Definicija Laplaceovog transformata

Laplaceov transformat funkcije $f(t)$, realnog argumenta $t \geq 0$ i s vrijednostima u skupu realnih ili kompleksnih brojeva, je funkcija $F(s)$, s je realni ili kompleksni parametar, definirana s $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$.

Teorem o prigušenju originala

Prigušenju u gornjem području odgovara pomak ulijevo u donjem

$$e^{-at} f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s+a)$$

DOKAZ:
$$\mathcal{L}\left(e^{-at} f(t)\right) = \int_0^\infty e^{-st} e^{-at} f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-(s+a)t} f(t)\,dt = F(s+a) \,//$$

Teorem o pomaku originala

Pomaku originala udesno odgovara prigušenje u donjem području

$$f(t-a)u(t-a) \circ\!\!-\!\!\bullet e^{-as} F(s)$$

DOKAZ:
$$\mathcal{L}\left(f(t-a)u(t-a)\right) = \int_0^\infty e^{-st} f(t-a)u(t-a)\,dt = \int_a^\infty e^{-st} f(t-a)\,dt = \int_0^\infty e^{-s(u+a)} f(u)\,du$$
$$= e^{-sa} \int_0^\infty e^{-su} f(u)\,du \,//$$

Teorem o deriviranju originala

f je diferencijabilna i original, vrijedi: $f'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet sF(s) - f(0)$

DOKAZ:
$$\mathcal{L}\left(f'(t)\right) = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\,dt = \left| \begin{matrix} u = e^{-st} & dv = f'(t)\,dt \\ du = -se^{-st}\,dt & v = f(t) \end{matrix} \right| = e^{-st} f(t) \Big|_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt.$$

↳ ako je a_0 eksponent rasta od f, za $s > a_0$ integral $\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$ konvergira i zato je $\lim_{t\to\infty} e^{-st} f(t) = 0$. Tako dobivamo $f'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet sF(s) - f(0) \,//$

Teorem o deriviranju slike

Deriviranju u donjem području odgovara množenje s $(-t)$ u gornjem području

$(-t) f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F'(s)$ tj. $(-t)^n f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F^{(n)}(s)$

DOKAZ:
$$F'(s) = \frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-st} (-t) f(t)\,dt \bullet\!\!-\!\!\circ (-t) f(t) \,//$$

Teorem o integriranju originala

Ako je $f(t)$ original onda je i $\varphi(t)=\int_0^t f(\tau)\,d\tau$ original pa vrijedi:

$$\int_0^t f(\tau)\,d\tau \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{F(s)}{s}$$

DOKAZ: Provjerimo eksponencijalni rast: $|\varphi(t)| \leq \int_0^t |f(\tau)|\,d\tau \leq \int_0^t Me^{a\tau}\,d\tau = \frac{M}{a}\left(e^{at}-1\right) < \frac{M}{a}e^{at}$

Zato postoji $\Phi(s)=\mathcal{L}(\varphi(t))$ i vrijedi: $f(t)=\varphi'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet s\Phi(s)-\varphi(0)=s\Phi(s)=F(s)$ //

DOKAZ (Konvolucijom): $\frac{F(s)}{s}=F(s)\cdot\frac{1}{s} \bullet\!\!-\!\!\circ f(t)*u(t)=\int_0^t f(\tau)\cdot u(t-\tau)\,d\tau=\int_0^t f(\tau)\,d\tau$ //

Teorem o integriranju slike

Ako je $\frac{f(t)}{t}$ original, onda vrijedi: $\frac{f(t)}{t} \circ\!\!-\!\!\bullet \int_s^\infty F(s)\,ds$

DOKAZ: $\Phi(s)=\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right)$, vrijedi $\lim_{s\to\infty}\Phi(s)=0$

$$t\cdot\frac{f(t)}{t} \circ\!\!-\!\!\bullet -\Phi'(s) \longrightarrow \Phi(s)=-F(s)$$

$$\Phi(s)=-\int_{s_0}^{s} F(s)\,ds + C=\int_s^{s_0} F(s)\,ds + C$$

$$s=s_0 \longrightarrow C=\Phi(s_0)$$

$$s_0\to\infty \longrightarrow \Phi(s)=\lim_{s_0\to\infty}\int_s^{s_0} F(s)\,ds+\lim_{s_0\to\infty}\Phi(s_0)$$

$$\Phi(s)=\int_s^\infty F(s)\,ds$$

//

Teorem o preslikavanju periodične funkcije

Slika periodične funkcije s periodom T računa se: $F(s)=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)\,dt$

DOKAZ:

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt=\sum_{n\geq 0}\int_{nT}^{(n+1)T} e^{-st}f(t)\,dt=\sum_{n\geq 0} I_n=\sum_{n\geq 0} e^{-nsT}\int_0^T e^{-s\tau}f(\tau)\,d\tau=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-s\tau}f(\tau)\,d\tau$$

//

$$I_n=\int_{nT}^{(n+1)T} e^{-st}f(t)\,dt=\int_0^T e^{-s(\tau+nT)}f(\tau+nT)\,d\tau=e^{-nsT}\int_0^T e^{-s\tau}f(\tau+nT)\,d\tau=e^{-nsT}\int_0^T e^{-s\tau}f(\tau)\,d\tau$$

Definicija konvolucije originala

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau)\, d\tau$$

Teorem o konvoluciji originala

Konvoluciji u gornjem području odgovara umnožak slika u donjem

$$f_1(t) * f_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; F_1(s) \cdot F_2(s)$$

DOKAZ:

$f_1(t) = f(t)$

$f_2(t) = u(t)$

$$f(t) * u(t) = \int_0^t f(\tau) \cdot u(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t f(\tau)\, d\tau \circ\!\!-\!\!\bullet\; F(s) \cdot \frac{1}{s} \quad //$$

$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; F(s)$

$u(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{s}$

Definicija prebrojivog skupa

Beskonačan skup A je prebrojiv ako se skup njegovih elemenata može poredati u beskonačan niz: $A = \{a_1, a_2, \dots\}$

Definicija ekvipotentnog skupa

Skup A je ekvipotentan sa skupom B ako postoji bijekcija $f: A \to B$.

Definicija relacije ekvivalencije

Binarna relacija $\rho \subseteq X \times X$ je relacija ekvivalencije ako je leksivna x, y, z u X vrijedi $x \rho x$ (refleksivnost), $x \rho y \Rightarrow y \rho x$ (simetričnost) i $(x \rho y$ i $y \rho z \Rightarrow x \rho z)$ (tranzitivnost).

Multinomni teorem

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n = \sum_{n_1 + n_2 + \dots + n_k = n} \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_k!}\, x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}$$

Poopćeno Dirichletovo načelo

Ako je n predmeta smješteno u m kutija, onda postoji kutija koja sadrži bar $\left\lfloor \frac{n-1}{m} \right\rfloor + 1$ predmeta.

DOKAZ: Pretpostavimo suprotno, svaka kutija sadrži $\le \left\lfloor \frac{n-1}{m} \right\rfloor$ predmeta. Onda je ukupan broj predmeta u m kutija $\le m \cdot \left\lfloor \frac{n-1}{m} \right\rfloor \le m \cdot \frac{n-1}{m} = n-1$, što je protuslovlje.