1.3. HARMONIČKI OSCILATOR: JEDNADŽBA GIBANJA I POČETNI UVJETI

1.3.1. UVOD

PERIODIČNO GIBANJE je gibanje koje se ponavlja u jednakim vremenskim razmacima.

TITRANJE je posebna vrsta periodičnog gibanja kod kojeg se materijalna točka giba amo-tamo oko ravnotežnog položaja.

Materijalna točka nakon određenog vremena – PERIODA T – ponavlja cijelo gibanje. Period je trajanje jednog potpunog titraja i za to vrijeme materijalna točka 2 puta prođe kroz ravnotežni položaj.

FREKVENCIJA f je broj titraja u jedinici vremena: $f = 1/T$. Jedinica je Hz ili s^{-1}.

FAZA TITRANJA je trenutno stanje određenog titranja – položaj i brzina tijela u određenom vremenskom trenutku.

Svako titranje uzrokuje određena sila koja nastoji vratiti sustav u položaj ravnoteže.

JEDNOSTAVNO HARMONIČKO TITRANJE je ono kod kojeg je sila proporcionalna iznosu pomaka iz položaja ravnoteže, a suprotna njegovu smjeru.

PRIMJER: uteg obješen na vertikalnu oprugu – sustav opruga+masa.

SLIKA: UTEG NA OPRUZI – HENČ-BARTOLIĆ, KULIŠIĆ – SL. 1.1. STR.2

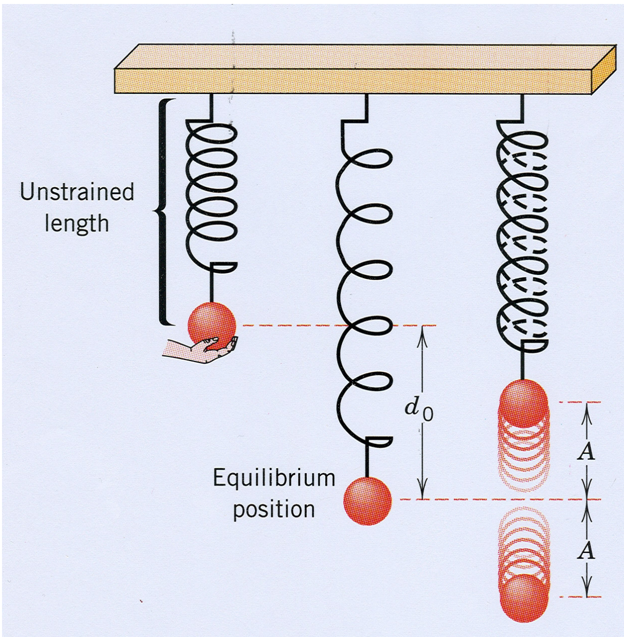
Uteg izvučemo iz ravnotežnog položaja i pustimo da titra – on se giba gore-dolje. Rezultantna sila, koja uzrokuje titranje sustava, je vektorski zbroj napetosti opruge i težine, a skalarno:

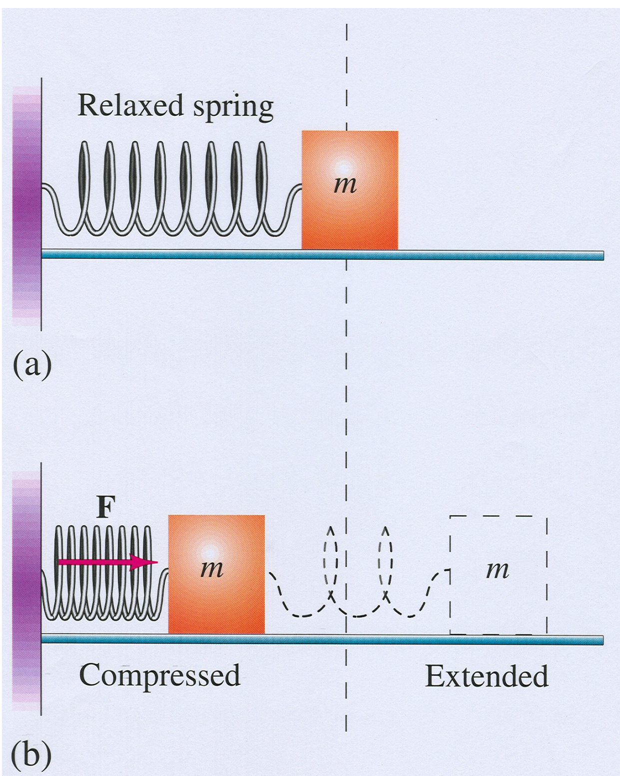
$$F = mg - k(l + s - l_0) = k(l - l_0) - k(l - l_0) - ks = -ks$$

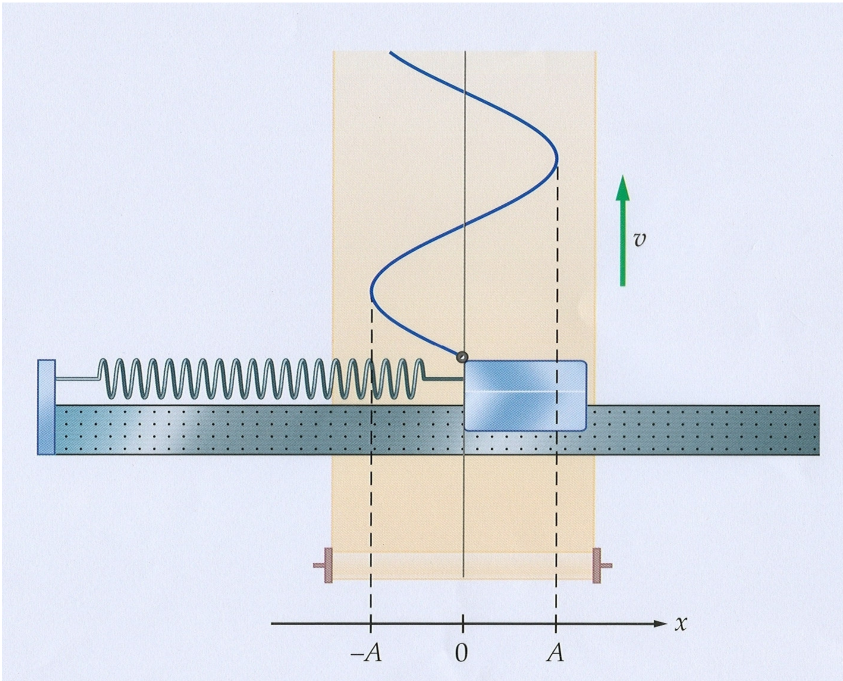
s – pomak iz položaja ravnoteže (elongacija)
k – konstanta opruge ili elastična konstanta (pozitivna veličina) – restitucijska kontanta

Elastična ili hamonička sila: $\vec{F} = -k\vec{s}$ (vektorski), proporcionalna je i suprotna po smjeru pomaku iz položaja ravnoteže s (predznak minus).

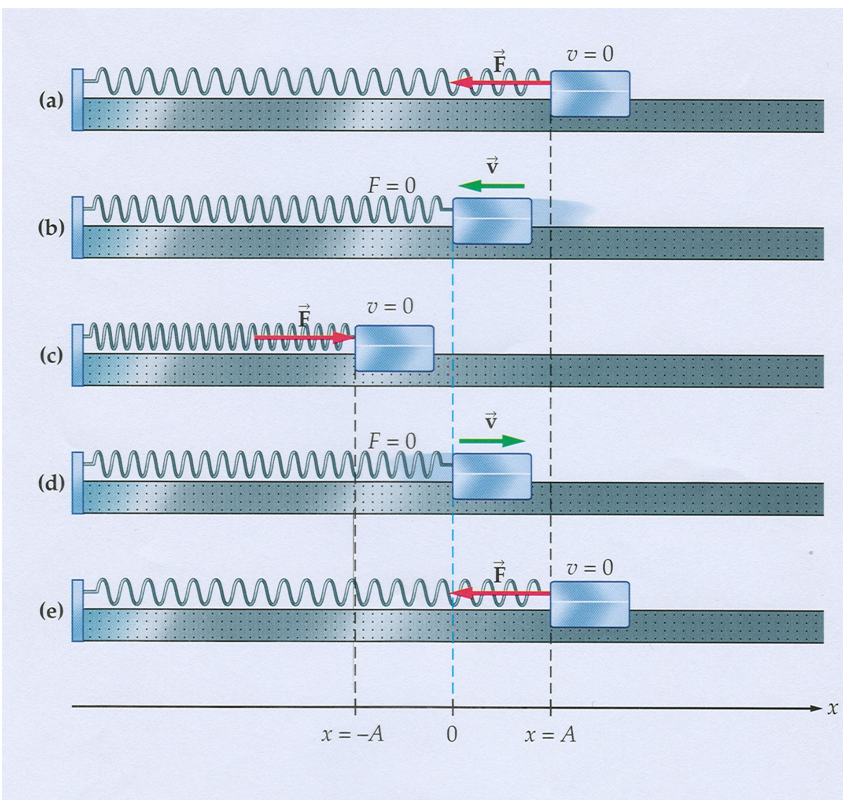
HARMONIČKI OSCILATOR je sustav koji titra zbog utjecaja harmoničke sile.


Unstrained length
d_0
Equilibrium position
A
A


Relaxed spring
m
(a)
F
m
m
Compressed
Extended
(b)



v
x
−A
0
A



(a)
F
v = 0
(b)
F = 0
v
(c)
F
v = 0
(d)
F = 0
v
(e)
F
v = 0
x
x = −A
0
x = A

1.3.2. JEDNADŽBA GIBANJA I RJEŠENJE

Pišemo jednadžbu gibanja (2. Newtonov zakon) za titranje harmoničkog oscilatora:

$$F = ma = m\frac{d^2 s}{dt^2} = -ks \, / : m$$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{k}{m}s = 0 \qquad (*)$$

To je homogena linearna diferencijalna jednadžba 2. reda.

Prema teoriji diferencijalnih jednadžbi postoje 2 linearno neovisna rješenja jednadžbe: $\sin \omega t$ i $\cos \omega t$.

Opće rješenje je linearna kombinacija tih dvaju neovisnih rješenja: $s(t) = a\sin \omega t + b\cos \omega t$

Zamijenimo li $a = A\cos \varphi_0$ i $b = A\sin \varphi_0$ pa rješenje poprima oblik:

$$s(t) = A\cos \varphi_0 \sin \omega t + A\sin \varphi_0 \cos \omega t$$

A i φ_0 su konstante koje ćemo odrediti kasnije.

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta$$

$$s(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$\frac{d}{dt}s(t) = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}s(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Sve to uvrstimo u (*):

$$-A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) + \frac{k}{m}A\sin(\omega t + \varphi_0) = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Jednadžba (*) ima rješenje u obliku sinusne (harmoničke) funkcije: $s(t) = A\sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi_0)$ (**)

Period T funkcije $s(t)$ je vrijeme u kojem se argument sinusa poveća za 2π :

$$\sqrt{\frac{k}{m}}(t+T)=\sqrt{\frac{k}{m}}t+2\pi$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Period T ne ovisi o amplitudi titranja (karakteristika svakog harmoničkog titranja).

Frekvencija titranja: $f = 1/T$

KRUŽNA FREKVENCIJA $\omega=2\pi/T=2\pi f\ \left[s^{-1}\right]$

U (**) konstanta A je AMPLITUDA – pomak u času kad se čestica zaustavi i promijeni smjer titranja.

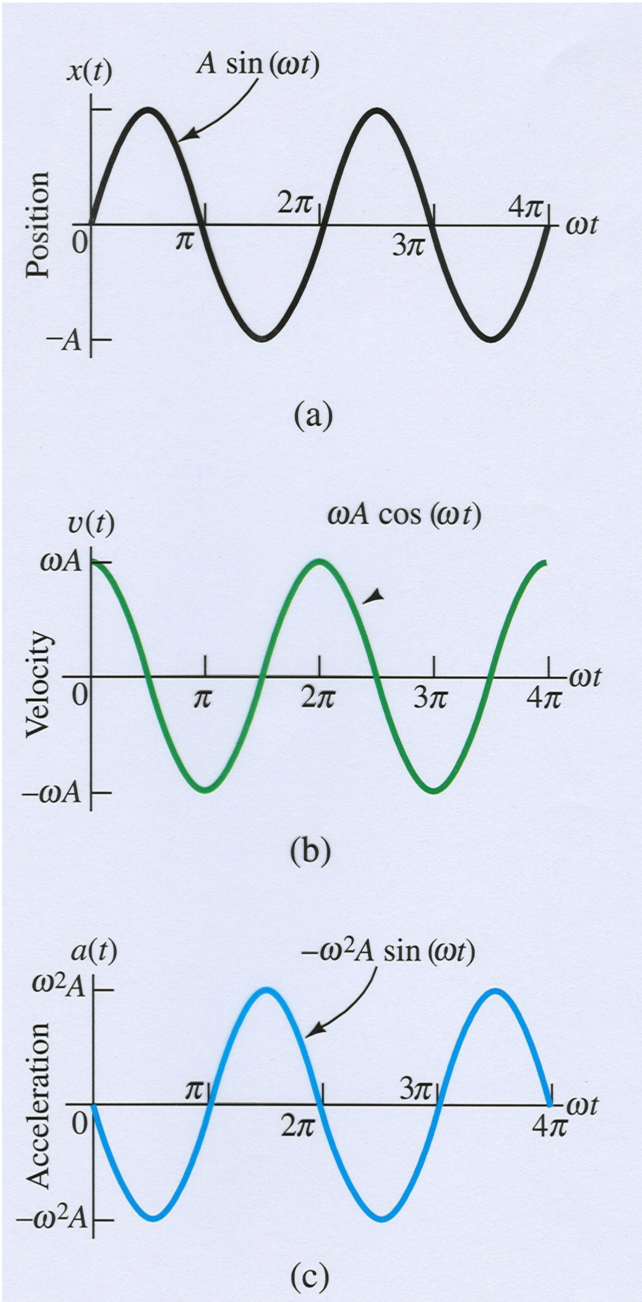
FAZA TITRANJA = $(\omega t+\varphi_0)$.

POČETNA FAZA u trenutku t = 0 je φ_0.

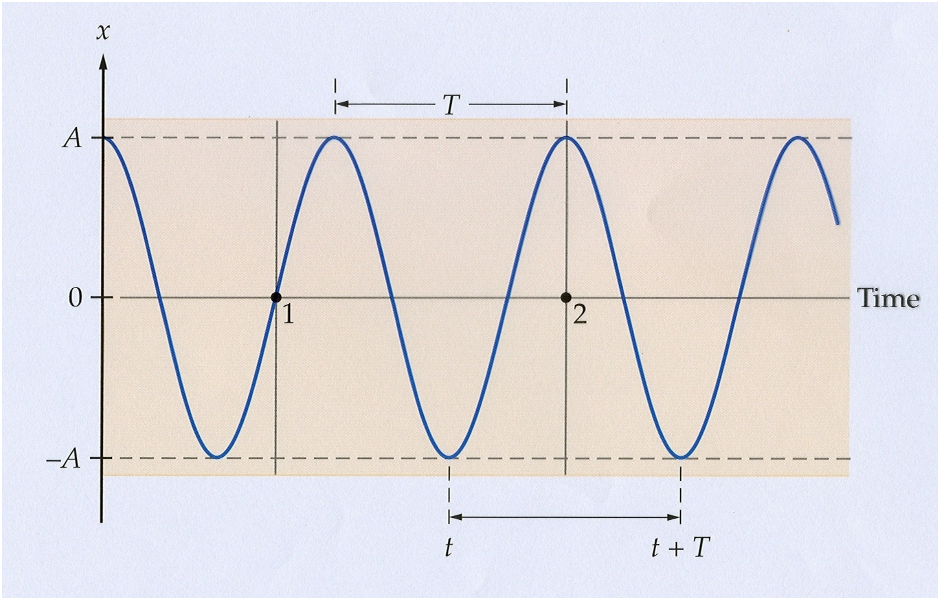
BRZINA tijela koje titra je prva derivacija elongacije po vremenu: $v=\frac{d}{dt}s(t)=A\omega\cos(\omega t+\varphi_0)$

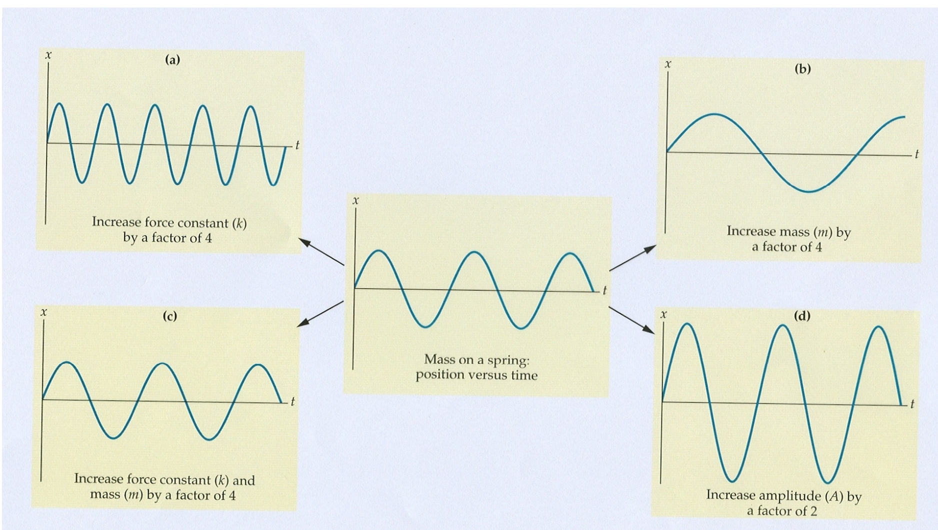
AKCELERACIJA tijela je druga derivacija elongacije po vremenu: $a=\frac{d^2}{dt^2}s(t)=-A\omega^2\sin(\omega t+\varphi_0)=-\omega^2 s(t)$

SLIKA: VREMENSKA OVISNOST ELONGACIJE, BRZINE I AKCELERACIJE PRI JEDNOSTAVNOM HARMONIČKOM TITRANJU – HENČ-BARTOLIĆ, KULIŠIĆ – SL. 1.12. STR. 16 (Početna faza = 0)



x(t)
A sin (ωt)
Position
0
π
2π
3π
4π
ωt
−A
(a)
v(t)
ωA cos (ωt)
ωA
Velocity
0
π
2π
3π
4π
ωt
−ωA
(b)
a(t)
−ω²A sin (ωt)
ω²A
Acceleration
0
π
2π
3π
4π
ωt
−ω²A
(c)


x
T
A
0
Time
1
2
–A
t
t + T


(a)
Increase force constant (k) by a factor of 4
(b)
Increase mass (m) by a factor of 4
Mass on a spring: position versus time
(c)
Increase force constant (k) and mass (m) by a factor of 4
(d)
Increase amplitude (A) by a factor of 2

1.3.3. POČETNI UVJETI

Točno rješenje jednadžbe (*) je određeno ako znamo 2 početna uvjeta: npr.elongaciju i brzinu u $t = 0$:

$$s(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0) \qquad s(t=0) = A\sin\varphi_0$$

$$v = \frac{d}{dt}s(t) = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0) \qquad v = \frac{d}{dt}s(t=0) = A\omega\cos\varphi_0$$

$$\frac{s(0)}{v(0)} = \frac{A\sin\varphi_0}{A\omega\cos\varphi_0} = \frac{1}{\omega}tg\varphi_0 \qquad \omega\frac{s(0)}{v(0)} = tg\varphi_0$$

$$s^2(0) + \frac{v^2(0)}{\omega^2} = A^2\sin^2\varphi_0 + A^2\cos^2\varphi_0 = A^2$$

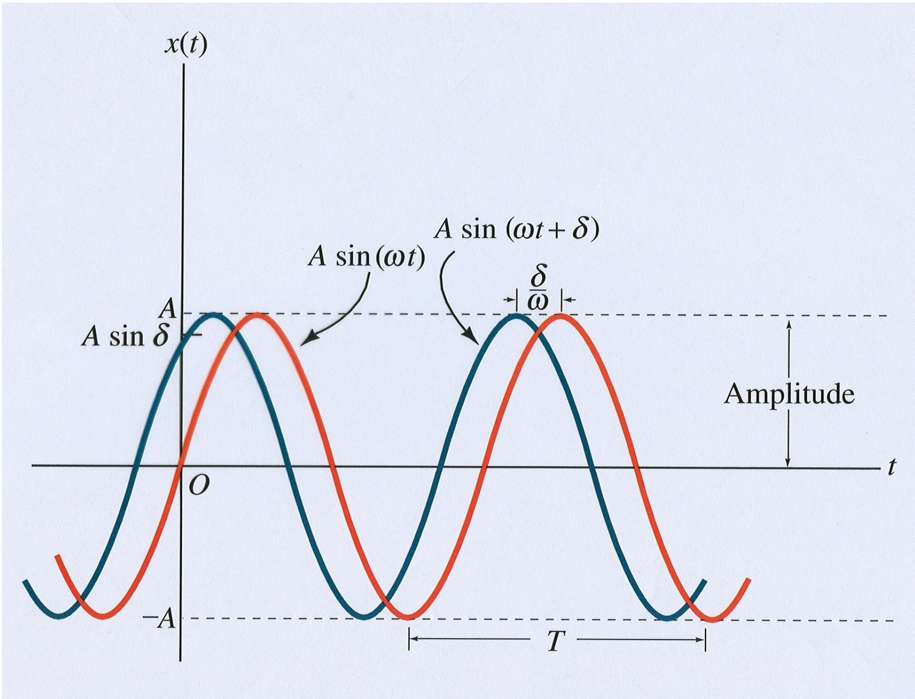
I amplitudu i početnu fazu možemo izraziti pomoću početnih uvjeta.

Npr. ako je u $t = 0$ tijelo u ravnotežnom položaju, onda je elongacija $s(t = 0) = s(0) = 0$ i amplituda $A = v(0)/\omega$.

Elongacija se mijenja kao: $s(t) = \dfrac{v(0)}{\omega}\sin\omega t$

Npr.ako je tijelo u početnom trenutku $t = 0$ maksimalno udaljeno od položaja ravnoteže, tj. $v(0) = 0$, onda je $A = s(0)$ i početna faza $\varphi_0 = \pi/2$.

Elongacija se mijenja kao: $s(t) = s(0)\sin(\omega t + \pi/2) = s(0)\cos\omega t$



x(t)
A sin (ωt + δ)
A sin(ωt)
δ
ω
A
A sin δ
Amplitude
t
O
−A
T

1.3.4. RJEŠENJE JEDNADŽBE HARMONIČKOG OSCILATORA PREKO KOMPLEKSNIH BROJEVA

Svaki kompleksni broj $z = x + iy$ se može prikazati u polarnim koordinatama:

$z = |z|e^{i\varphi}$

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\qquad \varphi = arctg\,\dfrac{y}{x}$

Eulerova relacija: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

Računamo s ekponencijalnom funkcijom umjesto s trigonometrijskom funkcijom.

Jednadžba jednostavnog harmoničkog oscilatora:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{k}{m}s = 0$$

Pretpostavljamo rješenje jednadžbe u obliku:

$$s(t) = Ae^{i(\omega t + \varphi)} = A(\cos(\omega t + \varphi) + i\sin(\omega t + \varphi))$$

Deriviramo:

$$\frac{d}{dt}s(t) = Ai\omega e^{i(\omega t + \varphi)}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}s(t) = Ai^2\omega^2 e^{i(\omega t + \varphi)} = -A\omega^2 e^{i(\omega t + \varphi)}$$

Uvrstimo u jednadžbu gibanja:

$$-mA\omega^2 e^{i(\omega t + \varphi)} + kAe^{i(\omega t + \varphi)} = 0$$

$$-m\omega^2 + k = 0 \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Zaključujemo da je i $s(t) = Ae^{i(\omega t + \varphi)}$ rješenje jednadžbe gibanja, ali uz kružnu frekvenciju $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

Ovo rješenje je kompleksna funkcija, a funkcija, koja opisuje titranje, je realna funkcija. Stoga rješenjem možemo smatrati i imaginarni i realni dio funkcije: $s(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ i $s(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$. A i φ se određuju iz početnih uvjeta.

1.4. ROTIRAJUĆI VEKTOR - FAZOR

Harmoničko titranje možemo povezati s jednolikim gibanjem po kružnici.

SLIKA: PRIKAZ HARMONIČKOG TITRANJA ROTIRAJUĆIM VEKTOROM – HENČ-BARTOLIĆ, KULIŠIĆ – SL. 1.21. STR. 34

Zamislimo da se točka P giba po kružnici polumjera A stalnom kutnom brzinom ω. Pri tom se projekcija točke P na os x, odnosno na os y giba po toj osi.

Ako je u t = 0 položaj točke P određen kutom φ_0, tada će u trenutku t polumjer $\overline{OP}$ zatvoriti kut $\varphi = \omega t + \varphi_0$ s osi x.

Gibanje projekcije P': $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$
Gibanje projekcije P'': $y = A\sin(\omega t + \varphi_0)$

Kad se neka točka giba jednoliko po kružnici, njezina projekcija na bilo koji promjer te kružnice harmonički titra.

Kutna brzina = kružnoj frekvenciji.
Ophodno vrijeme gibanja pokružnici = periodu titranja projekcije te točke.
Polumjer kružnice = amplitudi titranja.
Prijeđeni kut = fazi titranja.
Vektor $\overrightarrow{OP}$ spaja ishodište O s točkom P = ROTIRAJUĆI VEKTOR ili FAZOR.

Neka je rješenje jednadžbe gibanja harmoničkog oscilatora dano izrazom: $s(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$, gdje φ_0 određuje položaj tijela u početnom trenutku.

SLIKA: ROTIRAJUĆI VEKTOR -FAZOR – HORVAT – SL. 2.2. STR. 2-5

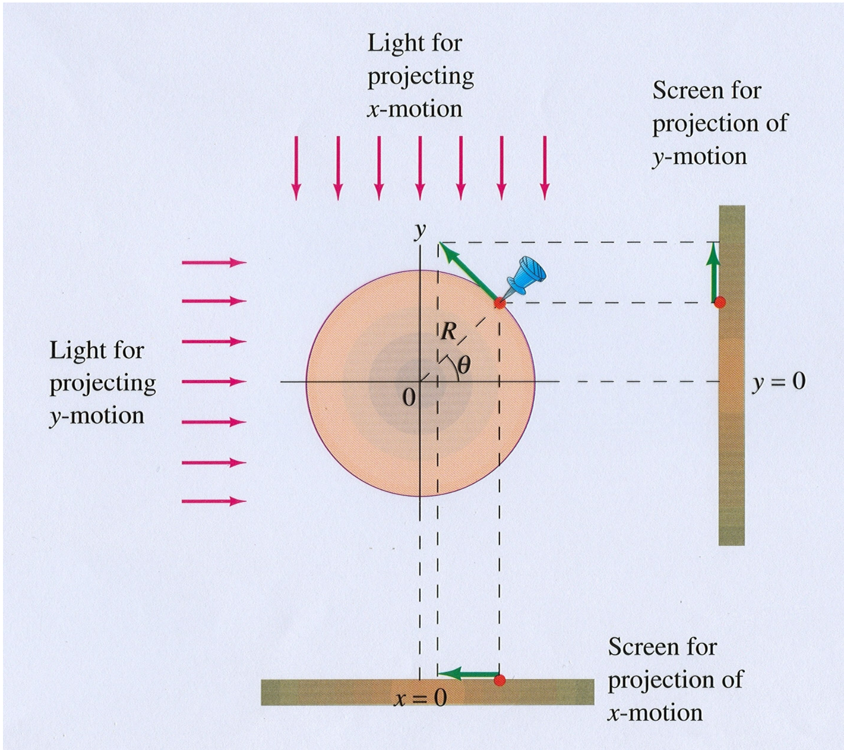
U t = 0 projekcija vektora $\vec{A}$ na horizontalnu os je s(0). Kako vrijeme odmiče, tako $\vec{A}$ rotira kutnom brzinom ω. Projekcija vektora $\vec{A}$ na os s izvodi harmoničko titranje između A i $-A$ – rotirajući vektor ili fazor.

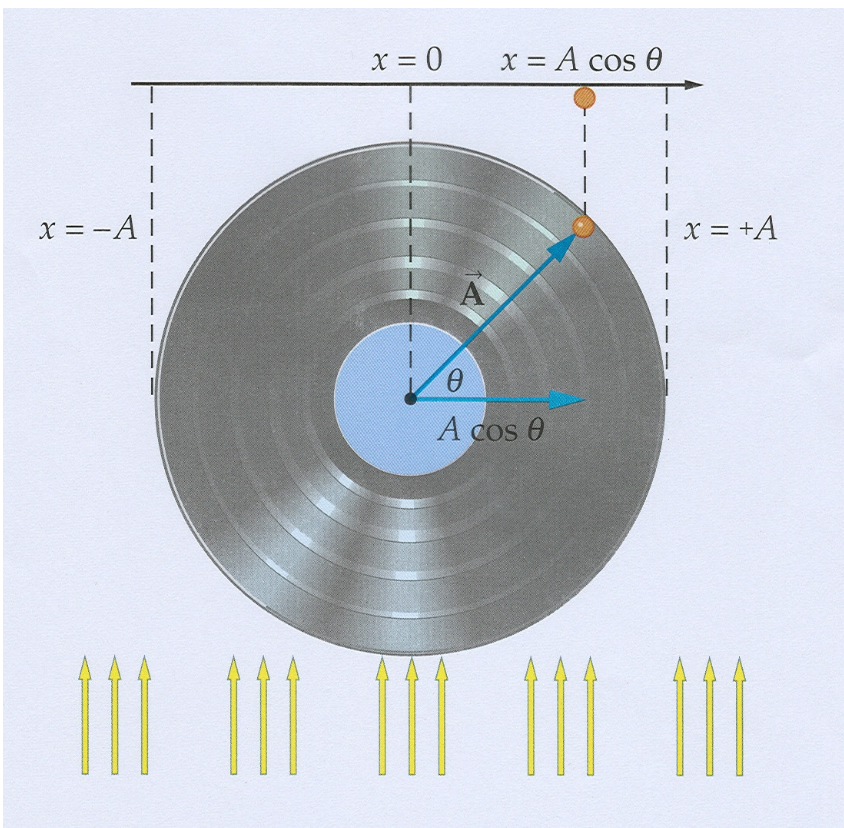
Iz rješenja $s(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$ možemo izvesti izraze za brzinu i akceleraciju:

$$v(t) = \frac{d}{dt}s(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0) = +A\omega\cos(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2})$$

$$a(t) = \frac{d}{dt}v(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0) = +A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0 + \pi)$$

Vidimo da je fazna razlika između elongacije i brzine jednaka $\pi/2$, a između elongacije i akceleracije π.
Pomoću fazora možemo zbrajati titranja različitih amplituda i faza. Rezultantno titranje dano je vektorskim zbrojem fazora.


Light for projecting x-motion
Screen for projection of y-motion
Light for projecting y-motion
y
R
θ
0
y = 0
Screen for projection of x-motion
x = 0


x = 0
x = A cos θ
x = −A
x = +A
A
θ
A cos θ

1.5. ENERGIJA KOD TITRANJA

Kinetička energija pri titranju materijalne točke stalno prelazi u potencijalnu i obrnuto.

U ravnotežnom položaju:	potencijalna energija = 0,	kinetička energija = max.
U amplitudnom položaju:	potencijalna energija = max,	kinetička energija = 0.

Kinetička energija harmoničkog oscilatora = kinetičkoj energiji materijalne točke mase *m* i brzine $v(t) = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0)$.

Elongacija materijalne točke koja harmonički titra je: $s(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)$.

Brzina je: $v(t) = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0)$.

Kinetička energija: $E_k = mv^2/2 = \frac{m}{2}A^2\omega^2\cos^2(\omega t + \varphi_0)$

Uz $\omega^2 = k/m$ slijedi:

$$E_k = \frac{k}{2}A^2\cos^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{k}{2}A^2(1 - \sin^2(\omega t + \varphi_0)) = \frac{k}{2}(A^2 - s^2).$$

Kad na materijalnu točku mase *m* djeluje sila $F = -ks$, njena potencijalna energija je rad te sile pri pomaku točke za elongaciju *s* iz položaja ravnoteže:

$$E_p = -W = -\int_0^s (-ks)ds = \frac{ks^2}{2} = \frac{k}{2}A^2\sin^2(\omega t + \varphi_0)$$

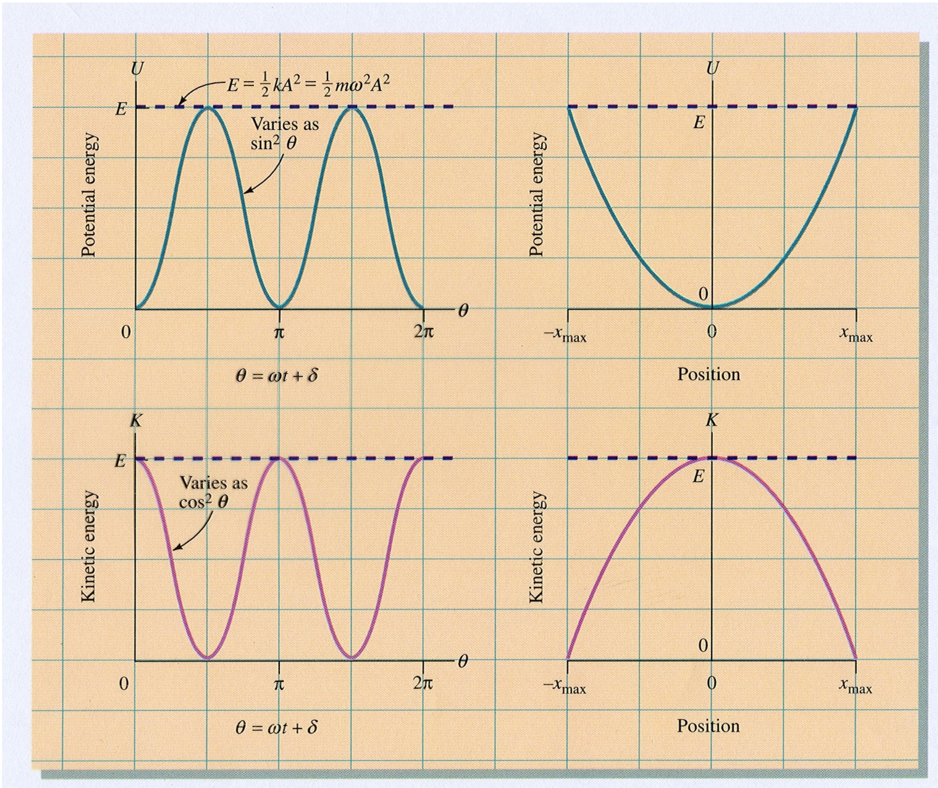
Ukupna energija = zbroj kinetičke i potencijalne energije:

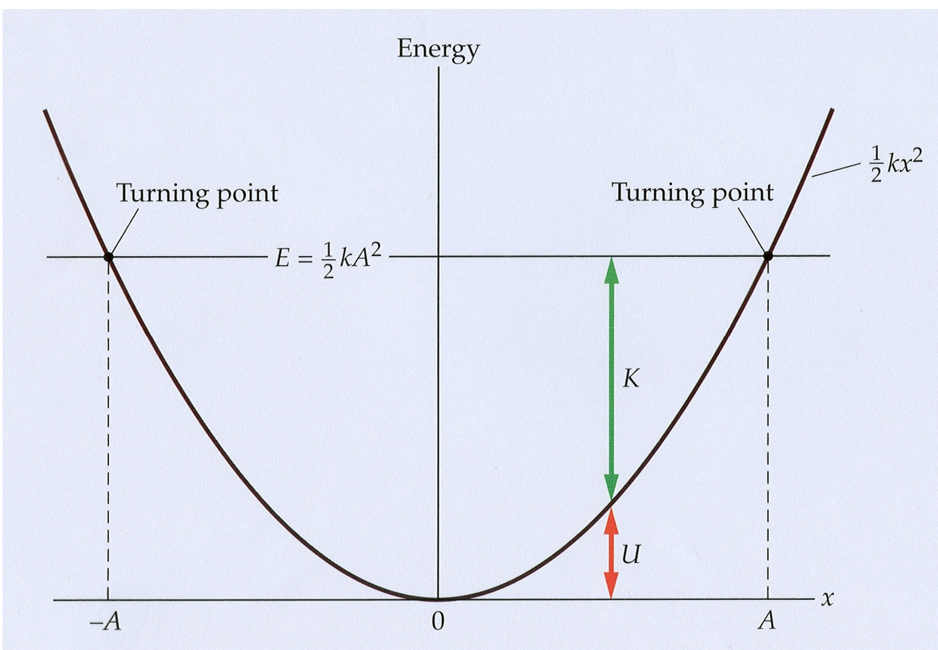
$$E = E_k + E_p = \frac{k}{2}A^2\cos^2(\omega t + \varphi_0) + \frac{k}{2}A^2\sin^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{kA^2}{2}$$

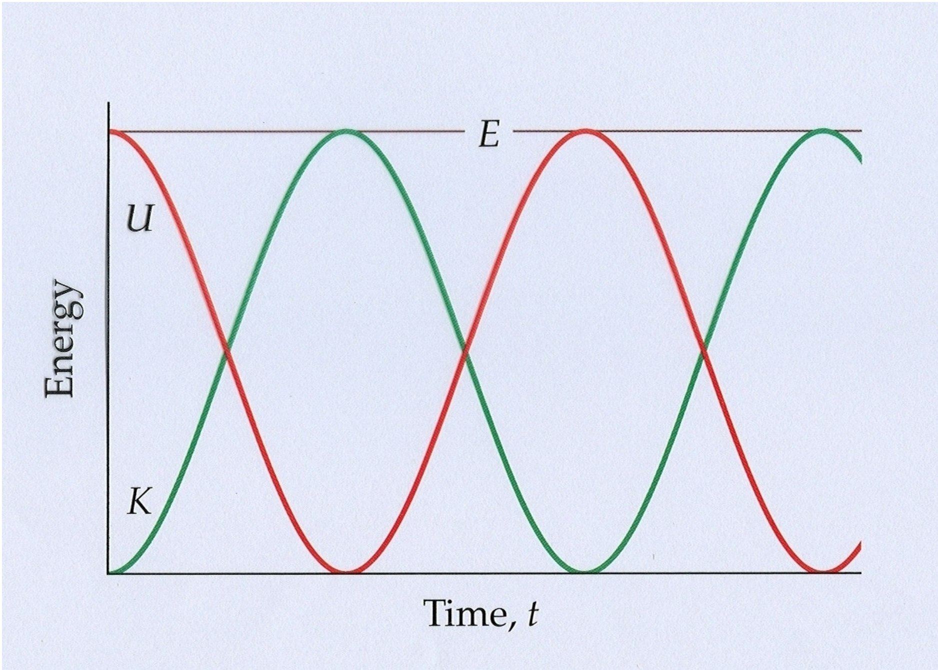
E ne ovisi o vremenu, konstanta je jer je harmonički oscilator zatvoreni sustav za koji vrijedi zakon očuvanja energije $E = E_k + E_p = konst$

SLIKA: OVISNOST ENERGIJE HARMONIČKOG TITRANJA O ELONGACIJI – HENČ-BARTOLIĆ, KULIŠIĆ – SL. 1.23. STR. 37

Za svaku elongaciju vrijedi zakon očuvanja energije.


$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2$
Varies as $\sin^2\theta$
Potential energy
Varies as $\cos^2\theta$
Kinetic energy
$\theta = \omega t + \delta$
Position
$-x_{max}$
x_{max}


Energy
Turning point
Turning point
$\frac{1}{2}kx^2$
$E = \frac{1}{2}kA^2$
K
U
x
−A
0
A


E
U
K
Energy
Time, t