Signali i sustavi

Profesor
Branko Jeren

3. svibnja 2017.

Mikrofon kao sustav

- u uvodnom predavanju je pokazano kako mikrofon – pa i svaki drugi sustav – možemo prikazati blokom

- pobuda mikrofona su zvučni signali i mogući pobudni signal neka je definiran kao:

$$NekiZvuk : Vrijeme \rightarrow Tlak$$

$$Vrijeme \subset \mathbb{R} \text{ i } Tlak \subset \mathbb{R}$$

- odziv mikrofona su električni signali i neka je odziv na pobudu *NekiZvuk* označen i definiran kao:

$$NekiMikIzlaz : Vrijeme \rightarrow Napon$$

$$Vrijeme \subset \mathbb{R} \text{ i } Napon \subset \mathbb{R}$$

Prostor signala, prostor funkcija

- skup svih zvučnih signala koji predstavljaju ulazne signale u mikrofon nazivamo prostor zvučnih signala i pišemo

$$ZvučniSignali = [Vrijeme \to Tlak]$$

slično se definira prostor signala

$$MikrofonskiIzlazi = [Vrijeme \to Napon]$$

- u općem slučaju vrijedi:
  - neka je signal $u : A \to B$
  - neka je definiran skup svih funkcija čija je domena A i kodomena B,

$$U = [A \to B] = \{\, u | \mathcal{D} = A \text{ i } \mathcal{K} = B \,\}$$
$$= \{\, \text{skup svih funkcija čija je domena} = \text{A, i kodomena} = \text{B} \,\}.$$

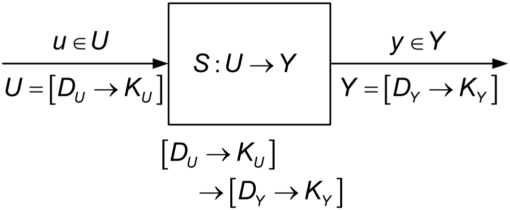
ovaj skup, s odabranim skupom skalara (iz $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$), nazivamo signalnim, ili funkcijskim, prostorom

Sustavi kao funkcije

- sustav S je funkcija i transformira ulazni signal u, u izlazni signal y, pa je
$$y = S(u)$$
- sustav S je dakle funkcija koja preslikava prostor signala u prostor signala
$$S : [D_u \to K_u] \to [D_y \to K_y]$$
- sustav S je sveukupnost ul./izl. parova (u, y)
$$S = \{(u, y)|u \in U, y \in Y\}$$
- u je element prostora ulaznih signala a y je element prostora izlaznih signala, pa u zovemo i ulaznom a y izlaznom varijablom sustava
- ovako definirani model sustava naziva se **model ulaz–izlaz**

Sustavi kao funkcije

- sustave opisujemo blokovskim dijagramima



- sustavi su funkcije čije su domene i kodomene prostori signala
- sustav S transformira cjelokupni signal u, u cjelokupni signal y
- nadalje, ako je $w \in D_Y$ tada je

$$y(w) = S(u)(w) \in K_Y$$

Vremenski kontinuirani i vremenski diskretni sustavi

- vezano uz prije definirane klase signala *KontSignali* i *DisktSignali* definiraju se
    - klasa vremenski kontinuiranih sustava [1]

$$KontSustavi : KontSignali \to KontSignali$$

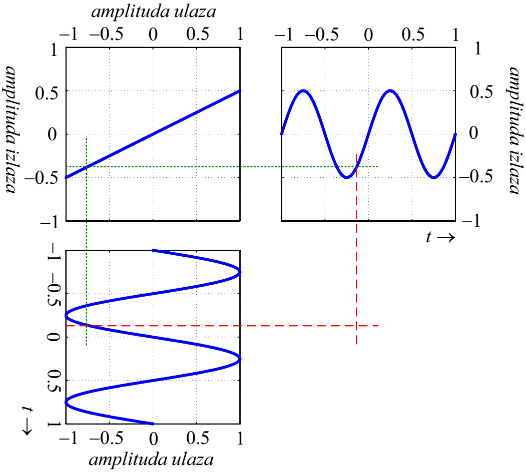
    - i klasa vremenski diskretnih sustava

$$DisktSustavi : DisktSignali \to DisktSignali$$

[1] Nezavisna varijabla nije nužno vrijeme. Korektniji bi bio naziv - po nezavisnoj varijabli kontinuirani sustavi. U ovom predmetu ostajemo kod tradicionalnog imena.

Primjer vremenski kontinuiranog sustava

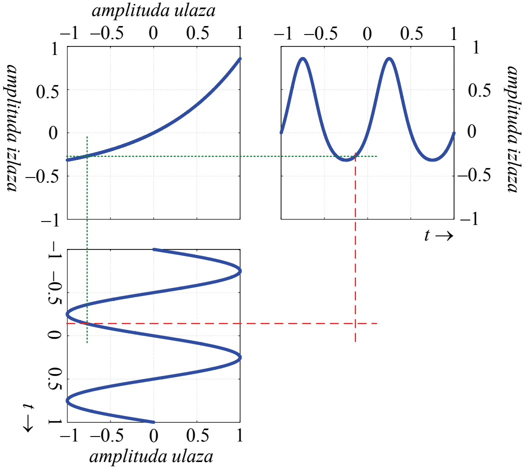
- pokazan je odziv linearnog, bezmemorijskog[2], kontinuiranog sustava, $y(t) = 0.5u(t)$, na pobudu sinusnim signalom



[2] Objašnjava se kasnije

Primjer vremenski kontinuiranog sustava

- pokazan je odziv nelinearnog, bezmemorijskog[3], kontinuiranog sustava, $y(t) = 0.5e^{u(t)} - 0.5$, na pobudu sinusnim signalom



[3]Objašnjava se kasnije

Primjer vremenski diskretnog sustava

- pokazuje se odziv sustava za usrednjavanje, definiranog linearnim vremenski diskretnim sustavom,

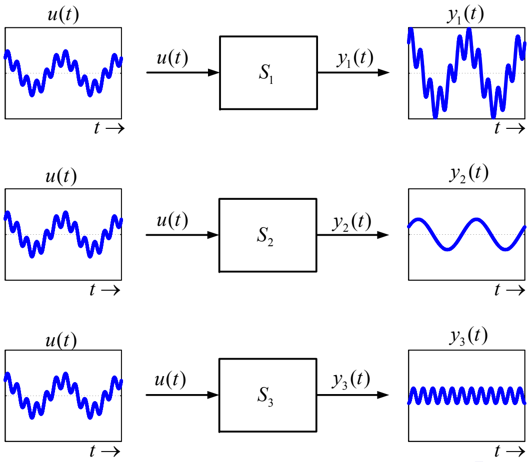
$$y(n) = \frac{1}{L+1}\sum_{m=0}^{L} u(n-m) = \frac{1}{4}\sum_{m=0}^{3} u(n-m), \qquad \text{za } L = 3,$$

  na pobudu vremenski diskretnim signalom kao na slici[4]

[4] radi bolje interpretacije postupka usrednjavanja, u crvenoj boji je, linearnom aproksimacijom, ulazni vremenski diskretan signal prikazan i kao vremenski kontinuiran

Ponašanje sustava određuje funkcija sustava – primjer

- dan je primjer tri različita sustava pobuđena istom pobudom i na slici su prikazana tri moguća različita odziva ovisna o tri različite funkcije sustava



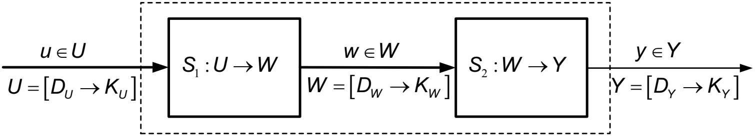
Povezivanje sustava

- spajanjem sustava grade se složeniji sustavi
- na primjeru audio sustava pokazano je, u uvodnom predavanju, da je on složen od tri sustava spojenih u kaskadu

- kaskadni, paralelni, te spoj sustava u povratnu vezu, omogućuju bilo koju kombinaciju povezivanja sustava

Kaskadni spoj sustava

- razmotrimo opis dvaju sustava u kaskadnom spoju



- funkcija S opisuje sustav koji je nastao spajanjem, u kaskadu, sustava S_1 i S_2
- uz oznake signala i oznake prostora signala na slici vrijedi

$$w = S_1(u) \quad \text{i} \quad y = S_2(w) \quad \Rightarrow y = S_2(S_1(u)) = S(u)$$

- zaključujemo kako je funkcija nastalog sustava S kompozicija funkcija S_1 i S_2

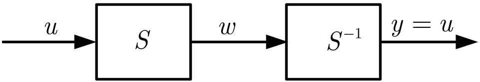
$$\forall u \in U, y = S(u) = S_2(S_1(u)) \Leftrightarrow S = S_2 \circ S_1$$

Kaskadni spoj inverznih sustava

- kompozicija funkcija nije komutativna (osim u specijalnim slučajevima)

$$S_1 \circ S_2 \neq S_2 \circ S_1$$

- ako za funkciju sustava S postoji inverzna funkcija S^{-1} tada je sustav opisan funkcijom S^{-1} inverzni sustav sustava S
- kaskadni spoj sustava i njemu inverznog sustava



rezultira u

$$\forall u \in U, \quad y = S^{-1}(S(u)) = (S^{-1} \circ S)(u) = i_U(u) = u$$

gdje je i_U identiteta, odnosno funkcija definirana kao $i_U : U \to U$.

Kaskadni spoj inverznih sustava – primjer

- za sustav S zadan kao $w = S(u) = 2u + 1$, za $u \in U$, gdje je U prostor ulaznih signala u S, određuje se inverzni sustav, te kaskadni spoj ovih sustava
- iz

$$w = S(u) = 2u + 1 \quad \Rightarrow \quad y = S^{-1}(w) = \frac{w-1}{2},$$

pa je

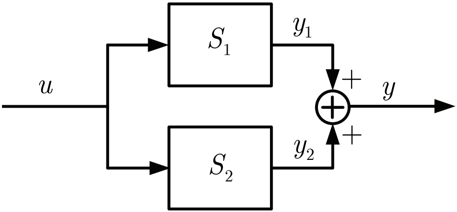
$$y = (S^{-1} \circ S)(u) = S^{-1}(S(u)) = S^{-1}(w) = S^{-1}(2u+1) = \frac{(2u+1)-1}{2} = u,$$

ali i

$$y = (S \circ S^{-1})(u) = S(S^{-1}(u)) = S\left(\frac{u-1}{2}\right) = 2\frac{u-1}{2} + 1 = u$$

Paralelna veza podsustava

- paralelna veza podsustava prikazana je blokovskim dijagramom

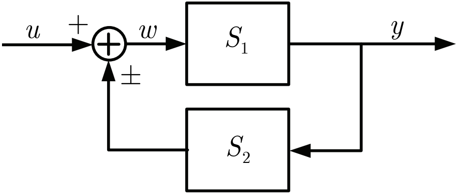


- slijede jednadžbe

$$y_1 = S_1(u), \quad y_2 = S_2(u) \Rightarrow y = S_1(u) + S_2(u)$$

Povratna veza podsustava

- povratna veza podsustava prikazana je blokovskim dijagramom

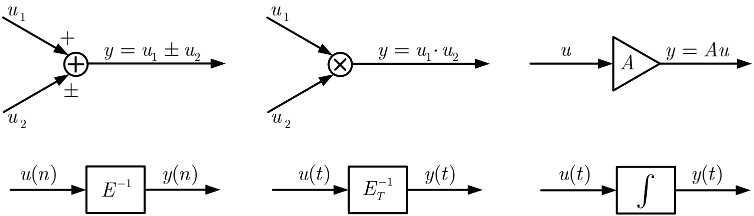


- za ovaj spoj vrijede jednadžbe

$$w = u \pm S_2(y)$$
$$y = S_1(w) = S_1(u \pm S_2(y)) \quad \Rightarrow \quad y = S_1(u \pm S_2(y))$$

Osnovni blokovi

- u prikazu sustava blokovskim dijagramima koristi se skup osnovnih blokova:
    - zbrajalo s dva ili više ulaza,
    - množilo,
    - množilo s konstantom,
    - element za jedinično kašnjenje,
    - element za kašnjenje, i
    - integrator



$y(n) = u(n-1)$

$\forall n \in \mathbb{Z}$

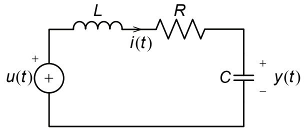
$y(t) = u(t-T)$

$\forall t \in \mathbb{R},\ T \in \mathbb{R}_+$

$y(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\lambda)\, d\lambda$

Blokovski dijagram s osnovnim blokovima – primjer

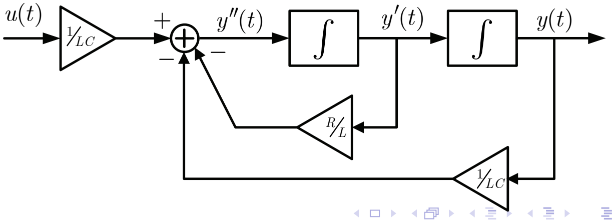
- u prvoj cjelini dan je primjer RLC električnog kruga



- diferencijalna jednadžba ovog kruga je

$$y''(t) + \frac{R}{L}y'(t) + \frac{1}{LC}y(t) = \frac{1}{LC}u(t)$$

a blokovski dijagram



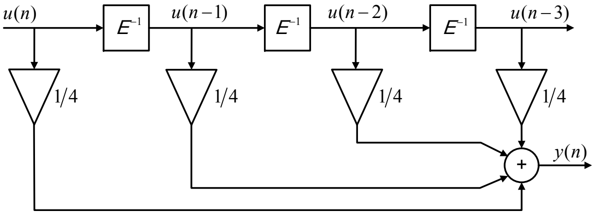
Blokovski dijagram s osnovnim blokovima – primjer

- sustav za usrednjavanje definiran na prikaznici 9,

$$y(n) = \frac{1}{L+1}\sum_{m=0}^{L} u(n-m) = \frac{1}{4}\sum_{m=0}^{3} u(n-m), \qquad \text{za } L = 3,$$

$$y(n) = \frac{1}{4}u(n) + \frac{1}{4}u(n-1) + \frac{1}{4}u(n-2) + \frac{1}{4}u(n-3)$$

a blokovski dijagram



Bezmemorijski sustavi

- bezmemorijski sustav ima svojstvo da odziv sustava ovisi samo o trenutnoj vrijednosti ulaznog signala, a ne o njihovim prethodnim ili budućim vrijednostima, i možemo pisati:

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad y(t) = S(u)(t)$$

ili

$$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad y(n) = S(u)(n)$$

- primjer bezmemorijskog sustava bio je primjer sa slike na prikaznici 7, definiran kao

$$y(t) = \frac{1}{2}u(t), \quad \forall t \in [-1, 1] \subset \mathbb{R}$$

Memorijski sustavi

- kauzalni[5] sustavi s beskonačnom[6] memorijom definirani su kao

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad y(t) = S(u_{(-\infty,t]})(t)$$

ili

$$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad y(n) = S(u_{(-\infty,n]})(n)$$

- oznaka $u_{(-\infty,t]}$ kazuje kako je u određivanju odziva y, u trenutku t, potrebno poznavati ulazni signal, ne samo u trenutku t, već i na cijelom intervalu $(-\infty, t]$
- ovako definirani sustavi nazivaju se memorijskim sustavima jer trenutnu vrijednost y(t) odziva određuju sve vrijednosti ulaznog signala iz intervala $(-\infty, t]$, dakle, cijela njegova "prošlost"

[5] objašnjava se nešto kasnije

[6] sustavi s konačnom memorijom (memorije T sekundi, odnosno N koraka, uz $T > 0$ i $N > 0$) definirani su kao $y(t) = S(u_{[t-T,t]})(t)$ odnosno $y(n) = S(u_{[n-N,n]})(n)$, uz $T > 0$ i $N > 0$

Memorijski sustavi

- vladanje sustava uglavnom pratimo na konačnom vremenskom intervalu $[t_0, t]$, ili $[n_0, n]$, koji nazivamo interval promatranja
- dakle, zanima nas odsječak odziva $y_{[t_0,t]}$ ili $y_{[n_0,n]}$ kao posljedica odsječka pobude $u_{[t_0,t]}$ ili $u_{[n_0,n]}$
- za sustave opisane jednadžbama diferencija, ili sustave opisane s diferencijalnim jednadžbama, rezultat pobude iz intervala $(-\infty, n_0)$ ili $(-\infty, t_0)$ može se uzeti u obzir jednim ili više brojeva α_i pa su $y(n) = S(\alpha_i, u_{[n_0,n]})(n)$ odnosno $y(t) = S(\alpha_i, u_{[t_0,t]})(t)$
- α_i sadrže informaciju o prošlosti sustava i nazivamo ih početnim uvjetima sustava
- odziv sustava za koji su svi[7] $\alpha_i = 0$, ovisan je samo o pobudi za $n_0 \geq 0$, odnosno $t_0 \geq 0$, i naziva se odziv **mirnog** sustava (engl. zero state response)

[7] ne postoji početna energija u sustavu, pa su svi početni uvjeti jednaki nuli

Primjeri memorijskih sustava

- u trećoj su cjelini razmotrene operacije integracije vremenski kontinuiranog signala i numeričke integracije ovih signala postupkom akumulacije
- ove operacije možemo realizirati sustavima koje nazivamo integrator, odnosno akumulator, a koji ovdje predstavljaju primjere memorijskih sustava
- integrator je definiran kao

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau) d\tau$$

- a akumulator kao

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad y(n) = \sum_{m=-\infty}^{n} u(m)$$

Primjeri memorijskih sustava

- redovito poznajemo signale pobude u od nekog trenutka t_0, i odziv sustava možemo pratiti u intervalu $[t_0, t]$
- sukladno tome integrator je potrebno definirati kao

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t_0} u(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t} u(\tau)d\tau = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} u(\tau)d\tau$$

- u $y(t_0)$ je sadržana sva "povijest" integratora i predstavlja stanje sustava prije dovođenja poznate pobude u trenutku t_0
- zaključujemo da je, za određivanje odziva sustava u intervalu $[t_0, t]$, dovoljno poznavanje stanja sustava (početno stanje) $y(t_0)$, te sve vrijednosti pobude $u_{[t_0,t]}$
- treba napomenuti da je nevažno znati kakva je pobuda djelovala prije t_0, i što je izazvalo izlaz $y(t_0)$, jer, u $y(t_0)$ je sadržana sva "povijest" integratora (sustava) i to je dovoljan podatak u određivanju odziva od t_0 na dalje

Primjeri memorijskih sustava

- sustav za usrednjavanje definiran na prikaznici 9,

$$y(n) = \frac{1}{L+1} \sum_{m=0}^{L} u(n-m),$$

  je memorijski sustav
- određujemo li odziv sustava za $n \geq n_0 = 0$, dakle za $n \in \mathbb{Z}_0^+$ potrebno je, osim pobude iz intervala $[0, n]$, poznavati i $u(-1)$, $u(-2)$, ..., $u(-L)$
- u $u(-1)$, $u(-2)$, ..., $u(-L)$ je sadržana sva "povijest" sustava za usrednjavanje i oni predstavljaju početne uvjete odnosno, zajedničkim imenom, početno stanje sustava
- u ilustraciji ovog sustava na prikaznici 9, pretpostavljeno je da je $u(-1) = u(-2) = u(-3) = 0$, i prikazan je odziv mirnog sustava

Nekauzalni sustavi

- do sada su razmatrani memorijski kauzalni sustavi,

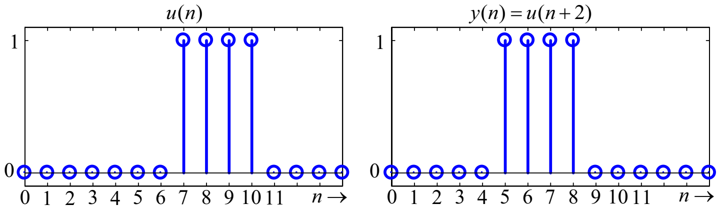
$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad y(t) = S(u_{(-\infty,t]})(t)$$
$$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad y(n) = S(u_{(-\infty,n]})(n)$$

- drugim riječima, trenutni odziv sustava je bio posljedica trenutne i prošlih vrijednosti ulaznog signala
- ovdje se razmatraju nekauzalni sustavi – memorijsko-prediktivni – koji, u određivanju trenutne vrijednosti izlaza, uz prethodne vrijednosti, anticipiraju i buduće vrijednosti ulaznog signala

$$\forall t \in \mathbb{R} \text{ i } t < t_1 < \infty, \qquad y(t) = S(u_{(-\infty,t_1)})(t)$$
$$\forall n \in \mathbb{Z} \text{ i } n < n_1 < \infty, \qquad y(n) = S(u_{(-\infty,n_1)})(n)$$

Nekauzalni sustavi

- odziv nekauzalnog sustava započinje prije nego je djelovala pobuda $\Rightarrow$ nekauzalni vremenski sustavi ne mogu biti realizirani u stvarnom vremenu
    - tako npr., za nekauzalni sustav zadan s jednadžbom $y(n) = u(n+2)$, odziv bi se trebao pojaviti dva koraka prije pojave pobude, što je za realne sustave, koji nemaju prediktivna svojstva, nemoguće
    - dan je prikazan odziva ovog nekauzalnog sustava na zadanu pobudu (odziv je moguće odrediti jer znamo cijelu pobudu unaprijed)



Nekauzalni sustavi

- nekauzalni vremenski sustavi su često rezultat postupaka sinteze na temelju idealiziranih zahtjeva
- nekauzalne sustave možemo koristiti u slučajevima kada je dozvoljeno kašnjenje ili kada su konačni signali prethodno pohranjeni (poznati u cijelom području definicije) i kasnije obrađivani izvan stvarnog vremena (pohranjeni signali glazbe, geofizički podaci, itd.)
- ponovimo još jednom, kako odziv nekauzalnog sustava započinje prije nego je djelovala pobuda, dakle, sustav anticipira buduću pobudu (radi predikciju)
- ilustrirajmo tu činjenicu jednim mogućim primjerom:
  - vozač prati cestu i sukladno tomu regulira brzinu automobila
  - ako zna cestu unaprijed (ili ima čitača karte) on prije nego i vidi zavoj, ili poznatu zapreku, počne unaprijed smanjivati brzinu

Vremenski stalni sustavi

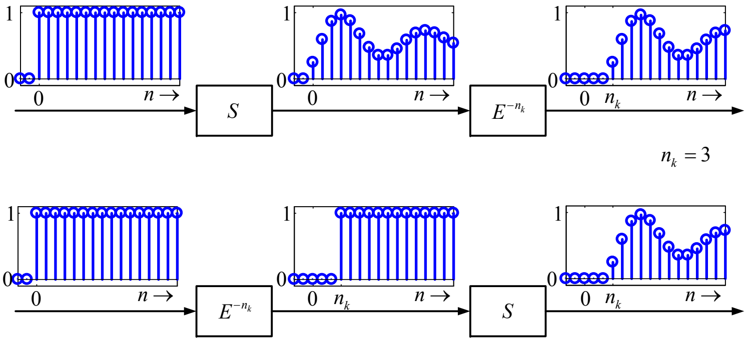
- u definiciji vremenski stalnog sustava koristi se sustav za kašnjenje[8]
- neka je E^{-n_k} vremenski diskretan sustav za kašnjenje ulaznog signala za n_k koraka
- odziv toga sustava $y(n) = E^{-n_k}(u)(n)$ definiran je kao

$$\forall n, n_k \in \mathbb{Z}, \qquad y(n) = u(n - n_k)$$

- vremenski stalni (invarijantni) sustavi su sustavi koji ne mijenjaju parametre tijekom vremena
- dakle, sustav S je vremenski stalan, ako za bilo koju pobudu $u(n)$ daje odziv $y(n)$, a za zakašnjeli ulaz $E^{-n_k}(u)(n)$ daje zakašnjeli odziv $E^{-n_k}(y)(n)$
- ovo se svojstvo ilustrira grafički

[8] Ovdje se razmatraju vremenski diskretni sustavi. Ista rasprava vrijedi i za vremenski kontinuirane sustave

Vremenski stalni sustavi



- diskretni sustav S vremenski je stalan (vremenski invarijantan) ako vrijedi[9]

$$\forall n, n_k \in \mathbb{Z} \text{ i } \forall u \qquad S(E^{-n_k}(u))(n) = E^{-n_k}(S(u))(n)$$

[9] analogno, za vremenski kontinuirani sustav, vrijedi
$\forall t, t_k \in \mathbb{R}$ i $\forall u \qquad S(E_{t_k}^{-1}(u))(t) = E_{t_k}^{-1}(S(u))(t)$

Vremenski stalni sustavi – primjer

- pokazuje se kako sustav za ekspanziju vremenski diskretnog signala nije vremenski stalan

$$y(n) = \begin{cases} u(\frac{n}{L}) & n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0 & \text{za ostale } n \end{cases} \tag{1}$$

- odziv ovog sustava $y_1(n)$ za ulaz $u_1(n) = u(n - n_k)$ je

$$y_1(n) = \begin{cases} u_1(\frac{n}{L}) & n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0 & \text{za ostale } n \end{cases}$$

$$y_1(n) = \begin{cases} u(\frac{n}{L} - n_k) & n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0 & \text{za ostale } n \end{cases}$$

- s druge strane je, zamjenom n s $n - n_k$ u (1),

$$y(n - n_k) = \begin{cases} u(\frac{n-n_k}{L}) & n = n_k, n_k \pm L, n_k \pm 2L, \dots \\ 0 & \text{za ostale } n \end{cases}$$

- sustav nije vremenski stalan jer je $y_1(n) \neq y(n - n_k)$

Vremenski stalni sustavi – primjer

- sustav za usrednjavanje je vremenski stalan sustav

$$y(n) = \frac{1}{L+1} \sum_{m=0}^{L} u(n-m)$$

- odziv ovog sustava $y_1(n)$ za ulaz $u_1(n) = u(n - n_k)$ je

$$y_1(n) = \frac{1}{L+1} \sum_{m=0}^{L} u_1(n-m) = \frac{1}{L+1} \sum_{m=0}^{L} u(n-m-n_k)$$

- s druge strane je

$$y(n-n_k) = \frac{1}{L+1} \sum_{m=0}^{L} u(n-n_k-m)$$

- sustav je vremenski stalan jer je $y_1(n) = y(n - n_k)$

Linearni sustavi

Sustav $y = S(u)$ je linearan ako zadovoljava svojstvo homogenosti

$$S(\alpha u) = \alpha S(u) = \alpha y,$$

gdje je α proizvoljna realna ili kompleksna konstanta, te svojstvo aditivnosti

$$S(u_1 + u_2) = S(u_1) + S(u_2).$$

Spojena svojstva aditivnosti i homogenosti iskazuju se kao svojstvo ili princip superpozicije linearnih sustava

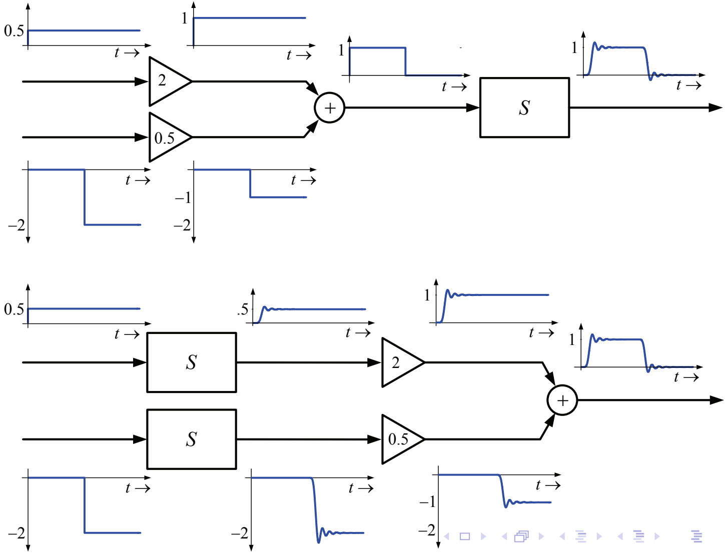
$$S(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 S(u_1) + \alpha_2 S(u_2) = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$$

gdje su α_1 i α_2 proizvoljne realne ili kompleksne konstante.

Treba uvijek imati u vidu da, za realne (fizikalne) sustave, svojstvo superpozicije vrijedi samo za ograničeno područje vrijednosti konstanti α_1 i α_2.

Linearni sustavi – ilustracija svojstva superpozicije

- ilustriramo $S(2u_1 + 0.5u_2) = 2S(u_1) + 0.5S(u_2)$



Linearni sustavi

- linearne sustave obilježava i važno svojstvo po kojem je za ulaz jednak nula i izlaz jednak nula, pa se to svojstvo obično naziva ulaz-nula, izlaz-nula
- da bi sustav $y = S(u)$ bio linearan nužno je da za $u = 0$ vrijedi

$$y = S(0) = 0$$

- ovo svojstvo proizlazi izravno iz svojstva homogenosti, za $\alpha = 0$, dakle iz

$$S(\alpha u) = \alpha S(u), \quad \text{za } \alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad S(0) = S(0 \cdot u) = 0 \cdot S(u) = 0$$

- ovo svojstvo je očigledno nuždan uvjet, ali ne i dovoljan, za dokaz linearnosti sustava

Linearni sustavi – primjer

- pokazuje se linearnost sustava za usrednjavanje, opisanog s jednadžbom diferencija

$$y(n) = \frac{1}{L+1}\sum_{m=0}^{L} u(n-m),$$

uz $u(-1) = u(-2) = \ldots = u(-L+1) = u(-L) = 0$.
Za
$y_1(n) = \frac{1}{L+1}\sum_{m=0}^{L} u_1(n-m)$,
$y_2(n) = \frac{1}{L+1}\sum_{m=0}^{L} u_2(n-m)$ i
$u(n) = \alpha u_1(n) + \beta u_2(n)$, slijedi

$$y(n) = \frac{1}{L+1}\sum_{m=0}^{L}[\alpha u_1(n-m) + \beta u_2(n-m)] =$$

$$= \alpha\frac{1}{L+1}\sum_{m=0}^{L} u_1(n-m) + \beta\frac{1}{L+1}\sum_{m=0}^{L} u_2(n-m) =$$

$$= \alpha y_1(n) + \beta y_2(n)$$

Linearni sustavi – primjer

- pokazuje se linearnost integratora dakle sustava opisanog s

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)\, d\tau$$

pokazuje se da, za

$$u(t) = \alpha u_1(t) + \beta u_2(t),$$
$$y_1(t) = \int_{-\infty}^{t} u_1(\tau)\, d\tau,$$
$$y_2(t) = \int_{-\infty}^{t} u_2(\tau)\, d\tau$$

vrijedi

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{t} [\alpha u_1(\tau) + \beta u_2(\tau)]\, d\tau =$$
$$= \alpha \int_{-\infty}^{t} u_1(\tau)\, d\tau + \beta \int_{-\infty}^{t} u_2(\tau)\, d\tau = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$$

dakle, sustav je linearan

Linearni sustavi – primjer

- ispituje se linearnost integratora dakle sustava opisanog s

$$\forall t \in [t_0, t] \subset \mathbb{R}, \quad y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} u(\tau) d\tau$$

za

$$u(t) = \alpha u_1(t) + \beta u_2(t),$$
$$y_1(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} u_1(\tau)\, d\tau,$$
$$y_2(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} u_2(\tau)\, d\tau$$

vrijedi

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} u(\tau)\, d\tau = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} [\alpha u_1(\tau) + \beta u_2(\tau)]\, d\tau =$$
$$= y(t_0) + \alpha \int_{t_0}^{t} u_1(\tau)\, d\tau + \beta \int_{t_0}^{t} u_2(\tau)\, d\tau \neq \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$$

- slično – neočekivano – bi se pokazalo da sustav opisan s jednadžbom $y(n) = au(n) + b$, također nije linearan

Linearni sustavi – primjer

- razmotrimo još jednom integrator zadan kao

$$\forall t \in [t_0, t] \subset \mathbb{R}, \quad y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} u(\tau)\, d\tau$$

- odziv ovog, i svakog drugog sustava, možemo razložiti na dvije komponente:
  - komponentu odziva koja je posljedica početnog stanja sustava i ne ovisi o pobudi – odziv nepobuđenog sustava i,
  - komponentu odziva koji je posljedica isključivo pobude i ne ovisi o početnim uvjetima – odziv mirnog sustava
- odziv možemo razložiti kao

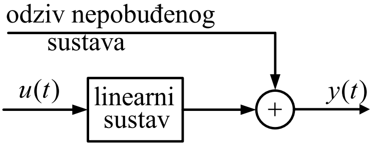
$$y(t) = \underbrace{y(t_0)}_{\text{odziv nepobuđenog sustava}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} u(\tau)\, d\tau}_{\text{odziv mirnog sustava}}$$

Linearni sustavi – primjer

- uvidom u

$$y(t) = \underbrace{y(t_0)}_{\text{odziv nepobuđenog sustava}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} u(\tau)\, d\tau}_{\text{odziv mirnog sustava}}$$

očigledno je da dio koji predstavlja odziv mirnog sustava predstavlja odziv linearnog sustava pa strukturu ovog sustava možemo prikazati kao



- sustavi kod kojih je cjelokupni odziv superpozicija odziva linearnog sustava i odziva nepobuđenog sustava nazivaju se inkrementalno linearni sustavi

Stabilni i nestabilni sustavi

- u drugoj cjelini je pokazano kako je signal f omeđen ako postoji konačan broj $M_f < \infty$ takav da je $|f(w)| \leq M_f$ za $\forall w \in PodručjeDefinicije(f)$
- sustav je BIBO stabilan (engl. Bounded Input Bounded Output) ako je za svaki omeđeni ulaz njegov odziv također omeđen
- dakle za stabilan vremenski kontinuiran sustav vrijedi

$$|u(t)| \leq M_u < \infty \quad \Rightarrow \quad |y(t)| \leq M_y < \infty, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

a za stabilan vremenski diskretan sustav vrijedi

$$|u(n)| \leq M_u < \infty \quad \Rightarrow \quad |y(n)| \leq M_y < \infty, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

- ovo je definicija tzv. vanjske stabilnosti sustava (definirane pomoću ulaza i izlaza)
- o unutarnjoj stabilnosti sustava biti će govora kasnije

Stabilni i nestabilni sustavi – primjeri

- inkrementalno linearan sustav,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = 7u(t) + 6,$$

je za, $|u(t)| \leq M_u < \infty$, BIBO stabilan jer vrijedi

$$y(t) \leq 7M_u + 6 = M_y, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

- ispituje se BIBO stabilnost diskretnog sustava, $y(n) = \frac{1}{L+1} \sum_{m=0}^{L} u(n-m)$.

$$\text{Za } |u(n)| \leq M_u, \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow$$

$$|y(n)| \leq \frac{1}{L+1}(L+1)M_u, \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

pa je ovaj sustav BIBO stabilan

Stabilni i nestabilni sustavi – primjeri

- integrator je definiran kao sustav s:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)\, d\tau,$$

- pobudimo li integrator s jediničnim skokom $u(t) = \mu(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, odziv će biti

$$y(t) = t\mu(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & t \geq 0. \end{cases}$$

- očigledno je kako odziv $y(t)$ nije omeđen i integrator nije BIBO stabilan sustav

Signali i sustavi

Profesor
Branko Jeren

8. svibnja 2017.

Impulsni odziv vremenski diskretnog sustava

Impulsni odziv vremenski diskretnog sustava

- odziv linearnog, vremenski stalnog (LTI), vremenski diskretnog sustava,

$$S : [\mathbb{Z} \to \mathbb{R}] \to [\mathbb{Z} \to \mathbb{R}],$$

na pobudu u, definiran je kao

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad y(n) = S(u)(n)$$

- odziv ovog sustava na jedinični impuls δ, Kroneckerovu δ funkciju, uz uvjet da je sustav bio miran prije dovođenja pobude, nazivamo impulsnim odzivom sustava i označavamo kao $h = S(\delta)$, dakle

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad h(n) = S(\delta)(n)$$

Primjer određivanja impulsnog odziva vremenski diskretnog sustava

- vremenski diskretan sustav zadan je jednadžbom diferencija

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad y(n) - 0.75y(n-1) = u(n)$$

- sustav je miran, dakle vrijedi $y(-1) = 0$, i određujemo impulsni odziv sustava, dakle odziv na pobudu $u(n) = \delta(n)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$
- ovdje ćemo to učiniti metodom izračunavanja korak po korak

$$y(n) = 0.75y(n-1) + u(n)$$
$$\text{za } u(n) = \delta(n) \Rightarrow$$
$$h(n) = 0.75h(n-1) + \delta(n)$$

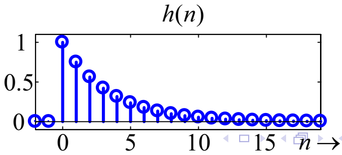
- dovoljno je promatrati odziv za $n \geq 0$, jer pobuda djeluje za $n \geq 0$

Primjer određivanja impulsnog odziva vremenski diskretnog sustava

- dakle, za $h(-1) = y(-1) = 0$, i za $n = 0, 1, 2, \dots$ slijedi

$$
\begin{aligned}
h(0) &= 0.75h(-1) + 1 = 1 \\
h(1) &= 0.75h(0) + 0 = 0.75 \cdot 1 = 0.75 \\
h(2) &= 0.75h(1) + 0 = 0.75 \cdot 0.75 = 0.75^2 \\
h(3) &= 0.75h(2) + 0 = 0.75 \cdot 0.75^2 = 0.75^3 \\
h(4) &= 0.75h(3) + 0 = 0.75 \cdot 0.75^3 = 0.75^4 \\
\dots & \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
h(n) &= 0.75h(n-1) + 0 = 0.75 \cdot 0.75^{n-1} = 0.75^n
\end{aligned}
$$

- zaključujemo kako je impulsni odziv zadanog sustava, $\forall n \geq 0, \quad h(n) = 0.75^n$, beskonačnog trajanja i asimptotski se približava k nuli

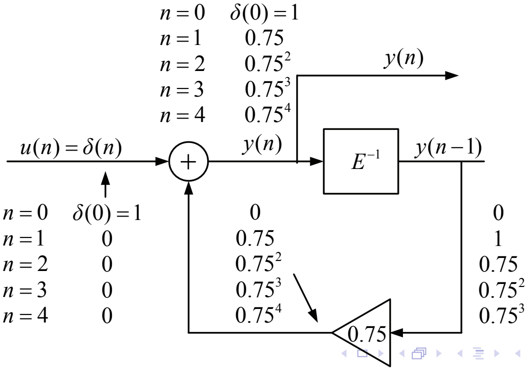


Primjer određivanja impulsnog odziva vremenski diskretnog sustava

- razmatrani vremenski diskretan sustav

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad y(n) - 0.75y(n-1) = u(n)$$

prikazujemo blokovskim dijagramom i analiziramo odziv na jedinični impuls δ uz $y(-1) = 0$, dakle za miran sustav

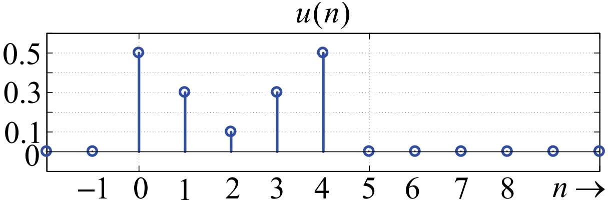


Odziv sustava na niz impulsa

Diskretni signal kao zbroj jediničnih impulsa

- svaki niz može biti prikazan uz pomoć niza vremenski diskretnih jediničnih impulsa što proizlazi iz:

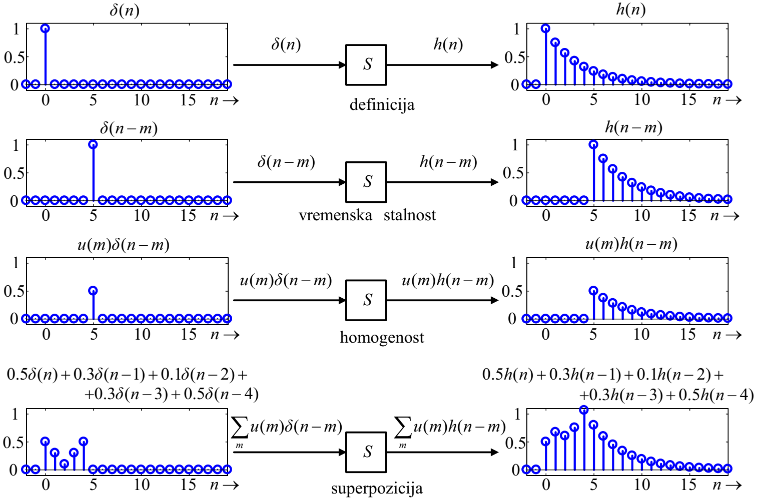
$$u(n) = u(n) \cdot comb(n) = u(n) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)\delta(n-m)$$



$$u(n) = .5\delta(n) + .3\delta(n-1) + .1\delta(n-2) + .3\delta(n-3) + .5\delta(n-4)$$

- razmotrimo odziv linearnog, vremenski stalnog, diskretnog sustava na pobudu prikazanu kao niz impulsa

Odziv sustava na niz impulsa



Slika 1: Konvolucijski zbroj *SISO* sustava

Konvolucijski zbroj

Konvolucijski zbroj

- pobuda sustava prikazana je kao zbroj niza impulsa

$$\begin{aligned}
&\forall n \in \mathbb{Z} \\
&u(n) = \ldots + u(-1)\delta(n+1) + u(0)\delta(n) + u(1)\delta(n-1) + \\
&\qquad + u(2)\delta(n-2) + u(3)\delta(n-3) \ldots \Rightarrow \\
&u(n) = \textstyle\sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)\delta(n-m)
\end{aligned}$$

- za linearni sustav vrijedi svojstvo homogenosti

$$u(m)\delta(n-m) \to u(m)h(n-m)$$

- pa je odziv na pobudu prikazanu nizom impulsa

$$\begin{aligned}
y(n) = \ldots &+ u(-1)h(n+1) + u(0)h(n) + u(1)h(n-1) + \\
&+ u(2)h(n-2) + u(3)h(n-3) \ldots \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)h(n-m) \tag{1}$$

Konvolucijski zbroj

- izvedeni izraz predstavlja konvoluciju nizova u i h

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)h(n-m) = (u * h)(n)$$

  i zato ga nazivamo **konvolucijski zbroj** (suma)
- supstitucijom $k = n - m$ slijedi alternativni prikaz

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)u(n-k),$$

  pa za konvoluciju vrijedi svojstvo komutativnosti

$$y = h * u = u * h$$

odnosno

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad y(n) = (h * u)(n) = (u * h)(n)$$

Signali i sustavi
školska godina 2016/2017
Cjelina 9.

Profesor Branko Jeren

Konvolucijski zbroj kauzalnih nizova

- konvolucijski zbroj, za $\forall n \in \mathbb{Z}$, možemo raspisati kao

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{-1} u(m)h(n-m) + \sum_{m=0}^{n} u(m)h(n-m) + \sum_{m=n+1}^{\infty} u(m)h(n-m)$$

- za kauzalne $u(n)$ i $h(n)$

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{-1} \underbrace{u(m)}_{=0} h(n-m) + \sum_{m=0}^{n} u(m)h(n-m) + \sum_{m=n+1}^{\infty} u(m) \underbrace{h(n-m)}_{=0}$$

konvolucijski zbroj se reducira u[1]

$$y(n) = \sum_{m=0}^{n} u(m)h(n-m) = \sum_{m=0}^{n} h(m)u(n-m), \qquad n \geq 0$$

što je odziv linearnog vremenski stalnog kauzalnog sustava

[1] Uz svojstvo komutativnosti dana su oba izraza za konvoluciju

IIR sustavi - primjer

IIR sustavi

- iz $y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)u(n-m)$ zaključujemo da je, uz poznavanje impulsnog odziva sustava h, moguće odrediti odziv na bilo koju pobudu
- sustavi s beskonačnim trajanjem impulsnog odziva nazivaju se IIR (Infinite Impulse Response) sustavi
- primjer IIR sustava je prije razmatrani vremenski diskretni sustav

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad y(n) - 0.75y(n-1) = u(n)$$

  čiji je impulsni odziv

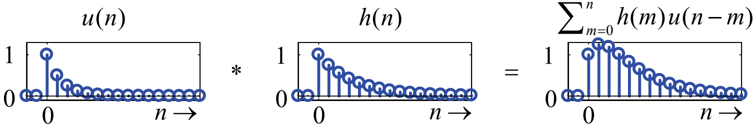
$$h(n) = \begin{cases} 0.75^n, & n \geq 0; \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

- ilustrira se odziv ovog sustava na pobudu $u(n) = 0.5^n \mu(n)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$

IIR sustav – primjer

- oba niza, h i u, su kauzalna, pa je konvolucijski zbroj

$$
\begin{aligned}
y(n) &= \sum_{m=0}^{n} h(m)u(n-m), \qquad n \geq 0 \\
&= \sum_{m=0}^{n} 0.75^m 0.5^{n-m} = 0.5^n \sum_{m=0}^{n} \left(\frac{0.75}{0.5}\right)^m = \\
&= 0.5^n \frac{\left(\frac{0.75}{0.5}\right)^{n+1} - 1}{\frac{0.75}{0.5} - 1} = 4\left[0.75^{n+1} - 0.5^{n+1}\right], \qquad n \geq 0
\end{aligned}
$$



FIR sustavi - primjer

FIR sustavi

- sustavi za koje je impulsni odziv konačne duljine, $M+1$, nazivaju se sustavi s konačnim impulsnim odzivom ili FIR (Finite Impulse Response) sustavi:

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad y(n) = \sum_{m=0}^{M} h(m)u(n-m)$$

- sustav za usrednjavanje je primjer FIR sustava

$$\forall n \in \mathbb{Z},$$

$$y(n) = \frac{1}{M+1}\sum_{m=0}^{M} u(n-m) = \sum_{m=0}^{M} \frac{1}{M+1} u(n-m),$$

pri čemu je njegov impulsni odziv

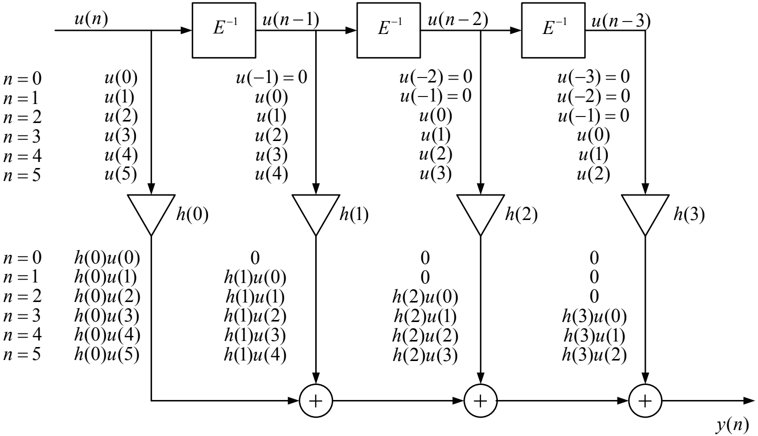
$$h(n) = \begin{cases} \frac{1}{M+1}, & 0 \leq n \leq M; \\ 0, & n < 0 \text{ i } n > M \end{cases}$$

FIR sustav – blokovski dijagram

- na naredne dvije prikaznice su blokovski dijagrami koji predstavljaju realizaciju FIR sustava za koji je $M = 3$
- blokovski dijagram je izveden izravno iz jednadžbe za konvolucijski zbroj i radi se o dva ekvivalentna prikaza istog sustava
- na slikama je prikazano napredovanje signala (njegovih očitaka) kroz sustav, te svi međurezultati svih operacija koje se u modelu sustava događaju tijekom određivanja odziva u pojedinom koraku
- važno je uočiti ulogu koju početni uvjeti (različiti od nule) imaju na odziv sustava
- evidentno je zašto se pri definiciji impulsnog odziva naglašava da je to odziv na jedinični impuls za slučaj mirnog sustava (početni uvjeti jednaki nuli)

FIR sustav – blokovski dijagram

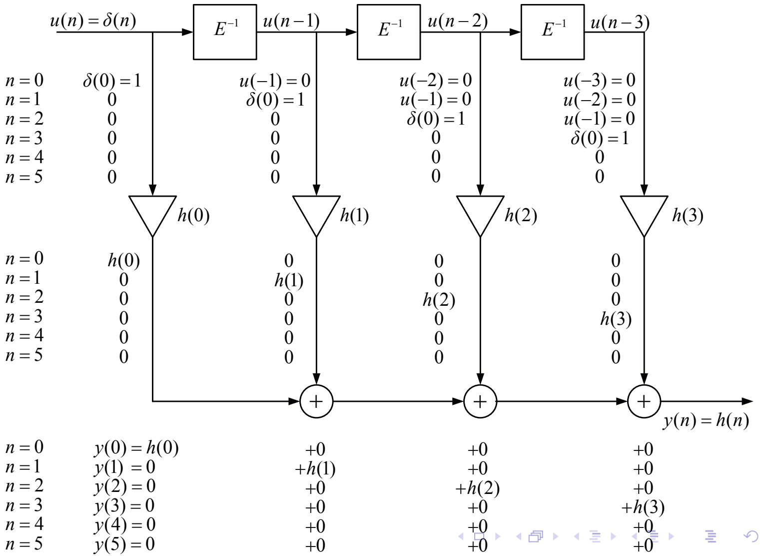
iz $y(n) = \sum_{m=0}^{3} h(m)u(n-m) =$
$h(0)u(n) + h(1)u(n-1) + h(2)u(n-2) + h(3)u(n-3)$



$n=0$	$y(0) = h(0)u(0)$	$+0$	$+0$	$+0$
$n=1$	$y(1) = h(0)u(1)$	$+h(1)u(0)$	$+0$	$+0$
$n=2$	$y(2) = h(0)u(2)$	$+h(1)u(1)$	$+h(2)u(0)$	$+0$
$n=3$	$y(3) = h(0)u(3)$	$+h(1)u(2)$	$+h(2)u(1)$	$+h(3)u(0)$
$n=4$	$y(4) = h(0)u(4)$	$+h(1)u(3)$	$+h(2)u(2)$	$+h(3)u(1)$
$n=5$	$y(5) = h(0)u(5)$	$+h(1)u(4)$	$+h(2)u(3)$	$+h(3)u(2)$

Impulsni odziv FIR sustava – blokovski dijagram

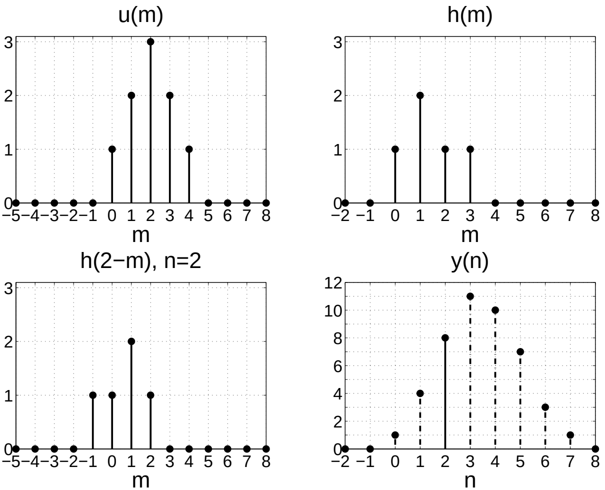
iz $y(n) = \sum_{m=0}^{3} h(m)\delta(n-m) = h(n) =$
$h(0)\delta(n) + h(1)\delta(n-1) + h(2)\delta(n-2) + h(3)\delta(n-3)$



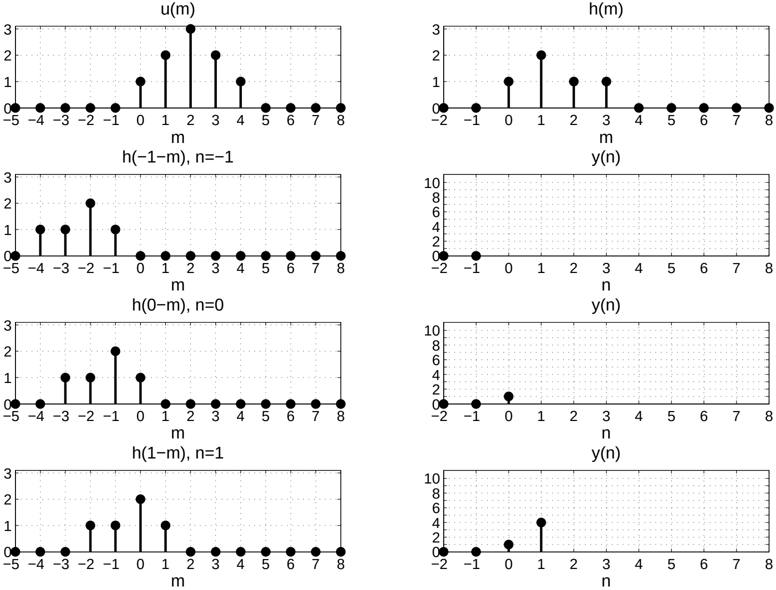
Grafička interpretacija konvolucijskog zbroja

Grafička interpretacija konvolucijskog zbroja

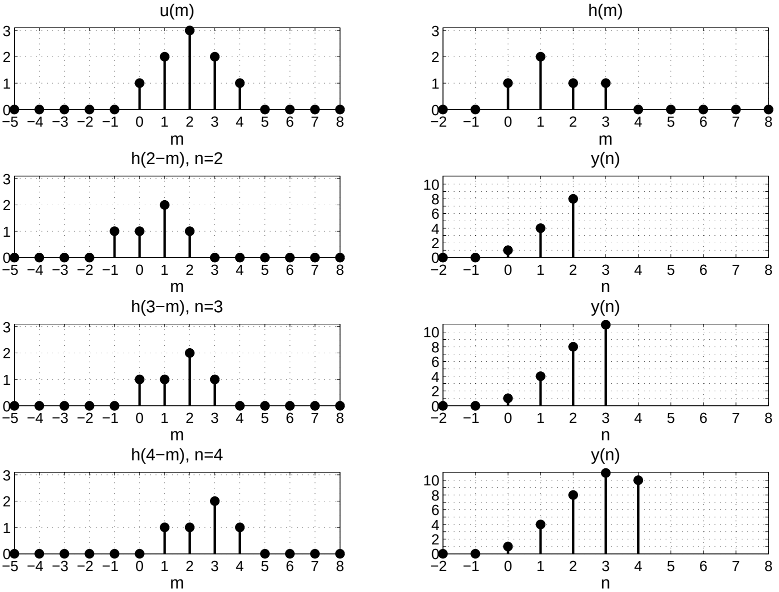
$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)h(n-m),$$
$$\text{za } n = 2 \Rightarrow y(2) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)h(2-m)$$



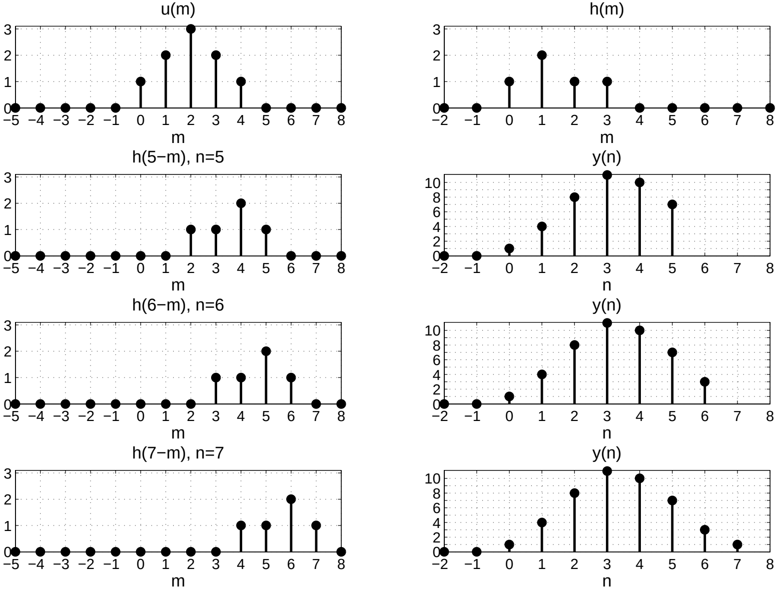
Grafička interpretacija konvolucijskog zbroja



Grafička interpretacija konvolucijskog zbroja



Grafička interpretacija konvolucijskog zbroja



Svojstva konvolucijskog zbroja

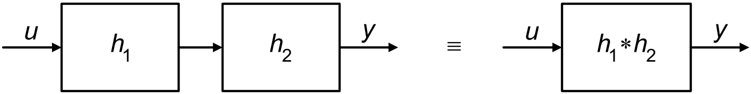
Svojstva konvolucijskog zbroja – komutativnost i asocijativnost

- već je pokazano da vrijedi komutativnost

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)h(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)u(n-m) \Leftrightarrow u*h = h*u$$

- svojstvo asocijativnosti

$$y(n) = ((u * h_1) * h_2)(n) = (u * \underbrace{(h_1 * h_2)}_{h})(n) = (u * h)(n)$$



Slika 6: Konvolucijski zbroj – asocijativnost

Svojstva konvolucijskog zbroja – asocijativnost

- izvod svojstva asocijativnosti za linearni, vremenski stalni, diskretni sustav

$$y(n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m) h_1(j-m) \right] h_2(n-j) =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m) \left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} h_1(j-m) h_2(n-j) \right]$$

za $k = j - m \Rightarrow$

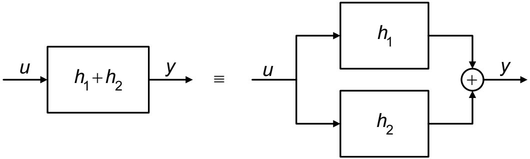
$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m) \underbrace{\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1(k) h_2(n-m-k) \right]}_{h(n-m)}$$

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m) h(n-m)$$

Svojstva konvolucijskog zbroja – distributivnost

- svojstvo distributivnosti za linearni, vremenski stalni, diskretni sustav

$$y(n) = (u * (h_1 + h_2))(n) = (u * h_1)(n) + (u * h_2)(n)$$



Slika 7: Konvolucijski zbroj – distributivnost

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)\left[h_1(n-m) + h_2(n-m)\right]$$

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)h_1(n-m) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)h_2(n-m)$$

Konvolucija proizvoljnih signala

- dosadašnja razmatranja konvolucijskog zbroja odnosila su se na jedan od mogućih opisa LTI sustava
- konvolucijski zbroj možemo definirati i za proizvoljne signale, pa pišemo

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m) x_2(n-m) = (x_1 * x_2)(n)$$

- već prije izvedena svojstva konvolucijskog zbroja vrijede i za proizvoljne signale:
  - komutativnost:
    $(x_1 * x_2)(n) = (x_2 * x_1)(n)$
  - distributivnost:
    $(x_1 * (x_2 + x_3))(n) = (x_1 * x_2)(n) + (x_1 * x_3)(n)$
  - asocijativnost:
    $(x_1 * (x_2 * x_3))(n) = ((x_1 * x_2) * x_3)(n)$

Svojstva konvolucijskog zbroja – pomak

- za $y(n) = (x_1 * x_2)(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)x_2(n-m)$, te uz oznake $(E^{-p}(x_1))(n) = x_1(n-p)$ i $(E^{-q}(x_2))(n) = x_2(n-q)$, vrijedi svojstvo pomaka

$$(E^{-p}(x_1) * E^{-q}(x_2))(n) = y(n-p-q)$$

- izvod svojstva pomaka

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} [E^{-p}(x_1)(m)][E^{-q}(x_2)(n-m)]$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m-p)x_2(n-m-q)$$

za $j = m - p$ slijedi

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} x_1(j)x_2(n-p-q-j) = y(n-p-q)$$

Svojstva konvolucijskog zbroja – konvolucija s jediničnim impulsom, duljina konvolucijskog zbroja

- konvolucija s jediničnim impulsom
  - za bilo koji signal $x(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, i jedinični impuls $\delta(n)$, $n \in \mathbb{Z}$,

$$(x * \delta)(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m) = x(n)$$

- duljina konvolucijskog zbroja konačnih nizova
  - neka je L_1 duljina (broj elemenata) niza $x_1(n)$, a L_2 duljina niza $x_2(n)$
  - duljina $(x_1 * x_2)(n)$ je $L_1 + L_2 - 1$

dokaz slijedi iz: $y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)x_2(n-m)$

$0 \leq m \leq L_1 - 1$

$0 \leq n - m \leq L_2 - 1 \qquad | + m$

$m \leq n \leq L_2 - 1 + m \quad \Rightarrow$

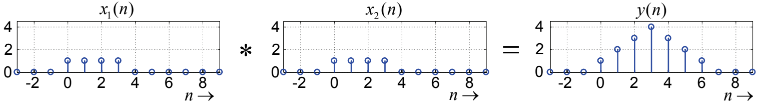
$0 \leq m \leq n \leq L_2 - 1 + m \leq L_2 - 1 + L_1 - 1 \quad \Rightarrow$

$0 \leq n \leq L_1 + L_2 - 2$

pa je duljina konvolucije $L = L_1 + L_2 - 1$

Konvolucijski zbroj – primjer

- u Cjelini 3 dan je primjer konvolucije dva pravokutna signala



- signali x_1 i x_2 definirani su kao

$$x_1(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 3; \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \qquad x_2(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 3; \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

- duljine nizova $x_1(n)$ i $x_2(n)$ su $L_1 = L_2 = 4$, pa je duljina niza koji je rezultat njihove konvolucije, $(x_1 * x_2)(n)$, jednaka $L_1 + L_2 - 1 = 7$
- očigledno da je dovoljno računanje konvolucije za $0 \leq n \leq 6$

Konvolucijski zbroj – primjer

- konvoluciju $(x_1 * x_2)(n)$, uzimajući u obzir da se radi o kauzalnim nizovima, određujemo iz

$$y(n) = \sum_{m=0}^{n} x_1(m)x_2(n-m), \qquad n \geq 0,$$

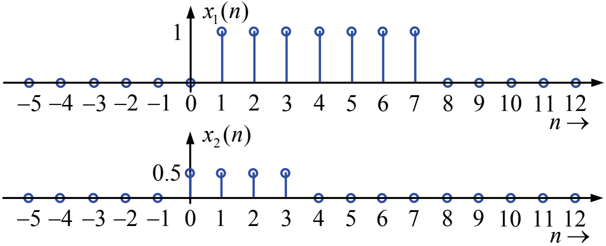
$$\begin{aligned}
y(0) &= x_1(0)x_2(0) && = 1\\
y(1) &= x_1(0)x_2(1) + x_1(1)x_2(0) && = 2\\
y(2) &= x_1(0)x_2(2) + x_1(1)x_2(1) + x_1(2)x_2(0) && = 3\\
y(3) &= x_1(0)x_2(3) + x_1(1)x_2(2) + x_1(2)x_2(1) + x_1(3)x_2(0) && = 4\\
y(4) &= x_1(1)x_2(3) + x_1(2)x_2(2) + x_1(3)x_2(1) && = 3\\
y(5) &= x_1(2)x_2(3) + x_1(3)x_2(2) && = 2\\
y(6) &= x_1(3)x_2(3) && = 1
\end{aligned}$$

Konvolucijski zbroj – izračun

Konvolucijski zbroj – izračun

- izračunava se konvolucijski zbroj signala x_1 i x_2 definiranih kao

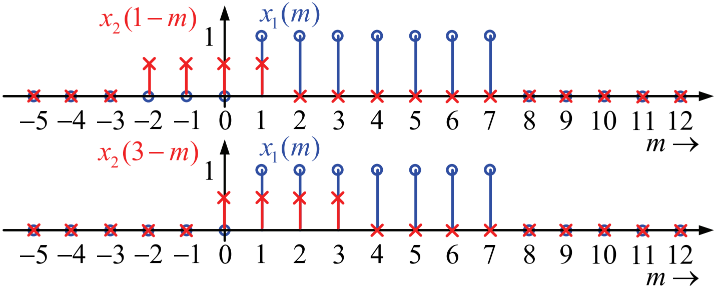
$$x_1(n) = \begin{cases} 1, & 1 \leq n \leq 7; \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \qquad x_2(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \leq n \leq 3; \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$



konvoluciju izračunavamo iz $y(n) = \sum_{m=0}^{n} x_1(m)x_2(n-m)$

Konvolucijski zbroj – izračun

- djelomično preklapanje $x_1(m)$ i $x_2(n-m)$ započinje za $n = 1$ i završava za $n = 3$

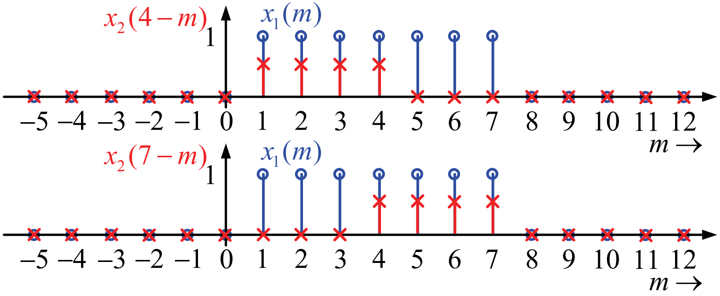


pa su, za interval $1 \le n \le 3$, donja granica zbrajanja $m = 1$ i gornja $m = n$, pa vrijedi

$$y(n) = \sum_{m=1}^{n} x_1(m)x_2(n-m) = \sum_{m=1}^{n} 1 \cdot \frac{1}{2} = (n-1+1)\frac{1}{2} = \frac{1}{2}n$$

Konvolucijski zbroj – izračun

- potpuno preklapanje $x_1(m)$ i $x_2(n-m)$ započinje za $n=4$ i završava za $n=7$

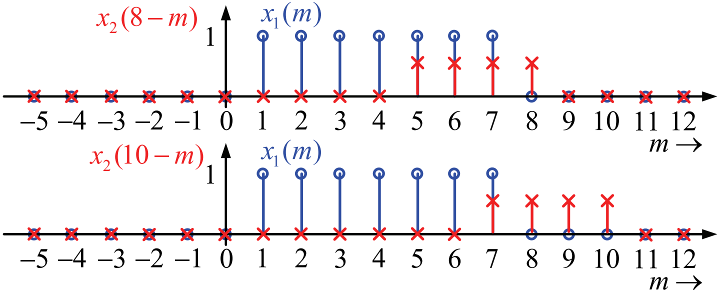


pa su, za interval $4 \leq n \leq 7$, gornja granica zbrajanja $m=n$ i donja $m=n-3$, pa vrijedi

$$y(n)=\sum_{m=n-3}^{n} x_1(m)x_2(n-m)=\sum_{m=n-3}^{n} 1\cdot\frac{1}{2}=(n-(n-3)+1)\frac{1}{2}=2$$

Konvolucijski zbroj – izračun

- ponovno djelomično preklapanje $x_1(m)$ i $x_2(n-m)$ započinje za $n = 8$ i završava za $n = 10$



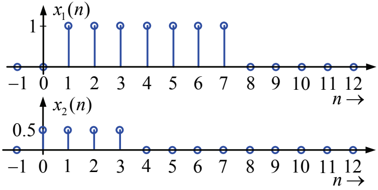
pa su, za interval $8 \leq n \leq 10$, gornja granica zbrajanja $m = 7$ i donja $m = n - 3$, pa vrijedi

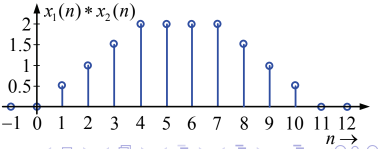
$$y(n) = \sum_{m=n-3}^{7} x_1(m)x_2(n-m) = \sum_{m=n-3}^{7} 1 \cdot \frac{1}{2} = (11-n)\frac{1}{2}$$

Konvolucijski zbroj – izračun

- preklapanje $x_1(m)$ i $x_2(n-m)$ ne postoji za $n < 1$ i $n \geq 11$ i tada je $y(n) = 0$
- finalno, rezultat konvolucije signala x_1 i x_2 je

$$y(n) = \begin{cases} 0, & n < 1; \\ \frac{1}{2}n, & 1 \leq n \leq 3, \\ 2, & 4 \leq n \leq 7, \\ (11-n)\frac{1}{2}, & 8 \leq n \leq 10, \\ 0, & n \geq 11; \end{cases}$$





Impulsni odziv vremenski kontinuiranog sustava

Impulsni odziv vremenski kontinuiranog sustava

- odziv linearnog, vremenski stalnog (LTI), vremenski kontinuiranog sustava,

$$S : [\mathbb{R} \to \mathbb{R}] \to [\mathbb{R} \to \mathbb{R}],$$

na pobudu u, definiran je kao

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = S(u)(t)$$

- odziv ovog sustava na jedinični impuls δ, Diracovu δ funkciju, uz uvjet da je sustav bio miran prije dovođenja pobude, nazivamo impulsnim odzivom sustava i označavamo kao $h = S(\delta)$, dakle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad h(t) = S(\delta)(t)$$

Impulsni odziv vremenski kontinuiranog sustava – primjer

- odziv integratora

$$\int : [\mathbb{R} \to \mathbb{R}] \to [\mathbb{R} \to \mathbb{R}],$$

na pobudu u, definiran je kao

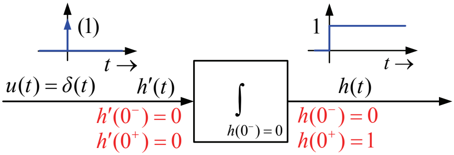
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)\, d\tau = y(0^-) + \int_{0^-}^{t} u(\tau)\, d\tau,$$

- odziv ovog sustava na jedinični impuls δ (Diracovu δ funkciju), uz uvjet da je sustav bio miran, $h(0^-) = y(0^-) = 0$, prije dovođenja pobude, nazivamo impulsnim odzivom sustava i označavamo

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad h(t) = \int_{0^-}^{t} \delta(\tau)\, d\tau = \mu(t)$$

Impulsni odziv vremenski kontinuiranog sustava – primjer

- blokovski dijagram integratora je



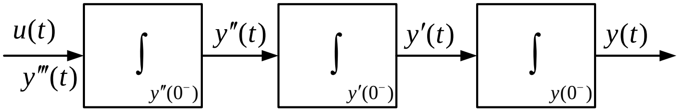
- očigledno je kako će, zbog djelovanja Diracove funkcije u $t = 0$, početni uvjet u $h(0^+)$ biti različit od $h(0^-)$

$$h(0^+) = \underbrace{h(0^-)}_{=0} + \int_{0^-}^{0^+} \delta(\tau)\, d\tau = \mu(0^+) = 1$$

- na slici je ta činjenica naglašena oznakama crvenom bojom

Impulsni odziv vremenski kontinuiranog sustava – primjer

- razmatra se impulsni odziv sustava koji je nastao kao kaskada triju integratora



$$y(t) = y(0^-) + \int_{0^-}^{t} \left[y'(0^-) + \int_{0^-}^{\tau} \left[y''(0^-) + \int_{0^-}^{\lambda} u(\vartheta)\, d\vartheta \right] d\lambda \right] d\tau$$

za miran sustav,

$h(0^-) = y(0^-) = 0,$

$h'(0^-) = y'(0^-) = 0,$

$h''(0^-) = y''(0^-) = 0,$

određujemo impulsni odziv iz

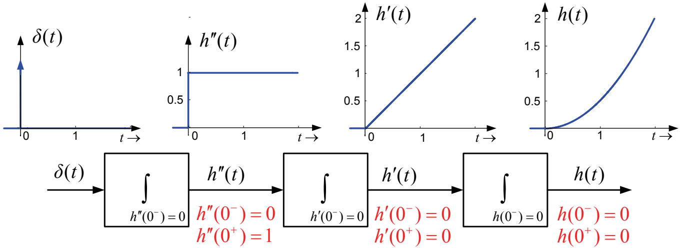
$$h(t) = \int_{0^-}^{t} \left[\int_{0^-}^{\tau} \left[\int_{0^-}^{\lambda} \delta(\vartheta)\, d\vartheta \right] d\lambda \right] d\tau = \frac{t^2}{2}\mu(t)$$

Impulsni odziv vremenski kontinuiranog sustava – primjer

- uzimajući u obzir poznate činjenice, $\forall t \in \mathbb{R}_0^+$,

$$\int_{0^-}^{t} \delta(\tau)\, d\tau = \mu(t), \quad \int_{0^-}^{t} \mu(\tau)\, d\tau = t\mu(t), \quad \int_{0^-}^{t} \tau\, d\tau = \frac{t^2}{2}\mu(t),$$

i uvidom u blokovski dijagram



zaključujemo kako se, djelovanjem Diracove funkcije u $t = 0$, mijenja samo početni uvjet prvog integratora u kaskadi, dok su početni uvjeti ostalih nepromijenjeni (vidi vrijednosti gornjih integrala za gornju granicu 0^+)

Primjer određivanja impulsnog odziva vremenski kontinuiranog sustava

- vremenski kontinuiran sustav zadan je diferencijalnom jednadžbom

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) + 2y(t) = u(t)$$

- sustav je miran, dakle vrijedi $y(0^-) = 0$, i određujemo impulsni odziv sustava, dakle odziv na pobudu $u(t) = \delta(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$
- transformirajmo gornju jednadžbu

$$y'(t) = -2y(t) + u(t)$$

a za $u(t) = \delta(t) \Rightarrow$

$$h'(t) = -2h(t) + \delta(t) \qquad (2)$$

Primjer određivanja impulsnog odziva vremenski kontinuiranog sustava

- impulsni odziv određujemo rješavanjem diferencijalne jednadžbe

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad h'(t) = -2h(t) + \delta(t)$$

- za $t < 0$ impulsni odziv je $h(t) = 0$, a za $t > 0$ jednadžba prelazi u homogenu diferencijalnu jednadžbu

$$h'(t) = -2h(t),$$

- jednostavnim zaključivanjem[2] određujemo njezino rješenje kao

$$h(t) = Ce^{-2t}, \quad \forall t > 0$$

koje očigledno zadovoljava gornju jednadžbu

[2] Postupke za rješavanje diferencijalnih jednadžbi analiziramo kasnije

Primjer određivanja impulsnog odziva vremenski kontinuiranog sustava

- postavlja se pitanje što je s impulsnim odzivom u $t = 0$
- diferencijalna jednadžba mora biti zadovoljena za $\forall t$, pa i za $t = 0$, a do zaključka o vrijednosti $h(0^+)$ dolazimo integriranjem njezine obje strane od $t = 0^-$ do $t = 0^+$

$$\int_{0^-}^{0^+} h'(t)\,dt = -2\underbrace{\int_{0^-}^{0^+} h(t)\,dt}_{=0} + \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\,dt}_{1}$$

$$h(0^+) - \underbrace{h(0^-)}_{=0} = 1 \quad \Rightarrow \quad h(0^+) = 1$$

- napomena: da bi bila zadovoljena jednadžba
$h'(t) = -2h(t) + \delta(t)$
evidentno je da $h'(t)$ sadrži impuls u $t = 0$, dakle $h(t)$ sadrži tek konačni skok, i zato vrijedi $\int_{0^-}^{0^+} h(t)\,dt = 0$

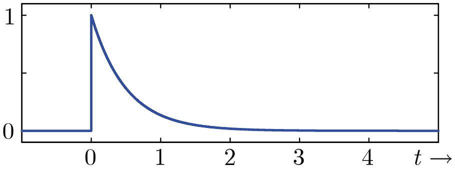
Primjer određivanja impulsnog odziva vremenski kontinuiranog sustava

- iz $h(0^+) = 1$ određujemo konstantu C, dakle iz $h(t) = Ce^{-2t}$ slijedi, za $t = 0^+$,

$$h(0^+) = 1 = C$$

pa je impulsni odziv danog sustava[3]

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad h(t) = e^{-2t}\mu(t)$$



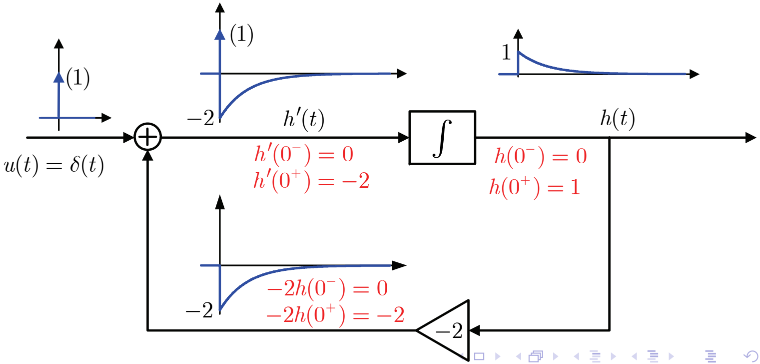
[3] uvrštenjem rješenja u jednadžbu $h'(t) + 2h(t) = \delta(t) \Rightarrow$ $e^{-2t}\delta(t) - 2e^{-2t}\mu(t) + 2e^{-2t}\mu(t) =$ $= e^{-2t}\delta(t) = e^{0}\delta(t) = \delta(t)$ čime je dokazana valjanost rješenja

Primjer određivanja impulsnog odziva vremenski kontinuiranog sustava

- uvidom u blokovski dijagram koji realizira jednadžbu sustava također zaključujemo o odzivu na pobudu jediničnim impulsom, dakle iz

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad h'(t) = -2h(t) + \delta(t)$$

crtamo



Konvolucijski integral

Izvod konvolucijskog integrala

- konvoluciju dvaju signala f i g definiramo s konvolucijskim integralom

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau$$

- razmatramo konvoluciju signala u i Diracove delta funkcije

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (u * \delta)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\delta(t-\tau)\, d\tau = u(t), \quad (3)$$

- pa zaključujemo kako ulazni signal možemo pisati kao[4]

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\delta(t-\tau)\, d\tau$$

[4] Usporediti s $u(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)\delta(n-m)$ za vremenski diskretne signale

Konvolucijski integral

- linearan vremenski stalan kontinuiran sustav definiran je kao

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = S(u)(t) \tag{4}$$

a njegov impulsni odziv

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad h(t) = S(\delta)(t) \tag{5}$$

pa je iz (4), i uz (5), $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$y(t) = S\left\{\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\underbrace{S\{\delta(t-\tau)\}}_{\substack{h(t-\tau) \\ \text{vrem. stalnost!}}}\,d\tau$$

- dakle, uz poznate h i u, odziv vremenski kontinuiranog sustava određujemo pomoću **konvolucijskog integrala**

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t-\tau)\,d\tau = (u * h)(t)$$

Konvolucijski integral – svojstva[5]

- u Cjelini 2 je pokazano da konvolucijski integral možemo definirati i za proizvoljne signale, pa možemo pisati

$$(x_1 * x_2)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)\,d\tau$$

  - komutativnost:
    $(x_1 * x_2)(t) = (x_2 * x_1)(t)$
  - distributivnost:
    $(x_1 * (x_2 + x_3))(t) = (x_1 * x_2)(t) + (x_1 * x_3)(t)$
  - asocijativnost:
    $(x_1 * (x_2 * x_3))(t) = ((x_1 * x_2) * x_3)(t)$
  - pomak:
    za $(E_{T_1}^{-1}(x_1))(t) = x_1(t - T_1)$ i $(E_{T_2}^{-1}(x_2))(t) = x_2(t - T_2)$
    $(E_{T_1}^{-1}(x_1) * E_{T_2}^{-1}(x_2))(t) = y(t - T_1 - T_2)$
  - konvolucija s impulsom
    $(x * \delta)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau = x(t)$

[5] Izvode se na sličan način kao i za konvolucijski zbroj pa je ovdje njihov izvod izostavljen

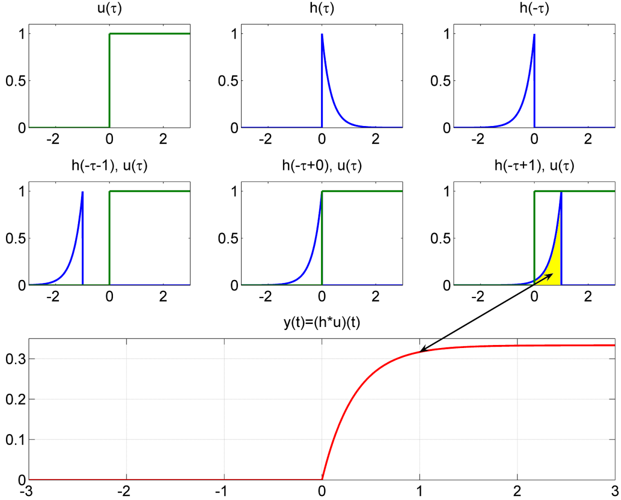
Izračunavanje odziva sustava pomoću konvolucijskog integrala – Primjer 1.

- neka je zadan linearni, vremenski stalni, vremenski kontinuiran sustav, svojim impulsnim odzivom $h(t) = e^{-3t}\mu(t)$
- određuje se odziv na pobudu $u(t) = \mu(t)$
- odziv izračunavamo pomoću konvolucijskog integrala

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)u(\tau)\, d\tau$$

- sa slike 8 je vidljivo kako se $u(\tau)$ i $h(t-\tau)$ ne poklapaju za $t \leq 0$ pa slijedi da je $y(t) = 0$ za $t \leq 0$

Grafička interpretacija izračunavanja konvolucijskog integrala – Primjer 1.



Slika 8: Konvolucijski integral – primjer

Izračunavanje odziva sustava pomoću konvolucijskog integrala – Primjer 1. nastavak

- za $t > 0$, postoji preklapanje $u(\tau)$ i $h(t-\tau)$, pa je

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)u(\tau)\ d\tau = \int_{0}^{t} h(t-\tau)u(\tau)\ d\tau \quad \Rightarrow$$

$$y(t) = \int_{0}^{t} e^{-3(t-\tau)}\ d\tau = e^{-3t}\int_{0}^{t} e^{3\tau}\ d\tau = \frac{1}{3}\left[1 - e^{-3t}\right]$$

- grafička interpretacija postupka konvolucije dana je na slici 8, i treba uočiti kako trenutna vrijednost $y(t)$ odgovara površini preklapanja $u(\tau)$ i $h(t-\tau)$ (žuto na slici)
- tako je za $t = 1$

$$y(1) = \int_{0}^{1} e^{-3(1-\tau)}\ d\tau = \frac{1}{3}\left[1 - e^{-3}\right] = 0.3167$$

Nekauzalni sustavi

- za nekauzalni sustav, odziv započinje prije nego je djelovala pobuda, dakle, sustav anticipira buduću pobudu (radi predikciju)
- nekauzalni vremenski sustavi su često rezultat postupaka sinteze na temelju idealiziranih zahtjeva
- nekauzalni vremenski sustavi ne mogu biti realizirani u stvarnom vremenu
- nekauzalne sustave možemo koristiti u slučajevima kada je dozvoljeno kašnjenje ili kada su konačni signali pohranjeni (poznati u cijelom području definicije)
- ovdje se demonstrira odziv nekauzalnog sustava konvolucijskim integralom

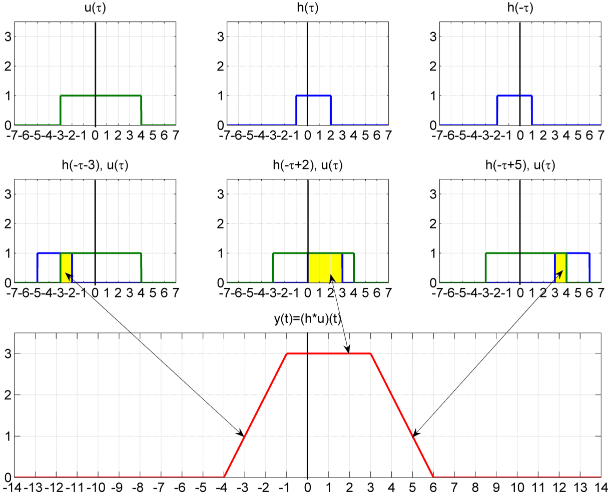
Izračunavanje odziva sustava pomoću konvolucijskog integrala – Primjer 2.

- neka je zadan linearni, vremenski stalni, vremenski kontinuiran sustav, svojim impulsnim odzivom $h(t) = \mu(t+1) - \mu(t-2)$
- određuje se odziv na pobudu $u(t) = \mu(t+3) - \mu(t-4)$
- odziv izračunavamo pomoću konvolucijskog integrala

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)u(\tau)\, d\tau$$

- grafička interpretacija dana je na slici 9
- sa slike 9 je vidljivo kako se $u(\tau)$ i $h(t-\tau)$ preklapaju u tri intervala
  - u intervalu $-4 \leq t \leq -1$, djelomično,
  - u intervalu $-1 \leq t \leq 3$, potpuno (cijeli $h(t-\tau)$ zahvaćen s $u(\tau) \neq 0$),
  - u intervalu $3 \leq t \leq 6$, djelomično,

Izračunavanje odziva sustava pomoću konvolucijskog integrala – Primjer 2. nastavak 1



Slika 9: Grafička interpretacija izračunavanja konvolucijskog integrala – Primjer 2.

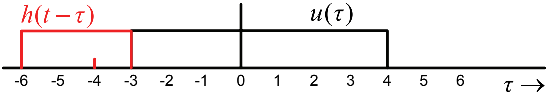
Izračunavanje odziva sustava pomoću konvolucijskog integrala – Primjer 2. nastavak 2

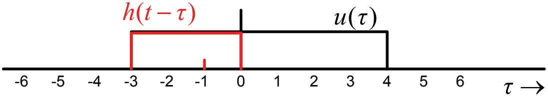
- na slici 9 je ilustrirano kako vrijednosti $y(-3) = 1$, $y(2) = 3$ i $y(5) = 1$, odgovaraju površini produkata $u(\tau) * h(-3-\tau)$, $u(\tau) * h(2-\tau)$, odnosno, $u(\tau) * h(5-\tau)$
- evidentno je kako, zbog nekauzalnosti impulsnog odziva, odziv starta prije pobude
- odziv započinje za $t \geq -4$, trenutak kada se počinju preklapati $u(\tau)$ i $h(t-\tau)$, i u intervalu $-4 \leq t \leq -1$ računa se iz

$$y(t) = \int_{-3}^{t+1} u(\tau) h(t-\tau)\, d\tau = \int_{-3}^{t+1} d\tau = t+4$$

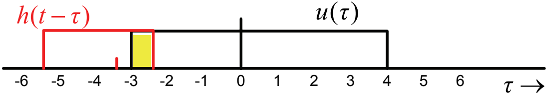
- obrazložimo gornju i donju granicu

Izračunavanje odziva sustava pomoću konvolucijskog integrala – Primjer 2. nastavak 3



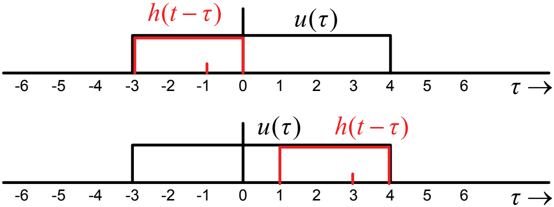


djelomično preklapanje počinje za $t=-4$, a završava za $t=-1$

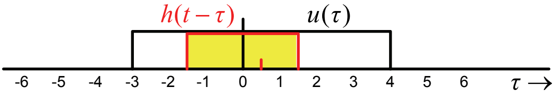


granica integracija za interval $-4 \leq t \leq -1$ su: donja je -3; gornja je $t+1$

Izračunavanje odziva sustava pomoću konvolucijskog integrala – Primjer 2. nastavak 4



potpuno preklapanje počinje za $t=-1$, a završava za $t=3$

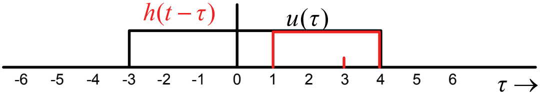


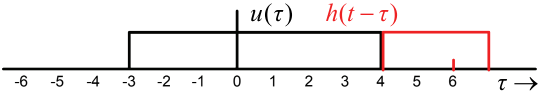
granica integracija za interval $-1 \le t \le 3$ su: donja je $t-2$; gornja je $t+1$

- u intervalu $-1 \leq t \leq 3$ odziv se računa iz

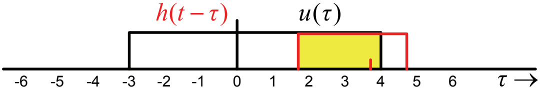
$$y(t) = \int_{t-2}^{t+1} u(\tau)h(t-\tau)\, d\tau = \int_{t-2}^{t+1} d\tau = 3,$$

Izračunavanje odziva sustava pomoću konvolucijskog integrala – Primjer 2. nastavak 5





djelomično preklapanje počinje za $t = 3$, a završava za $t = 6$



granica integracija za interval $3 \le t \le 6$ su: donja je $t-2$; gornja je 4

- u intervalu $3 \le t \le 6$,iz

$$y(t) = \int_{t-2}^{4} u(\tau)h(t-\tau)\, d\tau = \int_{t-2}^{4} d\tau = 6 - t$$

Izračunavanje odziva sustava pomoću konvolucijskog integrala – Primjer 2. nastavak 6

- finalno, odziv sustava $h(t) = \mu(t+1) - \mu(t-2)$, na pobudu $u(t) = \mu(t+3) - \mu(t-4)$, je

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t \leq -4 \\ t+4, & -4 \leq t \leq -1 \\ 3, & -1 \leq t \leq 3 \\ 6-t, & 3 \leq t \leq 6 \\ 0, & t \geq 6 \end{cases}$$

Signali i sustavi

Profesor
Branko Jeren

15. svibnja 2017.

Vremenski diskretni sustavi – model uzlaz-izlaz

- razmatraju se vremenski diskretni sustavi s jednim ulazom i jednim izlazom, opisani s modelom s ulazno-izlaznim varijablama
- razmatramo vremenski diskretne sustave opisane s jednadžbama diferencija
- osnovni cilj u analizi dinamičkih sustava je odrediti odziv (izlaz) sustava na pobudu (ulaz) sustava, uzimajući u obzir interna stanja sustava (početna stanja sustava)
- ovaj cilj se ostvaruje rješavanjem jednadžbi diferencija

Vremenski diskretni sustavi – primjer

- razmatra se sustav za generiranja jeke (eho efekta) signala, koji se može opisati jednadžbom diferencija

$$y(n) = u(n) + \alpha y(n-N), \qquad n \in \mathbb{Z}$$

neka su $N = 4$, $\alpha = 0.6$, $y(n) = 0$ za $n < 0$, i

$$u(n) = \begin{cases} 0 & \text{za } n < 0 \\ 1 & \text{za } n = 0, 1 \\ 0 & \text{za } n > 1 \end{cases}$$

- jednadžba je

$$y(n) = u(n) + 0.6 y(n-4), \qquad n \in \mathbb{Z}$$

- odziv ovog sustava, za $n \in \mathbb{Z}$, određuje se rješavanjem ove jednadžbe

Iterativno rješenje jednadžbe diferencija

- jednadžbu $y(n) = u(n) + 0.6y(n-4)$ rješavamo korak po korak
- iz jednadžbe je očigledno da za određivanje odziva, za $n \geq 0$, treba poznavati pobudu $u(n)$ za $n \geq 0$, i četiri prethodne vrijednosti odziva, $y(n-1)$, $y(n-2)$, $y(n-3)$, $y(n-4)$,
- odziv ovog sustava određujemo za $n \geq 0$, pa u izračunavanju $y(0)$ treba poznavati početne uvjete (interna stanja sustava) $y(-1)$, $y(-2)$, $y(-3)$, $y(-4)$,
- u ovom primjeru početni uvjeti neka su jednaki nuli

Iterativno rješenje jednadžbe diferencija

- jednadžbu $y(n) = u(n) + 0.6y(n-4)$ rješavamo korak po korak, uz $y(-1) = y(-2) = y(-3) = y(-4) = 0$ i

$$u(n) = \begin{cases} 0 & \text{za } n < 0 \\ 1 & \text{za } n = 0, 1 \\ 0 & \text{za } n > 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{llll}
n = 0 & y(0) = u(0) + 0.6y(-4) & = 1 + 0.6 \cdot 0 & = 1 \\
n = 1 & y(1) = u(1) + 0.6y(-3) & = 1 + 0.6 \cdot 0 & = 1 \\
n = 2 & y(2) = u(2) + 0.6y(-2) & = 0 + 0.6 \cdot 0 & = 0 \\
n = 3 & y(3) = u(3) + 0.6y(-1) & = 0 + 0.6 \cdot 0 & = 0 \\
n = 4 & y(4) = u(4) + 0.6y(0) & = 0 + 0.6 \cdot 1 & = 0.6 \\
n = 5 & y(5) = u(5) + 0.6y(1) & = 0 + 0.6 \cdot 1 & = 0.6 \\
n = 6 & y(6) = u(6) + 0.6y(2) & = 0 + 0.6 \cdot 0 & = 0 \\
n = 7 & y(7) = u(7) + 0.6y(3) & = 0 + 0.6 \cdot 0 & = 0 \\
n = 8 & y(8) = u(8) + 0.6y(4) & = 0 + 0.6 \cdot 0.6 & = 0.36 \\
n = 9 & y(9) = u(9) + 0.6y(5) & = 0 + 0.6 \cdot 0.6 & = 0.36
\end{array}$$

Signali i sustavi
školska godina 2016/2017
Cjelina 10.

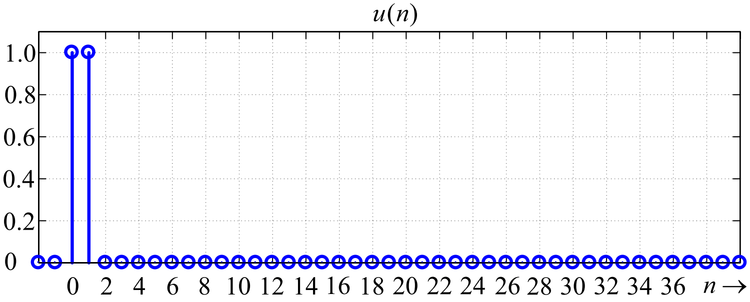
Profesor Branko Jeren

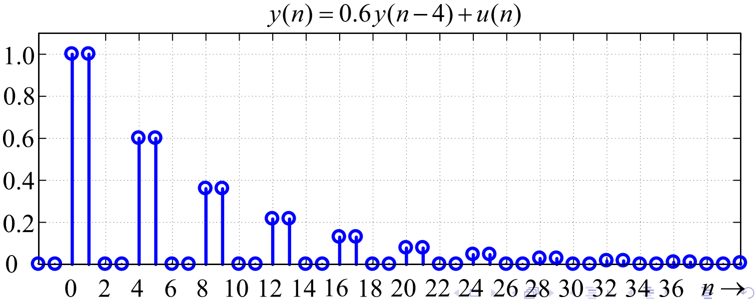
Vremenski diskretni sustavi – opis s jednadžbama diferencija

Odziv linearnih vremenski stalnih diskretnih sustava

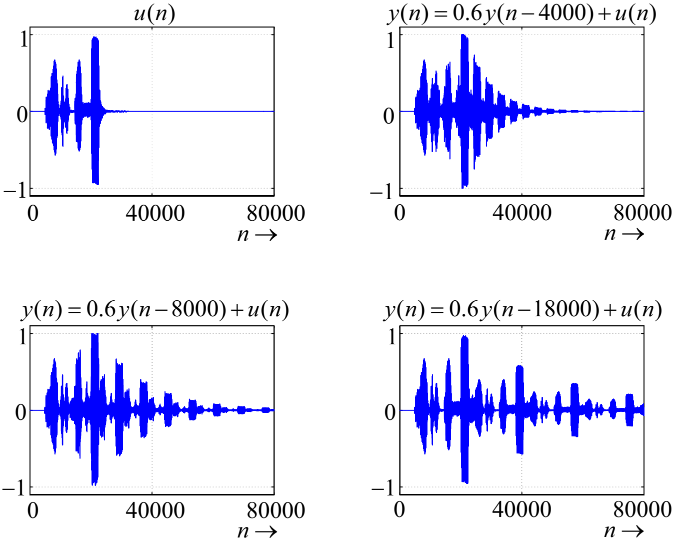
Određivanje impulsnog odziva

Iterativno rješenje jednadžbe diferencija – primjer





Jeka govornog signala



Red sustava

- jednadžbu diferencija $y(n) = u(n) + 0.6y(n-4)$, koja opisuje sustav za generiranje jeke, možemo pisati i kao

$$y(n)+0\cdot y(n-1)+0\cdot y(n-2)+0\cdot y(n-3)-0.6y(n-4) = u(n)$$

- dani sustav opisan je jednadžbom diferencija 4–tog reda
- red sustava odgovara redu jednadžbe diferencija
- vremenski diskretan sustav N–tog reda definiran je ulazno–izlaznom jednadžbom diferencija, za $N \geq M$,

$$y(n) = F(y(n-1), \ldots, y(n-N), u(n), u(n-1), \ldots, u(n-M), n)$$

- u najopćenitijem slučaju $N = M$

Linearan vremenski diskretan sustav N-tog reda

- linearan, vremenski stalan, vremenski diskretan sustav N–tog reda definiran je kao

$$y(n) + a_1 y(n-1) + \ldots + a_{N-1} y(n-N+1) + a_N y(n-N) =$$
$$= b_0 u(n) + b_1 u(n-1) + \ldots + b_{N-1} u(n-N+1) + b_N u(n-N)$$

  gdje su koeficijenti $\{a_m\}$ i $\{b_m\}$ realne konstante[1]

- gornju jednadžbu možemo zapisati i kao

$$\sum_{m=0}^{N} a_m y(n-m) = \sum_{m=0}^{N} b_m u(n-m), \quad \text{za } a_0 = 1, \quad \text{ili}$$

$$y(n) + \sum_{m=1}^{N} a_m y(n-m) = \sum_{m=0}^{N} b_m u(n-m)$$

[1] Ako je neki od koeficijenata funkcija vremena tada govorimo o vremenski varijantnom sustavu koje ne razmatramo u okviru ovog predmeta

Linearan vremenski diskretan sustav N-tog reda

- u literaturi se navodi i drugi oblik zapisa jednadžbe diferencija

$$y(n+N)+a_1y(n+N-1)+\ldots+a_{N-1}y(n+1)+a_Ny(n)=$$
$$=b_0u(n+N)+b_1u(n+N-1)+\ldots+b_{N-1}u(n+1)+b_Nu(n)$$

- ovaj zapis se uglavnom koristi u matematičkoj literaturi i potpuno je ekvivalentan s prije danim
- naime, supstitucijom $n=n'-N$, u gornjoj jednadžbi, dolazimo u polazni oblik jednadžbe diferencija za sustav N-tog reda
- ilustrirajmo tu ekvivalenciju na primjeru sustava drugog reda

Jednadžbe diferencija vremenski diskretnog sustava drugog reda

- razmatra se sustav drugog reda pobuđen s pobudom $u(n) = (0.5)^n \mu(n)$, dakle pobuda započinje u $n = 0$
- razmotrimo tri jednadžbe diferencija koje opisuju isti sustav drugog reda

$$y(n+2) + 0.5y(n+1) + 0.06y(n) = u(n+1) \qquad (1)$$
$$y(n) + 0.5y(n-1) + 0.06y(n-2) = u(n-1) \qquad (2)$$
$$y(n+1) + 0.5y(n) + 0.06y(n-1) = u(n) \qquad (3)$$

- do jednadžbe (2) dolazimo pomakom jednadžbe (1) za dva koraka unazad, a do jednadžbe (3) pomakom za jedan korak unazad[2]
- sve tri jednadžbe daju identičan odziv ali samo onda ako su kroz njih korektno propagirani početni uvjeti

[2]Uočiti kako se u sva tri slučaja radi o jednadžbi diferencija drugog reda jer razlika najviše i najniže diferencije iznosi 2

Jednadžbe diferencija vremenski diskretnog sustava drugog reda

- za $n = 0$, jednadžba (1) prelazi u

$$y(2) + 0.5y(1) + 0.06y(0) = u(1)$$

  pa, uz poznati $u(1)$, $y(0)$ i $y(1)$ predstavljaju početne uvjete za izračun $y(2)$
- $y(0)$ i $y(1)$ su rezultat djelovanja pobude $u(n)$, za $n \geq 0$, i početnih uvjeta (internih stanja sustava) prije djelovanja pobude
- neka su $y(0) = 1$ i $y(1) = -1$
- slično
  - odziv sustava prema jednadžbi (2) je za $n \geq 0$ pa su potrebni početni uvjeti $y(-2)$ i $y(-1)$
  - odziv sustava prema jednadžbi (3) je za $n \geq 1$ pa su potrebni početni uvjeti $y(-1)$ i $y(0)$

Jednadžbe diferencija vremenski diskretnog sustava drugog reda

- neka su zadani početni uvjeti $y(0) = 1$ i $y(1) = -1$ koji se koriste u određivanju odziva prema jednadžbi (1)

$$y(n+2) + 0.5y(n+1) + 0.06y(n) = u(n+1)$$

- početni uvjeti $y(-2)$ i $y(-1)$ potrebni u određivanju odziva prema jednadžbi (2) određuju se iz gornje jednadžbe za $n = -1$ i $n = -2$

za $n = -1$ i uz $y(0) = 1$ i $y(1) = -1$, slijedi

$$\underbrace{y(1)}_{-1} + 0.5\underbrace{y(0)}_{1} + 0.06y(-1) = \underbrace{u(0)}_{0.5^0=1} \Rightarrow y(-1) = 25$$

za $n = -2$ slijedi

$$\underbrace{y(0)}_{1} + 0.5\underbrace{y(-1)}_{25} + 0.06y(-2) = \underbrace{u(-1)}_{0} \Rightarrow y(-2) = -225$$

Jednadžbe diferencija vremenski diskretnog sustava drugog reda

- finalno, odziv sustava, na pobudu $u(n) = (0.5)^n \mu(n)$, bit će, uz dane početne uvjete, identičan za sve tri jednadžbe

$$y(n+2) + 0.5y(n+1) + 0.06y(n) = u(n+1),$$
$$y(1) = -1, \quad y(0) = 1$$

$$y(n) + 0.5y(n-1) + 0.06y(n-2) = u(n-1),$$
$$y(-1) = 25, \quad y(-2) = -225$$

$$y(n+1) + 0.5y(n) + 0.06y(n-1) = u(n),$$
$$y(0) = 1, \quad y(-1) = 25$$

Iterativno određivanje odziva vremenski diskretnih sustava

Jednadžbe diferencija vremenski diskretnog sustava drugog reda

- ilustracija odziva, na pobudu $u(n) = (0.5)^n \mu(n)$, sustava opisanog jednadžbom, uz $y(-1) = 25$ i $y(-2) = -225$,

$$y(n) + 0.5y(n-1) + 0.06y(n-2) = u(n-1)$$

$$n = 0 \quad y(0) + 0.5\underbrace{y(-1)}_{25} + 0.06\underbrace{y(-2)}_{-225} = \underbrace{u(-1)}_{0} \Rightarrow y(0) = 1$$

$$n = 1 \quad y(1) + 0.5\underbrace{y(0)}_{1} + 0.06\underbrace{y(-1)}_{25} = \underbrace{u(0)}_{1} \Rightarrow y(1) = -1$$

$$n = 2 \quad y(2) + 0.5\underbrace{y(1)}_{-1} + 0.06\underbrace{y(0)}_{1} = \underbrace{u(1)}_{0.5} \Rightarrow y(2) = 0.94$$

$$n = 3 \quad y(3) + 0.5\underbrace{y(2)}_{0.94} + 0.06\underbrace{y(1)}_{-1} = \underbrace{u(2)}_{0.25} \Rightarrow y(3) = -0.16$$

$$n = 4 \quad y(4) + 0.5\underbrace{y(3)}_{-0.16} + 0.06\underbrace{y(2)}_{0.94} = \underbrace{u(3)}_{0.125} \Rightarrow y(4) = 0.1486$$

Iterativno rješenje jednadžbe diferencija

- izravni način određivanja odziva diskretnog sustava N-tog reda je izračunavanje $y(n)$ iz

$$y(n) = -\sum_{m=1}^{N} a_m y(n-m) + \sum_{m=0}^{N} b_m u(n-m)$$

- kako bi se odredio odziv sustava $y(n)$, potreban je $2N+1$ podatak
  - N prethodnih vrijednosti izlaza $y(n-1), y(n-2), \ldots, y(n-N)$
  - N prethodnih vrijednosti ulaza $u(n-1), u(n-2), \ldots, u(n-N)$, i
  - trenutna vrijednost ulaza $u(n)$
- u određivanju vrijednosti izlaza $y(0)$, treba poznavati početne uvjete, $y(-1), y(-2), \ldots, y(-N)$, i $u(0)$ (zbog kauzalnosti su ostali $u(-n) = 0$)

Blokovski dijagram jednadžbi diferencija

- jednadžbu diferencija, s kojom je opisan LTI vremenski diskretan sustav,

$$y(n) + \sum_{m=1}^{N} a_m y(n-m) = \underbrace{\sum_{m=0}^{N} b_m u(n-m)}_{w(n)}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

možemo razložiti na dvije jednadžbe

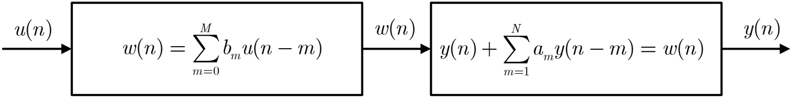
$$w(n) = \sum_{m=0}^{N} b_m u(n-m)$$

$$y(n) + \sum_{m=1}^{N} a_m y(n-m) = w(n)$$

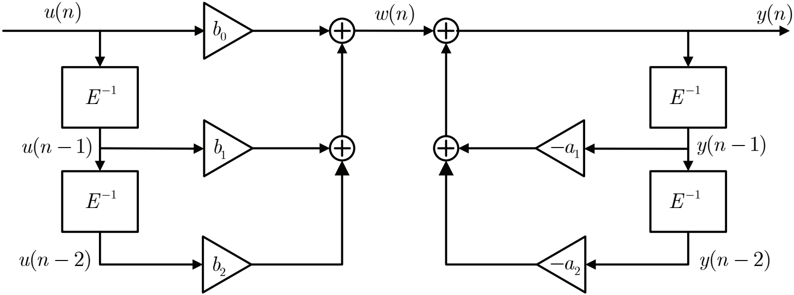
od kojih svaka od njih realizira LTI podsustav polaznog sustava

Blokovski dijagram jednadžbi diferencija

prethodno razlaganje sustava možemo prikazati blokovskim dijagramom

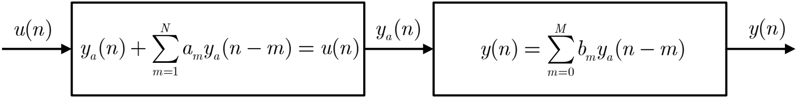


razlaganjem na osnovne blokove postižemo **direktnu realizaciju I** polazne jednadžbe (na slici je $N = M = 2$)

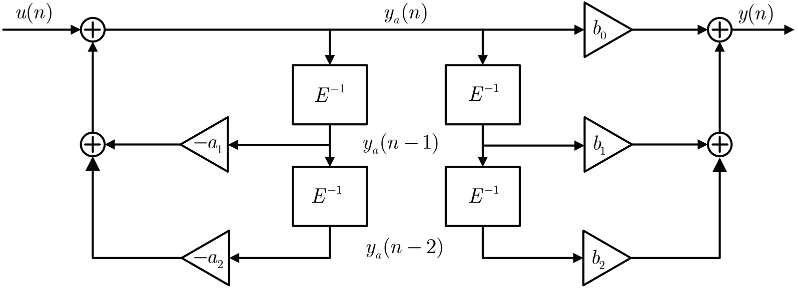


Blokovski dijagram jednadžbi diferencija

zamjenimo li redoslijed LTI podsustava

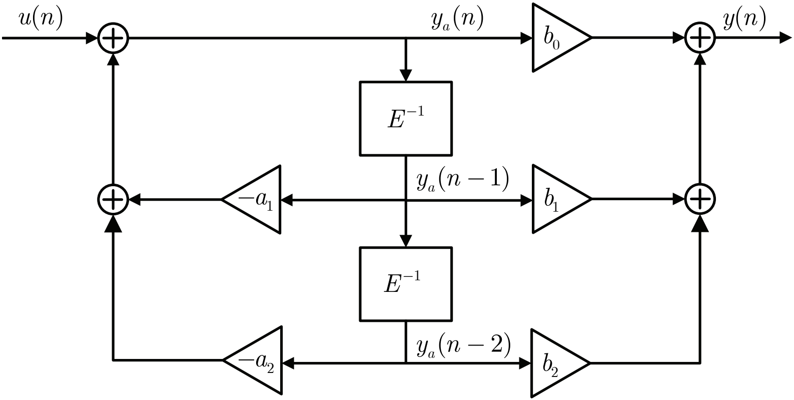


razlaganjem na osnovne blokove za $N = M = 2$ crtamo



Blokovski dijagram jednadžbi diferencija

- prethodni blokovski dijagram reduciramo u **direktnu realizaciju II** polazne jednadžbe diferencija



Operatorski zapis jednadžbe diferencija

Operatorski zapis jednadžbe diferencija

- linearni, vremenski stalni, diskretan sustav opisan je jednadžbom diferencija

$$y(n) + a_1 y(n-1) + \ldots + a_{N-1} y(n-N+1) + a_N y(n-N) =$$
$$b_0 u(n) + b_1 u(n-1) + \ldots + b_{N-1} u(n-N+1) + b_N u(n-N)$$

- jednadžbu zapisujemo pomoću operatora pomaka definiranog kao

za $n \in \mathbb{Z}$

$E^{-1} w(n) = w(n-1)$ – pomak za jedan korak

$E^{-K} w(n) = w(n-K)$ – pomak za K koraka

$$[1 + a_1 E^{-1} + \ldots + a_{N-1} E^{-N+1} + a_N E^{-N}] y(n) =$$
$$= [b_0 + b_1 E^{-1} + \ldots + b_{N-1} E^{-N+1} + b_N E^{-N}] u(n)$$

Operatorski zapis jednadžbe diferencija

- operatorski zapis jednadžbe diferencija

$$[1 + a_1 E^{-1} + \ldots + a_{N-1} E^{-N+1} + a_N E^{-N}] y(n) =$$
$$= [b_0 + b_1 E^{-1} + \ldots + b_{N-1} E^{-N+1} + b_N E^{-N}] u(n)$$

skraćeno pišemo kao

$$A(E^{-1}) y(n) = B(E^{-1}) u(n)$$

gdje su $A(E^{-1})$ i $B(E^{-1})$ složeni operatori

$$A(E^{-1}) = 1 + a_1 E^{-1} + \ldots + a_{N-1} E^{-N+1} + a_N E^{-N}$$
$$B(E^{-1}) = b_0 + b_1 E^{-1} + \ldots + b_{N-1} E^{-N+1} + b_N E^{-N}$$

Klasični postupak rješavanja jednadžbi diferencija

Totalno rješenje jednadžbe diferencija

- već je kazano kako se izračunavanje odziva diskretnog sustava svodi na rješavanje jednadžbe diferencija s kojom je sustav opisan
- primjenom klasičnog postupka rješavanja jednadžbi diferencija potrebno je odrediti homogeno i partikularno rješenje jer njihov zbroj predstavlja totalno rješenje jednadžbe

$$y(n) = y_h(n) + y_p(n)$$

- homogeno rješenje je izravno vezano uz početne uvjete, a partikularno rješenje je izravna posljedica funkcije pobude

Totalno rješenje jednadžbe diferencija

- homogeno rješenje $y_h(n)$ je rješenje homogene jednadžbe $A(E^{-1})y(n) = 0$ pa vrijedi

$$A(E^{-1})y_h(n) = 0$$

- partikularno rješenje $y_p(n)$ rješenje je nehomogene jednadžbe $A(E^{-1})y(n) = B(E^{-1})u(n)$ pa vrijedi

$$A(E^{-1})y_p(n) = B(E^{-1})u(n)$$

- jasno je da je totalni odziv $y(n) = y_h(n) + y_p(n)$ rješenje jednadžbe $A(E^{-1})y(n) = B(E^{-1})u(n)$ jer vrijedi

$$A(E^{-1})[y_h(n) + y_p(n)] = B(E^{-1})u(n)$$
$$\underbrace{A(E^{-1})y_h(n)}_{=0} + A(E^{-1})y_p(n) = B(E^{-1})u(n)$$

Rješenje homogene jednadžbe diferencija

Rješenje homogene jednadžbe diferencija

- izračunavanje odziva diskretnog sustava započinjemo rješavanjem homogene jednadžbe diferencija

$$y_h(n)+a_1 y_h(n-1)+\ldots+a_{N-1} y_h(n-N+1)+a_N y_h(n-N)=0$$

odnosno

$$[1+a_1 E^{-1}+\ldots+a_{N-1} E^{-N+1}+a_N E^{-N}] y_h(n)=0$$

- jednadžba kazuje da je linearna kombinacija $y_h(n)$ i zakašnjelih $y_h(n)$ jednaka nuli za sve vrijednosti n
- ovo je moguće samo onda kada su $y_h(n)$ i svi zakašnjeli $y_h(n)$ istog oblika
- ovaj zahtjev ispunjava eksponencijalna funkcija q^n

Rješenje homogene jednadžbe diferencija

- budući da vrijedi

$$E^{-k}q^n = q^{n-k} = q^{-k}q^n$$

q^{-k} je konstanta pa je pokazano kako je pomakom eksponencijale sačuvan njezin oblik

- to je razlog da odziv homogene jednadžbe diferencija treba biti oblika

$$y_h(n) = cq^n$$

- c i q izračunavamo iz homogene jednadžbe diferencija

$$cq^n + a_1cq^{n-1} + \ldots + a_{N-1}cq^{n-N+1} + a_Ncq^nq^{-N} = 0$$

$$\underbrace{\left(q^N + a_1q^{N-1} + \ldots + a_{N-2}q^2 + a_{N-1}q + a_N\right)}_{0} cq^{n-N} = 0$$

Rješenje homogene jednadžbe diferencija

- za netrivijalno rješenje $cq^n \neq 0$ je

$$q^N + a_1 q^{N-1} + \ldots + a_{N-2} q^2 + a_{N-1} q + a_N = 0$$

- prema tome q ima N rješenja
- homogena jednadžba ima isto N rješenja $c_1 q_1^n, c_2 q_2^n, \ldots, c_N q_N^n$ pa je rješenje homogene jednadžbe linearna kombinacija

$$y_h(n) = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n + \ldots + c_N q_N^n$$

- konstante $c_1, c_2, \ldots, c_N$ određujemo iz
  - početnih uvjeta kada određujemo odziv nepobuđenog sustava
  - iz početnih uvjeta i totalnog rješenja kada određujemo totalni odziv

Karakteristični polinom, karakteristične frekvencije

- polinom $q^N + a_1 q^{N-1} + \ldots + a_{N-2} q^2 + a_{N-1} q + a_N$ nazivamo karakterističnim polinomom sustava
- jednadžbu $q^N + a_1 q^{N-1} + \ldots + a_{N-2} q^2 + a_{N-1} q + a_N = 0$ nazivamo karakterističnom jednadžbom sustava
- korijeni karakteristične jednadžbe $q_1, q_2, \ldots, q_N$ nazivaju se karakteristične vrijednosti ili karakteristične frekvencije ili vlastite frekvencije ili vlastite vrijednosti
- karakteristične frekvencije mogu biti realne ili kompleksne, jednostruke ili višestruke
- kompleksne karakteristične frekvencije dolaze u konjugiranim parovima što je posljedica realnosti koeficijenata karakterističnog polinoma
- vrijednosti tj. položaj karakterističnih frekvencija u kompleksnoj ravnini definira prijelazni odziv sustava kao i stabilnost sustava

Rješenje homogene jednadžbe diferencija za višestruke karakteristične vrijednosti

- za karakteristični korijen q_1 višestrukosti m karakteristična jednadžba, u faktoriziranom obliku, je

$$(q - q_1)^m (q - q_{m+1})(q - q_{m+2}) \cdots (q - q_N) = 0$$

- rješenje homogene jednadžbe je tada

$$y_h(n) = (c_1 + c_2 n + c_3 n^2 + \ldots + c_m n^{m-1}) q_1^n + \\ + c_{m+1} q_{m+1}^n + c_{m+2} q_{m+2}^n + \ldots + c_N q_N^n$$

- korijen $q = 0$ se ne uzima u obzir jer on samo smanjuje red jednadžbe za jedan, odnosno za m u slučaju njegove višestrukosti

Rješenje homogene jednadžbe diferencija za kompleksne karakteristične vrijednosti

- za realne sustave kompleksni korijeni dolaze u konjugirano kompleksnim parovima
- u određivanju homogenog rješenja jednadžbe diferencija konjugirane kompleksne korijene možemo koristiti na isti način kao i realne
- činjenica da su parovi kompleksnih korijena q i q^* konjugirani može biti iskorištena za alternativni prikaz
- tako je za,

$$q = |q|e^{j\beta} \quad \text{i} \quad q^* = |q|e^{-j\beta}$$

rješenje homogene jednadžbe

$$y_h(n) = c_1 q^n + c_2 (q^*)^n = c_1 |q|^n e^{j\beta n} + c_2 |q|^n e^{-j\beta n}$$

Rješenje homogene jednadžbe diferencija za kompleksne karakteristične vrijednosti

- za realne sustave je $y_h(n)$ realna funkcija pa konstante c_1 i c_2 moraju biti konjugirane
- za

$$c_1 = \frac{c}{2}e^{j\theta} \quad \text{i} \quad c_2 = \frac{c}{2}e^{-j\theta}$$

proizlazi

$$y_h(n) = \frac{c}{2}|q|^n[e^{j(\beta n+\theta)} + e^{-j(\beta n+\theta)}]$$

odnosno, finalno,

$$y_h(n) = c|q|^n \cos(\beta n + \theta)$$

Partikularno rješenje jednadžbe diferencija

Partikularno rješenje jednadžbe diferencija

- za sustav opisan nehomogenom jednadžbom diferencija potrebno je odrediti i partikularno rješenje
- određivanje partikularnog rješenja
    - Lagrange-ova metoda varijacije parametara
        - rješenje se dobiva u eksplicitnom obliku
        - primjena rezultira složenim zbrojevima
    - Metoda neodređenog koeficijenta
        - ograničena na pobude oblika polinoma i eksponencijalnih nizova
        - veliki se broj pobuda može aproksimirati gore navedenim nizovima
        - češće se upotrebljava u analizi sustava

Partikularno rješenje jednadžbe diferencija

- za pobudu polinomom oblika

$$u(n) = A_0 + A_1 n + \ldots + A_M n^M$$

- partikularno je rješenje u obliku polinoma M-tog stupnja

$$y_p(n) = K_0 + K_1 n + \ldots + K_M n^M$$

- rješenje se uvijek pretpostavlja u obliku kompletnog polinoma tj. sa svim potencijama, bez obzira da li polinom pobude ima sve članove

Partikularno rješenje jednadžbe diferencija

- slično vrijedi i za nizove

pobuda $u(n)$	partikularno rješenje $y_p(n)$
A (konstanta)	K
$Ar^n, \quad r \neq q_i (i = 1, 2, \ldots, N)$	Kr^n
$Ar^n, \quad r = q_i$	Knr^n
An^M	$K_0 + K_1 n + \ldots + K_M n^M$
$r^n n^M$	$r^n (K_0 + K_1 n + \ldots + K_M n^M)$
$Acos(\omega_0 n)$	$K_1 cos(\omega_0 n) + K_2 sin(\omega_0 n)$
$Asin(\omega_0 n)$	$K_1 cos(\omega_0 n) + K_2 sin(\omega_0 n)$

Rješenje jednadžbe diferencija klasičnim postupkom – primjer

Rješenje jednadžbe diferencija klasičnim postupkom – primjer

- odredimo odziv sustava

$$y(n)-0.9y(n-1)+0.2y(n-2) = u(n)+u(n-1)+u(n-2)$$

- na pobudu $u(n) = -9(-0.9)^n$, za $n \geq 0$, te uz početne uvjete $y(-1) = 6$ i $y(-2) = -3$
- prvo se određuje rješenje homogene jednadžbe ovog sustava

$$y(n) - 0.9y(n-1) + 0.2y(n-2) = 0$$

Rješenje homogene jednadžbe – primjer

- pretpostavimo rješenje oblika cq^n i ono mora zadovoljiti homogenu jednadžbu

$$cq^n - 0.9cq^{n-1} + 0.2cq^{n-2} = 0$$

$$cq^{n-2}(q^2 - 0.9q + 0.2) = 0$$

- pa je karakteristična jednadžba

$$q^2 - 0.9q + 0.2 = 0$$

- korijeni karakteristične jednadžbe – vlastite frekvencije – su

$$q_1 = 0.5 \quad i \quad q_2 = 0.4$$

- pa je rješenje homogene jednadžbe

$$y_h(n) = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n = c_1 \cdot 0.5^n + c_2 \cdot 0.4^n$$

Određivanje partikularnog rješenja – primjer

- budući da je pobuda $u(n) = -9(-0.9)^n$ partikularno rješenje je oblika

$$y_p(n) = K(-0.9)^n$$

- koeficijent K određujemo metodom neodređenog koeficijenta
- uvrštenjem $y_p(n)$ u polaznu jednadžbu slijedi

$$y_p(n) - 0.9y_p(n-1) + 0.2y_p(n-2) = u(n) + u(n-1) + u(n-2)$$

$$K(-0.9)^n - 0.9K(-0.9)^n(-0.9)^{-1} + 0.2K(-0.9)^n(-0.9)^{-2}$$

$$= -9(-0.9)^n - 9(-0.9)^n(-0.9)^{-1} - 9(-0.9)^n(-0.9)^{-2}$$

$$K\underbrace{[1 - 0.9(-0.9)^{-1} + 0.2(-0.9)^{-2}]}_{2.2469} = \underbrace{-9 \cdot [1 + (-0.9)^{-1} + (-0.9)^{-2}]}_{-10.1111}$$

$\Rightarrow K = -4.5$ pa je partikularno rješenje

$$y_p(n) = -4.5(-0.9)^n, \text{ za } n \geq 0$$

Totalni odziv sustava rješenjem jednadžbe diferencija – primjer

- totalno rješenje je $y(n) = y_h(n) + y_p(n)$

$$y(n) = c_1 \cdot 0.5^n + c_2 \cdot 0.4^n - 4.5(-0.9)^n$$

- izračunavanje $y(0)$ i $y(1)$ potrebnih u izračunavanju c_1 i c_2, a uz $y(-1) = 6$ i $y(-2) = -3$, provodimo iz polazne jednadžbe diferencija

$$y(n) = 0.9y(n-1) - 0.2y(n-2) + u(n) + u(n-1) + u(n-2)$$

za $n = 0$

$$y(0) = 0.9\underbrace{y(-1)}_{6} - 0.2\underbrace{y(-2)}_{-3} + \underbrace{u(0)}_{-9} + \underbrace{u(-1)}_{0} + \underbrace{u(-2)}_{0} = -3$$

za $n = 1$

$$y(1) = 0.9\underbrace{y(0)}_{-3} - 0.2\underbrace{y(-1)}_{6} + \underbrace{u(1)}_{-9(-0.9)} + \underbrace{u(0)}_{-9} + \underbrace{u(-1)}_{0} = -4.8$$

Signali i sustavi
školska godina 2016/2017
Cjelina 10.

Profesor Branko Jeren

Vremenski diskretni sustavi – opis s jednadžbama diferencija

Odziv linearnih vremenski stalnih diskretnih sustava

Određivanje impulsnog odziva

Totalni odziv sustava rješenjem jednadžbe diferencija – primjer

- pa iz

$$y(n) = c_1 \cdot 0.5^n + c_2 \cdot 0.4^n - 4.5 \cdot (-0.9)^n$$

za $n = 0$ i $n = 1$ određujemo c_1 i c_2

$$\left. \begin{aligned} y(0) &= \quad c_1 + c_2 - 4.5 = -3 \\ y(1) &= \quad 0.5c_1 + 0.4c_2 - 4.5(-0.9) = -4.8 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \qquad \begin{aligned} c_1 &= -94.5 \\ c_2 &= 96 \end{aligned}$$

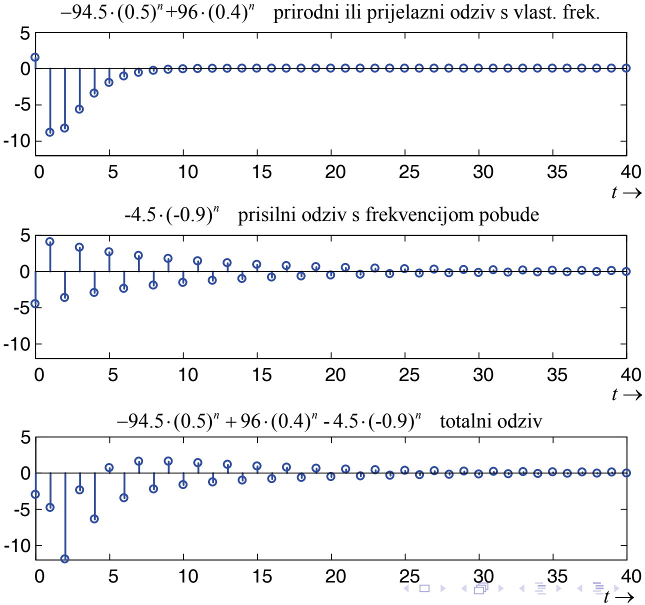
totalni odziv je

$$y(n) = -94.5 \cdot (0.5)^n + 96 \cdot (0.4)^n - 4.5 \cdot (-0.9)^n$$

pri čemu totalni odziv interpretiramo

$$y(n) = \underbrace{\left(-94.5 \cdot (0.5)^n + 96 \cdot (0.4)^n\right)}_{\substack{\text{prirodni ili} \\ \text{prijelazni odziv} \\ \text{(vlastite frekvencije)}}} + \underbrace{\left(-4.5 \cdot (-0.9)^n\right)}_{\substack{\text{prisilni} \\ \text{odziv} \\ \text{(frekvencija pobude)}}}, \qquad n \geq 0$$

Totalni odziv sustava rješenjem jednadžbe diferencija – primjer



Odziv linearnog vremenski diskretnog sustava kao zbroj odziva nepobuđenog i odziva mirnog sustava

Odziv linearnog vremenski diskretnog sustava kao zbroj odziva nepobuđenog i odziva mirnog sustava

- u interpretaciji inkrementalno linearnih sustava u Cjelini 8 pokazano je da se odziv sustava može interpretirati kao

totalni odziv = odziv nepobuđenog sustava+odziv mirnog sustava

odnosno

$$y(n) = y_0(n) + y_m(n)$$

- odziv nepobuđenog sustava, $y_0(n)$, je komponenta totalnog odziva koja je posljedica samo djelovanja početnih uvjeta (uz pobudu jednaku nula)
- odziv mirnog sustava, $y_m(n)$, je komponenta odziva koja je posljedica djelovanja pobude uz početne uvjete jednake nuli

Odziv nepobuđenog diskretnog sustava

- za nepobuđeni vremenski diskretan sustav N-tog reda, opisan s jednadžbom diferencija N-tog reda, odziv $y_0(n)$ je jednak rješenju homogene jednadžbe diferencija $y_h(n)$, pa je

$$y_0(n) = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n + \ldots + c_N q_N^n$$

- koeficijente $c_1, c_2, \ldots, c_N$ određujemo iz N početnih uvjeta $y(-1), y(-2), \ldots, y(-N)$

Odziv nepobuđenog sustava i vlastite frekvencije

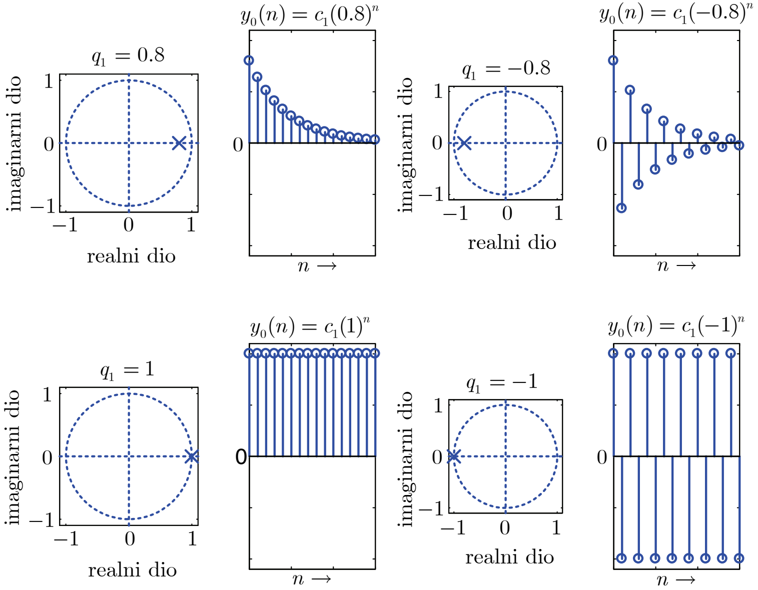
Odziv nepobuđenog diskretnog sustava

- nepobuđeni sustav titra eksponencijalama čije su frekvencije vlastite frekvencije sustava, pa je za pojedinu vlastitu frekvenciju q_1, komponenta nepobuđenog odziva q_1^n
- neka je u općem slučaju $q \in \mathbb{C}$ pa možemo pisati $q = |q|e^{j\beta}$, a kako je modul $|e^{j\beta}| = 1$ za svaki n, slijedi za:

$$\begin{array}{lll} |q| < 1 & q^n \to 0 & \text{za } n \to \infty \\ |q| > 1 & q^n \to \infty & \text{za } n \to \infty \\ |q| = 1 & |q|^n = 1 & \text{za } \forall n \end{array}$$

- slijede primjeri koji ilustriraju odziv nepobuđenog sustava za razne vrijednosti q

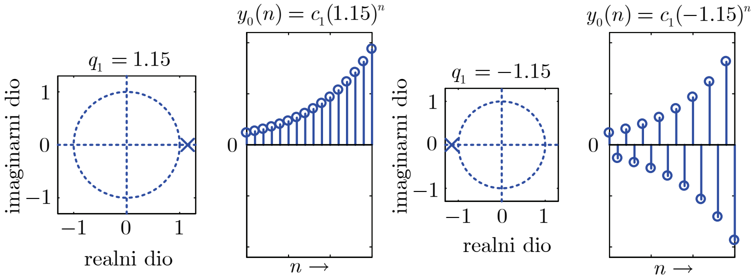
Odziv nepobuđenog sustava i vlastite frekvencije



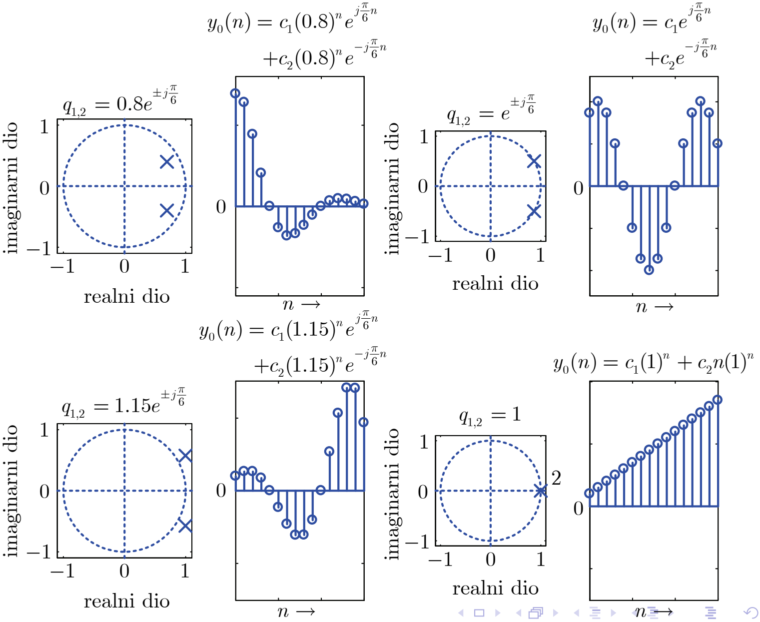
Signali i sustavi
školska godina 2016/2017
Cjelina 10.

Profesor
Branko Jeren

Odziv nepobuđenog sustava i vlastite frekvencije



Odziv nepobuđenog sustava i vlastite frekvencije



Odziv pobuđenog sustava

Odziv pobuđenog sustava

- kako je kazano totalni odziv je zbroj odziva nepobuđenog sustava i odziva mirnog sustava, dakle

$$y(n) = \sum_{m=1}^{N} c_m q_m^n + \textit{odziv mirnog sustava}$$

- odziv mirnog sustava na bilo koju pobudu možemo odrediti
  - klasičnim rješavanjem jednadžbe diferencija
  - korištenjem konvolucijskog zbroja

Odziv sustava rješenjem jednadžbe diferencija – primjer

- odredimo totalni odziv sustava prije razmatranog sustava (odziv određen klasičnim postupkom rješavanja jednadžbe diferencija)

$$y(n) - 0.9y(n-1) + 0.2y(n-2) = u(n) + u(n-1) + u(n-2)$$

- na pobudu $u(n) = -9(-0.9)^n$, za $n \geq 0$, te uz početne uvjete $y(-1) = 6$ i $y(-2) = -3$ ali tako da odziv izračunavamo kao zbroj odziva nepobuđenog sustava i odziva mirnog sustava
- prvo određujemo odziv nepobuđenog sustava za dane početne uvjete
- u drugom koraku određujemo odziv mirnog sustava na zadanu pobudu

Odziv nepobuđenog sustava – primjer

- nepobuđeni sustav zadan je jednadžbom diferencija

$$y(n) - 0.9y(n-1) + 0.2y(n-2) = 0,$$

  s početnim uvjetima $y(-2) = -3$ i $y(-1) = 6$.

- pretpostavimo rješenje oblika cq^n

$$cq^n - 0.9cq^{n-1} + 0.2cq^{n-2} = 0$$

$$cq^{n-2}(q^2 - 0.9q + 0.2) = 0$$

- pa je karakteristična jednadžba

$$q^2 - 0.9q + 0.2 = 0$$

Odziv nepobuđenog sustava – primjer

- korijeni karakteristične jednadžbe su

$$q_1 = 0.5 \quad q_2 = 0.4$$

- pa je rješenje homogene jednadžbe, odnosno odziv nepobuđenog sustava

$$y_h(n) = y_0(n) = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n = c_1 \cdot 0.5^n + c_2 \cdot 0.4^n$$

- konstante c_1 i c_2 određuju se iz početnih uvjeta $y(-2) = -3$ i $y(-1) = 6$ i

$$\left.\begin{aligned} y_h(-1) &= c_1 \cdot 0.5^{-1} + c_2 \cdot 0.4^{-1} = 6 \\ y_h(-2) &= c_1 \cdot 0.5^{-2} + c_2 \cdot 0.4^{-2} = -3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow c_1 = 18, \; c_2 = -12$$

pa je odziv nepobuđenog sustava

$$y_0(n) = 18 \cdot (0.5)^n - 12 \cdot (0.4)^n, \quad n \geq 0$$

Odziv mirnog sustava rješenjem jednadžbe diferencija – primjer

- preostaje odrediti odziv mirnog sustava

$$y_m(n) = c_1 \cdot 0.5^n + c_2 \cdot 0.4^n + y_p(n) \quad n \geq 0$$

  dakle, treba odrediti partikularno rješenje $y_p(n)$ te c_1 i c_2 za $y(-1) = 0$ i $y(-2) = 0$

- kako je pobuda $u(n) = -9(-0.9)^n$ partikularno rješenje je oblika

$$y_p(n) = K \cdot (-0.9)^n$$

- partikularno rješenje je određeno prije (slučaj klasičnog rješavanja jednadžbe diferencija za isti primjer)

$$y_p(n) = -4.5 \cdot (-0.9)^n \quad n \geq 0$$

  pa je odziv mirnog sustava

$$y_m(n) = c_1 \cdot 0.5^n + c_2 \cdot 0.4^n - 4.5 \cdot (-0.9)^n \quad n \geq 0$$

Odziv mirnog sustava rješenjem jednadžbe diferencija – primjer

- za miran sustav je $y(-1) = y(-2) = 0$
- odziv mirnog sustava je posljedica djelovanja pobude za $n \geq 0$, pa se c_1 i c_2 izračunavaju iz odziva mirnog sustava za $n \geq 0$
- zato je potrebno iz polazne jednadžbe

$$y(n) - 0.9y(n-1) + 0.2y(n-2) = u(n) + u(n-1) + u(n-2)$$

odrediti $y_m(0)$ i $y_m(1)$

za $n = 0$

$$y_m(0) = 0.9\underbrace{y(-1)}_{0} - 0.2\underbrace{y(-2)}_{0} + \underbrace{u(0)}_{-9} + \underbrace{u(-1)}_{0} + \underbrace{u(-2)}_{0} = -9$$

$n = 1$

$$y_m(1) = 0.9\underbrace{y(0)}_{-9} - 0.2\underbrace{y(-1)}_{0} + \underbrace{u(1)}_{-9\cdot(-0.9)} + \underbrace{u(0)}_{-9} + \underbrace{u(-1)}_{0} = -9$$

Odziv mirnog sustava rješenjem jednadžbe diferencija – primjer

- iz rješenja za odziv mirnog sustava

$$y_m(n) = c_1 \cdot 0.5^n + c_2 \cdot 0.4^n - 4.5 \cdot (-0.9)^n$$

$$\begin{aligned}
&\text{za } n = 0 \Rightarrow y_m(0) = -9 = c_1 + c_2 - 4.5 \\
&\text{za } n = 1 \Rightarrow y_m(1) = -9 = 0.5c_1 + 0.4c_2 - 4.5 \cdot (-0.9)
\end{aligned}$$

iz dvije jednadžbe s dvije nepoznanice

$$\left.\begin{array}{rcr} c_1 + c_2 & = & -4.50 \\ 0.5c_1 + 0.4c_2 & = & -13.05 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad c_1 = -112.5, \; c_2 = 108$$

pa je odziv mirnog sustava

$$y_m(n) = -112.5 \cdot 0.5^n + 108 \cdot 0.4^n - 4.5 \cdot (-0.9)^n \quad n \geq 0$$

Totalni odziv sustava kao zbroj odziva nepobuđenog i mirnog sustava – primjer

- totalni odziv sustava je $y(n) = y_0(n) + y_m(n)$

$$y(n) = \underbrace{18 \cdot (0.5)^n - 12 \cdot (0.4)^n}_{\text{odziv nepobuđenog sustava}} \quad +$$

$$\underbrace{-112.5 \cdot 0.5^n + 108 \cdot 0.4^n - 4.5 \cdot (-0.9)^n}_{\text{odziv mirnog sustava}} \quad n \geq 0$$

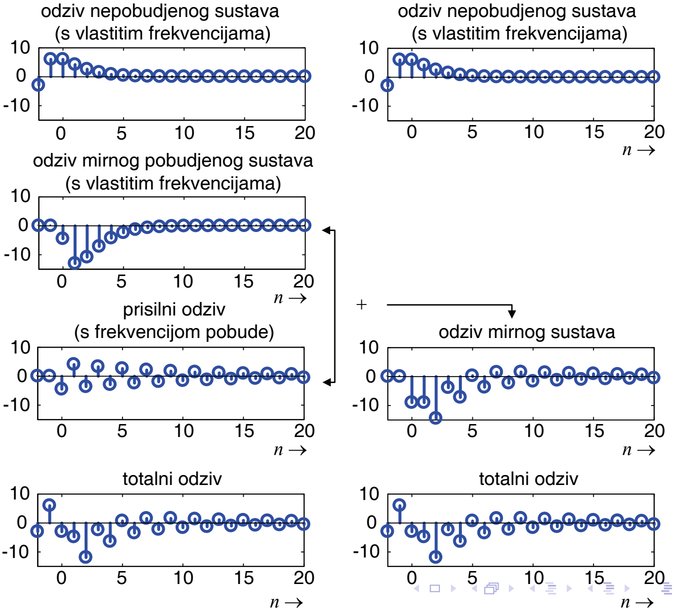
ili, kako je prije pokazano,

$$y(n) = \underbrace{18 \cdot (0.5)^n - 12 \cdot (0.4)^n - 112.5 \cdot 0.5^n + 108 \cdot 0.4^n}_{\text{prirodni odziv}} \quad +$$

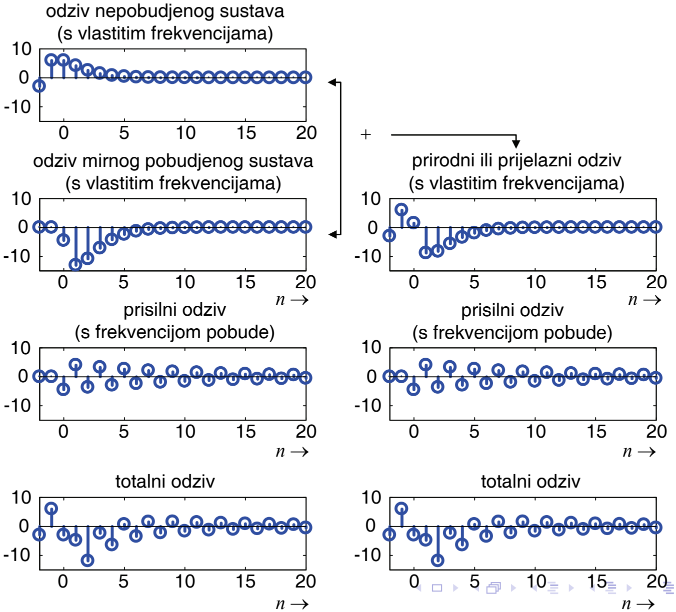
$$\underbrace{-4.5 \cdot (-0.9)^n}_{\text{prisilni odziv}}$$

$$y(n) = \underbrace{-94.5 \cdot (0.5)^n + 96(0.4)^n}_{\text{prirodni odziv}} \underbrace{-4.5 \cdot (-0.9)^n}_{\text{prisilni odziv}}, \; n \geq 0$$

Totalni odziv sustava kao zbroj odziva nepobuđenog i mirnog sustava – primjer



Totalni odziv sustava kao zbroj odziva nepobuđenog i mirnog sustava – primjer



Određivanje impulsnog odziva

Određivanje impulsnog odziva

- pokazano je da odziv pobuđenog mirnog sustava možemo odrediti konvolucijskim zbrojem

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)u(n-k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n-m)u(m)$$

- potrebno je odrediti impulsni odziv sustava, dakle totalni odziv sustava na pobudu $u(n) = \delta(n)$ uz početne uvjete jednake nuli

Određivanje impulsnog odziva – korak po korak

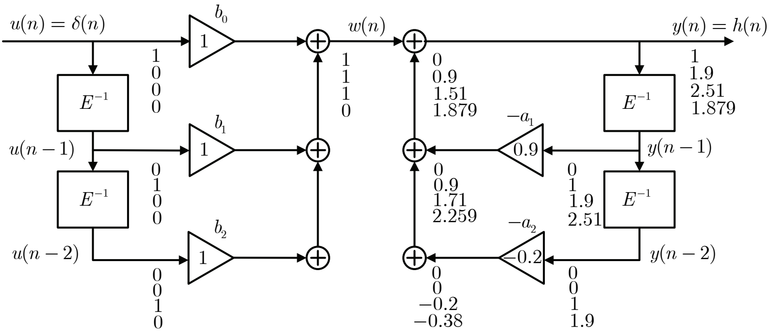
- za prije razmatrani sustav odredimo impulsni odziv $h(n)$
- sustav je bio zadan jednadžbom diferencija

$$y(n) - 0.9y(n-1) + 0.2y(n-2) = u(n) + u(n-1) + u(n-2)$$

- impulsni odziv određujemo za miran sustav (prije dovođenja pobude interno stanje sustava je nula) $y(-1) = h(-1) = 0$ i $y(-2) = h(-2) = 0$ i pobudu $u(n) = \delta(n)$
- izračun korak po korak ilustriramo na blokovskom dijagramu na narednoj prikaznici (direktna realizacija I)
- uočavamo da vanjska pobuda, Kroneckerov delta u koraku nula, "ubacuje" informaciju (energiju) u sustav čime unutarnje stanje sustava postaje različito od nule
- za korake $n \geq 1$ na ulazu u sustav je nula i sustav se dalje odziva kao nepobuđeni sustav (koji titra zbog postojanja unutarnjeg stanja)

Određivanje impulsnog odziva – korak po korak

$$y(n) = \underbrace{u(n) + u(n-1) + u(n-2)}_{w(n)} + 0.9y(n-1) - 0.2y(n-2)$$



Određivanje impulsnog odziva – 1. način

- odredimo odziv sustava $h(n)$ rješavanjem jednadžbe diferencija
- impulsni odziv određujemo za miran sustav $y(-1) = h(-1) = 0$ i $y(-2) = h(-2) = 0$ i pobudu $u(n) = \delta(n)$ pa pišemo

$$h(n) - 0.9h(n-1) + 0.2h(n-2) = \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2)$$

- očigledno je da gornja jednadžba prelazi u homogenu jednadžbu za $n > 2$ i da se određivanje impulsnog odziva svodi na određivanje rješenja homogene jednadžbe za $n > 2$ uz početne uvjete u $h(1)$ i $h(2)$

Određivanje impulsnog odziva – 1. način

- rješenje homogene jednadžbe ovog sustava, prije određeno, je

$$h(n) = c_1(0.5)^n + c_2(0.4)^n, \quad n > 2 \tag{4}$$

- početni uvjeti $h(1)$ i $h(2)$, potrebni u određivanju konstanti c_1 i c_2, izračunavaju se korak po korak iz polazne jednadžbe

$$h(n) = 0.9h(n-1) - 0.2h(n-2) + \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2)$$

$$h(0) = 0.9\underbrace{h(-1)}_{0} - 0.2\underbrace{h(-2)}_{0} + \underbrace{\delta(0)}_{1} + \underbrace{\delta(-1)}_{0} + \underbrace{\delta(-2)}_{0} = 1$$

$$h(1) = 0.9\underbrace{h(0)}_{1} - 0.2\underbrace{h(-1)}_{0} + \underbrace{\delta(1)}_{0} + \underbrace{\delta(0)}_{1} + \underbrace{\delta(-1)}_{0} = 1.9$$

$$h(2) = 0.9\underbrace{h(1)}_{1.9} - 0.2\underbrace{h(0)}_{1} + \underbrace{\delta(2)}_{0} + \underbrace{\delta(1)}_{0} + \underbrace{\delta(0)}_{1} = 2.51$$

Određivanje impulsnog odziva – 1. način

- uz sada poznate $h(1)$ i h(2) određujemo konstante c_1 i c_2

$$\left.\begin{aligned} h(1) &= c_1(0.5)^1 + c_2(0.4)^1 = 1.9 \\ h(2) &= c_1(0.5)^2 + c_2(0.4)^2 = 2.51 \end{aligned}\right\} c_1 = 35, \quad c_2 = -39$$

- pa je

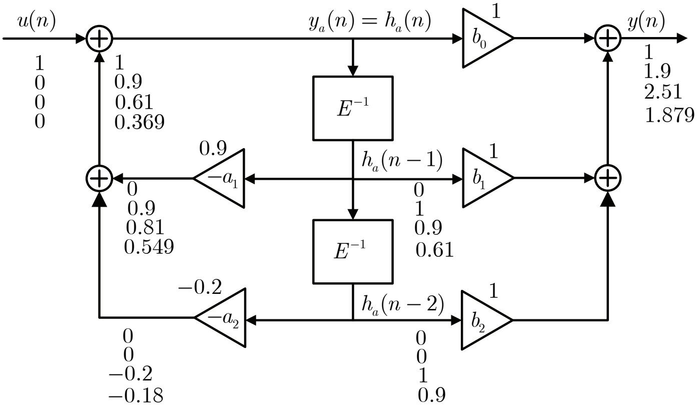
$$h(n) = 35 \cdot (0.5)^n - 39 \cdot (0.4)^n \quad n > 0$$

- gornje rješenje vrijedi za $n > 0$ jer su $h(1)$ i $h(2)$ početni uvjeti koji zadovoljavaju gornju jednadžbu
- preostaje odgovoriti što je se $h(0)$?
- uvidom u blokovski dijagram zaključujemo da postoji izravna veza s ulaza na izlaz pa je za $n = 0$, $h(0) = \delta(n) = 1$, a isto je pokazano izračunom korak po korak
- cjelokupni impulsni odziv je zato

$$h(n) = \delta(n) + [35 \cdot (0.5)^n - 39 \cdot (0.4)^n]\mu(n-1) \quad n \geq 0$$

Određivanje impulsnog odziva – 2. način

- impulsni odziv sustava $h(n)$ možemo odrediti postupkom koji se temelji na razlaganju sustava direktnom realizacijom II



Određivanje impulsnog odziva – 2. način

- impulsni odziv sustava $h(n)$ izračunavamo u dva koraka
- prvo izračunamo impulsni odziv podsustava opisanog jednadžbom

$$h_a(n) - 0.9 \cdot h_a(n-1) + 0.2 \cdot h_a(n-2) = \delta(n)$$

i zatim

$$h(n) = h_a(n) + h_a(n-1) + h_a(n-2)$$

- odredimo $h_a(n)$
- za $n > 0$ rješavamo homogenu jednadžbu

$$h_a(n) - 0.9 \cdot h_a(n-1) + 0.2 \cdot h_a(n-2) = 0$$

čije je rješenje

$$h_a(n) = c_1 \cdot (0.5)^n + c_2 \cdot (0.4)^n \quad n > 0$$

Određivanje impulsnog odziva – 2. način

- uz početne uvjete $h_a(-1) = 0$ i $h_a(0) = 1$ određujemo konstante c_1 i c_2

$$\left.\begin{aligned} c_1 \cdot (0.5)^{-1} + c_2 \cdot (0.4)^{-1} = 0 \\ c_1 \cdot (0.5)^{\,0} + c_2 \cdot (0.4)^{\,0} = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow c_1 = 5, \quad c_2 = -4$$

pa je

$$h_a(n) = 5 \cdot (0.5)^n - 4 \cdot (0.4)^n \quad n \geq 0$$

- impulsni odziv sustava, $h(n)$, određujemo iz

$$\begin{aligned} h(n) &= h_a(n) + h_a(n-1) + h_a(n-2) \\ &= 5 \cdot (0.5)^n - 4 \cdot (0.4)^n + 5 \cdot (0.5)^{n-1} - 4 \cdot (0.4)^{n-1} \\ &\quad + 5 \cdot (0.5)^{n-2} - 4 \cdot (0.4)^{n-2} \\ &= 5 \cdot (0.5)^n [1 + (0.5)^{-1} + (0.5)^{-2}] \\ &\quad - 4 \cdot (0.4)^n [1 + (0.4)^{-1} + (0.4)^{-2}] \\ &= 35 \cdot (0.5)^n - 39 \cdot (0.4)^n, \quad n \geq 2, \end{aligned}$$

Određivanje impulsnog odziva – 2. način

- za $n = 0, 1$

$$h(0) = h_a(0) + \underbrace{h_a(-1)}_{0} + \underbrace{h_a(-2)}_{0} = 5 \cdot (0.5)^0 - 4 \cdot (0.4)^0 = 1$$

$$h(1) = h_a(1) + \underbrace{h_a(0)}_{1} + \underbrace{h_a(-1)}_{0} = \underbrace{5 \cdot (0.5)^1 - 4 \cdot (0.4)^1}_{0.9} + 1 = 1.9$$

Samostalni rad studenata

Odziv sustava za generiranje jeke

- treba naći odziv diskretnog sustava opisanog jednadžbom

$$y(n) - 0.6y(n-4) = u(n), \qquad n \in \mathbb{Z}$$

- na pobudu

$$u(n) = \begin{cases} 0 & \text{za } n < 0 \\ 1 & \text{za } n = 0, 1 \\ 0 & \text{za } n > 1 \end{cases}$$

- neka je sustav miran dakle
  $y(-1) = y(-2) = y(-3) = y(-4) = 0$
- za $n > 1$, $u(n) = 0$ i gornja jednadžba postaje homogena

Odziv sustava za generiranje jeke

- dakle, problem rješavanja polazne jednadžbe

$$y(n) - 0.6y(n-4) = u(n)$$

svodimo na problem rješavanja homogene jednadžbe

$$y(n) - 0.6y(n-4) = 0 \quad \text{za } n > 1$$

čiji su početni uvjeti tada

$$y_h(1) = y(1),\ y_h(0) = y(0),\ y_h(-1) = y(-1) \text{ i } y_h(-2) = y(-2)$$

- $y(1)$ i $y(0)$ određujemo iterativnim postupkom iz polazne jednadžbe uz primjenu zadane pobude, a $y(-1)$ i $y(-2)$ su zadani početni uvjeti

Odziv sustava za generiranje jeke

- za pretpostavljeno rješenje homogene jednadžbe $y_h(n) = cq^n$ iz

$$y(n) - 0.6y(n-4) = 0,$$

- slijedi

$$\begin{aligned} cq^n - 0.6cq^{n-4} &= 0 \\ cq^{n-4}(q^4 - 0.6) &= 0 \end{aligned}$$

- pa je karakteristična jednadžba i karakteristične frekvencije

$$q^4 - 0.6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} q_1 = & -0.8801 & \\ q_2 = & j0.8801 & = 0.8801e^{j\frac{\pi}{2}} \\ q_3 = & -j0.8801 & = 0.8801e^{-j\frac{\pi}{2}} \\ q_4 = & 0.8801 & \end{cases}$$

Odziv sustava za generiranje jeke

- rješenje homogene jednadžbe je

$$y_h(n) = c_1(-0.8801)^n + c_2(j0.8801)^n + c_3(-j0.8801)^n + c_4(0.8801)^n$$

- rješenje vrijedi za $n > 1$ pa su početni uvjeti, potrebni u postupku određivanja c_1, c_2, c_3, c_4, vrijednosti $y_h(1), y_h(0), y_h(-1)$ i $y_h(-2)$
- $y_h(-1) = y(-1)$ i $y_h(-2) = y(-2)$ su zadani početni uvjeti, a $y_h(0) = y(0)$ i $y_h(1) = y(1)$ izračunavamo iterativnim postupkom iz nehomogene jednadžbe dakle za zadanu pobudu

Odziv sustava za generiranje jeke

- uz $y_h(-1) = y(-1) = 0$ i $y_h(-2) = y(-2) = 0$
- iz polazne jednadžbe slijedi za:

$$
\begin{array}{lll}
n = 0 & y(0) = u(0) + 0.6y(-4) = 1 & \Rightarrow y_h(0) = y(0) = 1 \\
n = 1 & y(1) = u(1) + 0.6y(-3) = 1 & \Rightarrow y_h(1) = y(1) = 1
\end{array}
$$

- pa iz

$$y_h(n) = c_1(-0.8801)^n + c_2(j0.8801)^n + c_3(-j0.8801)^n + c_4(0.8801)^n$$

- slijedi

$$
\begin{aligned}
y_h(1) &= c_1(-0.8801)^1 + c_2(j0.8801)^1 + c_3(-j0.8801)^1 + c_4(0.8801)^1 \\
y_h(0) &= c_1(-0.8801)^0 + c_2(j0.8801)^0 + c_3(-j0.8801)^0 + c_4(0.8801)^0 \\
y_h(-1) &= c_1(-0.8801)^{-1} + c_2(j0.8801)^{-1} + c_3(-j0.8801)^{-1} + c_4(0.8801)^{-1} \\
y_h(-2) &= c_1(-0.8801)^{-2} + c_2(j0.8801)^{-2} + c_3(-j0.8801)^{-2} + c_4(0.8801)^{-2}
\end{aligned}
$$

Odziv sustava za generiranje jeke

- izračunati su koeficijenti

$$
\begin{aligned}
c_1 &= -0.0341 \\
c_2 &= 0.2500 - j0.2841 = 0.3784e^{-j0.8491} \\
c_3 &= 0.2500 + j0.2841 = 0.3784e^{j0.8491} \\
c_4 &= 0.5341
\end{aligned}
$$

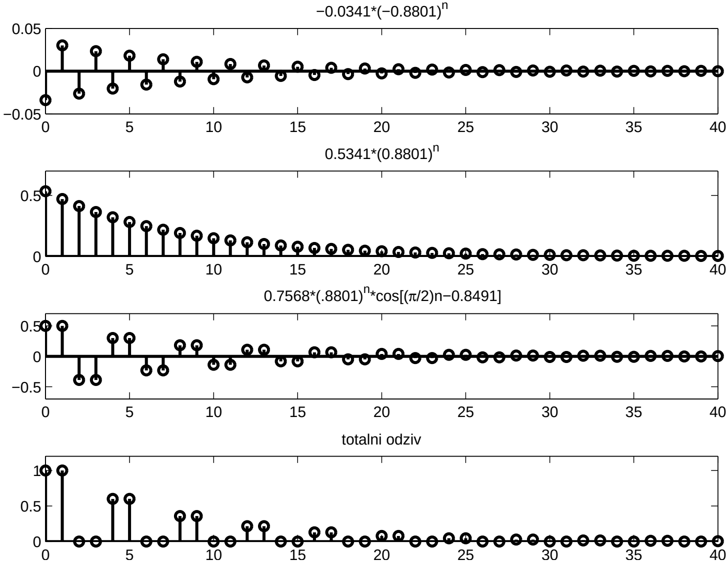
- pa je rješenje homogene jednadžbe

$$
\begin{aligned}
y_h(n) = -0.0341(-0.8801)^n &+ 0.3784e^{-j0.8491}0.8801^n e^{j\frac{\pi}{2}n} \\
&+ 0.3784e^{j0.8491}0.8801^n e^{-j\frac{\pi}{2}n} + 0.5341(0.8801)^n
\end{aligned}
$$

odnosno

$$
\begin{aligned}
y_h(n) = -0.0341(-0.8801)^n &+ 0.5341(0.8801)^n \\
&+ 0.7568 \cdot 0.8801^n \cos(\tfrac{\pi}{2}n - 0.8491),
\end{aligned}
$$

Odziv sustava za generiranje jeke



Slika 2: Odziv sustava za generiranje jeke

Signali i sustavi

Profesor
Branko Jeren

22. svibnja 2017.

Samostalni rad studenata – diferencijalna jednadžba električnog kruga

Linearni vremenski stalni sustavi – model ulaz-izlaz

- razmatraju se vremenski kontinuirani sustavi, s jednim ulazom i jednim izlazom, opisani modelom s ulazno-izlaznim varijablama
- sustavi se obično opisuju jednom diferencijalnom jednadžbom višeg reda koja veže jednu izlaznu[1] i jednu ulaznu varijablu, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{d^N y}{dt^N} + a_1 \frac{d^{N-1} y}{dt^{N-1}} + \ldots + a_{N-1} \frac{dy}{dt} + a_N y(t) =$$

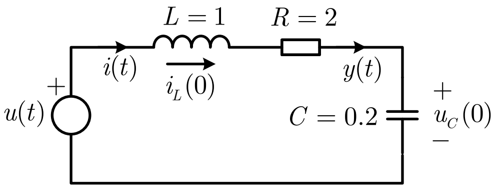
$$= b_{N-M} \frac{d^M u}{dt^M} + b_{N-M+1} \frac{d^{M-1} u}{dt^{M-1}} + \ldots + b_{N-1} \frac{du}{dt} + b_N u(t) \tag{1}$$

- slijede dva primjera za jedan jednostavni električni *RLC* krug za koji će biti izvedene diferencijalne jednadžbe za različito izabrane izlazne varijable

[1] U okviru ovog predmeta koristimo u kao oznaku za ulaznu, a y kao oznaku za izlaznu varijablu

Linearni vremenski stalni sustavi – model ulaz-izlaz – primjer 1

- razmatra se RLC krug na slici



- označimo kao ulaznu varijablu u, izlazna varijabla neka je $y = i$, a odziv sustava određujemo za $t \geq 0$
- spremnici energije su induktivitet L i kapacitet C i neka su njihova početna stanja, $i_L(0) = 0$, i $u_c(0) = 2$
- za vremenski stalne i linearne komponente kruga vrijedi

$$\forall t \in \mathbb{R}_0^+, \quad L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau + u_c(0) = u(t)$$

Linearni vremenski stalni sustavi – model ulaz-izlaz – primjer 1

- deriviranjem obje strane, te dijeljenjem, s obje strane, s L, slijedi

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i(t) = \frac{1}{L}\frac{du}{dt}$$

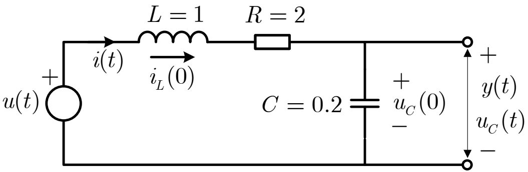
- diferencijalnu jednadžbu kruga pišemo uz pomoć uobičajenih oznaka za izlaznu varijablu y i ulaznu varijablu u
- za zadane vrijednosti elemenata, i za $y = i$, diferencijalna jednadžba kruga je

$$\forall t \in \mathbb{R}_0^+, \quad \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

- za rješenje jednadžbe potrebno je poznavati $y(0)$ i $y'(0)$, a njih određujemo iz $i_L(0)$ i $u_c(0)$

Linearni vremenski stalni sustavi – model ulaz-izlaz – primjer 2

- razmatra se RLC krug na slici



- označimo kao ulaznu varijablu u, neka je izlazna varijabla $y = u_c$, a odziv sustava određujemo za $t \geq 0$
- neka su početna stanja, $i_L(0) = 0$, i $u_c(0) = 2$
- za vremenski stalne i linearne komponente kruga vrijedi

$$\forall t \in \mathbb{R}_0^+, \quad L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + u_c(t) = u(t) \qquad (2)$$

Linearni vremenski stalni sustavi – model ulaz-izlaz – primjer 2

- kako za struju u petlji vrijedi

$$i(t) = i_c(t) = C\frac{du_c(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{di(t)}{dt} = C\frac{d^2u_c(t)}{dt^2}$$

- uvrštenjem u (2), te dijeljenjem obje strane s LC, slijedi

$$\forall t \in \mathbb{R}_0^+, \quad \frac{d^2u_c(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_c(t)}{dt} + \frac{1}{LC}u_c(t) = \frac{1}{LC}u(t)$$

- za zadane vrijednosti elemenata, i za $y = u_c$ diferencijalna jednadžba kruga je (za y kao izlaznu, a u kao ulaznu varijablu), $\forall t \in \mathbb{R}_0^+$,

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = 5u(t) \qquad (3)$$

- za rješenje jednadžbe potrebno je poznavati $y(0)$ i $y'(0)$, a njih određujemo iz $i_L(0)$ i $u_c(0)$

Linearni vremenski stalni sustavi – model ulaz-izlaz – primjeri 1 i 2

- treba uočiti kako su, iako se radi o istom *RLC* krugu, izvedene dvije različite diferencijalne jednadžbe
- to je razumljivo, jer u primjeru 1 izlazna varijabla $y = i$ predstavlja struju petlje, a u primjeru 2 izlazna varijabla $y = u_C$ predstavlja napon na kapacitetu C
- za realni fizikalni sustav, *RLC* krug, napisane su diferencijalne jednadžbe za čije je rješavanje potrebno odrediti početne uvjete $y(0)$ i $y'(0)$ iz poznavanja početnih vrijednosti spremnika energije (početnih stanja) fizikalnog sustava $i_L(0)$ i $u_C(0)$
- jasno je da će za primjer 1, $y(0)$ biti jednak $i_L(0)$, a u primjeru 2 je $y(0)$ jednak $u_C(0)$
- postupak određivanja početnih uvjeta biti će obrazložen nešto kasnije

Linearni vremenski stalni sustavi – model ulaz-izlaz

Linearni vremenski stalni sustavi – model ulaz-izlaz

- nastavljamo razmatranje vremenski kontinuiranih sustava s jednim ulazom i jednim izlazom, opisanih modelom s ulazno-izlaznim varijablama
- sustavi su općenito opisani s više simultanih diferencijalnih jednadžbi
- više se simultanih diferencijalnih jednadžbi obično svodi na jednu jednadžbu višeg reda koja veže jednu izlaznu i jednu ulaznu varijablu, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{d^N y}{dt^N} + a_1 \frac{d^{N-1} y}{dt^{N-1}} + \ldots + a_{N-1} \frac{dy}{dt} + a_N y(t) =$$
$$= b_{N-M} \frac{d^M u}{dt^M} + b_{N-M+1} \frac{d^{M-1} u}{dt^{M-1}} + \ldots + b_{N-1} \frac{du}{dt} + b_N u(t) \tag{4}$$

- za linearne, vremenski stalne sustave, koeficijenti a_i i b_i su konstante

Linearni vremenski stalni sustavi – model ulaz-izlaz

- za realne fizikalne sustave je $M \leq N$, pa jednadžbu (4), u najopćenitijem slučaju $M = N$, pišemo kao

$$\frac{d^N y}{dt^N} + a_1 \frac{d^{N-1} y}{dt^{N-1}} + \ldots + a_{N-1} \frac{dy}{dt} + a_N y(t) = b_0 \frac{d^N u}{dt^N} + b_1 \frac{d^{N-1} u}{dt^{N-1}} + \ldots + b_{N-1} \frac{du}{dt} + b_N u(t) \quad (5)$$

- uvođenjem operatora deriviranja D, koji predstavlja operaciju deriviranja d/dt, jednadžbu (5) zapisujemo kao

$$\underbrace{\left(D^N + a_1 D^{N-1} + \ldots + a_{N-1} D + a_N\right)}_{A(D)} y(t) = \underbrace{\left(b_0 D^N + b_1 D^{N-1} + \ldots + b_{N-1} D + b_N\right)}_{B(D)} u(t) \quad (6)$$

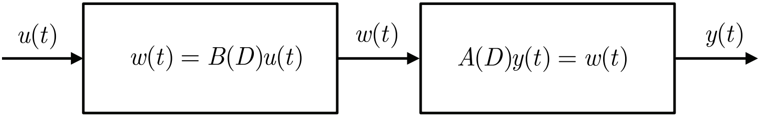
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad A(D)y(t) = B(D)u(t) \quad (7)$$

Blokovski dijagram diferencijalne jednadžbe

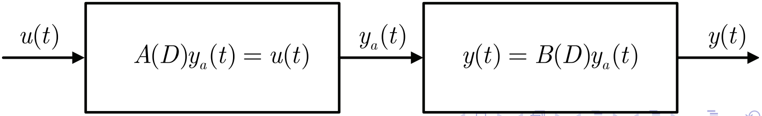
- diferencijalnu jednadžbu $A(D)y(t) = B(D)u(t)$ možemo razložiti na dvije jednadžbe

$$w(t) = B(D)u(t) \quad \text{i} \quad A(D)y(t) = w(t)$$

što možemo prikazati blokovskim dijagramom



- zamjena redosljeda LTI podsustava daje

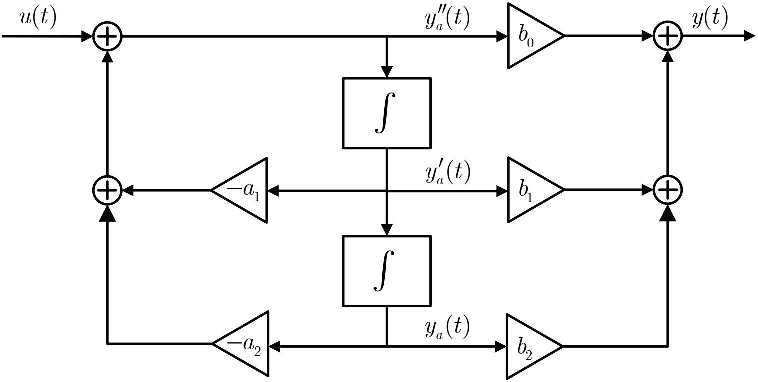


Blokovski dijagram diferencijalne jednadžbe

- za $N = M = 2$ je

$$A(D)y_a(t) = u(t) \quad \Rightarrow \quad y_a''(t) + a_1 y_a'(t) + a_2 y_a(t) = u(t)$$

$$y(t) = B(D)y_a(t) \quad \Rightarrow \quad y(t) = b_0 y_a''(t) + b_1 y_a'(t) + b_2 y_a(t)$$



blokovski dijagram predstavlja direktnu realizaciju II za vremenski kontinuirani sustav

Linearni vremenski stalni sustavi – model ulaz-izlaz

- odziv sustava na zadanu pobudu određuje se rješavanjem jednadžbe (5),

$$\frac{d^N y}{dt^N} + a_1 \frac{d^{N-1} y}{dt^{N-1}} + \ldots + a_{N-1} \frac{dy}{dt} + a_N y(t)$$
$$= b_0 \frac{d^N u}{dt^N} + b_1 \frac{d^{N-1} u}{dt^{N-1}} + \ldots + b_{N-1} \frac{du}{dt} + b_N u(t)$$

odnosno (7)

$$A(D)y(t) = B(D)u(t)$$

- totalni odziv sustava moguće je odrediti klasičnim postupkom rješavanja nehomogene diferencijalne jednadžbe
- rješenje nehomogene diferencijalne jednadžbe je

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

Linearni vremenski stalni sustavi – rješenje homogene diferencijalne jednadžbe

Linearni vremenski stalni sustavi – rješenje homogene diferencijalne jednadžbe

- rješenje homogene jednadžbe y_h, je rješenje jednadžbe

$$(D^N + a_1 D^{N-1} + \ldots + a_{N-1} D + a_N) y_h(t) = 0$$

- jednadžba pokazuje kako je linearna kombinacija y_h i njezinih N derivacija jednaka nuli za sve vrijednosti t
- ovo je moguće samo onda kada su y_h, i svih N njezinih derivacija, istog oblika
- ovaj zahtjev ispunjava kompleksna eksponencijalna funkcija $e^{st}, s \in \mathbb{C}$, jer vrijedi

$$D^k e^{st} = \frac{d^k}{dt^k} e^{st} = s^k e^{st}$$

Linearni vremenski stalni sustavi – rješenje homogene diferencijalne jednadžbe

- rješenje homogene jednadžbe pretpostavljamo u obliku

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y_h(t) = ce^{st}$$

- uvrštenjem u jednadžbu

$$(D^N + a_1 D^{N-1} + \ldots + a_{N-1} D + a_N) y_h(t) = 0$$

- slijedi

$$(s^N + a_1 s^{N-1} + \ldots + a_{N-1} s + a_N) ce^{st} = 0$$

- za netrivijalno rješenje jednadžbe, $y_h(t) = ce^{st} \neq 0$, mora biti

$$s^N + a_1 s^{N-1} + \ldots + a_{N-1} s + a_N = 0$$

Rješenje homogene diferencijalne jednadžbe

- jednadžba

$$s^N + a_1 s^{N-1} + \ldots + a_{N-1} s + a_N = 0$$

  ima N rješenja
- homogena jednadžba ima isto N rješenja, $c_1 e^{s_1 t}$, $c_2 e^{s_2 t}$, ... ,$c_N e^{s_N t}$, pa je rješenje homogene jednadžbe linearna kombinacija

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y_h(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} + \ldots + c_N e^{s_N t}$$

Karakteristični polinom, karakteristične frekvencije

- polinom $s^N + a_1 s^{N-1} + \ldots + a_{N-1} s + a_N$ nazivamo karakterističnim polinomom sustava
- jednadžbu $s^N + a_1 s^{N-1} + \ldots + a_{N-1} s + a_N = 0$ nazivamo karakterističnom jednadžbom sustava
- korijeni karakteristične jednadžbe $s_1, s_2, \ldots, s_N$ nazivaju se karakteristične vrijednosti, ili karakteristične frekvencije, ili vlastite frekvencije, ili vlastite vrijednosti
- karakteristične frekvencije mogu biti realne ili kompleksne, te jednostruke ili višestruke
- kompleksne karakteristične frekvencije dolaze u konjugiranim parovima što je posljedica realnih koeficijenata karakterističnog polinoma

Rješenje homogene diferencijalne jednadžbe za višestruke karakteristične vrijednosti

- za karakteristični korijen s_1, višestrukosti m, karakteristična jednadžba, u faktoriziranom obliku, je

$$(s - s_1)^m (s - s_{m+1})(s - s_{m+2}) \cdots (s - s_N) = 0$$

- rješenje homogene jednadžbe je tada

$$\forall t \in \mathbb{R},$$
$$y_h(t) = (c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + \ldots + c_m t^{m-1}) e^{s_1 t} + \\ + c_{m+1} e^{s_{m+1} t} + c_{m+2} e^{s_{m+2} t} + \ldots + c_N e^{s_N t}$$

Rješenje homogene diferencijalne jednadžbe za kompleksne karakteristične vrijednosti

- za realne sustave kompleksni korijeni dolaze u konjugirano kompleksnim parovima
- u određivanju homogenog rješenja diferencijalne jednadžbe, konjugirane kompleksne korijene možemo koristiti na isti način kao i realne
- činjenica da su parovi kompleksnih korijena s i s^* konjugirani može biti iskorištena za alternativni prikaz
- tako je za,

$$s = \alpha + j\beta \quad \text{i} \quad s^* = \alpha - j\beta$$

- rješenje homogene jednadžbe

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y_h(t) = c_1 e^{(\alpha + j\beta)t} + c_2 e^{(\alpha - j\beta)t}$$

Rješenje homogene diferencijalne jednadžbe za kompleksne karakteristične vrijednosti

- za realne sustave je y_h realna funkcija, pa konstante c_1 i c_2 moraju biti konjugirane

$$c_1 = \frac{c}{2} e^{j\theta} \quad \text{i} \quad c_2 = \frac{c}{2} e^{-j\theta}$$

- što rezultira u

$$y_h(t) = \frac{c}{2} e^{j\theta} e^{(\alpha+j\beta)t} + \frac{c}{2} e^{-j\theta} e^{(\alpha-j\beta)t} = \frac{c}{2} e^{\alpha t} \left[e^{j(\beta t+\theta)} + e^{-j(\beta t+\theta)} \right]$$

- odnosno, finalno,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y_h(t) = c e^{\alpha t} \cos(\beta t + \theta)$$

Određivanje konstanti u rješenju homogene diferencijalne jednadžbe

- nepoznate konstante $c_1, c_2, \dots, c_N$, u rješenju homogene diferencijalne jednadžbe, određujemo iz
  - početnih uvjeta kada određujemo odziv nepobuđenog sustava
  - iz početnih uvjeta i totalnog rješenja kada određujemo totalni odziv
- početni uvjeti nose informaciju o y i njezinih $N-1$ derivacija u početnom trenutku, najčešće je to, $t=0$
- za fizikalne sustave, početne uvjete treba odrediti iz odgovarajućih početnih stanja sustava

Početni uvjeti

Početni uvjeti

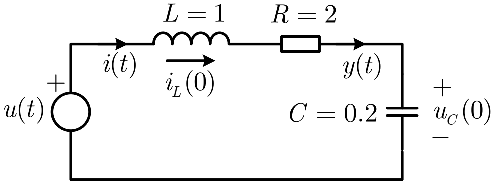
- potrebno je detaljnije razmotriti ulogu početnih uvjeta u određivanju odziva sustava
- preciziraju se početni uvjeti neposredno prije $t = 0$, tj. neposredno prije djelovanja pobude, kao početni uvjeti u $t = 0^-$, te početni uvjeti neposredno nakon početka djelovanja pobude, kao početni uvjeti u $t = 0^+$
- za očekivati je da se, ovisno o svojstvima sustava i karakteru pobude, početni uvjeti u $t = 0^-$ i u $t = 0^+$ mogu razlikovati
- za slučaj nepobuđenog sustava[2] početni su uvjeti za $t = 0^-$ i $t = 0^+$ identični dakle vrijedi

$$y_0(0^-) = y_0(0^+); \quad y_0'(0^-) = y_0'(0^+); \quad y_0''(0^-) = y_0''(0^+); \quad \ldots$$

[2] odziv nepobuđenog sustava označavamo kao $y_0(t)$

Primjer određivanja početnih uvjeta 1

- za prije razmotren RLC krug, na slici

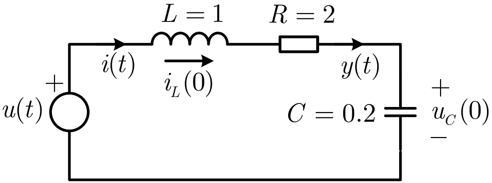


- diferencijalna jednadžba koja opisuje ovaj krug, za $y = i$, je

$$\forall t \in \mathbb{R}_0^+, \quad \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = \frac{du}{dt}$$

- treba odrediti početne uvjete, $y(0)$ i $y'(0)$, potrebne u izračunu odziva na pobudu jediničnim skokom, $u = \mu$, i uz početna stanja, $i_L(0) = i(0) = 0$, i $u_c(0) = 2$

Primjer određivanja početnih uvjeta 2

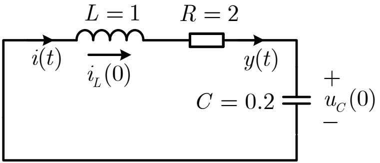


- u cilju određivanja $y'(0)$, koristimo jednadžbu Kirchhoffovog zakona napona za petlju

$$L\frac{dy(t)}{dt} + Ry(t) + u_C(t) = u(t)$$

Primjer određivanja početnih uvjeta 3

- prvo određujemo početne uvjete za slučaj nepobuđenog sustava
- $y_0(0)$ i $y_0'(0)$ određujemo iz $i_L(0) = 0$ i $u_c(0) = 2$
- za nepobuđeni sustav vrijedi $y_0(0^-) = y_0(0^+) = y(0)$ i $y_0'(0^-) = y_0'(0^+) = y_0'(0)$
- sa slike je očigledno da je $y_0(0) = i(0) = i_L(0) = 0$
- potrebno je odrediti $y_0'(0)$



- vrijedi

$$\underbrace{L}_{1}\frac{dy_0(t)}{dt} + \underbrace{R}_{2} y_0(t) + u_C(t) = 0$$

za $t = 0$

$$y_0'(0) + 2\,\underbrace{y_0(0)}_{0} + \underbrace{u_C(0)}_{2} = 0$$

$$y_0'(0) = -2$$

Primjer određivanja početnih uvjeta 4

- određuju se i početni uvjeti u $t = 0^-$ i $t = 0^+$, za slučaj određivanja odziva pobuđenog sustava, za $t \geq 0$
- uspoređuju se $y(0^-)$ i $y'(0^-)$ s $y(0^+)$ i $y'(0^+)$
- njihova se usporedba provodi uvidom u jednadžbu petlje

$$\underbrace{L}_{1}\frac{dy(t)}{dt} + \underbrace{R}_{2}y(t) + u_C(t) = u(t)$$

za $t = 0^-$ i $t = 0^+$

$$y'(0^-) + 2y(0^-) + u_C(0^-) = u(0^-) = \mu(0^-) = 0$$
$$y'(0^+) + 2y(0^+) + u_C(0^+) = u(0^+) = \mu(0^+) = 1$$

Primjer određivanja početnih uvjeta 5

- kako se struja induktiviteta i napon na kapacitetu ne mogu promijeniti[3] u intervalu od $t = 0^-$ do $t = 0^+$ vrijedi $y(0^-) = y(0^+) = 0$ i $u_C(0^-) = u_C(0^+) = 2$
- uvrštenjem ovih vrijednosti u prethodne dvije jednadžbe slijedi

$$y(0^-) = 0, \qquad y'(0^-) = -2$$

odnosno

$$y(0^+) = 0, \qquad y'(0^+) = -1$$

- dani primjer ukazuje na potreban postupak u definiranju i određivanju početnih uvjeta
- u nastavku se razmatra postupak određivanja početnih uvjeta u $t = 0^+$ za opći sustav drugog reda te, na kraju, za sustav N–tog reda

[3] osim u slučaju impulsne pobude, a taj će slučaj biti kasnije diskutiran

Određivanja početnih uvjeta – opći sustav drugog reda

- sustav je opisan diferencijalnom jednadžbom

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = b_0 u''(t) + b_1 u'(t) + b_2 u(t) \quad (8)$$

- neka je pobuda kauzalna pa vrijedi $u^{(i)}(0^-) = 0$ i neka pobuda ne sadrži Diracov jedinični impuls[4]
- neka su poznati $y^{(i)}(0^-) \neq 0$, a treba odrediti $y(0^+)$ i $y'(0^+)$
- integriramo jednadžbu (8) u intervalu $t = 0^-$ do t

$$y'(t) - y'(0^-) + a_1 y(t) - a_1 y(0^-) + a_2 \int_{0^-}^{t} y(\tau) d\tau =$$

$$= b_0 u'(t) + b_1 u(t) + b_2 \int_{0^-}^{t} u(\tau) d\tau \quad (9)$$

[4] slučaj kada pobuda sadrži Diracov impuls biti će razmatran kod određivanja impulsnog odziva

Određivanja početnih uvjeta – sustav drugog reda

- još jednom integracijom, jednadžbe (9), slijedi

$$\int_{0^-}^{t} y'(\tau)d\tau - y'(0^-)\int_{0^-}^{t} d\tau + a_1\int_{0^-}^{t} y(\tau)d\tau - a_1 y(0^-)\int_{0^-}^{t} d\tau +$$

$$+a_2\int_{0^-}^{t}\int_{0^-}^{\tau} y(\lambda)d\lambda d\tau = b_0\int_{0^-}^{t} u'(\tau)d\tau + b_1\int_{0^-}^{t} u(\tau)d\tau +$$

$$+b_2\int_{0^-}^{t}\int_{0^-}^{\tau} u(\lambda)d\lambda d\tau$$

Određivanja početnih uvjeta – sustav drugog reda

- za $t = 0^+$ slijedi

$$y(0^+) - y(0^-) - y'(0^-) \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} d\tau}_{0} + a_1 \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} y(\tau) d\tau}_{0} - a_1 y(0^-) \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} d\tau}_{0}$$

$$+ a_2 \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} \int_{0^-}^{\tau} y(\lambda) d\lambda d\tau}_{0} = b_0 u(0^+) + b_1 \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} u(\tau) d\tau}_{0} +$$

$$+ b_2 \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} \int_{0^-}^{\tau} u(\lambda) d\lambda d\tau}_{0} \quad \Rightarrow$$

$$y(0^+) - y(0^-) = b_0 u(0^+) \tag{10}$$

- rješenje jednadžbe (10) daje $y(0^+)$

Određivanja početnih uvjeta – sustav drugog reda

- iz jednadžbe (9),

$$y'(t) - y'(0^-) + a_1 y(t) - a_1 y(0^-) + a_2 \int_{0^-}^{t} y(\tau) d\tau =$$

$$= b_0 u'(t) + b_1 u(t) + b_2 \int_{0^-}^{t} u(\tau) d\tau$$

za $t = 0^+$ slijedi

$$y'(0^+) - y'(0^-) + a_1 y(0^+) - a_1 y(0^-) = b_0 u'(0^+) + b_1 u(0^+) \tag{11}$$

- rješenje jednadžbe (11), uz u (10) izračunat $y(0^+)$, daje $y'(0^+)$

Određivanja početnih uvjeta – opći sustav N–tog reda

- za sustav opisan diferencijalnom jednadžbom

$$\begin{aligned} y^{(N)} + a_1 y^{(N-1)} + \ldots + a_{N-1} y' + a_N y(t) = \\ = b_0 u^{(N)} + b_1 u^{(N-1)} + \ldots + b_{N-1} u' + b_N u(t) \end{aligned}$$

- potrebno je odrediti $y(0^+), y'(0^+), y''(0^+), \ldots, y^{(N-1)}(0^+)$
- istim postupkom, dakle višestrukim integriranjem, kao u slučaju sustava drugog reda, nalazimo N jednadžbi iz kojih određujemo tražene $y(0^+), y'(0^+), y''(0^+), \ldots, y^{(N-1)}(0^+)$

$$\begin{aligned}
&y(0^+) - y(0^-) = b_0 u(0^+) \\
&y'(0^+) - y'(0^-) + a_1 y(0^+) - a_1 y(0^-) = b_0 u'(0^+) + b_1 u(0^+) \\
&y''(0^+) - y''(0^-) + a_1 y'(0^+) - a_1 y'(0^-) + a_2 y(0^+) - a_2 y(0^-) \\
&\qquad = b_0 u''(0^+) + b_1 u'(0^+) + b_2 u(0^+) \\
&\qquad \vdots \\
&y^{(N-1)}(0^+) - y^{(N-1)}(0^-) + a_1 y^{(N-2)}(0^+) - a_1 y^{(N-2)}(0^-) + \ldots \\
&\qquad \ldots + a_{N-2} y'(0^+) - a_{N-2} y'(0^-) + a_{N-1} y(0^+) - a_{N-1} y(0^-) = \\
&\qquad = b_0 u^{(N-1)}(0^+) + b_1 u^{(N-2)}(0^+) + \ldots + b_{N-2} u'(0^+) + b_{N-1} u(0^+)
\end{aligned} \qquad (12)$$

Partikularno rješenje

Partikularno rješenje

- za sustav opisan nehomogenom diferencijalnom jednadžbom potrebno je odrediti i partikularno rješenje
- određivanje partikularnog rješenja
  - Lagrange-ova metoda varijacije parametara
  - Metoda neodređenog koeficijenta
- metoda neodređenih koeficijenata je ograničena samo na diferencijalne jednadžbe s konstantnim koeficijentima, te na funkcije koje se mogu svesti na polinome i eksponencijalne funkcije
- veliki broj pobuda se prikazuje polinomima i eksponencijalnim funkcijama i to je razlog široke uporabe ove metode

Određivanje partikularnog rješenja metodom neodređenih koeficijenata

- za pobudu polinomom oblika

$$u(t) = A_0 + A_1 t + \ldots + A_M t^M$$

- partikularno je rješenje u obliku polinoma M-tog stupnja

$$y_p(t) = K_0 + K_1 t + \ldots + K_M t^M$$

- rješenje se uvijek pretpostavlja u obliku kompletnog polinoma tj. sa svim potencijama, bez obzira da li polinom pobude ima sve članove

Određivanje partikularnog rješenja metodom neodređenih koeficijenata

- slično vrijedi i za pobude

pobuda $u(t)$	partikularno rješenje $y_p(t)$
A (konstanta)	K
$Ae^{\zeta t}, \quad \zeta \neq s_i (i = 1, 2, \ldots, N)$	$Ke^{\zeta t}$
$Ae^{\zeta t}, \quad \zeta = s_i$	$Kte^{\zeta t}$
At^M	$K_0 + K_1 t + \ldots + K_M t^M$
$e^{\zeta t} t^M$	$e^{\zeta t}(K_0 + K_1 t + \ldots + K_M t^M)$
$Acos(\Omega_0 t)$	$K_1 cos(\Omega_0 t) + K_2 sin(\Omega_0 t)$
$Asin(\Omega_0 t)$	$K_1 cos(\Omega_0 t) + K_2 sin(\Omega_0 t)$
$Acos(\Omega_0 t + \theta)$	$Kcos(\Omega_0 t + \theta)$

Odziv vremenski kontinuiranog sustava – klasični postupak

- razmatra se primjer vremenski kontinuiranog sustava opisanog s diferencijalnom jednadžbom

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 5y(t) = u(t) \tag{13}$$

- neka je sustav pobuđen pobudom $u(t) = 5\mu(t)$ i neka su $y(0^-) = -1$ i $\dot{y}(0^-) = -1$
- prvo određujemo rješenje homogene jednadžbe

$$(D^2 + 2D + 5)y_h = 0$$

- pa su karakteristična jednadžba i karakteristične frekvencije

$$s^2 + 2s + 5 = 0 \qquad \Rightarrow s_{1,2} = -1 \pm j2$$

- a rješenje homogene jednadžbe je

$$y_h(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} = c_1 e^{(-1+j2)t} + c_2 e^{(-1-j2)t}$$

Odziv vremenski kontinuiranog sustava – klasični postupak

- kako je pobuda konstantna i partikularno rješenje pretpostavljamo kao konstantu $y_p(t) = K$
- uvrštenjem u polaznu jednadžbu, i za $\ddot{y}_p(t) = \dot{y}_p(t) = 0$ slijedi

$$5K = 5 \quad \Rightarrow \quad K = 1 \quad \Rightarrow \quad y_p(t) = 1$$

- totalni odziv $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$

$$y(t) = c_1 e^{(-1+j2)t} + c_2 e^{(-1-j2)t} + 1$$

- konstante se c_1 i c_2 određuju iz početnih uvjeta $y(0^+)$ i $\dot{y}(0^+)$
- iz jednadžbi (10) i (11), uz $b_0 = b_1 = 0$, za ovaj primjer, slijedi

$$y(0^+) = y(0^-) = -1 \quad \text{i} \quad \dot{y}(0^+) = \dot{y}(0^-) = -1$$

Odziv vremenski kontinuiranog sustava – klasični postupak

- iz

$$y(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} + 1$$
$$\dot{y}(t) = s_1 c_1 e^{s_1 t} + s_2 c_2 e^{s_2 t}$$

slijedi za $t = 0^+$

$$\left.\begin{array}{l} -1 = c_1 + c_2 + 1 \\ -1 = s_1 c_1 + s_2 c_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} c_1 = -1 + j0.75 \\ c_2 = -1 - j0.75 \end{array}\right.$$

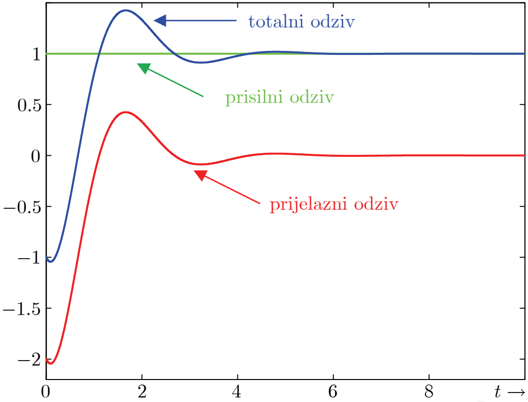
- konačno, totalni odziv je

$$\begin{aligned} y(t) &= (-1 + j0.75)e^{(-1+j2)t} + (-1 - j0.75)e^{(-1-j2)t} + 1 \\ &= -e^{-t}\left(e^{j2t} + e^{-j2t}\right) + j0.75e^{-t}\left(e^{j2t} - e^{-j2t}\right) + 1 \end{aligned}$$

$$y(t) = \underbrace{-2e^{-t}\cos(2t) - 1.5e^{-t}\sin(2t)}_{\substack{\text{prirodni ili} \\ \text{prijelazni odziv} \\ \text{(vlastite frekvencije)}}} + \underbrace{1,}_{\substack{\text{prisilni} \\ \text{odziv} \\ \text{(frekvencija pobude)}}} \qquad t \geq 0 \tag{14}$$

Prirodni i prisilni odziv sustava

- u totalnom odzivu prepoznaju se dvije komponente
  - prirodni ili prijelazni odziv – titra s karakterističnim frekvencijama i postoji zbog nesklada početnog i stacionarnog stanja
  - prisilni odziv – titra s frekvencijom pobude



Odziv linearnog vremenski diskretnog sustava kao zbroj odziva nepobuđenog i odziva mirnog sustava

- u interpretaciji inkrementalno linearnih sustava u Cjelini 8 pokazano je da se odziv sustava može interpretirati kao

totalni odziv = odziv nepobuđenog sustava+odziv mirnog sustava

odnosno

$$y(t) = y_0(t) + y_m(t)$$

- odziv nepobuđenog sustava, $y_0(t)$, je komponenta totalnog odziva koja je posljedica samo djelovanja početnih uvjeta (uz pobudu jednaku nula)
- odziv mirnog sustava, $y_m(t)$, je komponenta odziva koja je posljedica djelovanja pobude uz početne uvjete jednake nuli

Odziv linearnog vremenski kontinuiranog *SISO* sustava

- za nepobuđeni vremenski kontinuiran sustav N-tog reda, opisan s diferencijalnom jednadžbom N-tog reda, odziv $y_0(t)$ je jednak rješenju homogene diferencijalne jednadžbe $y_h(t)$, pa je

$$y_0(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} + \ldots + c_N e^{s_N t}$$

- koeficijente $c_1, c_2, \ldots, c_N$ određujemo iz N početnih uvjeta $y(0^-), y'(0^-), \ldots, y^{(N-1)}(0^-)$

Odziv nepobuđenog sustava i vlastite frekvencije

Odziv nepobuđenog kontinuiranog sustava

- nepobuđeni sustav titra eksponencijalama čije su frekvencije vlastite frekvencije sustava, pa je za pojedinu vlastitu frekvenciju s_i, komponenta nepobuđenog odziva $e^{s_i t}$
- neka je u općem slučaju $s \in \mathbb{C}$, pri čemu dolazi u konjugirano kompleksnim parovima, pa je komponenta odziva nepobuđenog sustava oblika $e^{(\alpha \pm j\beta)t} = e^{\alpha t} e^{\pm j\beta t}$
- za različite α, slijedi:

$$
\begin{array}{lll}
\alpha < 0 & e^{\alpha t} e^{\pm j\beta t} \to 0 & \text{za } t \to \infty \\
\alpha > 0 & e^{\alpha t} e^{\pm j\beta t} \to \infty & \text{za } t \to \infty \\
\alpha = 0 & \left| e^{\pm j\beta t} \right| = 1 & \text{za } \forall t
\end{array}
$$

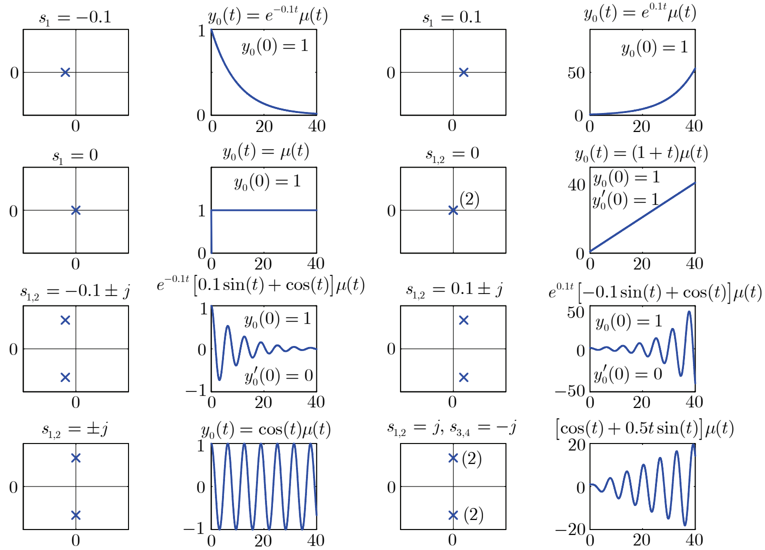
Odziv nepobuđenog kontinuiranog sustava

- za sustav s višestrukim vlastitim frekvencijama, $s = \alpha \pm j\beta$, višestrukosti m, nepobuđeni sustav titra eksponencijalama oblika $t^i e^{st}, i = 1, 2, \ldots, m-1$
- za različite $\alpha = Re\{s\}$, slijedi:

$$
\begin{array}{lll}
\alpha < 0 & t^i e^{\alpha t} e^{\pm j\beta t} \to 0 & \text{za } t \to \infty \\
\alpha \geq 0 & t^i e^{\alpha t} e^{\pm j\beta t} \to \infty & \text{za } t \to \infty
\end{array}
$$

- slijede primjeri koji ilustriraju odziv nepobuđenog sustava za razne vrijednosti s

Odziv nepobuđenog vremenski kontinuiranog sustava i vlastite frekvencije



Stabilnost vremenski kontinuiranih sustava

- za miran i nepobuđen vremenski stalni linearni sustav svi su $y(t)$, $y'(t), \ldots$ jednaki nuli i kažemo da se sustav nalazi u ravnotežnom stanju jednakom nuli
- pod stabilnošću sustava podrazumijevamo njegovo svojstvo da se nakon prestanka djelovanja pobude vraća u ravnotežno stanje u kojem ostaje neodređeno dugo
- dakle, nakon prestanka djelovanja pobude, stanje sustava u kojem se on tog trenutka nalazi, predstavlja početno stanje, različito od nule, koje definira početne uvjete $y(0)$, $y'(0), \ldots$ različite od nule
- stabilni sustavi se iz tih početnih uvjeta vraćaju u ravnotežno stanje jednako nuli

Stabilnost vremenski kontinuiranih sustava

- poznavanje odziva nepobuđenog sustava ukazuje na unutarnju stabilnost vremenski kontinuiranog linearnog sustava, pa vrijedi definicija
- vremenski kontinuirani nepobuđeni sustav je stabilan ako je njegov odziv omeđen, dakle,

$$|y_0(t)| < M = konst. < \infty, \forall t \in \mathbb{R} \tag{15}$$

- sustavi za koje vrijedi (15) nazivaju se i marginalno (rubno) stabilni
- sustav je asimptotski stabilan ako vrijedi (15) i ako

$$\lim_{t \to \infty} \{y_0(t)\} \to 0 \tag{16}$$

- sustavi koji nisu ni asimptotski ni rubno stabilni su nestabilni sustavi, za njih vrijedi

$$\lim_{t \to \infty} \{y_0(t)\} \to \infty \tag{17}$$

Unutarnja stabilnost vremenski kontinuiranih sustava

- o unutarnjoj stabilnosti sustava zaključuje se iz vrijednosti karakterističnih ili vlastitih frekvencija
- kauzalni kontinuirani linearni vremenski stalni sustav, s jednostrukim karakterističnim frekvencijama, je
  - asimptotski stabilan ako je $Re\{s_i\} < 0, \forall i$
  - stabilan (marginalno stabilan) ako je $Re\{s_i\} \leq 0, \forall i$
  - nestabilan ako postoji karakteristična frekvencija za koju je $Re\{s_i\} > 0$
- kauzalni kontinuirani linearni vremenski stalni sustav, s višestrukim karakterističnim frekvencijama, je
  - asimptotski stabilan ako je $Re\{s_i\} < 0, \forall i$
  - marginalno stabilan ako je za sve višestruke karakteristične frekvencije $Re\{s_i\} < 0$, i za sve različite karakteristične frekvencije $Re\{s_i\} \leq 0$
  - nestabilan ako postoji karakteristična frekvencija za koju je $Re\{s_i\} > 0$, ili postoji višestruka karakteristična frekvencija za koju je $Re\{s_i\} \geq 0$

Odziv nepobuđenog asimptotski stabilnog sustava

- za stabilni nepobuđeni sustav, odziv je posljedica postojanja početnih uvjeta, različitih od nule, dakle, posljedica neskladа početnog stanja i ravnotežnog stanja
- drugim riječima sustav se u prijelazu (prevladavanju neskladа) iz početnog stanja u ravnotežno stanje odziva titranjem s vlastitim frekvencijama
- ilustrirajmo ovu činjenicu na primjeru već prije korištenog sustava opisanog s

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 5y(t) = 0$$

uz $y(0^-) = -1$ i $\dot{y}(0^-) = -1$

Odziv nepobuđenog vremenski kontinuiranog sustava – primjer

Odziv nepobuđenog vremenski kontinuiranog sustava – primjer

- razmatra se nepobuđeni vremenski kontinuiran sustav čija je diferencijalna jednadžba

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 5y(t) = 0 \tag{18}$$

  a početni uvjeti su $y(0^-) = -1$ i $\dot{y}(0^-) = -1$
- odziv nepobuđenog sustava jednak je rješenju homogene diferencijalne jednadžbe za zadane početne uvjete $y(0^-)$ i $\dot{y}(0^-)$
- rješenje gornje homogene diferencijalne jednadžbe već je prije određeno, pa je odziv nepobuđenog sustava, za $t \geq 0$,

$$y_0(t) = c_{01}e^{s_1 t} + c_{02}e^{s_2 t} = c_{01}e^{(-1+j2)t} + c_{02}e^{(-1-j2)t}$$

Odziv nepobuđenog vremenski kontinuiranog sustava – primjer

- konstante c_{01} i c_{02} određujemo iz početnih vrijednosti $y(0^-) = -1$ i $\dot{y}(0^-) = -1$, pa iz

$$\begin{aligned} y_0(t) &= c_{01} e^{s_1 t} + c_{02} e^{s_2 t} \\ \dot{y}_0(t) &= s_1 c_{01} e^{s_1 t} + s_2 c_{02} e^{s_2 t} \end{aligned}$$

slijedi za $t = 0^-$

$$\begin{aligned} -1 &= c_{01} + c_{02} \\ -1 &= s_1 c_{01} + s_2 c_{02} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} -1 &= c_{01} + c_{02} \\ -1 &= (-1 + j2) c_{01} + (-1 - j2) c_{02} \end{aligned}$$

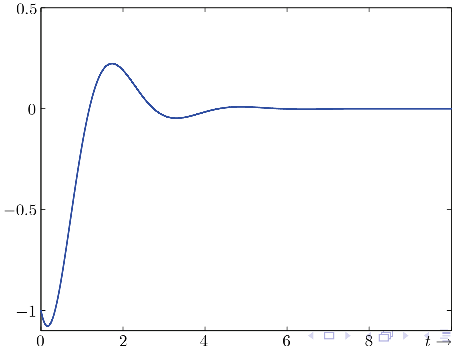
pa su

$$\begin{aligned} c_{01} &= -0.5 + j0.5 \\ c_{02} &= -0.5 - j0.5 \end{aligned}$$

Odziv nepobuđenog vremenski kontinuiranog sustava – primjer

- odziv nepobuđenog sustava je, za $t \geq 0$,

$$
\begin{aligned}
y_0(t) &= (-0.5 + j0.5)e^{(-1+j2)t} + (-0.5 - j0.5)e^{(-1-j2)t} \\
&= -0.5e^{-t}(e^{j2t} + e^{-j2t}) - j0.5e^{-t}(e^{j2t} - e^{-j2t}) \\
&= -e^{-t}cos(2t) - e^{-t}sin(2t), \qquad t \geq 0 \qquad (19)
\end{aligned}
$$



Odziv mirnog sustava

Odziv pobuđenog sustava

- kako je kazano, totalni odziv je zbroj odziva nepobuđenog sustava i odziva mirnog sustava,

$$y(t) = \sum_{i=1}^{N} c_{0i} e^{s_i t} + \textit{odziv mirnog sustava}, \quad t \geq 0$$

- odziv mirnog sustava, $y(0^-) = \dot{y}(0^-) = y^{(N-1)}(0^-) = 0$, na bilo koju pobudu možemo odrediti
  - klasičnim rješavanjem diferencijalne jednadžbe
  - korištenjem konvolucijskog integrala

Odziv mirnog sustava rješavanjem diferencijalne jednadžbe – primjer

- nastavlja se razmatranje sustava opisanog s diferencijalnom jednadžbom

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 5y(t) = u(t) \tag{20}$$

i sustav je pobuđen pobudom $u(t) = 5\mu(t)$ ali, budući ovdje razmatramo odziv mirnog sustava, početni uvjeti su $y(0^-) = 0$ i $\dot{y}(0^-) = 0$

- odziv ovog mirnog sustava rješavamo klasičnim postupkom izračunavajući rješenje homogene jednadžbe i partikularno rješenje
- rješenje homogene jednadžbe je prije određeno kao

$$y_h(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} = c_1 e^{(-1+j2)t} + c_2 e^{(-1-j2t)},$$

a partikularno rješenje kao: $y_p = 1$

Određivanje partikularnog rješenja – primjer

- odziv mirnog sustava je zato

$$y_m(t) = c_{m1} e^{(-1+j2)t} + c_{m2} e^{(-1-j2)t} + 1$$

- konstante c_{m1} i c_{m2} se određuju iz početnih uvjeta $y(0^+)$ i $\dot{y}(0^+)$
- iz jednadžbi (10) i (11), uz $b_0 = b_1 = 0$, za ovaj primjer, slijedi

$$y(0^+) = y(0^-) = 0 \quad \text{i} \quad \dot{y}(0^+) = \dot{y}(0^-) = 0$$

- iz

$$\begin{aligned} y_m(t) &= c_{m1} e^{s_1 t} + c_{m2} e^{s_2 t} + 1 \\ \dot{y}_m(t) &= s_1 c_{m1} e^{s_1 t} + s_2 c_{m2} e^{s_2 t} \end{aligned}$$

slijedi za $t = 0^+$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= c_{m1} + c_{m2} + 1 \\ 0 &= s_1 c_{m1} + s_2 c_{m2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} c_{m1} &= -0.5 + j0.25 \\ c_{m2} &= -0.5 + j0.25 \end{aligned}\right.$$

Odziv mirnog sustava rješavanjem diferencijalne jednadžbe – primjer

- konačno, odziv mirnog sustava je

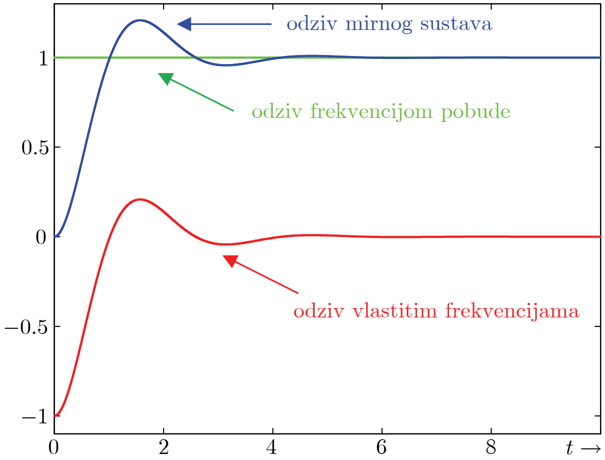
$$
\begin{aligned}
y_m(t) &= (-0.5 + j0.25)e^{(-1+j2)t} + (-0.5 - j0.25)e^{(-1-j2)t} + 1 \\
&= -0.5e^{-t}(e^{j2t} + e^{-j2t}) - j0.25e^{-t}(e^{j2t} - e^{-j2t}) + 1 \\
&= -e^{-t}cos(2t) - 0.5e^{-t}sin(2t) + 1, \qquad t \geq 0 \qquad (21)
\end{aligned}
$$

- odziv mirnog sustava čini titranje s vlastitim frekvencijama i titranje s frekvencijom pobude
- titranje s vlastitim frekvencijama postoji unatoč činjenici da je sustav bio miran, $y(0^-) = 0$ i $\dot{y}(0^-) = 0$, a posljedica je nesklada početnih uvjeta i stacionarnog[5] stanja u koje pobuda prevodi sustav

[5] za pobude konstantne amplitude, kao i za periodične pobude, partikularno rješenje je istog oblika i često se zove stacionarno stanje

Odziv mirnog sustava rješavanjem diferencijalne jednadžbe – primjer

- odziv, mirnog sustava,
  $y_m(t) = -e^{-t}cos(2t) - 0.5e^{-t}sin(2t) + 1 \quad \forall t \geq 0$



Totalni odziv sustava rješavanjem diferencijalne jednadžbe – primjer

- uz prije izračunati odziv nepobuđenog sustava

$$y_0(t) = -e^{-t}cos(2t) - e^{-t}sin(2t) \quad \forall t \geq 0$$

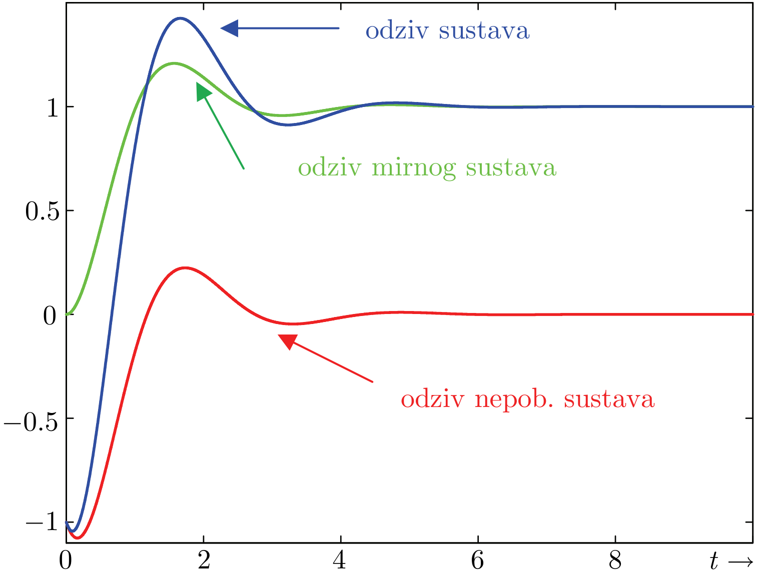
totalni odziv[6] je zbroj odziva nepobuđenog sustava i odziva mirnog sustava

$$y(t) = y_0(t) + y_m(t)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= [-e^{-t}cos(2t) - e^{-t}sin(2t)] \\ &\quad + [-e^{-t}cos(2t) - 0.5e^{-t}sin(2t) + 1] \\ &= -2e^{-t}cos(2t) - 1.5e^{-t}sin(2t) + 1, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

[6] Rezultira u identičnom izrazu kao i u izrazu 14, izračunatom klasičnim postupkom

Odziv vremenski kontinuiranog sustava



Odziv mirnog sustava pomoću konvolucijskog integrala

- totalni odziv se može prikazati kao zbroj odziva nepobuđenog sustava i odziva mirnog sustava

$$y(t) = y_0(t) + y_m(t)$$

- odziv nepobuđenog sustava jednak je rješenju homogene jednadžbe čije se konstante određuju iz zadanih početnih uvjeta u $t = 0^-$
- odziv mirnog sustava, dakle sustava čiji su svi početni uvjeti jednaki nuli za $t = 0^-$, možemo izračunati i kao

$$y_m(t) = u(t) * h(t) = \int_{0^-}^{t} u(\tau)h(t-\tau)\, d\tau$$

- problem izračuna konvolucijskog integrala detaljno je razmatran u Cjelini 9, a ovdje razmatramo način izračuna impulsnog odziva vremenski kontinuiranih sustava

Izračun impulsnog odziva

Impulsni odziv

- ovdje se detaljno razmatra problem izračunavanja impulsnog odziva za linearne vremenski stalne kontinuirane sustave opisane diferencijalnom jednadžbom ($N \geq M$)

$$\underbrace{\left(D^N + a_1 D^{N-1} + \ldots + a_{N-1} D + a_N\right)}_{A(D)} y(t) =$$
$$= \underbrace{\left(b_{N-M} D^M + b_{N-M+1} D^{M-1} + \ldots + b_{N-1} D + b_N\right)}_{B(D)} u(t) \tag{22}$$

odnosno

$$A(D)y(t) = B(D)u(t)$$

- impulsni odziv $y(t) = h(t)$, sustava (22), je odziv sustava na pobudu $u(t) = \delta(t)$, u $t = 0$, za sve početne uvjete $h(0^-) = h'(0^-) = h''(0^-) = \ldots = h^{(N-1)}(0^-) = 0$

Impulsni odziv

- za $u(t) = \delta(t)$, sustav (22) možemo, za $t \geq 0^+$, razmatrati kao nepobuđeni sustav, a odziv tog sustava tretirati kao posljedicu početnih uvjeta u $t = 0^+$ koji su nastali djelovanjem impulsne pobude u $t = 0$
- sustav je, za $t \geq 0^+$, opisan homogenom diferencijalnom jednadžbom

$$(D^N + a_1 D^{N-1} + \ldots + a_{N-1} D + a_N) h(t) = 0 \Leftrightarrow A(D) h(t) = 0$$

  za čije je rješenje potrebno odrediti početne uvjete $h(0^+), h'(0^+), h''(0^+), \ldots, h^{(N-1)}(0^+)$
- impulsni odziv će za $t \geq 0^+$ biti oblika[7]

$$h(t) = \sum_{j=1}^{N} c_j e^{s_j t}, \qquad t \geq 0^+$$

[7] ovdje su pretpostavljene jednostruke karakteristične frekvencije

Impulsni odziv

- postavlja se pitanje što se događa s impulsnim odzivom u $t = 0$, dakle, u trenutku djelovanja pobude $u(t) = \delta(t)$,
- u trenutku $t = 0$, jedino što se može pojaviti je impuls[8], pa je kompletni impulsni odziv $h(t)$

$$h(t) = A_0\delta(t) + \left(\sum_{j=1}^{N} c_j e^{s_j t}\right)\mu(t),$$

- odredimo A_0
- impulsni odziv je odziv sustava (22) za pobudu $u(t) = \delta(t)$, pa vrijedi

$$(D^N + a_1 D^{N-1} + \ldots + a_{N-1}D + a_N)h(t) =$$

$$= (b_{N-M}D^M + b_{N-M+1}D^{M-1} + \ldots + b_{N-1}D + b_N)\delta(t) \quad (23)$$

[8] vidi naredni blokovski dijagram

Impulsni odziv

- uvrštenjem $h(t) = A_0\delta(t) + \left(\sum_{j=1}^{N} c_j e^{s_j t}\right)\mu(t)$ u prethodnu jednadžbu (23) i usporedbom koeficijenata uz odgovarajuće impulsne članove na obje strane proizlazi[9]

$$\begin{aligned} A_0 &= b_0 &\quad \text{za } N = M \\ A_0 &= 0 &\quad \text{za } N > M \end{aligned}$$

- impulsni odziv $h(t)$ je prema tome

$$h(t) = \begin{cases} b_0\delta(t) + \left(\sum_{j=1}^{N} c_j e^{s_j t}\right)\mu(t) & \text{za } N = M \\ \left(\sum_{j=1}^{N} c_j e^{s_j t}\right)\mu(t) & \text{za } N > M \end{cases}$$

- potrebno je odrediti $h(0^+), h'(0^+), h''(0^+), \ldots, h^{(N-1)}(0^+)$ kako bi se izračunalo N konstanti c_j,

[9] N puta deriviranjem $h(t)$, javlja se član $A_0\delta^{(N)}$, pa se očekuje da i na desnoj strani bude član s $\delta^{(N)}$ a takav će postojati samo kada je $N = M$. Ova činjenica evidentna je i na blokovskom dijagramu

Impulsni odziv

- izračun početnih uvjeta $h(0^+), h'(0^+), h''(0^+), \ldots, h^{(N-1)}(0^+)$ često je nespretan i kompliciran
- pristupa se jednostavnijem postupku određivanja impulsnog odziva koji se temelji na prikazu sustava direktnom realizacijom II pri čemu diferencijalnu jednadžbu $A(D)y(t) = B(D)u(t)$ razlažemo na dvije jednadžbe (razlaganje razmatramo na primjeru sustava za koji je $N = M$)

$$(D^N + a_1 D^{N-1} + \ldots + a_{N-1} D + a_N) y_a(t) = u(t)$$

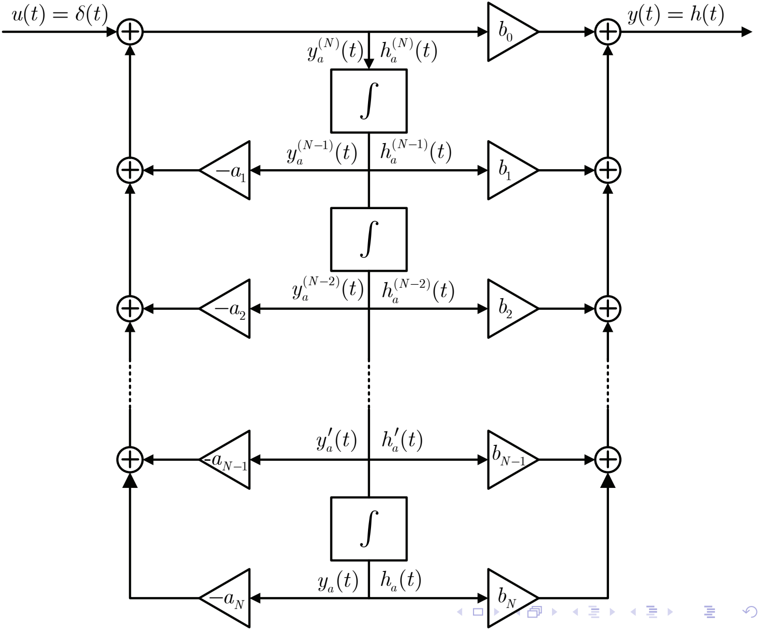
$$y(t) = (b_0 D^N + b_1 D^{N-1} + \ldots + b_{N-1} D + b_N) y_a(t)$$

odnosno

$$(D^N + a_1 D^{N-1} + \ldots + a_{N-1} D + a_N) h_a(t) = \delta(t) \qquad (24)$$

$$h(t) = (b_0 D^N + b_1 D^{N-1} + \ldots + b_{N-1} D + b_N) h_a(t) \qquad (25)$$

Impulsni odziv



Impulsni odziv

- impulsni odziv izračunavamo u dva koraka, prvo jednadžbu (24), a zatim (25)
- jednadžba (24)

$$h_a^{(N)}(t) + a_1 h_a^{(N-1)}(t) + a_2 h_a^{(N-2)}(t) + \dots \\ + a_{N-1} h_a'(t) + a_N h_a(t) = \delta(t)$$

- za $t > 0$ jednadžba postaje homogena i konstante c_m njezinog rješenja

$$h_a(t) = \sum_{m=1}^{N} c_m e^{s_m t}, \quad t > 0$$

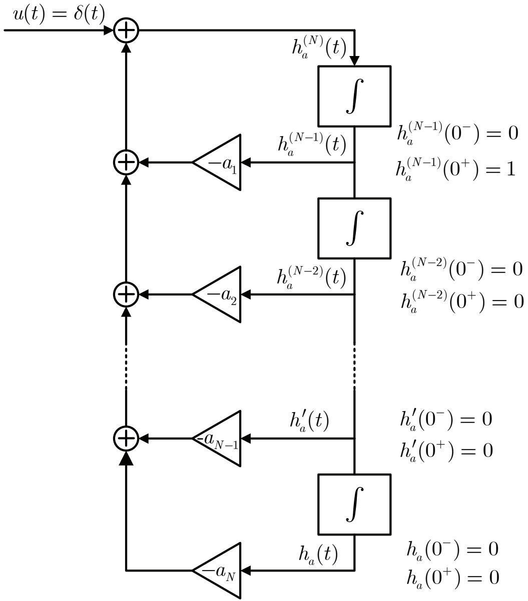
određujemo pomoću $h_a^{(N-1)}(0^+)$, $h_a^{(N-2)}(0^+)$, ..., $h_a'(0^+)$, i $h_a(0^+)$

Impulsni odziv

- određivanje početnih uvjeta $h_a^{(N-1)}(0^+)$, $h_a^{(N-2)}(0^+)$, $\ldots$, $h_a'(0^+)$, i $h_a(0^+)$ možemo provesti izravnim uvidom u blokovski dijagram (prethodni i naredni)
- sustav je miran pa su $h_a^{(N-1)}(0^-) = h_a^{(N-2)}(0^-) = \ldots = h_a'(0^-) = h_a(0^-)$
- dovođenjem $\delta(t)$ na ulaz sustava ovaj impuls prolazi izravno na izlaz $y(t) = h(t)$ (ako je $b_0 \neq 0$) i trenutno mijenja samo izlaz iz prvog integratora, pa je zato $h_a^{(N-1)}(0^+) = 1$
- izlazi ostalih integratora se u $t = 0^+$ ne mijenjanju pa su svi

$$h_a^{(m)}(0^+) = h_a^{(m)}(0^-) = 0, \qquad \forall m \leq N-2$$

Impulsni odziv



Impulsni odziv

- poznavanjem $h_a^{(N-1)}(0^+)$, $h_a^{(N-2)}(0^+)$, $\ldots$, $h_a'(0^+)$, i $h_a(0^+)$ određujemo sve konstante u

$$h_a(t) = \sum_{m=1}^{N} c_m e^{s_m t}, \quad t > 0$$

- impulsni odziv cjelokupnog sustava izračunavamo iz jednadžbe (25)

$$h(t) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{M} (b_{N-m} D^m) h_A(t), & t \geq 0, \quad M < N \\ b_0 \delta(t) + \sum_{m=0}^{M} (b_{N-m} D^m) h_A(t), & t \geq 0, \quad M = N \end{cases} \tag{26}$$

Izračun impulsnog odziva - primjer

Impulsni odziv – primjer 1

- određuje se impulsni odziv sustava

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = u''(t) + u'(t) + u(t)$$

- impulsni odziv, $h(t)$, je odziv sustava na $u(t) = \delta(t)$ uz $h(0^-) = h'(0^-) = 0$
- impulsni odziv zadovoljava početnu jednadžbu

$$h''(t) + 2h'(t) + h(t) = \delta''(t) + \delta'(t) + \delta(t)$$

- kako je $N = M = 2$ i $b_0 = 1$ slijedi iz jednadžbe (26)

$$h(t) = \delta(t) + h_A''(t) + h_A'(t) + h_A(t)$$

gdje je $h_A(t)$ rješenje jednadžbe

$$h_A''(t)+2h_A'(t)+h_A(t) = \delta(t), \qquad h_A(0^+) = 0, \quad h_A'(0^+) = 1$$

Impulsni odziv – primjer 1

- karakteristična jednadžba i karakteristične frekvencije su

$$s^2 + 2s + 1 = 0, \qquad s_1 = s_2 = -1$$

- pa je $h_A(t)$

$$h_A(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 t e^{s_1 t} = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$$

- konstante c_1 i c_2 određujemo iz početnih vrijednosti $h_A(0^+) = 0$ i $h'_A(0^+) = 1$, pa iz

$$\begin{aligned} h_A(t) &= c_1 e^{s_1 t} + c_2 t e^{s_1 t} \\ h'_A(t) &= s_1 c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_1 t} + s_1 c_2 t e^{s_1 t} \end{aligned}$$

za $t = 0^+$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= c_1 \\ 1 &= s_1 c_1 + c_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} c_1 &= 0 \\ c_2 &= 1 \end{aligned}$$

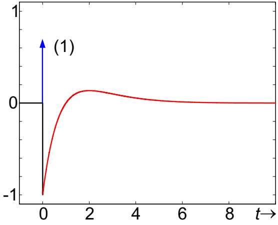
Impulsni odziv – primjer 1

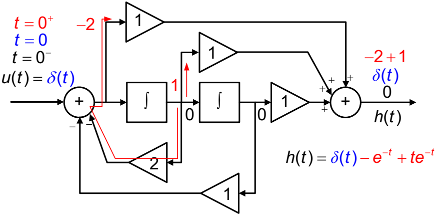
- rješenje za $h_A(t)$ je

$$h_A(t) = te^{-t}$$

- impulsni odziv sustava je, iz

$$\begin{aligned} h(t) &= \delta(t) + h_A''(t) + h_A'(t) + h_A(t) = \\ &= \delta(t) + (-e^{-t} - e^{-t} + te^{-t}) + (e^{-t} - te^{-t}) + te^{-t} \\ &= \delta(t) - e^{-t} + te^{-t}, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$





Samostalni rad studenata

Samostalni rad studenata

- slijedi niz primjera koje su priređeni kao dodatak predavanom gradivu
- preporuča se studentima da prouče ove dodatne materijale

Zadatak 1

- određuje se impulsni odziv sustava

$$y''(t) + 0.2y'(t) + 0.16y(t) = u(t)$$

- impulsni odziv, $h(t)$, je odziv sustava na $u(t) = \delta(t)$ uz $h(0^-) = h'(0^-) = 0$
- za $t \geq 0^+$ odziv sustava je jednak rješenju homogene jednadžbe a kako je $b_0 = b_1 = 0$ slijedi da je $h(t) = h_A(t)$, pa je impulsni odziv

$$h(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t}$$

- konstante se c_1 i c_2 određuju iz $h(0^+)$ i $h'(0^+)$
- sukladno prije pokazanom vrijedi $h(0^+) = 0$ i $h'(0^+) = 1$

Zadatak 1

- za zadani su sustav karakteristična jednadžba i karakteristične frekvencije

$$s^2 + 0.2s + 0.16 = 0 \quad \Rightarrow s_{1,2} = -0.1 \pm j0.3873,$$

- konstante c_1 i c_2 određujemo iz početnih vrijednosti $h(0^+) = 0$ i $h'(0^+) = 1$, pa iz

$$\begin{aligned} h(t) &= c_{01}e^{s_1 t} + c_{02}e^{s_2 t} \\ h'(t) &= s_1 c_{01}e^{s_1 t} + s_2 c_{02}e^{s_2 t} \end{aligned}$$

za $t = 0^+$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= c_1 + c_2 \\ 1 &= s_1 c_1 + s_2 c_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} c_1 &= -j1.2910 = 1.2910e^{-j1.5708} \\ c_2 &= +j1.2910 = 1.2910e^{j1.5708} \end{aligned}$$

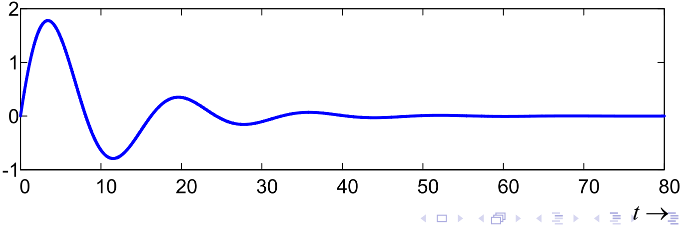
Zadatak 1

- impulsni odziv sustava je

$$h(t) = 1.2910e^{-j1.5708}e^{-0.1t}e^{j0.3873t} + \\ + 1.2910e^{j1.5708}e^{-0.1t}e^{-j0.3873t}$$

odnosno

$$h(t) = 2.582e^{-0.1t}\cos(0.3873t - 1.5708) = \\ = 2.582e^{-0.1t}\sin(0.3873t)$$



Odziv sustava II reda na jedinični impuls

- u uvodnom predavanju pokazano je kako su modeli sustava ovjesa automobila, glazbene vilice ili R-L-C električke mreže, dani diferencijalnom jednadžbom oblika

$$\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_2y(t) = b_2u(t)$$

- odnosno

$$\ddot{y}(t) + 2\zeta\Omega_n\dot{y}(t) + \Omega_n^2y(t) = A\Omega_n^2u(t)$$

gdje su ζ – stupanj prigušenja, Ω_n – neprigušena prirodna frekvencija i A konstanta

Odziv sustava II reda na jedinični impuls

- sustav pobuđujemo jediničnim impulsom pa je jednadžba

$$\ddot{y}(t) + 2\zeta\Omega_n\dot{y}(t) + \Omega_n^2 y(t) = A\Omega_n^2\delta(t)$$

- za $t > 0$ jednadžba postaje homogena jednadžba pa je za $t > 0$ odziv sustava na jedinični impuls jednak rješenju homogene jednadžbe
- vlastite se frekvencije izračunavaju iz karakteristične jednadžbe

$$s^2 + 2\zeta\Omega_n s + \Omega_n^2 = 0$$

i iznose

$$s_1 = -\zeta\Omega_n + j\Omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \text{ i } s_2 = -\zeta\Omega_n - j\Omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

pa je homogeno rješenje

$$y_h(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} \quad t > 0$$

Odziv sustava II reda na jedinični impuls

- zadani početni uvjeti $y(0^-)$ i $\dot{y}(0^-)$ trebaju biti definirani neposredno prije djelovanja pobude koja u ovom slučaju djeluje u $t = 0$ i
- konstante c_1 i c_2 određujemo za $t = 0^+$ pa je potrebno odrediti $y(0^+)$ i $\dot{y}(0^+)$ uzimajući u obzir $y(0^-)$ i $\dot{y}(0^-)$ i djelovanje pobude
- početne uvjete $y(0^+)$ i $\dot{y}(0^+)$ formalno nalazimo sljedećim postupkom

Odziv sustava II reda na jedinični impuls

- integriramo dva puta polaznu diferencijalnu jednadžbu[10]

$$\ddot{y}(t) + 2\zeta\Omega_n\dot{y}(t) + \Omega_n^2 y(t) = A\Omega_n^2\delta(t)$$

$$\int_{0^-}^{t} \ddot{y}(\tau)d\tau + 2\zeta\Omega_n \int_{0^-}^{t} \dot{y}(\tau)d\tau + \Omega_n^2 \int_{0^-}^{t} y(\tau)d\tau = A\Omega_n^2 \int_{0^-}^{t} \delta(\tau)d\tau \tag{27}$$

$$\int_{0^-}^{t}\int_{0^-}^{\tau} \ddot{y}(\lambda)d\lambda d\tau + 2\zeta\Omega_n \int_{0^-}^{t}\int_{0^-}^{\tau} \dot{y}(\lambda)d\lambda d\tau +$$

$$+ \Omega_n^2 \int_{0^-}^{t}\int_{0^-}^{\tau} y(\lambda)d\lambda d\tau = A\Omega_n^2 \int_{0^-}^{t}\int_{0^-}^{\tau} \delta(\lambda)d\lambda d\tau \tag{28}$$

[10] jednadžba je oblika $y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = b_2 u(t)$, pa zbog činjenice da je $b_0 = 0$ u odzivu $y(t)$ se ne može pojaviti $\delta(t)$

Odziv sustava II reda na jedinični impuls

- za $t = 0^+$ jednadžba (27) prelazi u

$$\dot{y}(0^+) - \dot{y}(0^-) + 2\zeta\Omega_n[y(0^+) - y(0^-)] + \Omega_n^2 \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} y(\tau)d\tau}_{=0} =$$

$$= A\Omega_n^2 \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} \delta(\tau)d\tau}_{=1} \qquad (29)$$

Odziv sustava II reda na jedinični impuls

- za $t = 0^+$ jednadžba (28) prelazi u

$$y(0^+) - y(0^-) + 2\zeta\Omega_n \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} \int_{0^-}^{\tau} \dot{y}(\lambda) d\lambda d\tau}_{=0} +$$

$$+\Omega_n^2 \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} \int_{0^-}^{\tau} y(\lambda) d\lambda d\tau}_{=0} = A\Omega_n^2 \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} \int_{0^-}^{\tau} \delta(\lambda) d\lambda d\tau}_{=0} \qquad (30)$$

- slijedi

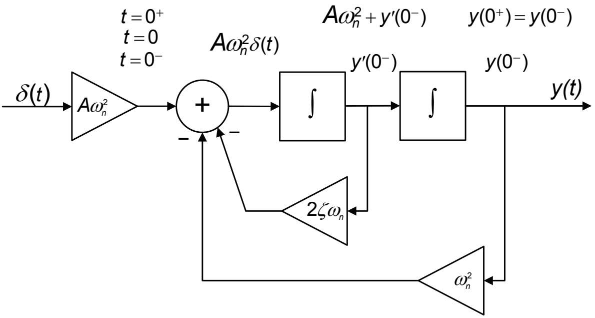
$$y(0^+) = y(0^-)$$

- a iz ovoga i iz jednadžbe (29) slijedi

$$\dot{y}(0^+) = \dot{y}(0^-) + A\Omega_n^2$$

Odziv sustava II reda na jedinični impuls

- do istog zaključka možemo doći uvidom u blok dijagram



Odziv sustava II reda na jedinični impuls

- iz

$$y_h(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} \quad t > 0$$

za $t = 0^+$

$$\begin{aligned} y(0^+) &= c_1 + c_2 = y(0^-) \\ \dot{y}(0^+) &= s_1 c_1 + s_2 c_2 = \dot{y}(0^-) + A\Omega_n^2 \end{aligned}$$

- izračunavamo

$$c_1 = \frac{y(0^-)s_2 - (\dot{y}(0^-) + A\Omega_n^2)}{s_2 - s_1}$$

$$c_2 = \frac{(\dot{y}(0^-) + A\Omega_n^2) - y(0^-)s_1}{s_2 - s_1}$$

Odziv sustava II reda na jedinični impuls

- odziv sustava II reda, s početnim uvjetima $y(0^-)$ i $\dot{y}(0^-)$, pobuđenog s jediničnim impulsom je

$$y_{imp}(t) = \frac{y(0^-)s_2 - (\dot{y}(0^-) + A\Omega_n^2)}{s_2 - s_1} e^{s_1 t} + \\ + \frac{(\dot{y}(0^-) + A\Omega_n^2) - y(0^-)s_1}{s_2 - s_1} e^{s_2 t} \quad t \geq 0$$

- za $y(0^-) = 0$ i $\dot{y}(0^-) = 0$ odziv na impuls zove se impulsni odziv i označava $h(t)$

$$h(t) = \frac{-A\Omega_n^2}{s_2 - s_1} e^{s_1 t} + \frac{A\Omega_n^2}{s_2 - s_1} e^{s_2 t} \quad t \geq 0$$

Odziv sustava II reda na jedinični impuls

- za $s_1 = -\zeta\Omega_n + j\Omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ i $s_2 = -\zeta\Omega_n - j\Omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

$$h(t) = \frac{-A\Omega_n^2}{-j2\Omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} e^{(-\zeta\Omega_n + j\Omega_n\sqrt{1-\zeta^2})t} + $$
$$+ \frac{A\Omega_n^2}{-j2\Omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} e^{(-\zeta\Omega_n - j\Omega_n\sqrt{1-\zeta^2})t}$$

- odnosno

$$h(t) = \frac{\Omega_n A}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\Omega_n t} \sin[(\Omega_n\sqrt{1-\zeta^2})t], \quad t \geq 0$$

Impulsni odziv – primjer

- određuje se impulsni odziv sustava (prije dani Zadatak 1)

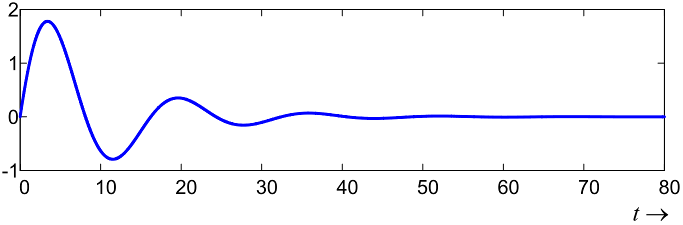
$$\ddot{y}(t) + 0.2\dot{y}(t) + 0.16y(t) = 6.25 \cdot 0.16u(t)$$

$$\zeta = 0.25, \quad \Omega_n = 0.4, \quad A = 6.25$$

- iz prethodnog izraza za $h(t)$ slijedi

$$h(t) = 2.582e^{-0.1t}\sin(0.3873t)$$

što je rezultat identičan onom iz zadatka 1



Zadatak 2

- određuje se odziv vremenski kontinuiranog sustava opisanog diferencijalnom jednadžbom

$$\ddot{y}(t) + 0.2\dot{y}(t) + 0.16y(t) = u(t)$$

  na pobudu

$$u(t) = 0.64 + \sin(t)$$

  i uz zadane početne uvjete $y(0^-) = -3$ i $\dot{y}(0^-) = -1$

- iz karakteristične jednadžbe

$$s^2 + 0.2s + 0.16 = 0$$

  karakteristične frekvencije su

$$s_1 = -0.1 + j0.3873 \text{ i } s_2 = -0.1 - j0.3873$$

Zadatak 2

- partikularno rješenje je oblika

$$y_p(t) = K_1 + K_2 \sin(t) + K_3 \cos(t)$$

a određuju se

$$\dot{y}_p(t) = K_2 \cos(t) - K_3 \sin(t)$$
$$\ddot{y}_p(t) = -K_2 \sin(t) - K_3 \cos(t)$$

- partikularno rješenje mora zadovoljiti polaznu jednadžbu

$$-K_2 \sin(t) - K_3 \cos(t) + 0.2K_2 \cos(t) - 0.2K_3 \sin(t) + \\ + 0.16K_1 + 0.16K_2 \sin(t) + 0.16K_3 \cos(t) = 0.64 + sin(t)$$

$$0.16K_1 + (-0.84K_2 - 0.2K_3) \sin(t) + \\ + (0.2K_2 - 0.84K_3) \cos(t) = 0.64 + sin(t)$$

Zadatak 2

- koeficijente K_1, K_2, K_3 određujemo metodom neodređenih koeficijenata, pa iz

$$0.16K_1 = 0.64 \quad \Rightarrow \quad K_1 = 4$$

$$\left.\begin{aligned} 1 &= -0.84K_2 - 0.2K_3 \\ 0 &= 0.2K_2 - 0.84K_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} K_2 &= -1.1266 \\ K_3 &= -0.2682 \end{aligned}$$

- totalno rješenje je, za $t \geq 0$

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} + y_p(t) = \\ &= c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} + K_1 + K_2 \sin(t) + K_3 \cos(t) \end{aligned}$$

- konstante c_1 i c_2 određujemo iz $y(0^+)$ i $\dot{y}(0^+)$
- kako je za zadanu jednadžbu $b_0 = b_1 = 0$ i $b_2 = 1$ slijedi, iz jednadžbi (10) i (11),

$$y(0^+) = y(0^-) = -3 \text{ i } \dot{y}(0^+) = \dot{y}(0^-) = -1$$

Zadatak 2

- iz

$$y(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} + K_1 + K_2 \sin(t) + K_3 \cos(t)$$
$$\dot{y}(t) = s_1 c_1 e^{s_1 t} + s_2 c_2 e^{s_2 t} + K_2 \cos(t) - K_3 \sin(t)$$

za $t = 0^+$

$$\left.\begin{aligned} -3 &= c_1 + c_2 + K_1 + K_3 \\ -1 &= s_1 c_1 + s_2 c_2 + K_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} c_1 + c_2 &= -3 - K_1 - K_3 \\ s_1 c_1 + s_2 c_2 &= -1 - K_2 \end{aligned}\right.$$

$$\left.\begin{aligned} &c_1 + c_2 = -3 - 4 + 0.2682 \\ &(-0.1 + j0.3873)c_1 + (-0.1 - j0.3873)c_2 = -1 + 1.1266 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$c_1 = -3.3659 + j0.7056 = 3.4391 e^{j2.9349}$$
$$c_2 = -3.3659 - j0.7056 = 3.4391 e^{-j2.9349}$$

Zadatak 2

- totalno rješenje je

$$
\begin{aligned}
y(t) = 3.4391 e^{j2.9349} e^{-0.1t} e^{j0.3873t} &+ \\
+ 3.4391 e^{-j2.9349} e^{-0.1t} e^{-j0.3873t} &+ \\
+ 4 - 1.1266 \sin(t) - 0.2682 \cos(t), &\quad t \geq 0
\end{aligned}
$$

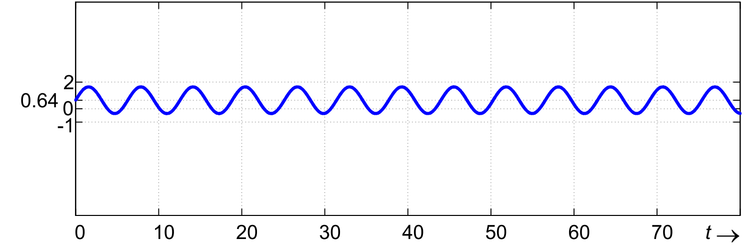
$$
\begin{aligned}
y(t) = \underbrace{6.8782 e^{-0.1t} \cos(0.3873t + 2.9349)}_{\text{prijelazni odziv – vlastitim frekvencijama}} &+ \\
+ \underbrace{4 + 1.1581 \cos(t + 1.8045)}_{\text{prisilni odziv – frekvencijom pobude}}, &\quad t \geq 0
\end{aligned}
$$

provjera za $t = 0$

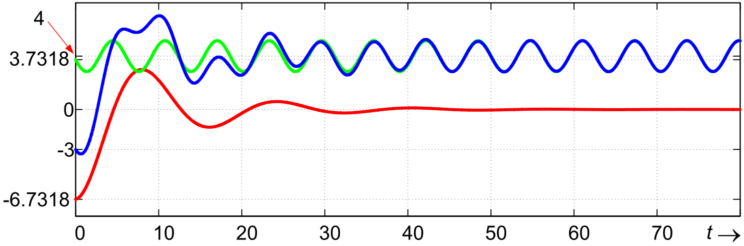
$$
\begin{aligned}
y(0) &= 6.8782 \cos(2.9349) + 4 + 1.1581 \cos(1.8045) = \\
&= -6.7318 + 4 - 0.2682 = -3
\end{aligned}
$$

Zadatak 2

$$u(t) = 0.64 + \sin(t)$$



$$y(t) = 6.8782\cos(0.3873t + 2.9349) + 4 + 1.1581\cos(t + 1.8045)$$



Utjecaj karakterističnih frekvencija na totalni odziv

- uvidom u izraz za totalni odziv stabilnog sustava evidentno je kako prirodni odziv trne s vremenom i pogrešan bi bio zaključak kako time sasvim prestaje utjecaj vlastitih frekvencija na totalni odziv
- treba podsjetiti kako je partikularno rješenje izračunavano metodom neodređenog koeficijenata i kako je u određivanju koeficijenata partikularnog rješenja korištena cjelokupna diferencijalna jednadžba pa su time, posredno, i karakteristične frekvencije utjecale na partikularno rješenje
- utjecaj karakterističnih frekvencija u totalnom odzivu moguće je ilustrirati sljedećim razmatranjem

Utjecaj karakterističnih frekvencija na totalni odziv

- razmotrimo sustav prvog reda, čiji je impulsni odziv $h(t) = Ae^{s_1 t}\mu(t)$, pobuđen s $u(t) = e^{\zeta t}\mu(t)$
- odziv kauzalnog mirnog sustava je

$$y(t) = h(t) * u(t) = Ae^{s_1 t}\mu(t) * e^{\zeta t}\mu(t)$$

$$y(t) = \int_0^t Ae^{s_1(t-\tau)}e^{\zeta\tau}d\tau = Ae^{s_1 t}\int_0^t e^{(\zeta - s_1)\tau}d\tau$$

$$y(t) = \frac{A}{\zeta - s_1}\left[e^{\zeta t} - e^{s_1 t}\right] \tag{31}$$

- očigledno je kako je za pobude čija je frekvencija bliža karakterističnoj frekvenciji veća amplituda odziva
- ovaj zaključak se jednostavno proširuje na sustave N–tog reda jer je impulsni odziv linearna kombinacija N eksponencijala koje titraju karakterističnim frekvencijama

Rezonancija

- jednadžba (31) potiče da se razmotri slučaj kada je frekvencija pobude identična jednoj od karakterističnih frekvencija sustava
- i ovdje se razmatranje započinje za sustav prvog reda čiji je impulsni odziv $h(t) = Ae^{s_1 t}\mu(t)$
- sustav se pobuđuje eksponencijalom neznatno različite frekvencije od karakteristične frekvencije $u(t) = e^{(s_1-\epsilon)t}\mu(t)$
- odziv ovog sustava, opet korištenjem konvolucijskog integrala, je

$$y(t) = \frac{A}{\epsilon}\left[e^{s_1 t} - e^{(s_1-\epsilon)t}\right] = Ae^{s_1 t}\left(\frac{1-e^{-\epsilon t}}{\epsilon}\right)$$

Rezonancija

- očigledno je kako se u

$$y(t) = Ae^{s_1 t}\left(\frac{1 - e^{-\epsilon t}}{\epsilon}\right),$$

za $\epsilon \to 0$, i brojnik i nazivnik približuju nuli

- primjenom L'Hôpital-ovog pravila slijedi

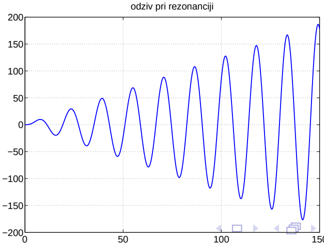
$$\lim_{\epsilon \to 0} y(t) = Ate^{s_1 t}$$

- odziv sadrži faktor t i za $t \to \infty$ amplituda odziva bi[11] također težila prema ∞
- ova pojava se naziva rezonancijom i za opaziti je da je to kumulativni, a ne trenutni, proces koji se razvija s t

[11] koristi se kondicional jer za s_1 u lijevoj poluravnini kompleksne ravnine se to neće dogoditi

Rezonancija

- za s_1 u lijevoj poluravnini kompleksne ravnine, rezonancija postoji, ali se ne stigne razviti jer se eksponencijala prigušuje brže od linearnog porasta t
- za s_1 na imaginarnoj osi, ili u desnoj poluravnini kompleksne ravnine, pojava rezonancije je očigledna
- kasnije će biti detaljno razmotrena rezonancija sustava drugog reda, čije su vlastite frekvencije $s_{1,2} = j\Omega_1$, a koji je pobuđen sinusoidalnim signalom iste frekvencije Ω_1
- ovdje se daje samo odziv tog sustava



Rezonancija

- pojavu rezonancije analiziramo na primjeru kontinuiranog sustava II reda i to preko njegova odziva
- odziv mirnog sustava možemo izračunati pomoću konvolucijskog integrala

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) u(t-\tau) d\tau$$

- prije je izveden izraz za impulsni odziv sustava drugog reda

$$h(t) = \frac{-A\Omega_n^2}{s_2 - s_1} e^{s_1 t} + \frac{A\Omega_n^2}{s_2 - s_1} e^{s_2 t} \quad t \geq 0$$

Rezonancija

- pojavu rezonancije ilustriramo na primjeru sustava[12]

$$\ddot{y}(t) + \Omega_n^2 y(t) = A\Omega_n^2 u(t)$$

- vlastite frekvencije sustava su $s_1 = j\Omega_n$ i $s_2 = -j\Omega_n$ pa je impulsni odziv

$$h(t) = \frac{-A\Omega_n^2}{s_2 - s_1} e^{s_1 t} + \frac{A\Omega_n^2}{s_2 - s_1} e^{s_2 t} = \Omega_n A \frac{e^{j\Omega_n t} - e^{-j\Omega_n t}}{2j}$$

- pobuđen sinusnim signalom frekvencije identične vlastitoj frekvenciji sustava

$$u(t) = \sin(\Omega_n t) = \frac{e^{j\Omega_n t} - e^{-j\Omega_n t}}{2j}$$

[12] pretpostavljamo $\zeta = 0$ u jednadžbi $\ddot{y}(t) + 2\zeta\Omega_n\dot{y}(t) + \Omega_n^2 y(t) = A\Omega_n^2 u(t)$

Rezonancija

- odziv mirnog kauzalnog sustava uz pobudu zadanu za $t \geq 0$ izračunavamo konvolucijom

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \int_0^t h(\tau)u(t-\tau)d\tau = \\
&= \int_0^t \frac{\Omega_n A}{2j}[e^{j\Omega_n\tau} - e^{-j\Omega_n\tau}]\frac{1}{2j}[e^{j\Omega_n(t-\tau)} - e^{-j\Omega_n(t-\tau)}]d\tau = \\
&= -\frac{\Omega_n A}{4}\int_0^t [e^{j\Omega_n t} - e^{j\Omega_n t}e^{-j2\Omega_n\tau} - e^{-j\Omega_n t}e^{j2\Omega_n\tau} + e^{-j\Omega_n t}]d\tau = \\
&= -\frac{\Omega_n A}{4}\{e^{j\Omega_n t}\int_0^t d\tau - e^{j\Omega_n t}\int_0^t e^{-j2\Omega_n\tau}d\tau - \\
&\qquad - e^{-j\Omega_n t}\int_0^t e^{j2\Omega_n\tau}d\tau + e^{-j\Omega_n t}\int_0^t d\tau\} = \\
&= -\frac{\Omega_n A}{4}\{t(e^{j\Omega_n t} + e^{-j\Omega_n t}) + \frac{e^{-j\Omega_n t}}{j2\Omega_n} - \frac{e^{j\Omega_n t}}{j2\Omega_n} - \frac{e^{j\Omega_n t}}{j2\Omega_n} + \frac{e^{-j\Omega_n t}}{j2\Omega_n}\} =
\end{aligned}
$$

$$
y(t) = -\frac{\Omega_n A}{2}t\cos(\Omega_n t) + \frac{A}{2}\sin(\Omega_n t), \qquad t \geq 0
$$

- rezonancija je prema tome kumulativna pojava i ona se razvija proporcionalno s t

Odziv pri rezonanciji

Vrijeme odziva sustava – vremenska konstanta

- intuitivno se može zaključiti kako sustavi trebaju neko vrijeme kako bi potpuno reagirali na neku pobudu i to vrijeme možemo nazvati vrijeme odziva ili vremenska konstanta sustava
- ako razmotrimo impulsni odziv sustava možemo zaključiti da, iako je pobuda $\delta(t)$ trenutna (trajanja nula), impulsni odziv je trajanja[13] T_h, dakle sustav treba neko vrijeme da potpuno odgovori na pobudu
- ovu činjenicu možemo ilustrirati sljedećim primjerom

[13] strogo govoreći impulsni odziv je beskonačnog trajanja jer se kompleksne eksponencijale asimptotski približavaju nuli za $t \to \infty$, no nakon nekog vremena vrijednosti impulsnog odziva su zanemarive pa ga možemo smatrati konačnim

Vrijeme odziva sustava – vremenska konstanta

- usporedimo impulsne odzive sljedeća dva sustava, te njihove odzive na jedinični skok
- diferencijalna jednadžba, karakteristične frekvencije i impulsni odziv prvog sustava su

$$
\begin{aligned}
&y'''(t) + 0.4y''(t) + 0.2y'(t) + 0.032y(t) = u(t)\\
&s_1 = -0.1000 + j0.3873 = 0.4e^{j1.8235}\\
&s_2 = -0.1000 - j0.3873 = 0.4e^{-j1.8235}\\
&s_3 = -0.2000\\
&h_1(t) = 6.455e^{-0.1t}\cos(0.3873t - 2.8889) + 6.25e^{-0.2t}
\end{aligned}
$$

- isto za drugi sustav

$$
\begin{aligned}
&y'''(t) + 0.2y''(t) + 0.05y'(t) + 0.004y(t) = 0.25u(t)\\
&s_1 = -0.0500 + j0.1936 = 0.2e^{j1.8235}\\
&s_2 = -0.0500 - j0.1936 = 0.2e^{-j1.8235}\\
&s_3 = -0.1000\\
&h_2(t) = 6.455e^{-0.05t}\cos(0.1936t - 2.8889) + 6.25e^{-0.1t}
\end{aligned}
$$

Vrijeme odziva sustava – vremenska konstanta

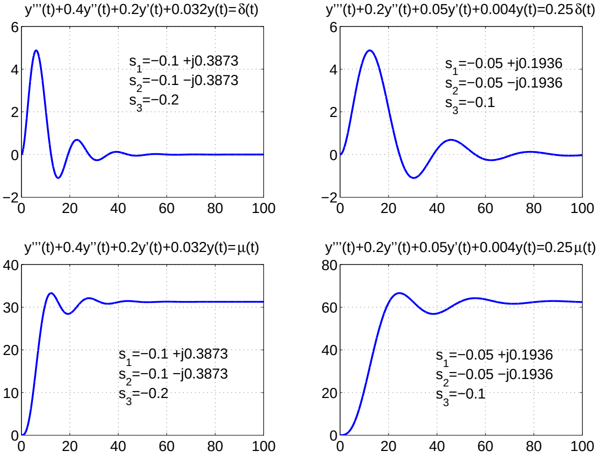
- usporedimo odzive na jedinični skok za iste sustave
- diferencijalna jednadžba, karakteristične frekvencije i odziv na jedinični skok prvog sustava su

$$
\begin{aligned}
&y'''(t) + 0.4y''(t) + 0.2y'(t) + 0.032y(t) = u(t)\\
&s_1 = -0.1000 + j0.3873 = 0.4e^{j1.8235}\\
&s_2 = -0.1000 - j0.3873 = 0.4e^{-j1.8235}\\
&s_3 = -0.2000\\
&y_{\mu 1}(t) = -16.1374e^{-0.1t}\sin(0.3873t) - 31.25e^{-0.2t} + 31.25
\end{aligned}
$$

- isto za drugi sustav

$$
\begin{aligned}
&y'''(t) + 0.2y''(t) + 0.05y'(t) + 0.004y(t) = 0.25u(t)\\
&s_1 = -0.0500 + j0.1936 = 0.2e^{j1.8235}\\
&s_2 = -0.0500 - j0.1936 = 0.2e^{-j1.8235}\\
&s_3 = -0.1000\\
&y_{\mu 2}(t) = -32.2749e^{-0.05t}\sin(0.1936t) - 62.5e^{-0.1t} + 62.5
\end{aligned}
$$

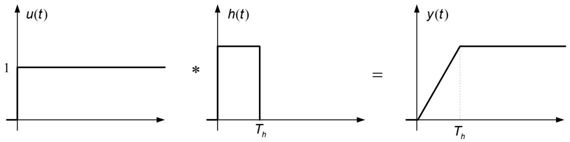
Vrijeme odziva sustava – vremenska konstanta



Slika 3: Impulsni odziv i odziv na jedinični skok

Vrijeme odziva sustava – vremenska konstanta

- očigledno je da je vrijeme odziva sustava ovisno o vrijednostima (položaju) karakterističnih frekvencija
- očigledno je, također, kako je za "širi" impulsni odziv vrijeme odziva veće
- ovo možemo dodatno pojasniti još jednostavnijim primjerom
- neka je impulsni odziv, pravokutni impuls trajanja T_h, i neka je sustav pobuđen jediničnim skokom
- odziv sustava će biti jednak njihovoj konvoluciji



Slika 4: Vrijeme odziva

Signali i sustavi

Profesor
Branko Jeren

24. svibnja 2017.

Odziv sustava na pobudu eksponencijalom

- razmotrimo odziv sustava na svevremensku eksponencijalu

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad s \in \mathbb{C}$$
$$u(t) = e^{st}$$

- odziv, linearnog, vremenski stalnog, mirnog sustava određujemo konvolucijom pa je

$$\begin{aligned} y(t) = h(t) * u(t) = h(t) * e^{st} = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau = \\ = e^{st} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau}_{H(s)} \end{aligned}$$

pa je

$$y(t) = H(s) e^{st}$$

gdje je

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau \qquad (1)$$

Odziv sustava na pobudu eksponencijalom

- za konkretnu kompleksnu frekvenciju pobude s, dakle kompleksni broj, $H(s)$ je također kompleksan broj, pa vrijedi:
- za pobudu kompleksnom eksponencijalom odziv je istog oblika i rezultat je množenja pobude s konstantom
- kompleksnu eksponencijalu nazivamo karakterističnom ili vlastitom funkcijom sustava
- budući da sinusoidni signali mogu biti razmatrani kao eksponencijale ($cos(\omega t) = 0.5e^{j\omega t} + 0.5e^{-j\omega t}$), svevremenske sinusoide su također vlastite ili karakteristične funkcije linearnih vremenski stalnih sustava

Odziv sustava na pobudu eksponencijalom

- kontinuirani *SISO* sustav opisan je diferencijalnom jednadžbom

$$\frac{d^N y}{dt^N} + a_1 \frac{d^{N-1} y}{dt^{N-1}} + \cdots + a_{N-1} \frac{dy}{dt} + a_N y(t) =$$

$$= b_{N-M} \frac{d^M u}{dt^M} + b_{N-M+1} \frac{d^{M-1} u}{dt^{M-1}} + \cdots + b_{N-1} \frac{du}{dt} + b_N u(t)$$

- podsjetimo se, kako uvođenjem operatora deriviranja D, koji predstavlja operaciju deriviranja d/dt, gornju jednadžbu zapisujemo kao

$$\underbrace{\left(D^N + a_1 D^{N-1} + \ldots + a_{N-1} D + a_N\right)}_{A(D)} y(t) =$$

$$= \underbrace{\left(b_{N-M} D^M + b_{N-M+1} D^{M-1} + \ldots + b_{N-1} D + b_N\right)}_{B(D)} u(t) \quad (2)$$

Odziv sustava na pobudu eksponencijalom

- diferencijalnu jednadžbu možemo zapisati i kao

$$y(t) = \left(\frac{B(D)}{A(D)}\right) u(t) \quad \Rightarrow \quad y(t) = H(D)u(t)$$

- složeni operator $H(D)$ pridružuje vremenskoj funkciji y funkciju u i predstavlja formalni zapis diferencijalne jednadžbe (2)

Odziv sustava na pobudu eksponencijalom

- sustav pobuđujemo kompleksnom eksponencijalom

$$u(t) = Ue^{st}, \qquad U = |U|e^{j\varphi}$$

U – kompleksna amplituda pobude,
$|U|$ – amplituda,
φ – faza
s – neka konkretna kompleksna frekvencija $s = \sigma + j\omega$

- partikularno rješenje je oblika $y_p(t) = Ye^{st}$
- kompleksnu amplitudu odziva Y određujemo iz polazne jednadžbe metodom neodređenih koeficijenata pa slijedi

$$\begin{aligned}(s^N + a_1 s^{N-1} + \cdots + a_{N-1}s + a_N)Ye^{st} &= \\ = (b_{N-M}s^M + b_{N-M+1}s^{M-1} + \cdots + b_{N-1}s + b_N)Ue^{st}\end{aligned}$$

Odziv sustava na pobudu eksponencijalom

- pa je kompleksna amplituda odziva Y

$$Y = \underbrace{\frac{b_{N-M}s^M + b_{N-M+1}s^{M-1} + \cdots + b_{N-1}s + b_N}{s^N + a_1 s^{N-1} + \cdots + a_{N-1}s + a_N}}_{H(s)} U = H(s)U$$

- amplituda partikularnog rješenja Y određena je amplitudom pobude, svojstvima sustava, te konkretnom kompleksnom frekvencijom s

Prijenosna funkcija

- $H(s)$ je veličina koja određuje odnos kompleksne amplitude prisilnog odziva $y_p(t) = Ye^{st}$ i kompleksne amplitude pobude $u(t) = Ue^{st}$

$$H(s) = \frac{b_{N-M}s^M + b_{N-M+1}s^{M-1} + \cdots + b_{N-1}s + b_N}{s^N + a_1 s^{N-1} + \cdots + a_{N-1}s + a_N} = \frac{Y}{U}$$

- za konkretnu frekvenciju s, H(s) ima značenje faktora kojim treba množiti kompleksnu amplitudu ulaza da se dobije amplituda izlaza

$$Y = H(s)U$$

- $H(s)$ možemo formalno zapisati iz složenog operatora $H(D)$, zamjenom operatora D s kompleksnom frekvencijom s

Prijenosna funkcija

- $H(s)$, za $s \in \mathbb{C}$, nazivamo prijenosna funkcija ili transfer funkcija i možemo je definirati kao

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad s \in \mathbb{C}$$
$$H(s) = \left.\frac{y_p(t)}{u(t)}\right|_{u(t)=e^{st}}$$

- transfer ili prijenosna funkcija sustava $H(s)$ racionalna je funkcija koju možemo prikazati kao

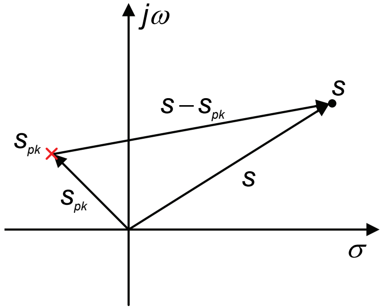
$$H(s) = K\frac{(s-s_{01})(s-s_{02})\cdots(s-s_{0M})}{(s-s_{p1})(s-s_{p2})\cdots(s-s_{pN})}$$

K je konstanta
$s_{01}, s_{02}, \ldots, s_{0M}$ su nule prijenosne funkcije
$s_{p1}, s_{p2}, \ldots, s_{pN}$ su polovi[1] prijenosne funkcije

[1] dolazi od engleske riječi tent-pole

Prijenosna funkcija

- svaki od članova $(s - s_{0k})$ ili $(s - s_{pk})$ može biti predstavljen kao vektor u kompleksnoj s ravnini



- vektor $(s - s_{pk})$ je usmjeren od s_{pk} do s i može biti prikazan u polarnom obliku

$$(s - s_{pk}) = |s - s_{pk}|e^{j\angle(s - s_{pk})}$$

Prijenosna funkcija

- prijenosnu funkciju možemo pisati kao produkt i kvocijent vektora

$$H(s) = K\frac{|s-s_{01}|e^{j\angle(s-s_{01})}|s-s_{02}|e^{j\angle(s-s_{02})}\dots|s-s_{0M}|e^{j\angle(s-s_{0M})}}{|s-s_{p1}|e^{j\angle(s-s_{p1})}|s-s_{p2}|e^{j\angle(s-s_{p2})}\dots|s-s_{pN}|e^{j\angle(s-s_{pN})}}$$

- prijenosnu funkciju $H(s)$ možemo pisati i kao

$$H(s) = |H(s)|e^{j\angle H(s)}$$

pri čemu su[2]

$$|H(s)| = |K|\frac{|s-s_{01}||s-s_{02}|\cdots|s-s_{0M}|}{|s-s_{p1}||s-s_{p2}|\cdots|s-s_{pN}|}$$

$$\angle H(s) = \angle K + [\angle(s-s_{01}) + \angle(s-s_{02}) + \cdots + \angle(s-s_{0M})] - \\ -[\angle(s-s_{p1}) + \angle(s-s_{p2}) + \cdots + \angle(s-s_{pN})]$$

[2] Za realne sustave je $K \in \mathbb{R}$, pa je $\angle K = 0$ za $K > 0$, odnosno $\angle K = \pi$ za $K < 0$

Primjer određivanja prijenosne funkcije

- za sustav opisan jednadžbom

$$\ddot{y}(t) + 0.2\dot{y}(t) + 0.16y(t) = u(t)$$

pobuđen s

$$u(t) = Ue^{st}$$

partikularno rješenje je

$$y_p(t) = Ye^{st}$$

- kompleksna amplituda odziva je

$$Y = \frac{1}{s^2 + 0.2s + 0.16}U$$

Primjer određivanja prijenosne funkcije

- partikularno rješenje je

$$y_p(t) = \frac{1}{s^2 + 0.2s + 0.16} U e^{st} = H(s) U e^{st}$$

- pa je prijenosna funkcija zadanog sustava

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 0.2s + 0.16} = \frac{1}{(s - s_{p1})(s - s_{p2})}$$

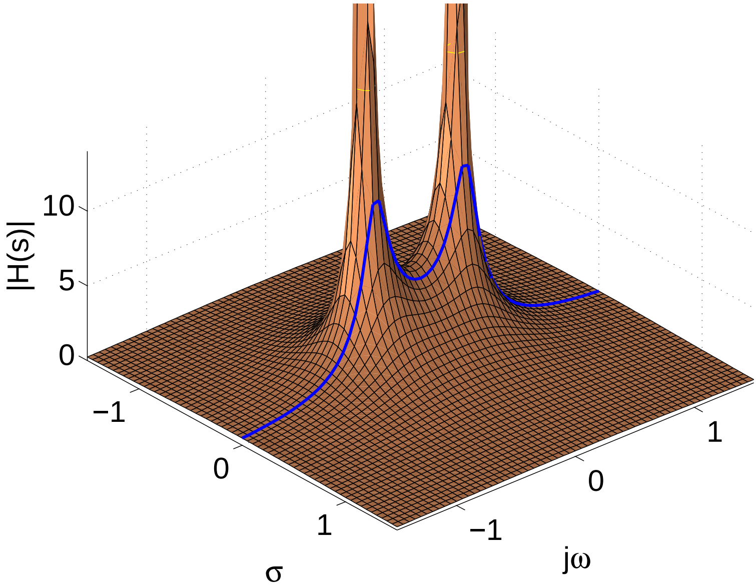
odnosno

$$H(s) = \frac{1}{[s - (-0.1 + j0.3873)][s - (-0.1 - j0.3873)]}$$

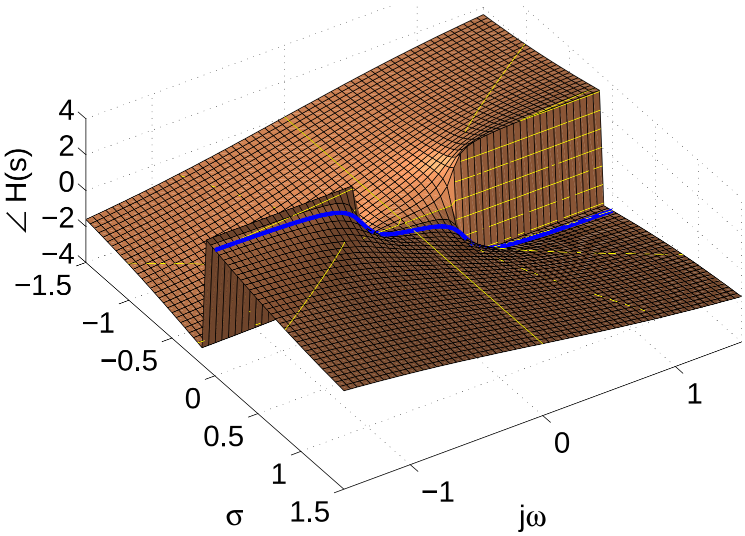
- $|H(s)|$ i $\angle H(s)$, izračunate iz diferencijalne jednadžbe, možemo prikazati i odgovarajućim plohama iznad kompleksne ravnine[3]

[3] plava krivulja označuje vrijednosti $H(s)$ za $s = \pm j\omega$, odnosno, presjecište ploha s ravninom koju određuje imaginarna os

Primjer određivanja prijenosne funkcije



Primjer određivanja prijenosne funkcije



Prisilni odziv sustava

- razmatraju se specijalni slučajevi kompleksne frekvencije pobude $s = 0$ i $s = j\omega$
- za $s = 0$, pobuda je $u(t) = Ue^{st} = Ue^{0 \cdot t} = U$, dakle, konstanta amplitude $U \in \mathbb{R}^+$

$$H(s) = \left. \frac{b_{N-M}s^M + b_{N-M+1}s^{M-1} + \cdots + b_{N-1}s + b_N}{s^N + a_1 s^{N-1} + \cdots + a_{N-1}s + a_N} \right|_{s=0} = \frac{b_N}{a_N}$$

- pa je prisilni odziv

$$y_p(t) = H(0)U$$

Prisilni odziv sustava

- za $s = j\omega$, pobuda je harmonijski (sinusoidalni) signal konstantne amplitude

$$u(t) = Ue^{j\omega t} = U[\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)], \text{ za } U \in \mathbb{R}^+$$

- kompleksna amplituda prisilnog odziva je

$$Y = \frac{b_{N-M}(j\omega)^M + b_{N-M+1}(j\omega)^{M-1} + \cdots + b_{N-1}(j\omega) + b_N}{(j\omega)^N + a_1(j\omega)^{N-1} + \cdots + a_{N-1}(j\omega) + a_N} U$$

- pa je prisilni odziv

$$y_p(t) = H(j\omega)Ue^{j\omega t}$$

- $H(j\omega)$ je frekvencijska karakteristika sustava[4]

[4] Iz jedandžbe (1), $H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau$, za $s = j\omega \;\Rightarrow H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}\,d\tau$, što znači kako je $H(j\omega)$ Fourierova transformacija impulsnog odziva $h(t)$

Prisilni odziv sustava

- za pobudu

$$u(t) = Ue^{-j\omega t} = U[\cos(\omega t) - j\sin(\omega t)], \text{ za } U \in \mathbb{R}^+$$

- kompleksna amplituda prisilnog odziva je

$$Y = \frac{b_{N-M}(-j\omega)^M + \cdots + b_{N-1}(-j\omega) + b_N}{(-j\omega)^N + a_1(-j\omega)^{N-1} + \cdots + a_{N-1}(-j\omega) + a_N} U$$

- pa je prisilni odziv

$$y_p(t) = H(-j\omega)Ue^{-j\omega t}$$

Prisilni odziv sustava

- za pobudu

$$u(t) = \frac{Ue^{j\omega t} + Ue^{-j\omega t}}{2} = U\cos(\omega t), \qquad \text{za } U \in \mathbb{R}^+$$

- prisilni odziv je[5]

$$y_p(t) = \frac{H(j\omega)Ue^{j\omega t} + H(-j\omega)Ue^{-j\omega t}}{2},$$

$$y_p(t) = \frac{H(j\omega)Ue^{j\omega t}}{2} + \left(\frac{H(j\omega)Ue^{j\omega t}}{2}\right)^*,$$

$$y_p(t) = 2Re\left(\frac{H(j\omega)Ue^{j\omega t}}{2}\right) = Re\left(|H(j\omega)|e^{j\angle H(j\omega)}Ue^{j\omega t}\right)$$

$$y_p(t) = U|H(j\omega)|\cos(\omega t + \angle H(j\omega))$$

[5] Da vrijedi $H(-j\omega) = H^*(j\omega)$ pokazuje se malo kasnije

Frekvencijska karakteristika kontinuiranog sustava

- frekvencijska karakteristika je kompleksna funkcija pa vrijedi

$$H(j\omega) = Re[H(j\omega)] + jIm[H(j\omega)] = |H(j\omega)|e^{j\angle H(j\omega)}$$

pri čemu su

- amplitudna frekvencijska karakteristika

$$|H(j\omega)| = \sqrt{(Re[H(j\omega)])^2 + (Im[H(j\omega)])^2}$$

- fazna frekvencijska karakteristika[6]

$$\angle H(j\omega) = \arctan\left(\frac{Im[H(j\omega)]}{Re[H(j\omega)]}\right)$$

[6] zbog višeznačnosti *arctan* funkcije treba se računati *arctan* za sva četiri kvadranta. U MATLAB-u se u tu svrhu koristi funkcija *atan*2

Frekvencijska karakteristika kontinuiranog sustava

- očigledno je kako vrijedi veza frekvencijske karakteristike kontinuiranog sustava, $H(j\omega)$, i prijenosne funkcije[7] $H(s)$

$$H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st}dt \right]_{s=j\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt$$

- za realni impulsni odziv $h(t)$ vrijedi

$$H(j\omega) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\cos(\omega t)\, dt}_{Re[H(j\omega)]} - j \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\sin(\omega t)\, dt}_{-Im[H(j\omega)]}$$

$$H(j\omega) = Re[H(j\omega)] + jIm[H(j\omega)]$$

- očigledno je kako je
  - $Re[H(j\omega)]$ parna funkcija od ω, a
  - $Im[H(j\omega)]$ neparna funkcija od ω

[7] Frekvencijska karak. definirana je kao $H : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, a prijenosna funkcija ka funkcija $H : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

Frekvencijska karakteristika kontinuiranog sustava

- iz parnosti i neparnosti realnog i imaginarnog dijela frekvencijske karakteristike slijedi $H(-j\omega) = H^*(j\omega)$
- iz

$$H(j\omega) = Re[H(j\omega)] + jIm[H(j\omega)]$$

i

$$H(-j\omega) = Re[H(-j\omega)] + jIm[H(-j\omega)]$$

uz parni $Re[H(j\omega)]$ i neparni $Im[H(j\omega)]$ slijedi

$$H(-j\omega) = Re[H(j\omega)] - jIm[H(j\omega)] = H^*(j\omega)$$

- iz parnosti $Re[H(j\omega)]$ i neparnosti $Im[H(j\omega)]$, slijedi kako je
  - $|H(j\omega))|$ parna funkcija od ω i
  - $\angle H(j\omega)$ neparna funkcija od ω

Frekvencijska karakteristika kontinuiranog sustava

- prijenosna funkcija sustava opisanog jednadžbom
  $\ddot{y}(t) + 0.2\dot{y}(t) + 0.16y(t) = u(t)$
  je

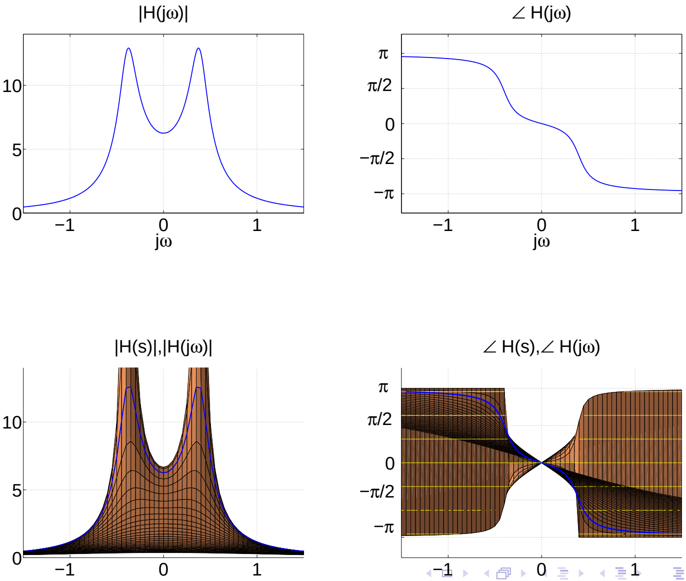
$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 0.2s + 0.16} = \frac{1}{(s + 0.1 - j0.387)(s + 0.1 + j0.387)}$$

- pa je frekvencijska karakteristika

$$H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2 + 0.2(j\omega) + 0.16}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega - 0.4e^{j0.3873})(j\omega - 0.4e^{-j0.3873})}$$

Frekvencijska karakteristika



Signali i sustavi
školska godina 2016/2017
Cjelina 12.

Profesor Branko Jeren

Frekvencijska karakteristika sustava

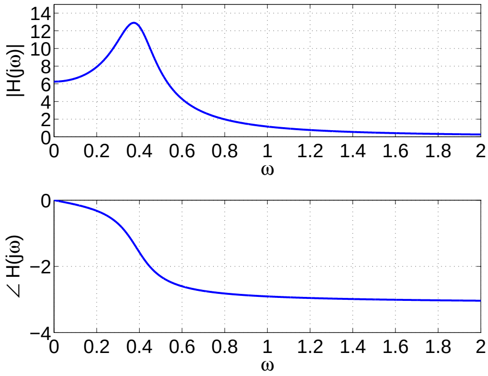
Odziv sustava na pobudu eksponencijalom

Prijenosna funkcija

Frekvencijska karakteristika vremenski kontinuiranih sustava

Frekvencijska karakteristika

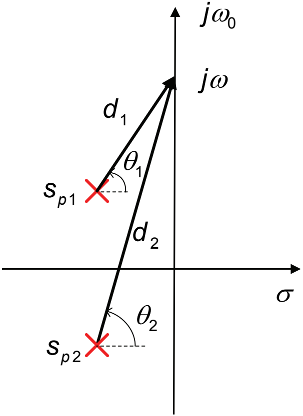
ω	$\lvert H(j\omega)\rvert$	$\angle H(j\omega)$
0.0	6.2500	0.0000
0.2	7.9057	−0.3218
0.4	12.5000	−1.5708
0.6	4.2875	−2.6012
0.8	1.9764	−2.8198
1.0	1.1581	−2.9078
1.2	0.7679	−2.9562
1.4	0.5490	−2.9873
1.6	0.4130	−3.0090
1.8	0.3225	−3.0252
2.0	0.2590	−3.0378

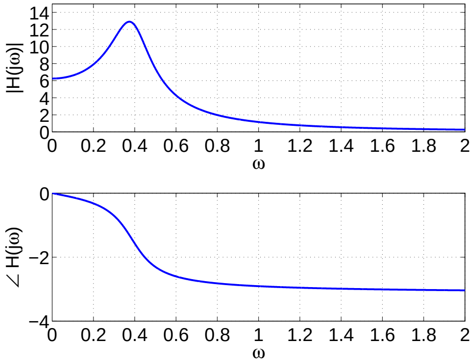


Frekvencijska karakteristika

- razmotrimo još jednom utjecaj polova na frekvencijsku karakteristiku

$$H(j\omega)=\frac{1}{(j\omega-s_{p1})(j\omega-s_{p2})}=\frac{1}{(d_1e^{j\theta_1})(d_2e^{j\theta_2})}=\frac{1}{d_1d_2}e^{-j(\theta_1+\theta_2)}$$





Frekvencijska karakteristika

- uvidom u frekvencijsku karakteristiku sustava, u prethodnom primjeru, zaključujemo da sustav ima filtarska svojstva tzv. niskopropusnog filtra
- sustav "propušta" sinusoidne pobude nižih frekvencija (recimo nižih od neke granične frekvencije ω_c), a "guši" sinusoidne pobude viših frekvencija
- primjer jasno pokazuje kako položaj polova (kasnije se pokazuje i za položaj nula) određuje frekvencijsku karakteristiku sustava
- intuitivno zaključujemo kako, odgovarajućim razmještajem polova i nula, možemo projektirati sustav odgovarajuće frekvencijske karakteristike
- ovdje će se kroz nekoliko primjera, pogodnim razmještajem polova i nula, ilustrirati "projektiranje" sustava raznih filtarskih karakteristika[8]

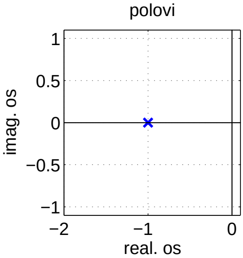
[8] sustavni postupci projektiranja sustava izučavaju se u drugim specijaliziranim predmetima

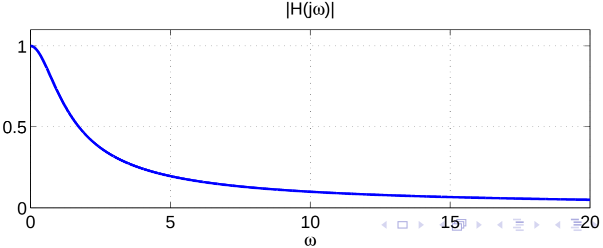
Frekvencijska karakteristika

- iz prethodnog primjera možemo zaključiti kako je maksimum $H(j\omega)$, za $j\omega$, točno nasuprot pola
- uzevši to u obzir "projektiramo" niskopropusni filtar prvog reda
- izabiremo pol na mjestu $s_{p1} = -1$
- maksimum $H(j\omega)$ će biti na frekvenciji $j\omega = 0$

Frekvencijska karakteristika – primjer sustava prvog reda

$$H(s) = \frac{1}{s - s_{p1}} = \frac{1}{s+1} \Rightarrow |H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + 1}}$$





Frekvencijska karakteristika

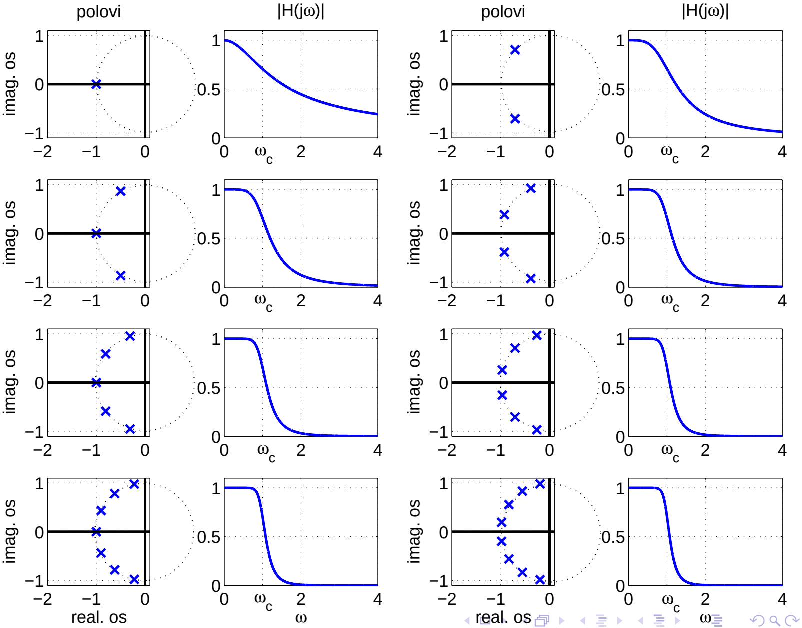
- sustav bolje formiranih filtarskih karakteristika može se postići postavljanjem "zida" polova nasuprot $j\omega$ osi
- ovo će biti ilustrirano nizom primjera tzv. Butterworth-ovih[9] niskopropusnih filtara za koje vrijedi da su polovi jednoliko razmješteni na kružnici radijusa $\omega_c = 1$, gdje je $\omega_c = 1$ granična frekvencija filtra
- u projektiranju koristimo Matlab naredbu za projektiranje vremenski kontinuiranih Butterworth-ovih filtara

$$[num, den] = butter(n, \omega_c, \text{'}low\text{'}, \text{'}s\text{'})$$

gdje su: n red sustava, ω_c granična frekvencija, *num* izračunati brojnik, i *den* izračunati nazivnik prijenosne funkcije

[9] postupak projektiranja Butterworth-ovih filtara izučava se u specijaliziranim predmetima

Frekvencijska karakteristika



Frekvencijska karakteristika

- ovdje je posebno napisana samo prijenosna funkcija, i vrijednosti polova, za Butterworth–ov filtar 5–tog reda

$$H(s) = \frac{1}{s^5 + 3.2361s^4 + 5.2361s^3 + 5.2361s^2 + 3.2361s + 1}$$

- a vrijednosti polova su

$$\begin{aligned}
s_{p1} = -0.3090 + j0.9511 &= e^{j1.8849} = e^{j\frac{3\pi}{5}} \\
s_{p2} = -0.8090 + j0.5877 &= e^{j2.5133} = e^{j\frac{4\pi}{5}} \\
s_{p3} = -1.0000 &= e^{j3.1416} = e^{j\frac{5\pi}{5}} = e^{j\pi} \\
s_{p4} = -0.8090 - j0.5877 &= e^{-j2.5133} = e^{-j\frac{4\pi}{5}} \\
s_{p5} = -0.3090 - j0.9511 &= e^{-j1.8849} = e^{-j\frac{3\pi}{5}}
\end{aligned}$$

Frekvencijska karakteristika – doprinos nula

- za prijenosnu funkciju sustava vrijedi

$$H(s)|_{s=s_{0j}} = K\frac{(s - s_{01})\cdots(s - s_{0M})}{(s - s_{p1})\cdots(s - s_{pN})} = 0, \quad j = 1, \ldots, M$$

- ako prije razmatranom sustavu prvog reda, s polom $s_{p1} = -1$, dodamo "nulu" u $s_{01} = 0$, rezultirajući sustav će postati visokopropusni filtar prvog reda s prijenosnom funkcijom

$$H(s) = \frac{s - s_{01}}{s - s_{p1}} = \frac{s}{s+1}$$

- amplitudna frekvencijska karakteristika ovog sustava je

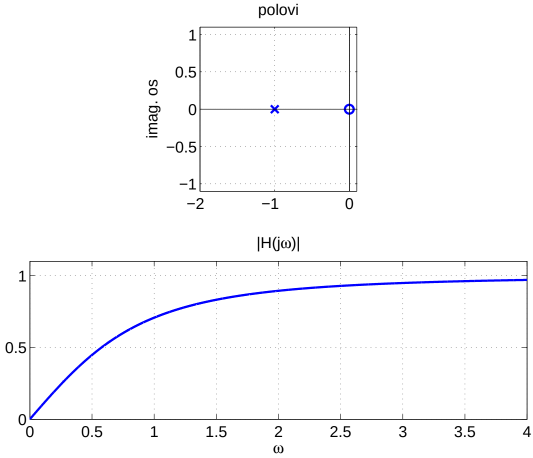
$$|H(j\omega)| = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + 1}}$$

a fazna frekvencijska karakteristika je

$$\angle H(j\omega) = \angle(j\omega) - \angle(j\omega + 1)$$

Frekvencijska karakteristika – primjer sustava prvog reda

$$H(s) = \frac{s}{s+1} \Rightarrow |H(j\omega)| = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2+1}}$$



Frekvencijska karakteristika – doprinos nula

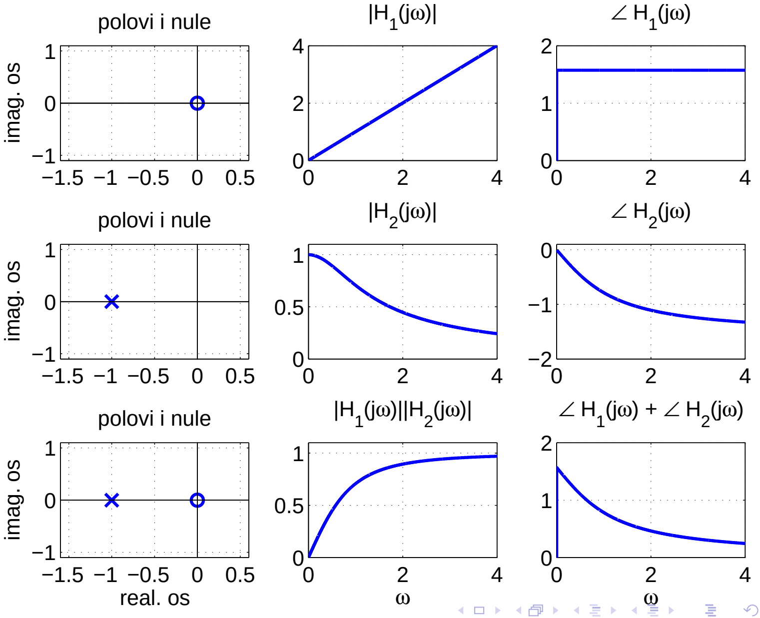
- doprinos nule na ukupnu frekvencijsku karakteristiku visokopropusnog filtra možemo razmotriti na slijedeći način
- prijenosnu funkciju $H(s)$ možemo razložiti i kao

$$H(s) = \frac{s}{s+1} = \underbrace{s}_{H_1(s)} \cdot \underbrace{\frac{1}{s+1}}_{H_2(s)} = |H_1(s)|e^{j\angle H_1(s)}|H_2(s)|e^{j\angle H_2(s)}$$

odnosno

$$H(s) = |H_1(s)| \cdot |H_2(s)|e^{j(\angle H_1(s)+\angle H_2(s))}$$

Frekvencijska karakteristika – doprinos nula



Frekvencijska karakteristika – pojasna brana

- ilustrira se projektiranje jednostavne pojasne brane čije su nule na frekvenciji $s = \pm j0.5$
- imajući u vidu prije dane primjere Butterworth-ovih filtara, za zaključiti je kako sustavi čiji su polovi na jediničnoj kružnici daju frekvencijsku karakteristiku koja je glatka u pojasu propuštanja
- zato i ovdje biramo polove koji su razmješteni na kružnici radijusa 0.5
- neka su, dakle, nule

$$s_{01,02} = \pm j0.5$$

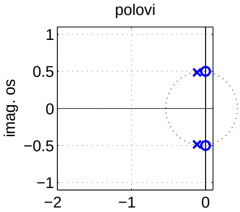
a polovi neka su

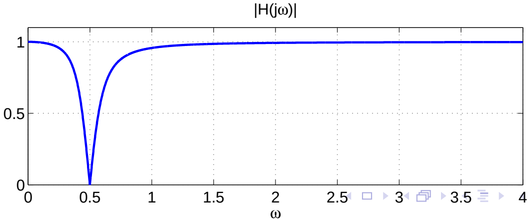
$$s_{p1,p2} = 0.5e^{\pm j1.8}$$

Frekvencijska karakteristika – pojasna brana

- za zadane polove i nule prijenosna funkcija je

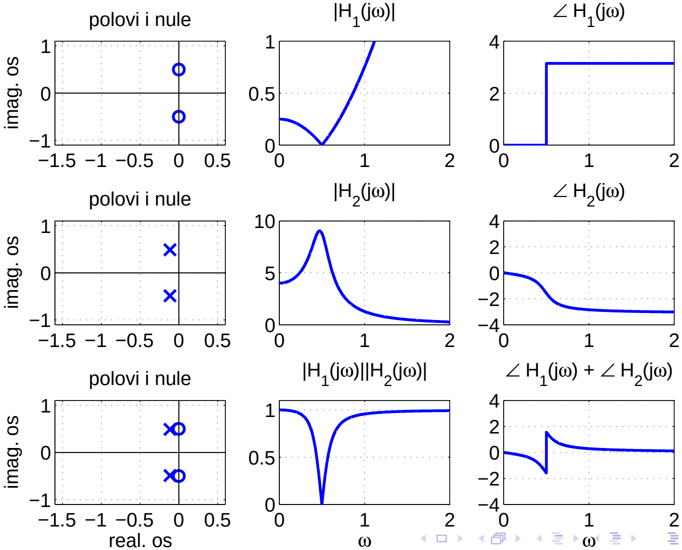
$$H(s) = \frac{s^2 + 0.25}{s^2 + 0.2272s + 0.25}$$





Frekvencijska karakteristika – pojasna brana

- i ovdje se može ilustrirati doprinos nula



Frekvencijska karakteristika – fazna frekvencijska karakteristika

- razmatra se frekvencijska karakteristika sustava

$$H(s) = \frac{1}{s^4 + 2.6131s^3 + 3.4142s^2 + 2.6131s + 1}$$

- frekvencijska karakteristika je kompleksna funkcija pa vrijedi

$$H(j\omega) = Re[H(j\omega)] + jIm[H(j\omega)] = |H(j\omega)|e^{j\angle H(j\omega)}$$

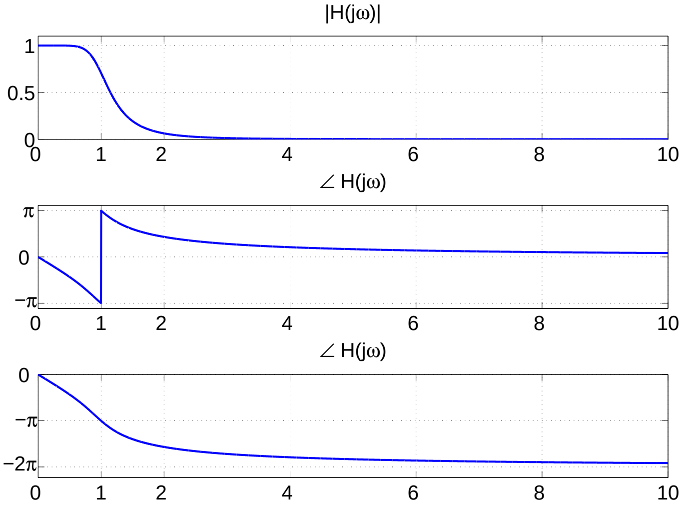
Frekvencijska karakteristika – fazna frekvencijska karakteristika

- fazna frekvencijska karakteristika je

$$\angle H(j\omega) = \arctan\left(\frac{Im[H(j\omega)]}{Re[H(j\omega)]}\right)$$

- kako je arkus funkcija višeznačna, u prikazu vrijednosti $\angle H(j\omega)$, uzimaju se samo glavne vrijednosti faze u intevalu $-\pi$ i π (dakle faza modulo 2π)
- za primijetiti je kako ova funkcija sadrži, na nekim frekvencijama, diskontinuitete u iznosu 2π, no oni nemaju nikakvo fizikalno značenje i samo su posljedica izračuna i uobičajnog načina prikaza funkcije faze
- pribrajanjem, ili oduzimanjem, cjelobrojnog višekratnika 2π, vrijednostima faze, na bilo kojoj frekvenciji, izvorna frekvencijska karakteristika se ne mijenja i moguće je prikazati $\angle H(j\omega)$ u obliku tzv. razmotane faze (unwrapped phase)

Frekvencijska karakteristika – fazna frekvencijska karakteristika



Signali i sustavi

Profesor
Branko Jeren

29. svibnja 2017.

Odziv diskretnog sustava na pobudu eksponencijalom Uz^n

- pokazano je kako je $y(t) = H(s)Ue^{st}$, odziv linearnog vremenski stalnog kontinuiranog sustava na pobudu svevremenskom eksponencijalom $u(t) = Ue^{st}$,
- razmotrimo odziv diskretnog sustava na svevremensku eksponencijalu

$$u(n) = Uz^n, \ n \in \mathbb{Z}, \ z \in \mathbb{C},$$

- odziv mirnog sustava određujemo konvolucijom pa je

$$y(n) = h(n) * u(n) = h(n) * Uz^n = U \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) z^{n-m} =$$

$$= Uz^n \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) z^{-m}}_{H(z)} = H(z) Uz^n$$

Odziv diskretnog sustava na pobudu eksponencijalom

- prema tome, odziv mirnog, linearnog, vremenski diskretnog sustava, na svevremensku eksponencijalu Uz^n, je

$$y(n) = H(z)Uz^n$$

gdje je[1]

$$H(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)z^{-m}$$

- za konkretnu kompleksnu frekvenciju pobude z, dakle kompleksan broj, $H(z)$ je također, u općem slučaju, kompleksan broj pa vrijedi
- za pobudu kompleksnom eksponencijalom odziv je istog oblika i rezultat je množenja pobude s konstantom
- kompleksnu eksponencijalu nazivamo karakterističnom ili vlastitom funkcijom sustava

[1] Za $z \in \mathbb{C}$, $H(z)$ nazivamo prijenosnom funkcijom definiranom s preslikavanjem $H : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

Odziv diskretnog sustava na pobudu eksponencijalom $U(e^{j\Omega})^n$

- razmatra se slučaj odziva linearnog vremenski stalnog diskretnog sustava na svevremensku eksponencijalu frekvencije $z = e^{j\Omega}$, dakle,

$$u(n) = Uz^n = U \cdot (e^{j\Omega})^n, \quad U \in \mathbb{R}^+$$

$$\begin{aligned} y(n) &= h(n) * u(n) = h(n) * U(e^{j\Omega})^n = \\ &= U \textstyle\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) e^{j\Omega(n-m)} = \\ &= Ue^{j\Omega n} \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) e^{-j\Omega m}}_{H(e^{j\Omega})} = H(e^{j\Omega}) Ue^{j\Omega n} \end{aligned}$$

- za $\Omega \in \mathbb{R}$, $H(e^{j\Omega})$ je kompleksna funkcija i naziva se frekvencijska karakteristika diskretnog sustava

$$H(e^{j\Omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) e^{-j\Omega m}$$

Frekvencijska karakteristika diskretnog sustava

- očigledno je kako vrijedi veza frekvencijske karakteristike diskretnog sustava[2], $H(e^{j\Omega})$, i prijenosne funkcije $H(z)$

$$H(e^{j\Omega}) = H(z)\big|_{z=e^{j\Omega}}$$

- za realni impulsni odziv $h(n)$ vrijedi

$$H(e^{j\Omega}) = \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)\cos(\Omega m)}_{Re[H(e^{j\Omega})]} - j \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)\sin(\Omega m)}_{-Im[H(e^{j\Omega})]}$$

$$H(e^{j\Omega}) = Re[H(e^{j\Omega})] + jIm[H(e^{j\Omega})]$$

- očigledno je kako je
  - $Re[H(e^{j\Omega})]$ parna funkcija od Ω a
  - $Im[H(e^{j\Omega})]$ neparna funkcija od Ω

[2] Frekvencijska karak. definirana je kao $H : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, a prijenosna funkcija kao funkcija $H : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

Frekvencijska karakteristika diskretnog sustava

- kako je $H(e^{j\Omega})$ kompleksna funkcija vrijedi

$$H(e^{j\Omega}) = Re[H(e^{j\Omega})] + jIm[H(e^{j\Omega})] = |H(e^{j\Omega})|e^{j\angle H(e^{j\Omega})}$$

pri čemu je amplitudna frekvencijska karakteristika,

$$|H(e^{j\Omega})| = \sqrt{(Re[H(e^{j\Omega})])^2 + (Im[H(e^{j\Omega})])^2},$$

a fazna frekvencijska karakteristika,

$$\angle H(e^{j\Omega}) = \arctan\left(\frac{Im[H(e^{j\Omega})]}{Re[H(e^{j\Omega})]}\right)$$

- iz parnosti $Re[H(e^{j\Omega})]$ i neparnosti $Im[H(e^{j\Omega})]$, slijedi kako je
  - $|H(e^{j\Omega})|$ parna funkcija od Ω i
  - $\angle H(e^{j\Omega})$ neparna funkcija od Ω

Frekvencijska karakteristika diskretnog sustava

- iz parnosti i neparnosti realnog i imaginarnog dijela frekvencijske karakteristike slijedi $H(e^{-j\Omega}) = H^*(e^{j\Omega})$
- iz

$$H(e^{j\Omega}) = Re[H(e^{j\Omega})] + jIm[H(e^{j\Omega})]$$

i

$$H(e^{-j\Omega}) = Re[H(e^{-j\Omega})] + jIm[H(e^{-j\Omega})]$$

uz parni $Re[H(e^{j\Omega})]$ i neparni $Im[H(e^{j\Omega})]$ slijedi

$$H(e^{-j\Omega}) = Re[H(e^{j\Omega})] - jIm[H(e^{j\Omega})] = H^*(e^{j\Omega})$$

Periodičnost frekvencijske karakteristike diskretnog sustava

- frekvencijska karakteristika diskretnog sustava je periodična s periodom 2π

$$H(e^{j(\Omega+2\pi k)}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)e^{-j(\Omega+2\pi k)m} =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)e^{-j\Omega m} \underbrace{e^{-j2\pi km}}_{1} = H(e^{j\Omega})$$

Odziv diskretnog sustava na realnu sinusoidu

- pokazano je kako je za pobudu $u(n) = Uz^n = U \cdot (e^{j\Omega})^n, U \in \mathbb{R}^+$, odziv linearnog diskretnog sustava

$$y(n) = Yz^n = (H(z)Uz^n)_{z=e^{j\Omega}} = H(e^{j\Omega})Ue^{j\Omega n}$$

- odziv na pobudu $u(n) = Uz^n = U(e^{-j\Omega})^n, U \in \mathbb{R}^+$, je

$$y(n) = Yz^n = (H(z)Uz^n)_{z=e^{-j\Omega}} = H(e^{-j\Omega})Ue^{-j\Omega n}$$

- iz ovoga zaključujemo o odzivu na svevremensku pobudu $u(n) = Ucos(\Omega n) = 0.5Ue^{j\Omega n} + 0.5Ue^{-j\Omega n}$

$$y(n) = 0.5UH(e^{j\Omega})e^{j\Omega n} + 0.5UH(e^{-j\Omega})e^{-j\Omega n}$$

Odziv diskretnog sustava na realnu sinusoidu

$$y(n) = 0.5UH(e^{j\Omega})e^{j\Omega n} + 0.5UH(e^{-j\Omega})e^{-j\Omega n}$$

- pišemo kao

$$y(n) = 0.5UH(e^{j\Omega})e^{j\Omega n} + \left(0.5UH(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}\right)^*$$

odnosno

$$y(n) = 2Re\left(0.5UH(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}\right) = Re\left(|H(e^{j\Omega})|Ue^{j\angle H(e^{j\Omega})}e^{j\Omega n}\right)$$

i finalno

$$y(n) = |H(e^{j\Omega})|U\cos\left(\Omega n + \angle H(e^{j\Omega})\right), \quad -\infty < n < \infty$$

- zaključujemo kako je problem određivanja odziva sustava, u vremenskoj domeni, transformiran u frekvencijsku domenu i svodi se na određivanje vrijednosti $H(e^{j\Omega})$

Operatorski zapis jednadžbe diferencija

- linearni, vremenski stalni, diskretan sustav N–tog reda, opisan je jednadžbom diferencija

$$y(n) + a_1 y(n-1) + \ldots + a_{N-1} y(n-N+1) + a_N y(n-N) =$$
$$= b_0 u(n) + b_1 u(n-1) + \ldots + b_{N-1} u(n-N+1) + b_N u(n-N)$$

- jednadžbu zapisujemo pomoću operatora pomaka definiranog kao

za $n \in \mathbb{Z}$

$E^{-1} w(n) = w(n-1)$ – pomak za jedan korak

$E^{-K} w(n) = w(n-K)$ – pomak za K koraka

$$\underbrace{\left[1 + a_1 E^{-1} + \ldots + a_{N-1} E^{-N+1} + a_N E^{-N}\right]}_{A(E)} y(n) =$$
$$= \underbrace{\left[b_0 + b_1 E^{-1} + \ldots + b_{N-1} E^{-N+1} + b_N E^{-N}\right]}_{B(E)} u(n)$$

Signali i sustavi
školska godina 2016/2017
Cjelina 13.

Profesor
Branko Jeren

Operatorski zapis jednadžbe diferencija

- dakle, skraćeni, operatorski zapis jednadžbe diferencija zapisujemo kao

$$A(E)y(n) = B(E)u(n)$$

gdje su $A(E)$ i $B(E)$ složeni operatori

$$\begin{aligned} A(E) &= 1 + a_1 E^{-1} + \ldots + a_{N-1} E^{-N+1} + a_N E^{-N} \\ B(E) &= b_0 + b_1 E^{-1} + \ldots + b_{N-1} E^{-N+1} + b_N E^{-N} \end{aligned}$$

odnosno

$$y(n) = \left(\frac{B(E)}{A(E)} \right) u(n) \quad \Rightarrow \quad y(n) = H(E)u(n)$$

- složeni operator $H(E)$ pridružuje vremenskoj funkciji $y(n)$ funkciju $u(n)$ i predstavlja formalni, operatorski, zapis polazne jednadžbe diferencija

Odziv sustava na pobudu eksponencijalom

- sustav pobuđujemo svevremenskom kompleksnom eksponencijalom

$$n \in \mathbb{Z}, \qquad z \in \mathbb{C}$$
$$u(n) = Uz^n$$

U – kompleksna amplituda pobude,
z – neka konkretna kompleksna frekvencija

- budući da pobuda starta u $-\infty$, za stabilni su sustav početni uvjeti, koji su eventualno postojali u $-\infty$, istitrali, nema prijelaznog odziva, i totalno je rješenje jednako partikularnom rješenju jednadžbe diferencija
- totalni odziv je zato

$$y(n) = y_p(n) = Yz^n$$

Odziv sustava na pobudu eksponencijalom

- kompleksnu amplitudu odziva Y određujemo iz polazne jednadžbe metodom neodređenih koeficijenata pa, uvrštenjem u polaznu jednadžbu, slijedi

$$\underbrace{\left(1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_{N-1} z^{-N+1} + a_N z^{-N}\right)}_{A(z)} Y z^n =$$
$$= \underbrace{\left(b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_{N-1} z^{-N+1} + b_N z^{-N}\right)}_{B(z)} U z^n$$

- kompleksna je amplituda odziva Y

$$Y = \underbrace{\frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_{N-1} z^{-N+1} + b_N z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_{N-1} z^{-N+1} + a_N z^{-N}}}_{H(z)} U = H(z) U$$

- amplituda partikularnog rješenja Y određena je amplitudom pobude, svojstvima sustava, te konkretnom kompleksnom frekvencijom z

Prijenosna funkcija

- $H(z)$ je veličina koja određuje odnos kompleksne amplitude prisilnog odziva Yz^n i kompleksne amplitude pobude Uz^n

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_{N-1} z^{-N+1} + b_N z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_{N-1} z^{-N+1} + a_N z^{-N}} = \frac{Y}{U}$$

- za konkretnu frekvenciju z, $H(z)$ ima značenje faktora kojim treba množiti kompleksnu amplitudu ulaza da se dobije amplituda izlaza

$$Y = H(z)U$$

- $H(z)$ možemo formalno zapisati iz složenog operatora $H(E)$, zamjenom operatora E^{-1} s kompleksnom frekvencijom z^{-1}

Prijenosna funkcija

- $H(z)$, za $z \in \mathbb{C}$, nazivamo prijenosna funkcija ili transfer funkcija diskretnog sustava i možemo je definirati kao

$$n \in \mathbb{Z}, \qquad z \in \mathbb{C}$$
$$H(z) = \left.\frac{y_p(n)}{u(n)}\right|_{u(n)=Uz^n} = \frac{Yz^n}{Uz^n} = \frac{Y}{U}$$

- prijenosna ili transfer funkcija sustava $H(z)$ racionalna je funkcija koju možemo prikazati kao

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_N z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_N z^{-N}} = \frac{\sum_{j=0}^{N} b_j z^{-j}}{1 + \sum_{j=1}^{N} a_j z^{-j}}$$

odnosno

$$H(z) = \frac{b_0 z^N + b_1 z^{N-1} + \ldots + b_N}{z^N + a_1 z^{N-1} + \ldots + a_N} = \frac{\sum_{j=0}^{N} b_j z^{N-j}}{z^N + \sum_{j=1}^{N} a_j z^{N-j}}$$

Prijenosna funkcija

- prijenosnu funkciju možemo pisati uz pomoć produkta korijenih faktora:

$$H(z) = \frac{\sum_{j=0}^{N} b_j z^{-j}}{1 + \sum_{j=1}^{N} a_j z^{-j}} = b_0 \frac{\prod_{j=1}^{N}(1 - z_j z^{-1})}{\prod_{j=1}^{N}(1 - p_j z^{-1})}$$

odnosno u obliku

$$H(z) = \frac{\sum_{j=0}^{N} b_j z^{N-j}}{z^n + \sum_{j=1}^{N} a_j z^{N-j}} = b_0 \frac{\prod_{j=1}^{N}(z - z_j)}{\prod_{j=1}^{N}(z - p_j)}$$

$z_1, z_2, \ldots, z_N$ su nule prijenosne funkcije
$p_1, p_2, \ldots, p_N$ su polovi[3] prijenosne funkcije

[3] dolazi od engleske riječi tent-pole

Prijenosna funkcija

- prijenosnu funkciju možemo pisati kao produkt i kvocijent vektora

$$H(z) = b_0 \frac{|z-z_1|e^{j\angle(z-z_1)}|z-z_2|e^{j\angle(z-z_2)}\dots|z-z_N|e^{j\angle(z-z_N)}}{|z-p_1|e^{j\angle(z-p_1)}|z-p_2|e^{j\angle(z-p_2)}\dots|z-p_N|e^{j\angle(z-p_N)}}$$

- prijenosnu funkciju $H(z)$ možemo pisati i kao

$$H(z) = |H(z)|e^{j\angle H(z)}$$

pri čemu su[4]

$$|H(z)| = |b_0|\frac{|z-z_1||z-z_2|\cdots|z-z_N|}{|z-p_1||z-p_2|\cdots|z-p_N|}$$

$$\angle H(z) = \angle(b_0) + [\angle(z-z_1) + \angle(z-z_2) + \cdots + \angle(z-z_N)] - \\ - [\angle(z-p_1) + \angle(z-p_2) + \cdots + \angle(z-p_N)]$$

---

[4] Za realne sustave je $b_0 \in \mathbb{R}$, pa je $\angle b_0 = 0$ za $b_0 \geq 0$, odnosno $\angle b_0 = \pi$ za $b_0 < 0$

Prijenosna funkcija diskretnog sustava – primjer

- za prije razmatrani diskretni sustav, opisan jednadžbom diferencija,

$$y(n) - 0.8\sqrt{2}y(n-1) + 0.64y(n-2) = u(n)$$

prijenosnu funkciju možemo formalno pisati zamjenjujući operator E^{-1} sa z^{-1}, pa slijedi

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.8\sqrt{2}z^{-1} + 0.64z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - 0.8\sqrt{2}z + 0.64}$$

Prisilni odziv sustava

- totalni je odziv vremenski diskretnog sustava, na pobudu $u(n) = cos(\Omega n) \cdot \mu(n)$, dan kao[5]

$$y(n) = \sum_{j=1}^{N} c_i q_i^n + y_p(n)$$

- pri čemu je prisilni odziv, uz danu pobudu,

$$y_p(n) = |H(e^{j\Omega})| \cos\Big(\Omega n + \angle H(e^{j\Omega})\Big), \qquad n \geq 0$$

[5] ovdje su pretpostavljene jednostruke karakteristične frekvencije

Prisilni odziv diskretnog sustava – primjer

- prije razmatrani diskretni sustav, opisan jednadžbom diferencija,

$$y(n) - 0.8\sqrt{2}y(n-1) + 0.64y(n-2) = u(n)$$

sustav je pobuđen s

$$u(n) = -0.2cos(\frac{\pi}{8}n) \cdot \mu(n)$$

- za ovaj sustav određujemo, prisilni odziv, prijenosnu funkciju i frekvencijsku karakteristiku
- prisilni odziv, na pobudu $u(n) = Ucos(\Omega_0 n)$ je, kako je prije pokazano,

$$y_p(n) = |H(e^{j\Omega_0})| U \cos\left(\Omega_0 n + \angle H(e^{j\Omega_0})\right)$$

Prisilni odziv diskretnog sustava – primjer

- iz jednadžbe diferencija,

$$y(n) - 0.8\sqrt{2}y(n-1) + 0.64y(n-2) = u(n)$$

odnosno

$$(1 - 0.8\sqrt{2}E^{-1} + 0.64E^{-2})y(n) = u(n)$$

prije je već izvedena prijenosna funkcija

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.8\sqrt{2}z^{-1} + 0.64z^{-2}}$$

a frekvencijsku karakteristiku izračunavamo za $z = e^{j\Omega}$

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1 - 0.8\sqrt{2}e^{-j\Omega} + 0.64e^{-j2\Omega}}$$

Prisilni odziv diskretnog sustava – primjer

- za konkretnu frekvenciju pobude $\Omega_0 = \frac{\pi}{8}$ omjer kompleksne amplitude odziva i pobude je

$$H(e^{j\Omega_0}) = H(e^{j\frac{\pi}{8}}) = \frac{1}{1 - 0.8\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{8}} + 0.64e^{-j2\frac{\pi}{8}}}$$

$$H(e^{j\frac{\pi}{8}}) = 2.4495 + j0.1178 = 2.4524e^{j0.0481}$$

- pa je partikularno rješenje

$$y_p(n) = |H(e^{j\Omega_0})| U \cos\left(\Omega_0 n + \angle H(e^{j\Omega_0})\right) =$$

$$= 2.4524(-0.2)\cos\left(\frac{\pi}{8}n + 0.0481\right) =$$

$$= -0.49048\cos\left(\frac{\pi}{8}n + 0.0481\right) \qquad n \geq 0$$

Prisilni odziv diskretnog sustava – primjer

- prije je određen prisilni odziv diskretnog sustava, zadanog jednadžbom diferencija,

$$y(n) - 0.8\sqrt{2}y(n-1) + 0.64y(n-2) = u(n),$$

  na pobudu $u(n) = -0.2cos(\frac{\pi}{8}n) \cdot \mu(n)$
- pokazano je kako je partikularno rješenje jednadžbe diferencija jednako prisilnom odzivu sustava
- ovdje će biti ponovljen postupak određivanja partikularnog rješenja u vremenskoj domeni, kako bi se ukazalo na jednostavnost netom prikazanog postupka određivanja partikularnog rješenja u frekvencijskoj domeni

Prisilni odziv diskretnog sustava – primjer

- kako je pobuda $u(n) = -0.2cos(\frac{\pi}{8}n) \cdot \mu(n)$ partikularno rješenje je oblika

$$y_p(n) = K_1 cos(\frac{\pi}{8}n) + K_2 sin(\frac{\pi}{8}n)$$

- koeficijente K_1 i K_2 određujemo metodom neodređenog koeficijenta
- uvrštenjem $y_p(n)$ u polaznu jednadžbu slijedi

$$y_p(n) - 0.8\sqrt{2}y_p(n-1) + 0.64y_p(n-2) = -0.2cos(\frac{\pi}{8}n);$$

$$\begin{aligned} K_1 cos(\tfrac{\pi}{8}n) + K_2 sin(\tfrac{\pi}{8}n) - 0.8\sqrt{2}K_1 cos[\tfrac{\pi}{8}(n-1)] - \\ -0.8\sqrt{2}K_2 sin[\tfrac{\pi}{8}(n-1)] + 0.64K_1 cos[\tfrac{\pi}{8}(n-2)] + \\ +0.64K_2 sin[\tfrac{\pi}{8}(n-2)] = -0.2cos(\tfrac{\pi}{8}n) \end{aligned}$$

Prisilni odziv diskretnog sustava – primjer

- primjenom trigonometrijskih transformacija slijedi

$$\begin{aligned}&K_1 cos(\tfrac{\pi}{8}n) + K_2 sin(\tfrac{\pi}{8}n) - \\ &\quad -0.8\sqrt{2}K_1[cos(\tfrac{\pi}{8}n)cos(\tfrac{\pi}{8}) + sin(\tfrac{\pi}{8}n)sin(\tfrac{\pi}{8})] - \\ &\quad -0.8\sqrt{2}K_2[sin(\tfrac{\pi}{8}n)cos(\tfrac{\pi}{8}) - cos(\tfrac{\pi}{8}n)sin(\tfrac{\pi}{8})] + \\ &\quad +0.64K_1[cos(\tfrac{\pi}{8}n)cos(\tfrac{\pi}{4}) + sin(\tfrac{\pi}{8}n)sin(\tfrac{\pi}{4})] + \\ &\quad +0.64K_2[sin(\tfrac{\pi}{8}n)cos(\tfrac{\pi}{4}) - cos(\tfrac{\pi}{8}n)sin(\tfrac{\pi}{4})] = -0.2cos(\tfrac{\pi}{8}n)\end{aligned}$$

- razvrstavanjem slijedi

$$\begin{aligned}&\{[1 - 0.8\sqrt{2}cos(\tfrac{\pi}{8}) + 0.64cos(\tfrac{\pi}{4})]K_1 + \\ &\quad +[0.8\sqrt{2}sin(\tfrac{\pi}{8}) - 0.64sin(\tfrac{\pi}{4})]K_2\}cos(\tfrac{\pi}{8}n) + \\ &\{-[0.8\sqrt{2}sin(\tfrac{\pi}{8}) - 0.64sin(\tfrac{\pi}{4})]K_1 + \\ &\quad +[1 - 0.8\sqrt{2}cos(\tfrac{\pi}{8}) + 0.64cos(\tfrac{\pi}{4})]K_2\}sin(\tfrac{\pi}{8}n) = -0.2cos(\tfrac{\pi}{8}n)\end{aligned}$$

Prisilni odziv diskretnog sustava – primjer

- usporedbom lijeve i desne strane pišemo

$$
\begin{aligned}
&[1-0.8\sqrt{2}cos(\tfrac{\pi}{8})+0.64cos(\tfrac{\pi}{4})]K_1+\\
&\qquad+[0.8\sqrt{2}sin(\tfrac{\pi}{8})-0.64sin(\tfrac{\pi}{4})]K_2=-0.2\\
&-[0.8\sqrt{2}sin(\tfrac{\pi}{8})-0.64sin(\tfrac{\pi}{4})]K_1+\\
&\qquad+[1-0.8\sqrt{2}cos(\tfrac{\pi}{8})+0.64cos(\tfrac{\pi}{4})]K_2=0
\end{aligned}
$$

- rješenjem ovih jednadžbi izračunavamo K_1 i K_2

$$K_1=-0.4899, \qquad K_2=0.0236$$

- pa je partikularno rješenje

$$
\begin{aligned}
y_p(n)&=-0.4899cos(\tfrac{\pi}{8}n)+0.0236sin(\tfrac{\pi}{8}n)=\\
&=-0.49048cos(\tfrac{\pi}{8}n+0.0481)
\end{aligned}
$$

Frekvencijska karakteristika diskretnog sustava – primjer

- iz izračunatih $H(z)$

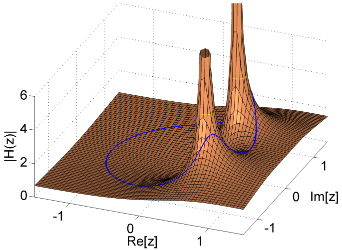
$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.8\sqrt{2}z^{-1} + 0.64z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - 0.8\sqrt{2}z + 0.64}$$

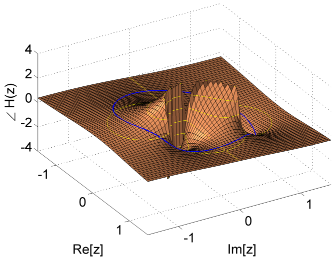
i $H(e^{j\Omega})$

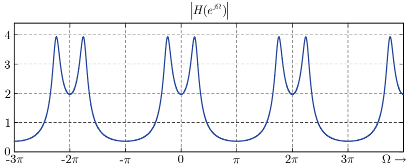
$$H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1 - 0.8\sqrt{2}e^{-j\Omega} + 0.64e^{-j2\Omega}} = \frac{e^{j2\Omega}}{e^{j2\Omega} - 0.8\sqrt{2}e^{j\Omega} + 0.64}$$

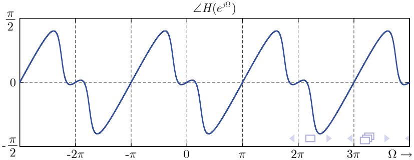
možemo crtati, kao i u slučaju kontinuiranih sustava, plohe koje prikazuju $|H(z)|$ i $\angle H(z)$, odnosno krivulje, $|H(e^{j\Omega})|$ i $\angle H(e^{j\Omega})$

Frekvencijska karakteristika diskretnog sustava – primjer









Frekvencijska karakteristika diskretnog sustava – primjer

- frekvencijska karakteristika se može odrediti grafički iz

$$H(z) = b_0 \frac{\prod_{j=1}^{N}(z - z_j)}{\prod_{j=1}^{N}(z - p_j)},$$

praćenjem $|H(z)|$ i $\angle H(z)$ na jediničnoj kružnici, dakle, za $z = e^{j\Omega}$

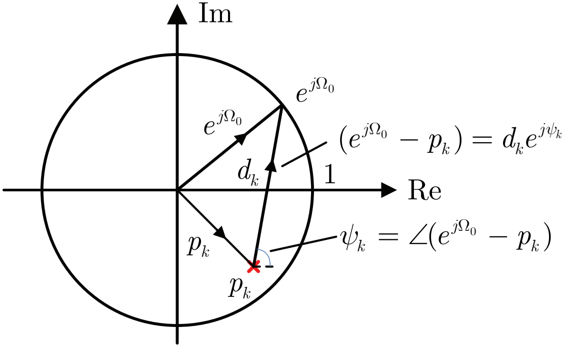
$$|H(e^{j\Omega})| = |b_0| \frac{\prod_{j=1}^{N} |(e^{j\Omega} - z_j)|}{\prod_{j=1}^{N} |(e^{j\Omega} - p_j)|},$$

$$\angle H(e^{j\Omega}) = \underbrace{\angle(b_0)}_{\substack{0 \text{ za } b_0 \geq 0 \\ \pi \text{ za } b_0 < 0}} + \sum_{j=1}^{N} \angle\left(e^{j\Omega} - z_j\right) - \sum_{j=1}^{N} \angle\left(e^{j\Omega} - p_j\right)$$

- svaki korijeni faktor prijenosne funkcije daje svoj individualni doprinos modulu (multiplikativno) i fazi (aditivno)

Frekvencijska karakteristika diskretnog sustava – primjer

- svaki od članova $\left(e^{j\Omega} - z_j\right)$ ili $\left(e^{j\Omega} - p_j\right)$ možemo prikazati kao vektore u kompleksnoj ravnini



- napomena: višestruke nule ili višestruke polove označujemo oznakama $\circ$, odnosno $\times$, i uz njih upisujemo arapski broj koji označuje red njihove višestrukosti

Frekvencijska karakteristika diskretnog sustava – primjer

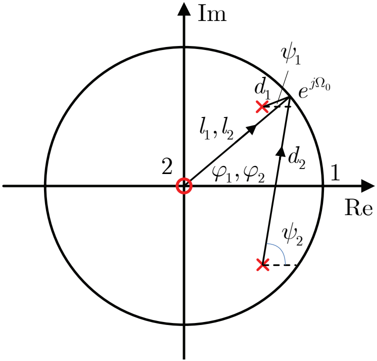
$$H(z) = \frac{z^2}{z^2 - 0.8\sqrt{2}z + 0.64} = \frac{z^2}{(z-p_1)(z-p_2)}$$

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{e^{j2\Omega}}{(e^{j\Omega} - 0.8e^{j\frac{\pi}{4}})(e^{j\Omega} - 0.8e^{-j\frac{\pi}{4}})}$$

za konkretnu frekvenciju
$z = e^{j\Omega_0}$,
i za $l_1 = l_2 = 1$,

$$|H(e^{j\Omega_0})| = \frac{l_1 l_2}{d_1 d_2} = \frac{1}{d_1 d_2}$$

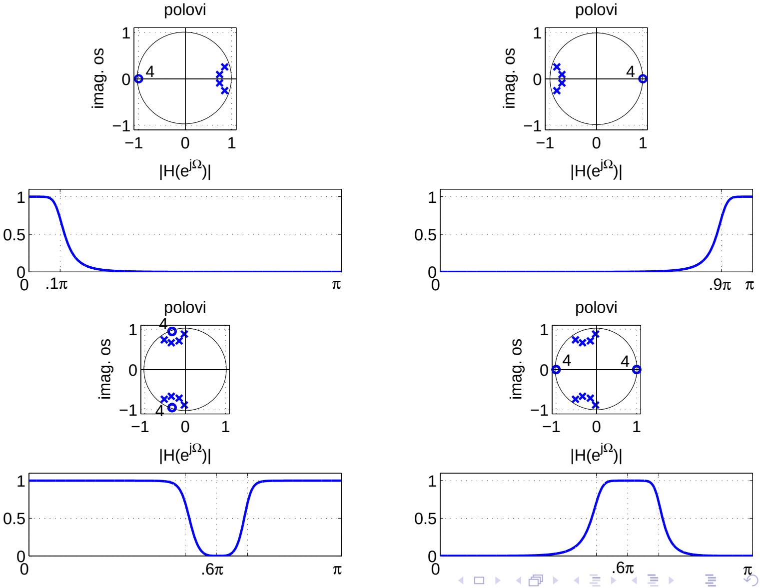
$$\angle H(e^{j\Omega_0}) = \varphi_1 + \varphi_2 - \psi_1 - \psi_2$$



Frekvencijska karakteristika diskretnog sustava – primjer

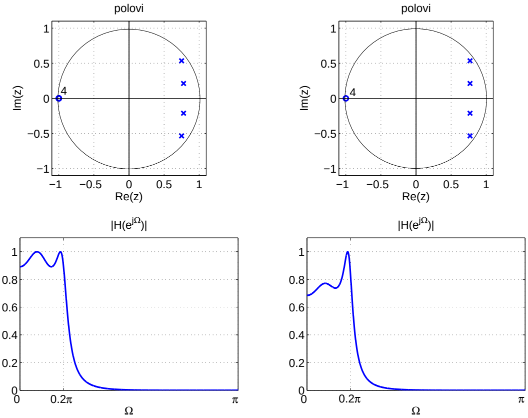
- slijede primjeri koji ukazuju kako položaj polova i nula određuje frekvencijsku karakteristiku
- položaj polova i nula određen je sustavnim postupcima za projektiranje sustava
- prikazani su primjeri četiri tipa tzv. Butterworth-ovih filtara:
  - niskopropusni (NP)
  - visokopropusni (VP)
  - pojasna brana (PB)
  - pojasno propusni (PP)

Frekvencijska karakteristika diskretnog sustava – primjer



Frekvencijska karakteristika diskretnog sustava – primjer

- slijedi primjer koji pokazuje kako mali pomak polova ima izravni utjecaj na frekvencijsku karakteristiku ⇒ potrebni sustavni postupci projektiranja



$$p_{1,2} = 0.7498 \pm j0.5348, \qquad p'_{1,2} = 0.7700 \pm j0.5348$$
$$p_{3,4} = 0.7774 \pm j0.2120, \qquad p'_{3,4} = 0.7774 \pm j0.2120$$

Signali i sustavi

Profesor
Branko Jeren

31. svibnja 2017.

Odziv diskretnog sustava na pobudu kompleksnom eksponencijalom

- pokazano je kako je odziv mirnog, linearnog, vremenski diskretnog sustava, na svevremensku eksponencijalu Uz^n,

$$y(n) = H(z)Uz^n$$

pri čemu je

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}$$

- za $z \in \mathbb{C}$, $H(z)$ je kompleksna funkcija

Dvostrana z–transformacija

z–transformacija

- zbroj

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n}$$

  možemo interpretirati kao transformaciju vremenske funkcije, impulsnog odziva $h(n)$ diskretnog sustava, u kompleksnu funkciju $H(z)$
- ovako definiranu transformaciju nazivamo dvostrana ili bilateralna **z-transformacija**
- z – transformacija $H(z)$ predstavlja, dakle, alternativni prikaz vremenskog niza $h(n)$

z–transformacija

- za diskretni signal $x(n)$, definira se dvostrana z–transformacija

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

- z–transformacija označuje se simbolički kao

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x(n)\}$$

ili još jednostavnije

$$x(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z)$$

z–transformacija – primjer 1

- neka je zadan vremenski diskretan signal, kao konačni niz, $x(n) = \{\underline{1}, 2, 3, 3, 2, 1\}, n \geq 0$
- slijedi kako je

$$X(z) = \sum_{n=0}^{5} x(n)z^{-n} = 1+2z^{-1}+3z^{-2}+3z^{-3}+2z^{-4}+z^{-5}$$

odnosno

$$X(z) = \frac{z^5 + 2z^4 + 3z^3 + 3z^2 + 2z + 1}{z^5}$$

- gornji zbroj konvergira, pa time $X(z)$ poprima konačne vrijednosti, za sve $z \in \mathbb{C}$ osim za $z = 0$
- primjer pokazuje kako je signalu $x(n)$, zadanom u vremenskoj domeni, pridružena njegov alternativni prikaz ("slika") $X(z)$, u z–domeni (frekvencijskoj domeni)

z–transformacija – primjer 1

- veza između

$$x(n) = \{\underline{1}, 2, 3, 3, 2, 1\}$$

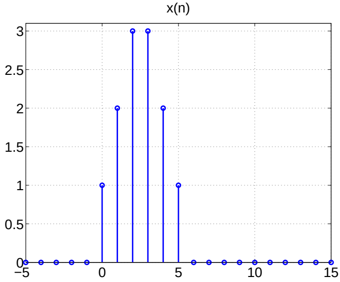
  i

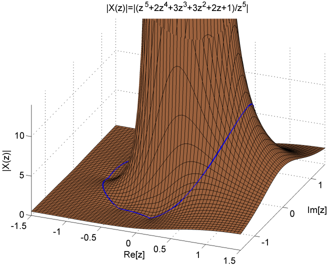
$$X(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 3z^{-3} + 2z^{-4} + z^{-5}$$

  je očigledna:
  koeficijent uz z^{-n} je vrijednost signala u koraku n, drugim riječima, eksponent od z sadrži vremensku informaciju potrebnu da bi se identificirali uzorci signala
- usporedimo prikaz $x(n)$ u vremenskoj i frekvencijskoj domeni[1]

[1] prikazuje se samo $|X(z)|$

z–transformacija





- polovi i nule $X(z)$ su

$$
\begin{aligned}
p_1 &= 0; & z_1 &= -1.0000 = e^{j\pi} \\
p_2 &= 0; & z_2 &= +j1.0000 = e^{j\frac{\pi}{2}} \\
p_3 &= 0; & z_3 &= -j1.0000 = e^{-j\frac{\pi}{2}} \\
p_4 &= 0; & z_4 &= -0.5000 + j0.8660 = e^{j\frac{2\pi}{3}} \\
p_5 &= 0; & z_5 &= -0.5000 - j0.8660 = e^{-j\frac{2\pi}{3}}
\end{aligned}
$$

z–transformacija – primjer 2

- određuje se z–transformacija niza

$$x(n) = \alpha^n \mu(n)$$

- signal $x(n)$ čini beskonačni broj uzoraka

$$x(n) = \{\underline{1}, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots\}$$

- iz definicije z–transformacije slijedi

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^n \mu(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n}$$

$$X(z) = 1 + \alpha z^{-1} + \alpha^2 z^{-2} + \alpha^3 z^{-3} + \ldots$$

što je sukladno prije izrečenoj interpretaciji z–transformacije

z–transformacija – primjer 2

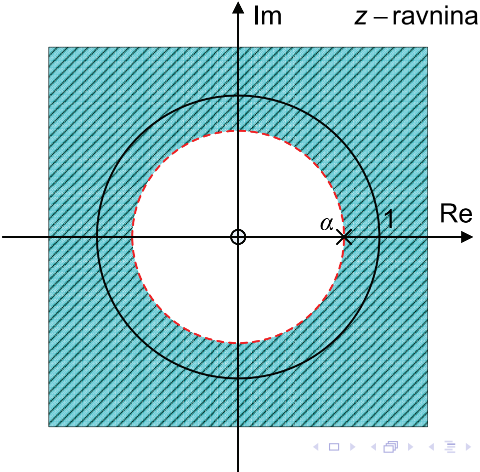
- u
$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^n$$
prepoznaje se geometrijski red
- da bi $X(z)$ konvergirao mora biti $|\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha z^{-1})^n| < \infty$ a to će biti za
$$|\alpha z^{-1}| < 1 \Leftrightarrow |z| > |\alpha|$$
- tada je
$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^n = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} = \frac{z}{z-\alpha}, \qquad \text{za } |z| > |\alpha|$$
- područje kompleksne ravnine, $|z| > |\alpha|$, za koje $X(z)$ konvergira, nazivamo područje konvergencije[2], $\mathcal{PK}$, z–transformacije

[2] U literaturi je uobičajena kratica *RoC*, prema engleskom Region of Convergence

Područje konvergencije z–transformacije

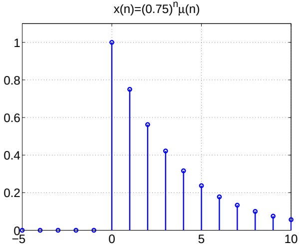
Područje konvergencije z–transformacije

- z–transformacija je racionalna funkcija
- z–transformacija niza $x(n) = \alpha^n \mu(n)$ ima jednu **nulu** u $z = 0$ i jedan **pol** u $z = \alpha$



z–transformacija – primjer 3

- određuje se z–transformacija niza $x(n) = \alpha^n \mu(n) = 0.75^n \mu(n)$



- z–transformacija je

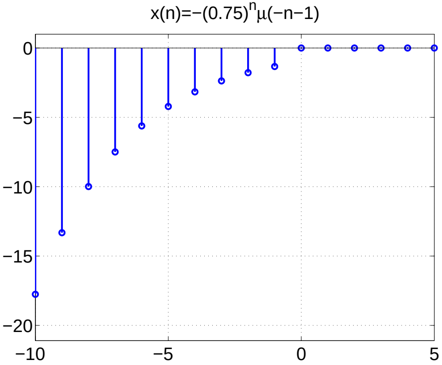
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^n \mu(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (0.75z^{-1})^n = \frac{z}{z - 0.75}$$

$$\text{za } |0.75z^{-1}| < 1 \Leftrightarrow |z| > |0.75|$$

z–transformacija – primjer 4

- određuje se z–transformacija niza
$$x(n) = -\alpha^n \mu(-n-1) = -0.75^n \mu(-n-1)$$

n	$x(n)$
≥ 0	0
-1	-1.3333
-2	-1.7778
-3	-2.3704
-4	-3.1605
-5	-4.2140
-6	-5.6187
-7	-7.4915
-8	-9.9887
-9	-13.3183
-10	-17.7577



z–transformacija – primjer 4

- z–transformacija je

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -\alpha^n \mu(-n-1) z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \alpha^n z^{-n} =$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{-n} z^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha^{-1} z)^n$$

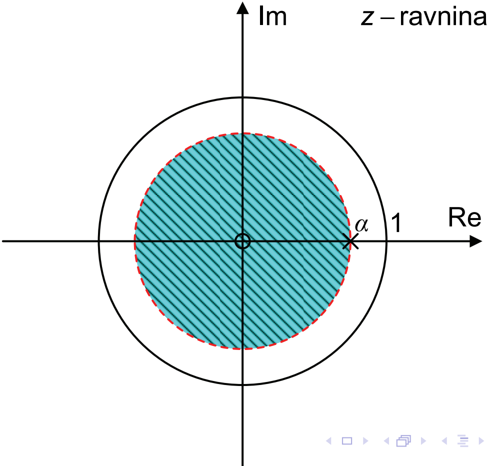
ako je $|\alpha^{-1} z| < 1 \Leftrightarrow |z| < |\alpha|$
tada gornji zbroj konvergira i vrijedi:

$$X(z) = 1 - \frac{1}{1-\alpha^{-1}z} = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} = \frac{z}{z-\alpha}$$

za $|z| < |\alpha|$

Područje konvergencije z–transformacije

- z–transformacija je racionalna funkcija
- z–transformacija niza $x(n) = -\alpha^n \mu(-n-1)$ ima jednu **nulu** u $z = 0$ i jedan **pol** u $z = \alpha$



Područje konvergencije z–transformacije

- usporedbom primjera 3 i primjera 4

$$\alpha^n \mu(n) \stackrel{z}{\longleftrightarrow} \frac{z}{z-\alpha} \quad \text{za } |z| > |\alpha|$$

  odnosno

$$-\alpha^n \mu(-n-1) \stackrel{z}{\longleftrightarrow} \frac{z}{z-\alpha} \quad \text{za } |z| < |\alpha|$$

  zaključujemo kako dva različita signala, jedan strogo kauzalan a drugi antikauzalan, imaju identične izraze za z–transformaciju i kako se njihova razlika očituje samo u području konvergencije, $\mathcal{PK}$,
- područje konvergencije $\mathcal{PK}$, z–transformacije, je važna i nužna informacija i tek definirano $\mathcal{PK}$ daje jednoznačnu vezu između niza i njegove z–transformacije
- stoga, z–transformacija mora biti uvijek zadana s njezinim $\mathcal{PK}$

z–transformacija – primjer 5

- određuje se z–transformacija niza

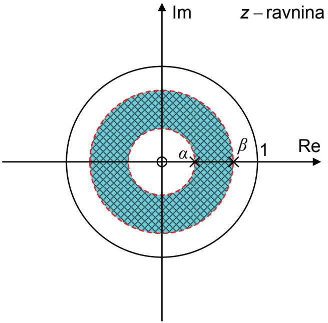
$$x(n) = \alpha^n \mu(n) + \beta^n \mu(-n-1)$$

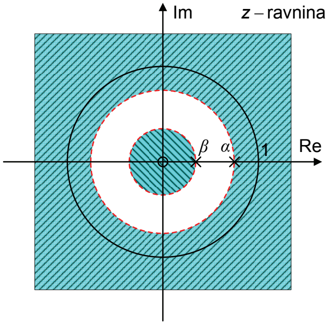
- iz definicije z–transformacije slijedi

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \beta^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^n + \sum_{m=1}^{\infty} (\beta^{-1} z)^m$$

- prvi zbroj konvergira za $|\alpha z^{-1}|$ ili $|z| > |\alpha|$
- drugi zbroj konvergira za $|\beta^{-1} z| < 1$ ili $|z| < |\beta|$
- u određivanju konvergencije $X(z)$ postoje dva slučaja
    - $|\beta| < |\alpha|$ – ne postoji područje preklapanja područja konvergencije i ne postoji $X(z)$
    - $|\beta| > |\alpha|$ – postoji prsten u z–ravnini u kojem obje sume konvergiraju i on predstavlja područje konvergencije $X(z)$

z–transformacija – primjer 5





pa je z–transformacija niza $x(n) = \alpha^n \mu(n) + \beta^n \mu(-n-1)$

$$X(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} - \frac{1}{1-\beta z^{-1}} = \frac{z}{z-\alpha} - \frac{z}{z-\beta}$$

$$= \frac{(\alpha-\beta)z}{z^2-(\alpha+\beta)z+\alpha\beta}$$

uz područje konvergencije z–transformacije $|\alpha| < |z| < |\beta|$

Jednostrana z–transformacija

z–transformacija kauzalnih nizova

- z–transformacija kauzalnih nizova definirana je kao

$$X : \mathcal{PK}(x) \to \mathbb{C}$$

$$\forall z \in \mathcal{PK}(x), \quad X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

gdje je područje konvergencije, $\mathcal{PK}(x) \subset \mathbb{C}$, definirano[3] [4] s

$$\mathcal{PK}(x) = \left\{ z = re^{j\Omega} \in \mathbb{C} \middle| \sum_{n=0}^{\infty} | \, x(n) r^{-n} | < \infty \right\}$$

- ovako definirana $X(z)$ naziva se jednostrana z–transformacija

[3] apsolutna konvergencija sume garantira i konvergenciju $X(z)$

[4] iz $\sum_{n=0}^{\infty} | \, x(n) z^{-n} |$ a uz, $z = re^{j\Omega}$, za koji zbroj konvergira, vrijedi $\sum_{n=0}^{\infty} |x(n)(re^{j\Omega})^{-n}| = \sum_{n=0}^{\infty} | \, x(n) r^{-n} || e^{-j\Omega n} | = \sum_{n=0}^{\infty} |x(n) r^{-n}|$

Područje konvergencije z–transformacije kauzalnih nizova

- za jednostranu z–transformaciju, u području konvergencije, vrijedi

$$|X(z)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x(n)|}{|z|^n} < \infty$$

- svaki kauzalni signal $x(n)$ koji ne raste brže od eksponencijalnog signala r_0^n zadovoljava ovaj uvjet[5], pa ako je

$$|x(n)| \leq r_0^n, \quad \text{za neki } r_0$$

tada je

$$|X(z)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_0}{|z|}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{r_0}{|z|}} \quad |z| > r_0$$

što znači da je za kauzalne signale, koji ne rastu brže od eksponencijalnog signala r_0^n, područje konvergencije $|z| > r_0$

[5] a to su gotovo svi signali od praktičnog interesa

z–transformacija kauzalnih nizova

- jednostrana z– transformacija pokazuje se posebno pogodnom u postupcima rješavanja jednadžbi diferencija sa zadanim početnim uvjetima
- jednostrana z– transformacija limitirana je samo na kauzalne signale i sustave
- kako je u ovom predmetu većina pozornosti okrenuta kauzalnim signalima i sustavima u nastavku se razmatra uglavnom jednostrana z–transformacija
- sukladno većini literature pod nazivom z–transformacija podrazumijevati će se jednostrana z–transformacija, a u slučaju dvostrane transformacije to će biti posebno istaknuto

z–transformacija osnovnih nizova

z–transformacija osnovnih nizova

$$\mathcal{Z}\{\delta(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(n) z^{-n} = 1, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$\mathcal{Z}\{\mu(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (z^{-1})^n = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z-1},$$

za $|z| > 1$

$$\mathcal{Z}\{a^n\mu(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^{-n} = \frac{1}{1 - \left(\frac{z}{a}\right)^{-1}} =$$

$$= \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z-a}, \qquad |z| > |a|$$

z–transformacija osnovnih nizova

$$\mathcal{Z}\{\cos(\Omega_0 n)\mu(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \cos(\Omega_0 n)\mu(n) z^{-n} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} e^{j\Omega_0 n} z^{-n} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-j\Omega_0 n} z^{-n} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{1 - e^{j\Omega_0} z^{-1}} + \frac{1}{2}\frac{1}{1 - e^{-j\Omega_0} z^{-1}} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1 - e^{-j\Omega_0} z^{-1} + 1 - e^{j\Omega_0} z^{-1}}{1 - e^{j\Omega_0} z^{-1} - e^{-j\Omega_0} z^{-1} + z^{-2}} \Rightarrow$$

$$\mathcal{Z}\{\cos(\Omega_0 n)\mu(n)\} = \frac{1 - z^{-1}\cos(\Omega_0)}{1 - 2z^{-1}\cos(\Omega_0) + z^{-2}} \qquad |z| > 1$$

Tablica osnovnih z–transformacija[6]

	$x(n)$	$X(z)$
1	$\delta(n)$	1
2	$\delta(n-m)$	z^{-m}
3	$\mu(n)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$n\mu(n)$	$\frac{z}{(z-1)^2}$
5	$n^2\mu(n)$	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
6	$n^3\mu(n)$	$\frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$
7	$a^n\mu(n)$	$\frac{z}{z-a}$
8	$na^n\mu(n)$	$\frac{az}{(z-a)^2}$
9	$n^2a^n\mu(n)$	$\frac{az(z+a)}{(z-a)^3}$
10	$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{a^m m!}a^n\mu(n)$	$\frac{z}{(z-a)^{m+1}}$

[6] izvor:B.P. Lathi:Linear Systems and Signals str. 498

Tablica osnovnih z–transformacija[7]

	$x(n)$	$X(z)$
11	$\cos(\Omega_0 n)\mu(n)$	$\frac{z(z-\cos(\Omega_0))}{z^2-2\cos(\Omega_0)z+1}$
12	$\sin(\Omega_0 n)\mu(n)$	$\frac{\sin(\Omega_0)z}{z^2-2\cos(\Omega_0)z+1}$
13	$a^n\cos(\Omega_0 n)\mu(n)$	$\frac{z(z-a\cos(\Omega_0))}{z^2-2a\cos(\Omega_0)z+a^2}$
14	$a^n\sin(\Omega_0 n)\mu(n)$	$\frac{a\sin(\Omega_0)z}{z^2-2a\cos(\Omega_0)z+a^2}$

[7] izvor: A.V.Oppenheim, A. S. Willsky: Signals and Systems str. 655

Osnovna svojstva z–transformacije

z–transformacija – linearnost

neka je $w(n) = ax(n) \pm by(n)$
tada je z–transformacija od $w(n)$

$$W(z) = aX(z) + bY(z), \qquad \forall z \in \mathcal{PK}(w) \text{ sadrži } \mathcal{PK}(x) \cap \mathcal{PK}(y)$$

područje konvergencije od $W(z)$ mora uključiti područja konvergencije od $X(z)$ i $Y(z)$
linearnost z–transformacije proizlazi iz definicije

$$W(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} [ax(n) \pm by(n)] z^{-n} =$$

$$= a \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} \pm b \sum_{n=0}^{\infty} y(n) z^{-n} = aX(z) \pm bY(z)$$

z–transformacija – pomak unaprijed za p–koraka

neka je $X(z) = \mathcal{Z}\{x(n)\}$ tada je, uz $p > 0$,

$$\mathcal{Z}\{x(n+p)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n+p) z^{-n} = \left| n+p=m \right| =$$

$$= \sum_{m=p}^{\infty} x(m) z^{-m+p} = z^p \sum_{m=p}^{\infty} x(m) z^{-m} =$$

$$= z^p \Bigg[\underbrace{\sum_{m=p}^{\infty} x(m) z^{-m} + \sum_{m=0}^{p-1} x(m) z^{-m}}_{X(z)} - \sum_{m=0}^{p-1} x(m) z^{-m} \Bigg] \Rightarrow$$

$$\mathcal{Z}\{x(n+p)\} = z^p \left[X(z) - \sum_{m=0}^{p-1} x(m) z^{-m} \right]$$

za $p = 1$, $\quad \mathcal{Z}\{x(n+1)\} = zX(z) - zx(0)$

za $p = 2$, $\quad \mathcal{Z}\{x(n+2)\} = z^2 X(z) - z^2 x(0) - zx(1)$

z–transformacija – kašnjenje za p–koraka

neka je $X(z) = \mathcal{Z}\{x(n)\}$ tada je, uz $p > 0$,

$$\mathcal{Z}\{x(n-p)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n-p)z^{-n} = \left|n-p=m\right| =$$

$$= \sum_{m=-p}^{\infty} x(m)z^{-m-p} = z^{-p}\sum_{m=-p}^{\infty} x(m)z^{-m} =$$

$$= z^{-p}\left[\sum_{m=0}^{\infty} x(m)z^{-m} + \sum_{m=-p}^{-1} x(m)z^{-m}\right] \Rightarrow$$

$$\mathcal{Z}\{x(n-p)\} = z^{-p}\left[X(z) + \sum_{m=-p}^{-1} x(m)z^{-m}\right]$$

za $p = 1$ i $p = 2$ vrijedi

$$\mathcal{Z}\{x(n-1)\} = z^{-1}\left[X(z) + zx(-1)\right] = z^{-1}X(z) + x(-1)$$

$$\mathcal{Z}\{x(n-2)\} = z^{-2}\left[X(z) + zx(-1) + z^2x(-2)\right] =$$

$$= z^{-2}X(z) + z^{-1}x(-1) + x(-2)$$

z–transformacija – konvolucijski zbroj kauzalnih nizova

za $y(n) = h(n) * u(n)$, te $U(z) = \mathcal{Z}\{u(n)\}$ i $H(z) = \mathcal{Z}\{h(n)\}$, vrijedi[8]

$$
\begin{aligned}
Y(z) &= \mathcal{Z}\{y(n)\} = \mathcal{Z}\{u(n) * h(n)\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{p=0}^{\infty} u(p)h(n-p)\right] z^{-n} = \sum_{p=0}^{\infty} u(p) \sum_{n=0}^{\infty} h(n-p) z^{-n} \\
&= \left| n - p = m \right| = \sum_{p=0}^{\infty} u(p) \sum_{m=-p}^{\infty} h(m) z^{-(m+p)} \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} u(p) z^{-p} \sum_{\underbrace{m=0}_{h(m)=0 \text{ za } m<0}}^{\infty} h(m) z^{-m} = U(z)H(z)
\end{aligned}
$$

$$
h(n) * u(n) \stackrel{z}{\longleftrightarrow} H(z)U(z)
$$

[8] pribrajajući nule, $h(m) = 0$ za $m < 0$, konvolucijski zbroj kauzalnih nizova $\sum_{p=0}^{n} u(p)h(n-p)z^{-n}$ proširujemo u $\sum_{p=0}^{\infty} u(p)h(n-p)z^{-n}$ (potreba izvoda)

z–transformacija – množenje s a^n

neka je $X(z) = \mathcal{Z}\{x(n)\}$ tada je z–transformacija niza $y(n) = a^n x(n)$

$$Y(z) = \mathcal{Z}\{y(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)\left(\frac{z}{a}\right)^{-n} = X\left(\frac{z}{a}\right)$$

slično za $y(n) = e^{j\Omega_0 n}x(n)$ vrijedi

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{j\Omega_0 n} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)\left(\frac{z}{e^{j\Omega_0}}\right)^{-n} = X\left(ze^{-j\Omega_0}\right)$$

korištenjem gornjeg svojstva proizlazi i svojstvo **modulacije** za $y(n) = x(n)cos(\Omega_0 n) = x(n)\frac{1}{2}[e^{-j\Omega_0 n} + e^{j\Omega_0 n}]$ slijedi

$$\mathcal{Z}\{x(n)cos(\Omega_0 n)\} = \frac{1}{2}[X(ze^{j\Omega_0}) + X(ze^{-j\Omega_0})]$$

z–transformacija – množenje s n

neka je $X(z) = \mathcal{Z}\{x(n)\}$ tada je z–transformacija niza $y(n) = nx(n)$

$$Y(z) = \mathcal{Z}\{nx(n)\} = z\sum_{n=0}^{\infty} x(n)\underbrace{nz^{-n-1}}_{-\frac{d}{dz}z^{-n}} = z\sum_{n=0}^{\infty} x(n)\left(-\frac{d}{dz}z^{-n}\right) =$$

$$= -z\frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}\right) = -z\frac{d}{dz}X(z)$$

množenje s n^p

$$\mathcal{Z}\{n^p x(n)\} = \left(-z\frac{d}{dz}\right)^p X(z)$$

z–transformacija – početna vrijednost niza

neka je $X(z) = \mathcal{Z}\{x(n)\}$ početna vrijednost niza izračunava se iz

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} = x(0) + \sum_{n=1}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

$$\Rightarrow x(0) = \lim_{z \to \infty} X(z)$$

z–transformacija – konačna vrijednost niza

neka je $X(z) = \mathcal{Z}\{x(n)\}$ konačna vrijednost niza izračunava se iz

$$\lim_{n\to\infty} x(n) = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})X(z), \text{ ako postoji } x(\infty)$$

limes za $z \to 1$ ima smisla samo kada je točka $z = 1$ locirana unutar područja konvergencije $X(z)$

dokaz započinjemo z–transformacijom niza $[x(n) - x(n-1)]$

$$\mathcal{Z}\{x(n) - x(n-1)\} = X(z) - z^{-1}X(z) - x(-1) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty}[x(n) - x(n-1)]z^{-n}$$

$$(1 - z^{-1})X(z) - x(-1) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}[x(n) - x(n-1)]z^{-n}$$

z–transformacija – konačna vrijednost niza

uzmimo limes za $z \to 1$

$$\lim_{z\to 1}[(1-z^{-1})X(z)]-x(-1) = \lim_{z\to 1}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}[x(n)-x(n-1)]z^{-n} =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\lim_{z\to 1}\sum_{n=0}^{N}[x(n)-x(n-1)]z^{-n} =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}[x(n)-x(n-1)] =$$

$$= \lim_{N\to\infty}[x(0)-x(-1)+x(1)-x(0)+x(2)-x(1)+\ldots] =$$

$$= -x(-1) + \lim_{N\to\infty} x(N)$$

$$\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})X(z) = \lim_{N\to\infty} x(N)$$

Inverzna z–transformacija

Inverzna z–transformacija

- razmotrimo li $X(z)$ za z u polarnom obliku, $z = re^{j\Omega}$,

$$X(re^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(re^{j\Omega})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[x(n)r^{-n}\right] e^{-j\Omega n}$$
$$= DTFT\{x(n)r^{-n}\},$$

pa niz $x(n)$ možemo odrediti korištenjem inverzne Fourierove transformacije $X(re^{j\Omega})$. Iz

$$x(n)r^{-n} = IDTFT\{X(re^{j\Omega})\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(re^{j\Omega})e^{j\Omega n}\, d\Omega,$$

množenjem obje strane s r^n, slijedi

$$x(n) = \frac{r^n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(re^{j\Omega})e^{j\Omega n}\, d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(re^{j\Omega})\left(re^{j\Omega}\right)^n d\Omega.$$

Inverzna z–transformacija

- integral $x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(re^{j\Omega})\left(re^{j\Omega}\right)^n d\Omega$ možemo, zamjenom $re^{j\Omega} = z$, transformirati u integral po varijabli z
- vrijedi

$$dz = jre^{j\Omega}\, d\Omega \quad \text{odnosno} \quad d\Omega = \frac{1}{j} z^{-1}\, dz$$

- integracija se provodi po varijabli Ω, pa r možemo smatrati konstantom
- integracija po Ω je u intervalu $-\pi$ do π, što u varijabli $z = re^{j\Omega}$, odgovara jednom obilasku po krivulji radijusa $|z| = r$, pa se integral može zapisati u obliku integrala po zatvorenoj krivulji u smjeru suprotnom kazaljci na satu

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z) z^{n-1}\, dz.$$

što predstavlja opći izraz za inverznu z–transformaciju

Inverzna z–transformacija – integralom po zatvorenoj krivulji

- inverzna z–transformacija je dana kao

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz$$

gdje je integral po zatvorenoj krivulji C koja zatvara ishodište i leži unutar područja konvergencije $X(z)$

- integral se izračunava primjenom Cauchy-evog teorema o reziduumima koji kazuje kako je integral, u pozitivnom smjeru duž zatvorene krivulje C, koja obuhvaća konačno izoliranih singularnih točaka (polova) jednak sumi residuuma u obuhvaćenim singularnim točkama, dakle,

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz = \sum_{m=1} Res_m[X(z) z^{n-1}]$$

$$Res_m[X(z) z^{n-1}] = \lim_{z \to z_m} [X(z) z^{n-1}(z - z_m)]$$

Inverzna z–transformacija – drugi postupci

- inverzna z–transformacija, integralom po zatvorenoj krivulji, navedena je ovdje zbog cjelovitosti izlaganja
- u nastavku se daju dva jednostavna postupka inverzne z–transformacije koji ne traže dublje poznavanje teorije funkcije kompleksne varijable
- prvo se razmatra inverzna z–transformacija postupkom razvoja u red
- pokazano je kako je z–transformacija kauzalnog niza $x(n)$

$$X(z) = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + x(3)z^{-3} + \dots$$

- pa je inverzna z–transformacija

$$x(n) = x(0)\delta(n) + x(1)\delta(n-1) + x(2)\delta(n-2) + x(3)\delta(n-3) + \dots$$

Inverzna z–transformacija – razvojem u red

- kad je $X(z)$ razlomljena racionalna funkcija, koeficijente prethodnog reda možemo dobiti jednostavnim dijeljenjem brojnika s nazivnikom
- ovo će biti ilustrirano narednim primjerom
- pokazano je da je $X(z) = \mathcal{Z}\{(0.75)^n \mu(n)\} = \frac{1}{1-0.75z^{-1}}$
- razvoj u red za $X(z)$ postižemo dijeljenjem brojnika s nazivnikom

$$
\begin{array}{l}
(1 + 0 \cdot z^{-1}) : (1 - 0.75z^{-1}) = 1 + 0.75z^{-1} + (0.75)^2 z^{-2} + (0.75)^3 z^{-3} + \ldots \\
\underline{\pm 1 \mp 0.75z^{-1}} \\
\qquad 0.75z^{-1} \\
\qquad \underline{\pm 0.75z^{-1} \mp (0.75)^2 z^{-2}} \\
\qquad\qquad (0.75)^2 z^{-2} \\
\qquad\qquad \underline{\pm (0.75)^2 z^{-2} \mp (0.75)^3 z^{-3}} \\
\qquad\qquad\qquad (0.75)^3 z^{-3}
\end{array}
$$

pa prepoznajemo

$$x(n) = \delta(n) + 0.75\delta(n-1) + (0.75)^2\delta(n-2) + (0.75)^3\delta(n-3) + \ldots = (0.75)^n \mu(n)$$

Inverzna z–transformacija – razvojem u red

- prijenosna funkcija $H(z)$ predstavlja z–transformaciju impulsnog odziva $h(n)$, sukladno tome impulsni odziv je inverzna z–transformacija prijenosne funkcije
- za zadanu prijenosnu funkciju nalazimo impulsni odziv

$$h(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1+2z^{-1}}{1-0.8\sqrt{2}z^{-1}+0.64z^{-2}}\right\}$$

- inverznu z–transformaciju provodimo dijeljenjem brojnika $H(z)$ s njezinim nazivnikom

$$\begin{array}{l}
(1+2z^{-1}) : (1-1.1314z^{-1}+0.64z^{-2}) = 1+3.1314z^{-1}+2.9028z^{-2}+\ldots \\
\underline{-1+1.1314z^{-1}-0.64z^{-2}} \\
\qquad +3.1314z^{-1}-0.64z^{-2} \\
\qquad \underline{-3.1314z^{-1}+3.5428z^{-2}-2.0041z^{-3}} \\
\qquad\qquad\qquad +2.9028z^{-2}-2.0041z^{-3}
\end{array}$$

Inverzna z–transformacija – razvojem u red

- pa je inverzna transformacija

$$h(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{1 + 3.1314z^{-1} + 2.9028z^{-2} + \ldots\}$$

$$h(n) = \delta(n) + 3.1314\delta(n-1) + 2.9028\delta(n-2) + \ldots$$

- ovim postupkom određivanja inverzne z–transformacije, moguće je brzo i jednostavno odrediti nekoliko prvih uzoraka signala,
- međutim ovdje je, iz poznatih uzoraka, teško prepoznati kompaktni izraz za impulsni odziv

$$h(n) = 4.6444(0.8)^n \cos\left(\frac{\pi}{4}n - 1.3538\right)\mu(n)$$

i on će biti određen postupkom rastava na parcijalne razlomke

Inverzna z–transformacija – rastavom na parcijalne razlomke

- metoda inverzne z–transformacije rastavom na parcijalne razlomke temelji se na prikazu funkcije $X(z)$ kao

$$X(z) = \alpha_1 X_1(z) + \alpha_2 X_2(z) + \ldots \alpha_K X_K(z)$$

gdje su $X_1(z), X_2(z), \ldots X_K(z)$ izrazi čije su inverzne transformacije $x_1(n), x_2(n), \ldots x_K(n)$ dane u tablici osnovnih z-transformacija

- ako je moguća takva dekompozicija tada se, korištenjem linearnosti, određuje inverzna transformacija $X(z)$ kao

$$x(n) = \alpha_1 x_1(n) + \alpha_2 x_2(n) + \ldots + \alpha_K x_K(n)$$

Inverzna z–transformacija – rastavom na parcijalne razlomke

- $X(z)$ je razlomljena racionalna funkcija i možemo je prikazati kao

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_N z^{-N}}$$

- za $N > M$ radi se o pravoj razlomljenoj racionalnoj funkciji koju je moguće rastaviti na parcijalne razlomke
- u slučaju $M \geq N$, $X(z)$ je neprava razlomljena racionalna funkcija, pa je prije rastave na parcijalne razlomke potrebno, dijeljenjem brojnika i nazivnika, $X(z)$ dovesti u oblik

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = c_0 + c_1 z^{-1} + \ldots + c_{M-N} z^{-(M-N)} + \underbrace{\frac{B_1(z)}{A(z)}}_{\substack{\text{prava}\\ \text{razlomljena}\\ \text{racionalna}\\ \text{funkcija}}}$$

Inverzna z–transformacija – primjer

- neka je z-transformacija kauzalnog niza $x(n)$, neprava razlomljena racionalna funkcija $X(z)$

$$X(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3}}{1 - 0.1z^{-1} - 0.06z^{-2}}$$

- u ovom primjeru je $M > N$ pa je, prije rastava na parcijalne razlomke, potrebno modificirati $X(z)$ na sumu polinoma i prave razlomljene funkcije
- to se postiže dijeljenjem polinoma u brojniku s polinomom u nazivniku[9]
- dakle iz
$(4z^{-3} + 3z^{-2} + 2z^{-1} + 1) : (-0.06z^{-2} - 0.1z^{-1} + 1)$ slijedi

$$X(z) = -66.6667z^{-1} + 61.1111 + \frac{-60.1111 + 74.7777z^{-1}}{1 - 0.1z^{-1} - 0.06z^{-2}}$$

[9] u obrnutom poretku kako bi eliminirali članove z^{-2} i z^{-3}

Inverzna z–transformacija – primjer

- $X(z)$ je priređen za rastav na parcijalne razlomke

$$X(z) = 61.1111 - 66.6667z^{-1} + \underbrace{\frac{-60.1111 + 74.7777z^{-1}}{1 - 0.1z^{-1} - 0.06z^{-2}}}_{\text{prava funkcija}}$$

- rastavom na parcijalne razlomke, što se pokazuje na narednim prikaznicama, slijedi

$$X(z) = 61.1111 - 66.6667z^{-1} + \frac{113.4889}{1 - 0.3z^{-1}} + \frac{-173.6}{1 + 0.2z^{-1}}$$

pa je, uvidom u tablice, inverzna z-transformacija

$$x(n) = 61.1111\delta(n) - 66.6667\delta(n-1) + \\ + 113.4889(0.3)^n\mu(n) - 173.6(-0.2)^n\mu(n)$$

Inverzna z–transformacija – primjer

- provjeru dobivenog rezultata možemo učiniti postupkom dijeljenjem brojnika i nazivnika $X(z)$, dakle,

$$(1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3}) : (1 - 0.1z^{-1} - 0.06z^{-2}) =$$
$$= 1 + 2.1z^{-1} + 3.27z^{-2} + 4.453z^{-3} + 0.6415z^{-4} + \dots$$

pa je inverzna transformacija

$$x(n) = \delta(n) + 2.1\delta(n-1) + 3.27\delta(n-2) + $$
$$+ 4.453\delta(n-3) + 0.6415\delta(n-4) + \dots$$

dok $x(n) = 61.1111\delta(n) - 66.6667\delta(n-1) +$
$$+ 113.4889(0.3)^n\mu(n) - 173.6(-0.2)^n\mu(n)$$

za $n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ daje uzorke $1, 2.1, 3.27, 4.453, 0.6415, \dots$

Inverzna z–transformacija – rastavom na parcijalne razlomke

- neka je $X(z)$ prava razlomljena racionalna funkcija

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_N z^{-N}}$$

gdje je $N > M$

- postupak rastava na parcijalne razlomke pojednostavljujemo množenjem brojnika i nazivnika sa z^N, što rezultira u

$$X(z) = \frac{B_1(z)}{A_1(z)} = \frac{b_0 z^N + b_1 z^{N-1} + \ldots + b_M z^{N-M}}{z^N + a_1 z^{N-1} + \ldots + a_N}$$

Inverzna z–transformacija – rastavom na parcijalne razlomke

- ovako transformiranu $X(z)$ možemo prikazati kao

$$X(z) = \frac{B_1(z)}{A_1(z)} = \frac{B_1(z)}{(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_N)}$$

- inverznu z–transformaciju rastavom na parcijalne razlomke započinjemo definiranjem pomoćne funkcije

$$X_1(z) = \frac{X(z)}{z}$$

- funkcija $X_1(z)$ se rastavlja na parcijalne razlomke, pa za jednostruke polove slijedi

$$X_1(z) = \frac{c_1}{z-p_1} + \frac{c_2}{z-p_2} + \ldots + \frac{c_N}{z-p_N}$$

Inverzna z–transformacija – rastavom na parcijalne razlomke

- $X(z)$ je tada

$$X(z) = zX_1(z) = \frac{c_1 z}{z - p_1} + \frac{c_2 z}{z - p_2} + \ldots + \frac{c_N z}{z - p_N}$$

pri čemu se koeficijenti $c_i, i = 1, 2, \ldots, N$ određuju iz

$$c_i = \lim_{z \to p_i} \left\{ (z - p_i) \frac{X(z)}{z} \right\}$$

- iz tablice z–transformacija prepoznaju se članovi $x(n)$

$$x(n) = [c_1(p_1)^n + c_2(p_2)^n + \ldots + c_N(p_N)^n]\mu(n)$$

Inverzna z–transformacija – rastavom na parcijalne razlomke

- za višestruke polove $X(z)$ je

$$X(z) = \frac{B_1(z)}{A_1(z)} = \frac{B_1(z)}{(z-p_1)^r (z-p_{r+1}) \cdots (z-p_N)}$$

- pomoćna funkcija $X_1(z)$ se rastavlja na parcijalne razlomke oblika

$$X_1(z) = \frac{c_{11}}{z-p_1} + \frac{c_{12}}{(z-p_1)^2} + \ldots + \frac{c_{1r}}{(z-p_1)^r} + \\ + \frac{c_{r+1}}{z-p_{r+1}} + \frac{c_{r+2}}{z-p_{r+2}} + \ldots + \frac{c_N}{z-p_N}$$

$$c_{1j} = \frac{1}{(r-j)!} \lim_{z \to p_1} \left\{ \frac{d^{r-j}}{dz^{r-j}} (z-p_1)^r \frac{X(z)}{z} \right\} \qquad (1)$$

$$c_i = \lim_{z \to p_i} \left\{ (z-p_i) \frac{X(z)}{z} \right\} \qquad (2)$$

Inverzna z–transformacija – rastavom na parcijalne razlomke

- za zadanu prijenosnu funkciju nalazimo impulsni odziv

$$h(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1+2z^{-1}}{1-0.8\sqrt{2}z^{-1}+0.64z^{-2}}\right\}$$

$$H(z) = \frac{1+2z^{-1}}{1-0.8\sqrt{2}z^{-1}+0.64z^{-2}} = \frac{z^2+2z}{z^2-0.8\sqrt{2}z+0.64}$$

$$p_{1,2} = 0.5657 \pm j0.5657 = 0.8e^{\pm j\frac{\pi}{4}}$$

- inverznu z–transformaciju provodimo rastavom na parcijalne razlomke

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{c_1}{z-p_1} + \frac{c_2}{z-p_2}$$

Inverzna z–transformacija – rastavom na parcijalne razlomke

- konstante c_1 i c_2 određujemo iz

$$c_1 = \lim_{z \to p_1} \left\{ (z - p_1) \frac{H(z)}{z} \right\} = \lim_{z \to p_1} \left\{ \cancel{(z - p_1)} \frac{z+2}{\cancel{(z-p_1)}(z-p_2)} \right\} =$$

$$= \frac{p_1 + 2}{p_1 - p_2} = \frac{0.5657 + j0.5657 + 2}{0.5657 + j0.5657 - 0.5657 + j0.5657} =$$

$$= 0.5000 - j2.2678 = 2.2322 e^{-j1.3538}$$

$$c_2 = \lim_{z \to p_2} \left\{ (z - p_2) \frac{H(z)}{z} \right\} = \lim_{z \to p_2} \left\{ \cancel{(z - p_2)} \frac{z+2}{(z-p_1)\cancel{(z-p_2)}} \right\} =$$

$$= \frac{p_2 + 2}{p_2 - p_1} = \frac{0.5657 - j0.5657 + 2}{0.5657 - j0.5657 - 0.5657 - j0.5657} =$$

$$= 0.5000 + j2.2678 = 2.3222 e^{j1.3538}$$

Inverzna z–transformacija – rastavom na parcijalne razlomke

- $H(z)$ pišemo kao

$$H(z) = \frac{c_1 z}{z - p_1} + \frac{c_2 z}{z - p_2}$$

i inverzna z–transformacija je

$$\begin{aligned} h(n) &= c_1(p_1)^n \mu(n) + c_2(p_2)^n \mu(n) = \\ &= 2.3222 e^{-j1.3538}(0.8)^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + 2.3222 e^{j1.3538}(0.8)^n e^{-j\frac{\pi}{4}n} = \\ &= 4.6444(0.8)^n \cos\left(\frac{\pi}{4}n - 1.3538\right)\mu(n) \end{aligned}$$

Primjena z–transformacije u analizi linearnih sustava

Primjena z–transformacije u analizi linearnih sustava – prijenosna funkcija

- određuje se prijenosna funkcija mirnog, linearnog, vremenski diskretnog sustava, primjenom z–transformacije
- neka je sustav opisan jednadžbom diferencija

$$y(n)+a_1y(n-1)+\ldots+a_{N-1}y(n-N+1)+a_Ny(n-N)=$$
$$=b_0u(n)+b_1u(n-1)+\ldots+b_{M-1}u(n-M+1)+b_Mu(n-M)$$

- z–transformacijom ove jednadžbe, uzimajući u obzir da je sustav miran, i koristeći svojstvo $\mathcal{Z}\{x(n-p)\}=z^{-p}X(z)$ slijedi

$$Y(z)+a_1z^{-1}Y(z)+\ldots+a_{N-1}z^{-N+1}Y(z)+a_Nz^{-N}Y(z)=$$
$$=b_0U(z)+b_1z^{-1}U(z)+\ldots+b_{M-1}z^{-(M-1)}U(z)+b_Mz^{-M}U(z)$$

Primjena z–transformacije u analizi linearnih sustava – prijenosna funkcija

$$[1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_{N-1} z^{-N+1} + a_N z^{-N}]Y(z) =$$
$$= [b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_{M-1} z^{-(M-1)} + b_M z^{-M}]U(z)$$

odnosno

$$Y(z) = \underbrace{\frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_{M-1} z^{-(M-1)} + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_{N-1} z^{-(N-1)} + a_N z^{-N}}}_{H(z)} U(z)$$

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_N z^{-N}} = \frac{b_0 z^N + b_1 z^{N-1} + \ldots + b_M z^{N-M}}{z^N + a_1 z^{N-1} + \ldots + a_N}$$

pa, prijenosnu funkciju diskretnog sustava, $H(z)$, definiramo kao omjer z–transformacija odziva i pobude, uz početne uvjete jednake nuli

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\mathcal{Z}\{y(n)\}}{\mathcal{Z}\{u(n)\}}$$

Primjena z–transformacije u analizi linearnih sustava

- primjenu z–transformacije u analizi linearnih sustava ilustriramo primjerom sustava opisanog jednadžbom diferencija

$$y(n) - 0.8\sqrt{2}y(n-1) + 0.64y(n-2) = u(n)$$

- sustav je pobuđen s $u(n) = -0.2cos(\frac{\pi}{8}n) \cdot \mu(n)$ a početni uvjeti su $y(-1) = -2$ i $y(-2) = -1.5$
- z–transformacija jednadžbe je

$$Y(z) - 0.8\sqrt{2}\left[z^{-1}Y(z) + y(-1)\right] + \\ + 0.64\left[z^{-2}Y(z) + z^{-1}y(-1) + y(-2)\right] = U(z)$$

$$\left[1 - 0.8\sqrt{2}z^{-1} + 0.64z^{-2}\right]Y(z) = \\ = U(z) + 0.8\sqrt{2}y(-1) - 0.64y(-2) - 0.64y(-1)z^{-1}$$

Primjena z–transformacije u analizi linearnih sustava

$$Y(z) = \underbrace{\underbrace{\frac{1}{1-0.8\sqrt{2}z^{-1}+0.64z^{-2}}}_{H(z)} U(z)}_{\text{odziv mirnog sustava}} +$$

$$+ \underbrace{\frac{0.8\sqrt{2}y(-1)-0.64y(-2)-0.64y(-1)z^{-1}}{1-0.8\sqrt{2}z^{-1}+0.64z^{-2}}}_{\text{odziv nepobuđenog sustava}}$$

množenjem brojnika i nazivnika sa z^2 i uvrštenjem zadanih početnih uvjeta $y(-1)=-2$ i $y(-2)=-1.5$

$$Y(z) = \frac{z^2}{z^2-0.8\sqrt{2}z+0.64} U(z) + \frac{-1.3028z^2+1.28z}{z^2-0.8\sqrt{2}z+0.64}$$

Primjena z–transformacije u analizi linearnih sustava

- z–transformacija zadane pobude
  $u(n) = -0.2cos(\frac{\pi}{8}n) \cdot \mu(n)$ je (iz tablice z–transformacija)

$$U(z) = \frac{-0.2z\big(z - \cos(\frac{\pi}{8})\big)}{z^2 - 2\cos(\frac{\pi}{8})z + 1}$$

pa je totalni odziv sustava na danu pobudu

$$Y(z) = \frac{-0.2z^3\big(z - \cos(\frac{\pi}{8})\big)}{(z^2 - 0.8\sqrt{2}z + 0.64)(z^2 - 2\cos(\frac{\pi}{8})z + 1)} + \\ + \frac{-1.3028z^2 + 1.28z}{z^2 - 0.8\sqrt{2}z + 0.64}$$

Primjena z–transformacije u analizi linearnih sustava

$$Y(z) = \underbrace{\frac{-0.2z^3\left(z-\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)}{(z-0.8e^{j\frac{\pi}{4}})(z-0.8e^{-j\frac{\pi}{4}})(z-e^{j\frac{\pi}{8}})(z-e^{-j\frac{\pi}{8}})}}_{Y_m(z)} + \underbrace{\frac{-1.3028z^2+1.28z}{(z-0.8e^{j\frac{\pi}{4}})(z-0.8e^{-j\frac{\pi}{4}})}}_{Y_0(z)}$$

rastavom na parcijalne razlomke

$$Y(z) = \underbrace{\frac{c_1 z}{z-0.8e^{j\frac{\pi}{4}}} + \frac{c_2 z}{z-0.8e^{-j\frac{\pi}{4}}} + \frac{c_3 z}{z-e^{j\frac{\pi}{8}}} + \frac{c_4 z}{z-e^{-j\frac{\pi}{8}}}}_{Y_m(z)} + \underbrace{\frac{c_5 z}{z-0.8e^{j\frac{\pi}{4}}} + \frac{c_6 z}{z-0.8e^{-j\frac{\pi}{4}}}}_{Y_0(z)}$$

Primjena z–transformacije u analizi linearnih sustava

- inverznom z–transformacijom će totalni odziv, u vremenskoj domeni, biti

$$y(n) = \left[c_1(0.8)^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + c_2(0.8)^n e^{-j\frac{\pi}{4}n} + c_3 e^{j\frac{\pi}{8}n} + c_4 e^{-j\frac{\pi}{8}n}\right]\mu(n) + \\ + \left[c_5(0.8)^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + c_6(0.8)^n e^{-j\frac{\pi}{4}n}\right]\mu(n)$$

- c_1, c_2, c_3 i c_4 određujemo iz $\frac{Y_m(z)}{z}$, a c_5 i c_6 iz $\frac{Y_0(z)}{z}$

$$c_1 = \lim_{z\to 0.8e^{j\frac{\pi}{4}}} \left\{ \cancel{(z-0.8e^{j\frac{\pi}{4}})} \frac{-0.2z^2\left(z-\cos(\frac{\pi}{8})\right)}{\cancel{(z-0.8e^{j\frac{\pi}{4}})}(z-0.8e^{-j\frac{\pi}{4}})(z-e^{j\frac{\pi}{8}})(z-e^{-j\frac{\pi}{8}})} \right\}$$

$$c_1 = 0.1858e^{j0.6757}$$

$$c_5 = \lim_{z\to 0.8e^{j\frac{\pi}{4}}} \left\{ \cancel{(z-0.8e^{j\frac{\pi}{4}})} \frac{-1.3028z+1.28}{\cancel{(z-0.8e^{j\frac{\pi}{4}})}(z-0.8e^{-j\frac{\pi}{4}})} \right\} = 0.8091e^{-j2.5066}$$

Primjena z–transformacije u analizi linearnih sustava

$$c_1 = 0.1858e^{j0.6757}$$
$$c_2 = 0.1858e^{-j0.6757}$$
$$c_3 = 0.2452e^{-j3.0935} = -0.2452e^{j0.04809}$$
$$c_4 = 0.2452e^{j0.3.0935} = -0.2452e^{-j0.04809}$$
$$c_5 = 0.8091e^{-j2.5066}$$
$$c_6 = 0.8091e^{j2.5066}$$

Primjena z–transformacije u analizi linearnih sustava

$$y_m(n) = \Big[0.1858e^{j0.6757}(0.8)^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + 0.1858e^{-j0.6757}(0.8)^n e^{-j\frac{\pi}{4}n} - 0.2452e^{j0.04809}e^{j\frac{\pi}{8}n} - 0.2452e^{-j0.04809}e^{-j\frac{\pi}{8}n}\Big]\mu(n)$$

$$y_0(n) = \Big[0.8091e^{-j2.5066}(0.8)^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + 0.8091e^{j2.5066}(0.8)^n e^{-j\frac{\pi}{4}n}\Big]\mu(n)$$

$$y(n) = y_0(n) + y_m(n)$$

$$y(n) = \underbrace{1.6182 \cdot 0.8^n \cos(\frac{\pi}{4}n - 2.5066)\mu(n)}_{\text{odziv nepobuđenog sustava}} +$$

$$\underbrace{+0.3716 \cdot 0.8^n cos(\frac{\pi}{4}n + 0.6759)\mu(n) - 0.4904 cos(\frac{\pi}{8}n + 0.04809)\mu(n)}_{\text{odziv mirnog sustava}}$$

- sugestija: usporediti s postupkom izračuna odziva ovog sustava u vremenskoj domeni (na prikaznici 84)

Primjena z–transformacije u analizi linearnih sustava

- analiziran je odziv diskretnog sustava opisanog jednadžbom diferencija

$$y(n) - 0.8\sqrt{2}y(n-1) + 0.64y(n-2) = u(n)$$

- sustav je bio pobuđen s $u(n) = -0.2cos(\frac{\pi}{8}n) \cdot \mu(n)$ a početni su uvjeti bili $y(-1) = -2$ i $y(-2) = -1.5$
- učinimo li pomak u vremenu za dva koraka, supstitucijom $n = n + 2$, dobivamo jednadžbu diferencija oblika

$$y(n+2) - 0.8\sqrt{2}y(n+1) + 0.64y(n) = u(n+2) \quad (3)$$

- ova jednadžba opisuje isti sustav i na zadanu pobudu $u(n) = -0.2cos(\frac{\pi}{8}n) \cdot \mu(n)$, daje isti odziv
- u izračunu odziva potrebno je poznavati početne uvjete $y(0)$ i $y(1)$, i njih je potrebno odrediti iz zadanih početnih uvjeta $y(-1) = -2$ i $y(-2) = -1.5$

Primjena z–transformacije u analizi linearnih sustava

- iz

$$y(n+2) - 0.8\sqrt{2}y(n+1) + 0.64y(n) = u(n+2)$$

za $n = -2$ slijedi,

$$y(0) - 0.8\sqrt{2}y(-1) + 0.64y(-2) = \underbrace{u(0)}_{-0.2} \Rightarrow y(0) = -1.5028$$

za $n = -1$ je

$$y(1) - 0.8\sqrt{2}y(0) + 0.64y(-1) = \underbrace{u(1)}_{-0.1848} \Rightarrow y(1) = -0.6050$$

Primjena z–transformacije u analizi linearnih sustava

- z–transformacija jednadžbe je

$$z^2Y(z) - z^2y(0) - zy(1) - z0.8\sqrt{2}Y(z) + z0.8\sqrt{2}y(0) + \\ + 0.64Y(z) = z^2U(z) - z^2u(0) - zu(1)$$

$$\left[z^2 - 0.8\sqrt{2}z + 0.64\right]Y(z) = \\ = z^2U(z) - z^2u(0) - zu(1) + z^2y(0) + zy(1) - z0.8\sqrt{2}y(0)$$

$$Y(z) = \frac{z^2}{z^2 - 0.8\sqrt{2}z + 0.64}U(z) + \\ + \frac{-z^2u(0) - zu(1) + z^2y(0) + zy(1) - z0.8\sqrt{2}y(0)}{z^2 - 0.8\sqrt{2}z + 0.64}$$

Primjena z–transformacije u analizi linearnih sustava

- uvrštenjem izračunatih $y(0) = -1.5028$ i $y(1) = -0.6050$ slijedi

$$Y(z) = \frac{z^2}{z^2 - 0.8\sqrt{2}z + 0.64} U(z) + \frac{-1.3028z^2 + 1.28z}{z^2 - 0.8\sqrt{2}z + 0.64}$$

što je identično prije izvedenoj z–transformaciji totalnog odziva

Samostalni rad studenta

Primjeri primjene z–transformacije u analizi linearnih sustava

- izračunava se odziv sustava za generiranje jeke opisanog jednadžbom

$$y(n) - 0.6y(n-4) = u(n), \qquad n \in \mathbb{Z}$$

- na pobudu

$$u(n) = \begin{cases} 0 & \text{za } n < 0 \\ 1 & \text{za } n = 0, 1 \\ 0 & \text{za } n > 1 \end{cases}$$

- neka je sustav miran dakle $y(-1) = y(-2) = y(-3) = y(-4) = 0$

Primjeri primjene z–transformacije u analizi linearnih sustava

- podsjetimo se da je z-transformacija

$$\mathcal{Z}\{y(n-j)\} = z^{-j}\left[Y(z) + \sum_{m=-j}^{-1} y(m)z^{-m}\right]$$

- kako su $y(-1) = y(-2) = y(-3) = y(-4) = 0$ i $j = 4$ slijedi

$$\mathcal{Z}\{y(n-4)\} = z^{-4}Y(z)$$

- iz $u(n) = \delta(n) + \delta(n-1)$ slijedi

$$U(z) = 1 + z^{-1}$$

- z-transformacija zadane jednadžbe diferencija je

$$Y(z) - 0.6z^{-4}Y(z) = U(z)$$

Primjeri primjene z–transformacije u analizi linearnih sustava

- pa je

$$Y(z) = \frac{1}{1-0.6z^{-4}} U(z) = \frac{1+z^{-1}}{1-0.6z^{-4}} = \frac{z^4+z^3}{z^4-0.6}$$

- rastavljamo na parcijalne razlomke funkciju

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z^3+z^2}{z^4-0.6}$$

- korijeni[10] polinoma u nazivniku su

$$p_1 = -0.8801, \; p_2 = -j0.8801, \; p_3 = +j0.8801, \; p_4 = 0.8801$$

[10] Korištenjem Matlab naredbe – roots([1 0 0 0 -0.6])

Primjeri primjene z–transformacije u analizi linearnih sustava

- rastav na parcijalne razlomke je

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z^3 + z^2}{z^4 - 0.6} =$$

$$= \frac{z^3 + z^2}{(z + 0.8801)(z - j0.8801)(z + j0.8801)(z - 0.8801)} =$$

$$= \frac{c_1}{z + 0.8801} + \frac{c_2}{z + j0.8801} + \frac{c_3}{z - j0.8801} + \frac{c_4}{z - 0.8801}$$

određujemo konstante

$$c_1 = \left\{ \cancel{(z + 0.8801)} \frac{z^3 + z^2}{\cancel{(z + 0.8801)}(z^2 + 0.8801^2)(z - 0.8801)} \right\}_{z=-0.8801} =$$

$$= -0.0341$$

Primjeri primjene z–transformacije u analizi linearnih sustava

$$c_2 = \left\{ \cancel{(z + j0.8801)} \frac{z^3 + z^2}{\cancel{(z + j0.8801)}(z^2 - 0.8801^2)(z - j0.8801)} \right\}_{z=-j0.8801} =$$
$$= 0.2500 + j0.2841 = 0.3784 e^{j0.8491}$$

$$c_3 = \left\{ \cancel{(z - j0.8801)} \frac{z^3 + z^2}{\cancel{(z - j0.8801)}(z^2 - 0.8801^2)(z + j0.8801)} \right\}_{z=j0.8801} =$$
$$= 0.2500 - j0.2841 = 0.3784 e^{-j0.8491}$$

$$c_4 = \left\{ \cancel{(z - 0.8801)} \frac{z^3 + z^2}{\cancel{(z - 0.8801)}(z^2 + 0.8801^2)(z + 0.8801)} \right\}_{z=0.8801} =$$
$$= 0.5341$$

Primjeri primjene z–transformacije u analizi linearnih sustava

$$Y(z) = \frac{c_1 z}{z+0.8801} + \frac{c_2 z}{z+j0.8801} + \frac{c_3 z}{z-j0.8801} + \frac{c_4 z}{z-0.8801} =$$

$$= \frac{-0.0341z}{z+0.8801} + \frac{0.3784e^{j0.8491}z}{z+j0.8801} +$$

$$+ \frac{0.3784e^{-j0.8491}z}{z-j0.8801} + \frac{0.5341z}{z-0.8801}$$

$$y(n) = -0.0341(-0.8801)^n + 0.3784e^{j0.8491}(-j0.8801)^n +$$

$$+ 0.3784e^{-j0.8491}(j0.8801)^n + 0.5341(0.8801)^n \quad n \geq 0$$

$$y(n) = -0.0341(-0.8801)^n + 0.3784e^{j0.8491}0.8801^n e^{-j\frac{\pi}{2}n} +$$

$$+ 0.3784e^{-j0.8491}0.8801^n e^{j\frac{\pi}{2}n} + 0.5341(0.8801)^n \quad n \geq 0$$

$$= -0.0341(-0.8801)^n + 0.5341(0.8801)^n +$$

$$+ 0.7568(0.8801)^n \cos(\frac{\pi}{2}n - 0.8491) \quad n \geq 0$$

Primjer inverzne z–transformacije

- određuje se inverzna z-transformacija kauzalnog signala $x(n)$

$$X(z) = \frac{-1 + 0.5z^{-1} + 0.25z^{-2}}{(1 + 0.25z^{-1})(1 + 0.5z^{-1})^2} = \frac{-z^3 + 0.5z^2 + 0.25z}{(z + 0.25)(z + 0.5)^2}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{-z^2 + 0.5z + 0.25}{(z + 0.25)(z + 0.5)^2} = \frac{c_1}{z + 0.25} + \frac{c_{21}}{z + 0.5} + \frac{c_{22}}{(z + 0.5)^2}$$

koeficijent c_1 možemo odrediti pomoću izraza (2)

$$c_1 = \left\{ \cancel{(z + 0.25)} \frac{-z^2 + 0.5z + 0.25}{\cancel{(z + 0.25)}(z + 0.5)^2} \right\}_{z=-0.25} = 1$$

a koeficijente c_{21} i c_{22} iz (1), uz $r = 2$ i za $j = 1, 2$,

$$c_{2j} = \frac{1}{(r - j)!} \lim_{z \to -0.5} \left\{ \frac{d^{r-j}}{dz^{r-j}} (z + 0.5)^r \frac{X(z)}{z} \right\}$$

Primjer inverzne z–transformacije

$$c_{22} = \left\{ \cancel{(z+0.5)^2} \frac{-z^2+0.5z+0.25}{\cancel{(z+0.5)^2}(z+0.25)} \right\}_{z=-0.5} = 1$$

$$c_{21} = \left\{ \frac{d}{dz} \cancel{(z+0.5)^2} \frac{-z^2+0.5z+0.25}{\cancel{(z+0.5)^2}(z+0.25)} \right\}_{z=-0.5} =$$

$$= \left\{ \frac{(-2z+0.5)(z+0.25)-(-z^2+0.5z+0.25)}{(z+0.25)^2} \right\}_{z=-0.5} = -2$$

- pokazuje se i drugi način određivanja koeficijenta c_1, c_{21} i c_{22}
- koeficijente c_1, c_{21} i c_{22} zamjenjujemo s A, B i C (radi bolje preglednosti jednačaba)

Primjer inverzne z–transformacije

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{-z^2 + 0.5z + 0.25}{(z + 0.25)(z + 0.5)^2} = \frac{A}{z + 0.25} + \frac{B}{z + 0.5} + \frac{C}{(z + 0.5)^2}$$
$$= \frac{A(z + 0.5)^2 + B(z + 0.25)(z + 0.5) + C(z + 0.25)}{(z + 0.25)(z + 0.5)^2}$$

$$\frac{-z^2 + 0.5z + 0.25}{(z + 0.25)(z + 0.5)^2} =$$
$$= \frac{(A + B)z^2 + (A + 0.75B + C)z + (0.25A + 0.125B + 0.25C)}{(z + 0.25)(z + 0.5)^2}$$

pa izjednačavanjem lijeve i desne strane slijedi

$$\begin{aligned} A + B &= -1 \\ A + 0.75B + C &= 0.5 \\ 0.25A + 0.125B + 0.25C &= 0.25 \end{aligned}$$

Primjer inverzne z–transformacije

- rješenja prethodnih jednadžbi su $A = 1$, $B = -2$ i $C = 1$, pa je rastav na parcijalne razlomke

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{z+0.25} + \frac{-2}{z+0.5} + \frac{1}{(z+0.5)^2} \quad \Rightarrow$$

$$X(z) = \frac{z}{z+0.25} + \frac{-2z}{z+0.5} + \frac{z}{(z+0.5)^2}$$

- podsjetimo se da je

$$\mathcal{Z}\{a^n\mu(n)\} = \frac{z}{z-a} \text{ i } \mathcal{Z}\{na^n\mu(n)\} = \frac{az}{(z-a)^2}$$

$$X(z) = \frac{z}{z-(-0.25)} + -2\frac{z}{z-(-0.5)} - 2\frac{(-0.5)z}{(z-(-0.5))^2}$$

pa je inverzna transformacija

$$x(n) = (-0.25)^n\mu(n) - 2(-0.5)^n\mu(n) - 2n(-0.5)^n\mu(n)$$

Rješenje jednadžbe diferencija klasičnim postupkom – primjer[11]

- odredimo odziv sustava

$$y(n) - 0.8\sqrt{2}y(n-1) + 0.64y(n-2) = u(n)$$

- na pobudu $u(n) = -0.2cos(\frac{\pi}{8}n)$ te uz početne uvjete $y(-1) = -2$ i $y(-2) = -1.5$
- prvo se određuje rješenje homogene jednadžbe ovog sustava

$$y(n) - 0.8\sqrt{2}y(n-1) + 0.64y(n-2) = 0$$

[11] Ovdje radi usporedbe s postupkom izračuna odziva pomoću z-transformacije

Rješenje homogene jednadžbe – primjer

- pretpostavimo rješenje oblika cq^n i ono mora zadovoljiti homogenu jednadžbu

$$cq^n - 0.8\sqrt{2}cq^{n-1} + 0.64cq^{n-2} = 0$$

$$cq^{n-2}(q^2 - 0.8\sqrt{2}q + 0.64) = 0$$

- pa je karakteristična jednadžba

$$q^2 - 0.8\sqrt{2}q + 0.64 = 0$$

- korijeni karakteristične jednadžbe su

$$q_{1,2} = 0.4\sqrt{2}(1 \pm j) = 0.8e^{\pm j\frac{\pi}{4}}$$

- pa je rješenje homogene jednadžbe

$$y_h(n) = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n = c_1 0.8^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + c_2 0.8^n e^{-j\frac{\pi}{4}n}$$

Određivanje partikularnog rješenja – primjer

- kako je pobuda $u(n) = -0.2cos(\frac{\pi}{8}n) \cdot \mu(n)$ partikularno rješenje je oblika

$$y_p(n) = K_1 cos(\frac{\pi}{8}n) + K_2 sin(\frac{\pi}{8}n)$$

- koeficijente K_1 i K_2 određujemo metodom neodređenog koeficijenta
- uvrštenjem $y_p(n)$ u polaznu jednadžbu slijedi

$$y_p(n) - 0.8\sqrt{2}y_p(n-1) + 0.64y_p(n-2) = -0.2cos(\frac{\pi}{8}n);$$

$$\begin{aligned} K_1 cos(\tfrac{\pi}{8}n) + K_2 sin(\tfrac{\pi}{8}n) - 0.8\sqrt{2}K_1 cos[\tfrac{\pi}{8}(n-1)] - \\ -0.8\sqrt{2}K_2 sin[\tfrac{\pi}{8}(n-1)] + 0.64K_1 cos[\tfrac{\pi}{8}(n-2)] + \\ +0.64K_2 sin[\tfrac{\pi}{8}(n-2)] = -0.2cos(\tfrac{\pi}{8}n) \end{aligned}$$

Određivanje partikularnog rješenja – primjer

- primjenom trigonometrijskih transformacija slijedi

$$
\begin{aligned}
&K_1 cos(\tfrac{\pi}{8}n) + K_2 sin(\tfrac{\pi}{8}n) - \\
&\quad -0.8\sqrt{2}K_1[cos(\tfrac{\pi}{8}n)cos(\tfrac{\pi}{8}) + sin(\tfrac{\pi}{8}n)sin(\tfrac{\pi}{8})] - \\
&\quad -0.8\sqrt{2}K_2[sin(\tfrac{\pi}{8}n)cos(\tfrac{\pi}{8}) - cos(\tfrac{\pi}{8}n)sin(\tfrac{\pi}{8})] + \\
&\quad +0.64K_1[cos(\tfrac{\pi}{8}n)cos(\tfrac{\pi}{4}) + sin(\tfrac{\pi}{8}n)sin(\tfrac{\pi}{4})] + \\
&\quad +0.64K_2[sin(\tfrac{\pi}{8}n)cos(\tfrac{\pi}{4}) - cos(\tfrac{\pi}{8}n)sin(\tfrac{\pi}{4})] = -0.2cos(\tfrac{\pi}{8}n)
\end{aligned}
$$

- razvrstavanjem slijedi

$$
\begin{aligned}
&\{[1 - 0.8\sqrt{2}cos(\tfrac{\pi}{8}) + 0.64cos(\tfrac{\pi}{4})]K_1 + \\
&\quad +[0.8\sqrt{2}sin(\tfrac{\pi}{8}) - 0.64sin(\tfrac{\pi}{4})]K_2\}cos(\tfrac{\pi}{8}n) + \\
&\{-[0.8\sqrt{2}sin(\tfrac{\pi}{8}) - 0.64sin(\tfrac{\pi}{4})]K_1 + \\
&\quad +[1 - 0.8\sqrt{2}cos(\tfrac{\pi}{8}) + 0.64cos(\tfrac{\pi}{4})]K_2\}sin(\tfrac{\pi}{8}n) = -0.2cos(\tfrac{\pi}{8}n)
\end{aligned}
$$

Određivanje partikularnog rješenja – primjer

- usporedbom lijeve i desne strane pišemo

$$
\begin{aligned}
&[1-0.8\sqrt{2}cos(\tfrac{\pi}{8})+0.64cos(\tfrac{\pi}{4})]K_1+\\
&\qquad +[0.8\sqrt{2}sin(\tfrac{\pi}{8})-0.64sin(\tfrac{\pi}{4})]K_2=-0.2\\
&-[0.8\sqrt{2}sin(\tfrac{\pi}{8})-0.64sin(\tfrac{\pi}{4})]K_1+\\
&\qquad +[1-0.8\sqrt{2}cos(\tfrac{\pi}{8})+0.64cos(\tfrac{\pi}{4})]K_2=0
\end{aligned}
$$

- rješenjem ovih jednadžbi izračunavamo K_1 i K_2

$$K_1=-0.4899, \qquad K_2=0.0236$$

- pa je partikularno rješenje

$$
\begin{aligned}
y_p(n)&=-0.4899cos(\tfrac{\pi}{8}n)+0.0236sin(\tfrac{\pi}{8}n)=\\
&=-0.4905cos(\tfrac{\pi}{8}n+0.0481)
\end{aligned}
$$

Totalni odziv sustava rješenjem jednadžbe diferencija – primjer

- totalno rješenje je $y(n) = y_h(n) + y_p(n)$

$$y(n) = c_1 0.8^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + c_2 0.8^n e^{-j\frac{\pi}{4}n} - 0.4905 cos(\frac{\pi}{8}n + 0.0481)$$

- izračunavanje $y(0)$ i $y(1)$ potrebnih u izračunavanju c_1 i c_2, a uz $y(-1) = -2$ i $y(-2) = -1.5$,

$$n = 0 \quad y(0) = 0.8\sqrt{2}y(-1) - 0.64y(-2) - 0.2cos(\tfrac{\pi}{8}0) = -1.5027$$
$$n = 1 \quad y(1) = 0.8\sqrt{2}y(0) - 0.64y(-1) - 0.2cos(\tfrac{\pi}{8}1) = -0.6049$$

- iz totalnog rješenja

$n = 0$

$$y(0) = c_1 + c_2 - 0.4899cos(0.0481) = -1.5027$$

$n = 1$

$$y(1) = c_1 0.8e^{j\frac{\pi}{4}} + c_2 0.8e^{-j\frac{\pi}{4}} - 0.4905cos(\tfrac{\pi}{8} + 0.0481) =$$
$$= -0.6049$$

Totalni odziv sustava rješenjem jednadžbe diferencija – primjer

- izračunate konstante c_1 i c_2 su

$$c_1 = -0.5064 - j0.3638 = 0.6235e^{-j2.5186}$$
$$c_2 = -0.5064 + j0.3638 = 0.6235e^{j2.5186}$$

- totalni odziv je

$$y(n) = c_1 0.8^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + c_2 0.8^n e^{-j\frac{\pi}{4}n} - 0.4905 cos(\tfrac{\pi}{8}n + 0.0481)$$

$$y(n) = 0.6235e^{-j2.5186} 0.8^n e^{j\frac{\pi}{4}n} + 0.6235e^{j2.5186} 0.8^n e^{-j\frac{\pi}{4}n} + \\ -0.4905 cos(\tfrac{\pi}{8}n + 0.0481)$$

- i konačno

$$y(n) = \underbrace{1.2471(0.8)^n cos(\frac{\pi}{4}n - 2.5186)}_{\text{prirodni ili prijelazni odziv}} \underbrace{-0.4905 cos(\frac{\pi}{8}n + 0.0481)}_{\text{prisilni odziv}}$$

Signali i sustavi

Profesor
Branko Jeren

5. lipnja 2017.

Odziv vremenski kontinuiranog sustava na pobudu kompleksnom eksponencijalom

- pokazano je kako je odziv mirnog, linearnog, vremenski stalnog kontinuiranog sustava, na svevremensku eksponencijalu e^{st},

$$y(t) = H(s)e^{st}$$

pri čemu je

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st}\,dt$$

- za $s \in \mathbb{C}$, $H(s)$ je kompleksna funkcija

Laplaceova transformacija

- integral

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st}\,dt$$

  možemo interpretirati kao transformaciju vremenske funkcije, impulsnog odziva $h(t)$ kontinuiranog sustava, u kompleksnu funkciju $H(s)$
- ovako definiranu transformaciju nazivamo dvostrana ili bilateralna **Laplaceova transformacija** – $\mathcal{L}$–transformacija
- Laplaceova transformacija $H(s)$ predstavlja alternativni prikaz kontinuiranog vremenskog signala $h(t)$

Dvostrana $\mathcal{L}$–transformacija

$\mathcal{L}$–transformacija

- za vremenski kontinuirani signal $x(t)$, definira se dvostrana $\mathcal{L}$–transformacija

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt$$

- $\mathcal{L}$–transformacija označava se simbolički kao

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$$

ili još jednostavnije

$$x(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s)$$

$\mathcal{L}$–transformacija – primjer 1

- određuje se $\mathcal{L}$–transformacija signala

$$x(t) = e^{-at}\mu(t), a \in \mathbb{R}$$

- iz definicije $\mathcal{L}$–transformacije slijedi

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}\mu(t)e^{-st}\,dt =$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-st}\,dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(s+a)t}\,dt = -\frac{1}{s+a}e^{-(s+a)t}\Big|_0^{\infty} =$$

$$= \frac{1}{s+a}, \qquad \text{za } Re(s+a) > 0$$

- gornji uvjet je posljedica ponašanja $e^{-(s+a)t}$ za $t \to \infty$

$\mathcal{L}$–transformacija – primjer 1

- iz

$$e^{-(s+a)t} = e^{-[Re(s+a)+jIm(s+a)]t} = e^{-[Re(s+a)]t}e^{-j[Im(s+a)]t}$$

a kako je $\left|e^{-j[Im(s+a)]t}\right| = 1$, neovisno o vrijednosti $[Im(s+a)]t$, slijedi

$$\lim_{t\to\infty} e^{-(s+a)t} = \begin{cases} 0 & Re(s+a) > 0 \\ \infty & Re(s+a) < 0 \end{cases}$$

pa vrijedi ispred izvedeno

$$X(s) = -\frac{1}{s+a}e^{-(s+a)t}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s+a}, \qquad \text{za } Re(s+a) > 0$$

- integral koji definira $X(s)$ postoji samo za vrijednosti $Re(s) > -a$ pa se područje vrijednosti $Re(s) > -a$ naziva područjem konvergencije $X(s)$

$\mathcal{L}$–transformacija – primjer 2

- određuje se $\mathcal{L}$–transformacija signala

$$x(t) = -e^{-at}\mu(-t), a \in \mathbb{R}$$

- iz definicije $\mathcal{L}$–transformacije slijedi

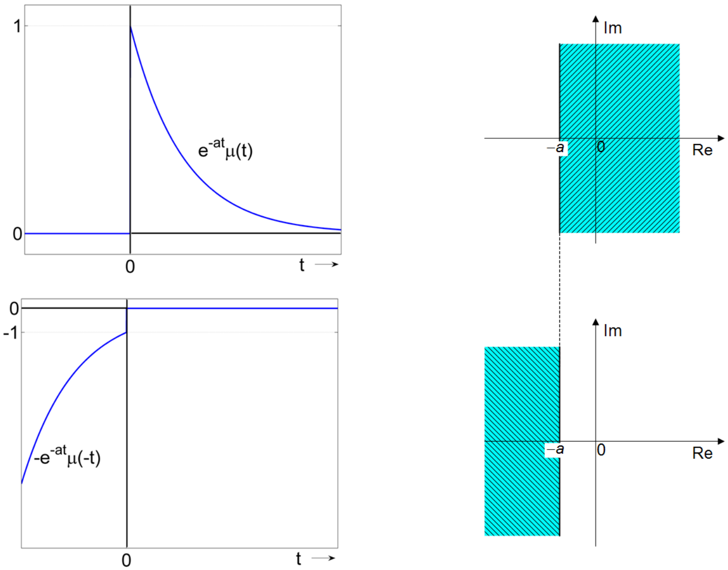
$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} -e^{-at}\mu(-t)e^{-st}\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} -e^{-at}e^{-st}\, dt = -\int_{-\infty}^{0} e^{-(s+a)t}\, dt = +\frac{1}{s+a}e^{-(s+a)t}\Big|_{-\infty}^{0}$$

$$= \frac{1}{s+a}, \qquad \text{za } Re(s+a) < 0$$

- pa je područje konvergencije, $\mathcal{PK}$, $\mathcal{L}$–transformacije $X(s)$, područje $Re(s) < -a$

$\mathcal{L}$–transformacija – primjer 2



$\mathcal{L}$–transformacija – područje konvergencije

- usporedbom primjera 1 i primjera 2

$$e^{-at}\mu(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+a} \qquad Re(s) > -a$$

odnosno

$$-e^{-at}\mu(-t) \stackrel{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+a} \qquad Re(s) < -a$$

zaključujemo kako dva različita signala, jedan kauzalan a drugi antikauzalan, imaju identične izraze za $\mathcal{L}$–transformaciju i kako se njihova razlika očituje samo u području konvergencije, $\mathcal{PK}$,

- područje konvergencije $\mathcal{PK}$, $\mathcal{L}$–transformacije, je važna i nužna informacija i tek definirano $\mathcal{PK}$ daje jednoznačnu vezu između signala i njegove $\mathcal{L}$–transformacije
- stoga, $\mathcal{L}$–transformacija mora biti uvijek zadana s njezinim $\mathcal{PK}$

Jednostrana $\mathcal{L}$–transformacija

Jednostrana $\mathcal{L}$–transformacija

- dvostrana $\mathcal{L}$–transformacija kauzalnih signala $x(t)\mu(t)$ je

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\mu(t)e^{-st}\,dt = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt$$

donja granica 0^- omogućuje uključivanje impulsa koji se mogu javiti u trenutku $t = 0$

- $\mathcal{L}$–transformacija definirana kao

$$X(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt$$

naziva se jednostrana ili unilateralna $\mathcal{L}$–transformacija

Jednostrana $\mathcal{L}$–transformacija – egzistencija

- kompleksnu varijablu s, u $\mathcal{L}$–transformaciji, možemo prikazati kao $s = \sigma + j\omega$ pa je

$$X(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt = \int_{0^-}^{\infty} \left[x(t)e^{-\sigma t}\right] e^{-j\omega t}\,dt$$

- kako je $\left|e^{-j\omega t}\right| = 1$ gornji integral konvergira ako je zadovoljeno

$$\int_{0^-}^{\infty} \left|x(t)e^{-\sigma t}\right| dt < \infty \qquad (1)$$

- iz gornjeg izraza zaključujemo da $\mathcal{L}$–transformacija postoji za sve signale koji ne rastu brže od nekog eksponencijalnog signala ce^{at}, a to su svi signali od praktičnog i teorijskog interesa
- dakle, ako za neke c i a vrijedi $|x(t)| \leq ce^{at}$, tada je za sve $\sigma = Re\{s\} > a$ zadovoljena relacija (1)

Jednostrana $\mathcal{L}$–transformacija

- jednostrana $\mathcal{L}$– transformacija pokazuje se posebno pogodnom u postupcima rješavanja diferencijalnih jednadžbi sa zadanim početnim uvjetima
- jednostrana $\mathcal{L}$– transformacija ograničena je samo na kauzalne signale i sustave
- kako je u ovom predmetu većina pozornosti okrenuta kauzalnim signalima i sustavima, u nastavku se razmatra uglavnom jednostrana $\mathcal{L}$–transformacija
- sukladno većini literature pod nazivom $\mathcal{L}$–transformacija podrazumijevati će se jednostrana $\mathcal{L}$–transformacija, a u slučaju dvostrane transformacije to će biti posebno istaknuto
- isto tako, zbog jednoznačnosti $\mathcal{L}$–transformacije, nepotrebno je, u slučaju kauzalnih signala $x(t)\mu(t)$, eksplicitno navoditi područje konvergencije (osim u slučaju mogućih dvojbenosti u interpretaciji)

$\mathcal{L}$–transformacija osnovnih signala

$\mathcal{L}$–transformacija osnovnih signala

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t) e^{-st}\, dt = 1,$$

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t-t_0) e^{-st}\, dt = e^{-st_0}, \qquad t_0 > 0$$

$$\mathcal{L}\{\mu(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} \mu(t) e^{-st}\, dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}\, dt = -\frac{1}{s} e^{-st}\Big|_{0^-}^{\infty} = \frac{1}{s},$$

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\mu(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-at}\mu(t) e^{-st}\, dt = \frac{1}{s+a}, \qquad \text{(prije izvedeno)}$$

odnosno

$$\mathcal{L}\{e^{j\omega_0 t}\mu(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{j\omega_0 t}\mu(t) e^{-st}\, dt = \frac{1}{s-j\omega_0}$$

$\mathcal{L}$–transformacija osnovnih signala

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega_0 t)\mu(t)\} = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$$

ova $\mathcal{L}$–transformacija slijedi iz[1]

$$\cos(\omega_0 t)\mu(t) = \frac{1}{2}\left[e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right]\mu(t)$$

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega_0 t)\mu(t)\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{j\omega_0}\mu(t)\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-j\omega_0}\mu(t)\}$$

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega_0 t)\mu(t)\} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s - j\omega_0} + \frac{1}{s + j\omega_0}\right] = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$$

[1] Koristi se svojstvo linearnosti Laplaceove transformacije koje se pokazuje nešto kasnije

Tablica osnovnih $\mathcal{L}$–transformacija [2]

	$x(t)$	$X(s)$
1	$\delta(t)$	1
2	$\delta(t-t_0)$	e^{-st_0}
3	$\mu(t)$	$\frac{1}{s}$
4	$t\mu(t)$	$\frac{1}{s^2}$
5	$t^j\mu(t)$	$\frac{j!}{s^{j+1}}$
6	$e^{\lambda t}\mu(t)$	$\frac{1}{s-\lambda}$
7	$te^{\lambda t}\mu(t)$	$\frac{1}{(s-\lambda)^2}$
8	$t^j e^{\lambda t}\mu(t)$	$\frac{j!}{(s-\lambda)^{j+1}}$
9	$\cos(bt)\mu(t)$	$\frac{s}{s^2+b^2}$
10	$\sin(bt)\mu(t)$	$\frac{b}{s^2+b^2}$

[2] izvor:B.P. Lathi: Linear Systems and Signals str. 344

Tablica osnovnih $\mathcal{L}$–transformacija [3]

	$x(t)$	$X(s)$
11	$e^{-at}\cos(bt)\mu(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$
12	$e^{-at}\sin(bt)\mu(t)$	$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$
13	$re^{-at}\cos(bt+\theta)\mu(t)$	$\frac{(r\cos\theta)s+(ar\cos\theta-br\sin\theta)}{s^2+2as+(a^2+b^2)}$
ili		
13[a]	$re^{-at}\cos(bt+\theta)\mu(t)$	$\frac{0.5re^{j\theta}}{s+a-jb}+\frac{0.5re^{-j\theta}}{s+a+jb}$

[3] izvor:B.P. Lathi: Linear Systems and Signals str. 344

Osnovna svojstva $\mathcal{L}$–transformacije

$\mathcal{L}$–transformacija – linearnost

neka je $w(t) = ax(t) \pm by(t)$
tada je $\mathcal{L}$–transformacija od $w(t)$

$$W(s) = aX(s) \pm bY(s)$$

linearnost $\mathcal{L}$–transformacije proizlazi iz definicije

$$W(s) = \int_{0^-}^{\infty} w(t)e^{-st}\,dt = \int_{0^-}^{\infty} [ax(t) \pm by(t)]e^{-st}\,dt =$$
$$= a\int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt \pm b\int_{0^-}^{\infty} y(t)e^{-st}\,dt = aX(s) \pm bY(s)$$

$\mathcal{L}$–transformacija – vremenski pomak

neka je $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\mu(t)\}$ tada je, za $t_0 \geq 0$

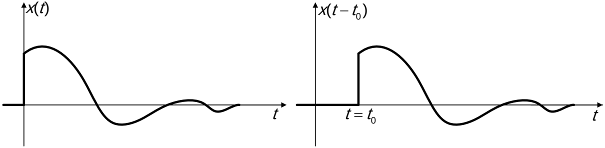
$$\mathcal{L}\{x(t-t_0)\mu(t-t_0)\} = e^{-st_0}X(s)$$

izvod:

$$\mathcal{L}\{x(t-t_0)\mu(t-t_0)\} = \int_0^\infty x(t-t_0)\mu(t-t_0)e^{-st}\,dt =$$

za $t - t_0 = \tau$

$$= \int_{-t_0}^\infty x(\tau)\mu(\tau)e^{-s(t_0+\tau)}d\tau = e^{-st_0}\int_0^\infty x(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau = e^{-st_0}X(s)$$



$\mathcal{L}$–transformacija – primjer uporabe svojstva vremenski pomak

određuje se $\mathcal{L}$–transformacija pravokutnog impulsa definiranog za $0 < a < b$

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{za } a \leq t < b \\ 0 & \text{za ostale } t \end{cases}$$

što se može zapisati i kao razlika dva pomaknuta jedinična skoka

$$x(t) = \mu(t-a) - \mu(t-b)$$

$\mathcal{L}$–transformacija je tada

$$X(s) = \mathcal{L}\{\mu(t-a) - \mu(t-b)\} = e^{-as}\frac{1}{s} - e^{-bs}\frac{1}{s} = \frac{e^{-as} - e^{-bs}}{s}$$

$\mathcal{L}$–transformacija – frekvencijski pomak

neka je $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$, tada je

$$\mathcal{L}\{x(t)e^{s_0 t}\} = X(s - s_0)$$

što je dualno prije izvedenom svojstvu vremenskog pomaka

izvod:

$$\mathcal{L}\{x(t)e^{s_0 t}\} = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{s_0 t}e^{-st}\, dt = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-(s-s_0)t}\, dt = \\ = X(s - s_0)$$

primjer: za

$$\sin(bt)\mu(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{b}{s^2 + b^2}$$

primjenom svojstva frekvencijskog pomaka slijedi, za $s_0 = -a$,

$$e^{-at}\sin(bt)\mu(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{b}{(s + a)^2 + b^2}$$

$\mathcal{L}$–transformacija – vremenska kompresija/ekspanzija

neka je $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$, tada je, za[4] $a > 0$

$$\mathcal{L}\{x(at)\} = \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right)$$

izvod:

$$\mathcal{L}\{x(at)\} = \int_{0^-}^{\infty} x(at) e^{-st}\, dt = \frac{1}{a} \int_{0^-}^{\infty} x(\tau) e^{-\frac{s}{a}\tau}\, d\tau = \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right)$$

- zaključuje se kako vremenska kompresija signala za faktor a rezultira u ekspanziji signala u frekvencijskoj domeni za isti faktor
- ekspanzija $x(t)$ rezultira u kompresiji $X(s)$

[4] $a > 0$ osigurava kauzalnost

$\mathcal{L}$–transformacija – konvolucija u vremenu

neka su $X_1(s) = \mathcal{L}\{x_1(t)\mu(t)\}$ i $X_2(s) = \mathcal{L}\{x_2(t)\mu(t)\}$ tada je,

$$\mathcal{L}\{[x_1(t)\mu(t)] * [x_2(t)\mu(t)]\} = X_1(s)X_2(s)$$

izvod: konvolucija vremenskih signala je

$$[x_1(t)\mu(t)]*[x_2(t)\mu(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} [x_1(\tau)\mu(\tau)][x_2(t-\tau)\mu(t-\tau)]\, d\tau$$
$$= \int_{0^-}^{\infty} x_1(\tau)[x_2(t-\tau)\mu(t-\tau)]\, d\tau$$

pa je $\mathcal{L}$–transformacija

$$\mathcal{L}\{[x_1(t)\mu(t)] * [x_2(t)\mu(t)]\} =$$
$$= \int_{0^-}^{\infty} \left[\int_{0^-}^{\infty} x_1(\tau)[x_2(t-\tau)\mu(t-\tau)]\, d\tau \right] e^{-st}\, dt =$$

$\mathcal{L}$–transformacija – konvolucija u vremenu

zamjenom redoslijeda integracije

$$\mathcal{L}\{[x_1(t)\mu(t)] * [x_2(t)\mu(t)]\} =$$

$$= \int_{0^-}^{\infty} x_1(\tau)\left[\int_{0^-}^{\infty} x_2(t-\tau)\mu(t-\tau)e^{-st}\,dt\right]d\tau$$

zamjenom $t - \tau = \lambda$

$$= \int_{0^-}^{\infty} x_1(\tau)\left[\int_{-\tau}^{\infty} x_2(\lambda)\mu(\lambda)e^{-s(\lambda+\tau)}d\lambda\right]d\tau =$$

zbog $\mu(\lambda) = 0$ za $\lambda < 0$

$$= \int_{0^-}^{\infty} x_1(\tau)e^{-s\tau}\left[\underbrace{\int_{0^-}^{\infty} x_2(\lambda)e^{-s\lambda}d\lambda}_{X_2(s)}\right]d\tau = X_2(s)\underbrace{\int_{0^-}^{\infty} x_1(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau}_{X_1(s)}$$

$$= X_2(s)X_1(s)$$

$\mathcal{L}$–transformacija – vremenska derivacija

neka je $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$, tada je

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = sX(s) - x(0^-)$$

višestrukom primjenom ovog svojstva slijedi

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right\} = s^2X(s) - sx(0^-) - x^{(1)}(0^-)$$

odnosno

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^jx(t)}{dt^j}\right\} = s^jX(s) - s^{j-1}x(0^-) - s^{j-2}x^{(1)}(0^-) - \ldots - x^{(j-1)}(0^-) =$$

$$= s^jX(s) - \sum_{m=1}^{j} s^{j-m}x^{(m-1)}(0^-)$$

$\mathcal{L}$–transformacija – vremenska derivacija

izvod

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = \int_{0^-}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st}\, dt$$

integral se rješava parcijalnom integracijom

$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$

neka su

$$u(t) = e^{-st} \quad \text{i} \quad dv = \frac{dx(t)}{dt}\, dt$$

vrijedi

$$u(t) = e^{-st} \quad \Rightarrow \quad du = -se^{-st}\, dt$$

$$dv = \frac{dx(t)}{dt}\, dt \quad \Rightarrow \quad v(t) = x(t)$$

tada je,

$\mathcal{L}$–transformacija – vremenska derivacija

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} &= \int_{0^-}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st}\, dt = \\
&= uv\Big|_{t=0^-}^{t=\infty} - \int_{0^-}^{\infty} v\, du = \\
&= e^{-st}x(t)\Big|_{t=0^-}^{t=\infty} - \int_{0^-}^{\infty} x(t)(-s)e^{-st}\, dt \\
&= \underbrace{\lim_{t\to\infty}\left[e^{-st}x(t)\right]}_{=0} - x(0^-) + sX(s) = sX(s) - x(0^-)
\end{aligned}
$$

- već je pokazano kako $\mathcal{L}$–transformacija konvergira za signale koji ne rastu brže od nekog eksponencijalnog signala ce^{at}, dakle, za signale za koje vrijedi $|x(t)| \leq ce^{at}$
- tada za sve s za koje je $\sigma = Re\{s\} > a$ vrijedi $\lim_{t\to\infty}\left[e^{-st}x(t)\right] = 0$

$\mathcal{L}$–transformacija – integracija u vremenu

neka je $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$, tada je

$$\mathcal{L}\left\{ \int_{0^-}^{t} x(\tau)\, d\tau \right\} = \frac{1}{s} X(s)$$

izvod se temelji na korištenju svojstva konvolucije

$$x(t) * \mu(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\mu(t-\tau)\, d\tau = \int_{0^-}^{t} x(\tau)\, d\tau$$

$$\int_{0^-}^{t} x(\tau)\, d\tau = x(t) * \mu(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s} X(s)$$

$\mathcal{L}$–transformacija – frekvencijska derivacija

neka je $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$, tada je

$$\mathcal{L}\{-tx(t)\} = \frac{d}{ds}(X(s)) \Leftrightarrow \mathcal{L}\{tx(t)\} = -\frac{d}{ds}(X(s))$$

izvod

$$\frac{d}{ds}(X(s)) = \frac{d}{ds}\int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt =$$

$$= \int_{0^-}^{\infty} \frac{d}{ds}[x(t)e^{-st}]\,dt = \int_{0^-}^{\infty} [-tx(t)]e^{-st}\,dt = \mathcal{L}\{-tx(t)\}$$

općenito vrijedi

$$\frac{d^j}{ds^j}(X(s)) = \int_{0^-}^{\infty} [(-t)^j x(t)]e^{-st}\,dt = \mathcal{L}\{(-t)^j x(t)\}$$

Inverzna $\mathcal{L}$–transformacija

Inverzna $\mathcal{L}$–transformacija – rastavom na parcijalne razlomke

- $X(s)$ je razlomljena racionalna funkcija i možemo je prikazati kao

$$X(s) = \frac{b_{N-M}s^M + b_{N-M+1}s^{M-1} + \cdots + b_{N-1}s + b_N}{s^N + a_1 s^{N-1} + \cdots + a_{N-1}s + a_N}$$

odnosno kao omjer polinoma M–tog i N–tog reda

$$X(s) = \frac{P_M(s)}{P_N(s)}$$

- za $N > M$ radi se o pravoj razlomljenoj racionalnoj funkciji koju je moguće rastaviti na parcijalne razlomke

Inverzna $\mathcal{L}$–transformacija – rastavom na parcijalne razlomke

- u slučaju $M \geq N$, $X(s)$ je neprava razlomljena racionalna funkcija, pa je prije rastave na parcijalne razlomke potrebno, dijeljenjem brojnika i nazivnika, $X(s)$ dovesti u oblik

$$X(s) = P_{M-N}(s) + \frac{P_R(s)}{P_N(s)}, \quad \text{gdje je } R \leq N-1$$

- primjer za $X(s) = \frac{s^3}{s^2+2s+1}$ dijeljenjem brojnika s nazivnikom slijedi

$$X(s) = \frac{s^3}{s^2+2s+1} = s - 2 + \frac{3s+2}{s^2+2s+1}$$

Inverzna $\mathcal{L}$–transformacija – rastavom na parcijalne razlomke

- pravu razlomljenu racionalnu funkciju, za slučaj jednostrukih polova,

$$X(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{B(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_N)}$$

rastavljamo na parcijalne razlomke

$$X(s) = \frac{c_1}{s-p_1} + \frac{c_2}{s-p_2} + \ldots + \frac{c_N}{s-p_N},$$

$$c_i = \lim_{s\to p_i}\Big\{(s-p_i)X(s)\Big\}, \qquad i = 1, 2, \ldots, N$$

iz čega slijedi inverzna $\mathcal{L}$–transformacija

$$x(t) = [c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t} + \ldots + c_N e^{p_N t}]\mu(t)$$

Inverzna $\mathcal{L}$–transformacija – rastavom na parcijalne razlomke

- za slučaj višestrukih polova,

$$X(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{B(s)}{(s-p_1)^r(s-p_{r+1})\cdots(s-p_N)}$$

rastavljamo na parcijalne razlomke

$$X(s) = \frac{c_{11}}{s-p_1} + \frac{c_{12}}{(s-p_1)^2} + \ldots + \frac{c_{1r}}{(s-p_1)^r} + \\ + \frac{c_{r+1}}{s-p_{r+1}} + \frac{c_{r+2}}{s-p_{r+2}} + \ldots + \frac{c_N}{s-p_N}$$

$$c_{1j} = \frac{1}{(r-j)!} \lim_{s\to p_1} \left\{ \frac{d^{r-j}}{ds^{r-j}} \Big[(s-p_1)^r X(s) \Big] \right\}, \quad j = r, r-1, \ldots, 2, 1$$

$$c_i = \lim_{s\to p_i} \Big\{ (s-p_i)X(s) \Big\}, \qquad i = r+1, r+2, \ldots, N$$

Inverzna $\mathcal{L}$–transformacija – rastavom na parcijalne razlomke

- inverzna $\mathcal{L}$–transformacija

$$X(s) = \frac{c_{11}}{s-p_1} + \frac{c_{12}}{(s-p_1)^2} + \ldots + \frac{c_{1r}}{(s-p_1)^r} + \\ + \frac{c_{r+1}}{s-p_{r+1}} + \frac{c_{r+2}}{s-p_{r+2}} + \ldots + \frac{c_N}{s-p_N}$$

kako je

$$e^{\lambda t}\mu(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s-\lambda} \qquad \text{i} \qquad t^j e^{\lambda t}\mu(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{j!}{(s-\lambda)^{j+1}}$$

$$x(t) = \Big[c_{11}e^{p_1 t} + c_{12}te^{p_1 t} + c_{13}\frac{1}{2!}t^2 e^{p_1 t} + \ldots + c_{1r}\frac{1}{(r-1)!}t^{(r-1)}e^{p_1 t} + \\ + c_{r+1}e^{p_{r+1}t} + c_{r+2}e^{p_{r+2}t} + \ldots + c_N e^{p_N t}\Big]\mu(t)$$

Inverzna $\mathcal{L}$–transformacija – rastavom na parcijalne razlomke – primjer

- inverzna transformacija

$$X(s) = \frac{s+3}{s(s+1)^2} = \frac{c_{11}}{s+1} + \frac{c_{12}}{(s+1)^2} + \frac{c_3}{s}$$

- konstante c_{11}, c_{12} i c_3 iz

$$c_{11} = \frac{1}{1!} \lim_{s\to -1} \left\{ \frac{d}{ds} \left[\cancel{(s+1)^2} \frac{s+3}{s\cancel{(s+1)^2}} \right] \right\} =$$

$$= \lim_{s\to -1} \left\{ \frac{s-(s+3)}{s^2} \right\} = -3$$

$$c_{12} = \frac{1}{0!} \lim_{s\to -1} \left\{ \cancel{(s+1)^2} \frac{s+3}{s\cancel{(s+1)^2}} \right\} = -2$$

$$c_3 = \lim_{s\to 0} \left\{ \cancel{s} \frac{s+3}{\cancel{s}(s+1)^2} \right\} = 3$$

$$x(t) = -3e^{-t}\mu(t) - 2te^{-t}\mu(t) + 3\mu(t)$$

Inverzna $\mathcal{L}$–transformacija – rastavom na parcijalne razlomke – primjer

- rastav na parcijalne razlomke moguće je učiniti i metodom neodređenih koeficijenata

$$X(s) = \frac{s+3}{s(s+1)^2} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{s}$$

- množenjem obje strane s nazivnikom lijeve strane izlazi

$$\begin{aligned} s+3 &= As(s+1) + Bs + C(s+1)^2 = \\ &= (A+C)s^2 + (A+B+2C)s + C \end{aligned}$$

- usporedbom koeficijenata jednako visokih potencija lijevo i desno slijedi sustav linearnih jednačaba

$$\left.\begin{aligned} A + C &= 0 \\ A + B + 2C &= 1 \\ C &= 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow A = -3, B = -2, C = 3$$

Inverzna $\mathcal{L}$–transformacija – rastavom na parcijalne razlomke – primjer

- inverzna transformacija

$$X(s) = \frac{s^2+s+2}{s^3+s^2+s+1} = \frac{s^2+s+2}{(s+1)(s-j)(s+j)} = \frac{s^2+s+2}{(s+1)(s^2+1)}$$

- rastav je moguće učiniti kao rastav razlomljene racionalne funkcije za jednostruke polove
- dva su pola konjugirano kompleksni i prepoznaje se da će inverzna transformacija rezultirati u sinusoidnom signalu, pa stoga, rastav možemo učiniti i na ovaj način

$$X(s) = \frac{s^2+s+2}{(s+1)(s^2+1)} = \frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2+1}$$

Inverzna $\mathcal{L}$–transformacija – rastavom na parcijalne razlomke – primjer

- metodom neodređenih koeficijenata određujemo A, B, C,

$$s^2+s+2 = As^2+A+Bs^2+Bs+Cs+C = \\ = (A+B)s^2+(B+C)s+(A+C)$$

- usporedbom koeficijenata jednako visokih potencija lijevo i desno slijedi sustav linearnih jednačaba

$$\left.\begin{array}{ll} A+B & =1 \\ B+C & =1 \\ A+C & =2 \end{array}\right\} \Rightarrow A=1, B=0, C=1$$

$$X(s)=\frac{s^2+s+2}{(s+1)(s^2+1)}=\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s^2+1}$$

$$x(t)=e^{-t}\mu(t)+sin(t)\mu(t)$$

Primjena $\mathcal{L}$–transformacije u analizi linearnih sustava

Primjena $\mathcal{L}$–transformacije u analizi linearnih sustava – prijenosna funkcija

- određuje se prijenosna funkcija mirnog, linearnog, vremenski kontinuiranog sustava, primjenom $\mathcal{L}$–transformacije
- neka je sustav opisan diferencijalnom jednadžbom

$$\frac{d^N y}{dt^N} + a_1 \frac{d^{N-1} y}{dt^{N-1}} + \cdots + a_{N-1} \frac{dy}{dt} + a_N y(t) =$$
$$= b_{N-M} \frac{d^M u}{dt^M} + b_{N-M+1} \frac{d^{M-1} u}{dt^{M-1}} + \cdots + b_{N-1} \frac{du}{dt} + b_N u(t)$$

- $\mathcal{L}$–transformacijom ove jednadžbe, uzimajući u obzir da je sustav miran, i koristeći svojstvo $\mathcal{L}\{\frac{d^j y}{dt^j}\} = s^j X(s)$ slijedi

$$(s^N + a_1 s^{N-1} + \cdots + a_{N-1} s + a_N) Y(s) =$$
$$= (b_{N-M} s^M + b_{N-M+1} s^{M-1} + \cdots + b_{N-1} s + b_N) U(s)$$

Primjena $\mathcal{L}$–transformacije u analizi linearnih sustava – prijenosna funkcija

- pa je

$$Y(s) = \underbrace{\frac{b_{N-M}s^M + b_{N-M+1}s^{M-1} + \cdots + b_{N-1}s + b_N}{s^N + a_1 s^{N-1} + \cdots + a_{N-1}s + a_N}}_{H(s)} U(s)$$

$$H(s) = \frac{b_{N-M}s^M + b_{N-M+1}s^{M-1} + \cdots + b_{N-1}s + b_N}{s^N + a_1 s^{N-1} + \cdots + a_{N-1}s + a_N} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

pa, prijenosnu funkciju vremenski kontinuiranog sustava, $H(s)$, definiramo kao omjer $\mathcal{L}$–transformacija odziva i pobude, uz početne uvjete jednake nuli

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\mathcal{L}\{y(t)\}}{\mathcal{L}\{u(t)\}}$$

Primjena $\mathcal{L}$–transformacije u analizi linearnih sustava

- primjenu $\mathcal{L}$–transformacije u analizi linearnih sustava ilustriramo primjerom sustava opisanog diferencijalnom jednadžbom

$$y''(t) + 0.2y'(t) + 0.16y(t) = u(t) \qquad (2)$$

- neka je sustav pobuđen pobudom $u(t) = 0.64\mu(t)$ i neka su $y(0^-) = -3$ i $y'(0^-) = -1$
- $\mathcal{L}$–transformacija jednadžbe je

$$s^2Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-) + \\ + 0.2sY(s) - 0.2y(0^-) + 0.16Y(s) = U(s)$$

$$\left[s^2 + 0.2s + 0.16\right]Y(s) = U(s) + \\ + sy(0^-) + y'(0^-) + 0.2y(0^-)$$

Primjena $\mathcal{L}$–transformacije u analizi linearnih sustava

$$Y(s) = \underbrace{\frac{sy(0^-) + y'(0^-) + 0.2y(0^-)}{s^2 + 0.2s + 0.16}}_{\text{odziv nepobuđenog sustava} \ - \ Y_0(s)} + \underbrace{\underbrace{\frac{1}{s^2 + 0.2s + 0.16}}_{H(s)} U(s)}_{\text{odziv mirnog sustava} \ - \ Y_m(s)}$$

uz $\mathcal{L}\{u(t)\} = \mathcal{L}\{0.64\mu(t)\} = \frac{0.64}{s} = U(s)$ i zadane početne uvjete $y(0^-) = -3$ i $y'(0^-) = -1$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{-3s - 1.6}{s^2 + 0.2s + 0.16}}_{Y_0(s)} + \underbrace{\frac{0.64}{s^3 + 0.2s^2 + 0.16s}}_{Y_m(s)}$$

Primjena $\mathcal{L}$–transformacije u analizi linearnih sustava

$$Y(s) = \underbrace{\frac{c_1}{s+0.1-j0.3873} + \frac{c_2}{s+0.1+j0.3873}}_{Y_0(s)} + \underbrace{\frac{c_3}{s+0.1-j0.3873} + \frac{c_4}{s+0.1+j0.3873} + \frac{c_5}{s}}_{Y_m(s)}$$

c_1, c_2 određujemo iz $Y_0(s)$, a c_3, c_4, c_5 iz $Y_m(s)$

$$c_1 = \left[(s+0.1-j0.3873)Y_0(s)\right]_{s=-0.1+j0.3873} = -1.5000 + j1.6783$$
$$c_2 = \left[(s+0.1+j0.3873)Y_0(s)\right]_{s=-0.1-j0.3873} = -1.5000 - j1.6783$$

$$c_3 = \left[(s+0.1-j0.3873)Y_m(s)\right]_{s=-0.1+j0.3873} = -2.0000 + j0.5164$$
$$c_4 = \left[(s+0.1+j0.3873)Y_m(s)\right]_{s=-0.1-j0.3873} = -2.0000 - j0.5164$$
$$c_5 = \left[sY_m(s)\right]_{s=0} = 4$$

Primjena $\mathcal{L}$–transformacije u analizi linearnih sustava

$$Y(s) = \underbrace{\frac{-1.5000 + j1.6783}{s + 0.1 - j0.3873} + \frac{-1.5000 - j1.6783}{s + 0.1 + j0.3873}}_{Y_0(s)} +$$

$$+ \underbrace{\frac{-2.0000 + j0.5164}{s + 0.1 - j0.3873} + \frac{-2.0000 - j0.5164}{s + 0.1 + j0.3873} + \frac{4}{s}}_{Y_m(s)}$$

$$\begin{aligned} y(t) = [&(-1.5 + j1.6783)e^{-0.1t+j0.3873t} + (-1.5 - j1.6783)e^{-0.1t-j0.3873t} + \\ &+(-2.0 + j0.5164)e^{-0.1t+j0.3873t} + (-2.0 - j0.5164)e^{-0.1t-j0.3873t} - \\ &+4]\mu(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t) = [&(-3.5 + j2.1947)e^{-0.1t+j0.3873t} + (-3.5 - j2.1947)e^{-0.1t-j0.3873t} - \\ &+4]\mu(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t) = {}& 4.5018e^{-0.1t}\cos(0.3873t + 2.3002) + \\ &+ 4.1313e^{-0.1t}\cos(0.3873t + 2.8889) + 4, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

$$y(t) = 8.2624e^{-0.1t}\cos(0.3873t + 2.5815) + 4, \quad t \geq 0$$

Primjena $\mathcal{L}$–transformacije u analizi linearnih sustava

- primjenom $\mathcal{L}$–transformacije odrediti impulsni odziv sustava, $u(t) = \delta(t)$, opisanog diferencijalnom jednadžbom

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = u''(t) + u'(t) + u(t) \tag{3}$$

- $\mathcal{L}$–transformacija jednadžbe je, uz $y(0^-) = y'(0^-) = 0$,

$$s^2 Y(s) + 2sY(s) + Y(s) = s^2 U(s) + sU(s) + U(s)$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{s^2 + s + 1}{s^2 + 2s + 1}}_{H(s)} U(s)$$

- kako je $u(t) = \delta(t) \Rightarrow U(s) = 1$, pa je

$$Y(s) = H(s) = \frac{s^2 + s + 1}{s^2 + 2s + 1}$$

Primjena $\mathcal{L}$–transformacije u analizi linearnih sustava

- inverzna $\mathcal{L}$–transformacija je traženi impulsni odziv
- kako je $H(s)$ neprava razlomljena racionalna funkcija, dijeljenjem brojnika s nazivnikom, slijedi

$$H(s) = \frac{s^2 + s + 1}{s^2 + 2s + 1} = 1 - \frac{s}{s^2 + 2s + 1}$$

- rastavom na parcijalne razlomke

$$\frac{s}{s^2 + 2s + 1} = \frac{s}{(s+1)^2} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} = \frac{As + A + B}{(s+1)^2}$$

- metodom neodređenih koeficijenata slijedi

$$\left.\begin{array}{lll} A & & = 1 \\ A & +B & = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A = 1, B = -1$$

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{1 - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2}\right\} = \delta(t) - e^{-t}\mu(t) + te^{-t}\mu(t)$$