LJETNI ISPITNI ROK
5.7.2021.

1. (10 bodova) Kažemo da je matrica $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{nn}$ *nilpotentna* ako je $\mathbf{A}^n = \mathbf{0}$.

   (a) Odredite $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takve da je matrica
   $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$$
   nilpotentna.

   (b) Dokažite da je matrica $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{22}$ nilpotentna ako i samo ako je matrica $\mathbf{I} + \mathbf{A}$ regularna i $(\mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{I} - \mathbf{A}$.

   (c) Ako je matrica $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{22}$ nilpotentna, dokažite da je zbroj elemenata na njezinoj glavnoj dijagonali jednak nuli.

2. (10 bodova) Odredite sve $\lambda \in \mathbb{R}$ za koje je broj linearno nezavisnih vektora u skupu
   $$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda^2 \\ \lambda^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$
   najveći mogući.

3. (10 bodova) Napišite vektor $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ kao linearnu kombinaciju vektora:
   $$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}, \\ \mathbf{u}_2 &= 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 5\mathbf{k}, \\ \mathbf{u}_3 &= \mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 8\mathbf{k}. \end{aligned}$$

4. (10 bodova) Neka je $V = \{p \in \mathcal{P}_4 : p(1) = 0\}$ podskup prostora polinoma $\mathcal{P}_4$ stupnja ne većeg od 4.

   (a) Dokažite da je V vektorski potprostor od $\mathcal{P}_4$.

   (b) Nađite jednu bazu i dimenziju za V.

5. (10 bodova) Neka su X i Y vektorski prostori.

   (a) Dokažite tvrdnju:

   Linearni operator $A\colon X \to Y$ je injekcija ako i samo ako je $\mathrm{Ker}(A) = \{\mathbf{0}\}$.

   (b) Neka je zadan linearni operator $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$. Dokažite da je A injekcija ako i samo ako je $r(A) = 3$.

   (c) Zadan je linearni operator $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ formulom
   $$A(x, y, z) = (x + y, x + az, 2x + 3y + z, x + 2y + z),$$
   pri čemu je $a \in \mathbb{R}$ neki realni parametar. Odredite sve $a \in \mathbb{R}$ za koje je taj operator injekcija.

OKRENITE STRANICU!

6. (10 bodova) Može li se matrica

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

dijagonalizirati? Odredite joj vlastite vrijednosti, a najvećoj vlastitoj vrijednosti i pripadni vlastiti vektor.

Napomena: Ispit se piše **150 minuta**. Nije dopuštena upotreba kalkulatora ni podsjetnika.