Da bi izračunali S, krećemo od $\sum_{n=0}^{\infty}(5x)^n = \frac{1}{1-5x}$. Integriranjem od 0 do x dobivamo $\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(5x)^{n+1}}{n+1} = \int_0^x \frac{dx}{1-5x} = -\frac{1}{5}\ln|1-5x|$, tj. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(5x)^n}{n} = -\ln|1-5x|$, tj. $S = -\ln|1-5x| - 5x - \frac{25}{2}x^2$, dakle

$$f(x) = -\frac{8x + 21x^2 + \ln(1-5x)^2}{2 + 4x + 8x^2}.$$

Zadatak 8. Neka je $f(x)$ funkcija izvodnica slijeda $(a_n)_{n\geq 0}$. Izrazi s pomoću $f(x)$ funkciju izvodnicu $g(x)$ slijeda $b_n = na_n$. Rabeći dobiveni rezultat odredi funkciju izvodnicu slijeda $b_n = \frac{n}{e^{2n}}$.

Rješenje. $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} na_n x^n = x\sum_{n=0}^{\infty} na_n x^{n-1} = x(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)' = xf'(x)$. Za slijed e^{-2n} je funkcija izvodnica $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(e^{-2}x)^n = \frac{1}{1-e^{-2}x}$, pa je $g(x) = xf'(x) = \frac{xe^{-2}}{(1-e^{-2}x)^2}$.

Zadatci za vježbu

1. Riješi rekurzivnu relaciju $a_{n+4} = 4a_{n+3} - 6a_{n+2} + 4a_{n+1} - a_n + 2^n$, $n \geq 0$, uz početne uvjete $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = -1$.
2. Riješi diferencijsku jednadžbu $a_{n+2}^3 = 5a_{n+1}^3 - 4a_n^3$, $n \geq 0$, uz početne uvjete $a_0 = 4$ i $a_1 = 13$.
3. Riješi rekurzivnu relaciju $a_n + 2a_{n-1} - 8a_{n-2} = 2^n - 4$, $n \geq 2$.

   (Naputak: U slučaju kada nehomogeni dio $f(n)$ rekurzivne relacije sadrži član $C \cdot x^n$, gdje je x korijen karakteristične jednadžbe, odgovarajuće partikularno rješenje (prema tablici) treba još pomnožiti s n^k, gdje je k najmanja potencija za koju niti jedan pribrojnik u "novom" partikularnom rješenju nije rješenje homogene jednadžbe.)
4. Riješi diferencijsku jednadžbu $a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n + n3^n$
5. Nađi konstante b i c ako je $a_n = c_1 + c_2 7^n$ opće rješenje diferencijske jednadžbe $a_{n+2} = ba_{n+1} + ca_n$.
6. Odredi rekurzivnu relaciju s realnim koeficijentima čije je opće rješenje
   (1) $a_n = A + B2^n + C2^n \cos\frac{n\pi}{3} + D2^n \sin\frac{n\pi}{n}$;
   (2) $b_n = A + B(-1)^n + C(1+i)^n + Di^n$.
7. Nađi opće rješenje rekurzivne relacije
$$a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n + n3^n.$$
8. Nađi nehomogenu linearnu rekurzivnu relaciju s konstantnim koeficijentima čije je opće rješenje:
$$a_n = n^2 + \alpha + \beta n + \gamma\cos\frac{3n\pi}{4} + \delta\sin\frac{3n\pi}{4},$$
   gdje su $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{R}$ bilo koje konstante.
9. Pero želi kupiti stan od 40 m^2. Trenutno je cijena kvadratnog metra stana 8 000 kuna. Perina ušteđevina iznosi 100 000 kuna, a godišnji prihod 50 000 kuna. Ako odmah novac stavi u banku koja daje 7.5 % kamata godišnje (i kamata se obračunava nakon isteka svake godine štednje) te ako svake godine 20 % godišnjeg prihoda i stečenu kamatu pripiše glavnici, nakon koliko godina će Pero uštedjeti za željeni stan uz uvjet:

(1) da stanovi ne poskupljuju?
(2) Trend rasta cijena stanova je 5 % godišnje?

10. Nađi opće rješenje rekurzivne relacije $a_{n+2} = 3a_n - 2a_{n-1} - 6n$.

11. Izračunaj sumu

$$S_n = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3.$$

12. Nađi opće rješenje rekurzivne relacije:

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = (-1)^n + 2n.$$

13. Riješi rekurziju

$$a_n - 4n_{n-2} = 2^n + 4^n,$$

uz početne uvjete $a_0 = \frac{1}{3}$, $a_1 = \frac{4}{3}$.

14. Nađi opće rješenje rekurzivne relacije

$$a_n = 2a_{n-1} + 9a_{n-2} - 18a_{n-3}, \; n \geq 3$$

pri čemu je $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 10$.

15. Neka je S_n zbroj prvih n kvadrata prirodnih brojeva tj. $S_n = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$.
(1) Napiši rekurzivnu relaciju koju zadovljava S_n.
(2) Riješi dobivenu rekurzivnu relaciju.

16. Kvadrat stranice 1 podijelimo dijagonalom na dva pravokutna trokuta, a svaki od ta dva trokuta podijelimo na dva sukladna pravokutna trokuta, itd. ... . novonastale trokutove dijelimo dalje na isti način. Neka je t_n broj trokutova nakon n podjela. Nađi:
(1) rekurzivnu relaciju za t_n,
(2) funkciju izvodnicu za t_n.

17. Riješi diferencijsku jednadžbu

$$a_{n+2} - 6a_{n+1} + 5a_n = n + 5^n, \; n \geq 0$$

uz početni uvjet $a_0 = 0$, $a_1 = 5$.

18. Neka je C_n broj različitih načina popločavanje pruge dimenzije $n \times 1$ pločama dimenzije 1×1 i 2×1. Nađi rekurzivnu relaciju za niz C_n, početne uvjete i riješi rekurziju.

19. Riješi rekurzivnu jednadžbu

$$a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2} + n, \; n \geq 2, \; a_0 = 2, \; a_1 = 4$$

i rješenje zapiši bez korištenja kompleksnih brojeva.

20. Vrijeme potrebno za predaju signala s_1 je t_1 sekundi, signala s_2 je t_2 sekundi, ..., a signala s_m je t_m sekundi, $t_i \in \mathbf{N}$. Neka je b_n broj različitih poruka (nizova signala) čije slanje traje točno n sekundi, $n \in \mathbf{N}$.
(1) Nađi rekurzivnu relaciju za b_n.
(2) Izračunaj b_{2010}, ako je zadano $m = 3$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, $t_3 = 1$.

21. Nađi rekurzivnu relaciju s realnim koeficijentima čije je opće rješenje

$$a_n = A \cdot 2^n + B \cdot n \cdot 2^n + C \cdot (-1)^n + D, \quad n \geq 0.$$

22. Komunikacijskim kanalima mogu se poredati poruke koristeći se samo trima slovima a, b i c. Dopustive poruke su one kod kojih se na susjednim mjestima ne pojavljuje simbol a. Koliko ima dopustivih poruka duljine n?

23. Odredi rekurzivnu relaciju s realnim koeficijentima čije je opće rješenje

$$a_n = A + B2^n + C2^n \cos\frac{n\pi}{3} + D2^n \sin\frac{n\pi}{3}.$$

24. (1) Odredi rekurzivnu relaciju za broj nizova duljine n, sastavljenih od znamenki 1, 2, 3, u kojima nikoje dvije neparne znamenke nisu susjedne.
(2) Koliko ima takvih nizova duljine 100?

25. Nađi opće rješenje rekurzije

$$3^{a_n} = 9^n \cdot 3^{-a_{n-2}}.$$

26. Nađi opće rješenje rekurzivne relacije

$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2},\ n \geq 2.$$

27. Niz (a_n) zadan je rekurzivno sa

$$a_{n+2} = 2a_n - a_{n-1} - 1,\ n \geq 1 \quad a_0 = 3,\ a_1 = -4,\ a_2 = 3$$

(1) Nađi niz u zatvorenoj formi.
(2) Nađi funkciju izvodnicu za niz (a_n).

28. Riješi rekurzivnu relaciju

$$a_{n+3} - 5a_{n+2} + 7a_{n+1} - 3a_n = 0,$$

uz početne uvjete $a_0 = -1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 7$.

29. Riješi rekurzivnu relaciju

$$a_n = 4a_{n-1} + 32a_{n-2} - 7n,\ n \geq 2,$$
$$a_0 = \frac{1}{5},\ a_1 = 1.$$

Naputci i rješenja

1. Opće rješenje je $a_n = A + Bn + Cn^2 + Dn^3 + 2^n$, a uz početne uvjete je $a_n = -n^2 + 2^n$.

2. Supstitucijom $b_n = a_n^3$ dobivamo $b_n = 51 \cdot 4^n - 35$, dakle $a_n = \sqrt[3]{51 \cdot 4^n - 35}$.

3. (a) Korijeni karakteristične jednadžbe $x^2 + 2x - 8 = 0$ su $x_1 = 2$ i $x_2 = -4$. Opće rješenje homogene jednadžbe je $a_n^* = A2^n + B(-4)^n$.
(b1) Partikularno rješenje diferencijske jedandžbe $a_n + 2a_{n-1} - 8a_{n-2} = 2^n$ je oblika $a_n' = Cn \cdot 2^n$. Uvrštavanjem dobivamo $Cn2^n + 2C(n-1)2^{n-1} - 8C(n-2)2^{n-2} = 2^n$, dakle $C = 1/3$.
(b2) Partikularno rješenje diferencijske jednadžbe $a_n + 2a_{n-1} - 8a_{n-2} = 2^n$ je $a_n'' = D$ (konstanta). Uvrštavanjem dobivamo $D + 2D - 8D = -4$, dakle $D = 4/5$.
(c) Prema teoremu o superpoziciji je $a_n = a_n^* + a_n' + a_n'' = A2^n + B(-4)^n + \frac{1}{3}n \cdot 2^n + \frac{4}{5}$.

4. Tu je $a_n^* = 3^n(An + B)$, $a_n' = 3^n n^2(Cn + D)$, i rješenje je $a_n = a_n^* + a_n' = 3^n(An + B) + 3^n n^2(Cn + D)$.

5. Karakteristična jednadžba $x^2 - bx - c = 0$ ima korijene 1 i 7, dakle $x^2 - bx - c = (x-1)(x-7) = x^2 - 8x + 7$, pa je $b = 8$, $c = -7$.

6. (1) Zbog $\alpha = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}) = 1 + \sqrt{3}i$ je karakteristična jednadžba $(x-1)(x-2)(x-1-\sqrt{3}i)(x-1+\sqrt{3}i) = x^4 - 5x^3 + 12x^2 - 16x + 8$, pa je rekurzivna relacija $a_{n+4} - 5a_{n+3} + 12a_{n+2} - 16a_{n+1} + 8a_n = 0$.
(2) Rekurzivna relacija ne postoji, jer kompleksna rješenja karakteristične jedandžbe moraju biti u paru konjugirana, a ovdje uz korijene $1+i$ i i nemamo njima konjugirano kompleksne brojeve $1-i$ i $-i$.

7. Iz $x^2 - 6x + 9$ dobivamo $x_{1,2} = 3$, dakle (vidi Teorem 10):

$$a_n^{(0)} = 3^n(A + Bn), \quad a_n^{(p)} = n^2 3^n(Cn + D),$$

Treba odrediti C i D u partikularnom rješenju. Uvrštavanjem $a_n^{(p)}$ u rekurzivnu relaciju i uspoređivanjem koeficijenata, dobivamo $C = 1/54$, $D = -1/18$, dakle $a_n = 3^n(A + Bn + \frac{1}{54}n^3 - \frac{1}{18}n^2)$.

8. Zbog $x_{1,2} = 1$ i $x_{3,4} = \cos\frac{3\pi}{4} \pm i\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$ karakteristična jednadžba glasi $(x-1)^2(x+\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2})(x+\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}) = 0$, tj. $x^4+(\sqrt{2}-2)x^3+(2-2\sqrt{2})x^2+(\sqrt{2}-2)x+1 = 0$. Prema tome rekurzivna relacija glasi

$$a_{n+4} + (\sqrt{2}-2)a_{n+3} + (2-2\sqrt{2})a_{n+2} + (\sqrt{2}-2)a_{n+1} + a_n = f(n).$$

Budući da je jedno partikularno rješenje (stavi $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \gamma = 0$ u opće rješenje) oblika $a_n^{(p)} = n^2 = n^2 1^n$, i 1 je dvostruki korijen, onda je $f(n)$ oblika $f(n) = C \cdot 1^n$. Broj C dobivamo uvrštavanjem partikularnog rješenja u rekurzivnu relaciju: $(n+4)^2+(\sqrt{2}-2)(n+3)^2+(2-2\sqrt{2})(n+2)^2+(\sqrt{2}-2)(n+1)^2+n^2 = C$, odakle slijedi $C = 16+9\sqrt{2}-18+8-8\sqrt{2}+\sqrt{2}-2 = 4+2\sqrt{2}$.

9. Perina ušteđevina nakon n godina iznosi $d_n = d_{n-1} \cdot 1.075 + 10\,000$, $d_0 = 100\,000$. Riješimo ovu rekurzivnu relaciju. Karakteristična jednadžba je $\lambda - 1.075 = 0$, tj. $\lambda = 1.075$, pa je opće rješenje pripadne homogene jednadžbe $d_n^{(0)} = c \cdot 1.075^n$. Partikularno rješenje tražimo u obliku konstante: $d_n^{(p)} = A$. Uvrštavanjem u rekurzivnu relaciju dobivamo $A = A \cdot 1.075 + 10\,000$, dakle $A = -133\,333$. Rješenje je $d_n = 233\,333 \cdot 1.075^n - 133\,333$.

(1) Rješavamo jednadžbu $d_n = 40 \cdot 8\,000$ odnosno

$$233\,333 \cdot 1.075^n - 133\,333 = 320\,000$$

što nam daje $n = 9.18$ odnosno 10 godina.

(2) Sada rješavamo jednadžbu $d_n = 320\,000 \cdot 1.05^n$ što nam daje 20 godina.

10. Karakteristična jednadžba je $\lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0$, čiji korijeni su $\lambda_{1,2} = 1$, $\lambda_3 = -2$. Stoga je $a_n^{(0)} = An + B + C(-2)^n$, $a_n^{(p)} = n^2(\alpha n + \beta)$, vidi Teorem 10. Uvrštavanjem partikularnog rješenja u početnu rekurzivnu relaciju, i uspoređivanjem koeficijenata uz potencije od n, dobivamo $\alpha = -1/3$, $\beta = 1/3$. Prema tome je $a_n = An + B + C(-2)^n - \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{3}n^2$.

11. Rekurzivna relacija ima oblik

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)^3, \ n \geq 1$$

uz početni uvjet $S_1 = 1$ (mogli bismo staviti i $S_0 = 0$). Kako karakteristična jednadžba ima oblik $x - 1 = 0$, odnosno $x_1 = 1$, partikularno rješenje pišemo u obliku

$$S_n^{(1)} = An^4 + Bn^3 + Cn^2 + Dn.$$

Uvrštavanjem tog izraza u rekurzivnu relaciju dobivamo $A = \frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{4}$ i $D = 0$ odnosno

$$S_n^{(1)} = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Sada dodajemo i opće rješenje pripadne homogene jednadžbe $S_n^{(0)} = E$,

$$S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + E$$

i uvrštavanjem u početni uvjet $S_1 = 1$ dobivamo $E = 0$ odnosno

$$S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

12. Karakteristična jednadžba ima oblik $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 = 0$ pa je $x_{1,2} = 2$ dvostruko rješenje. Prvo partikularno rješenje pišemo u obliku

$$a_n^{(1)} = A(-1)^n$$

pa uvrštavanjem u relaciju

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = (-1)^n$$

dobivamo $A = \frac{1}{9}$. Drugo partikularno rješenje pišemo u obliku

$$a_n^{(2)} = Bn + C.$$

Uvrštavanjem u relaciju

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 2n$$

dobivamo $B = 2$ i $C = 4$ pa opće rješenje ima oblik

$$a_n = D2^n + En2^n + \frac{1}{9}(-1)^n + 2n + 4, \; D, E \in \mathbf{R}, \; n \geq 0.$$

13. Karakteristična jednadžba ima oblik $x^2 - 4 = 0$ pa su nultočke $x_{1,2} = \pm 2$. Sada tražimo partikularna rješenja. Prvo ima oblik

$$a_n^{(1)} = An2^n.$$

Uvrštavajući to rješenje u jednadžbu

$$a_n - 4a_{n-2} = 2^n$$

dobivamo $A = \frac{1}{2}$. Drugo rješenje ima oblik

$$a_n^{(2)} = B4^n.$$

Uvrštavajući to rješenje u jednadžbu

$$a_n - 4a_{n-2} = 4^n$$

dobivamo $B = \frac{4}{3}$. Sada za

$$a_n = C2^n + D(-2)^n + \frac{1}{2}n2^n + \frac{4}{3}4^n$$

uvrštavamo početne uvjete i dobivamo $C = -\frac{7}{4}$ i $D = \frac{3}{4}$. Dakle,

$$a_n = -\frac{7}{4}2^n + \frac{3}{4}(-2)^n + \frac{1}{2}n2^n + \frac{4}{3}4^n, \; n \in \mathbf{N}_0.$$

14. Karakteristična jednadžba ima oblik

$$x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = (x-3)(x+3)(x-2) = 0,$$

nultočke karakteristične jednadžbe su $x_1 = 3$, $x_2 = -3$ i $x_3 = 2$ pa opće rješenje ima oblik

$$a_n = A3^n + B(-3)^n + C2^n.$$

Početni uvjeti daju sustav od 3 jednadžbe sa 3 nepoznanice čije rješenje je $A = \frac{11}{6}$, $B = \frac{1}{6}$ i $C = -2$ pa opće rješenje ima oblik

$$a_n = \frac{11}{6}3^n + \frac{1}{6}(-3)^n - 2 \cdot 2^n.$$

15. (1) Lako se vidi da je $S_{n+1} = S_n + (n+1)^2$ i $a_1 = 1$
(2) Karakteristična jednadžba ima oblik $x - 1 = 0$ $(x_1 = 1)$ pa partikularno rješenje ima oblik

$$a_n^{(1)} = n(An^2 + Bn + C).$$

Uvrštavanjem u rekurzivnu relaciju dobivamo $A = \frac{1}{3}$, $B = \frac{1}{2}$ i $C = \frac{1}{6}$ odnosno

$$a_n^{(1)} = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Sada opće rješenje pišemo u obliku

$$a_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + D.$$

Iz početnog uvjeta dobivamo $D = 0$ pa je

$$a_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

16. (1) Lako se vidi da je $t_1 = 2$, $t_2 = 4$ i općenito $t_n = 2^n$ za $n \geq 1$, ali i $t_0 = 0$. Rekurzivna relacija ima oblik $t_n = 2t_{n-1}$ za $n \geq 2$.

(2) Krenimo s funkcijom $\frac{1}{1-2x}$ za koju je $t_0 = 1$. Množenjem s $2x$ koeficijenti uz x^n za $n \geq 1$ ostaju nepromijenjeni, a konstantni član postaje 0, što i trebamo. Dakle

$$f(x) = \frac{2x}{1-2x}.$$

Isto tako smo mogli gledati $\frac{1}{1-2x} - 1$ što nam daje isti rezultat.

17. Karakteristična jednadžba ima oblik $x^2 - 6x + 5 = 0$, nultočke su $x_1 = 1$ i $x_2 = 5$ pa partikularna rješenje imaju oblik

$$a_n^{(1)} = n(An + B)$$

i

$$a_n^{(2)} = Cn5^n.$$

Dobivamo $A = -\frac{1}{8}$, $B = \frac{1}{16}$ i $C = \frac{1}{20}$. Sada u opće rješenje oblika

$$a_n = D + E5^n - \frac{1}{8}n^2 + \frac{1}{16}n + \frac{1}{20}n5^n$$

uvrštavamo početne uvjete i dobivamo $D = -\frac{77}{64}$ i $E = \frac{77}{64}$ odnosno

$$a_n = -\frac{77}{64} + \frac{77}{64}5^n - \frac{1}{8}n^2 + \frac{1}{16}n + \frac{1}{20}n5^n.$$

18. Zadnja ploča može biti dimenzije 1×1, a prije toga C_{n-1} popločavanja ili dimenzije 2×1, a prije toga C_{n-2} popločavanja. To nam daje rekurzivnu relaciju

$$C_n = C_{n-1} + C_{n-2}.$$

Lako se vidi da je $C_1 = 1$ i $C_2 = 2$. To nam daje Fibonaccijev niz, odnosno (uočite pomak za jedno mjesto),

$$C_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

19. Karakteriistična jednadžba ima oblik $x^2 - 2x + 2 = 0$, rješenja su $x_{1,2} = 1 \pm i$ pa je opće rješenje oblika

$$a_n^{(0)} = A(\sqrt{2})^n \cos\frac{n\pi}{4} + B(\sqrt{2})^n \sin\frac{n\pi}{4},\ n \geq 0.$$

Partikularno rješenje pišemo u obliku $a_n^{(1)} = Cn + D$. Uvrštavanjem u počentu jednadžbu dobivamo $C = 1$ i $D = 2$. Sada je $a_n = A(\sqrt{2})^n \cos\frac{n\pi}{4} + B(\sqrt{2})^n \sin\frac{n\pi}{4} + n + 2$ i iz početnih uvjeta dobivamo $A = 0$ i $B = 1$ odnosno

$$a_n = (\sqrt{2})^n \sin\frac{n\pi}{4} + n + 2,\ n \geq 0.$$

20. (1) Neka je $n \geq t_i$, $\forall i$. Kako poruka može završavati signalom s_i, micanjem tog signala, dobivamo poruku duljine $n - t_i$. To nam daje

$$b_n = \sum_{i=1}^{m} b_{n-t_i},\ n \geq \max_i\{t_i\}.$$

Uz to vrijedi $b_0 = 1$.

(2)

$$b_n = 2b_{n-1} + b_{n-2},\ n \geq 3,\ b_0 = 1,\ b_1 = 2.$$

Karakteristična jednadžba ima oblik $x^2 - 2x - 1 = 0$, nultočke su oblika $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$ pa opće rješenje ima oblik

$$b_n = A(1+\sqrt{2})^n + B(1-\sqrt{2})^n.$$

Iz početnih uvjeta dobivamo $A = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$ i $B = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$ pa je

$$b_{2010} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{2})^{2010} + \frac{2-\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{2})^{2010}.$$

21. Nultočke su $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$, $x_4 = 1$. To nam daje karakterisičnu jednadžbu

$$(x-2)^2(x+1)(x-1) = (x^2-4x+4)(x^2-1) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4 = 0$$

i rekurzivnu relaciju

$$a_{n+4} - 4a_{n+3} + 3a_{n+2} + 4a_{n+1} - 4a_n = 0.$$

22. Neka je a_n broj dopustivih poruka duljine n. Ako poruka završava simbolom a tada prije simbola a mogu biti simboli b ili c, a prije toga bilo što, a to je $2a_{n-2}$ poruka. Ako poruka završava simbolima b ili c tada prije toga može biti bilo što, a to je $2a_{n-1}$ poruka. To nam daje rekurzivnu relaciju

$$a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2},\ n \geq 3$$

uz početne uvjete $a_1 = 3$ i $a_2 = 8$. Karakteristična jednadžba ima oblik $x^2 - 2x - 2 = 0$, rješenja su $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}$ pa opće rješenje rekurzivne jednadžbe ima oblik

$$a_n = A(1+\sqrt{3})^n + B(1-\sqrt{3})^n,\ n \geq 1.$$

Uvrštavajući početne uvjete dobivamo $A = \frac{3+2\sqrt{3}}{6}$ i $B = \frac{3-2\sqrt{3}}{6}$ pa je broj poruka dan izrazom

$$a_n = \frac{3+2\sqrt{3}}{6}\cdot(1+\sqrt{3})^n + \frac{3-2\sqrt{3}}{6}\cdot(1-\sqrt{3})^n,\ n \geq 1.$$

23. Iz rekurzivne relacije nalazimo nultočke karakteristične jednadžbe: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_{3,4} = 2(\cos\frac{\pi}{3} \pm i\sin\frac{\pi}{3}) = 1 \pm \sqrt{3}i$. To nam daje karakterističnu jednadžbu

$$(x-1)(x-2)(x-1-\sqrt{3}i)(x-1+\sqrt{3}i) = (x^2-3x+2)(x^2-2x+4) = x^4-5x^3+12x^2-16x+8 = 0.$$

To znači da rekurzivna relacija ima oblik

$$a_{n+4} - 5a_{n+3} + 12a_{n+2} - 16a_{n+1} + 8a_n = 0.$$

24. (1) Označimo s a_n broj nizova duljine n. Tada nizovi mogu završavati znamenkom 2 i takvih ima a_{n-1}. Mogu završavati i neparnom znamenkom. No, kako dvije uzastopne znamenke ne mogu biti neparne prije toga je morala biti znamenka 2, a prije toga bilo što, pa takvih nizova ima $2a_{n-2}$. Dobivamo

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2},$$

uz početne uvjete $a_1 = 3$ i $a_2 = 5$.

(2) Karakteristična jednadžba ima oblik

$$x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1) = 0$$

pa opće rješenje ima oblik

$$a_n = A\cdot 2^n + B\cdot(-1)^n,\ n \geq 1.$$

Uvrštavanjem početnih uvjeta dobivamo $A = \frac{4}{3}$ i $B = -\frac{1}{3}$ pa je

$$a_n = \frac{4}{3}\cdot 2^n - \frac{1}{3}\cdot(-1)^n,\ n \geq 1$$

i
$$a_{100} = \frac{4}{3} \cdot 2^{100} - \frac{1}{3}.$$

25. Možemo pisati
$$3^{a_n} = 3^{2n - a_{n-2}}$$
odnosno
$$a_n = 2n - a_{n-2}.$$
Karakteristična jednadžba ima oblik
$$x^2 + 1 = 0,$$
rješenja su $\pm i$ pa partikularno rješenje pišemo u obliku $a_n^p = An + B$. Dobivamo $A = 1$ i $B = 1$ pa opće rješenje ima oblik
$$a_n = C \cos \frac{n\pi}{2} + D \sin \frac{n\pi}{2} + n + 1.$$

26. Karakteristična jednadžba ima oblik
$$x^2 - 4x + 4 = 0.$$
Kako je $x_1 = 2$ dvostruko rješenje, opće rješenje početne rekurzivne relacije ima oblik
$$a_n = (An + B) \cdot 2^n, \ n \geq 0.$$

27. (1) Karakteristična jednadžba ima oblik
$$x^3 - 2x + 1 = 0.$$
Lako se vidi da je $x_1 = 1$ jedno rješenje, a to nam daje
$$x^3 - 2x + 1 = (x - 1)(x^2 + x - 1)$$
pa su preostala dva rješenja oblika $x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Sada tražimo partikularno rješenje. Kako je 1 rješenje stupnja 1, partikularno rješenje pišemo u obliku $a_n^p = An$. Uvrštavanjem u zadanu jednadžbu dobivamo $A(n+2) = 2An - A(n-1) - 1$ odnosno $A = -1$. Sada imamo
$$a_n = -n + B + C\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + D\left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n$$
i to mora zadovoljiti početne uvjete. Sustav od 3 jednadžbe sa 3 nepoznanice nam daje $B = -1$, $C = 2$ i $D = 2$ pa dobivamo
$$a_n = -n - 1 + 2\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + 2\left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

(2) Početnu relaciju pišemo u obliku $a_{n+3} = 2a_{n+1} - a_n - 1, \ n \geq 0$, množimo s x^{n+3} i zbrajamo od 0 do beskonačno:
$$f(x) - 3 + 4x - 3x^2 = 2x^2(f(x) - 3) - x^3 f(x) - x^3 \frac{1}{1 - x}.$$
Nakon sređivanje dobivamo
$$f(x) = \frac{3 - 7x + x^2 + 2x^3}{(1 - x)(1 - 2x^2 + x^3)}.$$

28. Karakteristična jednadžba ima oblik
$$x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0.$$
To se može napisati u obliku
$$(x - 1)(x - 1)(x - 3) = 0$$

pa su korijeni $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ i $x_3 = 3$. Opće rješenje glasi

$$a_n = A + Bn + C \cdot 3^n.$$

Iz početnih uvjeta se dobiva $A = -1$, $B = 4$ i $C = 0$ pa vrijedi

$$a_n = 4n - 1.$$

29. Karakteristična jednadžba ima oblik $x^2 - 4x - 32 = 0$, rješenja su $x_1 = 8$ i $x_2 = -4$ pa je rješenje homogene rekurzivne relacije dano s

$$a_n^h = \lambda 8^n + \mu(-4)^n.$$

Partikularno rješenje je oblika $a_n^p = An + B$. Uvrštavanjem u rekurziju dobiva se $A = \frac{1}{5}$ i $B = \frac{68}{175}$ pa je

$$a_n^p = \frac{1}{5}n + \frac{68}{175}$$

Iz početnih uvjeta imamo

$$a_0 = \lambda + \mu + \frac{68}{175} = \frac{1}{5},$$

$$a_1 = 8\lambda - 4\mu + \frac{1}{5} + \frac{68}{175} = 1,$$

rješenje sustava je $\lambda = -\frac{1}{35}$, $\mu = -\frac{4}{25}$. To daje

$$a_n = -\frac{1}{35}8^n - \frac{4}{25}(-4)^n + \frac{1}{5}n + \frac{68}{175}.$$