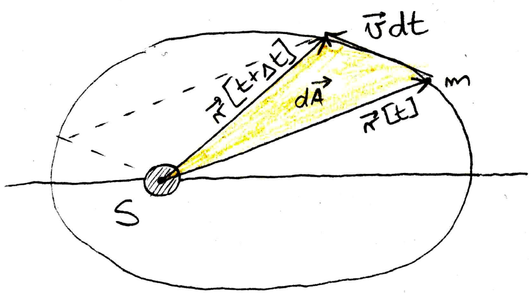
IZVODI

5. GRAVITACIJA

1. Formulirajte Keplerove zakone. Formulirajte Newtonov zakon gravitacije.

1) Orbite planeta su elipse sa Suncem u jednom od žarišta.

2) Vektor položaja planeta u odnosu na Sunce prebrisuje jednake površine u jednakim vremenskim intervalima.



polovica $P_{\square}$

$$dA = \frac{1}{2}|\vec{r} \times \vec{v}dt| = \frac{1}{2m}|\vec{r} \times m\vec{v}|\,dt$$

$$= \frac{1}{2m}|\vec{r} \times \vec{p}|\,dt = \frac{1}{2m}|\vec{L}|\,dt$$

$$\frac{dA}{dt} = konst. \Rightarrow |\vec{L}| = konst.$$

svojstvo svake centralne sile

– kutna količina gibanja planeta u odnosu na Sunce očuvana je veličina

3) Kvadrat ophodnog vremena planeta razmjeran je trećoj potenciji velike poluosi elipse

$$G\frac{M\cancel{m}}{R^{\cancel{2}}} = \frac{\cancel{m}\omega^2}{\cancel{R}}, \qquad \omega_1^2 R_1^3 = \omega_2^2 R_2^3$$

$$G\frac{M}{R} = \omega^2 R^2 \qquad \frac{\cancel{4\pi^2}}{T_1^2}R_1^3 = \frac{\cancel{4\pi^2}}{T_2^2}R_2^3$$

$$\underbrace{GM}_{} = \omega^2 R^3 \qquad \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{R_1^3}{R_2^3} \Rightarrow \boxed{\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}}$$

(ovisi samo o Suncu)
= konstanta!

NEWTONOV ZAKON GRAVITACIJE: Među česticama čije su mase m_1 i m_2 i koje su jedna od druge udaljene za r_{12} djeluje privlačna gravitacijska sila:

$$\boxed{\vec{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12}}$$

gdje je $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kgs^2}$ gravitacijska ili Newtonova konstanta.

2. *Definirajte jakost gravitacijskog polja. Definirajte gravitacijski potencijal i izvedite gravitacijsku potencijalnu energiju.*

- Jakost (intenzitet) gravitacijskog polja tijela mase m_1 definiramo kao omjer grav. sile i mase tijela na koje djeluje ta sila.

$$\vec{\gamma} = \frac{\vec{F}_{12}}{m_2} = -G\,\frac{m_1 \cancel{m_2}}{r_{12}^2}\,\hat{r}_{12}\cdot\frac{1}{\cancel{m_2}} \Rightarrow \boxed{\vec{\gamma} = -G\,\frac{m_1}{r_{12}^2}\,\hat{r}_{12}}$$

- masu m_2 iz položaja r_1, bez ubrzavanja, dovodimo u položaj r_2 u grav. polje mase m_1

$\underline{\vec{F} = -\vec{F}_G}$, rad obavljen pri premještanju tijela:

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}\,d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} G\,\frac{m_1 m_2}{r^2}\,dr = G m_1 m_2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = G m_1 m_2 \left(-\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1}\right)$$

$$\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_{r_1}^{r_2}$$

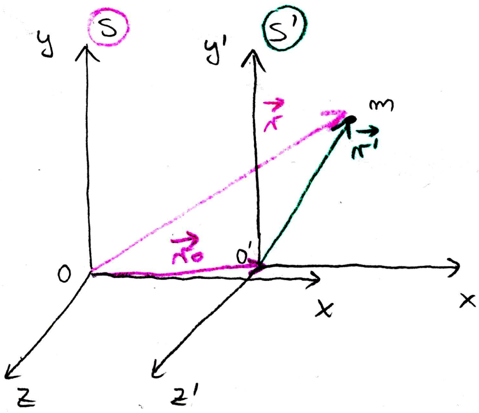
$$W = E_p(r_2) - E_p(r_1) = \underline{G m_1 m_2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}$$

↳ $r_1 = \infty,\ r_2 = r \Rightarrow \boxed{E_p(r) = -G\,\frac{m_1 m_2}{r}}$ ($r = \infty \Rightarrow E_p = 0$ kada su tijela beskonačno daleko)

- potencijal je omjer potencijalne energije i mase: $\varphi(r) = \frac{E_p(r)}{m_2} = -G\,\frac{m_1}{r}$

6. NEINERCIJSKI SUSTAVI

3. *Izvedite Galilejeve transformacije za dva inercijska sustava koji se jedan u odnosu na drugog gibaju stalnom brzinom. Pokažite da je Newtonova jednadžba gibanja invarijantna na Galilejeve transformacije.*



$\boxed{\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{r}_0}\ \Big|\ \frac{d}{dt}$ $(t = t')$

$\vec{v}_0$ = brzina sustava S' prema sustavu S (= konst.)

$\boxed{\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}_0}\ \Big|\ \frac{d}{dt}$

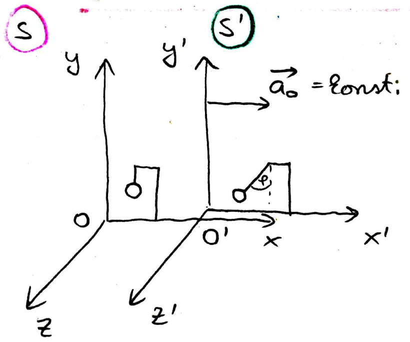
$\vec{a} = \vec{a}\,' + 0$

$\boxed{\vec{a} = \vec{a}\,'}$

2.NZ: $\left.\begin{array}{l}\vec{F} = m\vec{a}\\ \vec{F}' = m\vec{a}\,'\end{array}\right\} \Rightarrow$ $\boxed{\vec{F} = \vec{F}'}$

$x = x' + v_0 t$	$v_x = v_x' + v_0$
$y = y'$	$v_y = v_y'$
$z = z'$	$v_z = v_z'$

4. Napišite jednadžbu gibanja u neinercijskom referentnom sustavu koji se giba translatorno stalnom akceleracijom u odnosu na inercijski sustav.



$$\boxed{\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{r}_0} \;\Big|\; \frac{d}{dt}$$

$$\boxed{\vec{v}\,' = \vec{v} - \vec{v}_0} \;\Big|\; \frac{d}{dt}$$

$$\boxed{\vec{a}\,' = \vec{a} - \vec{a}_0}$$

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{F}' = m\vec{a}\,'$$

$$\vec{F}' = m\vec{a} - m\vec{a}_0$$

$$\boxed{\vec{F}' = \vec{F} + \vec{F}_i}$$

$\Rightarrow$ $\vec{F}_i$ = inercijalna sila

$$\vec{F}_i = -m\vec{a}_0$$

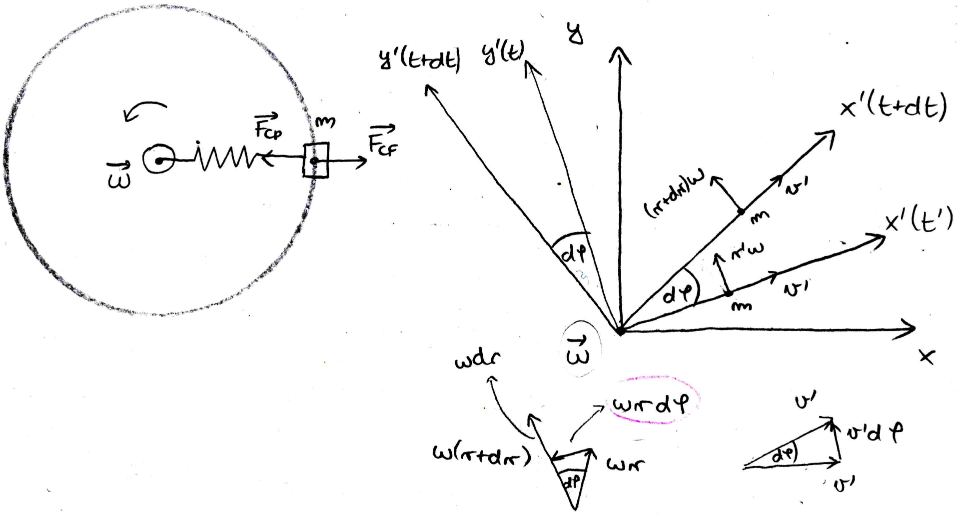
$$x' = x - v_0 t - \frac{a_0}{2}t^2 \qquad v_x' = v_x - v_0 - a_0 t$$

$$y' = y \qquad v_y' = v_y, \quad v_z' = v_z$$

$$z' = z \qquad a_x' = a_x - a_0$$

$$t' = t \qquad a_y' = a_y, \quad a_z' = a_z$$

5. Izvedite izraz za centrifugalnu silu u sustavu koji se vrti stalnom brzinom.



S' = jednoliko kružno gibanje

S' s obzirom na S = ubrzano

RADIJALNA AKCELERACIJA:

$$a_r = \lim_{\Delta t \to 0} \omega \frac{r\Delta\varphi}{\Delta t} = \omega r \frac{d\varphi}{dt}$$

$$a_r = \omega^2 r \Rightarrow \vec{a}_r = -\omega^2 \vec{r}$$

$$\vec{F}_{cp} = \vec{F}_{op} = m\vec{a}_r = -m\omega^2\vec{r}$$

$$\vec{r} = \vec{r}\,'$$

$$\vec{F}_{cp} + \vec{F}_{cf} = 0$$

$$\vec{F}_{cf} = -\vec{F}_{cp}$$

$$\boxed{\vec{F}_{cf} = m\omega^2\vec{r}}$$

u sustavu S' (koji se giba) predmet miruje $\Rightarrow \Sigma F = 0$

6. Izvedite Coriolisovu akc. i objasnite Coriol. silu.

TANGENCIJALNA AKCELERACIJA:

$$a_t = v'\frac{d\varphi}{dt} + \frac{dv}{dt}$$

(zbroj promjene radijalne brzine tijela po smjeru i promjene tang. komp. brzine po iznosu)

$$= v'\frac{d\varphi}{dt} + \omega\frac{dr}{dt}$$

$$= v'\omega + \omega v'$$

$$= 2\omega v'$$

$$\boxed{\vec{a}_c = -2\vec{v}\,' \times \vec{\omega}}$$

CORIOLISOVA SILA: $\vec{F}_t = m\vec{a}_c = -2m\vec{v}\,' \times \vec{\omega}$ $\qquad \vec{F}_t + \vec{F}_c = 0 \qquad \vec{F}_t = -\vec{F}$

$$\boxed{\vec{F}_c = 2m\vec{v}\,' \times \vec{\omega}}$$

u S': $\vec{a} = 0$, $\Sigma F = 0$

$$F_c = 2mv'\omega \sin\sphericalangle(\vec{v}\,', \vec{\omega})$$

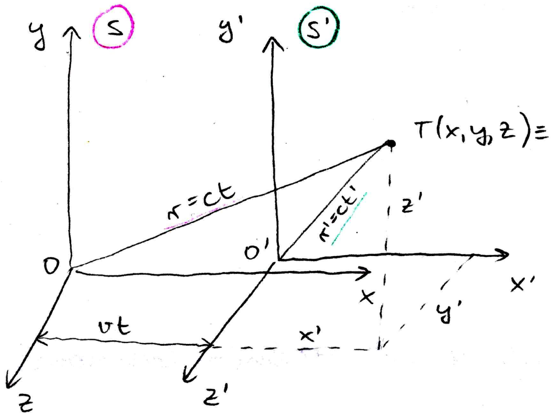
Coriolisova sila je inercijalna sila okomita na smjer brzine tijela i kutne brzine. Ona iščezava ako tijelo s obzirom na sustav miruje, odn. ako je brzina $\vec{v}\,'$ paralelna s kutnom brzinom $\vec{\omega}$.

7. Napišite Einsteinove postulate specijalne teorije relativnosti. Izvedite Lorentzove transformacije.

7. RELATIVISTIČKA MEHANIKA

1) PRINCIP KONSTANTNOSTI BRZINE SVJETLOSTI – Brzina svjetlosti u vakuumu ($c = 3 \cdot 10^8$ m/s) jednaka je u svim inercijskim referentnim sustavima i ne ovisi o gibanju izvora ili detektora svjetlosti.

2) Svi prirodni zakoni imaju isti oblik u svim inercijskim sustavima, tj. u sustavima koji se relativno jedan prema drugome gibaju jednoliko pravocrtno.



POČETNI TRENUTAK: $t = t' = 0, \quad x = x' = 0$

S: $|OT| = r = ct$

S': $|O'T| = r' = ct'$

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 \\ x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2 \end{cases}$$

transf. iz S u S' mora biti linearna:

$x' = Ax + Bt$

$t' = Cx + Dt$

$x' = 0, \; x = vt$ → gibanje ishodišta O' s obzirom na sustav S jest jednoliko po pravcu

TRANSFORMACIJA: $x' = \varkappa(x - vt)$

$y' = y$

$z' = z$

$t' = \varkappa'(t - ax)$ ← konst.

$\varkappa = A$

$\varkappa' = D$

$a = -\dfrac{C}{D}$

c = konst.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 \\ \varkappa^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2 = c^2\varkappa'^2(t - ax)^2 \end{cases}$$

$$\boxed{\varkappa = \varkappa' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} \qquad a = \frac{v}{c^2}$$

S u S'

$x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}$

$y' = y$

$z' = z$

$t' = \dfrac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$

$\boxed{\beta = \frac{v}{c}}$

S' u S

$x = \dfrac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$

$y = y'$

$z = z'$

$t = \dfrac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$

KLASIČNE BRZINE:

$v \ll c$

$\beta \ll 1$

ZBRAJANJE BRZINA:

MT u S: $u_x = \dfrac{dx}{dt} \quad u_y = \dfrac{dy}{dt} \quad u_z = \dfrac{dz}{dt}$

MT u S': $u_x' = \dfrac{dx'}{dt'} \quad u_y' = \dfrac{dy'}{dt'} \quad u_z' = \dfrac{dz'}{dt'}$

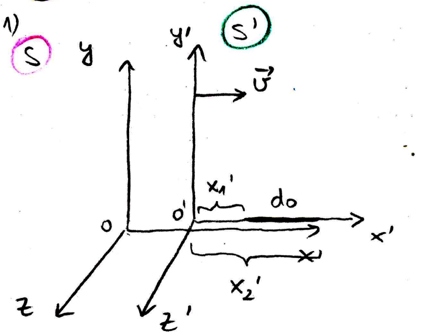
$dx' = \dfrac{dx - v\,dt}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad dy' = dy \quad dz' = dz, \quad dt' = \dfrac{dt - \frac{v\,dx}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$

$$u_x' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\frac{dx - v\,dt}{\cancel{\sqrt{1-\beta^2}}} \;/:dt}{\frac{dt - \frac{v\,dx}{c^2}}{\cancel{\sqrt{1-\beta^2}}} \;/:dt} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v\,dx}{c^2\,dt}} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v u_x}{c^2}}$$

$$u_y' = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy \;/:dt}{\frac{dt - \frac{v\,dx}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \;/:dt} = \frac{\frac{dy}{dt}\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}} = \frac{u_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{v u_x}{c^2}} \equiv u_z'$$

8. Izvedite izraz za kontrakciju duljine i dilataciju vremena.

1)



d_0 = vlastita duljina , početak i kraj štapa mjeren u istom trenutku

S u smjeru y-osi : $d_0 = y_2' - y_1' = y_2 - y_1 = d$

u smjeru z-osi : $d_0 = z_2' - z_1' = z_2 - z_1 = d$

u smjeru x-osi : $d_0 = x_2' - x_1'$

$$d = x_2 - x_1$$
$$= x_2'\sqrt{1-\beta^2} + \cancel{vt} - x_1'\sqrt{1-\beta^2} - \cancel{vt}$$
$$= (x_2' - x_1')\sqrt{1-\beta^2}$$

$$\boxed{d = d_0\sqrt{1-\beta^2}}$$

mjereno istovremeno u sustavu S'

S' $\quad d' = x_2' - x_1' = \varkappa(x_2 - vt_2) - \varkappa(x_1 - vt_1)$

$$= \varkappa(x_2 - x_1) - \varkappa v(t_2 - t_1)$$

$$t_2' = t_1' \Rightarrow \cancel{\varkappa}\left(t_2 - \frac{vx_2}{c^2}\right) = \cancel{\varkappa}\left(t_1 - \frac{vx_1}{c^2}\right)$$

$$t_2 - t_1 = \frac{v(x_2 - x_1)}{c^2}$$

$$d' = \varkappa(x_2 - x_1) - \varkappa\frac{v^2(x_2 - x_1)}{c^2} = \varkappa(x_2 - x_1)\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$= \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}(x_2 - x_1) = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}(x_2 - x_1) = d_0\sqrt{1-\beta^2}$$

2) $S' : \Delta t' = t_2' - t_1' \rightarrow$ na mjestu x'

$S : \Delta t = t_2 - t_1$

$$t_2 - t_1 = \frac{t_2' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{t_1' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

VLASTITO VRIJEME : $\boxed{\Delta t = \frac{\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}}$

9. Napišite izraz za relativističku količinu gibanja i izvedite izraz za relativističku energiju.

$$\boxed{\vec{p} = m\varkappa\vec{v}}$$

faktor ovisan o brzini

$$\varkappa = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

vanjska sila F :

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(m\varkappa v)$$

↳ RELATIVISTIČKA JEDNADŽBA GIBANJA

$$dE_k = dW = F\,ds$$
$$= F\,v\,dt$$
$$= \frac{d}{dt}(\gamma m v)\, v\, dt$$
$$= m(\gamma\, dv + v\, d\gamma)\, v$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \Big/^{2}$$

$$\gamma^2 = \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$\gamma^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = 1 \quad /\cdot c^2$$

$$\gamma^2 c^2 - \gamma^2 v^2 = c^2 \quad / \text{diferenciramo}$$

$$2\gamma\, d\gamma\, c^2 - 2\gamma\, d\gamma\, v^2 - \gamma^2\, 2v\, dv = 0 \quad /:2\gamma$$

$$c^2 d\gamma - v^2 d\gamma - \gamma v\, dv = 0$$

$$c^2 d\gamma = v(\gamma\, dv + v\, d\gamma) \quad /\cdot m$$

$$mc^2 d\gamma = mv(\gamma\, dv + v\, d\gamma)$$

$$d(\gamma m c^2) = dE_k \quad / \int \quad \left(\begin{matrix} v \\ v=0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} E_k \\ E_k=0 \end{matrix}\right)$$

$$E_k = \gamma m c^2 - mc^2$$

$$\boxed{E_k = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - mc^2} \quad \Rightarrow \quad E = E_k + E_0$$

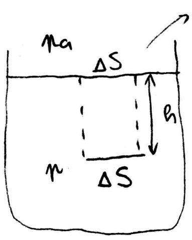
$$E_k = \underbrace{E}_{\text{ukupna en.}} - \underbrace{E_0}_{\text{en. mirovanja}}$$

$$\boxed{E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$

8. MEHANIKA FLUIDA

10. Izvedite izraz za hidrostatski tlak i primijenite ga na spojene posude s dvije različite tekućine.

↳ tlak uzrokovan težinom samog fluida



ρ = konst., tekućina nestlačiva

GORNJA BAZA: $F_1 = p_a \Delta S$

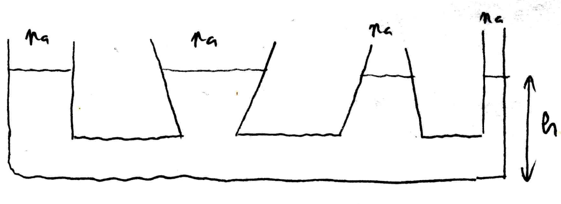
DONJA BAZA: $F_2 = p\, \Delta S$

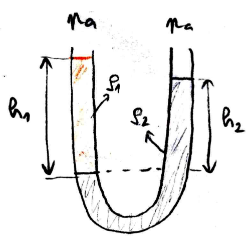
$$G = \Delta m g = \rho g \Delta V = \rho g h \Delta S$$

ZAMIŠLJENI VOLUMEN U RAVNOTEŽI: $p\Delta S - p_a \Delta S - \rho g h \Delta S = 0 \quad /:\Delta S$

$$\boxed{p = p_a + \rho g h}$$ HIDROSTATSKI TLAK

SPOJENE POSUDE:





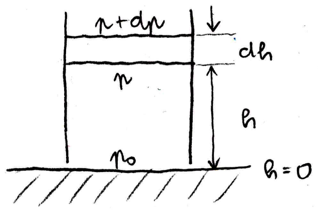
$$\cancel{p_a} + \rho_1 \cancel{g} h_1 = \cancel{p_a} + \rho_2 \cancel{g} h_2$$

$$\boxed{\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{h_2}{h_1}}$$

$\rho_1 \neq \rho_2$

hidrostatski tlak jednak je u svim

(11.) Izvedite barometarsku formulu za izotermnu atmosferu. $\Rightarrow T = konst.$



na visini h : $p_a = p$

na visini $h+dh$: $p_a = p + dp$

ako je dh pozitivan, tada je dp negativan jer tlak pada s visinom

$S = 1\ m^2$

$dp = -\rho g\, dh$ * $\rightarrow \rho$ je gustoća zraka na toj visini (funkcija tlaka i temp.)

$T = konst. \Rightarrow pV = konst.$

$$\frac{\rho(h)}{\rho_0} = \frac{p(h)}{p_0} \qquad \rightarrow p_0 \text{ i } \rho_0 \text{ na } h=0$$

$$\rho(h) = \frac{\rho_0}{p_0}\, p(h)$$

* $dp = -\rho(h)\, g\, dh$

$$dp = -\frac{\rho_0}{p_0}\, p(h)\, g\, dh$$

$$dh = -\frac{p_0}{\rho_0 g}\frac{dp}{p} \quad \Big/ \int$$

$$\int_0^h dh = -\frac{p_0}{\rho_0 g}\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{p} \qquad (\ln p - \ln p_0)$$

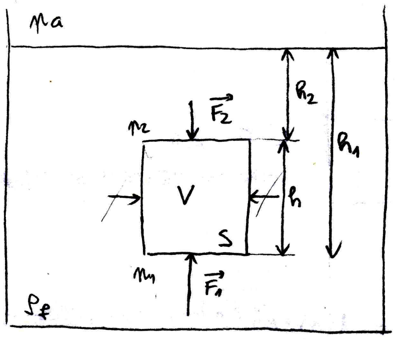
$$\ln\frac{p}{p_0} = -\frac{\rho_0 g h}{p_0} \quad \Big|\, e$$

$$\boxed{p = p_0\, e^{-\frac{\rho_0 g h}{p_0}}}$$

pri normiranim uvjetima

$p = p_0\, e^{-\frac{h}{7990}}$

(12.) Izvedite izraz za uzgon.



- sile pritiska koje djeluju na bočne strane se poništavaju jer su na istoj horizontalnoj ravnini jednake po iznosu, a suprotne po smjeru

GORNJA BAZA : $p_2 = p_a + \rho g h_2$

$F_2 = p_2 S$

DONJA BAZA : $p_1 = p_a + \rho g h_1$

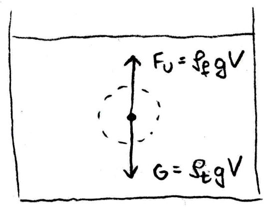
$F_1 = p_1 S$

$F_1 > F_2$

$$F_U = F_1 - F_2$$
$$= \rho_f g h_1 S - \rho_f g h_2 S$$
$$= \rho_f g (h_1 - h_2) S$$
$$= \rho_f g h S$$
$$\boxed{F_U = \rho_f g V}$$

$m_f = \rho_f V \rightarrow$ masa istisnutog fluida

1) TIJELO LEBDI U FLUIDU



- ravnoteža $(\Sigma F = 0)$

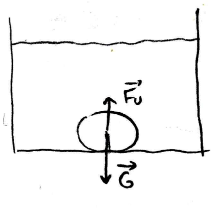
$F_U - G = 0$

$\rho_f g V = \rho_t g V$

$\rho_f = \rho_t$

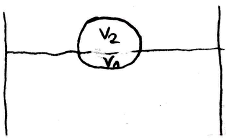
3) TEŽINA > UZGON

- tijelo ubrzano tone



2) UZGON > TEŽINA

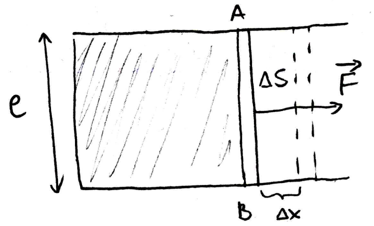
- uzgon na uronjeni dio (V_1) jednak je ukupnoj težini tijela !



$\rho_f V_1 \cancel{g} = \rho_t \cancel{g} V$

$V_1 = \frac{\rho_t}{\ldots} V$

13. Definirajte površinsku napetost i izvedite Laplaceovu formulu za tlak pod zakrivljene površine.



- na stranicu $\overline{AB}$ djeluje sila napetosti površine → možemo ju uravnotežiti vanjskom silom F koja joj je po iznosu jednaka

$\Delta W = F \Delta x$

$\Delta S = 2 e \Delta x$

opna se sastoji od 2 površine između kojih je tanak sloj tekućine

KOEFICIJENT POVRŠINSKE NAPETOSTI: $\boxed{\sigma = \frac{\Delta W}{\Delta S}}$

$$\sigma = \frac{F \cancel{\Delta x}}{2e \cancel{\Delta x}} = \frac{F}{2e}$$

→ suprotno sili napetosti površine

- da bi se povećao mjehurić s polumjera r na polumjer (r+dr), mora se izvršiti rad:

* $dW = 2\sigma dS$ → "2" jer mjehurić ima dvije površine ($S = 4r^2\pi$)

$dW = 2\sigma \cdot 8r\pi dr$ ⇒ $dS = 8r\pi dr$

- nadtlak unutar mjehurića: Δp
- sila koja djeluje na unutrašnju površinu mjehurića: $\Delta p S$
- rad te sile: $dW = \Delta p S dr$

* $dW = \Delta p 4r^2\pi dr$

⇒ * $2\sigma \overset{2}{\cancel{8}} \cancel{r} \cancel{\pi} \cancel{dr} = \Delta p \cancel{4} r^{\cancel{2}} \cancel{\pi} \cancel{dr}$

$\boxed{\Delta p = \frac{4\sigma}{r}}$ LAPLACEOVA FORMULA ZA DVOSTRUKU SFERNU POVRŠINU

$\boxed{\Delta p = \frac{2\sigma}{r}}$ L. F. ZA JEDNOSTRUKU SFERNU P.

14. Definirajte idealni fluid i izvedite jednadžbu kontinuiteta za idealni fluid

Idealan fluid je fluid kod kojeg nema unutrašnjeg trenja među njegovim slojevima.

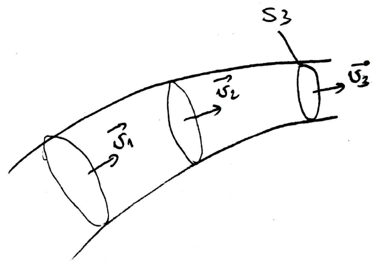
↳ nestlačiv, ρ = konst. *

↳ T = konst.

↳ tok je jednolik, brzina i tlak ne ovise o vremenu

↳ tok je slojevit, tj. laminaran (nije turbulentan)

↳ brzina je u svim točkama određenog presjeka jednaka!



$V = S \Delta s$

$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$

$V = S v \Delta t$

↳ volumen koji prođe kroz presjek S u vremenu Δt

VOLUMNI PROTOK: $q = \frac{\Delta V}{\Delta t} = S v$

masa = konst. ($\Delta m = \rho \Delta V$) * ⇒ protok(q) = konst.

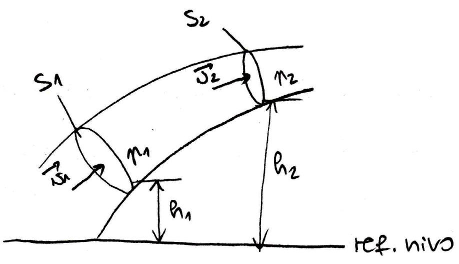
$\rho S_1 v_1 \Delta t = \rho S_2 v_2 \Delta t$ = konst.

$\boxed{Sv = \text{konst.}}$ JEDNADŽBA KONTINUITETA

15. Izvedite Bernoullijevu jednadžbu. Opišite mjerine primjene: Venturijeva cijev, Pitot - Prandtlova cijev i Torricellijev zakon istjecanja.

brzina veća → strujnice gušće → tlak manji

statički tlak ~ visina stupca tekućine u cjevčici (manometar)



JEDN. KONT.: $\Delta V = S_1 v_1 \Delta t = S_2 v_2 \Delta t = \frac{\Delta m}{\rho}$

$$\Delta W_1 = F_1 \cdot \Delta s_1 = \overbrace{p_1 S_1}\, v_1 \Delta t = p_1 \frac{\Delta m}{\rho}$$

$$\Delta W_2 = -F_2 \cdot \Delta s_1 = -\overbrace{p_2 S_2}\, v_2 \Delta t = -p_2 \frac{\Delta m}{\rho}$$

PRESJEK S1 - rad ΔW_1 izvršen nad sustavom

PRESJEK S_2 - sustav vrši rad ΔW_2 (protiv sila vanjskog tlaka)

UKUPNI RAD IZVRŠEN NAD SUSTAVOM: $\Delta W = W_1 + W_2 = (p_1 - p_2)\frac{\Delta m}{\rho}$

- promjena energije promatranog volumena (između S_1 i S_2 i stijenki cijevi) jednaka je razlici kin. i pot. energije volumena $\Delta V_1 = S_1 \Delta s_1$ i $\Delta V_2 = S_2 \Delta s_2$

$$\Delta E = \Delta E_{k_2} - \Delta E_{k_1} + \Delta E_{p_2} - \Delta E_{p_1}$$
$$= \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 + mgh_2 - mgh_1$$

$$\Delta W = \Delta E$$

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho} = \frac{1}{2} v_2^2 - \frac{1}{2} v_1^2 + gh_2 - gh_1 \quad / \cdot \rho$$

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 - \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_2 - \rho g h_1$$

$$\boxed{p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2} \equiv p + \frac{1}{2}\rho v + \rho g h = konst.$$

BERNOULLIJEVA JEDNADŽBA ZA STACIONARNO STRUJANJE NESTLAČIVOG IDEALNOG FLUIDA

p = statički tlak

$\rho g h$ = tlak uzrokovan visinskom razlikom pojedinih dijelova fluida

$\frac{1}{2}\rho v^2$ = dinamički (brzinski tlak)

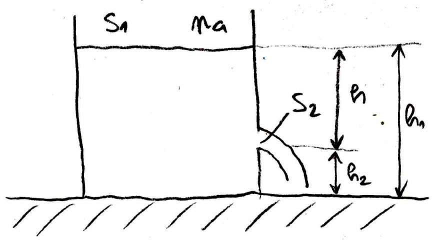
- ako je cijev horizontalna ili je gustoća fluida malena: $p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$

  ↳ veća brzina fluida → tlak manji

- fluid miruje ($v_1 = v_2 = 0$): $p_1 - p_2 = \rho g (h_2 - h_1)$

  ↳ razlika tlakova u mirnom fluidu

1) TORICELLIJEV ZAKON ISTJECANJA



- na presjeku S_1 je brzina jako malena, zanemariva $\rightarrow v_1 = 0$
- $p_1 = p_2 = p_a$

$$\cancel{p_a} + \cancel{\rho} g h_1 = \cancel{p_a} + \cancel{\rho} g h_2 + \frac{1}{2} \cancel{\rho} v_2^2$$

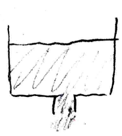
$$\frac{1}{2} v_2^2 = g(h_1 - h_2)$$

$$\boxed{v_2 = \sqrt{2gh}}$$

- brzina tekućine = tekućina slobodno pada s iste visine
- za idealne tekućine (za realne je brzina manja, zbog unutrašnjeg trenja)

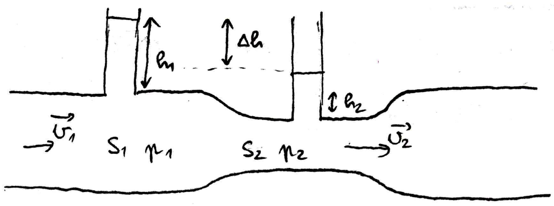
(KONTRAKCIJA MLAZA: efektivni presjek mlaza obično manji od presjeka otvora

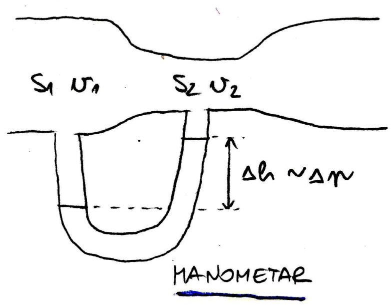
↳ KOEFICIJENT KONTRAKCIJE (ε): $q = \varepsilon S v = \varepsilon S \sqrt{2gh}$ //)



2) VENTURIJEVA CIJEV

– cijev sa suženjem u sredini, služi za mjerenje brzine i protoka fluida





$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \qquad (\Delta p = p_1 - p_2)$$

$$v_1 S_1 = v_2 S_2$$

$$\Rightarrow \Delta p + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = \frac{1}{2}\rho v_1^2 \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 \left(\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1\right) = \Delta p$$

$$\boxed{v_1 = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho\left(\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 1\right)}}}$$ BRZINA FLUIDA

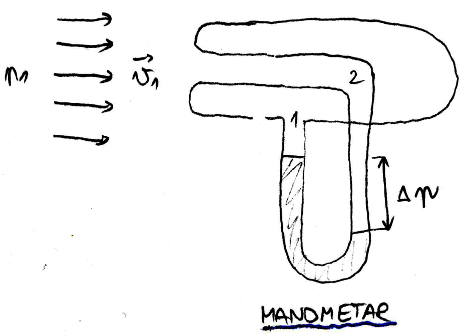
PROTOK: $q = v_1 S_1 = S_1 \sqrt{\dfrac{2\Delta p}{\rho\left(\frac{S_1^2 - S_2^2}{S_2^2}\right)}}$

$$\boxed{q = S_1 S_2 \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho(S_1^2 - S_2^2)}}}$$

- iz poznatih presjeka S_1 i S_2 i očitavanja razlike tlakova na manometru Venturijeve cijevi možemo izračunati brzinu i protok fluida kroz cijev

3) PITOT - PRANDTLOVA CIJEV

– mjerenjem dinamičkog tlaka možemo odrediti brzinu strujanja plina



mjeri razliku ukupnog i statičkog tlaka

→ jedan njegov otvor u smjeru strujanja fluida → u tom se otvoru fluid zaustavlja ($v_2 = 0$)

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2$$

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 - p_1 = \Delta p$$

$$\boxed{v_1 = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}}$$

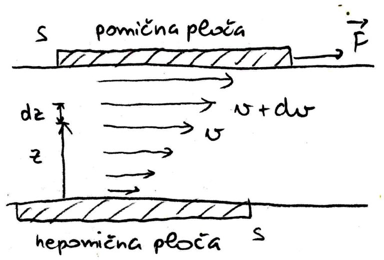
- može poslužiti za mjerenje brzine aviona

↳ pogodnija za mjerenje većih brzina

↳ Venturijeva - za mjerenje manjih v

(16.) Definirajte silu viskoznog trenja i izvedite Poiseuilleov zakon.

1) (viskoznost, unutrašnje trenje) je sila koja djeluje suprotno gibanju i uzrokuju ju međumolekularne sile



- ploča se giba jednoliko i povlači za sobom sloj fluida
  - ↳ LAMINARNO (SLOJEVITO) strujanje
  - ↳ sila viskoznog trenja uravnotežuje vanjsku tang. silu F

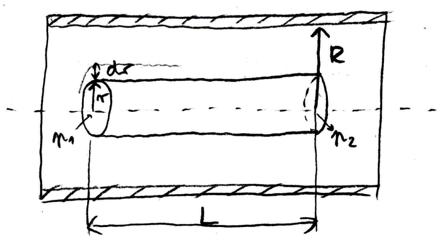
- Sila viskoznog trenja između 2 susjedna sloja fluida, čija je površina S i koji su međusobno udaljeni dz :

$$\boxed{F_{tr} = \eta S \frac{dv}{dz}} \rightarrow [\mathrm{Pa\,s}]$$

η = koeficijent dinamičke viskoznosti (ovisi o vrsti fluida i temp.)

$\frac{dv}{dz}$ = promjena brzine od sloja do sloja (gradijent brzine)

2)



- sila koja djeluje na sloj fluida (valjak) nastaje zbog razlike tlakova :

$$F = r^2\pi\,(p_1 - p_2)$$

- sila trenja kojom taj sloj tekućine djeluje na susjedni:

$$F_{tr} = \eta S \frac{dv}{dr} = \eta\, \underbrace{2r\pi L}\, \frac{dv}{dr}$$

$$\vec{F} + \vec{F}_{tr} = 0$$

$$r^{\cancel{2}}\cancel{\pi}(p_1 - p_2) = -\eta\, 2\cancel{r}\cancel{\pi} L \frac{dv}{dr} \quad \Big| \cdot dr \,\Big/ \int$$

$$-2\eta L \int_v^0 dv = (p_1 - p_2) \int_r^R r\,dr$$

$$\cancel{-}2\eta L(0 \cancel{-} v) = (p_1 - p_2)\frac{R^2 - r^2}{2}$$

$$\boxed{v = \frac{p_1 - p_2}{4\eta L}(R^2 - r^2)}$$

$$V = \int_V dV = \int_0^R 2r\pi\, dr\, v\, t$$

$$= \frac{p_1 - p_2}{{}_2\cancel{4}\eta L} \cdot \cancel{2}\pi t \int_0^R (R^2 - r^2)\, r\, dr$$

$$\int_0^R (R^2 r - r^3)\,dr = R^2 \cdot \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{2} = \frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}$$

$$= \frac{\pi(p_1 - p_2)t}{2\eta L} \cdot \frac{R^4}{4}$$

$$\boxed{q = \frac{V}{t} = \frac{\pi}{8\eta}\,\frac{p_1 - p_2}{L}\,R^4}$$

POISEUILLEOV ZAKON LAMINARNOG PROTJECANJA REALNE TEKUĆINE KROZ USKE CIJEVI

9. TOPLINA I TEMPERATURA

(17) Iz tri plinska zakona izvedite jednadžbu stanja idealnog plina.

1) BOYLE-MARIOTTEOV ZAKON: $T = konst. \Rightarrow \underline{pV = konst.}$

2) GAY-LUSSACOV ZAKON: $p = konst. \Rightarrow \underline{\frac{V}{T} = konst.}$

3) CHARLESOV ZAKON: $V = konst. \Rightarrow \underline{\frac{p}{T} = konst.}$

3) $V = V_0(1+\alpha t)$

$\alpha = \frac{1}{273}\,K^{-1}$

$V = V_0\left(1+\frac{t}{273\,K}\right)$

$V = V_0 \frac{t+273\,K}{273\,K} = p_0 \frac{T}{T_0}$

$\Rightarrow \frac{V}{V_0} = \frac{T}{T_0} \Rightarrow \frac{V}{T} = konst.$

↳ isto vrijedi i za 3)

JEDNADŽBA STANJA: $f(p, V, T) = 0$

POČ. STANJE: V_0, $T_0 = 273{,}15\,K$, $p_0 = 101\,325\,Pa$ $\xrightarrow[\text{zagrijavanje}]{\text{izobarno}}$ $T_{KON.}$ $\xrightarrow[\text{kompresija}]{\text{izotermna}}$ $p_{KON.}$, $V_{KON.}$

$\downarrow$ $V' = V_0 \frac{T}{T_0}$ $\rightarrow$ $\downarrow$ $pV = p_0 V'$ (V' se smanji na V, povećavamo p_0 do p)

JEDNADŽBA STANJA IDEALNOG PLINA: (*) $\frac{pV}{T} = \frac{p_0 V_0}{T_0} \Rightarrow \boxed{\frac{pV}{T} = konst.}$

↳ 2. OBLIK: $R = \frac{p_0 V_{m0}}{T_0} = \frac{1.0325 \cdot 10^5\,Pa \cdot 0.0224\,m^3 mol}{273{,}15\,K} = 8.314 \frac{J}{K mol}$

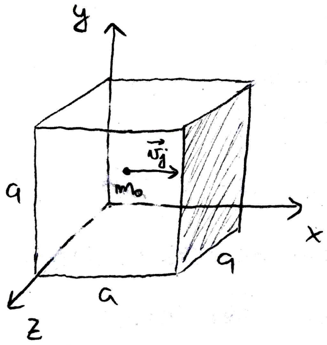
↳ univerzalna plinska konstanta

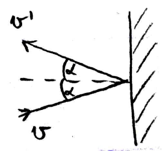
$\frac{pV}{T} = \frac{p_0 V_0}{T_0} = \overbrace{\frac{p_0 V_{m0}}{T_0}}^{R} n$

$pV = nRT$

(*) $\Rightarrow \boxed{pV = nRT}$, gdje je $n = \frac{V_0}{V_{m0}}$ množina plina [mol]

(18) Izvedite tlak idealnog plina u molekularno-kinetičkoj teoriji





- promatramo jednu molekulu mase m_0, njena brzina:

$\vec{v_i} = \vec{v_{ix}} + \vec{v_{iy}} + \vec{v_{iz}}$ → i-ta molekula

- prilikom sudara sa stijenkom promjeni se x komponenta od p:

$\Delta p_{ix} = m_0 v_{ix} - (-m_0 v_{ix}) = 2 m_0 v_{ix}$

- vrijeme potrebno za ponovni sudar sa stijenkom: $\frac{2a}{v_{ix}}$
- broj sudara u jedinici vremena promatrane molekule i stijenke: $\frac{v_{ix}}{2a}$

$\Delta p = \text{impuls sile} = \left(\frac{v_{ix}}{2a}\right)(2 m_0 v_{ix})\Delta t$

- srednja sila kojom molekula djeluje na stijenku posude: $\frac{\Delta p_{ix}}{\Delta t} = \left(\frac{v_{ix}}{2a}\right)(2m_0 v_{ix}) = \frac{m_0 v_{ix}^2}{a}$

- ukupna sila (za N molekula): $F = \frac{\Delta p_x}{\Delta t} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_0 v_{ix}^2}{a}$

$$= \left(\frac{m_0}{a}\right) \sum_{i=1}^{N} v_{ix}^2$$

$$\Rightarrow \quad p = \frac{F}{S} = \frac{F}{a^2}$$

$$p = \left(\frac{m_0}{V}\right) \sum_{i=1}^{N} v_{ix}^2 \qquad (V = a^3)$$

- Srednji kvadrat x komponente brzine molekula: $\overline{v_x^2} = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} v_{ix}^2\right)$

$$\Rightarrow \quad p = \frac{N m_0 \overline{v_x^2}}{V}$$

$$\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} = 3\overline{v_x^2} \quad \Rightarrow \quad \overline{v_x^2} = \frac{1}{3}\overline{v^2}.$$

$$\Rightarrow \quad pV = \frac{1}{3} N m_0 \overline{v^2} \quad \text{ili} \quad pV = \frac{2}{3} N \overline{E_k} \qquad \left(\overline{E_k} = \frac{m_0 \overline{v^2}}{2}\right)$$

SREDNJA KVADRATIČNA (EFEKTIVNA) BRZINA: $\boxed{v_{ef} = \sqrt{\overline{v^2}}}$

$$\Rightarrow \quad pV = \frac{1}{3} N m_0 v_{ef}^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{pV = \frac{1}{3} m v_{ef}^2}$$, uz $m = N m_0$ je masa plina

19. **Napišite izraze za molarne toplinske kapacitete u molekularno-kinetičkoj teoriji za: a) plinove, b) čvrsta tijela.**

molarni toplinski kapaciteti za idealne plinove: $C_V = \frac{1}{n}\frac{dU}{dT}$ $V = konst.$ $(dU = dQ)$

$C_p = \frac{1}{n}\frac{dH}{dt}$ $p = konst.$ $(dH = d(U+pV$

a) plinovi: $\boxed{C_p = \frac{i+2}{2} R}$ $\boxed{C_V = \frac{i}{2} R}$ $(C_p - C_V = R)$

↳ $i = 3$ → jednoatomni plinovi (molekule se gibaju samo translatorno (+3)),

↳ $i = 5$ → dvoatomne molekule (translatorno + rotacija (+2))

↳ $i = 7$ → dvoatomne molekule (trans. + rotacija + titranje ($E_k + E_p$, +2))

↳ $i = 8$ → višeatomni plinovi (trans. + titranje + rotacija (+3))

b) čvrsta tijela: $\overline{E} = \overline{E_k} + \overline{E_p} = 2\overline{E_k} = 2 \cdot \frac{3}{2} kT = 3kT$

$$U = \frac{3}{2} NkT = 3nRT$$

$$\boxed{C_V = \frac{1}{n}\frac{dU}{dT} = 3R}$$

20. Formulirajte prvi zakon termodinamike i izvedite Mayerovu relaciju za idealni plin.

1) $\boxed{Q = \Delta U + W}$ - u izoliranom sistemu ukupna energija ostaje konstantna bez obzira na procese koji se događaju u sistemu

$Q \rightarrow$ POZITIVNA: kad toplina ulazi u sustav

$\searrow$ NEGATIVNA: kad toplina izlazi iz sustava

$W \rightarrow$ POZITIVAN: kad ga vrši sustav

$\searrow$ NEGATIVAN: kad ga okolina vrši nad sustavom

- 1. Z.TD za infinitezimalne procese: $\boxed{đQ = dU + đW}$

→ funkcije procesa, osim granica integracije treba definirati i proces kojim sustav prevodimo iz poč. u kon. stanje

2) $dQ = dU + dW$

$$m C_p dT = m C_v dT + p dV$$

$$m (C_p - C_v) dT = m R dT$$

(*) $\boxed{C_p - C_v = R}$ MAYEROVA RELACIJA

molarni topl. kapaciteti

specifični topl. kapaciteti $\left(c_p - c_v = \frac{R}{M}\right)$

21. Izvedite jednadžbe adijabate (Poissonove jednadžbe).

ADIJABATSKI KOEFICIJENT: $\boxed{K = \frac{C_p}{C_v}}$

(*) $\Rightarrow K C_v - C_v = R$ $\qquad C_p - \frac{C_p}{K} = R$

$$C_v = \frac{R}{K-1} \qquad C_p = \frac{R}{1 - \frac{1}{K}} \Rightarrow C_p = \frac{KR}{K-1}$$

1. Z.TD. : $dU = -dW = -p dV$

$(*_2)$ $\cancel{m} \frac{R}{K-1} dT = -p dV = -\cancel{m} RT \frac{dV}{V}$

$$\frac{dT}{T} = -(K-1) \frac{dV}{V} \quad / \int$$

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = -(K-1) \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V}$$

$$\ln \frac{T_2}{T_1} = -(K-1) \ln \frac{V_2}{V_1} \quad / \,\hat{}\, e$$

1) $\boxed{\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{K-1}} \Rightarrow TV^{K-1} = \text{konst.}$

2) $(pV = mRT)$

$$\frac{\frac{p_2 V_2}{\cancel{mR}}}{\frac{p_1 V_1}{\cancel{mR}}} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{K-1}$$

$\boxed{\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^K} \Rightarrow pV^K = \text{konst.}$

3) (2) $\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^K \quad / \frac{1}{K}$

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{K}} = \frac{V_1}{V_2}$$

(1) $\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{K}(K-1)}$

$$\boxed{\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{K-1}{K}}}$$

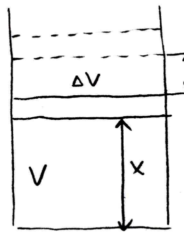
$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^K = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1-K}$$

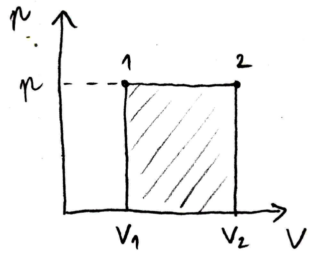
$\Rightarrow T^K p^{1-K} = \text{konst}$

(22.) Izvedite izraze za rad u izobarnoj, izotermnoj i adijabatskoj promjeni stanja idealnog plina.

(10.) TERMODINAMIKA

1) $p = konst.$



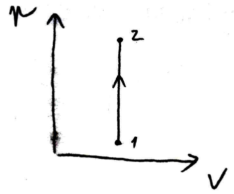


$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = pS\,dx$

$dW = p\,dV$

$W = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV = p(V_2 - V_1)$

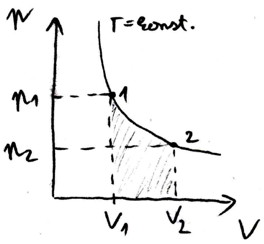
2) $V = konst.$



$dV = 0 \Rightarrow dW = 0$

$dQ = dU$

3) $T = konst.$

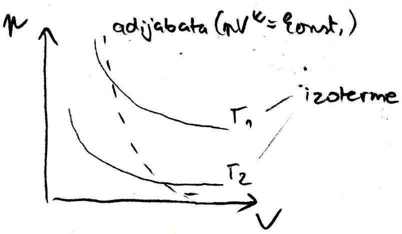


$W = \int_1^2 p\,dV = mRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V}$

$W = mRT \ln \frac{V_2}{V_1} = mRT \ln \frac{p_1}{p_2}$

4) $dQ = 0$

$dU = -dW$

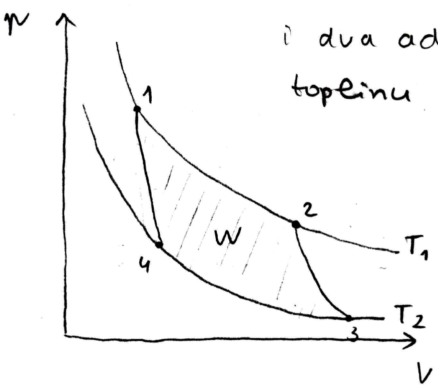


$W = \int_1^2 p\,dV = mR \int_1^2 T \frac{dV}{V}$ ← $(*_2)$

$W = \frac{mR}{1-\kappa} \int_{T_1}^{T_2} dT$

$W = \frac{mR}{\kappa - 1} (T_1 - T_2)$

(23.) Opišite Carnotov kružni proces. Izvedite izraz za faktor korisnog djelovanja

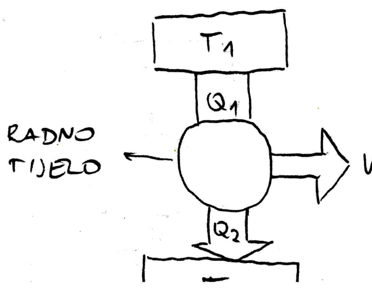


je proces u kojem se sistem s idealnim plinom nakon dva izotermna i dva adijabatska procesa vraća u početno stanje, te tako dovedenu toplinu djelomično pretvara u mehanički rad.

1) POČETNO STANJE: p_1, V_1, T_1

1→2) IZOTERMNA EKSPANZIJA : p_2, V_2, T_1
($\Delta U = 0$)

$W_{12} = mRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = Q_1$
⊕ ⊕



2→3) ADIJABATSKA EKSPANZIJA : plin se širi od V_2 do V_3 i hladi od T_1 do T_2
($Q = 0$)

$W_{23} = \frac{mR}{\kappa - 1}(T_1 - T_2)$
⊕

3 → 4) IZOTERMNA KOMPRESIJA : V_3 se stisne na volumen V_4

($\Delta U = 0$)

$$W_{34} = mRT_2 \ln \frac{V_4}{V_3} = Q_2$$

$\ominus$ $\ominus$

4 → 1) ADIJABATSKA KOMPRESIJA : sistem se vraća u početno stanje

($Q = 0$)

$$W_{41} = \frac{mR}{k-1}(T_2 - T_1)$$

$\ominus$

UKUPNI RAD: $W = W_{12} + W_{23} + W_{34} + W_{41}$ (proporcionalan površini unutar 1-2-3-4)

$W_{23} = W_{41}$

$W = W_{12} - W_{34}$

- primjenjena količina topline : $Q_1 + Q_2 = |Q_1| - |Q_2|$
- kružni proces: $\Delta U = 0$
- 1. Z. TD. : $Q = \Delta U + W$

  $W = Q_1 + Q_2$

  $W = |Q_1| - |Q_2|$

KOEFICIJENT KORISNOG DJELOVANJA η :

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{|Q_1| - |Q_2|}{|Q_1|} = 1 - \frac{|Q_2|}{|Q_1|}$$

$0 < \eta < 1$

$$T_1 V_2^{k-1} = T_2 V_3^{k-1}$$

$$T_1 V_1^{k-1} = T_2 V_4^{k-1} \quad \Big/ :$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$$

$$Q_1 = mRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$Q_2 = mRT_2 \ln \frac{V_4}{V_3}$$

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{|Q_2|}{|Q_1|} = 1 - \frac{T_2}{T_1}} \Rightarrow \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}$$