Fakultet elektrotehnike i računarstva
Financijska matematika
Zadaci za samostalan rad
20. 5. 2016.

1. Pretpostavimo da je da su cijene nerizične imovine $A(0)=100$, $A(1)=110$, $A(2)=121$, dok su cijene dionice XYZ ovisno o različitim scenarijima dane tablicom:

Scenarij	$S(0)$	$S(1)$	$S(2)$
ω_1	90	100	112
ω_2	90	100	106
ω_3	90	80	90
ω_4	90	80	80

a) Da li postoji strategija arbitraže ako tržište dozvoljava kratku poziciju u dionicama, ali prema pravilniku managementa investicijskog fonda broj udjela svake od vrijednosnica u portfelju mora biti cijeli broj?

b) Da li postoji strategija arbitraže ako tržište dozvoljava kratku poziciju u dionicama, ali se prema pravilniku trgovanja naplaćuje provizija u iznosu od 5% od ukupnog volumena trgovanja ukoliko se trguje dionicama?

2. Pretpostavimo da je $X_1, X_2, \ldots$ niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli očekivanja μ, varijance σ^2 te definiramo *n*-tu parcijalnu sumu kao $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $n \geq 1$. Nadalje neka je $\varphi(.)$ generirajuća funkcija momenata slučajne varijable X_1 $\left(\varphi(t) = E\left[e^{tX_1}\right]\right)$. Pokažite sljedeće:

a) Ako je $\mu = 0$, tada je niz S_n, $n \geq 1$ martingal

b) Niz $M_n = S_n - n\mu$, $n \geq 1$ je martingal

c) Niz $V_n = (S_n - n\mu)^2 - n\sigma^2$, $n \geq 1$ je martingal (uputa: iskoristite svojstvo uvjetnog očekivanja da za sigma algebru *G* i sl. varijablu *Y* koja je *G*-izmjeriva vrijedi $E[Y \cdot X | G] = Y \cdot E[X | G]$)

d) (Martingalni niz omjera vjerodostojnosti u slučaju Bernoullijevih slučajnih varijabli). Pretpostavimo da je $X_1, X_2, \ldots$ niz n.j.d. Bernoullijevih slučajnih varijabli, *B*(*p*). Definiramo $Z_n = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{2S_n - n}$, $n \geq 0$. Tada je niz $(Z_n)_{n \geq 0}$ martingal (uputa: Ako je *f* neprekidna funkcija, a X F-izmjeriva slučajna varijabla, tada je $f(X)$ također F-izmjeriva slučajna varijabla.).

e) (Martingalni niz omjera vjerodostojnosti u općem slučaju) Niz $K_n(y)=\dfrac{e^{yS_n}}{\varphi(y)^n}$, $n\geq 1$ je martingal za svaki $y>0$ za koji je $\varphi(y)<\infty$.

3. Neka je X integrabilna slučajna varijabla, $E[|X|]<\infty$ te neka je $(F_n)_{n\geq 0}$ niz rastućih sigma algebri na vjerojatnosnom prostoru (Ω,F,P). Tada je niz definiran sa $X_n=E[X\mid F_n]$, $n\geq 1$ martingal. (Uputa: prema svojstvu uvjetnog očekivanja vrijedi $E[E[X\mid G]H]=E[X|H]$, za svaku integrabilnu slučajnu varijablu X na vjerojatnosnom prostoru (Ω,F,P), pri čemu su G i H sigma algebre za koje vrijedi $H\subseteq G\subseteq F$, tj. sigma algebra H „sadrži“ manje informacija od sigma algebre G.) **Napomena:** primijetite i upamtite činjenicu da je moguće krenuvši samo od integrabilne slučajne varijable konstruirati martingal.

4. Pretpostavimo da promatramo sljedeću igru: igrač opetovano baca simetrični novčić konačan broj puta. Ishodi pojedinih bacanja su $X_1,X_2,\ldots$, pri čemu je $X_n=1$ u slučaju da padne glava, odnosno $X_n=-1$ u slučaju da padne pismo, $n\geq 1$. Pretpostavimo da se pri svakom bacanju možete kladiti s koeficijentom veličine $W_n>0$ na ishod svakog od sljedećeg bacanja, uz napomenu da je za razliku od uobičajenog klađenja ovdje i gubitak proporcionalan koeficijentu, te da veličina koeficijenta W_n može **ovisiti** o prethodno opaženim ishodima bacanja $X_1,X_2,\ldots,X_{n-1}$, ali ne i o *trenutnom* ishodu X_n (uočite da to znači da su vaša *nova* "saznanja" o koeficijentu W_n ovisna eventualno o $X_1,X_2,\ldots,X_{n-1}$ odnosno o informacijama kojima raspolažete do *trenutka* (i uključujući) n-1, ali ne i o ishodu u *n-tom* bacanju odnosno okladi. To ujedno implicira da je niz $(W_n), n\geq 1$, **predvidiv** u odnosu na $(X_n), n\geq 1$. Drugim riječima, predvidivost možete uvijek objasniti takvim argumentom, dakle vrlo često (ukoliko slučajna varijabla nije analitički zadana) opisnim argumentom odnosno ovisno o interpretaciji i značenju).

a) Odredite isplatu za igrača u svakom bacanju novčića

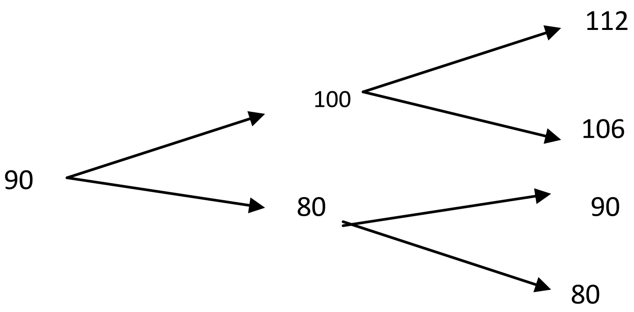
b) Odredite koji je neto dobitak za igrača nakon n odigranih bacanja (strategijsko investiranje)

c) Pokušajte dokazati da je niz, neto dobitaka za igrača nakon n bacanja, $(D_n), n\geq 1$ martingal. Kako biste interpretirali tu činjenicu, odnosno što takva činjenica znači u terminima neto dobiti za igrača.

5. Pretpostavimo da u jednoperiodnom modelu binomnog stabla ne postoji mogućnost arbitraže. Dokažite da u tom slučaju postoji jedinstvena martingalna mjera čija je vjerojatnost rasta cijene rizične imovine dana sa $q_g=\dfrac{r-d}{g-d}$. Kolika je vjerojatnost pada cijene rizične imovine u svijetu neutralnom na rizik? Zadatak riješite koristeći činjenicu da je diskontirani proces cijene rizične imovine martingal [prethodno uočite a) da se na nastavi do mjere neutralne na rizik došlo na malo drugačiji način (iz činjenice da je očekivani povrat uz vjerojatnost neutralnu na rizik jednek nerizičnoj kamatnoj stopi) te b) da je nemogućnost arbitraže ekvivalentna činjenici da postoji ekvivalentna martingalna mjera u odnosu na koju je diskontirani proces cijene svake vrijednosnice martingal!]

Rješenja:

1.



a) Arbitraža nije moguća jer u svakom čvoru vrijedi *d<r<g*.

b) U slučaju plaćanja provizije, investitor je u još gorem položaju, bilo da kupuje ili prodaje dionicu pa niti u ovom slučaju nema mogućnost arbitraže.

2. Uputa: koristiti svojstva uvjetnog očekivanja, te zapis (n+1)-og člana niza prema definiciji i pomoću procesa koji je F_n-izmjeriv, odnosno čiju vrijednost znamo pomoću informacija dostupnih do (i uključujući) trenutka *n*.

3. $X_n = E[X \mid F_n], \quad F_n \subseteq F_{n+1}$

$$E[X_{n+1} \mid F_n] = E[E[X \mid F_{n+1}] \mid F_n] = E[X \mid F_n] = X_n$$

4. a) Uplata u svakom bacanju je $Y_i = W_i - X_i, \quad X_i \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, W_i predvidiv niz.

b) $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{i=1}^{n} W_i X_i$

c)

$$E[S_{n+1} \mid F_n] = E[S_n + W_{n+1} \cdot X_{n+1} \mid F_n] = E[S_n \mid F_n] + E[W_{n+1} \cdot X_{n+1} \mid F_n] =$$
$$W_{n+1} \text{ je } \mathrm{F_n}\, izmjeriv \text{ jer je } (W_i)_i \text{ predvidiv} = S_n + W_{n+1} \cdot E[X_{n+1} \mid F_n] =$$
$$= (\mathrm{X})_\mathrm{i} \text{ su nj.d} = S_n + W_{n+1} \cdot E[X_{n+1}] = S_n + W_{n+1} \cdot 0 = S_n$$

5) $q_g = \dfrac{r-d}{g-d}$, $\quad q_d = \dfrac{g-r}{g-d}$ (vjerojatnost manjeg rasta cijene)

Zaista se radi o vjerojatnosti , odnosno $q_g \in (0,1)$ budući da prema Propoziciji 1 s predavanja, ne postoji mogućnost arbitraže ako i samo ako $d<r<g$.

9. ZADACI ZA VJEŽBU

① NERIZIČNA IMOVINA

$A(0) = 100$
$A(1) = 110$
$A(2) = 121$

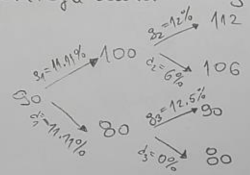
$A(1) = A(0)(1+r)^t$

$\frac{110}{100} = 1 + r \rightarrow r = 10\%$

CIJENE DIONICE XYZ, ovisno o scenariju:

SCENARIJ	S(0)	S(1)	S(2)
ω_1	90	100	112
ω_2	90	100	106
ω_3	90	80	90
ω_4	90	80	80

a) → dozvoljena KRATKA POZICIJA, broj udjela svake ~~pozicije~~ od vrijednosnica u portfelju mora biti cijeli broj



$100 = 90(1+g) \rightarrow g_1 = 11.11\%$

$80 = 90(1+d) \rightarrow d_1 = -11.11\%$

$-11.11 < r < 11.11$ i $6 < r < 12$

ili

$-11.11 < r < 11.11$ i $0 < r < 12.5$

} MOGUĆE

∄ ako vrijedi $d < r < g$ za svaki čvor, dakle zaključujemo da strategija arbitraže ne postoji

b) → dozvoljena KRATKA POZICIJA, naplaćuje se provizija u odnosu od 5% od ukupnog volumena trgovanja ukoliko se trguje dionicama.
- nema mogućnosti arbitraže jer je inv. u još gorem položaju (bilo da prodaje ili kupuje)

② $X_1, X_2 \ldots$ Niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli očekivanja μ, varijance σ^2, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $n \geq 1$

$E[X_i] = \mu$
$\mathrm{Var} X = \sigma^2$

a) $\mu = 0$, tada je niz S_n, $n \geq 1$ MARTINGAL

$$E[S_{n+1} | F_n] = E[S_n + X_{n+1} | F_n] = E[S_n | F_n] + E[X_{n+1} | F_n] = S_n + E[X_{n+1}]$$
$$= S_n + \mu = S_n$$

b) $M_n = S_n - n\mu$, $n \geq 1$ martingal

$$E[M_{n+1} | F_n] = E[S_{n+1} - (n+1)\mu | F_n] = E[S_n + X_{n+1} - (n+1)\mu | F_n] =$$
$$= E[S_n | F_n] + E[X_{n+1} | F_n] - (n+1)\mu =$$
$$= S_n + E[X_{n+1}] - (n+1)\mu = S_n + \mu - (n+1)\mu = S_n - n \cdot \mu = M_n$$

c) $V_n = (S_n - n\mu)^2 - n\sigma^2$, $n \geq 1$ je MARTINGAL $\qquad S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$.

$$E[V_{n+1} | F_n] = E\left[(S_{n+1} - (n+1)\mu)^2 - (n+1)\sigma^2 \,\middle|\, F_n\right] =$$

$$= E\left[\left((S_n - n\mu) + (X_{n+1} - \mu)\right)^2 - (n+1)\sigma^2 \,\middle|\, F_n\right] =$$

$$= E\left[(S_n - n\mu)^2 + 2(S_n - n\mu)(X_{n+1} - \mu) + (X_{n+1} - \mu)^2 - (n+1)\sigma^2 \,\middle|\, F_n\right] =$$

$$= E\left[(\overbrace{S_n - n\mu}^{F_n\text{-izmjerljiv}})^2 \,\middle|\, F_n\right] + 2 \cdot E\left[(\overbrace{S_n - n\mu}^{F_n\text{-izmjerljiv}})(X_{n+1} - \mu) \,\middle|\, F_n\right] + E\left[(\overbrace{X_{n+1}}^{\text{neovisno o } F_n} - \mu)^2 \,\middle|\, F_n\right] -$$

$$E\left[\underbrace{(n+1)\sigma^2}_{\text{broj}} \,\middle|\, F_n\right] =$$

$$= (S_n - n\mu)^2 + 2(S_n - n\mu) \cdot \underbrace{E\left[(X_{n+1} - \mu) \,\middle|\, F_n\right]}_{\mu - \mu = 0} + \underbrace{E\left[(X_{n+1} - \mu)^2 \,\middle|\, F_n\right]}_{\sigma^2} - (n+1)\sigma^2$$

$$E[X_{n+1}] - \mu = \mu - \mu = 0$$

$$= (S_n - n\mu)^2 + \sigma - (n+1)\sigma^2$$

$$= (S_n - n\mu)^2 - n \cdot \sigma^2 = V_n$$

d) $X_i \sim B(p)$ ... niz j.d. Bernoullijevih slučajnih varijabli

$Z_n = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{2S_n - n}$, $n \geq 0$ $\quad$ tada je niz $(Z_n)_{n \geq 0}$ MARTINGAL

$$E[Z_{n+1} | F_n] = E\left[\left(\frac{1-p}{p}\right)^{2 \cdot S_{n+1} - (n+1)} \,\middle|\, F_n\right] = E\left[\left(\frac{1-p}{p}\right)^{2 \cdot S_n + 2 \cdot X_{n+1} - n - 1} \,\middle|\, F_n\right] =$$

$$= E\left[\underbrace{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{2S_n - n - 1}}_{F\text{-izmjerljiva}} \cdot \left(\frac{1-p}{p}\right)^{2 \cdot X_{n+1}} \,\middle|\, F_n\right] =$$

$$= \left(\frac{1-p}{p}\right)^{2S_n - n - 1} \cdot E\left[\left(\frac{1-p}{p}\right)^{2 \cdot X_{n+1}} \,\middle|\, F_n\right] =$$

$$= \left(\frac{1-p}{p}\right)^{2S_n - n - 1} \cdot \left[\left(\frac{1-p}{p}\right)^{2 \cdot 1} \cdot p + \left(\frac{1-p}{p}\right)^{2 \cdot 0} (1-p)\right] =$$

$$= \left(\frac{1-p}{p}\right)^{2S_n - n - 1} \cdot \left[\underbrace{\frac{(1-p)^2}{\cancel{p}} + 1 - p}_{\frac{1 - 2p + \cancel{p^2} + p - \cancel{p^2}}{p} = \frac{1-p}{p}}\right] =$$

$$= \left(\frac{1-p}{p}\right)^{2S_n - n} = Z_n$$

③ X ... integrabilna slučajna varijabla

$E[|X|] < \infty$

$(F_n)_{n\geq 0}$ niz rastućih sigma algebri na vjerj. prostoru (Ω, F, P)

tada je $X_n = E[X|F_n]$, $n \geq 1$ MARTINGAL

$$E[X_{n+1}|F_n] = E\big[E[X|F_{n+1}]\,\big|\,F_n\big] = E[X|F_n] = X_n$$

$F_n \subseteq F_{n+1}$

④ ishodi bacanja $X_1, X_2, \dots$, $X_n = 1$ padne glava $\quad n \geq 1$

$X_n = -1$ padne pismo

$W_n > 0$ koeficijent klađenja

(W_n), $n \geq 1$ je PREDVIDIV u odnosu na $(X_n) \geq 1$

a) isplata za igrača u svakom bacanju novčića

$$X_i \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad W_i \text{ ... predvidiv niz.}$$

isplata: $Y_i = W_i \cdot X_i$

b) NETO dobitak za igrača nakon n odigranih bacanja

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{i=1}^{n} W_i X_i$$

c) $(S_n)_{n\geq 1}$ je MARTINGAL

$$E[S_{n+1}|F_n] = E[S_n + W_{n+1}\cdot \overbrace{X_{n+1}}^{\text{neovisno o } F_n}|F_n] = \underbrace{E[S_n|F_n]}_{F_n\text{-izmjerljiv}} + E[\overbrace{W_{n+1}}^{F_n \text{ izmjerljiv jer je } W_i \text{ predvidivo}}\cdot X_{n+1}|F_n] =$$

$$= S_n + W_{n+1}\cdot E[X_{n+1}|F_n] =$$

$$= S_n + W_{n+1}\cdot E[X_{n+1}] = \left\{ E[X_{n+1}] = 1\cdot\frac{1}{2} + (-1)\cdot\frac{1}{2} = 0 \right\}$$

$$= S_n$$

Q.E.D.

5. JEDNOPERIODNOM MODELU binarnog stabla $\nexists$ mogućnost arbitraže

$(S_n^D)_{n \geq 1}$ je MARTINGAL ako vrijedi

$$\underbrace{E^*\left[S_{n+1}^D \mid F_n\right] = S_n^D}$$

$$E\left[S_{n+1}^D \mid F_n\right] = E\left[\frac{S_{n+1}}{(1+r)^{n+1}} \Big| F_n\right] = \frac{1}{(1+r)^{n+1}} \cdot E\left[S_{n+1} \mid F_n\right] =$$

$$= \frac{1}{(1+r)^{n+1}} \left[S_n(1+g) \cdot q_g + S_n(1+d) q_d\right] = \frac{S_n}{(1+r)^n} \quad \Big/ \cdot \frac{(1+r)^{n+1}}{S_n}$$

$$(1+g) q_g + (1+d) q_d = 1+r \quad ; \{ q_d = 1 - q_g \}$$

$$(1+g) q_g + (1+d)(1-q_g) = 1+r$$

$$(1+g) q_g + \cancel{1} - q_g + d - d q_g = \cancel{1}+r$$

$$q_g (\cancel{1}+g-\cancel{1}-d) = r-d$$

$$\underbrace{q_g = \frac{r-d}{g-d}}$$

$$q_d = 1 - \frac{r-d}{g-d}$$

$$q_d = \frac{g-d-r+d}{g-d}$$

$$\underbrace{q_d = \frac{g-r}{g-d}}$$

- kako ne postoji mogućnost arbitraže $d < r < g$ onda je $q_g \in \langle 0, 1 \rangle$ pa se radi zaista o vjerojatnosti!

Fakultet elektrotehnike i računarstva
Financijska matematika
Zadaci za vježbu i samostalan rad
3. 6. 2016.

1. Pretpostavimo da ste se danas zadužili u banci u iznosu 4.5 uz kamatnu stopu od 12% kako biste kupili europsku put opciju na dionicu XYZ (dakle, danas je na tržištu moguće kupiti europsku put opciju po cijeni 4.5). Kolika bi morala biti cijena dionice XYZ u trenutku dospijeća za europsku put opciju izvršne cijene 36, s dospijećem od tri mjeseca kako biste osigurali profit u iznosu 3? (**Rj.** $\boldsymbol{S(T)}$**=28.363**)

2. (Call-put jednakost (paritet)) Uz pretpostavku da ne postoji mogućnost arbitraže, dokažite da vrijedi sljedeća relacija za cijenu europske call (*C*) i put (*P*) opcije na dionicu XYZ, pri čemu je izvršna cijena opcije *K*, a dospijeće *T*:

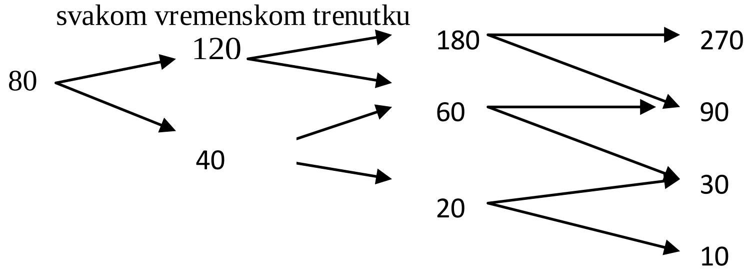
$$C - P = S(0) - Ke^{-rT}.$$

3. Pretpostavimo da promatramo tržište na kojem se na današnji dan trguje europskom call i put opcijom na baziču imovinu XYZ po cijeni *C* (europska call) i *P* (europska put) te da je odnos njihovih cijena dan relacijom $C > P + S(0) - Ke^{-rT}$, pri čemu je *S*(0) tržišna cijena bazične imovine XYZ na današnji dan, *K* izvršna cijena i put i call opcije, *T* je dospijeće opcija (isto i za call i za put) , a *r* referentna nerizična kamatna stopa na tržištu.

- **a)** Da li postoji mogućnost arbitraže na tržištu koji se sastoji od bazične imovine, europske call opcije, europske put opcije i nerizične imovine? (**Rj.** Da, prema prethodnom zadatku, odnsono prema call-put jednakosti, budući da je nearbitražna cijena call opcije $P + S(0) - K \cdot e^{-rT}$.)
- **b)** Ako da, konstruirajte strategiju arbitraže. (Uputa: uočite da s obzirom na međusobni odnos cijena, uglavnom u nekoj vrijednosnici zauzimate kratku poziciju, te dobiveni iznos onda investirate u (sve!) ostale vrijednosnice (rizične, nerizične) na tržištu od interesa). (**Rj.** Na nastavi, netko od studenata.)

4. Pretpostavimo da promatramo troperiodni binomni model za tržište (A,S) te da je situacija na tržištu sljedeća: cijena dionice XYZ *S*(0)=80, *g*=50%, *d*=-50%, p_g=0.6, a nerizična kamatna stopa jednaka je 25%. Pretpostavimo da investitor želi kupiti europsku put opciju na dionicu XYZ izvršne cijene 90 s dospijećem 3.

- **a)** Skicirajte binomno stablo i odredite cijene bazične imovine u svakom od mogućih scenarija u svakom vremenskom trenutku



b) Da li postoji mogućnost arbitraže na zadanom tržištu? (**Rj. Ne,** jer je $d< r <g$ u svakom čvoru stabla)

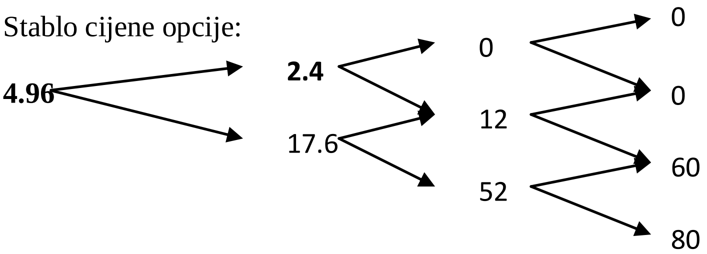
c) Odredite vjerojatnost neutralnu na rizik p^* (**Rj.** $\boldsymbol{p^*=0.75}$)

d) Odredite cijenu europske put opcije

Uputa: Nakon što ste odredili moguće cijene dionice XYZ u svakom od scenarija, krenite retrogradno određivati cijene opcije (s obzirom na moguće isplate u tom trenutku): dakle, prvo određujete cijenu opcije u trenutku 2 na bazi mogućih vrijednosti isplata (ugovorne funkcije) u trenutku 4 i to napravite za svaki od mogućih čvorova. Kada dobijete moguće cijene opcija u trenutku 2, na isti način određujete (za jedan period unazad!) moguće cijene opcija u trenutku 1 te konačno, znajući moguće cijene u trenutku 1, određujete (jedinstvenu!) cijenu opcije *danas* (trenutak 0).

(**Rj. Retrogradno**: potrebno je krenuti od određivanja isplate u trenutku dospijeća $T=3$: 0, 0, 60, 80(u slučaju scenarija w_1,w_2, w_3 *i* w_4 redom). Zatim izračunati cijenu opcije u prethodnom trenutku, tj. trenutku t=2 : 0, 12 i 52 (za različite scenarije). Zatim u trenutku t=1: 3.2 i 17.6. Napokon, u t =0: C_0=4.96)

Stablo cijene opcije:



e) Odredite replicirajući portfelj (**Rj.** Replicirajući portfelj može se računati bilo kojim redoslijedom, ***t* =1**: x(1)= **-0.19**, y(1)=**20.16**, ***t* =2**: x(2)=-0.1, y(2)=14.4 (za w_1,w_2, w_3) odnosno x(2)=-1, y(2)=57.6 (w_2, w_3 i w_4), ***t*=3:** x(3)=y(3)=0 (za w_1,w_2,), x(3)=-1, y(3)=72 (za w_2, w_3), x(3)=-1, y(3)=71 (za w_3 *i* w_4) .

f) Pretpostavimo da se takvom opcijom na tržištu trguje po cijeni 1.8. Što možete zaključiti? Analizirajte mogućnost arbitraže u tom slučaju. (Uputa: jednom kada odredite udjele x i y dovoljno je naći jedan vremenski trenutak u kojem ćete ostvariti pozitivan profit s pozitivnom vjerojatnosti, uz pretpostavku da u početnom trenutku vrijedi $V(0)=0$) (**Rj.** Kako je 1.8 < 4.96=nearbitražna cijena opcije u trenutku t = 0, <u>prodaje</u> se replicirajući portfelj za 4.96 (to znači da je potrebno kupiti 0.19 dionica i posuditi 20.16 u novcu), kupiti opciju za 1.8, a razliku od 3.16 oročiti po 25%. U trenutku t =1, prodani replicirajući portfelj i opcija vrijede isto (zaista, iz ostvarenog prava opcije namirimo obvezu prodanog replicirajućeg portfelja – provjerite!), te smo u t=1 ostvarili nerizični profit u iznosu od 3.95).

5. Pretpostavimo da ste u investicijskoj banci ABC market-maker unaprijednih ugovora na dionice. Trenutna cijena dionice XYZ je 80, referentna nerizična kamatna stopa je 8%, a prinos od dividende na dionicu XYZ je 3%. Pretpostavimo da je trenutna tržišna cijena unaprijednog ugovora na dionicu XYZ s isporukom od 15 mjeseci jednaka 90 te da se na tržištu trguje i sintetičkim ugovorima glede vrijednosnica koje su predmet interesa (tj. ugovorima nearbitražne cijene). Ako postoji, odredite strategiju arbitraže koristeći isključivo te dvije vrste ugovora. (**Rj. F(0,1.25)=85.16<90 => postoji**

mogućnost arbitraže; zauzmite kratku poziciju u uunaprijednom ugovoru, tj dogovorite danas prodaju dionice po cijeni 90; kupite danas e^{-dT} udjela te dionice za što ćete posuditi potrebnu vrijednost npr od banke po stopi *r*; dionica neprekidno isplaćuje dividendu – tj. kao da iznos od dividende reinvestirate neprekidno po stopi *d*- u trenutku T imat ćete potreban jedan udio dionice zakoji je dogovorena prodaja po cijeni 90).

Napomena 1: Zadatak 4 možete gledati kao na tri zadatka u jednom. Uočite da Zadatak 3 sadrži sve pojmove ključne za jedinstveno određivanje cijene imovine, vjerojatnosti neutralne na rizik, veze nearbitraže i martingalnog svojstva, replicirajućeg portfelja, kao i određivanja vrijednosti portfelja u svakom vremenskom trenutku.

Napomena 2. Glede kriterija o nepostojanju mogućnosti arbitraže, imate dvije mogućnosti:

1) Veza (ne)arbitraže i povrata (gore ili dolje): Ne postoji mogućnost arbitraže ako i samo ako vrijedi $d<r<g$ pri čemu je r referentna nerizična kamatna stopa (u slučaju višeperiodnog modela binomnog stabla relacija mora vrijediti i na svakom jednoperiodnom stablu unutar odgovarajućeg višeperiodnog stabla)

2) Veza (ne)arbitraže i vjerojatnosti neutralne na rizik: Ne postoji mogućnost arbitraže ako i samo ako vrijedi $0<p^*<1$.

10. ZADACI ZA VJEŽBU (3.6.2016.)

① $S = 4.5$

$r = 12\%$

XYZ PUT OPCIJU

$K = 36$

$T = 3$ mjeseca

profit 3

$$\underbrace{K - S(T)}_{\text{isplatna funkcija PUT-a}} - \underbrace{S(0)e^{r\cdot\frac{3}{12}}}_{\text{moram vratiti što sam se zadužila}} = 3$$

$S(T) = ?$ da bi osigurali profit

$$S(0)\cdot e^{rT} + 3 = K - S(T)$$

$$4.5\cdot e^{0.12\cdot\frac{3}{12}} + 3 = 36 - S(T)$$

$$\boxed{S(T) = 28,363}$$

② CALL-PUT PARITET

pretpostavka: ne postoji mogućnost arbitraže

dokaži:

$$C - P = S(0) - Ke^{-rT}$$

$$C = e^{-rT}E^*\left[(S(T)-K)^+\right]$$

$$P = e^{-rT}E^*\left[(K-S(T))^+\right]$$

$$C - P = e^{-rT}E^*\left[(S(T)-K)^+\right] - e^{-rT}E^*\left[(K-S(T))^+\right]$$

$$C - P = e^{-rT}E^*\left[(S(T)-K)^+ - (K-S(T))^+\right]$$

a) slučaj $S(T) > K$

$$C - P = e^{-rT}E^*\left[S(T) - K - 0\right]$$

$$C - P = e^{-rT}\cdot E^*\left[S(T)\right] - e^{-rT}\cdot K$$

$$C - P = e^{-rT}\cdot S(0)\cdot e^{rT} - e^{-rT}\cdot K$$

$$C - P = S(0) - e^{-rT}\cdot K \quad \text{Q.E.D.}$$

3.) C ... call

P ... put

$$C > P + S(0) + Ke^{-rT}$$

a) Da postoji mogućnost arbitraže na tržištu jer za nearbitražu bi moralo vrijediti: $C - P = S(0) - Ke^{-rT}$

b) konstruiraj strategiju arbitraže

<u>$t=0$</u> → budući da je $C >$ onda kratko prodamo (izdamo) 1 CALL OPCIJU
• za to dobijemo $C > P + S(0) - Ke^{-rT}$

→ kupimo 1 PUT OPCIJU za iznos P, 1 dionicu za iznos $S(0)$ i posudimo iz banke (zadužimo se) Ke^{-rT}

→ ostatak novca $C - P - S(0) + Ke^{-rT} > 0$ orocimo po kamatnoj stopi r

$V(0) = 0$

<u>$t=T$</u>
$$-\underbrace{[S(T)-K]^+}_{\text{moram vratiti za CALL}} + \underbrace{[K-S(T)]^+}_{\text{isp. fuk PUT-a}} + \underbrace{S(T)}_{\text{od dionica}} - \underbrace{Ke^{-rT}\cdot e^{rT}}_{\text{moram vratiti novac za koji sam se zadužila}} + x\cdot e^{rT}$$

• $S(T) > K$
$$-\cancel{S(T)} + \cancel{K} + 0 + \cancel{S(T)} - K + x\cdot e^{rT} > 0$$

$$\text{REPLICIRAJUĆI PORTFELJ} = \underbrace{[K-S(T)]^+ + S(T) - K}_{\text{PORTFELJ ZA CALL}} = \underbrace{[S(T)-K]^+}_{\text{CALL}}$$

④ TROPERIODNI binomni model tržišta

XYZ dionica

$S(0) = 80$

$g = 50\%$

$d = -5\%$

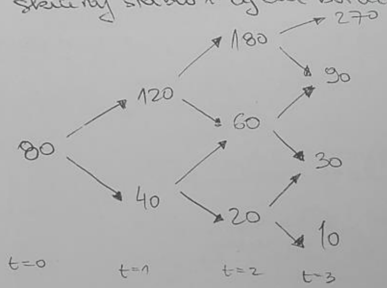
$p_g = 0.6$

$r = 25\%$

$K = 90$

$T = 3$

a) Skiciraj stablo i cijene bazične imovine



b) da li postoji mogućnost arbitraže?

NE jer je ispunjen uvjet $d < r < g$ u svakom čvoru stabla

c) Odredite vjerojatnost neutralnu na rizik.

$$\boxed{p^* = \frac{r-d}{g-d}} = \frac{25-(-50)}{50-(-50)} = \frac{3}{4} = 0.75$$

ili

$$120 \cdot p^* + 40(1-p^*) = 80 \cdot 1.25$$

d) Odredi cijenu EU PUT opcije?

$$C_0 = E^*\left[\frac{C_1}{1+r}\right]$$

isplatne put opcije: $\max\{K-S(T), 0\}$

$w_1: (90-270, 0) = 0$

$w_2: (90-90, 0) = 0$

$w_3: (90-30, 0) = 60$

$w_4: (90-10, 0) = 80$

u t=2:

ω_1, ω_2: $\boxed{C_2 = E^*\left[\frac{C_3}{1+r}\right]}$

$C_2 = \frac{1}{1+r}\left[p^* \cdot 0 + (1-p^*)\cdot 0\right] = \frac{1}{1+0.25}\cdot 0 = 0$

ω_2, ω_3: $C_2 = E^*\left[\frac{C_3}{1+r}\right]$

$C_2 = \frac{1}{1+r}\left[p^* \cdot 0 + (1-p^*)\cdot 60\right] = \frac{1}{1+0.25}\cdot\frac{1}{4}\cdot 60 = 12$

ω_3, ω_4: $C_2 = \frac{1}{1+r}\left[p^* \cdot 60 + (1-p^*)\cdot 80\right] = 52$

u t=1

$\omega_1, \omega_2 \omega_3$: $\boxed{C_1 = E^*\left[\frac{C_2}{1+r}\right]}$

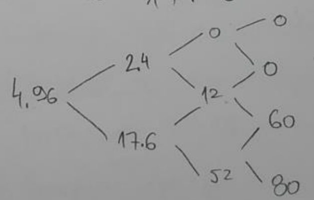
$C_1 = \frac{1}{1+r}\left[p^* \cdot 0 + (1-p^*)\cdot 12\right] = 2.4$

$\omega_2, \omega_3, \omega_4$: $C_1 = \frac{1}{1+r}\left[p^* \cdot 12 + (1-p^*)\cdot 52\right] = 17.6$

u t=0

$\boxed{C_0 = E^*\left[\frac{C_1}{1+r}\right]}$

$C_0 = \frac{1}{1+r}\left[p^* \cdot 2.4 + (1-p^*)\cdot 17.6\right] = \boxed{4.96}$



e) Odredi replicirajući portfelj $h(x,y) = ?$

t=1

$x(1)\cdot 120 + y(1)\cdot A(0)(1+r) = 2.4$

$x(1)\cdot 40 + y(1)\cdot A(0)(1+r) = 17.6$

$x(1)(120-40) = (2.4 - 17.6)$

$x(1) = -0.19$ $\quad y(1) = 20.16$

t=2

$\omega_1, \omega_2, \omega_3$

$x(2)\cdot 180 + y(2)\cdot 1.25 = 0$

$x(2)\cdot 60 + y(2)\cdot 1.25 = 12$

$120\, x(2) = -12$

$x(2) = -0.1$

$y(2) = 14.$

za $\underline{w_2, w_3 w_4}$: $\begin{array}{l} X(2)\cdot 60 + y(2)\cdot 1.25 = 12 \\ X(2)\cdot 20 + y(2)\cdot 1.25 = 52 \end{array} \Big| -$

$40X(2) = -40$

$\underbrace{X(2) = -1}$, $\underbrace{y(2) = 57.6}$

$\underline{t=3}$

za $\underline{w_1, w_2}$: $\begin{array}{l} X(3)\cdot 270 + y(3)\cdot 1.25 = 0 \\ X(3)\cdot 90 + y(3)\cdot 1.25 = 0 \end{array} \Big| -$

$\underbrace{X(3) = 0}$, $\underbrace{y(3) = 0}$

za $\underline{w_2, w_3}$: $\begin{array}{l} X(3)\cdot 90 + y(3)\cdot 1.25 = 0 \\ X(3)\cdot 30 + y(3)\cdot 1.25 = 60 \end{array} \Big| -$

$60X(3) = -60$

$\underbrace{X(3) = -1}$, $\underbrace{y(3) = 72}$

za $\underline{w_3 w_4}$: $\begin{array}{l} X(3)\cdot 30 + y(3)\cdot 1.25 = 60 \\ X(3)\cdot 10 + y(3)\cdot 1.25 = 80 \end{array} \Big| -$

$20X(3) = -20$

$\underbrace{X(3) = -1}$, $\underbrace{y(3) = 72}$

f) opcijom se trguje na tržištu po 1.8. Što zaključuješ?

Kako je $1.8 < 4.96$ nearbitražna cijena opcije u trenutku $t=0$

$\underline{t=0}$ → PRODAJE se replicirajući portfelj za 4.96 ⇒ POTREBNO kupim 0.19 dionica, posudim 20.16 u novcu

→ kupim opciju za 1.8

→ razlika: $4.96 - 1.8 = 3.16$ oročim po kamati 25%

$V(0) = 0$

$\underline{t=1}$ – prodani replicirajući portfelj i opcija vrijede <u>isto</u> (iz ostvarenog prava opcije namirimo obvezu prodanog replicirajućeg portfelja:

$-0.19\cdot 120 + 20.16\cdot 1.25 = 2.4$ w)

– ostvarili smo NERIZIČNI PROFIT: $3.16\cdot(1+0.25) = \underbrace{3.95} > 0$

⑤ XYZ

→ trguje se i sintetičkim ugovorima glede vrijednosnica

$S(0) = 80$ (cijena dionice)

$r = 8\%$

$r_{div} = 3\% = r_D$ (prinos od dividende)

$T = 15$ mjeseci

$F(0,T) = 90$ (trenutna tržišna cijena unaprijednog ugovora na dionicu)

ARBITRAŽA ?

Fer cijena:

$$F(0,T) = S(0)e^{(r-r_D)\cdot T}$$

$$F(0,T) = 80 \cdot e^{(0{,}08-0{,}03)\cdot \frac{15}{12}} = 85{,}16$$

$$F(0,T) > S(0)e^{(r-r_D)T}$$ ⇒ POSTOJI mogućnost arbitraže

$t=0$ → zauzmemo KRATKU poziciju u unap. ugovoru, dogovorimo PRODAJU po cijeni 90 u trenutku T

?? → kupimo danas $e^{-r_D T}$ udjela dionice za što moramo posuditi $\frac{S(0)}{e^{-r_D T}} = S(0)e^{r_D T}$ po stopi r

$t=T$ → prodamo dionicu po cijeni 90

→ vratimo dug

→ neprekidno reinvestiramo iznos od dividende po stopi r_D.

$$90 - 80\cdot e^{(0{,}08-0{,}03)\frac{15}{12}} = 4.84 > 0$$

Fakultet elektrotehnike i računarstva
Financijska matematika
Zadaci za vježbu i samostalan rad
17. 6. 2016.

Napomena pri rješavanju zadataka: Zadaci predstavljaju uobičajene zadatke za zadaću kao i dodatne zadatke za vježbu. Neke dodatne tvrdnje koje su navedene u napomenama i u zadacima služe kao dodatni materijali i bolje razumijevanje nastavnog sadržaja. Posebno obratite pažnju na detaljnije specifikacije analize kretanja cijene bazične imovine po modelu Blacka i Scholesa. To podrazumijeva da kretanje cijene bazične imovine ili neke vrijednosnice može biti zadano ili pomoću direktne specifikacije (1) ili pomoću stohastisčke diferencijalne jednadžbe (2) te uočite vezu između parametara. Uz određene pretpostavke, (1) je rješenje SDJ (2). Također, neke su tvrdnje navedene u samoj prezentaciji.

Napomena. Za računanje zadataka u kojima se pretpostavlja da se proces cijene neke vrijednosnice (bazične imovine, konkretno i najčešće dionice) analizira pomoću Black-Scholesovog modela, vrlo je važno primijetiti da pretpostavka log-normalnosti na proces cijene dionice podrazumijeva sljedeće:

a) $$S(t) = S(0)e^{\left(\mu-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t+\sigma W(t)} \qquad (1)$$

U odnosu na <u>fizičku ili objektivnu vjerojatnost *P*</u>, vrijedi

$$\ln[S(T)] \sim N\left(\ln S(0) + \left(\mu-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T, \sigma^2 T\right),$$

Također u tom slučaju vrijedi da je dinamika kretanja cijene dionice pomoću stohastičke diferencijalne jednadžbe dana sa

$$dS_t = (\mu-\delta)S_t dt + \sigma S_t dW_t \qquad (2)$$

pri čemu su μ i σ drift odnosno volatilnost, W je Brownovo gibanje, a δ je prinos od dividende u slučaju da dionica neprekidno isplaćuje dividendu. U slučaju da dionica **ne isplaćuje dividendu**, tada je δ **=0.** U tom slučaju kažemo da se proces cijene dionice $S(t)$ kreće po modelu **geometrijskog Brownovog gibanja**.

b) u odnosu na vjerojatnost neutralnu na rizik P^*, vrijedi

$$\ln[S(T)] \sim N\left(\ln S(0) + \left(r-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T, \sigma^2 T\right),$$

pri čemu je r nerizična kamatna stopa. Primijetite da u slučaju vjerojatnosti neutralne na rizik, parametar drifta μ iščezava.

U slučaju da **dionica neprekidno isplaćuje dividendu** čija je stopa prinosa δ, **Black-Scholesova formula** glasi:

$$C_{op} = S(0)e^{-\delta T} N(d_1) - Xe^{-rT} N(d_2),$$

pri čemu su X izvršna cijena opcije, a T dospijeće, a d_1, d_2 zadani sa $d_1 = \dfrac{\ln\dfrac{S_0}{X} + \left(r - \delta + \dfrac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$, $d_2 = \dfrac{\ln\dfrac{S_0}{X} + \left(r - \delta - \dfrac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$, dok je $N(.)$ funkcija distribucije normalne slučajne varijable. Uočite da jedina promjena u odnosu na formule sa predavanja je u parametru δ koji se oduzima od referentne nerizične kamatne stope r.

1. Pretpostavimo da je na dan 1.6.2010. cijena dionice XYZ 10% niža nego što je bila 1.3.2010. Pretpostavimo da je referentna nerizična kamatna stopa 6% te da promatramo unaprijedni ugovor s dospijećem 1.12. 2010.

a) Da li je cijena takvog unaprijednog ugovora na dan 1.6. veća ili manja od one na dan 1.3.?

b) Izračunajte za koliko (u %) će se promijeniti unaprijedna cijena 1.6.2010. u usporedbi s onom 1.3.2010. za takav unaprijedni ugovor.

2. Pretpostavimo da je referentna tržišna kamatna stopa na tržištu 8%. No, kao mali investitor možete posuđivati novac od banke po stopi od 10%, a oročiti ili investirati novac po stopi od 7%. Pretpostavimo nadalje da je unaprijedna cijena ugovora s dospijećem od jedne godine dana sa $F(0,1)=89$, te da je trenutna tržišna cijena dionice XYZ koja isplaćuje dividendu u iznosu od 2 za pola godine dana sa 83. Da li postoji mogućnost arbitraže? Ako da, odredite strategiju arbitraže.

.

3. Pretpostavimo da se dionicom XYZ koja ne isplaćuje dividendu trenutno na tržištu trguje cijenom od 15.6 te da je cijena europske call opcije na dionicu XYZ izvršne cijene 15 i dospijećem tri mjeseca trguje po cijeni od 2.83. Referentna nerizična kamatna stopa je 6.72%. Kolika je cijena europske put opcije iste izvršne cijene i dospijeća?

4. Pretpostavimo da je trenutna tržišna cijena europske call opcije na dionicu XYZ izvršne cijene 24 i dospijeća od pola godine 5.09, a europske put opcije iste izvršne cijene i istog dospijeća 7.78. Trenutna tržišna cijena dionice je 20.37, a referentna nerizična kamatna stopa na tržištu je 7.48%. Odredite da li na tržištu postoji mogućnost arbitraže te ukoliko postoji, odredite strategiju arbitraže.

5. Pretpostavimo da tvrtka XYZ u Hrvatskoj uvozi automobile iz Njemačke te želi dogovoriti unaprijedni ugovor za kupnju eura (strana valuta u Hrvatskoj!) za pola godine od danas. Referentna nerizična kamatna stopa za investiranje u domaću valutu je 4%, a za investiranja u stranu valutu je 3% te pretpostavimo da je trenutni tečaj 7.25. Odredite izvršnu cijenu europske call i put opcije na tečaj s dospijećem od pola godine uz uvjet da je cijena europske call opcije jednaka cijeni europske put opcije. (Uputa: primijetite da kod call-put paritetne relacije vrijedi $C_0^E - P_0^E = V_X(0)$, pri čemu je

$V_X(t)$ cijena unaprijednog ugovora unaprijedne cijene X u trenutku t. Primijetite da call-put paritetnu relaciju možete zapamtiti i pomoću takve relacije)

6. Neka su C^E, C^A cijena europske call odnosno američke call opcije izvršne cijene X i dospijeća T.

a) Pokušajte dati neki intuitivni razlog zašto bi bilo logično pretpostaviti da vrijedi $C^E \le C^A$

b) Dokažite da vrijedi $C^E \le C^A$ koristeći argument arbitraže.

c) Pretpostavite da analizirate dionicu XYZ trenutne tržišne cijene $S(0)$. Neka je C^E trenutna tržišna cijena europske call opcije na dionicu XYZ izvršne cijene X i dospijeća T. Dokažite da vrijedi $C^E < S(0)$ koristeći argument arbitraže.

7. Neka su C^E, C^A, P^E, P^A redom cijena europske call opcije, američke call opcije, europske put opcije i američke put opcije na dionicu XYZ izvršne cijene X i dospijeća T. Neka je trenutna tržišna cijena dionice XYZ $S(0)$ te neka je r referentna nerizična kamatna stopa. Koje od sljedećih relacija vrijede:

a) $S(0) \le Xe^{-rt} + C^E$

b) $P^E > Xe^{-rT}$

c) $Xe^{-rT} - P^E \le S(0)$

d) $C^E + X \le C^E \le C^A$

8. Pretpostavimo da analiziramo cijenu dionice XYZ pomoću Black-Scholesovog modela te da je poznato sljedeće: referentna nerizična kamatna stopa je 5.5%, cijena izvedenice na dionicu XYZ u trenutku t dana je sa $e^{rt}\ln[S(t)]$, pri čemu je $S(t)$ cijena dionice XYZ u trenutku t, volatilnost dionice XYZ je 30%, dionica isplaćuje dividendu neprekidno po stopi koja je proporcionalna cijeni dionice, a izvedenica ne isplaćuje dividendu (drugim riječima, ako izvedenicu promatramo kao vrijednosnicu za sebe, posjedovanje takvog vrijednosnog papira ne osigurava isplatu dividende). Odredite prinos od dividende na dionicu XYZ.

Uputa uz prethodne napomene: na predavanjima je analiziran slučaj kada dionica (bazična imovina!) **ne** isplaćuje dividendu i u tom slučaju uz pretpostavku log-normalne distribucije za cijenu bazične imovine S, vrijedi sljedeće: <u>u odnosu na vjerojatnost neutralnu na rizik</u> $\ln[S(T)] \sim N\left(\ln S(0) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T, \sigma^2 T\right)$ (Uvjerite se u istinitost ove tvrdnje koristeći definiciju Brownovog gibanja s obzirom na vjerojatnost neutralnu na rizik). Ukoliko dionica **isplaćuje dividendu** po stopi δ, tada uz pretpostavku log-normalne distribucije za cijenu bazične imovine S, vrijedi $\ln[S(T)] \sim . N\left(\ln S(0) + \left(r - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T, \sigma^2 T\right)$. Drugim riječima, prinos od dividende utječe samo na *drift*, odnosno na očekivanu vrijednost cijene dionice (bazične imovine!). Nadalje, prisjetite se da prema fundamentalnom teoremu vrednovanja imovine, (diskontirani!) slučajni proces

$\{e^{-rt}V(S(t),t)\}$ je martingal u odnosu na vjerojatnost neutralnu na rizik. Budući da je, u ovom zadatku, proces od interesa zapravo cijena izvedenice na dionicu XYZ u trenutku t koja je zadana sa

$$V(S(t),t) =) e^{rt} \ln[S(t)],$$

to znači da mora vrijediti

$$E^*\left[e^{-rT}V(S(T)) \mid S(0)\right] = def\_od\_V(S(t)) = E^*\left[e^{-rT}e^{rT}\ln[S(T)] \mid S(0)\right] = \ln[S(0)],$$

odnosno

$$E^*\left[\ln[S(T)] \mid S(0)\right] = \ln[S(0)]. \qquad (*)$$

Budući da s lijeve strane jednakosti uvjetujete očekivanu vrijednost na konstantu $S(0)$ koja je ujedno i uključena u parametre distribucije slučajne varijable $\ln[S(T)]$, vrijedi da je $E^*\left[\ln[S(T)] \mid S(0)\right] = E^*\left[\ln[S(T)]\right]$, a budući da vam je poznata distribucija slučajne varijable $\ln[S(T)]$, izračunajte očekivanje na lijevoj strani jednadžbe (*), a zatim riješite jednadžbu (*) po δ.

U ovom zadatku također **uočite** da nije bilo potrebno zadavati parametar drifta μ budući da se potrebno računanje vrši s obzirom na vjerojatnost neutralnu na rizik, a prethodno smo vidjeli da u specifikacijama vrednovanja s obzirom na vjerojatnost neutralnu na rizik, parametar drifta nestaje, tj. ne pojavljuje se u formulama! To nije slučajno, već ima svoju i ekonomsku interpretaciju.

Napomena: u sljedećim zadacima prisjetite se formule za udjele rizične i nerizične imovine (x,y) u replicirajućem portfelju za izvedenicu čija je isplatna (ugovorna) funkcija zadana sa $f(S_T)$, pri čemu je T dospijeće izvedenice, uz pretpostavku modela binomnog stabla. Prisjetite se također da kad su vam ti udjeli poznati, da je tada vrijednost takvog portfelja u trenutku 0 dana sa $V(0) = xS(0) + y$, pri čemu pretpostavljamo da vrijedi da je $A(0)=1$, odnosno da je vrijednost nerizične imovine u trenutku 0 jednaka jedan. Ukoliko vrijednost nerizične imovine u trenutku 0 nije jednaka jedan, tada je vrijednost takvog portfelja u trenutku 0 dana sa $V(0) = xS(0) + yA(0)$.

Uz **uvjet nearbitraže,** cijena izvedenice (u bilo kojem vremenskom trenutku pa tako i u trenutku t=0 odnosno *danas*) mora biti jednaka vrijednosti replicirajućeg portfelja u tom istom trenutku (teorem s predavanja!). Drugim riječima, $V(t) = \Pi(t)$, pri čemu je Π cijena izvedenice.

9. Pretpostavimo da analiziramo model binomnog stabla. Dokažite da je cijena europske call opcije izvršne cijene X i dospijeća 1 rastuća funkcija povrata u slučaju kretanja cijene prema gore, g, uz uvjet da su ostale varijable konstantne odnosno da se ne mijenjaju, uz pretpostavku da za izvršnu cijenu opcije vrijedi $S_d < X < S_g$, pri čemu su S_g odnosno S_d cijene bazične imovine u trenutku 1 u slučaju kretanja cijene prema gore odnosno prema dolje. Analizirajte utjecaj promjene povrata u slučaju kretanja cijene prema dolje, d, na cijenu opcije.

10. Uz pretpostavku modela binomnog stabla, odredite formulu za trenutnu cijenu europske call opcije na dionicu XYZ izvršne cijene X i dospijeća 1, tj. odredite $C^E(0)$, ukoliko je referentna nerizična kamatna stopa jednaka nula, cijena dionice XYZ u trenutku nula iznosi $S(0)=X=1$. Izračunajte cijenu takve opcije ukoliko su g=5%, d= -5% te ukoliko su g=1%, d= -19%.

11. Pretpostavimo da promatramo jednoperiodni model binomnog stabla. Odredite početnu vrijednost portfelja koji replicira call opciju na dionicu XYZ ukoliko se pri svakoj prodaji dionice investitor susreće sa troškovima transakcija proporcionalnima vrijednosti dionice XY u iznosu od 2% (drugim riječima, prodavač dionice dobiva 98% vrijednosti dionice), dok prilikom kupnje dionice XYZ nema transakcijskih troškova. Usporedite tako dobivenu vrijednost portfelja sa početnom vrijednosti porteflja ukoliko nema nikakvih transakcijskih troškova. Pretpostavimo da su zadane sljedeće vrijednosti: izvršna cijena opcije X=S(0)=100, pri čemu je S(0) vrijednost dionice XYZ u trenutku 0, povrati u slučaju rasta odnosno pada cijene dionice dani su sa g=10%, d= -10%, a referentna nerizična kamatna stopa jednaka je 5%.

12. Pretpostavimo da promatramo jednoperiodni model binomnog stabla. Neka je trenutna cijena dionice XYZ dana sa S(0)=X=75, povrati u slučaju rasta odnosno pada cijene dionice dani su sa g=20%, d= -10% te da novac možete posuđivati po kamatnoj stopi od 12%, ali kamatna stopa na depozite iznosi 8%. Odredite vrijednost replicirajućeg portfelja za put i call opciju.

Napomena: Ovdje je **jako bitno primijetiti sljedeće:** ukoliko je udio nerizične imovine u replicirajućem portfelju negativan, to znači da novac morate posuditi što ujedno znači da u tom slučaju koristite kamatnu stopu od 12% kao nerizičnu kamatnu stopu. Ukoliko je udio nerizične imovine u replicirajućem portfelju **pozitivan**, to znači da novac oročavate pa kao referentnu nerizičnu kamatnu stopu uzimate kamatnu stopu na depozite! Dakle prvo izračunate udjele rizične i nerizične imovini u replicirajućem portfelju. Izbor referentne nerizične kamatne stope je ključan za određivanje vjerojatnosti neutralne na rizik budući da je u modelu binomnog stabla $p_g^* = \dfrac{r-d}{g-d}$. Dakle, ovisno o tome da li je udio nerizične imovine u replicirajućem portfelju pozitivan ili negativan, koristit ćete različite referentne nerizične kamatne stope (ukoliko se kamatna stopa na depozite razlikuje u odnosu na onu za pozajmljivanje) te dobiti različite vjerojatnosti neutralne na rizik. Tada se vrednovanje opcija može računati po formuli

$$\Pi(0) = \frac{1}{1+r} E^*\left[f(S_1)\right], \qquad (**)$$

pri čemu je f ugovorna funkcija opcije, 1 je dospijeće budući da pretpostavljamo jednoperiodni binomni model, a očekivanje se računa u odnosu na vjerojatnost neutralnu na rizik.

Provjerite da li su cijene koje ste izračunali konzistentne s formulom za vrednovanje (**). (Kako biste odredili cijenu opcije u skladu s formulom (**) potrebno je odrediti vjerojatnosti neutralne na rizik u slučaju negativnog udjela nerizične imovine u replicirajućem portfelju kao i u slučaju pozitivnog udjela nerizične imovine u replicirajućem portfelju, i te dvije vjerojatnosti će se općenito razlikovati!

1. $t_1 < t_2$, $F(t_1,T) = 1.046S(t_1)$, $F(t_2,T) = 0.927S(t_1) \Rightarrow$

$$a) F(t_2,T) < F(t_1,T)$$

$$b) \frac{F(t_2,T)}{F(t_1,T)} = 0.886,$$

odnosno, $F(t_2,T)$ je 11.4% manja od $F(t_1,T)$.

2. Dvije su mogućnosti: a) kratka pozicija u (unaprijednom) ugovoru ili b) duga pozicija u ugovoru.

a) t=0: posuditi od banke 83 i kupiti dionicu, te dogovoriti prodaju dionice u trenutku T=1, po cijeni $F(0,1)$=89.

t=0.5: isplaćenu dividendu D=2 oročiti po r =7%

t=T=1: od prodaje dionice 89, od ukamaćene dividende 2.0712, banci vratiti 91.729. Sveukupno dobitak manji od nule, dakle nije strategija arbitraže

b) t=0: short-sell dionice za 83, dobiveni iznos oročiti uz 7% na godinu dana, te dogovoriti kupnju dionice u trenutku T=1.

t=0.5: posuditi D=2 po r =10% na period od pola godine

t=T=1: kupiti dionicu po 89 (čime se podmiri obaveza od kratke prodaje dionice iz trenutka t=0), vratiti posuđeno banci i podignuti oročeni iznos. Sveukupno, dobitak je manji od nule dakle nije strategija arbitraže.

3. Prema call-put jednakosti, slijedi P^E=1.98

4. Ukoliko su cijene (i call i put opcije) nearbitrazne tada mora biti zadovoljena call-put jednakost. No, $C^E > P^E + S(0) - Xe^{-rT}$ pa postoji strategija arbitraže:

t=0: prodati call opciju (zbog odgovarajuće nejednakosti!), kupiti put opciju i dionicu. Da bi to bilo moguće, potrebno je posuditi od banke 23.06. Sveukupno, V(0)=0.

t=0.5

a) Ako je S(T)> 24 (=izvršna cijena) put opcija postaje beznačajna pa je stanje imovine u trenutku t=0.5: posjeduje se dionica te je potrebno isplatiti kupcu call opcije iznos S(T)-24 budući da će kupac call opcije istu i iskoristiti (jer je S(T)>24) $-23.06e^{0.0748*0.5} + S(0.5) - (S(0.5) - 24) = 0.06122 > 0.$

b) Ako je S(T)<24 tada call opcija postaje bezvrijedna, a put opcija će se izvršiti. Stoga prodajemo dionicu po 24, te vratimo posuđeno banci. Svekupuno, $-23.06e^{0.0748*0.5} + 24 = 0.06122 > 0.$

5. U slučaju unaprijednog ugovora na tečaj, uvjet zadatka $C^E = P^E$ ekvivalentan je uvjetu (zbog call-put jednakosti) S(0)= Xe^{-rT}, odnosno $V_X(0)$=0, odnosno X=F(0,T), iz čega slijedi da je X=7.2863

6. a) vrijedi jer američka opcija daje veće „pravo" nego europska call-opcija (jer ju možete izvršiti u bilo kojem trenutku do i uključujući dospijeća).

b) ne vrijedi; (potrebno je dokazati da ne vrijedi: pretpostavite suprotno: tj $C^E > C^A$. Tada u t=0 prodate europsku c.o., kupite američku c.o. i ostatak oročite. Ne radite ništa do dospijeća (u trenutku dospijeća vrijede jednako). Preostaje oročeni dio koji je pozitivan. Time je stvorena strategija arbitraže što je kontradikcija. Dakle, $C^E \le C^A$.

c) ne vrijedi; pretpostavite suprotno, tj. $C^E \ge S(0)$. Time će biti omogućena strategija arbitraže (konstruirajte ju!).

7. Sve tvrdnje je potrebno, naravno, dokazati.

a) vrijedi (pomoću call-put jednakosti)

b) ne vrijedi (opet prema call-put jednakosti)

c) vrijedi

d) ne vrijedi jer je X>0

8. $\delta = 0.01$

9. $C^E = \frac{1}{1+r} E^*\left[(S(1)-X)^+\right] = \frac{1}{1+r}\frac{r-d}{g-d}\left(S(0)(1+g)-X\right)$

$$\Rightarrow \frac{\partial C^E}{\partial g} = \frac{1}{1+r}\frac{r-d}{g-d}\left[\frac{X-S(0)(1+d)}{g-d}\right] > 0, \text{odnosno } C^E \text{ je rastuća funkcija od } g$$

Analogno, C^E je padajuća funkcija od *d*.

10. a) $C^E(0)$=0.025

11. Da bi se replicirala call-opcija, potrebno je kupiti dionicu i prodati ju u trenutku izvršenja:

$$110 \cdot 0.98x + 1.05y = 110 - 100$$
$$90 \cdot 0.98x + 1.05y = 0$$
$$\Rightarrow x = 0.5102, y = -42.8471 \Rightarrow V(0) = 8.1633.$$

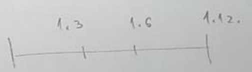
U slučaju da nema transakcijskih troškova, $x = 0.5, y = -42.8671 \Rightarrow V(0) = 7.1423$.

12. Call opcija (potrebno je kupiti opciju pomoću posudbe novca, tj. $x \ge 0, y \le 0$): V(0)=9.8214

Put opcija (ući u kratku poziciju s dionicom i oročiti dobiveni novac, tj. $x \le 0, y \ge 0$): V(0)= 2.7778

11. ZADACI ZA VJEŽBU (17.6. 2016.)

① $t_1 = 1.3.2010.$
$t_2 = 1.6.2010.$
$r = 6\%$
$T = 1.12.2010.$ (unaprijedni ugovor)
$S(t_2) = 0.9\,S(t_1)$



a) $F(t_2,T) \overset{?}{\gtrless} F(t_1,T)$

$$F(t_1,T) = S(t_1)\cdot e^{r(T-t_1)} = S(t_1)\cdot e^{0.06\cdot\frac{9}{12}} = 1.046\,S(t_1)$$

$$F(t_2,T) = S(t_2)\cdot e^{r(T-t_2)} = S(t_2)\cdot e^{0.06\cdot\frac{6}{12}} = 1.0305\,S(t_2) = 0.9274\,S(t_1)$$

$$\boxed{F(t_2,T) < F(t_1,T)}$$

b) $$\frac{F(t_2,T)}{F(t_1,T)} = \frac{0.9274\,S(t_1)}{1.046\,S(t_1)} = 0.8866$$

$F(t_2,T)$ je za 11.34% manja od $F(t_1,T)$

② $r = 8\%$
$r_P = 10\%$
$r_O = 7\%$
$T = 1$ godina
$F(0,1) = 89$
$S(0) = 83$
$D = 2$ ($t = 0.5$ godine)

ARBITRAŽA = ?
FER CIJENA

$$F(0,1) = \left[S(0) - D\cdot e^{-rt_1}\right]e^{rT}$$

$F(0,1) > \left[S_0 - D e^{-rt_1}\right]e^{rT}$

$$F(0,1) = \left[83 - 2\cdot e^{-0.08\cdot 0.5}\right]e^{0.08\cdot 1} = 87.8$$

1. SLUČAJ

$t=0$ → KRATKA POZICIJA u unaprijednom ug., tj. dogovorim PRODAJU po 89 u T, a sada kupim dionicu po $S(0) = 83$
→ za to posuditi od banke $S(0)$ po kamati 10%
$V(0) = 0$

$t=0.5$ → dobijem dividendu $D = 2$ oročim po 7%
$V(0.5) = 0$

$t=1$ → od prodaje dobijem $+89$
→ moram banci vratiti $-83\cdot e^{10\%\cdot 1}$
→ od dividende oročene dobijem: $+2\cdot e^{7\%\cdot 0.5}$

$$+89 - 83\,e^{0.1\cdot 1} + 2\cdot e^{0.07\cdot 0.5} = -0.658 < 0$$

NEMA ARBITRAŽE

II. SLUČAJ

$t=0$ → zauzmem dugu poziciju u nap, tj. ugovorim KUPNJU dionice po 89 NT

→ sada ju prodam po $S(0)=83$ i to oročim po kamati 7%

$V(0)=0$

$t=0.5$ → moram isplatiti Dividendu $D=2$ → posudim iz banke po stopi 10% na pola godine

$t=1$ → kupujem dionicu : -89

→ Vratimim banci : $-2 \cdot e^{0.1 \cdot 0.5}$

→ dobijem od oročavanja : $83 \cdot e^{0.07 \cdot 1}$

$$-89 - 2 \cdot e^{0.1 \cdot 0.5} + 83 e^{0.07} = -2.084 < 0$$

NEMA ARBITRAŽE

3) XYZ ne isplaćuje dividendu

$S(0) = 15.6$

$(X) = K = 15$

$T = 3$ mjeseca

$C^E = 2.83$

$r = 6.72\%$

$P^E = ?$

$$\rightarrow C^E - P^E = S(0) - Ke^{-rT}$$

$$P^E = C^E - S(0) + Ke^{-rT}$$

$$P^E = 2.83 - 15.6 + 15 \cdot e^{-0.0672 \cdot \frac{3}{12}}$$

$$\boxed{P^E = 1.98}$$

(4) $c^E = 5.09$ $\quad$ $p^E = 7.78$ $\quad$ $S(0) = 20.37$ $\quad$ STRATEGIJA ARBITRAŽE?

$K = 24$ $\quad$ $K = 24$ $\quad$ $r = 7.48\%$

$T = 0.5$ godine $\quad$ $T = 0.5$ god.

$$c^E - p^E = S(0) - Ke^{-rT}$$

$$c^E - p^E = 20.37 - 24e^{-0.0748 \cdot 0.5} = \underline{-2.749}$$

$\neq$ RAZLIKUJE SE

$$c^E - p^E = 5.09 - 7.78 = \underline{-2.69}$$

$$c^E = p^E + S(0) - Ke^{-rT}$$

$$\underline{c^E > p^E + S(0) - Ke^{-rT}} \Rightarrow \exists \text{ strategija arbitraže!}$$

$\underline{t=0}$ $\Rightarrow$ prodam call opciju za 5.09

$\Rightarrow$ kupim put opciju za -7.78

$\Rightarrow$ kupim dionicu za -20.37

$\Rightarrow$ za sve to moram posuditi: $-7.78 - 20.37 + 5.09 = -23.06$

$V(0) = 0$

$\underline{t = 0.5}$ a) ako je $S(T) > K \Rightarrow S(T) > 24$ $\Rightarrow$ PUT OPCIJA JE BEZNAČAJNA

$$\underbrace{-(S(T)-K)^+}_{\text{vraćam za call}} + \underbrace{[K - S(T)]^+}_{\emptyset} + \underbrace{S(T)}_{\text{dobijem od dionica}} - \underbrace{23.06 \cdot e^{0.0748 \cdot 0.5}}_{\text{vraćam banci posudbu}}$$

$$-(S(0.5) - 24) + S(0.5) - 23.06e^{0.0748 \cdot 0.5} =$$

$$= 24 - 23.06 \cdot e^{0.0748 \cdot 0.5} = \underline{0.06122 > 0}$$

b) ako je $S(T) < K \Rightarrow S(T) < 24$ $\Rightarrow$ CALL POSTAJE BEZVRIJEDAN

$$0 + K - \cancel{S(0.5)} + \cancel{S(0.5)} - 23.06e^{-0.748 \cdot 0.5} =$$

$$= \underline{0.06122 > 0}$$

5. $T = 0.5$ godina

$r_d = 4\%$ (domaća valuta)

$r_\$ - 3\%$ (strana valuta)

$P(0) = 7.25$

$K = ?$ ako je $C^E = P^E$

$C_0^E - P_0^E = V_X(0) = S(0) - K \cdot e^{-rT}$

$\boxed{F(0,T) = P(0) \cdot e^{(r_d - r_s) \cdot T}}$; $F(0,T) = X$ FORWARD na tečaj

$X = 7.25 \cdot e^{(0.04 - 0.03) \cdot 0.5}$

$\boxed{X = 7.29}$

6. b) $C^E \leq C^A$ ... argument arbitraže

→ pretpostavimo $C^E > C^A$

<u>u $t=0$</u> → prodamo C^E

→ kupimo C^A

→ ostatak orocimo $C^E - C^A$

<u>u $t=T$</u> - obje vrijede jednako

→ profit : $(C^E - C^A) \cdot e^{rT} > 0$ Q.E.D.

c) XYZ dionica tržišne cijene $S(0)$

$C^E - X, T$

dokaži $C^E < S(0)$ koristeći argument arbitraže

pretpostavimo $C^E \geq S(0)$

<u>u $t=0$</u> → prodamo call za C^E

→ kupimo dionicu za $S(0)$

→ eventualni višak oročimo po r

<u>u $t=T$</u> - osoba kojoj smo prodali CALL će izvršiti ako je $S(T) > K$

∘ imovina će onda biti

$$(C^E - S(0))\, e^{rT} \geq 0$$

- osoba kojoj smo prodali CALL ne će izvršiti ako je $S(T) < K$

∘ naša imovina će tada biti

$$(C^E - S(0))\, e^{rT} + S(T) > 0$$

Q.E.D.

ARBITRAŽNA STRATEGIJA

7. c^E, c^A, p^E, p^A ; $X, T, S(0), r$

Koje relacije vrijede:

a) $S(0) \leq Xe^{-rt} + c^E$

$c^E - p^E = S(0) - Xe^{-rt}$, budući da je $p^E \geq 0$

$c^E - p^E \leq c^E$

$S(0) - Xe^{-rt} \leq c^E$

$S(0) \leq Xe^{-rt} + c^E$ ✓ VRIJEDI

b) $p^E \geq Xe^{-rT}$

$c^E - p^E = S(0) - Xe^{-rT}$

$p^E = c^E - S(0) + Xe^{-rT}$; $\boxed{c^E < S(0)}$

$p^E < Xe^{-rT}$ NE VRIJEDI

c) $Xe^{-rT} - p^E \leq S(0)$

$c^E - p^E = S(0) - Xe^{-rT}$; $c^E \geq 0$

$c^E - p^E \geq -p^E$

$S(0) - Xe^{-rT} \geq -p^E$

$S(0) \geq Xe^{-rt} - p^E$ NE VRIJEDI

d) $c^E + X \leq c^E \leq c^A$

NE VRIJEDI, jer je $X \geq 0$

③ $r = 5.5\%$

cijena izvedenice na dionicu XYZ u trenutku t dana je sa $e^{rt} \ln[S(T$

∘ S(t) cijena dionice u trenutku t

$\sigma = 34\%$

→ dionica isplaćuje neprekidno dividendu po stopi koja je proporcionalna cijendi dionice, a izvedenica ne isplaćuje dividendu

$$\underbrace{E^*[\ln[S(T)] \mid S(0)]}_{= \ln S(0)} = \underbrace{E^*[\ln[(S(T)]]}_{\ln S(0) + (r - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2) \cdot T}$$

$$\boxed{E^*[\ln[S(T)]] = \ln S(0)}$$

$$\cancel{\ln S(0)} + (r - \delta - \tfrac{1}{2}\sigma^2) \cdot T = \cancel{\ln S(0)}$$

$$r - \delta - \tfrac{1}{2}\sigma^2 = 0$$

$$r - \tfrac{1}{2}\sigma^2 = \delta$$

$$\boxed{\delta = 0.01}$$

③ MODEL BINOMNOG STABLA

- dokazati da je C^E rastuća funkcija povrata u slučaju kretanja cijene prema gore, $T=1, X$
- pretpostavka $S_d < X < S_g$

$$S(0) \begin{cases} \nearrow S(0)(1+g) \\ \searrow S(0)(1+d) \end{cases} \qquad S_d < X < S_g$$

$$(S(1) - X)^+ = \begin{cases} S(0)(1+g) - X, & \text{za } S(1) = S(0)(1+g) \\ 0, & \text{za } S(1) = S(0)(1+d) \end{cases}$$

$$\Rightarrow p^* = \frac{r-d}{g-d}$$

$$C^E = E^*\left[\frac{(S(1)-X)^+}{1+r}\right] = \frac{1}{1+r}\left[p^*[S(0)(1+g) - X] + (1-p^*) \cdot 0\right]$$

$$C^E = \frac{1}{1+r} \cdot \frac{r-d}{g-d}\left(S(0)(1+g) - X\right)$$

$$\frac{\partial C^E}{\partial g} = \frac{1}{1+r} \cdot \frac{-(r-d)}{(g-d)^2}\underbrace{\left(S(0)(1+g) - X\right)}_{>0} + \frac{1}{1+r}\,\frac{r-d}{g-d} \cdot S(0)$$

$$\frac{\partial C^E}{\partial g} = \frac{1}{1+r} \cdot \overbrace{\frac{r-d}{g-d}}^{>0}\left[\underbrace{\frac{X - S(0) \cdot (1+d)}{g-d}}_{>0}\right] > 0$$

C^E RASTUĆA FUNKCIJA od g Q.E.D

- analogno C^E je PADAJUĆA funkcija od d

$$\frac{\partial C^E}{\partial d} = -\frac{(g-r)(S(0)(1+g)-X)}{(1+r)(g-d)^2} < 0$$

⑩ Pretpostavka modela BINOMNOG STABLA

$C^E(0) = ?$ $\quad r = 0\%$ $\quad T = 1$ god.

$S(0) = X = 1$

a) $g = 5\%$, $d = -5\%$

b) $g = 1\%$, $d = -19\%$

$$\boxed{C^E = E^*\left[\frac{\max\{S(T)-X,0\}}{r+1}\right]}$$ za binomno stablo

a)

$S(0)(1+g) = 1\cdot(1+0.05) = 1.05$

$S(0)(1+d) = 1(1-0.05) = 0.95$

$1 \nearrow 1.05$, $1 \searrow 0.95$

$$p^* = \frac{r-d}{g-d} = \frac{1}{2}$$

$\max\{1.05-1, 0\}$: 0.05

$\max\{0.95-1, 0\}$: 0

$$C^E = \frac{1}{r+1} E^*\left[p^*\, 0.05 + (1-p^*)\cdot 0\right]$$

$$C^E = 1 \cdot \frac{1}{2}\cdot 0.05 = \boxed{0.025}$$

b) $S(0)(1+g) = 1.01$

$S(0)(1+d) = 0.81$

$1 \nearrow 1.01$, $1 \searrow 0.81$

$$p^* = \frac{r-d}{g-d} = 0.95$$

$$C^E = \frac{1}{1+r} E^*\left[\frac{\max\{S(T)-X,0\}}{1}\right]$$

- $\max\{1.01-1, 0\} = 0.01$
- $\max\{0.81-1, 0\} = 0$

$$C^E = \frac{1}{1+0}\cdot\left[p^*\cdot 0.01 + (1-p^*)\cdot 0\right] = \boxed{0.0095}$$

(11) JEDNOPERIODNI MODEL BINOMNOG STABLA

- pri prodaji dionice INVESTITOR ima troškove transakcije $2\% = tr$ — dobiva 98% vrijednosti dionice dobiva prodajom
- pri kupnji dionice nema trans. troškova

$X = S(0) = 100$

$g = 10\%$

$d = -10\%$

$r = 5\%$

Odredi početnu vrijednost REPLICIRAJUĆEG PORTFELJA za CALL opciju.

$$\boxed{V^{e}(T) = \max\{S(1) - X, 0\}}$$

Da bi se REPLICIRALA CALL opcija potrebno je KUPITI DIONICU i PRODATI JE u trenutku izvršenja:

$$x \cdot S(0)(1+g)\,tr + y\,A(0)\cdot(1+r) = \max\{S(0)(1+g) - X, 0\}$$
$$x\,S(0)(1+d)\,tr + y\,A(0)(1+r) = \max\{S(0)(1+d) - X, 0\}$$

$$x \cdot 100 \cdot (1+0.1) \cdot 0.98 + y \cdot (1+0.05) = 110 - 100$$
$$x \cdot 100(1-0.1) \cdot 0.98 + y(1+0.05) = 0$$

$A(0) = 1$

$$107.8x + 1.05y = 10$$
$$88.2x + 1.05y = 0 \quad \Big|\, -$$

$$19.6x = 10$$

$\boxed{x = 0{,}5102}$ $\boxed{y = -42{,}8567}$

$V(0) = 0.5102 \cdot S(0) - 42.8567 \cdot A(0)$

$\boxed{V(0) = 8{,}1633}$ – početna vrijednost portfelja

→ kada nema transakcijskih troškova:

$$110x + 1.05y = 10$$
$$90x + 1.05y = 0$$

$$20x = 10$$

$\boxed{x = 0.5}$ $\boxed{y = -42.8567}$

$V(0) = 0.5 \cdot S(0) - 42.8567 \cdot A(0)$

$\boxed{V(0) = 7.1433}$

(13) JEDNOPERIODNI model binomnog stabla ; dionica XYZ

$S(0) = X = 75$

$g = 20\%$

$d = -10\%$

$r_p = 12\%$ (posuđivati)

$r_o = 8\%$ (na depozit)

CALL: $V^{u}(T) = \max\{S(T) - X, 0\}$

PUT: $V^{u}(T) = \max\{X - S(T), 0\}$

$$75 \nearrow 90 \quad \searrow 67.5$$

---

vrijednosti replicirajućeg portfelja za PUT i CALL opciju.

CALL OPCIJA: – potrebno kupiti dionicu → zato treba posuditi novce i po ju prodat ju u T

$$x \cdot S(0)(1+g) + y A(0)(1+r) = \max\{S(0)(1+g) - X, 0\}$$
$$x S(0)(1+d) + y A(0)(1+r) = \max\{S(0)(1+d) - X, 0\}$$

$r = 12\%$!

$$90x + 1.12y = 15$$
$$67.5x + 1.12y = 0 \quad / -$$

$$22.5x = 15$$

$\boxed{x = \frac{2}{3}}$ $\boxed{y = -40.179}$

$V(0) = \frac{2}{3} \cdot S(0) - 40.179 \cdot A(0) = 9.821$

PUT OPCIJA: – prodam dionicu – to oročim na banku, pa kupim dionicu u T

$$x S(0)(1+g) + y A(0)(1+r) = 0$$
$$x S(0)(1+d) + y A(0)(1+r) = 7.5$$

$\max\{X - S(T), 0\}$!PAZI!

$r = 8\%$!

$$90x + 1.08y = 0$$
$$67.5x + 1.08y = 7.5 \quad / -$$

$$22.5x = -7.5$$

$\boxed{x = -0.333}$ $\boxed{y = 27.775}$

$V(0) = -0.333 \cdot S(0) + 27.775 \cdot 1$

$V(0) = 2.8$

→ UDIO nerizične imovine $y < 0$ ⇒ POSUĐUJEM

→ UDIO nerizične imovine $y > 0$ ⇒ OROČAVAM

{„udio" = udio u replicirajućem portfelju}

Fakultet elektrotehnike i računarstva
Financijska matematika
Zadaci za vježbu i samostalan rad
17. 6. 2016.

1. Pretpostavimo da analiziramo Black-Scholesov model za kretanje cijene dionice XYZ Investicijska banka ABC izdaje 50000 put opcija na dionicu XYZ s dospijećem od 90 dana i izvršne cijene 1.8 te da je trenutna tržišna cijena dionice XYZ 1.82 i volatilnost 14%. Referentna nerizična kamatna stopa iznosi 5%. Konstruirajte delta neutralni portfelj kako biste se zaštitili od rizika promjene tržišne kamatne stope. Odredite cijenu tako konstruiranog portfelja u slučaju da u sljedećem danu trgovanja referentna tržišna kamatna stopa padne na 3%. (**Napomena**: primijetite da smo na nastavi riješili isti zadatak, ali u slučaju promjene cijene dionice. Bitno je primijetiti koja od mogućih varijabli, a time i promjena u njezinoj vrijednosti, ima utjecaja na hedging odnosno na određivanje udjela u rizičnoj imovini x).

2. Pretpostavimo da analiziramo Black-Scholesov model za kretanje cijene dionice XYZ. Izvedite formule za "Grke" u slučaju put opcije.

3. Pretpostavimo da analiziramo Black-Scholesov model za kretanje cijene dionice XYZ Investicijska banka ABC izdaje 1000 call opcija na dionicu XYZ s dospijećem od 90 dana i izvršne cijene 60 te da je trenutna tržišna cijena dionice XYZ 60 i volatilnost 30%. Referentna nerizična kamatna stopa iznosi 8%. U cilju zaštite od rizika od promjene tržišne vrijednosti dionice XYZ, investicijska banka osim call opcije na dionicu s dopsijećem od 90 dana, u svom portfelju ima i call opciju na dionicu XYZ s dospijećem od 60 dana i izvršne cijene 65. Odredite udjele u rizičnoj imovini te u drugoj vrsti opcije (one s dospijećem od 60 dana) u cilju konstrukcije delta-gamma neutralnog portfelja ukoliko je početna vrijednost takvog portfelja jednaka 0. 2.

Napomena: U ovom i sljedećem zadatku koristimo ostale „Grke“.

Primijetite da je prilikom konstrukcije delta-gamma neutralnog portfelja potrebno da su i delta-portfelja i gamma-portfelja jednaki nuli. Ukoliko portfelj sadrži samo dionicu, nerizičnu imovinu i jednu izvedenicu, znajući poziciju u toj izvedenici (u ovom zadatku z= -1000), preostaje odrediti samo poziciju u rizičnoj imovini x. To se postiže hedgingom konstruiranjem delta-neutralnog portfelja. No, u cilju konstrukcije i gamma-neutralnog portfelja, potrebno je uvođenje nove vrste izvedenice (jedna nepoznanica (koja predstavlja udio odnosno količinu nove izvedenice!) više, dok gamma-neutralnost predstavlja dodatnu jednadžbu. Drugim riječima, ukoliko označimo traženi portfelj sa (x, y, z, d), pri čemu su x, y, z oznake kao i na nastavi, dok je d broj druge vrste izvedenice u portfelju (u ovom zadatku broj call opcija s dospijećem od 60 dana. Dakle, u cilju konstrukcije delta-gamma neutralnog portfelja potrebno je riješiti dvije jednadžbe (delta-neutralnost i gamma neutralnost) s dvije nepoznanice (x i d) (z = -1000 u ovom zadatku, a y je udio u rizičnoj imovini koji se određuje nekim uvjetom na vrijednost portfelja prije samog hedginga uglavnom (ograničenje, na nastavi smo uzimali uvjet da je početna vrijednost portfelja jednaka nula), budući da derivacijom funkcije vrijednosti portfelja po određenoj varijabli od interesa, y iščezava jer se radi o udjelu u nerizičnoj imovini.

4. Pretpostavimo da analiziramo Black-Scholesov model za kretanje cijene dionice XYZ. Investicijska banka ABC izdaje 1000 call opcija na dionicu XYZ s dospijećem od 90 dana i izvršne cijene 60 te da je trenutna tržišna cijena dionice XYZ 60 i volatilnost 30%. Referentna nerizična kamatna stopa iznosi 8%. U cilju zaštite od rizika od promjene volatilnosti dionice XYZ, investicijska banka osim call opcije na dionicu s dopsijećem od 90 dana, u svom portfelju ima i call opciju na dionicu XYZ s dospijećem od 60 dana i izvršne cijene 65. Odredite udjele u rizičnoj imovini te u drugoj vrsti opcije (one s dospijećem od 60 dana) u cilju konstrukcije delta-vega neutralnog portfelja ukoliko je početna vrijednost takvog portfelja jednaka 0.

Napomena: U ovom i prethodnom zadatku je eksplicitno rečeno da se traži delta-gamma odnosno delta-vega neutralni portfelj. To inače ne mora biti specificirano već to morate zaključiti sami na temelju određene vrste rizika od koje se financijska institucija želi zaštititi. Stoga je potrebno točno interpretirati koja se vrsta hedginga radi ovisno o zaštiti od rizika u odnosu na pojedine faktore čija promjena vrijednosti utječe na portfelj od interesa.

5. Pretpostavimo da analiziramo Black-Scholesov model za kretanje cijene dionice XYZ koja ne isplaćuje dividendu te da promatramo europsku put opciju izvršne cijene K, i trenutne cijene $S(0)=K$. Pretpostavimo nadalje da je omjer trenutne cijene europske put opcije na dionicu XYZ i same cijene dionice XYZ manji od 5% te da je delta opcije -0.364. Referentna nerizična kamatna stopa je 1.2%. Izračunajte volatilnost dionice XYZ.

6. Pretpostavimo da analiziramo Black-Scholesov model za kretanje cijene dionice XYZ te da promatramo određenu opciju na dionicu XYZ. Trenutna cijena dionice XYZ je veća od 80, cijena opcije na dionicu je 2.34, delta opcije je -0.81, a gamma opcije je 0.035. Poznato je da se cijene dionice XYZ promijeni na 86 u nekom vremenskom periodu te da se delta-gamma aproksimacijom cijena opcije promijeni na 2.21. Odredite trenutnu tržišnu cijenu dionice XYZ $S(0)$.

Napomena: Primijetite da u zadatku nije specificirano o kojoj se vrsti opcije radi, već se uz pretpostavku Black-Scholesovog modela to može zaključiti iz predznaka određenog „Grka“. U ovom zadatku je ključna riječ **promjena**, što vas asocira u prvom redu na derivaciju,a u drugom redu na činjenicu da u samom zadatku imate vrijednosti za deltu opcije (prva derivacija!) i gammu opcije (druga derivacija!), a formula koja povezuje prvu i drugu derivaciju funkcije sa (malom!) promjenom u vrijednosti nezavisne varijable je **Taylorova formula**.

Uputa: Iskoristite Taylorovu formulu i to za razvoj funkcije do uključujući druge potencije (jer imate informaciju do i uključujući drugu derivaciju):

$$V(S+\varepsilon) \approx V(S) + V'(S)\varepsilon + \frac{1}{2}V''(S)\varepsilon^2$$

pri čemu je ε promjena u nezavisnoj varijabli. Sada iskoristite činjenicu da je delta opcije prva derivacija vrijednosti opcije, a gamma opcije druga derivacija. Potrebno je riješiti ovu kvadratnu *jednadžbu* (aprokismacija jednadžbe, jer imamo promjenu pri delta-gamma aproksimaciji cijene opcije) po ε budući da ne znate trenutnnu cijenu dionice XYZ, ali znate dionice XYZ nakon promjene u cijeni. $V(S)$ je oznaka za cijenu opcije (ovisna o cijeni S).

Rješenja:

1. $P^E = 0.031648,\ (x,y,z) = (-17765,3391469,-50000),\ P^E(1/365) = 0.038885,$

V=-357.2138.3

2. Prema call-put jednakosti:

$N(d_1) - 1 = -N(-d_1)$ (zadnja jednakost slijedi prema svojstvu funkcije distribucije normalne slučajne varijable)

$$gamma_P = gamma_C$$
$$theta_P = -\frac{S\sigma}{2\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{d_1^2}{2}} + rXe^{-rT} N(-d_2)$$
$$vega_P = vega_C$$
$$rho_P = -TXe^{-rT} N(-d_2)$$

3. Označimo sa *d* udio u call opciji na dionicu s dospijećem 60 dana i izvršnom cijenom 65, cijene $\hat{C}_E$;

(*x*,*y*,-1000,*d*) udio pojedine imovine u portfelju.

V(0)= $xS + y - 1000C_E + d\hat{C}_E = 0$ (1)

Konstrukcija delta-portfelja: $x + z\frac{\partial C_E}{\partial S} + d\frac{\partial \hat{C}_E}{\partial S} = 0$ (2)

Konstrukcija gamma-portfelja: $z\frac{\partial^2 C_E}{\partial S^2} + d\frac{\partial^2 \hat{C}_E}{\partial S^2} = 0$ (3)

C_E= 4.14452 , $\hat{C}_E$ =1.37826, e $\frac{\partial \hat{C}_E}{\partial S} = N(\hat{d}_1) = 0.31237$

$\frac{\partial^2 C_E}{\partial S^2} = 0.043688,\ \frac{\partial^2 \hat{C}_E}{\partial S^2} = 0.0485$

Rješenje jednadžbi (1), (2) i (3): *d*=900.76, *x*= 300.58, a *y* = -15131.77

4. Jednadžbe (1) i (2) kao u prethodnom zadatku.

$vega = \frac{\partial V}{\partial \sigma} = z\frac{\partial C_E}{\partial \sigma} + d\frac{\partial C_E}{\partial \sigma} = 0$ (3)

pri čemu su $\frac{\partial C_E}{\partial \sigma}, \frac{\partial C_E}{\partial \sigma}$ vege odgovarajućih opcija.

Kako je $vega_{C_E} = \frac{S\sqrt{T}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}}$ tada slijedi $vega_{C_E} = 11.634305$, a $vega_{\hat{C}_E} = 8.61068$

Rješenje jednadžbi (1), (2) i (3) uz z = -1000: d= -1351.15, y = -7311.12, x = 159.89.

5. $deltaP_E = -0.364$

Iz *deltaP*= $N(d_1) - 1 = -N(-d_1) = -0.364$ i definicije od d_1 slijedi:

$N\left(-\frac{0.012 + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma} \right) = 0.364$, odnosno $-\frac{0.012 + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma} = N^{-1}(0.364) = 0.34779$, odnosno

$\sigma_1 = 0.65916, \sigma_2 = 0.03641$.

Zbog uvjeta zadatka da je omjer trenutne cijene europske put opcije na dionicu XYZ i same cijene dionice XYZ manji od 5%, slijedi da je rješenje $\sigma_2 = 0.03641 = 3.64\%$

6. Uz supstituciju $\varepsilon = 86 - S(0)$ slijedi da je rješenje odgovarajuće jednadžbe (aproksimacija jednadžbe) $\varepsilon_1 = 0.16105$ i $\varepsilon_2 = 46.12$.

Iz uvjeta S(0) >80 slijedi S(0)=85.83895.

ZADACI ZA VJEŽBU

1. BLACK-SCHOLESOV model

- inv. banka izdaje 50 000 PUT opcija

$T = 90$ dana

$X = 1.8$

$S(0) = 1.82$

$\sigma = 14\%$

$r = 5\%$

a) konstruiraj portfelj neutralni

b) cijena konstruiranog portfelja da u slj. danu r padne na 3%

a) $\underbrace{P^E = C^E - S(0) + Ke^{-rT}}$

$\rightarrow C^E = S_0 N(d_1) - X e^{-rT} N(d_2)$

- $d_1 = 0.371 \Rightarrow N(d_1) = 0.6447$
- $d_2 = 0.3015 \Rightarrow N(d_2) = 0.6185$

$C^E = 1.82 \cdot 0.6447 - 1.8 \cdot e^{-0.05 \cdot \frac{90}{365}} \cdot 0.6185 = 0.0737$

$\underbrace{P^E = 0.031648}$

$\rightarrow V(0) = X \cdot S(0) + y \cdot A(0) - 50\,000 \cdot P^E(S(0))$

$\frac{dV}{dS} = X - 50000 \frac{dP^E}{dS} = 0 \quad ; \quad \underbrace{\frac{dP^E}{dS} = (N(d_1) - 1)}$

$X = 50\,000 \cdot (0.6447 - 1) = -17765$

$\rightarrow V(S) = X \cdot S + y \cdot A + z \cdot P^E = 0$

$-17765 \cdot 1.82 + y - 50\,000 \cdot 0.031648 = 0$

$y = 33914.7$

$\boxed{(X, y, z) = (-17765, 33914.7, -50\,000)}$

b) za 1. dan

$r = 3\%$

$p^E = c^E - S(0) + Ke^{-r\frac{89}{365}}$

$\boxed{p^E = 0.038885}$

NOVI c^E

3%

$c^E = S_0 N(d_1) - Xe^{-r\frac{89}{365}} N(d_2)$

$d_1 = 0.301448 \quad N(d_1) = 0.6217$

$d_2 = 0.23203 \quad N(d_2) = 0.5910$

$c^E = 0.07545$

$V\left(\frac{1}{365}\right) = -17765 \cdot 1.82 + 33914.7 \cdot 1 \cdot e^{0.05 \cdot \frac{1}{365}} - 50\,000 \cdot 0.03885$

$\underbrace{V\left(\frac{1}{365}\right) = -357.204}$

③ BLACK-SCHOLESOV model

→ inv. banka izdaje 1000 CALL OPCIJA $= z$

$T = 90$ dana + call opcija $= \hat{T} = 60$ dana
$X = 60$ (d) $\hat{X} = 65$
$S(0) = 60$
$\sigma = 30\%$ $V(0) = 0$ (poč. vrijednost portfelja)
$r = 8\%$

odredi udjele (x, y, z, d) u cilju delta-gamma neutralnog portfelja u $t=0$

→ $V(s) = x \cdot S + y \cdot A + z \cdot c^E + d \cdot \hat{c}^E = 0 \quad (1)$

delta portfelj: $\frac{\partial V}{\partial S} = x + z\frac{dc^E}{dS} + d\frac{d\hat{c}^E}{dS} = 0 \quad (2)$

gamma portfelj: $\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = z\frac{d^2 c^E}{dS^2} + d\frac{d^2 \hat{c}^E}{dS^2} = 0 \; (*) \quad (3)$

$\underline{c^E = 4.14452}$ $\frac{\partial c^E}{\partial S} = N(d_1) = \underline{0.581957}$ $\frac{\partial^2 c^E}{\partial S^2} = \underline{0.04369}$

- $d_1 = 0.2069 \quad N(d_1) = \ldots$
- $d_2 = 0.0579 \quad N(d_2) = \ldots$

$\hat{c}^E = \underline{1.37826}$ $\frac{\partial \hat{c}^E}{\partial S} = N(d_1) = \underline{0.312373}$ $\frac{\partial \hat{c}^E}{\partial S^2} = \underline{0.043502}$

- $\hat{d}_1 = \ldots \quad \hat{N}(d_1) = \ldots$
- $\hat{d}_2 = \ldots \quad \hat{N}(d_2) = \ldots$

$x - 1000 \cdot 0.581957 + d \cdot 0.312373 = 0$

$-1000 \cdot 0.04369 + d \cdot 0.043502 = 0 \Rightarrow \boxed{d = 900.76}$

$\boxed{x = 300.58}$