Završni ispit

5. veljače 2015.

Ime i Prezime: docx je kralj **Matični broj:** Unska 3, 10 000 ZGB

Napomena: Zadatke obavezno predati s rješenjima nakon završetka testa.

1. zadatak (8 bodova)

Zadan je CLTI sustav:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \end{bmatrix} u(t),\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t).$$

a) *(2 boda)* Odredite upravljivost sustava u ovisnosti o parametru ω.

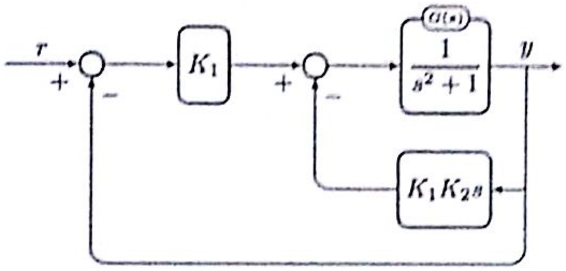
b) *(3 boda)* Koristeći Ackermannovu formulu projektirajte regulator po varijablama stanja za sustav iz a) dijela zadatka uz $\omega = 2$ i željene polove $s_{1,2} = -1 \pm j$.

c) *(2 boda)* Definirajte upravljivost diskretnog sustava i objasnite kako se provjerava.

d) *(1 bod)* Objasnite što je vremenski optimalan (dead-beat) regulator.

2. zadatak (12 bodova)

Sustav upravljanja dan je Slikom 1.



Slika 1: Sustav upravljanja

a) *(2 boda)* Odrediti karakterističnu jednadžbu upravljačkog kruga.

b) *(1 bod)* Odrediti točke fazne ravnine u koje se trebaju smjestiti polovi zatvorenog kruga da bi prema približnim izrazima vrijedilo $\sigma = 5\%$ i $t_m = 2$ s.

c) *(3 boda)* Odrediti pojačanje K_2 tako da krivulja mjesta korijena prolazi kroz $P = -1.5 \pm j1.5$.

d) *(3 boda)* Neka je $K_2 = 0.5$. Nacrtati krivulju mjesta korijena.

e) *(3 boda)* Neka je $K_2 = 0.5$. Korištenjem KMK odredite pojačanje K_1 takvo da su dominantni polovi zatvorenog kruga u $P = -1 \pm j2$.

3. zadatak (8 bodova)

Sustav s jediničnom povratnom vezom je opisan prijenosnom funkcijom otvorenog kruga:

$$G_o(s) = \frac{1}{s(s+1)}. \qquad (1)$$

a) *(6 bodova)* Odredite maksimalnu apsolutnu vrijednost funkcije osjetljivosti sustava te frekvenciju na kojoj je ostvarena maksimalna osjetljivost.

b) *(2 boda)* Skicirajte Nyquistov dijagram frekvencijske karakteristike otvorenog kruga za zadani sustav te na njemu ucrtajte točku u kojoj se postiže maksimalna osjetljivost sustava.

docx je kralj

4. zadatak (17 bodova)

Zadan je DLTI sustav:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k),$$
$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(k).$$

a) *(2 boda)* Je li otvoreni krug stabilan i zašto?

b) *(3 boda)* Projektirajte vremenski optimalan (dead-beat) rekonstruktor varijabli stanja.

c) *(8 bodova)* Projektirajte regulator koji minimizira upravljački kriterij:

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} y^2(k) + \frac{1}{8} u^2(k).$$

d) *(2 boda)* Je li zatvoreni krug uz regulator iz c) podzadatka stabilan i zašto?

e) *(2 boda)* Mijenja li se dinamika zatvorenog kruga (svojstvene vrijednosti) ako se za upravljanje DLTI sustavom, uz regulator iz c) podzadatka, umjesto stvarnih varijabli stanja koriste rekonstruirane varijable stanja iz b) podzadatka? Obrazložite odgovor!

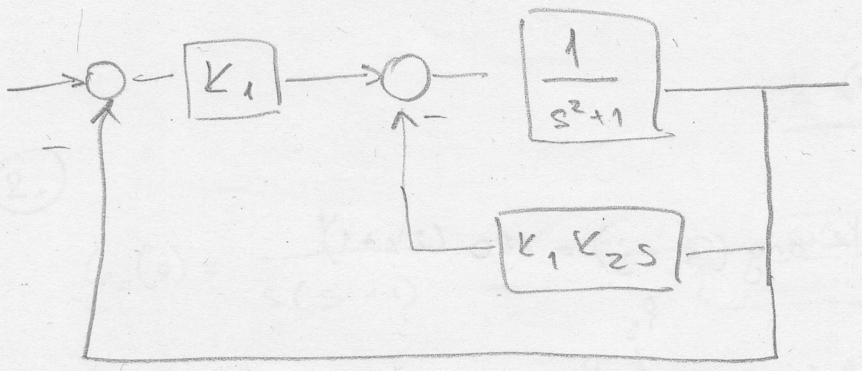
Pripremа Z1 SLSU (Z1 2014/2015)

docx je kralj

1. bezveze → 8 bodova

prvi ciklus ulazi malo u Z1

2.



a) $K_0(s) = K_1 \cdot \dfrac{\frac{1}{s^2+1}}{1+\frac{K_1K_2s}{s^2+1}} = \dfrac{K_1}{s^2+1+K_1K_2s}$

$$G_{cl}(s) = \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)}$$

$$\mathcal{L}_{cl}(s) = s^2 + K_1K_2s + 1 + K_1$$

b) $\sigma = 5\%$

$t_m = 2s$

$$\sigma = 100e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 5$$

$\underline{\xi = 0.69}$

$$t_m = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$$

$\underline{\omega_n = 2.17 \text{ rad/s}}$

$$p_{1/2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

$$= -1.49 \pm 1.57j$$

docx je kralj

c) Odrediti K_2 tako KMK prolazi kroz

$p_{1,2} = -1.5 \pm 1.5j$

$$\alpha_{cl}(s) = s^2 + K_1 K_2 s + 1 + K_1 = 0$$

$$= s^2 + 1 + K_1(K_2 s + 1) = 0$$

$$= 1 + K_1 \boxed{\frac{K_2 s + 1}{s^2 + 1}} = 0$$

$$\arg\left(\frac{K_2 s + 1}{s^2 + 1}\right)_{s=-1.5+1.5j} = 180^\circ(2k+1)$$

$$\underbrace{\arg(K_2 s + 1)}_{\varphi_1} - \underbrace{\arg(s + j)}_{\varphi_2} - \underbrace{\arg(s - j)}_{\varphi_3} = 180\,(2k+1)$$

$$\varphi_2 = \arg(-1.5 + 2.5j) = 120.96^\circ$$

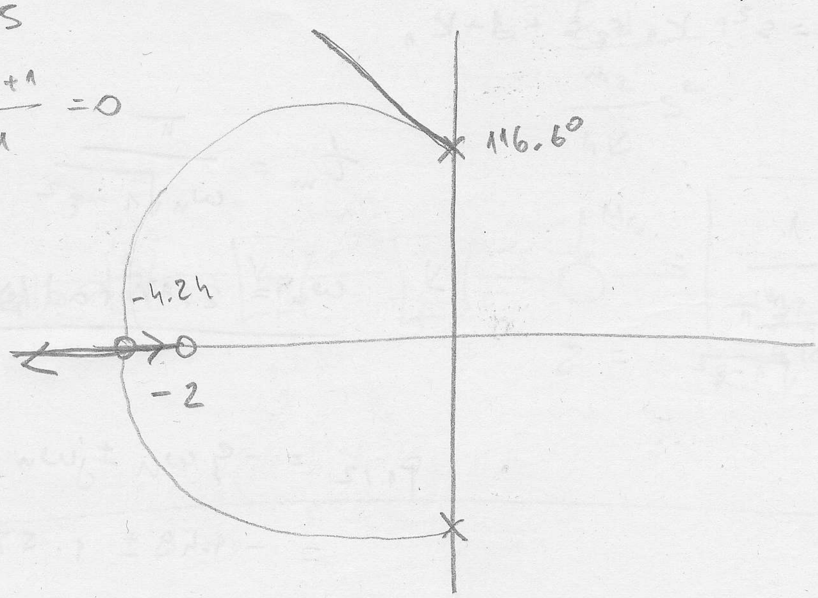
$$\varphi_3 = \arg(-1.5 + 0.5j) = 161.56^\circ$$

$$\arg(K_2(-1.5 + 1.5j) + 1) = -180 + \varphi_2 + \varphi_3 = 102.53^\circ$$

$$\operatorname{atan} \frac{1.5 K_2}{1 - 1.5 K_2} = 102.53^\circ \rightarrow \boxed{K_2 = 0.8571}$$

d) Neka $K_2 = 0.5$

$$1 + K_1 \frac{0.5 s + 1}{s^2 + 1} = 0$$



docx je kralj

e) $K_2 = 0.5$

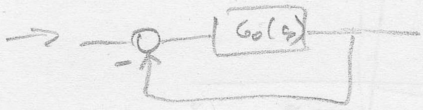
$K_1 = ? \rightarrow p_{1,2} = -1 \pm j2$

$$|G_0(s)| = \frac{1}{K_0} \qquad \left|\frac{0.5s+1}{s^2+1}\right|_{s=-1\pm j2} = \frac{1}{K_1}$$

$$\underline{K = 4}$$

2.

$$G_0(s) = \frac{1}{s(s+1)} \rightarrow$$



a) Odrediti max apsolutnu vrijednost fje. osjetljivosti te frekv. na kojoj je ostvarena

$$S_{G_0(s)}^{Y(s)} = \frac{G_0(s)}{Y(s)} \cdot \frac{dY(s)}{dG_0(s)} = \frac{1}{1+G_0(s)}$$

$$Y(s) = \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)} \cdot R(s)$$

$$dY(s) = \frac{dG_0(s)}{[1+G_0(s)]^2} R(s)$$

$$S(j\omega) = \frac{1}{1+\frac{1}{j\omega(j\omega+1)}} = \frac{j\omega(j\omega+1)}{1-\omega^2+j\omega}$$

$$|S(j\omega)| = \frac{\omega\sqrt{\omega^2+1}}{\sqrt{\omega^2+(1-\omega^2)^2}}$$

$$|S(j\omega)|^2 = \frac{\omega^2(\omega^2+1)}{1-2\omega^2+\omega^4+\omega^2}$$

$$\frac{d|S(j\omega)|^2}{d\omega} = \frac{(4\omega^3+2\omega)(\omega^4-\omega^2+1)-(\omega^4+\omega^2)(4\omega^3-2\omega)}{(\omega^4-\omega^2+1)^2}$$

A

$-4\omega^4 + 4\omega^2 + 2 = 0$

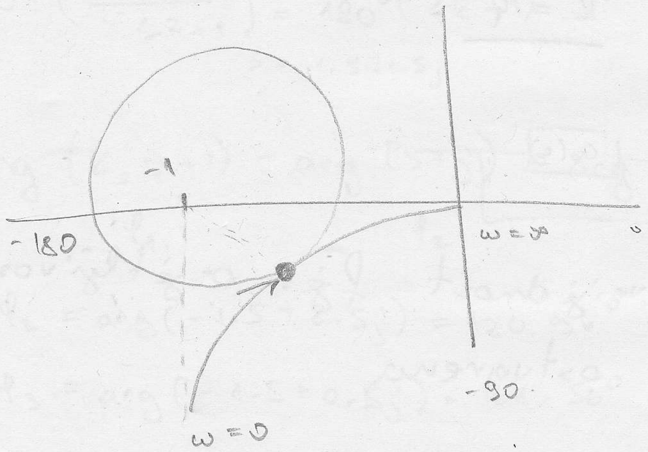
$2\omega^4 - 2\omega^2 - 1 = 0$

$2t^2 - 2t - 1 = 0$

$\omega^2 = t$

$\boxed{\omega = 1.168}$

b)



$\left| \frac{1}{s(s+1)} \right|$

- sustav je najosjetljiviji tamo gdje je najnestabilniji

4. DLTI sustav

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(k)$$

a) stabilnost?

$$\det(zI - A) = \begin{vmatrix} z+2 & 0 \\ -1 & z \end{vmatrix} = (z+2)z = 0$$

$$\boxed{\begin{matrix} z_1 = 0 \\ z_2 = -2 \end{matrix}}$$

NE!

docx je kralj

) dead beat rekonstruktor

2) Projektirati regulator koji minimizira upravljački kriterij:

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} y^2(k) + \frac{1}{8} u^2(k)$$

$$S_\infty = Q + A^T S_\infty A - A^T S_\infty B (R + B^T S_\infty B)^{-1} B^T S_\infty A$$

↳ DARE

$y = Cx$

$y^2 = y^T y$

$\underbrace{x^T C^T}_{y^T} \underbrace{C x}_{y} = y^2$

$$Q = C^T C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \frac{1}{8}$$

$$S_\infty = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix}$$

upr:

$J = x(7)^2 \cdot 5 + \sum_{k=0}^{6} x^2(k) \cdot 100$

horizont = 7

$S_N = 5$

$\|x\|^2$ → norma na kvadrat

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ → $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}^{\,2}$

$J = \|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2$

$$G_\infty = (R + B^T S_\infty B)^{-1} B^T S_\infty A = \left(\frac{1}{8} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{8} + s_{11}\right)^{-1} \begin{bmatrix} -2s_{11} + s_{12} & 0 \end{bmatrix}$$

$u = -G_\infty x$

$$A^T S_\infty A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4s_{11} - 4s_{12} + s_{22} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^T S_\infty B = \begin{bmatrix} -2s_{11} + s_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B^T S_\infty B = s_{11}$$

$$B^T S_\infty A = \begin{bmatrix} -2s_{11} + s_{12} & 0 \end{bmatrix}$$

$s_{22} = 1$

$s_{12} = 0$

$$s_{11} = 4 s_{11} + 1 - \frac{8}{8 s_{11} + 1} (-2 s_{11})^2$$

$$\boxed{s_{11} = 1.461}$$

$\downarrow$

$$G_\infty = \begin{bmatrix} -1.8423 & 0 \end{bmatrix}$$

Je li s regulatorom stabilan sustav?

$\det(zI - A + B G_\infty)$

Rekonstruktor (dead beat), dinamika zatvorenog kruga?

$\downarrow$

po separacijskom načelu se ne mijenja

docx je kralj