

Stohastički procesi - jesenski ispitni rok 2017.

04. rujna 2017.

1 1. zadatak (10 bodova)

- a) Dokažite formulu $E(X) = E(E(X|Y))$ gdje su X i Y diskretne slučajne varijable.
- b) Vjerojatnost ostvarivanja događaja A u nekom pokusu iznosi p . Koliki je očekivani broj ponavljanja pokusa do pojave događaja A uzastopce k puta?

2 2. zadatak (10 bodova)

- a) Definirajte povratni događaj.
- b) Definirajte postojan i prolazan događaj.
- c) Izvlačimo kuglice iz kutije u kojoj se nalazi 7 crnih i 3 bijele kuglice, bez vraćanja. Je li događaj $A = \text{"izvučena je crna kuglica"}$ povratan događaj? Kakav je događaj A u slučaju kada vraćamo kuglicu nakon izvlačenja?
- d) Označimo s
 - s_n – vjerojatnost da se promatrani događaj *po prvi put* ostvari u n -tom pokusu,
 - u_n – vjerojatnost da se promatrani događaj ostvari u n -tom pokusu, *ne nužno po prvi put*.

Dokažite da za funkcije izvodnice $S(x)$ i $U(x)$ nizova (s_n) i (u_n) vrijedi

$$U(x) = \frac{1}{1-S(x)}$$

3 3. zadatak (10 bodova)

- a) Definirajte diskretni Markovljev lanac i stacionarne vjerojatnosti.
- b) Izvedite Chapman-Kolmogorovljeve jednadžbe za Markovljev lanac.
- c) Zadan je Markovljev lanac X_0, X_1, \dots sa skupom stanja $S = 0, 1, 2$ i matricom prijelaznih vjerojatnosti

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.6 \\ 0.8 & 0 & 0.2 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

Izračunajte:

- (a) $p_1 = P(X_2 = 2 | X_1 = 0, X_0 = 1)$
- (b) $p_2 = P(X_{n+1} = 2, X_n = 0 | X_{n-1} = 0)$
- (c) $p_3 = P(X_2 = 2)$, ako je $P(X_0 = 0) = 0.4$, $P(X_0 = 1) = P(X_0 = 2) = 0.3$

4 4. zadatak (5 bodova)

- a) Definirajte Poissonov proces.
- b) Poznato je da broj prometnih nesreća N_t na nekom području u vremenskom intervalu $[0, t)$ može biti opisan kao Poissonov proces.
Ako se u prosjeku dogodi jedna nesreća u 4 sata, izračunajte vjerojatnost događaja A:

$A =$ dogodila se jedna nesreća u intervalu $[0, 10)$, barem dvije u intervalu $[10, 16)$ i
nijedna u intervalu $[16, 24)$

5 5. zadatak (5 bodova)

- a) Što je linearni sustav i njegov impulsni odziv?
- b) Izvedite formulu za kovarijacijsku funkciju odziva Y ako je signal X stacionaran proces.
- c) Izvedite formulu za kovarijacijsku funkciju procesa Y ako je signal $Y = X'$