

Stohastički procesi – zimski ispitni rok

15.02.2017.

1) (7b)

- a) Napišite definiciju funkcije izvodnice ψ_X slučajne varijable X koja poprima nenegativne cjelobrojne vrijednosti.
- b) Izvedite formulu za funkciju izvodnicu Poissonove slučajne varijable.
- c) Neka su $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ i $Y \sim \text{Poisson}(\mu)$ nezavisne slučajne varijable. Koristeći b) dio zadatka, odredite razdiobu slučajne varijable $X + Y$, a zatim dokažite da vrijedi

$$E(X|X + Y) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} (X + Y)$$

2) (5b)

- a) Definirajte povratni događaj.
- b) Definirajte postojani i prolazni događaj.
- c) Iskažite teorem o karakterizaciji postojanih događaja.
- d) Izvlačimo kuglice iz kutije u kojoj se nalazi 7 crnih i 3 bijele kuglice, bez vraćanja. Je li događaj $A = \text{„Izvučena je crna kuglica“}$ povratan događaj? Kakav je događaj A u slučaju kada vraćamo kuglicu nakon izvlačenja?

3) (8b)

- a) Definirajte Markovljev lanac i stacionarne vjerojatnosti.
- b) Ako matrica prijelaznih vjerojatnosti $\Pi = (p_{ij})$ konačnog neperiodičkog Markovljevog lanca s jednim bitnim skupom zadovoljava uvjet $\sum_{i=1}^m p_{ij} = 1, \forall j$, dokažite da za stacionarne vjerojatnosti vrijedi $\pi_j = \frac{1}{m}$.
- c) Zadan je niz $\{Y_n\}$ nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli sa skupom stanja $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ i razdiobom

$$P(Y_1 = i) = p_i, 0 < p_i < 1$$

Neka je:

$$X_0 = 0, X_{n+1} = X_n + Y_{n+1} \pmod{5}$$

Dokažite da je $\{X_n\}$ Markovljev lanac, odredite matricu prijelaznih vjerojatnosti i odredite stacionarne vjerojatnosti.

4) (10b)

Neka su A i B slučajne varijable korelirane s koeficijentom r .

- a) Odredite korelacijsku i kovarijacijsku funkciju slučajnog procesa

$$X_t = A + Bt$$

- b) Ako je $A \sim \text{Normal}(1, 4)$ i $B \sim \text{Normal}(2, 9)$ te $r = \frac{1}{2}$, odredite kovarijacijsku funkciju procesa X .
- c) Je li taj proces stacionaran u širem smislu?

5) (10b)

- a) Definirajte spektralnu gustoću snage procesa i prosječnu snagu procesa.
- b) Definirajte vremensko usrednjenje funkcije f .
- c) Dokažite svojstvo parnosti spektralne gustoće snage za realne procese.
- d) Za centrirani stacionarni proces $X(t)$ sa spektralnom gustoćom

$$S_{xx}(u) = (\delta(u - 1) + \delta(u + 1)) \cos(u)$$

odredite disperziju $D(t)$.