ELEKTROMAGNETIZAM

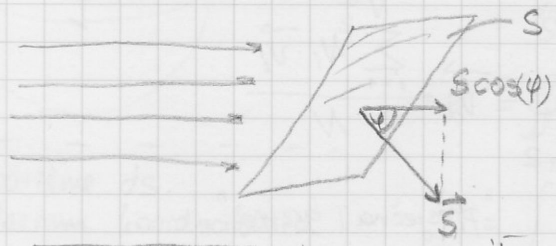
Površina/area

Površina se definira pomoću vektora normale

$$\boxed{d\vec{s} = \vec{n} \cdot ds}$$

Tok / flux

Ako stavimo neku površinu u električno polje kroz površinu će prolaziti silnice (manifestacija el. polja $\vec{E}$).



$$\boxed{\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{S}}$$

U slučaju da se ne radi o vakuumu definira se vektor gustoće el. polja $\vec{D}$ te formula izgleda:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \vec{E}$$

$$\Phi_E = \vec{D} \cdot \vec{S}$$

Za proizvoljnu površinu:

$$\Phi_E \approx \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i \cdot \Delta \vec{S}_i$$

$$\Phi_E = \lim_{\Delta S \to 0} \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i \cdot \Delta \vec{S}_i = \iint_S \vec{E}\, d\vec{s}$$

$$\boxed{\Phi_E = \iint_S \vec{E}\, d\vec{s}}$$

! Uvijek ako se ne radi u vakuumu umjesto $\vec{E}$ je $\vec{D}$!

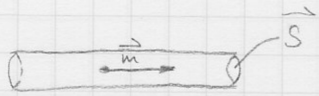
Formula za daljnje razmatranje koja ima smisla je ova: (uzimamo neku zatvorenu površinu koja zatvara volumen)

$$\boxed{\Phi_E = \oint_S \vec{E}\, d\vec{S}}$$

tok je povezan sa silnicama, a silnice sa količinom naboja; dakle tok kroz neku gauss površinu je prop. s nabojem

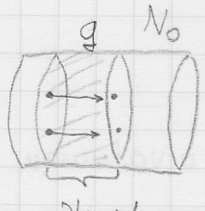
$\boxed{\Phi_E \sim q_{unutra}}$ točnije $\boxed{\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon}}$

Jakost i gustoća struje



$\boxed{\vec{J} = j \cdot \vec{m}}$ gustoća struje

$\boxed{I = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}}$ jakost



driftna brzina: v_d

- određen broj elektrona: N
- N_i elektron ima brzinu $\vec{v_i}$

$$\vec{v_d} = \frac{\sum_{i=1}^{N} N_i \cdot \vec{v_i}}{N}$$

"prosječna brzina"

N_0 - količina naboja po jediničnom volumenu

Količina naboja koja prođe kroz presjek S u vremenu Δt:

$$\Delta q = N_0 \cdot q \cdot v_d \cdot \Delta t \cdot S \quad | : \Delta t$$

$$j = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{S \Delta t} = N_0 q \cdot v_d$$

$$\boxed{\vec{J} = N_0 q \vec{v_d}}$$

Gustoću naboja ρ definiramo:

$$\boxed{\rho = q \cdot N_0}$$

pa dobivamo: $\boxed{\vec{J} = \rho \cdot \vec{v_d}}$

1. Maxwellova jednadžba – Gausov zakon

- opisuje povezanost između električnog toka kroz zatvorenu površinu (gausovu površinu) i naboja koji je uhvaćen površinom.

$$\boxed{\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$

Integralan oblik.

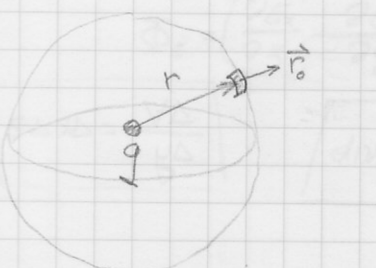
$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}}$$

ako q prikažemo pomoću prostorne gustoće naboja ρ

$$\boxed{\oiint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho\, dV}$$

Električno polje toč. naboja

Uzmemo kuglasti simetričan naboj naboja q i okružimo ga sferom radijusa r



$$\vec{E} = E(r)\cdot\vec{r_0}$$

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \oiint_S E(r)\cdot \underbrace{\vec{r_0}\cdot ds\cdot\vec{r_0}}_{=1}$$

$$= \oiint_{S_\pi} E(r)\cdot r^2 \sin\theta\, d\theta\cdot d\varphi \quad \text{(granice za sferu)}$$

$$= \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} E(r)\, r^2 \sin\theta\cdot d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot E(r)\cdot r^2$$

$$= -\cos\theta\Big|_0^{\pi}\cdot \varphi\Big|_0^{2\pi}\cdot E(r)\cdot r^2$$

$$= -(-1-1)\cdot 2\pi\cdot E(r)\cdot r^2 = 4\pi r^2\cdot E(r)$$

iznos površine ds u sfernim koordinatama

$$ds = \underbrace{r^2\sin\theta}_{\text{jakobijana}}\, \underbrace{d\theta\, d\varphi}_{\text{sferne koordinate}}$$

! nema dr jer je r konstantno

$$4\pi r^2 E = \frac{q}{\varepsilon}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{q}{r^2}\vec{r_0}}$$

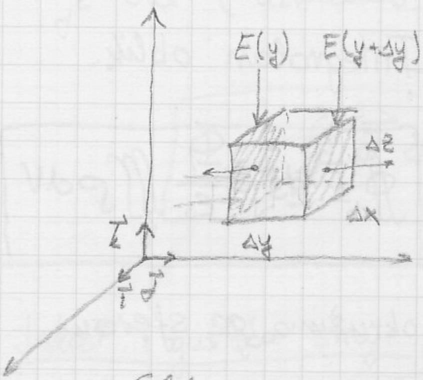
Međudjelovanje nije trenutno pa vrijeme potrebno da dođe do promjene je

$$t = \frac{r}{c}$$

Za $v \ll c$ vrijede i Coulombov i Gaussov zakon

Gaussov zakon u diferencijalnom obliku

Ideja: naći oblike jednadžbi koji vrijede za jako male volumene te od tih volumena stvaramo objekte bilokakve veličine i oblika



$\Delta V = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$

$\Delta V \to dV$

$dV = dx\,dy\,dz$

$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}$

Gledamo x-z ravninu tj stranice paralelne s njom.

Vektori normale su $\vec{j}$ i $\vec{j}$.

$\Phi_y = \vec{E} \cdot \vec{S} = \vec{E}\,(\vec{S}_1 + \vec{S}_2)$

(preživi samo y-komponenta)

$$\boxed{\frac{\Delta V}{\Delta y} = \Delta x \Delta z}$$

$= (E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}) \cdot (\Delta x \Delta z \vec{j} - \Delta x \Delta z \vec{j})$

$= E_y(x, y+\Delta y, z)\,\Delta x \Delta z - E_y(x, y, z)\,\Delta x \Delta y$

$= \dfrac{E_y(x, y+\Delta y, z) - E_y(x, y, z)}{\Delta y} \cdot \Delta V \quad (1)$

Za infinitezimalne oblike:

$$E_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{E_y(x, y+\Delta y, z) - E(x, y, z)}{\Delta y} \Delta V = \frac{\partial E_y}{\partial y} dV$$

Analogno za ostale:

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}}$$

Računamo prosječni tok kroz neki volumen na način da tok podijelimo s volumenom.

$$\overline{\Phi_E} = \frac{\oint_S \vec{E}\, d\vec{s}}{\Delta V}$$

$$\overline{\Phi_E} \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s}}{\Delta V} = div\, \vec{E} \rightarrow \text{za infinitezimalu veličinu}$$

$$\Phi_E = \overline{\Phi_E} \cdot dV = \frac{\rho}{\varepsilon_0} dV \quad (2)$$

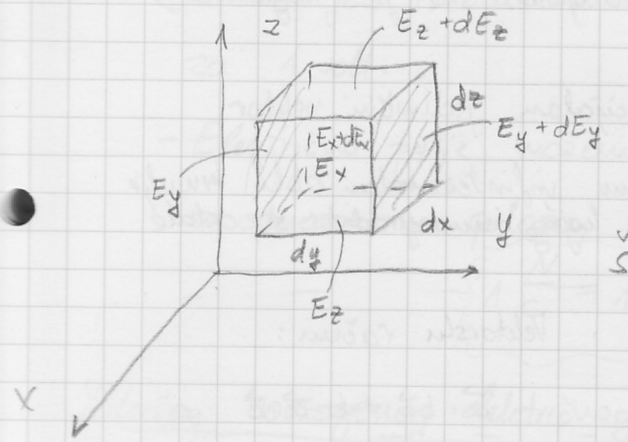
(1) za sve strane ukupan tok je:

$$\Phi_E = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) \cdot dV = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \cdot dV$$

$$\boxed{div\, \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

Drugi način

Uzmemo gaussovu plohu oblika kvadra i gledamo električni tok kroz svaku stranicu



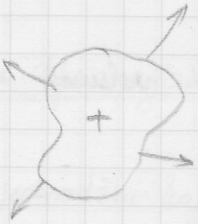
$$\boxed{dV = dx\,dy\,dz}$$

$$\oint_S \vec{E}\, d\vec{s} = (E_x + dE_x)\,dy\,dz - E_x\,dy\,dz$$
$$+ (E_y + dE_y)\,dx\,dz - E_y\,dx\,dz$$
$$+ (E_z + dE_z)\,dx\,dy - E_z\,dx\,dy$$
$$= dE_x\,dy\,dz + dE_y\,dx\,dz + dE_z\,dx\,dy$$

$$\Phi_E = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) dV = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \cdot dV$$

$$\boxed{div\, \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

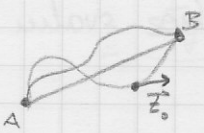
$\nabla \vec{E} > 0$



$\nabla E < 0$

Električni potencijal i razlika potencijala

Na probni naboj q_0 u električnom polju $\vec{E}$ djeluje sila $\vec{F}$ oblika $\vec{F} = q_0 \vec{E}$ i opisana je coulombovim zakonom. Iz tog razloga sila je konzervativna. Pomičući taj naboj po nekoj krivulji vršimo rad, ali zbog konzervativne prirode nije nam bitna krivulja nego njezina početna i krajnja točka.
(Analogija sa grav. poljem. Rad koji čovjek obavi kad digne predmet je $mgh < 0$, a rad gravitacijske sile je $-mgh < 0$)



$d\vec{l} = dl\,\vec{t}_0$

$\vec{t}_0$ - tangencijalan jedinični vektor

$d\vec{l}$ - uzimamo infinitezimalan oblik krivulje pomoću kojeg ćemo graditi sve ostale

- za inf. pomak polje obavi rad:

$$\underline{dW} = \vec{F}_c \cdot d\vec{l} = q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Vektorski račun:

$$\vec{a} \cdot b\vec{c} = b \cdot \vec{a} \cdot \vec{c}$$

- stoga se potencijalna energija promijenila za:

$$dE_p = -dW = -q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

(analogija: kad tijelo padne polje vrši rad pa se smanji pot. energija)

- za promjenu između točaka A i B:

$$\Delta E_{pAB} = E_{pB} - E_{pA}$$

$$\boxed{\Delta E_{pAB} = -q_0 \int_A^B \vec{E}\, d\vec{l}}$$

Za svaku točku u električnom polju definirana je potencijalna energija E u relativnom odnosu na referentnu točku gdje je $E=0$. Električni potencijal definiramo tako da potencijalnu energiju koju ima naboj q_0 u polju $\vec{E}$ podjelimo sa nabojem q_0.

$$\boxed{\varphi = \frac{E_p}{q_0}}$$

! potencijal je skalarna vrijednost

Razlika potencijala $\boxed{U_{AB} = \varphi_B - \varphi_A}$ je definirano kao razlika potencijalnih energija između točke A i B podjeljena sa nabojem

$$\boxed{\varphi_B - \varphi_A = \Delta U \equiv \frac{\Delta E_p}{q_0} = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}}$$

- Jedinica za razliku potencijala (izvedena iz SI) je volt [V].

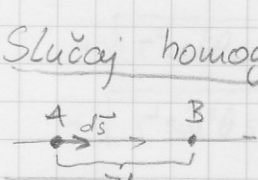
$$1\,V = 1\,\frac{J}{C}$$

Potrebno je 1 džul da naboju od 1 kulon promijenimo potencijal za 1 volt.

- Električno polje možemo shvatiti kao promjenu potencijala u odnosu na položaj

$$1\,\frac{N}{C} = 1\,\frac{V}{m}$$

Slučaj homogenog električnog polja (E = konst.)



$$U = \varphi_B - \varphi_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\int_A^B E \cdot ds \cdot \cos 0^\circ$$

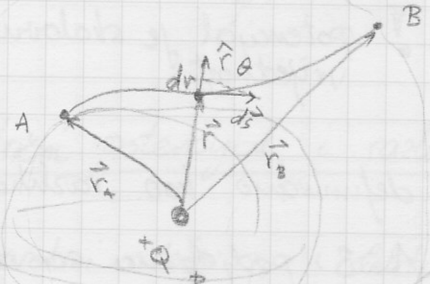
$$= -E\int_A^B ds = -\underline{E \cdot d}$$

! Negativan predznak da je $\varphi_A > \varphi_B$ i to je prirodno da polje gleda u smjeru padajućeg potencijala.

Promjena električne potencijalne energije

$$\boxed{\Delta E_{pAB} = q_0 U_{AB} = -q_0 \vec{E} \cdot \vec{d}}$$

Električni potencijal i potencijalna energija točkastog naboja



Ekvipotencijalne plohe

$$U_{AB} = \varphi_B - \varphi_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot \vec{ds}$$

Za električno polje koje stvara točkasti naboj:

$$\vec{E} = k \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \hat{r} \quad \Big| \cdot \vec{ds}$$

$$\vec{E} \cdot \vec{ds} = k \frac{q}{r^2} \hat{r} \cdot \vec{ds}$$

$\hat{r} \cdot \vec{ds} = ds \cos\theta$ projekcija $\vec{ds}$ na $\hat{r}$
$= dr$

$$\vec{E}\,\vec{ds} = k \frac{q}{r^2} dr \quad \Big| \int_A^B$$

$$-\int_A^B \vec{E}\,\vec{ds} = \varphi_B - \varphi_A = -\int_{r_A}^{r_B} k \frac{q}{r^2} dr = U_{AB}$$

$$U_{AB} = kq \cdot \frac{1}{r}\Big|_{r_A}^{r_B}$$

$$\boxed{U_{AB} = kq \cdot \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)} \qquad \boxed{\varphi = k \frac{q}{r}}$$

Ne ovisi o puti $A \to B$ i zato je električno polje konzervativno

Poopćeni izraz potencijala je

$$\boxed{\varphi = k \cdot \sum_i \frac{q_i}{r_i}}$$

Temelji se na principu superpozicije

- Pretpostavimo da imamo dva naboja q_1 i q_2.
- $r_1 = \infty$, q_1 i q_2 ne interferiraju
- potrebna energija da se q_2 približi q_1 na udaljenost r jednaka je

I $$W = \Delta E_p = -q_2 \int_{\infty}^{r} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -q_2 \int_{\infty}^{r} k \frac{q_1}{r^2} \underbrace{\hat{r} \cdot d\vec{s}}_{dr}$$

$$= k q_1 q_2 \cdot \frac{1}{r}\Big|_{\infty}^{r} = k \frac{q_1 q_2}{r}$$

II Narančić: Prelazimo na sferne koordinate

$$\vec{s} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (1)$$
$$d\vec{s} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} \quad (2)$$

raspis vektora pomaka

$$\left.\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

zamjena varijabli

$$\left.\begin{aligned} dx &= \sin\theta\cos\varphi\, dr + r\cos\theta\cos\varphi\, d\theta + r\sin\theta\sin\varphi\, d\varphi \\ dy &= \sin\theta\sin\varphi\, dr + r\cos\theta\sin\varphi\, d\theta - r\sin\theta\cos\varphi\, d\varphi \\ dz &= \cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

diferencijali supstitucija

$$d\vec{r} = |dx|\,\hat{r} + |dy|\,\hat{\theta} + |dz|\,\hat{\varphi} \quad (5)$$

$$|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (6)$$

$$d\vec{r} = \sqrt{\sin^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\theta}\; dr \cdot \hat{r}$$
$$+ \sqrt{r^2\cos^2\theta\cos^2\varphi + r^2\cos^2\theta\sin^2\varphi + r^2\sin^2\theta}\; d\theta \cdot \hat{\theta}$$
$$+ \sqrt{r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi}\; d\varphi \cdot \hat{\varphi}$$

(4) → (6) → (5)

$$d\vec{r} = dr\,\hat{r} + r\,d\theta\,\hat{\theta} + r\sin\theta\, d\varphi\,\hat{\varphi} \quad (7)$$

$$E_p = -\int_{\infty}^{r} k \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \underbrace{\hat{r} \cdot d\vec{s}}_{\text{preživjet će samo komponenta uz } \hat{r},\ dr} = k q_1 q_2 \left.\frac{1}{r}\right|_{\infty}^{r}$$

$$E_p = k \frac{q_1 q_2}{r} \quad \Big| : q_1$$

$$\boxed{\varphi = \frac{E_p}{q_1} = k \frac{q_2}{r} = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}\, d\vec{s}}$$ potencijal

Dobivanje električnog polja iz potencijala

(I) Električno polje i potencijal su povezani izrazom

$$d\varphi = -\vec{E}\, d\vec{s}$$

zasebno svaka komponenta

$$\left.\begin{aligned} d\varphi &= E_x\, dx \\ d\varphi &= E_y\, dy \\ d\varphi &= E_z\, dz \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ E_y &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ E_z &= -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{aligned}\right\}$$

komponente električnog polja su negativne parcijalne derivacije potencijala

(II) Narančić

Naboj koji se giba od A do B stalnom brzinom i gledamo iznos rada:

$$\Delta W = -\Delta E_p$$

$$\Delta W = F_x \Delta x \qquad \Delta E_p = q \Delta \varphi$$

$$dW = -dE_p$$

$$dW = F_x dx \qquad dE_p = q d\varphi$$

$$F_x dx = q d\varphi$$

$$E q\, dx = q\, d\varphi \quad \Big| : q$$

$$E_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$E_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$E_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

$$\boxed{\vec{E} = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{k}\right) \qquad \vec{E} = -\nabla \varphi \quad \vec{E} = -\text{grad}\, \varphi}$$

!

Magnetska sila na naboj koji se giba u mag polju

$$\boxed{\vec{F}_B = q\,\vec{v} \times \vec{B}}$$

$$F_B = q v B \sin\theta$$

Lorenzova sila ELE + MAG

$$\boxed{\vec{F} = q\vec{E} + q\,\vec{v} \times \vec{B}}$$

Sila na vodič u magnetnom polju

$$\boxed{\vec{F}_B = I \cdot \vec{l} \times \vec{B}}$$

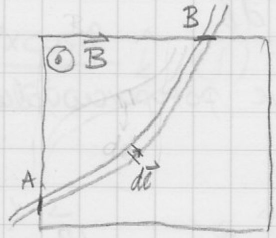
$\vec{l}$ - vektor koji gleda u smjeru struje

- a iznos mu je duljina vodiča u mag. polju

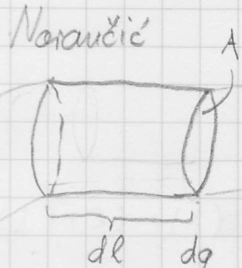
Za proizvoljnu žicu:

$$d\vec{F}_B = I\, d\vec{l} \times \vec{B} \quad \Big| \int_A^B$$

$$\boxed{\vec{F}_B = I \int_A^B d\vec{l} \times \vec{B}}$$



Narančić



Dio vodiča u mag polju duljine dl koji sadrži naboj dq

Gustoća naboja: $\rho = q N_0$

$\boxed{\vec{v}_d \text{ - driftna struja}}$

Gustoća struje: $\vec{J} = \rho \cdot \vec{v}_d$

$$d\vec{F} = \vec{v}_d \times \vec{B}\, dq$$

$dq = \rho\, dV = \rho \cdot A \cdot dl$

$$d\vec{F} = \rho\, \vec{v}_d \times \vec{B} A\, dl$$

supstitucija

$$d\vec{F} = \vec{J} \times \vec{B} A\, dl$$

definiramo smjer dl isti kao $\vec{J}$:

$$\vec{J} \cdot A\, dl = \frac{\vec{I}}{A} \cdot A\, dl = I\, d\vec{l}$$

$$d\vec{F} = I\, d\vec{l} \times \vec{B} \quad \Big| \int_A^B$$

$$\boxed{\vec{F} = I \int_A^B d\vec{l} \times \vec{B}}$$

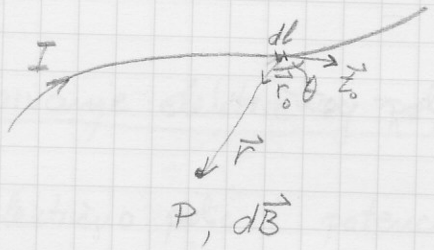
Biot-Savartov zakon

Govori nam o magnetnom polju koje stvara vodič u kojem teče struja

Definirat ćemo permeabilnost vakuuma:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Tm}{A}$$

$$\boxed{Wb = Tm^2 \quad \text{Weber}}$$



Promatramo za točku P djelovanje vodiča. definiramo male odsječke

$$\vec{dl} = dr\,\vec{z}_0$$

$$\vec{r} = r \cdot \vec{r}_0$$

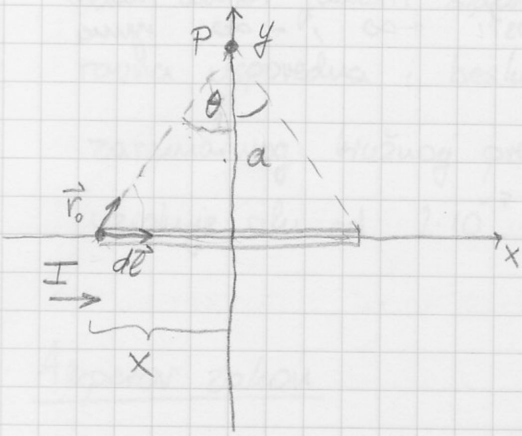
- Smjer vektora $d\vec{B}$ okomit na vektore $\vec{z}_0$ i $\vec{r}_0$
- Iznos vektora $d\vec{B}$ je obrnuto proporcionalan sa r^2
- Iznos vektora $d\vec{B}$ je proporcionalan sa iznosom jakosti struje i iznosom vektora $d\vec{l}$
- Iznos vektora $d\vec{B}$ je proporcionalan sa $\sin\theta$ gdje je θ kut između $\vec{z}_0$ i $\vec{r}_0$

$$d\vec{B} \perp \vec{z}_0, \vec{r}_0, \quad d\vec{B} \sim \frac{1}{r^2}, \quad d\vec{B} \sim I\,dl, \quad d\vec{B} \sim \sin\theta$$

$$\boxed{d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l} \times \vec{r}_0}{r^2}}$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_A^B \frac{d\vec{l} \times \vec{r}_0}{r^2}}$$

Magnetsko polje koje stvara beskonačno dug, ravan vodič kroz kojeg teče struja



komadić žice koja ima struju I

ideja: naći doprinos malog dijela žice i integrirati po svoj duljini žice

$d\vec{l} = dx\vec{i}$

a = udaljenost točke od vodiča

Iz Biot-Savartovog zakona znamo da je $d\vec{B} \perp d\vec{l}, \vec{r}_0$ i gleda smjeru osi z.

$$d\vec{l} \times \vec{r}_0 = |d\vec{l} \times \vec{r}_0|\hat{k} = |dx \sin(\tfrac{\pi}{2} - \theta)|\hat{k}$$
$$= (dx\cos\theta)\hat{k}$$

Ubacimo u diferencijalni oblik B-S jdžb:

$$d\vec{B} = (dB)\hat{k} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dx\cos\theta}{r^2}\hat{k} \quad (1)$$

Trigonometrija

$$r = \frac{a}{\cos\theta} = a\sec\theta \quad (2)$$

$$\boxed{\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}}$$

$$tg\,\theta = \frac{-x}{a} \qquad x = -a\,tg\,\theta \;\Big|'$$

$$dx = -a \cdot \frac{1}{\cos^2\theta}d\theta = -a\sec^2\theta\, d\theta \quad (3)$$

(2), (3) → (1)

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I \left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}\right) \cdot \left(\frac{-a}{\cos^2\theta}\right)\cos\theta\, d\theta$$

$$dB = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\cos\theta\, d\theta \;\Big|\int$$

$$B = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\cos\theta\, d\theta$$

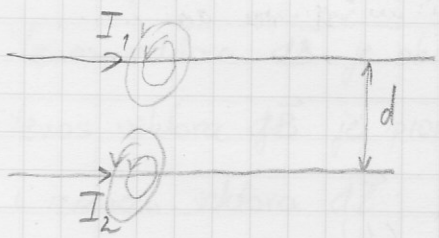
$$B = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(\sin\theta_2 - \sin\theta_1\right)$$

Za granice ćemo uzeti beskonačnosti $+\infty$ i $-\infty$ njima odgovaraju kuteví $\frac{\pi}{2}$ i $-\frac{\pi}{2}$:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}(1+1)$$

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}}$$

Sila između dva vodiča, definicija ampera



- dva ravna beskonačna paralelna vodiča
- prvi vodič stvara mag. polje,

$$\boxed{B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}}$$

a drugi

$$\boxed{B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d}}$$

Sila koja djeluje na ravni vodič u mag. polju je:

$$\boxed{\vec{F} = I\,\vec{l}\times\vec{B}}$$

Budući da je mag. polje okomito na smjer gibanja elektrona

$$F = BIl$$

Dakle sile izgledaju:

$$\boxed{F_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}\,l} \qquad \boxed{F_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}\,l}$$

III Newtnov zakon

$$\boxed{\vec{F}_1 = -\vec{F}_2}$$

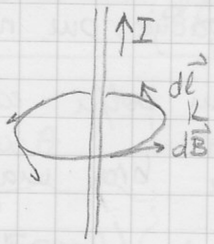
Amper

Jedan amper jakosti stalne struje koja prolazeći kroz dva ravna, usporedna i beskonačno dugačka vodiča u vakuumu zanemarivog kružnog presjeka međusobno udaljena jedan metar uzrokuje silu od $2 \cdot 10^{-7} \frac{N}{m}$!

Amperov zakon

Na beskonačnom ravnom vodiču iznos $\vec{B}$, na kružnici čije je središte vodič, je konstantan. (Pravilo desne ruke)

Takva silnica nema početak ni kraj nego se zatvara sama u sebe.



Razmatramo skalarni umnožak $d\vec{l} \cdot \vec{B}$ po kružnici

$$\oint_K \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_K B dl = B \oint_K dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot 2\pi r = \mu_0 I$$

$$\boxed{\oint_K \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I}$$

Ovaj izraz opisuje stvaranje magnetskih polja za sve stalne istosmjerne iznose struje.

2. Maxwellova jednadžba

Definiramo magnetski tok kroz plohu S

$$\boxed{\Phi_B = \vec{B}\cdot\vec{S}}$$

jedinica je $1\,Wb = 1\,T m^2$

Diferencijalni oblik

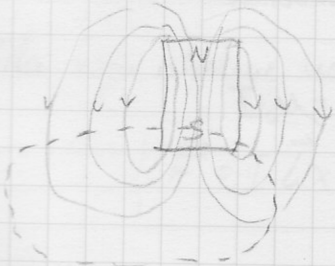
$$d\Phi_B = \vec{B}\cdot d\vec{S}$$

Integralni oblik

$$\Phi_B = \iint_S \vec{B}\, d\vec{S}$$

Analogija sa Gaussovim zakonom 1.MJ – ukupan tok kroz zatvorenu plohu proporcionalan je zarobljenom naboju.

No kod magnetnih silnica je drugačije, one nemaju početak i kraj. Ako u nekom magnetskom polju zaokružimo volumen gaussovom površinom jednak broj mag. silnica će ući i izaći. Činjenica je nepostojanja magnetskog monopola.



$$\boxed{\oint\!\!\!\oint_S \vec{B}\, d\vec{S} = 0}$$

U diferencijalnom obliku:

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{B} = 0}$$

Faradayev zakon indukcije

EMS - elektromotorna sila

Govori o povezanosti magnetskog toka i električnog polja. Pokus sa magnetom kroz prsten. Zaključak je da je inducirani napon tj. ems proporcionalan sa derivacijom mag. toka po vremenu.

$$\mathcal{E} \sim -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Za ovakav slučaj geometrije ako dodamo još prstenova oni će biti serijski vezani pa se vrijednosti zbrajaju:

$$\boxed{\mathcal{E} = -N\frac{d\Phi_B}{dt}}$$

$$\Phi_B = \vec{B}\cdot\vec{S} = BS\cos\theta$$

$$\mathcal{E} = -N\frac{d}{dt}(BS\cos\theta)$$

Inducirat će se $\mathcal{E}$ ako mijenjamo:

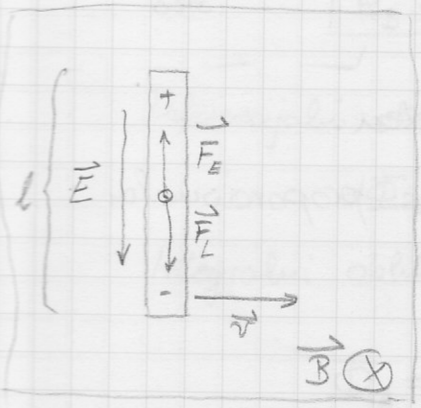
a) površinu koja je u mag. polju

b) iznos mag. polja

c) kut između normale i mag. polja

d) sve troje

Slučaj: EMS inducirana u vodiču koji se giba kroz konstantno mag. polje.



- štap se giba jednoliko
- na slobodne elektrone djeluje Lorenzova sila
⊕ ide gore ⊖ ide dolje
- zbog odvojenosti naboja javlja se ele. polje koje gleda od ⊕ prema ⊖
- ele. polje vraća naboje u početnu poziciju

- stacionarno stanje nastupa kad se izjednače

$$\vec{F}_L = q\vec{v}\times\vec{B} \qquad \vec{F}_E = q\vec{E}$$

$$\vec{v}\perp\vec{B} \qquad \vec{F}_E \parallel \vec{E}$$

$$F_L = qvB \qquad F_E = qE$$

$$\cancel{q}vB = \cancel{q}E$$

$$E = vB \quad (1)$$

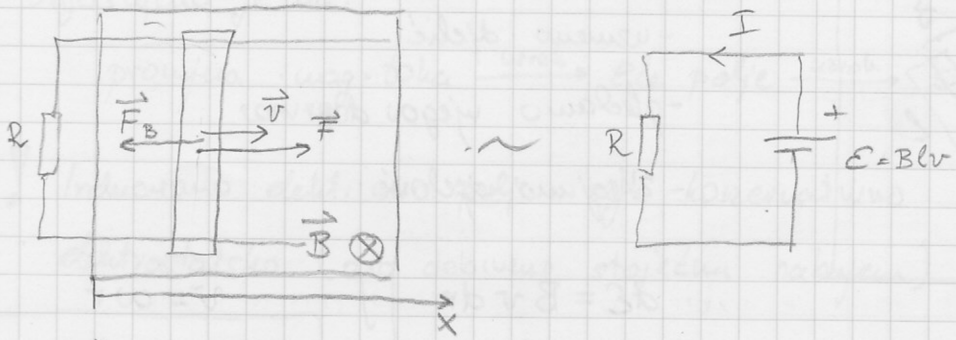
EMS je ustvari samo razlika potencijala $\varphi_+ - \varphi_- = U$

Za slučaj homogenog $\vec{E}$ vrijedi

$$\mathcal{E} = U = E\cdot l \quad (2)$$

$$(1)\to(2) \qquad \boxed{\mathcal{E} = Blv}$$

Slučaj: Štap iz prošlog primjera je stavljen na tračnice bez trenja i dodan otpor (zatvoren strujni krug)



- $\vec{B} \perp \vec{v}$
- djelujemo silom $\vec{F}$ da savladamo $\vec{F}_B = I \cdot \vec{l} \times \vec{B}$
- kako štap mijenja položaj mijenja i površinu $S(x) = l \cdot x$

$$\Phi_B = B \cdot l \cdot x$$

pa je

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}(B \cdot l \, x) = -Bl\frac{dx}{dt} = -Blv$$

$$\boxed{\mathcal{E} = -Blv}$$

Radi se o prijenosu energije. Iako nema izvora teče struja. Strujni krug nije izoliran sustav. Snaga koju smo unijeli sa silom $\vec{F}$ potroši se u potpunosti na otporniku:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

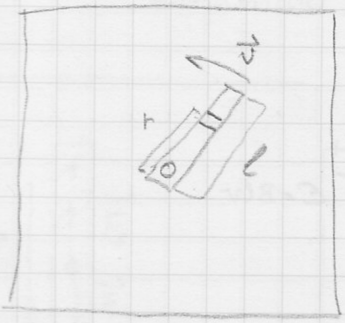
$$P = F_B \cdot v = BIlv$$

$$P = \frac{B^2 l^2 v^2}{R} = \frac{\mathcal{E}^2}{R}$$

$F = F_B$ po iznosu

struja $I = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = \frac{Blv}{R}$

Slučaj: Ako štap rotiramo konst. brzinom oko osi



- uzmemo djelić
- gledamo njegov doprinos
- zbrojimo djelove

$$d\mathcal{E} = B v\, dr \quad \Big| \int \qquad v = \omega r$$

$$\mathcal{E} = \int_0^l B \omega r\, dr$$

$$\mathcal{E} = B\omega \int_0^l r\, dr$$

$$\boxed{\mathcal{E} = \frac{1}{2} B \omega l^2}$$

Lenzovo pravilo

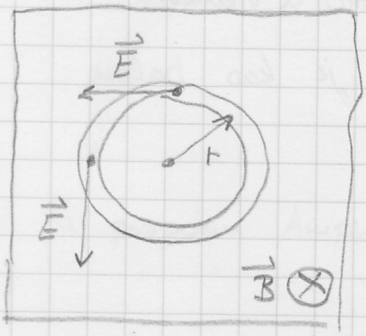
Struja inducirana u petlji će biti onog smjera da će mag. polje koje stvori protiviti se promjeni vanjske promjene.

3. Maxwellova jednadžba

Objašnjeno je da:

promjena mag. toka $\xrightarrow{uzrok}$ Ele polje $\xrightarrow{uzrok}$ struja

! Inducirano električno polje nije konzervativno kao elektrostatsko (ono dobiveno stojećim nabojem)



Promjenom mag toka induciran je ems

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (1)$$

Inducirana struja nam implicira da postoji ele. polje koje ju stvara. To $\vec{E}$ je tangencijalno na prsten.

Rad potreban da se probni naboj q provese po čitavom opsegu je:

$$dW = q\,dU = q\,d\mathcal{E} = F_E\,dl$$

$$q\,d\mathcal{E} = q\,E\,dl \quad |\,q$$

$$d\mathcal{E} = E\,dl$$

Zbrojimo doprinose čitavog prstena: (zatvorena krivulja)

$$\mathcal{E} = \oint_K \vec{E}\,d\vec{l} \quad (2)$$

(1) = (2)

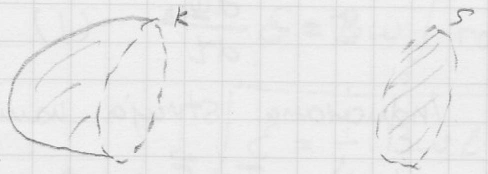
$$\boxed{\oint_K \vec{E}\,d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}}$$

4. Maxwellova jednadžba (poopćeni Amperov zakon)

Amperov zakon - za sve struje oblika $I = \frac{dq}{dt}$

$$\oint_K \vec{B}\, d\vec{l} = \mu_0 I + ?$$

Maxwell je shvatio da ovaj zakon je nepotpun.
Vrijedi samo kada je električno polje konstantno u vremenu
Definiramo amperovu površinu, površina koja je kao balon napuhana na neku krivulju



Ako stavimo takvu površinu u strujni krug sa kondenzatorom nedostajat će dio:

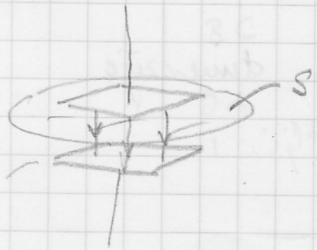
Kroz S_2 ne prolazi nikakva struja, ali se mijenja ele. tok.
Pa ćemo definirati struju I_d.

$$\Phi_E = \iint_S \vec{E}\, d\vec{s}$$

$$I_d = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

Analogija sa Faradayevim zakonom o indukciji !

Struja I_d je također oblika $\frac{dq}{dt}$:



$$\Phi_E = E \cdot S = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$I_d = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \frac{dq}{dt}$$

Struju kroz vodič I zapišemo kao:

$$I = \iint_S \vec{J}\, d\vec{s}$$

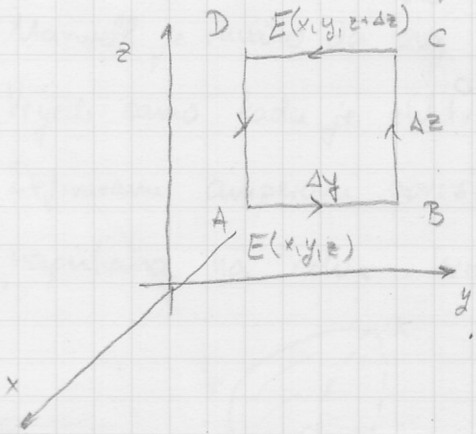
Pa poopćeni Amperov zakon je

$$\oint_K \vec{B}\, d\vec{l} = \mu_0 (I + I_d)$$

$$\boxed{\oint_K \vec{B}\, d\vec{l} = \mu_0 \iint_S \vec{J}\, d\vec{s} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \iint_S \vec{E}\, d\vec{s}}$$

3. i 4. Maxwellova jednadžba u infinitezimalnom obliku

Definiramo malu kvadratnu petlju infinitezimalnih dimenzija s kojom možemo graditi bilokakve oblike petlji i nađemo zakonitosti za nju



vektor normale određujemo pravilom desne ruke $\vec{n} = \vec{z}$

$\Delta S = \Delta y \Delta z$

Po 3MJ:

$$\oint_{ABCD} \vec{E}\, d\vec{l} = \int_{AB} \vec{E}\, d\vec{l} + \int_{BC} \vec{E}\, d\vec{l} + \int_{CD} \vec{E}\, d\vec{l} + \int_{DA} \vec{E}\, d\vec{l}$$

preživi samo E_y

Po y:
$$\left| \begin{array}{ll} AB & d\vec{l} = dy\,\vec{j} \\ CD & d\vec{l} = -dy\,\vec{j} \end{array} \right| = \int_{AB} \vec{E}\vec{j}\, dy - \int_{CD} \vec{E}\vec{j}\, dy$$

$$= E_y(x,y,z)\, dy - E_y(x,y,z+\Delta z)\, dy \;\Big|\; \frac{dz}{dz}$$

$$= -\frac{E_y(x,y,z+\Delta z) - E_y(x,y,z)}{dz}\, dS$$

$$= -\frac{\partial E_y}{\partial z}\, ds$$

Po z:

$$\left| \begin{array}{ll} BC & d\vec{l} = dz\vec{k} \\ DA & d\vec{l} = -dz\vec{k} \end{array} \right| = \int_{BC} \vec{E}\vec{k}\,dz - \int_{DA} \vec{E}\vec{k}\,dz =$$

$$= E_z(x, y+\Delta y, z)\,dz - E_z(x, y, z) \quad \Big| \frac{dy}{dy}$$

$$= \frac{E_z(x, y+\Delta y, z) - E_y(x, y, z)}{dy}\,ds$$

$$= \frac{\partial E_z}{\partial y}\,ds$$

Ukupan integral:

$$\oint_{ABCD} \vec{E}\,d\vec{l} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) dS$$

$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_{k} \vec{E}\,d\vec{l}}{\Delta S} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\Delta S}{\Delta S} = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}$$

Za svaku petlju u x,y i x,z ravnini dobivamo

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \qquad \mathrm{rot} \equiv \nabla\times$$

$$\left.\begin{array}{l} (\nabla\times\vec{E})_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ (\nabla\times\vec{E})_y = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ (\nabla\times\vec{E})_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{array}\right\} \quad \boxed{\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}}$$

Analogno za 4MJ $\boxed{\nabla\times\vec{B} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}$