Rekapitulacija zadnjih predavanja

- Modeli trenja
- Primjer statičke ravnoteže (penjač na ljestvama)
- Modeli trenja
- D'Alambertov zakon (poučak)
- Dinamika rotacijskog gibanja
- Rad i kinetička energija, moment količine gibanja

U ovom predavanju

- Primjer jednadžbe D'Alamberta
- Jednadžbe Langangea
- Primjer jednadžbi Lagrangea (obrnuto njihalo, dvostruko njihalo, kolica s ovjesenim njihalom, KONJ)

Ponavljanje – D'Alambertovo načelo (Jednadžba D'Alamberta)

- Svaki problem iz dinamike gibanja se može preuređenjem jednadžbi gibanja riješiti poznatim metodama statike.
- Drugi Newtonov zakon opisuje gibanje čestice vektorskom jednadžbom

$$\boxed{\overrightarrow{F_R} = m \cdot \vec{a}}$$

gdje je $\boldsymbol{F}_R$ rezultantna sila koja djeluje na česticu mase *m*

- Jednadžba gibanja može se prikazati i u implicitnom obliku

$$\boxed{\overrightarrow{F_R} - m \cdot \vec{a} = \vec{0}}$$

- što uz $\boxed{-m \cdot \vec{a} = \vec{L}}$ daje

$$\boxed{\overrightarrow{F_R} + \vec{L} = \vec{0}}$$

Tu je *L* tzv. inercijska sila (D'Alambertova sila) koja nema odlike stvarne sile i omogućava da se svaki zadatak dinamike promatra kao dinamička ravnoteža svih sila, uključujući i inercijsku.

Lagrangeove jednadžbe

- Primjenom Lagrangeovih jednadžbi, mogu se proučavati gibanja sustava bez uvođenja reakcija kao pomoćnih nepoznanica (za razliku od D'Alambertovih jednadžbi).
- Time se potrebni broj jednadžbi svodi na minimum
- Osnovna ideja ove metode opisa gibanja sustava je u tome da se koriste tzv. poopćene, fizikalne, koordinate, koje određuju položaj sustava.
- Posebno je pogodna za analizu složenih problema gibanja (s više stupnjeva slobode), koji su s kinematičkog gledišta složenije.
- Za takve slučajeve, primjenom D'Alambertovog načela trebalo bi uvesti veliki dio reakcijskih sila koje kasnije treba opet eliminirati
- Koristi se u velikoj mjeri u analizi elektromehaničkih sustava
- Langrangeove jednadžbe su u stvari diferencijalne jednadžbe sustava gibanja dobivene primjenom energijskog pristupa.

Lagrangeove jednadžbe

- Primjenom Lagrangeovih jednadžbi, mogu se proučavati gibanja sustava bez uvođenja reakcija kao pomoćnih nepoznanica (za razliku od D'Alambertovih jednadžbi).
- Langrangeove jednadžbe, za sustav s n stupnjeva slobode, se izražavaju u sustavu s poopćenim koordinatama $q_1 \cdots\cdots q_n$. (Primjer, za sustav KONJ-a, radi se o dva stupnja gibanja i postojat će dvije poopćene koordinate, x_c (pozicija kolica) i α (kut njihanja).
- Izvod Lagrangeovih jednadžbi zasnovan je na načelu virtualnog rada
- Polazna pretpostavka je da se tijelo mase m giba u ravnini x,y i da ima 2 stupnja slobode gibanja (jedno ograničenje slobode gibanja-rotacija oko z osi; tijelo koje se giba u ravnini ima maksimalno 3 stupnja slobode gibanja)
- Ako sila ***F*** sa svojim komponentama *Fx*, *Fy* predstavlja rezultantni vektor svih sila koje djeluju na česticu mase m koja se giba u KS-u x, y, vrijede Newtonove jednadžbe gibanja

$$F_x = m\ddot{x}, \quad F_y = m\ddot{y} \tag{1}$$

Lagrangeove jednadžbe

- Gibanje mase m se može izraziti u s dvije nezavisne poopćene koordinate (engl. *generalised coordinates*) q_1 i q_2, pa se onda koordinate x, y te točke u npr. Desacrtesovom KS-u može prikazati kao

$$x = x(q_1, q_2), \quad y = y(q_1, q_2) \tag{2}$$

- Za derivacije tih koordinata vrijedi

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}\dot{q}_2, \quad \dot{y} = \frac{\partial y}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2}\dot{q}_2 \tag{3}$$

- Ukoliko se masa u gibanju uslijed djelovanja neke proizvoljne sile pomakne za infinitezimalno mali put δ_s s komponentama δ_x i δ_y, onda je izvršeni rad pod djelovanjem te sile (1)

$$\delta W = F_x \delta x + F_y \delta y \quad \text{tj.} \quad \delta W = m(\ddot{x}\delta x + \ddot{y}\delta y) \tag{4}$$

Lagrangeove jednadžbe

- Veoma važan korak je da se parcijalnim deriviranjem prvog izraza u (3) po dq_1/d_t i respektivno dq_2/d_t dobije da je

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial x}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial x}{\partial q_2}, \qquad \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial y}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial y}{\partial q_2} \qquad (5)$$

- Uzevši u obzir izraz za virtualni rad (4) i izraz za kinetičku energiju sustava, može se nakon detaljno objašnjenog izvoda u [4] i [5] pokazati da za bilo koju poopćenu q_r koordinatu vrijedi

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_r}\right) - \left(\frac{\partial E_k}{\partial q_r}\right) = F_x \frac{\partial x}{\partial q_r} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_r} \qquad (6)$$

Lagrangeove jednadžbe

- Izraz (6) pojednostavljeno napisan daje opći oblik Lagrangeovih jednadžbi za n stupnjeva slobode (n poopćenih koordinata sustava $q_1, \ldots q_n$)

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_r}\right) - \left(\frac{\partial E_k}{\partial q_r}\right) = F_{q_r}} \qquad r = 1,2,\ldots n \qquad (7)$$

- Ovdje je q_r bilo koja od koordinata koja se pojavljuje u izrazu za kinetičku energiju E_k ili silu F_{qr} koja se zove poopćena sila ili generalizirana sila (vanjska sila koja djeluje na sustav)
- Ako je sustav konzervativan, onda je

$$F_{qr} = -\frac{\partial E_p}{\partial q_r} \qquad (8)$$

gdje je E_p potencijalna energija

Lagrangeove jednadžbe

- Budući da potencijalna energija ne ovisi od poopćenih brzina, onda se uvrštenjem (8) u (7) dobije jednostavniji (prepoznatljivi) oblik može

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial q_r}\right)=0} \quad (9)$$

gdje je

$$\boxed{L = E_k - E_p} \quad (10)$$

- Funkcija L iz (9) i (10) se zove LAGRANGIAN ili KINETIČKI POTENCIJAL

Lagrangeove jednadžbe

Postupak rješavanja zadataka pomoću Lagrangeovih jednadžbi

- Odrediti broj stupnjeva slobode zadanog sustava i izabrati pogodan sustav s poopćenim koordinatama $q_1 \ldots\ldots q_n$
- Izraziti kinetičku energiju sustava E_k u obliku

$$E_k = (q_1,\ q_2, \ldots\ldots q_n\ ;\ \dot{q}_1,\ \dot{q}_2, \ldots\ldots \dot{q}_n\ ),$$

tj. Kao funkciju poopćenih koordinata (pozicija) i poopćenih brzina, pri čemu je E_k kvadratna funkcija poopćenih brzina

- Deriviranjem E_k pronaći parcijalne derivacije

$$\partial E_k \big/ \partial \dot{q}_r \quad i \quad \partial E_k \big/ \partial q_r$$

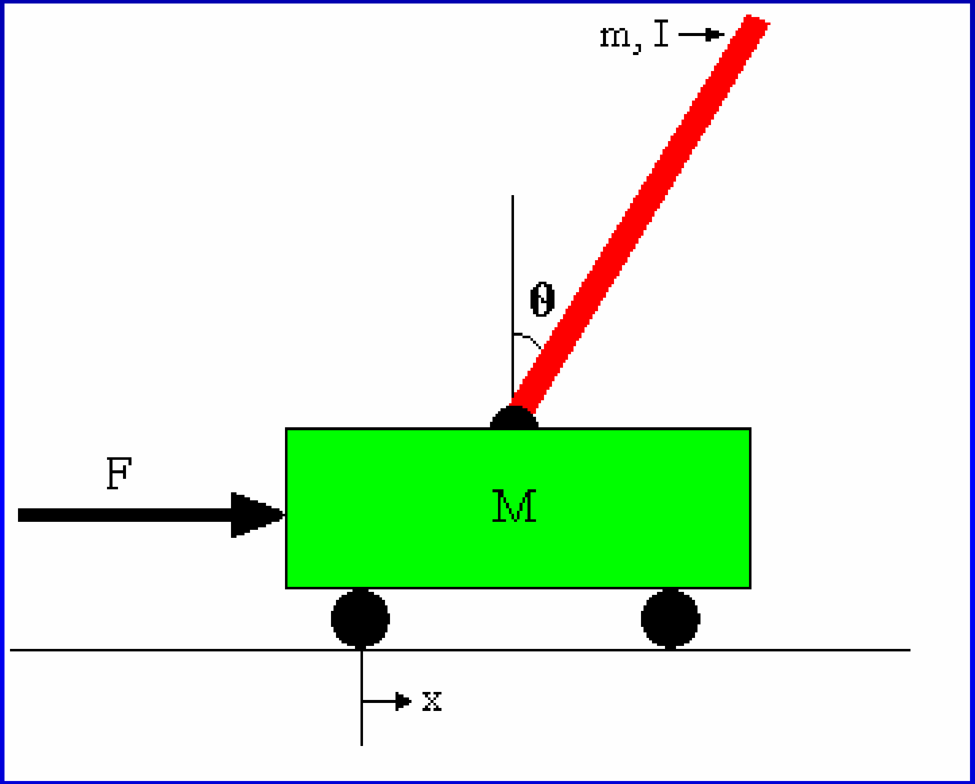
Lagrangeove jednadžbe

- Odrediti poopćene sile F_r koje djeluju na sustav. U tu svrhu treba pri određivanju te sile koja odgovara koordinati q_r dati sustavu virtualni pomak samo za koordinatu q_r, pa izračunati virtualni rad svih sila koje djeluju na sustav pri tom pomaku.
- U slučaju da postoji potencijalna energija u sustavu, izračunati odgovarajuću poopćenu silu prema izrazu

$$\boxed{F_r = -\frac{\partial E_p}{\partial q_r}}$$

- Nađene veličine E_p i E_k ili E i V (prema često korištenim oznakama $L = E_k - E_p$ ili $L = E - V$, ili $L = T - V$) uvrstiti u Lagrangeove jednadžbe

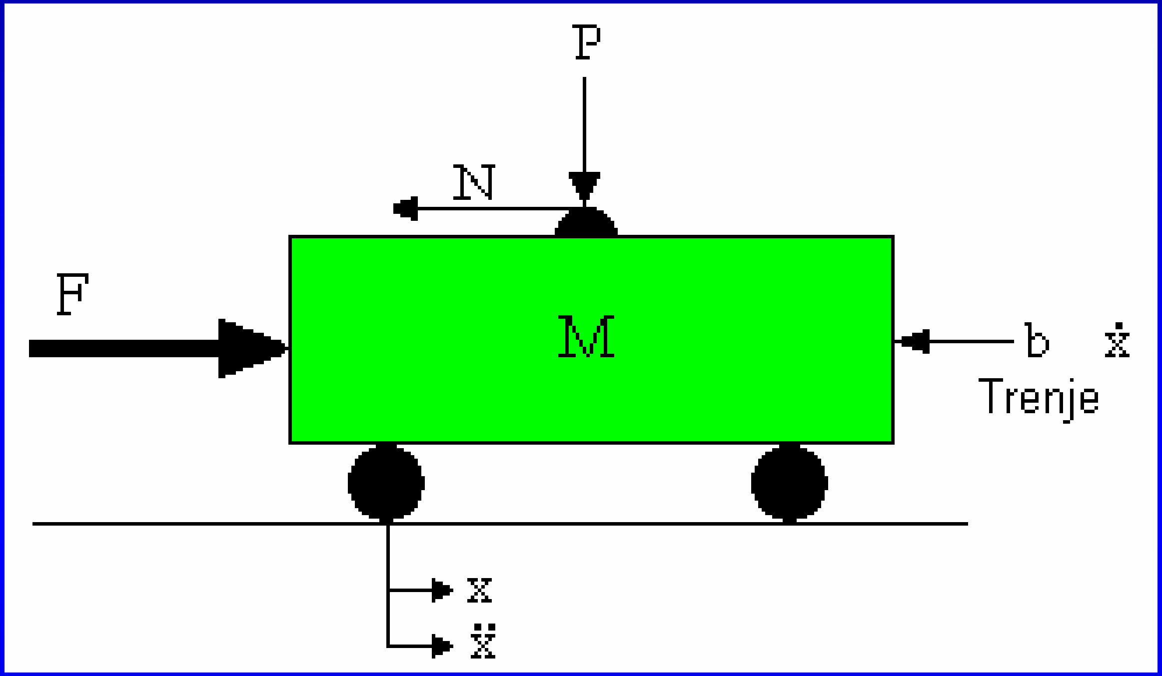
Primjer-1:Laboratorijski postav i definicija regulacijskog zadatka

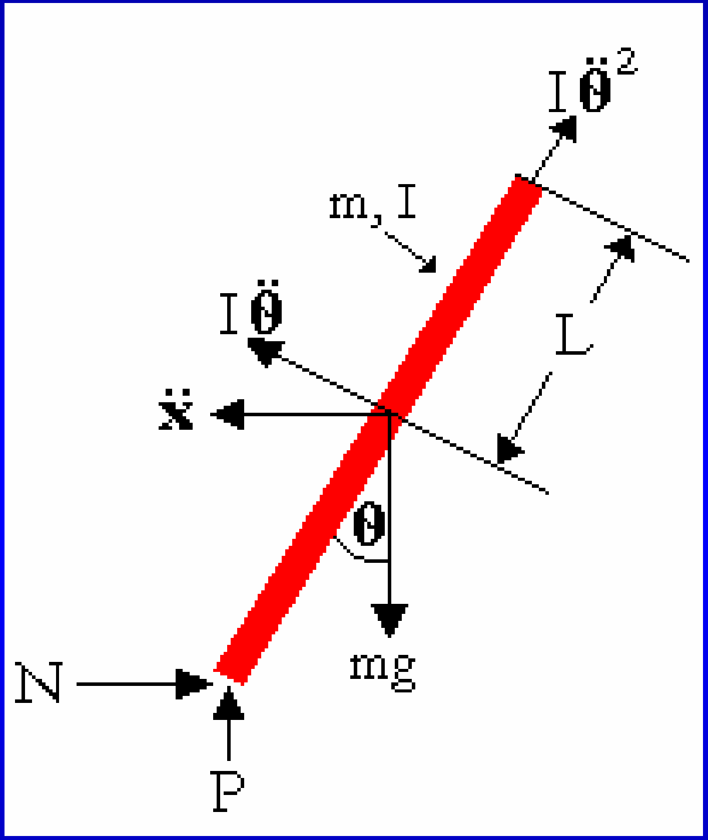


Mjerene varijable: x, θ

Realizirati matematički model obrnutog njihala s kolicima na slici prmjenom načela D'Alamberta

Matematičko modeliranje njihala





Jednadžbe (nelinearne) sustava

Horizontalne sile koje djeluju na njihalo:

$$F = M\ddot{x} + b\dot{x} + N \qquad (1)$$

$$N = m\ddot{x} + mL\ddot{\theta}\cos\theta - mL\dot{\theta}^2\sin\theta \qquad (2)$$

$$\left[F = (M+m)\ddot{x} + b\dot{x} + b\dot{x} + mL\ddot{\theta}\cos\theta - mL\dot{\theta}^2\sin\theta\right] \qquad \text{(2A)}$$

Okomite sile koje djeluju na njihalo:

$$P\sin\theta + N\cos\theta - mg\sin\theta = mL\dot{\theta} + m\ddot{x}\cos\theta \qquad (3)$$

$$-PL\sin\theta - NL\cos\theta = I\ddot{\theta} \qquad (4)$$

$$\left[(I + mL^2)\ddot{\theta} + mgL\sin\theta = -mL\ddot{x}\cos\theta\right] \qquad \text{(4A)}$$

Linearizacija jednadžbi oko radne točke

<u>Pretpostavka za linearizaciju:</u> Sila *F* djeluje na njihalo tako da je otklon njihala u željenoj radnoj točki (θ=0) u odnosu na okomitu os jako mali. U tom slučaju vrijedi:

$$\theta \cong \pi + \phi$$
$$\cos(\theta) = -1$$
$$\sin(\theta) = -\theta$$
$$\dot{\theta}^2 = 0$$

$$\phi \approx 0$$

$\Rightarrow$

Izraz dolje slijedi iz (2A) i (4A)

$$F = (M+m)\ddot{x} + b\dot{x} - mL\ddot{\phi}$$
$$mL\ddot{x} = (I + mL^2)\ddot{\phi} - mgL\phi$$

Linearne jednadžbe sustava

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \ddot{x}\\ \dot{\phi}\\ \ddot{\phi}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{-(I+mL^2)b}{I(M+m)+MmL^2} & \dfrac{m^2gL^2}{I(M+m)+MmL^2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & \dfrac{-mLb}{I(M+m)+MmL^2} & \dfrac{mgL(M+m)}{I(M+m)+MmL^2} & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\ \dot{x}\\ \phi\\ \dot{\phi}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{I+mL^2}{I(M+m)+MmL^2}\\ 0\\ \dfrac{mL}{I(M+m)+MmL^2}\end{bmatrix}\cdot u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\ \dot{x}\\ \phi\\ \dot{\phi}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\cdot u$$

Linearne jednadžbe sustava

M – Masa kolica	0.5 kg
m – Masa njihala	0.25 kg
b – Trenje kolica o podlogu	0.15 N/m/sec
L – Dužina njihala u odnosu na centar mase	0.35 m
I – Inercija njihala	0.006 kg·m²
g – gravitacijsko ubrzanje	9.8 m/s²

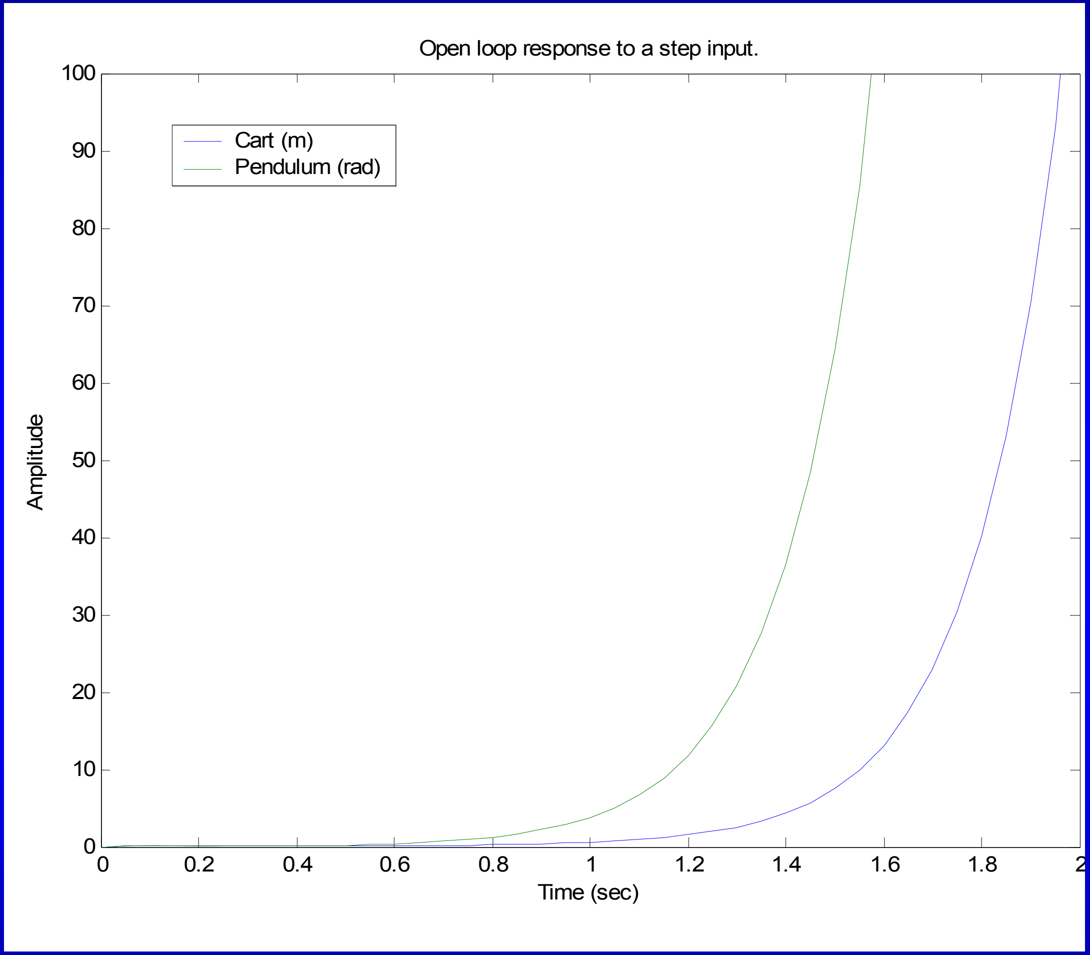
$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

u = sila koja djeluje na kolica

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -.2773 & 3.7871 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -.6625 & 32.4606 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.8486 \\ 0 \\ 4.4164 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sustav njihala u otvorenoj petlji

$$eig(A) = \begin{bmatrix} 0 \\ 5.6602 \\ -0.1999 \\ -5.7376 \end{bmatrix}$$



Svojstvene vrijednosti karakteristične jednadžbe sustava pokazuje da se jedan *pol* (5.6602) nalazi u desnoj poluravnini kompleksne ravnine pa je otvoreni sustav nestabilan.

Isto tako *pol u nuli* (0) ukazuje da otvoreni krug (staza) ima integralno djelovanje i da je prisutan *efekt zaleta*

Primjena LQR optimalnog regulatora

Linearni kvadratični regulator (engl. ***L**inear* ***Q**uadratic* ***R**egulator*, LQR) optimira koeficijente matrice K regulatora stanja *u=-Kx* tako da minimizira funkciju J, koja se zove *indeks kakvoće.*

$$J_0^t = \int_0^t \left[x^T(\tau) Q x(\tau) + u^T(\tau) R u(\tau) \right] d\tau$$

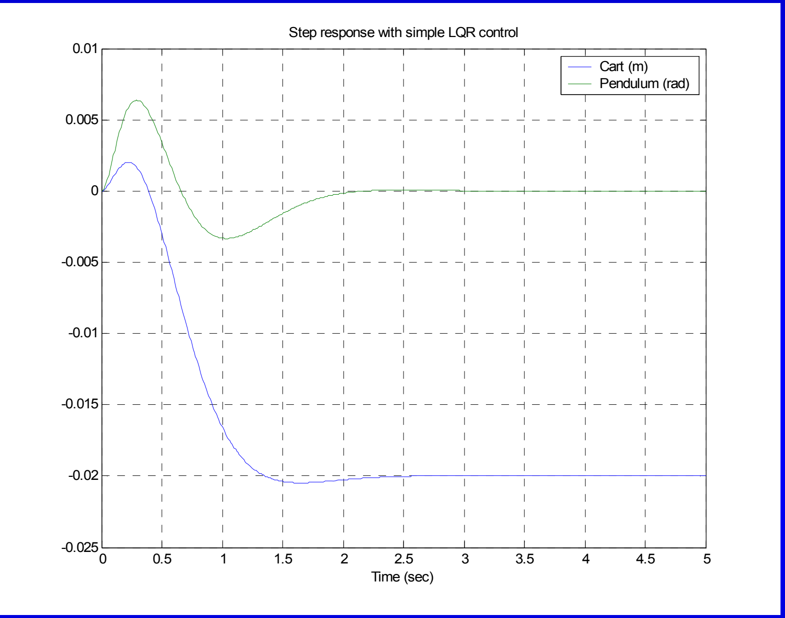
$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Q – matrica težinskih koeficijenata vektora varijabli stanja *X*

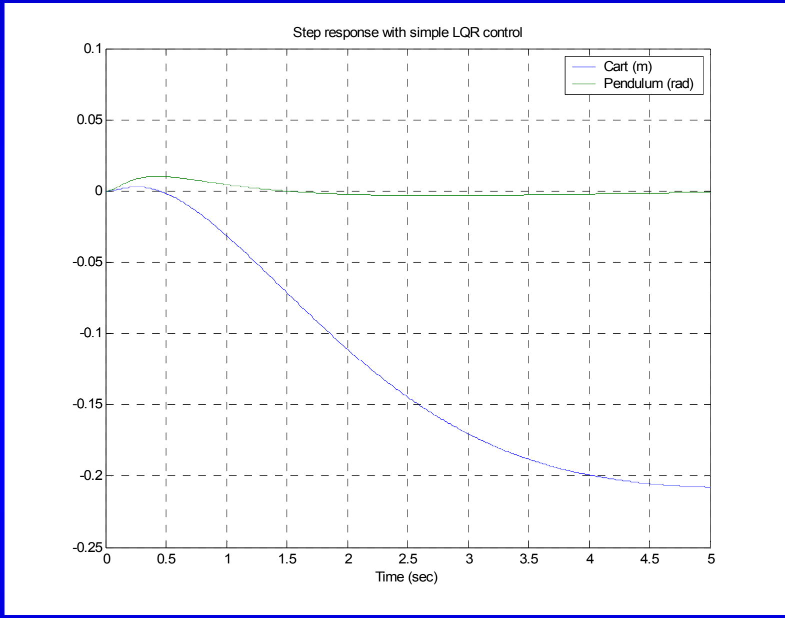
R – matrica težinskih koeficijenata vektora upravljačkih varijabli stanja *U*

Sinteza LQR-a

Q(1,1) = 100
Q(3,3) = 1
Naglašavanje odziva *pozicije kolica*

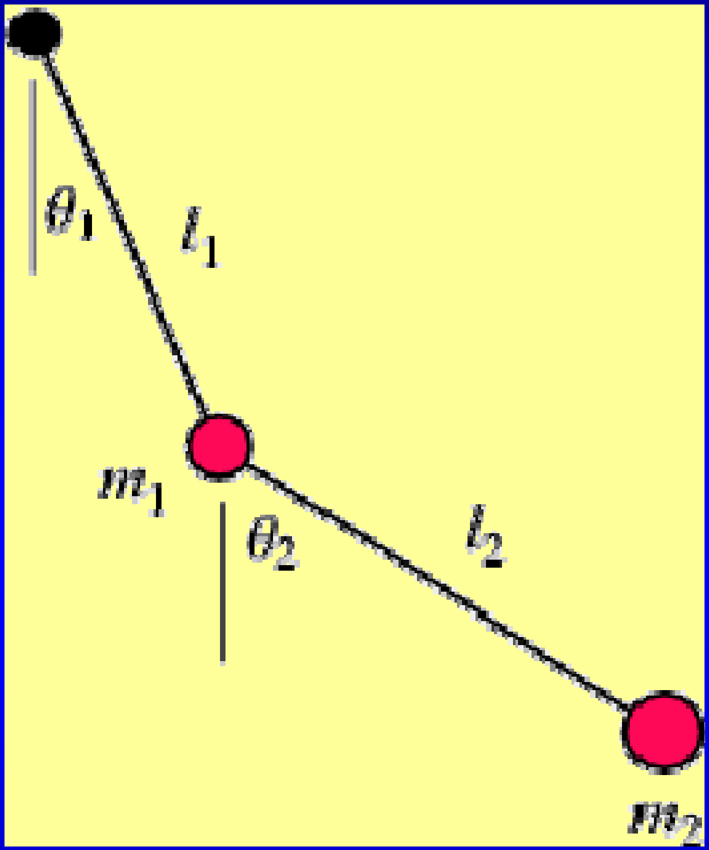


Q(1,1) = 1
Q(3,3) = 100
Naglašavanje odziva *kuta*



- Veća vrijednost koeficijenta težinske matrice poboljšava regulacijsku kakvoću varijable uz koju je težinska matrica.
- Povećavanjem Q(1,1) odziv pozicije kolica je dobar (brz); povećavanjem Q(3,3) kut njihanja se smanjuje.

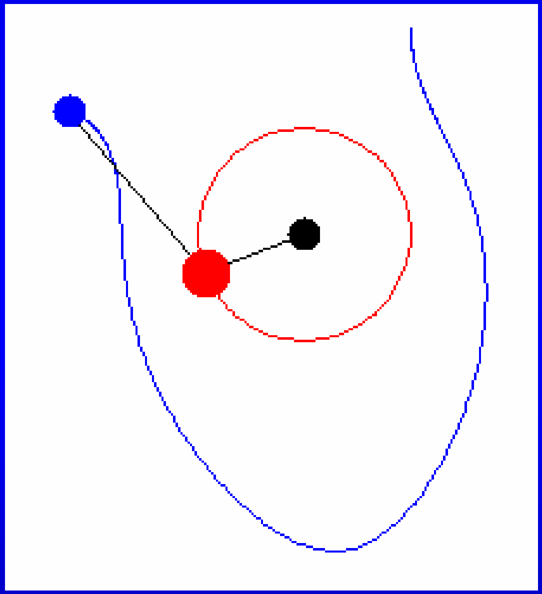
Primjer-2: Dvostruko njihalo

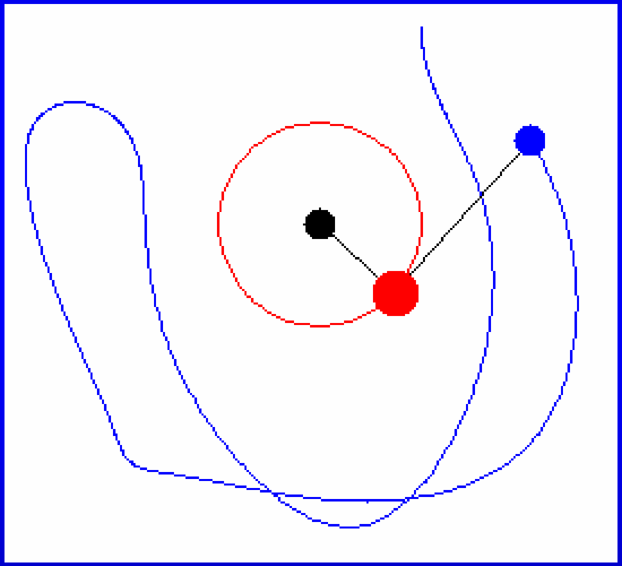


Zadatak: Pomoću jednadžbi D’Alamberta i Lagrangea realizirati matematički model dvostrukog njihala (prema slici)

Primjer: Dvostruko njihalo (animacija)

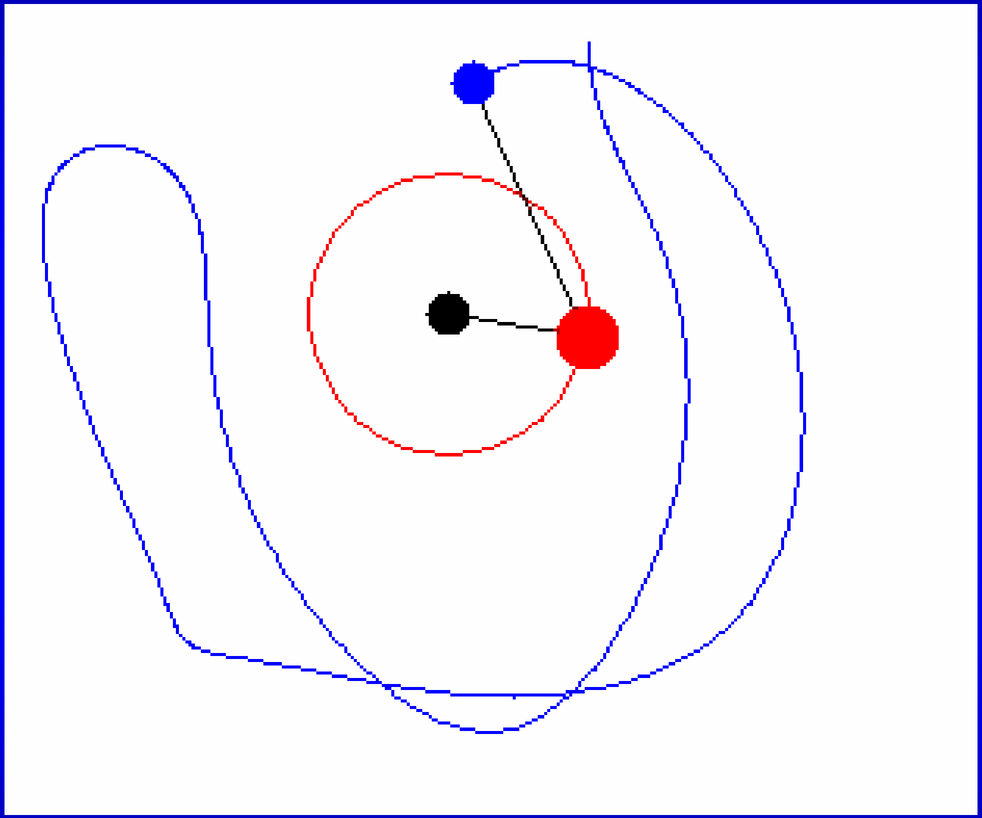
DOMAĆI Zadatak: Pomoću jednadžbi D'Alamberta i Lagrangea realizirati matematički model dvostrukog njihala (prema slici)





Moguće putanje koje opisuje vrh dvostrukog njihala pri slobodnom (nereguliranom) gibanju

Primjer: Dvostruko njihalo video animacija

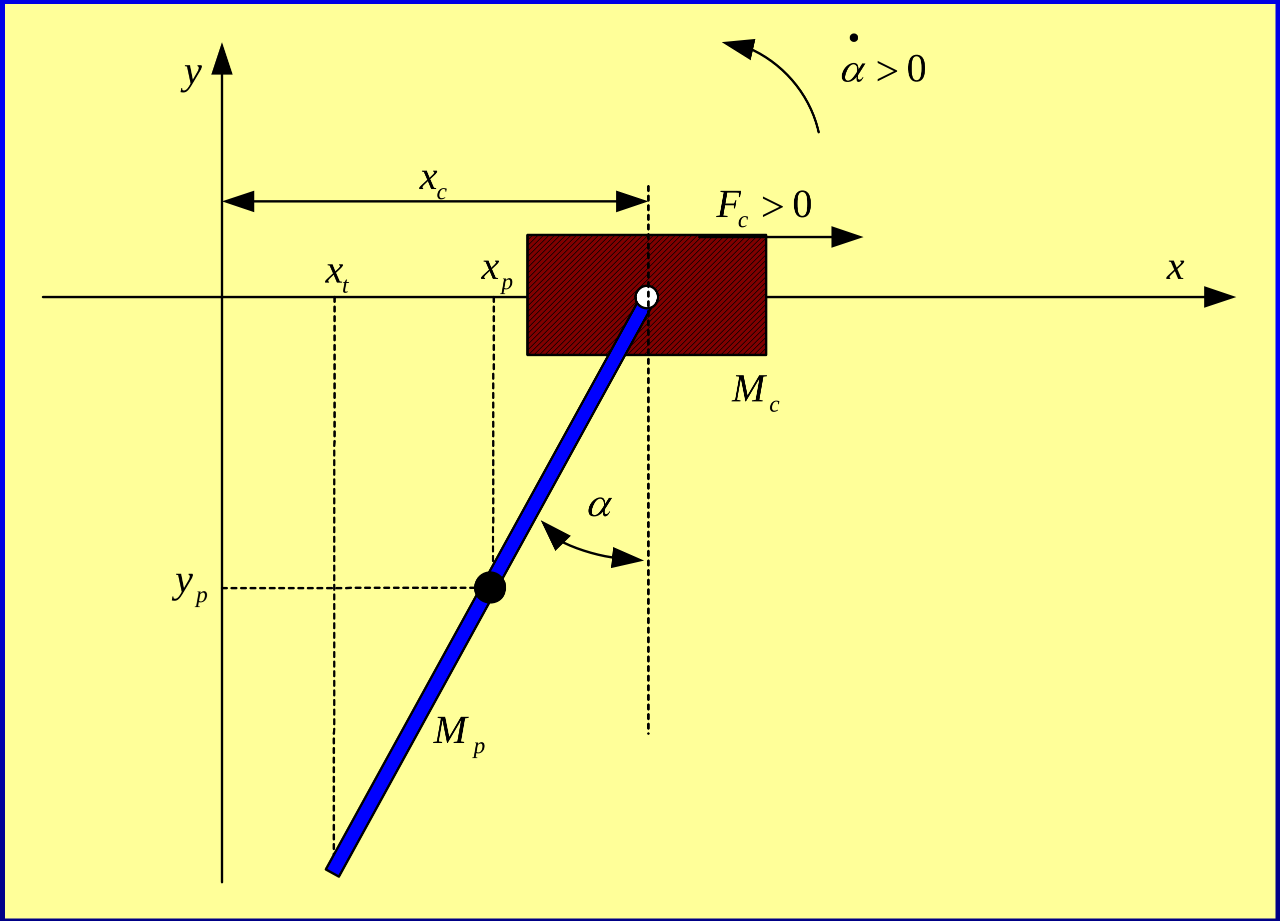


Zadatak: Pomoću jednadžbi D'Alamberta i Lagrangea realizirati matematički model dvostrukog njihala (prema slici)

Dvostruko njihalo
Industrijski sustav

Primjer: Kolica s Ovješenim Njihalom-KONJ (SPG – Single Pendulum Gantry)

Zadatak: Pomoću jednadžbi Lagrangea realizirati matematički model Kolica s ovješenim njihalom (prema slici)



Primjer: Kolica s Ovješenim Njihalom-KONJ (SPG – Single Pendulum Gantry)

- Sustav ima dva stupnja slobode, tj. postoje dvije Lagrangeove koordinate. Odabrane su poopćene koordinate: x_c (linearni pomak kolica od početne pozicije) i α (trenutni otklon njihala od vertikalne pozicije).

- Ulazna veličina sustava je F_c, odnosno sila koja djeluje na kolica. Opći oblik Lagrangeovih jednadžbi

$$\left(\frac{\partial}{\partial t \partial \dot{x}_c} L\right) - \left(\frac{\partial}{\partial x_c} L\right) = Q_{xc} \qquad (1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t \partial \dot{\alpha}} L\right) - \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} L\right) = Q_{\alpha} \qquad (2)$$

- Q_{xc} je ukupna sila primijenjena u x_c poopćenoj koordinati uz B_{eq} ekvivalentni koeficijent viskoznog trenja

$$Q_{x_c}(t) = F_c(t) - B_{eq}\dot{x}_c \qquad (3)$$

Primjer: Kolica s Ovješenim Njihalom-KONJ (SPG – Single Pendulum Gantry)

- Q_α je ukupna sila primijenjena u α poopćenoj koordinati uz B_p ekvivalentni koeficijent otpora zraka

$$Q_\alpha(t) = -B_p\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right) \qquad (4)$$

- Lagrangian sustava, L, koji je jednak razlici ukupne kinetičke, E_k, i potencijalne energije sustava, E_p iznosi

$$L = E_K - E_P \qquad (5)$$

- Ukupna kinetička energija sustava je zbroj kinetičke energije kolica, E_{kc}, i kinetičke energije njihala, E_{kp}

$$E_{Kct} = \frac{1}{2} M_c \cdot \dot{x}_c^{\,2} \qquad (6)$$

Translacijska E_k kolica

$$E_{Kcr} = \frac{1}{2}\frac{J_m K_g^2 \cdot \dot{x}_c^{\,2}}{r_{mp}^2} \qquad (7)$$

E_k zbog inercije rotora

Primjer: Kolica s Ovješenim Njihalom-KONJ (SPG – Single Pendulum Gantry)

- Ukupna kinetička energija kolica je zbroj (6) i (7)

$$E_{Kc} = E_{Kct} + E_{Kcr}$$ tj. $$E_{Kc} = \frac{1}{2} M \cdot \dot{x}_c^{\,2} \quad (8)$$

gdje je $$M = M_c + \frac{J_m K_g^2}{r_{mp}^2} \quad (9)$$

- Kinetička energija njihala sastoji se od translacijske kinetičke energije njihala, E_{kpt}, i kinetičke energije nastale zbog inercije njihala, E_{kpr}

$$E_{Kp} = E_{Kpt} + E_{Kpr} \quad (10)$$

- Ukupna masa njihala nalazi se u njegovom težištu, pa se translacijska energija njihala može prikazati kao funkcija linearnih brzina u težištu

$$E_{Kpt} = \frac{1}{2} M_p \left(\sqrt{\dot{x}_p^{\,2} + \dot{y}_p^{\,2}} \right)^2 \quad (11)$$

Primjer: Kolica s Ovješenim Njihalom-KONJ (SPG – Single Pendulum Gantry)

- Težište njihala opisano koordinatama x_p i y_p, može se prikazati Lagrangeovim koordinatama na slijedeći način

$$x_p = x_c + l_p \sin\alpha \qquad i \qquad y_p = -l_p \sin\alpha \tag{12}$$

- Linearna (translacijska) brzina njihala u smjeru *x* – osi i *y*-osi iznosi

$$\dot{x}_p = \dot{x}_c + l_p \cos(\alpha)\cdot\dot{\alpha} \qquad \dot{y}_p = l_p \sin(\alpha)\cdot\dot{\alpha} \tag{13}$$

- Kinetička energija njihala nastala zbog inercije njihala je

$$E_{Kpr} = \frac{1}{2} I_p \cdot \dot{\alpha}^2 \tag{14}$$

- Ukupna kinetička energija sustava je zbroj svih kinetičkih energija (8), (11) i (14) i nakon sređivanja iznosi

$$E_K = \frac{1}{2}(M + M_p)\cdot\dot{x}_c^{\,2} + M_p I_p \cos(\alpha)\cdot\dot{\alpha}\cdot\dot{x}_c + \frac{1}{2}(I_p + M_p l_p)\cdot\dot{\alpha}^2 \tag{15}$$

Primjer: Kolica s Ovješenim Njihalom-KONJ (SPG – Single Pendulum Gantry)

- Ukupna potencijalna energija sustava je količina energije koju sustav ima uslijed vertikalnog pomaka njihala i iznosi

$$E_P = -M_p g l_p \cos(\alpha(t)) \qquad (16)$$

- Lagrangian L sustava prema (5) iznosi

$$L = \frac{1}{2}(M + M_p)\cdot \dot{x}_c^{\,2} + M_p I_p \cos(\alpha)\cdot\dot{\alpha}\cdot\dot{x}_c + \frac{1}{2}(I_p + M_p l_p)\cdot\dot{\alpha} + M_p g l_p \cos(\alpha(t)) \qquad (17)$$

- Sređivanjem izraza dobiju se Lagrangeove jednadžbe

$$(M + M_p)\cdot\ddot{x}_c + M_p l_p \cos(\alpha)\cdot\ddot{\alpha} - M_p l_p \sin(\alpha)\cdot\dot{\alpha}^2 = F_c - B_{eq}\cdot\dot{x}_c \qquad (18)$$

$$M_p l_p \cos(\alpha)\cdot\ddot{x}_c + (I_p + M_p l_p^{\,2})\cdot\ddot{\alpha} - M_p g l_p \sin(\alpha) = -B_p\cdot\dot{\alpha} \qquad (19)$$

Primjer: Kolica s Ovješenim Njihalom-KONJ (SPG – Single Pendulum Gantry)

- Jednadžbe gibanja elektromehaničkog sustava dobiju se rješavanjem Lagrangeovih jednadžbi (18) i (19).
- Nelinearne jednadžbe gibanja potrebno je zapisati u preko drugih derivacija Lagrangeovih koordinata

$$\ddot{x}_c = \frac{-(I_p + M_p l_p^2)B_{eq}\cdot\dot{x}_c + (M_p^2 l_p^3 + l_p M_p I_p)\sin(\alpha)\cdot\dot{\alpha}^2 + M_p l_p \cos(\alpha) B_p \cdot \dot{\alpha}}{(M+M_p)I_p + M\cdot M_p l_p^2 + M_p^2 l_p^2 \sin(\alpha(t))^2} + \frac{M_p^2 l_p^2 g\cos(\alpha)\sin(\alpha) + (I_p + M_p l_p^2)\cdot F_c}{(M+M_p)I_p + M\cdot M_p l_p^2 + M_p^2 l_p^2\sin(\alpha)^2} \tag{20}$$

$$\ddot{\alpha} = \frac{-(M+M_p)B_p\cdot\dot{\alpha} - M_p^2 l_p^2\sin(\alpha)\cos(\alpha)\cdot\dot{\alpha}^2 + M_p l_p\cos(\alpha)B_{eq}\cdot\dot{x}_c}{(M+M_p)I_p + M\cdot M_p l_p^2 + M_p^2 l_p^2\sin(\alpha)^2} + \frac{-(M+M_p)M_p g l_p\sin(\alpha) - M_p l_p\cos(\alpha)\cdot F_c}{(M+M_p)I_p + M\cdot M_p l_p^2 + M_p^2 l_p^2\sin(\alpha)^2} \tag{21}$$

LITERATURA

1. D. Horvat, *Fizika I, Mehanika i toplina*, Hinus, Zagreb, 2004.
2. O. Muftić, *Mehanika i statika*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1989.
3. S. Jecić, *Mehanika II, Kinematika i Dinamika*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1989.
4. D. Bazjanac, *Tehnička mehanika, II dio, KINEMATIKA*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1968.
5. D.A.Wels, *Lagrangian Dynamics,* Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, New York, 1967. (Knjižnica ZESA)
6. M. Stegić, *Tehnička mehanika,* Elektrotehnički fakultet, Zagreb, 1992.
7. L. Vodovnik, S. Reberšek, *Dinamika sistemov,* Fakulteta za elektrotehniko, Univerza u Ljubljani, Ljubljana 1978. (Lagrange)
8. P. Kulišić i ostali, *Riješeni zadaci iz mehanike i topline*, Školska knjiga, Zagreb, 1996.
9. J. Dobrinić, *FIZIKA, mehanika, titranje i toplina*, Tehnički fakultet Rijeka, 1998.