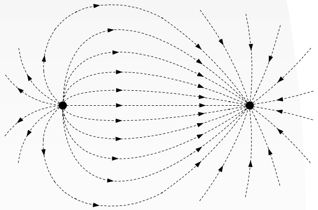
Elektrostatika

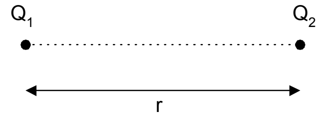
- Coulombov zakon.
- Homogeno i nehomogeno električno polje.
- Električno polje nabijene beskonačne ravnine.
- Električno polje točkastog naboja.
- Električno polje vrlo dugog ravnog vodiča.
- Električno polje nabijene kugle.
- Električno polje nabijenog valjka.

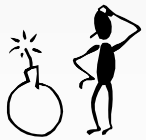


1. zadatak

Dva točkasta naboja istog predznaka nalaze se u zraku na udaljenosti r jedan od drugoga. Odrediti iznos, smjer i orijentaciju djelovanja sile između naboja.

- Q_1 = 85 [μC]
- Q_2 = 16.6 [nC]
- r = 6.5 [cm]

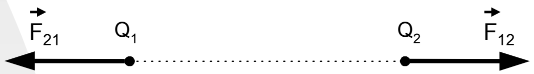




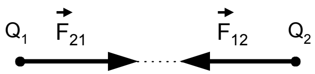
Početna stranica

Uvodni pojmovi

- Dva točkasta naboja, istog predznaka, djeluju jedan na drugoga odbojnom električnom silom i to:
  - Naboj Q_1 djeluje na naboj Q_2 odbojnom silom F_{12}.
  - Naboj Q_2 djeluje na naboj Q_1 odbojnom silom F_{21}.



- Dva točkasta naboja različitog predznaka, djeluju jedan na drugoga privlačnom električnom silom i to:
  - Naboj Q_1 djeluje na naboj Q_2 privlačnom silom F_{12}.
  - Naboj Q_2 djeluje na naboj Q_1 privlačnom silom F_{21}.



Početna stranica

- Po iznosu sile F_{12} i F_{21} su jednake po iznosu:

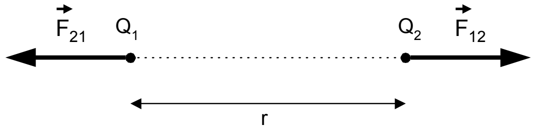
$$\left|\vec{F}\right| = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon}\cdot\frac{Q_1\cdot Q_2}{r^2}$$

  - **ε** - dielektricna konstanta medija u kojem se problem promatra. **ε = ε** $_0$· **ε** $_r$; **ε** $_0$ je tzv. apsolutna dielektricna konstanta (vrijednost 8.854×10^{-12} [As/Vm]) i predstavlja dielektricnost vakuuma, dok **ε** $_r$ predstavlja relativnu dielektricnu konstantu koja ovisi o samom mediju (za vakuum **ε** $_r$ =1).
  - **r** - udaljenost između naboja Q_1 i Q_2
- Električna sila je veličina koja je predstavljana vektorom koji ima svoj iznos, smjer i orijentaciju.

Početna stranica

Rješenje zadatka

- Naboji su istog predznaka tako da su sile odbojne:



- Po iznosu sile su jednake i iznose:

$$\left|\vec{F}_{12}\right| = \left|\vec{F}_{21}\right| = \left|\vec{F}\right| = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r}\cdot\frac{Q_1\cdot Q_2}{r^2}$$

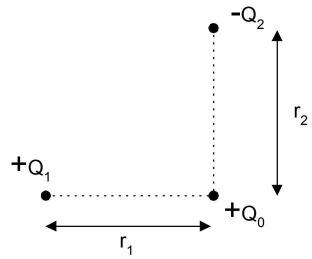
$$\left|\vec{F}\right| = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot 8.854\cdot 10^{-12}\cdot 1}\cdot\frac{85\cdot 10^{-6}\cdot 16.6\cdot 10^{-9}}{\left(6.5\cdot 10^{-2}\right)^2}$$

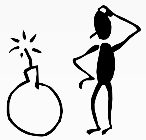
$$\left|\vec{F}\right| = 3\,[\mathrm{N}]$$

2. zadatak

Pozitivni točkasti naboj Q_1 i negativni točkasti naboj Q_2 nalaze se od pozitivnog točkastog naboja Q_0 na udaljenosti $r_1 = r_2$. Njihov međusobni položaj prikazan je na slici. Odredite iznos rezultantne sile na naboj Q_0 te skicirajte vektorski dijagram sila za taj naboj.

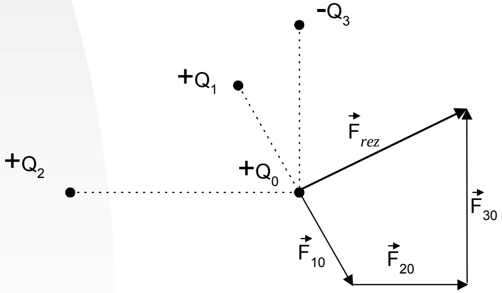
- $Q_1 = 10^{-6}$ [C]
- $Q_2 = -2\cdot 10^{-6}$ [C]
- $Q_0 = 10^{-6}$ [C]
- $r_1 = r_2 = 3$ [cm]





Uvodni pojmovi

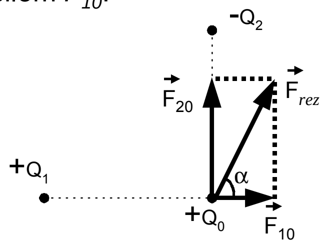
- Ako na točkasti naboj djeluje više naboja tada se za izračunavanje ukupne sile primjenjuje princip superpozicije.
- Princip superpozicije kaže da je rezultatno djelovanje svih naboja jednako zbroju doprinosa pojedinih naboja.
- Ukupna sila na naboj Q_0 jednaka je vektorskom zbroju svih sila koje djeluju na naboj Q_0:



$$\vec{F}_{rez} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i$$

Rješenje zadatka

- Na naboj Q_0 djeluju dva naboja, Q_1 i Q_2. Naboj Q_1 djeluje odbojnom silom F_{10}:



- Naboj Q_2 djeluje privlačnom silom F_{20}.
- Rezultantna sila jednaka je vektorskom zbroju sila F_{10} i F_{20}.

$$\vec{F}_{rez} = \sum_{i=1}^{2}\vec{F}_i = \vec{F}_{10} + \vec{F}_{20} = \left|\vec{F}_{rez}\right|\angle\alpha$$

- Budući da su vektori sila F_{10} i F_{20} međusobno okomiti vrijedi:

$$\left|\vec{F}_{rez}\right| = \sqrt{\left|\vec{F}_{10}\right|^2 + \left|\vec{F}_{20}\right|^2}$$

- Iznos sila F_{10} i F_{20}:

$$\left|\vec{F}_{10}\right| = F_{10} = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot 8.854\cdot 10^{-12}\cdot 1}\cdot\frac{10^{-6}\cdot 10^{-6}}{\left(3\cdot 10^{-2}\right)^2} = 10\,[\mathrm{N}]$$

$$\left|\vec{F}_{20}\right| = F_{20} = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot 8.854\cdot 10^{-12}\cdot 1}\cdot\frac{2\cdot 10^{-6}\cdot 10^{-6}}{\left(3\cdot 10^{-2}\right)^2} = 20\,[\mathrm{N}]$$

- Iznos rezultantne sile F_{rez}:

$$F_{rez} = \sqrt{F_{10}^2 + F_{20}^2} = \sqrt{10^2 + 20^2} = 22.4\,[\mathrm{N}]$$

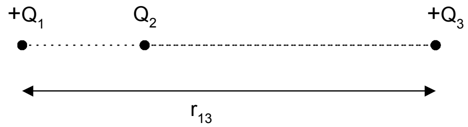
- Budući da je sila vektor njen smjer i orijentacija se određuje iz pravokutnog trokuta, odnosno:

$$tg\alpha = \frac{F_{20}}{F_{10}} \Rightarrow \alpha = 63° \qquad \boxed{\vec{F}_{rez} = 22.4\angle 63°\,[\mathrm{N}]}$$

3. zadatak

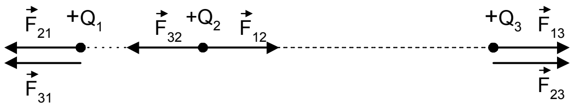
Tri mala tijela, električnih naboja $Q_1 = +\,4\cdot 10^{-11}$ [C], nepoznati elektricni naboj Q_2 i $Q_3 = +10^{-11}$ [C], zauzimaju u vakuumu polo□aj kao što je prikazano na slici. Odredite polo□aj i elektricni naboj Q_2 tako da se sva tijela pod djelovanjem Coulomb-ovih sila nalaze u mirovanju. Zadano:

- r_{13} = 5 [cm]

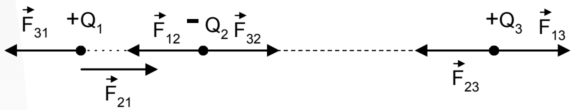


Rješenje zadatka

- Da bi električni naboj bio u mirovanju ukupna električna sila koja na njega djeluje mora biti jednaka 0.
- Pretpostavimo predznak naboja $Q_2 > 0$.



- Iz slike je vidljivo da se uvjet mirovanja može ispuniti za naboj Q_2, ali uz pozitivan naboj Q_2 naboji Q_1 i Q_3 neće biti u mirovanju. Zbog toga naboj Q_2 mora biti negativan.



- Uvjeti mirovanja:

$$\vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} = 0 \Rightarrow \left|\vec{F}_{21}\right| = \left|\vec{F}_{31}\right|$$

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} = 0 \Rightarrow \left|\vec{F}_{12}\right| = \left|\vec{F}_{32}\right|$$

$$\vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} = 0 \Rightarrow \left|\vec{F}_{13}\right| = \left|\vec{F}_{23}\right|$$

odnosno:

$$\left|k\cdot\frac{Q_2\cdot Q_1}{r_{12}^2}\right| = \left|k\cdot\frac{Q_3\cdot Q_1}{r_{13}^2}\right| \Rightarrow Q_2\cdot r_{13}^2 = Q_3\cdot r_{12}^2$$

$$\left|k\cdot\frac{Q_1\cdot Q_2}{r_{12}^2}\right| = \left|k\cdot\frac{Q_3\cdot Q_2}{r_{23}^2}\right| \Rightarrow Q_1\cdot r_{23}^2 = Q_3\cdot r_{12}^2$$

$$\left|k\cdot\frac{Q_1\cdot Q_3}{r_{13}^2}\right| = \left|k\cdot\frac{Q_3\cdot Q_2}{r_{23}^2}\right| \Rightarrow Q_1\cdot r_{23}^2 = Q_2\cdot r_{13}^2$$

$$r_{13} = r_{12} + r_{23}$$

- Rješenjem ovog sustava jednadžbi kao rješenja dobije se:

$$\boxed{\begin{aligned} r_{12} &= 3.33\,[\mathrm{cm}] \\ r_{23} &= 1.67\,[\mathrm{cm}] \end{aligned}}$$

$$Q_2 = 4.4\,[\mathrm{pC}]$$

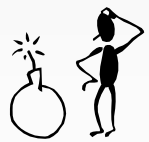
- Budući da znamo da je naboj Q_2 negativan, vrijedi:

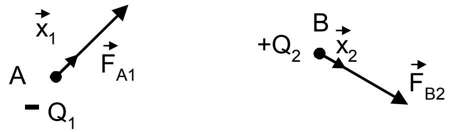
$$\boxed{Q_2 = -4.4\,[\mathrm{pC}]}$$

4. zadatak

U točke A i B nekog već formiranog polja unešeni su naboji Q_1 i Q_2. Pri tome je na naboj Q_1 opažena sila F_{A1} u smjeru jediničnog vektora x_1, dok je na naboj Q_2 opažena sila F_{B2}, u smjeru jediničnog vektora x_2 (kao na slici). Ako naboji Q_1 i Q_2 zamijene mjesta u prostoru (Q_1 dođe u točku B, a Q_2 u točku A), odredite iznose i smjerove sila na njih. Međusobno djelovanje naboja Q_1 i Q_2 i obrnuto zanemarujemo.

- Q_1 = -2 [μC]
- Q_2 = 5 [μC]
- F_{A1} = 0.04 [N], u smjeru vektora x_1
- F_{B2} = 0.05 [N], u smjeru vektora x_2



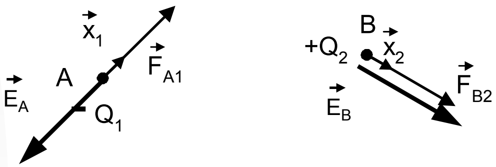


Rješenje zadatka

- Ako se točkasti naboj stavi u prostor u kojem djeluje električno polje, na naboj će djelovati električna sila. Veza između vektora električnog polja i električne sile je:

$$\vec{F}_{el} = Q \cdot \vec{E}$$

- U zadatku iz poznatih vektora sila na naboje Q_1 i Q_2 mogu se odrediti vektori električnog polja u točkama A i B.
- Kod pozitivnog naboja vektor sile i polja su u istom smjeru, a kod negativnog naboja vektor sile i polja su u suprotnom smjeru:



- Formirano električno polje u točkama A i B ima smjer prema slici:

- Zapisano pomoću vektora smjera:

$$\vec{E}_A = \frac{\vec{F}_{A1}}{Q_1} = \frac{0.04 \cdot \vec{x}_1}{-2 \cdot 10^{-6}} = -20 \cdot \vec{x}_1\,[\mathrm{kV/m}]$$

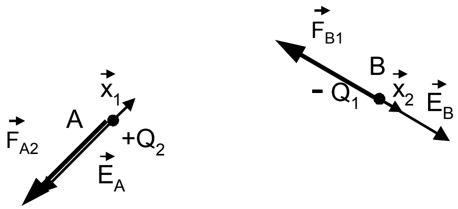
$$\vec{E}_B = \frac{\vec{F}_{B2}}{Q_2} = \frac{0.05 \cdot \vec{x}_2}{5 \cdot 10^{-6}} = 10 \cdot \vec{x}_2\,[\mathrm{kV/m}]$$

- Nakon što naboji zamijene mjesta, na njih djeluju sile :

$$\vec{F}_{A2} = \vec{E}_A \cdot Q_2 = -20 \cdot 10^3 \cdot \vec{x}_1 \cdot 5 \cdot 10^{-6} = -0.1 \cdot \vec{x}_1\,[\mathrm{N}]$$

$$\vec{F}_{B1} = \vec{E}_B \cdot Q_1 = 10 \cdot 10^3 \cdot \vec{x}_2 \cdot \left(-2 \cdot 10^{-6}\right) = -0.02 \cdot \vec{x}_2\,[\mathrm{N}]$$

- Vektori sila na naboje u točkama A i B:

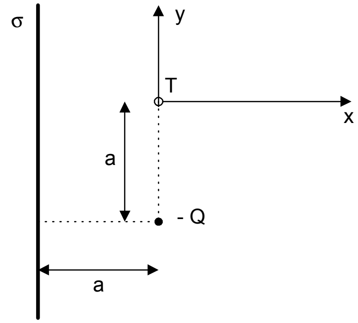


- Iz slike je vidljivo da je sila na negativan naboj Q_1 suprotnog smjera od polja u točki B, a na pozitivan naboj Q_2 istog smjera kao i polje u točki A.

5. zadatak

Ispred ravnine nabijene nabojem plošne gustoće σ nalazi se na udaljenosti, a negativan tockasti naboj Q. Odredite izraz za vektor jakosti elektricnog polja *E* (koordinatne osi zadane prema slici) koje ravnina i tockasti naboj stvaraju u tocki T, a takoder odredite i iznos polja *E*. Zadano:

- $\sigma = +2$ [nAs/m^2]
- $Q = -4 \cdot \pi$ [nAs]
- $a = 1$ [m]

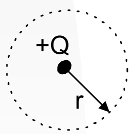


Uvodni pojmovi

- HOMOGENO ELEKTRIČNO POLJE je polje koje u svim točkama prostora ima jednak iznos i smjer (primjer; ravnomjerno nabijena beskonačna ravnina).
- NEHOMOGENO ELEKTRIČNO POLJE je polje koje u svim točkama prostora ima različit iznos i/ili smjer (primjer; točkasti naboj, kugla, valjak, itd.).
- Gauss-ov teorem:

$$\oiint_S \vec{D} d\vec{S} = \sum_i Q_i$$

- Primjena Gauss-ovog teorema za izračunavanje el. polja točkastog naboja:



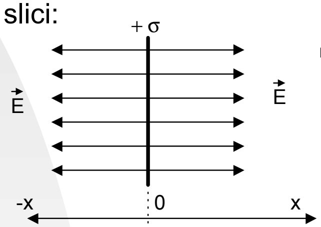
$$D \cdot \oiint_S dS = E \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 = Q$$

$$E = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot r^2}$$

Primjeri homogenog električnog polja

Beskonačna ravnina nabijena plošnim nabojem σ.

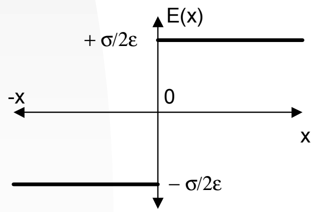
- U okolini pozitivno nabijene ravnine polje izgleda kao na slici:



- Po iznosu polje je:

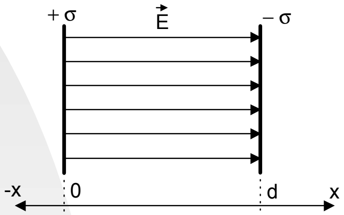
$$\left|\vec{E}\right| = \frac{\sigma}{2 \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r}$$

- Funkcija ovisnosti polja o udaljenosti od ravnine izgleda kao na slici:



Dvije suprotno nabijene paralelne ravnine

- Za ovaj slučaj polje izgleda kao:

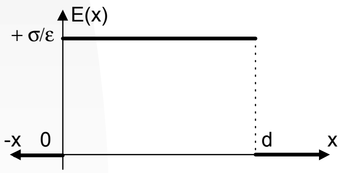


- Po iznosu polje između dvije ravnine je,

$$\left|\vec{E}\right| = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r}$$

dok izvan nema polja.

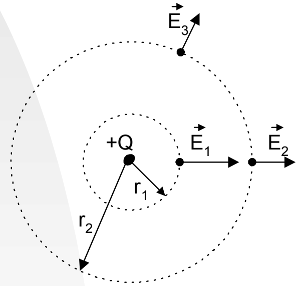
- Funkcija ovisnosti polja o udaljenosti od pozitivno nabijene ravnine izgleda kao na slici:



Primjeri nehomogenog električnog polja

Točkasti naboj

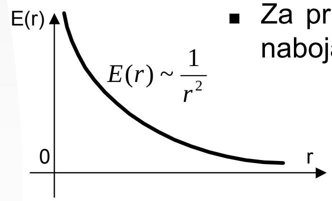
- U okolini pozitivno nabijenog točkastog naboja električno polje za označene točke ima prikazane smjerove:



- Električno polje ovisi o udaljenosti od točkastog naboja:

$$\left|\vec{E}\right| = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r} \cdot \frac{1}{r^2}$$

  - **r** - udaljenost od naboja Q do promatrane točke.



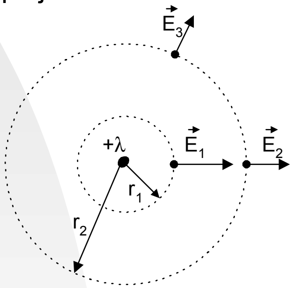
- Za prikazano polje točkastog naboja vrijedi:

$$\left|\vec{E}_2\right| = \left|\vec{E}_3\right|$$

$$\left|\vec{E}_1\right| > \left|\vec{E}_2\right|$$

Vrlo dugi ravni vodič nabijen linijskim nabojem λ

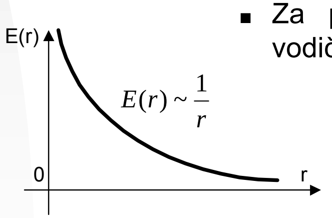
- U okolini pozitivno nabijenog ravnog vodiča električno polje za označene točke ima prikazane smjerove:



- Električno polje ovisi o udaljenosti od vodiča

$$\left|\vec{E}\right| = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r} \cdot \frac{1}{r}$$

  - **r** - udaljenost od vodiča do promatrane točke.



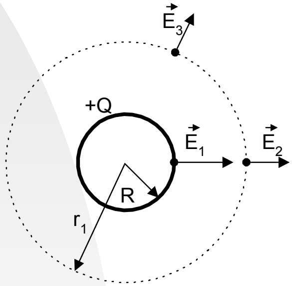
- Za prikazano polje ravnog vodiča:

$$\left|\vec{E}_2\right| = \left|\vec{E}_3\right|$$

$$\left|\vec{E}_1\right| > \left|\vec{E}_2\right|$$

Pozitivno nabijena kugla

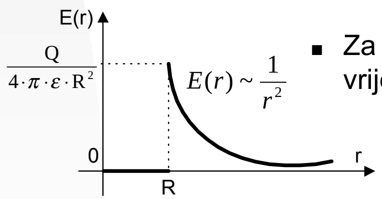
- U okolini pozitivno nabijene kugle polumjera R električno polje za označene točke ima prikazane smjerove :



- Unutar kugle nema polja, a izvan se mijenja po zakonu:

$$\left|\vec{E}\right| = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r} \cdot \frac{1}{r^2}$$

  - **r** - udaljenost od središta kugle



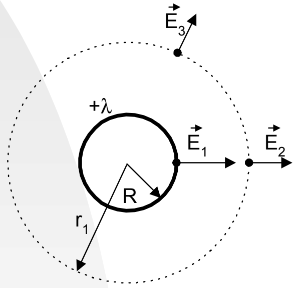
- Za prikazano polje kugle vrijedi:

$$\left|\vec{E}_2\right| = \left|\vec{E}_3\right|$$

$$\left|\vec{E}_1\right| > \left|\vec{E}_2\right|$$

Pozitivno nabijeni valjak

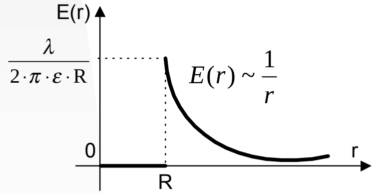
- U okolini pozitivno nabijenog valjka polumjera R električno polje za označene točke ima prikazane smjerove:



- Unutar valjka nema polja, a izvan se mijenja po zakonu:

$$\left|\vec{E}\right| = \frac{\lambda}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r}\cdot\frac{1}{r}$$

  - **r** - udaljenost od središta valjka



- Za prikazano polje valjka :

$$\left|\vec{E}_2\right| = \left|\vec{E}_3\right|$$

$$\left|\vec{E}_1\right| > \left|\vec{E}_2\right|$$

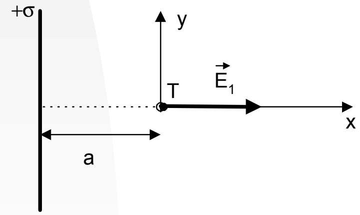
Rješenje zadatka

- Polje u točki T stvaraju dva nabijena tijela, pozitivno nabijena ravnina i negativni točkasti naboj.
- Ukupno polje određuje se metodom superpozicije:

  Za svako pojedinačno tijelo određuje se njegov doprinos (polje koje bi stvorilo bez drugih nabijenih tijela u blizini).

  Ukupno polje jednako je vektorskoj sumi pojedinih polja.

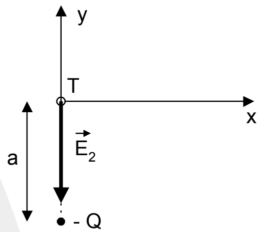
- Pozitivna nabijena ravnina stvara polje u točki T:



Polje je u smjeru osi x i iznosi:

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{2\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r}\cdot\vec{i}$$

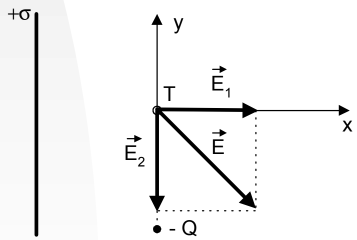
- Negativno nabijeni točkasti naboj stvara polje u točki T:



Polje je u smjeru osi -y i iznosi:

$$\vec{E}_2 = -\frac{|Q|}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r\cdot a^2}\cdot\vec{j}$$

- Ukupno polje jednako je vektorskom zbroju polja:



$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

- Uvrstivši vrijednosti za pojedina polja dobiva se ukupno polje u točki T:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{2\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r}\cdot\vec{i} + \left(-\frac{|Q|}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r\cdot a^2}\cdot\vec{j}\right)$$

$$\vec{E} = \frac{2\cdot10^{-9}}{2\cdot8.854\cdot10^{-12}\cdot1}\cdot\vec{i} - \frac{4\cdot\pi\cdot10^{-9}}{4\cdot\pi\cdot8.854\cdot10^{-12}\cdot1\cdot1^2}\cdot\vec{j}$$

$$\boxed{\vec{E} = 113\cdot\vec{i} - 113\cdot\vec{j}\ [\mathrm{V/m}]}$$

- Iznos vektora polja određuje se kao:

$$\left|\vec{E}\right| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{113^2 + 113^2}$$

$$\boxed{\left|\vec{E}\right| = 160\ [\mathrm{V/m}]}$$

- Na drugi način zapisan vektor polja:

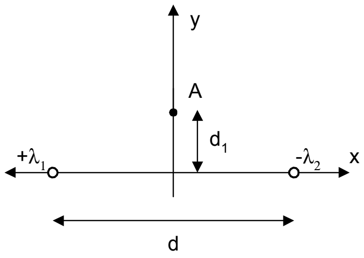
$$\vec{E} = \left|\vec{E}\right|\angle\alpha$$

$$\boxed{\vec{E} = 160\angle-45^\circ\ [\mathrm{V/m}]}$$

6. zadatak

Dva duga ravna vodiča, polumjera r_0 zanemarivo malog u odnosu na njihov međusobni razmak, nabijena su linijskim nabojima λ_1 i λ_2, predznaka prikazanih na slici. Ako se u točku A postavi negativan točkasti naboj Q, odredite silu koja djeluje na taj naboj. Zadano:

- λ_1 = + 2 [nAs/m]
- λ_2 = - 4 [nAs/m]
- Q = - 4 [pAs]
- d = 1 [m]
- d_1 = 0.25 [m]

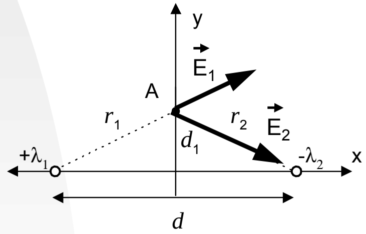


Rješenje zadatka

- Na naboj Q djeluje el. polje koje stvaraju dva vodiča.

$$\vec{F} = Q \cdot \vec{E}_A$$

- Električno polje E_A određuje se metodom superpozicije.
- Lijevi vodič stvara el. polje E_1, a desni vodič el. polje E_2:



$$\left|\vec{E}_1\right| = \frac{\lambda_1}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r\cdot r_1}$$

$$\left|\vec{E}_2\right| = \frac{\lambda_2}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r\cdot r_2}$$

$$r_1 = r_2 = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + d_1^2}$$

- Ukupno el. polje u točki A, E_A:

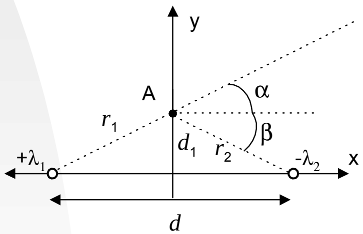
$$\vec{E}_A = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

- Ukupno polje najlakše je odrediti ako oba vektora polja prikažemo pomoću jediničnih vektora:

$$\vec{E}_1 = \left|\vec{E}_1\right|\cdot\cos\alpha\cdot\vec{i} + \left|\vec{E}_1\right|\cdot\sin\alpha\cdot\vec{j}$$

$$\vec{E}_2 = \left|\vec{E}_2\right|\cdot\cos\beta\cdot\vec{i} + \left|\vec{E}_2\right|\cdot\sin\beta\cdot\vec{j}$$

- Kuteve α i β odredujemo iz slike:



$$\cos\alpha = \frac{\frac{d}{2}}{r_1}; \sin\alpha = \frac{d_1}{r_1}; \alpha > 0$$

$$\cos\beta = \frac{\frac{d}{2}}{r_2}; \sin\beta = \frac{d_1}{r_2}; \beta < 0$$

- Ukupno el. polje u točki A, E_A:

$$\vec{E}_A = \left|\vec{E}_1\right|\cdot\cos\alpha\cdot\vec{i} + \left|\vec{E}_1\right|\cdot\sin\alpha\cdot\vec{j} + \left|\vec{E}_2\right|\cdot\cos\beta\cdot\vec{i} + \left|\vec{E}_2\right|\cdot\sin\beta\cdot\vec{j}$$

$$\vec{E}_A = \left(\left|\vec{E}_1\right|\cdot\cos\alpha + \left|\vec{E}_2\right|\cdot\cos\beta\right)\cdot\vec{i} + \left(\left|\vec{E}_1\right|\cdot\sin\alpha + \left|\vec{E}_2\right|\cdot\sin\beta\right)\cdot\vec{j}$$

$$\vec{E}_A = \left(\frac{|\lambda_1|}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r\cdot r_1}\cdot\frac{\frac{d}{2}}{r_1} + \frac{|\lambda_2|}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r\cdot r_2}\cdot\frac{\frac{d}{2}}{r_2}\right)\cdot\vec{i} + \left(\frac{|\lambda_1|}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r\cdot r_1}\cdot\frac{d_1}{r_1} - \frac{|\lambda_2|}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r\cdot r_2}\cdot\frac{d_1}{r_2}\right)\cdot\vec{j}$$

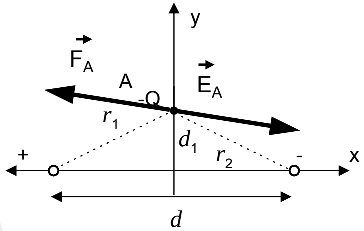
$$\vec{E}_A = \frac{d}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r}\left(\frac{|\lambda_1|}{r_1^2} + \frac{|\lambda_2|}{r_2^2}\right)\cdot\vec{i} + \frac{d_1}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r}\left(\frac{|\lambda_1|}{r_1^2} - \frac{|\lambda_2|}{r_2^2}\right)\cdot\vec{j}$$

$$\vec{E}_A = \frac{d\cdot\left(|\lambda_1| + |\lambda_2|\right)}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r\cdot\left(\left(\frac{d}{2}\right)^2 + d_1^2\right)}\cdot\vec{i} + \frac{d_1\cdot\left(|\lambda_1| - |\lambda_2|\right)}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r\cdot\left(\left(\frac{d}{2}\right)^2 + d_1^2\right)}\cdot\vec{j}$$

- Ako se uvrste poznate vrijednosti dobije se:

$$\vec{E}_A = 173\cdot\vec{i} - 29\cdot\vec{j}\ [\mathrm{V/m}] = 175\angle -9°[\mathrm{V/m}]$$

- Sila na negativan naboj Q u točki A onda ima smjer kao na slici:



- Vektor sile je:

$$\vec{F}_{\mathrm{A}} = \mathrm{Q}\cdot\vec{E}_{\mathrm{A}} = -4\cdot 10^{-12}\cdot\left(173\cdot\vec{i} - 29\cdot\vec{j}\right) = -0.69\cdot\vec{i} + 0.11\cdot\vec{j}\;[n\mathrm{N}]$$

$$\boxed{\vec{F}_{\mathrm{A}} = 0.7\angle 171°[n\mathrm{N}]}$$

7. zadatak

Točkasti naboj nalazi se u središtu šuplje metalne nenabijene kugle vanjskog polumjera R_2 i unutrašnjeg polumjera R_1. Odredite el. polje u točkama A i B za sljedece slucajeve:

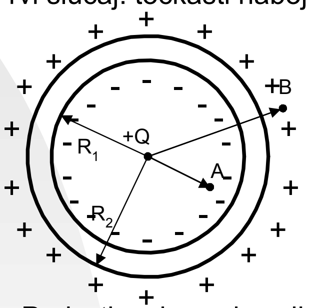
- tockasti naboj Q u središtu nenabijene kugle
- kugla nabijena nabojem Q bez tockastog naboja u središtu
- tockasti naboj Q u središtu kugle nabijene nabojem Q
- tockasti naboj Q u središtu kugle nabijene nabojem Q istog iznosa, ali suprotnog predznaka

Zadano:

- Q = + 9 [nAs]
- R_1 = 14 [mm]
- R_2 = 17 [mm]
- r_A = 1 [cm]
- r_B = 2 [cm]

Rješenje zadatka

Prvi slučaj: točkasti naboj Q u središtu nenabijene kugle.



- U točki A (unutar šuplje kugle) el. polje stvara točkasti naboj.

$$\left|\vec{E}_{\mathrm{A}}\right| = \frac{\mathrm{Q}}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{\mathrm{r}}\cdot r_{\mathrm{A}}^2}$$

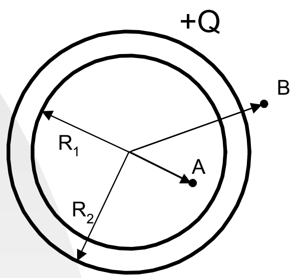
$$\left|\vec{E}_{\mathrm{A}}\right| = \frac{9\cdot 10^{-9}}{4\cdot\pi\cdot 8.854\cdot 10^{-12}\cdot 1\cdot\left(1\cdot 10^{-2}\right)^2} = 808[\mathrm{kV/m}]$$

- Pod utjecajem el. polja koje stvara točkasti naboj dolazi do influencije naboja na kugli (-Q na unutarnjoj plohi kugle i +Q na vanjskoj plohi kugle).
- El. polje u točki B onda iznosi:

$$\left|\vec{E}_{\mathrm{B}}\right| = \frac{\mathrm{Q}-\mathrm{Q}+\mathrm{Q}}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{\mathrm{r}}\cdot r_{\mathrm{B}}^2} = \frac{\mathrm{Q}}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{\mathrm{r}}\cdot r_{\mathrm{B}}^2} = \frac{9\cdot 10^{-9}}{4\cdot\pi\cdot 8.854\cdot 10^{-12}\cdot 1\cdot\left(2\cdot 10^{-2}\right)^2}$$

$$\left|\vec{E}_{\mathrm{B}}\right| = 202[\mathrm{kV/m}]$$

Drugi slučaj: nabijena kugla bez točkastog naboja u središtu



- Unutar kugle nema naboja tako da nema ni polja u točki A:

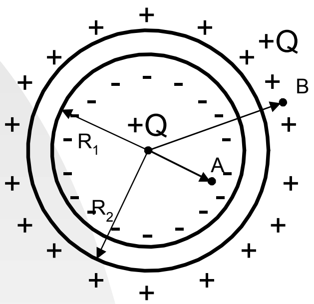
$$\left|\vec{E}_{\mathrm{A}}\right| = 0$$

- El. polje u točki B stvara nabijena kugla:

$$\left|\vec{E}_{\mathrm{B}}\right| = \frac{\mathrm{Q}}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{\mathrm{r}}\cdot r_{\mathrm{B}}^2} = \frac{9\cdot 10^{-9}}{4\cdot\pi\cdot 8.854\cdot 10^{-12}\cdot 1\cdot\left(2\cdot 10^{-2}\right)^2}$$

$$\left|\vec{E}_{\mathrm{B}}\right| = 202[\mathrm{kV/m}]$$

Treći slučaj: točkasti naboj Q u središtu nabijene kugle (Q)



- Unutar kugle el. polje stvara točkasti naboj Q:

$$\left|\vec{E}_{\mathrm{A}}\right| = \frac{\mathrm{Q}}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{\mathrm{r}} \cdot r_{\mathrm{A}}^2}$$

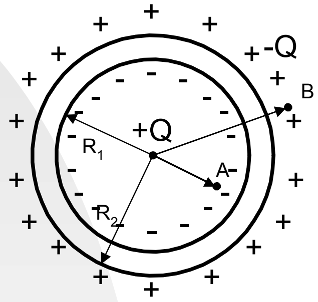
$$\left|\vec{E}_{\mathrm{A}}\right| = \frac{9 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot \pi \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot \left(1 \cdot 10^{-2}\right)^2} = 808\left[\mathrm{kV/m}\right]$$

- Pod utjecajem el. polja koje stvara točkasti naboj dolazi do influencije naboja na kugli (-Q na unutarnjoj plohi kugle i +Q na vanjskoj plohi kugle).
- El. polje u točki B onda iznosi:

$$\left|\vec{E}_{\mathrm{B}}\right| = \frac{\mathrm{Q} - \mathrm{Q} + \mathrm{Q} + \mathrm{Q}}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{\mathrm{r}} \cdot r_{\mathrm{B}}^2} = \frac{2 \cdot \mathrm{Q}}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{\mathrm{r}} \cdot r_{\mathrm{B}}^2} = \frac{2 \cdot 9 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot \pi \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot \left(2 \cdot 10^{-2}\right)^2}$$

$$\left|\vec{E}_{\mathrm{B}}\right| = 404\left[\mathrm{kV/m}\right]$$

Četvrti slučaj: točkasti naboj Q u središtu nabijene kugle (-Q)



- Unutar kugle el. polje stvara točkasti naboj Q:

$$\left|\vec{E}_{\mathrm{A}}\right| = \frac{\mathrm{Q}}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{\mathrm{r}} \cdot r_{\mathrm{A}}^2}$$

$$\left|\vec{E}_{\mathrm{A}}\right| = \frac{9 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot \pi \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot \left(1 \cdot 10^{-2}\right)^2} = 808\left[\mathrm{kV/m}\right]$$

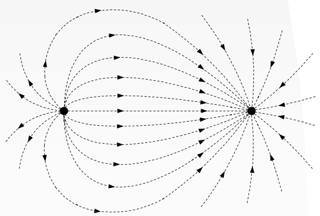
- Pod utjecajem el. polja koje stvara točkasti naboj dolazi do influencije naboja na kugli (-Q na unutarnjoj plohi kugle i +Q na vanjskoj plohi kugle).
- El. polje u točki B onda iznosi:

$$\left|\vec{E}_{\mathrm{B}}\right| = \frac{\mathrm{Q} - \mathrm{Q} + \mathrm{Q} - \mathrm{Q}}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{\mathrm{r}} \cdot r_{\mathrm{B}}^2} = \frac{0}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{\mathrm{r}} \cdot r_{\mathrm{B}}^2}$$

$$\left|\vec{E}_{\mathrm{B}}\right| = 0\left[\mathrm{kV/m}\right]$$

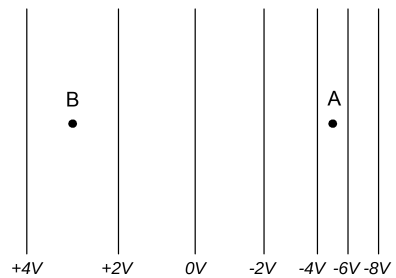
Elektrostatika

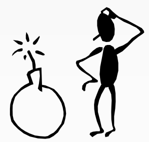
- Veza električnog polja i potencijala.
- Električni potencijal.
- Potencijalna energija.
- Rad.
- Zakon o očuvanju energije.



1. zadatak

Na slici su prikazane ekvipotencijalne plohe nekog elektrostatskog polja. Odredite u kakvom su odnosu iznosi sila F_A i F_B koje djeluju na pozitivan točkasti naboj. Također, odredite smjerove vektora sila F_A i F_B.





Uvodni pojmovi

- Svakoj točki prostora u kojoj postoji električno polje može se pridijeliti skalarna veličina - električni potencijal. Pri tome je el. potencijal funkcija el. polja:

$$\varphi = f(\vec{E})$$

- Potencijal promatrane točke:

$$\varphi_{promatrane\ tocke} = -\int_{referentna\ tocka}^{promatrana\ tocka} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Ako se el. polje mijenja samo u smjeru osi x, onda vrijedi:

$$\varphi_{promatrane\ tocke} = -\int_{referentna\ tocka}^{promatrana\ tocka} \vec{E}(\mathrm{x}) \cdot d\vec{\mathrm{x}}$$

- Potencijal neke točke se definira u odnosu na referentnu točku za koju vrijedi:

$$\varphi_{referentne\ tocke} = 0$$

Uvodni pojmovi

- El. polje se također može prikazati kao funkcija potencijala:

$$\vec{E} = g(\varphi)$$

- Ovisnost polja o potencijalu:

$$E(\mathrm{x}) = -\frac{d\varphi(\mathrm{x})}{d\mathrm{x}}$$

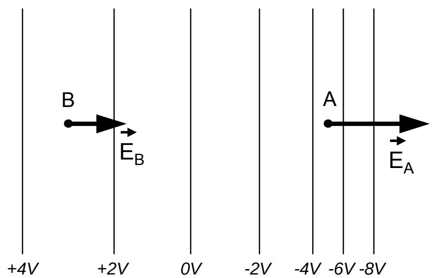
Smjer porasta električnog potencijala suprotan je smjeru vektora električnog polja.

Iznos električnog polja je jednak brzini promjene električnog potencijala.

- Polje električnog potencijala prikazuje se ekvipotencijalnim plohama (plohama istog potencijala).

Rješenje zadatka

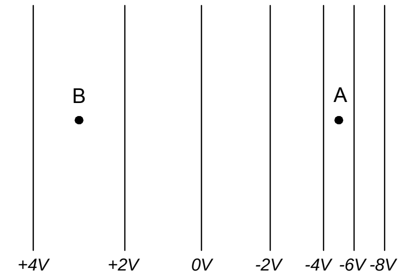
- Da bi se odredio smjer sile na naboj q potrebno je prvo odrediti smjer električnog polja.
- Smjer električnog polja je suprotan od smjera porasta potencijala tako da za prikazano elektrostatsko polje vektori polja u točkama A i B su sljedeći:



- Kako se radi o silama na pozitivan naboj i smjerovi sila u točkama A i B su istog smjera kao i vektori polja.

- Iznosi polja su proporcionalni brzini promjene potencijala. Za prikazano polje vrijedi:

$$\left(\frac{d\varphi(\mathrm{x})}{d\mathrm{x}}\right)_{\mathrm{A}} > \left(\frac{d\varphi(\mathrm{x})}{d\mathrm{x}}\right)_{\mathrm{B}}$$



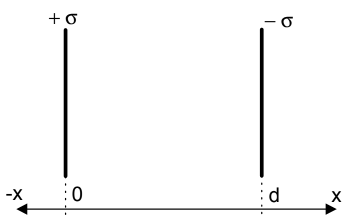
- Kako je sila proporcionalna polju vrijedi:

$$\boxed{\left|\vec{F}_{\mathrm{A}}\right| > \left|\vec{F}_{\mathrm{B}}\right|}$$

2. zadatak

Nacrtajte funkciju promjene potencijala između dvije raznoimeno nabijene ravnine uz različito definirane referentne točke:

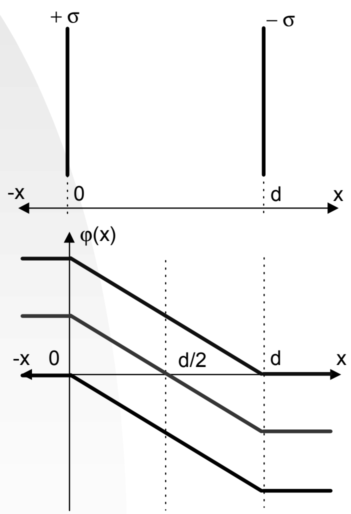
a) $x_{ref} = 0$
b) $x_{ref} = d/2$
c) $x_{ref} = d$



Rješenje zadatka

- Polje između dvije ravnine je homogeno:

$$E(x) = E \qquad \text{za } 0 < x < d$$



Potencijal bilo koje točke između dvije ravnine je:

$$\varphi(x) = -\int_{xref}^{x} E \cdot dx = -E \cdot x\Big|_{xref}^{x}$$

$$\varphi(x) = -E \cdot x + E \cdot x_{ref}$$

za $x_{ref} = 0$:

$$\varphi(x) = -E \cdot x$$

za $x_{ref} = d/2$:

$$\varphi(x) = -E \cdot x + E \cdot d/2$$

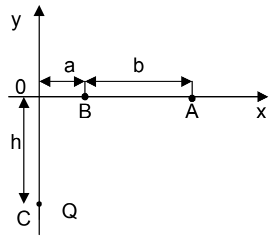
za $x_{ref} = d$:

$$\varphi(x) = -E \cdot x + E \cdot d$$

3. zadatak

Točkasti naboj Q nalazi se u točki C. Položaj dviju točaka A i B prikazan je na slici. Odredite napon U_{AB}. Ukoliko se točka A nalazi na potencijalu φ_A odredite točku na x osi u kojoj će potencijal imati vrijednost 0 [V]. Zadano:

- $Q = 27.82 \cdot \sqrt{2} \cdot 10^{-9}$ [As]
- $\varphi_A = -46$ [V]
- a = 1 [m]
- b = 3 [m]
- h = 2 [m]
- $\varepsilon = \varepsilon_0$



Uvodni pojmovi

- Polje potencijala u nekom prostoru može se odrediti na dva načina:

1 Najprije se na osnovu zadane raspodjele naboja odredi električno polje (na osnovu poznatih postupaka dosada razmatranih) u prostoru. Zatim se uz zgodno* odabranu referentnu točku polje potencijala traži po definiciji:

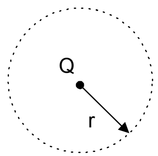
$$\varphi(x) = -\int_{x_{ref}}^{x} \vec{E}(x) \cdot d\vec{x}$$

2 Zadana raspodjela naboja promatra se kao skup točkastih naboja ("model točkastog naboja"). Ukupan potencijal nalazi se superpozicijom, skalarni doprinosi (sumom ili integralom), doprinosa tih elementarnih naboja. Osim modela točkastog naboja, nekada se mogu koristiti i drugi modeli čije potencijale znamo ili smo ih prethodno izračunali (nabijeni štap, prsten, ploča).

* *različitim izborom referentne točke dobit ćemo različite iznose potencijala, ali će razlike potencijala uvijek biti jednake za bilo koje dvije točke prostora.*

Uvodni pojmovi

- Polje potencijala u okolini točkastog naboja može se odrediti na sljedeći način:



$$\varphi(r) = -\int_{r_{ref}}^{r} \vec{E}(r) \cdot d\vec{r}$$

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_{ref}} \right)$$

- Za definiranu referentnu točku u beskonačnosti vrijedi:

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \frac{1}{r}$$

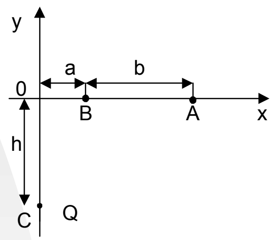
- Napon između dviju točaka u polju točkastog naboja:

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B$$

$$U_{AB} = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_{ref}} \right) - \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_{ref}} \right) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

Rješenje zadatka

- Potencijal točka A i B može se izračunati kao:



$$\varphi_A = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_{ref}} \right)$$

$$r_A = \sqrt{h^2 + (a+b)^2}$$

$$\varphi_B = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_{ref}} \right)$$

$$r_B = \sqrt{h^2 + a^2}$$

- Napon U_{AB} je onda:

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_{ref}} \right) - \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_{ref}} \right)$$

$$U_{AB} = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{h^2 + (a+b)^2}} - \frac{1}{\sqrt{h^2 + a^2}} \right)$$

- Iznos napona U_{AB}:

$$U_{\mathrm{AB}}=\frac{27.82\cdot\sqrt{2}\cdot10^{-9}}{4\cdot\pi\cdot8.854\cdot10^{-12}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2^2+(1+3)^2}}-\frac{1}{\sqrt{2^2+1^2}}\right)=-79[\mathrm{V}]$$

- Napon se može odrediti bez određivanja referentne točke, jer je razlika potencijala između dvije točke u prostoru neovisna o odabranoj referentnoj točki.
- Iz poznatog potencijala točke A može se odrediti udaljenost ekvipotencijalne plohe referentnog potencijala u zadatku:

$$\varphi_{\mathrm{A}}=\frac{\mathrm{Q}}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon}\cdot\left(\frac{1}{r_{\mathrm{A}}}-\frac{1}{r_{ref}}\right) \qquad r_{ref}=\frac{\frac{\mathrm{Q}}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon}}{\frac{\mathrm{Q}}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon}\cdot\frac{1}{r_{\mathrm{A}}}-\varphi_{\mathrm{A}}}$$

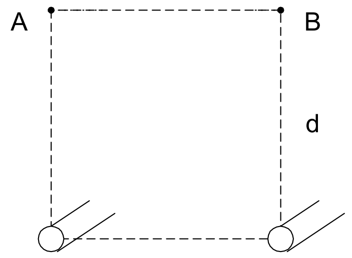
$$r_{ref}=\frac{\frac{27.82}{4\cdot\pi\cdot8.854\cdot10^{-12}}}{\frac{27.82}{4\cdot\pi\cdot8.854\cdot10^{-12}}\cdot\frac{1}{\sqrt{20}}-(-46)}=2.83[\mathrm{m}]$$

- Na osi x to je točka: $x_{ref}=\sqrt{r_{ref}^2-\mathrm{h}^2}=\sqrt{2.83^2-2^2}=2[\mathrm{m}]$

4. zadatak

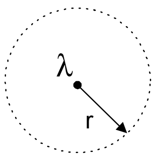
Odredite rad prilikom pomicanja pokusnog točkastog naboja Q_0 iz točke A u točku B. Točke A i B predstavljaju vrhove zamišljenog kvadrata koji leži u ravnini okomitoj na dva paralelna i suprotno nabijena ravna vodiča (slika). Zadano:

- $Q_0 = -4\cdot10^{-12}$ [As/m]
- $|\lambda| = 1.77\cdot10^{-8}$ [As/m]
- $\varepsilon = \varepsilon_0$



Uvodni pojmovi

- Polje potencijala u okolini nabijenog ravnog vodiča može se odrediti na sljedeći način:



$$\varphi(r)=-\int_{r_{ref}}^{r}\vec{E}(r)\cdot d\vec{r}$$

$$\varphi(r)=\frac{\lambda}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon}\cdot ln\frac{r_{ref}}{r}$$

- Napon između dviju točaka u polju ravnog vodiča:

$$U_{\mathrm{AB}}=\varphi_{\mathrm{A}}-\varphi_{\mathrm{B}}$$

$$U_{\mathrm{AB}}=\frac{\lambda}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon}\cdot ln\frac{r_{ref}}{r_{\mathrm{A}}}-\frac{\lambda}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon}\cdot ln\frac{r_{ref}}{r_{\mathrm{B}}}=\frac{\lambda}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon}\cdot ln\frac{r_{\mathrm{B}}}{r_{\mathrm{A}}}$$

Uvodni pojmovi

- Potencijalna energija točkastog naboja u električnom polju u točki A:

$$\mathrm{W}_{\mathrm{PA}}=\mathrm{Q}\cdot\varphi_{\mathrm{A}}$$

pri čemu je el. polje stvorilo neko drugo nabijeno tijelo (točkasti naboj, ravni vodič, kugla, ploča, itd.).

- Rad pri pomicanju točkastog naboja definiran je kao:

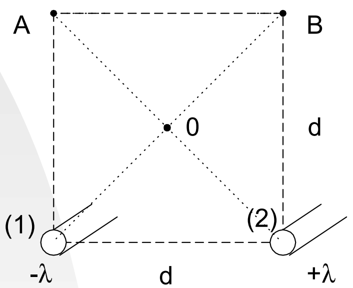
$$\mathrm{A}=\mathrm{Q}\cdot(\varphi_{\mathrm{pocetak}}-\varphi_{\mathrm{kraj}})$$

Predznak rada:

- A>0; pomicanje pod utjecajem sile električnog polja = smanjenje potencijalne energije
- A<0; pomicanje pod utjecajem vanjske sile = povećanje potencijalne energije

Rješenje zadatka

- Rad pri pomicanju pokusnog naboja Q_0 je:



$$A = Q_0 \cdot (\varphi_A - \varphi_B)$$

Da bi se odredili potencijali točaka A i B potrebno je odrediti referentnu točku. Pretpostavimo da se ona nalazi u središtu kvadrata.

- Potencijalu u točki A doprinose oba vodiča:

$$\varphi_A = \varphi_{A1} + \varphi_{A2}$$

$$\varphi_A = \frac{-\lambda}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon} ln \frac{r_{10}}{r_{A1}} + \frac{+\lambda}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon} ln \frac{r_{20}}{r_{A2}}$$

$$\varphi_A = \frac{-\lambda}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon} ln \frac{\frac{d\sqrt{2}}{2}}{d} + \frac{\lambda}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon} ln \frac{\frac{d\sqrt{2}}{2}}{d\sqrt{2}}$$

$$\varphi_A = \frac{\lambda}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon}\left(-ln\frac{\sqrt{2}}{2} + ln\frac{1}{2}\right) = \frac{\lambda}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon} ln \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\lambda}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon} ln \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- Potencijal u točki B određuje se na isti način:

$$\varphi_B = \varphi_{B1} + \varphi_{B2}$$

$$\varphi_B = \frac{-\lambda}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon} ln \frac{r_{10}}{r_{B1}} + \frac{+\lambda}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon} ln \frac{r_{20}}{r_{B2}}$$

$$\varphi_B = \frac{-\lambda}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon} ln \frac{\frac{d\sqrt{2}}{2}}{d\sqrt{2}} + \frac{\lambda}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon} ln \frac{\frac{d\sqrt{2}}{2}}{d}$$

$$\varphi_A = \frac{\lambda}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon}\left(-ln\frac{1}{2} + ln\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\lambda}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon} ln \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\lambda}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon} ln\sqrt{2}$$

- Rad pri pomicanju naboja onda iznosi:

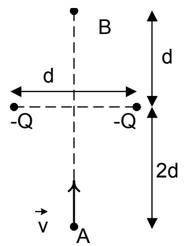
$$A = Q_0 \cdot \left(\frac{\lambda}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon} ln\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\lambda}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon} ln\sqrt{2}\right) = Q_0 \cdot \frac{\lambda}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon} ln\frac{1}{2} = +880[pWs]$$

gdje nam pozitivan predznak govori o dobivenom radu.

5. zadatak

Zadana su dva točkasta naboja Q na udaljenosti d prema slici. Koliko mora iznositi minimalna brzina elektrona u točki A udaljenoj 2d od spojnice naboja, da bi on mogao stići u točku B (udaljenu d od spojnice naboja) s druge strane spojnice. Elektron se giba po simetrali spojnice. Zadano:

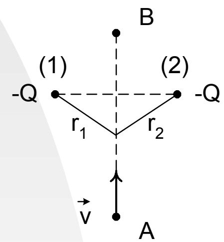
- $Q = -10 \cdot 10^{-11}$ [C]
- $d = 0.1$ [m]
- $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$ [kg]
- $q_e = -1.6 \cdot 10^{-19}$ [C]



Rješenje zadatka

- Potencijal u nekoj točki na spojnici A-B može se izračunati kao:

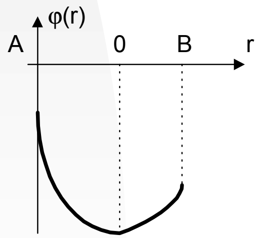
$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$



$$\varphi = \frac{-Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon}\cdot\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_{ref}}\right) + \frac{-Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon}\cdot\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_{ref}}\right)$$

Budući da je $r_1 = r_2$ i uz pretpostavljenu referentnu točku u beskonačnosti, za potencijal vrijedi:

$$\varphi = \frac{-Q}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon}\cdot\frac{1}{r_1}$$



Funkcija potencijala mijenja se kao što je prikazano na slici:

Da bi elektron stigao do točke B potrebno je nadvladati potencijalnu barijeru prikazanu na slici.

- Elektron se od točke 0 do točke B giba pod utjecajem električnog polja.
- Međutim, da bi elektron stigao do točke 0 na elektron se mora djelovati vanjskim utjecajem, odnosno vrijedi sljedeće:

$$W_{kinA} + W_{potA} = W_{pot0}; \quad W_{kin0} = 0$$

$$\frac{m \cdot v^2}{2} + (-q_e) \cdot \varphi_A = (-q_e) \cdot \varphi_0$$

$$r_A = \sqrt{(2d)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} = d\,\frac{\sqrt{17}}{2}; \qquad r_0 = \frac{d}{2}$$

$$\frac{m \cdot v^2}{2} = -q_e \cdot \left(\frac{-Q}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon}\frac{1}{r_0} - \frac{-Q}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon}\frac{1}{r_A}\right) = \frac{q_e \cdot Q}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_A}\right)$$

$$v = \sqrt{\frac{q_e \cdot Q}{\pi \cdot \varepsilon \cdot m}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_A}\right)} = \sqrt{\frac{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 10 \cdot 10^{-11}}{\pi \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 9.1 \cdot 10^{-31}}\left(\frac{2}{0.1} - \frac{2}{0.1\sqrt{17}}\right)}$$

$$\boxed{v = 3.1 \cdot 10^{6}\ [\mathrm{m/s}]}$$

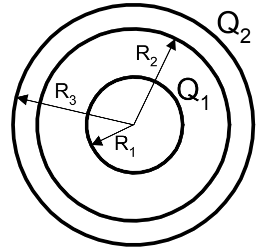
6. zadatak

U metalnoj kuglinoj ljusci (R_2, R_3) koncentrično se nalazi metalna kugla polumjera R_1 (slika). Kuglina ljuska nabijena je nabojem Q_2, a metalna kugla nabojem Q_1. Nacrtajte dijagrame funkcije promjene el. polja E(r) i potencijala φ(r) u zavisnosti o udaljenosti r od središta sustava ako je:

1) Q_1 = - 2 [nC], Q_2 = 0, $r_{ref} = \infty$
2) Q_1 = +2 [nC], Q_2 = +2 [nC] , $r_{ref} = \infty$
3) Q_1 = +2 [nC], Q_2 = -2 [nC] , $r_{ref} = \infty$

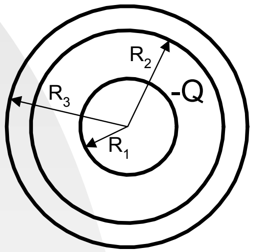
Zadano:

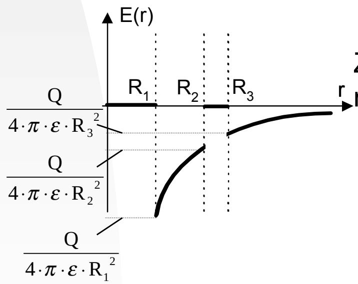
- R_1 = 2 [cm]
- R_2 = 4 [cm]
- R_3 = 4.5 [cm]



Rješenje zadatka

Prvi slučaj: E(r)





Za $r<R_1$:

$$E(r) = 0$$

Za $R_1< r <R_2$:

$$E(r) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r^2}$$

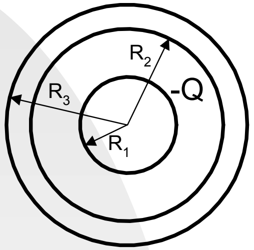
Unutar metala nema polja; za $R_2< r <R_3$:

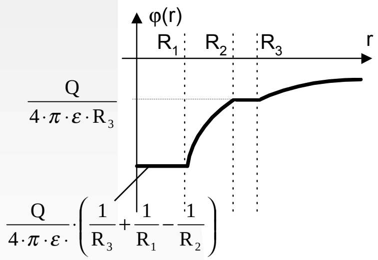
$$E(r) = 0$$

Zbog el. influencije polje za $r>R_3$ iznosi:

$$E(r) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r^2}$$

Prvi slučaj: φ(r)





Referentna točka nalazi se u beskonačnosti:

$$\varphi_{ref} = 0$$

Za $r>R_3$:

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r} - \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r_{ref}} = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r}$$

Za $R_2< r <R_3$ potencijal je konstantan jer u metalu nema polja:

$$\varphi(r) = \varphi(R_2) = \varphi(R_3) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R_3}$$

Za $R_1< r <R_2$:

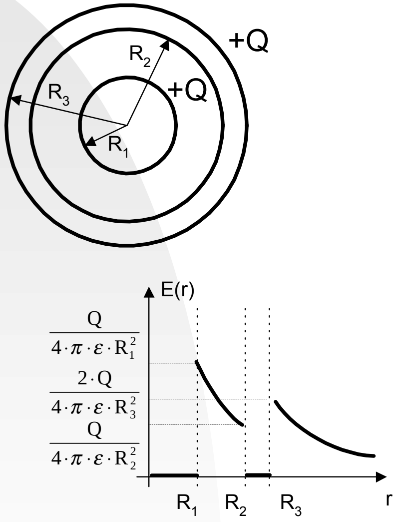
$$\varphi(r) = U_{rR2} + \varphi(R_2)$$

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r} - \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R_2} + \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R_3}$$

Za $r<R_1$ potencijal je konstantan:

$$\varphi(r) = \varphi(R_1) = U_{R1R2} + \varphi(R_2)$$

Drugi slučaj: E(r)



Za $r<R_1$:

$$E(r)=0$$

Za $R_1< r <R_2$:

$$E(r)=\frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon\cdot r^2}$$

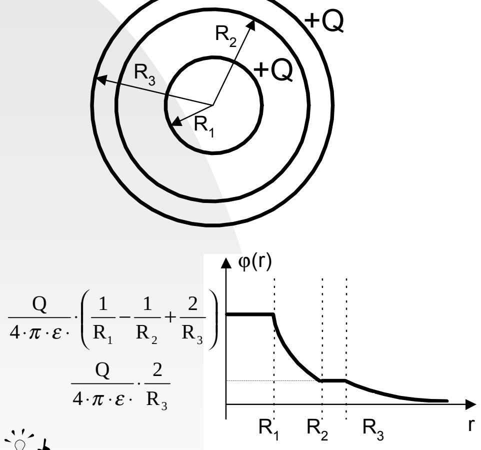
Za $R_2< r <R_3$:

$$E(r)=0$$

Zbog nabijene vanjske kugle i el. influencije polje za $r > R_3$:

$$E(r)=\frac{2\cdot Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon\cdot r^2}$$

Drugi slučaj: φ(r)



Referentna točka nalazi se u beskonačnosti:

$$\varphi_{ref}=0$$

Za $r>R_3$:

$$\varphi(r)=\frac{2\cdot Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon\cdot r}-\frac{2\cdot Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon\cdot r_{ref}}=\frac{2\cdot Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon\cdot r}$$

Za $R_2< r <R_3$ potencijal je konstantan jer u metalu nema polja:

$$\varphi(r)=\varphi(R_2)=\varphi(R_3)$$

Za $R_1< r <R_2$:

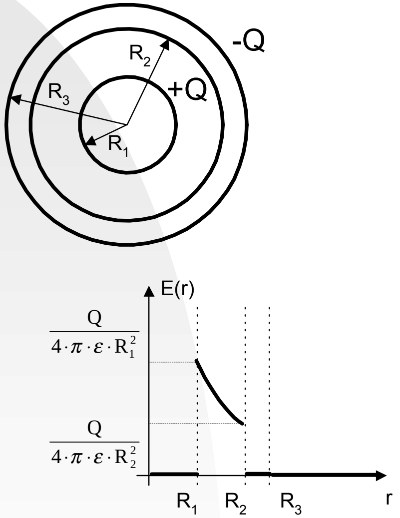
$$\varphi(r)=U_{rR2}+\varphi(R_2)$$

$$\varphi(r)=\frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon\cdot r}-\frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon\cdot R_2}+\frac{2\cdot Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon\cdot R_3}$$

Za $r<R_1$ potencijal je konstantan:

$$\varphi(r)=\varphi(R_1)=U_{R1R2}+\varphi(R_2)$$

Treći slučaj: E(r)



Za $r<R_1$:

$$E(r)=0$$

Za $R_1< r <R_2$:

$$E(r)=\frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon\cdot r^2}$$

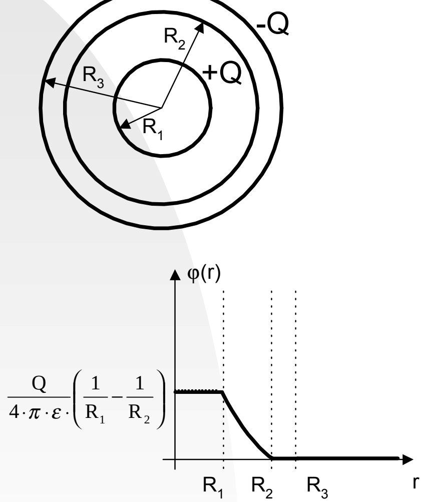
Za $R_2< r <R_3$:

$$E(r)=0$$

Zbog nabijene vanjske kugle i el. influencije polje za $r > R_3$:

$$E(r)=\frac{Q-Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon\cdot r^2}=0$$

Treći slučaj: φ(r)



Referentna točka nalazi se u beskonačnosti:

$$\varphi_{ref}=0$$

Budući da izvan sustava nema polja, za $r>R_3$:

$$\varphi(r)=0$$

Za $R_2< r <R_3$ potencijal je konstantan jer u metalu nema polja:

$$\varphi(r)=\varphi(R_2)=\varphi(R_3)=0$$

Za $R_1< r <R_2$:

$$\varphi(r)=U_{rR2}+\varphi(R_2)$$

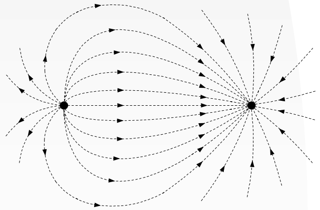
$$\varphi(r)=\frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon\cdot r}-\frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon\cdot R_2}$$

Za $r<R_1$ potencijal je konstantan:

$$\varphi(r)=\varphi(R_1)=U_{R1R2}+\varphi(R_2)$$

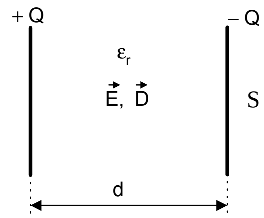
Elektrostatika

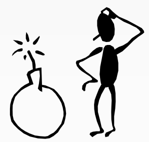
- Električno polje na granici dva dielektrika.
- Pločasti kondenzator.
- Cilindrični kondenzator.
- Kuglasti kondenzator.



1. zadatak

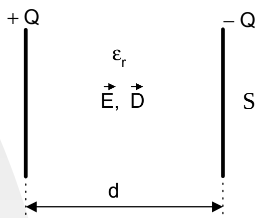
Dvije metalne ploče sa zrakom kao izolatorom bile su spojene na izvor napona U, a zatim odspojene od njega. Nakon toga je razmak ploča povećan na dvostruki iznos, a zrak je zamijenjen tinjcem (ε_r = 6). Odredite što se događa s električnim poljem, naponom između ploča, kapacitetom kondenzatora, nabojem na pločama i energijom u kondenzatoru.

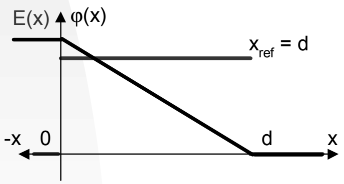




Uvodni pojmovi

- Za pločasti kondenzator vrijedi:





$$D = \sigma = \frac{Q}{S}$$

$$\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \vec{E}$$

$$U = \frac{Q}{C}$$

$$U = E \cdot d$$

$$C = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{S}{d}$$

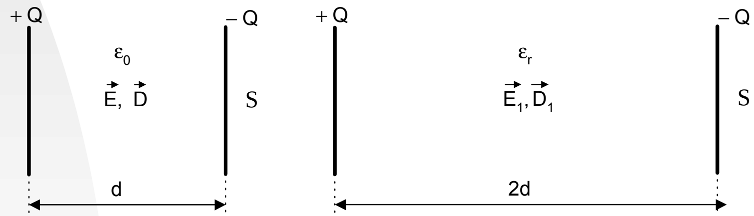
$$W = \frac{Q^2}{2 \cdot C} = \frac{Q \cdot U}{2} = \frac{E \cdot D}{2} \cdot S \cdot d$$

El. polje je konstantno.

Potencijal je linearna funkcija.

Rješenje zadatka

- Na ploče kondenzatora je bio spojen napon U i ploče su se nabile nabojem Q.
- Nakon toga je kondenzator odspojen, povećan je razmak među pločama i ubačen je dielektrik.



- Budući da je kondenzator odspojen od izvora napajanja nakon ubacivanja izolatora vrijedi:

$$Q = konst.$$

- Vektor dielektričnog pomaka D:

$$D=\frac{Q}{S};\, D_1=\frac{Q}{S}\quad\Rightarrow\quad D=D_1$$

- El. polje E:

$$E=\frac{D}{\varepsilon_0};\, E_1=\frac{D_1}{\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r}\quad\Rightarrow\quad \frac{E_1}{E}=\frac{\frac{D_1}{\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r}}{\frac{D}{\varepsilon_0}}=\frac{1}{\varepsilon_r}=\frac{1}{6}$$

- Napon U:

$$U=E\cdot d\,;U_1=E_1\cdot 2d\ \Rightarrow\ \frac{U_1}{U}=\frac{E_1\cdot 2d}{E\cdot d}=\frac{1}{3}$$

- Kapacitet C:

$$C=\varepsilon_0\cdot\frac{S}{d};C_1=\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r\cdot\frac{S}{2d}\quad\Rightarrow\quad\frac{C_1}{C}=\frac{\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r\cdot\frac{S}{2d}}{\varepsilon_0\cdot\frac{S}{d}}=\frac{\varepsilon_r}{2}=3$$

- Energija W:

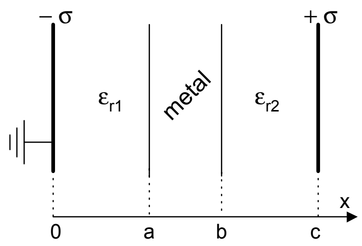
$$W=\frac{Q\cdot U}{2};W_1=\frac{Q\cdot U_1}{2}\quad\Rightarrow\quad\frac{W_1}{W}=\frac{\frac{Q\cdot U_1}{2}}{\frac{Q\cdot U}{2}}=\frac{U_1}{U}=\frac{1}{3}$$

2. zadatak

Na slici su prikazane dvije ploče nabijene nabojem površinske gustoće σ između kojih se nalaze dva sloja dielektrika uz njih te sloj metala u sredini.

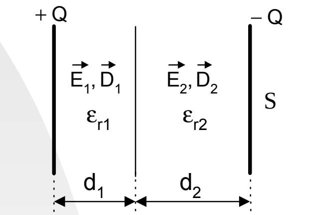
a) Skicirajte funkcije jakosti polja E(x) i potencijala φ(x).

b) Izvedite izraze za funkciju potencijala φ(x) za $0 < x < c$ uz pretpostavku da su poznati σ, a, b, c te $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$.



Uvodni pojmovi

- Pločasti kondenzator s dva dielektrika (serija):



$$D_1=D_2$$

$$E_1\neq E_2$$

$$E_1=\frac{Q}{\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{r1}\cdot S};\ E_2=\frac{Q}{\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{r2}\cdot S}$$

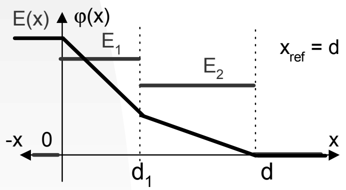
$$C_1=\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{r1}\cdot\frac{S}{d_1};\ C_2=\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{r2}\cdot\frac{S}{d_2}$$

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\quad\Rightarrow\quad C=\frac{C_1\cdot C_2}{C_1+C_2}$$

$$U_1=E_1\cdot d_1;\ U_2=E_2\cdot d_2$$

$$U=U_1+U_2$$

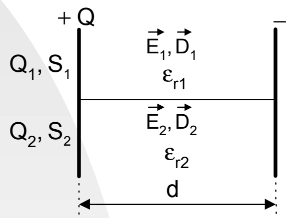
$$W=W_1+W_2$$



Za $\varepsilon_{r1} < \varepsilon_{r2}$ el. polje i potencijal izgledaju kao na slici:

Uvodni pojmovi

- Pločasti kondenzator s dva dielektrika (paralela):



$$E_1=E_2=E$$

$$D_1\neq D_2$$

$$Q=Q_1+Q_2$$

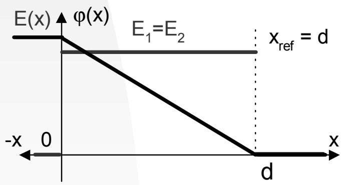
$$D_1=\frac{Q_1}{S_1}=\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{r1}\cdot E;\ D_2=\frac{Q_2}{S_2}=\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{r2}\cdot E$$

$$C_1=\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{r1}\cdot\frac{S_1}{d};\ C_2=\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{r2}\cdot\frac{S_2}{d}$$

$$C=C_1+C_2$$

$$U_1=U_2=U=E_1\cdot d=E_2\cdot d$$

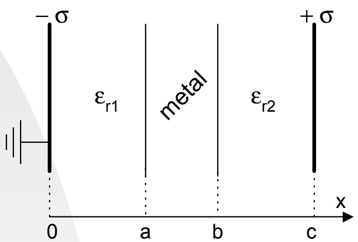
$$W=W_1+W_2$$

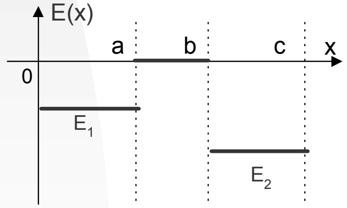


El. polje i potencijal izgledaju kao na slici:

Rješenje zadatka

- Prvo određujemo el. polje.





El. polje u prvom dielektriku iznosi:

$$E_1 = -\frac{D_1}{\varepsilon} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r1}}$$

El. polje u metalu:

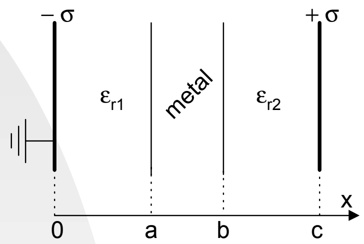
$$E_{\text{metal}} = 0$$

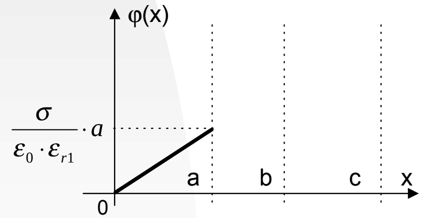
El. polje u drugom dielektriku iznosi:

$$E_2 = -\frac{D_2}{\varepsilon} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r2}}$$

- El. potencijal određuje se na sljedeći način:

$$\varphi(x) = -\int_{xref}^{x} E(x)dx$$





Ref. točka je u ishodištu:

$$\varphi(0) = 0$$

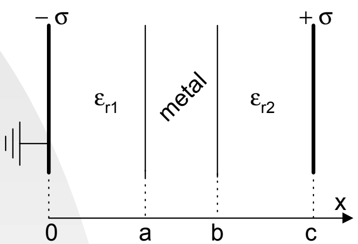
Za 0 < x < a:

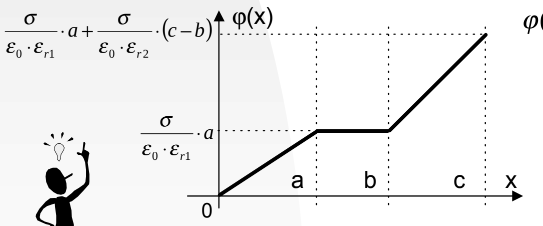
$$\varphi(x) = -\int_0^x E(x)dx = -\int_0^x -\frac{\sigma}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r1}} dx$$

$$\varphi(x) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r1}} \cdot x \Big|_0^x = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r1}} \cdot x$$

Za x = a:

$$\varphi(x) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r1}} \cdot a$$





Za a < x < b:

$$\varphi(x) = -\int_0^a E_1(x)dx - \int_a^x E_{metal}(x)dx$$

$$\varphi(x) = \varphi(a) - \int_a^x 0dx = \varphi(a)$$

$$\varphi(b) = \varphi(a) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r1}} \cdot a$$

Za b < x < c:

$$\varphi(x) = -\int_0^a E_1(x)dx - \int_a^b E_{metal}(x)dx - \int_b^x E_2(x)dx$$

$$\varphi(x) = \varphi(a) + \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r2}} \cdot x \Big|_b^x$$

$$\varphi(x) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r2}} \cdot x + \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r1}} \cdot a - \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r2}} \cdot b$$

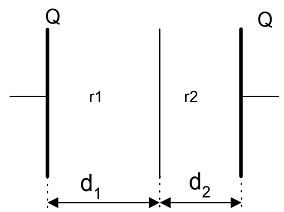
Za x = c:

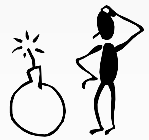
$$\varphi(x) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r1}} \cdot a + \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r2}} \cdot (c-b)$$

3. zadatak

Pločasti kondenzator sadrži dva sloja dielektrika prema slici. Odredite maksimalnu vrijednost napona U pri kojem neće doći do proboja, ako je zadano:

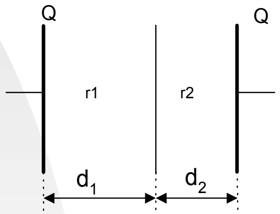
- E_{1p} = 10 [kV/m]
- E_{2p} = 20 [kV/m]
- d_1 = 7 [mm]
- d_2 = 3 [mm]
- ε_{r1} = 5
- ε_{r2} = 2





Rješenje zadatka

- Probojno polje označava maksimalno el. polje kod kojeg u određenom dielektriku neće doći do proboja.



Za serijski spojene kondenzatore vrijedi:

$$D_1 = D_2$$

$$E_1 \neq E_2$$

- Ako pretpostavimo da će el. polje u prvom dielektriku imati svoju maksimalnu vrijednost vrijedi:

$$E_1 = E_{1p} = 10\,[\mathrm{kV/m}]$$

$$\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r1} \cdot E_{1p} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r2} \cdot E_2 \quad \Rightarrow \quad E_2 = \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} \cdot E_{1p} = 25\,[\mathrm{kV/m}] > E_{2p}$$

- Ovaj slučaj ne zadovoljava, jer iako ne dolazi do proboja u prvom dielektriku u drugom dolazi.

- Uz pretpostavku da je u drugom dielektriku maksimalno polje vrijedi:

$$E_2 = E_{2p} = 20\,[\mathrm{kV/m}]$$

$$\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r1} \cdot E_1 = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r2} \cdot E_{2p} \quad \Rightarrow \quad E_1 = \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} \cdot E_{2p} = 8\,[\mathrm{kV/m}] < E_{1p}$$

- Znači el. polja u prvom i drugom dielektriku iznose:

$$E_1 = 8\,[\mathrm{kV/m}]$$

$$E_2 = E_{2p} = 20\,[\mathrm{kV/m}]$$

- Maksimalni napon onda iznosi:

$$U_{max} = U_1 + U_2 = E_1 \cdot d_1 + E_2 \cdot d_2$$

$$U_{max} = 8 \cdot 10^3 \cdot 7 \cdot 10^{-3} + 20 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^{-3}$$

$$\boxed{U_{max} = 116\,[\mathrm{V}]}$$

4. zadatak

Za koaksijalni kabel s polietilenskom izolacijom kao na slici (negativan linijski naboj na unutrašnjem vodiču) potrebno je odrediti:

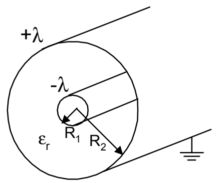
a) potencijal unutarnjeg vodiča

b) ako el. polje u polietilenu ne smije prijeći vrijednost od $3 \cdot 10^7$ [V/m] koliki je maksimalni napon koji se smije prikljuciti izmedu vodica kabela

c) kapacitet, ako je zadana du□ina kabela l

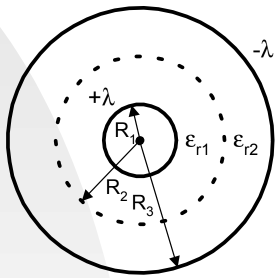
Zadano:

- $\varepsilon_r = 2.3$
- $\lambda = 1.15 \cdot 10^{-8}$ [As/m]
- $2 \cdot R_1 = 2.6$ [mm]
- $2 \cdot R_2 = 9.5$ [mm]
- $E_{max} = 30$ [MV/m]
- $l = 500$ [m]



Uvodni pojmovi

- Cilindrični kondenzator s dva dielektrika (serija):

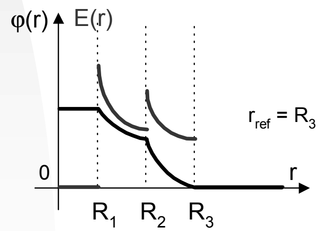


$$E_1(r) = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r1} \cdot r}; \; E_2(r) = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r2} \cdot r}$$

$$D_1(R_2) = D_2(R_2)$$

$$C_1 = \frac{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r1} \cdot l}{ln \frac{R_2}{R_1}}; \; C_2 = \frac{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r2} \cdot l}{ln \frac{R_3}{R_2}}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$$



$$U_{R1R2} = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r1}} ln \frac{R_2}{R_1}$$

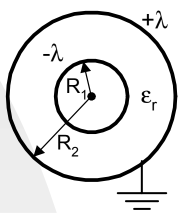
$$U_{R2R3} = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r2}} ln \frac{R_3}{R_2}$$

$$W = W_1 + W_2$$

El. polje i potencijal izgledaju kao na slici:

Rješenje zadatka

- U kondenzatoru ($R_1 < r < R_2$) se el. polje mijenja kao :



$$E(r) = \frac{-\lambda}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r\cdot r}$$

Potencijal se određuje u odnosu na ref. točku koja se nalazi na R_2:

$$\varphi(r) = \frac{-\lambda}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r} ln \frac{r_{ref}}{r}$$

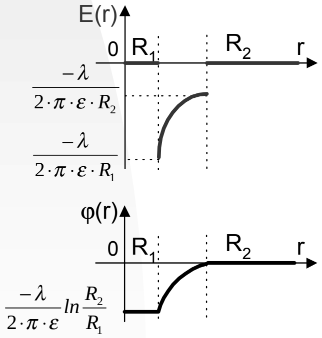
Potencijal unutarnjeg vodiča:

$$\varphi(R_1) = \frac{-\lambda}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r} ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$\varphi(R_1) = \frac{-1.15\cdot 10^{-8}}{2\cdot\pi\cdot 8.854\cdot 10^{-12}\cdot 2.3} ln \frac{4.75\cdot 10^{-3}}{1.3\cdot 10^{-3}}$$

$$\boxed{\varphi(R_1) = -116\,[\mathrm{V}]}$$

El. polje i potencijal izgledaju kao na slici:



Početna stranica

- Maksimalni napon će se postići u slučaju kada el. polje ima maksimalni iznos. Da ne bi došlo do proboja dielektrika to max. polje je na mjestu R_1:

$$E_{\max}(R_1) = \frac{\lambda_{\max}}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r\cdot R_1}$$

- Maksimalni napon je jednak:

$$U_{R1R2} = \frac{-|\lambda_{\max}|}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r} ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$|\lambda_{\max}| = E_{\max}(R_1)\cdot 2\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r\cdot R_1 \;\Rightarrow\; U_{R1R2} = -E_{\max}(R_1)\cdot R_1\cdot ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$U_{R1R2} = -30\cdot 10^{6}\cdot 1.3\cdot 10^{-3}\cdot ln \frac{4.75\cdot 10^{-3}}{1.3\cdot 10^{-3}}$$

$$\boxed{U_{R1R2} = -51\,[\mathrm{kV}]}$$

- Kapacitet kondenzatora:

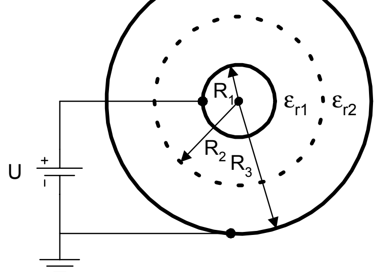
$$C = \frac{2\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r\cdot l}{ln \frac{R_2}{R_1}} = \frac{2\cdot\pi\cdot 8.854\cdot 10^{-12}\cdot 2.3\cdot 500}{ln \frac{4.75\cdot 10^{-3}}{1.3\cdot 10^{-3}}} = 49\,[n\mathrm{F}]$$

Početna stranica

5. zadatak

Kuglasti kondenzator s dva sloja dielektrika priključen je na napon U prema slici. Odredite polumjer granične površine (R_2) da bi na oba sloja vladao jednak napon. Koliki se najveći napon može priključiti na takav kondenzator a da ne dođe do proboja. Nacrtajte dijagrame promjene potencijala i iznosa vektora jakosti el. polja u zavisnosti o udaljenosti r od središta kondenzatora, φ(r), E(r), s karakteristicnim vrijednostima polja i potencijala za taj slucaj. Zadano:

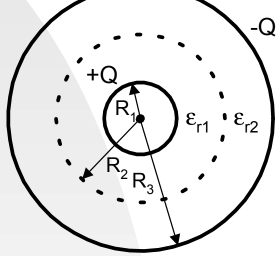
- $\varepsilon_{r1} = 4$
- $\varepsilon_{r2} = 2$
- $R_1 = 1$ [cm]
- $R_3 = 6$ [cm]
- $E_{1P} = 200$ [kV/m]
- $E_{2P} = 75$ [kV/m]



Početna stranica

Uvodni pojmovi

- Kuglasti kondenzator s dva dielektrika (serija):

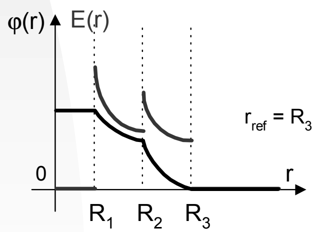


$$E_1(r) = \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{r1}\cdot r^2};\; E_2(r) = \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{r2}\cdot r^2}$$

$$D_1(R_2) = D_2(R_2)$$

$$C_1 = 4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{r1}\cdot\frac{R_1\cdot R_2}{R_2 - R_1};\; C_2 = 4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{r2}\cdot\frac{R_2\cdot R_3}{R_3 - R_2}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \;\Rightarrow\; C = \frac{C_1\cdot C_2}{C_1 + C_2}$$



$$U_{R1R2} = \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{r1}}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$U_{R2R3} = \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{r2}}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right)$$

$$W = W_1 + W_2$$

El. polje i potencijal izgledaju kao na slici:

Početna stranica

Rješenje zadatka

- Napon na prvom i drugom dielektriku su jednaki:

$$U_{R1R2}=U_{R2R3}$$

$$\frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{r1}}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=\frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{r2}}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_3}\right)$$

$$\frac{1}{\varepsilon_{r1}}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=\frac{1}{\varepsilon_{r2}}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_3}\right)$$

$$R_2=\frac{(\varepsilon_{r1}+\varepsilon_{r2})\cdot R_1\cdot R_3}{\varepsilon_{r1}\cdot R_1+\varepsilon_{r2}\cdot R_3}$$

$$R_2=\frac{(4+2)\cdot 1\cdot 10^{-2}\cdot 6\cdot 10^{-2}}{4\cdot 1\cdot 10^{-2}+2\cdot 6\cdot 10^{-2}}$$

$$\boxed{R_2=2.25\,[\mathrm{cm}]}$$

- Maksimalno polje u prvom dielektriku je na mjestu R_1, a u drugom na mjestu R_2.

- Pretpostavimo da je u prvom dielektriku el. polje jednako probojnom polju:

$$E_{1m}(R_1)=E_{1P}=\frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{r1}\cdot R_1^{\,2}}$$

- Uz takvo polje provjeravamo koliko je polje na granici (R_2) u drugom dielektriku:

$$D_1(R_2)=D_2(R_2)$$

$$\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{r1}\cdot E_1(R_2)=\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{r2}\cdot E_2(R_2)$$

$$E_2(R_2)=E_1(R_2)\cdot\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}$$

- El. polje u prvom dielektriku na granici (R_2) iznosi:

$$E_1(R_2)=\frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{r1}\cdot R_2^{\,2}}=E_{1P}\cdot\frac{R_1^2}{R_2^2}$$

- Uvrštavanjem poznatih vrijednosti el. polje drugom dielektriku na granici iznosi:

$$E_2(R_2)=E_{1P}\cdot\frac{R_1^2}{R_2^2}\cdot\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}=200\cdot\left(\frac{2.25}{1}\right)^2\cdot\frac{4}{2}=79\,[\mathrm{kV/m}]>E_{2P}$$

- Uz maksimalno polje u prvom dielektriku, u drugom bi došlo do proboja.
- Ukoliko je pak u drugom dielektriku polje jednako probojnom u prvom dielektriku polje iznosi:

$$E_{2m}(R_2)=E_{2P}=\frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{r2}\cdot R_2^{\,2}}$$

$$\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{r1}\cdot E_1(R_2)=\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{r2}\cdot E_2(R_2)$$

$$E_1(R_2)=E_{2P}\cdot\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}$$

$$E_1(R_1)=E_{2P}\cdot\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}\cdot\frac{R_2^{\,2}}{R_1^{\,2}}=75\cdot\frac{2}{4}\cdot\left(\frac{2.25}{1}\right)^2=190\,[\mathrm{kV/m}]<E_{1P}$$

- Maksimalni napon određuje se:

$$U_{\max}=U_{R1R2}+U_{R2R3}=\frac{Q_{\max}}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{r1}}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)+\frac{Q_{\max}}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{r2}}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_3}\right)$$

- Količina naboja na kuglama može se odrediti kao:

$$Q_{\max}=4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{r2}\cdot R_2^{\,2}\cdot E_{2P}$$

$$U_{\max}=\frac{\varepsilon_{r2}\cdot R_2^{\,2}\cdot E_{2P}}{\varepsilon_{r1}}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)+\frac{\varepsilon_{r2}\cdot R_2^{\,2}\cdot E_{2P}}{\varepsilon_{r2}}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_3}\right)$$

$$U_{\max}=\frac{\varepsilon_{r2}\cdot R_2^{\,2}\cdot E_{2P}}{\varepsilon_{r1}}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)+R_2^{\,2}\cdot E_{2P}\cdot\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_3}\right)$$

- Uvrštenjem poznatih vrijednosti dobijemo maksimalni napon:

$$\boxed{U_{\max}=2.1\,[\mathrm{kV}]}$$

- Za el. polje znamo sljedeće:

$$E_1(R_1)=190\,[\mathrm{kV/m}]$$

$$E_2(R_2)=75\,[\mathrm{kV/m}]$$

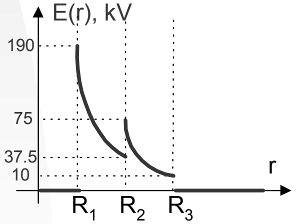
$$E_1(R_2)=E_{2P}\cdot\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}=75\cdot\frac{2}{4}=37.5\,[\mathrm{kV/m}]$$

$$E_2(R_3)=E_{2P}\cdot\left(\frac{R_2}{R_3}\right)^2=75\cdot\left(\frac{2.25}{6}\right)^2=10.5\,[\mathrm{kV/m}]$$

- Pomoću izračunatih vrijednosti polja mogu se odrediti funkcije promjene el. polja, E(r):

$$E(r)=\begin{cases} 0;\ za\ 0 < r < R_1 \\ \dfrac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{r1}\cdot r^2};\ za\ R_1 < r < R_2 \\ \dfrac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{r2}\cdot r^2};\ za\ R_2 < r < R_3 \\ 0;\ za\ r > R_3 \end{cases}$$

- Dijagram promjene jakosti el. polja:



Budući da Q nije zadan, on se može odrediti kao:

$$Q=4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{r2}\cdot R_2^{\ 2}\cdot E_{2P}$$

Početna stranica

- Dijagram potencijala određujemo uz referentnu točku na udaljenosti R_3 (pogledati sliku).

$$\varphi_{ref}=\varphi(R_3)=0$$

- Potencijal u drugom dielektriku, za $R_2 < r < R_3$, se mijenja kao:

$$\varphi(r)=U_{rR3}+\varphi(R_3)=\frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{r2}\cdot r}-\frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{r2}\cdot R_3}+0$$

$$\varphi(R_2)=\frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{r2}\cdot R_2}\cdot\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_3}\right)=\frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{r2}}\cdot\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_3}\right)=1.05\,[\mathrm{kV}]$$

- Potencijal u prvom dielektriku:

$$\varphi(r)=U_{rR2}+\varphi(R_2)=U_{rR2}+U_{R2R3}+\varphi(R_3)$$

$$\varphi(r)=\frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{r1}\cdot r}-\frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{r1}\cdot R_2}+\frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{r2}}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_3}\right)$$

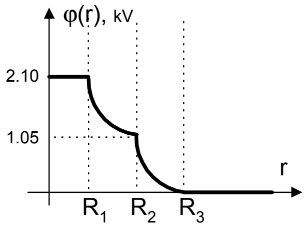
$$\varphi(R_1)=\frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{r1}}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)+\frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{r2}}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_3}\right)=2.1\,[\mathrm{kV}]$$

Početna stranica

- Potencijal, φ(r):

$$\varphi(r)=\begin{cases} \dfrac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{r1}}\left(\dfrac{1}{R_1}-\dfrac{1}{R_2}\right)+\dfrac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{r2}}\left(\dfrac{1}{R_2}-\dfrac{1}{R_3}\right);\ za\ 0 < r < R_1 \\ \dfrac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{r1}\cdot r}-\dfrac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{r1}\cdot R_2}+\dfrac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{r2}}\left(\dfrac{1}{R_2}-\dfrac{1}{R_3}\right);\ za\ R_1 < r < R_2 \\ \dfrac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{r2}\cdot r}-\dfrac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_{r2}\cdot R_3};\ za\ R_2 < r < R_3 \\ 0;\ za\ r > R_3 \end{cases}$$

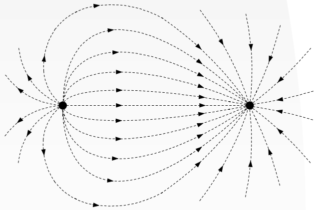
- Dijagram promjene potencijala:



Početna stranica

Elektrostatika

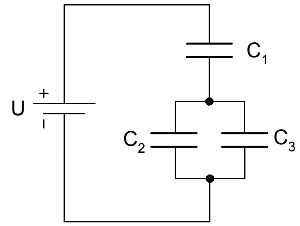
- Spojevi kondenzatora.

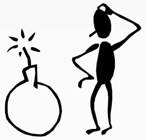


1. zadatak

Na kondenzatorsku mrežu na slici priključen je izvor napajanja koji daje istosmjerni napon od 1200 [V]. Potrebno je odrediti ekvivalentni (ukupni) kapacitet mreže, napone koji vladaju na pojedinim elementima (kondenzatorima) kao i pripadne naboje. Zadano je:

- C_1 = 4 [μF]
- C_2 = 6 [μF]
- C_3 = 2 [μF]
- U = 1200 [V]





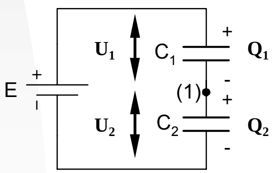
Uvodni pojmovi

- Priključivanjem skupine kondenzatora na istosmjerni izvor (ili izvore) električne energije uspostavljaju se naponske i nabojske prilike na pojedinim kondenzatorima u skladu s dva osnovna zakona i to:

$$alg\sum_i Q_{ikon} = alg\sum_i Q_{ipoč} \qquad \text{za svaki čvor}$$

$$alg\sum_j E_j = alg\sum_i \frac{Q_i}{C_i} \qquad \text{za svaku konturu}$$

- U slučaju **serijskog** spoja dva prethodno nenabijena kondenzatora vrijedi:



$$E = U_1 + U_2$$

$$\text{za čvor (1)} \qquad -Q_1 + Q_2 = 0$$

$$C_{12} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)^{-1}$$

Uvodni pojmovi

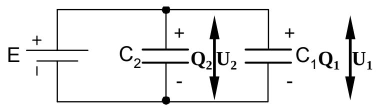
- Za seriju prethodno nenabijenih kondenzatora općenito vrijedi:

$$U_S = \sum_{i=1}^{n} U_i$$

$$Q_S = Q_1 = Q_2 = \cdots = Q_n$$

$$\frac{1}{C_S} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}$$

- U slučaju **paralelnog** spoja dva prethodno nenabijena kondenzatora vrijedi:



$$U_{12} = U_1 = U_2$$

$$Q_{12} = Q_1 + Q_2$$

$$C_{12} = C_1 + C_2$$

- Za paralelu prethodno nenabijenih kondenzatora općenito vrijedi:

$$U_P = U_1 = U_2 = \cdots = U_n$$

$$Q_P = \sum_{i=1}^{n} Q_i$$

$$C_P = \sum_{i=1}^{n} C_i$$

Rješenje

- Ukupni (ekvivalentni) kapacitet mreže:

$$C_{23} = C_2 + C_3 = 6\cdot10^{-6} + 2\cdot10^{-6} = 8\cdot10^{-6} = 8\,[\mu\mathrm{F}]$$

$$C = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{23}}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{4\cdot10^{-6}} + \frac{1}{8\cdot10^{-6}}\right)^{-1} = 2.67\cdot10^{-6} = 2.67\,[\mu\mathrm{F}]$$

- Naponi na kondenzatorima:

$$\mathrm{Q}_1 = \mathrm{Q}_{23} = \mathrm{Q} = C\cdot U$$

$$U_1 = U\cdot\frac{C}{C_1} = 1200\cdot\frac{2.67\cdot10^{-6}}{4\cdot10^{-6}} = 800\,[\mathrm{V}]$$

$$U_{23} = U\cdot\frac{C}{C_{23}} = 1200\cdot\frac{2.67\cdot10^{-6}}{8\cdot10^{-6}} = 400\,[\mathrm{V}]$$

$$U_2 = U_3 = U_{23} = 400\,[\mathrm{V}]$$

- Naboji na kondenzatorima:

$$\mathrm{Q}_1 = C_1\cdot U_1 = 4\cdot10^{-6}\cdot800 = 3.2\cdot10^{-3}\,[\mathrm{C}]$$

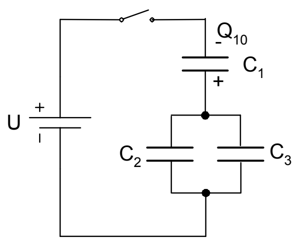
$$\mathrm{Q}_2 = C_2\cdot U_2 = 6\cdot10^{-6}\cdot400 = 2.4\cdot10^{-3}\,[\mathrm{C}]$$

$$\mathrm{Q}_3 = C_3\cdot U_3 = 2\cdot10^{-6}\cdot400 = 0.8\cdot10^{-3}\,[\mathrm{C}]$$

2. zadatak

Na kondenzatorsku mrežu priključuje se izvor napajanja koji daje istosmjerni napon od 1200 [V]. Potrebno je odrediti napone koji vladaju na pojedinim elementima (kondenzatorima) kao i pripadne naboje, ako je kondenzator C_1 prethodno nabijen nabojem Q_{10} prikazanog polariteta. Zadano je:

- C_1 = 4 [μF]
- C_2 = 6 [μF]
- C_3 = 2 [μF]
- Q_{10} = 1 [mC]
- U = 1200 [V]



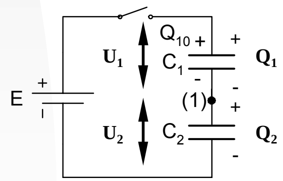
Uvodni pojmovi

- Priključivanjem skupine kondenzatora na istosmjerni izvor (ili izvore) električne energije uspostavljaju se naponske i nabojske prilike na pojedinim kondenzatorima u skladu s dva osnovna zakona i to:

$$alg\sum_i \mathrm{Q}_{ikon} = alg\sum_i \mathrm{Q}_{ipoč} \qquad \text{za svaki čvor}$$

$$alg\sum_j \mathrm{E}_j = alg\sum_i \frac{\mathrm{Q}_i}{\mathrm{C}_i} \qquad \text{za svaku konturu}$$

- U slučaju priključenja **serijskog** spoja dva kondenzatora na istosmjerni izvor, pri čemu je prije toga kondenzator C_1 nabijen na Q_{10}, vrijedi:

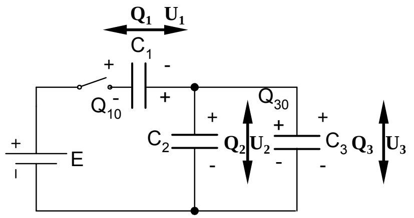


$$E = U_1 + U_2$$

$$\text{za čvor (1)} \quad -\mathrm{Q}_1 + \mathrm{Q}_2 = -\mathrm{Q}_{10}$$

Uvodni pojmovi

- U slučaju priključivanja na izvor istosmjernog napajanja **serijsko-paralelnog** spoja tri kondenzatora, gdje su oba kondenzatora prethodno nabijena prema slici vrijedi:



$$U_2 = U_3 = U_{23}$$

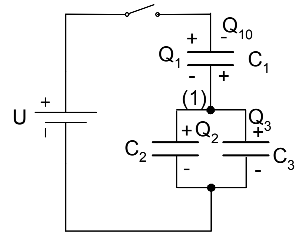
$$E = U_1 + U_{23}$$

$$U_1 = \frac{Q_1}{C_1} \qquad U_2 = \frac{Q_2}{C_2} \qquad U_3 = \frac{Q_3}{C_3}$$

$$-Q_1 + Q_2 + Q_3 = Q_{10} + Q_{30}$$

Rješenje

- Nakon zatvaranja sklopke u mreži se kondenzatori nakon nekog vremena nabiju nabojima prikazanim na slici:



- Za mrežu vrijedi:

$$\text{za čvor (1)} \quad -Q_1 + Q_2 + Q_3 = Q_{10}$$

$$U_2 = U_3 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q_3}{C_3}$$

$$U = U_1 + U_{23} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_3}{C_3}$$

- Rješenjem sustava tri jednadžbe s tri nepoznanice i uvrštenjem poznatih vrijednosti konačni naboji na kondenzatorima iznose:

$$Q_1 = 2.86\,[\text{mC}]$$

$$Q_2 = 2.90\,[\text{mC}]$$

$$Q_3 = 0.96\,[\text{mC}]$$

- Naponi na kondenzatorima:

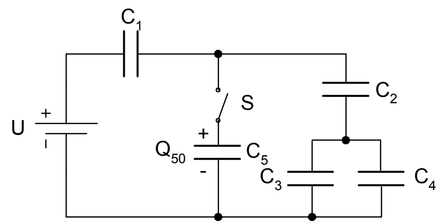
$$U_2 = U_3 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q_3}{C_3} = 480\,[\text{V}]$$

$$U_1 = \frac{Q_1}{C_1} = 720\,[\text{V}]$$

3. zadatak

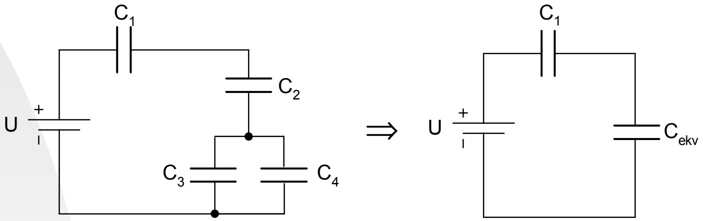
U mreži prema slici kondenzator C_5 ima početni naboj Q_{50} naznačenog predznaka. Koliku će promjenu napona ΔU_1 na kondenzatoru C_1 uzrokovati zatvaranje sklopke S? Zadano:

- C_1 = 18 [μF]
- C_2 = 20 [μF]
- C_3 = 14 [μF]
- C_4 = 16 [μF]
- C_5 = 5 [μF]
- U = 12 [V]



Rješenje zadatka

- Mreža prije zatvaranja sklopke može se pojednostaviti (kondenzatori nisu prethodno nabijeni):



$$\frac{1}{C_{ekv}} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3 + C_4}$$

$$C_{ekv} = \frac{C_2 \cdot (C_3 + C_4)}{C_2 + C_3 + C_4} = 12[\mu\text{F}]$$

- Budući da kondenzatori nisu prethodno nabijeni vrijedi:

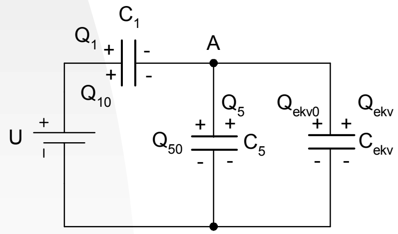
$$Q_{10} = Q_{ekv0}$$

$$U = U_{C10} + U_{Cekv0} = \frac{Q_{10}}{C_1} + \frac{Q_{ekv0}}{C_{ekv}}$$

$$Q_{10} = \frac{U \cdot C_1 \cdot C_{ekv}}{C_1 + C_{ekv}} = \frac{12 \cdot 18 \cdot 10^{-6} \cdot 12 \cdot 10^{-6}}{18 \cdot 10^{-6} + 12 \cdot 10^{-6}}$$

$$Q_{10} = 86.4[\mu\text{C}]$$

- Prije zatvaranja sklopke kondenzatori C_1 i C_{ekv} su nabijeni početnim nabojem Q_{10}, a kondenzator C_5 nabojem Q_{50} prikazanih polariteta.



Za mrežu nakon zatvaranja sklopke vrijedi:

za čvor (A)

$$-Q_1 + Q_5 + Q_{ekv} = -Q_{10} + Q_{50} + Q_{ekv0}$$

$$-Q_1 + Q_5 + Q_{ekv} = Q_{50}$$

$$U_{C5} = U_{Cekv} \Rightarrow \frac{Q_5}{C_5} = \frac{Q_{ekv}}{C_{ekv}}$$

$$U = U_{C1} + U_{C5} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_5}{C_5}$$

- Rješenjem sustava tri jednadžbe dobije se Q_5:

$$Q_5 = \frac{Q_{50} + U \cdot C_1}{\frac{C_1}{C_5} + 1 + \frac{C_{ekv}}{C_5}} = \frac{36 \cdot 10^{-6} + 12 \cdot 18 \cdot 10^{-6}}{\frac{18}{5} + 1 + \frac{12}{5}}$$

$$Q_5 = 36\,[\mu\text{As}]$$

- Napon na C_5:

$$U_{C5} = \frac{Q_5}{C_5} = \frac{36 \cdot 10^{-6}}{5 \cdot 10^{-6}} = 7.2\,[\text{V}]$$

- Prije zatvaranja sklopke kondenzatori C_1 nabijen je na napon U_{C10}:

$$U_{C10} = \frac{Q_{10}}{C_1} = \frac{86.4 \cdot 10^{-6}}{18 \cdot 10^{-6}} = 4.8\,[\text{V}]$$

- Nakon zatvaranja sklopke kondenzator C_1 nabijen je na napon U_{C1}:

$$U_{C1} = U - U_{C5} = 12 - 7.2 = 4.8\,[\text{V}]$$

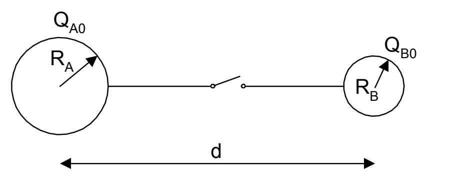
- Razlika napona na C_1 prije i poslije zatvaranja sklopke:

$$\Delta U = U_{C1} - U_{C10} = 4.8 - 4.8 = 0\,[\text{V}]$$

4. zadatak

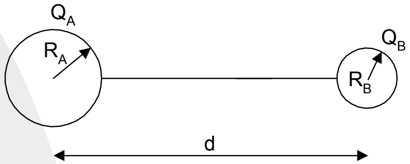
Središta dviju usamljenih metalnih kugli A i B polumjera R_A i R_B razmaknuta su d metara, s tim da je d >> R_A. Na kugle su dovedeni naboji Q_{A0} i Q_{B0}, a nakon toga one se međusobno povezuju vrlo tankom metalnom niti. Odredite, za taj slučaj, iznose polja E_A i E_B tik uz površinu kugli ako je $\varepsilon = \varepsilon_0$.

- R_A = 9 [cm]
- R_A = 1 [cm]
- Q_{A0} = -2.4 [nC]
- Q_{B0} = +3.2 [nC]



Rješenje zadatka

- Nakon zatvaranja sklopke potencijali kugli se izjednačavaju (dolazi do preraspodjele naboja):

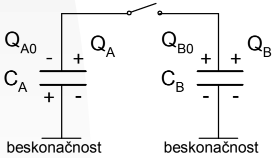


$$\varphi_A = \varphi_B$$

Uz referentnu točku u beskonačnosti:

$$\frac{Q_A}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R_A} = \frac{Q_B}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R_B}$$

- Kugle čine sustav prikazan na slici, za koji vrijedi:



$$-Q_{A0} + Q_{B0} = Q_A + Q_B$$

- Rješenjem sustava jednadžbi:

$$Q_B = Q_A \frac{R_B}{R_A}$$

$$Q_A = \frac{-Q_{A0} + Q_{B0}}{1 + \frac{R_B}{R_A}} = \frac{-2.4 \cdot 10^{-9} + 3.2 \cdot 10^{-9}}{1 + \frac{1}{9}}$$

$$Q_A = 720\,[pAs]$$

$$Q_B = 80\,[pAs]$$

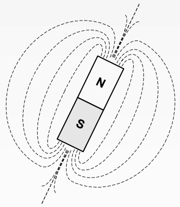
- Budući da je d >> R_A el. polja nakon zatvaranja sklopke iznose:

$$E_A = \frac{Q_A}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R_A^2} = \frac{720 \cdot 10^{-12}}{4 \cdot \pi \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot (9 \cdot 10^{-2})^2} = 800\,[\mathrm{V/m}]$$

$$E_B = \frac{Q_B}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R_B^2} = \frac{80 \cdot 10^{-12}}{4 \cdot \pi \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot (1 \cdot 10^{-2})^2} = 7.2\,[\mathrm{kV/m}]$$

Magnetizam

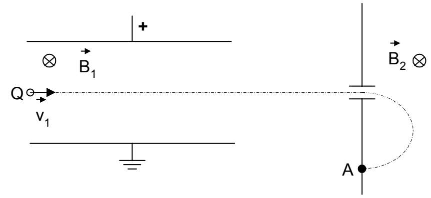
- Magnetsko polje, indukcija i tok.
- Magnetsko polje ravnog beskonačnog vodiča protjecanog strujom.
- Sila na naboj u magnetskom polju.
- Sila na vodič protjecan strujom u magnetskom polju.
- Zakon protjecanja.
- Biot-Savart -ov zakon.

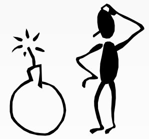


1. zadatak

Mlaz nabijenih čestica ubacuje se u prostor u kojem djeluje električno polje E i magnetska polja indukcija B_1 i B_2 prema slici. Odredite brzinu v_1 i polaritet čestica koje udaraju u točku A. Zadano:

- $E = 140.7$ [MV/m]
- $B_1 = 0.5$ [T]
- $B_2 = 0.16$ [T]





Uvodni pojmovi

- Magnetsko polje opisuje se pomoću sljedećih osnovnih veličina:
  - Jakost magnetskog polja: $\vec{H}\ [\mathrm{A/m}]$
  - Magnetska indukcija: $\vec{B}\ [\mathrm{T}]$
- Veza jakosti magnetskog polja i indukcije:

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{H}$$

gdje je: $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}\ [\mathrm{Vs/Am}]$

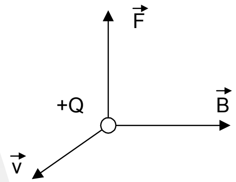
- Kada se naboj giba u magnetskom polju tada na njega djeluje magnetska sila:

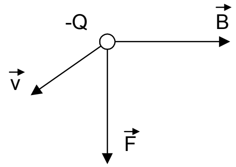
$$\vec{F} = \mathrm{Q} \cdot \left(\vec{v} \times \vec{B}\right)$$

  - Q - naboj
  - v - brzina gibanja naboja

Uvodni pojmovi

- Smjer magnetske sile na naboj definiran je vektorskim produktom brzine i magnetske indukcije:





- Po iznosu sila ovisi o kutu između vektora v i B:

$$\left|\vec{F}\right| = \mathrm{Q} \cdot v \cdot B \cdot \sin\alpha$$

  - ukoliko se naboj giba paralelno silnicama magnetskog polja, magnetske sila na naboj je jednaka nuli ($\sin \alpha = 0$)
  - ukoliko se naboj giba okomito na silnice magnetskog polja tada je sila po iznosu jednaka: $F = Q \cdot v \cdot B$

Rješenje zadatka

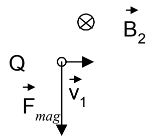
- U kondenzatoru na naboj djeluju električna i magnetska sila. Da bi bio zadovoljen uvjet pravocrtnog gibanja te dvije sile po iznosu moraju biti jednake:

$$\left|\vec{F}_{el}\right| = \left|\vec{F}_{mag}\right|$$

$$\mathrm{Q} \cdot E = \mathrm{Q} \cdot B_1 \cdot \mathrm{v}_1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{v}_1 = \frac{E}{B_1} = \frac{140.7 \cdot 10^6}{0.5}$$

$$\mathrm{v}_1 = 281.4 \cdot 10^6 \ [\mathrm{m/s}]$$

- Kada naboj prijeđe u područje gdje djeluje mag. indukcija B_2, na njega djeluje samo magnetska sila pomoću čijeg smjera se može odrediti odrediti predznak naboja:



- Iz smjera magnetske sile vidljivo je da se radi o negativnom naboju.

$$\mathrm{Q} < 0$$

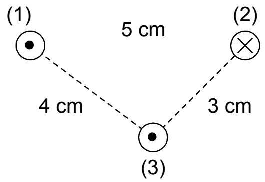
2. zadatak

Tri vrlo duga ravna vodiča smještena u zraku prema slici protjecana su strujama I_1, I_2 i I_3. Odredite:

a) smjer i veličinu magnetske indukcije koju vodiči (1) i (2) stvaraju na mjestu vodiča (3)

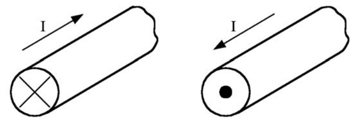
b) smjer i veličinu sile koja djeluje na element dužine l vodiča (3)

- I_1 = 100 [A]
- I_2 = 150 [A]
- I_3 = 75 [A]
- l = 80 [cm]



Uvodni pojmovi

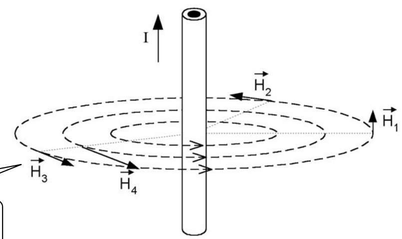
- Označavanje smjerova struje u vodiču:



- Magnetsko polje ravnog vodiča:

$$H = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot r}$$

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$$



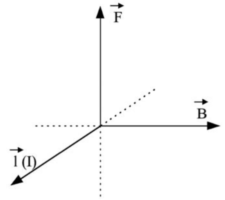
Smjer polja određuje se pravilom desne ruke:
palac - smjer struje
prsti - smjer polja

Uvodni pojmovi

- Sila na vodič protjecan strujom u magnetskom polju

$$\vec{F} = I \cdot \left(\vec{l} \times \vec{B}\right) \; [\mathrm{N}]$$

- Smjer sile određuje se pravilom lijeve ruke:
  - silnice (B) - dlan
  - struja (I, *l*) - prsti
  - sila (F) - palac



- Iznos sile:

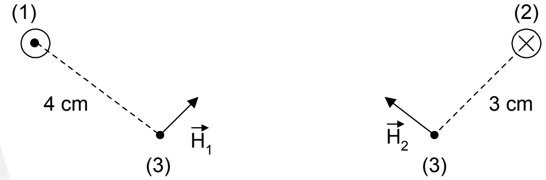
$$F = B \cdot I \cdot l \cdot \sin\alpha \, [\mathrm{N}]$$

  - *l* je duljina vodiča u magnetskom polju!!!
  - kut α je kut koji zatvaraju vektori polja (indukcije) i duljine (smjer struje)
  - ukoliko je vodič okomit na silnice magnetskog polja tada je magnetska sila po iznosu jednaka: F = B·I·*l*
  - ukoliko je vodič paralelan silnicama magnetskog polja magnetska sila na vodič jednaka je nuli (sin α = 0)

Početna stranica

Rješenje zadatka

- Zadatak se rješava metodom superpozicije.
- Vodič (1) na mjestu vodiča (3) stvara magnetsko polje H_1:



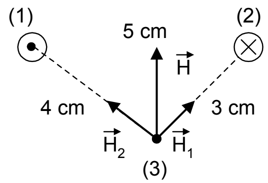
- Vodič (2) na mjestu vodiča (3) stvara magnetsko polje H_2.
- Po iznosu mag. polja:

$$H_1 = \frac{I_1}{2 \cdot \pi \cdot 4 \cdot 10^{-2}} = \frac{100}{2 \cdot \pi \cdot 4 \cdot 10^{-2}} = 4 \, [\mathrm{A/cm}]$$

$$H_2 = \frac{I_2}{2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 10^{-2}} = \frac{150}{2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 10^{-2}} = 8 \, [\mathrm{A/cm}]$$

Početna stranica

- Ukupno polje na mjestu vodiča (3) jednako je vektorskoj sumi magnetskih polja:



$$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$$

- Budući da su vektori H_1 i H_2 pod kutem od 90° vrijedi sljedeće:

$$\left|\vec{H}\right| = \sqrt{\left|\vec{H}_1\right|^2 + \left|\vec{H}_2\right|^2}$$

$$H = \sqrt{4^2 + 8^2} = 9 \, [\mathrm{A/cm}]$$

- Kut vektora H u odnosu na vektor H_1:

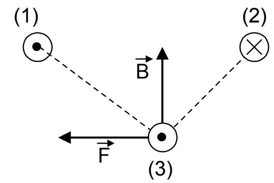
$$\sin\alpha = \frac{\left|\vec{H}_2\right|}{\left|\vec{H}\right|} = \frac{8}{9} \qquad \alpha = 63^\circ$$

- Magnetska indukcija:

$$B = \mu_0 \cdot H = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{9}{10^{-2}} = 1.13 \, [\mathrm{mT}]$$

Početna stranica

- Smjer sile na vodič (3) određuje se pravilom lijeve ruke:



- Budući da su vodič i smjer vektora magnetskog polja pod 90°, sila iznosi:

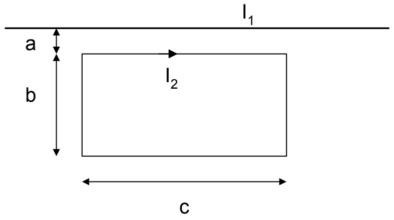
$$F = B \cdot I_3 \cdot l = 1.13 \cdot 10^{-3} \cdot 75 \cdot 80 \cdot 10^{-2} = 68 \, [\mathrm{mN}]$$

Početna stranica

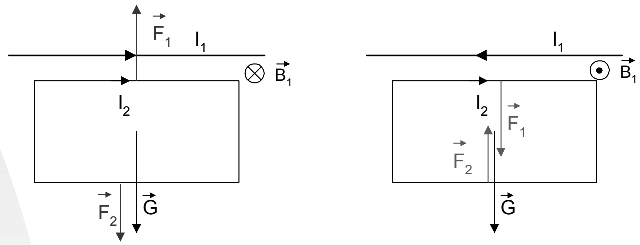
3. zadatak

Vrlo dugi ravni vodič i kruti metalni okvir smješteni su prema slici. Okvir ima težinu G. Uz ostale navedene podatke odredite smjer i veličinu struje I_1 uz koju će okvir zadržati zadani položaj. Zadano:

- G = 0.5 [N]
- I_2 = 15 [A]
- a = 1 [cm]
- b = 10 [cm]
- c = 50 [cm]



- Vrlo dugi ravni vodič protjecan strujom stvara mag. polje u svojoj okolini. Za različite smjerove struje I_1 to mag. polje djeluje na okvir silama F_1 i F_2:



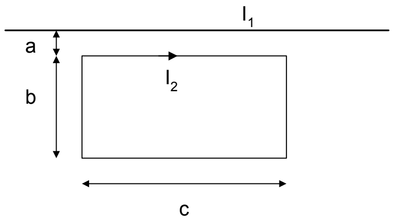
- Da bi okvir ostao u istom položaju ukupan zbroj sila mora biti jednak 0:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{G} = 0$$

- Budući da je $F_1 > F_2$, to se može postići samo u slučaju kada struja I_1 teče s lijeva na desno (1. slučaj).

$$\left|\vec{F}_1\right| = \left|\vec{F}_2\right| + \left|\vec{G}\right|$$

- Sile F_1 i F_2 određuju se kao:



$$F_1 = B_1(\mathrm{a}) \cdot I_2 \cdot \mathrm{c} = \mu_0 \cdot \frac{I_1}{2 \cdot \pi \cdot \mathrm{a}} \cdot I_2 \cdot \mathrm{c}$$

$$F_2 = B_1(\mathrm{a}+\mathrm{b}) \cdot I_2 \cdot \mathrm{c} = \mu_0 \cdot \frac{I_1}{2 \cdot \pi \cdot (\mathrm{a}+\mathrm{b})} \cdot I_2 \cdot \mathrm{c}$$

- Iz uvjeta ravnoteže okvira određuje se iznos struje I_1:

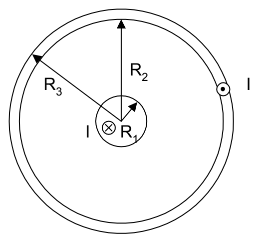
$$\mu_0 \cdot \frac{I_1}{2 \cdot \pi \cdot \mathrm{a}} \cdot I_2 \cdot c = \mu_0 \cdot \frac{I_1}{2 \cdot \pi \cdot (\mathrm{a}+\mathrm{b})} \cdot I_2 \cdot \mathrm{c} + G$$

$$I_1 = \frac{G \cdot 2 \cdot \pi \cdot \mathrm{a} \cdot (\mathrm{a}+\mathrm{b})}{I_2 \cdot \mu_0 \cdot \mathrm{c} \cdot \mathrm{b}} = \frac{0.5 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot (1+10)}{15 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 50 \cdot 10} = 3.7\,[\mathrm{kA}]$$

4. zadatak

Odredite veličinu struje koja teče kroz vodiče koaksijalnog kabela u suprotnim smjerovima, ako jakost magnetskog polja na udaljenosti d od središta kabela iznosi H_d. Također odredite funkciju promjene magnetskog polja, H(r) za 0 < r < ∞. Zadano:

- R_1 = 0.5 [cm]
- R_2 = 2.5 [cm]
- R_3 = 2.6 [cm]
- d = 2.55 [cm]
- H_d = 78.8 [A/m]



Rješenje zadatka

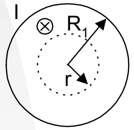
- Zadatak se rješava primjenom zakona protjecanja.

$$\oint_l \vec{H}d\vec{l} = \sum_i I_i$$

- Mag. polje se mijenja različito u četiri slučaja:
- Za r < R_1, obuhvaćen je samo dio unutarnjeg vodiča:

$$H \cdot 2 \cdot r \cdot \pi = I'$$

Gustoća struje u svakoj točki je jednaka.



$$G = \frac{I}{R_1^2 \cdot \pi} = \frac{I'}{r^2 \cdot \pi} \Rightarrow I' = r^2 \cdot \frac{I}{R_1^2}$$

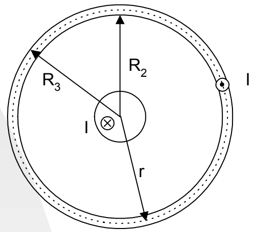
$$H = \frac{I'}{2 \cdot r \cdot \pi} = \frac{I \cdot \frac{r^2}{R_1^2}}{2 \cdot r \cdot \pi} = I \cdot \frac{r}{2 \cdot \pi \cdot R_1^2}$$

- Za R_1 < r < R_2, linijom l obuhvaćen je vodič kroz koji teče struja I pa mag. polje iznosi:

$$H \cdot 2 \cdot r \cdot \pi = I \quad \Rightarrow \quad H = \frac{I}{2 \cdot r \cdot \pi}$$

- Za R_2 < r < R_3, obuhvaćen je unutrašnji vodič i dio vanjskog vodiča:

$$H \cdot 2 \cdot r \cdot \pi = I - I''$$



Budući da su smjerovi struja suprotni njihovi doprinosi se oduzimaju.

$$G = \frac{I}{R_3^2 \cdot \pi - R_2^2 \cdot \pi} = \frac{I''}{r^2 \cdot \pi - R_2^2 \cdot \pi}$$

$$I'' = I \cdot \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2}$$

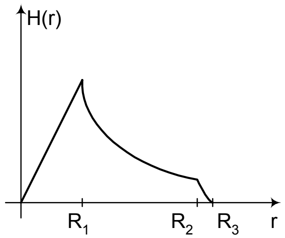
$$H = \frac{I}{2 \cdot r \cdot \pi}\left(1 + \frac{R_2^2}{R_3^2 - R_2^2}\right) - \frac{I}{2 \cdot \left(R_3^2 - R_2^2\right) \cdot \pi} \cdot r$$

- Za r > R_3:

$$H \cdot 2 \cdot r \cdot \pi = I - I$$

$$H = 0$$

- Funkcija promjene jakosti mag. polja izgleda kao na slici:



- Iz zadanog mag. polja na mjestu r = d može se odrediti struja I:

$$H_d = H(r = d) = \frac{I}{2 \cdot d \cdot \pi}\left(1 + \frac{R_2^2}{R_3^2 - R_2^2}\right) - \frac{I}{2 \cdot \left(R_3^2 - R_2^2\right) \cdot \pi} \cdot d$$

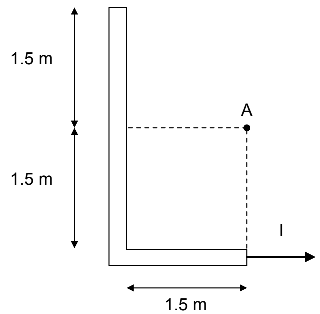
$$I = \frac{2 \cdot \pi \cdot H_d \cdot \left(R_3^2 - R_2^2\right) \cdot d}{R_3^2 - d^2} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 78.8 \cdot \left(2.6^2 - 2.5^2\right) \cdot 2.55 \cdot 10^{-2}}{2.6^2 - 2.55^2}$$

$$I = 25\,[\mathrm{A}]$$

5. zadatak

Kroz vodič u obliku L profila protječe struja I. Dimenzije vodiča su zadane na slici. Odredite smjer i jakost magnetske indukcije u točki A. Zadano:

- I = 50 [A]



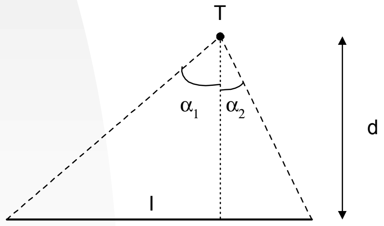
Uvodni pojmovi

- Ravni vodič konačne duljine kroz koji protječe struja I u svojoj okolini stvara magnetsko polje koje se može odrediti na sljedeći način:

$$H_T = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot d} \cdot (\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2)$$

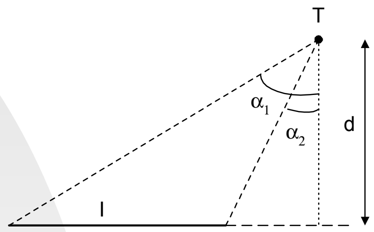
Smjer magnetskog polja definiran je pravilom desnog vijka.

- Primjeri:



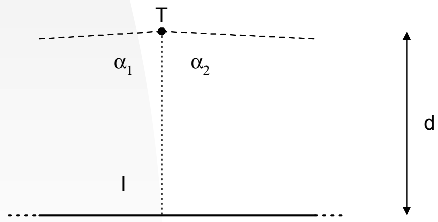
$$H_T = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot d} \cdot (\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2)$$
$$\alpha_1 > 0 \Rightarrow \sin\alpha_1 > 0$$
$$\alpha_2 < 0 \Rightarrow \sin\alpha_2 < 0$$

Uvodni pojmovi



$$H_T = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot d} \cdot (\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2)$$
$$\alpha_1 > 0 \Rightarrow \sin\alpha_1 > 0$$
$$\alpha_2 > 0 \Rightarrow \sin\alpha_2 > 0$$

- Beskonačno dugi ravni vodič :



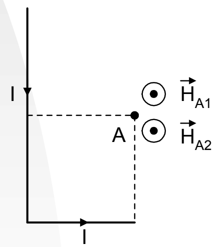
$$H_T = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot d} \cdot (\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2)$$
$$\alpha_1 \to +90° \quad \alpha_2 \to -90°$$
$$H_T = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot d} \cdot (\sin 90° - \sin(-90°))$$
$$H_T = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot d} \cdot (1 - (-1)) = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot d}$$

Rješenje zadatka

- Polje u točki stvaraju dva vodiča jedan dužine 3 m, a drugi dužine 1.5 m. Ukupno polje jednako je vektorskom zbroju pojedinih komponenti polja:

$$\vec{H}_A = \vec{H}_{A1} + \vec{H}_{A2}$$

- Smjer polja određujemo pomoću pravila desnog vijka:

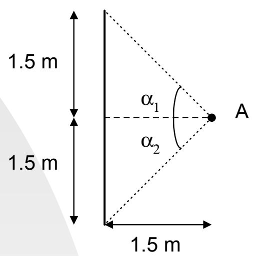


Budući da su polja istog smjera, ukupno polje jednako je algebarskom zbroju polja:

$$H_A = H_{A1} + H_{A2}$$

- Primjenom Biot-Savart-ovog zakona određuju se iznosi polja H_{A1}, odnosno polja H_{A2}.

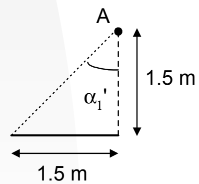
- Polje H_{A1}:



(1)

$$H_{A1} = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot 1.5} \cdot (\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2)$$
$$H_{A1} = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot 1.5} \cdot (\sin(+45°) - \sin(-45°))$$
$$H_{A1} = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot 1.5} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$$
$$H_{A1} = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot 1.5} \cdot \sqrt{2}$$

- Polje H_{A2}:



(2)

$$H_{A2} = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot 1.5} \cdot (\sin\alpha'_1 - \sin\alpha'_2)$$
$$H_{A2} = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot 1.5} \cdot (\sin(+45°) - \sin(0°))$$
$$H_{A2} = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot 1.5} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - (0)\right)$$
$$H_{A2} = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot 1.5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- Ukupno polje H_A:

$$H_{\mathrm{A}} = \frac{I}{4\cdot\pi\cdot1.5}\cdot\sqrt{2} + \frac{I}{4\cdot\pi\cdot1.5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$H_{\mathrm{A}} = \frac{I}{4\cdot\pi\cdot1.5}\cdot\frac{3\cdot\sqrt{2}}{2}$$

- Magnetska indukcija u točki A, B_A:

$$B_{\mathrm{A}} = \mu_0\cdot H_{\mathrm{A}} = 4\cdot\pi\cdot10^{-7}\frac{50}{4\cdot\pi\cdot1.5}\cdot\frac{3\cdot\sqrt{2}}{2}$$

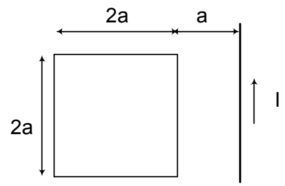
$$B_{\mathrm{A}} = 5\sqrt{2}\,[\mu\mathrm{T}]$$

- Smjer vektora mag. indukcije jednak je smjeru mag. polja.

6. zadatak

Odredite magnetski tok koji se zatvara kroz zatvorenu petlju prikazanu na slici. Zadano:

- a = 1 [cm]
- I = 10 [A]



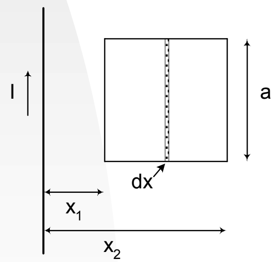
Uvodni pojmovi

- Magnetski tok je skalarna veličina kojom se opisuje magnetsko polje i definiran je kao:

$$\Phi = \vec{B}\cdot\vec{S}$$

$$\Phi = \oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \oiint_S \vec{S}\cdot d\vec{B}$$

- Primjer, tok kroz zatvorenu petlju:



$$\Phi = \oiint_S \vec{B}(x)\cdot d\vec{S} = \int_{x_1}^{x_2} B(x)\cdot \mathrm{a}\cdot dx$$

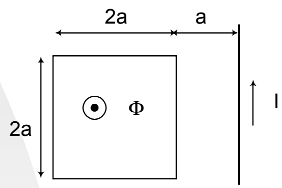
$$\Phi = \int_{x1}^{x2}\mu_0\cdot\frac{I}{2\cdot\pi\cdot x}\cdot \mathrm{a}\cdot dx = \mu_0\cdot\frac{I\cdot \mathrm{a}}{2\cdot\pi}\int_{x1}^{x2}\frac{dx}{x}$$

$$\Phi = \mu_0\cdot\frac{I\cdot \mathrm{a}}{2\cdot\pi}\cdot \ln x\Big|_{x1}^{x2}$$

$$\Phi = \mu_0\cdot\frac{I\cdot \mathrm{a}}{2\cdot\pi}\cdot \ln\frac{x_2}{x_1}$$

Rješenje zadatka

- Smjer magnetskog toka određuje se pravilom desnog vijka:



Palac se stavlja u smjer struje kroz vodič i tada prsti određuju smjer magnetskog toka.

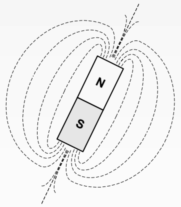
- Iznos toka:

$$\Phi = \mu_0\cdot\frac{I\cdot2\cdot \mathrm{a}}{2\cdot\pi}\cdot \ln\frac{x_2}{x_1} = \mu_0\cdot\frac{I\cdot2\cdot \mathrm{a}}{2\cdot\pi}\cdot \ln\frac{3\mathrm{a}}{\mathrm{a}} = \mu_0\cdot\frac{I\cdot \mathrm{a}}{\pi}\cdot \ln 3$$

$$\Phi = 4\cdot\pi\cdot10^{-7}\cdot\frac{10\cdot10^{-2}}{\pi}\cdot \ln 3 = 44\,[n\mathrm{Vs}]$$

Magnetizam

- Kretanje vodiča u magnetskom polju.
- Elektromagnetska indukcija. Samoindukcija. Međuindukcija.
- Induktivitet. Međuinduktivitet.
- Energija magnetskog polja.



1. zadatak

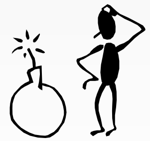
U homogenom magnetskom polju između polova trajnog magneta gustoće magnetskog toka (magnetske indukcije) 0.5 [T] giba se vodič duljine 50 [cm] brzinom od 30 [m/s] u smjeru

a) okomitom na silnice magnetskog polja,

b) pod kutem od 45 stupnjeva u odnosu na silnice magnetskog polja.

Potrebno je odrediti polaritet i iznos napona koji se na njemu inducira. Za prvi slučaj odredite kolika bi se snaga trošila na otporu R koji je spojen na vodič. Zadano:

- B = 0.5 [T]
- $l_{VODIČA}$ = 50 [cm]
- v = 30 [m/s]
- R = 10 [Ω]

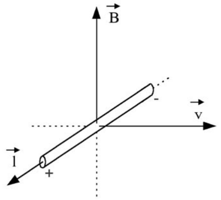


Uvodni pojmovi

- Inducirani napon u vodiču koji se giba u magnetskom polju (napon pomicanja):

$$e = \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot \vec{l} \ [\mathrm{V}]$$

- Smjer induciranog napona određuje se pravilom lijeve ruke:
  - silnice (B) - dlan
  - gibanje (v) - prsti
  - polaritet/smjer napona (e) - palac

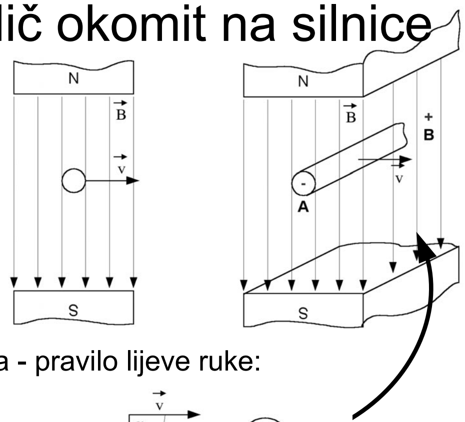


- Iznos napona:

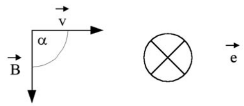
$$e = B \cdot l \cdot v \cdot \sin(\alpha) \ [\mathrm{V}]$$

  - l je duljina vodiča u magnetskom polju!!!
  - kut α je kut koji zatvaraju vektori polja (indukcije) i brzine (*samo komponenta brzine okomita na polje stvara napon*)

Vodič okomit na silnice



- Polaritet napona - pravilo lijeve ruke:



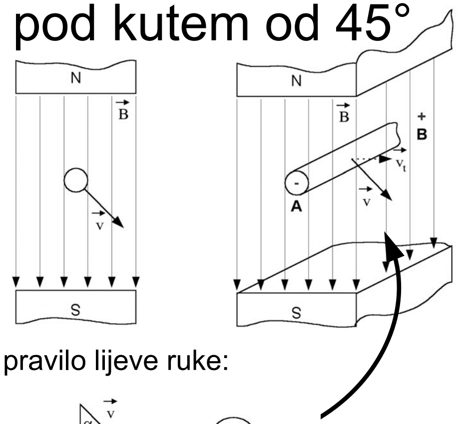
- Iznos induciranog napona:

$$e = B \cdot l \cdot v \cdot \sin(\alpha) = 0.5 \cdot 0.5 \cdot 30 \cdot \sin(90°)$$

$$e = 7.5 \ [\mathrm{V}]$$

$$U_{BA} = 7.5 \ [\mathrm{V}] \ (\mathrm{B} \Rightarrow +,\ \mathrm{A} \Rightarrow -)$$

Vodič pod kutem od 45°



- Polaritet napona - pravilo lijeve ruke:

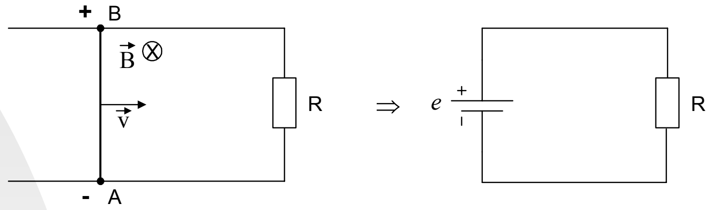
- Iznos induciranog napona:

$$e = B \cdot l \cdot v \cdot \sin(\alpha) = 0.5 \cdot 0.5 \cdot 30 \cdot \sin(45°)$$

$$e = 5.3\ [\mathrm{V}]$$

$$U_{BA} = 5.3\ [\mathrm{V}]\ (\mathrm{B} \Rightarrow +,\ \mathrm{A} \Rightarrow -)$$

- Priključivanjem otpora na vodič dobivamo sljedeći sustav:



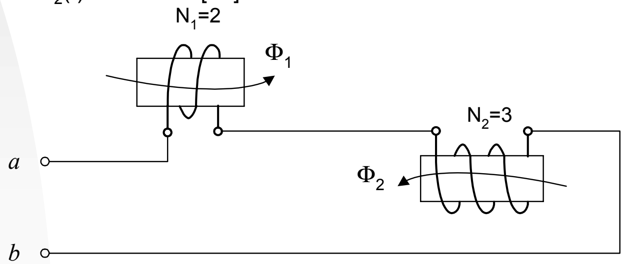
- Snaga na otporu:

$$P_R = \frac{e^2}{R} = \frac{7.5^2}{10} = 5.6\,[\mathrm{W}]$$

2. zadatak

Na slici su nacrtane dvije zavojnice s dva odnosno tri zavoja, kroz koje prolaze vremenski promjenjivi magnetski tokovi. Vremenska promjena tokova postignuta je izvorima koji na slici nisu nacrtani. Koliki se napon $u_{ab}(t)$ inducira između stezaljki *a* i *b* u vremenskom intervalu 0 < t <6[s]. Grafički prikazati napon za dani vremenski interval. Odredite napon u trenutku t = 1 [s].

- $\Phi_1(t) = 0.2 \cdot t^2 + 1$ [Vs]
- $\Phi_2(t) = -0.5 \cdot t + 4$ [Vs]



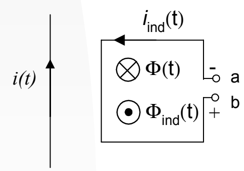
Uvodni pojmovi

- Elektromagnetska indukcija je pojava da se u zatvorenom zavoju stvara ili inducira napon ako se mijenja magnetski tok što ga obuhvaća zavoj.
- Smjer induciranog napona definiran je Lenzovim zakonom:

  smjer induciranog napona je uvijek takav da se od tog napona stvorena struja svojim magnetskim učinkom protivi **vremenskoj** promjeni magnetskog toka zbog kojega je došlo do induciranja napona.

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}; \quad e = -\mathrm{N} \cdot \frac{d\Phi}{dt}$$

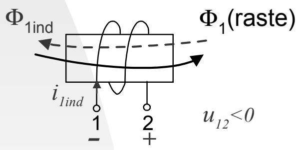
- Primjer:



- ako i(t) raste tada i tok Φ (t), prikazanog smjera, raste
- inducirani tok, $\Phi_{ind}(t)$ suprotnog je smjera
- taj tok je stvorila inducirana struja, $i_{ind}(t)$ čiji je smjer određen pravilom desnog vijka
- tu struju je stvorio inducirani napon prikazanog polariteta; $u_{ab}(t) < 0$

Rješenje zadatka

- Napon $u_{ab}(t)$ jednak je algebarskom zbroju induciranih napona na prvoj i drugoj zavojnici.
- Polaritet napona na stezaljkama prve zavojnice određuje se na sljedeći način:



- budući da Φ_1 raste, inducirani tok Φ_{1ind} je suprotnog smjera
- takav tok je stvorila inducirana struja, smjera prikazana na slici
- zbog toga je inducirani napon u_{12} prikazanog polariteta

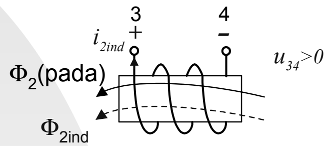
- Po iznosu napon $u_{12}(t)$:

$$\Phi_1(t) = 0.2 \cdot t^2 + 1\,[\mathrm{Vs}]$$

$$|u_{12}(t)| = \left|N_1 \frac{d\Phi_1(t)}{dt}\right| = N_1 \cdot \left|\frac{d\left(0.2 \cdot t^2 + 1\right)}{dt}\right|$$

$$|u_{12}(t)| = N_1 \cdot 0.4 \cdot t = 2 \cdot 0.2 \cdot t = 0.8 \cdot t\,[\mathrm{V}]$$

- Polaritet napona na stezaljkama druge zavojnice određuje se na sljedeći način:



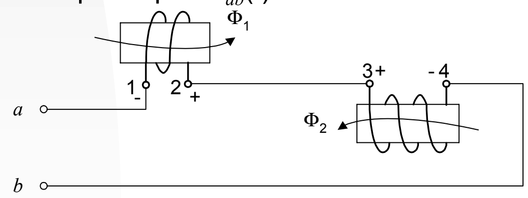
- budući da Φ_2 pada, inducirani tok Φ_{2ind} je istog smjera
- takav tok je stvorila inducirana struja prikazana na slici
- zbog toga je inducirani napon u_{34} prikazanog polariteta

- Po iznosu napon $u_{34}(t)$:

$$\Phi_2(t) = -0.5 \cdot t + 4\,[\mathrm{Vs}]$$

$$|u_{34}(t)| = \left|N_2 \frac{d\Phi_2(t)}{dt}\right| = N_2 \cdot \left|\frac{d(-0.5 \cdot t + 1)}{dt}\right| = N_2 \cdot 0.5 = 3 \cdot 0.5 = 1.5\,[\mathrm{V}]$$

- Ukupni napon $u_{ab}(t)$:



$$u_{ab}(t) = u_{12}(t) + u_{34}(t)$$

$$u_{ab}(t) = -|u_{12}(t)| + |u_{34}(t)|$$

- Napon $u_{ab}(t)$:

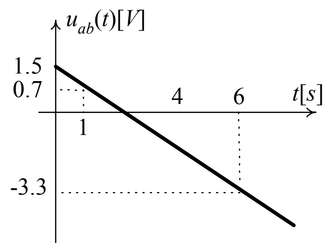
$$u_{ab}(t) = -|u_{12}(t)| + |u_{34}(t)|$$

$$u_{ab}(t) = -0.8 \cdot t + 1.5\,[\mathrm{V}]$$

- U trenutku t = 1 [s]:

$$u_{ab}(t = 1[s]) = -0.8 \cdot 1 + 1.5 = 0.7\,[\mathrm{V}]$$

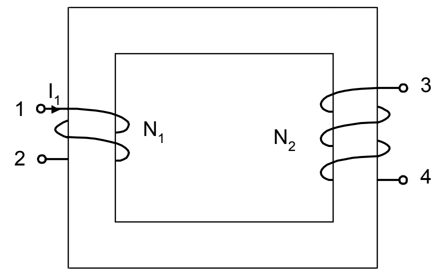
- Graf promjene napona:



3. zadatak

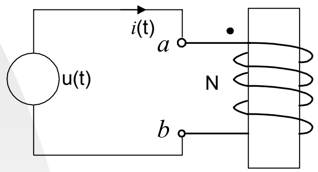
Dvije zavojnice imaju faktor magnetske veze k. Prva zavojnica ima N_1 zavoja. Pri struji I_1 kroz prvu zavojnicu stvara se tok Φ_1. Ako se struja prve zavojnice linearno smanji na nulu u vremenu 2 [ms] u drugoj zavojnici se inducira napon 63.75 [V]. Jezgra je od neferomagnetskog materijala. Odredite induktivitet prve i druge zavojnice, međuinduktivitet, broj zavoja druge zavojnice, napon samoindukcije te nacrtajte nadomjesnu shemu.

- k = 0.85
- N_1 = 250 [zavoja]
- I_1 = 2 [A]
- Φ_1 = 0.3 [mVs]



Uvodni pojmovi

- **Samoindukcija** je pojava da se u samom svitku kroz koji prolazi **vremenski** promjenjiva struja inducira napon samoindukcije zbog promjenjivog toka Φ što ga je proizvela vlastita struja tog svitka.



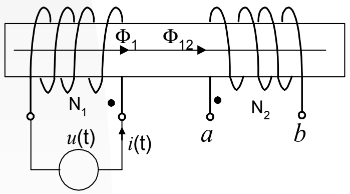
$$u_{ab} = \mathrm{N}\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Psi}{dt}$$

$$u_{a\ b} = \mathrm{L}\frac{di}{dt}$$

stezaljka označena s točkom

i(t) ulazi u stezaljku označenu s točkom

- **Međuindukcija** je pojava da se zbog promjene jakosti struje u jednom (primarnom) svitku inducira napon u nekom drugom (sekundarnom) svitku.



$$u_{ab} = \mathrm{N}_2\frac{d\Phi_{12}}{dt} = \frac{d\Psi_{12}}{dt}$$

$$u_{a\ b} = \mathrm{M}\frac{di}{dt}$$

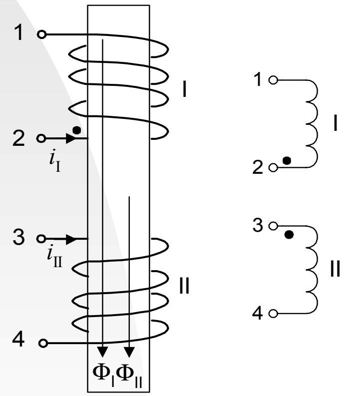
stezaljka označena s točkom (2. zavojnica)

i(t) ulazi u stezaljku označenu s točkom (1. zavojnica)

Početna stranica

Uvodni pojmovi

- Simboličko označavanje smjera namatanja zavojnice:

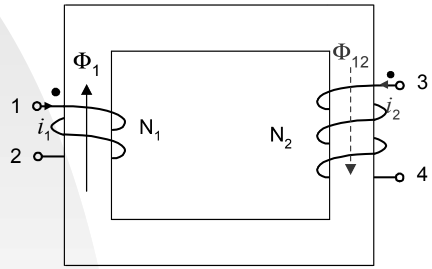


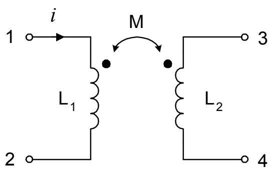
- Proizvoljno odaberemo stezaljku na prvoj zavojnici uz koju postavimo točku (to može biti stezaljka 1 ili 2).
- "U mislima" propustimo struju i_{I} da poteče zavojnicom i to tako da ona *ulazi* u stezaljku označenu s točkom.
- Odredimo smjer toka Φ_{I} koje stvara zamišljena struja i_{I}.
- Na drugoj zavojnici tražimo onu stezaljku u koju mora ulaziti struja i_{II} po kriteriju da zamišljene struje kroz zavojnicu I i II daju tokove *istog* smjera. Tu stezaljku na drugoj zavojnici označavamo s točkom.

Početna stranica

Rješenje zadatka

- Nadomjesna shema određuje se na prethodno opisani način:





- Za prikazanu nadomjesnu shemu vrijedi:

$$u_{34} = \mathrm{M}\frac{di}{dt}$$

$$u_{12} = \mathrm{L}_1\frac{di}{dt}$$

Početna stranica

- Određivanje L_1:

$$\mathrm{L}_1 = \frac{\mathrm{N}_1 \cdot \Phi_1}{\mathrm{I}_1} = \frac{250 \cdot 3 \cdot 10^{-4}}{2} = 37.5\,[\mathrm{mH}]$$

- Određivanje M:

$$|u_{34}| = \left|\mathrm{M}\frac{di_1}{dt}\right| = 63.75\,[\mathrm{V}]$$

$$\mathrm{M} = \frac{|u_{34}|}{\left|\frac{di_1}{dt}\right|} = \frac{|u_{34}|}{\left|\frac{\Delta \mathrm{I}_1}{\Delta t}\right|} = \frac{|63.75|}{\left|\frac{0-2}{2\cdot 10^{-3}-0}\right|} = 63.75\,[\mathrm{mH}]$$

- Određivanje L_2:

$$\mathrm{M} = \mathrm{k}\cdot\sqrt{\mathrm{L}_1 \cdot \mathrm{L}_2} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{L}_2 = \frac{\mathrm{M}^2}{\mathrm{k}^2 \cdot \mathrm{L}_1} = 150\,[\mathrm{mH}]$$

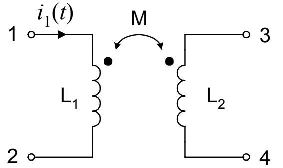
- Određivanje N_2:

$$\mathrm{M} = \frac{\mathrm{N}_2 \cdot \Phi_{12}}{\mathrm{I}_1} = \frac{\mathrm{N}_2 \cdot \mathrm{k} \cdot \Phi_1}{\mathrm{I}_1} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{N}_2 = \frac{\mathrm{M}\cdot \mathrm{I}_1}{\mathrm{k}\cdot\Phi_1}$$

$$\mathrm{N}_2 = \frac{63.75\cdot 10^{-3}\cdot 2}{0.85\cdot 3\cdot 10^{-4}} = 500\,[\mathrm{zavoja}]$$

Početna stranica

- Za vrijeme smanjivanja struje I_1 na nulu tada će se na prvoj zavojnici inducirati napon samoindukcije, a na drugoj zavojnici (budući da je međuinduktivno vezana) napon međuindukcije.



- Struja i_1(t):

$$i_1(t) = -10^3 \cdot t + 2 \; [\mathrm{A}]$$

- Napon samoindukcije u_{12}:

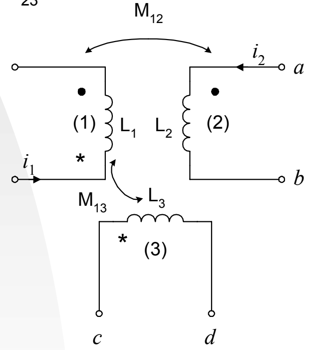
$$u_{12} = \mathrm{L}_1 \frac{di_1}{dt} = 37.5 \cdot 10^{-3} \cdot \left(-10^3 + 0\right) = -37.5 \, [\mathrm{V}]$$

- Napon međuindukcije u_{34}:

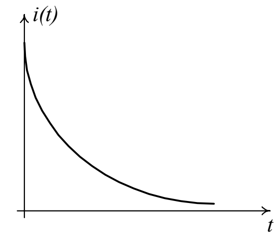
$$u_{34} = \mathrm{M} \frac{di_1}{dt} = 63.75 \cdot 10^{-3} \cdot \left(-10^3 + 0\right) = -63.75 \, [\mathrm{V}]$$

4. zadatak

Odredite napone $u_{ab}(t)$ i $u_{cd}(t)$ ako je vremenska promjena struja i_1(t) i i_2(t) jednaka i zadana prema slici b). Zadano: $L_1 = L_2 = L_3 = M_{12} = M_{13}$; $M_{23} = 0$



a)

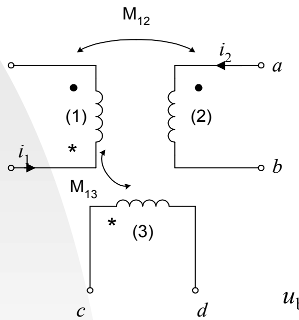


b)

Rješenje zadatka

- Naponi u_{ab} stvara struja i_2 protječući kroz zavojnicu (2) i struja i_1 protječući zavojnicom (1):

$$u_{\mathrm{ab}}(t) = u_{\mathrm{abL2}}(t) + u_{\mathrm{abM12}}(t)$$



Uvažavajući smjer i promjenu struja i_1 i i_2 te označene referentne točke vrijedi:

Napon samoindukcije:

$$u_{\mathrm{abL2}}(t) = L_2 \cdot \frac{di_2}{dt}$$

Napon međuindukcije:

$$u_{\mathrm{baM12}}(t) = M_{12} \cdot \frac{di_1}{dt} \quad \Rightarrow \quad u_{\mathrm{abM12}}(t) = -M_{12} \cdot \frac{di_1}{dt}$$

$$u_{\mathrm{ab}}(t) = L_2 \cdot \frac{di_2}{dt} - M_{12} \cdot \frac{di_1}{dt} = 0$$

- Napon u_{cd} stvara samo struja i_1 protječući kroz zavojnicu (1) (M_{23} = 0 i kroz zavojnicu (3) ne teče struja):

$$u_{cd}(t) = M_{13} \cdot \frac{di_1}{\underbrace{dt}_{<0}} < 0$$

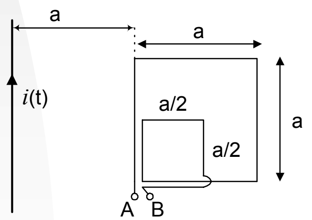
5. zadatak

U istoj ravnini s dugim vodičem nalazi se vodljiva petlja položaja i dimenzija prema slici a). Struja koja teče kroz ravni vodič mijenja se kao što je prikazano na slici b). Odredite:

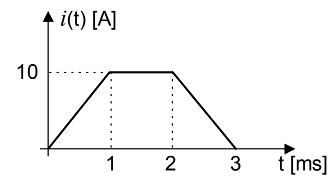
a) međuinduktivitet M,
b) napon u_{AB}(t).

Zadano:

- a = 0.1 [m]



a)



b)

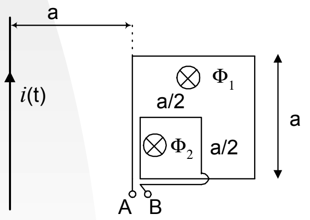
Rješenje zadatka

- Međuinduktivitet se određuje kao:

$$M = \frac{\Phi}{i}$$

Φ - tok koji se zatvara kroz zadanu petlju
i - struja koja je uzrokovala taj tok

- Da bi se odredio međuniduktivitet mora se prvo odrediti ukupni tok. Tok se zatvara kroz dvije petlje i istoga je smjera. Ukupni tok jednak je:



$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$$

$$\Phi_1 = \mu_0 \cdot \frac{i \cdot \mathrm{a}}{2\cdot\pi} \cdot \ln\frac{2\mathrm{a}}{\mathrm{a}}$$

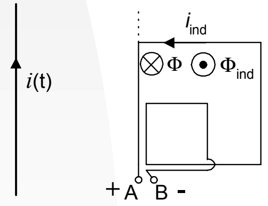
$$\Phi_2 = \mu_0 \cdot \frac{i \cdot \frac{\mathrm{a}}{2}}{2\cdot\pi} \cdot \ln\frac{\frac{3\mathrm{a}}{2}}{\mathrm{a}}$$

$$\Phi = \mu_0 \cdot \frac{i \cdot \mathrm{a}}{2\cdot\pi} \cdot \ln 2 + \mu_0 \cdot \frac{i \cdot \mathrm{a}}{4\cdot\pi} \cdot \ln\frac{3}{2} = \mu_0 \cdot \frac{i \cdot \mathrm{a}}{2\cdot\pi} \cdot \left(\ln 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}\right)$$

- Međuinduktivitet onda iznosi:

$$M = \frac{\Phi}{i} = \frac{\mu_0 \cdot \frac{i \cdot \mathrm{a}}{2\cdot\pi} \cdot \ln\sqrt{6}}{i} = 4\cdot\pi\cdot 10^{-7} \cdot \frac{0.1}{2\cdot\pi} \cdot 0.895 = 18\,[n\mathrm{H}]$$

- Polaritet napona u_{ab} određuje se Lenzovim pravilom, a iznos napona jednak je derivaciji toka po vremenu.
- Budući da je jedina veličina koja se mijenja u vremenu struja, o njenom obliku će ovisiti i inducirani napon u_{AB}.
- U vremenu 0 < t < 1 [ms] struja i(t) raste:



$$i(t) = 10^4 \cdot t\,[\mathrm{A}]$$

$$i\uparrow \;\Rightarrow\; \Phi\uparrow$$

$$|u_{ab}(t)| = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\left(\mu_0 \cdot \frac{i(t)\cdot \mathrm{a}}{2\cdot\pi} \cdot \ln\sqrt{6}\right)}{dt}$$

$$|u_{ab}(t)| = \mu_0 \cdot \frac{\mathrm{a}}{2\cdot\pi} \cdot \ln\sqrt{6}\,\frac{di}{dt} = \mu_0 \cdot \frac{\mathrm{a}}{2\cdot\pi} \cdot \ln\sqrt{6} \cdot 10^4$$

- Napon $u_{AB}(t)$ je za 0 < t < 1 [ms] konstantan i iznosi:

$$|u_{\mathrm{AB}}(t)| = \mu_0 \cdot \frac{\mathrm{a}}{2\cdot\pi} \cdot \ln\sqrt{6} \cdot 10^4 = 4\cdot\pi\cdot 10^{-7} \cdot \frac{0.1}{2\cdot\pi} \cdot \ln\sqrt{6} \cdot 10^4 = 180\,[\mu\mathrm{V}]$$

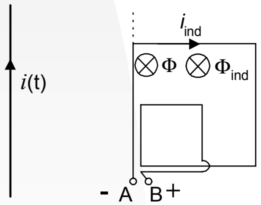
odnosno,

$$u_{\mathrm{AB}}(t) = +180\,[\mu\mathrm{V}]$$

- Za 1 [ms] < t < 2 [ms] struja je konstantna pa je napon $u_{AB}(t)$:

$$u_{\mathrm{AB}}(t) = 0$$

- U vremenu 2 [ms] < t < 3 [ms] struja i(t) pada:



$$i(t) = -10^4 \cdot t + 30\,[\mathrm{A}]$$

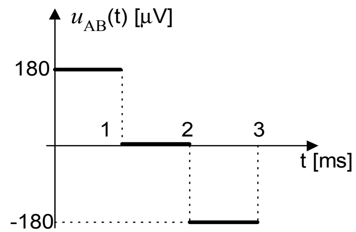
$$i\downarrow \;\Rightarrow\; \Phi\downarrow$$

$$|u_{ab}(t)| = \mu_0 \cdot \frac{\mathrm{a}}{2\cdot\pi} \cdot \ln\sqrt{6}\,\frac{di}{dt} = \mu_0 \cdot \frac{\mathrm{a}}{2\cdot\pi} \cdot \ln\sqrt{6} \cdot \left|-10^4\right|$$

$$|u_{\mathrm{AB}}(t)| = 180\,[\mu\mathrm{V}]$$

$$u_{\mathrm{AB}}(t) = -180\,[\mu\mathrm{V}]$$

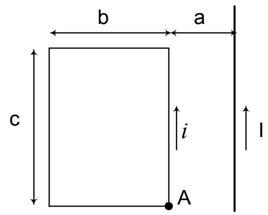
- Napon $u_{AB}(t)$ za 0 < t < 3 [ms] izgleda kao na grafu:



6. zadatak

Tanka zavojnica pravokutnog presjeka s N zavoja nalazi se u magnetskom polju ravnog dugog vodiča. Odredite promjenu energije ukupnog magnetskog polja sistema ako zavojnicu zarotiramo oko točke A za 90º suprotno od smjera kazaljke na satu. Sistem se nalazi u zraku, a zavojnica je u ravnini s vodičem. Zadano:

- a = 10 [cm]
- b = 20 [cm]
- c = 30 [cm]
- I = 10 [kA]
- i = 0.5 [A]
- N = 50 [zavoja]



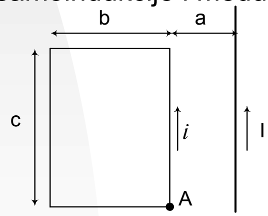
Rješenje zadatka

- Ukupna energija magnetskog polja sistema definirana je kao:

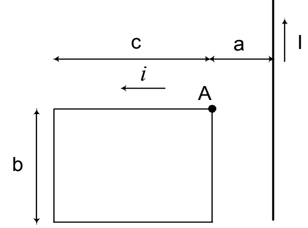
$$W=\frac{L_1\cdot I_1^2}{2}+\frac{L_2\cdot i^2}{2}\pm M\cdot I_1\cdot i$$

± predznak ovisi o tome da li su tok samoindukcije i tok međuinduktivnosti istog smjer ili ne

- Za prikazani sistem, za prvi i drugi slučaj, smjerovi toka samoindukcije i međuindukcije su isti.



$$W_2=\frac{L_1\cdot I^2}{2}+\frac{L_2\cdot i^2}{2}+M_2\cdot I\cdot i$$



$$W_1=\frac{L_1\cdot I^2}{2}+\frac{L_2\cdot i^2}{2}+M_1\cdot I\cdot i$$

- Razlika energija definirana je kao:

$$\Delta W=W_2-W_1=\frac{L_1\cdot I^2}{2}+\frac{L_2\cdot i^2}{2}+M_2\cdot I\cdot i-\frac{L_1\cdot I^2}{2}-\frac{L_2\cdot i^2}{2}-M_1\cdot I\cdot i$$

$$\Delta W=M_2\cdot I\cdot i-M_1\cdot I\cdot i$$

- Međuinduktiviteti u prvom i drugom slučaju:

$$M_1=\frac{N\cdot\Phi_1}{I}=\frac{N\cdot\mu_0\cdot\frac{I\cdot c}{2\cdot\pi}ln\frac{a+b}{a}}{I}=N\cdot\mu_0\cdot\frac{c}{2\cdot\pi}ln\frac{a+b}{a}$$

$$M_2=\frac{N\cdot\Phi_2}{I}=\frac{N\cdot\mu_0\cdot\frac{I\cdot b}{2\cdot\pi}ln\frac{a+c}{a}}{I}=N\cdot\mu_0\cdot\frac{b}{2\cdot\pi}ln\frac{a+c}{a}$$

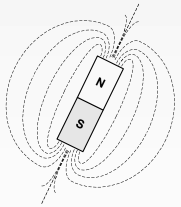
- Promjena energije onda iznosi:

$$\Delta W=I\cdot i\cdot\left(M_2-M_1\right)=\frac{I\cdot i\cdot N\cdot\mu_0}{2\cdot\pi}\cdot\left(b\cdot ln\frac{a+c}{a}-c\cdot ln\frac{a+b}{a}\right)$$

$$\Delta W=\frac{10\cdot10^3\cdot0.5\cdot50\cdot4\cdot\pi\cdot10^{-7}}{2\cdot\pi}\cdot\left(20\cdot10^{-2}\cdot ln\frac{40}{10}-30\cdot10^{-2}\cdot ln\frac{30}{10}\right)=-2.3\,[\mathrm{mW}]$$

Magnetizam

- Magnetski krug bez zračnog raspora.
- Magnetski krug sa zračnim rasporom.
- Magnetska energija u zraku.
- Magnetska energija u feromagnetskom materijalu.

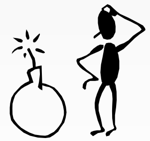


1. zadatak

Zadan je magnetski krug s torusnom jezgrom od feromagnetskog materijala. Ukoliko kroz tu torusnu jezgru protječe magnetski tok od 0.7 [mVs] koliko iznosi struja koja protječe zavojnicom? Ako se napravi zračni raspor u torusnoj jezgri širine 1 milimetar kolika struja treba teći zavojnicom da bi magnetski tok ostao nepromijenjen? Zadano je:

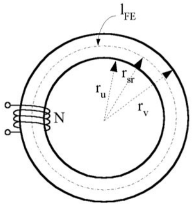
- N = 100 zavoja
- l_{FE} = 20 [cm]
- S_{FE} = 5 [cm^2]
- $\Phi = 7\cdot 10^{-4}$ [Vs]
- tablica magnetiziranja

B [T]	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
H [A/m]	380	500	750	1200	1900



Uvodni pojmovi

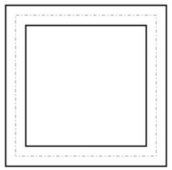
- Feromagnetska jezgra



$$l_{FE} = 2\cdot\pi\cdot r_{sr}$$

$$r_{sr} = \frac{r_u + r_v}{2}$$

sličnio vrijedi i za druge oblike:



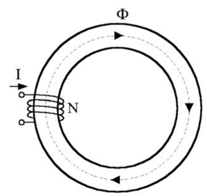
- Veza između magnetskog polja i struje koja ga stvara - zakon protjecanja:

$$H\cdot l = I\cdot N$$

$$\sum_i H_i\cdot l_i = \sum_j I_j\cdot N_j$$

Opći slučaj

Bez zračnog raspora



$$H_{FE}\cdot l_{FE} = I\cdot N$$

- Poznato: N, l_{FE}, Φ
- Φ (Φ_{FE}) $\Rightarrow$ B_{FE} $\Rightarrow$ tablica $\Rightarrow$ H_{FE}

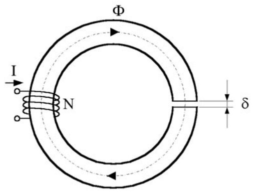
$$B_{FE} = \frac{\Phi_{FE}}{S_{FE}} = \frac{7\cdot 10^{-4}}{5\cdot 10^{-4}} = 1.4\ [\mathrm{T}]$$

$$B_{FE} \Rightarrow \text{ tablica magnetiziranja} \Rightarrow H_{FE} = 1200\left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}\right]$$

$$H_{FE}\cdot l_{FE} = I\cdot N$$

$$I = \frac{H_{FE}\cdot l_{FE}}{N} = \frac{1200\cdot 0.2}{100} = 2.4\ [\mathrm{A}]$$

Sa zračnim rasporom



$$l_{FE} - \delta \approx l_{FE}$$

$$I \cdot N = H_{FE} \cdot l_{FE} + H_\delta \cdot l_\delta$$

- Tok koji protječe jezgrom zatvara se preko zračnog raspora:

$$\Phi_{FE} = \Phi_\delta$$

- Zbog velikog otpora koji predstavlja vakuum (zrak) za magnetski tok sav tok se zatvara na mjestu gdje je razmak između otvorenih krajeva feromagnetske jezgre najmanji - zračni raspor.

- Zbog toga se može reći da je površina kroz koju taj tok prolazi jednaka površini feromagnetske jezgre:

$$S_{FE} = S_\delta$$

- Iz toga dalje slijedi da su i magnetske indukcije jednake:

$$B_{FE} = B_\delta$$

- Poznavajući gore navedeno može se doći do konačnog rješenja:

$$\Phi_{FE} = \Phi_\delta = \Phi = 7 \cdot 10^{-4}\ [\mathrm{Vs}]$$

$$B_\delta = B_{FE} = \frac{\Phi_{FE}}{S_{FE}} = \frac{7 \cdot 10^{-4}}{5 \cdot 10^{-4}} = 1.4\ [\mathrm{T}]$$

$$H_{FE} = 1200 \left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}\right]$$

$$H_\delta = \frac{B_\delta}{\mu_0} = \frac{1.4}{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}} = 1.114 \cdot 10^6 \left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}\right]$$

$$I \cdot N = H_{FE} \cdot l_{FE} + H_\delta \cdot l_\delta$$

$$I = \frac{H_{FE} \cdot l_{FE} + H_\delta \cdot l_\delta}{N} = \frac{1200 \cdot 0.2 + 1.1 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 10^{-3}}{100} = \frac{240 + 1114}{100}$$

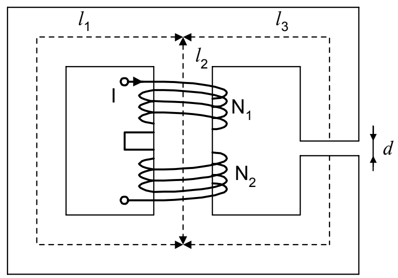
$$I = 13.54\ [\mathrm{A}]$$

- Uspoređujući ovu vrijednost s prethodnom može se vidjeti da za održavanje zadanog toka u zračnom rasporu širine 1 milimetar otpada čak 13.54-2.4=11.14 A !!!
- To je za više od 4x veća vrijednost od one za održavanje toka u feromagnetskoj jezgri 200x veće duljine.

2. zadatak

Zadan je magnetski krug s jezgrom od feromagnetskog materijala. Odredite struju I koja protječe kroz zavojnicu ako je poznato da je u rasporu nagomilana magnetska energija W_d. Karakteristika magnetskog materijala zadana je pomoću tablice.

- W_d = 9.6 [mJ]
- $l_1 = l_3$ = 20 [cm]
- l_2 = 20 [cm]
- d = 0.1 [mm]
- $S_1 = S_3 = S_0$ = 2 [cm^2]
- S_2 = 4 [cm^2]
- N_1 = 200 [zavoja]
- N_2 = 100 [zavoja]



B(T)	0.8	0.9	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.45	1.5
H(A/m)	200	240	300	380	500	818	1202	1350	1500

Uvodni pojmovi

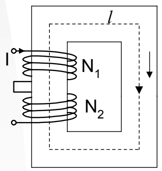
- Pri rješavanju složenih magnetskih krugova koristimo dva zakona:
  1) algebarska suma tokova u svakom čvoru magnetskog kruga jednaka je nuli

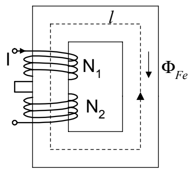
$$alg\sum_i \Phi_i = 0$$

  2) zbroj padova magnetskih napona duž bilo kojeg zatvorenog puta (konture) magnetskog kruga jednak je magnetomotornoj sili u toj konturi

$$alg\sum_i H_i \cdot l_i = alg\sum_j N_j \cdot I_j$$

- Primjeri različitog smjera obilaženja konture:





$$N_1 \cdot I - N_2 \cdot I = H_{Fe} \cdot l \qquad N_2 \cdot I - N_1 \cdot I = -H_{Fe} \cdot l$$

Rješenje zadatka

- Iz poznatog iznosa magnetske energije u zračnom rasporu moguće je izračunati magnetsku indukciju B_0:

$$\mathrm{W}_0 = \frac{B_0^2}{2 \cdot \mu_0} \cdot \mathrm{V} \quad \Rightarrow \quad B_0 = \sqrt{\frac{\mathrm{W}_0 \cdot 2 \cdot \mu_0}{S \cdot d}}$$

$$B_0 = \sqrt{\frac{9.6 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 10^{-4} \cdot 0.1 \cdot 10^{-3}}}$$

$$B_0 = 1.1\,[\mathrm{T}]$$

- Magnetski tok koji se zatvara kroz zračni raspor jednak je magnetskom toku u trećem stupu:

$$\Phi_0 = \Phi_{Fe3}$$

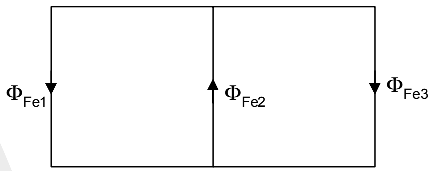
$$B_0 \cdot S_0 = B_{Fe3} \cdot S_{Fe3}$$

$$B_{Fe3} = B_0 = 1.1\,[\mathrm{T}]$$

- Iz tablice magnetiziranja može se odrediti mag. polje u trećem stupu:

$$H_{Fe3} = 380\,[\mathrm{A/m}]$$

- Struja I protječući kroz zavojnice stvara magnetski tok Φ_{Fe2} koji se grana na sljedeći način:



$$\Phi_{Fe2} = \Phi_{Fe3} + \Phi_{Fe1}$$

$$B_{Fe2} \cdot S_2 = B_{Fe3} \cdot S_3 + B_{Fe1} \cdot S_1$$

$$B_{Fe2} = \frac{B_{Fe3} + B_{Fe1}}{2}$$

- Iz zakona protjecanja slijedi:

$$H_{Fe1} \cdot l_1 = H_{Fe3} \cdot l_3 + H_0 \cdot d$$

$$H_{Fe1} = \frac{H_{Fe3} \cdot l_3 + \frac{B_0}{\mu_0} \cdot d}{l_1} = \frac{380 \cdot 20 \cdot 10^{-2} + \frac{1.1}{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}} \cdot 0.1 \cdot 10^{-3}}{20 \cdot 10^{-2}}$$

$$H_{Fe1} = 818\,[\mathrm{A/m}] \quad \Rightarrow \quad B_{Fe1} = 1.3\,[\mathrm{A/m}]$$

- Mag. indukcija i polje u drugom stupu:

$$B_{Fe2} = \frac{1.1 + 1.3}{2} = 1.2\,[\mathrm{T}] \quad \Rightarrow \quad H_{Fe2} = 500\,[\mathrm{A/m}]$$

- Struja I određuje se:

$$I \cdot (N_1 - N_2) = H_{Fe1} \cdot l_1 + H_{Fe2} \cdot l_2 = H_{Fe3} \cdot l_3 + H_0 \cdot d + H_{Fe2} \cdot l_2$$

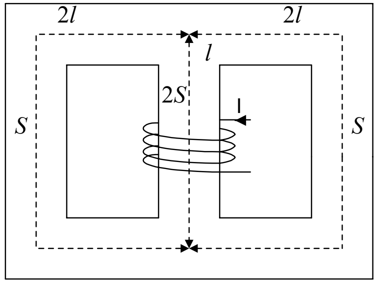
$$I = \frac{H_{Fe1} \cdot l_1 + H_{Fe2} \cdot l_2}{N_1 - N_2} = \frac{818 \cdot 20 \cdot 10^{-2} + 500 \cdot 15 \cdot 10^{-2}}{200 - 100}$$

$$I = 2.4\,[\mathrm{A}]$$

3. zadatak

Magnetski krug prema slici izrađen je od feromagnetskog materijala čija je krivulja magnetiziranja zadana tabelarno. Odredite kolika se magnetska energija nakupila u krugu. Zadano:

- l = 10 [cm]
- S = 12 [cm^2]
- N = 30 [zavoja]
- I = 1 [A]



B(T)	0.1	0.4	0.65	0.8	1.2	1.3
H(A/cm)	0.4	1	1.5	2	5	6

Rješenje zadatka

- Za krajnje stupove vrijedi:

$$H_{Fe1}\cdot 2\cdot l = H_{Fe3}\cdot 2\cdot l \;\Rightarrow\; H_{Fe1} = H_{Fe3} = H \;\Rightarrow\; B_{Fe1} = B_{Fe3} = B$$

- Magnetski tokovi:

$$\Phi_{Fe2} = \Phi_{Fe1} + \Phi_{Fe2}$$

$$B_{Fe2}\cdot 2\cdot S = B_{Fe1}\cdot S + B_{Fe2}\cdot S$$

$$B_{Fe2} = B_{Fe1} = B_{Fe2} = B$$

- Iz zakona protjecanja:

$$I\cdot N = H_{Fe2}\cdot l + H_{Fe3}\cdot 2\cdot l$$

$$I\cdot N = H_{Fe2}\cdot l + H_{Fe1}\cdot 2\cdot l = H\cdot l + H\cdot 2\cdot l$$

$$H = \frac{I\cdot N}{3\cdot l} = \frac{1\cdot 30}{3\cdot 10} = 1\left[\text{A/cm}\right]$$

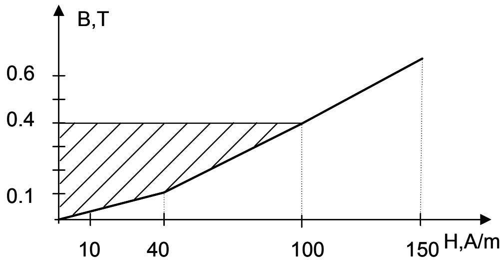
- Iz tablice magnetiziranja mag. indukcija:

$$B = 0.4\left[\text{T}\right]$$

- ω je gustoća energije po volumenu nakupljena u svakoj točki materijala i definiran je kao:

$$\omega = \int_0^{B} \text{H}\, d\text{B};\quad \omega = \int_0^{0.4} \text{H}\, d\text{B}$$

- Integral se može riješiti samo ukoliko pretpostavimo linearnu zavisnost H-B po dijelovima:



- Gustoća energije jednaka je označenoj površini:

$$\omega = \frac{0.1\cdot 40}{2} + 40\cdot(0.4-0.1) + \frac{(100-40)\cdot(0.4-0.1)}{2}$$

- ω je jednaka:

$$\omega = 2 + 12 + 9 = 23\left[\text{VAs/m}^3\right]$$

- Ukupna energija iznosi:

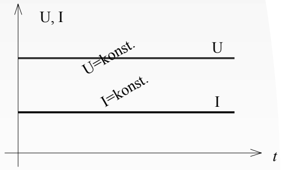
$$d\text{W} = \omega\cdot d\text{V}$$

$$\text{W} = \omega\cdot\text{V} = \omega\cdot\left(\text{S}\cdot(2\cdot l + 2\cdot l) + 2\cdot S\cdot l\right) = \omega\cdot 6\cdot S\cdot l$$

$$\text{W} = 6\cdot 23\cdot 12\cdot 10^{-4}\cdot 0.1 = 16.56\left[\text{mVAs}\right]$$

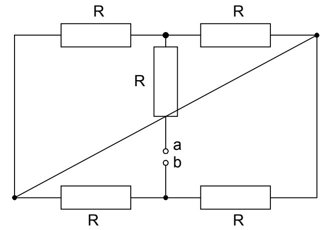
Istosmjerni krugovi

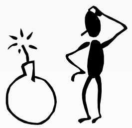
- Ekvivalenti električni otpor.
- Ohmov zakon.
- I Kirchhoffov zakon.
- II Kirchhoffov zakon.
- Pad napona.
- Jednostavne mreže.
- Realni naponski izvor.
- Potencijal u istosmjernoj mreži.



1. zadatak

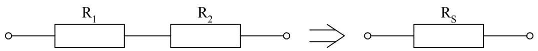
Odredite ukupni otpor između točaka a i b:





Uvodni pojmovi

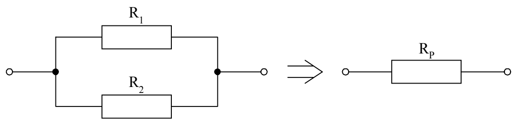
- Ekvivalentan otpor serijskog spoja otpora:



$$R_S = R_1 + R_2$$

$$R_S = \sum_{i=1}^{n} R_i$$ **Opći slučaj**

- Ekvivalentan otpor paralelnog spoja otpora:

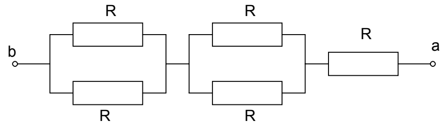


$$\frac{1}{R_P} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R_P} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}$$ **Opći slučaj**

Rješenje zadatka

- Zadana mreža može se prikazati na sljedeći način:



- Ukupni otpor R_{ab} jednak je:

$$R_{\mathrm{ab}} = R \| R + R \| R + R$$

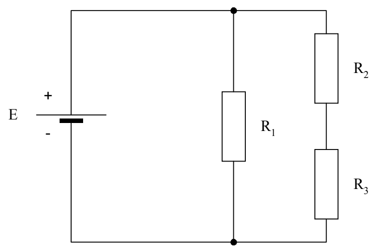
$$R_{\mathrm{ab}} = \frac{R \cdot R}{R + R} + \frac{R \cdot R}{R + R} + R = \frac{R}{2} + \frac{R}{2} + R$$

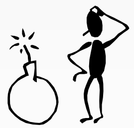
$$R_{\mathrm{ab}} = 2 \cdot R$$

2. zadatak

Za zadani strujni krug potrebno je odrediti sve struje koje teku u krugu te ukupan otpor kojim je opterećen izvor napajanja. Zadano je:

- $R_1 = 10$ [Ω]
- $R_2 = 4$ [Ω]
- $R_3 = 8$ [Ω]
- E = 12 [V]

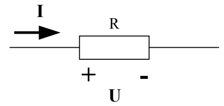




Uvodni pojmovi

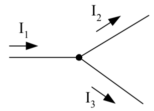
- Ohmov zakon:

$$I = \frac{U}{R}\ [\mathrm{A}]$$



- I Kirchhoffov zakon:

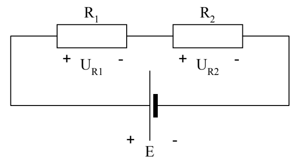
$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0$$



$I_1 - I_2 - I_3 = 0$

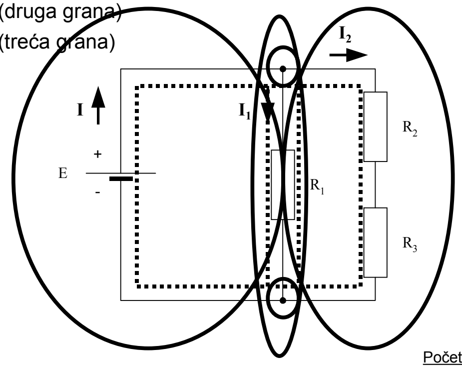
- II Kirchhoffov zakon:

$$\sum_{i=1}^{n} U_i = 0$$

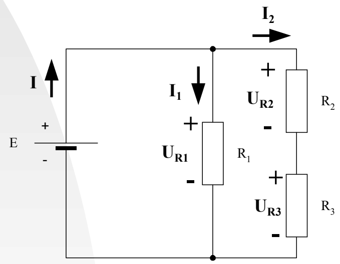


$E - U_{R1} - U_{R2} = 0$

- Zadani strujni krug sastoji se od:
  - tri grane
  - dva čvora
  - tri petlje
- U svakoj od navedenih grana teče struja:
  - I (prva grana)
  - I_1 (druga grana)
  - I_2 (treća grana)



- Postupak rješavanja zadatka sastoji se od nekoliko koraka:
  - Određuju se struje koje teku u strujnom krugu, pretpostavljaju se i ucrtavaju njihovi smjerovi te se na temelju njih definiraju padovi napona na pojedinim otporima.



  - Raspisuje se ($n_č$-1) jednadžbi I Kirchhoffovog zakona.

$$I - I_1 - I_2 = 0$$

  - Raspisuje se (n_P-1) jednadžbi II Kirchhoffovog zakona.

$$E - U_{R1} = 0$$
$$U_{R1} - U_{R2} - U_{R3} = 0$$

  - Rješava se dobiveni sustav jednadžbi.

$$I - I_1 - I_2 = 0$$
$$E - I_1 \cdot R_1 = 0$$
$$I_1 \cdot R_1 - I_2 \cdot R_2 - I_2 \cdot R_3 = 0$$

- Postupak rješavanja (radi se o jednostavnom sustavu):

$$E - I_1 \cdot R_1 = 0$$
$$\Downarrow$$
$$I_1 = \frac{E}{R_1} = \frac{12}{10} = 1.2 \text{ [A]}$$
$$I_1 \cdot R_1 - I_2 \cdot R_2 - I_2 \cdot R_3 = 0$$
$$\Downarrow$$
$$I_2 = \frac{I_1 \cdot R_1}{R_1 + R_2} = \frac{1.2 \cdot 10}{4+8} = 1 \text{ [A]}$$
$$I - I_1 - I_2 = 0$$
$$\Downarrow$$
$$I = I_1 + I_2 = 1.2 + 1.0 = 2.2 \text{ [A]}$$

- Ukupni otpor kojim je opterećen izvor napajanja:
  - može se izračunati kao ekvivalentni otpor kombinacije priključenih otpora (R_1, R_2, R_3):

$$R = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_{23}}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + R_3}\right)^{-1}$$

$$R = \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{4+8}\right)^{-1} = 5.45 \text{ [}\Omega\text{]}$$

  - ili jednostavnije kao kvocijent napona izvora i struje koju taj izvor daje:

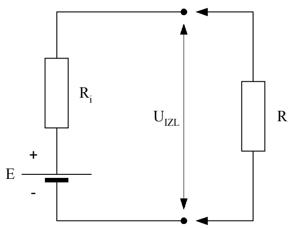
$$R = \frac{E}{I} = \frac{12}{2.2} = 5.45 \text{ [}\Omega\text{]}$$

3. zadatak

Potrebno je odrediti parametre realnog naponskog izvora ako je poznato da priključenjem trošila na njegove izlazne stezaljke izlazni napon iznosi:

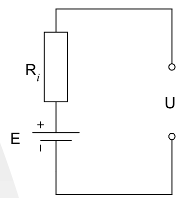
- U_{IZL} = 12 [V] pri opterećenju R = 20 [Ω]
- U_{IZL} = 10 [V] pri opterećenju R = 10 [Ω]

Nacrtajte izlaznu karakteristiku tog izvora i u nju ucrtajte navedene točke.

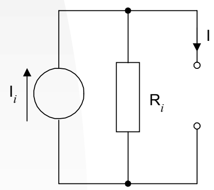


Uvodni pojmovi

- Realni naponski izvor:



- Realni strujni izvor:



- Napon na stezaljkama realnog naponskog izvora ovisi o priključenom otporu trošila (otpor određuje struju I):

$$U = E - I \cdot R_i$$

- Struja koju daje realni naponski izvor ovisi o spojenom trošilu R.

$$I = \frac{E}{R_i + R}$$

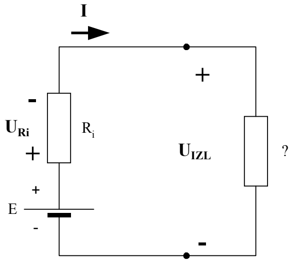
- Struju koju daje realni strujni izvor u mrežu ovisi o otporu trošila.

$$I = I_i \frac{R_i}{R_i + R}$$

- Napon na stezaljkama izvora ovisi o trošilu.

$$U = I \cdot R = I_i \frac{R_i \cdot R}{R_i + R}$$

- Kada se na realni naponski izvor priključi otpor u krugu poteče struja definiranog smjera te se na temelju smjera struje definiraju i odgovarajući padovi napona na otporima:



- Jednadžba I Kirchhoffovog zakona:

$$I = I_{Ri} = I_R$$

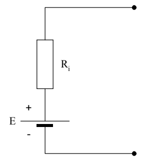
- Jednadžba II Kirchhoffovog zakona:

$$E - U_{Ri} - U_{IZL} = 0$$

- Jednadžba izlaznog napona:

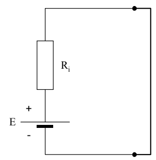
$$U_{IZL} = E - U_{Ri} = E - I \cdot R_i$$
$$\left(U_{IZL} = I \cdot R\right)$$

- Prazni hod izvora:



$$R \Rightarrow \infty$$
$$I = I_{PH} = 0\,[\mathrm{A}]$$
$$U_{IZL} = E - I \cdot R_i = E$$

- Kratki spoj izvora:

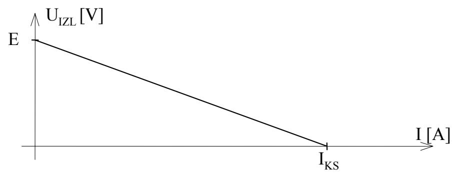


$$R \Rightarrow 0$$
$$U_{IZL} = U_{KS} = 0\,[\mathrm{V}]$$
$$U_{IZL} = E - I \cdot R_i = 0\,[\mathrm{V}]$$
$$I = I_{KS} = \frac{E}{R_i}$$

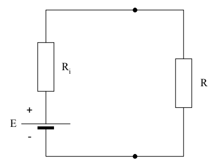
- Karakteristika izvora:
  - Ovisnost izlaznog napona o opterećenju (izlaznoj struji)

$$U_{IZL} = f(I)$$
$$U_{IZL} = E - I \cdot R_i$$ Jednadžba pravca!

  - Sjecište s ordinatom - prazni hod (I = 0[A], U_{IZL} = E)
  - Sjecište s apscisom - kratki spoj (U_{IZL} =0 [V], I = I_{KS})



- Opterećenje izvora:



$$U_{IZL} = E - I \cdot R_i; \quad I = \frac{E}{R_i + R}$$

$$U_{IZL} = E - \frac{E}{R_i + R} \cdot R_i = E \cdot \frac{R}{R_i + R}$$

- U našem slučaju zadatak se svodi na dvije jednadžbe s dvije nepoznanice, E i R_i:

$$U_{IZL1} = E \cdot \frac{R_1}{R_i + R_1}$$

$$U_{IZL2} = E \cdot \frac{R_2}{R_i + R_2}$$

- Rješenje:

$$E = U_{IZL1} \cdot \frac{R_i + R_1}{R_1}$$

$$E = U_{IZL2} \cdot \frac{R_i + R_2}{R_2}$$

$$U_{IZL1} \cdot \frac{R_i + R_1}{R_1} = U_{IZL2} \cdot \frac{R_i + R_2}{R_2}$$

$$R_i = \frac{U_{IZL2} - U_{IZL1}}{\frac{U_{IZL1}}{R_1} - \frac{U_{IZL2}}{R_2}} = \frac{10-12}{\frac{12}{20} - \frac{10}{10}} = \frac{-2 \cdot 20}{-8} = 5\ [\Omega]$$

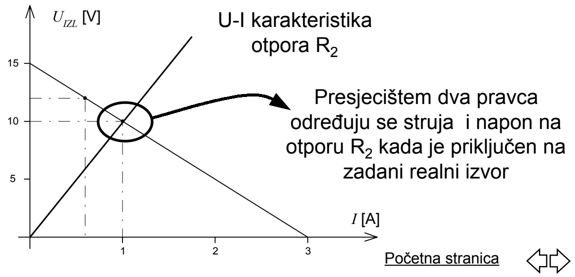
- Poznavajući vrijednost unutarnjeg otpora može se izračunati vrijednost napona E:

$$E = U_{IZL1} \cdot \frac{R_i + R_1}{R_1}$$

$$E = 12 \cdot \frac{5+20}{20} = 15\,[\mathrm{V}]$$

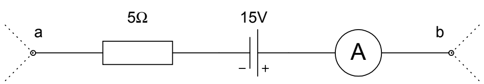
- Da bi se dobila karakteristika potrebno je još izračunati struju kratkog spoja:

$$I_{KS} = \frac{E}{R_i} = \frac{15}{5} = 3\,[\mathrm{A}]$$



4. zadatak

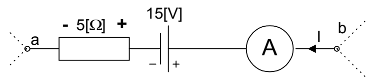
Ako su čvorovi a i b prema slici na potencijalima φ_a = 10[V] i φ_b = 30[V], odredite struju koju mjeri ampermetar zanemarivog otpora.



Rješenje zadatka

- Na slici je zadana grana, dio mreže kroz koju protječe struja I. Uz pretpostavljeni smjer struje pad napona na otporu od 5Ω ima prikazani polaritet:

Za ovako definiran smjer struje vrijedi:

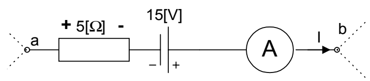


$$\varphi_a = \varphi_b - 15 - I \cdot 5$$

$$I = \frac{\varphi_b - \varphi_a - 15}{5} = \frac{30-10-15}{5} = 1\ [\mathrm{A}]$$

smjer struje **poklapa** se s pretpostavljenim smjerom struje

Za suprotno definiran smjer struje vrijedi:



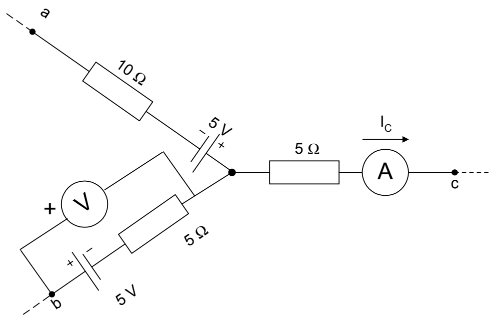
$$\varphi_a = \varphi_b - 15 + I \cdot 5$$

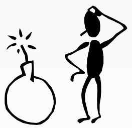
$$I = \frac{\varphi_a - \varphi_b + 15}{5} = \frac{10-30+15}{5} = -1\ [\mathrm{A}]$$

smjer struje **ne poklapa** se s pretpostavljenim smjerom struje

5. zadatak

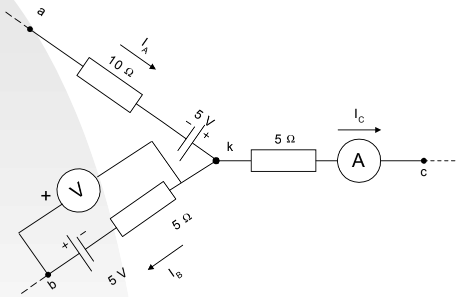
U dijelu neke mreže prikazane na slici idealni instrumenti mjere struju $I_{Ampermetra}$=1[A] i napon $U_{Voltmetra}$= 10[V] označenog smjera odnosno polariteta. Odredite napon U_{ca}.





Rješenje zadatka

- Uz pretpostavljene smjerove struja i označenu točku k vrijedi sljedeće:



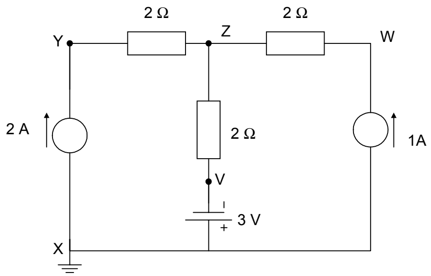
$$\varphi_k = \varphi_b - 5 + I_B \cdot 5$$
$$\varphi_k - \varphi_b = -10 = -5 + I_B \cdot 5$$
$$-10 + 5 = I_B \cdot 5$$
$$I_B = \frac{-10+5}{5} = -1\ [\mathrm{A}]$$
$$I_A = I_B + I_C = (-1) + 2 = 1\ [\mathrm{A}]$$

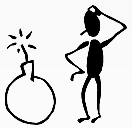
- Za napon U_{ca} vrijedi:

$$U_{ca} = \varphi_c - \varphi_a$$
$$\varphi_c = \varphi_a - I_A \cdot 10 + 5 - I_C \cdot 5 = \varphi_a - 1 \cdot 10 + 5 - 2 \cdot 5$$
$$U_{ca} = -15\ [\mathrm{V}]$$

6. zadatak

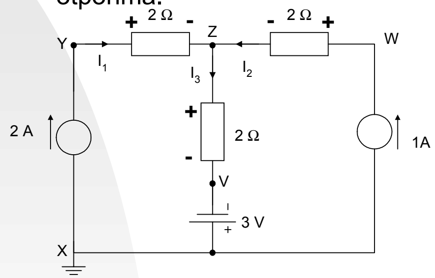
Odredite napon U_{YV}.





Rješenje zadatka

- Strujni izvori određuju struju u granama u kojima se nalaze. Sa tim strujama su povezani i padovi napona na otporima.



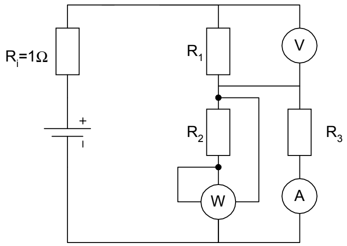
Napon U_{YV} određujemo tako da prvo odredimo potencijale točaka V i Y:

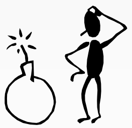
$$U_{YV} = \varphi_Y - \varphi_V$$
$$\varphi_V = -3\ [\mathrm{V}]$$

$$\varphi_Y = -3 + I_3 \cdot 2 + I_1 \cdot 2 = -3 + (I_1 + I_2) \cdot 2 + I_1 \cdot 2$$
$$\varphi_Y = -3 + (2+1) \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 7\ [\mathrm{V}]$$
$$U_{YV} = \varphi_Y - \varphi_V = 7 - (-3) = 10\ [\mathrm{V}]$$

7. zadatak

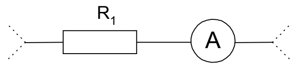
Instrumenti uključeni u mrežu prema slici mjere U_V = 15 [V], I_A = 2 [A] i P= 5 [W]. Ako je poznato da je R_2 = 5 [Ω] i R_i = 1[Ω] odredite snagu izvora P_i.





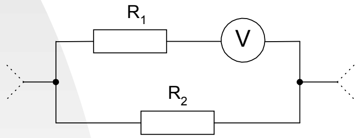
Uvodni pojmovi

- Za idealne instrumente vrijedi:



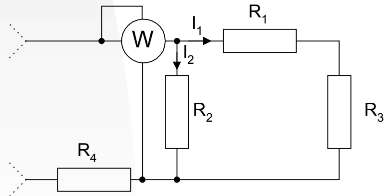
Ampermetar mjeri struju u grani u kojoj se nalazi, a pad napona na stezaljkama ampermetra je jednak nuli (R_A<<).

$$I_A = I_{R1}$$
$$U_A = 0$$



Voltmetar mjeri napon između dviju stezaljki na koje je spojen, a struja u grani u kojoj se nalazi voltmetar jednaka je nuli (R_V>>).

$$I_V = I_{R1} = 0$$
$$U_V = U_{R2}$$

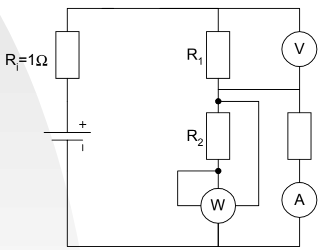


Watmetar mjeri umnožak $U_W \cdot I_W$, odnosno umožak struje koja prolazi njegovim strujnim stezaljkama i napona na koji su spojene njegove naponske stezaljke.

$$I_W = I_1 + I_2$$
$$U_W = U_{R2}$$

Rješenje zadatka

- Iz mreže je vidljivo da wattmetar mjeri snagu na otporu R_2. Pomoću te snage moguće je odrediti struju I_2 i napon U_2.



$$P = I_2^2 \cdot R_2 = \frac{U_2^2}{R_2} = U_2 \cdot I_2$$

$$I_2 = \sqrt{\frac{P}{R_2}} = \sqrt{\frac{5}{5}} = 1 \ [\mathrm{A}]$$

$$U_2 = \sqrt{P \cdot R_2} = \sqrt{5 \cdot 5} = 5 \ [\mathrm{V}]$$

- Na otporu R_3 vlada isti napon kao i na R_2 pa se može odrediti snaga P_3:

$$U_2 = U_3 = 5 \ [V]; \quad I_3 = I_A = 2 \ [\mathrm{A}]$$

$$P_3 = U_3 \cdot I_3 = 5 \cdot 2 = 10 \ [\mathrm{W}]$$

- Iz poznatog napona na otporu R_1 te ukupne struje u krugu mogu se odrediti snage na otporima R_1 i R_i:

$$U_1 = U_V = 15 \ [\mathrm{V}]$$

$$I_1 = I_i = I_2 + I_3 = 1 + 2 = 3 \ [A]$$

$$P_1 = U_1 \cdot I_1 = 3 \cdot 15 = 45 \ [\mathrm{W}]$$

$$P_i = I_i^2 \cdot R_i = 3^2 \cdot 1 = 9 \ [\mathrm{W}]$$

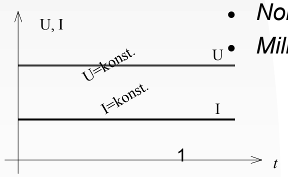
- Ukupna snaga izvora:

$$P_{izvora} = P_i + P_1 + P_2 + P_3 = 9 + 45 + 5 + 10 = 69 \ [\mathrm{W}]$$

Istosmjerni krugovi

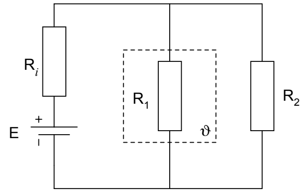
- Prilagođenje na maksimalnu snagu.
- Rješavanje linearnih mreža:
  - Direktna primjena Kirchhoffovih zakona.
  - Metoda konturnih struja (metoda struja petlji).
  - Theveninov teorem.

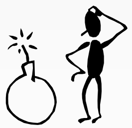
  - *Metoda napona čvorova*
  - *Metoda superpozicije*
  - *Nortonov teorem*
  - *Millmanov teorem*



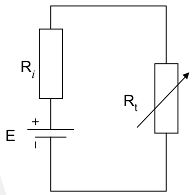
1. zadatak

Otpor R_1 u kombinaciji prema slici nalazi se u posudi u kojoj vlada promjenjiva temperatura. Pri temperaturi ϑ = 20°C, R_1 = 500 [Ω], R_2 = 300[Ω]. Pri kojoj temperaturi u posudi će paralelna kombinacija otpora R_1 i R_2 primiti maksimalnu snagu iz izvora E = 200 [V] i R_i = 200 [Ω]. Izračunajte kolika je ta snaga ako je α = 0.0025 C°$^{-1}$.





- Na trošilu će se trošiti maksimalna snaga u slučaju kada je otpor čitavog trošila jednak unutrašnjem otporu izvora.



$$P_{\mathrm{MAX}} \;\Rightarrow\; R_t = R_i = 200\ [\Omega]$$

$$R_t = R_1 \| R_2$$

$$\frac{1}{R_t} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$R_1 = R_{1(20^\circ C)} \cdot (1 + \alpha \cdot (\vartheta - \vartheta_0))$$

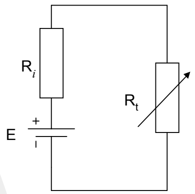
- Da bi se na trošilu disipirala maksimalna snaga R_1 iznosi:

$$\frac{1}{200} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{300} \;\Rightarrow\; R_1 = 600\ [\Omega]$$

- Otpor R_1 ima vrijednost od 600 [Ω] pri temperaturi:

$$600 = 500 \cdot (1 + 0.0025 \cdot (\vartheta - 20)) \;\Rightarrow\; \vartheta = 100^\circ C$$

- Maksimalna snaga može se sada izračunati na sljedeći način:



$$R_{\mathrm{ukupno}} = R_t + R_i = 400\ [\Omega]$$

$$I = \frac{E}{R_{ukupno}} = \frac{200}{400} = 0.5\ [\mathrm{A}]$$

$$P_{\mathrm{MAX}} = I^2 \cdot R_t = 0.5^2 \cdot 200 = 50\ [\mathrm{W}]$$

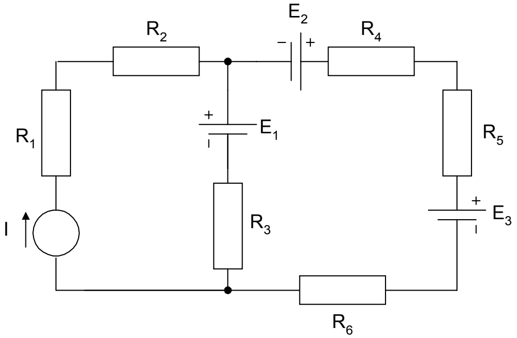
- Korisnost je definirana kao omjer korisne snage (snaga koja se troši na trošilu) i ukupne snage koju daje izvor. Snaga koja se disipira na unutrašnjem otporu realnog naponskog izvora predstavlja gubitak.

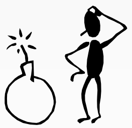
$$\eta = \frac{P_t}{P_i} = \frac{I^2 \cdot R}{E \cdot I} = \frac{50}{200 \cdot 0.5} = 0.5 = 50\%$$

2. zadatak

Odredite struje koje teku u svim granama mreže na slici i napon na stezaljkama strujnog izvora. Zadano:

- R_1 = 1 [Ω]
- R_2 = 1 [Ω]
- R_3 = 2 [Ω]
- R_4 = 4 [Ω]
- R_5 = 3 [Ω]
- R_6 = 1 [Ω]
- E_1 = 2 [V]
- E_2 = 1 [V]
- E_3 = 3 [V]
- I = 1 [A]





- Direktna primjena Kirchhoffovih zakona u analizi iole složenijih mreža postaje vrlo komplicirana zbog velikog broja jednadžbi koje treba riješiti.
- Zbog toga je razvijena metoda konturnih struja koja postupak analize razlaže na dva koraka te se tako na umjetan način smanjuje veličina sustava jednadžbi koji se rješava.
- U osnovnim crtama taj se postupak sastoji od sljedećih koraka:

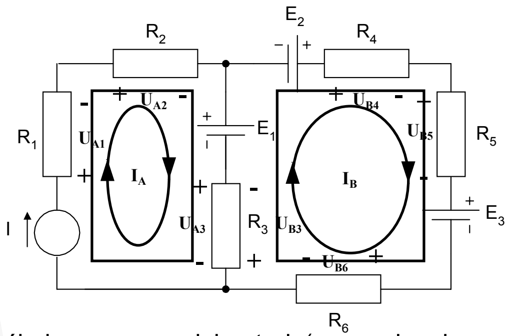
1. korak

1. Definiraju se neovisne petlje (konture) u mreži.
2. Za svaku petlju se definiraju struje koje kroz nju protječu.
3. Raspisuju se jednadžbe II Kirchhoffovog zakona za definirane petlje čime se dobiva odgovarajući sustav jednadžbi.
4. Rješavanjem tog sustava jednadžbi dolazi se do vrijednosti konturnih struja.

2. korak

5. Raspisuju se i rješavaju jednadžbe koje povezuju konturne struje i struje koje teku u pojedinim granama zadanog strujnog kruga.

- Definiranje neovisnih petlji (kontura) i smjerova konturnih struja, te odgovarajućih padova napona (koraci #1 i #2):



- Budući da se u prvoj konturi (u neovisnoj grani) nalazi strujni izvor vrijedi:

$$I_A = I$$

- Jednadžba II Kirchhoffovog zakona za *2. konturu* :

$$-I_A \cdot R_3 + I_B \cdot R_3 + I_B \cdot R_6 + I_B \cdot R_5 + I_B \cdot R_4 - E_1 + E_3 - E_2 = 0$$

- Rješenjem ovog sustava jednadžbi dobivaju se vrijednosti konturnih struja (korak #4):

$$I_B \cdot R_3 + I_B \cdot R_6 + I_B \cdot R_5 + I_B \cdot R_4 = I_A \cdot R_3 + E_1 - E_3 + E_2$$

$$I_B = \frac{I_A \cdot R_3 + E_1 - E_3 + E_2}{R_3 + R_6 + R_5 + R_4}$$

- Kada se u dobivene izraze uvrste brojevi:

$$I_A = I = 1[A]$$

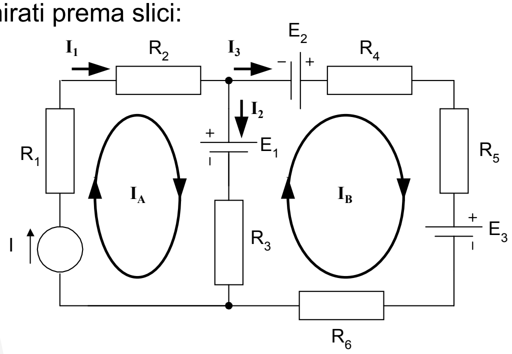
$$I_B = \frac{1 \cdot 2 + 2 - 3 + 1}{2 + 1 + 3 + 4} = 0.2\ [A]$$

$$I_A = 1[A]$$

$$I_B = 0.2[A]$$

- U posljednjem je koraku potrebno konturne struje povezati sa stvarnim strujama koje teku u krugu (korak #5).

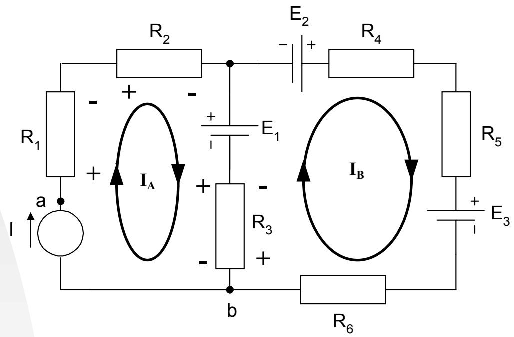
- Smjerovi struja koje teku u pojedinim granama mogu se definirati prema slici:



- Iz slike je vidljiva veza između konturnih struja i struja grana:

$$I_1 = I_A = 1\,[\mathrm{A}] \qquad I_3 = I_B = 0.2\,[\mathrm{A}] \qquad I_2 = I_A - I_B = 1 - 0.2 = 0.8\,[\mathrm{A}]$$

- Napon na stezaljkama strujnog izvora, U_{ab}:



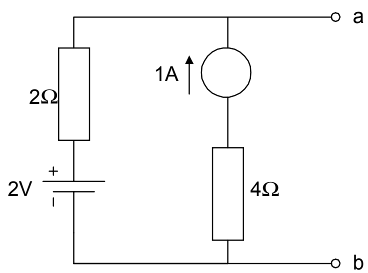
$$U_{ab} = I_A \cdot R_3 - I_B \cdot R_3 + E_1 + I_A \cdot R_2 + I_A \cdot R_1$$

$$U_{ab} = 1 \cdot 2 - 0.2 \cdot 2 + 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1$$

$$U_{ab} = 5.6\ [\mathrm{V}]$$

3. zadatak

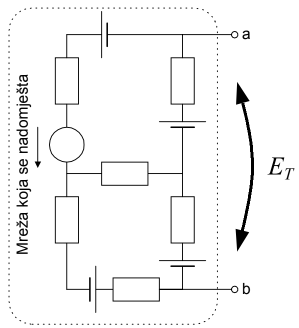
Nadomjestite prikazanu mrežu Theveninovim izvorom s obzirom na stezaljke a i b.



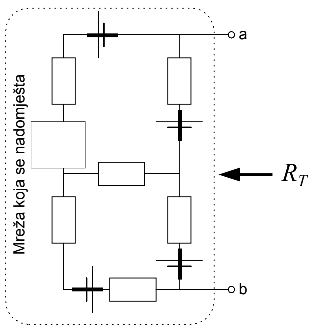
- Bilo koji dio aktivne linearne mreže može se nadomjestiti s obzirom na dvije stezaljke (a i b) realnim naponskim izvorom, čiji unutarnji napon E_T (Theveninov napon) i unutarnji otpor R_T (Theveninov otpor) određujemo iz zadane mreže:

⇒ **Theveninov napon E_T** određujemo tako da izračunamo ili izmjerimo napon U_{ab0} na otvorenim stezaljkama a-b linearne mreže.

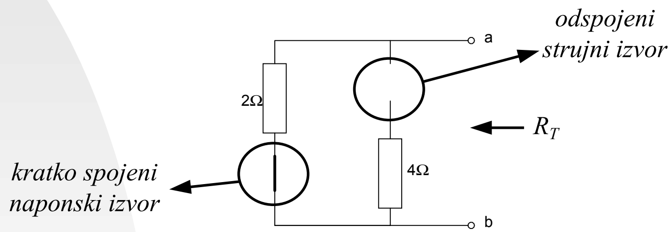
!Ako je $U_{ab0} > 0$, E_T ima plus prema "a"
!Ako je $U_{ab0} < 0$, E_T ima plus prema "b"



⇛ **Theveninov otpor R_T** odredimo tako da kratko spojimo sve naponske izvore i isključimo sve strujne izvore te onda izračunamo ili izmjerimo ukupni otpor između točaka a i b.

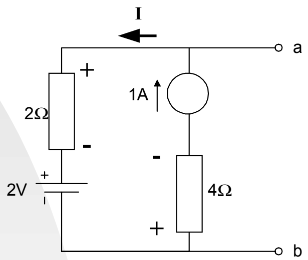


- Određivanje parametara nadomjesnog realnog naponskog izvora.
- Određivanje R_T:



$$R_T = 2\ [\Omega]$$

- Određivanje napona Thevenina:



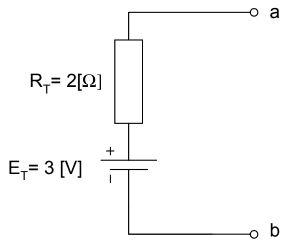
U zatvorenoj konturi teče struja koju diktira strujni izvor.

Uz ovakav smjer struje padovi napona su:

- Theveninov napon onda se može odrediti kao:

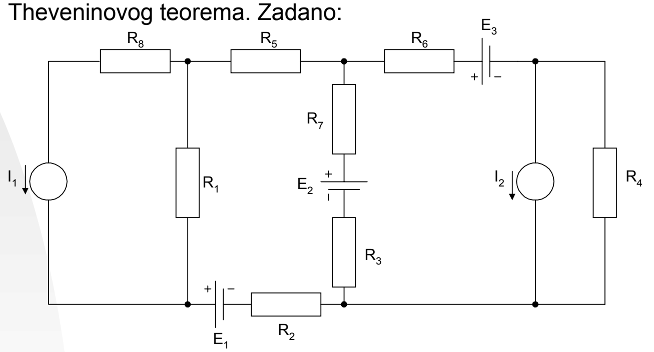
$$E_T = U_{ab0} = +2 + 0.5 \cdot 2 = +3\ [\mathrm{V}]$$

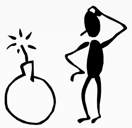
- Theveninov nadomjesni spoj:



4. zadatak

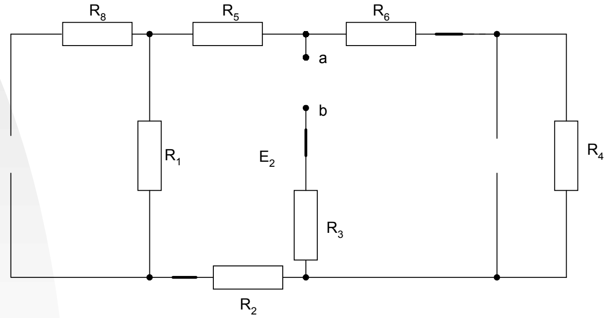
U mreži prema slici odredite struju kroz otpor R_7 primjenom Theveninovog teorema. Zadano:





- $R_1 = R_2 = 25$ [Ω]
- $R_3 = R_4 = 30$ [Ω]
- $R_5 = R_7 = 20$ [Ω]
- $R_6 = 40$ [Ω]
- $R_8 = 10$ [Ω]
- $E_1 = 25$ [V]
- $E_2 = 10$ [V]
- $E_3 = 11$ [V]
- $I_1 = I_2 = 200$[mA]

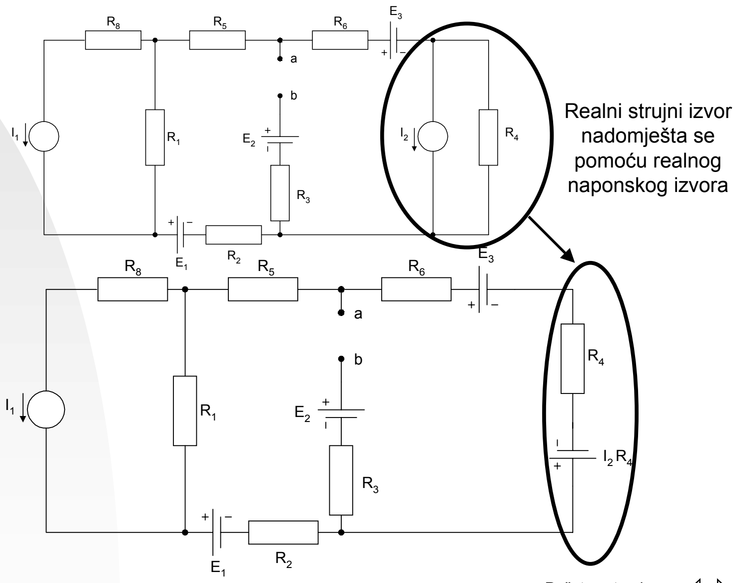
- Da bi se odredila struja kroz otpor R_7, potrebno je otpor R_7 isključiti iz mreže a ostatak mreže nadomjestiti pomoću realnog naponskog izvora.
- Određivanje R_T:



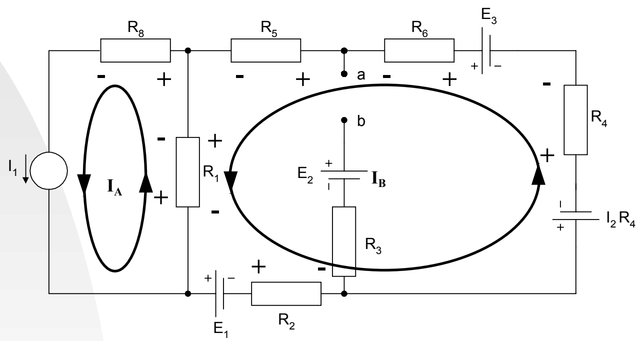
$$R_T = (R_5+R_1+R_2)\,\|\,(R_4+R_6)+R_3$$

$$R_T = 57.4\ [\Omega]$$

- Određivanje E_T, odnosno napona U_{ab0}:



- Napon U_{ab0} određujemo metodom konturnih struja koje određuju padove napona prikazanih na slici.



- Određivanje I_A i I_B:

$$I_A = I_1 = 200\ [\text{mA}]$$

$$-I_A\cdot R_1 + I_B\cdot(R_1+R_5+R_6+R_4+R_2) - E_3 + I_2\cdot R_4 + E_1 = 0$$

$$I_B = -\frac{16}{115}\ [\text{A}]$$

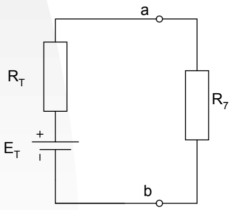
- Uvrštenjem u izraz za napon U_{ab0} dobivamo:

$$E_T = U_{ab0} = I_B \cdot (R_2 + R_1 + R_5) - I_A \cdot R_2 + E_1 - E_2$$

$$E_T = -\frac{16}{115} \cdot (10 + 10 + 20) - 0.2 \cdot 10 + 25 - 10$$

$$E_T = 7.74 \ [\mathrm{V}]$$

- Nakon što su se odredili elementi Theveninovog nadomjesnog spoja cijela mreža se može prikazati na sljedeći način:



Struja koja teče u strujnom krugu iznosi:

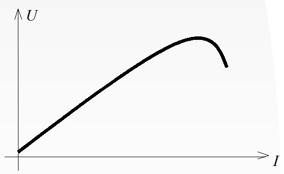
$$I_7 = \frac{E_T}{R_T + R_7}$$

$$I_7 = \frac{7.74}{57.74 + 20} = 100 \ [\mathrm{mA}]$$

Početna stranica

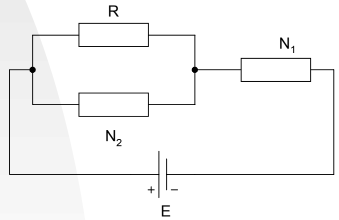
Istosmjerni krugovi

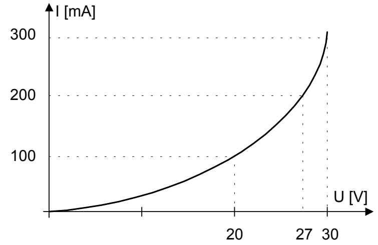
- Nelinearan element u mreži.

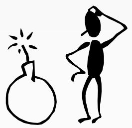


1. zadatak

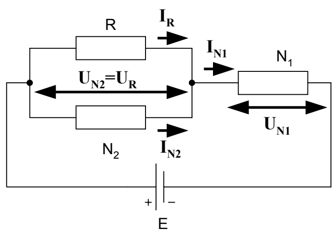
U mreži prema slici kroz otpornik R = 200 [Ω] teče struja I_R = 100 [mA]. Odredite snagu izvora E ako nelinearni elementi N_1 i N_2 imaju istu V-A karakteristiku prikazanu slikom.







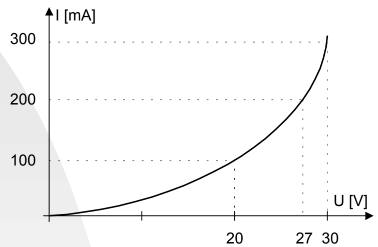
- Za mrežu s nelinearnim elementima vrijede Kirchhoffovi zakoni pa se za prikazanu mrežu mogu odrediti struje i naponi na pojedinim elementima:



- Budući da je poznata struja koja teče kroz otpor R može se odrediti napon na otporu kao i napon na nelinearnom elementu N_2:

$$U_R = I_R \cdot R = 100 \cdot 10^{-3} \cdot 200 = 20\ [\mathrm{V}]$$
$$U_{N2} = U_R = 20\ [\mathrm{V}]$$

- Iz U-I karakteristike nelinearnog elementa može se odrediti struja kroz nelinearni element N_2.



$$I_{N2} = 100\ [\mathrm{mA}]$$

I Kirchhoffov zakon za čvor:

$$I_{N1} = I_R + I_{N2} = 100 + 100 = 200\ [\mathrm{mA}]$$

- Iz U-I karakteristike nelinearnog elementa može se odrediti napon na nelinearnom elementu N_1.

$$U_{N1} = 27\ [\mathrm{V}]$$

- Napon izvora:

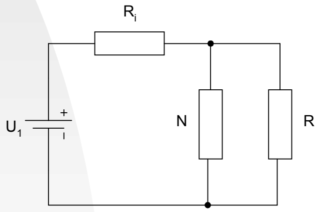
$$E = U_R + U_{N1} = 20 + 27 = 47\ [\mathrm{V}]$$

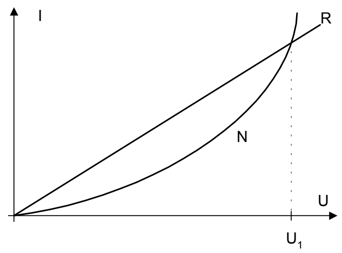
- Snaga izvora:

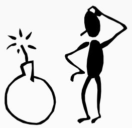
$$P = E \cdot I_{N1} = 47 \cdot 200 \cdot 10^{-3} = 9.4\ [\mathrm{W}]$$

2. zadatak

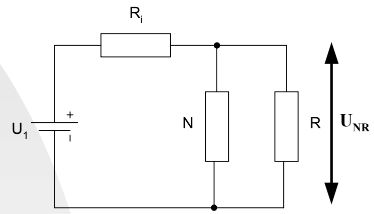
U strujnom krugu prema slici na otporu R troši se snaga P_R, a na nelinearnom elementu N snaga P_N. Odredite kako se odnose te snage (P_R je veća/jednaka/manja od P_N).





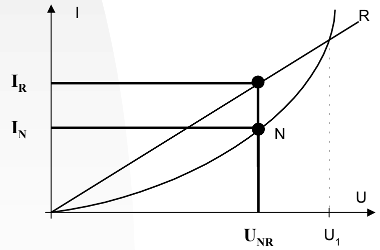


- Na nelinearnom elementu i otporu vlada isti napon budući da su spojeni u paralelu.



$$U_N = U_R = U_{NR}$$

Napon na paraleli manji je od napona izvora U_1 budući da postoji pad napona na R_i.



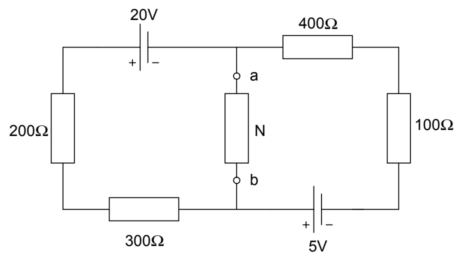
Ako se to ucrta na prikazani graf slijedi:

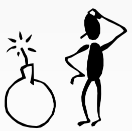
$$I_N < I_R$$
$$P_N < P_R$$

3. zadatak

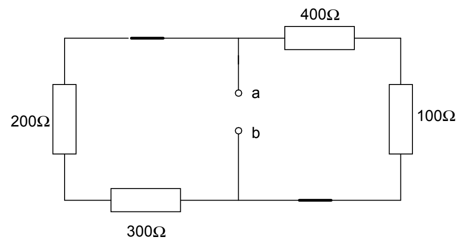
Nelinearni element N s voltamperskom karakteristikom danom u tabelarnom obliku uključen je u mrežu prikazanu slikom. Ako je pozitivan napon na elementu definiran kada je napon $U_{ab}>0$, a pozitivna struja kao struja teče od a prema b, odredite rad koji se izvrši na N u 45 minuta. Odredite struje koje teku kroz otpore od 100 [Ω] i 300[Ω].

U,V	-6.3	-6.1	-5.9	-5.7	-5.5	-5	...	0	0.1	0.2	0.4	0.6
I,mA	-35	-7	-1	-0.3	0	0	...	0	1	5	22	66



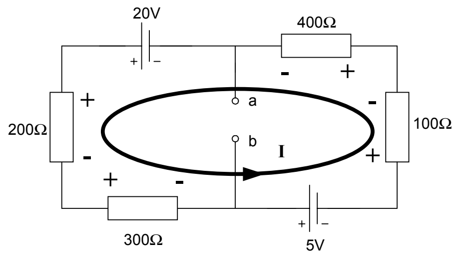


- Nelinearni element odspojimo, a ostatak mreže nadomjestimo pomoću Thevenina.
- Otpor R_T:



$$R_T = (100+400) \| (200+300)$$
$$R_T = 250\,[\Omega]$$

- Napon E_T:



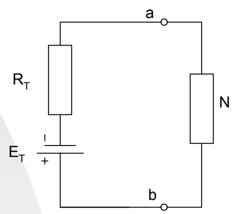
- Pretpostavimo smjer struje koja teče u krugu i s tim vezane padove napona.
- Pomoću II Kirchhoffovog zakona odredi se struja I:

$$20 - 5 = I \cdot (100 + 400 + 200 + 300)$$
$$I = 15\,[\text{mA}]$$

- Uz poznatu struju I može se odrediti napon E_T (U_{ab0}) :

$$E_{\text{T}} = -5 - I \cdot 100 - I \cdot 400 = I \cdot 300 + I \cdot 200 - 20$$
$$E_{\text{T}} = U_{ab0} = -12.5\,[\text{V}]$$

- Cijela mreža se sada svodi na jednostavnu mrežu:



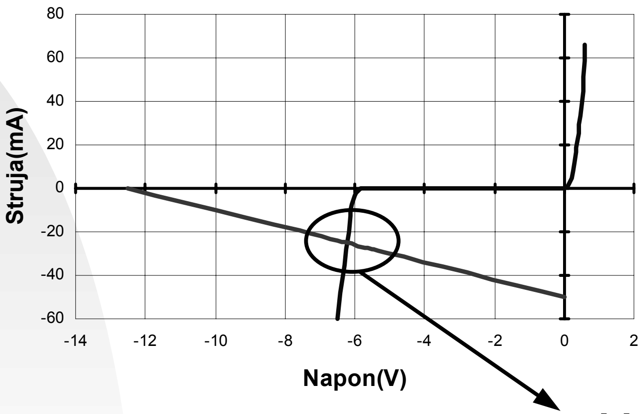
Iz prikazane mreže je vidljivo da struja teče od b prema a i da će napon U_{ab} biti manji od nula.

- Vanjska karakteristika realnog naponskog izvora:

$$E_{\text{T}} = U_{\text{ab0}} = -12.5\,[\text{V}]$$
$$I_{\text{KS}} = \frac{-12.5}{250} = -50\,[\text{mA}]$$

- U-I karakteristika nelinearnog elementa zadana je tabelarno.

- Grafički prikazane U-I karakteristike:



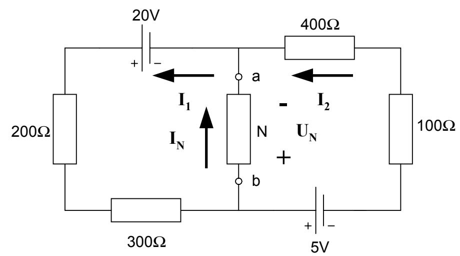
Presjecište krivulja određuje struju i napon na N:

$$U_{\text{N}} = -6.2\,[\text{V}]$$
$$I_{\text{N}} = -25\,[\text{mA}]$$

Rad:

$$A = U \cdot I \cdot t = (-6.2) \cdot (-25 \cdot 10^{-3}) \cdot 45 \cdot 60$$
$$A = 418.5\,[\text{Ws}]$$

- Iz izračunatih vrijednosti vidljivo je da struja teče od b prema a i da je potencijal točke b viši nego točke a:



- Struje u ostatku mreže:

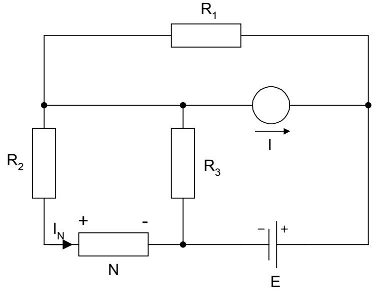
$$U_{\text{ab}} = U_{\text{N}} = -6.2 = I_1 \cdot 300 + I_1 \cdot 200 - 20$$
$$U_{\text{ab}} = U_{\text{N}} = -6.2 = -5 - I_2 \cdot 100 - I_2 \cdot 400$$

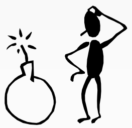
$$I_1 = 27.6\,[\text{mA}]; \quad I_2 = 2.4\,[\text{mA}]$$

4. zadatak

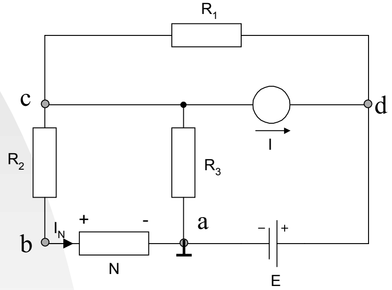
Za mrežu prema slici odredite iznos struje I strujnog izvora da bi kroz nelinearni element tekla struja I_N= 4 [mA] označenog smjera. U-I karakteristika zadana je izrazom $I_N = k \cdot U^{3/2}$, gdje je k = 0.5 $\cdot 10^{-6}$ [$AV^{-3/2}$]. Zadano:

- R_1 = 30 [kΩ]
- R_2 = 20 [kΩ]
- R_3 = 60 [kΩ]
- E = 900 [V]





- U mreži označimo čvorove, a čvor a kao točku referentnog potencijala:



$$\varphi_a = 0\ [\text{V}]$$

- Potencijal točke d:

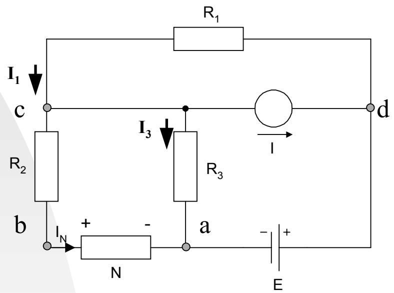
$$\varphi_d = \varphi_a + E = +900\,[\text{V}]$$

- Pomoću zadane struje I_N mogu se odrediti potencijali točaka b i c:

$$\varphi_b = \varphi_a + U_N = \varphi_c + \left(\frac{I_N}{k}\right)^{\frac{2}{3}} = 0 + \left(\frac{4\cdot 10^{-3}}{0.5\cdot 10^{-6}}\right)^{\frac{2}{3}} = +400\,[\text{V}]$$

$$\varphi_c = \varphi_b + I_N \cdot R_2 = 400 + 4\cdot 10^{-3}\cdot 20\cdot 10^{3} = +480\,[\text{V}]$$

- Uz označene smjerove struja, određujemo struje u pojedinim granama i struju strujnog izvora I:



- Potencijali svih točaka

$$\varphi_a = 0\ [\text{V}]$$
$$\varphi_b = +400\ [\text{V}]$$
$$\varphi_c = +480\ [\text{V}]$$
$$\varphi_d = +900\ [\text{V}]$$

$$\varphi_d - \varphi_c = R_1 \cdot I_1 \Rightarrow I_1 = \frac{\varphi_d - \varphi_c}{R_1}$$

$$\varphi_c - \varphi_a = R_3 \cdot I_3 \Rightarrow I_3 = \frac{\varphi_c - \varphi_a}{R_3}$$

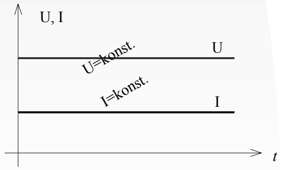
$$I_1 = I_N + I_3 + I$$

$$I = \frac{\varphi_d - \varphi_c}{R_1} - I_N - \frac{\varphi_c - \varphi_a}{R_3} = \frac{900-480}{30\cdot 10^3} - 4\cdot 10^{-3} - \frac{480-0}{60\cdot 10^3}$$

$$I = 14 - 4 - 8 = 2\,[\text{mA}]$$

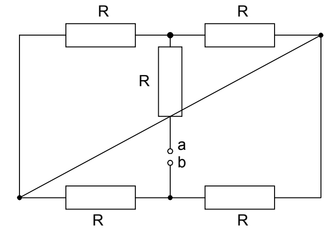
Istosmjerni krugovi

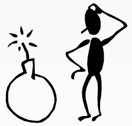
- Ekvivalenti električni otpor.
- Ohmov zakon.
- I Kirchhoffov zakon.
- II Kirchhoffov zakon.
- Pad napona.
- Jednostavne mreže.
- Realni naponski izvor.
- Potencijal u istosmjernoj mreži.



1. zadatak

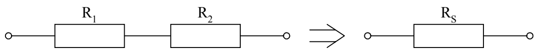
Odredite ukupni otpor između točaka a i b:





Uvodni pojmovi

- Ekvivalentan otpor serijskog spoja otpora:

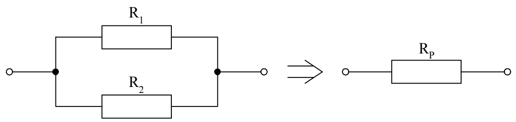


$$R_S = R_1 + R_2$$

$$R_S = \sum_{i=1}^{n} R_i$$

Opći slučaj

- Ekvivalentan otpor paralelnog spoja otpora:



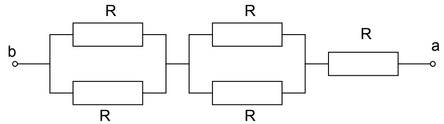
$$\frac{1}{R_P} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R_P} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}$$

Opći slučaj

Rješenje zadatka

- Zadana mreža može se prikazati na sljedeći način:



- Ukupni otpor R_{ab} jednak je:

$$R_{\mathrm{ab}} = R \| R + R \| R + R$$

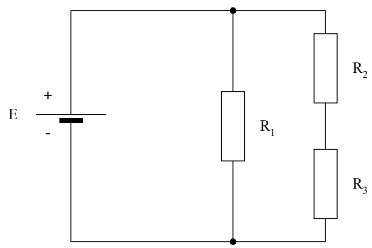
$$R_{\mathrm{ab}} = \frac{R \cdot R}{R + R} + \frac{R \cdot R}{R + R} + R = \frac{R}{2} + \frac{R}{2} + R$$

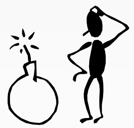
$$R_{\mathrm{ab}} = 2 \cdot R$$

2. zadatak

Za zadani strujni krug potrebno je odrediti sve struje koje teku u krugu te ukupan otpor kojim je opterećen izvor napajanja. Zadano je:

- $R_1 = 10$ [Ω]
- $R_2 = 4$ [Ω]
- $R_3 = 8$ [Ω]
- E = 12 [V]

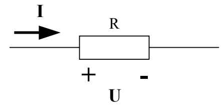




Uvodni pojmovi

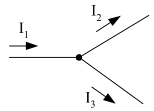
- Ohmov zakon:

$$I = \frac{U}{R}\ [\mathrm{A}]$$



- I Kirchhoffov zakon:

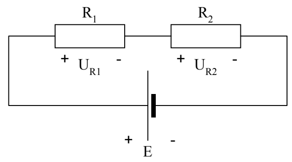
$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0$$



$I_1 - I_2 - I_3 = 0$

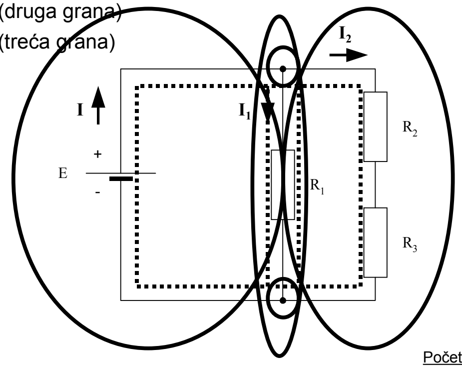
- II Kirchhoffov zakon:

$$\sum_{i=1}^{n} U_i = 0$$

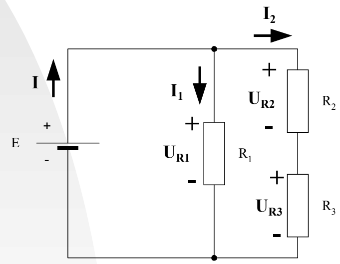


$E - U_{R1} - U_{R2} = 0$

- Zadani strujni krug sastoji se od:
  - tri grane
  - dva čvora
  - tri petlje
- U svakoj od navedenih grana teče struja:
  - I (prva grana)
  - I_1 (druga grana)
  - I_2 (treća grana)



- Postupak rješavanja zadatka sastoji se od nekoliko koraka:
  - Određuju se struje koje teku u strujnom krugu, pretpostavljaju se i ucrtavaju njihovi smjerovi te se na temelju njih definiraju padovi napona na pojedinim otporima.



  - Raspisuje se ($n_č$-1) jednadžbi I Kirchhoffovog zakona.

$$I - I_1 - I_2 = 0$$

  - Raspisuje se (n_P-1) jednadžbi II Kirchhoffovog zakona.

$$E - U_{R1} = 0$$
$$U_{R1} - U_{R2} - U_{R3} = 0$$

  - Rješava se dobiveni sustav jednadžbi.

$$I - I_1 - I_2 = 0$$
$$E - I_1 \cdot R_1 = 0$$
$$I_1 \cdot R_1 - I_2 \cdot R_2 - I_2 \cdot R_3 = 0$$

- Postupak rješavanja (radi se o jednostavnom sustavu):

$$E - I_1 \cdot R_1 = 0$$
$$\Downarrow$$
$$I_1 = \frac{E}{R_1} = \frac{12}{10} = 1.2\ [\mathrm{A}]$$
$$I_1 \cdot R_1 - I_2 \cdot R_2 - I_2 \cdot R_3 = 0$$
$$\Downarrow$$
$$I_2 = \frac{I_1 \cdot R_1}{R_1 + R_2} = \frac{1.2 \cdot 10}{4+8} = 1\ [\mathrm{A}]$$
$$I - I_1 - I_2 = 0$$
$$\Downarrow$$
$$I = I_1 + I_2 = 1.2 + 1.0 = 2.2\ [\mathrm{A}]$$

- Ukupni otpor kojim je opterećen izvor napajanja:
  - može se izračunati kao ekvivalentni otpor kombinacije priključenih otpora (R_1, R_2, R_3):

$$R = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_{23}}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + R_3}\right)^{-1}$$

$$R = \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{4+8}\right)^{-1} = 5.45\ [\Omega]$$

  - ili jednostavnije kao kvocijent napona izvora i struje koju taj izvor daje:

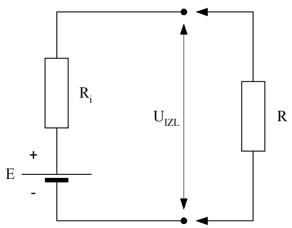
$$R = \frac{E}{I} = \frac{12}{2.2} = 5.45\ [\Omega]$$

3. zadatak

Potrebno je odrediti parametre realnog naponskog izvora ako je poznato da priključenjem trošila na njegove izlazne stezaljke izlazni napon iznosi:

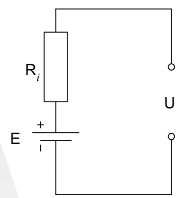
- U_{IZL} = 12 [V] pri opterećenju R = 20 [Ω]
- U_{IZL} = 10 [V] pri opterećenju R = 10 [Ω]

Nacrtajte izlaznu karakteristiku tog izvora i u nju ucrtajte navedene točke.

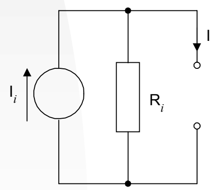


Uvodni pojmovi

- Realni naponski izvor:

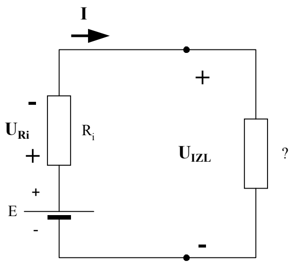


- Realni strujni izvor:



- Napon na stezaljkama realnog naponskog izvora ovisi o priključenom otporu trošila (otpor određuje struju I):
$$U = E - I \cdot R_i$$
- Struja koju daje realni naponski izvor ovisi o spojenom trošilu R.
$$I = \frac{E}{R_i + R}$$
- Struju koju daje realni strujni izvor u mrežu ovisi o otporu trošila.
$$I = I_i \frac{R_i}{R_i + R}$$
- Napon na stezaljkama izvora ovisi o trošilu.
$$U = I \cdot R = I_i \frac{R_i \cdot R}{R_i + R}$$

- Kada se na realni naponski izvor priključi otpor u krugu poteče struja definiranog smjera te se na temelju smjera struje definiraju i odgovarajući padovi napona na otporima:



- Jednadžba I Kirchhoffovog zakona:

$$I = I_{Ri} = I_R$$

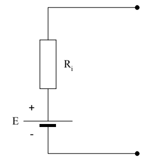
- Jednadžba II Kirchhoffovog zakona:

$$E - U_{Ri} - U_{IZL} = 0$$

- Jednadžba izlaznog napona:

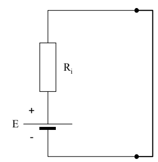
$$U_{IZL} = E - U_{Ri} = E - I \cdot R_i$$
$$\left(U_{IZL} = I \cdot R\right)$$

- Prazni hod izvora:



$$R \Rightarrow \infty$$
$$I = I_{PH} = 0\ [\mathrm{A}]$$
$$U_{IZL} = E - I \cdot R_i = E$$

- Kratki spoj izvora:



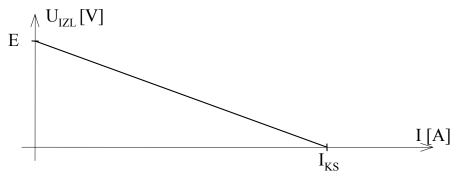
$$R \Rightarrow 0$$
$$U_{IZL} = U_{KS} = 0\ [\mathrm{V}]$$
$$U_{IZL} = E - I \cdot R_i = 0\ [\mathrm{V}]$$
$$I = I_{KS} = \frac{E}{R_i}$$

- Karakteristika izvora:
  - Ovisnost izlaznog napona o opterećenju (izlaznoj struji)

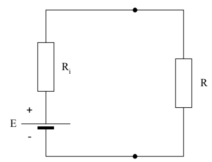
$$U_{IZL} = f(I)$$

$$U_{IZL} = E - I \cdot R_i$$ Jednadžba pravca!

  - Sjecište s ordinatom - prazni hod (I = 0[A], U_{IZL} = E)
  - Sjecište s apscisom - kratki spoj (U_{IZL} =0 [V], I = I_{KS})



- Opterećenje izvora:



$$U_{IZL} = E - I \cdot R_i; \quad I = \frac{E}{R_i + R}$$

$$U_{IZL} = E - \frac{E}{R_i + R} \cdot R_i = E \cdot \frac{R}{R_i + R}$$

- U našem slučaju zadatak se svodi na dvije jednadžbe s dvije nepoznanice, E i R_i:

$$U_{IZL1} = E \cdot \frac{R_1}{R_i + R_1}$$

$$U_{IZL2} = E \cdot \frac{R_2}{R_i + R_2}$$

- Rješenje:

$$E = U_{IZL1} \cdot \frac{R_i + R_1}{R_1}$$

$$E = U_{IZL2} \cdot \frac{R_i + R_2}{R_2}$$

$$U_{IZL1} \cdot \frac{R_i + R_1}{R_1} = U_{IZL2} \cdot \frac{R_i + R_2}{R_2}$$

$$R_i = \frac{U_{IZL2} - U_{IZL1}}{\frac{U_{IZL1}}{R_1} - \frac{U_{IZL2}}{R_2}} = \frac{10-12}{\frac{12}{20} - \frac{10}{10}} = \frac{-2 \cdot 20}{-8} = 5\ [\Omega]$$

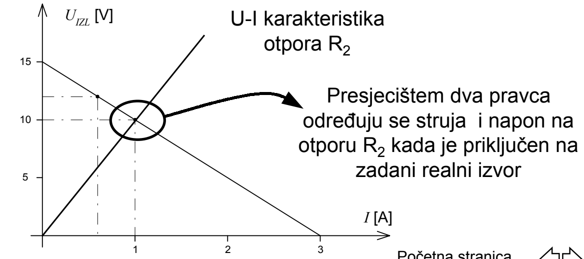
- Poznavajući vrijednost unutarnjeg otpora može se izračunati vrijednost napona E:

$$E = U_{IZL1} \cdot \frac{R_i + R_1}{R_1}$$

$$E = 12 \cdot \frac{5+20}{20} = 15\,[\mathrm{V}]$$

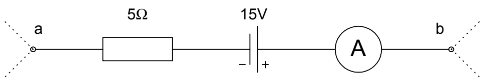
- Da bi se dobila karakteristika potrebno je još izračunati struju kratkog spoja:

$$I_{KS} = \frac{E}{R_i} = \frac{15}{5} = 3\,[\mathrm{A}]$$



4. zadatak

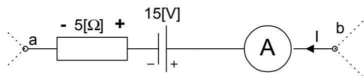
Ako su čvorovi a i b prema slici na potencijalima φ_a = 10[V] i φ_b = 30[V], odredite struju koju mjeri ampermetar zanemarivog otpora.



Rješenje zadatka

- Na slici je zadana grana, dio mreže kroz koju protječe struja I. Uz pretpostavljeni smjer struje pad napona na otporu od 5Ω ima prikazani polaritet:

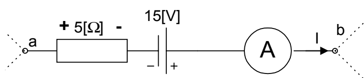
Za ovako definiran smjer struje vrijedi:



$$\varphi_a = \varphi_b - 15 - I \cdot 5$$

$$I = \frac{\varphi_b - \varphi_a - 15}{5} = \frac{30-10-15}{5} = 1\ [\mathrm{A}]$$ smjer struje **poklapa** se s pretpostavljenim smjerom struje

Za suprotno definiran smjer struje vrijedi:

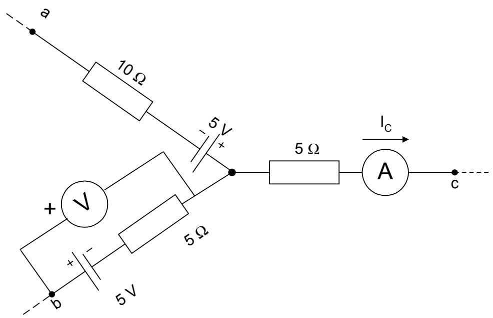


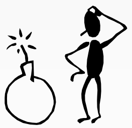
$$\varphi_a = \varphi_b - 15 + I \cdot 5$$

$$I = \frac{\varphi_a - \varphi_b + 15}{5} = \frac{10-30+15}{5} = -1\ [\mathrm{A}]$$ smjer struje **ne poklapa** se s pretpostavljenim smjerom struje

5. zadatak

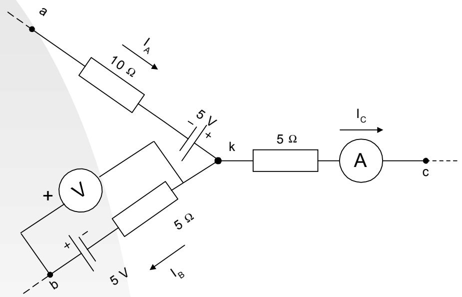
U dijelu neke mreže prikazane na slici idealni instrumenti mjere struju $I_{Ampermetra}$=1[A] i napon $U_{Voltmetra}$= 10[V] označenog smjera odnosno polariteta. Odredite napon U_{ca}.





Rješenje zadatka

- Uz pretpostavljene smjerove struja i označenu točku k vrijedi sljedeće:



$$\varphi_k = \varphi_b - 5 + I_B \cdot 5$$

$$\varphi_k - \varphi_b = -10 = -5 + I_B \cdot 5$$

$$-10 + 5 = I_B \cdot 5$$

$$I_B = \frac{-10+5}{5} = -1 \ [A]$$

$$I_A = I_B + I_C = (-1) + 2 = 1 \ [A]$$

- Za napon U_{ca} vrijedi:

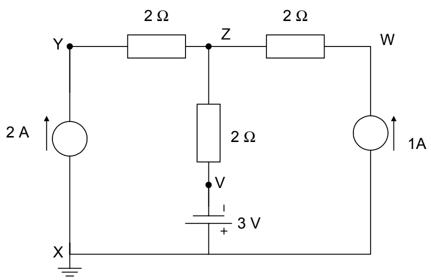
$$U_{ca} = \varphi_c - \varphi_a$$

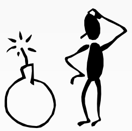
$$\varphi_c = \varphi_a - I_A \cdot 10 + 5 - I_C \cdot 5 = \varphi_a - 1 \cdot 10 + 5 - 2 \cdot 5$$

$$U_{ca} = -15 \ [V]$$

6. zadatak

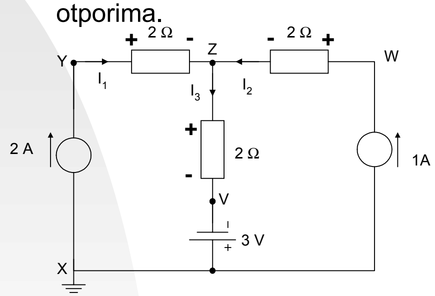
Odredite napon U_{YV}.





Rješenje zadatka

- Strujni izvori određuju struju u granama u kojima se nalaze. Sa tim strujama su povezani i padovi napona na otporima.



Napon U_{YV} određujemo tako da prvo odredimo potencijale točaka V i Y:

$$U_{YV} = \varphi_Y - \varphi_V$$

$$\varphi_V = -3 \ [V]$$

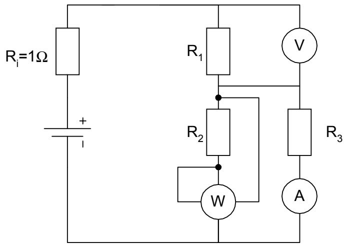
$$\varphi_Y = -3 + I_3 \cdot 2 + I_1 \cdot 2 = -3 + (I_1 + I_2) \cdot 2 + I_1 \cdot 2$$

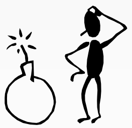
$$\varphi_Y = -3 + (2+1) \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 7 \ [V]$$

$$U_{YV} = \varphi_Y - \varphi_V = 7 - (-3) = 10 \ [V]$$

7. zadatak

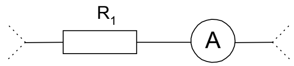
Instrumenti uključeni u mrežu prema slici mjere U_V = 15 [V], I_A = 2 [A] i P= 5 [W]. Ako je poznato da je R_2 = 5 [Ω] i R_i = 1[Ω] odredite snagu izvora P_i.





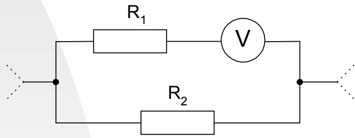
Uvodni pojmovi

- Za idealne instrumente vrijedi:



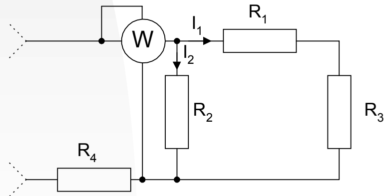
Ampermetar mjeri struju u grani u kojoj se nalazi, a pad napona na stezaljkama ampermetra je jednak nuli (R_A<<).

$$I_A = I_{R1}$$
$$U_A = 0$$



Voltmetar mjeri napon između dviju stezaljki na koje je spojen, a struja u grani u kojoj se nalazi voltmetar jednaka je nuli (R_V>>).

$$I_V = I_{R1} = 0$$
$$U_V = U_{R2}$$

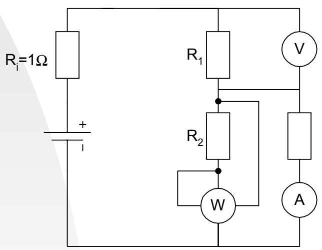


Watmetar mjeri umnožak $U_W \cdot I_W$, odnosno umožak struje koja prolazi njegovim strujnim stezaljkama i napona na koji su spojene njegove naponske stezaljke.

$$I_W = I_1 + I_2$$
$$U_W = U_{R2}$$

Rješenje zadatka

- Iz mreže je vidljivo da wattmetar mjeri snagu na otporu R_2. Pomoću te snage moguće je odrediti struju I_2 i napon U_2.



$$P = I_2^2 \cdot R_2 = \frac{U_2^2}{R_2} = U_2 \cdot I_2$$
$$I_2 = \sqrt{\frac{P}{R_2}} = \sqrt{\frac{5}{5}} = 1 \ [\mathrm{A}]$$
$$U_2 = \sqrt{P \cdot R_2} = \sqrt{5 \cdot 5} = 5 \ [\mathrm{V}]$$

- Na otporu R_3 vlada isti napon kao i na R_2 pa se može odrediti snaga P_3:

$$U_2 = U_3 = 5 \ [V]; \quad I_3 = I_A = 2 \ [\mathrm{A}]$$
$$P_3 = U_3 \cdot I_3 = 5 \cdot 2 = 10 \ [\mathrm{W}]$$

- Iz poznatog napona na otporu R_1 te ukupne struje u krugu mogu se odrediti snage na otporima R_1 i R_i:

$$U_1 = U_V = 15 \ [\mathrm{V}]$$
$$I_1 = I_i = I_2 + I_3 = 1 + 2 = 3 \ [A]$$
$$P_1 = U_1 \cdot I_1 = 3 \cdot 15 = 45 \ [\mathrm{W}]$$
$$P_i = I_i^2 \cdot R_i = 3^2 \cdot 1 = 9 \ [\mathrm{W}]$$

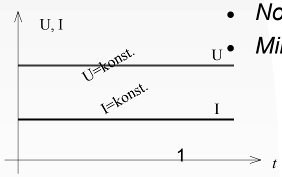
- Ukupna snaga izvora:

$$P_{izvora} = P_i + P_1 + P_2 + P_3 = 9 + 45 + 5 + 10 = 69 \ [\mathrm{W}]$$

Istosmjerni krugovi

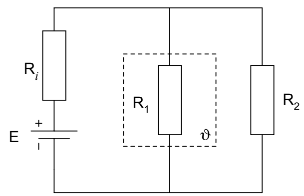
- Prilagođenje na maksimalnu snagu.
- Rješavanje linearnih mreža:
  - Direktna primjena Kirchhoffovih zakona.
  - Metoda konturnih struja (metoda struja petlji).
  - Theveninov teorem.

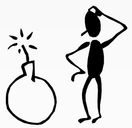
  - *Metoda napona čvorova*
  - *Metoda superpozicije*
  - *Nortonov teorem*
  - *Millmanov teorem*



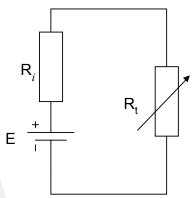
1. zadatak

Otpor R_1 u kombinaciji prema slici nalazi se u posudi u kojoj vlada promjenjiva temperatura. Pri temperaturi ϑ = 20°C, R_1 = 500 [Ω], R_2 = 300[Ω]. Pri kojoj temperaturi u posudi će paralelna kombinacija otpora R_1 i R_2 primiti maksimalnu snagu iz izvora E = 200 [V] i R_i = 200 [Ω]. Izračunajte kolika je ta snaga ako je α = 0.0025 $C^{\circ -1}$.





- Na trošilu će se trošiti maksimalna snaga u slučaju kada je otpor čitavog trošila jednak unutrašnjem otporu izvora.



$$P_{\text{MAX}} \Rightarrow R_t = R_i = 200\ [\Omega]$$

$$R_t = R_1 \| R_2$$

$$\frac{1}{R_t} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$R_1 = R_{1(20^\circ C)} \cdot (1 + \alpha \cdot (\vartheta - \vartheta_0))$$

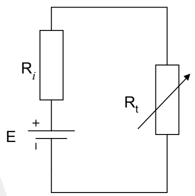
- Da bi se na trošilu disipirala maksimalna snaga R_1 iznosi:

$$\frac{1}{200} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{300} \Rightarrow R_1 = 600\ [\Omega]$$

- Otpor R_1 ima vrijednost od 600 [Ω] pri temperaturi:

$$600 = 500 \cdot (1 + 0.0025 \cdot (\vartheta - 20)) \Rightarrow \vartheta = 100^\circ C$$

- Maksimalna snaga može se sada izračunati na sljedeći način:



$$R_{\text{ukupno}} = R_t + R_i = 400\ [\Omega]$$

$$I = \frac{E}{R_{ukupno}} = \frac{200}{400} = 0.5\ [\text{A}]$$

$$P_{\text{MAX}} = I^2 \cdot R_t = 0.5^2 \cdot 200 = 50\ [\text{W}]$$

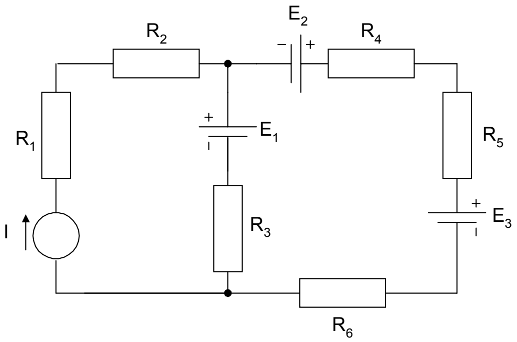
- Korisnost je definirana kao omjer korisne snage (snaga koja se troši na trošilu) i ukupne snage koju daje izvor. Snaga koja se disipira na unutrašnjem otporu realnog naponskog izvora predstavlja gubitak.

$$\eta = \frac{P_t}{P_i} = \frac{I^2 \cdot R}{E \cdot I} = \frac{50}{200 \cdot 0.5} = 0.5 = 50\%$$

2. zadatak

Odredite struje koje teku u svim granama mreže na slici i napon na stezaljkama strujnog izvora. Zadano:

- $R_1 = 1\ [\Omega]$
- $R_2 = 1\ [\Omega]$
- $R_3 = 2\ [\Omega]$
- $R_4 = 4\ [\Omega]$
- $R_5 = 3\ [\Omega]$
- $R_6 = 1\ [\Omega]$
- $E_1 = 2\ [V]$
- $E_2 = 1\ [V]$
- $E_3 = 3\ [V]$
- $I = 1\ [A]$



- Direktna primjena Kirchhoffovih zakona u analizi iole složenijih mreža postaje vrlo komplicirana zbog velikog broja jednadžbi koje treba riješiti.
- Zbog toga je razvijena metoda konturnih struja koja postupak analize razlaže na dva koraka te se tako na umjetan način smanjuje veličina sustava jednadžbi koji se rješava.
- U osnovnim crtama taj se postupak sastoji od sljedećih koraka:

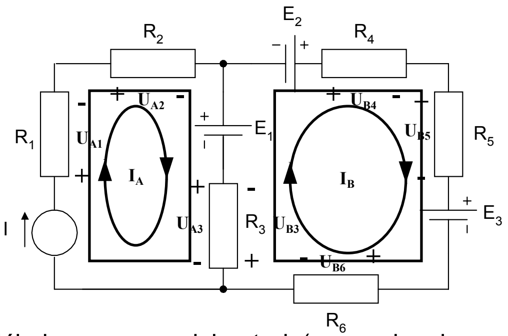
1. korak

1. Definiraju se neovisne petlje (konture) u mreži.
2. Za svaku petlju se definiraju struje koje kroz nju protječu.
3. Raspisuju se jednadžbe II Kirchhoffovog zakona za definirane petlje čime se dobiva odgovarajući sustav jednadžbi.
4. Rješavanjem tog sustava jednadžbi dolazi se do vrijednosti konturnih struja.

2. korak

5. Raspisuju se i rješavaju jednadžbe koje povezuju konturne struje i struje koje teku u pojedinim granama zadanog strujnog kruga.

- Definiranje neovisnih petlji (kontura) i smjerova konturnih struja, te odgovarajućih padova napona (koraci #1 i #2):



- Budući da se u prvoj konturi (u neovisnoj grani) nalazi strujni izvor vrijedi:

$$I_{\mathrm{A}} = I$$

- Jednadžba II Kirchhoffovog zakona za *2. konturu* :

$$-I_{\mathrm{A}} \cdot R_3 + I_{\mathrm{B}} \cdot R_3 + I_{\mathrm{B}} \cdot R_6 + I_{\mathrm{B}} \cdot R_5 + I_{\mathrm{B}} \cdot R_4 - E_1 + E_3 - E_2 = 0$$

- Rješenjem ovog sustava jednadžbi dobivaju se vrijednosti konturnih struja (korak #4):

$$I_{\mathrm{B}} \cdot R_3 + I_{\mathrm{B}} \cdot R_6 + I_{\mathrm{B}} \cdot R_5 + I_{\mathrm{B}} \cdot R_4 = I_{\mathrm{A}} \cdot R_3 + E_1 - E_3 + E_2$$

$$I_{\mathrm{B}} = \frac{I_{\mathrm{A}} \cdot R_3 + E_1 - E_3 + E_2}{R_3 + R_6 + R_5 + R_4}$$

- Kada se u dobivene izraze uvrste brojevi:

$$I_{\mathrm{A}} = I = 1\,[\mathrm{A}]$$

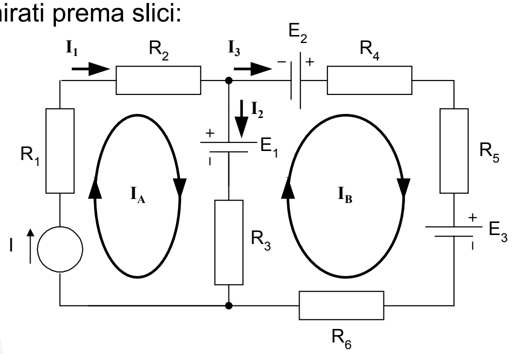
$$I_{\mathrm{B}} = \frac{1 \cdot 2 + 2 - 3 + 1}{2 + 1 + 3 + 4} = 0.2\ [\mathrm{A}]$$

$$I_{\mathrm{A}} = 1\,[\mathrm{A}]$$

$$I_{\mathrm{B}} = 0.2\,[\mathrm{A}]$$

- U posljednjem je koraku potrebno konturne struje povezati sa stvarnim strujama koje teku u krugu (korak #5).

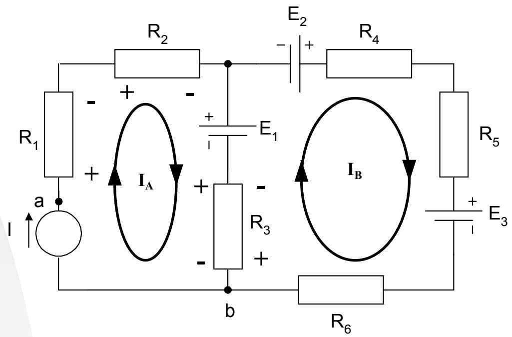
- Smjerovi struja koje teku u pojedinim granama mogu se definirati prema slici:



- Iz slike je vidljiva veza između konturnih struja i struja grana:

$I_1 = I_A = 1\,[A] \qquad I_3 = I_B = 0.2\,[A] \qquad I_2 = I_A - I_B = 1 - 0.2 = 0.8\,[A]$

- Napon na stezaljkama strujnog izvora, U_{ab}:



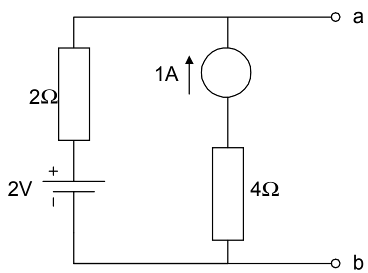
$$U_{ab} = I_A \cdot R_3 - I_B \cdot R_3 + E_1 + I_A \cdot R_2 + I_A \cdot R_1$$

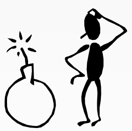
$$U_{ab} = 1 \cdot 2 - 0.2 \cdot 2 + 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1$$

$$U_{ab} = 5.6\ [V]$$

3. zadatak

Nadomjestite prikazanu mrežu Theveninovim izvorom s obzirom na stezaljke a i b.

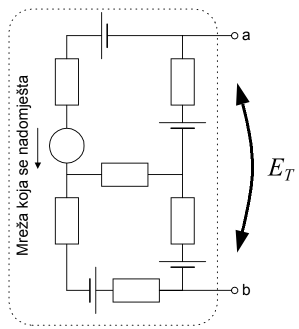




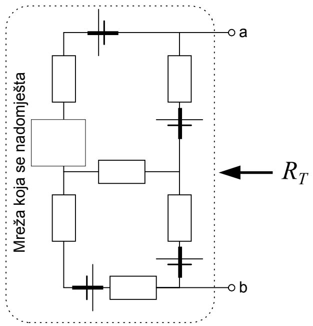
- Bilo koji dio aktivne linearne mreže može se nadomjestiti s obzirom na dvije stezaljke (a i b) realnim naponskim izvorom, čiji unutarnji napon E_T (Theveninov napon) i unutarnji otpor R_T (Theveninov otpor) određujemo iz zadane mreže:

⇒ **Theveninov napon E_T** određujemo tako da izračunamo ili izmjerimo napon U_{ab0} na otvorenim stezaljkama a-b linearne mreže.

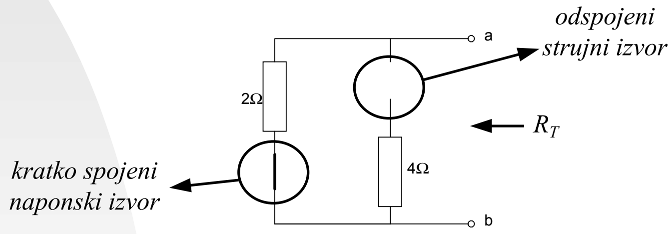
!Ako je $U_{ab0} > 0$, E_T ima plus prema "a"
!Ako je $U_{ab0} < 0$, E_T ima plus prema "b"



⇛ **Theveninov otpor R_T** odredimo tako da kratko spojimo sve naponske izvore i isključimo sve strujne izvore te onda izračunamo ili izmjerimo ukupni otpor između točaka a i b.

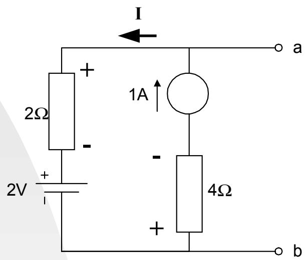


- Određivanje parametara nadomjesnog realnog naponskog izvora.
- Određivanje R_T:



$$R_{\mathrm{T}} = 2\ [\Omega]$$

- Određivanje napona Thevenina:



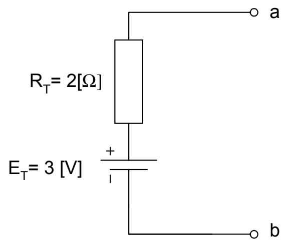
U zatvorenoj konturi teče struja koju diktira strujni izvor.

Uz ovakav smjer struje padovi napona su:

- Theveninov napon onda se može odrediti kao:

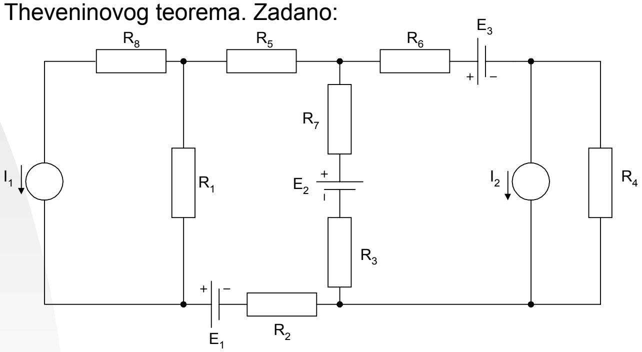
$$E_{\mathrm{T}} = U_{ab0} = +2 + 0.5 \cdot 2 = +3\ [\mathrm{V}]$$

- Theveninov nadomjesni spoj:

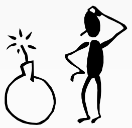


4. zadatak

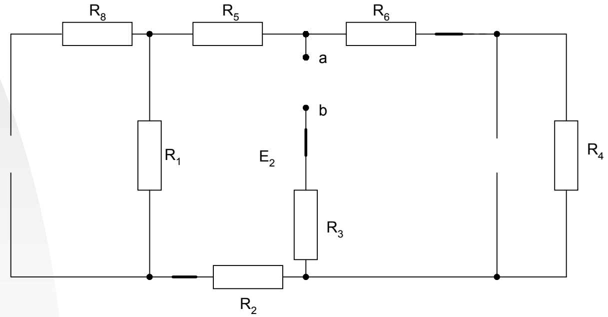
U mreži prema slici odredite struju kroz otpor R_7 primjenom Theveninovog teorema. Zadano:



- $R_1 = R_2 = 25$ [Ω]
- $R_3 = R_4 = 30$ [Ω]
- $R_5 = R_7 = 20$ [Ω]
- $R_6 = 40$ [Ω]
- $R_8 = 10$ [Ω]
- $E_1 = 25$ [V]
- $E_2 = 10$ [V]
- $E_3 = 11$ [V]
- $I_1 = I_2 = 200$[mA]



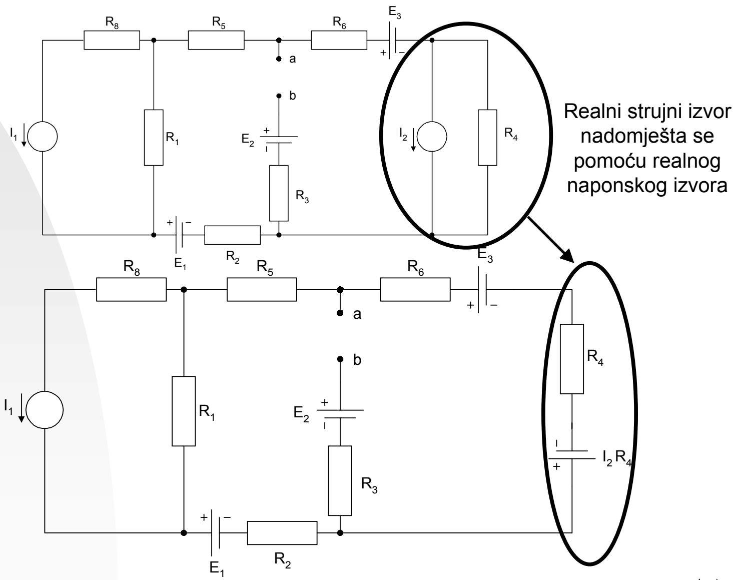
- Da bi se odredila struja kroz otpor R_7, potrebno je otpor R_7 isključiti iz mreže a ostatak mreže nadomjestiti pomoću realnog naponskog izvora.
- Određivanje R_T:



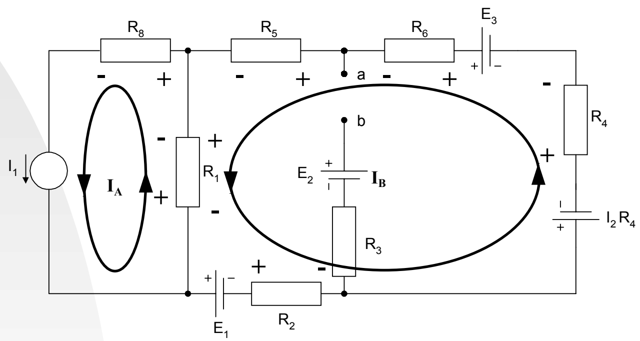
$$R_T = (R_5 + R_1 + R_2) \parallel (R_4 + R_6) + R_3$$

$$R_T = 57.4 \ [\Omega]$$

- Određivanje E_T, odnosno napona U_{ab0}:



- Napon U_{ab0} određujemo metodom konturnih struja koje određuju padove napona prikazanih na slici.



- Određivanje I_A i I_B:

$$I_A = I_1 = 200 \ [\mathrm{mA}]$$

$$-I_A \cdot R_1 + I_B \cdot (R_1 + R_5 + R_6 + R_4 + R_2) - E_3 + I_2 \cdot R_4 + E_1 = 0$$

$$I_B = -\frac{16}{115} \ [\mathrm{A}]$$

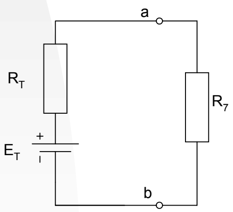
- Uvrštenjem u izraz za napon U_{ab0} dobivamo:

$$E_T = U_{ab0} = I_B \cdot (R_2 + R_1 + R_5) - I_A \cdot R_2 + E_1 - E_2$$

$$E_T = -\frac{16}{115} \cdot (10 + 10 + 20) - 0.2 \cdot 10 + 25 - 10$$

$$E_T = 7.74 \ [\mathrm{V}]$$

- Nakon što su se odredili elementi Theveninovog nadomjesnog spoja cijela mreža se može prikazati na sljedeći način:



Struja koja teče u strujnom krugu iznosi:

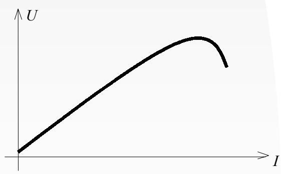
$$I_7 = \frac{E_T}{R_T + R_7}$$

$$I_7 = \frac{7.74}{57.74 + 20} = 100 \ [\mathrm{mA}]$$

Početna stranica

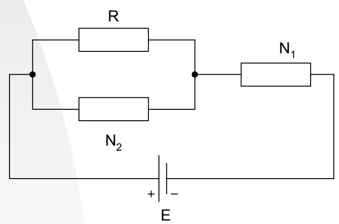
Istosmjerni krugovi

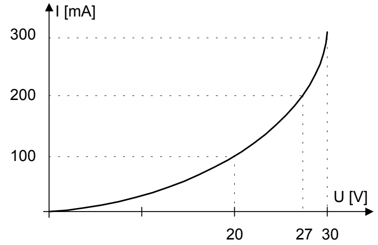
- Nelinearan element u mreži.

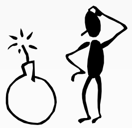


1. zadatak

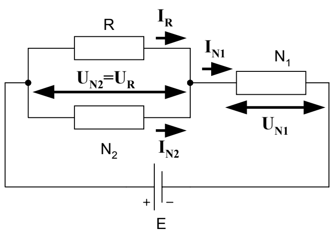
U mreži prema slici kroz otpornik R = 200 [Ω] teče struja I_R = 100 [mA]. Odredite snagu izvora E ako nelinearni elementi N_1 i N_2 imaju istu V-A karakteristiku prikazanu slikom.







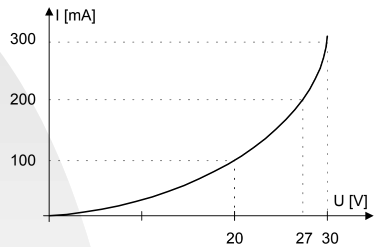
- Za mrežu s nelinearnim elementima vrijede Kirchhoffovi zakoni pa se za prikazanu mrežu mogu odrediti struje i naponi na pojedinim elementima:



- Budući da je poznata struja koja teče kroz otpor R može se odrediti napon na otporu kao i napon na nelinearnom elementu N_2:

$$U_R = I_R \cdot R = 100 \cdot 10^{-3} \cdot 200 = 20\ [\mathrm{V}]$$
$$U_{N2} = U_R = 20\ [\mathrm{V}]$$

- Iz U-I karakteristike nelinearnog elementa može se odrediti struja kroz nelinearni element N_2.



$$I_{N2} = 100\ [\mathrm{mA}]$$

I Kirchhoffov zakon za čvor:

$$I_{N1} = I_R + I_{N2} = 100 + 100 = 200\ [\mathrm{mA}]$$

- Iz U-I karakteristike nelinearnog elementa može se odrediti napon na nelinearnom elementu N_1.

$$U_{N1} = 27\ [\mathrm{V}]$$

- Napon izvora:

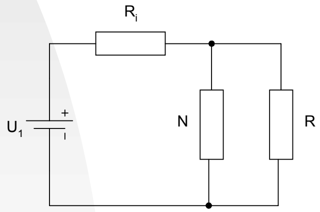
$$E = U_R + U_{N1} = 20 + 27 = 47\ [\mathrm{V}]$$

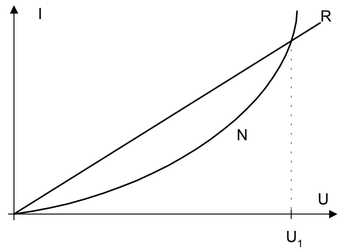
- Snaga izvora:

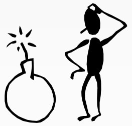
$$P = E \cdot I_{N1} = 47 \cdot 200 \cdot 10^{-3} = 9.4\ [\mathrm{W}]$$

2. zadatak

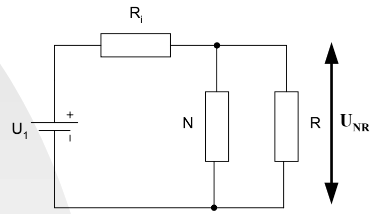
U strujnom krugu prema slici na otporu R troši se snaga P_R, a na nelinearnom elementu N snaga P_N. Odredite kako se odnose te snage (P_R je veća/jednaka/manja od P_N).





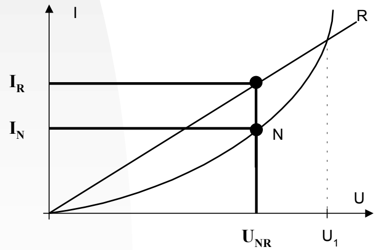


- Na nelinearnom elementu i otporu vlada isti napon budući da su spojeni u paralelu.



$$U_N = U_R = U_{NR}$$

Napon na paraleli manji je od napona izvora U_1 budući da postoji pad napona na R_i.



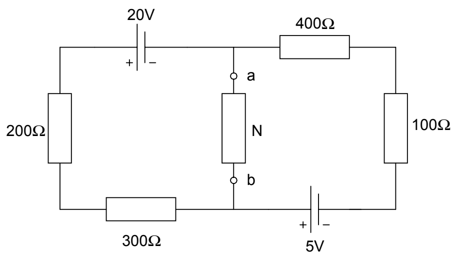
Ako se to ucrta na prikazani graf slijedi:

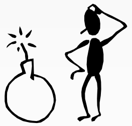
$$I_N < I_R$$
$$P_N < P_R$$

3. zadatak

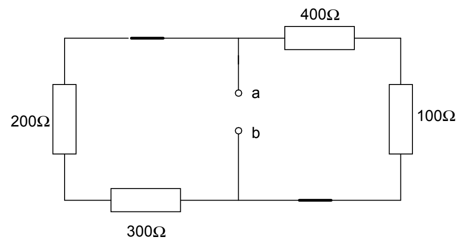
Nelinearni element N s voltamperskom karakteristikom danom u tabelarnom obliku uključen je u mrežu prikazanu slikom. Ako je pozitivan napon na elementu definiran kada je napon $U_{ab}>0$, a pozitivna struja kao struja teče od a prema b, odredite rad koji se izvrši na N u 45 minuta. Odredite struje koje teku kroz otpore od 100 [Ω] i 300[Ω].

U,V	-6.3	-6.1	-5.9	-5.7	-5.5	-5	...	0	0.1	0.2	0.4	0.6
I,mA	-35	-7	-1	-0.3	0	0	...	0	1	5	22	66



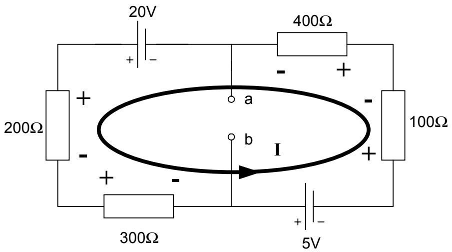


- Nelinearni element odspojimo, a ostatak mreže nadomjestimo pomoću Thevenina.
- Otpor R_T:



$$R_T = (100+400) \| (200+300)$$
$$R_T = 250\,[\Omega]$$

- Napon E_T:



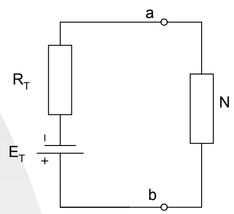
- Pretpostavimo smjer struje koja teče u krugu i s tim vezane padove napona.
- Pomoću II Kirchhoffovog zakona odredi se struja I:

$$20 - 5 = I \cdot (100 + 400 + 200 + 300)$$
$$I = 15\,[\mathrm{mA}]$$

- Uz poznatu struju I može se odrediti napon E_T (U_{ab0}) :

$$E_\mathrm{T} = -5 - I \cdot 100 - I \cdot 400 = I \cdot 300 + I \cdot 200 - 20$$
$$E_\mathrm{T} = U_{ab0} = -12.5\,[\mathrm{V}]$$

- Cijela mreža se sada svodi na jednostavnu mrežu:



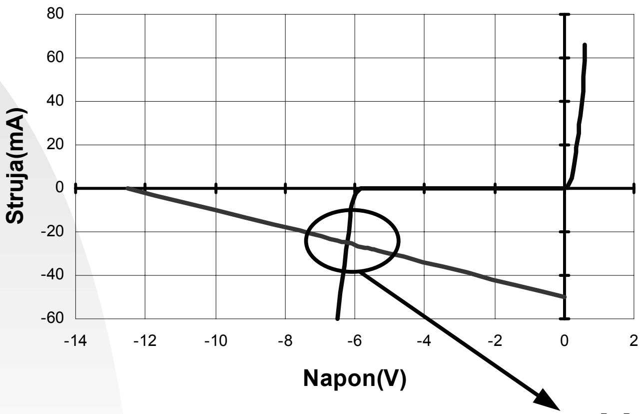
Iz prikazane mreže je vidljivo da struja teče od b prema a i da će napon U_{ab} biti manji od nula.

- Vanjska karakteristika realnog naponskog izvora:

$$E_\mathrm{T} = U_{\mathrm{ab0}} = -12.5\,[\mathrm{V}]$$
$$I_{\mathrm{KS}} = \frac{-12.5}{250} = -50\,[\mathrm{mA}]$$

- U-I karakteristika nelinearnog elementa zadana je tabelarno.

- Grafički prikazane U-I karakteristike:



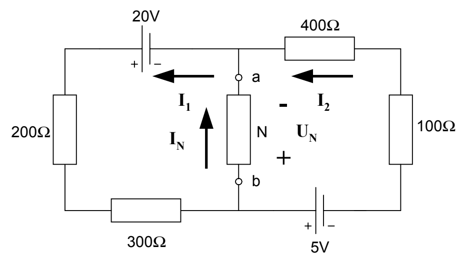
Presjecište krivulja određuje struju i napon na N:

$$U_\mathrm{N} = -6.2\,[\mathrm{V}]$$
$$I_\mathrm{N} = -25\,[\mathrm{mA}]$$

Rad:

$$A = U \cdot I \cdot t = (-6.2) \cdot (-25 \cdot 10^{-3}) \cdot 45 \cdot 60$$
$$A = 418.5\,[\mathrm{Ws}]$$

- Iz izračunatih vrijednosti vidljivo je da struja teče od b prema a i da je potencijal točke b viši nego točke a:



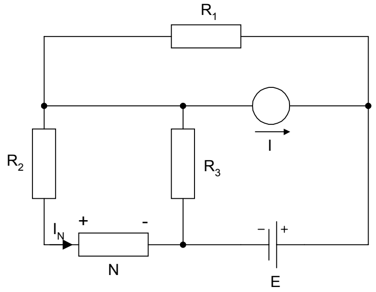
- Struje u ostatku mreže:

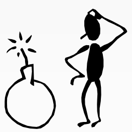
$$U_{\mathrm{ab}} = U_\mathrm{N} = -6.2 = I_1 \cdot 300 + I_1 \cdot 200 - 20$$
$$U_{\mathrm{ab}} = U_\mathrm{N} = -6.2 = -5 - I_2 \cdot 100 - I_2 \cdot 400$$
$$I_1 = 27.6\,[\mathrm{mA}]; \quad I_2 = 2.4\,[\mathrm{mA}]$$

4. zadatak

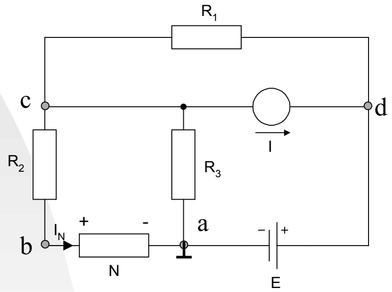
Za mrežu prema slici odredite iznos struje I strujnog izvora da bi kroz nelinearni element tekla struja I_N= 4 [mA] označenog smjera. U-I karakteristika zadana je izrazom $I_N = k \cdot U^{3/2}$, gdje je $k = 0.5 \cdot 10^{-6}$ [$AV^{-3/2}$]. Zadano:

- R_1 = 30 [kΩ]
- R_2 = 20 [kΩ]
- R_3 = 60 [kΩ]
- E = 900 [V]





- U mreži označimo čvorove, a čvor a kao točku referentnog potencijala:



$$\varphi_a = 0\,[V]$$

- Potencijal točke d:

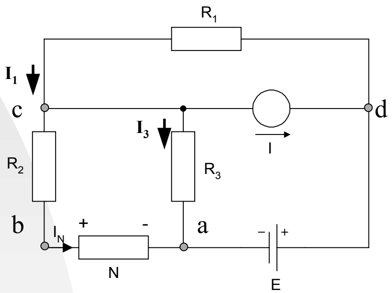
$$\varphi_d = \varphi_a + E = +900\,[V]$$

- Pomoću zadane struje I_N mogu se odrediti potencijali točaka b i c:

$$\varphi_b = \varphi_a + U_N = \varphi_c + \left(\frac{I_N}{k}\right)^{\frac{2}{3}} = 0 + \left(\frac{4\cdot10^{-3}}{0.5\cdot10^{-6}}\right)^{\frac{2}{3}} = +400\,[V]$$

$$\varphi_c = \varphi_b + I_N \cdot R_2 = 400 + 4\cdot10^{-3}\cdot20\cdot10^{3} = +480\,[V]$$

- Uz označene smjerove struja, određujemo struje u pojedinim granama i struju strujnog izvora I:



- Potencijali svih točaka

$$\varphi_a = 0\,[V]$$
$$\varphi_b = +400\,[V]$$
$$\varphi_c = +480\,[V]$$
$$\varphi_d = +900\,[V]$$

$$\varphi_d - \varphi_c = R_1 \cdot I_1 \Rightarrow I_1 = \frac{\varphi_d - \varphi_c}{R_1}$$

$$\varphi_c - \varphi_a = R_3 \cdot I_3 \Rightarrow I_3 = \frac{\varphi_c - \varphi_a}{R_3}$$

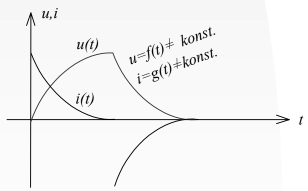
$$I_1 = I_N + I_3 + I$$

$$I = \frac{\varphi_d - \varphi_c}{R_1} - I_N - \frac{\varphi_c - \varphi_a}{R_3} = \frac{900-480}{30\cdot10^3} - 4\cdot10^{-3} - \frac{480-0}{60\cdot10^3}$$

$$I = 14 - 4 - 8 = 2\,[mA]$$

Prijelazne pojave

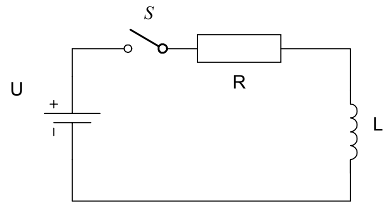
- Kondenzator u istosmjernoj mreži.
- Zavojnica u istosmjernoj mreži.

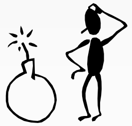


1. zadatak

Zadan je serijski RL spoj. U trenutku t = 0 [s] zatvara se sklopka i spoj se priključuje na izvor napajanja U. Odredite $u_R(t)$, $u_L(t)$ i i(t) te nacrtajte pripadne krivulje.

- U = 100 [V]
- R = 50 [Ω]
- L = 10 [H]

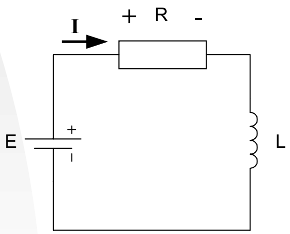




Uvodni pojmovi

Zavojnica u istosmjernoj mreži

- U istosmjernoj mreži zavojnica predstavlja kratki spoj. Kroz nju teče struja koja je određena elementima u mreži. Za prikazanu mrežu vrijedi:



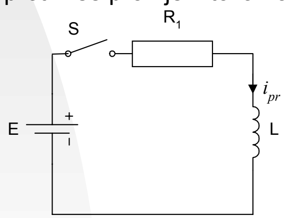
$$U_R = U$$
$$U_L = 0$$
$$I = \frac{U}{R}$$

- Smjer struje i polaritet napona prikazani su na slici.

Uvodni pojmovi

Priključenje zavojnice u istosmjerni krug

- Prilikom priključivanja na naponski izvor (zatvaranje sklopke) struja postupno raste do svoje stacionarne vrijednosti. Zavojnica nastoji zadržati struju koja teče kroz nju, odnosno protivi se promjeni toka koji se zatvara kroz nju.



Početak prijelazne pojave:

$$i_{pr}(t=0+) = i_{pr}(t=0-) = 0$$
$$u_{R1}(t=0+) = 0$$
$$u_L(t=0+) = E - u_{R1}(t=0+) = E$$

- Naponi i struje u krugu za vrijeme prijelazne pojave opisani su pomoću eksponencijalnih funkcija.

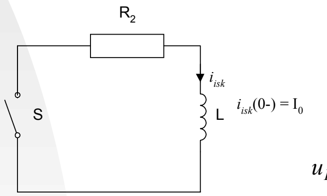
$$\mathrm{A}_i \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \mathrm{K}_i$$

- A_i, K_i predstavljaju konstante
- τ je vremenska konstanta kruga; $\tau = L / R_1$

Uvodni pojmovi

Isključenje zavojnice iz istosmjernog kruga

- Prilikom isključivanja zavojnice (zatvaranje sklopke) kroz koju je prethodno tekla struja I_0 smjera kao struja i_{isk}, struja postupno pada na nulu.



Početak prijelazne pojave:

$$i_{isk}(t=0+) = i_{isk}(t=0-) = I_0$$

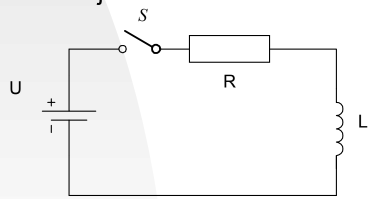
$$u_{R2}(t=0+) = I_0 \cdot R_2$$

$$u_L(t=0+) = -u_{R2}(t=0+) = -I_0 \cdot R_2$$

- Struje i naponi pri isključenju zavojnice također se mijenjaju po eksponencijalnim funkcijama.
- Vremenska konstanta kruga $\tau = L / R_2$.

Rješenje zadatka

- Za prikazani sklop mogu se definirati dva karakteristična trenutka, početak prijelazne pojave i stacionarno stanje.
- Zavojnica se protivi promjeni struje koja teče kroz nju tako da u početnom trenutku struja zadržava svoju vrijednost.



Početak prijelazne pojave, t = 0+

$$i(t=0+) = i(t=0-)$$

Stacionarno stanje, t = ∞

$$i(t=\infty) = \frac{U}{R}$$

- Iz teorije je poznato da se struja mijenja po eksponencijalnom zakonu:

$$i(t) = A_I \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + K_I$$

- Kada se uvrste vrijednosti struje za početak i kraj prijelazne pojave dobije se sustav dvije jednadžbe s dvije nepoznanice:

$$\begin{aligned} &za\ \ t=0;\ 0 = A_I \cdot e^{-\frac{0}{\tau}} + K_I \\ &za\ \ t=\infty;\ \frac{U}{R} = A_I \cdot e^{-\frac{\infty}{\tau}} + K_I \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &0 = A_I + K_I \\ &\frac{U}{R} = 0 + K_I \end{aligned}$$

- Kao rješenje ovog sustava jednadžbi dobiju se konstante A_I i K_I, odnosno struja i(t):

$$K_I = \frac{U}{R};\ A_I = -\frac{U}{R}$$

$$i(t) = \frac{U}{R} \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

- Vremenska konstanta τ za prikazani strujni krug iznosi:

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{10}{50} = 200\,[\mathrm{ms}]$$

- Ukoliko se uvrste zadane vrijednosti u zadatku dobivamo struju i(t):

$$i(t) = \frac{U}{R} \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = \frac{100}{50} \cdot (1 - e^{-\frac{t}{200 \cdot 10^{-3}}})$$

$$i(t) = 2 \cdot (1 - e^{-5 \cdot t})$$

- Napon na zavojnici i otporu mogu se, uz pomoć poznate struje u krugu odrediti na dva načina. Prvi način se svodi na prethodno opisani postupak određivanja struje.
- U svakom trenutku u prikazanom strujnom krugu vrijede Kirchhoffovi zakoni, odnosno vrijedi:

$$U = u_R(t) + u_L(t)$$

- I u ovom slučaju razlikujemo dva karakteristična trenutka.

Početak prijelazne pojave:

$$u_R(0+) = i(0+)\cdot R = 0$$

$$u_L(0+) = U - u_R(0+) = U - 0 = U$$

Stacionarno stanje:

$$u_R(\infty) = i(\infty)\cdot R = U$$

$$u_L(\infty) = 0$$

- Iz priloženog se vidi da zavojnica na početku prijelazne pojave preuzima na sebe svu razliku napona, a na kraju prijelazne pojave predstavlja kratki spoj.
- Iz teorije je poznato da se napon na otporu i na zavojnici mijenjaju po eksponencijalnom zakonu.

$$u_R(t) = \mathrm{A_R}\cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \mathrm{K_R}$$

$$u_L(t) = \mathrm{A_L}\cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \mathrm{K_L}$$

- Istim postupkom kao i za struju određuju se navedene konstante iz sustava dvije jednadžbe s dvije nepoznanice.

$$u_R(t) = U\cdot(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$u_L(t) = U\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

- Uvrštenjem zadanih vrijednosti naponi iznose:

$$u_R(t) = 100\cdot(1 - e^{-5\cdot t})$$

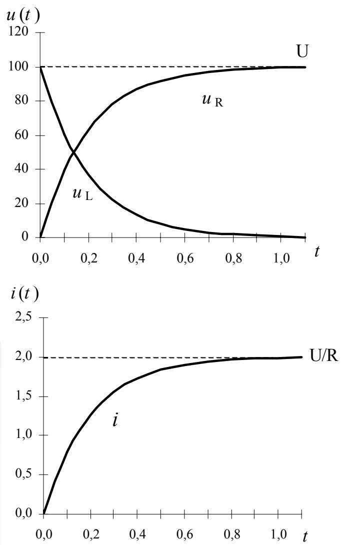
$$u_L(t) = 100\cdot e^{-5\cdot t}$$

- Drugi način određivanja napona na otporu i zavojnici svodi se na određivanje napona pomoću veze napona i struje na elementima u strujnom krugu.

$$u_R(t) = i(t)\cdot R = \frac{U}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})\cdot R = U\cdot(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$u_L(t) = L\cdot\frac{di}{dt} = L\cdot\frac{d\left(\frac{U}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})\right)}{dt} = L\cdot\frac{U}{R}\cdot\left(-\frac{1}{\tau}\right)\left(-e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = U\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

- Grafički prikazane funkcije napona i struje:



$$u_R(t) = 100\cdot(1 - e^{-5\cdot t})$$

$$u_L(t) = 100\cdot e^{-5\cdot t}$$

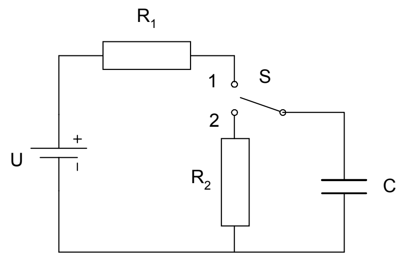
$$i(t) = 2\cdot(1 - e^{-5\cdot t})$$

2. zadatak

U spoju prema slici sklopka S ritmički se prebacuje iz položaja 1 u 2. U svakom položaju ostaje 10 [ms]. Vrijeme prebacivanja je zanemarivo kratko. Odredite i nacrtajte krivulje struje i napona na kondenzatoru te struju kroz otpornik R_2 ako je:

a) R_1 = 7 [kΩ], R_2 = 2 [kΩ], C = 1 [μF] i U = 100 [V],

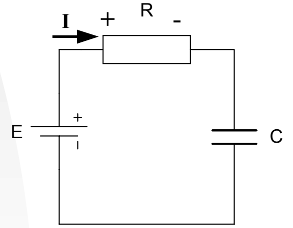
b) R_1 = 50 [Ω], R_2 = 2 [kΩ], C = 1 [μF] i U = 100 [V].



Uvodni pojmovi

Kondenzator u istosmjernoj mreži

- U istosmjernoj mreži kondenzator predstavlja beskonačan otpor, kroz njega ne teče struja, a na njegovim stezaljkama vlada napon koji ovisi o elementima mreže.



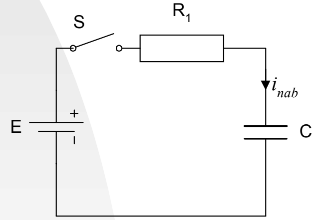
$$U_R = 0$$
$$U_C = E$$
$$I = 0$$

- Smjer struje i polaritet napona prikazani su na slici.

Uvodni pojmovi

Nabijanje kondenzatora

- Prilikom priključivanja na naponski izvor (zatvaranje sklopke) dolazi do nabijanja kondenzatora.



Početak prijelazne pojave:

$$u_C(t=0+) = u_C(t=0-) = 0$$
$$i_{nab}(t=0+) = \frac{E}{R_2}$$
$$u_R(t=0+) = \mathrm{E} - u_C(t=0+)$$

- Naponi i struje u krugu za vrijeme prijelazne pojave opisani su pomoću eksponencijalnih funkcija.

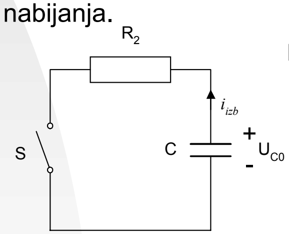
$$\mathrm{A}_i \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \mathrm{K}_i$$

- A_i, K_i predstavljaju konstante
- τ je vremenska konstanta kruga; $\tau = R_1 \cdot C$

Uvodni pojmovi

Izbijanje kondenzatora

- Prilikom zatvaranja sklopke u prikazanom krugu dolazi do izbijanja kondenzatora nabijenog na napon U_{C0} preko otpora R_2. Struja izbijanja ima suprotni smjer od struje nabijanja.



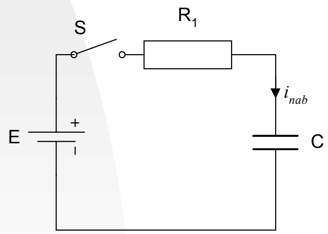
Početak prijelazne pojave:

$$u_C(t=0+) = u_C(t=0-) = \mathrm{U}_{C0}$$
$$i_{izb}(t=0+) = \frac{U_{C0}}{R_2}$$
$$u_R(t=0+) = -u_C(t=0+)$$

- Struje i naponi pri izbijanju kondenzatora također se mijenjaju po eksponencijalnim funkcijama.
- Vremenska konstanta kruga $\tau = R_2 \cdot C$.

Rješenje zadatka

- Najprije rješavamo a) dio zadatka.
- Razlikujemo dva položaja sklopke S, nabijanje kondenzatora (položaj1) te izbijanje kondenzatora (položaj 2).
- Za nabijanje kondenzatora vrijedi sljedeće:



U početnom trenutku kroz krug proteče struja i(0+):

$$i_{nab}(0+) = \frac{U}{R_1}$$

U stacionarnom stanju kroz kondenzator ne teče struja:

$$i_{nab}(\infty) = 0$$

- Iz teorije je poznato da se struja mijenja po eksponencijalnom zakonu:

$$i_{nab}(t) = \mathrm{A}_I \cdot e^{-\frac{t}{\tau_{nab}}} + \mathrm{K}_I$$

- Kada se uvrste vrijednosti struje za početak i kraj prijelazne pojave dobije se sustav dvije jednadžbe s dvije nepoznanice:

$$\frac{U}{R_1} = A_I \cdot e^{-\frac{0}{\tau}} + K_I$$

$$0 = A_I \cdot e^{-\frac{\infty}{\tau}} + K_I$$

- Kao rješenje ovog sustava jednadžbi dobiju se konstante A_I i K_I, odnosno struja $i_{nab}(t)$:

$$K_I = 0; \quad A_I = \frac{U}{R_1}$$

$$i_{nab}(t) = \frac{U}{R_1} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_{nab}}}$$

- Vremenska konstanta τ_{nab} za prikazani strujni krug iznosi:

$$\tau_{nab} = R_1 \cdot C = 7000 \cdot 10^{-6} = 7\,[\text{ms}]$$

- Na isti način dolazi se do izraza za napon na kondenzatoru:

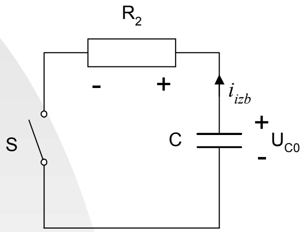
$$u_{Cnab}(t) = U \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau_{nab}}})$$

- Pri nabijanju kondenzator bi se nabio na napon U izvora u stacionarnom stanju. Budući da se sklopka prebacuje iz položaja 1 u 2 nakon vremena t = 10 [ms], što je približno jednako τ kondenzator se ne uspije nabiti na napon U nego na:

$$u_{Cnab}(t = 10\,[\text{ms}]) = 100 \cdot (1 - e^{-\frac{10 \cdot 10^{-3}}{7 \cdot 10^{-3}}}) = 76\,[\text{V}] = U_{C0}$$

- Nakon t = 10 [ms] prebacuje se sklopka u položaj 2. Kondenzator je nabijen na napon U_{C0} i izbija se tokom vremena preko otpora R_2.

- Struja izbijanja kondenzatora je suprotnog smjera od struje nabijanja, a polariteti napona su prikazani na slici.



Struja tokom vremena padne na nulu:

$$i_{izb}(t) = -\frac{U_{C0}}{R_2} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_{izb}}}$$

Kondenzator se nakon određenog vremena također izbije:

$$u_{Cizb}(t) = U_{C0} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_{izb}}}$$

- Napon na otporu iznosi:

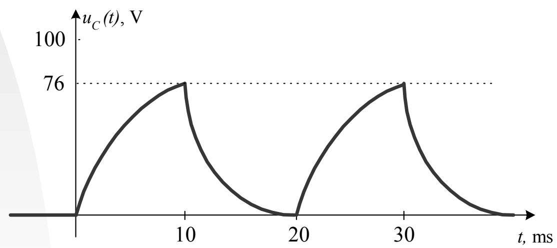
$$u_{Cizb}(t) + u_R(t) = 0$$

$$u_R(t) = -u_{Cizb}(t) = U_{C0} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_{izb}}}$$

- Vremenska konstanta τ_{izb} za prikazani strujni krug iznosi:

$$\tau_{izb} = R_2 \cdot C = 2000 \cdot 10^{-6} = 2\,[\text{ms}]$$

- Budući da je vrijeme u kojem sklopka ostaje u položaju 2 jednako $5 \cdot \tau$ kondenzator se uspije u potpunosti izbiti. Nakon 10 [ms] napon na kondenzatoru je 0 [V].
- Napon na kondenzatoru grafički prikazan izgleda kao na slici.

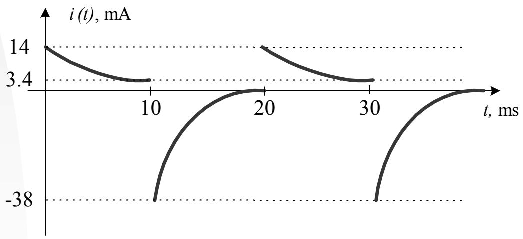


- Struja nabijanja kondenzatora:

$$i_{nab}(t)=\frac{U}{R_1}\cdot e^{-\frac{t}{\tau_{nab}}} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} i_{nab}(t=0\mathrm{s}) &= \frac{U}{R_1}=\frac{100}{7\cdot 10^{-3}}=14.3\,[\mathrm{mA}] \\ i_{nab}(t=10\,\mathrm{ms}) &= \frac{100}{7\cdot 10^{-3}}\cdot e^{-\frac{10\cdot 10^{-3}}{7\cdot 10^{-3}}}=3.4\,[\mathrm{mA}] \end{aligned}$$

- Struja izbijanja kondenzatora:

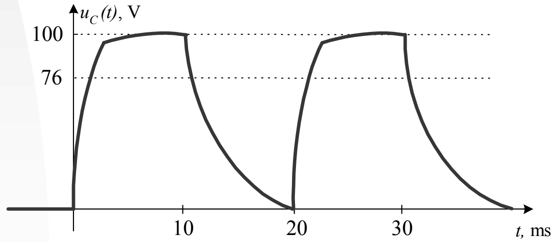
$$i_{izb}(t)=-\frac{U_{C0}}{R_2}\cdot e^{-\frac{t}{\tau_{izb}}} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} i_{izb}(t=0\mathrm{s}) &= -\frac{U_{C0}}{R_2}=\frac{76}{2\cdot 10^{-3}}=-38\,[\mathrm{mA}] \\ i_{izb}(t=10\,\mathrm{ms}) &= 0\,[\mathrm{A}] \end{aligned}$$



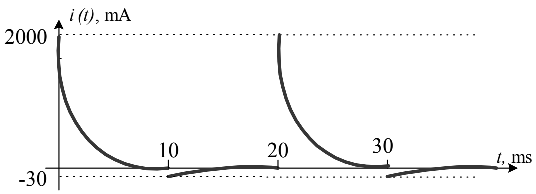
- b) dio zadatka:
- Struje i naponi za vrijeme nabijanja i izbijanja kondenzatora imaju isti oblik kao i u a) dijelu zadatka. Razlika je u vremenskoj konstanti kod nabijanja kondenzatora.
- Vremenska konstanta nabijanja kondenzatora iznosi:

$$\tau_{nab}=R_1\cdot C=50\cdot 10^{-6}=7\,[\mu\mathrm{s}]$$

- Budući da je t >> $5\cdot\tau_{nab}$, kondenzator se uspije nabiti na napon U.



- Struja nabijanja kondenzatora izračunava se na isti način kao i u a) dijelu zadatka.

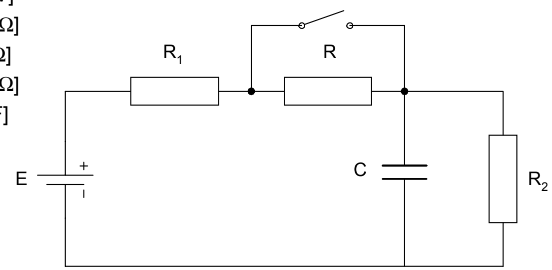


- Uspoređujući krivulje napona i struje u a) i b) dijelu zadatka vidljivo je da čim je manja vremenska konstanta RC kruga da se kondenzator tim prije nabije ili izbije, odnosno krivulje napona i struje imaju brži porast ili pad.

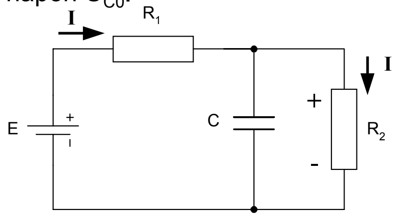
3. zadatak

U stacionarnom stanju, u trenutku t = 0 [s], otvara se sklopka. Odredite sve struje u mreži i napon na kapacitetu te skicirajte njihove oblike. Zadano:

- E= 150 [V]
- R_1 = 30 [Ω]
- R = 50 [Ω]
- R_2 = 20 [Ω]
- C = 5 [μF]



- Prije otvaranja sklopke mreža izgleda kao na slici. Budući da je uspostavljeno stacionarno stanje kondenzator je nabijen na napon U_{C0}.



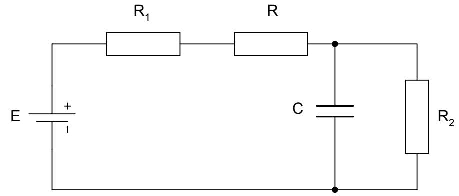
- U krugu teče struja I kroz seriju otpora R_1 i R_2 budući da za istosmjerni krug kondenzator predstavlja beskonačni otpor te kroz njega ne teče struja.

$$I = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{150}{30+20} = 3\,[\mathrm{A}]$$

- Napon na kondenzatoru jednak je naponu na R_2 polariteta prema slici.

$$U_{C0} = U_{R2} = I \cdot R_2 = 3 \cdot 20 = 60\,[\mathrm{V}]$$

- Nakon otvaranja sklopke dobije se mreža kao na slici.

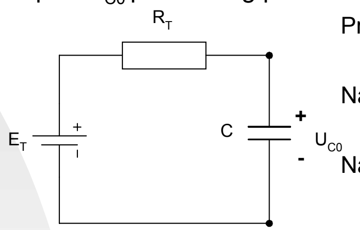


- Do ponovne uspostave stacionarnog stanja naponi i struje u krugu mijenjaju se po eksponencijalnim krivuljama.
- Za jednostavnije rješavanje mreže kondenzator se odspaja, a ostatak mreže nadomješta Theveninovim realnim naponskim izvorom te mreža postaje jednostavni RC krug.
- Određivanje E_T i R_T.

$$E_T = \frac{E}{R_1 + R + R_2} \cdot R_2 = \frac{150}{30+50+20} \cdot 20 = 30\,[\mathrm{V}]$$

$$R_T = (R_1 + R) \| R_2 = \frac{(30+50) \cdot 20}{30+50+20} = 16\,[\Omega]$$

- Kondenzator je na početku prijelazne pojave nabijen na napon U_{C0} prikazanog polariteta.



Prije otvaranja sklopke:

$$u_C(0-) = U_{C0}$$

Nakon otvaranja sklopke:

$$u_C(0+) = u_C(0-) = U_{C0}$$

Na kraju prijelazne pojave:

$$u_C(\infty) = E_T$$

- Napon se mijenja po eksponencijalnoj krivulji:

$$u_C(t) = \mathrm{A_C} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \mathrm{K_C}$$

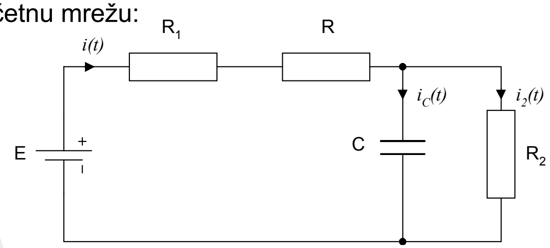
- Uvrštenjem uvjeta odrede se konstante A_C i K_C:

$$\left.\begin{aligned} 60 &= \mathrm{A_C} \cdot 1 + \mathrm{K_C} \\ 30 &= \mathrm{A_C} \cdot 0 + \mathrm{K_C} \end{aligned}\right\} \mathrm{A_C} = 30;\ \mathrm{K_C} = 30$$

odnosno, napon $u_c(t)$,

$$u_C(t) = 30 + 30 \cdot e^{-\frac{t}{R_T \cdot C}} = 30 + 30 \cdot e^{-12500 \cdot t}\ [\mathrm{V}]$$

- Za određivanje struja u krugu potrebno se vratiti u početnu mrežu:



- Struja $i_C(t)$ i $i_2(t)$:

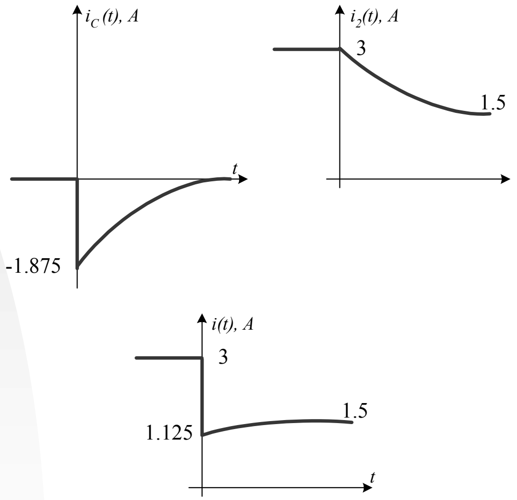
$$i_C(t) = C \cdot \frac{du_C}{dt} = 5 \cdot 10^{-6} \cdot (30) \cdot (-12500) \cdot e^{-12500 \cdot t} = -1.875 \cdot e^{-12500 \cdot t}\,[\mathrm{A}]$$

$$i_2(t) = \frac{u_C}{R_2} = \frac{30 + 30 \cdot e^{-12500 \cdot t}}{20} = 1.5 + 1.5 \cdot e^{-12500 \cdot t}\,[\mathrm{A}]$$

- Ukupna struja i(t):

$$i(t) = i_C(t) + i_2(t) = 1.5 - 0.375 \cdot e^{-12500 \cdot t}\,[\mathrm{A}]$$

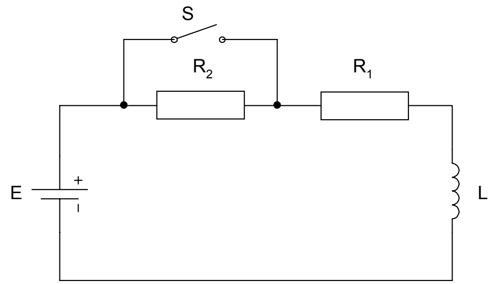
- Grafički prikaz struja:

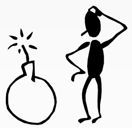


4. zadatak

U shemi prema slici, u trenutku t = 0 [s] zatvara se sklopka S. Do tada je krug bio u stacionarnom stanju. Odredite struju u krugu i napon na zavojnici u prijelaznom stanju.

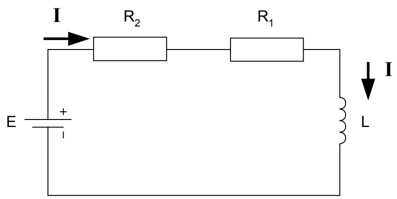
- E = 20 [V]
- R_1 = 5 [Ω]
- R_2 = 15 [Ω]
- L = 50 [mH]





Rješenje zadatka

- Prije zatvaranja sklopke mreža izgleda kao na slici. Budući da je uspostavljeno stacionarno stanje kroz zavojnicu teče struja I.

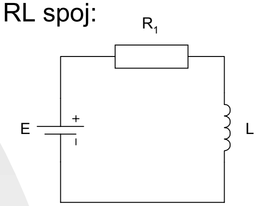


- U krugu teče struja kroz seriju otpora R_1 i R_2.

$$I = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{20}{5+15} = 1\,[\mathrm{A}]$$

- Napon na zavojnici je jednak nuli, tj. zavojnica predstavlja kratki spoj u istosmjernoj mreži.

- Nakon zatvaranja sklopke mreža se svodi na jednostavan RL spoj:



Prije zatvaranja sklopke:

$$i_L(0-) = \mathrm{I}$$

Nakon zatvaranja sklopke:

$$i_L(0+) = i_L(0-) = \mathrm{I}$$

Na kraju prijelazne pojave:

$$i_L(\infty) = \frac{E}{R_1} = 4\,[\mathrm{A}]$$

- Struja za vrijeme prijelazne pojave:

$$i_L(t) = \mathrm{A_L} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \mathrm{K_L}$$

- Uvrštenjem uvjeta odrede se konstante A_L i K_L:

$$\left.\begin{aligned} 1 &= \mathrm{A_L} \cdot 1 + \mathrm{K_L} \\ 4 &= \mathrm{A_L} \cdot 0 + \mathrm{K_L} \end{aligned}\right\} \mathrm{A_L} = -3;\ \mathrm{K_L} = 4$$

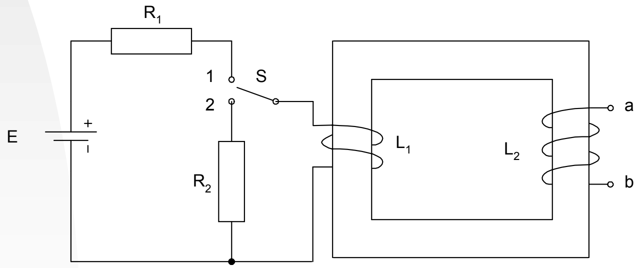
odnosno, struja $i_L(t)$,

$$i_L(t) = 4 - 3 \cdot e^{-\frac{R_1 \cdot t}{L}} = 4 - 3 \cdot e^{-100 \cdot t}\ [\mathrm{A}]$$

5. zadatak

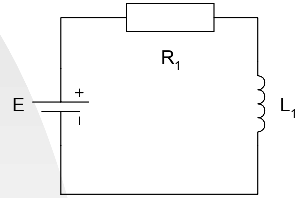
U sklopu prema slici sklopka se nalazi dugo vremena u položaju 1. Koliki je napon u_{ab} ako sklopku trenutno prebacimo u položaj 2? (u_{ab} (t = 0+) = ?). Zadano:

- R_1 = 10 [Ω]
- R_2 = 10 [kΩ]
- L_1 = 16 [mH]
- L_2 = 25 [mH]
- k = 0.8
- E = 60 [V]



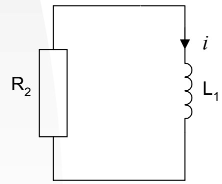
Rješenje zadatka

- Sklopka je u položaju 1 dugo vremena i kroz zavojnicu teče struja I, a mreža izgleda kao na slici.



$$i(0-) = I = \frac{E}{R_1} = \frac{60}{10} = 6\,[\mathrm{A}]$$

- Prebacivanjem sklopke u položaj 2, mreža poprima sljedeći oblik.



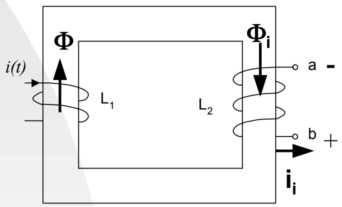
$$i(0+) = i(0-) = 6\,[\mathrm{A}]$$

$$i(\infty) = 0\,[\mathrm{A}]$$

$$\tau = \frac{L_1}{R_2}$$

$$i(t) = \frac{E}{R_1} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

- Zavojnica L_1 i L_2 su međuinduktivno vezane. Struja koja prolazi kroz zavojnicu L_1 međuinduktivnom vezom inducira napon na stezaljkama zavojnice L_2.



Struja i(t) protječući kroz zavojnicu L_1 stvara promjenjivi tok Φ smjera prema slici.

Budući da struja i(t) pada, tok Φ također pada, a inducirani tok Φ_i je prikazanog smjera.

Takav inducirani tok uzrokovala je inducirana struja prikazanog smjera, odnosno inducirani napon prikazanog polariteta.

- Po iznosu napon u_{ab} iznosi:

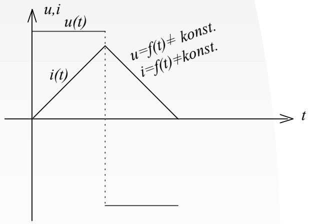
$$M = k \cdot \sqrt{L_1 \cdot L_2} = 0.8 \cdot \sqrt{16 \cdot 25} = 16\,[\mathrm{mH}]$$

$$|u_{ab}(t)| = \left|M \cdot \frac{di}{dt}\right| = \left|M \cdot \frac{E}{R_1} \cdot \left(-\frac{R_2}{L_1}\right) \cdot e^{-\frac{R_2 \cdot t}{L_2}}\right|$$

$$u_{ab}(t = 0+) = -\left|16 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{60}{10} \cdot \left(-\frac{10 \cdot 10^3}{16 \cdot 10^{-3}}\right) \cdot e^{-0}\right| = -60\,[\mathrm{kV}]$$

Nesinusoidalni krugovi

- Izmjenični krugovi s nesinusoidalnim izvorima.
- Parametarsko karakteriziranje periodičkih električnih veličina.



1. zadatak

U spoju prema slici a) nalazi se idealni strujni izvor. Na slici b) prikazan je dijagram vremenske ovisnosti struje izvora. Treba odrediti:

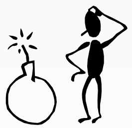
a) $u_R(t)$, $u_L(t)$, $u(t)$ i nacrtati dijagrame tih napona

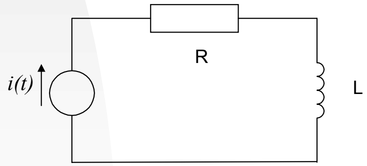
b) maksimalne vrijednosti napona na priključcima izvora

c) jednadžbu trenutne snage i snagu u trenutku t = 0. 25 [s] i t = 0.75 [s]

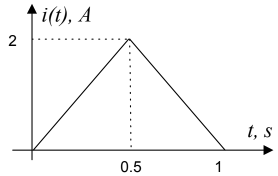
Zadano:

- R = 2 [Ω]
- L = 1 [H]





a)



b)

Uvodni pojmovi

- Strujno-naponske prilike na otporu, induktivitetu i kapacitetu u izmjeničnim strujnim krugovima:
  - Otpor (R):

$$u_R(t) = i_R(t)\cdot R$$

  - Induktivitet (L):

$$u_L(t) = L\cdot\frac{di_L(t)}{dt}$$

  - Kapacitet (C):

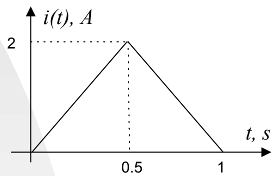
$$u_C(t) = \frac{1}{C}\cdot\int_o^t i_C(t)\cdot dt$$

- Snaga u izmjeničnim krugovima:

$$p(t) = u(t)\cdot i(t)$$

Rješenje zadatka

- Struja koju daje strujni izvor analitički opisana ima sljedeći oblik:



$$i(t) = \begin{cases} 4\cdot t; & \text{za } 0\le t\le 0.5\,[s] \\ -4\cdot(t-1); & \text{za } 0.5\,[s]\le t\le 1\,[s] \end{cases}$$

- Napon na otporu R:

$$u_R(t) = i(t)\cdot \mathrm{R} = \begin{cases} 8\cdot t; & \text{za } 0\le t\le 0.5\,[s] \\ -8\cdot(t-1); & \text{za } 0.5\,[s]\le t\le 1\,[s] \end{cases}$$

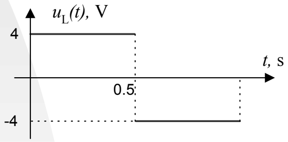
- Napon na zavojnici L:

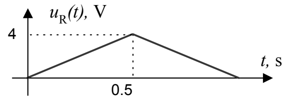
$$u_L(t) = L\cdot\frac{di}{dt} = \begin{cases} L\cdot\dfrac{d(4\cdot t)}{dt} = 1\cdot 4 = 4\,[\mathrm{V}]; & \text{za } 0\le t\le 0.5\,[s] \\ L\cdot\dfrac{d(-4\cdot(t-1))}{dt} = 1\cdot(-4) = -4\,[\mathrm{V}]; & \text{za } 0.5\,[s]\le t\le 1\,[s] \end{cases}$$

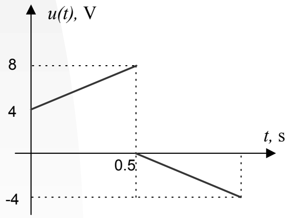
- Napon na stezaljkama strujnog izvora:

$$u(t) = u_R(t) + u_L(t) = \begin{cases} 8 \cdot t + 4\,; & \text{za } 0 \le t \le 0.5\,[s] \\ -8 \cdot t + 4\,; & \text{za } 0.5\,[s] \le t \le 1\,[s] \end{cases}$$

- Dijagrami napona:







Maksimalni napon na izvoru:

$$U_{max} = 8\,[V]$$

- Snaga na izvoru:

$$p(t) = i(t) \cdot u(t)$$

$$p(t) = \begin{cases} (4 \cdot t) \cdot (8 \cdot t + 4); & \text{za } 0 \le t \le 0.5\,[s] \\ (-4 \cdot (t-1)) \cdot (-8 \cdot t + 4); & \text{za } 0.5\,[s] \le t \le 1\,[s] \end{cases}$$

$$p(t) = \begin{cases} 32 \cdot t^2 + 16 \cdot t\,; & \text{za } 0 \le t \le 0.5\,[s] \\ 32 \cdot t^2 - 48 \cdot t + 16; & \text{za } 0.5\,[s] \le t \le 1\,[s] \end{cases}$$

- Snaga za t = 0. 25 [s]:

$$p(t) = 32 \cdot t^2 + 16 \cdot t = 32 \cdot 0.25^2 + 16 \cdot 0.25 = 6\,[W]$$

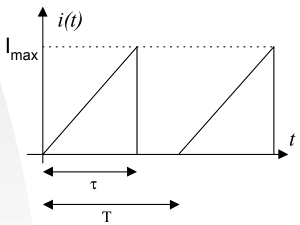
- Snaga za t = 0. 75 [s]:

$$p(t) = 32 \cdot t^2 - 48 \cdot t + 16 = 32 \cdot 0.75^2 - 48 \cdot 0.75 + 16 = 2\,[W]$$

Uvodni pojmovi

Perodičke električne veličine

- Za svaku perodičku veličinu može se odrediti analitička funkcija koja opisuje ovisnost prikazane veličine o vremenu.



$$i(t)\,;\, u(t) = f(t)$$

- Osnovni parametri pomoću kojih su opisane periodičke veličine su sljedeći:
  - T je perioda ponavljanja funkcije
  - τ je vrijeme trajanja impulsa
  - I_{max}, U_{max} maksimalna vrijednost veličine

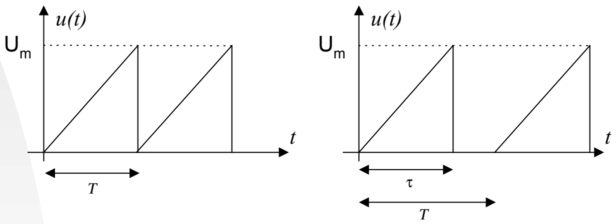
Uvodni pojmovi

Parametarsko karakteriziranje perodičkih električnih veličina

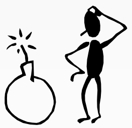
- Srednja aritmetička vrijednost struje: $I_{sr} = \dfrac{1}{T} \cdot \int_0^T i(t)dt$
- Srednja elektrolitička vrijednost struje: $I_{el} = \dfrac{1}{T} \cdot \int_0^T |i(t)|dt$
- Efektivna vrijednost struje: $I = \sqrt{\dfrac{1}{T} \cdot \int_0^T i^2(t)dt}$
- Tjemeni faktor: $\sigma = \dfrac{I_{max}}{I}$
- Faktor oblika: $\xi = \dfrac{I}{I_{el}}$
- Srednji faktor: $\zeta = \dfrac{I_{el}}{I_{max}}$

2. zadatak

Odredite srednju (aritmetičku) vrijednost i efektivnu vrijednost "pilastog" napona čija je vremenska promjena prikazana na slikama.

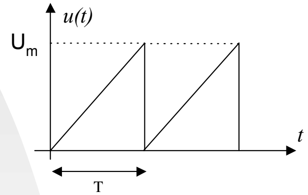


a) b)



Rješenje zadatka

- Funkcija napona analitički opisana:



$$u(t)=\frac{U_m}{T}\cdot t$$

- Srednja vrijednost napona:

$$U_{sr}=\frac{1}{T}\int_0^T u(t)\cdot dt=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{U_m}{T}\cdot t\cdot dt$$

$$U_{sr}=\frac{1}{T}\cdot\frac{U_m}{T}\int_0^T t\cdot dt=\frac{U_m}{T^2}\cdot\frac{t^2}{2}\bigg|_0^T=\frac{U_m}{T^2}\cdot\left(\frac{T^2}{2}-\frac{0^2}{2}\right)$$

$$\boxed{U_{sr}=\frac{U_m}{2}}$$

- Efektivna vrijednost napona:

$$U_{ef}^2=\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\cdot dt=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{U_m^2}{T^2}\cdot t^2\cdot dt$$

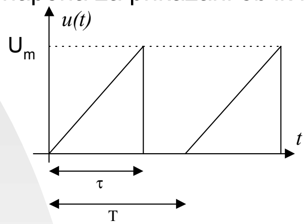
$$U_{ef}^2=\frac{1}{T}\cdot\frac{U_m^2}{T^2}\int_0^T t^2\cdot dt=\frac{U_m^2}{T^3}\cdot\frac{t^3}{3}\bigg|_0^T=\frac{U_m^2}{T^3}\cdot\left(\frac{T^3}{3}-\frac{0^2}{3}\right)$$

$$U_{ef}=\sqrt{\frac{U_m^2}{3}}$$

$$\boxed{U_{ef}=\frac{U_m}{\sqrt{3}}}$$

- Kao što se može vidjeti iz priloženoga srednja i efektivna vrijednost napona ne ovisi o vremenu T.
- Isti izrazi vrijede i za struje.

- Istim postupkom određuju se srednja i efektivna vrijednost napona za prikazani oblik napona:



$$u(t)=\begin{cases}\frac{U_m}{\tau}\cdot t & \text{za } 0\le t\le\tau\\ 0 & \text{za } \tau\le t\le \mathrm{T}\end{cases}$$

- Srednja vrijednost napona:

$$U_{sr}=\frac{1}{T}\int_0^T u(t)\cdot dt=\frac{1}{T}\left[\int_0^\tau\frac{U_m}{\tau}\cdot t\cdot dt+\int_\tau^T 0\cdot dt\right]$$

$$U_{sr}=\frac{1}{T}\cdot\frac{U_m}{\tau}\int_0^\tau t\cdot dt=\frac{U_m}{T\cdot\tau}\cdot\frac{t^2}{2}\bigg|_0^\tau=\frac{U_m}{T\cdot\tau}\cdot\left(\frac{\tau^2}{2}-\frac{0^2}{2}\right)$$

$$\boxed{U_{sr}=\frac{U_m}{2}\cdot\frac{\tau}{T}}$$

- Efektivna vrijednost napona:

$$U_{ef}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\cdot dt = \frac{1}{T}\left[\int_0^\tau \frac{U_m^2}{\tau^2}\cdot t^2\cdot dt + \int_\tau^T 0\cdot dt\right]$$

$$U_{ef}^2 = \frac{1}{T}\cdot\frac{U_m^2}{\tau^2}\int_0^\tau t^2\cdot dt = \frac{U_m^2}{T\cdot\tau^2}\cdot\left.\frac{t^3}{3}\right|_0^\tau = \frac{U_m^2}{T\cdot\tau^2}\cdot\left(\frac{\tau^3}{3}-\frac{0^2}{3}\right)$$

$$U_{ef} = \sqrt{\frac{U_m^2\cdot\tau}{3\cdot T}}$$

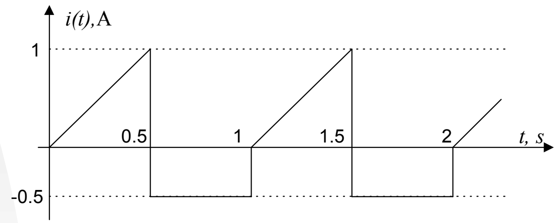
$$\boxed{U_{ef} = \frac{U_m}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\frac{\tau}{T}}}$$

- Usporedivši dobivene rezultate, za bilo koji oblik srednja i efektivna vrijednost impulsa može se izračunati kao:

$$\boxed{U_{sr} = U_{srimpulsa}\cdot\frac{\tau}{T}} \qquad \boxed{U_{ef} = U_{efimpulsa}\cdot\sqrt{\frac{\tau}{T}}}$$

3. zadatak

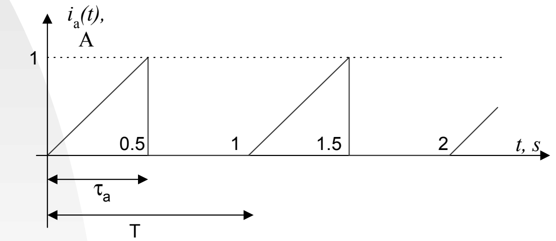
Odredite srednju vrijednost (I_{sr}), srednju elektrolitsku vrijednost (I_{el}) i efektivnu vrijednost (I) promjenjive struje prikazane dijagramom na slici.



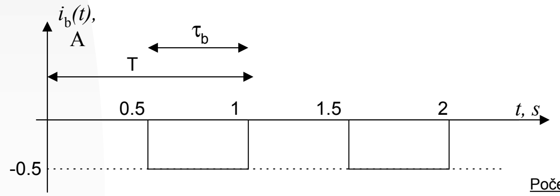
Rješenje zadatka

- Prikazana struja može se rastaviti na dvije funkcije čije parametre znamo izračunati:

$$i(t) = i_{\mathrm{a}}(t) + i_{\mathrm{b}}(t)$$



a)



b)

- Srednja vrijednost pojedinih funkcija.

"Pila": $$I_{sr\mathrm{a}} = \frac{I_{m\mathrm{a}}}{2}\cdot\frac{\tau_{\mathrm{a}}}{T}$$

Pravokutni: $$I_{sr\mathrm{b}} = I_{m\mathrm{b}}\cdot\frac{\tau_{\mathrm{b}}}{T}$$

- Srednja vrijednost struje i(t):

$$I_{sr} = I_{sr\mathrm{a}} + I_{sr\mathrm{b}}$$

$$I_{sr} = \frac{I_{m\mathrm{a}}}{2}\cdot\frac{\tau_{\mathrm{a}}}{T} + I_{m\mathrm{b}}\cdot\frac{\tau_{\mathrm{b}}}{T} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}$$

$$I_{sr} = 0$$

- Na sličan način određuje se efektivna vrijednost struje i(t).

- Efektivna vrijednost pojedinih funkcija.

"Pila": $I_\mathrm{a} = \dfrac{I_{m\mathrm{a}}}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\dfrac{\tau_\mathrm{a}}{T}}$

Pravokutni: $I_\mathrm{b} = I_{m\mathrm{b}} \cdot \sqrt{\dfrac{\tau_\mathrm{b}}{T}}$

- Efektivna vrijednost struje i(t):

$$I^2 = I_\mathrm{a}^2 + I_\mathrm{b}^2$$

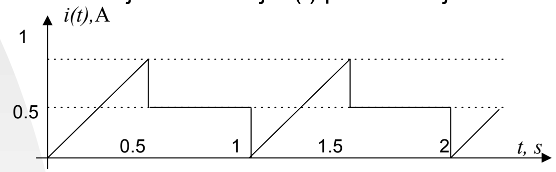
$$I^2 = \left(\frac{I_{m\mathrm{a}}}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{\tau_\mathrm{a}}{T}}\right)^2 + \left(I_{m\mathrm{b}} \cdot \sqrt{\frac{\tau_\mathrm{b}}{T}}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2$$

$$\mathrm{I} = \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{7}{24}\,[\mathrm{A}]$$

- Srednja elektrolitska vrijednost definirana je kao:

$$I_{el} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T |i(t)| \cdot dt$$

- Apsolutna vrijednost struje i(t) prikazana je na slici.



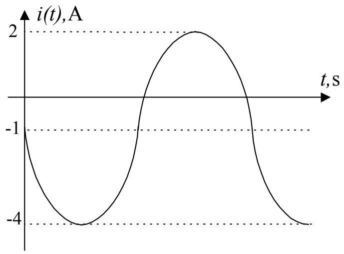
- Za takav oblik struje srednja vrijednost, odnosno srednja elektrolitska vrijednost početne struje iznosi:

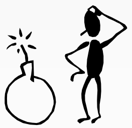
$$I_{el} = \frac{I_{m\mathrm{a}}}{2} \cdot \frac{\tau_\mathrm{a}}{T} + I_{m\mathrm{b}} \cdot \frac{\tau_\mathrm{b}}{T} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$I_{el} = \frac{1}{2}$$

4. zadatak

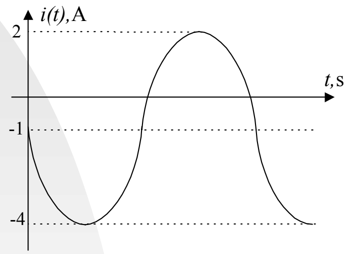
Kolika je radna snaga otpornika R = 100 [Ω] ako kroz otpornik teče struja sinusnog valnog oblika prema slici.





- Efektivna vrijednost struje oblika prema slici određuje se:

$$i(t) = -1 + 3 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$



Efektivna vrijednost sinusoide iznosi:

$$I = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}$$

Efektivna vrijednost sinusoide pomaknute za istosmjernu komponentu:

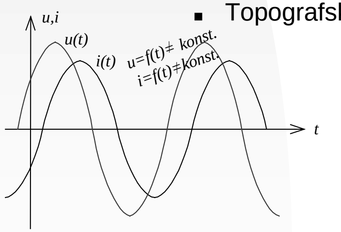
$$I^2 = I_{is}^2 + I_{iz}^2 = (-1)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2$$

- Ova formula vrijedi samo za oblike kod kojih je srednja vrijednost izmjeničnog signala jednaka 0.
- Radna snaga koja se disipira na otporniku R iznosi:

$$P = I^2 \cdot R \qquad P = \left((-1)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2\right) \cdot 100 = 550\,[\mathrm{W}]$$

Izmjenični krugovi

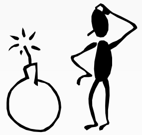
- Sinusoidalne veličine - amplituda, fekvencija, fazni pomak.
- Vektori - kompleksni račun.
- Otpor, induktivitet i kapacitet u izmjeničnom strujnom krugu.
- Ohmov zakon u izmjeničnom strujnom krugu.
- I i II Kirchhoffov zakon u izmjeničnom strujnom krugu.
- Vektorski dijagram napona i struja.
- Topografski dijagram.

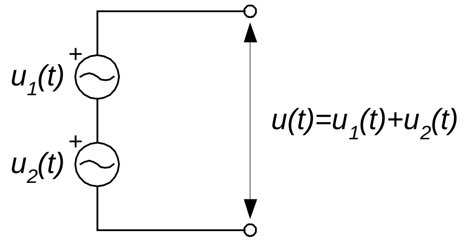


1. zadatak

Dva izvora izmjeničnog sinusoidalnog napona spojena su u seriju. Odredite ukupni napon kojeg daju ovi izvori.

- f = 50 [Hz]
- $U_{MAX1} = U_{MAX2}$ = 100 [V]
- φ_1 = 30 [°]
- φ_2 = 60 [°]





Početna stranica

Uvodni pojmovi

- Matematička funkcija koja opisuje sinusoidalnu veličinu:

$$x(t) = A \cdot \sin[\alpha(t)]$$

gdje je:

- x promatrana veličina koja se mijenja po sinusiodalnom zakonu,
- A predstavlja maksimalnu vrijednost (amplitudu) koju ta veličina može poprimiti,
- $\alpha(t)$ argument funkcije *sinus*, koji je funkcija vremena t.

- U strujnim krugovima radi se o naponima i strujama:

$$u(t) = U_{MAX} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_u)\ [\mathrm{V}]$$
$$i(t) = I_{MAX} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_i)\ [\mathrm{A}]$$

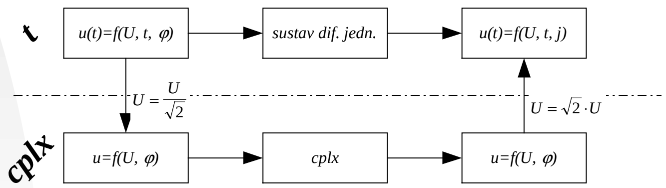
gdje je:

- $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$ [rad/s] - kružna frekvencija,
- f [Hz], - frekvencija (f =1/T, T[s] - period),
- φ [rad], [°] - fazni pomak.

Početna stranica

Uvodni pojmovi

- Rješavanje zadataka s vremenski promjenljivim (sinusoidalnim) veličinama:
  - direktno rješavanje problema u vremenskom području - vrlo komplicirano (rješavanje sustava dif. jednadžbi),
  - rješavanje problema preslikavanjem u kompleksno područje čime se izbjegava vremenska dimenzija problema i pojednostavnjuje proračun.



- Preslikavanje u kompleksno područje vrši se odgovarajućim matematičkim postupkom.

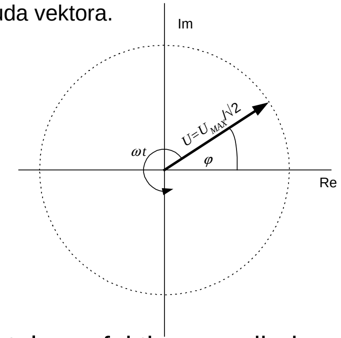
Početna stranica

Uvodni pojmovi

- Može se pokazati da vrijedi izraz:

$$U_{MAX} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) = \mathrm{Im}\left\{U_{MAX} \cdot e^{j(\omega \cdot t + \varphi)}\right\}$$

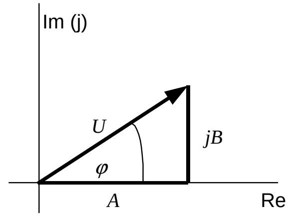
- Izraz u vitičastoj zagradi na desnoj strani može se predočiti s rotirajućim vektorom, pri čemu je:
  - ω - kutna brzina kojom vektor rotira oko svog hvatišta,
  - U_{MAX} - amplituda vektora.



- Kako bi se baratalo s efektivnom vrijednosti sinusoidalne veličine vrši se dijeljenje amplitude s faktorom √2.

Uvodni pojmovi

- Budući da se radi o dvodimenzionim vektorima oni se najčešće zapisuju uz pomoć kompleksnih brojeva:
  - x os označava se kao realna os,
  - y os označava se kao imaginarna os i sve veličine dobivaju prefiks j.



- Pri tome je:

$$A = U \cdot \cos(\varphi)$$
$$B = U \cdot \sin(\varphi)$$

odnosno:

$$U = \sqrt{A^2 + B^2}; \quad \varphi = arctg\left(\frac{B}{A}\right)$$

Uvodni pojmovi

- Stoga vrijede sljedeći načini zapisa vektora:

$$\dot{U} = A + jB$$
$$\dot{U} = U\angle\varphi$$

- Pri tome je zbrajanje lakše provesti s prvim načinom zapisa:

$$\dot{U}_1 \pm \dot{U}_2 = (A_1 + jB_1) \pm (A_2 + jB_2) = (A_1 \pm A_2) + j(B_1 \pm B_2)$$

dok je množenje i dijeljenje jednostavnije s drugim načinom zapisa:

$$\dot{U}_1 \cdot \dot{U}_2 = (U_1\angle\varphi_1) \cdot (U_2\angle\varphi_2) = U_1 \cdot U_2 \angle(\varphi_1 + \varphi_2)$$
$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{U_1\angle\varphi_1}{U_2\angle\varphi_2} = \frac{U_1}{U_2}\angle(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Rješenje u vremenskoj domeni

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t)$$

$$u(t) = 100 \cdot \sin(\omega \cdot t + 30°) + 100 \cdot \sin(\omega \cdot t + 60°)$$

- Upotrebom trigonometrijskih formula (zbroj i razlika kuteva):

$$u(t) = 100 \cdot [\sin(\omega \cdot t) \cdot \cos(30°) + \sin(30°) \cdot \cos(\omega \cdot t)]$$
$$+ 100 \cdot [\sin(\omega \cdot t) \cdot \cos(60°) + \sin(60°) \cdot \cos(\omega \cdot t)]$$

- Kad se izračunaju vrijednosti sin i cos za kuteve 30° i 60°:

$$u(t) = 100 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) \cdot [\sin(\omega \cdot t) + \cos(\omega \cdot t)]$$

$$u(t) = 100 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left[\sin(\omega \cdot t) + \sin\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

- Daljnjom primjenom trigonometrijskih formula (zbroj i razlika funkcija):

$$u(t)=100\cdot\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\cdot 2\cdot\sin\left(\frac{\omega\cdot t+\omega\cdot t+\frac{\pi}{2}}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\omega\cdot t-\omega\cdot t-\frac{\pi}{2}}{2}\right)$$

$$u(t)=100\cdot\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\cdot 2\cdot\sin\left(\omega\cdot t+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$u(t)=100\cdot\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\cdot 2\cdot\sin\left(\omega\cdot t+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$u(t)=50\cdot\sqrt{2}\cdot\left(1+\sqrt{3}\right)\cdot\sin\left(\omega\cdot t+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$u(t)=193\cdot\sin(\omega\cdot t+45^\circ)\ [\mathrm{V}]$$

- Zamislite složenost izračunavanja sume/umnoška proizvoljnog broja napona $u_i(t)$ s različitim amplitudama i fazama!

Rješenje u kompleksnoj domeni

- Upotrebom kompleksnog računa proračun se znatno pojednostavnjuje:

$$u_1(t)=100\cdot\sin(\omega\cdot t+30^\circ)\Rightarrow\dot{U}_1=\frac{100}{\sqrt{2}}\angle 30^\circ\ [\mathrm{V}]$$

$$u_2(t)=100\cdot\sin(\omega\cdot t+60^\circ)\Rightarrow\dot{U}_2=\frac{100}{\sqrt{2}}\angle 60^\circ\ [\mathrm{V}]$$

- Budući da se traži suma napona:

$$\dot{U}=\dot{U}_1+\dot{U}_2$$

koristit će se za to odgovarajući oblik:

$$\dot{U}_1=\frac{100}{\sqrt{2}}\cdot\cos(30^\circ)+j\frac{100}{\sqrt{2}}\cdot\sin(30^\circ)$$

$$\dot{U}_2=\frac{100}{\sqrt{2}}\cdot\cos(60^\circ)+j\frac{100}{\sqrt{2}}\cdot\sin(60^\circ)$$

- Zbroj tih napona jednak je:

$$\dot{U}=\left[\frac{100}{\sqrt{2}}\cdot\cos(30^\circ)+j\frac{100}{\sqrt{2}}\cdot\sin(30^\circ)\right]+\left[\frac{100}{\sqrt{2}}\cdot\cos(60^\circ)+j\frac{100}{\sqrt{2}}\cdot\sin(60^\circ)\right]$$

$$\dot{U}=\frac{100}{\sqrt{2}}\left[\cos(30^\circ)+\cos(60^\circ)\right]+j\frac{100}{\sqrt{2}}\left[\sin(30^\circ)+\sin(60^\circ)\right]$$

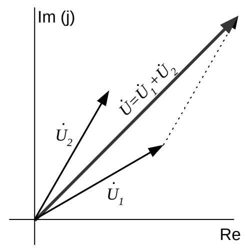
$$\dot{U}=\frac{100}{\sqrt{2}}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right]+j\frac{100}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$\dot{U}=96.5+j96.5\ [\mathrm{V}]$$

ili

$$\dot{U}=136.5\angle 45^\circ\ [\mathrm{V}]$$

- Vektorski dijagram dobije se ucrtavanjem izračunatih vektora napona:



- Provjera:

$$u(t)=193\cdot\sin(\omega\cdot t+45^\circ)[\mathrm{V}]\Leftrightarrow\dot{U}=136.5\angle 45^\circ\ [\mathrm{V}]$$

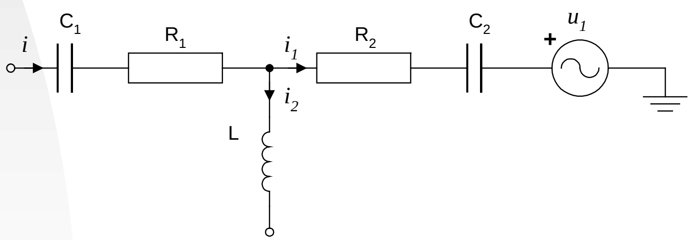
$$U_{MAX}=193\Leftrightarrow\frac{193}{\sqrt{2}}=136.5\Leftrightarrow U=136.5$$

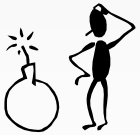
$$\varphi=45^\circ\Leftrightarrow\varphi=45^\circ$$

2. zadatak

Odredite izraz za trenutnu vrijednost napona na kondenzatoru C_1. Zadano:

- $u_1(t) = 15 \cdot \sin(314 \cdot t - \pi/2)$ [V]
- $i_1(t) = 2 \cdot \sin(314 \cdot t + \pi/6)$ [A]
- $i_2(t) = 3 \cdot \sin(314 \cdot t - \pi/3)$ [A]
- $R_1 = 5$ [Ω]
- $R_2 = 3$ [Ω]
- $C_1 = 1$ [mF]
- $C_2 = 200$ [μF]
- L = 7 [mH]

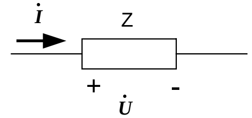




Uvodni pojmovi

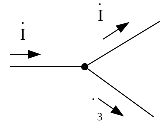
- Ohmov zakon:

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{\dot{Z}} \, [\mathrm{A}]$$



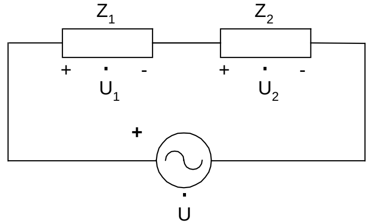
- I Kirchhoffov zakon:

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{I}_i = 0$$



- II Kirchhoffov zakon:

$$\sum_{i=0}^{n} \dot{U}_i = 0$$



Rješenje zadatka

- Napon na kondenzatoru C_1 iznosi:

$$\dot{U}_{C1} = \dot{I} \cdot \dot{X}_{C1}$$

- Impedancija kondenzatora:

$$X_{C1} = \frac{1}{\omega \cdot C_1} = \frac{1}{314 \cdot 1 \cdot 10^{-3}} = 3.2 \, [\Omega]$$

$$\dot{X}_{C1} = -jX_{C1} = -j3.2 \, [\Omega]$$

- Za čvor vrijedi I Kirchhofov zakon:

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$$

- Struje u kompleksnom području:

$$i_1(t) = 2 \cdot \sin(314 \cdot t + \pi/6) \quad \Rightarrow \quad \dot{I}_1 = \frac{2}{\sqrt{2}} \angle 30°$$

$$i_2(t) = 3 \cdot \sin(314 \cdot t - \pi/3) \quad \Rightarrow \quad \dot{I}_2 = \frac{3}{\sqrt{2}} \angle -60°$$

- Ukupna struja:

$$\dot{I} = \frac{2}{\sqrt{2}} \angle 30° + \frac{3}{\sqrt{2}} \angle -60°$$

$$\dot{I} = \frac{2}{\sqrt{2}} (\cos 30° + j \sin 30°) + \frac{3}{\sqrt{2}} (\cos(-60°) + j \sin(-60°))$$

$$\dot{I} = \frac{2}{\sqrt{2}} (\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}) + \frac{3}{\sqrt{2}} (\frac{1}{2} + j(-\frac{\sqrt{3}}{2}))$$

$$\dot{I} = 1.23 + j0.71 + 1.06 - j1.83$$

$$\dot{I} = 2.29 - j1.12 = \sqrt{2.29^2 + (-1.12)^2} \angle arctg \frac{-1.12}{2.29}$$

$$\dot{I} = 2.6 \angle -26° \, [\mathrm{A}]$$

- Po iznosu napon na kondenzatoru C_1:

$$\dot{U}_{C1} = (2.6 \angle -26°) \cdot (3.2 \angle -90°) = 8.3 \angle -116° \, [\mathrm{V}]$$

$$u_{C1}(t) = 8.3 \cdot \sqrt{2} \sin(314 \cdot t - 116°) \, [\mathrm{V}]$$

3. zadatak

Serijski spojeni otpor (R) i kondenzator (C) priključeni su na izvor izmjeničnog napona $u(t)=150\cdot\sin(10^4\cdot t)$ [V]. Potrebno je odrediti:

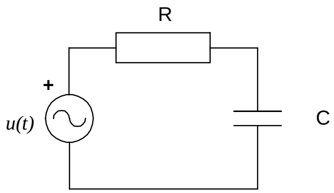
a) impedanciju Z

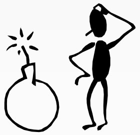
b) struju koja teče strujnim krugom u kompleksnom obliku

c) struju u obliku i(t)

d) nacrtajte prikaz U/I veličina u kompleksnoj ravnini

- R = 20 [Ω]
- C = 5 [μF]
- $u(t) = 150\cdot\sin(10^4\cdot t)$ [V]

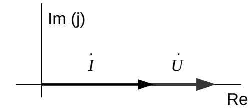




Uvodni pojmovi

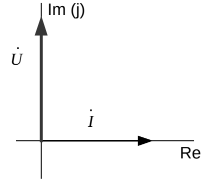
- Strujno-naponske prilike na otporu, induktivitetu i kapacitetu kod sinusoidalnih napona i struja (kompleksno područje):
  - Otpor (R): $\dot{I}=\dfrac{\dot{U}}{R}$

$$R\text{ - radni otpor }\left(R;R\angle 0°\right)$$



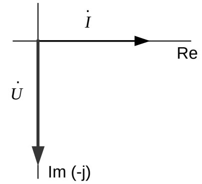
  - Induktivitet (L): $\dot{I}=\dfrac{\dot{U}}{jX_L}$

$$jX_L = j\omega\cdot L\text{ - ind. otpor }\left(X_L\angle 90°\right)$$



  - Kapacitet (C): $\dot{I}=\dfrac{\dot{U}}{-jX_C}$

$$-jX_C=\frac{1}{j\omega\cdot C}\text{ - kap. otpor }\left(X_C\angle -90°\right)$$



Rješenje zadatka

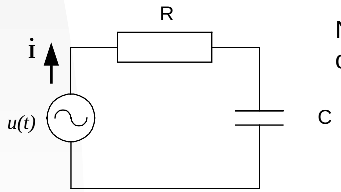
- Impedancija kruga određuje se na sljedeći način:

$$Z=\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=R+\frac{1}{j\omega\cdot C}=R+\frac{1}{j\omega\cdot C}\cdot\frac{j}{j}=R-j\frac{1}{\omega\cdot C}$$

$$Z=20-j\frac{1}{10^4\cdot 5\cdot 10^{-6}}=20-j20\,[\Omega]$$

$$Z=20\cdot\sqrt{2}\angle -45°\,[\Omega]$$

- Krug se sastoji od serije otpora i kondenzatora pa u krugu teče ista struja I kroz sve elemente.

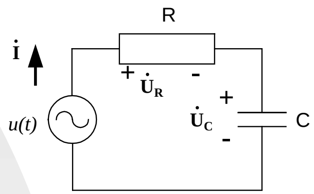


Napon izvora u kompleksnom obliku:

$$u(t)=150\cdot\sin(10^4\cdot t)$$

$$\dot{U}=\frac{150}{\sqrt{2}}\angle 0°$$

- Tako definirana struja stvara padove napona na pojedinim elementima.



Struja se određuje pomoću Ohmovog zakona u kompleksnom obliku.

$$\dot{I}=\frac{\dot{U}}{Z}=\frac{\frac{150}{\sqrt{2}}\angle 0°}{20\sqrt{2}\angle -45°}=\frac{\frac{150}{\sqrt{2}}}{20\sqrt{2}}\angle 0°-(-45°)$$

$$\dot{I}=3.75\angle +45°\,[\mathrm{A}]$$

- U vremenskoj domeni struja ima oblik:

$$i(t)=I\cdot\sqrt{2}\sin(\omega\cdot t+\varphi_i)=3.75\cdot\sqrt{2}\sin(10^4\cdot t+45°)\,[\mathrm{A}]$$

- Naponi na otporu i kondenzatoru :

$$\dot{U}_R=\dot{I}\cdot R=(3.75\angle 45°)\cdot(20\angle 0°)=75\angle 45°\,[\mathrm{V}]$$

$$\dot{U}_C=\dot{I}\cdot(-jX_C)=(3.75\angle 45°)\cdot(20\angle -90°)=75\angle -45°\,[\mathrm{V}]$$

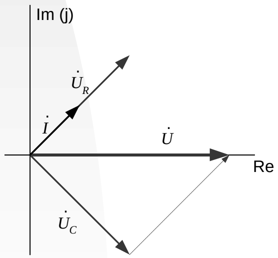
- Napon na izvoru jednak je zbroju napona na otporu i kondenzatoru:

$$\dot{U}_R + \dot{U}_C = (75\angle 45°) + (75\angle -45°)$$

$$\dot{U}_R + \dot{U}_C = [75\cdot\cos(45°) + j75\cdot\sin(45°)] + [75\cdot\cos(-45°) + j75\cdot\sin(-45°)]$$

$$\dot{U}_R + \dot{U}_C = 2\cdot 75\cdot\cos(45°) = 75\cdot\sqrt{2}\,[\mathrm{V}] = \dot{U}$$

- Crtanjem dobivenih vektora napona i vektora struje dolazi se do vektorskog dijagrama:



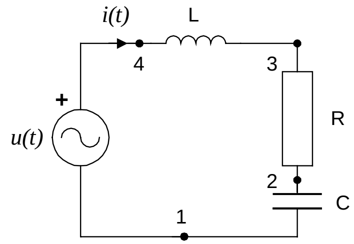
Dijagram prikazuje odnose koji su već ranije objašnjeni:

- Na otporu su struja i napon *u fazi*.
- Na kapacitetu struja prethodi naponu za četvrtinu periode.
- Ukupan napon izvora jednak je ***vektorskoj*** sumi napona na pojedinim elementima.

4. zadatak

Za spoj prema slici nacrtajte vektorski i topografski dijagram. Zadano:

- u (t) = 20·sin ω·t [V]
- R = 10 [Ω]
- X_L = 20 [Ω]
- X_C = 10 [Ω]



Rješenje zadatka

- Zadatak započinjemo određivanjem ukupne impedancije:

$$Z = R + jX_L - jX_C$$

$$\mathrm{Z} = 10 + j20 - j10 = 10 + j10 = 10\sqrt{2}\angle 45°\,[\Omega]$$

- Struja u krugu:

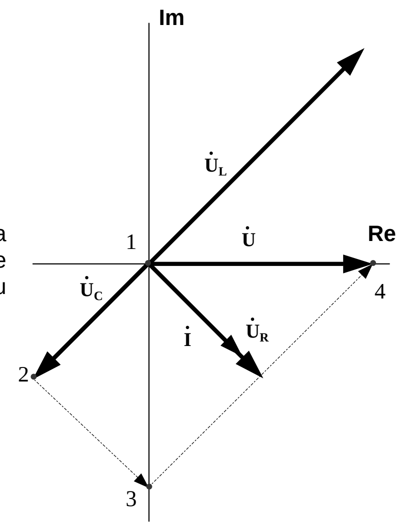
$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z}$$

$$\dot{I} = \frac{10\sqrt{2}\angle 0°}{10\sqrt{2}\angle +45°} = 1\angle -45°\,[\mathrm{A}]$$

- I bez određivanja struje iz poznate impedancije, odnosno njenog karaktera moguće je zaključiti da struja u krugu kasni za naponom.

- Određivanje vektorskog dijagrama:

1. Prvi korak pri crtanju v.d. je ucrtavanje vektora napona koji je zadan.
2. Iz poznatog karaktera impedancije (induktivni) moguće je nacrtati ukupnu struju u krugu koja kasni za naponom za 45°
3. Napon na kondenzatoru kasni za strujom za 90°.
4. Napon na otporu je u fazi sa strujom. Po iznosu napon je jednak naponu na kondenzatoru (R = X_C).
5. Napon na zavojnici prethodi struji za 90°. Napon je dva puta veći od pada napona na otporu i kondenzatoru.
6. Ukupni napon na izvoru jednak je vektorskom zbroju napona na kondenzatoru, otporu i zavojnici.



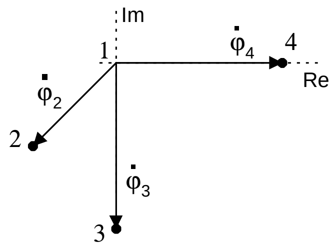
- Topografski dijagram predstavlja prikaz potencijala mreže u kompleksnoj ravnini.
- Za određivanje topografskog dijagrama potrebno je odrediti referentnu točku.
- Ako odaberemo točku 1 za referentnu vrijedi:

$$\dot{\varphi}_1 = 0$$

$$\dot{\varphi}_2 = \dot{U}_{21} = \dot{I}\cdot \dot{X}_C = (1\angle -45°)\cdot(10\angle -90°) = 10\angle -135°\ [\mathrm{V}]$$

$$\dot{\varphi}_3 = \dot{\varphi}_2 + \dot{I}\cdot R = (10\angle -135°) + (1\angle -45°)\cdot(10\angle 0°) = 10\sqrt{2}\angle -90°\ [\mathrm{V}]$$

$$\dot{\varphi}_4 = \dot{\varphi}_3 + \dot{I}\cdot \dot{X}_L = (10\sqrt{2}\angle -90°) + (1\angle -45°)\cdot(20\angle 90°) = 10\sqrt{2}\angle 0°\ [\mathrm{V}]$$



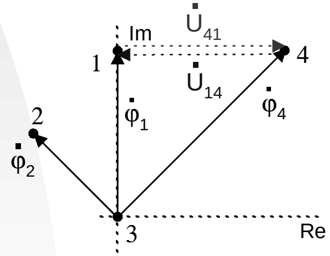
- Ako odaberimo točku 3 za referentnu vrijedi:

$$\dot{\varphi}_3 = 0$$

$$\dot{\varphi}_4 = \dot{U}_{43} = \dot{I}\cdot \dot{X}_L = (1\angle -45°)\cdot(20\angle 90°) = 20\angle 45°\ [\mathrm{V}]$$

$$\dot{\varphi}_2 = \dot{U}_{23} = -\dot{I}\cdot R = -(1\angle -45°)\cdot(10\angle 0°) = 10\sqrt{2}\angle 135°\ [\mathrm{V}]$$

$$\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 - \dot{I}\cdot \dot{X}_C = (10\angle 135°) - (1\angle -45°)\cdot(10\angle -90°) = 10\sqrt{2}\angle 90°\ [\mathrm{V}]$$



Napon između dvije točke definiran je kao:

$$\dot{U}_{41} = \dot{\varphi}_4 - \dot{\varphi}_1$$

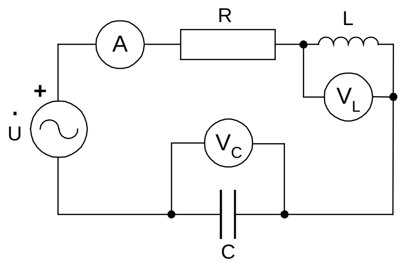
$$\dot{U}_{14} = \dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_4$$

- Iz dijagrama je vidljivo da bez obzira koju referentnu točku odabrali razlika potencijala između dviju točki predstavlja isti vektor.

5. zadatak

Krug se sastoji od elemenata RLC. Na induktivitetu vlada pad napona U_L, a na kondenzatoru U_C uz napon na stezaljkama kruga U. U krugu teče struja I. Odredite RLC i cos φ. Zadano:

- U_L = 660 [V]
- U = 220 [V]
- U_C = 500 [V]
- R = 10 [Ω]
- f = 50 [Hz]
- I = 11 [A]



Rješenje zadatka

- Zadatak započinjemo crtanjem vektorskog dijagrama:

Pretpostavimo proizvoljnu fazu struje I, odnosno:

$$\dot{I} = 11\angle 0°$$

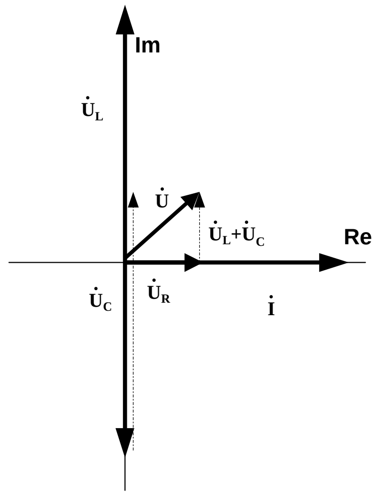
Napon na kondenzatoru kasni za strujom I za 90°.

Napon na zavojnici prethodi struji za 90°.

Napon na otporu je u fazi sa strujom.

Napon izvora jednak je vektorskom zbroju napona na svim elementima u krugu.

$$\dot{U} = \dot{U}_C + \dot{U}_L + \dot{U}_R$$



- Iz vektorskog dijagrama slijedi:

$$U^2 = U_R^2 + (U_L - U_C)^2$$

- Napon na otporu R:

$$U_R = I \cdot R$$

- Poznavajući prethodno, R se može odrediti na sljedeći način:

$$R = \sqrt{\frac{U^2 - (U_L - U_C)^2}{I^2}} = \sqrt{\frac{200^2 - (660-500)^2}{11^2}} = 14\,[\Omega]$$

- Kapacitet kondenzatora i induktivitet zavojnice određujemo:

$$U_C = I \cdot X_C = \frac{I}{2\cdot\pi\cdot f\cdot C} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{I}{2\cdot\pi\cdot f\cdot U_C} = \frac{11}{2\cdot\pi\cdot 50\cdot 500} = 70.8\,[\mu\mathrm{F}]$$

$$U_L = I \cdot X_L = I\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot L \quad \Rightarrow \quad L = \frac{U_L}{2\cdot\pi\cdot f\cdot I} = \frac{660}{2\cdot\pi\cdot 50\cdot 11} = 0.19\,[\mathrm{H}]$$

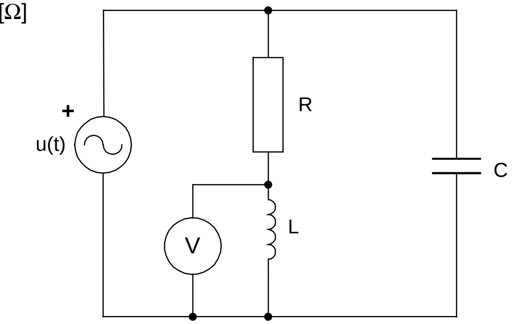
- cos φ određuje se iz vektorskog dijagrama.

$$\cos\varphi = \frac{U_R}{U} = \frac{I\cdot R}{U} = \frac{11\cdot 14}{200} = 0.7 \ \text{(induktivno)}$$

6. zadatak

Kombinacija prema slici priključena je na izvor napajanja u(t). Ako voltmetar mjeri napon U_V, a između napona i ukupne struje u krugu ne postoji fazni pomak, izračunajte vrijednosti R_L i X_L. Zadano:

- u (t) = 100·√2 · sin ω· t [V]
- U_V = 60 [V]
- X_C =10 [Ω]



Rješenje zadatka

- Zadatak započinjemo crtanjem vektorskog dijagrama:

Prvo ucrtavamo napon izvora i vektor struje koji su u fazi.

Budući da se radi o paralelnom spoju, napon na seriji R i L te na kondenzatoru je jednak naponu izvora. Iz toga slijede vektori struja u granama.

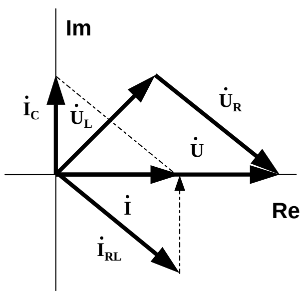
$$\dot{U} = \dot{U}_{RL} = \dot{U}_C$$

Zbroj struja u granama mora dati ukupnu struju u krugu, koja mora biti u fazi s ukupnim naponom u krugu.

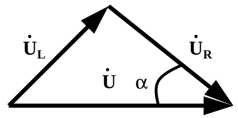
$$\dot{I} = \dot{I}_{RL} + \dot{I}_C$$

Zbroj padova napona na zavojnici i otporu daju napon na izvoru.

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L$$



- Iz vektorskog dijagrama napona slijedi:



$$U^2 = U_R^2 + U_L^2$$

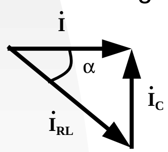
$$U_R = \sqrt{U^2 - U_L^2} = \sqrt{100^2 - 60^2} = 80\,[\mathrm{V}]$$

$$tg\,\alpha = \frac{U_L}{U_R} = \frac{60}{80} = \frac{3}{4}$$

- Struju kroz kondenzator moguće je odrediti iz:

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}}{\dot{X}_C} = \frac{100\angle 0^\circ}{10\angle -90^\circ} = 10\angle 90^\circ\,[\mathrm{A}]$$

- Iz vektorskog dijagrama struja slijedi:



$$tg\,\alpha = \frac{I_C}{I} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{I_C}{tg\alpha} = \frac{10}{\frac{3}{4}} = 13.3\,[\mathrm{A}]$$

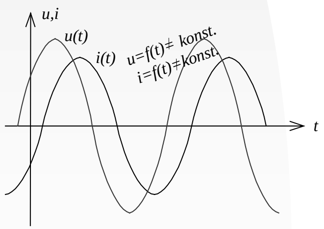
$$I_{RL} = \sqrt{I^2 + I_C^2} = \sqrt{13.3^2 + 10^2} = 16.7\,[\mathrm{A}]$$

- Sada je moguće odrediti R i X_L.

$$R = \frac{U_R}{I_{RL}} = \frac{80}{16.7} = 4.8\,[\Omega] \qquad X_L = \frac{U_L}{I_{RL}} = \frac{60}{16.7} = 3.6\,[\Omega]$$

Izmjenični krugovi

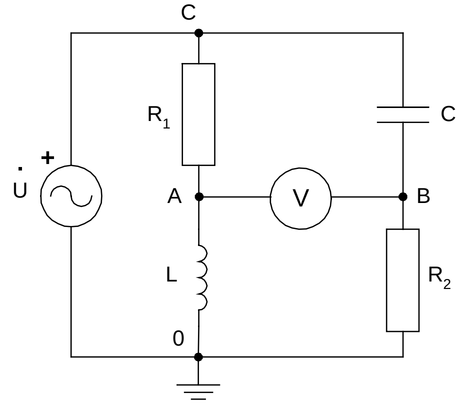
- Vektorski dijagram.
- Topografski dijagram.
- Snaga u izmjeničnim strujnim krugovima.
- Prividna, jalova i radna snaga.

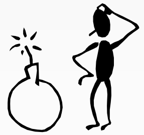


1. zadatak

U strujnom krugu prema slici odredite napon i struju izvora, ako idealan voltmetar pokazuje 60 [V]. Nacrtajte vektorski i topografski dijagram.

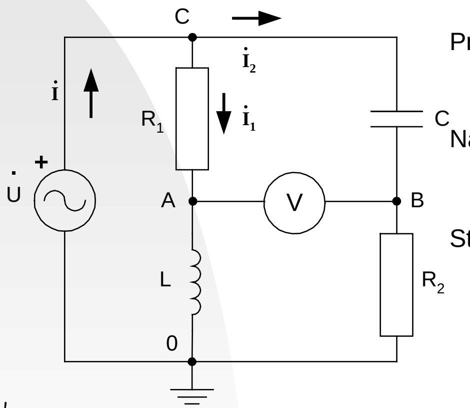
- $R_1 = R_2 = 5\ [\Omega]$
- $X_L = 10\ [\Omega]$
- $X_C = 10\ [\Omega]$





Rješenje zadatka

- U mreži teku struje naznačenog smjera:



Pretpostavimo fazni pomak napona U_{AB}:

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_V = 60\angle 0°\,[\mathrm{V}]$$

Napon U_{AB} može se izračunati kao:

$$\dot{U}_{AB} = \dot{\varphi}_A - \dot{\varphi}_B = \dot{I}_1 \cdot jX_L - \dot{I}_2 \cdot R_2$$

Struje u granama iznose:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{R_1 + jX_L}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}}{R_2 - jX_C}$$

- Uvrštenjem struja u izraz za napon U_{AB} dobiva se:

$$\dot{U}_{AB} = \dot{I}_1 \cdot jX_L - \dot{I}_2 \cdot R_2 = \frac{\dot{U}}{R_1 + jX_L} \cdot jX_L - \frac{\dot{U}}{R_2 - jX_C} \cdot R_2$$

- Pomoću izraza za napon U_{AB} moguće je izračunati napon izvora :

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U} \cdot \left(\frac{jX_L}{R_1 + jX_L} - \frac{R_2}{R_2 - jX_C} \right)$$

$$\dot{U} = \frac{\dot{U}_{AB}}{\left(\frac{jX_L}{R_1 + jX_L} - \frac{R_2}{R_2 - jX_C} \right)} = \frac{60}{\frac{j10}{5 + j10} - \frac{5}{5 - j10}}$$

$$\dot{U} = \frac{60}{\frac{j10}{5 + j10} \cdot \frac{5 - j10}{5 - j10} - \frac{5}{5 - j10} \cdot \frac{5 + j10}{5 + j10}} = \frac{60}{\frac{100 + j50}{125} - \frac{25 + j50}{125}} = \frac{60}{\frac{75}{125}}$$

$$\dot{U} = 100\angle 0°\,[\mathrm{V}]$$

- Pomoću struja u granama moguće je izračunati struju izvora:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{R_1 + jX_L} = \frac{100}{5 + j10} \cdot \frac{5 - j10}{5 - j10} = 4 - j8\,[\mathrm{A}]$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}}{R_2 - jX_C} = \frac{100}{5 - j10} \cdot \frac{5 + j10}{5 + j10} = 4 + j8\,[\mathrm{A}]$$

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 4 - j8 + 4 + j8 = 8\angle 0°\,[\mathrm{A}]$$

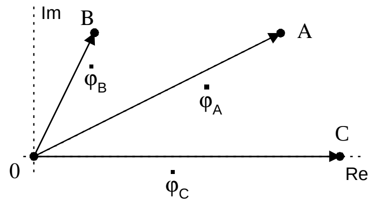
- Za topografski dijagram potrebno je odrediti potencijale svih točaka u mreži:

$$\dot{\varphi}_0 = 0\angle 0°\,[\mathrm{V}]$$

$$\dot{\varphi}_A = \dot{I}_1 \cdot jX_L = 8.94\angle -63.4° \cdot 10\angle 90° = 89.4\angle 26.6°\,[\mathrm{V}]$$

$$\dot{\varphi}_B = \dot{I}_2 \cdot R_2 = 8.94\angle 63.4° \cdot 5\angle 0° = 44.7\angle 63.4°\,[\mathrm{V}]$$

$$\dot{\varphi}_C = \dot{U}_{C0} = 100\angle 0°\,[\mathrm{V}]$$



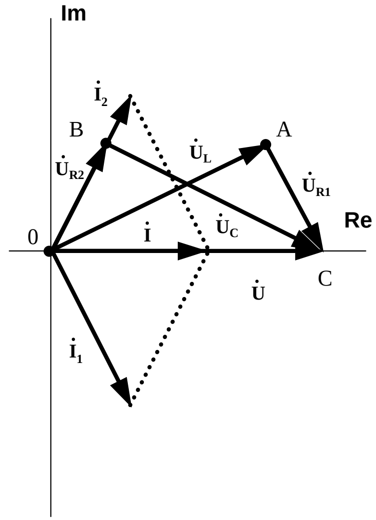
- Određivanje vektorskog dijagrama:

Vektor napona izvora je poznat te njega prvog ucrtavamo u vektorski dijagram.

Struja u prvoj grani (I_1) kasni za naponom izvora, a struja u drugoj grani (I_2) prethodi naponu izvora. Ukupna struja u krugu jednaka je vektorskom zbroju struja u granama.

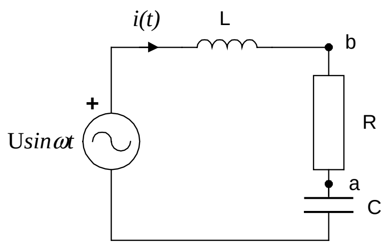
Napon na zavojnici L prethodi struji I_1, a napon na otporu R_1 je u fazi s istom strujom. Napon na izvoru jednak je zbroju padova napona na L i R_1.

Napon na otporu R_2 je u fazi sa strujom I_2, a napon na kondenzatoru C kasni za istom strujom. Napon na izvoru jednak je zbroju padova napona na R_2 i C.



2. zadatak

Nacrtati vektor koji prikazuje napon U_{ab}. $X_L > X_C$.



Rješenje zadatka

- Za odrediti vektor napona U_{ab} potrebno je djelomično nacrtati vektorski dijagram.

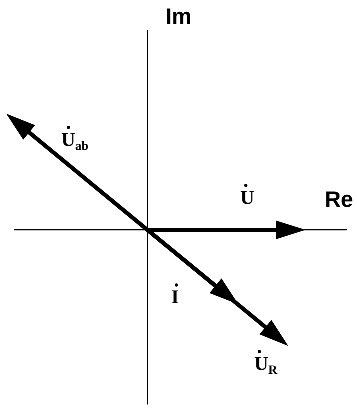
Vektor napona izvora je zadan kao napon pod 0°.

Budući da je $X_L > X_C$, struja u krugu kasni za naponom za kut manji od 90 ° .

Napon na otporu je u fazi sa strujom.

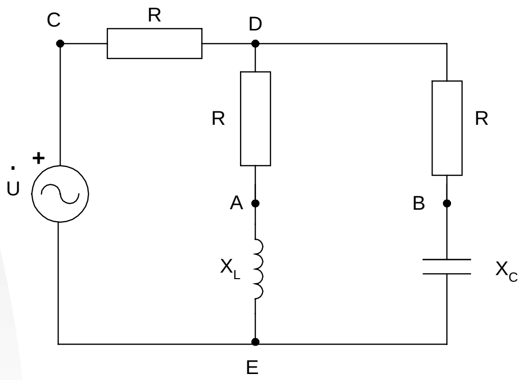
Napon Uab je definiran kao:

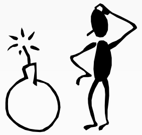
$$\dot{U}_{ab} = -\dot{U}_R$$



3. zadatak

U kakvom su faznom odnosu naponi U_{CD} i U_{AE} ako je $X_L = X_C = R$.





Rješenje zadatka

- Da bi se odredio fazni pomak napona potrebno je nacrtati vektorski dijagram:

Pretpostavimo da je napon U_{DE} pod 0°.

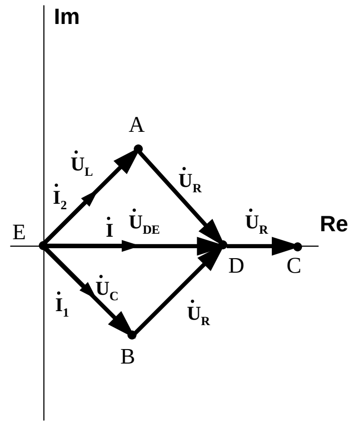
Struja u prvoj grani kasni za naponom U_{DE} za 45°, dok struja u drugoj grani prethodi naponu U_{DE} za 45° budući da je $X_L = X_C = R$.

Napon U_{DE} jednak je zbroju napona na zavojnici i otporu, odnosno padu napona na kondenzatoru i otporu.

Ukupna struja jednaka je zbroju struja u granama.

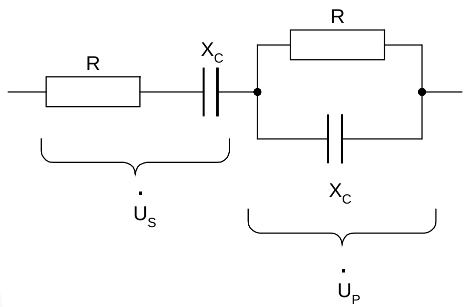
Napon izvora jednak je zbroju napona U_{DE} i napona na otporu R koji je u fazi sa strujom I.

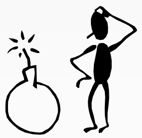
Iz vektorskog dijagrama slijedi da napon U_{AE} prethodi naponu U_{CD} za 45°.



4. zadatak

Odredite omjer napona U_S/U_P. $R = X_C$.





Rješenje zadatka

- Izrazi za napone su sljedeći:

$$\dot{U}_S = \dot{I} \cdot (R - jX_C)$$

$$\dot{U}_P = \dot{I} \cdot (R \| (-jX_C))$$

- Omjer napona se svodi na omjer impedancija budući da ista struja teče kroz obje impedancije:

$$\frac{\dot{U}_S}{\dot{U}_P} = \frac{\dot{I} \cdot (R - jX_C)}{\dot{I} \cdot (R \| (-jX_C))} = \frac{R - jX_C}{R \| (-jX_C)}$$

- Ukoliko se uvrsti $R = X_C$:

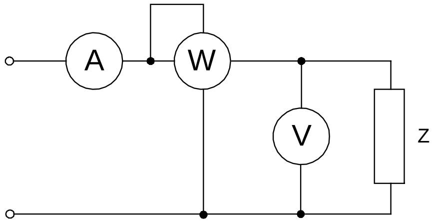
$$\frac{\dot{U}_S}{\dot{U}_P} = \frac{R - jR}{\frac{R \cdot (-jR)}{R - jR}} = \frac{(R - jR)^2}{R \cdot (-jR)} \cdot \frac{j}{j} = j \cdot (1 - 2j - 1) = 2\angle 0°$$

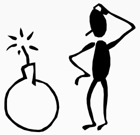
- Omjer efektivnih vrijednosti: $\frac{U_S}{U_P} = 2$

5. zadatak

Izračunati impedanciju i cos φ jednofaznog trošila ako instrumenti spojeni prema slici pokazuju:

- $I_{ampermetra} = 10$ [A]
- $U_{voltmetra} = 400$ [V]
- $P_{watmetra} = 3$ [kW]





Uvodni pojmovi

- Što se tiče snage u izmjeničnim strujnim krugovima - tu se koriste sljedeći pojmovi:
  - **Prividna snaga** - snaga koju izvor predaje trošilu. Predstavlja umnožak efektivnih vrijednosti napona i struje.

$$S = U \cdot I \,[\mathrm{VA}]$$

  - **Radna (djelatna) snaga** - snaga koja se na trošilu disipira u toplinu, odnosno snaga koja predstavlja *iskoristivi* dio prividne snage. Kut φ predstavlja pomak u fazi između napona i struje.

$$P = U \cdot I \cdot \cos(\varphi) \,[\mathrm{W}]$$

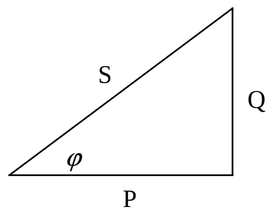
cos(φ) se naziva i faktorom snage!

  - **Jalova (reaktivna) snaga** - snaga koju trošilo vraća nazad izvoru i koja je posljedica reaktivne komponente trošila (kapacitivnost ili induktivnost).

$$\mathrm{Q} = U \cdot I \cdot \sin(\varphi) \,[\mathrm{VAr}]$$

Uvodni pojmovi

- Navedene se tri veličine mogu predočiti u obliku trokuta snaga:



- Iako prividna i jalova snaga nemaju direktnu primjenu u proračunu korisne energije, ipak svaka od njih nosi važan podatak koji se koristi u proračunu električnih uređaja. Na primjer:
  - Izvor napajanja - generator - mora biti u stanju dati traženu struju (uz konstantan napon), neovisno o faktoru snage.
  - Budući da se jalova snaga može kompenzirati vrlo je bitno imati podatak o njenoj vrijednosti.

Rješenje zadatka

- Snaga koju mjeri watmetar u ovoj mreži jednaka je radnoj snazi:

$$P = U \cdot I \cdot \cos\varphi$$

- Iz ovog izraza moguće je odrediti cos φ:

$$\cos\varphi = \frac{P}{U \cdot I} = \frac{3000}{400 \cdot 10} = 0.75$$

- Iznos impedancije može se odrediti iz poznatog napona i struje na impedanciji:

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{400}{10} = 40 \,[\Omega]$$

- Impedancija osim iznosa određena je faznim kutem, tj.

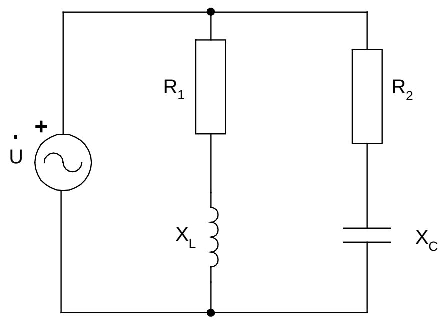
$$\cos\varphi = 0.75 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \pm 41.4°$$

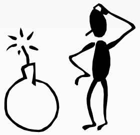
$$\dot{Z} = 40\angle \pm 41.4° \,[\Omega]$$

5. zadatak

U strujnom krugu prema slici odredite struje u krugu, radnu snagu izvora i snage na otporima R_1 i R_2.

- R_1 = 10 [Ω]
- R_2 = 15 [Ω]
- X_L = 20 [Ω]
- X_C = 15 [Ω]
- U = 200 [V]
- φ_U = 0°





Rješenje zadatka

- Snaga izvora određuje se na sljedeći način:

$$P = \mathrm{Re}\left\{\dot{U} \cdot \dot{I}^*\right\}$$

- Da bi se odredila snaga izvora potrebno je odrediti struju I:

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$$

- Za određivanje struje I potrebno je odrediti struje u granama:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{R_1 + jX_L} = \frac{200}{10 + j20} \cdot \frac{10 - j20}{10 - j20} = 4 - j8 = 8.94\angle -63.4° \,[\mathrm{A}]$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}}{R_2 - jX_C} = \frac{200}{15 - j15} \cdot \frac{15 + j15}{15 + j15} = 6.67 + j6.67 = 9.43\angle 45° \,[\mathrm{A}]$$

- Uvrštenjem izračunatih vrijednosti dobije se:

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 4 - j8 + 6.67 + j6.67 = 10.67 - j1.33 = 10.8\angle -7.1° \,[A]$$

- Konjugirano kompleksne vrijednost struje I:

$$\dot{I} = 10.7\text{-}j1.3\,[\mathrm{A}] \quad \Rightarrow \quad \dot{I}^* = 10.7 + j1.3\,[\mathrm{A}]$$

- Snaga izvora:

$$P = \mathrm{Re}\left\{\dot{U} \cdot \dot{I}^*\right\} = \mathrm{Re}\left\{(200 + j0) \cdot (10.67 + j1.33)\right\} = 200 \cdot 10.67 + j0 \cdot j1.33$$

$$P \approx 2140\,[\mathrm{W}]$$

- Snage na otporima R_1 i R_2:

$$P_{R1} = I_1^2 \cdot R_1 = 8.94^2 \cdot 10 \approx 800\,[\mathrm{W}]$$

$$P_{R2} = I_2^2 \cdot R_2 = 9.42^2 \cdot 15 \approx 1335\,[\mathrm{W}]$$

- Snage na otporima mogu se odrediti i na drugi način:

$$\dot{U}_{R1} = \dot{I}_1 \cdot R_1 = (4 - j8) \cdot 10 = 40 - j80\,[\mathrm{V}]$$

$$P_{R1} = \mathrm{Re}\left\{\dot{U}_{R1} \cdot \dot{I}_1^*\right\} = \mathrm{Re}\left\{(40 - j80) \cdot (4 + j8)\right\} = 40 \cdot 4 + 80 \cdot 8 = 800\,[\mathrm{W}]$$

$$\dot{U}_{R2} = \dot{I}_2 \cdot R_2 = (6.67 + j6.67) \cdot 15 = 100 + j100\,[\mathrm{V}]$$

$$P_{R2} = \mathrm{Re}\left\{\dot{U}_{R2} \cdot \dot{I}_2^*\right\} = \mathrm{Re}\left\{(100 + j100) \cdot (6.67 + j6.67)\right\} = 100 \cdot 6.67 + 100 \cdot 6.67 = 1335\,[\mathrm{W}]$$

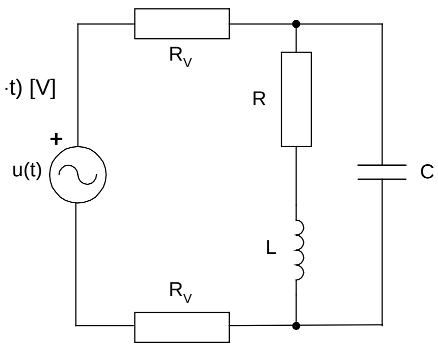
- Vidljivo je da se radna snaga koju daje izvor troši na radnim otporima R_1 i R_2.

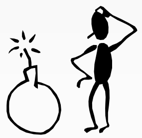
$$P = P_{R1} + P_{R2} = 800 + 1335 \approx 2135\,[\mathrm{W}]$$

6. zadatak

Za strujni krug prema slici treba odrediti struju, jalovu, djelatnu i prividnu snagu koju daje izvor, te gubitke u vodičima R_V. Zadano:

- R_V = 2 [Ω]
- C = 26.525 [μF]
- L = 26.525 [mH]
- R = 20 [Ω]
- u(t) = 311·sin(377 ·t) [V]





Rješenje zadatka

- Struja I određuje se iz Ohmovog zakona:

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z}$$

$$U = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{311}{\sqrt{2}} = 220\,[\mathrm{V}] \quad \Rightarrow \quad \dot{U} = 220\angle 0°\,[\mathrm{V}]$$

$$Z = R_V + (R + jX_L)\|(-jX_C) + R_V$$

- Za određivanje impedancije Z potrebno je odrediti X_C i X_L:

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{377 \cdot 26.525 \cdot 10^{-6}} = 100\,[\Omega]$$

$$X_L = \omega \cdot L = 377 \cdot 26.525 \cdot 10^{-3} = 10\,[\Omega]$$

- Ukupna impedancija iznosi:

$$Z = 2 \cdot 2 + \frac{(20 + j10)\cdot(-j100)}{20 + j10 - j100} = 27.5 + j5.9 = 28\angle 12°\,[\Omega]$$

- Struja I onda iznosi:

$$\dot{I} = \frac{220\angle 0°}{28\angle 12°} = 7.9\angle -12°\,[\mathrm{A}] \quad \Rightarrow \quad i(t) = 11 \cdot \sin(377 \cdot t - 12°)\,[\mathrm{A}]$$

Početna stranica

- Gubici u vodovima iznose:

$$P_V = 2 \cdot I^2 \cdot R_V = 2 \cdot 7.9^2 \cdot 2 = 250\,[\mathrm{W}]$$

- Prividna snaga, S:

$$S = U \cdot I = 220 \cdot 7.9 = 1738\,[\mathrm{VA}]$$

- Radna snaga, P:

$$P = U \cdot I \cdot \cos\varphi$$

$$\varphi = \angle(\dot{U}, \dot{I}) = \varphi_U - \varphi_I = 0 - (-12) = +12°$$

$$P = 220 \cdot 7.9 \cdot \cos 12° = 1700\,[\mathrm{W}]$$

- Jalova snaga, Q:

$$Q = U \cdot I \cdot \sin\varphi = 220 \cdot 7.9 \cdot \sin 12° = 360\,[\mathrm{VAr}]$$

$$ili$$

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{1738^2 - 1700^2} = 360\,[\mathrm{VAr}]$$

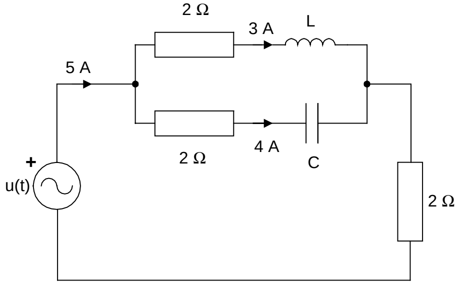
- Radna snaga koja se troši na otporu R:

$$P_R = P - P_V = 1700 - 250 = 1450\,[\mathrm{W}]$$

Početna stranica

7. zadatak

Izračunajte radnu snagu kruga prema slici.



Rješenje zadatka

- Radna snaga u krugu jednaka je zbroju snaga koje se troše na radnim otporima:

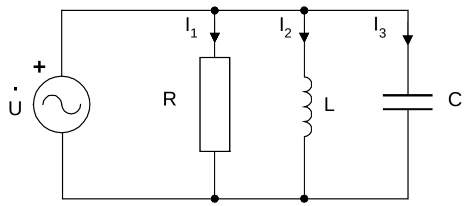
$$P = 3^2 \cdot 2 + 4^2 \cdot 2 + 5^2 \cdot 2 = 100\,[\mathrm{W}]$$

Početna stranica

8. zadatak

U krugu prema slici zadane su struje u granama i napon izvora. Odredite prividnu snagu izvora. Zadano:

- I_1 = 6 [A]
- I_2 = 10 [A]
- I_3 = 4 [A]
- U = 100 [V]



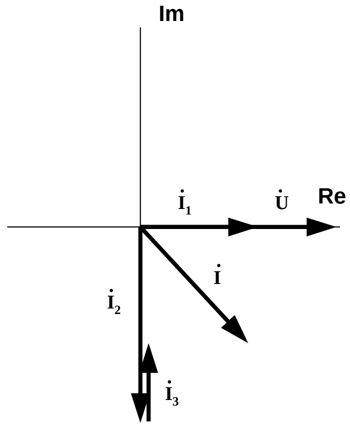
Početna stranica

Rješenje zadatka

- Prividna snaga definirana je kao:

$$S = U \cdot I$$

- Napon je poznat, a struja se može odrediti pomoću vektorskog dijagrama struja.



- Iz vektorskog dijagrama slijedi:

$$I^2 = I_1^2 + \left(I_2 - I_3\right)^2$$

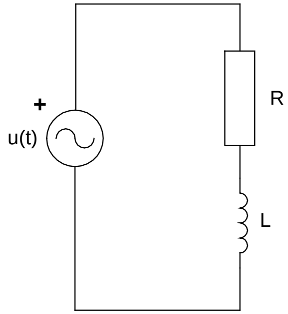
- Prividna snaga iznosi:

$$S = U \cdot I = 100 \cdot \sqrt{6^2 + 6^2} = 850\,[\mathrm{VA}]$$

9. zadatak

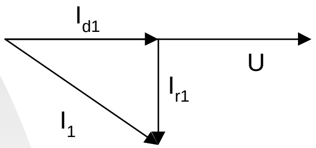
Trošilo omskog otpora R i induktiviteta L vezano je na generator izmjeničnog napona efektivne vrijednosti 100 [V] i frekvencije 50 [Hz]. Ako se paralelno trošilu veže kondenzator kapaciteta C = 138 [µF], efektivna vrijednost struje generatora će se smanjiti na polovinu prvobitne vrijednosti i bit će u fazi s naponom generatora. Odredite:

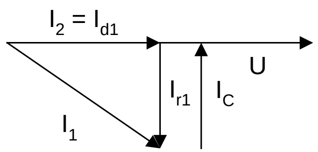
a) otpor i induktivitet trošila
b) djelatnu snagu koje trošilo uzima iz mreže kada mu nije paralelno priključen kondenzator
c) izraz za trenutnu vrijednost struje kroz kondenzator kada je priključen paralelno trošilu



Rješenje zadatka

- Vektorski dijagram struja za prvi slučaj i kada se trošilu priključi paralelno kondenzator:





- Da bi u drugom slučaju ukupna struja I_2 bila u fazi s naponom genaratora mora biti zadovoljeno:

$$I_C = I_{r1}$$

- Struja u drugom slučaju je manja za polovicu:

$$I_2 = \frac{1}{2} I_1 = I_{d1} = I_1 \cdot \cos\varphi \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi = \frac{1}{2}$$

- Struja kroz kondenzator može se odrediti kao:

$$I_C = U \cdot \omega \cdot C = 100 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 138 \cdot 10^{-6} = 4.33\,[\mathrm{A}]$$

- Iz vektorskog dijagrama moguće je odrediti struju I_1 kao:

$$I_1 = \frac{I_C}{\sin\varphi} \qquad \sin\varphi = \sqrt{1 - \cos^2\varphi} \quad \Rightarrow \quad \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$I_1 = \frac{4.33}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 5\,[\mathrm{A}]$$

- Otpor trošila, odnosno induktivitet trošila:

$$R = Z \cdot \cos\varphi = \frac{U}{I_1} \cdot \cos\varphi = \frac{100}{5} \cdot \frac{1}{2} = 10\,[\Omega]$$

$$X_L = Z \cdot \sin\varphi = \frac{U}{I_1} \cdot \sin\varphi = \frac{100}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 17\,[\Omega]$$

$$X_L = \omega \cdot L \quad \Rightarrow \quad L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{17}{2 \cdot \pi \cdot 50} = 54.4\,[\mathrm{mH}]$$

- Radna snaga trošila, odnosno radna snaga izvora :

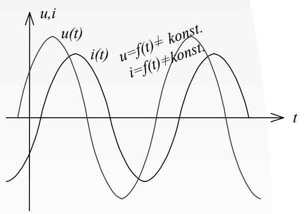
$$P = I_1^2 \cdot R = 5^2 \cdot 10 = 250\,[\mathrm{W}]$$

- Struja kroz kondenzator u vremenskoj domeni :

$$i_C(t) = 4.33 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(314 \cdot t + 90°)\,[\mathrm{A}]$$

Izmjenični krugovi

- Frekvencijske karakteristike.
- Serijska (naponska) rezonancija.
- Paralelna (strujna) rezonancija.

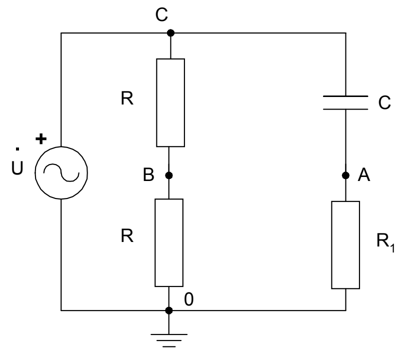


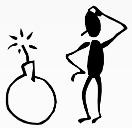
1. zadatak

U strujnom krugu prema slici odredite promjenu potencijala točke A kao i napona U_{AB} ako:

a) otpor R_1 raste od $0 \to \infty$

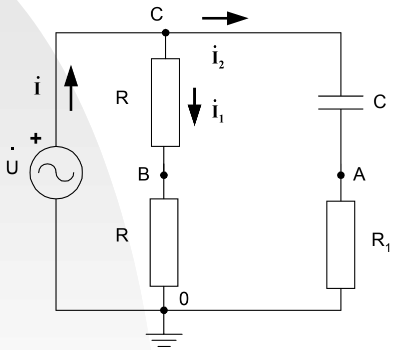
b) ω raste od $0 \to \infty$





Rješenje zadatka

- U mreži teku struje naznačenog smjera:



Po iznosu struje iznose:

$$I_1 = \frac{U}{2 \cdot R}$$

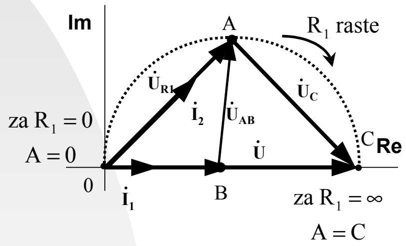
$$I_2 = \frac{U}{\sqrt{R_1^2 + X_C^2}}$$

Fazni pomak struje I_2 u odnosu na napon izvora:

$$\varphi = arctg \frac{X_C}{R_1}$$

- Promjenom otpora R_1 mijenja se iznos i fazni pomak struje I_2, dok se struja I_1 ne mijenja.

- Ovisnost potencijala i napona u krugu najjednostavnije je vidjeti u vektorskom dijagramu.
- Za proizvoljnu vrijednost otpora R_1 vektorski dijagram izgleda:



Za $R_1 = \infty$ točka A nalazi se na istom mjestu kao i točka C:

$$I_2 = 0$$

$$\dot{\varphi}_A = \dot{\varphi}_C$$

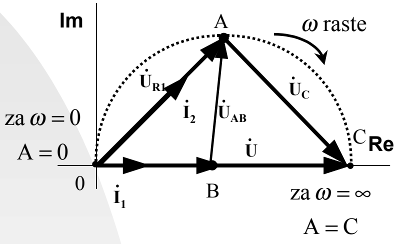
Za $R_1 = 0$ točka A nalazi se u ishodištu:

$$U_{R1} = 0$$

$$\dot{\varphi}_A = \dot{\varphi}_0$$

- Promjenom otpora R_1 od 0 do ∞ točka A u v.d. mijenja položaj po polukružnici i smjerom prikaznim na slici.
- Iz dijagrama je vidljivo da iznos potencijala točke A raste, a fazni kut pada od 90° do 0°.
- Po iznosu napon U_{AB} je konstantan, fazni kut napona mijenja se od 180° do 0°.

- Na sličan način kao za prvi dio zadatka v.d. za frekvenciju različitu od 0 i ∞ vrijedi:



Za ω = 0 točka A nalazi se na istom mjestu kao i točka 0:

$$X_C = \infty;\ I_2 = 0$$

$$\dot{\varphi}_A = \dot{\varphi}_0$$

Za ω = ∞ točka A nalazi se na istom mjestu kao i točka C:

$$X_C = 0;\ U_C = 0$$

$$\dot{\varphi}_A = \dot{\varphi}_C$$

- Promjenom frekvencije ω od 0 do ∞ točka A u v.d. mijenja položaj po polukružnici i smjerom prikaznim na slici.
- Iz dijagrama je vidljivo da iznos potencijala točke A raste, a fazni kut pada od 90° do 0°.
- Po iznosu napon U_{AB} je konstantan, fazni kut napona mijenja se od 180° do 0°.

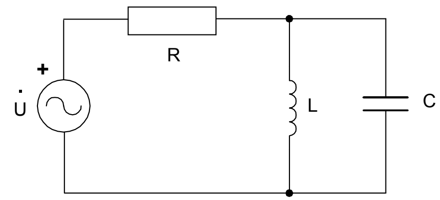
2. zadatak

Za krug zadan prema slici potrebno je odrediti rezonantnu frekvenciju. Nacrtati funkciju ovisnosti struje o frekvenciji te nacrtati vektorski dijagram za:

a) $\omega = \omega_0$
b) $\omega > \omega_0$
c) $\omega < \omega_0$

Zadano:

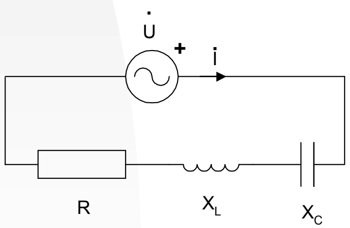
- R = 100 [Ω]
- L = 0.1 [H]
- C = 40 [μF]
- U = 120 [V]



Uvodni pojmovi

- S promjenom frekvencije mijenjaju se impedancija (admitancija) kruga, fazni odnos napona i struje, sama struja i sve električne veličine strujnog kruga koje ovise o frekvenciji.
- Pojava u strujnom krugu sastavljenom od omskih, induktivnih i kapacitivnih elemenata, koji priključen na izvor izmjeničnog napona prima struju koja je u fazi s priključenim naponom naziva se rezonancija.

Serijski RLC spoj



$$\dot{I}(\omega) = \frac{\dot{U}}{Z(\omega)}$$

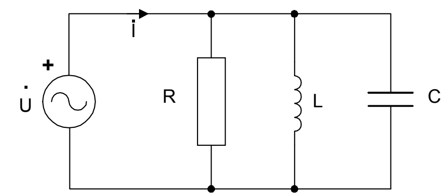
$$Z(\omega) = \sqrt{R^2 + \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2}$$

Za rezonantnu frekvenciju (ω_0)vrijedi:

$$\mathrm{Im}\{\dot{Z}\} = 0$$

Uvodni pojmovi

Paralelni RLC spoj



$$\dot{I}(\omega) = \dot{U} \cdot Z(\omega)$$

$$Y(\omega) = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{\omega \cdot L} - \omega \cdot C\right)^2}$$

Za rezonantnu frekvenciju (ω_0)vrijedi:

$$\mathrm{Im}\{\dot{Y}\} = 0$$

Rješenje zadatka

- Rezonantnu frekvenciju određujemo na sljedeći način:

$$\mathrm{Im}\{\dot{Y}\}=0$$

$$\dot{Z}=R+\frac{jX_L\cdot(-jX_C)}{jX_L-jX_C}$$

$$\dot{Y}=\frac{1}{\dot{Z}}=\frac{1}{R+j\cdot\dfrac{X_L\cdot X_C}{X_L-X_C}}\cdot\frac{R-j\cdot\dfrac{X_L\cdot X_C}{X_L-X_C}}{R-j\cdot\dfrac{X_L\cdot X_C}{X_L-X_C}}$$

$$\dot{Y}=\frac{R\cdot(X_L-X_C)^2}{R^2\cdot(X_L-X_C)^2+(X_L\cdot X_C)^2}+j\cdot\frac{X_L\cdot X_C\cdot(X_L-X_C)}{R^2\cdot(X_L-X_C)^2+(X_L\cdot X_C)^2}$$

$$\mathrm{Im}\{\dot{Y}\}=\frac{X_L\cdot X_C\cdot(X_L-X_C)}{R^2\cdot(X_L-X_C)^2+(X_L\cdot X_C)^2}=0\quad\Rightarrow\quad X_L=X_C$$

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{L\cdot C}}=\frac{1}{\sqrt{0.1\cdot 40\cdot 10^{-6}}}=500\ \mathrm{rad/s}$$

Početna stranica

- Ovisnost struje o frekvenciji opisana je sljedećom funkcijom:

$$I(\omega)=U\cdot Y(\omega)$$

- Karakteristične frekvencije za određivanje frekventne karakteristike su $\omega = 0$, $\omega = \infty$ i $\omega = \omega_0$.

Za $\omega = 0$ vrijedi:

$$X_L=0$$
$$X_C=\infty$$
$$I=\frac{U}{R}=\frac{120}{100}=1.2\,[\mathrm{A}]$$

Za $\omega = \infty$ vrijedi:

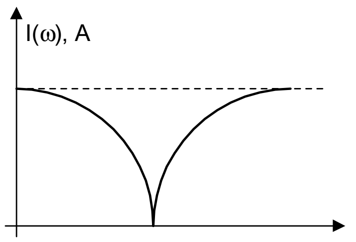
$$X_L=\infty$$
$$X_C=0$$
$$I=\frac{U}{R}=\frac{120}{100}=1.2\,[\mathrm{A}]$$

Za $\omega = \omega_0$ vrijedi:

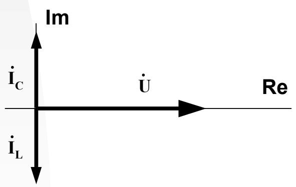
$$Z=\infty$$
$$I=0\,[\mathrm{A}]$$

Početna stranica

- Na osnovu prethodnih razmatranja moguće je nacrtati funkciju ovisnosti struje o frekvenciji:



- Vektorski dijagram za $\omega = \omega_0$:

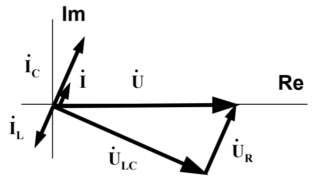


$$\dot{I}_L=-\dot{I}_C$$
$$\dot{I}=0$$

Početna stranica

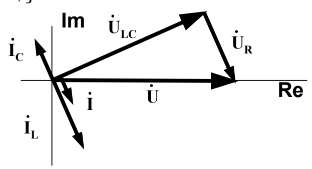
- Vektorski dijagram za $\omega > \omega_0$:

$$\left.\begin{array}{l}X_L>X_C\\ |\dot{I}_L|<|\dot{I}_C|\end{array}\right\}\text{ukupna struja prethodi naponu } U$$



- Vektorski dijagram za $\omega < \omega_0$:

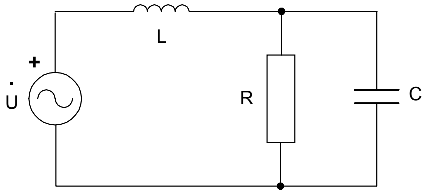
$$\left.\begin{array}{l}X_C>X_L\\ |\dot{I}_C|<|\dot{I}_L|\end{array}\right\}\text{ukupna struja kasni za naponom U}$$



Početna stranica

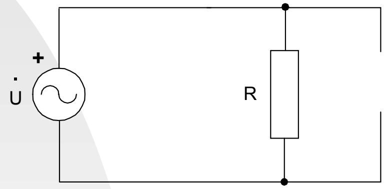
3. zadatak

Za spoj prema slici imamo podatke da je pri $\omega = 0$ ukupna impedancija kruga jednaka 5 [Ω], a pri rezonantnoj frekvenciji ukupna impedancija je jednaka 2.5 [Ω]. Odredite X_L i X_C.



Rješenje zadatka

- Pri frekvenciji $\omega = 0$ krug poprima sljedeći oblik:



$$X_L = 0$$
$$X_C = \infty$$
$$Z = R = 5\,[\Omega]$$

- Ukupna impedancija kruga ima sljedeći oblik:

$$Z = jX_L + (R \| -jX_C) = jX_L + \frac{R \cdot (-jX_C)}{R - jX_C} \cdot \frac{R + jX_C}{R + jX_C}$$

$$Z = jX_L + \frac{X_C^2 \cdot R - jX_C \cdot R^2}{R^2 + X_C^2}$$

$$Z = \frac{X_C^2 \cdot R}{R^2 + X_C^2} + j\left(X_L - \frac{X_C \cdot R^2}{R^2 + X_C^2}\right)$$

- Pri rezonantnoj frekvenciji vrijedi:

$$\mathrm{Im}\{\dot{Z}\} = 0$$
$$\mathrm{Re}\{\dot{Z}\} = |\dot{Z}|$$

odnosno, prema uvjetima zadatka:

$$X_L - \frac{X_C \cdot R^2}{R^2 + X_C^2} = 0$$

$$\frac{X_C^2 \cdot R}{R^2 + X_C^2} = 2.5$$

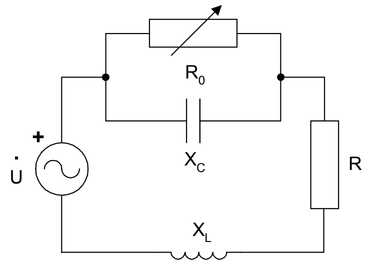
- Kombinacijom prethodne dvije jednadžbe dobiju se rješenja zadatka:

$$X_C = 5\,[\Omega]$$
$$X_L = 2.5\,[\Omega]$$

4. zadatak

U spoju prema slici potrebno je odrediti:
a) R_0 uz koji će krug biti u rezonanciji
b) struju u rezonanciji
Zadano:

- U = 100 [V]
- R = 15 [Ω]
- X_L = 5 [Ω]
- X_C = 10 [Ω]



Rješenje zadatka

- Iz uvjeta za rezonanciju moguće je odrediti otpor R_0:

$$\operatorname{Im}\{\dot{Z}\}=0$$

$$Z=(R_0 \| -jX_C)+R+jX_L=\frac{R_0\cdot(-jX_C)}{R_0-jX_C}\cdot\frac{R_0+jX_C}{R_0+jX_C}+R+jX_L$$

$$Z=\frac{R_0^2\cdot(-jX_C)+R_0\cdot X_C^2}{R_0^2+X_C^2}+R+jX_L$$

$$Z=R+\frac{R_0\cdot X_C^2}{R_0^2+X_C^2}+j\left(X_L-\frac{R_0^2\cdot X_C}{R_0^2+X_C^2}\right)$$

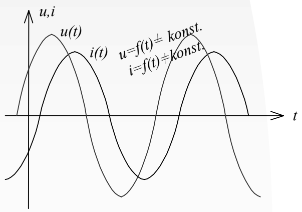
$$X_L-\frac{R_0^2\cdot X_C}{R_0^2+X_C^2}=0 \quad\Rightarrow\quad R_0=\sqrt{\frac{X_C^2\cdot X_L}{X_C-X_L}}=\sqrt{\frac{10^2\cdot 5}{10-5}}=10\ [\Omega]$$

- Struja u rezonanciji je jednaka:

$$I=\frac{U}{\operatorname{Re}\{\dot{Z}\}}=\frac{U}{R+\dfrac{R_0\cdot X_C^2}{R_0^2+X_C^2}}=\frac{100}{15+\dfrac{10\cdot 10^2}{10^2+10^2}}=5\,[\mathrm{A}]$$

Izmjenični krugovi

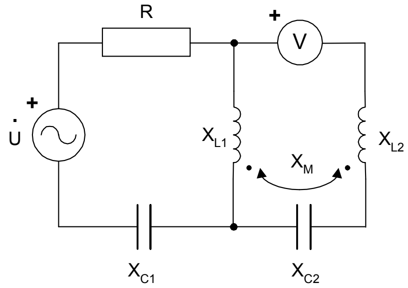
- Međuinduktivitet u izmjeničnim krugovima.

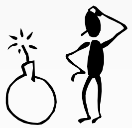


1. zadatak

U mreži prema slici napon izvora je u(t) = 141 sin 1000·t [V]. Voltmetar pokazuje vrijednost napona, U_V = 106.1 [V] . Odredite međuinduktivitet i koeficijent magnetske veze. Zadano:

- R = 10 [Ω]
- X_{C1} = X_{C2} = 10 [Ω]
- X_{L1} = 20 [Ω]
- X_{L2} = 10 [Ω]

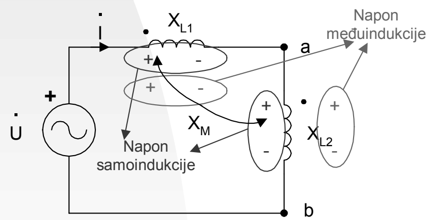




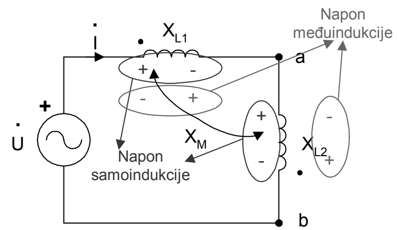
Uvodni pojmovi

Međuinduktivitet u mreži

- U mreži u kojoj se nalaze međuinduktivno vezane zavojnice struja protjecanjem kroz pojedinu zavojnicu stvara napon međuindukcije na drugoj zavojnici. Polaritet napona ovisi o vrsti međuinduktivne veze (suglasna ili nesuglasna).



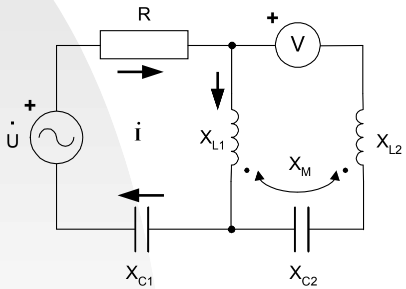
$$\dot{U}_{ab} = \dot{I} \cdot jX_{L2} + \dot{I} \cdot jX_M$$



$$\dot{U}_{ab} = \dot{I} \cdot jX_{L2} - \dot{I} \cdot jX_M$$

Rješenje zadatka

- U grani u kojoj se nalazi voltmetar ne teče struja. U krugu teče samo struja I označenog smjera.

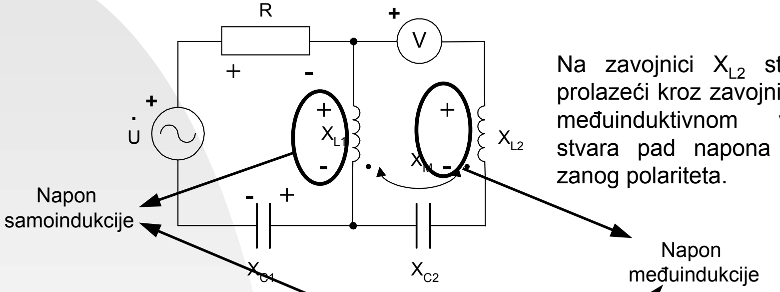


Struju I može se odrediti kao:

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R + jX_{L1} - jX_{C1}}$$

- Napon na stezaljkama voltmetra jedanak je zbroju napona na zavojnici X_{L1} kroz koju prolazi struja I i napona na zavojnici X_{L2} koji je stvoren međuinduktivnom vezom.

- Struja I stvara padove napona na elementima kroz koje prolazi kao na slici:



Na zavojnici X_{L2} struja I prolazeći kroz zavojnicu X_{L1} međuinduktivnom vezom stvara pad napona prikazanog polariteta.

- Napon na stezaljkama voltmetra iznosi:

$$\dot U_V = \dot I\cdot jX_{L1} - \dot I\cdot jX_M$$

- Uvrštenjem izraza za struju I dobivamo:

$$\dot U_V = \frac{\dot U}{R + jX_{L1} - jX_{C1}}\cdot j\cdot(X_{L1} - X_M)$$

- Po iznosu napon U_V iznosi:

$$\dot U_V = \frac{\dot U}{\sqrt{R^2 + (X_{L1} - X_{C1})^2}\angle\varphi}\cdot j\cdot(X_{L1} - X_M)$$

$$\Downarrow$$

$$U_V = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_{L1} - X_{C1})^2}}(X_{L1} - X_M) = 106\,[\mathrm{V}]$$

- Uvrštenjem zadanih vrijednosti dobije se:

$$X_M = \frac{\frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_{L1} - X_{C1})^2}}\cdot X_{L1} - 106}{\frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_{L1} - X_{C1})^2}}} = \frac{\frac{100}{\sqrt{10^2 + (20-10)^2}}\cdot 20 - 106}{\frac{100}{\sqrt{10^2 + (20-10)^2}}} = 5\,[\Omega]$$

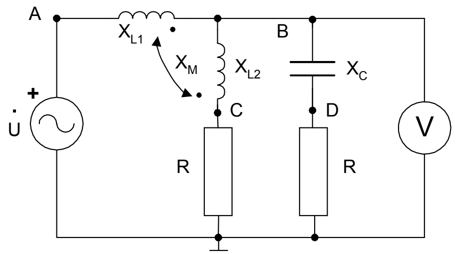
- Faktor međuinduktivne veze k:

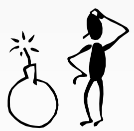
$$X_M = k\cdot\sqrt{X_{L1}\cdot X_{L2}} \quad\Rightarrow\quad k = \frac{X_M}{\sqrt{X_{L1}\cdot X_{L2}}} = \frac{5}{\sqrt{20\cdot 10}} = 0.35$$

2. zadatak

Voltmetar prema slici pokazuje U_V = 100 [V]. Nacrtajte topografski dijagram i odredite napon izvora. Kod crtanja treba uzeti da je faza ukupne struje 0°. Zadano:

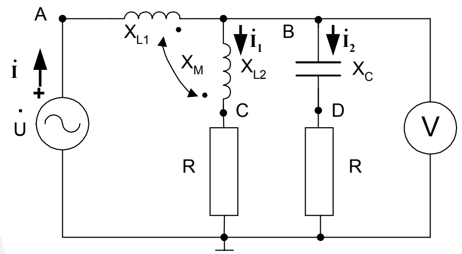
- $X_{L1} = X_{L2} = 100\ [\Omega]$
- $X_C = 100\ [\Omega]$
- $X_M = 100\ [\Omega]$
- $R = 100\ [\Omega]$





Rješenje zadatka

- U mreži teku struje prikazanih smjerova:

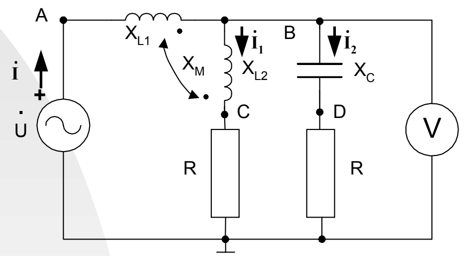


- Napon na stezaljkama izvora definiran je kao:

$$\dot U = \dot I\cdot jX_{L1} + \dot I_1\cdot jX_M + \dot I_1\cdot jX_{L2} + \dot I\cdot jX_M + \dot I_1\cdot R$$

- Struja I protječući kroz zavojnicu X_{L1} stvara napon samoindukcije na zavojnici X_{L1} i napon međuindukcije na zavojnici X_{L2} prikazanih polariteta. S druge strane, struja I_1 prolazeći kroz zavojnicu X_{L2} stvara napon samoindukcije na zavojnici X_{L2} i napon međuindukcije na zavojnici X_{L1} prikazanog polariteta.

- Za krug, uz pretpostavljeni fazni pomak napona U_{BO}, može se odrediti struja I_2, te ostale struje u krugu na sljedeći način:



$$\dot U_{BO} = \dot I_2 \cdot (-jX_C) + \dot I_2 \cdot R$$

$$\dot I_2 = \frac{\dot U_{BO}}{R - jX_C} = \frac{100\angle 0°}{100 - j100}$$

$$\dot I_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\angle +45°$$

$$\dot I = \dot I_1 + \dot I_2$$

$$\dot U_{BO} = \dot I_1 \cdot jX_{L2} + \dot I \cdot jX_M + \dot I_1 \cdot R = \dot I_1 \cdot jX_{L2} + \dot I_1 \cdot jX_M + \dot I_2 \cdot jX_M + \dot I_1 \cdot R$$

$$\dot I_1 = \frac{\dot U_{BO} - \dot I_2 \cdot jX_M}{R + jX_{L2} + jX_M} = \frac{100 - \frac{\sqrt{2}}{2}\angle 45° \cdot j100}{100 + j100 + j100}$$

$$\dot I_1 = \frac{100 + 50 - j50}{100 + j100 + j100} = \frac{50 \cdot \sqrt{10}\angle -18°}{100 \cdot \sqrt{5}\angle +63°} = \frac{\sqrt{2}}{2}\angle -81° \,[\mathrm{A}]$$

$$\dot I = \dot I_1 + \dot I_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\angle -81° + \frac{\sqrt{2}}{2}\angle +45° = 0.64\angle -18° \,[\mathrm{A}]$$

- Uz poznate struje u krugu moguće je odrediti napon izvora:

$$\dot U = \dot I \cdot jX_{L1} + \dot I_1 \cdot jX_M + \dot I_1 \cdot jX_{L2} + \dot I \cdot jX_M + \dot I_1 \cdot R$$

$$\dot U = \dot I \cdot (jX_{L1} + jX_M) + \dot I_1 \cdot (jX_M + jX_{L2} + R)$$

$$\dot U = (0.64\angle -18°) \cdot (j100 + j100) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\angle -81°\right) \cdot (j100 + j100 + 100)$$

$$\dot U = 204\angle +21° \,[\mathrm{V}]$$

- Na osnovi izračunatih vrijednosti moguće je odrediti potencijale svih točaka u krugu:

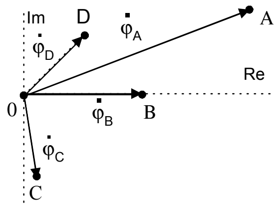
$$\dot\varphi_C = \dot I_1 \cdot R = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\angle -81°\right) \cdot (100\angle 0°) = 50\sqrt{2}\angle -81° \,[\mathrm{V}]$$

$$\dot\varphi_D = \dot I_2 \cdot R = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\angle 45°\right) \cdot (100\angle 0°) = 50\sqrt{2}\angle 45° \,[\mathrm{V}]$$

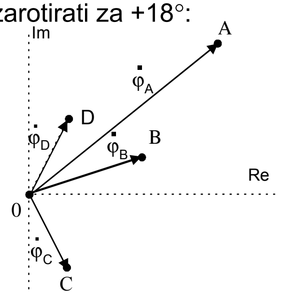
$$\dot\varphi_B = \dot U_{BO} = 100\angle 0° \,[\mathrm{V}]$$

$$\dot\varphi_A = \dot U_{AO} = \dot U = 204\angle +21° \,[\mathrm{V}]$$

- Pomoću izračunatih vrijednosti potencijala moguće je nacrtati topografski dijagram.



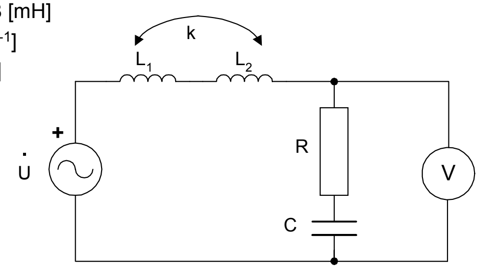
- Međutim, budući da je u zadatku zadano da struju I treba nacrtati kao vektor s faznim pomakom od 0° potrebno je čitav dijagram zarotirati za +18°:

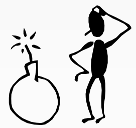


3. zadatak

Krug na slici je u rezonanciji. Odredite iznos koeficijenta magnetskog vezanja k i karakter magnetske veze (suglasna/nesuglasna). Zadano:

- $U = 6$ [V]
- $U_V = 10$ [V]
- $L_1 = L_2 = 8$ [mH]
- $\omega = 500$ [s^{-1}]
- $P = 12$ [W]



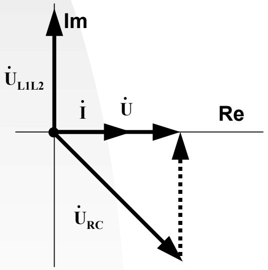


Rješenje zadatka

- Budući da je mreža u rezonanciji napon na otporu je jednak naponu izvora pa je pomoću poznate snage na otporu moguće odrediti R:

$$P = \frac{U_R^2}{R} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{U_R^2}{P} = \frac{U^2}{P} = \frac{6^2}{12} = 3\,[\Omega]$$

- Iz vektorskog dijagrama moguće je odrediti odnose među naponima u krugu.



Budući da je krug u rezonanciji ukupna struja u krugu i napon izvora su u fazi.

Napon na zavojnici prethodi struji za 90°, a napon na seriji RC kasni za strujom za kut manji od 90°.

Napon na izvoru jednak je vektorskom zbroju napona na svim elementima u krugu.

Iz vektorskog dijagrama slijedi:

$$U_{L1L2} = \sqrt{U_{RC}^2 - U^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8\,[\mathrm{V}]$$

- Struju u krugu možemo odrediti kao:

$$P = I^2 \cdot R \quad \Rightarrow \quad I = \sqrt{\frac{P}{R}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = 2\,[\mathrm{A}]$$

- Ukupnu impedanciju međuinduktivno vezanih zavojnica možemo odrediti kao:

$$X_{L1L2} = \frac{U_{L1L2}}{I} = \frac{8}{2} = 4\,[\Omega]$$

- Impedancije zavojnica jednake su:

$$X_{L1} = X_{L2} = \omega \cdot L_1 = \omega \cdot L_2 = 500 \cdot 8 \cdot 10^{-3} = 4\,[\Omega]$$

- Ukupna impedancija međuinduktivno vezanih zavojnica jednaka je (uz nepoznati karakter međuinduktivne veze):

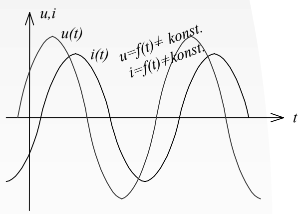
$$X_{L1L2} = X_{L1} + X_{L2} \pm 2 \cdot X_M = 4\,[\Omega]$$

- Iz ovoga slijedi da su zavojnice nesuglasno međuinduktivno vezane s faktorom k koji je jednak:

$$X_{L1} + X_{L2} - 2 \cdot k \cdot \sqrt{X_{L1} \cdot X_{L2}} = 4\,[\Omega] \quad \Rightarrow \quad k = \frac{4 - X_{L1} - X_{L2}}{-2 \cdot \sqrt{X_{L1} \cdot X_{L2}}} = \frac{4 - 4 - 4}{-2 \cdot \sqrt{4 \cdot 4}} = 0.5$$

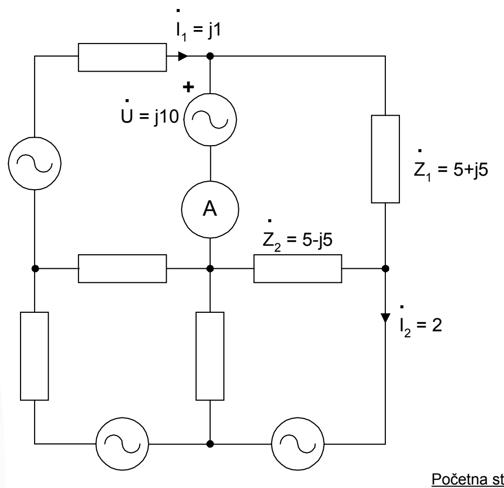
Metode rješavanja izmjeničnih krugova

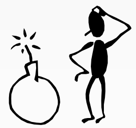
- Metoda konturnih struja.
- Metoda napona čvorova.
- Millman-ov teorem.
- Thevenin-ov teorem.
- Norton-ov teorem.
- Metoda superpozicije.



1. zadatak

Za mrežu na slici poznati su elementi i struje koji su označeni na slici. Izračunajte struju koju mjeri idealni ampermetar.





Uvodni pojmovi

Metoda konturnih struja

- Rješavanje mreža pomoću metode konturnih struja može se svesti na sljedeće korake:
  1) Prvo je potrebno odabrati nezavisne konture i definirati smjer obilaženja.
  2) Za svaku konturu napiše se naponska jednadžba, koja ima općenito za k-tu konturu oblik:

$$\dot{I}_k \cdot Z_{kk} + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n} \dot{I}_l \cdot Z_{kl} = \dot{E}_{kk}$$

gdje je,

I_k - struja promatrane konture

I_l - struja bilo koje druge konture

Z_{kk} - vlastita impedancija konture *k*

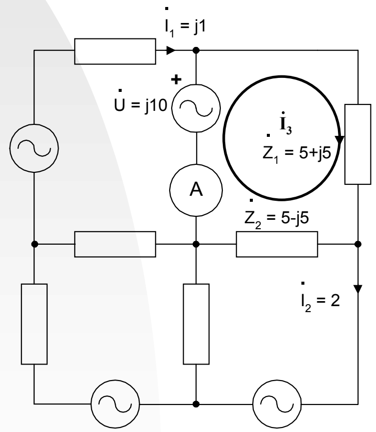
Z_{kl} - zajednička impedancija između konture *k* i l

E_{kk} - vektorska suma svih unutarnjih napona konture *k*

  3) Kao rješenje sustava jednadžbi dobije se niz konturnih struja u mreži.

Rješenje zadatka

- U mreži prema slici struja I_1 i I_2 predstavljaju konturne struje. Ako pretpostavimo struju I_3 kao konturnu struju u prikazanoj konturi moguće je odrediti njenu vrijednost:



$$\dot{I}_3 \cdot \left(\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2\right) - \dot{I}_2 \cdot \dot{Z}_2 = \dot{U}$$

$$\dot{I}_3 \cdot (5 + j5 + 5 - j5) - 2 \cdot (5 - j5) = j10$$

$$\dot{I}_3 = \frac{10 - j10 + j10}{5 + j5 + 5 - j5} = 1\angle 0° \,[\mathrm{A}]$$

Struja koja teče kroz ampermetar jednaka je:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_3 - \dot{I}_1 = 1 - j = \sqrt{2}\angle -45° \,[\mathrm{A}]$$

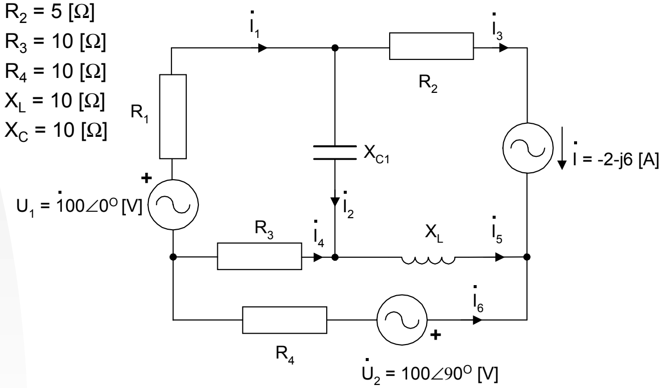
Ampermetar mjeri efektivnu vrijednost struje I_A:

$$I_A = \sqrt{2}\,[\mathrm{A}]$$

2. zadatak

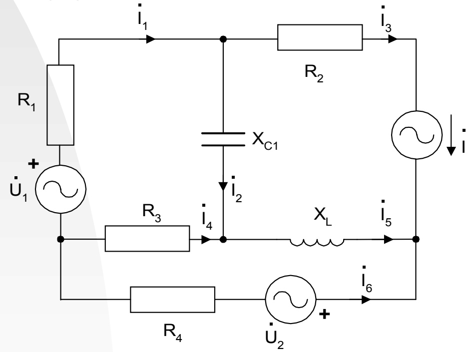
Odredite struje u svim granama zadane mreže te snage izvora i snage na otporima.

- R_1 = 10 [Ω]
- R_2 = 5 [Ω]
- R_3 = 10 [Ω]
- R_4 = 10 [Ω]
- X_L = 10 [Ω]
- X_C = 10 [Ω]



Rješenje zadatka

- Struje I_1, I_3 i I_6 predstavljaju konturne struje u mreži. Pri tome je struja I_3 određena strujom koju daje strujni izvor. Ostale konturne struje moguće je odrediti pomoću sustava dviju jednadžbi:



$$\dot{I}_3 = \dot{I} = -2 - j6\,[\mathrm{A}]$$

$$\dot{I}_1 \cdot (R_1 - jX_C + R_3) - \dot{I}_3 \cdot (-jX_C) + \dot{I}_6 \cdot R_3 = \dot{U}_1$$

$$\dot{I}_1 \cdot R_3 + \dot{I}_3 \cdot jX_L + \dot{I}_6 \cdot (jX_L + R_3 + R_4) = \dot{U}_2$$

- Uvrštenjem vrijednosti pojedinih elemenata dobije se sljedeći sustav jednadžbi koji rješavamo:

$$\dot{I}_1 \cdot (10 - j10 + 10) - (-2 - j6)\cdot(-j10) + \dot{I}_6 \cdot 10 = 100$$

$$\dot{I}_1 \cdot 10 + (-2 - j6)\cdot j10 + \dot{I}_6 \cdot (j10 + 10 + 10) = j100$$

$$\dot{I}_1 \cdot (20 - j10) + \dot{I}_6 \cdot 10 = 100 + (-2 - j6)\cdot(-j10)$$

$$\dot{I}_1 \cdot 10 + \dot{I}_6 \cdot (20 + j10) = j100 - (-2 - j6)\cdot j10$$

$$\dot{I}_1 \cdot (2 - j) + \dot{I}_6 = 4 + j2 \quad \Rightarrow \quad \dot{I}_6 = 4 + j2 - \dot{I}_1 \cdot (2 - j)$$

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_6 \cdot (2 + j) = -6 + j12$$

$$\dot{I}_1 + (4 + j2 - \dot{I}_1 \cdot 2 + \dot{I}_1 \cdot j)\cdot(2 + j) = -6 + j12$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{I}_1 = 3 - j\,[\mathrm{A}]$$

$$\dot{I}_6 = 4 + j2 - (3 - j)\cdot(2 - j) = -1 + j7\,[\mathrm{A}]$$

- Struje u zavisnim granama određujemo pomoću konturnih struja :

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_1 - \dot{I}_3 = 3 - j + 2 + j6 = 5 + j5\,[\mathrm{A}]$$

$$\dot{I}_4 = -\dot{I}_1 - \dot{I}_6 = -3 + j + 1 - j7 = -2 - j6\,[\mathrm{A}]$$

$$\dot{I}_5 = -\dot{I}_3 - \dot{I}_6 = 2 + j6 + 1 - j7 = 3 - j\,[\mathrm{A}]$$

- Snage naponskih izvora:

$$P_{U1} = \mathrm{Re}\{\dot{U}_1 \cdot \dot{I}_1^*\} = \mathrm{Re}\{100 \cdot (3 + j)\} = 300\,[\mathrm{W}]$$

$$P_{U2} = \mathrm{Re}\{\dot{U}_2 \cdot \dot{I}_6^*\} = \mathrm{Re}\{j100 \cdot (-1 - j7)\} = 700\,[\mathrm{W}]$$

- Kako bi se odredila snaga strujnog izvora potrebno je odrediti napon na stezaljkama strujnog izvora:

$$\dot{U}_I = \dot{I}_3 \cdot R_2 - \dot{I}_2 \cdot (-jX_C) - \dot{I}_5 \cdot jX_L$$

$$\dot{U}_I = (-2 - j6)\cdot 5 - (5 + j5)\cdot(-j10) - (3 - j)\cdot j10$$

$$\dot{U}_I = -70 - j10\,[\mathrm{V}]$$

- Snaga strujnog izvora:

$$P_I = \mathrm{Re}\left\{\dot{U}_I \cdot \dot{I}^*\right\} = \mathrm{Re}\left\{(-70 - j10)\cdot(-2 + j6)\right\} = 140 + 60 = 200\ [\mathrm{W}]$$

- Snage na radnim otporima:

$$P_{R1} = I_1^2 \cdot R_1 = \left(3^2 + (-1)^2\right)\cdot 10 = 100\ [\mathrm{W}]$$

$$P_{R2} = I_3^2 \cdot R_2 = \left((-2)^2 + (-6)^2\right)\cdot 5 = 200\ [\mathrm{W}]$$

$$P_{R3} = I_4^2 \cdot R_3 = \left((-2)^2 + (-6)^2\right)\cdot 10 = 400\ [\mathrm{W}]$$

$$P_{R4} = I_6^2 \cdot R_4 = \left((-1)^2 + (7)^2\right)\cdot 10 = 500\ [\mathrm{W}]$$

- Snagu koju daju izvori u mreži troši se na radnim otporima u mreži:

$$\sum_i P_{Ri} = \sum_j P_{izvoraj}$$

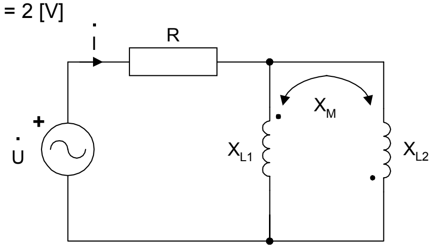
$$100 + 200 + 400 + 500 = 300 + 700 + 200$$

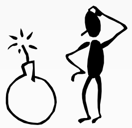
Početna stranica

3. zadatak

Odredite iznos struje I u spoju prema slici. Zadano:

- R = 2 [Ω]
- X_{L1} = 2 [Ω]
- X_{L2} = 2 [Ω]
- X_M = 2 [Ω]
- U = 2 [V]

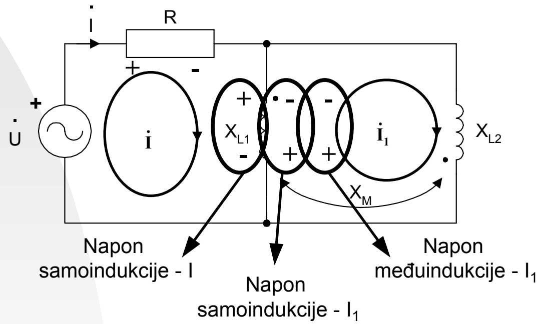




Početna stranica

Rješenje zadatka

- Pretpostavimo smjerove dviju konturnih struja, I i I_1 koje stvaraju padove napona prema slici (I. kontura).

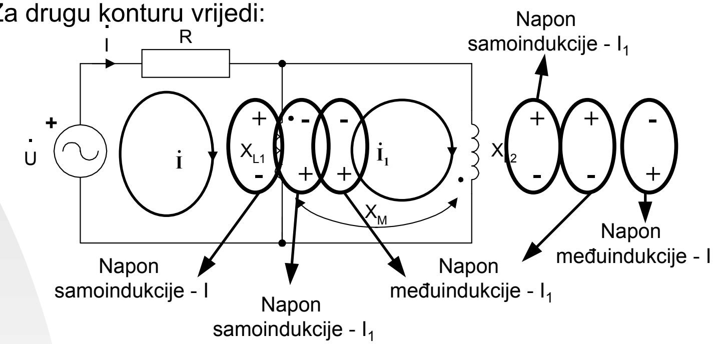


- Za I. konturu, na osnovu prikazanih napona moguće je zapisati sljedeće:

$$\dot{I}\cdot\left(R + jX_{L1}\right) - \dot{I}_1 \cdot jX_{L1} - \dot{I}_1 \cdot jX_M = \dot{U}$$

Početna stranica

- Za drugu konturu vrijedi:



- Naponi na prvoj, odnosno drugoj zavojnici su kao što je prikazano na slici. Iz toga slijedi:

$$\dot{I}\cdot jX_{L1} + \dot{I}\cdot jX_M - \dot{I}_1 \cdot jX_{L1} - \dot{I}_1 \cdot jX_M - \dot{I}_1 \cdot jX_{L2} - \dot{I}_1 \cdot jX_M = 0$$

- Uvrštenjem poznatih vrijednosti određuje se struja I:

$$\left.\begin{aligned}\dot{I}\cdot(2 + j2) - \dot{I}_1\cdot(j4) &= 2\\ \dot{I}\cdot(j4) - \dot{I}_1\cdot(j8) &= 0\end{aligned}\right\}\quad \dot{I} = 2\angle 0^\circ$$

Početna stranica

4. zadatak

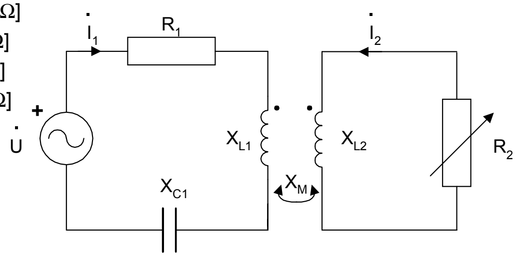
U spoju prema slici odredite:

a) vrijednost otpora R_2 uz koju će krug biti u rezonanciji

b) struje u krugu.

Zadano:

- U = 100 [V]
- R_1 = 20 [Ω]
- X_{L1} = 10 [Ω]
- X_{L2} = 9 [Ω]
- X_M = 6 [Ω]
- X_{C1} = 8 [Ω]



Rješenje zadatka

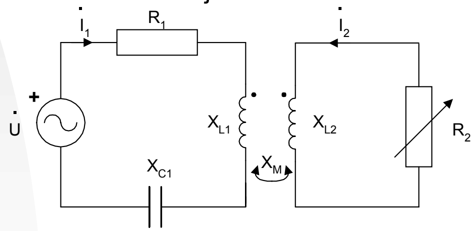
- Iz uvjeta rezonancije vrijedi:

$$\mathrm{Im}\{\dot{Z}_{uk}\} = 0$$

- Da bi se odredila ukupna impedancija kruga potrebno je odrediti omjer napona izvora i struje I_1:

$$\dot{Z}_{uk} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}_1}$$

- Za prikazanu mrežu vrijedi:



$$\dot{I}_1 \cdot (R_1 + jX_{L1} - jX_C) + \dot{I}_2 \cdot jX_M = \dot{U}$$

$$\dot{I}_2 \cdot (R_2 + jX_{L2}) + \dot{I}_1 \cdot jX_M = 0$$

- Kao rješenje sustava jednadžbi dobijemo ukupnu impedanciju:

$$\dot{I}_2 = -\frac{\dot{I}_1 \cdot jX_M}{(R_2 + jX_{L2})}$$

$$\dot{I}_1 \cdot (R_1 + jX_{L1} - jX_C) + \frac{-\dot{I}_1 \cdot jX_M}{R_2 + jX_{L2}} \cdot jX_M = \dot{U}$$

$$R_1 + jX_{L1} - jX_C + \frac{X_M^2}{R_2 + jX_{L2}} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}_1} = \dot{Z}_{uk}$$

$$\dot{Z}_{uk} = R_1 + jX_{L1} - jX_C + \frac{X_M^2}{R_2 + jX_{L2}} \cdot \frac{R_2 - jX_{L2}}{R_2 - jX_{L2}}$$

$$\dot{Z}_{uk} = R_1 + \frac{X_M^2 \cdot R_2}{R_2^2 + X_{L2}^2} + j\left(X_{L1} - X_C - \frac{X_{L2} \cdot X_M^2}{R_2^2 + X_{L2}^2}\right)$$

- Iz uvjeta rezonancije dobijemo otpor R_2:

$$\mathrm{Im}\{\dot{Z}_{uk}\} = X_{L1} - X_C - \frac{X_{L2} \cdot X_M^2}{R_2^2 + X_{L2}^2} = 0$$

$$R_2 = \sqrt{\frac{-X_{L2}^2 \cdot X_{L1} + X_{L2}^2 \cdot X_C + X_{L2} \cdot X_M^2}{X_{L1} - X_C}} = \sqrt{\frac{-9^2 \cdot 10 + 9^2 \cdot 8 + 9 \cdot 6^2}{10 - 8}} = 9\,[\Omega]$$

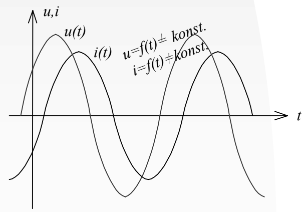
- Struje u krugu:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{\dot{Z}_{uk}} = \frac{\dot{U}}{R_1 + \dfrac{R_2 \cdot X_M^2}{R_2^2 + X_{L2}^2}} = \frac{100\angle 0^\circ}{20 + \dfrac{9 \cdot 6^2}{9^2 + 9^2}} = 4.5\angle 0^\circ\,[\mathrm{A}]$$

$$\dot{I}_2 = -\frac{\dot{I}_1 \cdot jX_M}{R_2 + jX_{L2}} = -\frac{4.5 \cdot j6}{9 + j9} = -\frac{j27}{9\sqrt{2}\angle 45^\circ} = \frac{3\sqrt{2}}{2}\angle -135^\circ\,[\mathrm{A}]$$

Metode rješavanja izmjeničnih krugova

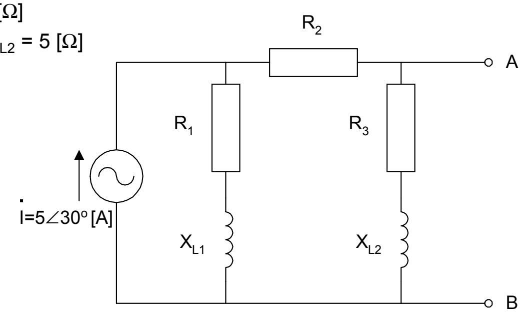
- *Metoda konturnih struja.*
- *Metoda napona čvorova.*
- Thevenin-ov teorem.
- Norton-ov teorem.
- Millman-ov teorem.
- *Metoda superpozicije.*

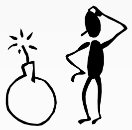


1. zadatak

Zadana je mreža prema slici. Nadomjestite spoj prema Theveninu u odnosu na stezaljke A i B.

- $R_1 = 5$ [Ω]
- $R_2 = 10$ [Ω]
- $R_3 = 5$ [Ω]
- $X_{L1} = X_{L2} = 5$ [Ω]

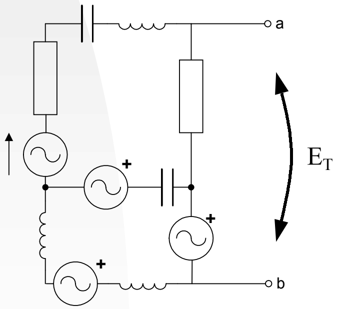


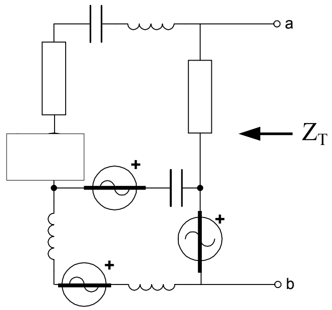


- Bilo koji dio aktivne linearne mreže može se nadomjestiti s obzirom na dvije stezaljke (a i b) realnim naponskim izvorom, čiji unutarnji napon E_T (Theveninov napon) i unutarnju impedanciju Z_T (Thevenin-ovu impedanciju) određujemo iz zadane mreže:

⇛ **Theveninov napon E_T** određujemo tako da izračunamo napon U_{ab0} na otvorenim stezaljkama a-b linearne mreže.

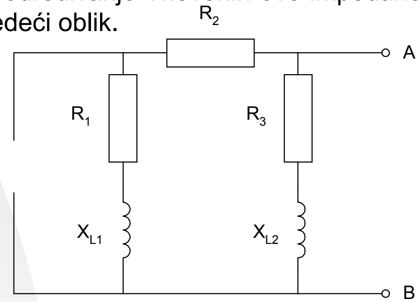
⇛ **Theveninovu impedanciju Z_T** odredimo tako da kratko spojimo sve naponske izvore i isključimo sve strujne izvore te onda izračunamo ukupnu impedanciju između a i b.





Rješenje zadatka

- Za određivanje Thevenin-ove impedancije mreža poprima sljedeći oblik.



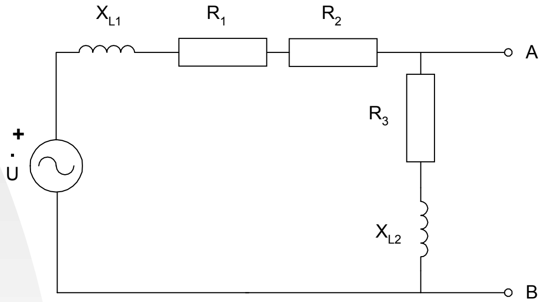
- Strujni izvor odspojen je iz mreže, a impedancija iznosi:

$$\dot{Z}_T = (R_1 + R_2 + jX_{L1}) \| (R_3 + jX_{L2}) = \frac{(5+10+j5)\cdot(5+j5)}{5+10+j5+5+j5}$$

$$\dot{Z}_T = \frac{75+j75+j25-25}{20+j10} = \frac{50+j100}{20+j10} = \frac{5+j10}{2+j}\cdot\frac{2-j}{2-j} = \frac{10+j20-j5+10}{4+1}$$

$$\dot{Z}_T = 4 + j3\ [\Omega]$$

- Ako strujni izvor pretvorimo u naponski možemo lakše odrediti Thevenin-ov napon.



- Napon nadomjesnog naponskog izvora jednak je:

$$\dot{U} = \dot{I} \cdot (R_1 + jX_{L1})$$

- Thevenin-ov napon jednak je:

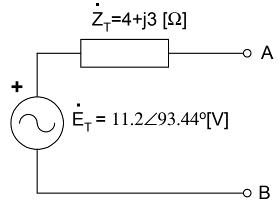
$$\dot{E}_T = \frac{\dot{U}}{R_1 + jX_{L1} + R_2 + R_3 + jX_{L2}} \cdot (R_3 + jX_{L2})$$

- Uvrštenjem poznatih vrijednosti Thevenin-ov napon iznosi:

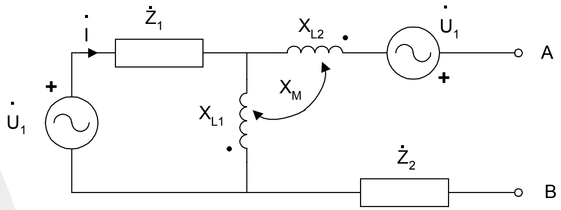
$$\dot{E}_T = \frac{5\angle 30° \cdot (5+j5)}{5+j5+10+5+j5} \cdot (5+j5) = \frac{(5\angle 30°) \cdot (5\sqrt{2}\angle 45°) \cdot (5\sqrt{2}\angle 45°)}{(10\sqrt{5}\angle 26.36°)}$$

$$\dot{E}_T = 11.2\angle 93.44° \, [\mathrm{V}]$$

- Nadomjesni Thevenin-ov spoj:



- Za mrežu sličnu onoj u zadatku vrijedi sljedeće.



- U mreži struja I teče kroz impedanciju Z_1 i zavojnicu X_{L1}. Kroz zavojnicu X_{L2} i impedanciju Z_2 ne teče struja.
- Thevenin-ov napon iznosi:

$$\dot{E}_T = 0 \cdot \dot{Z}_2 + \dot{I} \cdot jX_{L1} - \dot{I} \cdot jX_M + \dot{U}_1$$

Kroz Z_2 ne teče struja

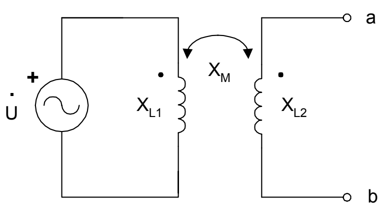
Napon samoindukcije na zavojnici X_{L1}

Napon međuindukcije na zavojnici X_{L2}

2. zadatak

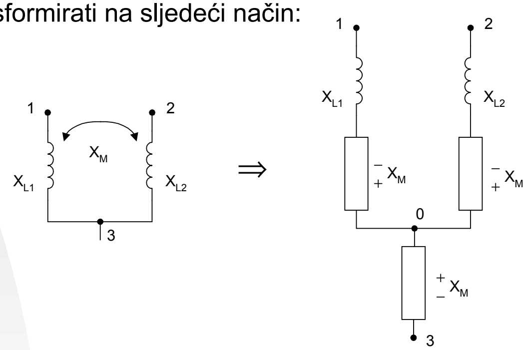
Odredite Thevenin-ovu impedanciju Z_{ab}.

- X_{L1} = 4 [Ω]
- X_{L2} = 4 [Ω]
- X_M = 2 [Ω]

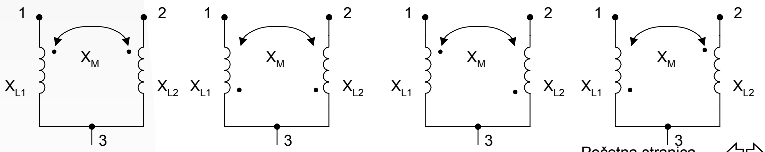


Uvodni pojmovi

- Dvije međuinduktivno vezane zavojnice mogu se transformirati na sljedeći način:

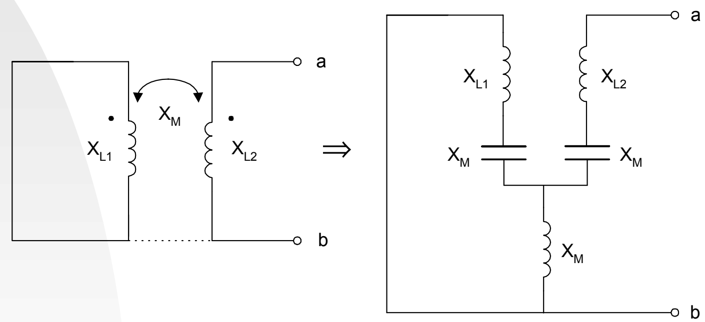


Gornji predznaci vrijede za: Donji predznaci vrijede za:



Rješenje zadatka

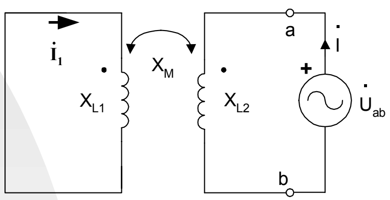
- Zadatak se može riješiti na dva načina.
- Mrežu možemo transformirati na sljedeći način:



$$\dot{Z}_{ab} = (jX_{L1} - jX_M) \| jX_M + jX_{L2} - jX_M$$

$$\dot{Z}_{\text{ab}} = \frac{(jX_{L1} - jX_M) \cdot jX_M}{jX_{L1} - jX_M + jX_M} + jX_{L2} - jX_M = j + j4 - j2 = j3\,[\Omega]$$

- Drugi način rješavanja. Na stezaljke a-b spoji se "poznati" naponski izvor. Impedancija se onda određuje kao omjer napona i struje koja teče u pasivnoj mreži.



$$\dot{Z}_{\text{ab}} = \frac{\dot{U}_{\text{ab}}}{\dot{I}}$$

- Kroz zavojnicu X_{L1} teče struja I_1 smjera prikazanog na slici.
- Za prvu i drugu konturu vrijedi:

$$\dot{I}_1 \cdot jX_{L1} + \dot{I} \cdot jX_M = 0$$

$$\dot{I} \cdot jX_{L2} + \dot{I}_1 \cdot jX_M = \dot{U}_{\text{ab}}$$

- Impedancija Z_{ab} jednaka je:

$$\dot{Z}_{\text{ab}} = \frac{\dot{U}_{\text{ab}}}{\dot{I}} = jX_{L2} - jX_M \cdot \frac{X_M}{X_{L1}} = j4 - j2 \cdot \frac{2}{4} = j3\,[\Omega]$$

3. zadatak

Trošilo nepoznate impedancije priključeno je na generator unutarnje impedancije $\dot{Z}_g$. Odredite:

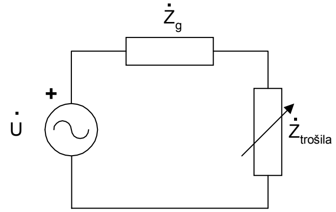
a) impedanciju trošila tako da snaga na trošilu bude maksimalna

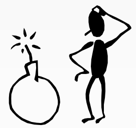
b) snagu u tom slučaju i faktor snage

c) stupanj iskorištenja generatora

Zadano:

- U = 20 [V]
- Z_g = 2+j4 [Ω]

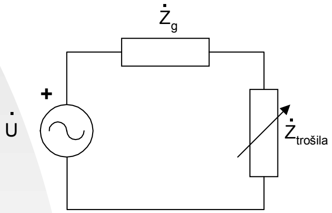




Uvodni pojmovi

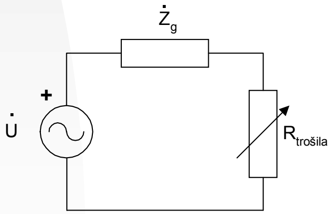
Prilagođenje na maksimalnu snagu

- Maksimalna snaga na promjenjivoj impedanciji.



$$\dot{Z}_{trošila} = \dot{Z}_g^*$$
$$\Downarrow$$
$$P = P_{\max}$$

- Maksimalna snaga na promjenjivom otporu.



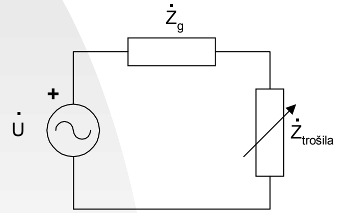
$$R_{trošila} = \left|\dot{Z}_g\right|$$
$$\Downarrow$$
$$P = P_{\max}$$

Rješenje zadatka

- Na trošilu će biti maksimalna snaga ako impedancija trošila ima vrijednost:

$$\dot{Z}_{trošila} = \dot{Z}_g^* = R_g - jX_g = 2 - j4\,[\Omega]$$

- Maksimalna snaga na trošilu će biti jednaka:



$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{\dot{Z}_g + \dot{Z}_{trošila}} = \frac{\dot{U}}{R_g + jX_g + R_g - jX_g}$$

$$I = \frac{U}{2 \cdot R_g}$$

$$P_{\max} = \frac{U^2}{4 \cdot R_g^2} \cdot R_{trošila} = \frac{20^2}{4 \cdot 2^2} \cdot 2 = 50\,[\mathrm{W}]$$

- Faktor snage:

$$\cos\varphi = \frac{R_{trošila}}{\dot{Z}_{trošila}} = \frac{R_g}{\sqrt{R_g^2 + X_g^2}} = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = 0.447$$

- Faktor iskorištenja:

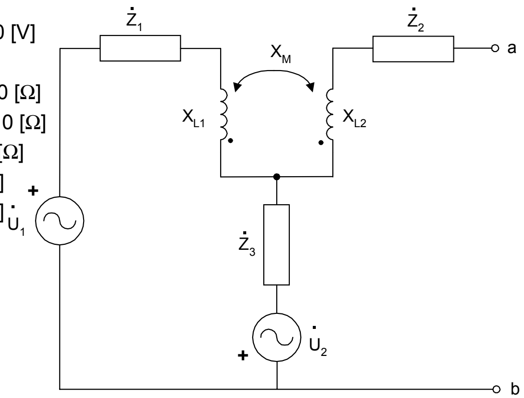
$$\eta = \frac{\mathrm{P}_{\text{trošila}}}{\mathrm{P}_{\text{izvora}}} = \frac{I^2 \cdot R_{trošila}}{I^2 \cdot R_g + I^2 \cdot R_{trošila}} = \frac{R_g}{R_g + R_g} = 0.5 = 50\%$$

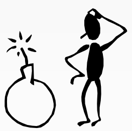
4. zadatak

Zadanu shemu prema slici nadomjestite po Thevenin-u obzirom na priključnice a-b. Koju bi impedanciju trebalo na njih priključiti da bi se na njoj trošila maksimalna snaga? Kolika je ta snaga?

Zadano:

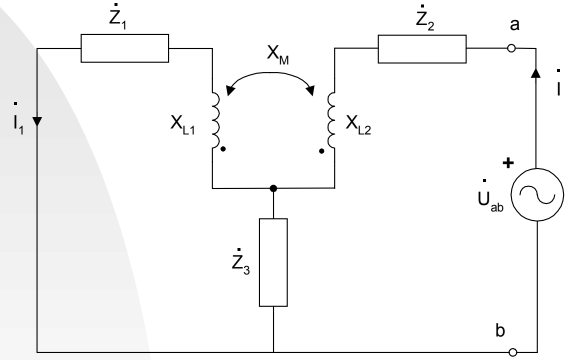
- $\dot{U}_1 = 30 - j60$ [V]
- $\dot{U}_2 = j30$ [V]
- $\dot{Z}_1 = 10 - j20$ [Ω]
- $\dot{Z}_2 = 10 + j10$ [Ω]
- $\dot{Z}_3 = 5 - j10$ [Ω]
- $X_{L1} = 15$ [Ω]
- $X_{L2} = 10$ [Ω]
- $X_M = 5$ [Ω]





Rješenje zadatka

- Thevenin-ova impedancija određuje se U-I metodom.



$$\dot{Z}_{ab} = \frac{\dot{U}_{ab}}{\dot{I}}$$

- Za mrežu vrijedi:

$$\dot{I}_1 \cdot \left(\dot{Z}_1 + \dot{Z}_3 + jX_{L1}\right) - \dot{I} \cdot \dot{Z}_3 - \dot{I} \cdot jX_M = 0$$

$$\dot{I} \cdot \left(\dot{Z}_2 + jX_{L2} + \dot{Z}_3\right) - \dot{I}_1 \cdot \dot{Z}_3 - \dot{I}_1 \cdot jX_M = \dot{U}_{ab}$$

- Uvrštenjem poznatih vrijednosti:

$$\dot{I}_1 \cdot (10 - j20 + 5 - j10 + j15) - \dot{I} \cdot (5 - j10) - \dot{I} \cdot j5 = 0$$

$$\dot{I} \cdot (10 + j10 + j10 + 5 - j10) - \dot{I}_1 \cdot (5 - j10) - \dot{I}_1 \cdot j5 = \dot{U}_{\mathrm{ab}}$$

$$\dot{I}_1 \cdot (15 - j15) - \dot{I} \cdot (5 - j5) = 0$$

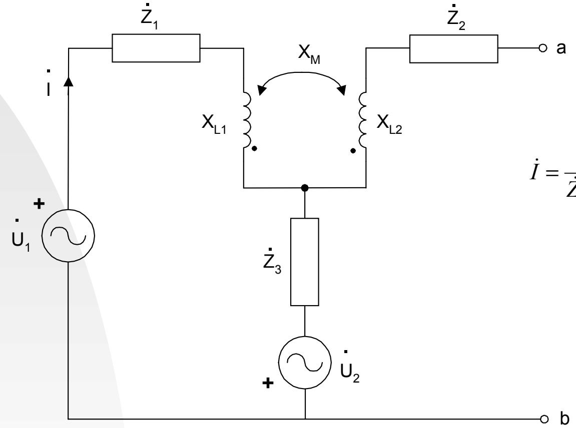
$$-\dot{I}_1 \cdot (5 - j5) + \dot{I} \cdot (15 + j10) = \dot{U}_{\mathrm{ab}}$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{I} \cdot (5 - j5)}{(15 - j15)} = \dot{I} \cdot \frac{1}{3}$$

$$-\dot{I} \cdot \frac{1}{3}(5 - j5) + \dot{I} \cdot (15 + j10) = \dot{U}_{\mathrm{ab}}$$

$$\dot{Z}_{\mathrm{ab}} = \frac{\dot{U}_{\mathrm{ab}}}{\dot{I}} = 15 + j10 - \frac{1}{3} \cdot (5 - j5) = \frac{40 + j35}{3}\ [\Omega]$$

- Thevenin-ov napon:

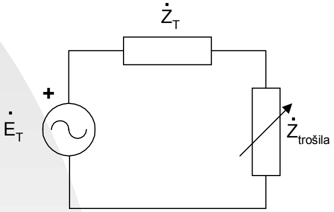


$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_1 + \dot{U}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_3 + jX_{L1}}$$

$$\dot{E}_T = -\dot{U}_2 + \frac{\dot{U}_1 + \dot{U}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_3 + jX_{L1}} \cdot (\dot{Z}_3 + jX_M)$$

$$\dot{E}_T = -j30 + \frac{30 - j60 + j30}{10 - j20 + 5 - j10 + j15} \cdot (5 - j10 + j5) = 10 - j40\ [\mathrm{V}]$$

- Ukoliko se na stezaljke a-b priključi trošilo mreža poprima sljedeći oblik:



Da bi se na trošilu disipirala maksimalna snaga mora biti zadovoljeno:

$$\dot{Z}_{trošila} = \dot{Z}_T^* = \frac{40 - j35}{3}\ [\Omega]$$

- Maksimalna snaga je jednaka:

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}_T}{\dot{Z}_T + \dot{Z}_{trošila}} = \frac{\dot{E}_T}{2 \cdot R_T}$$

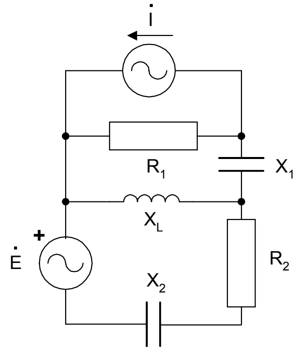
$$P_{\max} = I^2 \cdot R_{trošila} = I^2 \cdot R_T = \left(\frac{E_T}{2 \cdot R_T}\right)^2 \cdot R_T = \frac{E_T^2}{4 \cdot R_T}$$

$$P_{\max} = \frac{E_T^2}{4 \cdot R_T} = \frac{10^2 + 40^2}{4 \cdot \frac{40}{3}} = 32\ [\mathrm{W}]$$

5. zadatak

Za mrežu prema slici odredite pomoću Norton-ovog teorema veličinu struje kroz svitak. Zadano:

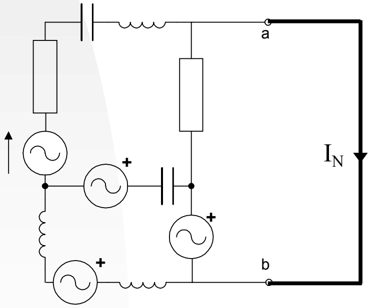
- $\dot{U} = 1\angle 0°$ [V]
- $\dot{I} = 1\angle 0°$ [A]
- $R_1 = X_1 = R_2 = X_2 = 1$ [Ω]
- $X_L = 0.5$ [Ω]

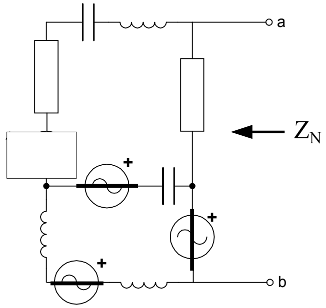


- Bilo koji dio aktivne linearne mreže može se nadomjestiti s obzirom na dvije stezaljke (a i b) realnim strujnim izvorom, čiju struju I_N (Norton-ovu struju) i unutarnju impedanciju Z_N (Norton-ovu impedanciju) određujemo iz zadane mreže:

⇛ **Norton-ovu struju I_N** određujemo tako da izračunamo struju koja teče od a prema b kada su stezaljke a-b kratko spojene.

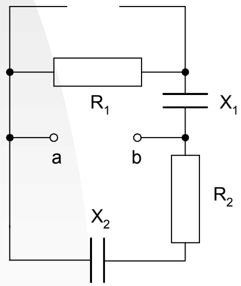
⇛ **Norton-ovu impedanciju Z_N** odredimo tako da kratko spojimo sve naponske izvore i isključimo sve strujne izvore te onda izračunamo ukupnu impedanciju između a i b.





Rješenje zadatka

- Da bi se odredila struja kroz zavojnicu korištenjem Norton-ovog teorema potrebno je zavojnicu odspojiti iz mreže, a ostatak mreže nadomjestiti pomoću realnog strujnog izvora.
- Određivanje Z_N.



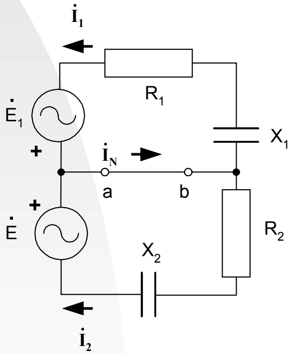
$$\dot{Z}_N = \dot{Z}_{ab} = (R_1 - jX_1)\|(R_2 - jX_2)$$

$$\dot{Z}_N = \frac{(R_1 - jX_1)\cdot(R_2 - jX_2)}{R_1 - jX_1 + R_2 - jX_2}$$

$$\dot{Z}_N = \frac{(1-j)\cdot(1-j)}{2-j2} = 0.5 - j0.5\,[\Omega]$$

- Određivanje I_N.
- Ako realni strujni izvor pretvorimo u naponski realni izvor dobivamo sljedeću mrežu:

$$\dot{E}_1 = \dot{I}\cdot R_1$$



Struja I_N je struja koja teče od a prema b kada su stezaljke a i b kratko spojene.

U mreži teku prikazane struje, a struja I_N iznosi:

$$\dot{I}_N = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$$

Budući da su potencijali točaka a i b isti, za struje koje teku u mreži vrijedi:

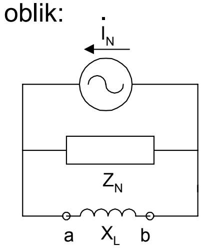
$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}_1}{R_1 - jX_1} = \frac{\dot{I}\cdot R_1}{R_1 - jX_1}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{E}}{R_2 - jX_2}$$

$$\dot{I}_N = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \frac{\dot{I}\cdot R_1}{R_1 - jX_1} + \frac{\dot{E}}{R_2 - jX_2}$$

$$\dot{I}_N = \frac{1\angle 0°\cdot 1}{1-j} + \frac{1\angle 0°}{1-j} = \frac{1\angle 0°}{\sqrt{2}\angle -45°} + \frac{1\angle 0°}{\sqrt{2}\angle -45°} = \sqrt{2}\angle 45°\,[\mathrm{A}]$$

- Mreža sada ima oblik:



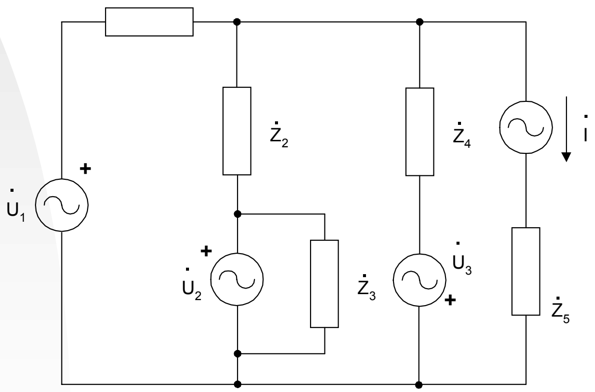
- Struja kroz zavojnicu iznosi:

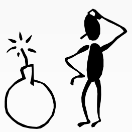
$$\dot{I}_L = \frac{\dot{I}_N\cdot(\dot{Z}_N\|jX_L)}{jX_L} = \frac{\sqrt{2}\angle 45°\cdot\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}\angle -45°\cdot 0.5\angle 90°}{\frac{\sqrt{2}}{2}\angle -45° + 0.5\angle 90°}}{j0.5} = 2\angle 0°\,[\mathrm{A}]$$

6. zadatak

U spoju prema slici odredite iznos struja kroz grane. Zadano:

- $\dot{U}_1 = 50\angle 90°$ [V]
- $\dot{U}_2 = 50\angle -30°$ [V]
- $\dot{U}_3 = 50\angle -150°$ [V]
- $\dot{I} = 2\angle 0°$ [A]
- $\dot{Z}_1 = \dot{Z}_2 = \dot{Z}_3 = \dot{Z}_4 = \dot{Z}_5 = 5\angle 30°$ [Ω]





Uvodni pojmovi

Millman-ov teorem

- Za mreže u kojima postoje samo dva čvora razlika potencijala ta dva čvora određuje se kao:

$$\dot{U}_{\text{ab}} = \frac{\sum_{l=1}^{n} \dot{E}_l \cdot \dot{Y}_l}{\sum_{l=1}^{n} \dot{Y}_l}$$

gdje je,

U_{ab} - razlika potencijala čvora a i b

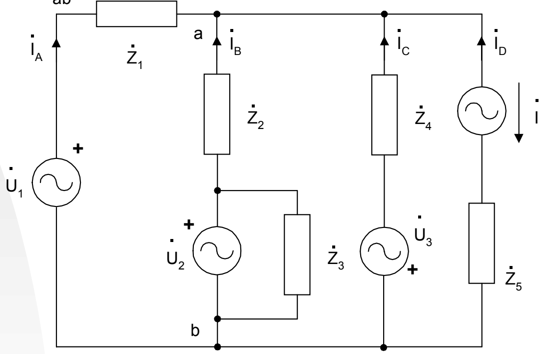
Y_l - suma admitancija u pojedinoj grani

E_l - suma unutarnjih napona u pojedinoj grani

- Pomoću ovako određenog napona moguće je izračunati ostale veličine u krugu.

Rješenje zadatka

- Korištenjem Millman-ovog teorema moguće je odrediti napon U_{ab}:



$$\dot{U}_{\text{ab}} = \frac{\sum_i \dot{U}_i \cdot \dot{Y}_i}{\sum_i \dot{Y}_i} = \frac{\frac{\dot{U}_1}{\dot{Z}_1} + \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_2} - \frac{\dot{U}_3}{\dot{Z}_4} - \dot{I}}{\frac{1}{\dot{Z}_1} + \frac{1}{\dot{Z}_2} + \frac{1}{\dot{Z}_4}}$$

- Uvrštenjem vrijednosti napon U_{ab} iznosi:

$$\dot{U}_{\text{ab}} = \frac{\frac{50\angle 90°}{5\angle 30°} + \frac{50\angle -30°}{5\angle 30°} - \frac{50\angle -150°}{5\angle 30°} - 2\angle 0°}{\frac{1}{5\angle 30°} + \frac{1}{5\angle 30°} + \frac{1}{5\angle 30°}}$$

$$\dot{U}_{\text{ab}} = \frac{10\angle 60° + 10\angle -60° - 10\angle -180° - 2\angle 0°}{\frac{3}{5\angle 30°}}$$

$$\dot{U}_{\text{ab}} = \frac{10 \cdot \frac{1}{2} + j10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 10 \cdot \frac{1}{2} - j10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 10 - 2}{0.6\angle -30°} = 30\angle +30° \ [\text{V}]$$

- Struje u granama se onda mogu odrediti na sljedeći način:

$$\dot{U}_{\text{ab}} = \dot{U}_1 - \dot{I}_{\text{A}} \cdot \dot{Z}_1$$

$$\dot{I}_{\text{A}} = \frac{\dot{U}_1 - \dot{U}_{\text{ab}}}{\dot{Z}_1} = \frac{50\angle 90° - 30\angle 30°}{5\angle 30°} = 8.7\angle 97° \ [\text{A}]$$

$$\dot{U}_{ab} = \dot{U}_2 - \dot{I}_B \cdot \dot{Z}_2$$

$$\dot{I}_B = \frac{\dot{U}_2 - \dot{U}_{ab}}{\dot{Z}_2} = \frac{50\angle -30° - 30\angle 30°}{5\angle 30°} = 8.7\angle -97° \,[\mathrm{A}]$$

$$\dot{U}_{ab} = -\dot{U}_3 - \dot{I}_C \cdot \dot{Z}_4$$

$$\dot{I}_C = \frac{-\dot{U}_3 - \dot{U}_{ab}}{\dot{Z}_4} = \frac{-50\angle -150° - 30\angle 30°}{5\angle 30°} = 4\angle 0° \,[\mathrm{A}]$$

$$\dot{I}_D = -\dot{I} = 2\angle 180° \,[\mathrm{A}]$$

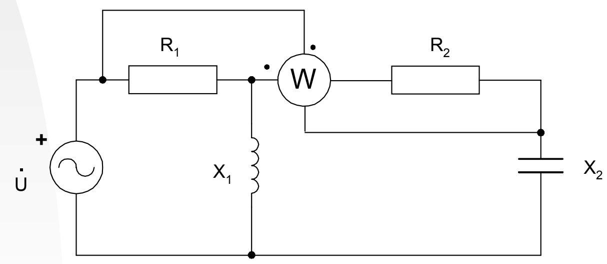
- Zbroj svih struja u mreži jednak je 0 (1. Kircchhoff-ov zakon):

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C + \dot{I}_D = 8.7\angle 97° + 8.7\angle -97° + 4\angle 0° + 2\angle 180° = 0$$

7. zadatak

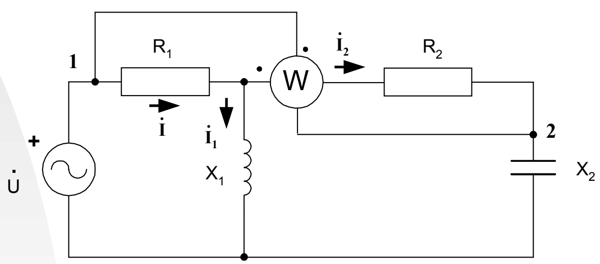
Odredite pokazivanje watmetra u mreži prema slici. Zadano:

- U = 120 [V]
- R_1 = 10 [Ω]
- R_2 = 20 [Ω]
- X_1 = 40 [Ω]
- X_2 = 20 [Ω]



Rješenje zadatka

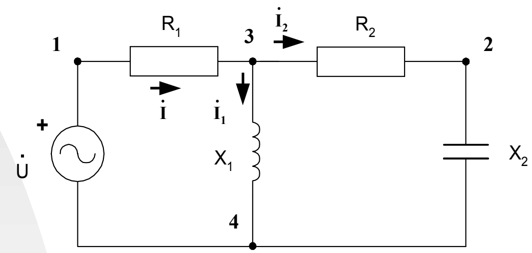
- Uz pretpostavljene smjerove struja u krugu watmetar mjeri snagu koja se može odrediti pomoću izraza:



$$P_W = \mathrm{Re}\left\{\dot{U}_{12} \cdot \dot{I}_2^*\right\}$$

- Da bi se odredila snaga potrebno je odrediti struju I_2 i napon U_{12}.

- Budući da mreža ima dva čvora struju I_2 možemo odrediti korištenjem Millman-ovog teorema.



$$\dot{U}_{34} = \frac{\frac{\dot{U}}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{jX_1} + \frac{1}{R_2 - jX_2}} = \frac{\frac{120}{10}}{\frac{1}{10} + \frac{1}{j40} + \frac{1}{20 - j20}} = 96\angle 0° \,[\mathrm{V}]$$

$$\dot{U}_{34} = \dot{I}_2 \cdot (R_2 - jX_2) \quad \Rightarrow \quad \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{34}}{R_2 - jX_2} = \frac{96}{20 - j20} = 2.4\sqrt{2}\angle 45° \,[\mathrm{A}]$$

- Da bi se odredio napon U_{12} potrebno je odrediti struju I:

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{34}}{jX_1} + \dot{I}_2 = \frac{96}{40\angle 90^\circ} + 2.4\sqrt{2}\angle 45^\circ = 2.4\angle 0^\circ\,[\mathrm{A}]$$

$$\dot{U}_{12} = \dot{I}\cdot R_1 + \dot{I}_2 \cdot R_2 = 2.4\angle 0^\circ \cdot 10 + 2.4\sqrt{2}\angle 45^\circ \cdot 20 = 72 + j48\,[\mathrm{V}]$$

- Snaga koju mjeri watmetar iznosi:

$$P_W = \mathrm{Re}\left\{\dot{U}_{12}\cdot \dot{I}_2^*\right\}$$

$$\dot{I}_2 = 2.4 + j2.4\,[\mathrm{A}] \Rightarrow \dot{I}_2^* = 2.4 - j2.4\,[\mathrm{A}]$$

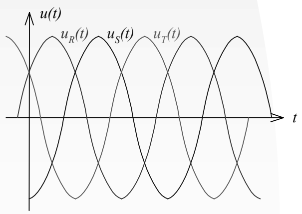
$$P_W = \mathrm{Re}\{(72 + j48)\cdot(2.4 - j2.4)\} = 72\cdot 2.4 + (j48)\cdot(-j2.4)$$

$$P_W = 72\cdot 2.4 + 48\cdot 2.4$$

$$P_W = 288\,[\mathrm{W}]$$

Trofazni sustav

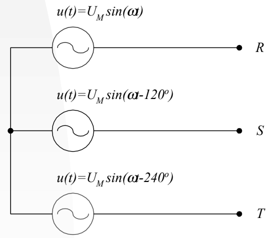
- Linijski i fazni naponi i struje.
- Spoj zvijezda.
- Spoj trokut.
- Simetrično i nesimetrično opterećenje.
- Snaga trofaznog sustava.

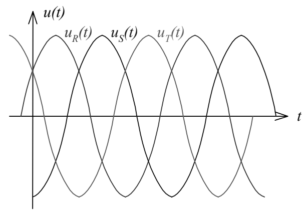


Uvodni pojmovi

- Trofazni sustav napajanja predstavlja sustav napajanja koji se sastoji od tri međusobno zavisna izvora izmjeničnog sinusoidalnog napona.
- Ti izvori napajanja daju napone koji imaju:
  - međusobno jednake amplitude ($U_{M1} = U_{M2} = U_{M3}$),
  - međusobno jednake frekvencije($f_1 = f_2 = f_3$),

  ali koji su međusobno fazno pomaknuti za jednu trećinu periode (120°):





Uvodni pojmovi

- Stoga vrijedi:

$$U_R = U_M \cdot \sin(\omega \cdot t)[\mathrm{V}]$$
$$U_S = U_M \cdot \sin\left(\omega \cdot t - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right)[\mathrm{V}]$$
$$U_T = U_M \cdot \sin\left(\omega \cdot t - \frac{4 \cdot \pi}{3}\right)[\mathrm{V}]$$

odnosno (u kompleksnoj domeni):

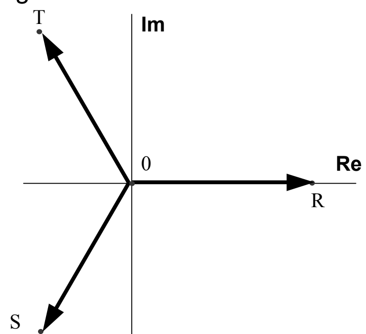
$$\dot{U}_R = U\angle 0° \,[\mathrm{V}]$$
$$\dot{U}_S = U\angle -120° \,[\mathrm{V}]$$
$$\dot{U}_T = U\angle -240° \,[\mathrm{V}]$$

gdje je:

$$U = \frac{U_M}{\sqrt{2}} \,[\mathrm{V}]$$

Uvodni pojmovi

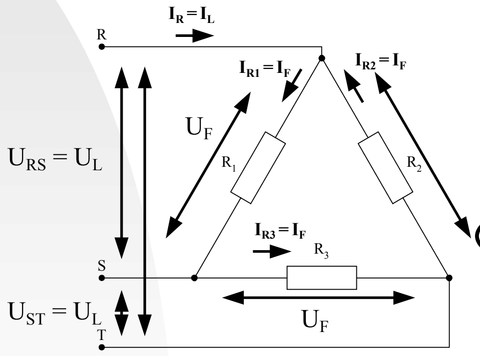
- Navedene vektore može se prikazati i odgovarajućim vektorskim dijagramom:



- Postoje dva osnovna načina spajanja trošila u trofaznim sustavima:
  - spoj trokut,
  - spoj zvijezda.

Uvodni pojmovi

- Spoj trokut:



1. $U_L = U_F$

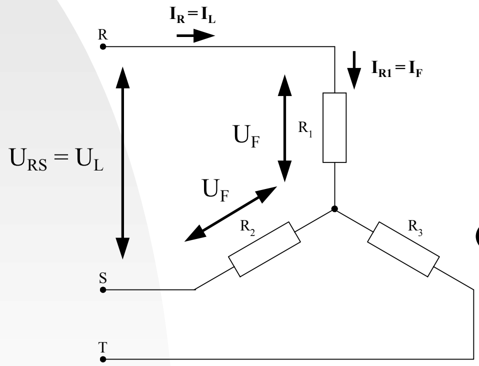
2. $U_F = I_F \cdot R_F$

3. $I_L = I_F \cdot \sqrt{3}$

samo kod simetričnog opterećenja, tj. za $R_1 = R_2 = R_3$!!! ($Z_1 = Z_2 = Z_3$)

Uvodni pojmovi

- Spoj zvijezda:



1. $I_L = I_F$

2. $U_F = I_F \cdot R_F$

3. $U_L = U_F \cdot \sqrt{3}$

samo kod simetričnog opterećenja, tj. za $R_1 = R_2 = R_3$!!! ($Z_1 = Z_2 = Z_3$)

1. zadatak

Zadana je mreža prema slici. Odredite pokazivanja instrumenata za sljedeće slučajeve:

a) jednak teret u svim fazama uz uključenu sklopku u nul-vodu

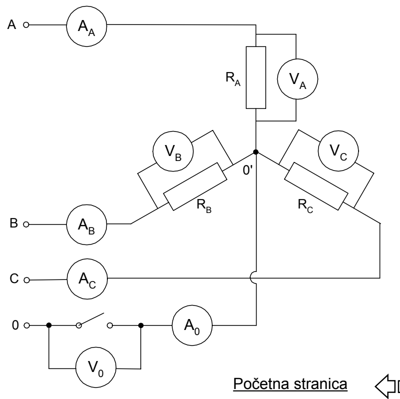
b) prekid faze C uz uključenu sklopku u nul - vodu

c) prekid faze C uz isključenu sklopku u nul - vodu

d) kratki spoj faze A uz isključenu sklopku u nul - vodu

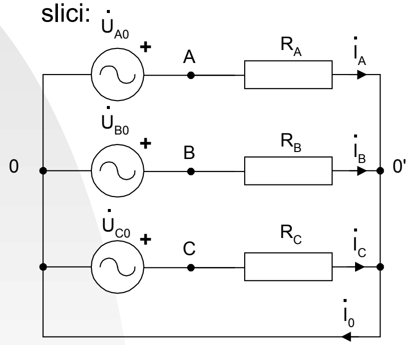
Zadano je:

- $U_L = 173$ [V]
- $R_A = R_B = R_C = 10$ [Ω]



Rješenje zadatka

- Mreža s uključenom sklopkom u nul-vodu izgleda kao na slici:



Naponi izvora:

$$\dot{U}_{A0} = 100\angle 0° \,[\mathrm{V}]$$
$$\dot{U}_{B0} = 100\angle -120° \,[\mathrm{V}]$$
$$\dot{U}_{C0} = 100\angle 120° \,[\mathrm{V}]$$

S obzirom da je riječ o simetričnom trošilu s nul-vodom vrijedi:

$$\dot{U}_{0'0} = 0$$

Napon na trošilima:

$$\dot{U}_{A0'} = \dot{U}_{A0} = 100\angle 0° \,[\mathrm{V}]$$
$$\dot{U}_{B0'} = \dot{U}_{B0} = 100\angle -120° \,[\mathrm{V}]$$
$$\dot{U}_{C0'} = \dot{U}_{C0} = 100\angle 120° \,[\mathrm{V}]$$

- Iz poznatih napona na trošilima moguće je odrediti struje:

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_{A0'}}{R_A} = \frac{100\angle 0°}{10} = 10\angle 0° \,[\mathrm{A}]$$

$$\dot{I}_B = \frac{\dot{U}_{B0'}}{R_A} = \frac{100\angle -120°}{10} = 10\angle -120° \,[\mathrm{A}]$$

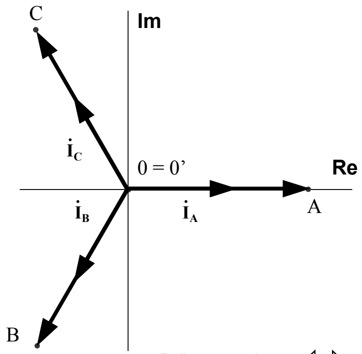
$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_{C0'}}{R_A} = \frac{100\angle 120°}{10} = 10\angle 120° \,[\mathrm{A}]$$

- Vektorski dijagram:

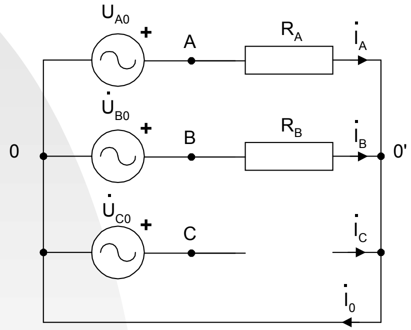
1. Naponi trofaznog izvora su zadani.
2. Zbog spojenog nul-voda, naponi na trošilima u pojedinim fazama jednaki su naponima izvora.

$$\varphi_0 = \varphi_{0'} \quad \Rightarrow \quad \dot{U}_{A0'} = \dot{U}_{A0}, \ldots$$

3. Struje koje teku kroz pojedine faze (A, B, C) su u fazi s naponima na trošilima.



- Mreža s uključenom sklopkom u nul-vodu i prekid faze C izgleda kao na slici:



Zbog postojećeg nul-voda vrijedi:

$$\dot{U}_{0'0} = 0$$

Napon na trošilima:

$$\dot{U}_{A0'} = \dot{U}_{A0} = 100\angle 0° \,[\mathrm{V}]$$

$$\dot{U}_{B0'} = \dot{U}_{B0} = 100\angle -120° \,[\mathrm{V}]$$

$$\dot{U}_{C0'} = \dot{U}_{C0} = 100\angle 120° \,[\mathrm{V}]$$

- Struje:

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_{A0'}}{R_A} = \frac{100\angle 0°}{10} = 10\angle 0° \,[\mathrm{A}]$$

$$\dot{I}_B = \frac{\dot{U}_{B0'}}{R_A} = \frac{100\angle -120°}{10} = 10\angle -120° \,[\mathrm{A}]$$

$$\dot{I}_C = 0\angle 0° \,[\mathrm{A}]$$

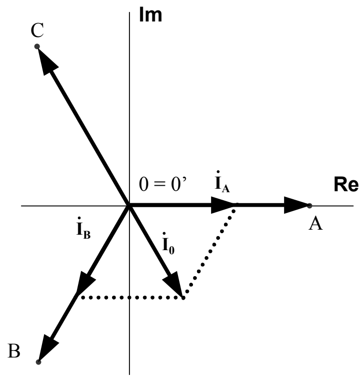
$$\dot{I}_0 = \dot{I}_A + \dot{I}_B = 10\angle -60° \,[\mathrm{A}]$$

- Vektorski dijagram:

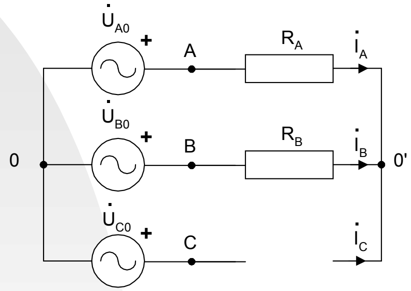
1. Naponi trofaznog izvora su zadani.
2. Zbog spojenog nul-voda, naponi na trošilima u pojedinim fazama jednaki su naponima izvora.

$$\varphi_0 = \varphi_{0'} \quad \Rightarrow \quad \dot{U}_{A0'} = \dot{U}_{A0}, \ldots$$

3. U fazi C, zbog prekida, ne teče struja.
4. Struje koje teku kroz ostale faze (A, B) su u fazi s naponima na trošilima.
5. Struja kroz nul-vodič jednaka je vektorskom zbroju struja u fazama A i B.



- Mreža s isključenom sklopkom u nul-vodu i prekid faze C izgleda kao na slici:



Mreža nema nul-vod pa vrijedi:

$$\dot{U}_{0'0} \neq 0$$

Napon na trošilima nije jednak naponu izvora:

$$\dot{U}_{A0'} = \dot{U}_{A0} - \dot{U}_{0'0}$$

$$\dot{U}_{B0'} = \dot{U}_{B0} - \dot{U}_{0'0}$$

$$\dot{U}_{C0'} = \dot{U}_{C0} - \dot{U}_{0'0}$$

- Da bi se odredili naponi na trošilima potrebno je odrediti napon između zvjezdišta trofaznog trošila i izvora. Taj napon se određuje pomoću Millman-ovog teorema :

$$\dot{U}_{0'0} = \frac{\dfrac{\dot{U}_{A0}}{R_A} + \dfrac{\dot{U}_{B0}}{R_B}}{\dfrac{1}{R_A} + \dfrac{1}{R_B}} = \frac{\dfrac{100\angle 0°}{10} + \dfrac{100\angle -120°}{10}}{\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{10}} = 50\angle -60° \,[\mathrm{V}]$$

- Naponi na trošilima iznose:

$$\dot{U}_{A0'} = \dot{U}_{A0} - \dot{U}_{0'0} = 100\angle 0^\circ - 50\angle -60^\circ = 86.6\angle 30^\circ \,[\mathrm{V}]$$
$$\dot{U}_{B0'} = \dot{U}_{B0} - \dot{U}_{0'0} = 100\angle -120^\circ - 50\angle -60^\circ = 86.6\angle -150^\circ \,[\mathrm{V}]$$
$$\dot{U}_{C0'} = \dot{U}_{C0} - \dot{U}_{0'0} = 100\angle 120^\circ - 50\angle -60^\circ = 150\angle 120^\circ \,[\mathrm{V}]$$

- Struje u mreži:

$$\dot{I}_C = 0\angle 0^\circ \,[\mathrm{A}]$$

$$\dot{I}_A \cdot R_A = \dot{U}_{A0} - \dot{U}_{0'0} \quad \Rightarrow \quad \dot{I}_A = \frac{\dot{U}_{A0} - \dot{U}_{0'0}}{R_A}$$

$$\dot{I}_A = \frac{100\angle 0^\circ - 50\angle -60^\circ}{10} = 8.66\angle 30^\circ \,[\mathrm{A}]$$

$$\dot{I}_B \cdot R_B = \dot{U}_{B0} - \dot{U}_{0'0} \quad \Rightarrow \quad \dot{I}_B = \frac{\dot{U}_{B0} - \dot{U}_{0'0}}{R_B}$$

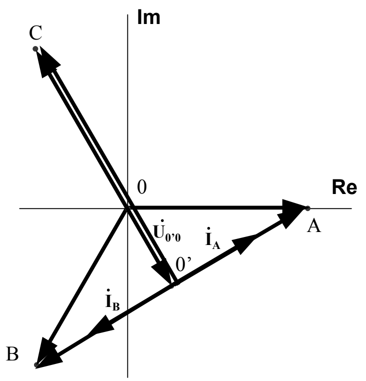
$$\dot{I}_B = \frac{100\angle -120^\circ - 50\angle -60^\circ}{10} = 8.66\angle -150^\circ \,[\mathrm{A}]$$

- Vektorski dijagram:

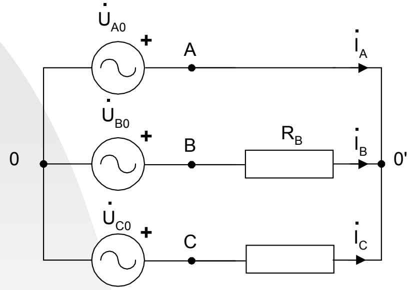
1. Naponi trofaznog izvora su zadani.
2. Budući da mreža nema nul-vod postoji razlika potencijala između zvjezdišta trošila i izvora.

$$\dot{\varphi}_{0'} \neq \dot{\varphi}_0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi}_{0'} = \dot{U}_{0'0}$$

3. Spajanjem točaka A, B i C sa točkom 0' dobiju se naponi na trošilima u pojedinim fazama.
4. Iz dijagrama je vidljivo da se radi o nesimetričnom trofaznom sustavu, za razliku od prethodnog slučaju sa spojenim nul-vodom.
5. Struja kroz trošila u fazama A i B je u fazi s naponima na tim trošilima.



- Mreža s isključenom sklopkom u nul-vodu i kratkim spojem u fazi A izgleda kao na slici:



Mreža nema nul-vod pa vrijedi:

$$\dot{U}_{0'0} \neq 0$$

Budući da se u fazi A nalazi samo naponski izvor vrijedi:

$$\dot{\varphi}_{0'} = \dot{\varphi}_A$$
$$\dot{U}_{0'0} = \dot{U}_{A0}$$

- Naponi na trošilima u fazi B i C:

$$\dot{U}_{B0'} = \dot{U}_{B0} - \dot{U}_{0'0} = \dot{U}_{B0} - \dot{U}_{A0} = 100\angle -120^\circ - 100\angle 0^\circ = 173\angle -150^\circ \,[\mathrm{V}]$$
$$\dot{U}_{C0'} = \dot{U}_{C0} - \dot{U}_{0'0} = \dot{U}_{C0} - \dot{U}_{A0} = 100\angle 120^\circ - 100\angle 0^\circ = 173\angle 150^\circ \,[\mathrm{V}]$$

- Struje:

$$\dot{I}_B = \frac{\dot{U}_{B0'}}{R_B} = \frac{173\angle -150^\circ}{10} = 17.3\angle -150^\circ \,[\mathrm{A}]$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_{C0'}}{R_C} = \frac{173\angle 150^\circ}{10} = 17.3\angle 150^\circ \,[\mathrm{A}]$$

$$\dot{I}_A = -\dot{I}_B - \dot{I}_C = -17.3\angle -150^\circ - 17.3\angle 150^\circ = 30\angle 0^\circ \,[\mathrm{A}]$$

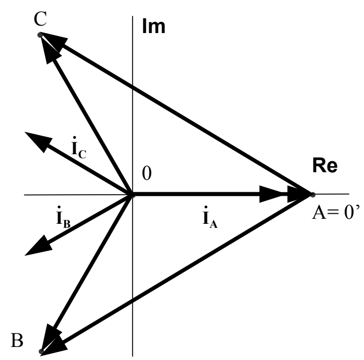
- Vektorski dijagram:

1. Naponi trofaznog izvora su zadani.
2. Zbog kratkog spoja u fazi A potencijali točaka A i 0' su isti.

$$\dot{\varphi}_{0'} = \dot{\varphi}_A$$

3. Napone na pojedinim trošilima u fazama B i C dobijemo spajanjem točke 0' s pripadnom točkom.
4. Struje u fazama B i C su u fazi s naponima na trošilima u fazama B i C. Struja u fazi A jednaka je vektorskom zbroju struja I_B i I_C.

$$\dot{I}_A = -\dot{I}_B - \dot{I}_C$$



2. zadatak

U mreži prema slici odredite linijske struje te nacrtajte vektorski dijagram. Razmotrite sljedeće slučajeve:

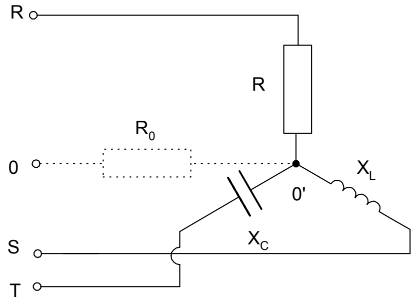
a) nema nul-vodiča

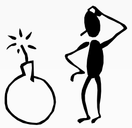
b) postoji nul vodič otpora R_0

c) postoji nul-vodič zanemarivog otpora

Zadano:

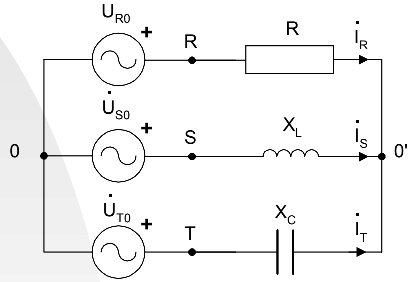
- $U_L = 380$ [V]
- $R = X_L = X_C = 10$ [Ω]
- $R_0 = 2.5$ [A]





Rješenje zadatka

- Mreža bez nul-vodiča:



Naponi izvora:

$$\dot{U}_{R0} = \frac{380}{\sqrt{3}} = 220\angle 0° \,[\text{V}]$$

$$\dot{U}_{S0} = 220\angle -120° \,[\text{V}]$$

$$\dot{U}_{T0} = 220\angle 120° \,[\text{V}]$$

- Radi se o nesimetričnom trošilu budući da su impedancije različitih karaktera pa vrijedi:

$$\dot{U}_{0'0} = \frac{\dfrac{\dot{U}_{R0}}{R} + \dfrac{\dot{U}_{S0}}{jX_L} + \dfrac{\dot{U}_{T0}}{-jX_C}}{\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{jX_L} + \dfrac{1}{-jX_C}} = \frac{\dfrac{220\angle 0°}{10} + \dfrac{220\angle -120°}{j10} + \dfrac{220\angle 120°}{-j10}}{\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{j10} + \dfrac{1}{-j10}} = -160\,[\text{V}]$$

- Struje u mreži određuju se na sljedeći način:

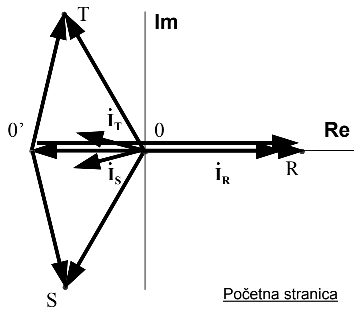
$$\dot{I}_R \cdot R = \dot{U}_{R0} - \dot{U}_{0'0} \quad \Rightarrow \quad \dot{I}_R = \frac{\dot{U}_{R0} - \dot{U}_{0'0}}{R} = \frac{220\angle 0° - (-160)}{10} = 38\,[\text{A}]$$

$$\dot{I}_S = \frac{\dot{U}_{S0} - \dot{U}_{0'0}}{jX_L} = \frac{220\angle -120° - (-160)}{j10} = -19 - j5\,[\text{A}]$$

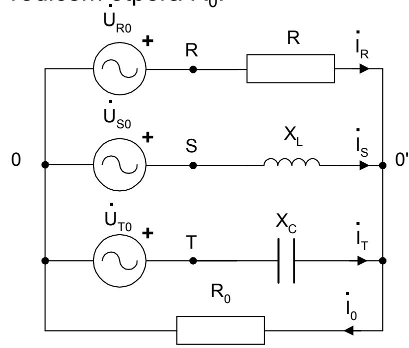
$$\dot{I}_T = \frac{\dot{U}_{T0} - \dot{U}_{0'0}}{-jX_C} = \frac{220\angle 120° - (-160)}{-j10} = -19 + j5\,[\text{A}]$$

- Vektorski dijagram:

1. Zbog nesimetričnog trošila potencijal zvjezdišta trošila (0') je pomaknut u odnosu na točku 0.
2. Naponi na trošilima izgledaju kao na slici.
3. Struja u fazi R je u fazi s naponom na trošilu. Struja u fazi S kasni za 90°, a u fazi T prethodi za 90° pripadnom naponu.



- Mreža s nul-vodičem otpora R_0:



- Napon $U_{0'0}$:

$$\dot{U}_{0'0} = \frac{\dfrac{\dot{U}_{R0}}{R} + \dfrac{\dot{U}_{S0}}{jX_L} + \dfrac{\dot{U}_{T0}}{-jX_C}}{\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{jX_L} + \dfrac{1}{-jX_C} + \dfrac{1}{R_0}} = \frac{\dfrac{220\angle 0°}{10} + \dfrac{220\angle -120°}{j10} + \dfrac{220\angle 120°}{-j10}}{\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{j10} + \dfrac{1}{-j10} + \dfrac{1}{2.5}} = -32\,[\text{V}]$$

- Struje u mreži određuju se na sljedeći način:

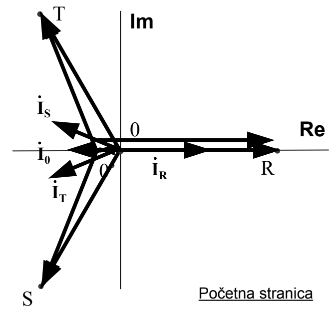
$$\dot{I}_R = \frac{\dot{U}_{R0} - \dot{U}_{0'0}}{R} = \frac{220\angle 0^\circ - (-32)}{10} = 25.2\,[\mathrm{A}]$$

$$\dot{I}_S = \frac{\dot{U}_{S0} - \dot{U}_{0'0}}{jX_L} = \frac{220\angle -120^\circ - (-32)}{j10} = -19 - j7.8\,[\mathrm{A}]$$

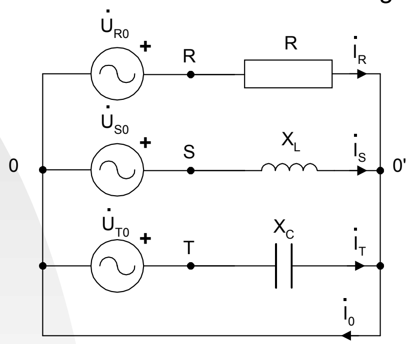
$$\dot{I}_T = \frac{\dot{U}_{T0} - \dot{U}_{0'0}}{-jX_C} = \frac{220\angle 120^\circ - (-32)}{-j10} = -19 + j7.8\,[\mathrm{A}]$$

$$\dot{I}_0 = \dot{I}_R + \dot{I}_S + \dot{I}_T = \frac{\dot{U}_{0'0}}{R_0} = \frac{-32}{2.5} = -12.8\,[\mathrm{A}]$$

- Vektorski dijagram:



- Mreža s nul-vodičem zanemarivog otpora:



$$\dot{U}_{0'0} = 0\,[\mathrm{V}]$$

$$\dot{U}_{R0'} = \dot{U}_{R0} = 220\angle 0^\circ\,[\mathrm{V}]$$

$$\dot{U}_{S0'} = \dot{U}_{S0} = 220\angle -120^\circ\,[\mathrm{V}]$$

$$\dot{U}_{T0'} = \dot{U}_{T0} = 220\angle 120^\circ\,[\mathrm{V}]$$

- Struje u mreži:

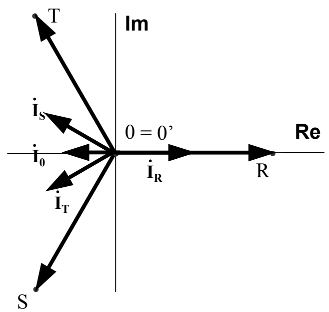
$$\dot{I}_R = \frac{\dot{U}_{R0'}}{R} = \frac{220\angle 0^\circ}{10} = 22\,[\mathrm{A}]$$

$$\dot{I}_S = \frac{\dot{U}_{S0'}}{jX_L} = \frac{220\angle -120^\circ}{j10} = 22\angle -210^\circ\,[\mathrm{A}]$$

$$\dot{I}_T = \frac{\dot{U}_{T0'}}{-jX_C} = \frac{220\angle 120^\circ}{-j10} = 22\angle 210^\circ\,[\mathrm{A}]$$

$$\dot{I}_0 = \dot{I}_R + \dot{I}_S + \dot{I}_T = 22\angle 0^\circ + 22\angle -210^\circ + 22\angle 210^\circ = -16\,[\mathrm{A}]$$

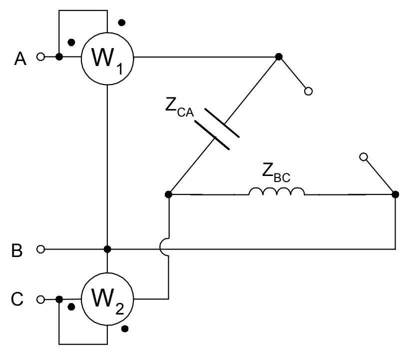
- Vektorski dijagram:



3. zadatak

Trošilo je priključeno na trofaznu mrežu napona U_L. Odredite pokazivanje mjernih instrumenata. Zadano:

- $U_L = 220$ [V]
- $\dot{Z}_{AB} = \infty$ [Ω]
- $\dot{Z}_{BC} = \dot{Z}_{CA} = 10$ [Ω]

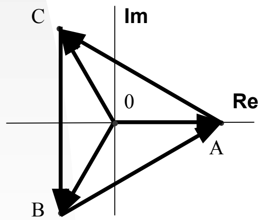


Rješenje zadatka

- Watmetri su spojeni u tzv. Aronov spoj, kojim se mjeri radna snaga cijelog trofaznog sustava. Radna snaga koja se troši na trofaznom trošilu jednaka je algebarskoj sumi očitanja pojedinih watmetara.
- Watmetri mjere sljedeće:

$$P_{W1} = \mathrm{Re}\{\dot{U}_{AB} \cdot \dot{I}_A^*\} \qquad P_{W2} = \mathrm{Re}\{\dot{U}_{CB} \cdot \dot{I}_C^*\}$$

- Da bi se odredila pokazivanja watmetra potrebno je odrediti napone i struje. Linijski naponi iznose:

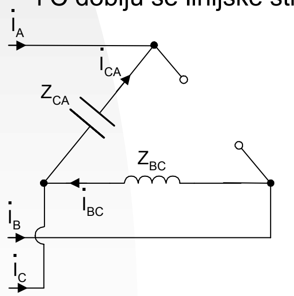


$$\dot{U}_{AB} = U_L \angle 30° = 220\angle 30° \,[\mathrm{V}]$$
$$\dot{U}_{BC} = U_L \angle -90° = 220\angle -90° \,[\mathrm{V}]$$
$$\dot{U}_{CA} = U_L \angle 150° = 220\angle 150° \,[\mathrm{V}]$$

- Fazne struje iznose:

$$\dot{I}_{CA} = \frac{\dot{U}_{CA}}{\dot{Z}_{CA}} = \frac{220\angle 150°}{-j10} = 22\angle 240° \,[\mathrm{A}]$$
$$\dot{I}_{BC} = \frac{\dot{U}_{BC}}{\dot{Z}_{BC}} = \frac{220\angle -90°}{j10} = 22\angle 180° \,[\mathrm{A}]$$
$$\dot{I}_{AB} = 0 \,[\mathrm{A}]$$

- Korištenjem prvog Kircchhoffovog zakona za čvorove A, B i C dobiju se linijske struje:



$$\dot{I}_A = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA} = 0 - 22\angle 240° = 11 + j19 \,[\mathrm{A}]$$
$$\dot{I}_B = \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB} = 22\angle 180° = -22 \,[\mathrm{A}]$$
$$\dot{I}_C = \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC} = 22\angle 240° - 22\angle 180° = 11 - j19 \,[\mathrm{A}]$$

- Uvrštenjem izračunatih vrijednosti napona i struja određujemo snage koju mjere watmetri:

$$P_{W1} = \mathrm{Re}\{\dot{U}_{AB} \cdot \dot{I}_A^*\} = \mathrm{Re}\{(190 + j110)\cdot(11 - j19)\} = 4180 \,[\mathrm{W}]$$
$$P_{W2} = \mathrm{Re}\{\dot{U}_{CB} \cdot \dot{I}_C^*\} = \mathrm{Re}\{(j220)\cdot(11 + j19)\} = -4180 \,[\mathrm{W}]$$

- Ukupna radna snaga trošila:

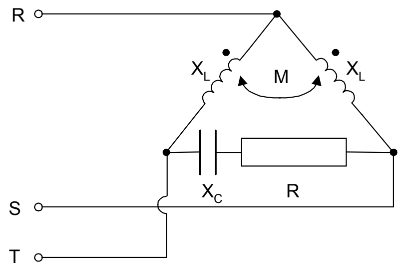
$$P_{trošila} = P_{W1} + P_{W2} = 4180 - 4180 = 0 \,[\mathrm{W}]$$

- Budući da se radi o čisto reaktivnom trošilu može se zaključiti da će radna snaga biti jednaka 0.

4. zadatak

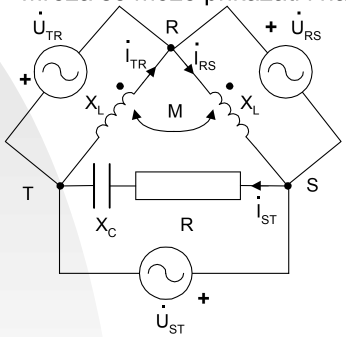
U trofaznu mrežu spojen je zadani teret. Odredite linijske i fazne struje. Zadano:

- U_L = 220 [V]
- X_L = 100 [Ω]
- X_M = 50 [Ω]
- X_C = 100 [Ω]
- R = 100 [Ω]



Rješenje zadatka

- Mreža se može prikazati i na sljedeći način:



Pretpostavimo napone izvora:

$$\dot{U}_{RS} = 220\angle 0^\circ\,[\mathrm{V}]$$
$$\dot{U}_{ST} = 220\angle -120^\circ\,[\mathrm{V}]$$
$$\dot{U}_{TR} = 220\angle 120^\circ\,[\mathrm{V}]$$

- Za mrežu vrijedi:

$$\dot{U}_{RS} = \dot{I}_{RS}\cdot jX_L - \dot{I}_{TR}\cdot jX_M$$
$$\dot{U}_{TR} = \dot{I}_{TR}\cdot jX_L - \dot{I}_{RS}\cdot jX_M$$
$$\dot{U}_{ST} = \dot{I}_{ST}\cdot (R - jX_C)$$

- Struja I_{ST} iznosi:

$$\dot{I}_{ST} = \frac{\dot{U}_{ST}}{R - jX_C} = \frac{220\angle 120^\circ}{100 - j100} = -1.5 + j0.4\,[\mathrm{A}]$$

- Struje I_{RS} i I_{TR} određujemo iz sustava dviju jednadžbi:

$$\dot{I}_{RS} = \frac{\dot{U}_{RS} + \dot{I}_{TR}\cdot jX_M}{jX_L} = -1.5 + j0.4\,[\mathrm{A}]$$

$$\dot{U}_{TR} = \dot{I}_{TR}\cdot jX_L - \frac{\dot{U}_{RS} + \dot{I}_{TR}\cdot jX_M}{jX_L}\cdot jX_M$$

$$\dot{I}_{TR} = \frac{\dot{U}_{TR} + \dot{U}_{RS}\cdot \frac{X_M}{X_L}}{jX_L - \frac{X_M}{X_L}\cdot jX_M} = \frac{220\angle 120^\circ + 220\angle 0^\circ\cdot\frac{50}{100}}{j100 - \frac{50}{100}\cdot j50} = 2.5\,[\mathrm{A}]$$

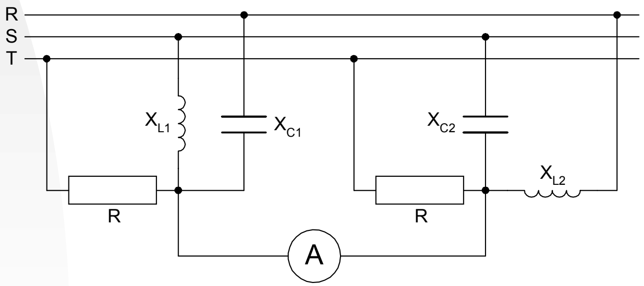
- Linijske struje:

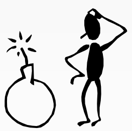
$$\dot{I}_R = \dot{I}_{RS} - \dot{I}_{TR} = -1.2 - j2.2\,[\mathrm{A}]$$
$$\dot{I}_S = \dot{I}_{ST} - \dot{I}_{RS} = -2.8 + j2.6\,[\mathrm{A}]$$
$$\dot{I}_T = \dot{I}_{TR} - \dot{I}_{ST} = 4.0 - j0.4\,[\mathrm{A}]$$

5. zadatak

Dva trofazna trošila spojena u zvijezdu napajaju se iz trofazne mreže linijskog napona U_L. Između nultočki spojen je amapermetar zanemarivog otpora. Odredite pokazivanje ampermetra. Zadano:

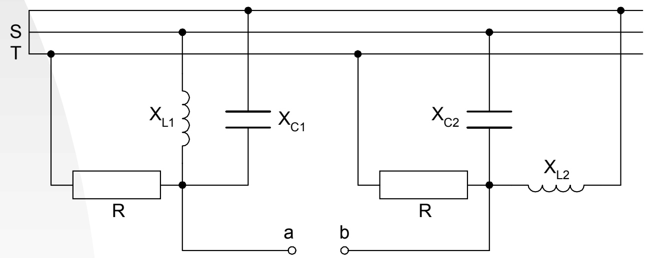
- U_L = 346 [V]
- R = X_{L1} = X_{C1} = 100 [Ω]
- X_{L2} = X_{C2} = 50 [Ω]





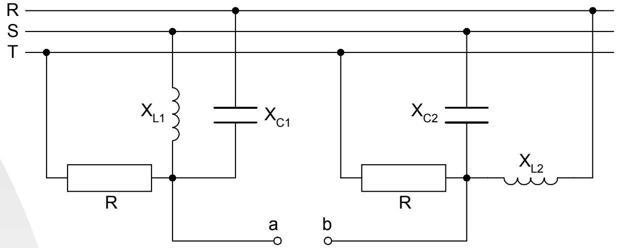
Rješenje zadatka

- Zadatak rješavamo korištenjem Thevenin-ovog teorema. Ampermetar odspajamo iz mreže, a ostatak nadomješatamo realnim naponskim izvorom.
- Određivanje Z_T:



$$Z_T = Z_{ab} = \left(R \| -jX_{C1} \| jX_{L1}\right) + \left(R \| -jX_{C2} \| jX_{L2}\right)$$
$$Z_T = R + R = 200\,[\Omega]$$

- Određivanje E_T:



$$\dot{E}_T = \dot{E}_{ab} = \dot{\varphi}_a - \dot{\varphi}_b$$

$$\dot{\varphi}_a = \frac{\dfrac{\dot{U}_{R0}}{-jX_{C1}} + \dfrac{\dot{U}_{S0}}{jX_{L1}} + \dfrac{\dot{U}_{T0}}{R}}{\dfrac{1}{-jX_{C1}} + \dfrac{1}{jX_{L1}} + \dfrac{1}{R}} = \frac{\dfrac{\dot{U}_{R0}}{-j100} + \dfrac{\dot{U}_{S0}}{j100} + \dfrac{\dot{U}_{T0}}{100}}{\dfrac{1}{-j100} + \dfrac{1}{j100} + \dfrac{1}{100}} = j\dot{U}_{R0} - j\dot{U}_{S0} + \dot{U}_{T0}$$

$$\dot{\varphi}_b = \frac{\dfrac{\dot{U}_{R0}}{jX_{L2}} + \dfrac{\dot{U}_{S0}}{-jX_{C2}} + \dfrac{\dot{U}_{T0}}{R}}{\dfrac{1}{jX_{L2}} + \dfrac{1}{-jX_{C2}} + \dfrac{1}{R}} = \frac{\dfrac{\dot{U}_{R0}}{j50} + \dfrac{\dot{U}_{S0}}{-j50} + \dfrac{\dot{U}_{T0}}{100}}{\dfrac{1}{j50} + \dfrac{1}{-j50} + \dfrac{1}{100}} = -j2\dot{U}_{R0} + j2\dot{U}_{S0} + \dot{U}_{T0}$$

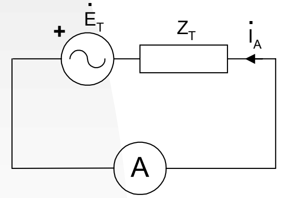
- Napon E_T iznosi:

$$\dot{E}_T = \dot{\varphi}_a - \dot{\varphi}_b = j\dot{U}_{R0} - j\dot{U}_{S0} + \dot{U}_{T0} - \left(-j2\dot{U}_{R0} + j2\dot{U}_{S0} + \dot{U}_{T0}\right)$$

$$\dot{E}_T = j3\dot{U}_{R0} - j3\dot{U}_{S0} = j3\left(\frac{346}{\sqrt{3}}\angle 0° - \frac{346}{\sqrt{3}}\angle -120°\right)$$

$$\dot{E}_T = 600\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{3}{2}\right)[\mathrm{V}]$$

- Nadomjesna shema mreže:



$$\dot{I}_A = \frac{\dot{E}_T}{Z_T} = \frac{600\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{3}{2}\right)}{200} = 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{3}{2}\right)[\mathrm{A}]$$

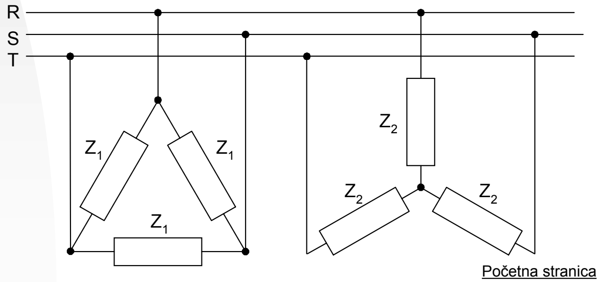
Ampermetar mjeri struju od:

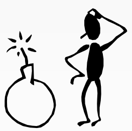
$$I_A = \sqrt{\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2} = 5.2\,[\mathrm{A}]$$

6. zadatak

Dva trofazna motora napajaju se iz istog trofaznog izvora linijskog napona U_L. Namoti prvog motora spojeni su u trokut, a drugog u zvijezdu. Prvi motor troši snagu P_1 uz cos φ_1, a drugi snagu P_2 uz cos φ_2. Odredite ukupne linijske struje. Napomena: oba trošila su induktivnog karaktera. Zadano:

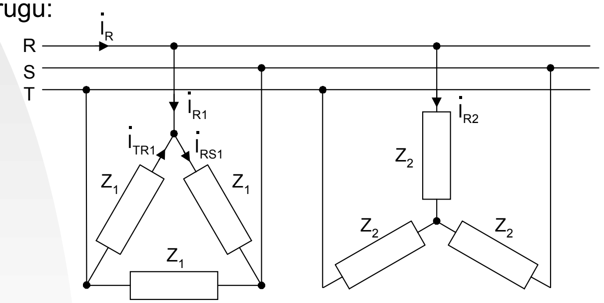
- U_L = 380 [V]
- P_1 = 3.3 [kW]
- cos φ_1 = 0.867
- P_2 = 2.15 [kW]
- cos φ_2 = 0.707





Rješenje zadatka

- Budući da se radi o simetričnim trošilima u krugu teke tri po iznosu iste linijske struje.
- Kako bi se odredila linijska struja I_R definirane su struje u krugu:



- Struja I_R jednaka je:

$$\dot{I}_R = \dot{I}_{R1} + \dot{I}_{R2} = \dot{I}_{RS1} - \dot{I}_{TR1} + \dot{I}_{R2}$$

- Po iznosu fazne struje se mogu odrediti iz snage:

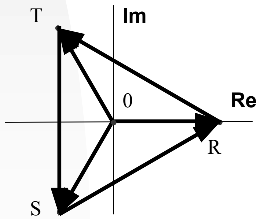
$$P_1 = 3 \cdot U_L \cdot I_{F1} \cdot \cos\varphi_1 \;\Rightarrow\; I_{F1} = \frac{P_1}{3 \cdot U_L \cdot \cos\varphi_1} = \frac{3300}{3 \cdot 380 \cdot 0.867} = 3.34\,[\mathrm{A}]$$

$$P_2 = 3 \cdot U_F \cdot I_{F2} \cdot \cos\varphi_2 \;\Rightarrow\; I_{F2} = \frac{P_2}{3 \cdot U_F \cdot \cos\varphi_2} = \frac{2150}{3 \cdot 220 \cdot 0.707} = 4.62\,[\mathrm{A}]$$

- Ako pretpostavimo fazni pomak napona U_{R0} od 0° vrijedi:

$$\dot{I}_{R2} = \frac{\dot{U}_{R0}}{\dot{Z}_2} = \frac{U_{R0}\angle 0°}{Z_2\angle 45°} = 4.62\angle -45°$$

- Kako su oba trošila spojena na isti trofazni izvor, linijski naponi su tada:



$$\dot{U}_{RS} = U_L\angle 30° = 380\angle 30°\,[\mathrm{V}]$$
$$\dot{U}_{ST} = U_L\angle -90° = 380\angle -90°\,[\mathrm{V}]$$
$$\dot{U}_{TR} = U_L\angle 150° = 380\angle 150°\,[\mathrm{V}]$$

- Fazne struje prvog trošila:

$$\dot{I}_{RS} = \frac{\dot{U}_{RS}}{\dot{Z}_1} = \frac{U_L\angle 30°}{Z_1\angle 30°} = 3.34\angle 0°$$

$$\dot{I}_{TR} = \frac{\dot{U}_{TR}}{\dot{Z}_1} = \frac{U_L\angle 150°}{Z_1\angle 30°} = 3.34\angle 120°$$

- Linijska struja I_R onda iznosi:

$$\dot{I}_R = \dot{I}_{RS1} - \dot{I}_{TR1} + \dot{I}_{R2}$$

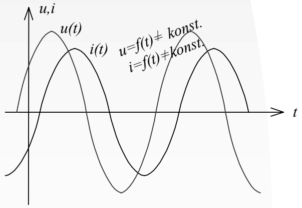
$$\dot{I}_R = 3.34\angle 0° - 3.34\angle 120° + 4.62\angle -45°$$

$$\dot{I}_R = 3.34 + 1.67 - j2.89 + 3.27 - j3.27$$

$$\dot{I}_R = 8.28 - j6.16 = 10.32\angle -37°[\mathrm{A}]$$

Višefrekvencijski izmjenični krugovi

- Izmjenični krugovi s izvorima različitih frekvencija.
- Metoda superpozicije.



1. zadatak

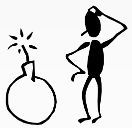
Za spoj prema slici treba odrediti:

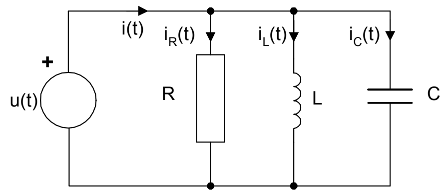
a) $i_R(t)$, $i_L(t)$ i $i_C(t)$

b) efektivne vrijednosti napona i struja

Zadano:

- ω = 1000 [s^{-1}]
- R = 100 [Ω]
- L = 0.1 [H]
- C = 10 [μF]
- u(t) = 100 sin($\omega\cdot$t+π/6) + 30 sin(3$\cdot\omega\cdot$t) + 10 sin(5$\cdot\omega\cdot$t+3$\cdot\pi$/4) [V]





Uvodni pojmovi

Metoda superpozicije

- U svakoj linearnoj mreži koja se sastoji od više naponskih ili strujnih izvora struja u grani k bit će jednaka sumi svih struja što bi ih u toj grani prouzročili pojedini izvori, sami za sebe.
- Metodom superpozicije struja se u jednoj grani izračuna tako da se redom ugase svi izvori osim jednog i izračuna struja u promatranoj grani samo uz taj jedan izvor. Tako se redom određuju struje za sve izvore u mreži, a suma tih pojedinih struja bit će tražena struja u promatranoj grani.
- U jednofrekvencijskim mrežama radi se s vektorskoj sumi struja, a u višefrekvencijskim mrežama radi se o sumi struja u vremenskoj domeni.
- Za višefrekvencijske mreže vrijedi:

$$i(t) = I_{m1}\cdot\sin(\omega_1\cdot t+\varphi_1)+I_{m2}\cdot\sin(\omega_2\cdot t+\varphi_2)+I_{m3}\cdot\sin(\omega_3\cdot t+\varphi_3)+\ldots$$

$$I^2 = I_{\omega 1}^2+I_{\omega 2}^2+I_{\omega 3}^2+\ldots$$

Rješenje zadatka

- Da bi se odredile struje u mreži potrebno je korištenjem metode superpozicije odrediti struje na tri različite frekvencije.
- Za frekvenciju ω vrijedi:

$$X_L = \omega\cdot L = 1000\cdot 0.1 = 100\,[\Omega] \qquad X_C = \frac{1}{\omega\cdot C} = \frac{1}{1000\cdot 10^{-5}} = 100\,[\Omega]$$

$$\dot{U}(\omega) = 50\sqrt{2}\angle 30^\circ\,[\mathrm{V}]$$

$$\dot{I}_R(\omega) = \frac{\dot{U}}{R} = \frac{50\sqrt{2}\angle 30^\circ}{100} = \frac{\sqrt{2}}{2}\angle 30^\circ\,[\mathrm{A}]$$

$$\dot{I}_L(\omega) = \frac{\dot{U}}{jX_L} = \frac{50\sqrt{2}\angle 30^\circ}{100\angle 90^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2}\angle -60^\circ\,[\mathrm{A}]$$

$$\dot{I}_C(\omega) = \frac{\dot{U}}{-jX_C} = \frac{50\sqrt{2}\angle 30^\circ}{100\angle -90^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2}\angle 120^\circ\,[\mathrm{A}]$$

- Za frekvenciju 3ω vrijedi:

$$X_L = 3\cdot\omega\cdot L = 3\cdot 1000\cdot 0.1 = 300\,[\Omega]$$

$$X_C = \frac{1}{3\cdot\omega\cdot C} = \frac{1}{3\cdot 1000\cdot 10^{-5}} = \frac{100}{3}\,[\Omega]$$

$$\dot{U}(3\omega) = 15\sqrt{2}\angle 0°\,[\mathrm{V}]$$

$$\dot{I}_R(3\omega) = \frac{\dot{U}}{R} = \frac{15\sqrt{2}\angle 0°}{100} = 0.15\sqrt{2}\angle 0°\,[\mathrm{V}]$$

$$\dot{I}_L(3\omega) = \frac{\dot{U}}{jX_L} = \frac{15\sqrt{2}\angle 0°}{300\angle 90°} = 0.05\sqrt{2}\angle -90°\,[\mathrm{A}]$$

$$\dot{I}_C(3\omega) = \frac{\dot{U}}{-jX_C} = \frac{15\sqrt{2}\angle 0°}{\frac{100}{3}\angle -90°} = 0.45\sqrt{2}\angle 90°\,[\mathrm{A}]$$

- Za frekvenciju 5ω vrijedi:

$$X_L = 5\cdot\omega\cdot L = 5\cdot 1000\cdot 0.1 = 500\,[\Omega]$$

$$X_C = \frac{1}{5\cdot\omega\cdot C} = \frac{1}{5\cdot 1000\cdot 10^{-5}} = 20\,[\Omega]$$

$$\dot{U}(5\omega) = 5\sqrt{2}\angle -135°\,[\mathrm{V}]$$

$$\dot{I}_R(5\omega) = \frac{\dot{U}}{R} = \frac{5\sqrt{2}\angle -135°}{100} = 0.05\sqrt{2}\angle -135°\,[\mathrm{V}]$$

$$\dot{I}_L(5\omega) = \frac{\dot{U}}{jX_L} = \frac{5\sqrt{2}\angle -135°}{500\angle 90°} = 0.01\sqrt{2}\angle -225°\,[\mathrm{A}]$$

$$\dot{I}_C(5\cdot\omega) = \frac{\dot{U}}{-jX_C} = \frac{5\sqrt{2}\angle -135°}{20\angle -90°} = 0.25\sqrt{2}\angle -45°\,[\mathrm{A}]$$

- U vremenskoj domeni struje iznose:

$$i_R(t) = \sin(\omega\cdot t + 30°) + 0.3\cdot\sin(3\cdot\omega\cdot t) + 0.1\cdot\sin(5\cdot\omega\cdot t - 135°)\,[\mathrm{A}]$$

$$i_L(t) = \sin(\omega\cdot t - 60°) + 0.1\cdot\sin(3\cdot\omega\cdot t - 90°) + 0.02\cdot\sin(5\cdot\omega\cdot t - 225°)\,[\mathrm{A}]$$

$$i_C(t) = \sin(\omega\cdot t + 120°) + 0.9\cdot\sin(3\cdot\omega\cdot t + 90°) + 0.5\cdot\sin(5\cdot\omega\cdot t - 45°)\,[\mathrm{A}]$$

- Efektivne vrijednosti struja:

$$I_R = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{0.3}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{0.1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 0.74\,[\mathrm{A}]$$

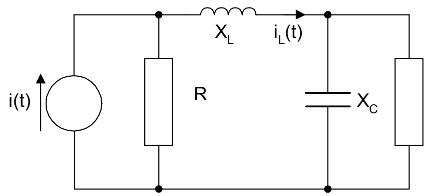
$$I_L = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{0.1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{0.02}{\sqrt{2}}\right)^2} = 0.71\,[\mathrm{A}]$$

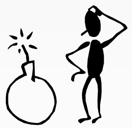
$$I_C = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{0.9}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{0.5}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1.01\,[\mathrm{A}]$$

2. zadatak

Odredite struju $i_L(t)$ i njezinu efektivnu vrijednost za spoj prema slici. Zadano:

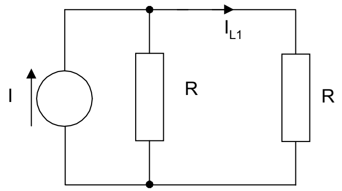
- $i(t) = 10 + 30\sqrt{2}\sin(\omega\cdot t) + 15\sqrt{2}\sin(2\cdot\omega\cdot t)$ [A]
- $X_C = 1\,[\Omega]$
- $X_L = 0.5\,[\Omega]$
- $R = 1\,[\Omega]$





Rješenje zadatka

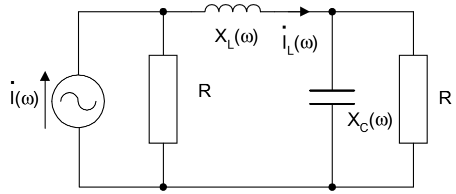
- Zadatak rješavamo koristeći metodu superpozicije.
- Za frekvenciju 0 mreža poprima izgled kao na slici i struja koja teče kroz zavojnicu iznosi:



$$I = 10\,[\mathrm{A}]$$

$$I_{L1}(\omega = 0) = \frac{I \cdot (R \| R)}{R} = \frac{10 \cdot 0.5}{1} = 5\,[\mathrm{A}]$$

- Za frekvenciju ω:



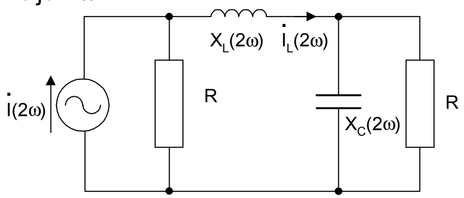
$$\dot{I}(\omega) = 30\angle 0°\,[\mathrm{A}]$$

$$\dot{I}_L(\omega) = \frac{\dot{I}(\omega) \cdot \left(R \| \left(jX_L(\omega) + \left(R \| -jX_C(\omega)\right)\right)\right)}{jX_L(\omega) + \left(R \| -jX_C(\omega)\right)}$$

$$\dot{I}_L(\omega) = \frac{30 \cdot \left(1 \| \left(j0.5 + (1 \| -j)\right)\right)}{j0.5 + (1 \| -j)}$$

$$\dot{I}_L(\omega) = 20\angle 0°\,[\mathrm{A}]$$

- Za frekvenciju 2ω:



$$\dot{I}(2\omega) = 15\angle 0°\,[\mathrm{A}]$$

$$\dot{I}_L(2\omega) = \frac{\dot{I}(2\omega) \cdot \left(R \| \left(jX_L(2\omega) + \left(R \| -jX_C(2\omega)\right)\right)\right)}{jX_L(2\omega) + \left(R \| -jX_C(2\omega)\right)}$$

$$\dot{I}_L(2\omega) = \frac{15 \cdot \left(1 \| \left(j + (1 \| -j0.5)\right)\right)}{j + (1 \| -j0.5)}$$

$$\dot{I}_L(2\omega) = 11.2\angle -27°\,[\mathrm{A}]$$

- Struja kroz zavojnicu:

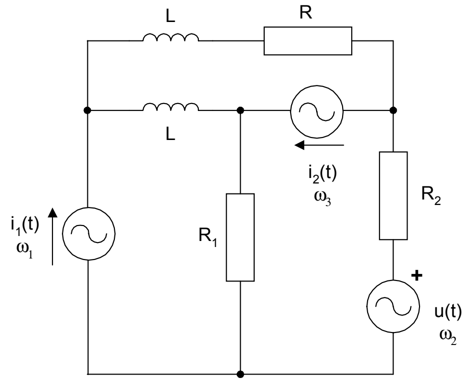
$$I_L = \sqrt{5^2 + 20^2 + 11.2^2} = 23.5\,[\mathrm{A}]$$

$$i_L(t) = 5 + 20\sqrt{2}\sin(\omega \cdot t) + 11.2\sqrt{2}\sin(2 \cdot \omega \cdot t - 27°)\,[\mathrm{A}]$$

3. zadatak

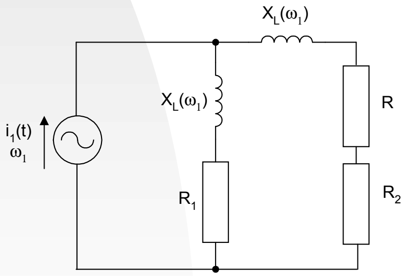
Odredite snagu koja se razvija na otporniku R. Zadano:

- $i_1(t) = 2\sqrt{2}\sin(100 \cdot t)$ [A]
- $i_2(t) = 10\sqrt{2}\sin(200 \cdot t + 53°)$ [A]
- $u(t) = 60\sin(150 \cdot t)$ [V]
- R = 5 [Ω]
- R_1 = 15 [Ω]
- R_2 = 10 [Ω]
- L = 0.1 [H]



Rješenje zadatka

- Da bi se odredila snaga na otporu R potrebno je odrediti struju koja teče kroz njega.
- Za frekvenciju ω_1 aktivan je samo strujni izvor i_1, dok su ostali izvori neaktivni. To znači, da je strujni izvor (i_2) odspojen iz mreže, a naponski kratko spojen.



$$\dot{I}_1 = 2\angle 0° [\mathrm{A}]$$

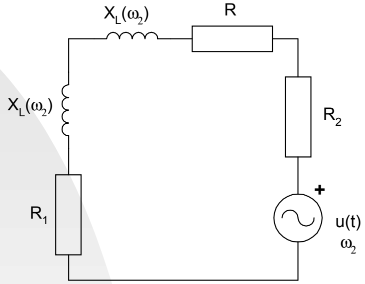
$$X_L = X_L(\omega_1) = \omega_1 \cdot L = 100 \cdot 0.1 = 10\,[\Omega]$$

$$\dot{I}_R(\omega_1) = \dot{I}_1 \cdot \frac{((R_1 + jX_L)\|(R_2 + R + jX_L))}{R_2 + R + jX_L}$$

$$\dot{I}_R(\omega_1) = 2 \cdot \frac{((15 + j10)\|(10 + 5 + j10))}{10 + 5 + jX_L}$$

$$\dot{I}_R(\omega_1) = 1\angle 0°\,[\mathrm{A}]$$

- Frekvencija ω_2:



$$\dot{U} = \frac{60}{\sqrt{2}}\angle 0° [\mathrm{V}]$$

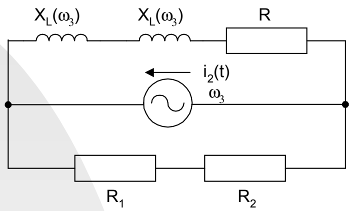
$$X_L = X_L(\omega_2) = \omega_2 \cdot L = 150 \cdot 0.1 = 15\,[\Omega]$$

$$\dot{I}_R(\omega_2) = \frac{-\dot{U}}{R_1 + R_2 + 2 \cdot jX_L + R}$$

$$\dot{I}_R(\omega_2) = \frac{-\frac{60}{\sqrt{2}}}{15 + 10 + 5 + 2 \cdot j15}$$

$$\dot{I}_R(\omega_2) = 1\angle -225°\,[\mathrm{A}]$$

- Frekvencija ω_3:



$$\dot{I}_2 = 10\angle 53° [\mathrm{A}]$$

$$X_L = X_L(\omega_3) = 200 \cdot 0.1 = 20\,[\Omega]$$

$$\dot{I}_R(\omega_3) = \dot{I}_2 \cdot \frac{((R_1 + R_2)\|(R + jX_L + jX_L))}{R + jX_L + jX_L}$$

$$\dot{I}_R(\omega_3) = 10\angle 53° \cdot \frac{((15 + 10)\|(5 + j40))}{5 + j40}$$

$$\dot{I}_R(\omega_3) = 5\angle 0°\,[\mathrm{A}]$$

- Efektivna vrijednost struje kroz otpor R:

$$I_R = \sqrt{(I_R(\omega_1))^2 + (I_R(\omega_2))^2 + (I_R(\omega_3))^2}$$

$$I_R = \sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (5)^2} = \sqrt{27}\,[\mathrm{A}]$$

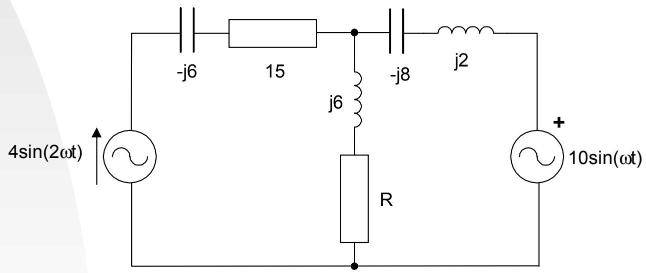
- Snaga na otporu R:

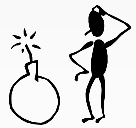
$$P_R = I_R^2 \cdot R = 27 \cdot 5 = 135\,[\mathrm{W}]$$

4. zadatak

U mreži prema slici zadane su vrijednosti impedancija za kružnu frekvenciju ω. Odredite snagu na otporu R. Zadano:

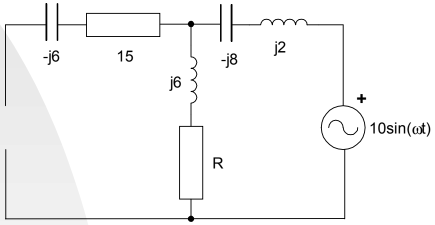
- $R = 5\,[\Omega]$





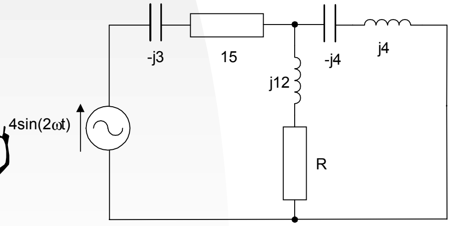
Rješenje zadatka

- Struja koja teče kroz otpor se sastoji od dvije komponenete, na frekvenciji ω i 2ω.



$$\dot{I}_R(\omega) = \frac{\frac{10}{\sqrt{2}}}{5 + j6 - j8 + j2}$$

$$\dot{I}_R(\omega) = \sqrt{2}\angle 0°[\mathrm{A}]$$



Zbog serijske rezonancije

$$\dot{I}_R(2\omega) = 0\,[\mathrm{A}]$$

Snaga na R:

$$P_R = I_R^2 \cdot R = \left(\sqrt{2}\right)^2 \cdot 5 = 10\,[\mathrm{W}]$$

Početna stranica