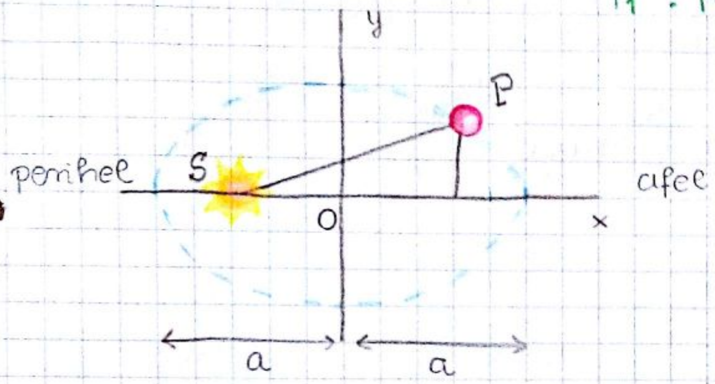
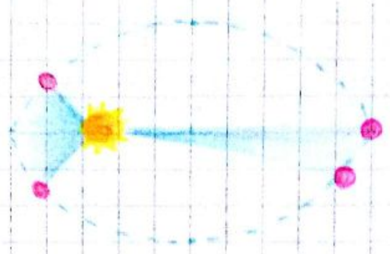
1. KEPLEROVI ZAKONI:

1. Planeti se oko Sunca gibaju po elipsama u čijem se jednom žarištu nalazi Sunce.
2. Radijusvektor planeta (vektor od središta Sunca do središta planeta) u jednakim vremenskim intervalima prebrisuje jednake površine.
3. Kvadrati ophodnih vremena planeta oko Sunca odnose se kao kubovi velikih poluosi eliptičnih putanja.

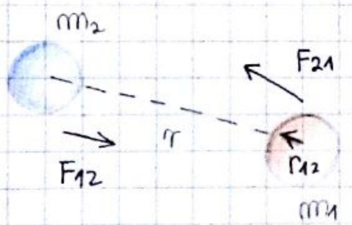
$$T_1^2 : T_2^2 = a_1^3 : a_2^3$$





NEWTONOV OPĆI ZAKON GRAVITACIJE:

$$F_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad ; \quad G = 6{,}673 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$$

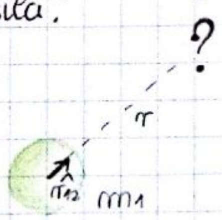


$$\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}_{12}$$

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

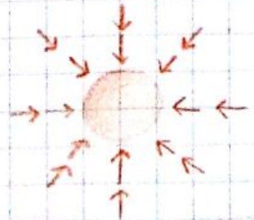
2. GRAVITACIJSKO POLJE - prostor u kojem se osjeća gravitacijsko djelovanje

Jakost gravitacijskog polja tijela mase m_1 definiramo kao omjer gravitacijske sile i mase tijela na koje djeluje ta sila.



$$\vec{\gamma} = \frac{\vec{F}_{12}}{m_2} = -G \frac{m_1 m_2 \hat{r}_{12}}{m_2 r^2} = -G \frac{m_1}{r^2} \cdot \hat{r}_{12}$$

gravitacijsko polje mase m_1



* gravitacijsko polje je vektorski zbroj pojedinih polja

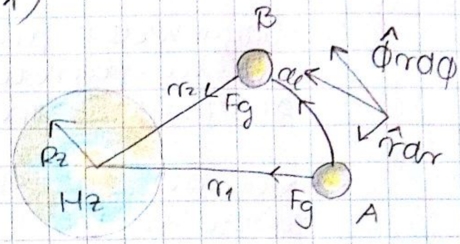
Scanned by CamScanner

Gravitacijska potencijalna energija

$$W_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot \vec{dl} = \int_{r_1}^{r_2} -G \frac{Mm}{r^2} \hat{r} \left(\hat{r}\, dr + \hat{\phi}\, r\, d\phi \right)$$

$$W_{12} = -GMm \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = GMm \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

$$W_{12} = -\Delta E_p = GMm \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$



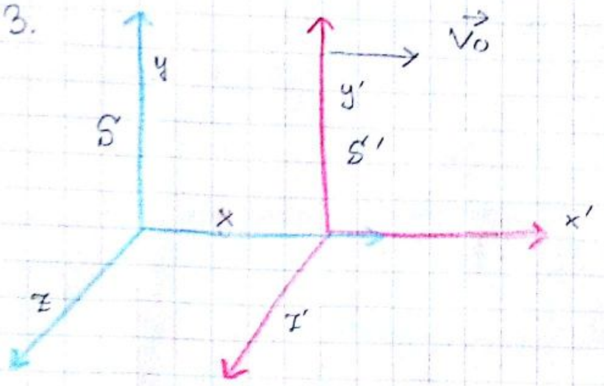
$$E_{p2} - E_{p1} = - \left(\frac{GMm}{r_2} - \frac{GMm}{r_1} \right)$$

$$E_p(r) = - \frac{GMm}{r}$$ GRAVITACIJSKA POTENCIJALNA ENERGIJA

GRAVITACIJSKI POTENCIJAL: $\varphi(r) = \dfrac{E_p(r)}{m} = - \dfrac{GM}{r}$

↳ omjer potencijalne energije i mase

3.



$x = x' + v_0 t$
$y = y'$
$z = z'$
$t = t'$

× Galilejeve transform. za dva inercijska sustava

→ deriviranjem dobijemo

$v_x = v_x' + v_0$
$v_y = v_y'$
$v_z = v_z'$

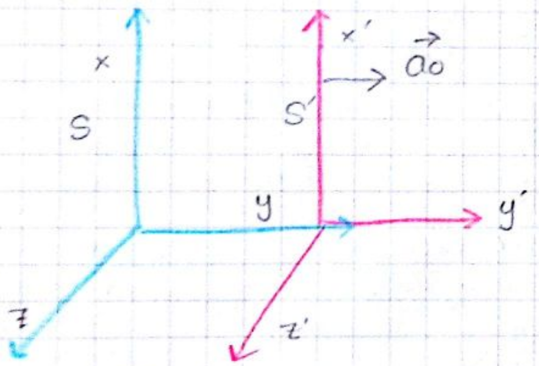
→ deriviranjem dobijemo

$a_x = a_x'$
$a_y = a_y'$
$a_z = a_z'$

$m(a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) = \vec{F}$
$m(a_x' \hat{i} + a_y' \hat{j} + a_z' \hat{k}) = \vec{F}'$
$\vec{F} = \vec{F}'$

↳ invarijantnost II. N. Zakona na Galileieve transformacije

4. NEINERCIJSKI SUSTAVI



$x = x' + V_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2$
$y = y'$
$z = z'$
$t = t'$

→ deriviranjem dobijemo

$v_x = v_x' + v_0 + a_0 t$
$v_y = v_y'$
$v_z = v_z'$

→ deriviranjem dobijemo

$a_x = a_x' + a_0$
$a_y = a_y'$
$a_z = a_z'$

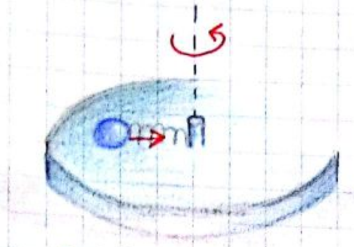
$m a_x' = F_x \underbrace{- m a_0}_{\vec{F_i}}$

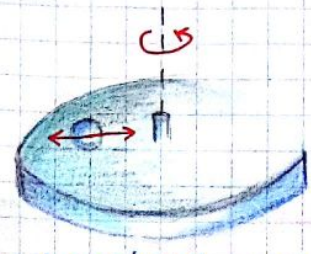
sustav S: $m\vec{a} = \vec{F}$

sustav S': $m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F_i}$

$\vec{F_i} = - m\vec{a_i}$ inercijska sila

5. CENTRIFUGALNA SILA





inercijski promatrač → CENTRIPETALNA SILA

$\vec{F}_{cp} = \vec{F}_{cp}$

$\vec{F}_{cp} = -\frac{mv^2}{r} \cdot \hat{r} = ma_{cp}$

$\vec{a}_{cp} = -\frac{v^2}{r}\hat{r} = -r\omega^2\hat{r}$

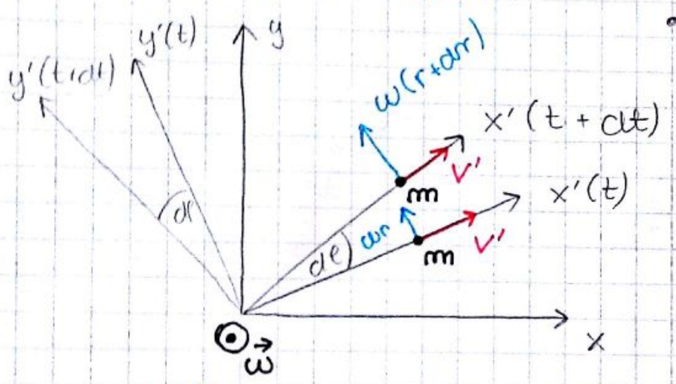
neinercijski promatrač → CENTRIFUGALNA SILA

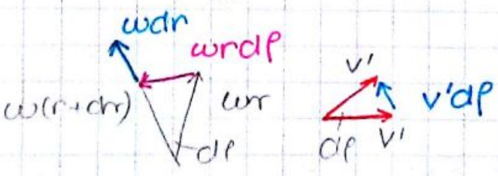
$\vec{F}_{cf} + \vec{F}_{cp} = 0$

$\vec{F}_{cf} = \frac{mv^2}{r}\hat{r} = m\vec{a}_{cf}$

$\vec{a}_{cf} = \frac{v^2}{r}\hat{r} = r\omega^2\hat{r}$

6. CORIOLISOVA SILA





- u sustavu S' masa m giba se jednoliko u radijalnom smjeru

$v' = \frac{dr}{dt}$

- u sustavu S masa m ima:
  radijalnu brzinu: $v' = dr/dt$
  tangencijalnu brzinu: $v = \omega r$

- radijalna akceleracija nastaje zbog radijalne komponente promjene brzine

$a_r = \frac{\omega r d\theta}{dt} = \omega^2 r \qquad a_r = -\omega^2\vec{r}$

- tangencijalna akceleracija nastaje zbog promjene radijalne brzine po smjeru i zbog promjene tangencijalne komponente brzine po iznosu

$a_t = \frac{v' d\theta}{dt} + \frac{\omega dr}{dt} = v'\omega + \omega v' = 2\omega v' \qquad a_t = -2\vec{v}\times\vec{\omega}$

u sustavu S: $\vec{F} = m\vec{a} = -m\omega^2\vec{r} - 2m\vec{v}'\times\vec{\omega}$

u sustavu S': $\vec{F}' = \vec{F} + \vec{F}_i = 0$

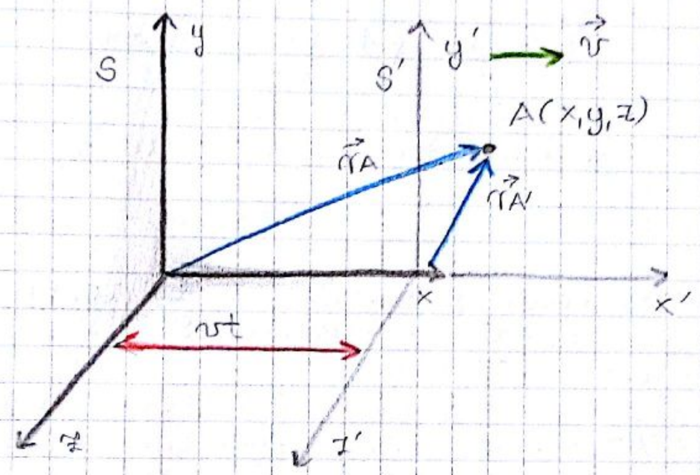
$\vec{F}_i = -\vec{F} = \underbrace{m\omega^2\vec{r}}_{F_{cp}} + \underbrace{2m\vec{v}\times\vec{\omega}}_{F_c}$

7. EINSTEINOVI POSTULATI SPECIJALNE TEORIJE RELATIVNOSTI

- Svi fizikalni zakoni imaju isti oblik u svim inercijskim sustavima. (sustavima koji se u odnosu jedan na drugog gibaju jednoliko)
- Brzina svjetlosti u vakuumu c jednaka je u svim inercijskim sustavima i ne ovisi o gibanju izvora ili promatrača.

LORENTZOVE TRANSFORMACIJE

1. trebaju prijeći u Galileeve transformacije za $v \ll c$
2. trebaju biti simetrične za $v \to -v$ jer su inercijalni sustavi ekvivalentni (ne može se utvrditi tko se giba a tko miruje)
3. trebaju biti linearne funkcije koordinata i vremena jer je prostor izotropan i homogen $x = \alpha x' + \beta t'$
4. trebaju dati zbrajanje brzina tako da brzina svjetlosti uvijek bude c



$$3) \Rightarrow x = ax' + bt' = a\left(x' + \frac{b}{a}t'\right)$$

$$x = \gamma(x' + vt')$$

$$2) \Rightarrow x' = \gamma(x - vt)$$

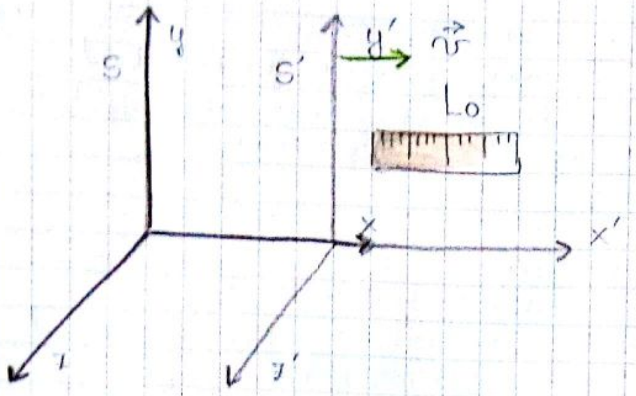
→ u početnom trenutku sustavi se poklapaju
→ svjetlosni signal poslan je duž osi x

$$x = c \cdot t = \gamma(x' + vt') = \gamma(ct' + vt') = \gamma t'(c + v)$$
$$x' = c \cdot t' = \gamma(x - vt) = \gamma(ct - vt) = \gamma t(c - v)$$

$$t' = \frac{\gamma t(c-v)}{c} \qquad ct = \gamma \cdot \frac{\gamma t(c-v)}{c}(c+v)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad t = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

8. KONTRAKCIJA DUŽINE



$L_0 = x_2' - x_1'$ VLASTITA DULJINA – duljina štapa u sustavu S' u kojem štap miruje

$L = x_2 - x_1$ duljina štapa u sustavu S

$x_1' = \gamma (x_1 - v t_1)$ $x_2' = \gamma (x_2 - v t_2)$

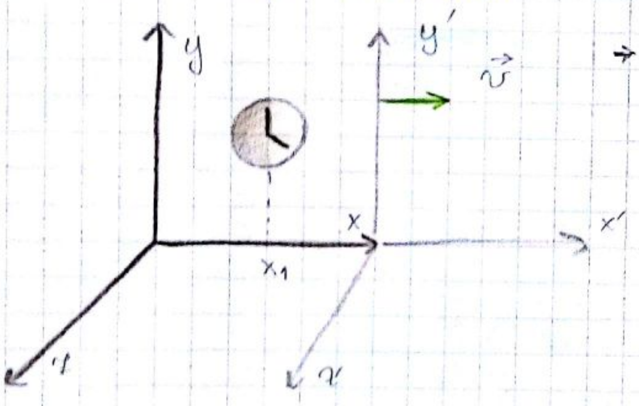
⇒ koordinate se mjere u istom trenutku $t_2 = t_1$

$$x_2 - x_1 = \gamma (x_2 - v t_2 - x_1 + v t_1) = \gamma (x_2 - x_1)$$

$L_0 = \gamma L$ $L = \frac{L_0}{\gamma} = L_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ $L < L_0$

↳ u sustavu S štap je kraći nego u sustavu S'

DILATACIJA VREMENA



→ Sat se nalazi u sustavu S u točki x_1

$\Delta t_0 = t_2 - t_1$ u sustavu S

↑

vlastito vrijeme – vremenski interval između dva događaja koje mjeri promatrač koji vidi oba događaja na istom mjestu

$\Delta t' = t_2' - t_1'$

↑

vrijeme u sustavu S' koji se giba u odnosu na sat

$$t_1' = \frac{t_1 - \frac{v x_1}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t_2' = \frac{t_2 - \frac{v x_1}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

vrijeme ide sporije u sustavu koji se giba u odnosu na mirni sat

9. RELATIVISTIČKA DINAMIKA

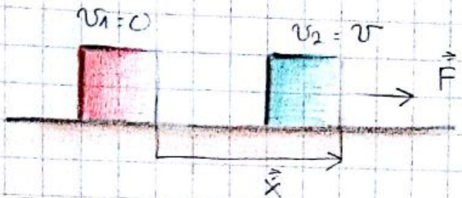
Einstein: Svi fizikalni zakoni imaju isti oblik u svim inercijskim sustavima.

Za relativističku količinu gibanja treba vrijediti:

1. zakon očuvanja količine gibanja
2. za $v \ll c$ treba dobiti klasični izraz za količinu gibanja

$\vec{p} = \gamma m \vec{v}$ $\quad \vec{p} = \dfrac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ relativistička količina gibanja

$\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt} = \dfrac{d}{dt} \dfrac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ relativistička jedn. gibanja je invarijantna prema Lorentzovim transformacijama



TEOREM O RADU I ENERGIJI

$W_{12} = \Delta E_k \qquad \int_{x_1}^{x_2} F dx = \frac{1}{2} m v^2$ $\qquad \boxed{d(vp) = dv \cdot p + dp\, v}$

$$W = \int_1^2 F dx = \int_1^2 \frac{dp}{dt} dx = \int_1^2 \frac{dp}{dt} v\, dt = \int_1^2 v\, dp$$

$$= \int_0^v d(vp) - \int_0^v p\, dv = \gamma m v^2 - \int_0^v \frac{mv\, dv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

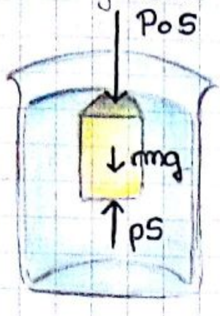
$$= \gamma m c^2 - mc^2 = E_k$$

$\gamma mc^2 = mc^2 + E_k \qquad E_0 = mc^2$, energija mirovanja

$E = E_0 + E_k$

Scanned by CamScanner

10. **HIDROSTATSKI TLAK** - tlak uzrokovan težinom samog fluida (zbog sile teže koja djeluje na sve čestice)



$$\sum_i \vec{F_i} = 0$$

$$pS - p_0 S - mg = 0$$

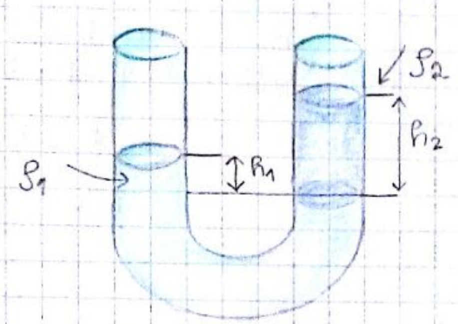
$$pS = p_0 S + mg \qquad m = \rho \cdot V$$

$$pS = p_0 S + \rho V g \qquad V = S \cdot h$$

$$pS = p_0 S + \rho \cdot S \cdot h \cdot g$$

$$p = p_0 + \rho g h \quad \leftarrow \text{tlak na dubini } h$$

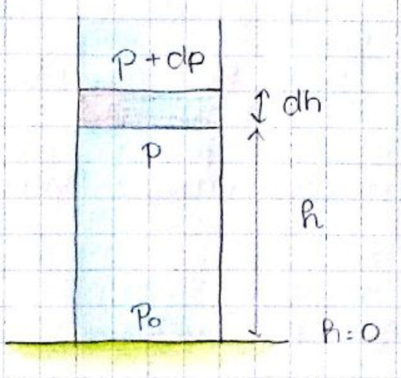
$$p_h = \rho g h \quad \leftarrow \text{hidrostatski tlak stupca fluida visine } h$$



$$p_0 + \rho_1 h_1 g = p_0 + \rho_2 h_2 g$$

$$\rho_2 = \rho_1 \cdot \frac{h_1}{h_2} \quad \leftarrow \text{određivanje nepoznate gustoće}$$

11. Atmosferski tlak se mijenja s visinom i pada po barometarskoj formuli



tlak na visini h: p
na $h + dh$: $p + dp$ → tlak pada s visinom pa je dp negativan
→ razlika nastaje zbog težine stupca zraka

$$dp = -\rho g dh$$

Zbog pretpostavke da je atmosfera izotermna, iz Boyle-Mariotteova zakona slijedi

$$\rho(h) = \frac{\rho_0}{p_0} p(h)$$

$$dp = -\frac{\rho_0}{p_0} p \cdot g \cdot dh$$

$$-\frac{p_0}{\rho_0 \cdot g} \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p} = \int_0^h dh$$

$$\frac{-p_0}{\rho_0 \cdot g} \ln \frac{p}{p_0} = h$$

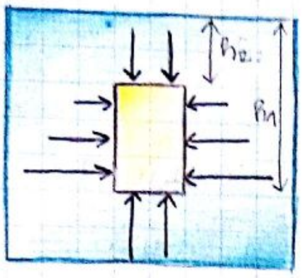
$$\ln \frac{p}{p_0} = h \cdot \frac{-\rho_0 \cdot g}{p_0} \quad / e^{()}$$

$$p = p_0 \cdot e^{-\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g \cdot h}$$

BAROMETARSKA FORMULA → $p = p_0 \cdot e^{\frac{h}{7990}}$

Scanned by CamScanner

12. **UZGON** → rezultantna sila koja se javlja kada je tijelo uronjeno u fluid kao posljedica hidrostatskog tlaka.



→ sile pritiska koje djeluju na bočne strane se poništavaju, iste su po iznosu ali suprotnog smjera na istoj horizontalnoj ravnini

na gornju bazu djeluje tlak: $p_2 = p_a + \rho g h_2 \Rightarrow F_2 = p_2 \cdot S$
na donju bazu djeluje tlak: $p_1 = p_a + \rho g h_1 \Rightarrow F_1 = p_1 \cdot S$

$$F_u = F_1 - F_2 = p_1 \cdot S - p_2 \cdot S = \rho g h_1 \cdot S - \rho g h_2 S = \rho g \cdot \underbrace{S(h_1 - h_2)}_{V}$$

$$F_u = \rho_f g V = m_f \cdot g$$

↑ masa istisnutog fluida
volumen uronjenog tijela

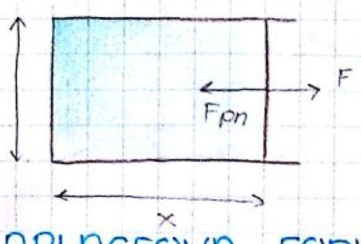
13. **POVRŠINSKA NAPETOST**

→ u unutrašnjosti tekućine molekula je sa svih strana okružena susjednim molekulama pa je rezultantna sila međudjelovanja jednaka nuli

→ na površini molekule nisu sa svih strana okružene jednakim brojem molekula → na molekule na površini djeluje rezultantna sila usmjerena prema unutrašnjosti → molekule na površini imaju veću potencijalnu energiju

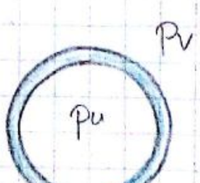
→ da bi bio ispunjen uvjet ravnoteže - minimum potencijalne energije → tekućina nastoji smanjiti slobodnu površinu i zato se javlja površinska napetost

koeficijent površinske napetosti: $\sigma = \frac{\Delta W}{\Delta S}$



$$\sigma = \frac{F \Delta x}{2l \Delta x} = \frac{F}{2l}$$

LAPLACEOVA FORMULA ZA TLAK ISPOD ZAKRIVLJENE POVRŠINE.



$\Delta p = p_u - p_v$

→ površinska napetost uravnoteži se sa silom zbog Δp

$dW = 2\sigma dS = 2\sigma d(4\pi r^2) = 2\sigma 8\pi r dr$

↑ mjehur ima dvije površine

$dW = \Delta p S dr = \Delta p 4\pi r^2 dr$

$2\sigma 8\pi r dr = \Delta p 4\pi r^2 dr$

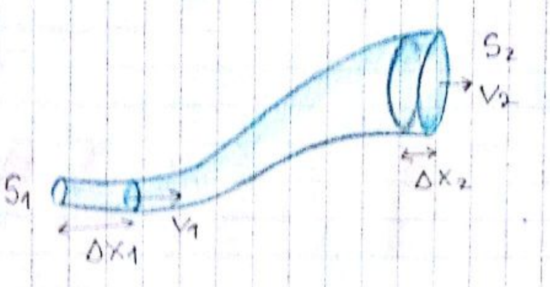
$\Delta p = \frac{4\sigma}{r}$ ← mjehur sapunice

$\Delta p = \frac{2\sigma}{r}$ ← mjehur zraka u tekućini ili kapljica tekućine

14 IDEALAN FLUID

- fluid je nestlačiv
- temperatura je stalna
- tok fluida je stacionaran (brzina fluida stalna u vremenu)
- tok fluida je laminaran - slojevit (nije turbulentan)
- fluid nije viskozan

JEDNADŽBA KONTINUITETA



$\Delta x_1 = v_1 \Delta t$ $\qquad$ $\Delta x_2 = v_2 \cdot \Delta t$

$m_1 = \rho \cdot \underbrace{S_1 \Delta x_1}_{V} = \rho \cdot S_1 \cdot v_1 \cdot \Delta t$ $\qquad$ $m_2 = \rho \cdot S_2 \cdot v_2 \cdot \Delta t$

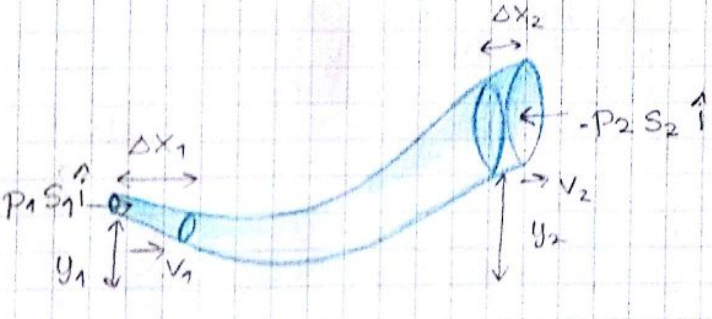
ZAKON OČUVANJA MASE: $m_1 = m_2$

$\Rightarrow S_1 v_1 = S_2 v_2$

maseni tok: $q_m = \rho S v = \text{konst.}$

volumni tok: $q_v = S v = \text{konst.}$

15 BERNOULIJEVA JEDNADŽBA



$W_1 = \vec{F}_1 \Delta \vec{x}_1 = p_1 S_1 \Delta x_1 = p_1 \Delta V_1$

$W_2 = \vec{F}_2 \Delta \vec{x}_2 = -p_2 S_2 \Delta x_2 = -p_2 \Delta V_2$

$\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$

$\Delta W = W_1 + W_2 = (p_1 - p_2) \Delta V$

$\Delta W = \Delta E_k + \Delta E_p$

VEĆA BRZINA → MANJI TLAK

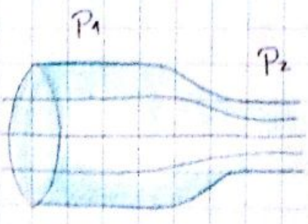
$\Delta E_k = \frac{1}{2} \Delta m v_2^2 - \frac{1}{2} \Delta m v_1^2$ $\qquad$ $\Delta E_p = \Delta m g y_2 - \Delta m g y_1$

$(p_1 - p_2) \Delta V = \frac{1}{2} \Delta m v_2^2 - \frac{1}{2} \Delta m v_1^2 + \Delta m g y_2 - \Delta m g y_1$ $\qquad$ $\Delta m = \rho \Delta V$

$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g y_2$

Primjene Bernoulijeve jednadžbe

- VENTAURIJEVA CIJEV → služi za mjerenje brzine i protoka fluida

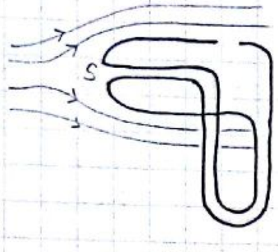


$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$ $\qquad$ $S_1 v_1 = S_2 v_2$

$p_1 + \frac{1}{2} \rho \cdot \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2 v_2^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$ $\qquad$ $v_1 = \frac{S_2}{S_1} v_2$

$v_2 = S_1 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho (S_1^2 - S_2^2)}}$

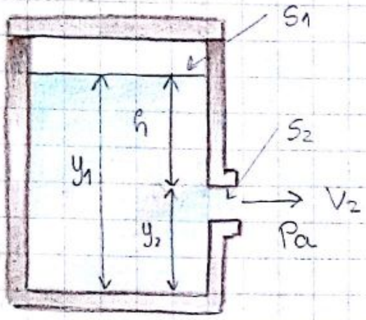
PITOT - PRANDLOTOVA CIJEV → mjerenjem dinamičkog tlaka određujemo brzinu strujanja plina



$$p_1 + \frac{1}{2}\rho_f v_1^2 = p_2$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}$$

TORICELLIJEV ZAKON ISTJECANJA



$S_1 v_1 = S_2 v_2$ $\quad S_2 \ll S_1 \Rightarrow v_1 \ll v_2 \Rightarrow v_1 \approx 0$

$$p + \rho g y_1 = p_a + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$$

$y_1 - y_2 = h$ ako je posuda otvorena $p = p_a$

$$v = \sqrt{2gh}$$

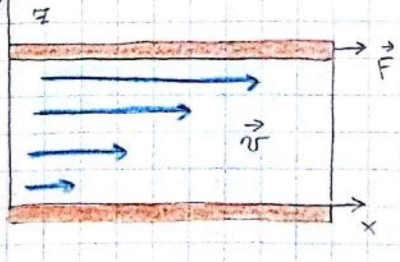
16. VISKOZNOST

- → pri protjecanju realnog fluida međumolekularne sile uzrokuju unutrašnje trenje ili viskoznost
- → viskoznost se očituje samo pri gibanju
- → gibanje fluida u slojevima nazivamo laminarno ili slojevito strujanje (slojevi se ne miješaju)
- → ako je brzina veća od kritične brzine, laminarno strujanje prelazi u turbulentno, slojevi se miješaju i nastaju vrtlozi

Sila unutrašnjeg trenja između dva susjedna sloja fluida, čija je površina S i koji su međusobno udaljeni dz

$$F_{tr} = \eta S \frac{dv}{dz}$$

η - koeficijent dinamičke viskoznosti ovisi o vrsti fluida i temperaturi



$S = 2r\pi L$

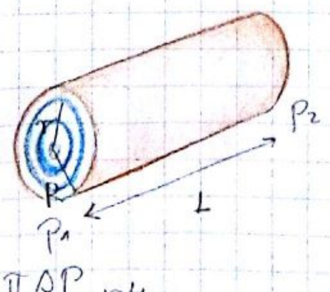
$F = \Delta p r^2 \pi$ $\quad F_\eta = -F$

↑ sila koja djeluje na sloj fluida polumjera r ← sila kojom taj sloj djeluje na susjedni

$$r^2\pi\Delta p = -\eta \cdot 2r\pi L \cdot \frac{dv}{dr}$$

$$\hookrightarrow dv = -\frac{\Delta p}{2\eta L} r\,dr \qquad v(R) = 0$$

$$v(r) = \frac{\Delta p}{2\eta L}(R^2 - r^2) \qquad v(r) = v_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$



$$dV = dS\,dl = 2r\pi\,dr\,dl = 2r\pi\,dr \cdot v(r) \cdot dt$$

$$dq_v = \frac{dV}{dt} = 2r\pi\,dr\,v(r) = \frac{\pi\Delta p}{2\eta L}(R^2 - r^2)\,r\,dr$$

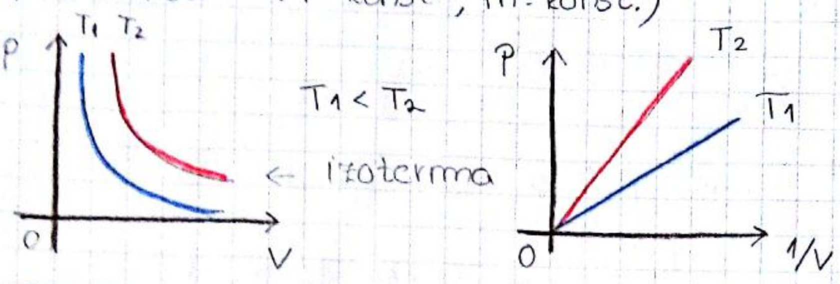
$$q_v = \int dq_v = \frac{\pi\Delta p}{2\eta L}\int_0^R (R^2 - r^2)\,r\,dr$$

$q_v = \frac{\pi\Delta p}{8\eta L}R^4$ $\quad q_v = S\bar{v} = R^2\pi\bar{v}$ $\quad F_\eta = 8\pi\eta L\bar{v}$

17 PLINSKI ZAKONI

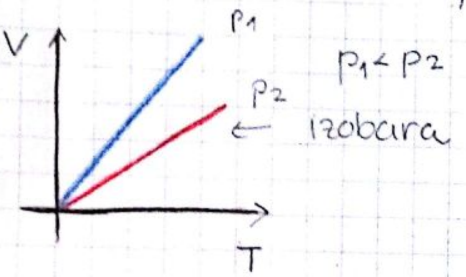
• **BOYLE-MARIOTTEOV ZAKON** (vrijedi za plin kod kojeg se mijenja tlak ili volumen plina uz stalnu temp.)

$p \cdot V = konst.$ $(T = konst \; ; \; m = konst.)$



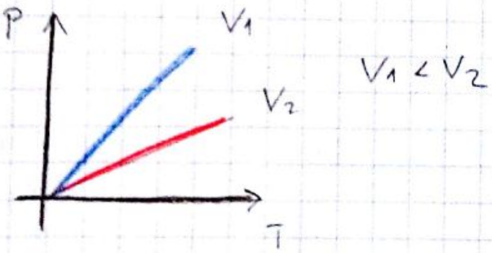
• **GAY-LUSSACOV ZAKON** (kada se plin zagrijava uz stalni tlak (izobarno) volumen mu se linearno povećava s temperaturom)

$\frac{V}{T} = konst.$ $(T = konst \; ; \; m = konst.)$



• **CHARLES - GAY - LUSSACOV ZAKON** (izohorne promjene stanja idealnog plina)

$\frac{p}{T} = konst.$ $(V = konst \, , \; m = konst)$



→ Stanje idealnog plina potpuno je određeno sa tri veličine: tlak, volumen, temperatura

⇒ Kako bismo iz plinskih zakona dobili jednadžbu stanja idealnog plina, prevodimo određenu količinu plina iz početnog stanja (standardni uvjeti) u konačno stanje, određeno sa p, V, T

JEDNADŽBA STANJA IDEALNOG PLINA

Standardni uvjeti: $p_0 = 101\,325$ Pa $\quad n = 1$ mol

$T_0 = 273{,}15$ K $\quad V_0 = 22{,}41$ L

Za $n = 1$ mol

izobarno: $\frac{V_0}{T_0} = \frac{V'}{T} \Rightarrow V' = \frac{V_0}{T_0} \cdot T$

izotermno: $p_0 V' = pV \Rightarrow p_0 \cdot \frac{V_0}{T_0} \cdot T = pV$

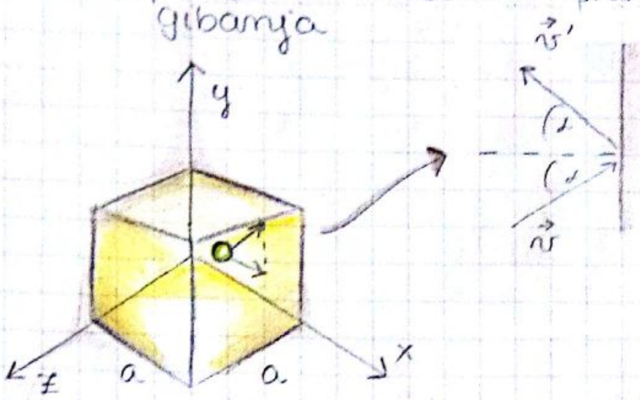
$\frac{pV}{T} = \frac{p_0 V_0}{T_0} \qquad \frac{p_0 V_0}{T_0} = R = 8{,}314$ J/molK

Za n molova:

$pV = nRT$ ← jednadžba idealnog plina

18. TLAK IDEALNOG PLINA

→ uzrokuje ga neprekidno udaranje molekula u stijenku posude pri čemu molekule predaju stijenki određenu količinu gibanja



Tlak plina je omjer sile kojom molekule djeluju na stijenku i površine te stijenke

- prilikom sudara promijeni se x komponenta količine gibanja, jednaka je impulsu sile koju primi stijenka

$$\Delta p_x = 2 m_m v_{xi}$$

- molekuli je potrebno da stigne od jednog kraja do drugog, u oba smjera

$$\frac{2a}{v_{xi}}$$ ← broj sudara u jedinici vremena

- ukupni impuls koji molekula prenese na stijenku posude

$$\frac{(v_{xi})}{2a}(2 m_m v_{xi})\Delta t = \frac{m_m v_{xi}^2}{a}\Delta t$$

- srednja sila kojom molekula djeluje na stijenku posude

$$F_{xi} = \frac{m_m v_{xi}^2}{a}$$

- u posudi se nalazi N molekula pa je ukupna sila

$$F_x = \frac{m_m}{a}\sum_{i=1}^{N} v_{xi}^2$$

$$p = \frac{F_x}{a^2} = \frac{m_m \sum v_{xi}^2}{V}$$

- srednji kvadrat x komponenti brzine $\overline{v_x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} v_{xi}^2$
- molekule se gibaju u svim smjerovima

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{1}{3}\overline{v^2}$$

$$p = \frac{m_m \cdot N \cdot \overline{v_x^2}}{V} = \frac{m_m \cdot N \cdot \overline{v^2}}{3V} = \frac{2N}{3V}\overline{E_k}$$

$$pV = \frac{2N}{3}\overline{E_k}$$

19. MOLARNI TOPLINSKI KAPACITETI PLINOVA

JEDNOATOMNI PLIN: $C_V = \frac{3}{2}R$ $C_p = \frac{5}{2}R$ $K_1 = \frac{5}{3}$

DVOATOMNI PLIN: $C_V = \frac{5}{2}R$ $C_p = \frac{7}{2}R$ $K_1 = \frac{7}{5}$

TROATOMNI PLIN: $C_V = 3R$ $C_p = 4R$ $K_1 = \frac{4}{3}$

$$C_p = \frac{1}{m}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p \qquad C_V = \frac{1}{m}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$$

$$C_p - C_V = R$$

$$U = \frac{i}{2} N k_B T \qquad N k_B = mR$$

$$C_V = \frac{i}{2} R \qquad C_p = \left(1 + \frac{i}{2}\right) R$$

$$K = \frac{C_p}{C_V} \qquad K = 1 + \frac{2}{i}$$

MOLARNI TOPLINSKI KAPACITETI KRUTIH TIJELA

$E_k = \frac{1}{2}(V_x^2 + V_y^2 + V_z^2)$ 3 stupnja slobode

$E_p = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2)$ 3 stupnja slobode

za jednu česticu:

$$U = \frac{6}{2} N k_B T$$

za N čestica

$$U = 3 N k_B T = 3mRT$$

$$C = \frac{\partial U}{\partial T} = 3R$$

20. PRVI ZAKON TERMODINAMIKE

→ posljedica zakona o očuvanju energije
→ u izoliranom sistemu ukupna energija ostaje konstantna bez obzira na procese koji se događaju u sistemu

$$\Delta U = \Delta Q - \Delta W$$

* Q, W funkcije procesa
U funkcija stanja

$\Delta Q > 0$ toplina ulazi u sustav
$\Delta Q < 0$ toplina izlazi iz sustava
$\Delta W > 0$ plin vrši rad (ekspanzija)
$\Delta W < 0$ okolina vrši rad nad plinom

- izovolumni proces → sva dobivena toplina pretvara se u unutrašnju energiju $\Delta Q = \Delta U$
- izotermni proces → nema promjene unutrašnje energije, sva dovedena toplina pretvara se u mehanički rad
- adijabatski proces ($\Delta Q = 0$) → rad se obavlja na račun promjene unutrašnje energije
- kružni proces (vraćamo se u istu točku $\Delta U = 0$) → toplina koja se dovede jednaka je radu kojeg izvrši sistem

MAYEROVA RELACIJA

$dU = d'Q - d'W \qquad dU = d'Q - pdV$

izohorni proces: $pdV = 0 \qquad dU = d'Q = mC_v dT$
izobarni proces: $d'Q = mC_p dV$
opća plinska jednadžba: $pV = mRT \qquad pdV = mRdT$

$mC_v dT = mC_p dT - mRdT \qquad C_p - C_v = R$ Mayerova relacija

$K = \frac{C_p}{C_v} = \frac{c_p}{c_v} > 1$ adijabatska konstanta idealnog plina

21. JEDNADŽBA ADIJABATE

(za razliku od izotermnog procesa mijenja se temperatura, ali nema izmjene topline s okolinom)

adijabatski proces: $d'Q = 0 \qquad dU = -dW = -pdV$
izohorni proces: $pdV = 0 \qquad d'Q = dU = mC_v dT$

$mC_v dT = -pdV$
opća plinska jednadžba: $pV = mRT \qquad pdV + Vdp = mRdT$

$pdV + Vdp = -\frac{R}{C_v} pdV \qquad C_p - C_v = R$

$\frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = -\frac{C_p - C_v}{C_v} \frac{dV}{V} \qquad \frac{C_p}{C_v} = K$

$\frac{dp}{p} = -K \frac{dU}{V}$

$\ln p_2 - \ln p_1 = -K \ln V_2 + K \ln V_1$

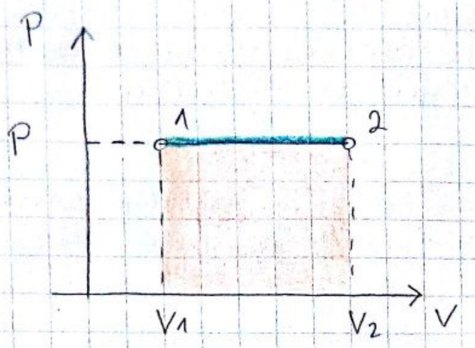
$\frac{p_2}{p_1} = -K \left(\frac{V_1}{V_2} \right)$

pV = izoterma
pV^K = adijabata
adijabate su strmije, $K > 1$

$pV^K = \text{konst.} \qquad p^{1-K} T^K = \text{konst.} \qquad TV^{K-1} = \text{konst}$

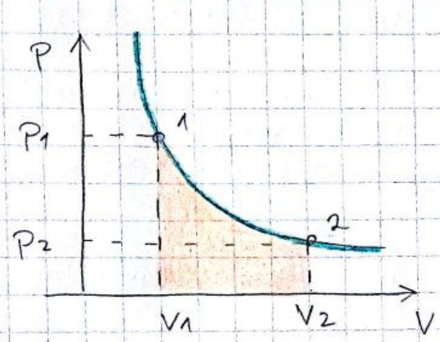
Poissonove jednadžbe.

22. RAD U IZOBARNOJ PROMJENI



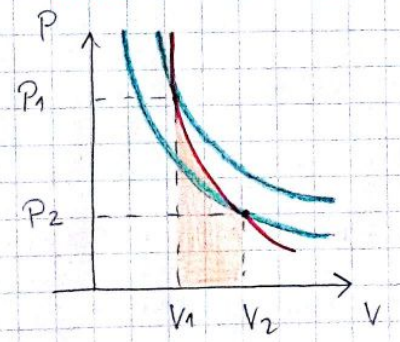
$$W_{izob} = \int_1^2 p\,dV = p\int_1^2 dV$$
$$= p\,(V_2 - V_1)$$

RAD U IZOTERMNOJ PROMJENI



$$W_{izot} = \int_1^2 p\,dV = \int_1^2 \frac{mRT}{V}\,dV$$
$$= mRT \cdot \int_1^2 \frac{1}{V}\,dV$$
$$= mRT\,(\ln V_2 - \ln V_1)$$
$$= mRT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

RAD U ADIJABATSKOJ PROMJENI



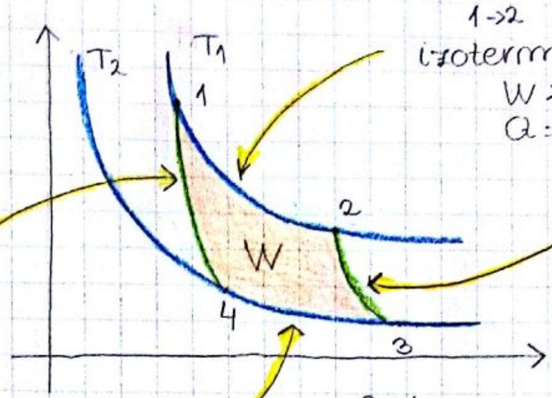
$$W_{adij} = \int_1^2 p\,dV = \int_1^2 \frac{mRT}{V}\,dV$$

$$TV^{k-1} = konst$$
$$dT\,V^{k} + T(k-1)\,V^{k-2}\,dV = 0$$
$$\frac{dT}{T} = (1-k)\,\frac{dV}{V}$$

$$W_{adij} = \frac{mR}{1-k}\int_1^2 dT = \frac{mR}{1-k}\,(T_2 - T_1)$$

CARNOTOV KRUŽNI PROCES

→ sistem s idealnim plinom se nakon dva izotermna i dva adijabatska procesa vraća u početno stanje, te tako dovedenu toplinu djelomično pretvara u mehanički rad



$1 \to 2$
izotermna ekspanzija (idealni plin prima toplinu Q_1 iz grijača stalne temperature T_1 čim se i obavlja W)
$W > 0$
$Q : Q_1 > 0$

$2 \to 3$
adijabatska ekspanzija
$Q = 0$
$W > 0$
(sistem je izoliran nema razmjene topline, čim se i hladi do temp T_2)

$3 \to 4$
izotermna kompresija
$Q = Q_2 < 0$
$W < 0$
(plin se pri stalnoj temperaturi T_2 izotermno sabije, pri čemu se ulaže vanjski rad, Q_2 se odvodi iz sistema u hladnjak)

$4 \to 1$
adijabatska kompresija
$Q = 0$
$W < 0$
(plin se vraća u početno stanje, okolina obavlja rad)

$1 \to 2$

$dU = 0 \Rightarrow Q_1 = W_{12}$

$W_{12} = mRT_1 \frac{V_2}{V_1}$

$2 \to 3$

$d'Q = 0$

$W_{23} = \frac{mR}{k-1}(T_1 - T_2)$

$3 \to 4$

$W_{34} = mRT_2 \frac{V_4}{V_3}$

$4 \to 1$

$W_{41} = \frac{mR}{k-1}(T_2 - T_1)$

$$W = \sum_i W_i = mRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} + mRT_2 \ln \frac{V_4}{V_3}$$

$$= Q_1 + Q = |Q_1| - |Q_2|$$

$$\left.\begin{matrix} T_1 V_2^{k-1} = T_2 V_3^{k-1} \\ T_1 V_1^{k-1} = T_2 V_4^{k-1} \end{matrix}\right\} \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$$

$$\eta = \frac{\text{dobijeno}}{\text{uloženo}} = \frac{W}{Q_1} = \frac{|Q_1| - |Q_2|}{Q_1}$$

$$\eta = \frac{mR(T_1 - T_2)\ln(V_2 - V_1)}{mRT_1 \ln(V_2 - V_1)}$$

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$