

## Sadržaj

1.	DFT <sub>N</sub> , FFT .....	2
2.	DTFT, CTFT, DTFS,CTFS – Fourierove transformacije .....	3
3.	DTFT.....	3
4.	Veza DTFT-a i z-transformacije .....	4
5.	DTFS.....	5
6.	DFT.....	5
7.	Povezanost DFT-a i DTFT-a .....	6
8.	Dometak nula u DFT-u.....	6
9.	Linearna konvolucija.....	6
10.	Konvolucijska sumacija.....	6
11.	Cirkularna konvolucija .....	6
12.	Konvolucijski integral.....	7
13.	Metoda podijeli pa vladaj .....	8
14.	Radix-2 FFT – algoritam decimacije u vremenu/frekvenciji .....	9
15.	RE2FFT – DFT dvaju realnih nizova pomoću jedne kompleksne DFT .....	11
16.	REDFFT .....	12
17.	Odnos trajanja signala i širine spektra .....	12
18.	Gibbsov efekt.....	13
19.	Antialiasing filter.....	15
20.	Utjecaj položaja polova i nula na frekv. karakteristiku .....	16
21.	Obnavljanje ili rekonstrukcija vremenski kontinuiranog signala iz vremenski diskretnog.....	17
22.	Linearna faza .....	19
23.	FIR filtri .....	19
24.	Tipovi FIR filtera.....	19
25.	Svepropusni filter .....	25
26.	Sustavi minimalne faze .....	25
27.	Projektiranje FIR filtera pomoću vremenskog otvora .....	25
28.	Projektiranje FIR filtera jednake valovitosti .....	26
29.	Tipovi vremenskih otvora .....	27
30.	Fiksni vremenski otvori.....	27
	Pravokutni vremenski otvor .....	28
	Bartlettov vremenski otvor .....	29

Hannov vremenski otvor .....	29
Hammingov vremenski otvor .....	29
Blackmanov vremenski otvor .....	30
31. Promjenjivi vremenski otvori .....	30
32. Optimalni filtri .....	33
33. Metoda jednakog impulsnog odziva .....	33
34. Bilinearna transformacija .....	35
35. Realizacija IIR filtara .....	37
36. Direktna realizacija IIR filtra .....	38
37. Kaskadna realizacija.....	39
38. Paralelna realizacija.....	40
39. Q faktor.....	40
40. Frekvencijske transformacije.....	41
41. Polifazna dekompozicija.....	44

## 1. DFT<sub>N</sub>, FFT

FFT se koristi za brzo izračunavanje DFT. FFT algoritmi temelje se na dekompoziciji DFT<sub>N</sub> u niz parcijalnih DFT-a odnosno periodičnosti i simetričnosti kompleksne eksponencijale.

Na taj način, razlaganjem DFT<sub>N</sub> od N točaka na dva DFT<sub>N/2</sub> broj potrebnih kompleksnih množenja biti polovica kompleksnih množenja potrebnih za izravni izračun DFT<sub>N</sub> niza x(n).

$$2\left(\frac{N}{2}\right)^2 = \frac{N^2}{2},$$

Ipak, potreban je još određeni broj operacija nad parcijalnim DFT kako bi se dobio ispravan rezultat.

Svojstva kompleksne eksponencijale  $e^{-j\frac{2\pi}{N}k} = W_N^k$

- Simetričnost

$$\begin{aligned} W_N^{k+\frac{N}{2}} &= \left(e^{-j\frac{2\pi}{N}}\right)^{k+\frac{N}{2}} = e^{-j\frac{2\pi}{N}k - j\frac{2\pi}{N}\frac{N}{2}} = \\ &= e^{-j\frac{2\pi}{N}k} e^{-j\pi} = -e^{-j\frac{2\pi}{N}k} = -W_N^k \end{aligned}$$

- Periodičnost

$$W_N^{k+N} = \left(e^{-j\frac{2\pi}{N}}\right)^{k+N} = e^{-j\frac{2\pi}{N}k - j2\pi} = e^{-j\frac{2\pi}{N}k} = W_N^k$$

## 2. DTFT, CTFT, DTFS, CTFS – Fourierove transformacije

### Fourierove transformacije

	aperiodičan	periodičan
kontinuirani	$CTFT : \text{KontSignali} \rightarrow \text{KontSignali}$ $X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt$  $ICTFT : \text{KontSignali} \rightarrow \text{KontSignali}$ $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)e^{j\Omega t} d\Omega$	$CTFS : \text{KontPeriod}_{T_0} \rightarrow \text{DisktSignal}i$ $X_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t)e^{-jk\Omega_0 t} dt$  $ICTFS : \text{DisktSignal}i \rightarrow \text{KontPeriod}_{T_0}$ $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\Omega_0 t}$
	$DTFT : \text{DisktSignal}i \rightarrow \text{KontPeriod}_{2\pi}$ $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jn\omega n}$  $IDTFT : \text{KontPeriod}_{2\pi} \rightarrow \text{DisktSignal}i$ $x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{jn\omega n} d\omega$	$DTFS : \text{DisktPeriod}_N \rightarrow \text{DisktPeriod}_N$ $X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$  $IDTFS : \text{DisktPeriod}_N \rightarrow \text{DisktPeriod}_N$ $x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$

### 3. DTFT

Za **aperiodične** diskretne signale  $x(n)$  koristimo DTFT (discrete time fourier transform)

$$\forall \omega \in \mathbb{R} \quad X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jn\omega n}$$

$X(e^{j\omega})$  je dekompozicija aperiodičnog diskretnog signala  $x(n)$  na njegove frekvencijske komponente te se naziva spektar signala  $x(n)$ .

Spektar vremenski kontinuiranog signala definiran je za  $\Omega$  u intervalu  $(-\infty, \infty)$ , a spektar vremenski diskretnog signala je iz područja  $[-\pi, \pi]$ .

Zbog aperiodičnosti signala u vremenskoj domeni, spektar  $X(e^{j\omega})$  je kontinuiran i periodičan s periodom  $2k\pi$ .

$$\begin{aligned} X(e^{j(\omega+2\pi k)}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j(\omega+2\pi k)n} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}e^{-j2\pi kn} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = X(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

Ovo svojstvo je izravna posljedica činjenice da je frekvencijsko područje bilo kojeg diskretnog signala omeđeno na  $[-\pi, \pi]$  te da je svaka frekvencija izvan ovog intervala ekvivalentna odgovarajućoj frekvenciji unutar intervala.

- zaključno, par za Fourierovu transformaciju aperiodičnih vremenski diskretnih signala je

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \quad (1)$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega \quad (2)$$

- izraz za Fourierovu transformaciju vremenski diskretnih aperiodičnih signala (DTFT) konvergira za

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty,$$

ili za,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty$$

#### 4. Veza DTFT-a i z-transformacije

Izrazi su isti, ali se  $e^{-j\omega n}$  zamjeni sa  $z^{-n}$ .

- za diskretni signal  $x, \forall n \in \mathbb{Z}$ , definira se dvostrana z-transformacija

$$\forall z \in \mathcal{PK}(x) \subset \mathbb{C}, \quad X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

gdje je područje konvergencije,  $\mathcal{PK}(x) \subset \mathbb{C}$ ,

- za vremenski diskretan signal definira se i DTFT

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

- u slučaju da područje konvergencije Z-transformacije sadrži jediničnu kružnicu  $z = e^{j\omega}$ , vrijedi

$$\forall z \in \mathcal{PK}(x), \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad X(e^{j\omega}) = X(z) \Big|_{z=e^{j\omega}}$$

## 5. DTFS

Vremenski diskretan periodičan signal  $x(n) = x(n + N)$  ima **periodičan i diskretan spektar**

- zaključno, par za Fourierovu transformaciju periodičnih vremenski diskretnih signala je

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

- Parsevalova jedankost za periodične diskrete signale<sup>1</sup>

$$P_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |X_k|^2$$

## 6. DFT

diskretna Fourierova transformacija – *DFT*

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jk\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

inverzna diskretna Fourierova transformacija – *IDFT*

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{jk\frac{2\pi}{N}kn}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

DFT simetričnog niza – čisto realan

DFT antisimetričnog niza – čisto imaginaran

Fourierova transformacija vremenski diskretnih aperiodskih signala konačnog trajanja je kontinuirana funkcija od frekvencije  $\omega$ . Radi predstavljanja takve funkcije na računalima pogodno je koristiti njene uzorke, a ne funkciju.

Matematički postupak kojim je moguće odrediti N uzoraka Fourierove transformacije nekog aperiodskog signala konačnog trajanja naziva se diskretna Fourierova transformacija (DFT)

## 7. Povezanost DFT-a i DTFT-a

Diskretnu Fourierovu transformaciju (DFT) **aperiodičnog** niza interpretiramo kao očitavanje njegove DTFT, zbog čega su gotovo sva svojstva koja vrijede za DTFT primjenjiva za DTF

- cirkularni vremenski pomak
- cirkularni frekvencijski pomak
- cirkularna konvolucija

## 8. Dometak nula u DFT-u

Dodavanjem nula (zero padding) povećava se broj točaka DFT-a, čime se zapravo povećava rezolucija izračunatog spektra. Ipak ta rezolucija je samo numerička rezolucija, ne fizikalna rezolucija spektra signala (nismo povećali broj uzoraka na nekom intervalu, povećali smo interval, uzorci su i dalje jednako razmaknuti).

## 9. Linearna konvolucija

Konvolucija konačnih signala duljina L i M. Rezultat njihove linearne konvolucije je duljine **N+M-1**

Dometkom odgovarajućeg broja nula na svaki od njih do duljine L+M-1, **cirkularna konvolucija postaje jednaka linearnoj.**

## 10. Konvolucijska sumacija

Za vremenski **diskretan** LTI sustav definira se impulsni odziv h, kao odziv na pobudu Kroneckerovom delta funkcijom (jediničnim impulsom)  $h = S(\delta)$  tako da je

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad h(n) = (S(\delta))(n)$$

Za bilo koji ulazni signal u, odziv LTI sustava  $y = S(u)$  je **određen konvolucijom** ulaznog signala i impulsnog odziva

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)h(n-m) = (u * h)(n) = (h * u)(n)$$

## 11. Cirkularna konvolucija

Cirkularnoj konvoluciji dvaju konačnih nizova  $x_1(n)$  i  $x_2(n)$  u vremenskoj domeni odgovara produkt njihovih DFT u frekvencijskoj domeni

$$DFT \left[ \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)x_2(\langle n-m \rangle_N) \right] = X_1(k)X_2(k)$$

izvod:

$$\begin{aligned} IDFT[X_1(k)X_2(k)] &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_1(k)X_2(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[ \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)e^{-j\frac{2\pi}{N}km} \right] \left[ \sum_{p=0}^{N-1} x_2(p)e^{-j\frac{2\pi}{N}kp} \right] e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) \sum_{p=0}^{N-1} x_2(p) \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}k(n-m-p)} \right] \end{aligned}$$

$\forall r \in \mathbb{Z}$

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}k(n-m-p)} = \begin{cases} 1, & \text{za } p = (n-m) + rN = \langle n-m \rangle_N, \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

slijedi

$$IDFT[X_1(k)X_2(k)] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)x_2(\langle n-m \rangle_N)$$

- zaključujemo da je cirkularna konvolucija dva konačna niza, niz duljine  $N$
- uobičajena je oznaka

$$y_C(n) = x_1(n) \circledast x_2(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)x_2(\langle n-m \rangle_N)$$

## 12. Konvolucijski integral

Za vremenski **kontinuiran** LTI sustav definira se impulsni odziv  $h$ , kao odziv na pobudu Diracovom delta funkcijom (jediničnim impulsom)  $h = S(\delta)$ , tako da je

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad h(t) = (S(\delta))(t)$$

Za bilo koji ulazni signal  $u$ , odziv LTI sustava  $y = S(u)$  određen je **konvolucijom** ulaznog signala i impulsnog odziva.

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t-\tau) d\tau = (u * h)(t) = (h * u)(t)$$

### 13. Metoda podijeli pa vladaj

Računanje DFT<sub>N</sub> u N točaka, gdje je N faktoriziran kao produkt dva cijela broja N=LM.

Niz  $x(n)$  može se pohraniti u jednodimenzionalno polje indeksirano s n.

n	0	1	2	...	N-1
	$x(0)$	$x(1)$	$x(2)$	...	$x(n-1)$

Niz  $x(n)$  može se pohraniti i u dvodimenzionalno polje indeksirano s l i m.

$$0 \leq l \leq L - 1 \quad 0 \leq m \leq M - 1$$

gdje  $l$  predstavlja indeks redaka a  $m$  indeks stupaca

$l \setminus m$	0	1	2	...	$M - 1$
0	$x(0, 0)$	$x(0, 1)$	$x(0, 2)$	...	$x(0, M - 1)$
1	$x(1, 0)$	$x(1, 1)$	$x(1, 2)$	...	$x(1, M - 1)$
2	$x(2, 0)$	$x(2, 1)$	$x(2, 2)$	...	$x(2, M - 1)$
:	:	:	:	:	:
$L - 1$	$x(L-1, 0)$	$x(L-1, 1)$	$x(L-1, 2)$	...	$x(L-1, M-1)$

niz  $x(n)$  se u dvodimenzionalno polje može pohraniti na više načina, ovisno o razlaganju indeksa n u indekse (l,m)

- **Razlaganje po redcima** (prvi redak sadrži prvih M elemenata, drugi drugih M elemenata...)
  - $n = Ml + m$
- **Razlaganje po stupcima**, gdje prvi stupac sadrži prvih L elemenata, drugi drugih L elemenata
  - $n = l + mL$

Na iste načine može se razložiti i indeks k za izračunati X(k).

$DFT_N$  može se izraziti kao dvostruka suma preko elemenata polja pomnoženih s odgovarajućom kompleksnom eksponencijalom

npr.  $x(n)$  je pohranjen po stupcima  $n = l + mL$ , a  $X(k)$  je pohranjen po redcima  $k = Mp + q$

- izračun

$$X(p, q) = \sum_{l=0}^{L-1} \underbrace{\left\{ W_N^{ql} \overbrace{\left[ \sum_{m=0}^{M-1} x(l, m) W_M^{mq} \right]}^{F(l, q)} \right\}}_{G(l, q)} W_L^{pl}$$

Tri koraka izračuna

1. Izračunaj  $F(l, q)$
2. Izračunaj  $G(l, q)$
3. Izračunaj  $X(q, p)$

### Metoda podijeli pa vladaj

- izračun broja numeričkih operacija
  - broj množenja:  $LM^2 + LM + ML^2 = N(M + 1 + L)$
  - broj zbrajanja:  $LM(M - 1) + ML(L - 1) = N(M + L - 2)$
- primjer: neka je  $N = 1000$  i neka su  $L = 20$  i  $M = 50$   
broj množenja :  
$$N(M + L + 1) = 1000(20 + 50 + 1) = 71000$$
- izravnim izračunom  $DFT_N$  potrebno je  $N^2 = 10^6$  kompleksnih množenja pa je omjer<sup>2</sup>:

$$\frac{N^2}{N(M + L + 1)} = \frac{10^6}{71000} = 14.08$$

## 14. Radix-2 FFT – algoritam decimacije u vremenu/frekvenciji

$DFT_N$  se može još efikasnije izračunati ako se  $N$  faktorizira

$$N = r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_j$$

gdje su  $\{r_j\}$  prim brojevi

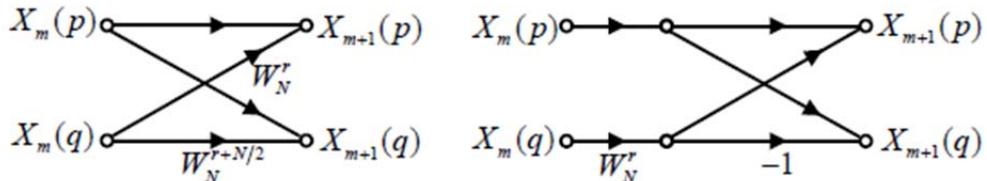
U slučaju da su  $r_1 = r_2 = \dots = r_j$  je  $N = r^j$  (da su sve dimenzije  $r$ ) izračunavanje DFT<sub>N</sub> poprima pravilnu strukturu te se r tada naziva baza (radix) FFT algoritma.

Za  $N = 2^j$  koristi se postupak „podjeli pa vladaj“ tako da se izabere  $M = N/2$  i  $L=2$ . Niz  $x(n)$  razlažemo po stupcima tako da svaki stupac sadrži dva elementa.

U prvom retku dobit ćemo  $f_1(n)$  u kojem će biti samo parni uzorci, a u drugom  $f_2(n)$  bit će neparni uzorci.

$f_1(n)$  i  $f_2(n)$  dobiveni su decimacijom niza  $x(n)$  za faktor 2 i zato se ovaj FFT algoritam naziva **algoritam decimacije u vremenu** (decimation in time algorithm – DIT FFT)

Kako se tijekom postupka  $X(k)$  razlaže na parne i neparne uzorce ovaj postupak nazivamo **algoritam decimacije u frekvencijskoj domeni**



- uz  $W_N^{N/2} = e^{-j\frac{2\pi}{N} \cdot \frac{N}{2}} = e^{-j\pi} = -1$

$$X_{m+1}(p) = X_m(p) + W_N^r X_m(q)$$

$$X_{m+1}(q) = X_m(p) + W_N^{r+N/2} X_m(q) = X_m(p) - W_N^r X_m(q)$$

- neka je  $N = 2^j$  i koristi se postupak "podjeli pa vladaj" tako da se izabere  $L = N/2$  i  $M = 2$
- niz  $x(n)$  je razložen po stupcima, gdje prvi stupac sadrži prvi  $L = N/2$  elemenata  $x(n)$  a drugi stupac sadrži slijedećih  $L = N/2$  elemenata
- postupkom sličnim kao kod decimacije u vremenu dolazimo do strukture kao na slici na narednoj prikaznici
- kako se tijekom postupka  $X(k)$  razlaže na parne i neparne uzorce ovaj postupak nazivamo **algoritam decimacije u frekvenciji** – decimation-in-frequency algorithm (DIF FFT)
- treba uočiti kako je sada niz  $x(n)$  u prirodnom poretku uzorka a izračunati niz  $X(k)$  u "bit reversed" poretku

## 15. RE2FFT – DFT dvaju realnih nizova pomoću jedne kompleksne DFT

$x(n)$  i  $y(n)$  su dva nezavisna realna i konačna niza. Da bi pronašli  $X(k)$  i  $Y(k)$  stvaramo novi kompleksan niz  $z(n) = x(n) + jy(n)$  te određujemo njegov DFT.

$$\begin{aligned} Z(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} [x(n) + jy(n)] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} [x(n) + jy(n)] \left[ \cos \frac{2\pi}{N}kn - j \sin \frac{2\pi}{N}kn \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z(k) &= \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos \frac{2\pi}{N}kn}_{Re[X(k)]} + \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} y(n) \sin \frac{2\pi}{N}kn}_{-Im[Y(k)]} + \\ &\quad + j \left[ \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} y(n) \cos \frac{2\pi}{N}kn}_{Re[Y(k)]} - \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} x(n) \sin \frac{2\pi}{N}kn}_{Im[X(k)]} \right] \end{aligned}$$

- (1)  $Re[Z(k)] = Re[X(k)] - Im[Y(k)]$
- (2)  $Im[Z(k)] = Re[Y(k)] + Im[X(k)]$
- (3)  $Re[Z(N-k)] = Re[X(N-k)] - Im[Y(N-k)]$
- (4)  $Im[Z(N-k)] = Re[Y(N-k)] + Im[X(N-k)]$

- kombinacijom prethodnih jednadžbi slijede četiri jednadžbe iz kojih određujemo  $X(k)$  i  $Y(k)$

$$(1) + (3) \Rightarrow \operatorname{Re}[X(k)] = \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{Re}[Z(k)] + \operatorname{Re}[Z(N-k)] \right\}$$

$$(2) - (4) \Rightarrow \operatorname{Im}[X(k)] = \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{Im}[Z(k)] - \operatorname{Im}[Z(N-k)] \right\}$$

$$(2) + (4) \Rightarrow \operatorname{Re}[Y(k)] = \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{Im}[Z(k)] + \operatorname{Im}[Z(N-k)] \right\}$$

$$(3) - (1) \Rightarrow \operatorname{Im}[Y(k)] = \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{Re}[Z(N-k)] - \operatorname{Re}[Z(k)] \right\}$$

- zaključujemo kako je **jednom DFT duljine N** moguće istovremeno transformirati **dva realna niza duljine N**

## 16. REDFFT

Transformacija realnog niza  $v(n)$  duljine  $2N$  pomoću DFT duljine  $N$ .

Niz  $v(n)$  duljine  $2N$  razlažemo na dva niza definirana kao  $x(n) = v(2n)$  i  $y(n) = v(2n+1)$ , svaki duljine  $N$ .

Na svaki **primjenimo RE2FFT** te izračunamo  $X(k)$  i  $Y(k)$ .

- DFT transformaciju početnoga niza  $v(n)$  izračunavamo iz

$$V(k) = X(\langle k \rangle_N) + W_{2N}^k Y(\langle k \rangle_N), \quad 0 \leq k \leq 2N-1$$

## 17. Odnos trajanja signala i širine spektra

U slučaju pravokutnog pulsa, spektar se širi kako se **trajanje pulsa skraćuje**. Trajanje signala i širina frekvencijskog pojasa su **recipročni**, a njihov produkt je **konstanta**.

### Equal-Area Rectangle

Prema ovoj definiciji trajanje signala  $x(t)$  je trajanje pravokutnog signala koji je iste površine i visine kao sam signal  $x(t)$ . Identično se definira i širina frekvencijskog pojasa spektra signala

- uz

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt \quad \& \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)e^{j\Omega t} d\Omega$$

i uz

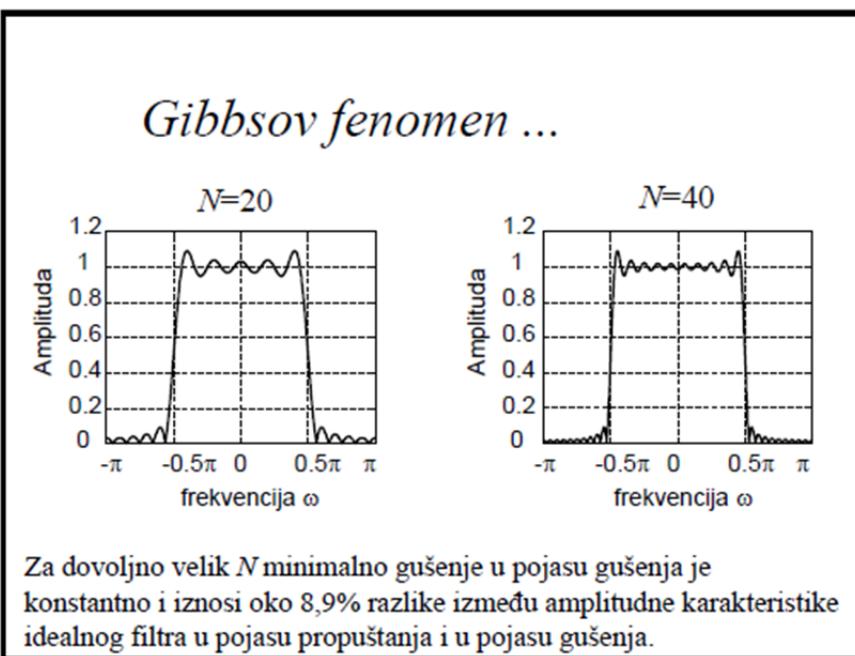
$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt}_{X(0)} = Dx(0) \quad \& \quad \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) d\Omega}_{2\pi x(0)} = BX(0)$$

slijedi

$$D = \frac{X(0)}{x(0)} \quad \& \quad B = 2\pi \frac{x(0)}{X(0)} \quad \Rightarrow \quad DB = 2\pi$$

## 18. Gibbsov efekt

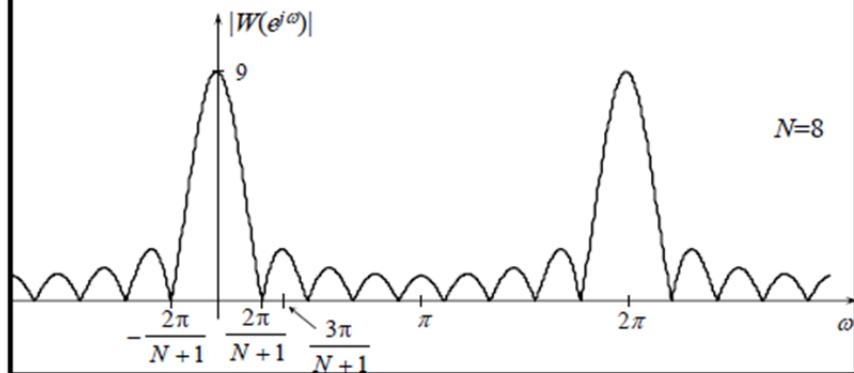
Gibbsov fenomen je odziv filtra na step, odnosno kako se signal ponaša kada ga „naglo odrežemo“. Dolazi do valovitosti. Što je veći red filtra, signal će imati manje prijelazno područje te će aproksimacija pravokutnog vremenskog otvora biti bolja



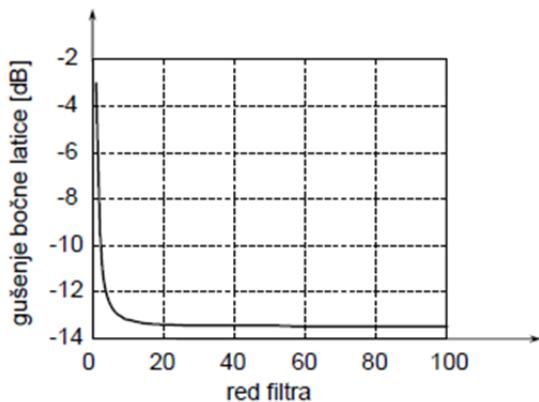
## Gibbsov fenomen ...

Fourierova transformacija vremenskog otvora  $w[n]$  je

$$W(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^N e^{-jk\omega} = e^{-j\omega\frac{N}{2}} \cdot \frac{\sin \omega(N+1)/2}{\sin \omega/2}$$

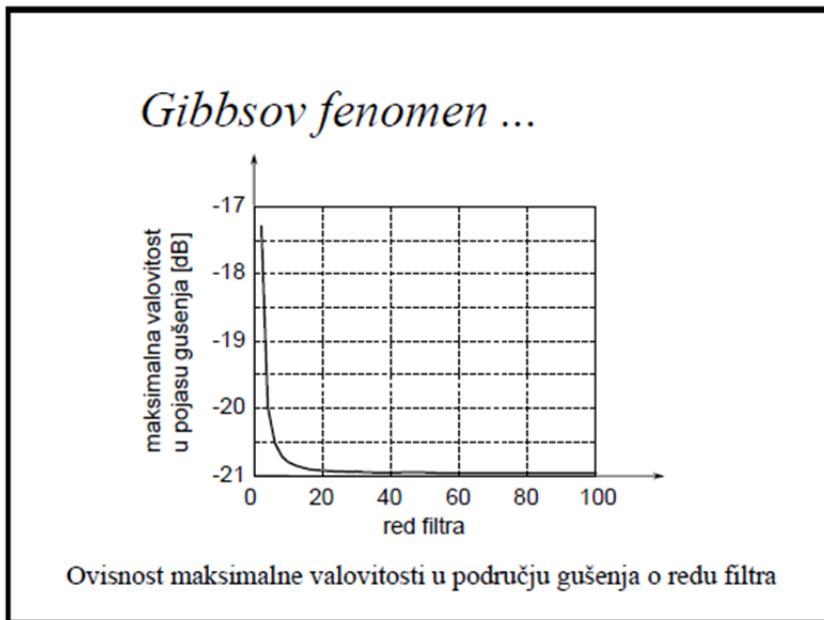


## Gibbsov fenomen ...



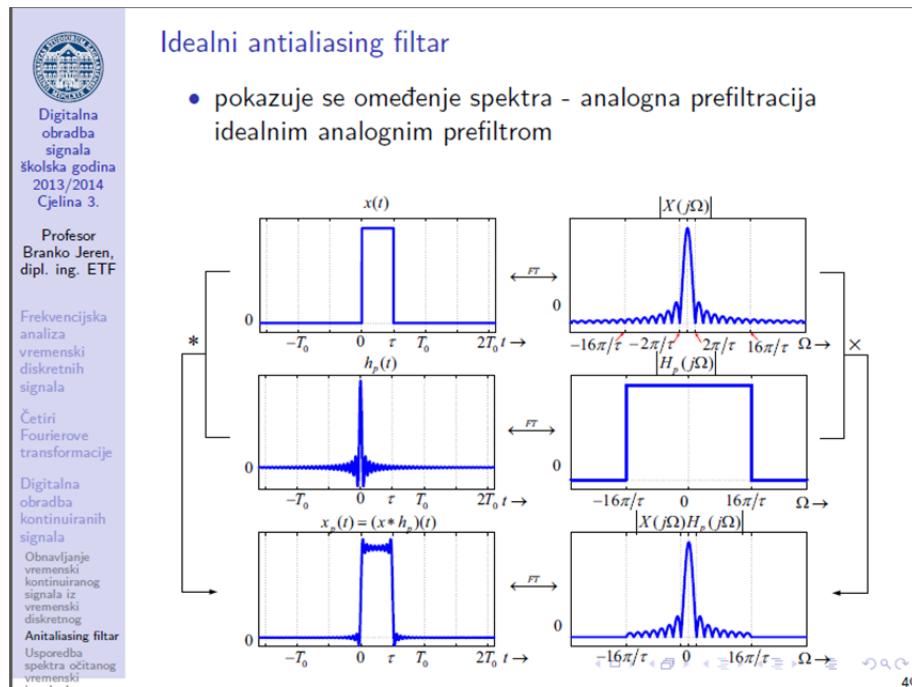
Ovisnost gušenja bočne latice o broju uzoraka

Gušenje bočne latice prestaje naglo padati nakon 20 uzoraka, što znači da bi nekakva granica gušenja dolazila do -12dB. Maksimalna valovitost pada do -21dB na 100 uzoraka, ali na 40 je tek neznatno iznad toga.



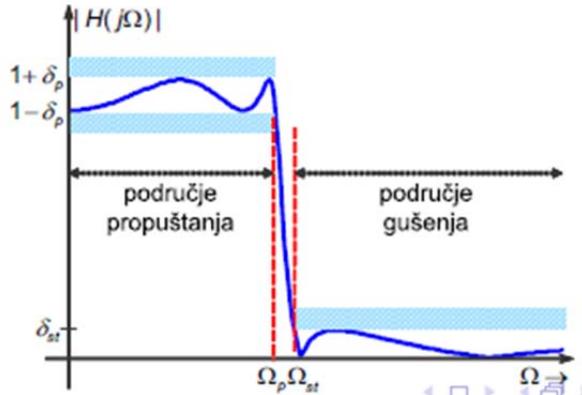
## 19. Antialiasing filter

U praksi mnogi signali nisu frekvencijski omeđeni te se očitavanjem takvih signala javlja aliasing i time pojava greške kod rekonstrukcije očitanog signala. Kako bi se greška smanjila signale frekvencijski omeđujemo.



Aliasing koji se javlja pri očitavanju frekvencijski neomeđenog signala izbjegava se filtriranjem kont. signala antialiasing filtrom. AA filtri su niskopropusni analogni filtri koji propuštaju komponente spektra frekvencija **nižih od pola frekvencije očitavanja** do više guše.

Koriste se realni filtri koji imaju **konačnu širinu prijelaznog pojasa frekvencijske karakteristike i konačno gušenje** u pojasu gušenja



Zbog konačne širine prijelaznog područja realnih AA filtara potrebno je signal očitavati **nešto većom frekvencijom od dvostrukе maksimalne frekv. signala.**

(digitalna obrada glazbenih signala – frekv. područje 20kHz ->frekv. očitavanja 44.1kHz)

## 20. Utjecaj položaja polova i nula na frekv. karakteristiku

Nula ili pol ima najveći utjecaj na područje frekvencijske karakteristike koja odgovara dijelu jedinične kružnice koji je najbliži promatranoj nuli ili polu. Približavanjem nule ili pola jediničnoj kružnici raste njihov utjecaj na frekvencijsku karakteristiku.

Za pol čiji je modul  $|p_m|$  blizak jedinici amplitudna frekvencijska karakteristika ima lokalni maksimum za frekvenciju koja odgovara točki na jediničnoj kružnici koja je najbliža promatranoj polu.

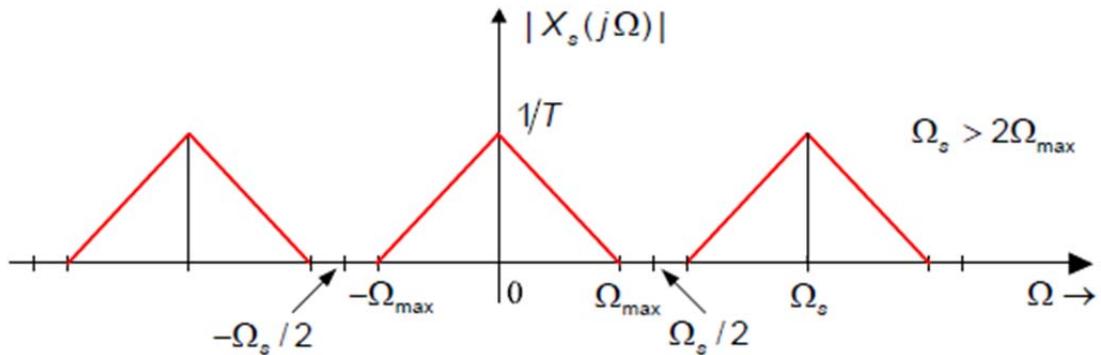
Za nulu čiji je modul  $|z_m|$  blizak jedinici, amplitudna frekvencijska karakteristika ima lokalni minimum za frekvenciju koja odgovara točki na jediničnoj kružnici koja je najbliža promatranoj nuli.

Ako je neka od **nula na jediničnoj kružnici**  $z_m = e^{j\omega}$ , za kružnu frekvenciju u amplitudna karakteristika ima vrijednost nula, a faza skok od  $\pi$  radijana.

Ako je neki od **polova na jediničnoj kružnici**  $p_m = e^{j\omega}$ , za kružnu frekvenciju u amplitudna frekvencijska karakteristika ima beskonačnu vrijednost.

Polovi i nule koji se nalaze u **samom ishodištu** ne utječu na amplitudno frekvencijsku karakteristiku već samo na faznu.

## 21. Obnavljanje ili rekonstrukcija vremenski kontinuiranog signala iz vremenski diskretnog



Obnavljanje ili rekonstrukciju vremenski kontinuiranog signala iz vremenski diskretnog signala postižemo izdvajanjem osnovne sekcije spektra  $X_s(j\Omega)$  koji potom **filtriramo s rekonstrukcijskim filterom** frekvencijske karakteristike  $H_r(j\Omega)$ .

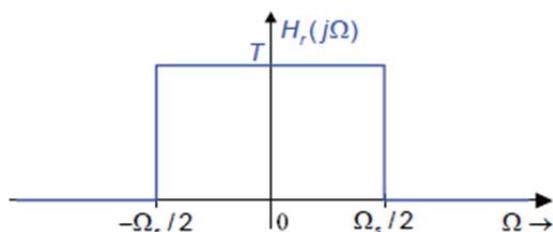
$$X_c(j\Omega) = X_s(j\Omega)H_r(j\Omega)$$

Prepostavke:

Frekvencija očitavanja je takva da unutar pojasa  $(-\Omega_s/2, \Omega_s/2)$  nema preklapanja sekcija spektra pa vrijedi

$$X_c(j\Omega) = X(j\Omega) = X_s(j\Omega)H_r(j\Omega)$$

$H_r(j\Omega)$  je idealan filter čija je frekvencijska karakteristika pravokutan otvor



$$H_r(j\Omega) = \begin{cases} T & |\Omega| \leq \frac{\Omega_s}{2} = \frac{\pi}{T} \\ 0 & |\Omega| > \frac{\Omega_s}{2} = \frac{\pi}{T} \end{cases}$$

a impulsni odziv

$$h_r(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_r(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega = \frac{\sin(\Omega_s t/2)}{\Omega_s t/2} = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}$$

---

<sup>6</sup>Impulsni odziv se definira kao odziv sustava na jedinični impuls. Ovdje se podsjetimo kako se impulsni odziv može odrediti kao inverzna Fourierova transformacija frekvencijske karakteristike filtra

36

### (Primjeti sinc!)

Uzmememo u obzir:

1. Umnožak u vremenskoj je konvolucija u frekvencijskoj domeni
2. Množenje funkcije s pomaknutim kroeneckerom je vrijednost funkcije s tim pomakom

a.  $f(t) * \delta(t - t_1) = f(t - t_1)$

$$X(j\Omega) = H_r(j\Omega)X_s(j\Omega) \xrightarrow{CTFT}$$

$$x(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T} * \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)$$

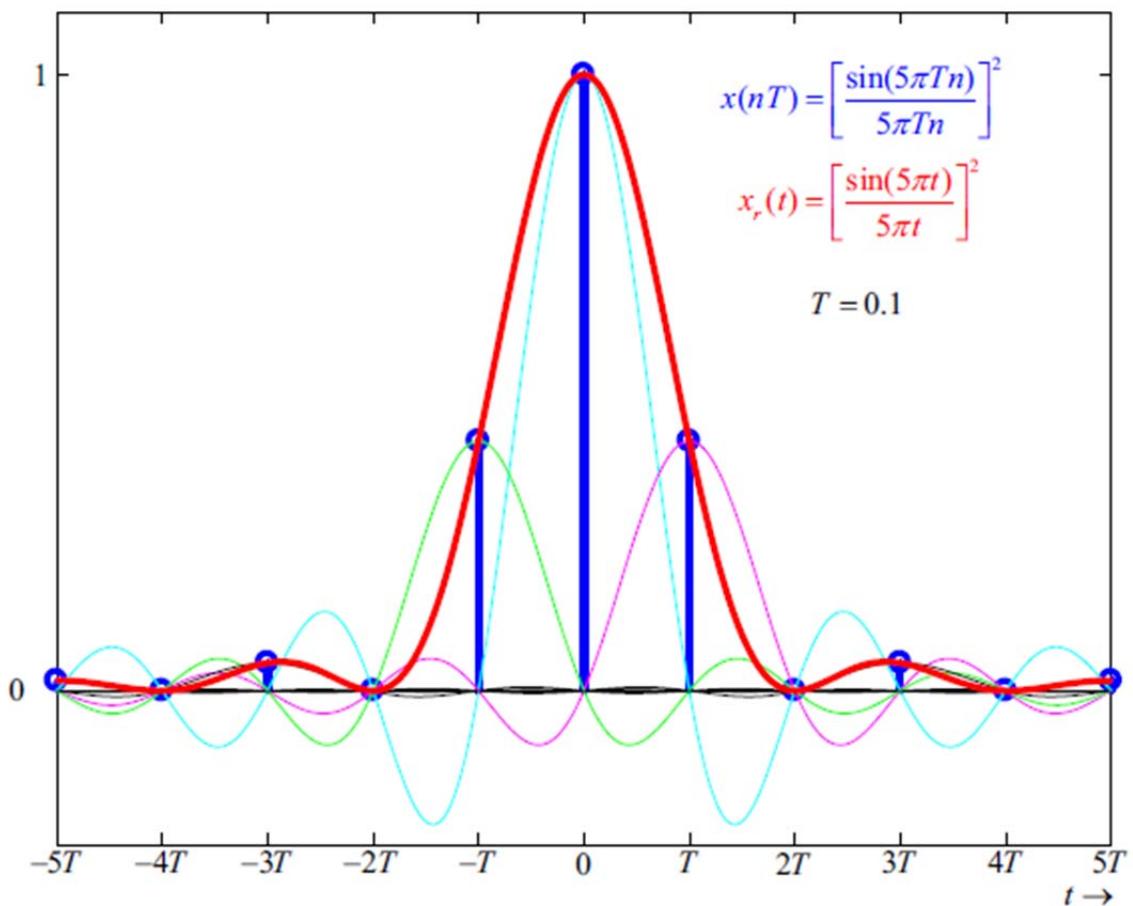
pa je

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \frac{\sin \frac{\pi}{T}(t - nT)}{\frac{\pi}{T}(t - nT)}$$

što znači da je kontinuirani signal  $x(t)$  rekonstruiran iz očitaka signala  $x(nT)$  interpolacijom s funkcijom

$$\frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}$$

Interpolacijska funkcija sinc ( $t/T$ ) predstavlja impulsni odziv **idealnog filtra**. Idealni filter ima nekauzalan impulsni odziv (odziv na impuls počinje prije nego se impuls pojavio te je prema tome **neostvariv**).



## 22. Linearna faza

Filtri moraju imati linearu fazu kako bi sve frekvencijske komponente imale jednolik pomak u vremenu (jednoliko kašnjenje)

## 23. FIR filtri

- filtri s linearnom fazom
- simetrija impulsnog odziva je nužan preduvjet za linearu fazu
- ovisno o tipu simetrije impulsnog odziva definiramo četiri tipa FIR filtra s realnim impulsnim odzivom duljine N+1

## 24. Tipovi FIR filtara

Simetrija impulsnog odziva je nužan preduvjet za linearnu fazu. Ovisno o tipu simetrije definira se 4 tipa FIR filtara s realnim impulsnim odzivom duljine N+1

1. simetričan impulsni odziv, neparan broj uzoraka
2. simetričan impulsni odziv, paran broj uzoraka
3. asimetričan impulsni odziv, neparan broj uzoraka
4. asimetričan impulsni odziv, paran broj uzoraka

**TIP 1**

Simetričan impulsni odziv, neparan broj uzoraka. Impulsni odziv zadovoljava slijedeći uvjet

$$h(n) = h(N - n), \quad 0 \leq n \leq N$$

- zbog jednostavnijeg razmatranja prepostavimo  $N = 8$  i u tom je slučaju prijenosna funkcija filtra

$$\begin{aligned} H(z) = & h(0) + h(1)z^{-1} + h(2)z^{-2} + h(3)z^{-3} + h(4)z^{-4} + \\ & + h(5)z^{-5} + h(6)z^{-6} + h(7)z^{-7} + h(8)z^{-8} \end{aligned}$$

- uz predviđenu simetriju impulsnog odziva vrijedi

$$h(0) = h(8), \quad h(1) = h(7), \quad h(2) = h(6), \quad h(3) = h(5)$$

pa slijedi

$$\begin{aligned} H(z) = & h(0)[1 + z^{-8}] + h(1)[z^{-1} + z^{-7}] + \\ & + h(2)[z^{-2} + z^{-6}] + h(3)[z^{-3} + z^{-5}] + h(4)z^{-4} \\ = & z^{-4} \{ h(0)[z^4 + z^{-4}] + h(1)[z^3 + z^{-3}] + \\ & + h(2)[z^2 + z^{-2}] + h(3)[z + z^{-1}] + h(4) \} \end{aligned}$$

pripadna frekvencijska karakteristika

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) = & e^{-j4\omega} \{ 2h(0)\cos(4\omega) + 2h(1)\cos(3\omega) + \\ & + 2h(2)\cos(2\omega) + 2h(3)\cos(\omega) + h(4) \} \end{aligned}$$

- iz

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j4\omega} \{ 2h(0)\cos(4\omega) + 2h(1)\cos(3\omega) + \\ + 2h(2)\cos(2\omega) + 2h(3)\cos(\omega) + h(4) \}$$

- evidentno je kako je izraz u zagradi realna funkcija od  $\omega$  i može poprimiti pozitivne i negativne vrijednosti u intervalu  $0 \leq \omega \leq \pi$
- faza je linearna funkcija od  $\omega$ , pa je, za  $N = 8$ , grupno kašnjenje

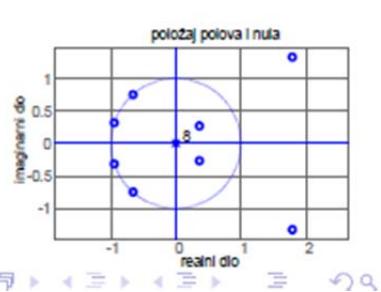
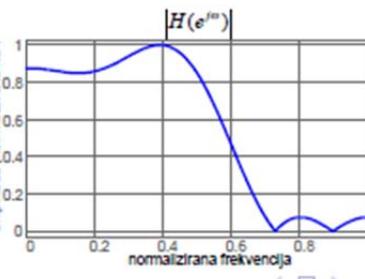
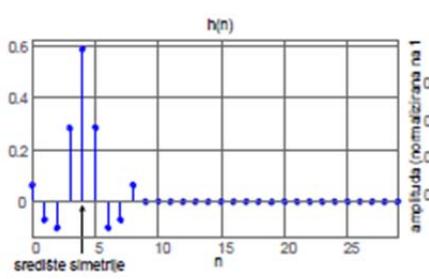
$$\tau(\omega) = -\frac{d\theta(\omega)}{d\omega} = 4$$

- u općem slučaju vrijedi

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{N}{2}\omega} \left\{ \underbrace{\sum_{n=0}^{N/2} a(n) \cos(\omega n)}_{\check{H}(\omega)} \right\} = e^{-j\frac{N}{2}\omega} \check{H}(\omega)$$

gdje su

$$a(0) = h\left(\frac{N}{2}\right), \quad a(n) = 2h\left(\frac{N}{2} - n\right), \quad 1 \leq n \leq \frac{N}{2}$$



Tip 1 je suma  $\cos(n\omega)$  – ne možemo napraviti visoko propusni jer bi on zahtjevao da je u  $\omega=0$  vrijednost filtra 0, a to je nemoguće postići.

**TIP 2**

Simetričan impulsni odziv, paran broj uzoraka

- impulsni odziv zadovoljava slijedeći uvjet

$$h(n) = h(N - n), \quad 0 \leq n \leq N$$

- zbog jednostavnijeg razmatranja pretpostavimo  $N = 7$  i u tom je slučaju prijenosna funkcija filtra

$$\begin{aligned} H(z) = & h(0) + h(1)z^{-1} + h(2)z^{-2} + h(3)z^{-3} + h(4)z^{-4} + \\ & + h(5)z^{-5} + h(6)z^{-6} + h(7)z^{-7} \end{aligned}$$

- uz predviđenu simetriju impulsnog odziva vrijedi

$$h(0) = h(7), \quad h(1) = h(6), \quad h(2) = h(5), \quad h(3) = h(4)$$

pa slijedi

$$\begin{aligned} H(z) = & h(0)[1 + z^{-7}] + h(1)[z^{-1} + z^{-6}] + \\ & + h(2)[z^{-2} + z^{-5}] + h(3)[z^{-3} + z^{-4}] \\ = & z^{-7/2} \{ h(0)[z^{7/2} + z^{-7/2}] + h(1)[z^{5/2} + z^{-5/2}] + \\ & + h(2)[z^{3/2} + z^{-3/2}] + h(3)[z^{1/2} + z^{-1/2}] \} \end{aligned}$$

pripadna frekvencijska karakteristika

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) = & e^{-j\frac{7}{2}\omega} \left\{ 2h(0) \cos\left(\frac{7}{2}\omega\right) + 2h(1) \cos\left(\frac{5}{2}\omega\right) + \right. \\ & \left. + 2h(2) \cos\left(\frac{3}{2}\omega\right) + 2h(3) \cos\left(\frac{1}{2}\omega\right) \right\} \end{aligned}$$

- iz

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{7}{2}\omega} \left\{ 2h(0) \cos\left(\frac{7}{2}\omega\right) + 2h(1) \cos\left(\frac{5}{2}\omega\right) + 2h(2) \cos\left(\frac{3}{2}\omega\right) + 2h(3) \cos\left(\frac{1}{2}\omega\right) \right\}$$

- evidentno je kako je izraz u zagradi realna funkcija od  $\omega$  i može poprimiti pozitivne i negativne vrijednosti u intervalu  $0 \leq \omega \leq \pi$
- faza je linearna funkcija od  $\omega$ , pa je, za  $N = 7$ , grupno kašnjenje

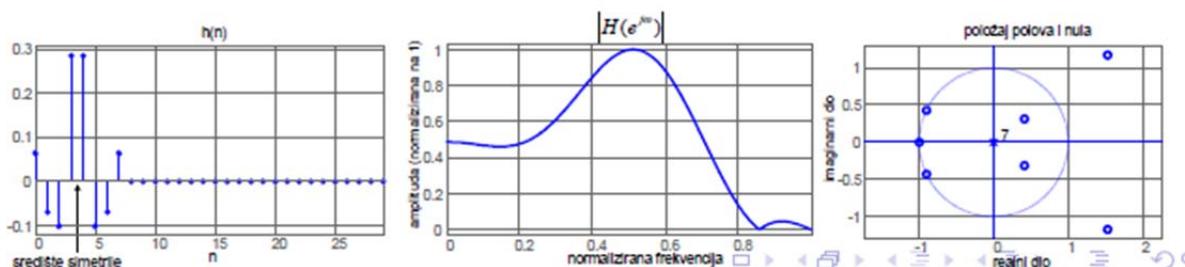
$$\tau(\omega) = -\frac{d\theta(\omega)}{d\omega} = \frac{7}{2}$$

- u općem slučaju vrijedi (uočiti nulu prijenosne funkcije za  $\omega = \pi$ )

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{N}{2}\omega} \underbrace{\left\{ \sum_{n=1}^{(N+1)/2} b(n) \cos\left(\omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\right) \right\}}_{\check{H}(\omega)} = e^{-j\frac{N}{2}\omega} \check{H}(\omega)$$

gdje je

$$b(n) = 2h\left(\frac{N+1}{2} - n\right), \quad 1 \leq n \leq \frac{N+1}{2}$$



Tip 2 je suma cos ovisna o  $\omega/2$ , što znači da je moguće postići da filter daje vrijednost 0 u  $\omega=0$ , ali ne i da daje 1 za  $\omega=\pi$ .

### TIP 3

Suma  $\sin(n\omega)$

### TIP 4

Suma  $\sin(\omega(n-1/2))$

## Tablica ostvarivosti FIR filtara

- iz općeg oblika frekvencijske karakteristike FIR filtara linearne faze<sup>5</sup>

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\alpha\omega} e^{j\beta} \tilde{H}(\omega)$$

	simetričnost	$N$	$\alpha$	$\beta$	$\tilde{H}(\omega)$	napomena
Tip 1	$h(n) = h(N - n)$	paran	$\frac{N}{2}$	0	$\sum_{n=0}^{N/2} a(n) \cos(\omega n)$	
Tip 2	$h(n) = h(N - n)$	nepar.	$\frac{N}{2}$	0	$\sum_{n=1}^{(N+1)/2} b(n) \cos(\omega(n - \frac{1}{2}))$	$H(\pi) = 0$
Tip 3	$h(n) = -h(N - n)$	paran	$\frac{N}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\sum_{n=1}^{N/2} c(n) \sin(\omega n)$	$H(0) = H(\pi) = 0$
Tip 4	$h(n) = -h(N - n)$	nepar.	$\frac{N}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\sum_{n=1}^{(N+1)/2} d(n) \sin(\omega(n - \frac{1}{2}))$	$H(0) = 0$

- zaključujemo o mogućnosti realizacije

	niski propust NP	visoki prop. VP	pojasni prop. PP	pojasna brana PB
Tip 1	+	+	+	+
Tip 2	+	-	+	-
Tip 3	-	-	+	-
Tip 4	-	+	+	-

<sup>5</sup>za tip 1 broj uzoraka simetričnog impulsnog odziva je neparan ali je  $N$  paran. Isto vrijedi za ostale tipove

When choosing one of these 4 types of linear phase filters there are mainly 3 things to consider:

- constraints on the zeros of  $H(z)$  at  $z=1$  and  $z=-1$
- integer/non-integer group delay
- phase shift (apart from the linear phase)

For type I filters (odd number of taps, even symmetry) there are no constraints on the zeros at  $z=1$  and  $z=-1$ , the phase shift is zero (apart from the linear phase), and the group delay is an integer value.

Type II filters (even number of taps, even symmetry) always have a zero at  $z=-1$  (i.e., half the sampling frequency), they have a zero phase shift, and they have a non-integer group delay.

Type III filters (odd number of taps, odd symmetry) always have zeros at  $z=1$  and  $z=-1$  (i.e. at  $f=0$  and  $f=f_s/2$ ), they have a 90 degrees phase shift, and an integer group delay.

Type IV filters (even number of taps, odd symmetry) always have a zero at  $z=1$ , a phase shift of 90 degrees, and a non-integer group delay.

This implies (among other things) the following:

- Type I filters are pretty universal, but they cannot be used whenever a 90 degrees phase shift is necessary, e.g. for differentiators or Hilbert transformers.
- Type II filters would normally not be used for high pass or band stop filters, due to the zero at  $z=-1$ , i.e. at  $f=f_s/2$ . Neither can they be used for applications where a 90 degrees phase shift is necessary.
- Type III filters cannot be used for standard frequency selective filters because in these cases the 90 degrees phase shift is usually undesirable. For Hilbert transformers, type III filters have a relatively bad magnitude approximation at very low and very high frequencies due to the zeros at  $z=1$  and  $z=-1$ . On the other hand, a type III Hilbert transformer can be implemented more efficiently than a type IV Hilbert transformer because in this case every other tap is zero.
- Type IV filters cannot be used for standard frequency selective filters, for the same reasons as type III filters. They are well suited for differentiators and Hilbert transformers, and their magnitude approximation is usually better because, unlike type III filters, they have no zero at  $z=-1$ .
- In some applications an integer group delay is desirable. In these cases type I or type III filters are preferred.

## 25. Svepropusni filter

Naziva se još i korektor faze jer se **kaskadnim spojem** sustava koji ima dobru amplitudnu frekvencijsku karakteristiku, a lošu faznu karakteristiku **može korigirati fazna karakteristika**.

Za stabilan svepropusni filter polovi se nalaze unutar jedinične kružnice, a nule izvan jedinične kružnice.

## 26. Sustavi minimalne faze

Sustav čije su sve nule i polovi unutar jedinične kružnice. Od svih sustava s istom amplitudnom frekvencijskom karakteristikom imaju **najmanje fazno zaostajanje**.

## 27. Projektiranje FIR filtara pomoću vremenskog otvora

Tu se javlja Gibbsov fenomen.

$h(k)$  se može prikazati kao produkt željenog impulsnog odziva i otvora konačnog trajanja

$$h[n] = \tilde{h}_d[n] \cdot w[n]$$

gdje je

$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

U frekvencijskoj domeni vrijedi

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\varphi}) \cdot W(e^{j(\omega-\varphi)}) d\varphi$$

$H(e^{jw})$  je periodička kontinuirana konvolucija željene prijenosne karakteristike  $H_d(e^{jw})$  i Fourierove transformacije vremenskog otvora  $W(e^{jw})$ .

Postupak

1. Uzeti idealnu karakteristiku filtra
2. Izračunati Fourierovu transformaciju idealne karakteristike filtra (daje beskonačan imp. odziv)
3. Odabrati vremenski otvor
4. Pomnožiti beskonačan impulsni odziv s uzorcima vremenskog otvora (daje konačan imp. odziv)

## 28. Projektiranje FIR filtera jednake valovitosti

**Parks-McClellan algoritam** – temelji se na iterativnom podešavanju koeficijenata  $H(\omega)$  dok maksimum pogreške  $E(\omega)$  ne postane minimalan.

- Ako maksimum od  $E(\omega)$  u području  $\omega_a \leq \omega \leq \omega_b$  iznosi  $\varepsilon_o$ , tada za absolutnu grešku vrijedi:

$$|\tilde{H}(\omega) - D(\omega)| \leq \frac{\varepsilon_o}{|W(\omega)|}, \quad \omega_a \leq \omega \leq \omega_b$$

- Za projektiranje filtra

$$D(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{za pojas propuštanja} \\ 0, & \text{za pojas gušenja} \end{cases}$$

- $\tilde{H}(\omega)$  treba zadovoljiti gornji zahtjev s valovitošću  $\pm \delta_p$  u pojasu propuštanja i valovitošću  $\delta_s$  u pojasu gušenja.

- Zato težinska funkcija može biti izabrana kao

$$W(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{u pojasu propuštanja} \\ \delta_p / \delta_s, & \text{u pojasu gušenja} \end{cases}$$

ili

$$W(\omega) = \begin{cases} \delta_s / \delta_p, & \text{u pojasu propuštanja} \\ 1, & \text{u pojasu gušenja} \end{cases}$$

## 29. Tipovi vremenskih otvora

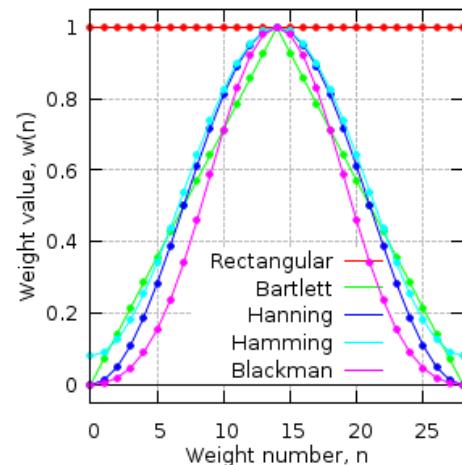
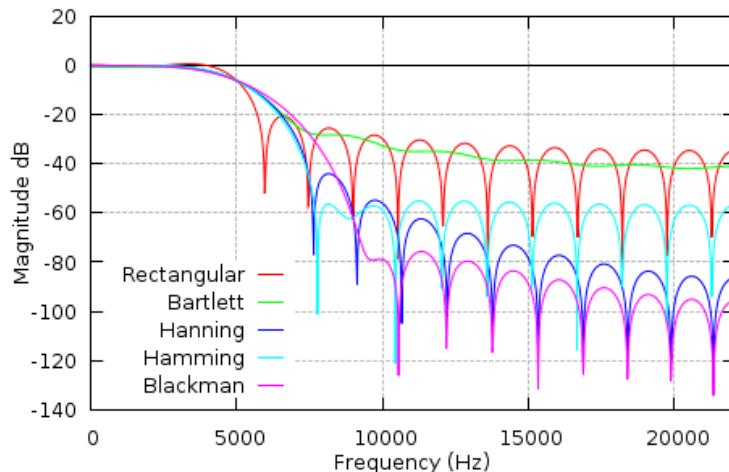
### Fiksni

- Pravokutni
- Bartletov (trokutni)
- Hannov
- Hammingov
- Blackmanov

### Promjenjivi vremenski otvori

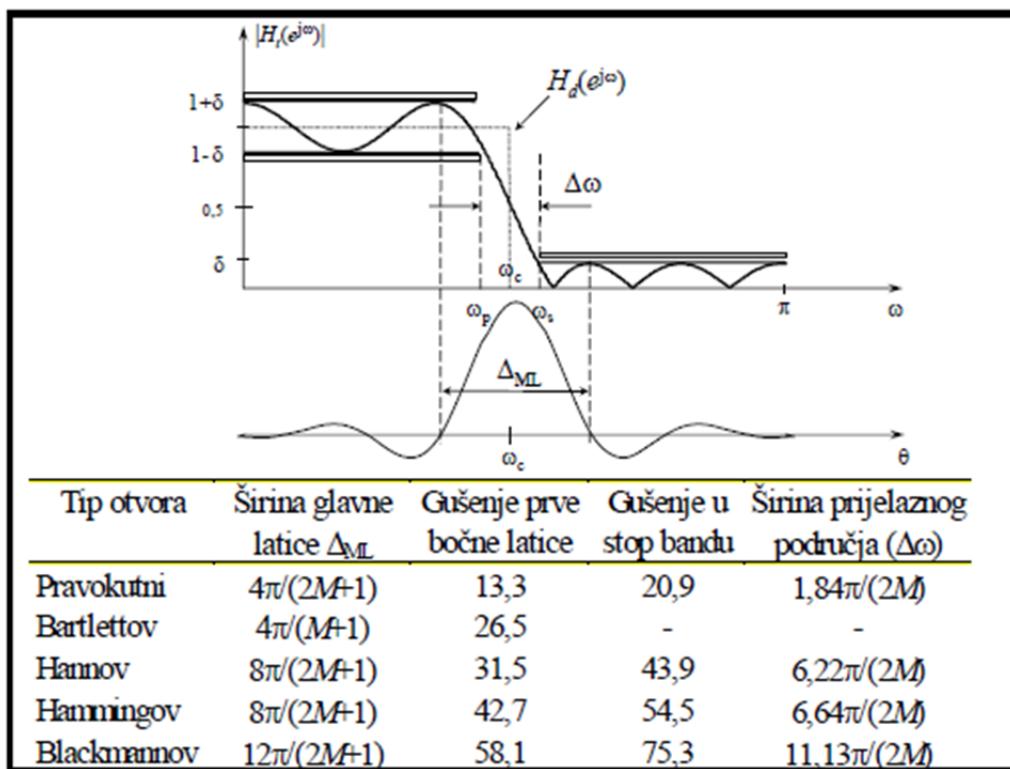
- Dolph-Chebyshev
- Kaiserov

## 30. Fiksni vremenski otvori



Fiksne vremenske otvore razlikujemo prema

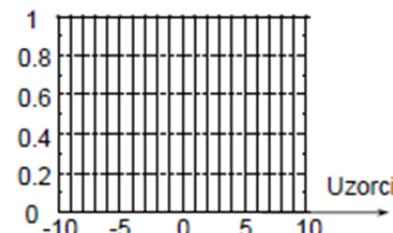
- širini glavne latice
- gušenju prve bočne latice
- gušenju u stop bandu
- širini prijelaznog područja



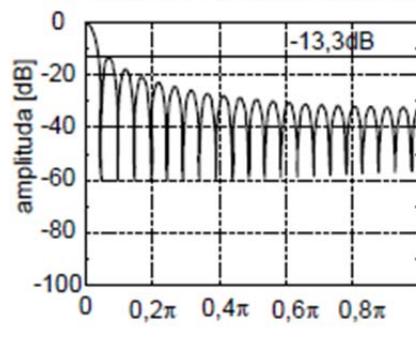
### Pravokutni vremenski otvor

Pravokutni vremenski otvor

$$w[n] = 1, \quad -M \leq n \leq M$$



Pravokutni vremenski otvor

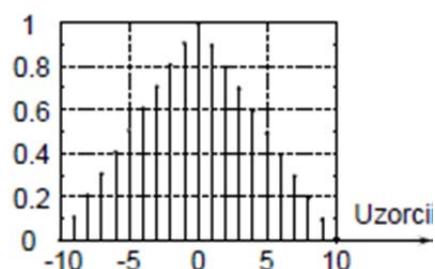


### Bartlettov vremenski otvor

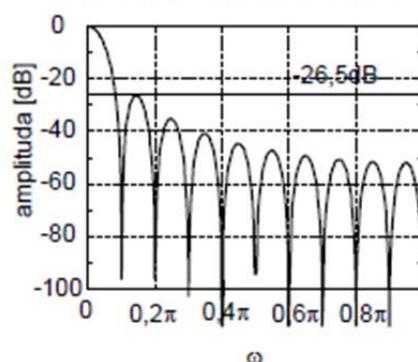
Bartlettov vremenski otvor

$$w[n] = 1 - \frac{|n|}{M+1},$$

$$-M \leq n \leq M$$



Bartlettov vremenski otvor

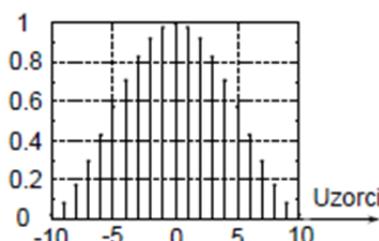


### Hannov vremenski otvor

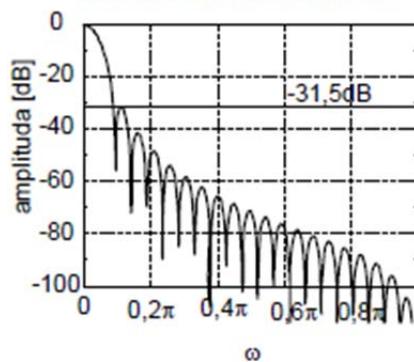
Hannov vremenski otvor

$$w[n] = 0,5 + 0,5 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot n}{2M+1}\right),$$

$$-M \leq n \leq M$$



Hannov vremenski otvor

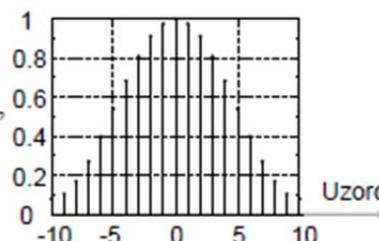


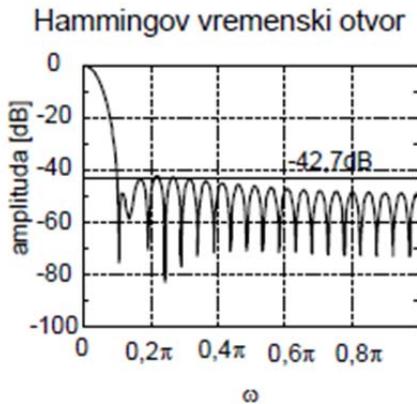
### Hammingov vremenski otvor

Hammingov vremenski otvor

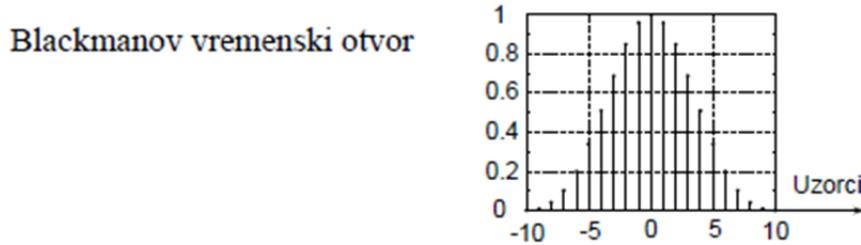
$$w[n] = 0,54 + 0,46 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot n}{2M+1}\right),$$

$$-M \leq n \leq M$$

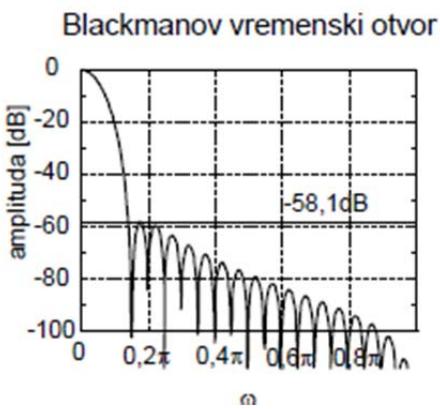




### Blackmanov vremenski otvor



$$w[n] = 0,42 + 0,5 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot n}{2M+1}\right) + 0,08 \cdot \cos\left(\frac{4 \cdot \pi \cdot n}{2M+1}\right), \\ -M \leq n \leq M$$



## 31. Promjenjivi vremenski otvori

Omogućavaju kontrolu minimalnog gušenja. Promjenom određenih parametara utječemo na karakteristiku filtra.

Kod projektiranja FIR filtera metodom fiksnih vremenskih otvora, valovitost u području gušenja zavisila je o tipu korištenog otvora. Primjenom adaptivnih vremenskih otvora (Kaiser, Dolph-Čebišev) moguće je **utjecati na valovitost, ali je ona ista za cijelo frekvencijsko područje** (za područje propuštanja i za područje gušenja). Metoda koja bi omogućila **nezavisnu** kontrolu nad valovitostima u pojedinim pojasevima dala bi filtre nižeg reda za ostvarenje iste željene karakteristika.

Metode kojima se to može temelje se na iterativnim optimizacijskim postupcima koji se provode uz pomoć računala.

Vremenski prozori mogu biti kategorizirani u kao fiksni ili promjenjivi. Fiksni prozori (pravokutni, Hanning, Hamming, Bartlett, Blackman) imaju **samo jedan nezavisni parametar – širinu prozora**. Širina prozora kontrolira širinu glavne latice.

Adaptivni (promjenjivi) vremenski otvori imaju dva ili više nezavisnih parametara. Jedan koji kontrolira širinu prozora te ostali koji određuju neke druge karakteristike filtra.

### Dolph-Chebyshevijev otvor

Chebyshev ili minmax kriterij

**Minimizira se maksimalna vrijednost greške:**

$\epsilon = \max |E(\omega)|$ ,  $\omega \in R$ , gdje je R skup razdvojenih frekvencijskih područja  $[0, \pi]$ , za koje je  $D(e^{j\omega})$  definiran.

- Iterativno se određuju koeficijenti  $H(z)$  tako da je razlika  $H(e^{j\omega})$  i  $D(e^{j\omega})$  preko zatvorenih subintervala od  $0 \leq \omega \leq \pi$  minimalna.
- Greška aproksimacije dana je s:

$$E(\omega) = W(e^{j\omega})[H(e^{j\omega}) - D(e^{j\omega})]$$

gdje je  $W(e^{j\omega})$  težinska funkcija

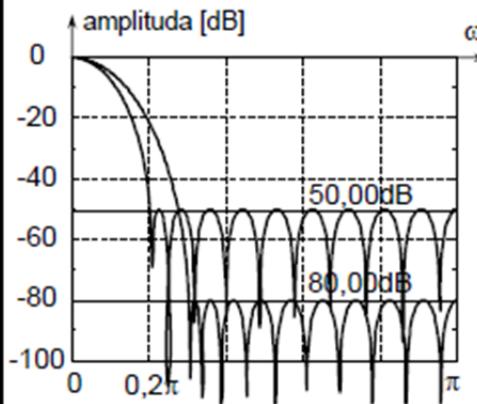
Greška aproksimacije, težinska funkcija.

Veće gušenje -> šira glavna latica

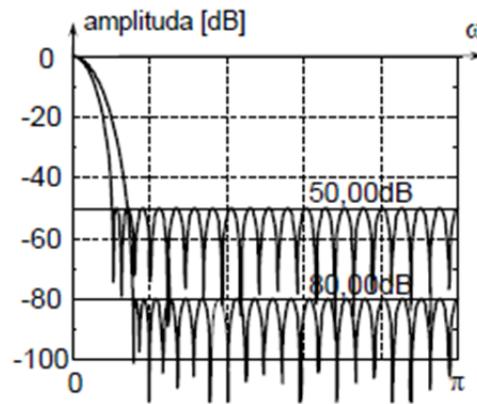
Veci red otvora -> uža glavna latica

## Dolph-Chebyshev otvor ...

N = 20



N = 40



- Veće gušenje  $\rightarrow$  šira glavna latica
- Veći red otvora  $\rightarrow$  uža glavna latica

## Kaiserov otvor

Kontrolira **širinu prozora i gušenje prve bočne latice**. Njegov problem je matematička kompleksnost uslijed korištenja Besselovih funkcija pri proračunu parametara prozora.

## Kaiserov otvor

$$w[n] = \frac{I_0 \left\{ \beta \cdot \sqrt{1 - \left( \frac{n}{M} \right)^2} \right\}}{I_0(\beta)}, \quad -M \leq n \leq M$$

gdje je  $I_0(u)$  modificirana Bessel-ova funkcija nultog reda prve vrste

$$I_0(u) = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \left[ \frac{(u/2)^r}{r!} \right]^2$$

a  $\beta$  parametar koji kontrolira gušenje u području gušenja

## 32. Optimalni filtri

Optimalni filtri kontroliraju valovitost za svako pojedino područje.

Optimalni FIR filtri imaju najmanju valovitost  $\delta$  za definirano prijelazno područje  $[\omega_s, \omega_p]$ .

Rezultirajuća valovitost je za niski propust u području gušenja  $\delta_p = \delta$ , a u području propuštanja  $\delta_s = K\delta$ .

## 33. Metoda jednakog impulsnog odziva

SVAKA HORIZONTALNA PRUGA S-RAVNINE TRANSFORMIRA SE U CIJELU Z RAVNINU.

Metoda projektiranja IIR filtra **transformacijom prijenosne funkcije prototipnog analognog filtra**.

Naći IIR prijenosnu funkciju čiji je **impulsni odziv jednak jednoliko otipkanom impulsnom odzivu prototipnog analognog filtra**.

Imamo zadalu prijenosnu funkciju kauzalnog i stabilnog analognog filtra. Njegov impulsni odziv je dan inverznom Laplace-ovom transformacijom

$$h_a(t) = \mathcal{Z}^{-1}\{H_a(s)\}$$

Impulsni odziv digitalnog filtra je jednoliko otipkana verzija impulsnog odziva analognog filtra

$$g[n] = h_a(nT)$$

Frekvencijsku karakteristiku digitalnog filtra dobivamo uvrštavanjem  $z = e^{j\omega}$ .

*Metoda jednakog impulsnog odziva*

Pogledajmo transformaciju  $z = e^{sT}$  koja preslikava  $s$  ravninu u  $z$  ravninu.

Za  $s = \sigma_0 + j\Omega_0$  vrijedi  $z = r \cdot e^{j\omega} = e^{\sigma_0 T} \cdot e^{j\Omega_0 T}$   
odnosno  $|z| = r = e^{\sigma_0 T}$

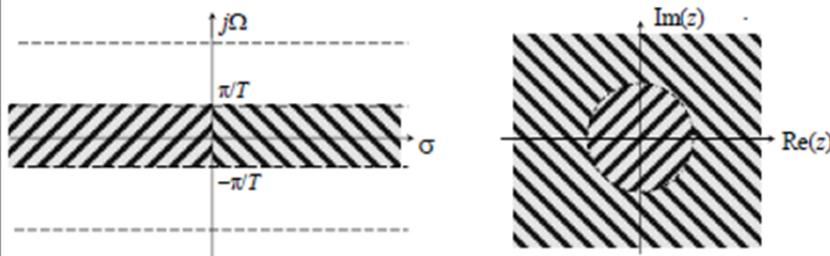
iz ovoga slijedi  
imaginarna os u  $s$  ravnnini ( $\sigma_0 = 0$ )  $\rightarrow$  jedinična kružnica u  $z$  ravnnini ( $|z| = 1$ )  
lijeva  $s$  poluravnina ( $\sigma_0 < 0$ )  $\rightarrow$  unutrašnjost jedinične kružnice u  $z$  ravnnini ( $|z| = 1$ )  
desna  $s$  poluravnina ( $\sigma_0 > 0$ )  $\rightarrow$  izvan jedinične kružnice u  $z$  ravnnini ( $|z| = 1$ )

Sustav je stabilan za s nultočke u **lijevoj poluravnini**.

Polovi stabilnog filtra se preslikavaju u unutrašnjost jedinične kružnice u  $z$  ravnini.

### *Metoda jednakog impulsnog odziva*

dakle, horizontalni odsječak  $-\pi/T \leq \Omega \leq \pi/T$  u  $s$  ravnini se preslikava u cijelu  $z$  ravninu



13

### *Metoda jednakog impulsnog odziva*

isto tako horizontalni odsječak  $-3\pi/T \leq \Omega \leq -\pi/T$  u  $s$  ravnini se preslikava u cijelu  $z$  ravninu

svaki horizontalni odsječak  $(2k-1)\pi/T \leq \Omega \leq (2k+1)\pi/T$  u  $s$  ravnini se preslikava u cijelu  $z$  ravninu



14

Transformacija  $z=e^{sT}$  je **višestruko** preslikavanje iz  $s$  ravnine u cijelu  $z$  ravninu.

Transformacija  $z=e^{sT}$  preslikava sve točke u  $s$  ravnini dane s

$$s = \sigma_0 + j\Omega_0 + j \frac{2\pi k}{T}$$

u jednu točku u  $z$  ravnini

$$z = e^{\sigma_0 T} \cdot e^{j\Omega_0 T}$$

Problem može predstavljati činjenica da ne postoji analogni filter čija je prijenosna karakteristika

frekvencijski ograničena. U praksi, ako je  $|H_a(j\Omega)| \leq 0,01 H_{\max}$  za  $\Omega \geq \pi/T$ , gdje je

$H_{\max} = \max(|H_a(j\Omega)|)$ , u intervalu  $0 \leq \Omega \leq \pi/T$ , može se smatrati da je prijenosna karakteristika dovoljno ograničena.

#### SVOJSTVA FILTRA PROJEKTIRANOG METODOM JEDNAKOG IMPULSNOG ODZIVA

- Broj polova digitalnog filtra jednak je broju polova analognog filtra
- Digitalni filter je stabilan ako je prototipni analogni filter stabilan
- Frekvencijska karakteristika digitalnog filtra je periodizirana frekvencijska karakteristika analognog filtra
- Kaskada dva digitalna filtra projektirana metodom jednakog impulsnog odziva nema impulsni odziv jednak impulsnom odzivu kaskade dva analognih prototipa
  - **filter mora biti projektiran u jednom koraku**

### 34. Bilinearna transformacija

Transformira vremenski kontinuirani sustav zadan prijenosnom funkcijom  $H(s)$  u vremenski diskretni sustav s prijenosnom funkcijom  $H(z)$ .

Rješava problem aliasinga koji nastaje kod transformacije jednakih impulsnih odziva. Da bi to bilo moguće, transformacija mora preslikati svaku točku iz ravnine u jedinstvenu točku u z-ravnini i obratno.

Bilinearnom transformacijom se cijela  $j\Omega$  os u s-ravnini (lijeva poluravnina) prevodi u jedan obilazak jedinične kružnice u z-ravnini. ( $-\infty < \Omega < \infty \rightarrow -\pi < \omega < \pi$ )

#### Svojstva bilinearne transformacije

- promotrimo realni dio varijable s:

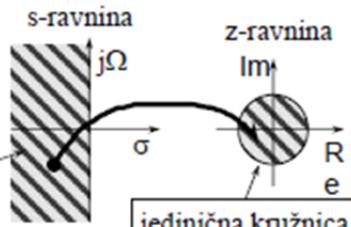
$$\sigma = \frac{2}{T} \left( \frac{r^2 - 1}{1 + 2r \cdot \cos \omega + r^2} \right)$$

- ... pošto je nazivnik uvijek veći ili jednak od nule, predznak od  $\sigma$  ovisi isključivo o  $r$  i  $\omega$ :

- za  $r < 1 \dots \sigma < 0$
- za  $r > 1 \dots \sigma > 0$
- za  $r = 1 \dots \sigma = 0, s = j\Omega$

lijeva poluravnina

jedinična kružnica



Definirana je algebarskom transformacijom između varijabli s i z.

$$s = \frac{2}{T} \left( \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)$$

Veza slične i diskretnе kružne frekvencije

$$\Omega = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \left( \frac{\omega}{2} \right),$$

$$\omega = 2 \operatorname{arctg} \left( \frac{\Omega T}{2} \right).$$

#### Izvod preko trapezne formule

### Bilinearna transformacija

- Izraz za bilinearnu transformaciju dobiven je iz trapezne formule za numeričku integraciju.
- ... pretpostavimo vrem. kont. sustav prvog reda

$$H_c(s) = \frac{b}{s+a}, \text{ odnosno } y'(t) + ay(t) = bu(t)$$

- korištenjem trapezne formule integral  $y(t)$

$$y(t) = \int_{t_0}^t y'(\tau) d\tau + y(t_0)$$

se može u točkama  $t=nT$  i  $t_0=(n-1)T$  aproksimirati sa:

$$y(nT) = \frac{T}{2} [y'(nT) + y'((n-1)T)] + y((n-1)T)$$

## Bilinearna transformacija

- evaluacijom diferencijalne jednadžbe za  $t=nT$  slijedi:  
 $y'(nT) = -ay(nT) + bu(nT)$
- što uvrštenjem u izraz za trapeznu aproksimaciju integrala daje jednadžbu diferencija:

$$\left(1 + \frac{aT}{2}\right)y[n] - \left(1 - \frac{aT}{2}\right)y[n-1] = \frac{bT}{2}(u[n] + u[n-1])$$

- z transformacijom gornje jednadžbe dobiva se:

$$\left(1 + \frac{aT}{2}\right)Y(z) - \left(1 - \frac{aT}{2}\right)z^{-1}Y(z) = \frac{bT}{2}(1 + z^{-1})U(z)$$

42

## Bilinearna transformacija

- slijedi prijenosna funkcija vrem. diskr. sustava  $H(z)$ :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{(bT/2)(1+z^{-1})}{1+aT/2-(1-aT/2)z^{-1}}$$

- ... odnosno

$$H(z) = \frac{b}{\frac{2}{T} \left( \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) + a}$$

- Usporedbom s početnom

$$\Rightarrow \text{slijedi: } H_c(s) = \frac{b}{s+a}$$

$$s = \frac{2}{T} \left( \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)$$

43

### Postupak projektiranja digitalnog filtra $H(z)$

1. definiranje zahtjeva za digitalni filter (specifikacija)
2. inverznom bilinearnom transformacijom dobivaju se zahtjevi za pripadni analogni filter
3. projektiranje analognog filtra  $H_c(s)$  koji zadovoljava tražene specifikacije
4. Bilinearnom transformacijom od  $H_c(s)$  dobivamo traženi  $H(z)$

## 35. Realizacija IIR filtera

- Kaskadna
- Direktna
- Paralelna

Realizacija IIR filtera temelji se na izravnoj implementaciji jednadžbe diferencija odnosno prijenosne funkcije. Problem je taj da nad beskonačnim signalima radimo s aritmetikom konačne preciznosti.

Ulagano izlazni model IIR filtra pretpostavlja konačnu sumu produkata.

Imamo jednadžbu diferencija koju želimo pretvoriti u prijenosnu funkciju određenog sustava.

### Realizacija IIR filtera

$$y[n] = - \sum_{m=1}^N a_m y[n-m] + \sum_{m=0}^M b_m u[n-m]$$

- Z transformacijom pišemo prijenosnu funkciju:

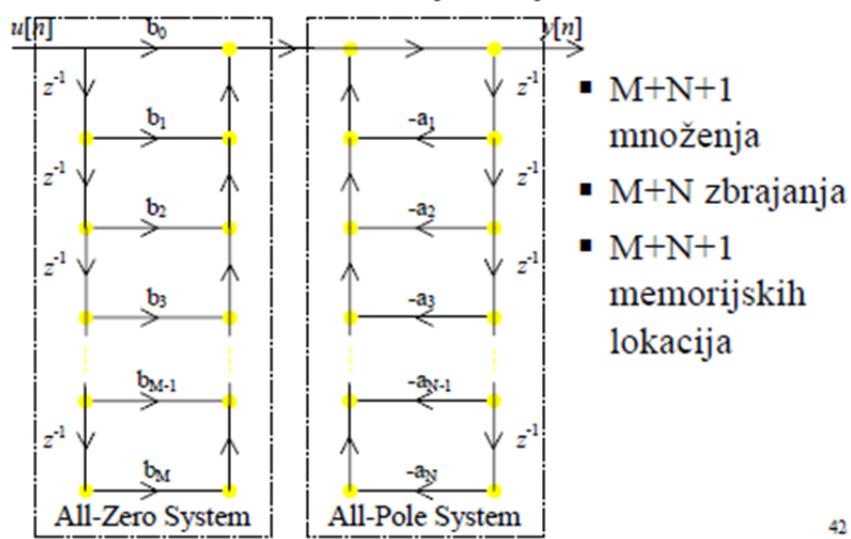
$$H(z) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{1 + \sum_{m=1}^N a_m z^{-m}}$$

- polinomi od  $z^{-1}$  u brojniku i nazivniku
- sustav ima nule i polove

40

## 36. Direktna realizacija IIR filtra

### Direktna I realizacija IIR filtra



42

Direktna I realizacija je po potrošnji najgora realizacija – najviše blokova za kašnjenje (memorijskih lokacija)

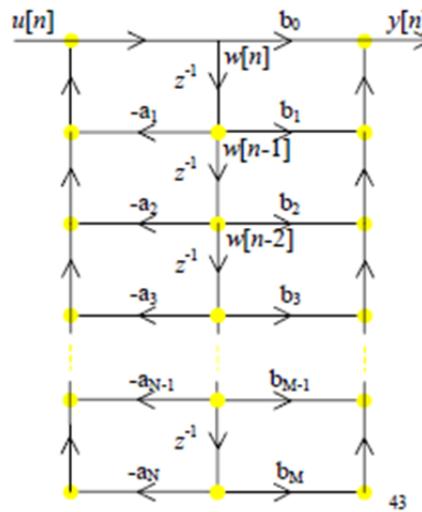
## *Direktna II realizacija IIR filtra*

- kompaktnija struktura  
jer vrijedi:

$$w[n] = -\sum_m^N a_m w[n-m] + u[n]$$

$$y[n] = \sum_{m=0}^M b_m w[n-m]$$

- $M+N+1$  množenja
  - $M+N$  zbrajanja
  - $\max(M, N)$   
memorijskih lokacija



Direktna II realizacija je realizacija  $H(z)$  bez potpunog rastavljanja na dva sustava (all-pole i all-zero). Kompaktnija je od D-I jer je smanjila broj memorijskih lokacija na  $\max(M, N)$ .

Direktne realizacije su izuzetno **osjetljive na promjene koeficijenata** te **nisu preporučljive u praktičnim aplikacijama** (kvantizacija koeficijenata, aritmetika konačne duljine riječi)

## 37. Kaskadna realizacija

Prijenosnu funkciju možemo realizirati kaskadno ako ju razdijelimo na sekcije nižeg reda, pri čemu se polinomi u brojniku i nazivniku prikazuju kao proizvodi polinoma nižeg reda.

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{B_1(z) \cdot B_2(z) \cdot B_3(z)}{A_1(z) \cdot A_2(z) \cdot A_3(z)}$$

Različite kaskadne realizacije možemo postići različitim uparivanjem polova i nula i/ili izmjenom redoslijeda sekacija u kaskadi.

Možemo posložiti i u ovisnosti o Q faktoru nazivnika ili brojnika

Nakon fiksiranja redoslijeda nazivničkih polinoma, **odabir brojnika** za svaku pojedinačnu kaskadu radi se tako da dinamika na izlazu iz te kaskade bude **što bliža jedinici**, tj. da signal nije niti jako pojačan niti jako atenuiran. Tada se postiže bolji odnos signal/šum u čvorovima strukture.

## 38. Paralelna realizacija

*Paralelna realizacija IIR filtera*

- $N \geq M$

$$H(z) = C + \sum_{l=1}^N \frac{A_l}{1 - p_l z^{-1}}$$

$$C = \frac{b_n}{a_n}$$

54

- gdje su  $p_l$  polovi, a  $A_l$  koeficijenti u rastavu na parcijalne razlomke

Kao i kaskadna realizacija, može biti rastuća ili padajuća, ovisno o Q faktoru.

## 39. Q faktor

Q faktor (quality factor) je bezdimenzijski parametar koji opisuje prigušenost oscilatora, odnosno koliko će trajati titranje. Viši Q označava sporiji gubitak energije (oscilacije umiru polakše).

Kod sekcija  $R_n(z^{-1})$  kod kojih je nazivnik dobiven uparivanjem para polova bliskih jediničnoj kružnici (**veliki Q faktor**), u amplitudno-frekvencijskoj karakteristici postoje značajna izdignuća. To uzrokuje **pojavu velikog prekoračenja dinamike u čvorovima nazivnika** pa se signal na ulazu u **tu sekciju mora jako atenuirati**.

Zbog cjelobrojne realizacije, ova **atenuacija kvari odnos signal/šum**. Ako se takva sekcija nalazi na početku kaskade, tada se na samom **ulazu u sistem ubacuje veliki šum** kojeg zatim **pojačavaju sekcije s manjim Q faktorima**.

S druge strane, ako se takva **sekcija nalazi na kraju kaskade**, tada ta zadnja sekcija značajno pojačava i šum i signal koji dolazi iz prijašnjih sekcija oko frekvencije svog pola, što **rezultira nejednolikom spektralnom razdiobom šuma**.

## 40. Frekvencijske transformacije

- Pokazuje se da funkcije  $G(z^{-1})$  koje zadovoljavaju sve tražene zahtjeve imaju općenit oblik:

$$Z^{-1} = G(z^{-1}) = \pm \prod_{k=1}^N \frac{z^{-1} - \alpha_k}{1 - \alpha_k z^{-1}}$$

... uz uvjet da  $|\alpha_k| < 1$ .

- Funkcija  $G(z^{-1})$  odgovara prijenosnoj funkciji svepropusnog filtra.

Za NP  $\rightarrow$  NP i NP  $\rightarrow$  VP red je  $z^{-1}$  jer imaju istu širinu područja koje propuštaju dok je za NP  $\rightarrow$  PP i NP  $\rightarrow$  PB red  $z^2$  jer imaju drugačiju širinu propuštanja.

Frekvencijska transformacija NP  $\rightarrow$  NP

Transformacija NP filtra u NP, ali s **drugom graničnom frekvencijom!**

- Najjednostavnija je transformacija NP filtra ponovno u NP filter ali druge granične frekvencije.

- $G(z^{-1})$  za ovu transformaciju glasi:

$$Z^{-1} = G(z^{-1}) = \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}}$$

- Supstitucijom  $Z = e^{j\Theta}$ ,  $z = e^{j\omega}$  u gornji izraz :

$$e^{-j\Theta} = \frac{e^{-j\omega} - \alpha}{1 - \alpha e^{-j\omega}}$$

... odnosno :

$$\omega = \arctan \left[ \frac{(1 - \alpha^2) \sin \Theta}{2\alpha + (1 + \alpha^2) \cos \Theta} \right]$$

s

$$\tan \left( \frac{\Theta}{2} \right) = \left( \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \right) \tan \left( \frac{\omega}{2} \right)$$

Frekvencijska transformacija NP  $\rightarrow$  VP

- Za VP filter željene granične frekvencije  $\omega_p$  :

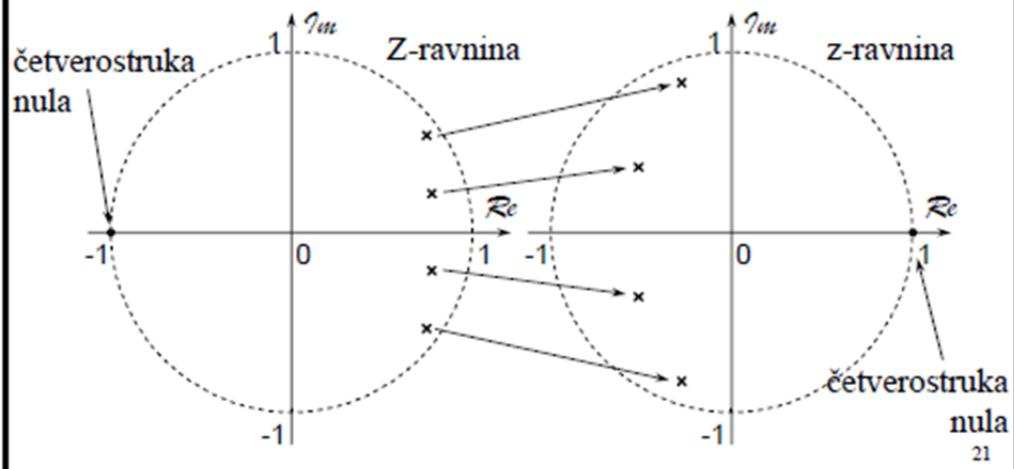
$$Z^{-1} = -\frac{z^{-1} + \alpha}{1 + \alpha z^{-1}}$$

- gdje je  $\alpha$  :

$$\alpha = -\frac{\cos\left(\frac{\Theta_p + \omega_p}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\Theta_p - \omega_p}{2}\right)}$$

### *Primjer transformacije NP $\rightarrow$ VP*

- Položaj polova i nula filtara  $H_{LP}(Z)$  i  $H(z)$  :



Frekvensijska transformacija NP  $\rightarrow$  PP

- Za PP filter željenih graničnih frekvencija  $\omega_{p1}$  i  $\omega_{p2}$ :

$$Z^{-1} = -\frac{z^{-2} - \frac{2\alpha k}{k+1}z^{-1} + \frac{k-1}{k+1}}{\frac{k-1}{k+1}z^{-2} - \frac{2\alpha k}{k+1}z^{-1} + 1}$$

- gdje su  $\alpha$  i  $k$ :

$$\alpha = \frac{\cos\left(\frac{\omega_{p2} + \omega_{p1}}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega_{p2} - \omega_{p1}}{2}\right)} \quad \omega_{p1} < \omega_{p2}$$

$$k = \cot\left(\frac{\omega_{p2} - \omega_{p1}}{2}\right) \tan\left(\frac{\Theta_p}{2}\right)$$

Frekvencijska transformacija NP  $\rightarrow$  PB

- Za filter tipa PB željenih gran. frekvencija  $\omega_{p1}$  i  $\omega_{p2}$ :

$$Z^{-1} = \frac{z^{-2} - \frac{2\alpha}{1+k}z^{-1} + \frac{1-k}{1+k}}{\frac{1-k}{1+k}z^{-2} - \frac{2\alpha}{1+k}z^{-1} + 1}$$

- gdje su  $\alpha$  i  $k$ :

$$\alpha = \frac{\cos\left(\frac{\omega_{p2} + \omega_{p1}}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega_{p2} - \omega_{p1}}{2}\right)} \quad \omega_{p1} < \omega_{p2}$$

$$k = \tan\left(\frac{\omega_{p2} - \omega_{p1}}{2}\right) \tan\left(\frac{\Theta_p}{2}\right)$$

## 41. Polifazna dekompozicija

### Polifazna realizacija FIR filtera

- polifazna dekompozicija  $H(z)$  – paralelna struktura
- postupak dekompozicije za kauzalni FIR filter reda  $M=8$

$$H(z) = h[0] + h[1] \cdot z^{-1} + h[2] \cdot z^{-2} + h[3] \cdot z^{-3} + h[4] \cdot z^{-4} + \\ + h[5] \cdot z^{-5} + h[6] \cdot z^{-6} + h[7] \cdot z^{-7} + h[8] \cdot z^{-8}$$

- izvršimo grupiranje na slijedeći način:

$$H(z) = (h[0] + h[2] \cdot z^{-2} + h[4] \cdot z^{-4} + h[6] \cdot z^{-6} + h[8] \cdot z^{-8}) \\ + (h[1] \cdot z^{-1} + h[3] \cdot z^{-3} + h[5] \cdot z^{-5} + h[7] \cdot z^{-7})$$

32

### Polifazna realizacija FIR filtera

$$H(z) = (h[0] + h[2] \cdot z^{-2} + h[4] \cdot z^{-4} + h[6] \cdot z^{-6} + h[8] \cdot z^{-8}) \\ + z^{-1} (h[1] + h[3] \cdot z^{-2} + h[5] \cdot z^{-4} + h[7] \cdot z^{-6})$$

- uvodenjem notacije:

$$E_0(z) = h[0] + h[2] \cdot z^{-1} + h[4] \cdot z^{-2} + h[6] \cdot z^{-3} + h[8] \cdot z^{-4}$$

$$E_1(z) = h[1] + h[3] \cdot z^{-1} + h[5] \cdot z^{-2} + h[7] \cdot z^{-3}$$

- možemo pisati:

$$H(z) = E_0(z^2) + z^{-1} E_1(z^2)$$

33

### Polifazna realizacija FIR filtera

- izvršimo li grupiranje na slijedeći način:

$$H(z) = (h[0] + h[3] \cdot z^{-3} + h[6] \cdot z^{-6}) \\ + z^{-1} (h[1] + h[4] \cdot z^{-3} + h[7] \cdot z^{-6}) \\ + z^{-2} (h[2] + h[5] \cdot z^{-3} + h[8] \cdot z^{-6})$$

- uvodenjem notacije:

$$E_0(z) = h[0] + h[3] \cdot z^{-1} + h[6] \cdot z^{-2}$$

$$E_1(z) = h[1] + h[4] \cdot z^{-1} + h[7] \cdot z^{-2}$$

$$E_2(z) = h[2] + h[5] \cdot z^{-1} + h[8] \cdot z^{-2}$$

- slijedi:

$$H(z) = E_0(z^3) + z^{-1} E_1(z^3) + z^{-2} E_2(z^3)$$

34

### *Polifaznna realizacija FIR filtara*

- prikazana dekompozicija  $H(z)$  naziva se polifazna dekompozicija
- u općem slučaju polifazna dekompozicija na L grana je oblika

$$H(z) = \sum_{m=0}^{L-1} z^{-m} E_m(z^L)$$

- gdje je

$$E_m(z) = \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{M}{L} \rfloor} h[Ln + m]z^{-n} \quad \text{za } 0 \leq m \leq L-1$$

$\lfloor \frac{M}{L} \rfloor$  cijelobrojna vrijednost od  $\frac{M}{L}$