EMP 1. ciklus

LORENZ i def. $\vec{E}$ i $\vec{B}$.

(1.) Ukupna sila $\vec{F}$ na točkasti naboj q koji se giba brzinom $\vec{v}$:

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$ - sila koja djeluje na naboj q koji se giba brzinom $\vec{v}$ u magnetskom polju $\vec{B}$ i na njega djeluje električno polje $\vec{E}$.

$$\vec{E} = \lim_{q \to 0}\left[\frac{F}{q}\right] \quad ; \quad \vec{v} = 0$$

Jakost električnog polja $\vec{E}$ $\left(\frac{V}{m}\right)$ omjer je sile na naboj u mirovanju iznosa q.
- uvijet da je naboj vrlo mali → točka
- ispitni naboj što manji $(q \to 0)$

$$\vec{v} \times \vec{B} = \frac{1}{q}\left(\vec{F} - q\vec{E}\right)$$

Od ukupne izmjerene sile odbije se sila električnog polja $q\vec{E}$ odredi se indukcija $\vec{B}$.

$\vec{B}$ pojava da se u vodiču u mag. polju ima komp. sile okomitu na polje indi. napon.

GUSTOĆE NABOJA I STRUJE

(3.) Gustoća naboja u nekoj točki prostora definira se kao:

$$\vec{\rho}(\vec{r}, t) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{dQ}{dV} \quad \left[\frac{C}{m^3}\right]$$

Gustoća struje koja teče okomito kroz element površine ΔS je:

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \vec{a}_v \left[\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta S}\right] = \vec{a}_v \frac{dI}{dS} \quad \left[\frac{A}{m^2}\right]$$

Ohmov zakon $\Big\}$ $\vec{J} = K\vec{E}$ ⇒ kondukcijske struje u vodljivim materijalima

K → provodnost

PLOŠNI NABOJ je naboj raspodjeljen na sloju debljine nula, pa je njegova gustoća σ na plohi S:

$$\sigma = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} = \frac{dQ}{dS} \left[\frac{C}{m^2}\right] = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\rho \cdot \cancel{\Delta S} \cdot \Delta l}{\cancel{\Delta S}} = \lim_{\substack{\Delta l \to 0 \\ \rho \to \infty}} (\rho \cdot \Delta l)$$

LINIJSKI NABOJ je naboj raspodjeljen po presjeku debljine nula, pa je njegova gustoća λ na liniji l:

$$\lambda = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta l} = \frac{dQ}{dl} \left[\frac{C}{m}\right] = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\rho \, \Delta S \cdot \cancel{\Delta l}}{\cancel{\Delta l}} = \lim_{\substack{\Delta S \to 0 \\ \rho \to \infty}} (\rho \, \Delta S)$$

4. JEDNADŽBA KONTINUITETA

- postulat o očuvanju električnog naboja

$\Rightarrow$ Tok električnog naboja (struja) I iz zatvorenog konačnog prostora volumena V kojeg obrubljuje ploha S jednak je smanjenju iznosa naboja Q unutar prostora:

$$I = -\frac{dQ}{dt} \qquad \boxed{\underbrace{\oint_S \vec{J} \, \vec{n} \, dS}_{I} = -\frac{d}{dt} \int_V \overbrace{\rho \, dV}^{Q}}$$

Gauss: $\oint_S \vec{A} \, \vec{n} \, dS = \int_V \nabla \vec{A} \, dV$

$$\Downarrow$$

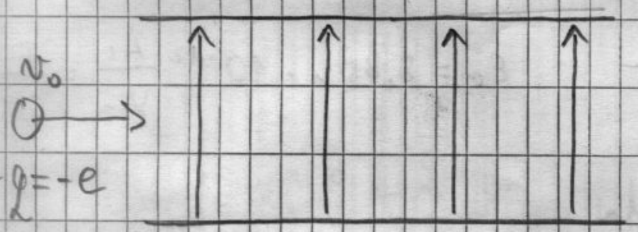
$$\int_V \nabla \vec{J} \, dV = \int_V -\frac{d}{dt} \rho \, dV$$

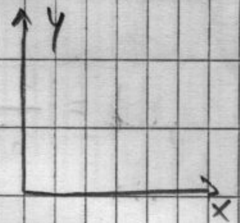
$$\operatorname{div} \vec{J} = -\frac{d\rho}{dt}$$

(2). Putanja čestice koja okomito upada u homogeno el. polje

$$\vec{E} \qquad m a = -e \vec{E} \qquad d\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{a_x} + \frac{dy}{dt}\vec{a_y}$$

$$\vec{v_0} \qquad m\frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}$$





$$\vec{v_0} = v_{0x}\vec{a_x}$$

$$\vec{E} = E\,\vec{a_y}$$

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\vec{a_x} + \frac{dv_y}{dt}\vec{a_y}$$

$$\underbrace{m\frac{dv_x}{dt}\vec{a_x}}_{0} + m\frac{dv_y}{dt}\vec{a_y} = -eE\vec{a_y}$$

(1) $\frac{dv_x}{dt} = 0 \quad \Big/ \int \quad v_x = \text{konst} = v_{0x}$

$$x(t) = \int v_x(t)\,dt = v_{0x}t + \overset{0}{x_0}$$

$$\boxed{x(t) = v_{0x}\,t}$$

$$t = \frac{x}{v_{0x}}$$

$$\boxed{y(x) = -\frac{1}{2}e\frac{E}{m}\frac{x^2}{v_{0x}^2}}$$

(2) $m\frac{dv_y}{dt} = -eE \quad \Big/ :m \int$

$$v_y = -e\frac{E}{m}t + \overset{0}{v_{y_0}}$$

$$y(t) = -e\frac{E}{m}\frac{t^2}{2} + \overset{0}{y_0}$$

$$\boxed{y(t) = -\frac{1}{2}e\frac{E}{m}t^2}$$

5. COULOMBOV ZAKON

Sila između dva vrlo mala nabijena tijela koja se nalaze u vakuumu na udaljenosti koja je puno veća od njihovih dimenzija proporcionalna je naboju na svakom tijelu i obrnuto proporcionalna kvadratu njihove udaljenosti:

$$F = k \frac{Q_1 Q_2}{R^2}, \quad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}, \quad \varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm} = \frac{F}{m}$$

raznoimeni naboji -> privlačna sila

istoimeni naboji -> odbojna sila

$$\vec{F}_{12} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_{12}^2} \vec{a}_{12} \qquad \vec{R}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = R_{12} \vec{a}_{12} \Rightarrow \vec{a}_{12} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

$$\vec{F}_{12} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_{12}^3} \vec{R}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

atom => Coulombova i centrifugalna

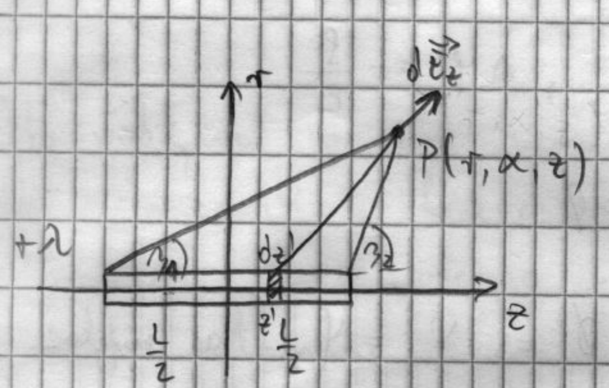
jezgra => Coulombova i nuklearna

(6.) ELEKTRIČNO POLJE JEDNOLIKO NABIJENE DUŽINE

Jednoliko nabijenu dužinu prikazujemo linijskim nabojem λ.

Jakost električnog polja dobijemo zbrajanjem diferencijalnih doprinosa naboja $dQ = \lambda dl$ na dužini l:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_l \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{R} = \int_l \frac{\lambda\, dl}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\vec{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_l \frac{\vec{R}}{R^3}\lambda(\vec{r})\,dl$$



$dQ = \lambda\, dz'$

$\vec{r} = r\vec{a}_r + z\vec{a}_z$

$\vec{r}' = z'\vec{a}_z$

$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$

$\vec{R} = r\vec{a}_r + (z + z')\vec{a}_z$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int dQ\, \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|^3}$$

$$\vec{E} = E_r\vec{a}_r + E_z\vec{a}_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \lambda \frac{r\vec{a}_r + (z-z')\vec{a}_z}{(r^2+(z-z')^2)^{\frac{3}{2}}}\,dz'$$

$$\vec{E}_r = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{r}{(r^2+(z-z')^2)^{\frac{3}{2}}}\,dz'$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{z+\frac{L}{2}}{\sqrt{(\frac{L}{2}+z)^2+r^2}} - \frac{z-\frac{L}{2}}{\sqrt{(z-\frac{L}{2})^2+r^2}}\right]$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\cos\beta_1 - \cos\beta_2\right]$$

$$E_z = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{(z-z')\,dz'}{(r^2+(z-z')^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{r}{\sqrt{r^2+(\frac{L}{2}-z)^2}} - \frac{r}{\sqrt{r^2+(\frac{L}{2}+z)^2}}\right]$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(\sin\beta_2 - \sin\beta_1\right)$$

7. POISSONOVA i LAPLACEOVA JEDNADŽBA

Poissonova jednadžba primjenjuje se na rješavanje potencijala u homogenom sredstvu:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \nabla(\varepsilon \cdot \vec{E}) = \rho_s \qquad \vec{E} = -\nabla \varphi$$

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho_s}{\varepsilon} \quad \Big| \quad \nabla \cdot (\varepsilon \cdot (-\nabla \varphi)) = \rho_s$$

Ako nema naboja u prostoru tada prelazi u Laplaceovu jdžb:

$$\Delta \varphi = 0$$

Rubni uvjeti: $\Delta \varphi_1 = -\frac{\rho}{\varepsilon}$, $\Delta \varphi_2 = -\frac{\rho}{\varepsilon}$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 0$$

1. $\varphi_1 - \varphi_2 = 0 \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2$ u cijelom V

2. $\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}$ tada u V vrijedi $\varphi_1 = \varphi_2 + \varphi_0$

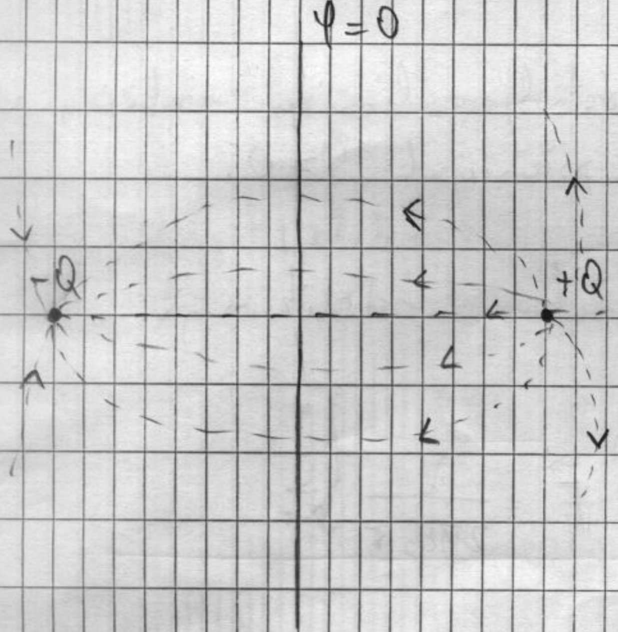
3. $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$ u jednom dijelu površine S, a $\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = 0$ na ostatku od S. u cijelom V vrijedi $\varphi_1 = \varphi_2$.

1. Dirichletovi uvjeti φ

2. Neumannovi uvjeti $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$

3. Mješani uvjeti: kombinacija 1. i 2.

8. METODA ODSLIKAVANJA



Pozitivni točkasti naboj nalazi se ispred beskonačne vodljive uzemljene ravnine. Sve silnice polja točkastog naboja završavaju na vodljivoj ravnini i na njoj influenciraju negativne naboje. Influencirani naboj je $-Q$ i plošna gustoća naboja opada s udaljenosti od točkastog naboja.

Ako vodljivu ravninu zamjenimo s točkastim nabojem $-Q$, smještenim na udaljenosti a lijevo od ravnine, na mjestu ravnine biti će potencijal $\varphi = 0$, te će jakost polja biti normalna na ravninu u svim točkama.

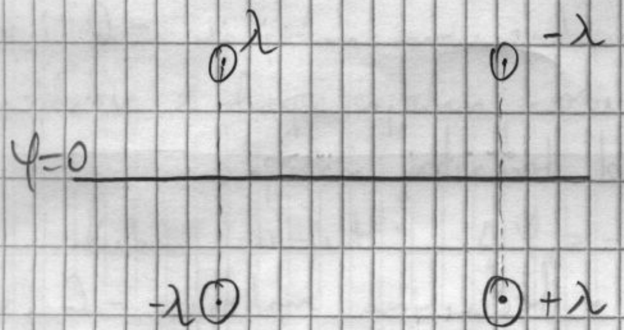
EL. POLJE – odslikava se naboj obrnutog predznaka na udaljenosti.

STRUJNO POLJE – strujni izvor istog predznaka na udaljenosti

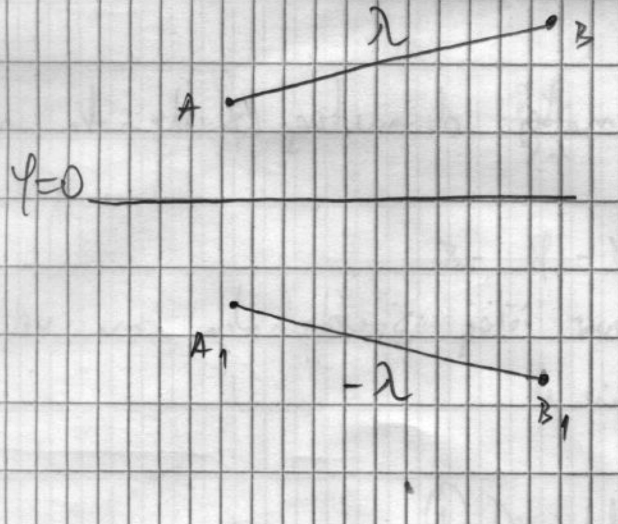
9. POLJE VODA IZNAD POVRŠINE TLA

Vod iznad površine tla predstavlja linijski naboj, a tlo vodljivu ravninu čiji je potencijal $\varphi = 0$.

Za račun polja koristi se metoda odslikavanja.



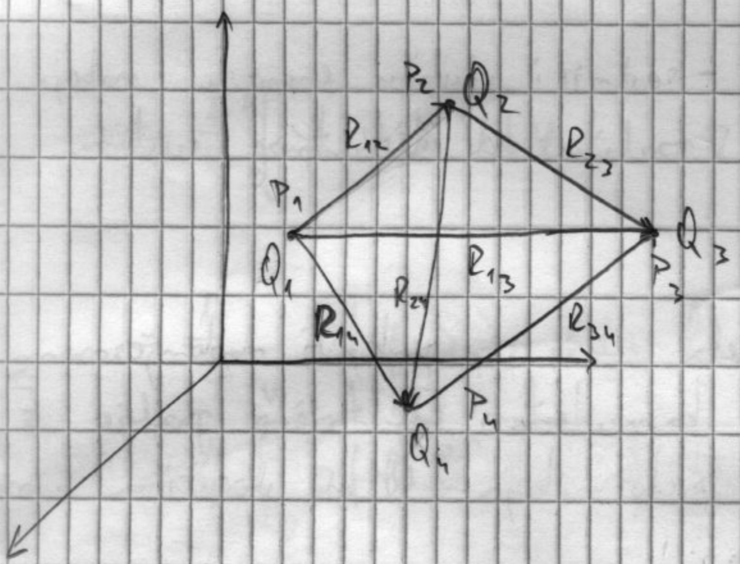
$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\,\vec{a}_r$$



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{l}\frac{\vec{R}}{|\vec{R}|^3}\,\lambda(\vec{r})\,dl$$

10. ENERGIJA SUSTAVA TOČKASTIH NABOJA

IZVOD ZA SUSTAV OD 4 NABOJA TE ANALOGIJOM NA n



Q_1 u P_1 nema rada jer nema polja

Q_2 u P_2 polje od Q_1

$$W_2 = \varphi_{12} \cdot Q_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon R_{12}} Q_2$$

Q_3 u P_3 polja Q_1 i Q_3

$$W_3 = \varphi_{13} Q_3 + \varphi_{23} Q_3 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon R_{13}} Q_3 + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon R_{23}} Q_3$$

$$W_4 = \varphi_{14} Q_4 + \varphi_{24} Q_4 + \varphi_{34} Q_4 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon R_{14}} Q_4 + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon R_{24}} Q_4 + \frac{Q_3}{4\pi\varepsilon R_{34}} Q_4$$

$$W = W_2 + W_3 + W_4$$

$$= \varphi_{12} Q_2 + \varphi_{13} Q_3 + \varphi_{23} Q_3 + \varphi_{14} Q_4 + \varphi_{24} Q_4 + \varphi_{34} Q_4$$

$$= \frac{1}{2}\Big[(\varphi_{21} + \varphi_{31} + \varphi_{41}) Q_1 + (\varphi_{12} + \varphi_{32} + \varphi_{42}) Q_2 + (\varphi_{13} + \varphi_{23} + \varphi_{43}) Q_3 + (\varphi_{14} + \varphi_{24} + \varphi_{34}) Q_4 \Big]$$

$$W = \frac{1}{2}(\varphi_1 Q_1 + \varphi_2 Q_2 + \varphi_3 Q_3)$$

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} Q_i \cdot \varphi_i$$

$$\varphi_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \varphi_{ji}$$

11. Energija prostorne raspodjele naboja i sustava vodljivih tijela

Naboj prostorne gustoće ρ u volumenu V:

$dQ = \rho\, dV \Rightarrow$ energija određena s $W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} Q_i \cdot \varphi_i$

$W = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi \, dV$ - sadrži i vlastitu energiju naboja za razliku od diskretnog sustava

Sustav vodljivih tijela može se prikazati nadomjesnom shemom parcijalnih kapaciteta. Električno polje $\vec{E}$ u tom sustavu povezano je preko naboja Q na vodičima s naponom U.

12. Energija prikazana vektorima električnog polja

$$W = \frac{1}{2}\int_V \rho \varphi \, dV \qquad \operatorname{div} \vec{D} = \rho_s$$

$$W = \frac{1}{2}\int_V \varphi (\nabla \cdot \vec{D}) \, dV \qquad \nabla(f \cdot \vec{A}) = f(\nabla \vec{A}) + \vec{A}(\nabla f)$$

$$= \frac{1}{2}\int_V \nabla(\varphi \cdot \vec{D}) - \vec{D}(\nabla \varphi) \, dV$$

$$= \frac{1}{2}\int_V \nabla(\varphi \cdot \vec{D}) \, dV - \frac{1}{2}\int_V (\vec{D} \cdot \nabla\varphi) \, dV \qquad \nabla \varphi = -\vec{E}$$

$$= \frac{1}{2}\int_V \nabla(\varphi \cdot \vec{D}) \, dV + \frac{1}{2}\int_V \vec{D} \cdot \vec{E} \, dV \qquad \int_V \nabla \vec{A} \cdot dV = \oint_S \vec{A}\, \vec{n}\, dS$$

$$= \frac{1}{2}\oint_S \varphi \vec{D}\, \vec{n}\, dS + \underbrace{\frac{1}{2}\int_V \vec{D} \cdot \vec{E} \, dV}_{\text{energija u V gdje vlada el. polje}}$$

doprinos ener. izvan V

$\frac{1}{r} \quad \frac{1}{r^2} \quad r^2$

$r \to \infty \qquad \oint \to 0$

$$= \frac{1}{2}\int_V \vec{D}\vec{E} \, dV = \frac{1}{2}\int_V \varepsilon \vec{E}^2 \, dV = \frac{1}{2}\int_V \varepsilon E^2 \, dV$$

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\int_V \varepsilon E^2 \, dV \qquad w = \frac{1}{2}\varepsilon E^2}$$

13. KAPACITET I ENERGIJA POHRANJENA U KONDENZATORU

vodiču dovodimo naboj raste potencijal:

$$Q = C\varphi \Rightarrow C = \frac{Q}{\varphi} \left[\frac{C}{V} = F\right]$$ – ne vrijedi u dielektricima

KUGLA

$$\vec{E}(r) = \vec{a}_r \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} \Rightarrow \varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r}$$

$$\varphi(R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon R}$$

$$C = \frac{Q}{\varphi(R)} = 4\pi\varepsilon R$$

kapacitet vodljivog tijela možemo povećati tako da mu u blizinu dovedemo vodljivo tijelo suprotnog predznaka

KONDENZATOR → dva međusobno izolirana vodljiva tijela sa istim nabojem

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{-\int_2^1 \vec{E}\, d\vec{l}} = \frac{\oint_S \vec{D}\, \vec{n}\, dS}{U}$$

ENERGIJA KONDENZATORA

energija na + i – elektrodi: $W_+ = \frac{1}{2}\int_S \sigma \varphi_1\, dS = \frac{1}{2}\varphi_1 \int_S \sigma\, dS = \frac{1}{2} Q\varphi_1$

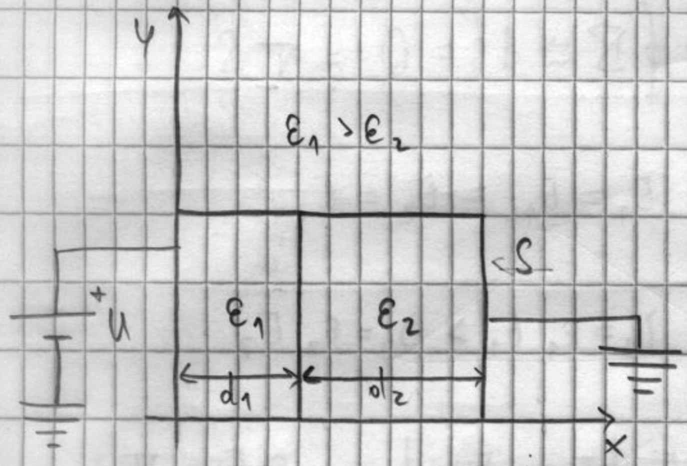
$$W = W_+ + W_- = \frac{1}{2} Q(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2} Q U_{12}$$

$$W_- = \frac{1}{2}\int_S \sigma(-\varphi_2)\, dS = \frac{1}{2}(-\varphi_2)\int_S \sigma\, dS = -\frac{1}{2} Q\varphi_2$$

φ_1 i φ_2 = konst

$$\underline{W = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}}$$

14. Kapacitet dvoslojnog pločastog kondenzatora (granica paralelna)



$$D_{1n} = D_{2n}$$

$$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}$$

$$\oint_S D_n \, dS = Q = \sigma S$$

$$DS = \sigma S = Q$$

$$\varepsilon_1 E_1 = \sigma \Rightarrow E_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_1}, \quad E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_2}$$

$$U_{12} = -\int_2^1 \vec{E}\, d\vec{l}$$

$$= -\int_{d_1+d_2}^{d_1} E_2\, dx - \int_{d_1}^{0} E_1\, dx = E_2 \Big|_{d_1}^{d_1+d_2} + E_1 \Big|_{0}^{d_1}$$

$$= E_2 d_2 + E_1 d_1 = U$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{Q}{S} \cdot \frac{1}{\varepsilon}$$

$$U = \frac{Q}{S\varepsilon_1} d_1 + \frac{Q}{S\varepsilon_2} d_2 =$$

$$= \frac{Q}{S}\left(\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}\right)$$

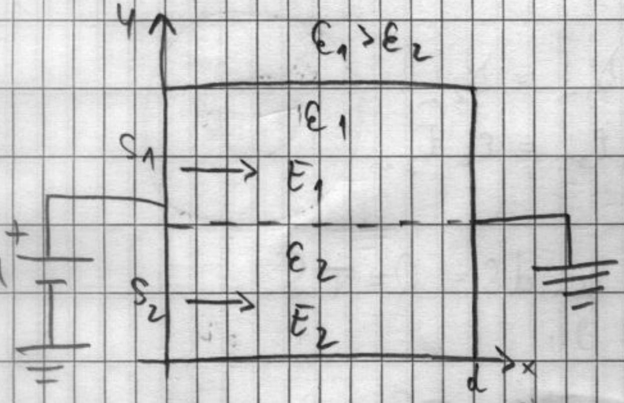
$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\cancel{Q}}{\frac{\cancel{Q}}{S}\left(\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}\right)}$$

$$C = \frac{\varepsilon S}{d}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

$\Rightarrow$ serijski spoj kondenzatora

15 Kapacitet dvoslojnog pločastog kondenzatora (okomita granica)



$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q = \sigma S$$

$$E_1 = E_{1t} = E_2 = E_{2t}$$

$$D_1 = \varepsilon_1 E_1 > D_2 = \varepsilon_2 E_2$$

$$U_{12} = -\int_d^0 \vec{E}_1 d\vec{l} = E_1 d = E_2 d \qquad \varepsilon_1 E_1 = \sigma \qquad E_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_1}$$

$$C = \frac{\varepsilon S}{d}$$

$$Q = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \oint_{S_1} \vec{D}_1 \cdot d\vec{S}_1 + \oint_{S_2} \vec{D}_2 \cdot d\vec{S}_2$$

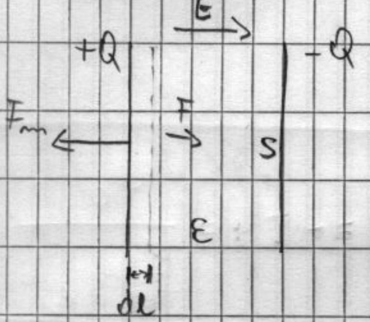
$$= D_1 S_1 + D_2 S_2 = \varepsilon_1 E_1 S_1 + \varepsilon_2 E_2 S_2$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon_1 E_1 S_1 + \varepsilon_2 E_2 S_2}{E_1 d} \qquad E_1 = E_2 = E$$

$$= \frac{\varepsilon_1 S_1 \cancel{E} + \varepsilon_2 S_2 \cancel{E}}{\cancel{E} d} = \frac{\varepsilon_1 S_1}{d} + \frac{\varepsilon_2 S_2}{d} = C_1 + C_2$$

paralelni spoj kondenzatora

16. SILE U ELEKTRIČNOM POLJU - KONSTANTNI NABOJI I KONST. POTENCIJALI

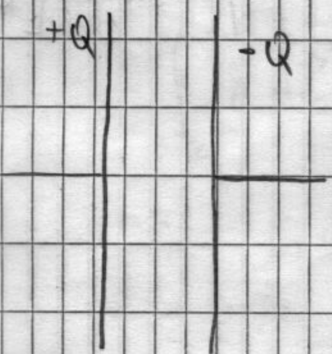


virtualni pomak: - izolirani sustav

$$dW_m = dW_e \Rightarrow F_m \cdot dl = w \cdot dV$$
$$= \frac{1}{2}\varepsilon E^2 dV$$
$$= \frac{1}{2}\varepsilon E^2 S\,dl$$

$$F_e = F_m = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 S$$

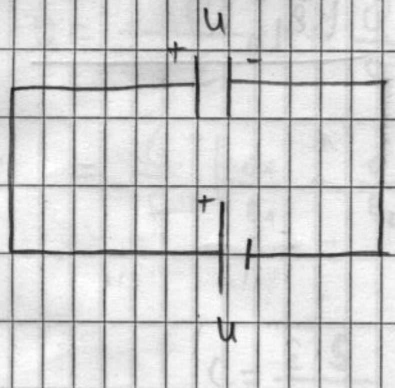
KONSTANTNI NABOJ (IZOLIRANI SUSTAV)



$$\vec{F_s} = -\frac{dW}{ds}\vec{a_s} = -\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{Q^2}{2C}\right)\vec{a_s} = -\frac{Q^2}{2}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{C}\right)\vec{a_s}$$

$$W = \frac{Q^2}{2C}$$

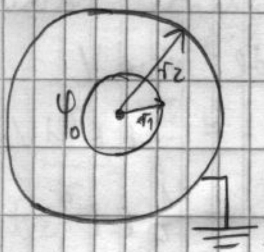
KONSTANTNI POTENCIJAL (NEIZOLIRAN SUSTAV)



$$\vec{F} = \frac{\partial W}{\partial s}\vec{a_s} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{2}CU^2\right)\vec{a_s}$$

$$W = \frac{1}{2}CU^2 \qquad = \frac{U^2}{2}\frac{\partial}{\partial s}C\,\vec{a_s}$$

(17.) Sile na elektrode izoliranog kuglastog kondenzatora



$$\vec{E} = \vec{a}_r E$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}$$

$$d\vec{l} = \vec{a}_r \, dr$$

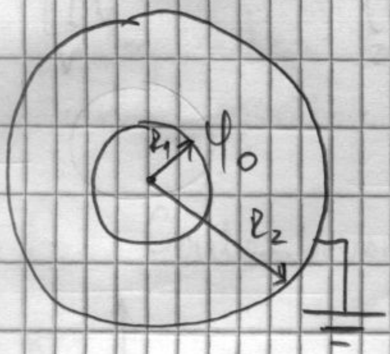
$$\varphi_0 - 0 = U = -\int_B^A \vec{E}\, d\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(-\int_{R_2}^{R_1} \frac{dr}{r^2}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right]$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{4\pi\varepsilon}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}}$$

$$F_{R_1} = -\frac{\partial W}{\partial R_1} = -\frac{\partial}{\partial R_1}\left(\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}\right) = \underline{\frac{4\pi\varepsilon_0}{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)^2} \cdot \frac{1}{R_1^2}}$$

$$\underline{F_{R_2} = -\frac{\partial W}{\partial R_2} = \frac{-4\pi\varepsilon_0}{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)^2} \cdot \frac{1}{R_2^2}}$$

18. Sile na elektrode cilindričnog kondenzatora spojenog na izvor napona



$$Q = \oint_S \vec{D}\,\vec{n}\,dS$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\vec{n} = \vec{a_r}$$

$$S = 2r\pi l$$

$$\vec{E} = \frac{\varphi_0}{\ln\frac{R_2}{R_1} r}\vec{a_r}$$

$$Q = D \cdot S = \frac{2\pi l}{\ln\frac{R_2}{R_1}}\varphi_0$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\varphi_0} = \frac{2\pi l}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$$

$$\vec{F}_{R_1} = \frac{\partial W}{\partial R_1}\vec{a}_{R_1} = \frac{\partial}{\partial R_1}\frac{1}{2}CU^2\vec{a}_{R_1} = \frac{1}{2}U^2\frac{\partial C}{\partial R_1}\vec{a}_{R_1}$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}U^2\frac{2\pi\varepsilon_0}{\left(\ln\frac{R_2}{R_1}\right)^2}\cdot\frac{1}{R_1} = \frac{U^2\pi\varepsilon_0}{R_1\left(\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)\right)^2}$$

$$\vec{F}_{R_2} = \frac{\partial W}{\partial R_2}\vec{a}_{R_2} = \frac{1}{2}U^2\frac{\partial C}{\partial R_1}\vec{a}_{R_2} = -\frac{U^2\pi\varepsilon_0}{R_2\left(\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)\right)^2}$$

19. Gaussov zakon za električno polje

$$\oint_S \vec{D}\,\vec{n}\,dS = \int_V \rho_s\,dV \qquad \oiint_S \vec{D}\,\vec{n}\,dS = \iiint_V \nabla \vec{D}\,dV$$

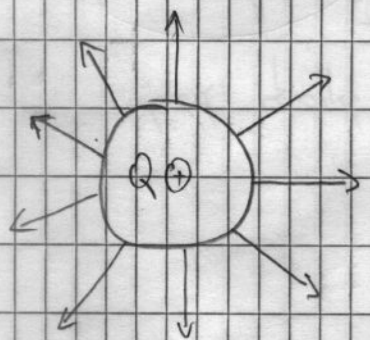
$$\int_V \nabla \vec{D}\,dV = \int_V \rho_s\,dV$$

$$\nabla \vec{D} = \rho_s$$

20. IZVOD GAUSSOVA ZAKONA IZ COULOMBOVOG ZAKONA

Tok električnog polja kroz bilokakvu zatvorenu površinu oko točkastog naboja Q, uvijek je isti i neovisan o obliku zatvorene površine.

Iz Coulombovog zakona: $\vec{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{a_r} = \text{konst.}$



Vektor $\vec{D}$ na površini kugle je isto konst.

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} = \vec{a_r}\frac{Q}{4\pi R^2} = \text{konst.}$$

$\vec{n} = \vec{a_r}$ pa tok iz kugle:

$$\phi_e = \oiint_S \vec{D}\vec{n}\, dS = \oiint_S \frac{Q}{4\pi R^2}\, dS$$

$$= \frac{Q}{4\pi R^2} S = \frac{Q}{4\pi R^2} \cdot 4\pi R^2 = Q$$

što vrijedi za bilo koju zatvorenu površinu

Ako postavimo više naboja vrijedit će: načelo superpozicije

$\oiint_S \vec{D}\vec{n}\, dS = \sum Q$ te prelaskom na diferencijalne dijelove gustoće naboja vrijedi:

$$\boxed{\oiint_S \vec{D}\vec{n}\, dS = \iiint_V \rho_s\, dV}$$

21. SKALARNI ELEKTRIČNI POTENCIJAL - VEZA SKALARNOG ELEKTRIČNOG POTENCIJALA I RADA

ELEKTRIČNI POTENCIJAL - omjer potencijalne energije naboja u točki polja i tog naboja

$$\varphi(a) = \frac{W_p(a)}{q} \qquad q = 1\,C \quad \varphi(a) = W_p(a) \text{ po iznosu}$$

Potencijal možemo izračunati iz poznate jakosti polja:

$$\varphi(a) = -\int_{\infty}^{a} \vec{E} \cdot d\vec{l} \ ; \quad \varphi(\infty) = 0$$

Potencijalna energija jednaka je radu koji treba izvršiti da bi naboj q iz beskonačnosti doveli u točku a (na potencijal $\varphi(a)$):

$$W_p = -\int_{\infty}^{a} q\vec{E}\, d\vec{l} = -q\,\varphi(a)$$

Ako mičemo naboj od točke a do točke b vrijedi:

$$W_p(a) - W_p(b) = -\int_{\infty}^{a} q\vec{E}\, d\vec{l} + \int_{\infty}^{b} q\vec{E}\, d\vec{l} = -q\int_{a}^{b} \vec{E}\, d\vec{l} = q\left(\varphi(a) - \varphi(b)\right)$$

promjena energije jednaka je radu $\qquad = q\,U_{ab}$

22. POTENCIJAL TOČKASTOG NABOJA; POTENCIJAL JEDNOLIKO NABIJENE DUŽINE

Polje točkastog naboja:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\vec{a}_r$$

$$\varphi(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}\,d\vec{l} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\infty}^{r} \vec{a}_r \frac{1}{r^2}$$

$$= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r=\infty}^{r}$$

$$= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(-\frac{1}{r}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

DUŽINA:

linijski naboj λ na dužini l $\qquad dQ = \lambda\,dl$

$$R = |\vec{R}| = |\vec{r} - \vec{r}\,'|$$

$$\varphi(\vec{r}) = \int_l \frac{dQ}{4\pi\varepsilon R} = \int \frac{\lambda\,dl}{4\pi\varepsilon R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int \frac{\lambda\,dl}{R}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int \frac{\lambda\,dl}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

23. IZVOD VEZE JAKOSTI ELEKTRIČNOG POLA I SKALARNOG ELEKTRIČNOG POTENCIJALA

Potencijal u nekoj točki je omjer potencijalne energije u toj točki polja i iznosa naboja :

$$\varphi(a) = \frac{W_p(a)}{q}$$

Potencijalna energija naboja q u nekoj točki električnog polja a jednaka je radu kojeg je potrebno izvršiti da bi se naboj q iz beskonačnosti ($\vec{E}=0$) doveo u točku polja a, suprotno djelovanju sile polja.

$$W_p(a) = -\int_{\infty}^{a} \vec{F_e}\, d\vec{l} = -\int_{\infty}^{a} q\vec{E}\, d\vec{l} \Rightarrow$$

$$\varphi(a) = -\frac{1}{q}\int_{\infty}^{a} q\vec{E}\, d\vec{l} = -\frac{1}{q}\cdot q\int_{\infty}^{a} \vec{E}\, d\vec{l} = -$$

$$\boxed{\varphi(a) = -\int_{\infty}^{a} \vec{E}\, d\vec{l}}$$

24. DOKAZ NEOVISNOST RAZLIKE POTENCIJALA O PUTU INTEGRACIJE

$$\varphi(a) = -\int_{\infty}^{a} \vec{E}\, d\vec{l}$$

$$\varphi(a) - \varphi(b) = -\int_{b}^{a} \vec{E}\, d\vec{l} \qquad \varphi(b) - \varphi(a) = -\int_{a}^{b} \vec{E}\, d\vec{l}$$

$$-\int_{b}^{a} \vec{E}\, d\vec{l} - \int_{a}^{b} \vec{E}\, d\vec{l} \Rightarrow \oint_{l} \vec{E}\, d\vec{l} = 0$$

25. IZVOD OHMOVOG ZAKONA U ELEMENTARNOM OBLIKU

$\vec{F} = -e\vec{E}$ $\qquad \rho = -N \cdot e$ — broj elektrona u jedinici volumena

$\vec{v} = \mu \vec{E}$ — pokretljivost

$\vec{v}$ — brzina elektrona

$$\vec{J}_s = \rho_s \cdot \vec{v} = -Ne\,\vec{v} = \underbrace{-Ne\mu}_{K} \cdot \vec{E}$$

$$\boxed{\vec{J}_s = K\vec{E}}$$ OHMOV ZAKON

$$U = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 \frac{\vec{J}}{K}\, d\vec{l} \qquad \vec{J} = \frac{I}{S}$$

$$= I \int_1^2 \frac{1}{K} \cdot \frac{dl}{S} = I\, \frac{1}{K} \cdot \frac{l}{S} \qquad R = \frac{1}{K} \cdot \frac{l}{S}$$

$$\boxed{U = I \cdot R}$$

26. PONAŠANJE SLOBODNIH NABOJA U VODIČU U VANJSKOM ELEKTRIČNOM POLJU (RELAKSACIJA)

Ako se vodljivi materijal postavi u električno polje, ono će na slobodne elektrone djelovati silom usmjerenom suprotno od smjera električnog polja.

Slobodni elektroni će se grupirati uz površinu vodiča na dijelu gdje polje ulazi u vodič, a na suprotnoj strani ostat će manjak slobodnih elektrona.

Ova pojava naziva se električna influencija, a razdvojeni pozitivni i negativni naboj na vodiču naziva se inducirani naboj.

Inducirani naboj stvara u vanjskom prostoru svoje vlastito električno polje koje se superponira na vanjsko narinuto polje.

Djelovanje vanjskog električnog polja na vodič može se nadomjestiti odgovarajućom raspodjelom plošnog slobodnog naboja na vodič gustoće σ_{inf}.

Influencirani naboj nalazi se na površini vodiča, jer u unutrašnjosti vodiča ne može biti naboja – jer nema polja $\Rightarrow$ influencirani naboj poništava polje u vodiču.

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{inf} = 0$$

27. IZOLATORI U ELEKTRIČNOM POLJU - POLARIZACIJA, GUSTOĆA ELEKTRIČNOG TOKA - DEFINICIJA I VEZA S POLARIZACIJOM

Ne posjeduju slobodne elektrone koji mogu napuštati matični atom.
Pod utjecajem polja javlja se električna polarizacija → poremećaj u raspodjeli pozitivnih i negativnih naboja.

Vanjsko polje uzrokuje pomak jezgre u smjeru polja i izduženje elektronske putanje suprotno od smjera polja.
Taj poremećaj prikazujemo kao dipol:

$\vec{p} = q\vec{a}$

$\vec{a}$ od negativnog k pozitivnom naboju

q - količina naboja jednog od 2 točkasta naboja

Polarizacijski naboji stvara $\vec{E}_{pol}$ suprotno usmjereno od vanjskog polja.
Polje unutar dielektrika: $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{pol} < \vec{E}_0$

$\vec{E}_{pol} = -\chi_e \vec{E}$

↳ dielektrična susceptibilnost

ukupno polje: $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{pol} = \vec{E}_0 - \chi_e \vec{E} \;/\cdot \varepsilon_0$

$$\varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 \vec{E}_0 - \underbrace{\varepsilon_0 \cdot \chi_e \vec{E}}_{\vec{P}\text{ - vektor polarizacije}}$$

$\Leftarrow$

$$\vec{E} = \frac{\vec{D} - \vec{P}}{\varepsilon_0} = \vec{E}_0 - \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_r}$$

$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}_0$ - vektor el. indukc.

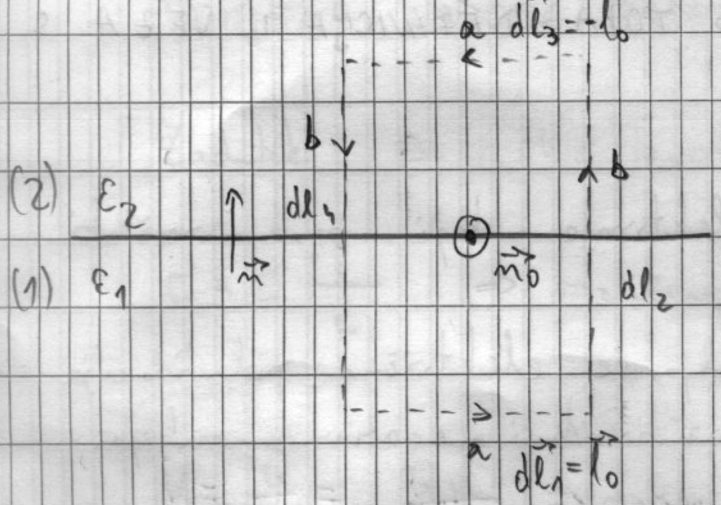
$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

$= \varepsilon_0 \vec{E}(1 + \chi_e) = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$

↳ relativna dielektrična konst.

$$\boxed{\vec{P} = -\varepsilon_0 \vec{E}_{pol}}$$

(28) UVJETI NA GRANICI - IZVOD UVJETA ZA JAKOST POLJA



$$\oint_C \vec{E}\,d\vec{l} = \emptyset$$

$$\vec{l}_0 = \vec{n} \times \vec{n}_0$$

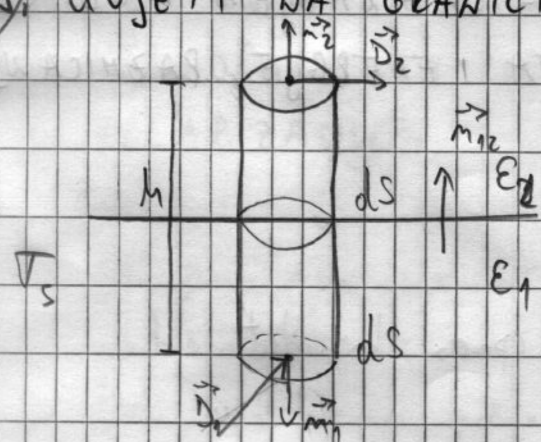
$$\lim_{b \to 0} \oint_C \vec{E}\,d\vec{l} = \lim_{b \to 0} a\vec{E}_1 \vec{l}_0 - a\vec{E}_2 \vec{l}_0 + \text{doprinos od } b$$

$$= \left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2\right) \cdot \vec{l}_0 = \emptyset$$

$$\left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2\right)\left(\vec{n} \times \vec{n}_0\right) = \vec{n}_0 \left[\left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2\right) \times \vec{n}\right] = \emptyset$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} = \vec{C} \cdot \left(\vec{A} \times \vec{B}\right) \qquad \vec{n} \times \left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1\right) = \emptyset$$

29. UVJETI NA GRANICI – IZVOD UVJETA ZA GUSTOĆU EL. TOKA



Gauss: $\oint_S \vec{D}\,\vec{n}\,dS = \int_V \rho\,dV$

$\vec{D}_1\vec{n}_1\,dS + \vec{D}_2\vec{n}_2\,dS + \text{doprinos plašta} =$

$\rho_s\,dS \cdot h$

$$\lim_{h\to 0}\left[-\vec{D}_1\vec{n}_{12}\,dS + \vec{D}_2\vec{n}_{12}\,dS + \text{dop. plašt}\right] = \lim_{h\to 0} \rho\,dS \cdot h$$

$$\vec{n}_{12}(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma_s$$

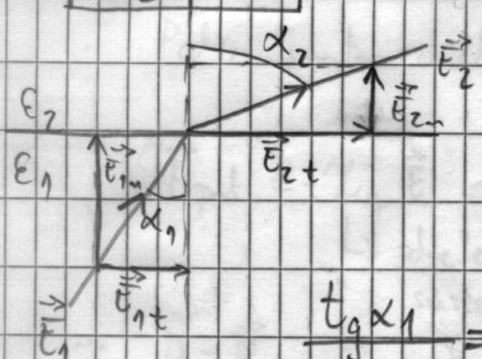
DIELEKTRIK – DIELEKTRIK

$\sigma_s = \emptyset$ $\quad \vec{n}_{12}(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \emptyset$

$D_{2n} - D_{1n} = \emptyset$

$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n} \Leftarrow \boxed{D_{2n} = D_{1n}}$

$\boxed{\dfrac{E_{1n}}{E_{2n}} = \dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$



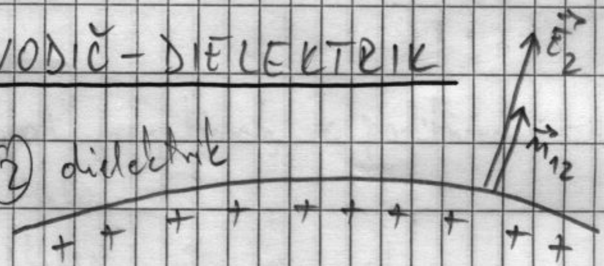
$\mathrm{tg}\,\alpha_1 = \dfrac{E_{1t}}{E_{1n}}$

$\mathrm{tg}\,\alpha_2 = \dfrac{E_{2t}}{E_{2n}}$

$$\frac{\mathrm{tg}\,\alpha_1}{\mathrm{tg}\,\alpha_2} = \frac{E_{1t}}{E_{2t}} \cdot \frac{E_{2n}}{E_{1n}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

$\Rightarrow E_{1t} = E_{2t}$

VODIČ – DIELEKTRIK



$\vec{n}_{12}(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma_s$

nema polja u vodiču

$\vec{E}_{1t} = \emptyset \Rightarrow E_{2t} = \emptyset$

$\vec{E}_{1n} = 0 \Rightarrow \vec{n}_{12}\vec{D}_2 = \sigma_s$

$\boxed{D_{2n} = \sigma_s \qquad E_{2n} = \dfrac{\sigma_s}{\varepsilon}}$

30. PLOČASTI ZRAČNI KONDENZATOR - NABIJEN I ODSPOJEN - PROMJENA NAPONA, KAPACITETA I ENERGIJE RAZMICANJEM

Zadatak 13. i 14. izvodi:

$$C = \varepsilon \frac{S}{d}$$ => razmicanjem opada kapacitet

$$U = \frac{Q}{C} = \frac{Qd}{\varepsilon S}$$ => napon raste

$$W = \frac{1}{2} Q \cdot U = \frac{1}{2} \frac{Q^2 d}{\varepsilon S}$$ => energija raste razmicanjem

(1.) JEDNADŽBE STATIČKOG STRUJNOG POLJA I UVJETI NA GRANICI

$\boxed{\text{OVO JE ODG. NA 2. PITANJE}}$

Statičko strujno polje → električno polje u vodičima koje uzrokuje vođenje struje.

Prema analogiji sa statičkim električnim poljem vrijedi:

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = \phi \qquad \nabla(\kappa \vec{E}) = \phi$$

$$\vec{J} = \kappa \vec{E} \qquad \nabla(\kappa(-\nabla \varphi)) = \phi$$

$$\vec{E} = -\nabla \varphi \qquad \Delta \varphi = \phi$$

ANALOGNE VELIČINE
$\vec{D} \to \vec{J}$
$\vec{E} \to \vec{E}$
$\varepsilon \to \kappa$
$\varphi \to \varphi$
$\phi_e \to I$
$C \to G$

$$\nabla \vec{J} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \phi \qquad \nabla \vec{E} = -\frac{1}{\kappa}\frac{\partial \varphi}{\partial t} \qquad \nabla \vec{D} = \rho_s \Rightarrow \nabla \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\vec{J} = \kappa \vec{E} \qquad \frac{\rho}{\varepsilon} = -\frac{1}{\kappa}\frac{\partial \rho}{\partial t} \Rightarrow \frac{\kappa}{\varepsilon}\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

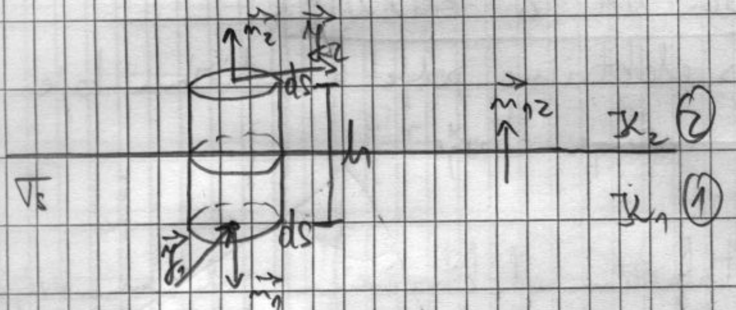
$$\nabla \times \vec{E} = \phi \qquad \rho = \rho_0 e^{-\left(\frac{\kappa}{\varepsilon}\right)t}$$

↳ konstanta relaksacije

$$\oint_S \vec{J}\vec{n}\, dS = \phi, \quad \oint_C \vec{E}\, d\vec{l} = \phi$$

$$\Delta \varphi = \phi$$

UVJETI NA GRANICI



$$\oint_S \vec{J}\,\vec{n}\,dS = -\frac{d}{dt}\int_V \rho_s\,dV$$

$$\vec{J}_1 \vec{n}_1 dS + \vec{J}_2 \vec{n}_2 dS + \text{dop. kroz plašt}$$

$$= -\frac{d}{dt}(\rho_s h\, dS)$$

$h \to 0$

$$\vec{n}_{12}(\vec{J}_2 - \vec{J}_1) = -\frac{d\sigma_s}{dt} = \emptyset$$

$$E_{1t} = E_{2t} \Rightarrow \vec{n}_{12} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \emptyset$$

$$\frac{J_{1t}}{J_{2t}} = \frac{\kappa_1}{\kappa_2}$$

$$J_{1n} = J_{2n} \Rightarrow \frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1}$$

ZAKON LOMA ISTO KAO I KOD STATIČKOG ELEKTRIČNOG POLJA.

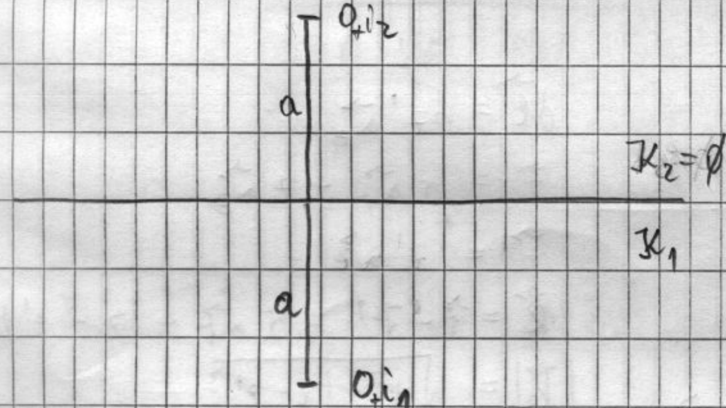
2. ANALOGIJA STATIČKOG ELEKTRIČNOG I STATIČKOG STRUJNOG POLJA I ODSLIKAVANJE U STATIČKOM STRUJNOM POLJU

PRVI DIO ANALOGIJE KOD 1. ZADATKA

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \emptyset$$

HOMOGENI DIELEKTRIK BEZ NABOJA: $\rho_s = 0$	VODLJIVI MATERIJAL: $\frac{\partial \rho}{\partial t}$
Gauss: $\nabla \vec{D} = 0$; $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, $\vec{E} = -\nabla \varphi$, $\nabla \times \vec{E} = \emptyset$	Jdžb. kont: $\nabla \vec{J} = 0$; $\vec{J} = \kappa \vec{E}$; $\vec{E} = -\nabla \varphi$, $\nabla \times \vec{E} = \emptyset$
Laplace: $\Delta \varphi = \emptyset$	Laplace: $\Delta \varphi = \emptyset$
Električni tok (vektora $\vec{D}$): $\phi_e = \int_S \vec{D}\,\vec{n}\,dS$	Strujni tok: $I = \int_S \vec{J}\,\vec{n}\,dS$
Kapacitet: $C = \frac{Q}{U_{ab}} = \frac{\oint_S \vec{D}\,\vec{n}\,dS}{-\int_b^a \vec{E}\,d\vec{l}}$	Vodljivost: $G = \frac{I}{U_{ab}} = \frac{\int_S \vec{J}\,\vec{n}\,dS}{-\int_a^b \vec{E}\,d\vec{l}}$

ODSLIKAVANJE



$$J_{1n} = J_{2n} \,;\; J_{2n} = \emptyset \Rightarrow J_{1n} = \emptyset$$

$$E_{1n} = E_{2n} = \emptyset$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \emptyset$$

Kada odslikamo istoimeni strujni izvor s druge strane dobijemo zadovoljen uvjet da na granici postoji samo tangencijalna komponenta polja.

3. GUBICI SNAGE U VODIČU U STATIČKOM STRUJNOM POLJU

Gubitak energije u statičkom strujnom polju od A do B

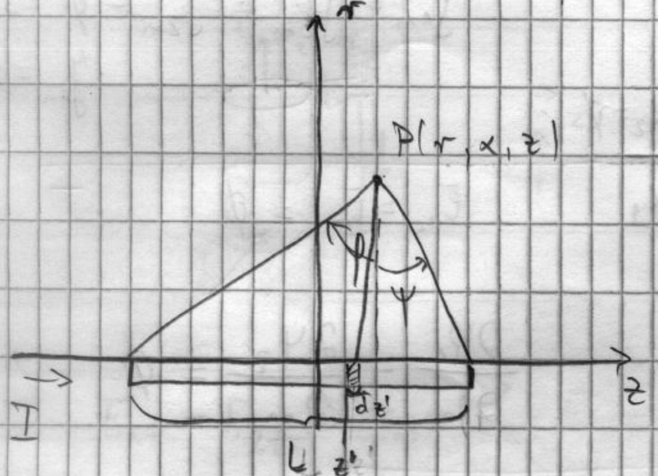
$$dW = \underbrace{dq}_{\vec{J}\vec{n}\,dS\,dt}\left[\varphi(A) - \varphi(B)\right] = \vec{J}\,\vec{n}\,dS\,dt \cdot \vec{E}\,d\vec{s} = \vec{J}\cdot\vec{E}\,dV\,dt$$

Gubitak snage: $P = \frac{dW}{dt} = \int_V \vec{J}\cdot\vec{E}\,dV$

$$\nabla\cdot(\varphi\cdot\vec{J}) = \varphi\,\nabla\cdot\vec{J} + (\nabla\varphi)\cdot\vec{J} = 0 - \vec{E}\cdot\vec{J}$$

$$P = -\int_V \nabla\cdot(\varphi\cdot\vec{J})\,dV = \oint_S \varphi\,\vec{J}\,\vec{n}\,dS = I\cdot\varphi_1 - I\varphi_2 = I\cdot U = I^2 R$$

4. BIOT-SAVARTOV ZAKON I MAGNETSKA INDUKCIJA KRATKE RAVNE STRUJNICE



$$d\vec{l} = dz'\,\vec{a}_z$$

$$\vec{r} = r\,\vec{a}_r + z\,\vec{a}_z$$

$$\vec{r}\,' = z'\,\vec{a}_z$$

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}\,' = r\,\vec{a}_r + (z - z')\,\vec{a}_z$$

$$|\vec{R}| = \sqrt{r^2 + (z - z')^2}$$

$$d\vec{l} \times \vec{R} = dz'\,\vec{a}_z \times \left(r\,\vec{a}_r + (z - z')\,\vec{a}_z \right)$$

$$= r\,dz'\,\vec{a}_\alpha$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{R}}{|\vec{R}|^3}$$

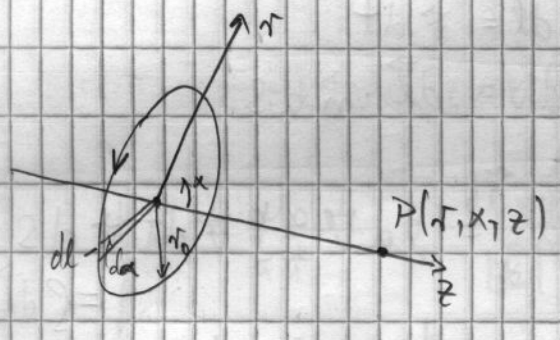
$$\vec{B} = \mu_0 \frac{I}{4\pi} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{r}{\left(r^2 + (z - z')^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,dz'\,\vec{a}_\alpha$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \left[\frac{\frac{L}{2} + z}{\sqrt{\left(\frac{L}{2} + z\right)^2 + r^2}} + \frac{\frac{L}{2} - z}{\sqrt{\left(\frac{L}{2} - z\right)^2 + r^2}} \right] \vec{a}_\alpha$$

$$\vec{B} = \vec{a}_\alpha \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \left[\sin\varphi + \sin\psi \right]$$

$$\left. \begin{array}{l} L \to \infty \\ \varphi, \psi \to \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \vec{B} = \vec{a}_\alpha \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

5. BIOT-SAVARTOV ZAKON I MAGNETSKA INDUKCIJA NA OSI KRUŽNE STRUJNICE



$$d\vec{l} = r_0 \, d\alpha \, \vec{a_\alpha}$$

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' = z\,\vec{a_z} - r_0\,\vec{a_r}$$

$$\vec{r} = z\,\vec{a_z}$$

$$\vec{r}' = r_0\,\vec{a_r}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{z\vec{a_r} + r_0\vec{a_z}}{(r_0^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\, r_0\, d\alpha$$

$$d\vec{l} \times \vec{R} = r_0\, d\alpha\, \vec{a_\alpha} \times (z\vec{a_z} - r_0\vec{a_r}) = r_0 z\, d\alpha\, \vec{a_r} + r_0^2\, d\alpha\, \vec{a_z}$$

$$= B_r\,\vec{a_r} + B_z\,\vec{a_z}$$

$$|\vec{R}| = \sqrt{z^2 + r_0^2}$$

$$\vec{a_r} B_r = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\cdot\frac{z\, r_0}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\underbrace{\int_0^{2\pi}\vec{a_r}\, d\alpha}_{\phi}$$

$$\vec{a_r} = \vec{a_x}\cos\alpha + \vec{a_y}\sin\alpha$$

ϕ – samo ako je cijeli krug

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\,\frac{r_0^2}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi} d\alpha$$

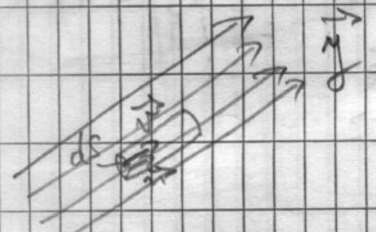
$$= \frac{\mu_0 I}{2}\,\frac{r^2}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\Bigg\} \text{ cijeli krug}$$

6. SILA NA STRUJNI ELEMENT U MAGNETSKOM POLJU

$$\vec{F} = q\,(\underbrace{\vec{E}}_{=0} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$$d\vec{l} = \vec{v}\,dt$$

$$dV = d\vec{l} \cdot \vec{n}\,dS$$



$$dq = \rho\,dV = \rho\,\vec{v}\,dt\,\vec{n}\,dS = \rho\,d\vec{l}\,\vec{n}\,dS = \rho\,dl\,dS = \rho\,v\,dt\,dS$$

$$I = \frac{dq}{dt} = \rho\,v\,dS$$

$$J = \frac{I}{dS} = \rho \cdot v$$

$$\vec{F} = \iiint_V \vec{J} \times \vec{B}\,dV$$

$$d\vec{F} = dq\,(\vec{v} \times \vec{B}) = \rho\,d\vec{l}\,\vec{n}\,dS\,(\vec{v} \times \vec{B})$$

$$= \rho\,(\vec{v} \times \vec{B})\,dV$$

$$= I\,(d\vec{l} \times \vec{B})$$

$$\vec{F} = BIl$$

7. JEDNADŽBE STATIČKOG MAGNETSKOG POLJA U INTEGRALNOM I DIFERENCIJALNOM OBLIKU

BIOT-SAVARTOV ZAKON

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{l} \times \vec{R}}{|\vec{R}|^3} \quad , \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}\,') \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} dV$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \times \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} dV \Rightarrow \nabla \vec{B}(\vec{r}) = 0$$

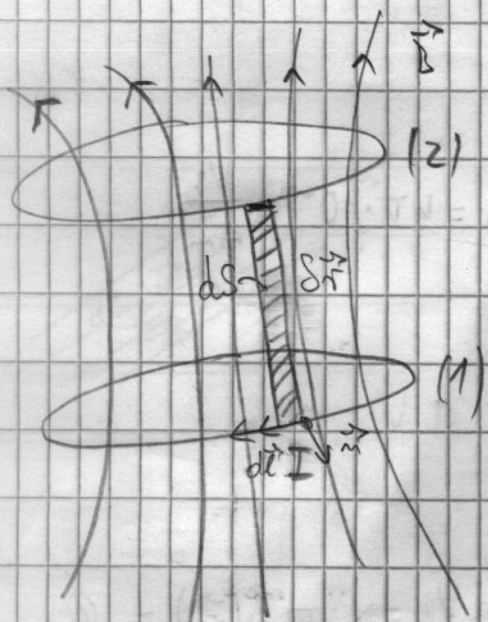
GAUSSOV ZAKON

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \oint_S \vec{B}\, \vec{n}\, dS = 0$$

AMPEROV KRUŽNI ZAKON

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \Rightarrow \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_S \vec{J}\, \vec{n}\, dS = \mu_0 I$$

8. ENERGIJA POHRANJENA U MAGNETSKOM POLJU IZRAŽENA POMOĆU MAGNETSKOG TOKA



$$d\vec{F}_m = I\,(d\vec{l} \times \vec{B})$$

$$d\vec{F}_v = -d\vec{F}_m$$

$$dW = d\vec{F}_v \cdot \partial\vec{r} = -I\,(d\vec{l} \times \vec{B})\,\partial\vec{r}$$

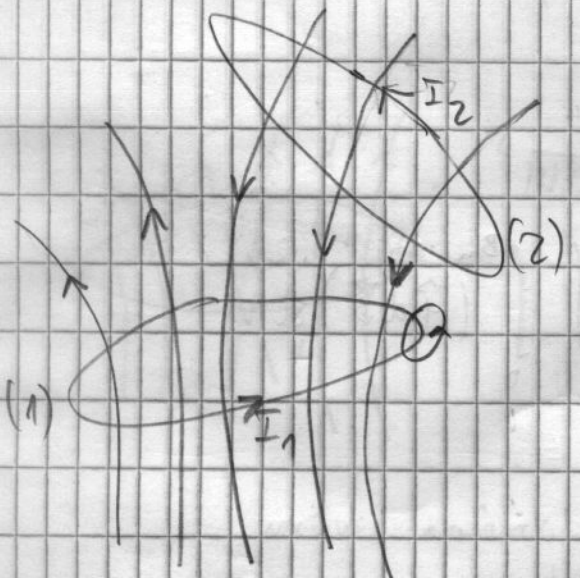
$$\vec{A}\,(\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$

$$dW = -I \cdot \vec{B}\,(\partial\vec{r} \times d\vec{l})$$

$$= -I\,\underbrace{(\vec{B}\,\vec{n}\,dS)}_{\phi}$$

$$W = I\,\underbrace{(\phi_2 - \phi_1)}_{\text{tok kroz plašt}}$$

9. MAGNETSKA ENERGIJA SUSTAVA STRUJNIH PETLJI IZRAŽENA POMOĆU VEKTORSKOG MAGNETSKOG POTENCIJALA



u polje strujnice (1) dovodimo strujnicu (2)

$$W_{12} = I_2 \phi_{12}$$

obratno $W_{21} = I_1 \phi_{21}$

$$W = W_{12} = W_{21}$$

10 VEKTORA MAG. POLJA

$$\nabla(\vec{H}\times\vec{A}) = \vec{A}(\nabla\times\vec{H}) - \vec{H}(\nabla\times\vec{A})$$

$$= \vec{A}\cdot\vec{J} - \vec{H}\cdot\vec{B}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{J} = \nabla(\vec{H}\times\vec{A}) + \vec{H}\cdot\vec{B}$$

$$W = \frac{1}{2}\int_V \vec{H}\cdot\vec{B}\,dV + \frac{1}{2}\int_V \nabla(\vec{H}\times\vec{A})\,dV$$

$$= \int_V \vec{H}\cdot\vec{B}\,dV + \underbrace{\frac{1}{2}\int_S \vec{H}\times\vec{A}\,d\vec{S}}_{\text{veliki volumen} = \phi}$$

$$W = \frac{1}{2}\int_V \vec{B}\cdot\vec{H}\,dV \overset{LIH}{\Longrightarrow}$$

$$W = \frac{1}{2}\int_V \frac{|\vec{B}|^2}{\mu}\,dV = \frac{1}{2}\int_V \mu|\vec{H}|^2\,dV$$

$$2W = \phi_{12} I_2 + \phi_{21} I_1$$

$$W = \frac{1}{2}\left(\phi_{12} I_2 + \phi_{21} I_1\right) \Rightarrow$$

za n strujnica

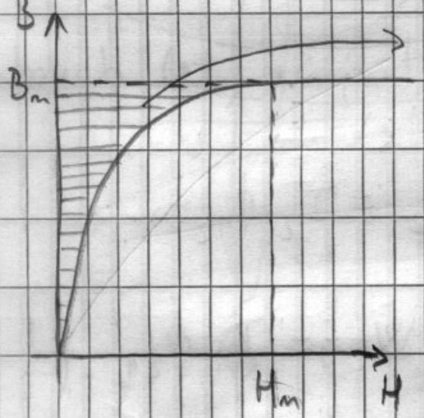
$$\boxed{W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} I_i \sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{n} \phi_{ji}}$$

$$\phi = \oint_C \vec{A}\cdot d\vec{l}$$

$$I_i = \int_S \vec{J}\cdot\vec{n}\,dS$$

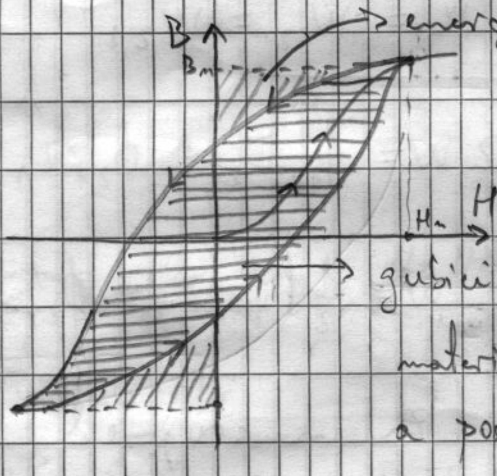
$$\Rightarrow \boxed{W = \frac{1}{2}\int_V \vec{J}\cdot\vec{A}\,dV}$$

11. MAGNETSKA ENERGIJA U NELINEARNIM MATERIJALIMA I GUBICI ZBOG HISTEREZE



$$w = \int_0^{B_m} H\,dB$$

$$W = \int_V \int_0^{B_m} (\vec{H}\,d\vec{B})\,dV$$

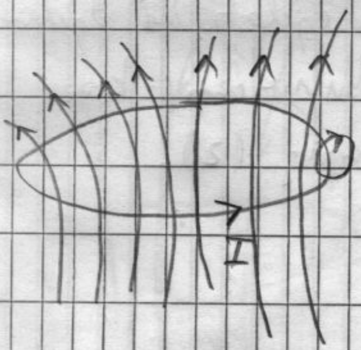


energija vraćena izvoru

gubici zbog HISTEREZE u nelinearnim materijalima => pretvara se u toplinu, a posljedica je trenja domena

$$dW = i\,d\phi = i \iint_S d\vec{B}\,\vec{n}\,dS$$

12. INDUKTIVITET STRUJNE PETLJE



INDUKTIVITET: $L = \dfrac{\phi}{I}$ Omjer toka i el. struje.

$$W = \frac{LI^2}{2} = \frac{1}{2}\int_V \vec{B}\cdot\vec{H}\,dV$$

$$L = \frac{\int_V \vec{B}\cdot\vec{H}\,dV}{I^2}$$ samo induktivitet

$$= \frac{1}{I^2}\left(\underbrace{\int_{V_u} \vec{B}\cdot\vec{H}\,dV}_{L_u} + \underbrace{\int_{V_v} \vec{B}\cdot\vec{H}\,dV}_{L_V}\right)$$

Kod strujne petlje s N zavoja vrijedi:

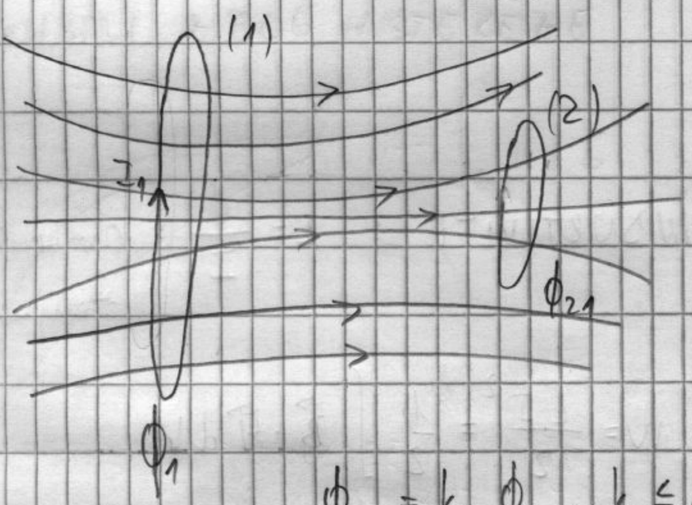
ϕ → cijeli magnetski tok

$\psi = N\phi$ – obuhvaćeni (ulančani) magnetski tok

$$L = \frac{\psi}{I} = \frac{N\phi}{I} \qquad \phi = N\cdot\phi_1$$

$$\boxed{L = N^2\,\frac{\phi_1}{I} = N^2 L_1}$$

(13) MEĐUINDUKTIVITET, (14) ODNOS INDUKTIVITETA i M.



Tok proizveden u krugu (1) strujom I_1 biti će u cjelosti ili djelomično obuhvaćen kroz strujni krug (2).

$$\Phi_{21} = k_1 \, \Phi_1 \, , \quad k \leq 1$$

$$M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1}$$ - koeficijent međuindukcije

$$M_{21} = \frac{N_2 N_1 \Phi_{21}}{I_1}$$ => analogno vrijedi i obrat

$$\vec{A}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{l_1} \frac{dl_1}{|r - r'|}$$

$$\Psi_{21} = \oint_{l_2} \vec{A}_1 \, d\vec{l}_2 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{l_2}\oint_{l_1} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{|r - r'|}$$

$$M_{21} = N_2 \, k_1 \frac{N_1 \Phi_1}{I_1} = k_1 N_2 \frac{L_1}{N_1}$$

$$M^2 = M_{12} \cdot M_{21} = k_1 \cdot k_2 \cdot L_1 L_2 = k^2 L_1 L_2$$

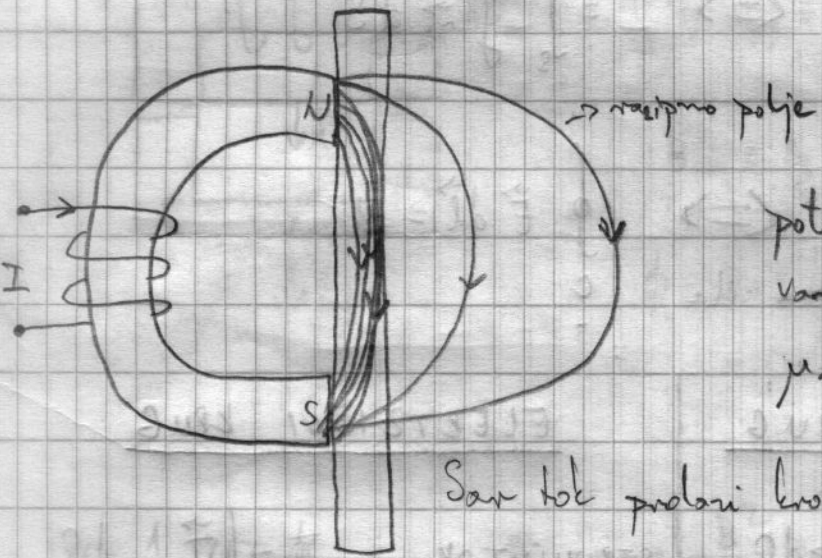
$$M = k \sqrt{L_1 L_2} \; ; \quad k \leq 1$$

↳ koef. magnetske sprege

$$M_{21} = M = \frac{\Psi_{21}}{I} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_2}\oint_{l_1} \frac{d\vec{l}_1 \, d\vec{l}_2}{|r - r'|}$$ => dvije okomite strujnice $M = 0$

15. MAGNETSKI KRUG

- prostor u kojem je gustoća magnetskih silnica znatno veća nego u preostalom dijelu prostora (feromagneti)



?

potrebno magnetizirati krug vanjskim poljem da μ_r bude velik

$\mu_r \to \mu_0$ zasićenje kruga

Sav tok prolazi kroz krug: $\phi = \int_S \vec{B}\, d\vec{S}$

Amperov kružni zakon: $\oint_C \vec{H} d\vec{l} = NI = \Theta$

Pojednostavljenja: homogeno polje po svim presjecima

$$\phi = B_{sr} S_{sr} \qquad H_{sr} l_{sr} = NI$$

$$R_m = \frac{\Theta}{\phi} = \frac{H_{sr} l_{sr}}{B_{sr} S_{sr}} = \frac{1}{\mu}\frac{l}{S}$$

Prostor polja možemo podjeliti u sustav elementarnih cijevi (silocijevi). Magnetski tok kroz tu cijev je konstantan, a silocijev je zatvorena u samu sebe. Njena permeabilnost i presjek se mogu mijenjati duž cijevi.

Vrijedi jednadžba: $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I = NI$

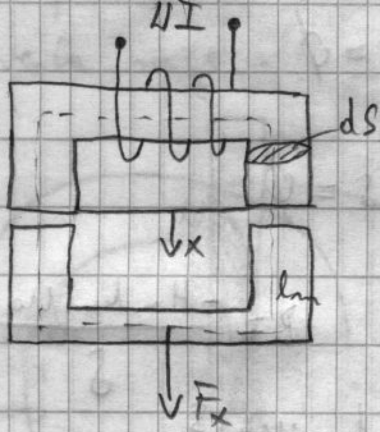
16. ANALOGIJA MAGNETSKOG KRUGA I KRUGA ISTOSMJERNE STRUJE

$$\phi = \int_S \vec{B}\,\vec{n}\,dS \iff I = \int_S \vec{J}\,\vec{n}\,dS$$

$$\oint_C \vec{H}\,d\vec{l} = \underbrace{NI}_{\text{magnetomotorna sila}} \iff \oint_C \vec{E}\,d\vec{l} = U$$

MAGNETSKI KRUG		ELEKTRIČNI KRUG	
MAGNETSKI TOK	$\phi = \int_S \vec{B}\,\vec{n}\,dS$	STRUJNI TOK	$I = \int_S \vec{I}\,n\,dS$
MAGNETSKA INDUKCIJA	$\vec{B} = \mu \vec{H}$	GUSTOĆA STRUJE	$\vec{J} = \kappa \vec{E}$
JAKOST MAG. POLJA	$\vec{H}$	JAKOST EL. POLJA	$\vec{E}$
MAGNETSKA POBUDA	$NI = \oint_C \vec{H}\,d\vec{l}$	NAPON	$U = \oint_C \vec{E}\,d\vec{l}$
MAGNETSKI OTPOR	$R_m = \dfrac{\Theta}{\phi} = \dfrac{\oint_C \vec{H}\,d\vec{l}}{\int_S \vec{B}\,\vec{n}\,dS}$	ELEKTRIČNI OTPOR	$R = \dfrac{U}{I} = \dfrac{\oint_C \vec{E}\,d\vec{l}}{\int_S \vec{J}\,\vec{n}\,dS}$

17. MAGNETSKI KRUG ELEKTROMAGNETA



$$\oint \vec{H}\, d\vec{l} = NI \qquad H_m l_m + 2H_\delta \cdot \delta = NI$$

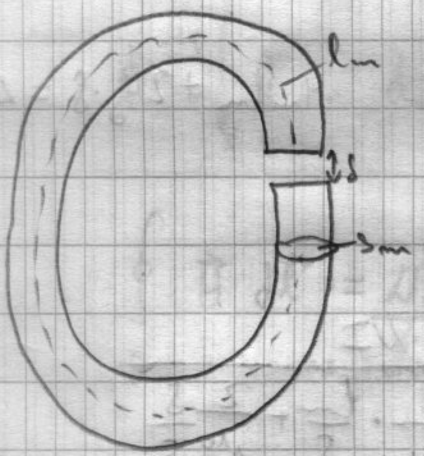
$$B_m = B_\delta = B$$

$$\phi = B \cdot S = \frac{NI}{\underbrace{\frac{1}{\mu_0 \mu_r} \cdot \frac{l_m}{S} + \frac{2}{\mu_0} \frac{\delta}{S}}_{R_{uk}}}$$

$$W = \frac{1}{2} NI \phi \qquad \vec{F}_x = -\vec{a}_x \frac{B^2}{2\mu_0} S$$

$$\left(\vec{F}_x = \vec{a}_x \frac{\partial}{\partial S} W_x \right)$$

18. MAGNETSKI KRUG PERMANENTNOG MAGNETA



$$\oint \vec{H}\, d\vec{l} = NI = \emptyset$$

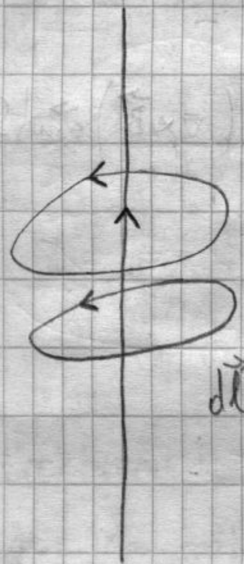
$$H_m l_m + H_\delta \cdot \delta = \emptyset$$

$$B = B_m = B_\delta \qquad B = \frac{-H_m l_m \mu_0}{\delta}$$

$$\phi = B \cdot S = \frac{-H_m l_m \cdot \mu_0 \cdot S}{\delta}$$

$$\vec{F}_x = \frac{\partial}{\partial \delta} W = -\vec{a}_x \frac{H_m \cdot \mu_0 \cdot l_m \cdot S}{\delta^2}$$

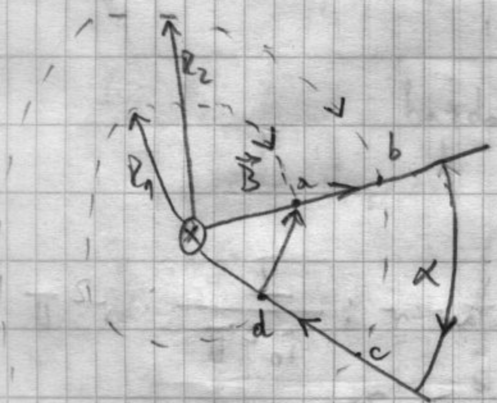
19. AMPEROV KRUŽNI ZAKON I POLJE BESKONAČNO DUGOG RAVNOG VODIČA POLUMJERA R PROTJECANOG STRUJOM I JEDNOLIKO RASPOREĐENOM PO PRESJEKU VODIČA



$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2 r \pi}\, \vec{a_\alpha}$$

$$\oint_C \vec{B}\, d\vec{l} = \int_{\alpha=0}^{2\pi} \vec{B}\, r\, d\alpha = B\, 2 r \pi = \mu_0 I$$

$$d\vec{l} = r\, d\alpha\, \vec{a_\alpha}$$



a - b $\quad d\vec{l} = \vec{a_r}\, dr$

b - c $\quad d\vec{l} = R_2\, d\alpha\, \vec{a_\alpha}$

c - d $\quad d\vec{l} = -\vec{a_r}\, dr$

d - a $\quad d\vec{l} = -R_1\, d\alpha\, \vec{a_\alpha}$

$$\oint \vec{B}\, d\vec{l} = \int_{r=R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 I}{2 r \pi} \overbrace{\vec{a_\alpha}\, \vec{a_r}}^{\emptyset} dr + \int_{\alpha} \frac{\mu_0 I}{2\pi R_2}\, \vec{a_\alpha} R_2\, d\alpha\, \vec{a_\alpha}$$

$$+ \int_{r=R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 I}{2 r \pi}\, \overbrace{\vec{a_\alpha} \left(-\vec{a_r}\, dr\right)}^{0}$$

$$+ \int_{\alpha} \frac{\mu_0 I}{2\pi R_1}\, \vec{a_\alpha} \left(-R_1\, d\alpha\, \vec{a_\alpha}\right)$$

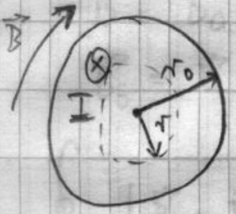
$$\oint_c \vec{B}\, d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\alpha - \frac{\mu_0 I}{2\pi}\alpha = \emptyset$$

IDENTITET: $$\oint \vec{A}\, d\vec{l} = \iint_S (\nabla \times \vec{A})\, \vec{n}\, dS$$

$$\oint_C \vec{B}\, d\vec{l} = \mu_0 I = \mu_0 \iint_S \vec{J}\, \vec{n}\, dS = \iint_S (\nabla \times \vec{B})\, \vec{n}\, dS$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}}$$

VODIČ:



B u vodiču

$$\oint_C \vec{B}\, d\vec{l} = \mu_0 I$$

$S_{uk} = r_0^2 \pi$

dio struje unutar r : $\frac{I}{r_0^2 \pi} \cdot r^2 \pi$

$S(r) = r^2 \pi$

$$\int_{\alpha=0}^{2\pi} B r\, d\alpha = \mu_0 \frac{I r^2 \cancel{\pi}}{r_0^2 \cancel{\pi}}$$

$$B\, 2 \cancel{r} \pi = \mu_0 \frac{I r^{\cancel{2}}}{r_0^2}$$

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2 r \pi}}$$ izvan vodiča

$$\boxed{B = \mu_0 \frac{I}{2\pi r_0^2} \cdot r}$$ unutar vodiča

20. VEKTORSKI MAGNETSKI POTENCIJAL, DIFERENCIJALNA JEDNADŽBA I PRORAČUN TOKOVA U MAGNETSKOM POLJU

Gaussov zakon $\nabla \cdot \vec{B} = \emptyset$

vrijedi: $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = \emptyset$

$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

↳ vektorski magnetski potencijal $\left[\frac{Wb}{m} = \frac{Vs}{m}\right]$

Vektorski magnetski potencijal je kontinuirana funkcija, jer da nije na mjestu diskontinuiteta $\vec{B} = \infty$.

Coulombovo baždarenje: $\nabla \cdot \vec{A} = \emptyset$ čime je osigurana jedinstvenost v. m. p.

$$\phi = \int_S \vec{B}\,\vec{n}\,dS = \int_S (\nabla \times \vec{A})\,\vec{n}\,dS = \oint_C \vec{A}\,d\vec{l}$$

DIFERENCIJALNA JDŽB.:

$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_s$

$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A}\right) = \vec{J}_s$

LIH: $\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \mu \vec{J}_s$

$\nabla \overbrace{(\nabla \cdot \vec{A})}^{\emptyset} - \Delta \vec{A} = \mu \vec{J}_s$

$\Delta \vec{A} = -\mu \vec{J}_s$ Poissonova jednadžba

$\Delta \vec{A} = \emptyset$ Laplaceova

(22.) JAKOST MAGNETSKOG POLJA i PONAŠANJE MAT. U POLJU

(21.) MAGNETIZACIJA i AMPERSKE STRUJE

Vanjsko homo magnetsko polje indukcije $\vec{B}_0$ koje je stvoreno slobodnim strujama gustoće $\vec{J}_s$ (npr. kroz zavojnicu omotanu oko materijala) u materijalu će uzrokovati jednoliku magnetizaciju. Struje susjednih strujnih petlji će se u unutrašnjosti materijala svugdje poništavati, a samo na površini materijala ostat će rezultirajuća plošna struja magnetizacije koju nazivamo amperska struja gustoće $\vec{J}_M$. Ukupno magnetsko polje indukcije B_0 i amperske struje magnetizacije u materijalu $\vec{J}_M$ koje stvaraju svoje magnetsko polje indukcije B_M.

(22.)

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_M$$

$$\vec{B}_0 = \vec{B} - \vec{B}_M \qquad \oint_C \vec{B}_0 \, d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} \, \vec{n} \, dS$$

$$\oint_C (\vec{B} - \vec{B}_M) \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J}_s \, \vec{n} \, dS$$

$$\oint_C \left(\frac{\vec{B} - \vec{B}_M}{\mu_0} \right) d\vec{l} = \int_S \vec{J} \, \vec{n} \, dS \qquad H = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}, \; M = \frac{\vec{B}_M}{\mu_0}$$

$$\oint_C \vec{H} \, d\vec{l} = \int_S \vec{J} \, \vec{n} \, dS$$ - Amperov zakon u prisustvu materijala

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}, \quad \vec{M} = \underbrace{\chi_m}_{\text{magnetska susceptibilnost}} \vec{H}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_M = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 \vec{H} (1 + \chi_m) = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

21. - 22. nastavak

DIJAMAGNETIZAM
- svojstvo svih materijala
- posljedica djelovanja polja na orbitalne elektrone
- vektor magnetizacije $\vec{M}$ koji je suprotan narinutom polju
- $\chi_m < 0$, $\mu_r < 1$
- H, He, Cu, Au, Si, C, S, . . .

PARAMAGNETIZAM
- postoje permanentni magnetski dipolni momenti u samom materijalu
- orijentirani su tako da je materijal magnetski neutralan
- vektor magnetizacije $\vec{M}$ u smjeru narinutog polja
- $0 < \chi_m < 1$, $\mu_r > 1$
- O_2, Al, $FeCl_3$, Pb

FEROMAGNETIZAM
- dipoli se unutar malih područja (domena) jednako orijentiraju
- $\mu_r >> 1$ u zasićenju pada prema 1
- Fe, Co, Ni
- $\mu_r = f(\vec{H})$ => nelinearno
- memorijski efekt

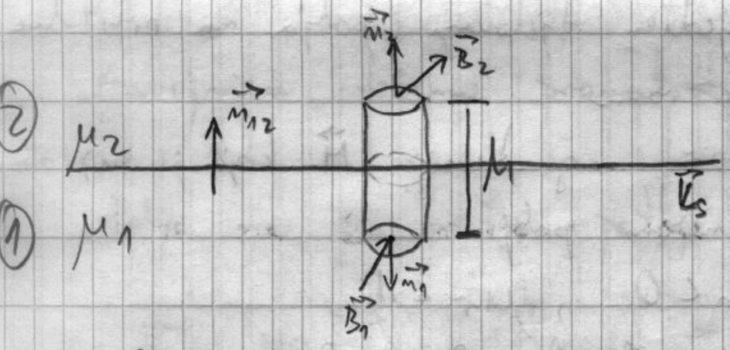
21. Pomoću magnetskog momenta uvodimo magnetizaciju : $\vec{m} = \vec{n} S I$

$$\vec{M}(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum_{\Delta V} m_i}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}$$

El. volumen dV možemo nadomjestiti mag. dipolom protjecanim strujom I_A (amperska struja).

$$d\vec{m} = \vec{M} dV = \vec{M} d\vec{l}\, \vec{n}\, dS = dI\, \vec{n}\, dS ; \quad dI_a = \vec{M} d\vec{l}$$

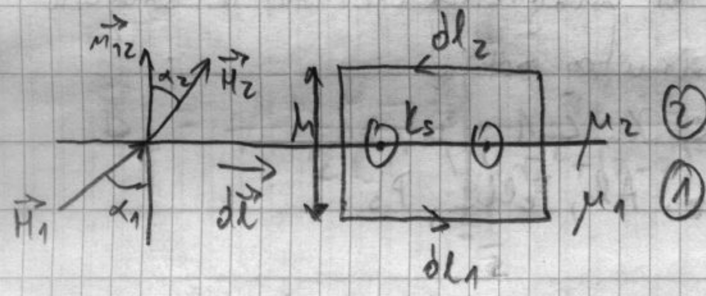
23. UVJETI ZA VEKTORE MAGNETSKOG POLJA NA GRANICI DVA MATERIJALA



$$\oint_S \vec{B}\,n\,dS = 0$$

$$\vec{B}_1\vec{n}_1\,dS_1 + \vec{B}_2\vec{n}_2\,dS_2 + (\text{doprinos kroz plašt}) = 0$$

$$h \to 0 \qquad \vec{n}_{12}(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad B_{1n} = B_{2n} \qquad \frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$



$$tg\,\alpha_1 = \frac{H_{1t}}{H_{1n}} \qquad tg\,\alpha_2 = \frac{H_{2t}}{H_{2n}}$$

$$\frac{tg\,\alpha_1}{tg\,\alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

$$\oint_C \vec{H}\,d\vec{l} = \int_S \vec{J}\,\vec{n}\,dS$$

$$\vec{H}_1\,d\vec{l}_1 + H_2\,d\vec{l}_2 + (\text{doprinos po stranica } h) = \vec{J}_s\,\vec{n}_0\,h\,dl$$

$$h \to 0 \qquad (\vec{H}_1 - \vec{H}_2)\vec{t} = \vec{n}_0\,K_s \quad , \quad \vec{t} = -(\vec{n}_0 \times \vec{n}_{12})$$

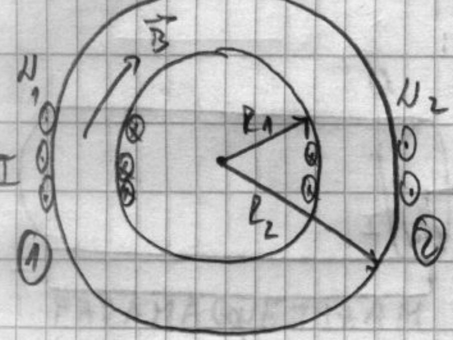
$$(\vec{H}_1 - \vec{H}_2)(\vec{n}_0 \times \vec{n}_{12}) = \vec{n}_0\,K_s \quad ; \quad A\cdot(B\times C) = B\cdot(C\times A)$$

$$\vec{n}_{12} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = K_s$$

$$K_s = 0 \; ; \quad H_{1t} = H_{2t} \Rightarrow \frac{B_{1t}}{B_{2t}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

i ~~A~~ 25. MAG. INDUKCIJE

24. INDIREKTNO MJERENJE MAGNETSKOG POLJA U FEROMAGNETSKOJ TORUSNOJ JEZGRI U POKUSU SNIMANJA DINAMIČKE PETLJE HISTEREZE



- dvije zavojnice oko iste jezgre
- kroz zavojnicu 1 pustimo struju I i vrijedi Amperov zakon

$$\oint_{l_{sr}} \vec{H}\, d\vec{l} = N_1 I \quad ; \quad l_{sr} = 2\pi \frac{R_1 + R_2}{2}$$

H konstantan po cijelom presjeku istalan zbog simetrije

$$H(t) = \frac{N_1\, i(t)}{l_{sr}}$$

tok kroz zavojnicu $\phi = \vec{B}(t) \cdot S$; $\vec{B} = \mu \vec{H}$ ↳ ne lin.

U drugoj zavojnici se inducira napon:

$$e(t) = -N_2 \frac{d\phi}{dt} = -N_2 S \frac{dB(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad B(t) = \frac{1}{N_2 S} \int u(t)\, dt \qquad i_2(t) = \frac{u_2(t)}{R_2}$$

$$B(t) = \frac{R_2}{N_2 S} \int i(t)\, dt$$

$$u_c = \frac{1}{C} \int i_2(t)$$

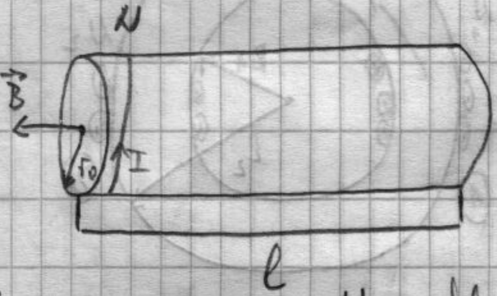
$$B(t) = \frac{C R_2}{N_2 S}\, u_c$$

26. TOČNI PRORAČUN MAGNETSKE INDUKCIJE NA OSI JEDNOSLOJNE ZAVOJNICE

Zavojnicu možemo promatrati kao sustav od N kružnih petlji:

Polje na osi kružne petlje iznosi:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{r^2}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{a_z}$$



Ukupna indukcija dobiva se zbrajanjem polja N petlji:

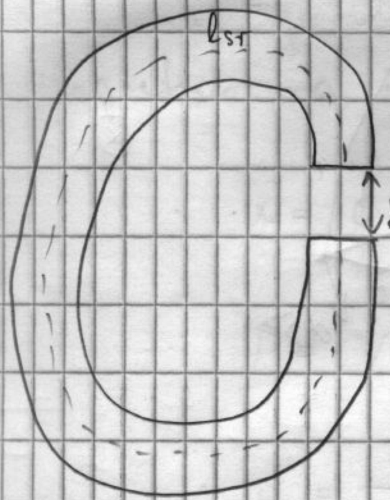
$$d\vec{B}_z = \frac{\mu_0 N I r_0^2 \vec{a_z}}{2l(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot dz \qquad dI = \frac{NI}{l} dz$$

$$\vec{B}_z = \frac{\mu_0 N I \vec{a_z}}{2l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{r_0^2 \, dz'}{(r_0^2+(z-z')^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 N I \vec{a_z}}{2l} \left[\frac{z+\frac{l}{2}}{\sqrt{r_0^2+(z+\frac{l}{2})^2}} - \frac{z-\frac{l}{2}}{\sqrt{r_0^2+(z-\frac{l}{2})^2}} \right]$$

$z = 0$ $\qquad\qquad$ $L \to \infty \qquad z >> r_0$

$$\vec{B}_z = \frac{\mu_0 N I}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{c^2+r^2}} \vec{a_z} \qquad\qquad \vec{B} = \vec{a_z} \frac{\mu_0 N I}{l}$$

27. GRAFOANALITIČKO RJEŠAVANJE MAGNETSKOG KRUGA SA ZRAČNIM RASPOROM



$$H_\delta = \frac{B_\delta}{\mu_0} \qquad H_m = \frac{B_m}{\mu_0 \mu_r}$$

μ_r - s krivulje magnetizacije

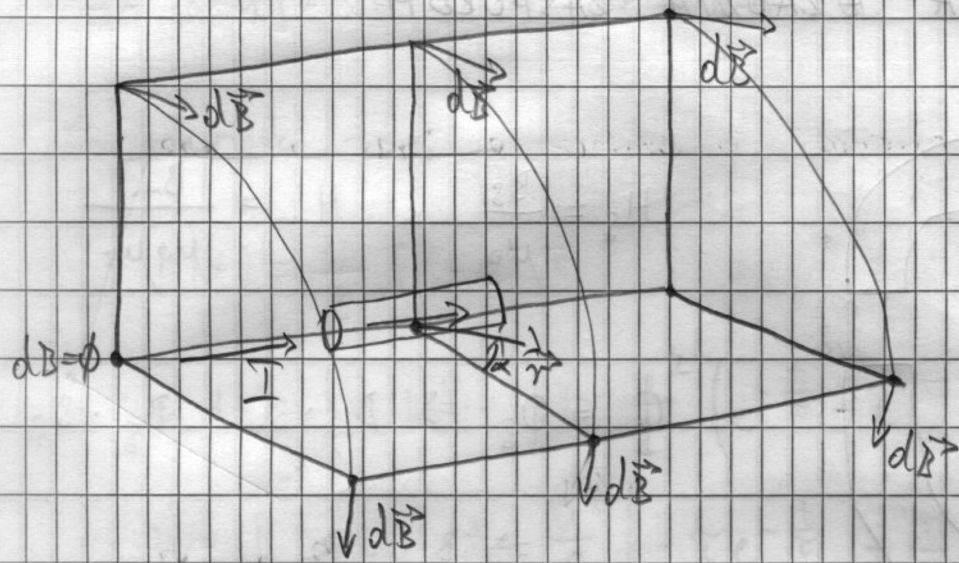
$$\phi_m = \phi_\delta \Rightarrow B_m \cdot S_m = B_\delta \cdot S_\delta$$

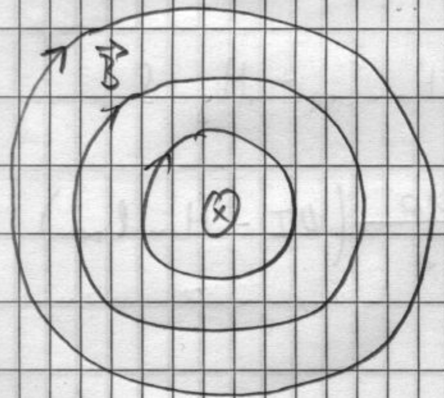
$$\Rightarrow B_m = B_\delta$$

$$\Theta = NI = H_m l_{sr} + H_\delta \cdot \delta$$

$$B_m = \frac{\mu_0}{\delta}\left(NI - H_m l_{sr}\right)$$

28. SLIKA STATIČKOG MAGNETSKOG POLJA - LINIJE POLJA





29. SNAGA GUBITAKA I SPECIFIČNI GUBICI U POKUSU SNIMANJA DINAMIČKE PETLJE HISTEREZE

Volumna gustoća energije gubitaka u jezgri po ciklusu magnetiziranja iz petlje histereze:

$$w = \oint_B H \, dB$$

$$P = V \cdot w \cdot f = l_{sr} \cdot S \cdot w \cdot f$$

f → frekvencija izmjenične struje magnetiziranja

$$p_s = \frac{P}{m} \left[\frac{W}{kg}\right]$$

$$p_s = \frac{wf}{\rho}$$

Druga je vatmetrička metoda pomoću Epsteinovog aparata.

30. MJERENJE ENERGIJE LINEARNE ZAVOJNICE POMOĆU SPOJA ZAVOJNICE I OTPORNIKA

Za serijski spoj zavojnice i otpornika vrijedi:

$$i(t) = \frac{U}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \qquad u_L(t) = Ue^{-\frac{t}{\tau}} \qquad \tau = \frac{L}{R}$$

$$p_L(t) = u_L(t) \cdot i(t) = \frac{U^2}{R}\left(e^{-\frac{t}{\tau}} - e^{-\frac{2t}{\tau}}\right)$$

$$W = \int_0^\infty p_L(t) \cdot dt = \frac{U^2}{R}\left[-\tau e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{\tau}{2}e^{-\frac{2t}{\tau}}\right] = \frac{LI^2}{2}$$

1. FARADAYEV ZAKON I LENZOVO PRAVILO

FARADAYEV ZAKON

- inducirani napon u vodljivoj petlji površine S, koja je obrubljena konturom c razmjeran je vremenskoj promjenjivosti magnetskog toka:

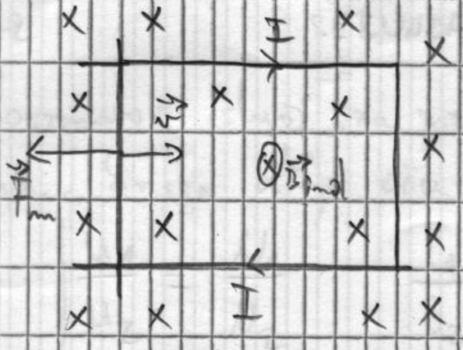
$$u_{ind} = \oint_c \vec{E}\, d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\, \vec{n}\, dS$$

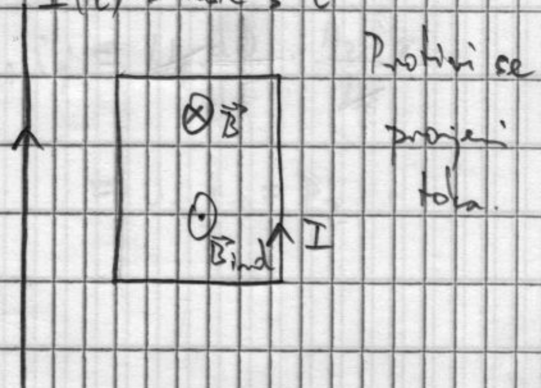
LENZOVO PRAVILO

- inducirana struja je takvog smjera da se suprotstavlja promjeni magnetskog toka

- smjer sile inducirane struje u vodiču suprotan je smjeru gibanja vodiča - nastoji se poništiti uzrok indukcije

$$\vec{F} = I(l \times \vec{B})$$





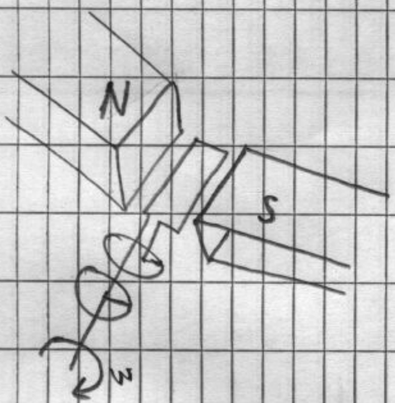
2. INDUCIRANJE NAPONA ZBOG PROMJENE TOKA I GIBANJA: INTEGRALNI I DIFERENCIJALNI OBLIK

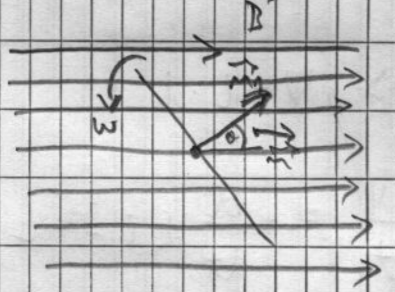
$$u_{ind} = \oint_C \vec{E}\, d\vec{l} = -\frac{d\phi}{dt}$$

$$\oint_C \vec{E}\, d\vec{l} = \underbrace{-\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\, \vec{n}\, dS}_{\text{promjena toka u vremenu - napon transformacije}} + \underbrace{\oint_C (\vec{v} \times \vec{B})\, d\vec{l}}_{\text{gibanje petlje - napon gibanja}}$$

$$\nabla \times \vec{E}_{ind} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B})$$

3. NAČELO RADA GENERATORA





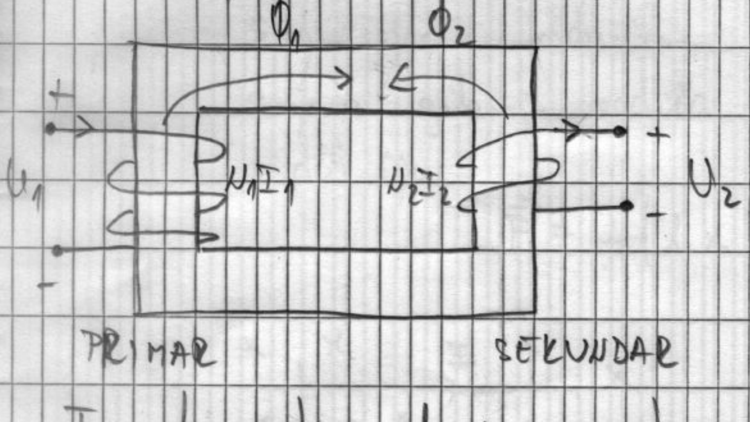
$$\Phi = \int_S \vec{B}\,\vec{n}\,dS = B\,S\cos\theta$$

$$\theta = \omega t$$

Pretvara mehanički rad u električnu energiju.

$$U_{ind} = \left| -\frac{d\Phi}{dt} \right| = B\cdot S\cdot \omega \sin(\omega t)$$

4. NAČELO RADA TRANSFORMATORA



PRIMAR SEKUNDAR

$$u_1 = N_1 \frac{d\Phi}{dt} \; ; \; u_2 = N_2 \frac{d\Phi}{dt}$$

$$N_1 I_1 = N_2 I_2 = \Theta$$

$$P_1 = u_1 i_1 = \cancel{N_1}\frac{d\Phi}{dt} \cdot \frac{N_2 i_2}{\cancel{N_1}}$$

$$= u_2 i_2 = P_2$$

Transformator služi za pretvaranje napona. Snaga ostaje očuvana.

$$\boxed{\frac{u_1}{u_2} = \frac{N_1}{N_2} \qquad \frac{i_1}{i_2} = \frac{N_2}{N_1}}$$

5. NAPON SAMOINDUKCIJE I MEĐUINDUKCIJE

$$L = \frac{\Psi}{I} \Rightarrow \Psi = L \cdot i$$

$$u_{ind} = -\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{d}{dt} L i = -L \frac{di}{dt}$$

$$M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I}$$ → tok stvorenog kruga 1 obuhvaćen krugom 2

$$\Rightarrow \Psi_{21} = M i$$

$$u_{ind_2} = -\frac{d\Psi_{21}}{dt} = -\frac{d}{di} (M i_1) = -M \frac{di}{dt}$$

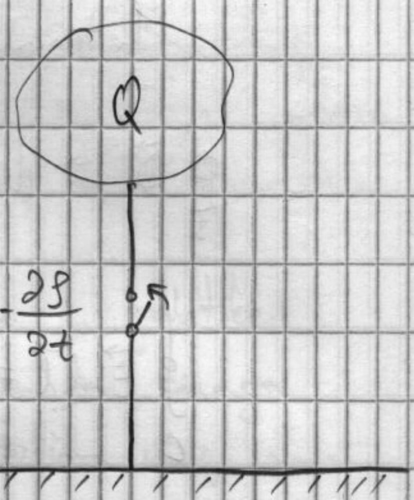
6. MAXWELLOVO PROŠIRENJE KRUŽNOG ZAKONA

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = 0 = \nabla \cdot \vec{J} \Longleftrightarrow \nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

kontradikcija



Maxwellovo proširenje:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \vec{D})$$

$$\nabla \cdot \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) = 0$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow$$ posmačne struje

$\vec{J}$ ⇓ provodne struje

7. MAXWELLOVE JEDNADŽBE

Integralni: Diferencijalni:

$$\oiint_S \vec{D}\,\vec{n}\,dS = \iiint_V \rho\,dV \qquad \nabla\cdot\vec{D} = \rho$$

$$\oint_C \vec{E}\,d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\oiint \vec{B}\,\vec{n}\,dS \qquad \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\oiint_S \vec{B}\,\vec{n}\,dS = 0 \qquad \nabla\cdot\vec{B} = 0$$

$$\oint_C \vec{D}\,dl = \iint_S \left(\vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)\vec{n}\,dS \qquad \nabla\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

8. POYNTINGOV TEOREM

Ukupna trenutna snaga predana od elektromagnetskog polja slobodnim i vezanim nabojima, koji se uvijek nalaze u stanju gibanja, pretvara se u neki drugi oblik energije.

Toplina nastala gibanjem naboja predstavlja „gubitke energije". Načelo očuvanja energije nalaže da snaga predana od elektromagnetskog polja nabojima u gibanju mora namiriti gubitke i iskazati kao smanjenje energije polja, tj. tok prenesene snage. Što znači da postoji elektromagnetska energija koja je pohranjena u samom polju.

Poyntingov teorem iskazuje zakon o očuvanju energije za to elektromagnetsko polje, te vrijedi samo u elektrodinamici.

$$\vec{F} = q\cdot(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}) \Rightarrow dW = \vec{F}d\vec{l} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})d\vec{l}$$

$$= q\left(\vec{E}\,d\vec{l} + \overbrace{\frac{d\vec{l}}{dt}\times\vec{B}\cdot d\vec{l}}^{\emptyset}\right) = q\vec{E}\,d\vec{l}$$

$$\frac{dW}{dt} = q\vec{E}\,\frac{d\vec{l}}{dt} = q\vec{E}\vec{v}$$

$$q \to \rho\, dV \qquad \frac{dW}{dt} = \rho\, dV\,\vec{E}\vec{v} = \vec{J}\vec{E}\,dV \Rightarrow P = \iiint_V \vec{J}\cdot\vec{E}\,dV$$

identitet: $\nabla(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}(\nabla\times\vec{A}) - \vec{A}(\nabla\times\vec{B})$

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \nabla\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla(\vec{E}\times\vec{H}) = \vec{H}\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) - \vec{E}\left(\vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)$$

$$= -\vec{J}\vec{E} - \vec{H}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - \vec{E}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

$$= -\vec{J}\vec{E} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}\right)$$

$$\iiint_V \nabla(\vec{E}\times\vec{H}) = -\left(\iiint_V \vec{J}\cdot\vec{E}\,dV + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_V\left(\frac{1}{2}\vec{E}\vec{D} + \frac{1}{2}\vec{B}\vec{H}\right)dV\right)$$

snaga kojom polje snabdijeva naboje u gibanju

gustoća el. polja

gustoća magnetskog polja

$$= \oiint_S \underbrace{(\vec{E}\times\vec{H})}_{\vec{P}}\,d\vec{S}$$

$\vec{P} \Rightarrow$ Poyntingov vektor (tok snage)

9. MAXWELLOVE JEDNADŽBE U FAZORSKOJ DOMENI

- vremenski sinusno promjenjiva polja

$$\vec{E}(\vec{r},t) = E_x(\vec{r})\cos(\omega_0 t + \psi_x(\vec{r}))\vec{a_x} + E_y(\vec{r})\cos(\omega_0 t + \psi_y(\vec{r}))\vec{a_y}$$

$$+ E_z(\vec{r})\cos(\omega_0 t + \psi_z(\vec{r}))\vec{a_z}$$

$$A\cos(\omega t + \psi) = Re\{Ae^{j\psi}e^{j\omega t}\} = Re\{\underline{A}e^{j\omega t}\}$$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = Re\left\{\left(E_x(\vec{r})e^{j\psi_x}\vec{a_x} + E_y(\vec{r})e^{j\psi_y}\vec{a_y} + E_z(\vec{r})e^{j\psi_z}\vec{a_z}\right)e^{j\omega_0 t}\right\}$$

$$= Re\{\underline{\vec{E}}(\vec{r})e^{j\omega_0 t}\}$$

$$\frac{\partial \vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t} = Re\{j\omega\,\underline{\vec{E}}(\vec{r})e^{j\omega_0 t}\}$$

$$\nabla \times \underline{\vec{E}} = -j\omega_0 \underline{\vec{B}}$$

$$\nabla \times \underline{\vec{H}} = \underline{\vec{J}} + j\omega \underline{\vec{D}}$$

$$\nabla \cdot \underline{\vec{D}} = \underline{\rho_v}$$

$$\nabla \cdot \underline{\vec{B}} = 0$$

10. KOMPLEKSNI OBLIK POYNTINGOVOG TEOREMA

$$\vec{E} = E_x \cos(\omega_0 t + \psi_{E_x})\vec{a_x} + E_y \cos(\omega_0 t + \psi_{E_y})\vec{a_y} + E_z \cos(\omega_0 t + \psi_{E_z})\vec{a_z}$$

$$\vec{H} = H_x \cos(\omega_0 t + \psi_{H_x})\vec{a_x} + E_y \cos(\omega_0 t + \psi_{H_y})\vec{a_y} + E_z \cos(\omega_0 t + \psi_{E_z})\vec{a_z}$$

Iz:

$$\vec{N}_{sr} = \frac{1}{T}\int_0^T \vec{E} \times \vec{H}\, dt \qquad \frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t)\, dt = \frac{1}{2}$$

$$\cos(\omega t + \psi_E)\cdot\cos(\omega t + \psi_H) = \frac{1}{2}\left[\cos(2\omega t + \psi_E + \psi_H) + \cos(\psi_E - \psi_H)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\cos(\psi_E - \psi_H)$$

$$\vec{N}_{sr} = \frac{1}{2}\left[E_y H_z \cos(\psi_{E_y} - \psi_{H_z}) - E_z H_y \cos(\psi_{E_z} - \psi_{H_y})\right]\vec{a_x} +$$

$$\frac{1}{2}\left[E_z H_x \cos(\psi_{E_z} - \psi_{H_x}) - E_x H_z \cos(\psi_{E_x} - \psi_{H_z})\right]\vec{a_y} +$$

$$\frac{1}{2}\left[E_x H_y \cos(\psi_{E_x} - \psi_{H_y}) - E_y \cdot H_x \cos(\psi_{E_y} - \psi_{H_x})\right]\vec{a_z}$$

$$= \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2}(\underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^*)\right\}$$

$$P_{J,sr} = \frac{1}{2\varkappa}\iiint_V |\vec{J}|^2 dV \qquad \oint_S (\underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^*)d\vec{S} = -\int_V \underline{\vec{E}}\cdot\underline{\vec{J}}^*\, dV + j\omega\int_V (\varepsilon \underline{E}^2 - \mu \underline{H}^2)\, dV$$

$$W_{m,sr} = \frac{\mu}{4}\iiint_V |\underline{\vec{H}}|^2 dV$$

$$\boxed{P_N = \oint_S \vec{N}\,\vec{n}\, dS = -P_{J,sr} + 2j\omega(W_{e,sr} - W_{m,sr})}$$

$$W_{e,sr} = \frac{\varepsilon}{4}\iiint_V |\underline{\vec{E}}|^2 dV$$

11. JEDNADŽBE RAVNOG VALA

Razmotrimo prostor u kojem ne postoji izvor polja ($\rho_s = \emptyset$, $J_s = \emptyset$) ispunjen idealnim dielektrikom (ε=konst, μ=konst, $\kappa = \emptyset$). Maxwellove jednadžbe poprimaju oblik:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \emptyset$$
$$\nabla \times \vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
$$\nabla \cdot \vec{B} = \emptyset$$
$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Valna jednadžba: $\Delta \vec{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial^2 t} = \emptyset$.

Rješenje ove jednadžbe koja ovise o vremenu i samo jednoj prostornoj konstanti nazivaju se RAVNI VALOVI. U prirodi takvi valovi ne postoje, ali na velikim udaljenostima od izvora polja i tla, valovi se mogu dobro opisati ravnim valovima.

12. PUTUJUĆI VAL - BRZINA ŠIRENJA VALA

$$f = (t - z\sqrt{\mu\varepsilon}) \cos(t - z\sqrt{\mu\varepsilon})$$

U jednom trenutku t funkcija poprima niz vrijednosti u ovisnosti o z. Iz formule vidimo da je funkcija u trenutku t jednaka funkciji od z u trenutku koji prethodi, ali pomaknuta u smjeru rastućeg z.

Stoga funkcija $f(t - z\sqrt{\mu\varepsilon})$ predstavlja val koji se giba u smjeru $+z$ brzinom $\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$.

Budući da se vrijednosti funkcije periodički ponavljaju vrijedi:

$$t_1 - z_1\sqrt{\mu\varepsilon} = t_2 - z_2\sqrt{\mu\varepsilon}$$

pa za brzinu vrijedi: $v = \frac{(z_2 - z_1)\sqrt{\mu\varepsilon}}{t_2 - t_1} = 1$

$$\Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

Brzina prostiranja u vakuumu iznosi: $v_f = c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$

(13) VALNA IMPEDANCIJA

Valna impedancija je omjer komponente električnog i magnetskog polja:

$$Z = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{K + j\omega\varepsilon}}$$

DOBRI VODIČI:

- kompleksan broj

DIELEKTRICI:

- realan broj (električno i magnetsko polje su u fazi)

$K = \emptyset$ $\quad Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ i mali broj jer $\varepsilon > 1$, $\mu = \mu_0$

⇓

manja nego u vakuumu

(16) VAST.

1\. uzrok konačna magnetska vodljivost
fazu s tokom
čista struja magnetiziranja
jalovi karakter
90° osn. harmonik

2\. gubici zbog histereze i vrtložnih struja
u fazi s naponom

14. SINUSNI RAVNI VAL - VALNA DUŽINA I FAZNA KONSTANTA

Val se prostire brzinom: izraz: $y = A\sin(\omega t - \beta x)$

$$v_f = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \lambda \cdot f$$

Ovaj izraz povezuje prostornu i vremensku promjenu polja.

$$\frac{1}{\lambda} = f\sqrt{\mu\varepsilon} \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \beta \text{ - fazna konstanta}$$

Fazna konsta je mjera brzine promjene faze s udaljenošću u smjeru gibanja vala u trenutku $t = t_0$.

(15) JEDNADŽBA VALA KOJE SE GIBA U PROIZVOLNOM SMJERU

Ako se val giba u proizvoljnom smjeru:

$\vec{r} = x\vec{a_x} + y\vec{a_y} + z\vec{a_z}$ tada je njegova promjena brzine faze jednaka $\vec{\beta} = \beta_x\vec{a_x} + \beta_y\vec{a_y} + \beta_z\vec{a_z}$.

Za takav val vrijedi jednadžba $\vec{E} = \vec{E_0}\cos(\omega t - \vec{\beta}\vec{r} + \varphi)$.

16. STRUJA MAGNETIZIRANJA ZAVOJNICE S FEROMAGNET. JEZGROM

~~Struja magnetiziranja javlja se u transformatoru.~~

~~Ako kroz primarni krug teče vremenski promjenjiva struja im, a stezaljke sekundara su otvorene na sekundarnoj strani neće biti struje te će struja primara im u potpunosti služiti za magnetiziranje jezgre. Ta struja se još naziva struja magnetiziranja.~~

~~17. ODREĐIVANJE DIELEKTRIČNE KONSTANTE IZOLACIJE KOAKSIJALNOG KABELA MJERENJEM BRZINE PROSTIRANJA~~

Struja magnetiziranja je struja koja protječe u praznom hodu kroz zavojnicu ili transformator s feromagnetskom jezgrom spojenima na izvor napona. Struja potrebna za postizanje magnetskog toka u jezgri.

sinusna pobuda => sinusni tok $\phi = \frac{1}{N_1}\int u_1\,dt$, $i_1 = \frac{H}{l}$

sinusni oblik ϕ stvorit će u feromagnetu nesinusni periodični valni oblik jakosti magnetskog polja (i struje). Zbog nelinearnog μ_r.

Iz B-H grafa možemo preći na $\phi - i$.

Dobiva se nelinearna struja koja se sastoji od dvije komponente:

17. ODREĐIVANJE DIELEKTRIČNE KONSTANTE KOAKSIJALNOG KABELA MJERENJEM BRZINE PROSTIRANJA

Idealni dvožični vod i koaksijalni kabel su prijenosni sustavi u kojima su vektori $\vec{E}$ i $\vec{H}$ transverzalni i nemaju komponente u smjeru prostiranja.

Uzduž linije putuje direktni ravni val:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \emptyset \qquad \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \emptyset$$

$$v_f = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \qquad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} \qquad \mu_r = 1 \text{ u dielektriku}$$

$$v_f = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}$$

Ako je linija otvorena tada dolazi do potpune refleksije na kraju linije.

Mjerenjem vremena između pobudnog i reflektiranog signala možemo odrediti v_f, a time i ε_r.

18. MJERENJE PROMJENE MAGNETSKOG TOKA POMOĆU ELE. MAGNETSKE INDUKCIJE

- određivanje promjene toka kroz zavojnicu na temelju ukupnog naboja koji proteče kroz zavojnicu.

Inducirani napon u zavojnici:

$$u = \frac{d\Psi}{dt} \Rightarrow i = \frac{d\Psi}{dt}\frac{1}{R}$$ $R \rightarrow$ ukupan otpor

$$Q = \int i\,dt = \frac{1}{R}\int\frac{d\Psi}{dt}dt = \frac{1}{R}\int d\Psi = \frac{1}{R}(\Psi_2 - \Psi_1) = \frac{1}{R}\Delta\Psi$$

$$\Rightarrow \Delta\Psi = Q \cdot R$$

Ako je struja u $t=0$ $i=0$ tada vrijedi:

$$\Psi = Q \cdot R \Rightarrow M = \frac{\Psi}{I}$$

19. ODREĐIVANJE MEĐUINDUKTIVITETA SUSTAVA ZAVOJNICA NA TEMELJU MJERENJA EKVIVALENTNOG INDUKTIVITETA SER. SPOJA

Međuinduktivitet dviju zavojnica:

$$M = \frac{\Psi_{12}}{I_1} = \frac{\Psi_{21}}{I_2}$$

Dvije međuinduktivno povezane zavojnice spojene serijski i ako kroz njih teče promjenjiva struja i napon je:

$$u = L_1 \frac{di}{dt} \pm M \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} \pm M \frac{di}{dt} = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} \pm 2M \frac{di}{dt}$$

$$u = \frac{di}{dt} L_{ekv} \Rightarrow L_{ekv} = L_1 + L_2 \pm 2M$$

Na taj način mjerenjem ekvivalentnog induktiviteta možemo odrediti međuinduktivitet zavojnica. Zavojnice trebamo spojiti u seriju i izmjeriti ekvivalentan induktivitet. Zatim jednu trebamo prespojiti tako da joj zamijenimo stezaljke te će se obrnuti predznak uz 2M. Tada razlika ΔL_{ekv}:

$$\Delta L_{ekv} = L_1 + L_2 + 2M - L_1 - L_2 + 2M = 4M$$

$$\Rightarrow M = \frac{\Delta L_{ekv}}{4} \qquad \text{Provjera: } M = \frac{\overset{\to \text{ veća izmjerena vrijednost}}{L_{ekv}} - L_1 - L_2}{2}$$

20. HELMHOLTZOVI SVITCI

- koriste se za precizno dobivanje uniformnih magnetskih polja, kada prostor u kojem je polje uniformno mora biti lako dostupan. U velikom dijelu prostora između svitaka polje se na njihovoj osi značajnije ne mijenja.

- koriste se za generiranje vremenski stalnih magnetskih polja te za generiranje promjenjivih polja niskih frek.

Presjek: