3. ANALIZA PRIJELAZNIH POJAVA

- opis stanja sustava postiže se uz pomoć VARIJABLI STANJA
- ideja: u svakom trenutku moguće je dobiti opis stanja sustava
- varijable stanja opisuju količinu energije pohranjene u sustavu
- promjene varijabli stanja opisane su sustavom diferencijalnih jednadžbi

- HOMOGENI SUSTAV: $\dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x}$
  - $\underline{A}$ matrica sustava

- HETEROGENI SUSTAV: $\dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}(t)$

- T period integracije, obično konstantan

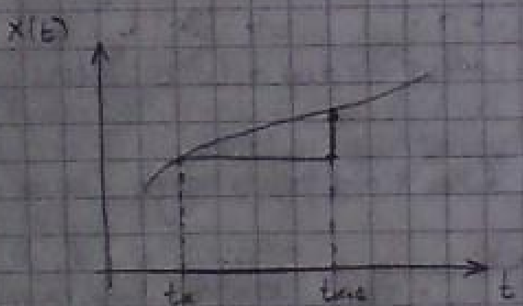
3.1. EULEROVI POSTUPCI

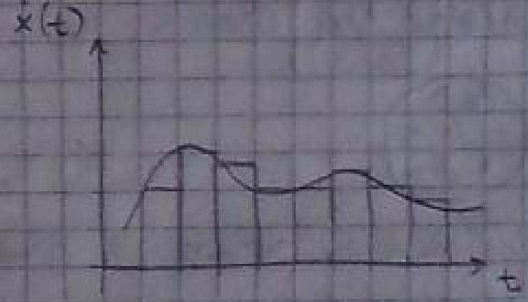
3.1.1. IZRAVNI EULEROV POSTUPAK

ZADATAK

x_0, t_0
$\dot{x}(t) = f(x,t)$

$x(t) = ?$





→ aproksimacija (pogreška dx)

$$x_{k+1} = x_k + T\cdot\dot{x}_k = x_k + T\cdot f(x_k, t_k)$$

- GLOBALNA POGREŠKA: $O(T^Q)$ $\qquad$ / $Q = 1$ /
- LOKALNA POGREŠKA: $O(T^{Q+1})$ ... za 1 stupanj reda!

- Eulerov postupak je postupak Q-tog reda (red ovisan o bazi)

- nestabilnost je ako pogreška raste: $|\delta_{k+1}| > |\delta_k|$
- ispitivanje stabilnosti: $\dot{x} = \lambda x \longrightarrow$ uvrštavamo u formulu postupka

- uvjet stabilnosti Eulerovog postupka : $|1+\lambda T| \leq 1$

ZADATAK

Tijelo usporava zbog trenja u bestežinskom prostoru kretanjem kroz viskoznu tekućinu ($F_{TR} \sim v$).

$$\left.\begin{aligned} ma &= -F_{TR} \\ mv' &= -kv \end{aligned}\right\}$$ brzina je jedina varijabla stanja

$$v' = -\frac{kv}{m}$$

NPR. $v' = -0.1v$

$\dot{x} = -0.1x$

ANALITIČKI

$$\frac{dx}{dt} = -0.1x$$

$$\frac{dx}{x} = -0.1dt \longrightarrow \ln x = -0.1t$$

$$x = e^{-0.1t} \Rightarrow x = x_0 e^{-0.1(t-t_0)}$$

EULEROV POSTUPAK

$$\dot{x} = -0.1x = f(x) \longrightarrow \lambda = -0.1 \quad (\text{ono što množi } x)$$

$$x_{k+1} = x_k + T \cdot (-0.1x_k)$$

- STABILNOST : $|1+\lambda T| \leq 1 \longrightarrow \lambda = \sigma + j\omega$

$$T \leq -\frac{2\sigma}{|\lambda|} = 20$$

- max. korak integracije za Eulerov postupak $T \leq 20$

- POČETNI UVJETI $x_0 = 1$

x_k	T = 1	T = 15	T = 25	T = 20
x_0	1	1	1	1
x_1	0.9	-0.5	-1.5	-1
x_2	0.81	0.25	2.25	1
x_3	0.729	-0.125	-3.375	-1
x_4	0.6561	0.0625	5.0625	1

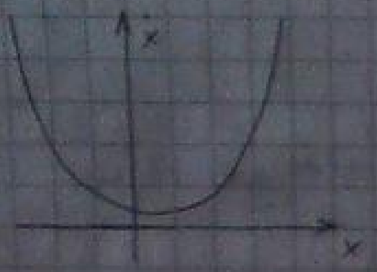
T = 15 ... preciznost lošija ali stabilno!

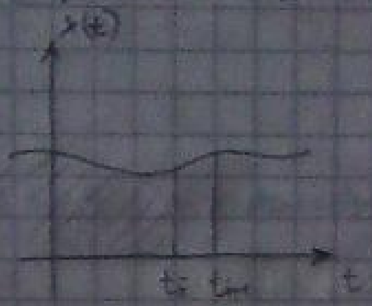
T = 25 ... nestabilno, greška se povećava

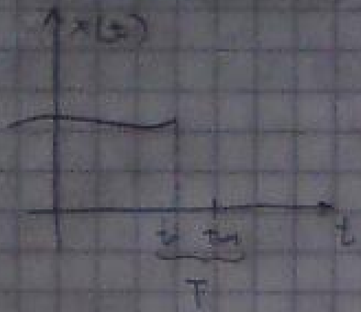
T = 20 ... rubni uvjet, stabilno

$$x_{k+1} = x_k + T(-0.1 + x_k)$$

$\dot{x} = f(x, t)$







ZADATAK

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -5 \end{bmatrix} \underline{x}$$

$$\underline{x}(t=0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Odrediti max dopušteni T integracije i vrijednost varijable stanja u vrijednosti $t = 0.8$ po Eulerovu postupku.

$\dot{x}_1 = x_2$

$\dot{x}_2 = -10x_1 - 5x_2$

$\longrightarrow |1 + \lambda T| \leq 1$ ... uvjet stabilnosti

$\lambda = \sigma + j\omega$

$\longrightarrow T \leq -\dfrac{2\sigma}{|\lambda|^2}$

$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 10 & \lambda + 5 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+5) - 10(-1) = \lambda^2 + 5\lambda + 10 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\dfrac{5}{2} \pm j\dfrac{\sqrt{15}}{2}$

$\Rightarrow |\lambda|^2 = \dfrac{25}{4} + \dfrac{15}{4} = 10$

$T \leq -\dfrac{2\sigma}{|\lambda|^2} = +\dfrac{2 \cdot 5/2}{10} = 0.5$

$T = 0.4$ ... najbliže dolazimo do rješenja

$x_{k+1} = x_k + T\dot{x}_k$ ... EULER

$x_{1,k+1} = x_{1,k} + T \cdot (x_{2,k})$ ... Eulerova aproksimacijska formula

$x_{2,k+1} = x_{2,k} + T\,(-10x_{1,k} - 5x_{2,k})$

$\longrightarrow t = 0.4$

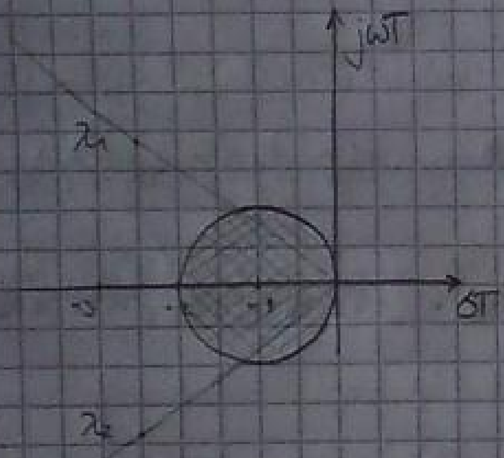
$x_{1,1} = 1 + 0.4 \cdot 0 = 1$
$x_{2,1} = 0 + 0.4\,(-10 \cdot 1 - 5 \cdot 0) = 0.4\,(-10 + 0) = -4$

$\longrightarrow t = 0.8$

$$\left.\begin{aligned} x_{1,2} &= 1 + 0.4\,(-4) = -0.6 \\ x_{2,2} &= -4 + 0.4\,(-10 \cdot 1 + 5 \cdot 4) = -4 + 0.4 \cdot 10 = 0 \end{aligned}\right\} x(t=0.8) = \begin{bmatrix} -0.6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dopušteni korak integracije mora zadovoljavati sve svojstvene vrijednosti sustava!

- ako je zadan linearni sustav ($\underline{\dot{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{t}$), kada izaberemo valjan T, sustav će uvijek biti stabilan
- kod nelinearnih sustava svojstvene vrijednosti se mijenjaju i uvjete stabilnosti treba iznova provjeravati
- uz to, potrebno je računati Jakobijevu maticu J



- kada se λ-e pomnože s periodom integracije, vrijednosti moraju upasti u stabilno područje
- množenje λ s realnim brojem je pomicanje po pravcu - spojnici točke s ishodištem

3.1.2. OBRNUTI EULEROV POSTUPAK

jednaka pretpostavka da se derivacija neće mijenjati
pravišom, za razliku od unaprijednog, aproksimiramo posljednjom vrijednošću

ne može se direktno u jednom koraku izraziti ono što znamo ⟶ nepoznanice s obje strane
⟶ IMPLICITNI POSTUPCI (lako za riješiti ako je sustav linearan, inače se koriste složeni iteracijski postupci)

$\dot{x}_k \longrightarrow \lambda x_k$

$\dot{x}_{k+1} \longrightarrow \lambda x_{k+1}$

3.1.3 TRAPEZNI POSTUPAK

- aproksimacija linearnom funkcijom - trapezom
- trapezni postupak je postupak 2. reda ⟶ precizniji od izravnog i obrnutog Eulerovog postupka (1. reda)
- implicitni postupak

3.1.4. HEUNOV POSTUPAK

- modifikacija trapeznog postupka ⟶ pretvaramo ga u eksplicitni postupak

$x_{k+1} = x_k + \frac{T}{2}(\dot{x}_k + \dot{x}_{k+1})$

- pomoću Eulerovog postupka se procjeni varijabla stanja u budućnosti

$\dot{x} = \lambda x$

$\overline{x}_{k+1} = x_k + T(\lambda x_k)$ ... procjena

$x_{k+1} = x_k + \frac{T}{2}\left[\dot{x}_k + \dot{\overline{x}}_{k+1}\right]$

$\dot{\overline{x}}_{k+1} \Rightarrow \lambda \overline{x}_{k+1} = \lambda(x_k + T\lambda x_k)$

3.1.5. SAŽETAK

$\dot{x} = f(x,t)$

- EULER

$\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k + T\dot{\underline{x}}_k$

$|1+\lambda T| \leq 1 \rightarrow T \leq \frac{-2\sigma}{|\lambda|^2}$

- OBRNUTI EULER

$\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k + T\dot{\underline{x}}_{k+1}$

$|1-\lambda T| \geq 1 \rightarrow T \geq \frac{2\sigma}{|\lambda|^2}$

- TRAPEZNI

$x_{k+1} = x_k + \frac{T}{2}\left[\dot{x}_k + T\dot{x}_{k+1}\right]$

$\sigma \leq 0$

- HEUNOV

$\hat{\underline{x}}_{k+1} = \underline{x}_k + T\dot{\underline{x}}_k$

$x_{k+1} = x_k + \frac{T}{2}\left[f(x_k,t) + f(\hat{x}_{k+1},t)\right.$

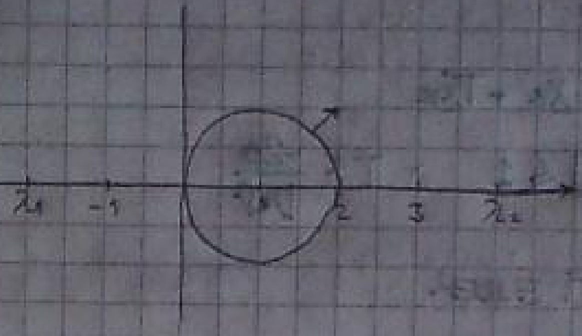
$\lambda T + \frac{(\lambda T)^2}{2} \leq 0$

ZADATAK

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \underline{x}$$

Predložite postupak num. integracije i definirajte dopuštene vrijednosti perioda integracije

$|\lambda E - A| = \ldots \rightarrow \lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 4$



$\lambda_1: T \geqslant -1$

$\lambda_2: T \geqslant 0.5$

$\Big\rangle\ T \in [0.5, \infty\rangle$

- EULER: NE
- TRAPEZ: NE
- HEUN: NE
- OBRNUTI EULER: DA!

3.2. RUNGE - KUTTA POSTUPCI

- "default" postupak
- broj članova označava red postupka (razvoj u Taylorov red)
- derivacije (višeg stupnja) se određuju analitički
- ne treba znati konkretne formule, već karakteristike postupaka
- najčešće korišteni Runge-Kutta postupak je 4. reda

ZADATAK

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -200 & -102 \end{bmatrix} \underline{x}$$ obrnuti Euler

$$\underline{x}(t=0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$x(t=0.02)$ uz $T = 0.01$

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k + T\dot{\underline{x}}_{k+1}$$

$$x_{1,k+1} = x_{1,k} + T \cdot \left(0 \cdot x_{1,k+1} + 1 \cdot x_{2,k+1}\right)$$

$$x_{2,k+1} = x_{2,k} + T \cdot \left(-200 \cdot x_{1,k+1} - 102\, x_{2,k+1}\right)$$

1. u 2. $\Rightarrow$ $x_{2,k+1} = x_{2,k} + T \cdot (-200)(x_{1,k} + T x_{2,k+1}) - T \cdot 102 \cdot x_{2,k+1}$

$$\underline{x_{2,k+1}} = \frac{x_{2,k} - 200 T x_{1,k}}{1 + 200T^2 + 102T}$$

$\underline{x_{1,k+1}} = \ldots$

<u>t = 0.01</u>

$x_{2,1} = \frac{-2-2+1}{1+0.02+1.02} = -1.96078$

$x_{1,1} = 1 + 0.01(-1.96078) = 0.98039$

<u>t = 0.02</u>

$x_{2,2} = -1.92233$

$x_{1,2} = 0.96116$ //

x_1 se smanjuje, x_2 se povećava - titranje - <u>ok</u>!

ZADATAK

$\underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -200 & -102 \end{bmatrix} \underline{x}$

$x(t=0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

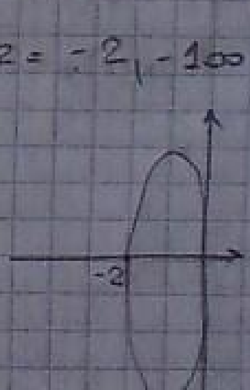
$x(t=0.02)$ uz $T = 0.01$

$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 200 & \lambda+102 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 102\lambda + 200 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -2, -100$

- uvjet (Heun) $\left| 1 + \lambda T + \frac{(\lambda T)^2}{2} \right| \leq 1$

$\lambda = -2 \rightarrow 0.9802 \leq 1$ ✓

$\lambda = -100 \rightarrow 0.5 \leq 1$ ✓



$t = 0.01$

$\hat{x}_{1,1} = x_{1,0} + T x_{2,0} = 0.98$

$\hat{x}_{2,1} = x_{2,0} + T(-200 x_{1,0} - 102 x_{2,0}) = -1.96$

$$x_{1,1} = x_{1,0} + \frac{T}{2}\left[0x_{1,0} + 1x_{2,0} + 0\hat{x}_{1,1} + 1\cdot\hat{x}_{2,1}\right] = 0.9802$$

$$x_{2,1} = x_{2,0} + \frac{T}{2}\left[\underbrace{-200x_{1,0} - 102x_{2,0}}_{\dot{x}_{2,0}} \underbrace{-200\hat{x}_{1,1} - 102\hat{x}_{2,1}}_{\dot{\hat{x}}_{2,1}}\right] = -1.9404$$

$t = 0.02$

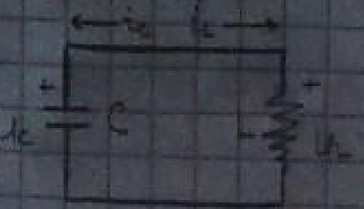
$$\hat{x}_{1,2} = x_{1,1} + Tx_{2,1} = 0.96079$$

$$\hat{x}_{2,2} = x_{2,1} + T(-200x_{1,1} - 102x_{2,1}) = -1.9216$$

$$x_{1,2} = x_{1,1} + \frac{T}{2}\left[x_{2,1} + \hat{x}_{2,2}\right] = 0.96089$$

$$x_{2,2} = x_{2,1} + \frac{T}{2}\left[\ \dots\ \right] = -1.9118$$

ZADATAK



$L = 0.1H$
$C = 1\mu F$ } Harmonički oscilator

Odrediti sustav jednadžbi za zadanu mrežu. Provjeriti može li se rješavati Eulerom; tj. predložiti odgovarajući postupak rješavanja i korak integracije

$i_C = -i_L$ 1. KIRCHOFFOV ZAKON
$u_C = u_L$ 2. KIRCHOFFOV ZAKON

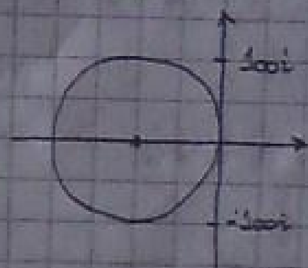
$$\boxed{\begin{aligned} i_C &= C\frac{du}{dt} = Cu' \\ u_L &= L\frac{di}{dt} = Li' \end{aligned}}$$

$Cu' = -i_L$
$u_C = Li_L'$ } $u_C = u$, $i_L = i$

$$\boxed{\begin{aligned} i' &= \frac{1}{L}u \\ u' &= \frac{-1}{C}i \end{aligned}}$$ → SUSTAV

$$\begin{bmatrix} i' \\ u' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/L \\ -1/C & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ -1000 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ u \end{bmatrix}$$

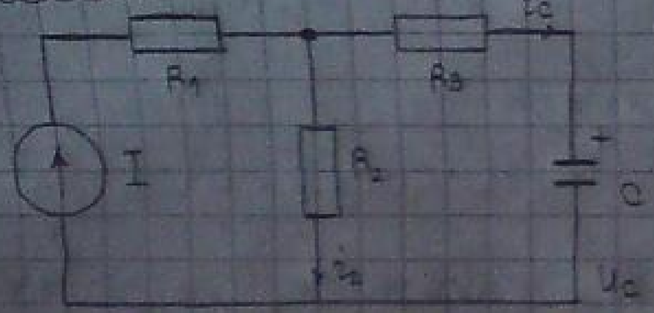
$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -10 \\ 1000 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 10000 = 0 \rightarrow \lambda = \pm 100i$$



→ EULER: NE! morali bi množiti s 0

- OBRNUTI EULER
- TRAPEZ $T \in [0, \infty)$

ZADATAK



$R_1 = R_2 = 100\,\Omega$
$R_3 = 50\,\Omega$
$C = 100\,\mu F$
$I = 1\,mA$

Odrediti odgovarajući postupak i provesti 2 iteracije uz $T = 0.01$. Početne vrijednosti varijabli stanja su 0.

$I = i_C + i_2$ — 1. KIRCHOFFOV ZAKON

$i_2 R_2 = i_C R_3 + u_C$ — 2. KIRCHOFFOV ZAKON

$(I - i_C) R_2 = i_C R_3 + u_C \quad / \; i_C = C u_C'$

$I R_2 - R_2 C u_C' = R_3 C u_C' + u_C \quad / \; u_C = u$

$$u' = \underbrace{\frac{1}{C(-R_2 - R_3)}}_{\lambda} u - \underbrace{\frac{I R_2}{C(-R_2 - R_3)}}_{\text{pobuda (vremenski neovisna)}}$$

$\Rightarrow f(u,t) = \frac{-1}{0.015} u + 6.6$

- EULER: $T \leq \frac{2\delta}{|\lambda|^2} = 0.03 = T_{MAX}$

$t = 0.01$

$u_1 = u_0 + T f(u_0, t_0) = 0.02\ V$

$u_2 = u_1 + T f(u_1, t_1) = 0.08\ V$

ZADATAK

$$m_1 = x_k + Tf(x_k, t_k)$$

$$m_2 = \dot{x}_k + Tf(x_{k+1}, t_{k+1})$$

$$x_{k+1} = x_k + \frac{T}{2}\left[f(m_1, t_k) + f(m_2, t_{k+1})\right]$$

Definiran je proizvoljan postupak numeričke integracije. Uz pomoć ispitne jednadžbe odredite uvjet stabilnosti postupka.

Ako se postupkom rješava sustav $\dot{x} = -0.1x$, hoće li biti stabilan uz korak $T = 1$

→ ISPITNA JEDNADŽBA: $\dot{x} = \lambda x$

$$f(x_i, t_i) \rightarrow \lambda x_i$$

$$m_1 = x_k + T\lambda x_k$$

$$m_2 = \dot{x}_k + T\lambda x_{k+1}$$

$$x_{k+1} = x_k + \frac{T}{2}\left[\lambda(x_k + T\lambda x_k) + \lambda(\dot{x}_k + T\lambda x_{k+1})\right]$$

... (sređivanje)

$$x_{k+1}\left(1 - \frac{(\lambda T)^2}{2}\right) = x_k\left(1 + \lambda T + \frac{(\lambda T)^2}{2}\right)$$

$$\delta_{k+1} \text{ u } \delta_k$$

$$|\delta_{k+1}| \leq |\delta_k|$$

$$\left|\frac{1 + \lambda T + \frac{(\lambda T)^2}{2}}{1 - \frac{(\lambda T)^2}{2}}\right| \leq 1 \qquad \begin{array}{l}\lambda = -0.1\\ T = 1\end{array}$$

$$\left|\frac{1 - 0.1 + \frac{0.01}{2}}{1 - \frac{0.01}{2}}\right| = 0.909 \leq 1 \Rightarrow \text{ sustav je stabilan}$$

3.3 LINEARNI VIŠEKORAČNI POSTUPCI

- PREDIKTORSKO - KOLEKTORSKI POSTUPCI : procjena $x_{k+1}^{(0)}$ eksplicitnim postupkom - PREDIKTOROM ; zatim implicitna iteracija KOREKTOR

3.3.1 LAGRANGEOVA INTERPOLACIJA

- za točno jednu zadanu vrijednost funkcija će imati vrijednost različitu od 0

3.3.2 ADAMS - BASHFORTHOVI POSTUPCI

- eksplicitni postupci temeljeni na Lagrangeovoj interpolaciji
- zbog loše stabilnosti ne koriste se sami, već kao prediktori u prediktorsko - kolektorskom paru

3.3.3 ADAMS - MOULTONOVI POSTUPCI

- koristi točku u budućnosti za izgradnju postupka → implicitni postupak

3.3.4. NORDSIECKOV OBLIK LINEARNIH VIŠEKORAČNIH POSTUPAKA

- Adams - Bashforthov prediktor $(n-1)$ reda
- Adams - Moultonov korektor n reda

} općenito

- PAROVI : • prediktor 2. i korektor 3. reda
  • prediktor 3. i korektor 4. reda

4. POGREŠKE U POSTUPCIMA ANALIZE

4.1. MOGUĆI UZROCI POGREŠAKA

1. **MATEMATIČKI MODEL** ne opisuje vjerno modeliranu pojavu i/ili ulazni podaci nisu točni

2. **METODA RJEŠAVANJA** nije točna, zasniva se na aproksimacijama

3. **POGREŠKE ZAOKRUŽIVANJA** zbog ograničenog broja znamenaka pri zapisivanju broja i računanju s brojevima

4.2. PRIKAZ BROJEVA S POMIČNOM TOČKOM

- PARAMETRI:
  - baza β
  - preciznost p

4.2.1 IEEE STANDARD 754

(metoda iz skripte)

z	e	f

z ... PREDZNAK $\rightarrow$ 1 bit
e ... POMAKNUTI EKSPONENT $\rightarrow$ k bitova
f ... FRAKCIJA (MANTISA) $\rightarrow$ p bitova

- EKSPONENT: $(e) - \underbrace{(2^{k-1}-1)}_{\text{POMAK} = a}$ ... vrijedi za bilokoju bazu (umjesto $2 \rightarrow \beta$)

- SIGNIFIKANT (ono što se dekodira): 1.f ili 0.f

• TABLICA DEKODIRANJA •

e	f	VRIJEDNOST	
0	0	$(-1)^z \cdot 0 = \pm 0$	
0	$1 \le f \le 2^p-1$	$(-1)^z \cdot 2^{1-a} \cdot 0.f$	DENORMIRANI SIGNIFIKAND, $a = 2^{k-1}-1$
$1 \le e \le 2^k-2$	$0 \le f \le 2^p-1$	$(-1)^z \cdot 2^{e-a} \cdot 1.f$	NORMALNO PODRUČJE
2^k-1	0	$(-1)^z \cdot \infty = \pm \infty$	
2^k-1	$f \neq 0$	NaN	

- vidi grafikon u skripti (primjer)

- EKSPONENT definira OPSEG
- FRAKCIJA definira PRECIZNOST

- u svakom području eksponenta može se prikazati uvijek jednak broj vrijednosti

4.2.2 IZRAČUN POGREŠKE

- x ... početna vrijednost koju želimo zapisati
- $rd(x)$ ... zapisana vrijednost u računalu

• APSOLUTNA POGREŠKA $|rd(x) - x|$

• MAX. APSOLUTNA POGREŠKA: 2^{a-p-1} (ULP)

- postiže se za max vrijednost eksponenta
- PROVJERA: uzmemo 2 susjedna broja u max. području i njihov razmak podijelimo sa 2

• RELATIVNA POGREŠKA: $\left|\frac{rd(x) - x}{x}\right|$ [%]

• MAX. RELATIVNA POGREŠKA: $\varepsilon = 2^{-p}$ (EPS), strojni epsilon/preciznost

→ kod ISPRAVNO ZAOKRUŽENIH brojeva: $|rd(x) - x| < 0.5$ ulp

4.3. ARITMETIKA BROJEVA S POMIČNOM TOČKOM

- operacije $+, -, *, /$ ne vrijede potpuno

ZADATAK

Po uzoru na IEEE 754 standard definirajte paket s 1 bitom za predznak, 4 bita za pomaknuti eksponent i 4 bita za frakciju. Ako je broj zapisan kao 1 0 0 0 0 1 1 0 0, odredite mu vrijednost u R.

$\underbrace{1}_{z} | \underbrace{0\,0\,0\,0}_{e} | \underbrace{1\,1\,0\,0}_{f}$ $a = 2^{4-1} - 1 = 7$

- $e = 0$ => područje denormaliziranog signifikanda

$VR = -2^{1-7} \cdot 0{,}1100_2 = -2^{-6} \cdot 0.75 = -0.01171875$

ZADATAK

$k = 4$
$p = 3$

$a = 3$, $e = [1, \dots, 6] \Rightarrow eks = [-2, 3]$

$e = 0 \rightarrow eks = -2$

$0.25 \equiv 2^{-2} \cdot 1.000$
$0.2 \equiv 2^{-2} \cdot 0.110 = 0.1875$

$\longrightarrow$ ako dobijemo konkretnu vrijednost za reprezentaciju, krećemo od područja denormaliziranog signifikanda

ZADATAK

Definiran je zapis u području [-100, 100]. Odredite min. br. bitova za e i f ako MAP (ULP) u definiranom području nije bit 0.5
Predstavite brojeve: -99, 4.5 u tom zapisu, provedite operaciju zbrajanja i dekodirajte rezultat.

$3\,bit \longrightarrow a = 3 \longrightarrow max.\ e = 2^3 = 8$ (nedovoljno, dođemo do 16)
$4\,bit \longrightarrow a = 7 \longrightarrow max.\ e = 2^7 = 128$ ✓

$\longrightarrow$ ako $MAP \leq 0.5$ tada razmak dvije max. vrijednosti može biti najviše 1 (u području [-100, 100])

$100 = 2^6 \cdot 1.1001_2$
$99 = 2^6 \cdot 1.100011_2$ $\Big\rangle\ p = 6$

$-99 = -2^6 \cdot 1.100011 \equiv 1 \mid 1\,1\,0\,1 \mid 1\,0\,0\,0\,1\,1$
$4.5 = 2^2 \cdot 1.001000 \equiv 0 \mid 1\,0\,0\,1 \mid 0\,0\,1\,0\,0\,0$

$99 = 2^6 \cdot 1.1\,0\,0\,0\,1\,1$
$-4.5 = -2^6 \cdot 0.0\,0\,0\,1\,0\,0 \mid 1\,0\,0\,0$ odbacuje se $\rightarrow$ pogreška računa

$- 2^6 \cdot 1.0\,1\,1\,1\,1\,1\,1 = -95$ ✓

ZADATAK

Definiraj e prikaz u kojem vrijednosti 24.7 i 22.25 možemo predsta
uz grešku ne veću od 0.25
Predstavite brojeve -15.5 i 8.75 u tom zapisu, provedite operaciju zbrajanja
i dekodirajte rezultat

→ 4 bit = 2^4 eksponent
→ pomak 7
→ frakcija 5

$22.25 = 10110.01$ → $22.25 = 2^4 \cdot 1.011$
$24.7 = 11000.1010\ldots$ → $24.7 = 2^4 \cdot 1.10001$

$-15.5 = -2^3 \cdot 1.1111110 = 1|1010|1111110$
$8.75 = +2^3 \cdot 1.0001110 = 0|1010|0001110$

... 6.75 (dobro, slučajno, nema greške)

→ za prvu: umjesto 8.75 uzeti 0.75

DZ $k=8$
$p=4$

a) $(4.75 + 0.25) + 10$

b) $4.75 + (0.25 + 10)$

TEOREM 2.1. → pogledati dokaz teorema (2 str. niže)

TEOREM 2.2. → ne treba dokaz

RASPROSTIRANJE POGREŠAKA → ne treba