SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
Fakultet elektrotehnike i računarstva
Zavod za automatiku i računalno inženjerstvo
Unska 3, Zagreb, HRVATSKA

Prof. dr. sc. Ivan Petrović

Računalno upravljanje sustavima

http://www.fer.hr/predmet/rus

Poglavlje 0:
Organizacija i administracija predmeta

© Ivan Petrović

Osnovni podaci o predmetu

- **Tko ga može upisati?**
  - **Obvezatni predmet modula *Automatika***
  - **Preporučeni izborni predmet modula *Elektroničko i računalno inženjerstvo* i modula *Elektronika***
  - **Studenti drugih modula EIT-a u dogovoru s mentorom**
  - **Preduvjet: *Automatsko upravljanje* (položen)**
- **Koliko ECTS bodova Vam donosi? – 4 ECTS boda**
- **Koji su oblici izvođenja nastave?**
  - **Predavanja: 3 školska sata tjedno tijekom 13 tjedana**
  - **Laboratorijske vježbe: 6 × 2 sata nakon odrađenih pripadnih predavanja (obvezna odrada)**
  - **Domaće zadaće: 6 domaćih zadaća (ujedno pripreme za laboratorijske vježbe)**

© Ivan Petrović

Izvođači nastave

Ime i Prezime	Ured, E-mail	Termin konzultacija
Predavanja		
Prof. dr. sc. Ivan Petrović	C-IX-10, ivan.petrovic@fer.hr	iza predavanja
Dr. sc. Marija Đakulović	C-IX-02, marija.dakulovic@fer.hr	iza predavanja
Asistenti		
Ivan Marković, dipl.ing.	C-IX-02, ivan.markovic@fer.hr	forum ili se najaviti e-mailom
Domagoj Herceg, mag.ing.	C-IX-17, domagoj.herceg@fer.hr	forum ili se najaviti e-mailom

© Ivan Petrović

Provjera znanja studenata

Aktivnost	najveći broj bodova	prag
Domaće zadaće (DZ)	12 bodova	50%
Laboratorijske vježbe (LV)	12 bodova	50%
Međuispit (MI)	26 bod	40%
Završni ispit – pismeni (ZIP)	30 bodova	50%
Završni ispit – usmeni (ZIU)	20 bodova	

1. Odrađene sve LV i DZ i na njima skupljeno najmanje 6+6 bodova
2. Na MI skupljeno najmanje 10 bodova

Ostvareni broj bodova	Ocjena
50-62	dovoljan (2)
62,5-74,5	dobar (3)
75-87	vrlo dobar (4)
87,5-100	izvrstan (5)

Domaće zadaće i laboratorijske vježbe

- **Domaće zadaće (DZ)**
  - **Predaju se on-line preko Ferko sustava**
  - **Svaka zadaća odgovara pripremi za jednu laboratorijsku vježbu te bez nje nije moguće pristupiti polaganju laboratorijske vježbe**
- **Laboratorijske vježbe (LV)**
  - **Obvezatne su i uvjet su za pristup završnom ispitu**
  - **Provode se primjenom MATLAB-a kod kuće ili u dvoranama koje su otvorene za studente (A109, A110 i PCLAB1)**
  - **U terminu vježbe piše se kratka provjera znanja (blic)**
  - **Studenti koji iz opravdanih razloga nisu predali izvještaj niti pristupili blicu u roku od 1 tjedna nakon termina vježbe trebaju donijeti ispričnicu tajnici zavoda (IX. kat) te se prijaviti za nadoknadu vježbe preko Ferko sustava. O opravdanosti izostanka odlučuje nositelj predmeta.**

© Ivan Petrović

Međuispit i završni ispit

- Međuispit se organizira kao pismeni ispit koji se sastoji od računskih zadataka
- Tijekom semestra bit će organizirane auditorne vježbe na kojima će se rješavati zadaci
- Studenti imaju na raspolaganju i službenu zbirku zadataka
- Završni ispit sastoji se od pismenog i usmenog dijela ispita

© Ivan Petrović

Zašto RUS?

- Računala omogućuju automatski rad raznih tehničkih sustava - od jednostavnih do iznimno složenih
- Računalni sustavi upravljanja (RSU) primjenjuju se za upravljanje raznorodnim tehničkim sustavima, ali su koncepti projektiranja RUS-a jedinstveni
- Rad u stvarnom vremenu razlikuje primjenu računala za upravljanje (tehničkim) sustavima od drugih primjena računala
- Složenost zahtjeva na rad u stvarnom vremenu RSU ovisi o upravljanome tehničkom sustavu

© Ivan Petrović

Ciljevi predmeta

- **Ovladati osnovnim postupcima matematičkog modeliranja vremenski diskretnih sustava**
- **Ovladati postupcima projektiranja digitalnih regulatora koji se najčešće koriste**
- **Ovladati osnovnim izvedbenim aspektima računalnih sustava upravljanja**
- **Ovladati osnovama raspodijeljenih računalnih sustava upravljanja**
  - **specifičnostima upravljanja u zatvorenoj petlji preko komunikacijske mreže**

Što treba znati za uspješan razvoj RUS?

- **Matematičko modeliranje procesa**
  - **teoretsko i eksperimentalno određivanje modela procesa**
- **Teoriju automatskog upravljanja**
  - **postupke analize i sinteze računalnih sustava upravljanja**
- **Mjernu tehnologiju**
  - **fizikalne zakonitosti mjerenja, izvedbe osjetila, dinamičke karakteristike i točnost osjetila, ...**
- **Računalnu tehnologiju**
  - **odabir procesora, programskih jezika, RTOS, računalnu aritmetiku,...**
- **Komunikacijsku tehnologiju**
  - **karakteristike komunikacijskih sustava prilagođenih RSU-a**

© Ivan Petrović

Sadržaj predmeta

- Matematičko modeliranje linearnih diskretnih sustava
- Strukture digitalnih regulatora
- Postupci sinteze digitalnih sustava upravljanja
- Strukture i izvedbe RSU-a
- Izvedbeni aspekti digitalnih regulatora
- Raspodijeljeni računalni sustavi upravljanja
- Komunikacije u raspodijeljenim računalnim sustavima upravljanja
- Regulacijske petlje zatvorene preko komunikacijskih mreža

© Ivan Petrović

Literatura

- **Ivan Petrović:** *Računalno upravljanje sustavima – bilješke za predavanja*, **ZARI, FER Zagreb. (bit će dostupno na mrežnoj stranici predmeta)**
- **Nedjeljko Perić:** *Automatsko upravljanje – Predavanja (po FER1)*. **ZARI, FER Zagreb, 2005. (u skriptarnici FER-a)**
- **Nedjeljko Perić, Ivan Petrović:** *Automatizacija postrojenja i procesa – Predavanja*. **ZARI, FER Zagreb, 2005. (u skriptarnici FER-a)**
- **Nedjeljko Perić, Zoran Vukić, Mato Baotić, Mario Vašak:** *Automatsko upravljanje – Predavanja (po FER2)*. **ZARI, FER Zagreb, 2008. (dostupno na mrežnoj stranici predmeta)**
- **Dimitrios Hristu-Varsakelis and William S. Levine (Editors):** *Handbook of Networked and Embedded Control Systems*, **Birkhauser, 2005.**
- **G. F. Franklin, J. D. Powell, A. Emami-Naeini:** *Feedback Control of Dynamical Systems*, **4*th* edition, Prentice Hall, 2002.**
- **G. F. Franklin, J. D. Powel, M. L. Workman:** *Digital Control of Dynamic Systems*, **3*rd* edition, Prentice Hall, 1997.**
- **Karl J. Astrom, Bjorn Wittenmark:** *Computer-Controlled Systems*, **Theory and Design, Prentice Hall, 1996.**
- **Paul Katz:** *Digital Control using Microprocessors*, **Prentice Hall, 1981.**

© Ivan Petrović

Raspored nastave po tjednima (okvirno) - 1

1. tjedan
   - Uvodno predavanje: Definicije sustava i upravljanje sustavima. Uloga, osnovne funkcije, zahtjevi i sposobnosti RSU-a. Arhitekture RSU. Upravljačke petlje u RUS-u.
2. tjedan
   - Matematičko modeliranje sustava: Matematički modeli sustava u vremenskom, kompleksnom i frekvencijskom području (repetitorij s AU). Eksperimentalno određivanje matematičkog modela sustava (identifikacija).
   - LV1: Identifikacija sustava grafoanalitičkim postupcima – radi se tijekom 4. tjedna
3. tjedan
   - Pristup sintezi digitalnih regulatora: Definiranje problema sinteze. Pristupi sintezi. Strukture digitalnih regulatora.

Raspored nastave po tjednima (okvirno) - 2

4. tjedan

- Sinteza sustava upravljanja u vremenskom području: 1. dio: Sinteza PID regulatora relejnim postupkom.
- LV2: Relejni postupak podešavanja parametara PID regulatora – radi se tijekom 6. tjedna

5. tjedan

- Sinteza sustava upravljanja u vremenskom području: 2. dio: Opći linearni parametarski regulator i njegova sinteza optimiranjem.
- LV3: Optimiranje diskretnih parametarskih regulatora – radi se tijekom 7. tjedna

Raspored nastave po tjednima (okvirno) - 3

6. tjedan
   - Sinteza sustava upravljanja u frekvencijskom području: Sinteza pomoću Bodeovih dijagrama.
   - LV4: Sinteza u frekvencijskom području – radi se tijekom 9. tjedna
7. tjedan
   - Analitički postupci sinteze sustava upravljanja: Truxal-Guilleminov postupak. Sinteza s obzirom na vodeće i poremećajno vladanje.

- MEĐUISPIT

Raspored nastave po tjednima (okvirno) - 4

8. tjedan
   - Upravljanje procesima s izraženim mrtvim vremenom: Regulatori sa Smithovim prediktorom.
9. tjedan
   - Izvedbeni aspektu RSU: Sklopovske izvedbe. Prijenos i obradba mjernih signala. Prilagodbe prema izvršnim organima i prema operateru.
   - LV5: Izvedbeni aspekti računalnih sustava upravljanja – radi se tijekom 11. tjedna nastave
10. tjedan
   - Implementacijski aspekti digitalnih regulatora: Implementacijski oblici. Konačna duljina riječi. Pogreške koeficijenata. Kvantizacija. Implementacija PID regulatora u FPGA sklopu.
   - LV6: Implementacijski aspekti digitalnih regulatora – radi se tijekom 12. i 13. tjedna nastave

Raspored nastave po tjednima (okvirno) - 5

11. tjedan

- Komunikacijske mreže u računalnom upravljanju sustavima: Komunikacijski model za rad u stvarnome vremenu. Najvažnije RT mreže.

12. tjedan

- Izbor vremena uzorkovanja u raspodijeljenim računalnim sustavima upravljanja: Identifiakcija problema. Algoritam na TT mrežama. Algoritam na CAN mreži.

13. tjedan

- Upravljanje u zatvorenoj petlji preko komunikacijske mreže.

- **ZAVRŠNI ISPIT**

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
Fakultet elektrotehnike i računarstva
Zavod za automatiku i računalno inženjerstvo
Unska 3, Zagreb, HRVATSKA

Prof. dr. sc. Ivan Petrović

Računalno upravljanje sustavima

http://www.fer.hr/predmet/rus

Poglavlje 1: Uvodno predavanje

© Ivan Petrović

Sadržaj predavanja

- **Definicije sustava i upravljanje sustavima**
- **Uloga, osnovne funkcije, zahtjevi i sposobnosti računalnih sustava upravljanja**
- **Arhitekture računalnih sustava upravljanja**
- **Upravljačke petlje u računalnom upravljanju sustavima**

Što je sustav?

"Sustav je dio svijeta koji je povezan s okolinom preko ulaznih i izlaznih djelovanja.

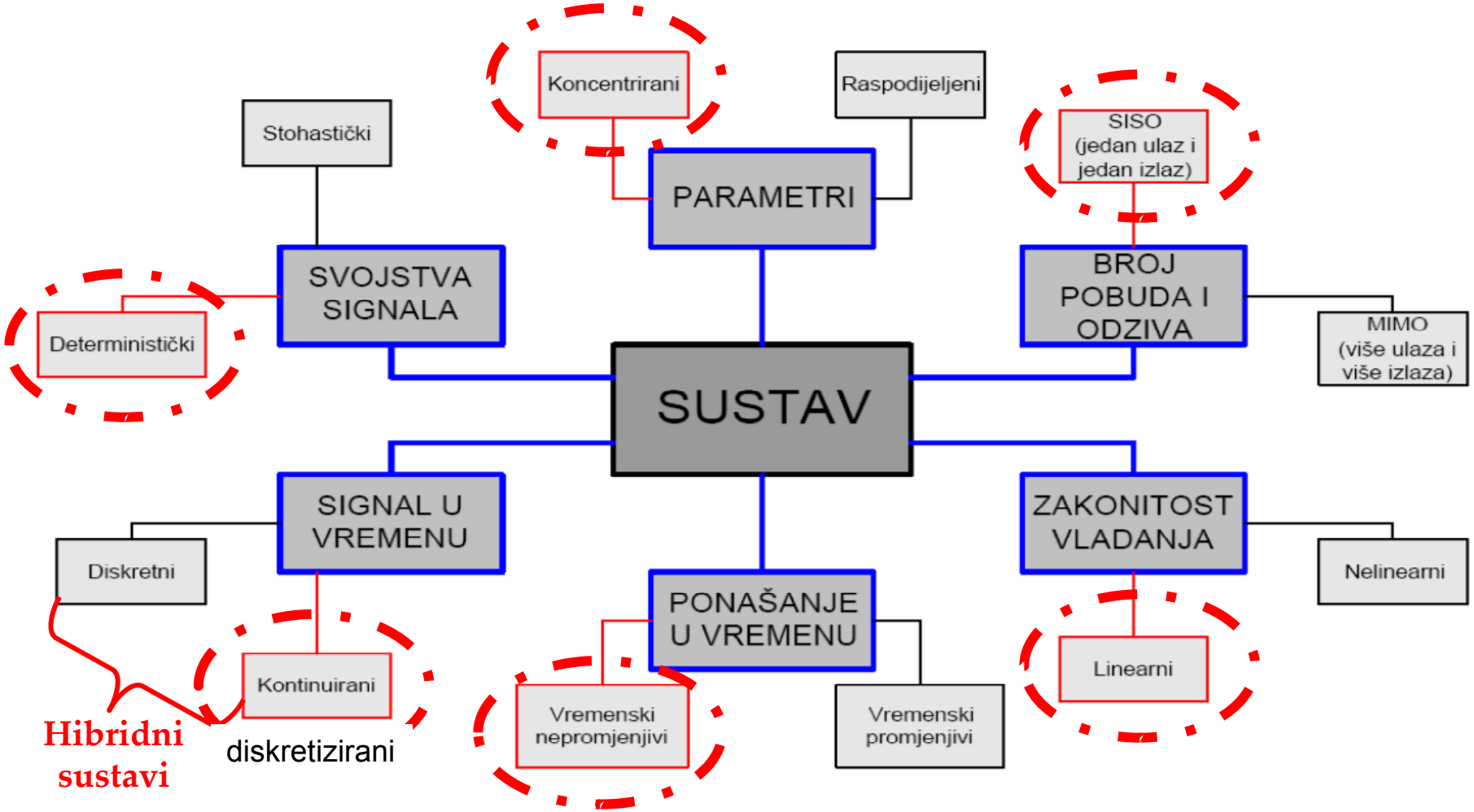
Ulazna djelovanja sustav preoblikuje u izlazna djelovanja.

Izlaz sustava općenito može ovisiti o trenutku pobude i o *memoriji* sustava do trenutka pobude.

Povijest, odnosno memorija sustava tretira se konceptom *stanja sustava*."

Vladimir Kučera (1979.)

Podjele sustava po raznim kriterijima



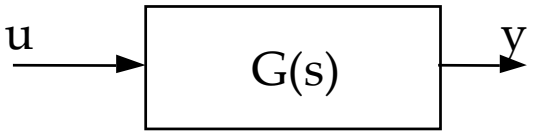
Napomena: U tehnici se sustavi često nazivaju i tehničkim procesima (a ponekad i postrojenjima)

Diskretni i kontinuirani sustavi

diskretno upravljanje

kontinuirano upravljanje

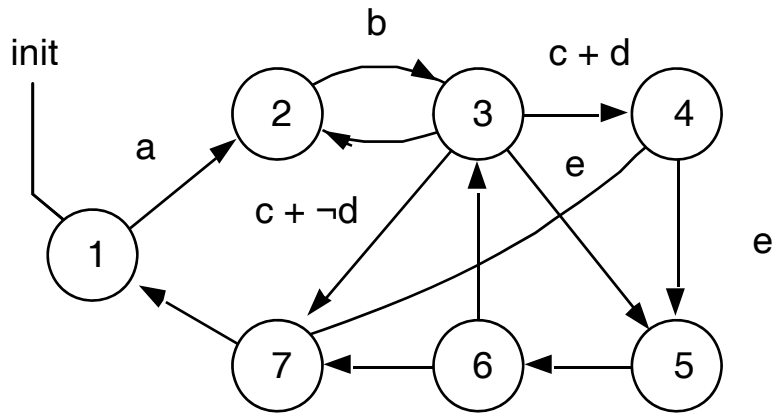
Kontinuirani sustavi



- **Primjeri:** Elektromotorni pogoni, peći, kemijski reaktori, ...
- **Kontinuirani procesi imaju stanja opisana kontinuiranim veličinama (temperatura, napon, brzina,...)**
- **Kontinuirani su procesi uglavnom <u>reverzibilni</u> i <u>monotoni</u>:** To su nužni uvjeti za njihovo upravljanje (u povratnoj vezi)
- **Glavni zadatak upravljanja kontinuiranim procesima jest održavanje stanja sustava u željenom stanju ili gibanje sustava po željenoj trajektoriji stanja**

© Ivan Petrović

Diskretni sustavi



- **Diskretni se sustavi modeliraju dobro definiranim diskretnim, nepreklapajućim stanjima i skokovitim prijelazima između stanja prouzročenih događajima**

- **Diskretni su sustavi većinom <u>reverzibilni</u>, ali <u>ne i monotoni</u>:** uklanjanje pobude koja je prouzročila prijelaz stanja neće nužno vratiti sustav u prethodno stanje (npr. dizalo neće ići natrag na prethodni kat kada otpustimo tipku kojom smo ga pozvali)

- **Glavni zadatak upravljanja diskretnim sustavima odvija se u otvorenoj petlji – daju se naredbe uključi/isključi i sl.**

Hibridni sustavi

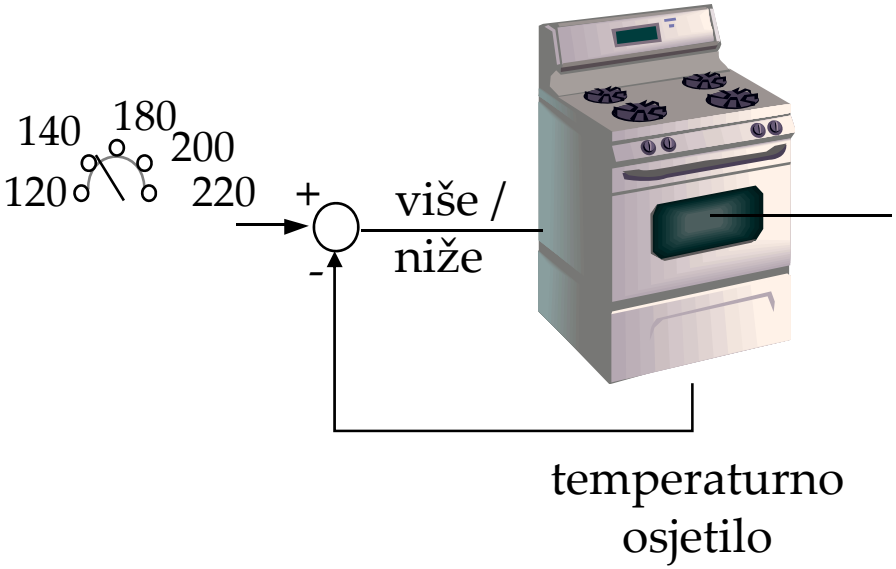
- **U stvarnosti se sva postrojenja sastoje od kontinuiranih i diskretnih procesa, npr.**
  - **Pr. 1: Upravljanje motorom dizala s regulacijom brzine vrtnje i zaustavljanjem na katovima**
  - **Pr. 2: Linija za punjenje boca u načelu je kontinuirani proces, ali je svaki korak niz sekvencijalnih operacija**
- Hibridni sustavi mogu biti opisani kao kontinuirani u okviru diskretnih stanja ili kao nelinearni kontinuirani procesi
- **Standardna je praksa upravljanje kontinuiranim dijelom procesa u zatvorenoj petlji i upravljanje (promjenama) diskretnim stanjima u otvorenoj petlji**

Upravljanje sustavima

- Unatoč vrlo velikoj raznovrsnosti primjena, načela rada RUS-a su slična, jer se veliki broj tehničkih sustava može svrstati u samo nekoliko tipova sustava
- Tri su temeljna upravljačka zadatka:
  - mjerenje (engl. measurement)
  - upravljanje u otvorenoj petlji (engl. command)
  - upravljanje u zatvorenoj petlji (regulacija, engl. control)

Upravljanje u otvorenoj i zatvorenoj petlji

otvorna petlja: temperatura je netočna, ovisi o temperaturi u prostoriji i o količini smjese koja se kuha, ali se vrijeme kuhanja može mijenjati

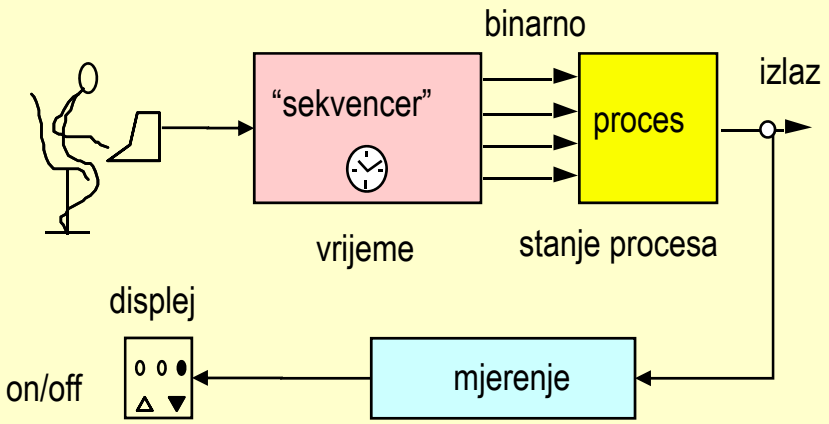


zatvorena petlja: temperatura točno regulirana, potrebno mjerenje regulirane veličine (temperature)

Upravljanje u otvorenoj i zatvorenoj petlji

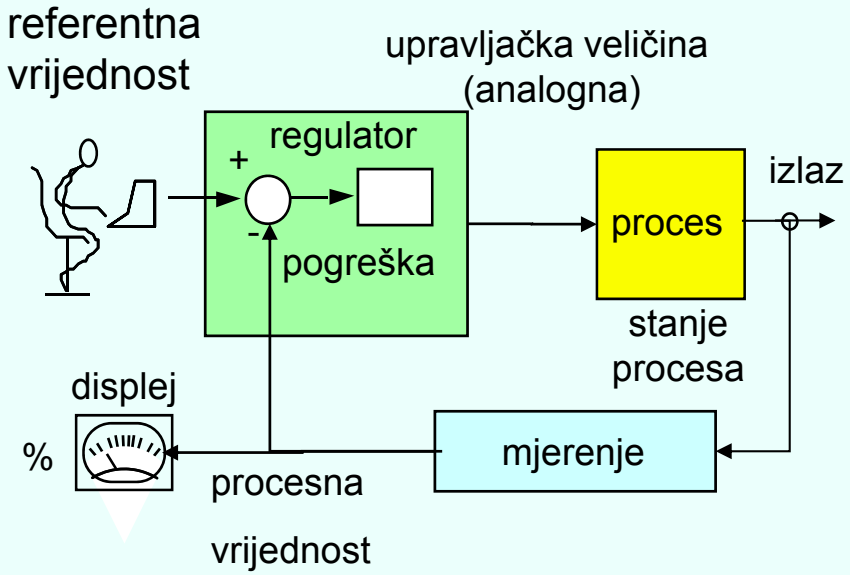
upravljanje u otvorenoj petlji

ključni pojmovi: sekvencijalno / kombinacijsko, binarne veličine, diskretni procesi,
“šaržni procesi", “proizvodni procesi"



upravljanje u zatvorenoj petlji

ključni pojmovi: povratna veza, analogne veličine, kontinuirani procesi, "procesno upravljanje"



© Ivan Petrović

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
Fakultet elektrotehnike i računarstva
Zavod za automatiku i računalno inženjerstvo
Unska 3, Zagreb, HRVATSKA

Poglavlje 1: Uvodno predavanje

Uloga, osnovne funkcije, zahtjevi i sposobnosti RSU

© Ivan Petrović

Uloga računala u sustavima upravljanja

Funkcije u otvorenoj petlji:

- Akvizicija i obradba podataka
- Prijenos podataka između procesa i operatera
- Prikaz stanja procesa operateru
- Prikupljanje i spremanje podataka za trendove, histograme i izvještaje
- Simulacije i obučavanje
- Algoritmi optimizacije procesa

Funkcije u zatvorenoj petlji:

- Zaštita sustava od opasnih stanja
- Regulacijske petlje
- Sekvencijalno upravljanje diktirano procesom

- Sustav upravljanja djeluje autonomno na proces, bez utjecaja operatera

© Ivan Petrović

Osnovni zahtjevi na RSU procesima - 1

- **RSU mora komunicirati s procesom u stvarnome vremenu, tj. mora biti u stanju reagirati na promjene u procesu u dovoljno kratkom vremenu da ne dolazi do degradacije vladanja procesa.**
- **Čimbenici koji određuju može li RSU raditi u stvarnome vremenu su:**
  - **brzina mikroprocesorskih jedinica,**
  - **brzina operacijskog sustava,**
  - **izvedba aplikacijskog softvera,**
  - **brzina i učinkovitost komunikacije,**
  - **broj I/O događaja.**

Osnovni zahtjevi na RSU procesima - 2

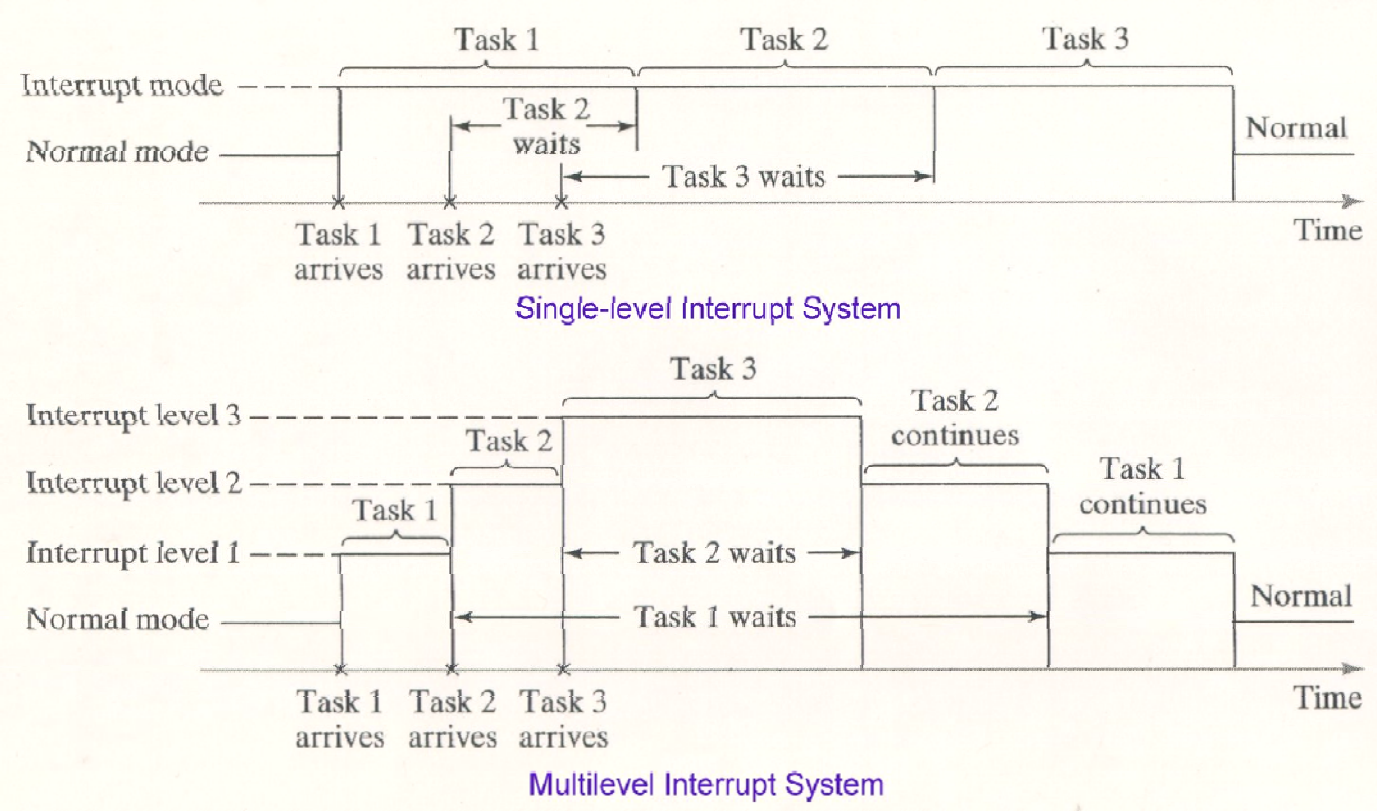
- **Višezadaćnost, tj. sposobnost obavljanja više zadataka istodobno bez međusobnog sukoba među njima.**
- **Zadaci su:**
  - **Prekidi iz procesa. RSU mora reagirati na dolazeći signal iz procesa.**
  - **Vremenski inicirani zadaci. RSU mora moći izvesti akciju u zadanom vremenskom trenutku.**
  - **Upravljački signali procesu. RSU mora moći izračunavati i slati upravljačke signale procesu.**
  - **Sustavski i programski inicirani događaji. Računalo mora moći komunicirati s drugim računalima i periferijskim uređajima.**
  - **Operatorski inicirani događaji. RSU mora moći prihvaćati i odgovarati na naredbe operatora.**

Sposobnosti RSU-a - 1

- **Da bi mogao udovoljiti navedenim zahtjevima, RSU mora imati sljedeće sposobnosti:**
  - **"Polling". Periodičko uzorkovanje podataka koji označavaju/mjere stanje procesa. Problemi koji se moraju razmatrati su:**
    - **Frekvencija uzorkovanja,**
    - **Redoslijed uzorkovanja i**
    - **Format uzorkovanih podataka.**
  - **"Interlocks". Sigurnosni mehanizmi za koordinaciju akcija dvaju ili više uređaja i sprječavanje interferencije / miješanja među njima. "Interlock" može proizvesti vanjski uređaj (ulaz) ili sami RSU (izlaz).**
    - **Npr. sprječavanje da istodobno svi semafori na križanju imaju zeleno svjetlo**

Sposobnosti RSU-a - 2

– **Prekidni režim (Interrupt mode). Sposobnost RSU-a da suspendira izvođenje tekućeg programa i izvede drugi program kao odgovor na signal iz procesa koji označava događaj u procesu višeg prioriteta.**



Sposobnosti RSU-a - 3

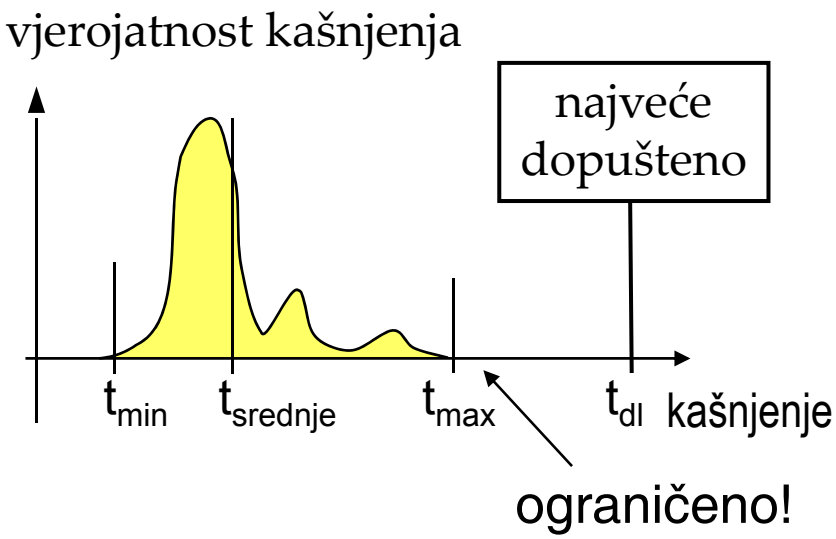
- **Obradba iznimaka (Exception Handling). Iznimka je događaj izvan normalnog ili željenog režima rada procesa ili RSU-a.**
  - **Obrada iznimaka je bitna, glavna, funkcija upravljačkog algoritma.**
  - **Događaji koji mogu izazvati rutine obradbe iznimaka uključuju:**
    - **loša kvaliteta proizvoda;**
    - **vrijednosti procesne varijable izvan normalnog područja;**
    - **nedostatak sirovina ili energije neophodnih za odvijanje procesa;**
    - **opasni uvjeti, npr. požar;**
    - **neispravnost RSU-a.**

Što je rad u stvarnom vremenu?

- **Marketinški se pod radom u stvarnome vremenu smatra sve što se odvija brzo, aktualno ili on-line**
- **Definicija:**
  - **Sustav upravljanja radi u stvarnome vremenu ako generira izlazne (upravljačke) veličine unutar zadanog, ograničenog vremenskog intervala**
- **Razine zahtjeva rada u stvarnome vremenu:**
  - **zajamčeno ispunjenje svih vremenskih zahtjeva i to uvijek - sustavi sa strogim vremenskim ograničenjima (*engl.* hard real-time, HRT)**
  - **ispunjenje vremenskih zahtjeva većinu vremena – sustavi s mekim vremenskim ograničenjima (*engl.* soft real-time, SRT)**
  - **zajamčeno ispunjenje nekih vremenskih zahtjeva uvijek, a nekih većinu vremena**
- **Vremenski se zahtjevi moraju ispuniti i u slučaju nekih kvarnih stanja RSU-a.**

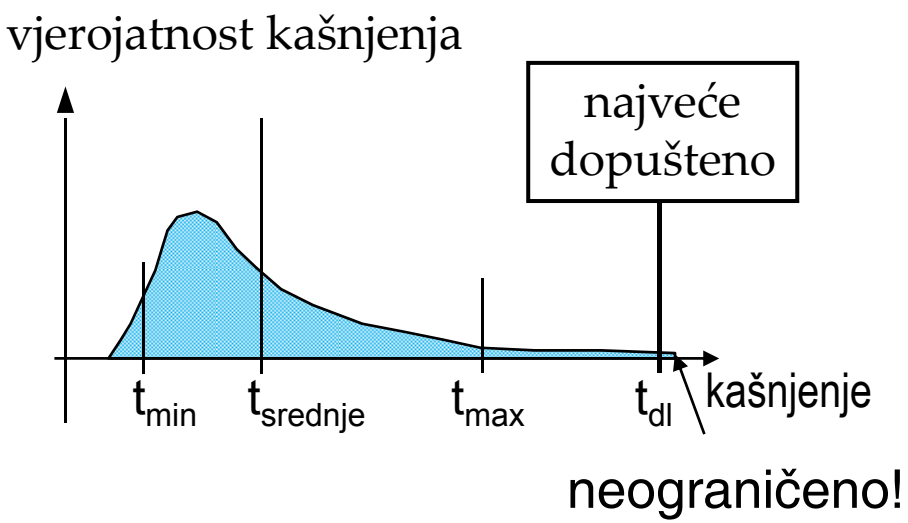
HRT naspram SRT

HRT - (deterministički sustavi)



Vjerojatnost da kašnjenje bude veće od dopuštenog jednaka je nuli u normalnom radnom režimu i pri oporavku sustava od pogrešaka

SRT (nedeterministički sustavi)

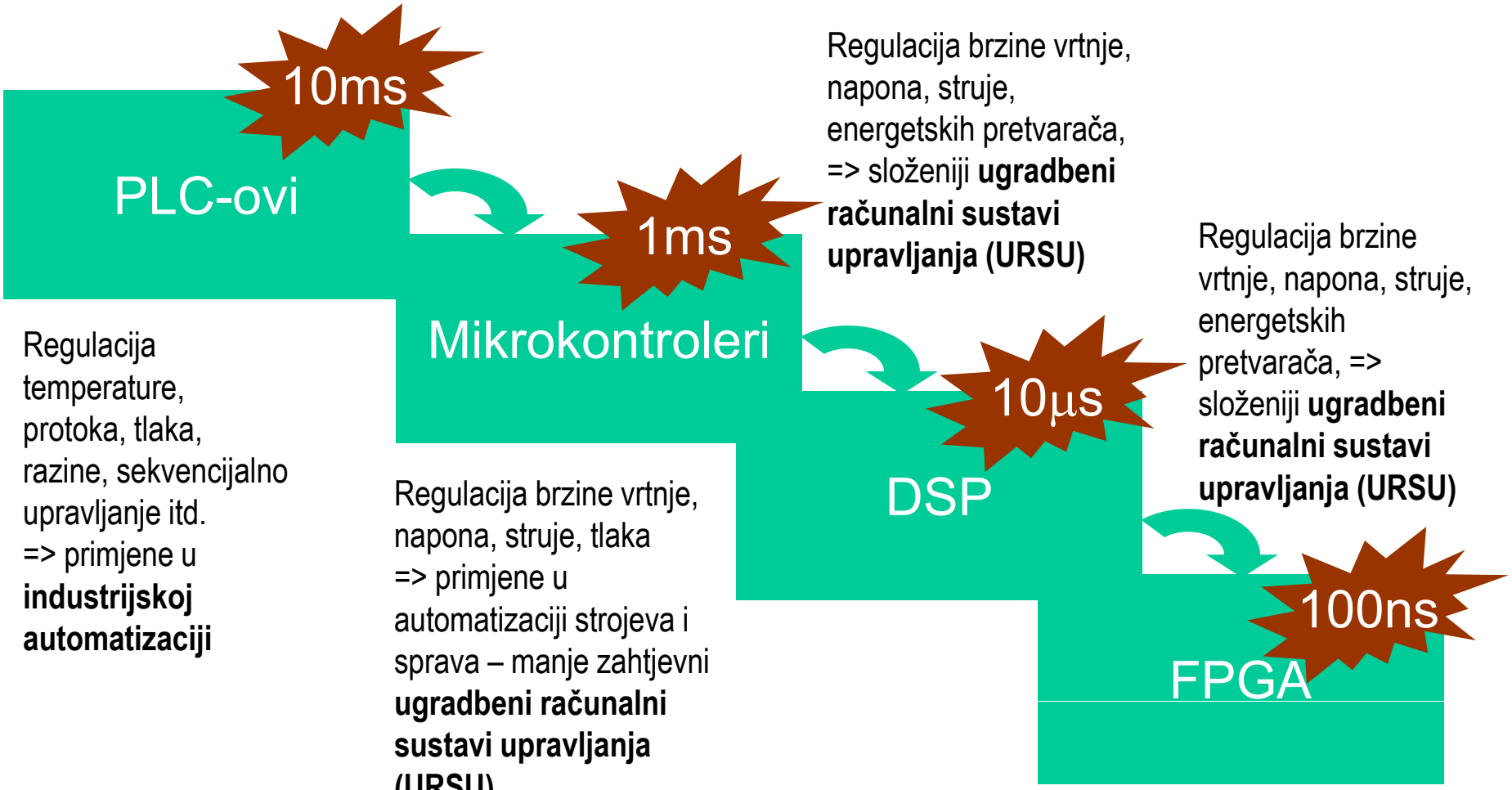


Vjerojatnost da kašnjenje bude veće od dopuštenog je mala, ali ipak veća od nule čak i u normalnom radnom režimu, a pogotovo pri oporavku sustava od pogrešaka

Vremena reakcije - primjeri

10 µs:	pozicioniranje cilindra u ofset printanju (0,1 mm pri 20 m/s)
50 µs:	sinkronizacija senzora u zaštiti sabirnice energetske podstanice (1º za 50Hz)
100 µs:	rezolucija kloka za visko brzinska vozila (1cm pri 360 km/h)
100 µs:	rezolucija događaja u električnoj mreži
1,6 ms:	vrijeme uzorkovanja za algoritme zaštite u energetskim podstanicama
10 ms:	rezolucija događaja u procesnoj industriji
20 ms:	vrijeme otvaranja / zatvaranja jakostrujnog prekidača
200 ms:	prihvatljivo vrijeme reakcije na naredbe operatera
1 s:	prihvatljivo vrijeme osvježavanja podataka na operatorskom zaslonu
3 s:	prihvatljivo vrijeme postavljanja nove slike na operatorskom zaslonu
10 s:	prihvatljivo vrijeme oporavka zablokiranog nadzornog računala
1 min:	opći zahtjev za vremenom osvježavanja procesne baze u slučaju velikih kvarova

Računalna izvedba prema vremenu reakcije



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
Fakultet elektrotehnike i računarstva
Zavod za automatiku i računalno inženjerstvo
Unska 3, Zagreb, HRVATSKA

Poglavlje 1: Uvodno predavanje

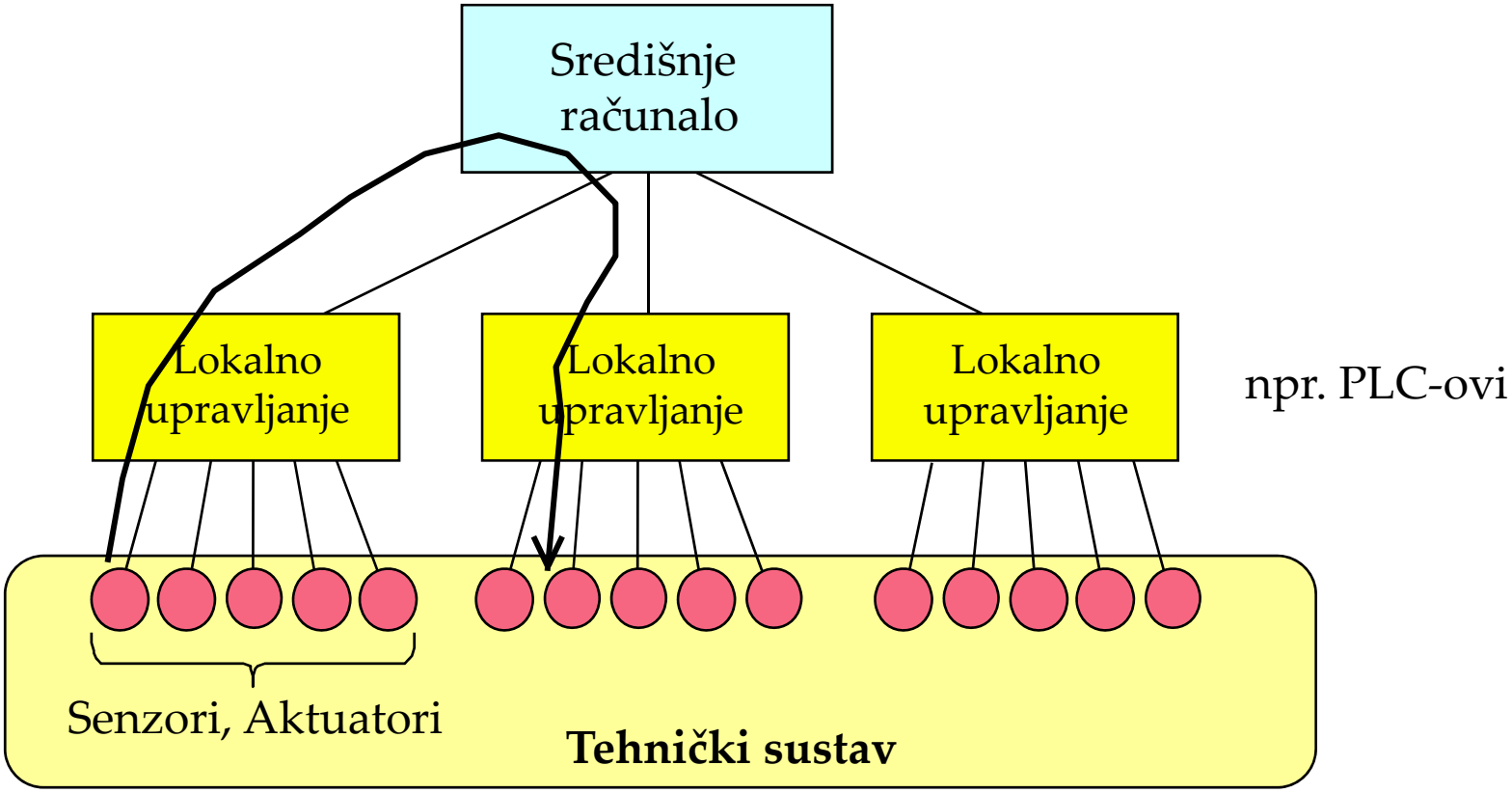
Arhitekture računalnih sustava upravljanja

© Ivan Petrović

Čime je određena arhitektura RSU?

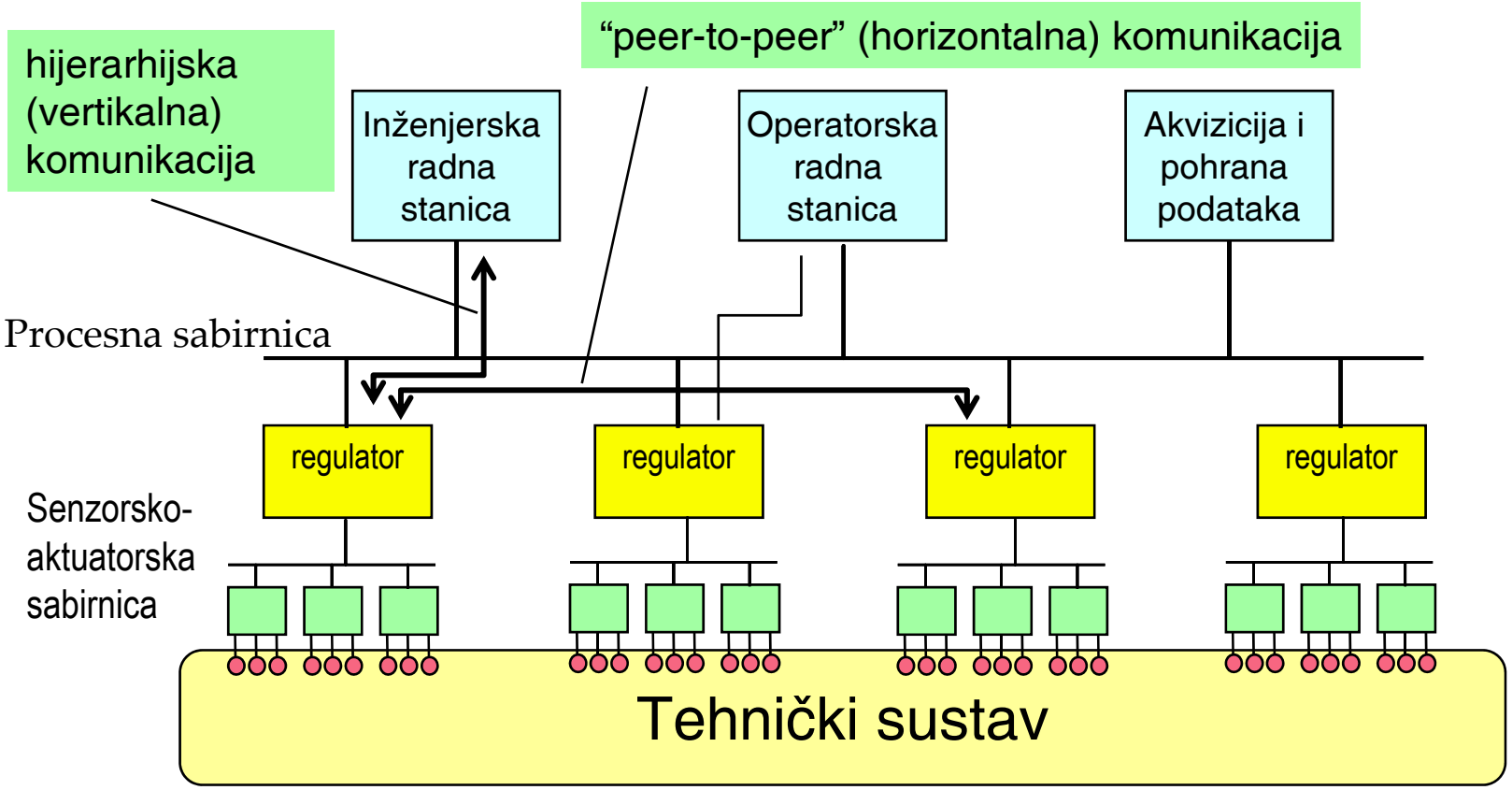
- **Arhitektura RSU određena je arhitekturom i svojstvima upravljanoga procesa, a ne obratno**
  - **Idealno: svaki jedinični proces (stroj, sprava) treba imati vlastiti računalni sustav upravljanja koji je u interakciji s računalnim sustavima upravljanja drugih procesa (strojeva, sprava) s kojima je i sami proces (stroj, sprava) u interakciji**
  - **Vrijeme reakcije RSU-a određeno je dinamičkim svojstvima upravljanoga procesa**
- **Osnovne arhitekture RSU su centralizirana (klasična) i raspodijeljena arhitektura.**

Centralizirana arhitektura RSU



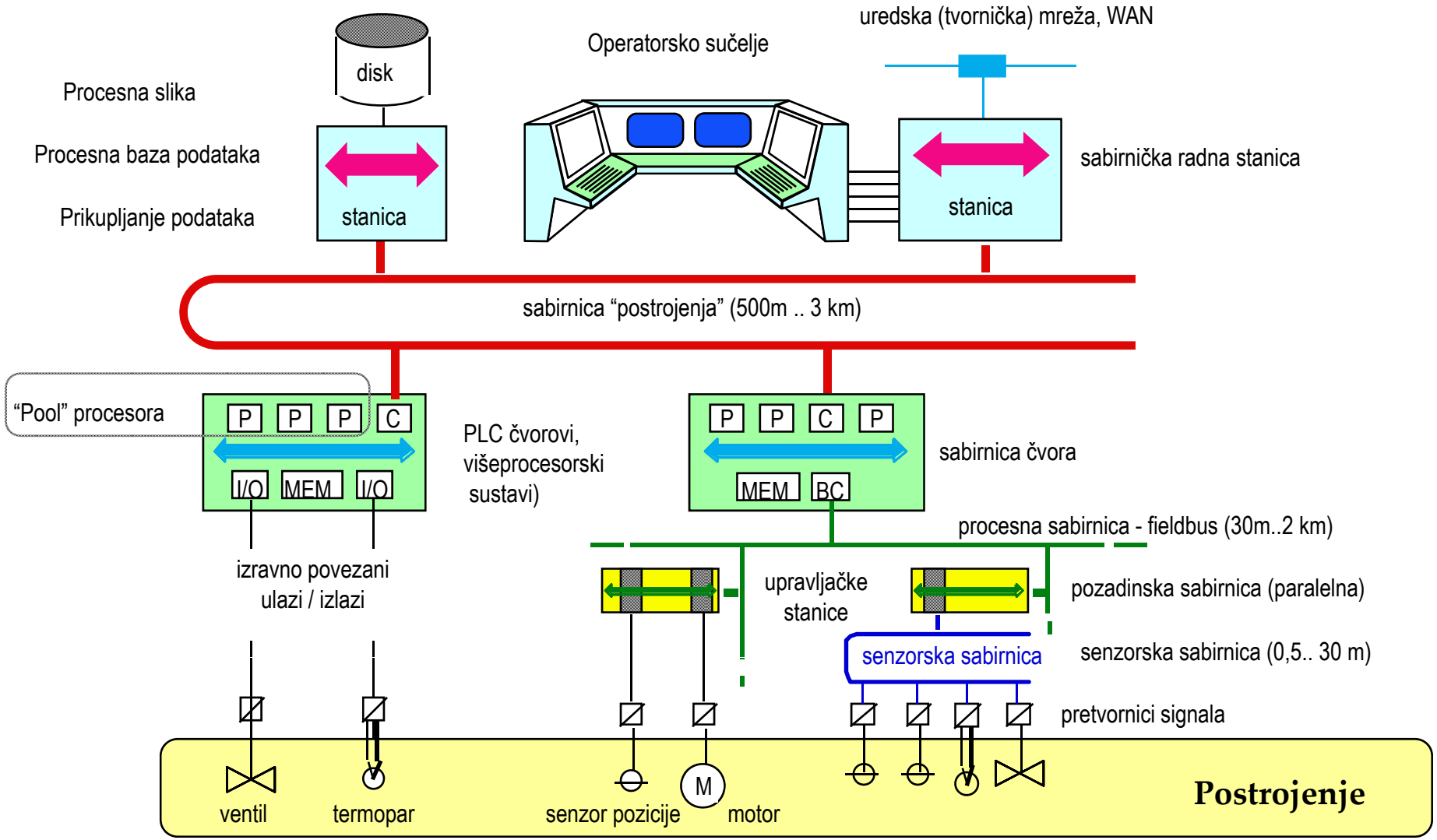
Središnje računalo nadzire rad lokalnih regulatora i prosljeđuje im naredbe

Raspodijeljena arhitektura RSU

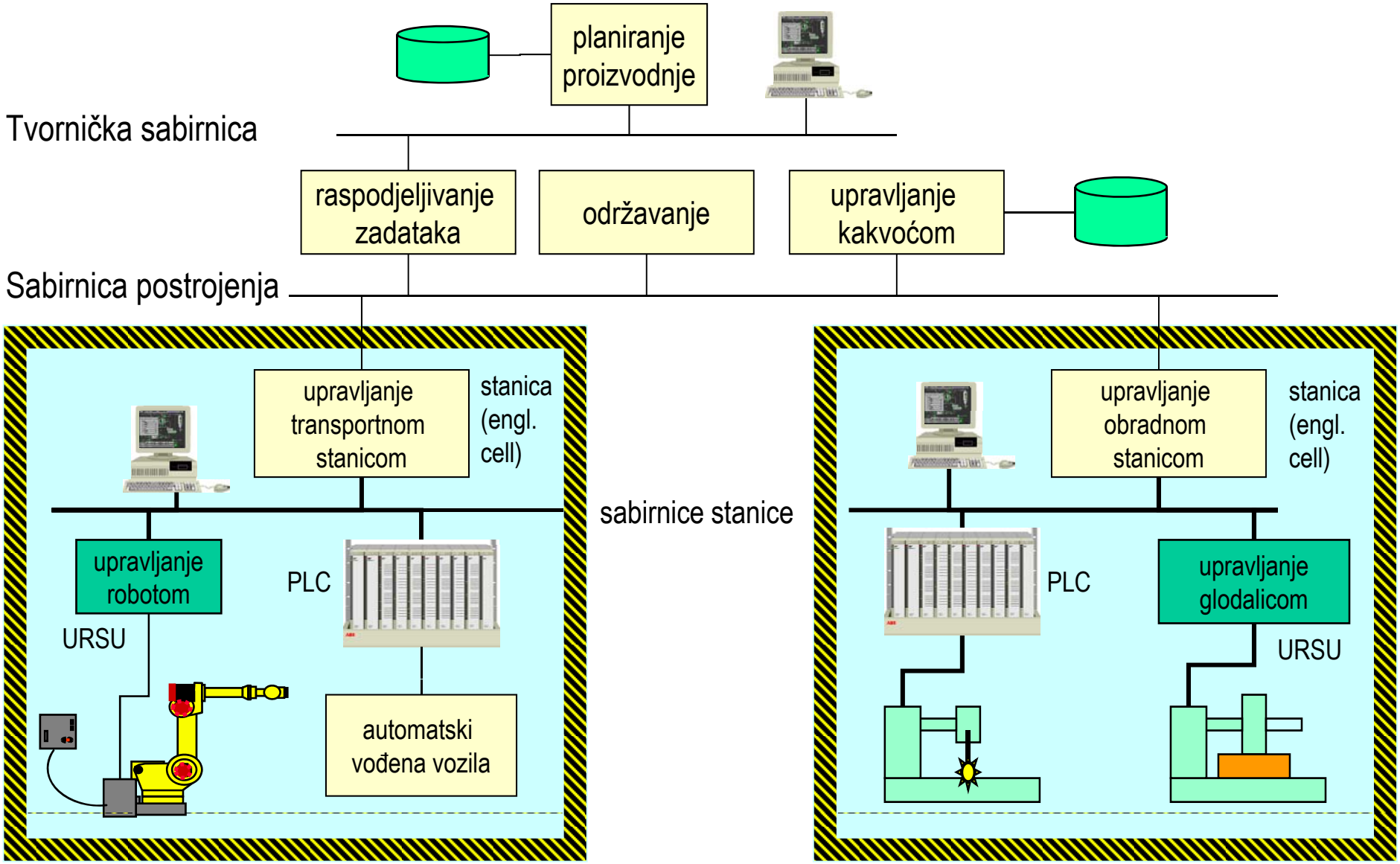


Svi regulatori mogu komunicirati kao ravnopravni sugovornici (nema potrebe za komunikacijom preko središnjeg računala); jedina ograničenja su propusna moć sabirnice i stupanj modularnosti.

Primjer raspodijeljenog RSU složenim industrijskim postrojenjem (process industry)



Primjer raspodijeljenog RSU proizvodnim postrojenjem (manufacturing)



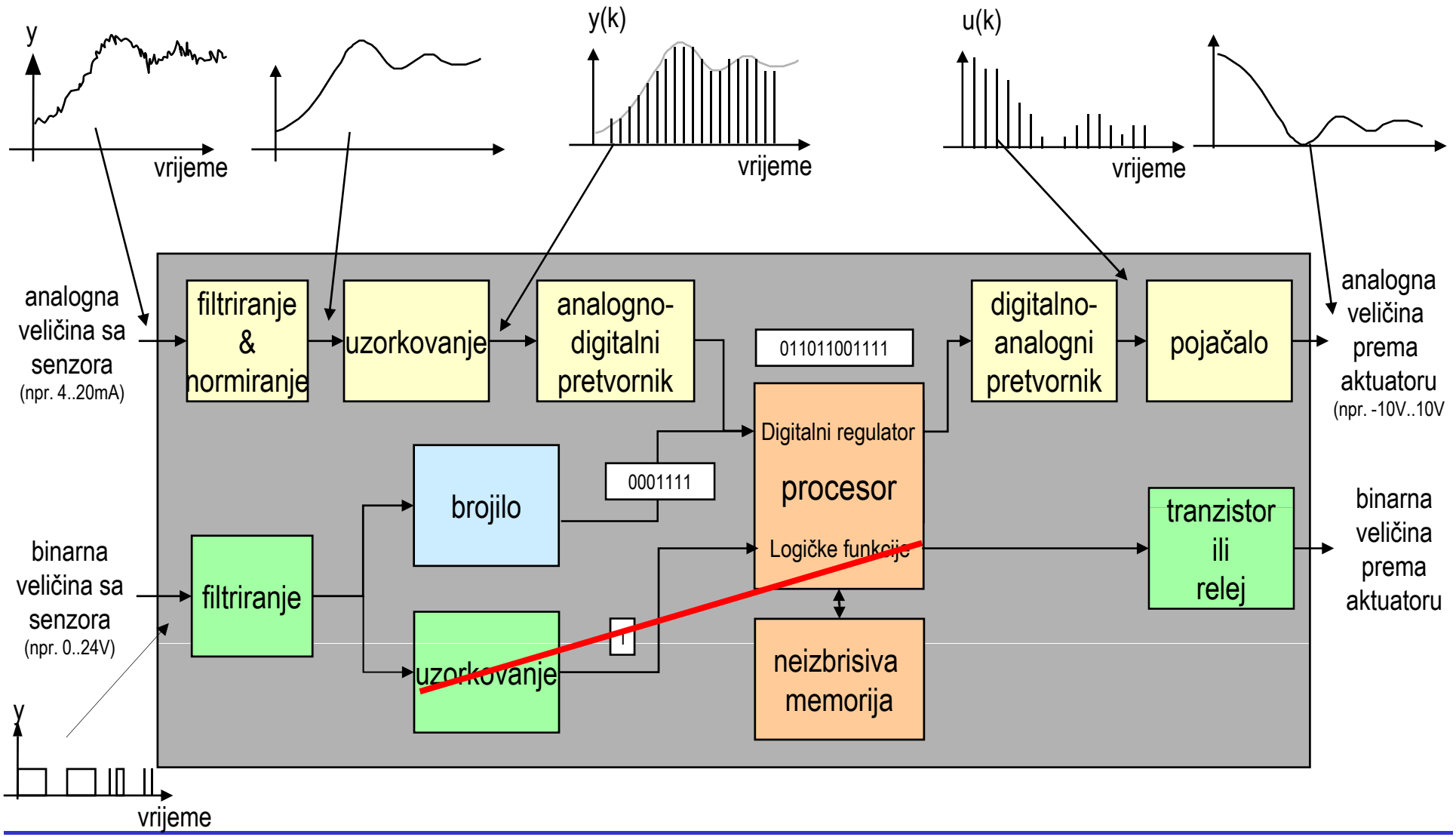
SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
Fakultet elektrotehnike i računarstva
Zavod za automatiku i računalno inženjerstvo
Unska 3, Zagreb, HRVATSKA

Poglavlje 1: Uvodno predavanje

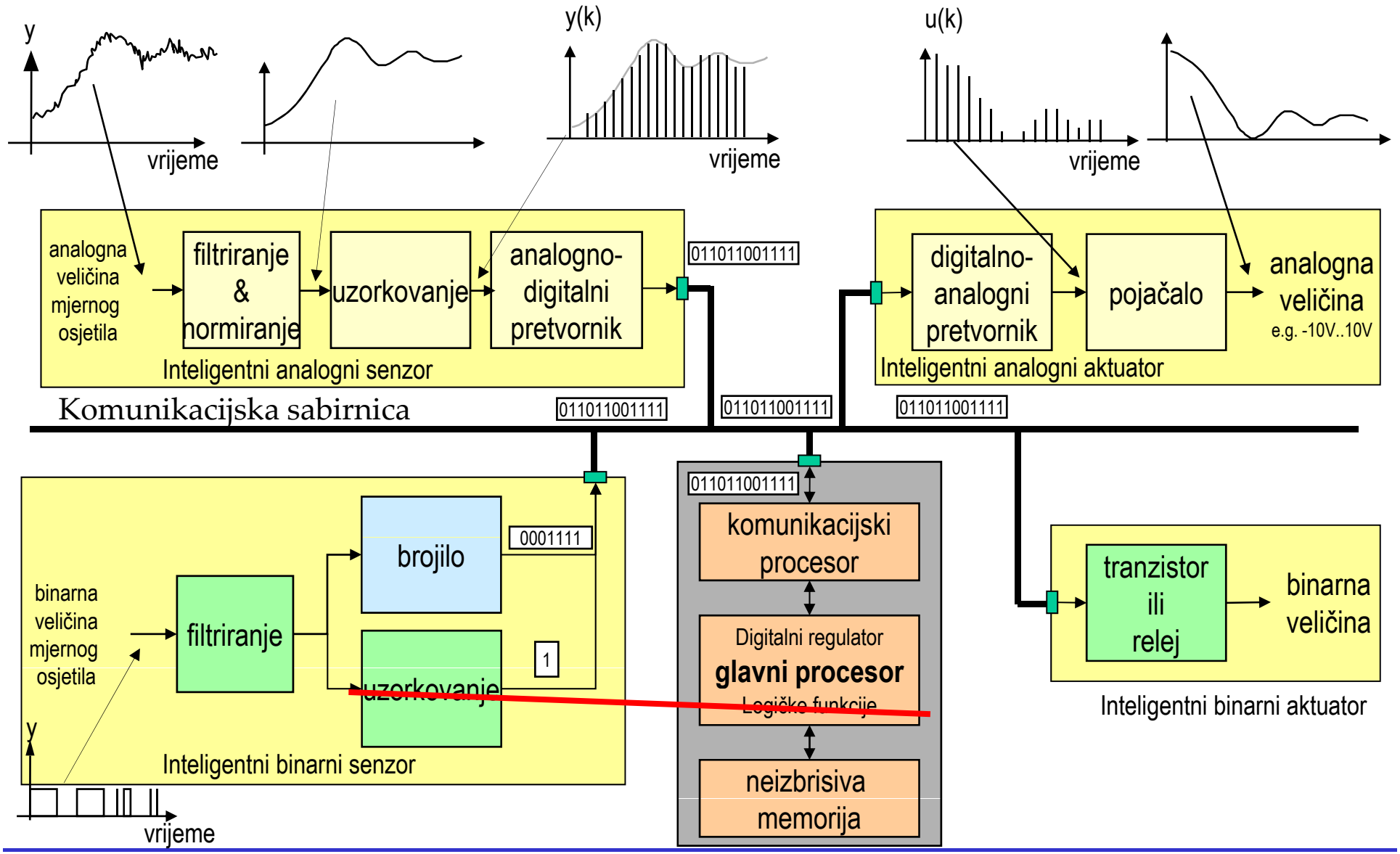
Upravljačke petlje u RUS-u

© Ivan Petrović

Tipična izvedba upravljačkih petlji



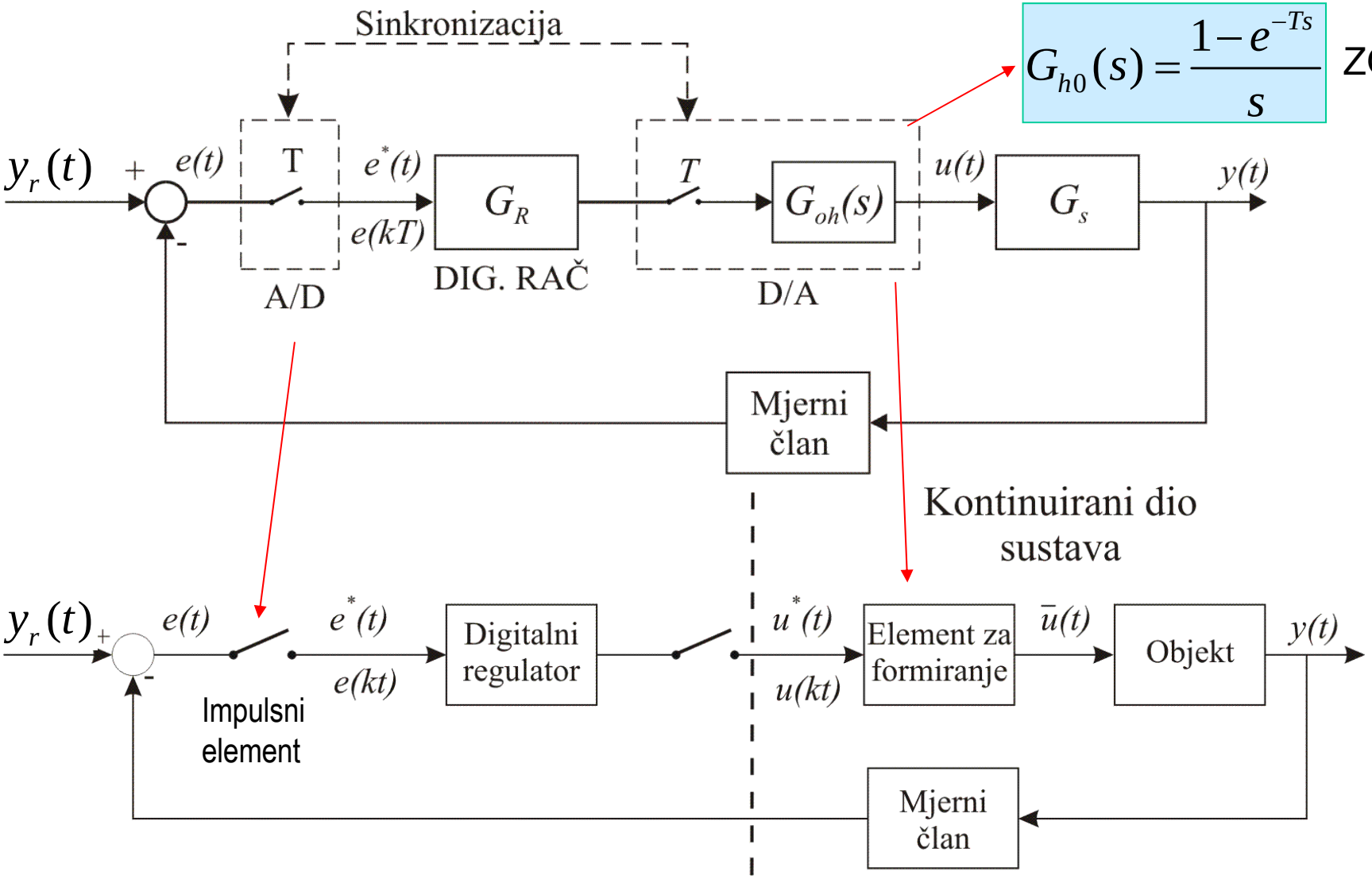
Izvedba upravljačkih petlji preko komunikacijske mreže



© Ivan Petrović

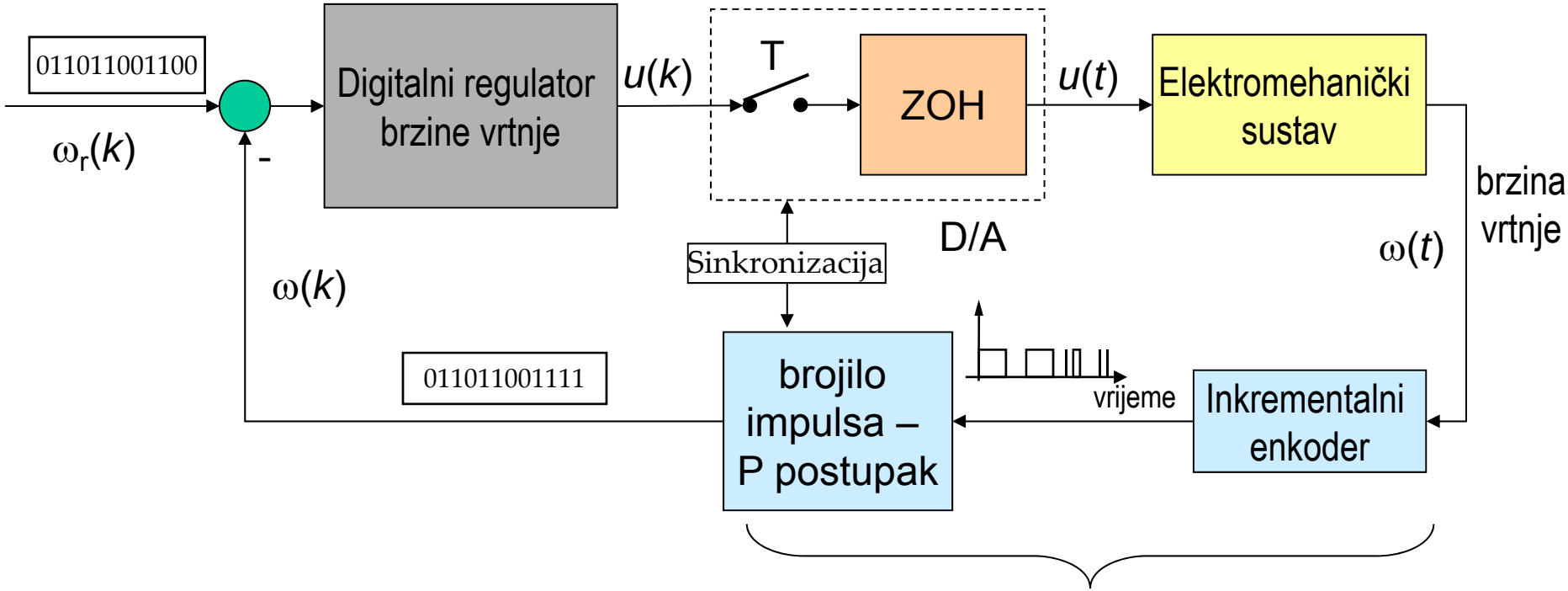
Upravljanje u zatvorenoj petlji kontinuiranog dinamičkog sustava – A/D i D/A

$$G_{h0}(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s}$$ ZOH



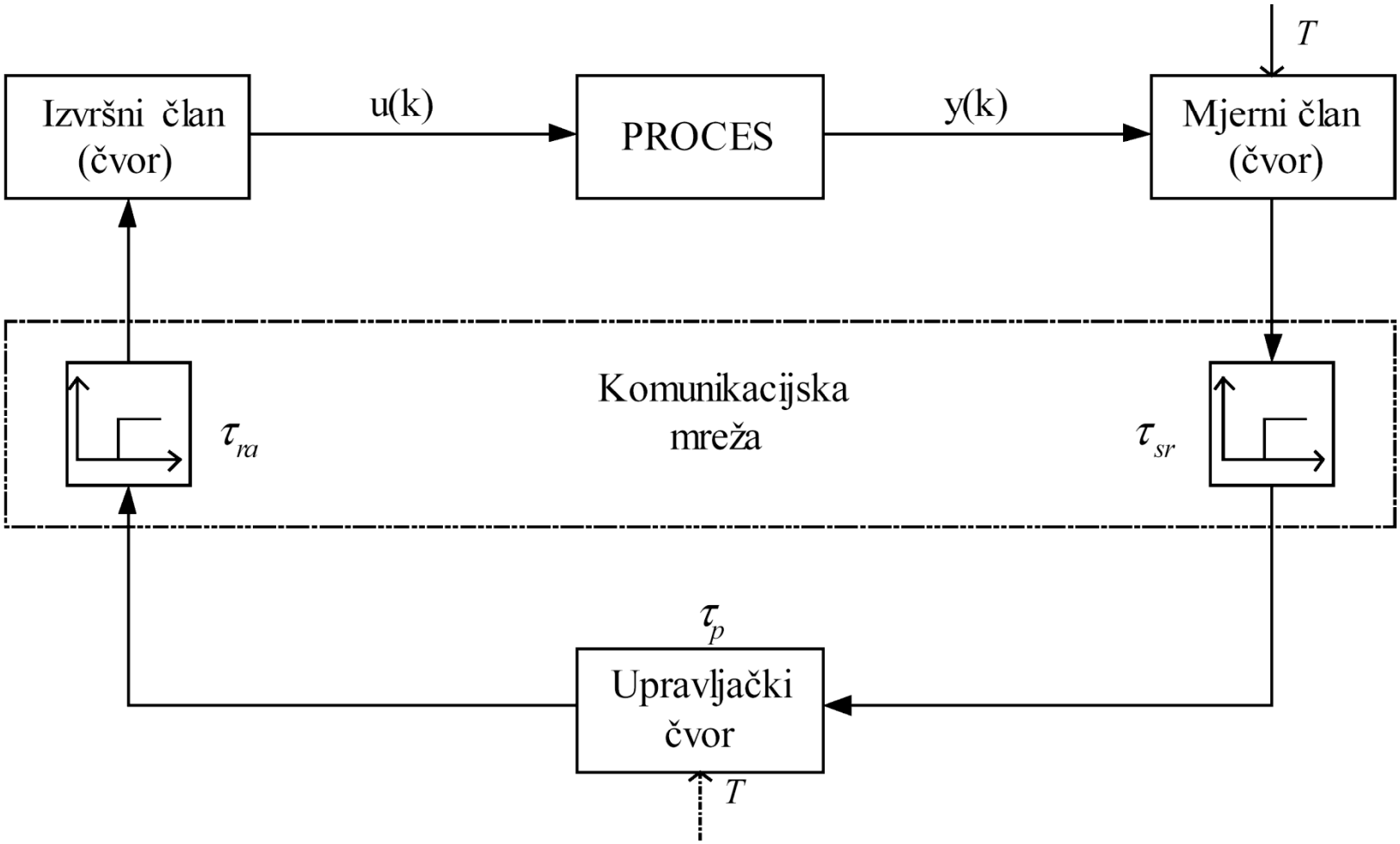
Upravljanje u zatvorenoj petlji kontinuiranog dinamičkog sustava – IE i D/A

$$G_{h0}(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s}$$



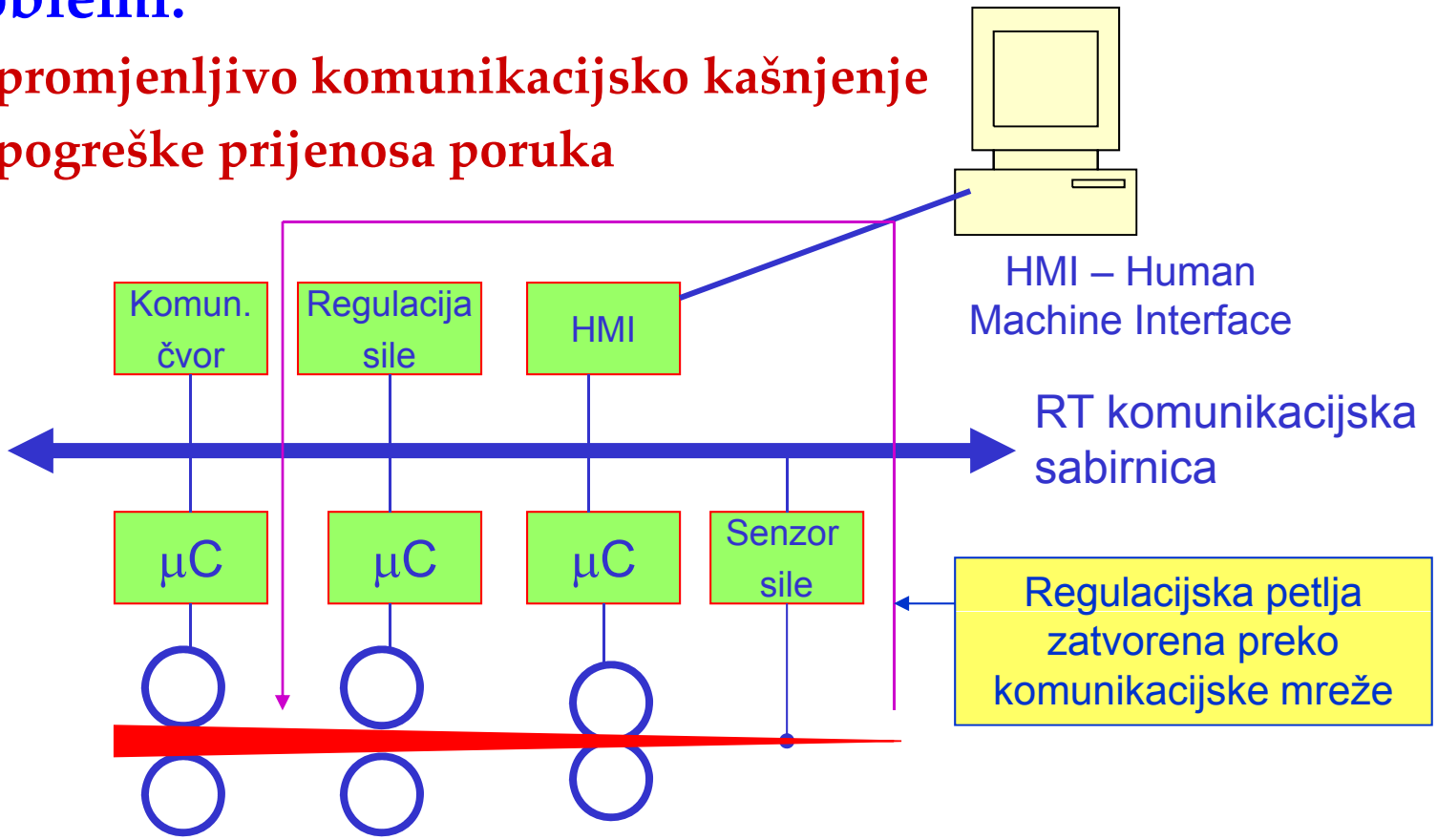
$$G_{IE}(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s}$$

Upravljanje u zatvorenoj petlji kontinuiranog dinamičkog sustava – preko kom. mreže



Primjer zatvorene upravljačke petlje preko mreže

- **RUS valjačke pruge:**
  - **Važnost RT komunikacije**
  - **Problemi:**
    - **promjenljivo komunikacijsko kašnjenje**
    - **pogreške prijenosa poruka**



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
Fakultet elektrotehnike i računarstva
Zavod za automatiku i računalno inženjerstvo
Unska 3, Zagreb, HRVATSKA

Računalno upravljanje sustavima

Poglavlje 2:
Matematičko modeliranje sustava

© Ivan Petrović

Sažetak prethodnog predavanja

- **Definicije sustava i upravljanje sustavima**
- **Uloga, osnovne funkcije, zahtjevi i sposobnosti računalnih sustava upravljanja**
- **Arhitekture računalnih sustava upravljanja**
- **Upravljačke petlje u računalnom upravljanju sustavima**

Sadržaj poglavlja

- Osnovne definicije sustava
- Matematički modeli sustava u vremenskom području
- Matematički modeli sustava u kompleksnom području
- Matematički modeli sustava u frekvencijskom području
- Eksperimentalno određivanje matematičkog modela sustava

Što je sustav?

"Sustav je dio svijeta koji je povezan s okolinom preko ulaznih i izlaznih djelovanja.

Ulazna djelovanja sustav preoblikuje u izlazna djelovanja.

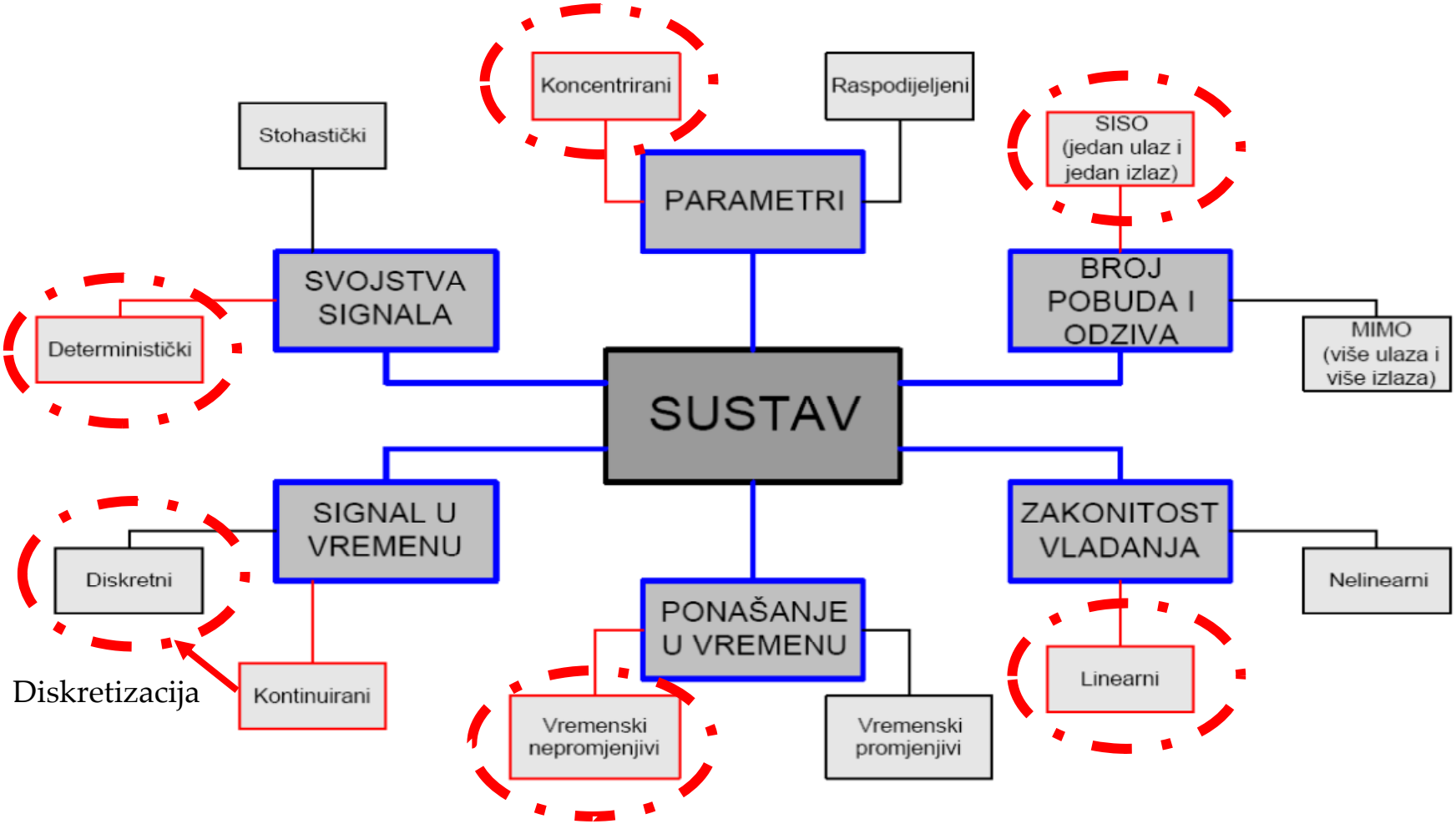
Izlaz sustava općenito može ovisiti o trenutku pobude i o *memoriji* sustava do trenutka pobude.

Povijest, odnosno memorija sustava tretira se konceptom *stanja sustava*."

Vladimir Kučera (1979.)

© Ivan Petrović

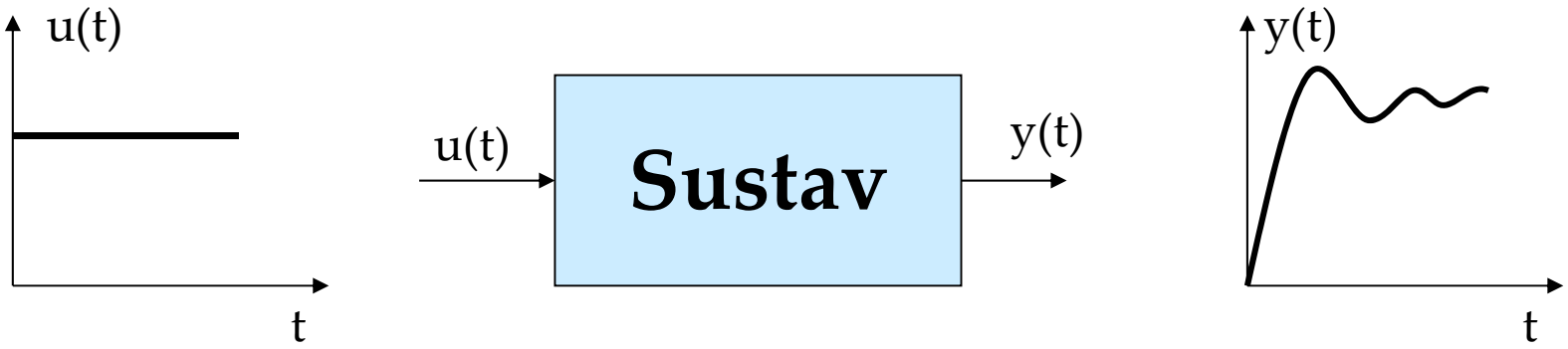
Podjele sustava po raznim kriterijima



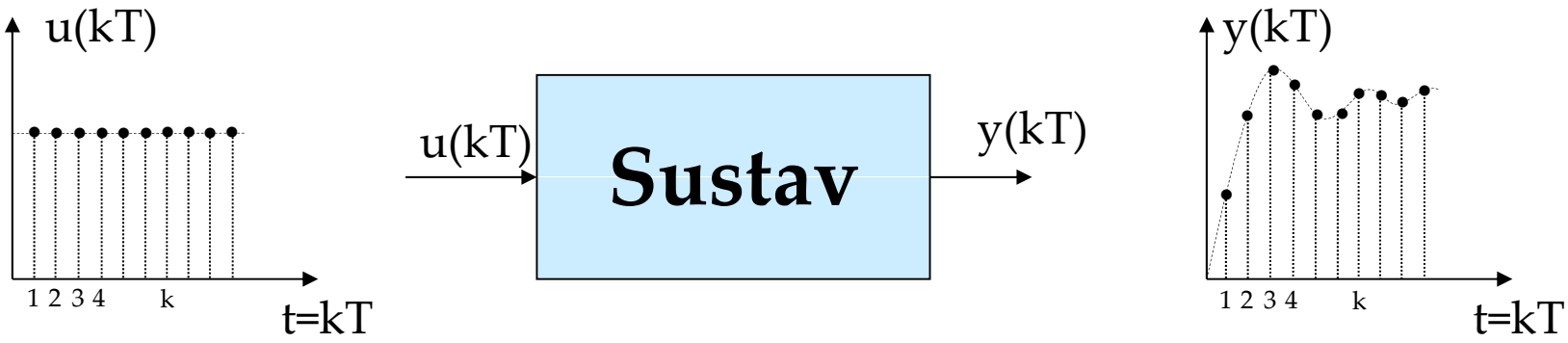
<u>Obrađuju se</u>: Linearni, deterministički, vremenski nepromjenljivi dinamički sustavi s koncentriranim parametrima i s jednim ulazom i jednim izlazom.

Prikaz sustava

Kontinuirani dinamički sustav:



Diskretni dinamički sustav:



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
Fakultet elektrotehnike i računarstva
Zavod za automatiku i računalno inženjerstvo
Unska 3, Zagreb, HRVATSKA

Poglavlje 2: Matematičko modeliranje sustava

Opis sustava u vremenskom području

© Ivan Petrović

Diferencijalne jednadžbe i jednadžbe diferencija

Kontinuirani, linearni dinamički sustav:

$$\sum_{i=o}^{n} a_i(t)\frac{d^i}{dt^i}y(t) = \sum_{j=0}^{m} b_j(t)\frac{d^j}{dt^j}u(t)$$

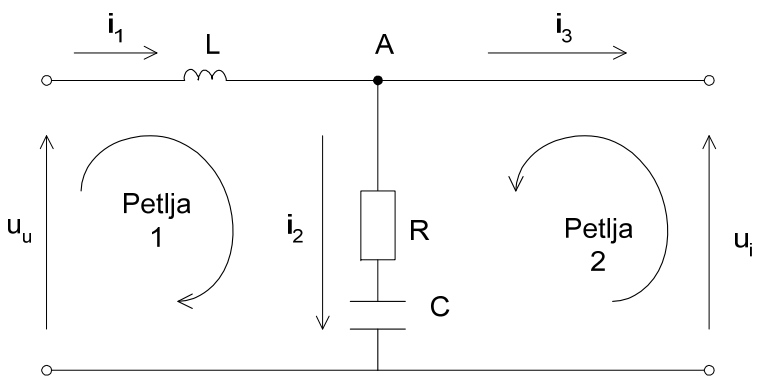
diferencijalna jednadžba

Diskretni, linearni dinamički sustav:

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i y(k-i) = \sum_{j=0}^{m} \beta_j u(k-j)$$

jednadžba diferencija

Primjer:



$$T_2^2\frac{d^2u_i}{dt^2} + T_1\frac{du_i}{dt} + u_i = T_1\frac{du_u}{dt} + u_u$$

$$T_1 = RC$$

$$T_2 = \sqrt{LC}$$

$$u_i(k) = -\alpha_1 u_i(k-1) - \alpha_2 u_i(k-2) + \\ + \beta_0 u_u(k) + \beta_1 u_u(k-1)$$

iznosi α_i i β_i ovise o primijenjenom postupku diskretizacije

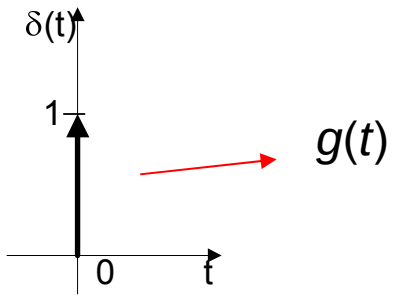
© Ivan Petrović

Težinska i prijelazna funkcija

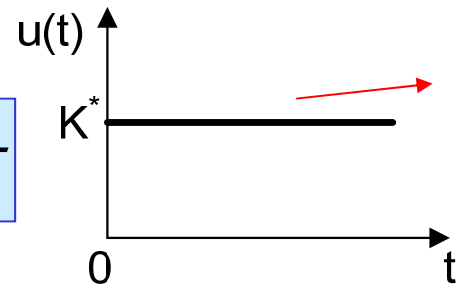
Težinska funkcija (impulsni odziv) g – odziv sustava na jediničnu impulsnu pobudu δ

Prijelazna funkcija h – odziv sustava na jediničnu skokovitu pobudu S

Kontinuirani, linearni dinamički sustav:



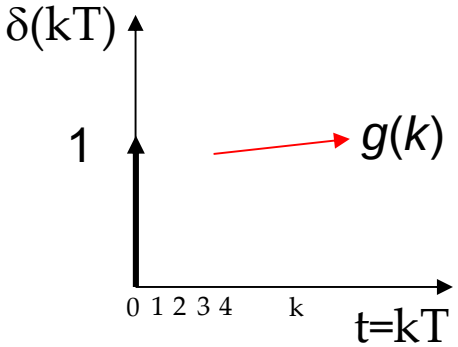
$$h(t) = \int_0^t g(\tau)d\tau$$



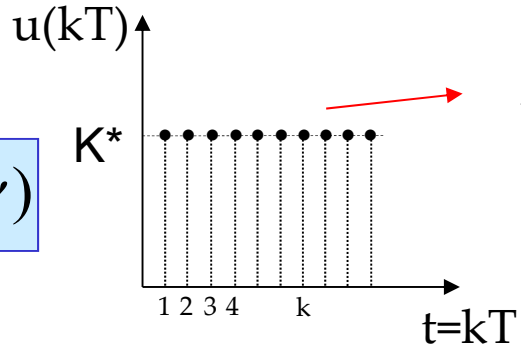
$$h(t) = \frac{y(t)}{K^*}$$

$$u(t) = \underbrace{K^*}_{konst.} S(t)$$

Diskretni, linearni dinamički sustav:



$$h(k) = \sum_{\nu=0}^{k} g(\nu)$$



$$h(k) = \frac{y(k)}{K^*}$$

$$u(k) = \underbrace{K^*}_{konst.} S(k)$$

Konvolucijski integral i suma

Kontinuirani, linearni dinamički sustav:

$$y(t) = \int_0^t u(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

Konvolucijski integral (Duhamelov integral)

Diskretni, linearni dinamički sustav:

$$y(k) = \sum_{\nu=0}^{k} u(k-\nu)g(\nu)$$

Konvolucijska suma

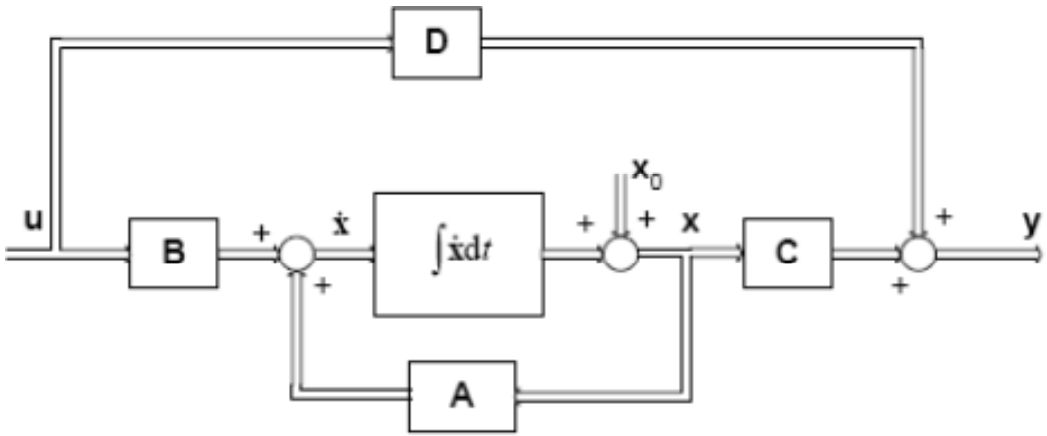
- Dakle, ako je poznata težinska funkcija sustava ***g***, tada se za svaki pobudni signal ***u***, može odrediti odziv sustava ***y***.
- Isto tako, iz poznatih tokova signala ***u*** i ***y*** dekonvolucijom se može dobiti težinska funkcija sustava ***g***.

© Ivan Petrović

Opis sustava u prostoru stanja

Kontinuirani dinamički sustav:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(t)$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\,\mathbf{u}(t)$$



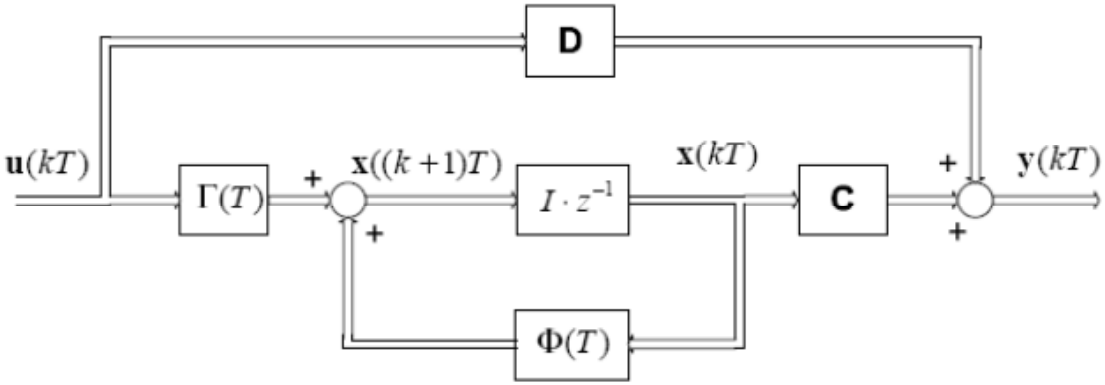
A - (n × n) matrica sustava
B - (n × r) ulazna matrica
C - (m × n) izlazna matrica
D - (m × r) ulazno/izlazna matrica

x - (n × 1) vektor stanja
u - (r × 1) ulazni (upravljački) vektor
y - (m × 1) izlazni vektor

Diskretni dinamički sustav:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{\Phi}\,\mathbf{x}(k) + \mathbf{\Gamma}\,\mathbf{u}(k)$$
$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\,\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\,\mathbf{u}(k)$$

Matrice Φ i Γ ovise o primijenjenom postupku diskretizacije



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
Fakultet elektrotehnike i računarstva
Zavod za automatiku i računalno inženjerstvo
Unska 3, Zagreb, HRVATSKA

Poglavlje 2: Matematičko modeliranje sustava

Opis sustava u području kompleksne varijable

© Ivan Petrović

Laplaceova transformacija – (*kont. sustavi*)

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i x(t)}{dt^i} = 0$$

$$\left.\frac{d^i x(t)}{dt^i}\right|_{t=0^+} , \quad i = 0,1,2,\ldots(n-1)$$

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{s_k t} \quad , \quad t > 0$$

Vremensko područje

Diferencijalna jednadžba

Rješenje

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$

L-transformacija

L^{-1}-transformacija

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds$$

Područje kompleksne varijable *s*

Algebarska jednadžba

Rješenje

$$X(s)\left[\sum_{i=0}^{n} a_i s^i\right] - \left[\sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{\nu=1}^{i} s^{i-\nu} \left.\frac{d^{\nu-1}}{dt^{\nu-1}} x(t)\right|_{t=0^+}\right] = 0$$

$$X(s) = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{\nu=1}^{i} s^{i-\nu} \left.\frac{d^{\nu-1}}{dt^{\nu-1}} x(t)\right|_{t=0^+}}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i} = \frac{Z(s)}{N(s)} .$$

Prijenosna funkcija (*kontinuirani sustavi*)

- **Diferencijalna jednadžba:**

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^{m} b_j \frac{d^j u(t)}{dt^j} \quad .$$

- **Uz početne uvjete jednake nuli, L-transformacijom:**

$$Y(s)\sum_{i=0}^{n} a_i s^i = U(s)\sum_{j=0}^{m} b_j s^j$$

dobije se prijenosna funkcija sustava:

$$\boxed{\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_o + b_1 s + \cdots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \cdots + a_n s^n} = G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)}}$$

$$\boxed{\text{Stupanj}\{Z(s)\} \le \text{Stupanj}\{N(s)\}} \longleftarrow \text{uvjet kauzalnosti}$$

Veza prijenosne funkcije i težinske funkcije sustava $\longrightarrow$ $\boxed{G(s) = L\{g(t)\}}$

Z – transformacija (*diskretni sustavi*)

- **Laplaceova transformacija diskretnog signala:**

$$F^*(s) = L\left[f^*(t)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-kTs}$$

- **Supstitucijom** $z = e^{sT}$ $\left(s = \frac{1}{T}\ln z\right)$ **dobije se z-transformacija diskretnog signala** ***f*(*kT*):**

$$F(z) = Z\left[f^*(t)\right] = F^*(s)\Big|_{s=\frac{1}{T}\ln z} = F^*\left(\frac{1}{T}\ln z\right)$$

$$f^*(t) = Z^{-1}\left[F(z)\right]$$

$$F(z) = Z\left[f^*(t)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}$$

- L – transformacija je transcendentna
- z- transformacija nije transcendentna

© Ivan Petrović

Prijenosna funkcija (*diskretni sustavi*)

- **Jednadžba diferencija:**

$$\mathcal{Z}\left[y(k) + a_1 y(k-1) + \ldots + a_{n-1} y(k-n+1) + a_n y(k-n)\right] =$$
$$= \mathcal{Z}\left[b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \ldots + b_{m-1} u(k-m+1) + b_m u(k-m)\right]$$

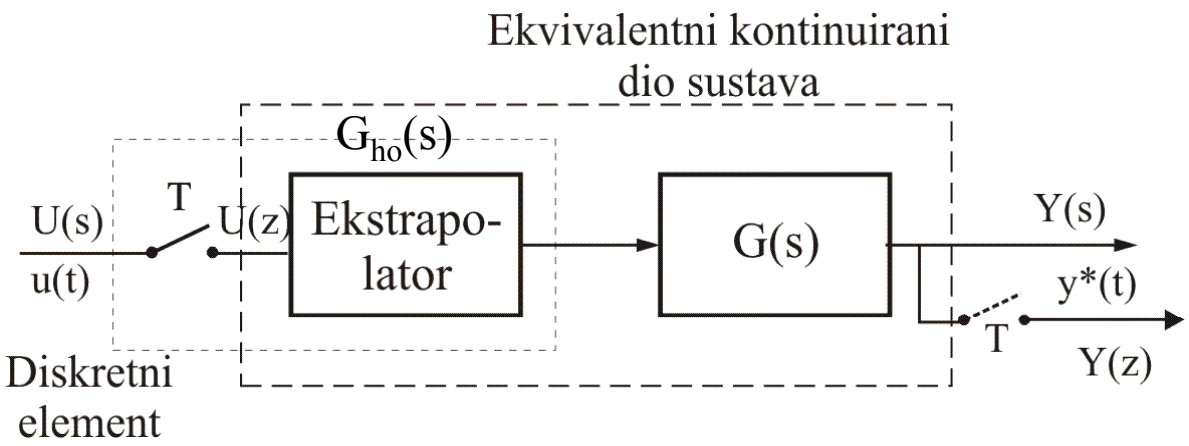
- **Uz miran sustav i kauzalnu pobudu slijedi:**

$$Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + \ldots + a_{n-1} z^{-n+1} Y(z) + a_n z^{-n} Y(z) =$$
$$b_0 U(z) + b_1 z^{-1} U(z) + \ldots + b_{m-1} z^{-m+1} U(z) + b_m z^{-m} U(z)$$
$$Y(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_n z^{-n}} U(z)$$

- **Prijenosna funkcija diskretnog sustava:**

$$\boxed{G(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_n z^{-n}}} \qquad \boxed{G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k) z^{-k}}$$

Diskretizacija kontinuiranog sustava – G(s) → G(z)



$$G_p(s) = G_{ho}(s) \cdot G(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \cdot G(s)$$

$$G(s) \Rightarrow G(z) = Z\left\{G_{ho}(s) \cdot G(s)\right\} = (1 - z^{-1}) Z\left\{\frac{1}{s} G(s)\right\}$$

$G(z)$ je prijenosna funkcija diskretnog sustava koji je ekvivalentan kontinuiranom sustavu opisanom prijenosnom funkcijom $G(s)$

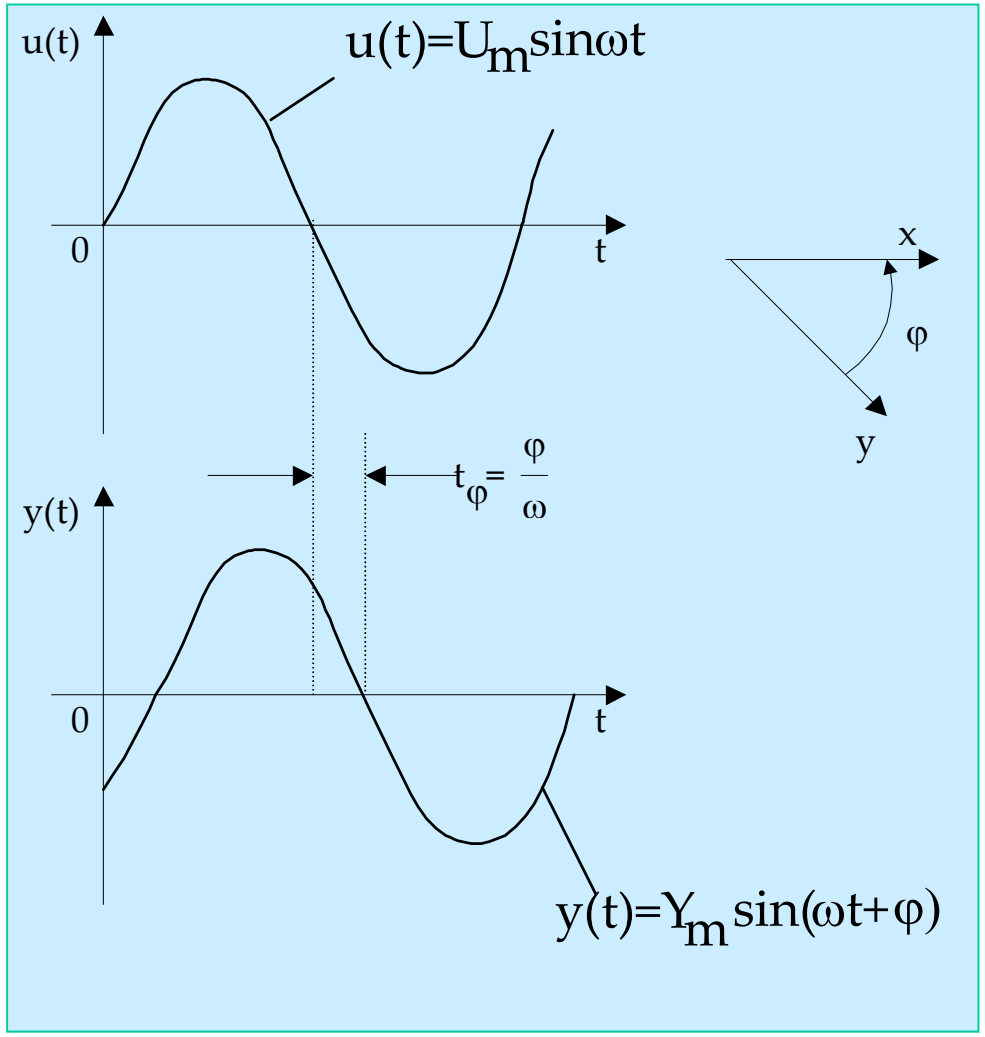
SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
Fakultet elektrotehnike i računarstva
Zavod za automatiku i računalno inženjerstvo
Unska 3, Zagreb, HRVATSKA

Poglavlje 2: Matematičko modeliranje sustava

Opis sustava u frekvencijskom području

© Ivan Petrović

Frekvencijska karakteristika (*kontinuirani sustavi*)



- **Nakon završetka prijelazne pojave izlazni signal ima istu frekvenciju kao i ulazni signal, ali različitu amplitudu i fazni pomak**

- **Formalno:**

  $G(s) \rightarrow G(j\omega)$

  $G(s),\ s = \sigma + j\omega$

  $\sigma = 0 \rightarrow G(j\omega)$

  Ovo je moguće jer σ djeluje samo u prijelaznoj pojavi

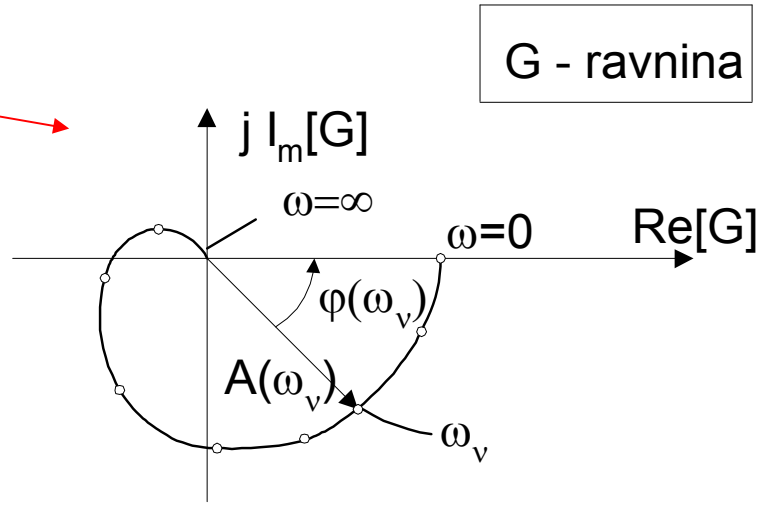
- **G(jω) se snimi tako da se sustav pobuđuje sinusnim signalima različitih frekvencija u čitavom dinamičkom području sustava**

© Ivan Petrović

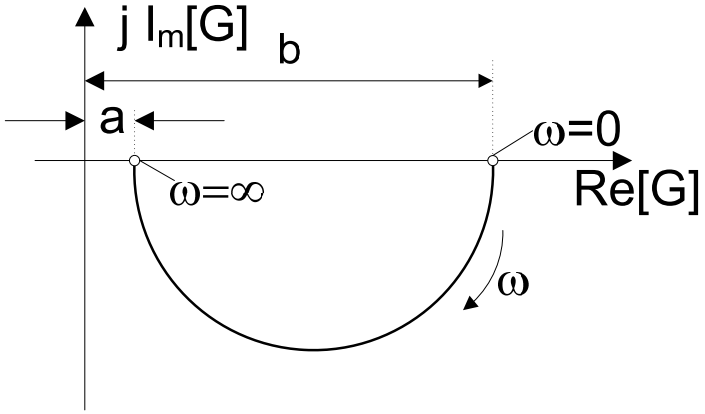
Nyquistov dijagram (*kontinuirani sustavi*)

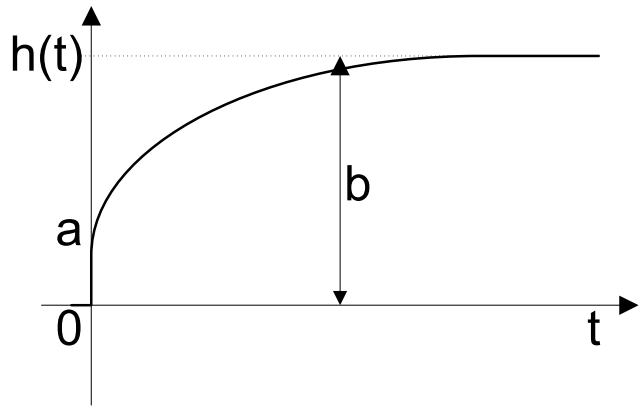
$$G(j\omega_\nu) = A(\omega_\nu)e^{j\varphi(\omega_\nu)}$$

$$A(\omega) = |G(j\omega)| \quad \varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$$



- Iz Nyquistovog dijagrama može se procijeniti vremenski tijek prijelazne funkcije sustava:



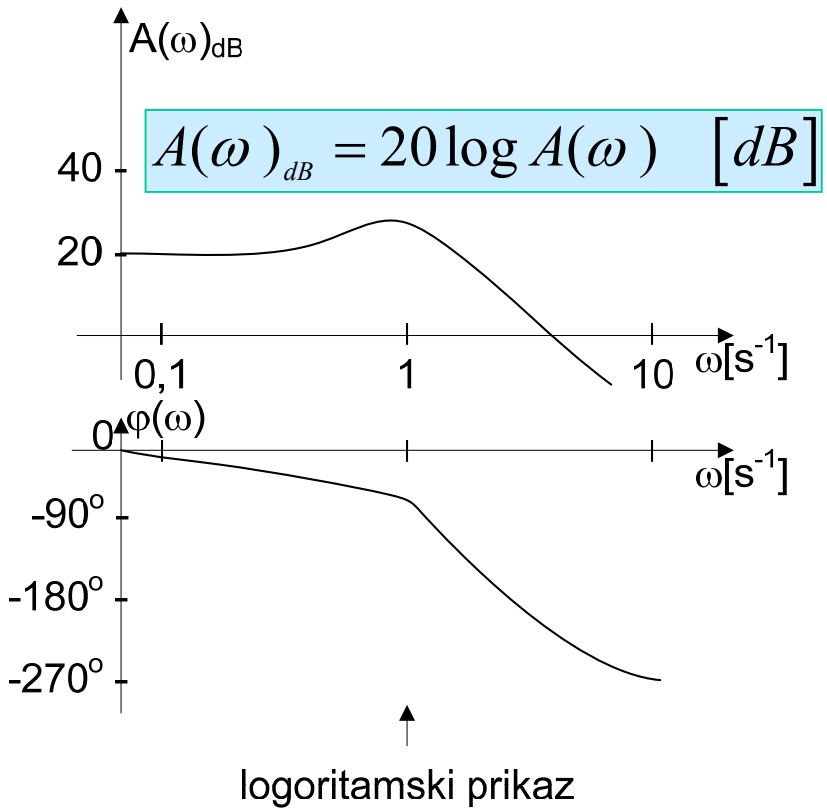


Bodeov dijagram (*kontinuirani sustavi*)

- **Amplitudna i fazna karakteristika crtaju se zasebno**
- **Koristi se logaritamski prikaz što omogućuje jednostavno crtanje karakteristika sustava u kojima se pojavljuju prijenosni članovi spojeni u seriju:**

$$A(\omega)_{dB} = 20\log\left[A_1(\omega)A_2(\omega)....A_{m+n}(\omega)\right] = \\ = A_1(\omega)_{dB} + A_2(\omega)_{dB} + ... + A_{m+n}(\omega)_{dB}$$

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + ... + \varphi_{m+n}(\omega) \ .$$



$$A(\omega)_{dB} = 20\log A(\omega) \quad [dB]$$

Vrlo povoljan za analizu i sintezu sustava

Frekvencijska karakteristika (*diskretni sustavi*) – 1/10

$$G_0(z) = G_0(e^{sT}),\ s = j\omega$$

- **Transcendentna funkcija** => ne mogu se primijeniti metode analize i sinteze iz kontinuiranih sustava.

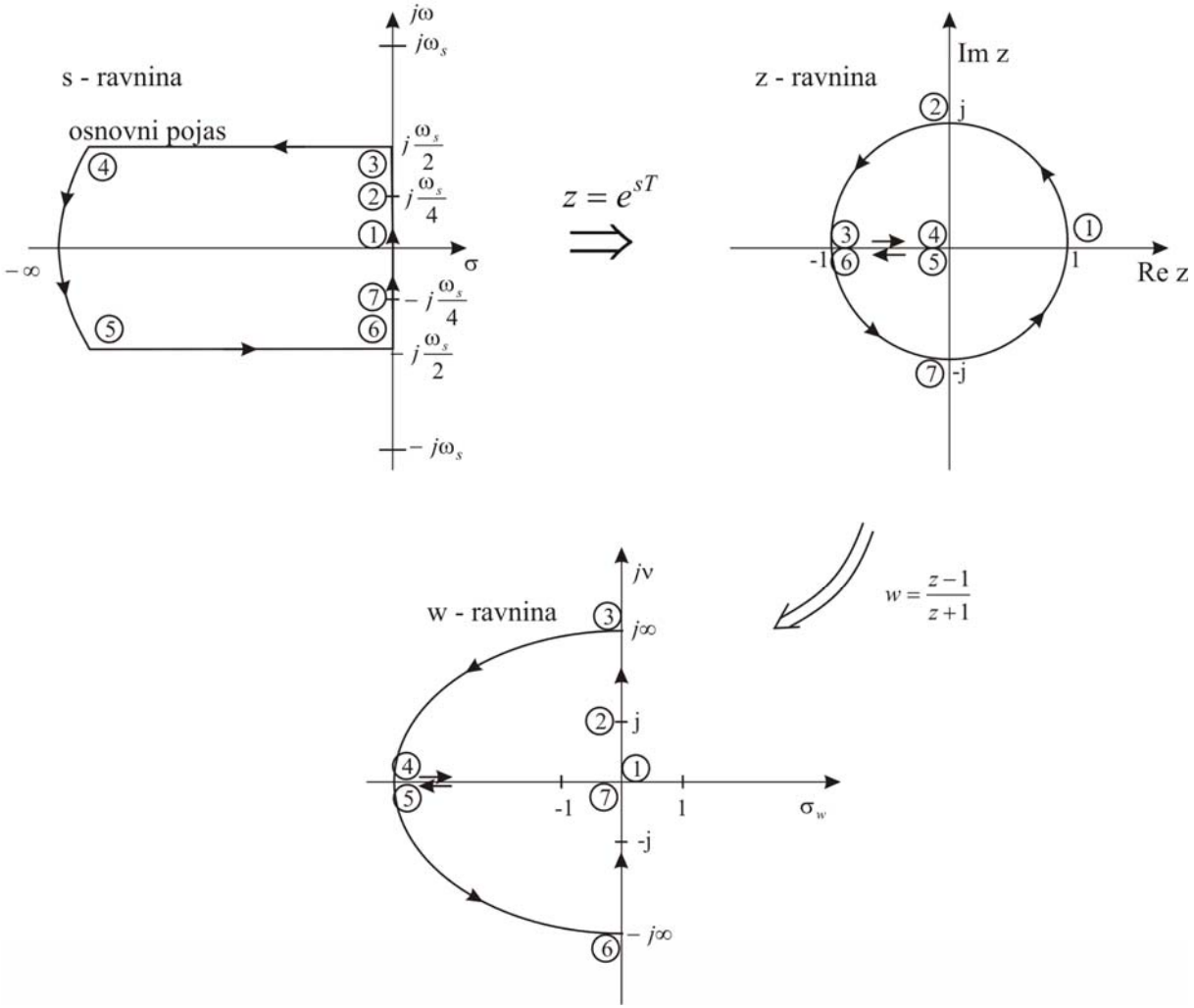
- Iz toga se razloga uvodi **bilinearna transformacija:**

$$z = \frac{1+w}{1-w} \qquad w = \frac{z-1}{z+1} = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

- Bilinearna transformacija preslikava jedinični krug sa središtem u ishodištu z ravnine u lijevu poluravninu kompleksne w ravnine.

Frekvencijska karakteristika (*diskretni sustavi*) – 2/10

- **Preslikavanja** $s \rightarrow z \rightarrow w$



Frekvencijska karakteristika (*diskretni sustavi*) – 3/10

- **Transformacija *G(z)* u *G(w)* (gotov izraz):**

$$G(z)=\frac{\prod_{j=1}^{m}(z+a_j)}{(z-1)^k\prod_{l=1}^{n}(z+b_l)}$$

$$z=\frac{1+w}{1-w}$$

$$G(w)=\frac{\prod_{j=1}^{m}(1+a_j)(1-w)^{k-m+n}\prod_{j=1}^{m}\left(1+\frac{1-a_j}{1+a_j}w\right)}{\prod_{l=1}^{n}(1+b_l)(2w)^k\prod_{l=1}^{n}\left(1+\frac{1-b_l}{1+b_l}w\right)}$$

Primjer:

$$G(z)=\frac{z+a_1}{(z-1)(z+b_1)(z+b_2)}$$

m=1; k=1; n=2

$$G(w)=\frac{\prod_{j=1}^{1}(1+a_j)(1-w)^{1-1+2}\prod_{j=1}^{1}\left(1+\frac{1-a_j}{1+a_j}w\right)}{\prod_{l=1}^{2}(1+b_l)(2w)^1\prod_{l=1}^{2}\left(1+\frac{1-b_l}{1+b_l}w\right)}$$

$$G(w)=\frac{(1+a_1)(1-w)^2\left(1+\frac{1-a_1}{1+a_1}w\right)}{(1+b_1)(2w)(1+b_2)(2w)\left(1+\frac{1-b_1}{1+b_1}w\right)\left(1+\frac{1-b_2}{1+b_2}w\right)}$$

Frekvencijska karakteristika (*diskretni sustavi*) – 4/10

- **Promjena frekvencijskog mjerila:**

$$w = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}; \quad z^{-1} = e^{-j\omega T} \quad \Rightarrow \quad w = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{1 + e^{-j\omega T}} = \frac{e^{j\frac{\omega T}{2}} - e^{-j\frac{\omega T}{2}}}{e^{j\frac{\omega T}{2}} + e^{-j\frac{\omega T}{2}}}$$

$$w = j\,tg\frac{\omega T}{2} = j\nu$$

$$\nu = tg\frac{\omega T}{2}$$

relativna pseudofrekvencija (fiktivna frekvencija); bezdimenzionalna veličina.

$$-\frac{\omega_s}{2} \le \omega \le \frac{\omega_s}{2} \Rightarrow -\infty \le \nu \le \infty$$

promijenjeno frekvencijsko mjerilo

© Ivan Petrović

Frekvencijska karakteristika (*diskretni sustavi*) – 5/10

- **Ispravljanje frekvencijskog mjerila:**
  - **Uvodimo varijablu $\boldsymbol{\Omega}$**

$$w = \frac{z-1}{z+1} \Rightarrow \boldsymbol{\Omega} = \frac{2}{T} w = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} \Rightarrow z = \frac{1+\boldsymbol{\Omega}\, T/2}{1-\boldsymbol{\Omega}\, T/2}$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}; z^{-1} = e^{-j\omega T} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\Omega} = j\frac{2}{T} tg\frac{\omega T}{2} = j\frac{2}{T}\nu = j\omega^*$$

apsolutna pseudofrekvencija [rad/s]

  - **Nyquistov i Bodeov prikaz u području pseudofrekvencije ω^* geometrijski su slični prikazima ekvivalentnog kontinuiranog sustava u području stvarne frekvencije ω (vrijedi i za korištenje w transformacije)**
  - **Također su i brojčane vrijednosti slične brojčanim vrijednostima kod prikaza ekvivalentnog kontinuiranog sustava (ne vrijedi za w transformaciju)**

Frekvencijska karakteristika (*diskretni sustavi*) – 6/10

- **Veza između pseudofrekvencije i stvarne frekvencije**

$$\omega^* = \frac{2}{T}\nu = \frac{2}{T} tg \frac{\omega T}{2} \qquad \text{odnosno} \qquad \omega = \frac{2}{T} arctg \frac{\omega^* T}{2}$$

Za malo vrijeme uzorkovanje T vrijedi:

$$\frac{\omega T}{2} << 1 \Rightarrow tg \frac{\omega T}{2} \approx \frac{\omega T}{2} \longrightarrow \boxed{\omega^* \approx \omega}$$

Vrijedi: $\boxed{\lim_{T \to 0} \Omega = s} \longrightarrow \boxed{s \doteq \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}}$

Tustinov izraz

$$z = \frac{1 + \frac{Ts}{2}}{1 - \frac{Ts}{2}}$$

Dokaz: $\Omega = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} \overset{z=e^{sT}}{\Rightarrow} \Omega = \frac{2}{T}\frac{e^{sT}-1}{e^{sT}+1}$

Razvojem u Taylorov red

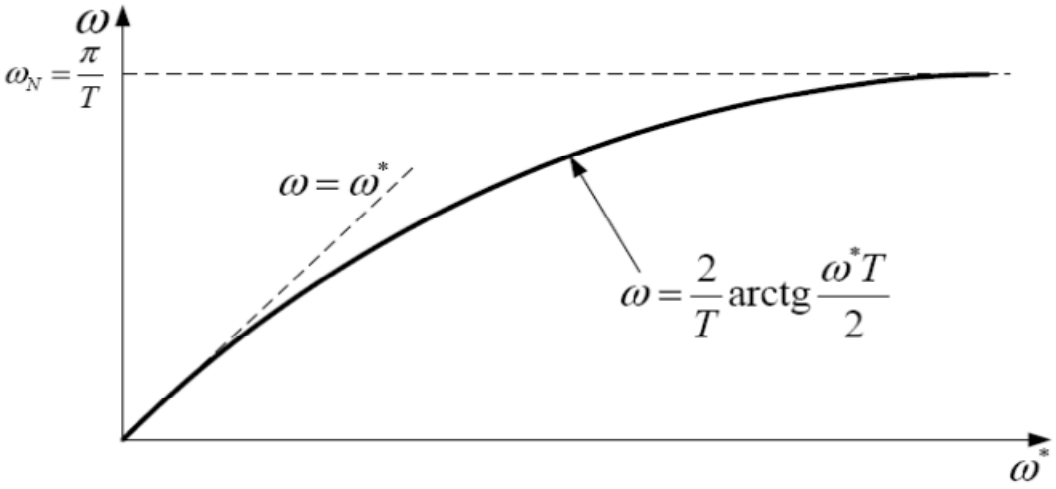
$$\lim_{T \to 0} \Omega = \lim_{T \to 0} \frac{2}{T} \frac{Ts + \frac{(Ts)^2}{2} + \ldots}{2 + Ts + \frac{(Ts)^2}{2} + \ldots} = \lim_{T \to 0} 2 \frac{s + T\frac{s^2}{2} + \ldots}{2 + Ts + \frac{(Ts)^2}{2} + \ldots} = \frac{2}{2} s$$

Dakle za mali T može se koristiti s umjesto Ω.

Frekvencijska karakteristika (*diskretni sustavi*) – 7/10

- **Izobličenje frekvencijske karakteristike:**
  - **Za vezu ω^* i ω**

$$\omega^* = \frac{2}{T} tg \frac{\omega T}{2} \longrightarrow \omega = \frac{2}{T} arctg \frac{\omega^* T}{2}$$



- Izobličenje zanemarivo za:

$$\boxed{\frac{\omega T}{2} \leq 0,5}$$

  - **Ako postoji izobličenje frekvencijske karakteristike uslijed bilinearne transformacije (pri relativno velikom iznosu *T*) to izobličenje treba uzeti u obzir pri sintezi digitalnog regulatora.**

Frekvencijska karakteristika (*diskretni sustavi*) – 8/10

- **Korekcija izobličenja f. k. (Frequency prewarping)**
  - **Provodi se na specifičnim frekvencijama tako da se u Tustinovu izrazu promjeni koeficijent skaliranja:**

$$\frac{2}{T} \Rightarrow \frac{\omega_1}{tg\dfrac{\omega_1 T}{2}}$$

  - **U tom slučaju Tustinov (modificiran) izraz glasi:**

$$s = \frac{\omega_1}{tg\dfrac{\omega_1 T}{2}} \frac{z-1}{z+1}$$

  - **<u>Napomena</u>: Izobličenje frekvencijske karakteristike korigirano samo na specifičnoj frekvenciji ω_1. Na ostalim frekvencijama postoji izobličenje.**

© Ivan Petrović

Frekvencijska karakteristika (*diskretni sustavi*) – 9/10

- **Primjer korekcije izobličenja f.k.:**

$$G(s) = \frac{a}{s+a}$$

  - **Neka je specifična frekvencija ω_1 jednaka lomnoj frekvenciji $\omega_1 = a$.**
  - **Zahtijeva se:** $\left|G(j\omega_1)\right| = \left|G(z_1 \middle| z_1 = e^{j\omega_1 T})\right|$
  - **Da bi se to postiglo koristi se izraz:** $s = \dfrac{\omega_1}{tg\dfrac{\omega_1 T}{2}} \dfrac{z-1}{z+1}$
  - **Slijedi:**

$$G(s) = \frac{1}{\dfrac{s}{\omega_1}+1} \quad (\omega_1 = a)$$

$$G(z) = \frac{1}{\dfrac{1}{\omega_1}\dfrac{\omega_1}{tg\dfrac{\omega_1 T}{2}}\dfrac{z-1}{z+1}+1} = \frac{(z+1)tg\dfrac{\omega_1 T}{2}}{(z-1)+(z+1)tg\dfrac{\omega_1 T}{2}}$$

$$G(z) = \frac{1+z^{-1}}{\left(1+ctg\dfrac{aT}{2}\right)+\left(1-ctg\dfrac{aT}{2}\right)z^{-1}}$$

→ izraz za implementaciju

Frekvencijska karakteristika (*diskretni sustavi*) – 10/10

- **Primjer korekcije izobličenja f.k. - nastavak:**
  - **Provjera:**

$$G(j\omega) \xrightarrow{\omega=a} |G(ja)| = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a}{a}\right)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

→ kontinuirani sustav

$$G(z)\Big|_{z=e^{j\omega T}} \xrightarrow{\omega=a} G(e^{jaT}) = \frac{1}{\frac{1}{tg\frac{aT}{2}}\frac{e^{jaT}-1}{e^{jaT}+1}+1} = \frac{1}{\frac{1}{tg\frac{aT}{2}}jtg\frac{aT}{2}+1} = \frac{1}{j+1}$$

$$|G(e^{jaT})| = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

→ diskretni sustav

Na frekvenciji $\omega_1 = a$ diskretni sustav ima jednako pojačanje kao i kontinuirani

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
Fakultet elektrotehnike i računarstva
Zavod za automatiku i računalno inženjerstvo
Unska 3, Zagreb, HRVATSKA

Poglavlje 2: Matematičko modeliranje sustava

Eksperimentalno određivanje modela sustava

© Ivan Petrović

Identifikacija na temelju prijelazne funkcije ili težinske funkcije

- **Tipični procesi**
  - **PTTt**
  - **PTn**
  - **PT2S**
  - **PTnS**
  - **Za ove tipične procese razvijene su metode pomoću kojih se <u>određuju razlomljene racionalne prijenosne funkcije</u> s mrtvim vremenom ili bez mrtvog vremena, a <u>na temelju eksperimentalno određene prijelazne funkcije ili težinske funkcije</u>**

$$\Downarrow$$

grafoanalitičke metode

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
Fakultet elektrotehnike i računarstva
Zavod za automatiku i računalno inženjerstvo
Unska 3, Zagreb, HRVATSKA

Poglavlje 2:
Matematičko modeliranje sustava

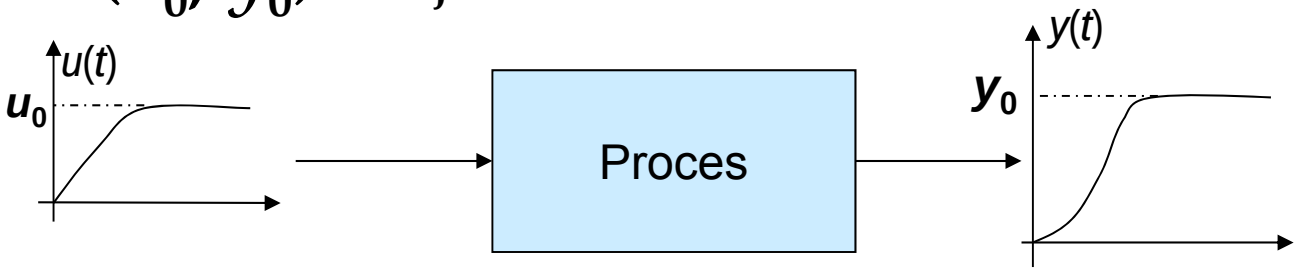
Eksperimentalno određivanje modela sustava:

Identifikacija prijelazne i težinske funkcije

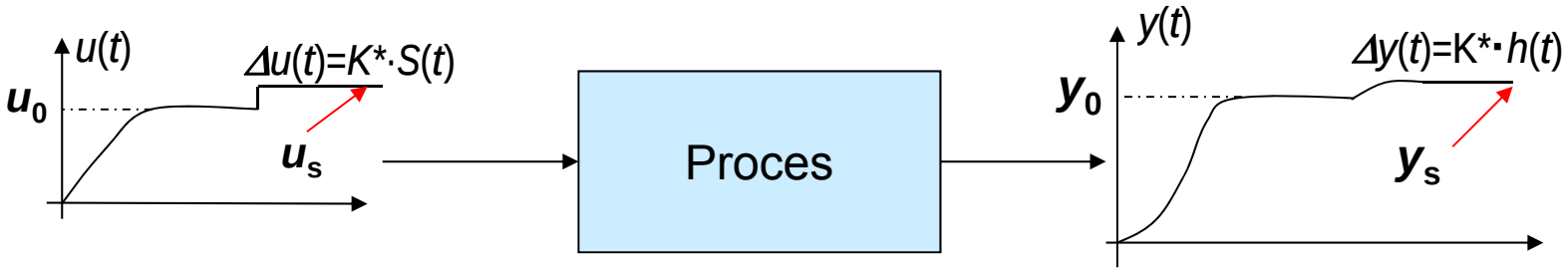
© Ivan Petrović

Eksperimentalno određivanje prijelazne funkcije $h(t)$ – neposredni postupak

- **Prvi korak**: Sustav se dovede u očekivanu radnu točku (u_0, y_0) - najčešće ručno



- **Drugi korak**: Na u_0 superponira se skokovita promjena $\Delta u(t)=K^*\cdot S(t)$



$$K^* = \frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{y_s - y_0}{u_s - u_0} \rightarrow h(t) = \frac{\Delta y}{K^*}$$

Obično treba napraviti i negativnu skokovitu promjenu

© Ivan Petrović

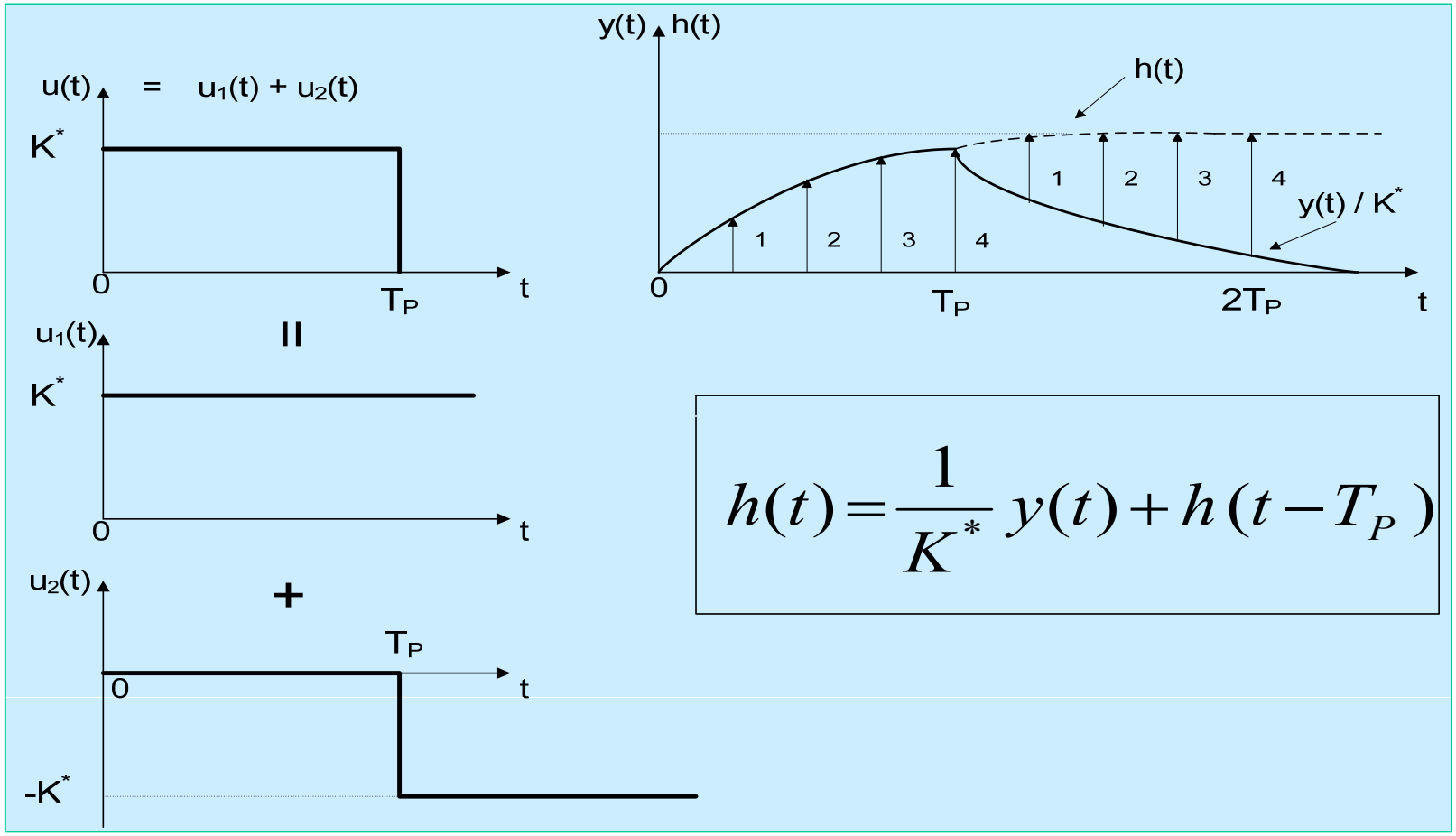
Eksperimentalno određivanje prijelazne funkcije $h(t)$ – posredni postupci – 1/6

- **U mnogim procesima nije dopušteno primijeniti skokoviti test signal za određivanje $h(t)$:**
  - **remeti se normalni radni režim procesa,**
  - **izvršni (postavni) elementi ne dopuštaju skokovitu promjenu pobudnog ispitnog signala**
- **Stoga se prijelazna funkcija određuje posredno na osnovi drugih oblika pobudnog signala:**
  - **pravokutni impuls kao ispitni signal,**
  - **funkcija linearnog porasta kao ispitni signal,**
  - **proizvoljni deterministički ispitni signal.**

© Ivan Petrović

Eksperimentalno određivanje prijelazne funkcije *h*(*t*) – posredni postupci – 2/6

- **Pravokutni impuls kao ispitni signal:**

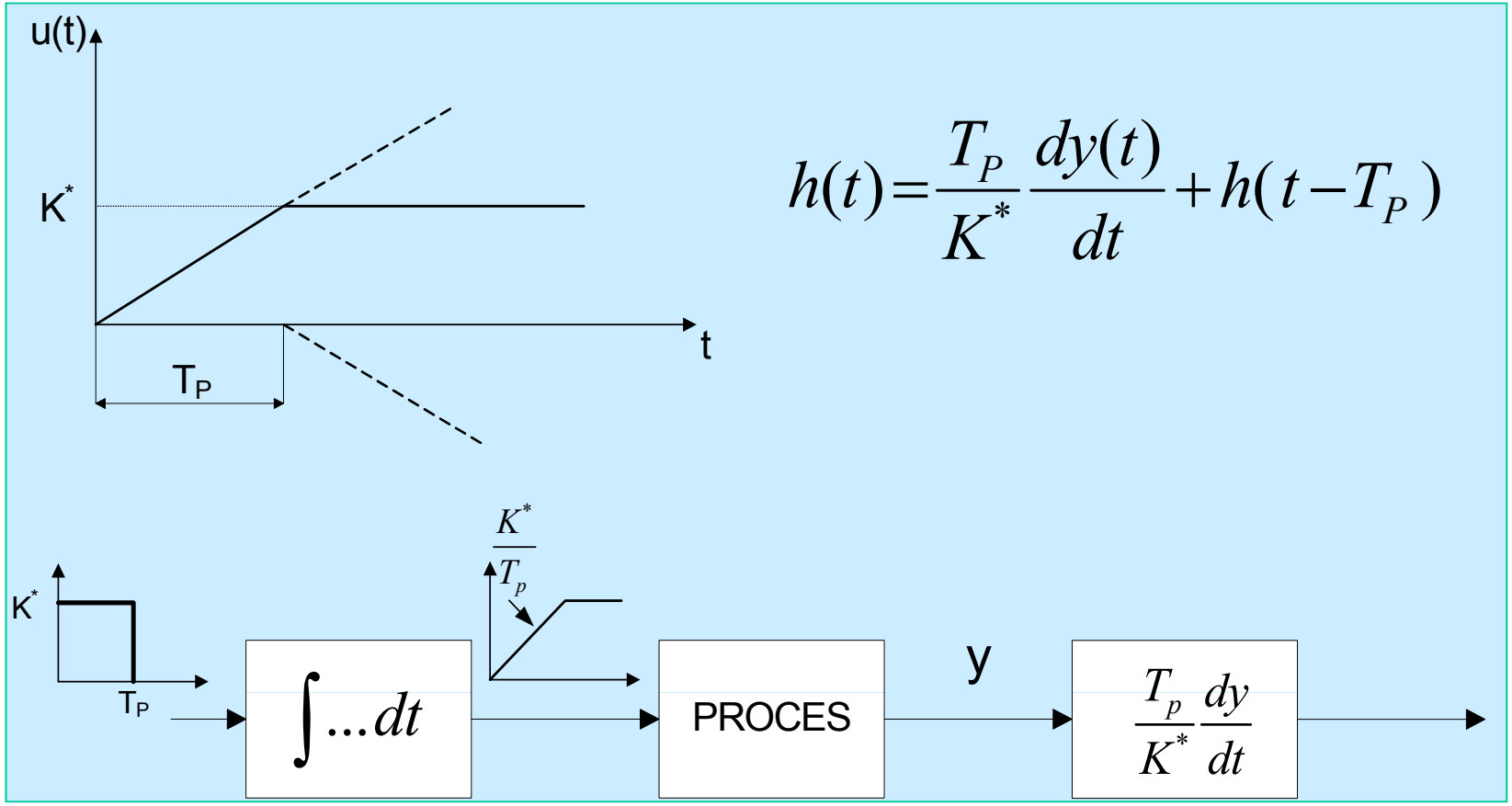


$$h(t) = \frac{1}{K^*} y(t) + h(t - T_P)$$

(Lako se odredi grafički ili numerički)

Eksperimentalno određivanje prijelazne funkcije *h*(*t*) – posredni postupci – 3/6

- **Funkcija linearnog porasta kao ispitni signal:**



$$h(t)=\frac{T_P}{K^*}\frac{dy(t)}{dt}+h(t-T_P)$$

(Lako se odredi grafički ili numerički)

Eksperimentalno određivanje prijelazne funkcije *h*(*t*) – posredni postupci – 4/6

- **Proizvoljni deterministički ispitni signal:**

(Duhamelov konvolucijski integral)

$$y(t) = \int_0^t u(t-\tau)g(\tau)d\tau \qquad (*)$$

  - **Ako su poznati u(t) i y(t), g(t) se može odrediti pomoću numeričke dekompozicije konvolucijskog integrala.**
  - **Integral (*) može se aproksimirati zbrojem (Δτ-mala širina koraka):**

$$y(t) \approx \sum_{\nu=0}^{k} u(t-\nu\Delta\tau)g(\nu\Delta\tau)\Delta\tau$$

  - **Ako se pri numeričkom izračunavanju za vrijeme t odabere širina koraka Δτ, tj.**

$$t = 0, \Delta\tau, 2\Delta\tau, \ldots, k\Delta\tau ,$$

dobije se sustav od (k+1) jednadžbi s (k+1) nepoznatih veličina (g(0), g(Δτ), g(2Δτ), . . ., g(kΔτ)):

© Ivan Petrović

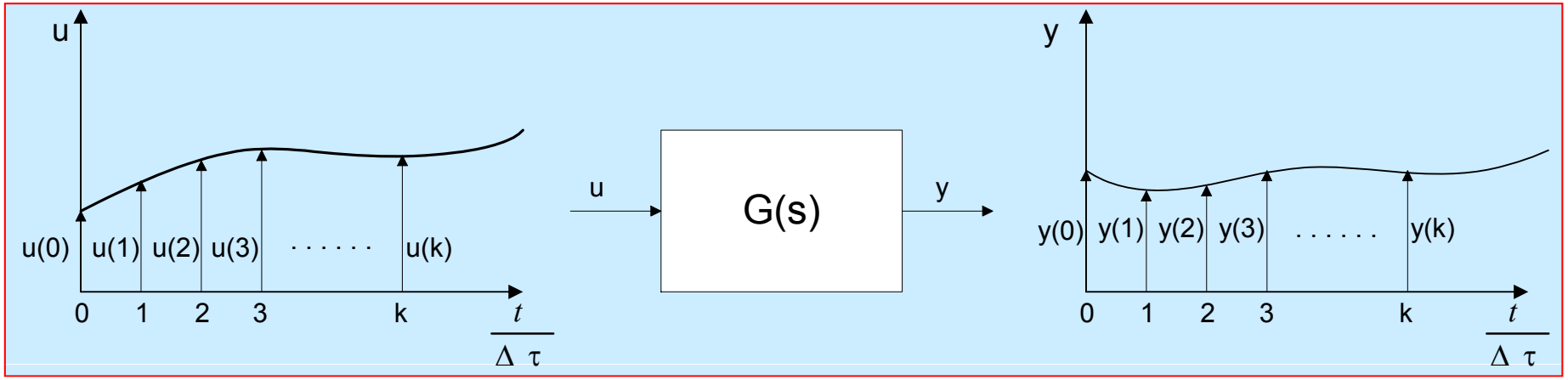
Eksperimentalno određivanje prijelazne funkcije *h*(*t*) – posredni postupci – 5/6

$$
\begin{aligned}
y(0) &= u(0)g(0)\Delta\tau \ , \\
y(\Delta\tau) &= u(\Delta\tau)g(0)\Delta\tau + u(0)g(\Delta\tau)\Delta\tau \ , \\
&\vdots \\
y(k\Delta\tau) &= u(k\Delta\tau)g(0)\Delta\tau + \ldots + u(0)g(k\Delta\tau)\Delta\tau \ .
\end{aligned}
$$

$$y(t) \approx \sum_{\nu=0}^{k} u(t-\nu\Delta\tau)g(\nu\Delta\tau)\Delta\tau$$

Normiranjem vremena *t* s Δτ slijedi:

$$y(k) = \sum_{\nu=0}^{k} u(k-\nu)g(\nu)$$



Eksperimentalno određivanje prijelazne funkcije *h*(*t*) – posredni postupci – 6/6

$$
\begin{aligned}
y(0) &= u(0)g(0)\Delta\tau \ , \\
y(\Delta\tau) &= u(\Delta\tau)g(0)\Delta\tau + u(0)g(\Delta\tau)\Delta\tau \ , \\
&\vdots \\
y(k\Delta\tau) &= u(k\Delta\tau)g(0)\Delta\tau + \ldots + u(0)g(k\Delta\tau)\Delta\tau \ .
\end{aligned}
$$

Normiranjem vremena *t* s $\Delta\tau$ slijedi:

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(k) \end{bmatrix}}_{\underline{y}(k)} = \underbrace{\begin{bmatrix} u(0) & 0 & \cdots & 0 \\ u(1) & u(0) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u(k) & u(k-1) & \cdots & u(0) \end{bmatrix}}_{\underline{u}(k)} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} g(0) \\ g(1) \\ \vdots \\ g(k) \end{bmatrix}}_{\underline{g}(k)}
$$

$$
\underline{g}(k) = \underline{u}^{-1}(k)\underline{y}(k)
$$

(Aproksimacija težinske funkcije u vektorskom obliku)

$$
h(t) = \int_0^t g(\tau)d\tau \rightarrow h(k) = \sum_{\nu=0}^{k} g(\nu)
$$

© Ivan Petrović

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
Fakultet elektrotehnike i računarstva
Zavod za automatiku i računalno inženjerstvo
Unska 3, Zagreb, HRVATSKA

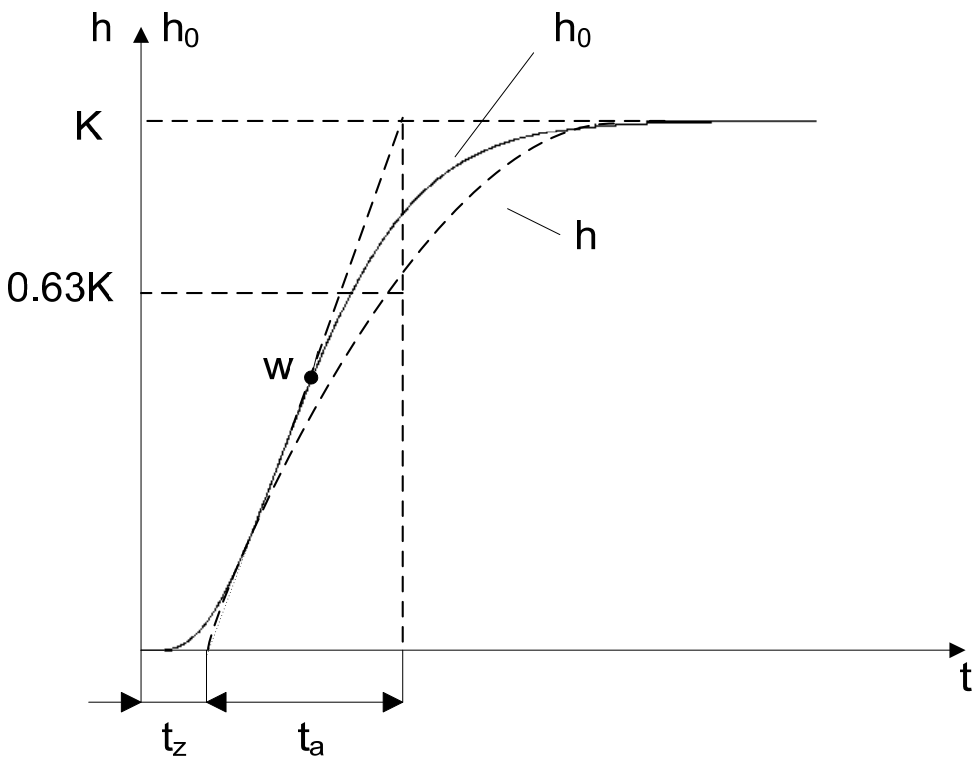
Poglavlje 2: Matematičko modeliranje sustava

Eksperimentalno određivanje modela sustava:

Metode identifikacije prijenosne funkcije iz prijelazne i težinske funkcije

© Ivan Petrović

Metoda prema Küpfmülleru



h - aproksimativna prijelazna funkcija:

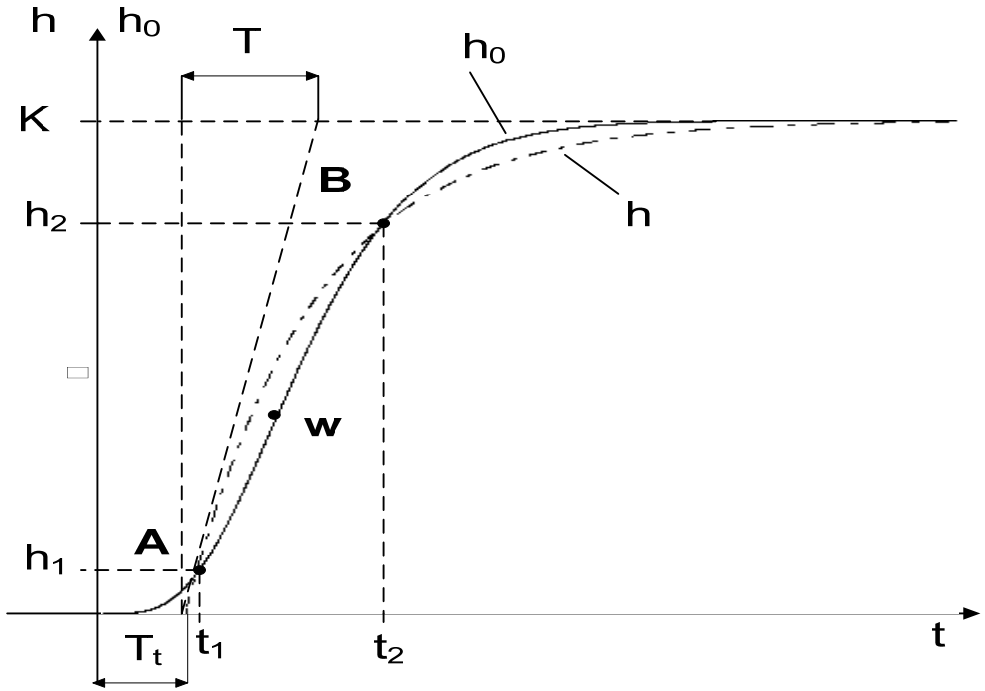
$$G(s) = \frac{K \cdot e^{-sT_t}}{1+Ts}$$

$T_t \approx t_z$ (vrijeme zadržavanja)
$T \approx ta$ (vrijeme porasta)
$K = \Delta y/\Delta u$ - statičko pojačanje (očita se iz oscilograma)

h_0 - eksperimentalno dobivena prijelazna funkcija
w - točka infleksije

$$h(t) = \begin{cases} 0 & ,za \quad t < T_t \\ K(1 - e^{-\frac{t-T_t}{T}}) & ,za \quad t \geq T_t \end{cases}.$$

Metoda prema Strejcu



- Na snimljenoj prijelaznoj funkciji $h_0(t)$ odrede se dvije točke:
  A$(h_1;t_1)$ i
  B$(h_2;t_2)$
- Točke A i B trebaju se odabrati tako da je točka infleksije **w** između njih.
- Kroz točke **A** i **B** ucrta se prijelazna funkcija ***h(t)*** i izračunaju se T_t i T kako slijedi:

$$h(t) = \begin{cases} 0 & , za \quad t < T_t \\ K(1 - e^{-\frac{t-T_t}{T}}) & , za \quad t \geq T_t \end{cases}.$$

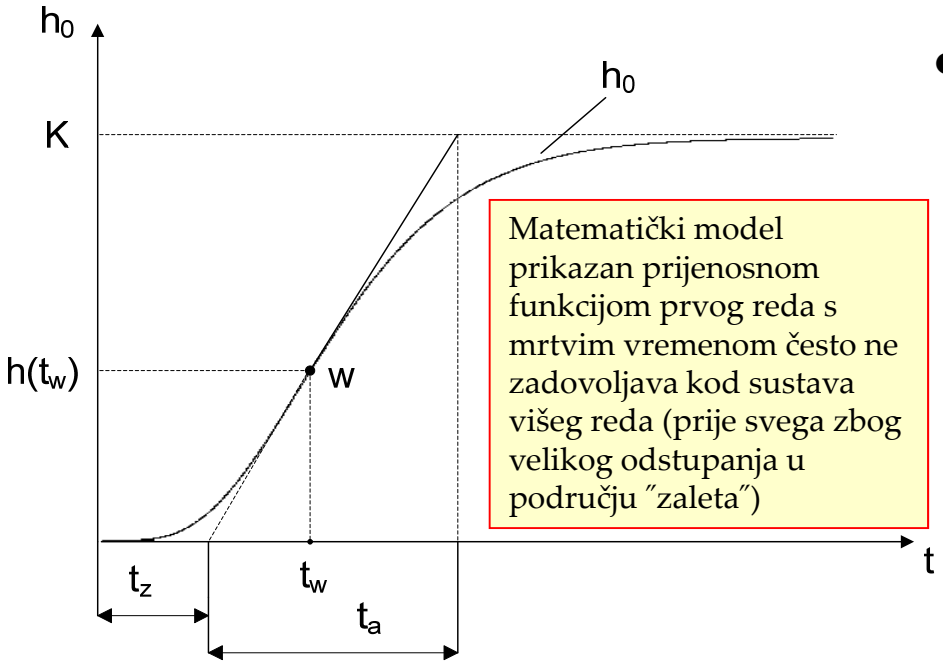
$$h_1 = K(1 - e^{-\frac{t_1 - T_t}{T}})$$

$$h_2 = K(1 - e^{-\frac{t_2 - T_t}{T}})$$

$$T = \frac{t_2 - t_1}{\ln\left(\frac{K - h_1}{K - h_2}\right)}; \quad T_t = T \cdot \ln\left(1 - \frac{h_\nu}{K}\right) + t_\nu; \quad \nu = 1 \text{ ili } 2.$$

Poboljšanje Küpfmüllerove metode. Manja osjetljivost na mjerni šum

Aproksimacija matematičkog modela sustava pomoću PT2 člana – 1/3



Matematički model prikazan prijenosnom funkcijom prvog reda s mrtvim vremenom često ne zadovoljava kod sustava višeg reda (prije svega zbog velikog odstupanja u području ″zaleta″)

- Na temelju prijelazne funkcije $h_0(t)$ dobivene mjerenjem određuje se prijenosna funkcija:

$$G(s) = \frac{K}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$$

- Iz vremena $\mathbf{t_a}$ **i** $\mathbf{t_z}$ određuju se vremenske konstante $\mathbf{T_1}$ **i** $\mathbf{T_2}$ prijenosne funkcije.

- Prijelazna funkcija za G(s) glasi ($T_1 \neq T_2$):

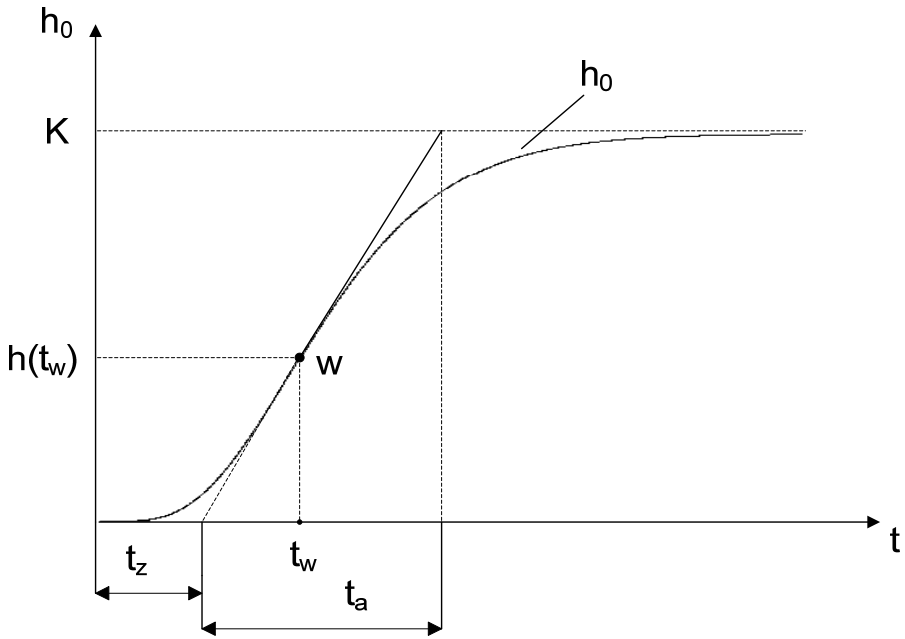
$$h(t) = K\left(1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-t/T_1} - \frac{T_2}{T_2 - T_1} e^{-t/T_2}\right)$$

- Prva i druga derivacija prijelazne funkcije $h(t)$ glase:

$$\dot{h}(t) = \frac{K}{T_1 - T_2}\left(e^{-t/T_1} - e^{-t/T_2}\right)$$

$$\ddot{h}(t) = \frac{K}{T_1 - T_2}\left(-\frac{1}{T_1} e^{-t/T_1} + \frac{1}{T_2} e^{-t/T_2}\right)$$

Aproksimacija matematičkog modela sustava pomoću PT2 člana – 2/3



1. U točki infleksije prijelazne funkcije druga derivacija je jednaka nuli:

$$\ddot{h}(t) = 0 \Rightarrow t_w = \frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1} \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

2. Iz grafa prijelazne funkcije vidi se da vrijedi:

$$\dot{h}(t_w) = \frac{K}{t_a} \Rightarrow t_a = T_1 \left[\frac{T_2}{T_1}\right]^{\frac{T_2}{T_2 - T_1}}$$

3. Iz sličnosti trokutova proizlazi:

$$\frac{t_w - t_z}{t_a} = \frac{h(t_w)}{K} \Rightarrow t_z = \frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1} \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - t_a + T_1 + T_2$$

•Uz $\mu = T_2/T_1$ slijedi:

$$\frac{t_a}{T_1} = (\mu)^{\frac{\mu}{\mu-1}},$$

$$\frac{t_a}{t_z} = \frac{1}{(\mu)^{-\frac{\mu}{\mu-1}}\left[1 + \mu + \frac{\mu}{\mu-1}\ln(\mu)\right] - 1}.$$

Aproksimacija matematičkog modela sustava pomoću PT2 člana – 3/3

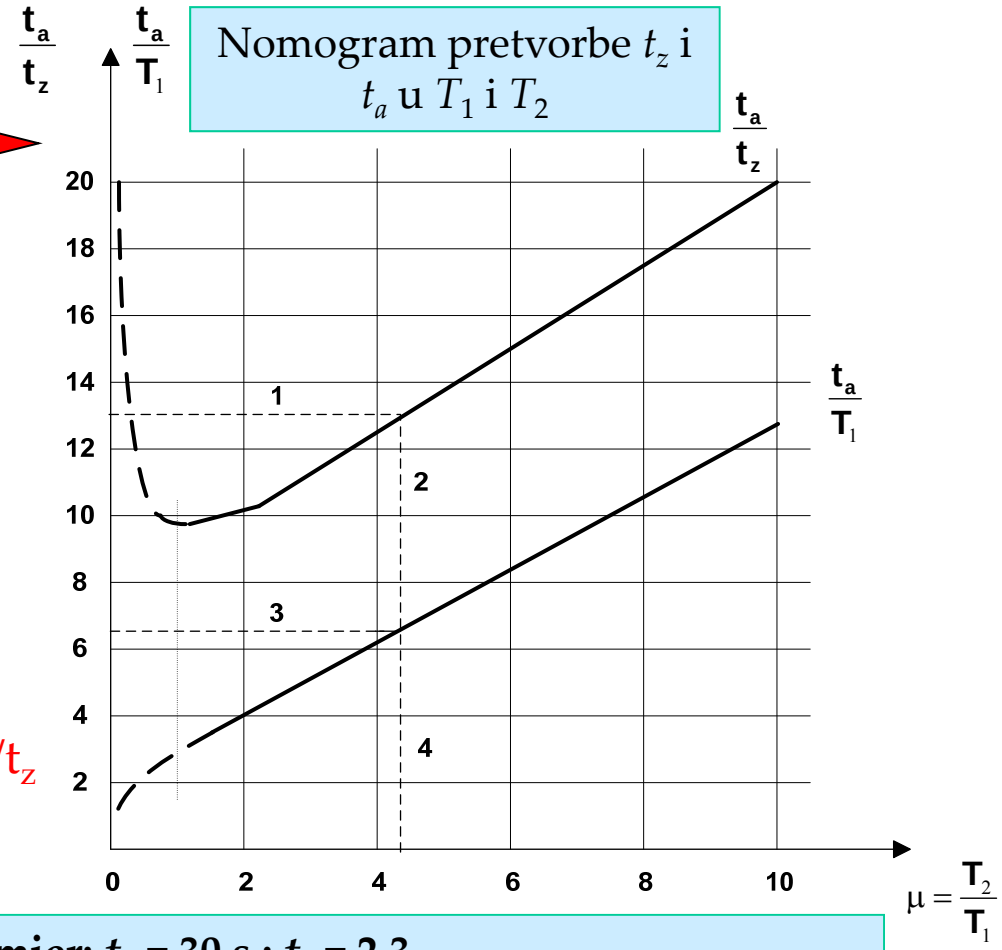
$$\frac{t_a}{T_1} = (\mu)^{\frac{\mu}{\mu-1}},$$

$$\frac{t_a}{t_z} = \frac{1}{(\mu)^{\frac{\mu}{\mu-1}}\left[1+\mu+\frac{\mu}{\mu-1}\ln(\mu)\right]-1}.$$

$\mu = T_2/T_1$	t_a/T_1	t_a/t_z
0.1	1.29	20.09
0.2	1.50	13.97
0.3	1.68	11.91
0.4	1.84	10.91
0.5	2.00	10.36
0.6	2.15	10.03
0.7	2.30	9.83
0.8	2.44	9.72
0.9	2.58	9.66
0.99	2.70	9.65
1.11	2.87	9.66
1.2	2.99	9.70
2.0	4.00	10.36
3.0	5.20	11.50
4.0	6.35	12.73
5.0	7.48	13.97
6.0	8.59	15.22
7.0	9.68	16.45
8.0	10.77	17.67
9.0	11.85	18.89
10.0	12.92	20.09

min t_a/t_z

Nomogram pretvorbe t_z i t_a u T_1 i T_2



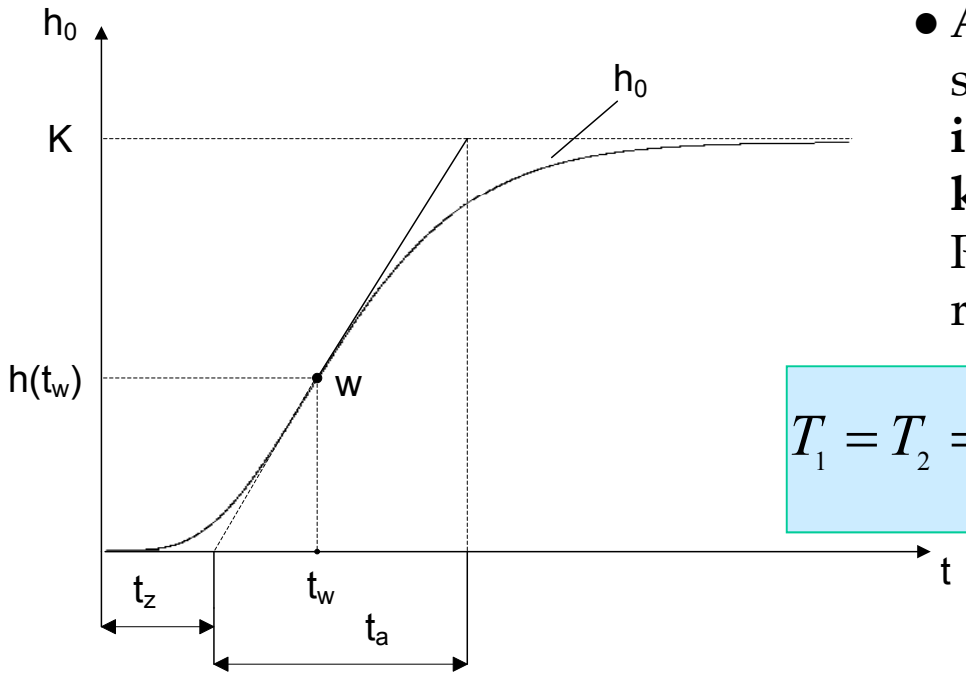
Primjer: t_a = 30 s ; t_z = 2,3

(1) $t_a / t_z = 13$

(2) ÷ (3) $t_a / T_1 = 6{,}55 \rightarrow$ **T_1 = 4,57 s**

(2) ÷ (4) $T_2 / T_1 = 4{,}2 \rightarrow$ **T2 = 19,2 s**

Aproksimacija matematičkog modela sustava pomoću PTn člana – 1/2



- Ako su vremenske konstante stvarnog sustava približno jednake (**odnos najveće i najmanje dominantne vremenske konstante nije veći od 2**), aproksimacija PTn članom daje zadovoljavajuće rezultate:

$$T_1 = T_2 = T_3 = \cdots = T_n = T \;\Rightarrow\; G(s) = \frac{K}{(1+Ts)^n}$$

- Pripadajuća prijelazna funkcija glasi:

$$h(t) = K\left\{1 - \left[\sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{(t/T)^{\nu}}{\nu!}\right] e^{-t/T}\right\}$$

- Prva i druga derivacija prijelazne funkcije $h(t)$ glase:

$$\frac{\dot{h}(t)}{K} = \frac{(t/T)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{T} e^{-t/T}$$

$$\frac{\ddot{h}(t)}{K} = \frac{(n-1)}{(n-1)!}(t/T)^{n-2} \cdot \frac{1}{T} e^{-t/T} - \frac{(t/T)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{T^2} e^{-t/T}$$

© Ivan Petrović

Aproksimacija matematičkog modela sustava pomoću PTn člana – 2/2

- Prva i druga derivacija prijelazne funkcije $h(t)$ glase:

$$\frac{\dot{h}(t)}{K} = \frac{(t/T)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{T} e^{-t/T} \qquad \frac{\ddot{h}(t)}{K} = \frac{(n-1)}{(n-1)!}(t/T)^{n-2} \cdot \frac{1}{T} e^{-t/T} - \frac{(t/T)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{T^2} e^{-t/T}$$

- Iz uvjeta:

$$\ddot{h}(t_w) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_w = (n-1)T$$

$$\dot{h}(t_w) = \frac{K}{t_a} \quad \Rightarrow \quad \frac{t_a}{T} = \frac{(n-1)!}{(n-1)^{n-1}} e^{n-1} \qquad (*)$$

- Iz sličnosti trokutova proizlazi:

$$(t_w - t_z)/t_a = h(t_w)/K \quad \Rightarrow \quad \frac{t_z}{T} = (n-1) - \frac{(n-1)!}{(n-1)^{n-1}} \left[e^{n-1} - \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{(n-1)^{\nu}}{\nu!} \right] \qquad (**)$$

- Postupak identifikacije:
  - Iz prijelazne se funkcije odrede t_a i t_z, a zatim se n mijenja od n=2 na više i odredi se T iz (*) ili (**) dok se ne dobije dobro slaganje odziva modela procesa i stvarnoga procesa

Aproksimacija matematičkog modela sustava pomoću PT2S člana – 1/3

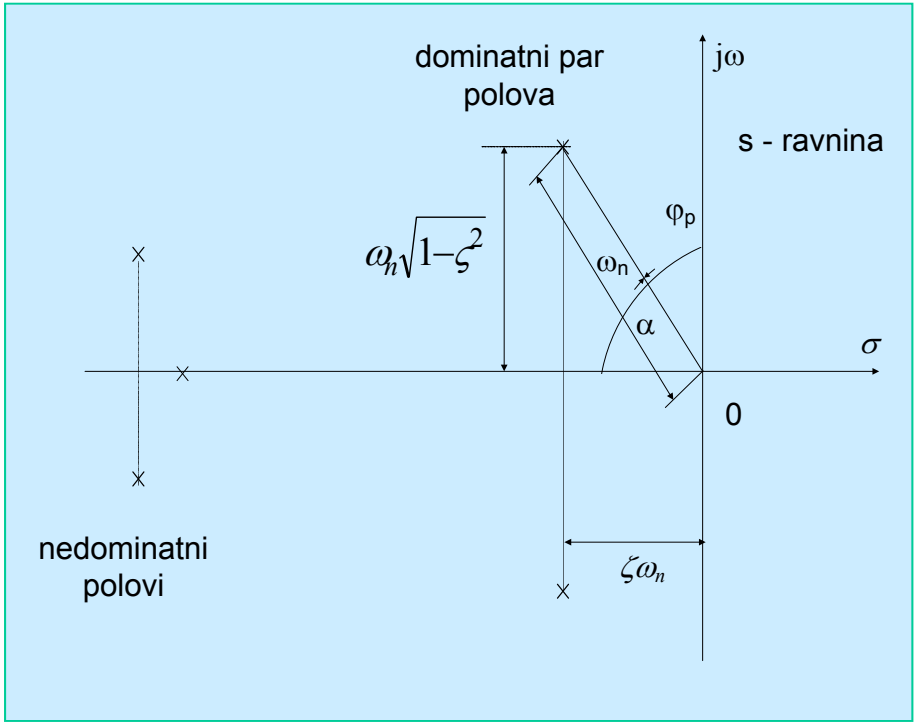
- **Dok su prethodne metode namijenjne identifikaciji sustava s aperiodskim odzivom, ovdje se obrađuje metoda identifikacije sustava s oscilatornim odzivom**
- **Takvi se sustavi često mogu dovoljno dobro aproksimirati prijenosnom funkcijom drugog reda:**

$$G(s) = K \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

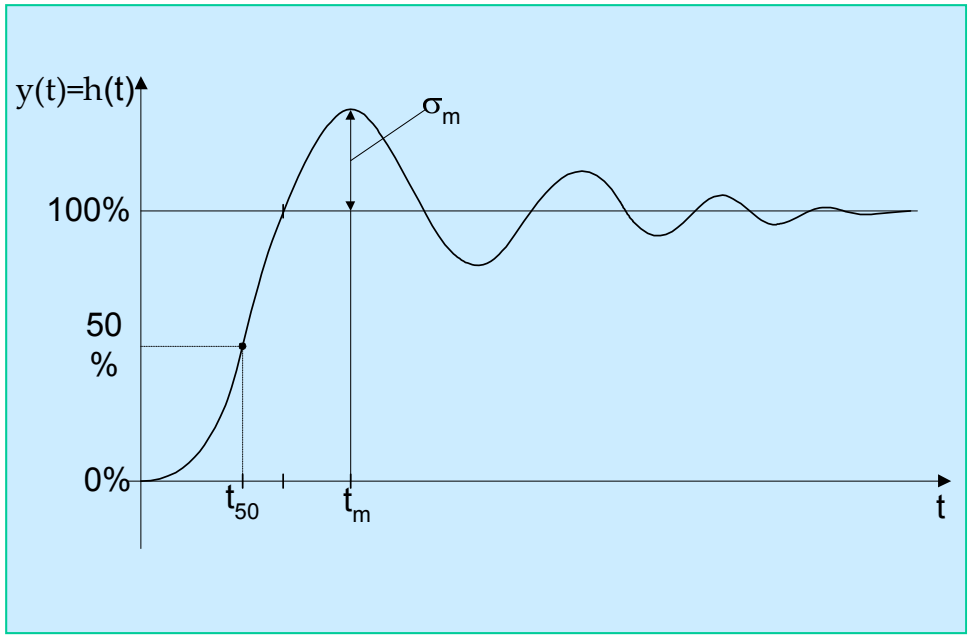
gdje je:

ω_n - prirodna frekvencija neprigušenih oscilacija i

ζ - relativni koeficijent prigušenja



Aproksimacija matematičkog modela sustava pomoću PT2S člana – 2/3



$$g(t) = \dot{h}(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot e^{-\zeta\omega_n t} \cdot \sin\left(\sqrt{1-\zeta^2} \cdot \omega_n t\right)$$

Iz $g(t) = \dot{h}(t) = 0$

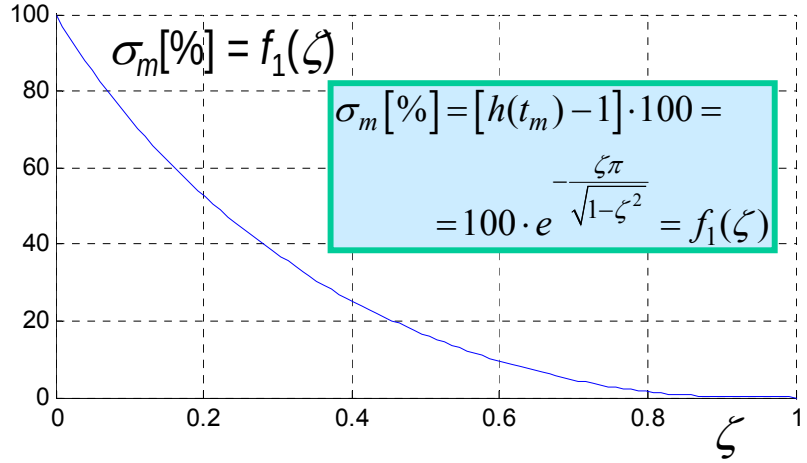
$$t_m = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$

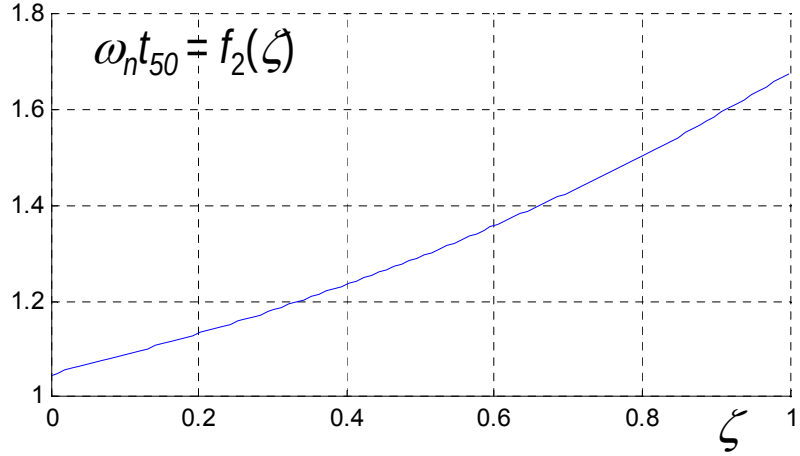
$$\sigma_m[\%] = [h(t_m) - 1] \cdot 100 = 100 \cdot e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = f_1(\zeta)$$

$$h(t) = 1 - \frac{e^{-\varsigma\omega_n t}}{\sqrt{1-\varsigma^2}} \cdot \cos\left[\sqrt{1-\varsigma^2} \cdot \omega_n t - \arcsin\varsigma\right],$$

$$h(t_{50}) = 0.5 = 1 - \frac{e^{-\varsigma\omega_n t_{50}}}{\sqrt{1-\varsigma^2}} \cdot \cos\left[\sqrt{1-\varsigma^2}\,\omega_n t_{50} - \arcsin\varsigma\right] \xrightarrow{\text{Numeričkim postupkom}} \omega_n t_{50} = f_2(\zeta)$$

Aproksimacija matematičkog modela sustava pomoću PT2S člana – 3/3





Prijenosna funkcija određena je s tri parametra: K, ζ i ω_n, koji se identificiraju sljedećim postupkom:

1. Pojačanje K određuje se iz omjera promjene izlazne veličine i ulazne veličine u eksperimentu.
2. Koeficijent prigušenja ζ određuje se iz očitanog σ_m i iz funkcije $f_1(\zeta)$.
3. Frekvencija neprigušenih prirodnih oscilacija ω_n određuje se iz očitanog vremena t_{50} i iz funkcije $f_2(\zeta)$.

© Ivan Petrović

Metoda momenata – 1/3

- **Određuje prijenosnu funkciju procesa G(s) iz izmjerene težinske funkcije g(t)**

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \cdots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \cdots + s^n}$$

- **Odnos g(t) i G(s) dan je Laplaceovom transformacijom:**

$$G(s) = L\{g(t)\} = \int_0^\infty g(t) e^{-st} dt$$

- **Razvojem u Taylorov red člana e^{-st} u okolici točke st=0 G(s) poprima oblik:**

$$G(s) = \int_0^\infty \left[1 - st + \frac{(st)^2}{2!} - \frac{(st)^3}{3!} + \cdots \right] g(t) dt$$

- **Iz toga slijedi: => vidjeti sljedeći slajd**

Metoda momenata – 2/3

$$G(s)=\int_0^\infty\left[1-st+\frac{(st)^2}{2!}-\frac{(st)^3}{3!}+\cdots\right]g(t)dt$$

$$G(s)=\int_0^\infty g(t)dt-s\int_0^\infty tg(t)dt+\frac{s^2}{2!}\int_0^\infty t^2g(t)dt-\cdots$$

$$G(s)=M_0-sM_1+\frac{s^2}{2!}M_2-\frac{s^3}{3!}M_3+\cdots$$

***i* - ti** moment zadane težinske funkcije

gdje je: $M_i=\int_0^\infty t^i g(t)dt$

$$G(s)=\frac{b_0+b_1s+\cdots+b_ms^m}{a_0+a_1s+\cdots+s^n}$$

$$\left(M_0-sM_1+\frac{s^2}{2!}M_2-\frac{s^3}{3!}M_3\right)\left(a_0+a_1s+\cdots+s^n\right)=b_0+b_1s+\cdots+b_ms^m$$

- Izjednačenjem koeficijenata uz iste potencije dobije se **(m+n+1)** algebarskih jednadžbi odakle se mogu odrediti koeficijenti prijenosne funkcije:

$$\mathbf{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, b_0, b_1, \ldots, b_m.}$$

Metoda momenata – 3/3

- **Primjer: m = 1; n = 2** (sustav s jednom nulom i dva pola)

$$\left(M_0 - sM_1 + \frac{s^2}{2!}M_2 - \frac{s^3}{3!}M_3\right)\left(a_0 + a_1 s + \cdots + s^n\right) = b_0 + b_1 s + \cdots + b_m s^m$$

$$\begin{aligned}
M_0 a_0 &= b_0 \\
\left(-M_1 a_0 + M_0 a_1\right)s &= b_1 s \\
\left(\frac{M_2}{2!}a_0 - M_1 a_1 + M_0\right)s^2 &= 0 \\
\left(-\frac{M_3}{3!}a_0 + \frac{M_2}{2!}a_1 - M_1\right)s^3 &= 0
\end{aligned}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M_0 & 0 & -1 & 0 \\ -M_1 & M_0 & 0 & -1 \\ \frac{M_2}{2!} & -M_1 & 0 & 0 \\ -\frac{M_3}{3!} & \frac{M_2}{2!} & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{M}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}}_{\underline{p}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -M_0 \\ M_1 \end{bmatrix}}_{\underline{m}}$$

$$\underline{p} = \underline{M}^{-1} \cdot \underline{m}$$

Postavlja se pitanje kako eksperimentalno odrediti (izmjeriti) težinsku funkciju *g*(*t*) koja je potrebna za primjenu metode momenata? Opisano na slajdovima 34-40.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
Fakultet elektrotehnike i računarstva
Zavod za automatiku i računalno inženjerstvo
Unska 3, Zagreb, HRVATSKA

Računalno upravljanje sustavima

Poglavlje 3:
Pristup sintezi digitalnih regulatora

© Ivan Petrović

Sadržaj poglavlja:

- **Definiranje problema sinteze sustava automatskog upravljanja**
  - **Stabilnost SAU**
  - **Zahtjevi na sustav automatskog upravljanja - pokazatelji kakvoće**
  - **Izbor vremena uzorkovanja**
- **Pristupi sintezi digitalnih regulatora**
  - **Sinteza u kontinuiranom području uz zanemaren utjecaj diskretizacije**
  - **Sinteza u kontinuiranom području uz uključen utjecaj diskretizacije**
  - **Sinteza u diskretnom području**
- **Strukture digitalnih regulatora**

© Ivan Petrović

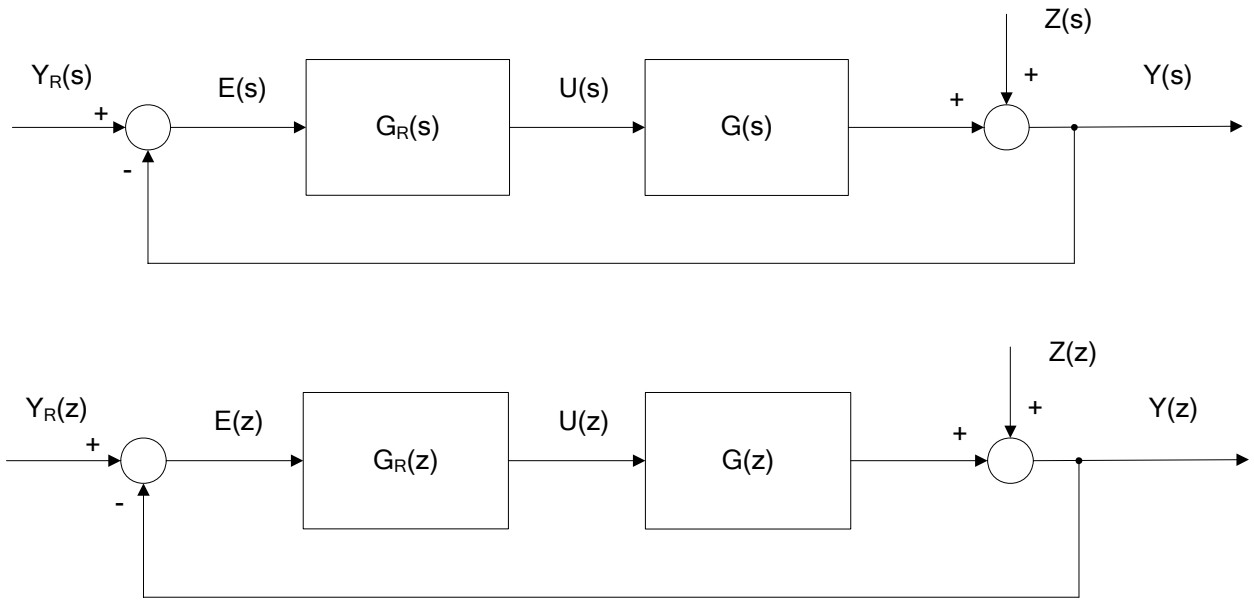
Definiranje problema sinteze sustava automatskog upravljanja

- **Projektiranje ili sinteza sustava upravljanja** jedna je od najvažnijih zadaća koja se postavlja pred projektanta sustava upravljanja.

- Pod ovom se zadaćom podrazumijeva kompletno projektiranje (dimenzioniranje) svih elemenata sustava, **uključivo i elemente zaštite, signalizacije i dijagnostike**.

- Uobičajeni zahtjevi koji se postavljaju na sustave upravljanja, predočene standardnom strukturom regulacijskog kruga (Sl. 3.1.), jesu (ograničit ćemo se samo na projektiranje regulatora):

© Ivan Petrović



Sl. 3.1.

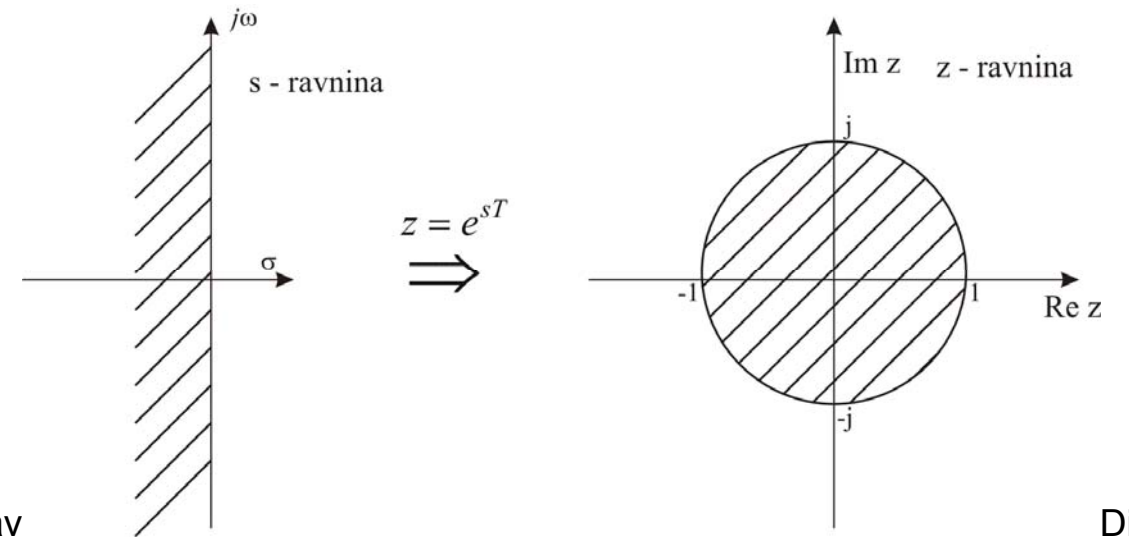
1. regulacijski krug mora biti stabilan;
2. regulirana veličina y(t) treba čim točnije i čim brže slijediti vremenski promjenljivu vodeću vrijednost $y_R(t)$;
3. poremećajne veličine z(t) trebaju čim manje utjecati na reguliranu veličinu y(t);
4. regulacijski krug treba biti čim manje osjetljiv na promjene parametara.

© Ivan Petrović

Stabilnost regulacijskog kruga:

(ispunjenje 1. zahtjeva)

- Stabilnost sustava s obzirom na položaj polova:



Kontinuirani sustav

Diskretni sustav

- Sustav je stabilan ako se svi polovi prijenosne funkcije zatvorenog sustava nalaze u lijevoj poluravnini ***s*** ravnine (kontinuirani sustavi), odnosno unutar jediničnog kruga u ***z*** ravnini (diskretni sustavi).
- U tom slučaju govorimo o **asimptotski stabilnom** sustavu.

© Ivan Petrović

• Kriteriji stabilnosti:

KONTINUIRANI SUSTAVI	DISKRETNI SUSTAVI

a) algebarski (analitički) kriteriji

- Routh-Hurwitzov kriterij (u s-ravnini)

- Kriterij Schur-Cohna (nepraktičan)
- Kriterij Jurya (u z-ravnini)

Daju uvid u apsolutnu nestabilnost

b) grafički (grafoanalitički) kriteriji

- Nyquistov kriterij (u $G_0(s)$ ravnini)
- Krivulja mjesta korijena (root locus)- KMK (u s-ravnini)
- Bodeov dijagram (u $j\omega$ ravnini)

- Nyquistov kriterij (u $G_0(z)$ ravnini - nepraktičan)
- Krivulja mjesta korijena (root locus) - KMK (u z-ravnini)
- Bodeov dijagram (u jw ravnini)

Daju uvid u relativnu nestabilnost (stupanj oscilatornosti, amplitudna pričuva, fazna pričuva)

© Ivan Petrović

Zahtjevi na vladanje sustava upravljanja - pokazatelji kakvoće:

(ispunjenje 2. i 3. zahtjeva)

IDEALNO VLADANJE SUSTAVA:

- U **idealnom slučaju** ispunjenje zahtjeva 2. i 3. rezultira:

$$\boxed{G_x(s) = \frac{Y(s)}{Y_R(s)} = \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)} = 1,} \qquad (3 - 1)$$

(Idealno praćenje referentne veličine)

$$\boxed{G_z(s) = \frac{Y(s)}{Z(s)} = \frac{1}{1+G_0(s)} = 0\ .} \qquad (3 - 2)$$

(Idealna kompenzacija poremećaja)

- **Stroga realizacija (3-1) i (3-2) nije moguća** zbog fizikalnih i tehničkih razloga.

© Ivan Petrović

Primjer 3.1

- Pretpostavimo da je objekt upravljanja (proces) istosmjerni motor s nezavisnom i konstantnom uzbudom čija je prijenosna funkcija :

$$\boxed{\frac{\Omega(s)}{U_a(s)} = \frac{1}{K} \cdot \frac{1}{1 + T_m s + T_a T_m s^2}}.$$

- Uz pretpostavku upravljanja brzinom vrtnje bez podređenog upravljanja strujom armature (direktno upravljanje) te uz pretpostavku da se može zanemariti armaturna vremenska konstanta T_a, prijenosna funkcija motora poprima oblik:

$$\boxed{\frac{\Omega(s)}{U_a(s)} = \frac{K_1}{1 + T_m s}}. \qquad (3 - 3)$$

$$K_1 = \frac{1}{K}$$

© Ivan Petrović

- Nadalje, uz pretpostavku zanemarenja svih nedominantnih vremenskih konstanti sustava (u pojačalu snage s pojačanjem K_p i u mjernom članu brzine vrtnje s pojačanjem K_b) proizlazi da bi se u cijelosti mogla kompenzirati dinamika objekta upravljanja ako se primijeni regulator brzine vrtnje PD - djelovanja (uz $T_R = T_m$):

$$\boxed{G_R(s) = K_R(1 + T_m s).} \qquad (3 - 4)$$

- U tom slučaju otvoreni regulacijski krug s prijenosnom funkcijom:

$$\boxed{G_0(s) = G_R(s) \cdot G(s) \cdot K_p K_b = K_R(1 + T_m s)\frac{K_1 K_p K_b}{1 + T_m s} = K_R K_1 K_p K_b} \qquad (3 - 5)$$

poprima čisto P - djelovanje.

- Ako se ulazna veličina regulatora promijeni skokovito, proizlazi da bi i brzina vrtnje motora poprimila trenutačno svoju stacionarnu vrijednost.

© Ivan Petrović

- Da bi se ovo vladanje moglo interpretirati fizikalno, razmotrimo prijelaznu funkciju regulatora:

$$\boxed{h_R(t) = K_R S(t) + K_R T_m \delta(t).} \qquad (3 - 6)$$

- Proizlazi da bi **izvršna veličina objekta upravljanja** (napon armature motora) trebala trenutačno poprimiti **beskonačni iznos** (δ - impuls) koji bi uvjetovao beskonačno kratki zalet motora.
- Osim toga, da bi trajno regulacijsko odstupanje bilo jednako nuli te da bi se u cijelosti kompenzirao utjecaj smetnji, **moralo bi pojačanje regulatora biti beskonačno**.
- Prema tome, regulator s prijenosnom funkcijom (3 - 4) ne može se primijeniti na procese opisane prijenosnim funkcijama koje imaju strukturu kao (3 - 3).
- Osim toga:
  - Regulator s prijenosnom funkcijom (3 - 4) ne može se realizirati. Dobra aproksimacija idealnog PD - regulatora prema (3 - 4) postiže se PDT_1 - regulatorom (realni PD - regulator):

© Ivan Petrović

$$G_R(s) = K_R\left(1 + \frac{T_D s}{1 + T_v s}\right),$$

gdje je: $T_v << T_D$.

- Iznosi izvršnih veličina ne smiju poprimiti proizvoljno velike vrijednosti. U navedenom primjeru motor može imati maksimalno dopušteni napon armature, koji se ne smije prekoračiti. Osim toga, pri pokretanju motora ne smije se prekoračiti ni dopuštena struja armature. Prema tome, pri projektiranju regulatora brzine vrtnje (u konkretnom slučaju) moraju se uzeti u obzir granične vrijednosti napona i struje armature motora.
- Postojanje derivacijskog člana u regulacijskom krugu pojačava visokofrekvencijske signale. Takvi se signali uobičajeno pojavljuju u svakom realnom regulacijskom krugu kao stohastičke smetnje (signali šuma) koji se superponiraju determinističkim regulacijskim signalima
- Veliko pojačanje regulatora K_R moglo bi prouzročiti nestabilnost zatvorenog regulacijskog kruga. Ovaj slučaj ne može teoretski nastupiti u navedenom primjeru. Međutim, treba imati u vidu da je prijenosna funkcija (3 - 3) dobivena uz zanemarenja.

© Ivan Petrović

- Na temelju analiziranog primjera vidljivo je da su **zahtjevi na ustaljeno vladanje (trajno regulacijsko odstupanje) i dinamičko vladanje međusobno djelomično kontradiktorni**; to je utoliko izraženije ukoliko se više teži idealnom regulacijskom krugu definiranom relacijama (3-1) i (3-2).

- U praksi se stoga pri projektiranju sustava upravljanja polazi od maksimalno mogućeg približenja idealnom slučaju.

- Prema tome, projektiranje sustava upravljanja predstavlja kompromis između postavljenih zahtjeva i tehničkih ograničenja.

- Pri tome su od velike pomoći **prethodna iskustva, inženjersko razumijevanje fizikalnih zbivanja u elementima sustava upravljanja te projektantska kreativnost**.

- **Zahtjeve za vladanjem zatvorenog regulacijskog kruga** projektant iskazuje preko **pokazatelja kakvoće** njegova vladanja u dinamičkim stanjima i u ustaljenom stanju.

© Ivan Petrović

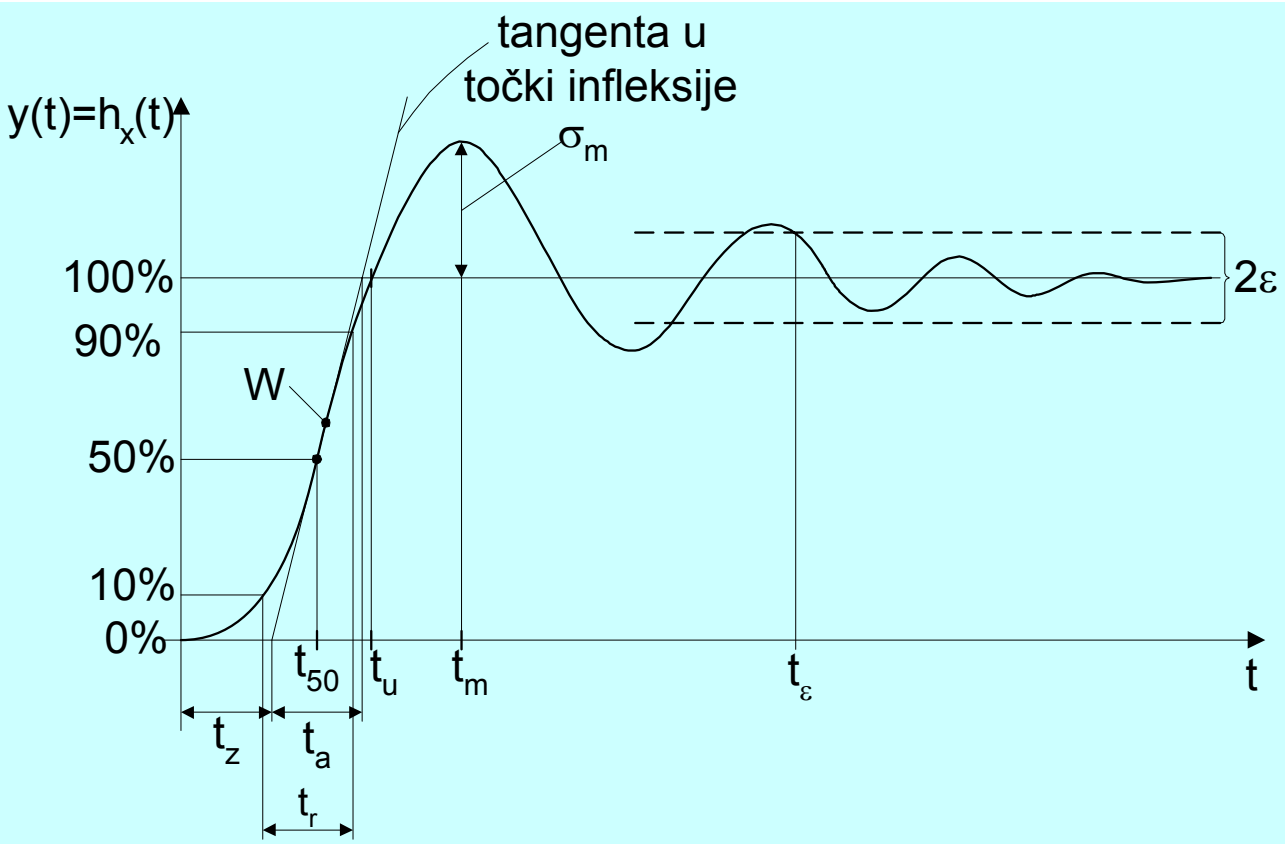
POKAZATELJI KAKVOĆE U VREMENSKOM PODRUČJU:

Karakteristične veličine prijelaznih funkcija $h_x(t)$ i $h_z(t)$:

Prijelazna funkcija s obzirom na referentnu veličinu $h_x(t)$:

- Prikazana je na slici 3.2. –> sljedeći slajd.
- Za opis prijelazne funkcije $h_x(t)$ koriste se sljedeći pojmovi (**neposredni pokazatelji kakvoće**):
  - **maksimalno nadvišenje** σ_m (*engl.* peak, overshoot; *njem.* maximale Überschwingweite; $\sigma_m \mathrel{\hat{=}} e_{\max} \mathrel{\hat{=}} M_p$) kojim je određen iznos maksimalnog regulacijskog odstupanja nakon prvog dostizanja željenog stacionarnog stanja, odnosno dostizanja referentne vrijednosti (100 %) u sustavima s jediničnom povratnom vezom;

© Ivan Petrović



Sl. 3.2.

$$h(t) = 1 - \frac{e^{-\varsigma\omega_n t}}{\sqrt{1-\varsigma^2}} \cdot \cos\left[\sqrt{1-\varsigma^2} \cdot \omega_n t - \arcsin\varsigma\right]$$

- uobičajena je pretpostavka da se stvarni zatvoreni sustav dobro aproksimira PT_2S modelom

© Ivan Petrović

- **vrijeme prvog maksimuma** t_m pri kojem se pojavljuje maksimalno nadvišenje ($t_m \mathrel{\hat{=}} t_p$, *engl.* time to maximum overshoot; *njem.* t_m-Zeit):

- **vrijeme porasta** t_r (*engl.* rise time; *njem.* Anstiegszeit) koje se definira kao vrijeme za koje prijelazna funkcija $h_x(t)$ poraste od vrijednosti 0,1 $h_x(\infty)$ na vrijednost 0,9 $h_x(\infty)$;

- Vrijeme porasta može se definirati i pomoću tangente povučene u točki infleksije W prijelazne funkcije $h_x(t)$:

  - **vrijeme porasta** t_a koje se dobije iz točaka sjecišta tangente, povučene u točki infleksije W prijelazne funkcije $h_x(t)$, s linijama 0% i 100%. Često se koristi tangenta povučena u točki određenoj vremenom t_{50} kod koje $h_x(t)$ poprima 50% željenog stacionarnog stanja, odnosno 50 % referentne vrijednosti u sustavima s jediničnom povratnom vezom.(U tom slučaju se vrijeme porasta označava s $t_{a,50}$).

  - **vrijeme zadržavanja** t_z dobije se iz sjecišta prethodno definirane tangente u točki infleksije s vremenskom osi.

© Ivan Petrović

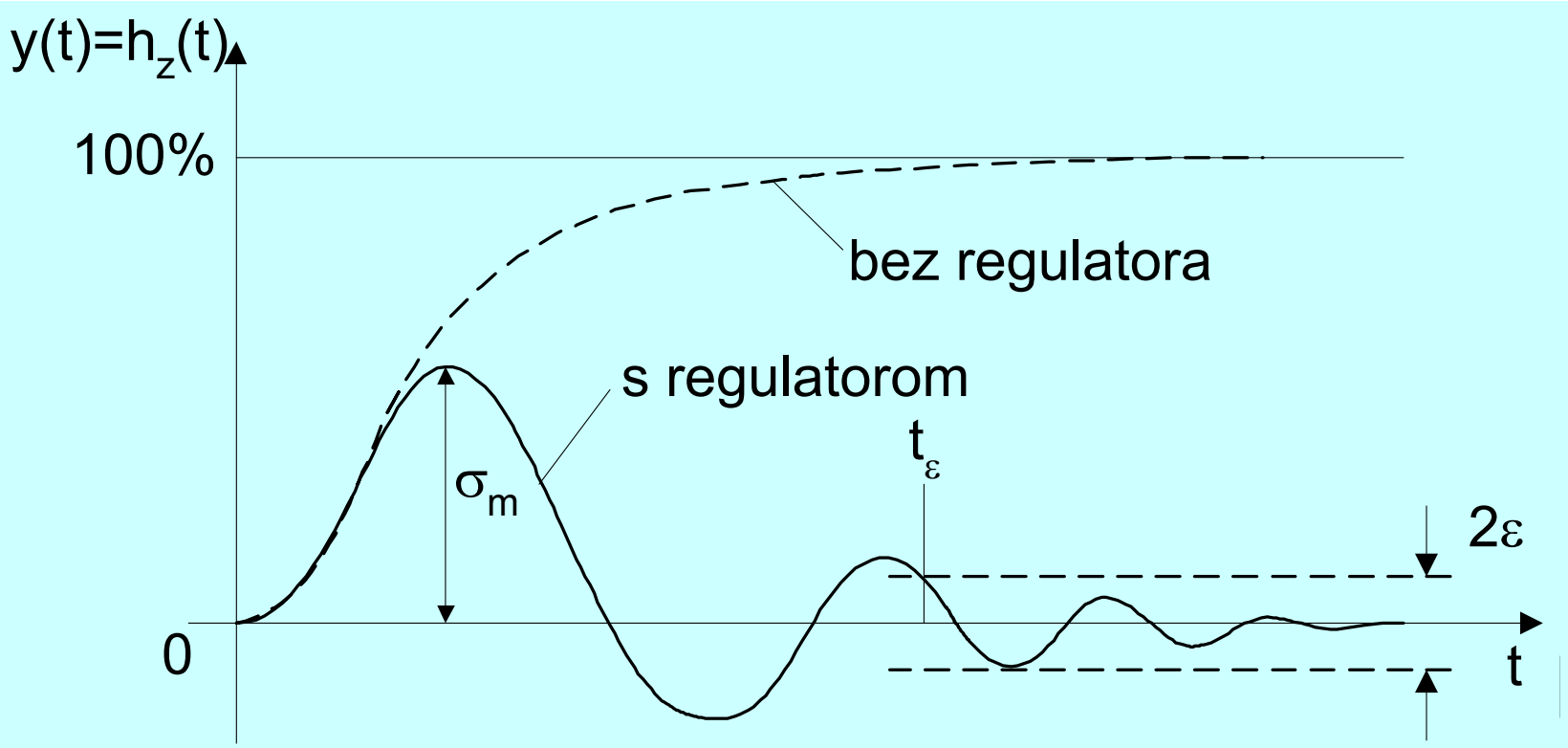
- **ulazno vrijeme** t_u kojim je određen trenutak prvog dostizanja željenog stacionarnog stanja, odnosno dostizanja referentne vrijednosti (100%) u sustavima s jediničnom povratnom vezom. Vrijedi približna relacija: $t_u \approx t_z + t_a$.

- **vrijeme ustaljivanja** t_ε kojim je određeno trajanje prijelaznog procesa nakon kojega regulacijsko odstupanje e(t) postane manje od zadanog iznosa ε (npr. ε = 3%, što odgovara vremenu ustaljenja $t_{3\%}$): (Ustaljivanje = smirivanje: $t_\varepsilon \mathrel{\hat{=}} t_s \mathrel{\hat{=}} T_s$; *engl.* settling time, *njem*. Ausregelzeit).

Prijelazna funkcija s obzirom na poremećajnu veličinu $h_z(t)$:

- Na sličan način može se karakterizirati i **vladanje sustava s obzirom na poremećajnu veličinu**. I ovdje se na isti način definiraju pojmovi "maksimalno nadvišenje" i "vrijeme ustaljenja", **Sl. 3.3.**:

© Ivan Petrović



Sl. 3.3.

- Veličine σ_m i t_ε neposredno ukazuju na **prigušenje sustava**, dok je veličinama t_u, t_a, t_r i t_m određena brzina, odnosno **dinamika sustava upravljanja**.

- Budući da sve ove veličine predstavljaju odstupanja prijelazne funkcije od prethodno definiranog idealnog slučaja i time dinamičku pogrešku prijelaznog procesa, cilj je sinteze sustava da te veličine imaju čim manji iznos.

- **U praksi** se često ograničavamo na tri veličine i to: t_u **(ili** t_r **ili** t_m**),** t_ε **i** σ_m .

- Pri minimizaciji ovih veličina općenito je nužno **uvažavati maksimalno dopuštene vrijednosti fizikalnih varijabli** u sustavu upravljanja (primjerice u izvršnim članovima).

© Ivan Petrović

Integralni kriteriji kao pokazatelji kakvoće:

- Iz slike 3.2. je vidljivo da površina između prijelazne funkcije $h_x(t)$ i pravca iznosa 100% predstavlja **mjeru za odstupanje regulacijskog kruga od idealnog vladanja s obzirom na vodeću vrijednost**.
- Jednako tako, površina između prijelazne funkcije $h_z(t)$ (Sl. 3.3.) i vremenske osi predstavlja **mjeru za odstupanje regulacijskog kruga od slučaja idealnog potiskivanja smetnji**.
- U oba se slučaja radi o ukupnoj površini ispod regulacijskog odstupanja $e(t) = y_R(t) - y(t)$ kojim se može opisati odstupanje od idealnog regulacijskog kruga.
- Prema tome, integral za kontinuirane i suma za diskretne sustave:

$$\boxed{I_k = \int_0^\infty f_k\left[e(t)\right]dt} \qquad \boxed{I_k = \sum_{k=0}^{\infty} f_k\left[e(k)\right]} \qquad (3 - 7)$$

predstavljaju **mjeru za kakvoću upravljanja**, gdje funkcija f_k **[e(t)]** može imati **različite oblike**, npr. $e(t)$, $|e(t)|t$, $e^2(t)$ itd.

© Ivan Petrović

- U takvoj integralnoj mjeri kakvoće mogu se **uzeti u obzir i vremenske derivacije** regulacijskog odstupanja kao i amplitude izvršnih veličina.

- **Najvažnija svojstva** mjera kakvoće I_k dana su **u tablici 3.1** (Sljedeća stranica).

- **Upravljanje** je u smislu odabranog integralnog kriterija utoliko **bolje** ukoliko je **I_k manji**.

- Prema tome, potrebno je provesti **minimizaciju I_k**, pri čemu se to može izvesti prikladnim izborom slobodnih (podesivih) parametara sustava r_1, r_2.....(parametara regulatora).

- **Time integralni kriterij** poprima oblik:

$$\boxed{I_k = \int_0^\infty f_k\left[e(t)\right]dt = I_k(r_1, r_2....) \overset{!}{=} \min.} \qquad \boxed{I_k = \sum_{k=0}^{\infty} f_k\left[e(k)\right] = I_k(r_1, r_2....) \overset{!}{=} \min.} \qquad (3 - 8)$$

© Ivan Petrović

MJERE KAKVOĆE		SVOJSTVA
Kontinuirani sustavi	Diskretni sustavi	
$I_1 = \int_0^\infty e(t)\,dt$	$I_1 = \sum_{k=0}^{\infty} e(k)$	**Linearna površina regulacijskog odstupanja:** Prikladna je za analizu jako prigušenih ili monotonih sustava upravljanja; jednostavna matematička obrada.
$I_2 = \int_0^\infty \lvert e(t)\rvert\,dt$	$I_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \lvert e(k)\rvert$	**Linearna površina apsolutne vrijednosti regulacijskog odstupanja:** Prikladna je za oscilatorne sustave upravljanja; mukotrpna matematička obrada
ISE* - kriterij (Integral of Squared Error)		**Kvadratična površina regulacijskog odstupanja:** Daje veće vrijeme ustaljivanja t_ε nego I_2. U mnogim slučajevima moguć analitički proračun
$I_3 = \int_0^\infty e^2(t)\,dt$	$I_3 = \sum_{k=0}^{\infty} e^2(k)$	
ITAE* - kriterij (Integral of Time Multiplied by Absolute Value of Error)		**Vremenski otežana linearna površina apsolutne vrijednosti regulacijskog odstupanja:** Djelovanje kao I_2, ali dodatno uzima u obzir trajanje regulacijskog odstupanja
$I_4 = \int_0^\infty \lvert e(t)\rvert t\,dt$	$I_4 = \sum_{k=0}^{\infty} \lvert e(k)\rvert k$	
$I_5 = \int_0^\infty e^2(t)t\,dt$	$I_5 = \sum_{k=0}^{\infty} e^2(k)k$	**Vremenski otežana kvadratična površina regulacijskog odstupanja:** Djelovanje kao I_3, ali dodatno uzima u obzir trajanje regulacijskog odstupanja

$I_6 = \int_0^\infty \left[e^2(t) + \alpha \dot{e}^2(t) \right] dt$	$I_6 = \sum_{k=0}^{\infty} \left[e^2(k) + \alpha \dot{e}^2(k) \right]$	**Poopćena kvadratična površina regulacijskog odstupanja:** Djelovanje povoljnije od I_3; izbor težinskog koeficijenta α općenito je subjektivan
$I_7 = \int_0^\infty \left[e^2(t) + \beta u^2(t) \right] dt$	$I_7 = \sum_{k=0}^{\infty} \left[e^2(k) + r u^2(k) \right]$	**Kvadratična površina regulacijskog odstupanja i energetsko forsiranje:** Veća vrijednost σ_m ima za posljedicu t_ε bitno kraće; izbor težinskog koeficijenta β općenito je subjektivan

Tablica 3.1.

- ***Napomena:*** Ako u regulacijskom krugu postoji trajno regulacijsko odstupanje e_∞, tada se u navedenim relacijama koristi $e(t)-e_\infty$ umjesto $e(t)$, kako bi integrali konvergirali.

- Integralni kriteriji koriste za određivanje parametara regulatora postupcima optimiranja u vremenskom području.

© Ivan Petrović

POKAZATELJI KAKVOĆE U PODRUČJU KOMPLEKSNE VARIJABLE:

Kontinuirani sustavi:

- Često vrijedi pretpostavku da se stvarni zatvoreni sustav dobro aproksimira PT_2S modelom:

$$h_x(t) = 1 - \frac{e^{-\varsigma\omega_n t}}{\sqrt{1-\varsigma^2}} \cdot \cos\left[\sqrt{1-\varsigma^2}\cdot\omega_n t - \arcsin\varsigma\right]$$

- prijelazna funkcija PT2S modela

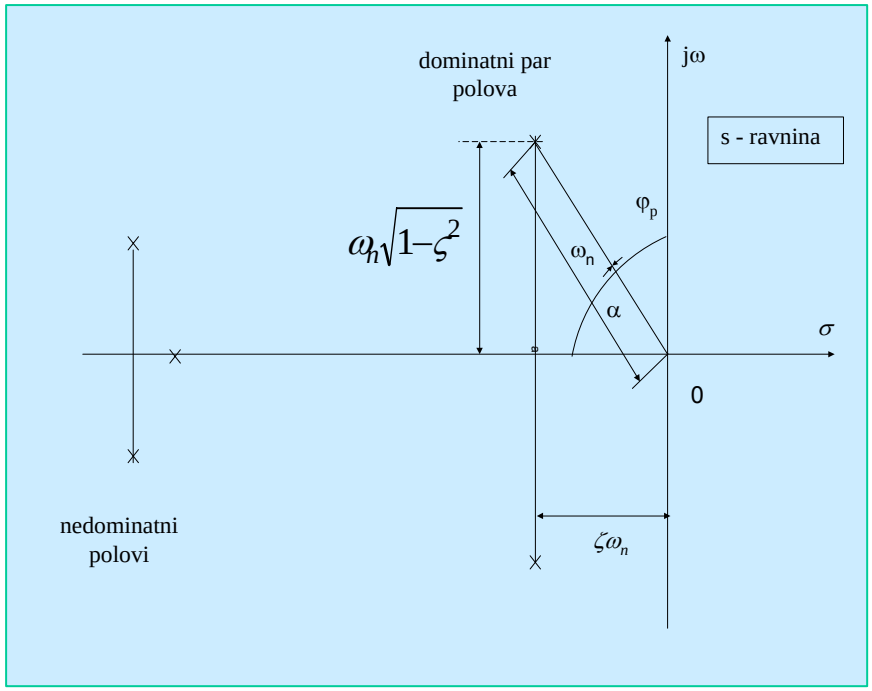
$$G_x(s) = K\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

- Veza položaja dominantnih polova kont. sustava s pokazateljima kakvoće u vremenskom području:

$$t_m = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$t_{\varepsilon=1\%} \approx \frac{4,6}{\zeta\,\omega_n}$$

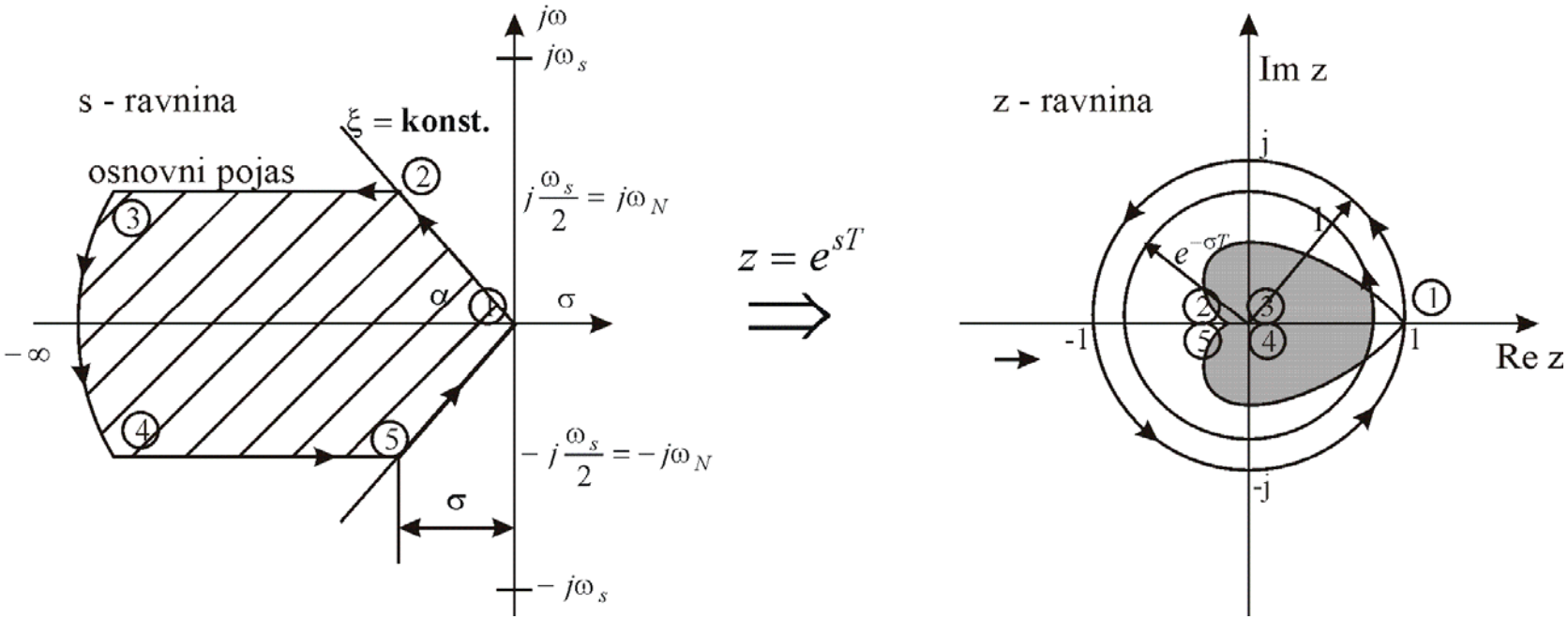
Za $\zeta \approx 0,5$ je $t_r \approx \frac{1,8}{\omega_n}$.



© Ivan Petrović

Diskretni sustavi:

- Veza položaja dominantnih polova kontinuiranog sustava u *s*-ravnini i dominantnih polova ekvivalentnog diskretnog sustava u *z*-ravnini:



$$s = -\varsigma\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\varsigma^2}; \quad \varsigma = konst.; \quad 0 \le \omega_n \le \frac{\pi/T}{\sqrt{1-\varsigma^2}}$$

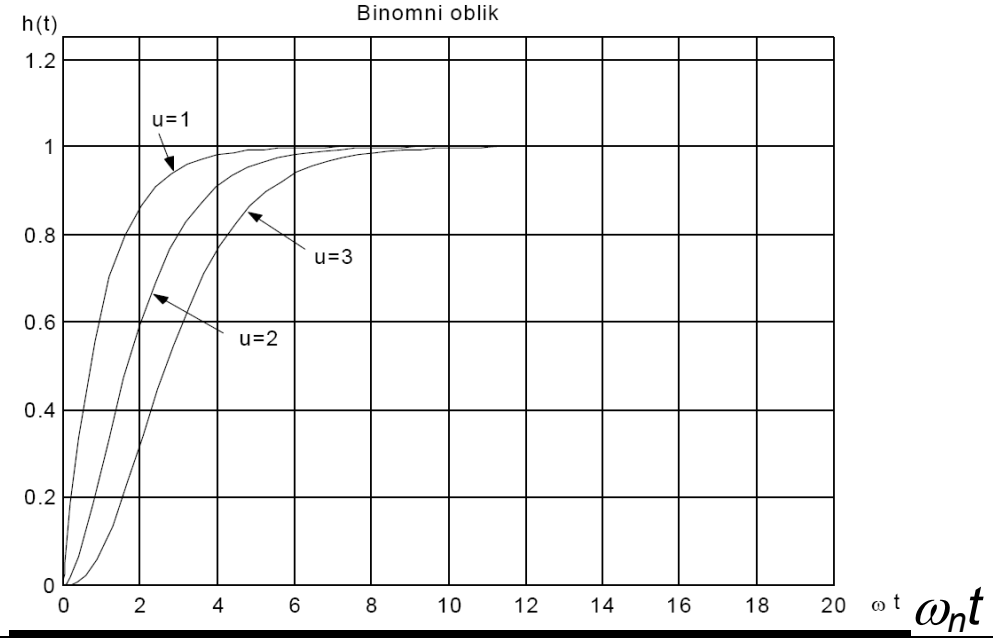
$$z = e^{sT} = e^{-\varsigma\omega_n T} e^{j\omega_n T\sqrt{1-\varsigma^2}}$$

© Ivan Petrović

Specifikacija zahtjeva pomoću modelske prijenosne funkcije zatvorenog regulacijskog kruga:

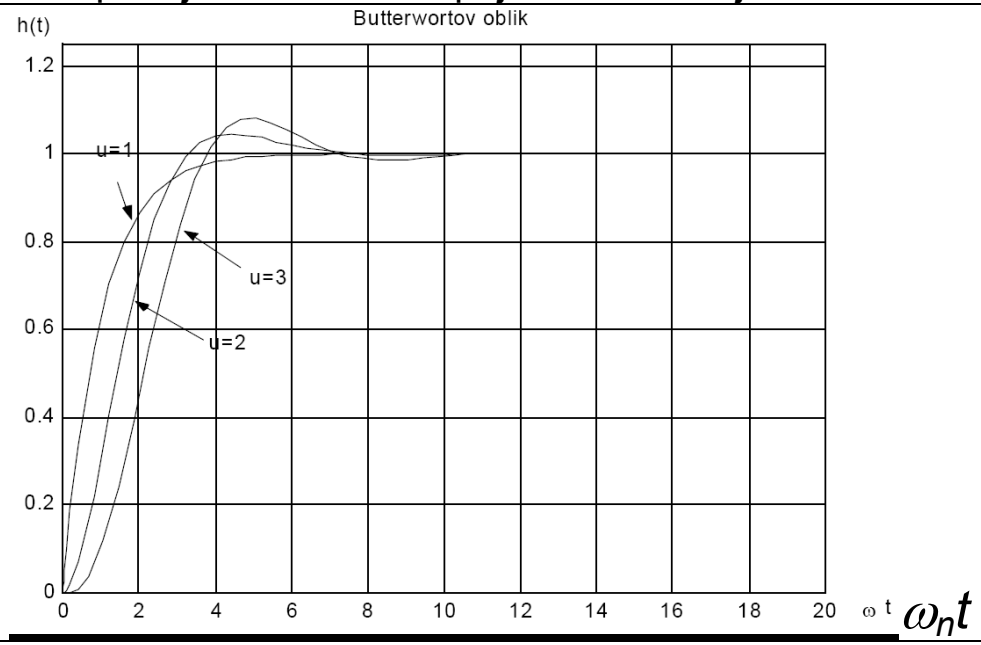
- *Binomni oblik modelske prijenosne funkcije*:

$$G_m = \frac{\omega_n^u}{(s+\omega_n)^u}$$

Karakteristični polinomi za *u*=1,2,3:	Pripadajuće prijelazne funkcije za *u*=1,2,3:
• Modelski oblik odgovora serijskoj vezi PT_1 članova sa vremenskom konstantom $T = \frac{1}{\omega_n}$ $s+\omega_n,$ $s^2+2s\omega_n+\omega_n^2,$ $s^3+3s^2\omega_n+3s\omega_n^2+\omega_n^3,$ gdje je *u* stupanj karakterističnog polinoma.	

© Ivan Petrović

- *Butterworthov oblik modelske prijenosne funkcije*:

Karakteristični polinomi za *u*=1,2,3:	Pripadajuće normirane prijelazne funkcije za *u*=1,2,3:
• Polovi prijenosne funkcije ravnomjerno su razmješteni u lijevoj poluravnini *s*-ravnine sa kružnicom polumjera ω_n. $$s+\omega_n,$$ $$s^2+1.4s\omega_n+\omega_n^2,$$ $$s^3+2s^2\omega_n+2s\omega_n^{\ 2}+\omega_n^{\ 3}$$ gdje je *u* stupanj karakterističnog polinoma.	

- Modelske prijenosne funkcije koriste se pri **analitičkim postupcima sinteze sustava** u području kompleksne varijable *s* odnosno *z*.
- Frekvencija ω_n odredi se iz neke od karakterističnih vrijednosti normirane prijelazne funkcije.

© Ivan Petrović

POKAZATELJI KAKVOĆE U FREKVENCIJSKOM PODRUČJU:

Frekvencijska karakteristika zatvorenog regulacijskog kruga:

- Za opis vladanja sustava u frekvencijskom području koriste se sljedeće karakteristične veličine:

ω_r - **rezonantna frekvencija**

$$\omega_r = \omega_n \cdot \sqrt{1-2\varsigma^2}$$

M_r - **rezonatno izdizanje (amplitudno nadvišenje)**;

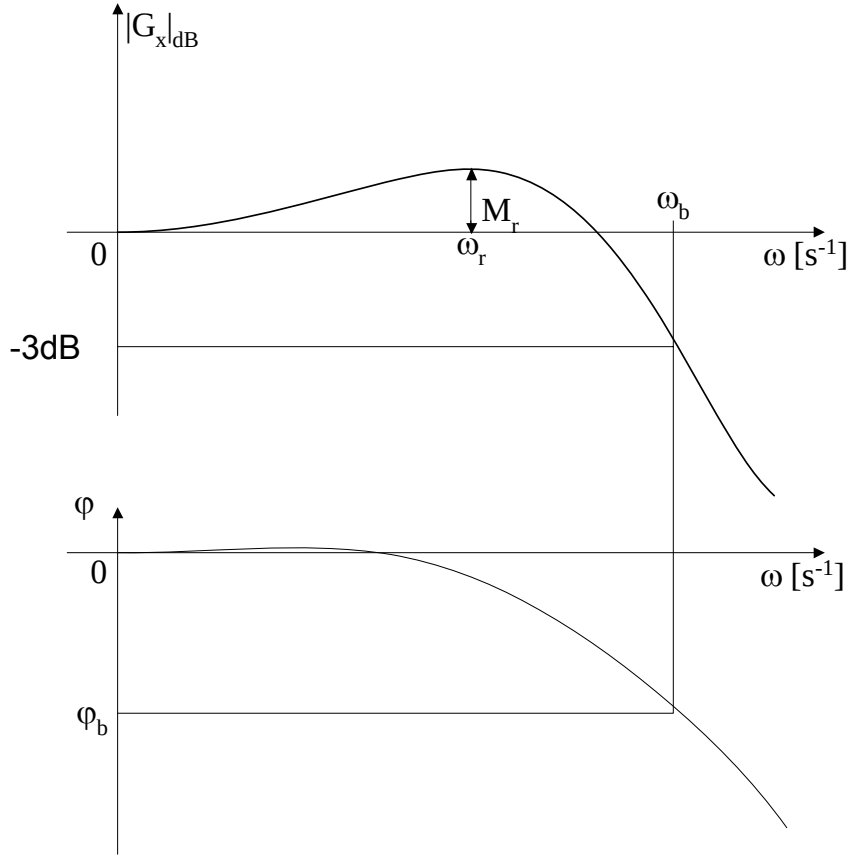
$$M(\omega_r) = M_r = \frac{1}{2\varsigma\sqrt{1-\varsigma^2}}.$$

ω_b - **širina pojasa**; $\omega_b \mathrel{\hat{=}} \omega_{BW}$; (*engl.* Bandwidth)

$$\frac{\omega_b}{\omega_n} \approx 1{,}8 - 1{,}1 \cdot \varsigma \quad \text{za} \quad 0{,}3 < \varsigma < 0{,}8,$$

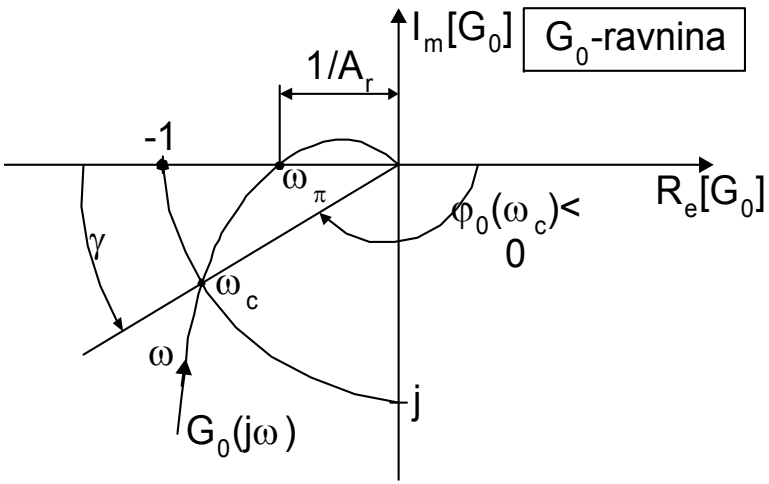
$\varphi_b = \varphi(\omega_b)$ - **fazni kut**

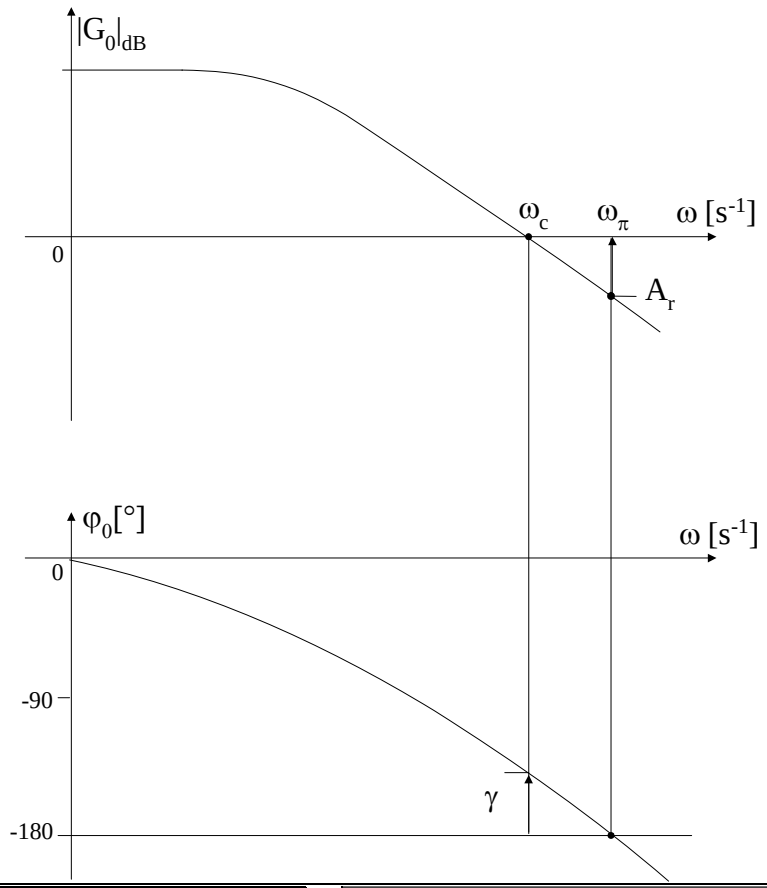
$$|\varphi_b| \approx \pi - 2{,}3 \cdot \varsigma \quad \text{za} \quad 0 \le \varsigma \le 1,$$



Frekvencijska karakteristika otvorenog regulacijskog kruga:

Nyquistov dijagram	Bodeovi dijagrami





Amplitudna pričuva:

$$A_r = \frac{1}{\left|G_0\left(j\omega_\pi\right)\right|},\ \arg G_0\left(j\omega_\pi\right) = -\pi,\ \left[A_r \cdot \left|G_0\left(j\omega_\pi\right)\right| = 1\right].$$

Fazna pričuva:

$$\gamma = \pi + \arg G_0\left(j\omega_c\right) = \pi + \varphi_c\left(\omega_c\right)$$

Vrijedi: $\gamma\,[°] \approx 70 - \sigma_m\,[\%]$ za $0.3 < \zeta < 0.8$; $\omega_c \approx \dfrac{3}{t_m}$ za $0{,}3<\varsigma<0{,}8.$; $\dfrac{\omega_c}{\omega_n} = \sqrt{\sqrt{4\zeta^4+1} - 2\zeta^2}$

ZAHTJEVI NA VLADANJE SUSTAVA U USTALJENOM STANJU:

- Zahtjevi na vladanje sustava u stacionarnom stanju specificiraju se neovisno o izboru kriterija kakvoće.

- Da bi se postiglo da **regulacijsko odstupanje u stacionarnom stanju bude nula (e_∞=0)**, to jest da bude:

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = 0}$$

Za kontinuirane sustave

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} e(k) = \lim_{z\to 1} (z-1)e(z) = 0}$$

Za diskretne sustave

potrebno odabrati **regulator s integralnim djelovanjem** višestrukosti *k* (*k* = 0,1, 2) (k=0 –> P vladanje, k=1 –> I vladanje, k=2 -> I_2 vladanje):

$$\boxed{G_R(s) = \frac{Q(s)}{s^k P(s)}}$$

Za kontinuirane sustave

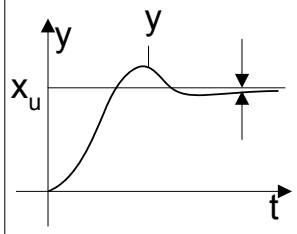
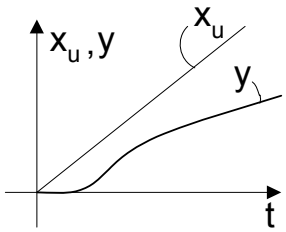
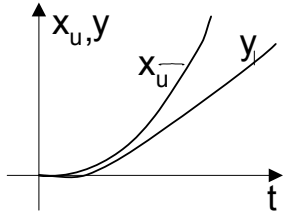
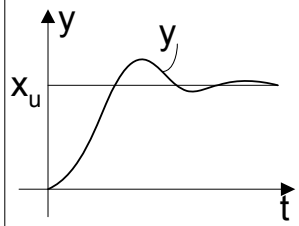
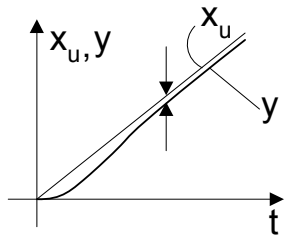
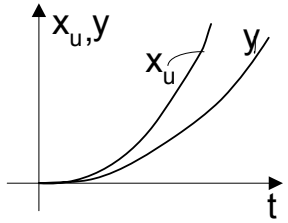
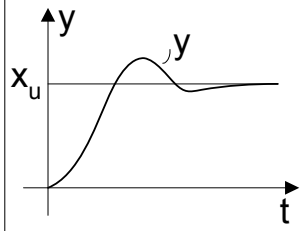
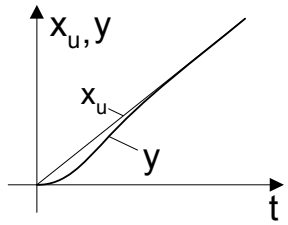
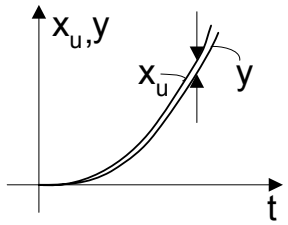
$$\boxed{G_R(z) = \frac{Q(z)}{(z-1)^k P(z)}}$$

Za diskretne sustave

- Višestrukost integralnog djelovanje regulatora ovisi o višestrukosti integralnog djelovanje upravljanoga (redu astatizma procesa)

© Ivan Petrović

- Regulacijska odstupanja u ovisnosti o tipu sustava i vrsti pobude:

Tip sustava	Vrste pobude								
	skokovita	e_∞	K_p	linearni porast	e_∞	K_v	parabolična	e_∞	K_a
P		$\frac{1}{1+K_p}$	K_0		∞	0		∞	0
I_1		0	∞		$\frac{1}{K_v}$	K_0		∞	0
I_2		0	∞		0	∞		$\frac{1}{K_a}$	K_0

Izbor vremena uzorkovanja:

- Vrijeme uzorkovanja (diskretizacije) *T* dodatni je parametar pri analizi i sintezi diskretnih (digitalnih) sustava upravljanja.
- Ekvivalentni digitalni sustav upravljanja dobiven diskretizacijom kontinuiranog sustava upravljanja, općenito govoreći, ima lošije dinamičko vladanje.
- To je posljedica nedostupnosti informacija o obrađivanim signalima između trenutaka uzimanja uzoraka kao i načina obradbe informacija (ograničenja koja se pojavljuju pri analogno/digitalnoj i digitalno/analognoj pretvorbi, ograničenja uslijed primijenjene aritmetike u obradbi informacija).
- Međutim, digitalni sustavi upravljanja, nasuprot kontinuiranim sustavima upravljanja mogu na fleksibilniji i raznovrsniji način koristiti obrađivane informacije, što ih u tome pogledu čini superiornijima kontinuiranim sustavima.

© Ivan Petrović

- Općenito vrijedi da se s povećanjem vremena uzorkovanja *T* ekvivalentnog digitalnog sustava pogoršavaju njegove dinamičke značajke u odnosu na kontinuirani sustav.

- Moglo bi se zaključiti da je u svakom slučaju poželjno težiti da *T* bude čim manji $(T \to 0)$. Međutim, i suviše malo vrijeme uzorkovanja može u praksi imati i negativne učinke:

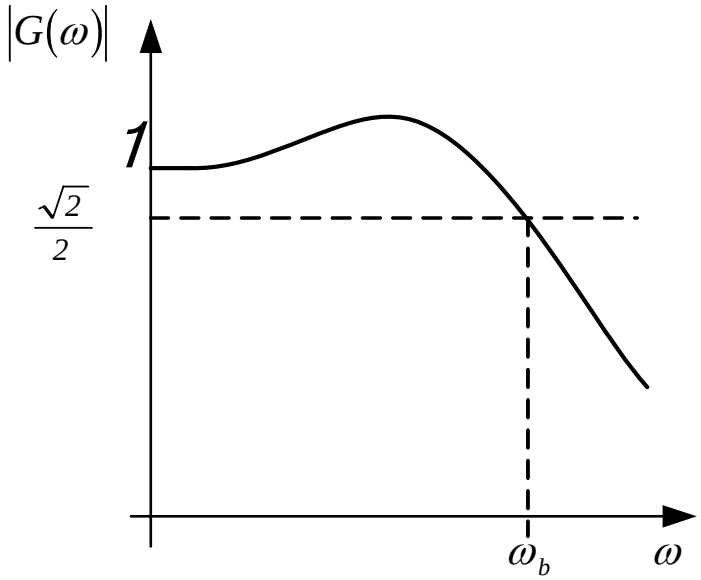
  - malo *T* => skuplji mikroprocesorski sustav, skuplji A/D i D/A pretvornici, veća duljina riječi procesora.

- **Koje je najbolje vrijeme uzorkovanja?**

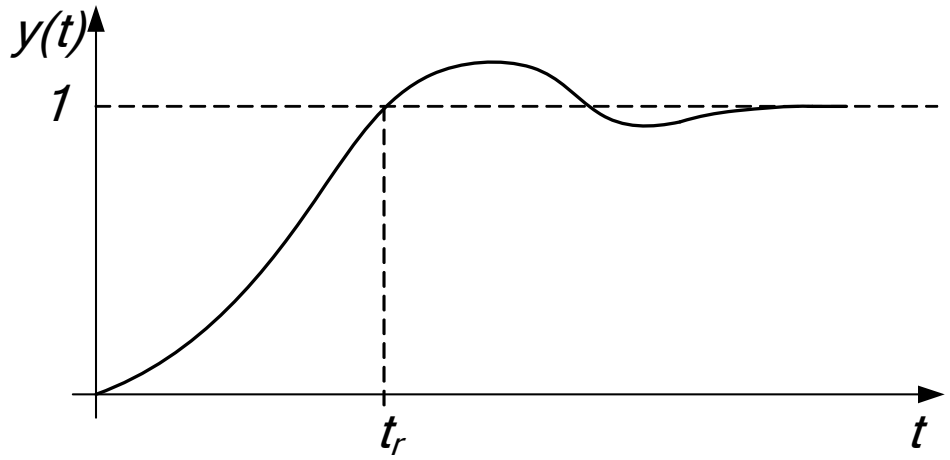
  - **Najveće vrijeme uzorkovanja uz koje sustav zadovoljava svim traženim specifikacijama.**

- U izboru vremena uzorkovanja uglavnom se oslanjamo na razna iskustvena pravila. Najčešće se polazi od širine frekvencijskog pojasa zatvorenog regulacijskog kruga, tj. od frekvencije ω_b:

© Ivan Petrović



Frekvencijska karakteristika zatvorenog regulacijskog kruga



Prijelazna karakteristika zatvorenog regulacijskog kruga

- Teoretski, prema impulsnom teoremu, kružna frekvencija uzorkovanja $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ pojasa ω_b zatvorenog regulacijskog kruga treba iznositi:

$$\boxed{\omega_s \geq 2\omega_b}$$

© Ivan Petrović

- U praksi frekvencija uzorkovanja treba biti znatno veća od $2\omega_b$ kako bi se postigao glatki odziv sustav i ograničio iznos upravljačkog signala.
- Prihvatljivo vladanje sustava obično se postiže za:

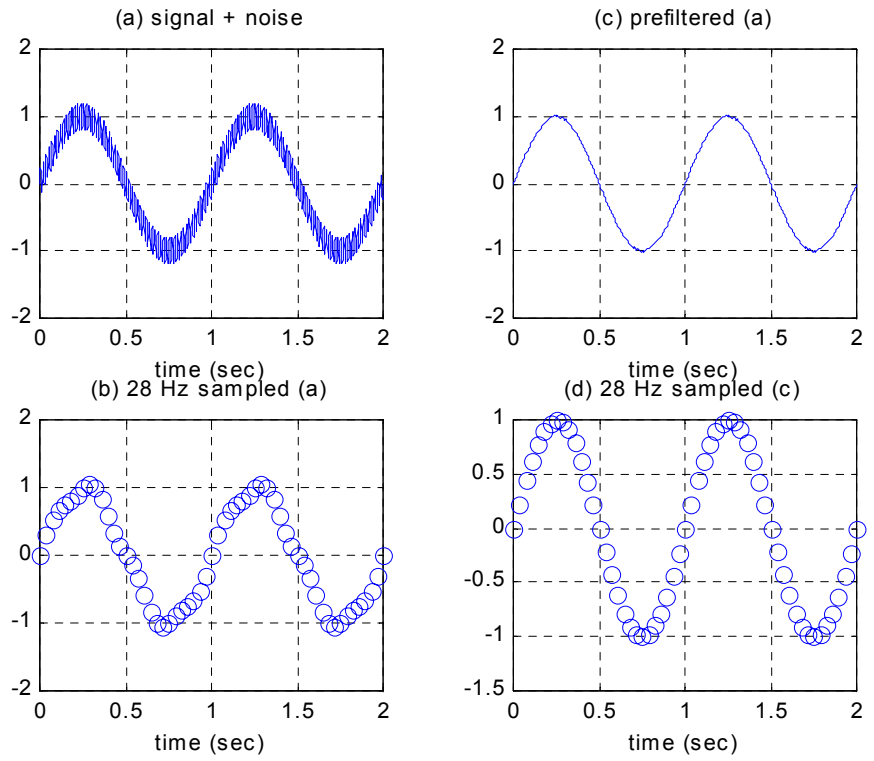
$$\boxed{6\omega_b \leq \omega_s \leq 40\omega_b}.$$

- Koje vrijeme uzorkovanja odabrati unutar ovako širokog raspona vrijednosti ovisi o više čimbenika, kao što su:
  - zahtijevana kvaliteta vladanja sustava – dopušteno nadvišenje odziva;
  - frekvencijski spektar poremećajnih veličina – problem preklapanja spektara;
  - karakteristike izvršnih članova – problem oštećenja aktuatora zbog diskontinuiteta u upravljačkom signalu;
  - karakteristike mjernih članova – mjerni šum, dinamika;
  - zahtjevi rukovatelja – brz odziv na naredbe operatera;
  - ograničenja proistekla radom računala u stvarnom vremenu, što uključuje i cijenu regulatora.

© Ivan Petrović

Problem mjernog šuma:

- Visoke frekvencije mjernog šuma (iznad $\omega_s/2$) preslikavaju se u osnovni pojas (ispod $\omega_s/2$) i izobličuju signal u osnovnom frekvencijskom pojasu određenom (problem „aliasinga“) - Ilustracija „aliasinga“:



Signal: 1 Hz

Šum: 60 Hz

f_s: 28 Hz => $\omega_s = 2\pi f$= 176 rad/s

(b) Bez filtra, šum izobličuje niskofrekvencijski signal.

(c) Signal je filtriran prije uzorkovanja PT1 filtrom lomne frekvencije f_p=3.2 Hz. => „antialiasing filtar“:

$$G_{pf}(s) = \frac{\omega_p}{s+\omega_p} = \frac{2\pi \cdot 3,2}{s+2\pi \cdot 3,2} = \frac{20}{s+20}.$$

(d) Prefiltar je spriječio izobličenje signala na niskim frekvencijama.

- Dakle, ako je mjerni šum jako izražen treba koristiti prefiltar.
- Cilj korištenja prefiltra jest dovoljno prigušenje utjecaja mjernog šuma na frekvenciji $\omega_s/2$, kako bi se spriječio utjecaj viših frekvencija na izobličenje nižih.
- Što je frekvencija prefiltra ω_p niža to je jače smanjenje utjecaja mjernog šuma na regulacijski krug.
- Međutim, ako je ω_p malo ($\omega_p < 10\omega_b$) treba prijenosnu funkciju prefiltra uzeti u obzir u analizi i sintezi sustava, inače se može zanemariti.
- Problem je što je ω_p vezan s ω_s, pa ih treba zajednički promatrati:
  - Ako je $\omega_s = 25\omega_b$, tada je dovoljno imati $\omega_p = 5\omega_b$ i za veliki šum, ali $G_{pf}(s)$ treba uključiti u model procesa.
  - Ako je $\omega_s = 40\omega_b$, tada je dovoljno imati $\omega_p = 10\omega_b$, $G_{pf}(s)$ ne treba uključiti u model procesa.
  - Ako je dopuštena $2\omega_b < \omega_p < 5\omega_b$ tada se može koristiti $\omega_s < 25\omega_b$, naravno $G_{pf}(s)$ treba uključiti u model procesa.

© Ivan Petrović

- Poznavanjem veze između ω_b i ostalih pokazatelja kakvoće sustava upravljanja, lako dobijemo i druge odgovarajuće izraze za odabir vremena uzorkovanja.

- Iz $6\omega_b \le \omega_s \le 40\omega_b$ i $\omega_s = \dfrac{2\pi}{T}$ proizlazi:

$$T \approx (0{,}16 \div 1{,}05)\frac{1}{\omega_b}.$$

- Nadalje, iz $\dfrac{\omega_b}{\omega_n} \approx 1{,}8 - 1{,}1 \cdot \varsigma$ za $0{,}3 < \varsigma < 0{,}8$, i $t_r \approx \dfrac{1{,}8}{\omega_n}$ proizlazi $\boxed{t_r \approx \dfrac{2}{\omega_b}}$:

$$\boxed{T \approx (0{,}08 \div 0{,}5)t_r,}$$

tj.

$$\boxed{N_r \approx (2 \div 12)\frac{uzoraka}{t_r}.}$$

© Ivan Petrović

Pristupi sintezi digitalnih regulatora

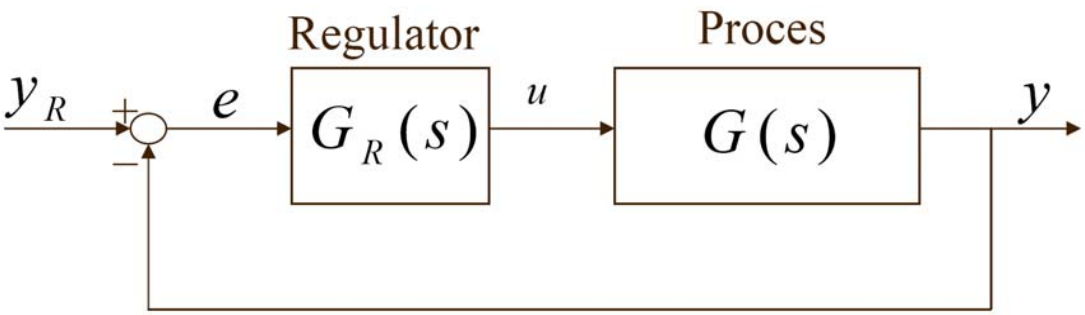
- Tri su pristupa sintezi digitalnih regulatora:
  1. Sinteza u kontinuiranom području uz zanemaren utjecaj diskretizacije
     - Projektira se kontinuirani regulator nekim od standardnih postupaka sinteze, a zatim se dobiveni kontinuirani regulator diskretizira nekim od postupaka diskretizacije digitalnih filtara (obično Tustinovim postupkom ili Eulerovim postupkom unazadne diferencije)
  2. Sinteza u kontinuiranom području uz uključen utjecaj diskretizacije
     - Postupak je identičan 1. postupku, ali je ZOH aproksimiran nadomjesnom prijenosnom funkcijom u s-području.
     - Prednost: vladanje digitalnog regulatora bliže vladanju kontinuiranog regulatora, ali u slučaju promjene vremena uzorkovanja treba ponoviti postupak projektiranja regulatora
  3. Sinteza u diskretnom području
     - Kontinuirani se proces modelira ekvivalentnim diskretnim modelom i regulator se projektira izravno u diskretnom prostoru.

© Ivan Petrović

SINTEZA U KONTINUIRANOM PODRUČJU UZ ZANEMAREN UTJECAJ DISKRETIZACIJE (Metoda EMUL1):

- **Koraci postupka sinteze:**

1. Projektiranje kontinuiranog regulatora



- Kontinuirani regulator može već postojati i treba ga pretvoriti u digitalni

ili

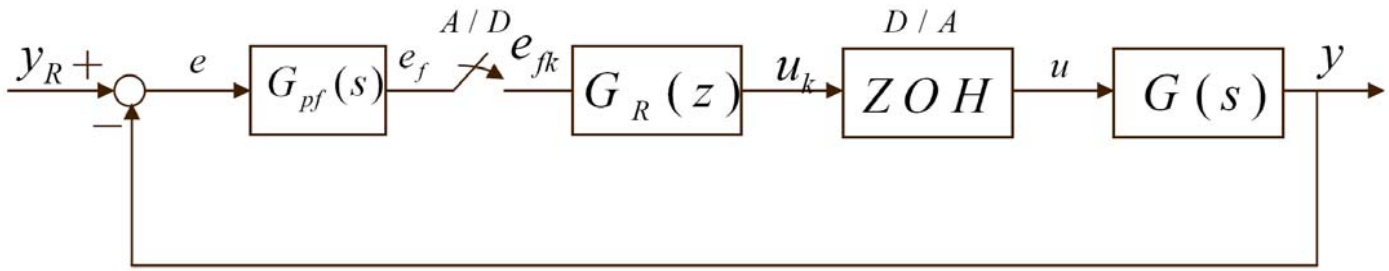
- Kontinuirani se regulator projektira prema zadanim zahtjevima.

© Ivan Petrović

2. Izbor vremena uzorkovanja

- Odrediti gornju graničnu frekvenciju propusnog frekvencijskog opsega zatvorenog kontinuiranog regulacijskog kruga ω_b.
- Izaberi frekvenciju uzorkovanja ω_s u odnosu na ω_b, i izračunaj $T=2\pi/\omega_s$
- S obzirom da je ovaj postupak sinteze aproksimativan, preporuča se odabrati $10\omega_b < \omega_s < 40\omega_b$

3. Diskretizacija regulatora i dodavanje diskretizacijskih elemenata



- Za odabrani T kontinuirani se regulator diskretizira nekim od postupaka diskretizacije digitalnih filtara (obično Tustinovim postupkom ili Eulerovim postupkom unazadne diferencije), koji osigurava da je diskretni regulator što sličniji kontinuiranom

© Ivan Petrović

- Uključi u krug: **D/A pretvornik**, obično kao ZOH, **D/A pretvornik**, obično modeliran kao idealni impulsni element, te **antialiasing filtar (AAF)**, niskopropusni filtar jediničnog pojačanja s lomnom frekvencijom ω_p višom od ω_b i nižom od ω_s.

- Obično je dovoljno AAF izabrati kao PT_1 član lomne frekvencije $\omega_p = \frac{\omega_s}{2}$, a ako je šum jako izražen može se primijeniti i AAF višeg reda.

4. Diskretizacija modela procesa (obično ZOH diskretizacija)

- AAF se obično može zanemariti. U tom slučaju:

$$\boxed{G(z) = Z\left\{G_{ho}(s)\cdot G(s)\right\} = (1-z^{-1})Z\left\{\frac{1}{s}G(s)\right\}}$$

- Ako se AAF uzme u obzir onda:

$$\boxed{G(z) = Z\left\{G_{ho}(s)\cdot G(s)\cdot G_{pf}(s)\right\} = (1-z^{-1})Z\left\{\frac{1}{s}G(s)\frac{\omega_p}{s+\omega_p}\right\}}$$

5. Provjera performansi simulacijom primjenom diskretnog modela (npr. u Simulinku)

- Ako vladanje sustava ne zadovoljava moguće je sljedeće: povećati ω_s, smanjiti ω_p, i/ili promijeniti metodu diskretizacije regulatora. Ako ništa ne pomogne ići na drugi postupak sinteze (npr. EMUL2).

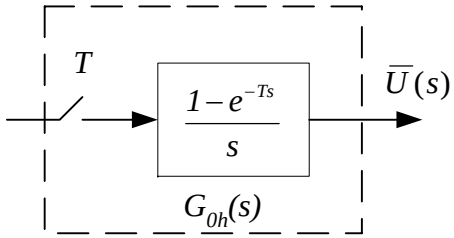
© Ivan Petrović

SINTEZA U KONTINUIRANOM PODRUČJU UZ UKLJUČEN UTJECAJ DISKRETIZACIJE (Metoda EMUL2):

- **Koraci postupka sinteze:**

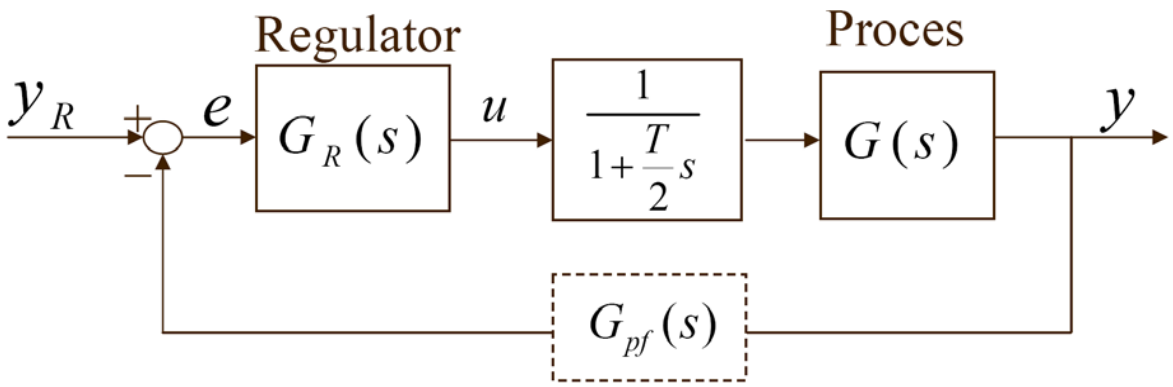
1. Izbor vremena uzorkovanja i AAF
   - Odrediti gornju graničnu frekvenciju propusnog frekvencijskog opsega zatvorenog kontinuiranog regulacijskog kruga ω_b.
   - Izaberi frekvenciju uzorkovanja ω_s u odnosu na ω_b, i izračunaj $T=2\pi/\omega_s$
   - S obzirom da je ovaj postupak sinteze aproksimativan, preporuča se odabrati $10\omega_b < \omega_s < 40\omega_b$ te lomnu frekvenciju AAF-a ω_p kao u EMUL1 postupku.

2. Aproksimacija ZOH-a PT1 članom:



$$\frac{1}{T}\frac{1-e^{-Ts}}{s} = e^{-\frac{Ts}{2}}\frac{e^{\frac{Ts}{2}}-e^{-\frac{Ts}{2}}}{Ts} \approx e^{-\frac{Ts}{2}}\frac{1+\frac{Ts}{2}-1+\frac{Ts}{2}}{Ts} \approx e^{-\frac{Ts}{2}} = \frac{1}{e^{\frac{Ts}{2}}} \approx \frac{1}{1+\frac{T}{2}s}.$$

3. Projektiranje kontinuiranog regulatora



4. Diskretizacija modela procesa i diskretizacija regulatora

- $G(z)$ odrediti identično kao u koraku 4. EMUL1 postupka.
- $G_R(z)$ odrediti identično kao u koraku 3. EMUL1 postupka.

5. Provjera performansi simulacijom primjenom diskretnog modela (npr. u Simulinku)

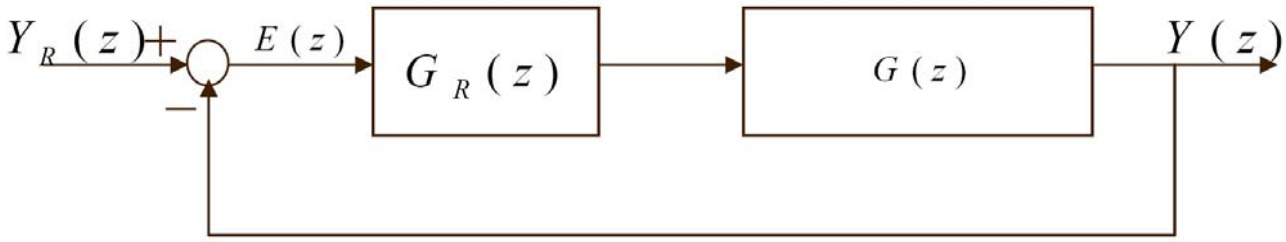
- Ako vladanje sustava ne zadovoljava postupak se ponavlja od početka.

© Ivan Petrović

SINTEZA U DISKRETNOM PODRUČJU:

- **Koraci postupka sinteze:**

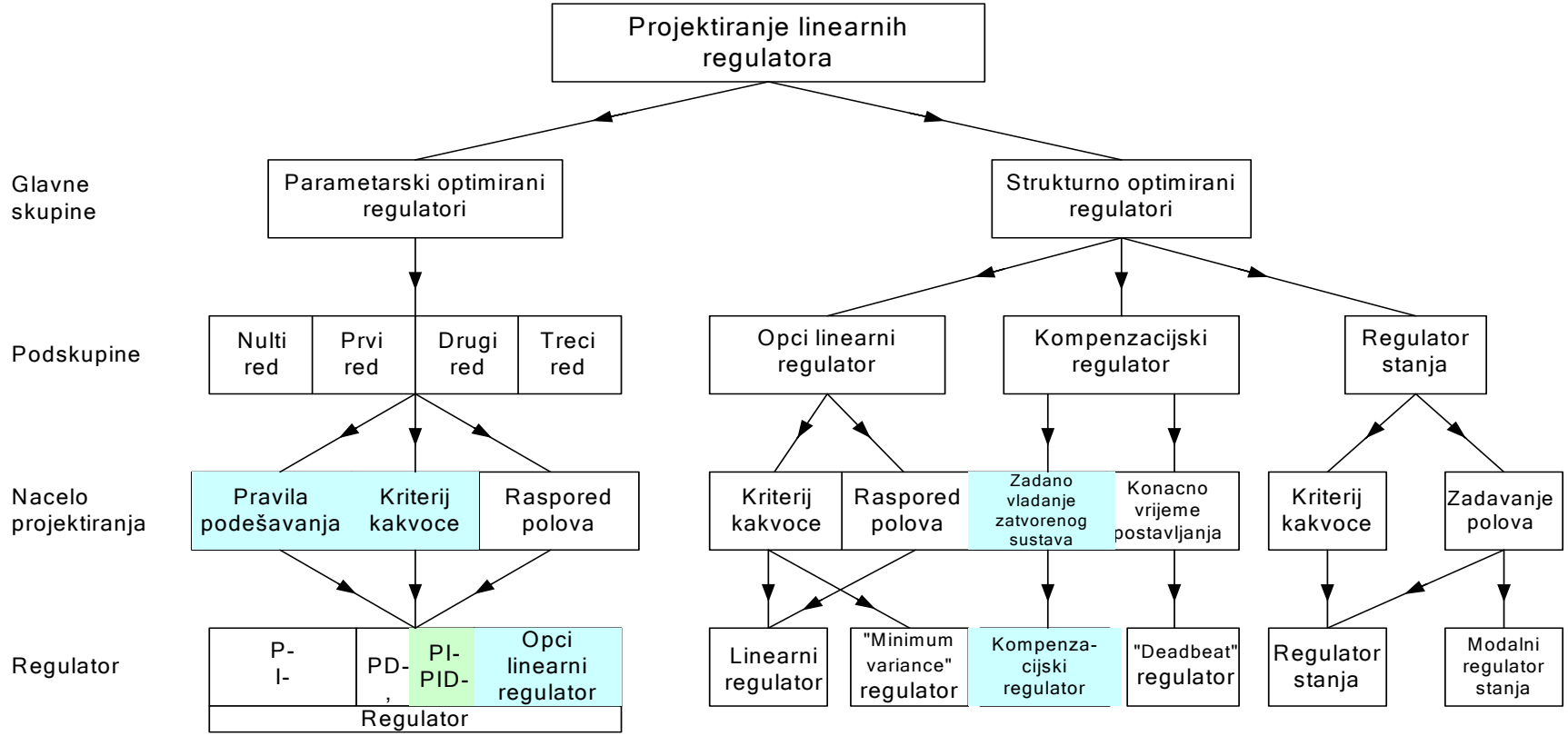
1. Izbor vremena uzorkovanja i AAF
   - Odrediti gornju graničnu frekvenciju propusnog frekvencijskog opsega zatvorenog kontinuiranog regulacijskog kruga ω_b.
   - Izaberi frekvenciju uzorkovanja ω_s u odnosu na ω_b, i izračunaj $T=2\pi/\omega_s$ te odredi te lomnu frekvenciju AAF-a ω_p.
2. Diskretizacija modela procesa i diskretizacija regulatora
   - Identično kao u koraku 4. EMUL2 postupka.



   - Provesti postupak sinteze diskretnog regulatora $G_R(z)$ prema traženim specifikacijama.

© Ivan Petrović

Strukture digitalnih regulatora



Vanjska smetnja:							
deterministickia	x	x	-	x	x	x	-
stohasticka	x	x	x	-	-	x	-

- Najčešće korištena struktura digitalnog regulatora jest PID regulator, koji se u ovome predmetu detaljno obrađuje.
  - Obradit će se postupci sinteze PID regulatora u vremenskom i frekvencijskom području.
- Obrađuju se također i sljedeće strukture regulatora:
  - Opći linearni parametarski regulator i njegova sinteza u vremenskom području prema integralnim kriterijima kakvoće.
  - Strukturno optimirani kompenzacijski regulatori koji se projektiraju u području kompleksne varijable (s ili z) prema modelskoj prijenosnoj funkciji.
  - Tzv. korekcijski regulatori (fazno prethođenje i fazno kašnjenje) koji se projektiraju u frekvencijskom području s ciljem oblikovanja frekvencijske karakteristike otvornog regulacijskog kruga.

© Ivan Petrović

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
Fakultet elektrotehnike i računarstva
Zavod za automatiku i računalno inženjerstvo
Unska 3, Zagreb, HRVATSKA

Računalno upravljanje sustavima

Poglavlje 4:
Sinteza sustava upravljanja u vremenskom području

© Ivan Petrović

Sadržaj poglavlja:

4.1. Uvod – Parametarski optimirani linearni regulatori

4.2. PID regulator

- **Strukture PID regulatora**
- **Praktični postupci sinteze PID regulatora**
- **Postupci diskretizacije kontinuiranog PID regulatora**

4.3. Opći linearni parametarski regulator

- **Strukture linearnih parametarskih regulatora**
- **Sinteza linearnih parametarskih regulatora optimiranjem**

© Ivan Petrović

4.1. Uvod - Parametarski optimirani regulatori

- U vremenskom se području uglavnom optimiraju parametarski regulatori.
- **Kod parametarskih je regulatora struktura unaprijed definirana i ne prilagođava se strukturi upravljanoga procesa.**
- Željeno vladanje sustava automatskog upravljanja postiže se određivanjem odgovarajućih vrijednosti parametara regulatora.
- **Općenito imaju jednostavnu strukturu s malim brojem parametara (≤ 3).** $\Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow$ Strukturno optimirani regulatori imaju veći broj parametara (obično > 10).
- Prema tome, parametarski optimirani regulatori manje su fleksibilni od strukturno optimiranih regulatora.

© Ivan Petrović

- Zbog toga se ovim regulatorima, općenito, ne može postići kakvoća upravljanja kakva se može postići strukturno optimiranim regulatorima.

- Unatoč tome, parametarski optimirani regulatori češće se primjenjuju od strukturno optimiranih regulatora, jer u velikom broju slučajeva daju zadovoljavajuću kvalitetu upravljanja, a određivanje optimalnih vrijednosti njihovih parametara znatno je jednostavnije.

- **Najpoznatiji parametarski optimirani regulator je PID regulator.**

- Digitalni PID regulator koji emulira izvorni analogni PID regulator opisan je u točki 4.2.

- Opći linearni regulatori (digitalni algoritmi upravljanja nižeg reda) koji se primjenjuju za velika vremena uzorkovanja opisani su u točki 4.3.

© Ivan Petrović

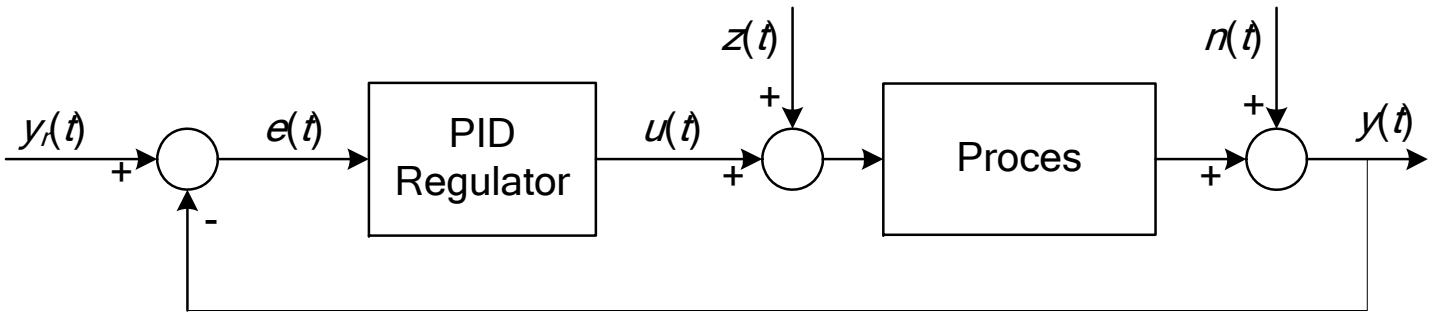
4.2. PID regulator

- PID regulatori su **najčešće primjenjivani regulatori** za upravljanje industrijskim procesima.
- Izvorno su se PID regulatori izvodili u analognoj tehnici, bilo kao mehanički, hidraulički, pneumatski ili elektronički (operacijska pojačala).
- U današnje se vrijeme uglavnom primjenjuju digitalne izvedbe PID regulatora.
- Digitalni PID regulatori dobivaju se diskretizacijom analognog PID regulatora.
- Pri tome se nastoji postići da vladanje digitalnog regulatora što bolje opisuje vladanje analognog regulatora, tj. da **digitalni regulator emulira analogni regulator**.
- Digitalni PID regulator dobro će emulirati analogni PID regulator, ako je **vrijeme uzorkovanja malo**.
- U ovoj se točki pretpostavlja da je vrijeme uzorkovanja malo pa se opisuju praktični postupci sinteze uz pretpostavku da se radi o analognom PID regulatoru, a na kraju se daju postupci njegove diskretizacije s preporukama odabira postupka.

© Ivan Petrović

Primjer za ilustraciju raznih aspekata izvedbe PID regulatora:

- Osnovna konfiguracija regulacijskog kruga s PID regulatorom (Sl. 4.1.):



$$G_s(s) = \frac{K_s e^{-T_t s}}{1 + T_s s}$$

$K_s = 1;$

$T_s = 1\text{s};$

$T_t = 0.2$ s

$y_r(t)$ - referentna velicina

$u(t)$ - upravljacka velicina

$y(t)$ - izlazna (regulirana) velicina

$e(t)$ - regulacijsko odstupanje

$z(t)$ - poremecajna velicina

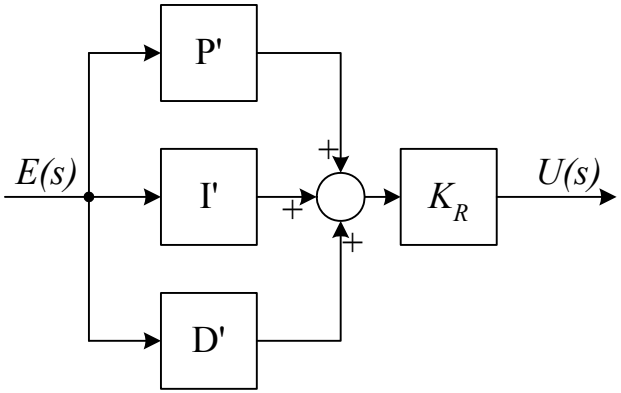
$n(t)$ - mjerni šum

- Strukture PID regulatora i postupci sinteze ispitani su simulacijskim eksperimentima ovog regulacijskog kruga.

© Ivan Petrović

Analogni (kontinuirani) PID regulator:

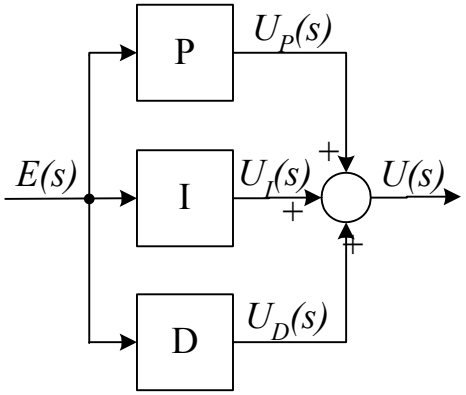
1)Standardni(neinteraktivni):



$$G_{RI}(s) = K_R\left[1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s\right]$$

$$u(t) = K_R\left(e(t) + \frac{1}{T_I}\int_0^t e(\tau)\,d\tau + T_D\frac{de(t)}{dt}\right)$$

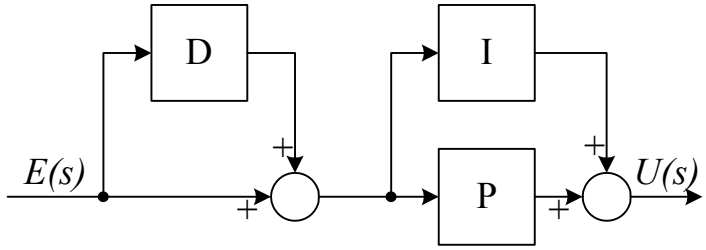
2) Paralelni:



$$G_{RP}(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s$$

$$u(t) = K_P e(t) + K_I\int_0^t e(\tau)\,d\tau + K_D\frac{de(t)}{dt}$$

3) Serijski (interaktivini):



$$G_{RS}(s) = K_{RS}\left(1 + \frac{1}{T_{IS}s}\right)(1 + T_{DS}s)$$

$$u(t) = K_{RS}\frac{T_{IS} + T_{DS}}{T_{IS}}e(t) + \frac{K_{RS}}{T_{IS}}\int_0^t e(\tau)\,d\tau + K_{RS}T_{DS}\frac{de(t)}{dt}$$

© Ivan Petrović

Problem ostvarivosti:

- Idealni derivator: - nije ostvariv

$$\boxed{u_D = K_R T_D \frac{de(t)}{dt};} \qquad \boxed{U_D(s) = K_R T_D s}$$

- Mora se primijeniti realni derivator:

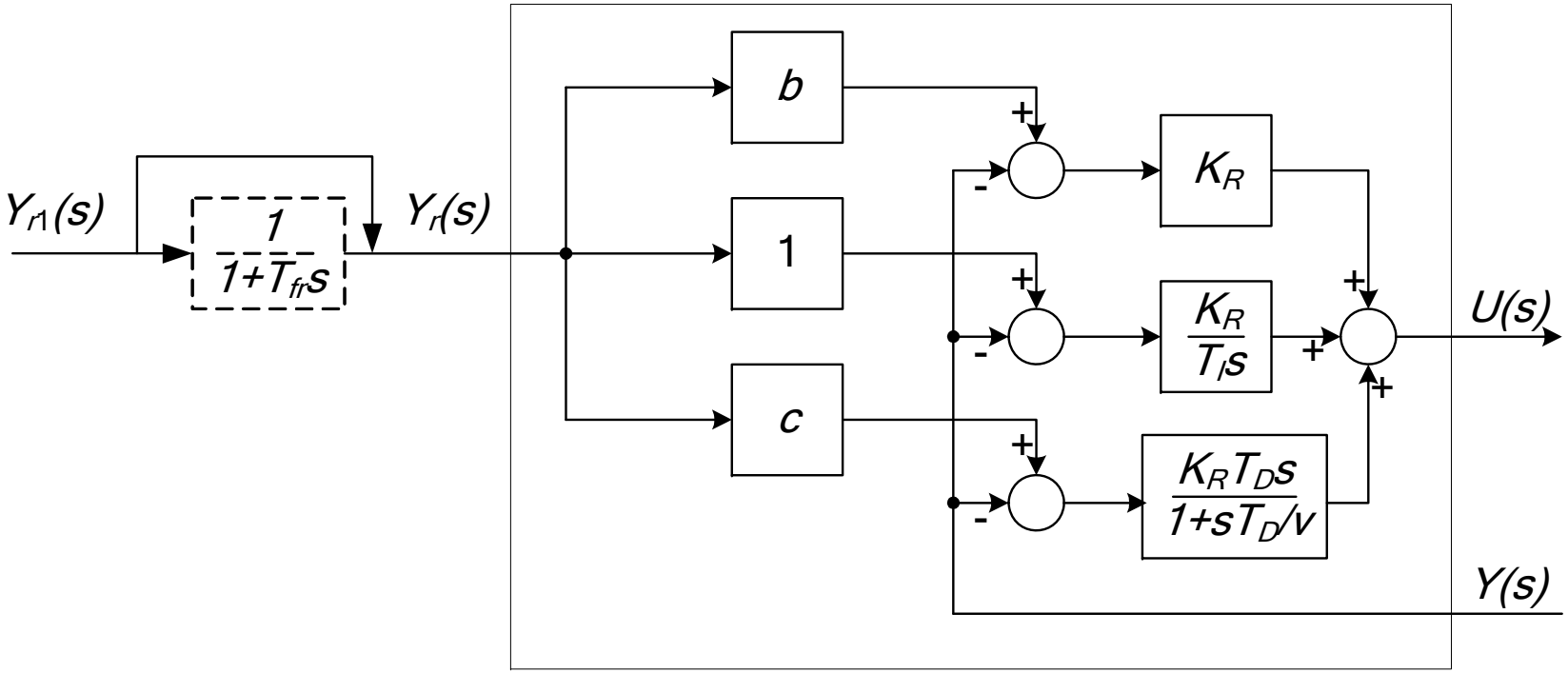
$$\boxed{\frac{T_D}{\nu}\frac{du_D}{dt} + u_D = K_R T_D \frac{de}{dt}}; \qquad \boxed{U_D(s) = \frac{K_R T_D s}{1 + \frac{T_D}{\nu} s}}.$$

ν - skalar, tipično vrijednosti 5 do 20.

© Ivan Petrović

Modifikacije osnovnog PID algoritma:

Struktura PID regulatora s dva stupnja slobode podešavanja parametara (Sl. 2.6.):



$$U(s) = K_R(bY_r(s) - Y(s)) + \frac{K_R}{T_I s}E(s) + \frac{K_R T_D s}{1 + \frac{T_D}{\nu}s}(cY_r(s) - Y(s)).$$

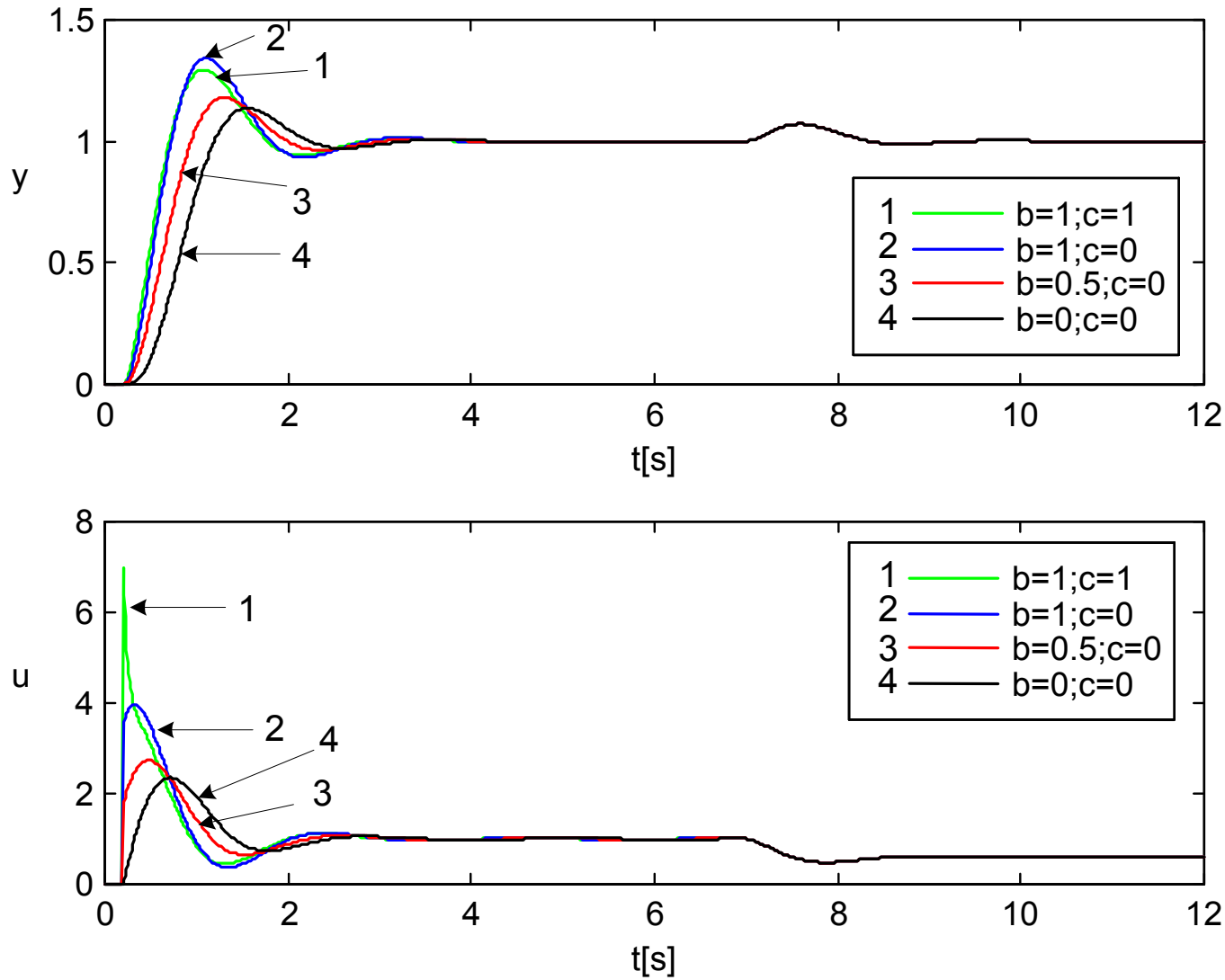
Podešavanje parametara:

1. **Parametri regulatora (K_R, T_I, T_D) podese se za dobru kompenzaciju poremećaja;**
2. **Podešavaju se koeficijenti b ($0 \leq b \leq 1$) i c ($0 \leq c \leq 1$) dok se ne postigne željeno vladanje s obzirom na referentnu veličinu.**

- **Ako se koeficijenti b i c postave na jedinični iznos, dvostupanjski regulator postaje identičan osnovnom regulatoru,**
- **Ako se postave na nulti iznos, P-član i D-član regulatora djeluju samo na mjerni signal (signal povratne veze).**
- **Dodatna fleksibilnost može se postići filtriranjem referentnog signala.**

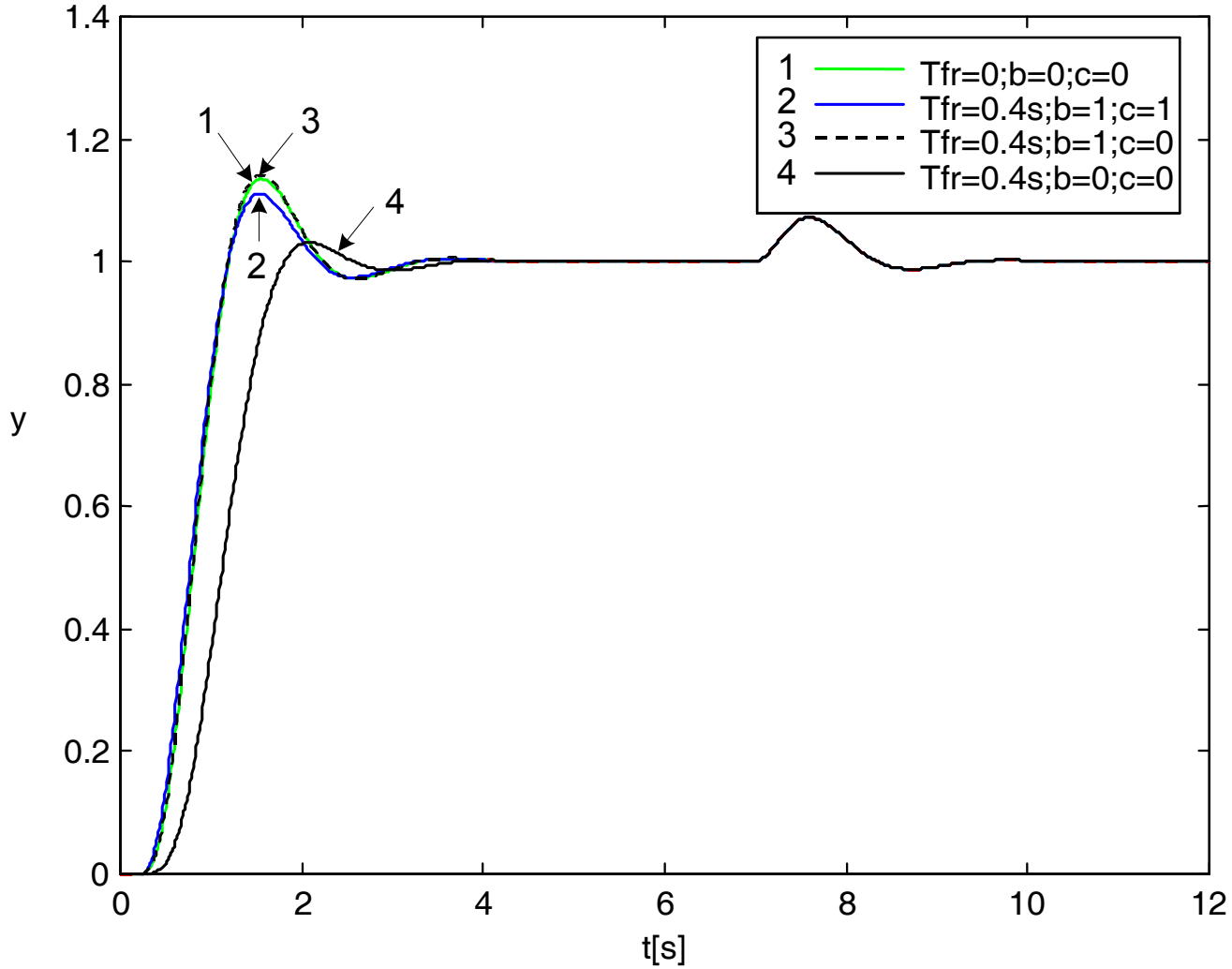
- **Ilustracija vladanja regulatora (Sl. 4.2 i Sl. 4.3.) $\Rightarrow$ sljedeće dvije slike.**

© Ivan Petrović



Sl. 4.2. *Odzivi regulacijskog sustava s dvostupanjskim PID regulatorom.*

© Ivan Petrović

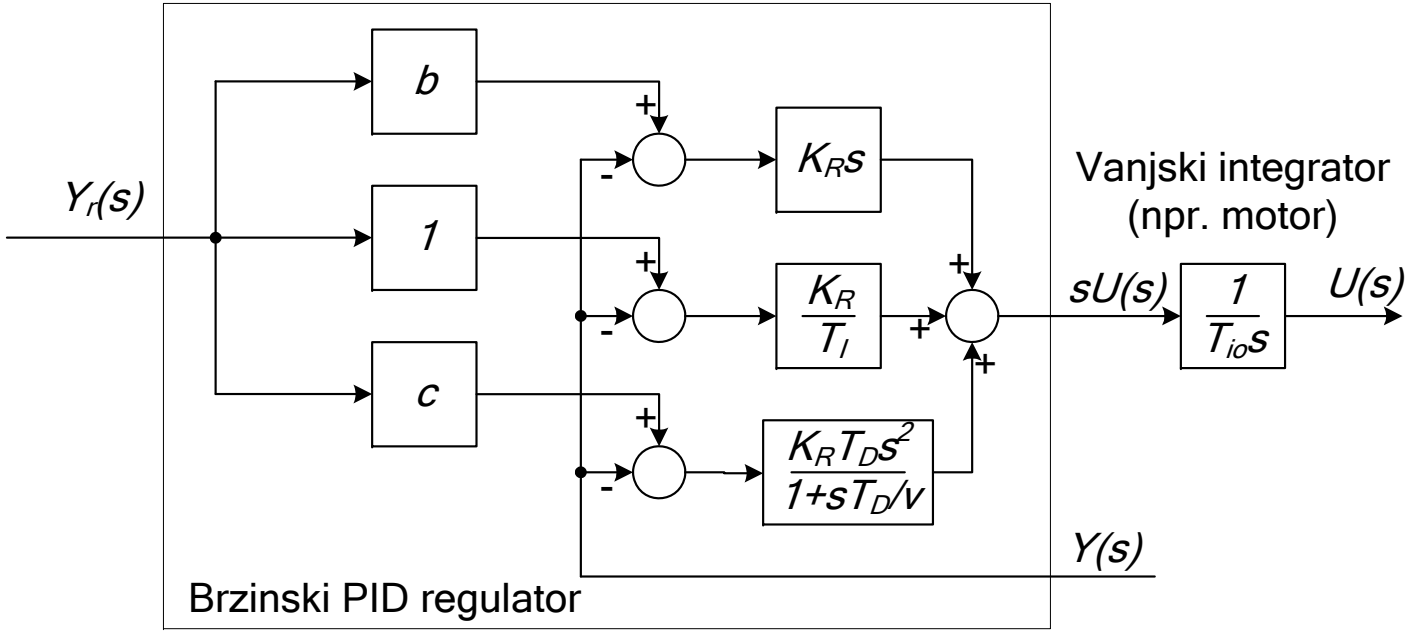


Sl. 4.3. *Odzivi regulacijskog sustava s filtrom referentne veličine.*

© Ivan Petrović

Brzinski PID algoritam:

- Naprijed opisani PID regulatori: **pozicijski** ⇒ daju iznos upravljačkog signala.
- Brzinski ili inkrementalni PID regulatori ⇒ daju promjenu ("brzinu") upravljačkog signala (Sl. 4.4.). **Za izvršne organe s integralnim djelovanjem**.



Sl. 4.4

- Prijenosne su funkcije P- i D-člana brzinskog PID regulatora nekauzalne, pa se u izvedbama moraju modificirati analogno modifikaciji D-člana pozicijskog regulatora.

© Ivan Petrović

Praktični postupci sinteze digitalnog PID regulatora:

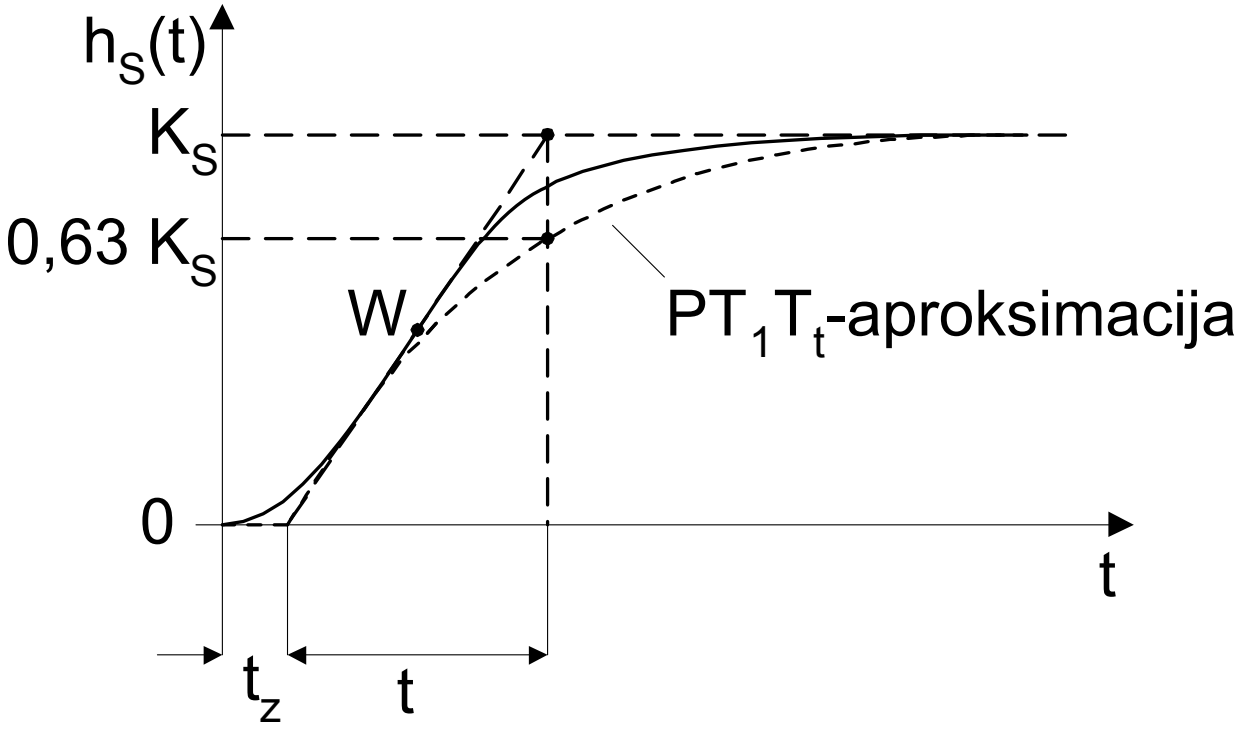
- **Podešavanje parametara digitalnog PID regulatora, dobivenog diskretizacijom analognog PID regulatora uz malo vrijeme uzorkovanja, može se provoditi istim postupcima kojima se podešavaju parametri izvornog analognog regulatora.**

- U nastavku se opisuju tri vrlo praktična empirijska postupka podešavanja parametara:

  - **Ziegler-Nicholsov postupak,**
  - **Takahashijev postupak i**
  - **Relejni postupak.**

Ziegler- Nicholsov postupak podešavanja parametara PID regulatora:

- **Mnogi industrijski procesi mogu se opisati prijelaznom funkcijom s čistim aperiodskim vladanjem;**
- Slika 4.5 prikazuje aproksimaciju PT - člana pomoću PT_1T_t - člana.
- ($h_s(t)$ je prijelazna funkcija procesa)



Sl. 4.5.

- **Često se ovakvi procesi mogu opisati pojednostavljenim matematičkim modelom:**

$$\boxed{G_s(s) = \frac{K_s}{1+T_s s} \cdot e^{-T_t s},}$$

- Član s usporenjem prvog reda s mrtvim vremenom T_t zadovoljavajuće dobro aproksimira složeniji matematički model procesa.

- Pri tome se prijelazna funkcija $h_s(t)$ **karakterizira pomoću** triju veličina koje su određene tangentom u točki infleksije W:
  - K_s (koeficijent pojačanja procesa),
  - t_a (vrijeme porasta) i
  - t_z (vrijeme zadržavanja).

- Uz grubu aproksimaciju vrijedi: $\boxed{T_t = t_z \quad \text{i} \quad T_s = t_a.}$

© Ivan Petrović

- **U praksi se koriste brojna pravila za podešavanje parametara standardnih regulatora do kojih se došlo empirijski ili simulacijom na odgovarajućim matematičkim modelima.**

- **Često korištena empirijska pravila za podešavanje regulatora definirali su Ziegler i Nichols (1942.).**

- **Ta su pravila izvedena empirijski na temelju podešavanja regulatora, pri čemu prijelazna funkcija zatvorenog regulacijskog kruga pokazuje smanjenje amplitude po periodi oscilacije za oko 25%.**

- **Pri korištenju pravila podešavanja prema Ziegleru i Nicholsu na raspolaganju su dvije mogućnosti:**

© Ivan Petrović

a) ***Metoda ruba stabilnosti (Inačica I)***:

- Ovdje se provode sljedeći koraci:

1. **Standardnom regulatoru koji se nalazi u regulacijskom krugu odabere se samo P - djelovanje (isključena I i D djelovanja);**
2. **Pojačanje K_R P-regulatora povećava se tako dugo dok se u zatvorenom regulacijskom krugu ne proizvedu trajne oscilacije. Pojačanje uz koje se dobiju trajne oscilacije označava se kritičnim pojačanjem regulatora K_{rkr};**
3. **Mjeri se iznos perioda oscilacija T_{kr} (period tzv. kritičnih oscilacija);**
4. **Na temelju K_{Rkr} i T_{kr} određuju se vrijednosti parametara regulatora (K_R, T_I i T_D) pomoću izraza danih u tablici 4.1.**

© Ivan Petrović

b) ***Metoda prijelazne funkcije (Inačica II)***:

1. **Često je nemoguće (štetno) dovoditi regulacijske krugove u postrojenjima i procesima u granično stabilno stanje.**

2. **Međutim, određivanje (mjerenje) prijelazne funkcije $h_s(t)$ procesa ne predstavlja poteškoću.**

3. **Stoga je druga varijanta Ziegler - Nicholsovih pravila za podešavanje regulatora u tim slučajevima pogodnija, a temelji se na nagibu tangente u točki infleksije K_s/t_a i na vremenu zadržavanja t_z prijelazne funkcije (Sl. 4.5).**

4. **Iz vrijednosti t_z, K_s i t_a te izraza danih u tablici 4.1 (sljedeća stranica) jednostavno se odrede vrijednosti parametara regulatora.**

© Ivan Petrović

Tablica 4.1

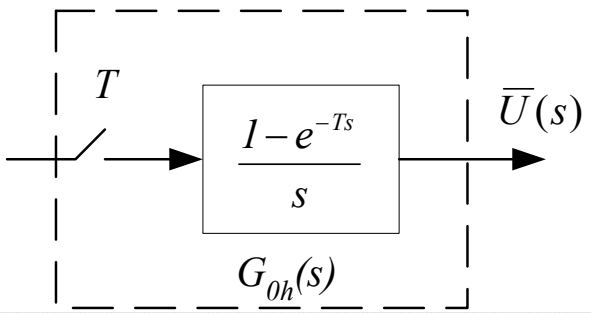
	Tip regulatora	Vrijednosti parametara regulatora		
		K_R	T_I	T_D
Inačica I	P	$0,5\,K_{R\,kr}$	-	-
	PI	$0,45\,K_{R\,kr}$	$0,85\,T_{kr}$	-
	PID	$0,6\,K_{R\,kr}$	$0,5\,T_{kr}$	$0,12\,T_{kr}$
Inačica II	P	$1/K_s \cdot t_a/t_z$	-	-
	PI	$0,9/K_s \cdot t_a/t_z$	$3,33\,t_z$	-
	PID	$1,2/K_s \cdot t_a/t_z$	$2\,t_z$	$0,5\,t_z$

- Pravila za podešavanje parametara regulatora prema Ziegleru i Nicholsu **približna** su **pravila**.
- Njima se može samo približno postići zahtijevana mjera kakvoće sustava upravljanja.
- Stoga se često za postizanje kvalitetnijeg upravljanja u praksi koristi simulacija na računalu pri sintezi sustava upravljanja, gdje vrijednosti parametara regulatora dobivene prema Ziegler - Nicholsovim pravilima mogu poslužiti kao **dobri početni parametri za optimiranje sustava**.

© Ivan Petrović

Takahashijev postupak podešavanja parametara PID regulatora:

- Zasniva se na Ziegler-Nicholsovom postupku, koji je najčešće korišteni postupak podešavanja parametara analognog PID regulatora u industrijskim primjenama.
- I za Takahashijev postupak, kao i za Ziegler-Nicholsov postupak, postoje dvije inačice:
  - *** na temelju odziva zatvorenog regulacijskog kruga na rubu stabilnosti (INAČICA I);**
  - *** na temelju prijelazne funkcije procesa $h_s(t)$ (INAČICA II).**
- Eksperimenti se provode na isti način kao i kod Ziegler-Nicholsova postupka, a razlikuju se samo izrazi za izračunavanje vrijednosti parametara regulatora.
- **Uzima se obzir kašnjenje zbog A/D i D/A pretvorbi, koje iznosi približno polovicu vremena uzorkovanja:**

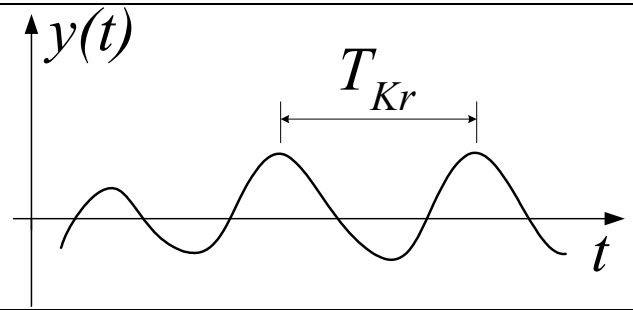


$$\boxed{\frac{1}{T}\frac{1-e^{-Ts}}{s} = e^{-\frac{Ts}{2}}\frac{e^{\frac{Ts}{2}}-e^{-\frac{Ts}{2}}}{Ts} \approx e^{-\frac{Ts}{2}}\frac{1+\frac{Ts}{2}-1+\frac{Ts}{2}}{Ts} \approx e^{-\frac{Ts}{2}}}.$$

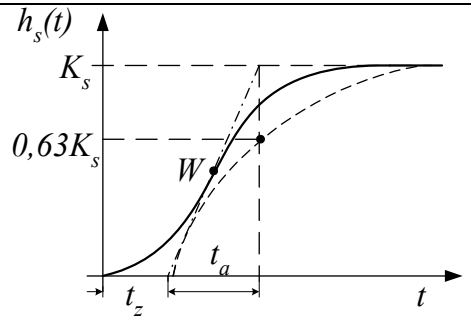
© Ivan Petrović

- **Dakle, uz mrtvo vrijeme procesa T_t u digitalnom sustavu upravljanja pojavljuje se i dodatno mtrvo vrijeme $T/2$ pa ukupno mrtvo vrijeme iznosi $T_{tu}=T_t+T/2$.**
- **Izrazi za izračunavanje parametara P, PI i PID regulatora za obje inačice Takahashijevog postupka dani su u tablici 4.2. Izrazi u tablici 4.2 postaju jednaki Ziegler-Nicholsovim za $T = 0$.**
- **PID regulator podešen primjenom jednog od Z-N (ili Takahashijevih) postupaka dobro kompenzira smetnju, ali je odziv na promjene referentne veličine oscilatoran (koeficijent prigušenja $\zeta \approx 0.2$).**
- **Zbog toga treba koristiti regulator s dva stupnja slobode podešavanja parametara, koji omogućuje naknadnu promjenu kvalitete odziva po referentnoj veličini (ili filtriranje ili prebacivanje derivacijskog i proporcionalnog člana u povratnu vezu ili oboje).**

© Ivan Petrović

Tablica 4.2 **INAČICA I**			
	K_R	T_I	T_D
P	$0,5K_{Rkr}$	-	-
PI	$0,45K_{Rkr} - 0,5K_R \frac{T}{T_I} =$ $0,45K_{Rkr} - 0,27K_{Rkr} \frac{T}{T_{kr}}$	$K_R \frac{T_{kr}}{0,54K_{Rkr}} =$ $0,83T_{kr} - 0,5T$	-
PID	$0,6K_{Rkr} - 0,5K_R \frac{T}{T_I} =$ $0,6K_{Rkr} - 0,6K_{Rkr} \frac{T}{T_{kr}}$	$K_R \frac{T_{kr}}{1,2K_{Rkr}} =$ $0,5T_{kr} - 0,5T$	$\frac{1}{K_R} \cdot \frac{3}{40} K_{Rkr} T_{kr} =$ $0,125 \frac{T_{kr}}{1 - \frac{T}{T_{kr}}}$

© Ivan Petrović

Tablica 4.2 **INAČICA II**			
	K_R	T_I	T_D
P	$\frac{1}{K_S}\cdot\frac{t_a}{t_z+0,5T}$	-	-
PI	$\frac{1}{K_S}\left[\frac{0,9t_a}{t_z+0,5T}-0,5K_R\frac{T}{T_I}\right]=$ $\frac{1}{K_S}\left[\frac{0,9t_a}{t_z+0,5T}-0,135\frac{t_aT}{(t_z+0,5T)^2}\right]$	$K_RK_S\frac{(t_z+0,5T)^2}{0,27t_a}=$ $3,33(t_z+0,5T)-0,5T$	-
PID	$\frac{1}{K_S}\left[\frac{1,2t_a}{t_z+T}-0,5K_R\frac{T}{T_I}\right]=$ $\frac{1,2}{K_S}\cdot\frac{t_a}{t_z+T}\left[1-0,25T\frac{t_z+T}{(t_z+0,5T)^2}\right]$	$K_RK_S\frac{(t_z+0,5T)^2}{0,6t_a}=$ $2\frac{(t_z+0,5T)^2}{t_z+T}-0,5T$	$0,5(t_z+T)$

© Ivan Petrović

Relejni postupak podešavanja parametara PID regulatora:

- **Općenito, Z-N (Takahashijev) postupak podešavanja parametara regulatora dovođenjem sustava na rub stabilnosti i mjerenjem perioda oscilacija daje pouzdanije rezultate od postupka zasnovanog na mjerenju prijelazne karakteristike procesa.**

- **Međutim problem je kod primjene toga postupka u načinu dovođenja sustava na rub stabilnosti.**

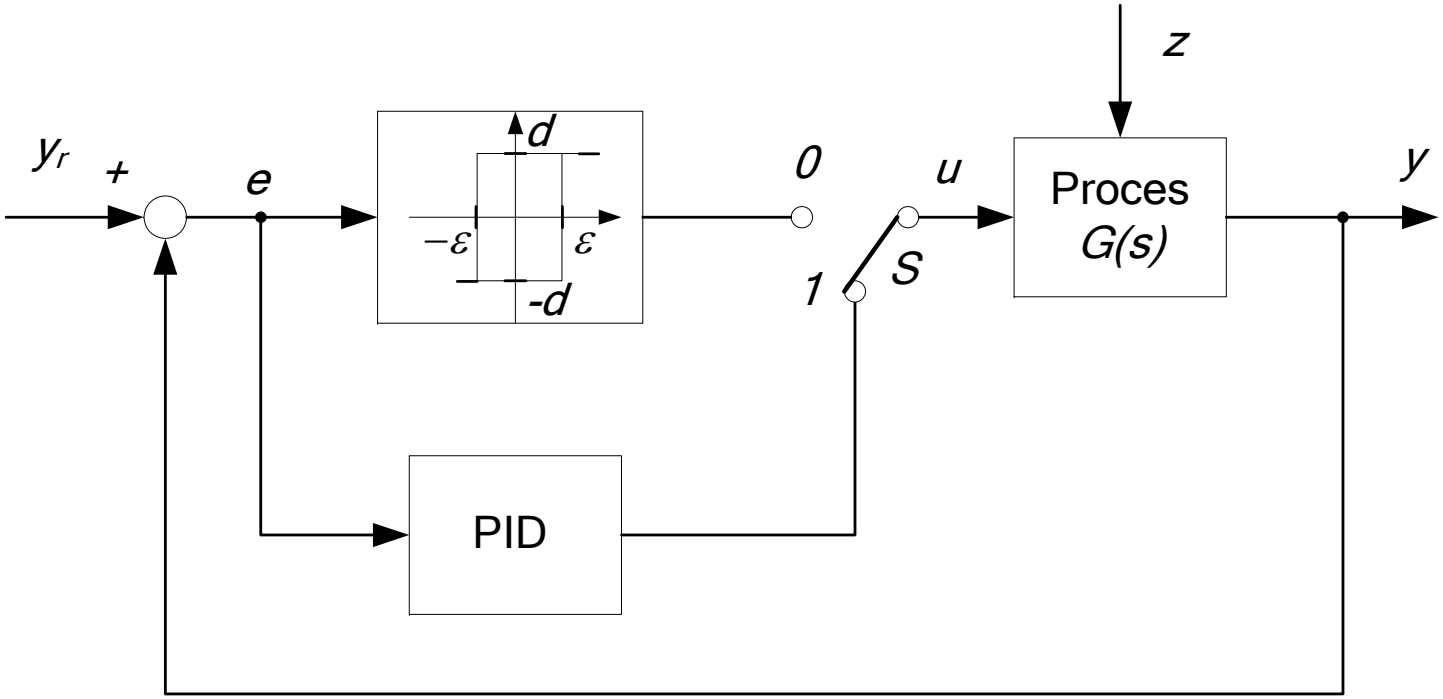
- **Vrlo je teško pogoditi stvarnu granicu stabilnosti i postoji opasnost ulaska sustava u nestabilan rad uz pojavu nekontroliranih amplituda oscilacija, što može ugroziti funkcionalnost pojedinih elemenata regulacijskog kruga.**

- **Osim toga, pri izračunavanju vrijednosti parametara regulatora u obzir se uzima samo period oscilacija, a ne i njihova amplituda.**

© Ivan Petrović

- Åström i Hägglund su 1984. godine predložili **<u>relejni postupak</u>** (Sl. 4.6)**:**

*** sustav je na rubu stabilnosti, ali je amplituda oscilacija kontrolirana.**



Sl. 4.6.

- **Sustav može doći u oscilatorno stanje, ako je preklopka *S* u položaju 0.**
- **Oscilatorno stanje nastupa zbog relejne karakteristike u zatvorenom krugu.**

© Ivan Petrović

- **Pri tome proces treba biti najmanje 2. reda.**

- Regulacijsko odstupanje je oscilatorni periodički signal.

- Za analizu nelinearnog sustava prikazanog slici 4.6 primjenjuje se tzv. **metoda opisne funkcije**.

- U osnovi, metodom opisne funkcije nelinearnog člana zanemaruju se viši harmonici izlaznog signala nelinearnog člana.

- **Nelinearni član pobuđen sinusnim signalom određene frekvencije na izlazu daje signal iste te frekvencije i još dodatno više harmonike (prema razvoju u Fourierov red).**

© Ivan Petrović

<u>DIGRESIJA 1:</u> ***Razvoj funkcije u Fourierov red*:**

- **Jean-Baptiste Joseph Fourier** (1768-1830), francuski fizičar i matematičar, uveo je u analizu Fourierov red i Fourierov integral.

- **Fourierov red** je jedan od najvažnijih alata za rješavanje običnih i parcijalnih diferencijalnih jednadžbi.

- Za funkciju *f(x)* kažemo da je periodička ako je definirana za sve realne x i ako postoji neki pozitivni broj T takav da je

$$f(x+T)=f(x)$$

za sve x. Tada se broj T naziva periodom funkcije *f(x)*.

- Ako je n bilo koji cijeli broj i ako vrijedi

$$f(x+nT)=f(x)$$

za svaki x, tada je svaki umnožak nT također period funkcije *f(x)*.

- Pretpostavimo da je *f(x)* periodička funkcija s periodom 2π koja se može razviti u trigonometrijski red

$$\boxed{f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)} \qquad (4\text{-}1)$$

- Za takvu funkciju *f(x)* treba odrediti koeficijente pripadajućeg reda (a_0, a_n i b_n).

- Integriranjem obiju strana izraza (4-1) od $-\pi$ do π dobije se

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\right]dx$$

- Nakon integriranja dobije se prvi koeficijent

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

koji je je površina ispod krivulje *f(x)* na intervalu od $-\pi$ do π podijeljena sa 2π.

- Na sličan se način odrede i koeficijenti a_1, a_2,...
- Pomnoži se izraz (4-1) s cos mx, gdje je m bilo koji pozitivni cijeli broj, i integrira od $-\pi$ do π, što daje

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\right]\cos mx\ \ dx$$

- Integriranjem član po član dobije se

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\, dx \qquad m = 1, 2, ...$$

jer je:

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_m \cos^2 mx\, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{2m}\sin mx \cos mx\Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

- Na sličan se način određuju i koeficijenti b_1, b_2,...., tako da se izraz (4-1) pomnoži sa sin mx, gdje je m određeni pozitivni cijeli broj, i integrira od $-\pi$ do π:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\right]\sin mx\ \ dx$$

© Ivan Petrović

- Integriranjem član po član konačno dobije se:

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\, dx \quad m = 1, 2, ...$$

jer je:

$$\int_{-\pi}^{\pi} b_m \sin^2 mx\, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2m}\sin mx \cos mx \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

- Zamjenom n umjesto m dobiju se tzv. Eulerovi izraz za izračunavanje koeficijenata Fourierova reda:

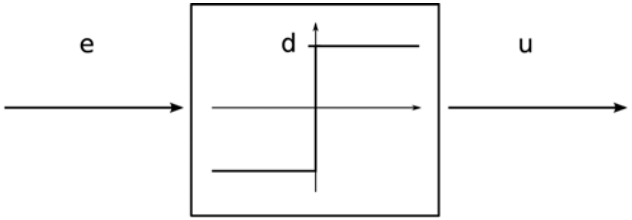
$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx \quad n = 1, 2, ...$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx \quad n = 1, 2, ...$$

KRAJ DIGRESIJE 1.

- **Uz idealni relej (ε=0, sl. 4.7) izlaz releja *u*(*t*) na pobudni signal *e*(*t*)=*A*sin*ωt* dan je izrazom:**



Sl. 4.7.

$$u(t) = f(\omega t) = \begin{cases} -d & -\pi \le \omega t \le 0 \\ d & 0 \le \omega t \le \pi \end{cases} \qquad (4\text{-}2)$$

- **Prema tome, *u*(*t*) je periodička funkcija pa se može razviti u Fourirerov red i dobije se sljedeći izraz:**

$$u(t) = \frac{4d}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)\omega t}{2n-1} = \frac{4d}{\pi}\sin\omega t + \frac{4d}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)\omega t}{2n-1} \qquad (4\text{-}3)$$

- **Dijeljenjem prvog harmonika signala *u*(*t*) (n=1) s *e*(*t*)=*A*sin*ωt* dobije se opisna funkcija (OF) relejnog člana:**

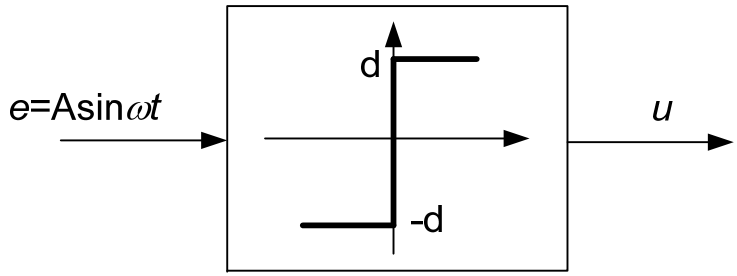
$$\boxed{N(A) = \frac{4d}{\pi A}}, \qquad (4\text{-}4)$$

© Ivan Petrović

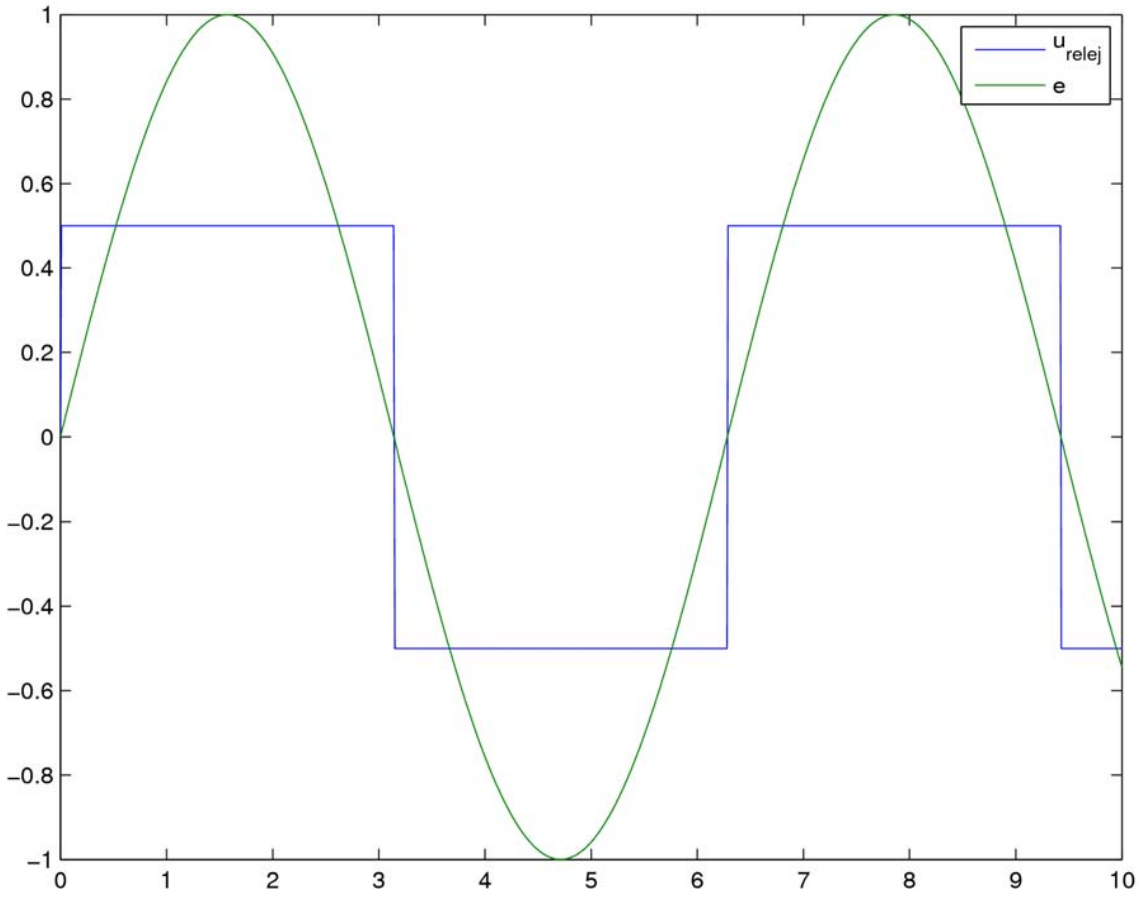
- **Dakle, opisna funkcija $N(A)$ predstavlja samo prvi harmonik, tj. zanemaruju se viši frekvencijski članovi (harmonici) u izrazu.**
- **Viši se harmonici filtriraju kroz proces koji ima karakteristiku niskog propusta.**
- **Opisna funkcija kod nelinearnog sustava odgovara prijenosnoj funkciji kod linearnog sustava i predstavlja linearizirani opis nelinearnog člana.**

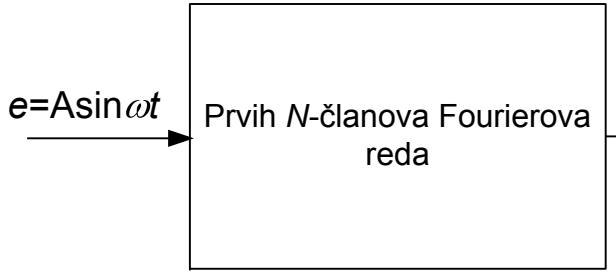
<u>DIGRESIJA 2</u>: ***Ilustracija opravdanosti primjene opisne funkcije***

- Relej pobuđen sinusnim signalom na ulazu:



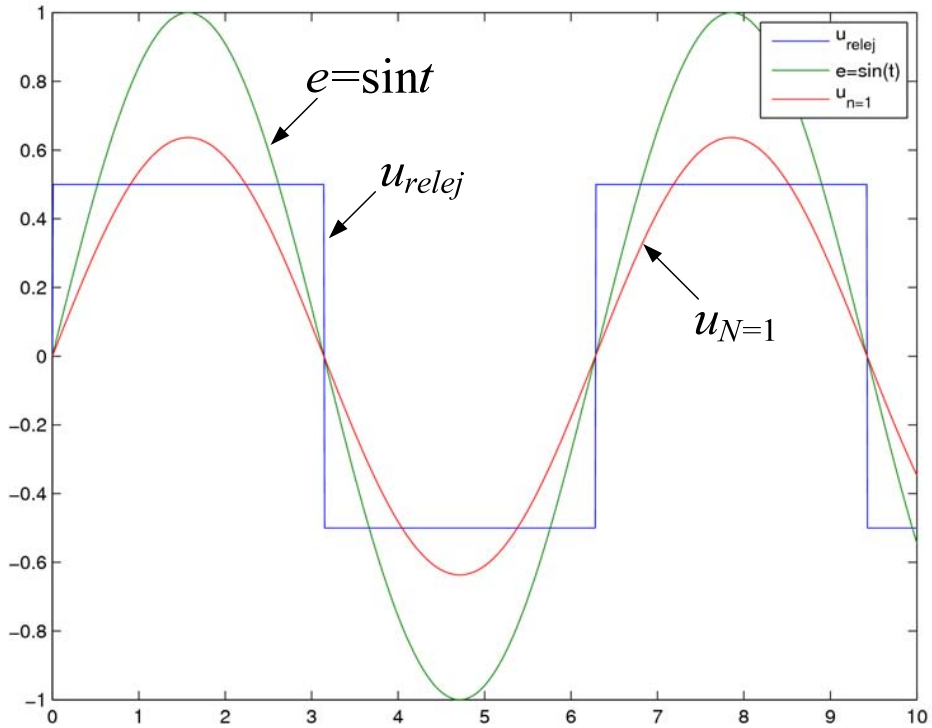
- Ulazni i izlazni signali idealnog releja d=0,5 pobuđenog signalom $e(t)=A\sin\omega t$:



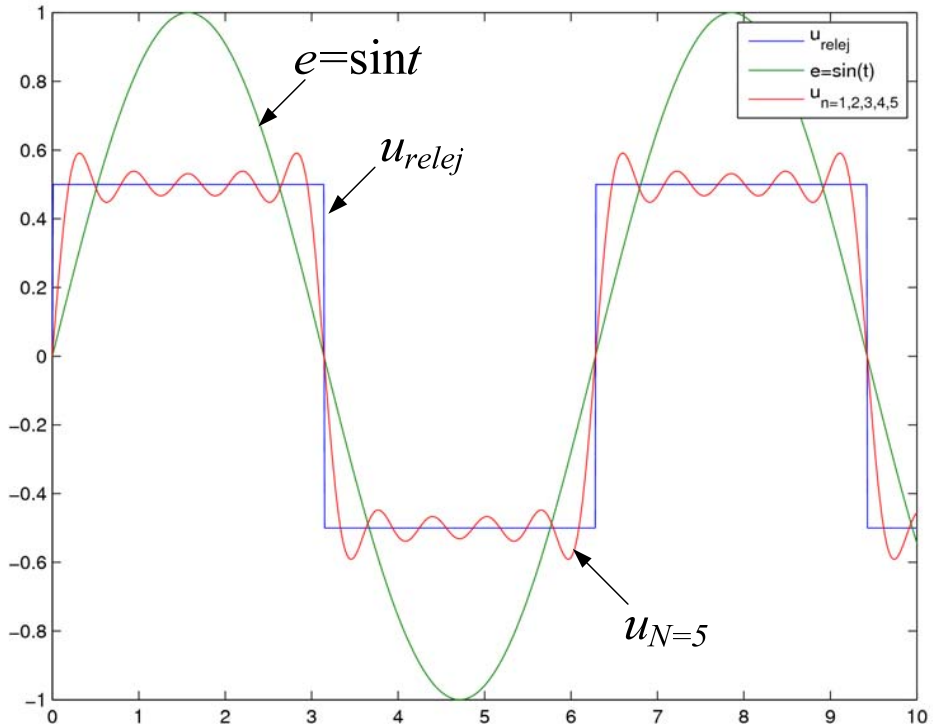


$$u(t) = \frac{4d}{\pi} \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(2n-1)\omega t}{2n-1}$$

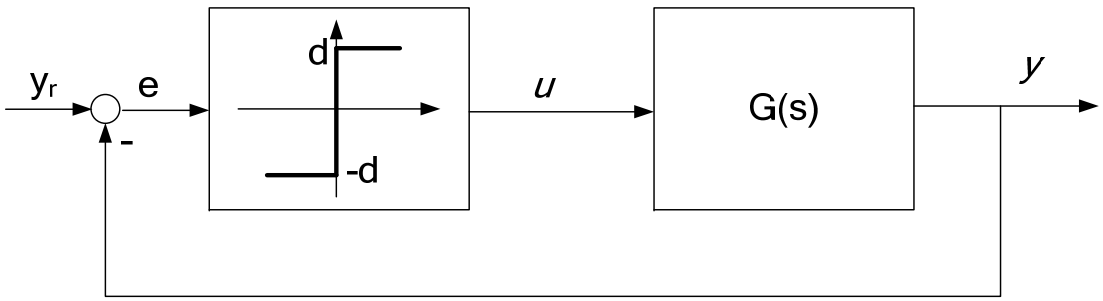
N=1



N=5



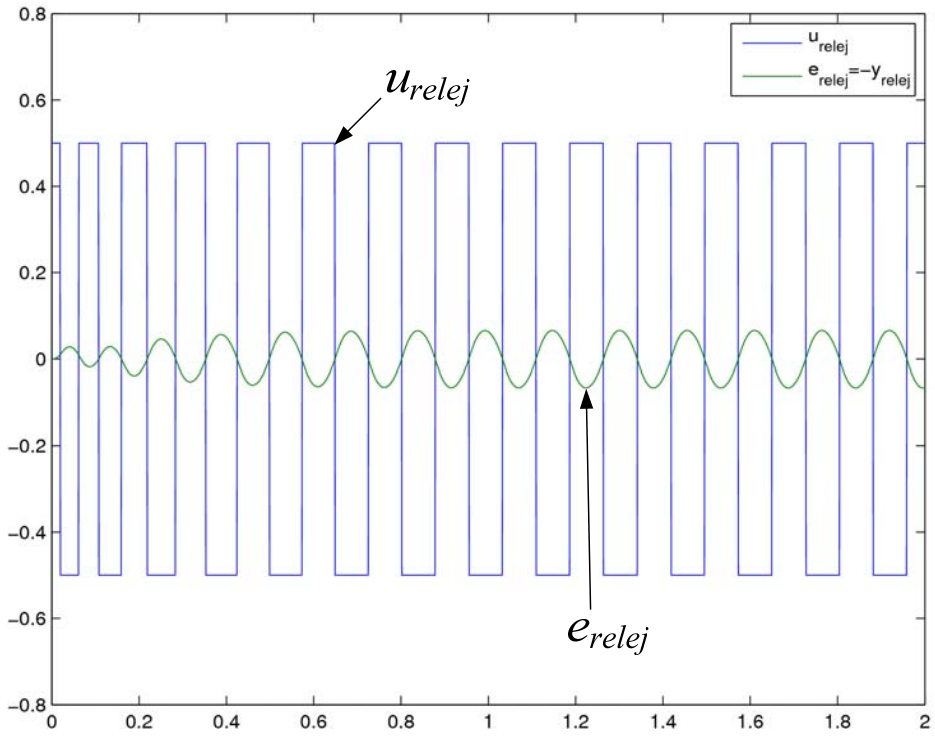
- Idealni relej kao regulator:



Dobivene oscilacije signala regulacijskog odstupanja su:

$$e(t) = -y(t) = 0.06595 \cdot \sin 41.87t$$

Na slici je plavi signal $u(t)$, a zeleni $e(t)$

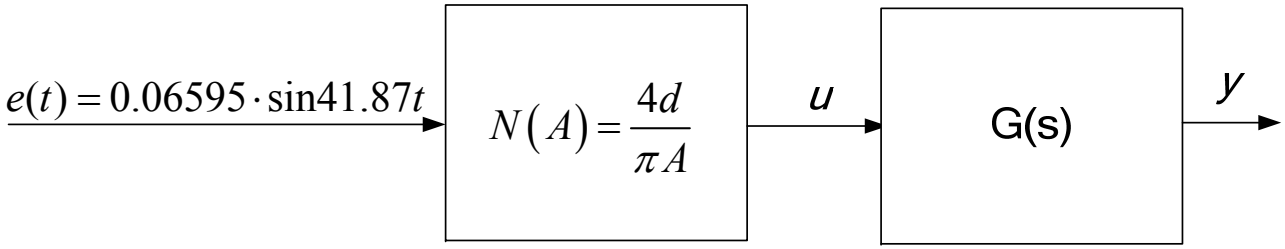


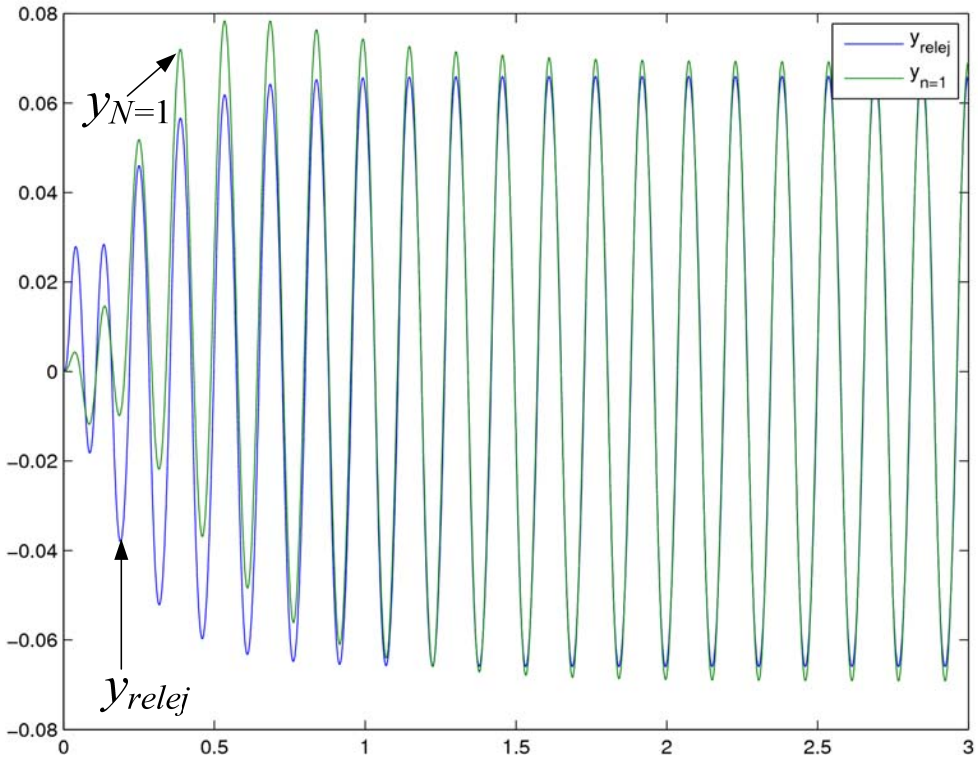
<u>Proces</u>: Motor iz LV1.

<u>Napomena:</u> treba dati kratkotrajni mali impuls y_r ili poremećaja, kako bi se pobudile oscilacije u sustavu.

© Ivan Petrović

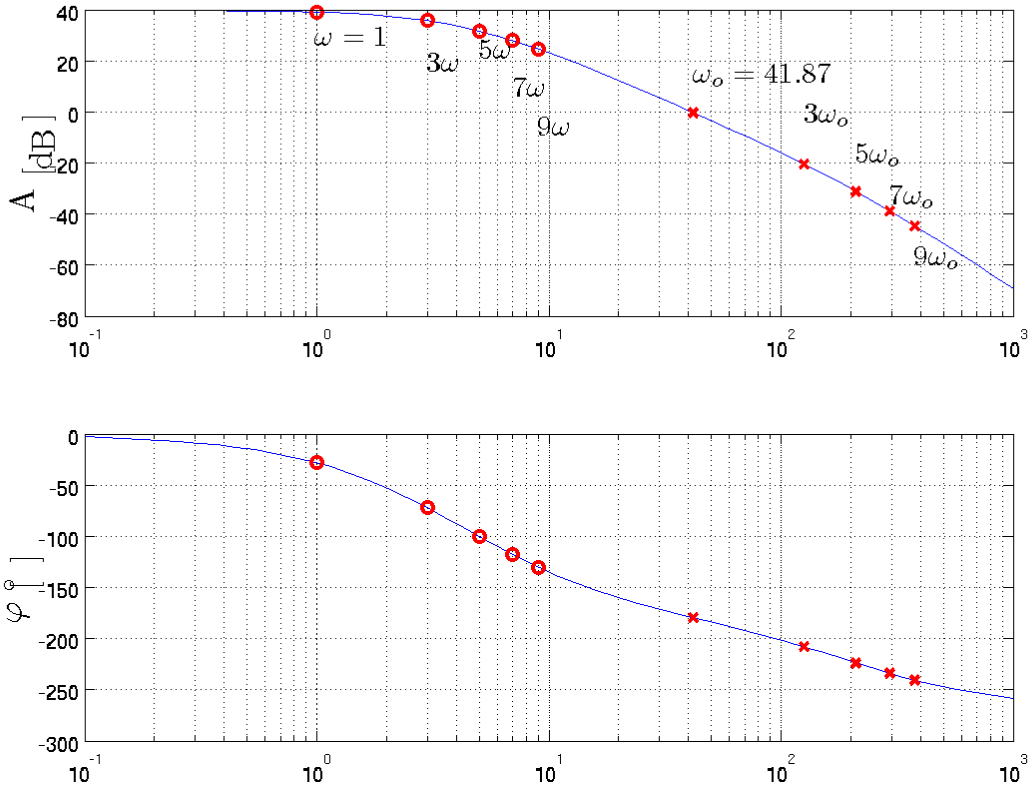
- Za opravdanost primjene OF, relej je nadomješten OF i snimljen je odziv serije OF i procesa na signal regulacijskog odstupanja dobiven u eksperimentu s relejom:



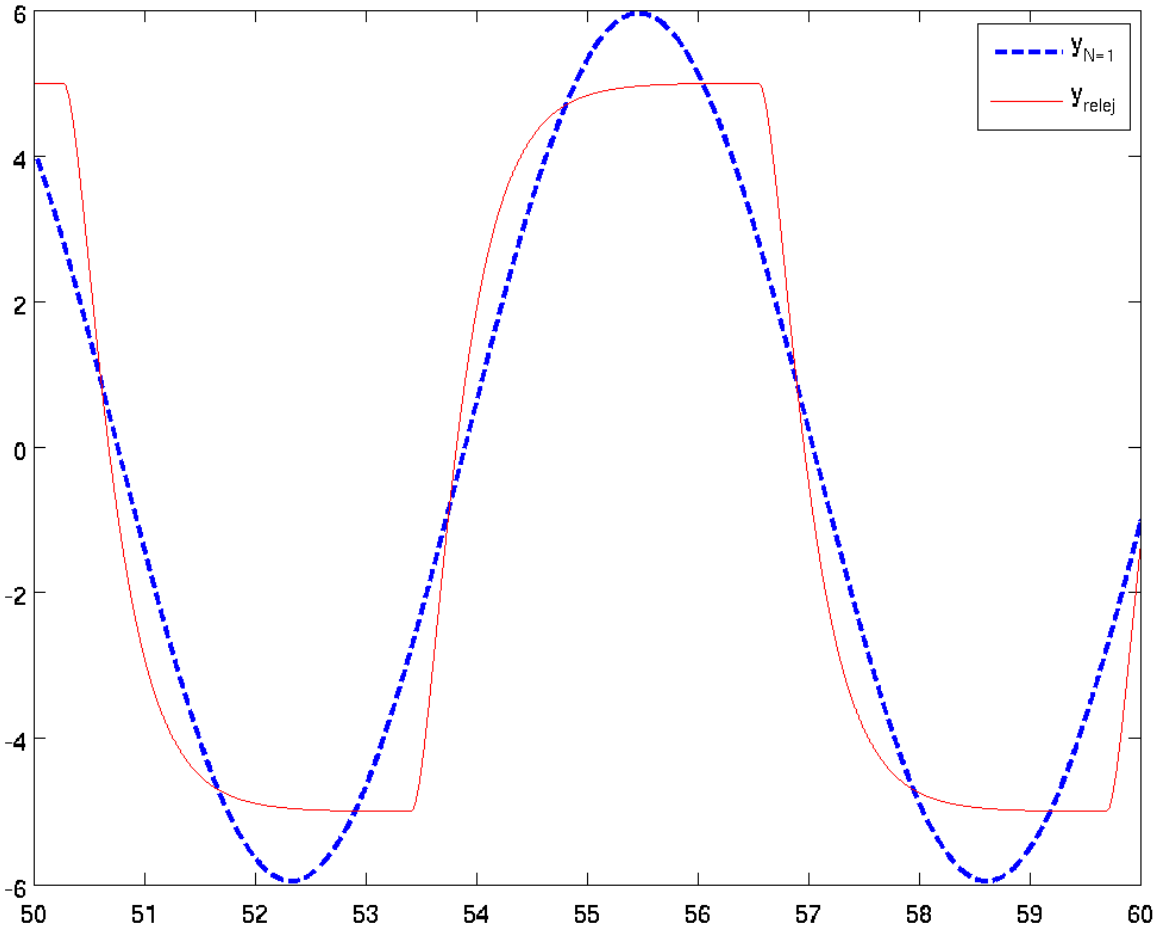


© Ivan Petrović

- O opravdanosti primjene OF može se zaključiti i iz frekvencijske karakteristike upravljanoga procesa:



- OF se ne može koristiti na frekvencijama nižim od ω_0. Za ilustraciju dan je odziv procesa na sinusnu pobudu frekvencije ω =1 rad/s:

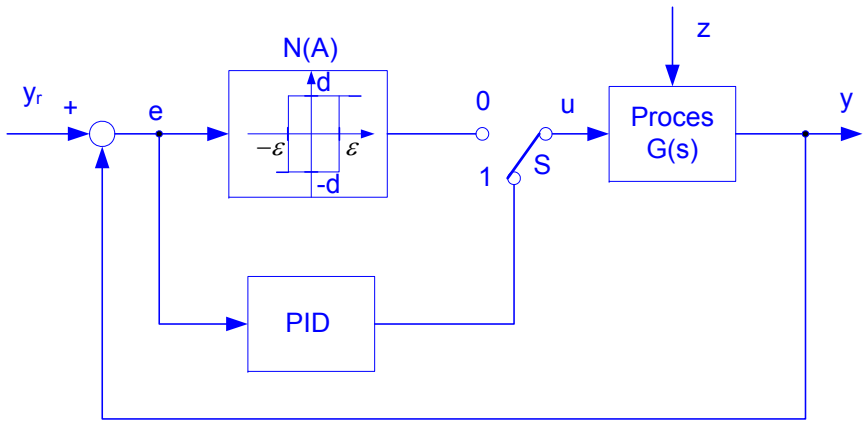


KRAJ DIGRESIJE 2.

- Kako bi se izbjeglo da zbog mjernog šuma relej ima i promjene stanja koje nisu određene dinamikom sustava, u praksi se obično koristi **<u>relejni član s histerezom</u>** (kao na slici 4.6).
- Njegova opisna funkcija može se odrediti istim postupkom, a glasi:

$$\boxed{N(A) = \frac{4d}{\pi A^2}\sqrt{A^2 - \varepsilon^2} - j\frac{4d\varepsilon}{\pi A^2}}, \qquad (4\text{-}5)$$

- Ako pretpostavimo da opisna funkcija zadovoljavajuće dobro aproksimira nelinearni član, onda se sustav na slici 4.6 može opisati na sljedeći način ($y_r = 0$):



Sl. 4.6

$$\boxed{Y(j\omega) = -Y(j\omega)N(A)G(j\omega)}, \qquad (4\text{-}6)$$

odnosno (uz $Y(j\omega) \neq 0$)

$$\boxed{G(j\omega) = -\frac{1}{N(A)}}. \qquad (4\text{-}7)$$

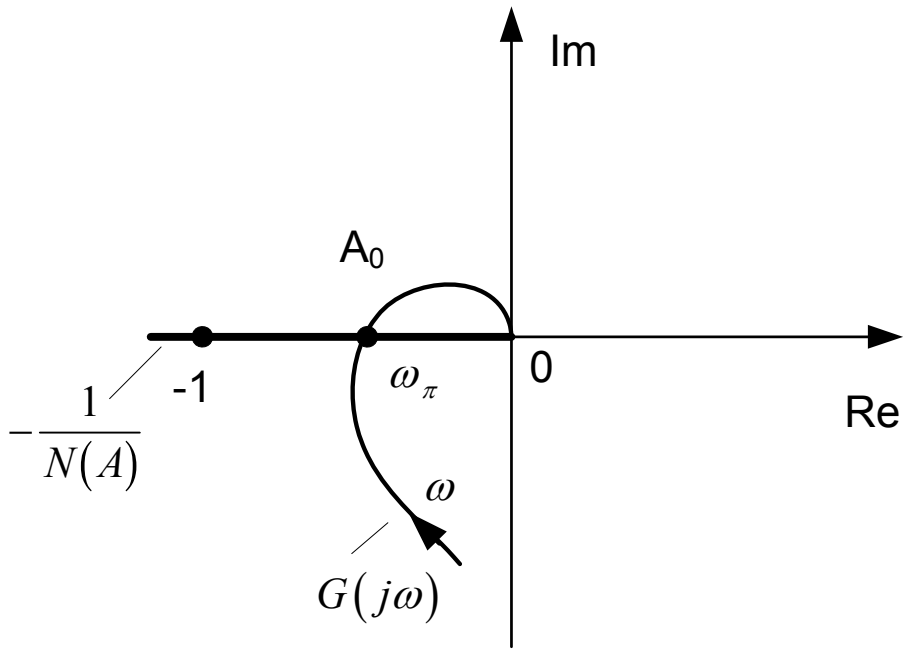
© Ivan Petrović

Relejni član bez histereze:

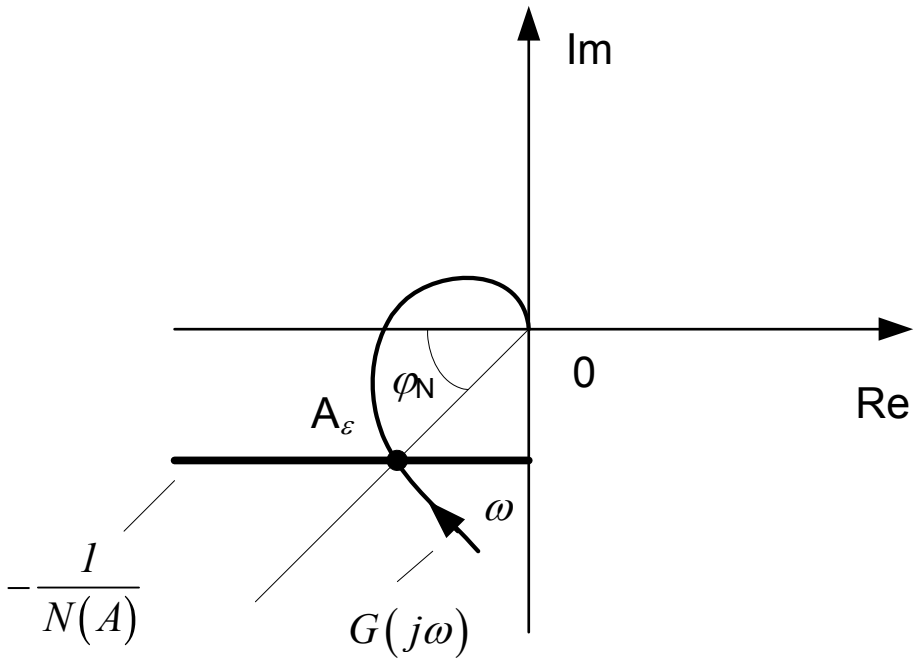
- frekvencija oscilacija: ω_π.
- fazno kašnjenje $-\pi$ (točka A_0 na slici 4.8.)
- Prema tome, čisti relejni član ne unosi fazno kašnjenje.

Relejni član s histerezom:

- u procesima s izraženim djelovanjem šuma
- unosi kašnjenje faze φ_N kako je prikazano na slici 4.9.



Sl. 4.8.



Sl. 4.9.

© Ivan Petrović

- Iz (4-5) $\left(N(A)=\frac{4d}{\pi A^2}\sqrt{A^2-\varepsilon^2}-j\frac{4d\varepsilon}{\pi A^2}\right)$ slijedi fazno kašnjenje prouzročeno histerezom:

$$\boxed{\varphi_N = arctg\frac{\varepsilon}{\sqrt{A^2-\varepsilon^2}}}. \qquad (4\text{-}8)$$

- Pretpostavit ćemo da je proces opisan tipičnom prijenosnom funkcijom PT_1T_t:

$$\boxed{G(s)=\frac{K_s}{1+T_s s}e^{-T_t s}}; \qquad (4\text{-}9)$$

- Fazna karakterisitka sustava:

$$\boxed{\omega_0 T_t + arctg\,\omega_0 T_s = \pi + \varphi_N}, \qquad (4\text{-}10)$$

- Amplitudna karakterisitka sustava:

$$\boxed{K_s = \frac{\pi A}{4d}\sqrt{1+(\omega_0 T_s)^2}}, \qquad (4\text{-}11)$$

gdje je ω_0 – frekvencija oscilacija.

© Ivan Petrović

- Iz izraza (4-10) $(\omega_0 T_t + arctg\,\omega_0 T_s = \pi + \varphi_N)$ i (4-11) $(K_s = \frac{\pi A}{4d}\sqrt{1+(\omega_0 T_s)^2})$ razvidno je da se promjenom amplitude releja d i histereze ε može utjecati na ω_0 i A.

- Uz poznato ε i d te mjereno $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ i A mogu se odrediti parametri PID regulatora u skladu s definiranim kriterijem kakvoće.

© Ivan Petrović

Izračunavanje parametara PID regulatora:

- Sinteza zatvorenog regulacijskog kruga s PID regulatorom (sklopka S u položaju 1) provodi se na temelju frekvencijske karakteristike otvorenog regulacijskog kruga s PID regulatorom.

- Pri tome se postavlja zahtjev da presječna frekvencija otvorenog regulacijskog kruga s PID regulatorom **ω_c bude jednaka frekvenciji oscilacija ω_0 ($\omega_c = \omega_0$)** izmjerenoj tijekom relejnog eksperimenta.

- Frekvencijska karakteristika otvorenog sustava $G_0(j\omega)$ je:

  * amplitudna karakteristika:

$$\boxed{G_0(j\omega) = K_R\left(1 + \frac{1}{j\omega T_I} + j\omega T_D\right)G(j\omega)}. \qquad (4\text{-}12)$$

  * frekvencijska karakterisika (iz slike 4.9: $argG\,(j\omega) = -\pi - \varphi_N$):

$$\boxed{\varphi_0(j\omega) = -\frac{3\pi}{2} + arctg\frac{\omega T_I}{1-\omega^2 T_D T_I} + \varphi_N}. \qquad (4\text{-}13)$$

- Iz (4-13) dobije se fazno osiguranje $\gamma = \pi + \varphi_0(j\omega_0)$:

$$\boxed{\omega_0 T_D - \frac{1}{\omega_0 T_I} = tg(\gamma - \varphi_N)}. \qquad (4\text{-}14)$$

- Izborom $T_I = \alpha T_D$ (uobičajeno α=4) iz (4-14) dobije se izraz za izračunavanje derivacijske i integralne vremenske konstante PID regulatora:

$$\boxed{T_D = \frac{T_I}{\alpha} = \frac{tg(\gamma - \varphi_N) + \sqrt{\frac{4}{\alpha} + tg^2(\gamma - \varphi_N)}}{2\omega_0}}. \qquad (4\text{-}15)$$

Iz uvjeta ($|G_0(j\omega_0)| = 1$) dobije se:

$$\boxed{K_R = \frac{4d}{\pi A}\cos(\gamma - \varphi_N)}. \qquad (4\text{-}16)$$

© Ivan Petrović

- **S obzirom da je i za vrijeme relejnog eksperimenta vladanje sustava kontrolirano, opisani se relejni postupak podešavanja parametara PID regulatora može automatizirati.**

- **To jest na temelju njega može se izvesti sustav sa samopodešenjem parametara PID regulatora (*engl*. PID controller autotuning).**

- **Samopodešenje PID regulatora može imati značajne industrijske primjene.**

- **Poglavito pri upravljanju procesima sa sporom dinamikom (npr. vremenske konstante toplinskih procesa mogu biti veće i od sat vremena). Kod takvih je procesa ručno podešavanje regulatora dugotrajno.**

© Ivan Petrović

Postupci diskretizacije kontinuiranog PID regulatora:

- **Pri digitalnoj izvedbi kontinuiranog regulatora, regulacijski se algoritam izvodi u diskretnom vremenu pa se mora provesti njegova diskretizacija.**
- **Pri tome je važno izabrati odgovarajuće vrijeme uzorkovanja *T* i primijeniti odgovarajući postupak diskretizacije.**
- **U nastavku se ukratko opisuje nekoliko postupaka diskretizacije PID regulatora i daju se preporuke za odabir prikladnog postupka.**

Diskretizacija proporcionalnog člana:

$$\boxed{u_P(t)=K_R e(t)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{u_P(k)=K_R e(k)}.$$

© Ivan Petrović

Diskretizacija integralnog člana:

Deriviranjem integralnog člana PID regulatora $\boxed{u_I(t) = \frac{K_R}{T_I}\int_0^t e(\tau)\,d\tau}$ dobije se:

$$\boxed{\frac{du_I(t)}{dt} = \frac{K_R}{T_I}e(t)}. \qquad (4\text{-}17)$$

Diferencijalna jednadžba (4-17) može se diskretizirati na više načina, primjerice primjenom postupka unaprijedne diferencije ili postupka unazadne diferencije ili Tustinova postupka.

Postupak unaprijedne diferencije $\boxed{\left(s = \frac{z-1}{T} = \frac{1-z^{-1}}{Tz^{-1}}\right)}$: diferencijalna jednadžba (4-17) postaje:

$$\boxed{\frac{u_I(k+1) - u_I(k)}{T} = \frac{K_R}{T_I}e(k)}, \qquad (4\text{-}18)$$

odnosno

© Ivan Petrović

$$\boxed{\frac{u_I(k)-u_I(k-1)}{T}=\frac{K_R}{T_I}e(k-1)}. \qquad (4\text{-}19)$$

I izraza (4-19) dobije se rekurzivna jednadžba integralnog člana:

$$\boxed{u_I(k)=u_I(k-1)+\frac{K_R T}{T_I}e(k-1)}. \qquad (4\text{-}20)$$

Postupak unazadne diferencije $\boxed{\left(s=\frac{1-z^{-1}}{T}\right)}$: diferencijalna jednadžba (4-17) postaje:

$$\boxed{\frac{u_I(k)-u_I(k-1)}{T}=\frac{K_R}{T_I}e(k)}. \qquad (4\text{-}21)$$

I izraza (4-21) dobije se rekurzivna jednadžba integralnog člana:

$$\boxed{u_I(k) = u_I(k-1) + \frac{K_R T}{T_I} e(k)}. \qquad (4\text{-}22)$$

Tustinov postupak: $\boxed{\left(s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)}$: diferencijalna jednadžba (4-17) aproksimira se rekurzivnom jednadžbom diferencija:

$$\boxed{u_I(k) = u_I(k-1) + \frac{K_R T}{T_I} \frac{e(k) + e(k-1)}{2}}. \qquad (4\text{-}23)$$

Uočava se da sva tri postupka diskretizacije diferencijalne jednadžbe (4-17) daju rekurzivnu jednadžbu diferencija oblika:

$$\boxed{u_I(k) = u_I(k-1) + b_{i1} e(k) + b_{i2} e(k-1)}, \qquad (4\text{-}24)$$

s tim da iznosi koeficijenata b_{i1} i b_{i2} ovise o primijenjenom postupku diskretizacije.

Diskretizacija derivacijskog člana:

Može se diskretizirati diferencijalna jednadžba realnog derivatora:

$$\boxed{\frac{T_D}{\nu}\frac{du_D}{dt}+u_D=K_R T_D\frac{d(cy_R-y)}{dt}=K_R T_D\frac{de_D}{dt}}. \qquad (4\text{-}25)$$

ili idealnog derivatora:

$$\boxed{u_D=K_R T_D\frac{d(cy_R-y)}{dt}=K_R T_D\frac{de_D}{dt}}. \qquad (4\text{-}26)$$

Postupak unaprijedne diferencije:

- realni derivacijski član:

$$\boxed{u_D(k)=\left(1-\frac{\nu T}{T_D}\right)u_D(k-1)+K_R\nu\left[e_D(k)-e_D(k-1)\right]}, \qquad (4\text{-}27)$$

- idealni derivacijski član:

$$\boxed{u_D(k)=\frac{K_R T_D}{T}\left[e_D(k+1)-e_D(k)\right]}. \text{ – nekauzalno} \qquad (4\text{-}28)$$

© Ivan Petrović

Postupak unazadne diferencije:

- realni derivacijski član:

$$\boxed{u_D(k) = \frac{T_D}{T_D + \nu T} u_D(k-1) + \frac{K_R \nu T_D}{T_D + \nu T}\left[e_D(k) - e_D(k-1)\right]}, \qquad (4\text{-}29)$$

- idealni derivacijski član:

$$\boxed{u_D(k) = \frac{K_R T_D}{T}\left[e_D(k) - e_D(k-1)\right]}. \qquad (4\text{-}30)$$

Tustinov postupak:

- realni derivacijski član:

$$\boxed{u_D(k) = \frac{2T_D - \nu T}{2T_D + \nu T} u_D(k-1) + \frac{2K_R \nu T_D}{2T_D + \nu T}\left[e_D(k) - e_D(k-1)\right]}. \qquad (4\text{-}31)$$

- idealni derivacijski član:

$$\boxed{u_D(k) = -u_D(k-1) + \frac{2K_R T_D}{T}\left[e_D(k) - e_D(k-1)\right]}. \qquad (4\text{-}32)$$

© Ivan Petrović

Uočava se da se diskretizacijom diferencijalne jednadžbe (4-25), a jednako tako i diferencijalne jednadžbe (4-26), dobije rekurzivna jednadžba diferencija oblika:

$$\boxed{u_D(k) = a_d u_D(k-1) + b_d \left[e(k) - e(k-1) \right]}, \qquad (4\text{-}33)$$

pri čemu iznosi koeficijenata a_d i b_d ovise o primijenjenom postupku diskretizacije.

- Koeficijenti jednadžbi diferencija I- i D-člana dani su u tablici 4.3.

Tablica 4.3.	**Postupak diskretizacije**		
Koeficijent	Unaprijedni kvocijent diferencija	Unazadni kvocijent diferencija	Tustinov postupak
b_{i1}	0	$\frac{K_R T}{T_I}$	$\frac{K_R T}{2T_I}$
b_{i2}	$\frac{K_R T}{T_I}$	0	$\frac{K_R T}{2T_I}$
a_d (realni derivacijski član)	$1-\frac{\nu T}{T_D}$	$\frac{T_D}{T_D+\nu T}$	$\frac{2T_D-\nu T}{2T_D+\nu T}$
a_d (idealni derivacijski član)	-	0	-1
b_d (realni derivacijski član)	$K_R \nu$	$\frac{K_R \nu T_D}{T_D+\nu T}$	$\frac{2K_R \nu T_D}{2T_D+\nu T}$
b_d (idealni derivacijski član)	-	$\frac{K_R T_D}{T}$	$\frac{2K_R T_D}{T}$

© Ivan Petrović

Koji postupak diskretizacije izabrati?

- Diskretizacija idealnog derivacijskog člana primjenom unaprijednog kvocijenta diferencija nije moguća, a diskretizacija Tustinovim postupkom je granično stabilna (koeficijent $a_d = -1$) pa niti ona nije zadovoljavajuća.
- Diskretizacija realnog derivacijskog člana primjenom unaprijednog kvocijenta diferencija bit će stabilna samo ako je ispunjen uvjet $|a_d| < 1$ (vidi izraz (4-33)), tj. ako je $\boxed{T_D > \frac{\nu T}{2}}$.

<u>*Dokaz*</u>:

$$\boxed{\left\{ |a_d| < 1 \Rightarrow \left| 1 - \frac{\nu T}{T_D} \right| < 1 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 1 - \frac{\nu T}{T_D} < 1 \Rightarrow T_D > 0 \\ -1 + \frac{\nu T}{T_D} < 1 \Rightarrow \mathbf{T_D > \frac{\nu T}{2}} \end{array} \right| \right\}}$$

© Ivan Petrović

- Ako je T_D malog iznosa tada unaprijedni kvocijent diferencija i Tustinov postupak diskretizacije realnog derivacijskog člana mogu dati negativan iznos koeficijenta a_d, što ima za posljedicu oscilacije izlaza derivacijskog člana $u_D(k)$.

- Unazadni kvocijent diferencija daje stabilnu aproksimaciju derivacijskog člana za sve iznose T_D, pa se taj postupak diskretizacije najčešće primjenjuje.

- Sva tri postupka diskretizacije daju stabilnu aproksimaciju integralnog člana. Zbog jednostavnosti najčešće se primjenjuje unazadni kvocijent diferencija, a ponekad se primjenjuje i Tustinov postupak jer daje bolju aproksimacju od unazadnog kvocijenta diferencija.

© Ivan Petrović

Digitalna izvedba brzinskog PID regulatora:

- Brzinski PID regulator (Sl. 4.4.) diskretizira se kao i pozicijski PID regulator.
- Ali daje inkrement upravljačkog signala u *k*-tom koraku, umjesto njegovog apsolutnog iznosa $\Rightarrow$ **inkrementalni PID regulator**.
- Rekurzivna jednadžba inkrementalnog regulatora glasi:

$$\boxed{\Delta u(k) = u(k) - u(k-1) = \Delta u_P(k) + \Delta u_I(k) + \Delta u_D(k)}. \qquad (4\text{-}34)$$

Na osnovi rekurzivnih jednadžbi za P-, I- i D-član dobiju se jednadžbe za inkremente P-, I- i D-člana u izrazu (4-34):

$$\boxed{\Delta u_P(k) = K_R\left[e_P(k) - e_P(k-1)\right]},$$

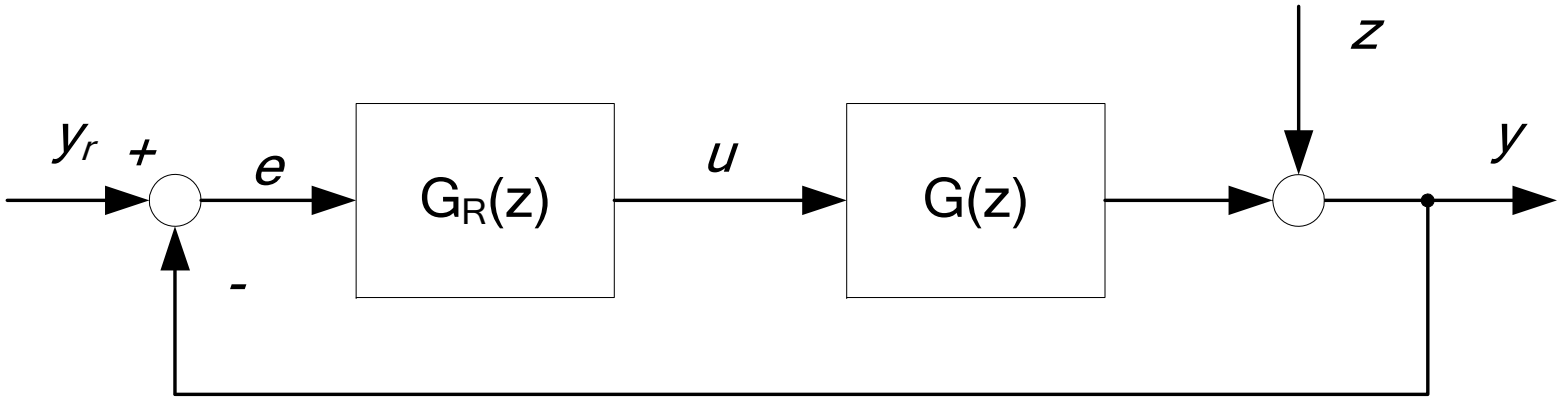
$$\boxed{\Delta u_I(k) = b_{i1}e(k) + b_{i2}e(k-1)},$$

$$\boxed{\Delta u_D(k) = a_d \Delta u_D(k-1) + b_d\left[e(k) - 2e(k-1 + e(k-2)\right]}.$$

© Ivan Petrović

4.3. Opći linearni parametarski regulatori

- Pretvorba kontinuiranog regulatora u diskretni oblik nije valjana za veća vremena uzorkovanja.
- Zbog toga se u narednim razmatranjima izlaže postupak projektiranja i optimiranja parametara regulatora neposredno u *z*-području.
- Polazimo od regulacijskog kruga prikazanog na slici 4.10:



Sl. 4.10. *Blokovska shema regulacijskog kruga.*

- Pretpostavlja se da je proces, uključivo i ekstrapolator nultog reda (ZOH), opisan prijenosnom funkcijom:

$$\boxed{G(z)=\frac{Y(s)}{U(z)}=\frac{B\left(z^{-1}\right)}{A\left(z^{-1}\right)}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_mz^{-m}}{1+a_1z^{-1}+\cdots+a_mz^{-m}}\cdot z^{-d}.} \qquad (4\text{-}35)$$

- Pretpostavlja se nadalje, da je opći oblik prijenosne funkcije regulatora:

$$\boxed{G_R(z)=\frac{U(z)}{E(z)}=\frac{Q\left(z^{-1}\right)}{P\left(z^{-1}\right)}=\frac{q_0+q_1z^{-1}+\cdots+q_\nu z^{-\nu}}{p_0+p_1z^{-1}+\cdots+p_\mu z^{-\mu}}.} \qquad (4\text{-}36)$$

- **Za realizaciju algoritma regulatora prema (4-36) mora biti $p_0 \neq 0$. (Za ν, μ nema uvjeta; može biti $\nu > \mu$ ili $\nu \leq \mu$.) Obično je: $p_0 = 1$ i $q_0 \neq 0$.**
- Kod strukturno optimiranih regulatora su ν i μ funkcije reda modela procesa.
- **Za parametarski optimirane regulatore obično je $\nu \leq m$ i $\mu \leq m+d$, pa je zbog toga manji opseg računanja.**

© Ivan Petrović

Strukture općih linearnih parametarskih regulatora:

- Pri postavljanju strukture regulatora treba imati u vidu da regulacijsko odstupanje u stacionarnom stanju treba biti 0.
- **Iz teorema o konačnoj vrijednosti u z-području slijedi da regulator treba imati (barem) jedan pol u $z = 1$.**
- Prema tome, najjednostavniji algoritam upravljanja ν-tog reda ima oblik:

$$\boxed{G_R(z) = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + \cdots + q_\nu z^{-\nu}}{1 - z^{-1}}}. \qquad (4\text{-}37)$$

- Pripadajuća jednadžba diferencija za prijenosnu funkciju (4-37) glasi:

$$\boxed{u(k) = u(k-1) + q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + \cdots + q_\nu e(k-\nu).} \qquad (4\text{-}38)$$

- Izborom parametara regulatora prema (4-37) može se postići:
  - za ν = 1 regulator PI-tipa,
  - za ν =2 regulator PID-tipa,

© Ivan Petrović

PID regulator kao linearni parametarski regulator:

- Izlaz digitalnog PID regulatora može se prikazati kao zbroj izlaza P, I i D članova:

$$\boxed{u(k) = u_P(k) + u_I(k) + u_D(k)}. \tag{4-39}$$

- Rekurzivni oblik digitalnog PID algoritma dobije se oduzimanjem vrijednosti izlaza regulatora u (k-1)-vom koraku od vrijednosti njegova izlaza u k-tom koraku:

$$\boxed{u(k) - u(k-1) = \left[u_P(k) - u_P(k-1)\right] + \left[u_I(k) - u_I(k-1)\right] + \left[u_D(k) - u_D(k-1)\right]}. \tag{4-40}$$

- Na osnovi rekurzivnih jednadžbi za P-, I- i D-član, izraz (4-40) poprima oblik:

$$\boxed{\begin{aligned} u(k) - u(k-1) = {} & K_R\left[e_P(k) - e_P(k-1)\right] + b_{i1}e(k) + b_{i2}e(k-1) + \\ & + (a_d - 1)u_D(k-1) + b_d\left[e_D(k) - e_D(k-1)\right] \end{aligned}}. \tag{4-41}$$

© Ivan Petrović

- Za iznose koeficijenata b=1 i c=1 (osnovna struktura regulatora, tj. e_P=e_D=e) i uz diskretizaciju idealnog derivacijskog člana dobije se rekurzivna jednadžba PID regulatora:

$$\boxed{u(k) = u(k-1) + q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2)}. \qquad (4\text{-}42)$$

gdje je (prema tablici 4.3.):

- uz diskretizaciju unazadnim kvocijentom diferencija:	- uz diskretizaciju I-člana Tustinovim postupkom:
$q_0 = K_R\left(1+\frac{T_D}{T}\right)$ $q_1 = -K_R\left(1+2\frac{T_D}{T}-\frac{T}{T_I}\right)$ $q_2 = K_R\frac{T_D}{T}$	$q_0 = K_R\left(1+\frac{T}{2T_I}+\frac{T_D}{T}\right)$ $q_1 = -K_R\left(1+2\frac{T_D}{T}-\frac{T}{2T_I}\right)$ $q_2 = K_R\frac{T_D}{T}$

- U primjenama u kojima nije neophodno imati paralelnu strukturu, prikladno je PID regulator implementirati pomoću jedne rekurzivne jednadžbe.

© Ivan Petrović

- Primjenom z-transformacije na rekurzivnu jednadžbu (4-42) dobije se prijenosna funkcija digitalnog PID regulatora:

$$\boxed{\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}}}. \tag{4-43}$$

- Rekurzivna jednadžba PI regulatora glasi:

$$\boxed{u(k) = u(k-1) + q_0 e(k) + q_1 e(k-1)}, \tag{4-44}$$

gdje je (prema tablici 4.3.):

- uz diskretizaciju unazadnim kvocijentom diferencija: $\boxed{\begin{aligned} q_0 &= K_R\left(1 + \frac{T}{T_I}\right) \\ q_1 &= -K_R \end{aligned}}$	- uz diskretizaciju Tustinovim postupkom: $\boxed{\begin{aligned} q_0 &= K_R\left(1 + \frac{T}{2T_I}\right) \\ q_1 &= K_R\left(\frac{T}{2T_I} - 1\right) \end{aligned}}$

© Ivan Petrović

Opći parametarski regulator drugog reda:

- Prema (4-37) ($G_R(z)=\dfrac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})}=\dfrac{q_0+q_1z^{-1}+\cdots+q_\nu z^{-\nu}}{1-z^{-1}}$) za $\nu=2$ dobije se:

$$\boxed{G_R(z)=\frac{U(z)}{E(z)}=\frac{q_0+q_1z^{-1}+q_2z^{-2}}{1-z^{-1}},} \qquad (4\text{-}45)$$

odnosno prema jednadžbi (4-38):

$$\boxed{u(k)=u(k-1)+q_0e(k)+q_1e(k-1)+q_2e(k-2)}.$$

- Iz odziva na skokovitu pobudu:

$$e(k)=\begin{cases}1 & \text{za} \quad k\geq 1,\\ 0 & \text{za} \quad k<0,\end{cases} \qquad (4\text{-}46)$$

slijedi:

© Ivan Petrović

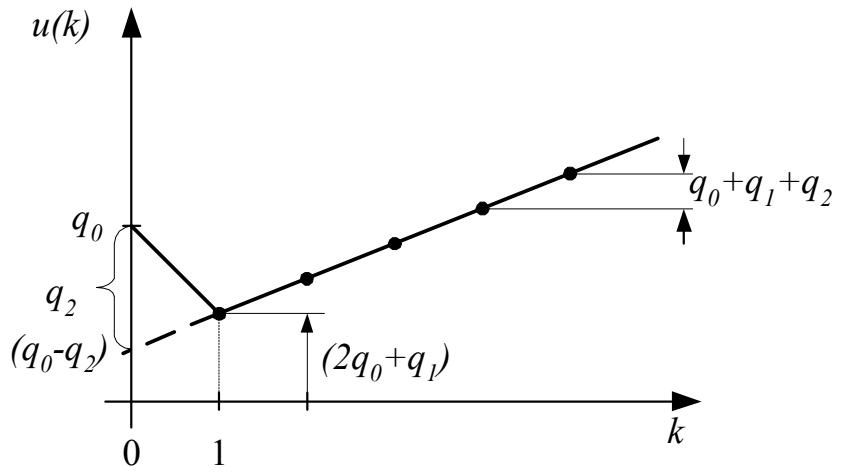
$$
\begin{aligned}
&u(0)=q_0\\
&u(1)=u(0)+q_0+q_1=2q_0+q_1\\
&u(2)=u(1)+q_0+q_1+q_2=3q_0+2q_1+q_2\\
&\vdots\\
&u(k)=u(k-1)+q_0+q_1+q_2=(k+1)q_0+kq_1+(k-1)q_2.
\end{aligned}
\tag{4-47}
$$

- Prema slikama 4.11 i 4.12 (**sljedeći slajd**) diskretni algoritam (4-45) imat će svojstva PID regulatora ako je ispunjeno:

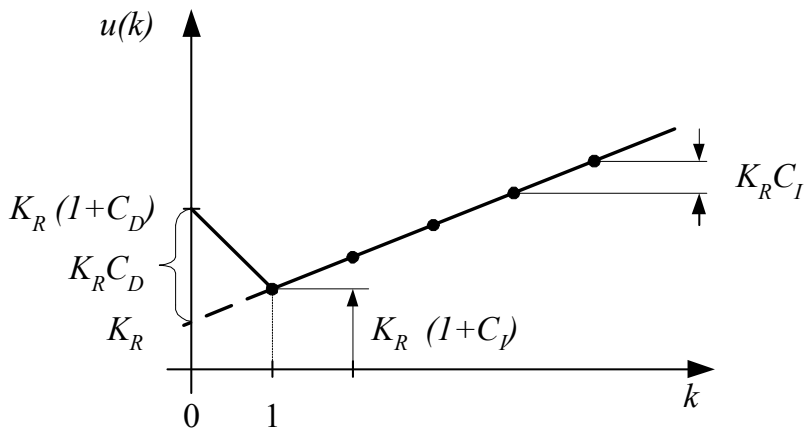
$$
\begin{aligned}
&u(1)<u(0)\ \rightarrow\ 2q_0+q_1<q_0\ \rightarrow\ q_0+q_1<0,\\
&u(k)>u(k-1)\ \xrightarrow{za\ \ k\geq 2}\ 3q_0+2q_1+q_2>2q_0+q_1\ \rightarrow\ q_0+q_1+q_2>0.
\end{aligned}
$$

- Uz pozitivno pojačanje regulatora, $q_0>q_2$, slijede uvjeti za područja parametara:

$$
\begin{aligned}
&q_0>0,\\
&q_1<-q_0,\\
&-(q_0+q_1)<q_2<q_0.
\end{aligned}
\tag{4-48}
$$



Sl. 4.11. Algoritam upravljanja 2. reda kao PID regulator.



Sl. 4.12. Karakteristični parametri PID regulatora.

$$K_R \mathrel{\hat{=}} K_R;\ C_D \mathrel{\hat{=}} \frac{T_D}{T};\ C_I \mathrel{\hat{=}} \frac{T}{T_I}$$

- Prema slikama 4.11 i 4.12 dobiju se karakteristični parametri PID regulatora:

$K_R = q_0 - q_2$ - koeficijent pojačanja,

$C_I = \left(q_0 + q_1 + q_2\right) / K_R$ - koeficijent integralnog djelovanja, (4-49)

$C_D = \dfrac{q_2}{K_R}$ - koeficijent derivacijskog djelovanja.

- Prema (4-48) ($q_0 > 0,\ q_1 < -q_0,\ -(q_0 + q_1) < q_2 < q_0$) slijede uvjeti:

$$C_D > 0, \qquad C_I > 0, \qquad C_I < C_D. \tag{4-50}$$

o Ako se izrazi dobiveni iz (4-49) ($K_R = q_0 - q_2,\ \ C_I = (q_0 + q_1 + q_2)/K_R\ \ C_D = \dfrac{q_2}{K_R}$):

$$q_2 = K_R C_D; \quad q_0 = K_R(1 + C_D); \quad q_1 = K_R(C_I - 2C_D - 1)$$

uvrste u (4-45) ($G_R(z) = \dfrac{U(z)}{E(z)} = \dfrac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}}$,) dobije se prijenosna funkcija koja odgovara PID regulatoru:

$$\boxed{G_R(z) = \frac{K_R\left[(1 + C_D) + (C_I - 2C_D - 1)z^{-1} + C_D z^{-2}\right]}{1 - z^{-1}}.} \tag{4-51}$$

- Algoritam upravljanja drugog reda sličan je kontinuiranom PID regulatoru samo ako su ispunjeni uvjeti (4-48), odnosno (4-50).

- Treba napomenuti da parametri regulatora dobiveni optimiranjem, ovisno o konkretnom procesu i odabiru kriterija optimiranja, ne moraju ispunjavati navedene uvjete, tj. regulator može poprimiti nekonvencionalni oblik.

Opći parametarski regulator prvog reda:

- Ako se u (4-45) uvrsti $q_2 = 0$ dobije se algoritam upravljanja prvoga reda:

$$\boxed{G_R(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1}}{1 - z^{-1}},} \tag{4-52}$$

odnosno, odgovarajuća jednadžba diferencija:

$$u(k) = u(k-1) + q_0 e(k) + q_1 e(k-1). \tag{4-53}$$

- Iz (4-53) slijede vrijednosti za prijelaznu funkciju:

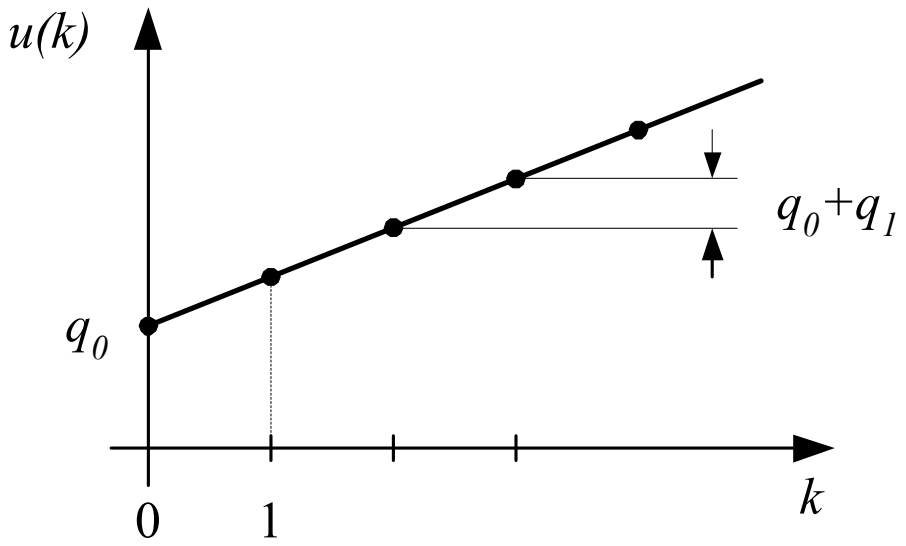
$$\begin{aligned}
&u(0) = q_0, \\
&u(1) = u(0) + q_0 + q_1 = 2q_0 + q_1, \\
&u(2) = u(1) + q_0 + q_1 = 3q_0 + 2q_1, \\
&\vdots \\
&u(k) = u(k-1) + q_0 + q_1 = (k+1)q_0 + kq_1.
\end{aligned} \tag{4-54}$$

© Ivan Petrović

- Za $u(1) > u(0)$ dobije se regulator prvog reda koji je usporediv s kontinuiranim PI regulatorom.
- Za $q_0 > 0$ slijedi uvjet za PI regulator:

$$2q_0 + q_1 > q_0 \;\rightarrow\; q_1 > -q_0. \tag{4-55}$$

Na slici 4.13 prikazana je odgovarajuća prijelazna funkcija PI regulatora.



Sl. 4.13. Algoritam upravljanja 1. reda kao PI regulator.

- Prema (4-49) (($K_R = q_0 - q_2$, $C_I = (q_0 + q_1 + q_2)/K_R$, $C_D = \frac{q_2}{K_R}$)) slijede izrazi za karakteristične parametre PI regulatora:

$K_R = q_0$ - koeficijent pojačanja,

$C_I = (q_0 + q_1)/K_R$ - koeficijent integralnog djelovanja. (4-56)

- Za $K_R > 0$ slijedi da je $C_I > 0$, odnosno:

$$\boxed{G_R(z) = \frac{K_R\left[1 + (C_I - 1)z^{-1}\right]}{1 - z^{-1}}.} \tag{4-57}$$

- Za $q_0 = 0$ iz (4-52) slijedi prijenosna funkcija regulatora s integralnim djelovanjem (*I* regulator):

$$\boxed{G_R(z) = \frac{q_1 z^{-1}}{1 - z^{-1}}.} \tag{4-58}$$

i odgovarajuća jednadžba diferencija:

$$u(k) = u(k-1) + q_1 e(k-1). \tag{4-59}$$

© Ivan Petrović

- Nadalje, specijalni slučajevi regulatora prema (4-45) su:
  - *proporcionalni (P) regulator*:

$$G_R(z) = q_0 \quad \rightarrow \quad u(k) = q_0 e(k). \tag{4-60}$$

i

  - *proporcionalno derivacijski (PD) regulator*, dobiven prema (4-51) ($G_R(z) = \dfrac{K_R\left[(1+C_D)+(C_I-2C_D-1)z^{-1}+C_D z^{-2}\right]}{1-z^{-1}}$.) uz $C_I = 0$ i uz (4-48) ($q_0 > 0,\ q_1 < -q_0,\ -(q_0+q_1) < q_2 < q_0$):

$$\boxed{G_R(z) = q_0 - q_1 z^{-1} \rightarrow u(k) = q_0 e(k) - q_1 e(k-1).} \tag{4-61}$$

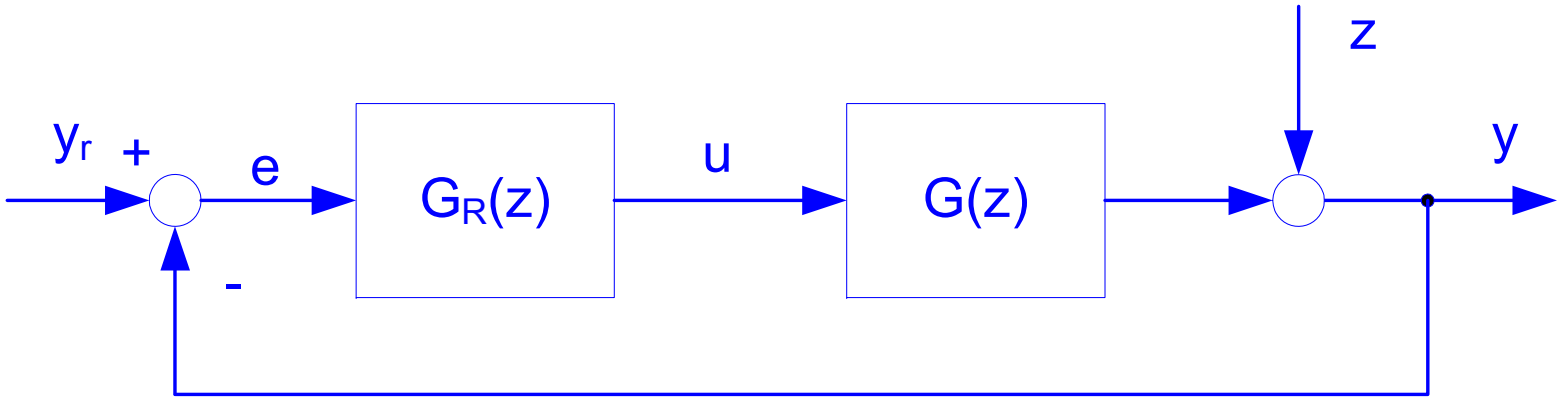
- Za PD regulatore trebaju biti ispunjeni uvjeti:

$$q_0 > 0,$$
$$q_0 < q_1. \tag{4-62}$$

© Ivan Petrović

Parametarski regulator s ograničenjem upravljačke veličine:

- Za zatvoreni regulacijski krug prijenosna funkcija s obzirom na referentnu veličinu glasi (Sl. 4.10.):



$$\frac{U(z)}{X_R(z)} = \frac{G_R(z)}{1 + G_R(z)G_s(z)}. \qquad (4\text{-}63)$$

- Uvrštenjem prijenosne funkcije za regulator drugog reda (4-45) i prijenosne funkcije procesa (4-35) u (4-63) dobije se:

© Ivan Petrović

$$\frac{U(z)}{Y_r(z)}=\frac{\dfrac{q_0+q_1z^{-1}+q_2z^{-2}}{1-z^{-1}}}{1+\dfrac{q_0+q_1z^{-1}+q_2z^{-2}}{1-z^{-1}}\cdot\dfrac{b_1z^{-1}+\cdots+b_mz^{-m}}{1+a_1z^{-1}+\cdots+a_mz^{-m}}\cdot z^{-d}},$$

odnosno

$$\frac{U(z)}{Y_r(z)}=\frac{\left(q_0+q_1z^{-1}+q_2z^{-2}\right)\left(1+a_1z^{-1}+\cdots+a_mz^{-m}\right)}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1+a_1z^{-1}+\cdots+a_mz^{-m}\right)+\left(q_0+q_1z^{-1}+q_2z^{-2}\right)\left(b_1z^{-1}+\cdots+b_mz^{-m}\right)z^{-d}},$$

iz čega slijedi:

$$\boxed{\begin{aligned}&\left[\left(1-z^{-1}\right)\left(1+a_1z^{-1}+\cdots+a_mz^{-m}\right)+\left(q_0+q_1z^{-1}+q_2z^{-2}\right)\left(b_1z^{-1}+\cdots+b_mz^{-m}\right)z^{-d}\right]U(z)=\\&\left[\left(q_0+q_1z^{-1}+q_2z^{-2}\right)\left(1+a_1z^{-1}+\cdots+a_mz^{-m}\right)\right]Y_r(z).\end{aligned}} \tag{4-64}$$

- Jednadžba diferencija prema (4-64) u konačnom obliku glasi:

$$
\begin{aligned}
u(k) = {} & (1-a_1)u(k-1) + (a_1 - a_2)u(k-2) + \cdots \\
& - q_0 b_1 u(k-d-1) - (q_0 b_2 + q_1 b_1)u(k-d-2) - \cdots \\
& + q_0 y_r(k) + (q_0 a_1 + q_1) y_r(k-1) + (q_0 a_2 + q_1 a_1 + q_2) y_r(k-2) + \cdots .
\end{aligned}
\tag{4-65}
$$

- Vrijednost upravljačke veličine na odziv $y_r(k) = S(k)$ za prva dva koraka je:

1. slučaj: $d = 0$

$$
\begin{aligned}
& u(0) = q_0, \\
& u(1) = (1-a_1)u(0) - q_0 b_1 u(0) + q_0 + (q_0 a_1 + q_1) = q_0(2 - q_0 b_1) + q_1 .
\end{aligned}
\tag{4-66}
$$

2. slučaj: $d \geq 1$

$$
\begin{aligned}
& u(0) = q_0, \\
& u(1) = 2q_0 + q_1 .
\end{aligned}
\tag{4-67}
$$

- **U 2. slučaju je upravljačka veličina barem u prva dva koraka ovisna samo o parametrima regulatora.**
- Stoga je praktično ograničiti upravljačku veličinu na iznos određen fizikalnim ograničenjima izvršnog elementa:

© Ivan Petrović

$$\boxed{U_{\max} = u(0) = q_0}. \tag{4-68}$$

- Osim toga, treba osigurati:

$$\boxed{u(1) \le u(0)}. \tag{4-69}$$

- Za slučaj $d = 0$ iz (4-69), prema (4-66) slijedi:

$$\boxed{q_0(2 - q_0 b_1) + q_1 \le q_0 \quad \rightarrow \quad q_1 \le -q_1(1 - q_0 b_1)}. \tag{4-70}$$

- Za slučaj $d \ge 1$, na isti način slijedi:

$$\boxed{2q_0 + q_1 \le q_0 \quad \rightarrow \quad q_1 \le -q_0}. \tag{4-71}$$

- Nejednadžbe (4-70) i (4-71) vrijede i za regulatore prvog reda.
- Na ovaj je način zadan jedan parametar regulatora, q_0, prema (4-68), pa za regulatore drugog reda ostaje optimirati preostala dva parametra, q_1 i q_2.
- Za regulatore prvog reda ostaje optimirati samo jedan parametar, q_1. Ovo ima za posljedicu skraćenje izračunavanja.
- Iz prethodnog razmatranja valja izvući naputak da pri projektiranju regulatora na prikazani način u konkretnim slučajevima treba uvažavati konkretne specifičnosti procesa (radni režimi, djelovanja raznih smetnji…).

© Ivan Petrović

Sinteza linearnih parametarskih regulatora optimiranjem:

- Parametre $q_0, q_1 \ldots q_\nu$ u (4-38) $(u(k) = u(k-1) + q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + \cdots + q_\nu e(k-\nu))$ treba odabirati tako da se postigne najbolje moguće vladanje sustava upravljanja.

- **Pri tome se koriste sljedeći postupci:**

  a) Minimizacija kriterija kakvoće tj. optimiranje parametara (općenito se koristi numeričko optimiranje). ***Pretpostavlja se da su parametri i struktura procesa poznati (iz identifikacije procesa i/ili iz dinamičke analize procesa).***

  b) Definiranje položaja polova zatvorenog sustava uz poznatu strukturu i parametre procesa.

  c) **Metoda "pokušaja" (*engl.* trial-and-error method; njem. Probierverfahren) kada parametri procesa nisu poznati.** ***U ovom se slučaju parametri regulatora postupno mijenjaju sve dok se dobije zadovoljavajuće vladanje sustava upravljanja.***

- Za određivanje i podešavanje parametara regulatora prema prethodnim postupcima od velike pomoći mogu biti spoznaje o tehnološkom procesu, tj. tokovi tvari i energije u procesu.

© Ivan Petrović

- Postupak za određivanje parametara prema c) u pravilu zadovoljava samo u onim slučajevima u kojima se ne postavljaju strogi zahtjevi na vladanje sustava upravljanja.
- Ako su ti zahtjevi strogi, primjenjuju se postupci prema a) i b), tj. numerički postupci za projektiranje regulatora (*engl.* computer-aided design).
- Primjerice, razmotrimo postupak numeričkog optimiranja parametara uz primjenu kvadratičnog kriterija kakvoće (koji se koristi i za druge metode projektiranja regulatora):

$$S_{eu}^2 = \sum_{k=0}^{M} \left[e^2(k) + r\Delta u^2(k) \right], \tag{4-72}$$

gdje je: $\Delta u(k) = u(k) - \bar{u}$ -odstupanje upravljačke (izvršne) veličine.

- Ako se radi o sustavima s determiniranim poremećajima, onda je $\bar{u} = u(\infty)$ (pretpostavlja se skokoviti poremećaj).
- Ako se radi o sustavu sa stohastičkim poremećajima, onda je $\bar{u} = E\{u(k)\}$.

© Ivan Petrović

- U izrazu (4-72) praktično je težinski koeficijent r prikazati kao umnožak $r = r_p K_p$, gdje je $K_p = \dfrac{y(\infty)}{u(\infty)}$ za statičke procese, a $K_p = \dfrac{1}{T_i}$ za astatičke procese (T_i je integralna vremenska konstanta procesa). Dakle slobodno se podešava koeficijent r_p.
- Na temelju izraza (4-72) ($S_{eu}^2 = \sum_{k=0}^{M}\left[e^2(k) + r\Delta u^2(k)\right]$)može se definirati srednje kvadratično regulacijsko odstupanje:

$$S_e^{\,2} = \overline{e}^2(k) = \frac{1}{M+1}\sum_{k=0}^{M} e^2(k) \tag{4-73}$$

i srednje kvadratično upravljačko (izvršno) odstupanje (*engl.* averaged input power):

$$S_u^{\,2} = \Delta\overline{u}^2(k) = \frac{1}{M+1}\sum_{k=0}^{M} \Delta u^2(k). \tag{4-74}$$

- Izborom težinskog koeficijenta r, odnosno $r_p K_p$, mogu se S_e^2 i S_u^2 staviti u odgovarajući međusobni odnos.
- Ako se odabere r malog iznosa, tada se dobije mali S_e^2 uz veliki "izvršni rad" S_u^2 i oscilatornije vladanje sustava.

© Ivan Petrović

- Za r većeg iznosa dobije se manji S_u^2 i veći S_e^2, odnosno prigušenije vladanje sustava.

- Pri optimiranju parametara regulatora (4-37) potrebno je odrediti vektor parametara:

$$\underline{q}^T = \left[q_0 \; q_1 \cdots q_\nu \right] \tag{4-75}$$

tako da se dobije minimum S_{eu}^2, tj. da se ispuni uvjet:

$$\frac{dS_{eu}{}^2}{d\underline{q}} = \underline{0}. \tag{4-76}$$

- U svrhu određivanja optimalnih parametara regulatora uobičajeno se koriste sljedeći numerički postupci optimiranja:

  - ♦ postupci traženja (Hooke-Jeevesova metoda, Nelder-Mead metoda);
  - ♦ gradijentni postupci prvog i drugog reda (Newton-Raphsonova metoda);
  - ♦ kombinacija više postupaka (Fletcher-Powellova metoda).

© Ivan Petrović

Neki naputci za optimiranje parametara regulatora simulacijom na računalu i primjeri za simulaciju:

- Pri projektiranju sustava upravljanja treba odrediti slobodne parametre regulatora (**npr. vrijeme uzorkovanja *T*, parametar *r*, u(0)**).
- Izbor slobodnih parametara regulatora mora se obavljati uzimajući u obzir zakonitosti tehničkog procesa.

Primjer 1:

- Za proces opisan prijenosnom funkcijom:

$$G_{S1}(s) = \frac{K_S(1 - T_1 s)}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)},$$

$$K_s = 1; \quad T_1 = 4s; \quad T_2 = 10s.$$

$$G_{s1}(z) = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \tag{4-77}$$

© Ivan Petrović

potrebno je optimirati parametre regulatora:

$$G_R(z) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}} \tag{4-78}$$

prema kriteriju kakvoće:

$$S_{eu}{}^2 = \sum_{k=0}^{M} \left[e^2(k) + r\Delta u^2(k) \right], \text{ za } M = 128. \tag{4-79}$$

Prikazati ovisnosti

$$S_e = \sqrt{\overline{e}^2(k)} = \sqrt{\frac{1}{M+1} \sum_{k=0}^{M} e^2(k)} \tag{4-80}$$

i

$$S_u = \sqrt{\Delta\overline{u}^2(k)} = \sqrt{\frac{1}{M+1} \sum_{k=0}^{M} \Delta u^2(k)} \tag{4-81}$$

o vremenu uzorkovanja $T = 0,2;\ 0,5;\ 1;\ 2\text{s}$ i o $r = 0;\ 0,1;\ 0,25;\ 0,5$ za slučaj s ograničenjem i bez ograničenja upravljačke veličine.

© Ivan Petrović

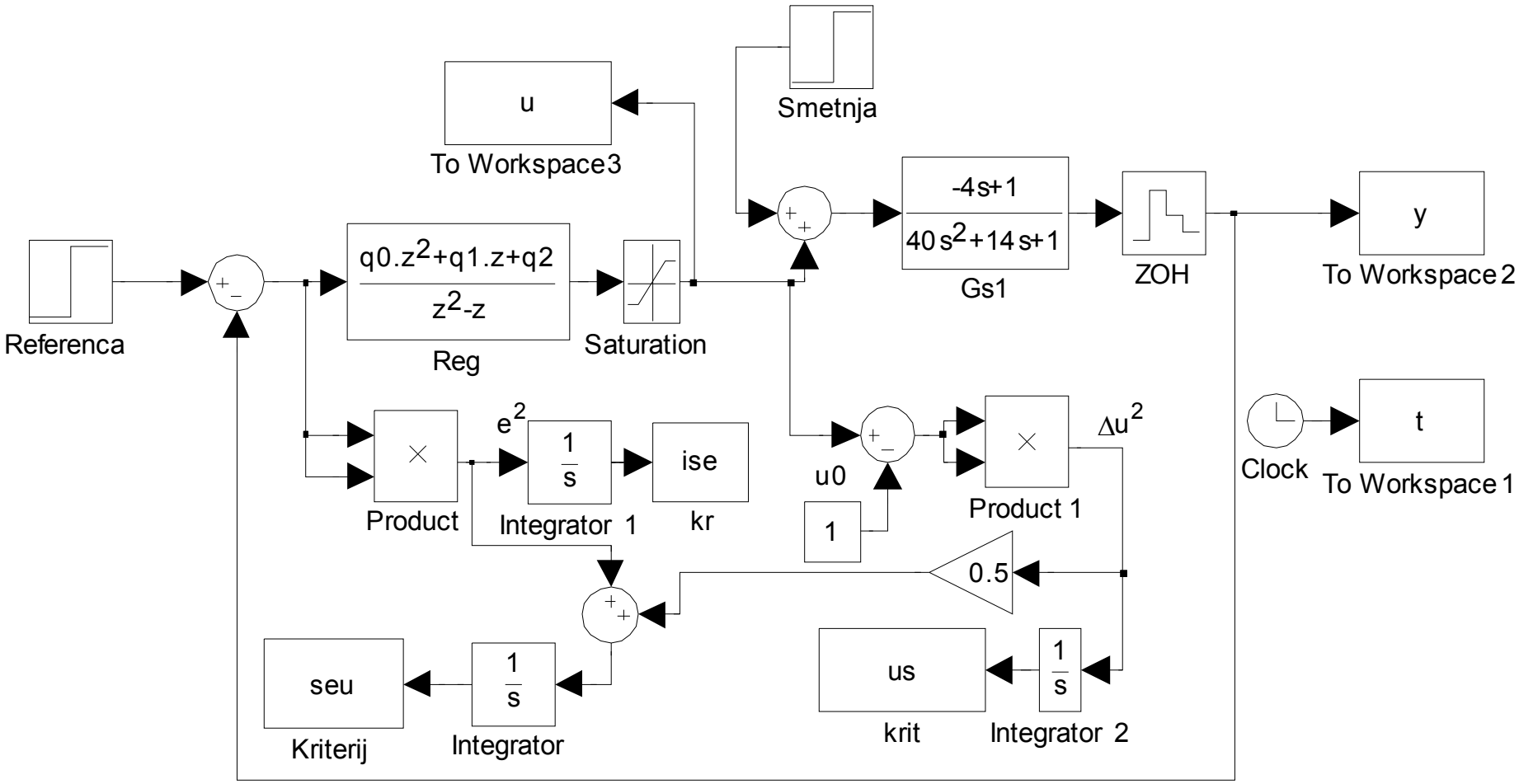
Rješenje:

- Za određivanje optimalnih parametara regulatora treba koristiti numeričke metode optimizacije.

- U programskom paketu MATLAB postoji skup funkcija (*Optimization toolbox*) za određivanje optimalnih vrijednosti neke kriterijske funkcije.

- Potrebno je definirati kriterijsku funkciju kojoj se traži minimum.

- Na slici 4.14 prikazana je simulacijska shema za određivanje zadane kriterijske funkcije.



Sl. 4.14. Simulacijska shema za Primjer 1. (model.mdl)

- U shemi je kriterij prikazan pomoću integratora, iako je zadani kriterij u obliku zbroja.

- SIMULINK omogućuje jednostavno nalaženje vrijednosti integrala tj. iznosa površine ispod krivulje $f(t) = e^2(t) + r\Delta u^2(t)$:

izlaz iz integratora je funkcija $\int_0^t (e^2(\tau) + r\Delta u^2(\tau))d\tau$.

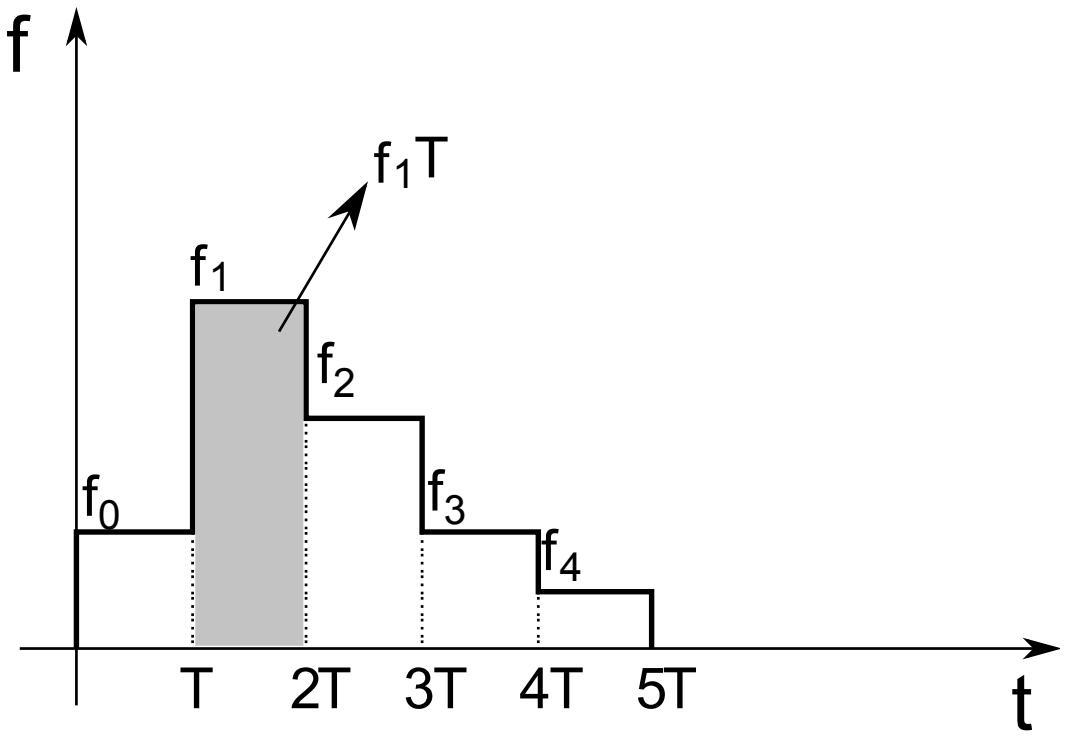
- Uvrštavanjem $t=t_{max}$ (vrijeme trajanja simulacije) dobije se određeni integral, odnosno površina ispod krivulje:

$$\boxed{\int_0^{t\max} (e^2(\tau) + r\Delta u^2(\tau))d\tau}.$$

- Budući da se radi o diskretnom sustavu, računa se površina ispod stepeničaste krivulje, traženi kriterij S_{eu}^2 dobije se tako što se dobivena površina podijeli s T (slika 4.15):

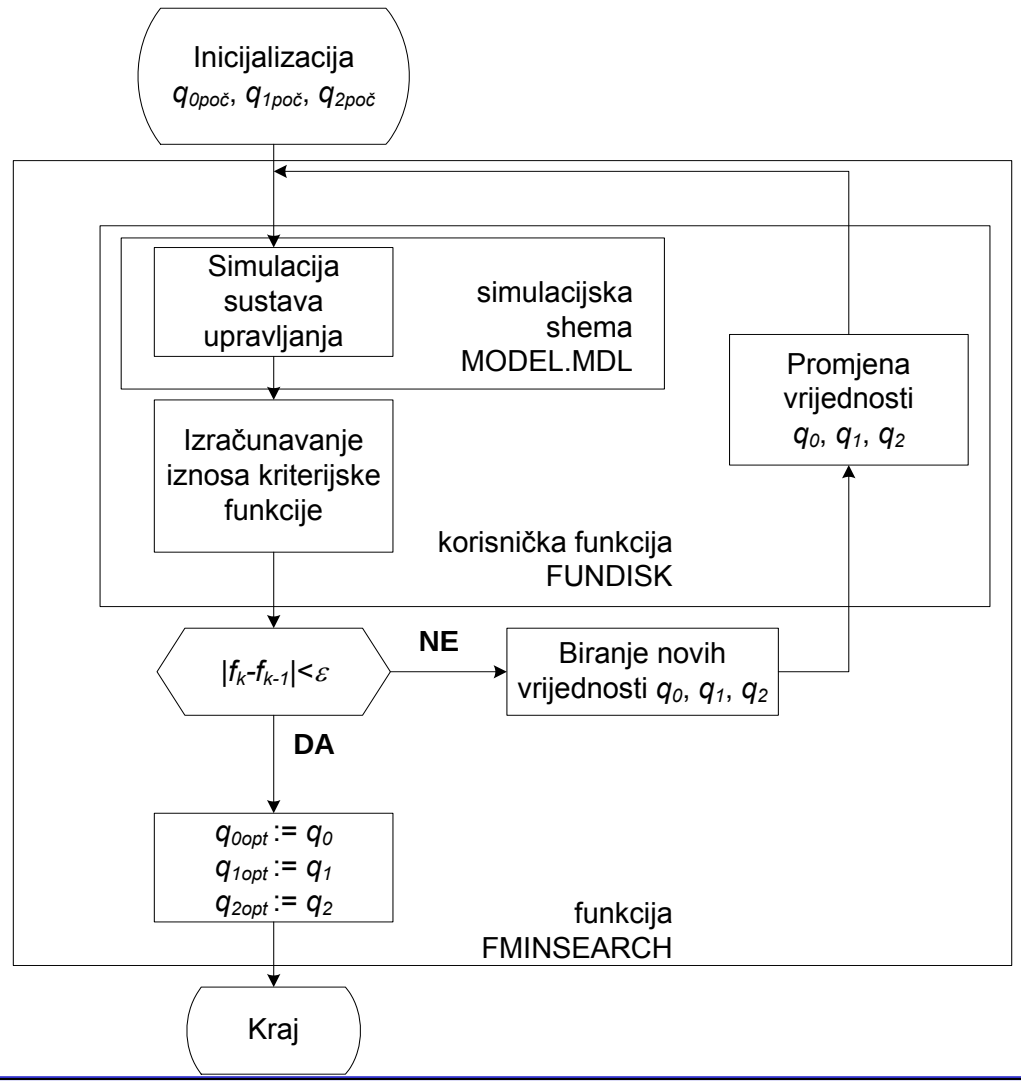
$$S_{eu}{}^2 = \sum_{k=0}^{M}\left[e^2(k) + r\Delta u^2(k)\right] = \frac{1}{T}\int_0^{t_{\max}} (e^2(\tau) + r\Delta u^2(\tau))d\tau, t_{\max} = M \cdot T.$$

© Ivan Petrović



Sl. 4.15. Ilustracija izračunavanja kriterija S_{eu}^2

- **Dijagram toka optimizacije parametara regulatora** (Sl. 4.16.)**:**



- Optimiranje se pokreće pozivanjem funkcije fminsearch, kojoj se kao argumenti zadaju početne vrijednosti parametara, kriterijska funkcija S^2_{eu} i dodatni parametri.
- Funkcija fminsearch računa kriterijsku funkciju i obavlja traženje optimalnih parametara kroz niz iteracija prema Nelder-Mead postupku (1965.)
- U svakoj iteraciji optimiranja korisnička funkcija fundisk.m mijenja parametre regulatora simulacijske sheme pomoću funkcije set_param.
- Nakon toga se sustav upravljanja simulira i proračunava se kriterijska funkcija.
- Postupak se prekida kada je postignuta tražena točnost proračunatih parametara.
- Napomena: Bitno je da je vrijeme izvođenja simulacije dulje od vremena potrebnog da se traženi integral dovoljno približi krajnjoj vrijednosti.

© Ivan Petrović

- Primjer poziva naredbe za optimiranje je:

```
d=fminsearch('fundisk',[1 1 1],options),
```

gdje je `fundisk` naziv funkcije kojoj se traži minimum, drugi argument su početni parametri regulatora, a treći argument funkcije su dodatne opcije koje se mogu postaviti funkcijom `optimset` (broj iteracija, prikaz iteracija, (pogledati help MATLAB-a)).

- Vrijeme simuliranja t_{max} određuje se prema vremenu diskretizacije i maksimalnom broju koraka M.

- Kriterijska m-funkcija `fundisk.m` postavlja parametre regulatora i simulira sustav upravljanja (naredba `sim`):

```
function [f]=fundisk(d)
global tmax
q0=d(1);
q1=d(2);
q2=d(3);
set_param('model/Reg','Numerator',mat2str([q0 q1 q2]));
sim('model',tmax);
f=abs(seu(end);
```


© Ivan Petrović

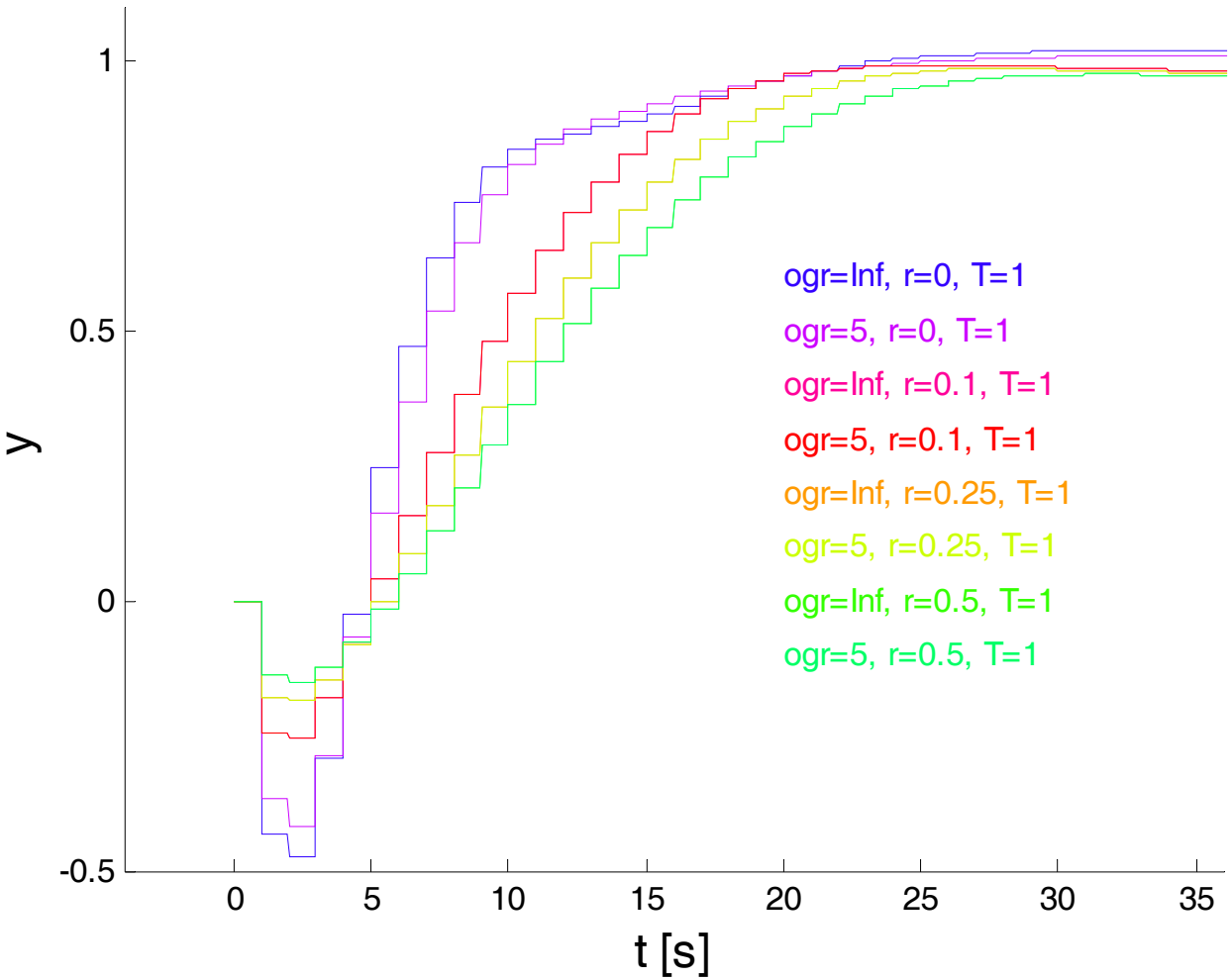
- Izlazni parametar `f` funkcije `fundisk` odgovara vrijednosti kriterijske funkcije za odabrane parametre regulatora u ulaznom vektoru `d`.

- Optimiranje je provedeno za skokovitu pobudu referente veličine uz:

```
T=[0.2 0.5 1 2];
r=[0 0.1 0.25 0.5];
umax=[inf 5];
```

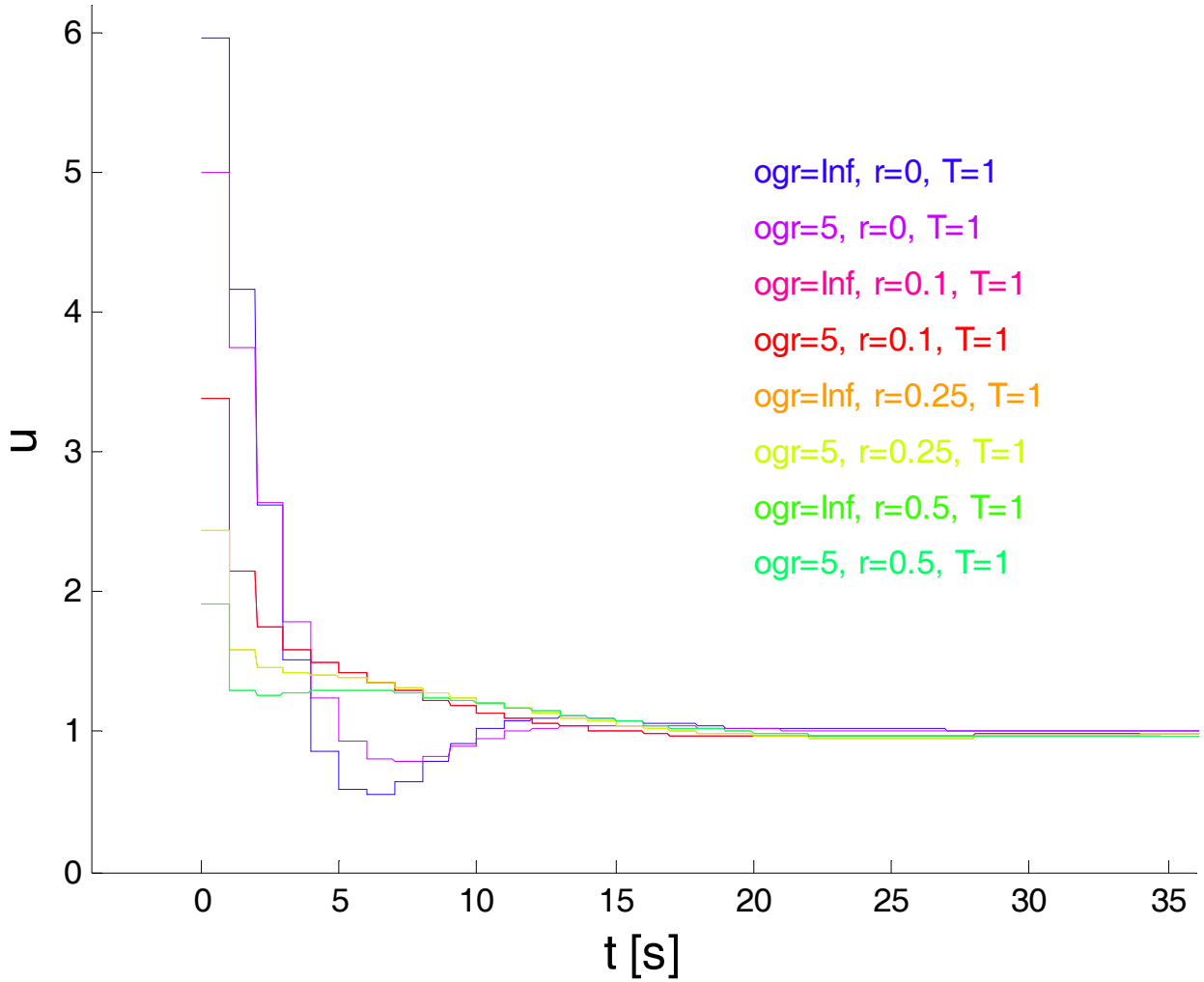
- Dani su odzivi sa zadanim vremenom uzorkovanja T=1s uz mijenjanje parametra r (Sl. 4.17. i Sl. 4.18) i sa zadanim pojačanjem r=0.1 uz mijenjanje vremena uzorkovanja T (Sl. 4.19. i Sl. 4.20):
  - Utjecaj ograničenja izlaza regulatora uočljiv je za male vrijednosti r.
  - Veće vrijednosti r smanjuju upravljačku veličinu pa je ona već u prvom koraku ispod granice u_{max}.
  - Smanjivanje upravljačke veličine bilo ograničavanjem izlaza regulatora ili većim iznosom parametra r rezultira sporijim odzivom izlazne veličine.
  - U slučaju velikog vremena uzorkovanja i ograničenja izlaza regulatora proračunani parametri daju oscilatorne odzive za male vrijednosti pojačanja r. (Zašto?)

© Ivan Petrović

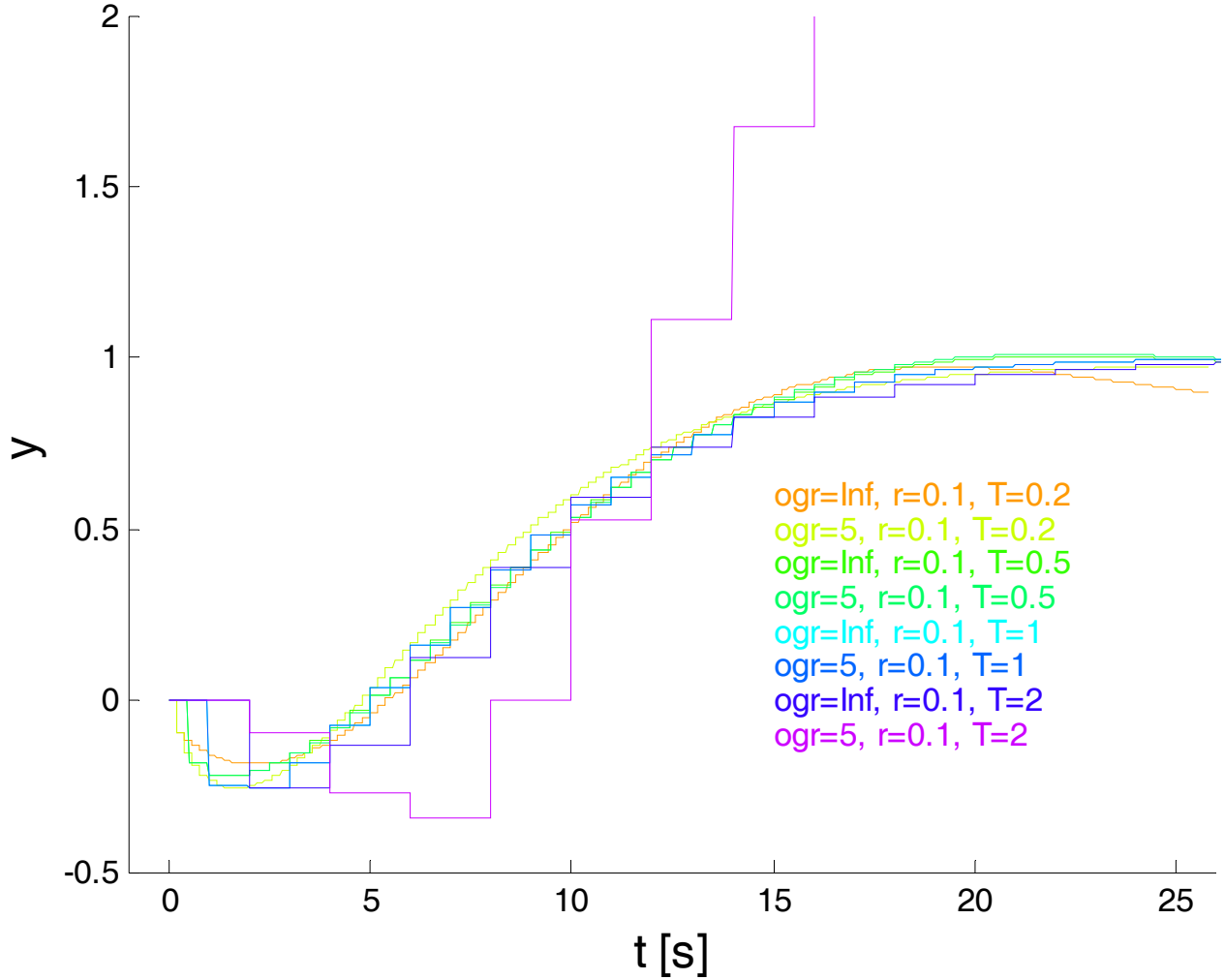


Sl. 4.17.

© Ivan Petrović

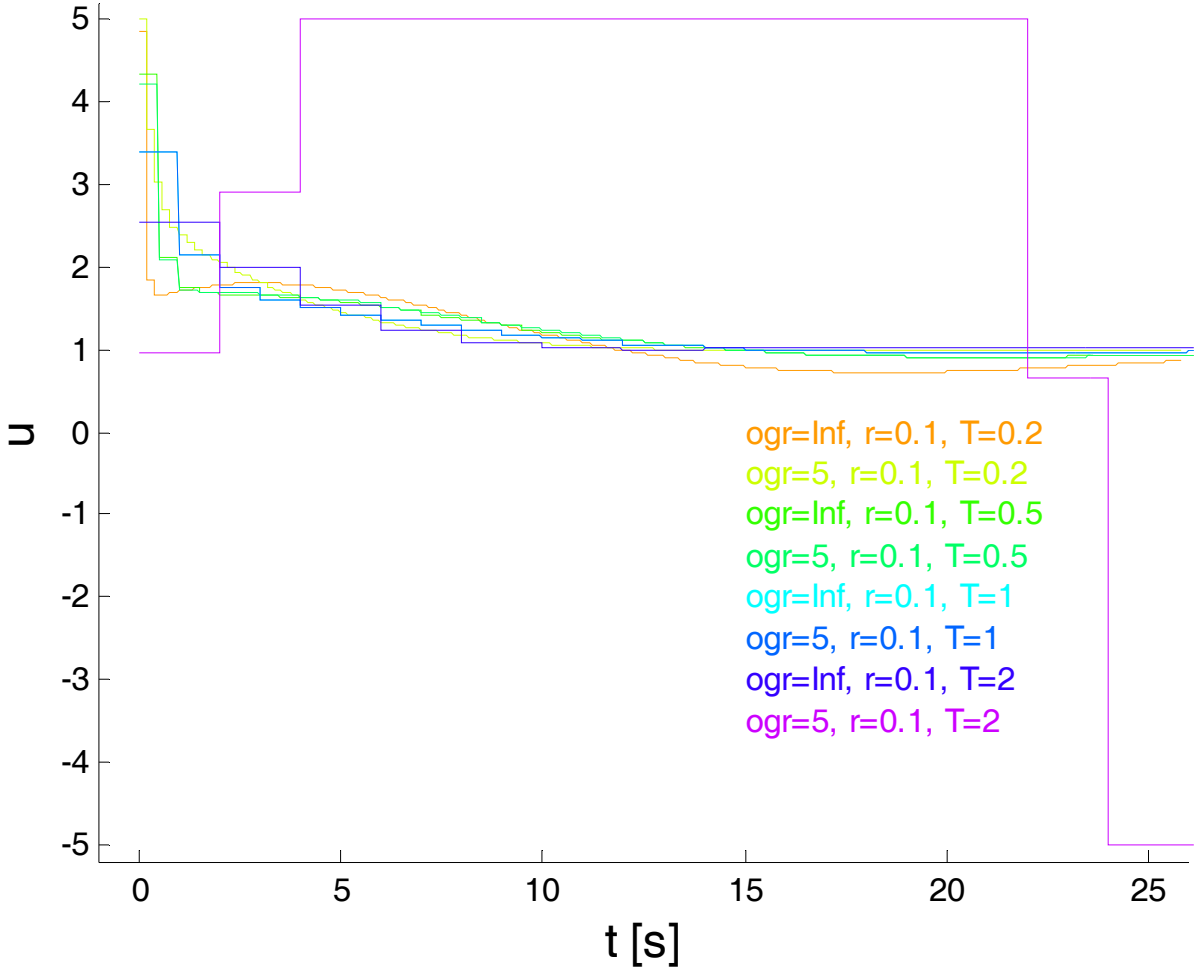

ogr=Inf, r=0, T=1
ogr=5, r=0, T=1
ogr=Inf, r=0.1, T=1
ogr=5, r=0.1, T=1
ogr=Inf, r=0.25, T=1
ogr=5, r=0.25, T=1
ogr=Inf, r=0.5, T=1
ogr=5, r=0.5, T=1
u
t [s]
0
1
2
3
4
5
6
0
5
10
15
20
25
30
35

Sl. 4.18.



Sl. 4.19.

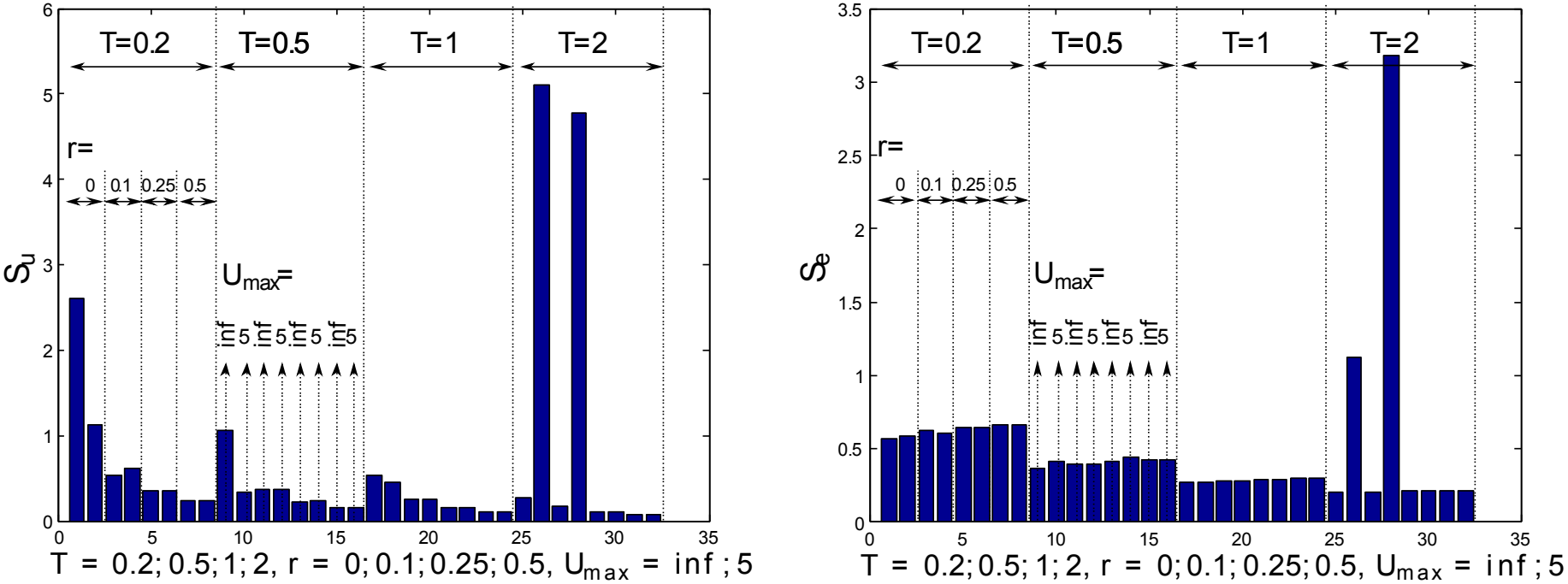
© Ivan Petrović



Sl. 4.20.

© Ivan Petrović

- Ovisnost kriterija S_u i S_e o T i r:



Sl. 4.21.

Optimiranje s obzirom na referentnu veličinu i na poremećaj:

- Parametri regulatora koji se dobiju optimiranjem osiguravaju optimalno vladanje sustava samo s obzirom na veličinu za koju su optimirani.
- Provedeno optimiranje u *Primjeru 1* osigurava optimalno ponašanje s obzirom na referentnu veličinu, jer je optimiranje parametara regulatora provedeno uz pobudu regulacijskog kruga referentnim signalom tipa odskočne funkcije.
- Ponovit ćemo postupak optimiranja za proces iz *Primjera 1*, ali uz pobudu regulacijskog kruga signalom smetnje na ulazu u proces tipa odskočne funkcije.
- Za oba se slučaja koristi ista simulacijska shema uz T=1s , a pobudna se funkcija bira postavljanjem parametara blokova „Referenca“ (1. slučaj) i „Smetnja“ (2. slučaj).
- Za oba slučaja treba postaviti odgovarjuću stacionarnu vrijednost upravljačkog signala, (1. slučaj: u bloku „u0“ konstanta „1“ , 2. slučaj: u bloku „u0“ konstanta „-1“).

© Ivan Petrović

1. slučaj

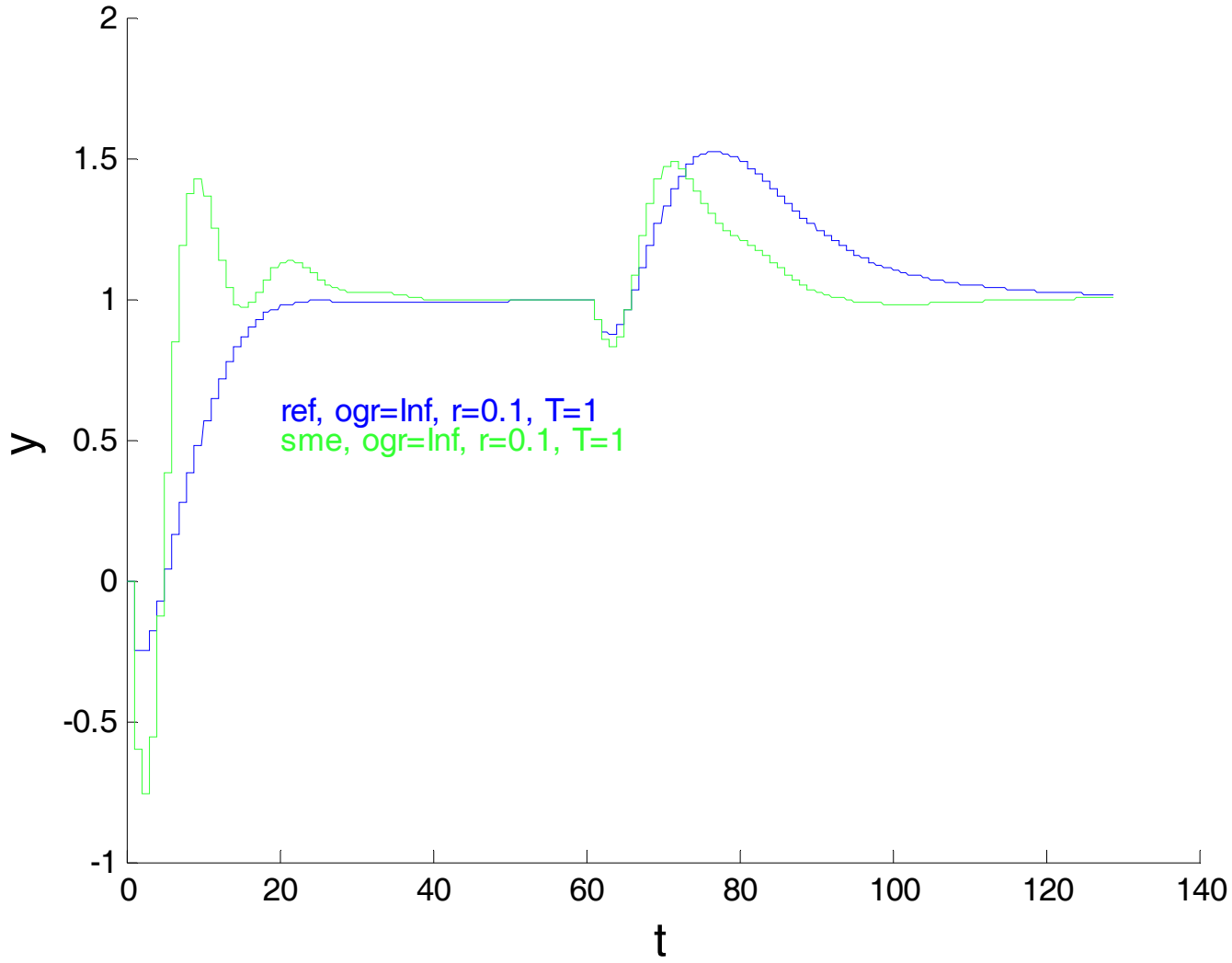
- Optimalni parametri regulatora: $d=[q_0 \;\; q_1 \;\; q_2]=[\,3.3805 \quad -5.4451 \quad 2.1494]$
- Vrijednosti kriterija: $S_e = 0.2783$, $S_u = 0.2591$, $S_{eu}{}^2 = 10.8603$

2. slučaj

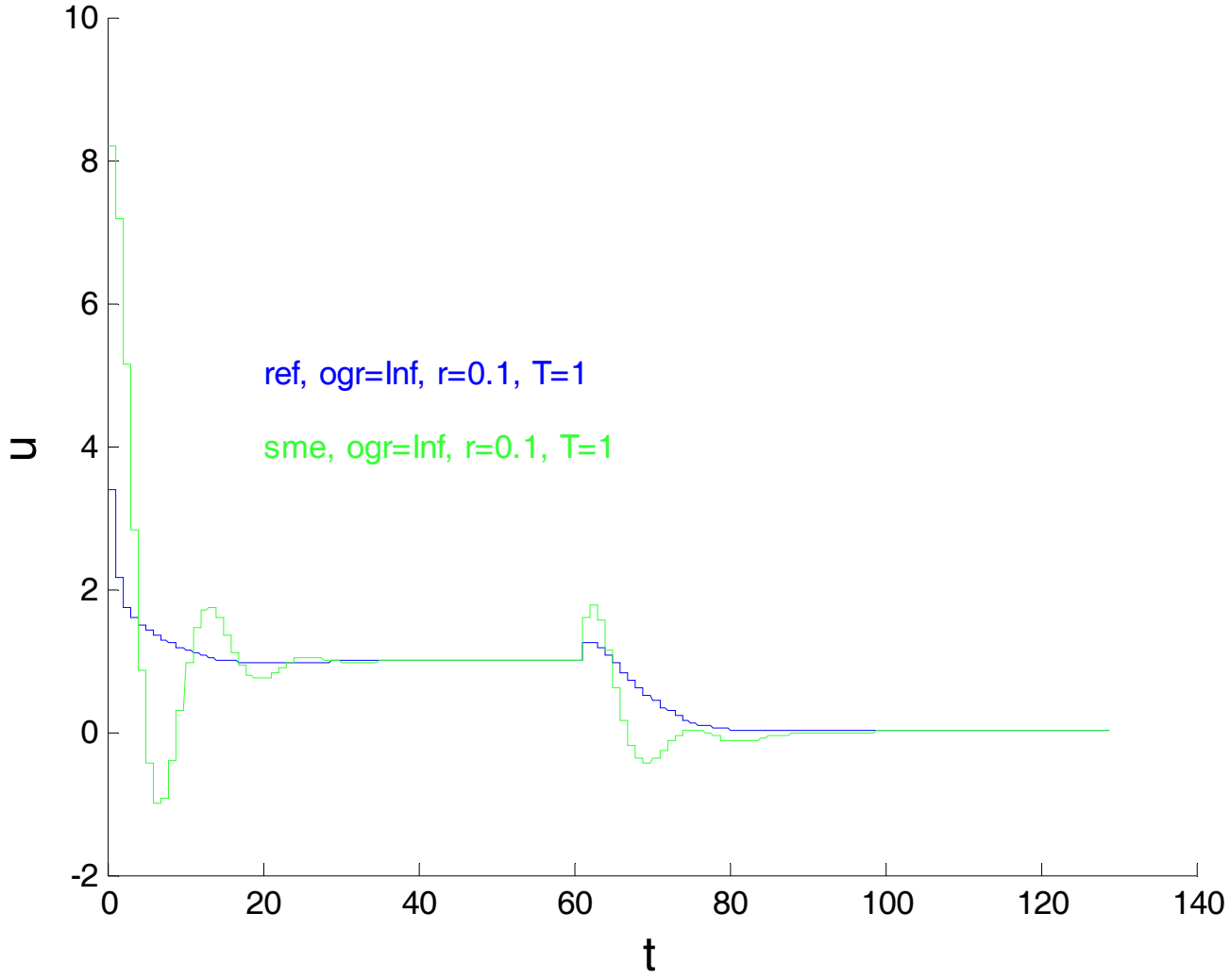
- Optimalni parametri regulatora: $d=[q_0 \;\; q_1 \;\; q_2]=[\,8.2033 \quad -14.1436 \quad 6.1392]$
- Vrijednosti kriterija: $S_e = 0.1240$, $S_u = 0.2976$, $S_{eu}{}^2 = 3.12585$

- Na slikama 4.22 i 4.23 prikazani su usporedno odzivi sustava na skokovitu promjenu referentne veličine i poremećaja na ulazu u proces uz vrijednosti parametara dobivene optimiranjem za oba slučaja.

© Ivan Petrović


2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
y
0
20
40
60
80
100
120
140
t
ref, ogr=Inf, r=0.1, T=1
sme, ogr=Inf, r=0.1, T=1

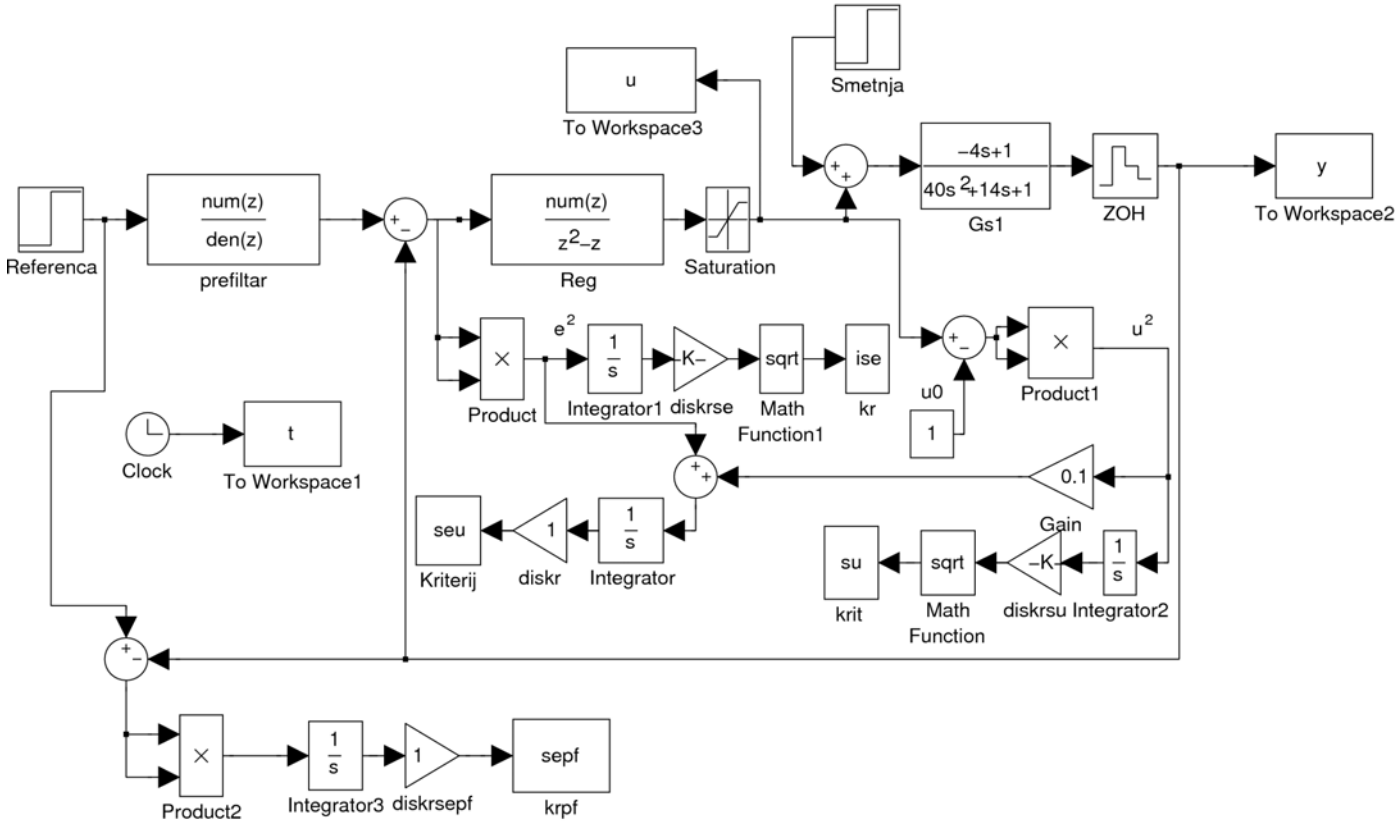
Sl. 4.22.


10
8
6
4
2
0
-2
u
ref, ogr=Inf, r=0.1, T=1
sme, ogr=Inf, r=0.1, T=1
0
20
40
60
80
100
120
140
t

Sl. 4.23.

Dvostupanjska sinteza optimiranjem:

- Prvo se optimira zatvoreni regulacijski krug po poremećaju (**2. slučaj**) i odrede se optimalne vrijednosti parametara regulatora, a zatim se u referentnu granu ugradi prefiltar i odrede se njegovi parametri optimiranjem po referentnoj veličini, kako je ilustrirano na slici 4.24.



Sl. 4.24

- Primjerice, u razmatranome su primjeru parametri regulatora prvo dobiveni optimiranjem po poremećaju (**2. slučaj**), tj. d=[8.2033 -14.1437 6.1392], a zatim je u referentnu granu ugrađen prefiltar oblika

$$G_{prefiltar} = \frac{b_f}{1 + a_f z^{-1}}$$

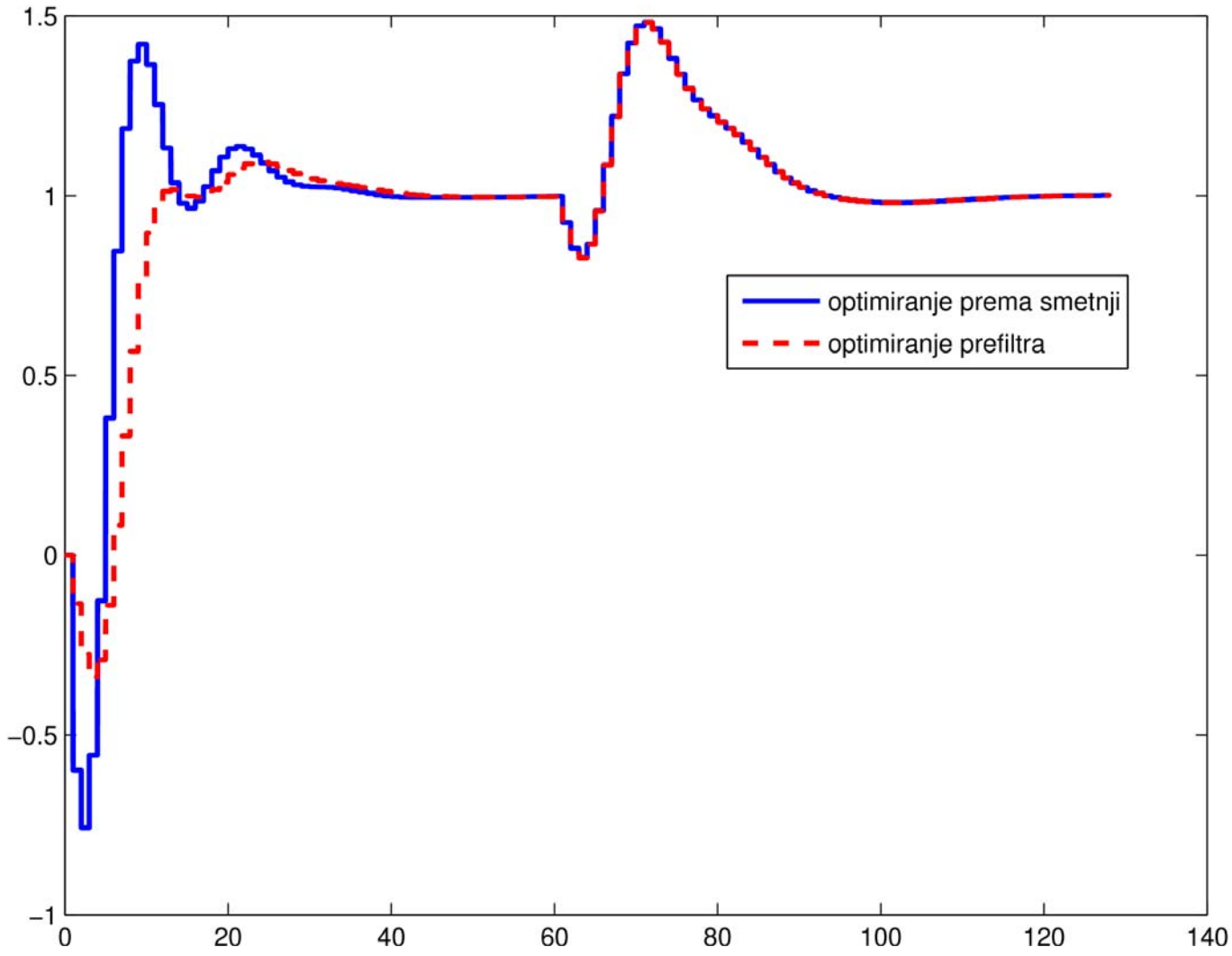
- Iz uvjeta jediničnog pojačanja prefiltra u stacionarnom stanju proizlazi da mora biti:

$$b_f = 1 + a_f,$$

pa se optimiranje provodi samo po jednom parametru:

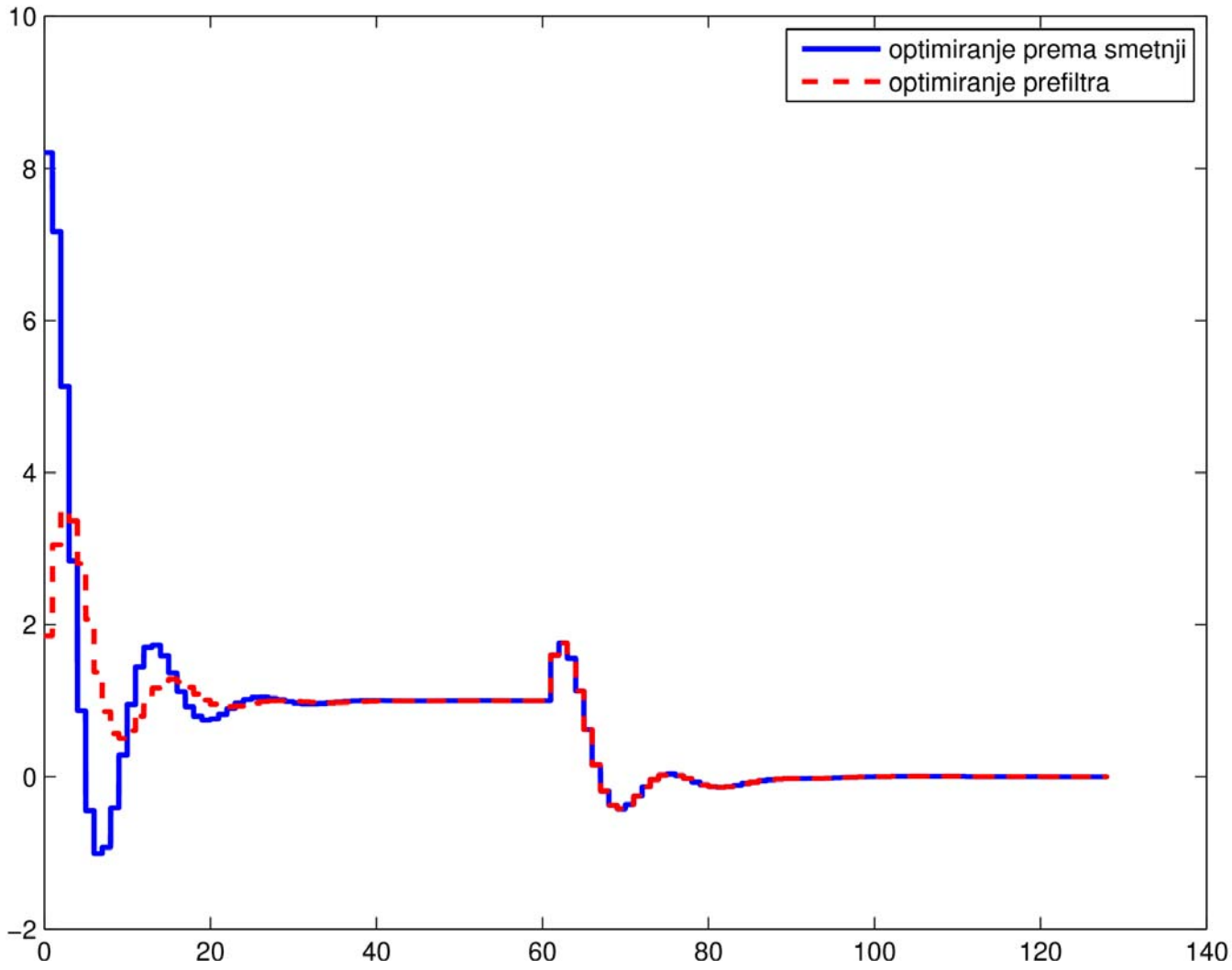
$$d = a_f = -0.7744,\ b_f = b_f = 1 + a_f = 0.2256$$

- Na slikama 4.25 i 4.26 prikazani su usporedno odzivi sustava na skokovitu promjenu referentne veličine i poremećaja na ulazu u proces uz korištenje prefiltra i bez korištenja prefiltra.



Sl. 4.25

© Ivan Petrović


optimiranje prema smetnji
optimiranje prefiltra
10
8
6
4
2
0
−2
0
20
40
60
80
100
120
140

Sl. 4.26

Primjer 2:

- Za proces opisan prijenosnom funkcijom:

$$G_{s2}(s) = \frac{K_S(1+T_4 s)}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)(1+T_3 s)} e^{-T_t s}$$

$$K_s = 1; T_1 = 10s; T_2 = 7s; T_3 = 3s; T_4 = 2s; T_t = 4s.$$

$$G_{s2}(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3}} \cdot z^{-d} \qquad (4\text{-}82)$$

potrebno je optimirati parametre regulatora:

$$G_R(z) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}} \qquad (4\text{-}83)$$

prema kriteriju kakvoće:

$$S_{eu}{}^2 = \sum_{k=0}^{M} \left[e^2(k) + r\Delta u^2(k) \right], \text{ za } M = 128. \qquad (4\text{-}84)$$

- Prikazati ovisnosti

© Ivan Petrović

$$S_e = \sqrt{\overline{e}^2(k)} = \sqrt{\frac{1}{M+1}\sum_{k=0}^{M} e^2(k)} \tag{4-85}$$

i

$$S_u = \sqrt{\Delta\overline{u}^2(k)} = \sqrt{\frac{1}{M+1}\sum_{k=0}^{M} \Delta u^2(k)} \tag{4-86}$$

o vremenu uzorkovanja $T = 0,5;\ 1;\ 2;\ 4s$ i o $r = 0;\ 0,1;\ 0,25;\ 0,5$ za slučaj s ograničenjem i bez ograničenja upravljačke veličine.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
Fakultet elektrotehnike i računarstva
Zavod za automatiku i računalno inženjerstvo
Unska 3, Zagreb, HRVATSKA

Računalno upravljanje sustavima

Poglavlje 5:
Sinteza sustava upravljanja u frekvencijskom području

© Ivan Petrović

Sadržaj poglavlja:

5.1. Uvod u sintezu regulatora u frekvencijskom području

5.2. Sinteza regulatora pomoću frekvencijskih karakteristika (Bodeovih dijagrama)

5.2.1. Korekcijski član s faznim prethođenjem (FP)

5.2.2. Korekcijski član s faznim kašnjenjem (FK)

5.2.3. Kombinacija obaju korekcijskih članova (FP+FK)

© Ivan Petrović

5.1. Uvod u sintezu u frekvencijskom području

Karakteristične veličine zatvorenog regulacijskog kruga u frekvencijskom području:

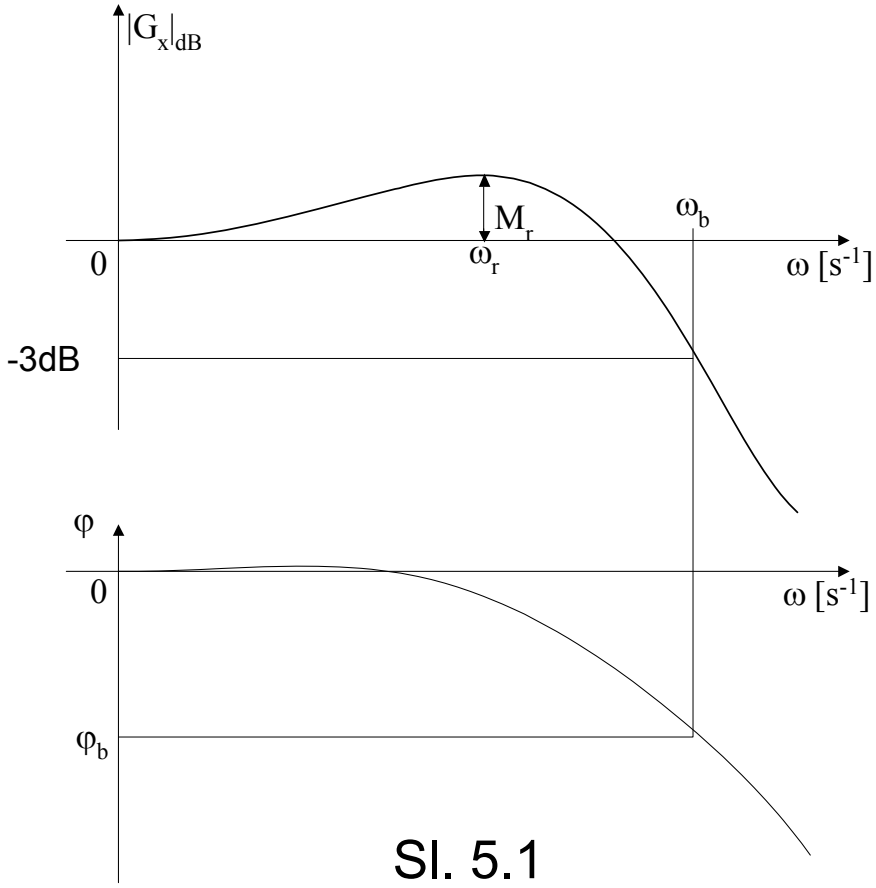
- Za opis vladanja sustava u frekvencijskom području koriste se sljedeće karakteristične veličine prikazane na slici 5.1 (posredni pokazatelji kakvoće):

ω_r - **rezonantna frekvencija** (*engl.* resonant frequency, *njem.* Rezonantfrequenz)

M_r - **rezonatno izdizanje (amplitudno nadvišenje)**; $M_r \hat{=} A(\omega_r)$, (*engl.* resonant peak magnitude, *njem.* Amplitudenüberhöhung)

ω_b - **širina pojasa**; $\omega_b \hat{=} \omega_{BW}$; (*engl.* Bandwidth, *njem.* Bandbreite)

$\varphi_b = \varphi(\omega_b)$ - **fazni kut**



Sl. 5.1

© Ivan Petrović

- **<u>Pretpostavka:</u>** zatvoreni regulacijski krug može se približno opisati PT_2S - članom:

$$\boxed{G_x(s) = \frac{\omega_n^{\ 2}}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^{\ 2}}}, \qquad (5\text{-}1)$$

gdje

ω_n - prirodna frekvencija neprigušenih oscilacija i

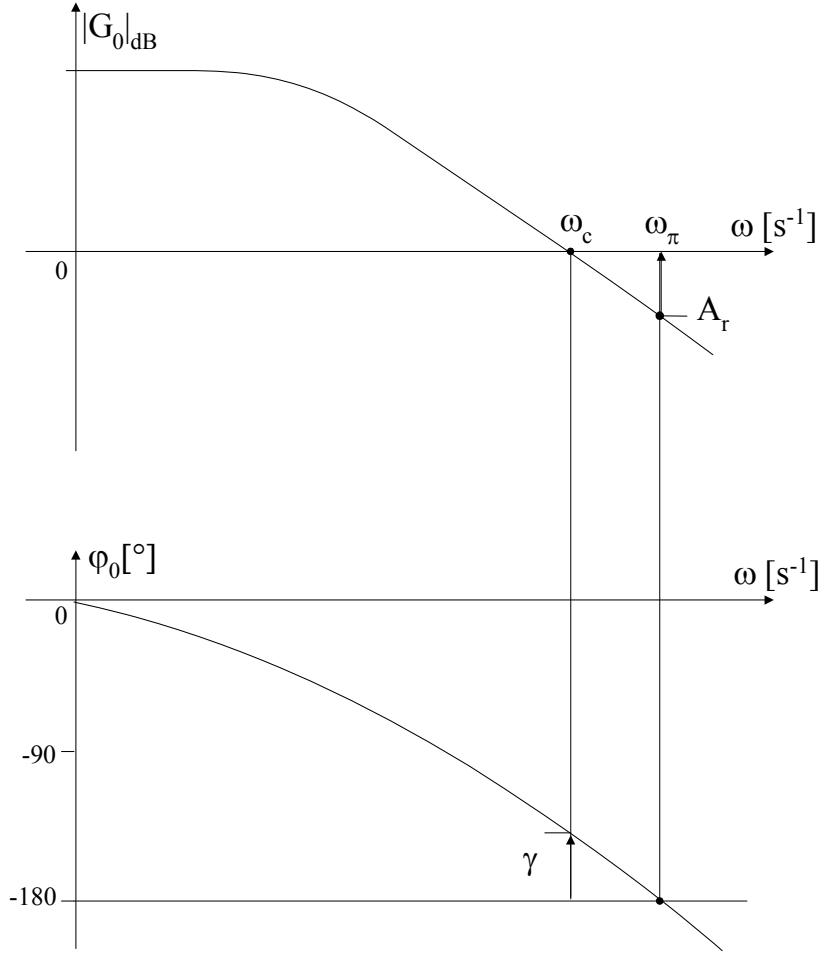
ζ - relativni koeficijent prigušenja

u cijelosti karakteriziraju regulacijsko vladanje sustava.

© Ivan Petrović

Karakteristične veličine otvorenog regulacijskog kruga u frekvencijskom području:

- Pretpostavlja se u daljnjim razmatranjima da otvoreni regulacijski krug $G_0(s)$ ima statičko vladanje čiji je kvalitativni Bodeov dijagram prikazan na slici 5.2.
- Karakteristične veličine $G_0(j\omega)$ su:
  - ω_c - presječna frekvencija,
  - $\gamma = 180° + \varphi_0(\omega_c)$ - fazno osiguranje,
  - $A_r \cdot |G_0(\omega_\pi)| = 1$- amplitudno osiguranje.



Sl. 5.2

© Ivan Petrović

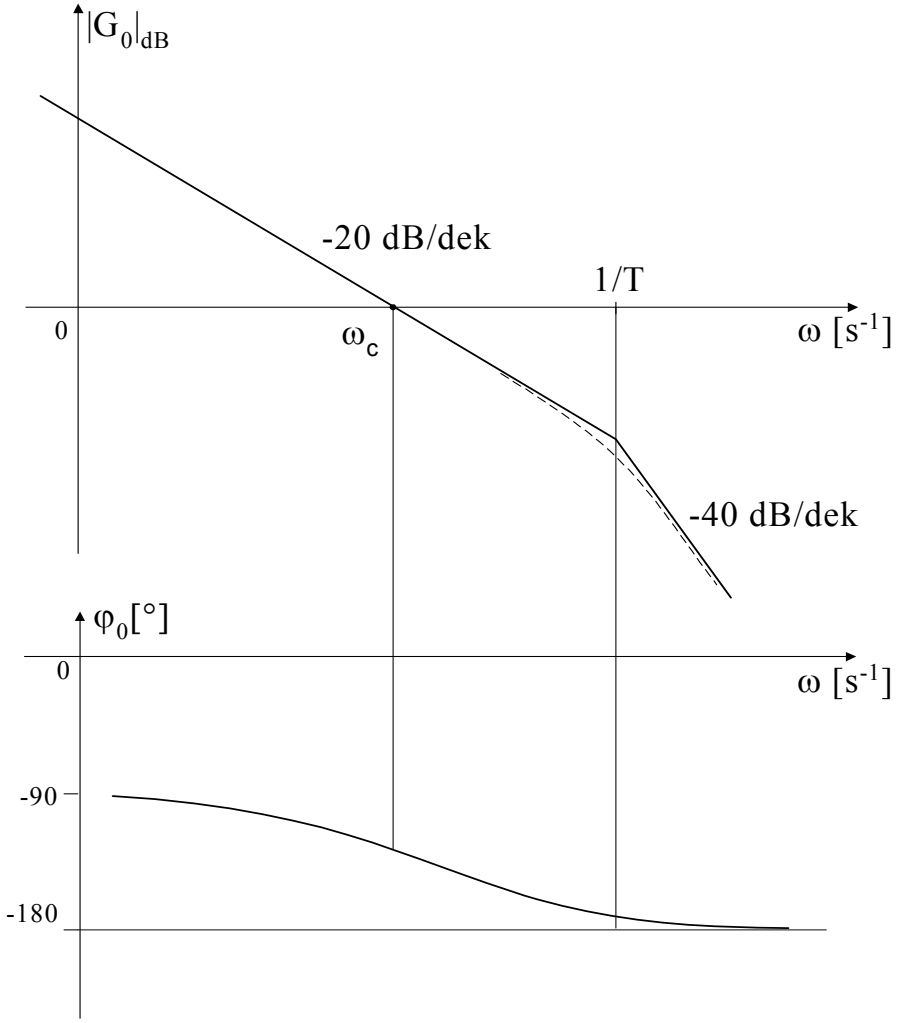
- Na osnovi pretpostavke da se dinamičko vladanje zatvorenog regulacijskog kruga može približno opisati pomoću dominantnog konjugirano - kompleksnog para polova, tj. pomoću izraza (5-1) ($\boxed{G_x(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}}$). U tom slučaju iz (5-1) slijedi:

$$\boxed{G_x(s) \rightarrow G_0(s) = \frac{G_x(s)}{1 - G_x(s)} = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}}. \qquad (5\text{-}2)$$

- Izraz (5-2) može se prikazati i na sljedeći način:

$$\boxed{G_0(s) = \frac{K_0}{s} \cdot \frac{1}{1 + Ts}}, \qquad \text{gdje je: } \boxed{K_0 = \frac{\omega_n}{2\varsigma}, \qquad T = \frac{1}{2\varsigma\omega_n}}. \qquad (5\text{-}3)$$

- Bodeov dijagram za frekvencijsku karakteristiku prema (5-3) prikazan je na slici 5.3:



Sl. 5.3.

- Bodeovi dijagrami prikazani na slikama 5.2 i 5.3 međusobno se razlikuju.
- Sustav prema slici 5.2 nema I-djelovanja i višeg je reda od 2 ($\varphi < -180°$).
- **Međutim, u okolišu presječne frekvencije ω_c Bodeovi dijagrami na obje slike imaju sličan oblik.**

© Ivan Petrović

- Ako za neki sustav vrijedi:

$$\left.\begin{array}{lll} |G_0(j\omega)| >> 1 & \text{za} & \omega << \omega_c \\ & \text{i} & \\ |G_0(j\omega)| \approx 0 & \text{za} & \omega >> \omega_c \end{array}\right\} \Rightarrow$$ tada je približno u okolišu ω_c:

$$\boxed{G_0(s) \approx \frac{K_0}{s} \cdot \frac{1}{1+Ts}.} \qquad (5\text{-}4)$$

- U tom je slučaju moguće opisati zatvoreni sustav prijenosnom funkcijom $G_x(s)$ drugog reda (1 dominantni par konjugirano - kompleksnih polova).

- Da bi se specifikacije kakvoće izvedene za sustave drugog reda mogle primijeniti i na sustave višeg reda treba $|G_0(j\omega)|$ imati nagib -20 dB/dek u okolišu ω_c.

- Za analiziranu prijenosnu funkciju to je ispunjeno ako je $\boxed{\omega_c < \frac{1}{T}}$ (Sl. 5.3.).

© Ivan Petrović

- Iz izraza (5-2) $\boxed{G_x(s) \rightarrow G_0(s) = \frac{G_x(s)}{1-G_x(s)} = \frac{\omega_n^{\ 2}}{s(s+2\zeta\omega_n)}}$, uz uvjet $|G_0(j\omega_c)| = 1$ slijedi ($G_0(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{j\omega(j\omega+2\varsigma\omega_n)}$):

$$\boxed{\frac{\omega_c}{\omega_n} = \sqrt{\sqrt{4\zeta^4+1}-2\zeta^2}}. \qquad (5\text{-}5)$$

- Iz (5-5) uz $\boxed{T = \frac{1}{2\varsigma\omega_n} \text{ i } \omega_c < \frac{1}{T}}$ dobije se:

$$\boxed{\sqrt{\sqrt{4\varsigma^4+1}-2\varsigma^2} < 2\varsigma \Rightarrow \varsigma > 0{,}42.} \qquad (5\text{-}6)$$

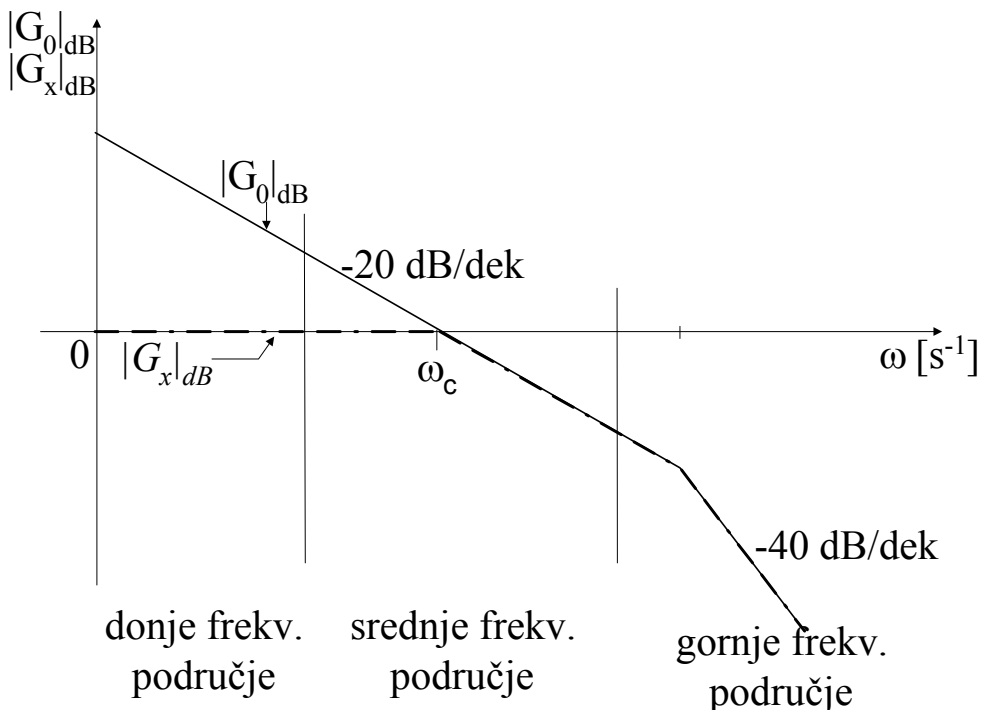
- Za $\zeta > 0{,}42$ osigurano je da $|G_0(j\omega)|_{dB}$ u okolišu ω_c ima nagib -20 dB/dek.
- Za praksu se preporuča $0{,}5 < \zeta < 0{,}7$ što osigurava prihvatljivo vrijeme porasta i prihvatljivo maksimalno nadvišenje (a time i γ i A_r).

- Od posebne je važnosti za dinamičko vladanje sustava upravljanja presječna frekvencija ω_c.
- Ako je veća presječna frekvencija ω_c, veća je širina pojasa ω_b za $G_x(j\omega)$ što ima za posljedicu brži sustav.
- To proizlazi iz sljedećih razmatranja.
- Za $G_x(j\omega)$ vrijedi sljedeća aproksimacija (Sl. 5.4 – sljedeća stranica):

$$\boxed{G_x(j\omega) = \frac{G_0(j\omega)}{1+G_0(j\omega)} \approx \begin{cases} 1 \; za \; |G_0(j\omega)| >> 1, \\ G_0(j\omega) \; za \; |G_0(j\omega)| << 1 \end{cases}} \qquad (5\text{-}7)$$

- Određivanje po odsječcima $|G_x(j\omega)|_{dB}$ pomoću $|G_0(j\omega)|_{dB}$.

© Ivan Petrović



Sl. 5.4.

- **Donje frekvencijsko područje** koje određuje vladanje sustava u stacionarnim stanjima. U ovom području $|G_0(j\omega)|$ treba imati veliki iznos (a time i veliko kružno pojačanje K_0).
- **Srednje frekvencijsko područje** koje određuje vladanje sustava u dinamičkim stanjima (prijelazni proces).
- **Gornje frekvencijsko područje** u kojem $|G_0(j\omega)|$ treba imati čim manji iznos radi potiskivanja eventualno postojećih visokofrekvencijskih smetnji.

- Za Bodeov prikaz prema slici 5.4 nagib $|G_0(j\omega)|_{dB}$ u okolišu ω_c iznosi -20 dB/dek, pa za to područje vrijedi:

$$\boxed{G_0(j\omega) \approx \frac{\omega_c}{j\omega} \Rightarrow G_x(j\omega) = \frac{G_0}{1+G_0} \approx \frac{1}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_c}}.} \qquad (5\text{-}8)$$

- Prema tome, $G_x(j\omega)$ se u okolišu ω_c može nadomjestiti PT_1 članom.
- Budući da se amplitudno - frekvencijska karakteristika PT_1 člana smanji na frekvenciji $\omega = \omega_l$ (= ω_c) za 3 dB, slijedi po definiciji za ω_b da je $\omega_c \approx \omega_b$. (tipično je ω_b =1,2÷1,5ω_c).

© Ivan Petrović

- **Odnosi između pokazatelja kakvoće u vremenskom području i pokazatelja kakvoće u frekvencijskom području (Tablica 5.1)*:***

Nadvišenje σ	$\sigma_m \approx 70 - \gamma, \quad 0.3 < \zeta < 0.8$
Vrijeme prvog maksimuma t_m	$t_m \approx \dfrac{3}{\omega_c}, \quad 0.3 < \zeta < 0.8$
Vrijeme porasta $t_{a,50}$	$t_{a,50} \approx \frac{1}{\omega_c}\left(1 - \dfrac{\sigma_m[\%]}{250}\right), \quad 0 < \zeta < 1$
Propusni opseg ω_b	$\omega_b \approx 1.2 - 1.5\omega_c, \quad \omega_b \approx \dfrac{2.3}{t_{a,50}}$
Rezonantno izdizanje M_r	$M_r = \dfrac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$
Rezonantna frekvencija ω_r	$\omega_r = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$
Vrijeme ustaljivanja $t_{1\%}$	$t_{1\%} \approx \dfrac{4.6}{\zeta\omega_n}$

- Ovi su odnosi egzaktni za sustave drugog reda.
- Oni se mogu primijeniti i na sustave višeg reda ako sustav posjeduje jedan dominantni par polova.

© Ivan Petrović

5.2 Sinteza regulatora pomoću frekvencijskih karakteristika (Bodeovih dijagrama)

- Polazište pri sintezi regulatora pomoću Bodeovog dijagrama jest **frekvencijska karakteristika otvorenog regulacijskog kruga** $G_o(j\omega)$.

- Za ispunjenje zahtjeva koji se postavljaju na zatvoreni regulacijski krug potrebno je postići onakve karakteristične veličine $G_o(j\omega)$ (ω_c, γ, **pojačanje $G_o(j\omega)$ na niskim frekvencijama**) kojima će se postići postavljeni zahtjevi:

  1. **Presječna frekvencija ω_c** $\rightarrow$ određuje propusni opseg ω_b, vrijeme porasta (t_r, $t_{a,50}$), vrijeme ustaljivanja zatvorenog kruga.
  2. **Fazno osiguranje γ** $\rightarrow$ određuje koeficijent prigušenja ζ i nadvišenje σ_m zatvorenog kruga.
  3. **Pojačanje $G_o(j\omega)$ na niskim frekvencijama** $\rightarrow$ određuje pogrešku zatvorenog sustava u ustaljenom stanju.

© Ivan Petrović

- **<u>Zadaća je sinteze</u> da se <u>pomoću</u> prijenosne funkcije regulatora $G_R(s)$ <u>podesi</u> $G_o(j\omega)$ tako da ona poprimi zahtijevane karakteristične veličine.**

- Pri tome se mogu koristiti standardni tipovi regulatora (PID i iz njega izvedeni), kao i nestandardni tipovi regulatora (često se nazivaju kompenzacijskim ili **korekcijskim članovima**).

- Najčešće korišteni korekcijski članovi su:

  - **Korekcijski član s faznim prethođenjem** (FP, *engl.* Phase Lead Compensation) – koristi se za podizanje fazne karakteristike, a time za povećanje brzine odziva sustava, ali povećava pojačanje sustava na visokim frekvencijama (problematično zbog šuma) – poopćenje PD regulatora.

  - **Korekcijski član s faznim kašnjenjem** (FK, *engl.* Phase Lag Compensation) – koristi se za (i) povećanje pojačanja sustava na niskim frekvencijama ili za (ii) smanjenje pojačanja sustava na

© Ivan Petrović

srednjem i visokim frekvencijama bez smanjenja pojačanja na niskim frekvencijama; usporava brzinu odziva sustava – poopćenje PI regulatora.

- **Kombinacija navedenih korekcijskih članova** (FK&FP, *engl*. Phase Lag-Lead Compensation) – omogućuje istodobno povećanje brzine odziva (brža prijelazna pojava) i povećanje pojačanja na niskim frekvencijama (bolja točnost u ustaljenom stanju) ili povećanje brzine odziva bez pojačavanja visokih frekvencija – poopćenje PID regulatora.

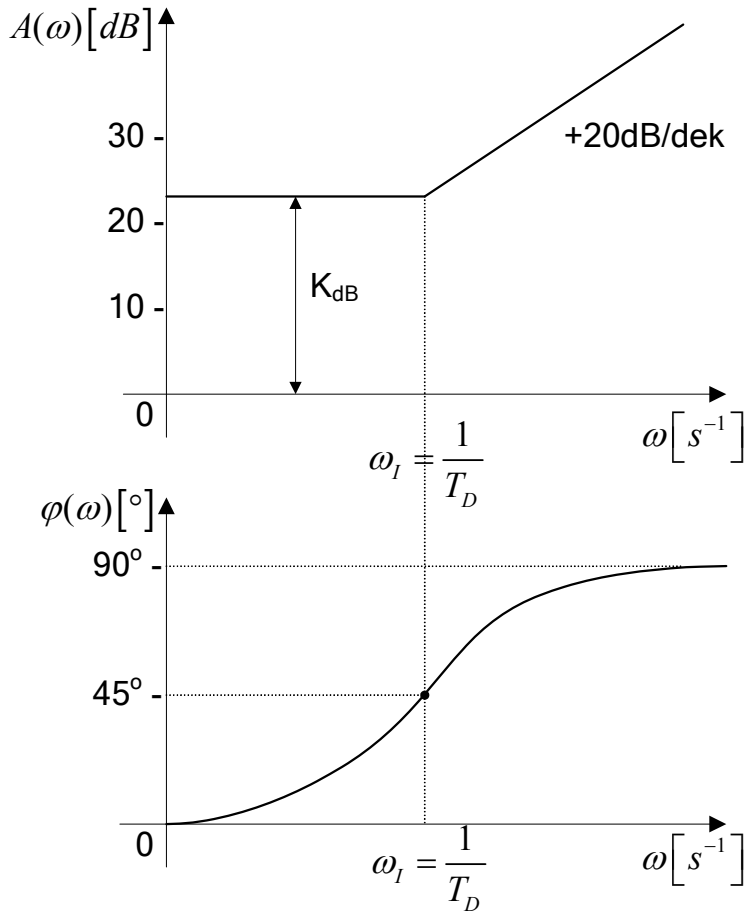
5.2.1. Korekcijski član s faznim prethođenjem (FP)

- PD-regulator je osnovni član s faznim prethođenjem:

$$G(s) = K(1 + T_D s)$$

- Ako se lomna frekvencija $\omega_l = 1/T_D$ postavi u blizni presječne frekvencije otvorenog regulacijskog kruga, povećat će se fazno osiguranje sustava => stabilizacija sustava
- Međutim, PD član pojačava signale visokih frekvencija, tj. pojačava mjeni šum, što je nepoželjno.
- Zbog toga se dodaje pol na višoj frekvenciji od lomne frekvencije PD-člana => član s faznim prethođenjem

Bodeov dijagram PD - člana:



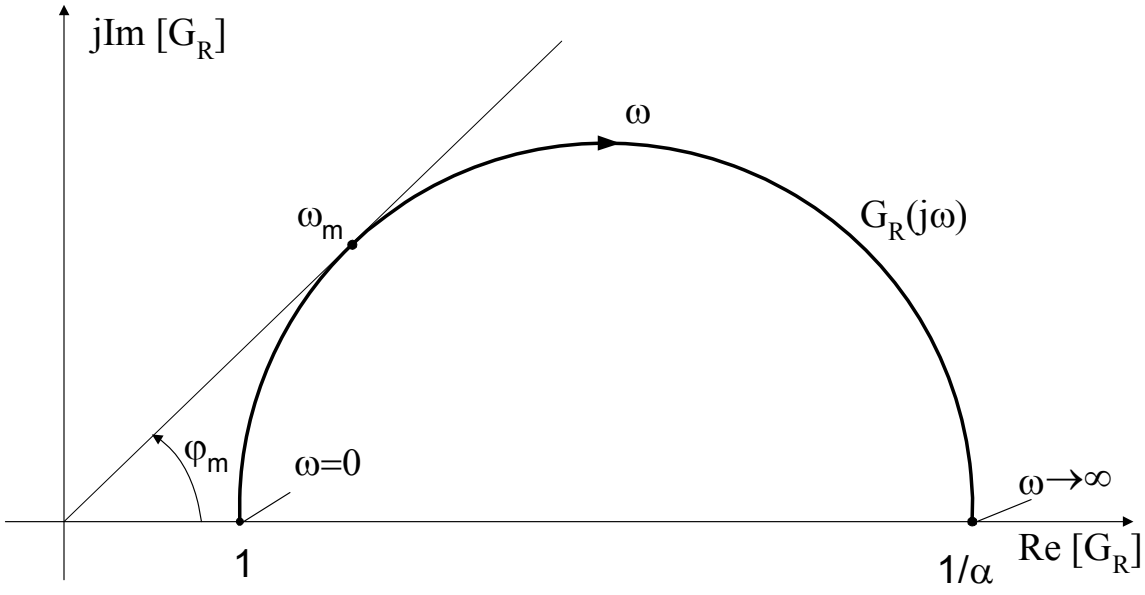
- **Korekcijski član s faznim prethođenjem** doprinosi podizanju fazne karakteristike u određenom frekvencijskom području, uz ograničeno pojačanje signala visokih frekvencija.
- Prijenosna funkcija korekcijskog člana s faznim prethođenjem glasi:

$$\boxed{G_R(s) = \frac{1+Ts}{1+\alpha Ts} = \frac{1+\dfrac{s}{1/T}}{1+\dfrac{s}{1/\alpha T}} \text{ za } 0<\alpha<1.} \qquad (5\text{-}9)$$

- Nyquistov dijagram (Sl. 5.9) za $G_R(j\omega)$ prema (5-9) dobije se iz:

$$\boxed{G_R(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = \sqrt{\frac{1+T^2\omega^2}{1+\alpha^2T^2\omega^2}} \cdot e^{[arctg(\omega T)-arctg(\alpha\omega T)]}}. \qquad (5\text{-}10)$$

© Ivan Petrović



Sl. 5.9.

- Maksimalno prethođenje (ω_m - frekvencija maksimalnog prethođenja):

$$\boxed{\varphi(\omega) = arctg\,\omega T - arctg\,\alpha\omega T \Rightarrow \frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = 0},$$

$$\boxed{\frac{T}{1+(\omega T)^2} - \frac{\alpha T}{1+(\alpha\omega T)^2} = 0},$$

$$\boxed{\omega_m = \sqrt{\omega_{\ln} \cdot \omega_{lb}} = \omega_{\ln} \cdot \sqrt{\frac{\omega_{lb}}{\omega_{\ln}}} = \omega_{\ln} \frac{1}{\sqrt{m_p}} = \omega_{lb}\sqrt{m_p} = \frac{1}{T}\sqrt{m_p}}, \qquad (5\text{-}11)$$

$$\boxed{\varphi_m = \arcsin\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}$$

gdje je:

$\boxed{\omega_{\ell b} = \frac{1}{T}}$ - lomna frekvencija člana u brojniku $G_R(s)$,

$\boxed{\omega_{\ell n} = \frac{1}{\alpha T}}$ - lomna frekvencija člana u nazivniku $G_R(s)$,

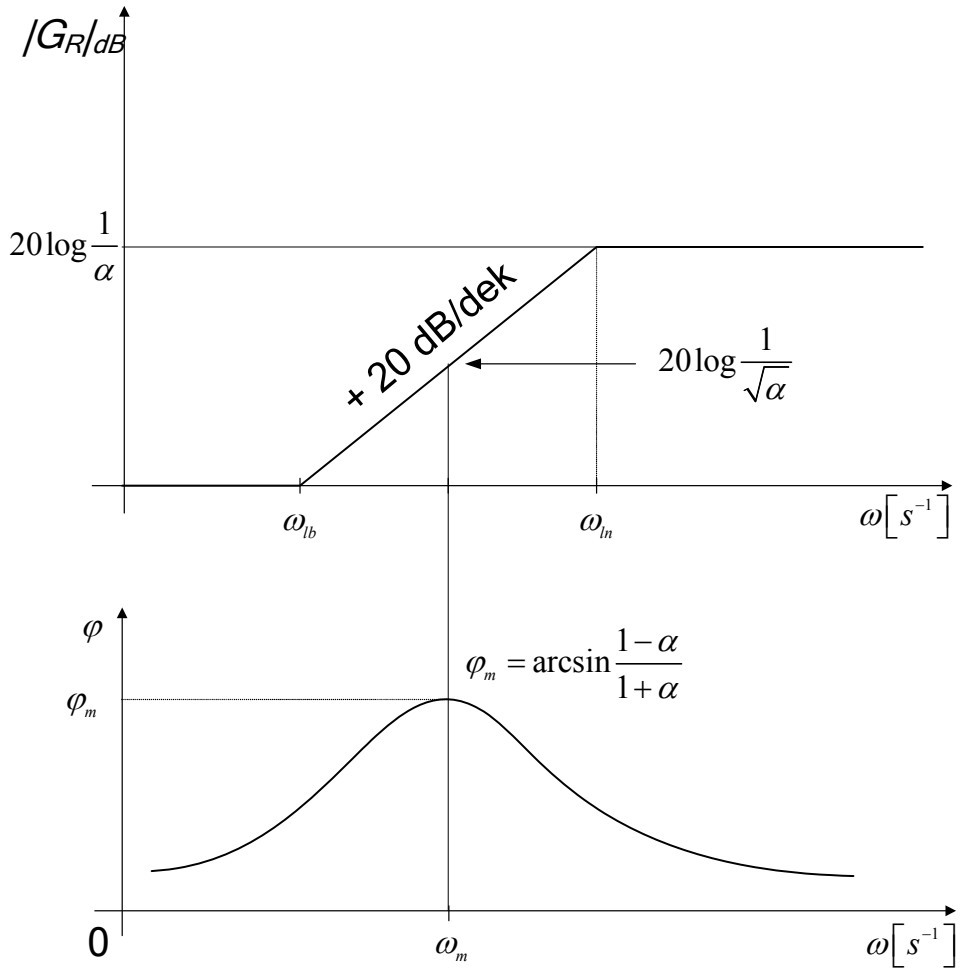
$\boxed{m_p = \frac{\omega_{\ell n}}{\omega_{\ell b}} = \frac{1}{\alpha}}$ - **<u>koeficijent faznog prethođenja</u>.**

© Ivan Petrović

- Iz Bodeovog dijagrama (**<u>Sl. 5.10</u>**) vidi se da član s faznim prethođenjem ima **<u>na višim frekvencijama nepovoljno uzdizanje</u>** amplitudne karakteristike za koeficijent $1/\alpha$, odnosno **20log1/**α.

- Zahtijevani iznos φ_m, određuje odnos između lomnih frekvencija FP člana:

$$\boxed{\alpha = \frac{1-\sin\varphi_m}{1+\sin\varphi_m}} \qquad (5\text{-}11a)$$



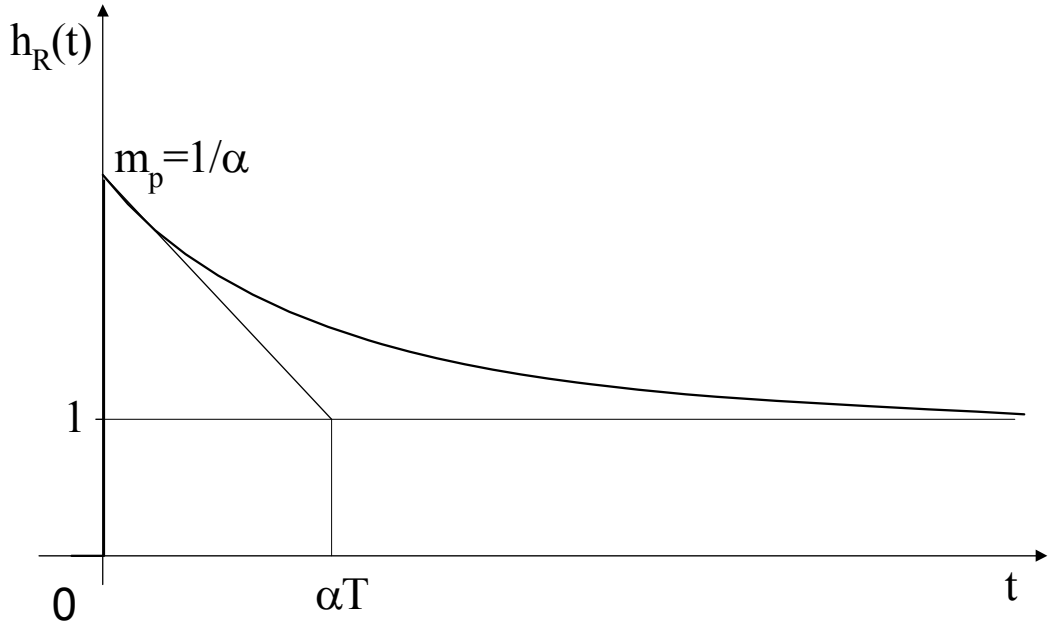
- Prijelazna funkcija korekcijskog člana s faznim prethođenjem dobije se iz (5-9) kako slijedi:

$$\boxed{G_R(s) = \frac{1+Ts}{1+\alpha Ts} = \frac{1+\alpha Ts}{1+\alpha Ts} + \frac{(1-\alpha)Ts}{1+\alpha Ts} = 1 + (\frac{1}{\alpha} - 1) \cdot \frac{\alpha Ts}{1+\alpha Ts}}. \qquad (5\text{-}12)$$

- Iz (5-12) vidljivo je da se ovaj član može promatrati kao paralelni spoj P - člana (K_R = 1) i DT_1 –člana (PDT_1 - regulator).

- Pripadajuća prijelazna funkcija (**<u>Sl. 5.11.</u>**) korekcijskom članu (5-12) glasi:

$$\boxed{h_R(t) = 1 + (\frac{1}{\alpha} - 1) \cdot e^{-\frac{t}{\alpha T}}}. \qquad (5\text{-}13)$$

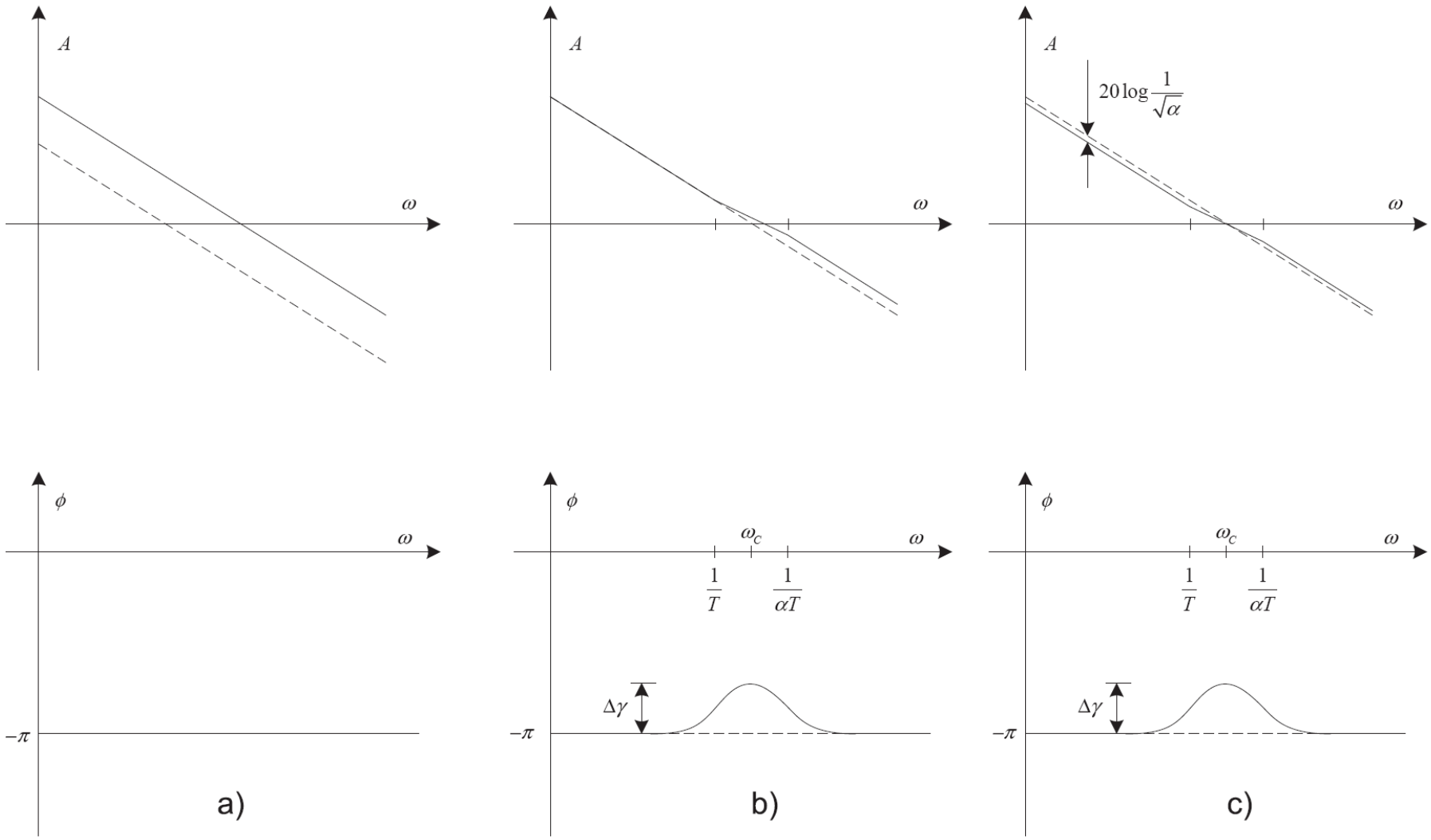


Načelna procedura projektiranja člana s faznim prethođenjem:

1. Dodavanjem pojačanja u otvoreni krug postaviti željnu presječnu frekvenciju (**Sl. 5.12 a)**)
2. Proračunati maksimalno izdizanje fazne karakteristike korekcijskog člana φ_{max} koje je potrebno ostvariti da bi se postiglo željeno fazno osiguranje. Na temelju φ_{max} izračunati potrebni odnos između lomnih frekvencija korekcijskog člana α (izraz (5-11a)). Vremensku konstantu T korekcijskog člana odabrati tako da frekvencija maksimalnog izdizanja faze bude jednaka željenoj presječnoj frekvenciji:

$$T = \frac{1}{\sqrt{\alpha}\,\omega_c}, \qquad (5\text{-}14)$$

   Dodavanjem korekcijskog člana uz tako određene parametre **fazna karakteristika na presječnoj frekvenciji ω_c podignuta je za $\Delta = \varphi_{max}$**, ali je istodobno došlo do podizanja amplitudne karakteristike (**Sl. 5.12 b)**);
3. Kako pojačanje korekcijskog člana na presječnoj frekvenciji (frekvenciji maksimalnog izdizanja faze φ_{max}) iznosi $1/\sqrt{\alpha}$, potrebno je korigirati (spustiti) amplitudnu karakteristiku upravo s faktorom $\sqrt{\alpha}$ $\left(20\log\left(1/\sqrt{\alpha}\right)\right)$, da bi presječna frekvencija ω_c ostala nepromijenjena (**Sl. 5.12 c)**).



Sl. 5.12

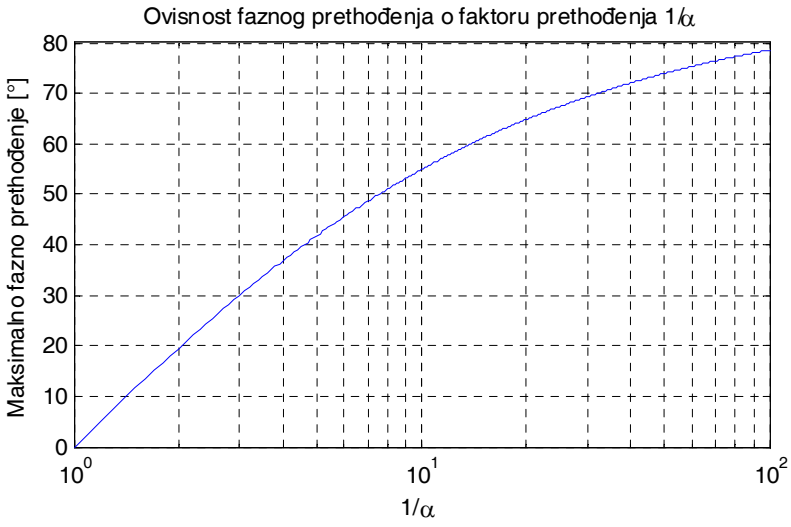
© Ivan Petrović

Komentar o izboru odnosa α:

- Maksimalno fazno prethođenje φ_{max} ovisi isključivo o iznosu α ($1/\alpha$), prema izrazu (5-11) – vidi sliku 5.12a:

$$\varphi_m = \arcsin\frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

- Što je $1/\alpha$ veći, veći je i φ_{max}, ali je i veće pojačanje visokih frekvencija (šum)



Sl. 5.12a

- Uobičajeno, ako je zahtijevani φ_{max}>60° koristi se dvostruki član s faznim prethođenjem:

$$G_R(s) = \left(\frac{1+Ts}{1+\alpha Ts}\right)^2, \ \alpha < 1$$

Primjer 5.1.: Sinteza korekcijskog člana s faznim prethođenjem

- **Za proces** opisan prijenosnom funkcijom:

$$G_s(s) = \frac{K_s}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)} = \frac{1}{s(1+0.2s)(1+0.02s)}$$

potrebno je **projektirati regulator $G_R(s)$** uz sljedeći zahtjev:

1. prijelazna funkcija zatvorenog sustava $h_x(t)$ ima:

$$t_m = 0{,}3\ s, \quad \sigma_m = 20\%.$$

Rješenje:

- Presječna frekvencija i fazno osiguranje prema tablici 5.1 iznose:

$$\omega_c \approx \frac{3}{t_m} \approx 10\ s^{-1}, \qquad \gamma[°] \approx 70 - \sigma_m[\%] = 70 - 20 = 50°$$

© Ivan Petrović

1. korak sinteze:

- Amplituda procesa **$G_S(s)$** na frekvenciji $\omega = 10s^{-1}$ iznosi:

$$A_s(\omega = 10s^{-1}) = \left| \frac{K_s}{j\omega(1+T_1 j\omega)(1+T_2 j\omega)} \right| = 0,04 = -27dB$$

- Prema tome, treba podići amplitudnu karakteristiku za 27 dB

$$K_R = \frac{1}{0,04} = 22,8$$

2. korak sinteze:

- Fazna karakteristika procesa **$G_S(s)$** na frekvenciji $\omega = 10s^{-1}$ iznosi:

$$\varphi_s(\omega = 10s^{-1}) = \arg\left[\frac{K_s}{j\omega(1+T_1 j\omega)(1+T_2 j\omega)} \right] = -164,7°$$

$$\gamma_s = 180° + \varphi_s(\omega = 10s^{-1}) = 15,25°$$

- Prema tome, treba podići faznu karakteristiku za $\varphi_m = 37,25^0$ na frekvenciji $\omega = 10s^{-1}$ da se dobije traženo fazno osiguranje 50°.

$$\alpha = \frac{1-\sin\varphi_m}{1+\sin\varphi_m} = 0,27; \qquad \omega_c = \sqrt{\frac{1}{T}\frac{1}{\alpha T}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}T} = 10s^{-1} \Rightarrow \quad T = \frac{1}{\sqrt{\alpha}\omega_c} = 0,19s$$

3. korak sinteze:

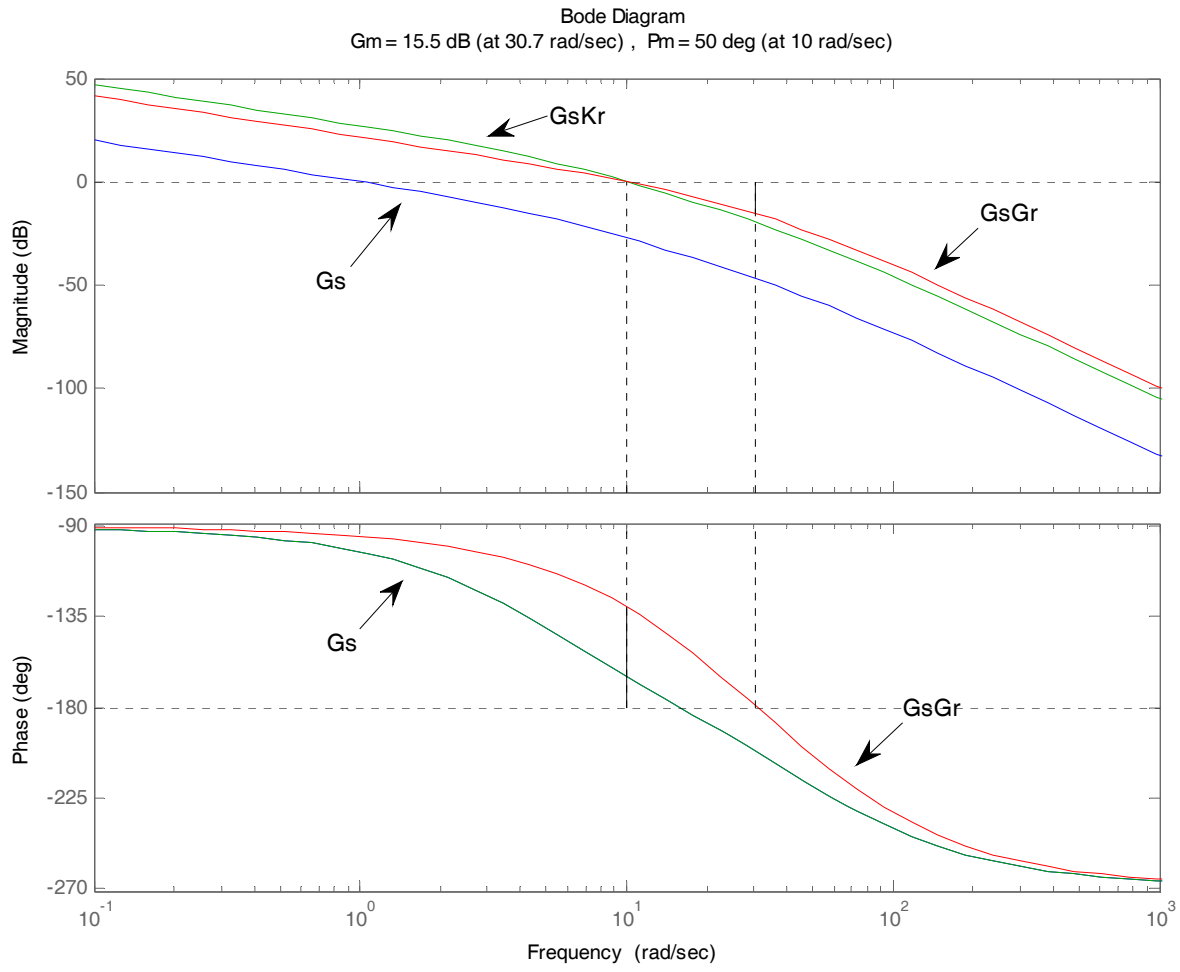
- Da korekcijski član ne bi promijenio amplitudu na presječnoj frekvenciji množi se s $\sqrt{\alpha}$

$$G_R(s) = \sqrt{\alpha}\,\frac{1+Ts}{1+\alpha Ts}$$

- Ukupni regulator je oblika:

$$G_R(s) = K_R\sqrt{\alpha}\,\frac{1+Ts}{1+\alpha Ts} = \frac{2,28s+11,94}{0,052s+1}$$

- Provjera u Matlabu:



5.2.2. Korekcijski član s faznim kašnjenjem (FK)

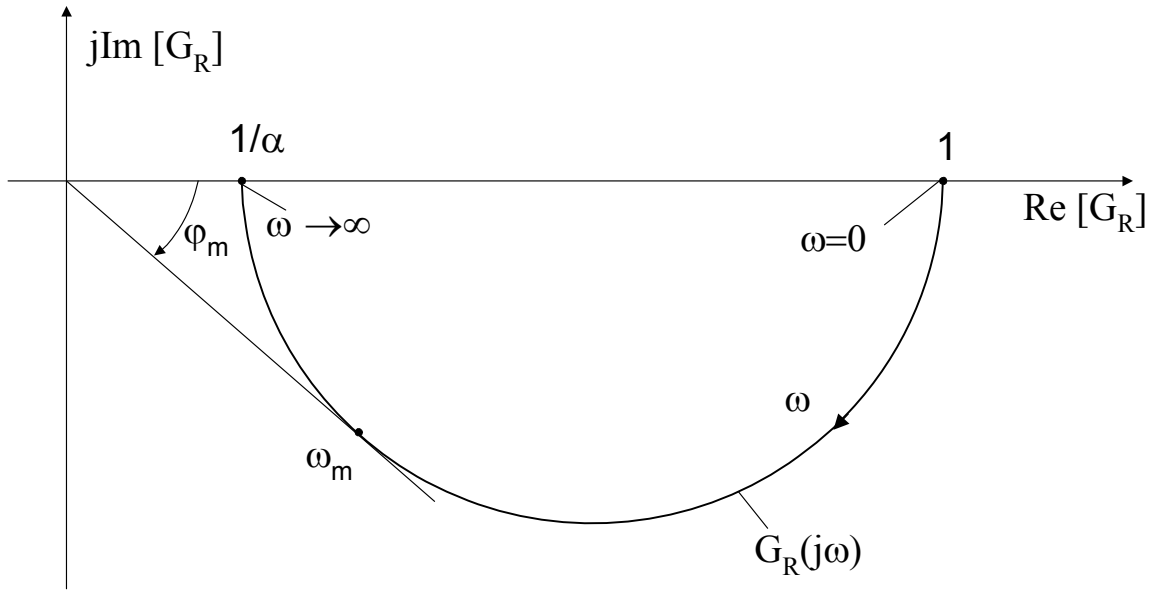
- FK član (*engl.* lag compensation) **se koristi za (i) podizanje amplitudne karakteristike u niskofrekvencijskom području (uz pojačanje α) ili za (ii) njeno smanjenje u određenom frekvencijskom području (bez pojačanja α)**. Pri tome dolazi do smanjenja fazne karakteristike, što je nepovoljno.
- **Prijenosna funkcija** korekcijskog člana s faznim kašnjenjem glasi:

$$G_R(s) = \alpha \frac{1+Ts}{1+\alpha Ts} = \alpha \frac{1+\dfrac{s}{1/T}}{1+\dfrac{s}{1/\alpha T}} \quad \text{za} \quad \alpha > 1. \tag{5-15}$$

- Iz frekvencijske karakteristike:

$$G_R(j\omega) = \frac{1+j\dfrac{\omega}{\omega_{lb}}}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_{ln}}} \tag{5-16}$$

dobije se Nyquistov dijagram - Sl. 5.13:

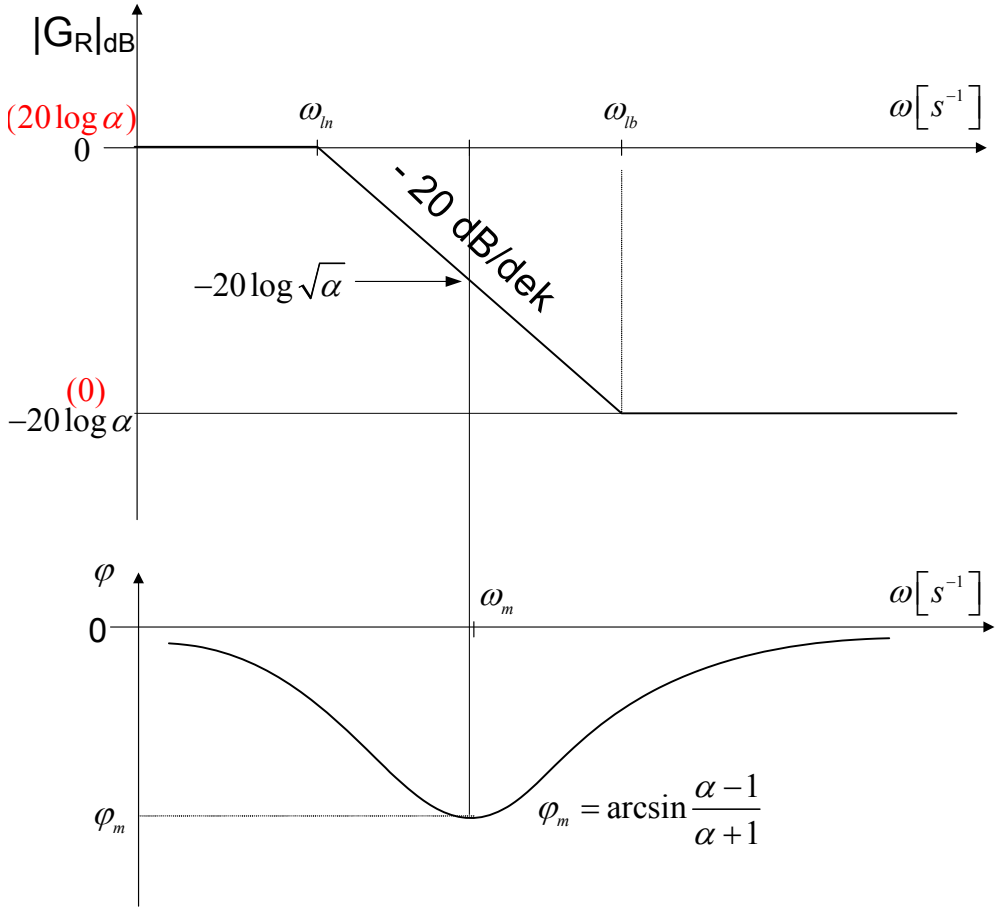


Sl. 5.13.

- Uz ovaj član može se definirati **<u>koeficijent faznog kašnjenja</u>:**

$$\boxed{m_k = \frac{\omega_{\ell b}}{\omega_{\ell n}} = \alpha > 1.} \qquad (5\text{-}17)$$

- Bodeov dijagram korekcijskog člana s faznim kašnjenjem (slika 5.14.):



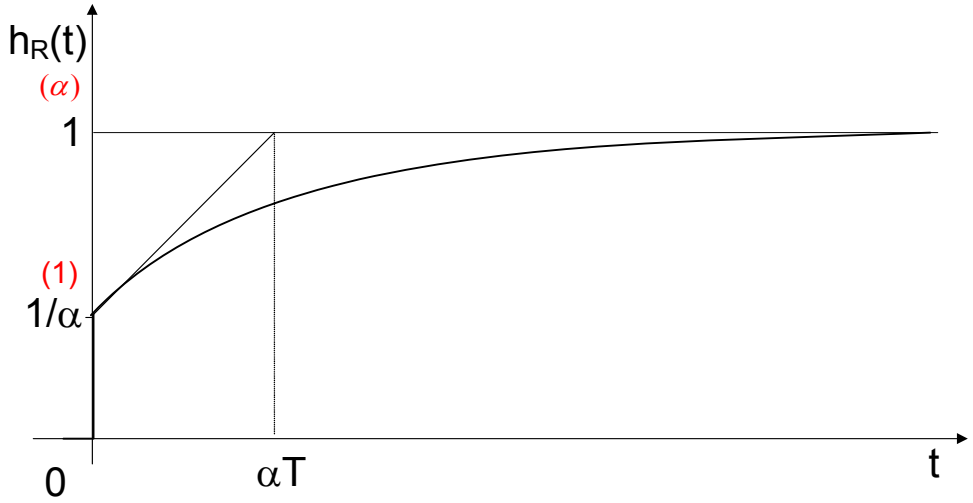
Sl. 5.14

- Prijelazna funkcija korekcijskog člana s faznim kašnjenjem dobije se iz (5-15) kako slijedi:

$$\boxed{G_R(s) = \alpha \cdot \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{(1-\frac{1}{\alpha})}{1+\alpha T s}\right)}. \qquad (5\text{-}18)$$

- Prema (5-18) ovaj se član sastoji od paralelnog spoja P – člana ($K_R = \frac{1}{\alpha}$) i PT_1 – člana (PPT_1 – član).
- Izraz za odgovarajuću prijelaznu funkciju glasi (Sl. 5.15 – sljedeća stranica):

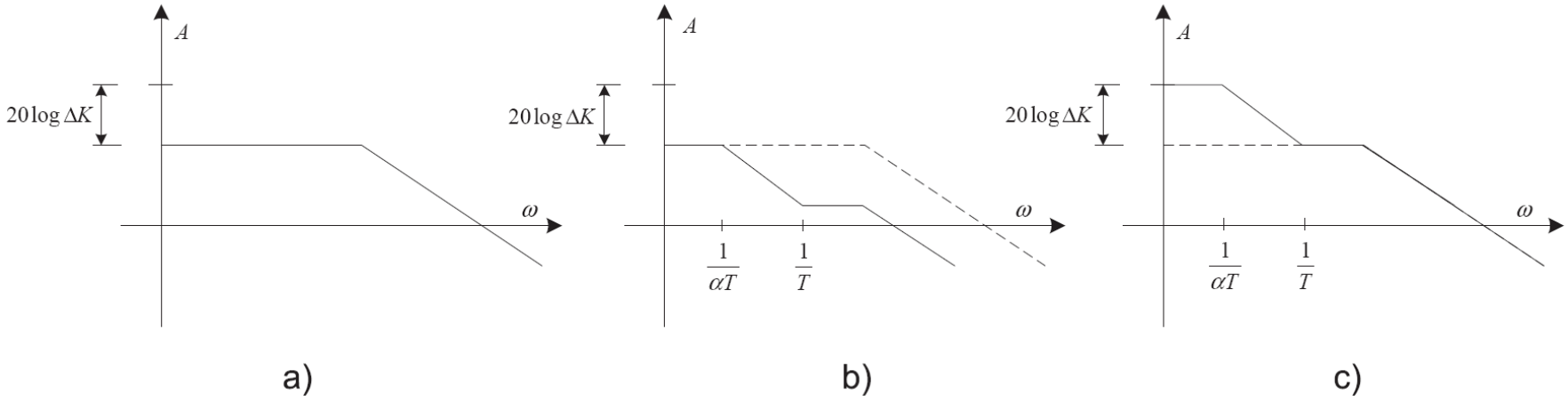
$$\boxed{h_R(t) = \alpha \cdot \left(\frac{1}{\alpha} + (1-\frac{1}{\alpha}) \cdot (1-e^{-\frac{t}{\alpha T}})\right)}. \qquad (5\text{-}19)$$



Sl. 5.15. Prijelazna funkcija.

Načelna procedura projektiranja FK člana – (i) povećanje pojačanja na niskim frekvencijama:

1. Na temelju specificiranog ponašanja sustava u stacionarnom stanju (koeficijent statičke pogreške, koeficijent brzinske pogreške, i sl.) potrebno je odrediti iznos potrebne korekcije amplitudne karakteristike ΔK u području niskih frekvencija kako bi se osiguralo željeno ponašanje (**Sl. 5.16 a)**).
2. Budući da ukupna korekcija amplitudne karakteristike koju unosi korekcijski član s faznim kašnjenjem iznosi $\alpha\,(20\log\alpha)$ (Sl. 5.14), odabire se $\alpha = \Delta K$.



Sl. 5.16.

3. Vremenska konstanta T korekcijskog člana određuje se na način da korekcijski član ne utječe značajno na iznos faznog osiguranja γ. To znaci da je potrebno odabrati

$1/T \leq \omega_c/10$ (ili čak $1/T \leq \omega_c/50$). Dodavanjem korekcijskog člana uz ovako određene parametre pojačanje na niskim frekvencijama ostaje nepromijenjeno, dok na srednjim (i visokim) frekvencijama dolazi do pada amplitudne karakteristike za iznos 20logα (**Sl. 5.16 b)**).

4. Kako želimo da korekcijski član podiže amplitudnu karakteristiku na niskim frekvencijama za α=ΔK te da ne utječe na nju na srednjim frekvencijama, potrebno je dodatno korigirati amplitudnu karakteristiku s pojačanjem α=ΔK, tj. podići je za 20logα (**Sl. 5.16 c)**).

Napomena:

- Kod projektiranja regulatora bitno je imati na umu određena ograničenja. Tu je posebno važno ograničenje na nagib frekvencijske karakteristike u području oko presječne frekvencije koji bi uz aproksimaciju amplitudno-frekvencijske karakteristike pravcima trebao biti -1 odnosno -20*dB/dek*.
- Ovo je ograničenje posljedica povezanosti nagiba karakteristike oko presječne frekvencije s iznosom faznog osiguranja, a približna relacija koja opisuje tu ovisnost dana je sljedećim izrazom:

$$\gamma = 180 + \frac{\pi}{2} \cdot n$$

gdje je *n* nagib frekvencijske karakteristike u području oko presječne frekvencije.

- Iz prethodne je približne relacije očito da bi slučaju nagiba -2 amplitudno-frekvencijske karakteristike oko presječne frekvencije ω_c, zatvoreni regulacijski krug bio na rubu stabilnosti.

Primjer 5.2.: Sinteza kompenzacijskog člana s faznim kašnjenjem

- **Za proces** opisan prijenosnom funkcijom:

$$G_s(s) = \frac{K_s}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)} = \frac{7}{(1+0.2s)(1+0.02s)}$$

potrebno je **projektirati regulator $G_R(s)$** uz sljedeće zahtjeve:

1. trajno regulacijsko odstupanje pri $y_R(t)=S(t)$ ne smije prijeći vrijednost $e_\infty = 0.02$.
2. dinamičko vladanje sustava ostane približno nepromijenjeno.

Rješenje:

1. korak sinteze:

- **Iz zahtjeva** $e_\infty = 0.02$ **slijedi** pojačanje otvorenog regulacijskog kruga K_0:

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{1+G_0(s)} \cdot Y_R(s)} \qquad \boxed{Y_R(s) \to \frac{1}{s}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} e_\infty &= \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{1+G_R(s)\cdot \dfrac{K_S}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)}} \cdot \frac{1}{s} = \\ &= \frac{1}{1+K_s G_R(0)} = \frac{1}{1+K_0} = \frac{1}{1+K_s \cdot K_R} \\ K_0 &= \frac{1-e_\infty}{e_\infty} = 49 \to K_R = \frac{49}{7} = 7 \end{aligned}}$$

2. korak sinteze:

- Odabire se kompenzacijski član koji djeluje samo na niskim frekvencijama oblika (uz pojačanje α):

$$G_R(s) = \alpha \frac{1+Ts}{1+\alpha Ts}; \quad \alpha = K_R = 7$$

3. korak sinteze:

- Određuje se vremenska konstantu *T* tako da kompenzacijski član ne utječe na fazno osiguranje ($\frac{1}{T} << \omega_c$) –> potrebno je odrediti presječnu frekvenciju

$$A(\omega_c) = 1 \Rightarrow \frac{K_s}{\sqrt{(1+(T_1\omega_c)^2)(1+(T_2\omega_c)^2)}} = 1 \Rightarrow \omega_c = 29,68 s^{-1}$$

- Npr. odaberimo:

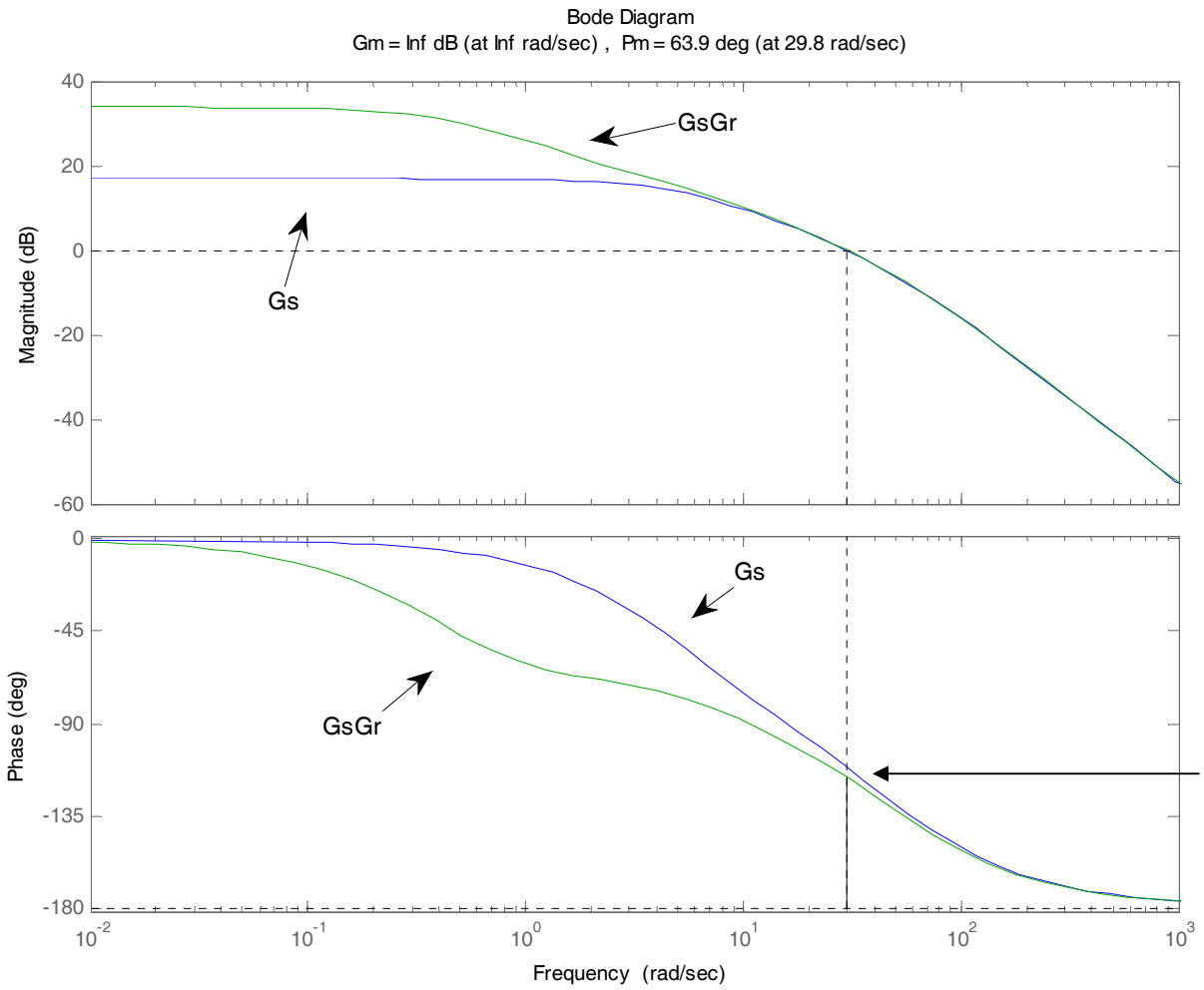
$$\frac{1}{T} = \frac{\omega_c}{10} \Rightarrow T = 0,34 s$$

4. korak sinteze:

- Ukupni regulator je oblika

$$G_R(s) = \alpha \frac{1+Ts}{1+\alpha Ts} = \frac{2.35s+7}{2.35s+1}$$

- Provjera u Matlabu



Smanjeno fazno osiguranje

- **<u>Digresija:</u>** utjecaj na fazno osiguranje sustava

$$\boxed{\begin{aligned}&\varphi(\omega_c) = arctg\,\omega T - arctg\,\alpha\omega T = \\ &= arctg\,29,68\cdot 0,34 - arctg\,7\cdot 29,68\cdot 0,34 = -4,85^0\end{aligned}}$$

(Dakle, FK je smanjio fazno osiguranje za 4,85^o.)

- Da je odabrano $\frac{1}{T} = \frac{\omega_c}{20} \Rightarrow T = 0,68s$, utjecaj na fazno osiguranje sustava bio bi:

$$\boxed{\begin{aligned}&\varphi(\omega_c) = arctg\,\omega T - arctg\,\alpha\omega T = \\ &= arctg\,29,68\cdot 0,68 - arctg\,7\cdot 29,68\cdot 0,68 = -2,43^0\end{aligned}}$$

1. Prema tome što je *T*>> smanjenje faznog osiguranja je manje, međutim mogli bi nastupiti problemi s digitalnom realizacijom regulatora.

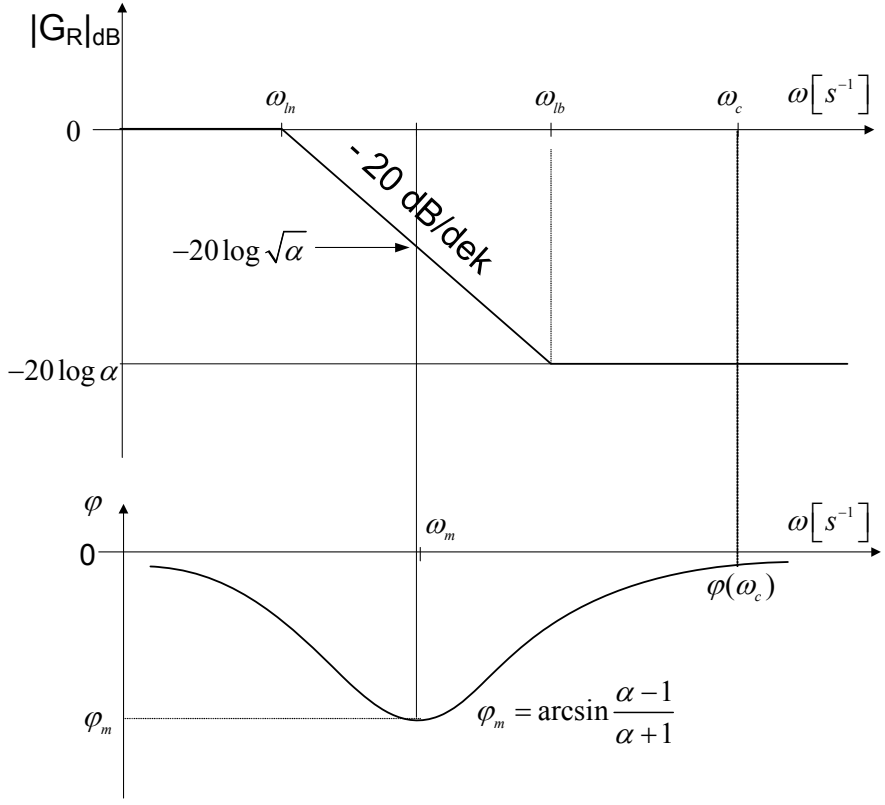
© Ivan Petrović

Načelna procedura projektiranja FK člana – (ii) smanjenje pojačanja na srednjim i visokim frekvencijama:

1. Na temelju željenog smanjenja ponašanja sustava u srednjefrekvencijskom području (najčešće na ω_c) odredi se iznos potrebne korekcije amplitudne karakteristike ΔK: $\alpha = \Delta K \;\; (20\log(1/\alpha) = \Delta K[dB])$

2. Izbor *T* kao i u (i) slučaju ili prema dopuštenom smanjenu faznog osiguranja (tipično 5-12°):

$$\boxed{\varphi(\omega_c) = arctg\,\omega T - arctg\,\alpha\omega T = 5^0 - 12^0 \Rightarrow T}$$



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
Fakultet elektrotehnike i računarstva
Zavod za automatiku i računalno inženjerstvo
Unska 3, Zagreb, HRVATSKA

Računalno upravljanje sustavima

Poglavlje 6:
Analitički postupci sinteze sustava upravljanja

© Ivan Petrović

Sadržaj poglavlja:

6.1. Uvod u sintezu analitičkim postupcima

6.2. Postupak sinteze prema Truxal-Guilleminu
(John G. Truxal and Ernst Adolf Guillemin)

6.3. Sinteza regulatora s obzirom na vodeće i poremećajno vladanje

© Ivan Petrović

6.1. Uvod u sintezu analitičkim postupcima

- Metode sinteze ne temelju frekvencijskih karakteristika spadaju u posredne postupke sinteze.
  - Polazište pri sintezi je otvoreni regulacijski krug opisan frekvencijskom karakteristikom ili prijenosnom funkcijom.
  - Željeno vladanje zatvorenog regulacijskog kruga postiže se dodavanjem različitih kompenzacijskih (korekcijskih) članova koji modificiraju frekvencijsku karakteristiku otvorenog regulacijskog kruga, a time posredno i frekvencijsku karakteristiku zatvorenog regulacijskog kruga.
  - Posredni postupci sinteze obavljaju se u pravilu u više koraka; pri tome je posebno važno iskustvo i vještina projektanta.
- **Analitički postupci sinteze spadaju u neposredne postupke sinteze, jer je polazište pri sintezi zatvoreni regulacijski krug** opisan željenom prijenosnom funkcijom:

© Ivan Petrović

$$\boxed{G_r(s) \overset{!}{=} G_m(s)}, \quad \text{- u kontinuiranom području} \qquad (6\text{-}1)$$

$$\boxed{G_r(z) \overset{!}{=} G_m(z)} \quad \text{- u diskretnom području}$$

gdje je $G_m(s)$, $G_m(z)$ - željena (modelska) prijenosna funkcija zatvorenog sustava (referentni model).

- $G_m(\cdot)$ proizlazi iz specifikacije kakvoće koja se obično zasniva na odgovarajućoj prijelaznoj funkciji $h_r(t)$.
- Za niz prikladnih prijelaznih funkcija $h_r(t)$ načinjene su tablice pripadajućih prijenosnih funkcija $G_m(\cdot)$, s točno definiranim rasporedom polova i nula.
- Ovakav neposredni postupak sinteze <u>nije primjenljiv na procese s mrtvim vremenom</u>.
- Uz poznato vladanje procesa i uz odabrani $G_m(\cdot)$ može se tada neposredno projektirati odgovarajući regulator.

© Ivan Petrović

Standardni oblici modelskih prijenosnih funkcija $G_m(s)$ i $G_m(z)$:

- Neka je željena prijenosna funkcija zatvorenog sustava s obzirom na referentnu vrijednost dana izrazom:

$$\boxed{G_m(s) = \frac{\alpha(s)}{\beta(s)} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 s + \cdots + \alpha_v s^v}{\beta_0 + \beta_1 s + \cdots + \beta_u s^u}, \quad u > v}. \qquad (6\text{-}2)$$

- Rasporedom polova i nula u (6-2), što se postiže odgovarajućim izborom parametara α_i i β_i, dobije se željena prijelazna funkcija $h_x(t)$.

- Čest je slučaj da je polinom u brojniku (6-2) nultog reda (nema nula) te da je

$$\boxed{G_m(0) \overset{!}{=} 1}.$$

© Ivan Petrović

- Tada je $\alpha_0 = \beta_0$ pa slijedi:

$$\boxed{G_m(s) = \frac{\alpha(s)}{\beta(s)} = \frac{\beta_0}{\beta_0 + \beta_1 s + \cdots + \beta_u s^u}}. \qquad (6\text{-}3)$$

- Za razne željene prijelazne funkcije $h_r(t)$ postoje tzv. **standardni (prototipni) oblici** prijenosne funkcije $G_m(s)$ (prema (6-3)) za koje su određeni parametri β_i (dani u tabličnom obliku, a određuju raspored polova).

- U nastavku je prikazano nekoliko često korištenih standardnih oblika:

a) Binomni oblik

$$\boxed{G_m(s) = \frac{\omega_n^u}{(s+\omega_n)^u} = \frac{\alpha(s)}{\beta(s)}}, \qquad (6\text{-}4)$$

© Ivan Petrović

- Ovaj oblik odgovara serijskoj vezi *u* PT_1 - članova s istom vremenskom konstantom $T_m = \dfrac{1}{\omega_n}$.
- Standardni polinomi ***β(s)*** za različite redove glase:

$$s + \omega_n$$

$$s^2 + 2\omega_n s + \omega_n{}^2$$

$$s^3 + 3\omega_n s^2 + 3\omega_n{}^2 s + \omega_n{}^3$$

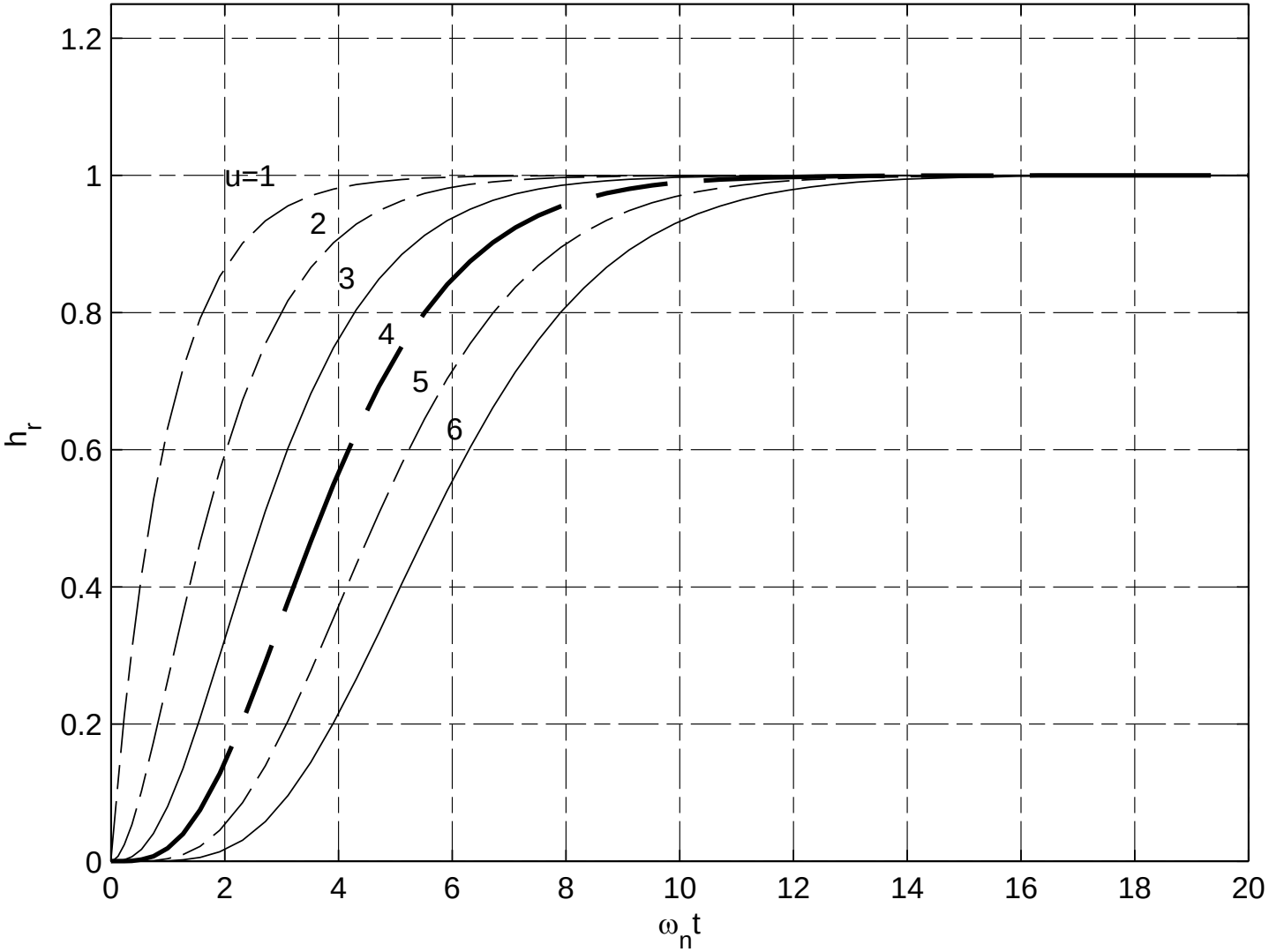
$$s^4 + 4\omega_n s^3 + 6\omega_n{}^2 s^2 + 4\omega_n{}^3 s + \omega_n{}^4$$

$$s^5 + 5\omega_n s^4 + 10\omega_n{}^2 s^3 + 10\omega_n{}^3 s^2 + 5\omega_n{}^4 s + \omega_n{}^5$$

$$s^6 + 6\omega_n s^5 + 15\omega_n{}^2 s^4 + 20\omega_n{}^3 s^3 + 15\omega_n{}^4 s^2 + 6\omega_n{}^5 s + \omega_n{}^6$$

- Njima pridružene $\boxed{h_r(\omega_n t)}$ prikazane su na slici 6.1.
- Vidimo da $h_r(t)$ nema regulacijskog nadvišenja. Porastom reda *u* $h_r(\omega_n t)$ poprima sporiji odziv.

© Ivan Petrović



Sl. 6.1. Prijelazne funkcije za binomne modelske oblike.

b) Butterworthov oblik

- Standardni polinomi ***β(s)*** za različite redove glase:

$$s+\omega_n$$

$$s^2+1.4\omega_n s+\omega_n{}^2$$

$$s^3+2.0\omega_n s^2+2.0\omega_n{}^2 s+\omega_n{}^3$$

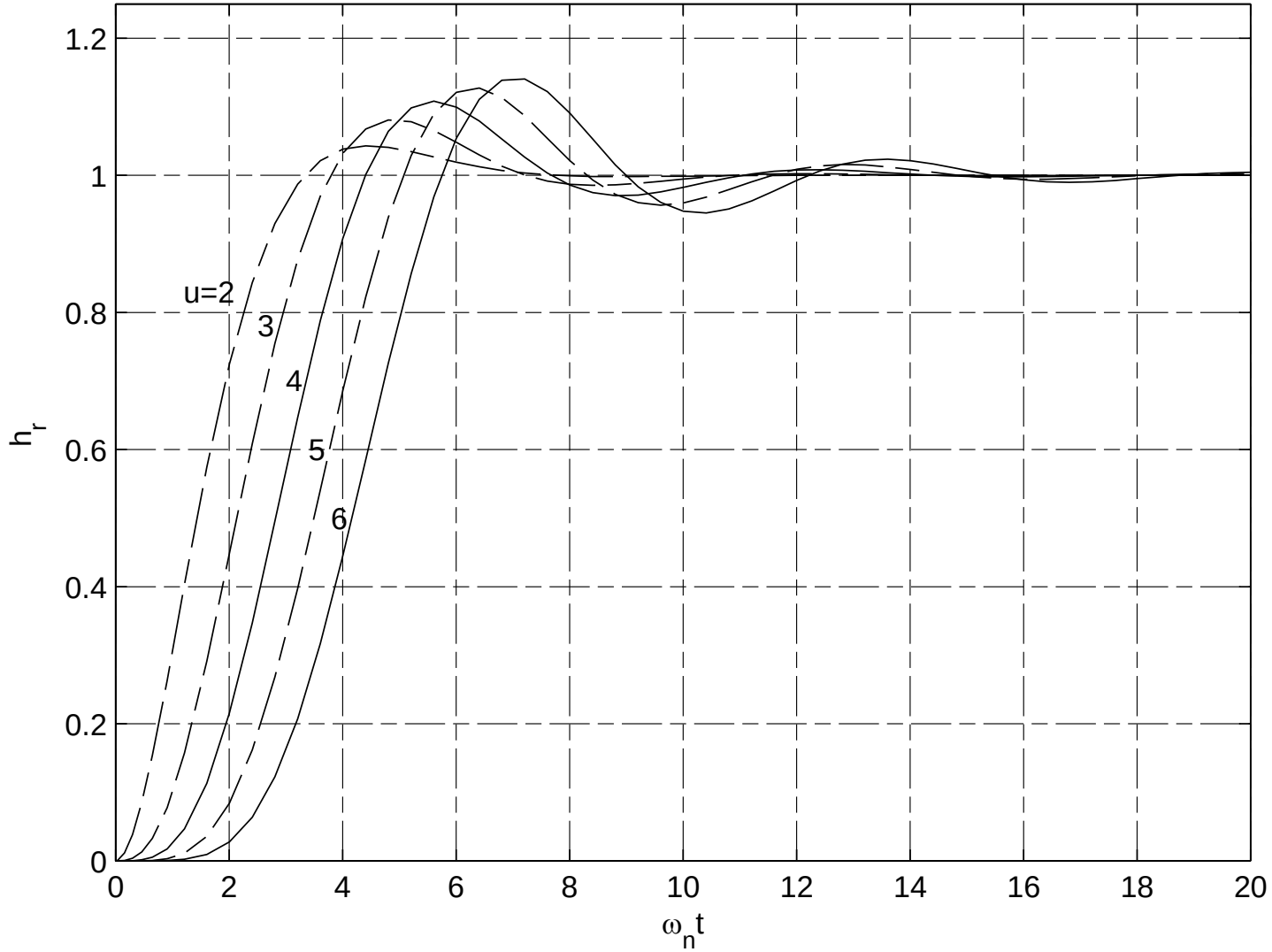
$$s^4+2.6\omega_n s^3+3.4\omega_n{}^2 s^2+2.6\omega_n{}^3 s+\omega_n{}^4$$

$$s^5+3.24\omega_n s^4+5.24\omega_n{}^2 s^3+5.24\omega_n{}^3 s^2+3.24\omega_n{}^4 s+\omega_n{}^5$$

$$s^6+3.86\omega_n s^5+7.46\omega_n{}^2 s^4+9.14\omega_n{}^3 s^3+7.46\omega_n{}^4 s^2+3.86\omega_n{}^5 s+\omega_n{}^6$$

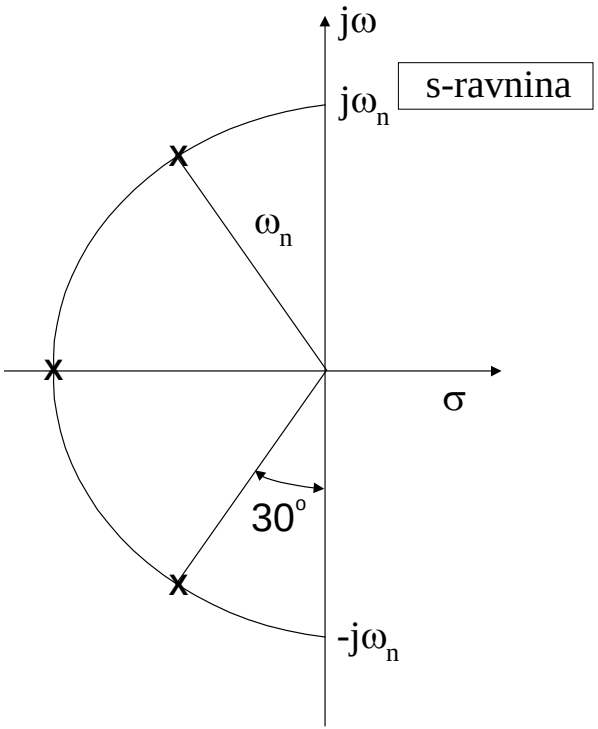
- Njima pridružene $\boxed{h_r(\omega_n t)}$ prikazane su na slici 6.2.
- Vidimo da $h_r(t)$ ima regulacijsko nadvišenje, ali je brži odziv nego kod binomnih oblika.

© Ivan Petrović



Sl. 6.2. Prijelazne funkcije za Butterworthove modelske oblike.

- Polovi prijenosne funkcije (6-3) ravnomjerno su razmješteni u lijevoj poluravnini s-ravnine na kružnici s radijusom ω_n.
- Uočava se zakonitost među koeficijentima. Regulacijsko nadvišenje raste s redom polinoma. Sustav postaje sporiji s povećanjem reda.
- Npr. za 3. red standardnog polinoma u Butterworthovom obliku dobije se:



Sl. 6.3.

c) Standardni oblici zasnovani na integralnim kriterijima

- Standardni polinomi prijenosne funkcije (6-3) mogu proizaći i iz integralnih kriterija. Primjerice, za I_4 integralni kriterij:

$$\boxed{\int_0^\infty \left|e(t)\right| \cdot t \cdot dt}, \qquad (6\text{-}5)$$

standardni polinomi $\beta(s)$ za različite redove glase:

$$s + \omega_n$$

$$s^2 + 1.505\omega_n s + \omega_n{}^2$$

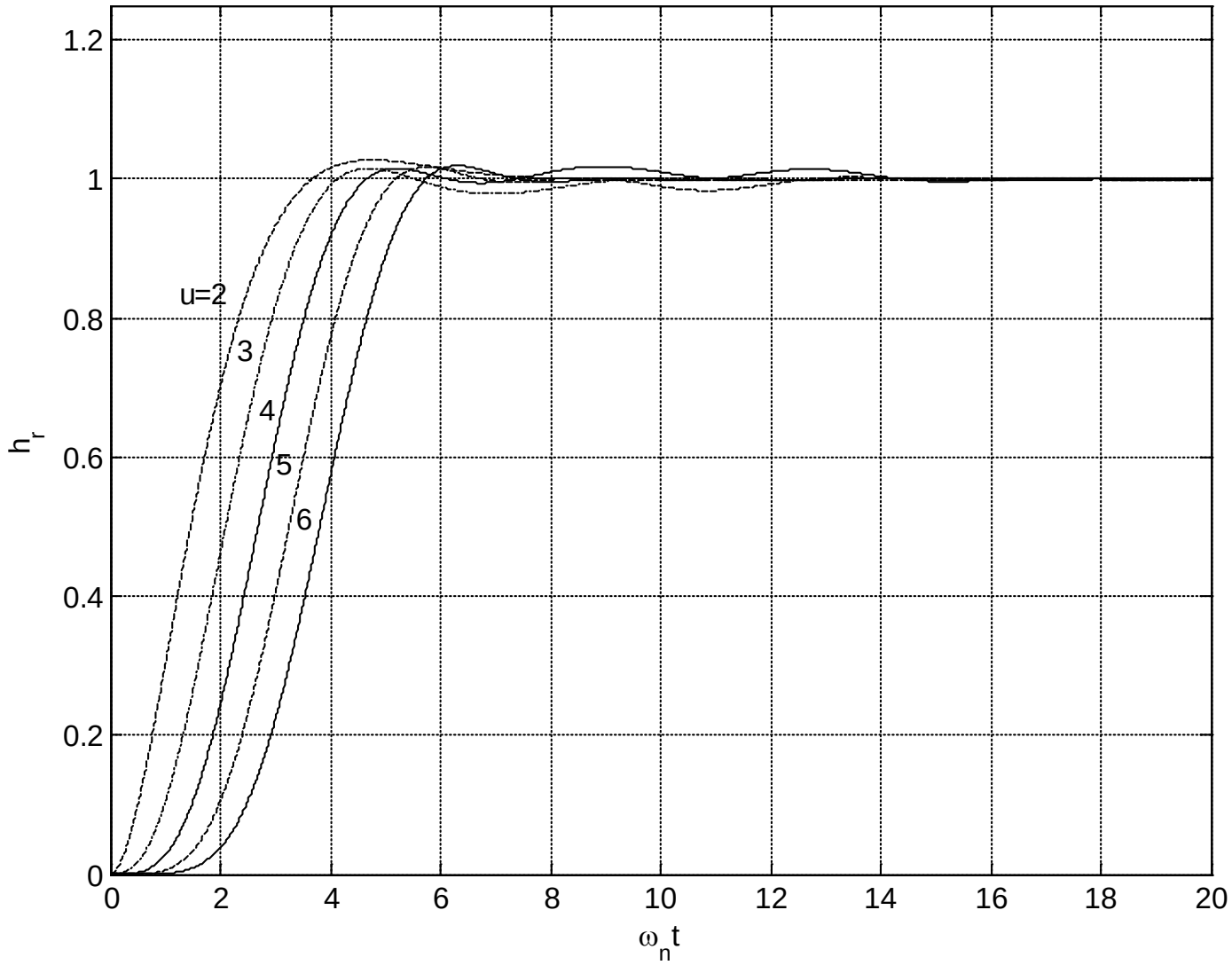
$$s^3 + 1.783\omega_n s^2 + 2.172\omega_n{}^2 s + \omega_n{}^3$$

$$s^4 + 1.953\omega_n s^3 + 3.347\omega_n{}^2 s^2 + 2.648\omega_n{}^3 s + \omega_n{}^4$$

$$s^5 + 2.068\omega_n s^4 + 4.499\omega_n{}^2 s^3 + 4.675\omega_n{}^3 s^2 + 3.257\omega_n{}^4 s + \omega_n{}^5$$

$$s^6 + 2.152\omega_n s^5 + 5.629\omega_n{}^2 s^4 + 6.934\omega_n{}^3 s^3 + 6.792\omega_n{}^4 s^2 + 3.740\omega_n{}^5 s + \omega_n{}^6$$

- Njima pridružene $\boxed{h_r(\omega_n t)}$ prikazane su na slici 6.4.



Sl. 6.4. Prijelazne funkcije za modelske oblike prema kriteriju (6-5)

- Standardni oblik, koji se zasniva na integralnom kriteriju, kojim se **minimizira vrijeme ustaljivanja t_ε** također se često koristi.
- Primjerice, standardni polinomi za minimalno vrijeme smirivanja uz vrijednost $t_{5\%}$ glase:

$$s+\omega_n$$

$$s^2+1.4\omega_n s+\omega_n{}^2$$

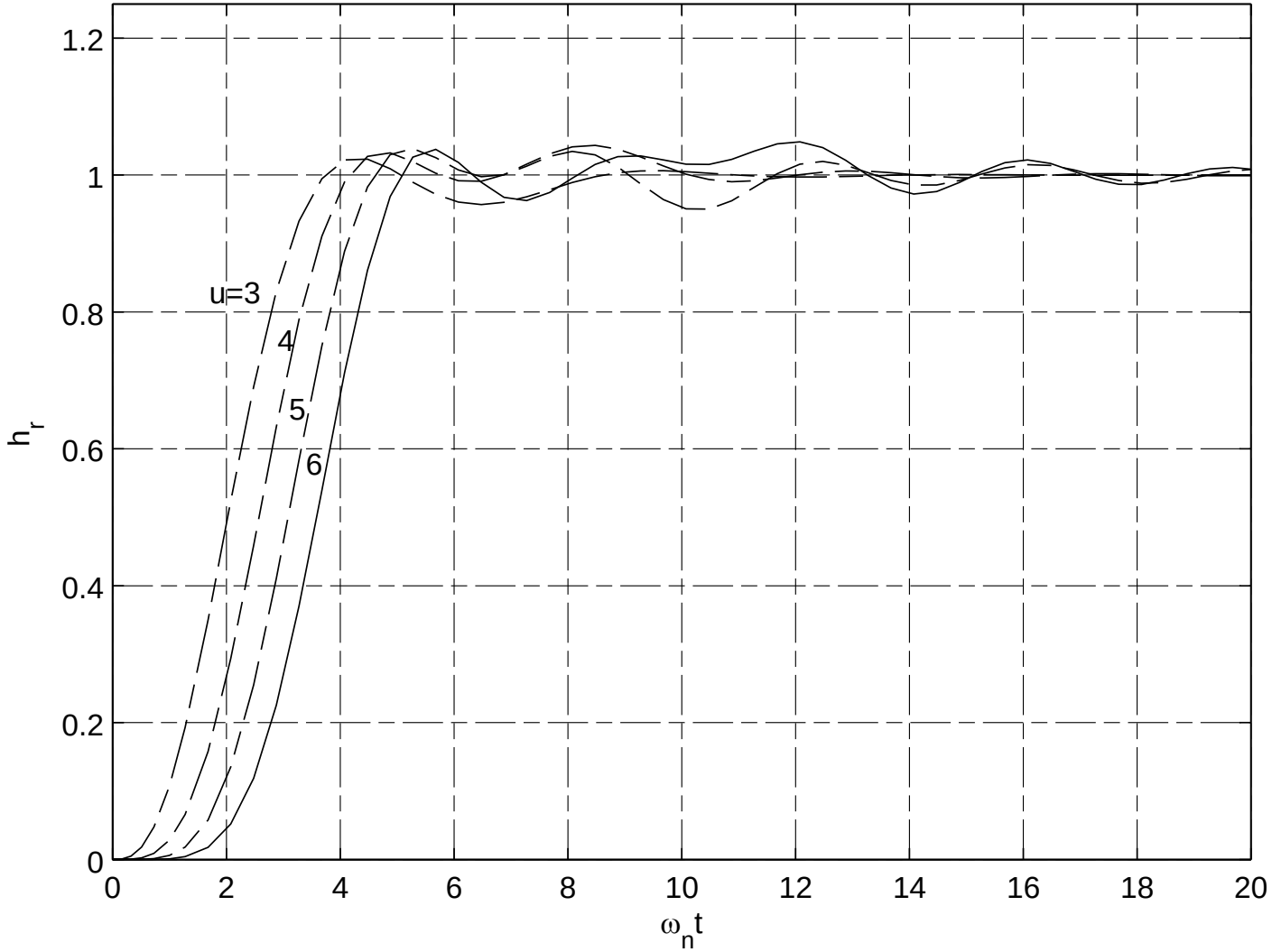
$$s^3+1.55\omega_n s^2+2.10\omega_n{}^2 s+\omega_n{}^3$$

$$s^4+1.60\omega_n s^3+3.15\omega_n{}^2 s^2+2.45\omega_n{}^3 s+\omega_n{}^4$$

$$s^5+1.575\omega_n s^4+4.05\omega_n{}^2 s^3+4.10\omega_n{}^3 s^2+3.025\omega_n{}^4 s+\omega_n{}^5$$

$$s^6+1.45\omega_n s^5+5.10\omega_n{}^2 s^4+5.30\omega_n{}^3 s^3+6.25\omega_n{}^4 s^2+3.425\omega_n{}^5 s+\omega_n{}^6$$

- Njima pridružene $\boxed{h_r(\omega_n t)}$ prikazane su na slici 6.5.



Sl. 6.5. Prijelazne funkcije za modelske oblike za minimalno t_ε

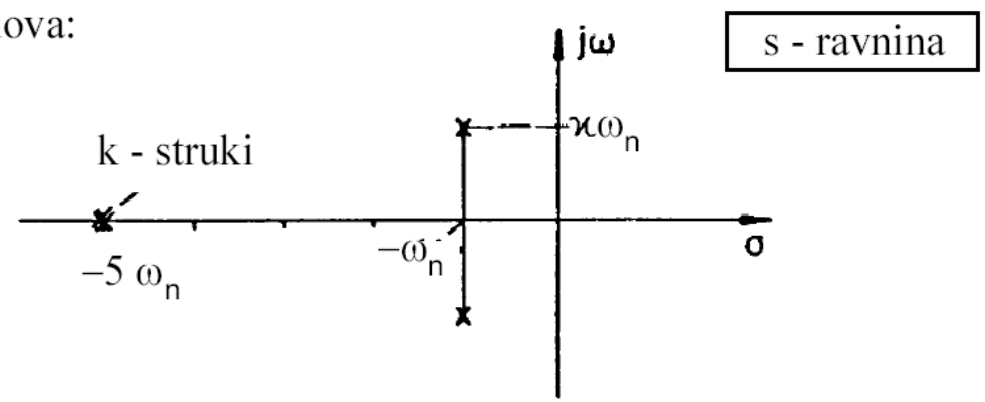
d) Weberov oblik

- Željena prijenosna funkcija zatvorenog sustava prema Weberu glasi:

$$\boxed{G_m(s) = \frac{5^k \cdot \left(1+\kappa^2\right) \cdot \omega_n^{k+2}}{\left(s+\omega_n + j\kappa\omega_n\right) \cdot \left(s+\omega_n - j\kappa\omega_n\right) \cdot \left(s+5\omega_n\right)^k}}. \qquad (6\text{-}6)$$

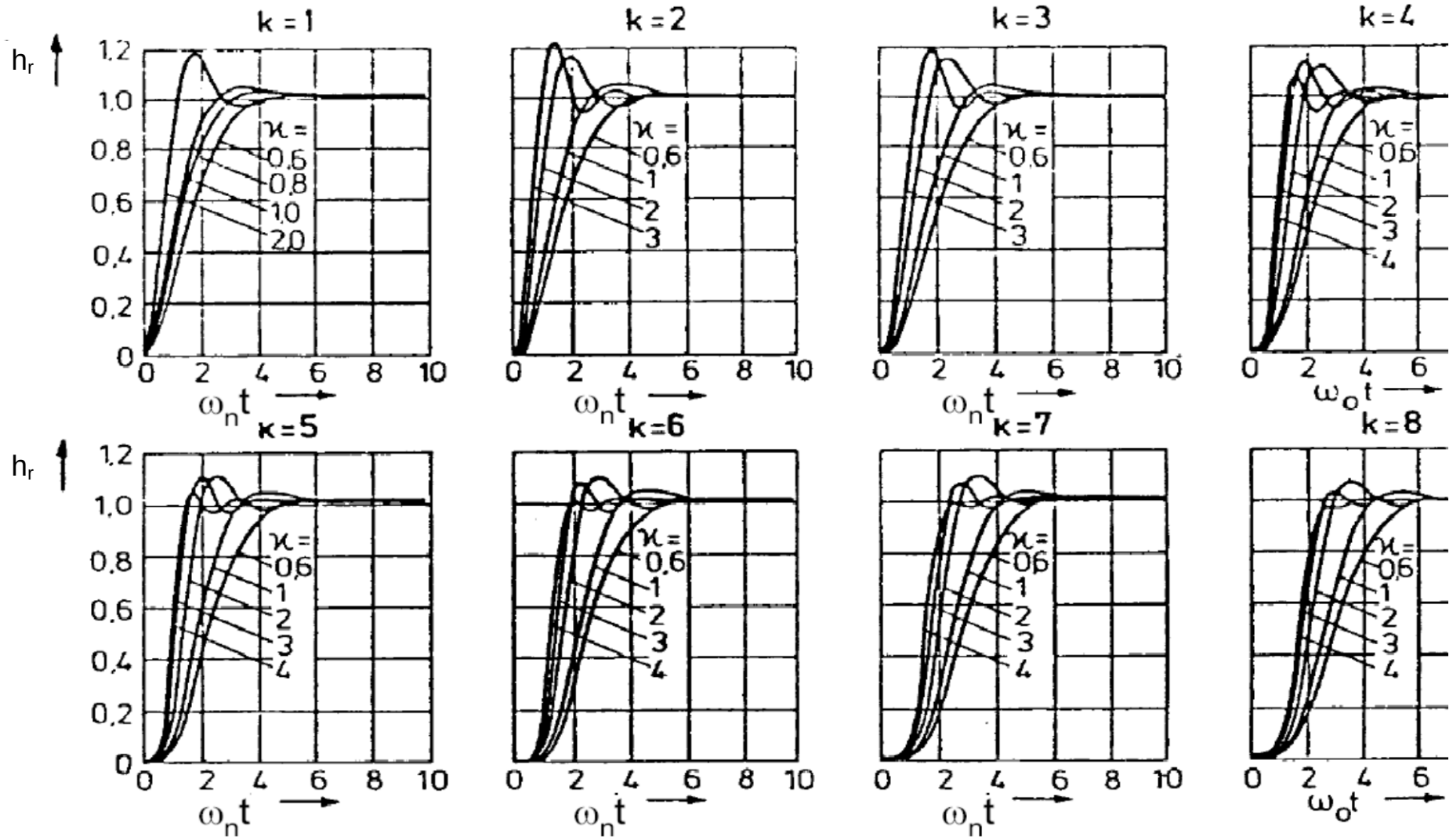
- Radi se o prijenosnoj funkciji koja ima jedan k-struki realni pol (k = u - 2) i jedan kompleksni par polova.

razmještaj polova:



- Odabir κ, ***k*** i $\boldsymbol{\omega_n}$ se radi s obzirom na konkretnu primjenu.
- Prijelazne funkcije $h_r(\omega_n t)$ za različite vrijednosti ***k*** i κ dane su na slici 6.6.

© Ivan Petrović

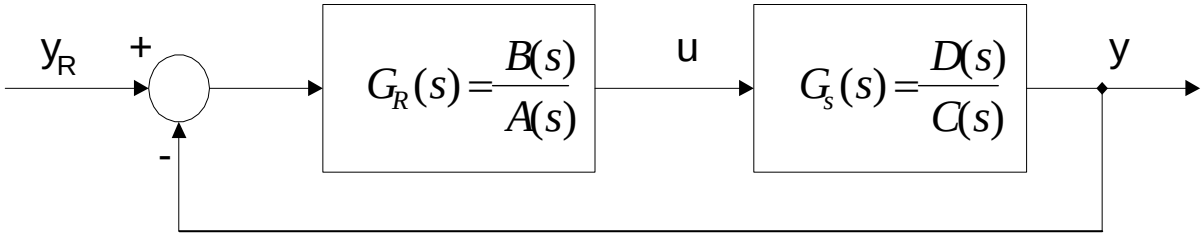


Sl. 6.6. Prijelazne funkcije za Weberove modelske oblike

© Ivan Petrović

6.2. Postupak sinteze prema Truxal-Guilleminu (TG postupak):

- Razmatra se regulacijski krug prikazan na slici 6.7. (DESNO)



- Proces $G_s(s)$ opisan je racionalnom prijenosnom funkcijom (6-7):

$$G_s(s)=\frac{D(s)}{C(s)}=\frac{d_0+d_1s+\cdots+d_ms^m}{c_0+c_1s+\cdots+c_ns^n}$$

- Pretpostavke:
  - polinomi brojnika D(s) i nazivnika C(s) nemaju zajedničke korijene;
  - proces je stabilan i posjeduje svojstva minimalne faze;
  - m < n.

- Prijenosna funkcija regulatora kojega treba projektirati (6-8):

$$G_R(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{b_0+b_1s+\cdots+b_ws^w}{a_0+a_1s+\cdots+a_zs^z}.$$

- Pri tome mora biti ispunjen uvjet realizacije (**w ≤ z**).
- $G_m(s)$ može, uz uvjet realizacije regulatora, imati proizvoljan oblik.

© Ivan Petrović

- Regulator treba tako projektirati da prijenosna funkcija zatvorenog sustava odgovara modelskoj prijenosnoj funkciji $G_m(s)$:

$$\boxed{G_r(s) \overset{!}{=} G_m(s) = \frac{\alpha(s)}{\beta(s)} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 s + \cdots + \alpha_v s^v}{\beta_0 + \beta_1 s + \cdots + \beta_u s^u}, \quad u > v}. \qquad (6\text{-}9)$$

- Iz prijenosne funkcije s obzirom na referentnu vrijednost

$$\boxed{G_r(s) = \frac{G_R(s)G_s(s)}{1 + G_R(s)G_s(s)} \overset{!}{=} G_m(s)} \qquad (6\text{-}10)$$

slijedi prijenosna funkcija regulatora:

$$\boxed{G_R(s) = \frac{1}{G_s(s)} \frac{G_m(s)}{1 - G_m(s)}}. \qquad (6\text{-}11)$$

© Ivan Petrović

- Nakon uvrštenja polinoma $\alpha(s)$ i $\beta(s)$ za $G_m(s)$ dobije se:

$$\boxed{G_R(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{C(s)\alpha(s)}{D(s)\left[\beta(s) - \alpha(s)\right]}}. \qquad (6\text{-}12)$$

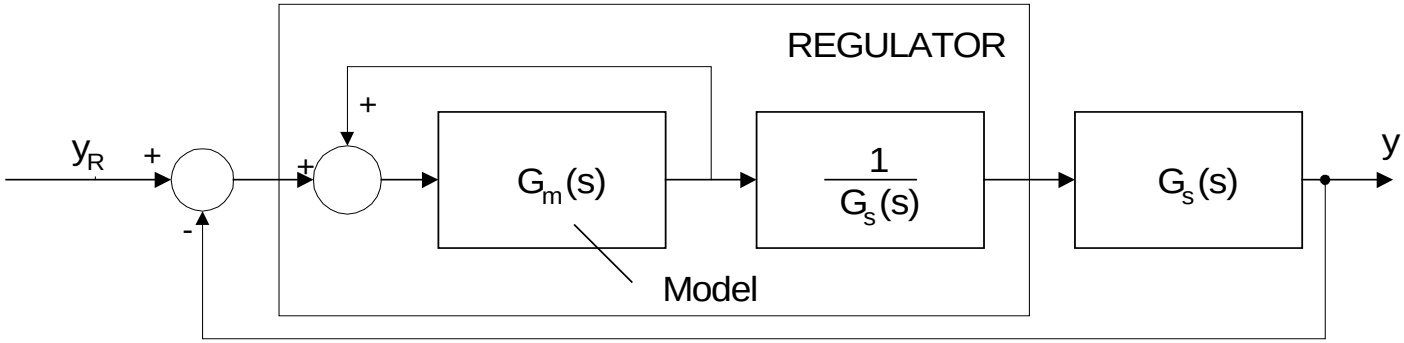
- U izrazu (6-12) mora biti ispunjeno **(uvjet realizacije regulatora)**:

Stupanj $B(s) = w = n + v \leq$ Stupanj $A(s) = z = u + m$, odakle slijedi:

$$\boxed{u - v \geq n - m}.$$

- Prema tome, "**polni višak**" (pole excess (engl.), Polüberschuß (njem.)) (**u-v**) željene prijenosne funkcije $G_m(s)$ mora biti veći (ili jednak) "polnom višku" (**n-m**) prijenosne funkcije procesa $G_s(s)$.

- U prijenosnoj funkciji regulatora $G_R(s)$ pojavljuje se $G_s(s)^{-1}$.
- Dakle, regulatorom bi se moglo **potpuno kompenzirati dinamičko vladanje** procesa.
- Stoga se regulator koji ima strukturu kao (6-11) naziva **kompenzacijskim regulatorom**.
- Regulacijski krug koji ima regulator prema (6-11) može se prikazati kao na slici 6.8.



Sl. 6.8.

- Potrebno je imati u vidu uvjet realizacije.

- Opisanim TG postupkom određen je kontinuirani regulator, koji je optimalne strukture i optimalnih parametara s obzirom na zadanu prijenosnu funkciju procesa i željenu (modelsku) prijenosnu funkciju zatvorenog regulacijskog kruga.

- Međutim, konačni je cilj sinteze određivanje prijenosne funkcije $G_R(z)$ (odnosno rekurzivne jednadžbe) digitalnog regulatora.

- Kako je već opisano u 3. poglavlju prijenosna funkcija digitalnog regulatora $G_R(z)$ može se dobiti:

  - **emulacijom prijenosne funkcije** $G_R(s)$, pri čemu se utjecaj procesa uzorkovanja može zanemariti (metoda EMUL1) ili uzeti u obzir (metoda EMUL2).

  - neposrednom sintezom u diskretnom području (metoda 3).

© Ivan Petrović

TG postupak sinteze digitalnog regulatora EMUL1 metodom:

- Nakon što je određena prijenosna funkcija kontinuiranog regulatora $G_R(s)$, prema izrazu (6-11) ili (6-12), $G_R(z)$ se određuje kroz dva dodatna koraka:
  - **1. korak - Izbor vremena uzorkovanja *T***: prema ω_b modelske prijenosne $G_m(s)$ ili prema vremenu porasta t_r pripadne prijelazne funkcije.
  - **2. korak - diskretizacija regulatora:** Dobiveni kontinuirani regulator $G_R(s)$ jednostavno se diskretizira nekim od postupaka diskretizacije digitalnih filtara, npr. Tustinovim postupkom:

$$\boxed{G_R(z) = G_R(s)\Big|_{s=\frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1}}}$$

© Ivan Petrović

TG postupak sinteze digitalnog regulatora EMUL2 metodom:

- Postupak je identičan prethodnom koraku, ali je ZOH aproksimiran nadomjesnom prijenosnom funkcijom u *s*-području:

$$G_{ZOH}(s) = \frac{1}{1 + \frac{T}{2}s}$$

i dobivena je nadomjesna prijenosna funkcija procesa:

$$\boxed{G_s'(s) = G_{ZOH}(s) G_s(s)}$$

- Dodavanjem $G_{ZOH}(s)$ u prijenosnu funkciju procesa povećan je „polni višak“ procesa za jedan (***n-m+1***), pa je i minimalni „polni višak“ modelske funkcije za jedan veći nego kod EMUL1 metode (***u-v+1***).
- Dakle, postupak sinteze je sljedeći:
  - **1. korak** – izabrati $G_m(s)$ prema $G'_s(s)$, tj. s „polnim viškom“ ≥ ***n-m+1***
  - **2. korak** – izabrati vrijeme uzorkovanja (kao kod EMUL1) i odrediti $G_{ZOH}(s)$
  - **3. korak** – odrediti $G'_s(s)$ te $G_R(s)$ prema (6-11) ili (6-12)
  - **4. korak** – odrediti $G_R(z)$ kao kod EMUL1 metode.

Primjer 6.1:

- Neka je proces opisan prijenosnom funkcijom

$$\boxed{G_s(s) = \frac{5}{s\left(s^2 + 1{,}4s + 1\right)} = \frac{D(s)}{C(s)}},$$

- "Polni višak" procesa iznosi: *n* - *m* = 3 - 0 = 3.

- Prema (6-12) slijedi "polni višak" za $G_m(s)$: $\boxed{u - v \geq 3}$.
- Izbor parametara prijenosne funkcije $G_m(s)$, koji određuju položaje njenih polova i nula, nije potpuno proizvoljan.
- **Praktična ograničenja** koja se postavljaju na $G_m(s)$, a time i na regulator, odnose se na:

a) **maksimalno dopušteno područje promjene izvršne veličine u(t);**

b) **netočnosti parametara $G_s(s)$ ili njihovo mijenjanje s vremenom;**

c) **šum u mjernom signalu koji se prenosi preko regulatora na proces.**

- Uvažavajući navedena ograničenja, za $G_m(s)$ se može odabrati bilo koji standardni oblik.

- Ako se odabere standardni Butterworthov oblik 3. reda (u - v = 3)

$$\boxed{G_{\mathbf{m}3}(s) = \frac{\alpha(s)}{\beta(s)} = \frac{\omega_n^3}{s^3 + 2\omega_n s^2 + 2\omega_n^2 s + \omega_n^3}}$$

dobije se regulator:

$$\boxed{G_R(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{C(s)\alpha(s)}{D(s)\left[\beta(s)-\alpha(s)\right]}=\frac{\omega_n^3}{5}\cdot\frac{s^2+1,4s+1}{s^2+2\omega_n s+2\omega_n^2}}$$

- Linearni regulator drugog reda (aktivni filtar drugog reda).

- Neka se, primjerice, zahtijeva ulazno vrijeme $\boxed{t_u=2s}$.
  - Iz normirane prijelazne funkcije $h_r(\omega_n t)$ za Butterworthov oblik 3. reda dobije se:

$$\boxed{\omega_n t_u \approx 3,8}, \qquad \boxed{\omega_n \approx \frac{3,8}{t_u}=\frac{3,8}{2}=1,9s^{-1}}.$$

- Prema tome, prijenosna funkcija **<u>kontinuiranog regulatora</u>** glasi:

$$\boxed{G_R(s)=1,37\cdot\frac{s^2+1,4s+1}{s^2+3,8s+7,22}}$$

Određivanje digitalnog regulatora EMUL1 metodom:

1. korak – odabir vremena uzorkovanja:

$$T = \frac{t_u}{4 \div 12} \xrightarrow{npr.} T = \frac{t_u}{5} = \frac{2s}{5} = 0,4s$$

2. korak - diskretizacija regulatora; određivanje $G_R(z)$ (**EMUL1 regulator**):

$$\boxed{G_R(z) = G_R(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}} = 1,37 \cdot \frac{s^2 + 1,4s + 1}{s^2 + 3,8s + 7,22}\Bigg|_{s=5\cdot\frac{z-1}{z+1}}}$$

$$\boxed{G_R(z) = \frac{0.88 - 1,29z^{-1} + 0,51z^{-2}}{1 - 0,69z^{-1} + 0,26z^{-2}}}$$

Određivanje digitalnog regulatora EMUL2 metodom:

1. korak – zbog $G_{ZOH}(s)$ izabiremo $G_m(s)$ Butterworthov oblik 4. reda (u-v+1=4)

$$\boxed{G_{\mathbf{m}4}(s)=\frac{\alpha(s)}{\beta(s)}=\frac{\omega_n^4}{s^4+2,6\omega_n s^3+3,4\omega_n^2 s^2+2,6\omega_n^3 s+\omega_n^4}}$$

2. korak – odabir vremena uzorkovanja:

$$T=\frac{t_u}{4\div 12}\xrightarrow{npr.}T=\frac{t_u}{5}=\frac{2s}{5}=0,4s\,,\quad \boxed{G_{ZOH}(s)=\frac{1}{1+\frac{T}{2}s}=\frac{1}{1+0,2s}}$$

3. korak – određivanje $G'_s(s)$ i $G_R(s)$:

$$\boxed{G'_s(s)=\frac{5}{s\left(1+1,4s+s^2\right)(1+0,2s)}=\frac{D(s)}{C'(s)}}$$

$$\boxed{G_R(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{C'(s)\alpha(s)}{D(s)\left[\beta(s)-\alpha(s)\right]}=\frac{\omega_n^4}{5}\cdot\frac{\left(s^2+1,4s+1\right)\left(1+0,2s\right)}{s^3+2,6\omega_n s^2+3,4\omega_n^2 s+2,6\omega_n^3}}$$

© Ivan Petrović

- Iz normirane prijelazne funkcije $h_x(\omega_n t)$ za Butterworthov oblik 4. reda dobije se:

$$\boxed{\omega_n t_u \approx 4,2}, \qquad \boxed{\omega_n \approx \frac{4,2}{t_u} = \frac{4,2}{2} = 2,1s^{-1}}.$$

- što uvršteno u prijenosnu funkciju $G_R(s)$ daje:

$$G_R(s) = 3,89 \cdot \frac{\left(s^2 + 1,4s + 1\right)\left(1 + 0,2s\right)}{s^3 + 5,46s^2 + 14,99s + 24,08} =$$

$$= 0.78 \frac{\left(s^2 + 1,4s + 1\right)\left(s + 5\right)}{\left(s + 3,13\right)\left(s^2 + 2,33s + 7.59\right)}$$

4. korak – određivanje $G_R(z)$ (**<u>EMUL2 regulator</u>**):

$$G_R(z) = G_R(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}} = 3,89 \cdot \frac{\left(s^2 + 1,4s + 1\right)\left(1 + 0,2s\right)}{s^3 + 5,46s^2 + 14,99s + 24,08}\Bigg|_{s=5\cdot\frac{z-1}{z+1}}$$

$$G_R(z) = \frac{0,71 - 1,04z^{-1} + 0,41z^{-2}}{1 - 1,01z^{-1} + 0,65z^{-2} - 0,11z^{-3}} =$$

$$= 0,71 \frac{1 - 1,45z^{-1} + 0,58z^{-2}}{\left(1 - 0,23z^{-1}\right)\left(1 - 0,78z^{-1} + 0,47z^{-2}\right)}$$

Primjer 6.2:

- Za statički proces opisan prijenosnom funkcijom:

$$G_s(s) = \frac{1}{(1+s)^2(1+5s)} = \frac{1}{1 + 7s + 11s^2 + 5s^3} = \frac{D(s)}{C(s)}$$

treba projektirati regulator prema standardnom obliku $G_m(s)$ proisteklom iz kriterija:

$$\boxed{\int_0^\infty \left|e(t)\right| \cdot t \cdot dt}$$

tako da se dobije $t_{a,50} = 2s$.

- Za $G_s(s)$ "polni višak" je ***n - m = 3*** $\rightarrow$ za $G_m(s)$ je "polni višak" $\boxed{u - v \geq 3}$.
- Za $\int_0^\infty \left|e(t)\right| t\, dt$ i za *u* = 3 i *v* = 0 dobije se standardni polinom (slajd 13):

$$\boxed{\beta(s) = s^3 + 1{,}75\omega_n s^2 + 2{,}15\omega_n^2 s + \omega_n^3}.$$

- Iz normiranih prijelaznih funkcija $h_r(\omega_n t)$ dobije se:

$$\boxed{\omega_n t_{a,50} \approx 2},$$

$$\boxed{\omega_n \approx \frac{2}{t_{a,50}} = \frac{2}{2} = 1s^{-1}}.$$

- Slijedi:

$$\boxed{\beta(s) = s^3 + 1,75s^2 + 2,15s + 1, \qquad \alpha(s) = 1}.$$

- Prema (6-12) dobije se:

$$\boxed{G_R(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{C(s)\alpha(s)}{D(s)\left[\beta(s) - \alpha(s)\right]} = \frac{1 + 7s + 11s^2 + 5s^3}{1 \cdot \left[1 + 2,15s + 1,75s^2 + s^3 - 1\right]}},$$

$$\boxed{G_R(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{1 + 7s + 11s^2 + 5s^3}{s\left(2,15 + 1,75s + s^2\right)}}.$$

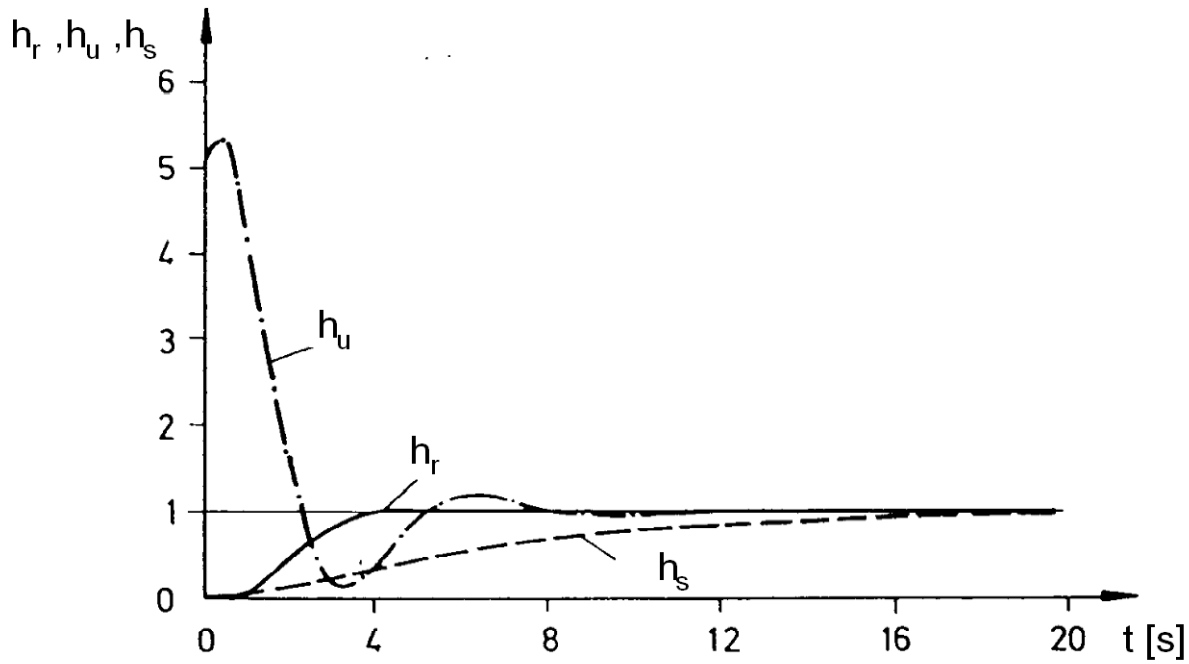
- Prema tome, ovaj regulator posjeduje I- djelovanje.

- Vladanje sustava upravljanja s tako projektiranim regulatorom prikazano je na slici 6.11.

- **Digitalni regulator za primjer 6.2 može se projektirati nekim od opisanih postupaka (EMUL1, EMUL2), kao što je provedenu u primjeru 6.1.**

- **Nadalje se sva razmatranja provode u kontinuiranom području, a studentima se preporuča da za vježbu projektiraju odgovarajuće digitalne regulatore.**

© Ivan Petrović



Sl. 6.11. Prijelazne funkcije zatvorenog regulacijskog kruga iz pr. 6.2.

- h_r - prijelazna funkcija zatvorenog regulacijskog kruga s obzirom na referentnu vrijednost;
- h_u - prijelazna funkcija pripadajuće upravljačke veličine;
- h_s - prijelazna funkcija nereguliranog procesa.

Primjer 6.3.:

- Za proces kao u primjeru 6.1 (astatičan proces): $$\boxed{G_s(s) = \frac{5}{s\left(1+1,4s+s^2\right)}}$$

  neka je odabrana $G_m(s)$ kao u primjeru 6.2.: $$\boxed{G_m(s) = \frac{1}{s^3+1,75s^2+2,15s+1}}.$$

- Pomoću (6-12) ($G_R(s) = \dfrac{B(s)}{A(s)} = \dfrac{C(s)\alpha(s)}{D(s)\left[\beta(s)-\alpha(s)\right]}$) dobije se:

$$\boxed{G_R(s) = \frac{1+1,4s+s^2}{10,75+8,75s+5s^2}}.$$ (Regulator bez I djelovanja)

- **Iz primjera 6.2. i 6.3 proizlazi da se može postići jednako vladanje zatvorenog sustava za sasvim različite procese.**

© Ivan Petrović

- Pretpostavlja se da su izvršne veličine u(t) u dopuštenom području vrijednosti.

- Na temelju dosadašnjih razmatranja proizlazi da je **struktura regulatora** određena strukturom procesa i modelskom prijenosnom funkcijom $G_m(s)$.

- **Parametri tako strukturiranog regulatora** proizlaze iz parametara procesa, parametara modelske prijenosne funkcije $G_m(s)$ i postavljenih zahtjeva na sustav upravljanja.

- Dosadašnja razmatranja odnosila su se na **procese** koji su **stabilni** i imaju svojstva **minimalne faze**.

- Za procese koji ne ispunjavaju navedene pretpostavke opisani postupak sinteze uvjetno je primjenljiv.

- U tom slučaju regulatorom se ne smiju kompenzirati polovi i nule $G_s(s)$ koje se nalaze u desnoj poluravnini s-ravnine jer bi i kod malih promjena položaja nula i polova (uslijed malih promjena parametara procesa) nastupili problemi stabilnosti. Stoga se ne može u ovim slučajevima proizvoljno odabrati $G_m(s)$.
- Korijeni karakteristične jednadžbe zatvorenog sustava upravljanja su korijeni jednadžbe

$$1 + G_s G_R = 0$$

$$1 + \frac{D}{C}\frac{B}{A} = 0$$

$$CA + DB = 0$$

- Neka se pol procesa (s-a) krati s nulom regulatora:

$$C(s) = (s-a)\bar{C}(s)$$

$$B(s) = (s-a)\bar{B}(s)$$

- Karakteristična jednadžba postaje

$$(s-a)\bar{C}(s)A(s)+D(s)(s-a)\bar{B}(s)=0$$

$$(s-a)(A\bar{C}+D\bar{B})=0$$

- Zajednički faktor ostaje faktor karakteristične jednadžbe!

$$G_R=\frac{1}{G_s}\frac{G_m}{1-G_m}$$

- Za procese s neminimalnim faznim vladanjem mora se $G_m(s)$ tako odrediti da su nule od $G_m(s)$ jednake nulama $G_s(s)$ koje su smještene u desnoj poluravnini s-ravnine => izbor $G_m(s)$ značajno je ograničen.

- Za nestabilne procese mora prijenosna funkcija $(1-G_m(s))$ posjedovati nule koje su jednake polovima $G_s(s)$ koji su smješteni u desnoj poluravnini s-ravnine.

- **Primjena analitičkih postupaka sinteze za procese s neminimalnim faznim vladanjem i za nestabilne procese ilustrirana je primjerima 6.4. i 6.5.**

Primjer 6.4.: *Proces s neminimalno faznim vladanjem*

- Za proces s neminimalno faznim vladanjem (svepropusni član prvog reda):

$$\boxed{G_s(s) = \frac{1 - T_s s}{1 + T_s s}}$$

treba projektirati regulator tako da zatvoreni regulacijski krug ima željenu prijenosnu funkciju:

a) $$\boxed{G_m(s) = \frac{1}{1 + T_1 s}}.$$

- Prema (6-12) ($G_R(s) = \dfrac{C(s)\alpha(s)}{D(s)\left[\beta(s) - \alpha(s)\right]}$)dobije se: $$\boxed{G_R(s) = \frac{1 + T_s s}{1 - T_s s}\frac{1}{T_1 s}}.$$

- Ovaj bi regulator neposredno kompenzirao nulu procesa ($s = 1/T_s$), što je, kako je navedeno, nepoželjno $\Rightarrow$ **Odabrana $G_m(s)$ nije prihvatljiva**.
- Stoga se odabire $G_m(s)$ na sljedeći način ($G_m(s)$ ima svojstva neminimuma faze):

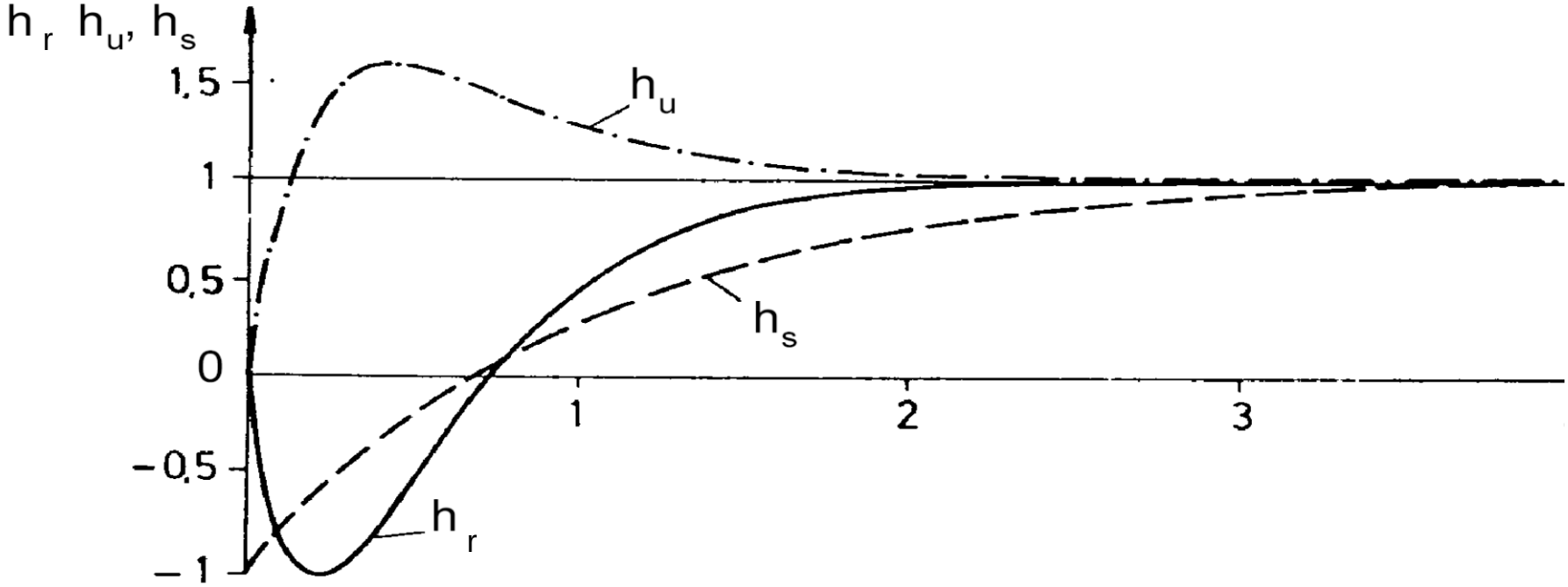
b)
$$\boxed{G_m(s) = \frac{1 - T_s s}{(1 + T_1 s)^2}}.$$

- Prema (6-11) $G_R(s) = \dfrac{1}{G_s(s)} \dfrac{G_m(s)}{1 - G_m(s)}$ dobije se:

$$\boxed{G_R(s) = \frac{1 + T_s s}{s\left[(2T_1 + T_s) + T_1^2 s\right]}}.$$

© Ivan Petrović

- Vladanje sustava upravljanja, s procesom koji ima neminimalno fazna svojstva, prikazano je na slici 6.12.



Sl. 6.12. Prijelazne funkcije zatvorenog regulacijskog kruga iz pr. 6.4.

- h_r - prijelazna funkcija zatvorenog regulacijskog kruga s obzirom na referentnu vrijednost;

- h_u - prijelazna funkcija pripadajuće upravljačke veličine;
- h_s - prijelazna funkcija nereguliranog procesa.

Primjer 6.5.: *Nestabilni proces*

- Za nestabilni proces $$\boxed{G_s(s) = \frac{1}{1 - T_s s} = \frac{D(s)}{C(s)}}$$

potrebno je projektirati regulator tako da:

$(1 - G_m(s))$ ima nulu u $s = +\dfrac{1}{T_s}$ (to je vrijednost nestabilnog pola procesa):

$$\boxed{1 - G_m(s) = 1 - \frac{\alpha(s)}{\beta(s)} = \frac{\beta(s) - \alpha(s)}{\beta(s)} = \frac{(1 - T_s s) P(s)}{\beta(s)}}.$$

- Iz uvjeta realizacije (6-12) mora biti: $u - v \geq 1$ (jer je $n - m = 1$)
- Dakle, polinom P(s) treba tako odabrati da vrijedi:

$$\boxed{\text{stupanj}\left[(1-T_s s)\cdot P(s)\right]=\text{stupanj}\ \beta(s).} \qquad (6\text{-}13)$$

- Za konkretni slučaj odaberimo da je Stupanj $\beta(s) = 2$ i Stupanj $\alpha(s) = 1$, pa iz (6-13) slijedi:

Stupanj $P(s) = 1$

- **Kako odrediti parametre $G_m(s)$ u promatranom primjeru?**

- Prijenosna funkcija (1 - $G_m(s)$) može se prikazati na sljedeći način:

$$\boxed{1-G_m(s)=\frac{\bar{C}(s)P(s)}{\beta(s)}\Rightarrow G_m(s)=1-\frac{\bar{C}(s)P(s)}{\beta(s)}=\frac{\alpha(s)}{\beta(s)}}$$

odnosno:

$$\boxed{\beta(s)-\bar{C}(s)P(s)=\alpha(s)}. \qquad (6\text{-}14)$$

- U konkretnom slučaju je $\bar{C}(s)=(1-T_s s)$.
- Iz (6-14) dobije se uvrštenjem odgovarajućih polinoma:

$$\boxed{\beta_0+\beta_1 s+\beta_2 s^2-\left[(\bar{c}_0+\bar{c}_1 s)(p_0+p_1 s)\right]=\alpha_0+\alpha_1 s}.$$

© Ivan Petrović

- Sređenjem ovog izraza dobije se:

$$\boxed{(\beta_0 - \overline{c}_0 p_0) + (\beta_1 - \overline{c}_0 p_1 - \overline{c}_1 p_0)s + (\beta_2 - \overline{c}_1 p_1)s^2 = \alpha_0 + \alpha_1 s}.$$

- Iz toga slijedi:

$$\boxed{\beta_0 - \overline{c}_0 \cdot p_0 = \alpha_0 \xrightarrow{G_m(0)=1 \to \alpha_0 = \beta_0} p_0 = 0},$$

$$\boxed{\beta_1 - \overline{c}_0 \cdot p_1 - \overline{c}_1 \cdot p_0 = \alpha_1 \xrightarrow{\overline{c}_0 = 1} \beta_1 - p_1 = \alpha_1},$$

$$\boxed{\beta_2 - \overline{c}_1 \cdot p_1 = 0 \xrightarrow{\overline{c}_1 = -T_s} \beta_2 + T_s \cdot p_1 = 0}.$$

- Odaberemo: $\boxed{\beta_2 = 1} \quad \rightarrow \quad \boxed{p_1 = -\frac{1}{T_s}}$.

- Koeficijenti: α_0 i α_1 te β_0, β_1 i β_2 načelno se određuju prema željenoj dinamici sustava koja je određena s:

$$\boxed{G_m(s) = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 s}{\beta_0 + \beta_1 s + \beta_2 s^2} = \frac{1 + \alpha_1 s}{1 + \beta_1 s + s^2}}.$$ ($\alpha_0 = \beta_0 = 1$, $\beta_2 = 1$)

$$\boxed{\beta_1 - p_1 = \alpha_1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\beta_1 + \frac{1}{T_s} = \alpha_1}.$$

- Odabiremo:

$$\boxed{\alpha_1 = \frac{2}{T_s} \quad \rightarrow \quad \beta_1 = \frac{1}{T_s},}$$

pa se dobije:

$$\boxed{G_m(s) = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 s}{\beta_0 + \beta_1 s + \beta_2 s^2} = \frac{1 + \frac{2}{T_s} s}{1 + \frac{1}{T_s} s + s^2}},$$

($G_m(s)$ ne spada u prije razmatrane standardne oblike.)

odnosno:

$$\boxed{1-G_m(s)=\frac{(1-T_s s)(-\frac{s}{T_s})}{1+\frac{1}{T_s}s+s^2}}.$$

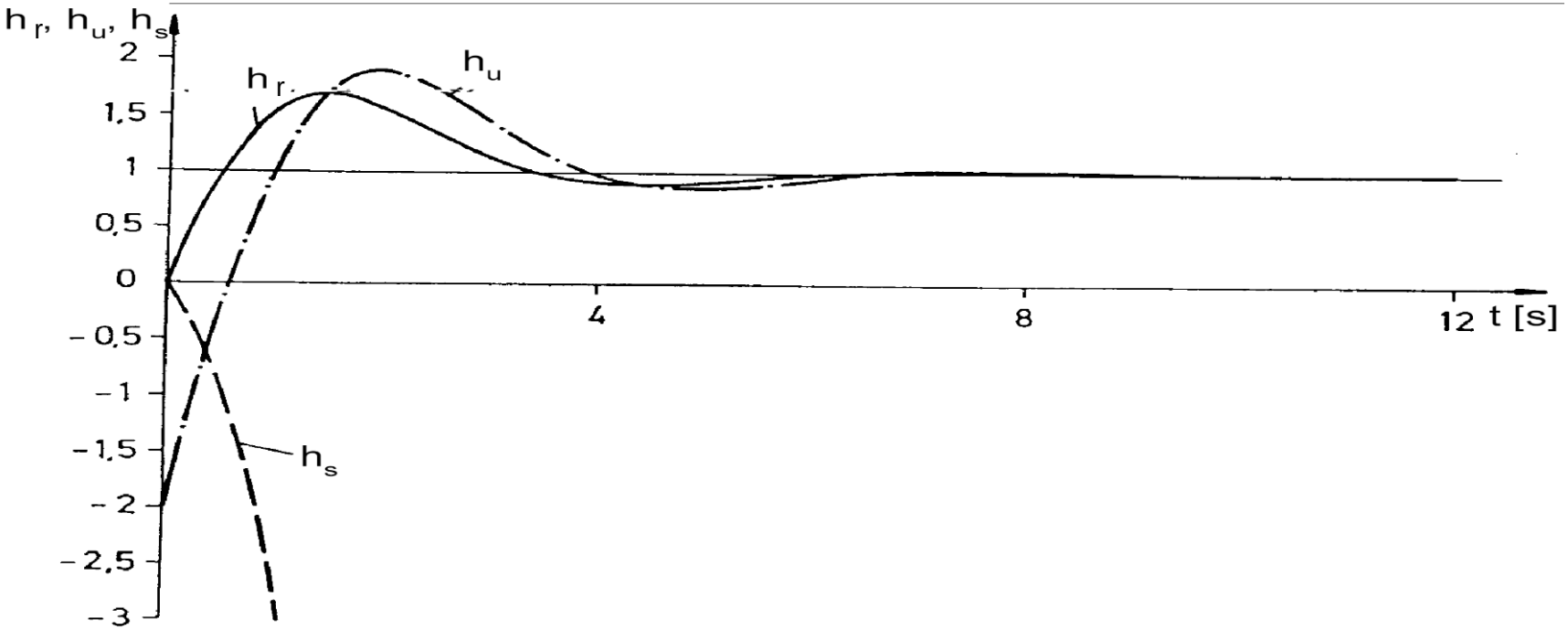
- Prema (6-11) slijedi:

$$\boxed{G_R(s)=\frac{1}{G_s(s)}\frac{G_m(s)}{1-G_m(s)}=(1-sT_s)\frac{\dfrac{1+\frac{2}{T_s}s}{1+\frac{1}{T_s}s+s^2}}{\dfrac{(1-sT_s)\left(-\frac{s}{T_s}\right)}{1+\frac{1}{T_s}s+s^2}}},$$

odnosno:

$$G_R(s) = \frac{1 + \frac{2}{T_s} s}{-\frac{1}{T_s} s} = -2\left(1 + \frac{T_s}{2}\frac{1}{s}\right).$$

- Vladanje sustava upravljanja, s nestabilnim procesom, prikazano je na slici 6.13 (za T_s = 1s):



Sl. 6.13. Prijelazne funkcije zatvorenog regulacijskog kruga iz pr. 6.5.

- h_r - prijelazna funkcija zatvorenog regulacijskog kruga s obzirom na referentnu vrijednost;
- h_u - prijelazna funkcija pripadajuće upravljačke veličine;
- h_s - prijelazna funkcija nereguliranog procesa.

TG postupak sinteze digitalnog regulatora u z-području (metoda 3 – Ragazzinijeva metoda):

- Koraci sinteze:
  - **1. korak** – izabrati vrijeme uzorkovanja kao kod EMUL1 i EMUL2 metoda
  - **2. korak** – diskretizirati prijenosnu funkciju procesa $G_s(s)$ primjenom ZOH transformacije $\rightarrow G_s(z)$
  - **3. korak** – na osnovi $G_s(z)$ i karakteristične jednadžbe željenog zatvorenog kruga u kontinuiranom području odabrati modelsku prijenosnu funkciju $G_m(z)$ – pronaći i uključiti ograničenja na $G_m(z)$
  - **4. korak** – Odrediti prijenosnu funkciju digitalnog regulatora $G_R(z)$, kako slijedi:

$$G_r(z) = \frac{Y(z)}{X_R(z)} = \frac{G_R(z)G_s(z)}{1+G_R(z)G_s(z)} \overset{!}{=} G_m(z),$$

$$\boxed{G_R(z) = \frac{1}{G_s(z)} \frac{G_m(z)}{1-G_m(z)},}$$

- **<u>Napomena</u>: Treba voditi računa o uvjetu realizacije regulatora, jer ZOH transformacija može unijeti neminimalno faznu nulu u prijenosnu funkciju $G_s(z)$, koja se ne smije pojaviti u $G_R(z)$ kao pol !!!**
- **<u>Mora vrijediti kauzalnost</u>**: Iz teorije z-transformacije prijenosna funkcija $G_R(z)$ je kauzalna ako nema pol u beskonačnosti (odnosno stupanj brojnika je manji od stupnja nazivnika). Pol u beskonačnosti u $G_R(z)$ će se pojaviti ako $G_s(z)$ ima nulu u beskonačnosti, osim ako ne zahtjevamo da ga pokrati $G_m(z)$.
- **<u>Ograničenje 1</u>**: $G_m(z)$ mora imati nulu u beskonačnosti istog reda kao proces $G_s(z)$

$$\boxed{G_m(z) = \frac{z^{-k}\left(b_0 + \ldots + b_m z^{-m}\right)}{a_0 + \ldots + a_n z^{-n}}}$$

- **<u>Ograničenje 2:</u>** $1-G_m(z)$ mora posjedovati nule koje su jednake polovima $G_s(z)$ izvan jedinične kružnice

© Ivan Petrović

- **Ograničenje 3:** $G_m(z)$ mora posjedovati nule koje su jednake nulama $G_s(z)$ izvan jedinične kružnice
- **Ograničenje točnosti u stacionarnom stanju pri odzivu na step**

$$e_\infty = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{1}{z-1}\left[1-G_m(z)\right] = 0 \Rightarrow G_m(1) = 1$$

- **Ograničenje točnosti u stacionarnom stanju – kinetička pogreška $1/K_v$**

$$e_\infty = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{Tz}{(z-1)^2}\left[1-G_m(z)\right] = \frac{1}{K_v}$$

$$(L'Hopital) \Rightarrow -T\left.\frac{dG_m}{dz}\right|_{z=1} = \frac{1}{K_v}$$

Vratimo se ponovo na primjer 6.1.

Određivanje digitalnog regulatora neposredno u z-području (metoda 3):

1. korak – odabir vremena uzorkovanja:

$$T = \frac{t_u}{4 \div 12} \xrightarrow{npr.} T = \frac{t_u}{5} = \frac{2s}{5} = 0,4s$$

2. korak – diskretizirati prijenosnu funkciju procesa $G_s(s) \rightarrow G_s(z)$

$$\boxed{G_s(z) = (1 - z^{-1}) Z\left\{\frac{G_s(s)}{s}\right\} = (1 - z^{-1}) Z\left\{\frac{5}{s^2\left(1 + 1,4s + s^2\right)}\right\}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} G_s(z) &= \frac{0,05z^{-1} + 0,16z^{-2} + 0,03z^{-3}}{1 - 2,45z^{-1} + 2,02z^{-2} - 0,57z^{-3}} = \\ &= 0,05\frac{z^{-1}\left(1 + 3,24z^{-1}\right)\left(1 + 0,23z^{-1}\right)}{\left(1 - z^{-1}\right)\left(1 - 1,45z^{-1} + 0,57z^{-2}\right)} \end{aligned}}$$

3. korak – na osnovi $G_s(z)$ i karakteristične jednadžbe željenog zatvorenog kruga u kontinuiranom području odabrati modelsku prijenosnu funkciju $G_m(z)$ – pronaći i uključiti ograničenja na $G_m(z)$

© Ivan Petrović

- Karakteristična jednadžba je diskretni ekvivalent kontinuirane karakteristične jednadžbe (pole placement) – treći red prema Butterworthu

$$s^3 + 2\omega_n s^2 + 2\omega_n^2 s + \omega_n^3 = 0$$

$$s^3 + 3.8s^2 + 7.22s + 6.859 = 0$$

$$\begin{matrix} s_{p1} = -1.9 \\ s_{p2,3} = -0.95 \pm 1.65j \end{matrix} \Rightarrow (z = e^{sT}) \begin{matrix} z_{p1} = 0.47 \\ z_{p2,3} = 0.54 \pm 0.42j \end{matrix}$$

$$z^3 - 1.55z^2 + 0.9737z - 0.2187 = 0$$

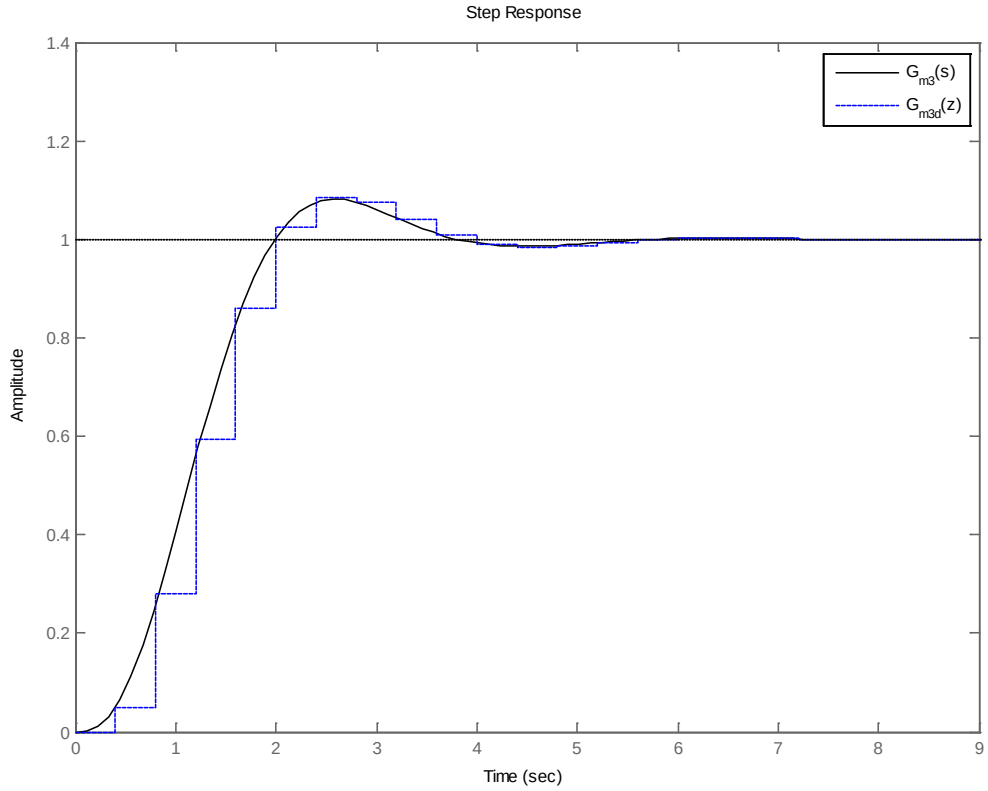
- Gs(z) ima 1-struku nulu u beskonačnosti
- $G_s(z)$ ima nestabilnu nulu **$(1+3{,}24z^{-1})$,** koja bi se preslikala u pol regulatora, pa da bi se to spriječilo i modelska funkcija treba imati tu nulu
- Stacionarna točnost - pojačanje G_m bude **1** za ***z*=1**

$$\boxed{G_{m3d}(z) = \frac{z^{-1}(1+3.24z^{-1})p_0}{1-1{,}55z^{-1}+0{,}97z^{-2}-0{,}22z^{-3}}}$$

© Ivan Petrović

- Potrebno je odrediti p_0 iz uvjeta za stacionarnu točnost

$$\boxed{G_{m3d}(1) = 1 \Rightarrow p_0 = 0.48}$$



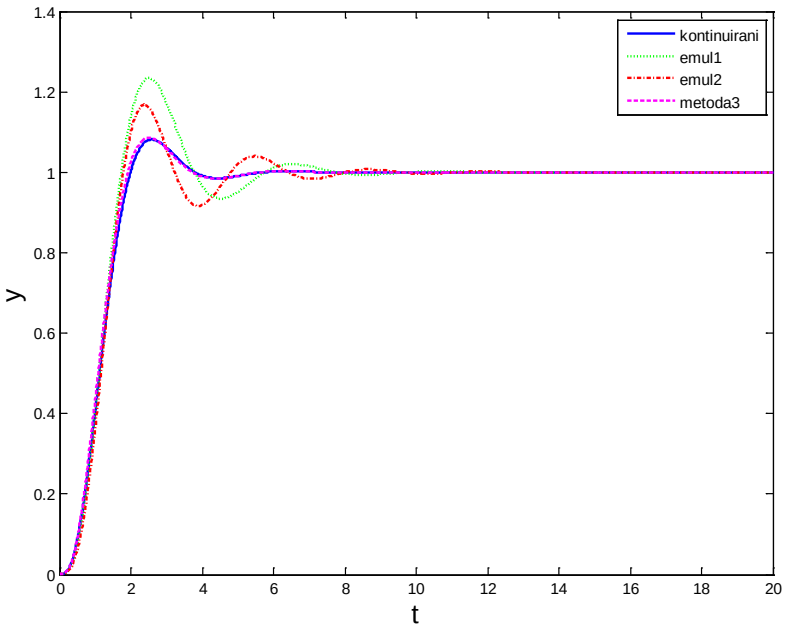
Sl. 6.9. Usporedba diskretne modelske funkcije s kontinuiranom.

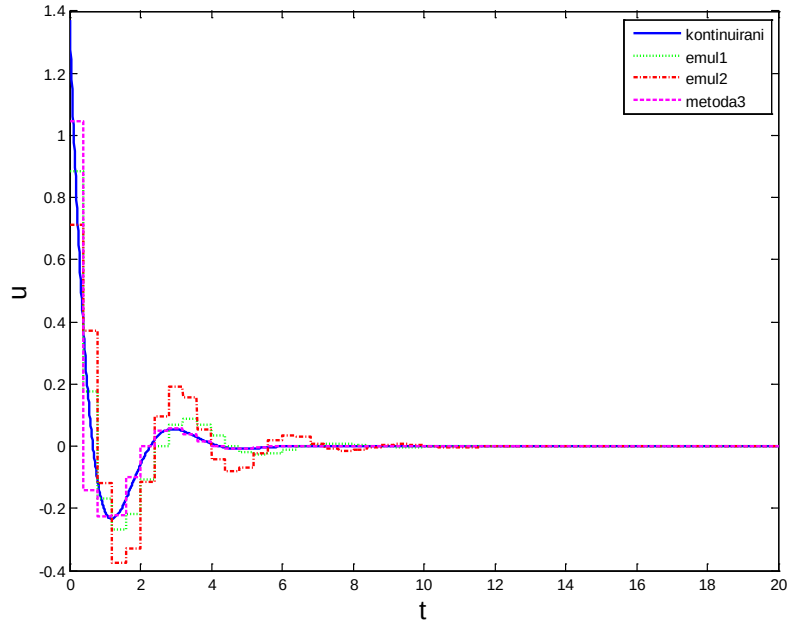
4. korak – Odrediti prijenosnu funkciju digitalnog regulatora $G_R(z)$, kako slijedi:

$$\boxed{G_R(z) = \frac{1}{G_s(z)} \frac{G_{m3d}(z)}{1 - G_{m3d}(z)},}$$

$$\boxed{\begin{aligned} G_R(z) &= \frac{1,05 - 1,52z^{-1} + 0,598z^{-2}}{1 - 0,36z^{-1} + 0,08z^{-2} + 0,05z^{-3}} = \\ &= 1,05 \frac{\left(1 - 1,45z^{-1} + 0,57z^{-2}\right)}{\left(1 + 0,23z^{-1}\right)\left(1 - 0,6z^{-1} + 0,22z^{-2}\right)} \end{aligned}}$$

Usporedba regulatora simulacijom sustava:





Sl. 6.10. Prijelazne funkcije zatvorenog regulacijskog kruga sa sva četiri projektirana regulatora u primjeru 6.1

- Nadvišenja prijelaznih funkcija: kontinuirani **8.15%**, EMUL1 **23.45%**, EMUL2 **16.77%**, metoda3 **8.63%.**

Primjer 6.6.

Proces je opisan prijenosnom funkcijom

$$G_s(s) = \frac{1}{s(10s+1)}$$

Projektirati diskretni regulator neposredno u diskretnom području tako da karakteristična jednadžba zatvorenog sustava upravljanja bude diskretni ekvivalent kontinuirane karakteristične jednadžbe

$$s^2 + s + 1 = 0$$

s vremenom uzorkovanja T=1. Sustav upravljanja mora biti stabilan, bez pogreške u stacionarnom stanju (odziv na step) i s kinetičkom pogreškom $1/K_v=1$.

Rješenje:

1. korak – vrijeme uzorkovanja je zadano

2. korak – diskretizirati prijenosnu funkciju procesa $G_s(s) \rightarrow G_s(z)$

$$\boxed{G_s(z) = (1-z^{-1})Z\left\{\frac{G_s(s)}{s}\right\} = 0.0484\frac{z^{-1}(1+0.9672z^{-1})}{(1-z^{-1})(1-0.9048z^{-1})}}$$

3. korak – na osnovi Gs(z) i karakteristične jednadžbe željenog zatvorenog kruga u kontinuiranom području odabrati modelsku prijenosnu funkciju Gm(z) – pronaći i uključiti ograničenja na Gm(z)

- Karakteristična jednadžba je diskretni ekvivalent kontinuirane karakteristične jednadžbe (pole placement)

$$s_{p1,2} = -0.5 \pm 0.866\,j \Rightarrow (z = e^{sT})z_{p1,2} = 0.393 \pm 0.462\,j$$

$$z^2 - 0.7859z + 0.3679 = 0$$

- Gs(z) ima 1-struku nulu u beskonačnosti
- $G_s(z)$ nema nestabilnu nulu
- Stacionarna točnost (na step i na rampu)

$$\boxed{G_{md}(z) = \frac{z^{-1}(b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots)}{1 - 0.7859z^{-1} + 0,3679z^{-2}}}$$

- Iz dvije jednadžbe za stacionarnu točnost moguće je odrediti samo dvije nepoznanice – b_0 i b_1 pa članove od b_2 na dalje zanemarujemo

© Ivan Petrović

$$G_{md}(1)=1\Rightarrow$$

$$\frac{b_0+b_1}{1-0.7859+0.3679}=1\Rightarrow$$

$$b_0+b_1=0.582$$

$$-T\left.\frac{dG_{md}}{dz}\right|_{z\to 1}=\frac{1}{K_v}\Rightarrow -\left.\frac{dG_{md}}{dz}\right|_{z\to 1}=1\Rightarrow$$

$$-\frac{\left.(-b_0z^{-2}-2b_1z^{-3})\right|_{z=1}(nazivnik(z=1))-\left.(0.7859z^{-2}-2\cdot 0.3679z^{-3})\right|_{z=1}(brojnik(z=1))}{(nazivnik(z=1))^2}=1\Rightarrow$$

$$b_0+2b_1=0.5318$$

$$b_0=0.6321$$

$$b_1=-0.05013$$

$$G_{md}(z)=\frac{z^{-1}(0.6321-0.05013z^{-1})}{1-0.7859z^{-1}+0,3679z^{-2}}$$

4. korak – Odrediti prijenosnu funkciju digitalnog regulatora $G_R(z)$, kako slijedi:

$$G_R(z) = \frac{1}{G_s(z)} \frac{G_{md}(z)}{1 - G_{md}(z)},$$

$$G_R(z) = \frac{13,06 - 12,85z^{-1} + 0,9372z^{-2}}{1 + 0,5492z^{-1} - 0,4043z^{-2}} =$$

$$= 13,06 \frac{(1 - 0,9z^{-1})(1 - 0,08z^{-1})}{\left(1 + 0,967z^{-1}\right)\left(1 - 0,418z^{-1}\right)}$$

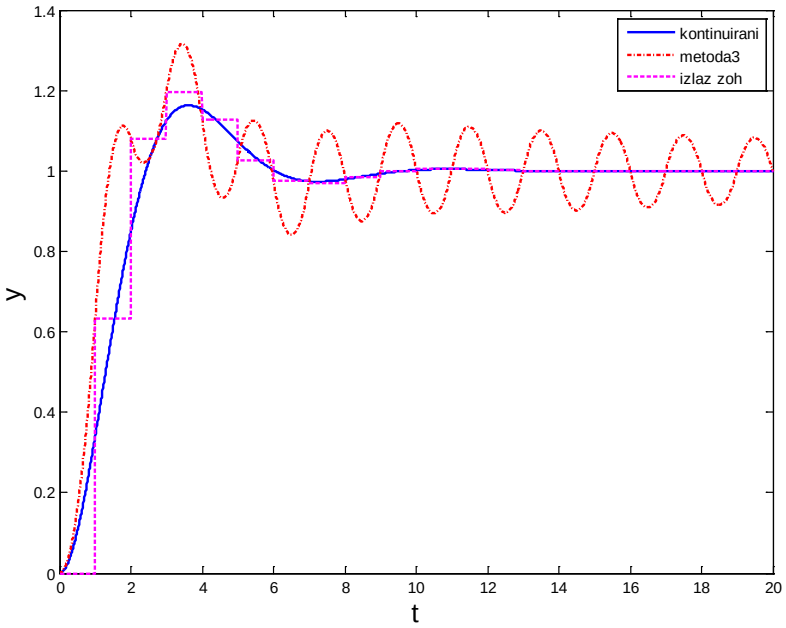
Usporedba regulatora simulacijom sustava:

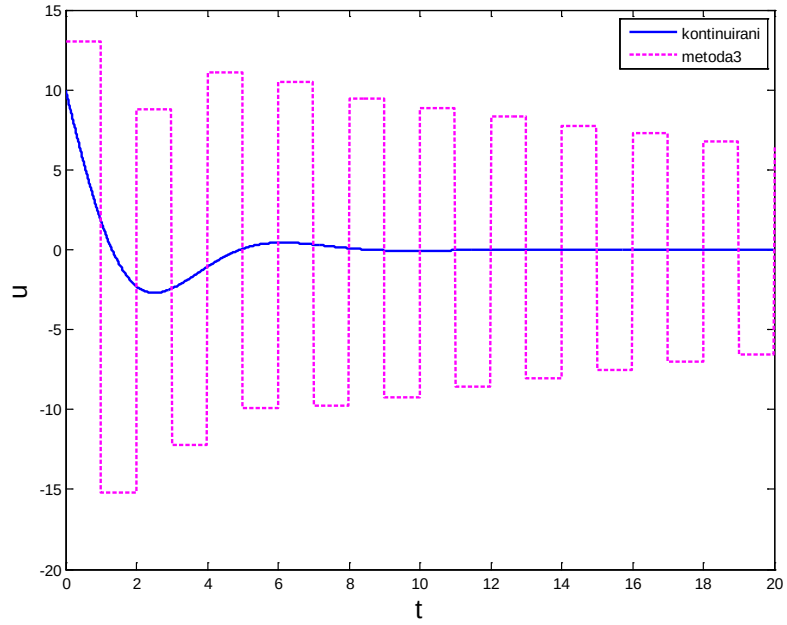
-kontinuirani sustav projektiran je za modelsku funkciju

$$G_m(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

Dobiven je regulator

$$G_R(s) = \frac{10s+1}{s+1}$$





Sl. 6.11. Prijelazne funkcije zatvorenog regulacijskog kruga sa kontinuiranim i diskretnim regulatorom u primjeru 6.6

- Odziv izlaza iz procesa je oscilatoran, ali samo između trenutaka uzorkovanja.
- Odgovor ćemo naći u sljedećoj prijenosnoj funkciji

$$\boxed{\frac{U(z)}{R(z)} = 13,06 \frac{(z-1)(1-0,9z^{-1})(1-0,08z^{-1})}{\left(1+0,967z^{-1}\right)\left(1-0,79z^{-1}+0,37z^{-2}\right)}}$$

- Pol z=-0.967 je vrlo blizu jedinične kružnice i prouzrokuje oscilacije upravljačke veličine. Ovaj pol se pokratio s nulom prijenosne funkcije i zato se na diskretnom odzivu izlazne veličine ne vide oscilacije. Ovako loš odziv može se izbjeći uključivanjem skoro nestabilne nule u modelsku prijenosnu funkciju.

$$\boxed{G_{md2}\left(z\right) = \frac{z^{-1}(1+0.967z^{-1})(b_0+b_1z^{-1})}{1-0.7859z^{-1}+0,3679z^{-2}}}$$

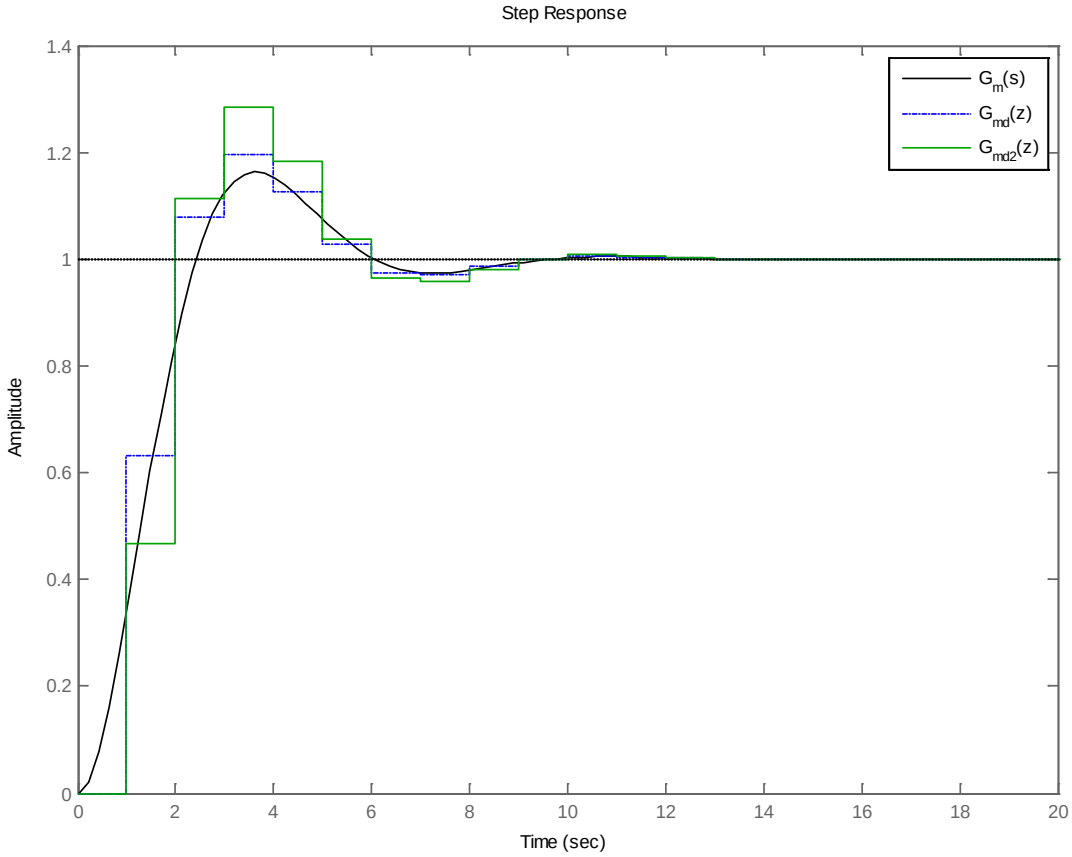
- Ponavljanjem postupka za statičku točnost dobiju se sljedeće dvije jednadžbe

© Ivan Petrović

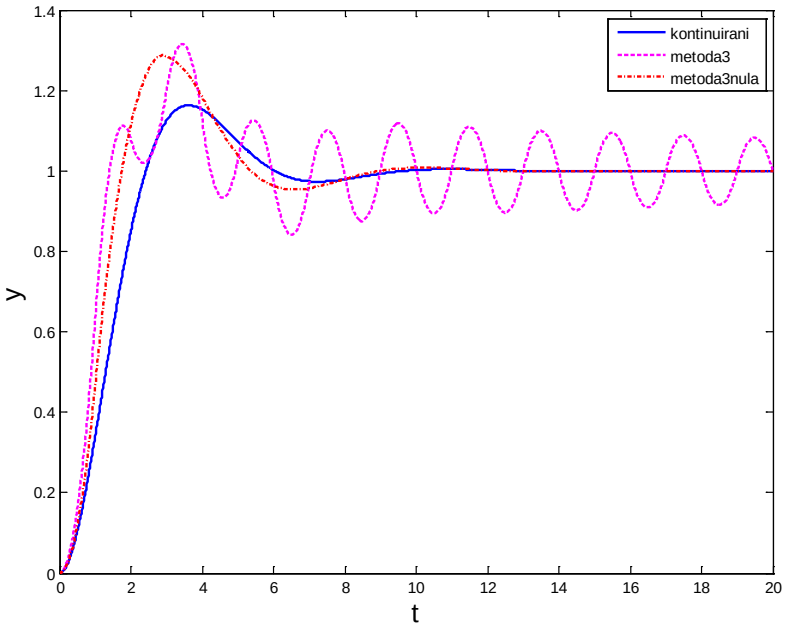
$$\boxed{\begin{aligned} &G_{md\,2}(1)=1\Rightarrow \\ &b_0+b_1=0.2958 \end{aligned}}$$

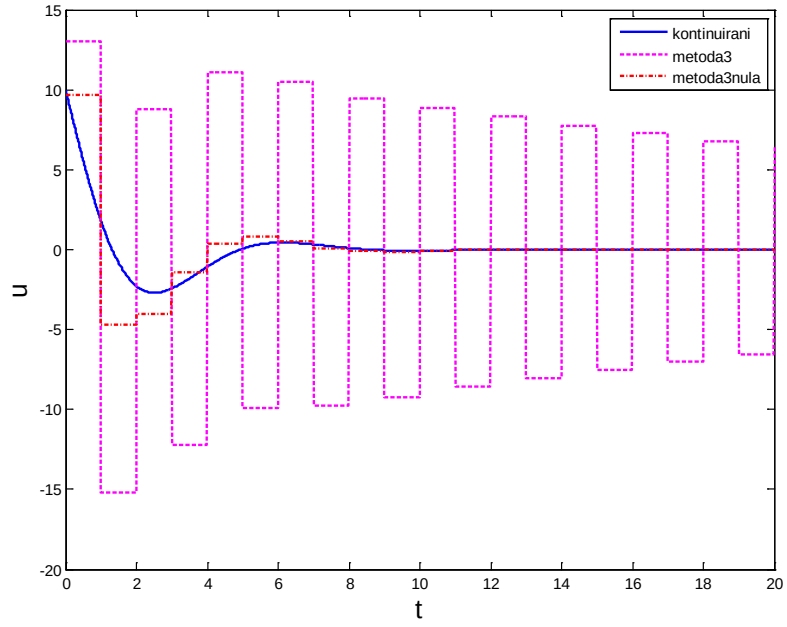
$$\boxed{\begin{aligned} &-T\left.\frac{dG_{md\,2}}{dz}\right|_{z\to 1}=\frac{1}{K_v}\Rightarrow -\left.\frac{dG_{md\,2}}{dz}\right|_{z\to 1}=1\Rightarrow \\ &(1+2\cdot 0.967)b_0+(1+2\cdot 0.967)b_1=0.5318 \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &b_0=0.47 \\ &b_1=-0.17 \end{aligned}}$$



Sl. 6.12. Usporedba diskretnih modelskih funkcija s kontinuiranom.





Sl. 6.13. Prijelazne funkcije zatvorenog regulacijskog kruga sa kontinuiranim i diskretnim regulatorima u primjeru 6.6

6.3. Sinteza regulatora s obzirom na vodeće i poremećajno vladanje

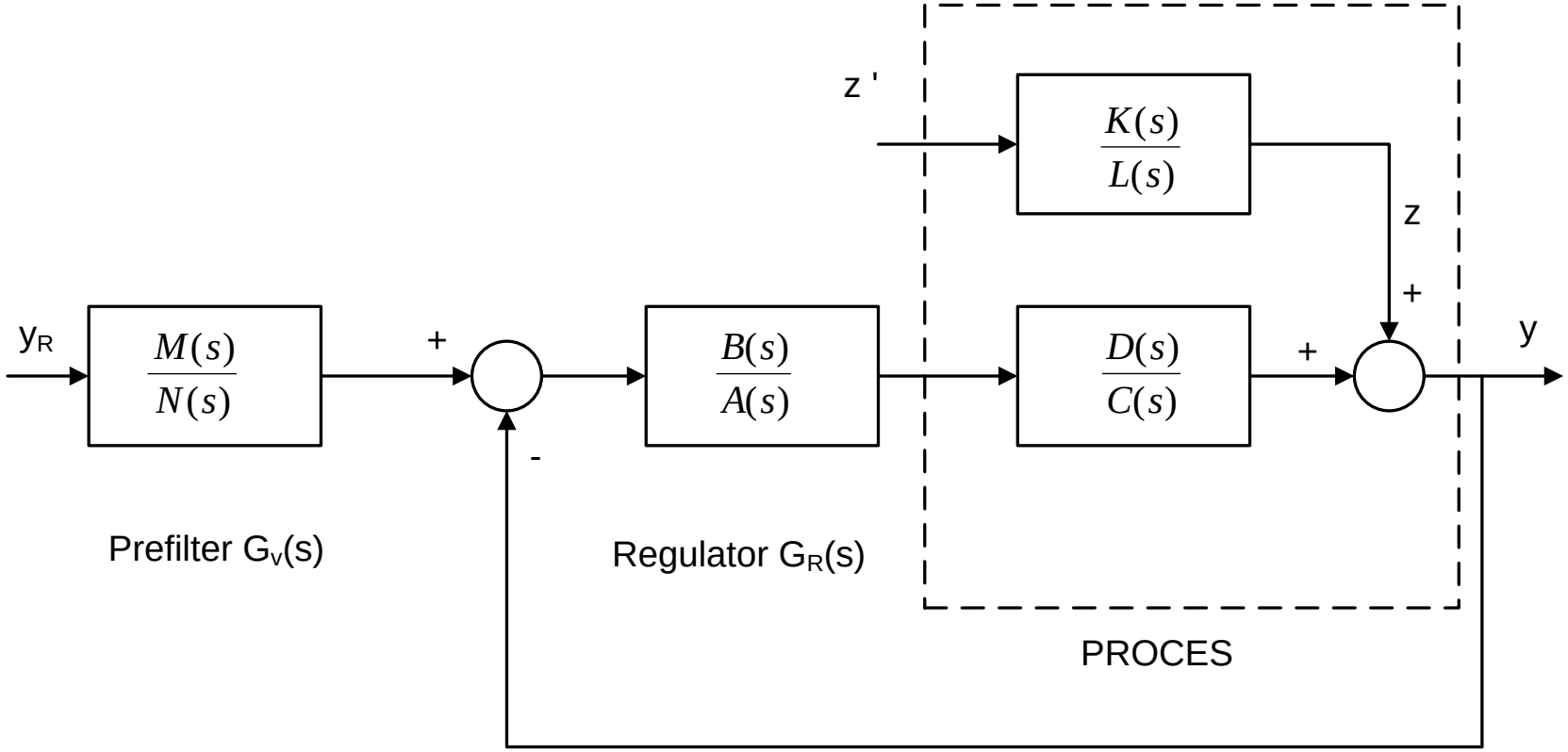
- Dosadašnja razmatranja odnosila su se na sintezu regulatora uz zadanu prijenosnu funkciju procesa $G_s(s)$ i zahtijevanu prijenosnu funkciju zatvorenog sustava s obzirom na referentnu vrijednost

$$G_r(s) \overset{!}{=} G_m(s).$$

- Međutim, smetnja može značajno utjecati na vladanje sustava.

- Da bi se smanjio taj utjecaj proširuje se do sada razmatrana struktura regulacijskog kruga; uvodi se **prefiltar u granu referentne vrijednosti** (sl. 6.14):

© Ivan Petrović



Sl. 6.14. Regulacijski krug s prefiltrom

- Smetnja z' može djelovati na raznim mjestima u regulacijskom krugu (npr. na ulazu procesa, na izlazu procesa) što ima za posljedicu i različiti utjecaj na reguliranu veličinu.

- Pri sintezi regulatora i prefiltra koriste se sljedeće prijenosne funkcije:

$$\boxed{G_v(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{m_0 + m_1 s + \cdots + m_x s^x}{n_0 + n_1 s + \cdots + n_y s^y}}, \quad y \geq x, \qquad (6\text{-}15)$$

$$\boxed{G_R(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \cdots + b_w s^w}{a_0 + a_1 s + \cdots + a_z s^z}}, \quad z \geq w, \qquad (6\text{-}16)$$

$$\boxed{G_s(s) = \frac{D(s)}{C(s)} = \frac{d_0 + d_1 s + \cdots + d_m s^m}{c_0 + c_1 s + \cdots + c_n s^n}}, \quad n > m, \qquad (6\text{-}17)$$

- Sintezom se zahtijeva **<u>željena prijenosna funkcija</u>** zatvorenog sustava, s obzirom na **<u>vodeću vrijednost</u>** ($G_m(s) = \dfrac{Y(s)}{Y_R(s)}$):

$$\boxed{G_r(s) = G_m(s) = \frac{\alpha(s)}{\beta(s)} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 s + \cdots + \alpha_v s^v}{\beta_0 + \beta_1 s + \cdots + \beta_u s^u}}, \; u > v, \; \beta_0 = 1 \qquad (6\text{-}18)$$

i **<u>željena prijenosna funkcija</u>** zatvorenog sustava s obzirom na **<u>poremećajnu veličinu</u>** ($G_{mz}(s) = \dfrac{Y(s)}{Z'(s)}$):

$$\boxed{G_z(s) = G_{mz}(s) = \frac{\gamma(s)}{\sigma(s)} = \frac{\gamma_0 + \gamma_1 s + \cdots + \gamma_q s^q}{\sigma_0 + \sigma_1 s + \cdots + \sigma_p s^p}}, \; p \geq q, \; \sigma_0 = 1 \qquad (6\text{-}19)$$

- Također se zahtijeva da ne smije biti trajnog regulacijskog odstupanja pri skokovitoj promjeni vodeće i poremećajne veličine:

$$\boxed{G_m(0) = \lim_{s \to 0} \frac{\alpha(s)}{\beta(s)} = 1}, \qquad (6\text{-}20)$$

$$\boxed{G_{mz}(0) = \lim_{s \to 0} \frac{\gamma(s)}{\sigma(s)} = 0} \qquad (6\text{-}21)$$

- Nadalje se zahtijeva da polinomi u brojniku i nazivniku $G_m(s)$ i $G_{mz}(s)$ budu čim nižeg reda (i da su po mogućnosti odabrani prema standardnim oblicima).

© Ivan Petrović

Sinteza regulatora:

- Prijenosna funkcija zatvorenog sustava s obzirom na vodeću vrijednost (Sl. 6.14) glasi:

$$\boxed{G_r(s) = \frac{Y(s)}{Y_R(s)} = G_v(s)\frac{G_R(s)G_s(s)}{1+G_R(s)G_s} \overset{!}{=} G_m(s)}, \qquad (6\text{-}22)$$

dok je prijenosna funkcija zatvorenog sustava s obzirom na poremećaj:

$$\boxed{G_z(s) = \frac{Y(s)}{Z'(s)} = G_{sz}(s)\frac{1}{1+G_R(s)G_s(s)} \overset{!}{=} G_{mz}(s)}. \qquad (6\text{-}23)$$

- Iz (6-23) slijedi:

$$\boxed{G_R(s) = \frac{G_{sz}(s) - G_{mz}(s)}{G_s(s)G_{mz}(s)}}. \qquad (6\text{-}24)$$

© Ivan Petrović

- Ako **smetnja djeluje na ulazu** u proces $(G_{sz}(s) = G_s(s))$ onda (6-24) poprima oblik:

$$G_R(s) = \frac{G_{SZ}(s) - G_{mz}(s)}{G_S(s) \cdot G_{mz}(s)} = \frac{\dfrac{D(s)}{C(s)} - \dfrac{\gamma(s)}{\sigma(s)}}{\dfrac{D(s)}{C(s)}\dfrac{\gamma(s)}{\sigma(s)}} = \frac{\overset{(m)}{D(s)}\overset{(p)}{\sigma(s)} - \overset{(n)}{C(s)}\overset{(q)}{\gamma(s)}}{D(s)\gamma(s)} \qquad (6\text{-}25)$$

- Ako pak **smetnja djeluje na izlazu** iz procesa $(G_{sz}(s) = 1)$ iz (6-24) slijedi:

$$\boxed{G_R(s) = \frac{1}{G_s(s)} \frac{1 - \dfrac{\gamma(s)}{\sigma(s)}}{\dfrac{\gamma(s)}{\sigma(s)}} = \frac{1}{G_S(s)} \frac{\sigma(s) - \gamma(s)}{\gamma(s)}}. \qquad (6\text{-}26)$$

Sinteza regulatora za smetnju na ulazu u proces:

- Prema (6-25) **uvjet za realizaciju regulatora** je: $\boxed{z \geq w}$.
- Uz pretpostavku da se oduzimanjem polinoma u brojniku ne poništavaju izrazi s istim potencijama, slijedi:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} m+p \leq m+q \\ \text{ili} \\ n+q \leq m+q \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} q \geq p \\ \\ m \geq n \end{array}}$$

,=>Ovo je u **koliziji** s (6-17) (**n>m**) i (6-19) (**p≥q**)

- Da bi se izbjegla ova kolizija potrebno je da u polinomu brojnika $G_R(s)$ (prema (6-25) $\boxed{G_R(s) = \frac{D(s)\sigma(s) - C(s)\gamma(s)}{D(s)\gamma(s)}}$):

$$\boxed{D(s)\cdot\sigma(s) - C(s)\cdot\gamma(s)}$$

isčeznu odgovarajući članovi viših potencija "s".

- To je moguće samo ako se odabere:

$$\boxed{m+p=q+n}, \text{ odnosno, } \boxed{n-m=p-q}. \qquad (6\text{-}27)$$

- Poslije množenja u polinomu $D(s)\sigma(s)-C(s)\gamma(s)$ odgovarajući se članovi viših potencija "s" izjednače s nulom.

- Iz toga slijede **jednadžbe sinteze regulatora** (različito od slučaja do slučaja).

- Iz (6-27) proizlazi:

  polni višak prijenosne funkcije staze $G_s(s)$ (n-m) i polni višak $G_{mz}(s)$ (p-q) moraju biti jednaki.

- Nadalje je vidljivo iz (6-25) da se zbog uvjeta realizacije mora poništiti (kompenzirati) u polinomu brojnika $G_R(s)$ (polinom: $D(s)\sigma(s)-C(s)\gamma(s)$):

$$\boxed{(m+p)-(m+q)=p-q=n-m} \quad \text{članova viših potencija.}$$

- Iz toga slijedi stupanj polinoma brojnika i nazivnika prijenosne funkcije regulatora:

$$\boxed{w = z = (m+p)-(p-q) = m+q}.$$

- Budući da se mora kompenzirati (*n*-*m*) članova višeg reda u polinomu brojnika $G_R(s) = \dfrac{D(s)\sigma(s) - C(s)\gamma(s)}{D(s)\gamma(s)}$, a da pri tome stupanj polinoma $\gamma(s)$ bude minimalan, odabire se za:

$$\boxed{\text{Stupanj}\,\gamma(s) = q = n-m} \qquad (6\text{-}28)$$

- Nadalje slijedi iz (6-27):

$$\boxed{p = (n-m)+q = (n-m)+(n-m) = 2(n-m)}. \qquad (6\text{-}29)$$

- Iz toga se dobije stupanj brojnika i nazivnika regulatora:

$$\boxed{w = z = m+q = m+n-m = n}. \qquad (6\text{-}30)$$

Primjer 6.5.:

- Prijenosna funkcija procesa glasi:

$$\boxed{G_s(s) = \frac{D(s)}{C(s)} = \frac{d_0 + d_1 s}{c_0 + c_1 s + c_2 s^2}}.$$

- Za prijenosnu funkciju $G_{mz}(s) = \dfrac{\gamma(s)}{\sigma(s)}$ dobije se:

$$\boxed{\text{Stupanj}\,\gamma(s) = q = n - m = 1},$$

(prema (6-28); *q =n-m*)

i $$\boxed{\text{Stupanj}\,\sigma(s) = p = 2(n-m) = 2}.$$

(prema (6-29); *p=2(n-m)*).

- Slijedi:

$$\boxed{G_{mz}(s) = \frac{\gamma(s)}{\sigma(s)} = \frac{\gamma_0 + \gamma_1 s}{1 + \sigma_1 s + \sigma_2 s^2}}.$$

- Uvrštenjem ovog izraza za $G_{mz}(s)$ u (6-25) ($G_R(s)=\dfrac{D(s)\sigma(s)-C(s)\gamma(s)}{D(s)\gamma(s)}$)

  dobije se nakon sređivanja:

$$\boxed{G_R(s)=\frac{d_0+\left(d_0\sigma_1+d_1-\gamma_1c_0\right)s+\left(d_0\sigma_2+d_1\sigma_1-\gamma_1c_1\right)s^2+\left(d_1\sigma_2+\gamma_1c_2\right)s^3}{d_0\gamma_1s+d_1\gamma_1s^2}}$$

- Iz razloga realizacije regulatora potrebno je član u brojniku uz s^3 izjednačiti s nulom:

$$\boxed{d_1\sigma_2-\gamma_1c_2=0 \quad\rightarrow\quad \gamma_1=\frac{d_1\sigma_2}{c_2}}. \;\Rightarrow\; \boxed{G_{mz}(s)=\frac{\dfrac{d_1\sigma_2}{c_2}s}{1+\sigma_1s+\sigma_2s^2}}$$

(γ_0=0 prema (6-21))

- Vladanje zatvorenog sustava s obzirom na smetnju ne može se proizvoljno odabrati. Polovi prijenosne funkcije (vlastita dinamika sustava) po volji se odabire. Koeficijent polinoma u brojniku ovisi o koeficijentu polinoma u nazivniku.

© Ivan Petrović

- Uvođenjem konstanti:

$$\boxed{\begin{aligned} b_0 &= d_0, \\ b_1 &= d_0\sigma_1 + d_1 - \gamma_1 c_0, \\ b_2 &= d_0\sigma_2 + d_1\sigma_1 - \gamma_1 c_1, \\ a_1 &= d_0\gamma_1, \\ a_2 &= d_1\gamma_1, \end{aligned}}$$

prijenosna funkcija regulatora poprima oblik:

$$\boxed{G_R(s) = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2}{a_1 s + a_2 s^2}}.$$

- Parametri regulatora u razmatranom primjeru ovise o parametrima procesa (d_i, c_i) i o parametrima modelske prijenosne funkcije $G_{mz}(s)$ (γ_i, σ_i).

Sinteza regulatora za smetnju na izlazu iz procesa:

- Polazeći od prijenosne funkcije regulatora prema (6-2):

$$G_R(s)=\frac{1}{G_s(s)}\frac{\sigma(s)-\gamma(s)}{\gamma(s)}=\frac{\overset{(n)}{C(s)}\left[\overset{(p)}{\sigma(s)}-\overset{(q)}{\gamma(s)}\right]}{\underset{(m)}{D(s)\gamma(s)}}=\frac{\overset{(w)}{B(s)}}{\underset{(z)}{A(s)}}$$

mogu se postaviti slični odnosi kao i u slučaju djelovanja smetnje na ulazu u proces.

- Stupanj polinoma brojnika $G_R(s)$ određen je s: $\boxed{n+p}$ ili $\boxed{n+q}$.
- Stupanj polinoma nazivnika određen je s: $\boxed{m+q}$
- Uvjet realizacije regulatora $G_R(s)$ je:

$$\boxed{m+q\geq n+p} \quad \text{ili} \quad \boxed{m+q\geq n+q}.$$

što je ispunjeno za: $\boxed{p=q}$

- I ovdje se mora kompenzirati $(n+p)-(m+q)=n-m$ članova s najvećim potencijama u polinomu brojnika $G_R(s)$.

- Na taj se način dobije:

$$\boxed{w=z=(q+n)-(n-m)=m+q}$$

- Budući da se mora kompenzirati $(n-m)$ članova s najvećim potencijama u brojniku $G_R(s)$, a zahtjeva se da stupanj polinoma $\gamma(s)$ bude minimalan, odabire se:

$$\boxed{q=n-m}. \qquad (6\text{-}31)$$

- Uz $p=q$ slijedi stupanj polinoma u $G_R(s)$:

$$\boxed{w=z=m+q=m+(n-m)=n}. \qquad (6\text{-}32)$$

Primjer 6.7.:

- Prijenosna funkcija procesa glasi:

$$\boxed{G_S(s) = \frac{d_0 + d_1 s}{c_0 + c_1 s + c_1 s^2} = \frac{D(s)}{C(s)}}$$

- Budući da je prema (6-31) $p = q = n - m = 1$ slijedi:

$$\boxed{G_{mz}(s) = \frac{\gamma(s)}{\sigma(s)} = \frac{\gamma_1 s}{1 + \sigma_1 s}}$$

- Prema (6-26) dobije se nakon sređivanja:

$$\boxed{G_R(s) = \frac{c_0 + \left[c_1 + c_0(\sigma_1 - \gamma_1)\right]s + \left[c_2 + c_1 \cdot (\sigma_1 - \gamma_1)\right]s^2 + c_2(\sigma_1 - \gamma_1)s^3}{d_0\gamma_1 s + d_1\gamma_1 s^2}}.$$

- Iz $(\sigma_1 - \gamma_1) = 0$ slijedi prijenosna funkcija regulatora: $\boxed{G_R(s) = \frac{c_0 + c_1 s + c_2 s^2}{d_0\sigma_1 s + d_1\sigma_1 s^2}}$

© Ivan Petrović

Sinteza prefiltra:

- Polazište pri sintezi prefiltra $G_v(s)$ su:

$$\boxed{G_r(s) = \frac{Y(s)}{Y_R(s)} = G_v(s)\frac{G_R(s)G_s(s)}{1+G_R(s)G_s(s)} \overset{!}{=} G_m(s)}, \qquad (6\text{-}22)$$

i

$$\boxed{G_z(s) = \frac{Y(s)}{Z'(s)} = \frac{G_{sz}(s)}{1+G_R(s)G_s(s)} \overset{!}{=} G_{mz}(s)}, \qquad (6\text{-}23)$$

- Iz (6-22) i (6-23) slijedi:

$$\boxed{G_v(s) = \frac{G_{sz}(s)G_m(s)}{G_R(s)G_s(s)G_{mz}(s)}} \qquad (6\text{-}33)$$

© Ivan Petrović

- U slučaju da **smetnja djeluje na ulazu u proces** ($G_{sz}(s) = G_s(s)$), (6-33) poprima oblik:

$$\boxed{G_v(s) = \frac{G_m(s)}{G_R(s)G_{mz}(s)}}. \qquad (6\text{-}34)$$

- Ako pak **smetnja djeluje na izlazu iz procesa** ($G_{sz}(s) = 1$), (6-33) poprima oblik:

$$\boxed{G_v(s) = \frac{G_m(s)}{G_R(s)G_s(s)G_{mz}(s)}}. \qquad (6\text{-}35)$$

© Ivan Petrović

Sinteza prefiltra za smetnju na ulazu u proces:

- Iz (6-34), uzimajući u obzir (6-16) i (6-25) ($G_R(s)=\dfrac{D(s)\sigma(s)-C(s)\gamma(s)}{D(s)\gamma(s)}$) slijedi (gdje je $A(s)=D(s)\gamma(s)$):

$$G_v(s)=\frac{\alpha(s)}{\beta(s)}\frac{\overset{(z)}{A(s)}}{B(s)}\frac{\sigma(s)}{\underset{(q)}{\gamma(s)}}=\frac{\overset{(v)}{\alpha(s)}\overset{(m)}{D(s)}\overset{(p)}{\sigma(s)}}{\underset{(u)}{\beta(s)}\underset{(w)}{B(s)}}=\frac{\overset{(x)}{M(s)}}{\underset{(y)}{N(s)}} \qquad (6\text{-}36)$$

- Uvjeti realizacije $G_v(s)$:

  - za $G_{mz}(s)=\dfrac{\gamma(s)}{\sigma(s)}$, $\boxed{q=n-m}$ (prema (6-28))

    $\boxed{p=2(n-m)}$ (prema (6-29))

- za $G_R(s) = \dfrac{B(s)}{A(s)}$,

$$\boxed{w = z = m + q = n} \text{ (prema (6-30))}$$

$$\boxed{u + n \geq v + m + 2(n - m)} \text{ (prema (6-36))}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{u \geq n - m + v} \qquad (6\text{-}37)$$

- za $G_s(s) = \dfrac{D(s)}{C(s)}$,

- za $G_v(s) = \dfrac{M(s)}{N(s)}$,

$$\boxed{\begin{aligned} x &= m + v + p = m + v + 2(n - m) \\ x &= 2n - m + v \\ y &= n + u \end{aligned}}$$

- za $G_m(s) = \dfrac{\alpha(s)}{\beta(s)}$,

Primjer 6.8.:

- Prijenosna funkcija procesa te željena prijenosna funkcija zatvorenog sustava s obzirom na poremećajnu veličinu glase:

$$G_s(s) = \frac{D(s)}{C(s)} = \frac{d_0 + d_1 s}{c_0 + c_1 s + c_2 s^2}, \qquad G_{mz}(s) = \frac{\gamma(s)}{\sigma(s)} = \frac{\gamma_1 s}{1 + \sigma_1 s + \sigma_2 s^2}.$$

- Slijedi prijenosna funkcija regulatora:

$$G_R(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2}{a_1 s + a_2 s^2}$$

- Prema (6-36) određuje se prijenosna funkcija prefiltra:

$$G_v(s) = \frac{\alpha(s) D(s)}{\beta(s) B(s)} \sigma(s)$$

© Ivan Petrović

- Ako se odabere:

a) $$\boxed{G_m(s) = \frac{\alpha(s)}{\beta(s)} = \frac{1}{1+\beta_1 s}}$$ slijedi: $\boxed{\text{Stupanj } M(s) = \text{Stupanj } N(s)}$,

odnosno

$$\boxed{G_v(s) = \frac{m_0 + m_1 s + m_2 s^2 + m_3 s^3}{n_0 + n_1 s + n_2 s^2 + n_3 s^3}},$$

gdje je:

$$\boxed{\begin{aligned} &m_0 = d_0; \quad m_1 = d_0\sigma_1 + d_1; \quad m_2 = d_0\sigma_2 + d_1\sigma_1; \quad m_3 = d_1\sigma_2; \\ &n_0 = b_0; \quad n_1 = \beta_0\beta_1 + b_1; \quad n_2 = b_0\beta_1 + b_2; \quad n_3 = b_2\beta_1 \end{aligned}}$$

b) Za $\boxed{G_m(s) = \frac{\alpha(s)}{\beta(s)} = \frac{1}{1+\beta_1 s+\beta_2 s^2}}$

slijedi iz: $\boxed{\mathrm{G_v}(\mathrm{s}) = \frac{\alpha(s)D(s)}{B(s)\beta(s)}\sigma(\mathrm{s})}$

$$G_v(s) = \frac{1(d_0+d_1 s)}{(1+\beta_1 s+\beta_2 s^2)(b_0+b_1 s+b_2 s^2)}(1+\sigma_1 s+\sigma_2 s^2)$$

$$G_v(s) = \frac{m_0+m_1 s+m_2 s^2+m_3 s^3+m_4 s^4}{n_0+n_1 s+n_2 s^2+n_3 s^3+n_4 s^4}$$

$$m_x = f(d_m, \sigma_p)$$
$$n_y = f(b_w, \beta_u)$$

© Ivan Petrović

Sinteza prefiltra za smetnju na izlazu iz procesa:

- Prema prijenosnoj funkciji (6-35) ($G_v(s) = \dfrac{G_m(s)}{G_R(s)G_s(s)G_{mz}(s)}$):

$$\boxed{G_v(s) = \frac{G_m(s)}{G_R(s)G_s(s)G_{mz}(s)} = \frac{M(s)}{N(s)}} \qquad (6\text{-}38)$$

uzimajući u obzir (6-16) ($G_R(s) = \dfrac{B(s)}{A(s)}$) do (6-19) ($G_{mz}(s) = \dfrac{\gamma(s)}{\sigma(s)}$) slijedi:

$$\boxed{G_v(s) = \frac{A(s)C(s)\sigma(s)\alpha(s)}{B(s)D(s)\gamma(s)\beta(s)}}.$$

- Iz (6-16) i (6-25) $G_R(s) = \dfrac{D(s)\sigma(s) - C(s)\gamma(s)}{D(s)\gamma(s)}$ slijedi: $\boxed{A(s) = D(s)\gamma(s)}$

pa (6-38) ($G_v(s) = \dfrac{G_m(s)}{G_R(s)G_s(s)G_{mz}(s)}$) u tom slučaju poprima oblik:

$$\boxed{G_v(s) = \frac{\overset{(n)}{C(s)}\overset{(p)}{\sigma(s)}\overset{(v)}{\alpha(s)}}{\underset{(w)}{B(s)}\underset{(u)}{\beta(s)}} = \frac{\overset{(x)}{M(s)}}{\underset{(y)}{N(s)}}} \qquad (6\text{-}39)$$

- Uvjet realizacije $G_v(s)$ prema (6-39) glasi:

$$\boxed{w + u \geq n + p + v}, \qquad (6\text{-}40)$$

pa prema (6-31) i (6-32) slijedi:

$$\boxed{n + u \geq n + (n - m) + v},$$

odnosno

$$\boxed{u \geq n - m + v}. \qquad (6\text{-}41)$$

gdje su: $p = n - m$ (prema (6-18)); $w = n$ (prema (6-32)).

- Prema (6-39) ($G_v(s) = \dfrac{C(s)\sigma(s)\alpha(s)}{B(s)\beta(s)} = \dfrac{M(s)}{N(s)}$) dobije se, uzimajući u obzir (6-17), (6-18), (6-19) te (6-31) i (6-32):

$$\boxed{\text{Stupanj } M(s) = x = 2n - m + v}, \qquad (6\text{-}42)$$

$$\boxed{\text{Stupanj } N(s) = y = n + u}. \qquad (6\text{-}43)$$

Primjer 6.9:

- Za prijenosnu funkciju procesa:

$$\boxed{G_s(s) = \frac{D(s)}{C(s)} = \frac{d_0 + d_1 s}{c_0 + c_1 s + c_2 s^2}}$$

- U primjeru 6.7. dobilo se:

$$\boxed{G_{mz}(s) = \frac{\gamma(s)}{\sigma(s)} = \frac{\gamma_1 s}{1 + \sigma_1 s}} \quad \text{i} \quad \boxed{G_R(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2}{a_1 s + a_2 s^2}}.$$

- Ako se odabere:

$$\boxed{G_m(s) = \frac{\alpha(s)}{\beta(s)} = \frac{1}{1+\beta_1 s}}$$

onda iz (6-39) ($G_v(s) = \dfrac{C(s)\sigma(s)\alpha(s)}{B(s)\beta(s)} = \dfrac{M(s)}{N(s)}$) slijedi:

$$\boxed{G_v(s) = \frac{C(s)\sigma(s)\alpha(s)}{\beta(s)B(s)}}$$

$$\boxed{G_v(s) = \frac{\left(c_0 + c_1 s + c_2 s^2\right)\cdot\left(1+\sigma_1 s\right)\cdot 1}{\left(1+\beta_1 s\right)\cdot\left(b_0 + b_1 s + b_2 s^2\right)}},$$

odnosno, u općem obliku:

$$\boxed{G_v(s) = \frac{m_0 + m_1 s + m_2 s^2 + m_3 s^3}{n_0 + n_1 s + n_2 s^2 + n_3 s^3}}.$$

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
Fakultet elektrotehnike i računarstva
Zavod za automatiku i računalno inženjerstvo
Unska 3, Zagreb, HRVATSKA

Računalno upravljanje sustavima

Poglavlje 7:
Upravljanje procesima s izraženim mrtvim vremenom

© Ivan Petrović

Sadržaj poglavlja:

7.1. Procesi s izraženim mrtvim vremenom

7.2. Regulatori sa Smithovim prediktorom

7.3. Poboljšanje robusnosti sustava upravljanja zasnovanih na Smithovom prediktoru

7.4. Simulacijske provjere sustava upravljanja sa Smithovim prediktorom

© Ivan Petrović

7.1. Procesi s izraženim mrtvim vremenom

- Općenito, prijenosna funkcija procesa s mrtvim vremenom glasi:

$$G_s(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} z^{-d} = \frac{b_1 z^{-1} + \ldots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_m z^{-m}} z^{-d}, \qquad (7\text{-}1)$$

- Ako proces ima mrtvo vrijeme *d*, kao u (7-1), onda je karakteristična jednadžba zatvorenog sustava:

$$1 + G_R(z) G_s(z) = z^{m+d} = 0. \qquad (7\text{-}2)$$

- Procesi s “malim” mrtvim vremenom T_t:
  - T_t < najmanja dominantna vremenska konstanta procesa.
  - Tada se može primijeniti sljedeća aproksimacija:

$$e^{-T_t s} \approx \frac{1}{1 + T_t s}. \qquad (7\text{-}3)$$

© Ivan Petrović

- Procesi s “velikim” mrtvim vremenom T_t:

$$G_s(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \underbrace{\frac{b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_m z^{-m}}}_{G_s'(z)} \cdot z^{-d}, \qquad (7\text{-}4)$$

gdje je:

$$T_t = dT \qquad d = 1, 2, \ldots \qquad \left(e^{-T_t s} \mathrel{\hat{=}} z^{-d}\right).$$

- Izraz (7-4) može se prikazati kao:

$$\boxed{G_s(z) = \underbrace{G_s'(z)}_{dinamika\ procesa} \cdot z^{-d}.} \qquad (7\text{-}5)$$

- Ako d nije cjelobrojni višekratnik vremena uzorkovanja primjenjuje se modificirana z-transformacija:

$$T_t = (d - \beta)T, \qquad (7\text{-}6)$$

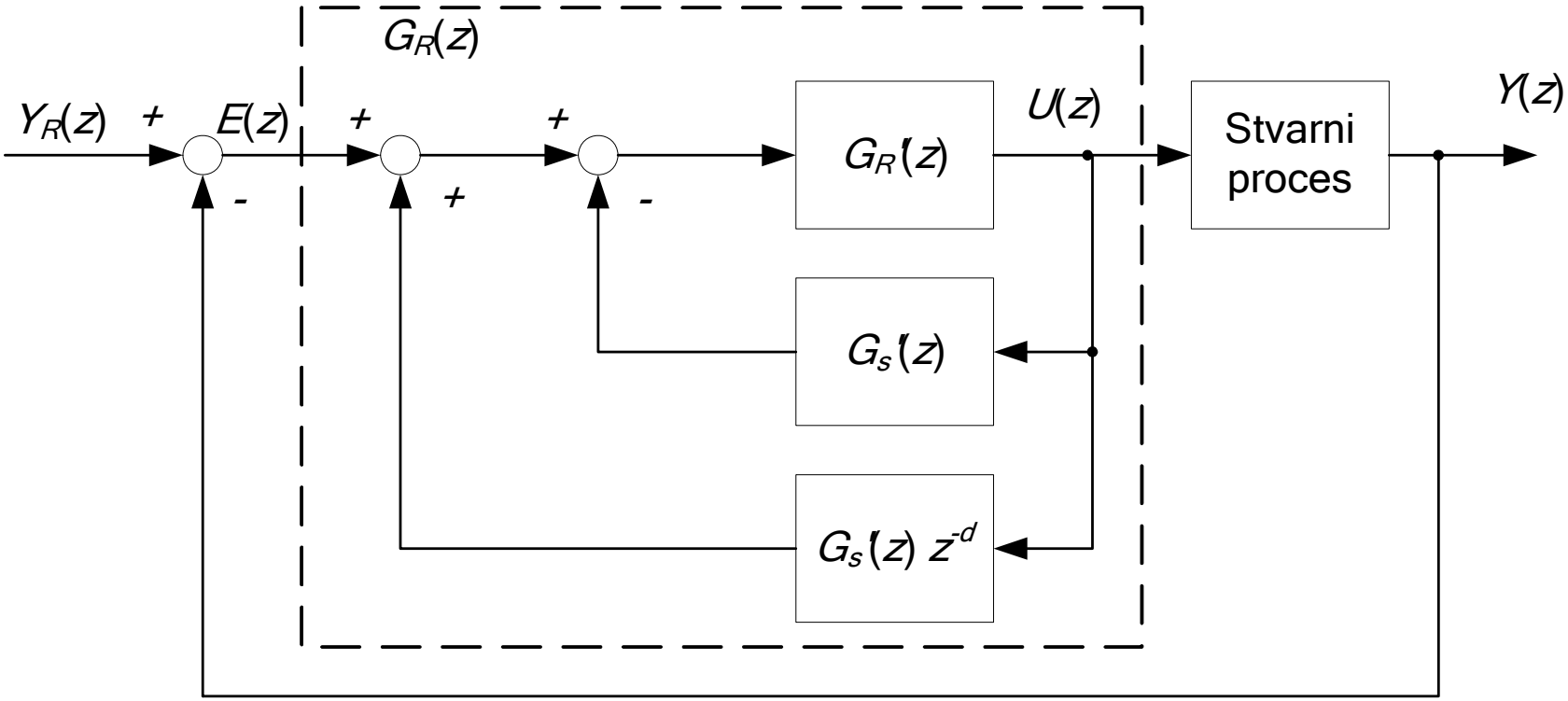
gdje je:

$$d = 1, 2, \ldots, \qquad 0 \le \beta \le 1.$$

© Ivan Petrović

7.2. Regulatori sa Smithovom prediktorom

- Upravljanje zasnovano na Smithovom prediktoru prikazano je na slici 7.1.



- Za $d = 0$ iz slike 7.1 slijedi $G_R(z) = G_R'(z)$, tj. $G_R'(z)$ je struktura regulatora koja odgovara procesu bez mrtvog vremena.

© Ivan Petrović

- $G'_R(z)$ može biti:
  - parametarski optimirani regulator (PID, linearni regulatori općeg oblika unaprijed definirane strukture);
  - strukturno optimirani regulatori.

- Bez obzira na strukturu regulatora $G'_R(z)$ dobije se opći oblik regulatora $G_R(z)$:

$$\boxed{G_R(z) = \frac{G'_R(z)}{z^d + G'_R(z)G'_s(z)\left(z^d - 1\right)} \cdot z^d.} \qquad (7\text{-}7)$$

- S obzirom da se u prijenosnoj funkciji regulatora (7-7) pojavljuje član za prethođenje z^d, ovaj koncept upravljanja naziva se prediktivnim (Smithov prediktor).

- Prijenosna funkcija otvorenog kruga, prema slici 7.1, glasi:

$$G_0(z) = G_R(z) \cdot G'_{s0}(z) \cdot z^{-d_0} = G'_0(z) \cdot z^{-d_0}, \qquad (7\text{-}8)$$

© Ivan Petrović

gdje $G'_{s0}(z)$ opisuje stvarno vladanje procesa, d_0 predstavlja stvarno kašnjenje procesa.

- Iz (7-8) slijedi prijenosna funkcija zatvorenog sustava s obzirom na referentnu veličinu:

$$G_r(z) = \frac{Y(z)}{Y_R(z)} = \frac{G'_0(z)z^{-d_0}}{1 + G'_0(z)z^{-d_0}}. \qquad (7\text{-}9)$$

- Uvrštenjem (7-7) u (7-9) dobije se (Δ= d-d_0):

$$G_r(z) = \frac{G'_R(z)G'_{s_0}(z)z^{\Delta}}{z^d + G'_R(z)G'_s(z)(z^d - 1) + G'_R(z)G'_{s_0}(z)z^{\Delta}}. \qquad (7\text{-}10)$$

- Ako je $G'_s(z) = G'_{s0}(z)$ i ako je $d = d_0$, tj. $\Delta = 0$, (7-10) poprima oblik:

$$G_r(z) = \frac{G'_R(z)G'_s(z)}{z^d + G'_R(z)G'_s(z)z^d}, \qquad (7\text{-}11)$$

odnosno:

© Ivan Petrović

$$G_r(z) = \frac{G'_R(z)G'_s(z)}{1+G'_R(z)G'_s(z)} z^{-d}. \qquad (7\text{-}12)$$

- Karakteristična jednadžba sustava prema (7-12) glasi:

$$1+G'_s(z)G'_R(z)=0. \qquad (7\text{-}13)$$

- Prema tome, karakteristična jednadžba sustava, uz primjenu strukture regulatora zasnovane na Smithovoj ideji, jednaka je karakterističnoj jednadžbi sustava s procesom bez mrtvog vremena i s regulatorom $G'_R(z)$, tj. u karakterističnoj se jednadžbi ne pojavljuje kašnjenje.

- Na temelju toga slijedi postupak projektiranja regulatora:
  - projektira se regulator $G'_R(z)$ ignorirajući kašnjenje u procesu;
  - tako projektiranom regulatoru $G'_R(z)$ dodaju se povratne veze $G'_s(z)$ i $G'_s(z)z^{-d}$ (Sl. 7.1.).

© Ivan Petrović

Primjer 7.1:

- Za proces opisan prijenosnom funkcijom:

$$G_s(s) = \frac{1}{1+T_1 s} e^{-T_t s}$$

potrebno je projektirati regulator zasnovan na Smithovom prediktoru.

- Diskretni oblik prijenosne funkcije procesa uz primjenu ZOH glasi:

$$G_s(z) = Z\left\{\frac{1-e^{-Ts}}{s}\frac{1}{1+T_1 s}e^{-T_t s}\right\}, T_t = d \cdot T$$

$$G_s(z) = \left(1-z^{-1}\right) z^{-d} Z\left\{\frac{1}{s(1+T_1 s)}\right\}.$$

- Uz:

$$Z\left\{\frac{1}{s(1+T_1 s)}\right\}=\frac{(1-e^{-T/T_1})z}{(z-1)(z-e^{-T/T_1})}=\frac{bz}{(z-1)(z-a)};\quad \begin{array}{l} b=1-e^{-T/T_1} \\ a=e^{-T/T_1} \end{array}$$

slijedi:

$$G_s(z)=\underbrace{\frac{b}{z-a}}_{G'_s}z^{-d}.$$

- Neka je:

$$G'_R(z)=\frac{q_0+q_1 z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

linearni regulator prvog reda koji može imati svojstva regulatora PI djelovanja.

- Iz izraza za $G'_s(z)$ i $G'_R(z)$ slijedi:

$$G'_0(z)=G'_R(z)\cdot G'_s(z)=\frac{b(q_0 z+q_1)}{(z-a)(z-1)},$$

© Ivan Petrović

$$G_r'(z) = \frac{G_R'(z)G_s'(z)}{1+G_R'(z)G_s'(z)} = \frac{b(q_0 z + q_1)}{z^2 + (bq_0 - a - 1)z + (a + bq_1)}.$$

- Karakteristična jednadžba za $G_x'(z)$ glasi:

$$z^2 + p_1 z + p_2 = 0,$$

gdje je:

$$p_1 = bq_0 - a - 1,$$
$$p_2 = a + bq_1. \qquad (7\text{-}14)$$

- Vrijednostima koeficijenata p_1 i p_2 određeni su položaji polova zatvorenog sustava:

$$z_{1/2} = -\frac{p_1}{2} \pm \frac{\sqrt{p_1^2 - 4p_2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 2z_1 &= -p_1 + \sqrt{p_1^2 - 4p_2}, \\ 2z_2 &= -p_1 - \sqrt{p_1^2 - 4p_2}, \end{aligned}$$

odakle slijedi

$$z_1 + z_2 = -p_1,$$
$$z_1 - z_2 = \sqrt{p_1^2 - 4p_2}.$$

- Pri tome je:

$$z_1 = e^{s_1 T} = e^{-\xi\omega_n T} \cdot e^{+j\omega_n T\sqrt{1-\xi^2}}, \qquad \left(s_1 = -\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\right),$$

$$z_2 = e^{s_2 T} = e^{-\xi\omega_n T} \cdot e^{-j\omega_n T\sqrt{1-\xi^2}}, \qquad \left(s_2 = -\xi\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\right).$$

- Odavde slijedi:

$$p_1 = -\left(z_1 + z_2\right) = -2e^{-\xi\omega_n T}\cos\left[\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n T\right]. \qquad (7\text{-}15)$$

- Isto tako iz:

$$z_1 - z_2 = \sqrt{p_1^{\,2} - 4p_2}$$

slijedi:

$$e^{-\xi\omega_n T}\cdot 2j\sin\left[\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n T\right]=\sqrt{p_1{}^2-4p_2}\quad\Big|^2,$$

$$-4e^{-\xi\omega_n T}\sin^2\left[\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n T\right]=p_1{}^2-4p_2,$$

$$\Downarrow$$

$$p_2=e^{-2\xi\omega_n T}. \tag{7-16}$$

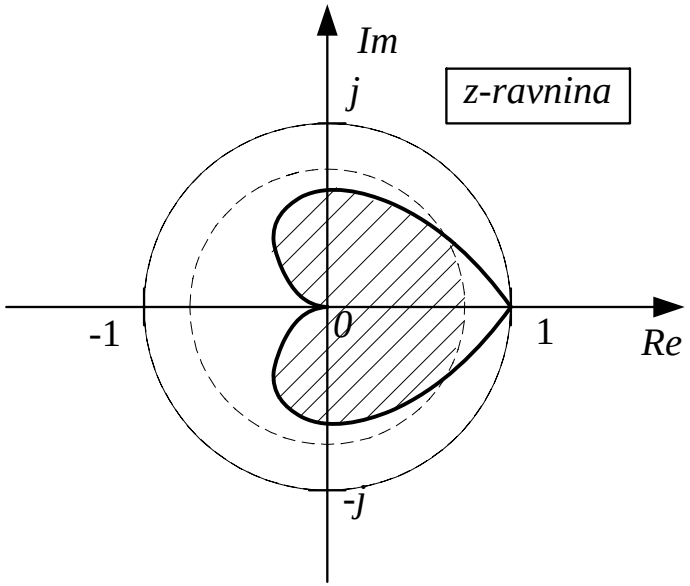
- Za vrijednosti prirodne frekvencije neprigušenih oscilacija ω_n i za relativni koeficijent prigušenja ξ preporuča se:

$$\omega_n\approx\frac{\omega_N}{5}$$

(gdje je $\omega_N=\dfrac{\pi}{T}$ - Nyquistova frekvencija) i

$$\xi\geq\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

- Uz takav izbor ω_n i ξ polovi zatvorenog sustava smješteni su unutar iscrtkanog područja kompleksne z-ravnine na slici 7.2.



Sl. 7.2. *Razmještaj polova zatvorenog sustava upravljanja*.

- Uz parametre p_1 i p_2 određene prema (7-15) i (7-16) dobiju se izrazi za parametre regulatora $G'_R(z)$:

© Ivan Petrović

$$q_0 = \frac{p_1 + a + 1}{b}, \qquad q_1 = \frac{p_2 - a}{b}.$$

- Dodavanjem regulatoru $G_R'(z)$ u povratne veze modela procesa $G_s'(z)$ i $G_s'(z)z^{-d}$ (Sl. 7.1.) dobije se prijenosna funkcija regulatora $G_R(z)$:

$$G_R = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{(q_0 z + q_1)(z - a)}{(z-a)(z-1)z^d + b(q_0 z + q_1)(z^d - 1)} \cdot z^d$$

odnosno:

$$G_R(z) = \frac{q_0 + (q_1 - aq_0)z^{-1} - aq_1 z^{-2}}{1 + \left[bq_0 - (a+1)\right]z^{-1} + (a + bq_1)z^{-2} - bq_0 z^{-1-d} - bq_1 z^{-2-d}}. \qquad (7\text{-}17)$$

- Za $d = 0$ slijedi:

$$G_R(z) = G_R'(z).$$

© Ivan Petrović

7.3. Poboljšanje robusnosti sustava upravljanja zasnovanih na Smithovom prediktoru

- Koncept upravljanja sa Smithovim prediktorom spada u **upravljanje zasnovano na matematičkom modelu procesa** (engl. Model-based Predictive Control; MPC).
- MPC upravljanje osnova je i za poopćeni predikcijski regulator (engl. Generalized Predictive Controller; GPC).
- **Svi na modelu procesa zasnovani regulatori u načelu su osjetljivi na:**
  - **neodređenost (engl. uncertainty) matematičkog modela procesa.**
- Ta se neodređenost poglavito odnosi na "nemodeliranu" dinamiku procesa i na pogreške u određivanju parametara matematičkog modela procesa.
- **U tom je smislu Smithov prediktor posebno osjetljiv na pogreške u određivanju mrtvog vremena procesa.**

© Ivan Petrović

- Prijenosna funkcija procesa $G_s(s)$ može se interpretirati na sljedeći način:

$$G_s(s) = G_{sn}(s) + \delta G_s(s), \qquad (7\text{-}18)$$

gdje je:

  - $G_{sn}(s)$ – nazivna (egzaktna) prijenosna funkcija procesa,
  - $\delta G_s(s)$ – neodređenost.

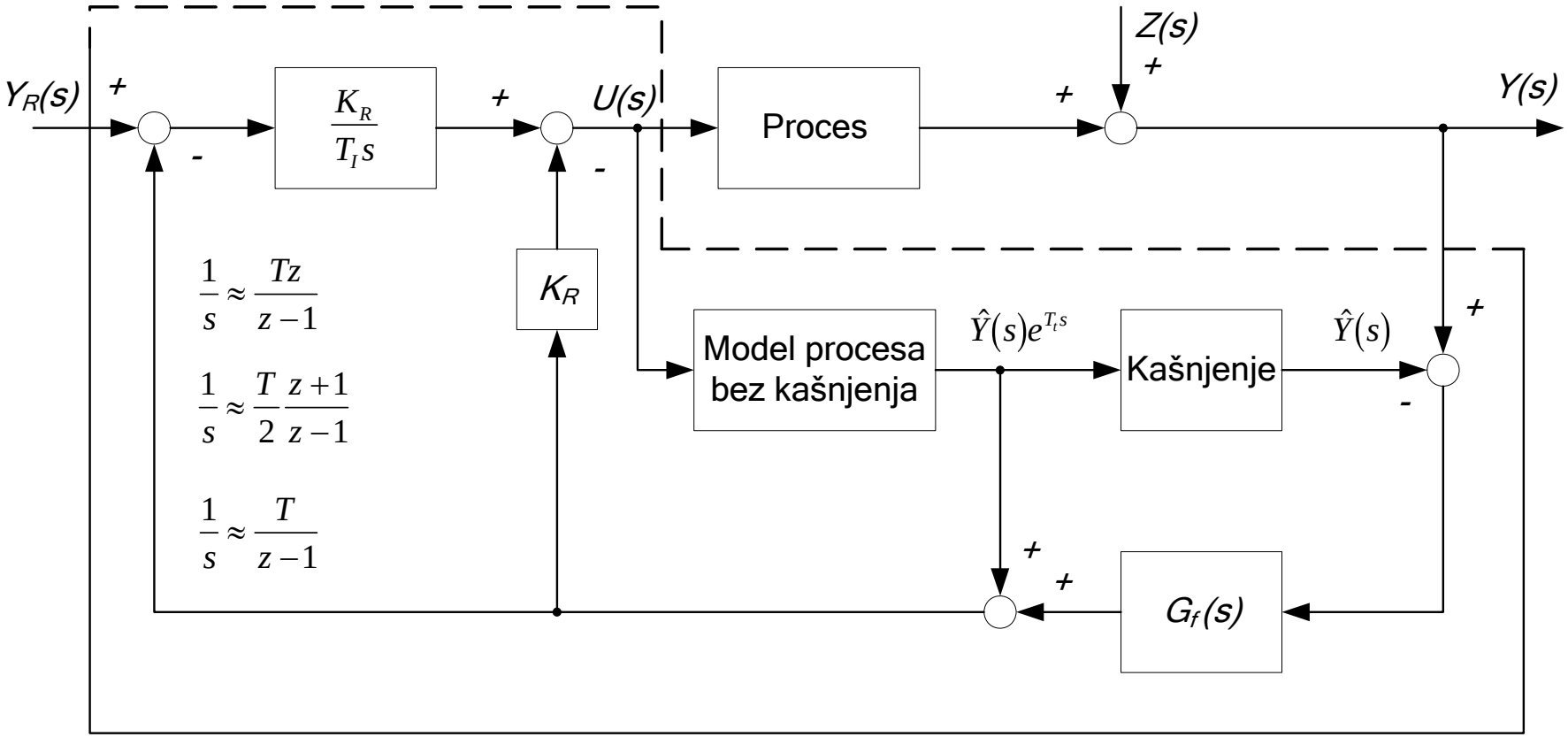
- Pri projektiranju regulatora potrebno je odrediti dopušteno područje neodređenosti $\delta G_s(s)$ za koje će zatvoreni sustav biti stabilan i imati prihvatljivu kvalitetu upravljanja.

- U praksi je uobičajena struktura prediktivnog upravljanja zasnovana na Smithovom prediktoru, uz primjenu modificiranog PI regulatora (engl. Predictive PI; PPI).

- Na slici 7.3 prikazana je modificirana struktura upravljanja sa Smithovim prediktorom uz korištenje filtra $G_f(s)$ u povratnoj vezi.

- Iako je sustav prikazan kao kontinuirani sustav, uobičajeno se realizira digitalno.

© Ivan Petrović



Sl. 7.3. *Zatvoreni regulacijski krug s (F)PPI regulatorom*.

PPI bez filtra $G_f(s)$:

- U upravljačkom dijelu sustava (uokvireni dio na slici 7.3.), uz model procesa PT_1T_t, trebalo bi podesiti pet parametara:
  - K_R, T_I – od PI regulatora,
  - T_t, K_s, T_s – od procesa.
- Tako veliki broj parametara povećava operativnu kompleksnost, u usporedbi s PID regulatorom.
- U praksi se preporučuje PPI sa samo tri podesiva parametra:

$$K_R = \frac{1}{K_s}, \quad T_I = T_s, \quad T_t.$$

- Međutim, robusnost zatvorenog sustava uz ovako jednostavno podešenje parametara nije zajamčena, pogotovo kada postoji neodređenost povezana s mrtvim vremenom.

PPI s filtrom $G_f(s)$:

- U svrhu povećanja robusnosti zatvorenog sustava ugrađuje se filtar $G_f(s)$ sa svojstvom $G_f(0)=1$ pa se dobije filtrirani PPI (engl. Filtered Predictive PI; FPPI).
- U praksi se preporučuje koristiti filtar prvog reda s vremenskom konstantom:

$$T_f = \frac{T_t}{\alpha}.$$

- Mijenjanjem iznosa koeficijenta α može se postizati željena mjera kakvoće upravljanja i robusnost.
- Za manji α sustav upravljanja je robusniji, dok je za veći α brža kompenzacija poremećaja.
- Uobičajeno se izabire α = 2, tj. vremenska konstanta filtra jednaka je polovici mrtvog vremena procesa.

© Ivan Petrović

7.4. Simulacijske provjere sustava upravljanja sa Smithovim prediktorom

- Zadan je sustav:

$$\boxed{G_s(s) = \frac{1}{1+T_1 s} e^{-T_t s}}, \quad \text{gdje je } T_1 = 1\text{s}, \; T_t = 2\text{s}.$$

- Provesti sljedeće simulacije:

I. Točan model procesa

1. PI regulatorom bez prediktora
2. PI regulatorom s prediktorom
3. PID regulatorom po ZN
4. PPI regulator i FPPI regulator

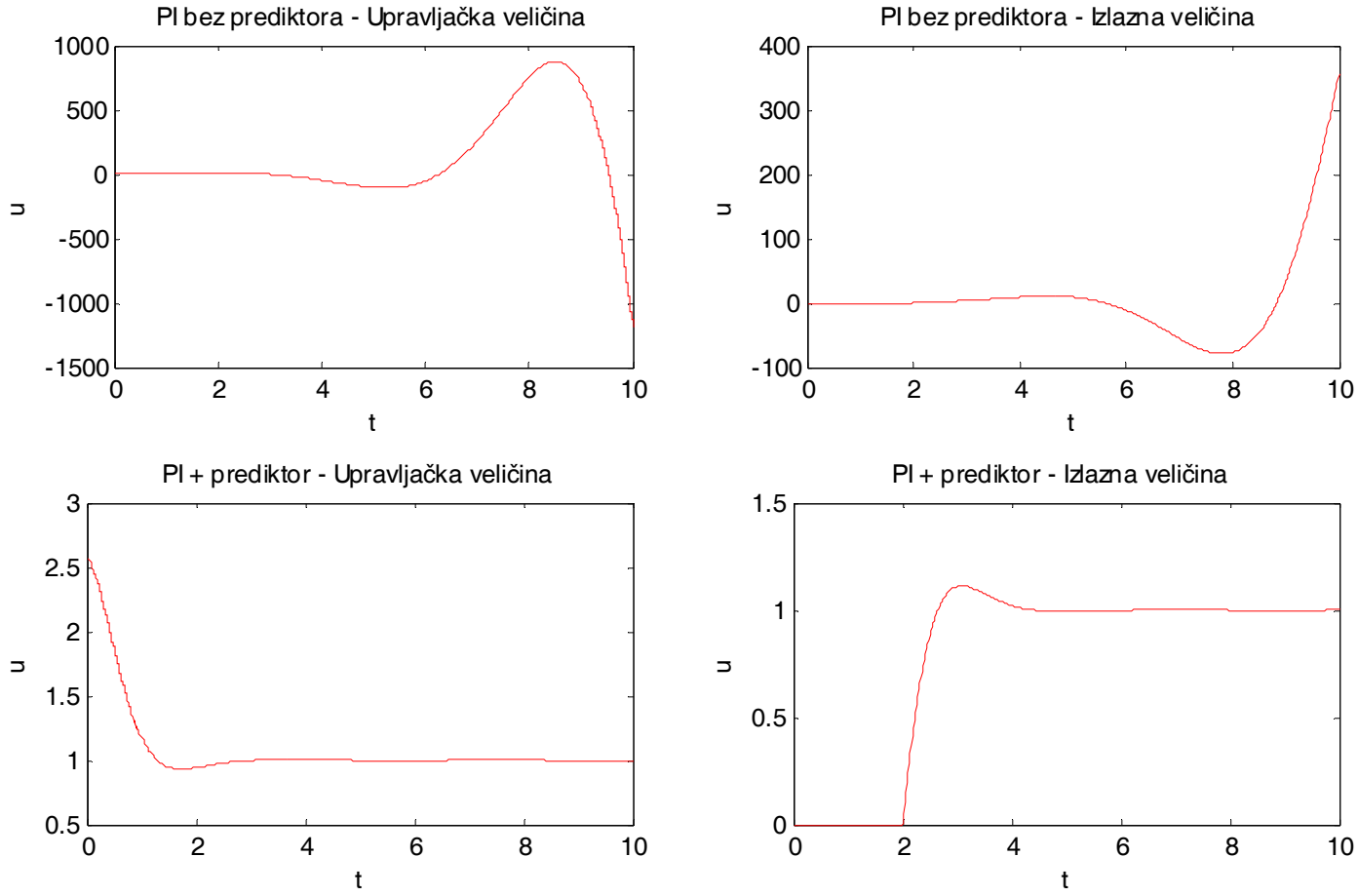
II. Netočan model procesa (mrtvo vrijeme u modelu veće nego u procesu za 50%)

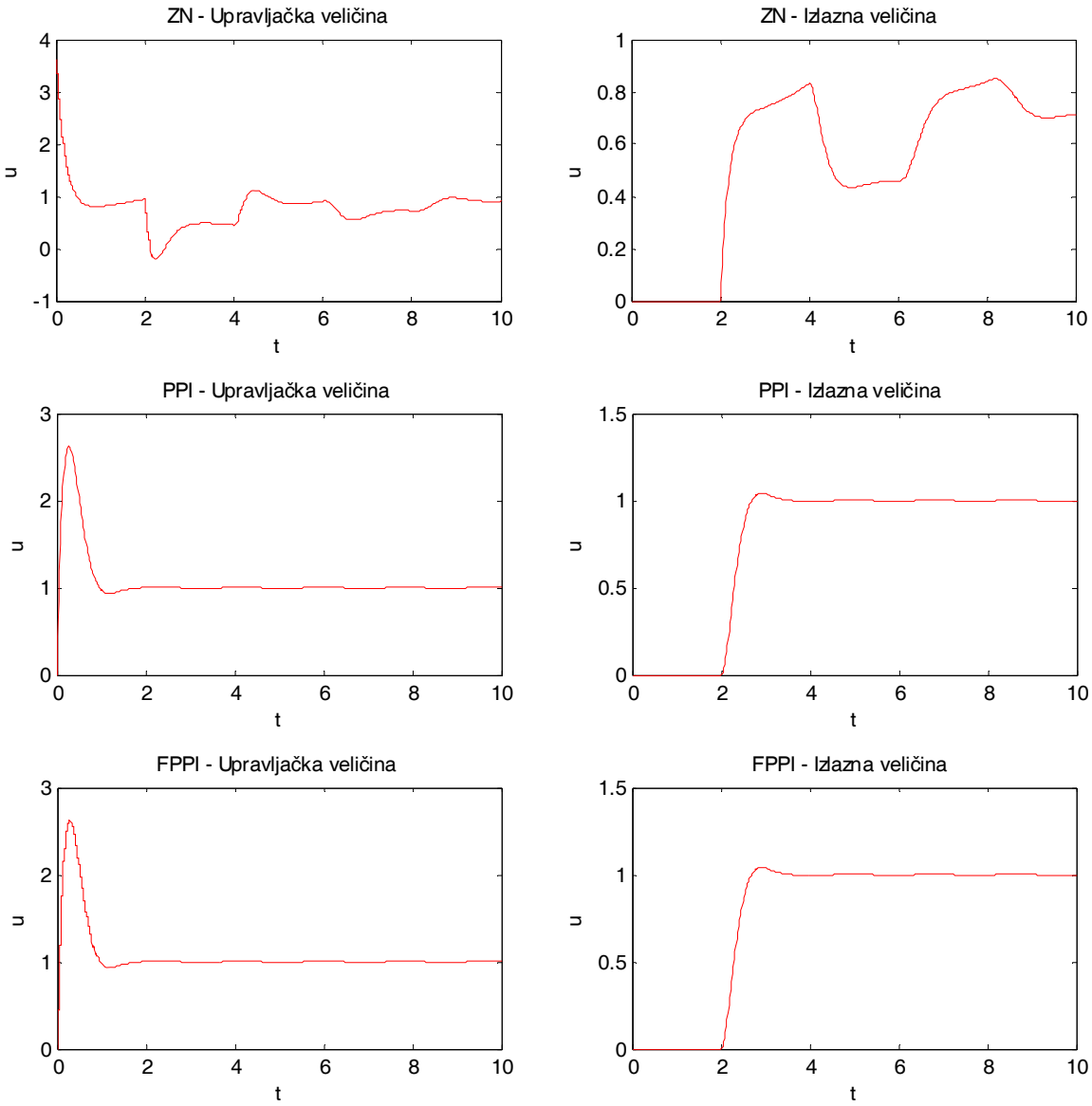
Ponoviti sve kao pod I.

© Ivan Petrović

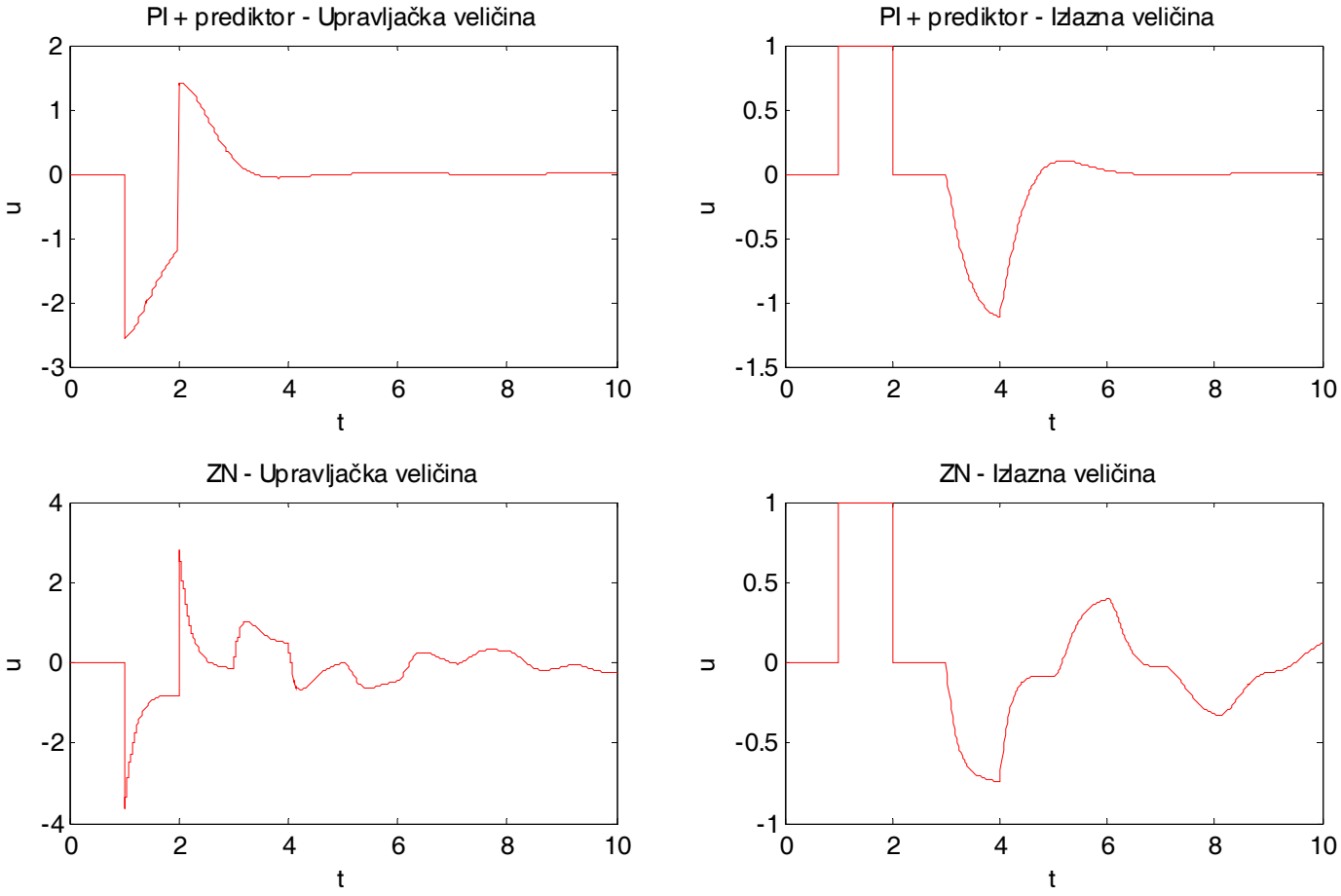
Simulacije za idealni model procesa:

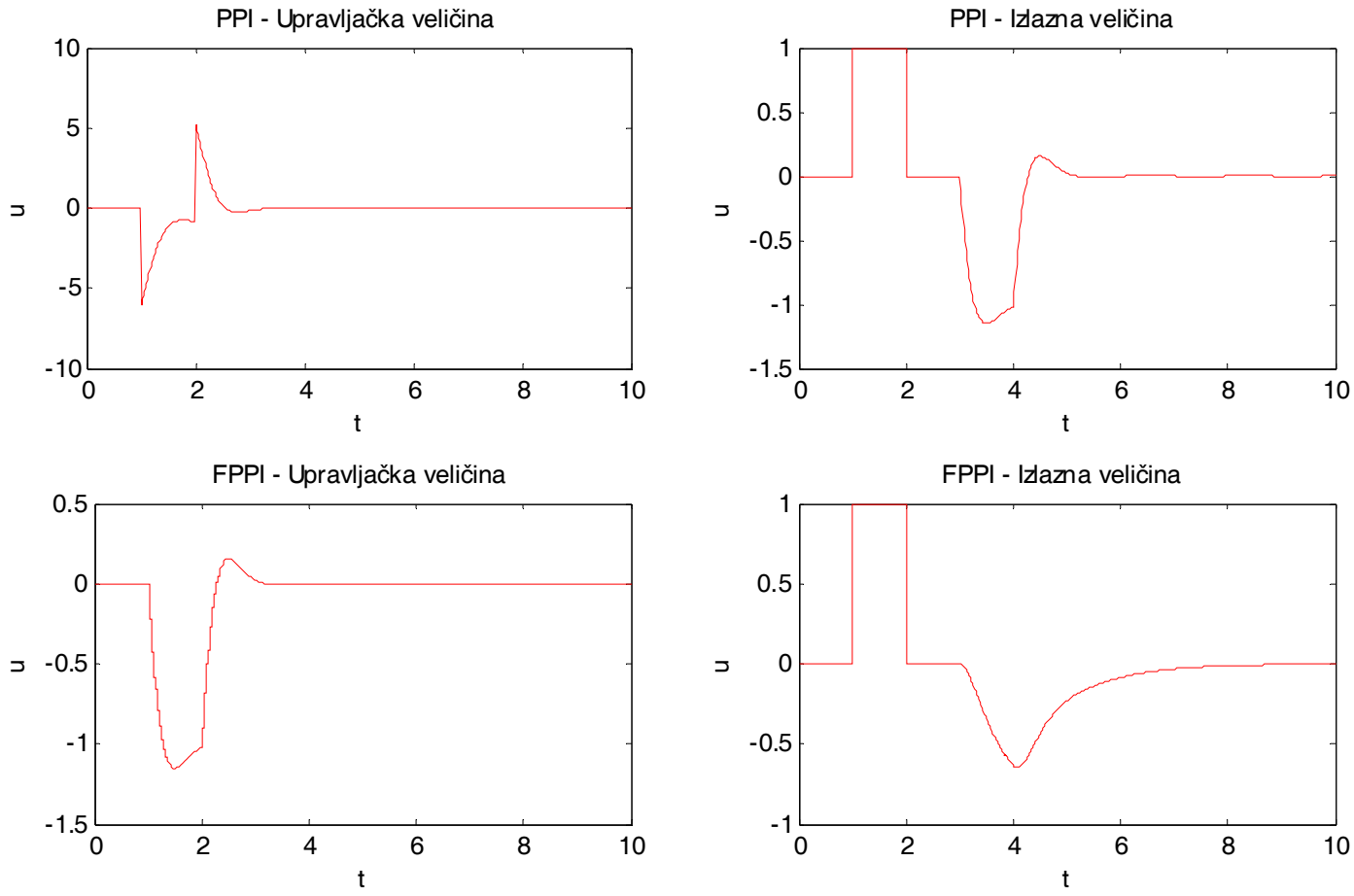
- *Odziv na skokovitu promjenu vodeće veličine:*



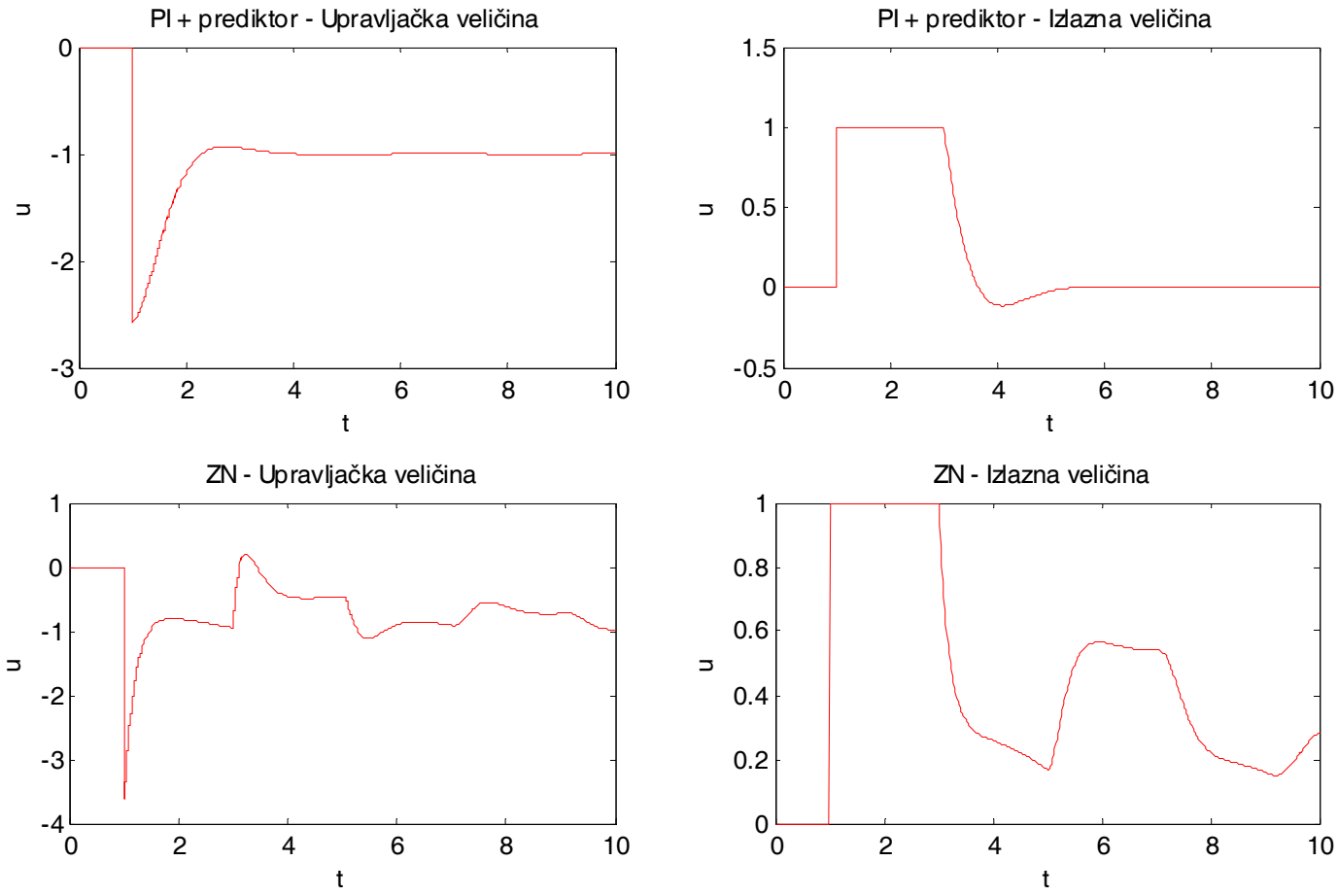

ZN - Upravljačka veličina
ZN - Izlazna veličina
PPI - Upravljačka veličina
PPI - Izlazna veličina
FPPI - Upravljačka veličina
FPPI - Izlazna veličina
u
t

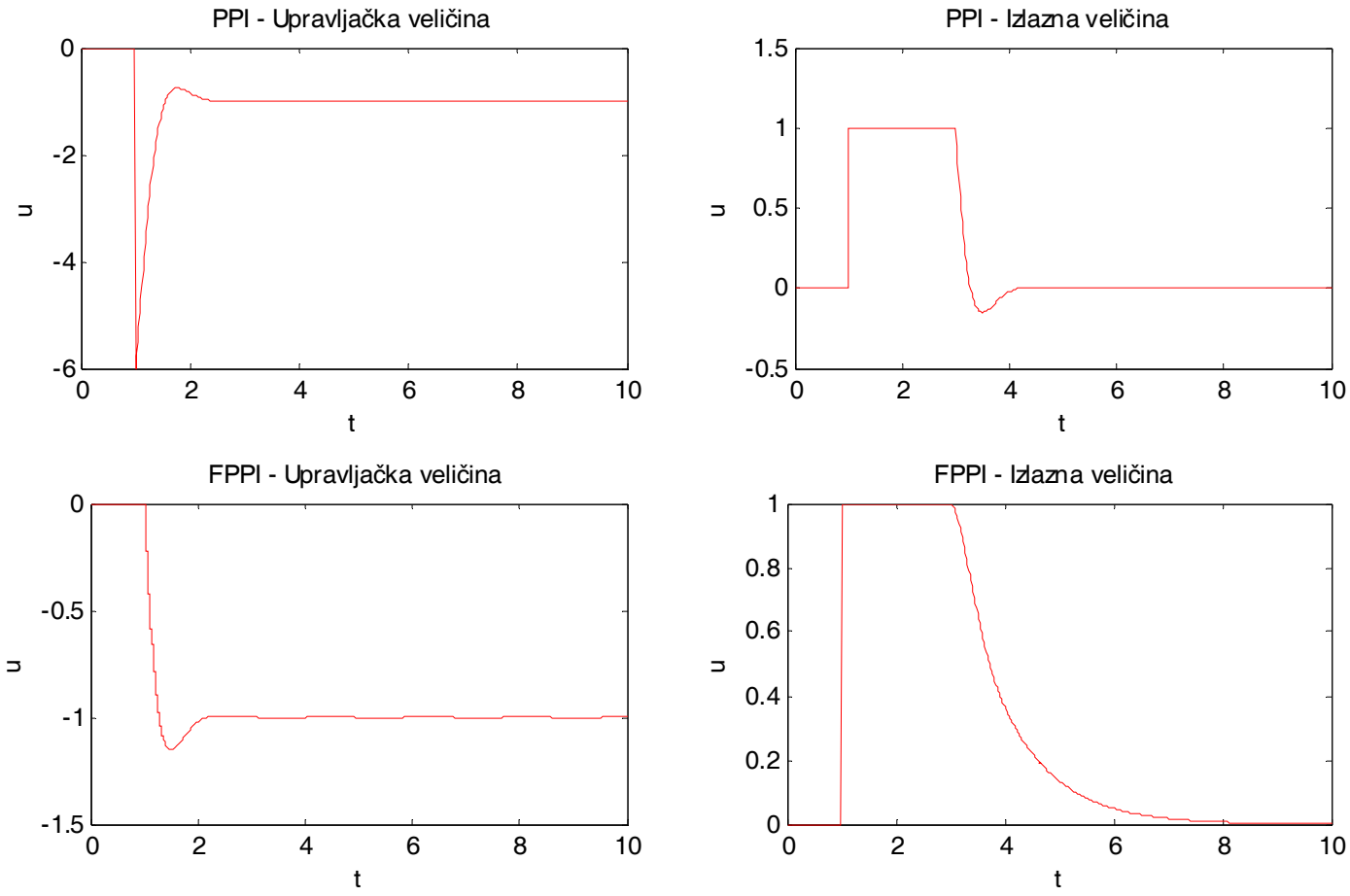
- *Odziv na kratku smetnju na izlazu procesa (trajanje poremećaja < T_t):*




PPI - Upravljačka veličina
PPI - Izlazna veličina
FPPI - Upravljačka veličina
FPPI - Izlazna veličina
u
t

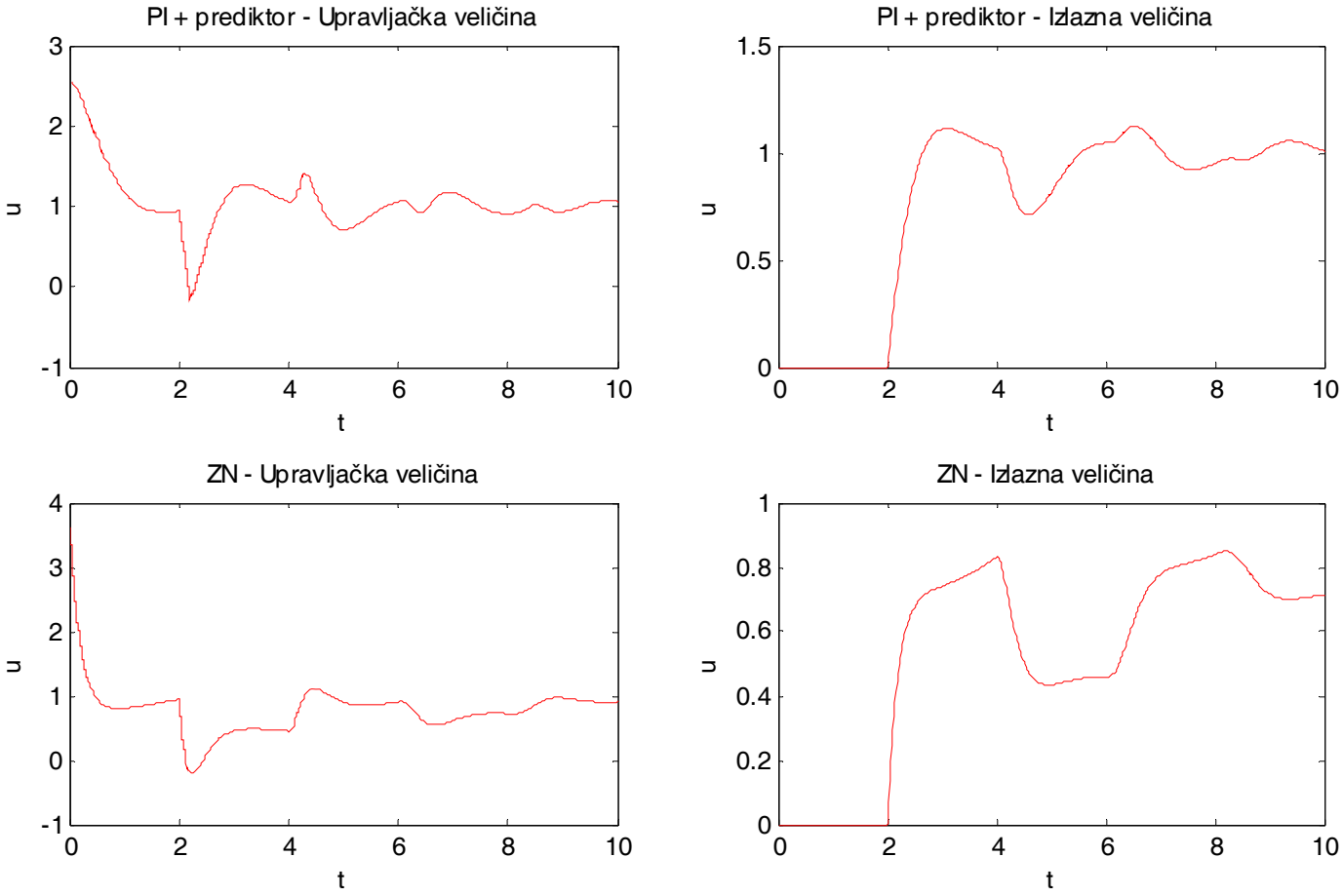
- *Odziv na dugu smetnju na izlazu procesa (trajanje poremećaja > T_t):*

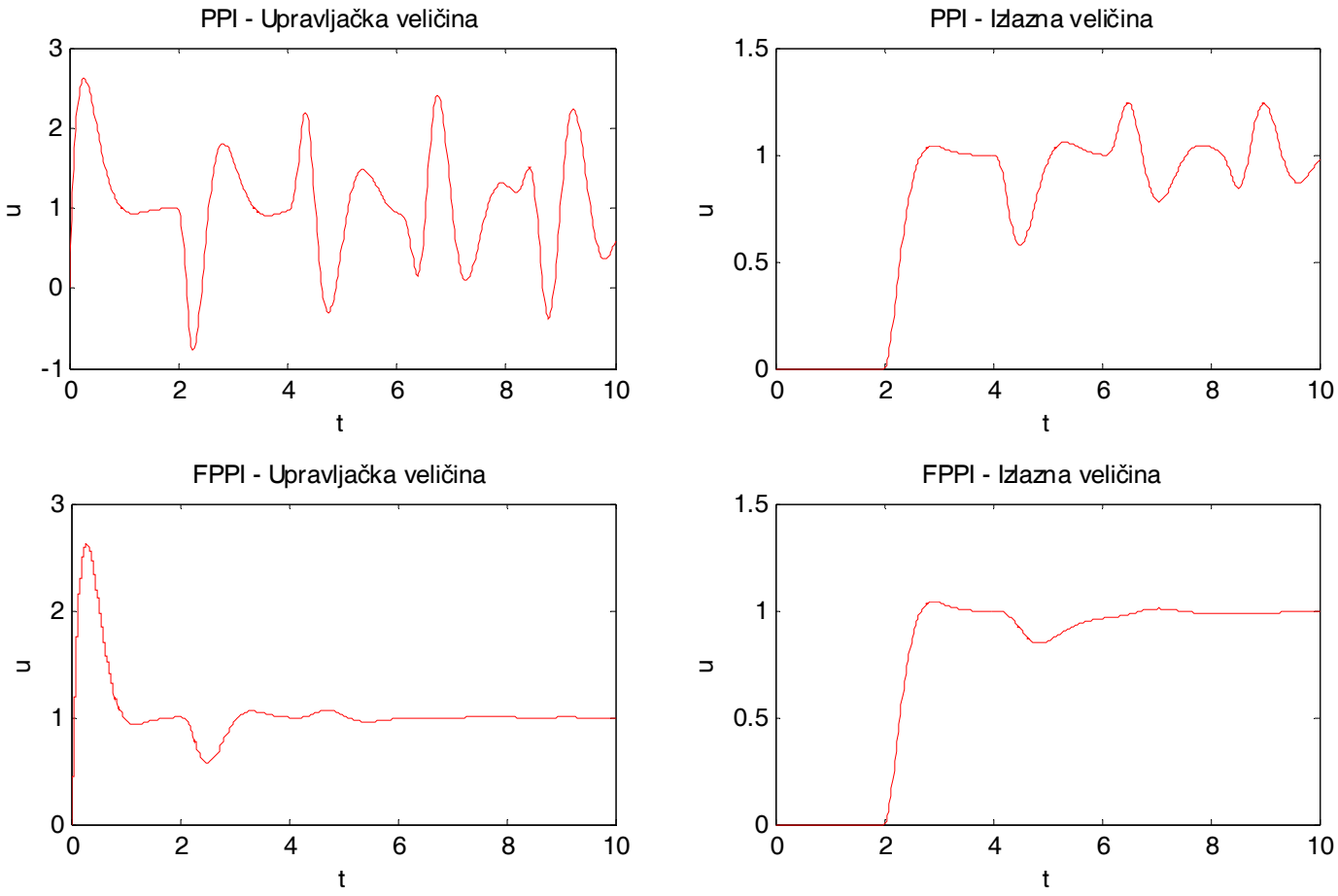



PPI - Upravljačka veličina
PPI - Izlazna veličina
FPPI - Upravljačka veličina
FPPI - Izlazna veličina
u
t

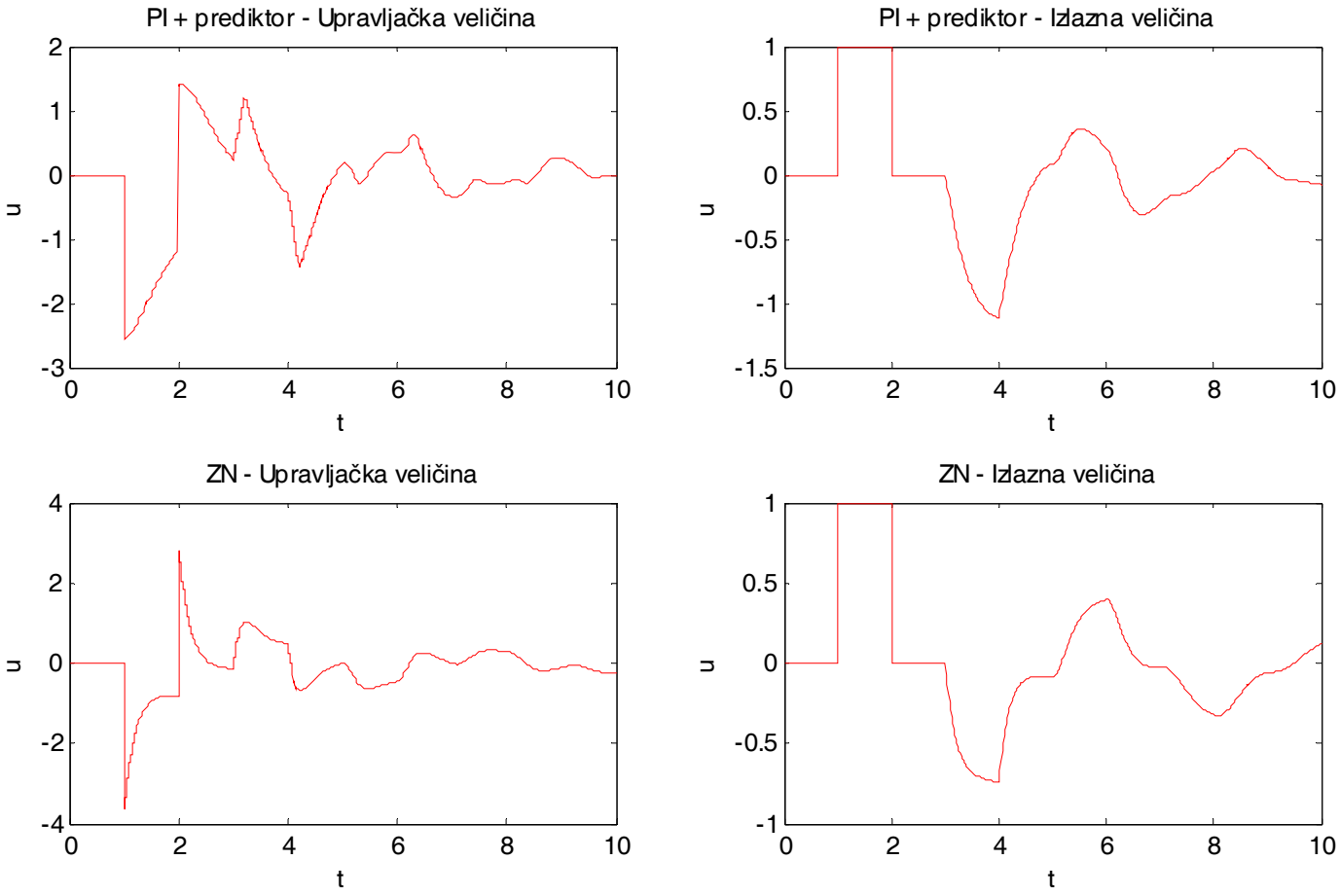
Simulacije za netočan model procesa:

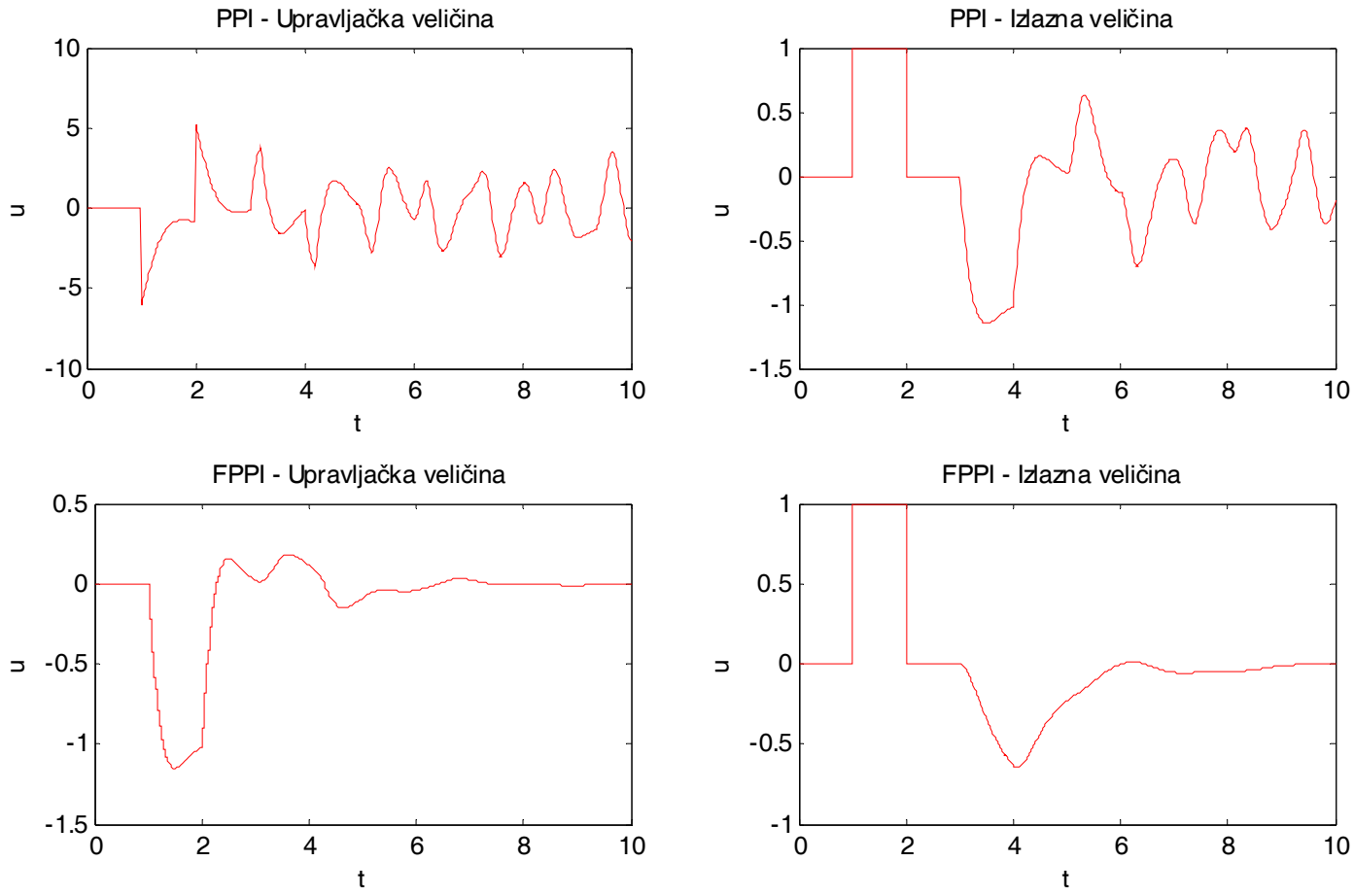
- *Odziv na skokovitu promjenu vodeće veličine:*



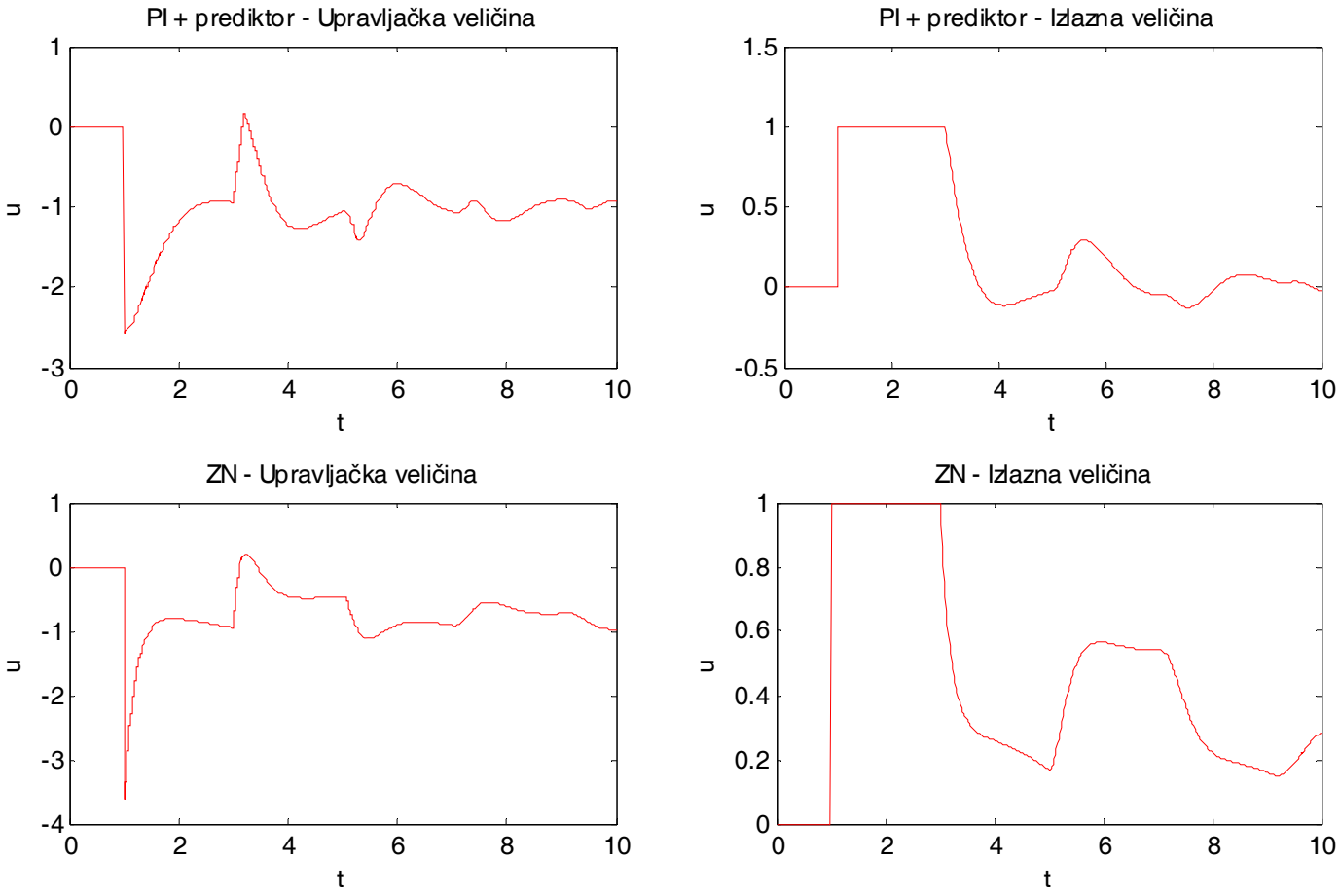

PPI - Upravljačka veličina
PPI - Izlazna veličina
FPPI - Upravljačka veličina
FPPI - Izlazna veličina
u
t

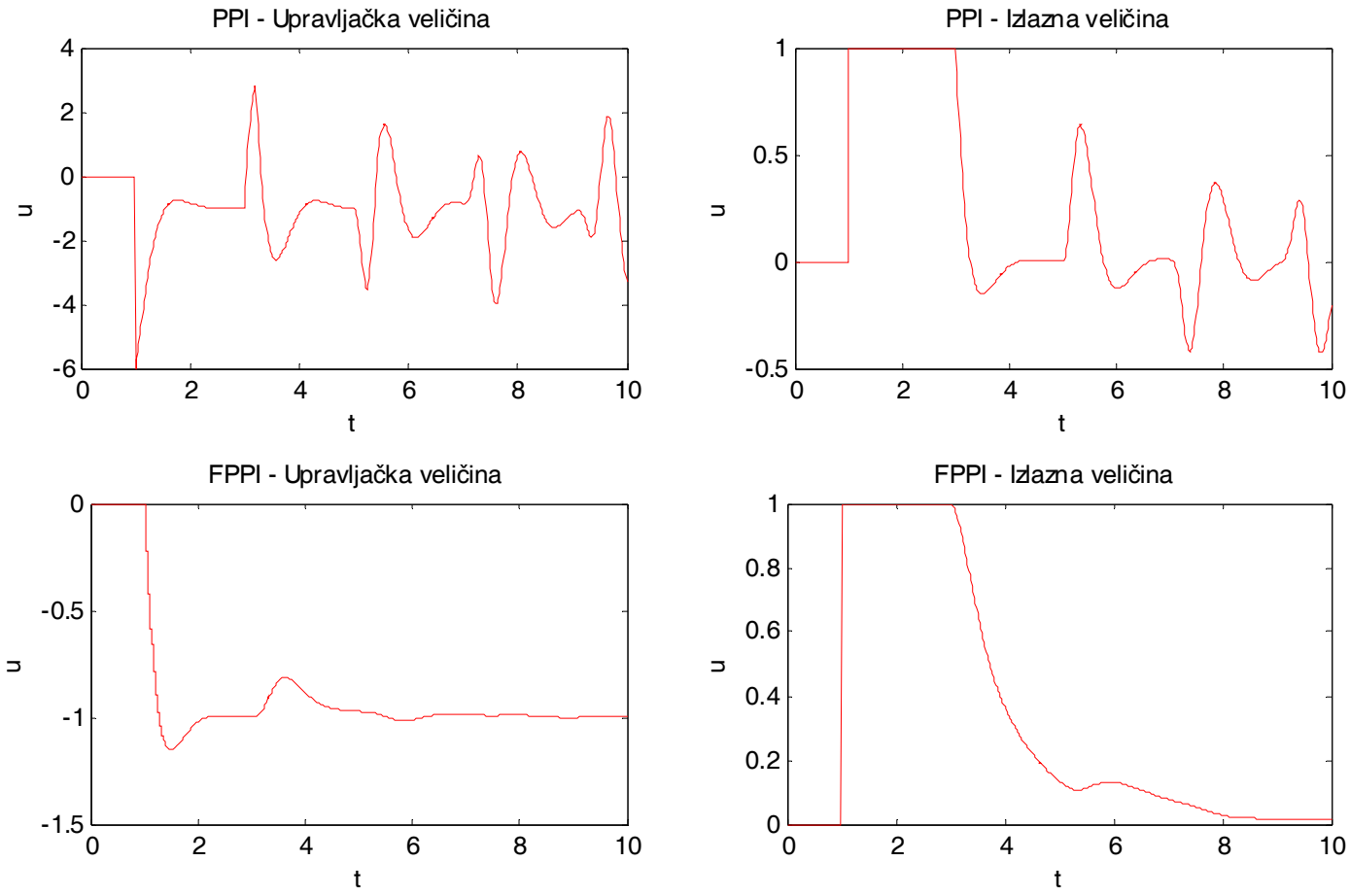
- *Odziv na kratku smetnju na izlazu procesa (trajanje poremećaja < T_t):*




PPI - Upravljačka veličina
PPI - Izlazna veličina
FPPI - Upravljačka veličina
FPPI - Izlazna veličina
u
t

- *Odziv na dugu smetnju na izlazu procesa (trajanje poremećaja > T_t):*




PPI - Upravljačka veličina
PPI - Izlazna veličina
FPPI - Upravljačka veličina
FPPI - Izlazna veličina
u
t

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
Fakultet elektrotehnike i računarstva
Zavod za automatiku i računalno inženjerstvo
Unska 3, Zagreb, HRVATSKA

Prof. dr. sc. Ivan Petrović

Računalno upravljanje sustavima

Poglavlje 8: Izvedbeni aspekti RSU-a

© Ivan Petrović

Sadržaj poglavlja

8.1. Uvod

8.2. Sklopovske izvedbe RSU-a

8.3. Prijenos i obradba mjernih signala u RSU-a

8.4. Prilagodba upravljačkih signala izvršnim organima

8.5. Prilagodba sustava upravljanja za prihvaćanje naredaba operatera

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
Fakultet elektrotehnike i računarstva
Zavod za automatiku i računalno inženjerstvo
Unska 3, Zagreb, HRVATSKA

Poglavlje 8: Izvedbeni aspekti RSU-a

8.1. Uvod

© Ivan Petrović

Osnovni zahtjevi na RSU procesima - 1

- **Mjerni signali sa senzora moraju biti vjerno preneseni u RSU što zahtijeva njihovu:**
  - prilagodbu po iznosu i obliku
  - zaštitu od vanjskih smetnji
  - predobradbu (linearizaciju, filtriranje,...)
- **Upravljački signal koji RSU šalje na izvršni organ mora biti:**
  - prilagođen po iznosu i obliku karakteristikama izvršnog organa
  - digitalni regulator mora voditi računa o fizikalnim ograničenjima izvršnog organa
- **Interakcija s operaterom:**
  - operateru mora biti omogućena promjena načina rada regulacijskog kruga bez štetnih posljedica na upravljani sustav

© Ivan Petrović

Osnovni zahtjevi na RSU procesima - 2

- **RSU mora komunicirati s procesom u stvarnome vremenu, tj. mora biti u stanju reagirati na promjene u procesu u dovoljno kratkom vremenu da ne dolazi do degradacije vladanja procesa.**
- **Čimbenici koji određuju može li RSU raditi u stvarnome vremenu su:**
  - **brzina mikroprocesorskih jedinica,**
  - **brzina operacijskog sustava,**
  - **izvedba aplikacijskog softvera,**
  - **brzina i učinkovitost komunikacije,**
  - **broj I/O događaja.**

© Ivan Petrović

Uvod - zaključno

- **Projektant RSU-a treba:**
  - **Izabrati odgovarajuću sklopovsku izvedbu računalnog sustava, vodeći računa o zahtijevanim tehničkim performansama i o dopuštenoj cijeni**
  - **Osigurati kvalitetne mjerne signale RSU-u**
  - **Prilagodi upravljačke signale izvršnim organima**
  - **Prilagoditi sustav upravljanja na prihvaćanje naredaba operatera**
- **U nastavku se obrađuju ova četiri aspekta izvedbe sustava upravljanja.**

© Ivan Petrović

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
Fakultet elektrotehnike i računarstva
Zavod za automatiku i računalno inženjerstvo
Unska 3, Zagreb, HRVATSKA

Poglavlje 8: Izvedbeni aspekti RUS-a

8.2. Sklopovska izvedba RSU

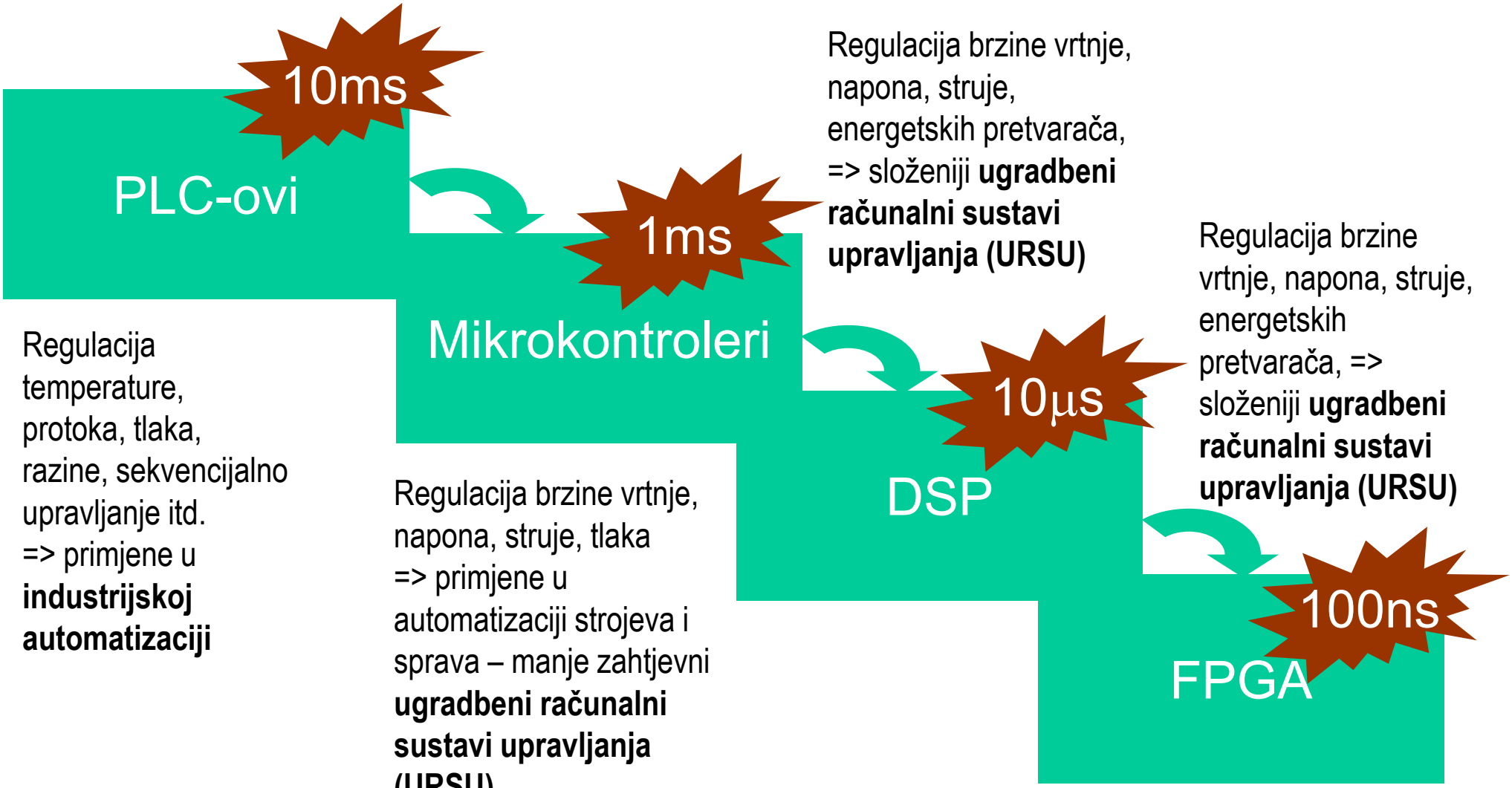
© Ivan Petrović

Vremena reakcije sustava - primjeri

10 μs:	pozicioniranje cilindra u ofset printanju (0,1 mm pri 20 m/s)
50 μs:	sinkronizacija senzora u zaštiti sabirnice energetske podstanice (1º za 50Hz)
100 μs:	rezolucija kloka za visko brzinska vozila (1cm pri 360 km/h)
100 μs:	rezolucija događaja u električnoj mreži
1,6 ms:	vrijeme uzorkovanja za algoritme zaštite u energetskim podstanicama
10 ms:	rezolucija događaja u procesnoj industriji
20 ms:	vrijeme otvaranja / zatvaranja jakostrujnog prekidača
200 ms:	prihvatljivo vrijeme reakcije na naredbe operatera
1 s:	prihvatljivo vrijeme osvježavanja podataka na operatorskom zaslonu
3 s:	prihvatljivo vrijeme postavljanja nove slike na operatorskom zaslonu
10 s:	prihvatljivo vrijeme oporavka zablokiranog nadzornog računala
1 min:	opći zahtjev za vremenom osvježavanja procesne baze u slučaju velikih kvarova

© Ivan Petrović

Računalna izvedba prema vremenu reakcije



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
Fakultet elektrotehnike i računarstva
Zavod za automatiku i računalno inženjerstvo
Unska 3, Zagreb, HRVATSKA

Poglavlje 8: Izvedbeni aspekti RUS-a

8.2. Sklopovska izvedba RSU

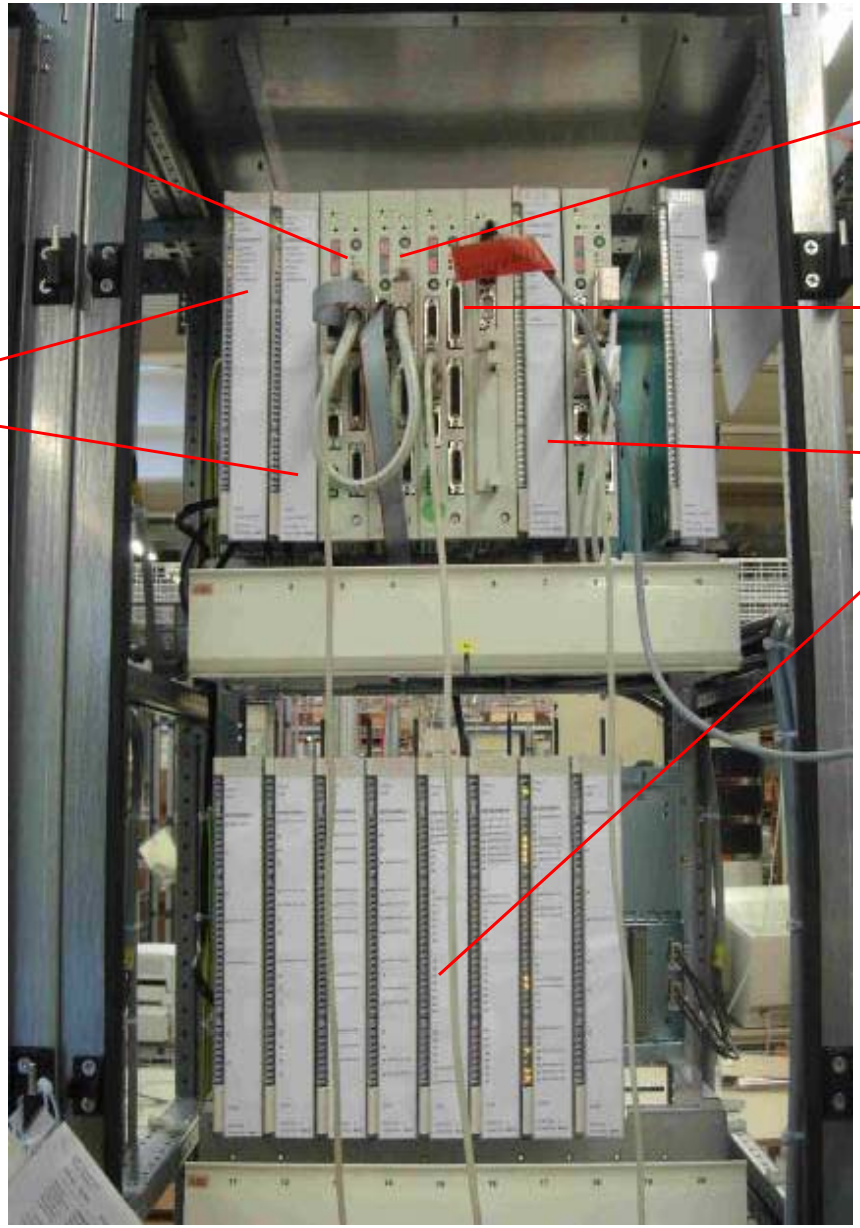
Programirljivi logički kontroleri (PLC-ovi)

© Ivan Petrović

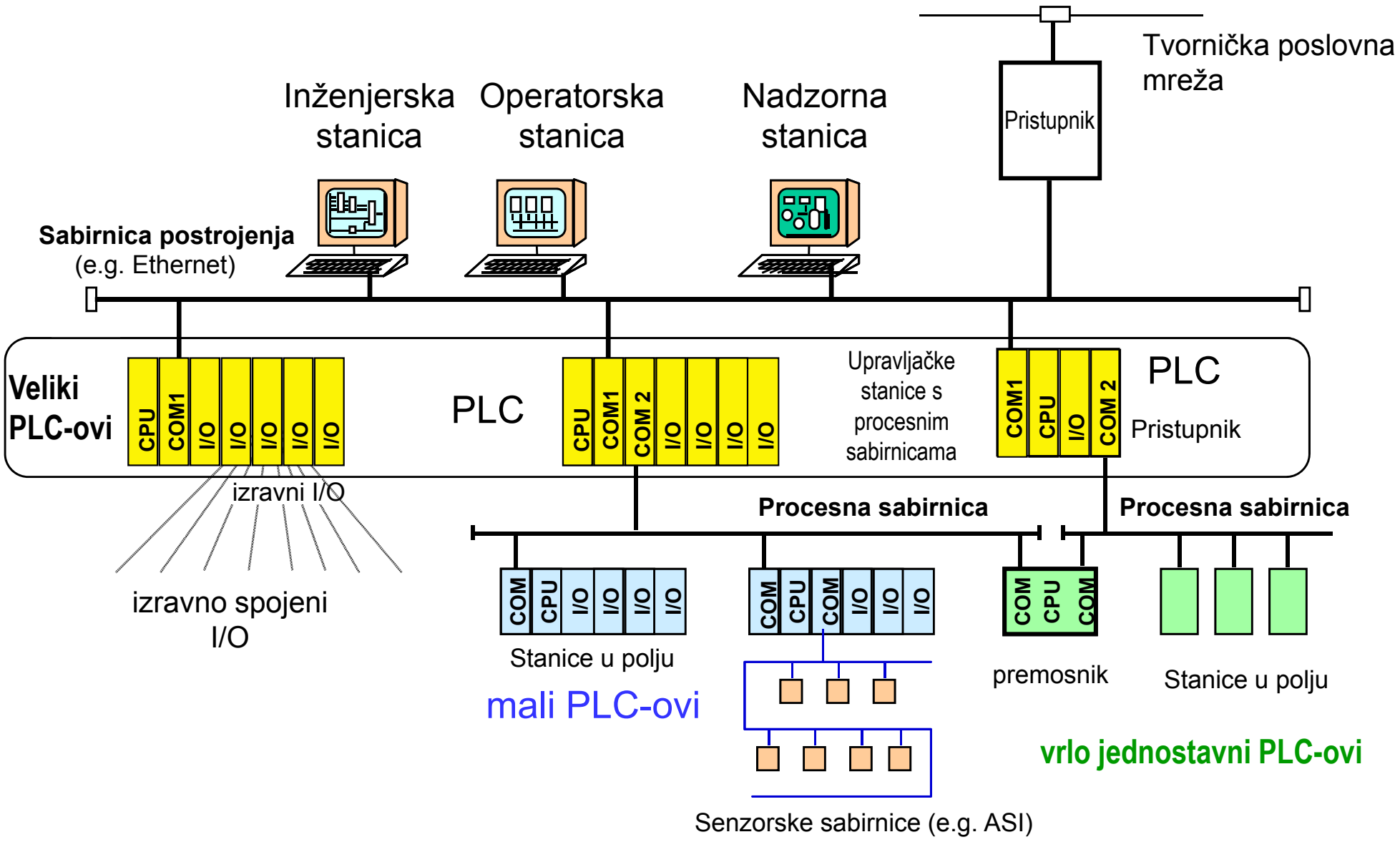
PLC - Definicije

- PLC-ovi su “mala” računala specijalizirana za zadaće automatizacije u industrijskim okruženjima
- PLC-ovi nekad: zamjena za relejno sekvencijalno upravljanje i kontinuirano pneumatsko i hidrauličko upravljanje
- PLC-ovi danas: ugradbena računala s velikim brojem ulaza i izlaza
- Funkcije današnjih PLC-ova: mjerenje, upravljanje, zaštita (ali i prikupljanje događaja, komunikacija, sučelje s operaterima) u sustavima automatizacije industrijskih i energetskih postrojenja i procesa

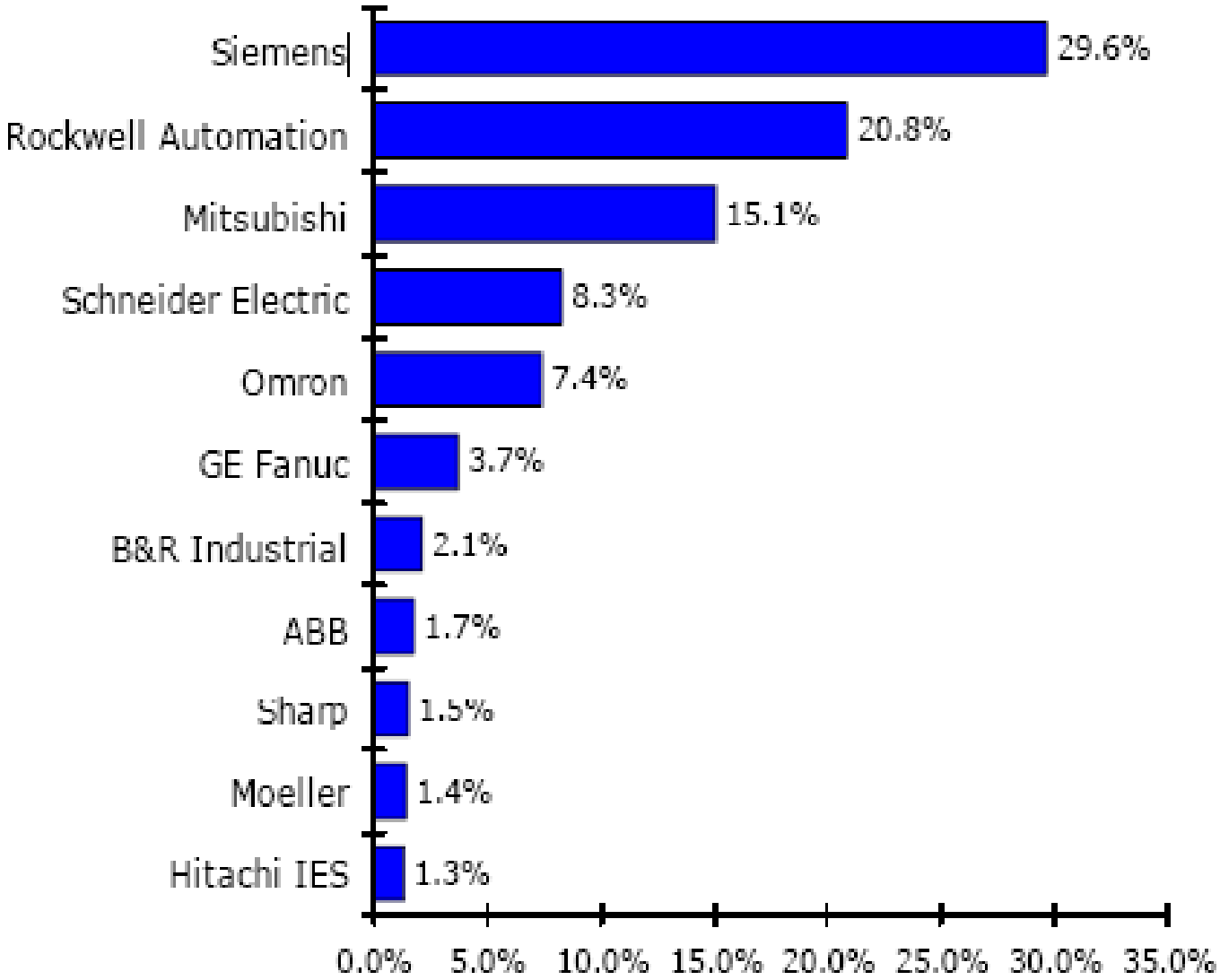
Primjer PLC-a



PLC: Mjesto i uloga u sustavima automatizacije

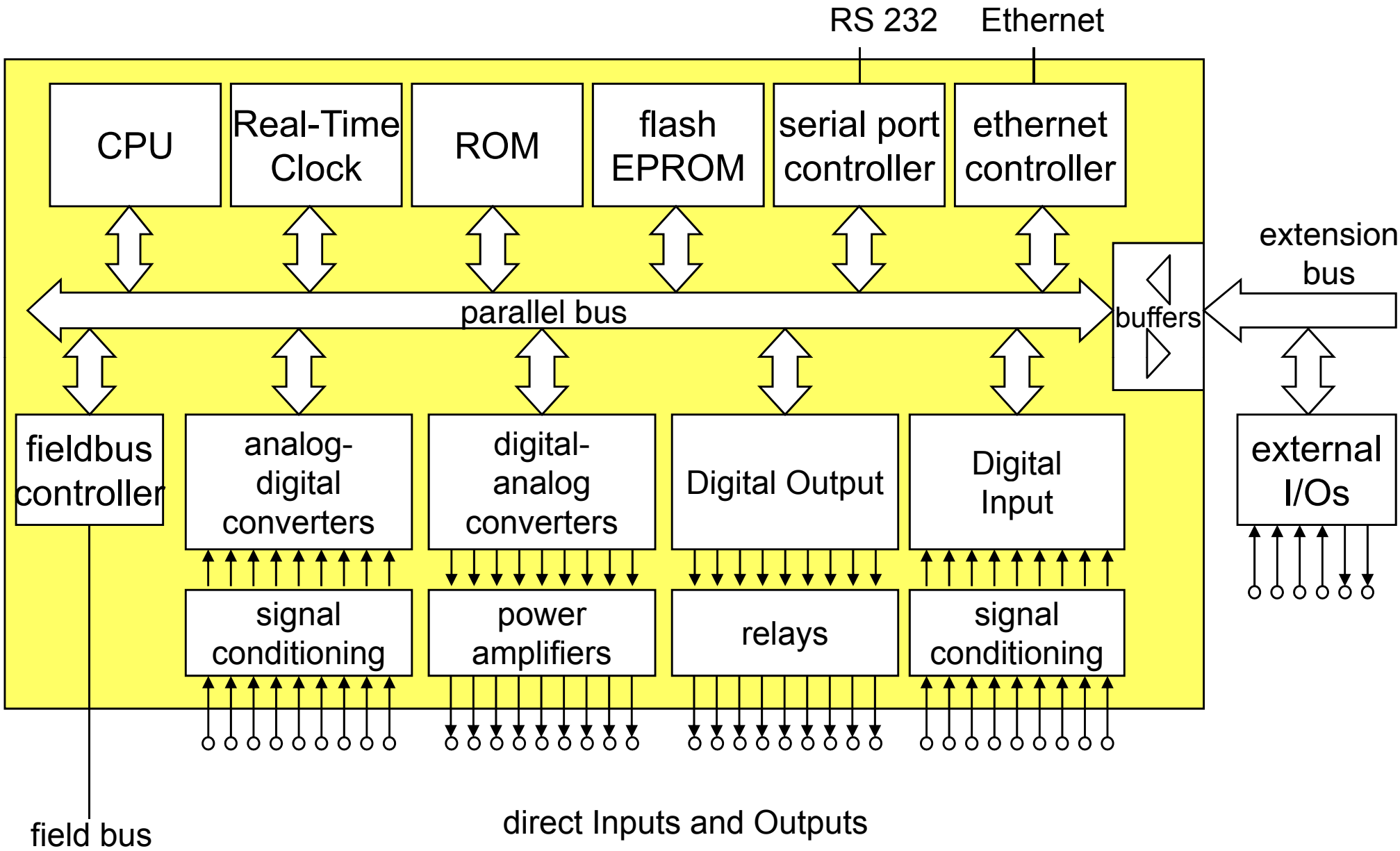


Glavni proizvođači



Ukupno prodano u 2006: 8,3 mld. USD

Opća arhitektura PLC-a

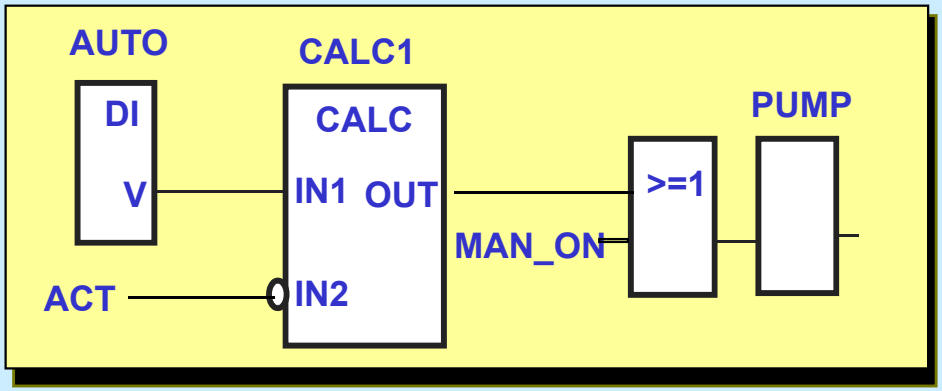


IEC 61131-3 programski jezici

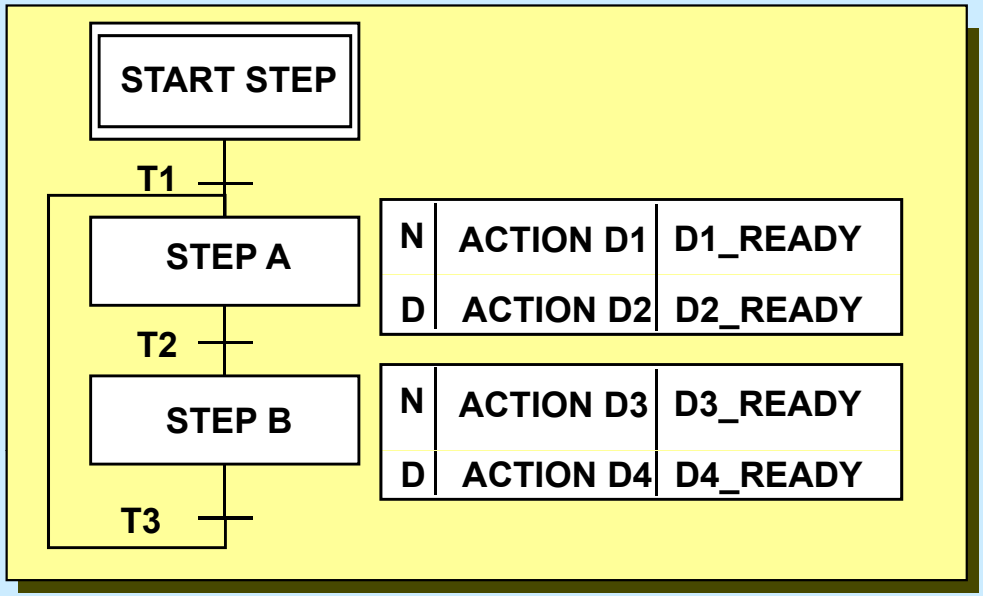
http://www.isagraf.com

Grafički jezici

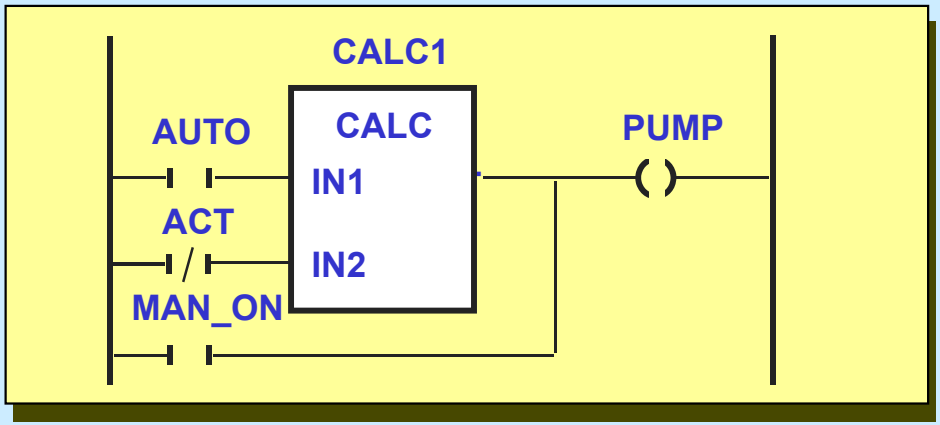
Function Block Diagram (FBD)



Sequential Flow Chart (SFC)



Ladder Diagram (LD)



Tekstualni jezici

Structured Text (ST)

```
VAR CONSTANT X : REAL := 53.8 ;
Z : REAL; END_VAR
VAR aFB, bFB :  FB_type; END_VAR

bFB(A:=1, B:='OK');
Z := X - INT_TO_REAL (bFB.OUT1);
IF Z>57.0 THEN aFB(A:=0, B:="ERR");
ELSE  aFB(A:=1, B:="Z is OK");
END_IF
```

Instruction List (IL)

```
A: LD   %IX1 (* PUSH BUTTON *)
   ANDN %MX5 (* NOT INHIBITED *)
   ST   %QX2 (* FAN ON *)
```


© Ivan Petrović

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
Fakultet elektrotehnike i računarstva
Zavod za automatiku i računalno inženjerstvo
Unska 3, Zagreb, HRVATSKA

Poglavlje 8: Izvedbeni aspekti RUS-a

8.2. Sklopovska izvedba RSU

Mikrokontroleri

© Ivan Petrović

Što je mikrokontroler?

RAČUNALO → **CPU (radna frekvencija)**, **MEMORIJA**, **U/I JEDINICE** → **SABIRNICE**

SABIRNICE – Adresna, podatkovna i upravljačka

← Sve se to nalazi unutar kućišta računala

← Računalo ima tzv. procesorsku moć – sposobnost da obrađuje (procesira) podatke

U svakodnevnom životu više puta koristimo uređaje koji za rad koriste upravo tu "procesorsku moć" a nisu spojeni na nikakvo računalo.

Procesorsku moć dobivaju iz → **MIKROKONTROLERA**

© Ivan Petrović

Zašto mikrokontroler? – *niska cijena*

MIKROPROCESORI → veliki napredak tijekom godina (značajna medijska pažnja)

→ cijene su u prosjeku oko 1000 kn

MIKROKONTROLERI → jednako veliki napredak

→ cijene su u prosjeku oko 50 kn

→ većina ih je ispod 100 kn

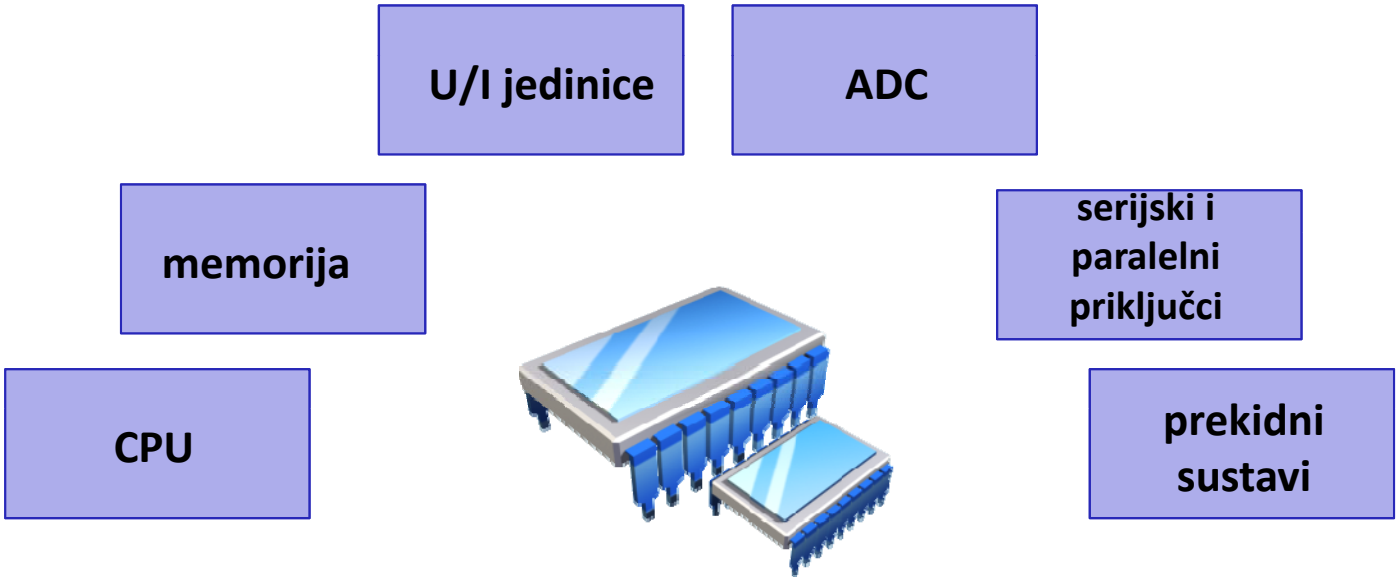
Mikrokontroleri su najprodavanija vrsta procesora

RAČUNALO može obavljati raznolike zadatke, no to nam najčešće ne treba, **treba nam jeftini procesor koji ima "procesorsku moć" za obavljanje jednog zadatka** → **mikrokontroler.**

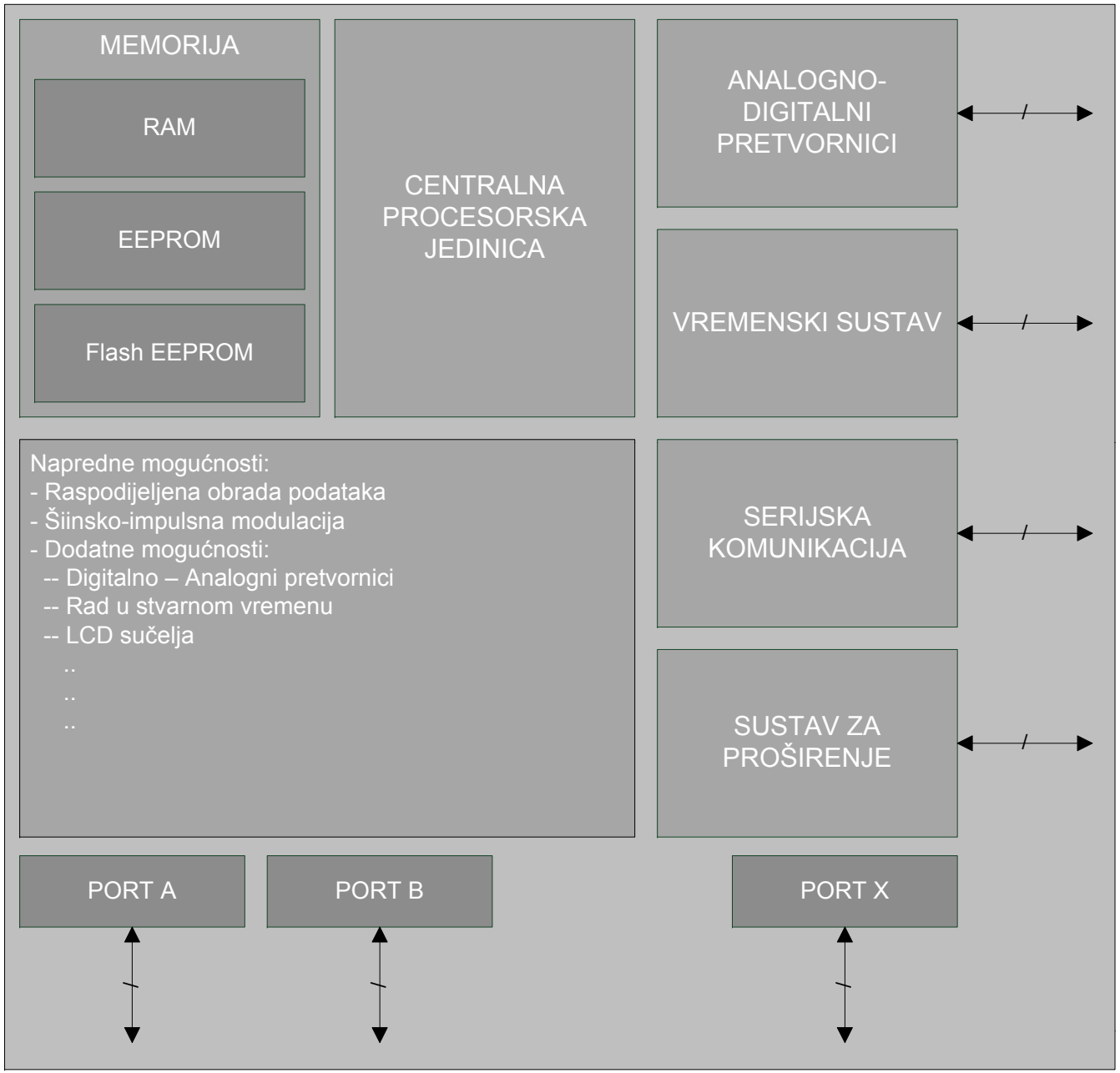
Zašto mikrokontroler? – *mala dimenzija*

MIKROKONTROLER → kompaktna veličina

"računalo na samo jednom čipu"



Generička arhitektura mikrokontrolera



Odabir mikrokontrolera

- **Izraditi dijagram povezivanja**
  - **na njemu označiti sve ulazne i izlazne komponente koje će biti spojene na mikrokontroler**
- **Odrediti sustave koji trebaju biti na samom mikrokontroleru**
  - **u ovisnosti o zadatku koji će obavljati.**
- **Ukratko, treba odgovoriti na sljedeća pitanja:**
  - **Zahtijeva li aplikacija neki specifični mikrokontroler?**
  - **Koja je potrebna vremenska rezolucija cjelokupnog sustava ? Pomoći će u određivanju radne frekvencije procesora.**
  - **Kolika je potrebna veličina podatka (treba li nam 4, 8 ili 16 bitovni mikrokontroler)?**
  - **Koliko treba digitalnih ulaznih/izlaznih i analognih ulaznih/izlaznih priključaka?**

Glavni proizvođači mikrokontrolera

- **Abecednim redom:**
  - **Advanced Micro Devices**
  - **Atmel**
  - **Dallas Semiconductor**
  - **EM Microelectronic-Marin SA**
  - **Intel**
  - **Microchip**
  - **Motorola**
  - **National Semiconductor**
  - **Parallax**
  - **Zilog**

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
Fakultet elektrotehnike i računarstva
Zavod za automatiku i računalno inženjerstvo
Unska 3, Zagreb, HRVATSKA

Poglavlje 8: Izvedbeni aspekti RUS-a

8.2. Sklopovska izvedba RSU

Digitalni procesori signala

(*engl. Digital Signal Processor - DSP*)

© Ivan Petrović

DSP

- **Digitalni procesor signala specijalno je oblikovan mikroprocesor za digitalnu obradu signala, najčešće u stvarnom vremenu**
- **Digitalna obrada signala jedna je od najviše upotrebljavanih tehnologija današnjice**
- **Primjene:**
  - **Bežične komunikacije**
  - **Žične komunikacije**
  - **Video i slike**
  - **Audio**
  - **Zaštitno alarmni sustavi**
  - **Digitalno upravljanje**
  - **Automobilska industrija**
  - **Mjerenja / senzori**
  - **...**

DSP algoritmi

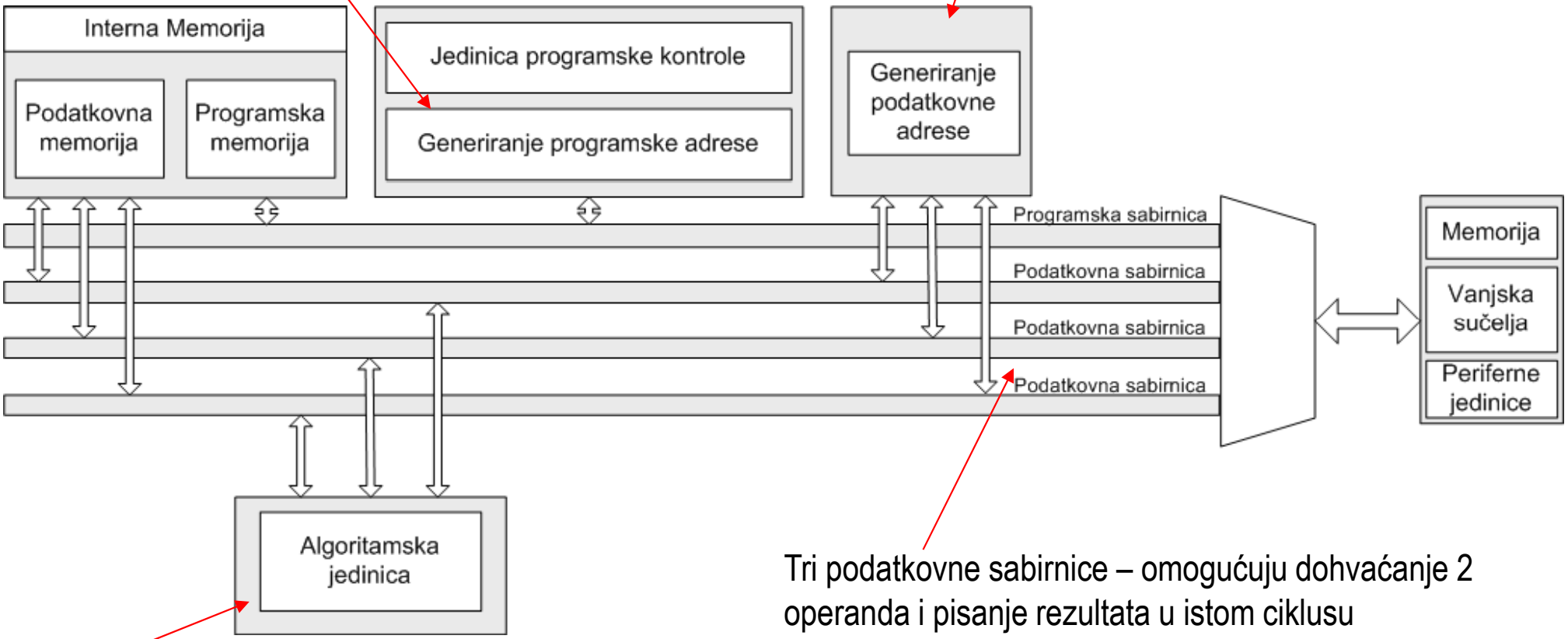
- Implementirani se algoritmi tipično primjenjuju na signale radi izlučivanja informacije, promjene oblika prikaza, otklanjanja šuma iz signala itd.
- Primjeri algoritama su:
  - vremenski ovisno i vremenski neovisno filtriranje, Fourierova Transformacija (FFT), parametarska estimacija, digitalni regulator itd.
- Specijalni oblik koji se očituje u raznim algoritmima jest skalarni umnožak vektora, koji kombinira množenje i memoriranje (engl. multiplication and accumulation - MAC):

$$\sum_{k=0}^{N-1} a(k)b(k) \qquad \sum_{k=0}^{n} a(k)b(n-k)$$

DSP Arhitektura

Obrada velike količine podataka često se odvija kroz " ponavljajuće petlje". Automatsko upravljanje petljama.

Automatsko generiranje adrese sljedećeg podatka bez gubitka ciklusa i bez korištenja algoritamske jedinice



Tri podatkovne sabirnice – omogućuju dohvaćanje 2 operanda i pisanje rezultata u istom ciklusu

Logičke operacije, zbrajanje/oduzimanje, MAC, šiftanje, zaokruživanje, odsijecanje

Glavni proizvođači DSP-ova

- **Abecednim redom:**
  - **Analog Devices**
  - **Lucent Technologies**
  - **Motorola**
  - **Texas Instruments**

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
Fakultet elektrotehnike i računarstva
Zavod za automatiku i računalno inženjerstvo
Unska 3, Zagreb, HRVATSKA

Poglavlje 8: Izvedbeni aspekti RUS-a

8.2. Sklopovska izvedba RSU

Sustavi na programirljivom čipu

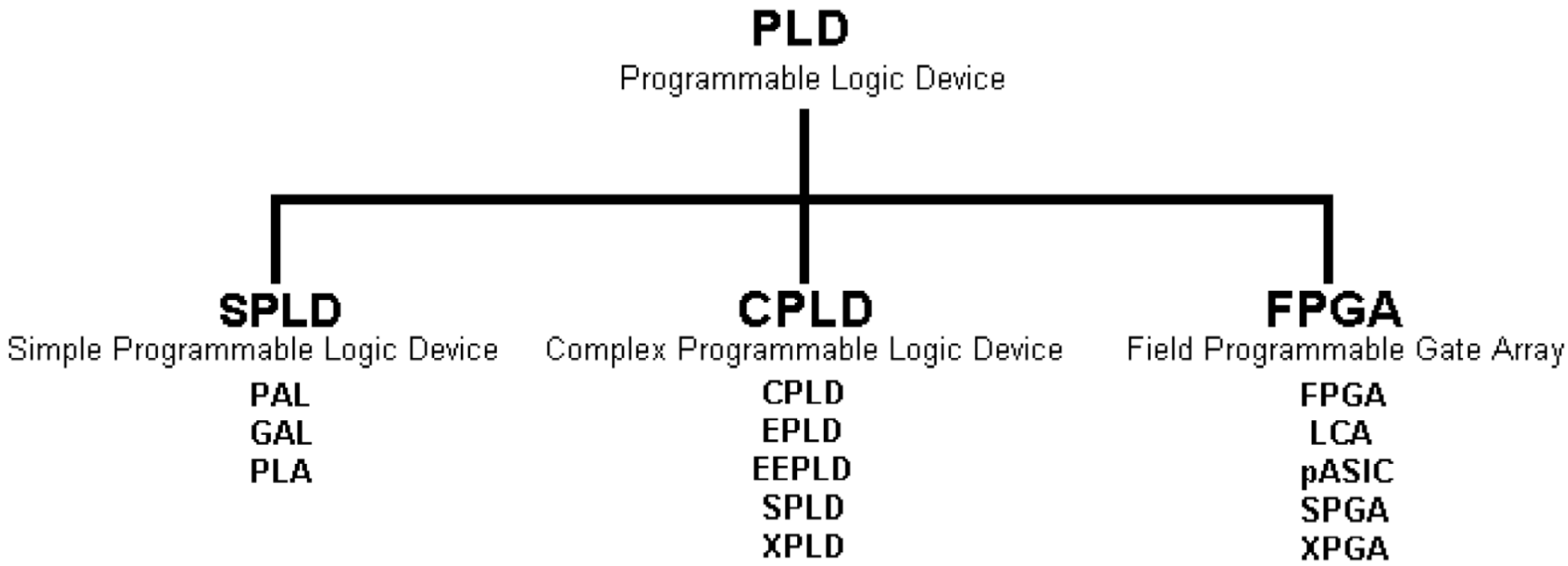
(*engl. Systems on Programmable Chips, SOPC*)

© Ivan Petrović

Programirljiva logika

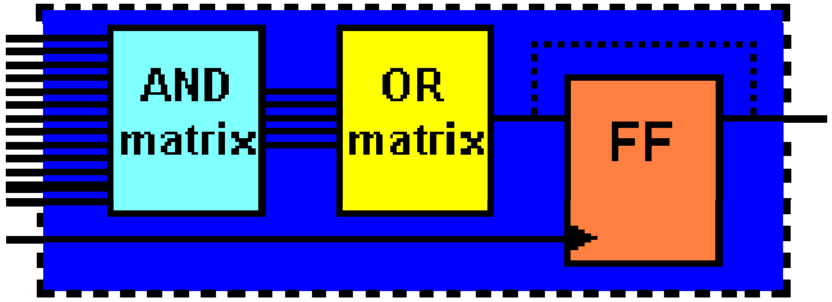
- **Programiranje u toku proizvodnje čipa**
  - Tvornički programirana polja logičkih vrata
  - ASIC (Application Specific Integrated Circuit)
  - U potpunosti korisnički dizajn
  - Visoka cijena razvoja
  - Niža cijena pojedinačnog integriranog kruga
- **Programiranje kod korisnika**
  - Niska cijena razvoja
  - Veća pojedinačna cijena integriranog kruga
  - SPLD (Simple Programmable Logic Devices)
    - PAL (Programmable Array Logic), GAL (Generic Array Logic)
  - CPLD (Complex Programmable Logic Devices)
  - FPGA (Field Programmable Gate Area)

Pregled sustava na programirljivom čipu



SPLD - 1

- **SPLD sklop sadrži dvije ili više "makroćelija" (specifično od proizvođača do proizvođača) kojima ostvaruje logičke funcije.**



simplified SPLD-macrocell

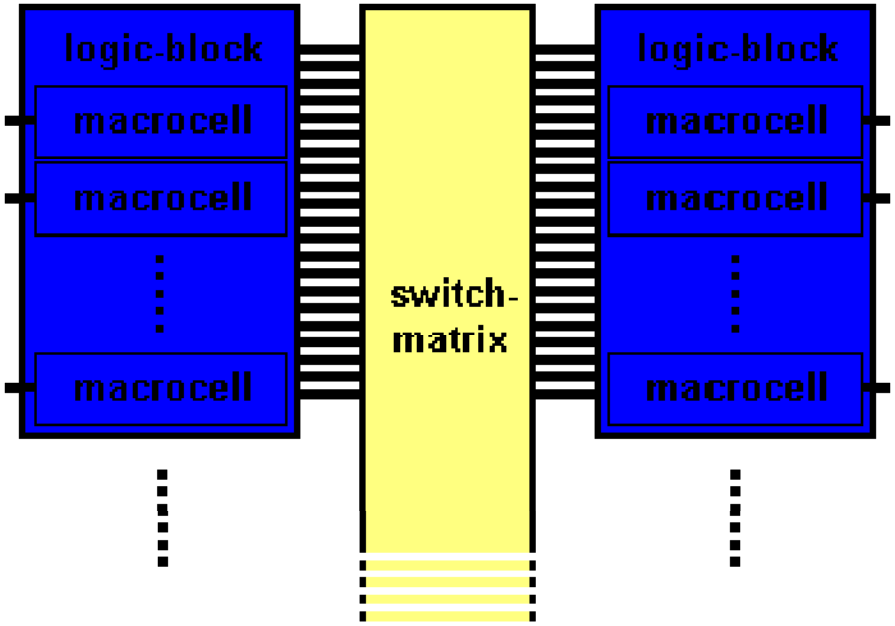
SPLD - 2

- **Glavne značajke SPLD-ova:**
  - 1 makroćelija po izlazu
  - minimalno 2 makroćelije u sklopu
  - tipično su sve makroćelije jednake
  - 1 množenje po makroćeliji
  - množenje je tipično izvedeno pomoću I i ILI matrica
  - minimalno 1 matrica (I/ILI) programirljiva
  - 1 bistabil po makroćeliji
- **Glavne prednosti:**
  - predvidljiv vremenski odziv
  - jednostavan razvoj
- **Glavni nedostaci:**
  - neučinkovito korištenje resursa
  - iskoristivi samo za jednostavne logičke funkcije

© Ivan Petrović

CPLD - 1

- CPLD (Complex Programmable Logic Device)
  - U istom kućištu više PAL sklopova međusobno povezanih programirljivim međuvezama
  - Mogu se realizirati vrlo složene funkcije koje kod nekih tipova CPLD sklopova imaju ekvivalent i od nekoliko stotina tisuća logičkih vrata



CPLD-architecture

Makroblokovi

- Sastoje se od više makroćelija
- Po strukturi vrlo slični PAL sklopu
- Ulazne signale uzimaju, a izlazne vraćaju u središnju prespojnu matricu

Ulazno izlazni blokovi

- Vezani su uz izvode integriranog kruga
- Mogu sadržavati sklop za kontrolu kašnjenja

CPLD - 2

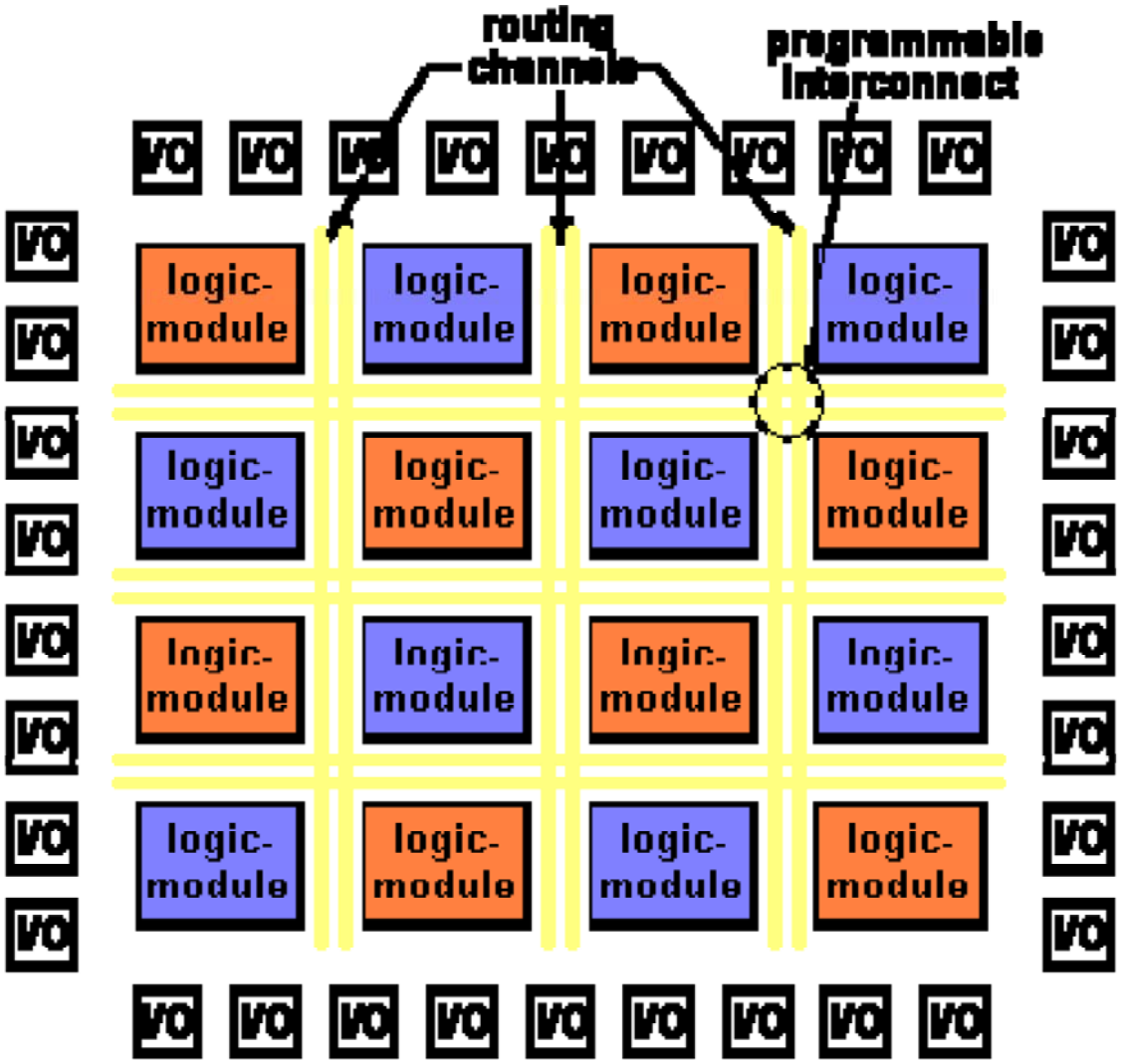
- **Glavne značajke CPLD-ova:**
  - umnošci se generiraju u programirljivm makroćelijama
  - tipično 1 bistabil po makroćeliji
  - više makroćelija po logičkom makrobloku
  - tipično su svi logički makroblokovi jednaki
  - minimalno dva logička makrobloka po sklopu
  - prespajanje između makroblokova pomoću prespojne matrice
- **Glavne prednosti:**
  - predvidljiv vremenski odziv
  - malo kašnjenje od pina do pina
  - učinkovito korištenje resursa pomoću prespojne matrice
  - moguće izvesti srednje složene funkcije
- **Glavni nedostaci:**
  - za izvođenje vrlo složenih funkcija potrebna je vrlo složena (i skupa) prespojna matrica

FPGA

- **FPGA (Field Programmable Gate Array)**
  - **Početci u kasnim sedamdesetim (82S100 i 82S105 tvrtke Signetics)**
  - **Zasnivaju se na konfigurabilnim logičkim blokovima (CLB) međusobno povezanim programirljivim međuvezama**
  - **Većina tipova ne pamti konfiguracijske podatke pa se kod starta moraju učitati iz vanjske memorije**
  - **Mogu se realizirati vrlo složene funkcije koje kod nekih tipova mogu imati ekvivalent i od nekoliko milijuna logičkih vrata**

© Ivan Petrović

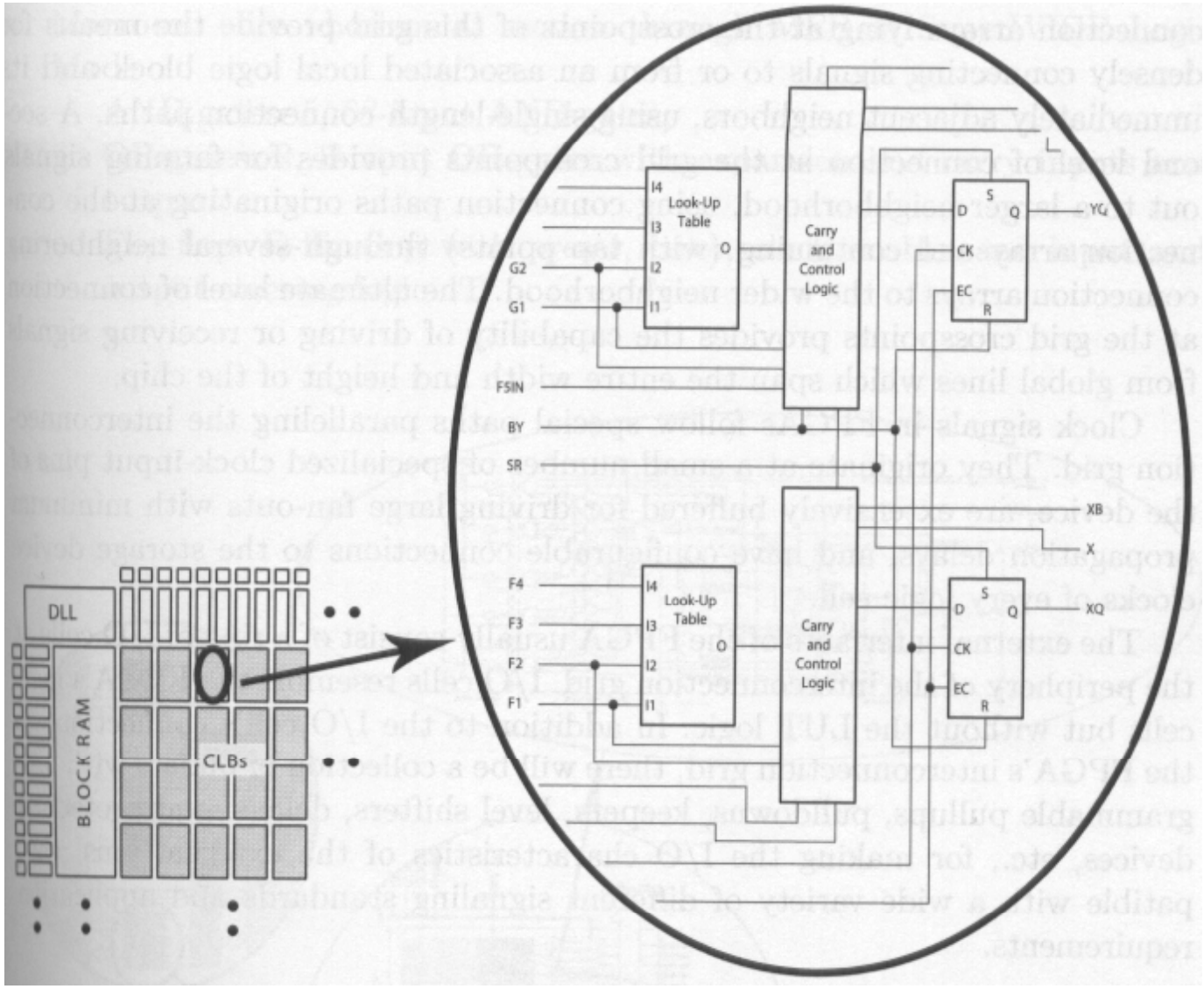
FPGA - 1



FPGA-architecture

- FPGA omogućuje izvedbu vrlo složenih funkcija što je postignuto tzv. “kanalnim prespajanjem” umjesto matričnoga kod CPLD.
- FPGA se sklop sastoji od velikog broja konfigurabilnih logičkih modula (blokova, CLB), koji su smješteni u strukturu polja.
- Kanali između CLB-ova koriste se za njihovu interakciju, koja je programirljiva.
- Polje CLB-ova okruženo je programirljivim I/O-modulima i povezano preko programirljivih veza.
- Ova sloboda povezivanja omogućuje da svaki CLB dohvati svaki CLB ili I/O-modul.

FPGA – struktura CLB-a



- CLB se sastoji od više malih (tipično 16-bitovnih) preglednih tablica (engl. lookup tables, LUTs), koje mogu pružiti bilo koju logičku funkciju.
- Ulazi LUT-a povezani su na prespojne kanale preko spojnog polja koje se konfigurira u RAM-u
- Izlazi LUT-a povezani su preko dodatnih logičkih blokova, koji se također konfiguriraju u RAM-u, na prespojne kanale.

FPGA -3

- Prvi FPGA sklop razvije 1984. – tvrtka Xilinx
- Glavne prednosti:
  - učinkovito iskorištenje resursa
  - moguća vrlo velika složenost
  - moguća visoka frekvencija rada
- Glavni nedostaci:
  - nije predvidljiv vremenski odziv sklopa (postoje izuzeci)
  - 100% povezanost je vrlo skupa
  - neophodni dobri CAE-alati za razvoj sustava zasnovanih na FPGA sklopovima
- Za upravljanje se češće koriste FPGA sklopovi.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
Fakultet elektrotehnike i računarstva
Zavod za automatiku i računalno inženjerstvo
Unska 3, Zagreb, HRVATSKA

Poglavlje 8: Izvedbeni aspekti RUS-a

8.3. Prijenos i obradba mjernih signala u RSU-a

© Ivan Petrović

TIPIČNI ELEMENTI ZA PREDOBRADBU MJERNIH SIGNALA

- Elementi za predobradbu (kondicioniranje) mjernih signala pretvaraju izlazni signal osjetila u oblik prikladan za daljnju obradbu (najčešće istosmjerni napon ili istosmjernu).

- Najvažniji elementi za predobradbu signala su:

  - Otklonski mostovi (*engl*. Deflection bridges) i

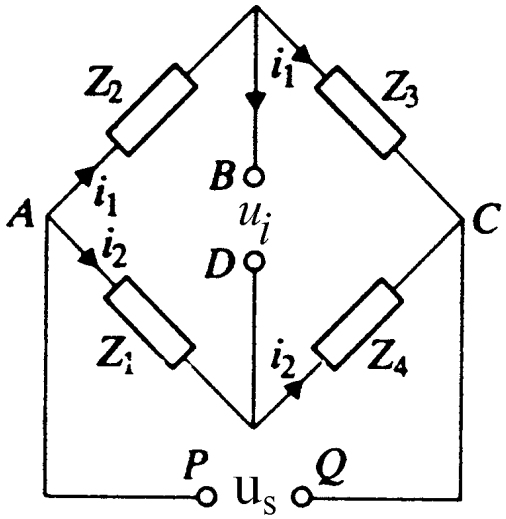
  - Pojačala (*engl*. Amplifiers)

© Ivan Petrović

Otklonski mostovi:

- Koriste se za pretvorbu izlaza iz otporničkih, kapacitivnih i induktivnih osjetila u naponski signal.

*Wheatstone*ov most:



- Impedancije Z_1 do Z_4 mogu biti aktivne i reaktivne.
- Izlazni napon u_i ovisi o naponu napajanja u_s prema sljedećem izrazu:

$$u_i = \left(\frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} - \frac{Z_4}{Z_1 + Z_4} \right) u_s = \\ = \frac{Z_1 Z_3 - Z_2 Z_4}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_4 + Z_3 Z_4} u_s$$

- Most će biti u ravnoteži (u_i = 0) ako je:

$$Z_1 Z_3 = Z_2 Z_4 \qquad odnosno \quad \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_3}{Z_4}$$

© Ivan Petrović

- Ako se promijeni iznos bilo koje impedancije, most postaje neuravnotežen (**otklanja** se iz ravnotežnog stanja) i pojavljuje se izlazni napon različit od nule.
- Osjetljivost mosta po pojedinoj impedanciji određuje se prema izrazima:

$$\frac{\partial u_i}{\partial Z_1} = \frac{Z_4}{\left(Z_1 + Z_4\right)^2} u_s; \qquad \frac{\partial u_i}{\partial Z_2} = \frac{-Z_3}{\left(Z_2 + Z_3\right)^2} u_s$$

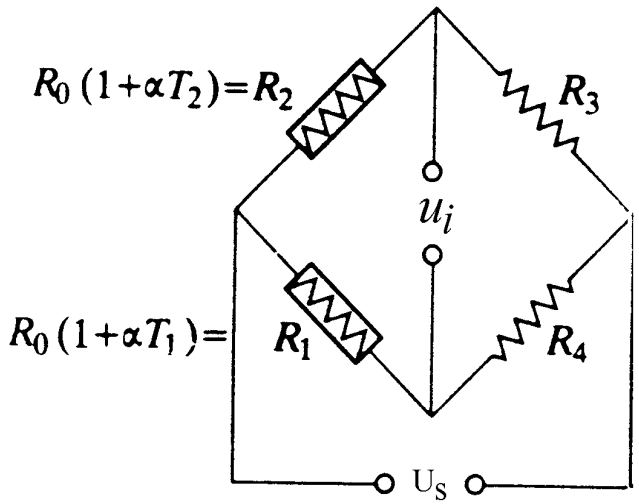
$$\frac{\partial u_i}{\partial Z_3} = \frac{Z_2}{\left(Z_2 + Z_3\right)^2} u_s; \qquad \frac{\partial u_i}{\partial Z_4} = \frac{-Z_1}{\left(Z_1 + Z_4\right)^2} u_s.$$

- Iz ukupne osjetljivosti mosta dobije se ovisnost promjene izlaznog napona u_i o promjenama impedancija mosta prema izrazu:

$$\boxed{\frac{\delta u_i}{u_s} = \frac{Z_4 \delta Z_1 - Z_1 \delta Z_4}{\left(Z_1 + Z_4\right)^2} - \frac{Z_3 \delta Z_2 - Z_2 \delta Z_3}{\left(Z_2 + Z_3\right)^2}}.$$

© Ivan Petrović

<u>Primjer osjetila u mosnom spoju</u>: Dva metalna otporna osjetila (npr. PT-100) u mosnom spoju



- Most će biti u ravnoteži ako je $R_4/R_1=R_3/R_2$, odnosno ako je $T_1=T_2$, tj. mora biti $R_4/R_0=R_3/R_0$ odnosno $R_3 = R_4$, pa se može pisati:

$$\boxed{u_i = \left(\frac{1}{1+\frac{R_3}{R_0}\frac{1}{1+\alpha T_1}} - \frac{1}{1+\frac{R_3}{R_0}\frac{1}{1+\alpha T_2}} \right) U_s}$$

- Ako se izabere $R_3 >> R_0$ vrijedi aproksimacija:

$$\boxed{u_i \approx \left(\frac{1+\alpha T_1}{\frac{R_3}{R_0}} - \frac{1+\alpha T_2}{\frac{R_3}{R_0}} \right) U_s = \frac{R_3}{R_0} U_s \alpha (T_1 - T_2)}.$$

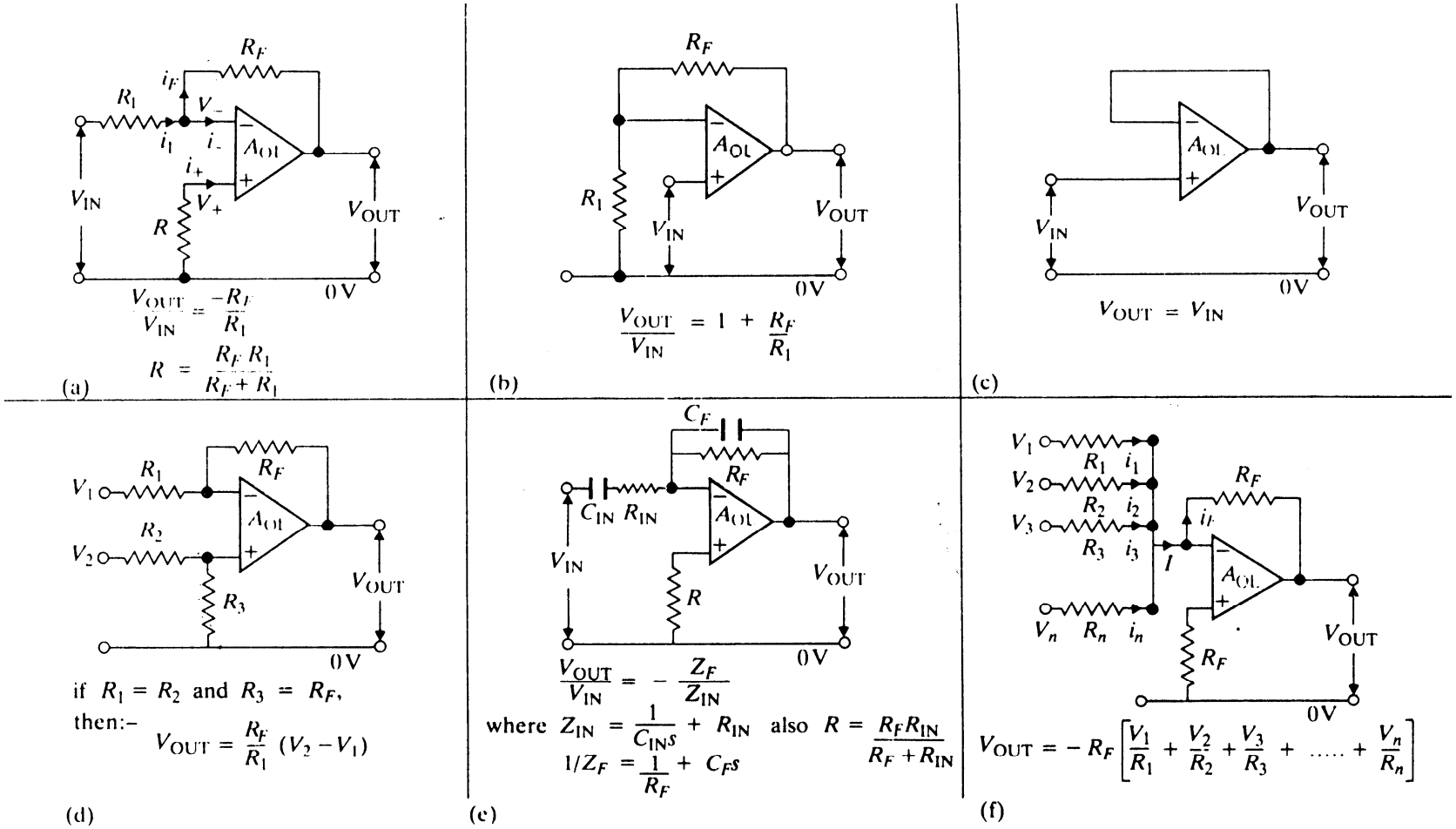
- Dakle, izlazni napon mosta proporcionalan je razlici temperatura.

© Ivan Petrović

Pojačala:

- Pojačala su neophodna za pojačavanje signala malih vrijednosti na vrijednosti prikladne za daljnju obradbu.
- Osnovni gradbeni element pojačala signala jest integrirano operacijsko pojačalo, koje se odlikuje visokim pojačanjem i izvodi se tako da može pojačavati signale u širokom rasponu frekvencija.
- Operacijskom se pojačalu izvana dodaje pasivna mreža koja određuje dinamička i statička svojstva pojačala (vidi sljedeću sliku).

© Ivan Petrović

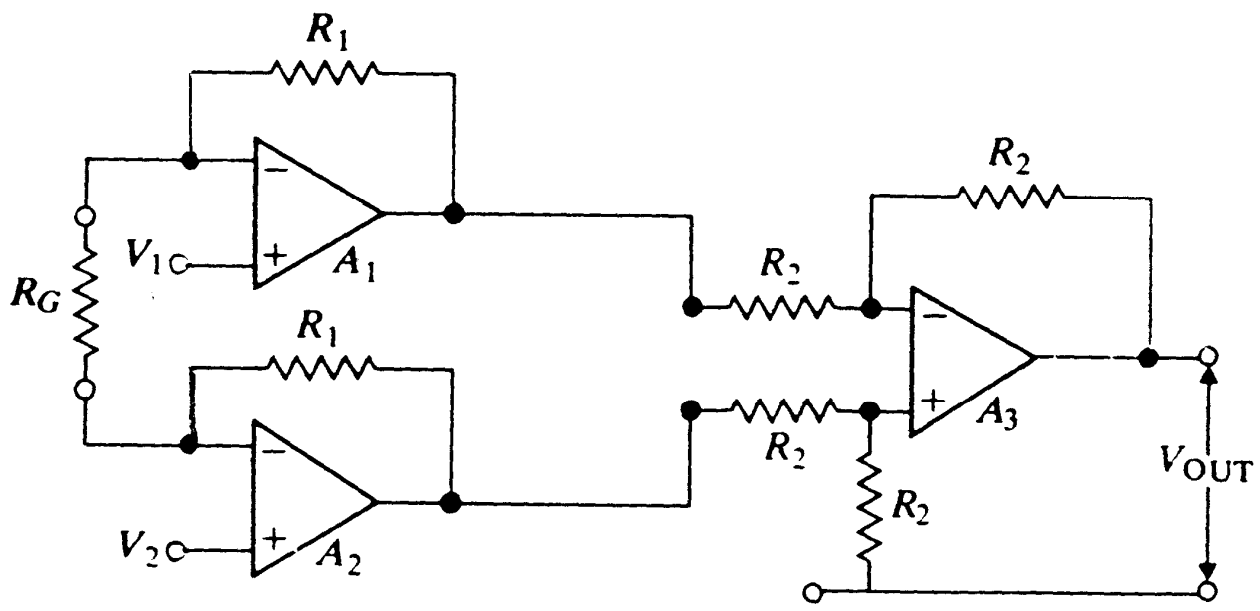


(a) invertirajuće pojačalo; (b) neinvertirajuće pojačalo; (c) naponsko slijedilo;

(d) diferencijalno pojačalo; (e) A.C. pojačalo (lead-lag); (f) naponsko zbrajalo.

© Ivan Petrović

Tipično instrumentacijsko pojačalo:



- Ulazna operacijska pojačala A_1 i A_2 imaju diferencijalno pojačanje **$(1+2R_1/R_G)$** i jedinično CM pojačanje.
- Pojačalo A_3 ima jedinično diferencijalno pojačanje, CMRR = 74-110 dB, ulaznu impedanciju 300-5000 M□, offset 0.2 mV, temperaturni koeficijent offseta 0.25-10 μV/°C.

- Visokokvalitetno diferencijalno pojačalo koje se sastoji od nekoliko operacijskih pojačala, i čiji izlaz ovisi samo o ulaznom naponu, tj. o razlici potencijala ulaznih priključaka.
- Karakteristike takvog instrumentacijskog pojačala su: velika ulazna impedancija, veliki CMRR, mali offset, mali temperaturni koeficijent offseta,
- Pojačanje se određuje dodavanjem vanjskog otpornika (R_G).

© Ivan Petrović

OPTEREĆENJE, ŠUM I INTERFERENCIJA U MJERNOM PODSUSTAVU

OPTEREĆENJE:

- Izlazni signal osjetila najčešće je naponski ili strujni.

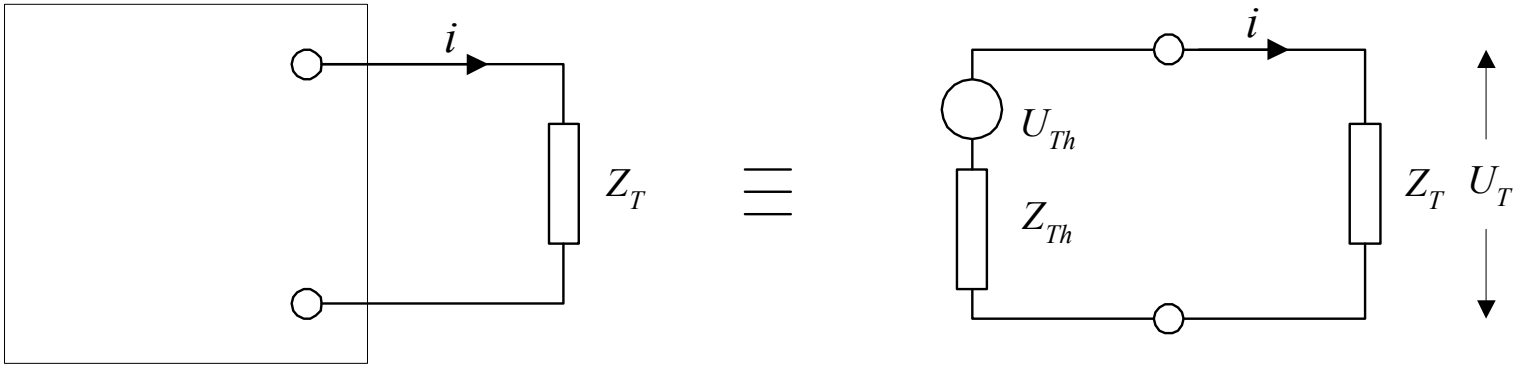
- Ulazne karakteristike elementa za predobradbu moraju odgovarati izlaznim karakteristikama osjetila, tj. element za predobradbu signala ne smije utjecati na karakteristike osjetila, odnosno ne smije ga opterećivati.

- Za opis vladanja napona i struje na spoju mjernog osjetila i elementa za predobradbu koriste se nadomjesni električki krugovi za svaki od njih.

© Ivan Petrović

Théveninov nadomjesni električki krug:

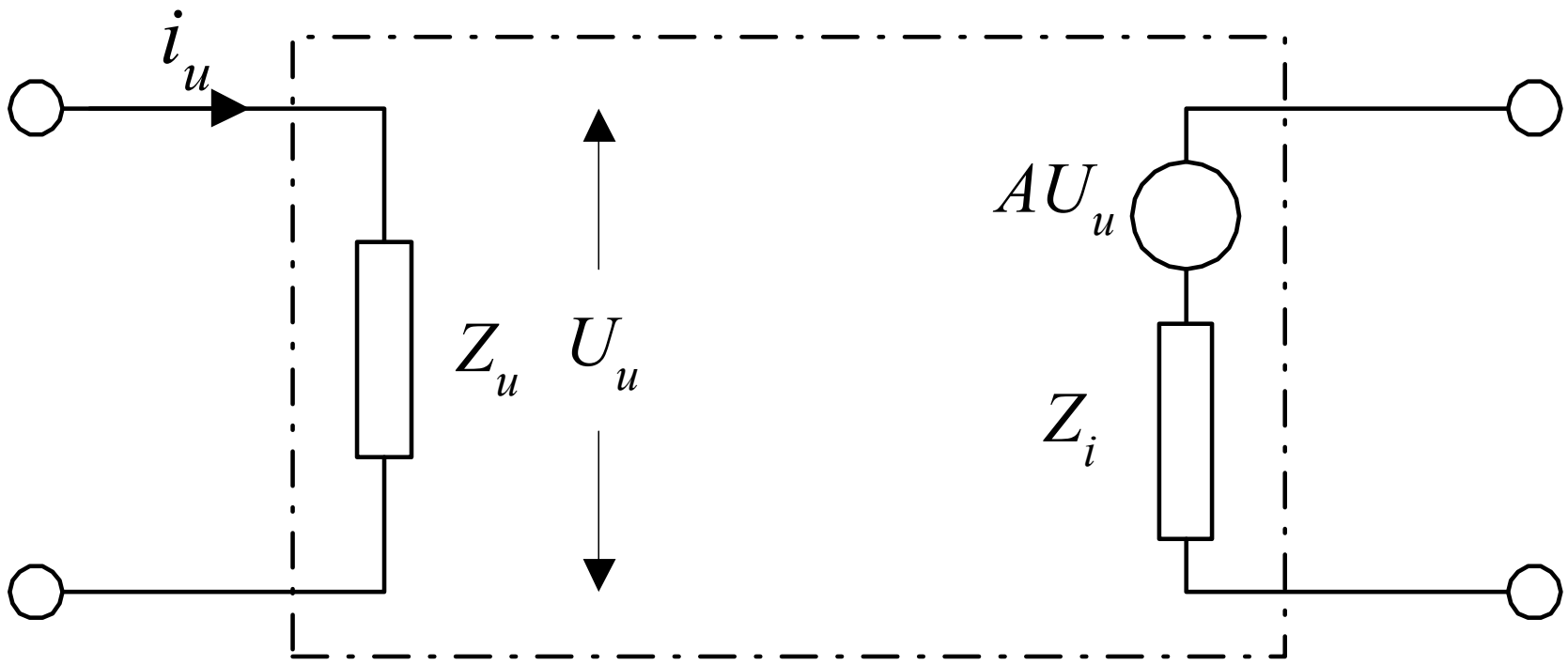
- Svaka električka mreža koja se sastoji od linearnih impedancija i naponskih izvora može se nadomjestiti nadomjesnim električkim krugom s jednim naponskim izvorom i impedancijom spojenom u seriju s njim.



$$U_T = U_{Th}\frac{Z_T}{Z_{Th}+Z_T};\ Z_T >> Z_{Th};$$

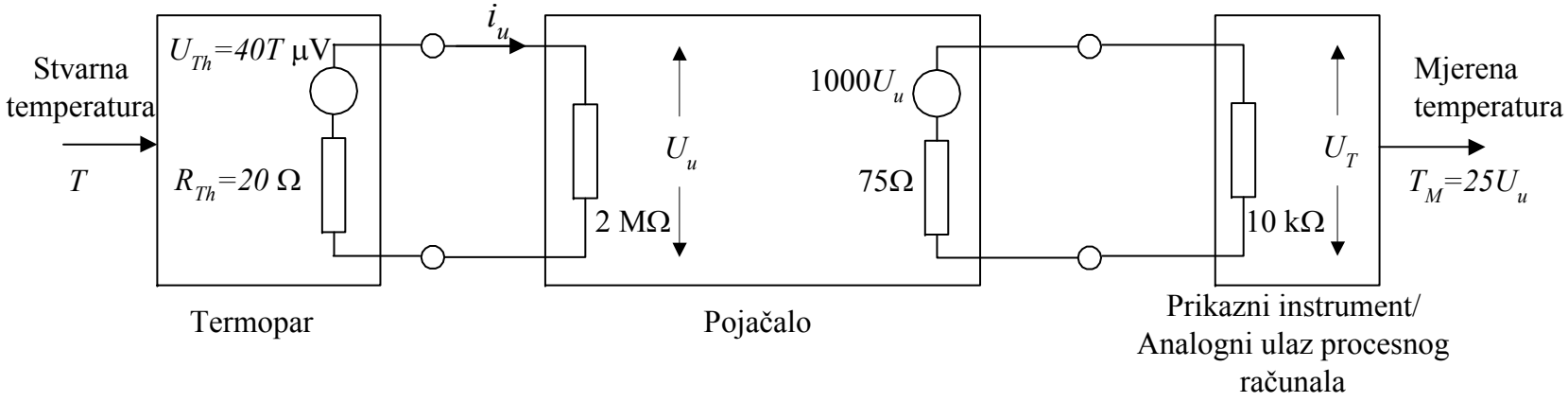
© Ivan Petrović

Primjer 1: Théveninov nadomjesni električki krug operacijskoga pojačala:



© Ivan Petrović

Primjer 2: Théveninov nadomjesni električki krug mjernoga člana temperature:



- U ovom je primjeru pretpostavljeno da 1V napona U_T odgovara promjeni temperature od 25 °C. Ovdje je:

$$U_u = 40 \cdot 10^{-6} T \frac{2 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^6 + 20}; \qquad U_T = 1000 U_u \frac{10^4}{10^4 + 75};$$

odakle slijedi:

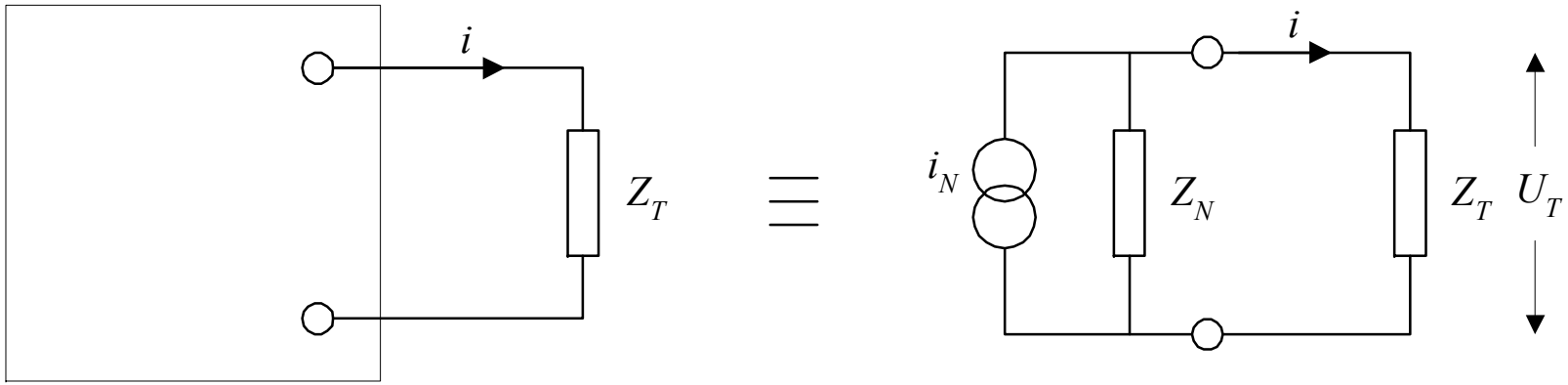
$$T_M = \frac{2 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^6 + 20} \frac{10^4}{10^4 + 75} = 0.9925T.$$

- Dakle, pogreška uslijed opterećenja iznosi –0.0075T.

© Ivan Petrović

Nortonov nadomjesni električki krug:

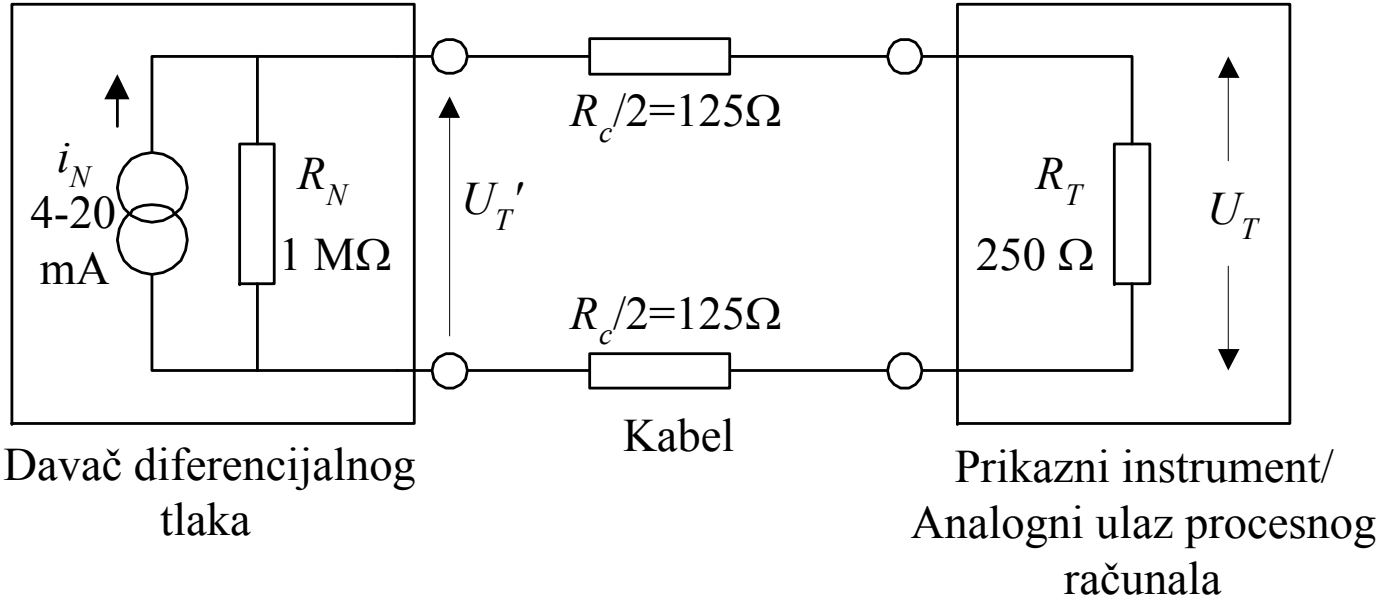
- Svaka električka mreža koja se sastoji od linearnih impedancija i strujnih izvora može se nadomjestiti nadomjesnim električkim krugom s jednim strujnim izvorom i impedancijom spojenom u paralelu s njim.



$$U_T = i_N \frac{Z_N Z_T}{Z_N + Z_T}; \quad Z_T << Z_N;$$

© Ivan Petrović

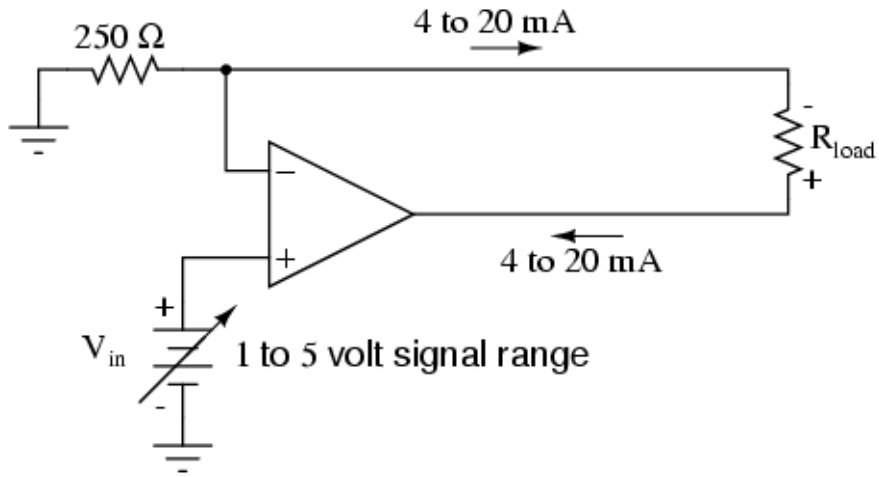
Primjer: Nortonov nadomjesni električki krug za mjerni član diferencijalnog tlaka



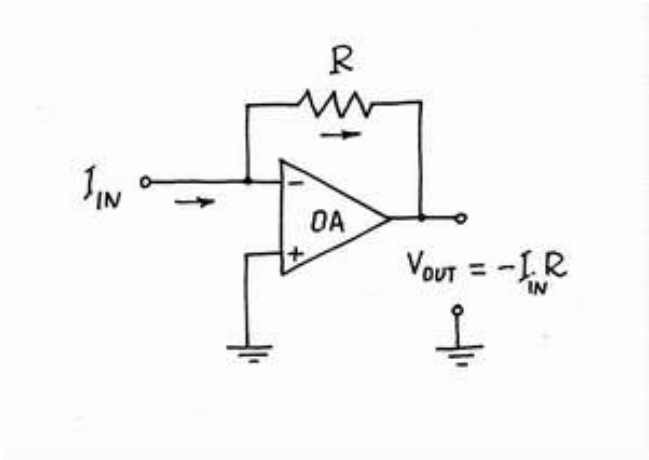
- Prema slici je: $U_T' = \dfrac{R_N(R_C + R_T)}{R_N + R_C + R_T} i_N$, odnosno: $U_T = \dfrac{R_N}{R_N + R_C + R_T} R_T i_N$.
- Za navedene vrijednosti na slici dobije se: $U_T = 0.995 R_T i_N$. Izlazni napon odstupa od željenog područja (1-5V) samo 0.05 %.

© Ivan Petrović

Naponsko-strujni pretvornik:



Strujno-naponski pretvornik:



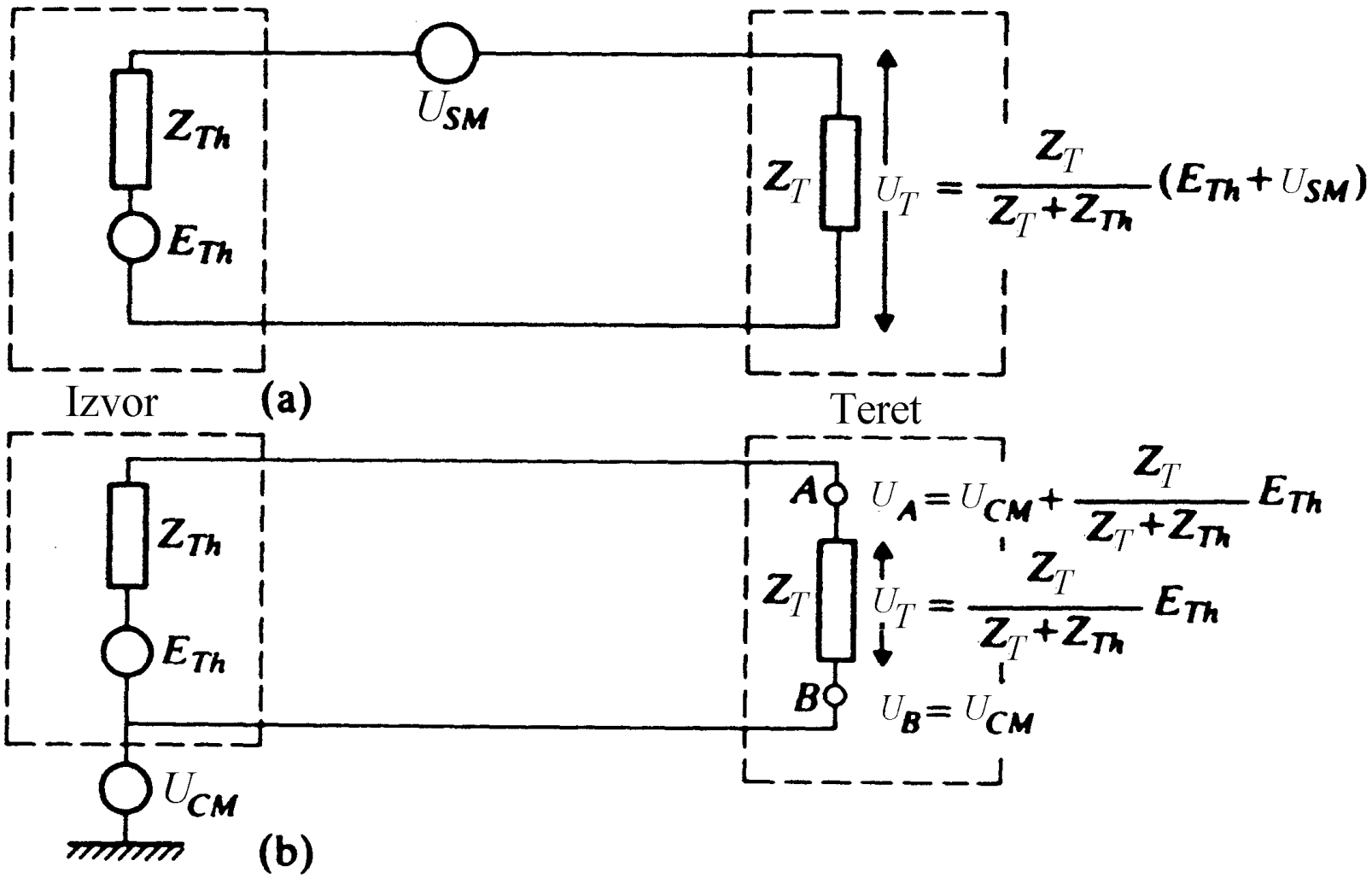
© Ivan Petrović

ŠUM I INTERFERENCIJA:

- U stvarnim izvedbama mjernih sustava osim Théveninova naponskog izvora (ili Nortonova strujnog izvora) koji predstavljaju mjerni signal obično se pojavljuju i
  - interferencijski napon (to je nepoželjni deterministički signal) i
  - napon šuma (to je nepoželjni slučajni signal).

- Na sljedećoj slici pod a) prikazana je tzv. **serijska interferencija** (*engl.* ***series mode interference***) kod koje je interferencijski napon U_{SM} u serijskom spoju s mjernim naponskim signalom U_{Th}.
- Na slici b) prikazana je **interferencija preko zajedničke točke** (*engl*. ***common mode interference***) koja uzrokuje podizanje naponske razine oba kruga za interferencijski napon U_{CM} u odnosu na uzemljenje.

© Ivan Petrović



a) serijska interferencija; b) interferencija preko zajedničke točke

© Ivan Petrović

Izvori šuma:

- Prema mjestu nastanka šum se u mjernim sustavima može podijeliti na **unutarnji šum** (*engl.* ***internal or inherent noise***) i na **izvanjski** (**interferencijski) šum**.

Unutarnji šum:

- Pojavljuje se u većoj ili manjoj mjeri kod svakog mjernog osjetila bez obzira kako kvalitetno je ono izvedeno. Pitanje je procjene koliko taj šum utječe na točnost mjerenja.
- Primjerice, unutarnji mjerni šum pojavljuje se kod otporničkih i poluvodičkih osjetila kao posljedica stohastičkog gibanja elektrona ovisno o radnoj temperaturi.
- Ovaj se šum naziva *toplinski* ili *Johnsonov* šum i ima svojstva bijeliog šuma.

© Ivan Petrović

Izvanjski (interferencijski) šum:

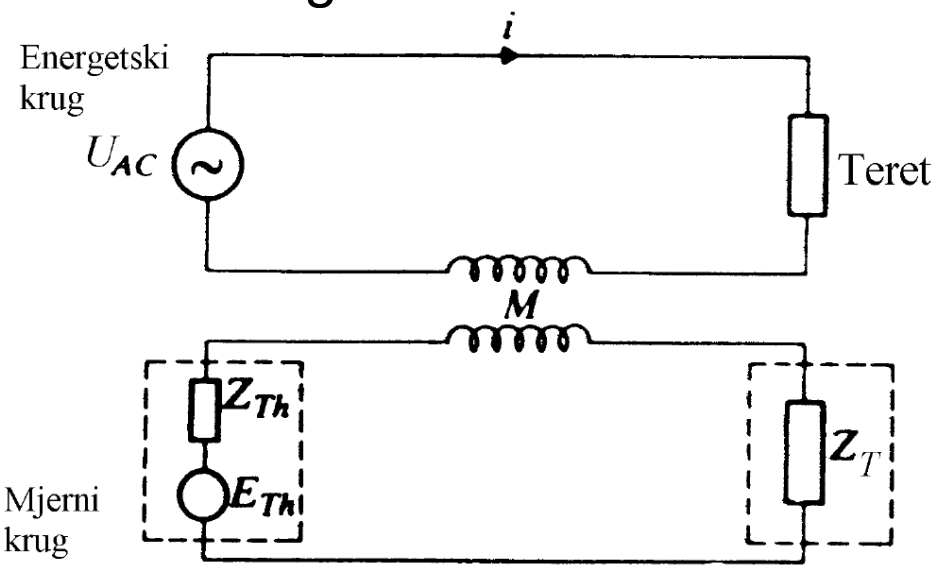
- To je šum koji u mjerni sustav dolazi izvana.
- Najčešće susretani izvanjski izvor šuma je izmjenična energetska mreža (220 V, 50 Hz), koja u mjerni sustav unosi odgovarajući sinusni interferencijski signal.
- Istosmjerna energetska mreža sama po sebi ne unosi šum u mjerni sustav, ali uklapanje i isklapanje sklopki u statičkim energetskim pretvaračima može unijeti velike (najčešće impulsne) smetnje u mjerni.
- Izvanjski izvori šuma u mjernom sustavu mogu biti i radio-frekvencijski prijenosnici, aparati za zavarivanje i elektrolučne peći koje unose napon šuma frekvencije nekoliko MHz.

© Ivan Petrović

Načini djelovanja izvanjskih izvora šuma na mjerne sustave:

Induktivno djelovanje:

- Ako je mjerni krug u blizini izmjeničnog energetskog električkog kruga, može se pojaviti značajno međuinduktivno djelovanje između ta dva kruga.



- Izmjenična struja ***i*** u energetskom krugu inducira u mjernom krugu serijski interferencijski napon iznosa:

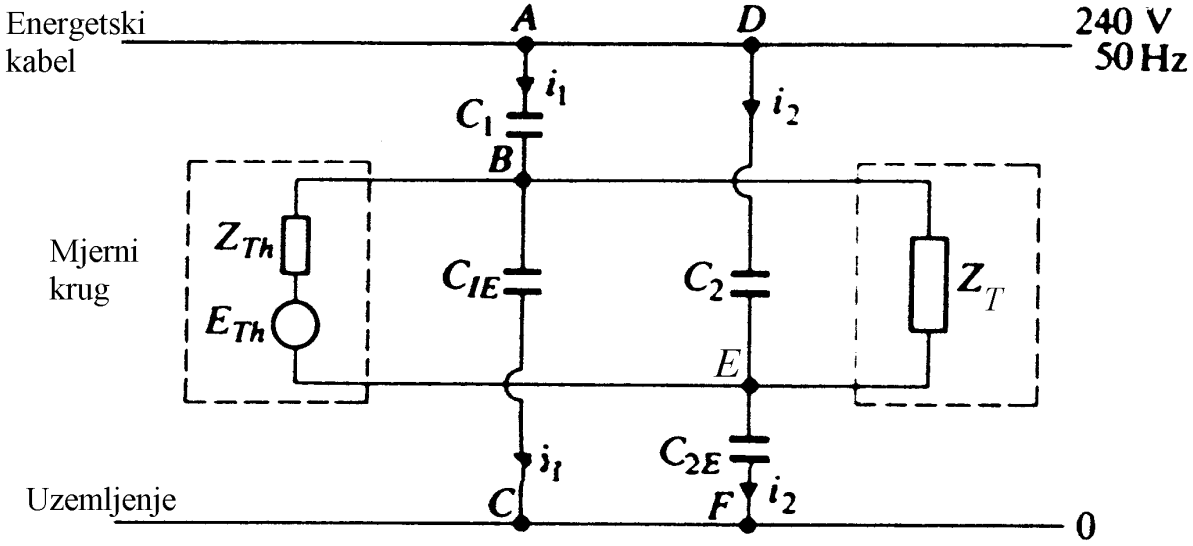
$$\boxed{U_{SM} = M\frac{di}{dt}}.$$

<u>Primjerice:</u> za $M \approx 1\ \mu H$ i $di/dt \approx 10^3$ A/s (tipično za motor snage 1 kW) dobije se $U_{SM} \approx 1$ mV.

© Ivan Petrović

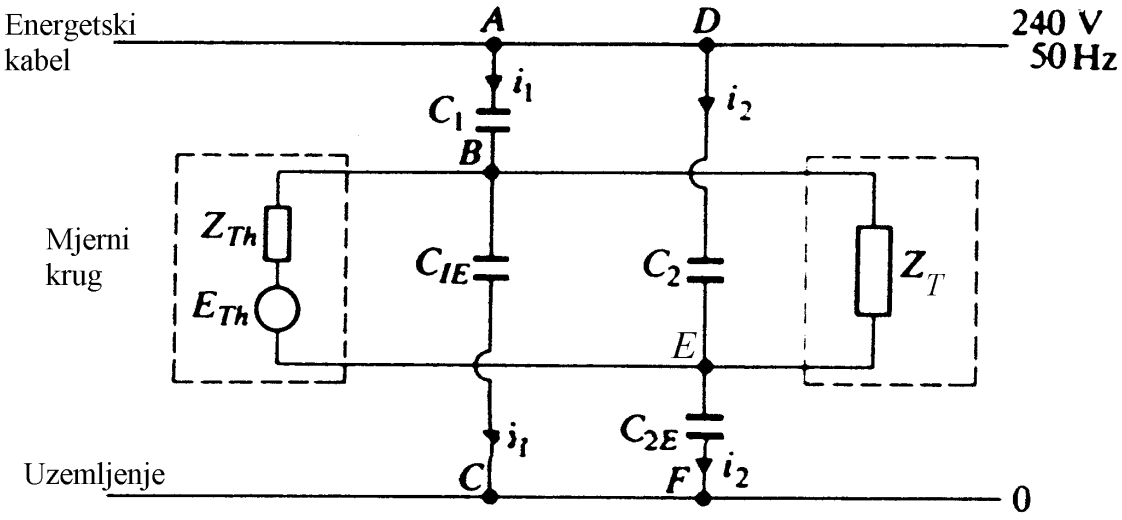
Kapacitivno djelovanje:

- Kapacitivno (elektrostatičko) djelovanje pojavljuje se kada je mjerni krug u blizini energetskog voda. Naime, između energetskog voda, uzemljivačkog voda i mjernog kruga može se pojaviti kapacitivno djelovanje, kao što je prikazano na slici.



- Ovi su kapaciteti raspodijeljeni po čitavoj duljini mjernog voda, ali se mogu nadomjestiti odgovarajućim koncentriranim kondenzatorima, kao što je prikazano na slici.

© Ivan Petrović



- Potencijali u točkama *B* i *E*, zanemarujući za trenutak napon E_{Th}, iznose:

$$U_B = 240\frac{C_1}{C_1 + C_{1E}}; \qquad U_E = 240\frac{C_2}{C_2 + C_{2E}}$$

- Kao posljedica kapacitivnog djelovanja pojavljuju se zajednički interferencijski napon $U_{CM} = U_E$ i serijski interferencijski napon

$$U_{SM} = 240\left(\frac{C_1}{C_1 + C_{1E}} - \frac{C_2}{C_2 + C_{2E}}\right).$$

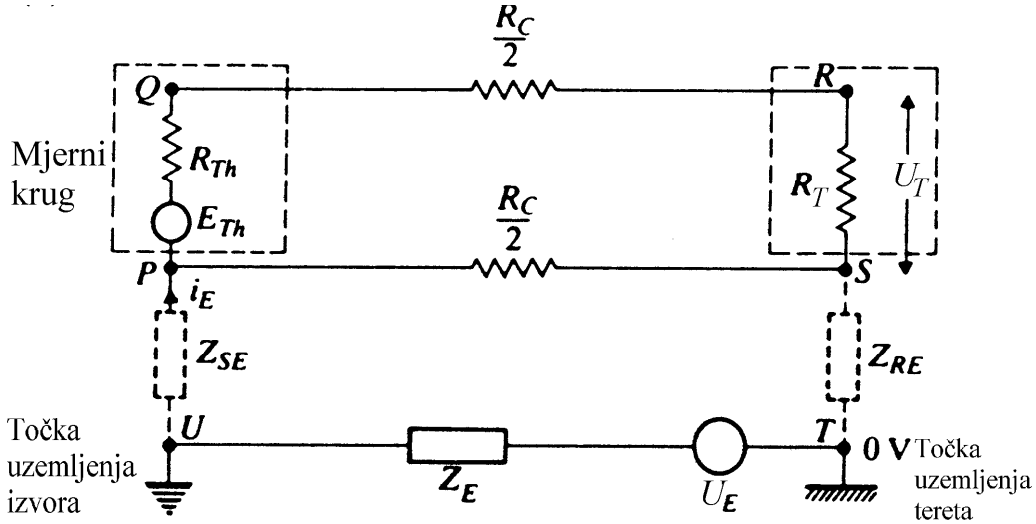
© Ivan Petrović

Višestruko uzemljenje:

- Pri objašnjavanju kapacitivnog djelovanja pretpostavljeno je da uzemljenje ima u svakoj točki jednak potencijal iznosa 0 V.
- Međutim, energetski uređaji velikih snaga mogu prouzročiti protjecanje struje kroz uzemljenje što ima za posljedicu pojavu različitih potencijala u točkama uzemljenja.
- Ako bi mjerni član bio potpuno odvojen od uzemljenja, ne bi bilo nikakvog djelovanja na njega.
- U stvarnosti se može dogoditi da jedan član mjernog kruga ima konačan otpor prema jednoj točki uzemljenja, a drugi prema nekoj drugoj, prostorno udaljenoj točki, koja je na različitom potencijalu od prve točke.
- Kao posljedica toga u mjernom se sustavu pojavljuju zajednički i serijski interferencijski naponi.

© Ivan Petrović

- Problem *višestrukog uzemljenja* ilustriran je na sljedećoj slici:



- Na osnovi slike može se pisati:

$$i_E = \frac{U_E}{Z_E + Z_{SE} + (R_c/2) + Z_{RE}};$$

$$U_{CM} = U_S = U_E \frac{Z_{RE}}{Z_E + Z_{SE} + (R_c/2) + Z_{RE}};$$

$$\boxed{U_{SM} = U_E \frac{R_c/2}{Z_E + Z_{SE} + (R_c/2) + Z_{RE}}}.$$

- U praksi se nastoji postići da su Z_{SE} i Z_{RE} što veći.

- To nije uvijek moguće ostvariti.

© Ivan Petrović

Primjer:

- Da se dobije što brži odziv jedan vrh termopara dodiruje oklop, koji je uronjen u metalnu posudu u kojoj se mjeri temperatura, a koja je uobičajeno uzemljena.
- Rezultat je mali otpor Z_{SE}, npr. Z_{SE}= 10 Ω, Za R_E = 1 Ω, $R_c/2$ = 10 Ω, U_E = 1V i Z_{RE}= 10^6 Ω dobije se $U_{SM} \approx 10$ μV.
- U slučaju da se točka *S* spoji izravno na uzemljenje (Z_{RE}= 0 Ω) dobio bi se $U_{SM} \approx 0.48$ V.
- **Dakle, ako se mjerni sustav mora uzemljiti, uzemljenje se smije izvesti samo na jednom kraju**.

© Ivan Petrović

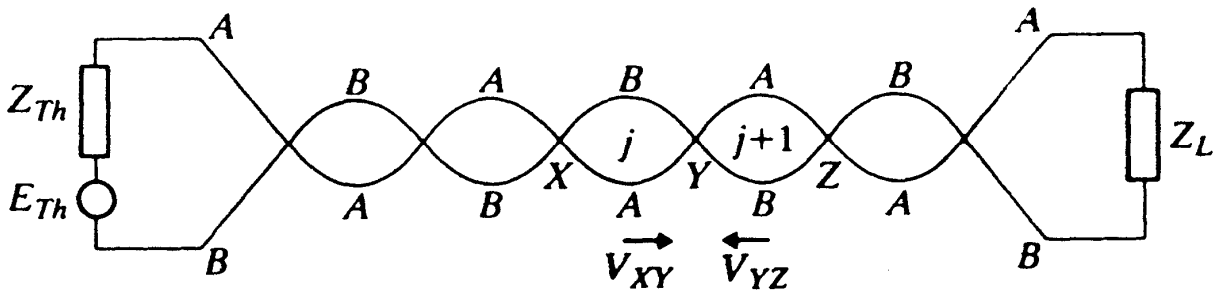
Metode smanjenja djelovanja smetnji na mjerne sustave:

Fizičko udaljavanje:

- Iznosi međuinduktiviteta i kapaciteta između energetskog i mjernog kruga obrnuto proporcionalni njihovoj udaljenosti, treba pri njihovoj izvedbi nastojati postići što je moguće veću udaljenost.

Uplitanje mjernih vodova:

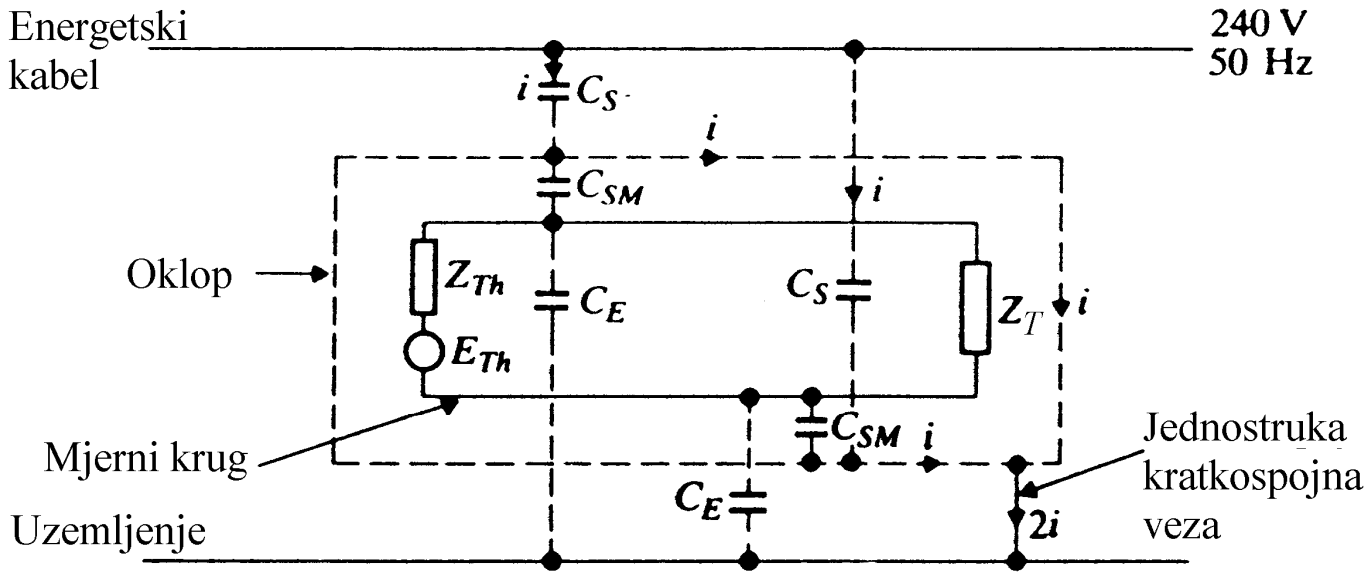
- Najjednostavniji način smanjenja induktivnog interferencijskog djelovanja.



- Dva vodiča *A* i *B* mjernog kruga međusobno se upletu tako da sve petlje imaju približno jednake površine.

© Ivan Petrović

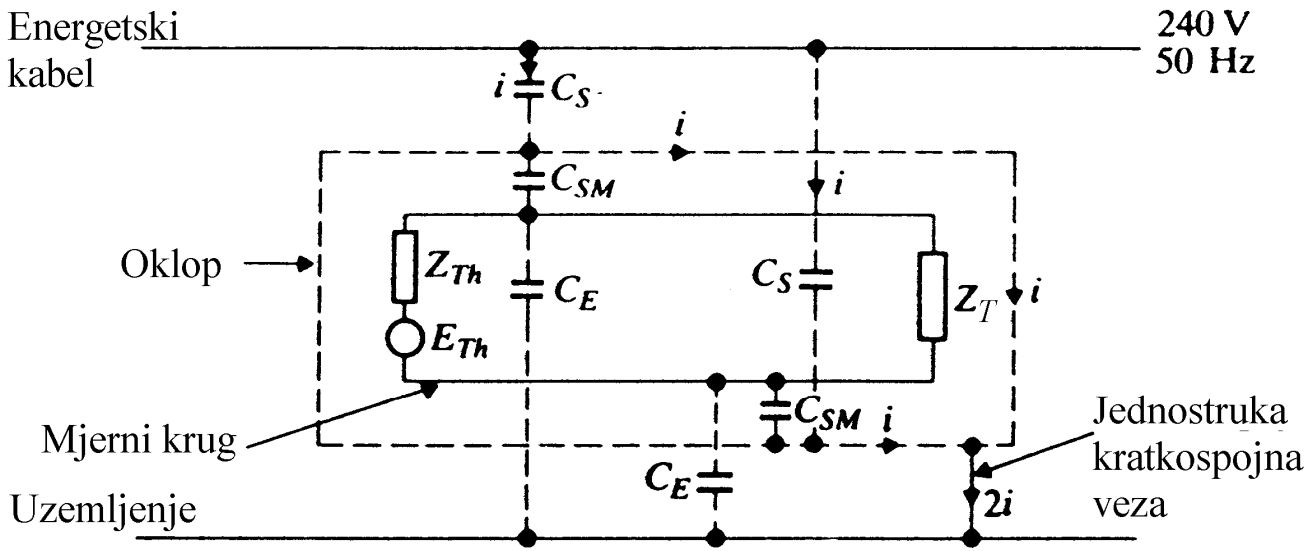
Oklapanje mjernih vodova:



- Oklapanjem mjernih vodova smanjuje se kapacitivno interferencijsko djelovanje na mjerni sustav.
- Metalni oklop (plašt) mora se uzemljiti, ali samo u jednoj točki, kako je prikazano na slici.

© Ivan Petrović

- Kao što se može vidjeti, nema izravnog spoja između mjernog kruga i oklopa; postoji samo visokoomska kapacitvna veza preko kapaciteta C_{SM}.

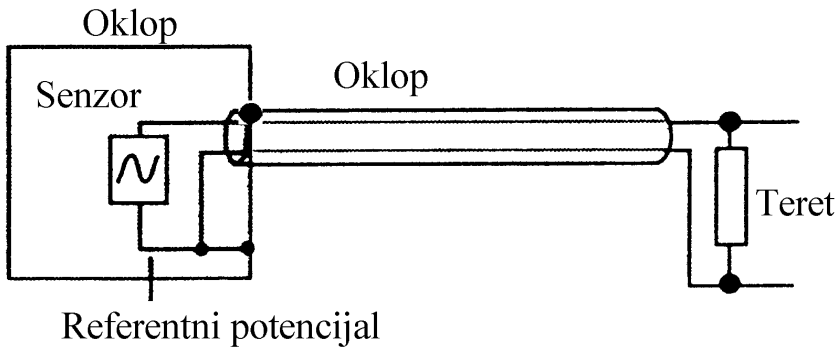


- Oklop predstavlja niskoomski otpor za interferencijsku struju i, pa su struje kroz kapacitete C_{SM} i C_E male, što ima za posljedicu smanjenje zajedničkog interferencijskog napona U_{CM}, a serijski interferencijski napon jednak je nuli.

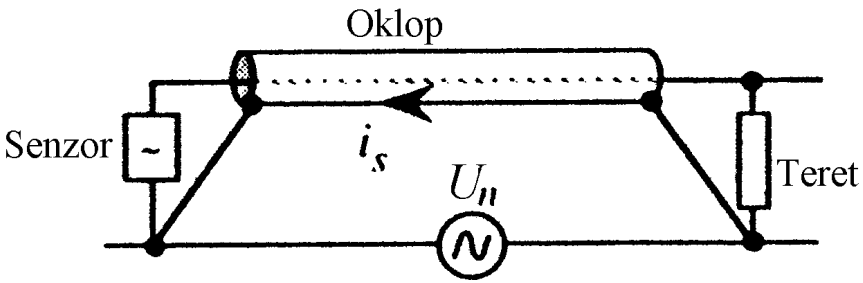
© Ivan Petrović

- U stvarnosti je mjerno osjetilo obično smješteno u oklopno kućište, a za prijenos signala osjetila koristi se oklopljeni kabel.
- Oklop kabela mora biti spojen na kućište osjetila, ali ne smije biti spojen na drugom kraju.

Ispravan spoj



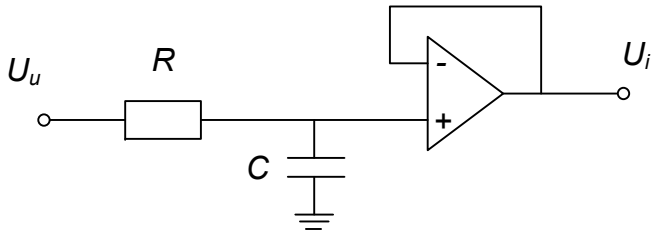
Neispravan spoj



© Ivan Petrović

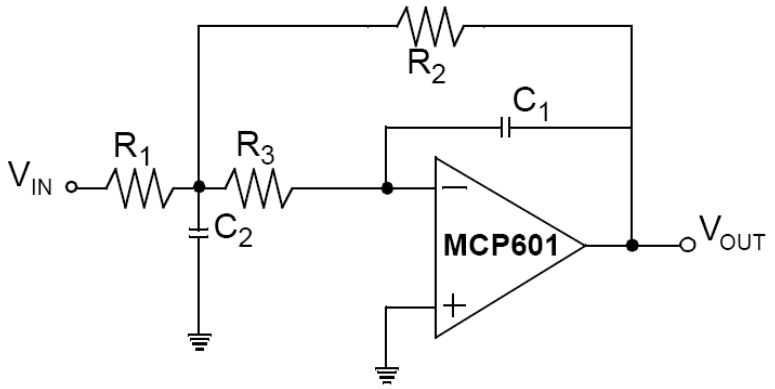
*Filtriranje mjernog signala (*Anti-aliasing filtar*):*

- Obično se koristi filtar prvog reda: $\boxed{G_{fpv} = \dfrac{1}{1+T_{fpv}s}}$.



$$\frac{U_i(s)}{U_u(s)} = \frac{1}{1+RCs}$$

a ponekad i filtar drugog reda:

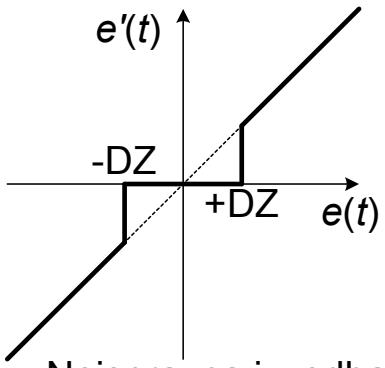


$$\frac{V_{OUT}}{V_{IN}} = \frac{-1/R_1R_3C_5C_6}{s^2C_2C_1 + sC_1(1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3) + 1/(R_2R_3C_2C_1)}$$

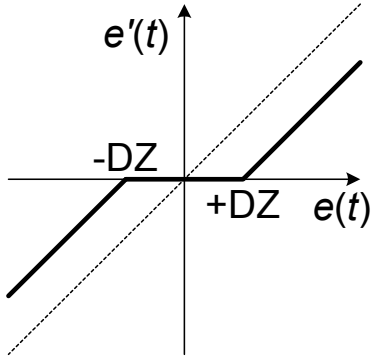
© Ivan Petrović

Zona neosjetljivosti (engl. dead zone):

$$e'(t) = \begin{cases} e(t) + \mathrm{DZ}; & za \quad e(t) < -\mathrm{DZ} \\ 0; & za \quad -\mathrm{DZ} \le e(t) \le +\mathrm{DZ} \\ e(t) - \mathrm{DZ}; & za \quad e(t) > +\mathrm{DZ} \end{cases}$$



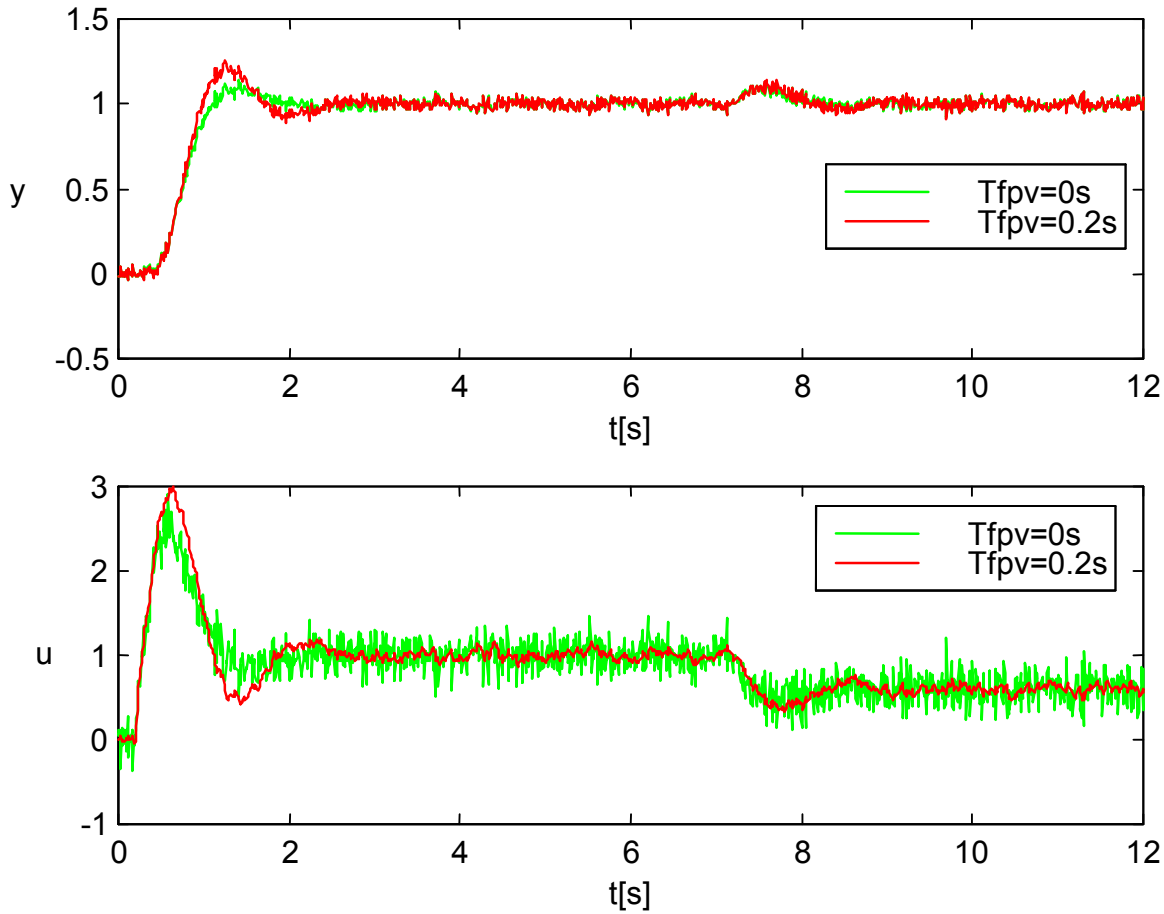
Neispravna izvedba zone neosjetljivosti



Ispravna izvedba zone neosjetljivosti

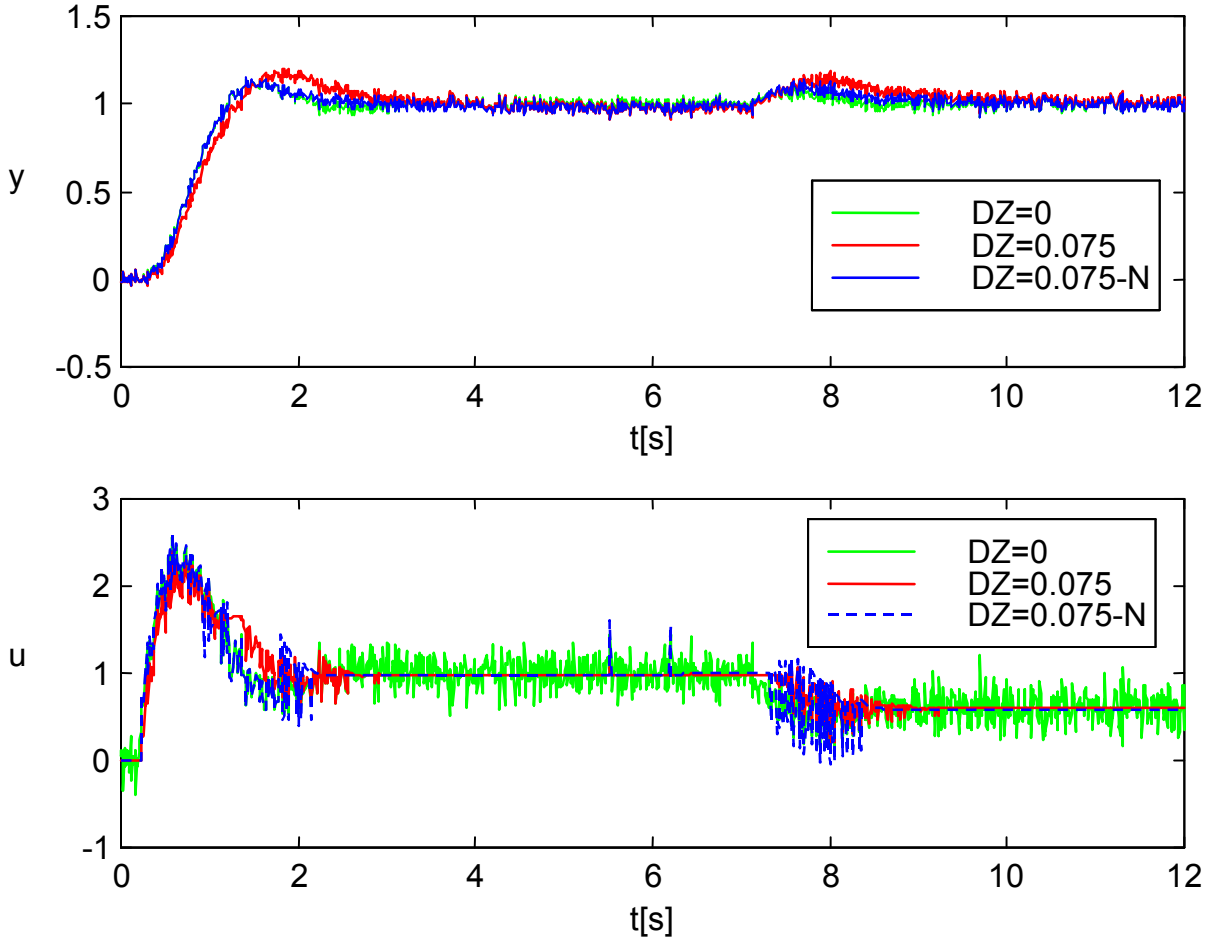
- Učinci filtriranja mjernog signala filtrom 1. reda i mrtve zone ilustrirani su na krugu regulacije s PID regulatorom iz potpoglavlja 4.1, gdje je u uveden mjerni šum.

© Ivan Petrović



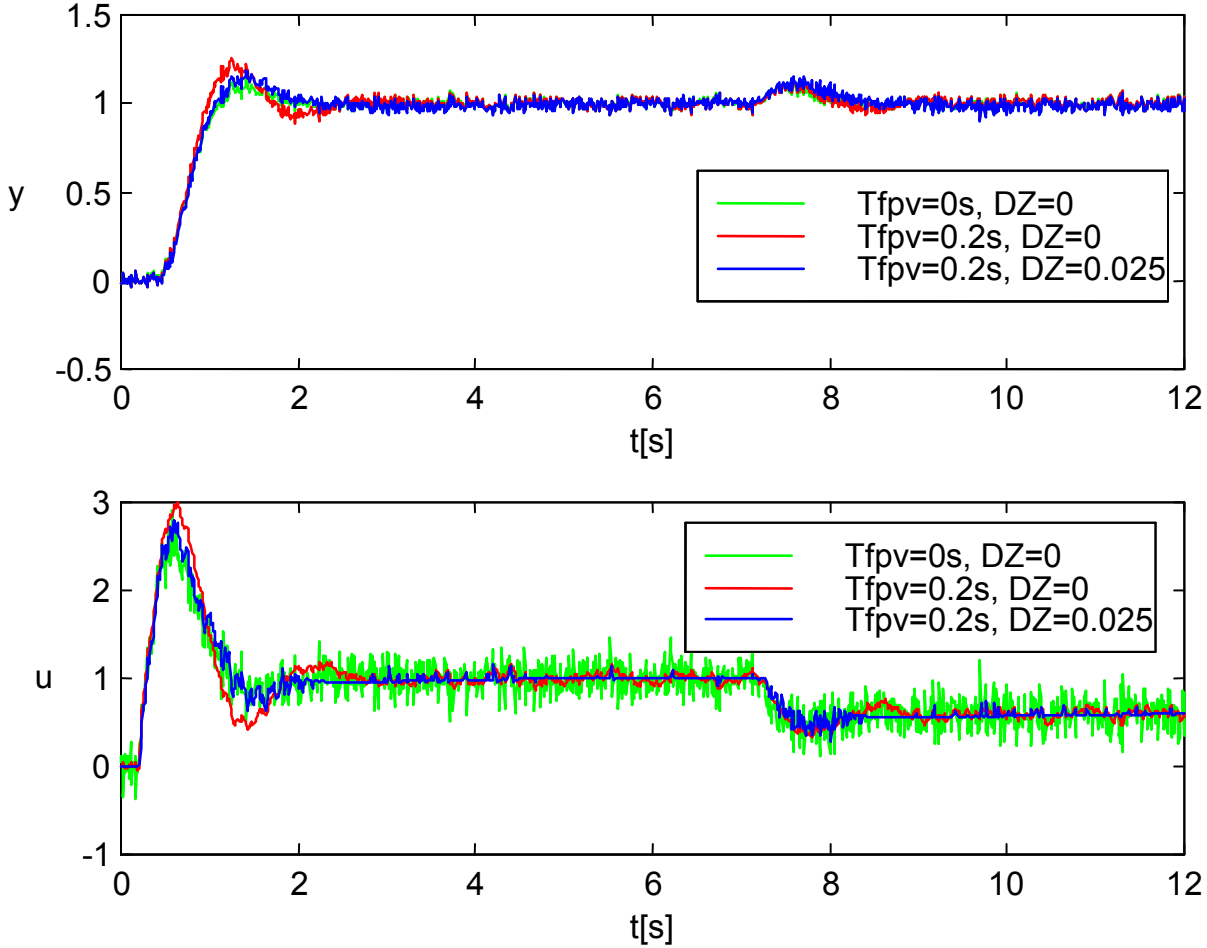
Smanjenje utjecaja mjernog šuma filtriranjem mjernog signala.

© Ivan Petrović



Smanjenje utjecaja mjernog šuma uvođenjem zone neosjetljivosti.

© Ivan Petrović



Skupno djelovanje filtra u povratnoj vezi i zone neosjetljivosti.

© Ivan Petrović

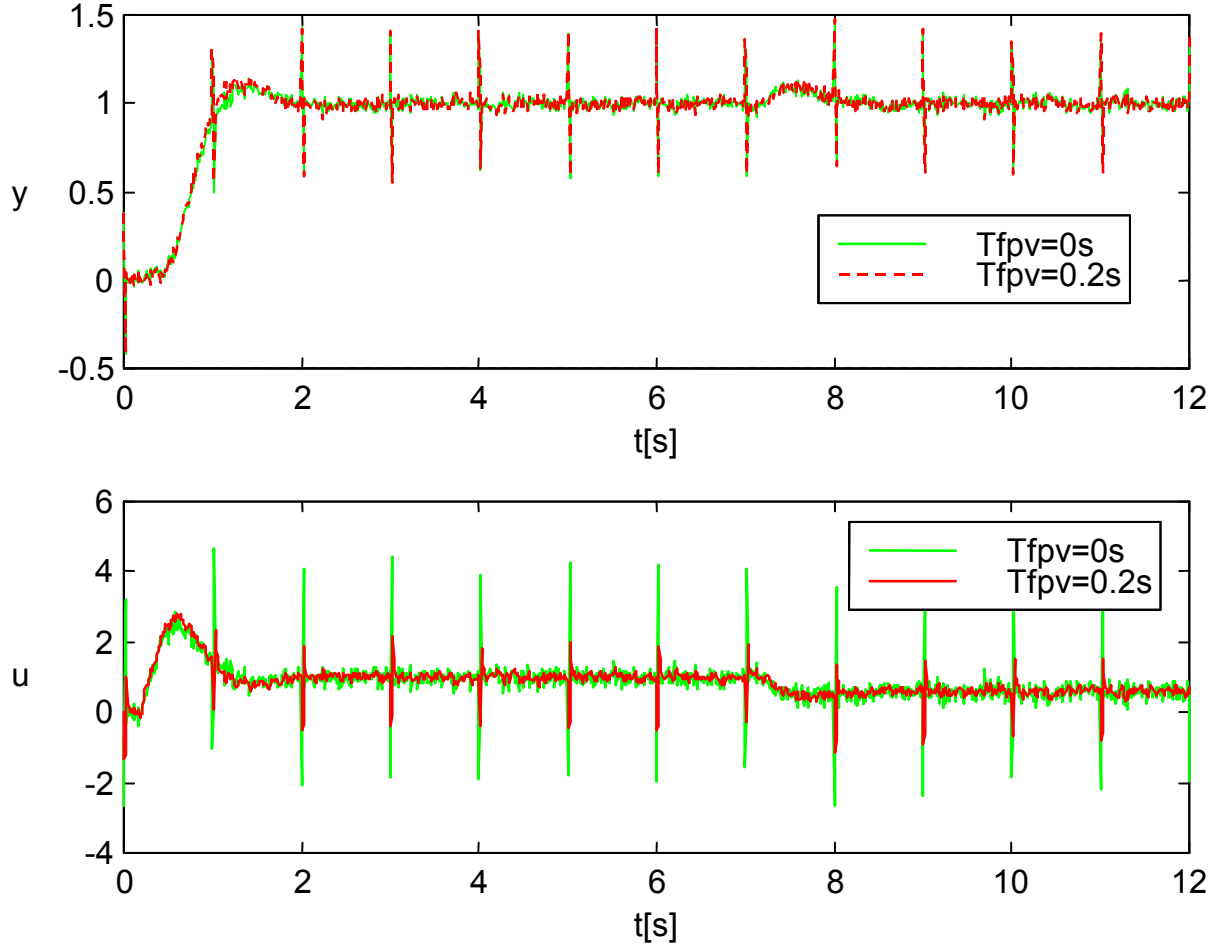
Smanjenje utjecaja impulsnih smetnji:

- Najčešći izvor: statički energetski pretvarači

Primjenom medijan funkcije na mjerni signal:	*Ograničenjem brzine promjene mjerenog signala (engl. Rate Limiter, RL):*
L uzoraka poreda se po iznosu i zatim se koristi m-ti uzorak. $$m = \begin{cases} \frac{1}{2}(y_{L/2} + y_{L/2+1}) & za \quad L \quad paran \\ y_{L/2+1} & za \quad L \quad neparan \end{cases}$$ **Problem**: period uzorkovanja mjernog signala ***T/L***.	$$\frac{dy}{dt} = \begin{cases} \left(\frac{dy}{dt}\right)_{\max}; & za \quad \frac{dy}{dt} > \left(\frac{dy}{dt}\right)_{\max} \\ \frac{dy}{dt}; & za \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)_{\min} \le \frac{dy}{dt} \ge \left(\frac{dy}{dt}\right)_{\max} \\ \left(\frac{dy}{dt}\right)_{\min}; & za \quad \frac{dy}{dt} < \left(\frac{dy}{dt}\right)_{\min} \end{cases}$$

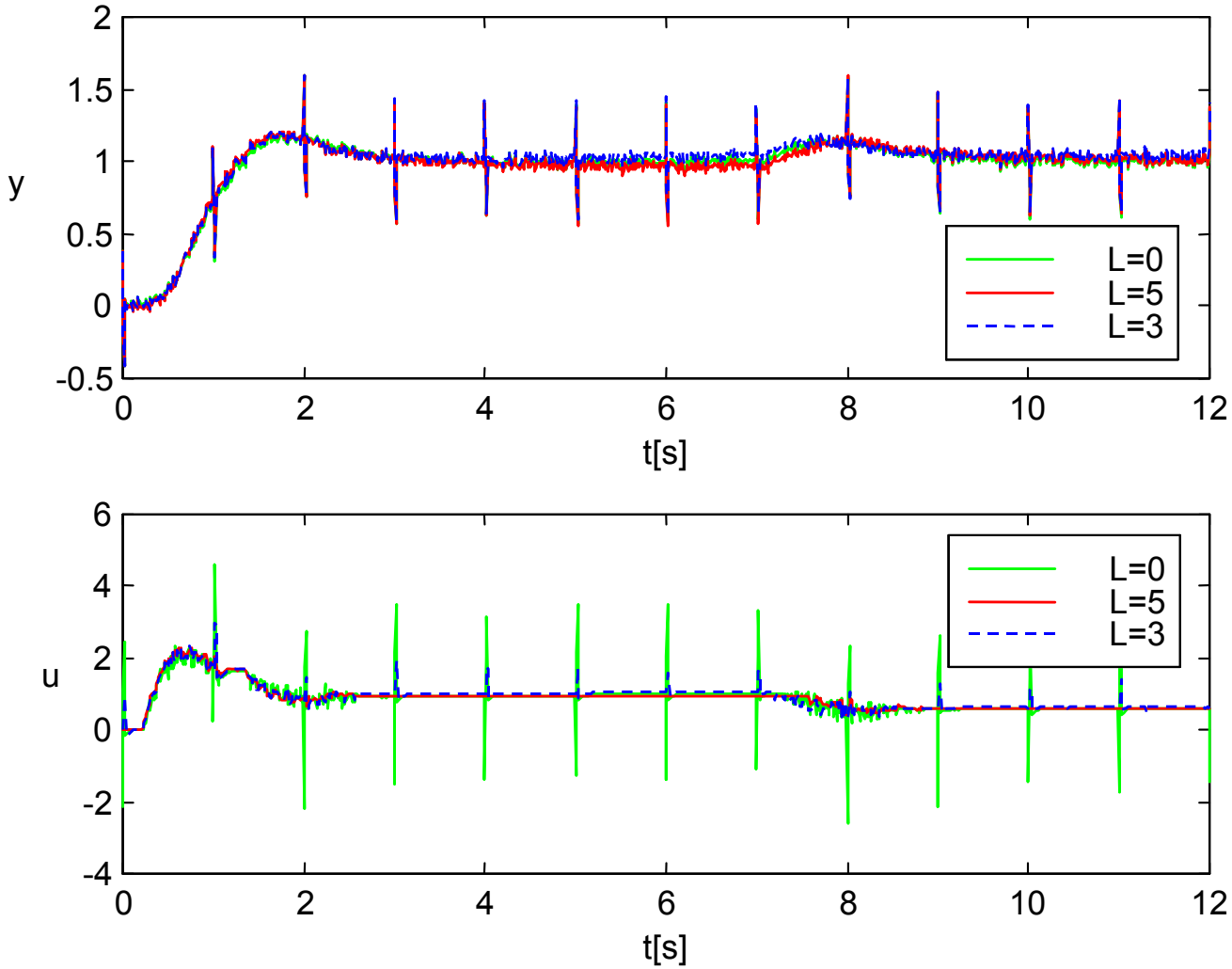
- Učinci primjene medijan funkcije i RL-a ilustrirani su na krugu regulacije s PID regulatorom iz potpoglavlja 4.1, gdje je u uveden impulsni šum.

© Ivan Petrović



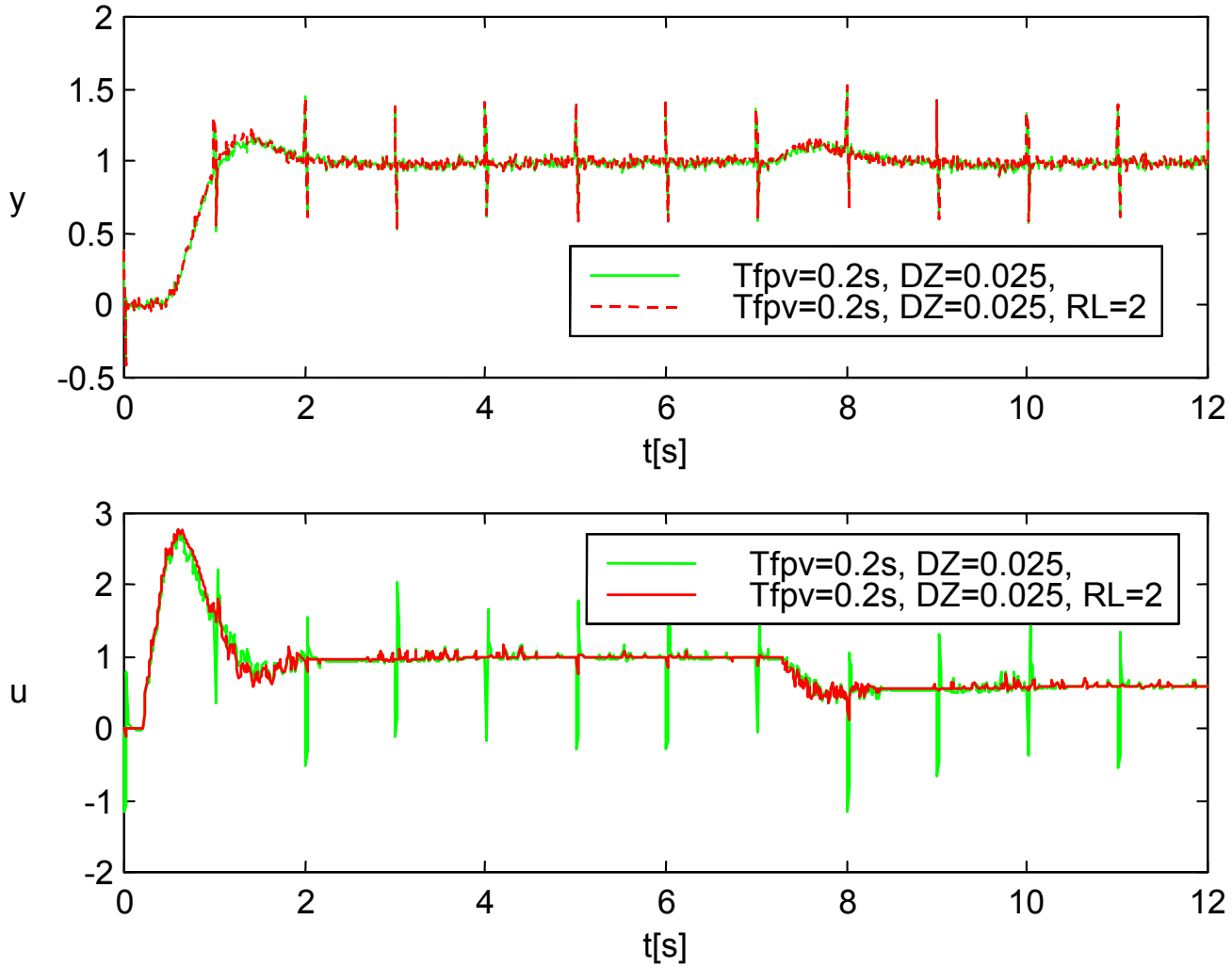
Filtriranje mjernog signala na kojega djeluju impulsne smetnje.

© Ivan Petrović



Otklanjanje impulsnih smetnji primjenom funkcije MEDIJAN.

© Ivan Petrović



Otklanjanje impulsnih smetnji primjenom “Rate-Limitera”.

© Ivan Petrović

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
Fakultet elektrotehnike i računarstva
Zavod za automatiku i računalno inženjerstvo
Unska 3, Zagreb, HRVATSKA

Poglavlje 8: Izvedbeni aspekti RUS-a

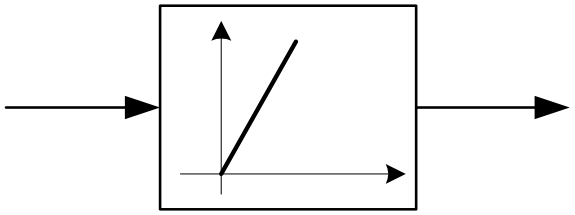
8.4. Prilagodba upravljačkih signala izvršnim organima

© Ivan Petrović

OBLICI UPRAVLJAČKOG SIGNALA

- Oblik izlaznog signala regulatora određen je tipom korištenog izvršnog organa:

1. Proporcionalni s kontinuiranim analognim upravljačkim signalom



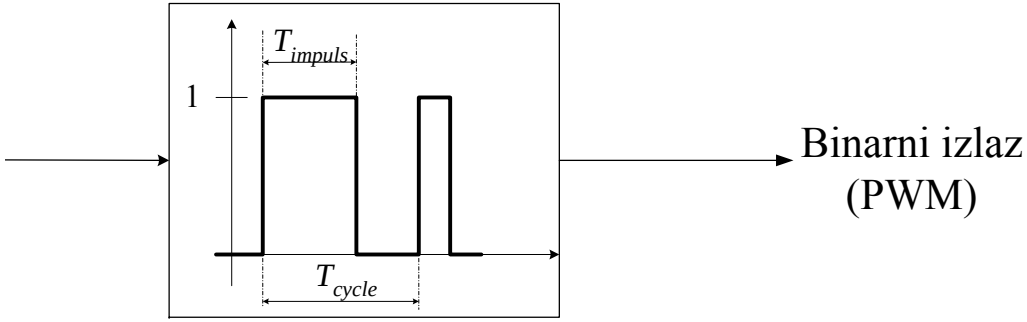
Analogni izlaz (4-20mA)

- Npr. pneumatski regulacijski ventili

© Ivan Petrović

2. *Proporcionalni s PWM upravljačkim signalom s dva stanja*

- Ovi izvršni organi prihvaćaju samo dvije vrijednosti izlaznog signala regulatora (on/off): uključen/isključen, otvoren/zatvoren, naprijed/natrag, ubrzaj/uspori.

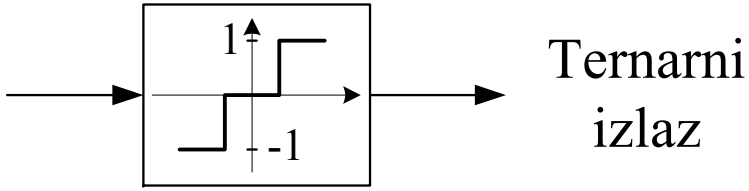


$$T_{impuls} = \frac{u(t) - u_{\min}}{u_{\max} - u_{\min}} T_{cycle}$$

- Unaprijed se definira tzv. vrijeme ciklusa T_{cycle}, koje odgovara maksimalnoj vrijednosti upravljačkog signala u_{max}. Za upravljački signal iznosa $u(t)$ trajanje impulsa dano je prethodnim izrazom.
- Regulator daje impulsni signal kojemu je trajanje proporcionalno iznosu upravljačkoga signala.
- Primjeri: elektroničke energetske sklopke, dvopoložajni ventili.

© Ivan Petrović

3. *Izvršni organi s integralnim djelovanjem i ternarnim izlazom*



- Ovi izvršni organi prihvaćaju tri vrijednosti izlaznog signala regulatora: naprijed-stoj-natrag.
- Tipičan primjer je regulacijski ventil s elektromotornim prigonom, kod kojega se pogonski motor može gibati naprijed (ventil se otvara), natrag (ventil se zatvara) te može stajati (otvor ventila se ne mijenja). Dakle, izlazni signal regulatora može poprimati tri stanja.
- Ta se tri stanja izvode pomoću dva digitalna (binarna) izlaza iz regulatora. Dok vodi prvi digitalni signal motor se giba naprijed i ventil se otvara, a dok vodi drugi digitalni signal motor se giba natrag i ventil se zatvara. Kada ne vodi niti jedan signal motor stoji. Mora se spriječiti da oba digitalna signala istodobno vode.
- Za upravljanje ovim ventilima primjenjuje se brzinski (inkrementalni) PID regulator.

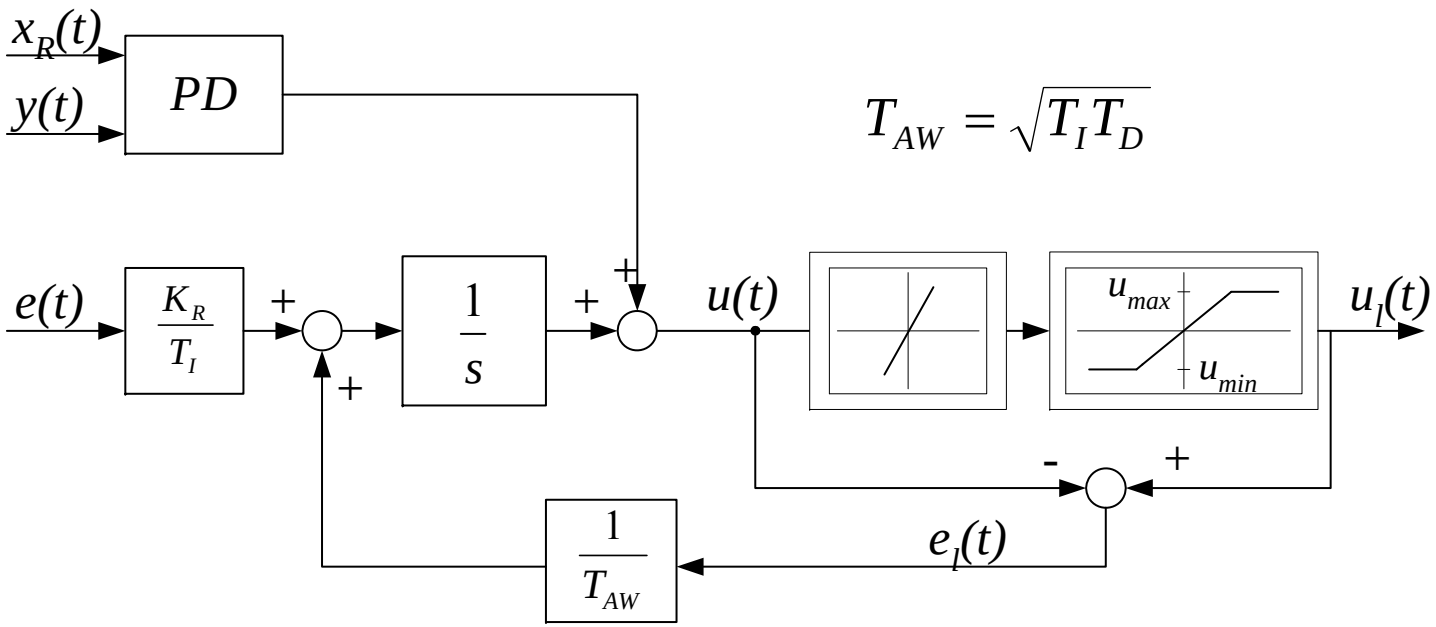
© Ivan Petrović

OGRANIČAVANJE IZNOSA UPRAVLJAČKOG SIGNALA

- Pri projektiranju regulatora mora se voditi računa o ograničenjima izvršnog organa kojemu regulator prosljeđuje upravljački signal.
- Ponekad se upravljačkom signalu mora ograničiti i brzina promjene.
- Ulaskom upravljačkog signala u ograničenje prekida se povratna veza i sustav radi u otvorenoj petlji budući da izvršni organ ostaje u graničnom položaju neovisno o izlaznom signalu regulatora.
- Ako regulator sadrži integralni član on će nastaviti integrirati regulacijsko odstupanje pa izlaz regulatora $u(t)$ može poprimiti vrlo veliku vrijednost.
- Zbog toga pri smanjenju regulacijskog odstupanja regulator vrlo sporo izlazi iz ograničenja.
- Ovaj se efekt naziva **"efektom zaleta"** (engl. "wind-up" phenomenon).
- Sprječavanje "efekta zaleta":
  - **postupkom povratnog integriranja**
  - **postupkom uvjetnog integriranja**

© Ivan Petrović

Postupak povratnog integriranja (postupak AW1):



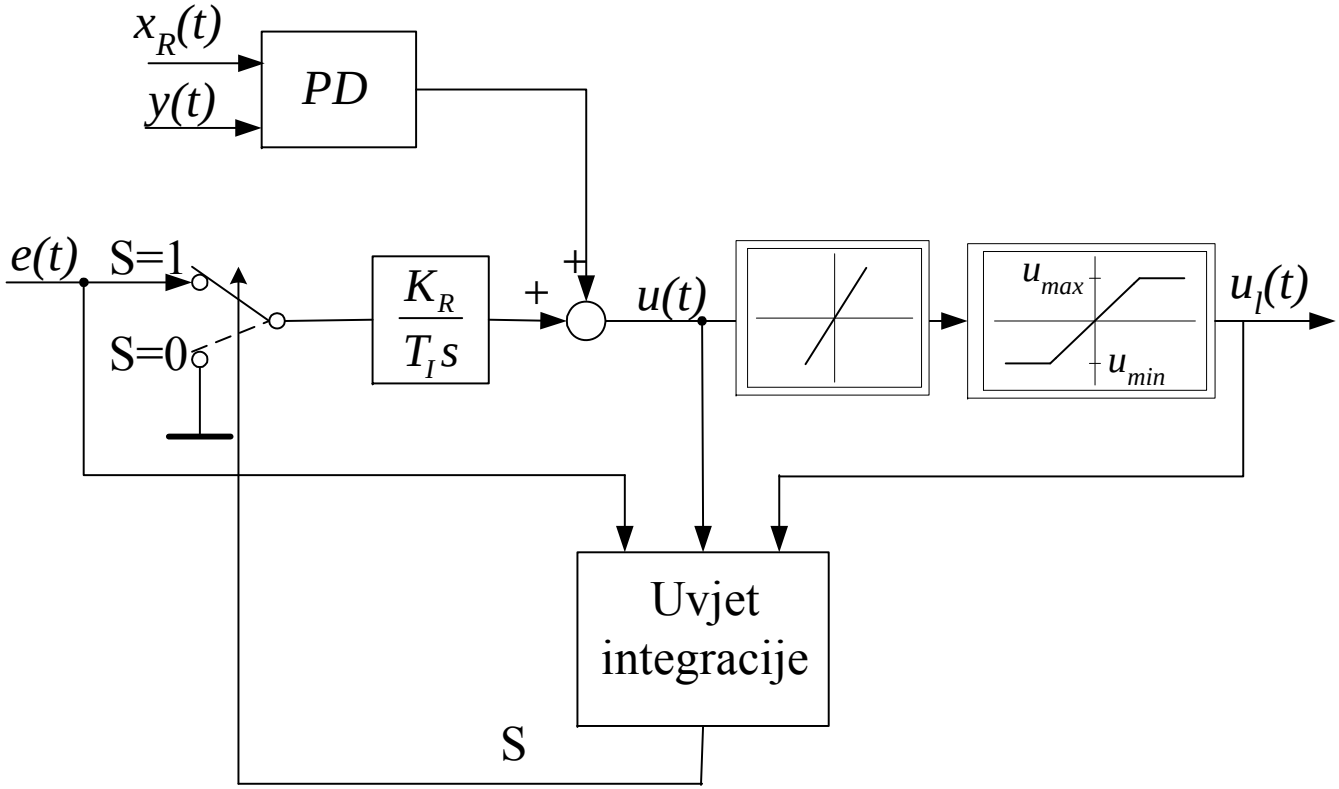
$$T_{AW} = \sqrt{T_I T_D}$$

U ograničenju je: $\boxed{\frac{1}{T_{AW}} e_l + \frac{K_R}{T_I} e}$, odakle je $\boxed{u = u_l + \frac{K_R T_{AW}}{T_I} e}$.

Kako je $\boxed{sign \quad u_l = sign\, e}$, uvijek je $\boxed{u > u_l} \Rightarrow$ regulator ne može iz ograničenja.

© Ivan Petrović

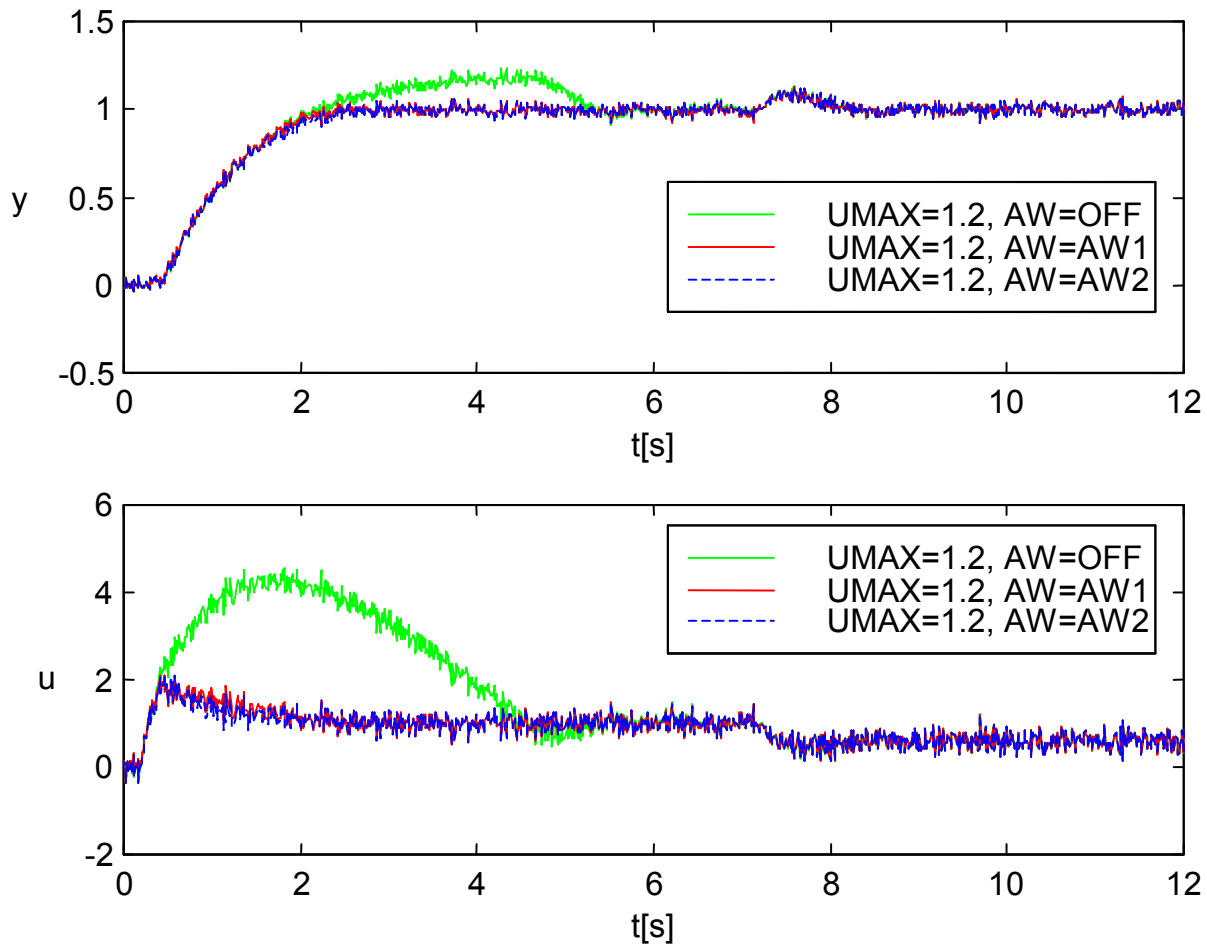
Postupak uvjetnog integriranja (postupak AW2):



Uvjet integracije: ako je ($u > u_l$ & $e > 0$) ili ($u < u_l$ & $e < 0$) $\Rightarrow$ S=0

inače S=1

© Ivan Petrović



Ilustracija "efekta zaleta" i sprječavanja njegove pojave na regulacijskom krugu iz 4.2.

© Ivan Petrović

- **<u>Napomene</u>:**
  - Navedeni oblici signala regulatora i problem „efekta zaleta“ nisu specifični samo za PID regulator, iako su naprijed opisani uz pretpostavku primjene PID regulatora.
  - Primjerice, problem „zaleta“ pojavio bi se i kod regulatora iz primjera 6.2:

$$\boxed{G_R(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{1 + 7s + 11s^2 + 5s^3}{s\left(2{,}15 + 1{,}75s + s^2\right)}}$$

  - Prema tome, za svaki regulator koji sadrži integralno djelovanje treba ga izdvojiti iz prijenosne funkcije regulatora i primijeniti zaštitu od efekta zaleta.

© Ivan Petrović

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
Fakultet elektrotehnike i računarstva
Zavod za automatiku i računalno inženjerstvo
Unska 3, Zagreb, HRVATSKA

Poglavlje 8: Izvedbeni aspekti RUS-a

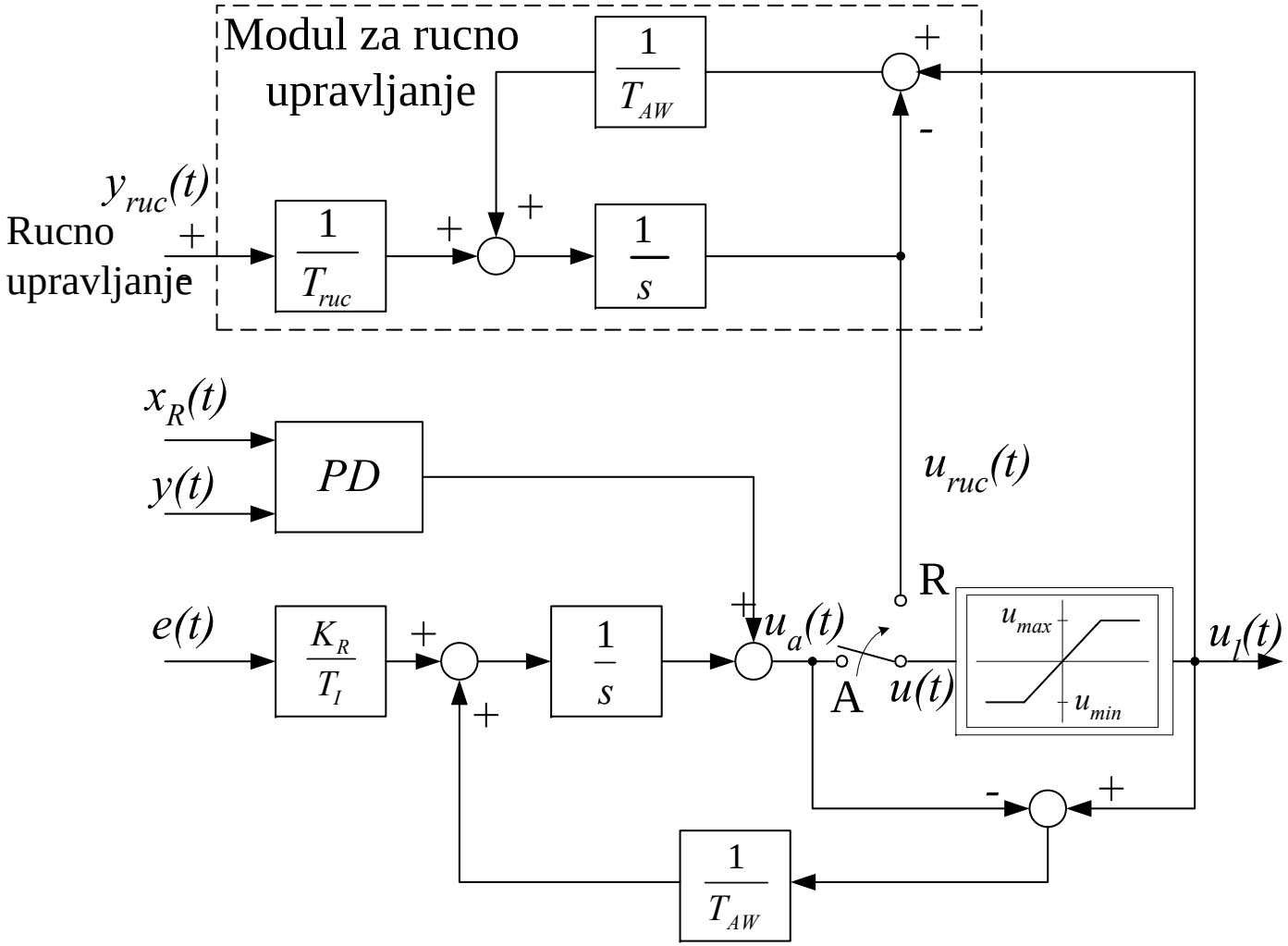
8.5. Prilagodba sustava upravljanja za prihvaćanje naredaba operatera

© Ivan Petrović

KONTINUIRANI PRIJELAZ IZMEĐU AUTOMATSKOG I RUČNOG NAČINA RADA

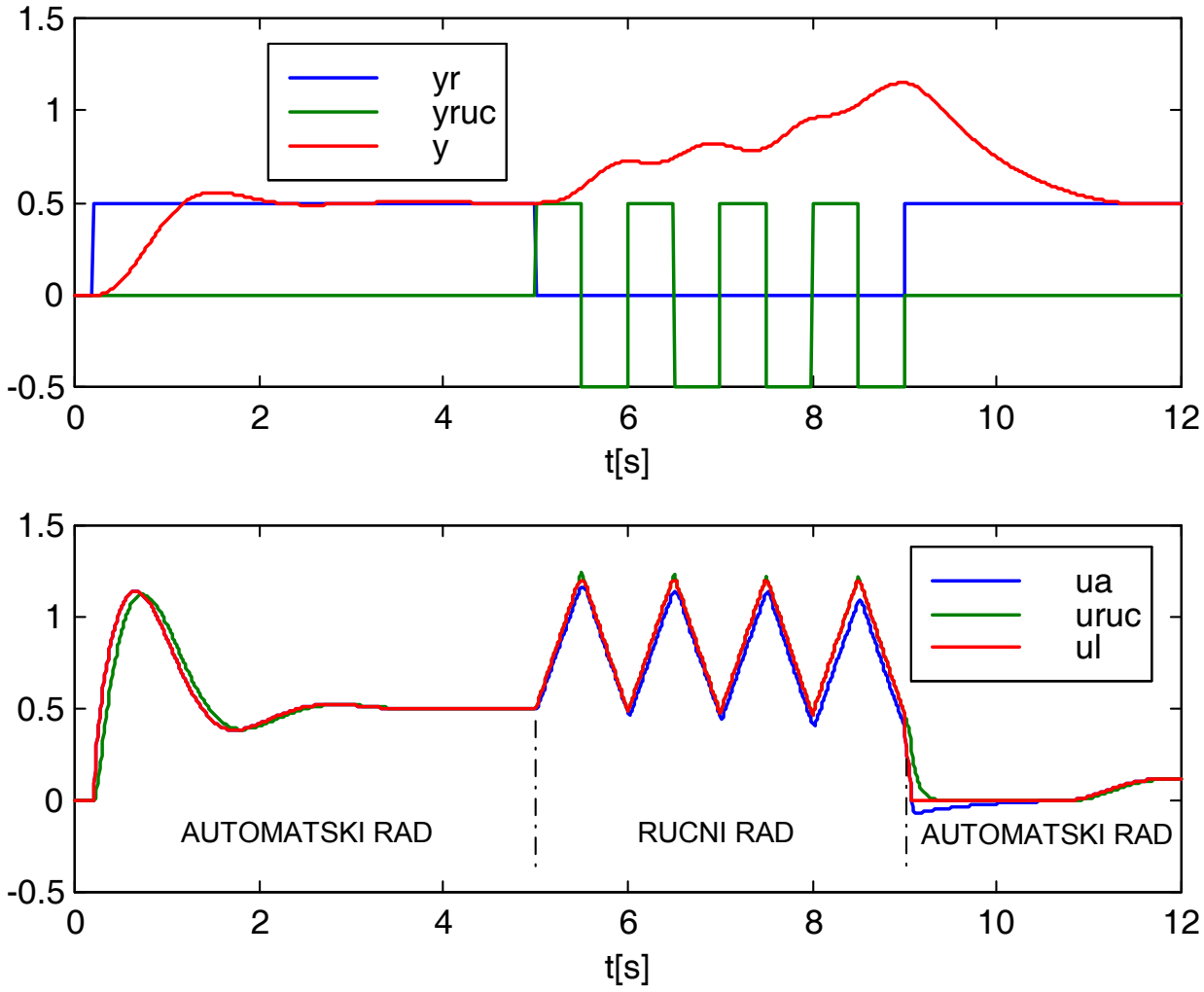
- **Više je razloga zbog kojih operater može imati potrebu djelovati na neki regulacijski krug:**
  - ♦ Zadati novu referentnu vrijednost;
  - ♦ Izvršiti identifikacijski eksperiment;
  - ♦ Ručno voditi proces (postrojenje) tijekom održavanja, remonta ili popravka;
  - ♦ Nezadovoljavajućeg vladanja sustava u automatskom načinu rada;
  - ♦ **...**
- **Nužno je osigurati da promjena načina rada sustava ne dovodi do skokovitih poremećaja u njegovu radu, već da prijelaz bude kontinuiran *(engl*. bumpless transition).**

© Ivan Petrović



Struktura za kontinuiranu promjenu načina rada

© Ivan Petrović



Promjena načina rada sustava uz strukturu regulatora prema slici na regulacijskom krugu iz 4.2

© Ivan Petrović

Prateći (slijedni) način rada regulatora:

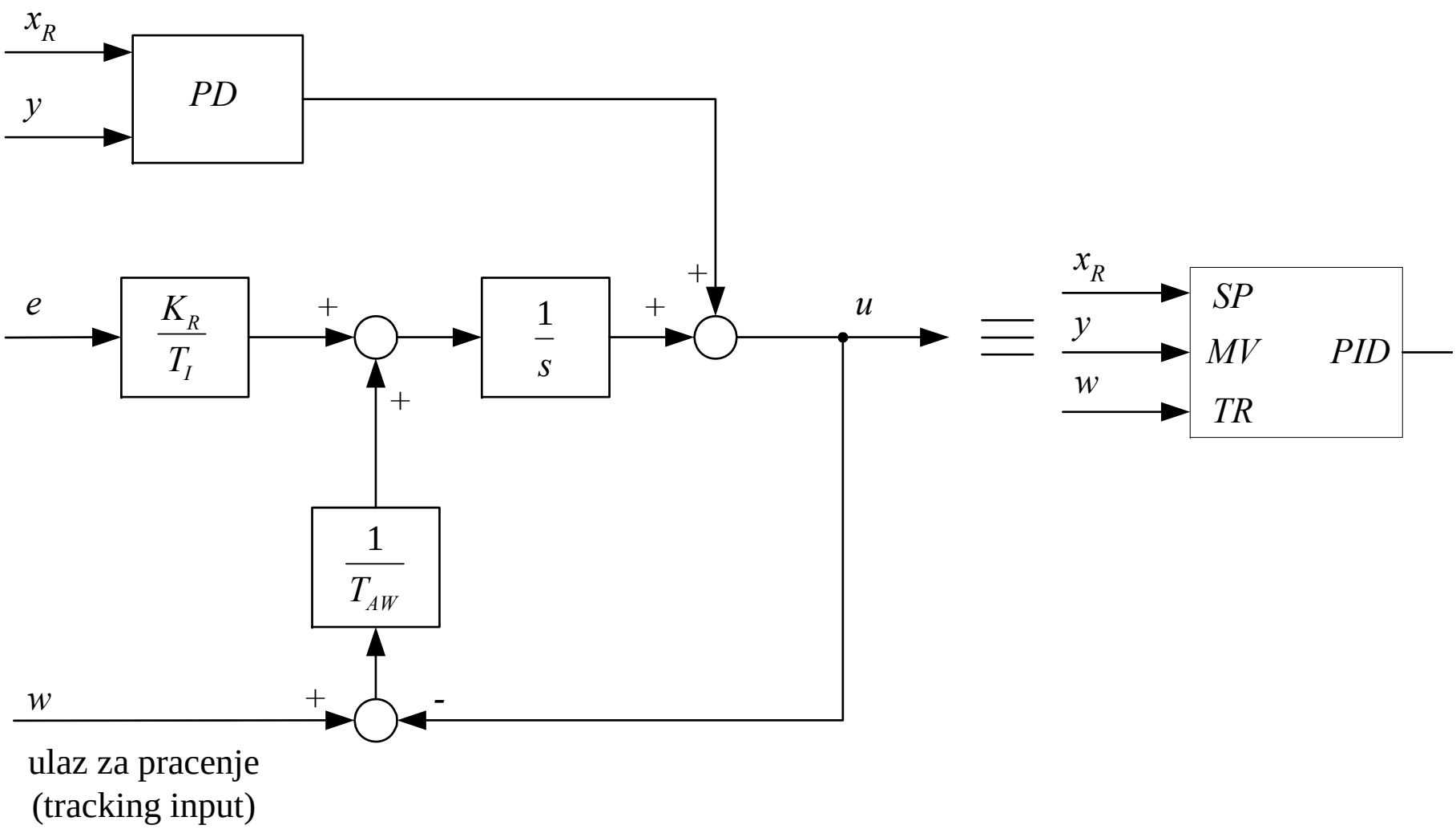
- Regulator s povratnom integracijom ima dva načina rada:

  ♦ *normalni način rada* i

  ♦ *prateći način rada* (slijedni, *engl*. tracking).

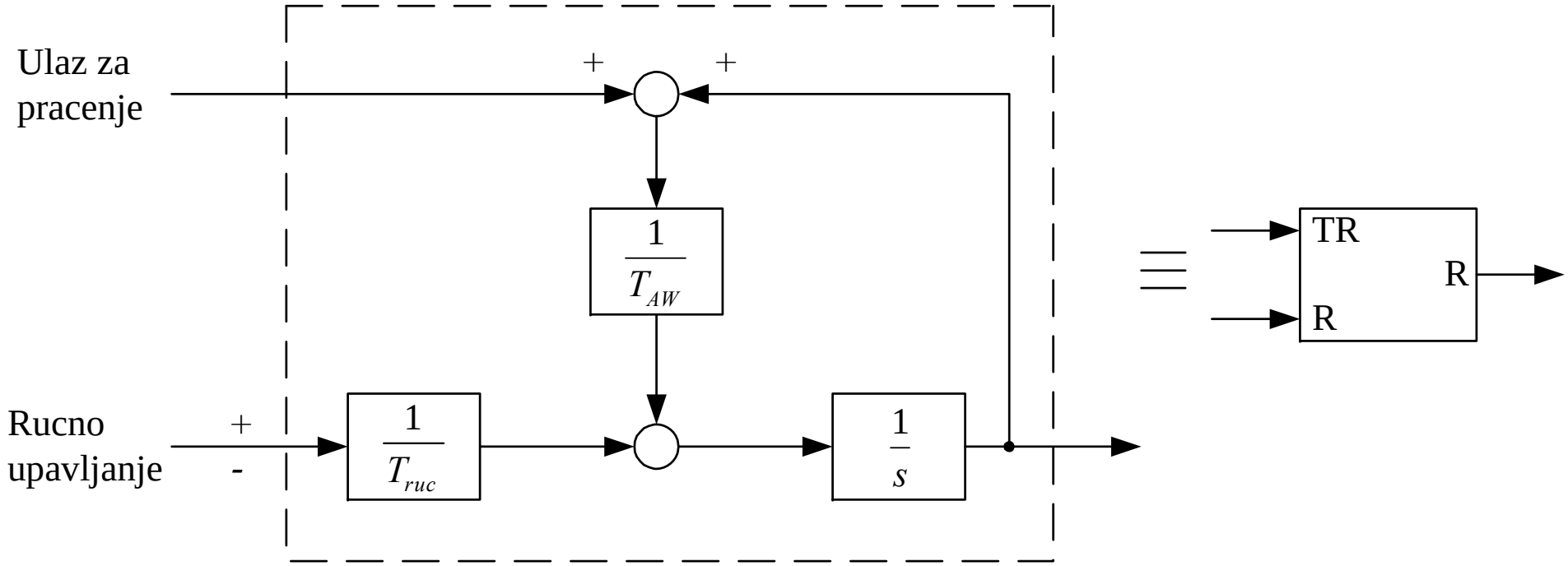
- Prijelaz iz jednog u drugi način rada odvija se automatski, bez ikakvih vanjskih uvjeta.
- Ovo svojstvo može biti od velike koristi pri projektiranju i puštanju u rad složenih sustava automatizacije, gdje više regulatora treba raditi u kombinaciji (npr. u kaskadnoj regulaciji ili u regulaciji odnosa) ili u kombinaciji s nelinearnim elementima (npr. množila).
- Slijede blokovske shema PID regulatora s ulazom za praćenje i blokovska shema modula za ručno upravljanje s ulazom za praćenje:

© Ivan Petrović



Blokovska shema PID regulatora s ulazom za praćenje.

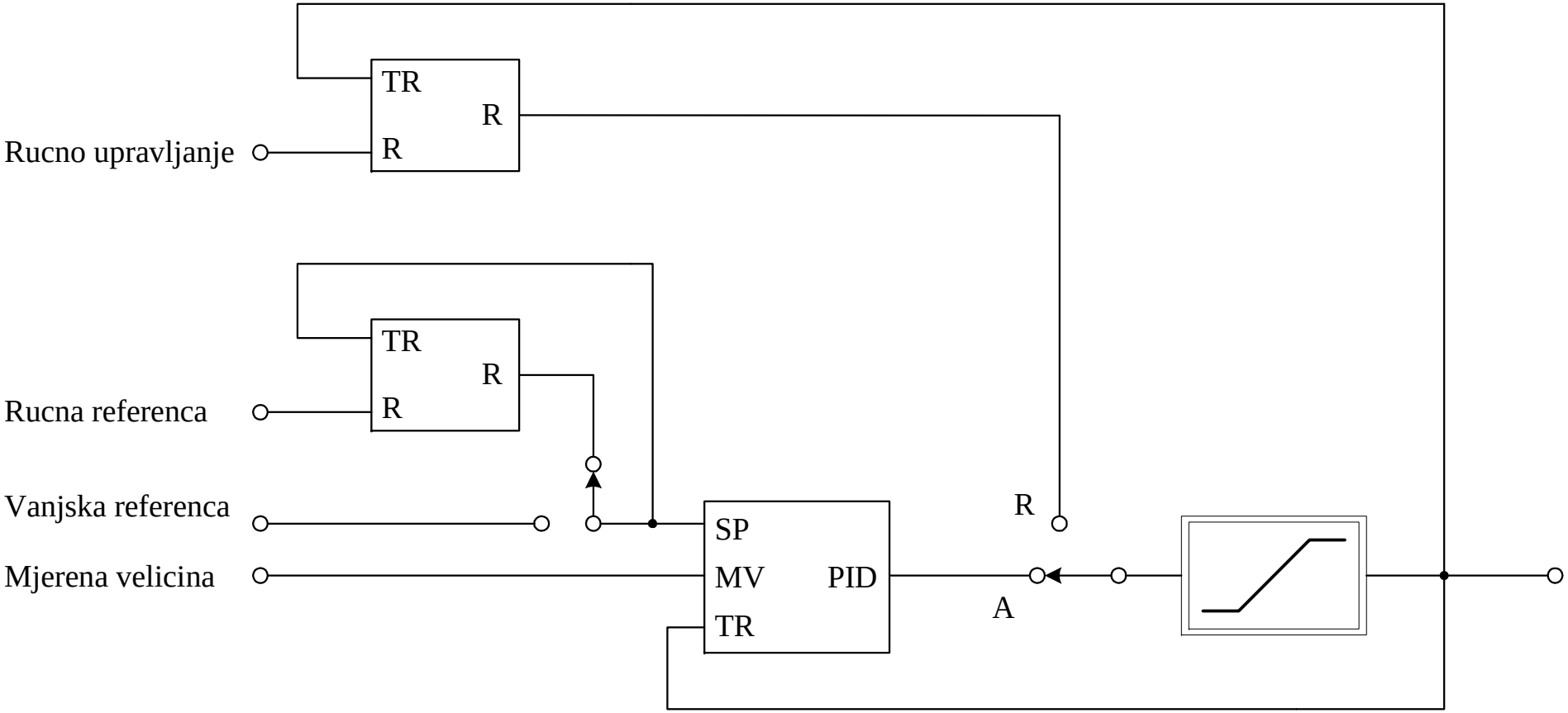
© Ivan Petrović



Blokovska shema modula za ručno upravljanje s ulazom za praćenje.

- Primjenom modula za PID upravljanje i modula za ručno upravljanje jednostavno se kreira složena struktura regulatora (slika na sljedećoj stranici).

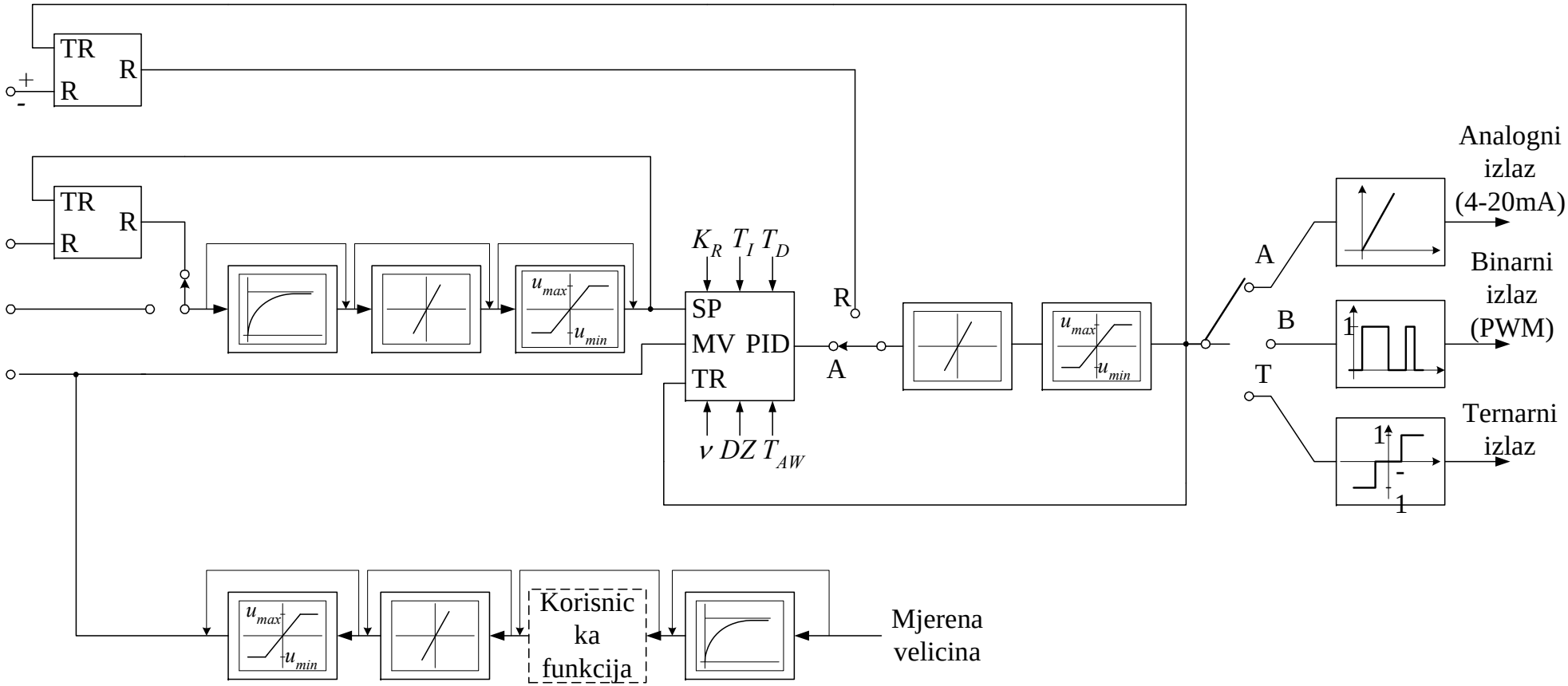
© Ivan Petrović



Složena struktura PID regulatora.

© Ivan Petrović

Blokovska shema profesionalnog programskog modula PID regulatora:



© Ivan Petrović

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
Fakultet elektrotehnike i računarstva
Zavod za automatiku i računalno inženjerstvo
Unska 3, Zagreb, HRVATSKA

Poglavlje 9: Implementacijski aspekti digitalnih regulatora

© Ivan Petrović

Sadržaj poglavlja:

9.1. Implementacijski oblici diskretnih regulatora

9.2. Binarna aritmetika s konačnom duljinom riječi

9.3. Pogreške koeficijenata i njihov utjecaj na dinamiku regulatora

9.4. Nelinearna svojstva regulatora uzrokovana kvantizacijom

© Ivan Petrović

9.1. IMPLEMENTACIJSKI OBLICI DISKRETNIH REGULATORA

- Pri analizi i sintezi sustava upravljanja, obično se pretpostavlja aritmetika s beskonačnom preciznošću – koeficijenti su realni brojevi

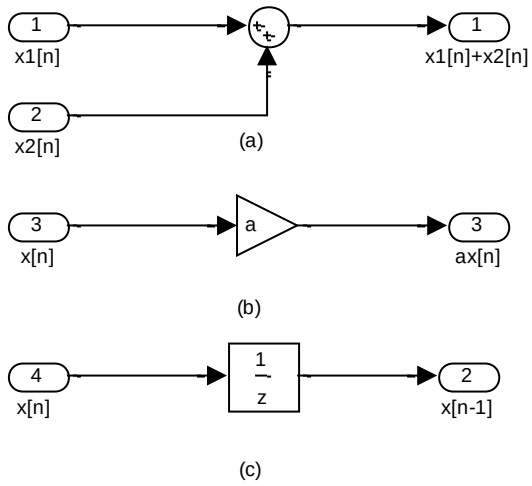
- Međutim, pri implementaciji algoritma upravljanja moraju se uvesti dodatna ograničenja koja proizlaze iz karakteristika primijenjenog sklopovlja.

- Diskretni algoritam upravljanja formulira se prijenosnom funkcijom u *z*-području ili jednadžbama diferencija u vremenskom području.

- Iterativno računanje rekurzivne formule dobivene iz diferencijalne jednadžbe zahtijeva da su dostupne zakašnjele vrijednosti izlaza i ulaza, te da su dostupni i međurezultati.

- Osnovni elementi potrebni za implementaciju su zbrajala, množila i memorija za pohranjivanje vrijednosti sekvenca.

© Ivan Petrović



- Postoji više oblika implementacije algoritama upravljanja, a osnovni su:
  - direktni oblik I,
  - direktni oblik II,
  - serijski oblik,
  - paralelni oblik,
  - modalni oblik.

© Ivan Petrović

- Razmatra se sljedeća opća diferencijalna jednadžba višeg reda, koja je zapisana u obliku rekurzivne formule za y[n] u smislu linearnih kombinacija prošlih vrijednosti izlaza te trenutnih i prošlih vrijednosti ulaza:

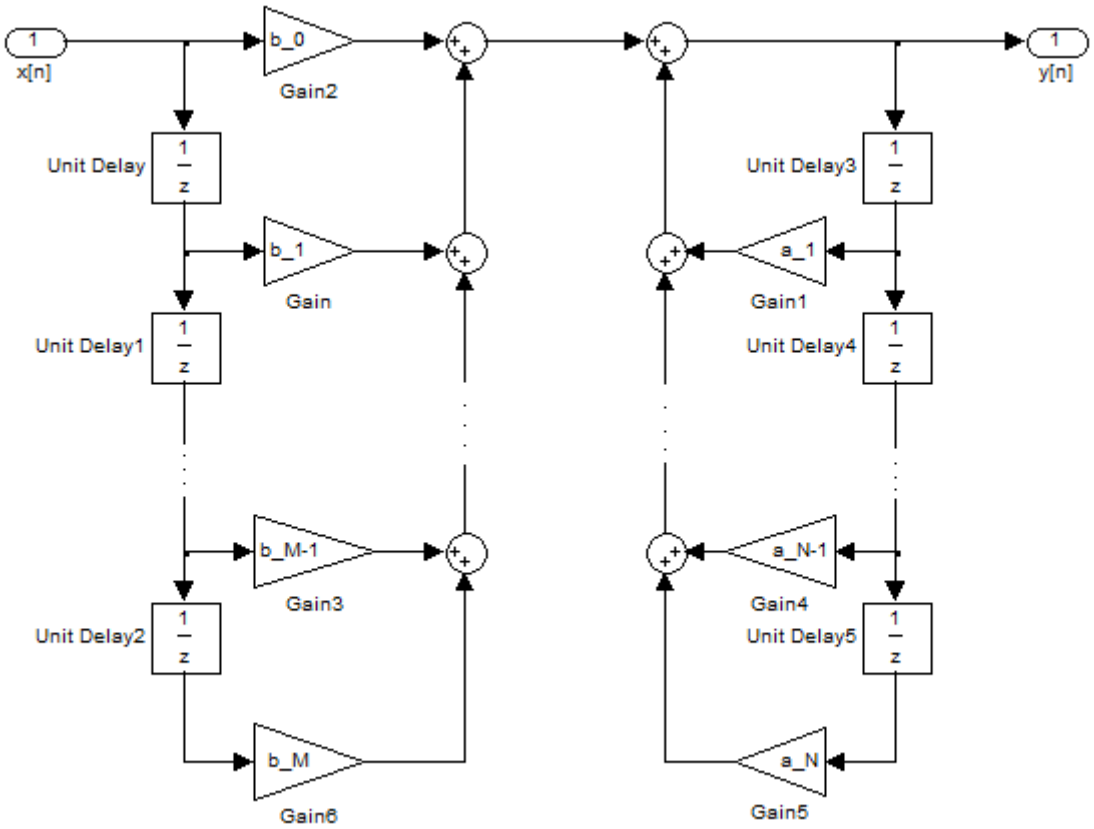
$$y[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \qquad (1\text{-}5)$$

- Pripadajuća prijenosna funkcija je:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} \; . \qquad (1\text{-}6)$$

- Blokovski dijagram na slici 1.2 je eksplicitna slikovna prezentacija jednadžbe (1-5) i naziva se <u>Direktni oblik I (DO-I):</u>

© Ivan Petrović



Slika 0.1Blok dijagram opće diferencijalne jednadžbe N-tog reda

- DO-I ima sljedeća svojstva:
  - Može se predstaviti kao sekcija nula koju prati sekcija polova.

- U većini shema izvedenih u cjelobrojnoj aritmetici (npr. dvojni komplement koji se najčešće koristi), **ne postoji mogućnost preljeva u internom filtru iz razloga što u filtru zapravo postoji samo jedno zbrajalo**. To svojstvo DO-I strukture vrlo je korisno. U cjelobrojnoj aritmetici, preljev predstavlja prijelaz iz najvećeg pozitivnog broja u najveći negativni broj (po apsolutnoj vrijednosti) i obratno. Tada je konačni rezultat $y[k]$ uvijek unutar zadanog opsega, čime izbjegavamo preljev konačnog rezultata, čak i prilikom pojave preljeva međurezultata u zbrajalu.
  - Ilustracija nepostojanja preljeva: Brojevi prikazani cjelobrojnom aritmetikom dvostrukog komplementa koristeći 3 bita:

Decimalni	Binarni	Objašnjenje
-4	100	• $3+3-4=2$ predstavlja zbroj u kojem dolazi do trenutnog preljeva ($3+3=6$, koje zbog preljeva postaje -2), no, konačni rezultat je ipak 2 koji se nalazi u propisanom opsegu. $011+011=110 \qquad (3+3=-2)$ $110+100=010 \qquad (-2-4=2)$ • Ova se pojava može objasniti time da se *pozitivni* preljev u prvom zbrajalu kompenzira *negativnim* preljevom u drugom zbrajalu.
-3	101	
-2	110	
-1	111	
0	000	
1	001	
2	010	
3	011	

© Ivan Petrović

- **Postoji dvostruko više kašnjenja nego što je potrebno**. Kao rezultat toga, DO-I struktura je nekanonička, ako gledamo kašnjenja. Općenito, možemo implementirati filtar N-tog reda koristeći samo N elemenata kašnjenja.

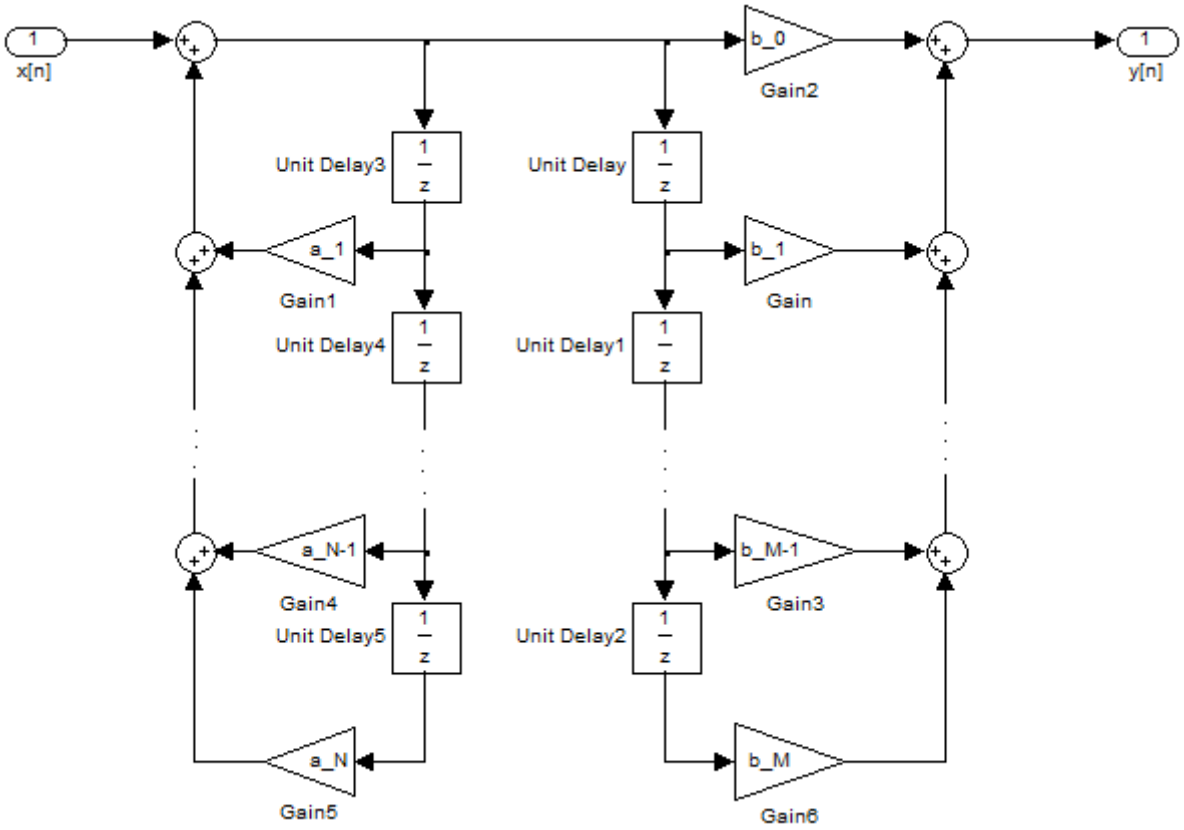
- Kao što je slučaj sa svim direktnim oblicima (čiji su koeficijenti određeni koeficijentima prijenosne funkcije), **polovi i nule filtra vrlo su osjetljivi na pogreške zaokruživanja koeficijenata**, što uglavnom ne predstavlja problem za jednostavnu sekciju 2. reda, no može postati problem za DO filtre višeg reda.

- **Osjetljivost na pogreške zaokruživanja koeficijenata više je izražena ako su korijeni prijenosne funkcije međusobno vrlo blizu u kompleksnoj ravnini.** Da bismo smanjili tu osjetljivost, faktoriziramo prijenosne funkcije filtra u paralele ili serije sekcija 2. reda.

- Blokovska shema može se reorganizirati ili modificirati na mnoštvo načina ne mijenjajući pritom sveukupnu prijenosnu funkciju sustava. Svaka reorganizacija predstavlja drukčiji algoritam za implementaciju istog sustava.

- Zamjenom redoslijeda sekcija nula i polova ne utječe se na sveukupnu prijenosnu funkciju sustava:

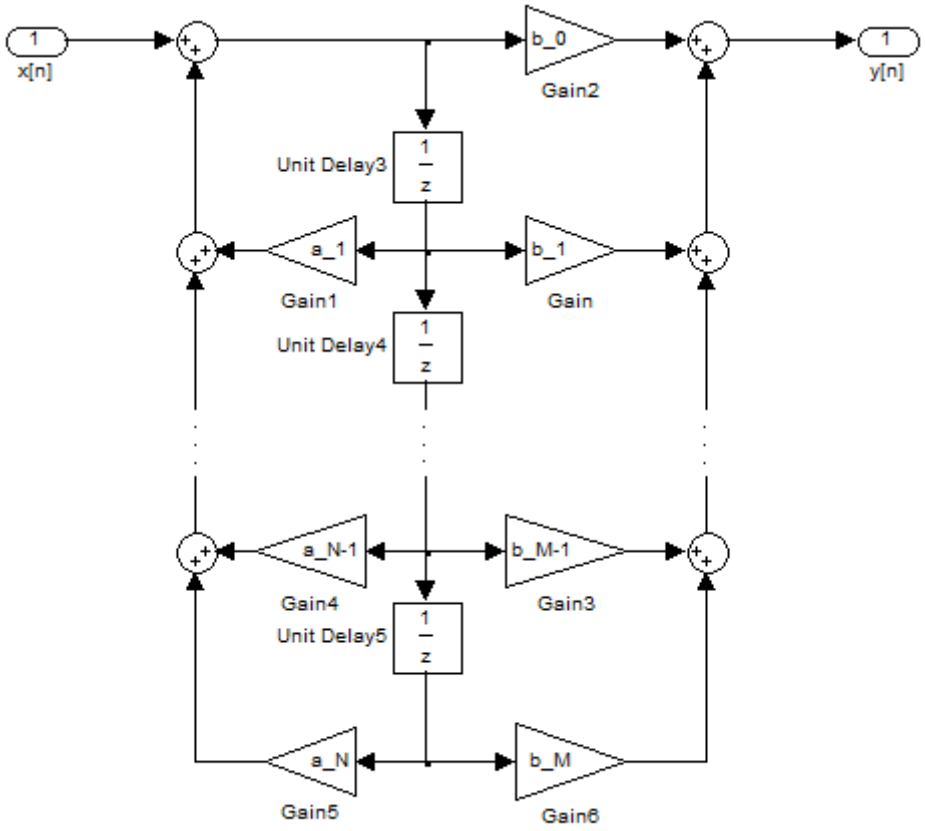
© Ivan Petrović



Slika 0.2Reorganizacija blokovskog dijagrama slike 1.2

- Oba sustava na slikama 1.2 i 1.3 imaju jednak broj kašnjenja. Međutim, blok dijagram sa slike 1.3 može se drukčije organizirati ako se primijeti da je isti signal pohranjen u oba lanca elemenata kašnjenja te se može spojiti u jedan lanac kako je prikazano na slici 1.4. - **Direktni oblik II (DO-II):**

© Ivan Petrović



Slika 0.3Reorganizacija blok dijagrama sa slike 1.3

- Jednadžbe diferencije za DO-II:

$$v[n] = x[n] + a_1 v[n-1] + a_2 v[n-2] + \ldots + a_N v[n-N]$$

$$y[n] = b_0 v[n] + b_1 v[n-1] + b_2 v[n-2] + \ldots. + b_M v[n-M]$$

© Ivan Petrović

Svojstva DO-II forme:

- Sekciju polova prati sekcija nula.
- Ova je forma kanonička gledajući kašnjenja – broj kašnjenja je $max\ (N, M)$; razlog tome je dijeljenje elemenata za kašnjenje između sekcija polova i nula.
- Moguća je pojava internog preljeva na ulaznom dijelu linije za kašnjenje, za razliku od DO-I forme.
- Kao i DO-I struktura, i ova je struktura osjetljiva na pogreške odsijecanja koeficijenata a_i i b_i, posebno za prijenosne funkcije višeg reda.

<u>Serijski oblik:</u>

- Prijenosna funkcija *n*-tog reda upravljačkog algoritma predstavljena je kao umnožak jednostavnijih prijenosnih funkcija prvoga i drugoga reda:

$$\frac{y(z)}{x(z)} = H(z) = \alpha_0 H_1(z) H_2(z) \cdots H_n(z).$$

© Ivan Petrović

- Za faktoriziranje prijenosne funkcije koriste se dva tipa elemenata:

  a) elementi 1. reda

$$H_i(z) = \frac{1 + b_{i1} z^{-1}}{1 + a_{i1} z^{-1}}$$

  b) elementi 2. reda

$$H_j(z) = \frac{1 + b_{j1} z^{-1} + b_{j2} z^{-2}}{1 + a_{j1} z^{-1} + a_{j2} z^{-2}}.$$

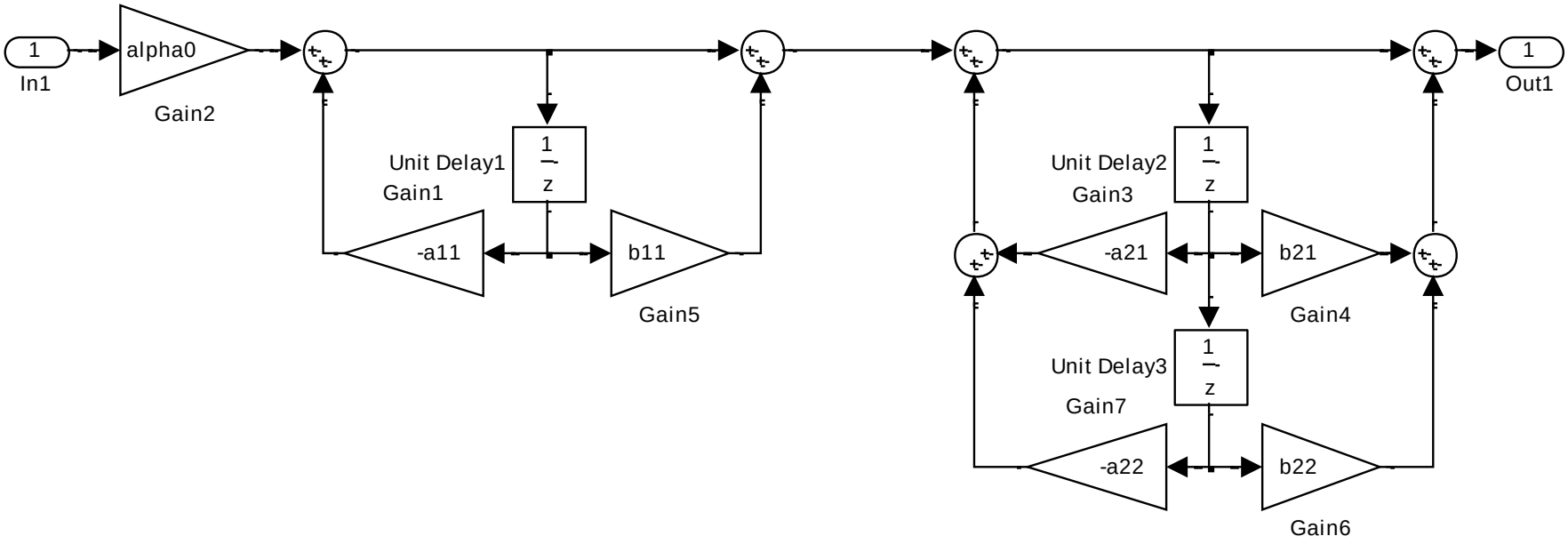
- Treba napomenuti da elementi prvoga reda predstavljaju realne nule i realne polove, dok elementi drugoga reda predstavljaju kompleksno-konjugirane parove nula i polova.

- Postoji poprilična sloboda u odabiru kompozicije podelemenata kao i u odabiru redoslijeda u kojem će ti podsustavi biti poredani u seriju.

- Iako svi ovi načini grupiranja imaju istu prijenosnu funkciju i isti odnos ulaza i izlaza u aritmetici s beskonačnom preciznošću, njihovo ponašanje kada je u pitanju konačna aritmetika može biti poprilično drukčije.

© Ivan Petrović

- Blokovska shema za filtar s jednim elementom 1. reda i jednim elementom 2. reda izvedenima u DO-II obliku:



Slika 0.4Regulator u serijskoj izvedbi

- Jednadžbe diferencija za prikazanu strukturu dane su izrazima:

$$y_1[n] = \alpha_0 \quad x[n] + b_{11}x[n-1] \quad - a_{11}y_1[n-1],$$
$$y[n] = y_1[n] + b_{21}y_1[n-1] + b_{22}y_1[k-2] - a_{21}y[k-1] - a_{22}y[k-2].$$

- Dodatna definicija serijske forme:

$$\frac{y(z)}{x(z)} = H(z) = H(1) \cdot H(2) \cdots H(n). \qquad (1\text{-}11)$$

- Prijenosna funkcija H(z) rastavljena je na jednostavnije prijenosne funkcije prvoga i drugoga reda koje predstavljaju podsekcije DO-II:

$$H_i(z) = \frac{b_{i0} + b_{i1}z^{-1}}{1 + a_{i1}z^{-1}}, \qquad (1\text{-}12)$$

$$H_i(z) = \frac{b_{i0} + b_{i1}z^{-1} + b_{i2}z^{-2}}{1 + a_{i1}z^{-1} + a_{i2}z^{-2}}. \qquad (1\text{-}13)$$

© Ivan Petrović

- Ovakva realizacija zahtijeva pet množila za realizaciju podsekcije drugoga reda, dok prethodna definicija kaskadne forme zahtijeva četiri. Međutim, podsekcije s pet množila omogućuju distribuciju pojačanja sustava kontrolirajući time veličinu signala na kritičnim mjestima u sustavu.

Paralelni oblik:

- Prijenosna funkcija *n*-tog reda prikazana je kao zbroj jednostavnijih prijenosnih funkcija prvoga i drugoga reda:

$$\frac{y(z)}{x(z)} = H(z) = a_0 + H_1(z) + H_2(z) + \cdots + H_n(z).$$

- Koriste se dva tipa elemenata:

a) *elementi 1. reda*

$$H_i(z) = \frac{b_{i0} z^{-1}}{1 + a_{i1} z^{-1}} \ ,$$

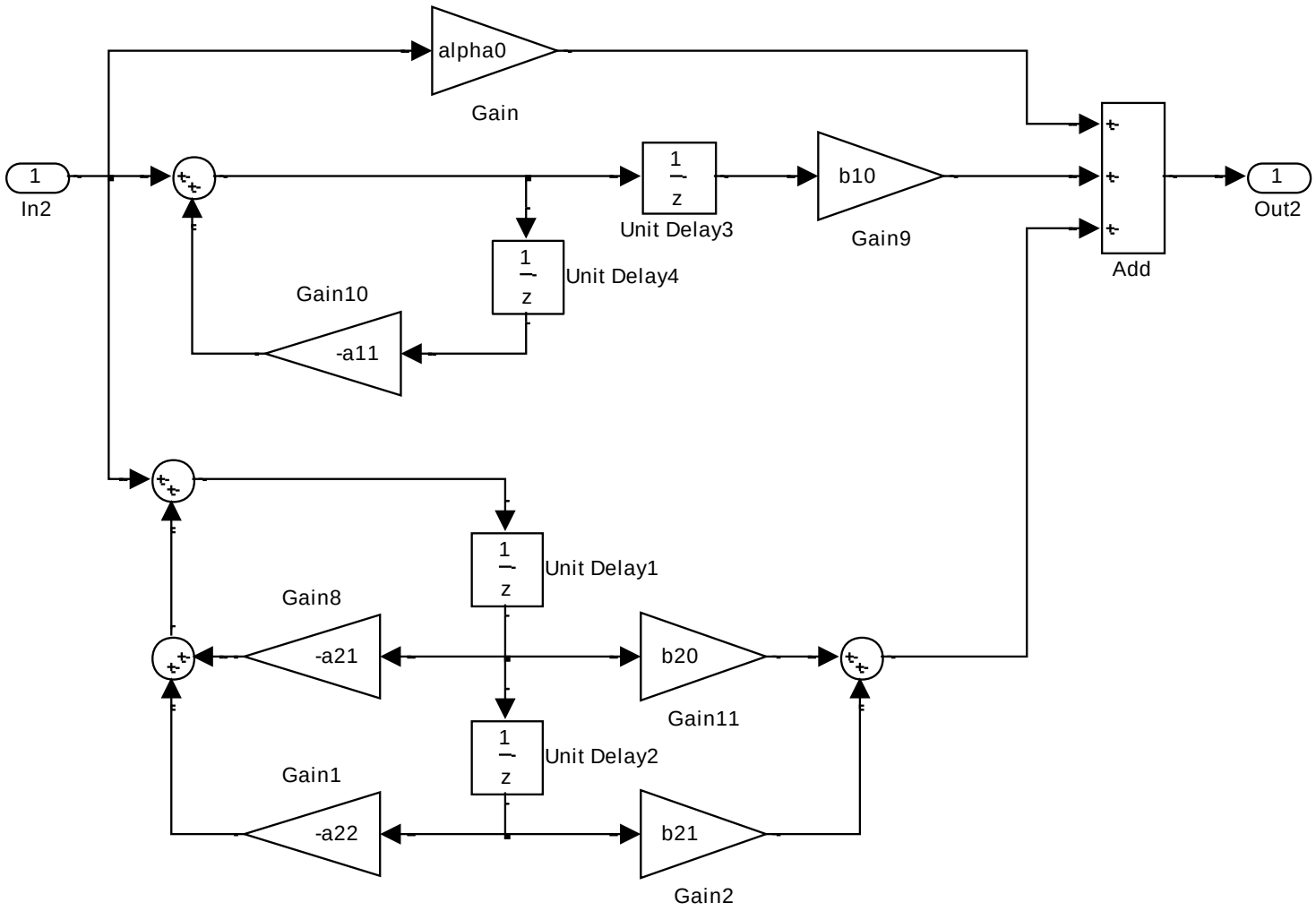
b) *elementi 2. reda*

© Ivan Petrović

$$H_i(z) = \frac{b_{i0} z^{-1} + b_{i1} z^{-2}}{1 + a_{i1} z^{-1} + a_{i2} z^{-2}} \quad .$$

- Blokovska shema za paralelnu kombinaciju podsustava prvoga i drugoga reda izvedenima u DO-II obliku:

© Ivan Petrović



Slika 0.5Regulator u paralelnoj izvedbi

© Ivan Petrović

- Jednadžbe diferencija za prikazanu strukturu dane su izrazima:

$$v_0[n] = \alpha_0 x[n],$$
$$v_1[n] = b_{10} x[n-1] - a_{11} v_1[n-1],$$
$$v_2[n] = b_{20} x[n-1] + b_{21} x[n-2] - a_{21} v_2[n-1] - a_{22} v_2[n-2],$$
$$y[n] = v_0[n] + v_1[n] + v_2[n].$$

Modalni oblik:

- U ovom obliku prijenosna se funkcija pretvara u odgovarajući model po varijablama stanja:

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k)\ , \qquad (1\text{-}17)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k)\ . \qquad (1\text{-}18)$$

- Odabire se tzv. modalna forma zapisa po varijablama stanja kod koje su dijagonalni članovi matrice φ jednaki realnim polovima ili kvadratne podmatrice za konjugirano-kompleksne polove.

© Ivan Petrović

- Primjerice, za slučaj kada regulator ima jedan realni pol i dva konjugirano-kompleksna pola:

$$p_1 = \lambda_1 \quad , \quad p_{2,3} = \sigma \pm j\omega \ , \qquad (1\text{-}19)$$

- matrica φ formira se na sljedeći način:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & \omega \\ 0 & -\omega & \sigma \end{bmatrix}. \qquad (1\text{-}20)$$

- Kao matrica transformacije u modalnu formu koristi se matrica svojstvenih vektora sustava:

$$x = Tz \ . \qquad (1\text{-}21)$$

- Uz pretpostavku da regulator ima različitih n_r realnih polova i n_c različitih konjugirano-kompleksnih parova polova, tada se regulator realizira na sljedeći način:

© Ivan Petrović

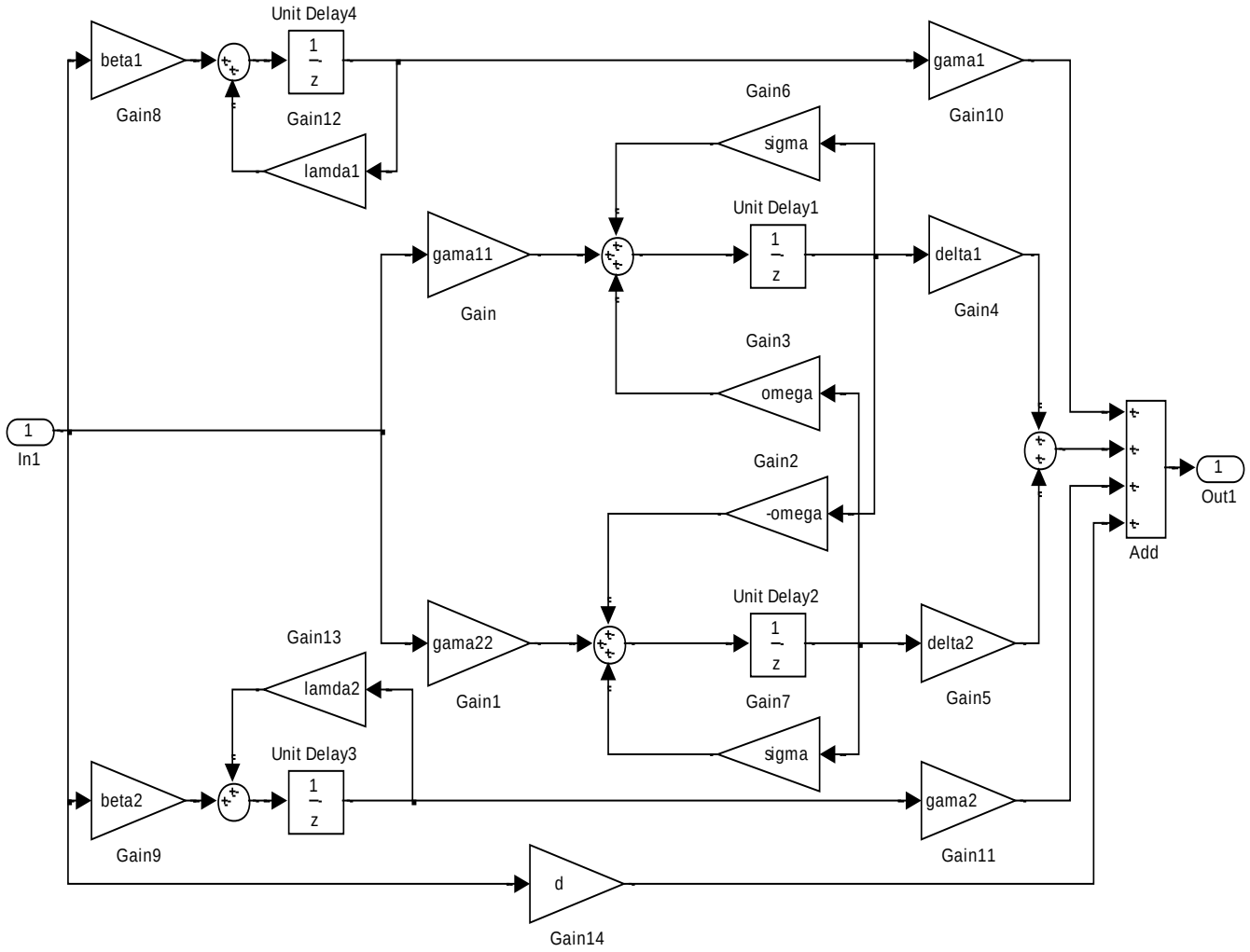
$$z_i(k+1) = \lambda_i z_i(k) + \beta_i e(k)\ ,\ i = 1, 2, \ldots, n_r \qquad (1\text{-}22)$$

$$v_i(k+1) = \begin{bmatrix} \sigma_i & \omega_i \\ -\omega_i & \sigma_i \end{bmatrix} v_i(k) + \begin{bmatrix} \gamma_{i1} \\ \gamma_{i2} \end{bmatrix} e(k)\ ,\ i = 1, 2, \ldots, n_c \qquad (1\text{-}23)$$

$$u(k) = \sum_{i=1}^{n_r} \gamma_i z_i(k) + \sum_{i=1}^{n_c} \delta_i v_i(k) + De(k)\ . \qquad (1\text{-}24)$$

- Blokovska realizacija regulatora u modalnoj izvedbi:

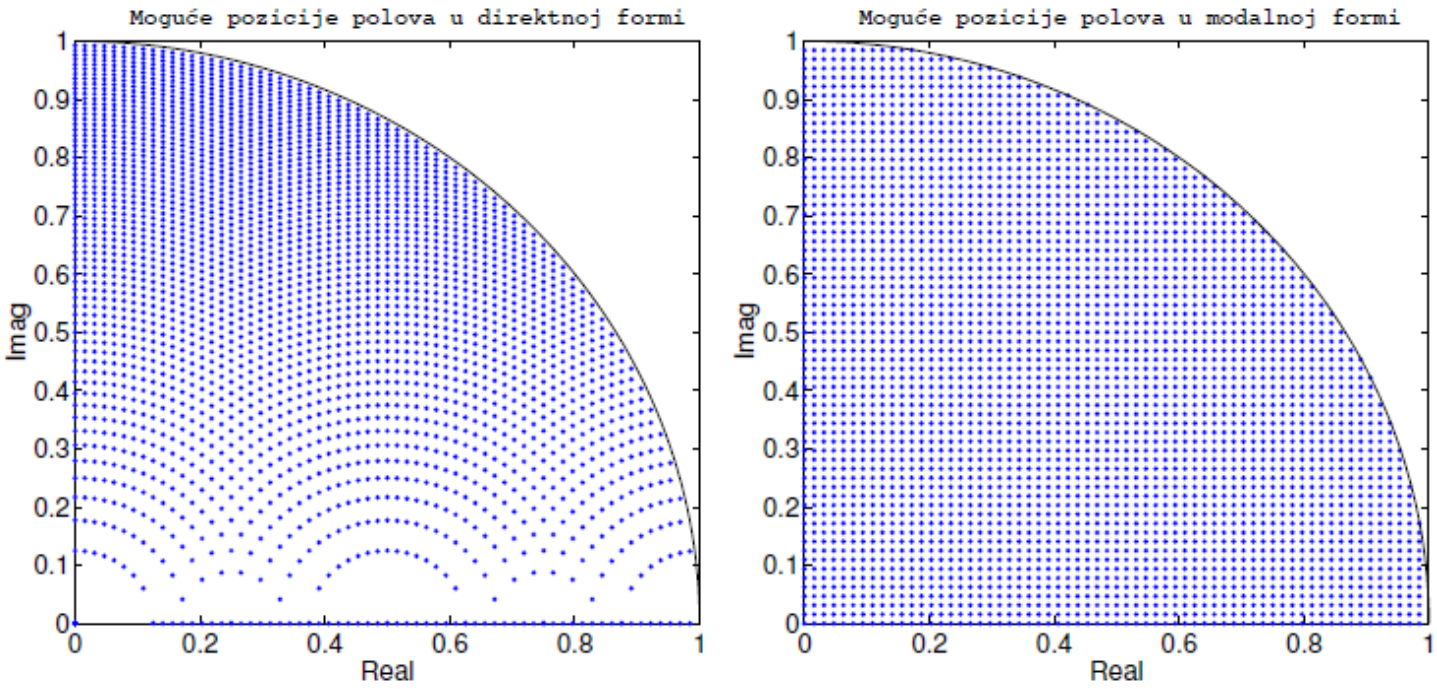
© Ivan Petrović



Slika 0.6Regulator u modalnoj izvedbi

© Ivan Petrović

- Vidljivo je kako se regulator zapisan u prostoru stanja u modalnoj formi realizira paralelno, tj. zasebno se realiziraju pojedini realni polovi i parovi konjugirano-kompleksnih polova.



- Uniformna osjetljivost položaja polova postiže se kod modalne realizacije zahvaljujući činjenici da su koeficijenti koji se koriste pri izvedbi regulatora zapravo njegovi polovi.

© Ivan Petrović

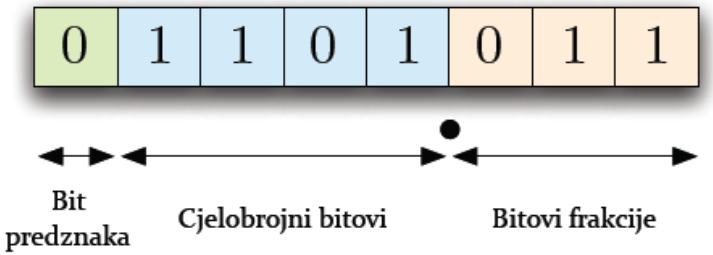
9.2. BINARNA ARITMETIKA S KONAČNOM DULJINOM RIJEČI

- Pažnja u ovom potpoglavlju posvećena je:
  - najčešće upotrebljavanim metodama zapisa brojeva kod mikroprocesorskog upravljanja – cjelobrojnom zapisu brojeva;
  - odsijecanju i zaokruživanju brojeva u analogno-digitalnim pretvornicima, pri izvođenju aritmetičkih operacija i pohrani parametara u memoriju.
- U teoretskim analizama diskretnih sustava obično se pretpostavlja da su vrijednosti signala i koeficijenata sustava predstavljeni kao realni brojevi. Idealne realne brojeve u narednim razmatranjima čini prikaz brojeva u Matlabu.
- Kod implementacije sustava s digitalnom obradbom signala, signali i koeficijenti sustava moraju se prikazati u konačnoj preciznosti.

© Ivan Petrović

Binarni zapis brojeva:

- Realni broj u aritmetici s nepomičnim zarezom prikazuje se kao cjelobrojna vrijednost X s N=m+n+1 bitova, pri čemu je:
  - N – duljina riječi,
  - m – broj cjelobrojnih bitova,
  - n – broj bitova frakcije.



- Prikazani format zapisa ponekad se naziva Q-formatom i označava se Qm.n.
- Iz navedenog je lako zaključiti da je najveći cijeli broj koji se zapisuje na ovaj način $\boxed{2^m - 1}$ za pozitivan i $\boxed{-2^m}$ za negativan.
- Najčešće je binarna točka postavljena na 2. poziciju (m=0), te na taj način opseg brojeva koji se mogu prikazati iznosi

$$\boxed{[-1,\ 1-2^{-n}]}.$$

© Ivan Petrović

- Granica razlučivosti ovakvog načina zapisa brojeva iznosi 2^{-n}, odnosno to je najmanji diskretni pomak između dva susjedna broja (korak kvantizacije).
- Izraz 2^{-n} nazivamo još i LSB – engl. *least significant bit* (najmanje značajan bit), jer predstavlja desni bit u prikazu broja i najmanje utječe na konačnu vrijednost broja.
- Realni broj pretvaramo u broj u aritmetici s nepomičnim zarezom na sljedeći način:

$$X = round(x \cdot 2^n) \quad ,$$

- gdje *x* predstavlja realni broj, a *X* broj zapisan u aritmetici s nepomičnim zarezom. Npr., dekadski broj iznosa 13.4 možemo zapisati u formatu Q4.3 kao $X = 107_{(10)} = 01101011_{(2)}$.

- U cjelobrojnom je prikazu binarni zarez nepomičan. Npr. za Q0.4 pretvorba u dekadski broj iznosi:

$$0.1010 = 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + 0 \cdot 2^{-4}$$

$$0.1010 = 0 + 0.5 + 0 + 0.125 + 0$$

$$0.1010 = 0.625.$$

© Ivan Petrović

- Za zapisivanje negativnih brojeva u binarnoj aritmetici koriste se tri različita oblika zapisa:

  a) *Zapis s predznakom* − vodeći bit predstavlja predznak, 0 za pozitivne vrijednosti i 1 za negativne. Ovakvim zapisom broj 0 ima dva zapisa 0000.00 i 1000.00.

$$-6.5 = 1110.10$$

$$+6.5 = 0110.10$$

  b) *Zapis dvojnog komplementa* − pozitivni brojevi jednaki su zapisu s predznakom, dok se negativni brojevi zapisuju na način da se sve binarne znamenke pozitivnog broja komplementiraju i zatim se pridoda 1.

$$-(0110.10) = (1001.01) + (0000.01)$$

$$-(0110.10) = 1001.10$$

Pri određivanju pozitivnog broja, koristi se isti postupak:

$$-(1001.10) = (0110.01) + (0000.01)$$

$$-(1001.10) = 0110.10$$

© Ivan Petrović

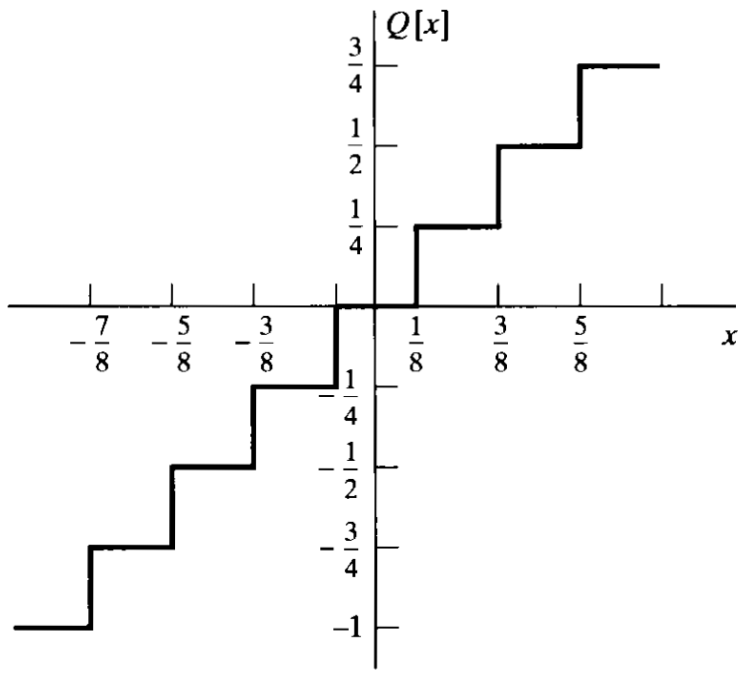
c) *Zapis komplementa* − pozitivni brojevi zapisani su u obliku zapisa s predznakom, dok su negativni zapisani tako da se svi bitovi pozitivnog broja komplementiraju.

$$-(0110.10) = 1001.01$$

Odsijecanje i zaokruživanje binarnih brojeva:

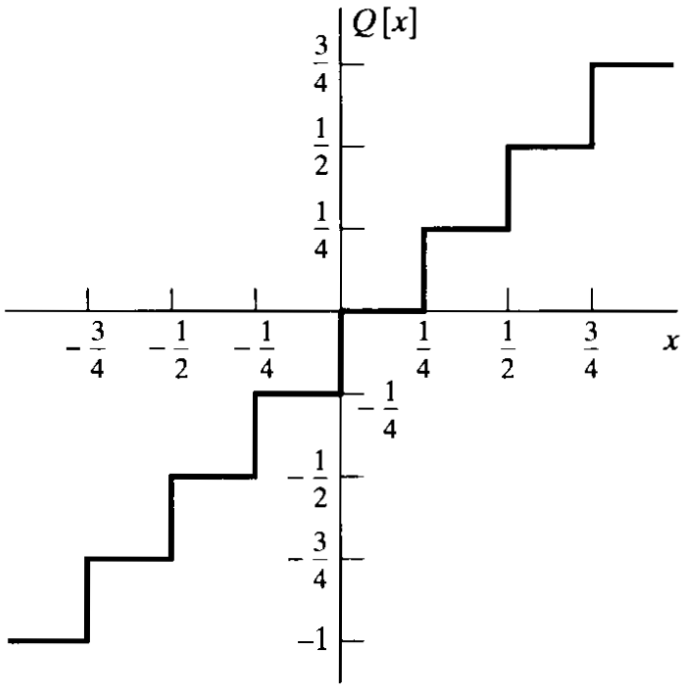
- Proizvoljni realni broj x zahtijevao bi za svoju točnu binarnu prezentaciju neograničen broj bitova. Operacija kvantiziranja broja na N bitova može biti provedena putem zaokruživanja ili odsijecanja, ali u oba slučaja kvantizacija je nelinearna operacija.

© Ivan Petrović



Slika 0.1Nelinearna karakteristika za operaciju zaokruživanja uz zapis dvojnog komplementa (N = 2)

© Ivan Petrović



Slika 0.2Nelinearna karakteristika za operaciju odsijecanja uz zapis dvojnog komplementa (N = 2)

- U razmatranjima utjecaja kvantizacije, definiramo kvantizacijsku pogrešku kao:

$$e = Q_N[x] - x \qquad (2\text{-}3)$$

© Ivan Petrović

- Za operaciju zaokruživanja, kvantizacijska pogreška kreće se u rasponu:

$$-q/2 < e \leq q/2 \quad , \qquad (2\text{-}4)$$

- dok se kvantizacijska pogreška za operaciju zaokruživanja kreće u rasponu:

$$-q < e \leq 0 \quad , \qquad (2\text{-}5)$$

gdje *q* predstavlja najmanju razliku između brojeva, tj. granicu razlučivosti.

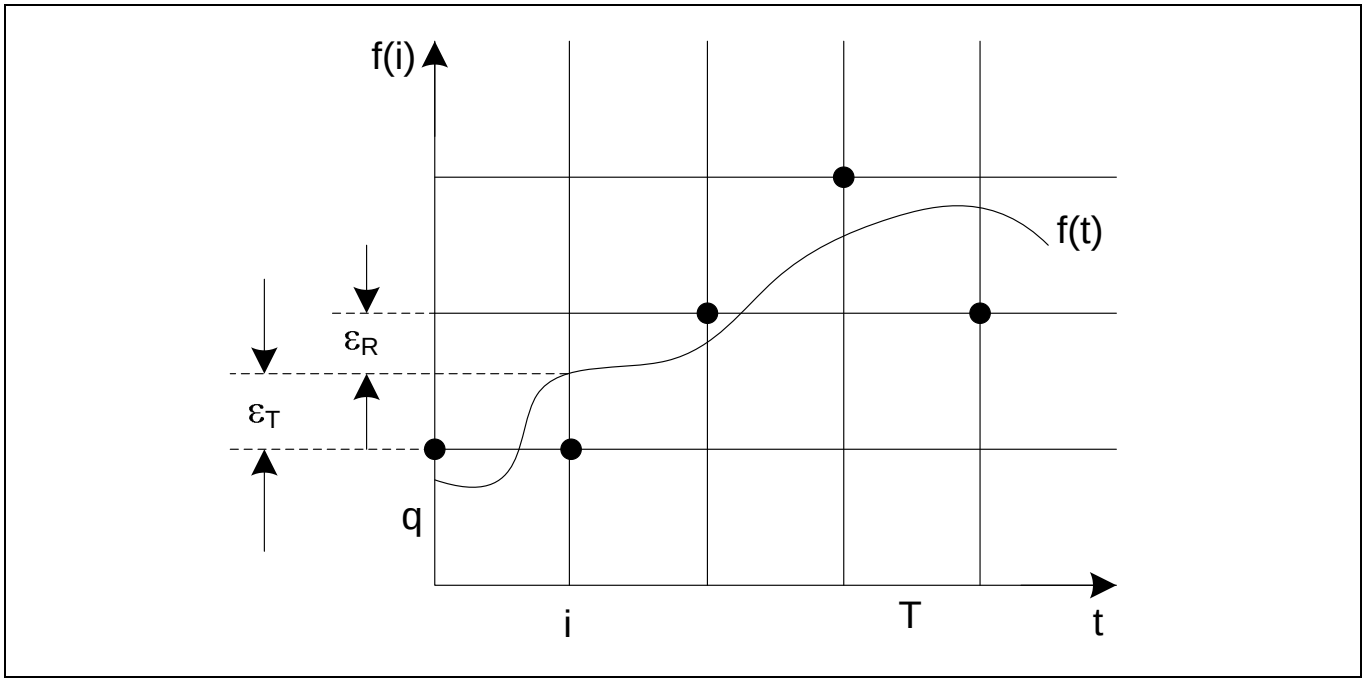
- Binarni se broj zaokružuje na *N*-bitova tako da se odabere broj unutar N-bitova koji je najbliži nezaokruženoj vrijednosti.

- Npr. 0.1100011 zaokružen na 4 bita je jednak 0.110.

- Npr. 0.1001010 (0.578125) zaokružen na 4 bita je 0.101 (0.625 bliže nego 0.5).

© Ivan Petrović

Pogreške odsijecanja i zaokruživanja *u A/D pretvornicima:*



- A/D pretvornik treba odabrati takav da mu je razlučivost *q* nešto niža od najveće amplitude šuma koji se pojavljuje i koji je sastavni dio signala u stvarnome sustavu.

© Ivan Petrović

Odsijecanja i zaokruživanja pri izvođenju aritmetičkih operacija:

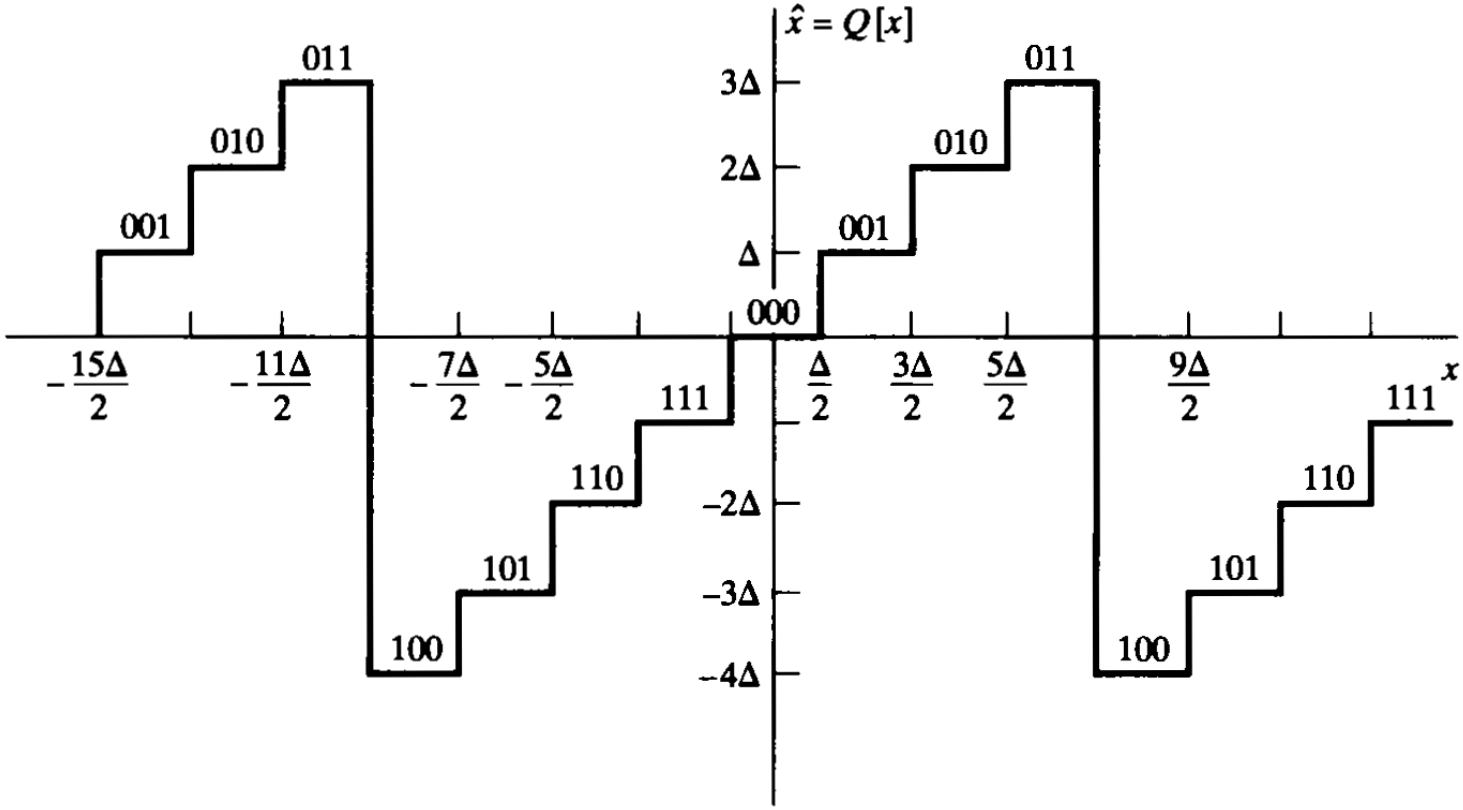
- Množenje uporabom decimalne aritmetike i riječi s 4 znamenke (za ilustraciju):

$$0.140 \cdot 0.140 = 0.0196$$

  - Odsijecanjem se dobije 0.019, pri čemu je pogreška odsijecanja jednaka $|\varepsilon_T| = 0.0006$, dok se zaokruživanjem dobije 0.020, tako da pogreška zaokruživanja iznosi $|\varepsilon_R| = 0.0004$
- Množenje u binarnoj aritmetici:
  - Problemi: odsijecanje/zaokruživanje, ali i preljev
    - U slučaju da je broj veći od maksimalog mogućeg prikazivog broja, dogodio se preljev – kada se zbrajaju dva broja čija je suma veća od raspoloživog raspona brojeva.
    - Metoda zasićenja (saturation) obično je implementirana u A/D konverziji. U slučaju preljeva iznos pogreške ne skače naglo, međutim nedostatak joj je što ne sadrži korisno svojstvo aritmetike dvojnog komplementa: 'Ako se nekoliko brojeva u zapisu dvojnog komplementa zbrajaju bez preljeva, tada je rezultat zbrajanja ovih

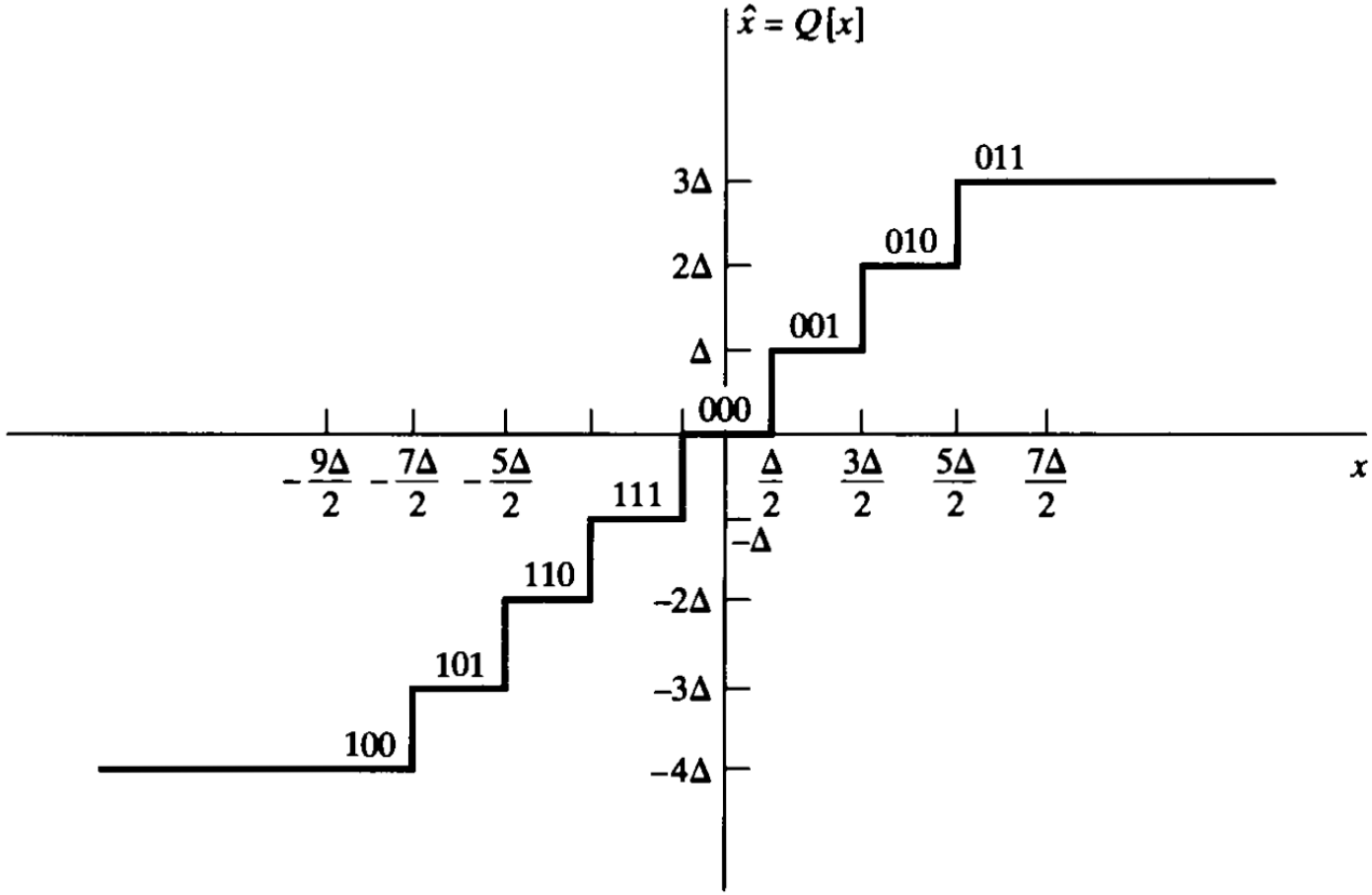
© Ivan Petrović

brojeva točan, iako se možda dogodio preljev u pojedinim međusumama. '



Slika 0.3Karakteristika uz zapis dvojnog komplementaza slučaj preljeva (N = 3)

© Ivan Petrović



Slika 0.4Karakteristika uz zapis dvojnog komplementa za slučaj zasićenja (N = 3)

© Ivan Petrović

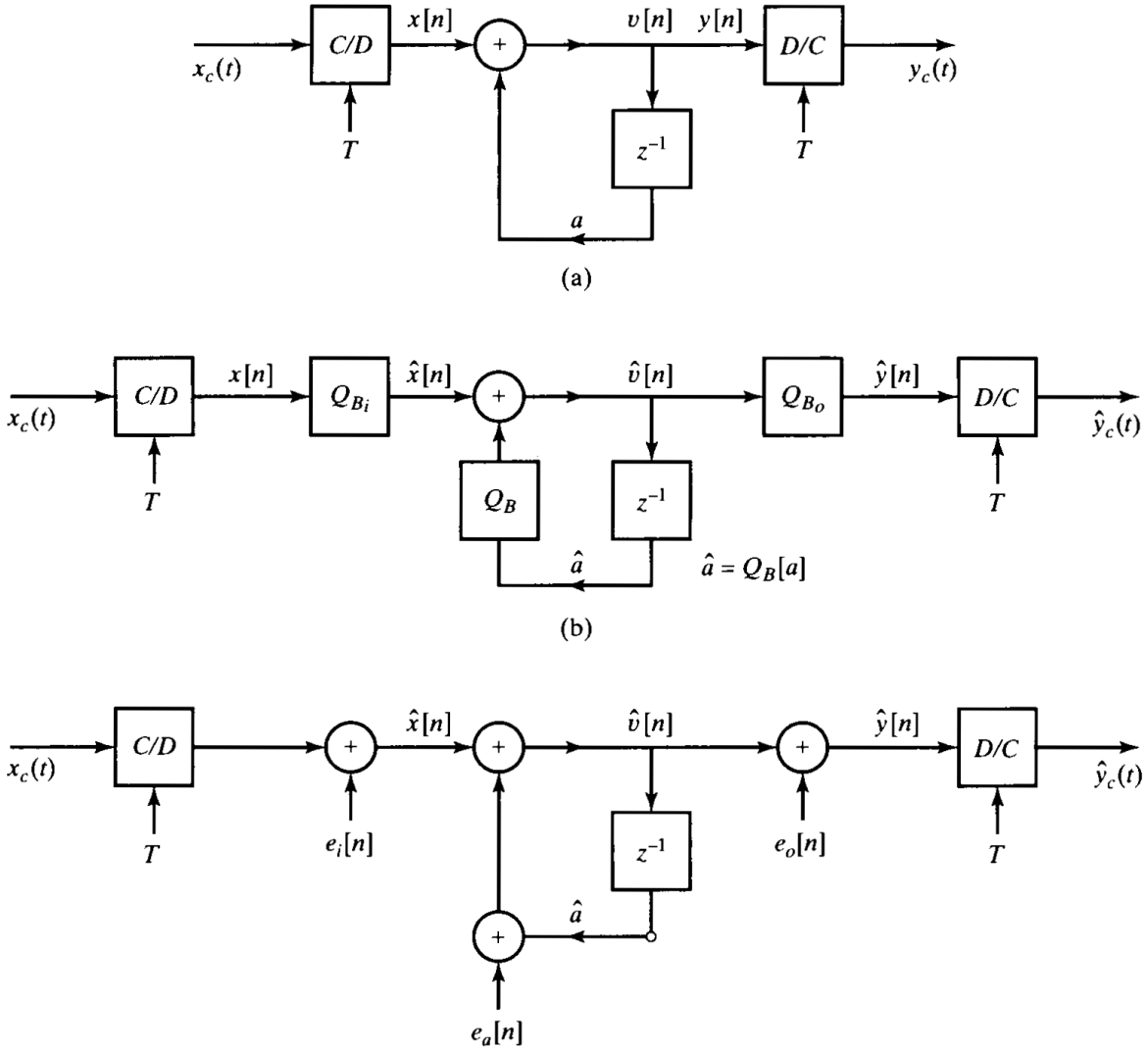
Pogreške parametara pohranjenih u memoriji:

- Do ovih pogrešaka dolazi zbog konačne duljine riječi koju memorijske jedinice koriste za pohranu podataka, a potrebno je pohraniti podatak koji je zapisan u većoj točnosti od točnosti dodijeljene memorijske lokacije - zaokruživanje ili odsijecanje.

- *Primjer:*
  - Neka vremenska konstanta izračunata za prijenosnu funkciju *n*-tog reda koristeći 5-znamenkastu preciznost iznosi $a = 0.55436$ (0.100011011),
  - Neka je algoritam namijenjen implementaciji u 8-bitovnom računalu (rezolucija 8-bitovnog računala je $2^{-7} = 1/128$, 8. bit je predznak). Kao rezultat dobije se: $a = 0.546875$ (0.1000110 odsijecanje).

© Ivan Petrović

Statističko modeliranje pogreške odsijecanja i zaokruživanja:



© Ivan Petrović

- Slika (a) – idealni sustav u beskonačnoj preciznosti kojem je kontinuirani signal $x_c(t)$ uzorkovan kako bi se dobio niz x[n] koji predstavlja ulaz u sustav:

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad .$$

- Slika (b) - sustav implementiran u binarnoj aritmetici od (B + 1) bitova (koeficijent a, varijabla $\hat{v}$[n-1], zbrajalo, umnožak $\hat{a}\hat{v}$[n-1] ima (2B + 1) bitova i rezultat se mora zaokružiti ili odsijecati na (B + 1) bitova prije nego se zbraja dalje s ulazom $\hat{x}$[n]. – nelinearni efekti
- Efekt kvantiziranja parametara sustava općenito se određuje odvojeno od efekta kvantizacije u konverziji podataka. Dakle, idealni koeficijenti prijenosne funkcije zamijenjeni su njihovim kvantiziranim vrijednostima te se zatim testiraju odzivi kako bi se primijetila eventualna degradiranja u performansama sustava te jesu li ta degradiranja dosegla neprihvatljive razine. Na primjer, ako je realni broj a kvantiziran na (B + 1) bitova, potrebno je razmotriti je li rezultirajući sustav prikazan sljedećim izrazom

© Ivan Petrović

$$\hat{H}(z) = \frac{1}{1 - \hat{a}z^{-1}} \ ,$$

dovoljno sličan željenoj prijenosnoj funkciji H(z).

- Slika (c) - može se osigurati da se preljev dogodi samo rijetko te da su kvantizacijske pogreške male - linearizirani sustav u kojem su kvantizacijske pogreške zamijenjene pribrojenim izvorima šuma.

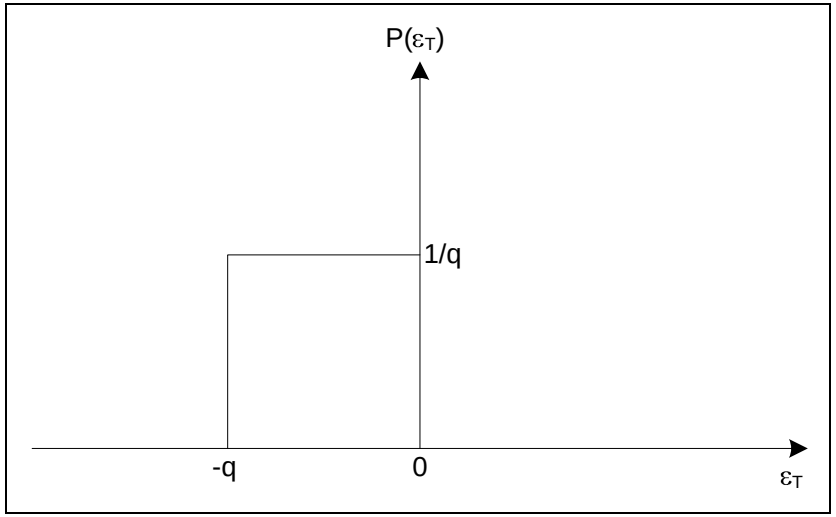
- Pretpostavlja se da je kvantizacijsku pogrešku ε moguće modelirati bijelim šumom, jednoliko raspodijeljenim u intervalu $[0, q]$.

- Također, pretpostavlja se da ne postoji veza između različitih izvora pogrešaka.

© Ivan Petrović

Statistički model pogreške odsijecanja:

- Na slici je prikazana statistička funkcija gustoće vjerojatnosti za pogrešku odsijecanja u cjelobrojnoj aritmetici dvojnog komplementa.



- Srednja vrijednost i varijanca pogreške odsijecanja ε_T iznose:

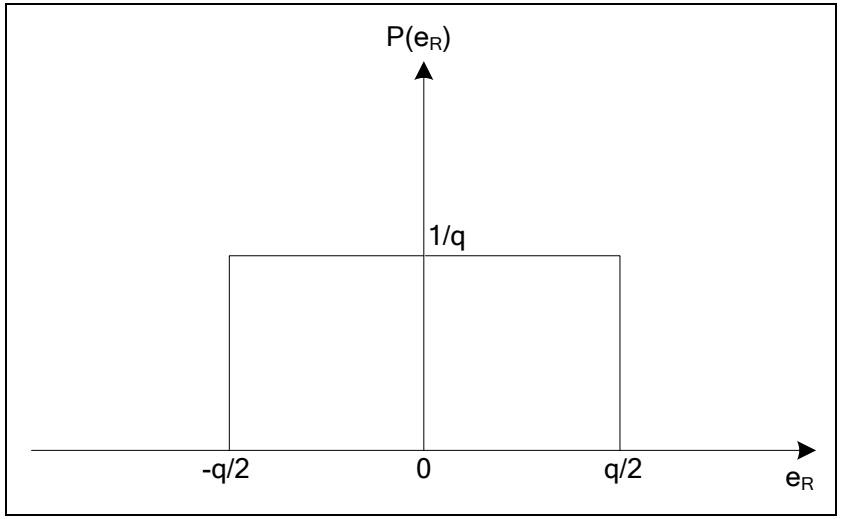
srednja vrijednost - $\bar{\varepsilon}_T = E\ \ \varepsilon_T\ \ = -\dfrac{q}{2},$

© Ivan Petrović

varijanca - $$\sigma_{\varepsilon_T}^2 = E\ \ \varepsilon_T\ \ = \int_{-q}^{0} \frac{1}{q}(\varepsilon - \bar{\varepsilon}_T)^2 d\varepsilon = \frac{q^2}{12}.$$

Statistički model pogreške zaokruživanja:

- Na slici je prikazana funkcija gustoće vjerojatnosti za pogrešku zaokruživanja u cjelobrojnoj aritmetici dvojnog komplementa.



- Srednja vrijednost i varijanca pogreške zaokruživanja iznose:

srednja vrijednost - $\bar{\varepsilon}_R = E\ \ \varepsilon\ \ = 0,$

© Ivan Petrović

varijanca - $$\sigma_R^2 = E\ \ \varepsilon_R^2\ \ = \int_{-\frac{q}{2}}^{\frac{q}{2}} \frac{1}{q}\varepsilon^2 d\varepsilon = \frac{q^2}{12}.$$

Propagacija kvantizacijskog šuma kroz sustav:

- Propagacija kvantizacijskog šuma ε ovisi o prijenosnoj funkciji između ulazne točke ε i izlaza sustava.
- Promatrajući ponašanje izlaza sustava ($\overline{u}$ ili σ_u) u odnosu na ponašanje ulaznog šuma ($\overline{\varepsilon}$ ili σ_ε), gleda se je li algoritam upravljanja pojačava ili oslabljuje kvantizacijski šum.
- Pretpostavka je da je sustav stabilan, linearan i vremenski nepromjenjiv, impulsnog odziva h_i (ili prikazan prijenosnom funkcijom $H(z)$).
- Dovede li se ulazni signal $\varepsilon[i]$, zadan svojom srednjom vrijednošću $\overline{\varepsilon}$ ili varijancom σ_ε, tada je srednja vrijednost izlaznog signala u dana izrazom:

© Ivan Petrović

$$\bar{u} = E\ \ u_i\ \ = \sum_{k=0}^{\infty} h_k E\ \ \varepsilon_{i-k}\ \ ,$$

$$\bar{u} = \bar{\varepsilon} \sum_{k=0}^{\infty} h_k .$$

- Alternativno, koristeći izraz za prijenosnu funkciju u diskretnom području, može se pisati:

$$\bar{u}(z) = H(z)\bar{\varepsilon}(z),$$

no, kako je $\bar{\varepsilon}$ = konst., koristi se teorem o konačnoj vrijednosti

$$\bar{u} = \bar{\varepsilon} \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1}) H(z).$$

Napomene:

- Kvantizacijski se šum može smanjiti povećanjem točnosti pri zaokruživanju koeficijenata (veći broj bitova).

© Ivan Petrović

- Propagacija i pojačanje kvantizacijskog šuma ovise o primijenjenom obliku implementacije algoritma upravljanja.
- U pravilu paralelna implementacija manje pojačava kvantizacijski šum, ali je najbolje to provjeriti simulacijom.

SKALIRANJE

- Radi smanjenja pojave preljeva
- Potrebno je osigurati da signali na izlazu iz zbrajala imaju amplitudu manju od jedinice kako bi se izbjegao preljev. Ako $w_k[n]$ predstavlja vrijednost signala kojeg treba ograničiti,a $h_k[n]$ neka označava impulsni odziv od ulaza x[n] do varijable $w_k[n]$, tada vrijedi

$$\left|w_k[n]\right| = \left|\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n-m]h_k[m]\right| \quad . \qquad (4\text{-}16)$$

© Ivan Petrović

- Ograničenje

$$\left|w_k[n]\right| \le x_{\max} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left|h_k[m]\right| \qquad (4\text{-}17)$$

je dobiveno zamjenom x[n-m] s njegovom maksimalnom vrijednošću x_{max}. Iz toga slijedi da je dovoljan uvjet za $|w_k[n]| < 1$

$$x_{\max} < \frac{1}{\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left|h_k[m]\right|} \quad . \qquad (4\text{-}18)$$

- Ako x_{max} ne zadovoljava prethodno napisani uvjet, tada se može x[n] pomnožiti, tj. skalirati s koeficijentom *s* na ulazu u sustav tako da

© Ivan Petrović

$$s \cdot x_{\max} < \frac{1}{\max\limits_{k}\left[\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} \left|h_k[m]\right|\right]}. \qquad (4\text{-}19)$$

- Drugi pristup skaliranju počinje pretpostavkom da je ulaz uskopojasni signal koji se modelira na način da je $x[n] = x_{max}\cos(\omega_0 n)$. U tom slučaju vrijedi

$$w_k[n] = \left|H_k(e^{j\omega_0})\right| x_{\max} \cos(\omega_0 n + \angle H_k(e^{j\omega_0})) \quad \cdot \qquad (4\text{-}20)$$

- Stoga, preljev je izbjegnut za sve sinusoidalne signale ako vrijedi

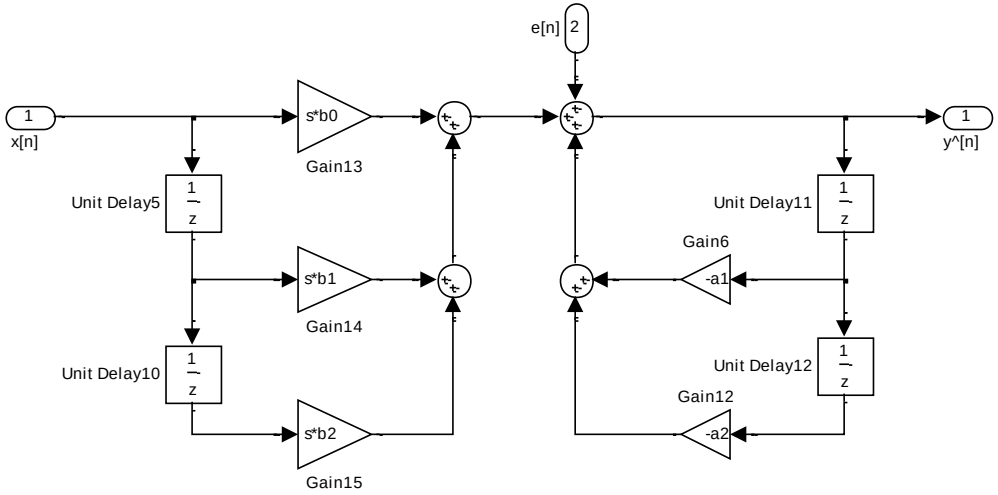
$$\max_{k,|\omega|\le\pi} \left|H_k(e^{j\omega})\right| x_{\max} < 1 \quad , \qquad (4\text{-}21)$$

- ili je ulaz skaliran s koeficijentom s koji zadovoljava

© Ivan Petrović

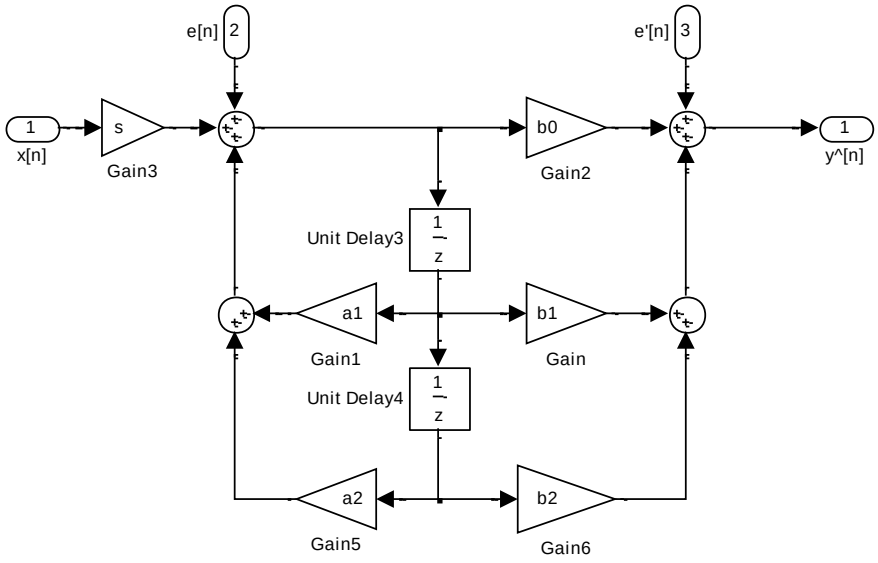
$$sx_{\max} < \frac{1}{\max\limits_{k,|\omega|\le\pi} \left| H_k(e^{j\omega}) \right|} \quad . \qquad (4\text{-}22)$$

- Faktore skaliranja moguće je pronaći tako što se proračuna impulsni odziv ili frekvencijski odziv numerički.
- Ako se ulaz mora proporcionalno smanjiti (s<1), omjer signala i šuma (SNR) na izlazu sustava će biti smanjen.



Slika 0.1Skaliranje sustava u direktnoj I izvedbi

© Ivan Petrović



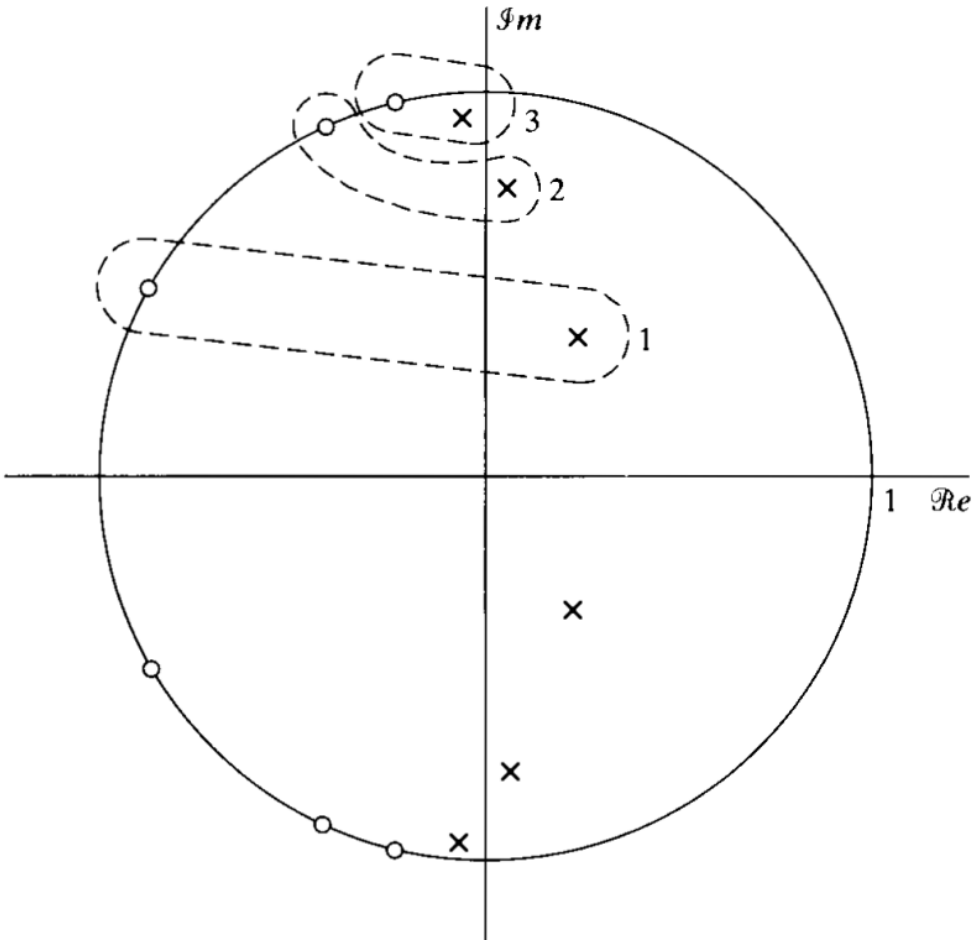
Slika 0.2Skaliranje sustava u direktnoj II izvedbi

- U slučaju analize serije ili paralele, potrebno je distribuirati pojačanje po podsekcijama tako da se u svakoj podsekciji izbjegne preljev. Postoje jednostavna Jacksonova pravila kojima se u većini slučajeva dobivaju dobri rezultati:

© Ivan Petrović

- Pol koji je najbliži jediničnoj kružnici trebao bi se grupirati s nulom koja je najbliža jediničnoj kružnici u z-ravnini – da se smanji rezonantno izdizanje ampl. frekv. kar. sekcije
- Prethodno pravilo trebalo bi se opetovano primjenjivati sve dok sve nule i polovi nisu grupirani.
- Rezultirajuće podsekcije drugoga reda trebale bi se postaviti redoslijedom koji odgovara ili rastućoj blizini jedinične kružnice ili padajućoj.

© Ivan Petrović



Slika 0.3Primjer grupiranja i redoslijeda podsekcija za sustav šestoga reda

9.3. POGREŠKE KOEFICIJENATA I NJIHOV UTJECAJ NA DINAMIKU REGULATORA

- Kada se parametri racionalne prijenosne funkcije ili odgovarajuće diferencijalne jednadžbe kvantiziraju, polovi i nule sustava pomiču se na nove pozicije u z ravnini. Također, frekvencijski odziv se odmiče od svoje originalne vrijednosti. Ako je implementacijska struktura jako osjetljiva na promjene koeficijenata rezultirajući sustav možda više neće zadovoljavati originalne specifikacije ili će možda postati nestabilan.
- Detaljna analiza osjetljivosti za opći slučaj je kompleksna
- Potrebno je razmotriti kako je kvantizacija koeficijenata utjecala na prijenosnu funkciju. Prijenosna funkcija direktnih izvedbi dana je s:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} \quad .$$

© Ivan Petrović

- Koeficijenti a_k i b_k su idealni realni koeficijenti koji nakon kvantizacije čine sljedeću prijenosnu funkciju:

$$\hat{H}(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} \hat{b}_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^{N} \hat{a}_k z^{-k}} \quad ,$$

gdje su $\hat{a}_k = a_k + \Delta a_k$ te $\hat{b}_k = b_k + \Delta b_k$ kvantizirani koeficijenti koji se razlikuju od početnih koeficijenata za vrijednost kvantizacijskih pogrešaka Δa_k i Δb_k .

- Jednostavan način provjeravanja utjecaja osjetljivosti položaja polova sustava je sljedeća funkcija osjetljivosti:

$$S_{p_i}^{a_k} = \frac{\partial p_i}{\partial a_k} \quad ,$$

pri čemu su ak koeficijenti, a p_i korijeni polinoma, tj. polovi sustava. Neka je karakteristični polinom sustava dan izrazom:

© Ivan Petrović

$$A(z) = 1 - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k} = \prod_{i=1}^{N} (1 - p_k z^{-1}) \ .$$

Primjenom pravila o derivaciji složene funkcije dobije se:

$$\frac{\partial A(z)}{\partial a_k} = \frac{\partial A(z)}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial p_i}{\partial a_k} \ .$$

Sređivanjem prethodnog izraza dobije se:

$$\frac{\partial p_i}{\partial a_k} = \frac{\partial A(z) / \partial a_k}{\partial A(z) / \partial p_i} = \frac{-z^{-k}}{\prod_{j=1,\ j \neq i}^{N} (1 - p_j z^{-1})(-z^{-1})} \ .$$

Zatim uvrštenjem $z = p_i$ u gornji izraz i sređivanjem dobije se:

$$\frac{\partial p_i}{\partial a_k} = \frac{p_i^{N-k}}{\prod_{j=1,\ j \neq i}^{N} (p_i - p_j)} \ .$$

© Ivan Petrović

- Može se zaključiti da ako su polovi sustava blizu jedan drugome, tada je osjetljivost velika. Najveća je osjetljivost položaja polova na iznos parametra an, uz pretpostavku stabilnog regulatora, tj. $|p_i| < 1$. Konjugirano-kompleksni polovi blizu realne osi predstavljaju nepovoljan slučaj. Dodatno, što je veći broj zbijenih polova to je veća osjetljivost. Analogno razmatranje vrijedi i za nule sustava.
- Prednosti kaskadne i paralelne izvedbe proizlazi iz činjenice da se zasebno realiziraju pojedini segmenti prijenosne funkcije regulatora. Svaki od segmenata realizira se u direktnoj izvedbi pa za njih vrijede relacije za osjetljivost polova i nula o iznosu koeficijenata.
- U paralelnoj formi na nule sustava utječu kvantizacijske pogreške u koeficijentima nazivnika i brojnika svih podsekcija.

© Ivan Petrović

9.4. NELINEARNA SVOJSTVA REGULATORA UZROKOVANA KVANTIZACIJOM

- Prijenosna funkcija zapisana cjelobrojnom aritmetikom konačne duljine riječi predstavlja nelinearni sustav s povratnom vezom kod kojega su moguće nelinearne pojave poput pojasa neosjetljivosti ili graničnog perioda.

- Kod analogno-digitalnog pretvornika s konačnom duljinom riječi također je moguća pojava graničnog perioda za cijeli sustav s povratnom vezom.

- Na primjeru je prikazano pojavljivanje pojasa neosjetljivosti i graničnog perioda pri korištenju decimalne aritmetike.

- Upotrebljava se ekvivalent odsijecanju kod aritmetike dvojnog komplementa, npr. 5.6 će postati 5, dok će -5.6 postati -6.

© Ivan Petrović

***Pojas neosjetljivosti* (*engl. deadband*):**

- Uzmimo prijenosnu funkciju prvog reda

$$\frac{y(z)}{u(z)} = \frac{1}{1-0.9z^{-1}},$$

ulaz neka bude jedinična skokovita funkcija

$$u(z) = \frac{1}{1-z^{-1}},$$

početni uvjet neka je

$$y[0] = 3.$$

- Izlaz je tada izračunan rekurzivnom jednadžbom diferencija

$$y[k+1] = 0.9y[k] + u[k+1].$$

© Ivan Petrović

- Izračunate vrijednosti y_k primjenom decimalne aritmetike dane su u tablici:

k	u_k	y_k	zaokruženo	y_k	odsječeno
0	0	3	3	3	3
1	1	3.7	4	3.7	3
2	1	4.6	5	3.7	3
3	1	5.5	6	3.7	3
4	1	6.4	6	3.7	3
5	1	6.4	6	3.7	3

- Može se utvrditi postojanje pojasa neosjetljivosti:
  - pri zaokruživanju, uz početne uvjete izlaza y_k u intervalu $[6,15]$, izlaz ostaje u stabilnom stanju određenom početnim uvjetima. U slučaju da su početni uvjeti ispod vrijednosti 6, izlaz nakon nekoliko koraka dolazi do vrijednosti 6, a u slučaju da su početni uvjeti izlaza iznad 15, izlaz u nekoliko koraka dolazi do vrijednosti 15 i ostaje u njoj što govori da postoji pojas neosjetljivosti u intervalu $[6,15]$.

© Ivan Petrović

- pri odsijecanju, uz početnu vrijednost izlaza u intervalu $[1,10]$, izlaz ostaje nepromijenjen i istog je iznosa kao i početna vrijednost. U slučaju da je početna vrijednost manja od 1, izlaz u nekoliko koraka dolazi u vrijednost 1 i ostaje u njoj; u slučaju da je izlaz veći od 10, on u nekoliko koraka dolazi u vrijednost 10 i ostaje u njoj. Pojas neosjetljivosti se nalazi u intervalu $[1,10]$.

***Granični period* (*engl. Limit Cycle*):**

- Diskretna prijenosna funkcija prvog reda dana je izrazom

$$\frac{y(z)}{u(z)} = \frac{1}{1+0.9z^{-1}},$$

ulazni impuls neka je $u(z)=10$, a početno stanje $y[0]=0$.

- Izlaz je dan izrazom

$$y[k+1] = -0.9y[k] + u[k+1].$$

© Ivan Petrović

- Za beskonačnu duljinu riječi, vrijednost izlaza iznosi:

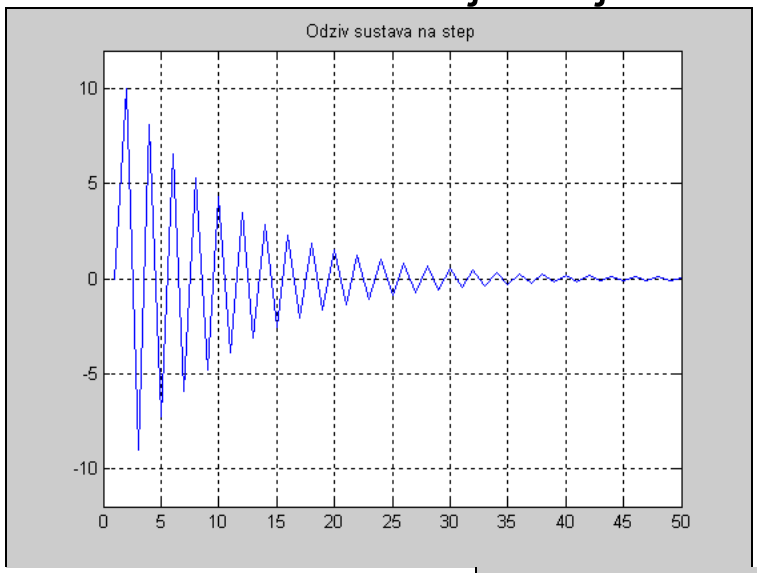
$$y_\infty = \lim_{z\to 1} \frac{1-z^{-1}}{1+0.9z^{-1}} 10 = 0.$$

- Izračunane vrijednosti y_k za konačnu duljinu riječi dane su u tablici, a prikazane su grafički na slikama na sljedećoj stranici.

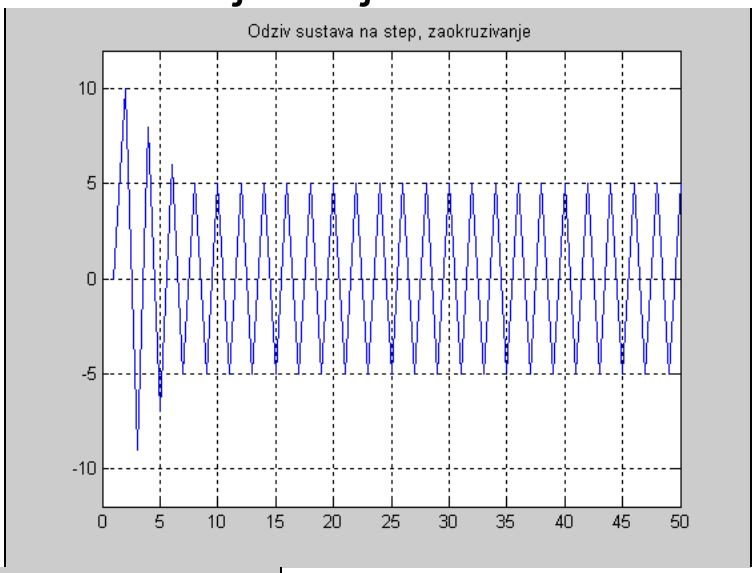
k	u_k	y_k	zaokruženo	y_k	odsječeno
0	0	0	0	0	0
1	10	10	10	10	10
2	0	-9	-9	-9	-9
3	0	8.1	8	8.1	8
4	0	-7.3	-7	-7.3	-8
5	0	6.3	6	7.2	7
6	0	-5.4	-5	-6.3	-7
7	0	4.5	5	6.3	6
8	0	-4.5	-5	-5.4	-6
9	0	4.5	5	5.4	5

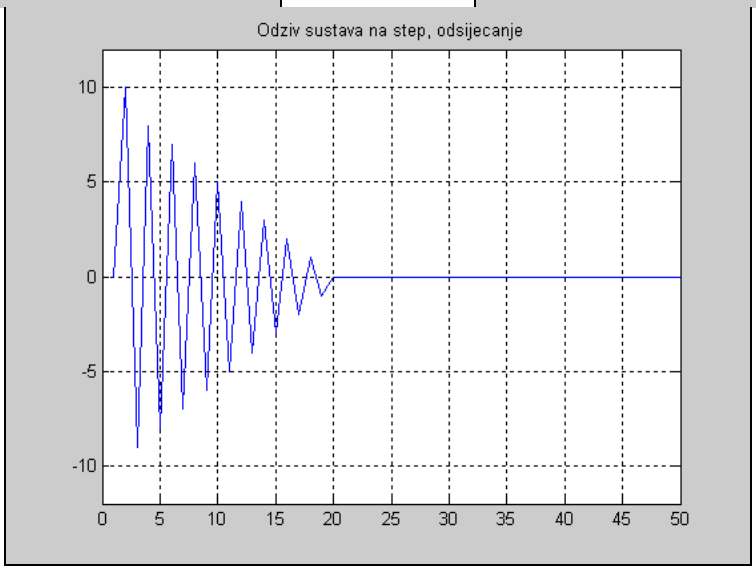
© Ivan Petrović

Beskonačna duljina riječi



Konačna duljina riječi - zaokruživanje



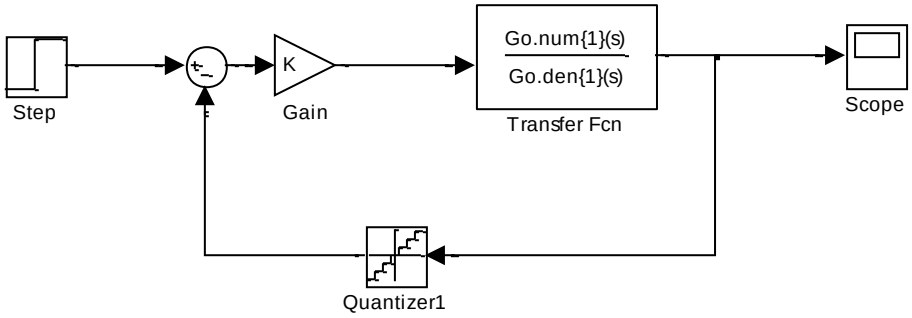


Konačna duljina riječi - odsijecanje

© Ivan Petrović

Analiza graničnog perioda primjenom opisne funkcije

Zatvoreni krug upravljanja dan je na slici



Slika 0.1Zatvoreni krug upravljanja

Prijenosna funkcija otvorenog kruga G_o zadana je s

$$G_o = \frac{250}{s^3 + 20s^2 + 100s} = \frac{2.5}{s(0.01s^2 + 0.2s + 1)}.$$

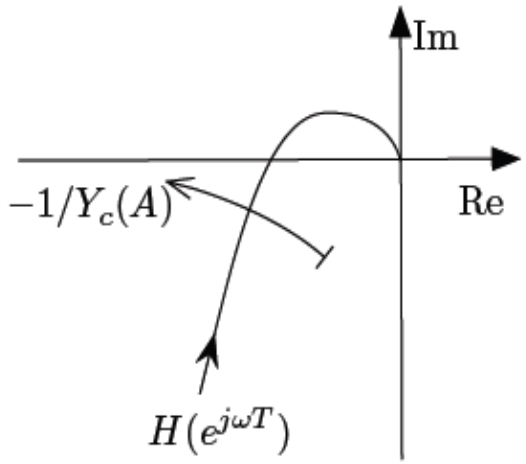
© Ivan Petrović

δ kvantizatora je zadan kao 6 bitni A/D pretvornik u rasponu od 0-10 s bitom za predznak (δ=0.3125). Granični ciklus frekvencije ω_0 i amplitude A_0 pojavit će se ako vrijedi

$$G_o(e^{j\omega_1}) = H(e^{j\omega_1}) = -\frac{1}{Y_c(A_1)} .$$

Prethodna jednadžba predstavlja jednadžbu regulacijskog kruga s nelinearnim elementom te će se ona iskoristiti za grafičko rješavanje u kompleksnoj ravnini kao što je prikazano na sljedećoj slici.

© Ivan Petrović



Slika 0.2Karakteristike linearnog i nelinearnog dijela sustava u kompleksnoj ravnini

Ako postoji presjek dvaju karakteristika, amplitudno-fazne karakteristike linearnog dijela sustava i ekvivalentne amplitudne karakteristike nelinearnog elementa, ta točka presjeka određuje amplitudu i frekvenciju oscilacija nelinearnog sustava.

Za element kvantizacije opisna funkcija je

© Ivan Petrović

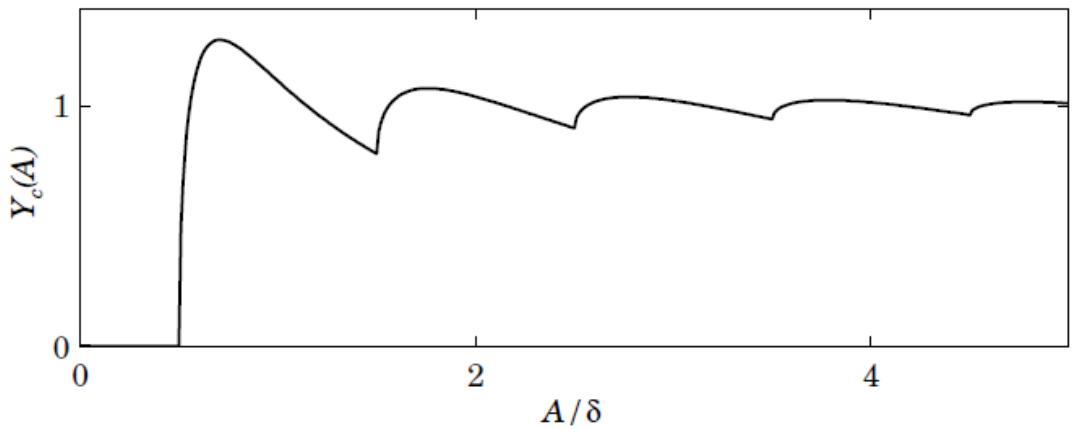
$$Y_c(A) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 < A < \dfrac{\delta}{2} \\ \dfrac{4\delta}{\pi A}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1-\left(\dfrac{2i-1}{2A}\delta\right)^2} & , \quad \dfrac{2n-1}{2}\delta < A < \dfrac{2n+1}{2}\delta \end{cases},$$

gdje je

- A – amplituda,
- δ – korak kvantizacije,
- n – broj aktiviranih razina kvantizatora – n=round(A/δ).

Ovisnost opisne funkcije o amplitudi prikazana je na sljedećoj slici.

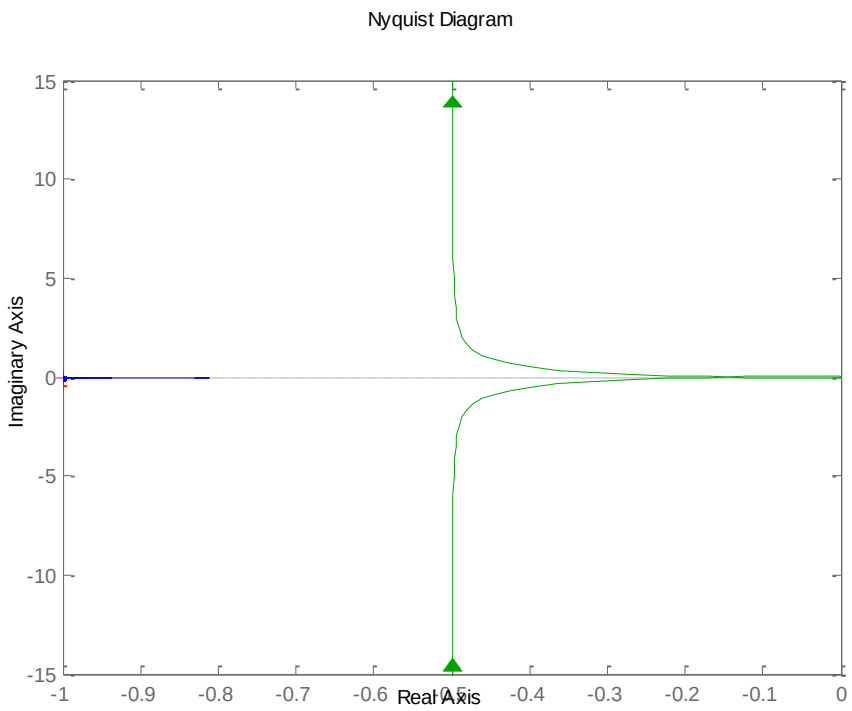
© Ivan Petrović



Slika 0.3Ovisnost opisne funkcije nelinearnog elementa o amplitudi

Za sustav dan na slici 5.1 dobije se Nyquistov dijagram prikazan na slici 5.4 zajedno s karakteristikom nelinearnog dijela sustava koji se nalazi na realnoj osi.

© Ivan Petrović



Slika 0.4Karakteristike linearnog dijela sustava i elementa kvantizacije u kompleksnoj ravnini

Da bi sustav mogao imati oscilacije konačne amplitude pojačanje u otvorenom krugu mora vrijediti $K \geq 2\pi$ (iz faznog uvjeta dobije se $\omega_0=10$). Za $K=2\pi$ slijedi $A=0.22$. Ako

© Ivan Petrović

se odabere da je pojačanje $K = 7$, dobije se da za to pojačanje vrijednosti amplituda oscilacija mogu biti $A_1 = 0.1841$ i $A_2 = 0.2955$.

Nyquistov kriterij za nelinearan sustav glasi da će granični period biti stabilan ako amplitudno-fazna karakteristika ne obuhvaća točke inverzne ekvivalentne amplitudne karakteristike nelinearnog elementa pri porastu amplitude. Dakle, iz točke A_2 kretanjem po inverznoj ekvivalentnoj karakteristici kvantizatora povećanjem amplitude karakteristika linearnog dijela neće obuhvaćati točke inverzne karakteristike kvantizatora koje slijede. Simulacijskom provjerom za odabrani K amplituda oscilacija iznosi oko 0.2725 što približno odgovara analitičkom postupku.

© Ivan Petrović

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
Fakultet elektrotehnike i računarstva
Zavod za automatiku i računalno inženjerstvo
Unska 3, Zagreb, HRVATSKA

Poglavlje 10: Komunikacijske mreže u računalnom upravljanju sustavima

© Ivan Petrović

Sadržaj izlaganja

- Uvodna razmatranja o RT komunikacijskim mrežama
- Upravljanje u zatvorenoj petlji preko komunikacijske mreže
- Raspodijeljenost podataka u RT mrežama
- Ciklički način rada
- Događajni način rada
- Komunikacijski model za rad u stvarnome vremenu
- Najvažnije RT komunikacijske mreže
- Usporedba RT komunikacijskih mreža

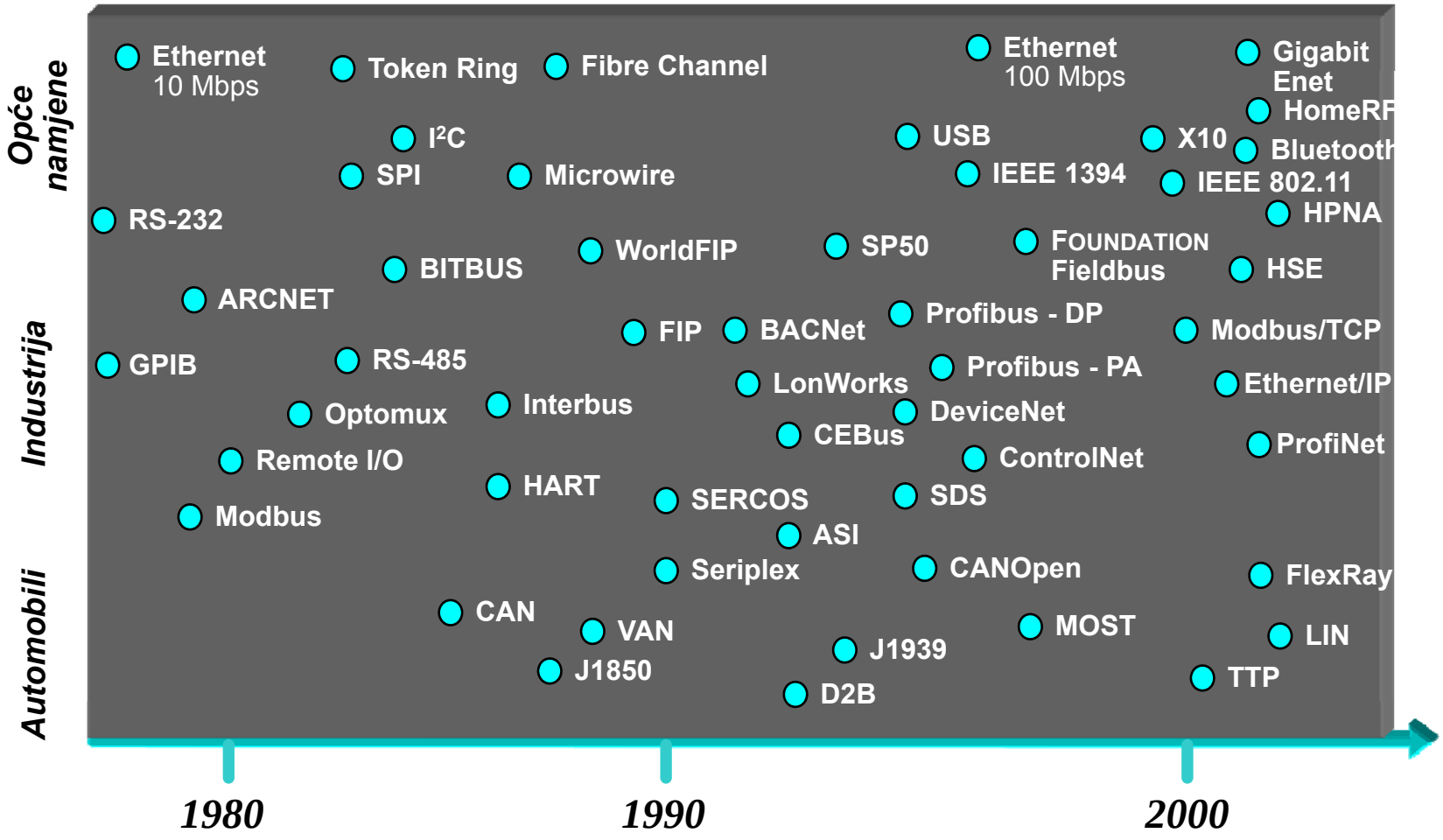
SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
Fakultet elektrotehnike i računarstva
Zavod za automatiku i računalno inženjerstvo
Unska 3, Zagreb, HRVATSKA

Poglavlje 10: Komunikacijske mreže u računalnom upravljanju sustavima

Uvodna razmatranja o RT komunikacijskim mrežama

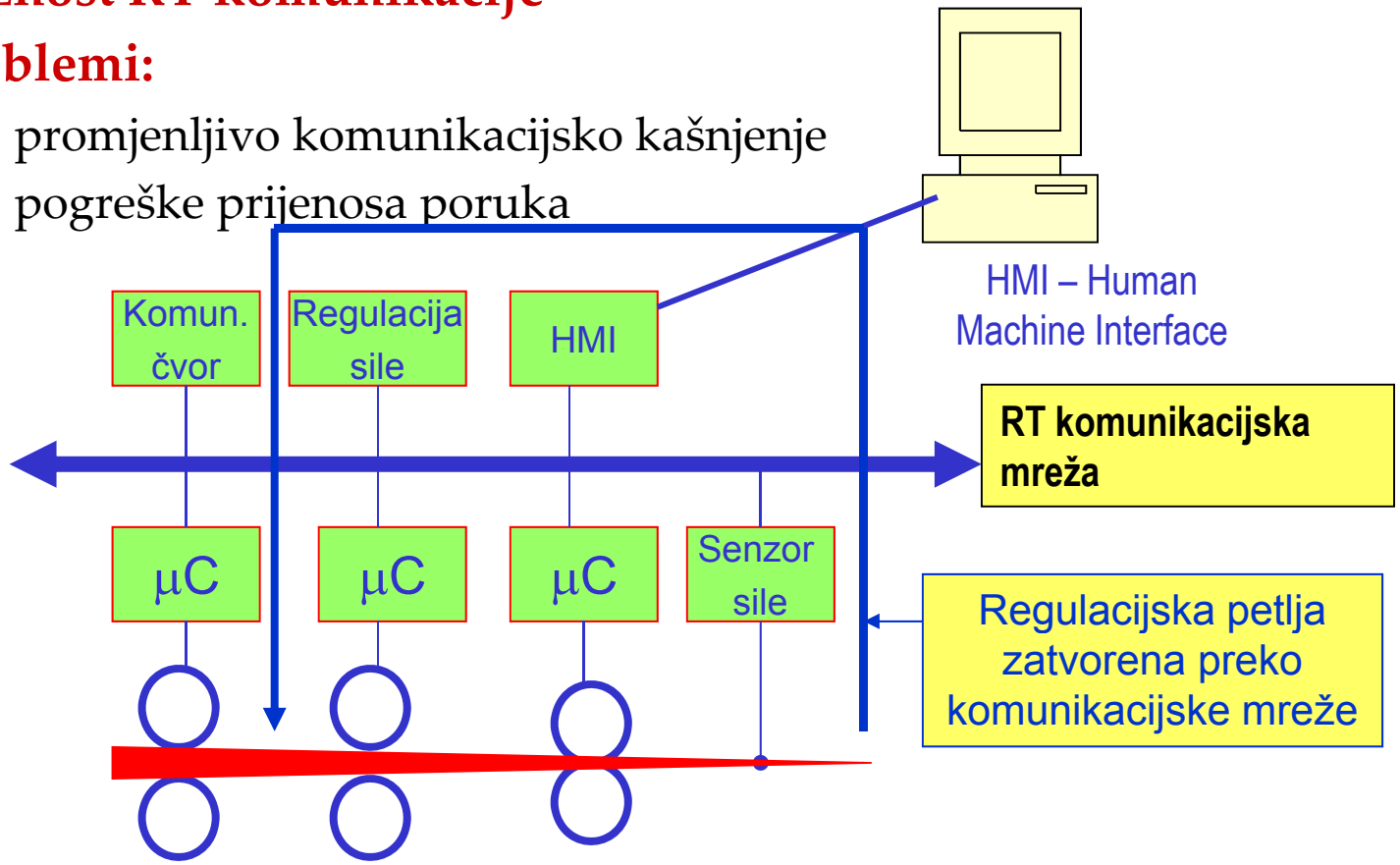
© Ivan Petrović

Brojnost komunikacijskih mreža



Distribuirani sustav za rad u stvarnome vremenu

- **Primjer:**
  - **DSU valjačke pruge:**
    - **Važnost RT komunikacije**
    - **Problemi:**
      - promjenljivo komunikacijsko kašnjenje
      - pogreške prijenosa poruka



Prednosti primjene RT komunikacijskih mreža

- **RT komunikacijska mreža povezuje moderne, inteligentne mjerne i izvršne članove (senzore i aktuatore) s upravljačkim uređajima.**
- **Umjesto točka-točka povezivanja svakog mjernog / izvršnog člana na odgovarajući upravljački uređaj, primjenjuje se serijska komunikacijska mreža koja povezuje sve mjerne i izvršne članove i uređaje za lokalno upravljanje.**
- **Prednosti primjene RT mreže su:**
  - **smanjenje (troškova) ožičenja**
  - **jednostavnija sučelja mjernih i izvršnih članova s upravljačkim uređajem (npr. nema potrebe za A/D i D/A pretvornicima)**
  - **razmjena većeg broja informacija (npr. dijagnostički i umjerni podaci)**
    - **jednostavnije otkrivanje i ispravljanje pogrešaka**
    - **jednostavnije puštanje u rad**
  - **povećana modularnost sustava upravljanja**
    - **pojednostavljeno proširivanje sustava**
    - **veliki broj uređaja raznih proizvođača koji zadovoljavaju isti komunikacijski standard**

Nedostaci primjene RT komunikacijskih mreža

- **Nedostaci primjene RT komunikacijske mreže u odnosu na klasično ožičenje:**
  - **niža pouzdanost prijenosa podataka, ako se ne koriste udvostručeni vodovi;**
  - **veće vrijeme prijenosa podataka zbog zajedničkog korištenja istog prijenosnog medija — serijski prijenos podataka umjesto paralelnog;**
  - **složeniji elektronički sklopovi mjernih i izvršnih članova te poteškoće njihova napajanja.**

Zahtjevi na komunikacije u stvarnome vremenu

- **Komunikacijsko kašnjenje treba biti:**
  - **malo, predvidljivo i s malom promjenljivošću**
  - **istodobna dostupnost poruka većem broju stanica (difuzija), jer neke procesne veličine koristi više stanica**
- **Kompozabilnost:**
  - **Neovisnost rada glavnih procesora stanica i komunikacijskog sustava**
  - **Poslužitelj u stanici može jamčiti ograničeno i predvidljivo kašnjenje jedino ako ga korisnik (klijent) ne preoptereti s previše zahtjeva.**
  - **Komunikacijski sustav treba osigurati upravljanje protokom zahtjeva klijenta prema poslužitelju.**
- **Fleksibilnost:**
  - **podrška promjenama konfiguracije sustava tijekom vremena**
- **Otkrivanje i ispravljanje pogrešaka**
  - **Komunikacijske pogreške – ispravljanje ne smije djelovati na komunikacijsko kašnjenje**
  - **Pogreške čvorova – otkriva ih komunikacijski protokol i obavješćuje sve ostale čvorove u mreži.**
- **Topologije**
  - **Sabirnička ili prstenasta**
  - **Ako se koriste upletene parice bolja je sabirnička, zbog jednostavnijih sučelja, veće otpornosti na kvarove i istodobnog dolaska poruka do svih čvorova**
  - **Ako se koriste optički kabeli bolja je prstenasta zbog jednostavnijih sučelja**

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
Fakultet elektrotehnike i računarstva
Zavod za automatiku i računalno inženjerstvo
Unska 3, Zagreb, HRVATSKA

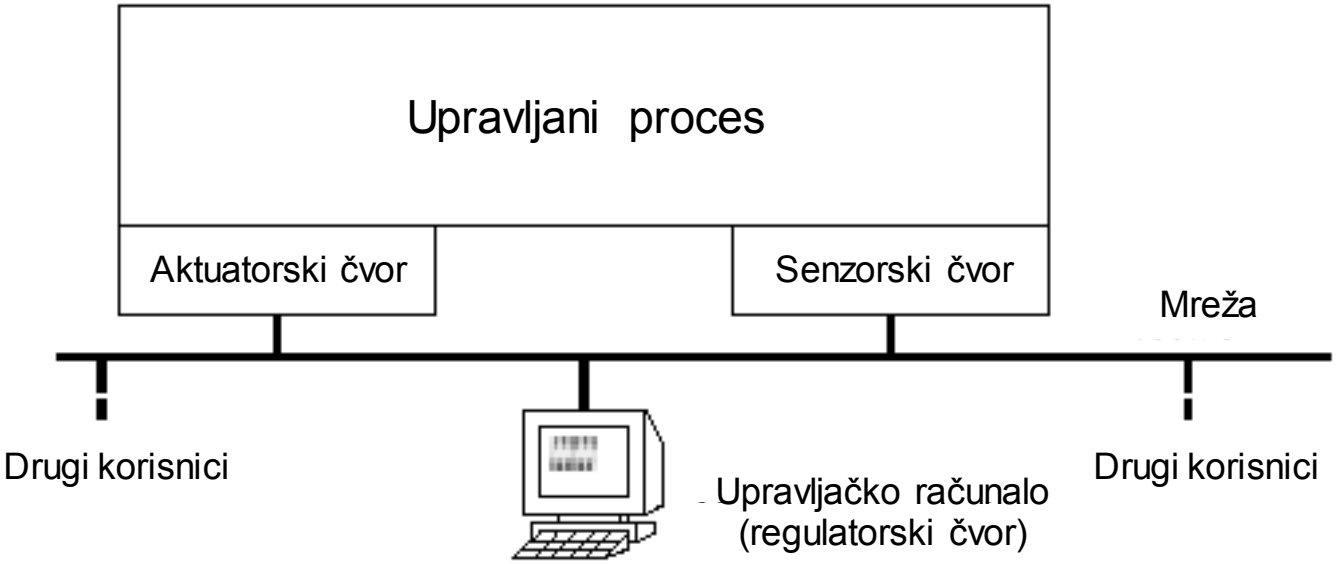
Poglavlje 10: Komunikacijske mreže u računalnom upravljanju sustavima

Upravljanje u zatvorenoj petlji preko komunikacijske mreže

© Ivan Petrović

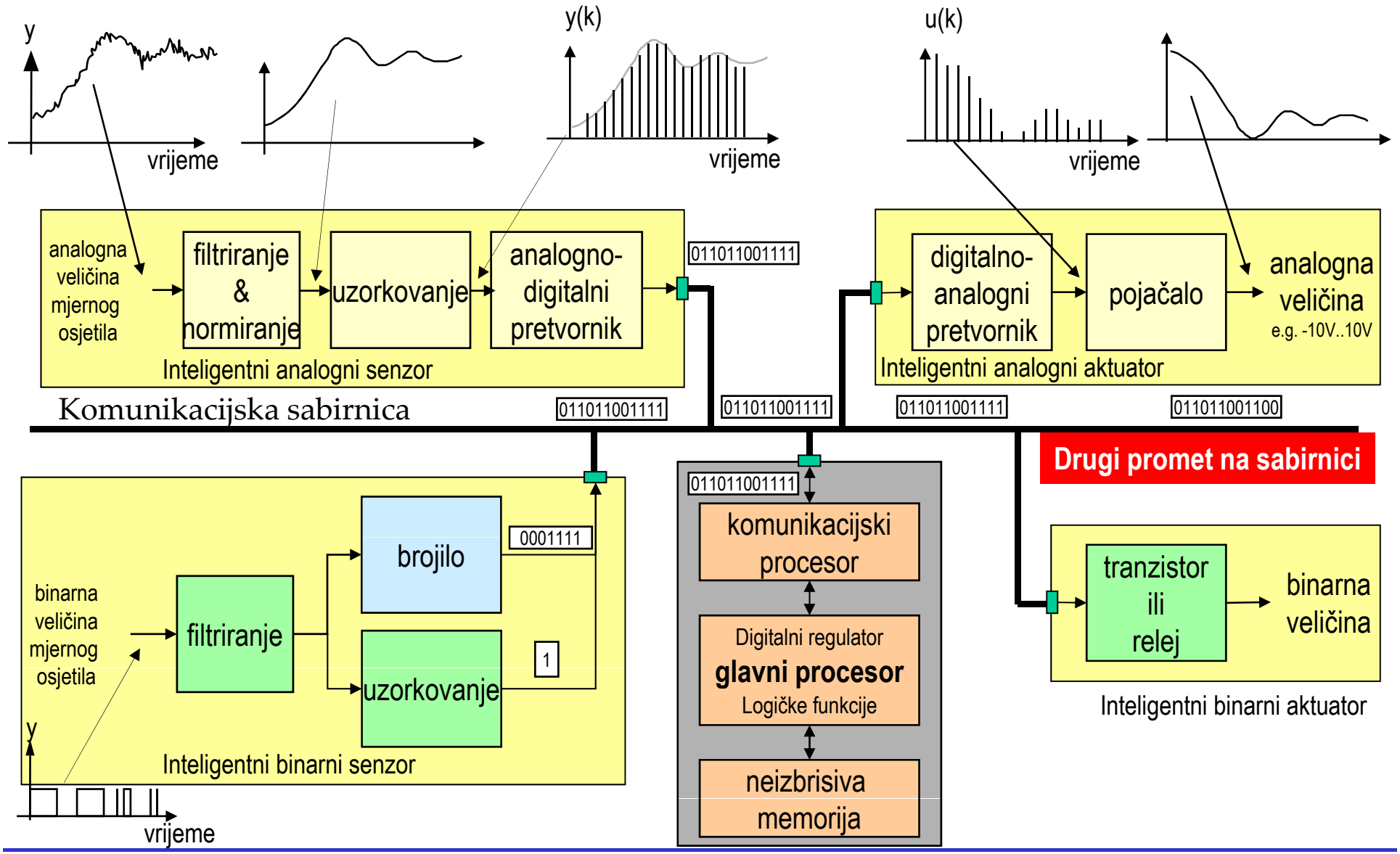
Upravljanje preko RT kom. mreža

- **Struktura zatvorenog sustava upravljanja preko komunikacijske mreže**



- **U literaturi se koriste nazivi za ove sustave upravljanja:**
  - **Networked Control Systems (NCS)**
  - **Integrated Communication and Control Systems (ICCS)**

Izvedba upravljačkih petlji preko kom. mreže



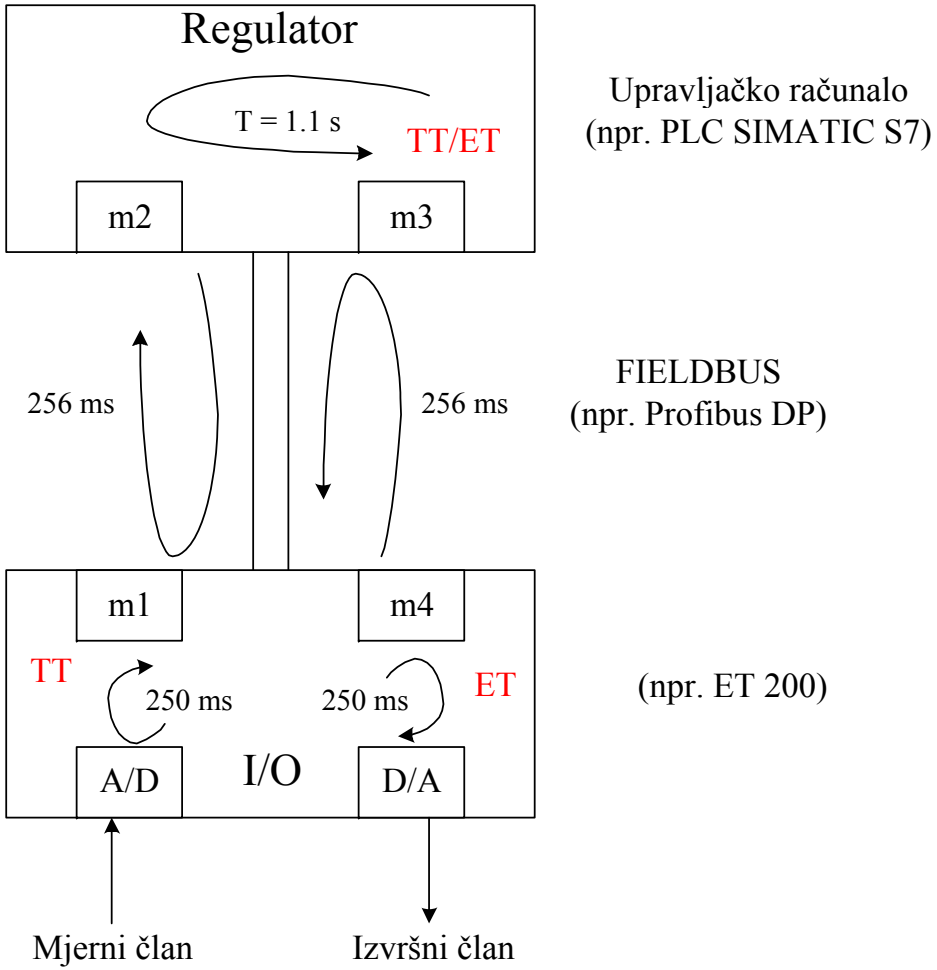
Zašto upravljati preko komunikacijske mreže?

- **Dobici:**
  - Modularnost: Decentralizacija upravljanja, Distribuirano procesiranje;
  - Integrirana dijagnostika: Brzo i jednostavno održavanje, otpornost na kvarna stanja;
  - Niska cijena: smanjenje ožičenja, razvoj sustava korak-po-korak.
- **Problemi:**
  - Komunikacijska kašnjenja zbog:
    - ograničene propusne moći komunikacijske mreže,
    - preopterećenja čvorova i mreže.
  - Ova su kašnjenja obično stohastički promjenljiva ⇒ sustav upravljanja postaje vremenski promjenljiv;
  - Standardna teorija LTI sustava postaje neprimjenljiva.

Zahtjevi na "upravljačke" komunikacijske mreže

- **Prijenos malih paketa između relativno velikog broja čvorova, ali s visokom frekvencijom prijenosa kojom se zadovoljavaju zahtjevi za rad u striktnom stvarnom vremenu;**
- **Ograničeno vremensko kašnjenje;**
- **Zajamčena isporuka poruka (nema praznih intervala niti intervala s više istih poruka);**
- **Visoko iskorištenje mreže.**
- **Razvijeno je više algoritama pristupa mediju s ciljem ispunjenja gornjih zahtjeva.**

Analiza kašnjenja u regulacijskom krugu



- Mjerna veličina se svakih 250 ms sprema u memorijsku lokaciju **m1**.
- Izlazna veličina (upravljačka) se svakih 250 ms čita iz memorijske lokacije **m4** i šalje preko D/A pretvornika na izvršni član.
- Iznos mjerne veličine se preko komunikacijske mreže prebaci iz **m1** u **m2** svakih 256 ms.
- Iznos upravljačkoga signala se preko kom. mreže prebaci iz **m3** u **m4** svakih 256 ms.
- Regulacijski algoritam u upravljačkom računalu izvodi se s vremenom diskretizacije T=1,1 ms.

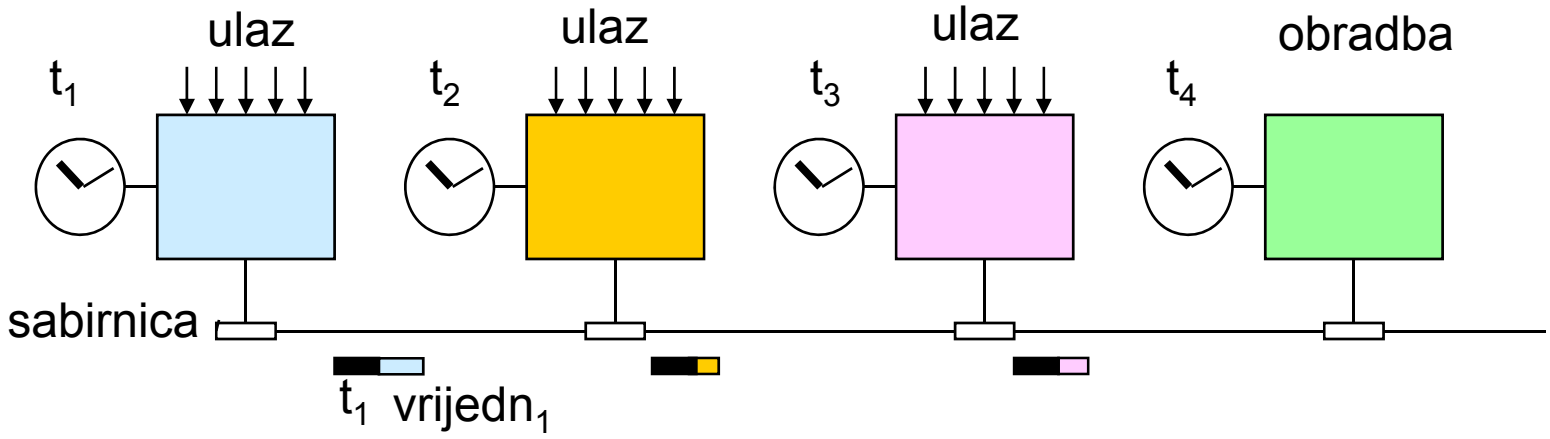
Koliko iznosi kašnjenje u sustavu?

- *Nesinkronizirani klokovi* **(uobičajeno u komercijalnim sustavima s distribuiranom periferijom)**
- **Budući da nema globalnoga vremena u sustavu, opisane periodičke aktivnosti međusobno će "driftati".**
- **Kašnjenje od trenutka očitanja mjerne veličine t_o do trenutka slanja upravljačkoga signala, koji koristi tu mjernu veličinu, na izvršni član t_u može maksimalno iznositi (minimalno kašnjenje 0.512s):**

$$\tau_k = (t_u - t_o)_{\max} = \underbrace{250}_{\tau_k^S} + \underbrace{256}_{\tau_k^{SR}} + \underbrace{1100}_{\tau_k^R} + \underbrace{256}_{\tau_k^{RA}} + \underbrace{250}_{\tau_k^A} = 2.112s$$

Globalno vrijeme i sinkronizacija lokalnih satova

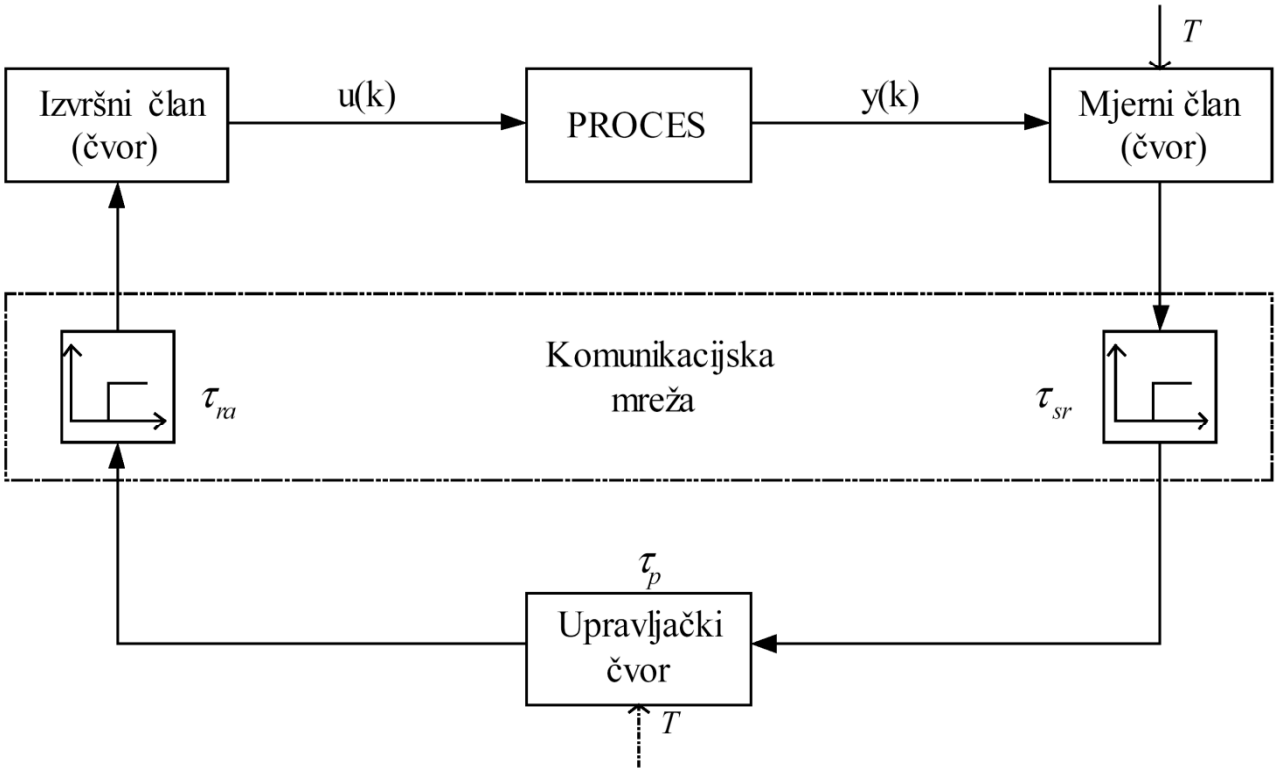
- **U velikom broju primjena, kao što su prikupljanje poremećaja i nizova događaja, precizno vrijeme uzorkovanja varijable mora se prenositi zajedno s njenom vrijednošću.**
- **Zbog toga su stanice opremljene satovima koji bilježe trenutke nastanka vrijednosti (ne vrijeme prijenosa).**
- **Za rekonstrukciju događaja koji dolaze od više stanica, njihovi satovi moraju biti sinkronizirani.**



Globalno vrijeme i sinkronizacija lokalnih satova

- **Sa stajališta teorije upravljanja prirodno je uzorkovati mjernu veličinu s fiksnim vremenom uzorkovanja T (TT – time triggered).**
- **Isto tako prirodno je držati kašnjenje u sustavu što je moguće kraćim (vremensko kašnjenje unosi i fazno kašnjenje).**
- **Regulatorski i aktuatorski čvor trebali bi se izvoditi na događaj (event-triggered, ET), tj. čim dobiju novu informaciju od senzorskoga čvora, odnosno od upravljačkoga čvora.**
- **Ovo je moguće kod CAN mreža, dok kod mreža s prosljeđivanjem zaloga i regulatorski čvor mora biti TT, pa se kašnjenja povećavaju za još jedno vrijeme uzorkovanja).**

Modeliranje sustava upravljanja preko mreže



Ukupno dodatno mrtvo vrijeme:

$$\tau_k = \tau_{sr,k} + \tau_{p,k} + \tau_{ra,k}$$

gdje je:

τ_{sr} - vrijeme prijenosa poruke od senzora do regulatora,

τ_p - vrijeme proračuna upravljačkog algoritma,

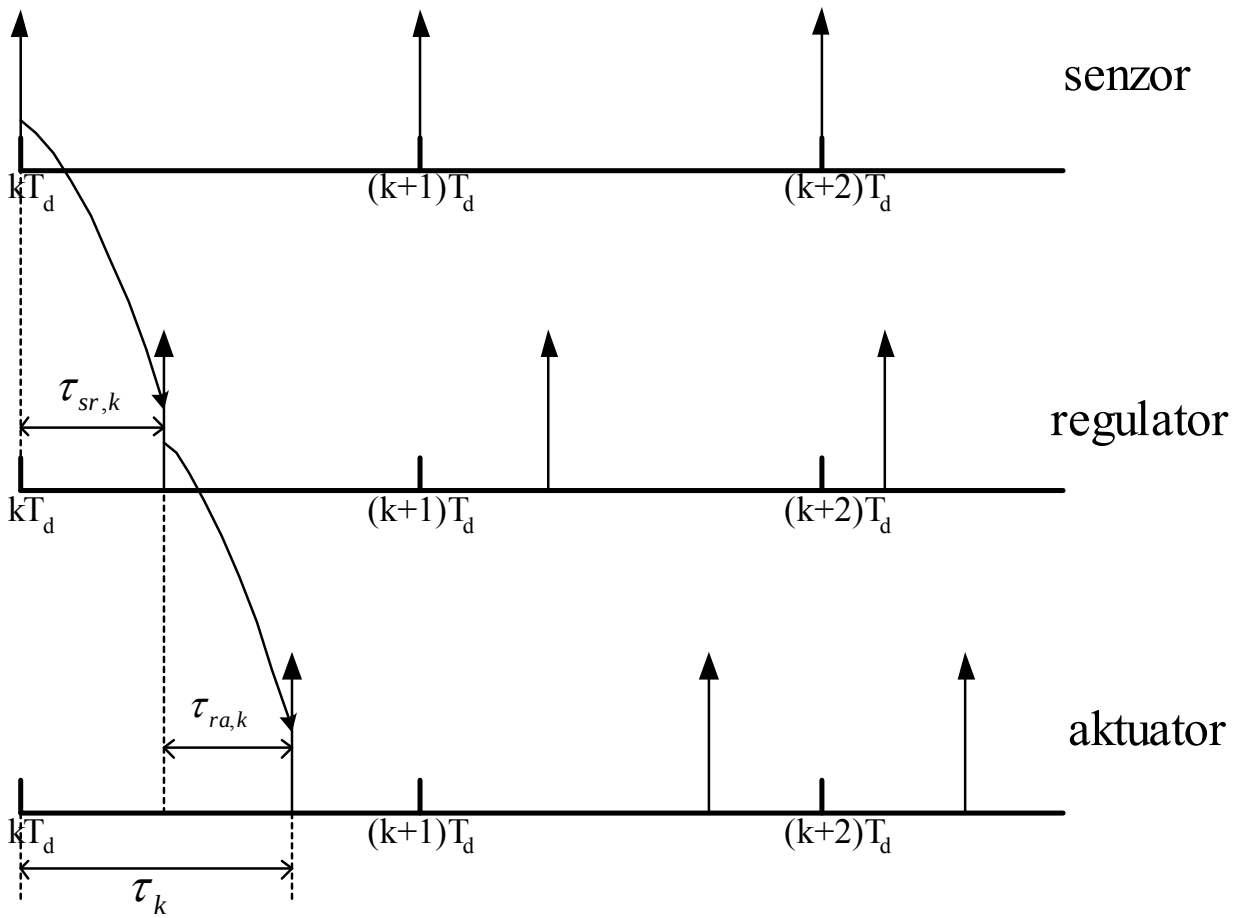
τ_{ra} - vrijeme prijenosa poruke od regulatora prema aktuatoru

Modeliranje sustava upravljanja preko mreže

- **U literaturi se mogu naći različite inačice zatvorenog kruga upravljanja preko mreže koje se razlikuju uglavnom u načinu kako se čvorovi na mreži aktiviraju.**
- **Čvor se može aktivirati kao posljedica nekog događaja, npr. prekida (*engl.* interrupt) uslijed dolaska poruke na čvor (*engl.* event-driven, ED) ili se može periodički aktivirati u skladu s lokalnim satom na čvoru (*engl.* time-driven, TD).**
- **Da bi vrijeme diskretizacije bilo konstantno, čvor senzora mora biti TD.**
- **Ovisno o tome jesu li čvorovi regulatora i aktuatora TD ili ED dobivamo različite modele sustava upravljanja. => opis slijedi =>**

Modeliranje sustava upravljanja preko mreže

- **1. Regulator i aktuator ED. Ovaj slučaj daje najmanje ukupno vrijeme kašnjenja, ali je kašnjenje promjenljivo.**



Modeliranje sustava upravljanja preko mreže

- **Vremenski dijagram uz regulator i aktuator ED**
  - **Matematički modela procesa u prostoru stanja (bez kašnjenja):**

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

  - **Diskretni regulator po varijablama stanja opisan je jednadžbom:**

$$u(kT_d) = -Kx(kT_d)$$

  - **Uz pretpostavku da je kašnjenje u mreži τ_k manje od vremena diskretizacije T_d, diskretizacijom procesa dobije se:**

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma_0(\tau_k)u(k) + \Gamma_1(\tau_k)u(k-1)$$
$$y(k) = Cx(k)$$

  - **gdje je:** $\Phi = e^{AT_d}; \quad \Gamma_0(\tau_k) = \int_0^{T_d-\tau_k} e^{As}Bds; \quad \Gamma_1(\tau_k) = \int_{T_d-\tau_k}^{T_d} e^{As}Bds.$

Modeliranje sustava upravljanja preko mreže

- Proširenjem vektora stanja zatvoreni krug upravljanja može se opisati sljedećom jednadžbom:

$$z(k+1) = \tilde{\Phi}(k) z(k),$$

gdje je: $z(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k-1) \end{bmatrix}; \qquad \tilde{\Phi} = \begin{bmatrix} \Phi - \Gamma_0(\tau_k) & \Gamma_1(\tau_k) \\ -K & 0 \end{bmatrix}$

- Ako je $\tau_k > T_d$ i ako za svaki k vrijedi: $(d-1)T_d < \tau_k < dT_d$,

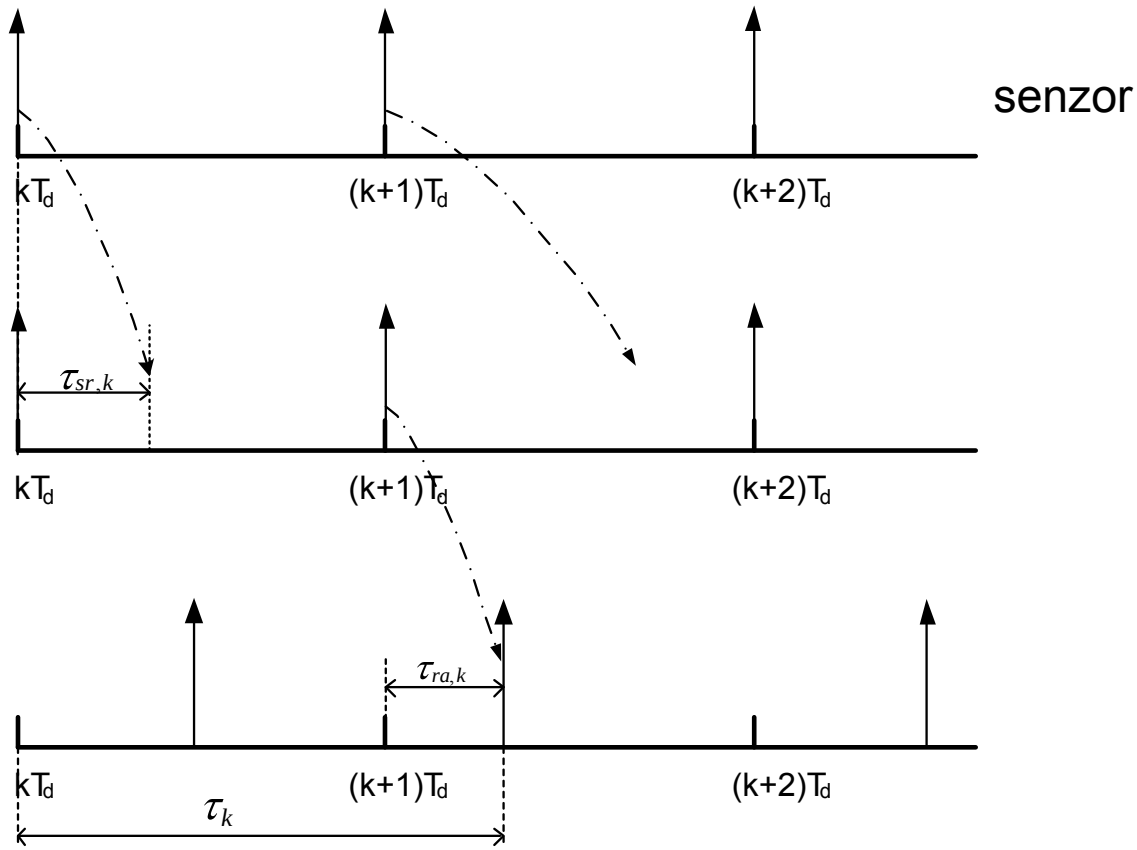
dobije se sljedeći oblik matrice:

$$\tilde{\Phi} = \begin{bmatrix} \Phi & \Gamma_1(\tau_k') & \Gamma_0(\tau_k') & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I \\ -K & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \qquad \text{gdje je } \tau_k' = \tau_k - (d-1)T_d.$$

Vremenski promjenljiv sustav

Modeliranje sustava upravljanja preko mreže

- **2. Regulator TD, aktuator ED. Ako se regulator periodički aktivira dobiva se različito ponašanje sustava nego u prethodnom slučaju.**



Vremenski dijagram uz regulator TD i aktuator ED (sinkronizirani klokovi)

Modeliranje sustava upravljanja preko mreže

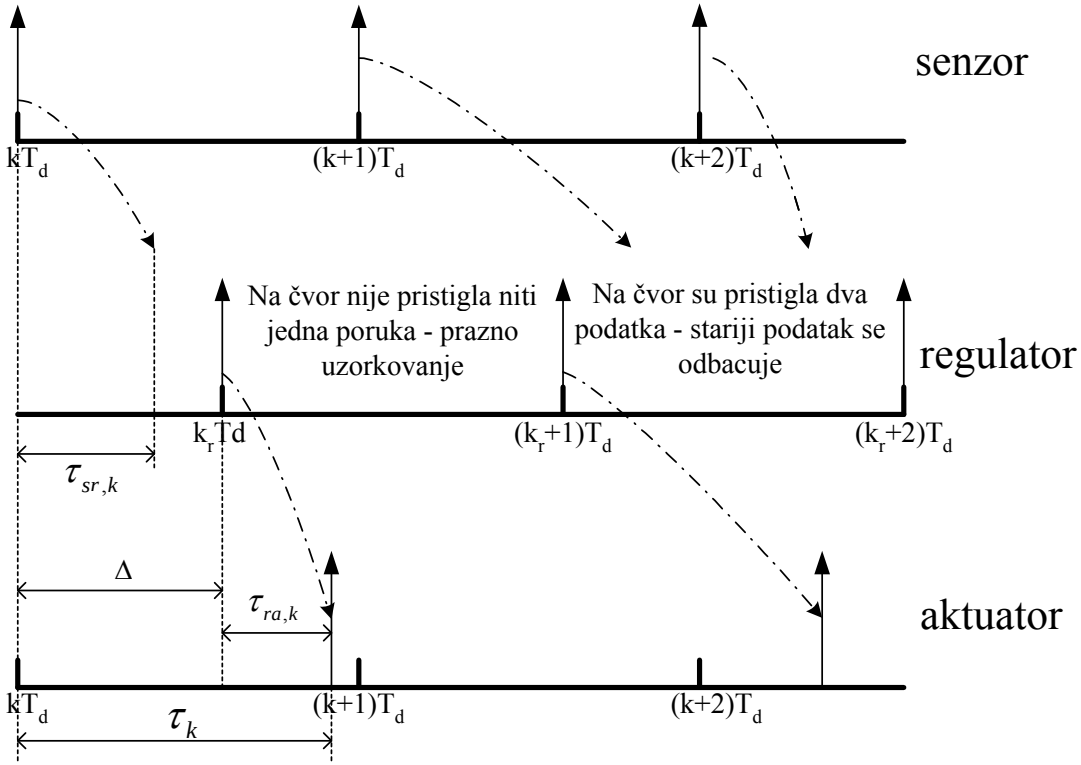
- *Pretpostavka*: Senzor i regulator su sinkronizirani i imaju jednako vrijeme diskretizacije T_d.
- Vrijeme kašnjenja se povećalo za vrijeme između dolaska poruke na čvor regulatora i proračunavanja upravljačkog algoritma.
- Na vremenskom je dijagramu prikazan slučaj kada su vremena kašnjenja manja od vremena diskretizacije.
- Diskretizirani se proces u ovom slučaju može opisati sljedećim jednadžbama:

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma_0 u(k) + \Gamma_1 u(k-1) + \Gamma_2 u(k-2)$$
$$y(k) = Cx(k)$$

- Izrazi za Γ_0, Γ_1 i Γ_2 slični su izrazima dobivenim u prethodnom slučaju.

Modeliranje sustava upravljanja preko mreže

- **Što ako senzorski i regulatorski čvorovi nisu sinkronizirani?**



Vremenski dijagram uz regulator TD i aktuator ED (nesinkronizirani klokovi)

Modeliranje sustava upravljanja preko mreže

- *Pretpostavka*: Senzor i regulator imaju vrijeme diskretizacije T_d, a trenuci diskretizacije su pomaknuti za vremenski pomak Δ.
- Δ je sporo promjenjiva veličina zbog posmaka (*engl.* drifta) satova na čvorovima.
- Vrijeme kašnjenja se povećalo za vrijeme između dolaska poruke na čvor regulatora i proračunavanja upravljačkog algoritma.
- Na vremenskom je dijagramu prikazan slučaj kada su vremena kašnjenja manja od vremena diskretizacije. Čak i u tom slučaju može se dogoditi da na čvor regulatora do trenutka proračunavanja upravljačke veličine ne stigne rezultat posljednjeg mjerenja.
- Uslijed toga može doći do pojave praznog uzorkovanja (*engl.* vacant sampling), kada u jednom intervalu na čvor regulatora ne stigne ni jedan rezultat mjerenja, ili odbacivanja podatka (*engl.* data rejection)

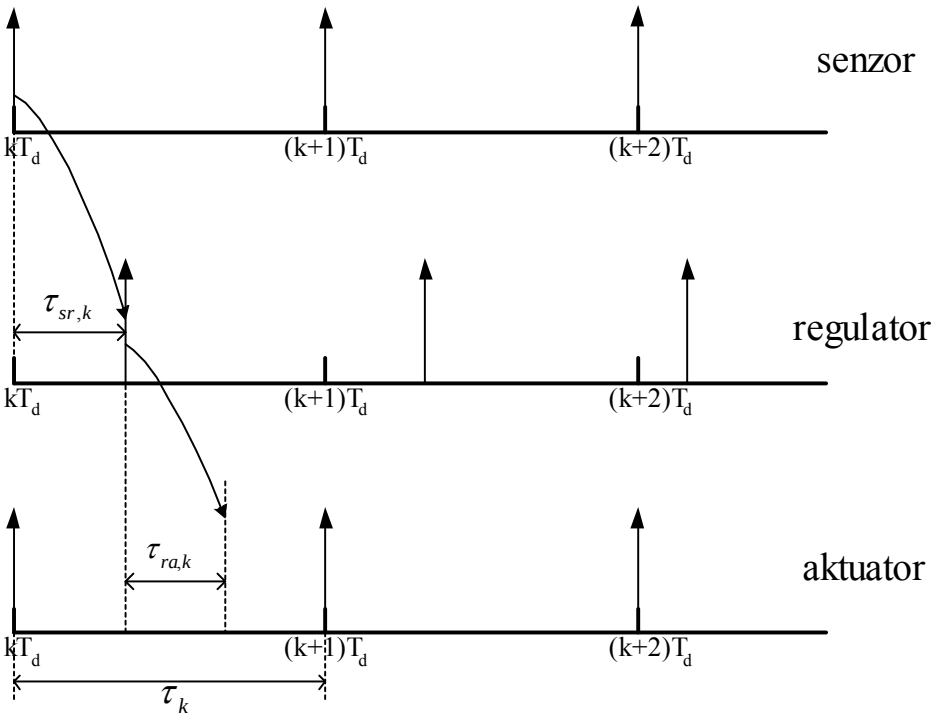
Modeliranje sustava upravljanja preko mreže

kada na čvor regulatora stignu dva rezultata mjerenja, pa se stariji rezultat odbacuje. Ovaj slučaj očito je kompliciraniji od prethodnog.

- Ovisno o tome je li $\tau_{ra,k}$ veći ili manji od T_d - Δ dobivaju različiti izrazi za Γ_0, Γ_1 i Γ_2.
- Parametri sustava u ovom slučaju ovise, osim o vremenu kašnjenja poruka u mreži, i o vremenskom pomaku Δ između trenutaka diskretizacije.
- Zbog toga je važno sinkronizirati satove na čvorovima regulatora i senzora.
- Sinkronizacija je korisna i u slučaju kada je regulator ED, budući da se uz sinkronizirane satove može proračunati kašnjenje poruke u mreži, i iz toga odrediti dodatno mrtvo vrijeme koje treba kompenzirati.

Modeliranje sustava upravljanja preko mreže

- **3. Aktuator TD. Aktuator i senzor spojeni na isti čvor na mreži => djelovanje aktuatora sinkronizirano s trenucima uzorkovanja mjernog signala. Ako su aktuator i senzor udaljeni ovo je moguće postići sinkronizacijom satova na čvoru aktuatora i senzora.**



Vremenski dijagram uz aktuator sinkroniziran sa senzorom.

Modeliranje sustava upravljanja preko mreže

- Uz sinkronizirano djelovanje aktuatora i senzora ukupno mrtvo vrijeme zbog upravljanja preko mreže bit će cjelobrojni koeficijent vremena diskretizacije:

$$\tau_k = \mathrm{n} T_d, \quad \mathrm{n} = 1,2,3,...$$

- Ako je ukupno kašnjenje u mreži manje od vremena diskretizacije (uz regulator ED), mrtvo vrijeme bit će konstantno i iznosit će T_d.

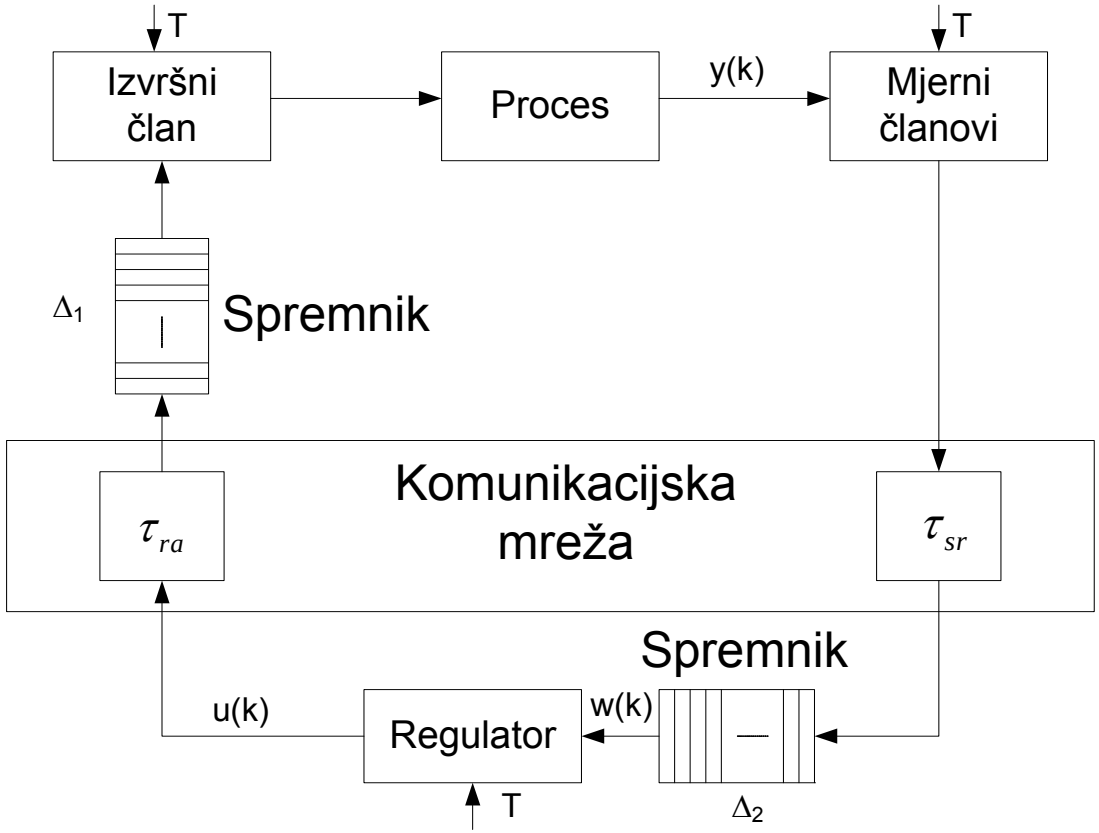
- Ako je kašnjenje veće od vremena diskretizacije moguće je dodavanjem spremnika (*engl.* buffera) na čvor regulatora i čvor aktuatora učiniti sustav vremenski nepromjenjivim (kasnije).

- Uz aktuator sinkroniziran sa senzorom može se postići da ukupno dodatno mrtvo vrijeme uslijed zatvaranja kruga upravljanja preko mreže bude konstantno, bez obzira je li kašnjenje poruka promjenljivo ili nije.

- To olakšava posao projektiranja sustava regulacije, ali daje ukupno mrtvo vrijeme veće nego što je potrebno. Ipak, u slučajevima kad povećanje mrtvog vremena ne narušava značajno vladanje sustava, preporučljivo je koristiti ovako projektiran sustav regulacije.

Najjednostavniji pristup upravljanju preko mreže

- **Učiniti sustav vremenski nepromjenljivim (determinističko upravljanje)**



Krug upravljanja uz dodane spremnike na čvoru regulatora i aktuatora.

Najjednostavniji pristup upravljanju preko mreže

- Čvorovi su periodički i sinkronizirani. U spremnike se spremaju poruke do njihovog preuzimanja od čvora.
- Spremnici se dimenzioniraju tako da budu veći od najvećeg kašnjenja na mreži, tako da u trenutku diskretizacije čvor uvijek može preuzeti podatak iz spremnika, bez obzira na kašnjenje u mreži.
- Takav sustav može se opisati jednadžbama:

$$\boxed{\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k-\Delta_1), \\ y(k) &= Cx(k), \\ w(k) &= y(k-\Delta_2), \end{aligned}} \qquad (*)$$

gdje su s $w(k)$ označeni podaci na čvoru regulatora, a s Δ_1 i Δ_2 veličine spremnika u broju koraka diskretizacije na čvoru aktuatora, odnosno regulatora.

- Budući da su duljine spremnika konstantne, komunikacijsko kašnjenje $\tau_k = nT_d$ moguće je uključiti u model procesa.

Najjednostavniji pristup upravljanju preko mreže

- Dakle, sustav se može promatrati kao sustav s konstantnim mrtvim vremenom i na njega je moguće primijeniti standardne regulatore, primjerice:
  - PID
  - FPPI regulator
  - Regulator u prostoru stanja s estimatorom kašnjenja

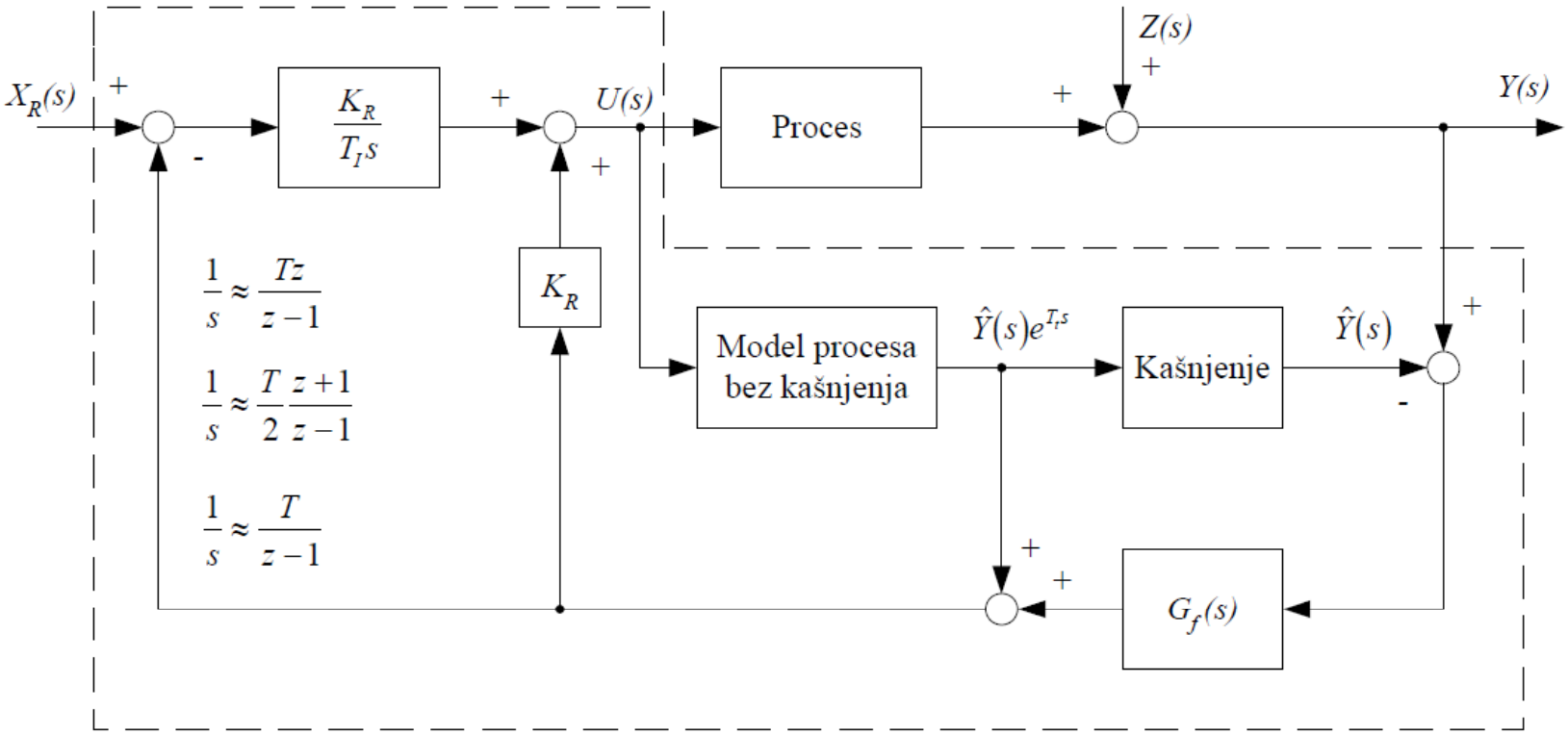
* ***Primjena PID regulatora***

- Ako je komunikacijsko kašnjenje malo, onda se sinteza PID regulatora može obaviti aproksimacijom kašnjenja PT1 članom ili primjenom Padéove aproksimacije.
- Druga je mogućnost primjena Zigler-Nicholsova postupka sinteze ili drugih iz njega izvedenih postupaka.

Najjednostavniji pristup upravljanju preko mreže

* ***Primjena FPPI regulatora*** (*engl.* **Filtered Predictive PI; FPPI**).

- Primjenjuje se kada je kašnjenje veliko pa PID regulator ne može dati dobro vladanje sustava.



Struktura sustava regulacije s FPPI regulatorom.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
Fakultet elektrotehnike i računarstva
Zavod za automatiku i računalno inženjerstvo
Unska 3, Zagreb, HRVATSKA

Poglavlje 10: Komunikacijske mreže u računalnom upravljanju sustavima

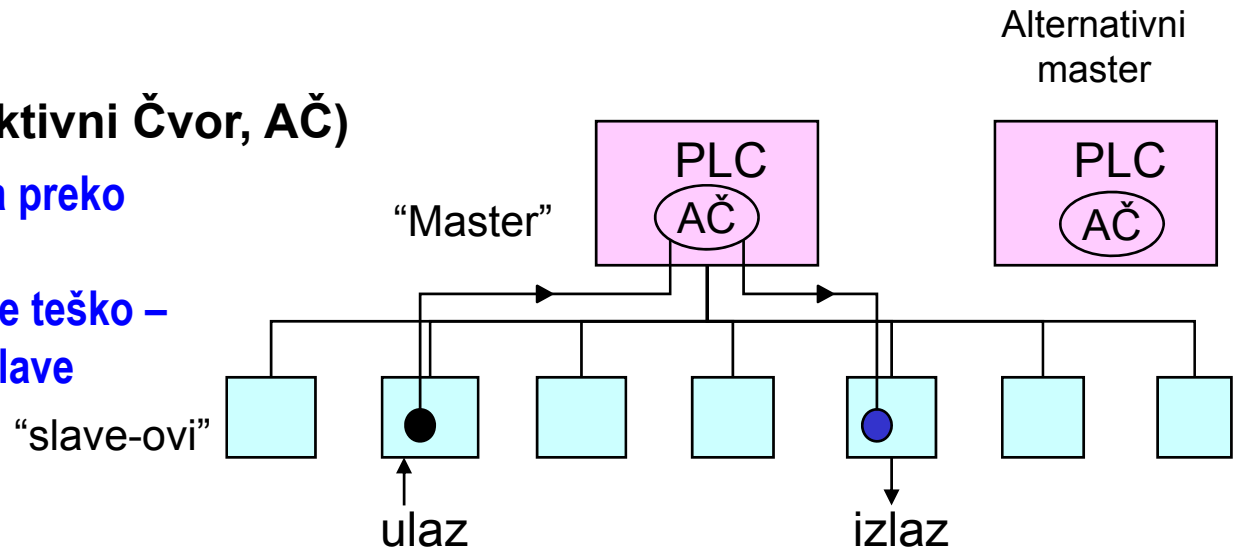
Raspodijeljenost podataka u RT mrežama

© Ivan Petrović

“Master-slave” ili “peer-to-peer” komunikacija

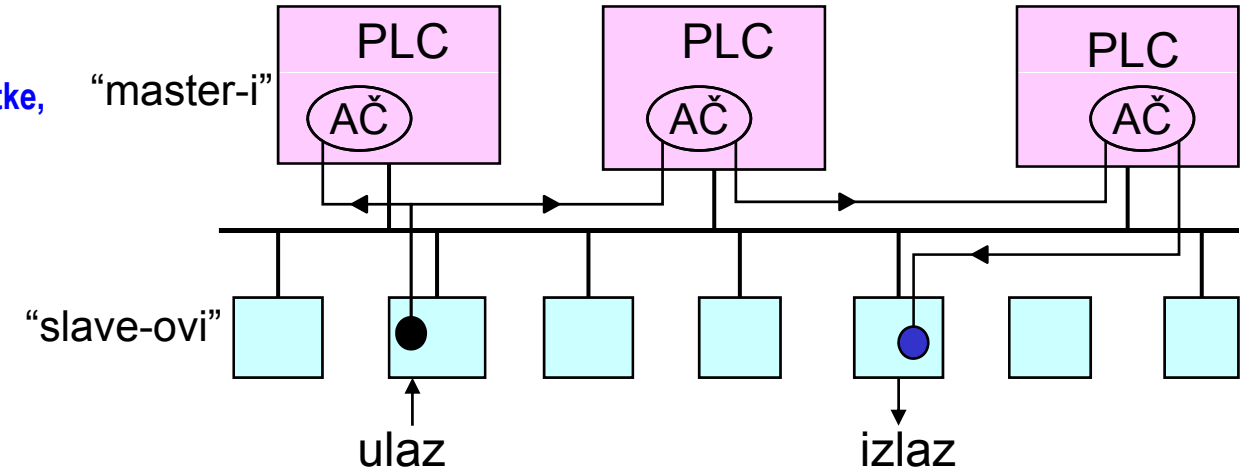
Središnji master čvor (Aktivni Čvor, AČ)

- Sva se komunikacija odvija preko mastera
- Dodavanje novog mastera je teško – on bi morao biti i master i slave



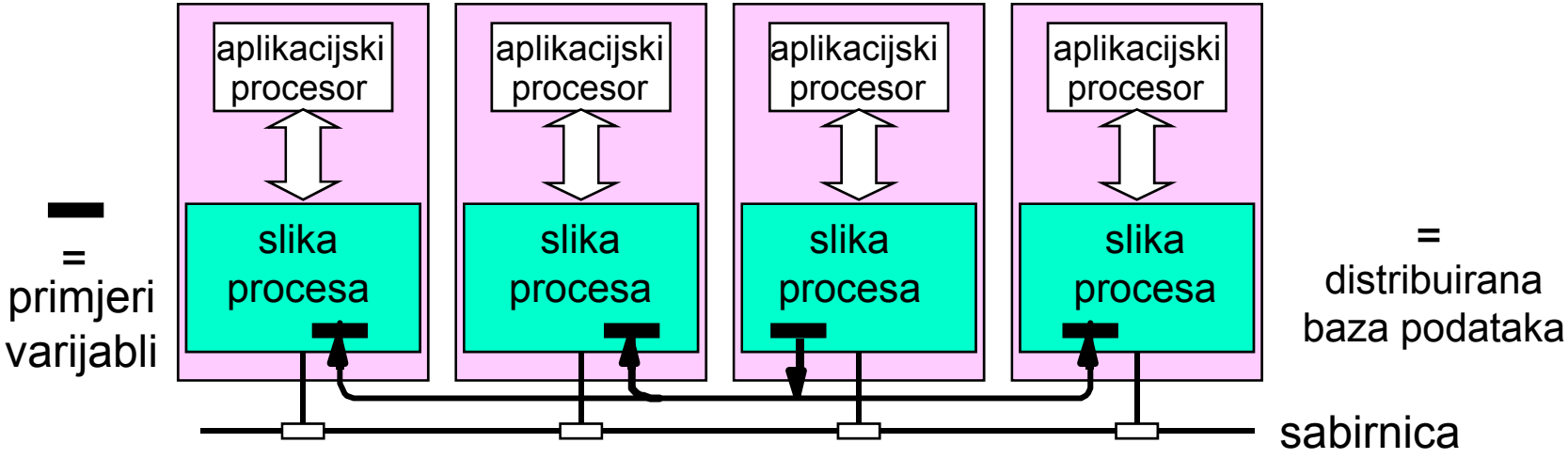
“Peer – to – peer”

- AČ-ovi mogu izmjenjivati podatke, dijeliti ulaze i izlaze
- Time se postiže redundancija i “distribuirana inteligencija”
- -> odvojen bus master
  od aplikacijskog mastera !
- Uređaji mogu međusobno komunicirati



Difuzijski prijenos

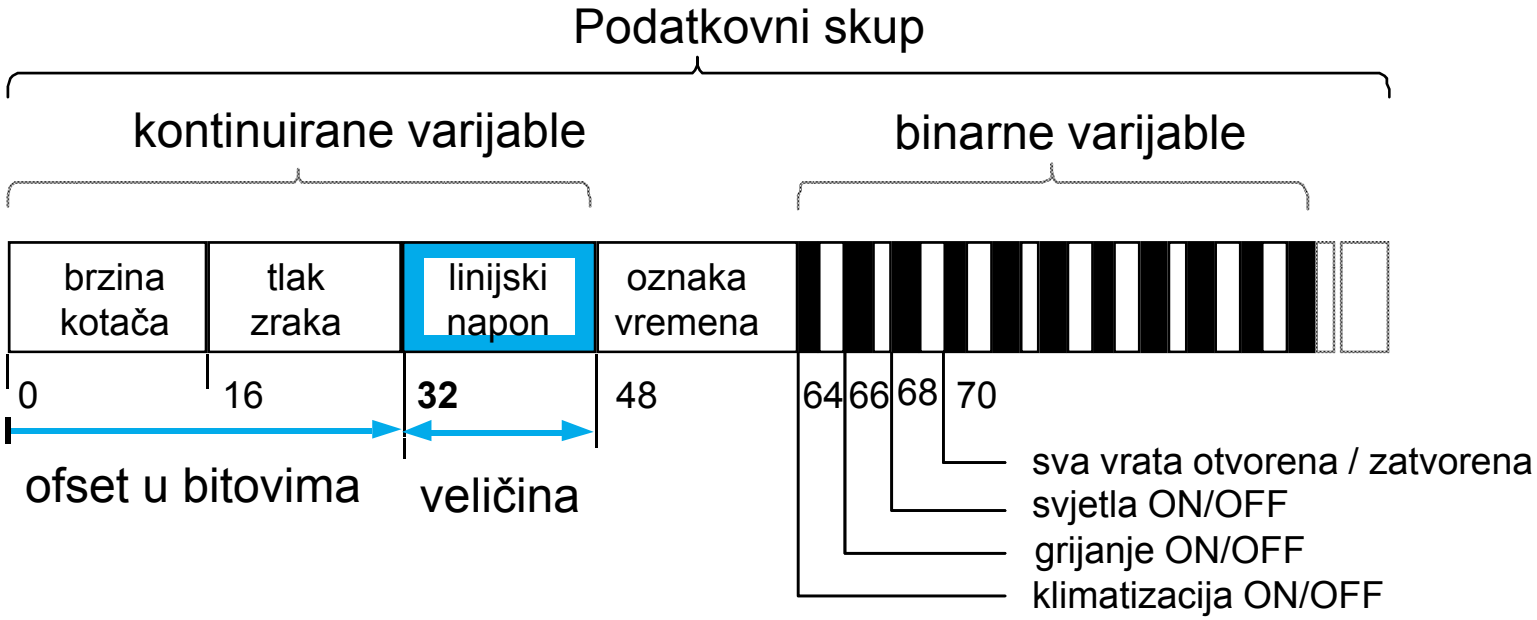
- Difuzijskim slanjem poruka, koje su identificirane njihovim pošiljateljem (ili sadržajem) povećava se učinkovitost komunikacije.



- Svaka je stanica **predbilježena** kao izvor ili odredište za određeni broj procesnih varijabli
- Samo jedna stanica može biti izvor neke određene varijable (inače, kolizija).
- Sabirnica osvježava sliku procesa u pozadini, ona postaje RT baza podatka.
- Svaka stanica osluškuje sabirnicu i čita varijable koje su joj od interesa.

Skupovi podataka

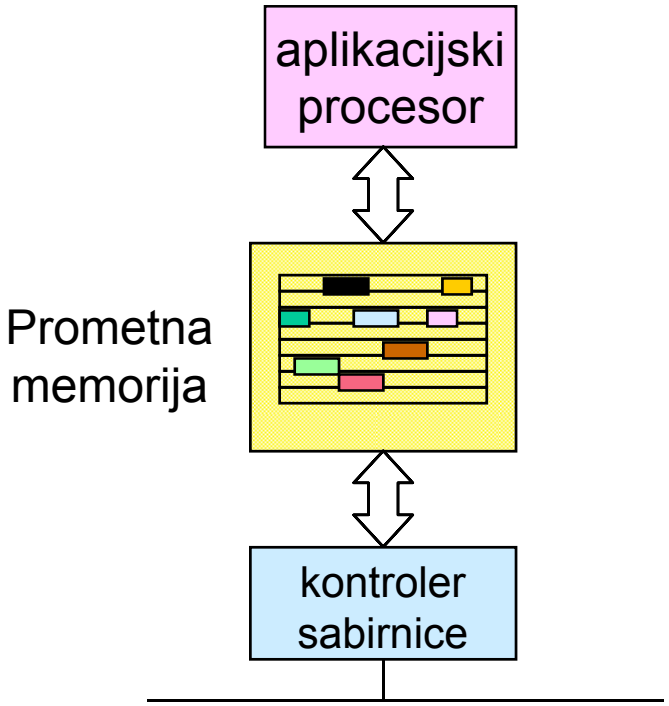
- Stanice u RT distribuiranim sustavima neprestano šalju vrijednosti istih varijabli.
- Ekonomično je grupirati varijable jedne stanice u okviru u podatkovni skup.
- Podatkovni se skup promatra kao cjelina u komunikaciji i u pristupu mediju.
- Varijabla se unutar podatkovnog skupa identificira ofsetom i veličinom
- Varijable mogu biti različitog tipa, tipovi mogu biti izmiješani.



Razdvajanje aplikacije i komunikacije

TT komunikacija

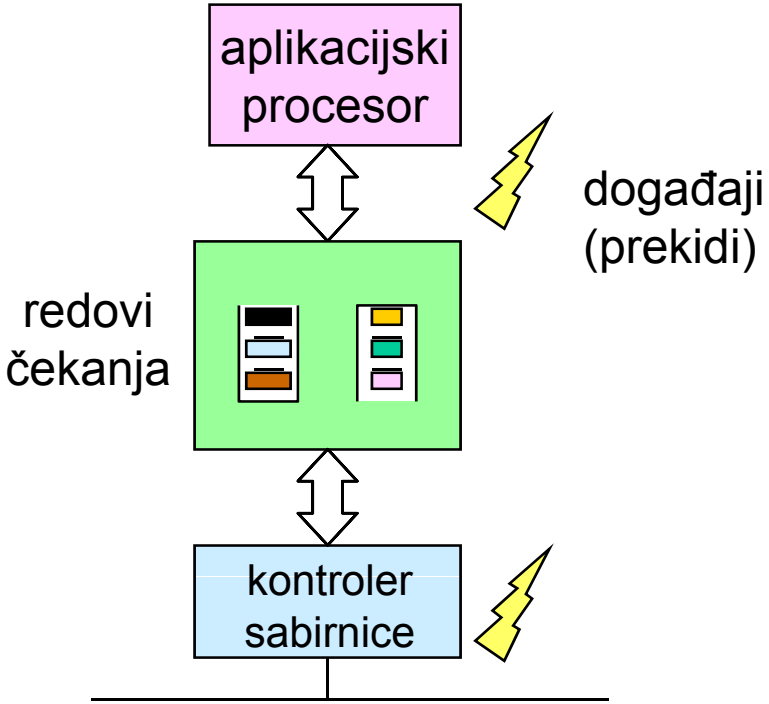
razdvojeno (asinkrono):



- **Slanje:** aplikacija upisuje podatke u memoriju
- **Primanje:** aplikacija čita podatke iz memorije
- Kontroler sabirnice odlučuje kada slati
- Sabirnica i aplikacija nisu sinkronizirane.

ET komunikacija

združeno (događajno):



- **Slanje:** aplikacija ubacuje podatke u red i pokreće prijenos, kontroler sabirnice dohvaća podatke iz reda
- **Primanje**: kontroler ubacuje podatke u red i prekida aplikaciju da ih prihvati, aplikacija prima podatke

© Ivan Petrović

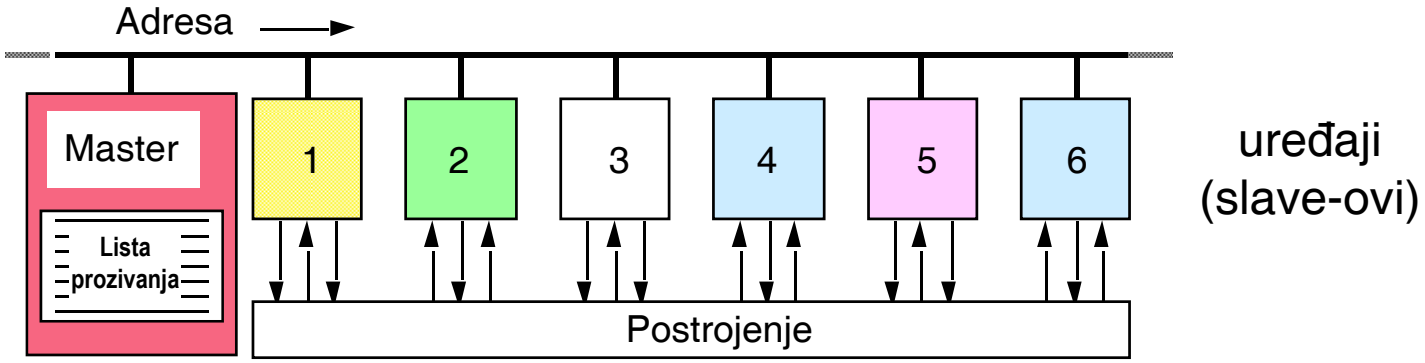
SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
Fakultet elektrotehnike i računarstva
Zavod za automatiku i računalno inženjerstvo
Unska 3, Zagreb, HRVATSKA

Poglavlje 10: Komunikacijske mreže u računalnom upravljanju sustavima

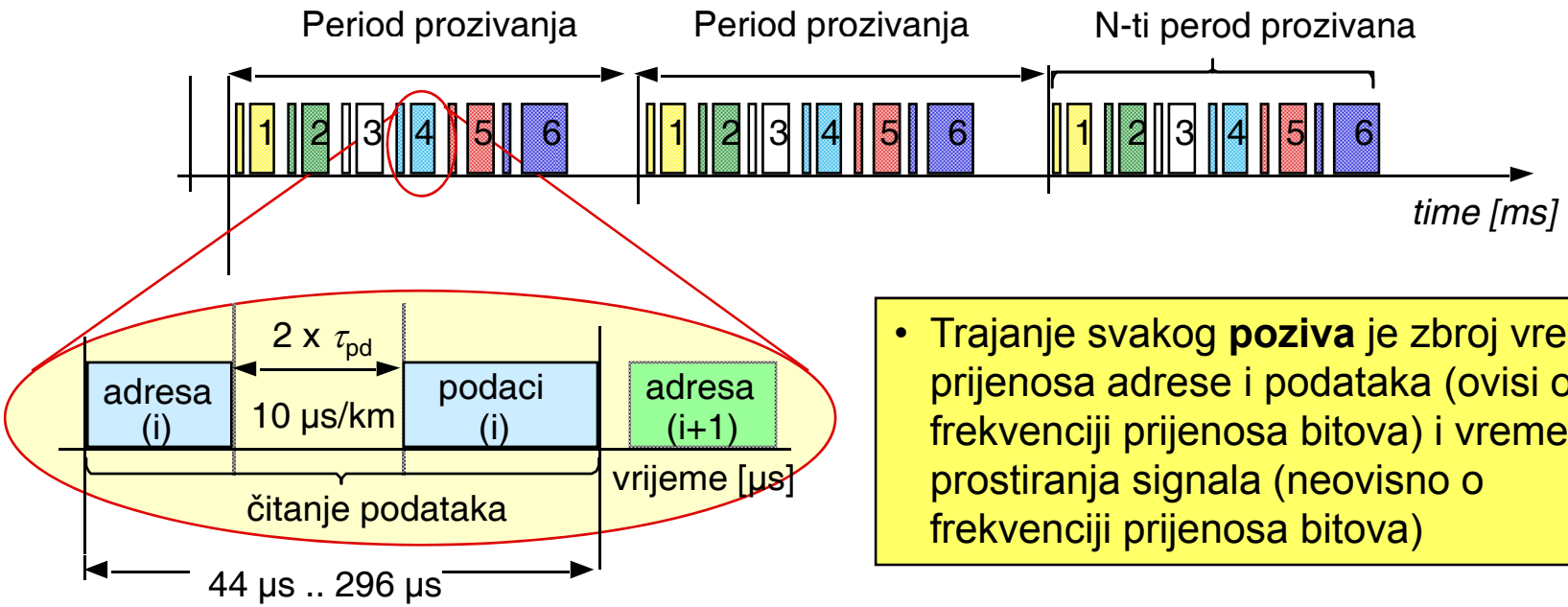
Ciklički način rada (Time Triggered Communication, TT komunikacija)

© Ivan Petrović

Ciklički prijenos podataka



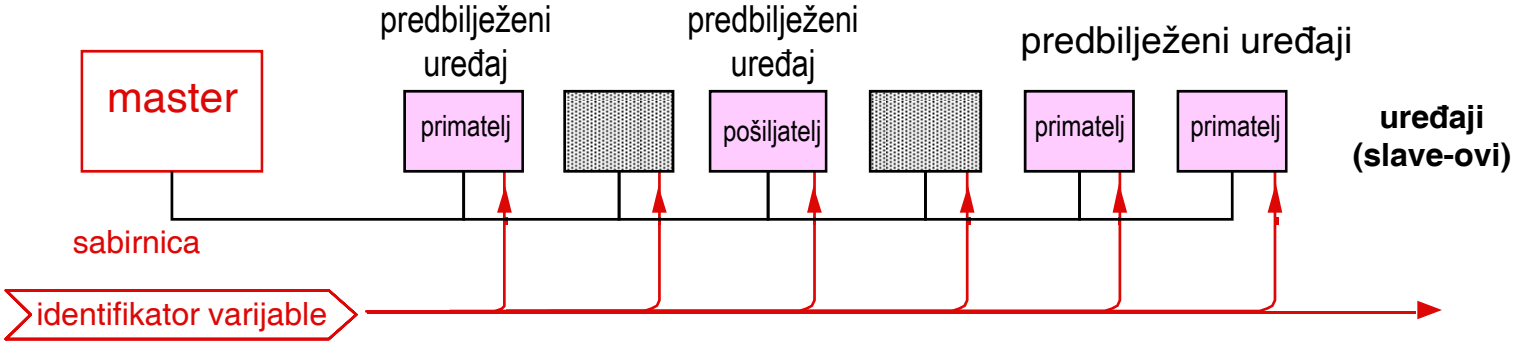
Master proziva adrese prema unaprijed utvrđenom redu, prema **listi prozivanja**.



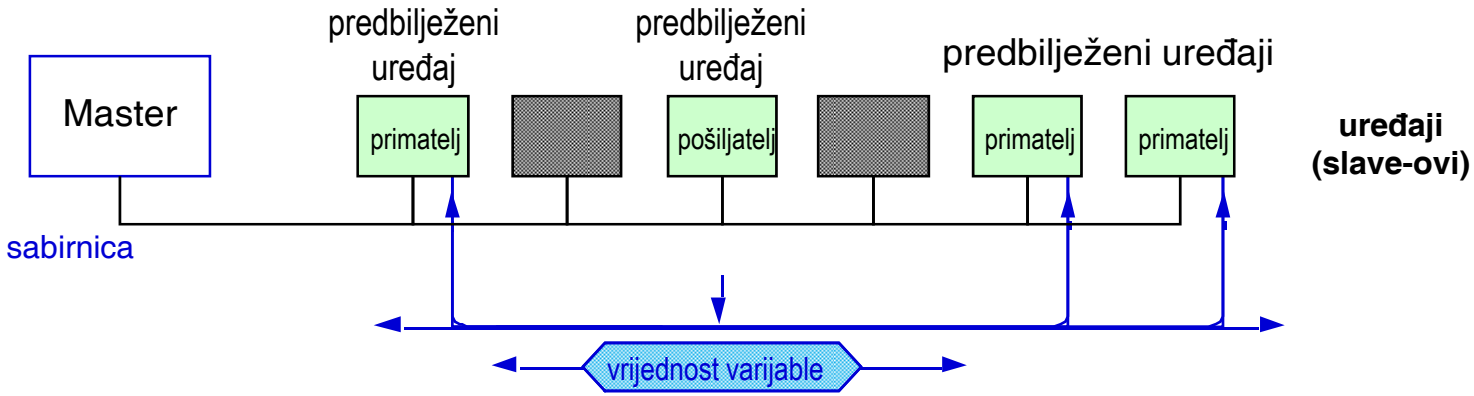
- Trajanje svakog **poziva** je zbroj vremena prijenosa adrese i podataka (ovisi o frekvenciji prijenosa bitova) i vremenu prostiranja signala (neovisno o frekvenciji prijenosa bitova)

Difuzijski prijenos zasnovan na adresi pošiljatelja

Faza 1: Master šalje identifikator varijable koja je na redu za prijenos:

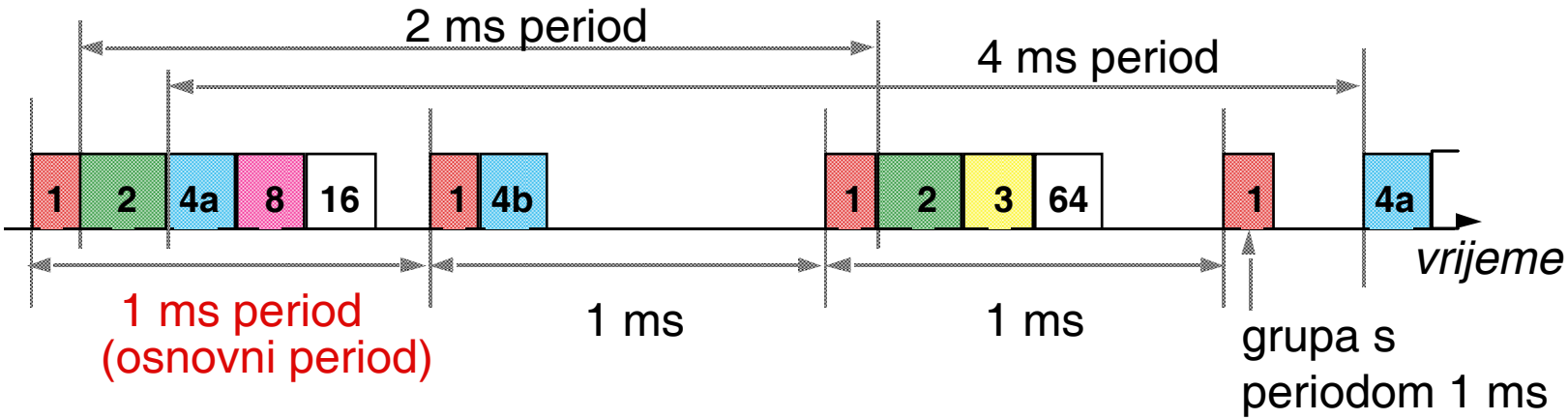


Faza 2: Uređaj koji šalje tu varijablu odgovara sa "slave" okvirom, koji sadrži vrijednost varijable, a svi predbilježeni primatelji primaju taj okvir.



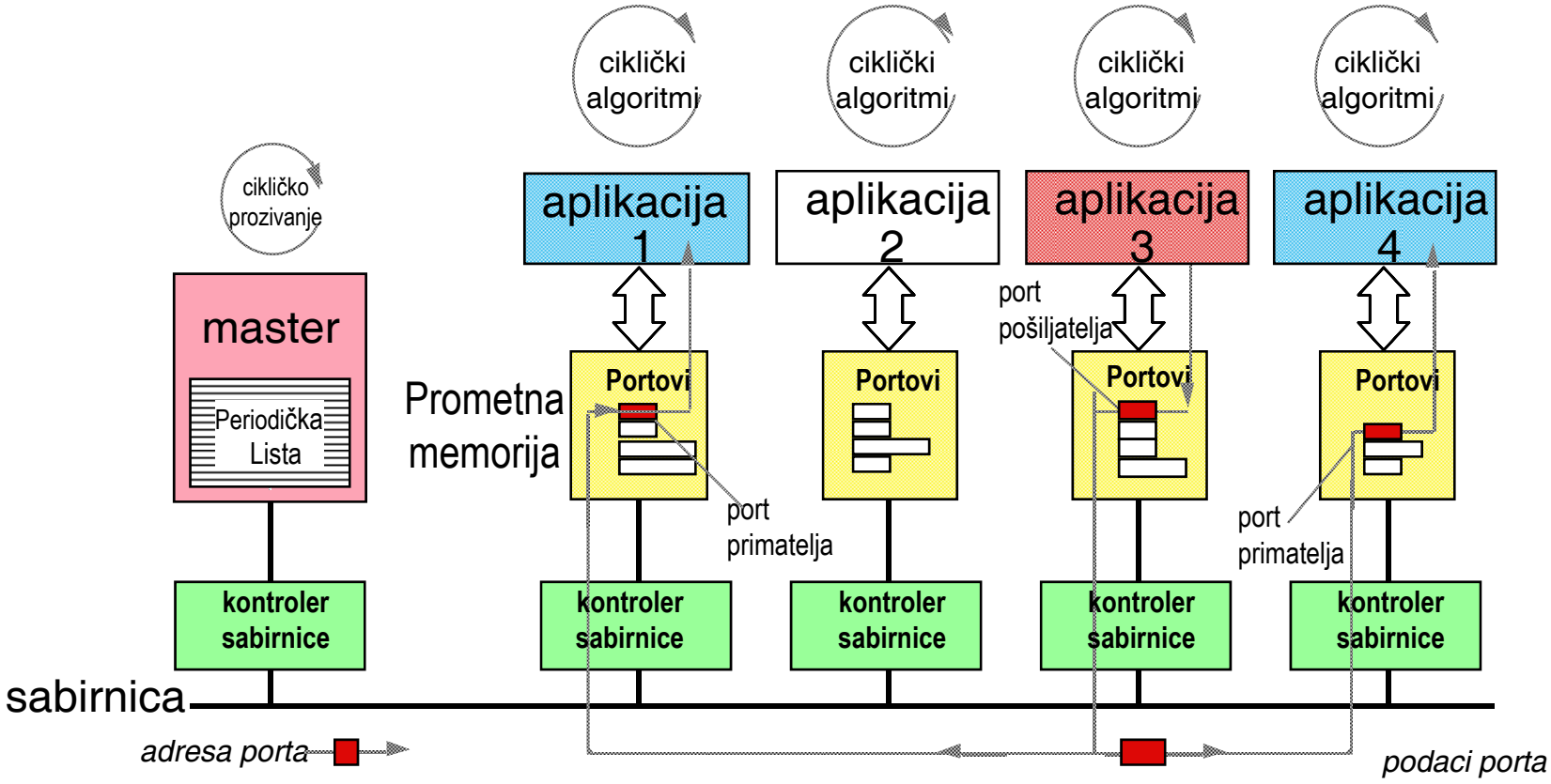
Optimiranje cikličkog načina rada

- Ciklički način rada koristi fiksne odsječke sabirničkog vremena.
- Period prozivanja se povećava s brojem prozivanih poruka.
- Sukladno tome usporava se brzina odziva.
- **Rješenje**: uvođenje podciklusa za manje žurne periodičke varijable:



- Cikličko prozivanje treba alat za konfiguriranje ciklusa prozivanja, tj. za izradu liste prozivanja. Ciklus prozivanja ne smije se mijenjati u radu.
- Jedna stanica može slati više procesnih podataka (varijabli stanja) s različitim prioritetima.
- Ako postoji samo jedan tip prozivanja po stanici, onda se prozivanje mora provoditi frekvencijom najprioritetnije varijable te stanice.
- Da bi se smanjilo opterećenje sabirnice, master proziva procesne podatke, a ne stanice

Ciklički prijenos i aplikacija



Promet na sabirnici i izvođenje aplikacijskog programa izvode se asinkrono.

Master šalje identifikatore po svome nahođenju.

Sabirnica i aplikacija su razdvojeni / povezani zajedničkom memorijom (prometna memorija), koja djeluje kao distribuirana baza podataka.

Primjena cikličkog načina prijenosa

- **Načelo cikličkog načina rada, kombinirano s difuzijom zasnovanom na adresi pošiljatelja, primjenjuje se u velikom broju komercijalnih RT komunikacijskih mreža**
- **Koristi se za upravljanje energetskim postrojenjima, željezničkim vozilima, zrakoplovima, itd.**
- **Ovo načelo daje mreži determinističko ponašanje, uz cijenu smanjene propusne moći i duljine sabirnice.**
- **Lista prozivanja smještena u masteru (koji se može duplicirati radi redundancije) određuje vladanje ovih RT mreža.**
- **Lista se konfigurira za specifičnu primjenu (posebno predavanje).**
- **Ovim se jamči da nijedna aplikacija neće zauzeti prijenosni medij više od unaprijed joj dodijeljenog vremena, čime se daje puna kontrola projektantu sustava.**

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
Fakultet elektrotehnike i računarstva
Zavod za automatiku i računalno inženjerstvo
Unska 3, Zagreb, HRVATSKA

Poglavlje 10: Komunikacijske mreže u računalnom upravljanju sustavima

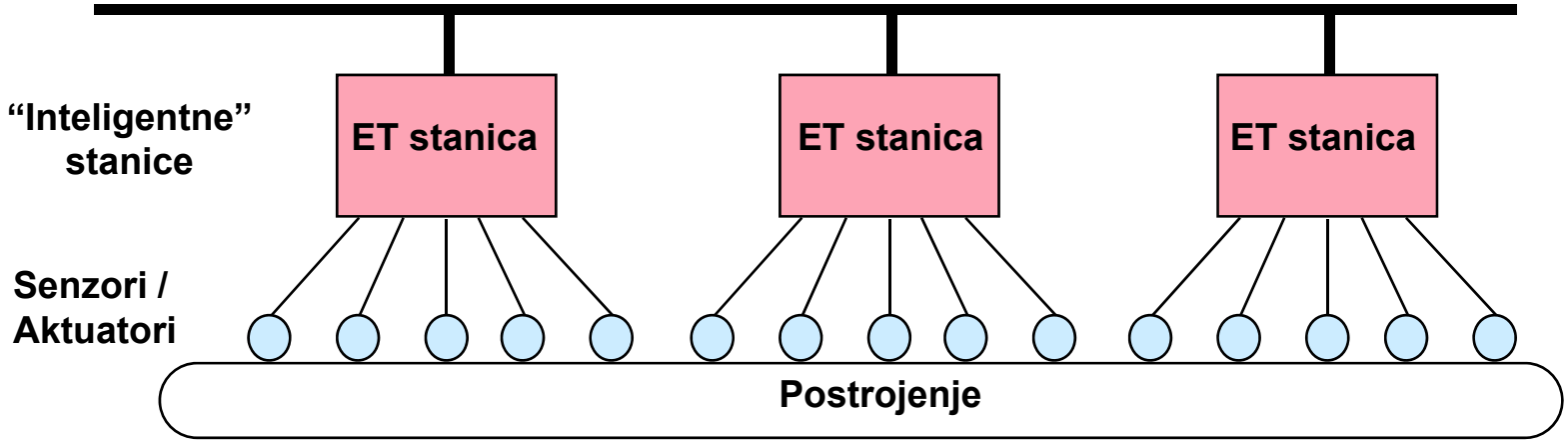
Događajni način rada (Event Triggered Communication, ET komunikacija)

© Ivan Petrović

Načelo događajnog načina rada

- Događaj izaziva prijenos samo kada dođe do promjene stanja neke varijable.
- Prosječno je opterećenje sabirnice vrlo malo, ali se u iznimnim situacijama može dogoditi preopterećenje

Sabirnica s više mastera: koristi samo prijenos s pisanjem

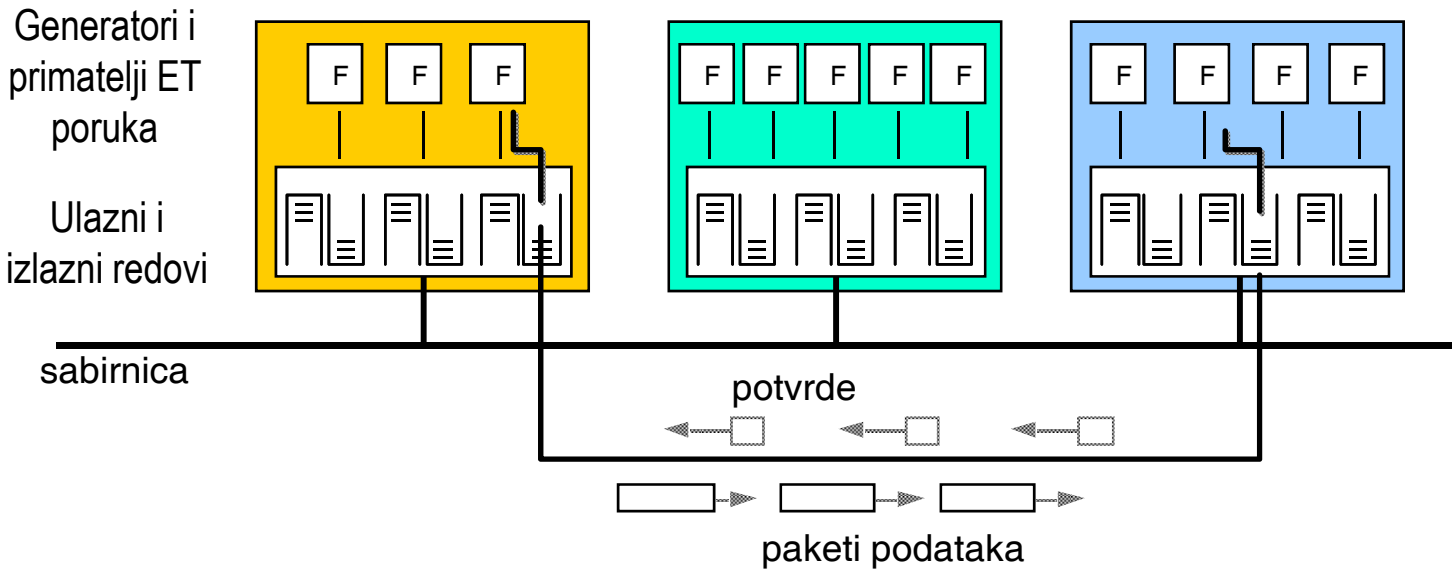


Detekcija događaja je "inteligentan" proces:

- **Nije svaka promjena varijable događaj, čak i za binarne varijable.**
- **Najčešće, kombinacija promjena varijabli tvori događaj.**
- **Samo aplikacija može odlučiti što je događaj, budući da samo programer aplikacije zna značenje varijabli.**

Događaji i determinizam

- Iako je deterministički pristup mediju uvjet zajamčenog vremena isporuke, on nije dovoljan jer ET poruke čekaju u redu u stanicama



- Prosječno vrijeme isporuke ovisi o duljini redova, o gustoći prometa na mediju i o vremenu obrade na odredištu.
- Često su računala veći izvori kašnjenja prijenosa nego sama mreža.

RT upravljanje = Mjerenje + Prijenos + Procesiranje + Djelovanje

ET – prednosti i nedostaci

- U ET sustavu, prijenos se poruke događa samo kad se dogodi neki događaj.

Prednosti:

- **Može obrađivati veliki broj događaja – ako nisu svi u isto vrijeme**
- **Podržava veliki broj stanica u mreži**
- **Sustav "miran" u normalnom stanju procesa**
- **Bolje iskorištenje resursa**
- **Koristi samo prijenos s pisanjem, prikladno za LANove s velikim vremenom propagacije**
- **Prikladno za standardne operacijske sustave.**

Nedostaci:

- **Zahtijeva "inteligentne" stanice (tvorba događaja)**
- **Zahtijeva raspodijeljeni pristup resursima (arbitracija)**
- **Nema gornje granice vremena pristupa mediju, ako je neka komponenta ne-deterministička**
- **Teško procijeniti vrijeme odziva**
- **Ograničenja uslijed efekata zagušenja**
- **Potreban pozadinski ciklički rad da se provjerava "budnost" sustava**

Ilustracija preopterećenja ET komunikacije

- **Ako se u procesu dogodi veći broj ET događaja nego što je projektant predvidio može doći do zagušenja komunikacijskog kanala. Primjerice.:**
  - **Nadzorno upravljački sustav elektroenergetskog sustava može imati više od 100.000 RT veličina koje se kontinuirano nadziru.**
  - **Dogodi se veliko nevrijeme s velikim brojem udara groma u kratkom vremenskom intervalu**
    - **veliki broj koreliranih alarma**
    - **uz ET komunikaciju doći će do preopterećenja**
    - **prepunit će se redovi čekanja**
- **TT komunikacija:**
  - **Nema zagušenja, alarmi stižu po točno utvrđenom redu, jer je sustav projektiran za najgori slučaj.**

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
Fakultet elektrotehnike i računarstva
Zavod za automatiku i računalno inženjerstvo
Unska 3, Zagreb, HRVATSKA

Poglavlje 10: Komunikacijske mreže u računalnom upravljanju sustavima

Komunikacijski model za rad u stvarnome vremenu

© Ivan Petrović

Prijenos mješovitih podatka

Procesni podaci

predstavljaju stanje procesa

kratki i žurni podaci

... struja motora, brzina vrtnje, naredbe operatera, stop u nuždi,...

-> Periodični prijenos procesnih varijabli

Budući da se varijable osvježavaju periodički, ponovno slanje neispravne poruke nema smisla

Poruke

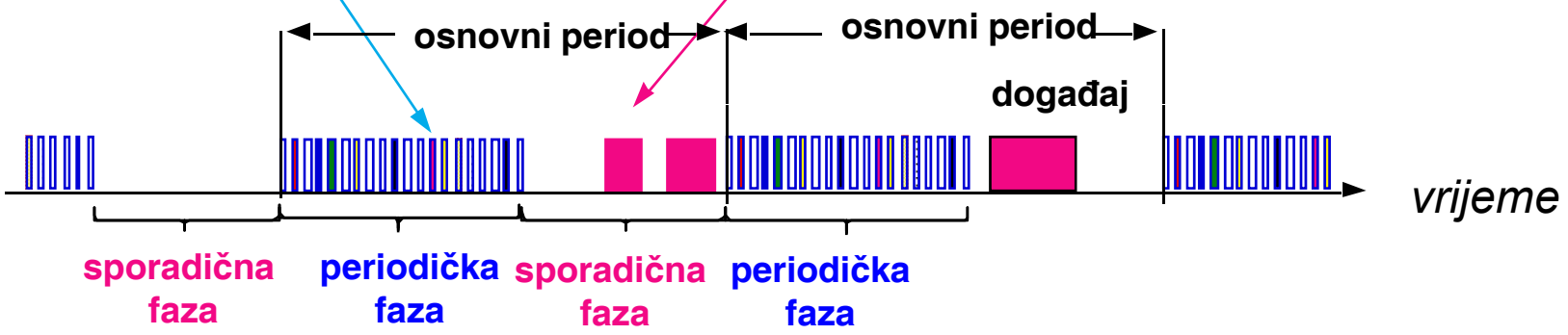
predstavljaju promjene stanja procesa

Rijetke, ponekad dugačke poruke o događajima, za:

- **Korisnike**: referentne veličine, diagnostičke poruke,status
- **Sustav**: inicijalizacija, "down-loading", ...

-> Sporadični prijenos procesnih varijabli i poruka

Budući da poruke predstavljaju promjene stanja, protokol mora obnoviti izgubljene podatke u slučaju pogreške prijenosa



Mješoviti prijenos je konfiguracijski problem

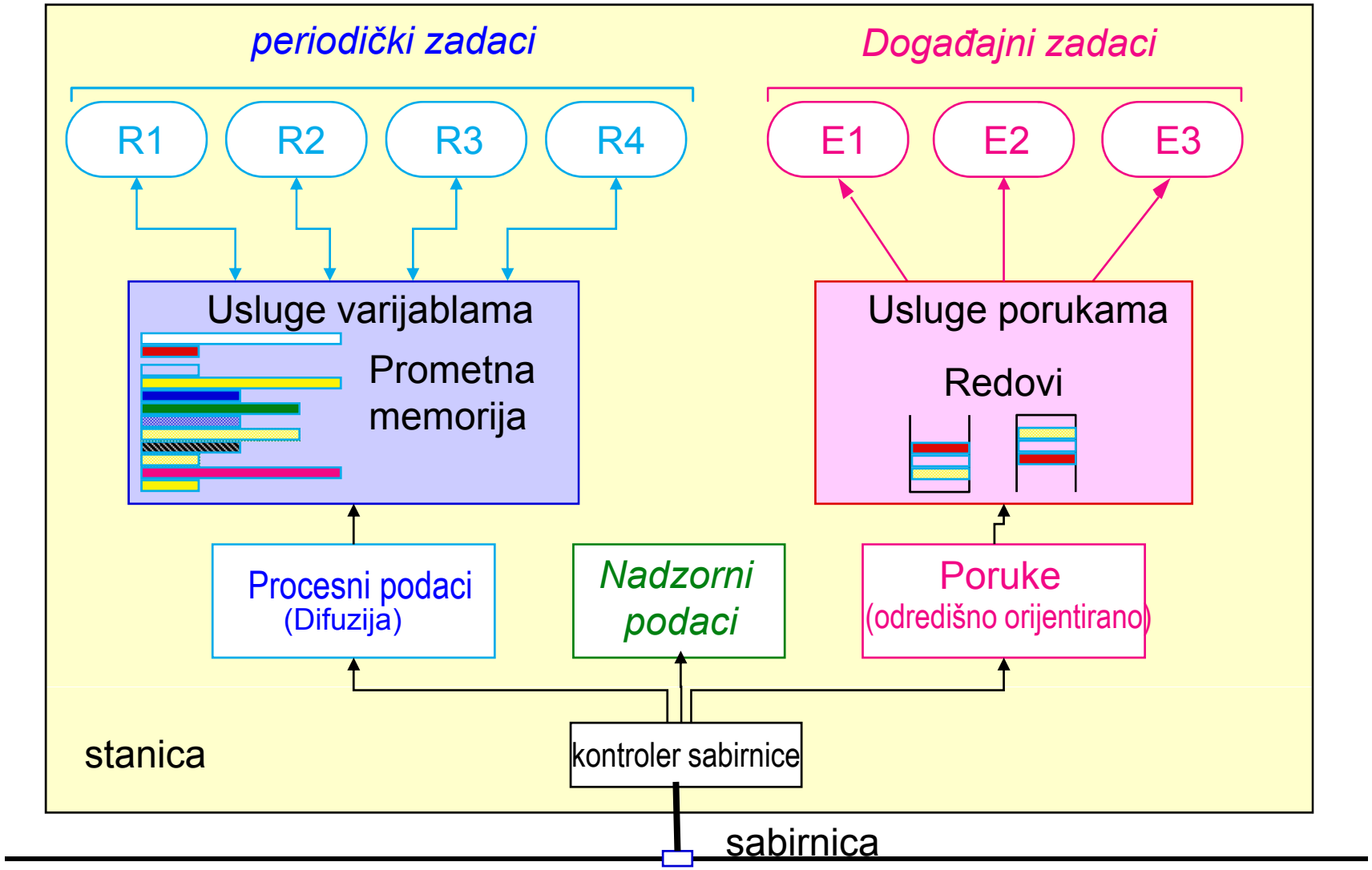
- **Ciklički prijenos zauzima veliki dio komunikacijskog kapaciteta mreže => treba ga koristiti samo za prijenos varijabli koje su zbilja vremenski kritične.**

- **Odluka o pridruživanju neke varijable cikličkom ili ET načinu slanja ne može se mijenjati tijekom rada sustava, već se mora donijeti u fazi njegova projektiranja.**

- **Uz RT podatke mora se osigurati i prijenosa NRT poruka, kao što su dijagnostičke poruke i upravljanje mrežom.**

- **Dakle, RT mreža mora omogućavati oba načina slanja poruka.**

Aplikacijski obzor RT komunikacija



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
Fakultet elektrotehnike i računarstva
Zavod za automatiku i računalno inženjerstvo
Unska 3, Zagreb, HRVATSKA

Poglavlje 10: Komunikacijske mreže u računalnom upravljanju sustavima

Najvažnije RT komunikacijske mreže

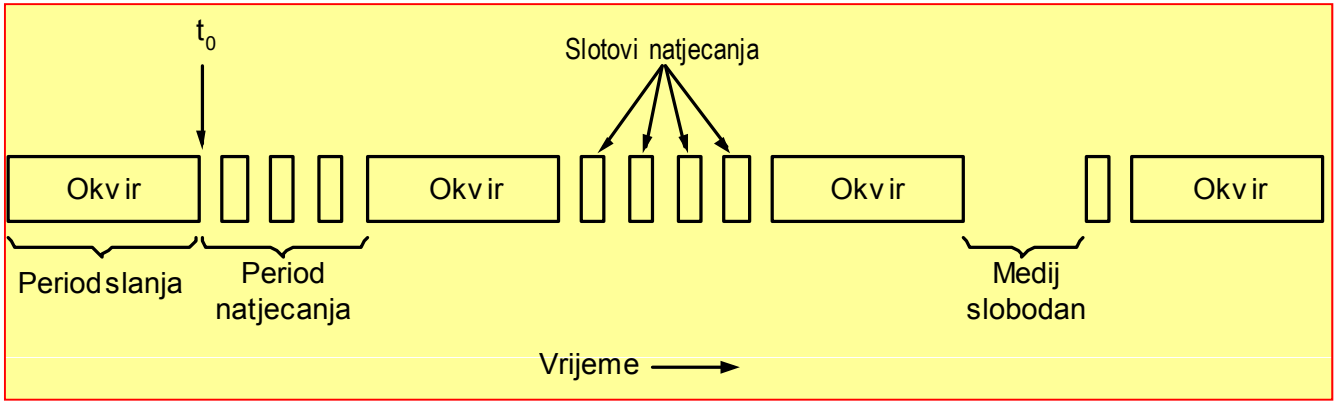
© Ivan Petrović

RT mreže prema pristupu mediju

- **Stohastički (događajni, ET) pristup:**
  - **Ethernet (IEEE 802.3: CSMA/CD);**
  - **CAN (CSMA/BA) ⇒ DeviceNet, SDS ...**
- **Deterministički (vremenski, TT) pristup:**
  - **Token passing (Token bus – IEEE 802.4; Token ring – IEEE 802.4) ⇒ PROFIBUS FMS, MAP, ControlNet,...**
  - **Centralized arbitration (polling) ⇒ PROFIBUS DP, FIP, TTP/A ....**
  - **TDMA (Time Division Multiple Access) ⇒ TTCAN, TTP/C, FlexRay**

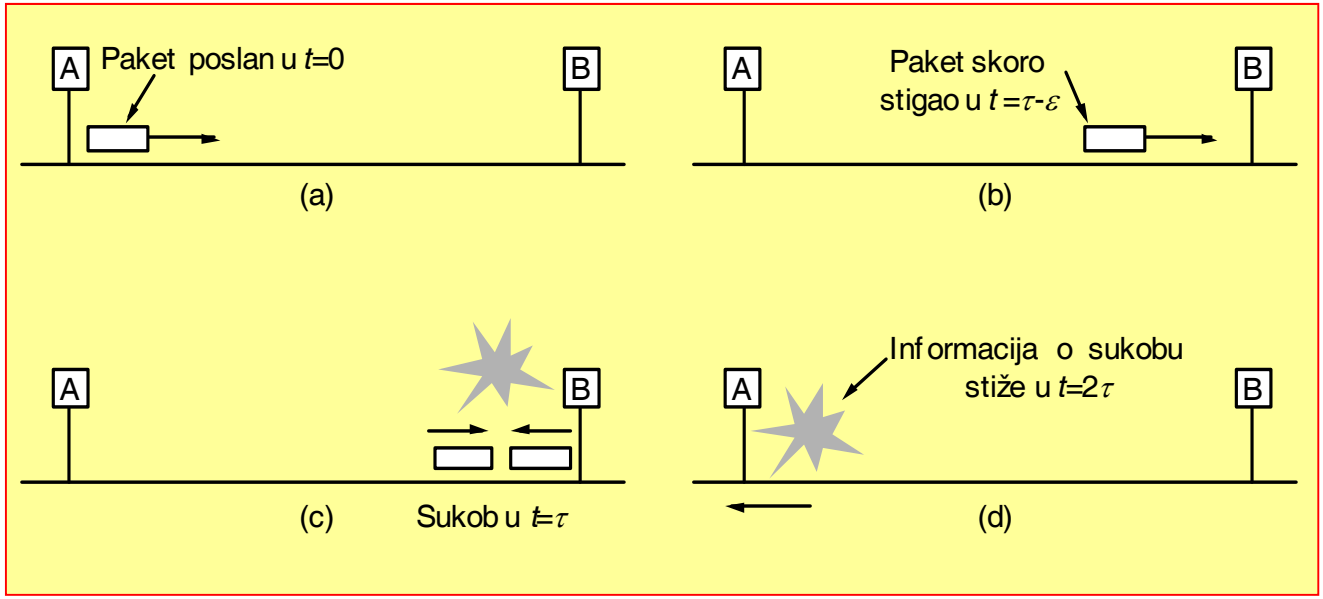
Ethernet – CSMA/CD pristup

- **CSMA s otkrivanjem sukoba (CSMA with Collisions Detection):**
- **CSMA/CD – koristi se kod LAN mreža (Ethernet).**
  - **Dvije ili više stanica mogu istodobno spoznati da je kanal slobodan i pokušati poslati poruku**
  - **Stanice koje šalju poruke mogu spoznati da je došlo do sukoba, usporedbom signala na mediju i poslanog signala**
  - **Nakon što otkrije sukob, stanica prekida odašiljanje poruke, čak i ako je već poslala pola okvira poruke.**
  - **Čeka slučajno vrijeme i ponovno pokušava poslati poruku.**
  - **Konceptualni model CSMA/CD protokola:**



Ethernet – CSMA/CD pristup

- **Period (interval) natjecanja**
  - **Minimalno vrijeme detekcije sukoba na mediju**
    - **τ – vrijeme propagacije između najudaljenijih stanica**



- **Stanica ne može biti sigurna da šalje bez sukoba dok ne istekne vrijeme 2τ =>**
- **Period natjecanja višekratnik vremena 2τ.**
- **Sukobi u intervalu natjecanja mogu značajno narušiti performanse, pogotovo ako je komunikacijski kabel dugačak i ako su okviri koji se šalju kratki.**

Ethernet – CSMA/CD pristup

Kabeli:

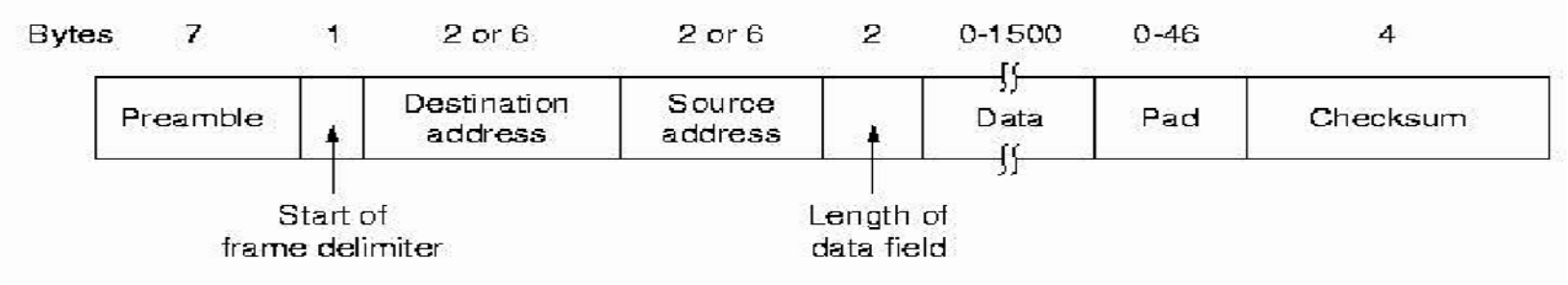
Ime	Kabel	Maks. duljina segmenta	Čvorova po segmentu	Prednosti
		10 Mbit/s - IEEE 802.3 - Ethernet		
10Base5	Debeli koaks. kabel	500 m	100	Dobar za osnovne mreže (engl. backbones)
10Base2	Tanki koaks. kabel	200 m	30	Najjeftiniji sustav
10BaseT	Upletena parica	100 m	1024	Lako održavanje
10BaseF	Optički kabel	2000 m	1024	Najbolje za promet između zgrada
		100 Mbit/s - IEEE 802.3u – Fast Ethernet		
100BaseT4	Upletena parica	100 m		4 UTP-a, kategorije 3
100BaseTX	Upletena parica	100 m		Obosmjerno 100 Mbit/s
100BaseFX	Optički kabel	2000 m		Obosmjerno 100 Mbit/s, dva multimodalna kabela
		1000 Mbit/s - IEEE 802.3z – Gigabit Ethernet		
1000BaseCX	Oklopljene u. p.	25 m		STP kategorije 3
1000BaseT	Upletene parice	100 m		UTP kategorije 3, (802.3ab)
1000BaseSX	Višemodalni o. k.	500 m		
1000BaseLX	Jednomodalni o. k.	3000 m		

Ethernet – CSMA/CD pristup

Definicija paketa

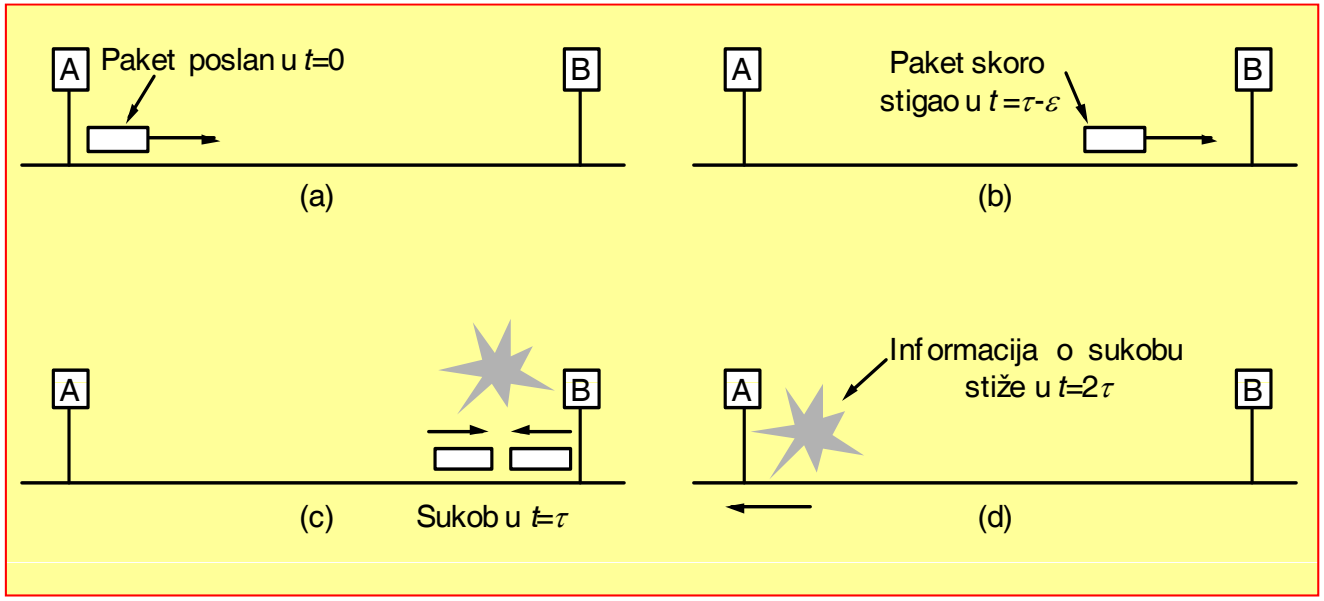
Preamble	== 7 bajtova - 7 x 10101010
Start	== 1 bajt - 10101011
Destination	== 6 bajtova MAC adrese
"višeodredišno"	== slanje grupi stanica.
"sveodredišno"	== (dest. = sve jedinice) sve stanice u mreži
Source	== 6 bajtova mac adrese
Length	== broj bajtova podatka
Data	== podatak - dobiven od mrežnog sloja
Pad	== osiguranje **64 bajta** od odredišne adrese do CRC-a
checksum	== 4 bajta CRC.

Zašto ?



Ethernet – CSMA/CD pristup

Zašto je potrebna minimalna duljina paketa ?



- Pad osigurava da prijenos traje dovoljno dugo da se poruka još uvijek šalje kada prvi bit stigne do prijemnika.
- Slanje okvira poruke mora još uvijek trajati kada do izvora stigne smetnja uzrokovana sukobom sa porukom druge stanice na mreži. **=>**
- **Minimalna duljina okvira 2τ.**

Ethernet – CSMA/CD pristup

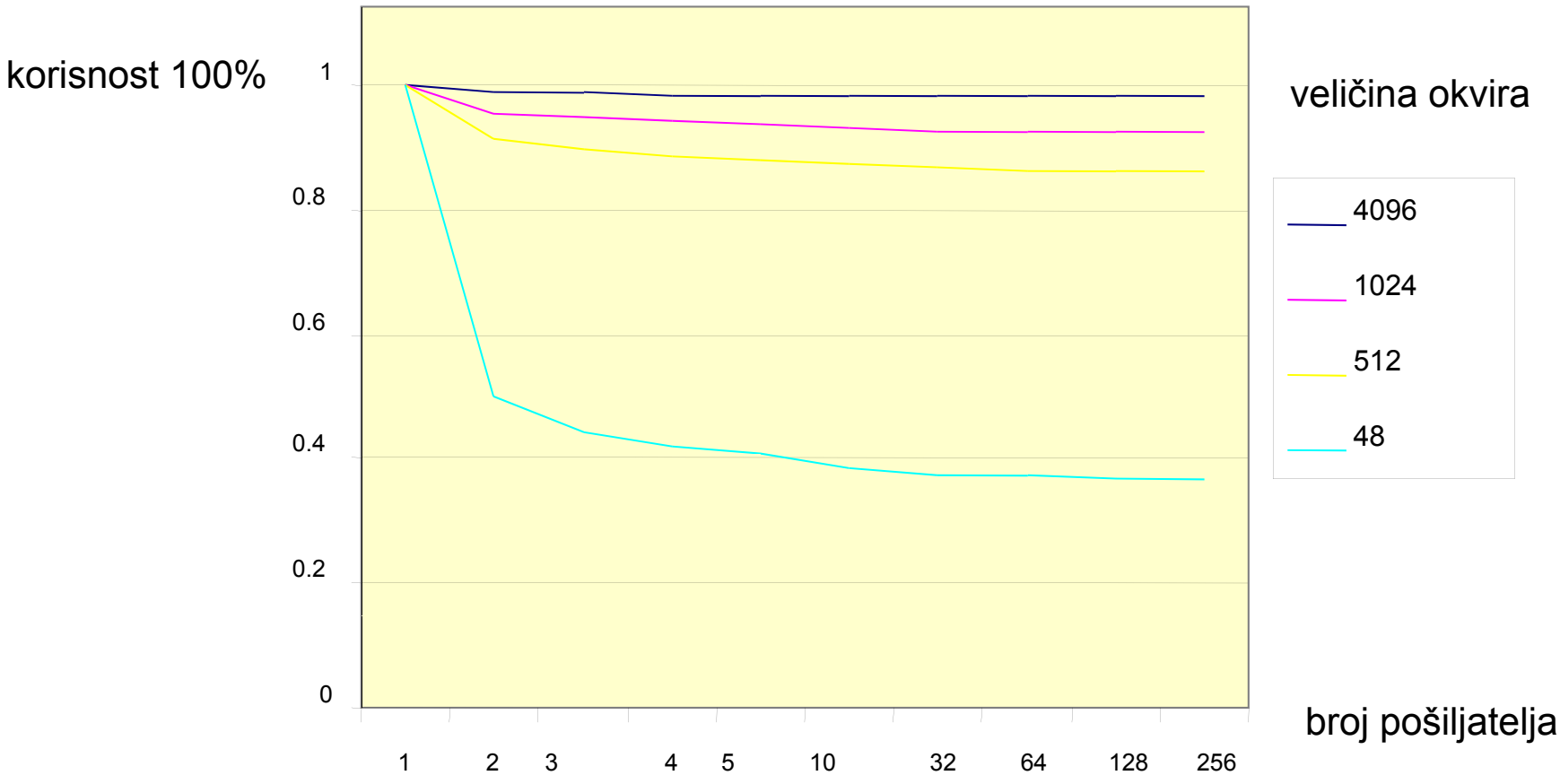
Minimalna duljina okvira 2τ – Koliko to iznosi kod 10 Mbit/s, 100 Mbit/s i 1Gbit/s ?

- **10 Mbit/s – Ethernet:**
  - **LAN duljine 2500 m**
    - **$2\tau \approx 51.2\ \mu s \rightarrow 512$ vremena bita (prema IEEE 802.3)**
    - **minimalna duljina okvira 64 bajta**
- **100 Mbit/s – Fast Ethernet:**
  - **LAN duljine 2500 m**
    - **$2\tau \approx 51.2\ \mu s \rightarrow 5120$ vremena bita**
    - **minimalna duljina okvira 640 bajta.**
    - **64 bajta za LAN duljine 250 m**
- **1Gbit/s Giga Ethernet:**
  - **LAN duljine 2500 m**
    - **$2\tau \approx 51.2\ \mu s \rightarrow 51.200$ vremena bita**
    - **minimalna duljina okvira 6400 bajta.**
    - **64 bajta za LAN duljine 25 m**

Ethernet – CSMA/CD pristup

- **"BINARY EXPONENTIAL BACKOFF" ALGORITAM:**
  - **Nakon detekcije sukoba, stanica čeka 0 ili 1 okvir.**
  - **Ako ponovno dođe do sukoba, odabire se vrijeme čekanja između 0, 1, 2 ili 3 okvira.**
  - **Ako se sukob opet ponovi čeka između 0 i 2^3 -1 vremena.**
  - **Najveće vrijeme čekanja je 2^{10}-1 (što odgovara 10 uzastopnih sukoba).**
  - **Nakon 16 sukoba dojavljuje se pogreška.**
  - **Algoritam se adaptira s obzirom na broj stanica.**

Ethernet – CSMA/CD pristup



Ethernet nije učinkovit za male okvire i veliki broj pošiljatelja

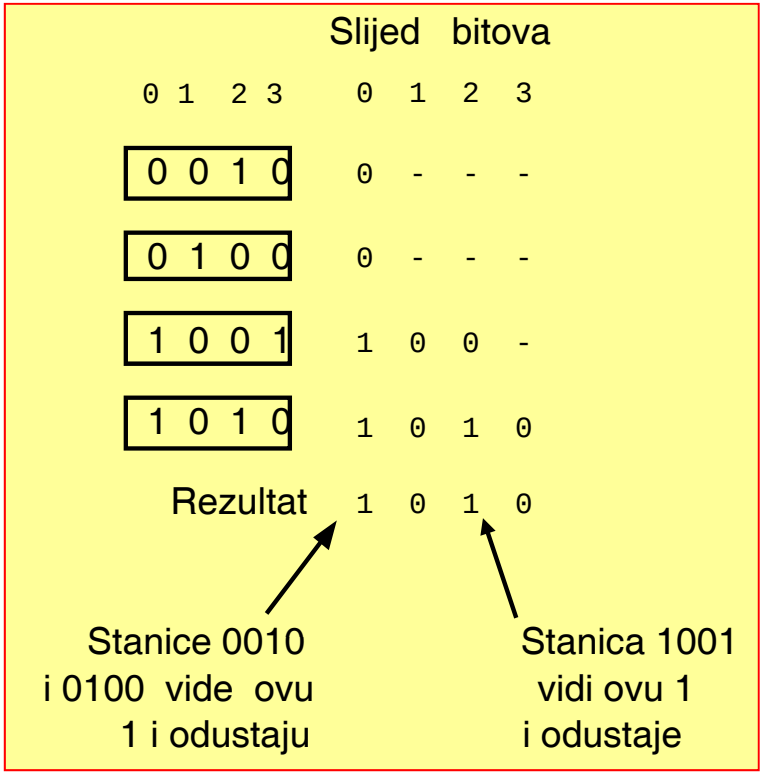
CAN - Controller Area Network

- Što je CAN ?
  - serijska sabirnica za učinkovitu podršku distribuiranim računalnim sustavima u stvarnome vremenu
  - difuzijski prijenos poruka — poruka ima identifikator umjesto adresa
  - Carrier Sense Multiple Access with Collision Avoidance (CSMA/CA) – protokol pristupa mediju
  - Istodobni zahtjevi za prijenosom okvira rješavaju se nedestruktivnom arbitražom bitova identifikatora, tako da se prenosi poruka s najvišim prioritetom.
  - Bitovi na sabirnici su ili recesivni ili dominantni.
  - Čvor koji prvi prenosi dominantni bit dobije pristup sabirnici => (binarno odbrojavanje)
- Izvorno razvijen u tvrtki Bosch GmbH, Njemačka, 1986. za primjenu u automobilima, a koristi se i u:
  - industrijskoj automatizaciji
  - ugrađenim računalnim sustavima
- CAN je standardiziran kod
  - International Standardization Organization (ISO 11898),
  - Society of Automotive Engineers (SAE J1939).
  - CAN 2.0A i CAN 2.0B

CAN – ilustracija arbitraže bitova

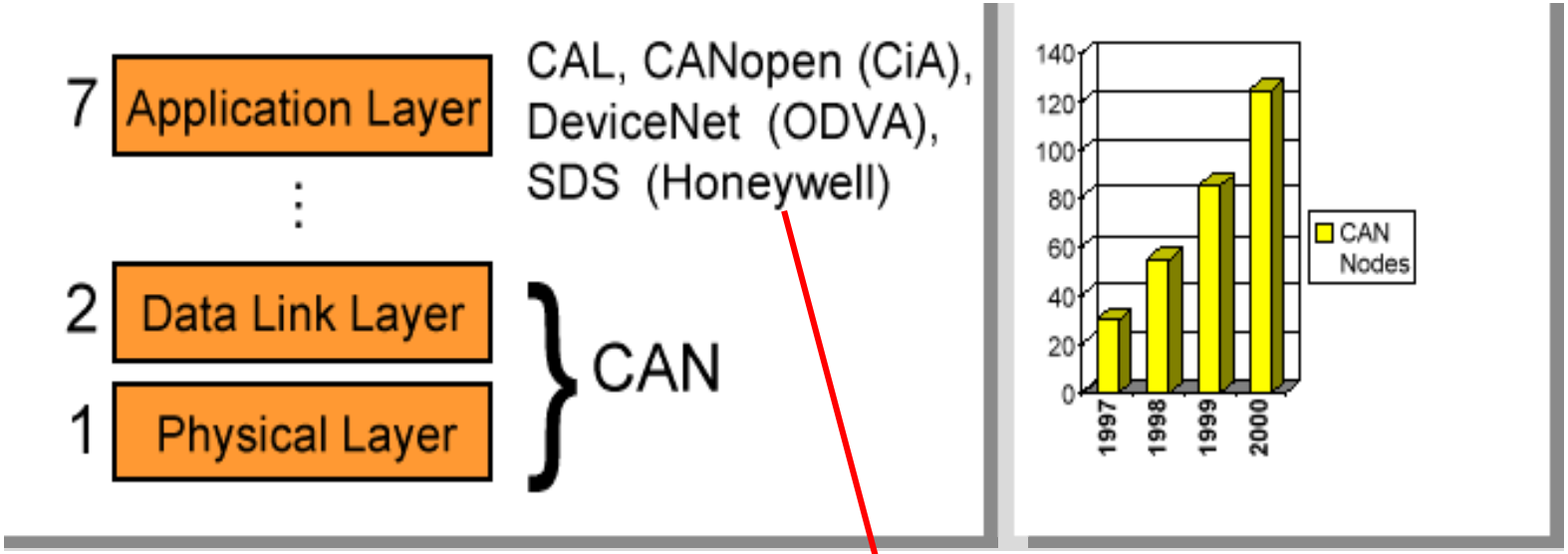
Binarno odbrojavanje:

- U prozoru sukoba svaka stanica šalje svoj identifikacijski broj.
- Na mreži se nad njima izvodi operacija **logičko ILI.**
- Pojedina stanica prepoznaje da je dobila pravo na slanje, jer nijedna druga stanica nije imala veći identifikacijski broj
- **učinkovitost d / (d+$\log_2 N$), a može se povećati do 100% ako se ILI operacija provodi nad adresama pošiljatelja počevši od bitova najviše važnosti**



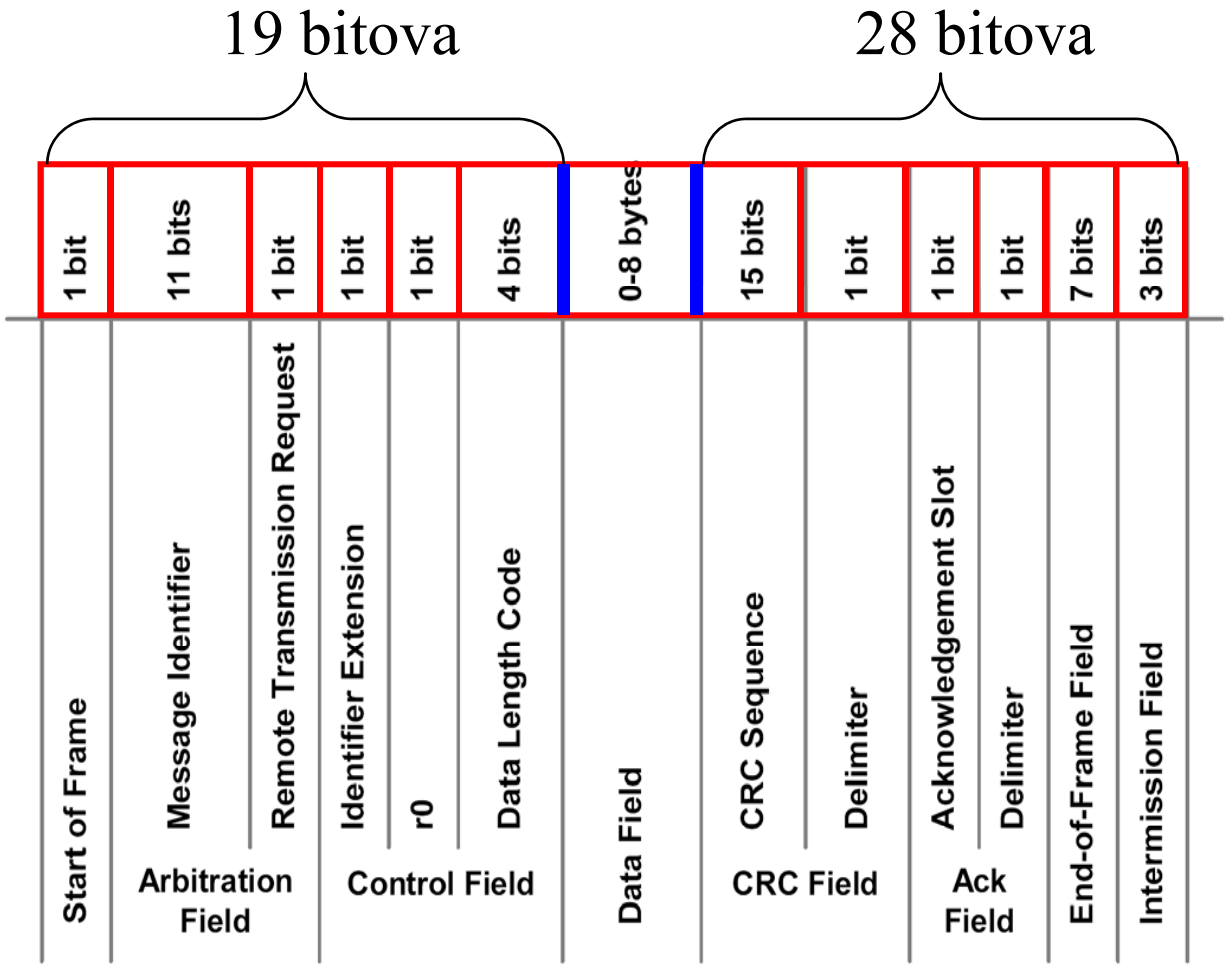
CAN i ISO Referentni Model

- **CAN protokoli spadaju unutar Podatkovnog i Fizičkog sloja OSI referentnog modela.**



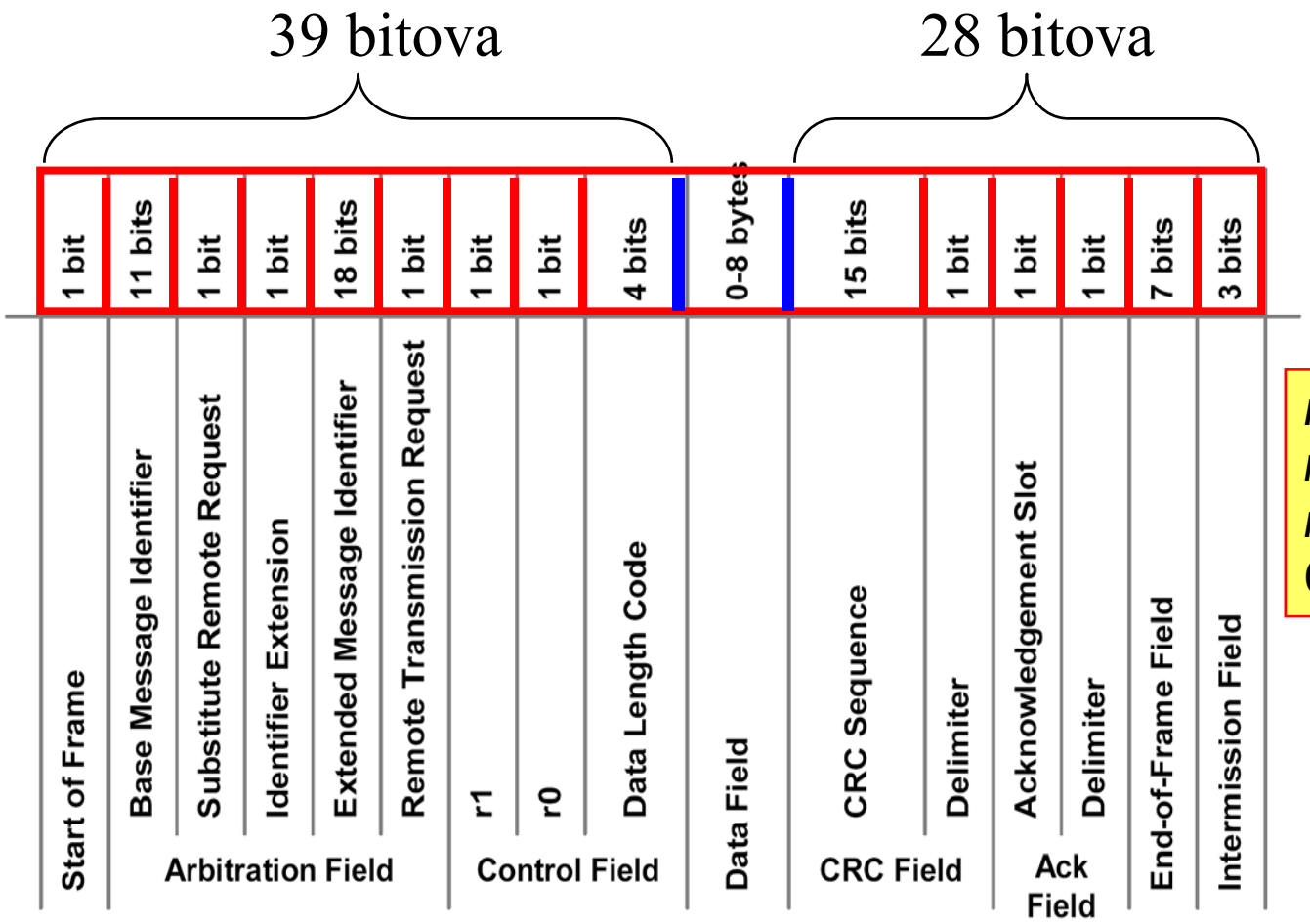
Viši protokoli zasnovani na CAN-u

CAN 2.0A – Format okvira



r = 47 bitova
m = 0-64 bita
n = 47-111 bitova
CEFmax=64/111= 0,58

CAN 2.0B – Format okvira



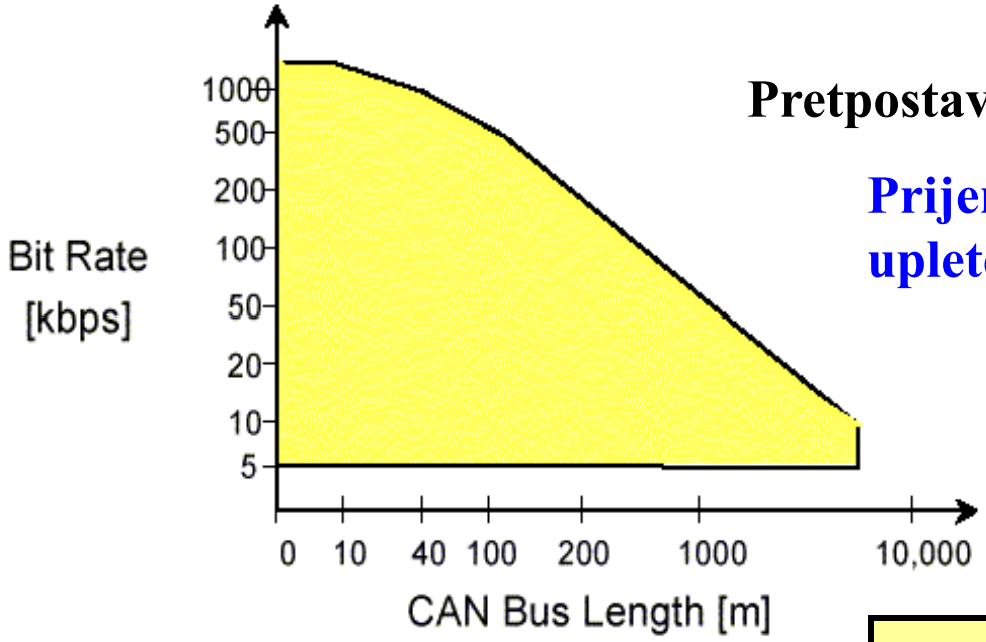
r = 67 bitova
m = 0-64 bita
n = 67-131 bit
CEFmax=64/131= 0,49

Kompatibilnost CAN 2.0A i CAN 2.0B

- 2.0B kontroleri su unatrag kompatibilni s 2.0A kontrolerima i mogu prenositi i primati poruke u bilo kojem od ova dva formata.
- Što se tiče 2.0A kontrolera postoje dva tipa:
  - Prvi može prenosti i primati samo poruke 2.0A formata.
  - Drugi, naziva se 2.0B pasivni kontroler, može:
    - slati i primati 2.0A poruke, te
    - potvrđivati prijem 2.0A poruka,
    - dok same 2.0B poruke odbacuje (ignorira).

	Frame with 11 bit ID	Frame with 29 bit ID
V2.0B Active CAN Module	Tx/Rx OK	Tx/Rx OK
V2.0B Passive CAN Module	Tx/Rx OK	Tolerated
V2.0A CAN Module	Tx/Rx OK	Bus ERROR

Duljina sabirnice naspram brzine prijenosa



Pretpostavka:

Prijenosni medij su oklopljene upletene parice

Uzrok ograničenja:

- Kao i kod Etherneta potrebna duljina poruke najmanje 2τ.

Duljina sabirnice (m)	Maksimalna brzina prijenosa (b/s)
40	1M
100	500k
200	250k
500	125k
6 km	10k

Problemi primjene CAN-a u RT sustavima

- **Pristup mediju preko arbitraže bitova identifikatora uzrokuje kašnjenje u slanju poruke**
- **Čvor ne može poslati poruku ako:**
  - **se za pristup mediju natječe neka druga poruka višeg prioriteta,**
  - **se sabirnicom već prenosi neka poruka (može biti i nižeg prioriteta) => čak i poruka najvišeg prioriteta može imati malo kašnjenje.**
- **Poruke nižeg prioriteta imat će veća kašnjenja.**
- **Teško izvesti sustav otporan na kvarna stanja (redundantna sabirnica)**
- **Rješenje: Uvesti determinizam u komunikaciju - uspostaviti statički ciklički redoslijed slanja poruka:**
  - **važno za sustave upravljanja u stvarnom vremenu i za**
  - **distribuirane računalne sustave otporne na kvarna stanja**
  - **TTCAN, TTP, FlexRay**

PROFIBUS - familija

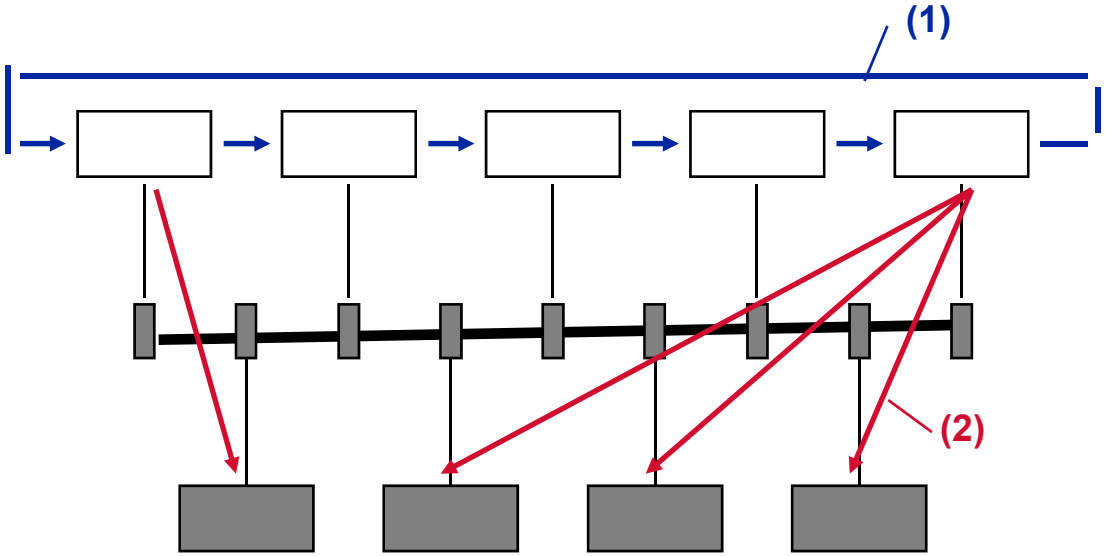
- PROFIBUS – DP (Distributed Processing)
  - Namijenjen za komunikaciju između PLC–ova i decentraliziranih U/I uređaja,
  - U pravilu jedan master koji proziva U/I uređaje sukladno listi prozivanja (Polling List)
- PROFIBUS – PA (Process Automation)
  - Omogućuje prijenos podataka i energije preko dvožične sabirnice
  - Namijenjena povezivanju senzora i aktuatora u opasnim zonama (npr. kemijska industrija)
- PROFIBUS – FMS (Field Messaging Specification)
  - "Peer–to–peer" komunikacija po načelu prosljeđivanja žetona

- PRIMJENE
  - Procesna automatizacija
  - Sponzori: Siemens, ABB, ...
  - Tržište: oko 26 % (sve tri vrste)

Karakteristike

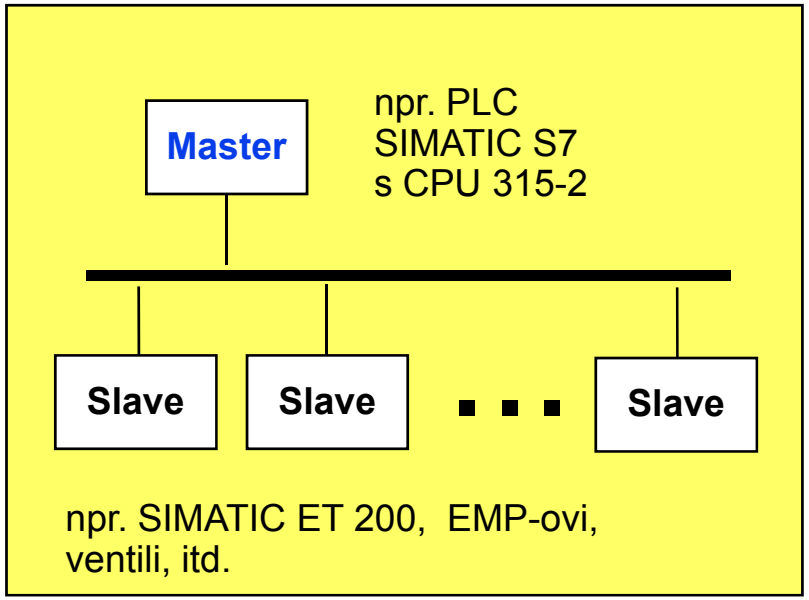
- Procesna i/ili S/A mreža s niskim i srednjim performansama, prema standardu DIN 19245
- Prijenosni medij:
  - Oklopljene, upletene parice
  - Stakleni ili plastični optički kabeli
- Pristup mediju:
  - Prosljeđivanje žetona (Token passing) i
  - Master/Slave
- Brzina prijenosa 9.6 Kbit/s do 12 Mbit/s
- Duljina:
  - Preko 9 km s upletenim paricama,
  - Preko 23 km sa staklenim optičkim kabelima
- Najveći broj čvorova u mreži: 127

Pristup mediju – PROFIBUS FMS



- Prosljeđivanje žetona između aktivnih čvorova/stanica **(1)**
- Master-slave između aktivnih i pasivnih čvorova **(2)**

Komunikacija s PROFIBUS DP i PA



- **Povezivanje U/I uređaja (S i A) na aktivni čvor (npr. PLC)**
- **Brzi prijenos male količine podataka:**
  - **Ciklička Master/Slave komunikacija**
  - **Rad s 1 master čvorom**
- **Izmjena podataka:**
  - **Master – Senzori: Prijenos s čitanjem**
  - **Master – Aktuatori: Prijenos s pisanjem**

TTCAN, TTP i FlexRay

www.can.bosch.com

BOSCH

www.flexray-group.com

BMW Group

DAIMLERCHRYSLER

GM

PHILIPS

Digital DNA from Motorola

BOSCH

TTTech

AMS

ARM POWERED

Audi

Honeywell

www.tttech.com

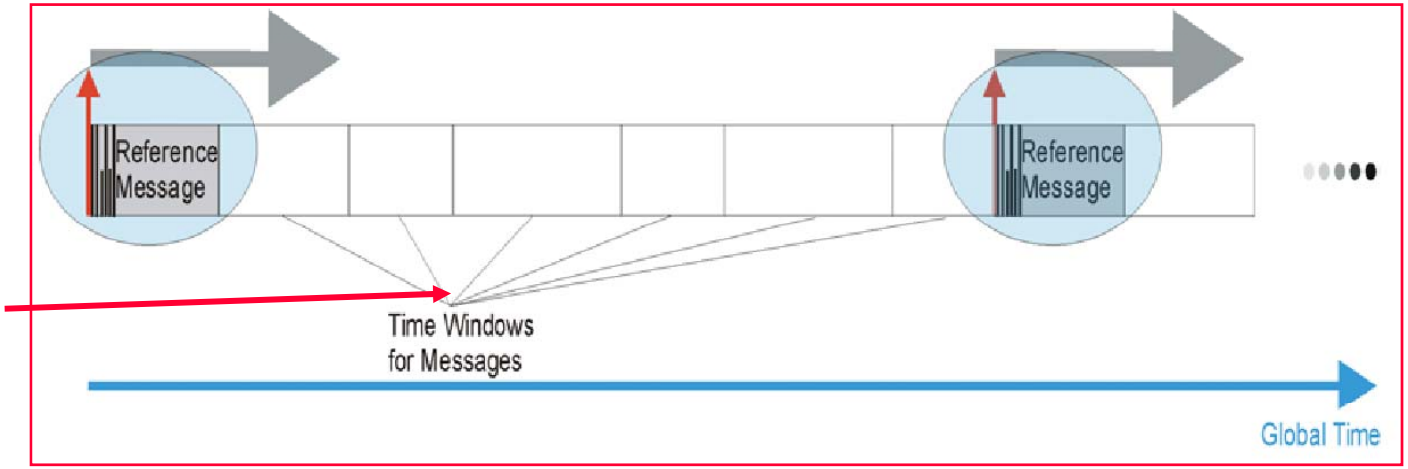
TTCAN protokol

- TTCAN - Time-Triggered CAN
- Dvije razine proširenja CAN-a:
  - 1. razina proširenja
    - TT komunikacija na CAN-u zajamčena slanjem referentne poruke "time master-a" (1 bajt).
    - Otpornost na kvarna stanja osigurava se redudantnim "time master-ima".
    - Ne treba sklopovskih izmjena CAN kontrolera.
  - 2. razina proširenja
    - Uspostavlja se globalna sinkronizirana vremenska baza u komunikacijskom sustavu.
    - Provodi se kontinuirano korigiranje drifta između CAN kontrolera.
    - Referentna poruka od 4 bajta.
    - Trebaju novi TTCAN kontroleri.

Pregled mehanizama TTCAN-a

- **Vremenska baza se osigurava unutarnjim ili vanjskim klokom.**
- **TT komunikacije se pokreću referentnom porukom "time mastera". Period između dviju referentnih poruka – osnovni ciklus:**

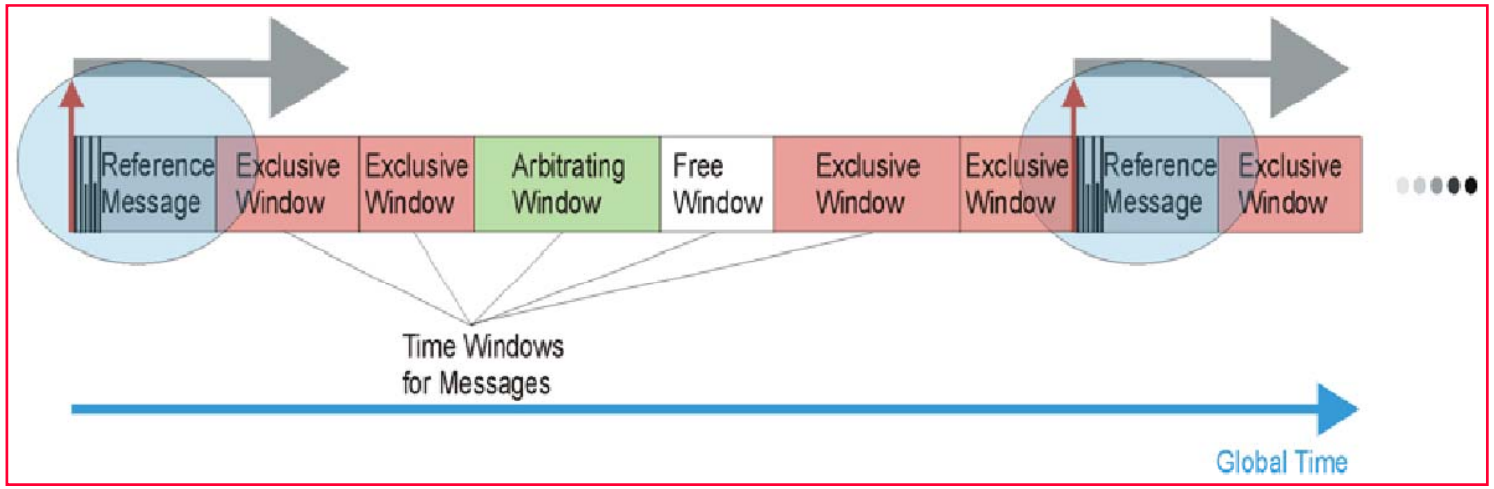
Vremenski prozori za poruke



- **Tri tipa vremenskih prozora:**
  - **Isključivi vremenski prozor (Exclusive time window),**
  - **Arbitražni vremenski prozor (Arbitrating time window),**
  - **Slobodni vremenski prozor (Free time window).**

Vremenski prozori

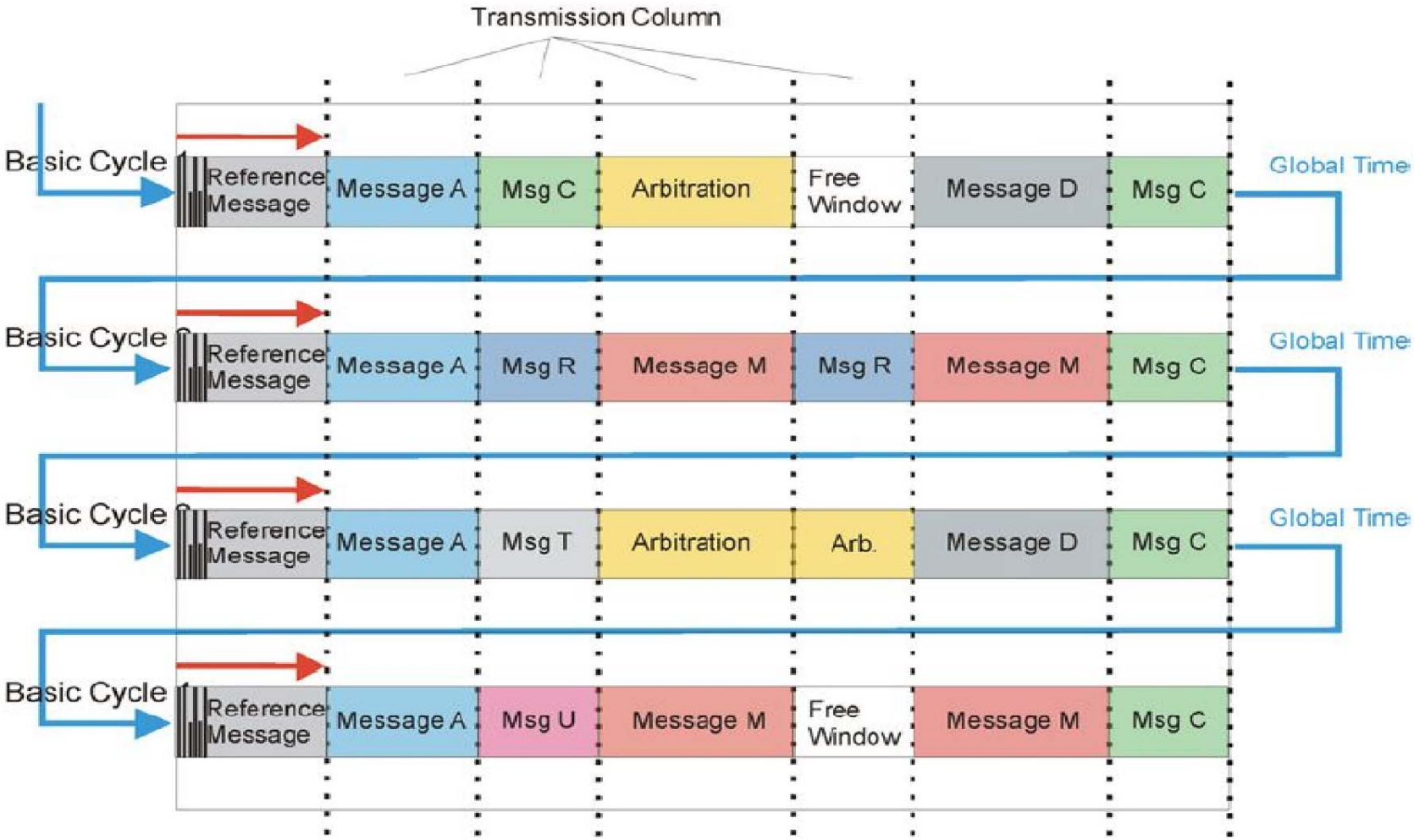
- **Isključivi prozor (Exclusive Window)**
  - **Isključivo rezerviran za jednu poruku, bez natjecanja za pristup sabirnici**
  - **Onemogućeno automatsko ponavljanje slanja neispravno poslane poruke, čime se jamči da poruke u ovom prozoru ne kasne**
- **Arbitražni prozor (Arbitrating Window)**
  - **Poruke se natječu za pristup sabirnici mehanizmom bitovne arbitraže CAN-a**
- **Slobodni prozor (Free Window)**
  - **Rezerviran za naknadna proširenja mreže**



Matrica sustava

- U praksi je često više regulacijskih petlji zatvoreno preko iste komunikacijske mreže s različitim vremenima uzorkovanja, a prenose se i druge poruke
- Za sve je poruke potrebno definirati trenutke slanja
- Osnovni ciklus TTCAN-a često ne pruža dovoljno fleksibilnosti za zadovoljavanje komunikacijskih zahtjeva =>
  - Povezuje se više osnovnih ciklusa =>
  - Redoslijed poruka definira tzv. MATRICA SUSTAVA (komunikacijska matrica) -> Ilustracija na sljedećem slideu
- Matrica sustava projektira se off-line (na isti način kao i Lista prozivanja kod Master/slave komunikacije)

Primjer cikličkog redoslijeda poruka na TTCAN-u



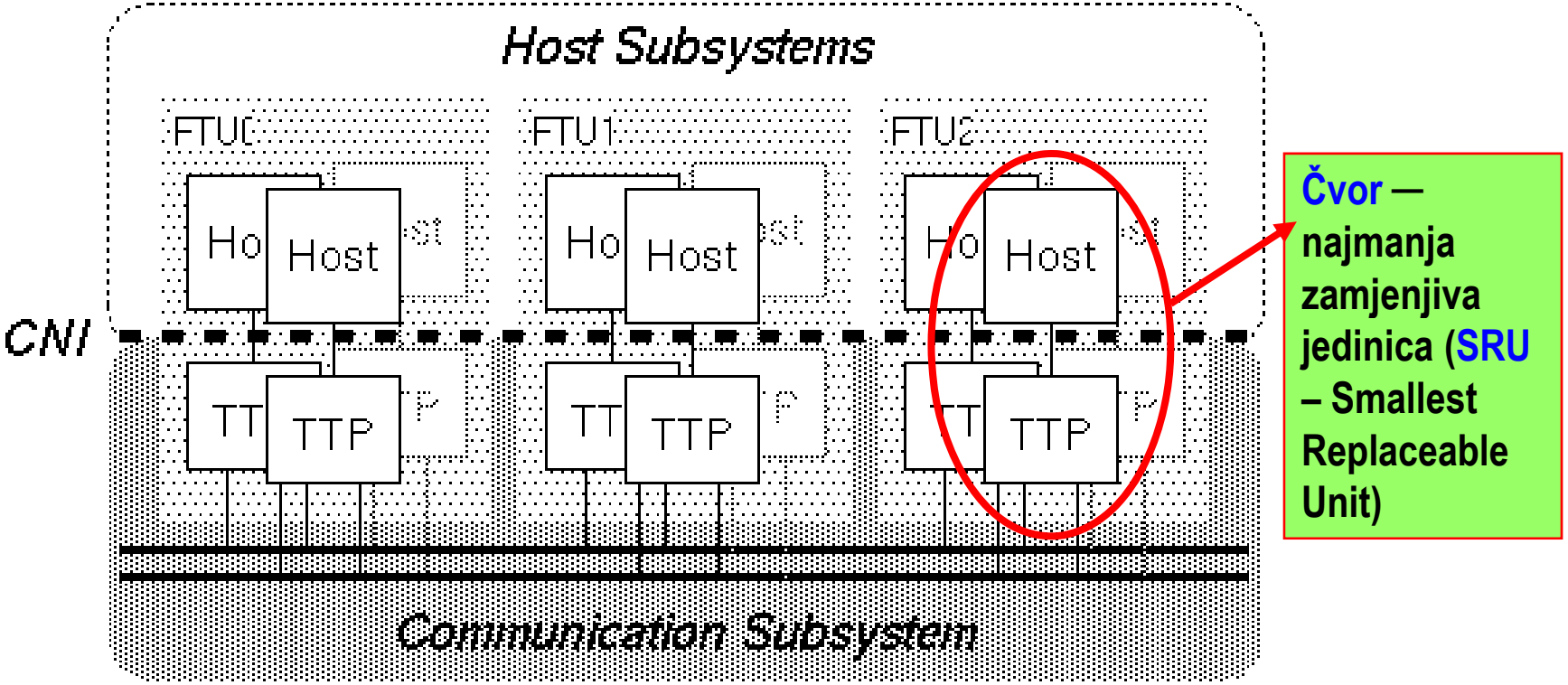
TTP protokoli

- TTP — Time-Triggered Protocol
- Cilj: Pouzdan RT protokol niske cijene
- Izvorna primjena: “X-by-wire”
- Dvije inačice
  - TTP/C - (inačica C – za hard real time)
    - distribuirani sustav otporan na kvarna stanja
  - TTP/A - (inačica A – za soft real time)
    - nije distribuiran protokol
    - za jeftine senzor-aktuator mreže
    - master- slave komunikacija (slično kao kod Profibus DP)
    - komunikacija preko UART-a
    - TT komunikacija za $2 po čvoru

TTP/C

- TT komunikacijski protokol za distribuirane sustave za rad u stvarnom vremenu koji su otporni na kvarove
- Zasniva se na TDMA (Time Division Multiple Access) strategiji pristupa mediju
  - Malo kašnjenje i mala promjenljivost prijenosa poruka
  - Malo redundantnih bitova u okviru
  - Nema potrebe za ponavljanjem slanja neispravnih poruka
- Distribuirana sinkronizacija lokalnih satova stvarnog vremena otporna na kvarove
- Distribuirano upravljanje redundancijom
- Brzina prijenosa do 25 Mbit/s, moguće i više

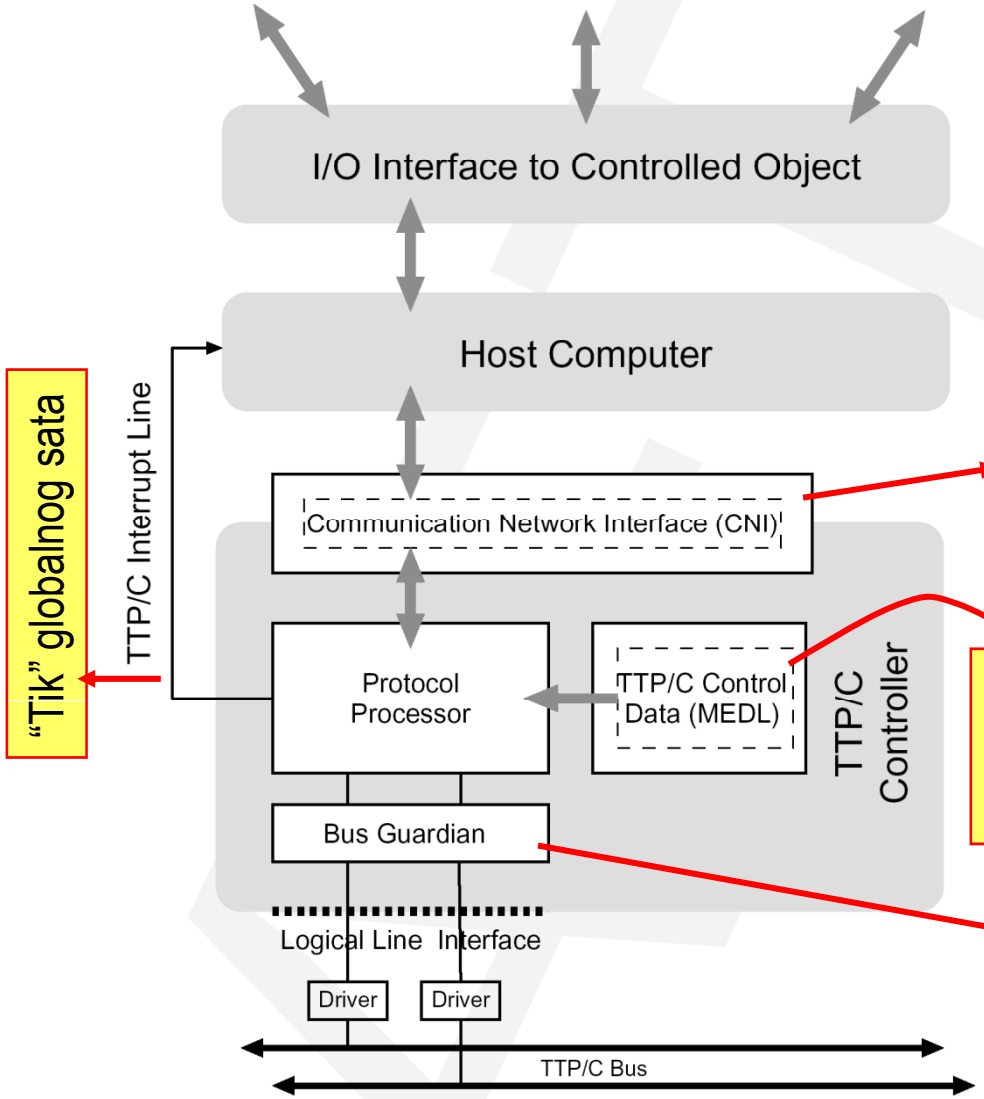
Struktura TTP/C sustava



CNI: Communication Network Interface

- TTP – komunikacijski kontroler
- CNI – komunikacijsko mrežno sučelje između glavnog procesora i TTP kontrolera
- FTU – jedinica otporna na kvarove

Konfiguracija čvora



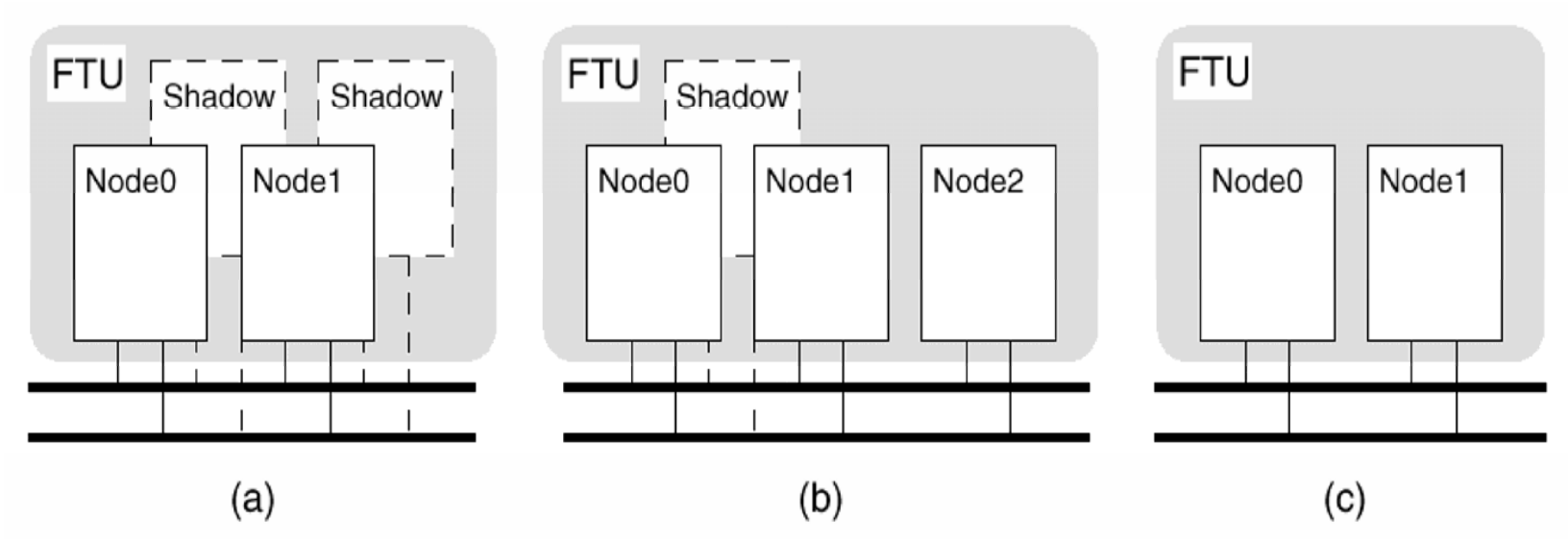
Dvopristupna RAM memorija

MEDL – Message Descriptor List:

- CNI adresa poruke + trenutci slanja + atribut poruke

Nadzire regularnost signala na sabirnici

Redundancija u TTP/C-u



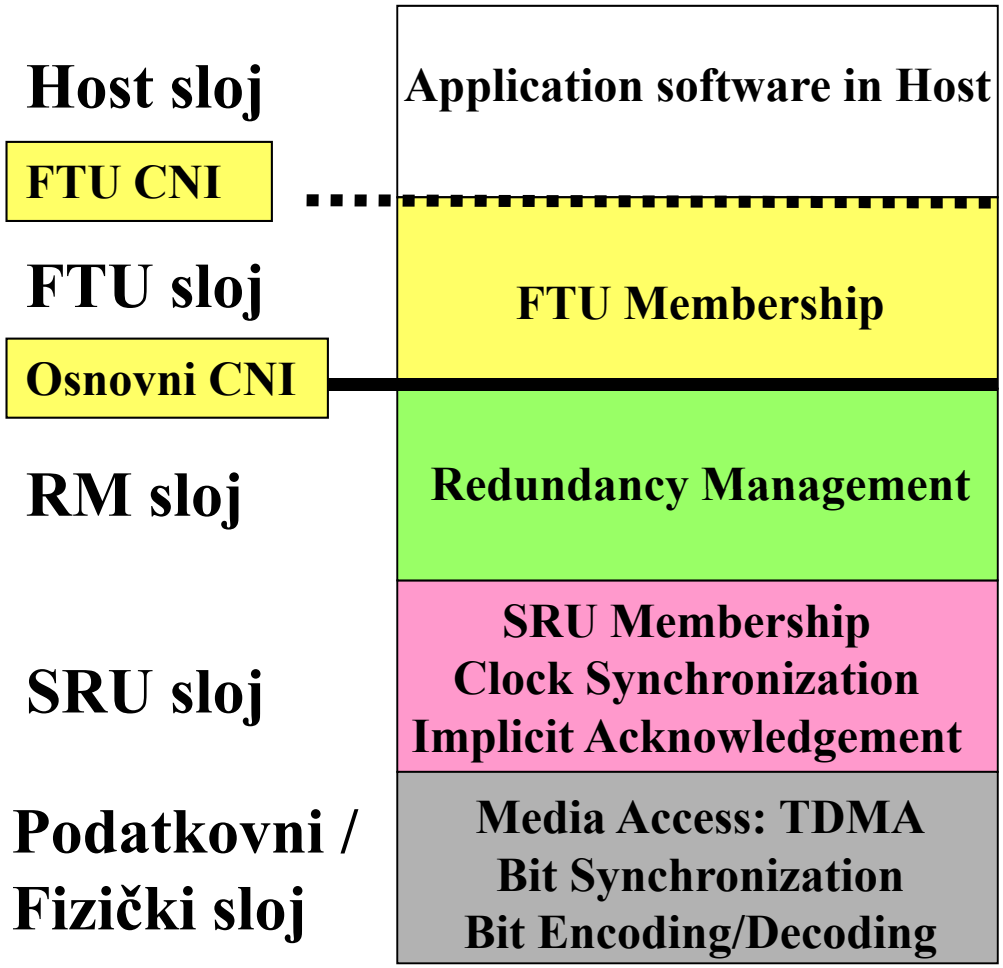
FTU – primjeri konfiguracija:

(a) Dva aktivna čvora, dva pričuvna čvora

(b) Tri aktivna čvora s jednim pričuvnim (Triple Modular Redundancy)

(c) Dva aktivna čvora bez ijednog pričuvnog

TTP/C – slog protokola



Aplikacijski softver u glavnom procesoru čvora

Sučelje između FTU sloja i Host sloja

Grupira dva ili više čvorova u FTU-ove

Sučelje za razmjenu podataka RM sloja i FTU sloja

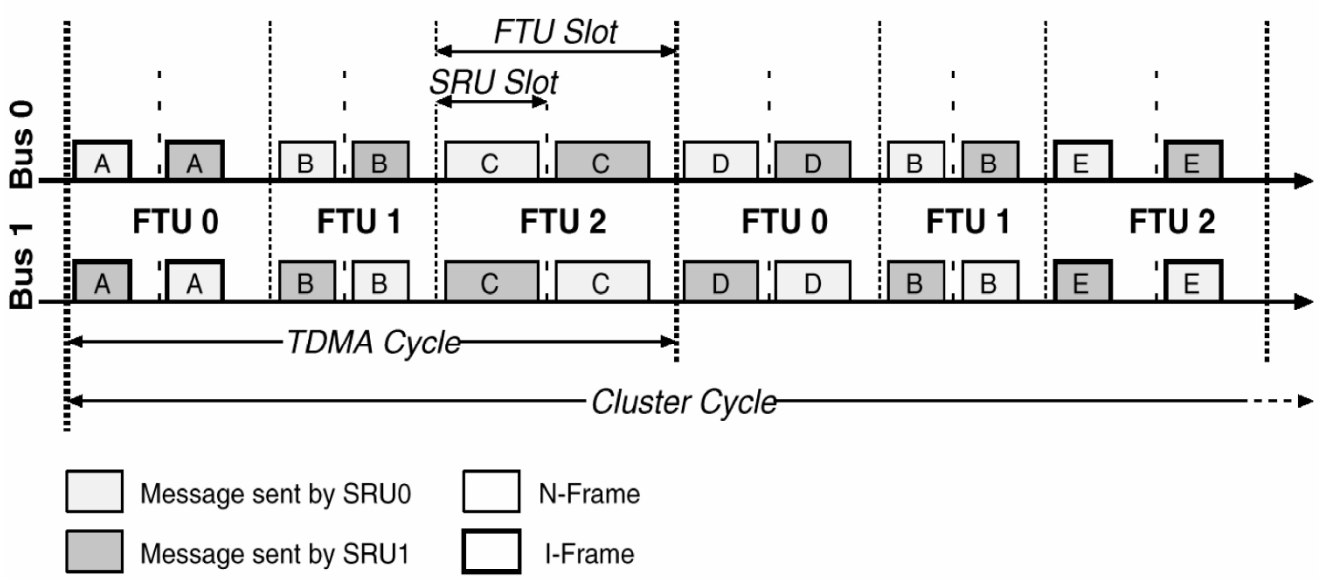
Zamjena neispravnog čvora pričuvnim (shadow) čvorom

Sprema podatkovna polja primljenih okvira u memoriju CNI DPRAM-a (prema MEDL listi)

Izmjenjuje okvire između čvorova

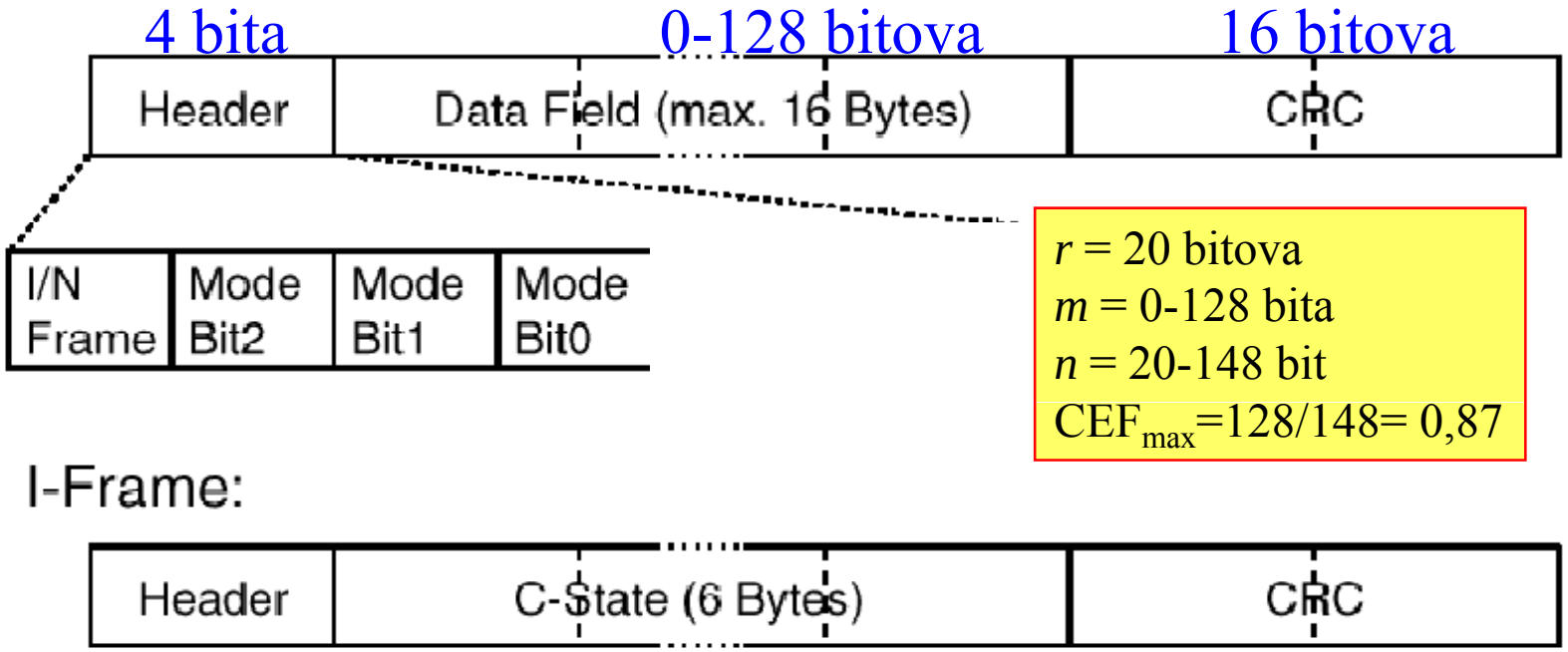
Ciklus u TTP/C-u

- SRU ciklus
  - Ciklus u kojem SRU pošalje poruku
- FTU ciklus
  - U primjeru na slici FTU se sastoji od 2 SRU, svaka SRU pošalje poruku na obje sabirnice
- TDMA ciklus
  - Ciklus u kojem svi FTU-ovi u mreži pošalju poruku
- Ciklus "klastera"
  - Sadržaj i duljina okvira više TDMA ciklusa u nizu mogu se razlikovati
  - Ovaj ciklus označava period ponavljanja takve skupine TDMA ciklusa



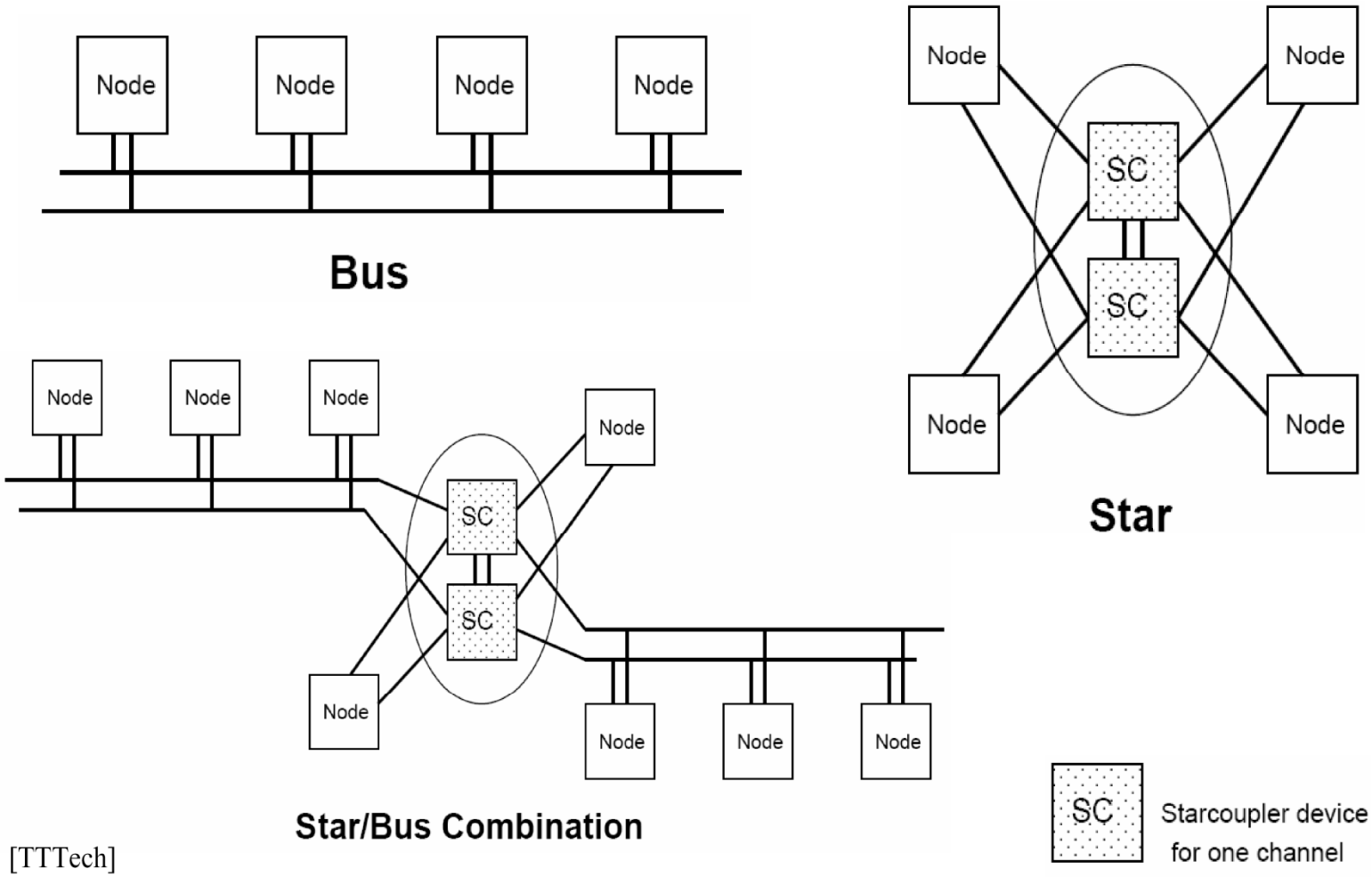
TTP/C - Okvir

- **I-okviri se koriste za inicijalizaciju**
- **N-okviri se koriste za normalne poruke**



r = 20 bitova
m = 0-128 bita
n = 20-148 bit
CEF_{max}=128/148= 0,87

TTP/C - topologije



[TTTech]

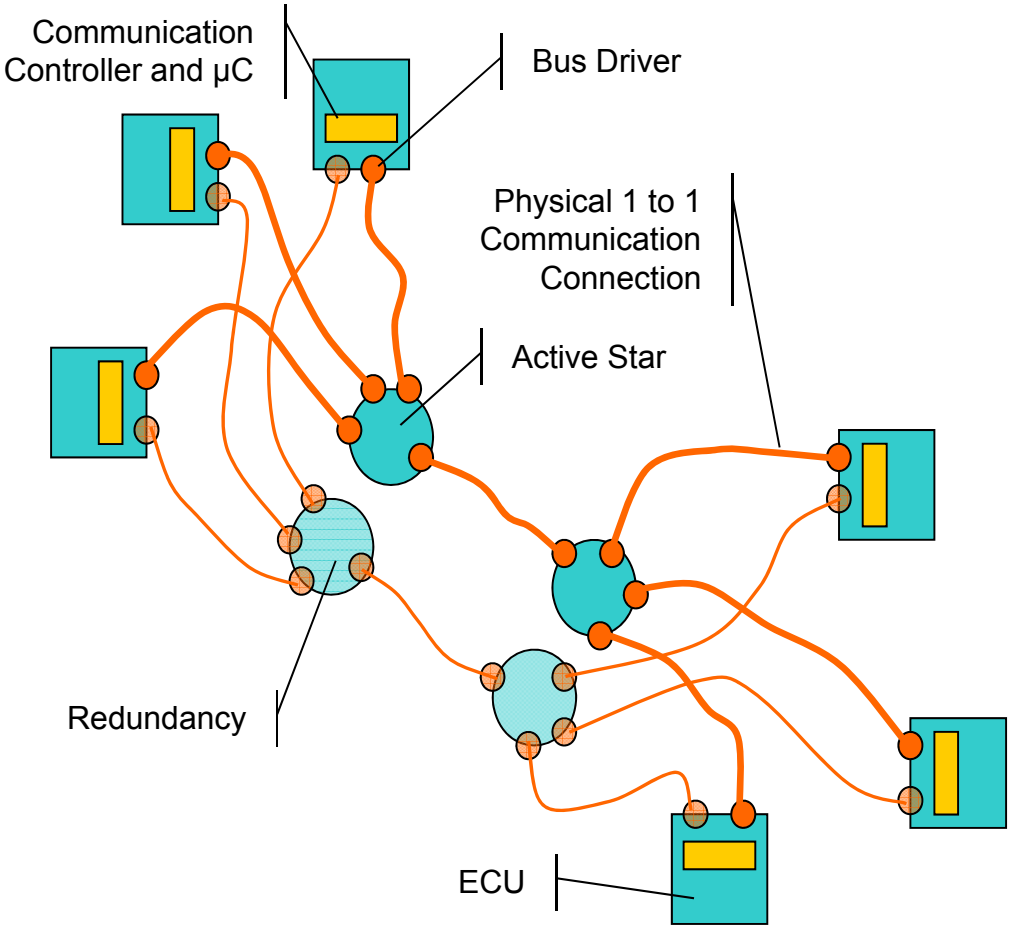
Prednosti i nedostaci TTP/C-a

- **Prednosti**
  - Protokol jednostavan za implementaciju
  - Determinističko vrijeme odziva
  - Nema gubljenja vremena na slanje “polling” poruke
- **Nedostaci**
  - Gubljenje resursa kada su neki čvorovi izvan funkcije
  - Sat stvarnog vremena mora biti vrlo stabilan
  - Fiksna dimenzija mreže za vrijeme instalacije

FlexRay

- Komunikacijski protokol za distribuirane sustave za rad u stvarnom vremenu koji su otporni na kvarove — glavni konkurent TTP prtokolu
- Podržava statičku (TDMA) i dinamičku (ET) komunikaciju — Za svaku zaseban vremenski odsječak bez preklapanja
- Podržava optičke i električke prijenosne medije
- Pouzdano otkrivanje pogrešaka u vremenskom području (Bus guradian) i u području vrijednosti (CRC)
- Podržava zvjezdaste i sabirničke topologije
- Ciljana brzina prijenosa 5 i 10 MBit/s, a može i više, na sabirnici do 64 čvora
- Otpornost na kvarna stanja — omogućuje redundantne komunikacijske kanale

FlexRay – Topologije (1)

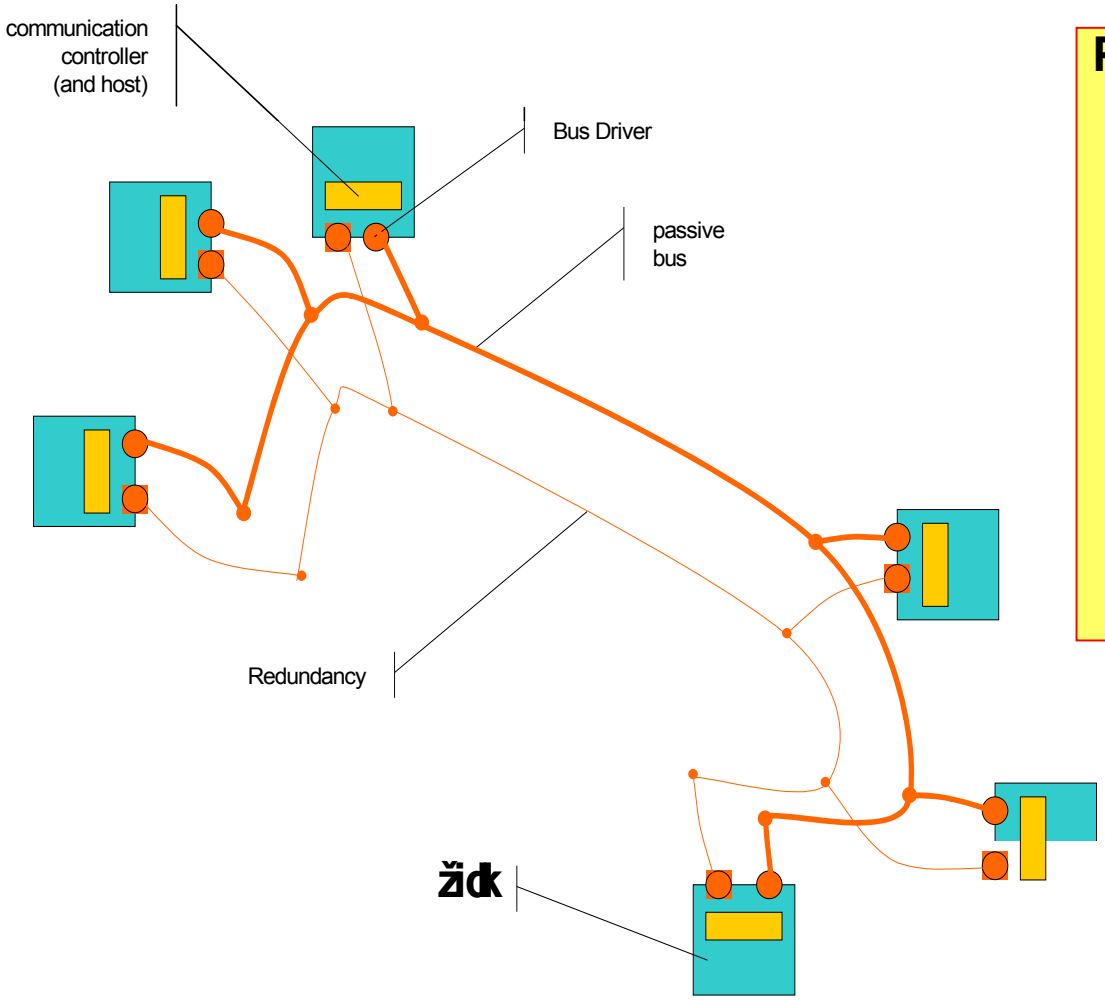


AKTIVNA ZVIJEZDA:

- **Opcijski redundantni komunikacijski kannali**
- **"Točka-točka" komunikacija u kombinaciji s aktivnim zvijezdama**
- **Podržava brzinu prijenosa 5 Mbit/s**

ECU – Electrical Control Unit

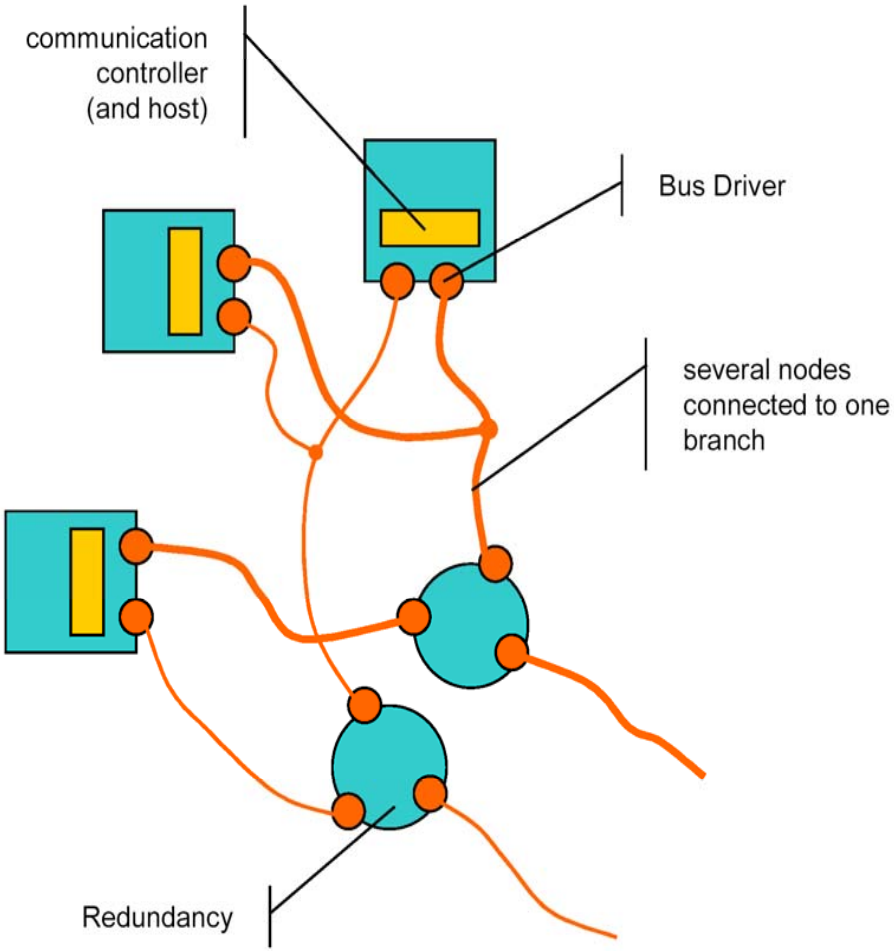
FlexRay – Topologije (2)



PASIVNA SABIRNICA

- **Rješenje s ograničenjima**
- **Opcijski redundantni komunikacijski kanali**
- **Brzina prijenosa, slično kao kod CAN-a, dakle niža nego kod zvijezde**

FlexRay – Topologije (3)



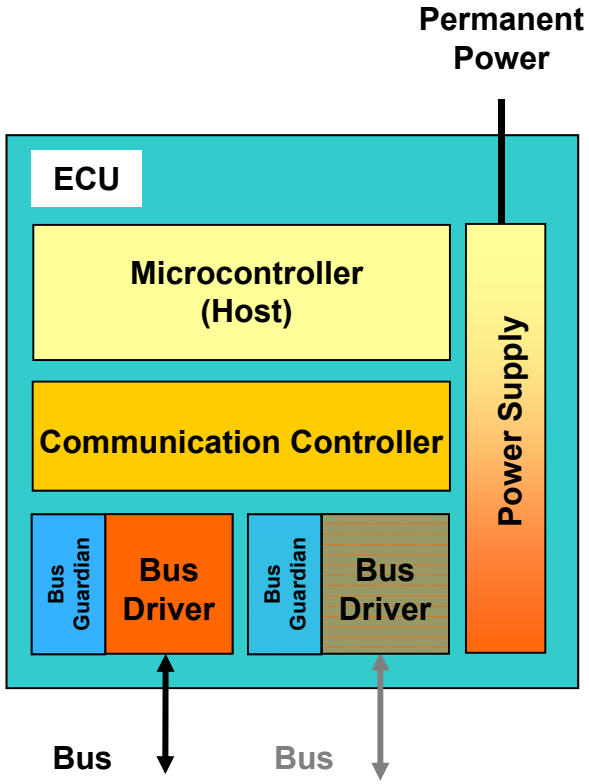
Kombinacija

AKTIVNA ZVIJEZDA

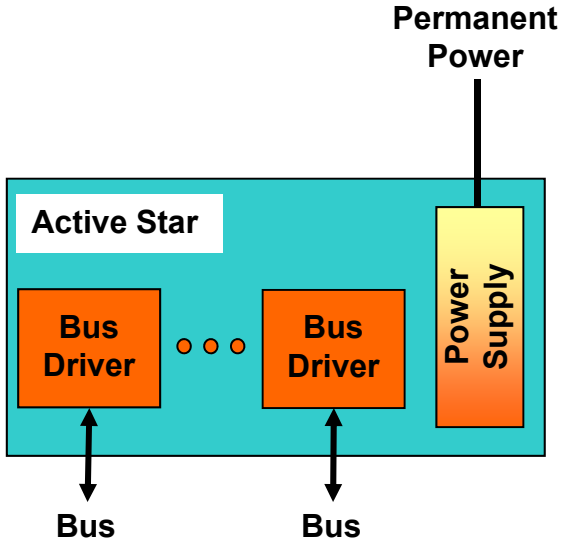
+

PASIVNA SABIRNICA

FlexRay – ECU i Aktivna zvijezda



- CC upravlja komunikacijom između glavnog računala čvora i sabirnice
- BG nadzire vremensku ispravnost prijenosa poruka

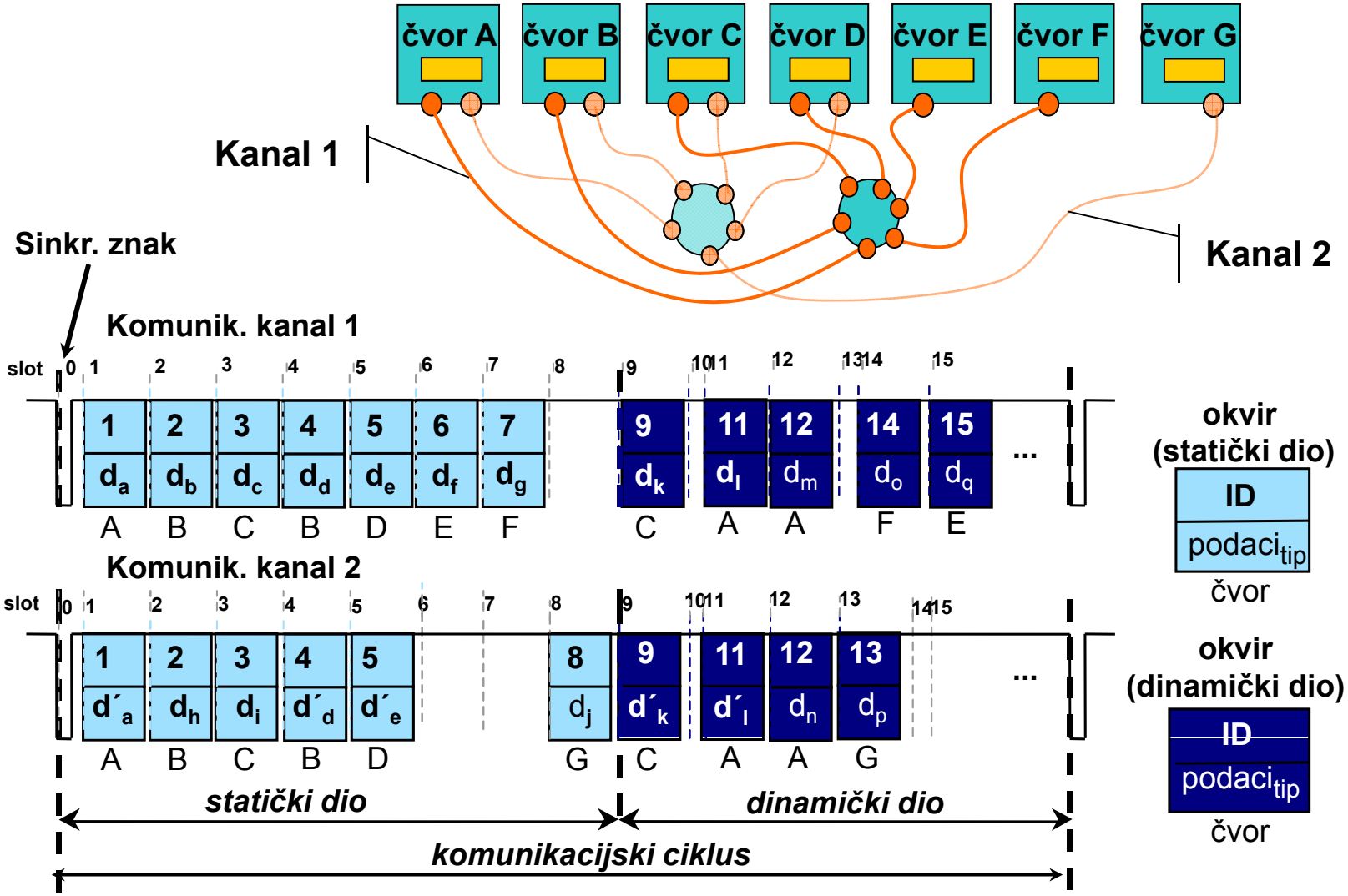


- Nema glavnog računala
- Samo veći broj "Bus Driver-a"

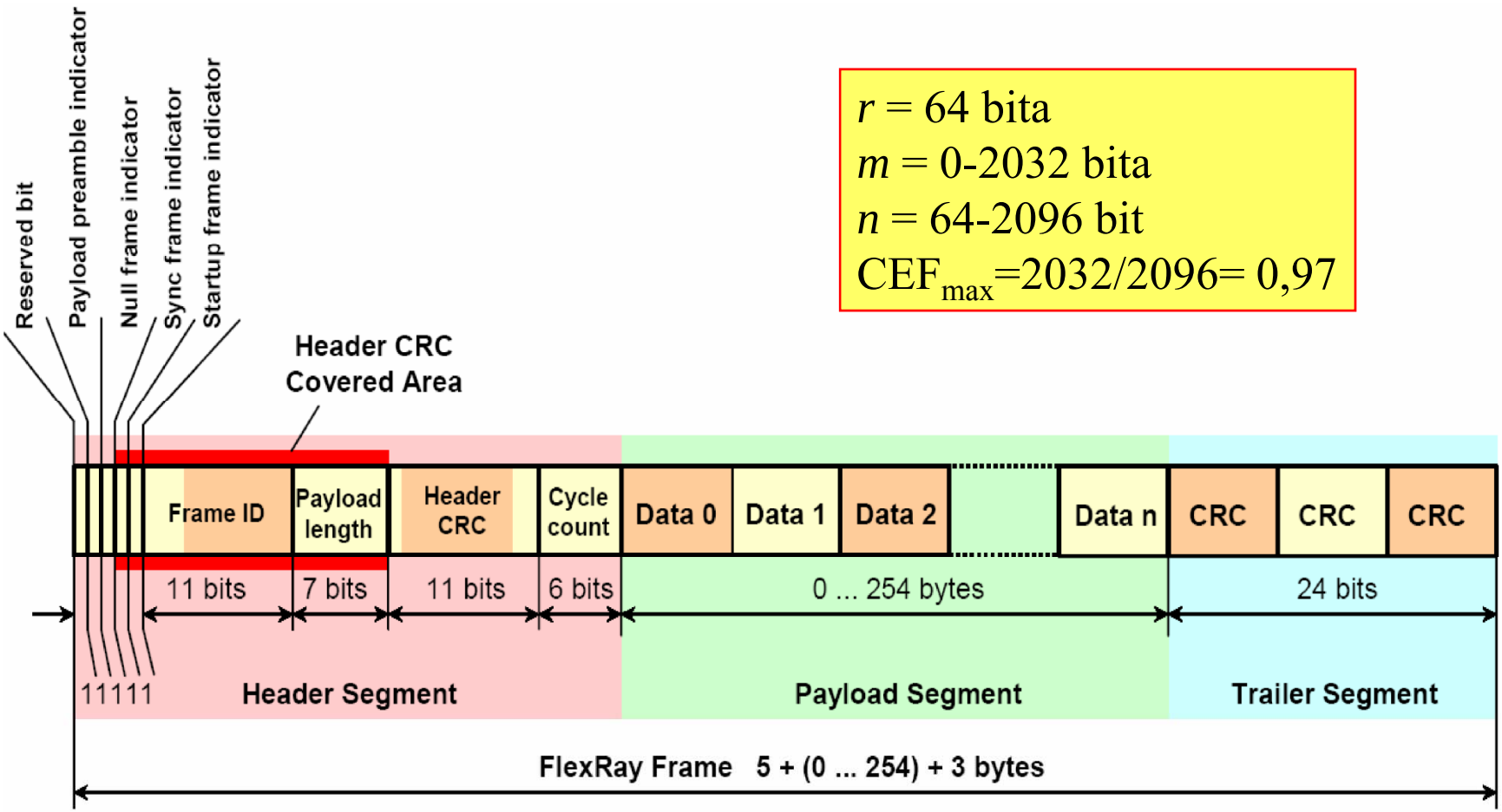
FlexRay – prijenos okvira (1)

- **Komunikacijski ciklus podijeljen je na dva dijela:**
  - **Statički dio**
    - **TDMA koncept slanja**
    - **Za poruke visokog prioriteta**
    - **Svaki čvor dobiva vlastiti vremenski odsječak**
    - **Čvorovi koji su spojeni na oba komunikacijska kanala šalju istodobno na oba**
  - **Dinamički dio**
    - **Za poruke nižeg prioriteta**
    - **Poruke se šalju prema "Byteflight" protokolu**
      - Fleksibnilni TDMA – slično ET kod CAN-a, ali s cikličkim vremenom
    - **Promjenljivi vremenski odsječci**

FlexRay – prijenos okvira (2)



FlexRay – format okvira



r = 64 bita
m = 0-2032 bita
n = 64-2096 bit
CEF_{max}=2032/2096= 0,97

Usporedba TTP/C, FlexRay

TTP/C

- Kvalitetnije uključene sigurnosne funkcije
- Manje fleksibilan
  - nema asinkronog prijenosa, ali se razvija, tako da se emulira u softveru
- Bolje razrađen od FlexRay-a, jer se razvija preko 20 godina
- Niža cijena po čvoru

FlexRay

- Fleksibilniji od TTP/C-a
  - omogućuje i sinkroni i asinkroni prijenos
- Neke sigurnosne funkcije nisu uključene u komunikacijski kontroler, već su prepuštene aplikacijskim programima
- Još uvijek u razvoju
  - FlexRay konzorcij osnovan 1999. godine

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
Fakultet elektrotehnike i računarstva
Zavod za automatiku i računalno inženjerstvo
Unska 3, Zagreb, HRVATSKA

Poglavlje 11:
Izbor vremena uzorkovanja u raspodijeljenim računalnim sustavima upravljanja

(Više regulacijskih petlji zatvorenih preko iste komunikacijske mreže)

© Ivan Petrović

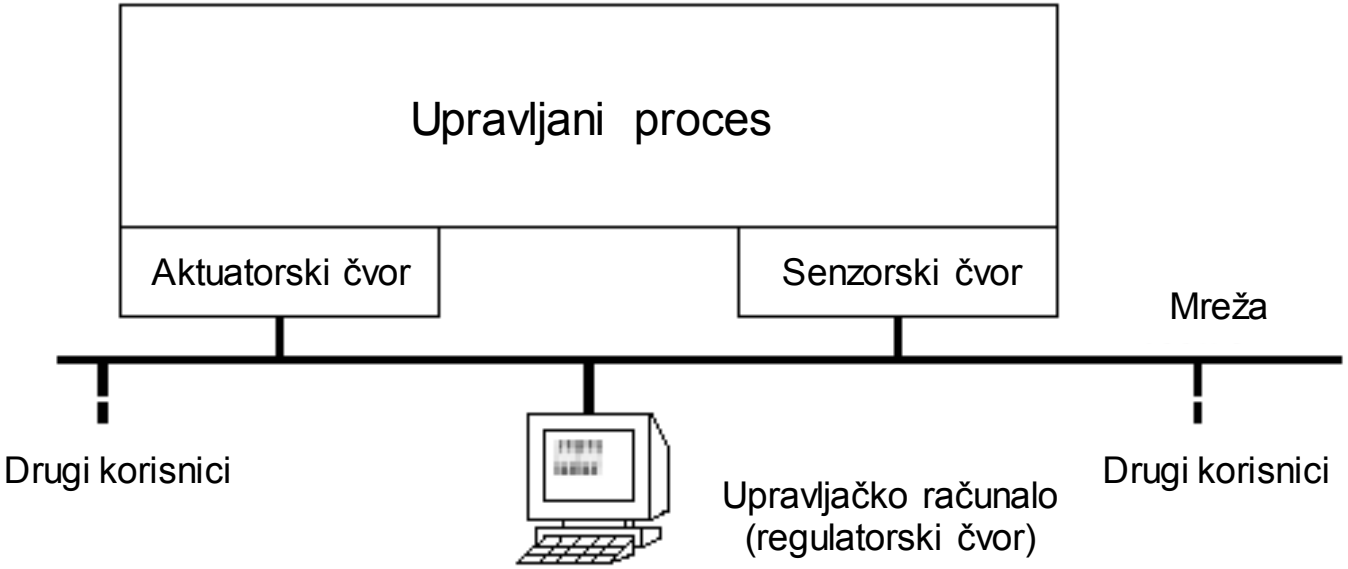
Sadržaj poglavlja:

- **Uvod**
  - * **Struktura zatvorenog sustava upravljanja preko komunikacijske mreže**
  - * **Zašto upravljanje u zatvorenoj petlji preko mreže – prednosti i problemi?**
  - * **Zahtjevi na "upravljačke" komunikacijske mreže**
  - * **Zadatak**
- **Izbor vremena uzorkovanja više regulacijskih petlji zatvorenih preko iste mreže**
  - * **Identifikacija problema**
  - * **Algoritam za određivanje trenutaka uzorkovanja (slanja poruka) u mrežama s prosljeđivanjem zaloga (TT mrežama)**
  - * **Algoritam za određivanje trenutaka uzorkovanja (slanja poruka) u CAN mreži**

© Ivan Petrović

Uvod

* **Struktura zatvorenog sustava upravljanja preko komunikacijske mreže**



U literaturi se koriste nazivi za ove sustave upravljanja:

- **Networked Control Systems (NCS)**
- **Integrated Communication and Control Systems (ICCS)**

* Zašto upravljati preko komunikacijske mreže?

Dobici:

- **Modularnost:** Decentralizacija upravljanja, Distribuirano procesiranje;
- **Integrirana dijagnostika:** Brzo i jednostavno održavanje, otpornost na kvarna stanja;
- **Niska cijena:** smanjenje ožičenja, razvoj sustava korak-po-korak.

Problemi:

- **Komunikacijska kašnjenja** zbog:

  a) ograničene propusne moći kom. mreže,

  b) preopterećenja čvorova i mreže.

- **Ova su kašnjenja obično stohastički promjenljiva** $\Rightarrow$ sustav upravljanja postaje vremenski promjenljiv;
- **Standardna teorija LTI sustava postaje neprimjenljiva**.

© Ivan Petrović

* "Upravljačke" komunikacijske mreže

Zahtjevi na "upravljačke" mreže:

- prijenos malih paketa između relativno velikog broja čvorova, ali s visokom frekvencijom prijenosa kojom se zadovoljavaju zahtjevi za rad u striktnom stvarnom vremenu;
- ograničeno vremensko kašnjenje;
- zajamčena isporuka poruka (nema praznih intervala niti intervala s više istih poruka);
- visoko iskorištenje mreže.

- Razvijeno je više algoritama pristupa mediju s ciljem ispunjenja gornjih zahtjeva.

© Ivan Petrović

Algoritmi (protokoli) pristupa mediju (MAC):

- **Stohastički pristup:**
  - **Ethernet (IEEE 802.3: CSMA/CD);**
  - **CAN (CSMA/BA) ⇒ DeviceNet, SDS ...**

- **Deterministički pristup:**
  - **Token passing (Token bus – IEEE 802.4; Token ring – IEEE 802.4) ⇒ PROFIBUS FMS, MAP, ControlNet,...**
  - **Centralized arbitration (polling) ⇒ PROFIBUS DP, FIP, TTP/A ....**
  - **TDMA (Time Division Multiple Access) ⇒ TTP/C, FlexRay**

* Zadatak

- **Pronaći algoritam za određivanje redoslijeda slanja poruka (pristupa mediju) čvorova na mreži, koji su ujedno i elementi zatvorenih regulacijskih krugova,**

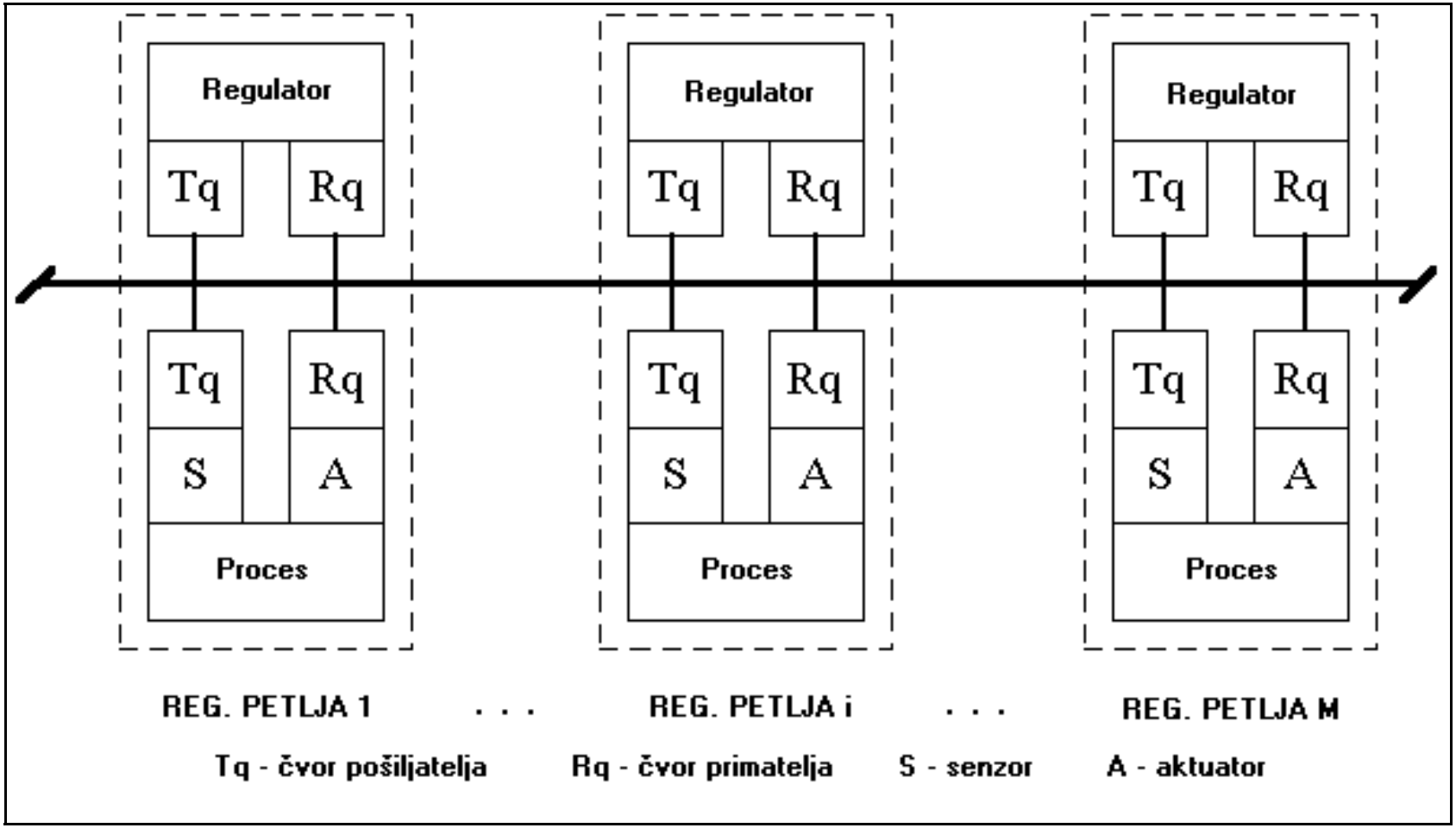
- **Pri tome se moraju zadovoljiti naprijed navedeni zahtjevi na "upravljačke" komunikacijske mreže,**

- **U nastavku se izvodi algoritam za određivanje trenutaka slanja poruka u mrežama s prosljeđivanjem zaloga, a zatim se prilagođava i za CAN mreže**

© Ivan Petrović

Vremena uzorkovanja više regulacijskih petlji

* Identifikacija problema



© Ivan Petrović

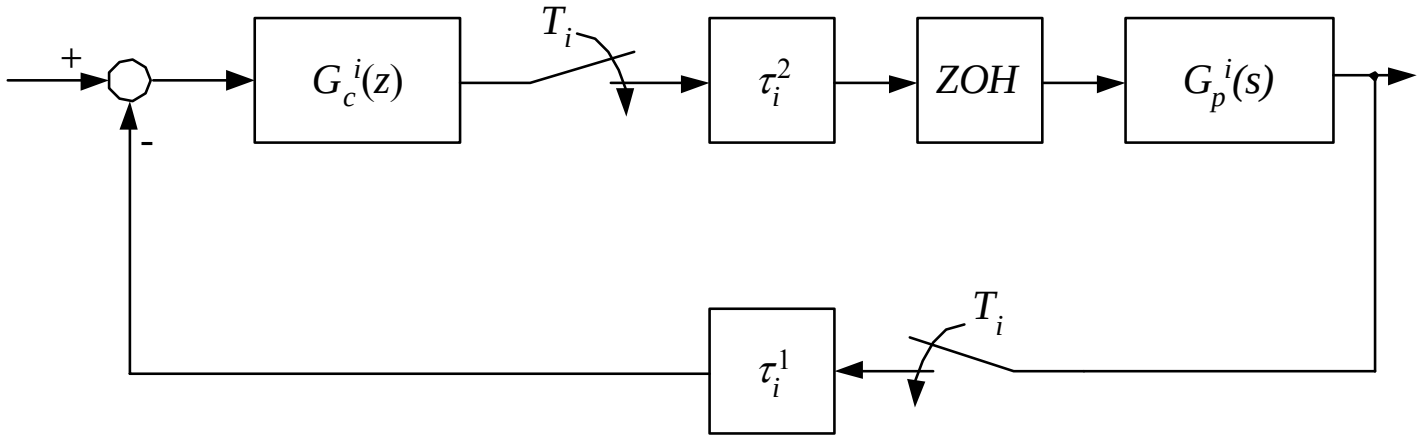
Pretpostavke:

- Ukupni broj mrežnih čvorova koji šalju poruke $N = 2M$.
- Senzorski i regulatorski čvor *i-te* regulacijske petlje imaju jednaka vremena uzorkovanja iznosa T_i.
- Svi čvorovi generiraju poruke (pakete) jednakih i fiksnih duljina $\bar{L}$.
- Brzina prijenosa podataka mrežom je B [bit/s] pa je vrijeme prijenosa paketa $L = \bar{L}/B$.

Napomena:

- Čvorovi mogu imati različite duljine poruka. U tom se slučaju poruke razlažu (segmentiraju) na pakete duljine $\bar{L}$.
- Npr. poruka duljine $L' \, (> \bar{L})$ koja se uzrokuje s periodom T razlaže se u $p = \lceil L'/\bar{L} \rceil$ paketa duljine $\bar{L}$, a zatim se svaki paket uključuje u red čekanja za prijenos s periodom T/p. Čvor primatelj slaže primljene pakete u poruku.

Komunikacijska kašnjenja u *i*-toj regulacijskoj petlji:



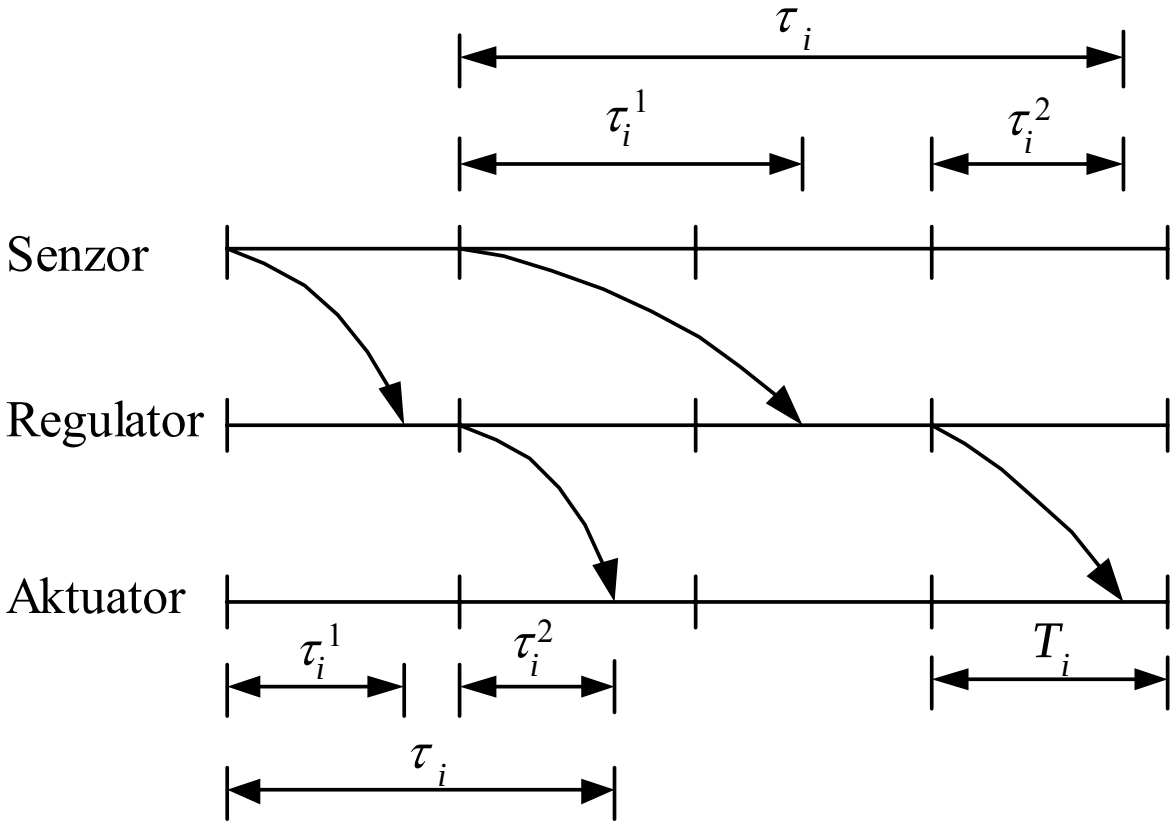
$G_c^i(z)$ - Prijenosna funkcija regulatora $G_p^i(s)$ - Prijenosna funkcija procesa

ZOH - Ekstrapolator nultog reda T_i - Vrijeme uzorkovanja *i*-te reg. petlje

- Uzorkovani podaci u čvorovima senzora i regulatora moraju čekati u redu za slanje dok dobiju pravo pristupa mediju tj. dok stanica dobije zalog kod mreža s prosljeđivanjem zaloga ili dok bude prozvana kod «master-slave» mreža. Ovo uzrokuje kašnjenje u regulacijskom krugu:
  - τ_i^1 - kašnjenje između senzora i regulatora,
  - τ_i^2 - kašnjenje između regulatora i aktuatora.

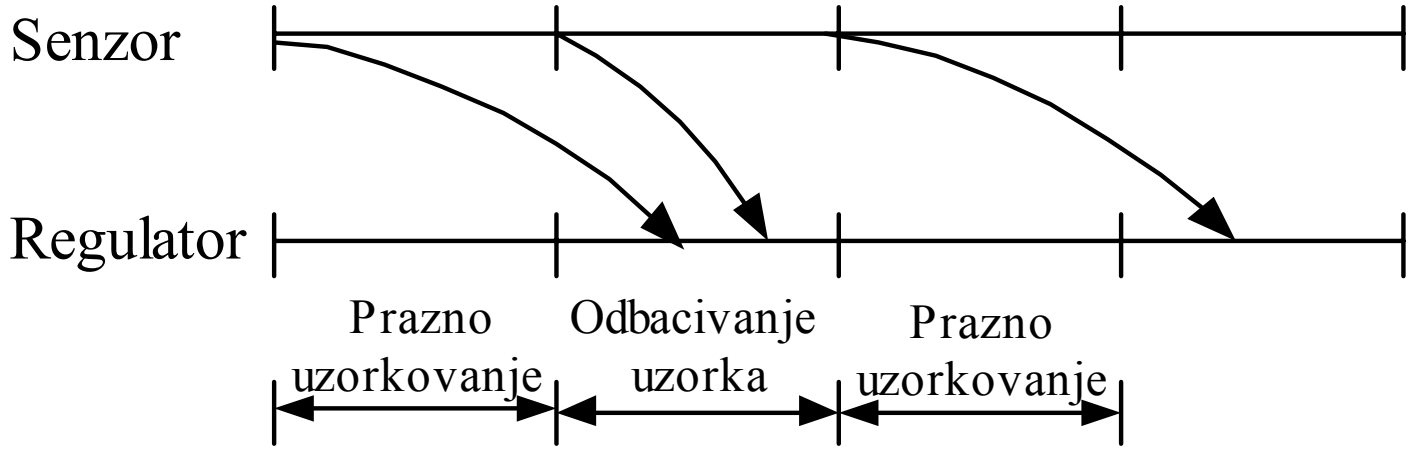
© Ivan Petrović

Ilustracija kašnjenja u regulacijskog petlji τ_i:



$$\tau_i = \left\lceil \frac{\tau_i^1}{T_i} \right\rceil T_i + \tau_i^2 \qquad (1)$$

Ilustracija odbacivanja uzoraka i praznih intervala uzorkovanja:



- Odbacivanje uzoraka i prazni intervali uzorkovanja narušavaju kakvoću vladanja sustava upravljanja i dovode do distorzije upravljačkog signala.
- Distorzija upravljačkog signala uzrokuje visokofrekvencijski šum u aktuatoru što može dovesti do njegova trošenja i oštećenja.
- Dakle, svaki mjerni podatak mora stići od senzorskog do regulatorskog čvora prije sljedećeg uzorkovanja mjernog signala.

© Ivan Petrović

Dopušteno kašnjenje u regulacijskoj petlji:

- Neka su Φ_i, i = 1 to M, unaprijed zadana najveća dopuštena kašnjenja u i-toj regulacijskoj petlji. Tada i-ta petlja mora zadovoljiti sljedeća dva uvjeta:

U1) spriječiti odbacivanja podataka i prazna uzorkovanja: $\tau_i^m < T_i$, m = 1, 2, i

U2) ograničiti kašnjenja u regulacijskim petljama: $\tau_i \leq \Phi_i$.

- Cilj je odrediti periode uzorkovanja T_i, i = 1 to M, koji zadovoljavaju zahtjeve na kvalitetu sustava upravljanja, ali i osigurati visoku iskoristivost komunikacijske mreže.
- Ako podaci ne stignu do čvora primatelja unutar vremenskog intervala (T_i), pojavio se «preljev», tj. čvor nije uspio poslati, jer nije došao na red.
- Algoritam određivanja trenutaka slanja poruka je ispravan ako:
  - nema «preljeva» niti na jednom čvoru u mreži te
  - ako su kašnjenja u svim regulacijskim petljama manja od dopuštenih,

tj. ako su zadovoljeni uvjeti U1) i U2).

© Ivan Petrović

Modificirano konstantno kašnjenje u regulacijskoj petlji:

- Kašnjenje u petlji $\tau_i = \left\lceil \frac{\tau_i^1}{T_i} \right\rceil T_i + \tau_i^2$ je vremenski promjenljivo jer je τ_i^2 vremenski promjenljivo.
- Zamjena τ_i^2 njegovom maksimalnom vrijednošću nije dobro rješenje.
- Neka je t_k k-ti trenutak kada upravljački signal stiže do procesa. Budući da je τ_i^2 vremenski promjenljiv, to je i interval $[t_k, t_{k+1})$.
- Dakle, na vladanje sustava upravljanja utječe vremenska promjenljivost intervala $[t_k, t_{k+1})$, a ne samô promjenljivo komunikacijsko kašnjenje.
- Interval $[t_k, t_{k+1})$ postaje najdulji kada se $\min \tau_i^2$ pojavi u k-om dolasku, a $\max \tau_i^2$ u $(k+1)$-vom dolasku.
- Dakle, ako se vremenski promjenljivo kašnjenje τ_i^2 modificira u konstantno kašnjenje preko $\sup[t_k, t_{k+1}) = T_i + (\sup \tau_i^2 - \min \tau_i^2)$, zahtjevi na kakvoću vladanja sustava upravljanja s promjenljivim komunikacijskim kašnjenjem bit će zadovoljeni.

© Ivan Petrović

- Uz kašnjenje od regulatora do aktuatora, treba uzeti u obzir i kašnjenje od senzora do regulatora.
- Ova se dva kašnjenja mogu promatrati zajednički, ako se ne pojavljuju prazni intervali uzorkovanja i ako ne dolazi do odbacivanja uzoraka, tj. ako je ispunjen uvjet U1).
- Konačno, **modificirano konstantno kašnjenje u petlji** τ_i' postaje

$$\tau_i' = 2T_i + (\sup\tau_i^2 - \min\tau_i^2). \qquad (2)$$

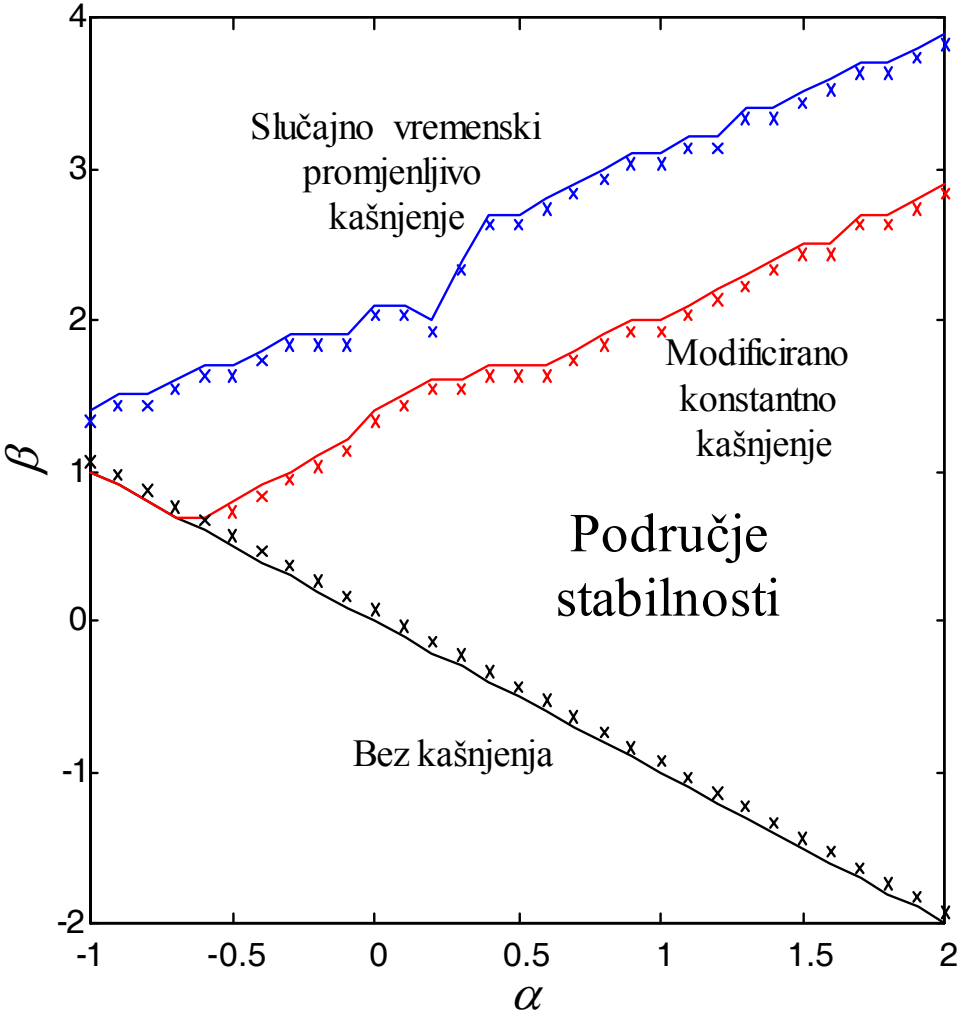
- Opravdanost primjene modificiranog konstantnog kašnjenja provjerena je simulacijom na sustavu prvog reda:

$$\dot{x}(t) + \alpha x(t) + \beta x(t - \tau(t)) = 0, \qquad (3)$$

gdje je $\tau(t)$ vremenski promjenljivo kašnjenje.

- Područja stabilnosti za modificirano konstantno kašnjenje i za promjenljivo kašnjenje u ovisnosti o promjeni parametara α i β (T_i=0.5s; $\tau(t)$ = rand[0s, 0.5s]) prikazana su na sljedećoj slici:

© Ivan Petrović



- Područje stabilnosti za modificirano konstantno kašnjenje obuhvaćeno je područjem stabilnosti za promjenljivo kašnjenje, što potvrđuje da je moguće projektirati ICCS na temelju modificiranog konstantnog kašnjenja.
- Na osnovi modificiranog konstantnog kašnjenja, uvjet U2) ($\tau_i \leq \Phi_i$) se može izraziti preko vremena uzorkovanja T_i, tj.

$$\tau_i' = 2T_i + (\sup \tau_i^2 - \min \tau_i^2) \leq \Phi_i . \quad (4)$$

- Budući da je τ_i' konstantno, maksimalno dopušteno kašnjenje u *i*-toj reg. petlji Φ_i može se jednostavno odrediti, npr. klasičnom analizom u frekvencijskom području (Nyquistov ili Bodeovi dijagrami).

* Algoritam za određivanje trenutaka uzorkovanja na mreži s prosljeđivanjem zaloga

Koncept prozora:

- Neka je **T** vektor vremena uzorkovanja *M* petlji, tj.

$$\mathbf{T} = \left[T_1, T_2, \cdots, T_M\right] \tag{5}$$

gdje su T_i poredani od najmanjeg do najvećeg, tj. $T_i \le T_{i+1}, \forall i$.

- Neka je r_i broj podataka koji se mogu prenijeti medijem pri najvećem kašnjenju u petlji i (broj zaloga koje čvor dobije).
- Najveći τ_i^m se pojavljuje kad čvor m (m = 1 i 2 označuju senzorski odnosno regulatorski čvor) u petlji i izgubi zalog neposredno prije nego uzorkuje (pošalje) podatak.
- Zalog će ciklički biti pridružen svim ostalim čvorovima prije nego ponovo dođe do čvora m. Prema tome, u najgorem slučaju τ_i^m postaje:

$$\max \tau_i^m = r_i L + N\sigma, \qquad m = 1,2 \tag{6}$$

gdje je σ dodatno maksimalno vrijeme potrebno za obradu i prostiranje zaloga.

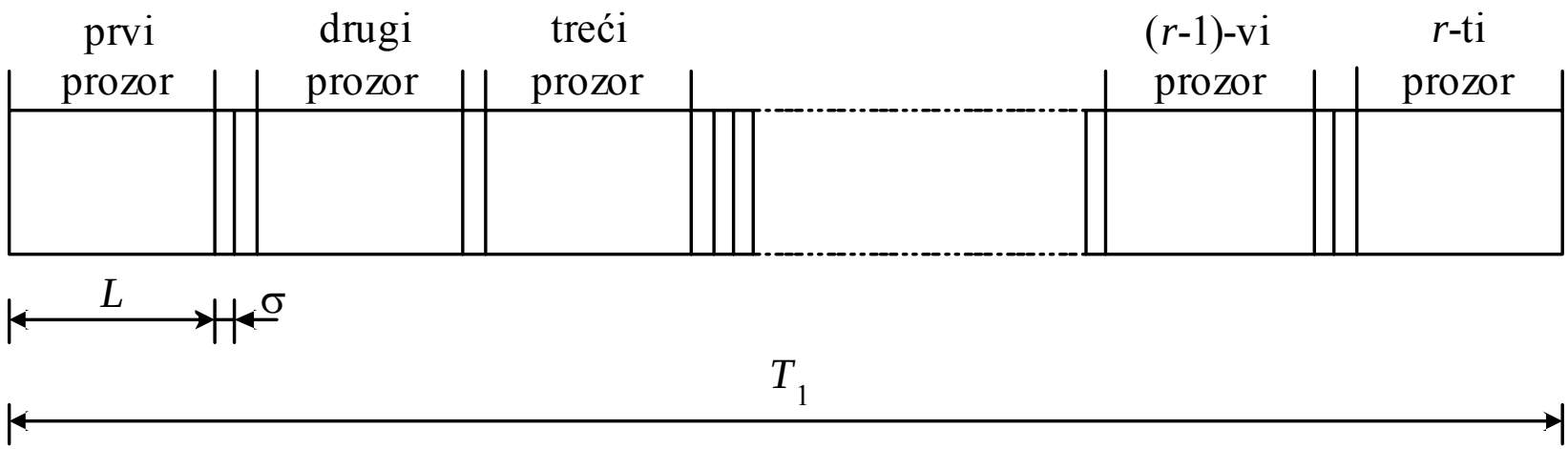
- Iz U1) ($\tau_i^m < T_i$) slijedi da se r_i mora ograničiti tako da vrijedi

$$r_i = \left\lfloor \frac{T_i - N\sigma}{L} \right\rfloor. \tag{7}$$

- Neka je r jednako r_1 za odgovarajuće odabrano T_1 (najkraće vrijeme uzorkovanja), tj.

$$r = \left\lfloor \frac{T_1 - N\sigma}{L} \right\rfloor \Rightarrow T_1 \geq rL + N\sigma \tag{8}$$

- Dakle T_1 se sastoji od r prozora duljine jednake vremenu prijenosa paketa L. ⇒ **KONCEPT PROZORA** (vidi sljedeću sliku)



Zaključak: Algoritam za određivanje vremena uzorkovanja zasniva se na KONCEPTU PROZORA gdje u svakom intervalu T_1, N čvorova u mreži dinamički dijeli r prozora ($N > r$), tako da broj paketa koji se prenose u bilo kojem intervalu T_1 ne prijeđe iznos r.

- Razmotrimo proizvoljni čvor j, gdje je $T_j = k_j T_1$ ($k_j \geq 1$). Ako se ne šalje više od r paketa unutar bilo kojeg intervala T_1, tada broj paketa koji će biti preneseni u intervalu T_j neće prijeći iznos $r_j = k_j r$. Dakle, čvor j neće nikad doživjeti «preljev».

- Najkraći τ_1^2 se pojavljuje kad čvor 2 (regulator) u petlji 1 uzrokuje (pošalje) njegov podatak neposredno prije nego izgubi zalog, tj. $\min \tau_1^2 = L$.
- Iz U1) ($\tau_i^m < T_i$, $m = 1, 2$) i U2) ($\tau_i \leq \Phi_i$) proizlazi $\sup \tau_1^2$ i τ_1' jednako T_1 odnosno $\Phi_1 (= \min[\Phi_i, i = 1 \text{ to } M])$.
- Odakle se uz zadano Φ_1, T_1 izračuna prema izrazu (4) ($\tau_i' = 2T_i + (\sup \tau_i^2 - \min \tau_i^2) \leq \Phi_i$) kao

$$\boxed{T_1 = \frac{\Phi_1 + L}{3}}. \qquad (9)$$

- Broj prozora r u T_1 prema (7) ($r = \left\lfloor \frac{T_1 - N\sigma}{L} \right\rfloor$) iznosi:

$$\boxed{r = \left\lfloor \frac{(\Phi_1 + L)/3 - N\sigma}{L} \right\rfloor}. \qquad (10)$$

- Uvedimo vektor **K** koji sadrži omjere vremena uzorkovanja u odnosu na najkraće vrijeme uzorkovanja T_1

$$\mathbf{K} = [k_1, k_2, \cdots, k_M], \qquad k_i = \frac{T_i}{T_1}, \qquad k_i \le k_{i+1}, \forall i. \tag{11}$$

- Razmotrimo proizvoljni čvor j s vremenom uzorkovanja T_j, gdje je $T_j \le T_M$. Ako je $\mathrm{Rem}[k_j, k_i] = 0$, $j > i$, broj paketa koje čvor j šalje za vrijeme intervala T_M (najveće vrijeme uzorkovanja koje se satoji od k_M intervala T_1) je fiksan cjelobrojni iznos k_M/k_j.
- Ponavljajući ovo za $j = 1$ do N, dobije se ukupni (cjelobrojni) broj paketa koje svi čvorovi pošalju unutar intervala T_M :

$$k_M \sum_{j=1}^{N} (1/k_j) = 2k_M \sum_{i=1}^{M} (1/k_i) = k_M \alpha_K .$$

gdje je α_K prosječni broj pakete koji se pošalje u intervalu T_1:

$$\alpha_K = 2\sum_{i=1}^{M} \frac{1}{k_i}. \tag{12}$$

- Ako je $\alpha_K \leq r$, $\mathrm{Rem}[k_j/k_i]=0$ za $\forall i$ i j, $j \geq i$, tada će svi podaci uzorkovani u intervalu T_M moći biti raspoređeni u raspoložive prozore unutar tog istog intervala T_M.

$$\Downarrow$$

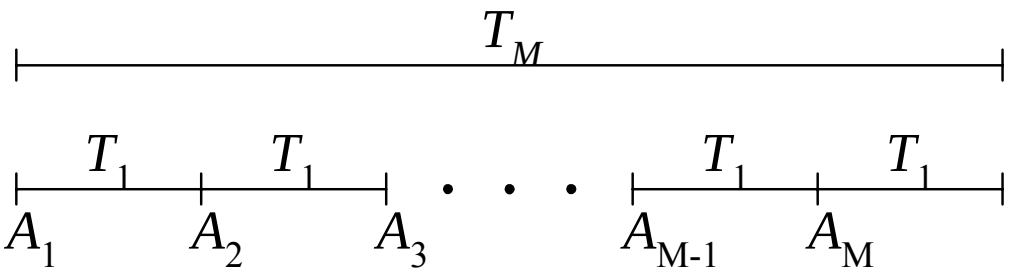
Ovo je osnovni kriterij ispravnosti rada algoritma.

- Ako je $\alpha_K > r$, kapacitet mreže nije dovoljan za postavljene zahtjeve, tj. komunikacijski sustav je preopterećen.
- U tom slučaju, projektant ICCS-a mora:
  - primijeniti mrežu većeg prijenosnog kapaciteta (B) i manjeg dodatnog opterećenja (σ), ili
  - smanjiti broj čvorova (N) u mreži.

© Ivan Petrović

Određivanje trenutka prvog uzorkovanja za svaki čvor:

- Neka su t_j, $j = 1$ do N, trenutci uzorkovanja za čvor j u T_M.
- Neka je $u^n(A_l)$ broj uzorkovanih (poslanih) podataka od čvorova 1 do N u A_l, i A_l je početni trenutak l-tog intervala T_l unutar intervala T_M.



- Za čvor 1 (koji ima najmanje vrijeme uzorkovanja), pridruži $t_l = A_1$.
- Budući da čvor 1 uzorkuje podatke s periodom T_1:

$$u^1(A_l) = 1, \qquad l = 1 \text{ do } k_M.$$

- Za ostale čvorove pridruži

$$t_j = \inf\,[A_l \geq A_{l-1}: u^j(A_l) \leq r], \quad j = 2 \text{ do } N.$$

- Kako je $\mathrm{Rem}[k_j, k_{j-1}] = 0$, vrijeme uzorkovanja čvora j je cjelobrojni umnožak čvora j-1, pa vrijedi

$$u^j(A_l + nT_j) \le r, \forall n = 1, 2, \ldots . \qquad (13)$$

- Nijedan čvor neće doživjeti «preljev» jer je broj podataka koji se uzorkoju u bilo kojem trenutku A_l ograničen na r, tj.

$$u^N(A_l) \le r, \quad \forall l = 1 \text{ to } k_M . \qquad (14)$$

<u>Napomena</u>:

- Budući da je vrijeme prijenosa paketa svakog čvora L, striktni uvjet istodobnog uzorkovanja više distribuiranih čvorova u trenutku A_l u (14) može s ublažiti u uvjet da maksimalna razlika trenutaka uzorkovanja ovih čvorova manja od L.
- Ovo se može jednostavno ostvariti periodičkim slanjem sinkronizacijske poruke od čvora zaduženog za provođenje sinkronizacije.

© Ivan Petrović

Određivanje k_i za i = 2 to M:

- Najviše r paketa može biti poslano za vrijeme bilo kojeg intervala T_1. Dakle, $\sup \tau_i^m = T_1$ i $\min \tau_i^m = L$, $\forall i$ i m.
- Iz (4) $(\tau_i' = 2T_i + (\sup \tau_i^2 - \min \tau_i^2) \le \Phi_i)$, za zadani Φ_i, uvjet U2) $(\tau_i \le \Phi_i)$ se može pisati kao

$$2T_i + (T_1 - L) \le \Phi_i. \tag{15}$$

- Iz (15) i iz uvjeta 1) $T_i = k_i T_1$, i = 2 do M i 2) Rem$[k_j/k_i]=0$ za $\forall i$ i j, $j \ge i$, dobije se

$$\boxed{k_i = \left\langle \frac{\Phi_i - (T_1 - L)}{2T_1} \right\rangle, \ \forall i = 2 \, do \, M} \tag{16}$$

gdje $y = \langle x \rangle$ znači y je potencija broja 2, 2^{n_i}, $n_i \in \{0, 1, 2, ...\}$, koja je najbliža broju x, ali je manja od njega. T_1 je dan izrazom (9) $(T_1 = \frac{\Phi_1 + L}{3})$.

Mali promet na mreži:

- Ako je promet na mreži mali, tj. ako je $r \geq N$, algoritam određivanja trenutaka uzorkovanja postaje znatno jednostavniji.
- Za vrijeme bilo kojeg intervala T_l, najviše jedan podatak se šalje s čvora j, jer je $T_j \geq T_1$, $j = 2$ do N.
- Budući da je maksimalni broj podataka koji se mogu uzorkovati u T_l jednak N nema opasnosti od pojave «preljeva» niti u jednom T_l.
- Algoritam će raditi ispravno ako se vremena uzorkovanja T_i, $i = 1$ do M izaberu tako da se zadovolji uvjet kakvoće vladanja sustava regulacije dan uvjetom U2) ($\tau_i \leq \Phi_i$), tj.

$$T_i = \frac{\Phi_i - (T_1 - L)}{2}, \quad \forall i = 1 \, do \, M \, . \qquad (17)$$

Iskorištenost mreže:

- Iskorištenost mreže U definira se kao dio ukupnog vremena unutar kojega mrežom putuju paketi:

$$U = \sum_{j=1}^{N} \frac{L}{T_j} = \frac{2L}{T_1} \sum_{i=1}^{M} \frac{1}{k_i}. \qquad (18)$$

- U se može povećati smanjenjem k_i (ili T_i). Ovim se smanjenjem ne narušava uvjet U2) ($\tau_i \leq \Phi_i$) ali je smanjenje ograničeno iznosom τ_i^m danim uvjetom U1) ($\tau_i^m < T_i$, $m = 1, 2$).
- Povećanje broja petlji M (tj. čvorova N) također povećava U. Ovo se povećanje mora ograničiti tako da a_K ne postane veće od r, inače će mreža postati preopterećena.
- Dakle, optimalna je situacija kada je U maksimalno, a da se pri tome ne narušavaju uvjeti U1) i U2), što se postiže ako $\alpha_K \rightarrow r$.

* Primjer: 5 regulacijskih petlji zatvorenih preko TP mreže

Zadano je:

- $M = 5$; $N = 10$.
- Čvorovi pridruženi petljama: *Čvorovi* (1, 2); (3, 4), (5, 6), (7, 8), (9, 10) pridruženi *petljama* 1, 2, 3, 4, 5, respektivno.
- $L = 2$ ms; $\sigma = 0.1$ ms.
- Prijenosne funkcije petlje 1:

Proces: $$G_p(s) = \frac{1}{(1+0.3s)(1+0.03s)}$$

Regulator: $$G_r(s) = \frac{35(1+0.2s)}{0.2s}$$

- Dopuštena kašnjenja u regulacijskim petljama:

$$\Phi = [\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5] = [25\text{ms}, 60\text{ms}, 100\text{ms}, 200\text{ms}, 400\text{ms}]$$

Primjena algoritma:

Korak 1: Odredi Φ_1, T_1 i r

$\Phi_1 = \min[\Phi_i, i = 1 \text{ do } M]$ $\Rightarrow$ $\Phi_1 = 25$ ms

$$T_1 = \frac{\Phi_1 + L}{3} \quad \Rightarrow \quad T_1 = \frac{25+2}{3} = 9\text{ms}$$

$$r = \left\lfloor \frac{T_1 - N\sigma}{L} \right\rfloor \quad \Rightarrow \quad r = \left\lfloor \frac{9 - 10 \cdot 0.1}{2} \right\rfloor = 4$$

Korak 2: Odredi T_i

Ako je $r \geq N$ (lagani promet), $\Rightarrow$ $r = 4 < N = 10$

tada $T_i = \dfrac{\Phi_i - (T_1 - L)}{2}, \quad \forall i = 1 \text{do} M$

inače

© Ivan Petrović

$$k_i = \left\langle \frac{\Phi_i - (T_1 - L)}{2T_1} \right\rangle, \forall i = 2 \text{ do } M$$

$$k_2 = \left\langle \frac{60-(9-2)}{2\cdot 9} \right\rangle = \langle 2.94 \rangle \Rightarrow k_2 = 2^1 = 2$$

$$k_3 = \left\langle \frac{100-(9-2)}{2\cdot 9} \right\rangle = \langle 5.17 \rangle \Rightarrow k_3 = 2^2 = 4$$

$$k_4 = \left\langle \frac{200-(9-2)}{2\cdot 9} \right\rangle = \langle 10.72 \rangle \Rightarrow k_4 = 2^3 = 8$$

$$k_5 = \left\langle \frac{400-(9-2)}{2\cdot 9} \right\rangle = \langle 21.83 \rangle \Rightarrow k_5 = 2^4 = 16$$

Provjeri je li sustav preopterećen:

$$\alpha_K = 2\sum_{i=1}^{M}\frac{1}{k_i} \qquad \Rightarrow \alpha_K = 2\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\right) = 3.875$$

Ako je $\alpha_K > r$, $\Rightarrow$ $\alpha_K = 3.875 < r = 4$

tada (mreža je preopterećena $\Rightarrow$ smanji N i ide na Korak 1)

inače $T_i = k_i\, T_1$ $\Rightarrow$

T_2=18ms; T_3=36ms; T_4=72 ms; T_5=144ms.

<u>Korak 3:</u> Odredi t_j (prvi trenutak uzorkovanja za čvor j)

$t_1 = A_1 = 0$

Za (j=2, l=l; $j \le N$, $l \le k_M$; $j=j+1$, $l=l+1$)

$t_j = \inf[A_l \ge A_{l-1} : u^j(A_l) \le r]$

$u^j(A_l + nT_j) \le r, \quad \forall n = 1, 2, \ldots$

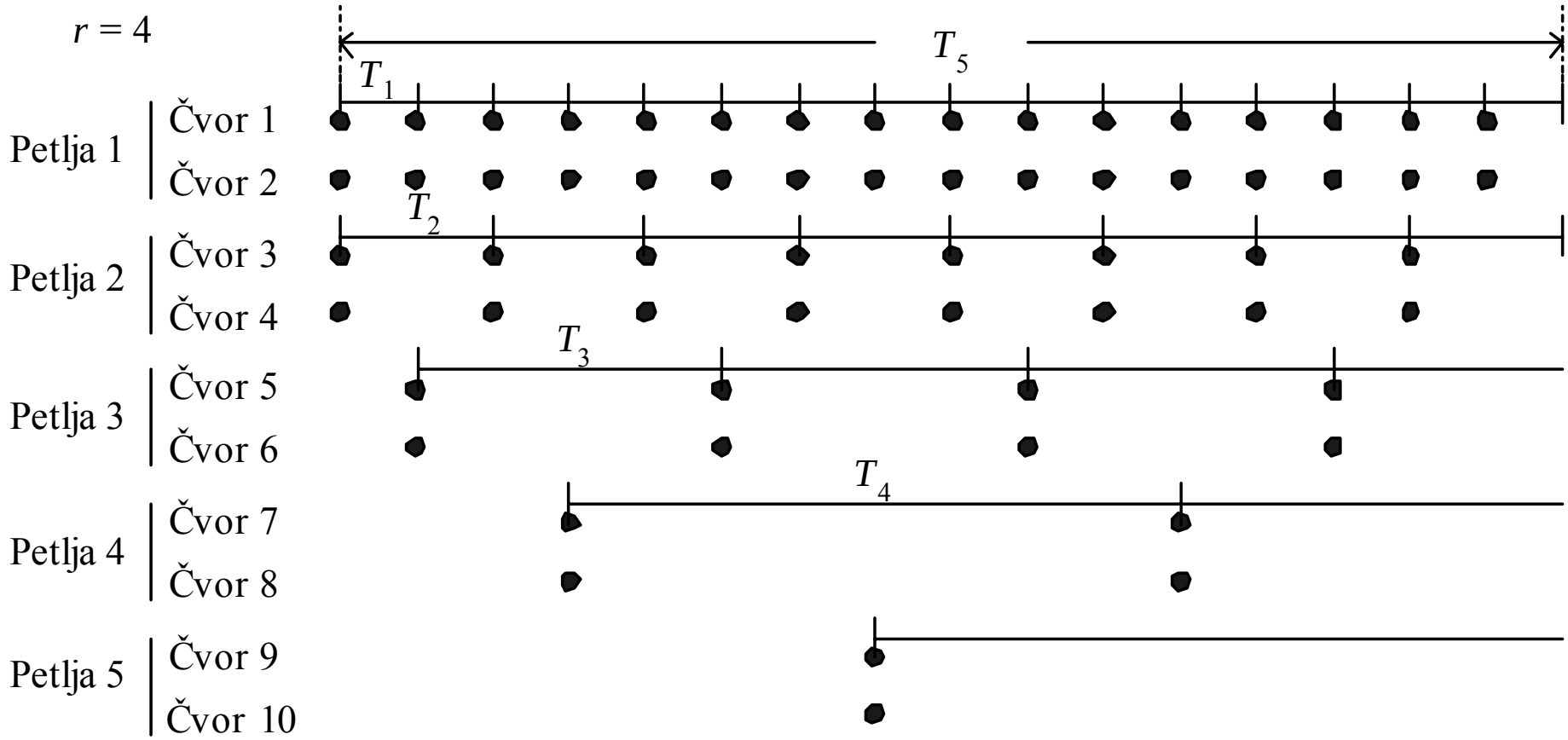
Petlja 1 T_1=9ms	$A_l = A_1$=0ms	$u^1(A_1) = 1 < r=4 \Rightarrow t_1 = A_1$ $u^2(A_1) = 2 < r=4 \Rightarrow t_2 = A_1$	
Petlja 2 T_2=18ms	$A_l = A_1$=0ms	$u^3(A_1) = 3 < r=4 \Rightarrow t_3 = A_1$ $u^4(A_1) = 4 = r=4 \Rightarrow t_4 = A_1$	Ne može više nijedan čvor započeti u A_1=0ms
Petlja 3 T_3=36ms	$A_l = A_2$=9ms	$u^5(A_2) = 3 < r=4 \Rightarrow t_5 = A_2$ $u^6(A_2) = 4 = r=4 \Rightarrow t_6 = A_2$	$u^2(A_1 + nT_1), \quad \forall n = 1, 2,...$ $\Rightarrow u^2(A_2=A_1+T_1) = 2$
Petlja 4 T_4=72ms	$A_l = A_3$=18ms	Ne može više nijedan čvor započeti u A_3=18ms	$u^2(A_1 + nT_1), \quad \forall n = 1, 2,...$ $\Rightarrow u^2(A_3=A_1+2T_1) = 2$ $u^4(A_1 + nT_2), \quad \forall n = 1, 2,...$ $\Rightarrow u^4(A_3=A_1+T_2) = 4$
	$A_l = A_4$=27ms	$u^7(A_4) = 3 < r=4 \Rightarrow t_7 = A_4$ $u^8(A_4) = 4 = r=4 \Rightarrow t_8 = A_4$	$u^2(A_1 + nT_1), \quad \forall n = 1, 2,...$ $\Rightarrow u^2(A_4=A_1+3T_1) = 2$

Tablica se nastavlja ne sljedećoj stranici

Petlja 5 T_5=144ms	$A_l = A_5$=36ms	Ne može više nijedan čvor započeti u A_5=36ms	$u^2(A_1 + nT_1)$, $\forall$n = 1, 2,... $\Rightarrow u^2(A_5=A_1+4T_1) = 2$ $u^4(A_1 + nT_2)$, $\forall$n = 1, 2,... $\Rightarrow u^4(A_5=A_1+2T_2) = 4$
	$A_l = A_6$=45ms	Ne može više nijedan čvor započeti u A_5=45ms	$u^2(A_1 + nT_1)$, $\forall$n = 1, 2,... $\Rightarrow u^2(A_6=A_1+5T_1) = 2$ $u^6(A_2 + nT_2)$, $\forall$n = 1, 2,... $\Rightarrow u^6(A_6=A_2+T_3) = 4$
	$A_l = A_7$=54ms	Ne može više nijedan čvor započeti u A_5=54ms	$u^2(A_1 + nT_1)$, $\forall$n = 1, 2,... $\Rightarrow u^2(A_7=A_1+6T_1) = 2$ $u^4(A_1 + nT_2)$, $\forall$n = 1, 2,... $\Rightarrow u^4(A_7=A_1+3T_2) = 4$
	$A_l = A_8$=63ms	$u^9(A_8) = 3 < r=4 \Rightarrow t_9 = A_8$ $u^{10}(A_8) = 4 = r=4 \Rightarrow t_{10} = A_8$	$u^2(A_1 + nT_1)$, $\forall$n = 1, 2,... $\Rightarrow u^2(A_8=A_1+7T_1) = 2$

Kraj.

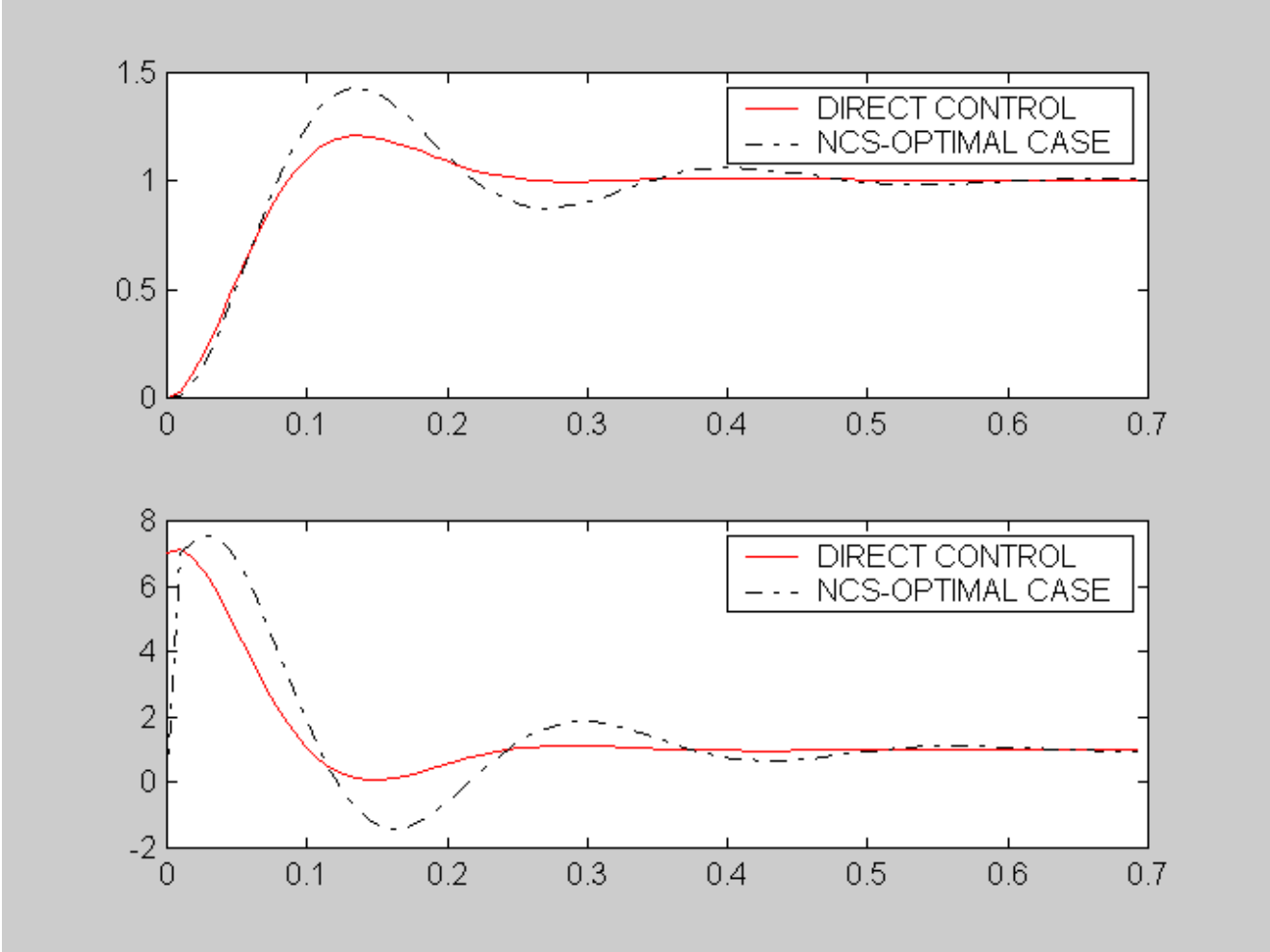
Prikaz pridruženih trenutaka uzorkovanja:



➢Iskorištenost mreže: $(U = \sum_{j=1}^{N} \frac{L}{T_j} = \frac{2L}{T_1} \sum_{i=1}^{M} \frac{1}{k_i})$: U =86.1%.

Kakvoća vladanja regulacijske petlje 1:

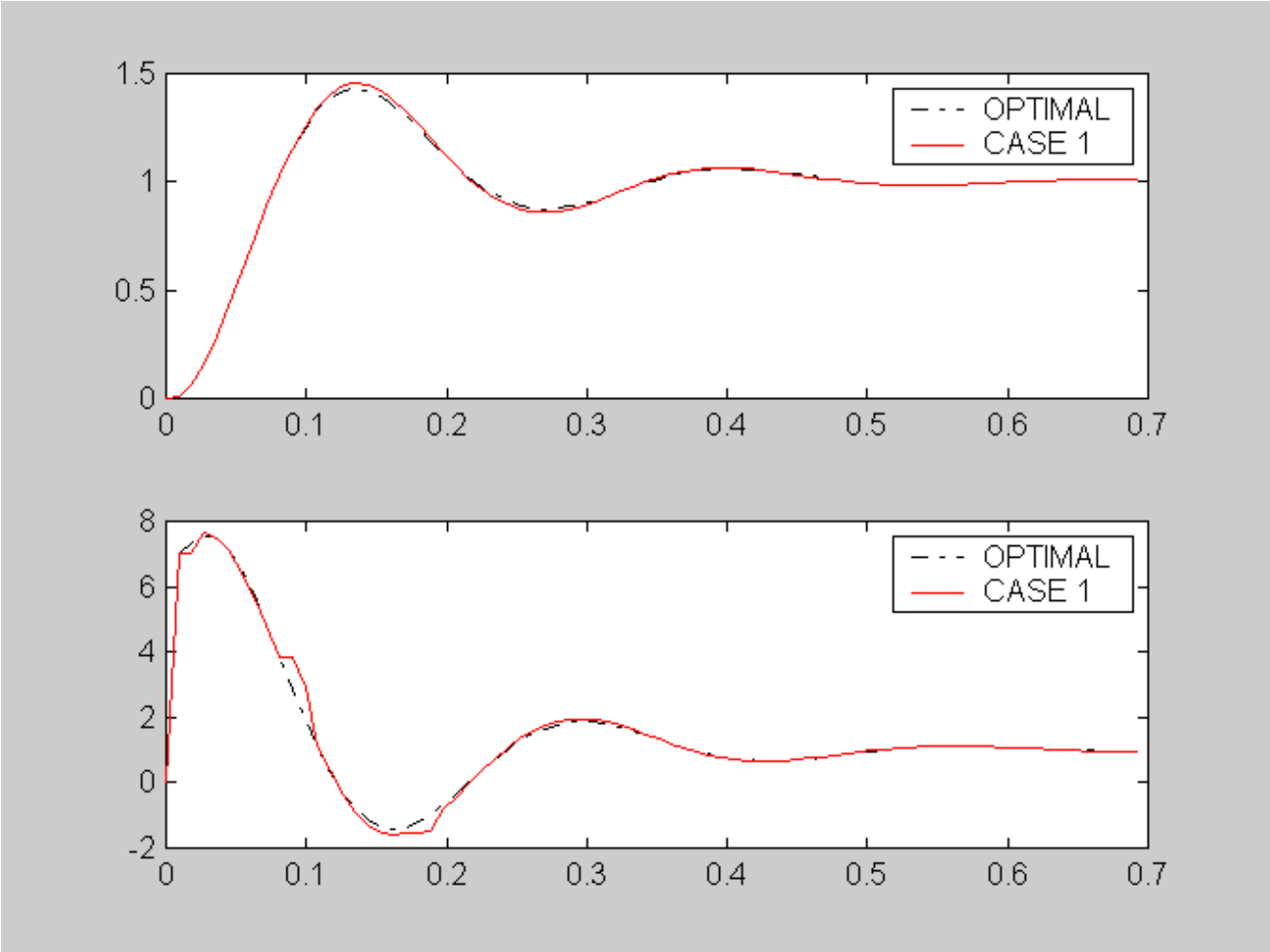
OPTIMALNI SLUČAJ: T_1=9ms; T_2=18ms; T_3=36ms; T_4=72 ms; T_5=144ms.



© Ivan Petrović

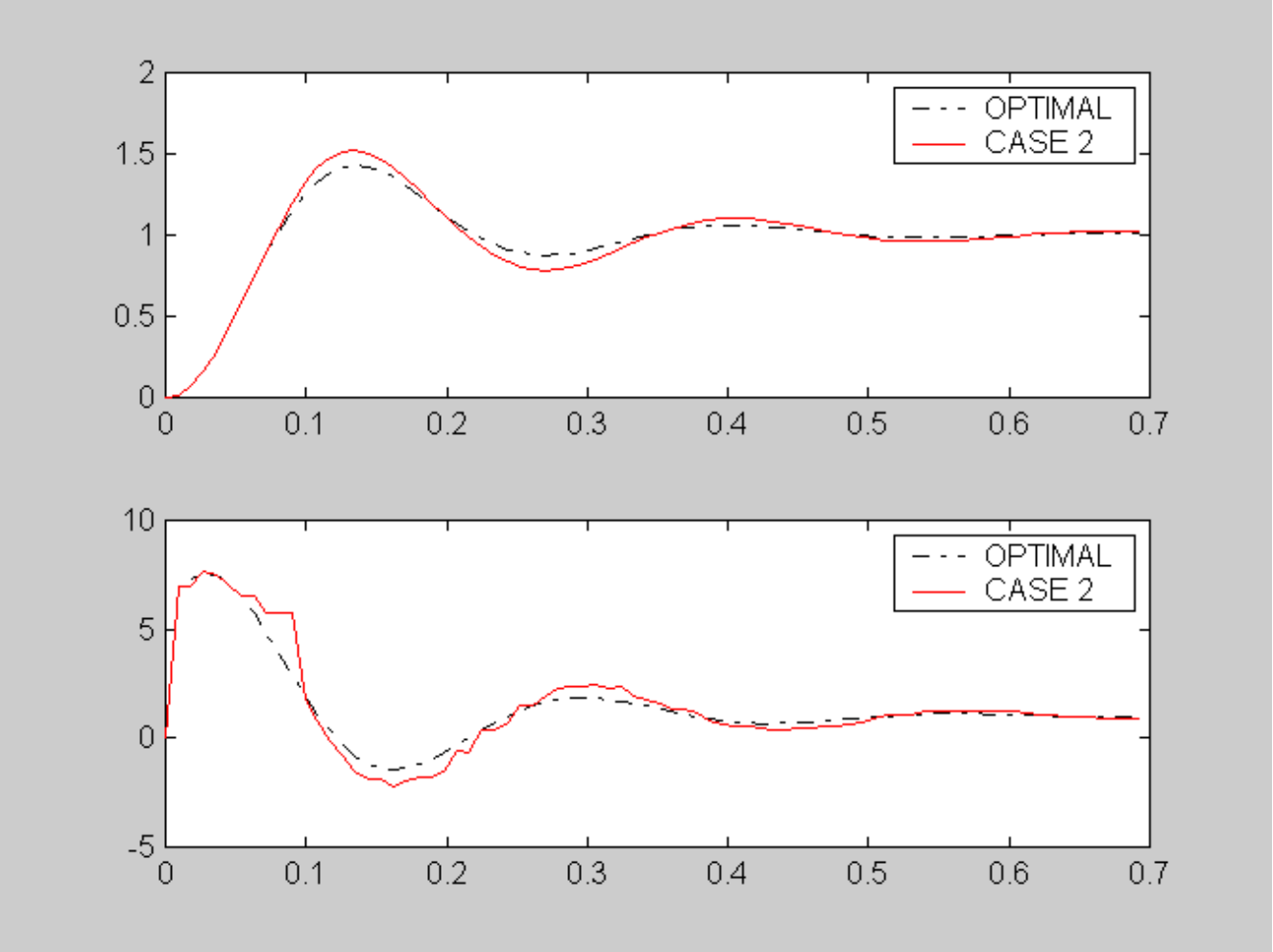
<u>SLUČAJ 1</u>: T_1=9ms; T_2=16ms; T_3=40ms; T_4=85 ms; T_5=170ms.

U=86.5% - iskorištenost mreže je gotovo jednaka kao i u optimalnom slučaju.



© Ivan Petrović

<u>SLUČJ 2</u>: T_1=9ms; T_2=9ms; T_3=18ms; T_4=36 ms; T_5=72ms.
U=127.7% - mreža je preopterećena.



* Zaključak

- Svojstva zatvorene regulacijske petlje izravno ovise o komunikacijskim kašnjenjima.
- Određivanje trenutaka uzorkovanja čvorova koji sudjeluju u formiranju zatvorenih regulacijskih petlji je važno pri projektiranju ICCS-a.
- Opisani algoritam zadovoljava temeljne zahtjeva na ICCS (za mreže s prosljeđivanjem zaloga) kao što su:
  - ograničenje kašnjenja u regulacijskim petljama unutar najviše dopuštene vrijednosti,
  - sprječavanje odbacivanja uzoraka i praznih uzorkovanja, te
  - povećanje iskorištenosti komunikacijskih resursa.
- Može li se ovaj algoritam primijeniti u drugim komunikacijskim mrežama ?
  - U TDMA i «Polling» mrežama se može izravno primijeniti, a u CAN mrežama ga je potrebno modificirati (obrađuje se u nastavku).

© Ivan Petrović

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
Fakultet elektrotehnike i računarstva
Zavod za automatiku i računalno inženjerstvo
Unska 3, Zagreb, HRVATSKA

Poglavlje 11:
Izbor vremena uzorkovanja u raspodijeljenim računalnim sustavima upravljanja:
(Više regulacijskih petlji zatvorenih preko iste komunikacijske mreže)

Algoritam za određivanje trenutaka uzorkovanja (slanja poruka) u CAN mreži

© Ivan Petrović

Uvod

- **Kod izvođenja algoritma za mreže s prosljeđivanjem zaloga pretpostavljeno je da se mrežom prenose samo periodičke upravljačke informacije, tj. mjerne veličine od senzora do regulatora i upravljački signali od regulatora prema aktuatorima.**
- **Podaci koji se prenose u CAN-u mogu se grupirati kao:**
  - **Real-time podaci (RT podaci), kod kojih pravovremenost prijenosa igra veliku ulogu**
    - **Upravljački RT podaci (engl. Control Data, URT)**
    - **Događajni RT podaci (engl. Event Data, DRT)**
  - **Non-real-time podaci (NRT podaci), kod kojih vrijeme stizanja podatka na odredište nije od ključne važnosti.**
- **DRT podaci i NRT podaci ne prenose se periodički kao URT podaci, već nasumice => Potrebno je proširiti algoritam određivanja trenutaka uzorkovanja kod TP mreža**

Zahtjevi na algoritam

- **URT podaci:**
  - prenose se periodički, svaki čvor sa svojim vremenom uzorkovanja, čvorovi istog regulacijskog kruga imaju ista vremena uzorkovanja
  - svaki podatak mora biti prenesen do primatelja unutar vremena uzorkovanja te regulacijske petlje
- **DRT podaci:**
  - to su nadzorni, dijagnostički i alarmni podaci, tj. moraju biti preneseni s minimalnim vremenom kašnjenja => najviši prioritet
  - generiraju se nasumice, neperiodički
- **NRT podaci:**
  - to su arhivski podaci, bitni za naknadno korištenje u okviru analize rada sustava,
  - obično veća količina podataka koji nisu bitni za trenutačno odvijanje rada procesa => najniži prioritet
- **Uz ove zahtjeve algoritam treba osigurati i maksimalno moguće iskorištenje mrežnih resursa.**

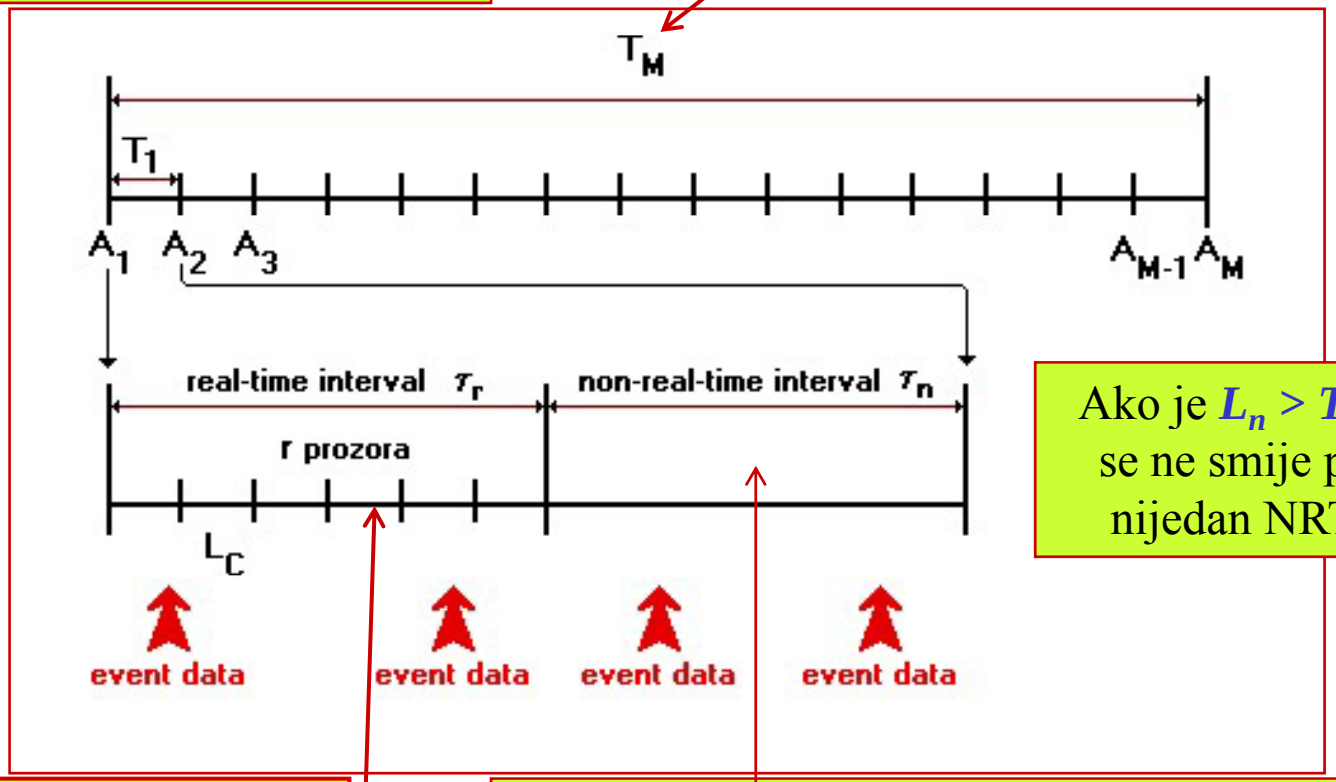
Popis oznaka koje se koriste

- M – broj regulacijskih petlji spojenih na zajedničku CAN sabirnicu
- N_c – broj čvorova koji generiraju URT podatke
- N_e – broj čvorova koji generiraju DRT podatke
- N_n – broj čvorova koji generiraju NRT podatke
- L_c – vrijeme prijenosa paketa URT podataka
- L_e – vrijeme prijenosa paketa DRT podataka
- L_n – vrijeme prijenosa paketa NRT podataka
- $[\Phi_i, i=1\text{-}M]$ – maksimalno dopušteno kašnjenje i-te regulacijske petlje
- $[\lambda_e^i, i=1\text{-}N_e]$ – frekvencija generiranja DRT paketa i-tog čvora
- $[\lambda_n^i, i=1\text{-}N_n]$ – frekvencija generiranja NRT paketa i-tog čvora
- $[T_i, i=1\text{-}M]$ – vrijeme uzorkovanja i-te regulacijske petlje

Koncept dodjeljivanja medija

Neophodna sinkronizacija lokalnih satova stvarnog vremena

Vrijeme uzorkovanja najsporije regulacijske petlje



Ako je $L_n > T_1 - \tau_r$ tada se ne smije prenijeti nijedan NRT paket

Prenose se URT podaci prema algoritmu izvedenom za TP mreže

Ako se u ovom intervalu pojave URT podaci imat će veći prioritet od NRT podataka

Koncept dodjeljivanja medija

- **Pretpostavke:**
  - **Generiranje DRT i NRT podataka može se modelirati Poissonovom razdiobom:**

$$P_\lambda(n) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \qquad \lambda = Np$$

p – vjerojatnost događaja u jednom mjerenju (<< 1)
N – broj ponovljenih mjerenja
λ – očekivani broj događaja
P – vjerojatnost n događaja uz zadano očekivanje

  - **Redovi čekanja za URT podatke duljine 1 paket, jer paket na nekom čvoru mora biti prenesen prije generiranja novog paketa na njemu**
  - **Redovi čekanja za DRT i NRT podatke dovoljno velike duljine tako da nikad ne dolazi do odbacivanja podataka zbog preljeva na čvoru ukoliko je promet na mreži stabilan.**
  - **Da bi promet na mreži bio stabilan, frekvencija kojom čvorovi postavljaju zahtjeve za prijenos mora biti ograničena na mjeru koja ne prekoračuje mrežni kapacitet.**

Stabilnost prijenosa DRT podataka – 1/2

- **Pretpostavimo da u nekom duljem vremenskom intervalu t na čvor i stiže neki prosječan broj DRT podataka.**
- **Red čekanja na čvoru i bit će stabilan ako on u intervalu t pošalje u prosjeku veći broj paketa od broja paketa pristiglih u red čekanja za prijenos. Drugim riječima, vrijeme potrebno da se svi podaci koji čekaju na prijenos pošalju mora biti manje od t.**
- **Prosječan broj DRT paketa generiranih u vremenu t je $\lambda_e^i t$ => vrijeme potrebno za prijenos svih tih paketa je $(\lambda_e^i t)L_e$.**
- **Za čvorove $j \neq i$, prosječan broj je $\lambda_e^j t$, ako je $\lambda_e^j t < \lambda_e^i t$, odnosno $\lambda_e^i t$, ako je $\lambda_e^j t > \lambda_e^i t$. <= svi događajni čvorovi dobivaju pravo na prijenos jednakog broj paketa podataka.**
- **Red čekanja na prijenos u čvoru i bit će stabilan, ako se svi ovi paketi prenesu unutar vremena t => uvjet stabilnosti reda čekanja na čvoru i:**

$$\boxed{(\lambda_e^i t)L_e + L_e \sum_{j=1,\, j\neq i}^{N_e} \min\left[\lambda_e^i t, \lambda_e^j t\right] < t} \qquad (1)$$

Stabilnost prijenosa DRT podataka – 2/2

- **Da bi mrežni sustav bio stabilan, potrebno je da ovakvo razmatranje vrijedi za svaki pojedini događajni čvor.**
- **Ako je red čekanja čvora koji generira podatke s najvećom frekvencijom stabilan, tada slijedi da će i svi ostali redovi čekanja događajnih čvorova biti stabilni.**
- **Tako uvjet stabilnosti za prijenos događajnih podataka postaje:**

$$\boxed{L_e \sum_{j=1}^{N_e} \lambda_e^j < 1} \qquad (2)$$

Stabilnost prijenosa NRT podataka – 1/2

- **NRT podaci obično su veći, pa se zato dijele u više paketa i kao takvi postavljaju u redove čekanja na prijenos. Paketi se šalju jedan za drugim te se na odredišnom čvoru ponovo sastavljaju u izvornu poruku.**
- **Neka je Λ_n^i frekvencija generiranja novih NRT podataka na čvoru i, podaci su segmentirani u p_i paketa => prosječan broj NRT paketa generiranih i postavljenih u red čekanja na čvoru i u jedinici vremena iznosi $\lambda_n^i = p_i \Lambda_n^i$.**
- **NRT paketi na mreži imaju najmanji prioritet, pa je zato prijenos ovih paketa ovisan o pojavama zahtjeva za prijenos DRT i URT paketa => U analizu stabilnosti redova čekanja na NRT čvorovima moraju se uračunati i paketi koje u toj jedinici vremena generiraju RT čvorovi => uvjet stabilnosti reda čekanja na NRT čvoru i =>**

Stabilnost prijenosa NRT podataka – 2/2

- **Uvjet stabilnosti reda čekanja na NRT čvoru *i*:**

prosječan broj NRT podataka čvora *i*	prosječan broj NRT podataka ostalih čvorova	prosječan broj URT podataka	prosječan broj DRT podataka

$$(\lambda_n^i t)L_n + L_n \sum_{j=1, j\neq i}^{N_n} \min\left[\lambda_n^i t, \lambda_n^j t\right] + (t/T_1)\alpha_K L_c + L_e \sum_{k=1}^{N_e} \lambda_e^k t < t \qquad (3)$$

- **Ako je red čekanja čvora s najvećom frekvencijom generiranja NRT podataka stabilan, tada su stabilni redovi čekanja i ostalih NRT čvorova.**

- **Dakle, uvjet stabilnosti prijenosa NRT podataka je:**

$$L_n \sum_{j=1}^{N_n} \lambda_n^j + \alpha_K L_c / T_1 + L_e \sum_{k=1}^{N_e} \lambda_e^k < 1 \qquad (4)$$

Stabilnost prijenosa URT podataka – 1/2

- **DRT paketi mogu biti prenošeni i za vrijeme RT intervala, koji je izvorno namijenjen prijenosu URT paketa, a RT interval ne smije postati veći od T_1. => prevelik broj DRT paketa najvećeg prioriteta mogao bi poremetiti koncept prozora**
- **U stvarnosti je broj DRT paketa na mreži znatno manji od broja URT paketa. Problem je stohastičke naravi i može se izraziti vjerojatnošću generiranja n DRT podataka tijekom intervala T_1:**

$$\boxed{\frac{(\lambda_e^i T_1)^n}{n!} e^{\lambda_e^i T_1}} \qquad (5)$$

- **Npr. za T_1=10[ms] i λ_e^i=0.01[ms]$^{-1}$, vjerojatnost da će biti generirano više od 10 DRT paketa u vremenu T_1, iznosi svega $7.89 \cdot 10^{-5}$.**

Stabilnost prijenosa URT podataka – 2/2

- **Pretpostavimo da je dopušteno n_i DRT paketa, što se odredi prema uvjetu (5) tako da vjerojatnost generiranja većeg broja DRT paketa bude zanemarivo mala, te da promet upravljačkih podataka na mreži prema algoritmu ne bude ugrožen.**

- **Ako je to ispunjeno, uvjet stabilnosti za upravljačke čvorove glasi:**

$$\boxed{L_c r + L_e n_i \leq T_1} \qquad (6)$$

- **Kada ovaj uvjet ne bi bio zadovoljen, neki upravljački podaci bili bi odbačeni za vrijeme ciklusa T_1.**

Stabilnost ukupne komunkacijske

- **Prijenos svih podataka na CAN-u (DRT, URT i NRT podataka) bit će stabilan ako su ispunjeni uvjeti (2), (4) i (6), tj. ako je:**

$$\boxed{L_e \sum_{j=1}^{N_e} \lambda_e^j < 1} \qquad (2)$$

$$\boxed{L_n \sum_{j=1}^{N_n} \lambda_n^j + \alpha_K L_c / T_1 + L_e \sum_{k=1}^{N_e} \lambda_e^k < 1} \qquad (4)$$

$$\boxed{L_c r + L_e n_i \le T_1} \qquad (6)$$

- **Uvjet (4) obuhvaća uvjet (2) pa se uvjet (2) ne treba promatrati.**

Ilustrativni primjer – 1/5

- Promatrana regulacijska petlja je najmanje prioritetna, a podatke uzorkuje s vremenom T_1
- Broj regulacijskih petlji: $M = 5$,
- Broj čvorova: $N = N_e + N_c + N_n = 5+10+5 = 20$
- Vremena prijenosa: $L_e = 0.584$ ms, $L_c = 1.04$ ms
- Frekvencija generiranja DRT paketa: $\lambda_e^i = 0.1\ [\text{ms}]^{-1}$, za $i = 1\text{-}N_e$
- Frekvencija generiranja NRT paketa: $\lambda_n^i = 0.00586\ \text{ms}^{-1}$, za $i = 1\text{-}N_n$
- Dopuštena kašnjenja regulacijskih petlji:

  θ = [25 ms, 60 ms, 100 ms, 200 ms, 400 ms]
- Prijenosne funkcije procesa i kontinuiranog ekvivalenta regulatora najbrže regulacijske petlje:

$$G_p(s) = \frac{1}{(1+0.3s)(1+0.03s)}$$

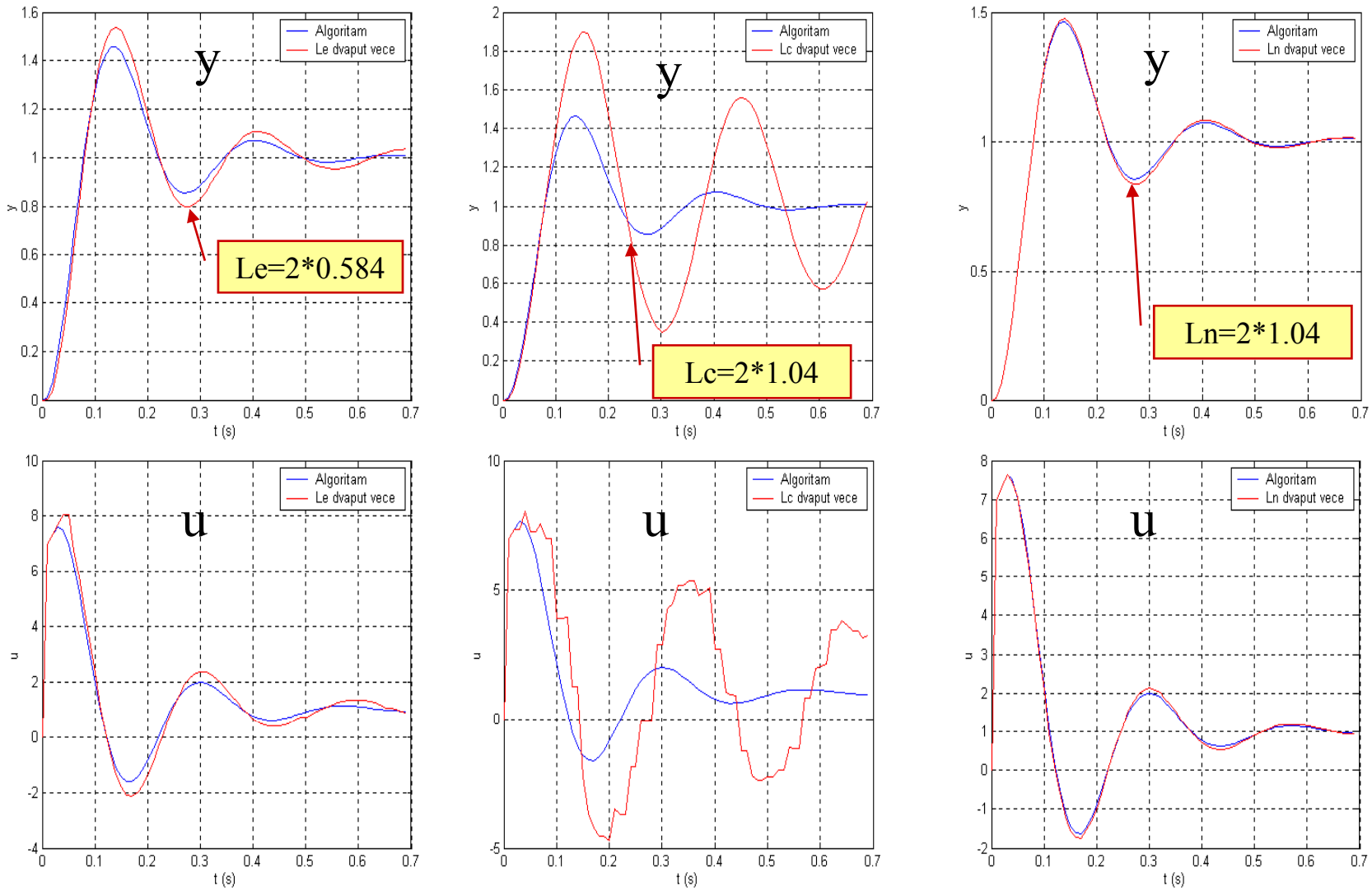
$$G_c(s) = \frac{35(1+0.2s)}{0.2s}$$

Ilustrativni primjer – 2/5

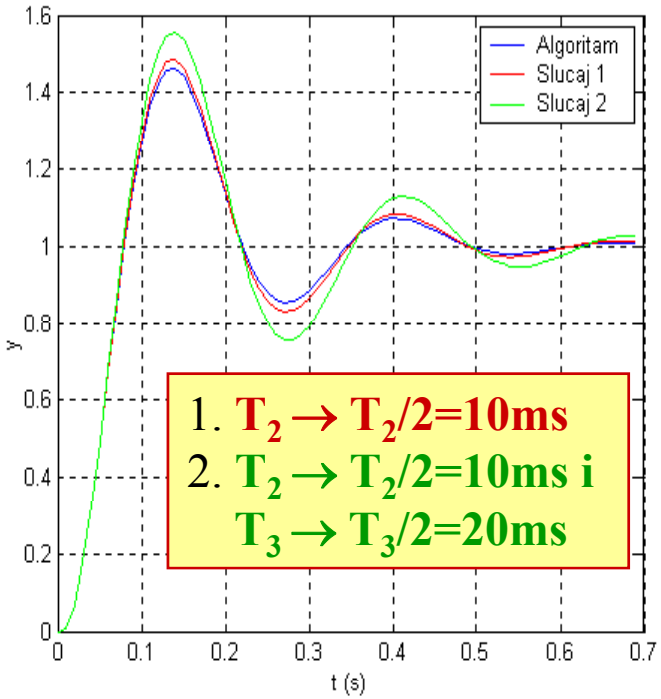
- **Algoritam određivanja trenutaka uzorkovanja daje sljedeće vrijednosti koje zadovoljavaju uvjete stabilnosti i daju skoro u potpunosti iskorištenu mrežu:**
  - L_n = 1.04 ms,
  - α_K = 3.875,
  - r = 4,
  - K = [1, 2, 4, 8, 16],
  - T = [10 ms, 20 ms, 40 ms, 80 ms, 160 ms],
  - t = [0 ms, 0 ms, 0 ms, 0 ms, 10 ms, 10 ms, 30 ms, 30 ms, 70 ms, 70 ms].

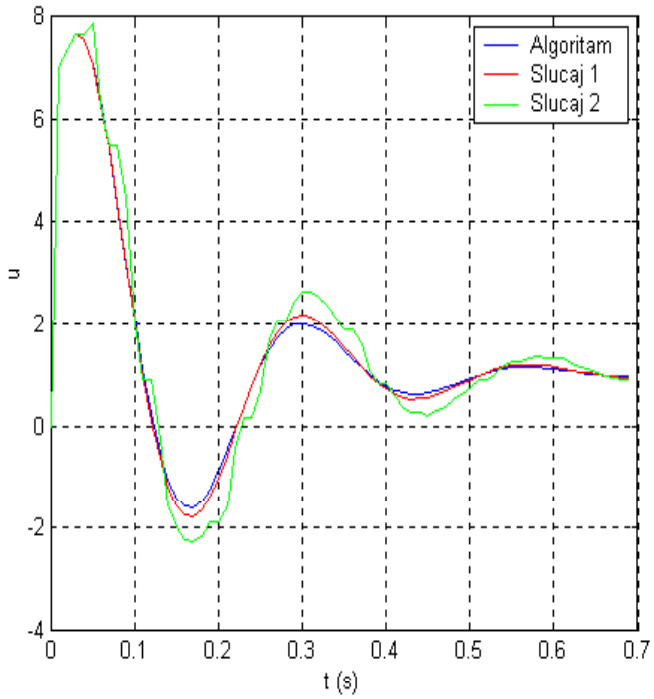
$$L_n \sum_{j=1}^{N_n} \lambda_n^j + \alpha_K L_c / T_1 + L_e \sum_{k=1}^{N_e} \lambda_e^k = 0.9992 < 1$$

Ilustrativni primjer – 3/5



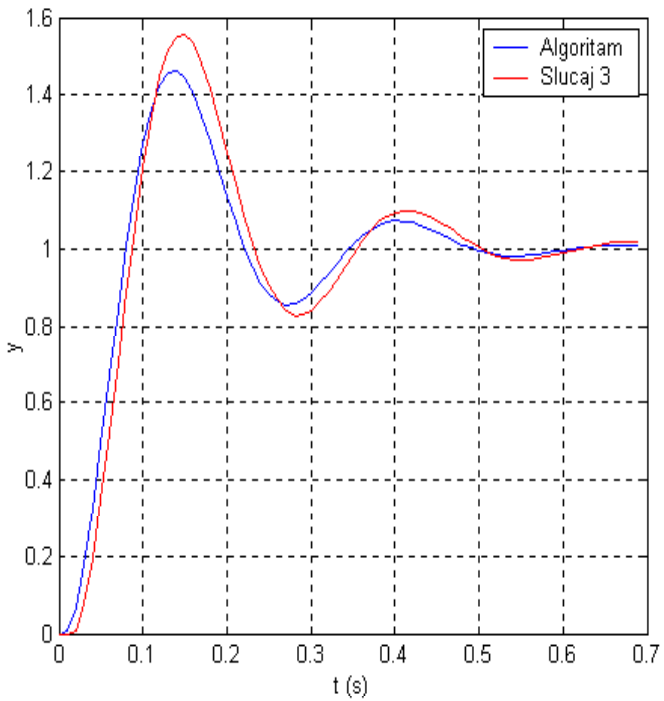
Ilustrativni primjer – 4/5

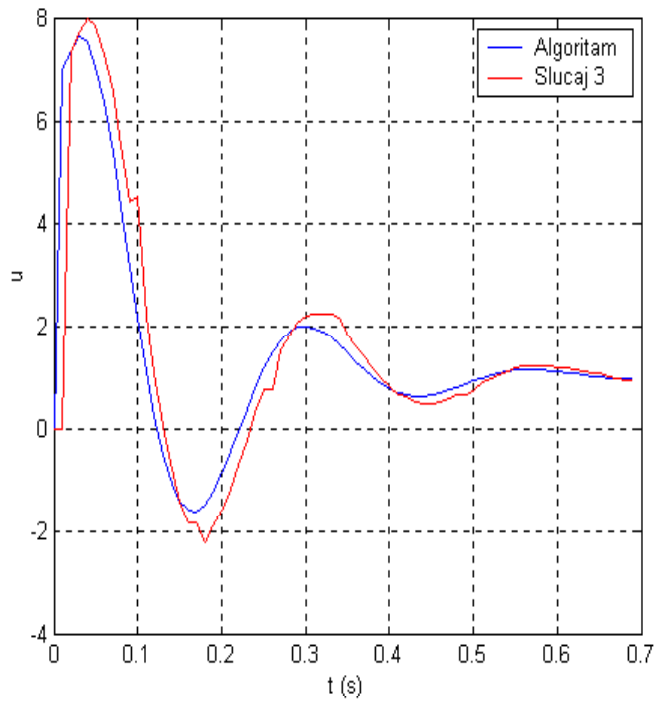




- Povećan broj URT paketa na mreži, a trajanje RT intervala ostalo nepromijenjeno.
- Nužna je posljedica narušavanje kakvoće vladanja regulacijskog kruga.

Ilustrativni primjer – 5/5





Svi parametri postavljeni prema algoritmu, osim članova vektora ***t*** koji su početno postavljeni na **0**.

- Vidi se velika distorzija upravljačkog signala.
- Do sličnog efekta može doći kada je sve podešeno prema algoritmu, ali se poremeti sinkronizacija lokalnih satova stvarnog vremena u čvorovima => važna dovoljno česta resinkronizacija.