VIS 1. CIKLUS

ALGEBRA DOGAĐAJA

- je svaka familija $\tilde{\mathcal{F}}$ podskupova od Ω na kojoj su definirane binarna operacija zbrajanja $+: \tilde{\mathcal{F}} \times \tilde{\mathcal{F}} \to \tilde{\mathcal{F}}$; unarna operacija komplementiranja sa svojstvima:
  1) $\Omega \in \tilde{\mathcal{F}}$
  2) $A \in \tilde{\mathcal{F}} \Rightarrow \bar{A} \in \tilde{\mathcal{F}}$
  3) $A, B \in \tilde{\mathcal{F}} \Rightarrow A + B \in \tilde{\mathcal{F}}$

VJEROJATNOST

- je preslikavanje $P: \tilde{\mathcal{F}} \to [0,1]$ definirano na algebri događaja $\tilde{\mathcal{F}}$, koje ima svojstva:
  1) $P(A) \geq 0$, $\forall A \in \tilde{\mathcal{F}}$ (pozitivnost)
  2) $P(\Omega) = 1$ (normiranost)
  3) Ako su $A \cap B = \emptyset$ (disjunktni), onda je $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (aditivnost)

VJEROJATNOST KOMPLEMENTA

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

VJEROJATNOST UNIJE

$A \cap B \neq \emptyset$ $\quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Dokaz: $\left.\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B \setminus A) \\ P(B) &= P(B \setminus A) + P(A \cap B) \end{aligned}\right\} -$

MONOTONOST

$$A \subset B \Rightarrow P(A) \le P(B).$$

Dokaz:

$$P(B) = P\big(A \cup (B \setminus A)\big) = P(A) + \underbrace{P(B \setminus A)}_{\ge 0} \ge P(A)$$

SILVESTROVA FORMULA

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i A_j A_k) - \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 A_2 \cdots A_n)$$

Dokaz: INDUKCIJA:

1° $n = 2$

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

2° Pretpostavimo da vrijedi za $n-1$

$$B = \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \qquad C_i = A_i \cap A_n \ (i < n)$$

KLASIČNI VJEROJATNOSNI PROSTOR

- svi elementarni događaji su jednako vjerojatni

KLASIČNA VJEROJATNOST

$$P(A) = \frac{\text{broj povoljnih}}{\text{broj mogućih}}$$

STIRLINGOVA FORMULA

- pri računanju brojeva $n!$ (za veliki n) i binomnih koeficijenata možemo koristiti Stirlingovu formulu:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

BESKONAČNI VJEROJATNOSNI PROSTOR

σ-algebra : σ-aditivnost vjerojatnosti

Ako je Ω beskonačan skup, tad zahtijevamo da algebra događaja $\mathcal{F}$ bude σ-algebra, tj. za nju vrijedi

$$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$$

Vjerojatnost P na σ-algebri $\mathcal{F}$ mora zadovoljavati uvjet σ-aditivnosti (prebrojive aditivnosti):

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n), \text{ ako je } A_n A_m = \emptyset, \forall n \neq m$$

NEPREKINUTOST VJEROJATNOSTI

Neka je P konačno aditivna vjerojatnost na σ-algebri $\mathcal{F}$. P je σ-aditivna ako i samo ako vrijedi

$$A_1 \subset A_2 \subset \dots \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (A_n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

DOKAZ: Neka je (A_n) rastući niz događaja.

$$B_1 := A_1$$
$$B_2 := A_2 \setminus A_1$$
$$B_3 := A_3 \setminus A_2$$
$$\vdots$$
$$B_n := A_n \setminus A_{n-1}$$

Skupovi B su disjunktni i vrijedi $\forall n$

$$A_n = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

Ako je P σ-aditivna, onda vrijedi

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n)$$

$$P(A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)$$

$$\lim_{n\to\infty} (A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n), \ P \text{ neprekinuta.}$$

OBRAT: $B_1, B_2, \dots$ niz disjunktnih događaja

$$A_1 = B_1$$
$$A_2 = B_1 \cup B_2$$
$$\vdots$$
$$A_n = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n$$
$$\vdots$$

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

vjerojatnost P je σ-aditivna

Ako je P neprekinuta vrijedi:

Vrijedi: $P(A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i)$$

GEOMETRIJSKA VJEROJATNOST

Neka je Ω ograničeni podskup n-dimenzionalnog prostora $\mathbb{R}^n$ ($n = 1, 2, 3$). Pretpostavit ćemo da je Ω izmjeriv skup, tj. da postoji njegova mjera $m(\Omega)$ (duljina za $n = 1$, površina za $n = 2$, obujam za $n = 3$) Neka je A izmjeriv podskup od Ω. Kažemo da biramo točku na sreću unutar skupa Ω, ako je vjerojatnost da ona bude izabrana iz podskupa A jednaka

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}.$$

UVJETNA VJEROJATNOST

Neka je $B \in \mathcal{F}$ događaj pozitivne vjerojatnosti: $P(B) > 0$. Uvjetna vjerojatnost uz uvjet B je funkcija $P_B : \mathcal{F} \to [0, 1]$ definirana formulom

$$P(A|B) = P_B(A) := \frac{P(AB)}{P(B)} \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

VJEROJATNOST UMNOŠKA

Vjerojatnost umnoška dvaju događaja računa se formulom:

$$P(AB) = P(B)\,P(A|B)$$

$$P(ABC) = P(A)\,P(B|A)\,P(C|AB)$$

NEZAVISNI DOGAĐAJI

Za događaje A i B kažemo da su nezavisni, ako vrijedi bilo koja od jednakosti: $P(A|B) = P(A)$ ili $P(B|A) = P(B)$.

Nužan i dovoljan uvjet za nezavisnost je:

$$P(AB) = P(A)\,P(B)$$

NEZAVISNOST DOGAĐAJA

Događaji $A_1, A_2, \dots, A_n$ su nezavisni ako za svaki k, $2 \le k \le n$ i svaki izbor $A_{i_1}, A_{i_2}, A_{i_3}, \dots, A_{i_k}$ nekolicine tih događaja vrijedi:

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k})$$

Ako su nezavisni vrijedi: $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$; obrat ne vrijedi

FORMULA POTPUNE VJEROJATNOSTI

Neka je $\{H_1, \dots, H_n\}$ potpun sustav događaja. Za svaki događaj $A \subset \Omega$ vrijedi:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A|H_i)$$

BAYESOVA FORMULA

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i) P(A|H_i)}{P(A)}, \quad P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A|H_i)$$

SLUČAJNA VARIJABLA

Preslikavanje $X : \Omega \to S$ je diskretna slučajna varijabla ako je $\forall x_k \in S$ $A_k := \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_k\}$ događaj. Označimo $p_k := P(A_k) = P(X = x_k)$. Za ove brojeve vrijedi $p_k \geq 0$, $\sum p_k = 1$. Zakon razdiobe slučajne varijable X sastoji se od područja vrijednosti koja ona poprima i odgovarajućih vjerojatnosti. Pišemo:

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \end{pmatrix}$$

NEZAVISNE SLUČAJNE VARIJABLE

Slučajne varijable $X, Y : \Omega \to S$ su nezavisne ako za sve $x_k, y_i \in S$ vrijedi

$$P(X = x_k, Y = y_i) = P(X = x_k)\, Y(Y = y_i).$$

Tada vrijedi općenitije, za sve $A, B \subset S$

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)\, P(Y \in B).$$

Dokaz: Neka su X i Y nezavisne, označimo skupove A i B sa:

$$A = \{x_1, \dots, x_m\}, \quad B = \{y_1, \dots, y_m\}$$

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in \{x_1, \dots, x_m\}, Y \in \{y_1, \dots, y_m\})$$

$$= P\Big(\bigcup_{\substack{1 \leq k \leq m \\ 1 \leq i \leq m}} \{X = x_k, Y = y_i\}\Big)$$

$$= \sum_{\substack{1 \leq k \leq m \\ 1 \leq i \leq m}} P(X = x_k, Y = y_i) = \sum_{1 \leq k \leq m} P(X = x_k) \sum_{1 \leq i \leq m} P(Y = y_i)$$

$$= P(X \in A)\, P(Y \in B)$$

OČEKIVANJE SLUČAJNE VARIJABLE

Neka slučajna varijabla X ima zakon razdiobe:

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots \end{pmatrix}.$$

Očekivanje slučajne varijabe X definirano je kao zbroj

$$E(X) := \sum_k x_k p_k .$$

SVOJSTVA OČEKIVANJA

Neka su X i Y slučajne varijable definirane na istom vjerojatnosnom prostoru. Očekivanje ima svojstvo linearnosti, za sve brojeve s i t vrijedi:

$$E(sX + tY) = E(sX) + E(tY)$$

DOKAZ:

$$E(sX) = \sum (s x_k) p_k = s \sum x_k p_k = s E(X)$$

$$E(X+Y) = \sum_{k,j} (x_k + y_j) p_{kj} = \sum_{k,j} x_k p_{kj} + \sum_{k,j} y_j p_{kj}$$

$$= \sum_k x_k \sum_j p_{kj} + \sum_j y_j \sum_k p_{kj} = \sum_k x_k p_k + \sum_j y_j p_j$$

$$= E(X) + E(Y)$$

Ako su X i Y nezavisne, tada vrijedi:

$$E(XY) = E(X) E(Y)$$

DOKAZ:

$$E(XY) = \sum_{k,j} x_k y_j p_{kj} = \sum_{k,j} x_k y_j \overbrace{p_k q_j}^{\text{nezavisnost}} = \sum_k x_k p_k \sum_j y_j q_j = E(X) E(Y)$$

DISPERZIJA ZBROJA SLUČAJNIH VARIJABLI

Disperzija zbroja $S = X_1 + \dots + X_n$ slučajnih varijabli računa se formulom

$$D(S) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) + 2\sum_{i<j} cov(X_i, X_j)$$

DOKAZ: Vrijedi $m_S = m_{X_1} + \dots + m_{X_n}$ pa je

$$D(S) = E[(S - m_S)^2] = E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - m_{X_i})\right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} E(X_i - m_{X_i})^2 + \sum_{i \neq j} E[(X_i - m_{X_i})(X_j - m_{X_j})]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} D(X_i) + 2\sum_{i<j} cov(X_i, X_j)$$

SVOJSTVA KOEFICIJENTA KORELACIJE

Za koeficijent korelacije uvijek je ispunjeno $|r(X,Y)| \leq 1$. Jednakost $r(X,Y) = \pm 1$ vrijedi onda i samo onda kad je $Y = aX + b$ za neke konstante a i b.

DOKAZ: X^* i Y^* su normirane varijable pridružene X i Y. Onda imamo

$$D(X^* \pm Y^*) = D(X^*) + D(Y^*) \pm 2\,cov(X^*, Y^*) = 2[1 \pm r(X,Y)]$$

pozitivne obje strane pa slijedi

$$1 \geq |r(X,Y)|$$

$$r(X,Y) = 1 \text{ akko } D(X^* - Y^*) = 0$$

$$\frac{Y - m_Y}{\sigma_Y} = \frac{X - m_X}{\sigma_X} = const \Rightarrow Y = aX + b,\ a = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$$

KARAKTERISTIČNA FUNKCIJA
slučajne varijable X definira se formulom

$$\vartheta_X(t) := E\left(e^{itX}\right)$$

Dakle:

$$\vartheta_X(t) = \sum_k p_k e^{itx_k}$$

SVOJSTVA KARAKTERISTIČNE FUNKCIJE

1° Karakteristična funkcija jednoznačno određuje razdiobu: dvije različite razdiobe ne mogu imati istu karakterističnu funkciju.

2° Ako su $X_1, \dots, X_n$ nezavisne, tada je

$$\vartheta_{X_1+\dots+X_n}(t) = \vartheta_{X_1}(t) + \dots + \vartheta_{X_n}(t)$$

3° Vrijedi formula

$$E(x^r) = \frac{\vartheta^{(r)}(0)}{i^r}, \quad r = 1, 2, \dots$$

ukoliko očekivanje postoji. Posebice:

$$E(X) = -i\vartheta'(0)$$

$$D(X) = -\vartheta''(0) + \vartheta'(0)^2$$

ISHODIŠNI I CENTRALNI MOMENTI SLUČAJNE VARIJABLE

Neka slučajna varijabla X ima razdiobu:

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \end{pmatrix}$$

i neka je n prirodni broj. Ishodišni moment reda n slučajne varijable X definira se formulom $E(X^n) := \sum_k x_k^n p_k$

Ako je m_X očekivanje od X, onda se centralni moment μ_n reda n definira formulom:

$$\mu_n := E[(X-m_X)^n] = \sum_k (x_k - m_X)^n p_k .$$

DISPERZIJA SLUČAJNE VARIJABLE (centralni moment drugog reda)

Disperzija (rasipanje, varijanca) definira se formulom

$$D(X) = E[(X-m_X)^2].$$

Ovaj izraz se najčešće računa na način:

$$D(X) = E(X^2) - m_X^2 = \sum_k x_k^2 p_k - \left(\sum_k x_k p_k\right)^2 .$$

IZVOD:

$$E[(X-m_X)^2] = E(X^2 - 2Xm_X + m_X^2) = E(X^2) - 2m_X E(X) + m_X^2 = E(X^2) - m_X^2$$

SVOJSTVA DISPERZIJE

Za slučajnu varijablu X i realni broj s vrijedi:

$$D(sX) = s^2 D(X).$$

DOKAZ:

$$D(sX) = E(sX)^2 - (E(sX))^2 = E(s^2X^2) - s^2E^2(X)$$
$$= s^2(E(X^2) - E^2(X)) = s^2 D(X)$$

Ako su X i Y nezavisne, onda vrijedi:

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y)$$

DOKAZ:

$$D(X+Y) = E\left((X+Y)^2\right) - \left(E(X+Y)\right)^2 = E\left(X^2+2XY+Y^2\right) - \left(E(X)+E(Y)\right)^2$$

$$= E(X^2) + 2\underbrace{E(XY) + E(Y^2) - E^2(X) - 2E(X)E(Y)}_{\text{nezavisnost}} - E^2(Y)$$

$$= D(X) + D(Y)$$

STANDARDNA DEVIJACIJA $\sigma_X = \sqrt{D(X)}$

KOVARIJACIJSKI MOMENT

varijabli X i Y definira se formulom:

$$\operatorname{cov}(X,Y) := E\left((X-m_X)(Y-m_Y)\right) = E(XY) - m_X m_Y$$

KOEFICIJENT KORELACIJE $r(X,Y) := \dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$

NEZAVISNE $\Rightarrow \operatorname{cov}(X,Y)=0 \Rightarrow r(X,Y)=0$; obrat NE vrijedi

DISPERZIJA $\Rightarrow$ KOVARIJACIJSKI MOM $\Rightarrow$ KOEFICIJENT KOR. $\rightarrow$ ne ovise o pomaku $X \pm \alpha$

CENTRIRANA VARIJABLA $\mathring{X} = X - m_X$ $\quad E(\mathring{X}) = 0 \quad D(\mathring{X}) = D(X)$

NORMIRANA VARIJABLA $X^* := \dfrac{X - m_X}{\sigma}$ $\quad E(X^*) = 0 \quad D(X^*) = 1$

KOEF. KOREL. se ne mijenja:

$$r(X^*, Y^*) = E(X^* Y^*) = E\left(\frac{X-m_X}{\sigma_X} \frac{Y-m_Y}{\sigma_Y}\right) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = r(X,Y)$$

GEOMETRIJSKA RAZDIOBA

Neka je pri izvođenju nekog pokusa p vjerojatnost događaja A. Ponavljamo taj pokus u nepromijenjenim uvjetima do prve realizacije tog događaja. Neka slučajna varijabla X mjeri broj pokusa u kojima se dogodio događaj A. $X \sim G(p)$

$$p_k = P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$$

Karakteristična funkcija $\vartheta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{itk} \cdot p q^{k-1} = pe^{it} \sum_{k=0}^{\infty} (qe^{it})^k = \frac{pe^{it}}{1-qe^{it}}$

OČEKIVANJE: 1° $E(X) = -i\vartheta'(0) = -i \frac{ipe^{it}(1-qe^{it}) - pe^{it}(-iqe^{it})}{(1-qe^{it})^2}\Big|_0 = -\frac{-pe^{it}}{(1-qe^{it})^2}\Big|_0$

$$= \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}$$

$$2°\ E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n p_n = \sum_{n=1}^{\infty} n(1-p)^{n-1} \cdot p = p\frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \ |x|<1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

DISPERZIJA: 1° $D(X) = -\vartheta''(0) + \vartheta'(0)^2 = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1^2}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$

$$\vartheta''(0) = \frac{-pe^{it}(1-qe^{it})^2 - ipe^{it}2(1-qe^{it})(-iqe^{it})}{(1-qe^{it})^4}\Big|_0$$

$$= \frac{-pe^{it}(1-qe^{it})^2 - pqe^{2it} \cdot 2(1-qe^{it})}{(1-qe^{it})^4}\Big|_0$$

$$= \frac{-p \cdot p^2 - 2p^2(1-p)}{p^4} = \frac{-p^3 - 2p^2 + 2p^3}{p^4} = \frac{p-2}{p^4}$$

$2^\circ \quad D(x) = E(x^2) - E^2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (1-p)^{n-1} p - \frac{1}{p^2}$

$= p \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (1-p)^{n-1} - \frac{1}{p^2} = p\left(\frac{2}{p^3} - \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p}\right) - \frac{1}{p^2}$

$= \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p} = \frac{1-p}{p^2}$

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$

$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) x^{n-2} = \frac{2\cancel{(1-x)}}{(1-x)^{\cancel{4}3}} = \frac{2}{(1-x)^3}$

$\sum_{n=2}^{\infty} (n^2 x^{n-2} - n x^{n-2}) = \sum_{n=2}^{\infty} n^2 x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$

$(*) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (1-p)^{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} n^2 (1-p)^{n-2}(1-p) = (1-p)\left(\sum_{n=2}^{\infty} n^2 (1-p)^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n (1-p)^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} n (1-p)^{n-2}\right)$

$= \frac{2-2p}{p^3} + \frac{1}{p^2} = \frac{2-p}{p^3}$

ODSUSTVO PAMĆENJA - temeljno svojstvo geometrijske razdiobe

Slučajna varijabla X koja poprima vrijednosti u skupu $\{1, 2, 3, \ldots\}$ ima geometrijsku razdiobu onda i samo onda ako vrijedi $\forall k, m \geq 1$

$P(X = k+m \mid X > k) = P(X = m)$

DOKAZ:

$P(X = k+m \mid X > k) = \frac{P(X = k+m, X > k)}{P(X > k)} = \frac{P(X = k+m)}{P(X > k)} = \frac{p(1-p)^{k+m-1}}{(1-p)^k}$

$= p(1-p)^{m-1} = P(X = m)$

OBRAT:

$$P(X>k+m \mid X>k) = \frac{P(X>k+m, X>k)}{P(X>k)} = \frac{P(X>k+m)}{P(X>k)}$$

$$\Rightarrow P(X>k+m) = P(X>k)P(X>m) \; ; \; Q(k) := P(X>k)$$

$$Q(k+m) = Q(k)Q(m), \; \forall k,m \geq 0 \qquad (*)$$

$$Q(0) = P(X>0) = 1, \; Q(1) = P(X>1) = 1-p =: q$$

$$(*) \; k=1 \quad Q(m+1) = Q(1)Q(m) \Rightarrow Q(m+1) = q\,Q(m)$$

$$Q(k) = q^k Q(0) = q^k$$

$$P(X>k) = q^k \; ; \; P(X=k) = P(X>k-1) - P(X>k) = q^{k-1} - q^k = (1-q)q^{k-1} = p\,q^{k-1}$$

BINOMNA RAZDIOBA

Neka je p vjerojatnost realizacije događaja A pri izvođenju nekog pokusa. Pretpostavimo da pokus ponavljamo n puta. Neka slučajna varijabla X mjeri broj pojavljivanja događaja A. $X \sim \mathcal{B}(n,p)$

$$p_k = P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Karakteristična funkcija

$$\vartheta(t) = \sum_{k=0}^{n} e^{itk} p_k = \sum_{k=0}^{n} e^{itk} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pe^{it})^k q^{n-k} = (pe^{it}+q)^n$$

Očekivanje $E(x) = -i\vartheta'(0) = np(p+q)^{n-1} = np(\cancel{p}+1-\cancel{p})^{n-1} = np$

$$\vartheta'(t) = n(pe^{it}+q)^{n-1}\cdot p\cdot ie^{it} = inpe^{it}(pe^{it}+q)^{n-1}$$

Disperzija $D(x) = -\vartheta''(0) + \vartheta'(0)^2 = n(n-1)p^2(\cancel{p}+1-\cancel{p})^{n-2} + np - n^2p^2 = (*)$

$$\vartheta''(t) = -n(n-1)p^2e^{2it}(pe^{it}+q)^{n-2} - npe^{it}(pe^{it}+q)^{n-1}$$

$(*)$ $\cancel{n^2p^2} - np^2 + np - \cancel{n^2p^2} = np(1-p) = npq$

Bernoullijeva ili indikatorska slučajna varijabla

$$E(x_i) = 0\cdot q + 1\cdot p = p \qquad D(x_i) = 0^2\cdot q + 1\cdot p - p^2 = pq$$

POISSONOVA RAZDIOBA

Granični slučaj binomne razdiobe, kad broj pokusa neograničeno raste. Uloga vjerojatnosti pojavljivanja p zamjenjuje intenzitet λ pojavljivanja događaja.

Aproksimacija binomne razdiobe

Neka je n velik, a p malen. Označimo $\lambda = E(x) = np$ tada vrijedi aproksimacija:

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

DOKAZ: Označimo $m = \frac{1}{p}$

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{m}\right)^k \left(1-\frac{1}{m}\right)^{n-k} \quad ; \lambda = np = \frac{n}{m}, n \to \infty$$

$$= \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n^k} \lambda^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right) \cdots \left(1-\frac{k-1}{n}\right) \lambda^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$\to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Karakteristična funkcija

$$\vartheta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}} = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

Očekivanje: $E(x) = -i\,\vartheta'(0) = \underline{\underline{\lambda}}$

$$\vartheta'(t) = \left(e^{\lambda(e^{it}-1)}\right)' = e^{\lambda(e^{it}-1)} \cdot \lambda e^{it} \cdot i = i\lambda e^{it} e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

Disperzija: $D(x) = -\vartheta''(0) + \vartheta'(0)^2 = \lambda^2 + \lambda + \lambda^2 = \lambda$

$$\vartheta''(t) = -\lambda^2 e^{2it} e^{\lambda(e^{it}-1)} - \lambda e^{it} e^{\lambda(e^{it}-1)}$$