LINEARNA ALGEBRA
Završni ispit (27.1.2021.)
– RJEŠENJA ZADATAKA I KOMENTARI –

Pitanje **1**
Nije još odgovoreno
Broj bodova od 4,00

Za svaki od sljedeća četiri sustava jednadžbi odredite što geometrijski predstavljaju rješenja tog sustava.

A. $\begin{cases} 4x - 2y + 6z = 26 \\ 2x - y + 3z = 13 \end{cases}$ ravnina

B. $\begin{cases} 4x - 2y + 6z = 26 \\ 2x - y + 3z = -11 \\ -3x - y + 2z = 5 \end{cases}$ prazan skup

C. $\begin{cases} 4x - 2y + 6z = 26 \\ -2x + 3y + 4z = 4 \end{cases}$ pravac

D. $\begin{cases} 4x - 2y + 6z = 26 \\ -2x + 3y + 4z = 4 \\ -3x - y + 2z = 5 \end{cases}$ točka

(1 bod za svaki točan odgovor; -0.33 za netočan; 0 ako nije odgovoreno)

Pitanje **2**
Nije još odgovoreno
Broj bodova od 6,00

Dan je pravac

$$p \dots \frac{x-1}{3} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-2}{5}$$

i točka $T(2, 3, 18)$.

Odredite jednadžbu ravnine π koja je okomita na pravac p i prolazi točkom T:

3 $\cdot x+$ −3 $\cdot y+$ 5 $\cdot z =$ 87 . **(2 boda)**

Odredite točku S na pravcu p koja je najbliža točki T:

$S($ 7 , −2 , 12 $)$. **(2 boda)**

Odredite točku R simetričnu točki T s obzirom na pravac p:

$R($ 12 , −7 , 6 $)$. **(2 boda)**

U svim poljima brojeve koji nisu cijeli možete upisivati kao decimalne brojeve s DECIMALNOM TOČKOM na 4 točne decimale ili kao razlomke (npr. -2.3333 ili -7/3).

Pitanje **3**

Nije još odgovoreno

Broj bodova od 4,00

Zadani su vektori:

- $\mathbf{a} = (-1, -1, -1, 1, 2, -1)$,
- $\mathbf{b} = (-1, 0, -1, 1, 1, 0)$,
- $\mathbf{c} = (2, -2, 1, 1, 2, -1)$,
- $\mathbf{d} = (1, -1, 0, 2, 2, 0)$,
- $\mathbf{e} = (0, -1, 0, 0, 1, -1)$.

Neka je $V = L(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e})$.

Koliko iznosi $\dim V$? 3 **(4 boda za točan odgovor)**

Pitanje **4**

Nije još odgovoreno

Broj bodova od 2,00

Neka je $V = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R^n} : x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0\}$.

Neka su $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in V$.

Tada je:

$\alpha x_1 + \beta y_1 + \alpha x_2 + \beta y_2 + \ldots + \alpha x_n + \beta y_n =$

$= \alpha(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + \beta(y_1 + y_2 + \ldots + y_n) = 0 + 0 = 0, \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

Time smo dokazali da:

- [x] je V vektorski potprostor od $\mathbf{R}^n$
- [ ] linearna kombinacija dvaju vektora iz V iščezava samo na trivijalan način
- [ ] $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ čine bazu
- [ ] Ne znam (0 bodova)
- [ ] su $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ linearno zavisni
- [ ] je $\dim V = 2$

(2 boda za točan odgovor, -0.5 za netočan, 0 za Ne znam ili ako nije odgovoreno)

Pitanje **5**

Nije još odgovoreno

Broj bodova od 4,00

Neka je V vektorski prostor i neka je $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ baza tog vektorskog prostora.

Neka je $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ skup vektora iz V za koji vrijedi:

- $\mathbf{f}_1 = a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + a_{31}\mathbf{e}_3$
- $\mathbf{f}_2 = a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + a_{32}\mathbf{e}_3$
- $\mathbf{f}_3 = a_{13}\mathbf{e}_1 + a_{23}\mathbf{e}_2 + a_{33}\mathbf{e}_3$

i neka je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

(i) Neka je $\det \mathbf{A} \neq 0$. Koja od sljedećih tvrdnji vrijedi za skup $F = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$?

- ○ F je baza vektorskog prostora V
- ○ F nije baza vektorskog prostora V
- ○ F može, ali ne mora biti baza vektorskog prostora V
- ○ Ne znam (0 bodova)

(2 boda za točan odgovor; -1 za netočan odgovor; 0 za Ne znam ili ako nije odgovoreno)

(ii) Neka je $\det \mathbf{A} = 0$. Koja od sljedećih tvrdnji vrijedi za skup $F = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$?

- ○ Ne znam (0 bodova)
- ○ F je baza vektorskog prostora V
- ○ F nije baza vektorskog prostora V
- ○ F može, ali ne mora biti baza vektorskog prostora V

(2 boda za točan odgovor; -1 za netočan odgovor; 0 za Ne znam ili ako nije odgovoreno)

Pitanje **6**

Nije još odgovoreno

Broj bodova od 10,00

Nadopunite sljedeći tekst upisivanjem točnih brojeva, tj. odabirom točnih odgovora među ponuđenima. **Brojeve upisujete kao cijele brojeve ili decimalne brojeve zaokružene na četiri decimale (koristite decimalnu točku).**

Neka je $T: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ preslikavanje zadano s $T(x, y, z) = (-2y + z, x + 3y - 2z, 2x + 2y - 2z + b)$, pri čemu je $b \in \mathbf{R}$.

Ako je T linearni operator, onda je b nužno jednako

0

. **(1 bod)**

To je, između ostalog, i posljedica sljedeće činjenice: nul-vektor je uvijek element jezgre linearnog operatora

(1 bod za točan odgovor; -0.25 za netočan; 0 ako nije odgovoreno)

Za tu vrijednost b, matrični prikaz ovog linearnog operatora u kanonskoj bazi je kvadratna matrica trećeg reda čiji su **retci** redom sljedeći vektori:

1. redak: (

0

,

-2

,

1

),

2. redak: (

1

,

3

,

-2

),

3. redak: (

2

,

2

,

-2

).

(svaki točan unos donosi 0.33333 bodova)

Operator T nije regularan.

(1 bod za točan odgovor; -1 za netočan; 0 ako nije odgovoreno)

Naime, slika ovog operatora je dimenzije

2

. **(1 bod)**

Nadalje, koristeći teorem o rangu i defektu

(1 bod za točan odgovor; -0.25 za netočan; 0 ako nije odgovoreno)

vidimo i da jezgra ovog operatora nije trivijalni vektorski prostor,

(1 bod za točan odgovor; -1 za netočan; 0 ako nije odgovoreno)

a defekt mu je jednak

1

. **(1 bod)**

Pitanje **7**

Nije još odgovoreno

Broj bodova od 6,00

Linearan operator $A : V^2 \to V^2$ ima vlastite vrijednosti $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ i pripadajuće vlastite vektore $\mathbf{v_1} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{v_2} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$.

Neka je $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ matrica operatora A u kanonskoj bazi $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$.

Za nju vrijedi:

- $\mathbf{A}$ je dijagonalna matrica Nije istina
- $\mathbf{A}$ je slična dijagonalnoj matrici Istina
- $\mathbf{A}$ je inverz dijagonalne matrice Nije istina

(1 bod za ispravno, a -1 za neispravno određenu istinitost; 0 ako nije odgovoreno)

Element a_{11} iznosi: 0

(3 boda za točnu vrijednost; -0.75 za netočnu; 0 ako nije odgovoreno)

Pitanje **8**

Nije još odgovoreno

Broj bodova od 4,00

Zadan je operator ortogonalnog projiciranja na koordinatnu ravninu yOz u prostoru V^3.

Koliko različitih vlastitih vrijednosti ima taj operator?

○1 ☒2 ○3 ○ovisi o izboru baze za V^3 ○Ne znam (0 bodova)

(2 boda za točan odgovor; -0.66 za netočan; 0 za Ne znam ili ako nije odgovoreno)

Kolika je dimenzija najvećeg vlastitog potprostora tog operatora?

○0 ○1 ☒2 ○3 ○Ne znam (0 bodova)

(1 bod za točan odgovor; -0.33 za netočan; 0 za Ne znam ili ako nije odgovoreno)

Jedna baza za sliku tog operatora je:

☒$\{\mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{j}\}$ ○$\{\mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{j} + \mathbf{k}\}$ ○Ne znam (0 bodova) ○$\{\mathbf{i} + \mathbf{k}, \mathbf{j}\}$ ○$\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$

(1 bod za točan odgovor; -0.33 za netočan; 0 za Ne znam ili ako nije odgovoreno)

Pitanje **9**

Nije još odgovoreno

Broj bodova od 10,00

Neka je V vektorski potprostor od $\mathbf{R}^4$ razapet vektorima $\mathbf{u} = (7, 7, 0, 7)$ i $\mathbf{v} = (0, 0, -7, 0)$.

Kolika je dimenzija ortogonalnog komplementa $V^\perp$?

2 **(1 bod)**

Odredite jednu bazu za $V^\perp$.

Možete upisivati brojeve s DECIMALNOM TOČKOM na 4 decimale. **Ukoliko smatrate da u bazi ima manje od 5 vektora; u suvišne kućice morate upisati NULE da bi vam zadatak bio bodovan.**

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_4 = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_5 = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$ **(4 boda)**

Ortogonalna projekcija vektora $\mathbf{x} = (-5, -4, 28, -96)$ na potprostor V je vektor $\mathbf{y} \in V$:

$\mathbf{y} =($ -35 , -35 , 28 , -35 $)$. **(4 boda)**

Ortogonalna komponenta vektora $\mathbf{x}$ s obzirom na potprostor V je vektor:

$\mathbf{z} =($ 30 , 31 , 0 , -61 $)$. **(1 bod)**

1. A. Ovaj sustav ima beskonačno mnogo rješenja koja ovise o dva parametra

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 6 & 26 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \end{array}\right] \begin{array}{l} + \\ \cdot(-2) \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \end{array}\right] \Rightarrow 2x - y + 3z = 13$$

Dakle, ovim je sustavom određena ravnina $2x - y + 3z = 13$.

B. Ovaj sustav nema rješenja

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 6 & 26 \\ 2 & -1 & 3 & -11 \\ -3 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{l} + \\ \cdot(-2) \\ \cdot(-1) \\ + \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 48 \\ 2 & -1 & 3 & -11 \\ -5 & 0 & -5 & 16 \end{array}\right]$$

Dakle, riječ je o trima ravninama kojima je zajednički presjek prazan skup.

C. Ovaj sustav ima beskonačno mnogo rješenja koja ovise o jednom parametru

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 6 & 26 \\ -2 & 3 & 4 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{l} + \\ \cdot 2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & 14 & 34 \\ -2 & 3 & 4 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{l} :2 \\ \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 7 & 17 \\ -2 & 3 & 4 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot(-\frac{3}{2}) \\ + \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 7 & 17 \\ -2 & 0 & -\frac{13}{2} & -\frac{43}{2} \end{array}\right] \begin{array}{l} \Rightarrow y = \frac{17}{2} - \frac{7}{2}z \\ \Rightarrow x = \frac{43}{4} - \frac{13}{4}z \end{array}$$

Dakle, ravnine se sijeku u pravcu s parametarskim jednadžbama

$$\begin{cases} x = \frac{43}{4} - \frac{13}{4}t \\ y = \frac{17}{2} - \frac{7}{2}t \\ z = t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

D. Ovaj sustav ima jedinstveno rješenje, riječ je o trima ravninama koje se sijeku u jednoj točki:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 6 & 26 \\ -2 & 3 & 4 & 4 \\ -3 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{l} + \cdot(-2) \\ + \\ \cdot 3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 10 & 0 & 2 & 16 \\ -11 & 0 & 10 & 19 \\ -3 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot 1 \\ + \\ \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 10 & 0 & 2 & 16 \\ -1 & 0 & 12 & 35 \\ -3 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{l} + \\ \cdot 10 \\ \cdot(-3) \\ + \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 122 & 366 \\ -1 & 0 & 12 & 35 \\ 0 & -1 & -34 & -100 \end{array}\right] \begin{array}{l} |:122 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 12 & 35 \\ 0 & -1 & -34 & -100 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot(-12) \\ + \\ + \quad \cdot 34 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \Rightarrow z = 3 \\ \Rightarrow x = 1 \\ \Rightarrow y = -2 \end{array}$$

Dakle, ravnine se sijeku u točki $(1,-2,3)$.

2) Budući da je $p \perp \pi$, za vektor normale od π možemo uzeti vektor smjera od p, $\vec{n}_\pi = 3\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$.

Zato je jednadžba od π

$$3(x-2) - 3(y-3) + 5(z-18) = 0$$

$$\pi \ldots \; 3x - 3y + 5z = 87$$

Tražena točka S je nožište okomice iz T na p, što je upravo presjek dobivene ravnine π i pravca p.

Parametarske jednadžbe od p su

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 4 - 3t \\ z = 2 + 5t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Uvrštavanjem u jednadžbu ravnine π dobivamo traženu točku

$$3(1+3t) - 3(4-3t) + 5(2+5t) = 87$$

$$43t + 1 = 87$$

$$t = 2 \qquad \Rightarrow \quad S(7,-2,12)$$

Konačno, točka S je polovište dužine $\overline{RT}$ odakle dobivamo koordinate od R:

$$\frac{1}{2}(x_R + 2) = 7 \Rightarrow x_R = 12$$

$$\frac{1}{2}(y_R + 3) = -2 \Rightarrow y_R = -7 \qquad \Rightarrow R(12,-7,6)$$

$$\frac{1}{2}(z_R + 18) = 12 \Rightarrow z_R = 6$$

3) Tražena dimenzija je jednaka rangu matrice čiji su reci (ili stupci) upravo zadani vektori:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow r = 3 \Rightarrow \dim V = 3$

4) Navedenim dokazom smo dokazali tvrdnju

$$(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})(\forall \vec{x}, \vec{y} \in V)\ \alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in V,$$

tj. skup V je zatvoren na linearne kombinacije svojih elemenata pa je on potprostor od $\mathbb{R}^n$.

5) Uočimo da iz pretpostavke zadatka slijedi $\dim V = 3$. Zato je $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ baza za V ako i samo ako je taj skup linearno nezavisan u V.

Neka su sada $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ proizvoljni takvi da vrijedi $\alpha\vec{f}_1 + \beta\vec{f}_2 + \gamma\vec{f}_3 = \vec{0}$.

Zbog pretpostavke zadatka, ovu jednakost možemo zapisati kao

$$\alpha(a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + a_{31}\vec{e}_3) + \beta(a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{32}\vec{e}_3) + \gamma(a_{13}\vec{e}_1 + a_{23}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma)\vec{e}_1 + (a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma)\vec{e}_2 + (a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33}\gamma)\vec{e}_3 = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma = 0 \\ a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma = 0 \\ a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33}\gamma = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

jer je $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ baza za V pa je taj skup linearno nezavisan

Sada imamo sljedeći niz ekvivalencija:

skup F je baza za V $\Leftrightarrow$ F je linearno nezavisan u V

$\Leftrightarrow$ homogeni sustav $(*)$ ima jedinstveno rješenje $\alpha = \beta = \gamma = 0$

$\Leftrightarrow$ matrica tog sustava, matrica A, je regularna

$\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$

Dakle, za $A = 0$ skup F nije, a za $\det A \neq 0$ skup F je baza za V.

6 Ako je T linearan operator, onda je nužno $T(\vec{0})=\vec{0}$. Naime, zbog svojstva linearnosti

$$2T(\vec{0}) = T(2\cdot\vec{0}) = T(\vec{0}) \Rightarrow T(\vec{0})=\vec{0}.$$

Dakle,

$$T(0,0,0) = (0,0,b) = (0,0,0) \Rightarrow b=0$$

i prema prethodnom zaključivanju vidimo da nul-vektor uvijek mora biti element jezgre linearnog operatora.

U tom je slučaju

$$T(1,0,0) = (0,1,2),\quad T(0,1,0) = (-2,3,2),\quad T(0,0,1) = (1,-2,-2)$$

pa je njegov matrični prikaz u kanonskoj bazi

$$T(e) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Odavde možemo odrediti rang ovog operatora

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \Big| \cdot(-2) + \sim \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 2 \end{bmatrix} \Big| \cdot 2 + \sim \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow r(T(e))=2 \Rightarrow r(T)=2$ (dimenzija slike ovog operatora je 2)

Budući da matrica $T(e)$ nije regularna (nije punog ranga), ni T nije regularan operator.

Nadalje, prema teoremu o rangu i defektu imamo

$$d(T) = \dim \mathbb{R}^3 - r(T) = 3-2 = 1$$

i jezgra ovog operatora nije trivijalni vektorski prostor, njena dimenzija, tj. defekt od T nije jednak nuli.

7) Uočimo da je matrični zapis od A u bazi $(f) = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ njegovih svojstvenih vektora

$$A(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Jednako tako, možemo odrediti matricu prijelaza iz kanonske baze u bazu (f):

$$I_{V^2}(e,f) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Sada lako možemo odrediti matrični prikaz od A u kanonskoj bazi

$$A = A(e) = I_{V^2}(e,f)\, A(f)\, I_{V^2}(f,e)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Dakle, A nije dijagonalna matrica niti je inverz dijagonalne matrice (inverz dijagonalne matrice, ako postoji, je unijek isto dijagonalna matrica), ali A je slična dijagonalnoj matrici.

Za traženi element imamo $a_{11} = 0$.

8 Označimo traženi operator sa P. Uočimo da za svaki vektor $\vec{v}$ okomit na yOz ravninu (ravninu projiciranja) vrijedi

$$P\vec{v} = \vec{0} = 0 \cdot \vec{v}.$$

Nadalje, svi takvi vektori leže na x-osi pa vidimo da je 0 svojstvena vrijednost ovog operatora i dimenzija pripadnog svojstvenog potprostora je 1.

Jednako tako, za svaki vektor $\vec{w}$ koji leži u yOz ravnini (ravnini projiciranja) vrijedi

$$P\vec{w} = \vec{w} = 1 \cdot \vec{w}.$$

Dakle, 1 je također svojstvena vrijednost od P i dimenzija pripadnog svojstvenog potprostora je 2.

Budući da P ne može imati više od tri linearno nezavisna svojstvena vektora ($\dim V^3 = 3$), slijedi da su to jedine svojstvene vrijednosti od P.

Dakle, P ima 2 različite svojstvene vrijednosti i dimenzija najvećeg svojstvenog potprostora je jednaka 2.

Uočimo i da iz prethodnih razmatranja slijedi da je x-os jezgra, a yOz ravnina slika od P. Od ponuđenih skupova, $\{\vec{j}+\vec{k}, \vec{j}\}$ je jedini čiji svi elementi leže u yOz ravnini (i oni uistinu jesu linearno nezavisni).

Alternativno, operator P možemo zapisati i eksplicitno formulom

$$P : V^3 \to V^3, \quad P(x,y,z) = (0, y, z).$$

Odavde mu možemo odrediti matricu u kanonskoj bazi

$$P(e) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

i na standardni način, računom, doći do istih zaključaka kao gore.

9. Neka je $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in V^{\perp}$ proizvoljan. Imamo

$$\langle \vec{a} | \vec{u} \rangle = 0 \Rightarrow 7a_1 + 7a_2 + 7a_4 = 0 \Rightarrow a_1 = -a_2 - a_4$$

$$\langle \vec{a} | \vec{v} \rangle = 0 \Rightarrow -7a_3 = 0 \Rightarrow a_3 = 0$$

Dakle,

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} -a_2 - a_4 \\ a_2 \\ 0 \\ a_4 \end{bmatrix} = -a_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=: \vec{e}_1} - a_4 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}}_{=: \vec{e}_2}, \quad a_{2,4} \in \mathbb{R}$$

Budući da je skup $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ linearno nezavisan, on čini jednu bazu za $V^{\perp}$ i $\dim V^{\perp} = 2$.

Sada vektor $\vec{x} = (-5, -4, 28, -96)$ zapišimo u bazi $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ za $\mathbb{R}^4$:

$$\vec{x} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{e}_1 + \delta \vec{e}_2$$

$$\begin{cases} 7\alpha + \gamma + \delta = -5 \\ 7\alpha - \gamma = -4 \\ -7\beta = 28 \\ 7\alpha - \delta = -96 \end{cases} \quad \Rightarrow 21\alpha = -105 \Rightarrow \alpha = -5 \Rightarrow \gamma = -31, \quad \Rightarrow \beta = -4, \quad \Rightarrow \delta = 61$$

Dakle, ortogonalna projekcija vektora $\vec{x}$ na potprostor V je vektor

$$\vec{y} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} = -5 \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -35 \\ -35 \\ 28 \\ -35 \end{bmatrix},$$

dok je ortogonalna komponenta vektora $\vec{x}$ s obzirom na V

$$\vec{z} = \vec{x} - \vec{y} = \gamma \vec{e}_1 + \delta \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ -4 \\ 28 \\ -96 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -35 \\ -35 \\ 28 \\ -35 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 31 \\ 0 \\ -61 \end{bmatrix}.$$