**Međuispit iz Diskretne matematike 1**
**29.11.2022.**

1. **(8 bodova)** Koliko ima prirodnih brojeva strogo manjih od $10^6$ kojima je zbroj znamenki jednak 15?

2. **(8 bodova)** Zadan je niz $a_n = (-1)^n + 3n2^n$ za sve $n \geq 0$.

   (a) Odredite homogenu rekurzivnu relaciju kojoj je niz $(a_n)_{n\geq 0}$ rješenje.

   (b) Odredite funkciju izvodnicu niza $(a_n)_{n\geq 0}$.

3. **(8 bodova)**

   (a) Odredite opće rješenje rekurzivne relacije

$$a_{n+3} - a_n = \frac{7}{2}(a_{n+2} - a_{n+1}), \quad n \geq 0.$$

   (b) Ako je $a_0 = 5$ i $a_1 = 3$, odredite za koju vrijednost člana $a_2$ niz $(a_n)_{n\geq 0}$ konvergira. Koliki je u tom slučaju limes niza $(a_n)_{n\geq 0}$?

4. **(8 bodova)**

   (a) Postoji li 3-regularan graf s 9 vrhova?

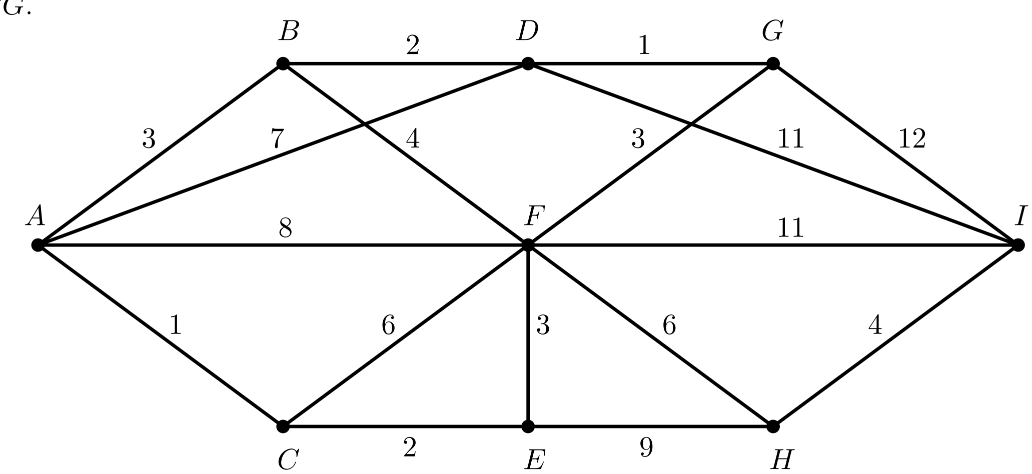
   (b) Postoji li hamiltonovski 3-regularan graf s 10 vrhova?

   (c) Postoji li nehamiltonovski 3-regularan graf s 10 vrhova?

   (d) Je li $Q_3$ hamiltonovski graf? Zadovoljava li $Q_3$ uvjete Oreovog teorema?

   Obrazložite svoje odgovore.

5. **(8 bodova)** Nađite najkraći put od vrha $A$ do vrha $I$ u grafu sa slike koji prolazi bridom $FG$.




*Ispit se piše 120 minuta. Korištenje kalkulatora niti formula nije dozvoljeno. Sretno!*

## Rješenja

**1.** Budući da tražimo brojeve strogo manje od $10^6 = 1000000$, ti brojevi imaju najviše šest znamenki. Te brojeve možemo označiti s $\overline{x_1x_2x_3x_4x_5x_6}$, gdje dopuštamo nule na početku jer ne tražimo samo šesteroznamenkaste brojeve. Dakle, tražimo broj rješenja jednadžbe

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 15$$

uz uvjete da je

$$0 \leq x_i \leq 9 \quad , \quad \text{za sve } i = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Pripadna funkcija izvodnica stoga glasi $f(x) = (1 + x + x^2 + \ldots + x^9)^6$ pa raspisujemo:

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1 + x + x^2 + \ldots + x^9)^6 = \left(\frac{1 - x^{10}}{1 - x}\right)^6 \\
&= (1 - x^{10})^6 (1 - x)^{-6} \\
&= \left(1 - \binom{6}{1} x^{10} + \binom{6}{2} x^{20} - \ldots\right) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-6}{n} (-x)^n \\
&= (1 - 6x^{10} + 15x^{20} - \ldots) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{n+5}{n} (-1)^n x^n \\
&= (1 - 6x^{10} + 15x^{20} - \ldots) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+5}{5} x^n.
\end{aligned}$$

Sada direktno vidimo da koeficijent uz $x^{15}$ iznosi:

$$\langle x^{15} \rangle f(x) = \binom{15+5}{5} - 6\binom{5+5}{5} = \binom{20}{5} - 6\binom{10}{5} = 15504 - 6 \cdot 252 = 13992.$$

**2.** (a) Iz zadanog niza $(a_n)_{n \geq 0}$ vidimo da su $-1$ i $2$ nultočke karakteristične jednadžbe tražene rekurzivne relacije pri čemu je $-1$ nultočka kratnosti 1 i 2 nultočka kratnosti 2. Prema tome, karakteristična jednadžba glasi

$$(x + 1)(x - 2)^2 = 0,$$

čijim pojednostavljivanjem dobivamo

$$x^3 - 3x^2 + 4 = 0.$$

Dakle, homogena rekurzivna relacija niza $(a_n)_{n \geq 0}$ glasi:

$$a_n = 3a_{n-1} - 4a_{n-3}.$$

Još je potrebno odrediti prva tri člana niza iz zadane formule, imamo:

$$\begin{aligned}
a_0 &= (-1)^0 + 3 \cdot 0 \cdot 2^0 = 1 \\
a_1 &= (-1)^1 + 3 \cdot 1 \cdot 2^1 = 5 \\
a_2 &= (-1)^2 + 3 \cdot 2 \cdot 2^2 = 25.
\end{aligned}$$

(b) Funkciju izvodnicu danog niza $(a_n)_{n\geq 0}$ nalazimo direktnim računom:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \big[(-1)^n + 3n2^n\big] x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n + 3\sum_{n=0}^{\infty} n(2x)^n. \end{aligned}$$

Ovdje prvu sumu prepoznajemo kao sumu geometrijskog reda te je time prva suma jednaka $\frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x}$. Zatvorenu formulu druge sume nalazimo derivirajući izraz

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = \frac{1}{1-2x}$$

čime dobivamo izraz

$$2\sum_{n=0}^{\infty} n(2x)^{n-1} = \frac{2}{(1-2x)^2}$$

pa dijeljenjem s 2 i množenjem ove jednakosti s $2x$ dobivamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(2x)^n = \frac{2x}{(1-2x)^2}.$$

Konačno, uvrštavanjem dobivenih izraza za sume pronalazimo zatvorenu formu za funkciju izvodnica niza $(a_n)_{n\geq 0}$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n + 3\sum_{n=0}^{\infty} n(2x)^n = \frac{1}{1+x} + \frac{6x}{(1-2x)^2}.$$

**3.** (a) Opće rješenje nalazimo tražeći nultočke karakteristične jednadžbe pripadne rekurzivne relacije koja u ovom slučaju glasi:

$$x^3 - 1 = \frac{7}{2}(x^2 - x).$$

Ovdje je potrebno odrediti nultočke polinoma trećeg stupnja pa tražimo prikladnu faktorizaciju na sljedeći način:

$$\begin{aligned} x^3 - 1 = \frac{7}{2}(x^2 - x) &\Longleftrightarrow 2(x^3 - 1) = 7(x^2 - x) \\ &\Longleftrightarrow 2(x^3 - 1) - 7(x^2 - x) = 0 \\ &\Longleftrightarrow 2(x-1)(x^2 + x + 1) - 7x(x-1) = 0 \\ &\Longleftrightarrow (x-1)\big[2(x^2 + x + 1) - 7x\big] = 0 \\ &\Longleftrightarrow (x-1)(2x^2 - 5x + 2) = 0. \end{aligned}$$

Rješavanjem kvadratne jednadžbe nalazimo da su rješenja karakteristične jednadžbe $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{2}$ i $x_3 = 2$. Budući da su svi korijeni međusobno različiti, zaključujemo da je opće rješenje oblika

$$a_n = \lambda_1 + \lambda_2 \left(\frac{1}{2}\right)^n + \lambda_3 2^n,$$

za neke koeficijente $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3 \in \mathbb{R}$.

(b) Koeficijenti $\lambda_1$, $\lambda_2$ i $\lambda_3$ određeni su iz početnih uvjeta $a_0$, $a_1$ i $a_2$ na sljedeći način:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 5 \\ \lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2 + 2\lambda_3 = 3 \\ \lambda_1 + \frac{1}{4}\lambda_2 + 4\lambda_3 = a_2 \end{cases} \tag{$*$}$$

što je sustav tri linearne jednadžbe s tri nepoznanice. Lako vidimo da je determinanta matrice sustava različita od 0 pa znamo da postoji jedinstveno rješenje za nepoznanice $\lambda_1$, $\lambda_2$ i $\lambda_3$. Za dobivene koeficijente $\lambda_i$ zahtijevamo da tada niz

$$a_n = \lambda_1 + \lambda_2 \left(\frac{1}{2}\right)^n + \lambda_3 2^n$$

konvergira. Jasno nam je da $a_n$ može konvergirati onda i samo onda kada je $\lambda_3 = 0$. Naime, kada bismo imali $\lambda_3 \neq 0$, tada bi bilo

$$\lim_n a_n = \lambda_1 + \lambda_2 \lim_n \frac{1}{2^n} + \lambda_3 \lim_n 2^n = \lambda_1 + \lambda_2 \cdot 0 + \lambda_3 \cdot \infty = \infty$$

pa limes ne postoji. Dakle, kao rješenje sustava jednadžbi moramo dobiti da je $\lambda_3 = 0$. Stoga, uvrštavanjem $\lambda_3 = 0$ u sustav $(*)$ dobivamo:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 5 \\ \lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2 = 3 \\ \lambda_1 + \frac{1}{4}\lambda_2 = a_2 \end{cases}.$$

Odavde, iz prve dvije jednadžbe nalazimo da je

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{i} \quad \lambda_2 = 4$$

pa uvrštavanjem dobivenih vrijednosti u treću jednadžbu dobivamo

$$a_2 = 1 + \frac{1}{4} \cdot 4 = 2.$$

Dakle, za $a_2 = 2$ niz $(a_n)_{n \geq 0}$ konvergira i tada je $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 0$ pa niz glasi

$$a_n = 1 + 4\frac{1}{2^n} + 0 \cdot 2^n = 1 + \frac{1}{2^{n-2}}$$

čime limes tog niza onda iznosi

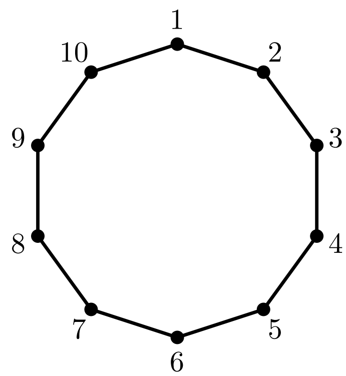
$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n-2}} = 1 + 0 = 1.$$

**4.** (a) Takav graf ne postoji. Pretpostavimo da postoji graf $G$ s devet vrhova koji je 3-regularan. Tada prema Lemi o rukovanju zbroj stupnjeva svih vrhova mora biti paran, no ovdje imamo

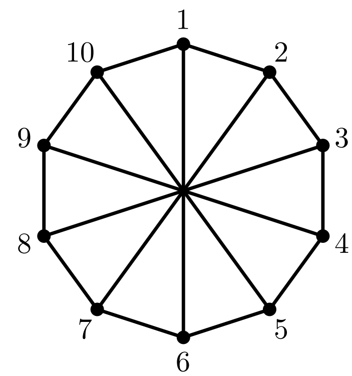
$$\sum_{v \in G} \deg(v) = \sum_{v \in G} 3 = \underbrace{3 + 3 + \ldots + 3}_{\text{devet vrhova}} = 27$$

i to nam daje kontradikciju s teoremom pa zaključujemo da ne postoji takav graf $G$.

(b) Takav graf postoji. Naime, uzmimo $C_{10}$, ciklički graf s 10 vrhova. Takav graf je jasno hamiltonovski, odnosno, postoji hamiltonovski ciklus pa označimo s 1, 2, . . ., 10 redom vrhove u tom hamiltonovskom ciklusu. Spojimo li sada vrhove 1 i 6, vrhove 2 i 7, 3 i 8, 4 i 9 te vrhove 5 i 10, tada lako vidimo da je to još uvijek hamiltonovski graf, no ovdje je sada svaki vrh stupnja 3 čime nalazimo da je to 3-regularan graf.

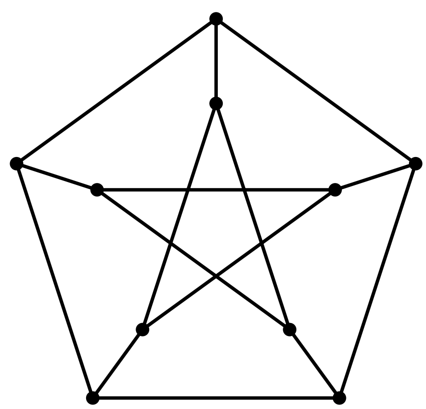



$C_{10}$



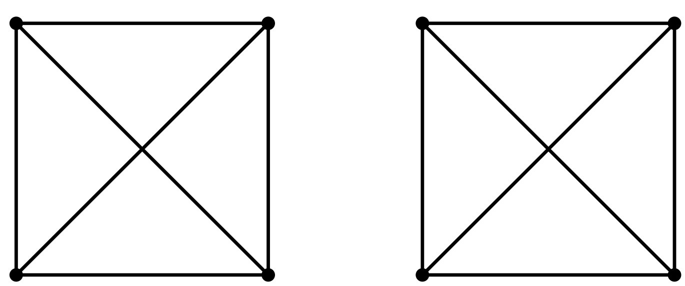

hamiltonski 3-regularan graf

(c) Takav graf postoji. Prisjetimo se da je Petersenov graf graf s 10 vrhova koji nije hamiltonovski (pogledajte Zadatak 4.7), ali on jest 3-regularan graf (svaki vrh mu je stupnja 3).



Petersenov graf

Može se navesti i primjer nepovezanog 3-regularnog grafa (koji time nije hamiltonovski), recimo navesti primjer disjunktne unije dva 3-regularna grafa, najjednostavnije $K_4 \cup K_4$.



$K_4 \cup K_4$

(d) Graf $Q_3$ jest hamiltonovski graf, a jedan njegov hamiltonovski ciklus glasi

$$000 \to 001 \to 101 \to 100 \to 110 \to 111 \to 011 \to 010 \to 000.$$

Provjerimo zadovoljava li 3-kocka uvjete Oreovog teorema. Znamo da graf $Q_3$ ima $2^3 = 8$ vrhova pa je $n = 8$, no isto tako vidimo da je $\deg(000) = 3$ te da je $\deg(111) = 3$. Sada nam je jasno da ne vrijedi

$$\deg(000) + \deg(111) \geq n$$

pa kako to nisu susjedni vrhovi zaključujemo da $Q_3$ ne zadovoljava uvjete Oreovog teorema.

**5.** Potrebno je provesti Dijkstrin algoritam, ali na način da prođemo ili bridom $F \to G$ ili bridom $G \to F$ (ovisno o tome što je povoljnije). Dijkstrinim algoritmom nalazimo da je

$$d(A, G) = 6 \quad \text{i} \quad d(F, I) = 10$$

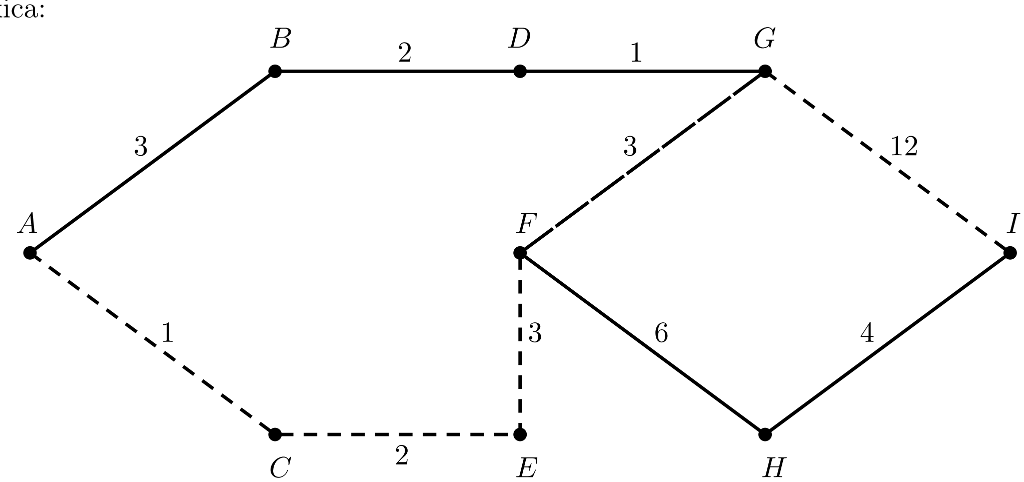
i to se postiže redom za

$$A \to B \to D \to G \quad \text{i} \quad F \to H \to I.$$

Slično nalazimo i da je

$$d(A, F) = 6 \quad \text{i} \quad d(G, I) = 12.$$

Skica:




Ovdje vidimo da je povoljnije uzeti

$$d(A, G) + w(GF) + d(F, I) = 19$$

jer je to manje od

$$d(A, F) + w(FG) + d(G, I) = 21.$$

Stoga zaključujemo da je najkraći put od vrha $A$ do vrha $I$ u danom grafu dan s

$$A \to B \to D \to G \to F \to H \to I.$$