Prvi međuispit iz Linearne algebre

19. travnja [illegible]

1. (5b) (a) (3b) Zadana je matrica $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ s koeficijentima iz polja $\mathbb{Z}_5$. Odredi $\mathbf{A}^{-1}$. (Svi koeficijenti matrice $\mathbf{A}^{-1}$ moraju biti u $\mathbb{Z}_5$.)
(b) (2b) Definirati pojam polja.

2. (7b) Zadan je skup X svih matrica oblika $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2\lambda + 3\mu & 2\lambda + \mu \\ 2\lambda + \mu & 3\lambda - 2\mu \end{bmatrix}$, gdje su $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
(a) (2b) Dokaži da je X vektor[illegible]ki podprostor prostora matrica M_2.
(b) (2b) Nađi neku bazu u X i [illegible]rovjeri da se radi o bazi.
(c) (3b) Definirati pojam baze [illegible]} općeg vektorskog prostora X. Provjeri da je rastav bilo kojeg vektora [illegible] X po toj bazi jedincat.

3. (8b) U vektorskom prostoru $\mathbb{R}^4$ (u redčanom zap[illegible] zadan je vektor $\mathbf{a} = (1, 2, 1, 2)$.
(a) (3b) Naći neku bazu u podprostoru $X = \{\mathbf{a}\}^{\perp}$.
(b) (3b) Naći ortogonalnu projekciju $P\mathbf{e}$ vektora $\mathbf{e} = (1, 0, 0, 0)$ [illegible] podprostor X.
(c) (2b) Ako je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ zadana ortogonalna baza nekog unitarnog prostora X, odredite koeficijente u rastavu bilo kojeg vektora $\mathbf{x} \in X$ po toj bazi.

4. (5b) Dijagonalizirajte matricu $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, ako je moguće (tj. odredite regularnu matricu $\mathbf{T}$ i dijagonalnu $\mathbf{D}$, takve da je $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \mathbf{D}$ [illegible]ako je moguće).

5. **(7b)** Zadan je operator $A : P_2 \to P_2$ sa $Ap(x) = (x+1) \cdot p'(x)$, gdje je P_2 vektorski prostor polinoma stupnja najviše 2.

(a) (2b) Provjeri da je A linearni operator.

(b) (5b) Odredi matricu A tog linearnog operatora. Odredi rang i defekt operatora A. Je li A izomorfizam?

6. **(6b)** Neka je $A : V^2 \to V^2$ operator rotacije ravnine ravnine za kut $\varphi = \pi/3$, a $B : V^2 \to V^2$ operator zrcaljenja ravnine s obzirom y-os.

(a) (3b) Odredite matricu C operatora $A \circ B : V^2 \to V^2$ s obzirom na kanonsku bazu u V^2.

(b) (2b) Koristeći Hamilton-Cayleyev teorem, izračunaj matricu $\mathbf{C}^{-1}$ (ako postoji).

(c) (1b) Je li $A \circ B = B \circ A$?

7. **(7b)** (a) (2b) Provjeri da ako su matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ slične (tj. postoji regularna matrica $\mathbf{T}$ takva da je $\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$), onda one imaju iste determinante.

(b) (2b) Provjeri da bilo koja gornja trokutasta matrica $\mathbf{B}$ na glavnoj dijagonali uvijek ima svoje vlastite vrijednosti.

(c) (3b) Provjeri da ako je $\mathbf{A}$ bilo koja kvadratna matrica reda n, onda $\det \mathbf{A} = \lambda_1 \cdots \lambda_n$, gdje su $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sve vlastite vrijednosti od $\mathbf{A}$. (*Naputak:* koristite Schurov teorem)