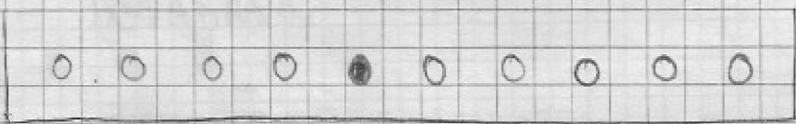
2. DOMAČA ZADAĆA

① U URNI SE NALAZI 10 KUGLICA, OD KOJIH JE SAMO JEDNA CRNA. IZVLAČIMO NA SREĆU PO JEDNU KUGLICU IZ URNE BEZ VRAĆANJA. NEKA X OZNAČAVA POKUŠAJ U KOJEMU JE IZVUČENA CRNA KUGLICA. ODREDI RAZDIOBU OD X !



1) POKUŠAJ PRVI: - IZVUČENA JE CRNA KUGLICA

$X_1 = 1 \qquad p_1 = \frac{1}{10}$

2) POKUŠAJ DRUGI: - IZVUČENA JE PRVO JEDNA BIJELA PA ONDA JEDNA CRNA

$X_2 = 2$

BIJELA: $P(B) = \frac{9}{10}$

CRNA: $P(C) = \frac{1}{9}$

$$P(BC) = P(B) \cdot P(C) = \frac{\cancel{9}}{10} \cdot \frac{1}{\cancel{9}} = \frac{1}{10}$$

3) POKUŠAJ TREĆI: - IZVUČENE SU PRVO DVIJE BIJELE ZATIM JEDNA CRNA:

$X_3 = 3$

BIJELE: $P(B) = \frac{\cancel{9}}{10} \cdot \frac{8}{\cancel{9}} = \frac{8}{10}$

CRNA: $P(C) = \frac{1}{8}$

$$P(BC) = \frac{8}{10} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{10}$$

4) POKUŠAJ ČETVRTI:

$X_4 = 4$

BIJELE: $P(B) = \frac{\cancel{9}}{10} \cdot \frac{\cancel{8}}{\cancel{9}} \cdot \frac{7}{\cancel{8}} = \frac{7}{10}$

CRNA: $P(C) = \frac{1}{7}$

$$P(BC) = \frac{\cancel{7}}{10} \cdot \frac{1}{\cancel{7}} = \frac{1}{10}$$

5) POKUŠAJ PETI:

$x_5 = 5$

BJELE: $P(B) = \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{6}{7} = \frac{6}{10}$

CRNA: $P(C) = \frac{1}{6}$

$\left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} P(BC) = \frac{6}{10} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{10}$

6) POKUŠAJ ŠESTI:

$x_6 = 6$

BJELE: $P(B) = \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{10}$

CRNA: $P(C) = \frac{1}{5}$

$\left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} P(BC) = \frac{5}{10} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$

7) POKUŠAJ SEDMI:

$x_7 = 7$

BJELE: $P(B) = \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{10}$

CRNA: $P(C) = \frac{1}{4}$

$\left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} P(BC) = \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$

8) POKUŠAJ OSMI:

$x_8 = 8$

BJELE: $P(B) = \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$

CRNA: $P(C) = \frac{1}{3}$

$\left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} P(BC) = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{10}$

9) POKUŠAJ DEVETI:

$x_9 = 9$

BJELE: $P(B) = \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{10}$

CRNA: $P(C) = \frac{1}{2}$

$\left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} P(BC) = \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$

$\Rightarrow$

10) POKUŠAJ DESETI:

$X_{10} = 10$

BIJELE:

$$P(B) = \frac{2}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$$

$$P(C) = \frac{1}{1} = 1$$

$$P(BC) = \frac{1}{10} \cdot 1 = \frac{1}{10}$$

RAZDIOBA:

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & p_7 & p_8 & p_9 & p_{10} \end{pmatrix}$$

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 \ldots & m \\ \frac{1}{m} \ldots & \frac{1}{m} \end{pmatrix}$$

$$P(X = k) = \frac{1}{m} \quad ; \quad k = 1, 2, \ldots m$$

2) U VANI SE NALAZI M KUGLICA NUMERIRANO BROJEVIMA $1, 2 \dots m$. ODJEDNOM IZVLAČIMO 3 KUGLICE. NEKA SLUČAJNA VARIJABLA X POPRIMA VRIJEDNOST NAJVEĆEG OD BROJEVA KOJI SE NALAZI NA TE TRI KUGLICE. ODREDI RAZDIOBU OD X!

- X POPRIMA VRIJEDNOSTI IZ SKUPA $\{3, 4 \dots M\}$, NE MOŽE BITI $\{1, 2\}$ JER IZVLAČIMO 3 KUGLICE I GLEDAMO NAJVEĆI BROJ!

1) $X = 3$

- BROJ MOGUĆIH NAČINA ZA IZVUĆI 2 KUGLICE OD 2 POVOLJNE:

$$M = \binom{2}{2} = 1$$

- BROJ MOGUĆIH NAČINA ZA IZVUĆI 3 KUGLICE IZ SKUPA OD m:

$$N = \binom{M}{3}$$

- VJEROJATNOST: $P(X=3) = \dfrac{1}{\binom{M}{3}}$

2) $X = 4$

- BROJ MOGUĆIH NAČINA ZA IZVUĆI 2 KUGLICE OD 3 POVOLJNE:

$$M = \binom{3}{2}$$

- BROJ MOGUĆIH NAČINA ZA IZVUĆI 3 KUGLICE IZ SKUPA OD M:

$$N = \binom{M}{3}$$

- VJEROJATNOST: $P(X=4) = \dfrac{\binom{3}{2}}{\binom{M}{3}}$

OPĆENITO: $X = k$

- BROJ MOGUĆIH NAČINA ZA IZVUĆI 2 KUGLICE IZ SKUPA OD $k-1$ KUGLICA:

$$M = \binom{k-1}{2}$$

- BROJ MOGUĆIH NAČINA ZA IZVUĆI 3 KUGLICE IZ SKUPA OD m KUGLICA:

$$N = \binom{m}{3}$$

- VJEROJATNOST:

$$P(X=k) = \frac{\binom{k-1}{2}}{\binom{m}{3}}$$

RAZDIOBA:

$$X \sim \begin{pmatrix} \overset{k_1}{3}, & \overset{k_2}{4}, & \ldots, & \overset{k_m}{m} \\ \frac{1}{\binom{m}{3}}, & \frac{\binom{3}{2}}{\binom{m}{3}}, & \ldots, & \frac{\binom{k_m-1}{2}}{\binom{m}{3}} \end{pmatrix}$$

$$P(X=k) = \frac{\binom{k-1}{2}}{\binom{m}{3}} \quad ; \; k = 3, 4, \ldots, m$$

③ U URNI SE NALAZI m KUGLICA NUMERIRANO BROJEVIMA $1, 2, \ldots m$. ODJEDNOM IZVLAČIMO TRI KUGLICE. NEKA SLUČAJNA VARIJABLA X POPRIMA VRIJEDNOST NAJMANJEG OD BROJEVA KOJI SE NALAZI NA TE TRI IZVUČENE KUGLICE. ODREDI RAZDIOBU OD X!

- SLUČAJNA VARIJABLA X POPRIMA VRIJEDNOSTI U SKUPU $\{1, 2, \ldots m-2\}$ JER ZADNJA DVA BROJA, tj. DVA NAJVEĆA BROJA IZ SKUPA OD m NEMOGU BITI NAJMANJI BROJ U SKUPU OD 3!

1) $X = 1$

- BROJ MOGUĆIH NAČINA ZA IZVUĆI 2 KUGLICE OD $m-1$ POVOLJNIH:

$$M = \binom{m-1}{2}$$

- BROJ MOGUĆIH NAČINA ZA IZVUĆI 3 KUGLICE IZ SKUPA OD m:

$$N = \binom{m}{3}$$

- VJEROVATNOST:

$$P(X=1) = \frac{\binom{m-1}{2}}{\binom{m}{3}}$$

2) OPĆENITO: $X = k$

- BROJ MOGUĆIH NAČINA ZA IZVUĆI 2 KUGLICE OD $m-k$ MOGUĆIH:

$$M = \binom{m-k}{2}$$

- BROJ MOGUĆIH NAČINA ZA IZVUĆI 3 KUGLICE OD m:

$$N = \binom{m}{3}$$

- VJEROJATNOST:

$$P(X=k) = \frac{\binom{m-k}{2}}{\binom{m}{3}}, \quad k = 1, 2, \ldots m-2$$

RAZDIOBA:

$$X \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} k_1 & \ldots & k_m \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1, & \ldots & m-2 \\ \frac{\binom{m-1}{2}}{\binom{m}{3}}, & \ldots, & \frac{\binom{m-k_m}{2}}{\binom{m}{3}} \end{pmatrix} \end{array}$$

(4) IZMEĐU 6 CRVENIH I 4 PLAVE KUGLICE NA SREĆU SE BIRAJU 3. IZRAČUNAJ OČEKIVANJE BROJA CRVENIH KUGLICA

$$\boxed{X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \ldots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \ldots \end{pmatrix} \qquad E(X) = \sum_k x_k p_k}$$

- OČEKIVANJE SLUČAJNE VARIJABLE X

X - SLUČAJNA VARIJABLA KOJA BROJI IZVUČENE CRVENE KUGLICE POPRIMA VRIJEDNOSTI U SKUPU $\{0, 1, 2, 3\}$

1) $X = 0$

- BROJ MOGUĆIH NAČINA ZA IZVUĆI 3 KUGLICE OD 10:

$$N = \binom{10}{3}$$

- BROJ POVOLJNIH NAČINA ZA IZVUĆI 0 KUGLICA OD 6 CRVENIH, tj. DA IZVUČEMO SVE TRI PLAVE OD MOGUĆIH 4:

$$M = \binom{4}{3}$$

- VJEROJATNOST:

$$P(X=0) = \frac{M}{N} = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}}$$

2) $X=1$

- BROJ MOGUĆIH NAČINA ZA IZVUĆI 3 KUGLICE OD 10:

$$N=\binom{10}{3}$$

- BROJ POVOLJNIH NAČINA ZA IZVUĆI 1 CRVENU OD 6 MOGUĆIH:

$$M_1=\binom{6}{1}=6$$

- BROJ POVOLJNIH NAČINA ZA IZVUĆI 2 PLAVE OD 4 MOGUĆE:

$$M_2=\binom{4}{2}$$

- VJEROVATNOST:

$$P(X=1)=\frac{M_1 M_2}{N}=\frac{6\cdot\binom{4}{2}}{\binom{10}{3}}$$

3) $X=2$

- BROJ MOGUĆIH NAČINA ZA IZVUĆI 3 KUGLICE OD 10:

$$N=\binom{10}{3}$$

- BROJ POVOLJNIH NAČINA ZA IZVUĆI 2 CRVENE OD 6 MOGUĆIH:

$$M_1=\binom{6}{2}$$

- BROJ POVOLJNIH NAČINA ZA IZVUĆI 1 PLAVU OD 4 MOGUĆE:

$$M_2=\binom{4}{1}=4$$

- VJEROJATNOST:

$$P(X=2)=\frac{M_1 M_2}{N}=\frac{\binom{6}{2}\cdot 4}{\binom{10}{3}}$$

4) $X=3$

- BROJ MOGUĆIH NAČINA ZA IZVUĆI 3 OD 10:

$$N=\binom{10}{3}$$

- BROJ POVOLJNIH NAČINA ZA IZVUĆI 3 CRVENE OD 6:

$$M=\binom{6}{3}$$

- VJEROJATNOST:

$$P(X=3)=\frac{M}{N}=\frac{\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}}$$

RAZDIOBA:

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} & \frac{6\cdot\binom{4}{2}}{\binom{10}{3}} & \frac{\binom{6}{2}\cdot 4}{\binom{10}{3}} & \frac{\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}} \end{pmatrix}$$

OČEKIVANJE CRVENIH:

$$E(X)=\sum_k x_k p_k$$

$$=0\cdot\frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}}+1\cdot\frac{6\cdot\binom{4}{2}}{\binom{10}{3}}+2\cdot\frac{\binom{6}{2}\cdot 4}{\binom{10}{3}}+3\cdot\frac{\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}}$$

$$=\frac{216}{120}=\frac{9}{5}\checkmark$$

5. NA RASPOLAGANJU NAM JE JEDNO GRLO ŽARULJE I UKUPNO 7 ŽARULJA, OD KOJIH IMAMO 3 ISPRAVNE I 4 NEISPRAVNE. ŽARULJE ISPROBAVAMO JEDNU ZA DRUGOM, DO POJAVE SVJETLOSTI. KOLIKO JE OČEKIVANJE BROJA POKUŠAJA?

X – SLUČAJNA VARIJABLA KOJA MJERI BROJ POKUŠAJA POPRIMA VRIJEDNOSTI IZ SKUPA $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ JER SIGURNO ĆE PETI POKUŠAJ BITI SVJETLO, JER MOŽEMO NAJVIŠE 4 PUTA IZABRATI NEISPRAVNU ŽARULJU!

1) $X=1$

– BROJ MOGUĆIH NAČINA ZA IZABRATI 1 ŽARULJU OD 7 MOGUĆIH:

$$N=\binom{7}{1}=7$$

– BROJ POVOLJNIH NAČINA ZA IZABRATI 1 ŽARULJU OD 3 ISPRAVNE:

$$M=\binom{3}{1}=3$$

– VJEROJATNOST:

$$P(X=1)=\frac{3}{7}$$

2) $X=2$

NEISPRAVNE: – BROJ MOGUĆIH NAČINA ZA IZABRATI 1 ŽARULJU OD 7 MOGUĆIH:

$$N=\binom{7}{1}=7$$

– BROJ MOGUĆIH NAČINA ZA IZABRATI 1 ŽARULJU OD 4 NEISPRAVNE:

$$M=\binom{4}{1}=4$$

– VJEROJATNOST DA ĆE PRVA ŽARULJA BITI NEISPRAVNA:

$$P(\emptyset)=\frac{M}{N}=\frac{4}{7}$$

ISPRAVNE:

- BROJ MOGUĆIH NAČINA ZA IZABRATI 1 ŽARULJU OD 6 MOGUĆIH:

$$N=\binom{6}{1}=6$$

- BROJ POVOLJNIH NAČINA ZA IZABRATI 1 ŽARULJU OD 3 ISPRAVNE:

$$M=\binom{3}{1}=3$$

- VJEROJATNOST DA JE ŽARULJA ISPRAVNA:

$$P(\otimes)=\frac{M}{N}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

- VJEROJATNOST DA IMAMO SVJETLOST IZ DRUGOG POKUŠAJA:

$$P(X=2)=P(\otimes)\cdot P(\otimes)=\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{7}$$

3) $X=3$

NEISPRAVNE:

- BROJ MOGUĆIH NAČINA ZA IZABRATI 2 ŽARULJE OD 7 MOGUĆIH:

$$N=\binom{7}{2}$$

- BROJ POVOLJNIH NAČINA ZA IZABRATI 2 ŽARULJE OD 4 NEISPRAVNE:

$$M=\binom{4}{2}$$

- VJEROJATNOST DA SU PRVE DVIJE ŽARULJE NEISPRAVNE:

$$P(\otimes)=\frac{M}{N}=\frac{\binom{4}{2}}{\binom{7}{2}}$$

ISPRAVNE:

- BROJ MOGUĆIH NAČINA ZA IZVUĆI 1 ŽARULJU OD 5 MOGUĆIH: $N=\binom{5}{1}=5$

- BROJ POVOLJNIH NAČINA ZA IZVUĆI 1 ŽARULJU OD 3 ISPRAVNE: $M=\binom{3}{1}=3$

- VJEROJATNOST DA JE ŽARULJA ISPRAVNA:

$$P(\circledast) = \frac{M}{N} = \frac{3}{5}$$

- VJEROJATNOST DA IMAMO SVJETLOST IZ TREĆEG POKUŠAJA:

$$P(X=3) = P(\otimes)\cdot P(\circledast) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{7}{2}}\cdot\frac{3}{5} = \frac{\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot1\cdot2\cdot1}}{\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot1\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}}\cdot\frac{3}{5} =$$

$$= \frac{12}{\cancel{42}}\cdot\frac{3}{5} = \frac{\cancel{12}}{\cancel{70}} = \frac{6}{35}$$

4) $X=4$

NEISPRAVNE:

- BROJ MOGUĆIH NAČINA ZA IZABRATI 3 ŽARULJE OD 7 MOGUĆIH: $N = \binom{7}{3}$
- BROJ POVOLJNIH NAČINA ZA IZABRATI 3 ŽARULJE OD 4 NEISPRAVNE: $M = \binom{4}{3}$
- VJEROJATNOST DA SU PRVE 3 ŽARULJE NEISPRAVNE:

$$P(\otimes) = \frac{M}{N} = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{7}{3}}$$

ISPRAVNE:

- BROJ MOGUĆIH NAČINA ZA IZABRATI 1 ŽARULJU OD 4 MOGUĆE: $N = \binom{4}{1} = 4$
- BROJ POVOLJNIH NAČINA ZA IZABRATI 1 ŽARULJU OD 3 ISPRAVNE: $M = \binom{3}{1} = 3$
- VJEROJATNOST DA JE ŽARULJA ISPRAVNA:

$$P(\circledast) = \frac{M}{N} = \frac{3}{4}$$

- VJEROJATNOST DA IMAMO SVJETLO IZ 4 POKUŠAJA:

$$P(X=4) = P(\otimes)\cdot P(\circledast) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{7}{3}}\cdot\frac{3}{4} = \frac{\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot1}}{\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}} = \frac{\cancel{4}}{\frac{210}{6}}\cdot\frac{3}{\cancel{4}} = \frac{6}{210}\cdot 3 = \frac{\cancel{18}}{\cancel{210}} = \frac{3}{35}$$

5) $X=5$

NEISPRAVNE:

- BROJ MOGUĆIH NAČINA ZA IZABRATI 4 ŽARULJE OD 7 MOGUĆIH: $N=\binom{7}{4}$
- BROJ POVOLJNIH NAČINA ZA IZABRATI 4 ŽARULJE OD 4 NEISPRAVNE: $M=\binom{4}{4}=1$
- VJEROJATNOST DA SU PRVE ČETIRI ŽARULJE NEISPRAVNE:

$$P(\otimes)=\frac{M}{N}=\frac{1}{\binom{7}{4}}$$

ISPRAVNE:

- BROJ MOGUĆIH NAČINA ZA IZABRATI 1 ŽARULJU OD 3 MOGUĆE: $N=\binom{3}{1}=3$
- BROJ POVOLJNIH NAČINA ZA IZABRATI 1 ŽARULJU OD 3 ISPRAVNE:

$$M=\binom{3}{1}=3$$

- VJEROJATNOST DA JE ŽARULJA ISPRAVNA:

$$P(☼)=\frac{3}{3}=1$$

- VJEROJATNOST DA IMAMO SVJETLO IZ 5 POKUŠAJA:

$$P(X=5)=P(\otimes)\cdot P(☼)=\frac{1}{\binom{7}{4}}\cdot 1=\frac{1}{\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}=\frac{24}{840}=\frac{1}{35}$$

RAZDIOBA:

$$X\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{6}{35} & \frac{3}{35} & \frac{1}{35}\end{pmatrix}$$

OČEKIVANJE:

$$E(X)=\sum_k x_k p_k=1\cdot\frac{3}{7}+2\cdot\frac{2}{7}+3\cdot\frac{6}{35}+4\cdot\frac{3}{35}+5\cdot\frac{1}{35}=2 \checkmark$$

⑥ BACAMO TRI KOCKE. NEKA JE X SLUČAJNA VARIJABLA KOJA POPRIMA VRIJEDNOST ZBROJA NA KOCKAMA. KOLIKO JE OČEKIVANJE I DISPERZIJA SLUČAJNE VARIJABLE X?

- SLUČAJNA VARIJABLA X POPRIMA VRIJEDNOSTI IZ SKUPA $\{3, \dots, 18\}$

X_1 = BROJ NA PRVOJ KOCKI
X_2 = BROJ NA DRUGOJ KOCKI
X_3 = BROJ NA TREĆOJ KOCKI

$\left.\begin{matrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{matrix}\right\}$ NEZAVISNE SLUČAJNE VARIJABLE

RAZDIOBE:

$$X_1, X_2, X_3 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

OČEKIVANJA:

$$E(X_1) = E(X_2) = E(X_3) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3.5$$

$$X = X_1 + X_2 + X_3$$

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = 3.5 \cdot 3 = 10.5 \checkmark$$

DISPERZIJE:

$$D(X_1) = D(X_2) = D(X_3) = E(X_1^2) - [E(X_1)]^2 =$$
$$= \left(1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6}\right) - (3.5)^2 = 2.92$$

$$D(X) = D(X_1) + D(X_2) + D(X_3) = 8.76 \checkmark$$

⑦ NEKA SU X i Y NEZAVISNE SLUČAJNE VARIJABLE KOJE POPRIMAJU VRIJEDNOSTI U SKUPU $\{0, 1, 2 \dots m\}$ PRI ČEMU JE:

$$P(X=i) = P(Y=i) = \frac{1}{m+1}$$

- ODREDI RAZDIOBU SLUČAJNE VARIJABLE $Z = X+Y$!

X, Y - NEZAVISNE SLUČAJNE VARIJABLE !

RAZDIOBE:

$$X \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & & x_m \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0, & 1, & 2, & \dots, & m \\ \frac{1}{m+1}, & \frac{1}{m+1}, & \dots, & & \frac{1}{m+1} \end{pmatrix} \end{array} ; \quad i \in \{0, 1, 2 \dots m\}$$

$$Y \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} y_1 & y_2 & y_3 & & y_m \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & m \\ \frac{1}{m+1}, & \frac{1}{m+1}, & \dots & & \frac{1}{m+1} \end{pmatrix} \end{array} ; \quad i \in \{0, 1, 2 \dots m\}$$

Z - NEZAVISNA VARIJABLA KOJA POPRIMA VRIJEDNOSTI IZ SKUPA $\{0, 1, 2 \dots m \dots 2m\}$

RAZDIOBA:

$$Z \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} z_1 & z_2 & z_3 & & z_m & & z_{2m} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & m & \dots & 2m \\ \frac{1}{(m+1)^2} & \frac{2}{(m+1)^2} & \frac{3}{(m+1)^2} & \dots & \frac{m+1}{(m+1)^2} & \dots & \frac{1}{(m+1)^2} \end{pmatrix} \end{array} ; \quad i \in \{0, \dots, 2m\}$$

$$P(Z=i) = \frac{i+1}{(m+1)^2} ; \quad i = 0, \dots, m$$

$$P(Z=i) = \frac{2m+1-i}{(m+1)^2} ; \quad i = m+1, \dots, 2m$$

⑦ NEKA SU X i Y NEZAVISNE SLUČAJNE VARIJABLE KOJE POPRIMAJU VRIJEDNOSTI U SKUPU $\{0,1,2\ldots m\}$ PRI ČEMU JE:

$$P(X=i) = P(Y=i) = \frac{1}{m+1}$$

- ODREDI RAZDIOBU SLUČAJNE VARIJABLE $Z=X+Y$!

X i Y - NEZAVISNE SLUČAJNE VARIJABLE !

RAZDIOBE:

$$X \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & & x_m \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0, & 1, & 2, & \ldots, & m \\ \frac{1}{m+1}, & \frac{1}{m+1}, & \ldots, & & \frac{1}{m+1} \end{pmatrix} \end{array} ; \; i \in \{0,1,2\ldots m\}$$

$$Y \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} y_1 & y_2 & y_3 & & y_m \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots & m \\ \frac{1}{m+1}, & \frac{1}{m+1}, & \ldots & & \frac{1}{m+1} \end{pmatrix} \end{array} ; \; i \in \{0,1,2\ldots m\}$$

Z - NEZAVISNA VARIJABLA KOJA POPRIMA VRIJEDNOSTI IZ SKUPA $\{0,1,2\ldots m \ldots 2m\}$

RAZDIOBA:

$$Z \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} z_1 & z_2 & z_3 & & z_m & & z_{2m} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots & m & \ldots & 2m \\ \frac{1}{(m+1)^2} & \frac{2}{(m+1)^2} & \frac{3}{(m+1)^2} & \ldots & \frac{m+1}{(m+1)^2} & \ldots & \frac{1}{(m+1)^2} \end{pmatrix} \end{array} ; \; i \in \{0,\ldots,2m\}$$

$$P(Z=i) = \frac{i+1}{(m+1)^2} \; ; \; i = 0,\ldots,m$$

$$P(Z=i) = \frac{2m+1-i}{(m+1)^2} \; ; \; i = m+1,\ldots,2m$$

8) BACA SE KOCKA. SLUČAJNA VARIJABLA X POPRIMA VRIJEDNOST KOJA JE JEDNAKA KVADRATU BROJA OKRENUTOG NA KOCKI, DOK SLUČAJNA VARIJABLA Y POPRIMA VRIJEDNOST -1 KAD JE BROJ ≤ 4 TE $+1$ KAD JE BROJ >4. IZRAČUNAJ DISPERZIJU SLUČAJNE VARIJABLE $Z = X+Y$!

- SLUČAJNA VARIJABLA X POPRIMA VRIJEDNOSTI IZ SKUPA

$$\{1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2\} \Rightarrow \{1, 4, 9, 16, 25, 36\}$$

RAZDIOBA:

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

- SLUČAJNA VARIJABLA Y POPRIMA VRIJEDNOST -1 ZA SKUP $\{1,2,3,4\}$ TE VRIJEDNOST $+1$ ZA SKUP $\{5, 6\}$

RAZDIOBA:

$$Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{4}{6} & \frac{2}{6} \end{pmatrix}$$

- RAZDIOBA SLUČAJNE VARIJABLE $Z = X+Y$, X i Y - ZAVISNE:

		y_1	y_2
	X \ Y	-1	1
≤ 4: 1	1	$\frac{1}{6}$	0
2	4	$\frac{1}{6}$	0
3	9	$\frac{1}{6}$	0
4	16	$\frac{1}{6}$	0
$4<$: 5	25	0	$\frac{1}{6}$
6	36	0	$\frac{1}{6}$

$$Z = X + Y_1 \sim \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & 15 & 24 & 35 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Z = X + Y_2 \sim \begin{pmatrix} 2 & 5 & 10 & 17 & 26 & 37 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$Z \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 5 & 8 & 10 & 15 & 17 & 24 & 26 & 35 & 37 \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

- OČEKIVANJE:

$$E(Z) = 0\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot 0 + 3\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot 0 + 8\cdot\frac{1}{6} + 10\cdot 0 + 15\cdot\frac{1}{6} + 17\cdot 0 + 24\cdot 0 + 26\cdot\frac{1}{6} + 35\cdot 0 + 37\cdot\frac{1}{6}$$

$$= \frac{89}{6} \checkmark$$

- DISPERZIJA:

$$D(Z) = E(Z^2) - [E(Z)]^2$$

$$E(Z^2) = 3^2\cdot\frac{1}{6} + 8^2\cdot\frac{1}{6} + 15^2\cdot\frac{1}{6} + 26^2\cdot\frac{1}{6} + 37^2\cdot\frac{1}{6} = \frac{2343}{6}$$

$$[E(Z)]^2 = \left(\frac{89}{6}\right)^2 = \frac{7921}{36}$$

$$D(Z) = \frac{2343}{6} - \frac{7921}{36} = 170{,}47 \checkmark$$

9. KOD BACANJA DVIJU KOCAKA SLUČAJNA VARIJABLA X POPRIMA VRIJEDNOST MINIMUMA, A SLUČAJNA VARIJABLA Y VRIJEDNOST MAXIMUMA OKRENUTIH BROJEVA. JESU LI VARIJABLE X i Y KORELIRANE? AKO JESU ODREDI KOEFICIJENT KORELACIJE!

- VARIJABLE X i Y SU ZAVISNE PA SU ZATO I KORELIRANE!

- RAZDIOBE: $p = \frac{1}{36}$

UVJET: $X \leq Y$!

X \ Y	1	2	3	4	5	6	
1	p	2p	2p	2p	2p	2p	11p
2	0	p	2p	2p	2p	2p	9p
3	0	0	p	2p	2p	2p	7p
4	0	0	0	p	2p	2p	5p
5	0	0	0	0	p	2p	3p
6	0	0	0	0	0	p	p
	p	3p	5p	7p	9p	11p	1

$$E(x) = \frac{11+18+21+20+15+6}{36} = \frac{91}{36}$$

$$E(y) = \frac{1+6+15+28+45+66}{36} = \frac{161}{36}$$

$$XY \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 8 & 9 & 10 & 12 & 15 & 16 & 18 & 20 & 24 & 25 & 30 & 36 \\ p & 2p & 2p & 3p & 2p & 4p & 2p & p & 2p & 4p & 2p & p & 2p & 2p & 2p & p & 2p & p \end{pmatrix}$$

$$E(XY) = 1\cdot p + 2\cdot 2p + 3\cdot 2p + 4\cdot 3p + 5\cdot 2p + 6\cdot 4p + 8\cdot 2p + 9\cdot p + 10\cdot 2p + 12\cdot 4p + 15\cdot 2p + 16\cdot p + 18\cdot 2p +$$
$$+ 20\cdot 2p + 24\cdot 2p + 25\cdot p + 30\cdot 2p + 36\cdot p =$$
$$= \frac{441}{36}$$

- KOVARIJACIJSKI MOMENT:

$$\mathrm{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{441}{36} - \frac{91}{36}\cdot\frac{161}{36} = \frac{1225}{36^2} = \left(\frac{35}{36}\right)^2$$

- DISPERZIJE:

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{2555}{36^2}$$

$$D(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \frac{2555}{36^2}$$

- KOEFICIJENT KORELACIJE:

$$r(X,Y) := \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

$$\sigma_X = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{2555}{36^2}}$$

$$\sigma_Y = \sqrt{D(Y)} = \sqrt{\frac{2555}{36^2}}$$

$$r(X,Y) = \frac{\left(\frac{35}{36}\right)^2}{\frac{2555}{36^2}} = 0.4794 \checkmark$$

10

SLUČAJNA VARIJABLA X POPRIMA VRIJEDNOSTI U SKUPU $\{-2,-1,0,1,2\}$ S JEDNAKIM VJEROJATNOSTIMA. ODREDI NJENU KARAKTERISTIČNU FUNKCIJU.

$$\boxed{\begin{array}{l} \vartheta_X(t) = E(e^{itx}) \\ \vartheta_X(t) = \sum_{k} p_k e^{itx} \end{array}}$$ - KARAKTERISTIČNA FUNKCIJA

- RAZDIOBA SLUČAJNE VARIJABLE X:

$m=5$

$\{-2,-1,0,1,2\}$

$$X \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

- OČEKIVANJE:

$$E(e^{itx}) = \frac{1}{5}\cdot e^{it(-2)} + \frac{1}{5}e^{it(-1)} + \frac{1}{5}e^{it\cdot 0} + \frac{1}{5}e^{it\cdot 1} + \frac{1}{5}e^{it2}$$

$$= \frac{1}{5}\left(e^{-2it} + e^{-it} + 1 + e^{it} + e^{2it}\right)$$

$$= \frac{1}{5}\left(e^{it} + e^{-it} + e^{2it} + e^{-2it} + 1\right); \quad \boxed{\frac{e^{it}+e^{-it}}{2} = \cos t}$$

$$= \frac{1}{5}\cdot 2\cdot\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2} + \frac{e^{2it}+e^{-2it}}{2} + \frac{1}{2}\right) \quad i \quad \boxed{\frac{e^{2it}+e^{-2it}}{2} = \cos 2t}$$

$$= \frac{2}{5}\left(\cos t + \cos 2t + \frac{1}{2}\right)$$

- KARAKTERISTIČNA FUNKCIJA:

$$\boxed{\vartheta_X(t) = \frac{2}{5}\cos 2t + \frac{2}{5}\cos t + \frac{1}{5}}$$

(11) PROVJERI DA JE:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{6}\cos 2t + \frac{1}{2}\cos 3t$$

- KARAKTERISTIČNA FUNKCIJA I ODREDI PRIPADNU RAZDIOBU

$$E(e^{itx}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{it}+e^{-it}}{2} + \frac{1}{6}\,\frac{e^{2it}+e^{-2it}}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{e^{3it}+e^{-3it}}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{it}+e^{-it}\right) + \frac{1}{12}\left(e^{2it}+e^{-2it}\right) + \frac{1}{4}\left(e^{3it}+e^{-3it}\right)$$

- RAZDIOBA:

$$X \sim \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{12} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

- PROVJERA:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{3+1+3+3+1+3}{12} = \frac{14}{12}$$

$P = \frac{7}{6} > 1$ // - VJEROJATNOST NEMOŽE BITI VEĆA OD 1 PA ZATO $\varphi(t)$ NIJE PRAVA KARAKTERISTIČNA FUNKCIJA !

(12) SLUČAJNE VARIJABLE X i Y SU NEZAVISNE, DISTRIBUIRANE PO GEOMETRIJSKOM ZAKONU S PARAMETROM q. DOKAŽI DA VRIJEDI:

$$P(X=k \mid X+Y=m) = \frac{1}{m+1} \; ; \; k=0,1,2,\dots,m$$

DOKAZ:

X, Y - IMAJU GEOMETRIJSKU RAZDIOBU: $\boxed{p_k = P(X=k) = p(1-p)^{k-1}}$

$$P(X=k \mid X+Y=m) = P(X=k \mid Y=m-X) = P(X=k \mid Y=m-k)$$

$$= \frac{P(X=k,\; Y=m-k)}{P(Y+X=m)} = \frac{P(X=k)\cdot P(Y=m-k)}{P(Y+X=m)}$$

$$= \frac{p(1-p)^{k-1}\cdot p(1-p)^{m-k-1}}{p(1-p)^{m-k-1}} = \frac{\frac{p(1-p)^{k}\cdot p(1-p)^{m-k}}{p(1-p)\cdot p(1-p)\cdot p(1-p)^{m-k}}}{p(1-p)} =$$

$$= \frac{p(1-p)^{k}\cdot \cancel{p(1-p)^{m-k}}\cdot \cancel{p(1-p)}}{p(1-p)\cdot \cancel{p(1-p)}\cdot \cancel{p(1-p)^{m-k}}} = \frac{p(1-p)^{k}}{p(1-p)} = \frac{1}{m+1}$$

(13) U URNI SE NALAZI N KUGLICA, MEĐU KOJIMA JE M CRNIH. IZVLAČIMO NA SREĆU m KUGLICA U MODELU S VRAĆANJEM. IZRAČUNAJ OČEKIVANJE I DISPERZIJU BROJA CRNIH KUGLICA!

N - UKUPNI BROJ KUGLICA

M - BROJ CRNIH KUGLICA

m - BROJ NA SREĆU IZVUČENIH KUGLICA S VRAĆANJEM!

X - SLUČAJNA VARIJABLA KOJA MJERI BROJ POJAVLJIVANJA CRNE KUGLICE PRI IZVOĐENJU ISTOVJETNOG POKUSA m PUTA!

- TAKVA VARIJABLA IMA BINOMNU RAZDIOBU: $X \sim B(m, p)$

m - BROJ DOGAĐAJA

$p = \frac{M}{N}$ - VJEROJATNOST DOGAĐAJA

$$X \sim B\left(m, \frac{M}{N}\right) \checkmark$$

- OČEKIVANJE:

$$E(X) = m \cdot p = m \cdot \frac{M}{N} \checkmark$$

- DISPERZIJA:

$$D(X) = m\, p\, q$$

$$q = 1 - p = 1 - \frac{M}{N}$$

$$D(X) = m \cdot \frac{M}{N} \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right) \checkmark$$

(14) U URNI SE NALAZI N KUGLICA, MEĐU KOJIMA JE M CRNIH. IZVLAČIMO NA SREĆU m KUGLICA U MODELU BEZ VRAĆANJA. IZRAČUNA OČEKIVANJE I DISPERZIJU BROJA CRNIH KUGLICA.

N - UKUPAN BROJ KUGLICA

M - BROJ CRNIH KUGLICA

m - BROJ NA SREĆU IZVUČENIH KUGLICA BEZ VRAĆANJA, tj. BROJ POKUSA.

k - BROJ IZVUČENIH CRNIH KUGLICA.

X - SLUČAJNA VARIJABLA KOJA MJERI BROJ OSTVARIVANJA DOGAĐAJA, tj. BROJ POJAVLJIVANJA CRNE KUGLICE PRI IZVOĐENJU <u>NEISTOVJETNOG</u> POKUSA.

- TAKVA VARIJABLA IMA HIPERGEOMETRIJSKU RAZDIOBU.

$$P(X=k)=\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{m-k}}{\binom{N}{m}}$$

- OD M CRNIH MORAMO IZVUĆI k CRNIH, A OD PREOSTALIH N-M KUGLICA MORAMO IZVUĆI m-k KUGLICA.

(15) NEKA JE X SLUČAJNA VARIJABLA DISTRIBUIRANA PO BINOMNOM ZAKONU $B(n,p)$. ODREDI PARAMETRE n I p AKO JE POZNATO $E(X)=12$, $D(X)=4$!

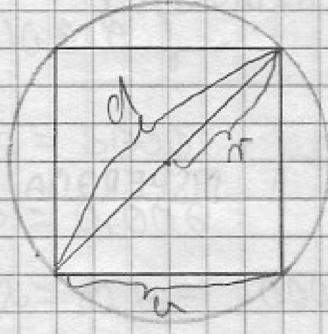
$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}E(X)=12\\ E(X)=n\cdot p\end{array}\right\} n\cdot p=12\\ \\ \left.\begin{array}{l}D(X)=npq\\ D(X)=4\end{array}\right\} npq=4\end{array}\right\} 12q=4 \Rightarrow q=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

$$q=1-p \Rightarrow p=1-q=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

$$np=12 \Rightarrow n=\frac{12}{p}=\frac{12}{\frac{2}{3}}=\frac{36}{2}=18$$

$$B(n,p) \Rightarrow B\left(18,\frac{2}{3}\right) \checkmark$$

(16) U KRUG JE UPISAN KVADRAT. IZRAČUNAJ VJEROJATNOST DA ĆE SE OD 10 NA SREĆU ODABRANIH TOČAKA UNUTAR KRUGA BAREM DVIJE NAĆI UNUTAR KVADRATA!



$d = a\sqrt{2}$

$d = 2r$

$a\sqrt{2} = 2r$

$a = \frac{2}{\sqrt{2}} r = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} r = \frac{\cancel{2}\sqrt{2}}{\cancel{2}} r = \sqrt{2} r$

$P_{\square} = a^2 = (\sqrt{2} r)^2 = 2r^2$

$P_{O} = r^2 \pi$

- DOGAĐAJ A - ODABRANA TOČKA JE UNUTAR KVADRATA

$P(A) = \frac{P_{\square}}{P_O} = \frac{2r^2}{r^2\pi} = \frac{2}{\pi} = p$

- DOGAĐAJ B - BAREM DVIJE TOČKE SU UNUTAR KVADRATA

$P(B) = 1 - P(k=0) - P(k=1)$

- BINOMNA RAZDIOBA: $\boxed{p_k = P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$

$n = 10$; $k = 0$; $k = 1$

$P(B) = 1 - \binom{10}{0} p^0 (1-p)^{10-0} - \binom{10}{1} p^1 (1-p)^{10-1}$

$= 1 - 1 \cdot 1 \cdot (1-p)^{10} - 10p(1-p)^9$

$= 1 - (1-p)^{10} - 10p(1-p)^9 = 1 - (1-p)^9 \cdot [(1-p) + 10p]$

$= 1 - (1-p)^9 \cdot [1 + 9p] = 1 - \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)^9 \cdot \left[1 + \frac{18}{\pi}\right] = 0.99926$ ✓

17 SLUČAJNA VARIJABLA X IMA POISSONOVU RAZDIOBU. AKO VRIJEDI $P(X=1)=P(X=2)$, IZRAČUNAJ OČEKIVANJE, DISPERZIJU I VJEROJATNOST DOGAĐAJA $\{X \geq 5\}$!

$$\boxed{p_k = P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}}$$ - POISSONOVA RAZDIOBA !

$$\boxed{E(X)=\lambda \quad ; \quad D(X)=\lambda}$$ - OČEKIVANJE I DISPERZIJA !

$$\left.\begin{aligned} P(X=1) &= \frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda} \\ P(X=2) &= \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda e^{-\lambda} = \frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda}$$

$$2\cancel{\lambda} e^{-\lambda} = \lambda^{\cancel{2}} e^{-\lambda}$$

$$2\cancel{e^{-\lambda}} = \lambda \cancel{e^{-\lambda}}$$

$$\boxed{\lambda = 2} \quad \checkmark$$

$E(X) = \lambda = 2$

$D(X) = \lambda = 2$

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2) - P(X=3) - P(X=4)$$

$$= 1 - \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} - \frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda} - \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} - \frac{\lambda^3}{3!} e^{-\lambda} - \frac{\lambda^4}{4!} e^{-\lambda}$$

$$= 1 + e^{-\lambda}\left(1 - \lambda - \frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda^3}{6} - \frac{\lambda^4}{24}\right) =$$

$$= 1 + e^{-2}\left(1 - 2 - \frac{4}{2} - \frac{8}{6} - \frac{16}{24}\right) =$$

$$= 0.052653$$

(18) KAMION PREVOZI NA GRADILIŠTE 5000 KOMADA CIGALA. VJEROJATNOST DA SE CIGLA PRI PRIJEVOZU RAZBIJE JE 0.006. ODREDI VJEROJATNOST DA KAMION STIGNE NA GRADILIŠTE SA NAJMANJE 20 I NAJVIŠE 50 RAZBIJENIH CIGALA.

$n = 5000$

$p = 0.006$

$\lambda = np = 5000 \cdot 0.006 = 30$

$P(20 \leq X \leq 50)$

$$P(x) = \underbrace{\sum_{k=20}^{50} \binom{5000}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{5000-k}}_{\text{BINOMNA RAZDIOBA.}} \approx \underbrace{\sum_{k=20}^{50} \frac{e^{-30} \cdot 30^k}{k!}}_{\text{APROKSIMACIJA BINOMNE RAZDIOBE POISSONOVOM.}}$$

(19.) PRI KOREKTURI KNJIGE OD 300 STRANICA PRIMJEĆENO JE 1100 GREŠAKA. KORISTEĆI POISSONOVU RAZDIOBU IZRAČUNA VJEROJATNOST DA SE NA POJEDINOJ STRANICI NALAZI VIŠE OD 3 GREŠKE. KOLIKI JE NAJVJEROJATNIJI BROJ GREŠAKA NA POJEDINOJ STRANICI?

- 300 STRANICA
- 1100 GREŠAKA

$P(X>3)=?$

$$\lambda = \frac{1100}{300} = \frac{11}{3}$$

A - BEZ GREŠAKA:

$$P(A) = P(X=0) = \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} = e^{-\frac{11}{3}}$$

B - JEDNA GREŠKA:

$$P(B) = P(X=1) = \frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda} = \frac{11}{3} e^{-\frac{11}{3}}$$

C - DVIJE GREŠKE:

$$P(C) = P(X=2) = \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{11}{3}\right)^2 \cdot e^{-\frac{11}{3}}$$

D - TRI GREŠKE:

$$P(D) = P(X=3) = \frac{\lambda^3}{3!} e^{-\lambda} = \frac{1}{6} \left(\frac{11}{3}\right)^3 e^{-\frac{11}{3}}$$

E - VIŠE OD TRI GREŠKE:

$$P(E) = 1 - P(A) - P(B) - P(C) - P(D)$$

$$= 1 - e^{-\frac{11}{3}} - \frac{11}{3} e^{-\frac{11}{3}} - \frac{1}{2} \frac{121}{9} e^{-\frac{11}{3}} - \frac{1}{6} \frac{121}{9} e^{-\frac{11}{3}}$$

$$= 1 - e^{-\frac{11}{3}}\left(1 + \frac{11}{3} + \frac{121}{18} + \frac{121}{54}\right) = 0.6516$$

- OČEKIVANJE:

$$E(X) = \lambda = \frac{11}{3} = \left|\frac{11}{3}\right| = 3$$

- NAJVJEROJATNIJE SU TRI GREŠKE !

(10) SLUČAJNA VARIJABLA IMA POISSONOV ZAKON DISTRIBUCIJE SA PARAMETROM λ. IZRAČUNAJ: $E\left(\frac{1}{1+X}\right) = ?$

$$y = \frac{1}{1+x}$$

$E(y) = ?$

$$E(y) = \sum_k p_k y_k \quad \text{- OPĆENITO !}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \cdot \frac{1}{1+k} \quad ; \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} \ldots$$

$$= \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{(k+1)}}{(k+1)!} e^{-\lambda}$$

$$= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \cdot (e^{\lambda} - 1)$$

$$= \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \checkmark$$