VIS - P. 5.3.13.

Tomislav Burić → tomislav.buric@fer.hr 12.30 - 13.30

1. MI - 40 1. ciklus
2. MI - 40 2. ciklus (bez 1. ciklusa)

3 provjere po 10 bodova - broji se 2 najbolje

prolaz - 45 bodova (samo 3/4 studenata, ako 150 ne prođe)

Literatura:

1. Diskretna vjerojatnost
2. Slučajne varijable
3. Matem. statistika

- diskretna vjerojatnost
- kontinuirana vjerojatnost
- statističke metode - kod plasiranja proizvoda

- Vjerojatnost - definirana polovicom 20 stoljeća u Rusiji
  - nastala u 17. stoljeću procvatom kockarske industrije
  - broj povoljnih / broj ukupnih ishoda → Pascal i Fermat

↓

ne vrijedi ako svi ishodi nisu jednako vjerojatni

1. Vjerojatnost

1.1. Algebra događaja

- slučajni pokus je svaki pokus kojem unaprijed ne znamo ishod

- elementarni događaj je ishod pokusa, oznaka $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$

- skup svih elementarnih događaja $\rightarrow \Omega$

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$$

$|\Omega|$ = kardinalni broj skupa ili broj

$\emptyset$ = prazan skup ili nemogući događaj

događaj = podskup od Ω $\rightarrow$ sastoji se od elementarnih događaja

= označavaju se velikim slovima A, B, C

1 ZZV-3) Bacamo 2 kocke. Opišite prostor elementarnih događaja

$\downarrow$ sluč. pokus

$$\omega_1 = 11, \ \omega_{12} = 12, \ \omega_{13} = 13, \ \dots, \ \omega_{36} = 66$$

$$\Omega = \{11, 12, 13, \dots, 66\}$$

$$|\Omega| = 36$$

$A = \{$ oba broja manja od $3\} = \{11, 12, 21, 22\}$

$B = \{$ zbroj je manji od $5\} = \{11, 12, 13, 21, 22, 31\}$

Unija $A \cup B$ ili $A + B$

Unija 2 događaja $\rightarrow A + B = \{11, 12, 21, 22, 13, 31\}$ $\rightarrow$ u ovom slučaju $A \subset B$

presjek $A \cap B$ ili, $A \cdot B$ $\rightarrow$ dogodio se i događaj A i događaj B

$$A \cdot B = \{11, 12, 21, 22\}$$

razlika $B \setminus A$, $B - A = \{13, 31\}$ $\rightarrow$ dogodio se B a nije se dogodio A

komplement $\bar{B}$, B^c ili suprotni događaj, tj sve što nije B

$$\bar{B} = \Omega \setminus B = \{14, 41, \dots\}$$

$$\bar{\bar{A}} = A$$

$$A \setminus B = A \cap \bar{B}$$

DeMorganova pravila

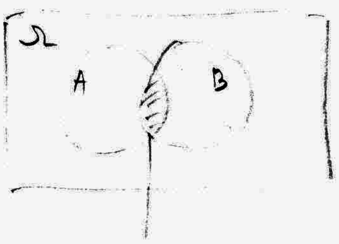
1.) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

2.) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

dokaz

1. $\omega \in \overline{A \cup B} \Rightarrow \omega \notin A \cup B \Rightarrow \omega \notin A$ i $\omega \notin B \Rightarrow \bar{A}$ i $\bar{B} \Rightarrow \bar{A} \cap \bar{B}$

Vennovi dijagrami



$A \cap B$ $A \cup B$

$\overline{A \cup B}$

$\bar{A} \cap \bar{B}$

- Algebra događaja je familija $\mathcal{F}$ podskupova od Ω na kojoj su definirane binarna operacija zbrajanja $+$ i unarna operacija komplementa sa slijedećim svojstvima:

i) $\Omega \in \mathcal{F}$, $\phi \in \mathcal{F}$ $\qquad \bar{\Omega} = \phi$

ii) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$

iii) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A + B \in \mathcal{F}$

Iz (ii) i (iii) $\Rightarrow \overline{A+B} \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \cdot \bar{B} \in \mathcal{F}$

1.2. Vjerojatnost

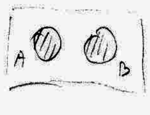
Vjerojatnost je preslikavanje $P: \mathcal{F} \to [0, 1]$ definirana na algebri događaja $\mathcal{F}$, koje ima svojstva:

1.) $P(\Omega) = 1$, $P(\phi) = 0$ — normiranost

2.) Ako je $A \subset B \Rightarrow P(A) \le P(B)$ — monotonost

3.) Ako su A i B disjunktni $(A \cap B = \phi)$ — aditivnost

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$



vjerojatnost komplementa:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

dokaz:

jer su A i $\bar{A}$ disjunktni

$$P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) \overset{3.}{=} P(A) + P(\bar{A}) = 1 \quad \text{jer je } P(\Omega) = 1$$

$$\Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

vjerojatnost unije:

$P(A \cup B)$, ako A i B nisu disjunktni

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Sylvesterova form. → unija 3 događaja

1.DZ-2)

$P(A \cup B) = 0.8$

$P(AB) = 0.2$

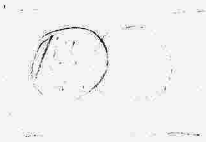
$P(\bar{A}) = 0.6$

Izračunaj $P(B)$, $P(\bar{A}\bar{B})$, $P(A\bar{B})$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \Rightarrow 0.8 = 0.4 + P(B) - 0.2$

$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 0.4$ $\qquad P(B) = 0.6$

$A\bar{B}$



$P(\bar{A}\bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 0.2$

$P(A\bar{B}) = P(A \setminus B) = P(A) - P(AB) = 0.2$

1.3. Konačni vjerojatnosni prostor

DEF: Vjerojatnosni prostor Ω koji posjeduje konačno mnogo ishoda nazivamo KVP.

$$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\} \rightarrow P(\omega_1) = p_1, \dots, P(\omega_n) = p_n$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$ ← slijedi iz aditivnosti i normiranosti

D'Alambertov problem

- bacao 2 novčića

$\omega_1 = \{2P\}$

$\omega_2 = \{2G\}$ $\qquad P(\omega_i) = \frac{1}{3}$

$\omega_3 = \{P, G\}$ → $\omega_3 = \{PG\}$, $\omega_4 = \{GP\}$

→ pogrešno je modeliran vjerojatnosni prostor

$P(1P \cdot 1G) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

vj. svakog ishoda je jednaka

$\Rightarrow$ svi elementarni događaji su jednako vjerojatni

$$p_1 = p_2 = \dots = p_n$$

$$\Rightarrow \sum p_i = n \cdot p = 1 \quad \Rightarrow p = \frac{1}{n}$$

Tada je vjerojatnost događaja

$$A = \{ \omega_{i1}, \dots, \omega_{im} \}$$

$$P(A) = m \cdot p = \frac{m}{n} = \frac{\text{broj povoljnih ishoda}}{\text{uk. broj ishoda}}$$

KLASIČNA DEF. VJEROJATNOSTI

vrijedi jedino ako su svi događaji jednako vjerojatni

1. DZ-4)

Bacamo 2 kocke. Izračunajte vjerojatnost da su

(a) 2 ista broja
(b) zbroj 8
(c) barem jedna 4
(d) broj djeljiv s 2 ili s 3

(a) $P(A) = \frac{6}{36}$

(b) $P(B) = \frac{5}{36}$ (35, 53, 26, 26, 44)

(c) $P(C) = \frac{11}{36}$ (41, 42, ..., 46
14, 24, 34, 44, 54, 64)

(d) $P(D) = \frac{32}{36}$ $\rightarrow$ suprotno 11, 15, 51, 55

$$1 - \frac{4}{36} = \frac{32}{36}$$

VIS - P. 7.3.13.

KOMBINATORIKA

produktno pravilo $\rightarrow$ podijelimo posao na vjerojatnosti

$\square$ $\square$ $\square$
5 3 4

kombinacije : $\binom{n}{k}$ $\rightarrow$ na koliko načina možemo odabrati k elemenata od n

1. ZZV - 62)

Bacamo 6 kocaka. Izračunajte vjerojatnost

(a) da je palo 6 razl. brojeva

(b) 6 brojeva manjih od 5

(c) 3 para jednakih brojeva (3 razl. para)

$$P(A) = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{6^6} = \frac{6!}{6^6}$$

$\square$ $\square$ $\square$ $\square$ $\square$ $\square$

6	6	6	6	6	6
6	5	4	3	2	1
4	4	4	4	4	4

$\binom{6}{3}$ biramo 3 broja od 6

$$P(B) = \frac{4^6}{6^6}$$

3 1 4

$\boxed{1}$ $\boxed{3}$ $\boxed{1}$ $\boxed{3}$ $\square$ $\square$

$$P(C) = \frac{\binom{6}{3}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{6^6}$$

za 1. broj 3 smo odabrali 2 kocke
$\binom{6}{2}$

za 2. broj 1 $\binom{4}{2}$

za 3. broj 4 $\binom{2}{2}$

1. MI-2008-4)

12 ping pong loptica i izvlačimo 7, 4 su defektne. Izr. vjer.

(a) da smo izvukli točno 1 defektnu

(b) najviše jednu defektnu

(c) barem jednu defektnu

$$P(A) = \frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{8}{6}}{\binom{12}{7}}$$

→ 1 iz skupa od 4
6 iz skupa od 8

$$P(B) = \frac{\binom{8}{7} + \binom{4}{1}\binom{8}{6}}{\binom{12}{7}}$$

+ jer su događaji disjunktni
najviše 1 + 0 def.

$$P(C) = 1 - \frac{\binom{8}{7}}{\binom{12}{7}}$$

jedna def. + 2 def.

1 - nema niti jedne def.

$\boxed{ZAD}$ 1-6, 14-16, 28-33, 52-85

1ZZV-70) U žari su 5B, 4C, 2Z kuglice. Izvlačimo 4 kuglice

(a) zastupljene su 3 boje
(b) broj crnih veći od broja bijelih

$$P(A) = \frac{\binom{5}{2}\binom{4}{1}\binom{2}{1} + \binom{5}{1}\binom{4}{2}\binom{2}{1} + \binom{5}{1}\binom{4}{1}\binom{2}{2}}{\binom{11}{4}}$$

1. 2B, 1C, 1Z
2. 1B, 2C, 1Z
3. 1B, 1C, 2Z

↓

netočno ↓

$$\frac{\binom{5}{1}\binom{4}{1}\binom{2}{1}\binom{8}{1}}{\binom{11}{4}}$$

↓

2x prebrojavamo
u $\binom{5}{1}$ i $\binom{8}{1}$

$$P(B) = \frac{\binom{4}{4} + \binom{4}{3}\binom{5}{1} + \binom{4}{3}\binom{2}{1} + \binom{4}{2}\binom{2}{2} + \binom{4}{2}\binom{5}{1}\binom{2}{1}}{\binom{11}{4}}$$

ZAD.

12 putnika ulazi na 4 perona. Izr. vj.

(a) u svaki vagon je ušlo po 3 putnika

(b) u 1. i 3. vagon po 3 putnika

svaki putnik može ući u bilo koji vagon, 2. isto u bilo koji ... 4·4... 4

nije 12^4 jer ne biraju vagoni ljude

$$P(A) = \frac{\binom{12}{3}\binom{9}{3}\binom{6}{3}\binom{3}{3}}{4^{12}}$$

za 1. vagon 3 osobe (od 12), za 2. vagon 3 (od 9), ...

$$P(B) = \frac{\binom{12}{3}\binom{9}{3} 2^6}{4^{12}}$$

$\binom{12}{3}$ 1. vagon

$\binom{9}{3}$ 3. vagon

imamo 6 ljudi za 2 vagona

1 M(-10-1) Wyatt Earp igra poker s 4 revolveraša. Svaki igrač je dobio 5 od 52 karata. Vjerojatnost da je Wyatt dobio

(a) flush (b) full house (c) royal flush (d) 2 para

(a) (5 karata iste boje)

(b) (od 10 do asa iste boje)

(c) (3 karta iste jačine i 2 karte neke druge jačine)

$$P(A) = \frac{4 \cdot \binom{13}{5}}{\binom{52}{5}}$$

(4 boje)
13 karata iste boje

$$P(B) = \frac{4}{\binom{52}{5}}$$

(4 jer su karte zadane od 10 do asa)

$$P(C) = \frac{13\binom{4}{3} \cdot 12\binom{4}{2}}{\binom{52}{5}}$$

npr. 10 i za njih odabrati 3 boje

as 3 boje

$\downarrow$ 13 $\quad\quad$ $\binom{4}{3}$

$$P(D) = \frac{\binom{13}{2}\binom{4}{2}\binom{4}{2}\cdot\binom{44}{1}}{\binom{52}{5}}$$

ili $\binom{13}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{2}\cdot 2$

npr. 10 10

AA

bilo što

$\binom{13}{2}$ 2 jačine i svaka ima 2 karte $\binom{4}{2}$; $\binom{4}{2}$

na kraju ostane 44 karte

ili

$$\frac{\frac{13\cdot\binom{4}{2}\cdot 12\binom{4}{2}}{2}}{\binom{52}{5}}$$

ZAD. 1

Problem rođendana. Koliko trebamo uzeti ljudi da bi imali dvoje s istim rođendanom za neku vjerojatnost

- s vjerojatnošću 50% je dovoljno 23 ljudi

99.99% 80 ljudi

U skupini od 80 ljudi barem 2 rođene na isti datum

$$P(A) = 1 - \frac{365\cdot 364 \cdots (365-80+1)}{365^{80}}$$

1 – svi su rođeni na različite

za 1. osobu bilo koji datum $\to$ 365

2. 364

$P(A) = 0.9999$

Ponavljanje pokusa

Pr.) Bacamo kocku 3 puta. Vjerojatnost da je svaki put pala 6?

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{216}$$

Zad.) Strijelac gađa metu 10 puta. Vjerojatnost pogotka je 0.8.

(a) Kolika je vjerojatnost da je svaki put promašio
(b) točno 2x pogodio
(c) barem 2x pogodio

(a) 0.2^{10} (NEZ. VJER. SE MNOŽE)

(b) $0.8^2\cdot 0.2^8\cdot\binom{10}{2}$ ← ODABIR 2 OD 10 U KOJIMA JE POGODIO

(c) $1-\underbrace{0.2^{10}}_{\text{vj. da je sve promašio}}-\underbrace{0.2^9\cdot 0.8\binom{10}{1}}_{\text{vj. da je 1 pogodio}}$

1MI-09-1) U kutiji 6 B i 4 C. Izvlačimo 7 kuglica. Izračunajte vj. da smo izvukli barem 5B (znači 5 ili 6)

a) Ako kuglice ne vraćamo (odjednom svih 7)
(b) Ako kuglice vraćamo u kutiju

(a) $$P(A)=\frac{\binom{6}{5}\binom{4}{2}+\binom{6}{6}\binom{4}{1}}{\binom{10}{7}}=0.333$$

OD 7 IZVLAČENJA BIRAMO 5 IZVL. U KOJIMA SU KUGLICE

(b)
$$P(B) = \left(\frac{6}{10}\right)^5 \cdot \left(\frac{4}{10}\right)^2 \cdot \binom{7}{5} + \left(\frac{6}{10}\right)^6 + \left(\frac{4}{10}\right)^1 \binom{7}{6} + \left(\frac{6}{10}\right)^7$$

5B, 6B, 7B

→ JER SVAKI PUT IMAMO NA RASPOLAGANJU SVE KUGLICE (10)

$= 0.42$

E

1.4. Beskonačni vjerojatnosni prostori

$\boxed{\text{Def}}$ Algebra događaja $\mathcal{F}$ je σ-algebra ako vrijedi

$$A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$$

Tada vjerojatnost P mora zadovoljiti uvjet σ-aditivnosti

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \quad \text{za disjunktne } A_1, A_2, \dots$$

Svojstvo neprekidnosti vjerojatnosti:

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(A)$$

Ω beskonačan
→ prebrojiv → $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots$
→ neprebrojiv → $\Omega = \mathbb{R}$

ZAD.)

2 igrača, Valentino i Renato

Izvlače kuglice iz kutija u kojem su 2B i 6C.

Pobjednik je onaj koji izvuče B

$$\Omega = \{ B, CB, CCB, \overset{\text{ELEM. ISHODI}}{CCCB}, \ldots \}$$

$$V = \{ B, CCB, CCCCB, \ldots \} \rightarrow \text{neparni broj izvlačenja}$$

$$P(V) \overset{\text{S. ADIT.}}{=} P(B) + P(CCB) + P(CCCCB) + \ldots$$

$$= \frac{2}{8} + \frac{6}{8} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{2}{8} + \frac{6}{8} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{2}{8} + \ldots$$

$$= \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^4 \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^6 \cdot \frac{1}{4} + \ldots$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{2n} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{4}{7}$$

$$\boxed{\sum_{n=0} x^n = \frac{1}{1-x}} \quad \text{za } x < 1$$

$$P(R) = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$$

D.Z.)

Sve isto, ali se kuglice ne vraćaju u kutiju

$$P(V) = \underset{B}{\frac{2}{8}} + \underset{C}{\frac{6}{8}} \cdot \underset{C}{\frac{5}{7}} \cdot \underset{B}{\frac{2}{6}} + \underset{C}{\frac{6}{8}} \cdot \underset{C}{\frac{5}{7}} \cdot \underset{C}{\frac{4}{6}} \cdot \underset{C}{\frac{3}{5}} \cdot \underset{B}{\frac{2}{4}} + \underset{C}{\frac{6}{8}} \cdot \underset{C}{\frac{5}{7}} \cdot \underset{C}{\frac{4}{6}} \cdot \underset{C}{\frac{3}{5}} \cdot \underset{C}{\frac{2}{4}} \cdot \underset{C}{\frac{1}{3}} \cdot \underset{B}{\frac{2}{2}}$$

$$= \frac{4}{7}$$

1.DZ-9)

Novčić bacamo dok se 2x zaredom ne pojavi isti znak
Izrač. vjerojatnost da smo bacali paran broj puta

$$\Omega = \{PP, GG, PGG, GPP, PGPP, GPGG, \dots\}$$

$$P(A) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2^4} + 2 \cdot \frac{1}{2^6} + 2 \cdot \frac{1}{2^8}$$

$$\frac{1}{2^4} \to \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

JER SUMA IDE OD $n=1$
ZA $n=0$ SUMA JE 1

$$P(A) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} \right) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4} \right)^n = 2 \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{4}} - 1 \right)$$

$$= \frac{2}{3}$$

ZAD.)

U kutiji se nalazi 14 kuglica sa brojevima od 1-14. Izvlačimo 5 kuglica bez vraćanja. Vjer. da je zbroj najveća 2 od tih 5 barem 25?

14 + 13 → povoljni ishodi
14 + 12 ostali
14 + 11 bilo kojih 12 od 3 $\binom{12}{3}$
13 + 12

$$P(A) = \frac{\binom{12}{3} + \binom{11}{3} + \binom{10}{3} + \binom{9}{3}}{\binom{14}{5}}$$

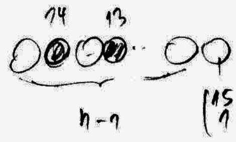
1. MI. 11-1) Tombola. Na kartici je 15 brojeva od 90.

(b) Vjerojatnost da u točno n izvlačenja dobijete bingo, tj. da je izvučeno vaših 15 brojeva.

ZBOG PORETKA → OSTATAK

$$P(B) = \frac{\binom{15}{1}\binom{n-1}{14}\cdot 14! \cdot \frac{75}{n-15}\cdot (n-15)!}{90\cdot 89\cdot 88\cdots(90-n+1)}$$

$n=20$ brojeva izvučeno



$\binom{15}{1}$

(a) u najviše n izvlačenja

ZAD.) Koliko puta trebamo baciti 2 kocke da bi vjerojatnost da su barem jednom pali isti brojevi veća od 90 posto? → suprotno je da su pali različiti brojevi

$$P(A) = 1 - \left(\frac{30}{36}\right)^n > 0.9$$

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n < 0.1 \quad / \log_{\frac{5}{6}}$$

$$n > 12.63$$

$$n = 13$$

1.5. GEOMETRIJSKA VJEROJATNOST

PR)

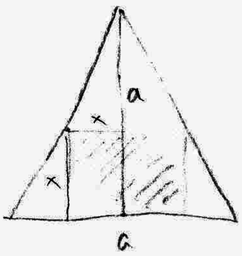
$P(A) = \frac{1}{3}$ VJER. DA ODABEREMO

VJ. ODABIRA NEKE TOČKE JE 0

1. DZ.5)

U jednakokračom osnovice a i visine a je upisan kvadrat. Na sreću biramo točku unutar trokuta. Kolika je vjerojatnost da smo pogodili unutar kvadrat

P_Δ – POVRŠINA TROKUTA



$$P(A) = \frac{P_\square}{P_\Delta}$$

$$P_\Delta = \frac{1}{2} a \cdot v = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a = \frac{a^2}{2}$$

$$P_\square = x^2 \left(x = \frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{4}$$

$$(a-x) : \frac{x}{2} = a : \frac{a}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$x = \frac{a}{2}$$

$$P(A) = \frac{\frac{a^2}{4}}{\frac{a^2}{2}} = \frac{1}{2}$$

DEF: Geometrijska vjerojatnost definiramo kao

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$$

pri čemu je

$m(A) \to$ dužina (u 1D)
površina (u 2D)
volumen (u 3D)

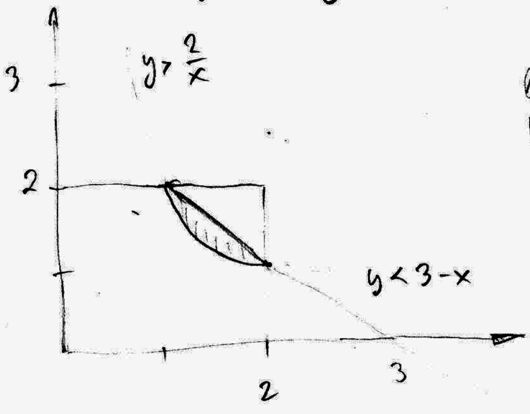
Uočimo: trivijalno slijede svojstva jednakosti

1 ZZV-43)

Biramo na sreću 2 točke iz intervala $x, y \in [0,2]$
Kolika je vj da je suma x i y manja od 3, a produkt veći od 2?

$x + y < 3$

$xy > 2$



biranje točke unutar kvadrata je ekvivalentno odabiru točke (x,y)

$$P(A) = \frac{\int_1^2 \left(3 - x - \frac{2}{3}\right) dx}{4} =$$

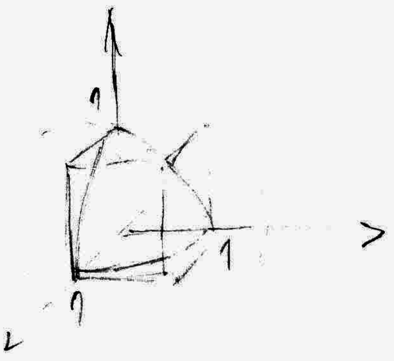
$\int$(GORNJA − DONJA POVRŠINA)

$$= \frac{\frac{3}{2} - 2\ln 2}{4}$$

VIS - P. 14.4.13.

Pr.) Biramo 3 broja iz intervala $x, y, z \in [0,1]$. Izrač. vj. da je zbroj njihovih kvadrata manji od 1.

$$x^2 + y^2 + z^2 < 1$$



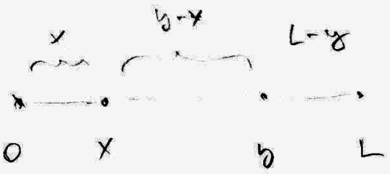
$$P(A) = \frac{\frac{1}{8} \frac{4}{3} 1 \pi}{1}$$

$$\frac{4}{3} r^3 \pi = V_{KUGLE}$$

$$V_{KUGLE} = a^3$$

$$P(A) = \frac{\pi}{6}$$

1 MI-08-3) Štap duljine L je prelomljen na 2 mjesta. Ako je vj. preloma na svakom mjestu jednaka izrač. vj. da je najkraći dio od ta 3 dijela veći od 1/4 L.



$x, y \in [0, L]$

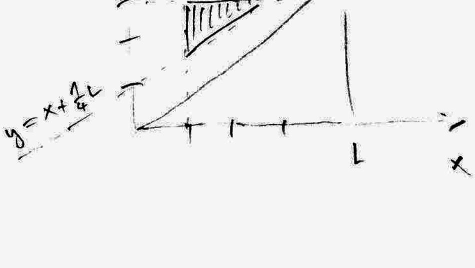
1.) Pretp. $y > x$:

$$x > \frac{1}{4} L$$

$$y - x > \frac{1}{4} L$$

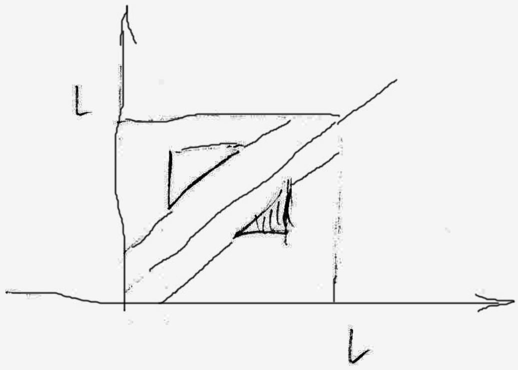
$$L - y > \frac{1}{4} L$$

AKO JE NAJKRAĆI VEĆI OD $\frac{1}{4} L$ ONDA SU SVI VEĆI OD $\frac{1}{4} L$



2.) Pretp. $y < x$

$\Rightarrow \ldots$



Isto kao i 1. slučaj samo ispod pravca

$$P(A) = \frac{\frac{1}{4}L \cdot \frac{1}{4}L}{L^2} = \frac{1}{16}$$

1. MI.-09-3) Provalnik provaljuje u mjenjačnicu između 2.50 i 3:00. Nezavisno od njega policajac obilazi mjenjačnicu između 2.50-3.00. Provalniku treba 2 min. za pljačku, a policajac se zadržava 5 minuta

(a) Izrač. vj da policajac uhvati lopova. (Ako je policajac već ispred mjenjačnice lopov će ići u pljačku)

$x \ldots l \to 2$ min.

$y \ldots p \to 5$ min

$x, y \in [0, 10]$

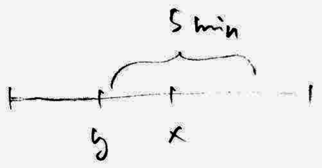
(1.) $x < y$

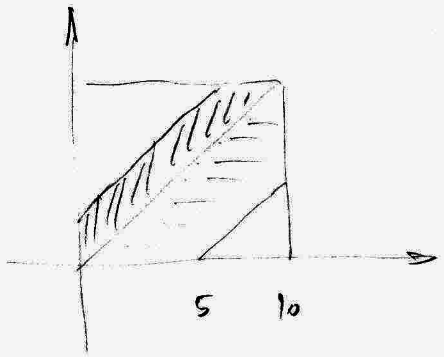
$y < x + 2$

(2.)

$y < x$

$x < y+5 \quad (y > x-5)$





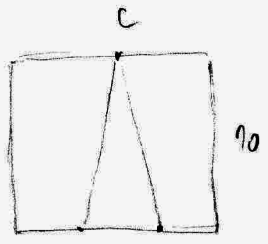
$$P(A) = \frac{100 - \frac{1}{2}\cdot 5^2 - \frac{1}{2} 8^2}{100} = \frac{111}{200}$$

(b) Izrač. vj. da provalnik dođe, obavi provalu, i ode prije nego dođe policajac

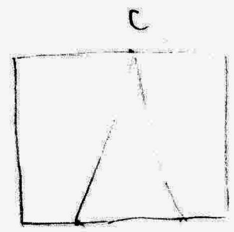
$P(B) = ?$ rj. je slučaj (1) iz (a) jer je $x < y$

$$P(B) = \frac{\frac{1}{2} 8^2}{100} = \frac{32}{100} = 0.32$$

1.M1.-11-2) Na jednoj strani kvadrata stranice 10 biramo točke A i B, a na nasuprotnoj točku C. Izrač. vj da je površina trokuta ABC < 25.



C točka je nebitna jer određuje visinu (koja je uvijek ista)



(a) za $y > x$

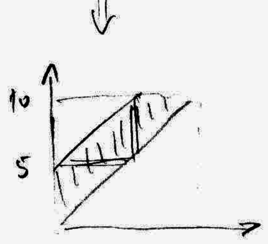
$$P_{\triangle ABC} = \frac{(y-x)\cdot 10}{2} < 25 \Rightarrow y - x < 5$$

(b) za $x > y$

P JE ISTA

$\Downarrow$

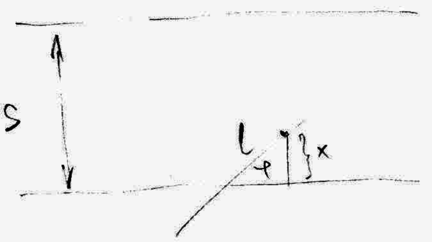
(a) za $y > x$



$$P(A) = \frac{50 - \frac{1}{2}\cdot 5 \cdot 5}{10 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3}{4}$$

l - duljina igle

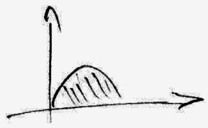
s - razmak između linija   Izračunaj vj. da igla presječe liniju



$$s = 2l$$

uvjet da igla sječe liniju

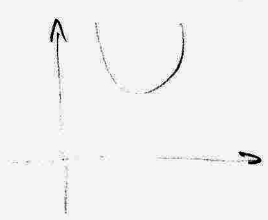
$$x < \frac{l}{2}\sin\varphi \Rightarrow$$



$$P(A) = \frac{2l}{\pi s} = \frac{2l}{\pi 2l} = \frac{1}{\pi} \approx \frac{m}{n} \Rightarrow \pi \approx \frac{n}{m} = 2.75$$

zad.) Biramo na sreću broj $a \in [-1,1]$ i $b \in [0,3]$. Izračunajte vj. da je kvadratna jedn.

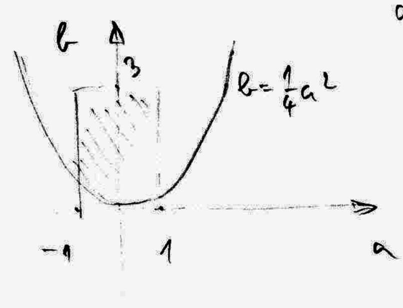
$$x^2 + ax + b > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{nema nultočki})$$



$$D < 0$$

$$b^2 - 4ac < 0$$

$$a^2 - 4b < 0 \Rightarrow b > \frac{1}{4}a^2$$



$$P(A) = \frac{6 - 2\int_0^1 \frac{1}{4}a^2\,da}{2 \cdot 3} = \frac{35}{36}$$