

TRANSFORMATORI

TR.1 - Matematički model, nadomjesna shema, fazorski dijagram, paralelni rad, hlađenje, prenaponi

Prof. dr. sc. Zlatko Maljković

Sadržaj predavanja iz transformatora

- Gubici i korisnost
- Naponske jednadžbe
- Nadomjesna shema
- Fazorski dijagram
- Pad napona
- Rasipna reaktancija
- Kratki spoj i sile na namote
- Paralelni rad
- Zagrijavanje i hlađenje transformatora
- Prenaponi
- Autotransformatori
- Natpisna pločica
- Kromatografska analiza ulja
- Supravodljivi transformatori

Osnovni teretni gubici

- **Teretni gubici P_t** – (gubici zbog tereta) predstavljaju gubitke u namotima zbog protoka struje.
- **Osnovni teretni gubici** (Joule-ovi pri istosmjernoj struji) su gubici I^2R za namote, gdje je R otpor namota pri istosmjernoj struji računat za normom definiranu radnu temperaturu namota.
- Uz poznat otpor R_1 pri temperaturi ϑ_1 može se otpor namota R_2 za bakrene vodiče pri temperaturi ϑ_2 računati prema formuli:

$$R_2 = R_1 \frac{235 + \vartheta_2}{235 + \vartheta_1}$$

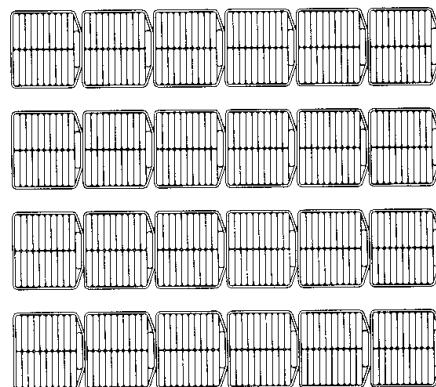
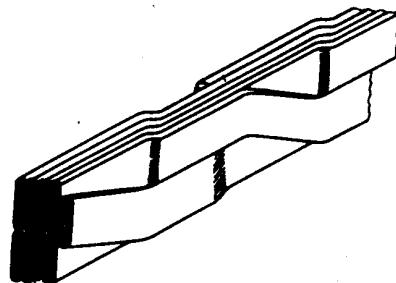
- Za aluminijске vodiče prethodna formula vrijedi stavljajući umjesto faktora 235 faktor 225.

Dodatni teretni gubici

- Dodatni teretni gubici su razlika mjenih gubitaka izmjeničnom strujom od računatih prema izrazu I^2R . Zbog izmjeničnog polja u kojem se nalaze vodiči teku vrtložne struje kroz vodiče, pa se događa nejednolika raspodjela struje kroz presjek vodiča i povećane gubitke.
- Zbog nejednolike raspodjele magnetskog polja po radijalnoj širini namota (najveće polje je u namotima uz kanal između dvaju koncentriranih namota) gubici zbog vrtložnih struja, pa onda i zagrijavanje najveće je u tim dijelovima namota.
- U svrhu smanjenja tih dodatnih gubitaka presjek vodiča okomit na magnetsko polje mora biti što manji, pa se namoti rade od dionih vodiča relativno malog presjeka.

Transponirani (prepleteni) vodiči

Kod velikih energetskih transformatora rade se posebne vrste namota radi smanjenja dodatnih gubitaka u namotu, npr. preloženi disk namot s transponiranim vodičima



Gubici i korisnost transformatora

- Gubici u transformatoru se sastoje od gubitaka praznog hoda P_0 i teretnih gubitaka P_t .
- Korisnost transformatora je omjer predane i primljene djelatne snage izražen u postocima:

$$\eta = 100 \cdot \frac{S \cos \varphi - P_0 - P_t}{S \cos \varphi} \quad [\%]$$

- Označava se najčešće s 4 znamenke, i današnji najveći transformatori postižu korisnost iznosa $\eta = 99,80\%$, što znači da su ukupni gubici samo 0,2% od prenesene snage.

Ovisnost korisnosti o opterećenju transformatora

- Relativno opterećenje α :

$$\alpha = \frac{S}{S_n}$$

- Teretni gubici ovise samo o iznosu tereta:

$$P_t = \alpha^2 \cdot P_{tn}$$

- Gubici praznog hoda ovise o naponu, odnosno o indukciji i frekvenciji:

$$P_0 = f(U) = f(B, f)$$

- Korisnost:

$$\eta = \frac{\alpha \cdot S_n \cos \varphi - P_0 - \alpha^2 \cdot P_{tn}}{\alpha \cdot S_n \cos \varphi}$$

Optimalna korisnost transformatora (1)

- Maksimalnu korisnost u ovisnosti o opterećenju dobit će se derivirajući izraz za korisnost i izjednačujući ga s nulom, pa se dobiva:

$$\left(\frac{P_0}{\alpha^2} \right) - P_{tn} = 0$$

- Opterećenje pri kojem je korisnost najveća je:

$$\alpha = \sqrt{\frac{P_0}{P_{tn}}}$$

- Korisnost je optimalna kada su gubici praznog hoda i teretni gubici jednaki $P_0 = P_t$.
- Transformator s nazivnim teretnim gubicima jednakim gubicima praznog hoda imao bi maksimalnu korisnost kod punog tereta.

Optimalna korisnost transformatora (2)

- No većinu vijeka trajanja transformator neće raditi punom nego smanjenom snagom. Uobičajena je izvedba transformatora s P_{tn} dva do šest puta većim od P_0 , što znači da je optimalna korisnost pri:

$$\alpha = \sqrt{\frac{P_0}{2P_0}} = 0,71 \quad \text{za} \quad P_{tn} = 2P_0$$

- odnosno:

$$\alpha = \sqrt{\frac{P_0}{6P_0}} = 0,41 \quad \text{za} \quad P_{tn} = 6P_0$$

Optimalna korisnost transformatora (3)

- Postiže se pri opterećenju od 40% kod manjih do 70% kod najvećih transformatora.
- Optimalna korisnost:

$$\eta_{\max} = \frac{\alpha S_n \cos \varphi - P_0 - \alpha^2 P_{tn}}{\alpha S_n \cos \varphi} = \frac{\sqrt{\frac{P_0}{P_{tn}}} S_n \cos \varphi - P_0 - \frac{P_0}{P_{tn}} P_{tn}}{\sqrt{\frac{P_0}{P_{tn}}} S_n \cos \varphi}$$

$$\boxed{\eta_{\max} = 1 - \frac{2 \cdot \sqrt{P_0 \cdot P_{tn}}}{S_n \cos \varphi}}$$

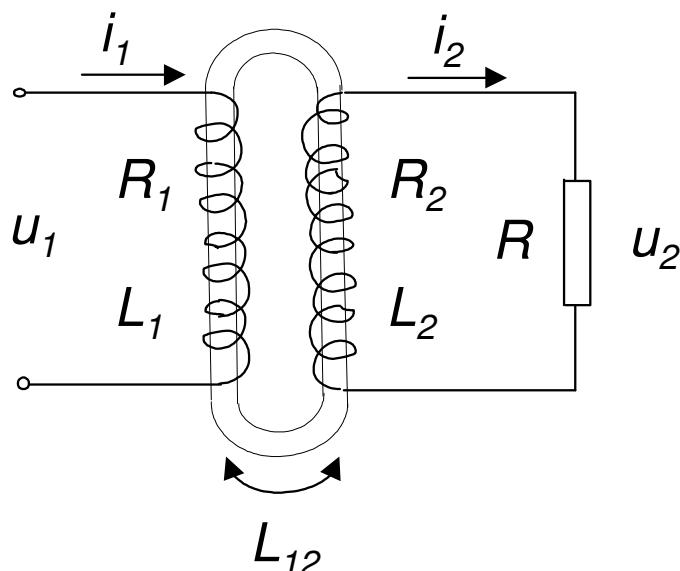
MATEMATIČKI MODEL.

Opće naponske jednadžbe transformatora

- Naponske jednadžbe primarnog i sekundarnog namota

$$u_1 = R_1 i_1 + \frac{d\psi_1}{dt} = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - L_{12} \frac{di_2}{dt}$$

$$-u_2 = -R i_2 = R_2 i_2 + \frac{d\psi_2}{dt} = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - L_{12} \frac{di_1}{dt}$$



Naponi i struje su trenutne vrijednosti

Otpori i induktiviteti su konstantni

Naponske jednadžbe u simboličkom prikazu

- Naponske jednadžbe primarnog i sekundarnog kruga transformatora za stacionarno stanje (kad su naponi i struje sinusne veličine) u simboličkom prikazu:

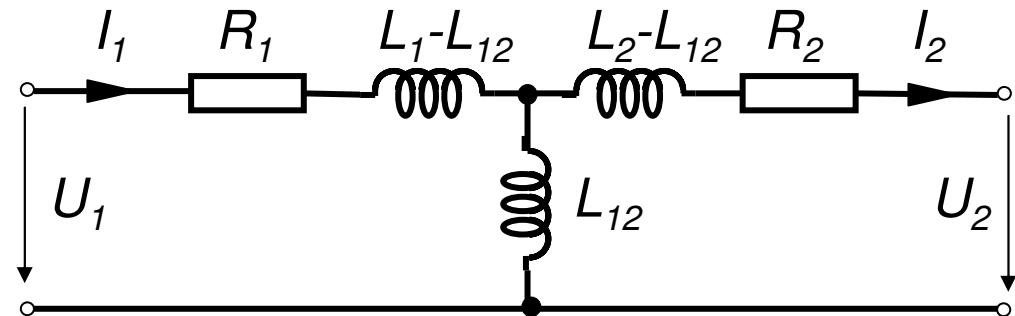
$$\dot{U}_1 = R_1 \dot{I}_1 + j\omega L_1 \dot{I}_1 - j\omega L_{12} \dot{I}_2$$

$$-\dot{U}_2 = R_2 \dot{I}_2 + j\omega L_2 \dot{I}_2 - j\omega L_{12} \dot{I}_1$$

- Dodavanjem dvaju suprotnih članova ($j\omega L_{12} I_1$ i $-j\omega L_{12} I_1$) u naponsku jednadžbu primara i ($j\omega L_{12} I_2$ i $-j\omega L_{12} I_2$) u jednadžbu sekundara dobije se:

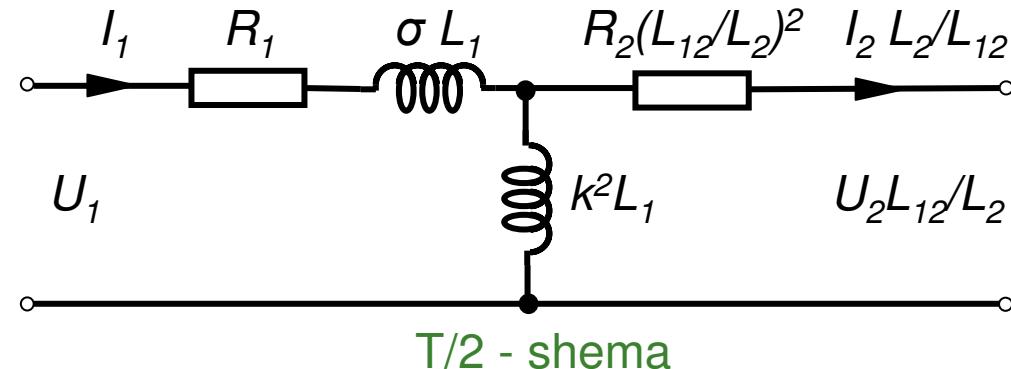
$$\dot{U}_1 = R_1 \dot{I}_1 + j\omega(L_1 - L_{12}) \dot{I}_1 + j\omega L_{12} (\dot{I}_1 - \dot{I}_2)$$

$$-\dot{U}_2 = R_2 \dot{I}_2 + j\omega(L_2 - L_{12}) \dot{I}_2 - j\omega L_{12} (\dot{I}_1 - \dot{I}_2)$$

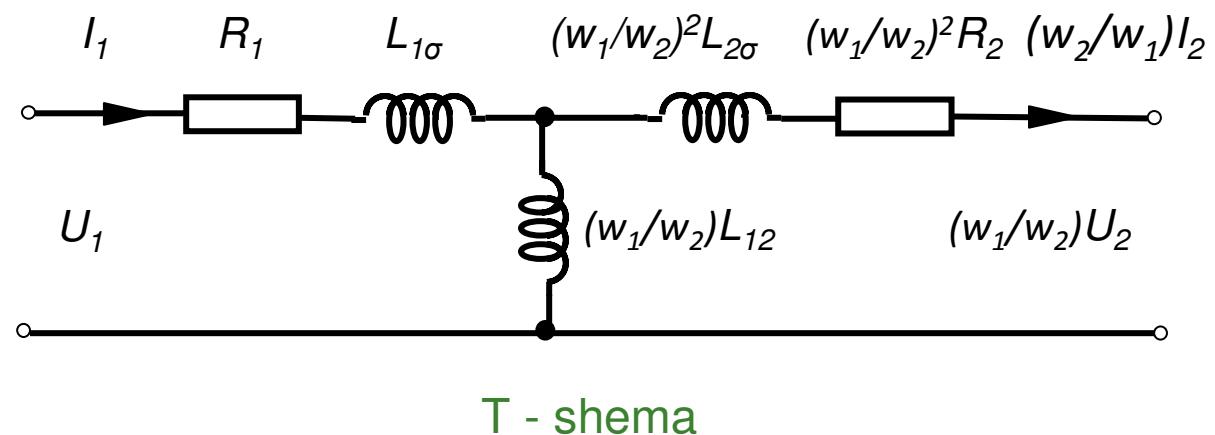


Nadomjesne sheme

- Teorijski korektna nadomjesna shema je T/2-shema, no za transformatore sa željeznom jezgrom dovoljno točna je i uobičajena T-shema



T/2 - shema



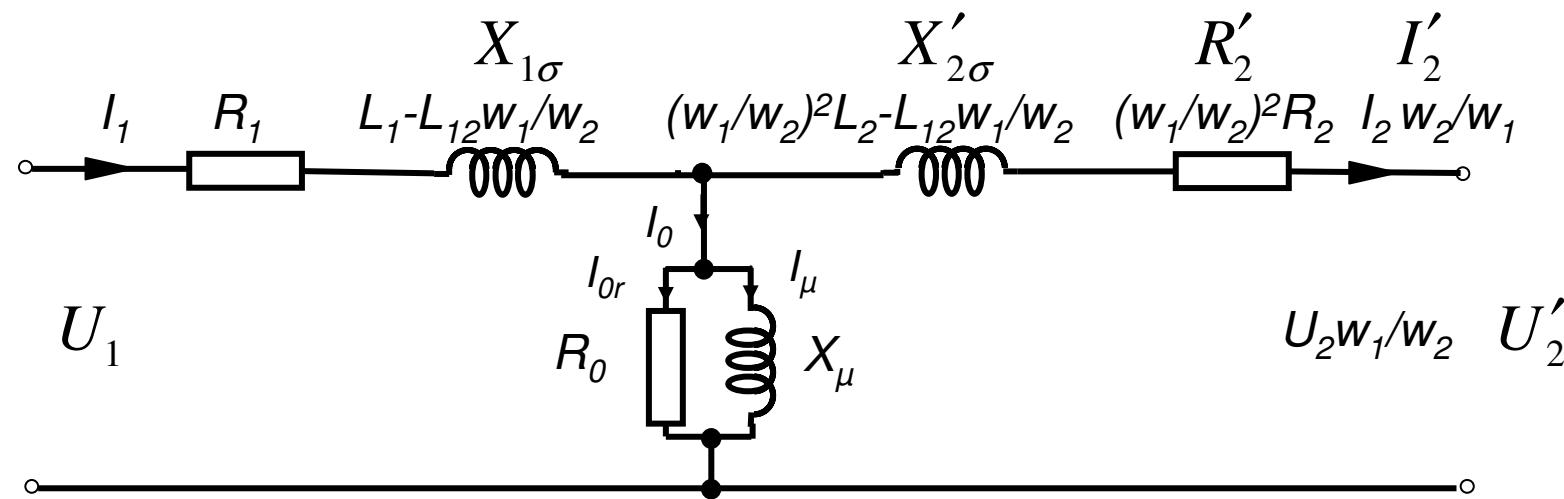
T - shema

Pojednostavljena T - shema

U literaturi je uobičajen odabir koeficijenta $a = \frac{w_1}{w_2}$

s kojim se dobivaju rasipne reaktancije primara i sekundara.

Dodavanjem otpora u poprečnu granu R_0 koji predstavlja nadomjesni otpor na kojoj se disipira snaga praznog hoda (gubici u željezu) dobiva se sljedeća nadomjesna shema:



Naponske jednadžbe u simboličkom prikazu

- Naponske jednadžbe primarnog i sekundarnog kruga transformatora za stacionarno stanje (kad su naponi i struje sinusne veličine) u simboličkom prikazu:

$$\dot{U}_1 = \dot{Z}_1 \dot{I}_1 - \dot{Z}_{12} \dot{I}_2$$

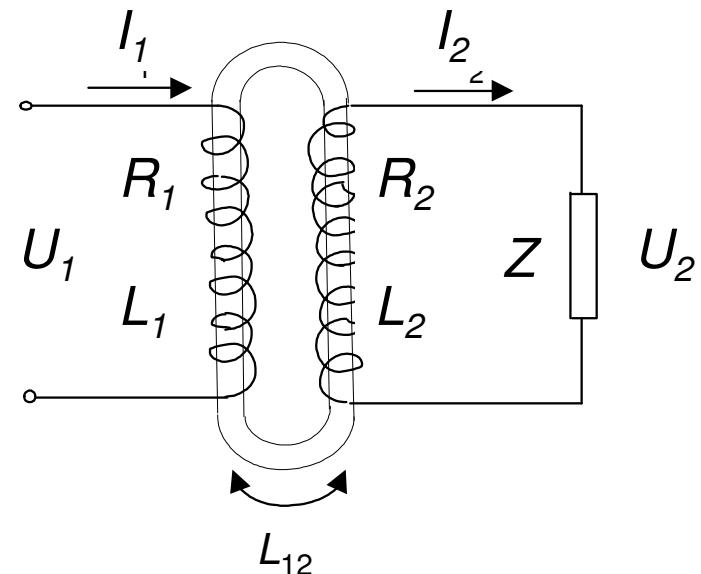
$$-\dot{U}_2 = -\dot{Z}_{12} \dot{I}_1 + \dot{Z}_2 \dot{I}_2$$

- gdje su impedancije:

$$\dot{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1$$

$$\dot{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2$$

$$\dot{Z}_{12} = j\omega L_{12}$$



Impedancija u praznom hodu i kratkom spoju

Prazni hod

$$\dot{Z}_{PH} = R_1 + j\omega L_1 \quad R_{PH} = R_1 \quad X_{PH} = \omega L_1$$

Kratki spoj

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{Z}_{12}}{\dot{Z}_2} \dot{I}_1 \quad \dot{U}_1 = \dot{Z}_1 - \frac{\dot{Z}_{12}^2}{Z_2} \dot{I}_1$$
$$\dot{Z}_{KS} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \dot{Z}_{11} - \frac{\dot{Z}_{12}^2}{\dot{Z}_{22}} = R_1 + j\omega L_1 - \frac{(j\omega L_{12})^2}{R_2 + j\omega L_2}$$

$$R_{KS} = R_1 + \frac{\omega^2 R_2 L_{12}^2}{(R_2^2 + \omega^2 L_2^2)}$$

$$X_{KS} = \omega L_1 - \frac{\omega^3 L_{12}^2 L_2}{(R_2^2 + \omega^2 L_2^2)}$$

Za kratki spoj vrijedi: $R_2^2 \ll \omega^2 L_2^2$

Otpor i reaktancija
u kratkom spoju

$$R_{KS} \approx R_1 + R_2 \left(\frac{L_{12}}{L_2} \right)^2$$

$$X_{KS} \approx \omega \left[L_1 - L_2 \left(\frac{L_{12}}{L_2} \right)^2 \right]$$

Ulančenje i rasipanje

- Ulančenje primara i sekundara nije potpuno, nego je definirano koeficijentom $k_1 < 1$ za primar odnosno $k_2 < 1$ za sekundar, odnosno vrijedi:

$$\frac{L_{12}}{L_1} = k_1 \frac{w_2}{w_1} \quad \frac{L_{12}}{L_2} = k_2 \frac{w_1}{w_2}$$

- Ukupni koeficijent ulančenja:

$$k = \sqrt{k_1 k_2} = \frac{L_{12}}{\sqrt{L_1 L_2}} < 1$$

- Koeficijent rasipanja: $\sigma = 1 - k^2$

- Induktivitet transformatora u kratkom spoju: $L_{KS} \approx \sigma L_1$

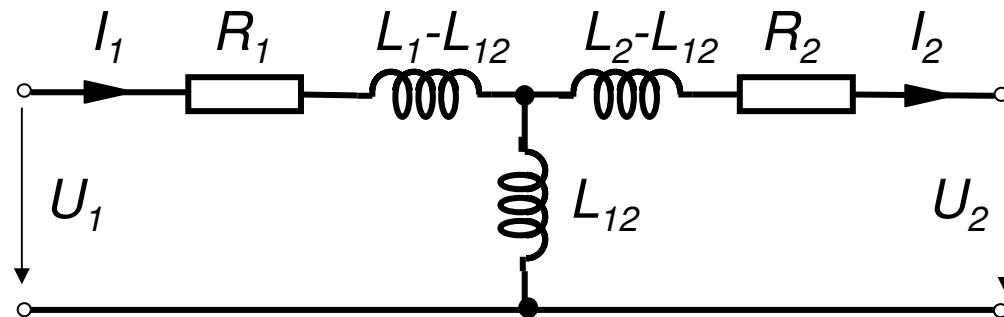
- Koeficijent rasipanja predstavlja omjer: $\sigma = \frac{L_{KS}}{L_{PH}} = \frac{X_{KS}}{X_{PH}}$

Opća T - nadomjesna shema

- Dodavanjem dvaju suprotnih članova ($j\omega L_{12}I_1$ i $-j\omega L_{12}I_1$) u naponsku jednadžbu primara i ($j\omega L_{12}I_2$ i $-j\omega L_{12}I_2$) u jednadžbu sekundara dobije se:

$$\dot{U}_1 = R_1 \dot{I}_1 + j\omega(L_1 - L_{12}) \dot{I}_1 + j\omega L_{12}(\dot{I}_1 - \dot{I}_2)$$
$$-\dot{U}_2 = R_2 \dot{I}_2 + j\omega(L_2 - L_{12}) \dot{I}_2 - j\omega L_{12}(\dot{I}_1 - \dot{I}_2)$$

- Na temelju ovih jednadžbi crta se nadomjesna T-shema transformatora

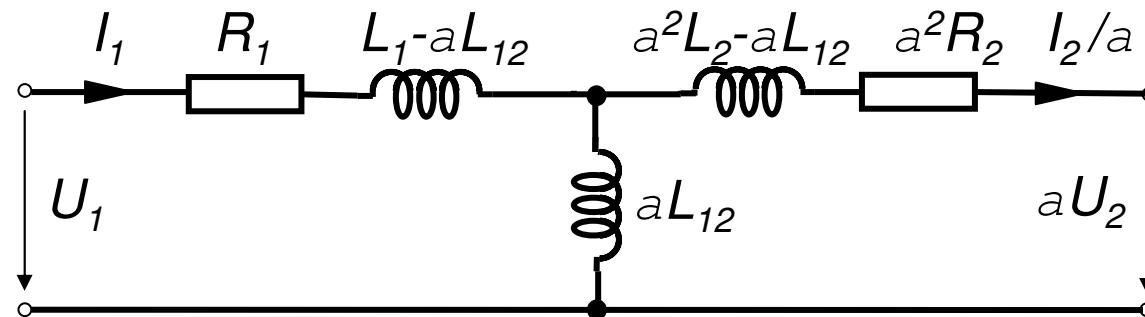


- Fizikalno je ispravno da su: $L_1 - L_{12} > 0$ i $L_2 - L_{12} > 0$. Zato treba uvesti koeficijent a koji treba biti u granicama:

$$k_2 \frac{w_1}{w_2} = \frac{L_{12}}{L_2} < a < \frac{L_1}{L_{12}} = \frac{1}{k_1} \frac{w_1}{w_2}$$

Oblici nadomjesne sheme

- Međuinduktivitet valja pomnožiti s koeficijentom a , a sekundarne otpore i samoinduktivitete s a^2 . U takvoj shemi primarni naponi i struje ostaju nepromijenjeni, dok se sekundarni naponi množe s a , a sekundarne struje dijele s a .



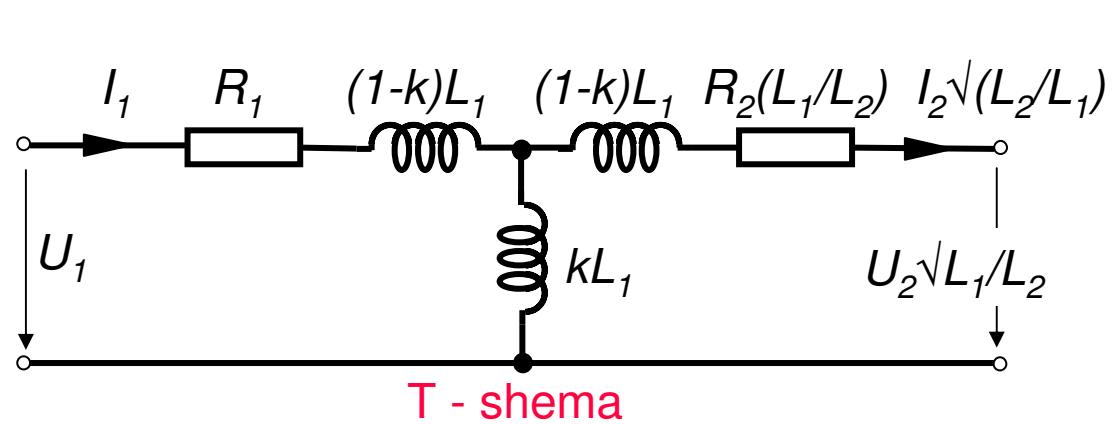
T - shema s dva rasipna induktiviteta i T/2 – shema s jednim rasipnim induktivitetom

Odabirom: $a = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$

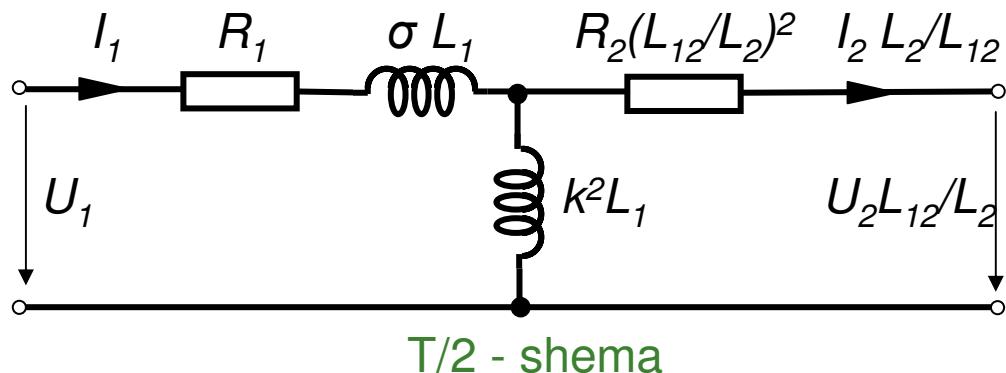
dobiju se jednak iznosi
serijskih induktiviteta
(reaktancija) u
primaru i sekundaru.

Odabirom : $a = \frac{L_{12}}{L_2}$

dobije se T/2 shema.



T - shema

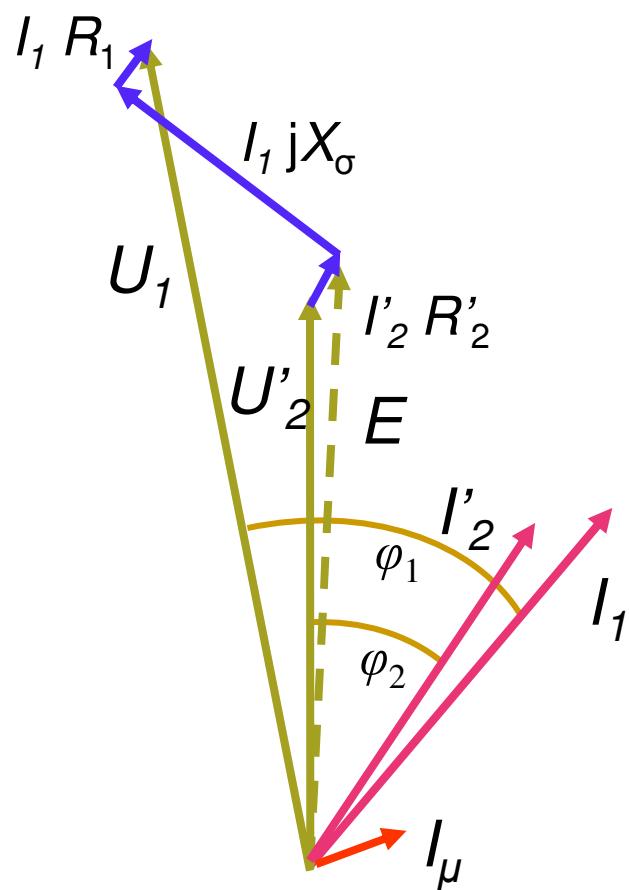


T/2 - shema

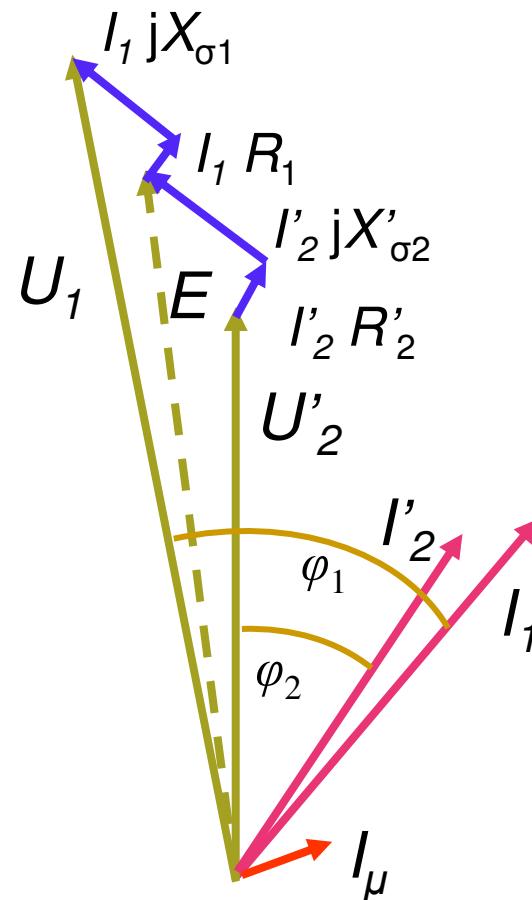
Pri tome je sekundarni napon u praznom hodu L_{12}/L_2 puta manji zbog
neulančanog ukupnog toka sekundara u odnosu na primar.

Fazorski dijagram za:

T/2 - shemu

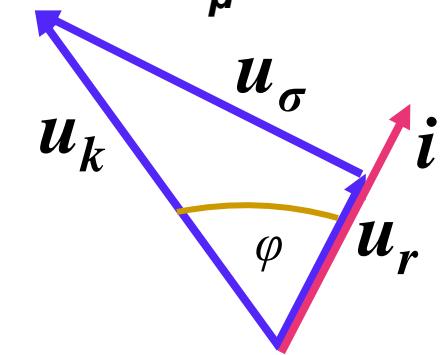


T - shemu



$$I_1 = I'_2$$

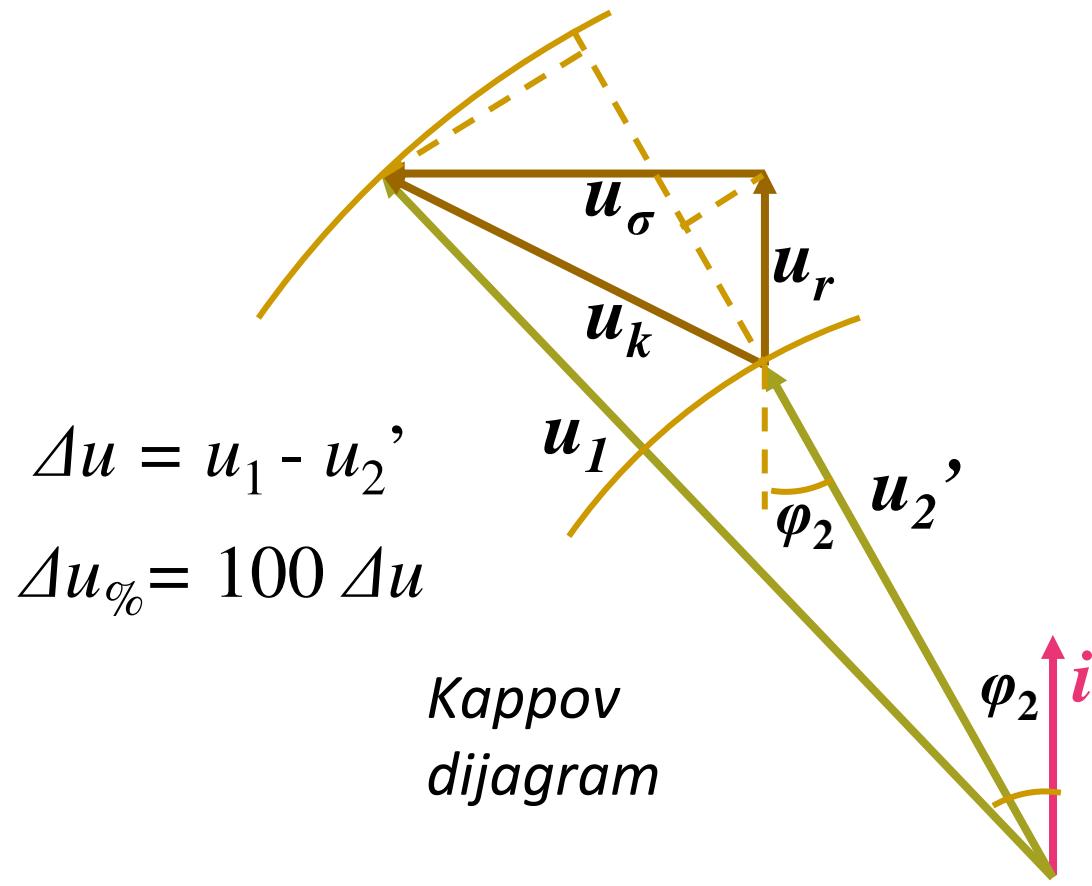
$$I_\mu \approx 0$$



Trokat kratkog
spoja

Pad napona u transformatoru

$$\Delta u_{\%} = \alpha [u_{r\%} \cos \varphi + u_{\sigma\%} \sin \varphi + 0,005\alpha (u_{\sigma\%} \cos \varphi - u_{r\%} \sin \varphi)^2]$$



$$\alpha = S/S_n$$

$$u_k = Z_k S_n / U_n^2$$

$$u_r = P_{tn} / S_n = R_k S_n / U_n^2$$

$$u_\sigma = \omega L_\sigma S_n / U_n^2$$

$$u_\sigma = \sqrt{(u_k^2 - u_r^2)}$$

$$u_{k\%} = 100 u_k$$

$$u_{\sigma\%} = 100 u_\sigma$$

$$u_{r\%} = 100 u_r$$

Razlike u parametrima malih i velikih transformatora

Mali transformator

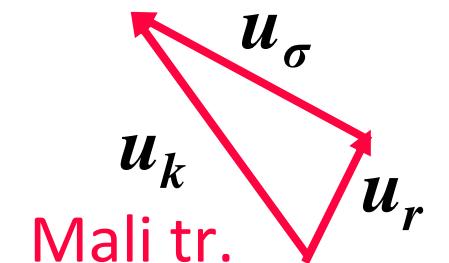
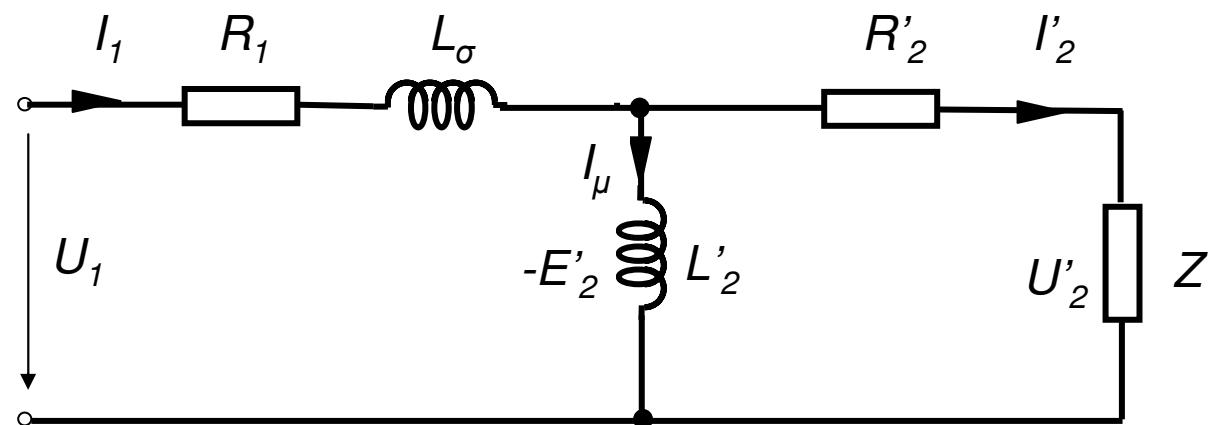
$$R_1 \approx R'_2 = 1 \%$$

$$X_\sigma = L_\sigma = 5 \%$$

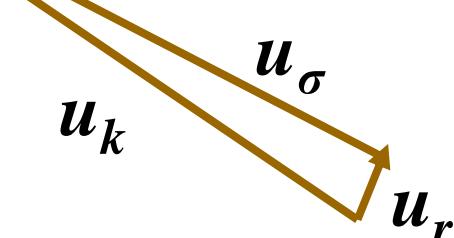
Veliki transformator

$$R_1 \approx R'_2 = 0,1 \%$$

$$X_\sigma = L_\sigma = 12 \%$$



Mali tr.

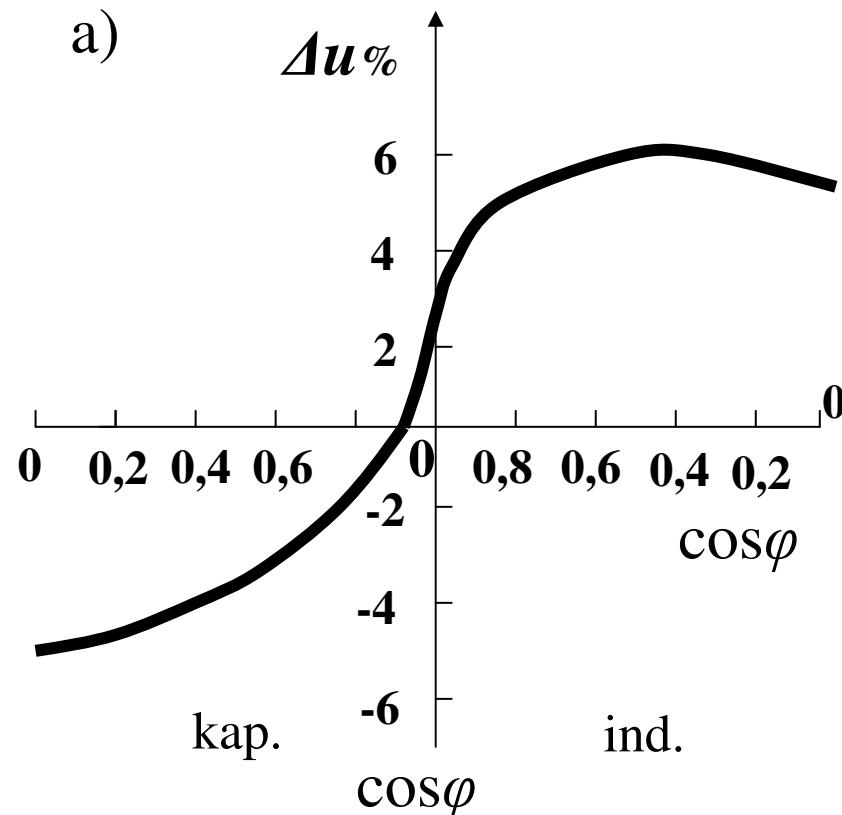


Veliki tr.

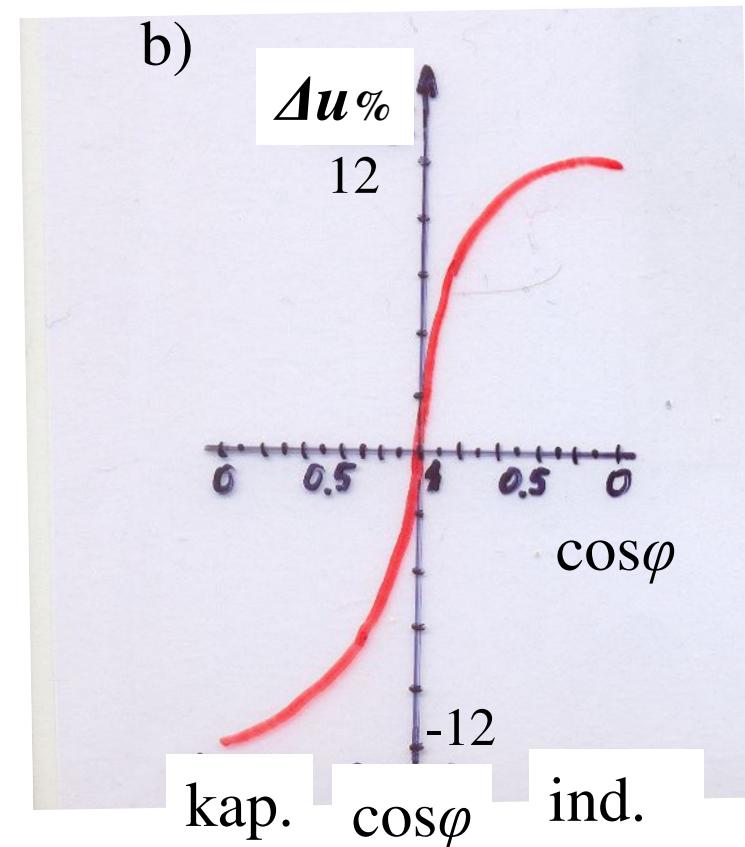
Pad napona nazivno opterećenog transformatora za različite faktore snage za:

a) male,

b) velike (mrežne) transformatore



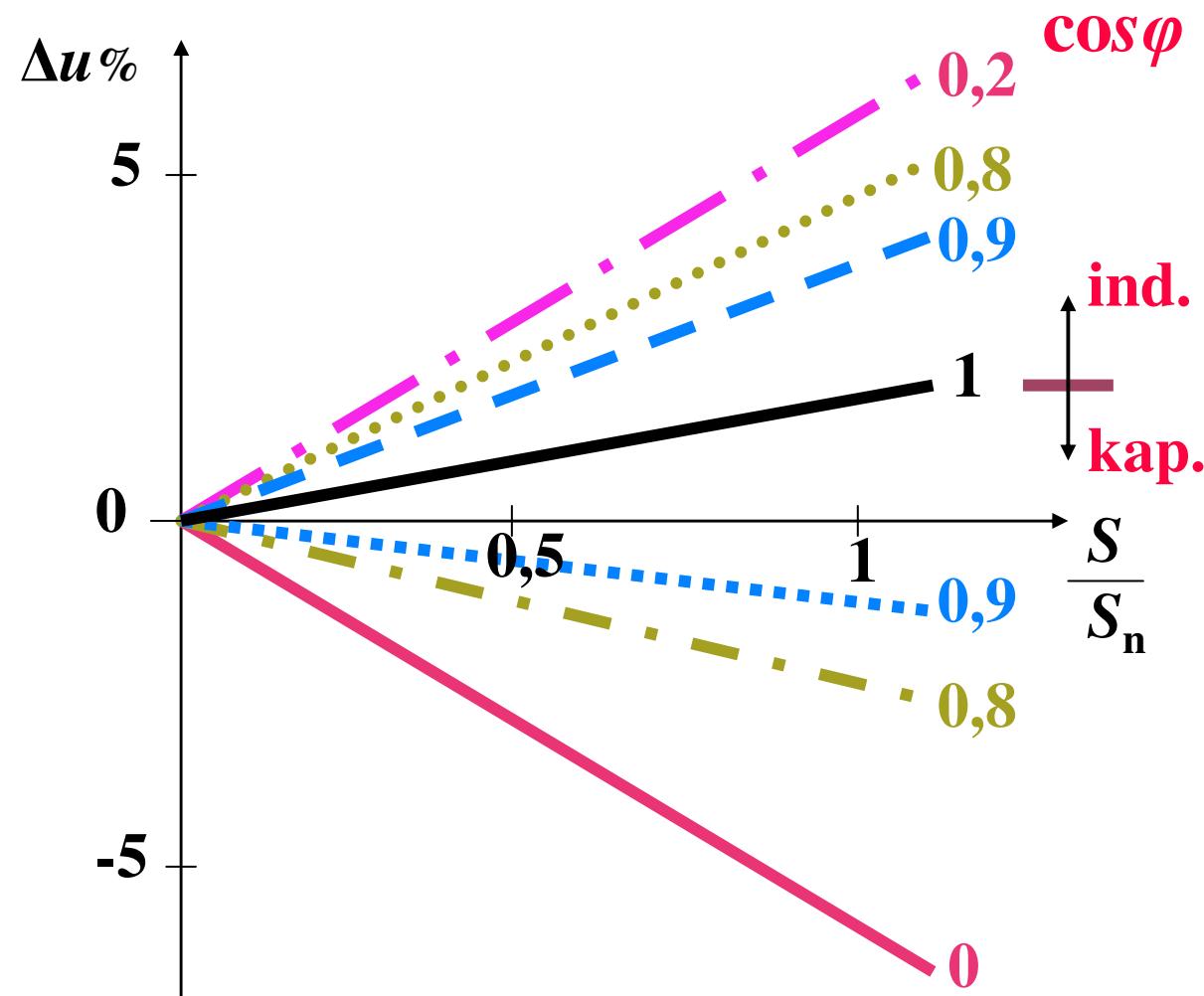
$$u_r = 2\% \quad u_\sigma = 6\%$$



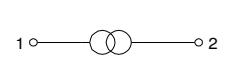
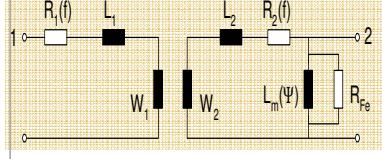
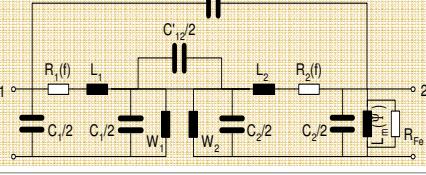
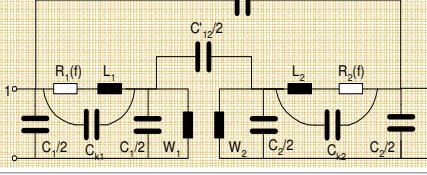
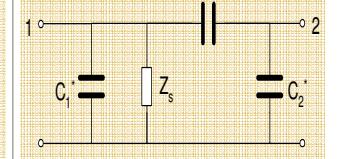
$$u_r = 0.2\% \quad u_\sigma = 12\%$$

Pad napona transformatora u ovisnosti o opterećenju i karakteru opterećenja

Napon sekundara raste s porastom kapacitivnog opterećenja, dok pada s porastom induktivnog opterećenja (u odnosu na prazni hod)

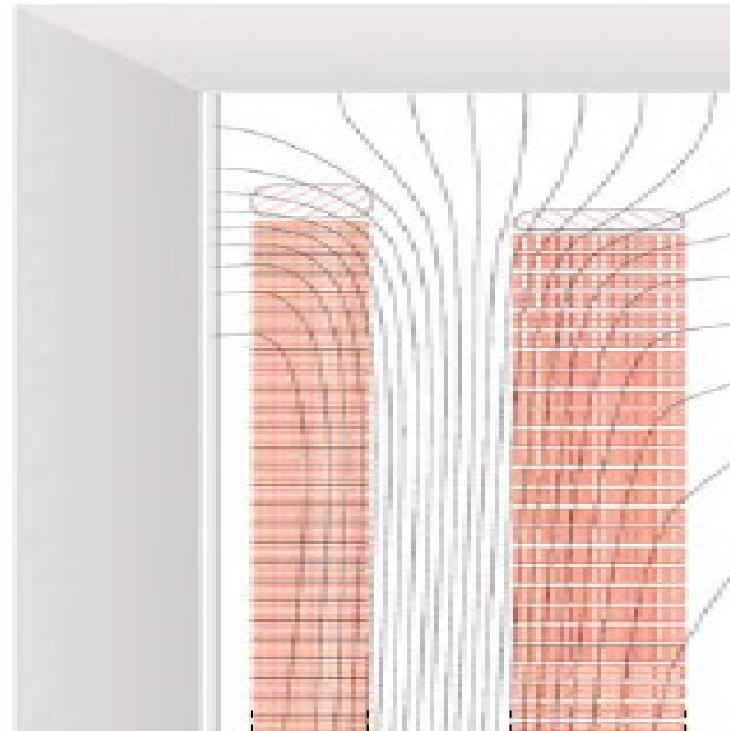


Nadomjesne sheme za prijelazne pojave u transformatoru i važnost parametara (prema CIGRE)

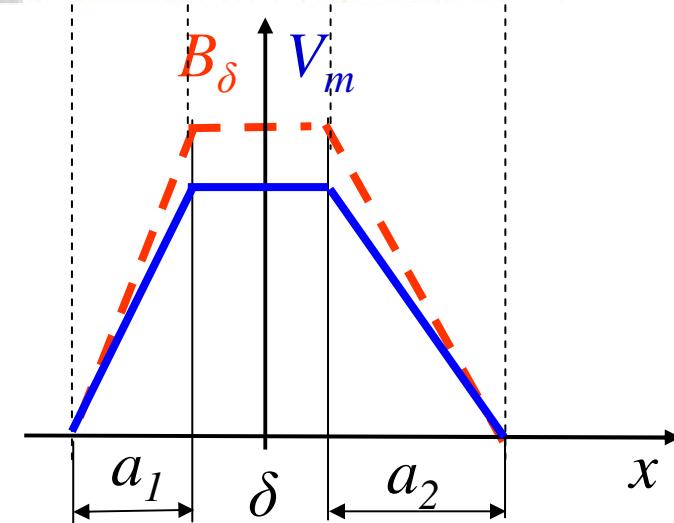
Transformator 	Skupina I 0,1 Hz – 3 kHz	Skupina II 50/60 Hz – 20 kHz	Skupina III 10 kHz – 3 MHz	Skupina IV 100 kHz – 50 MHz
Nadomjesna shema				
Impedancija kratkog spoja	vrlo važna	vrlo važna	važna	zanemariva
Zasićenje	vrlo važno	vrlo važno za magnetiziranje transformatora	zanemarivo	zanemarivo
Frekvencijski ovisni gubici	vrlo važni	važni	zanemarivi	zanemarivi
Gubici histereze i praznog hoda	važni za rezonanciju	važni samo za magnetiziranje transformatora	zanemarivi	zanemarivi
Parazitski kapaciteti	zanemarivi	važni	vrlo važni	vrlo važni

Rasipno polje

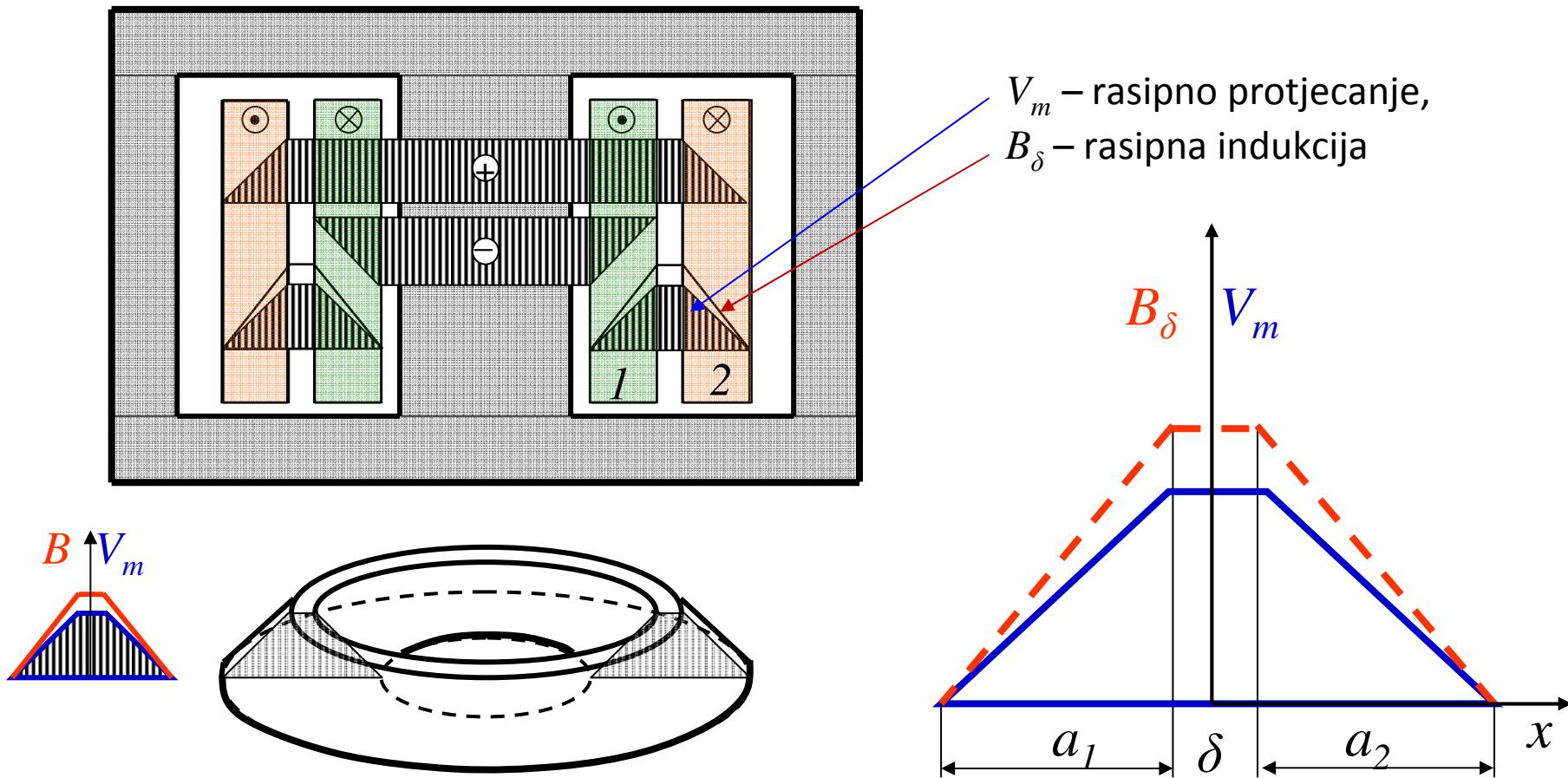
- Rasipno polje u transformatoru rezultat je djelovanja oba protjecanja – primarnog i sekundarnog.
- Rasipno protjecanje (magnetski pad napona) i rasipni tok najveći su u rasporu između namota, a u zoni namota linearno opadaju.



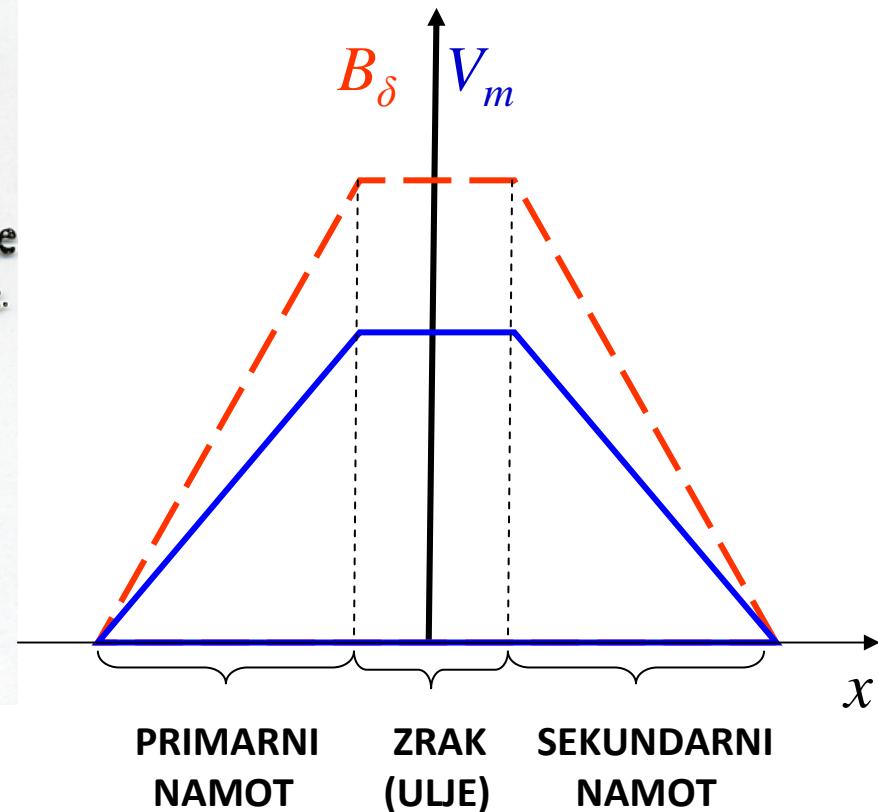
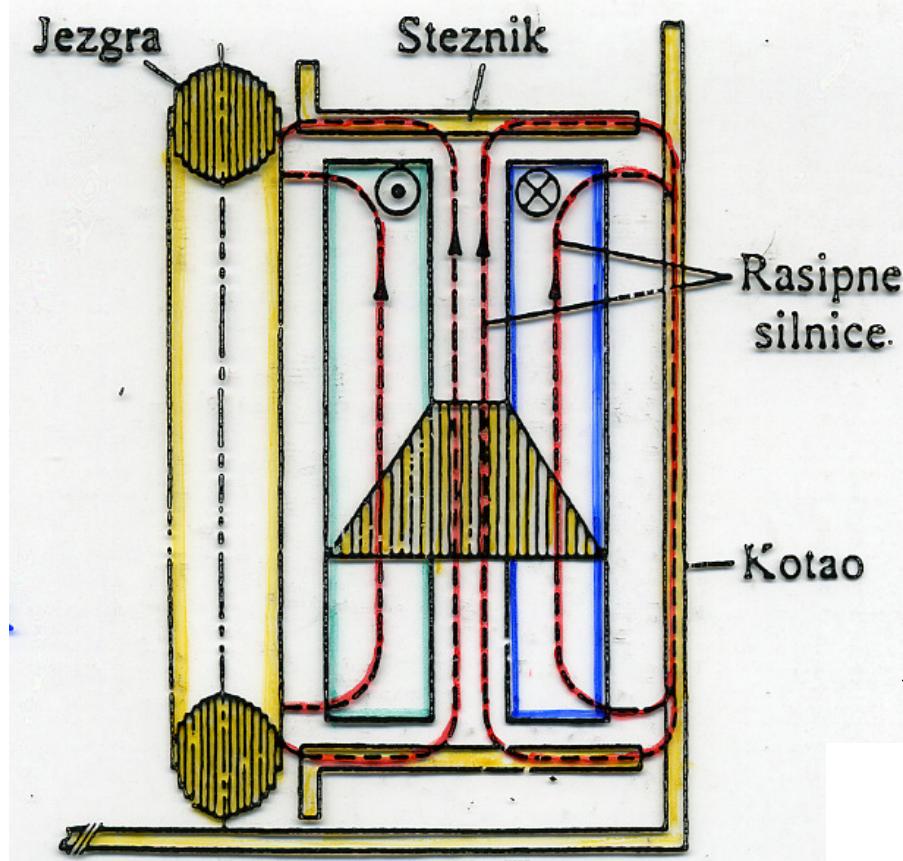
V_m – rasipno protjecanje
 B_δ – rasipna indukcija



Rasipni tok primarnog i sekundarnog namota (1)



Rasipni tok primarnog i sekundarnog namota (2)



Magnetska energija akumulirana u prostoru rasipnog toka

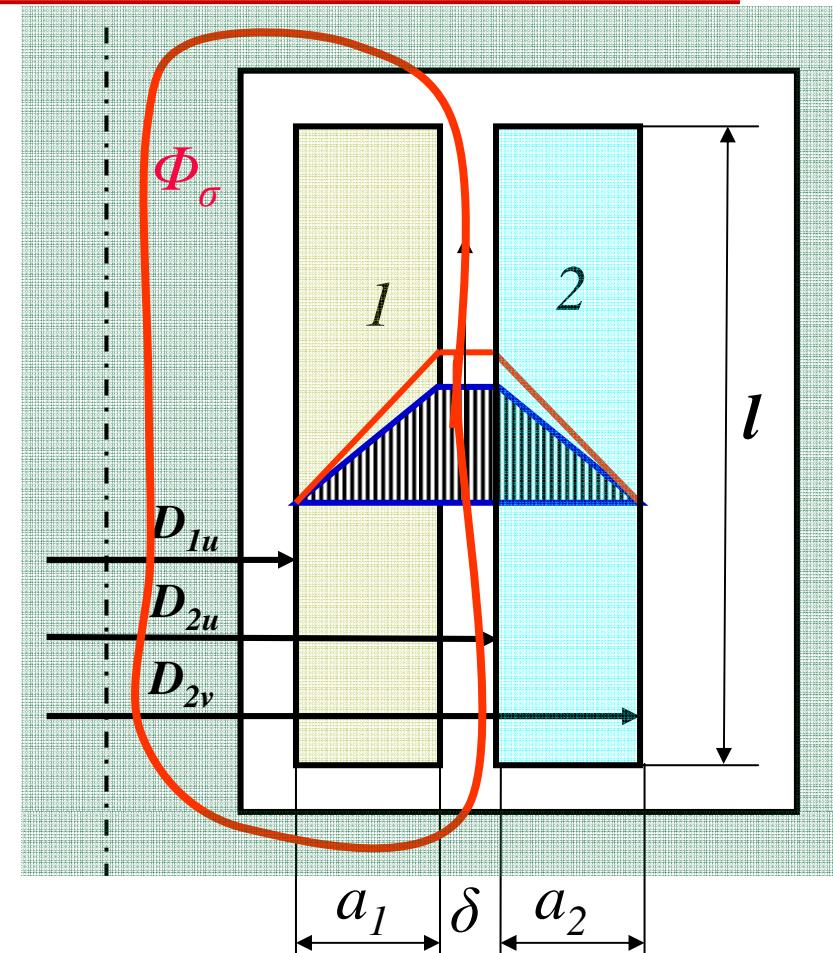
$$A_\sigma = A_{\sigma 1} + A_\delta + A_{\sigma 2}$$

- gdje su akumulirane energije:
 - $A_{\sigma 1}$ - u prostoru primara
 - A_δ - u prostoru između namota
 - $A_{\sigma 2}$ - u prostoru sekundara
- Raspodjela indukcije u području primara širine a_1 i sekundara a_2

$$B_{x1} = \frac{B_\delta}{a_1} x \quad B_{x2} = \frac{B_\delta}{a_1} \left(1 - \frac{x}{a_2} \right)$$

- Obujam prostora primara i sekundara:

$$dV_{x1} = l_\sigma (D_{1u} + 2x) \pi dx \quad dV_{x2} = l_\sigma (D_{2u} + 2x) \pi dx$$



Magnetska energija u prostoru primarnog namota $A_{\sigma 1}$ i između namota A_δ i u prostoru sekundarnog namota $A_{\sigma 2}$

$$A_{\sigma 1} = \frac{1}{2} \int B_{\sigma 1} H_{\delta 1} dV_x = \frac{1}{2\mu_0} \int B_x^2 dV_x$$

$$A_{\sigma 1} = \frac{1}{2\mu_0} \int_0^{a_1} \left(\frac{B_\delta}{a_1} x \right)^2 l_\sigma (D_{1u} + 2x) \pi dx$$

$$A_\delta = \frac{1}{2\mu_0} B_\delta^2 (D_{2u} - \delta) \pi l_\sigma \delta = \frac{B_\delta^2 l_\sigma \pi}{2\mu_0} \delta (D_{2u} - \delta)$$

$$A_\delta = \frac{B_\delta^2 l_\sigma \pi}{2\mu_0} \delta (D_{1u} + 2a_1)$$

$$A_{\sigma 2} = \frac{B_\delta^2 l_\sigma \pi}{2\mu_0} \int_0^{a_2} \left(1 - \frac{x}{a_2} \right)^2 (D_{2u} + 2x) dx$$

Ukupna magnetska energija rasipnog polja

- Nakon sređivanja ukupna je magnetska energija rasipnog polja:

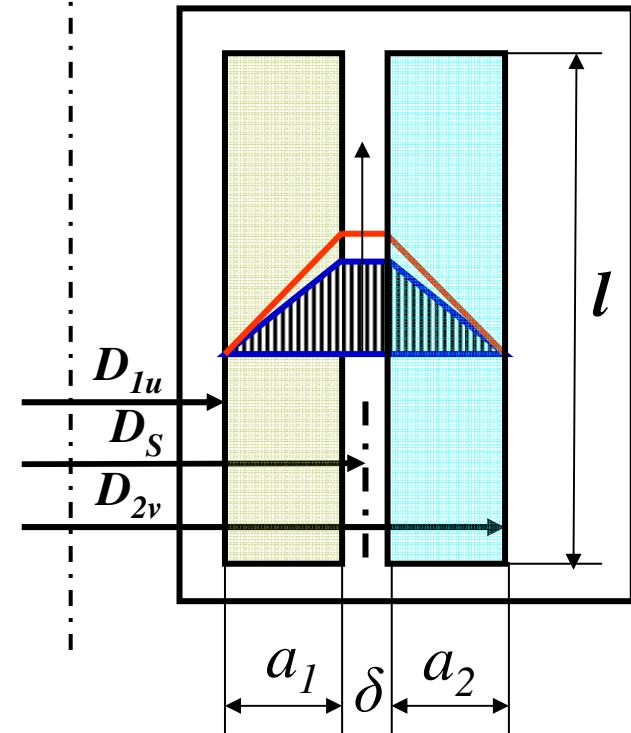
$$A_{\sigma} = \frac{B_{\delta}^2 l_{\sigma} \pi}{2 \mu_0} D_s \left[\frac{a_1}{3} \left(1 - \frac{\delta}{D_s} - \frac{a_1}{2D_s} \right) + \delta + \frac{a_2}{3} \left(1 + \frac{\delta}{D_s} + \frac{a_2}{3D_s} \right) \right]$$

- gdje je srednji promjer:

$$D_s = D_{1u} + 2a_1 + \delta$$

- Ako su širine primarnog i sekundarnog namota približno jednake $a_1 \approx a_2$ tada vrijedi:

$$A_{\sigma} = \frac{B_{\delta}^2 l_{\sigma} \pi}{2 \mu_0} D_s \left(\frac{a_1 + a_2}{3} + \delta \right)$$



Rasipni induktivitet - iz akumulirane energije:

- Veza indukcije i struje – iz zakona protjecanja: $L_\sigma = \frac{2A_\sigma}{i^2}$

$$L_\sigma = w^2 \mu_0 \frac{D_s \pi}{l_\sigma} \left(\frac{a_1 + a_2}{3} + \delta \right)$$

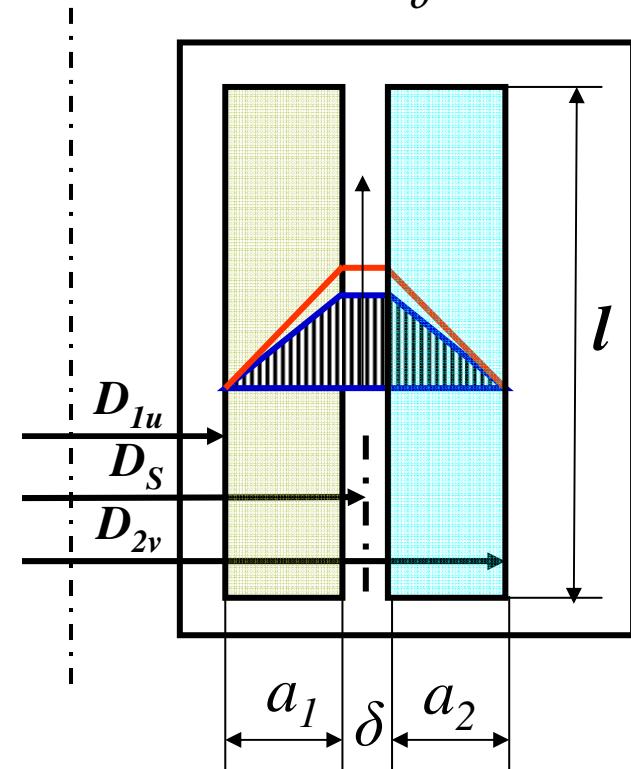
$$l_\sigma = \frac{l}{K_R}$$

$$B_\delta = \mu_0 \frac{w i}{l_\delta}$$

- l_σ - nadomjesna duljina rasipnih silnica
- l - visina stupa jezgre
- K_R – koeficijent Rogowskog

$$K_R = 1 - \sigma_R \left(1 - e^{-\frac{1}{\sigma_R}} \right) \approx 1 - \sigma_R$$

$$\sigma_R = \frac{\delta + a_1 + a_2}{\pi l}$$



Transformator s bikoncentričnim namotima

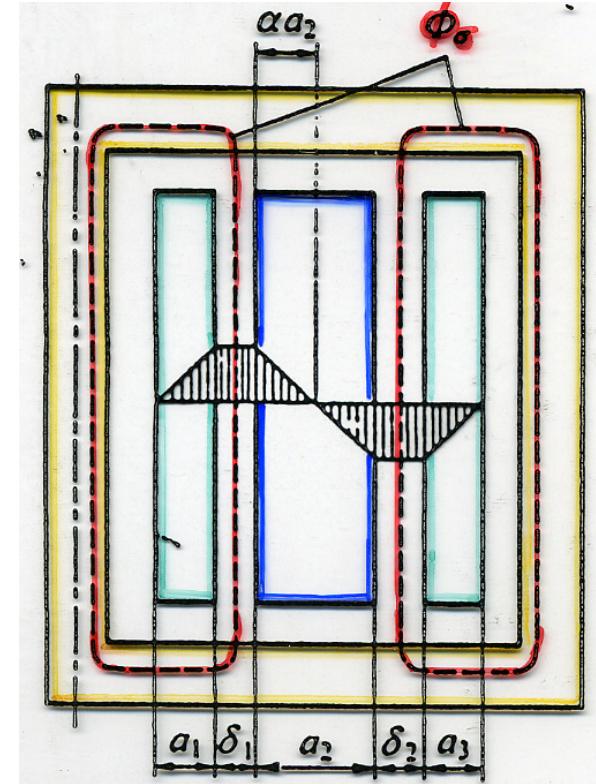
Rasipni induktivitet:

$$L_\sigma = (\alpha w)^2 \mu_0 \frac{D_{s1} \pi}{l_{\sigma 1}} \left(\delta_1 + \frac{a_1 + \alpha a_2}{3} \right) + \\ + (1 - \alpha)^2 w^2 \mu_0 \frac{D_{s2} \pi}{l_{\sigma 2}} \left(\delta_2 + \frac{(1 - \alpha)a_2 + a_3}{3} \right)$$

gdje su nadomjesne visine:

$$l_{\sigma 1} = \frac{l}{1 - \frac{a_1 + \alpha a_2 + \delta_1}{\pi l}}$$

$$l_{\sigma 2} = \frac{l}{1 - \frac{(1 - \alpha)a_2 + a_3 + \delta_2}{\pi l}}$$



Transformator s pločastim namotima

Rasipni induktivitet, ako ima n svitaka namota:

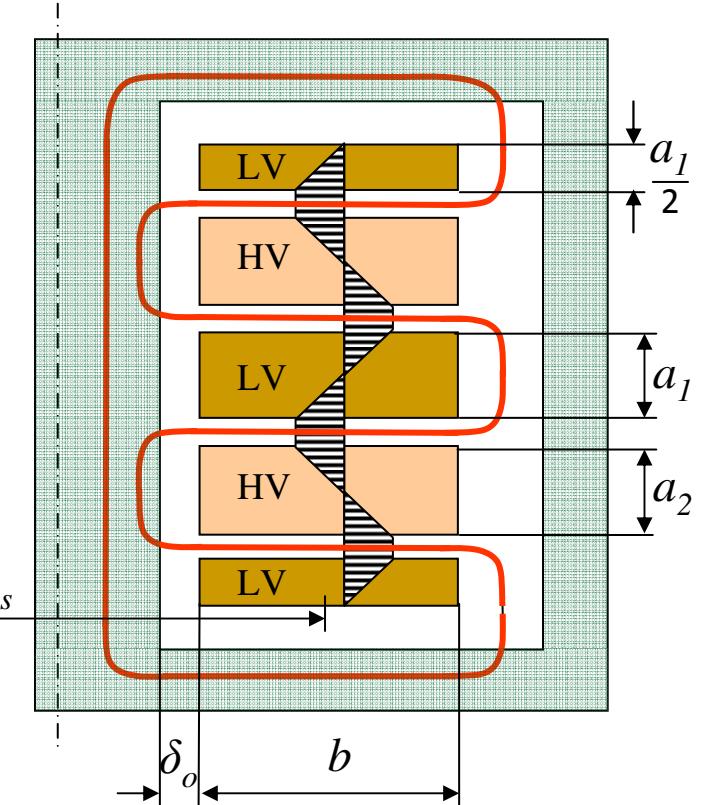
$$L_\sigma = \frac{w^2}{2n} \mu_0 \frac{D_s \pi}{b_\sigma} \left(\frac{a_1 + a_2}{6} + \delta \right)$$

Srednja duljina rasipnih silnica:

$$b_\sigma = \frac{b}{K_R}$$

Koeficijent Rogowskog:

$$K_R = 1 - \left(1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{\sigma_R}} \right) \cdot \left(1 - e^{-\frac{2\delta_0}{\sigma_R b}} \cdot (1 - e^{-\frac{1}{\sigma_R}}) \right)$$



Pločastim namotima postižu se manji iznosi rasipne reaktancije

Rasipna reaktancija

- Rasipna reaktancija u Ω :

$$X_\sigma = \omega L_\sigma$$

- Rasipna reaktancija u postocima je identičnog iznosa s reaktivnom (jalovom) komponentom napona kratkog spoja transformatora u postocima:

$$x_{\sigma\%} = u_{x\%} = u_{\sigma\%} = 100 \frac{\omega S_n}{U_n^2} L_\sigma \quad (\%)$$

Kratki spoj transformatora

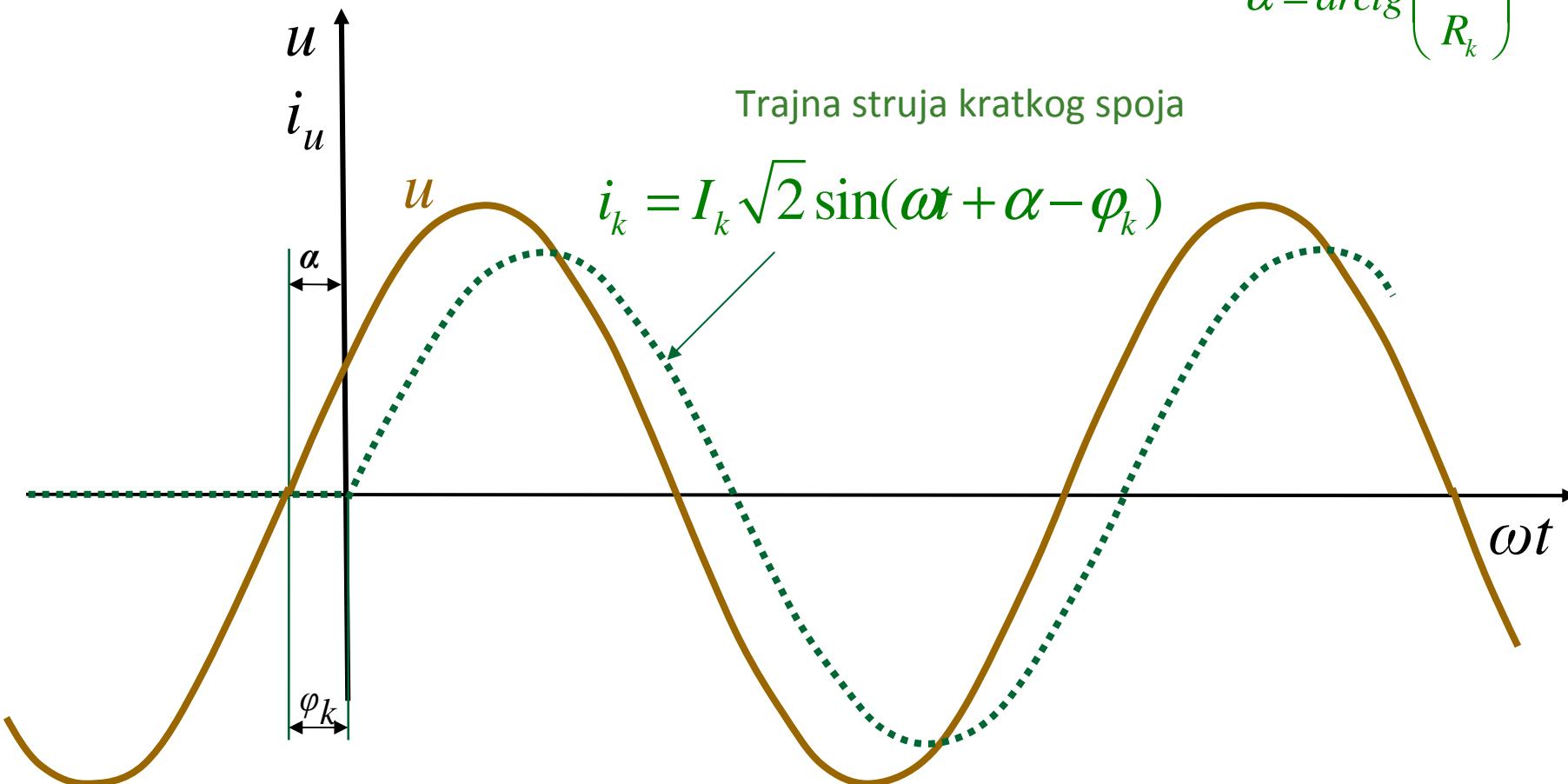
- Transformatoru se trenutno se kratko spoje sekundarne stezaljke, a prije toga je bio u praznom hodu
- Ako je kratki spoj u trenutku kad je trenutna vrijednost struje praznog hoda jednaka nuli, prijelaz iz praznog hoda u kratki spoj je bez prijelazne pojave – odmah se uspostavlja trajna struja kratkog spoja.
- Napon: $u_1 = U_1 \sqrt{2} \sin(\omega t + \alpha)$ $\alpha = \operatorname{arctg} \left(\frac{X_k}{R_k} \right)$
- Trajna struja kratkog spoja: $i_k = I_k \sqrt{2} \sin(\omega t + \alpha - \varphi_k)$
- U svim ostalim slučajevima imamo udarnu struju kratkog spoja
- Ako je impedancija mreže Z_s zanemariva, struja kratkog spoja se može računati:

$$I_k = \frac{U_n}{U_k} I_n = \frac{100}{u_k \%} I_n$$

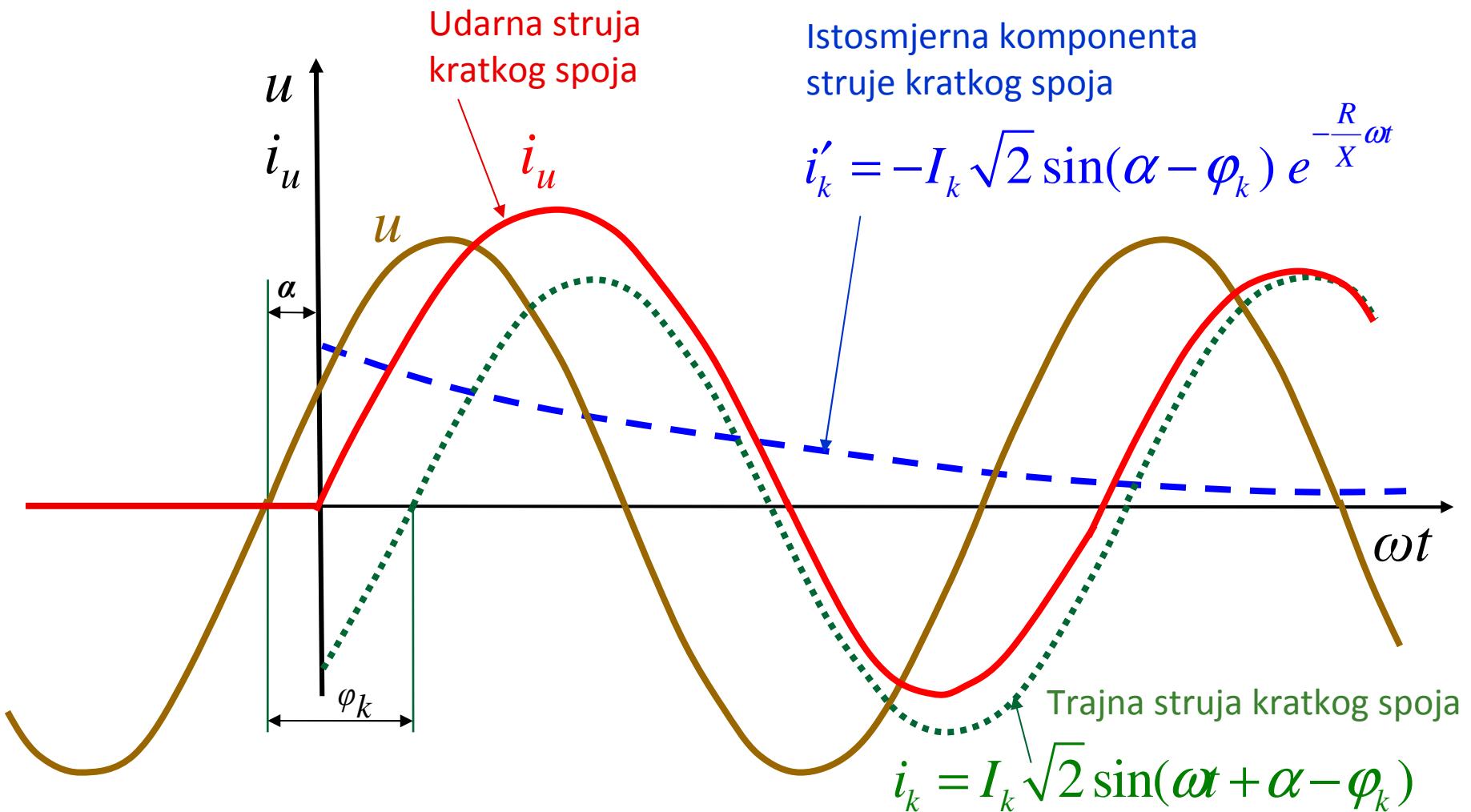
Kratki spoj bez prijelazne pojave

$$\alpha = \varphi_k$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left(\frac{X_k}{R_k} \right)$$



Udarna struja kratkog spoja



Udarna struja kratkog spoja

- Transformator od 100 kVA:
 - vremenska konstanta $T_k=0,005$ s,
 - trajna struja kratkog spoja $I_k = 23I_n$
 - udarna struja kratkog spoja $I_{ku} = 39I_n$.
- Transformator od 30 MVA:
 - vremenska konstanta $T_k=0,058$ s,
 - trajna struja kratkog spoja $I_k = 10I_n$
 - udarna struja kratkog spoja $I_{ku} = 27I_n$.
- Vremenska pojava isčezne nakon približno $3T_k$.
- Velike struje mogu uzrokovati velika mehanička naprezanja i oštetiti transformator

Iznos struje kratkog spoja (efektivna vrijednost)

- Ako je impedancija mreže Z_s zanemariva, struja kratkog spoja se može računati:

$$I_k = \frac{U_n}{U_k} I_n = \frac{100}{u_{k\%}} I_n$$

- Ako je $Z_s > 5\%Z_k$ struja se računa:

$$I_k = \frac{U_n}{(Z_k + Z_s)\sqrt{3}}$$

Tjemena vrijednost struje udarnog kratkog spoja (prvi maksimum asimetrične struje):

- Reaktancije i otpori transformatora i mreže:

$$X = X_k + X_S \quad R = R_k + R_S$$

- Ako je omjer X/R nepoznat, k_k se računa:

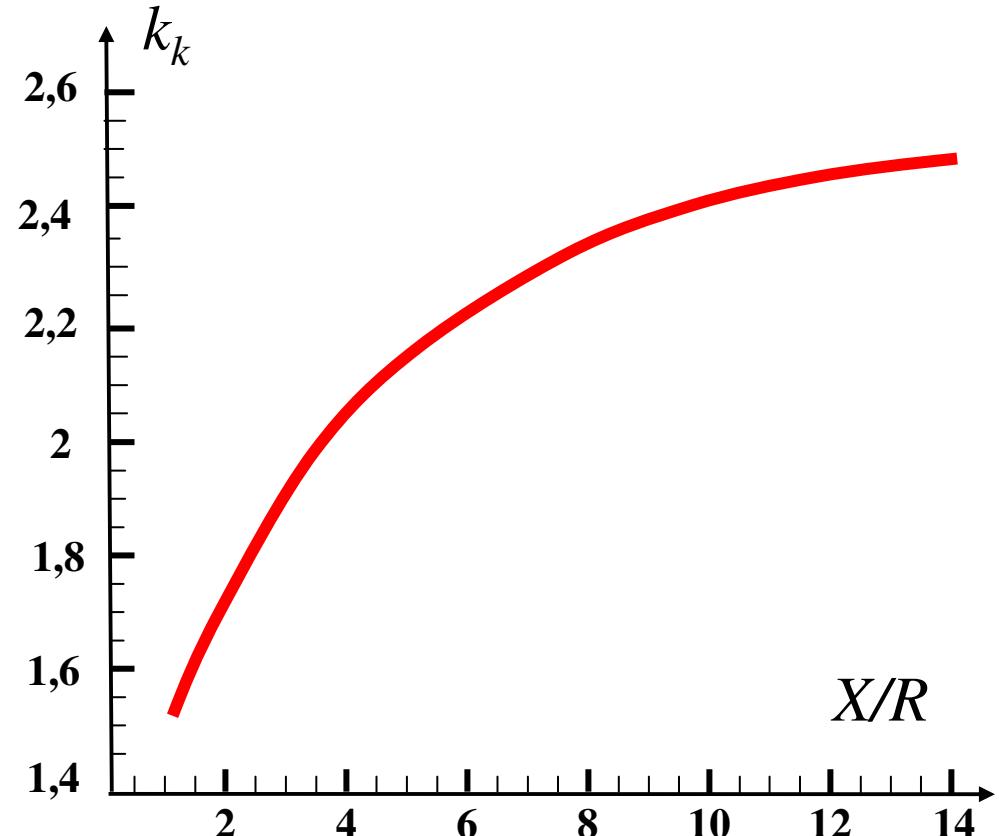
$$k_k = 1,8\sqrt{2} = 2,55$$

I_{kmax} se može računati i kao:

$$I_{kmax} = k_u \sqrt{2} I_k$$

$$k_u = 1 + e^{-\frac{1}{2fT}} = 1 + e^{-\frac{\pi R}{X}}$$

$$I_{kmax} = k_k I_k$$



Zagrijavanje u kratkom spoju

- Zagrijavanje transformatora tijekom kratkog spoja u pravilu nije problematično zbog kratkog trajanja, no ipak ga treba provjeriti.
- Srednja temperatura namota ϑ_1 ($^{\circ}\text{C}$) nakon protoka struje kratkog spoja izražene gustoćom struje J (A/mm^2) u trajanju t (s) iznosi (IEC 60076-5):

$$\theta_{1Cu} = \theta_0 + \frac{2 \cdot (\theta_0 + 235)}{\frac{106000}{J^2 t} - 1}$$

$$\theta_{1Al} = \theta_0 + \frac{2 \cdot (\theta_0 + 225)}{\frac{45700}{J^2 t} - 1}$$

gdje je početna temperatura namota ϑ_0 ($^{\circ}\text{C}$)

- Dopuštena maksimalna temperatura namota je 250°C za bakar i 200°C za aluminij, a formule vrijede za trajanje K.S. do 10 s (adijabatski uvjeti).

Sile na namote u transformatoru u kratkom spoju

- Sile računamo iz magnetske energije rasipnog polja

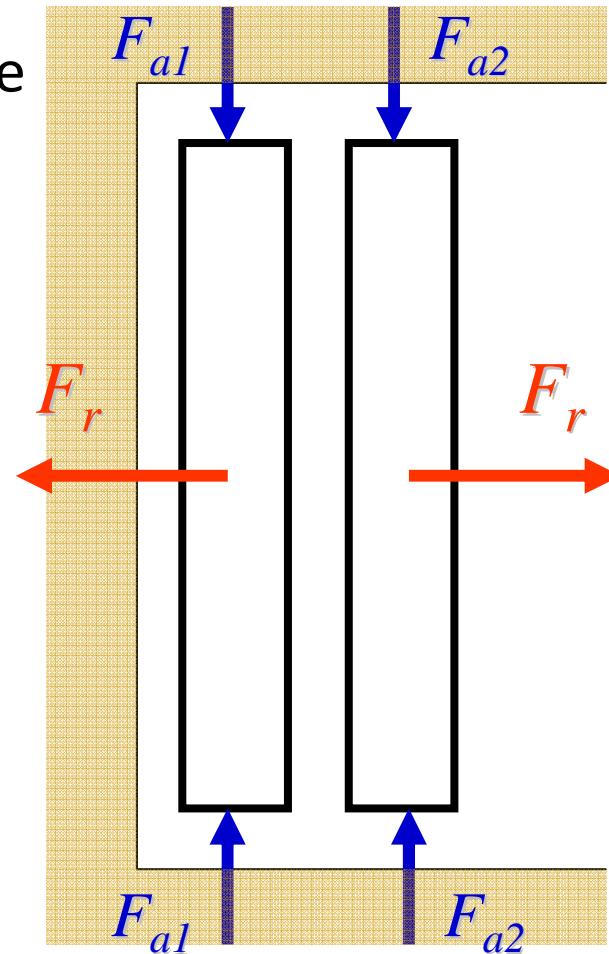
$$A_\sigma = \frac{i^2}{2} w^2 \mu_0 \frac{D_s \pi}{l_\sigma} \delta_r$$

- Radijalna sila F_r

$$F_r = \frac{\partial A_\sigma}{\partial \delta_r} = \frac{i^2}{2} w^2 \mu_0 \frac{D_s \pi}{l_\sigma}$$

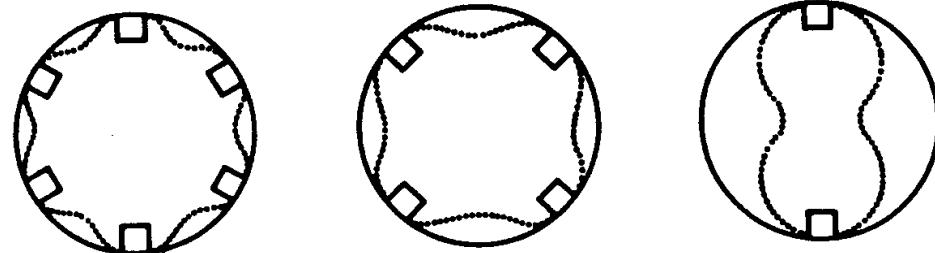
- Aksijalna sila F_a

$$F_a = \frac{\partial A_\sigma}{\partial l_\sigma} = \frac{i^2}{2} w^2 \mu_0 \frac{D_s \pi}{l_\sigma^2} \delta_r = F_r \frac{\delta_r}{l_\sigma}$$

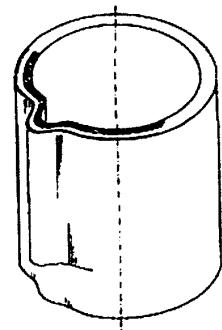


Deformacije namota nastale zbog kratkog spoja transformatora u pogonu

- Deformacije unutrašnjeg namota



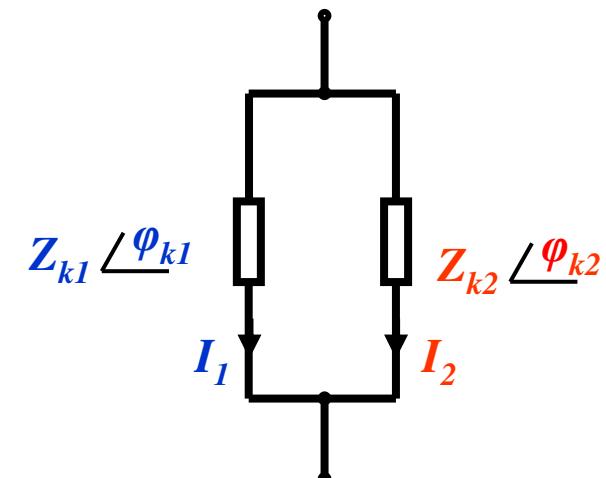
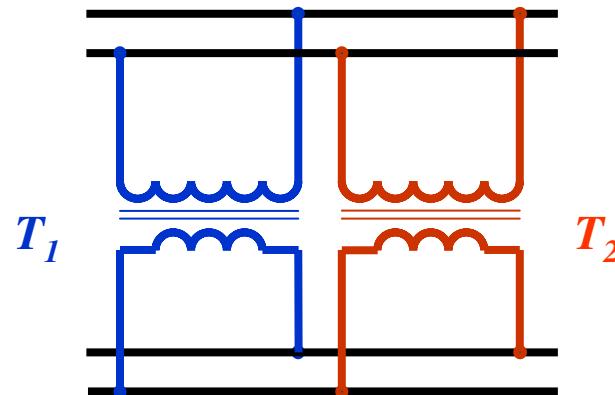
- Tipični primjer deformacije unutrašnjeg namota:



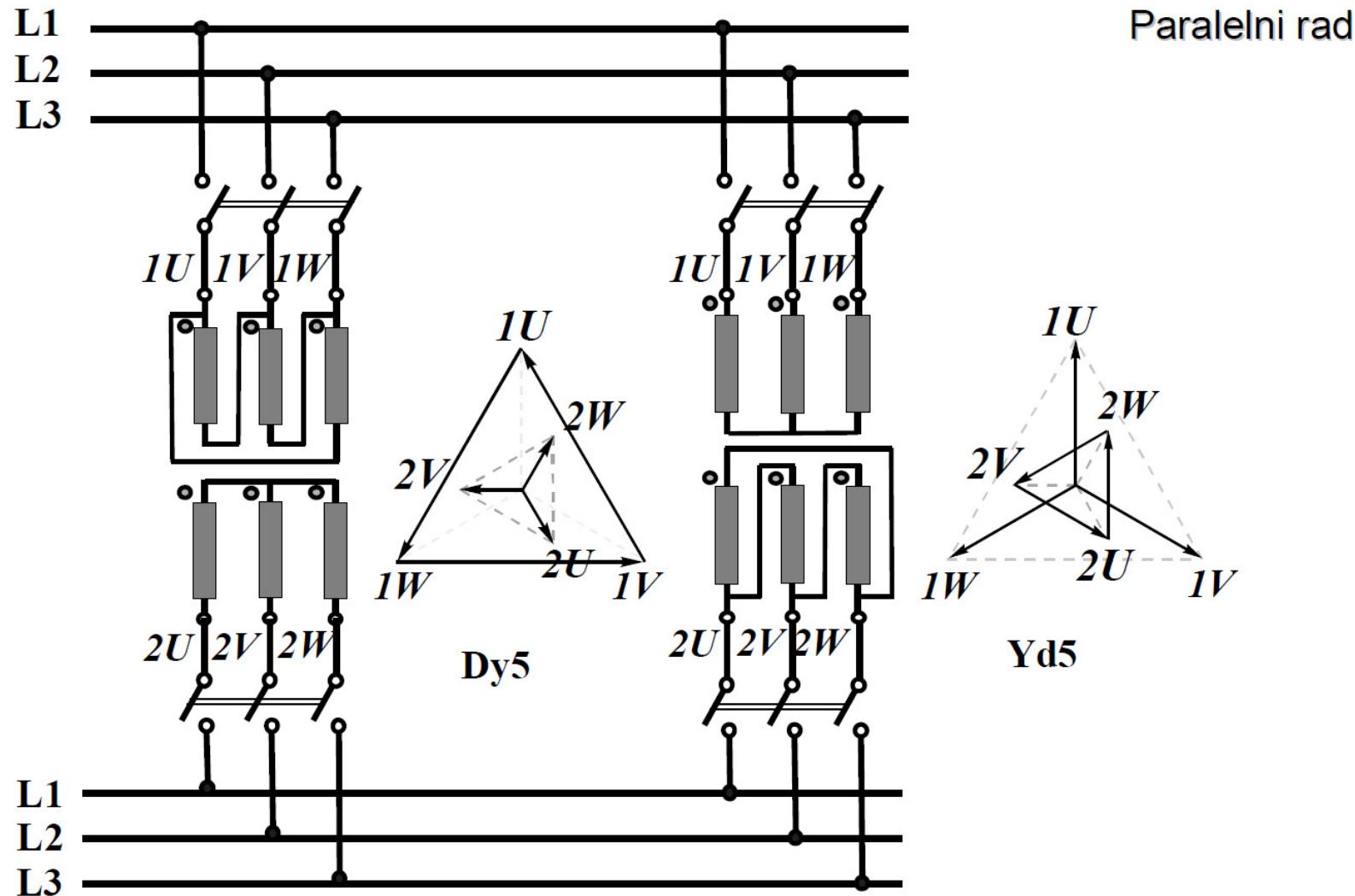
Paralelni rad transformatora

■ Uvjeti paralelnog rada:

- Isti satni broj
- Jednaki nazivni naponi transformacije U_{1n}/U_{2n}
- Približno jednaki naponi kratkog spoja, razlika do 10%
- Omjer nazivnih snaga ne veći od 2



Paralelni rad transformatora - Dy5 i Yd5



Paralelno spojeni transformatori

- Dopušteno opterećenje n paralelno spojenih transformatora S_d :

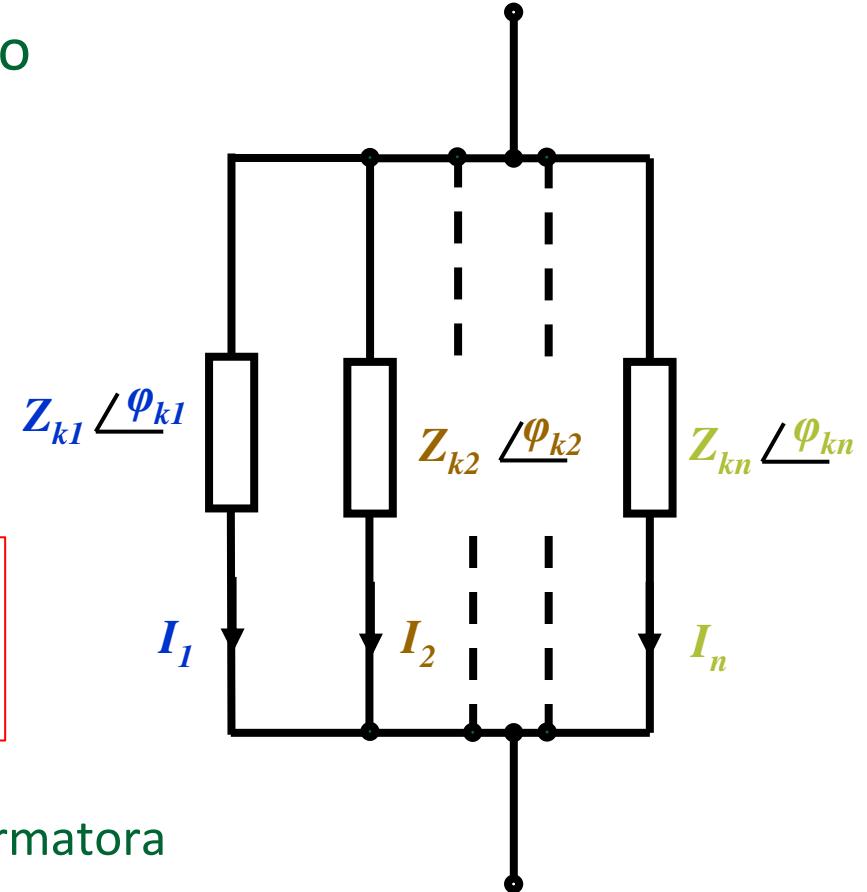
$$S_d = u_{k \min} \sum_{i=1}^n \frac{S_{ni}}{u_{ki}}$$

- Opterećenje pojedinog transformatora S_i :

$$S_i = \frac{S_{ni}}{u_{ki}} u_{k \min}$$

- gdje su:

- u_{ki} - napon kratkog spoja i -tog transformatora
- $u_{k \min}$ - napon kratkog spoja transformatora s minimalnim u_k



Paralelno spojeni transformatori

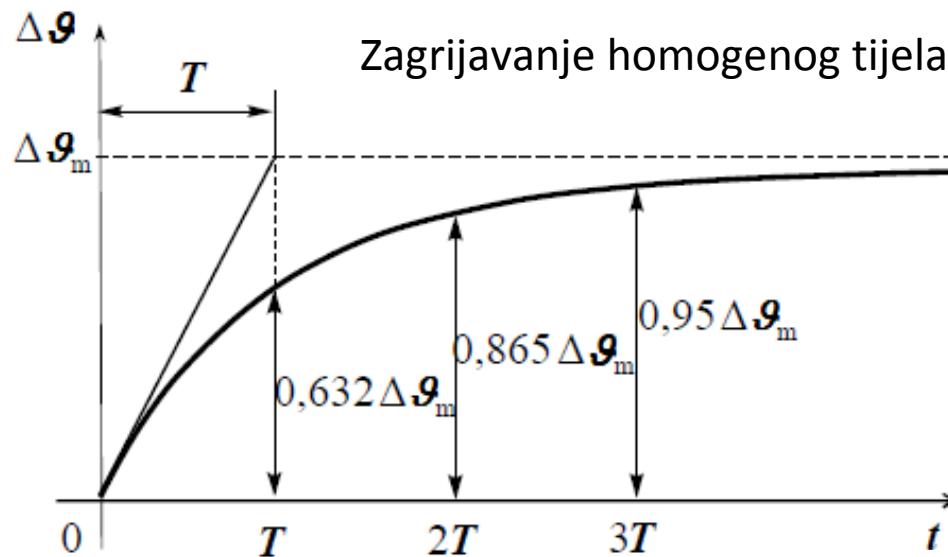
- Opterećenje pojedinog transformatora u slučaju kada se ukupno opterećenje paralelno spojenih transformatora S razlikuje od dopuštenog opterećenja S_d iznosi:

$$S_i = S \frac{S_{ni}}{u_{ki} \sum_{i=1}^n \frac{S_{ni}}{u_{ki}}}$$

ZAGRIJAVANJE I HLAĐENJE. Prijenos topline

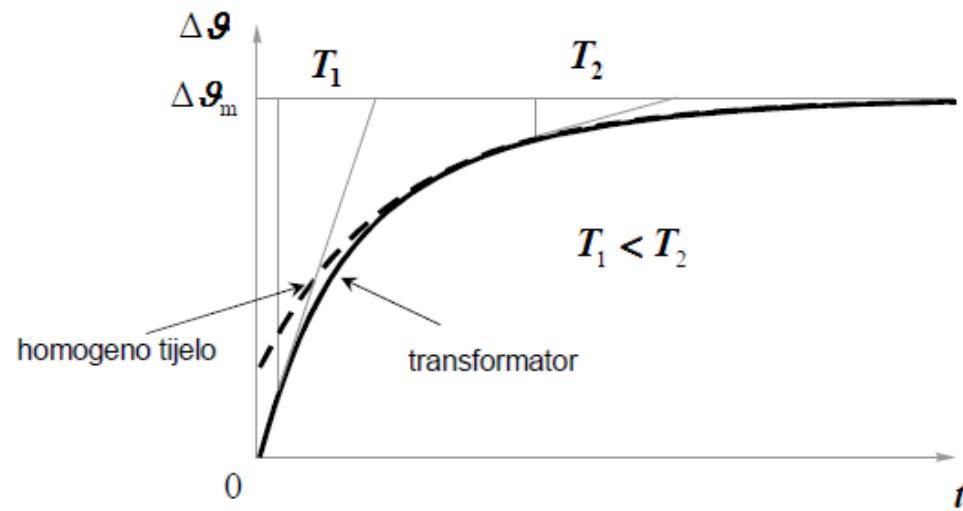
- Pojava spontanog prijenosa topline u smjeru temperaturnog pada, tj. od tijela više temperature na tijelo niže temperature ili od toplijih prema hladnijim slojevima tijela.
- Tri načina prijenosa topline:
 - *provođenje ili kondukcija* (vođenje),
 - *konvekcija* (odvođenje) - prijelaz topline od fluida na čvrstu stjenku ili od stjenke na fluid,
 - *zračenje ili radijacija* (isijavanje).

Zagrijavanje transformatora



- Toplinske vremenska konstanta namota: 3 do 15 minuta,
- Toplinske vremenska konstanta ulja+jezgre: 1,5 do 3 sata.
- Namot se puno brže zagrije i ohladi od ulja!
- Dva procesa zagrijavanja: zagrijavanje namota i zagrijavanje rashladnog sredstva (ulje ili zrak).

- Namot ima mnogo manji toplinski kapacitet nego ulje i zrak, višestruko manju vremensku konstantu i bolji odvod topline.
- Specifična toplina bakra iznosi 390 Ws/kg/K, a ulja 1883 Ws/kg/K.
- Odvod topline s namota na ulje je puno bolji, nego s ulja na okolinu.
- Računa se da je vremenska konstanta zagrijavanja transformatora jednaka vremenskoj konstanti ulja.



Jednadžba toplinskog stanja homogenog tijela

- Za homogeno tijelo mase m , specifičnog toplinskog kapaciteta c i površine A vrijedi:

$$\Phi_t dt = mc d\vartheta + A\alpha \vartheta dt$$

- gdje su: toplinski tok: Φ_t ; koeficijent prijelaza topline: α ; toplinski kapacitet tijela: mc ; toplinska vodljivost tijela: $A\alpha$

- Maksimalno zagrijanje (nadtemperatura) tijela pri konstantnom dovodu topline:

$$\vartheta_m = \frac{\Phi_t}{A\alpha}$$

- Ako su Φ_t , c i α konstante tada je rješenje jednadžbe toplinskog stanja kod zagrijavanja:

$$\vartheta = \vartheta_0 + (\vartheta_{\max} - \vartheta_0) \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right)$$

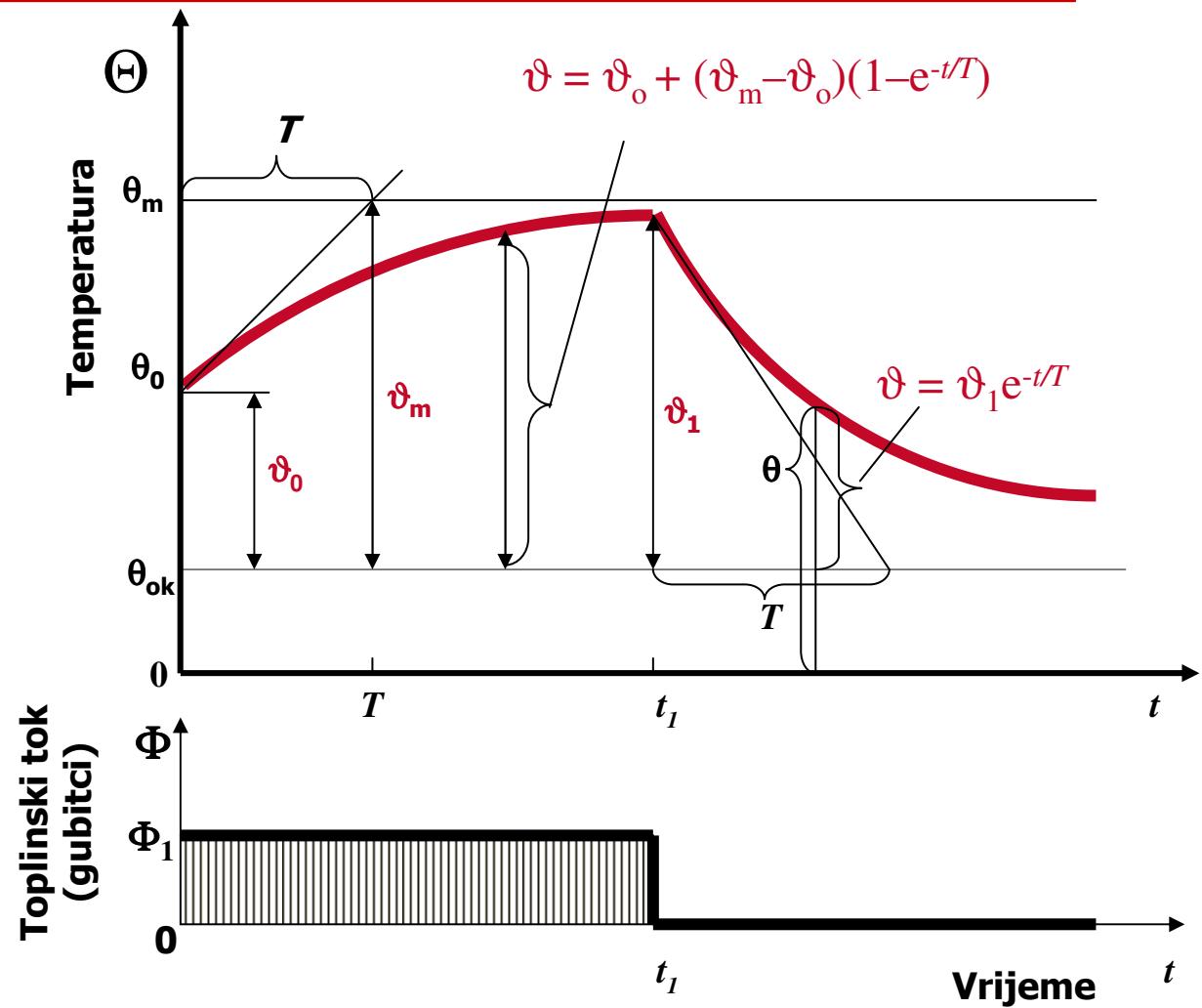
- i hlađenja: $\vartheta = \vartheta_1 e^{-\frac{t}{T}}$

- Toplinska vremenska konstanta: $T = \frac{mc}{A\alpha}$

Zagrijavanje i hlađenje homogenog tijela

- θ – temperatura
- ϑ – nadtemperatura (zagrijanje)

$$T = \frac{mc}{A\alpha}$$



Načini hlađenja transformatora

- Oznaka načina hlađenja transformatora sastoji se od 4 slova:
 1. Rashladno sredstvo namota
 2. Način hlađenja namota
 3. Rashladno sredstvo vanjskog hlađenja
 4. Način hlađenja za vanjsko hlađenje

Rashladno sredstvo:

O – mineralno ulje,
L – sintetsko ulje,
G – plin,
W – voda,
A – zrak,
S – kruti materijali

Način hlađenja:

N – prirodno,
F – prisilno,
D – dirigirano.

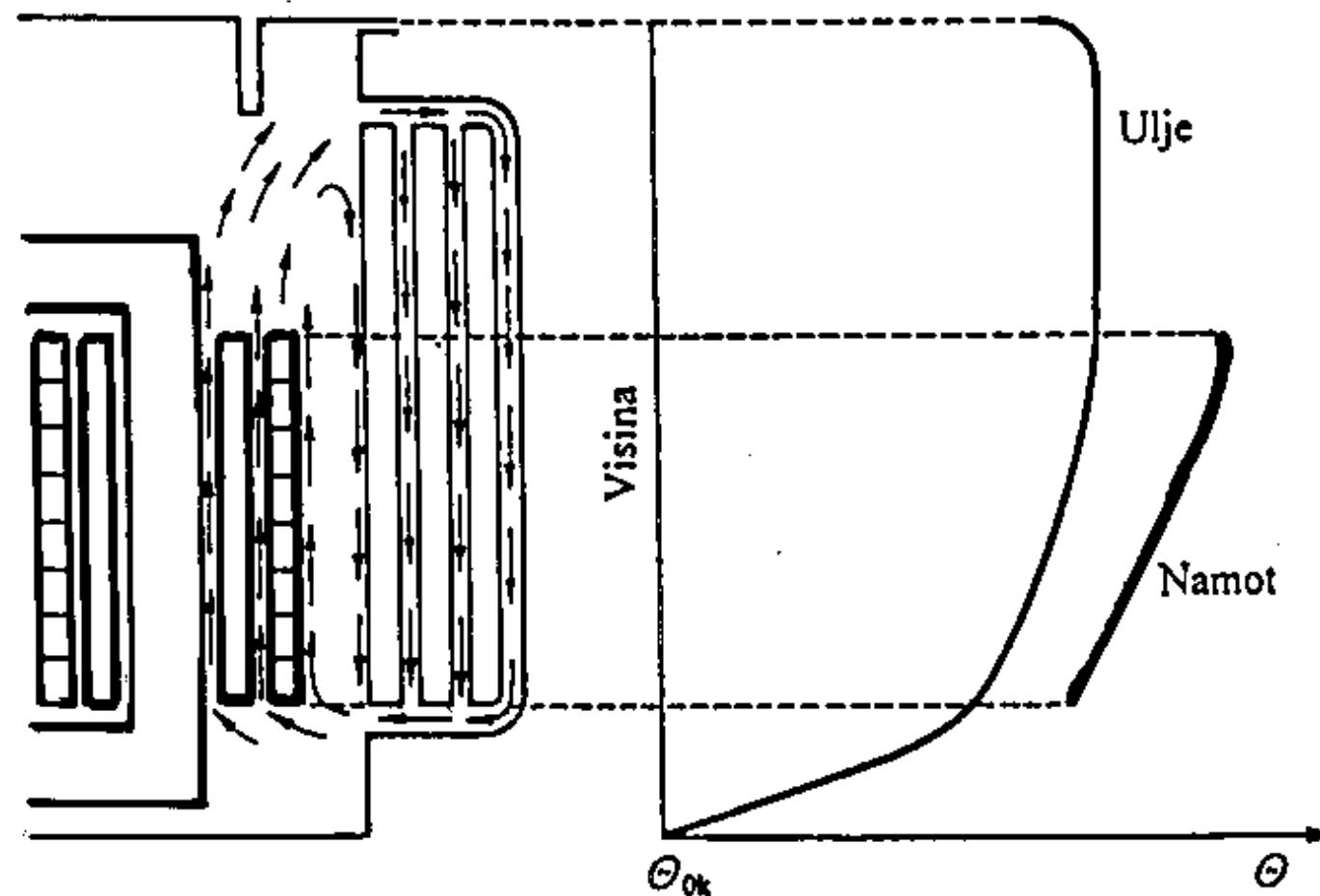
Primjeri oznake hlađenja transformatora:

- **ONAN** – hlađenje prirodnim strujanjem ulja oko namota, i zraka kao sekundarnog rashladnog sredstva (*uljni transformatori do 20 MVA*).
- **ONAN/ONAF** – do 80% snage ONAN, dalje se automatski uključuju ventilatori.
- **ODWF** - hlađenje namota dirigiranim strujanjem ulja u kotlu, te sekundarnim rashladnim krugom u kojem prisilno struji voda (*najveći transformatori*).
- **AN** – suhi transformatori bez zaštitnog kućišta.
- **ANAN** – suhi transformatori sa zaštitnim kućištem i prirodnim strujanjem zraka unutar i izvan kućišta.
- **AF** – suhi transformatori za veće snage.

Dopušteno zagrijavanje transformatora prema IEC normi

Dio	Dopušteno zagrijanje (K)
<i>Uljni transformatori</i> namoti	65 za prirodno i prisilno strujanje ulja
	70 za dirigirano strujanje ulja
ulje u najvišem sloju	65 ako je ulje zaštićeno od pristupa zraka 55 ako ulje nije zaštićeno od pristupa zraka
<i>Suhi transformatori</i> namoti	toplinska klasa
	60 A
	75 E
	80 B
	100 F
	125 H
	150 C
Jezgra, metalni i ostali dijelovi	Temperatura ne smije biti tolika da može oštetiti jezgru ili susjedne dijelove

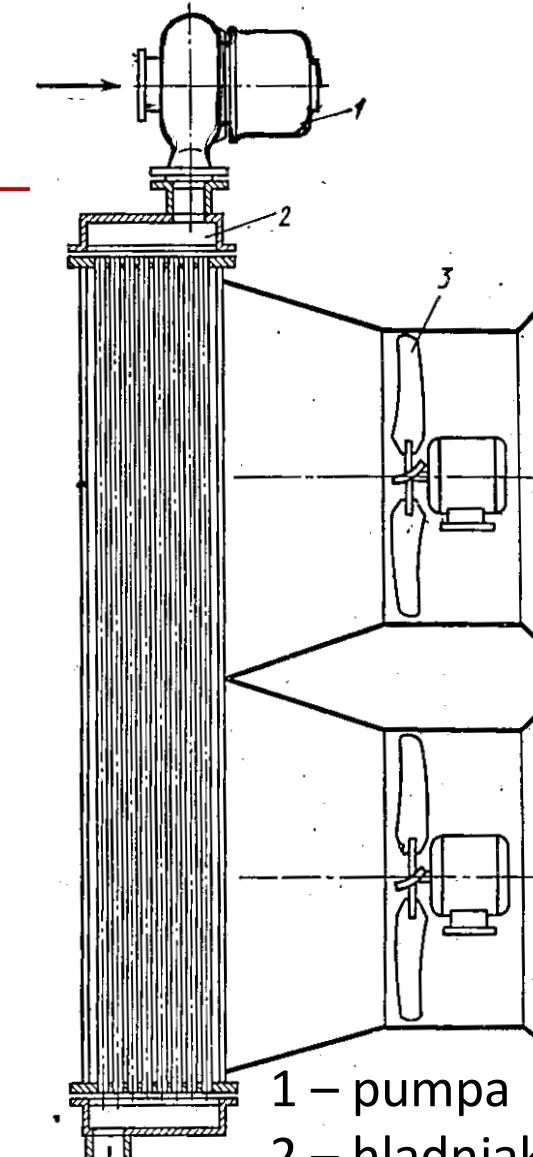
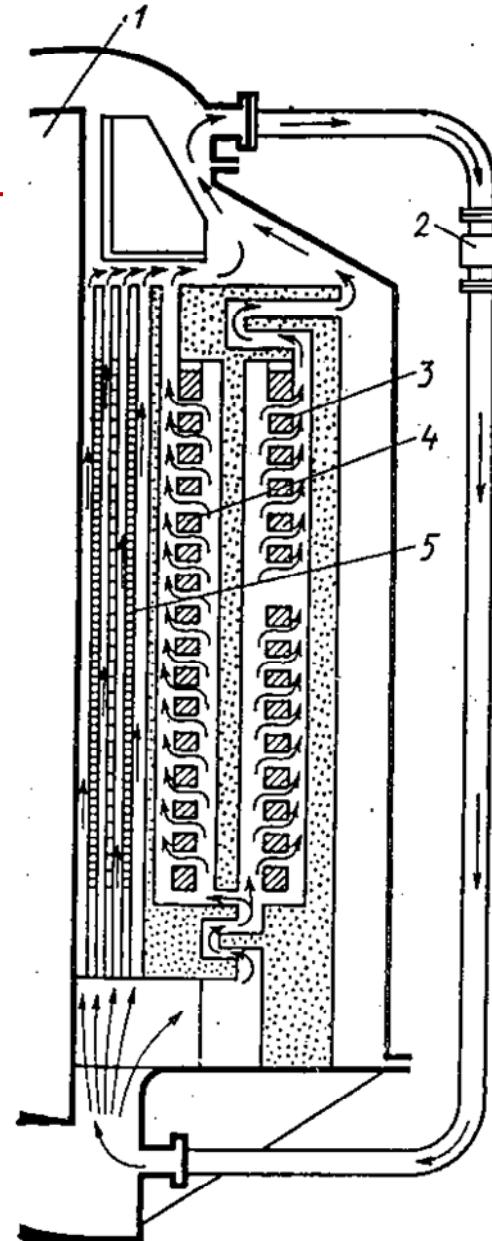
Zagrijavanje u transformatoru po vertikali



Prisilno hlađenje transformatora

- 1 – jezgra
- 2 – pumpa
- 3 – VN namot
- 4 – SN namot
- 5 – NN namot

strelice označavaju
smjer strujanja ulja

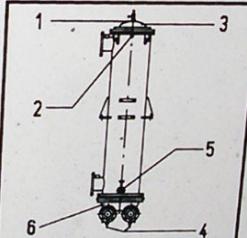


- 1 – pumpa
- 2 – hladnjak
- 3 – ventilator

Vodeni hladnjaci

- Na veće transformatore ponekad se ugrađuju hladnjaci koji rashlađuju ulje odvodom topline vodom umjesto zrakom.
- Manjih su dimenzija ali zahtijevaju rashladnu vodu.

OIL WATER COOLER		Type: WKDH 63 Ex
Execution with double tubes		Year: 2007
Cooler output	63 KW	Comm.No. 39011 - 10 - 2
Amount of oil circulation	22,7 m ³ /h	
Oil temperature in/out	70,0/64,2 °C	
Amount of water	6,1 m ³ /h	
Water temperature in/out	25,0/34,0 °C	
Weight of cooler (empty)	140 Kg	
Oil contents	46 dm ³	



Tipska snaga

- Tipska snaga transformatora je nazivna snaga dvonamotnog transformatora bez regulacije. Ako imamo mogućnost regulacije napona za $+a\%$ i $-b\%$ treba jednom namotu dodati $a\%$ zavoja, i presjek vodiča povećati za $b\%$ da bi pri tom nižem naponu struja bila veća za $b\%$. Tipska snaga takvog transformatora da nema regulacije je približno:

$$S_T = S_N \left(1 + \frac{a\% + b\%}{200} \right)$$

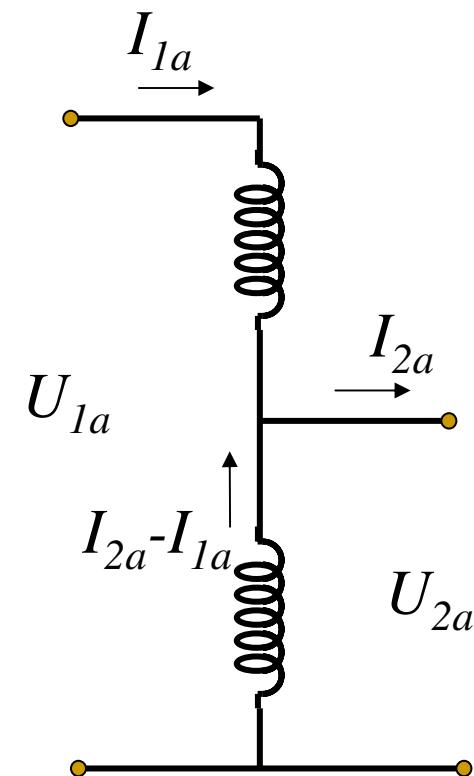
- Ako postoji treći namot nazivne snage S_3 tipska snaga je:

$$S_T = S_N \left(1 + \frac{a\% + b\%}{200} + \frac{S_3}{2S_N} \right)$$

AUTOTRANSFORMATOR

Transformator u štednom spoju

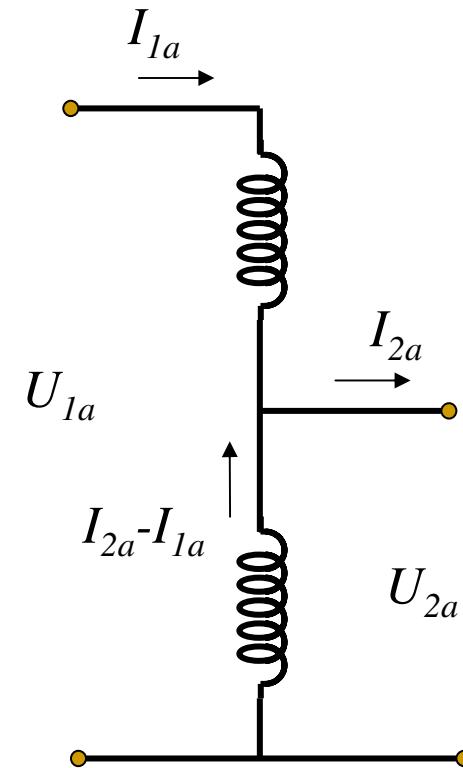
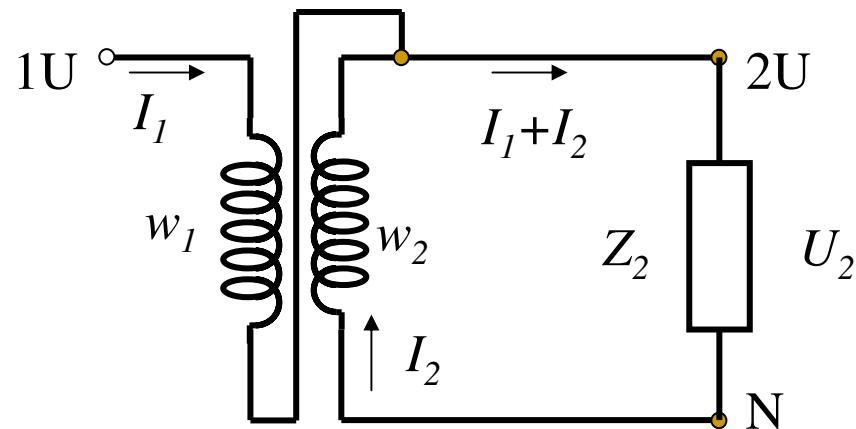
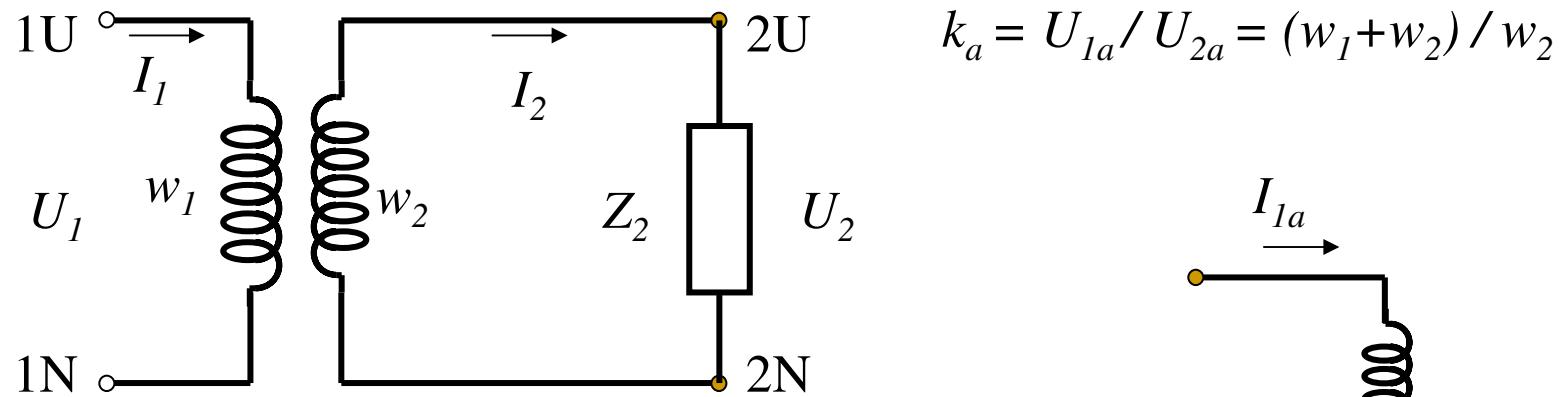
- Autotransformator je transformator u kojem su barem dva namota kruto spojena u zajednički namot.
- Višenaponska strana namota sastoji se od serijskog i zajedničkog (paralelnog) namota.
- Niženaponska strana se sastoji samo od zajedničkog namota.
- U autotransformatoru samo se dio snage transformira induktivnim putem, dok se preostali dio prenosi direktno s primara na sekundar preko galvanske veze namota.



Prednosti i nedostaci autotransformatora

- Prednosti autotransformatora prema dvonamotnom transformatoru za iste napone i snagu u osnovi se sastoje u manjim dimenzijama, nižim gubicima, većoj korisnosti, lakšem transportu i nižoj cijeni.
- Negativne strane autotransformatora proizlaze iz galvanske veze primarnog i sekundarnog kruga i time direktnog prijenosa prenapona s jednog sustava na drugi.
- Spoj trofaznog namota autotransformatora mora biti u zvijezda spoju da bi se mogao jedan izvod zajedničkog namota uzemljiti.
- Izolacijski sustav autotransformatora je kompleksniji zbog gotovo redovito izvedenih dodatnih regulacijskih zavoja.

Shema autotransformatora



Snaga autotransformatora

$$S_a = U_{1a} I_{1a} = (U_1 + U_2) I_1$$

$$S_a = U_1 I_1 \left(1 + \frac{U_2}{U_1} \right)$$

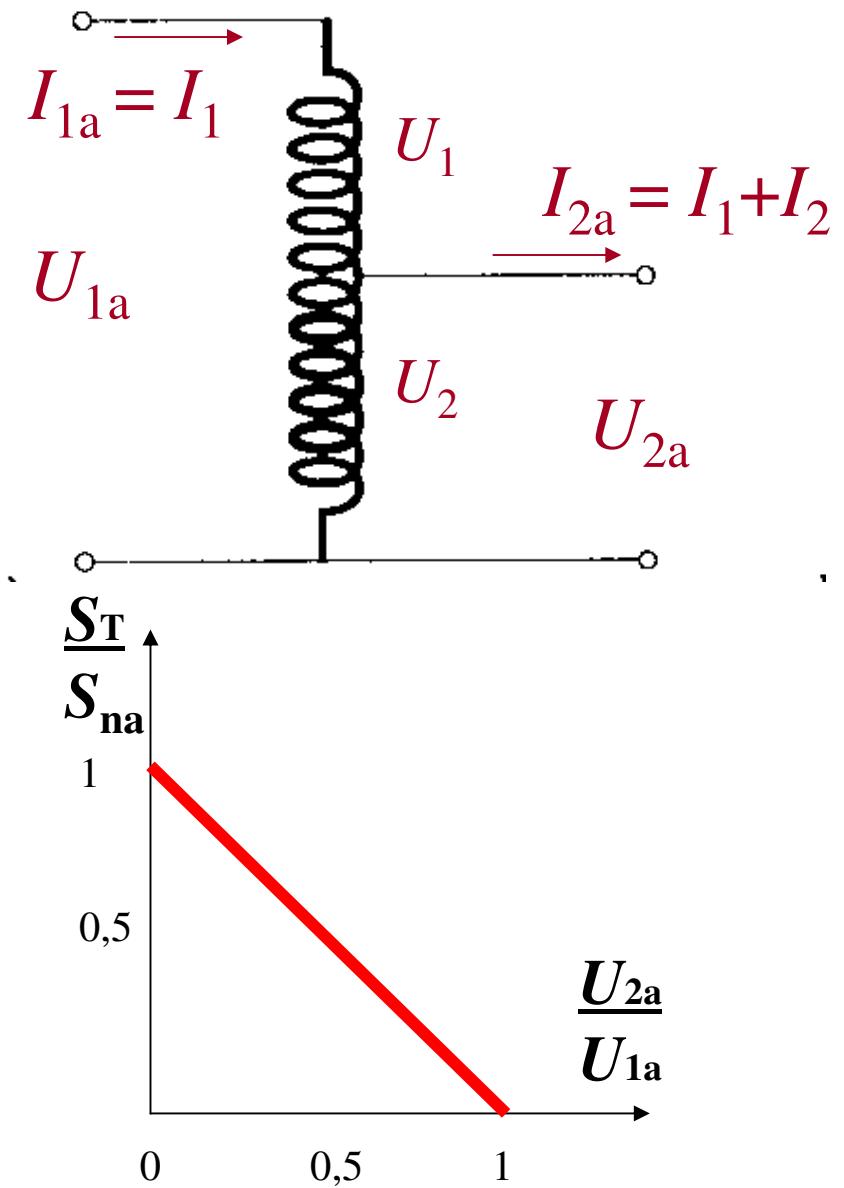
$$S_a = S_T \frac{U_{1a}}{U_{1a} - U_{2a}}$$

Tipska snaga:

$$S_T = S_a \left(1 - \frac{U_{2a}}{U_{1a}} \right)$$

Faktor redukcije:

$$q = \frac{S_T}{S_a} = \left(1 - \frac{U_{2a}}{U_{1a}} \right)$$



Napon kratkog spoja autotransformatora

- Napon kratkog spoja s VN strane u postotnom iznosu je manji jer je primarni napon veći (umjesto U_1 bazni je napon $U_{1a} = U_1 + U_2$):

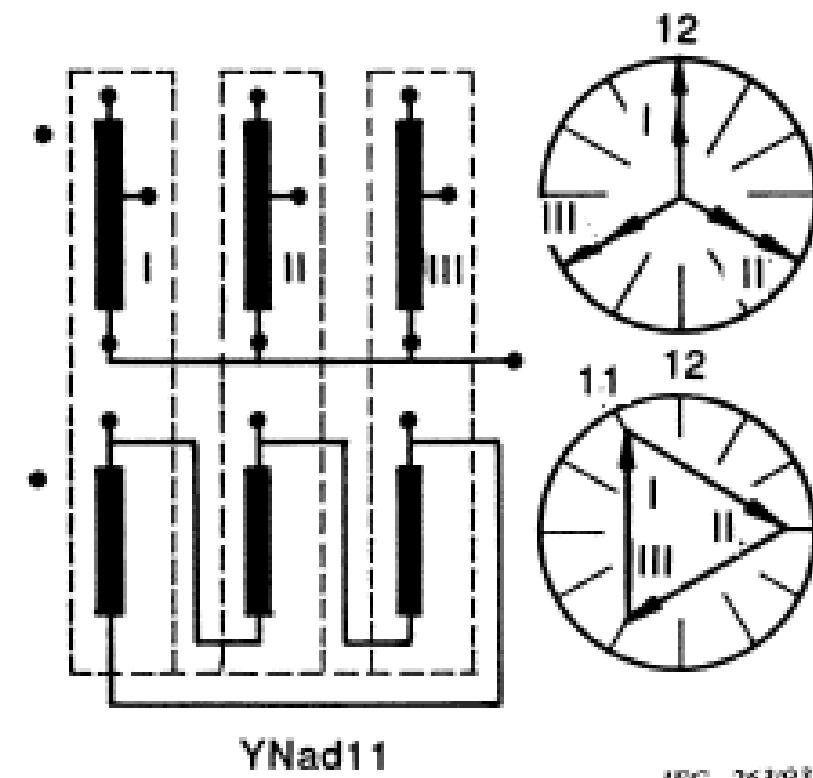
$$u_{ka\%} = 100 \frac{Z_k}{S_a} = 100 \frac{Z_k S_T \frac{U_{1a}}{U_{1a} - U_{2a}}}{\left(\frac{U_{1a}}{U_{1a} - U_{2a}} \right)^2 U_n^2} = u_{k\%} \frac{U_{1a} - U_{2a}}{U_{1a}}$$

$$u_{ka\%} = u_{k\%} \frac{S_T}{S_a}$$

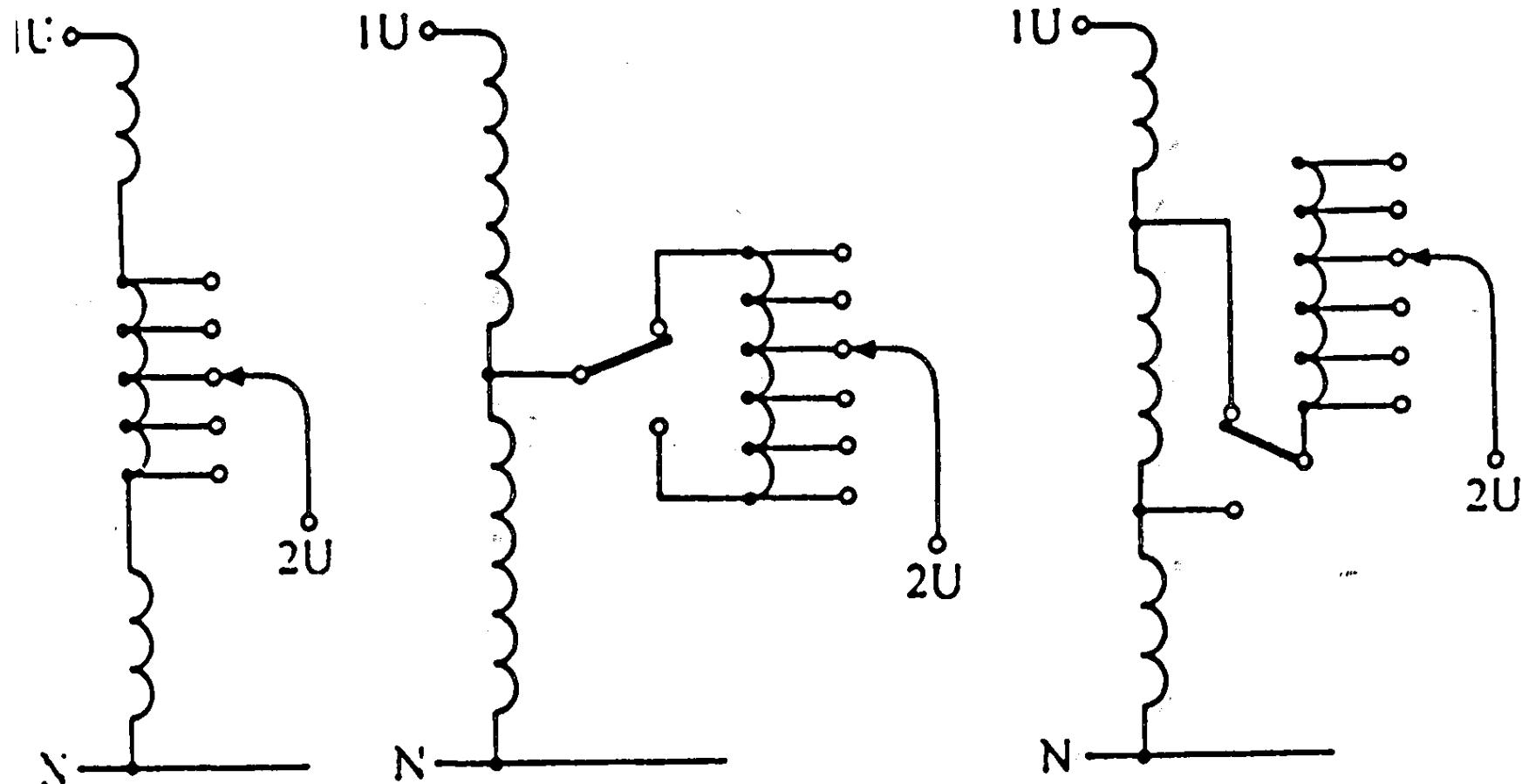
- Zbog manjih struja kratkog spoja u mreži često je zahtjev kupaca da u_{ka} bude većeg iznosa (čak i do 40%), pa se autotransformator mora raditi s posebnom konstrukcijom namota koje karakteriziraju povećani dodatni gubici.

Primjena autotransformatora

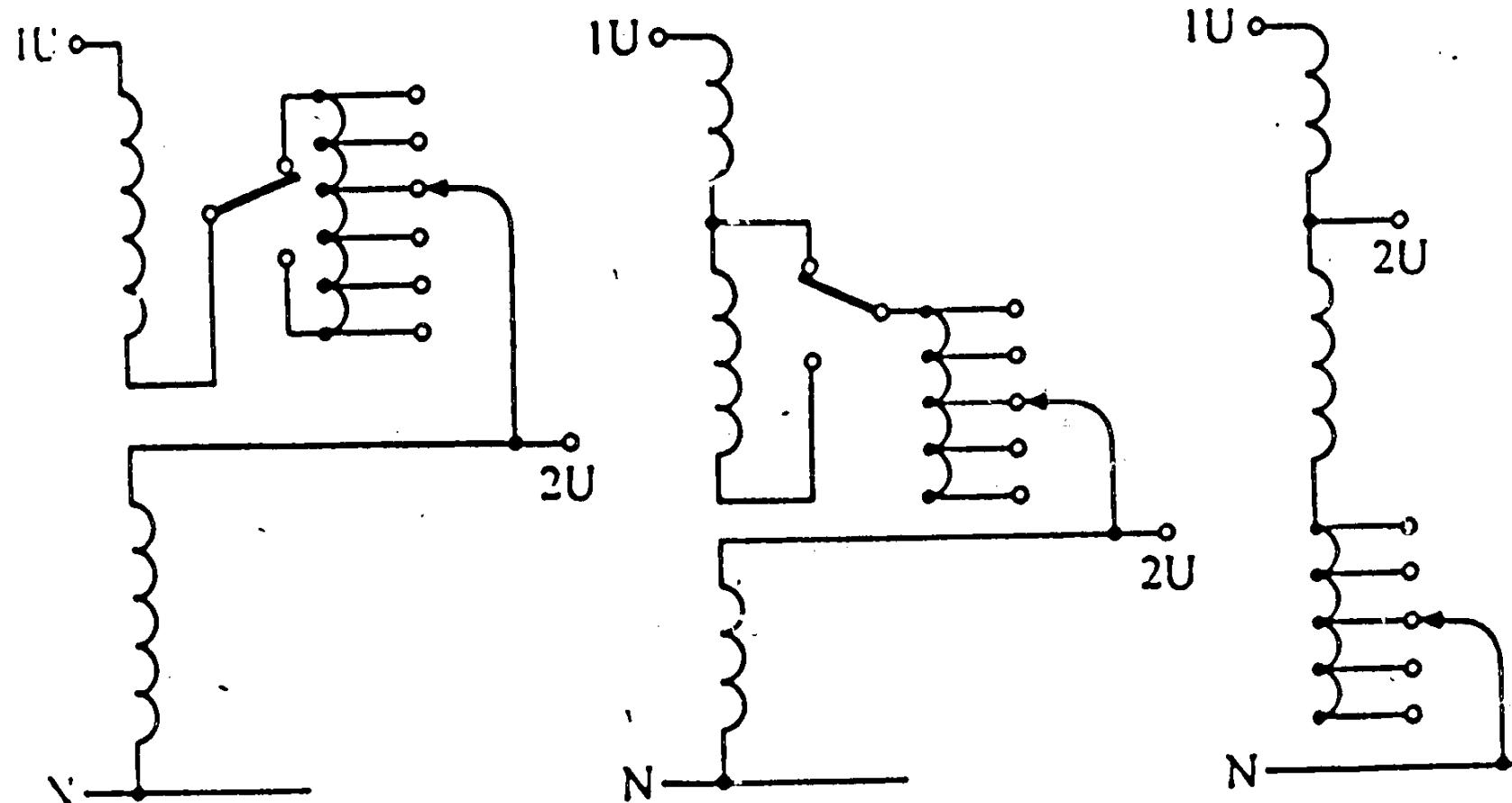
- Zbog uštede se često primjenjuju autotransformatori za velike snage pri povezivanju VN mreža (400, 220 i 110 kV). Najčešće se izrađuju tronamotni transformatori s VN i SN namotima spojenim u zvijezdu u štednom spoju, a NN namot je galvanski odvojen i spojen je u trokut. Taj se tercijar obično ne koristi za napajanje svoje mreže; tada ga nazivamo stabilizacijski namot kojim se ostvaruje da u magnetskom toku i induciranim naponu nema trećeg harmonika.
- Često se autotransformatorima dograđuje regulacijska sklopka zbog mogućnosti podešavanja prijenosnog omjera pod teretom.



Regulacija napona autotransformatora (napon VN strane čvrst)

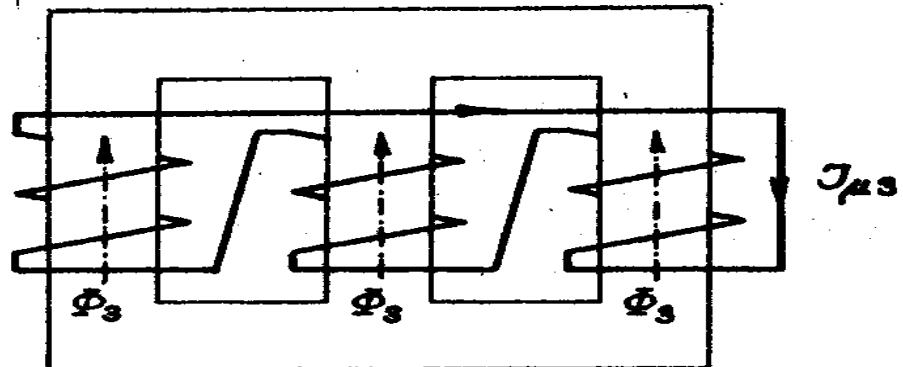


Regulacija napona autotransformatora (napon VN strane promjenljiv)



Tercijar

- Tercijar je kratkospojeni namot malog otpora, jednoliko razdijeljen na sva 3 stupa tako da su svi svici spojeni u seriju – spoj trokut.
- Namotan je oko stupa i sprečava zatvaranje 3.harmonika toka u prostoru između stupova i kotla.
- Nulta reaktancija jednaka je direktnoj reaktanciji i zato kažemo da tercijar ruši nultu reaktanciju od iznosa bliskog reaktanciji praznog hoda na iznos blizak reaktanciji kratkog spoja.
- U slučaju nesimetričnog opterećenja po fazama kada nema nul voda javljaju se istofazni tokovi u jezgri. Naponi inducirani tim tokovima mijenjaju fazne napone. No u tercijaru će poteći struja inducirana od istofaznih tokova u jezgri koja će svojim djelovanjem poništiti djelovanje istofaznih struja tereta.



Uloga tercijara

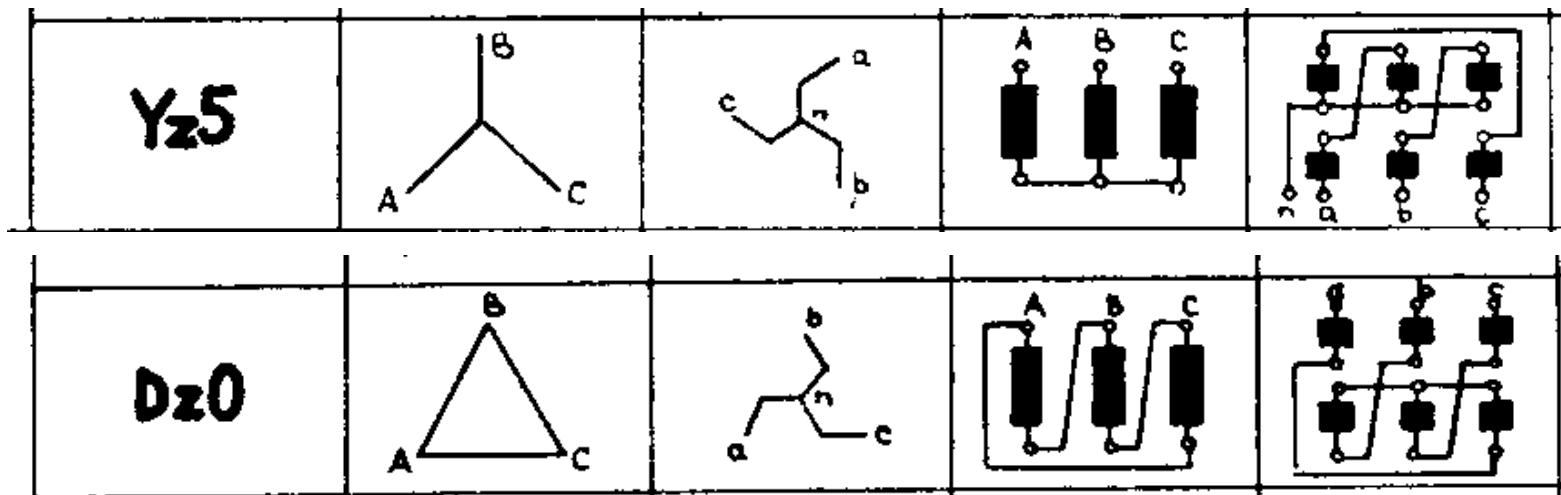
- Tercijar u transformatoru u spoju Yy ima funkciju smanjenja nulte reaktancije transformatora, simetriranja opterećenja po fazama, smanjenja nultih komponenti struje uključenja i sl.
- Može se koristiti i za priključak trošila, odnosno u elektrani ili transformatorskoj stanici gdje su potrebna 3 različita napona. Ako se ne koristi za napajanje trošila naziva se i stabilizacijski namot.
- Primjer tronamotnog transformatora s tercijarom: YNyn0d5

Cik-cak spoj transformatora

- Svaki se fazni namot sastoji od dva dijela u kojima se induciraju fazno pomaknuti naponi. Te se polufaze nalaze na različitim stupovima.
- 15,5% više zavoja nego u spoju zvijezda.
- Omogućeno nesimetrično opterećenje (čak 100% opterećenja samo jedne faze).
- Upotreba za manje transformatore (do 160 kVA)
- Primjer: Yzn5

Cik-cak (slomljena, razlomljena zvijezda)

- Praktički se ne koristi za primarni namot.
- Zbog spoja svake faze od polunamota, struje 3.harmonika djeluju tako da se treći harmonik protjecanja poništava, što znači da nema 3.harmonika magnetskog toka. Taj se tok može zatvoriti samo između cik-cak namota (jako veliki magnetski otpor) pa treba puno amperzavoja, tj. struja magnetiziranja (primara) mora biti jako velika.



Transformator za uzemljenje

- Iznimka za spoj cik-cak u primaru je transformator za uzemljenje.
- Ako treba mrežu (npr. 20 kV) uzemljiti, a spoj je na toj strani trokut ubacuje se transformator za uzemljenje u Z-spoju (to je praktički prigušnica).
- U sekundaru takvog transformatora za uzemljenje može se dodati namot u spoju y za napajanje NN mreže (0,4 kV) tako da je npr. grupa spoja ZNyn5.

Prenaponi kojima je izložen transformator

- Atmosferski – atmosfersko izbijanje prilikom udara groma u dalekovod ili bliskih munja.
- Sklopni – isklop ili uklop prekidača mijenja konfiguraciju mreže i nastupa prijelazno stanje s drugačijim akumuliranim energijama u električnom, magnetskom i mehaničkom dijelu sustava kao npr. počeci kratkih spojeva.
- Da bi bili sigurni da će transformator normalno raditi u svim radnim uvjetima ispitujemo ga:
 - izmjeničnim ispitnim naponima nazivne frekvencije AC (kV) razine od 10 do 630 kV
 - udarnim ispitnim naponima posebnog valnog oblika - LI (kV) razine od 40 do 1425 kV

Najviši napon opreme U_m (kV)	Podnosivi napon industr. frekv. (kV)	Podnosivi udarni napon (kV)
3,6	10	40
7,2	20	60
12	28	75
24	50	125
36	70	170
123	185	450
	230	550
245	360	850
	395	950
420	570	1300
	630	1425

Sklopni prenaponi – primjer oznake ispitivanja namota na otpornost prema sklopnim prenaponima: AC230

- Amplituda prenapona u odnosu na nazivni napon može biti i do 3 puta veća, ali tehnička rješenja limitiraju je na 2 i manje. Sklopni prenaponi simuliraju se valovima oblika 100-500 μs / nekoliko ms.

Strmina:

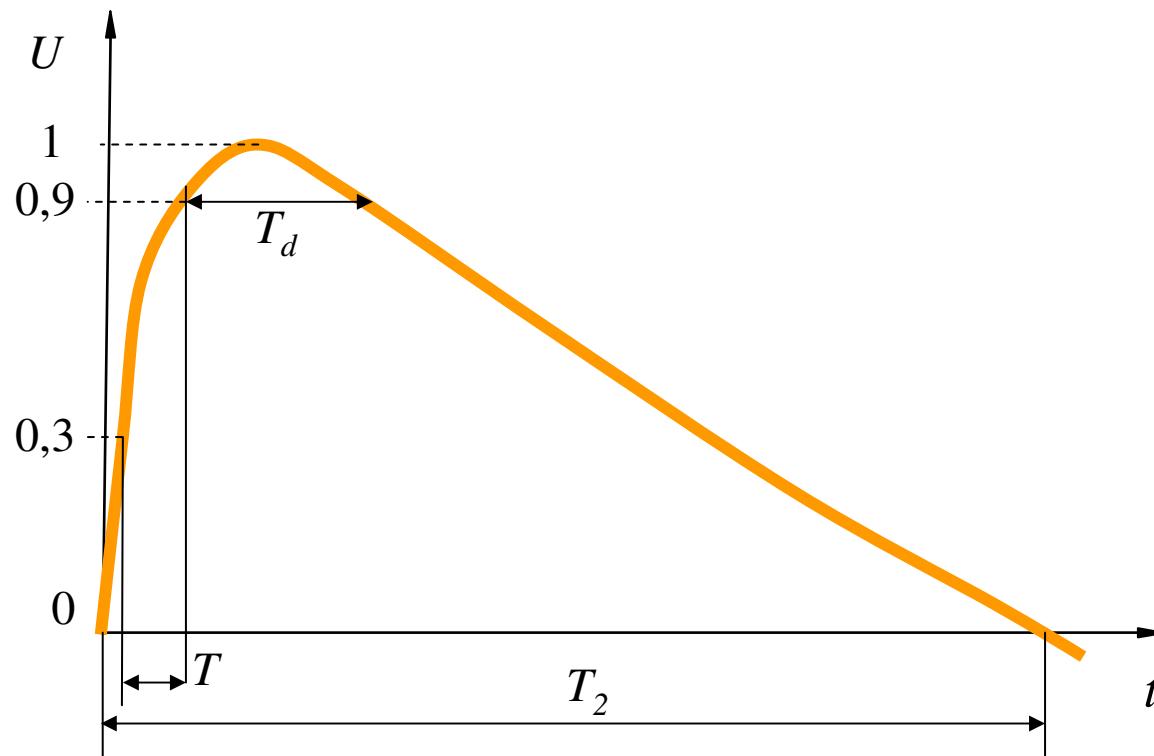
$$T_1 \geq 20 < 250 \mu\text{s} = 1,67 \frac{T}{T}$$

90% trajanje:

$$T_d \geq 200 \mu\text{s}$$

Trajanje do prve nule:

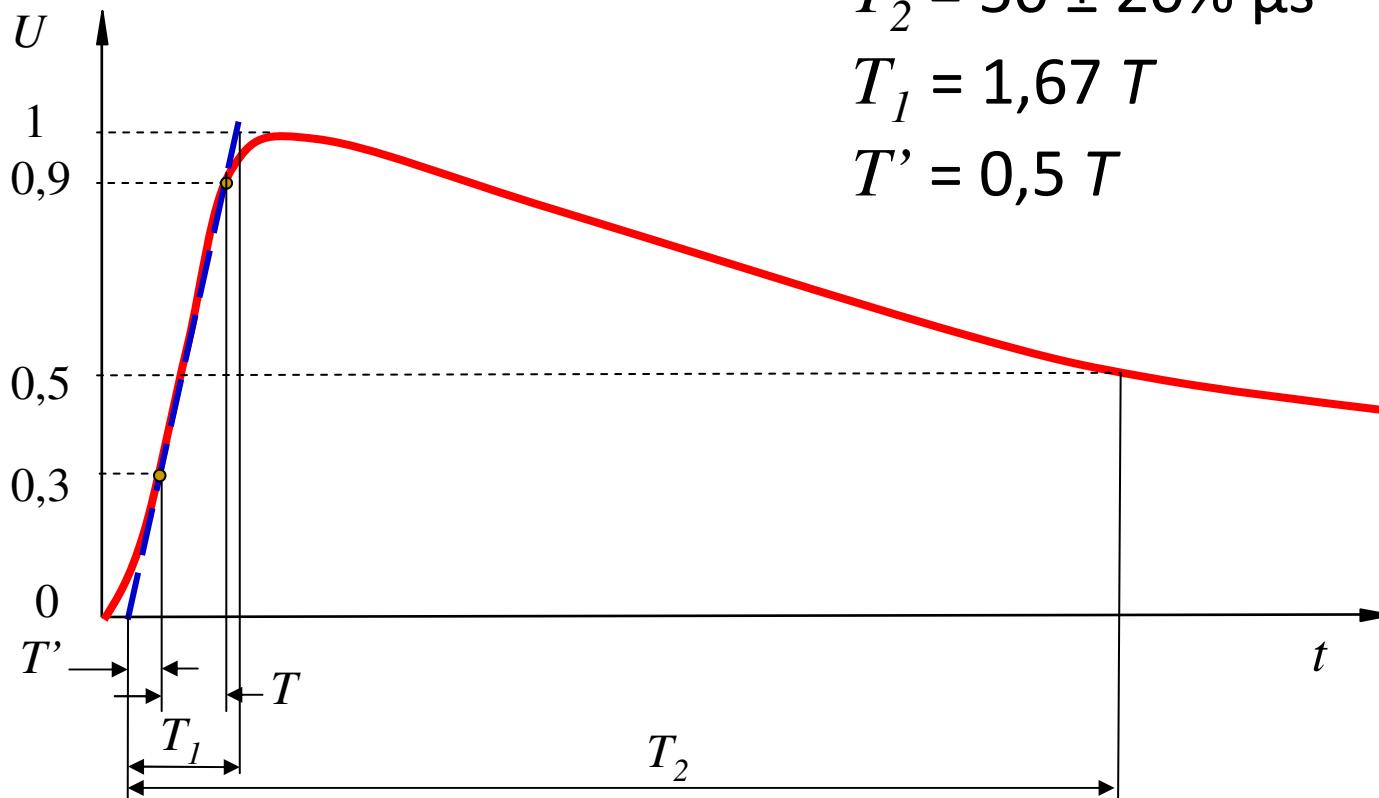
$$T_2 \geq 500 \mu\text{s}$$



Ispitivanje udarnim valom – primjer oznake: LI550 (*Lightning impulse test – Full wave lightning impulse*)

- Provjerava se sposobnost izolacije da će izdržati atmosferske prenapone koji se mogu pojaviti.

$$\begin{aligned}T_1 &= 1,2 \pm 30\% \mu\text{s} \\T_2 &= 50 \pm 20\% \mu\text{s} \\T_1 &= 1,67 T \\T' &= 0,5 T\end{aligned}$$



Natpisna pločica

- Za transformatore veće snage od 10 MVA preporuča se primjena vrijednosti R10 reda za nazivne snage, tj. 100, 125, 160, 200, 250, 315, 400, 500, 630, 800, 1000 itd. (IEC 60076-1).
- Primjer označavanja regulacijskih transformatora:
 - Transformator s regulacijom na 110 kV namotu s ukupno 21 odvojkom simetrično postavljenim:
$$(110 \pm 10 \times 1,5\%) / 35 \text{ kV}$$
ili uz nesimetrične odvojke:
$$(110_{-8 \times 1,5\%}^{+12 \times 1,5\%}) / 35 \text{ kV}$$

Nazivni podaci specijalnog tronamotnog transformatora

<i>Nazivna snaga</i> S_n (kVA)	Najviši napon opreme U_m (kV)	KONČAR D&ST	
U_{ISP_udarni}	Type TRP 40000 - 123/M	No. CT0489-	Year of Manufacture 2000
	Rated Frequency 60 Hz	Number of Phases 3	Standard IEC 76
U_{ISP_fn}	LI550 AC230 / LI125 AC50 / AC50	Vector Group Symbol YNyn0(d5)	
	Rated Power 40000 kVA	Type of Cooling ONAN/ONAF	
Position	H.V. 127556	L.V. 15000	H.V. 181.0 L.V. 1539.6
1			28.8 %
13	110000	15000	V 210.0 A 1539.6
25	92444	15000	249.8 1539.6
Stabilizing winding	6600	V 707.1 A	26.3 %
Temp. Rise-Winding/Oil	55/50 °C	Untanking Mass 36.5 t	24.1 %
Transportation Mass 61.5 t	Mass of Oil 20.0 t	Total Mass 76.0 t	
ONAN Cooling up to 31.5 MVA			

Uključenje rashladnih ventilatora hladnjaka kad je snaga veća od 31,5 MVA

Slaganje jezgre i namatanje namota



LEEEC transformatori – aktivni dio

150 MVA

220 kV



Transformatori s ovalnom jezgrom

Prednosti distributivnih transformatora nove generacije

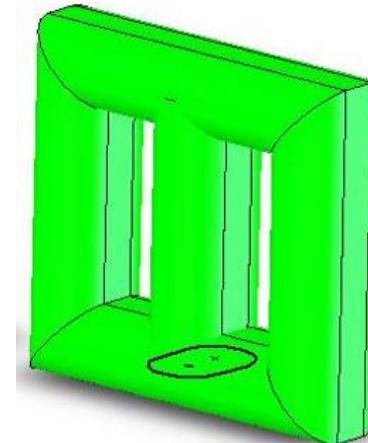
Kompaktniji namoti:

Dijamantni papir (DPP) i veća otpornost na sile kratkog spoja

Kvalitetnije sušenje u LFH postrojenju

Kvalitetnije vakuumiranje i punjenje ulja

Kvalitetnije jezgre: niža buka



Ovalna jezgra zahtjeva:

1. Čvršće namotan namot

- Nove generacije namatalica
- Dijamantnog papira (DPP) kao slojne izolacije (da bi se DPP slijepio potrebna je temperatura 120°C – 2h)

2. Manje tolerancije dimenzija jezgre



Transformator u postrojenju



Buchholzov relej - Zaštita od unutarnjih kvarova

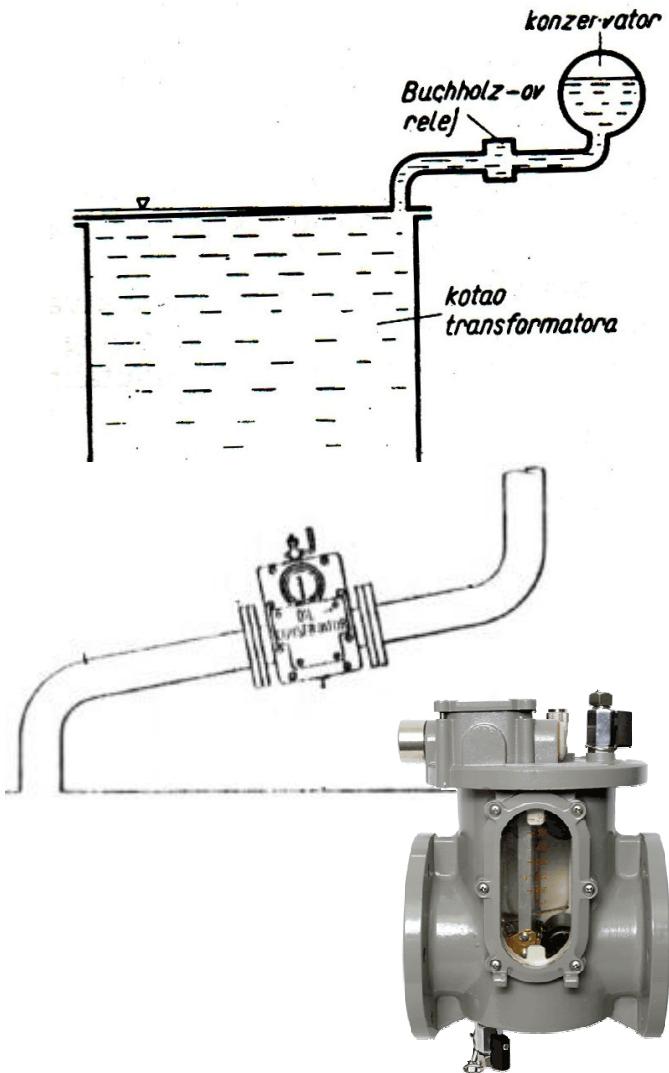
Detektira plinove u transformatoru

■ Mogući uzroci:

- Preskoci u transformatoru
- Zagrijavanje uslijed proboga izolacije vodiča
- Protjecanje struje kvara

■ Princip:

- Plinovi se izdižu i prolaze kroz cijev
- Što je veći kvar veće je i strujanje
- Ovisno o veličini kvara, zatvara se jedan od kontakata ili oba
- Gornji kontakti zatvaraju krug za signalizaciju, a donji za isklapanje transformatora
- Gornji kontakt se zatvara u slučaju manjeg kvara
- Donji kontakt se zatvara u slučaju većeg kvara
- Oba kontakta se zatvaraju u slučaju propuštanja ulja u kotlu



Plinovi nastali degradacijom papirne izolacije

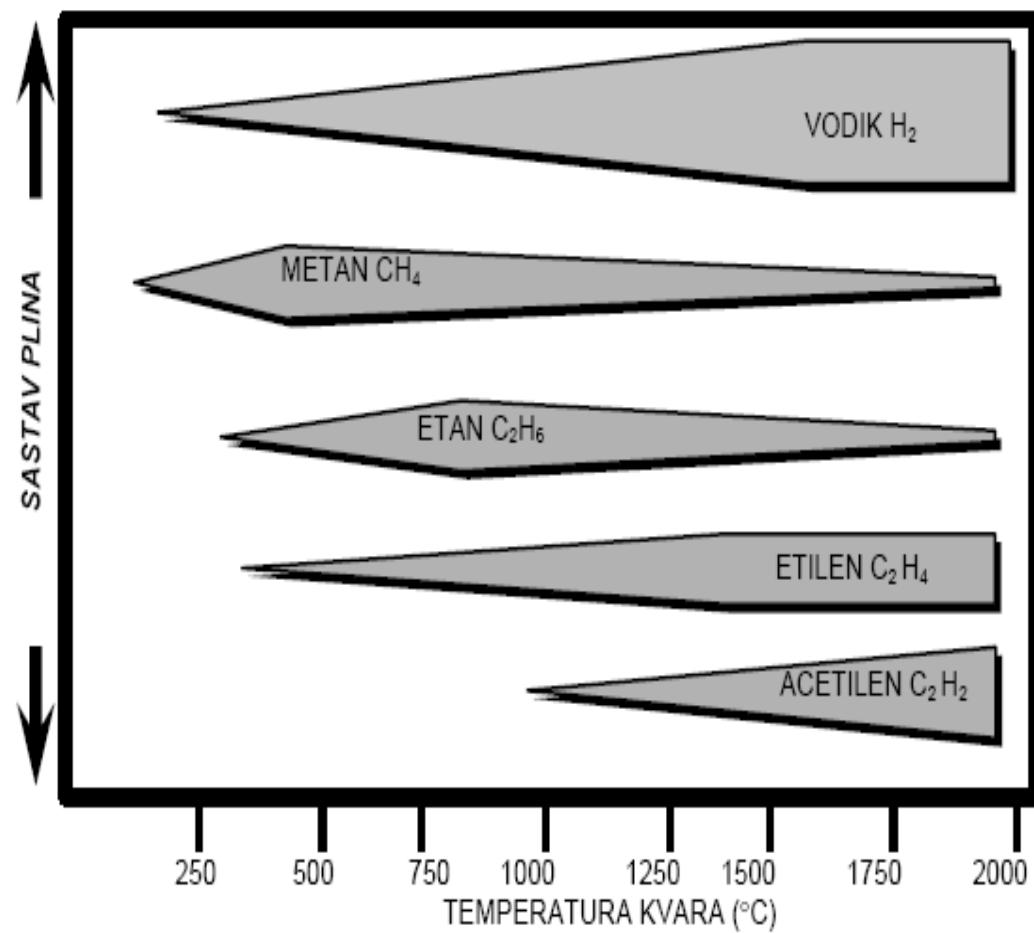
- Posljedica starenja papirne izolacije je nastanak ugljičnog monoksida i ugljičnog dioksida, te vode kao i nešto ugljičnovodičnih plinova i furana.
- Njihova pojava je ovisna o starosti transformatora, temperaturi, vlazi, prisutnosti kisika u ulju.
- Kako pojava tih plinova ovisi i o teretu oni ne moraju direktno ukazivati na grešku

Plinovi nastali degradacijom ulja

- Mineralna ulja u transformatoru su mješavina nekoliko različitih ugljikovodika pa su procesi razgradnje vrlo složeni.
- Prekidom veza ugljik – ugljik odnosno ugljik – vodik formiraju se aktivni atomi vodika i fragmenti ugljikovodika.
- Ti slobodni radikali međusobno se kombiniraju i stvaraju molekularni vodik (H_2), metan (CH_4), etan (C_2H_6) odnosno dalnjom rekombinacijom nastaju etilen (C_2H_4) i acetilen (C_2H_2).
- Ti procesi ovise o prisutnosti pojedinih ugljikovodika, o distribuciji energije i temperaturi na mjestu greške.

Pojave plinova

- Prvo se javlja vodik dok se ostali plinovi javljaju na još višim temperaturama.
- Kvarovi se mogu prepoznati po energiji koja se oslobađa na mjestu greške.
- Omjeri količine pojedinih plinova ukazuju na najvjerojatniji uzrok problema.



Plinska kromatografija

- Analize pojave plinova može biti korektna ako se poznaju i sljedeći podaci:
 - tip transformatora, njegova snaga i napon, godine pogona
 - vrsta, mjesto i temperatura greške
 - vrsta i starost ulja
 - sustav disanja
 - brzina cirkulacije ulja, način hlađenja
- Poželjno je imati referentnu točku za koncentraciju plinova u novim ili popravljenim transformatorima.

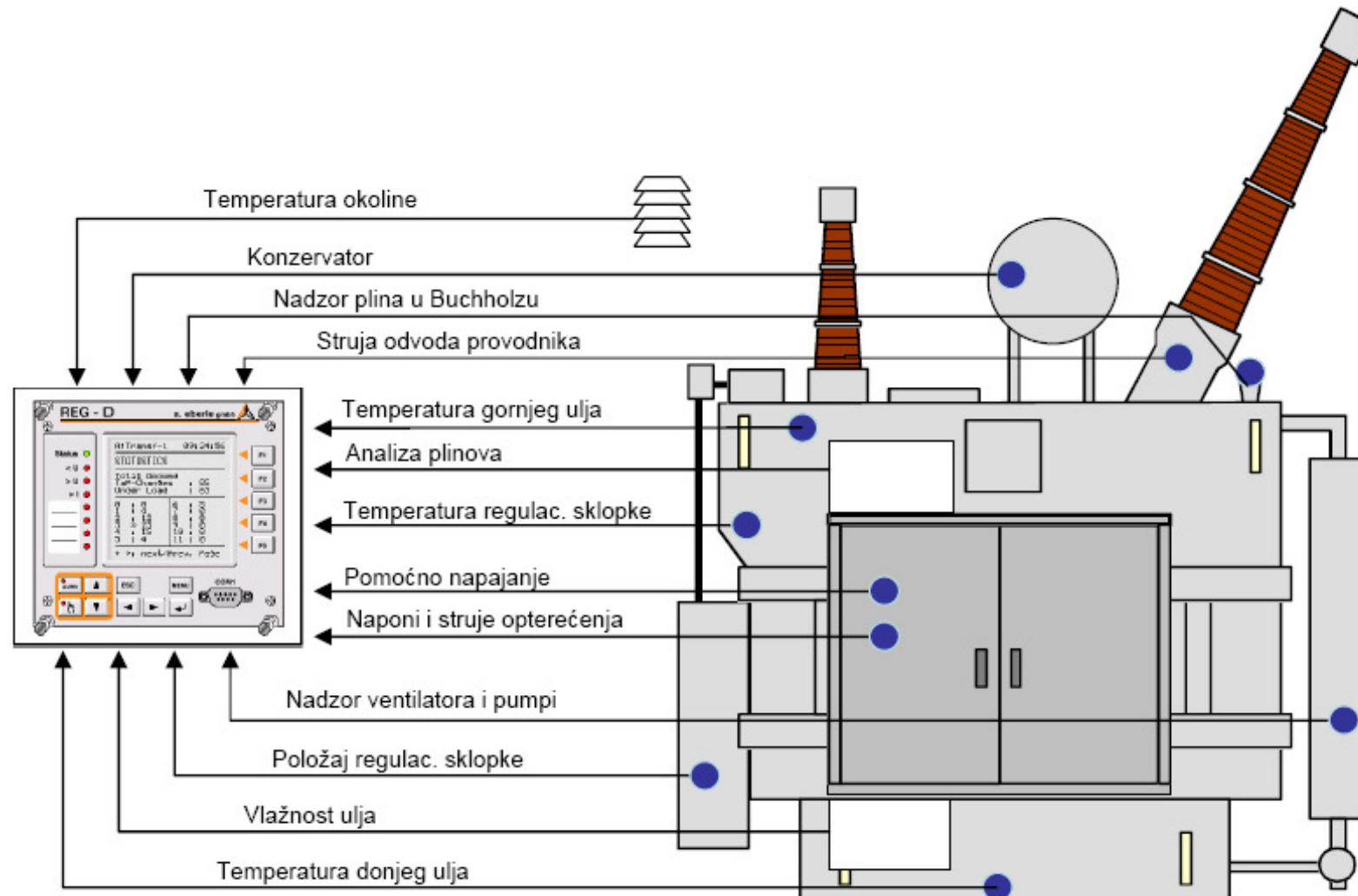


Ključni plinovi i vrsta greške u transformatoru

- Svaka vrsta grešaka uzrokuje pojavu karakterističnih vrsta plinova od kojih jedan dominira.
- Uzroci nastanka plinova mogu biti parcijalna izbijanja (corona), termičke greške ili iskrenje

KLJUČNI PLIN	VRSTA GREŠKE
Vodik, H ₂	parcijalna izbijanja
Etan, C ₂ H ₆	temperaturna greška <300 °C
Etilen, C ₂ H ₄	temperaturna greška 300° < θ < 700 °C
Acetilen, C ₂ H ₂ , Etilen, C ₂ H ₄	temperaturna greška > 700 °C
Acetilen, C ₂ H ₂ , Vodik, H ₂	izbijanja (iskrenje)

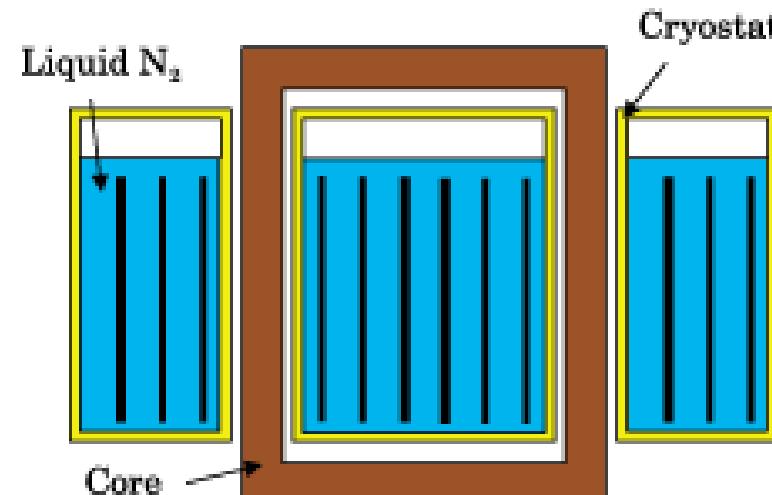
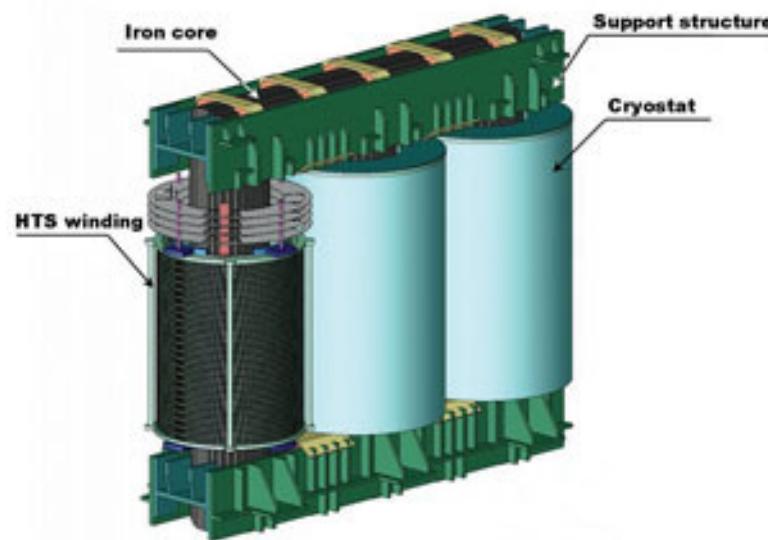
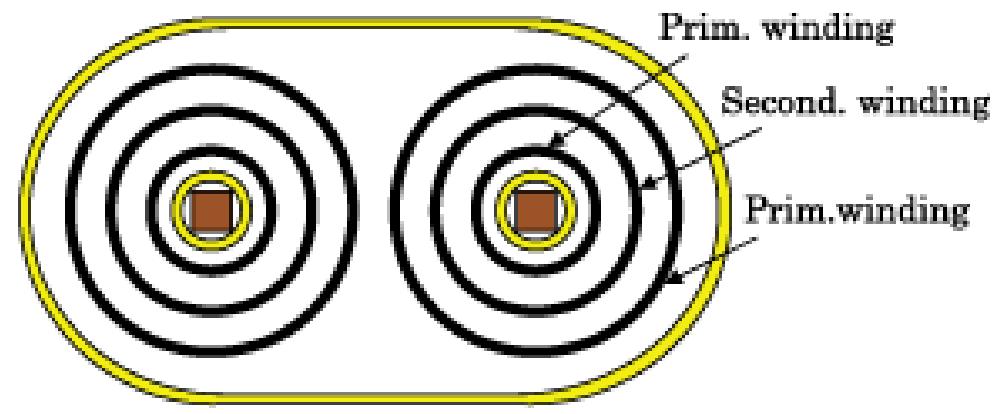
Integrirani sustav regulacije i nadzora energetskih transformatora



Supravodljivi transformatori

Namoti su u supravodljivom stanju (I^2R zanemarivi)

- Rashladni medij
 - helij (LTS)
 - dušik (HTS $\theta = -160$ do -130°C).



ROTACIJSKI ELEKTRIČNI STROJEVI

ES.2 - Istosmjerni, asinkroni i sinkroni strojevi

Prof. dr. sc. Zlatko Maljković

Sadržaj predavanja iz rotacijskih električnih strojeva

- Podjele: generatori, kompenzatori i motori
- ISTOSMJERNI STROJEVI
 - Istosmjerni generatori
 - Istosmjerni motori
 - Izmjenični kolektorski strojevi
- ASINKRONI STROJEVI
 - Kolutni asinkroni motori
 - Kavezni asinkroni motori
- SINKRONI STROJEVI
 - Podjela sinkronih strojeva
 - Namoti
 - Karakteristike
 - Paralelni rad
 - Pogonska karta
 - Uzbudni sustavi

Generatori

- Najčešći izvori električne energije u industrijskim postrojenjima su sinkroni generatori, a rjeđe asinkroni generatori.
- U starijim postrojenjima u kojima ima istosmjernih pogonskih električnih motora (npr. u valjaonicama) postoje i istosmjerni kolektorski generatori, koji se sve više nadomještaju ispravljačkim pretvaračima napajanim iz izmjenične mreže.
- Izmjenični generatori rade:
 - paralelno s mrežom
 - otočno, na vlastita trošila.
- Asinkroni generatori rade samo u paralelnom radu s krutom mrežom ili eventualno u otočnom radu, ali tada moraju imati kondenzatorske baterije (za svoje magnetiziranje).
- Generatori vjetroelektrana su sinkroni obično bez multiplikatora, ili asinkroni s multiplikatorima.

Sinkroni kompenzatori

- Kompenzatori jalove snage u izvedbi rotacijskog – sinkronog stroja (koji nema ni pogonski stroj niti radni mehanizam na svojoj osovini) su se ranije koristili kao “izvori” jalove snage, prvenstveno u pogonima s puno asinkronih motora. To se danas radi uporabom statičkih kompenzatora s kondenzatorskim baterijama odnosno prigušnicama.
- U pogonima s mnogo asinkronih motora jalovu snagu koju zahtijevaju asinkroni strojevi može se nadomjestiti sinkronim motorom, ili sinkronim generatorom energane industrijskog postrojenja
- Ispitni generatori u tvornicama transformatora rade praktički kao kompenzatori uz malu djelatnu snagu (služe kao kompenzatori jalove snage koju vuče transformator pri ispitivanju zagrijavanja i pokusa kratkog spoja transformatora).

Motori

- Danas su u industrijskim postrojenjima motori najčešće asinkroni, sve češće regulirani statičkim frekvencijskim pretvaračima (u pogonima gdje se zahtjeva promjenjiva brzina vrtnje), a vrlo rijetko sinkroni. Jedino u pogonima za velike snage male brzine vrtnje prednost ima sinkroni motor pred asinkronim.
- Asinkroni motori se rade samo brzohodni ($2p \leq 8$), jer bi sporohodni iz mreže vukli veliku struju magnetiziranja (zbog velikog broja polova odnosno zračnih raspora), tj. radili bi s lošim faktorom snage.
- Istosmjerni kolektorski motori se sve rjeđe koriste zbog iskrenja na kolektora i skupljeg održavanja, pa se još nalaze u starijim pogonima i nekim novijim pogonima u željezarama, te u vuči. Prednost istosmjernih strojeva je u njihovom radu s maksimalnim kutom opterećenja u svim radnim režimima. Podešavanje brzine ostvaruje se podešavanjem napona ili uzbude. Električno kočenje ostvaruje se otporom, protustrujno i generatorsko.

FAKULTET
ELEKTROTEHNIKE I
RAČUNARSTVA

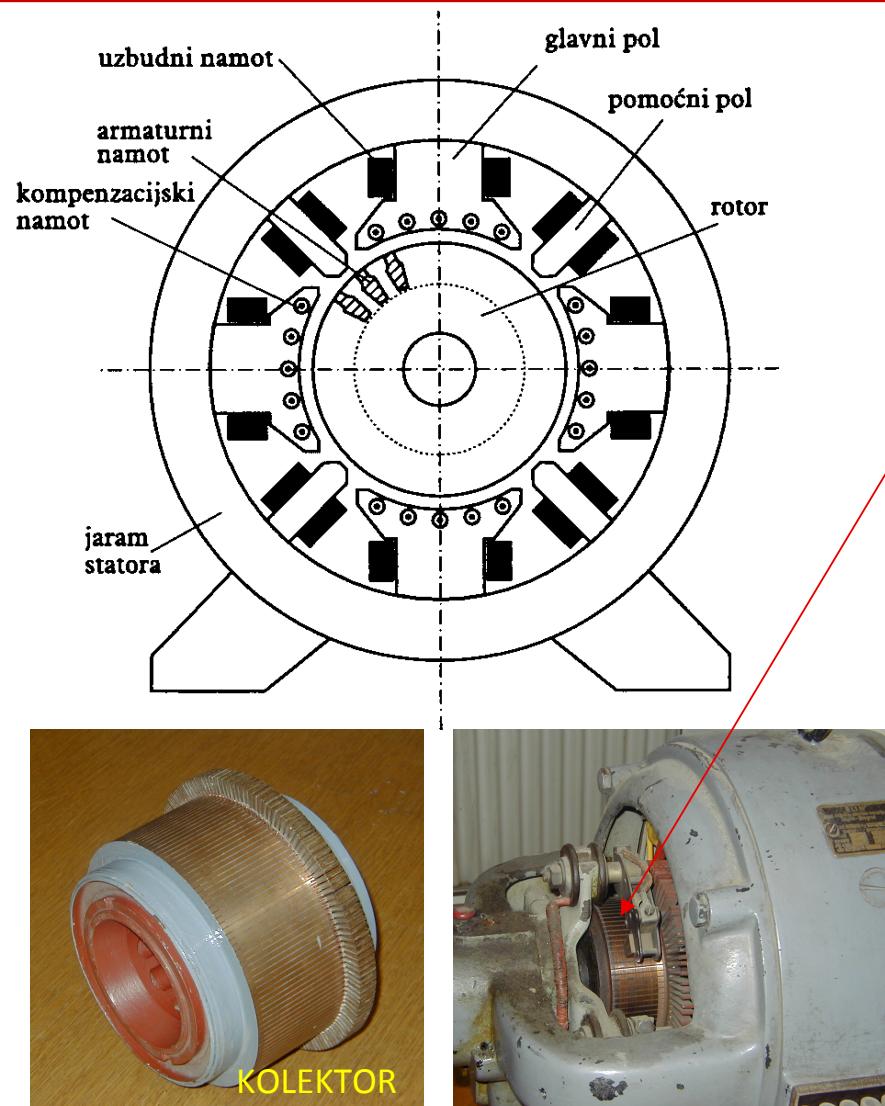
ISTOSMJERNI STROJEVI



ZAVOD ZA
ELEKTROSTROJARSTVO
I AUTOMATIZACIJU

10.10.2011.

Osnovni dijelovi istosmjernog stroja



Glavni polovi:

- Uzbudni namot protjecan istosmjernom strujom iz nezavisnog izvora ili samouzbuđno - formira glavno polje

Armatura:

- U utorima rotora armaturni namot kroz koji teče izmjenična struja koja se preko kolektora "ispravlja"

Kolektor i četkice:

- Mehanički ispravljač – kolektor se sastoji od lamela spojenih na armaturni namot

Pomoći polovi:

- Namot pomoćnih polova s malo zavoja, spojen serijski s armaturnim namotom, tako da njime teče armaturna struja

Poboljšavaju komutaciju

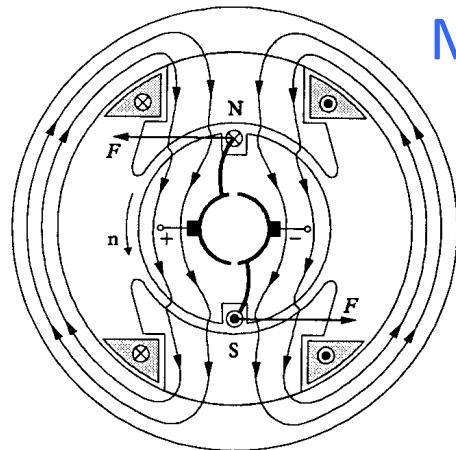
Smanjuju reakciju armature u neutralnoj zoni

Kompenzacijski namot:

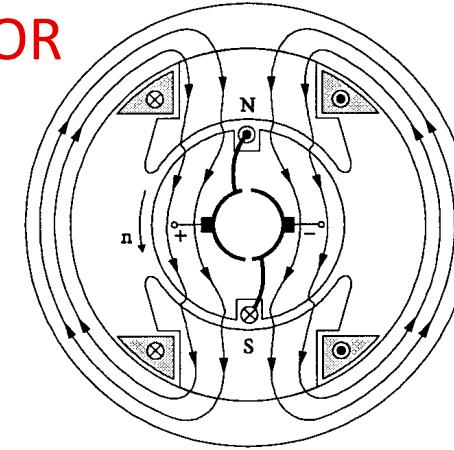
- Namot smješten u polne papuče, spojen serijski s armaturnim namotom, tako da njime teče armaturna struja

Poništavaju poprečno magnetsko polje armature
(protjecanje suprotno od armaturnog protjecanja)

Princip rada istosmjernih strojeva



MOTOR



GENERATOR

$$M = \frac{p}{a} \cdot \frac{\Phi I z}{2\pi} = k_M \Phi I$$

$$E = U - IR_a - \Delta U_{\check{c}}$$

M – elektromagnetski moment

E – inducirani napon

p – broj pari polova

a – broj pari paralelnih grana armaturnog namota

Φ – glavni magnetski tok

n – brzina vrtnje

$$E = \frac{p}{a} \cdot \frac{\Phi n z}{60} = k_E \Phi n = k_M \Phi \omega_m$$

$$U = E - IR_a - \Delta U_{\check{c}}$$

ω_m – kutna brzina

z – broj vodiča armaturnog namota

U – napon generatora

I – struja armature

R_a – otpor armaturnog namota

$\Delta U_{\check{c}}$ – pad napona na četkicama

Djelovanje armaturne struje istosmjernog stroja

REAKCIJA ARMATURE u istosmjernom stroju uzrokuje:

- smanjenje induciranih napona,
- povećanje gubitaka u željezu,
- pomak neutralne zone,
- porast napona među lamelama.

Kod većih istosmjernih strojeva koristi se kompaundni namot koji:

- jest uzbudni namot smješten na glavnim polovima, spojen serijski s armaturnim namotom, tako da njime teče armaturna struja
- nadoknađuje gubitak dijela induciranih napona izazvan reakcijom armature
- djeluje stabilizirajuće kod motora, a destabilizirajuće kod generatora (kompaundni spoj)

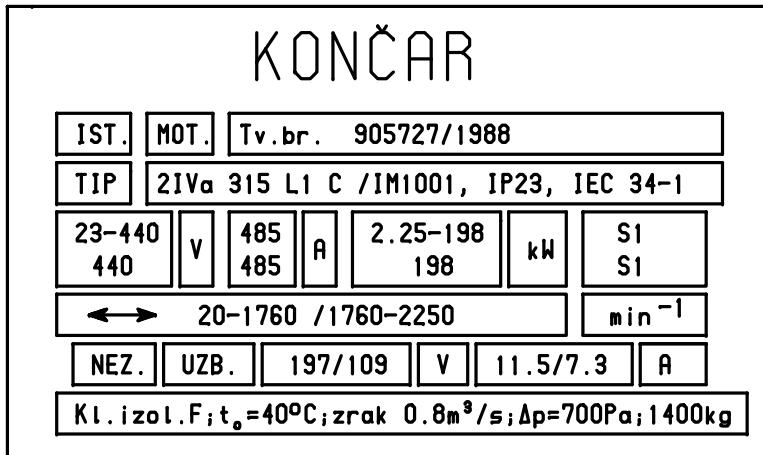
Vanjske karakteristike istosmjernih strojeva

- **Vanjske karakteristike motora i generatora** bitno ovise o načinu uzbudivanja istosmjernog stroja. Postoje razne izvedbe istosmjernih strojeva upravo prema vrsti uzbude.
- Osnovne vrste uzbude su:
 - **nezavisna uzbuda** - ima uzbudni namot napajan iz posebnog izvora istosmjernog napona, tako da se uzbudna struja može podešavati reguliranjem napona ili promjenljivog otpora u uzbudnom krugu,
 - **poredna uzbuda** - ima uzbudni namot spojen paralelno s armaturnim namotom, tj samouzbudni spoj,
 - **serijska uzbuda** - ima uzbudni namot serijski spojen s armaturnim namotom, tako da uzbudom teče armaturna struja,
 - **kompaundna uzbuda** - je složena uzbuda poredne ili nezavisne i serijske uzbude.

Podaci i oznake stezaljke

Oznake priključnih stezaljki

NAMOT	POČETAK - ZAVRŠETAK
Armature	A1 – A2
Pomoćnih polova	B1 – B2
Razdjeljen u dva dijela	1B1 – 1B2 2B1 – 2B2
Kompenzacijski	C1 – C2
Serijske uzbude	D1 – D2
Poredne uzbude	E1 – E2
Nezavisne uzbude	F1 – F2

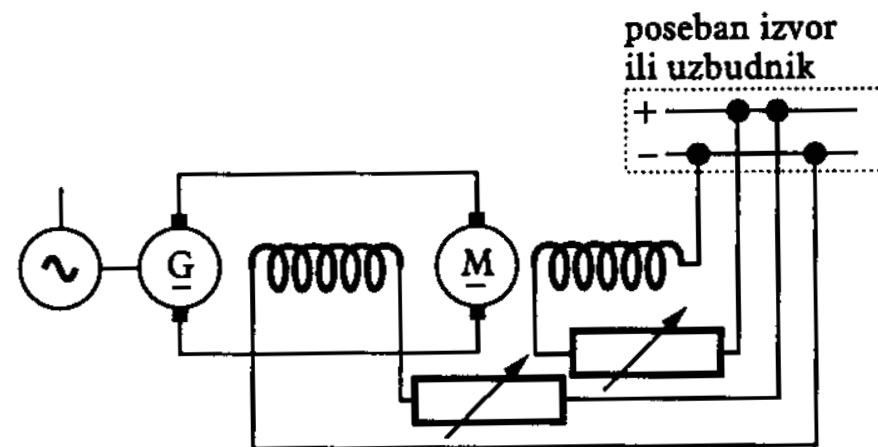


Istosmjerni motor 950 kW – glavni pogon istraživačkog broda 'Solea'



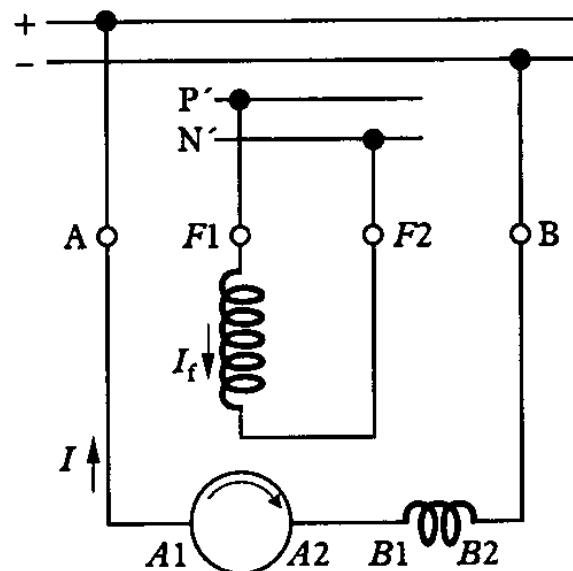
Istosmjerni generatori

- Danas se rijetko koriste, ali se još susreću kao
 - uzbudnici u klasičnim sustavima uzbude sinkronih strojeva,
 - u postrojenjima koji zahtijevaju veće istosmjerne izvore (valjaonice, željezare, ...),
 - u Leonardovom spoju (izmjenični motor pogoni istosmjerni generator koji napaja istosmjerni motor – pogonski stroj nekog radnog mehanizma koji zahtjeva široko područje regulacije brzine vrtnje),
 - mali strojevi sa stalnim magnetima



Nezavisni generator

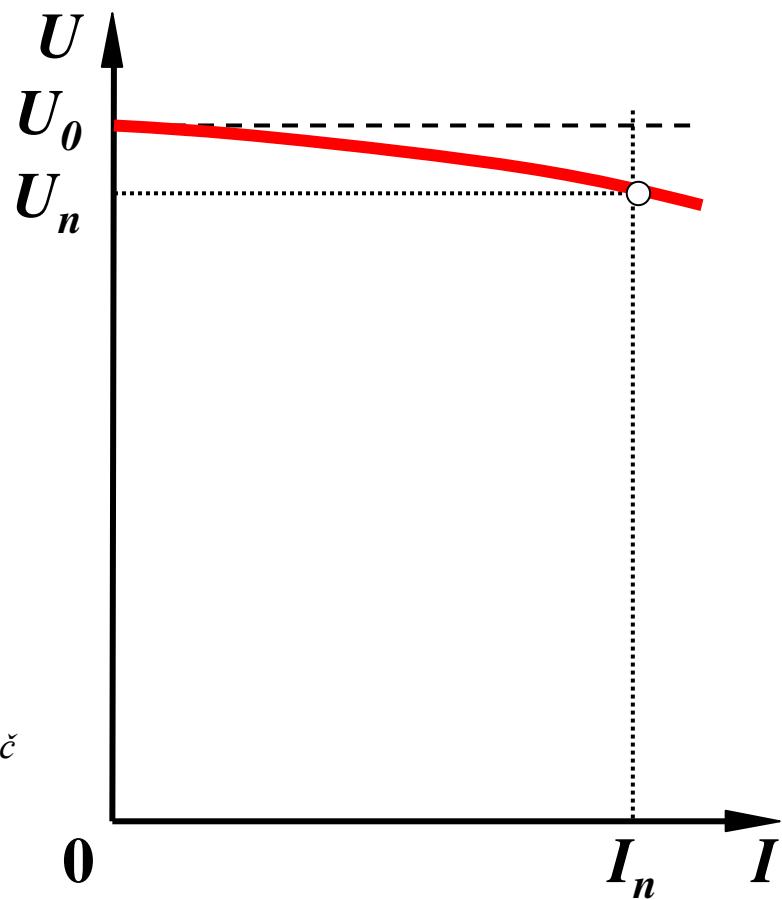
Spoj i oznake stezaljki



$$I_f = \frac{U_f}{R_f}$$

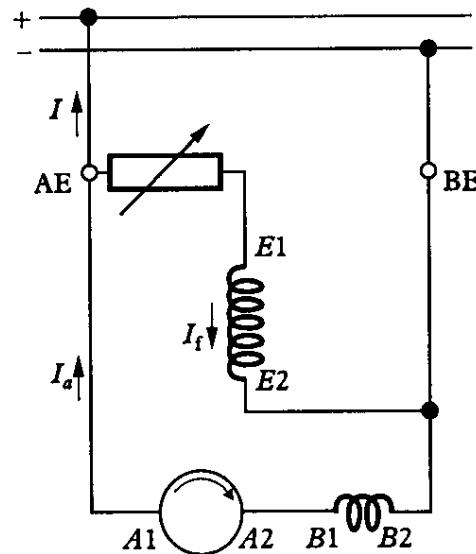
$$U = E - IR_a - \Delta U_c$$

Vanjska karakteristika



Poredni (paralelni) generator

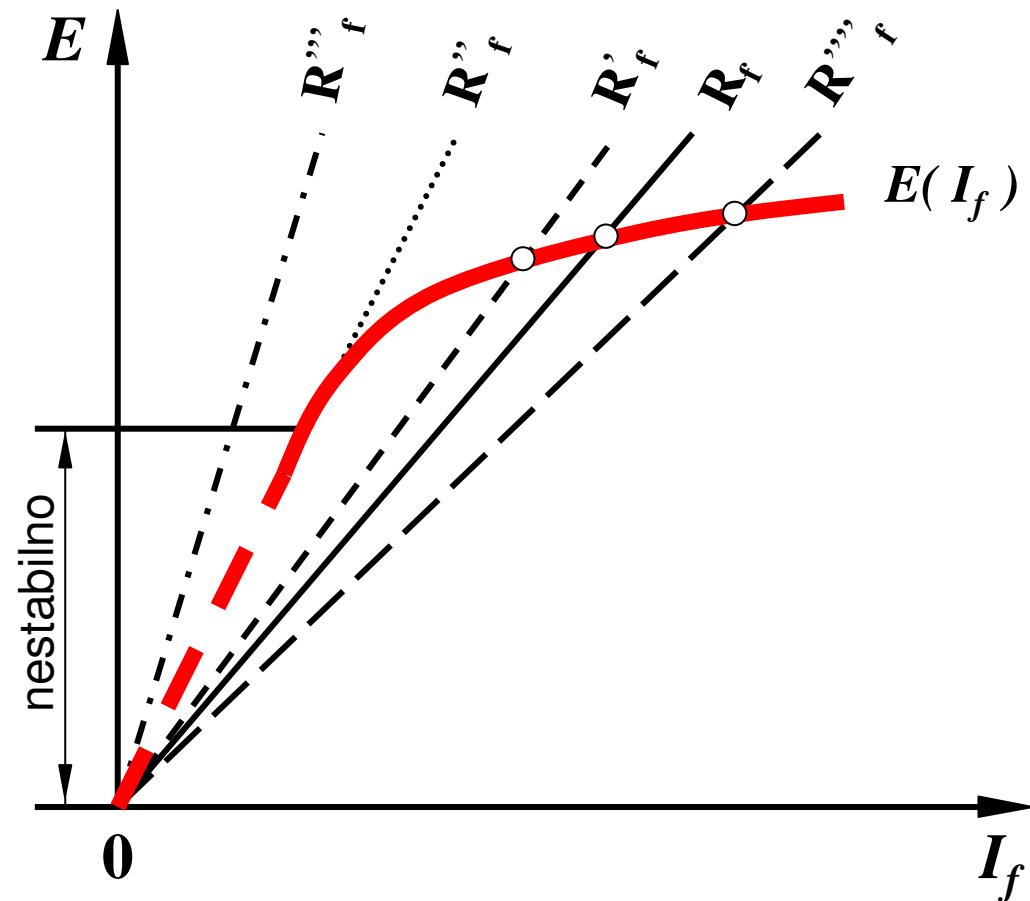
Spoj i oznake stezaljki



$$I_f = \frac{U_f}{R_f}$$

$$I_a = I + I_f$$

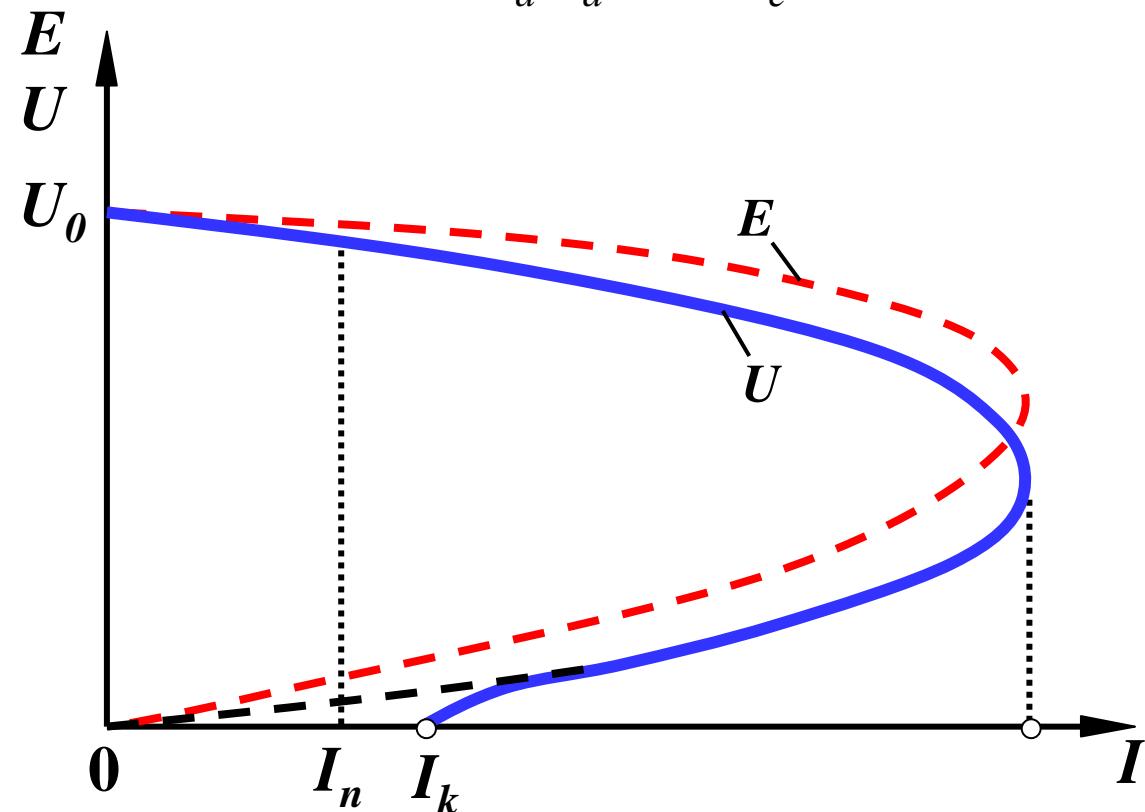
Karakteristika uzbudišvanja



Vanjska karakteristika porednog generatora

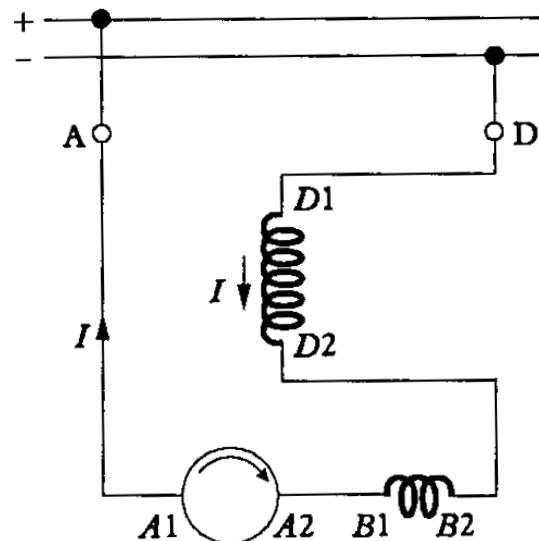
- Inducirani napon E opada s porastom struje armature zbog reakcije armature, a napon generatora U još brže pada zbog padova napona na armaturnom otporu $I_a R_a$ i pada napona na četkicama $\Delta U_{č}$
- Nakon prekretne točke - znatnog preopterećenja napon pada na nulu jer uzbudna struja zнатно pada

$$U = E - I_a R_a - \Delta U_{č}$$



Serijski generator

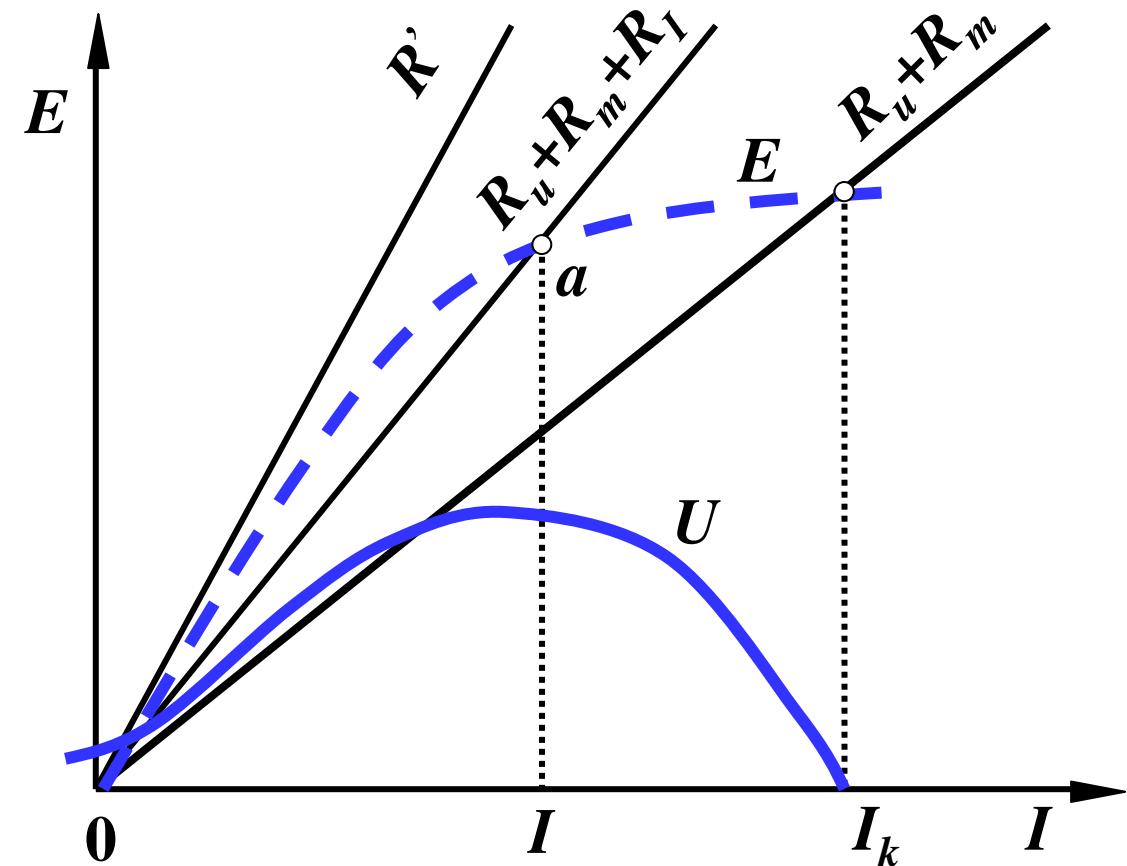
Spoj i oznake stezaljki



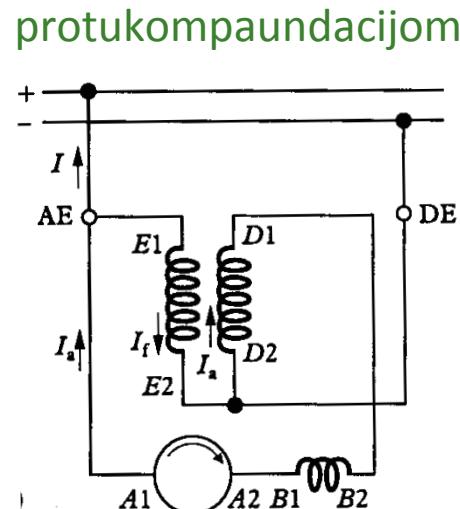
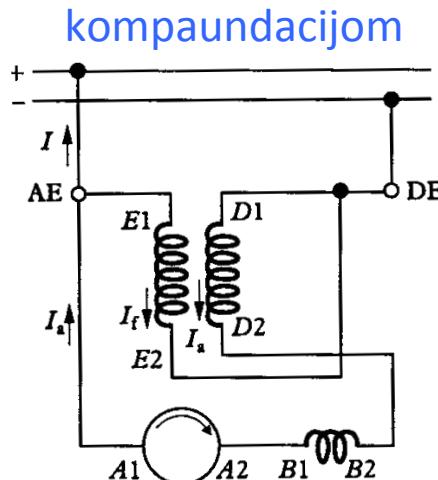
$$I_f = I_a = I$$

$$U = E - I(R_a + R_f) - \Delta U_c$$

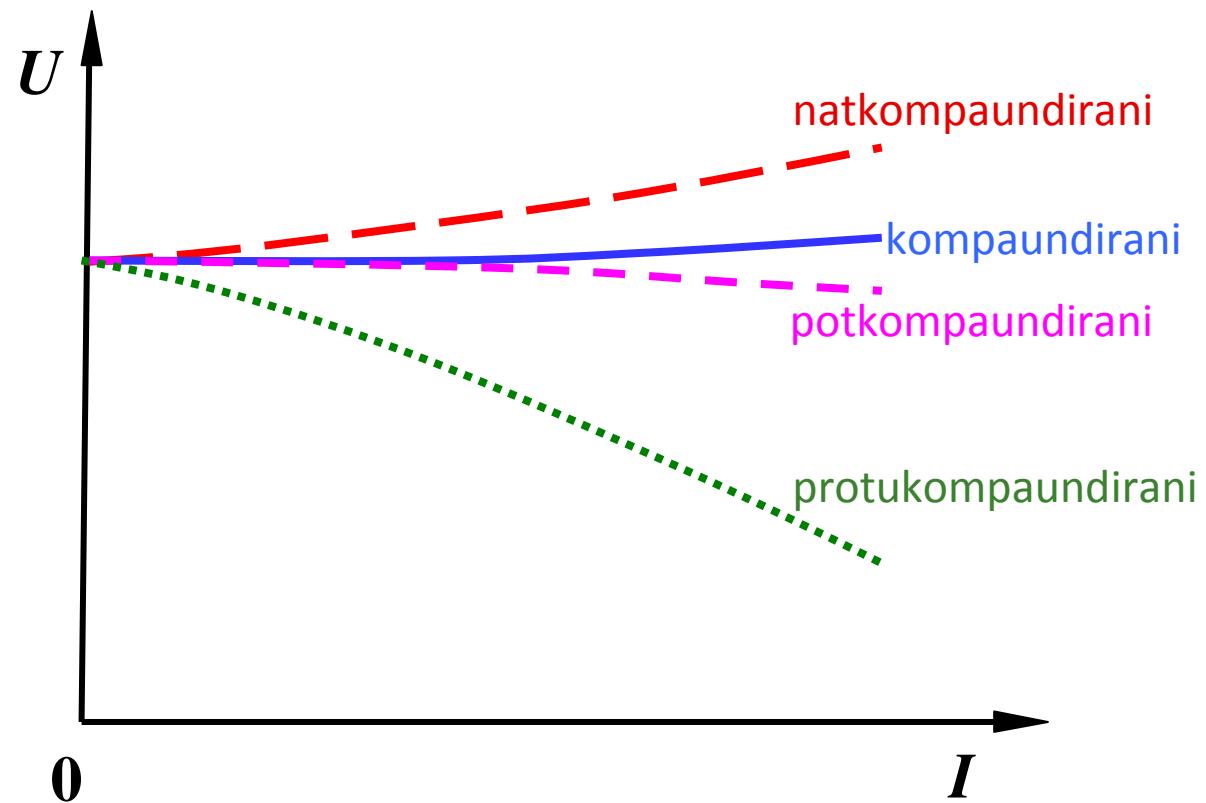
Vanjska karakteristika



Shema spoja kompaundnog generatora sa spojem serijske uzbude s:



Vanjske karakteristike



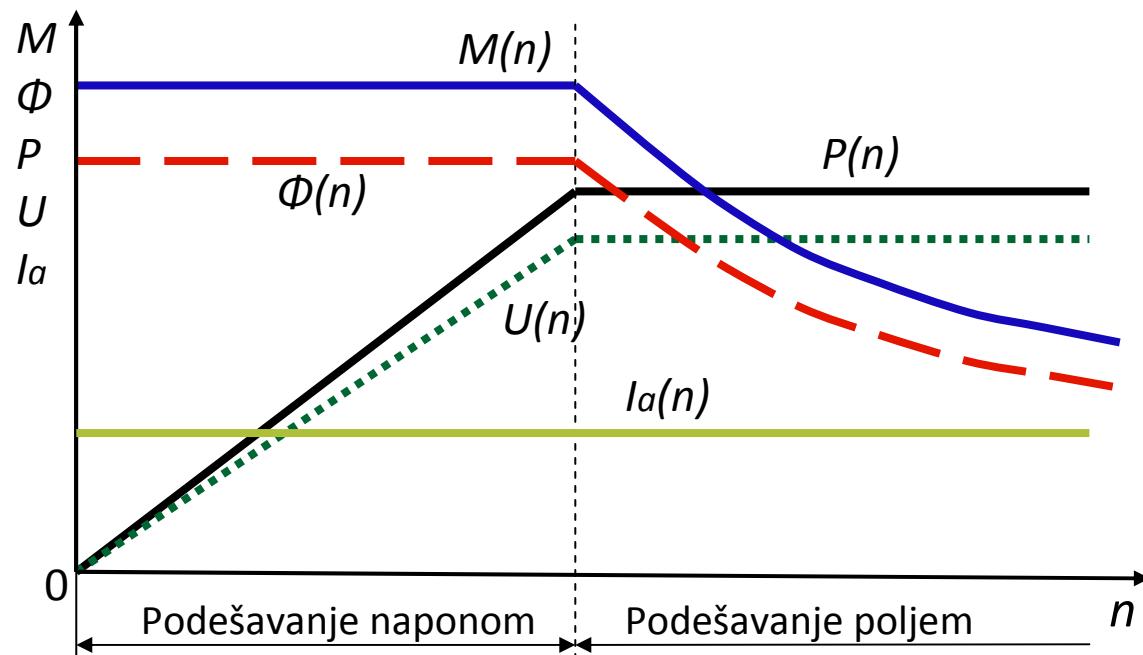
Istosmjerni motori

- Istosmjerni motori se koriste u nekim valjaoničkim pogonima, u vuči, u Leonardovom spoju za velike elektromotorne pogone, te kao mali motori.
- Regulacija brzine ostvaruje se podešavanjem armaturnog napona ili uzbude.

$$M = k_M \Phi I$$

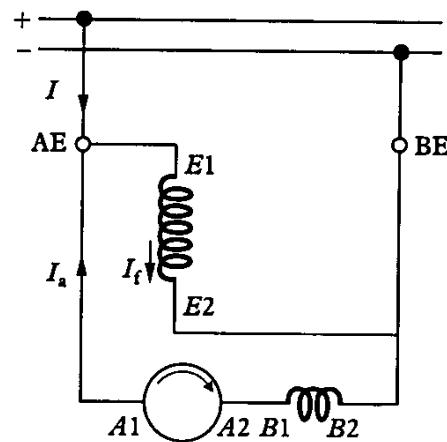
$$E = U - IR_a - \Delta U_c$$

$$\Phi = \frac{E}{k_E n}$$



Poredni motor

Spoj i oznake stezaljki



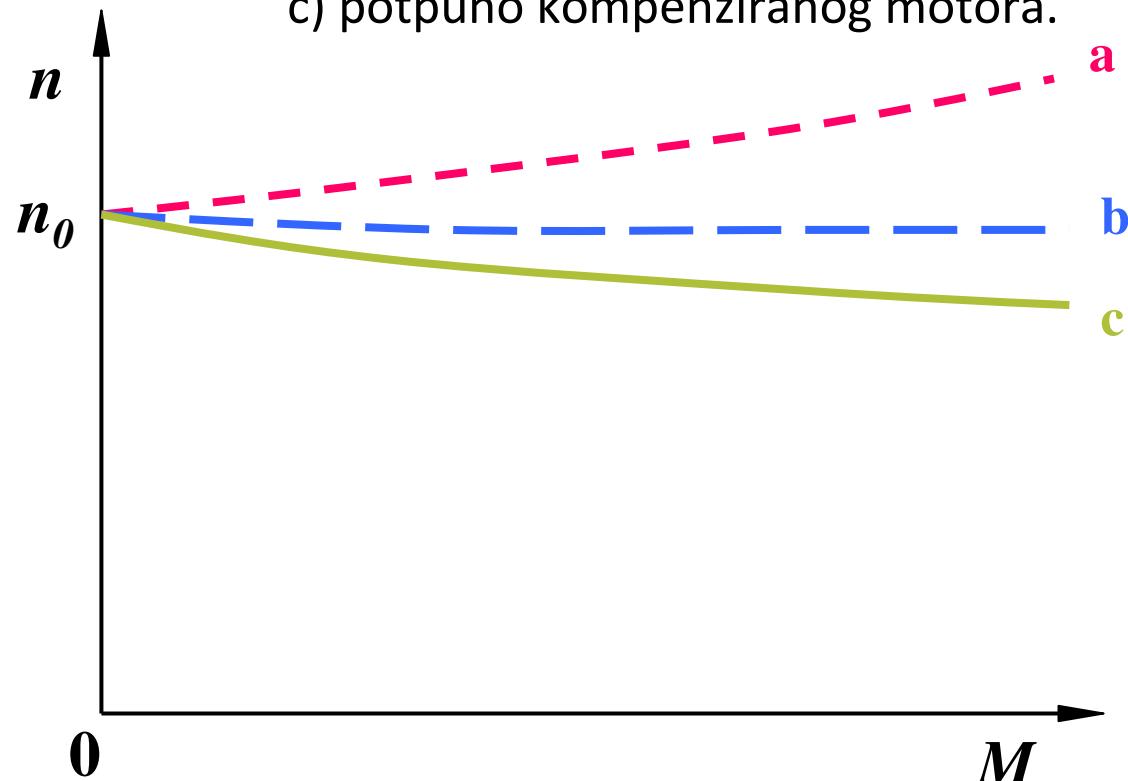
$$E = U - I_a R_a - \Delta U_c$$

$$n = \frac{E}{k_E \Phi} = \frac{U - I_a R_a - \Delta U_c}{k_E \Phi}$$

$$n = \frac{U - \Delta U_c}{k_E \Phi} - \frac{R_a}{k_E k_M \Phi^2} M$$

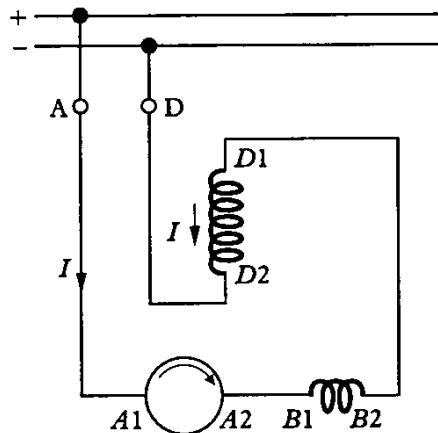
Vanjske karakteristike

- a) nekompenziranog,
- b) djelomično kompenziranog,
- c) potpuno kompenziranog motora.



Serijski motor

Spoj i oznake stezaljki



$$E = U - I(R_a + R_f) - \Delta U_c$$

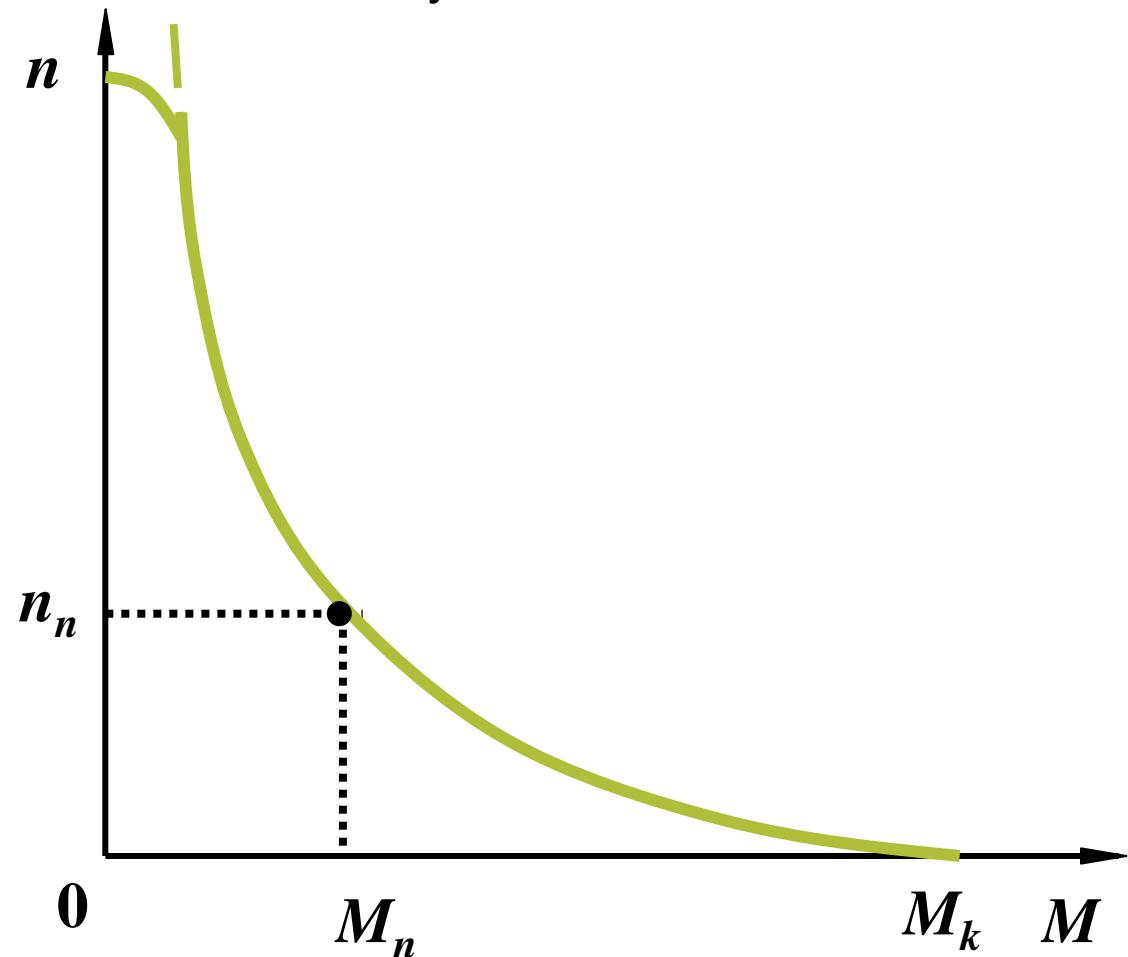
kod $I <$

$$M = k_M \Phi I_a = k I^2$$

kod $I >$

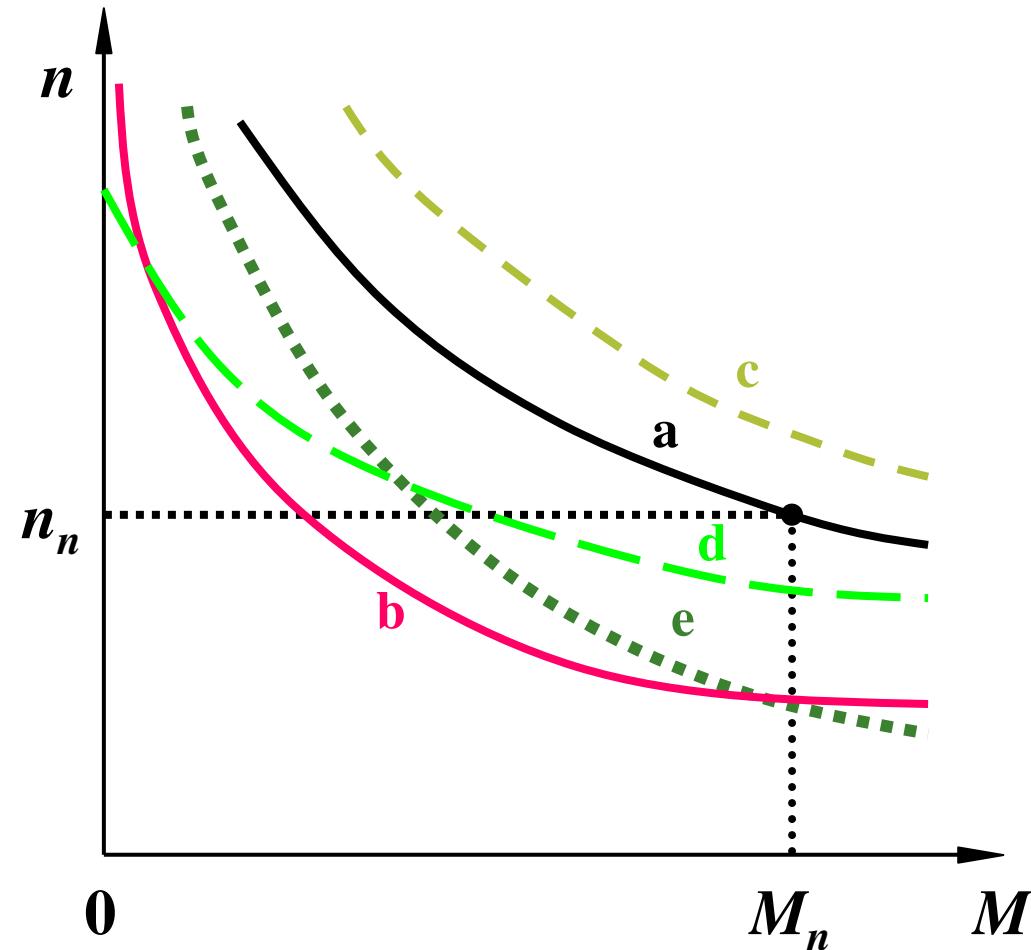
$$M = k_M \Phi I_a = k I$$

Vanjska karakteristika



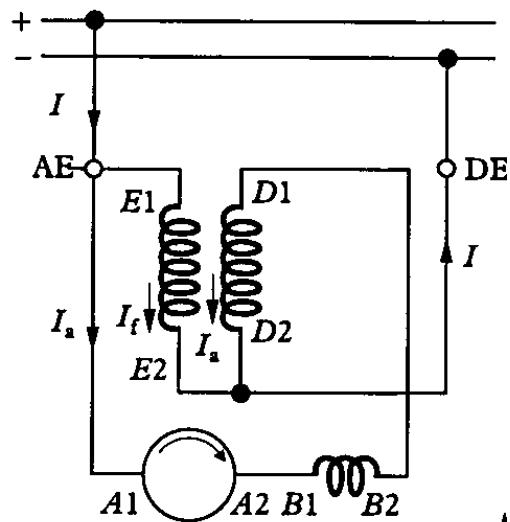
Vanjske karakteristike serijskog motora

- a) prirodna uz U_n
- b) uz $U = U_n/2$
- c) šantirana uzbuda
- d) šantirana armatura
- e) predotpor u armaturnom krugu



Kompaundni motor

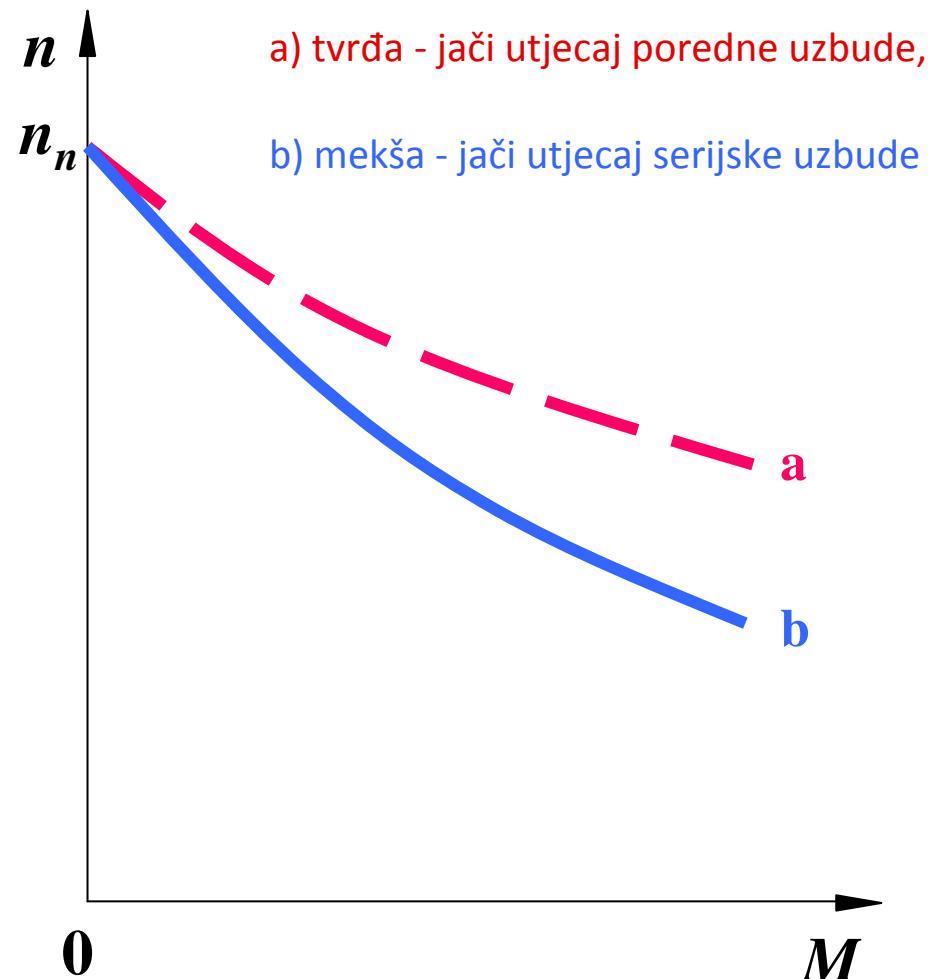
Spoj i oznake stezaljki



Serijski uzbudni namot potpomaže svojim djelovanjem tok uzbudnog namota, pa je vanjska karakteristika između one porednog i serijskog motora.

Primjenjuju za teške pogone, a izborom omjera utjecaja pojedinih uzbuda mogu se postići razne vanjske karakteristike motora prilagođene zahtjevima pogona.

Vanjska karakteristika



Izmjenični kolektorski strojevi

- Izmjenični kolektorski strojevi su najčešće motori - zbog mogućnosti podešavanja brzine vrtnje u širokom opsegu.
- Danas:
 - mali univerzalni motori u širokoj uporabi,
 - većih snaga samo u starim pogonima, a u novim pogonima zamijenili su ih regulirani izmjenični strojevi napajani iz statičkih pretvarača frekvencije.
- Osnovni nedostaci: komplikiranost izvedbe, visoka cijena i skupo održavanje.

Jednofazni kolektorski motori

- Jednofazni kolektorski motori redovno se izvode u serijskom spoju armature i uzbude.
- Ugrađivali su se u lokomotive kao vučni motori snage i do 1 MW.
- Obavezno su imali kompenzacijski namot i pomoćne polove.
- U vuči su se napajali u više zemalja frekvencijom $16\frac{2}{3}$ Hz, a rjeđe 50 Hz.

Repulzioni motori

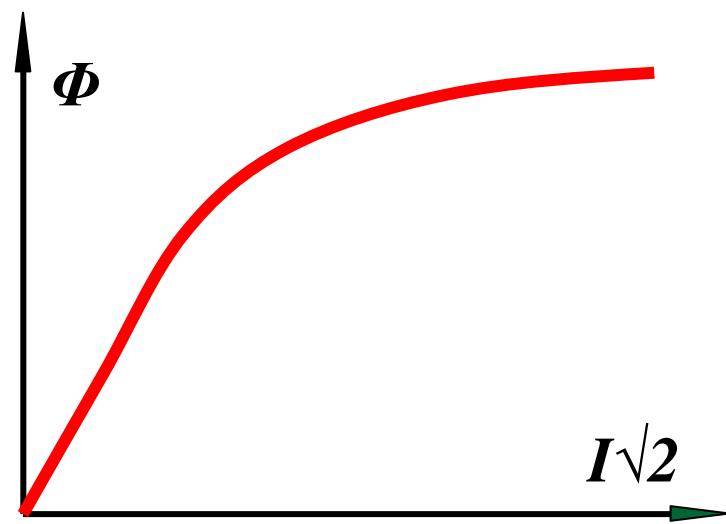
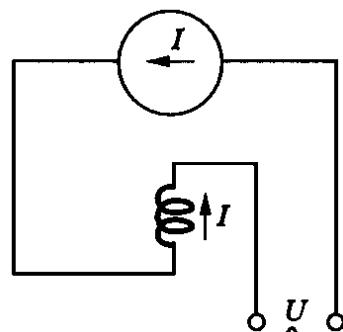
- Repulzioni motori imaju jednofazno namotani stator na koji se priključuje izmjenični napon, te rotorski namot kratko spojen preko četkica koje se dadu zakretati. Zakretanjem četkica podešava se brzina vrtnje i mijenja smjer vrtnje.
- Robili su se u tkaonicama i dizalima.
- Motori su se gradili i do snaga 100 kW za pogone koji su zahtjevali velike potezne momente i mekanu vanjsku karakteristiku (liftovi, kranovi i druge dizalice).

Trofazni kolektorski motori

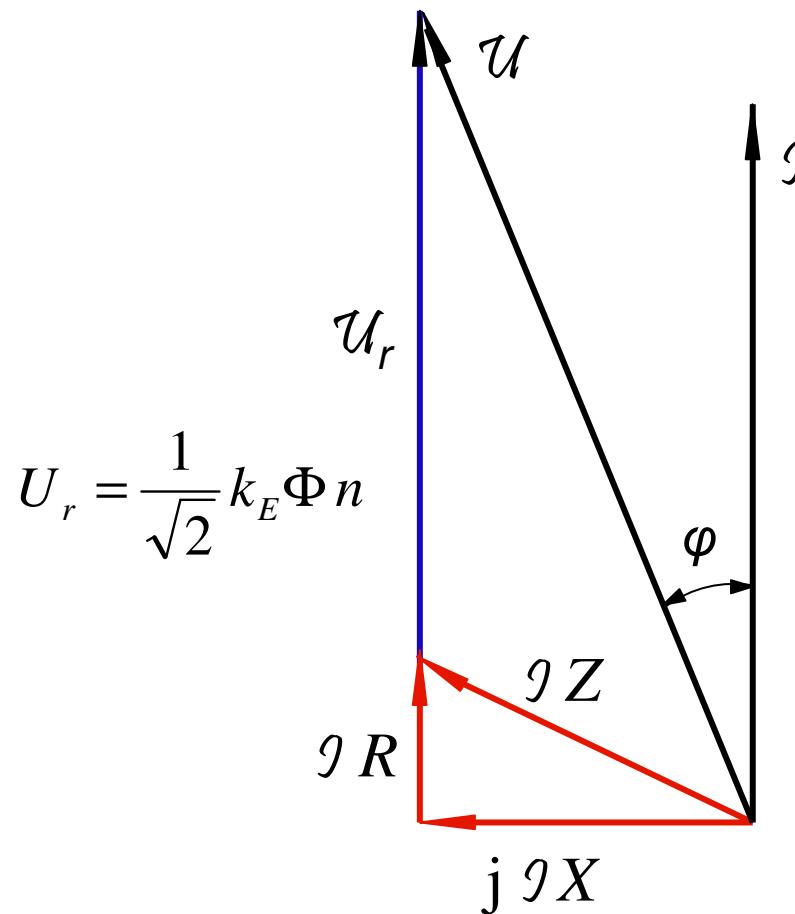
- Trofazni kolektorski motori po izvedbi odgovaraju asinkronim motorima kojima je dodan kolektor.
- Primarni je namot trofazni namot smješten na statoru (serijski trofazni motori) ili na rotoru (poredni-Schrage-ov motor).
- Sekundarni namot je kolektorski i uvijek je smješten na rotoru.
- Kod porednog trofaznog kolektorskog motora galvanskim putem je u sekundar dodan regulacijski napon.
- Pomicanjem četkica ostvaruje se fina regulacija brzine i vrtnje.

Univerzalni kolektorski motor

Shema spoja



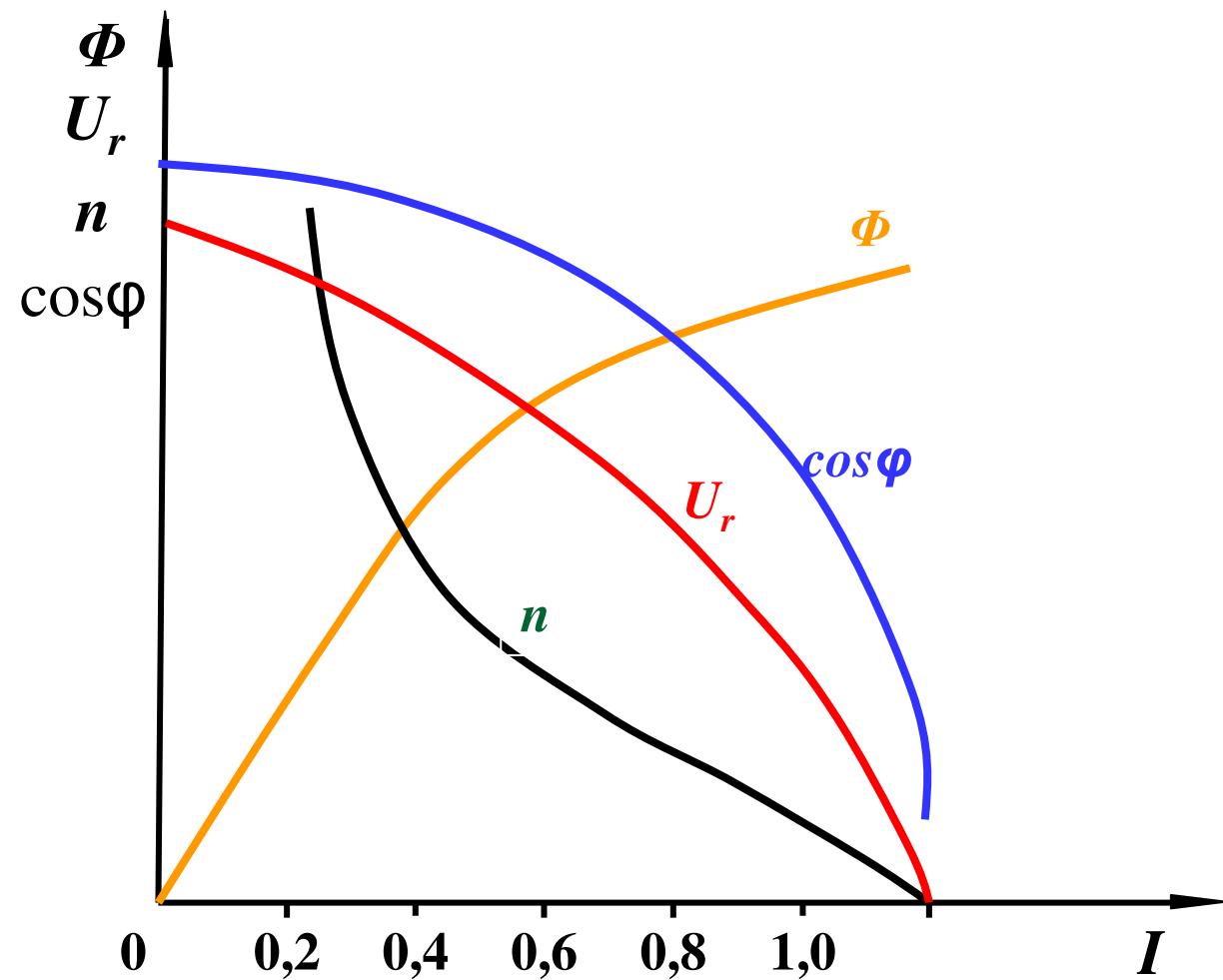
Fazorski dijagram



Karakteristike univerzalnog motora

Ovisnosti magnetskog
toka, napona, brzine
vrtnje i faktora snage
o struji opterećenja

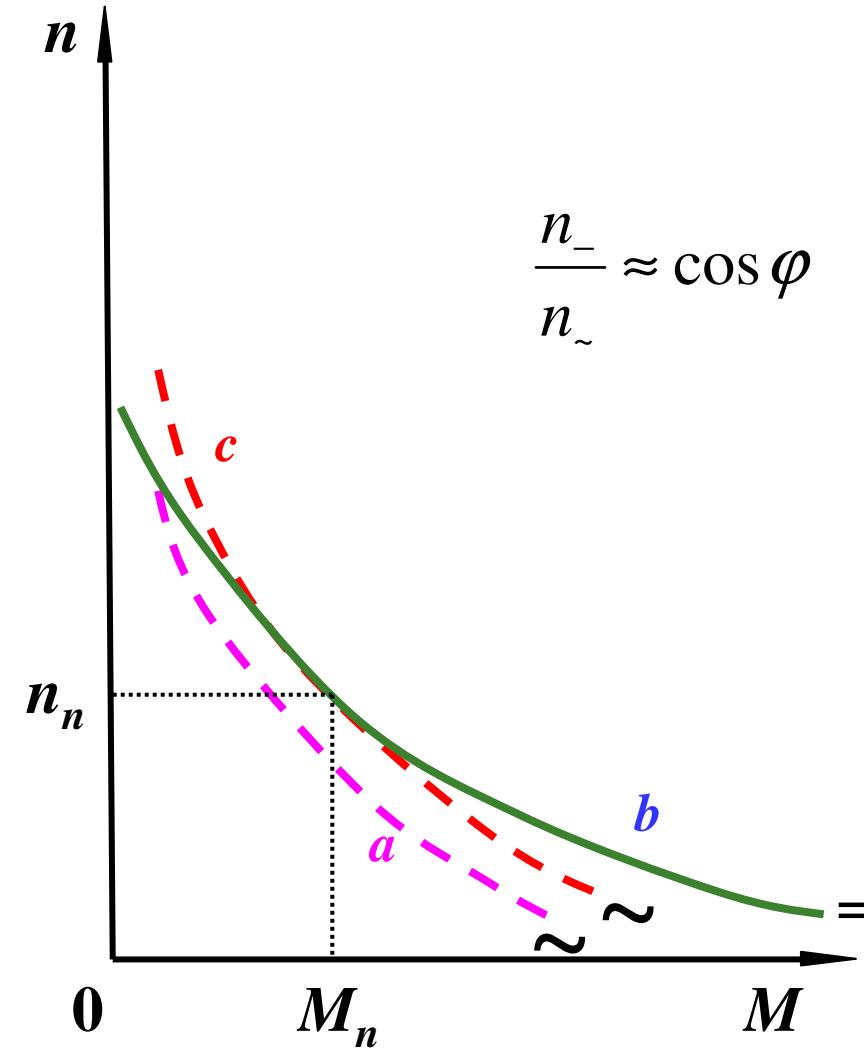
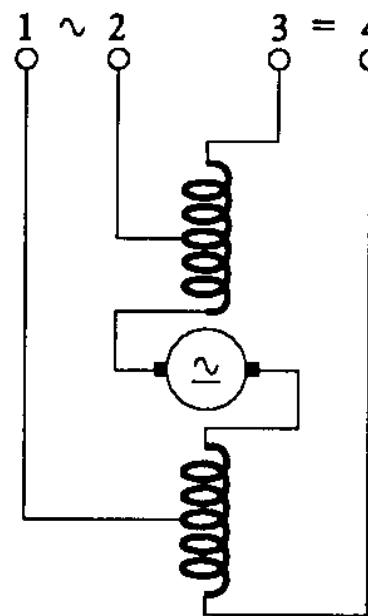
$$n = \frac{\sqrt{2} U_r}{k_E \Phi}$$



Vanjska karakteristika univerzalnog motora

Uz napajanje:

- a) izmjenično,
- b) istosmjerno,
- c) izmjenično ali uz spoj
uzbude prema slici



ASINKRONI STROJEVI

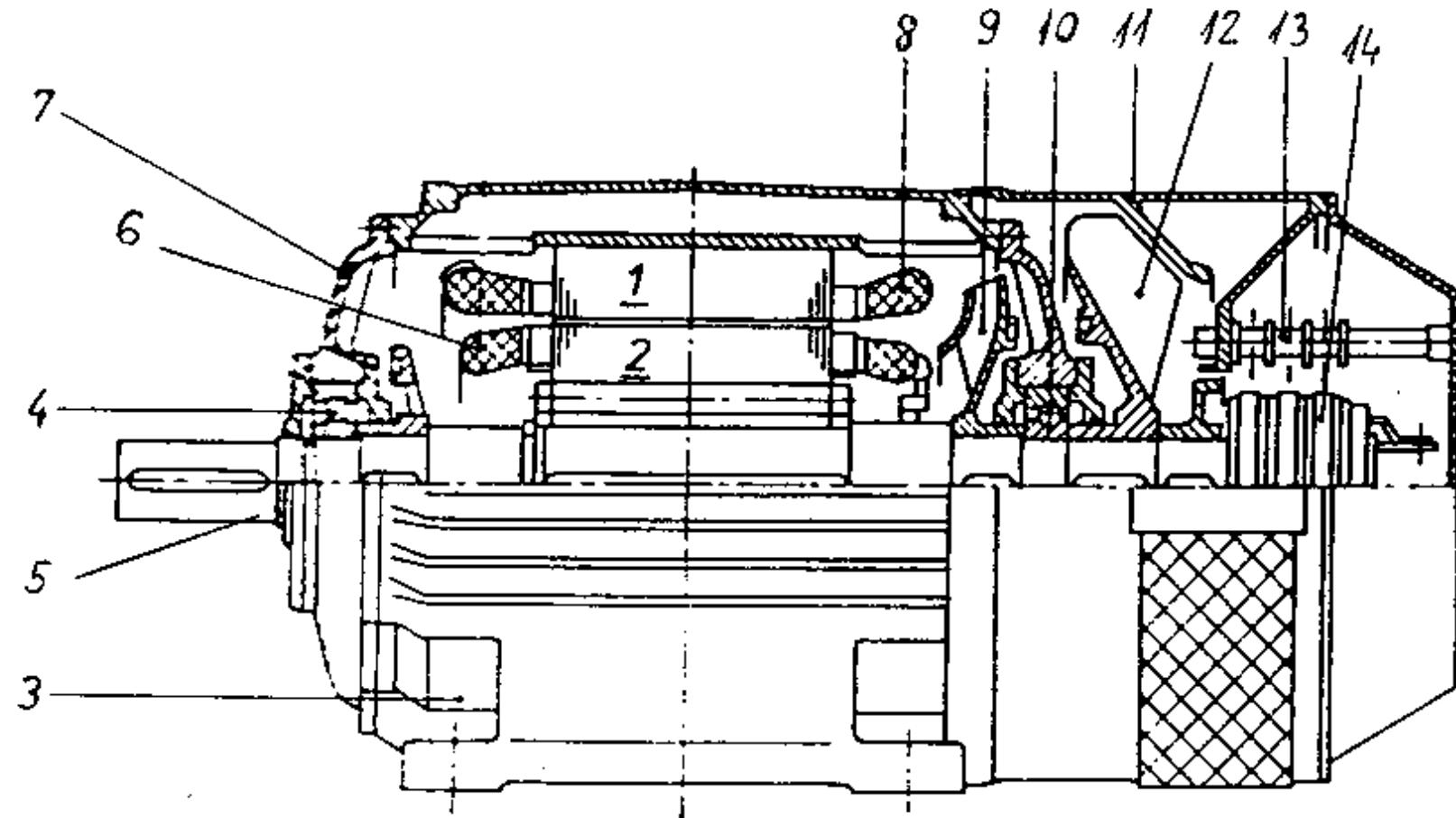


Kolutni asinkroni motori

- Koriste se u reguliranim pogonima ali sve rjeđe (zbog cijene i težeg održavanja), pa se zamjenjuju regulirani kaveznim motorima napajanim frekvencijskim pretvaračima. Regulacija brzine vrtnje omogućena je dodavanjem otpora u rotorski krug, što znači da motor ima klizne kolute i četkice, a namot rotora je izolirani namot spojen u zvijezdu.
- Broj polova statorskog i rotorskog namota mora biti jednak.
- Prednost u odnosu na kavezni je što pri nazivnom teretu ima manje klizanje, a potezni moment može biti jednak prekretnom izborom odgovarajućeg vanjskog otpora priključenog u rotorski krug preko četkica i prstenova.

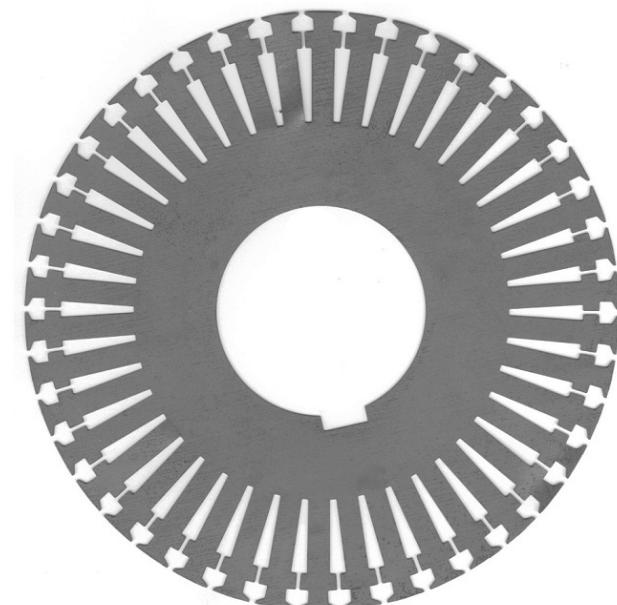


Uzdužni presjek kolutnog asinkronog motora

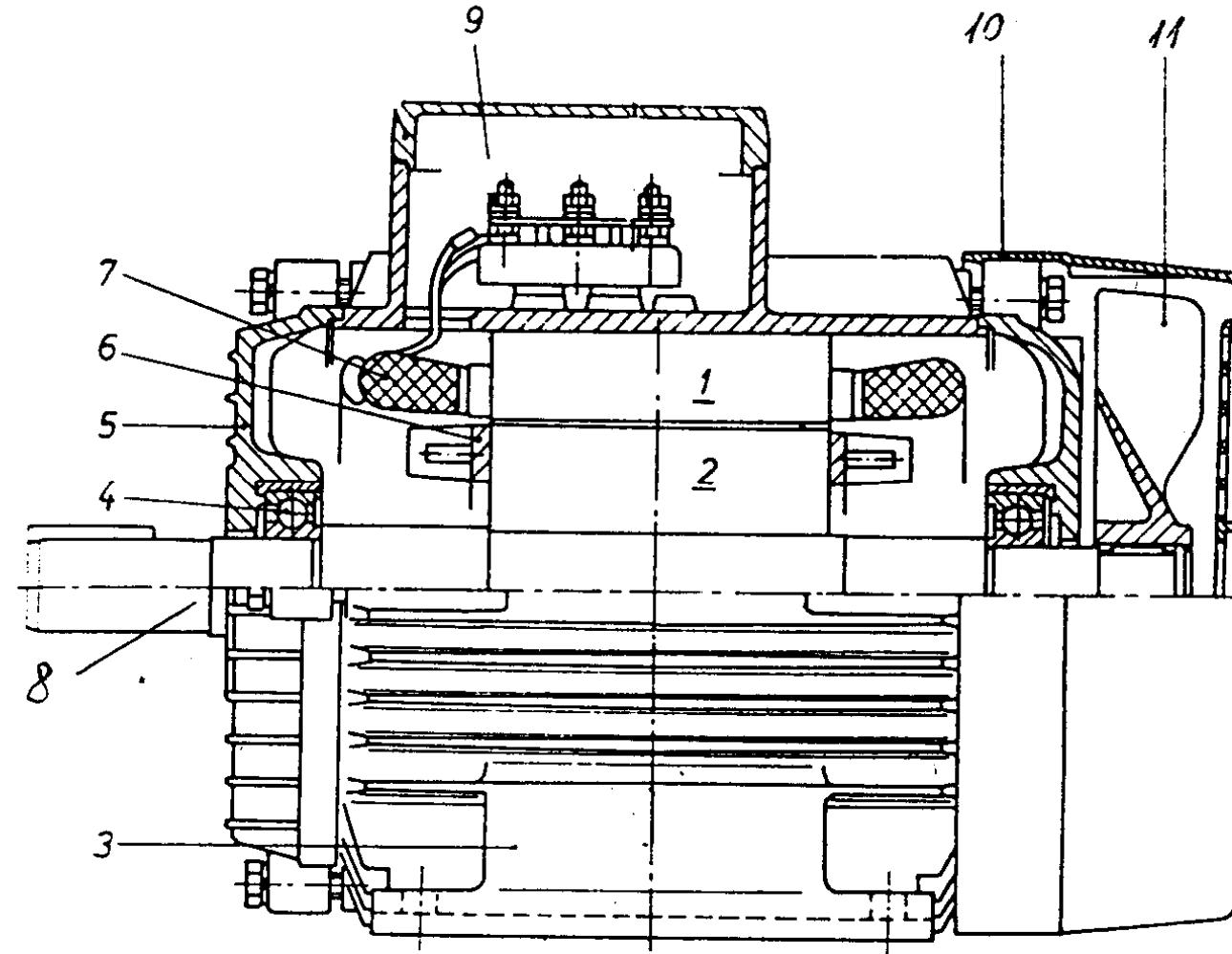


Kavezni asinkroni motori

- Zbog svoje robusnosti najšire u uporabi u industrijskim pogonima. Izvedbe su razlikuju u oblicima rotorskog kavezna:
 - obični,
 - s dubokim utorima,
 - dvokavezni.
- Poželjno je da klizanje pri nazivnom teretu bude što manje ($s < 5\%$), pogotovo kod većih motora zbog smanjenih rotorskih gubitaka u kavezu.



Uzdužni presjek kaveznog asinkronog motora

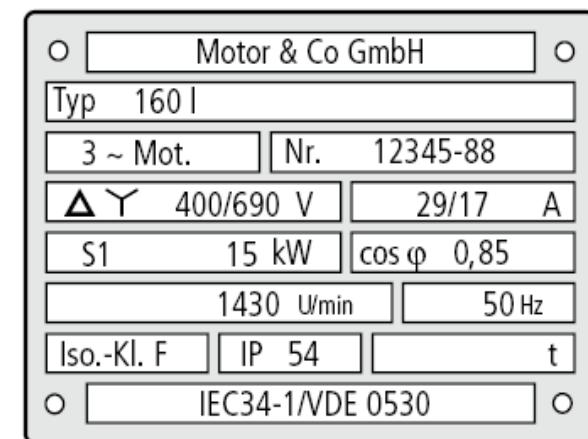


Simboli, oznake stezaljki i natpisna pločica asinkronih strojeva

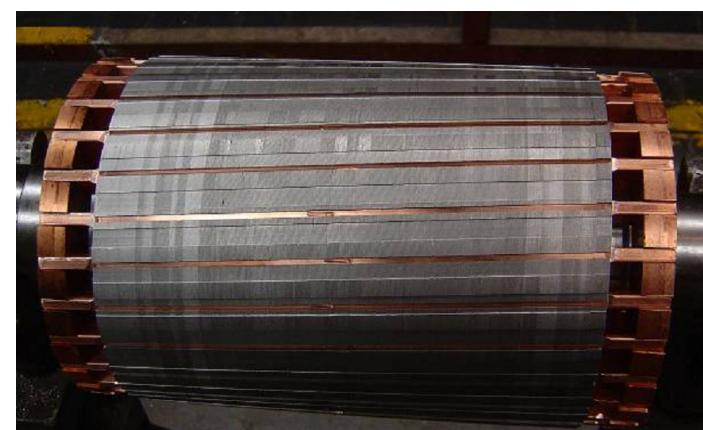
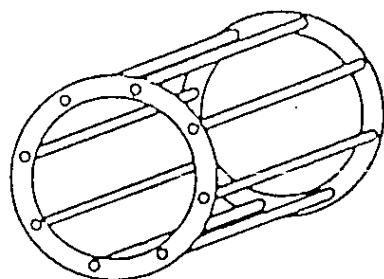
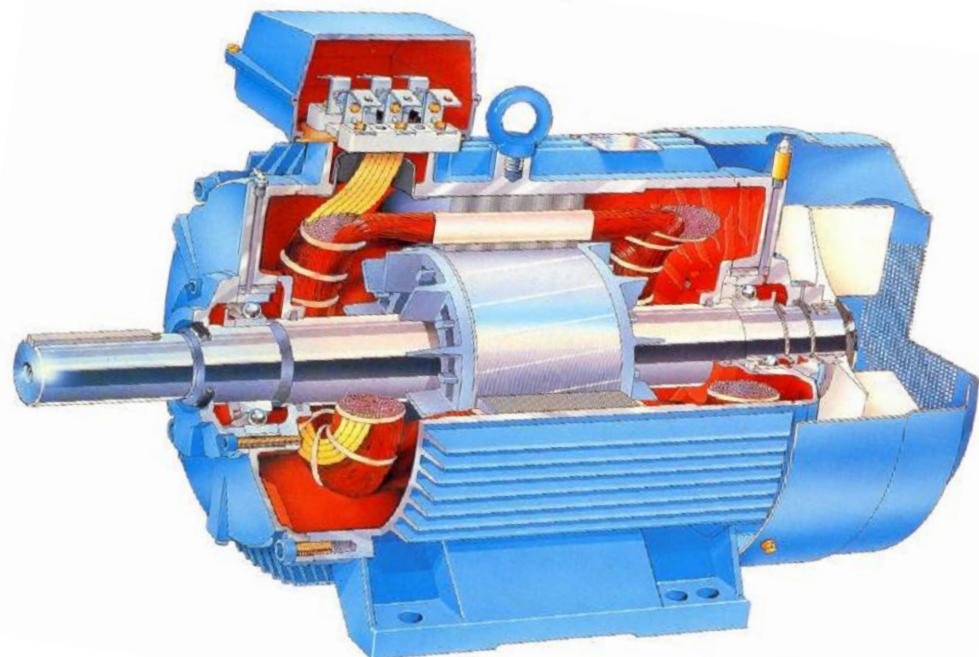
Vrsta stroja	Namot	Oznake za poč. -kraj namota	Simbol	Značenje
trofazni asinkroni kolutni motori	statorski trofazni namot	U1-U2 V1-V2 W1-W2		opći simbol
	rotorski trofazni namot	K1-K2 L1-L2 M1-M2		simbol s brojčanim podacima
trofazni asinkroni kavezni motori	statorski trofazni namot	U1-U2 V1-V2 W1-W2		opći simbol
jednofazni asinkroni kavezni motori	glavni namot	U1-U2		izvedeni krajevi pomoćne faze
	pomoćni namot	Z1-Z2		

N = oznaka za izvedeno zvjezdništvo statorskog namota,
Q = oznaka za izvedeno zvjezdništvo rotorskog namota

1. Proizvođač
2. Tip motora ili generatora
3. Tvornički broj
4. Broj faza
5. Nazivni napon i spoj
6. Nazivna struja
7. Snaga i tip opterećenja
8. Faktor snage
9. Brzina vrtnje
10. Frekvencija
11. Klasa izolacije
12. Vrsta zaštite
13. Težina
14. IEC norma
15. Godina proizvodnje



Izvedbe kaveza



Nadomjesna shema i fazorski dijagram asinkronog motora

Sve veličine odnose se na fazne veličine:

I_s - statorska struja

I'_r - rotorska struja preračunata na statorskiju stranu

I_0 - struja praznog hoda

I_μ - struja magnetiziranja

I_{0r} - radna komponenta struje praznog hoda

U_s - primarni napon

R_s - otpor statorskog namota

E_0 - inducirani napon

$X_{\sigma s}$ - rasipna reaktancija statorskog namota

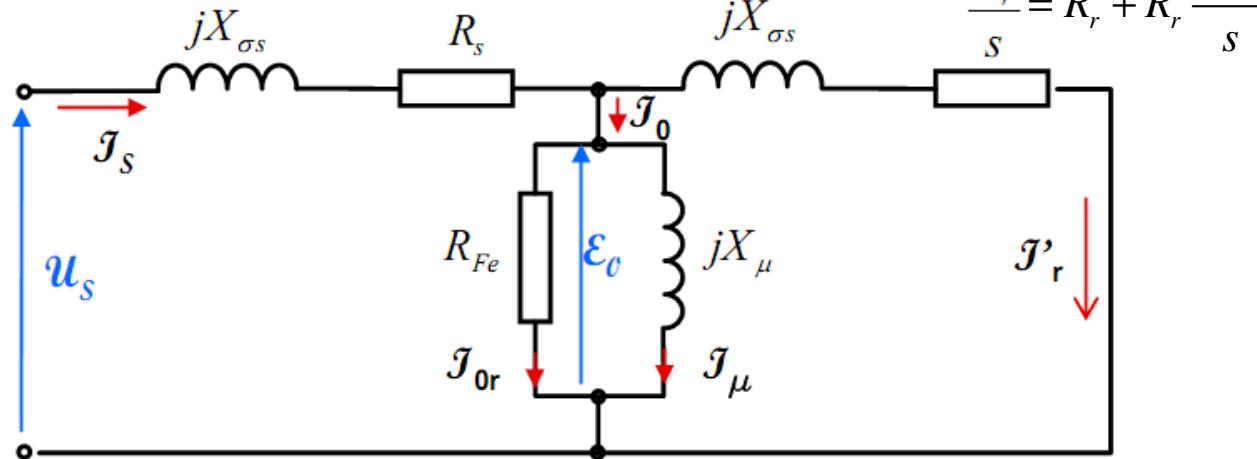
R'_r - otpor rotorskog namota preračunat na statorskiju stranu

$X'_{\sigma r}$ - rasipni induktivitet rotorskog namota preračunat na statorskiju stranu

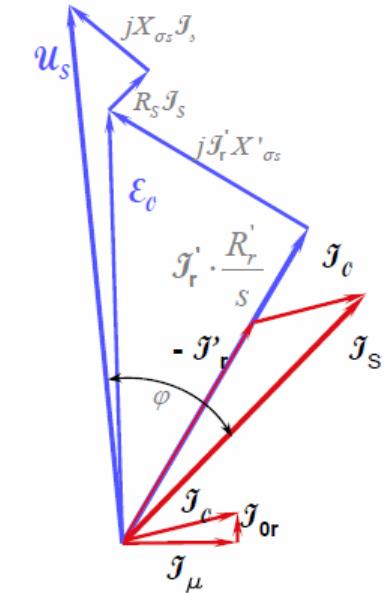
X_μ - glavna reaktancija

R_{Fe} - nadomjesni otpor zbog histereznih gubitaka i gubitaka vrtložnih struja u jezgri

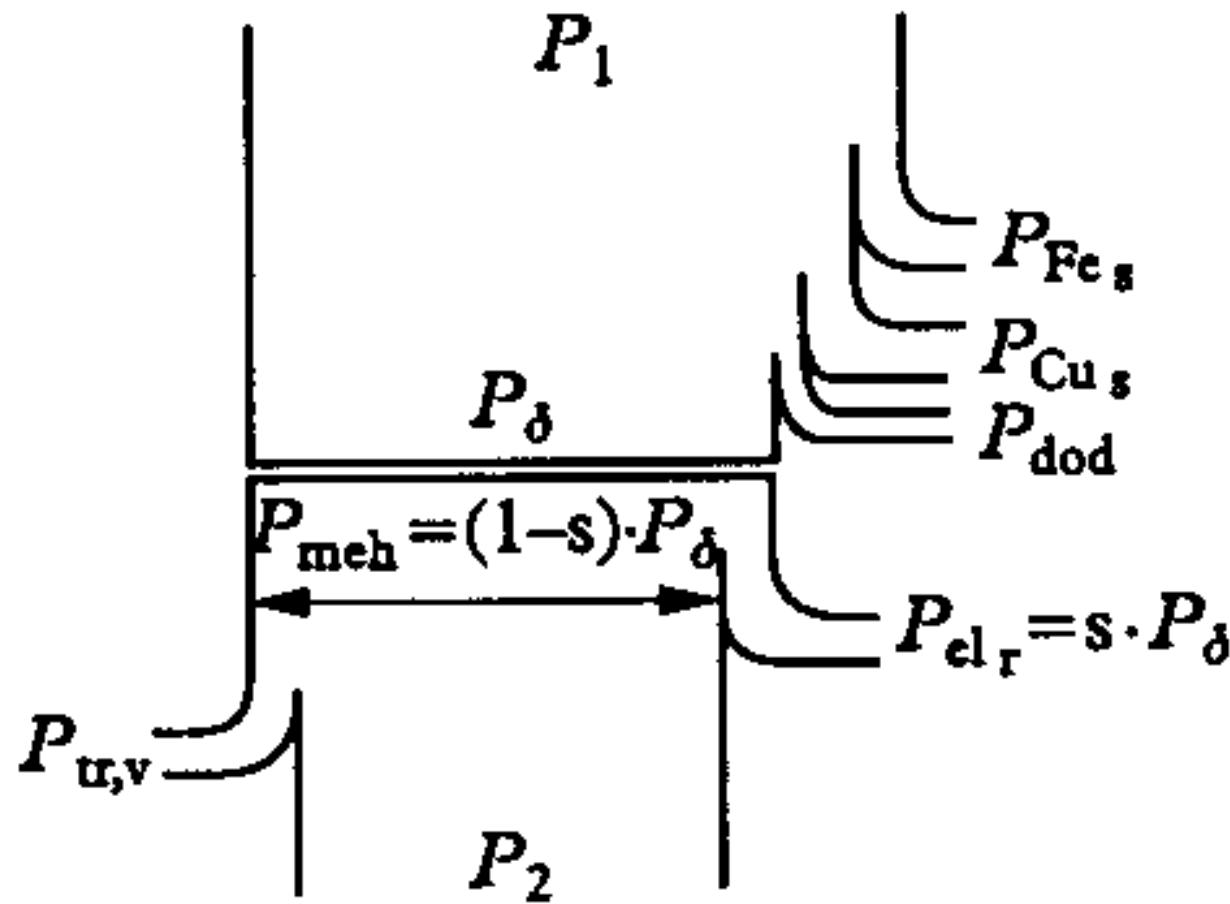
$R_r(1-s)/s$ - ekvivalent mehaničkog rada



$$\frac{R'}{s} = R'_r + R'_r \frac{1-s}{s}$$

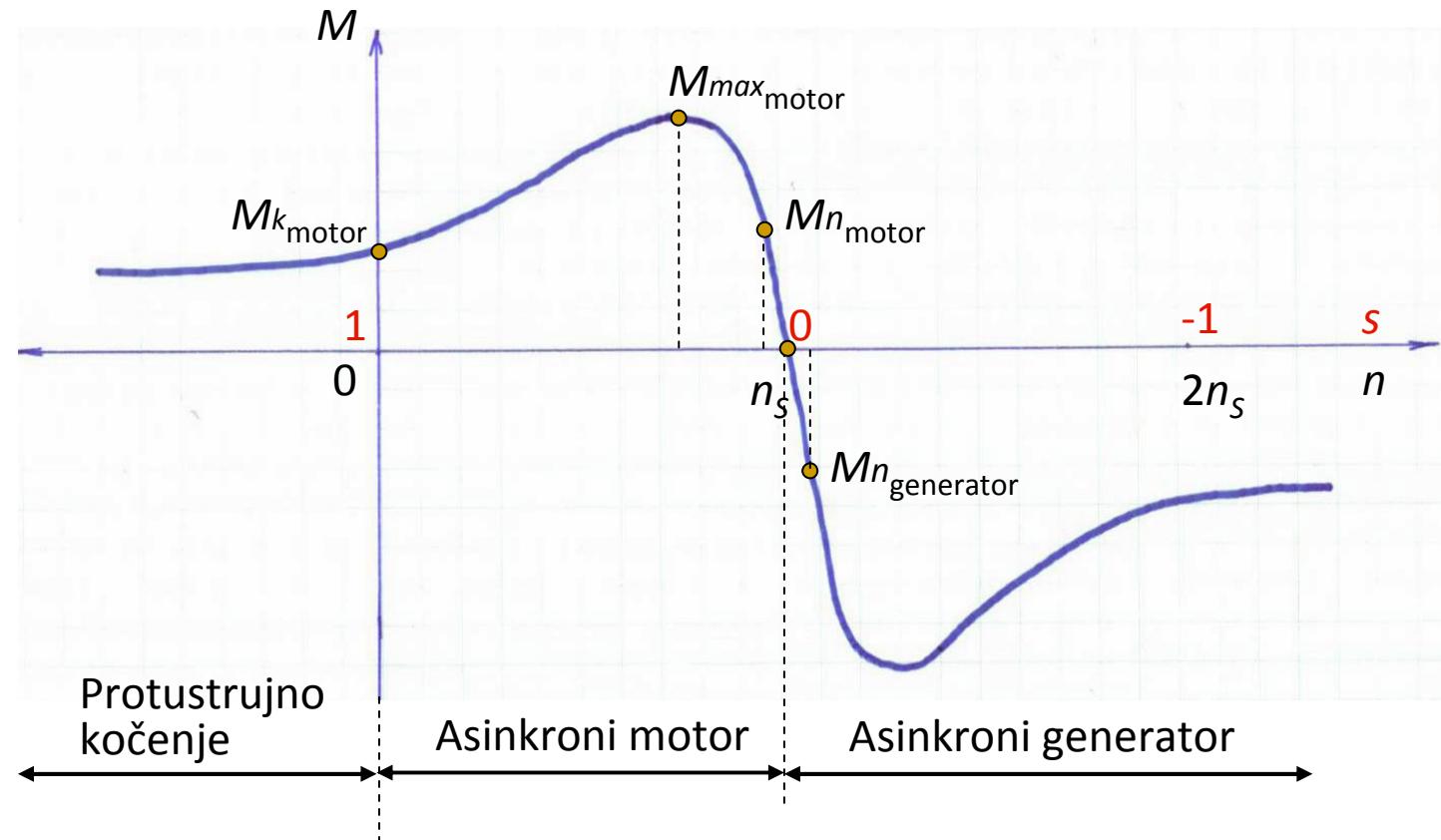


Bilanca snage asinkronog motora



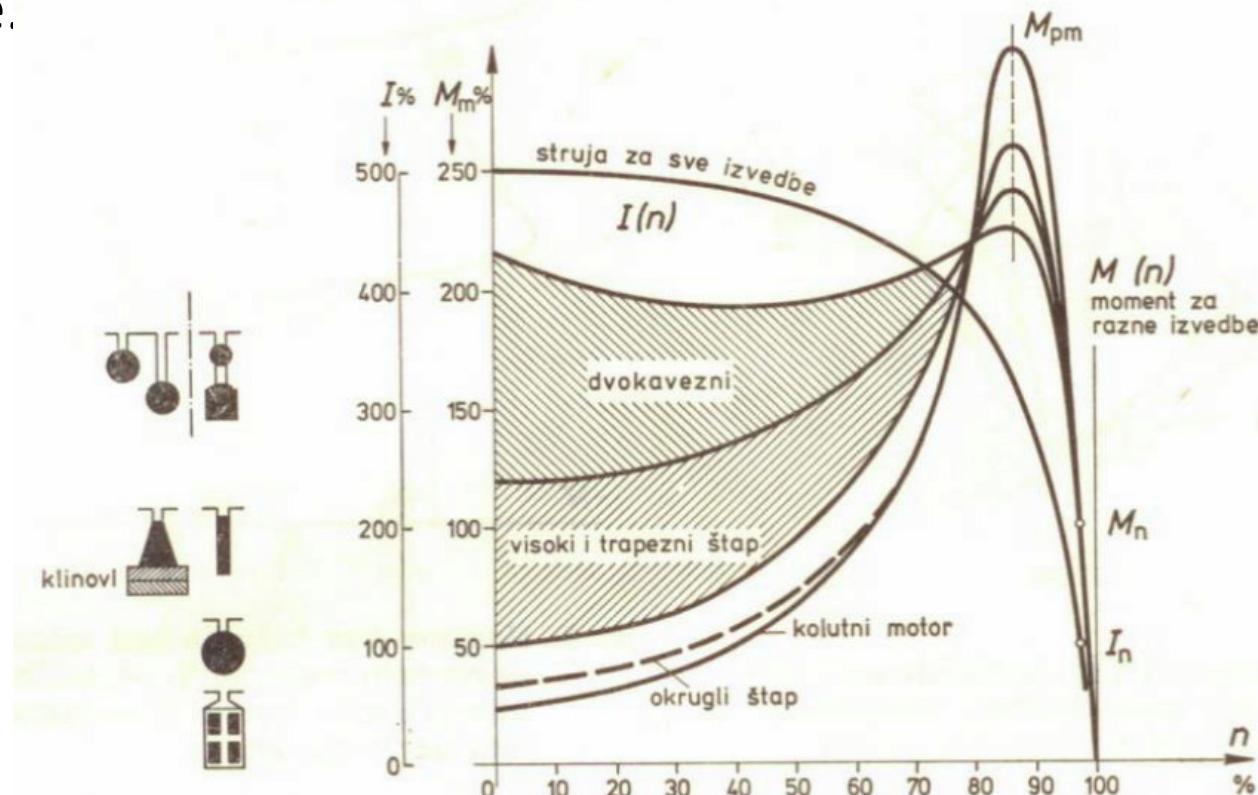
Momentna karakteristika asinkronog stroja

- Promjeni opterećenja radnog mehanizma asinkroni motor se prilagođava promjenom brzine vrtnje



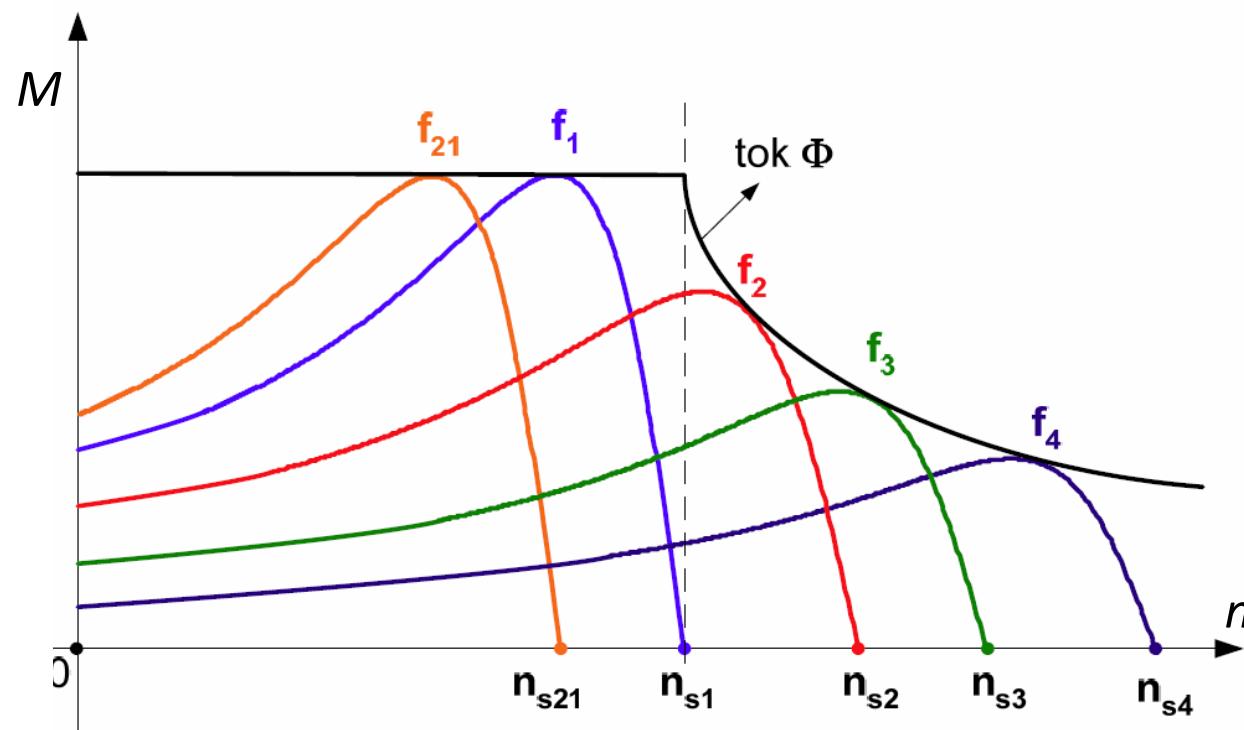
Momentna i strujna karakteristika asinkronog motora

- Oblik momentne karakteristike ovisi o odnosima induktivnih i radnih otpora.
- Konstrukcijom rotorskog utora se utječe na oblik momentne karakteristike.



Skalarna regulacija brzine vrtnje

- Momentne karakteristike pri promjeni frekvencije i napona, skalarna regulacija brzine vrtnje asinkronog motora



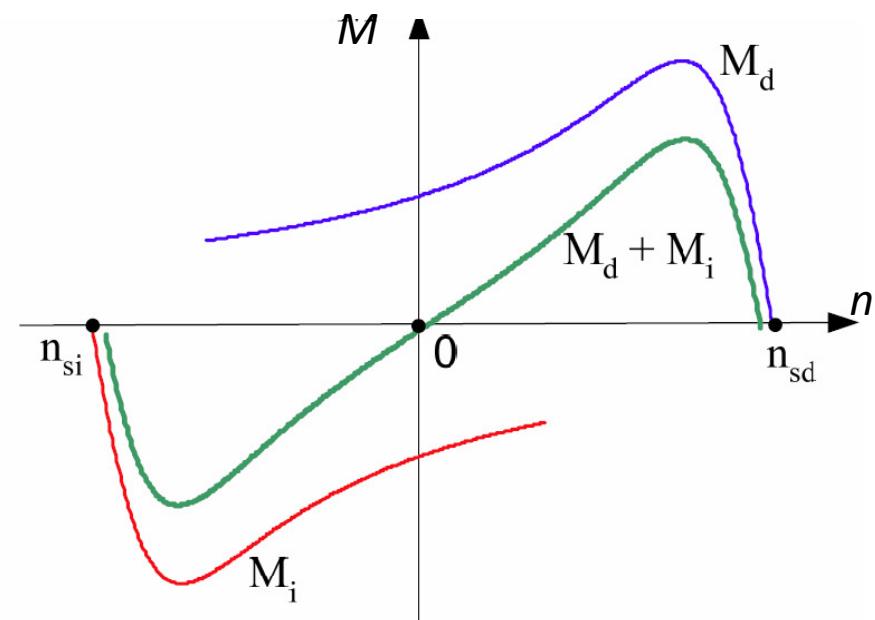
Jednofazni asinkroni motor

- Moment direktnog i inverznog protjecanja
 - Struje i momenti su jednaki za direktni i inverzni sistem, dok rotor stoji, tj. $s=1$, iz čega slijedi da je ukupni moment jednak nuli. Motor ne može krenuti iz mirovanja!
 - Čim se motor pokrene iz mirovanja prevladava jedno okretno polje i motor razvija moment kojim može savladati teret i nastaviti vrtnju.

M_d – moment direktnog protjecanja

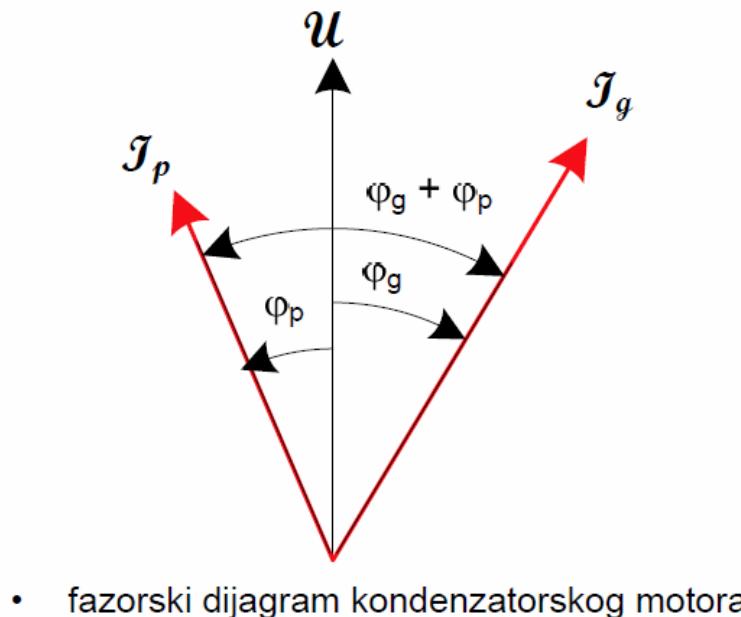
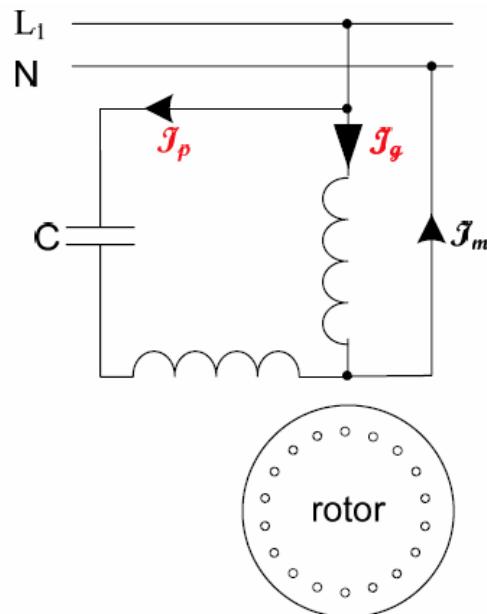
M_i – moment inverznog protjecanja

$M_d + M_i$ – ukupni moment



Jednofazni motor s pomoćnom fazom

- Problem poteznog momenta jednofaznog motora rješava se ugradnjom **pomoćne faze za zalet** koja je prostorno pomaknuta prema tzv. glavnoj fazi za neki kut, a fazni pomaci struja kroz fazne namote ostvaruju se dodavanjem kondenzatora, otpornika ili prigušnice (induktiviteta) u pomoćnu fazu.

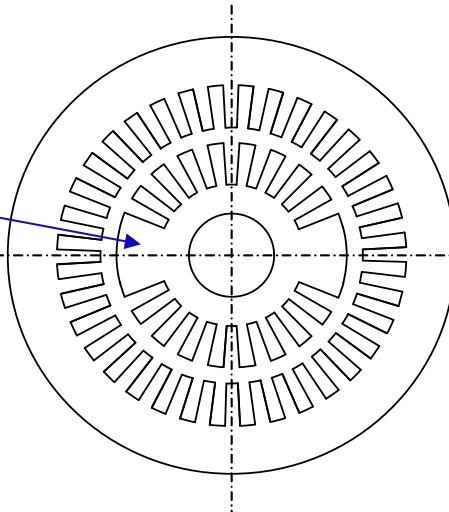
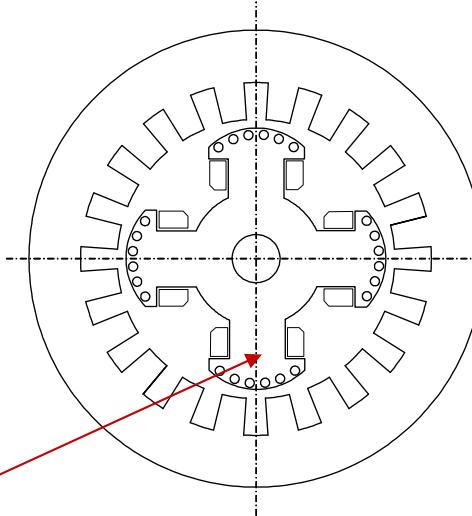


SINKRONI STROJEVI



Podjela sinkronih strojeva (1)

- Sinkroni strojevi su rotacijski strojevi koji pretvaraju električnu energiju u mehaničku ili obratno, radeći tako da se rotor u stacionarnom stanju vrti brzinom jednakom brzini vrtnje okretnog polja u stroju (**sinkrona brzina**).
- Stator je cilindričan, a rotor je:
 - s istaknutim polovima,
 - cilindrične izvedbe.
- Mora postojati istosmjerna uzbuda ili permanentni magneti (kod manjih strojeva). Uzbuda je najčešće na rotoru.



Podjela sinkronih strojeva (2)

- Podjela sinkronih strojeva prema vrsti pogonskog stroja:
 - **TURBOGENERATORI**
 - **HIDROGENERATORI**
 - **DIZELSKI GENERATORI**
 - **KOMPENZATORI**
 - **MOTORI**
- Podjela sinkronih strojeva prema brzini vrtnje (za $f = 50$ Hz):
 - **BRZOHODNI STROJEVI** (750, 1000, 1500 ili 3000 r/min, tj. 8, 6, 4 ili 2 pola)
 - **STROJEVI SREDNJE BRZINE** (300 do 600 r/min, 20 do 10 polova)
 - **SPOROHODNI STROJEVI** (manje od 300 r/min, više od 20 polova)

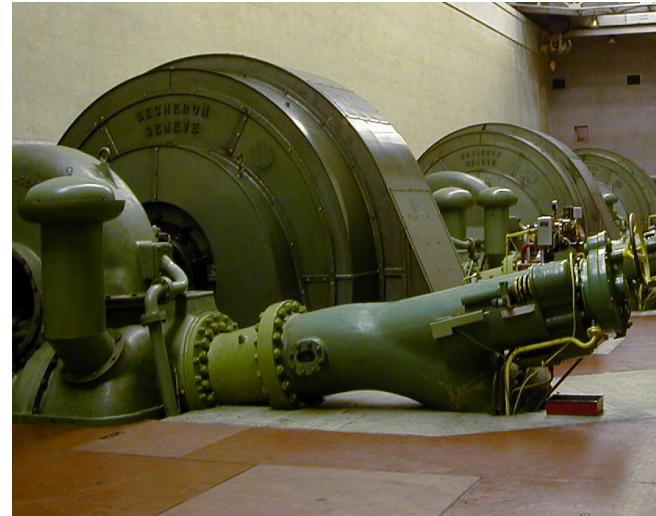
Turbogeneratori

- Pogonski stroj: parna ili plinska turbina
- Dva ili četiri pola s (okruglim) cilindričnim rotorom.
- Široki raspon snaga (najveći postojeći TG u nuklearnoj elektrani: 4-polni 1710 MVA; u projektu ili izgradnji 4-polni do 2220 MVA i 2-polni do 1500 MVA).



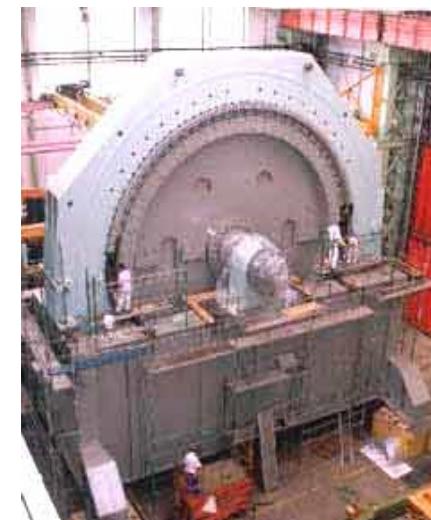
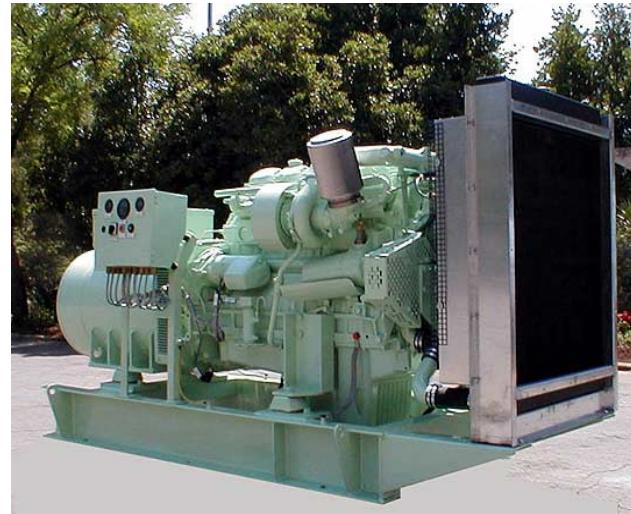
Hidrogeneratori

- Pogonski stroj: vodna turbina (Francis, Kaplan, Pelton).
- Grade se s istaknutim polovima, od sporohodnih do brzohodnih, u širokom rasponu snaga.
- Snage su danas već i preko 800 MVA (*Three Gorges* – Kina, 840 MVA, 75 r/min), rotorskog promjera i preko 18 m.



Dizelski generatori

- Pogonski stroj: dizelski motor.
- Grade se za široki raspon brzina vrtnje, (najčešće kao 4-polni do 8-polni)
- Snaga dizelskih generatora ograničena je mogućnostima izrade motora, najveći su do 60-tak MVA (sporohodni).



Sinkroni kompenzatori

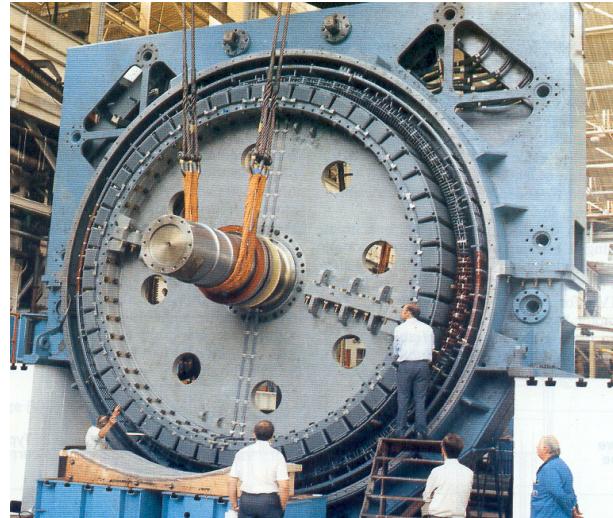
- Nemaju pogonskog stroja.
- Ne služe za elektromehaničku pretvorbu energije nego samo opskrbljuju energetski sustav jalovom energijom.
- Grade se u velikim jedinicama (10 MVA do 200 MVA) obično sa šest ili osam istaknutih polova.



Sinkroni motori

- Za pogone
 - s konstantnom brzinom vrtnje (pogon kompresora, ventilatora).
 - u reguliranim pogonima, napajanje preko ciklopretvarača.

- Grade se
 - za vrlo male snage (obično s permanentnim magnetima).
 - do najvećih snaga reda desetak MW (klasični), sa četiri ili više polova.

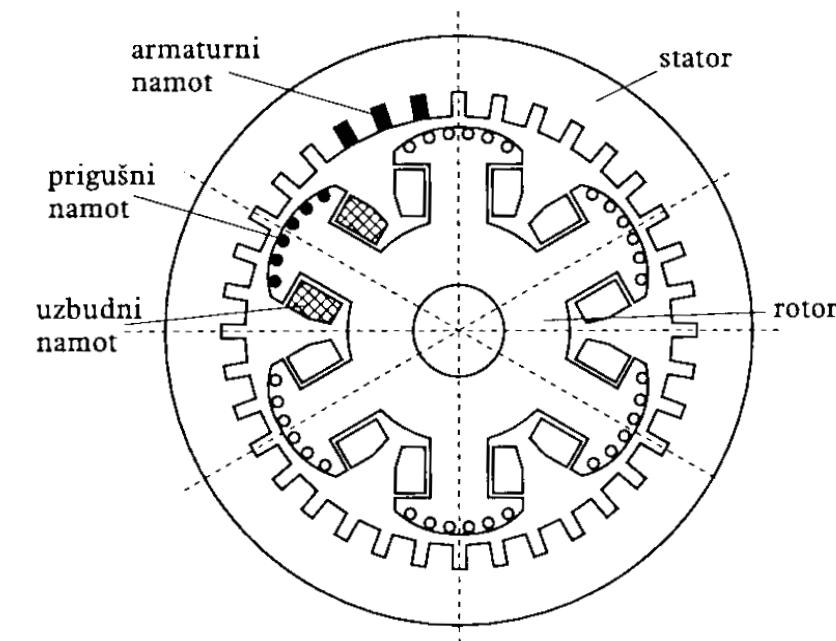
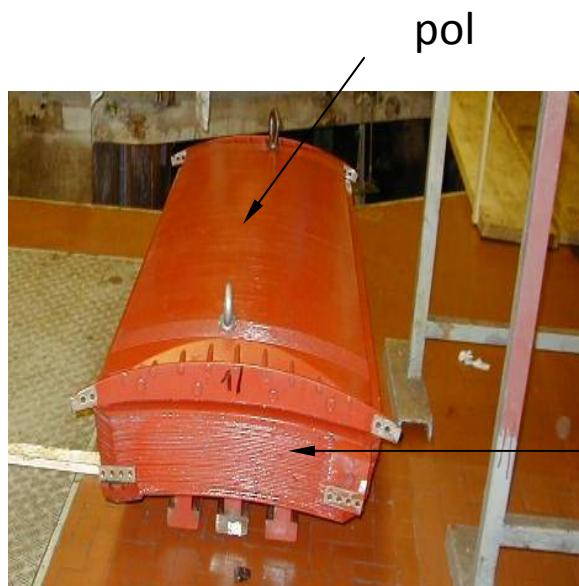


Namoti

- Namoti sinkronog stroja su:
 - **UZBUDNI**
 - **ARMATURNI**
 - **PRIGUŠNI**
- Velika većina sinkronih strojeva ima sva tri namota. Neke vrste malih strojeva nemaju uzbudni namot (reluktantni, SMPM).
- Armturni namot je najčešće na statoru, a uzbudni namot na rotoru, iako je moguće i obratno rješenje kod tzv. sinkronog stroja u inverznoj izvedbi.
- Napon uzbude je obično nizak (30 - 500 V) pa izolacija nije podvrgnuta velikom električkom polju, no zbog centrifugalnih sila, njena mehanička izdržljivost postaje važnije svojstvo.

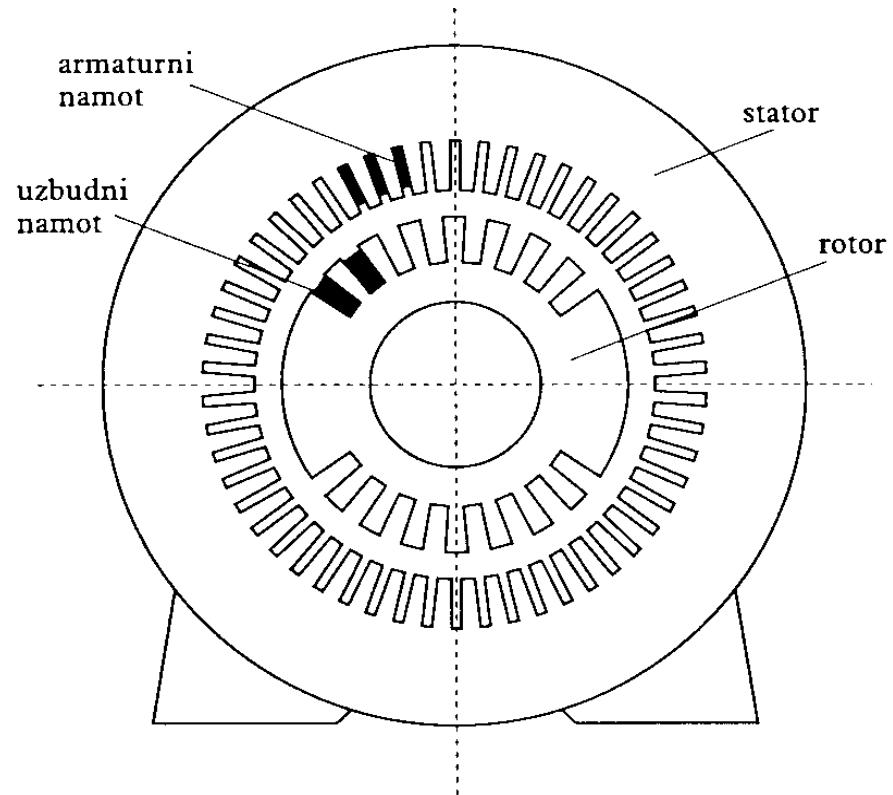
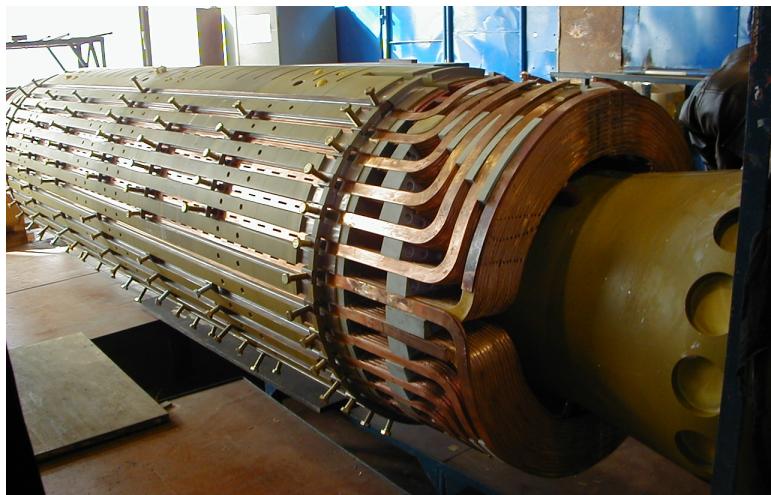
Uzbudni namot HG

- Veliki broj zavoja tanjih vodiča namotan oko istaknutih polova kroz koji teče istosmjerna struja i pritom stvara magnetski tok u stroju.



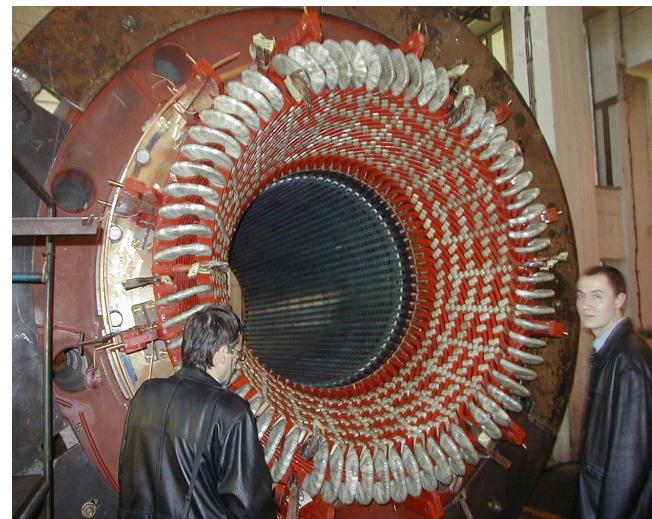
Uzbudni namot TG

- Na rotoru su utori u koje se smješta uzbudni namot.
- Namot najčešće zauzima 2/3 oboda rotora.



Armaturalni namot

- U njemu se inducira napon i kroz njega teku struje opterećenja. Mora biti dimenzioniran tako da može trajno podnosići nizivne vrijednosti napona (do $U_n = 27$ kV) i struja (do $I_n = 30$ kA).
- Preko njega se prenosi ukupna snaga stroja te se njemu posvećuje najveća pažnja.
- Vodiči se smještaju u utore kontinuirano po cijelom obodu statora.

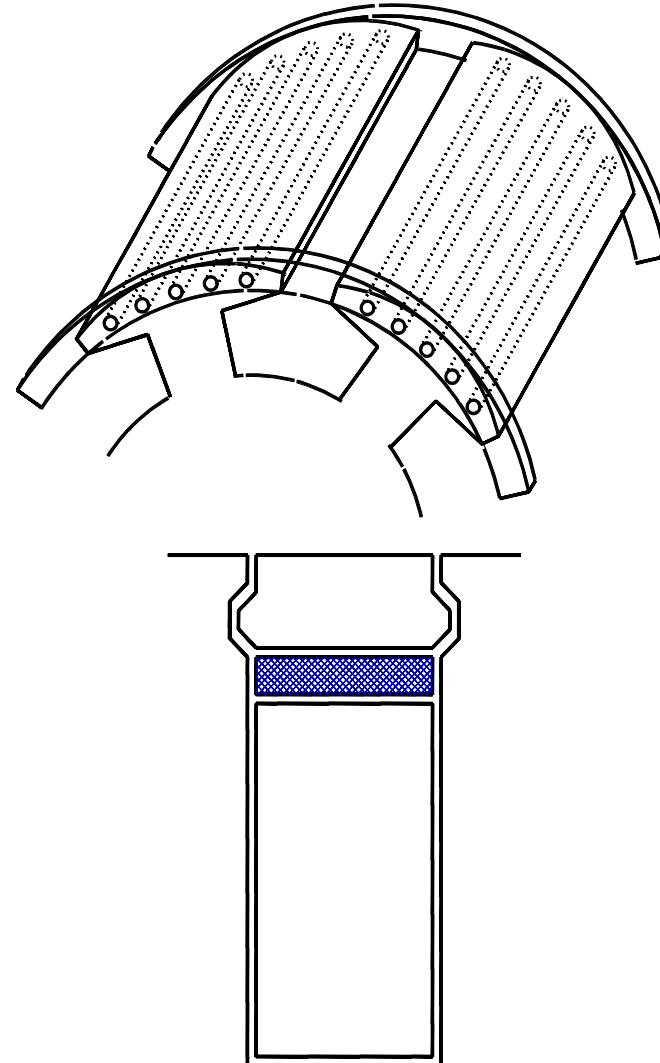


Tipični armaturni naponi, oznake stezaljki

- Tipični nazivni linijski naponi
 - 0,4; 3,15; 6,3; 10,5; 15,75; 21; 27 kV, eksperimentalno do 120 kV
- Ukupna struja kod najvećih TG do 30 kA (paralelne grane)
- Oznake stezaljki armaturnog namota
 - Određene IEC normama. Ako su izvedene samo stezaljke početaka faza, označavaju se slovima **U** (faza A), **V** (faza B) i **W** (faza C).
 - Ukoliko se označava početak i završetak svake faze oznake su **U1, V1 i W1** za početke, a **U2, V2 i W2** za završetke faza.
 - Kad postoji paralelne grane pridaje se ispred navedenih oznaka i broj koji označava granu (npr. **1U1** - početak prve grane faze A, **1U2** - završetak prve grane faze A, **2U1** - početak druge grane faze A, itd.).

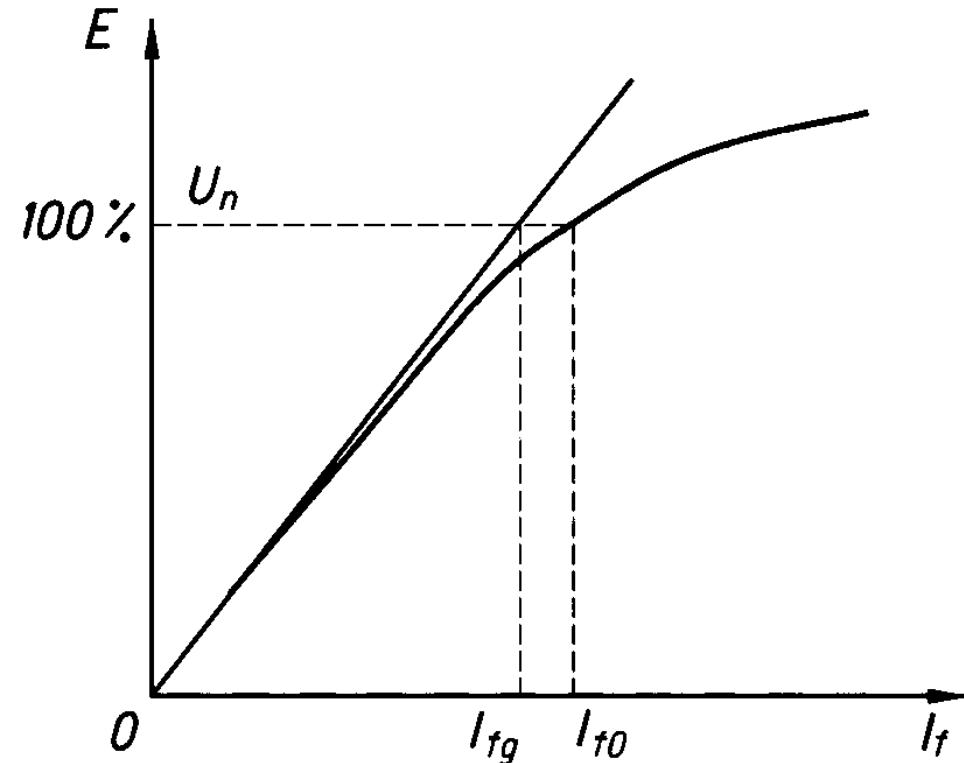
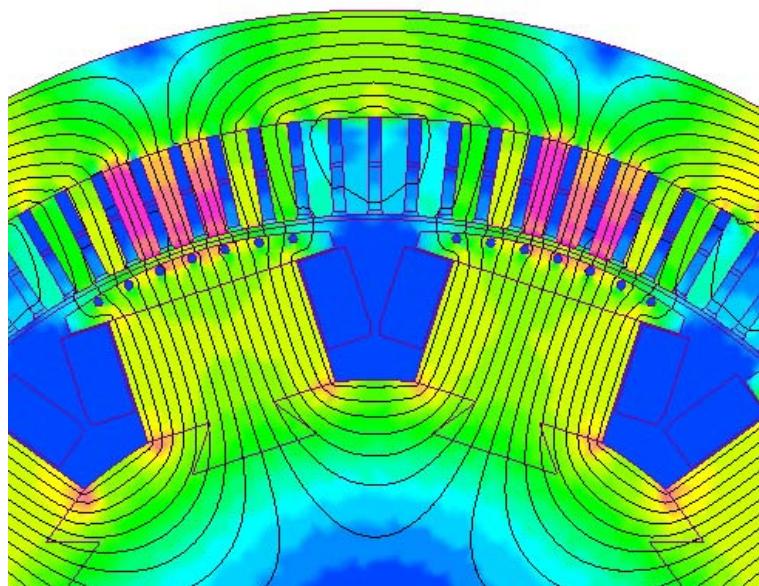
Prigušni namot

- Ugrađuje se u sinkrone strojeve sa svrhom prigušenja njihanja sinkronog stroja, prigušenja inverznog okretnog polja i omogućavanja asinkronog zaleta sinkronog motora i kompenzatora.
- Ugrađuje se u polne nastavke istaknutih polova na rotoru (HG) ili pri vrhu rotorskih utora (TG)



Krivulja (karakteristika) praznog hoda (PH) generatora

- Pokusom praznog hoda određuje se karakteristika PH i gubici u PH



Struja uzbude praznog hoda:

I_{fg} – nezasićenog stroja
 I_{f0} - stvarna

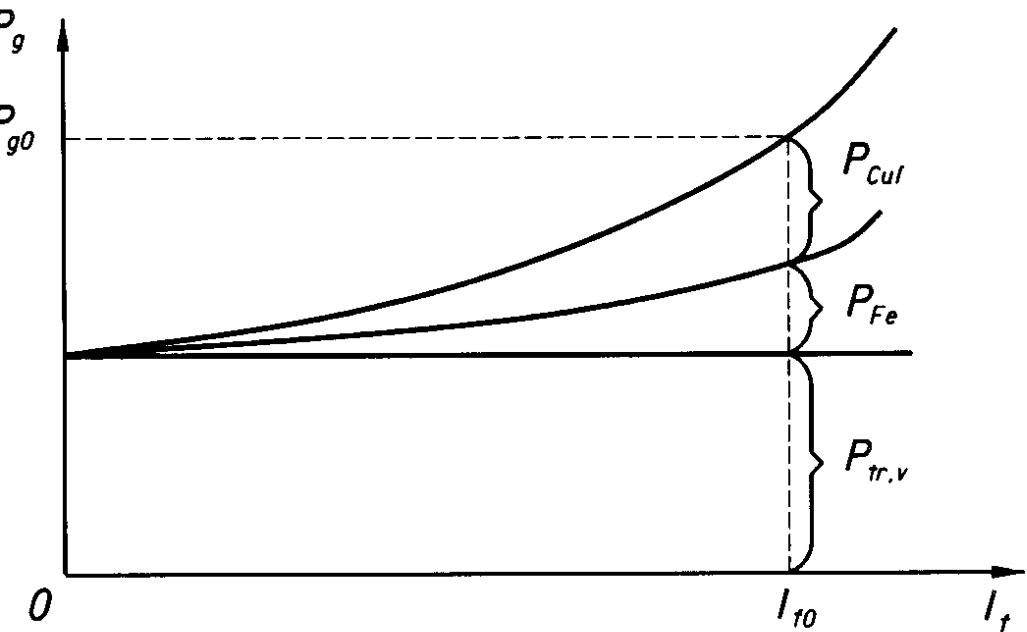
Gubici u praznom hodu generatora

- Gubici trenja i ventilacije $P_{tr,v}$ – konstantni (konstantna brzina vrtnje n_s)
- Gubici u željezu P_{Fe} – zbog vrtložnih struja i histereze
- Gubici u uzbudnom namotu $P_{Cuf} = I_f^2 R_f$ (+ gubici uzbudnika i regulatora uzbude)
- Gubici zbog vrtložnih struja i histereze se računaju po dijelovima magnetskog kruga željeza statora prema:

$$P_w = k_w f^2 B^2 d^2 m_{Fe}$$

$$P_h = k_h f B^2 m_{Fe}$$

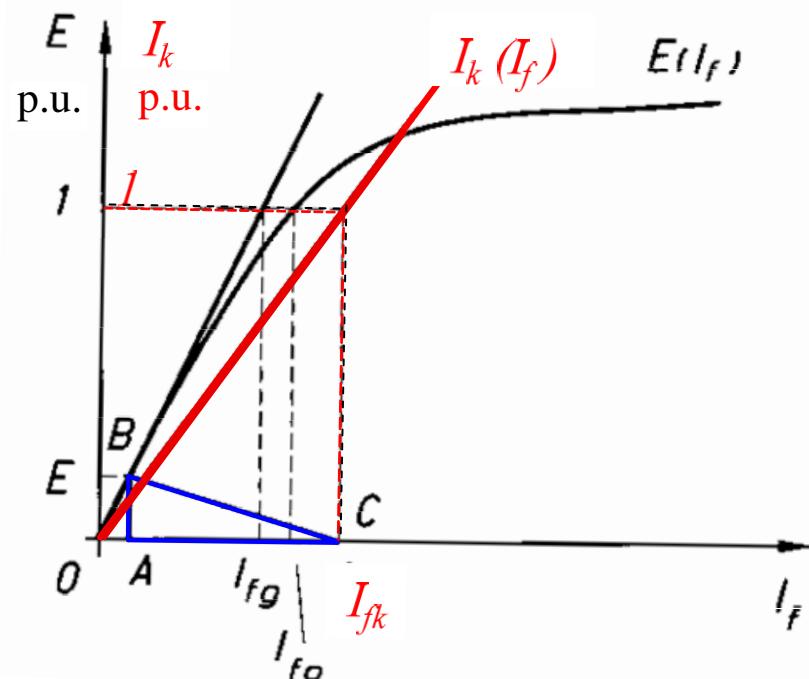
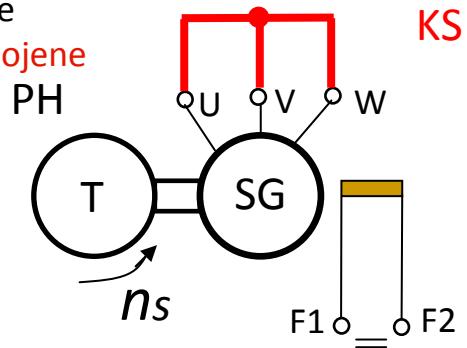
gdje se k_h i k_w određuju mjeranjima.



Karakteristike praznog hoda (PH) i kratkog spoja (KS) generatora

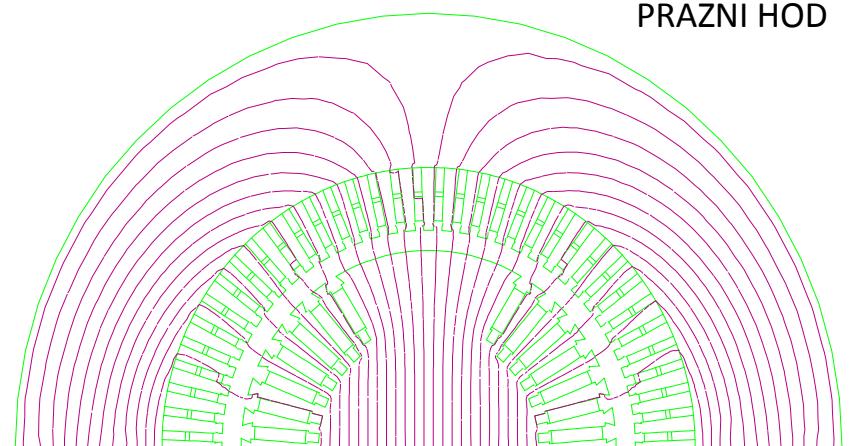
- ABC – trokut kratkog spoja
- 0A - uzbuda potrebna za magnetiziranje stroja u kratkom spoju pri $I_k = I_n$
- AC - uzbuda potrebna da nadoknadi djelovanje armaturne struje – reakciju armature
- 0E (AB) - inducirani napon u kratkom spoju, pokriva pad napona na rasipnoj reaktanciji statorskog namota
- Kratkospojni omjer: $k_k = \frac{I_{f0}}{I_{fk}}$

PH – stezaljke UVW otvorene
KS – stezaljke UVW kratkospojene

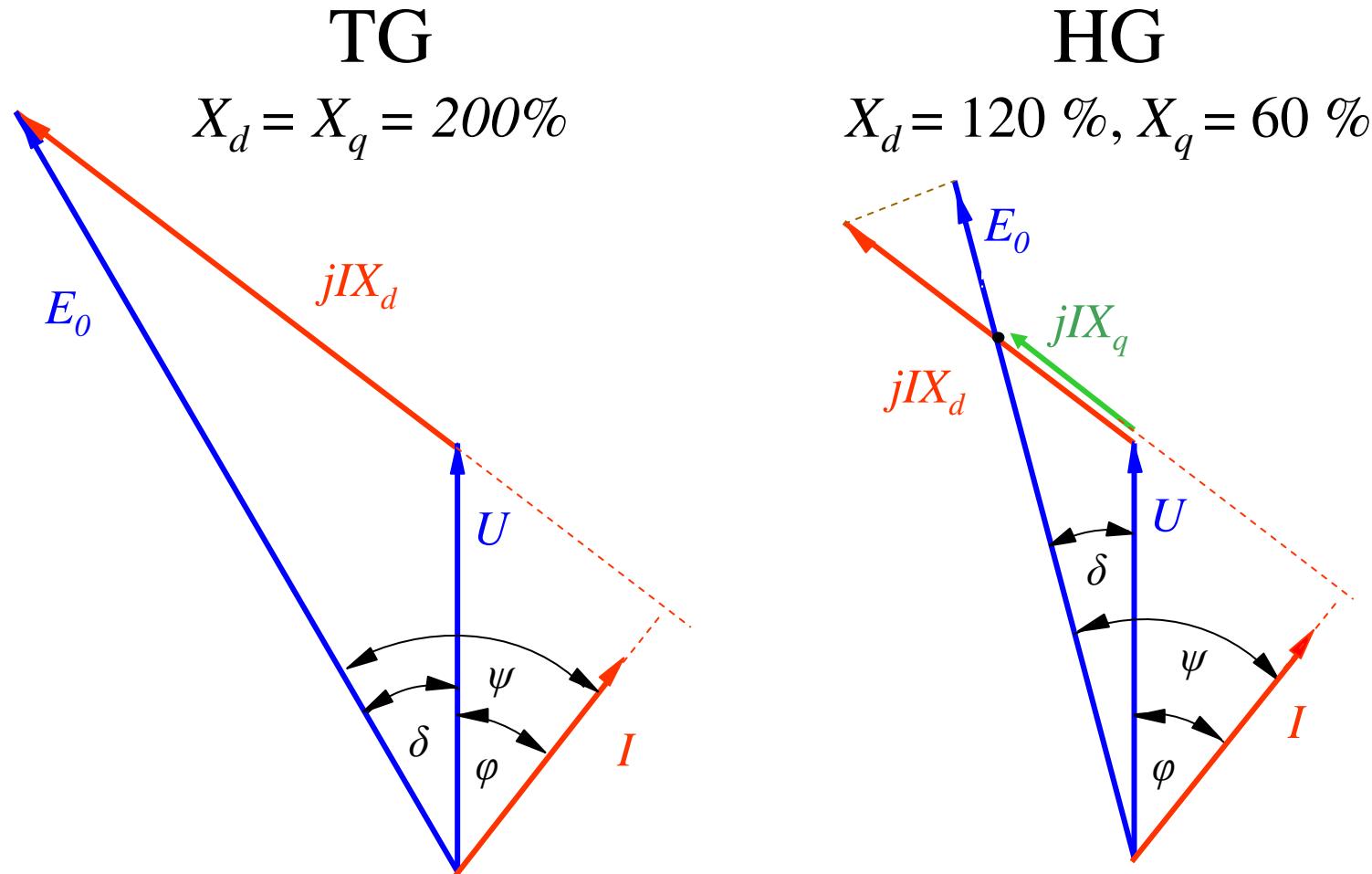


Reakcija armature

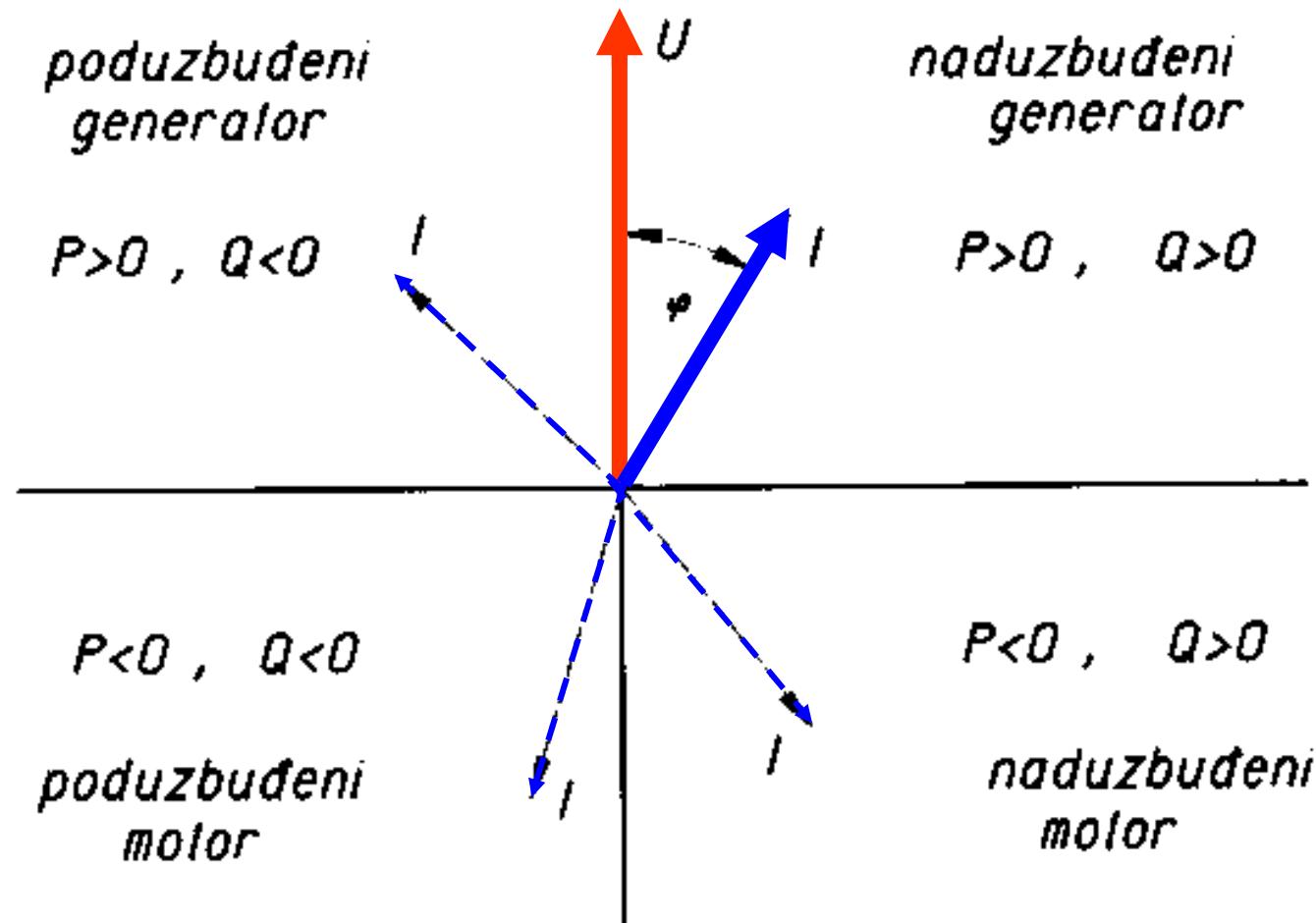
- Magnetski tok u rasporu sinkronog stroja ovisi o protjecanju svih namota koji su tim tokom ulančeni.
- U praznom hodu sinkronog stroja ne teče struja armaturnim namotom ($I=0$), pa je tok stvoren samo protjecanjem uzbudnog namota.
- Kada kroz armaturni namot poteče struja, ona svojim protjecanjem mijenja rezultantno protjecanje koje stvara rezultantni tok u stroju. Djelovanje armaturnog protjecanja nazivamo ***reakcijom armature***.
- Polja u stroju mogu se zbrajati samo kad su odnosi između polja i protjecanja linearni (što ovdje nije slučaj jer postoji zasićenje).
- Prvo se mora izračunati rezultantno protjecanje (pri čemu je odnos struja-protjecanje linearan), a tek onda magnetska indukcija.



Fazorski dijagram generatora opterećenog RL teretom ($I = 0,7I_n$)



Fazori napona i struja sinkronog stroja u generatorskom sustavu prikazivanja



Određivanje sinkrone reaktancije iz pokusa praznog hoda i kratkog spoja

- Kratkospojni omjer:

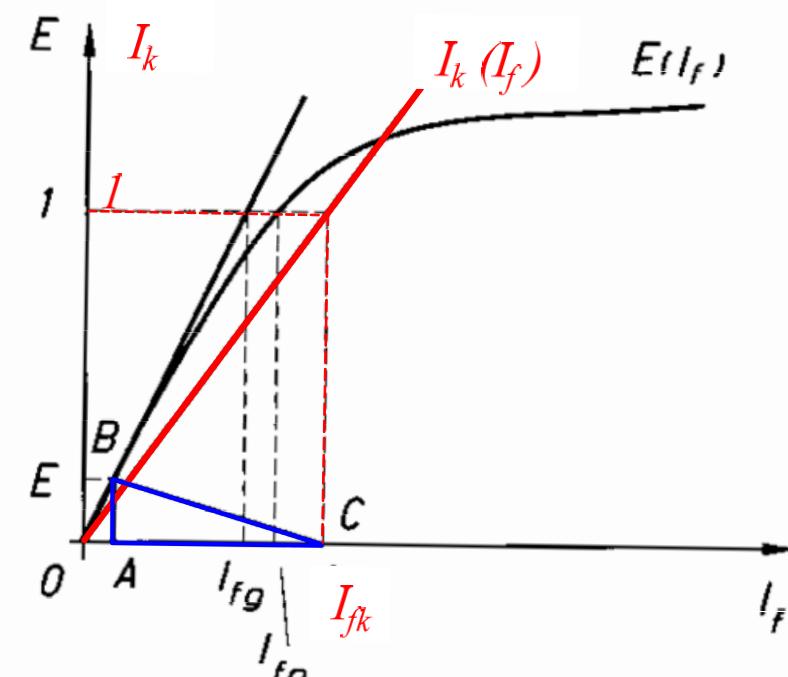
$$k_k = \frac{I_{f0}}{I_{fk}}$$

- Sinkrona reaktancija

$$x_d = \frac{I_{fk}}{I_{fg}} \cdot 100\%$$

- Zasićena sinkrona reaktancija

$$x_{dz} = \frac{1}{k_k} \cdot 100\% = \frac{I_{fk}}{I_{f0}} \cdot 100\%$$



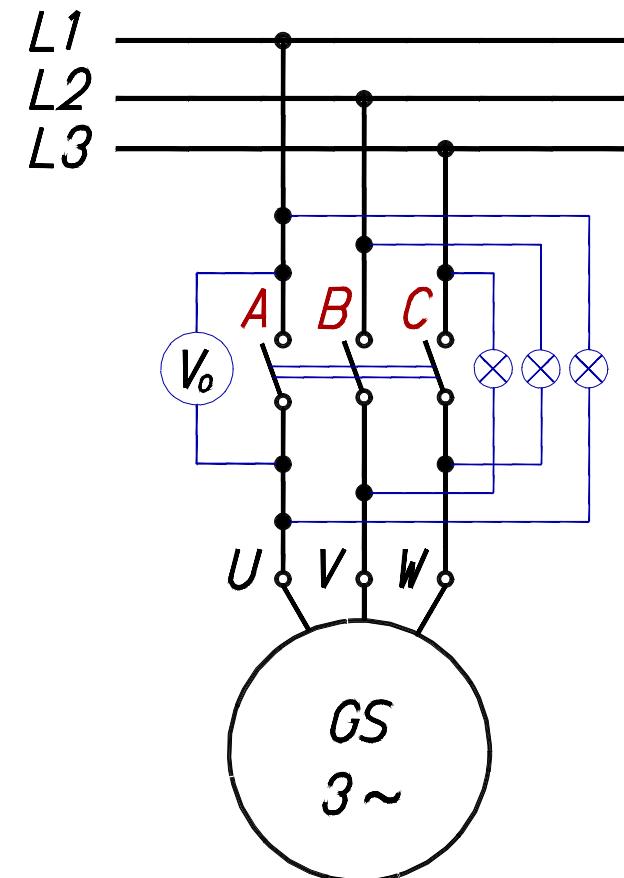
Sinkroni generator u pogonu

- **RAD SG NA KRUTU MREŽU** - paralelni rad SG s drugim generatorima ili cijelim EES.
- **RAD SG NA VLASTITU MREŽU** (otočni rad) - SG napaja samo svoja trošila
- Generatori najčešće rade na krutoj mreži za koju je karakteristično da ima čvrstu frekvenciju i napon, pa se računa da promatrani SG ne može mijenjati te veličine.
- U radu na vlastitu mrežu, SG svojim regulacijama pogonskog stroja i uzbude podešava f i U .

Paralelni rad sinkronih generatora s krutom mrežom

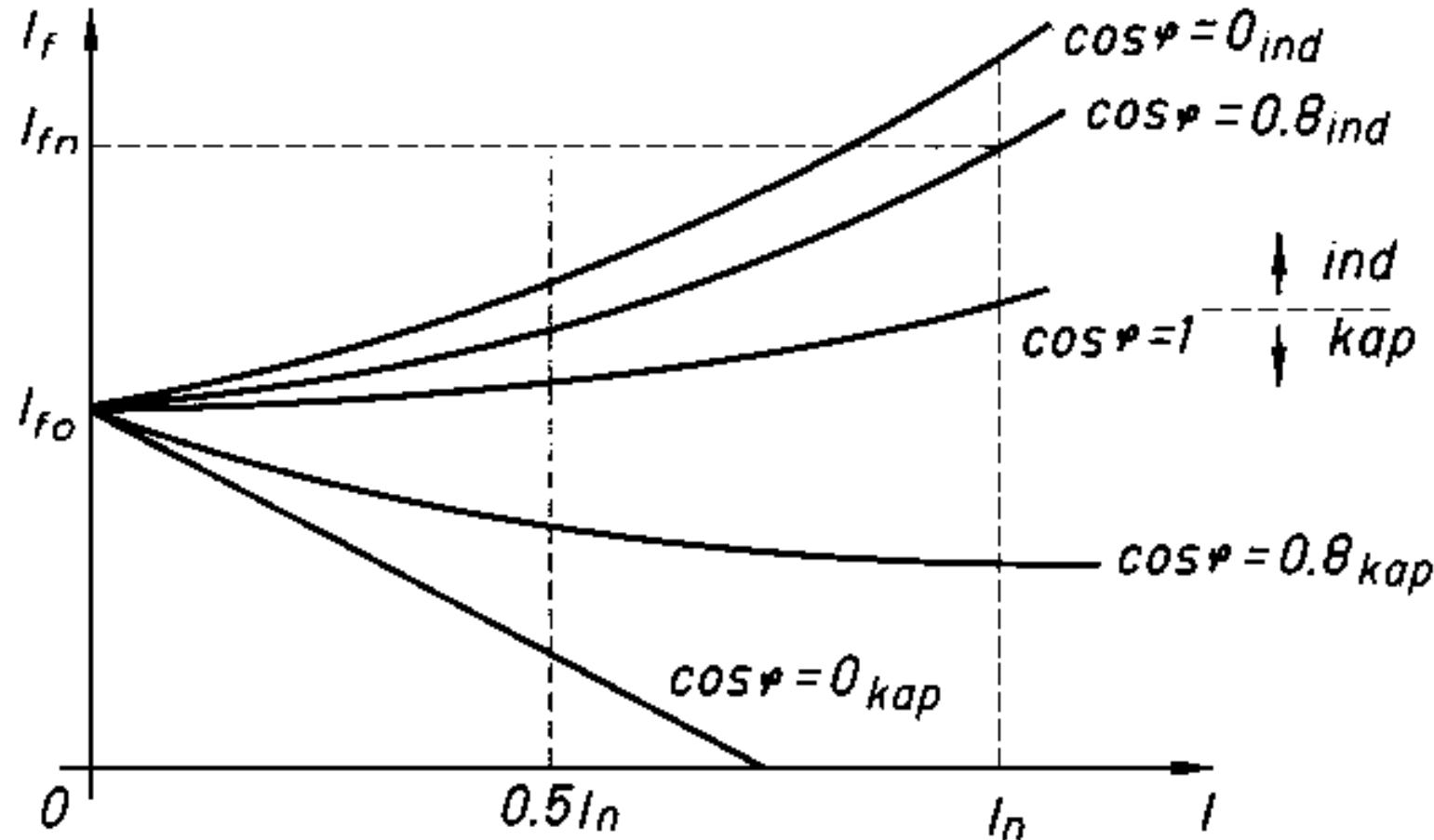
Uvjeti sinkronizacije:

- a) redoslijed faza generatora i mreže mora biti jednak
- b) vrijednosti napona generatora i mreže moraju biti jednake $E_G = U$
- c) frekvencije napona generatora i mreže moraju biti jednake $f_G = f$
- d) fazni kutovi napona generatora i mreže moraju biti jednaki $\varphi_G = \varphi$



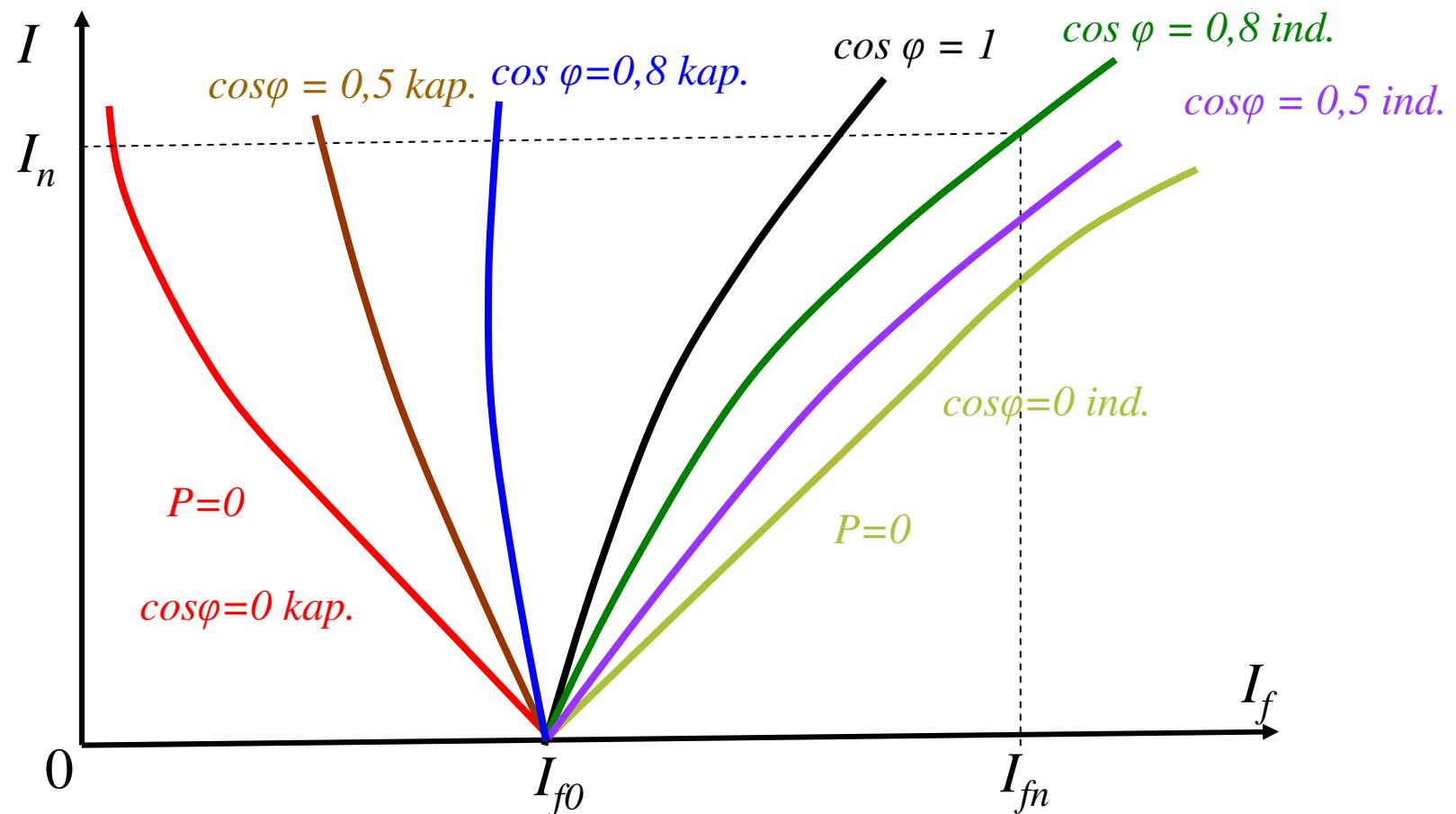
Krivulje regulacije (1)

(porodica krivulja s faktorom snage kao parametrom)



Krivulje regulacije (2) (porodica krivulja s faktorom snage kao parametrom)

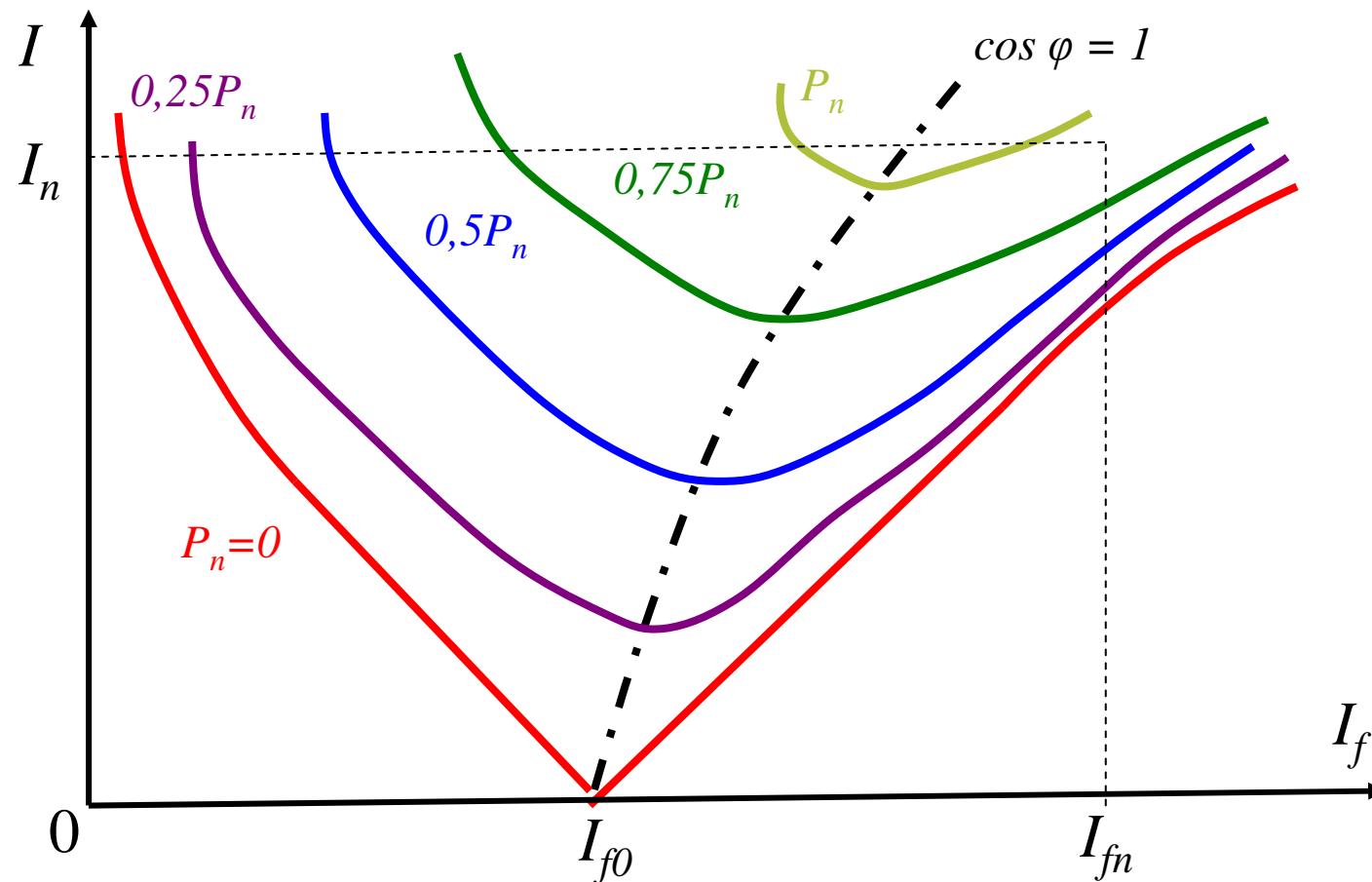
$$U = \text{konst. } f = \text{konst.}$$



V krivulje

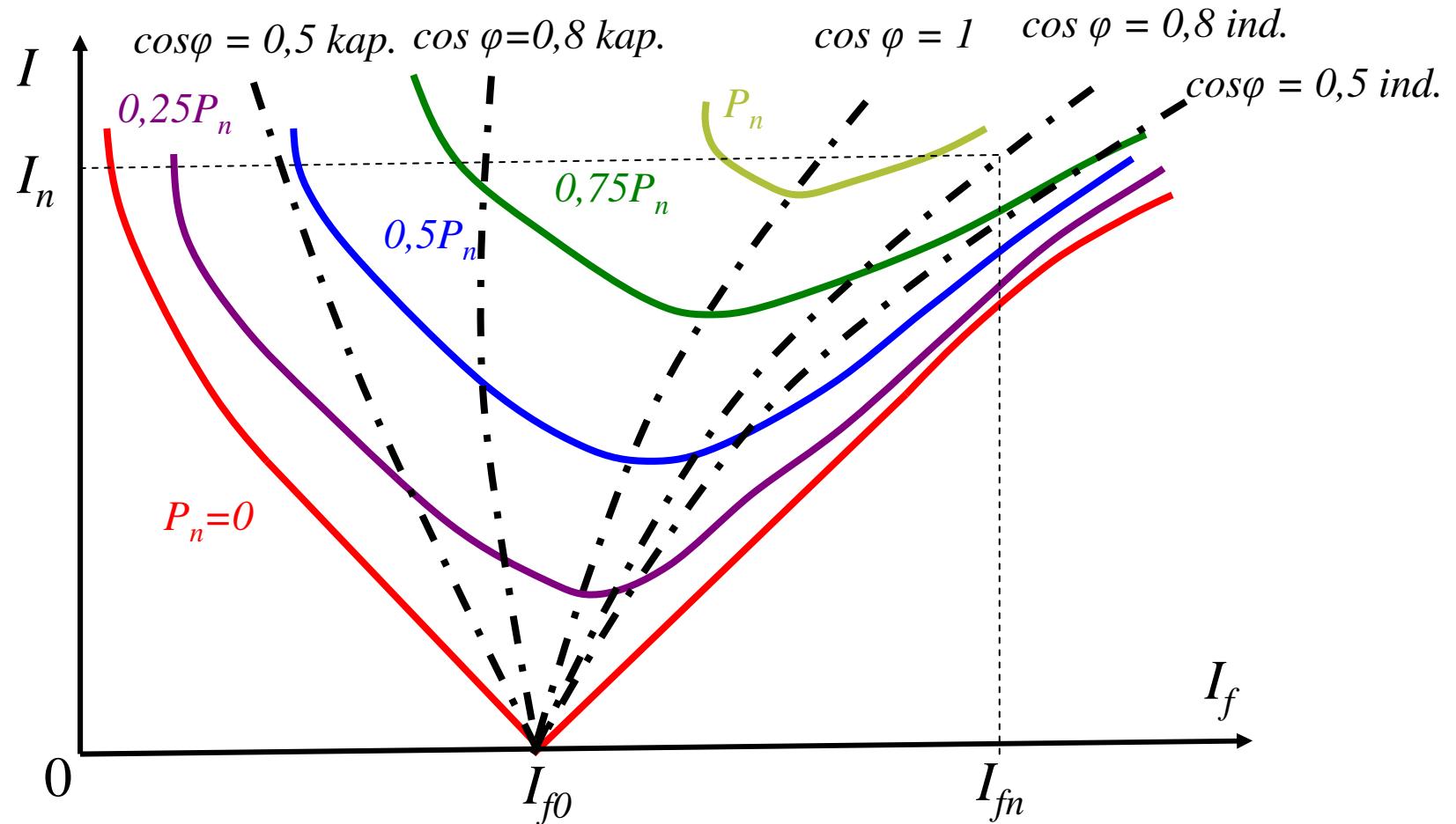
(porodica krivulja s djelatnom snagom kao parametrom)

$$U = \text{konst. } f = \text{konst.}$$



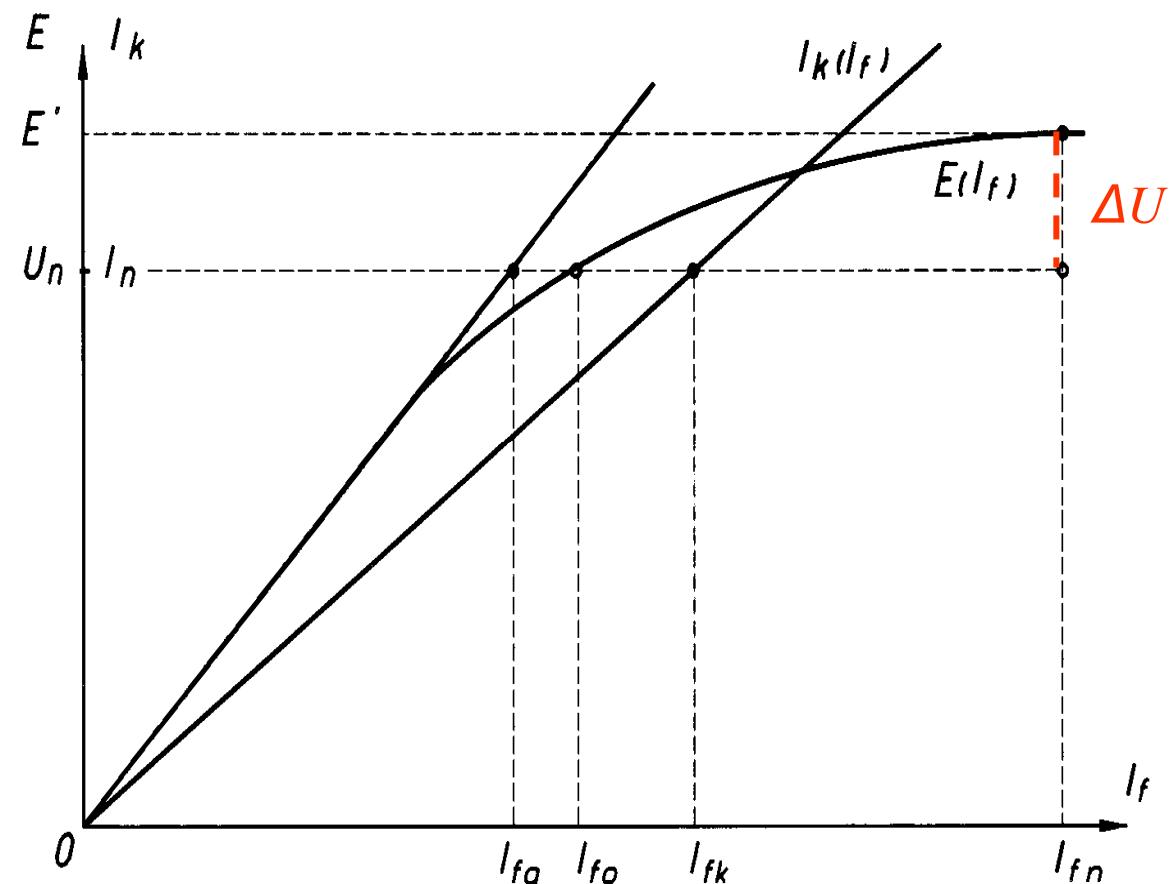
V krivulje i krivulje regulacije

$$U = \text{konst. } f = \text{konst.}$$



Porast napona ΔU kod rasterećenja generatora

- Isključenjem nazivno opterećenog SG s mreže trenutno poraste napon za iznos ΔU .
- Prema IEC normama taj porast napona ne bi smio biti veće od 50%.
- Magnetski krug SG se najčešće projektira tako da taj porast napona ne prelazi 30%.
- Stvarni najveći porast napona nakon rasterećenja ovisi o brzini regulacije turbine i uzbude.



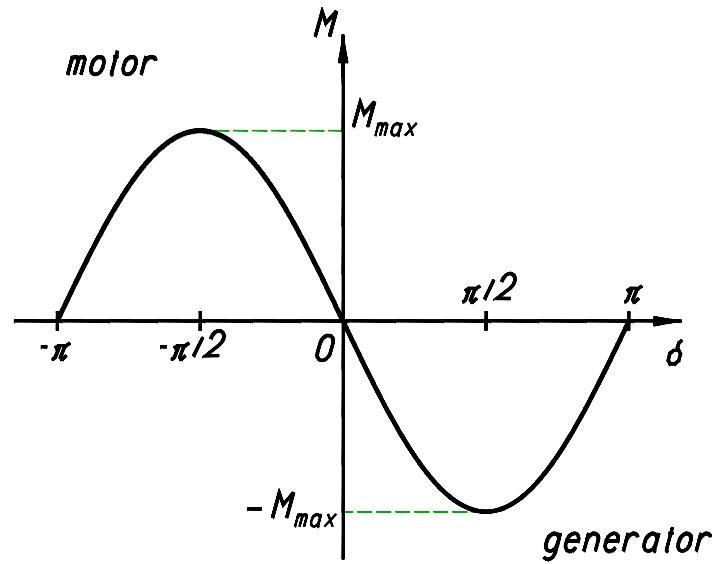
Elektromagnetski moment

$$M = P \frac{30}{n \pi} = \frac{28,65}{n} \left[\frac{E_0 U_{faz}}{X_d} \sin \delta + \frac{U_{faz}^2}{2} \frac{X_d - X_q}{X_d X_q} \sin(2\delta) \right] \text{ (Nm)}$$

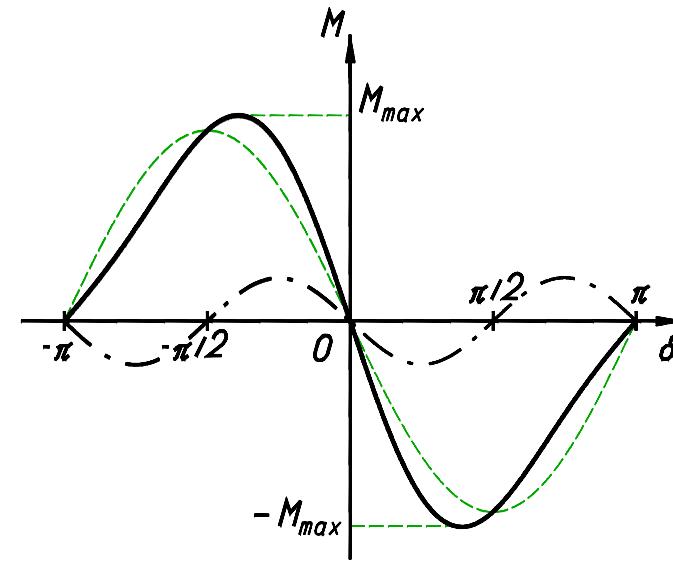
$$m = \underline{M} = \frac{M}{M_b} = \left[\frac{e_0 u}{x_d} \sin \delta + \frac{u^2}{2} \frac{x_d - x_q}{x_d x_q} \sin(2\delta) \right] \text{ (p.u.)}$$

$$M_b = \frac{S_n}{\omega_{ms}}$$

s konstantnim rasporom



s istaknutim polovima

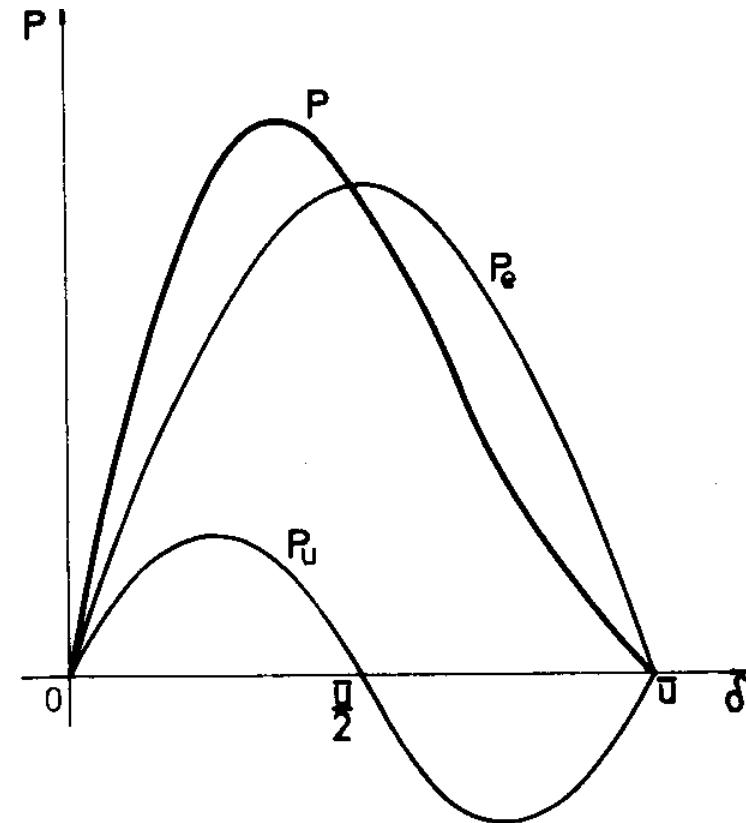


Karakteristika snage HG

P – ukupna razvijena snaga

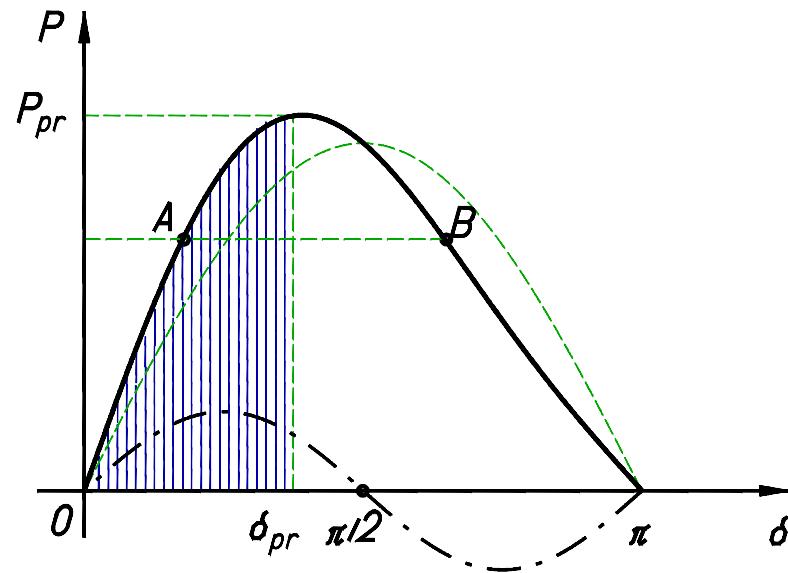
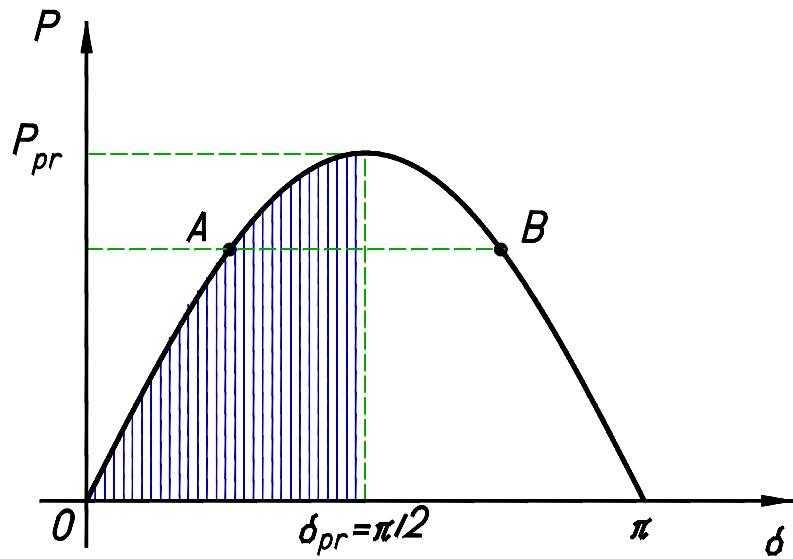
P_e – snaga razvijena protjecanjem rotorskih i statorskih struja

P_r – snaga razvijena reluktantnim momentom (protjecanjem statora uz istaknute polove rotora)



$$p = \underline{P} = \underline{P}_e + \underline{P}_r = \frac{e_0 u}{x_d} \sin \delta + \frac{u^2}{2} \frac{x_d - x_q}{x_d x_q} \sin(2\delta)$$

Statički stabilno područje rada i sinkronizacijski koeficijent

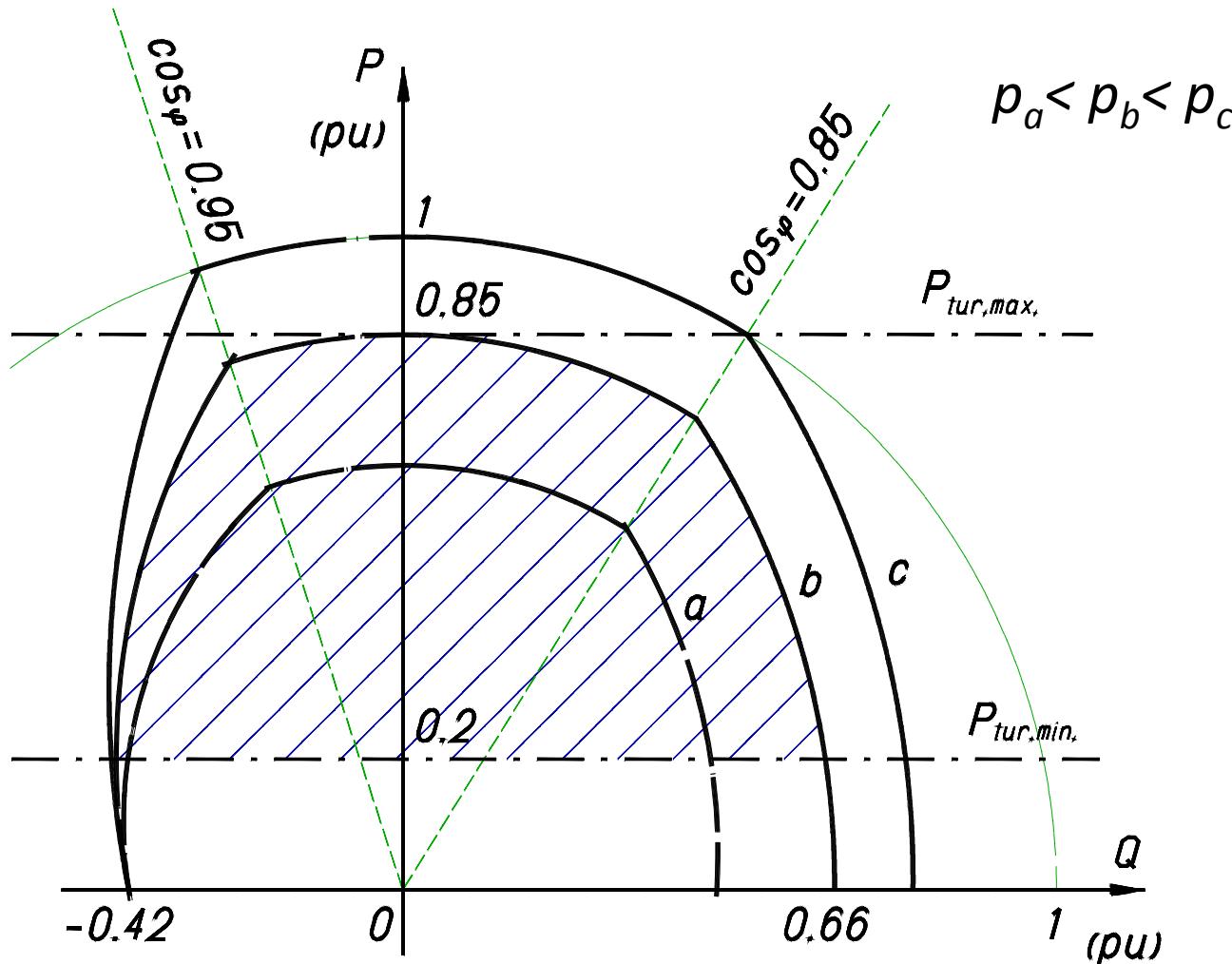


Sinkronizacijski koeficijent u p.u.:

$$k_s = \frac{e_0 u}{x_d} \cos \delta + u^2 \left(\frac{1}{x_q} - \frac{1}{x_d} \right) \cos(2\delta)$$

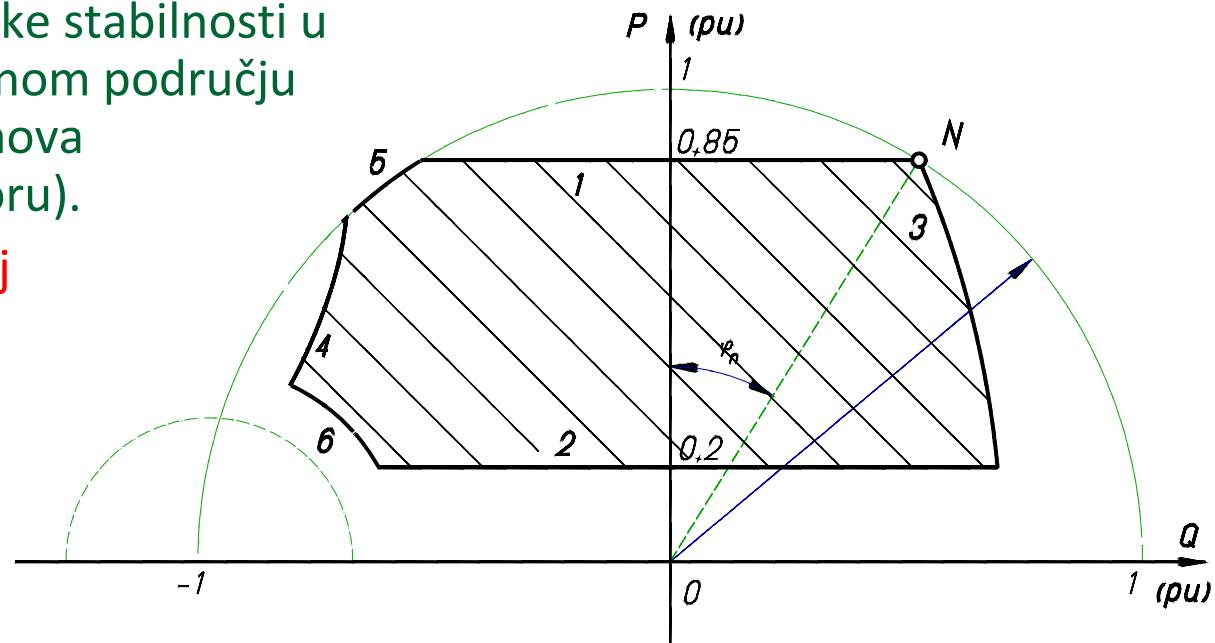
u Nm/rad: $k_{sM} = \frac{dM}{d\delta} = k_s \frac{S_n}{\omega_{mn}}$ $k_{sP} = \frac{dP}{d\delta} = k_s S_n$

Pogonska karta TG u ovisnosti o nadtlaku vodika

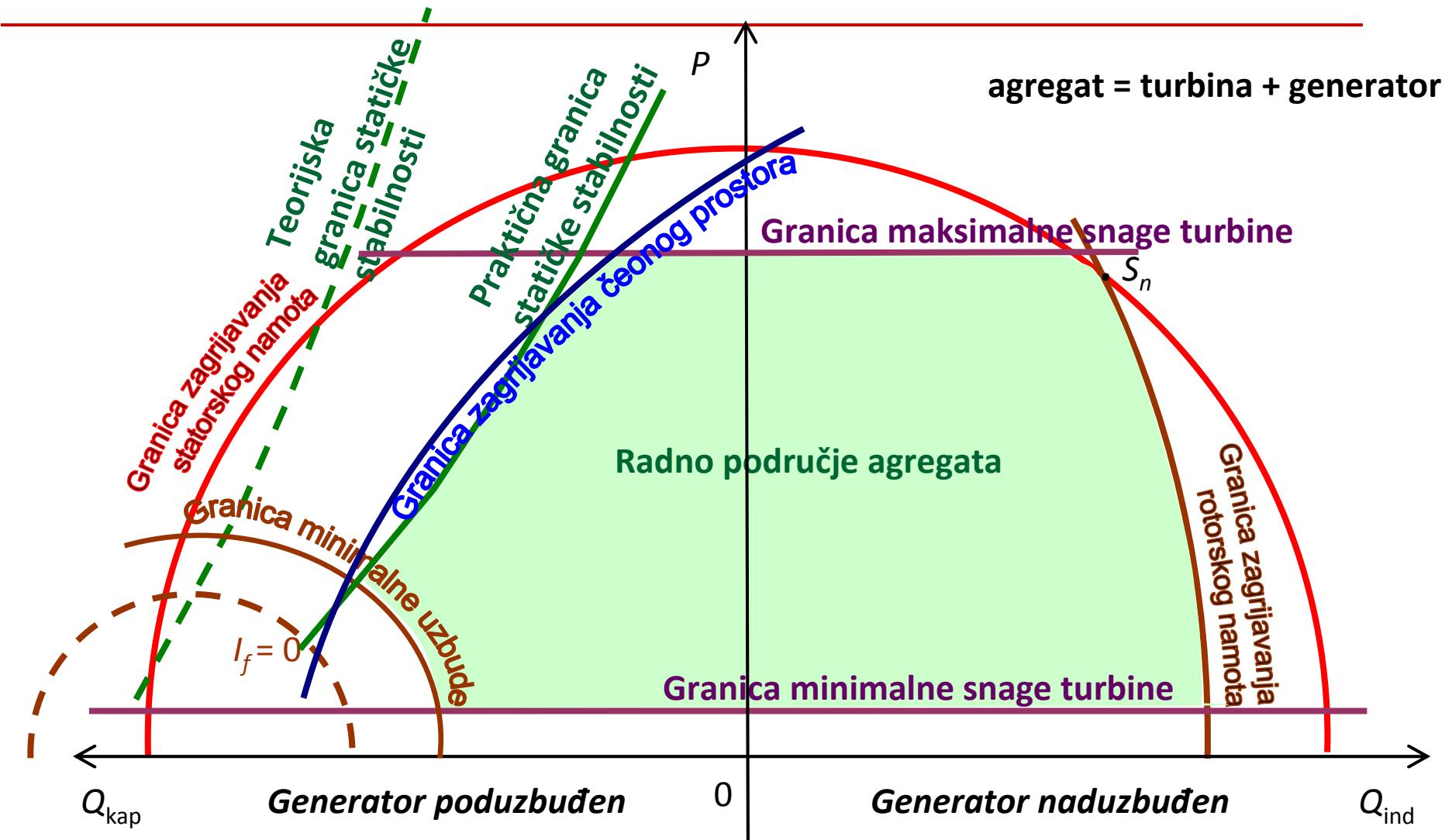


Pogonska karta hidrogeneratora

- 1 – maksimalna snaga P_{max} ograničena pogonskim strojem.
- 2 – minimalna snaga P_{min} ograničena kod nekim vrsta vodnih turbina (Kaplan, Francis, cijevni agregati itd).
- 3 - granica maksimalnih induktivnih opterećenja zbog pregrijavanja uzbudnog namota.
- 4 - praktična granica statičke stabilnosti u kapacitivnom, poduzbuđenom području (ili zagrijavanje krajnjih limova i dijelova u čeonom prostoru).
- 5 - granica po maksimalnoj armaturnoj struji I_{max} zbog pregrijavanja armature.
- 6 - granica po minimalnoj uzbudnoj struji $I_{f min}$.



Radno područje hidroagregata s ograničenjima

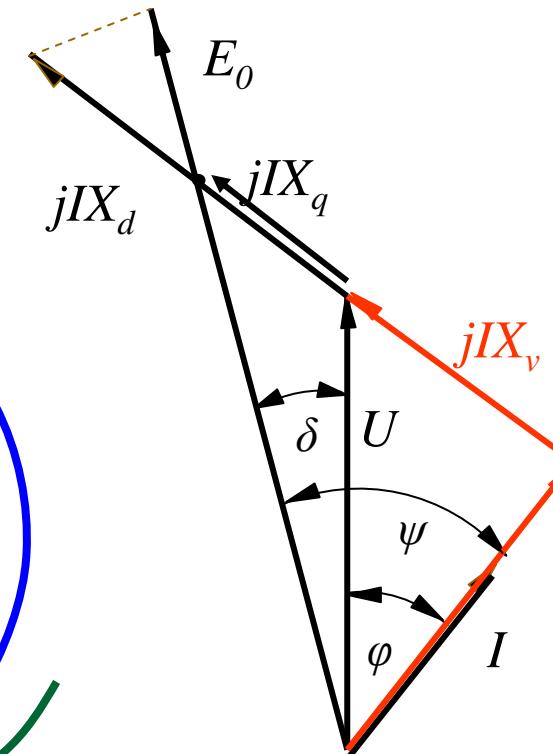
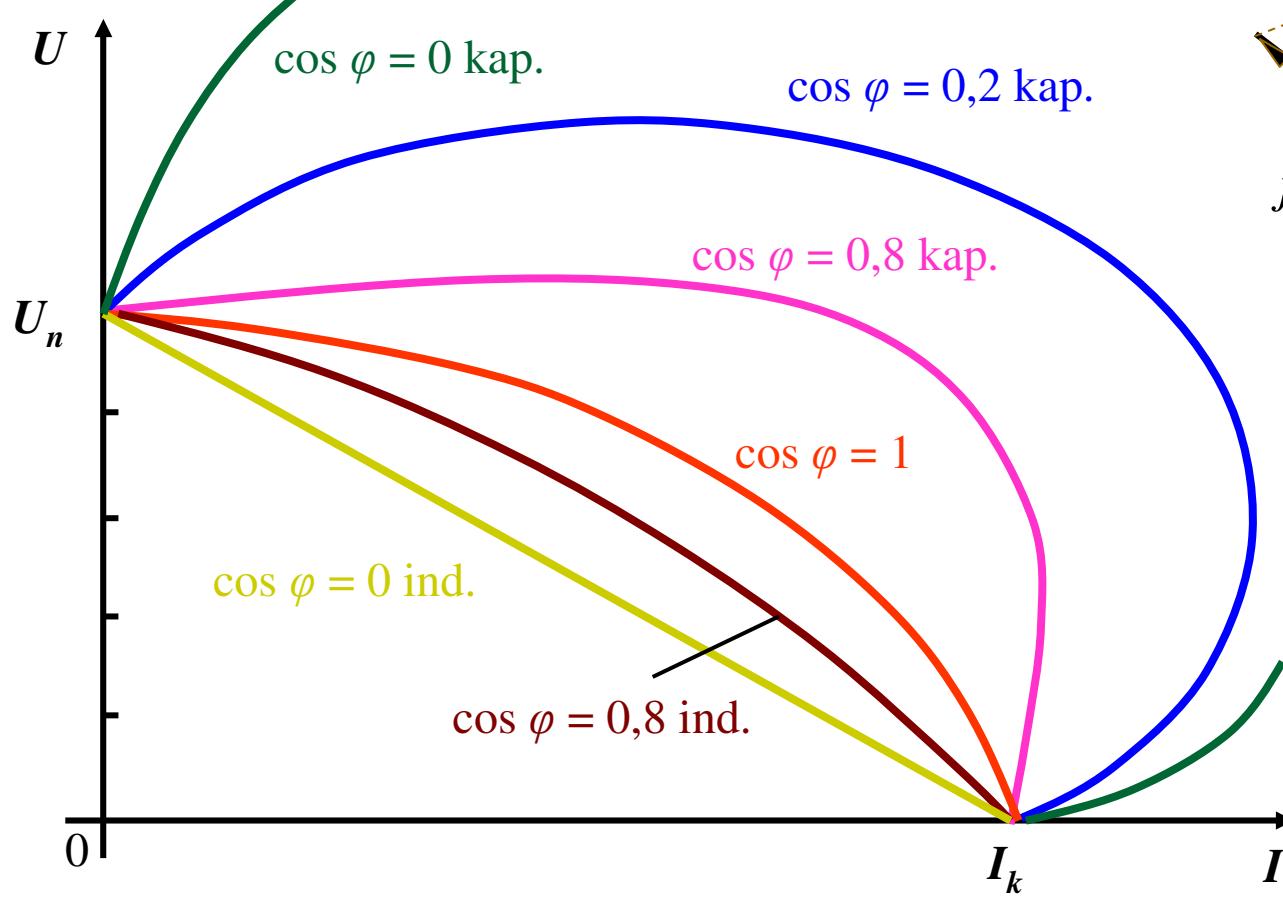


Rad sinkronog generatora na vlastitu mrežu

- Na veličinu frekvencije i napona utječe i trošilo.
- ***Regulacijom uzbude regulira se napon, a regulacijom brzine vrtnje*** pomoću regulatora na pogonskom stroju ***regulira se frekvencija.***
- Da bi dobili željenu frekvenciju napona pogonski stroj treba davati onoliku snagu kolika se troši na radnoj komponenti trošila. Ta snaga ovisi o naponu. Da bi dobili željeni napon treba regulirati uzbudnu struju.
- Za razliku od rada na krutoj mreži kad mreža guta sve što joj agregat može dati, u radu na vlastitoj mreži trošilo diktira zahtijevanu djelatnu i jalovu snagu. Trošilo diktira faktor snage.

Vanjske karakteristike SG u radu na vlastitu mrežu

($n = \text{konst.}$ $I_f = \text{konst.}$)



Teret $Z_v = R_v + jX_v$

SINKRONI MOTORI

- U klasičnoj primjeni - pogoni u kojima nije potrebno regulirati brzinu vrtnje niti se zahtijeva veći broj upuštanja i zaustavljanja.
 - motor-generatorske grupe,
 - elektromotorni pogoni sa:
 - snažnim pumpama,
 - ventilatorima,
 - kompresorima,
 - mlinovima i drobilicama.
- Mali sinkroni motori raznih izvedbi:
 - indukcijski,
 - s permanentnim magnetima,
 - histerezni.

Regulirani pogoni sa sinkronim motorima

- Napajanje preko energetskih elektroničkih pretvarača – regulira se frekvencija napajanja motora.
- Osnovne vrste pretvarača:
 - pretvarači s istosmjernim međukrugom,
 - ciklopretvarači.
- Regulirani pogoni:
 - sinkroni motori srednjih i velikih snaga širokog raspona brzina vrtnje.
 - mlinovi u cementarama - područje rada s velikim momentima i malim brzinama vrtnje.

Rad sinkronog motora

- Sinkroni motor iz mreže uzima djelatnu snagu upravo toliku da pokrije svoje gubitke i preda na osovini snagu koju zahtijeva radni mehanizam.
- Zahtijeva li radni mehanizam **veću snagu**, automatski će sinkroni motor iz mreže povući veću djelatnu snagu **povećanjem kuta opterećenja**.
- **Jalovu snagu** motora moguće je mijenjati neovisno o djelatnoj snazi; to se postiže **promjenom uzbudne struje**.

Radne karakteristike sinkronog motora

$I_f = \text{konst.}$

$U = \text{konst.}$

$f = \text{konst.}$

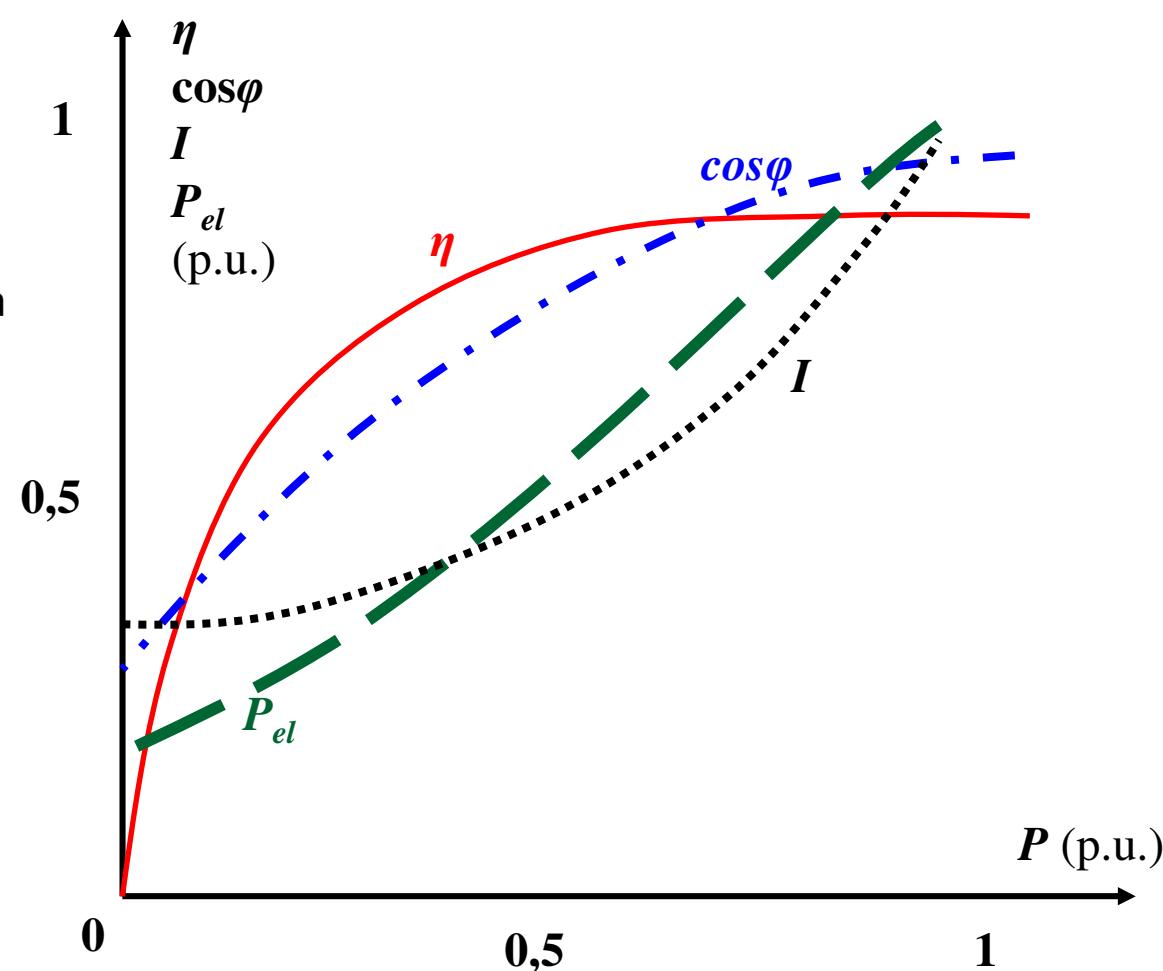
P - izlazna snaga - snaga na osovini motora

P_{el} - ulazna električna snaga

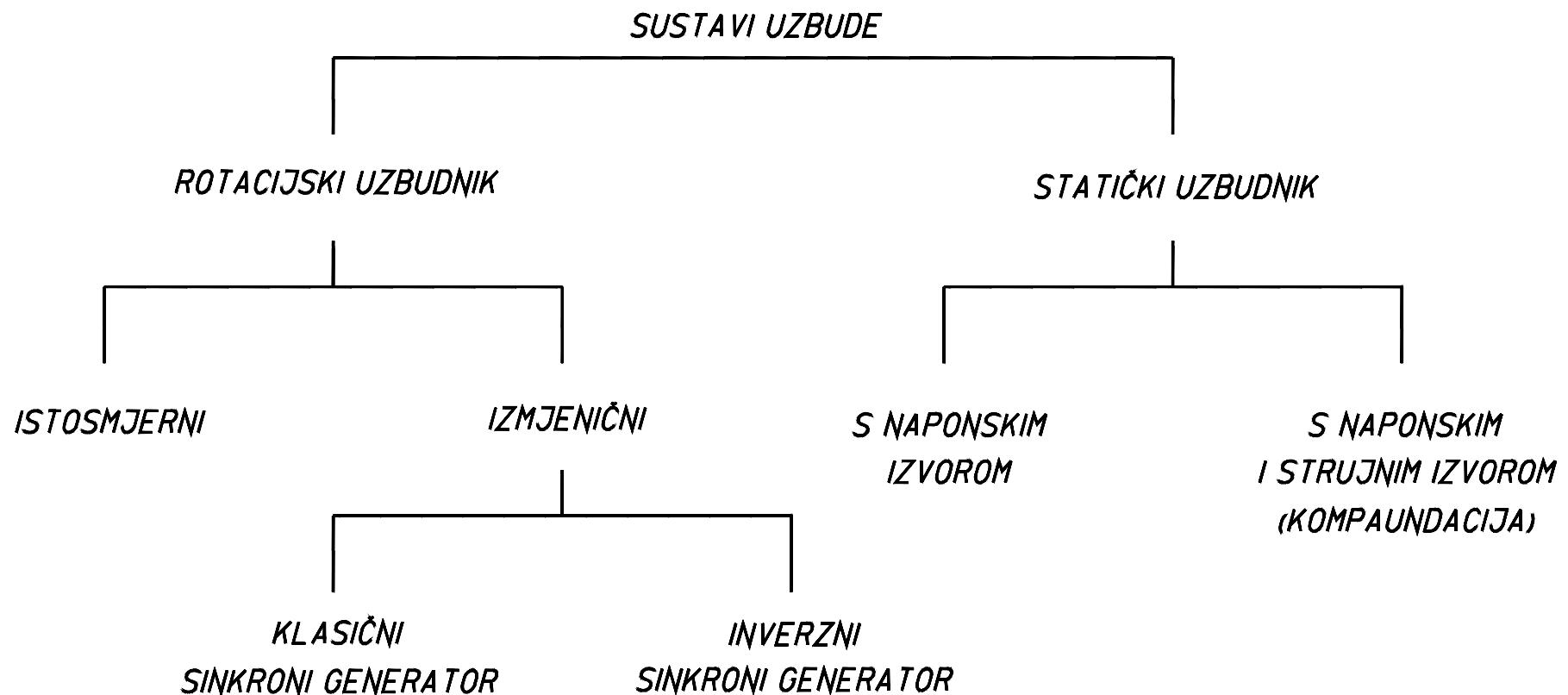
P_g - ukupni gubici

Korisnost:

$$\eta = \frac{P}{P_{el}} = \frac{P}{P + P_g}$$

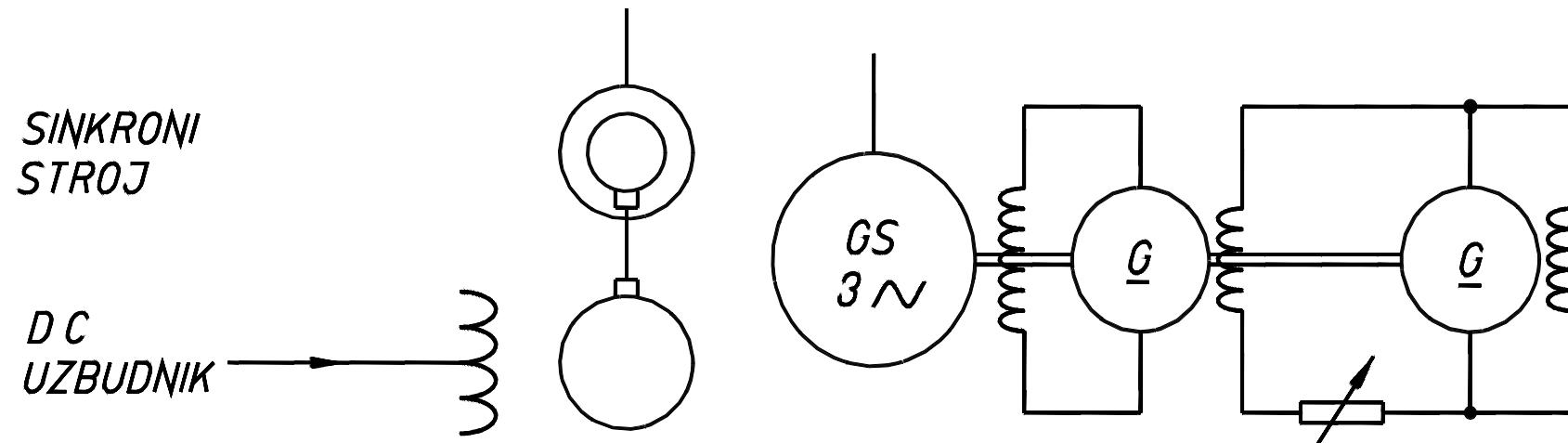
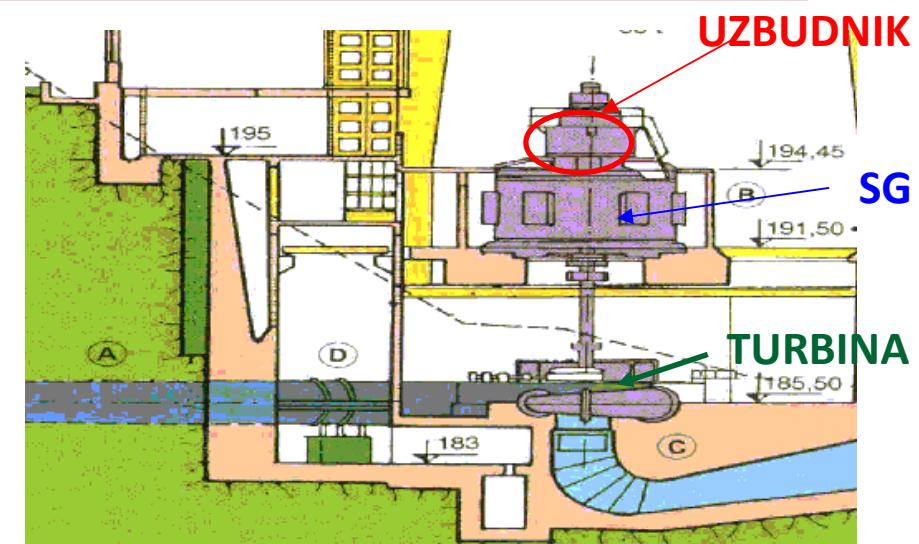


UZBUDNI SUSTAVI - podjela



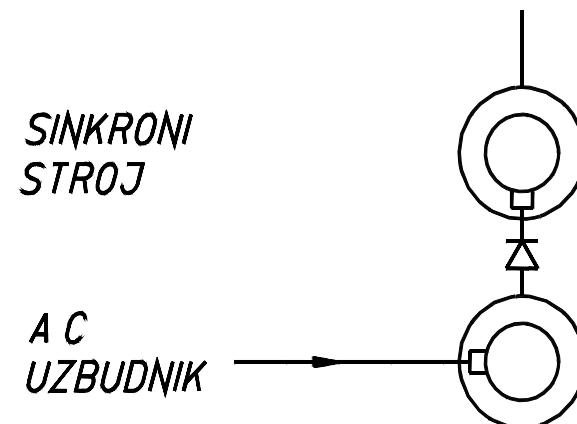
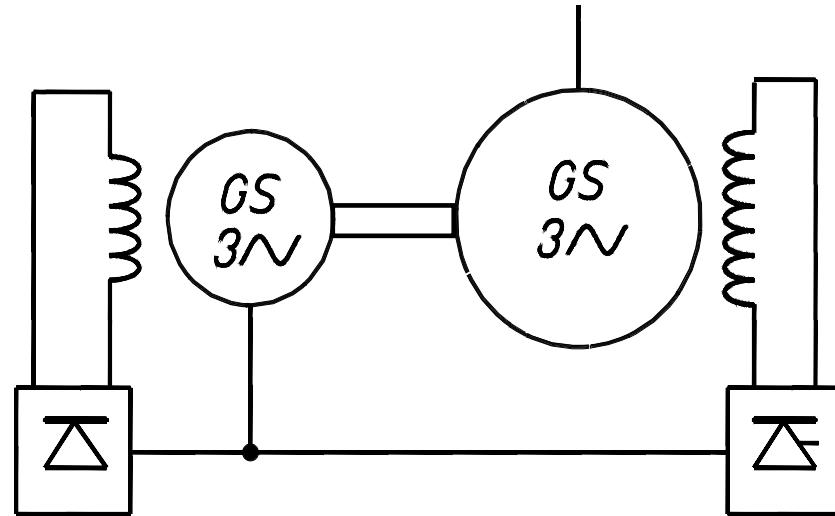
Klasični uzbudni sustav s istosmjernim uzbudnikom

- Zbog problema s istosmjernim uzbudnikom (skupo održavanje, ugljena prašina od četkica koje kližu po kolektoru,...) danas se ne koristi u novim agregatima



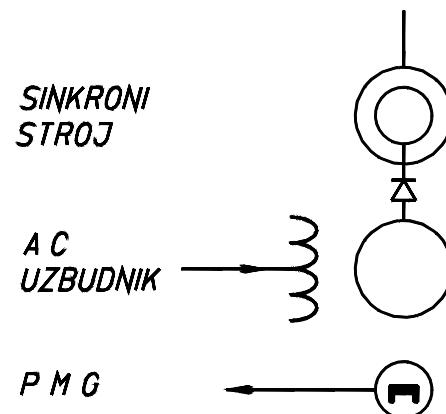
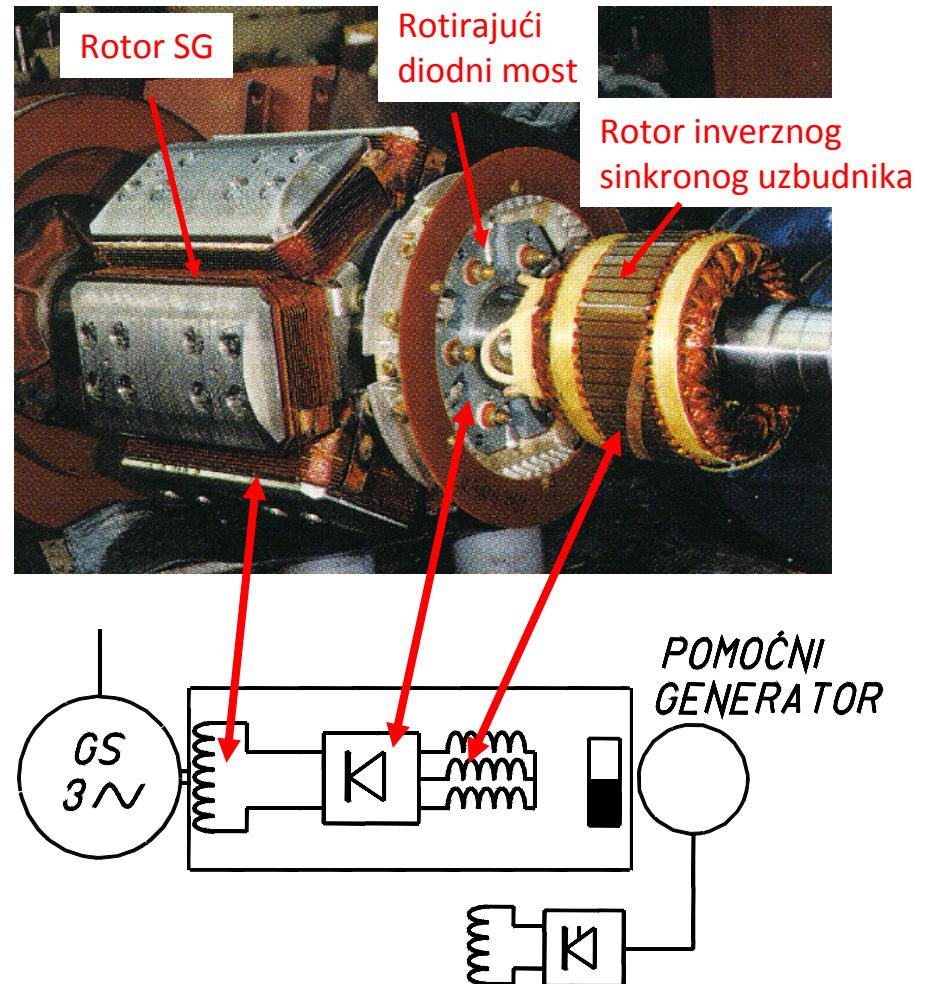
Uzbudni sustav sa sinkronim uzbudnikom

- Uzbudnik je sinkroni generator najčešće pogonjen turbinom na zajedničkoj osovini.
- Uzbuda se regulira statičkim upravlјivim ispravljačem (tiristori, tranzistori,...)
- Postoje klizni koluti i četkice na dva mesta



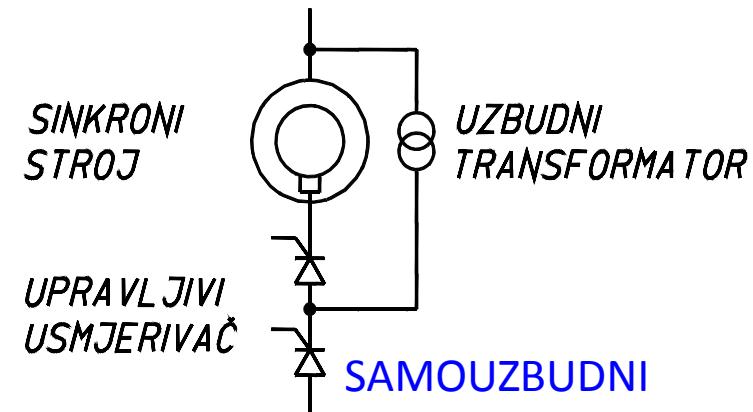
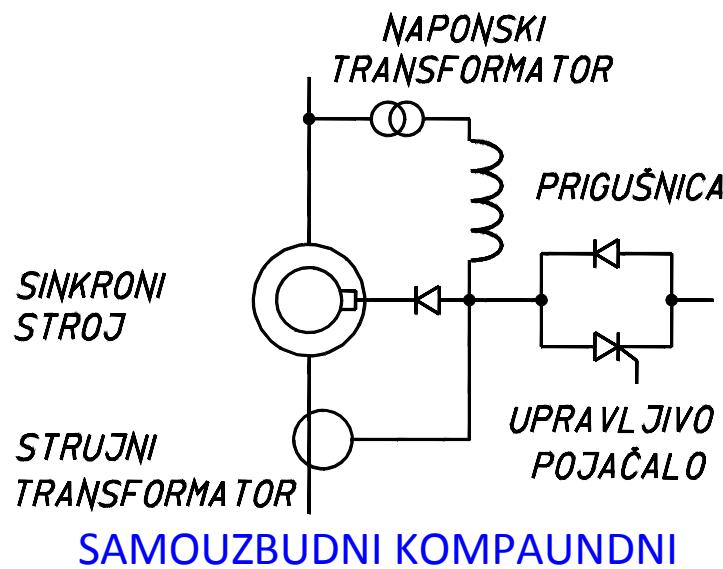
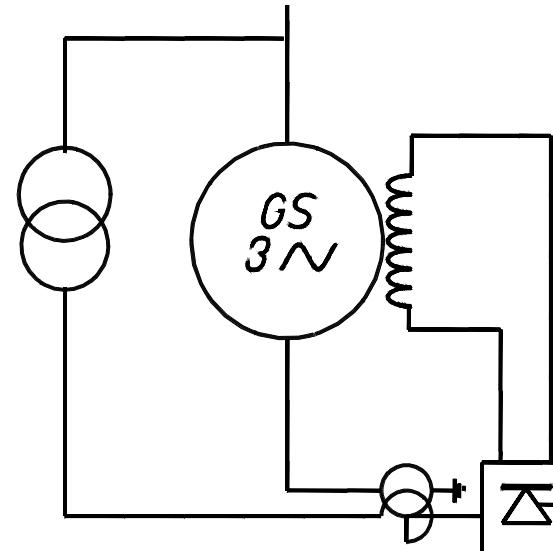
Beskontaktni sustav uzbude s rotirajućim diodama

- Uzbudnik je sinkroni stroj inverzne izvedbe (uzbuda na statoru).
- Rotirajući diodni most smješten na rotoru.
- Nema kliznih kontakata ni četkica.



Statički samouzbudni kompaundni sustav uzbude (zbrajanje struje na izmjeničnoj strani)

- Nema rotacijskog uzbudnika nego uzbudni - kompaundni transformator i upravljivi ispravljač.

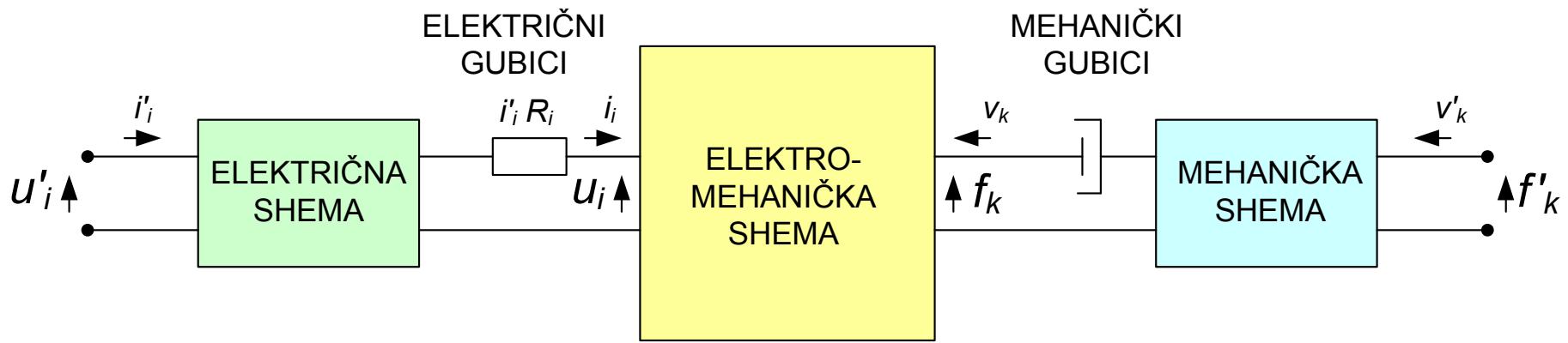


ELEKTROMEHANIČKA PRETVORBA

TESiT.3 - Osnovni prikaz elektromehaničke pretvorbe u električnom stroju

Prof. dr. sc. Zlatko Maljković

Osnovni prikaz elektromehaničke pretvorbe u električnom stroju



Ulagne ili izlazne stezaljke stroja:

Lijeve stezaljke – električne stezaljke

Desne stezaljke – mehaničke stezaljke

Bilanca energija

- U elektromehaničkoj shemi nema gubitaka, ona je konzervativna, pa vrijedi bilanca energije:

Primljena energija + predana energija = akumulirana energija

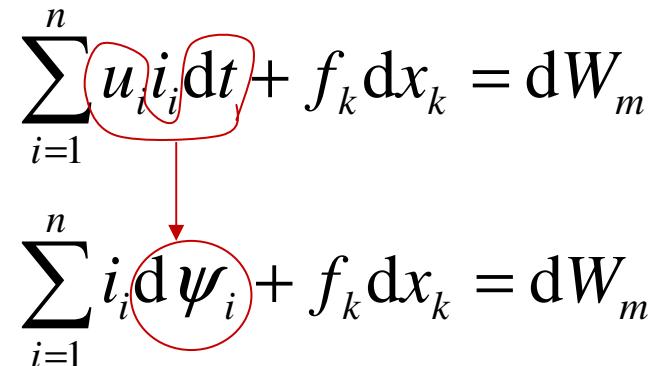
$$W_{Ul} + W_{Iz} = W_{akum}$$

- Akumulirana energija W_{akum} – samo je **magnetska** energija (kinetička je prikazana u mehaničkoj shemi – ovisi samo o mehaničkim parametrima)
- Ova bilanca poslužit će za proračun sile odnosno zakretnog momenta što ga u općem slučaju razvija električni stroj. Zamislimo virtualni pomak na k -toj mehaničkoj stezaljci dx_k što uzrokuje promjene i svih struja u stroju. Na ostalim mehaničkim stezaljkama nema nikakvog pomaka.

Bilanca energija

- U virtualnom pomaku na k -toj mehaničkoj stezaljci dx_k zamislimo da je određena energija ušla u stroj kroz električne stezaljke i neka druga energija izašla kroz mehaničke stezaljke (motorski rad u motorskom sustavu prikazivanja).
- Virtualni pomak donosi razmjenu mehaničke energije na mehaničkoj stezaljci: $dW_{Meh} = f_k dx_k$
- Prirast električne energije u elektromehaničkoj shemi u vremenu dt :
- Napon na i -tom ulazu u ravnoteži je s induciranim naponom: $u_i = -e_i = \frac{d\psi_i}{dt}$
- Bilanca energija:
- odnosno:

$$\sum_{i=1}^n u_i i_i dt + f_k dx_k = dW_m$$



$$\sum_{i=1}^n i_i d\psi_i + f_k dx_k = dW_m$$

Odabir nezavisnih varijabli

- Neka su nezavisne varijable
 - električne: struje namota i_1, i_2, \dots, i_n
 - mehaničke: pomaci x_1, x_2, \dots, x_m
- Ulančeni tok s namotom i ovisi o strujama kroz namote i o induktivitetima, koji pak ovise o mehaničkim koordinatama (položaju rotora prema statoru), pa je ulančeni tok funkcija električnih i mehaničkih koordinata:

$$\psi_i = \psi_i(i_1, i_2, \dots, i_n; x_1, x_2, \dots, x_m)$$

- Akumulirana magnetska energija također ovisi o strujama i pomacima:

$$W_m = W_m(i_1, i_2, \dots, i_n; x_1, x_2, \dots, x_m)$$

Bilanca energije

- Elektromagnetska sila f_{elmk} u ravnoteži je s vanjskom silom f_k
- pa je bilanca:

$$-f_k dx_k = f_{elmk} dx_k = \sum_{i=1}^n i_i d\psi_i - dW_m$$

- gdje su potpuni diferencijiali ulančanih tokova i magnetske energije u virtualnom pomaku:

$$d\psi_i = \frac{\partial \psi_i}{\partial x_k} dx_k + \sum_{r=1}^n \frac{\partial \psi_i}{\partial i_r} di_r$$

$$dW_m = \frac{\partial W_m}{\partial x_k} dx_k + \sum_{i=1}^n \frac{\partial W_m}{\partial i_i} di_i$$

Bilanca energije

- Uvrštavanjem u bilancu energije dobiva se:

$$f_{elmk} dx_k = \sum_{r=1}^n i_r \frac{\partial \psi_i}{\partial x_k} dx_k + \sum_{i=1}^n i_i \sum_{r=1}^n \frac{\partial \psi_i}{\partial i_r} di_r -$$

$$- \frac{\partial W_m}{\partial x_k} dx_k - \sum_{i=1}^n \frac{\partial W_m}{\partial i_i} di_i$$

$$f_{elmk} dx_k = \left(- \frac{\partial W_m}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^n i_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x_k} \right) dx_k + \sum_{i=1}^n \left(- \frac{\partial W_m}{\partial i_i} + \sum_{r=1}^n i_r \frac{\partial \psi_r}{\partial i_i} \right) di_i$$

Elektromagnetska sila

- Dijeljenjem s dx_k binaca energije je:

$$f_{elmk} = -\frac{\partial W_m}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^n i_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^n \left(-\frac{\partial W_m}{\partial i_i} + \sum_{r=1}^n i_r \frac{\partial \psi_r}{\partial i_i} \right) \frac{di_i}{dx_k}$$

- Ako umjesto promjene struje po pomaku napišemo:

$$\frac{di}{dx_k} = \frac{di}{dt} \cdot \frac{dt}{dx_k} = \frac{di}{dt} \cdot \frac{1}{v_k}$$

- Slijedi da desni zadnji član ovisi o promjeni struje, a poznato je da je sila neovisna o promjeni struje: $\bar{F} = i(\bar{dl} \times \bar{B})$
- zato suma uz di/dt mora biti jednak nula:

$$\sum_{i=1}^n \left(-\frac{\partial W_m}{\partial i_i} + \sum_{r=1}^n i_r \frac{\partial \psi_r}{\partial i_i} \right) = 0$$

Elektromagnetska sila

- Elektromagnetska sila

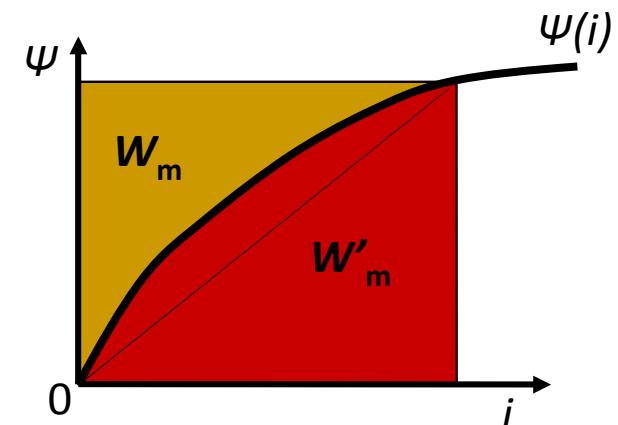
$$f_{elmk} = -\frac{\partial W_m}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^n i_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x_k}$$

- Akumulirana magnetska energija u svitku:

$$W_m = \int_0^\psi i d\psi = i\psi - \int_0^i \psi di$$

- Drugi dio predstavlja magnetsku koenergiju:

$$W'_m = \int_0^i \psi di$$



Elektromagnetska sila

- Deriviranjem po mehaničkoj koordinati:

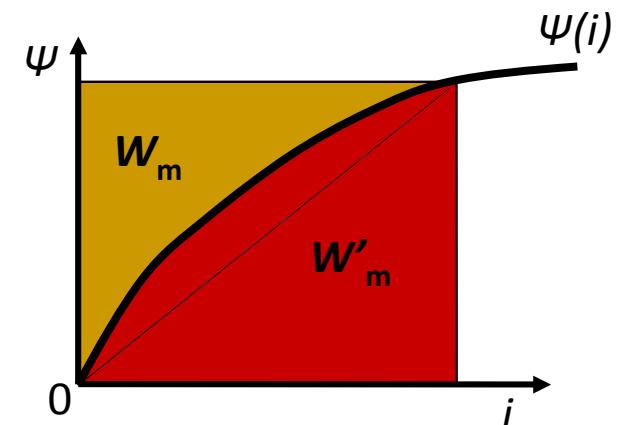
$$\frac{\partial W_m}{\partial x} = i \frac{d\psi}{dx} - \frac{\partial W'_m}{\partial x}$$

- a za n svitaka:

$$\frac{\partial W_m}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^n i_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial W'_m}{\partial x_k}$$

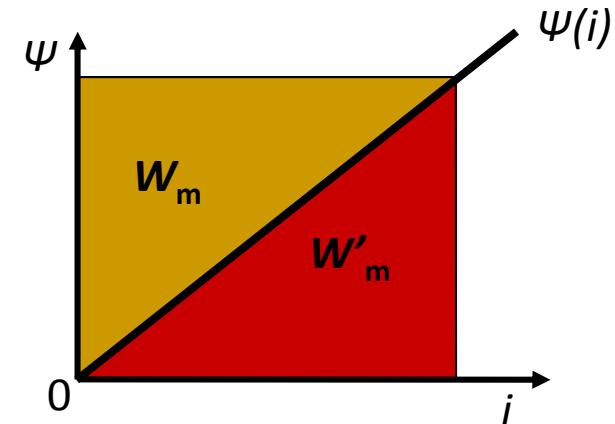
- pa se dobije za elektromagnetsku silu:

$$f_{elmk} = \frac{\partial W'_m}{\partial x_k}$$



Linearni magnetski krug

- U linearnom slučaju vrijedi $W'_m = W_m$
- pa slijedi: $f_{elmk} = \frac{\partial W_m}{\partial x_k}$
- Dakle, dovoljno je poznavati akumuliranu magnetsku energiju kao funkciju pomaka, da bi se u linearном slučaju odredila elektromagnetska sila (u praksi pomak je zakret rotora).
- **Zaključujemo da akumulirana magnetska energija mora biti ovisna o položaju rotora. U suprotnom nije ostvaren nužni uvjet da neka elektromagnetska naprava bude električni stroj.**
- Iz izraza se uočava temeljno značenje akumulirane magnetske energije. Ako je ne bi bilo, električni stroj zasnovan na elektromagnetskoj indukciji uopće ne bi mogao postojati!



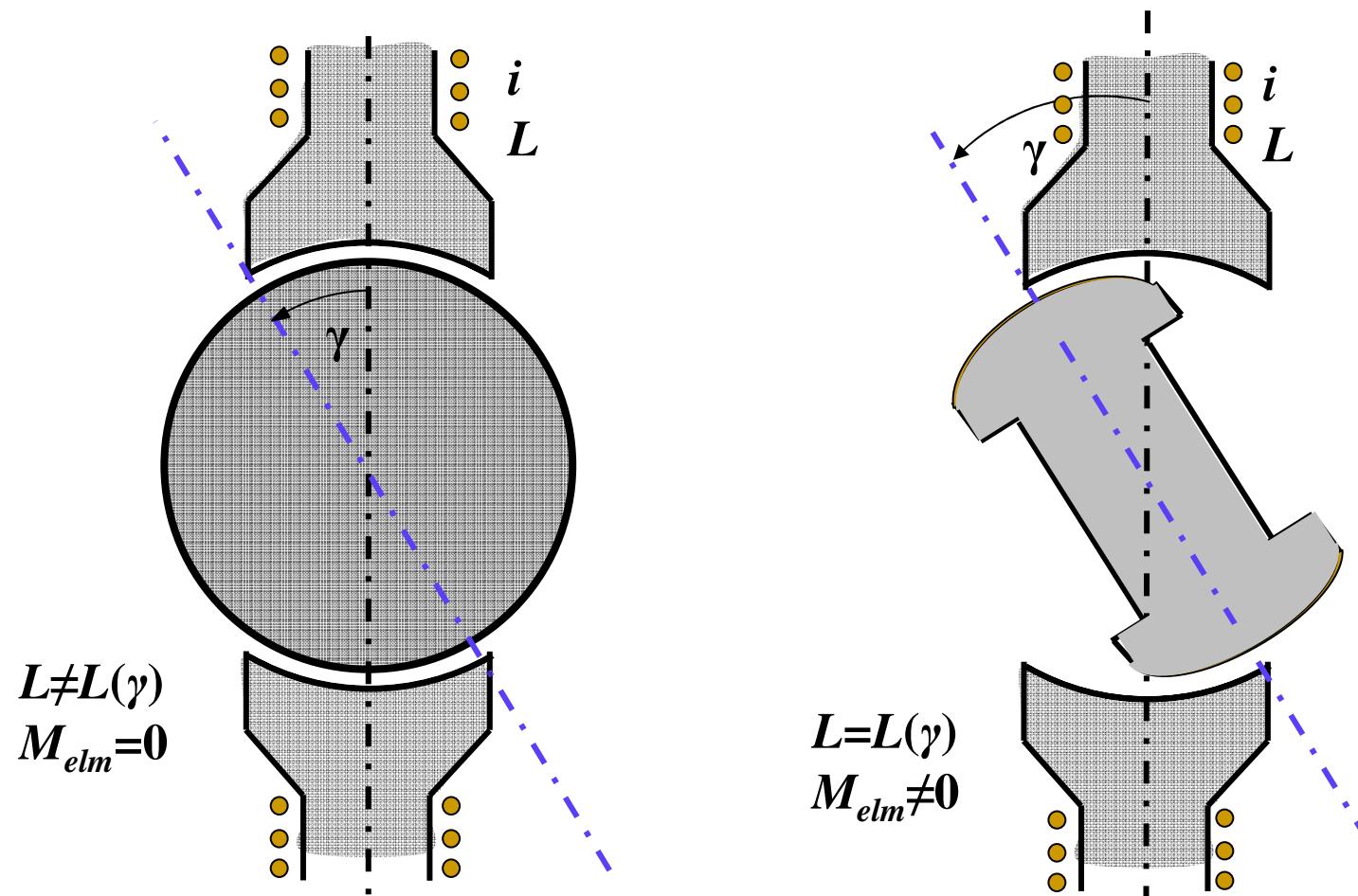
Elektromagnetski moment

- Za linearni slučaj vrijedi:
 - Deriviranjem:
 - dobiva se elektromagnetska sila u praktičnom obliku:
 - odnosno u matričnom prikazu:
 - Umnožak obodne sile i kraka daje moment
 $M_{elm} = f_{elm} D/2$, u kojem mehanička koordinata umjesto pomaka postaje kut zakreta $\gamma_m = x/(D/2)$
 - Elektromagnetski moment:
- $$W_m = W'_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \psi_i i_i$$
- $$\frac{\partial W_m}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n i_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x_k}$$
- $$f_{elmk} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n i_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x_k}$$
- $$f_{elmk} = \frac{1}{2} [i]_t \cdot \frac{\partial [L]}{\partial x_k} \cdot [i]$$

$$M_{elm} = \frac{1}{2} [i]_t \cdot \frac{d[L]}{d\gamma_m} \cdot [i]$$

Nužan uvjet za električni stroj

- Elektromagnetski moment postoji samo ako je induktivitet ovisan o položaju rotora prema statoru



Uvjet za postojanje trajnog momenta

- Sa prethodne slike i u slučaju istaknutih polova na rotoru razvija se elektromagnetski moment koji je periodička funkcija o položaju rotora, tako da je srednja vrijednost momenta ravna nuli. Slika momenta ponavlja se nakon svake periode vrtnje rotora. Koliko se predaje energije u jednoj poluperiodi, toliko se prime u drugoj poluperiodi.
- Ukupna energija predana u takvoj napravi:

$$\int_0^T M_{elm} d\gamma_m$$

- Ako je struja kroz statorske namote istosmjerna ta je energija jednaka nuli.

Uvjeti da bi postojao električni stroj

- Nužan uvjet: *Matrica induktiviteta mora biti ovisna o položaju rotora prema statoru:*

$$[L] = [L(\gamma_m)]$$

$$\frac{d[L]}{dt} \neq 0$$

- Dovoljan uvjet za trajnu elektromehaničku pretvorbu: *Moment mora imati srednju vrijednost kroz jednu električnu periodu vrtnje T :*

$$M_{elm_Sr} = \frac{1}{2T} \int_0^T [i]_t \cdot \frac{d[L]}{d\gamma_m} \cdot [i] d\gamma_m \neq 0$$

Bilanca energija elektromehaničke pretvorbe

- U kompletnoj shemi elektromehaničke pretvorbe zanemarujući gubitke vrijedi bilanca energije:

$$\begin{aligned} & \text{Prirast energije na električnim stezaljkama} + \text{Prirast energija na mehaničkim stezaljkama} \\ & = \text{Prirast magnatske energije} + \text{Prirast kinetičke energije} \end{aligned}$$

$$dW_{El} + dW_{Meh} = dW_m + dW_k$$

- Akumulirana kinetička energija W_k : $W_k = J \frac{\omega_m^2}{2}$
- Prirast akumulirana kinetička energija dW_k uz mehanički kut γ_m i kutnu brzinu ω_m :

$$dW_k = J \omega_m d\omega_m \quad dW_k = J \frac{d^2 \gamma_m}{dt^2} d\gamma_m$$

- Bilanca energije u virtualnom pomaku:

$$\sum_{i=1}^n i_i d\psi_i + M_T d\gamma_m = dW_m + J \frac{d^2 \gamma_m}{dt^2} d\gamma_m$$

Bilanca energija elektromehaničke pretvorbe

- Bilanca energije:

$$M_T d\gamma_m = J \frac{d^2 \gamma_m}{dt^2} d\gamma_m + \left(\frac{\partial W_m}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^n i_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x_k} \right) d\gamma_m + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial W_m}{\partial i_i} - \sum_{r=1}^n i_r \frac{\partial \psi_r}{\partial i_i} \right) di_i$$

- Dijeljenjem s $d\gamma_m$:

$$M_T = J \frac{d^2 \gamma_m}{dt^2} + \frac{\partial W_m}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^n i_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x_k} + \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial W_m}{\partial i_i} - \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^n i_r \frac{\partial \psi_r}{\partial i_i} \right) \frac{di_i}{d\gamma_m}$$

- Desni zadnji član ovisi o promjeni struje, pa ta suma uz $di/d\gamma_m$ mora biti jednak nula, pa se dobiva:

$$M_T = J \frac{d^2 \gamma_m}{dt^2} + \frac{\partial W_m}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^n i_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x_k}$$

Jednadžba gibanja

- Za linearni slučaj kad je magnetska energija jednaka koenergiji dobiva se:

$$\frac{\partial W_m}{\partial \gamma_m} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n i_i \frac{\partial \psi_i}{\partial \gamma_m}$$

- Uvrštavanjem prethodnog izraza u bilancu energije dobiva se:

$$M_T = J \frac{d^2 \gamma_m}{dt^2} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n i_i \frac{\partial \psi_i}{\partial \gamma_m}$$

- Promjenom redoslijeda dobiva se jednadžba rotacijskog gibanja:

$$J \frac{d^2 \gamma_m}{dt^2} = M_T + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n i_i \frac{\partial \psi_i}{\partial \gamma_m}$$

- u kojoj se pojavljuje elektromagnetski moment:

$$M_{elm} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n i_i \frac{\partial \psi_i}{\partial \gamma_m}$$

Elektromagnetski moment

- Elektromagnetski moment izražen pomoću matrice induktiviteta:

$$M_{elm} = \frac{1}{2} [i]_t \cdot \frac{d[L]}{d\gamma_m} \cdot [i]$$

- Položaj u jednadžbi gibanja pokazuje da je elektromagnetski moment pozitivan kad djeluje u smjeru vrtnje rotora, tj. kada djeluje kao moment motora:

$$J \frac{d^2\gamma_m}{dt^2} = M_T + M_{elm}$$

OPĆI MODEL ELEKTRIČNOG STROJA

TESiT.4 - Opća teorija električnih strojeva. Kronov model općeg električnog stroja. Matrica induktiviteta. Elektromagnetski moment. Uvjeti za elektromehaničku pretvorbu.

Prof. dr. sc. Zlatko Maljković



Ak. god. 2011/2012

Opći model električnog rotacijskog stroja

Oblik i sastav općeg modela električnog stroja:

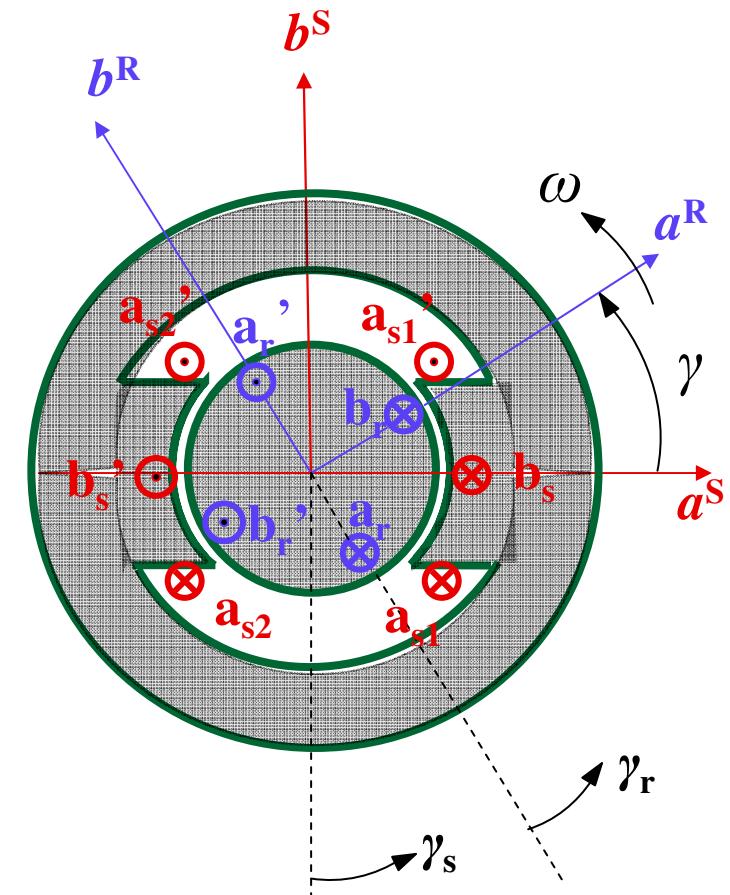
- Istaknuti polovi na statoru
- Cilindrični rotor
- Dva namota na statoru a^S i b^S , pod električnim kutom od devedeset stupnjeva
- Dva namota na rotoru a^R i b^R , pod električnim kutom od devedeset stupnjeva

Sastav općeg modela električnog stroja

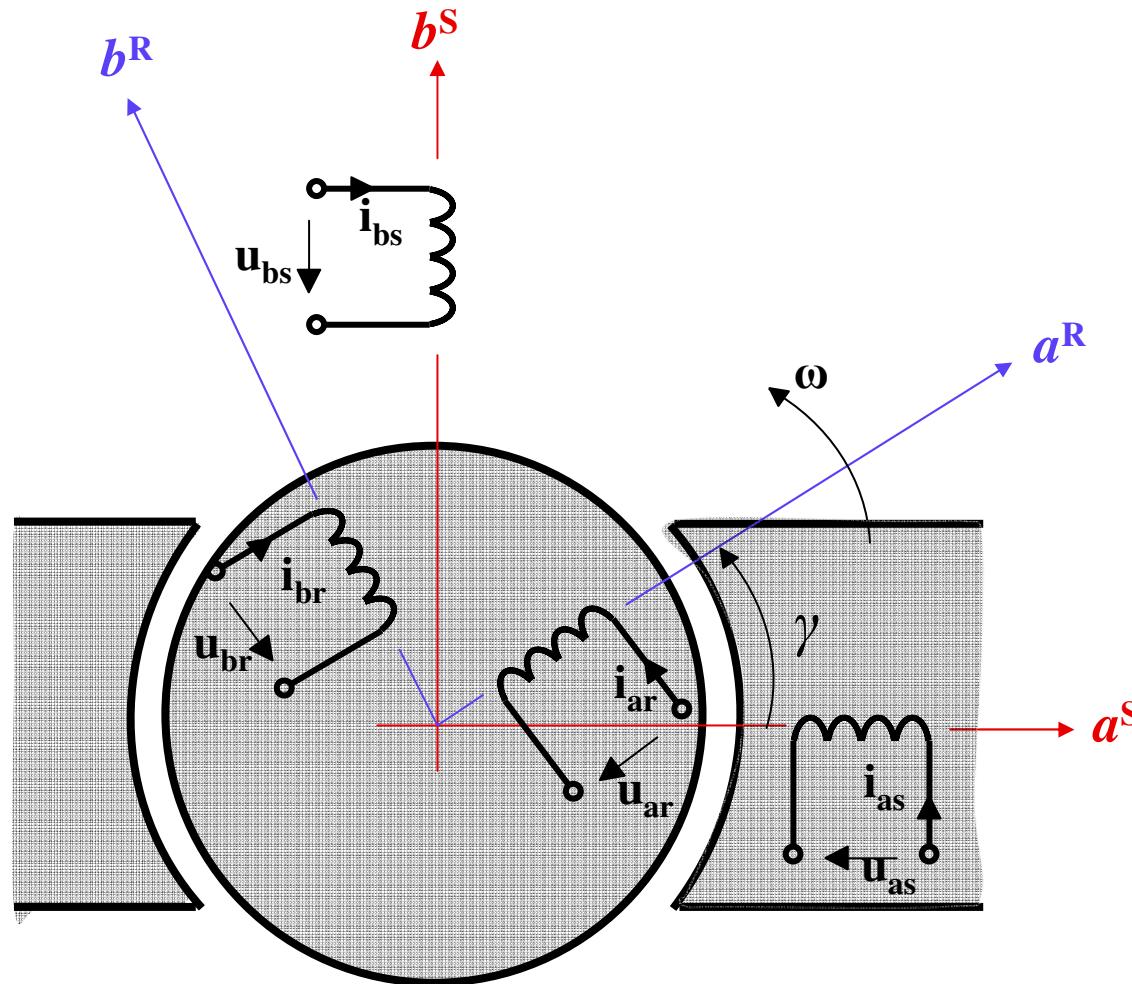
- STATOR: istaknuti polovi, dva namota pod 90° elek.: a^S i b^S
- ROTOR: cilindričan, dva namota pod 90° elek.: a^R i b^R

Nezavisne varijable
(koordinate) općeg modela:

- struje namota: i_a^S i_b^S i_a^R i_b^R
- električni kut ($\gamma_S - \gamma_R$): γ



Shematski prikaz općeg modela



Prepostavke

1. Opći model ima onoliko perioda osnovnog harmonika protjecanja namota statora ili rotora koliko ima pari istaknutih polova. Praktički to znači da je broj pari polova oba namota jednak broju pari istaknutih polova:

$$\gamma = p \cdot \gamma_m = n \cdot \gamma_m$$

2. Protjecanje svakog od četiri namota u prostoru je sinusno, tako da vrijedi:

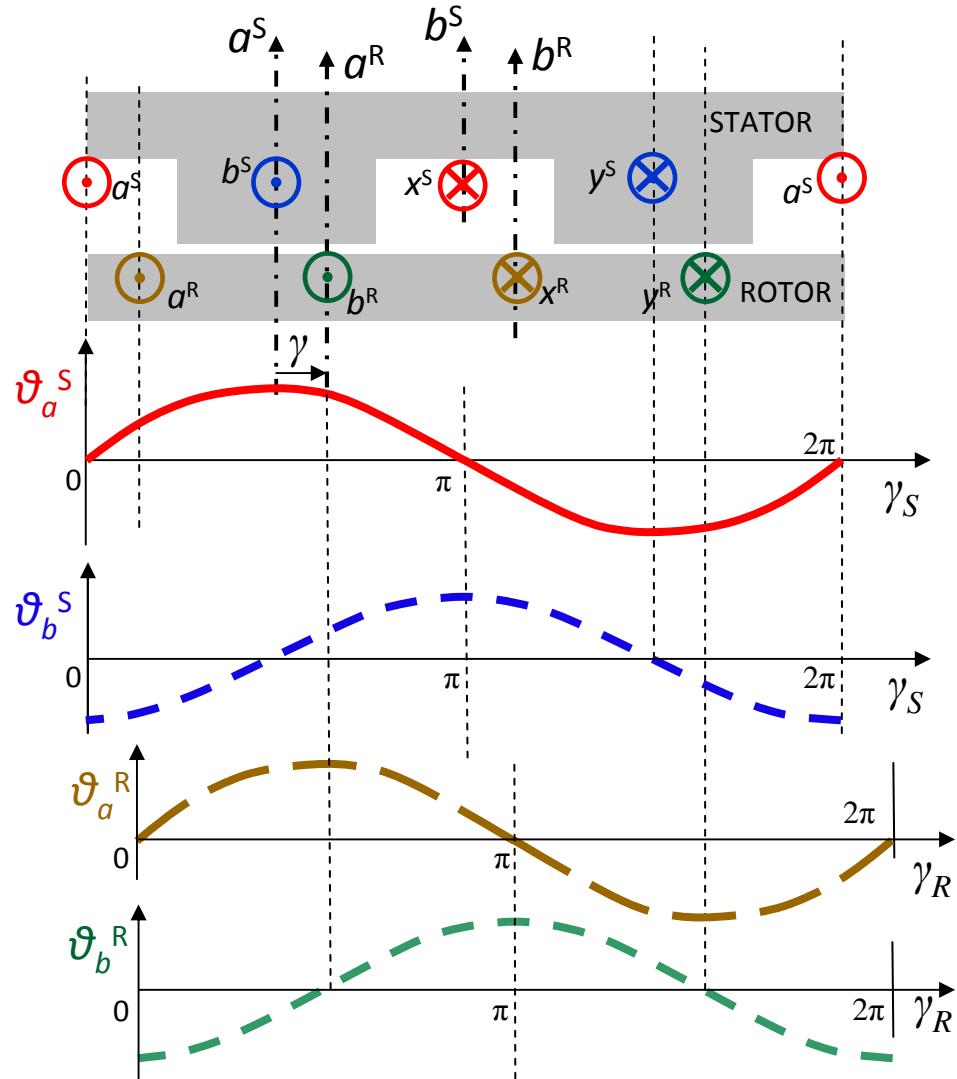
$$\vartheta_a^S = \Theta^S \cdot \sin \gamma^S$$

$$\vartheta_b^S = \Theta^S \cdot \sin \left(\gamma^S - \frac{\pi}{2} \right) = -\Theta^S \cdot \cos \gamma^S$$

$$\vartheta_a^R = \Theta^R \cdot \sin \gamma^R = \Theta^R \cdot \sin \left(\gamma^S - \gamma \right)$$

$$\begin{aligned} \vartheta_b^R &= \Theta^R \cdot \sin \left(\gamma^R - \frac{\pi}{2} \right) = -\Theta^R \cdot \cos \gamma^R = \\ &= -\Theta^R \cdot \cos \left(\gamma^S - \gamma \right) \end{aligned}$$

- Ovime smo zapravo prepostavili idealne namote, kojima su svi faktori namota za više harmoničke članove jednaki nuli.



Prepostavke

3. Zanemaruje se utjecaj utora u kojima su smješteni namoti na magnetsku vodljivost zračnog raspora. Uzima se u obzir samo utjecaj istaknutih polova. Magnetska vodljivost duž oboda opisuje se s beskonačnim redom s parnim harmonicima:

$$\lambda = \lambda_0 - \lambda_2 \cos(2\gamma^s) + \lambda_4 \cos(4\gamma^s) - \dots$$

- U ovom ćemo općem modelu računati samo s prva dva člana, pa će magnetska vodljivost biti:

$$\lambda = \lambda_0 - \lambda_2 \cos(2\gamma^s)$$

4. Magnetska se indukcija duž oboda stroja dobiva množenjem lokalnih vrijednosti protjecanja i magnetske vodljivosti:

$$b = \vartheta \cdot \lambda$$

- Budući da su funkcije protjecanja sinusne, a magnetska vodljivost ima konstantan član i član s dvostrukom frekvencijom koji održava promjenu vodljivosti zbog istaknutih polova, te će umnožak dati indukciju osnovne frekvencije i treći harmonički član. Potonji ćemo zanemariti, polazeći od prepostavke o idealnim namotima kojima su faktori namota za više harmoničke članove jednaki nuli.

Prepostavke

5. Namoti statora imaju isti broj zavoda i iste otpore. To vrijedi i za namote rotora:

$$w_a^S = w_b^S = w^S$$

$$w_a^R = w_b^R = w^R$$

$$R_a^S = R_b^S = R^S$$

$$R_a^R = R_b^R = R^R$$

6. Zanemaruje se magnetski otpor u željezu stroja

Dvofazni namoti

- Na statoru i rotoru postoje dvofazni namoti. Poznato je, a to će se i pokazati, da se svaki višefazni namot može svesti na dvofazni. Zbog toga se odabrani opći model električnog stroja može svesti na bilo koju vrstu stvarnog električnog stroja ovim postupcima:
 - specijalizacijom geometrije statora (eventualna ukidanja istaknutih polova);
 - specijalizacijom namota statora i rotora (svođenje višefaznog namota na dvofazni, ukidanje namota u nekoj od osi)
 - specijalizacijom uvjeta napajanja (npr. kratki spoj na stezaljkama namota rotora u slučaju asinkronog stroja)

Ulančani magnetski tokovi

$$\begin{bmatrix} \psi_a^s \\ \psi_b^s \\ \psi_a^r \\ \psi_b^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{aa}^{ss} + L_\sigma^s & L_{ab}^{ss} & L_{aa}^{sr} & L_{ab}^{sr} \\ L_{ba}^{ss} & L_{bb}^{ss} + L_\sigma^s & L_{ba}^{sr} & L_{bb}^{sr} \\ L_{aa}^{rs} & L_{ab}^{rs} & L_{aa}^{rr} + L_\sigma^r & L_{ab}^{rr} \\ L_{ba}^{rs} & L_{bb}^{rs} & L_{ba}^{rr} & L_{bb}^{rr} + L_\sigma^r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_a^s \\ i_b^s \\ i_a^r \\ i_b^r \end{bmatrix}$$

- Značenje oznaka:
 S – stator R – rotor
- a, b - namoti
prvi indeks - namot koji se ulančuje
drugi indeks - namot koji uzbuduje

$L_{b/a}^{SR}$ namot statora b^s ulančuje
namot rotora a^R uzbudi

Induktiviteti

- Proračunava se najprije induktivitete koji pripadaju glavnom magnetskom krugu općeg modela stroja. Induktiviteti se odnose na magnetsko polje koje proizlazi kroz zračni raspor i ulančuje namote statora i rotora. U slučaju samoinduktiviteta glavnim ćemo induktivitetima dodati rasipne induktivitete.
- U proračunu induktiviteta postupamo poznatim redoslijedom:

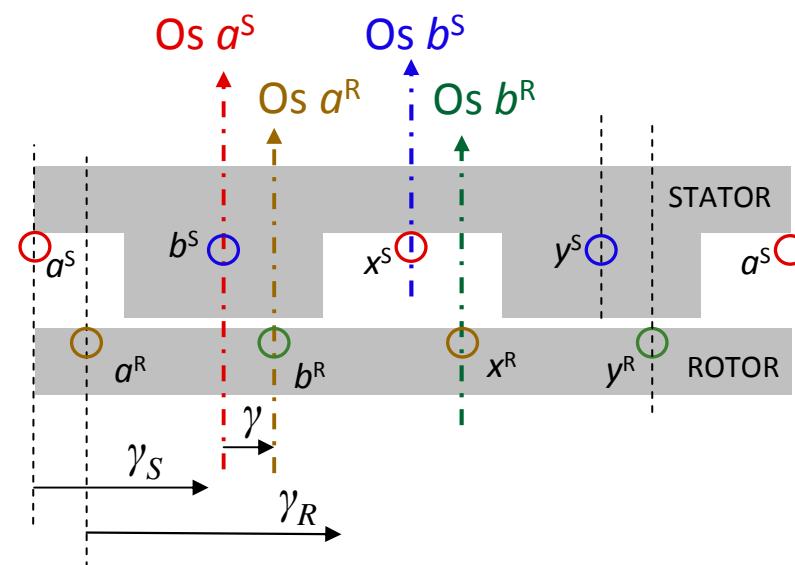
Protjecanje ϑ

→ indukcija b

→ tok φ

→ ulančani tok ψ

→ induktivitet L



Samoinduktivitet statorskog namota "a"

$$L_{aa}^{ss}$$

samoinduktivitet statorskog namota "a"

- Promatramo magnetske prilike u slučaju kad polje uzbudi i istodobno obuhvaća namot statora a^s
- Prostorna raspodjela protjecanja namota a^s : $\vartheta_a^s = \Theta^s \cdot \sin \gamma^s$
- Prostorna raspodjela indukcije koju stvara to protjecanje:

$$\begin{aligned} b_a^s &= \vartheta_a^s \cdot \lambda = \Theta^s \cdot \sin \gamma^s \cdot (\lambda_o - \lambda_2 \cos 2\gamma^s) = \\ &= \Theta^s \cdot \lambda_o \cdot \sin \gamma^s - \frac{1}{2} \Theta^s \cdot \lambda_2 \left[\sin(\gamma^s - 2\gamma^s) + \sin(\gamma^s + 2\gamma^s) \right] \\ b_a^s &= \Theta^s \left(\lambda_o + \frac{1}{2} \lambda_2 \right) \cdot \sin \gamma^s - \frac{1}{2} \Theta^s \cdot \lambda_2 \sin 3\gamma^s \end{aligned}$$

- U izrazu za indukciju pored osnovnog harmonika prostorne raspodjele javlja se i treći harmonik. Protjecanje je čisto sinusno, no unatoč tome, zbog parnog harmonika u funkciji magnetske vodljivosti, javlja se u indukciji i treći harmonički član. Njega u skladu s pretpostavkom zanemaruјemo.

Samoinduktivitet statorskog namota "a"

- Na slici su prikazani osnovni harmonik protjecanja statorske faze a , stvarna indukcija i osnovni harmonik indukcije u rasporu.

- Indukcija u zračnom rasporu:

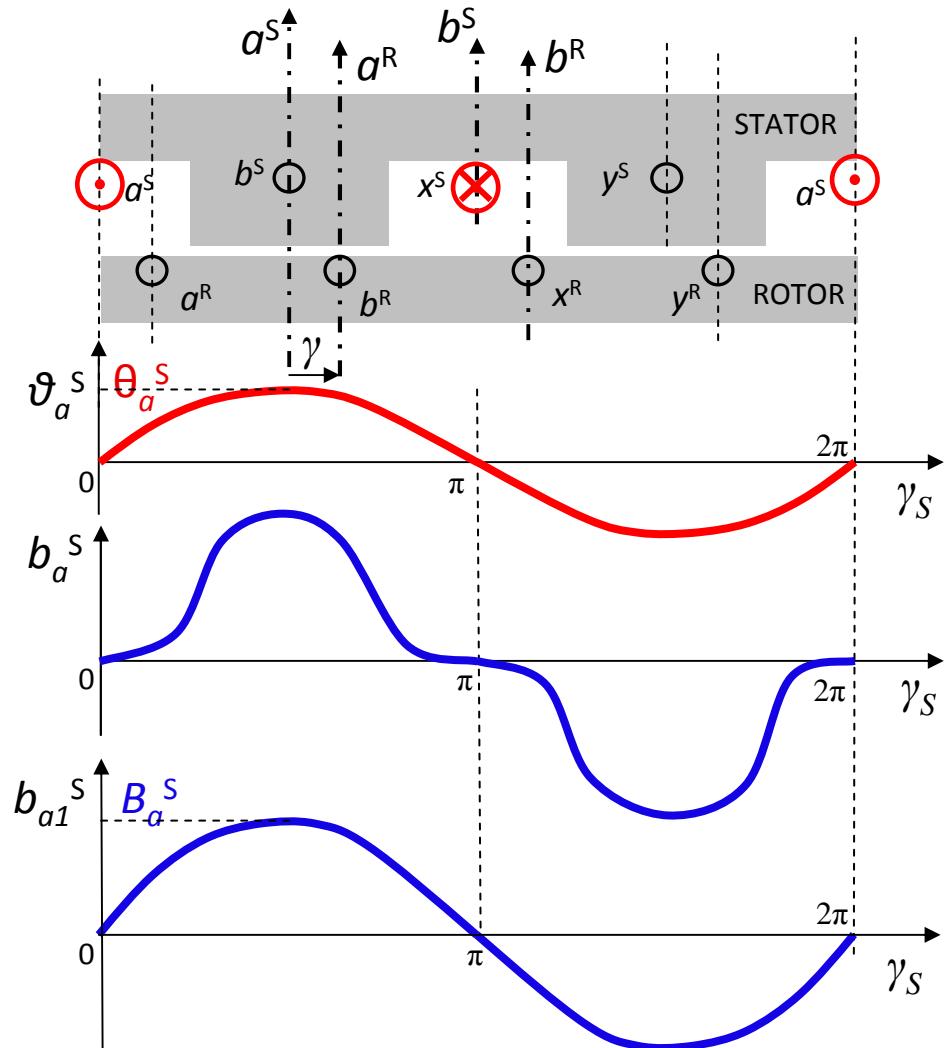
$$b_{a1}^s \approx \Theta^s \left(\lambda_o + \frac{1}{2} \lambda_2 \right) \sin \gamma^s$$

- Amplituda osnovnog harmonika indukcije iznosi:

$$B_a^s = \Theta^s \left(\lambda_o + \frac{1}{2} \lambda_2 \right)$$

- Magnetski se tok dobije integracijom raspodjele indukcije duž jednog polnog koraka:

$$\phi_a^s = \frac{2}{\pi} B_a^s \cdot \tau_p \cdot L = \frac{2}{\pi} \Theta^s \left(\lambda_o + \frac{1}{2} \lambda_2 \right) \cdot \tau_p \cdot L$$



Samoinduktivitet statorskog namota "a"

- Ulančani tok s namotom a^s dobije se množenjem toka s efektivnim brojem zavoja. To je umnožak stvarnog broja zavoja w^s i faktora namota za osnovni harmonički član f_n^s

$$\psi_{aa}^{ss} = \phi_a^s \cdot w^s \cdot f_n^s$$

- U oznaci za ulančeni tok nužno se javljaju dvostruki indeksi. Oni označuju koji namot uzbuduje tok, a koji ga ulančuje, kao što je to opisano za induktivitete.
- U izrazu za amplitudu protjecanja javlja se struja namota statora. To je trenutna vrijednost struje, budući da promatramo prilike magnetskog polja u određenom trenutku. Amplituda osnovnog harmonika protjecanja po jednom polu bit će

$$\Theta^s = \frac{2}{\pi} \frac{w^s \cdot f_n^s}{p} \cdot i_a^s$$

Samoinduktivitet statorskog namota "a"

- Ulančeni tok tada iznosi:

$$\psi_{aa}^{ss} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \frac{(w^s \cdot f_n^s)^2}{p} \left(\lambda_o + \frac{1}{2}\lambda_2\right) \cdot \tau_p \cdot L i_a^s$$

- Induktivitet L_{aa}^{ss} se dobiva dijeljenjem ulančanog toka sa strujom koja ga uzbudjuje:

$$L_{aa}^{ss} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \left(\lambda_o + \frac{1}{2}\lambda_2\right) \frac{\tau_p \cdot L}{p} (w^s f_n^s)^2$$

- Prvi član u submatrici statorskih veličina treba još dopuniti rasipnim induktivitetom L_σ^R tako da glasi: $L_{aa}^{ss} + L_\sigma^S = l_0^S + l_2^S + L_\sigma^S$
- gdje su:
$$l_0^S = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \frac{\tau_p \cdot L}{p} (w^s f_n^s)^2 \lambda_o$$

$$l_2^S = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \frac{\tau_p \cdot L}{p} (w^s f_n^s)^2 \frac{\lambda_2}{2}$$
- Ovaj je induktivitet konstantan, pa je njegova derivacija po mehaničkoj koordinati jednaka nuli. On, prema tome, ne doprinosi elektromehaničkoj pretvorbi energije.

Samoinduktivitet rotorskog namota "a"

$$L_{aa}^{RR}$$

samoinduktivitet rotorskog namota "a"

- Promatramo magnetske prilike u slučaju kad polje uzbuduje i istodobno obuhvaća namot rotoara a^R :
- Prostorna raspodjela protjecanja namota a^R : $\vartheta_a^R = \Theta^R \cdot \sin \gamma^R$
- Prostorna raspodjela indukcije koju stvara to protjecanje:

$$b_a^R = \vartheta_a^R \cdot \lambda = \Theta^R \cdot \sin \gamma^R \cdot (\lambda_o - \lambda_2 \cos 2(\gamma^R + \gamma)) = \Theta^R \cdot \lambda_o \cdot \sin \gamma^R - \frac{1}{2} \Theta^R \cdot \lambda_2 [\sin(2\gamma + 3\gamma^R) - \sin(2\gamma + \gamma^R)]$$

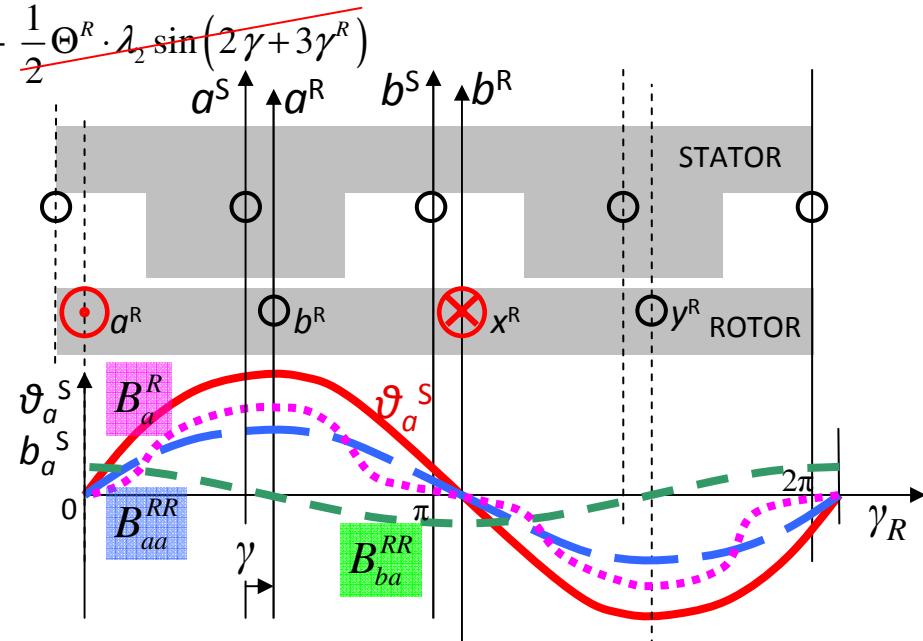
$$= \Theta^R \cdot \lambda_o \cdot \sin \gamma^R + \frac{1}{2} \Theta^R \cdot \lambda_2 [\sin 2\gamma \cdot \cos \gamma^R + \sin \gamma^R \cdot \cos 2\gamma] - \frac{1}{2} \Theta^R \cdot \lambda_2 \sin(2\gamma + 3\gamma^R)$$

$$b_a^R \approx \Theta^R \left(\lambda_o + \frac{1}{2} \lambda_2 \cos 2\gamma \right) \cdot \sin \gamma^R + \frac{1}{2} \Theta^R \cdot \lambda_2 \sin 2\gamma \cdot \cos \gamma^R$$

b_{aa}^{RR} b_{ba}^{RR}

Osnovni harmonik indukcije:

$$B_{aa}^{RR} = \Theta^R \left(\lambda_o + \frac{1}{2} \lambda_2 \cos(2\gamma) \right)$$



Samoinduktivitet rotorskog namota “a”

- Komponenta indukcija rotorskog namota “a” koja ulančuje taj isti namot:

$$b_{aa}^{RR} = \Theta^R \left(\lambda_o + \frac{1}{2} \lambda_2 \cos 2\gamma \right) \cdot \sin \gamma^R$$

- Osnovni harmonik te indukcije: $B_{ba}^{RR} = -\frac{1}{2} \Theta^R \cdot \lambda_2 \sin 2\gamma$

- Magnetski se tok dobije integracijom raspodjele indukcije duž jednog polnog koraka:

$$\phi_a^R = \frac{2}{\pi} B_a^R \cdot \tau_p \cdot L = \frac{2}{\pi} \Theta^R \left(\lambda_o + \frac{1}{2} \lambda_2 \cos 2\gamma \right) \cdot \tau_p \cdot L$$

- Ulančeni tok s namotom a^R dobije se množenjem toka s efektivnim brojem zavoja:

- $\psi_{aa}^{RR} = \phi_a^R \cdot w^R \cdot f_n^R$

- U oznaci za ulančani tok nužno se javljaju dvostruki indeksi. Oni označuju koji namot uzbuduje tok, a koji ga ulančuje, kao što je to opisano za induktivitete.

- Amplituda osnovnog harmonika protjecanja po jednom polu bit će:

$$\Theta^R = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{w^R f_n^R}{p} \cdot i_a^R$$

Samoinduktivitet rotorskog namota “a”

- Ulančeni tok tada iznosi:

$$\psi_{aa}^{RR} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \frac{\left(w^R \cdot f_n^R\right)^2}{p} \left(\lambda_o + \frac{1}{2} \lambda_2 \cos 2\gamma \right) \cdot \tau_p \cdot L \cdot i_a^R$$

- Induktivitet L_{aa}^{RR} se dobiva dijeljenjem ulančanog toka sa strujom koja ga uzbudjuje:

$$L_{aa}^{RR} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \left(\lambda_o + \frac{1}{2} \lambda_2 \cos(2\gamma) \right) \frac{\tau_p \cdot L}{p} \left(w^R f_n^R \right)^2$$

- Prvi član u submatrici rotorskih veličina treba još dopuniti rasipnim induktivitetom L_σ^R tako da glasi:

$$L_{aa}^{RR} + L_\sigma^R = l_0^R + l_2^R \cos(2\gamma) + L_\sigma^R$$

- gdje su:

$$l_0^R = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \frac{\tau_p \cdot L}{p} \left(w^R f_n^R \right)^2 \lambda_o$$

$$l_2^R = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \frac{\tau_p \cdot L}{p} \left(w^R f_n^R \right)^2 \frac{\lambda_2}{2}$$

Međuinduktivitet rotorskih namota

$$L_{ba}^{RR}$$

međuinduktivitet rotorskog namota "b" uzbudjenog rotorskim namotom "a"

- Komponenta indukcija rotorskog namota "a" koja ulančuje rotorski namot "b":

$$b_{ba}^R = \frac{1}{2} \Theta^R \cdot \lambda_2 \sin 2\gamma \cdot \cos \gamma^R = -\frac{1}{2} \Theta^R \cdot \lambda_2 \sin 2\gamma \cdot \sin \left(\gamma^R - \frac{\pi}{2} \right)$$

- Osnovni harmonik te indukcije:

$$B_{ba}^{RR} = -\frac{1}{2} \Theta^R \cdot \lambda_2 \sin(2\gamma)$$

- Magnetski se tok dobije integracijom te indukcije duž jednog polnog koraka:

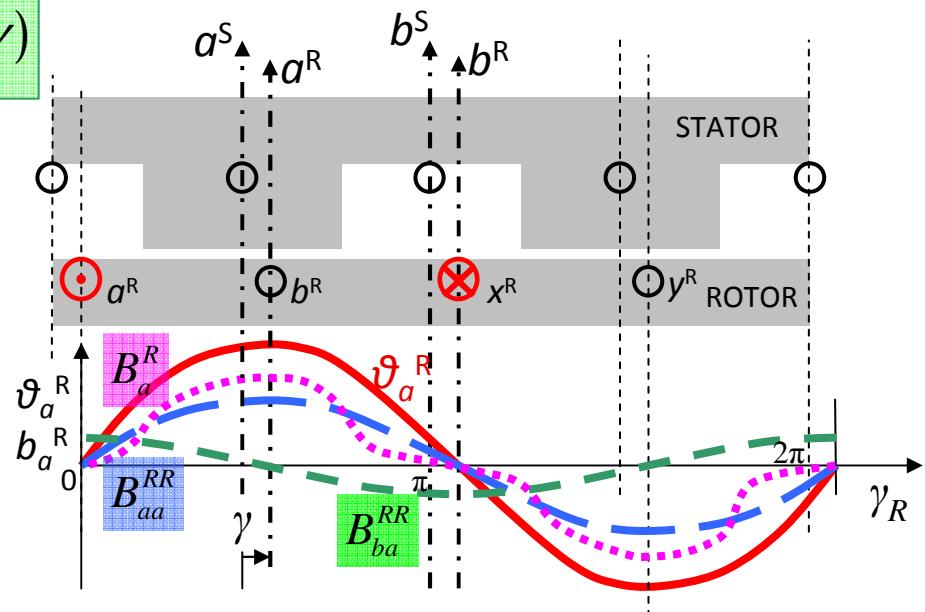
$$\phi_{ba}^{RR} = \frac{2}{\pi} B_{ba}^{RR} \cdot \tau_p \cdot L = -\frac{2}{\pi} \Theta^R \cdot \tau_p \cdot L \frac{1}{2} \lambda_2 \sin(2\gamma)$$

Ulančani tok: $\psi_{ba}^{RR} = \phi_b^R \cdot w^R \cdot f_n^R$

$$\psi_{ba}^{RR} = -\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \frac{(w^R f_n^R)^2}{p} \left(\frac{1}{2} \lambda_2 \sin(2\gamma)\right) \cdot \tau_p \cdot L \cdot i_a^R$$

Induktivitet:

$$L_{ba}^{RR} = -\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \left(\frac{1}{2} \lambda_2 \sin(2\gamma)\right) \frac{\tau_p \cdot L}{p} (w^R f_n^R)^2 = -l_2^R \sin(2\gamma)$$



Samoinduktiviteti statorskih i rotorskih namota

- Samoinduktiviteti statorskih namota neovisni su o položaju rotora prema statoru (cilindričan rotor!), pa oni ne doprinose elektromehaničkoj pretvorbi energije:

$$L_{aa}^{ss} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \left(\lambda_0 + \frac{1}{2}\lambda_2\right) \frac{\tau_p L}{p} (w^s f_n^s)^2 = l_0^s + l_2^s$$

$$L_{bb}^{ss} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \left(\lambda_0 - \frac{1}{2}\lambda_2\right) \frac{\tau_p L}{p} (w^s f_n^s)^2 = l_0^s - l_2^s$$

- Samoinduktiviteti rotorskih namota ovisni o položaju rotora prema statoru (zbog istaknutih polova na statoru), pa oni doprinose elektromehaničkoj pretvorbi energije preko reluktantnog momenta (ako postoji struje u statorskim namotima određene frekvencije):

$$L_{aa}^{RR} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \left[\lambda_0 + \frac{1}{2}\lambda_2 \cos(2\gamma)\right] \frac{\tau_p L}{p} (w^R f_n^R)^2 = l_0^R + l_2^R \cos(2\gamma)$$

$$L_{bb}^{RR} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \left[\lambda_0 - \frac{1}{2}\lambda_2 \cos(2\gamma)\right] \frac{\tau_p L}{p} (w^R f_n^R)^2 = l_0^R - l_2^R \cos(2\gamma)$$

Međuinduktiviteti statorskih namota, rotorskih namota i kombinacije statorskih i rotorskih namota

- Međuinduktiviteti statorskih namota jednaki su nuli zbog međusobnog okomitog položaja faza a i b : $L_{ab}^{ss} = L_{ba}^{ss} = 0$
- Međuinduktiviteti rotorskih namota ovise o $\sin(2\gamma)$ zbog istaknutih polova na statoru:
- Svi ostali međuinduktiviteti koji povezuju određeni rotorski namot sa statorskim ovise o $\sin\gamma$ odnosno $\cos\gamma$ i doprinose elektromehaničkoj pretvorbi energije:

$$L_{aa}^{SR} = L_{aa}^{RS} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \left(\lambda_0 + \frac{1}{2}\lambda_2\right) \frac{\tau_p L}{p} (w^s f_n^s)(w^r f_n^r) \cos \gamma = (l_0^{SR} + l_2^{SR}) \cos \gamma$$

$$L_{bb}^{SR} = L_{bb}^{RS} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \left(\lambda_0 - \frac{1}{2}\lambda_2\right) \frac{\tau_p L}{p} (w^s f_n^s)(w^R f_n^R) \cos \gamma = (l_0^{SR} - l_2^{SR}) \cos \gamma$$

$$L_{ba}^{SR} = L_{ab}^{RS} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \left(\lambda_0 - \frac{1}{2}\lambda_2\right) \frac{\tau_p L}{p} (w^s f_n^s)(w^R f_n^R) \sin \gamma = (l_0^{SR} - l_2^{SR}) \sin \gamma$$

$$L_{ab}^{SR} = L_{ba}^{RS} = -\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \left(\lambda_0 + \frac{1}{2}\lambda_2\right) \frac{\tau_p L}{p} (w^s f_n^s)(w^r f_n^r) \sin \gamma = -(l_0^{SR} + l_2^{SR}) \sin \gamma$$

Matrica induktiviteta

- Kompletna matrica samoinduktiviteta i međuinduktiviteta (kraće: MATRICA INDUKTIVITETA) ima sljedećih 16 članova:

$$[L] = \begin{bmatrix} l_0^S + l_2^S + L_\sigma^S & 0 & (l_0^{SR} + l_2^{SR}) \cos \gamma & -(l_0^{SR} + l_2^{SR}) \sin \gamma \\ 0 & l_0^S - l_2^S + L_\sigma^S & (l_0^{SR} - l_2^{SR}) \sin \gamma & (l_0^{SR} - l_2^{SR}) \cos \gamma \\ (l_0^{SR} + l_2^{SR}) \cos \gamma & (l_0^{SR} - l_2^{SR}) \sin \gamma & l_0^R + l_2^R \cos(2\gamma) + L_\sigma^R & -l_2^R \sin(2\gamma) \\ -(l_0^{SR} + l_2^{SR}) \sin \gamma & (l_0^{SR} - l_2^{SR}) \cos \gamma & -l_2^R \sin(2\gamma) & l_0^R - l_2^R \cos(2\gamma) + L_\sigma^R \end{bmatrix}$$

- Matrica induktiviteta povezuje ulančane tokove sa strujama općeg modela električnog stroja:
- a ključna je i za razvijanje elektromagnetskog momenta općeg električnog stroja:

$$M_{elm} = \frac{1}{2} [i]_t \frac{d[L]}{d\gamma_m} [i]$$

Matrica induktiviteta

- Kratice u matrici induktiviteta jesu:

$$l_0^S = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \frac{\tau_p \cdot L}{p} (w^S f_n^S)^2 \lambda_o$$

$$l_2^S = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \frac{\tau_p \cdot L}{p} (w^S f_n^S)^2 \frac{\lambda_2}{2}$$

$$l_0^R = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \frac{\tau_p \cdot L}{p} (w^R f_n^R)^2 \lambda_o$$

$$l_2^R = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \frac{\tau_p \cdot L}{p} (w^R f_n^R)^2 \frac{\lambda_2}{2}$$

$$l_0^{SR} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \frac{\tau_p \cdot L}{p} w^S f_n^S w^R f_n^R \lambda_o$$

$$l_2^{SR} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \frac{\tau_p \cdot L}{p} w^S f_n^S w^R f_n^R \frac{\lambda_2}{2}$$

Elektromagnetski moment koji razvija stroj

- Iz bilance energije konzervativne elektromehaničke sheme izveden je izraz za razvijeni elektromagnetski moment električnog stroja:

$$M_{elm} = \frac{1}{2} [i]_t \frac{d[L]}{d\gamma_m} [i]$$

- Vektor struja općeg modela:

$$[i] = \begin{bmatrix} i_a^S \\ i_b^S \\ i_a^R \\ i_b^R \end{bmatrix}$$

Deriviranje matrice induktiviteta po kutu

■ Matricu induktiviteta:

$$[L] = \begin{bmatrix} l_0^s + l_2^s + L_\sigma^s & 0 & (l_0^{sr} + l_2^{sr}) \cos \gamma & -(l_0^{sr} + l_2^{sr}) \sin \gamma \\ 0 & l_0^s - l_2^s + L_\sigma^s & (l_0^{sr} - l_2^{sr}) \sin \gamma & (l_0^{sr} - l_2^{sr}) \cos \gamma \\ (l_0^{sr} + l_2^{sr}) \cos \gamma & (l_0^{sr} - l_2^{sr}) \sin \gamma & l_0^r + l_2^r \cos(2\gamma) + L_\sigma^r & -l_2^r \sin(2\gamma) \\ -(l_0^{sr} + l_2^{sr}) \sin \gamma & (l_0^{sr} - l_2^{sr}) \cos \gamma & -l_2^r \sin(2\gamma) & l_0^r - l_2^r \cos(2\gamma) + L_\sigma^r \end{bmatrix}$$

treba derivirati po zakretu rotora prema statoru, pri čemu je $\gamma = p\gamma_m$:

$$\frac{d[L]}{d\gamma_m} = p \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -(l_0^{sr} + l_2^{sr}) \sin \gamma & -(l_0^{sr} + l_2^{sr}) \cos \gamma \\ 0 & 0 & (l_0^{sr} - l_2^{sr}) \cos \gamma & -(l_0^{sr} - l_2^{sr}) \sin \gamma \\ -(l_0^{sr} + l_2^{sr}) \sin \gamma & (l_0^{sr} - l_2^{sr}) \cos \gamma & -2l_2^r \sin(2\gamma) & -2l_2^r \cos(2\gamma) \\ -(l_0^{sr} + l_2^{sr}) \cos \gamma & -(l_0^{sr} - l_2^{sr}) \sin \gamma & -2l_2^r \cos(2\gamma) & 2l_2^r \sin(2\gamma) \end{bmatrix}$$

Razlučivanje derivirane matrice induktiviteta

- Izvodom zajedničkih parametara u deriviranoj matrici induktiviteta dobivaju se tri člana:

$$\frac{d[L]}{d\gamma_m} = pl_o^{SR} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sin \gamma & -\cos \gamma \\ 0 & 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 & 0 \\ -\cos \gamma & -\sin \gamma & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ pl_2^{SR} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sin \gamma & -\cos \gamma \\ 0 & 0 & -\cos \gamma & \sin \gamma \\ -\sin \gamma & -\cos \gamma & 0 & 0 \\ -\cos \gamma & \sin \gamma & 0 & 0 \end{bmatrix} + 2pl_2^{SR} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin(2\gamma) & -\cos(2\gamma) \\ 0 & 0 & -\cos(2\gamma) & \sin(2\gamma) \end{bmatrix}$$

Elektromagnetski moment stroja s cilindričnim statorom

- U stroju s cilindričnim statorom elektromagnetski moment će biti određen samo prvom od tri navedena matice u $[dL]/d\gamma_m$:

$$\begin{aligned} M_{elm0} &= \frac{1}{2} pl_0^{SR} \cdot \begin{bmatrix} i_a^S & i_b^S & i_a^R & i_b^R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sin \gamma & -\cos \gamma \\ 0 & 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 & 0 \\ -\cos \gamma & -\sin \gamma & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a^S \\ i_b^S \\ i_a^R \\ i_b^R \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} pl_0^{SR} \left\{ \begin{bmatrix} i_a^S & i_b^S \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin \gamma & -\cos \gamma \\ \cos \gamma & -\sin \gamma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_a^R \\ i_b^R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i_a^R & i_b^R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin \gamma & \cos \gamma \\ -\cos \gamma & -\sin \gamma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_a^S \\ i_b^S \end{bmatrix} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} pl_0^{SR} \left\{ -i_a^S i_a^R \sin \gamma - i_a^S i_b^R \cos \gamma + i_b^S i_a^R \cos \gamma - i_b^S i_a^R \sin \gamma - i_a^R i_a^S \sin \gamma + i_a^R i_b^S \cos \gamma - i_b^R i_a^S \cos \gamma - i_b^R i_b^S \sin \gamma \right\} \end{aligned}$$

$$M_{elm0} = \frac{1}{2} pl_0^{SR} \left[2(i_a^R i_b^S - i_b^R i_a^S) \cos \gamma - 2(i_a^R i_a^S + i_b^R i_b^S) \sin \gamma \right]$$

Elektromagnetski moment općeg modela

- Elektromagnetski moment za stroj s cilindričnim statorom:

$$M_{elm0} = pl_0^{SR} \left[(i_a^R i_b^S - i_b^R i_a^S) \cos \gamma - (i_a^R i_a^S + i_b^R i_b^S) \sin \gamma \right]$$

- Zakretni elektromagnetski moment koji razvija stroj u općem modelu električnog stroja dobiva se izvodom na isti način i rastavljen na komponente jest:

$$\begin{aligned} M_{elm} = p &[-(l_0^{SR} + l_2^{SR}) i_a^S i_b^R \cos \gamma + (l_0^{SR} - l_2^{SR}) i_b^S i_a^R \cos \gamma - \\ &-(l_0^{SR} + l_2^{SR}) i_a^S i_a^R \sin \gamma - (l_0^{SR} - l_2^{SR}) i_b^S i_b^R \sin \gamma + \\ &+ l_2^R \left((i_b^R)^2 - (i_a^R)^2 \right) \sin(2\gamma) - l_2^R 2 i_a^R i_b^R \cos(2\gamma)] \end{aligned}$$

- Razlika između prva 4 člana u kompletnom izrazu za moment i onom za cilindričan stator je u proširenju koje se dobiva zbog istaknutih polova, pa se pokazuje da namot a^S djeluje u krugu s većom magnetskom vodljivošću u osi pola, dok namot b^S djeluje u međupolnom prostoru, s manjom magnetskom vodljivošću. Zbog toga se uz članove sa strujom i_a^S javlja povećani koeficijent međuinduktiviteta ($l_0^{SR} + l_2^{SR}$), a uz članove s i_b^S smanjeni koeficijent ($l_0^{SR} - l_2^{SR}$).

Elektromagnetski moment zbog istaknutih polova

- Dio elektromagnetskog momenta koji se razvija zbog djelovanja istaknutih polova:

$$M_{elm2} = pl_2^{SR} \left[-\left(i_a^S i_b^R + i_a^R i_b^S \right) \cos \gamma + \left(i_b^R i_b^S - i_a^R i_a^S \right) \sin \gamma \right] + \\ + pl_2^R \left[\left(\left(i_b^R \right)^2 - \left(i_a^R \right)^2 \right) \sin(2\gamma) - 2i_a^R i_b^R \cos(2\gamma) \right]$$

- Drugi redak predstavlja reluktantni moment – djelovanje elektromagneta $a^R i b^R$ i strukture istaknutih polova.
- Postojanje reluktantnog momenta uvjetovano je postojanjem istaknutih polova na statoru i protoku struje, odnosno struja kroz namote koji se nalaze na suprotnom dijelu, dakle rotoru.
- Prva dva člana reluktantnog momenta podsjećaju na poznate reluktantne momente koji ovise o kvadratu struje, a treći je specifičan jer zahtjeva protok struja kroz oba rotorska namota

Reluktantni moment

- Poznata je ovisnost reluktantnog momenta o kvadratu rotorskog protjecanja odnosno kvadratu rotorske struje. Ovisi i o dvostrukom kutu opterećenja – kutu između rotorskog protjecanja i istaknutih polova statora $\sin(2\delta)$, pri čemu je:

$$\delta = \beta + \gamma$$

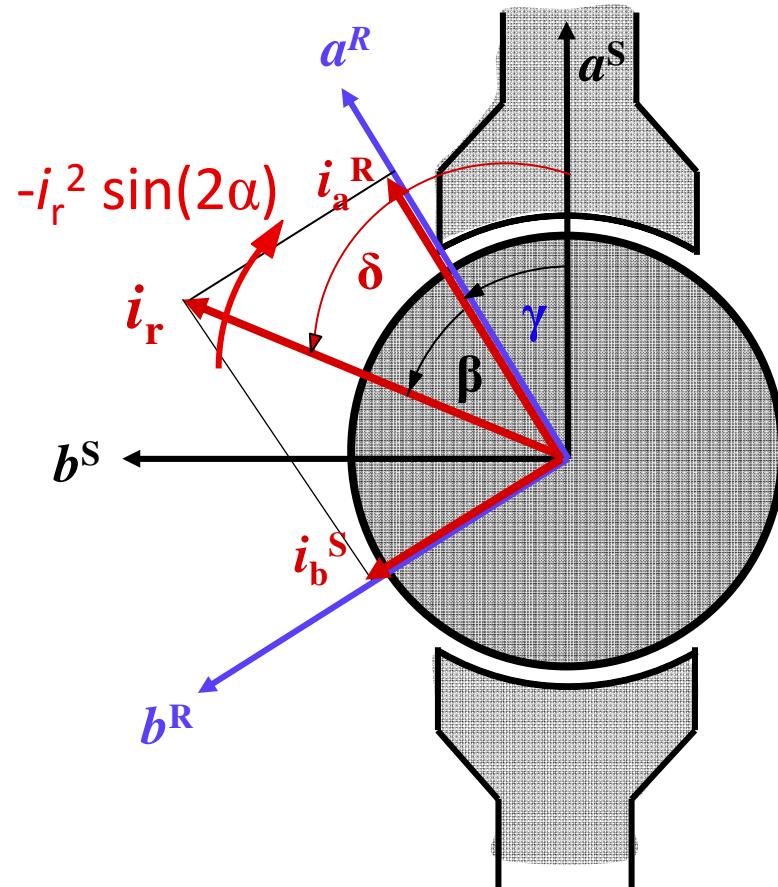
- Smjer djelovanja obodne sile reluktantnog momenta je takav da nastoji rotorsko protjecanje kraćim putem zakrenuti u bližu os istaknutog pola, pa vrijedi:

$$M_{elmR} \equiv -\left(i_r^R\right)^2 \sin(2\delta)$$

- Ako se uvrsti kut opterećenja

preko α i β dobiva se: $\sin(2\beta + 2\gamma) = \sin(2\beta)\cos(2\gamma) + \cos(2\beta)\sin(2\gamma) =$

$$= 2\sin\beta\cos\beta\cos(2\gamma) + (\cos^2\beta - \sin^2\beta)\sin(2\gamma) = 2\frac{i_b^R}{i_r^R} \cdot \frac{i_a^R}{i_r^R} \cos(2\gamma) + \left[\left(\frac{i_a^R}{i_r^R}\right)^2 - \left(\frac{i_b^R}{i_r^R}\right)^2 \right] \sin(2\gamma)$$



Reluktantni moment

- Uvrštavanjem izvedenih izraza u dio elektromagnetskog momenta koji se razvija zbog postojanja istaknutih polova dobiva se:

$$\begin{aligned} M_{elmR} &= -pl_2^R \left(i_r^R \right)^2 \sin(2\delta) = \\ &= -2pl_2^R \left(i_r^R \right)^2 \frac{i_b^R}{i_r^R} \cdot \frac{i_a^R}{i_r^R} \cos(2\gamma) - pl_2^R \left(i_r^R \right)^2 \left[\left(\frac{i_a^R}{i_r^R} \right)^2 - \left(\frac{i_b^R}{i_r^R} \right)^2 \right] \sin(2\gamma) = \\ &= 2pl_2^R i_a^R i_b^R \cos(2\gamma) - pl_2^R \left(i_a^R - i_b^R \right) \sin(2\gamma) \end{aligned}$$

- Konačni oblik elektromagnetskog reluktantnog momenta jest:

$$M_{elmR} = p \left[l_2^R \left(\left(i_b^R \right)^2 - \left(i_a^R \right)^2 \right) \sin(2\gamma) - 2l_2^R i_a^R i_b^R \cos(2\gamma) \right]$$

Praktički kriteriji za elektromehaničku pretvorbu energije

- Osnovni elektromagnetski moment predočen s prva 4 dijela izaraza za M_{elm}

$$M_{elm} = p[-(l_0^{SR} + l_2^{SR})i_a^S i_b^R \cos \gamma + (l_0^{SR} - l_2^{SR})i_b^S i_a^R \cos \gamma - (l_0^{SR} + l_2^{SR})i_a^S i_a^R \sin \gamma - (l_0^{SR} - l_2^{SR})i_b^S i_b^R \sin \gamma]$$

- mora dati srednju vrijednost kroz jednu električnu periodu. Da bi se to ostvarilo umnožak struja rotora i statora mora biti iste frekvencije kao frekvencija vrtnje. Naime uz konstantnu brzinu vrtnje jest električni kut zakreta: $\gamma = p\omega_m t + \gamma_0$
- Mora biti: $i^R i^S = A \sin(p\omega_m t) + B \cos(p\omega_m t) + \dots$
- Dakle, barem jedan član umnoška bilo koje kombinacije struja statora i rotora mora sadržavati sinusnu funkciju frekvencije $p\omega_m$, koja je jednaka frekvenciji brzine vrtnje. Tada će se dobiti srednja vrijednost $\neq 0$ npr.:

$$i^R i^S \sin \gamma = A \sin(p\omega_m t) \sin(p\omega_m t + \gamma_0) = \frac{A}{2} \cos \gamma_0 - \frac{A}{2} \cos(2p\omega_m t + \gamma_0)$$

$$i^R i^S \cos \gamma = A \sin(p\omega_m t) \cos(p\omega_m t + \gamma_0) = -\frac{A}{2} \sin \gamma_0 + \frac{A}{2} \sin(2p\omega_m t + \gamma_0)$$

Praktički kriteriji za elektromehaničku pretvorbu energije

- Da bi umnožak struja imao sinusni član s frekvencijom $p\omega_m$ mora biti zbroj ili razlika frekvencija struja statora i rotora jednaka frekvenciji brzine vrtnje.
- Neka struje statora i rotora imaju oblik:

$$i^S = A^S \sin(\omega_S t - \varphi_S)$$

$$i^R = A^R \sin(\omega_R t - \varphi_R)$$

- Njihov je umnožak:

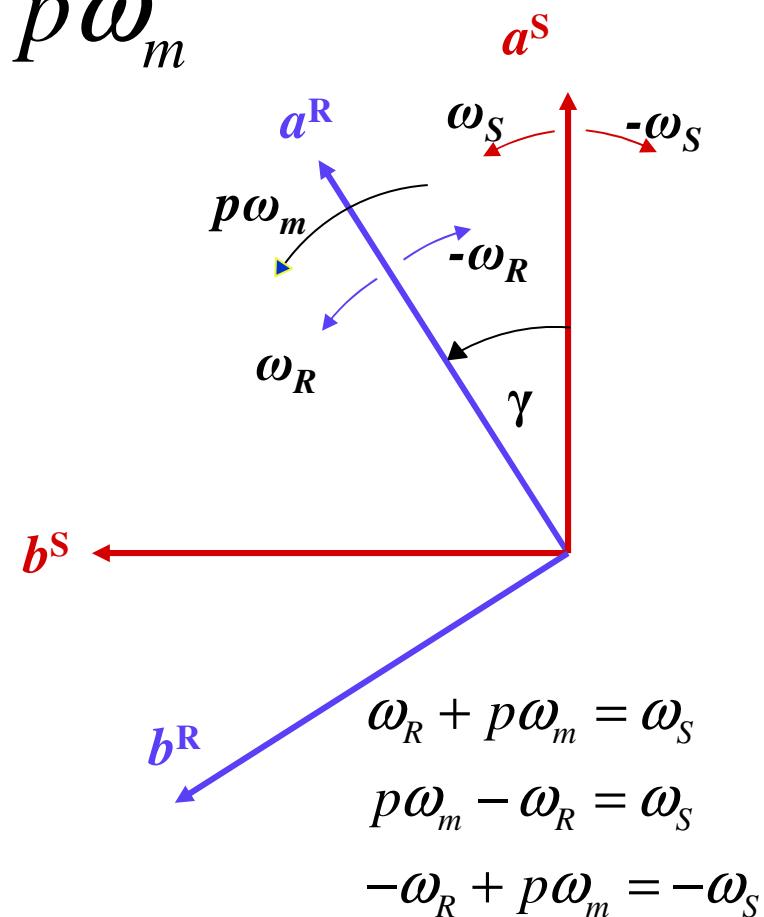
$$\begin{aligned} i^R i^S &= A^S A^R \sin(\omega_S t - \varphi_S) \cos(\omega_R t - \varphi_R) = \\ &= \frac{1}{2} A^S A^R \left\{ \left[\cos(\omega_S - \omega_R)t - \varphi_S + \varphi_R \right] + \left[\cos(\omega_S + \omega_R)t - \varphi_S - \varphi_R \right] \right\} \end{aligned}$$

- Kriterij za postojanje srednje vrijednosti momenta bit će zadovoljen ako jest: $\omega_S - \omega_R = p\omega_m$

$$\omega_S + \omega_R = p\omega_m$$

Praktički kriteriji za elektromehaničku pretvorbu energije

- Praktički kriterij elektromehaničke pretvorbe može se napisati kao: $\omega^R = \pm \omega^S \pm p\omega_m$
- U izrazu vrijede samo one kombinacije predznaka koje daju pozitivnu vrijednost za frekvenciju struja rotora. Isto bi vrijedilo da se eksplicitno izrazi frekvencija struje statora.
- Ovaj je kriterij jedini koji vrijedi za trajnu elektromehaničku pretvorbu energije u slučaju kada u električnom stroju djeluje samo elektromagnetski moment među namotima.



Kriteriji rotacijskih strojeva

- Za strojeve s istaknutim polovima vrijede i ostala tri kriterija o postojanju reluktantnog momenta.

$$M_{elmR} = pl_2 \left[\left(i_b^R \right)^2 \sin(2\gamma) - \left(i_a^R \right)^2 \sin(2\gamma) - 2 i_a^R i_b^R \cos(2\gamma) \right]$$

- Prva dva člana u izrazu za M_{elmR} daju, po analogiji za osnovni moment, uvjet da struja rotora (namota a ili namota b) mora biti iste frekvencije kao frekvencija vrtnje. Naime, umnožak dviju struja analogan je kvadratu struje, pa vrijede kriteriji:

$$\omega_a^R = p\omega_m$$

$$\omega_b^R = p\omega_m$$

- Sličnom se analogijom dobiva i četvrti kriterij:

$$\omega_a^R = \pm \omega_b^R \pm 2p\omega_m$$

Kriteriji za elektromagnetski moment

Kriteriji za postojanje srednje vrijednosti elektromagnetskog momenta povezuju frekvencije struja statora i rotora i brzinu vrtnje rotora:

$$\omega^R = \pm \omega^S \pm p\omega_m$$

$$\omega_a^R = p\omega_m$$

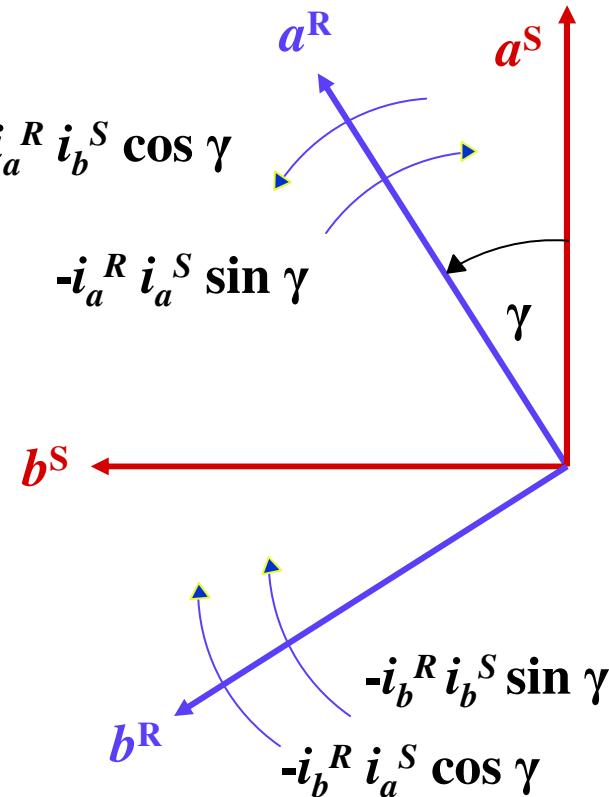
$$\omega_b^R = p\omega_m$$

$$\omega_a^R = \pm \omega_b^R \pm 2p\omega_m$$

Sva su četiri kriterija međusobno neovisna.

Osnovni elektromagnetski moment

- Komponente elektromagnetskog momenta među namotima - zbog struja statora i rotora



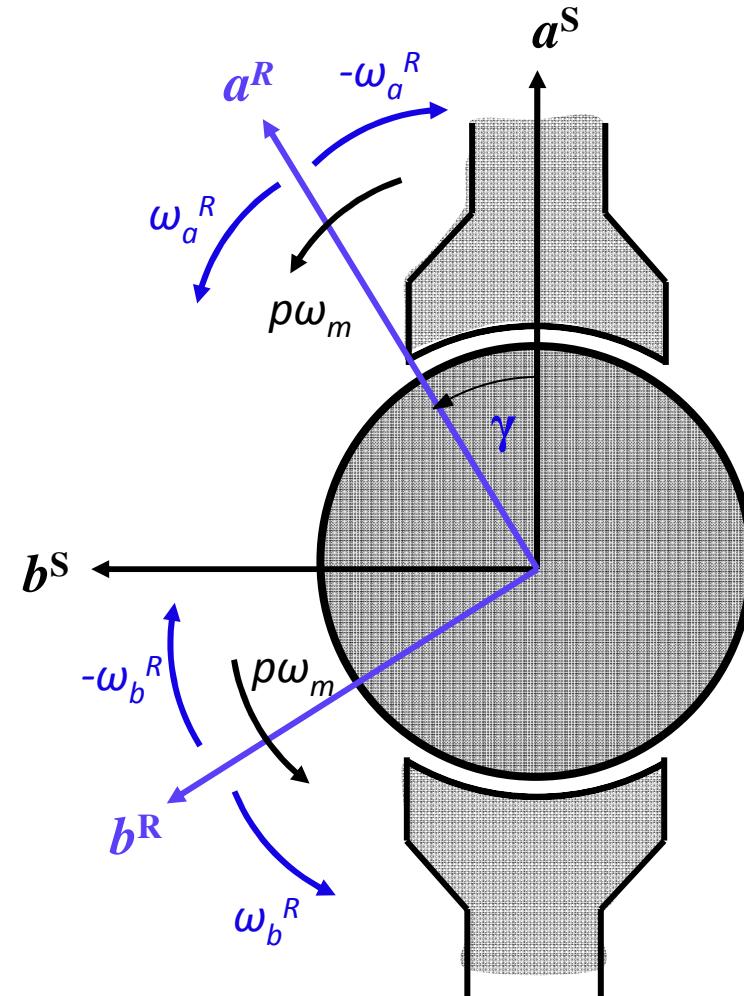
$$M_{elm} = p[-(l_0^{SR} + l_2^{SR})i_a^S i_b^R \cos \gamma + (l_0^{SR} - l_2^{SR})i_b^S i_a^R \cos \gamma - (l_0^{SR} + l_2^{SR})i_a^S i_a^R \sin \gamma - (l_0^{SR} - l_2^{SR})i_b^S i_b^R \sin \gamma]$$

Reluktantni moment

$$M_{elmR} = pl_2^R \left[(i_b^R)^2 \sin(2\gamma) \right]$$

$$M_{elmR} = -pl_2^R \left[(i_a^R)^2 \sin(2\gamma) \right]$$

- Kriterij za reluktantni moment kad postoji samo struja jednog namota rotora (a ili b) – protjecanje jednofazne struje prikazuje se s dva okretna protjecanja, uno koje se vrti u suprotnom smjeru od smjera vrtnje rotora u odnosu na istaknute polove miruje, pa se razvija konstantan reluktantni moment i time je dokazano postojanje trajne elektromehaničke pretvorbe
- Osim konstantnog razvija se i izmjenični moment zbog rotacije drugog protjecanja dvostrukom brzinom vrtnje protjecanja

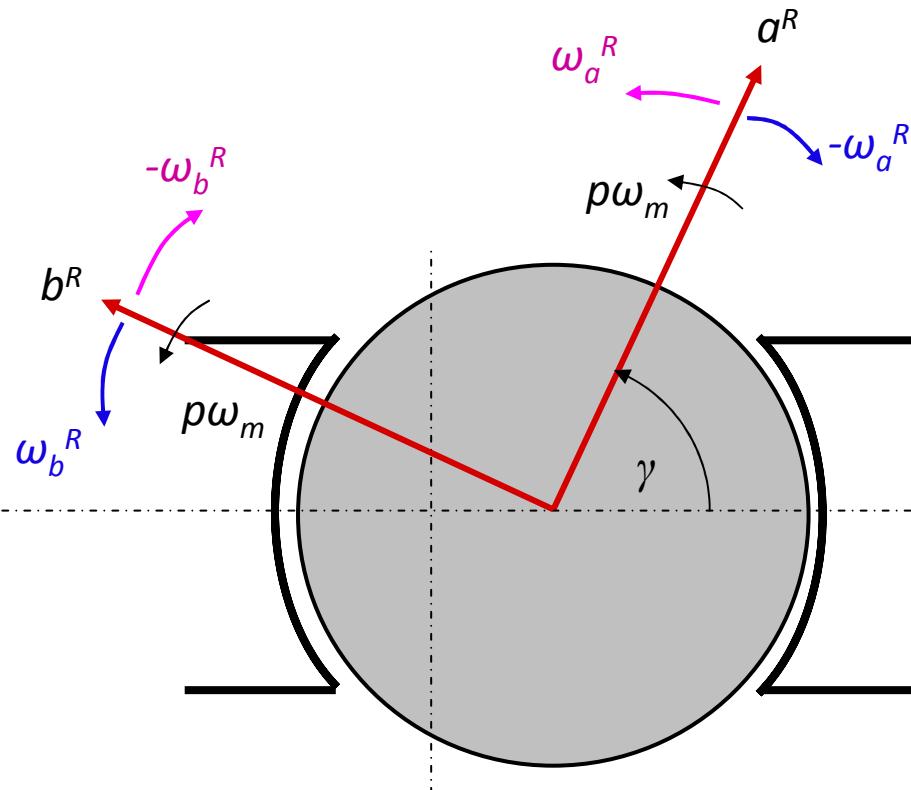


Reluktantni moment $M_{elmR} = -2pl_2^R i_a^R i_b^R \cos(2\gamma)$

- Reluktantni moment koji nastaje zbog struja rotora različitih frekvencija uskladijenih s brzinom vrtnje rotora
- Protjecanja obje faze rastavimo na okretna protjecanja, i par okretnih protjecanja koji se vrte istom brzinom u suprotnim smjerovima možemo predočiti kao pulzirajuće protjecanje koje razvija sa struktrom mirujućih istaknutih polova (reluktantni) moment koji se sastoji od dvije komponente: **konstantne** i periodički promjenljive
- Konstantna komponenta momenta osigurava trajnu elektromehaničku pretvorbu

$$p\omega_m - \omega_a^R = -(p\omega_m + \omega_b^R) \rightarrow \omega_a^R = \omega_b^R + 2p\omega_m$$

$$p\omega_m + \omega_a^R = -(p\omega_m - \omega_b^R) \rightarrow \omega_a^R = \omega_b^R - 2p\omega_m$$

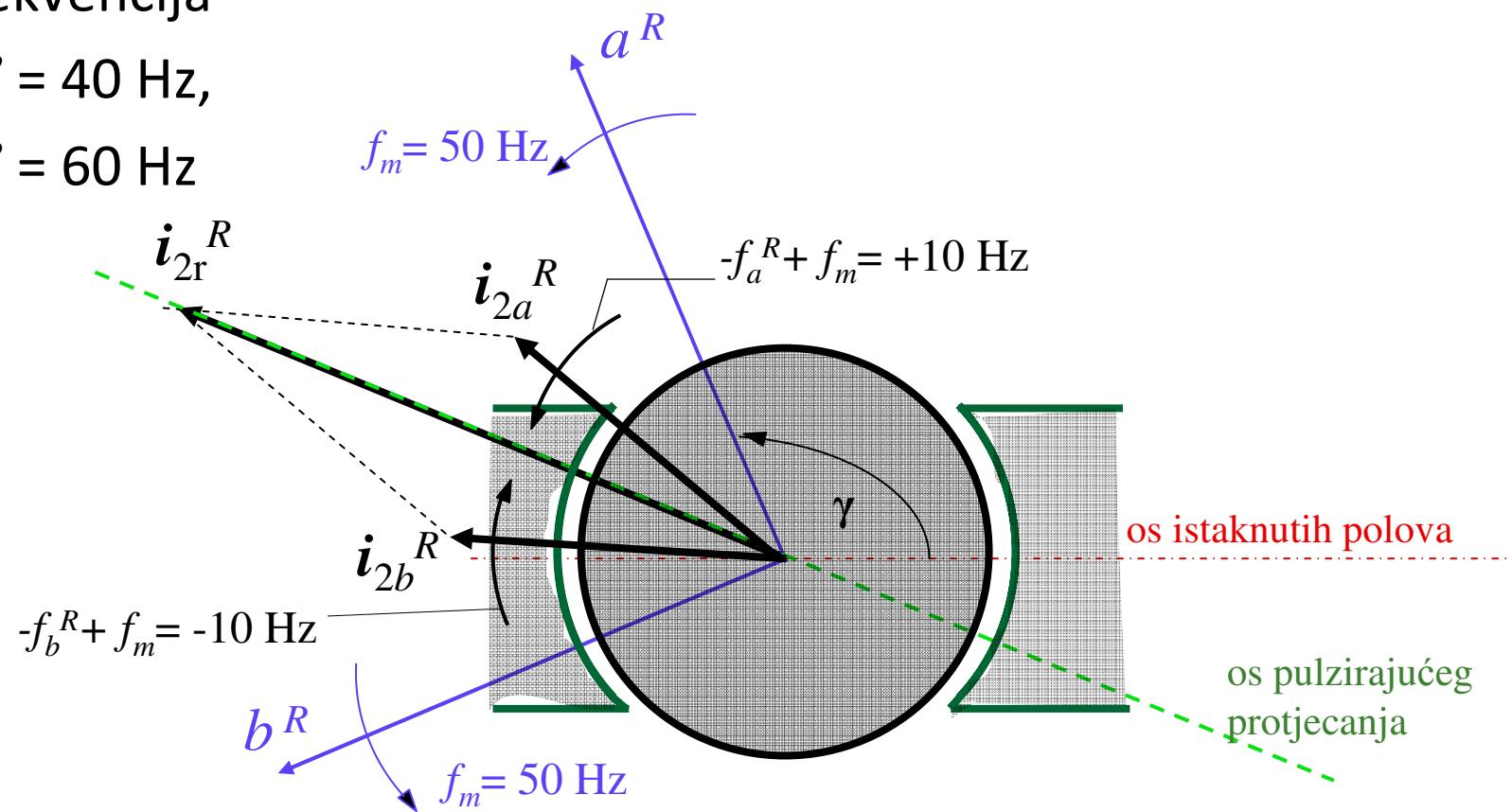


Pulzirajuće protjecanje

- Pulzirajuće protjecanje stvoreno rotorskim strujama različitih frekvencija

$$f_a^R = 40 \text{ Hz},$$

$$f_b^R = 60 \text{ Hz}$$



OPĆI MODEL ELEKTRIČNOG STROJA

*TESiT.5 – Praktični kriteriji elektromehaničke
pretvorbe - primjeri*

Prof. dr. sc. Zlatko Maljković

Praktični kriteriji elektromehaničke pretvorbe općeg modela stroja

- Kriteriji za postojanje srednje vrijednosti razvijenog elektromagnetskog momenta u općem modelu stroja izraženi preko kružnih frekvencija struja ω^S i ω^R i kutne brzine ω_m :

$$\omega^R = \pm \omega^S \pm p\omega_m$$

$$\omega_a^R = p\omega_m$$

$$\omega_b^R = p\omega_m$$

$$\omega_a^R = \pm \omega_b^R \pm 2p\omega_m$$

- Odnosno preko frekvencija struja u namotima statora f^S i rotora f^R i frekvencije vrtnje $f_m = p \cdot n / 60$:

$$f^R = \pm f^S \pm f_m$$

$$f_a^R = f_m$$

$$f_b^R = f_m$$

$$f_a^R = \pm f_b^R \pm 2f_m$$

- Valja naglasiti da su sva 4 kriterija međusobno nezavisna

Primjer 1.

Stator općeg modela stroja ima 4 istaknuta pola. Njegov se rotor vrti brzinom od 1500 min^{-1} . Namotima statora teku struje frekvencije 50 Hz. Odredite frekvencije rotorskih struja pri kojima je moguća trajna elektromehanička pretvorba energije. Odredite za sve slučajeve o kojoj se vrsti stroja i pretvorbe radi.

Rješenje:

$$p = 2$$

$$n = 1500 \text{ min}^{-1}$$

$$f^s = 50 \text{ Hz}$$

Frekvencija vrtnje:

$$f_m = p \cdot n / 60 = 2 \cdot 1500 / 60 = 50 \text{ Hz}$$

Prema prvom kriteriju postoje dvije frekvencije rotorskih struja i to su (uzimaju se samo pozitivne vrijednosti f^R):

$$f^R = \pm f^s \pm f_m = \pm 50 \pm 50$$

$$f^R_1 = 100 \text{ Hz}$$

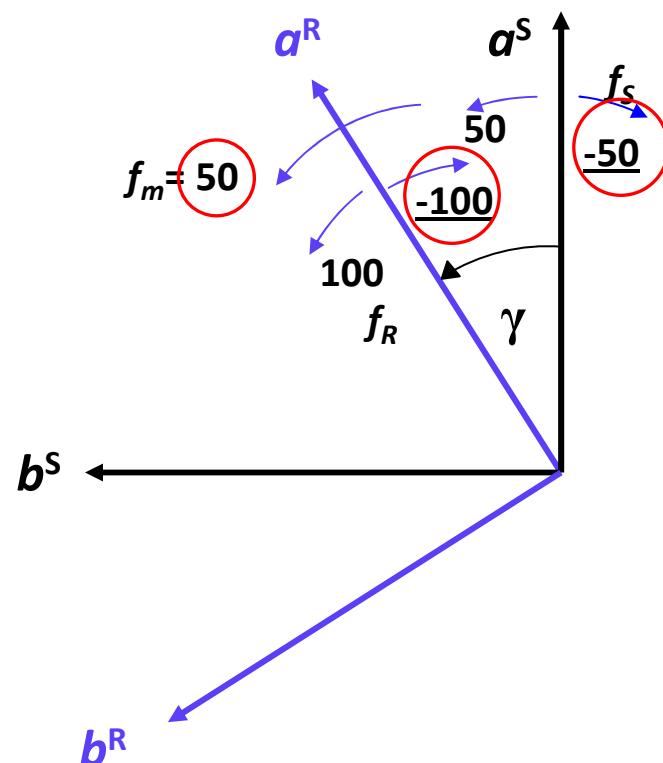
$$f^R_2 = 0 \text{ Hz}$$

Primjer 1.

Tumačenje 1. kriterija za rotorsku frekvenciju 100 Hz

Slika 1a.

Tumačenje sprege protjecanja u fazama a statora i rotora za frekvenciju rotora od 100 Hz

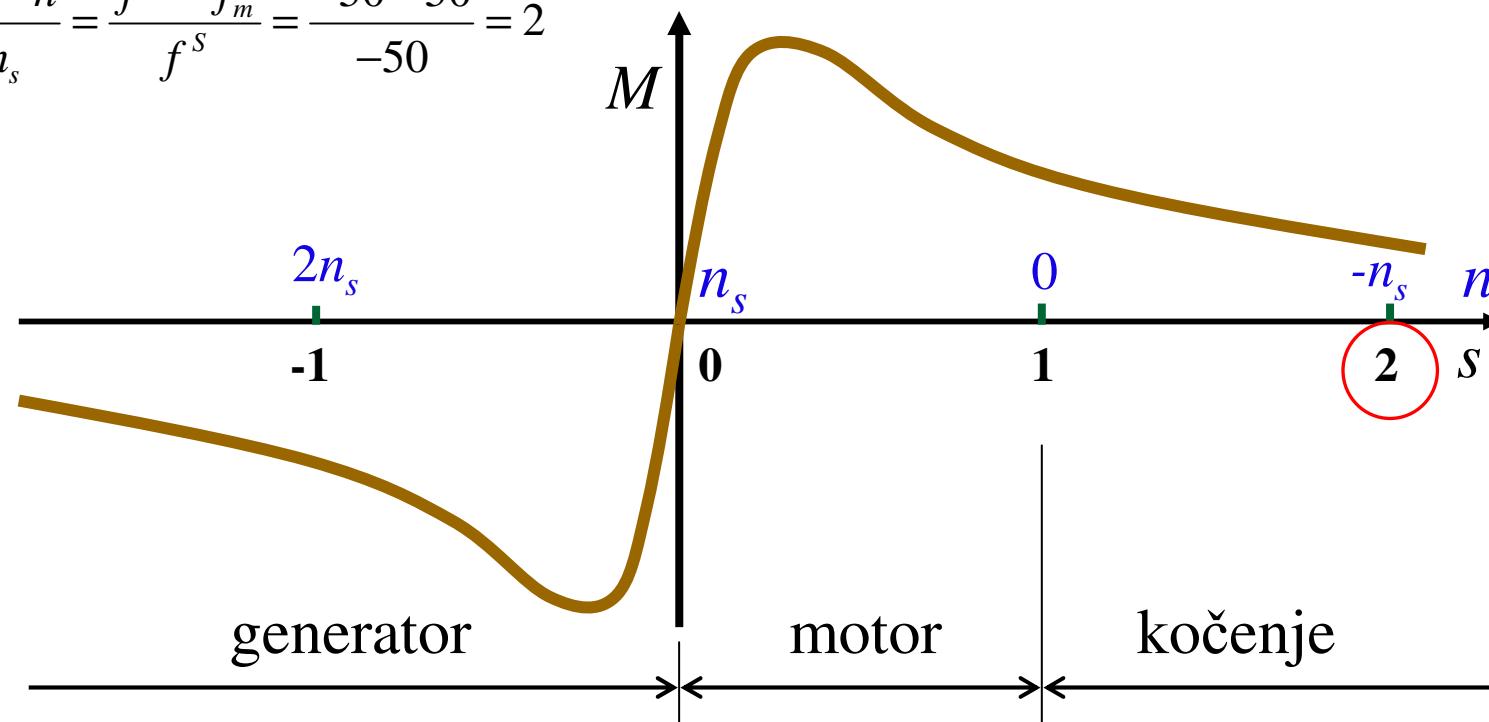


- Svaki namot protjecan izmjeničnom strujom stvara pulsirajuće protjecanje koje se može rastaviti na dvije komponente: direktno i inverzno okretno protjecanje. Ta dva suprotno rotirajuća protjecanja vrte se električnom kutnom brzinom koja je jednaka kružnoj frekvenciji struja ω .
- Da bi postojala srednja vrijednost elektromagnetskog momenta okretna protjecanja statora i rotora, kombinirana s vrtnjom rotora moraju biti nepomična u prostoru. Na slici su prikazani smjerovi vrtnje okretnih protjecanja namota a^S i a^R , te frekvencije koje odgovaraju njihovoj brzini vrtnje. Struja frekvencije 100 Hz dat će protjecanje rotora koje u prostoru miruje u odnosu na protjecanje statora samo u slučaju kad se kombinira s protjecanjem statora koje se također vrti suprotno brzini vrtnje rotora.

Primjer 1. Tumačenje 1. kriterija za rotorsku frekvenciju 100 Hz

- Tada su ta dva protjecanja međusobno nepomična i vrte se suprotno vrtnji rotora brzinom od 50 Hz.
- Budući da se rotor vrti suprotno smjeru vrtnje protjecanja namota statora i rotora, radi se o **protustrujnom kočenju asinkronog stroja**.
- Klizanje iznosi:

$$s = \frac{n_s - n}{n_s} = \frac{f^s - f_m}{f^s} = \frac{-50 - 50}{-50} = 2$$

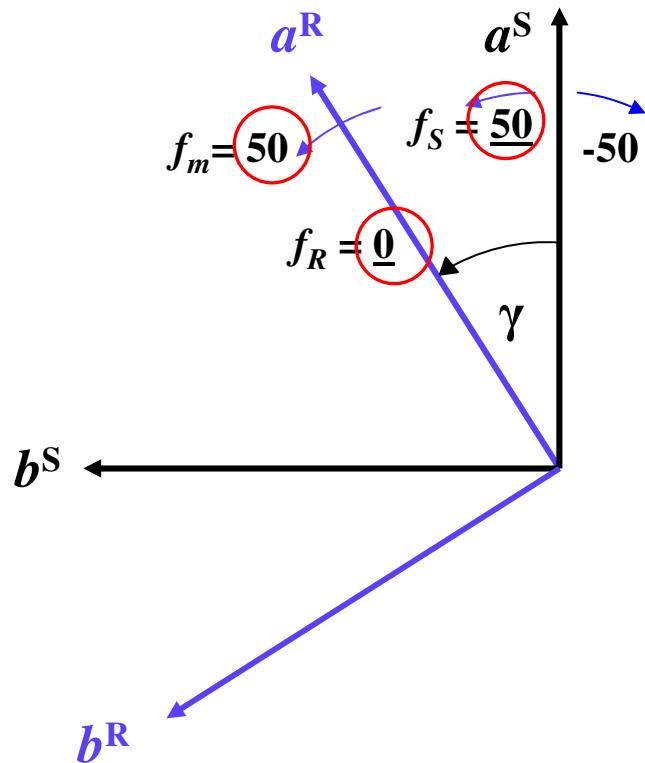


Primjer 1.

Tumačenje 1. kriterija za rotorsku frekvenciju 0 Hz

Slika 1b.

Tumačenje sprege protjecanja
u fazama a statora i rotora za
istosmjernu struju rotora



- Na slici su prikazani smjerovi vrtnje okretnih protjecanja namota a^S i a^R , te frekvencije koje odgovaraju njihovoj brzini vrtnje za rješenje $f^R_2 = 0$ Hz.
- Budući da je $f = 0$ Hz namotom rotora mora teći istosmjerna struja pa se tu radi o **sinkronom stroju**.
- Protjecanje rotora se u prostoru vrti frekvencijom 50 Hz zbog mehaničke vrtnje rotora koji ga nosi, pa je zbog toga u odnosu na protjecanje statora, koje se također vrti frekvencijom 50 Hz u smjeru vrtnje rotora, nepomično.
- Klizanje iznosi:

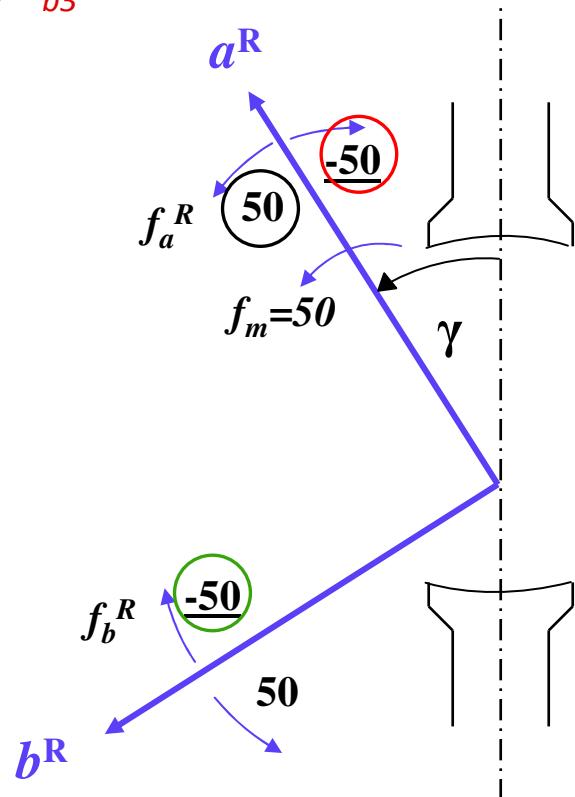
$$s = \frac{n_s - n}{n_s} = \frac{f^s - f_m}{f^s} = \frac{50 - 50}{50} = 0$$

Primjer 1.

Tumačenje 2. i 3. kriterija za rotorsku frekvenciju 50 Hz

Slika 1c.

Tumačenje reluktantnog momenta za $f_{a3}^R = 50 \text{ Hz}$ i $f_{b3}^R = 50 \text{ Hz}$



- Prema drugom i trećem kriteriju postoji po jedna frekvencija:

$$f_{a3}^R = f_m = \frac{pn}{60} = \frac{2 \cdot 1500}{60} = 50 \text{ Hz}$$

$$f_{b3}^R = f_m = \frac{pn}{60} = \frac{2 \cdot 1500}{60} = 50 \text{ Hz}$$

- Svaki od ovih kriterija pokazuje da je za srednju vrijednost momenta dovoljno da samo jednim namotom rotora, bilo kojim, teku struje frekvencije 50 Hz.
- Svaki od namota tada stvara pulsirajuće protjecanje koje se rastavlja na dva okretna protjecanja s frekvencijom vrtnje $\pm 50 \text{ Hz}$.
- Okretno protjecanje koje se vrti suprotno mehaničkoj vrtnji rotora je uvijek nepomično u odnosu na strukturu istaknutih polova i stvara srednju vrijednost reluktantnog momenta.

Primjer 1.

Tumačenje 2. i 3. kriterija za rotorsku frekvenciju 50 Hz

- Komponente protjecanja koje se vrte u istom smjeru kao i rotor stvaraju zbog strukture istaknutih polova elektromagnetski moment frekvencije 100 Hz, koji ne doprinosi trajnoj elektromehaničkoj pretvorbi energije.
- Međutim, zbog izmjeničnih naprezanja koja mogu utjecati na siguran rad stroja njegov utjecaj u konstrukciji stroja se ne smije zanemariti.
- Oba kriterija mogu biti ispunjena i istodobno.

$$f_{a3}^R = 50 \text{ Hz}$$

sinkroni reluktantni stroj, motor ili generator (nema struje statora, istaknuti polovi)

$$f_{b3}^R = 50 \text{ Hz}$$

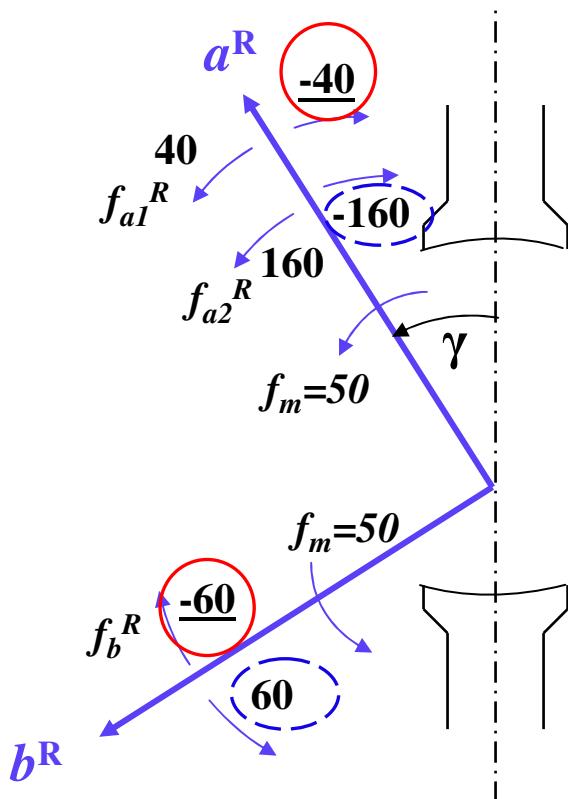
sinkroni reluktantni stroj, motor ili generator (nema struje statora, istaknuti polovi)

Primjer 1.

Tumačenje 4. kriterija za parove rotorskih protjecanja

Slika 1d.

Tumačenje reluktantnog momenta za par f_{a4}^R i f_{b4}^R



- Po četvrtom kriteriju postoji beskonačno mnogo parova frekvencija rotora, zbroj ili razlika kojih moraju biti jednaki dvostrukoj frekvenciji brzine vrtnje rotora, 100 Hz:

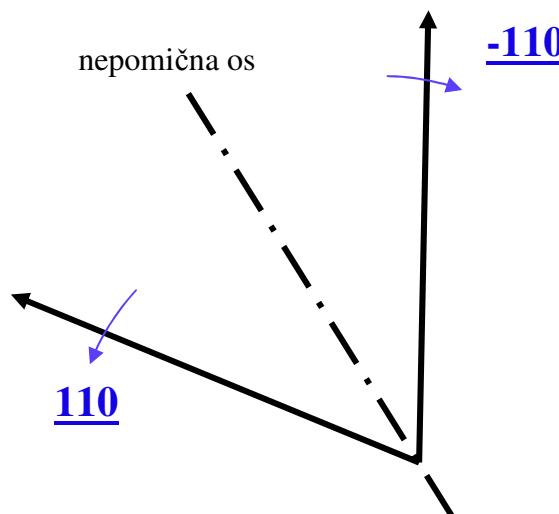
$$f_{a4}^R = \pm f_{b4}^R \pm 2f_m = \pm f_{b4}^R \pm 100$$

- Tumačenje četvrtog kriterija dano je slikom. Prepostavljeno je da je frekvencija struje namota $\omega_b^R = 60$ Hz (mogla se odabratи bilo koja frekvencija). Tada u namotu a^R mora teći struja frekvencije 160 Hz ili 40 Hz

Primjer 1.

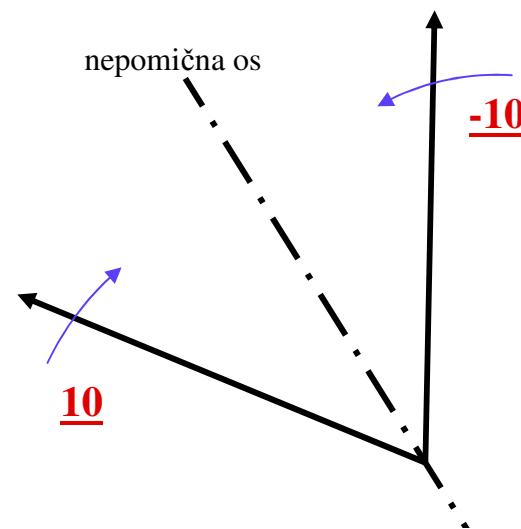
Tumačenje 4. kriterija za parove rotorskih protjecanja

- U slučaju struja a^R frekvencije **160 Hz** nastaju u prostoru dva protjecanja namota rotora koja se vrte jednakom i suprotnom brzinom, a frekvencijom **110 Hz**. Oni stvaraju komponentu pulsirajućeg protjecanja, os kojega u prostoru miruje. To pulsirajuće protjecanje stvara sa strukturu istaknutih polova srednju vrijednost momenta, koja njegovu os nastoji zakrenuti u os polova.



Ovo rješenje odgovara specijalnom reluktantnom stroju, napajanom s dvije različite frekvencije: $f_{a4}^R = \pm f_{b4}^R \pm 100$

- Sličan par međusobno suprotno rotirajućih protjecanja stvara i struja a^R frekvencije **40 Hz**. Oni se u prostoru vrte brzinom koja odgovara frekvenciji od **10 Hz** i također stvaraju odgovarajuće pulsirajuće protjecanje s nepomičnom osi, na koje djeluje struktura istaknutih polova, stvarajući reluktantni moment s određenom srednjom vrijednošću.



Primjer 2.

- Stator općeg modela stroja ima 4 istaknuta pola. Njegov se rotor vrati brzinom od 1500 min^{-1} . Namotima statora teku struje frekvencije 100 Hz. Odredite frekvencije rotorskih struja pri kojima je moguća trajna elektromehanička pretvorba energije. Odredite za sve slučajeve o kojoj se vrsti stroja i pretvorbe radi.

Rješenje:

$$p = 2$$

$$n = 1500 \text{ min}^{-1}$$

$$f^s = 100 \text{ Hz}$$

a) $f^R = \pm f^s \pm f_m = \pm f^s \pm \frac{pn}{60} = \pm 100 \pm 2 \cdot \frac{1500}{60} = \pm 100 \pm 50$

$$f_1^R = 50 \text{ Hz}$$

$$f_2^R = 150 \text{ Hz}$$

Primjer 2.

Tumačenje 1. kriterija za rotorske frekvencije 50 i 150 Hz

- Rješenje $f_1^R = 50$ Hz odgovara režimu rada **asinkronog motora** (rotor se vrti u istom smjeru i sporije od protjecanja statora).

Klizanje je:

$$s = \frac{100 - 50}{-100} = 0,5$$

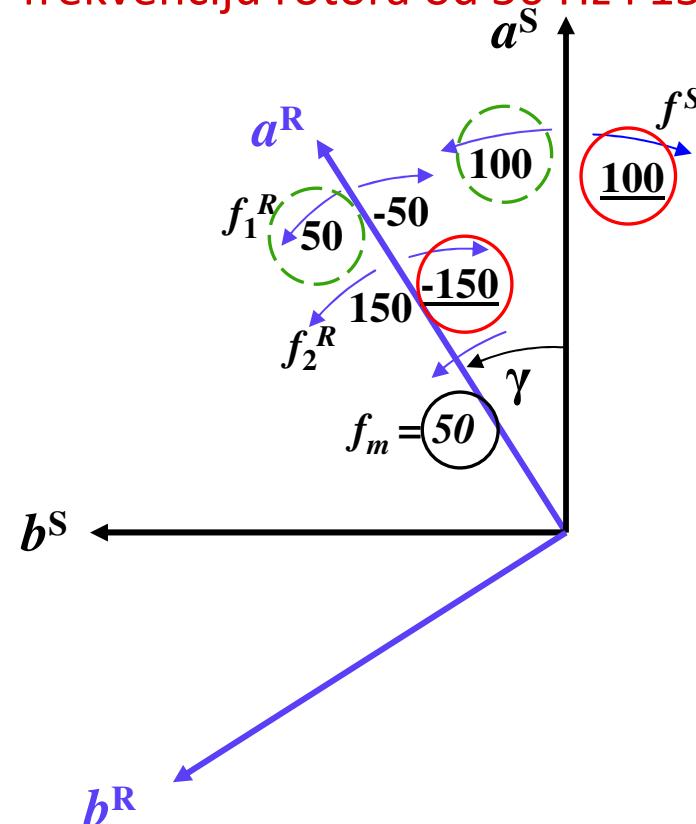
- Rješenje $f_2^R = 150$ Hz odgovara režimu rada asinkronog stroja u **protustrujnjom kočenju** (protjecanje statora vrti se suprotno rotoru).

Klizanje je:

$$s = \frac{-100 - 50}{-100} = 1,5$$

Slika 2a.

Tumačenje sprege protjecanja u fazama a statora i rotora za frekvenciju rotora od 50 Hz i 150 Hz



Primjer 2.

Tumačenje 2., 3. i 4. kriterija za reluktantne momente

b)

$$f_{a3}^R = 50 \text{ Hz}$$

sinkroni reluktantni motor

c)

$$f_{b3}^R = 50 \text{ Hz}$$

sinkroni reluktantni motor

d)

$$f_{a4}^R = \pm f_{b4}^R \pm 100 \text{ Hz}$$

ovo rješenje znači specijalni reluktantni stroj napajan na rotoru različitim frekvencijama.

Primjer 3.

Stator općeg modela stroja ima 4 istaknuta pola. Namotima statora teku struje frekvencije 50 Hz, a namotima rotora 60 Hz. Odredite brzine vrtnje pri kojima je moguća trajna elektromehanička pretvorba energije. Odredite za sve slučajeve o kojoj se vrsti stroja i pretvorbe radi.

Rješenje:

$$p = 2$$

$$f^R = 60 \text{ Hz}$$

$$f^S = 50 \text{ Hz}$$

a) $f^R = \pm f^S \pm f_m$

$$50 = \pm 60 \pm f_m$$

$$f_{m1} = 10 \text{ Hz} \quad n_1 = \frac{60 f_{m1}}{p} = \frac{60 \cdot 10}{2} = 300 \text{ min}^{-1}$$

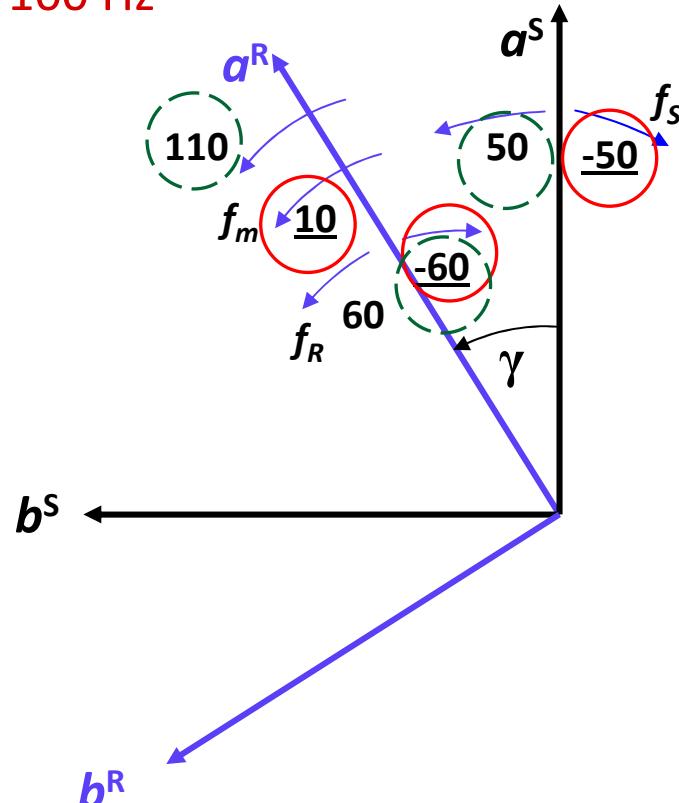
$$f_{m2} = 110 \text{ Hz} \quad n_2 = \frac{60 f_{m2}}{p} = \frac{60 \cdot 110}{2} = 3300 \text{ min}^{-1}$$

Primjer 3.

Tumačenje 1. kriterija za frekvencije vrtnje 10 i 110 Hz

Slika 3a.

Tumačenje sprege protjecanja u fazama a statora i rotora za frekvenciju rotora od 10 Hz i 100 Hz



- Rješenje $n = 300 \text{ min}^{-1}$ ($f_m = 10 \text{ Hz}$) odgovara **asinkronom stroju u režimu protustrujnog kočenja** (protjecanje statora vrti se suprotno od smjera vrtnje rotora). Klizanje je:

$$s = \frac{f_s - f_m}{f_s} = \frac{-50 - 10}{-50} = 1,2$$

- Rješenje $n = 3300 \text{ min}^{-1}$ ($f_m = 110 \text{ Hz}$) odgovara **asinkronom stroju u režimu generatora** (rotor se vrti u istom smjeru kao i protjecanje statora, ali s većom brzinom). Klizanje je:

$$s = \frac{f_s - f_m}{f_s} = \frac{50 - 110}{50} = -1,2$$

Primjer 3.

Tumačenje 2., 3. i 4. kriterija za reluktantne momente

b) $f_a^R = 60 \text{ Hz}$

$$n_3 = \frac{60 \cdot f_a^R}{p} = \frac{60 \cdot 60}{2} = 1800 \text{ min}^{-1}$$

Ova brzina odgovara radu **sinkronog reluktantnog stroja**.

c) $f_b^R = 60 \text{ Hz}$

$$n_3 = 1800 \text{ min}^{-1}$$

Ova brzina također odgovara radu **sinkronog reluktantnog stroja**.

d) Budući da rotorom teku struje zadane frekvencije (60 Hz), one su u oba namota jednake, pa se ne može primijeniti četvrti kriterij.

Primjer 4.

Stator općeg modela stroja ima 4 istaknuta pola. Njegov se rotor vrti brzinom od 1200 min^{-1} . Namotima rotora teku struje frekvencije 60 Hz. Odredite frekvencije statorskih struja pri kojima je moguća trajna elektromehanička pretvorba energije. Odredite za sve slučajeve o kojima se vrsti stroja i pretvorbe radi.

Rješenje:

$$p = 2$$

$$n = 1200 \text{ min}^{-1}$$

$$f_a^R = f_b^R = 60 \text{ Hz}$$

a) $f^R = \pm f^S \pm f_m$

$$60 = \pm f^S \pm 2 \cdot \frac{1200}{60} = \pm f^S \pm 40$$

$$f_1^S = 100 \text{ Hz}$$

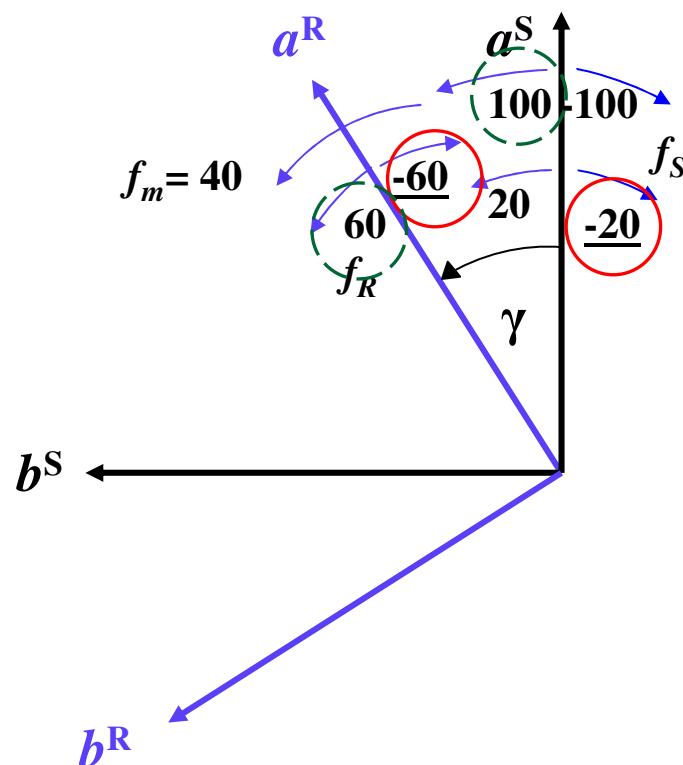
$$f_2^S = 20 \text{ Hz}$$

Primjer 4.

Tumačenje 1. kriterija za frekvencije statorskih struja 100 i 20 Hz

Slika 4a.

Tumačenje sprege protjecanja
u fazama a statora i rotora za
frekvenciju statora od 100 Hz i
20 Hz



$f_1^S = 100 \text{ Hz}$
režim asinkronog motora uz klizanje:

$$s = \frac{f_s - f_m}{f_s} = \frac{100 - 40}{100} = 0,6$$

$f_2^S = 20 \text{ Hz}$
asinkroni stroj u režimu
protustrujnog kočenja uz klizanje:

$$s = \frac{f_s - f_m}{f_s} = \frac{-20 - 40}{-20} = 3$$

Primjer 4.

Tumačenje 2., 3. i 4. kriterija za reluktantne momente

- Navedene dvije frekvencije struja statora jedina su rješenja.
- Reluktantni moment nema srednju vrijednost (za njega bi brzina vrtnje morala biti 1800 min^{-1} , a ne kako je zadano 1200 min^{-1}).
- U oba namota rotora teku struje zadane frekvencije 60 Hz, pa se ne može pojaviti srednja vrijednost reluktantnog momenta jer ona zahtijeva da frekvencije struja u namotima rotora budu različite.

MIRNO, PULZIRAJUĆE I OKRETNO MAGNETSKO POLJE

Namoti izmjeničnih strojeva

Strujni oblog, protjecanje i okretno polje u električnom stroju

Faktori namota

Protjecanja višefaznih namota

Inducirani napon

Elektromagnetski moment

Prof. dr. sc. Damir Žarko



Ak. god. 2010/2011

Osnovna podjela namota

Koncentrirani namot

- svi zavoji u jednom polnom koraku su namotani jedan ispod drugoga u istoj osi i spojeni u seriju
- *Primjer:* uzbudni namot sinkronog generatora s istaknutim polovima



Raspodijeljeni namot

- namot je smješten u utorima raspodijeljenima po obodu stroja
- po jednom paru utora može biti namotan jedan ili više zavoja
- dijelovi namota u različitim utorima se spajaju u seriju, a često više dijelova namota spojenih u seriju gupiraju u paralelne grane
- *Primjer:* armaturni namot asinkronog ili sinkronog stroja, uzbudni namot sinkronog turbogeneratora, rotorski namot kolutnog asinkronog motora

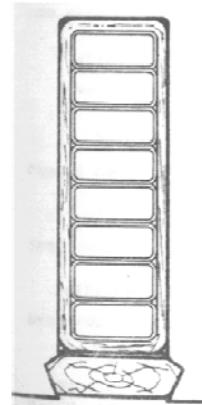


Osnovne izvedbe namota

Namoti mogu biti:

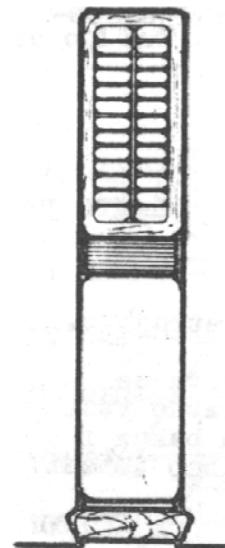
Jednoslojni

- u utoru se nalazi samo jedna strana svitka
- *prednosti:* manji broj svitaka, veći faktor punjenja bakrom
- *nedostaci:* svici su različitih dimenzija, nemogućnost skraćenja koraka svitka



Dvoslojni

- u utoru su smještene dvije strane dvaju različitih svitaka
- *prednosti:* moguće skraćenje koraka svitka i smanjenje udjela viših harmonika u induciranom naponu, svici su jednakih dimenzija
- *nedostaci:* manji faktor punjenja bakrom nego jednoslojni namot

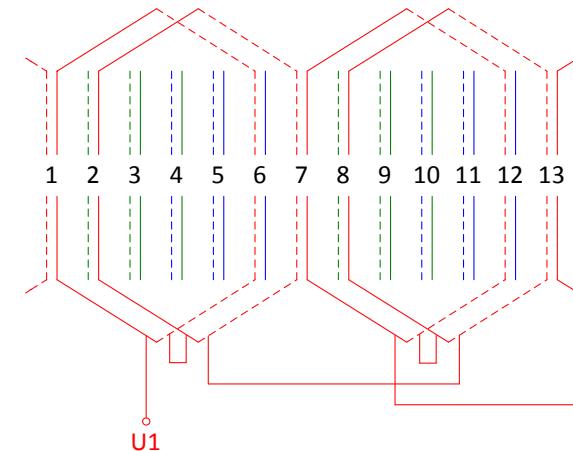


Osnovne izvedbe namota

Prema načinu spajanja namota razlikujemo:

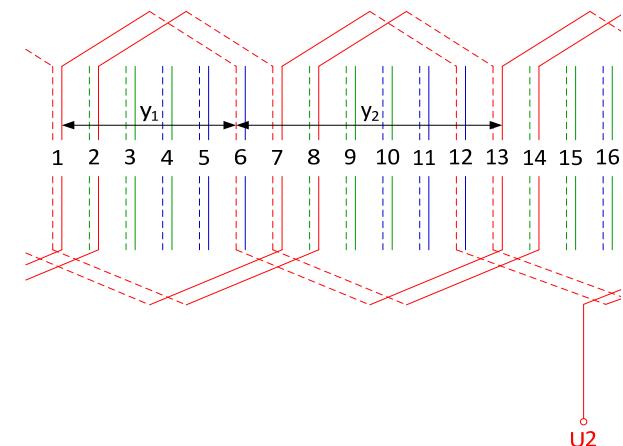
Petljasti namot

- svici pod jednim parom polova su spojeni jedan za drugim u seriju, a zatim se dalje spajaju s grupom svitaka pod drugim parom polova
- primjenjuje se kod strojeva sa svicima



Valoviti namot

- prvi štap u utoru se spaja u zavoj sa štapom koji je odmaknut za korak svitka y_1 . Sljedeći štap se spaja sa štapom odmaknutim za spojni korak y_2 u istom smjeru, tj. odmaknutim od prvog štapa za dvostruki polni korak.
- primjenjuje se uglavnom kod štapnih namota većih generatora

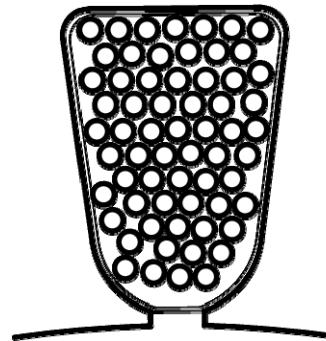


Osnovne izvedbe namota

Prema načinu ulaganja u utor razlikujemo:

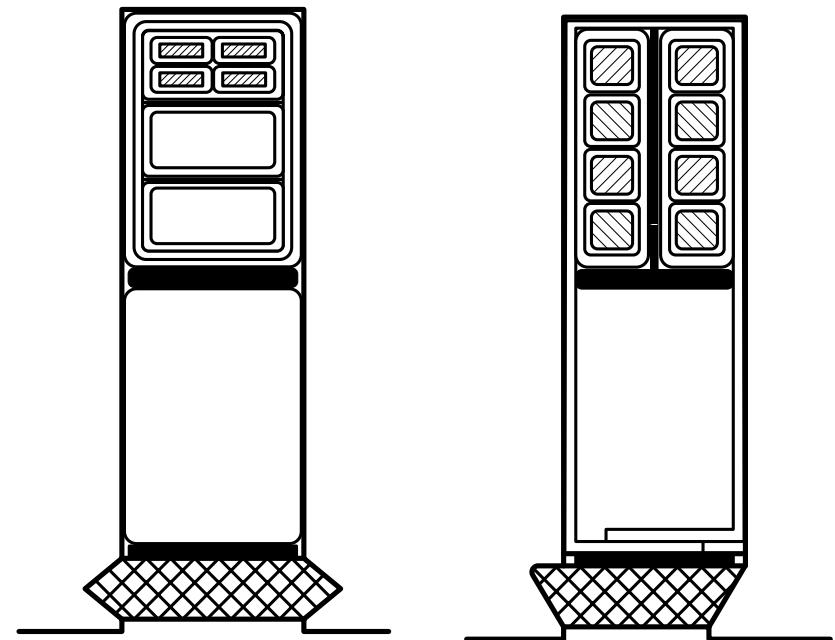
Usipni namot

- primjenjuje se kod okruglih vodiča izoliranih lakovom i poluzatvorenih utora
- u utor se kroz otvor pojedinačno uvode vodiči
- primjenjuje se kod malih strojeva



Uložni namot

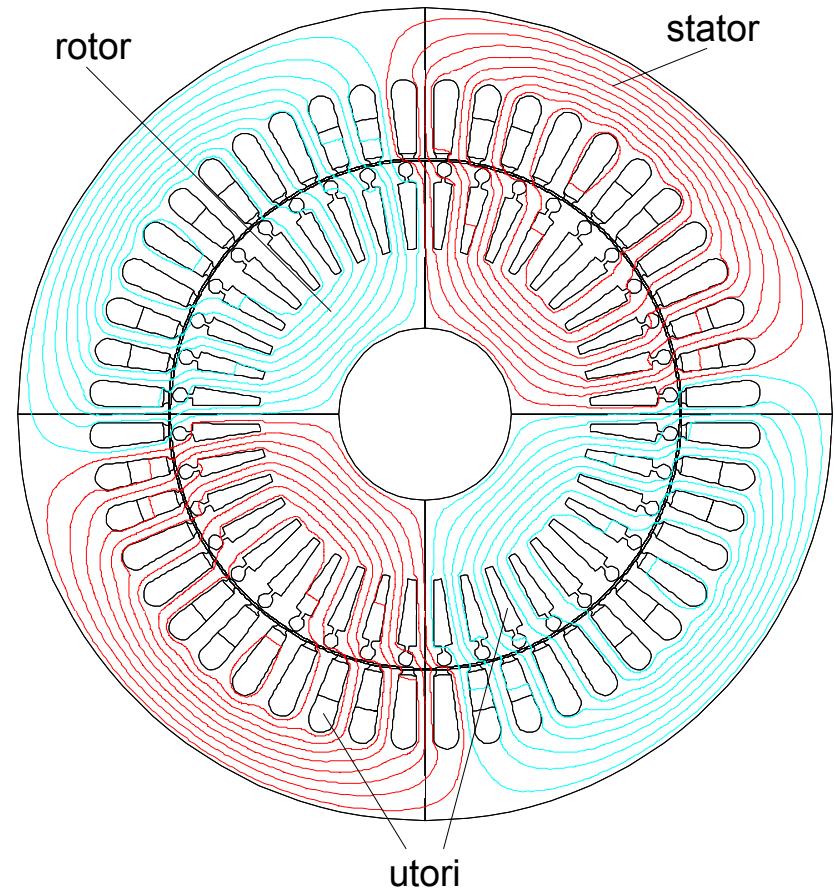
- primjenjuje se kod otvorenih utora najčešće u velikim strojevima
- namot s vodičima pravokutnog oblika se ulaže kroz otvor utora



Strujni oblog, protjecanje i okretno polje u električnom stroju

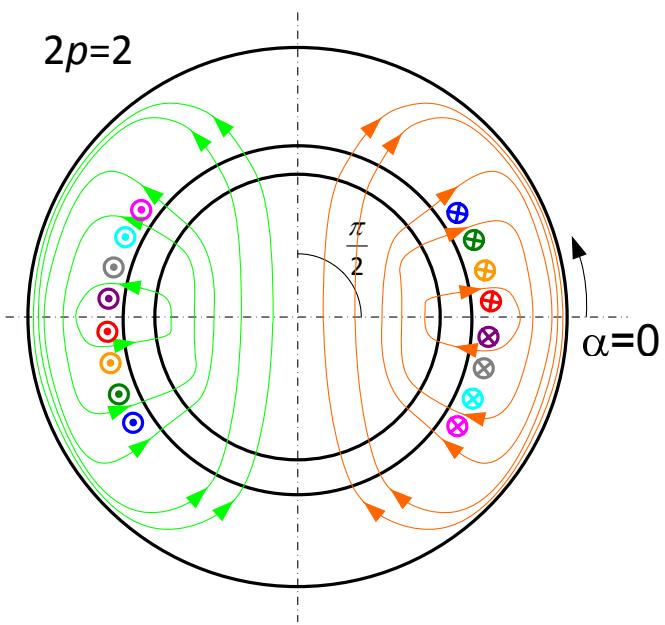
Početne pretpostavke:

- Rotor je cilindričnog oblika sa zračnim rasporom konstantne duljine
- Zanemaruje se pad magnetskog napona u željezu i zasićenje u stroju
- Razmatra se osnovni harmonik protjecanja i magnetskog polja u zračnom rasporu



Magnetsko polje u četveropolnom asinkronom motoru

Strujni oblog



Strujni oblog predstavlja raspodjelu struje po obodu stroja (drugi naziv linijska gustoća struje; engl. linear current density).

Jedinica: A/m

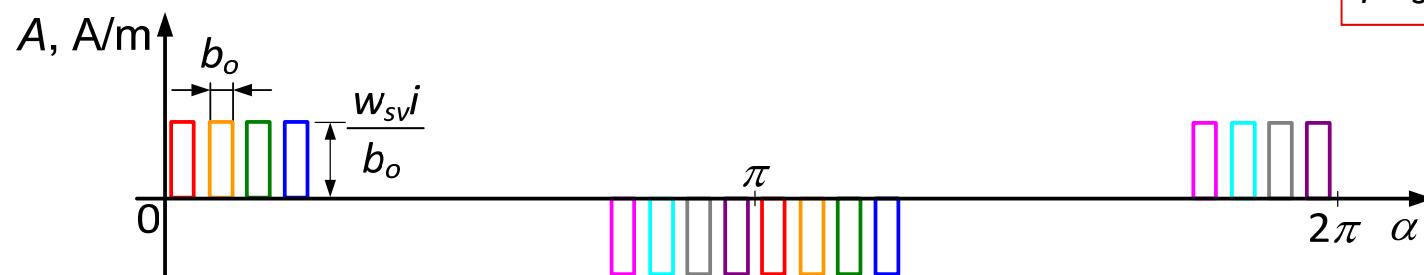
Strujni oblog određuje magnetsko polje u zračnom rasporu.

α je geometrijski kut po obodu stroja.

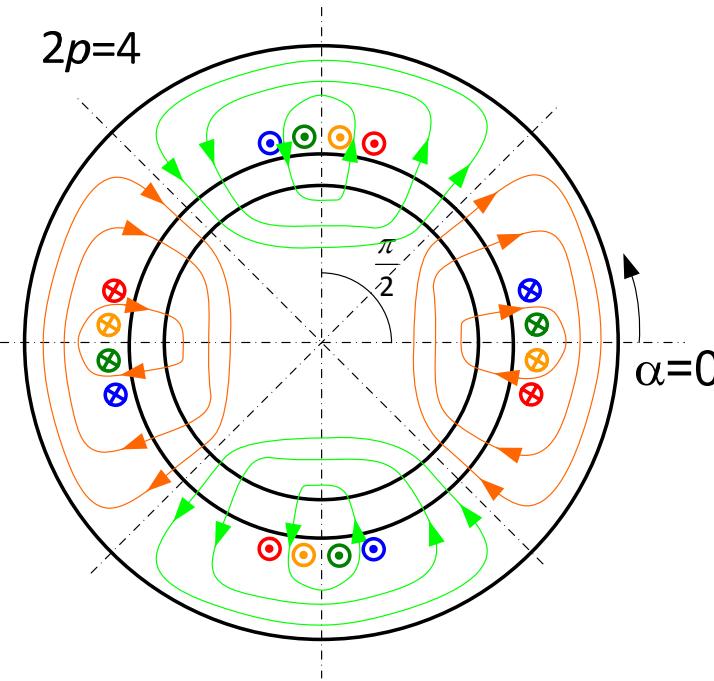
Prepostavlja se da je struja vodiča jednoliko raspoređena po zamišljenoj liniji uzduž otvora utora. Gustoća struje uzduž te linije je

$$A = \frac{w_{sv} i}{b_o}$$

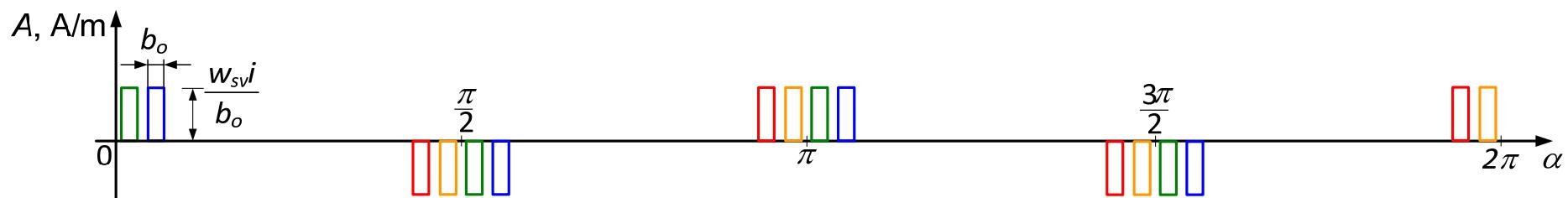
w_{sv} – broj zavoja po svitku
b_o – širina otvora utora
i – struja vodiča



Strujni oblog



Raspored vodiča jedne faze 4-polnog motora

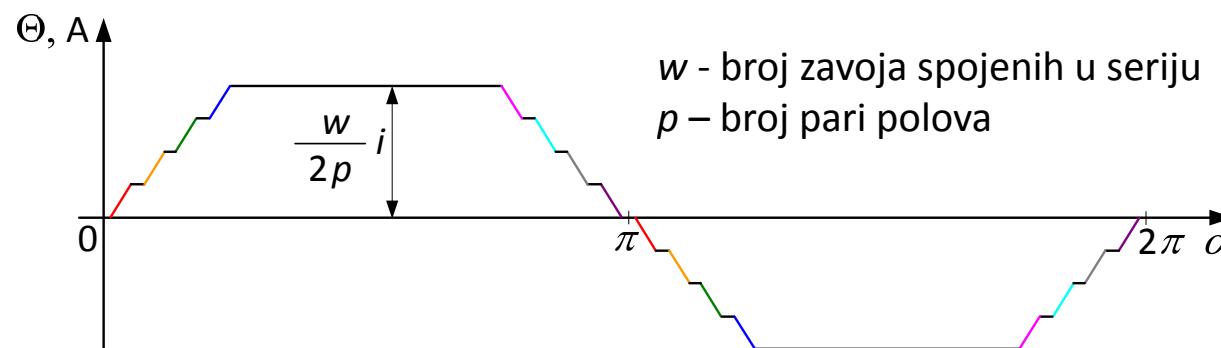
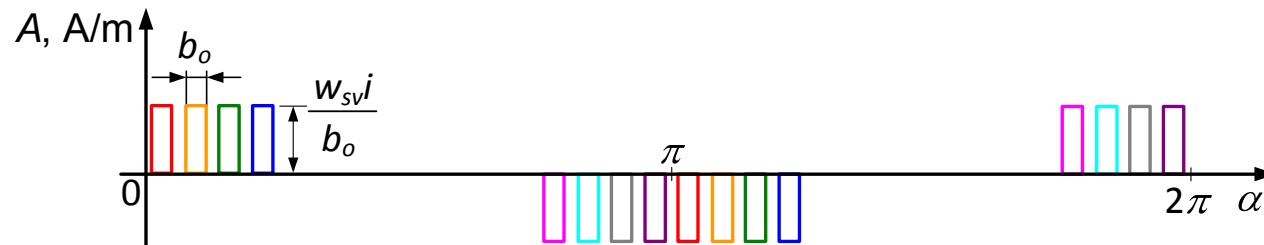


Protjecanje

Protjecanje se dobiva integracijom strujnog obloga po obodu stroja. U sredini svake strujne zone protjecanje je jednako nuli. Najveća vrijednost protjecanja postiže se u prostoru između dvije strujne zone, gdje je i iznos magnetske indukcije u zračnom rasporu maksimalan.

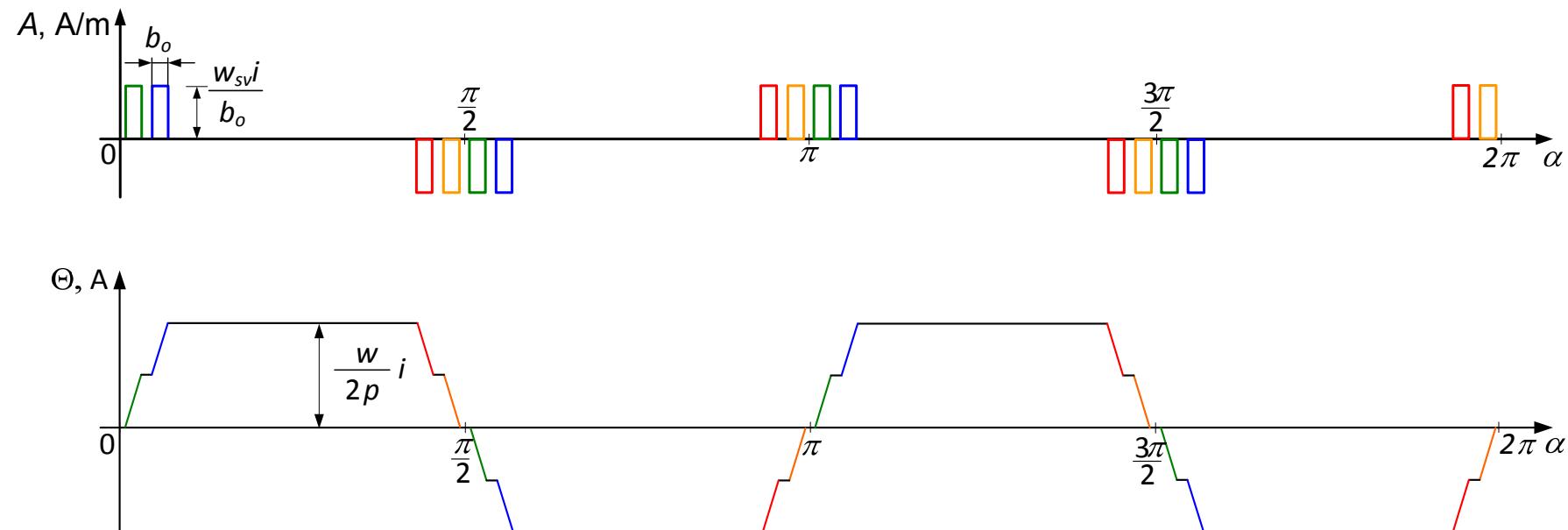
$$\Theta(\alpha) = \int_0^\alpha A(\alpha) d\alpha$$

Protjecanje 2-polnog motora



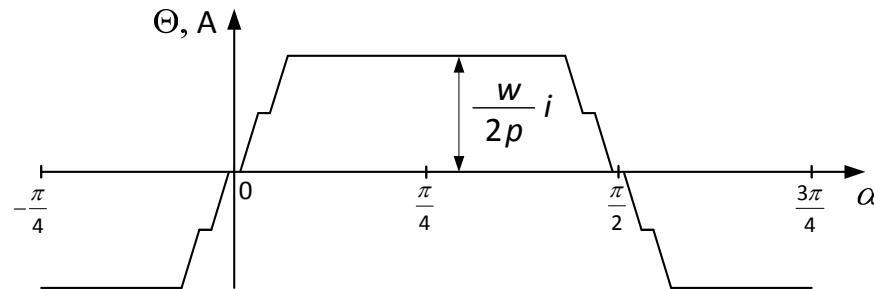
Protjecanje

Protjecanje 4-polnog motora

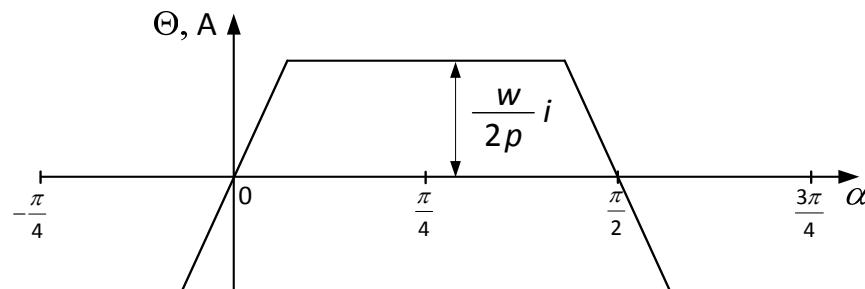


w - broj zavoja spojenih u seriju
 p - broj pari polova

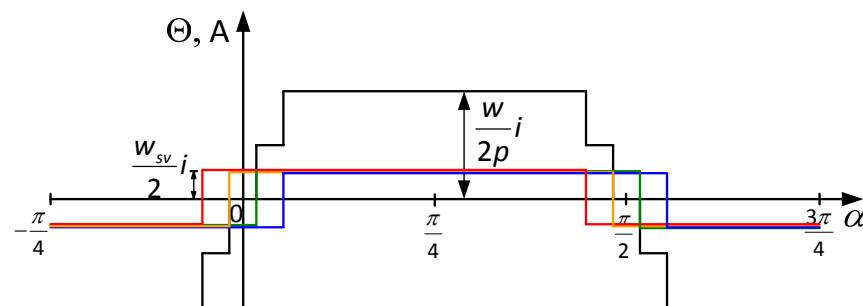
Protjecanje



Protjecanje uz kontinuiranu raspodjelu struje po otvoru utora

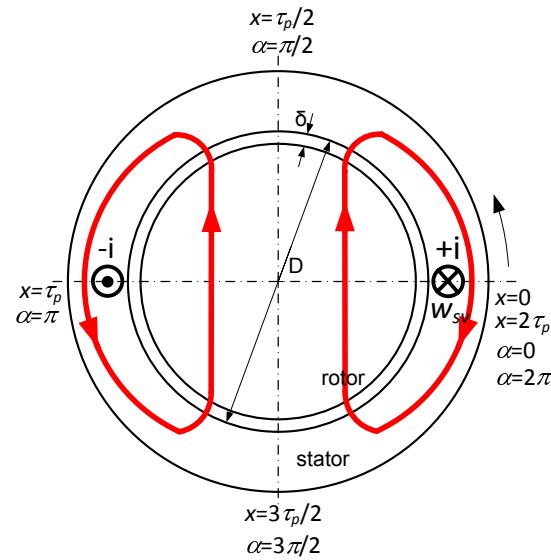


Protjecanje uz kontinuiranu raspodjelu struje po utorskom koraku

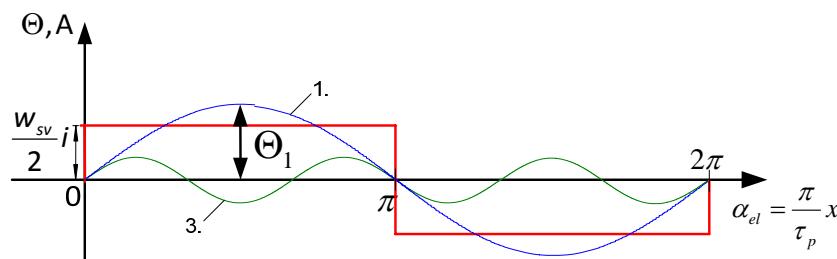


Protjecanje uz struje koncentrirane po sredini utora (najjednostavnije za računanje)

Harmonički sastav protjecanja



Magnetsko polje jednog svitka na statoru, broj polova $2p=2$



Raspodjela protjecanja jednog svitka po obodu statora

Ako svitkom s brojem vodiča w_{sv} smještenim na statoru teče struja i , stvorit će se 2 magnetska pola, oznaka $2p=2$.

Zračni raspor stator-rotor je konstantne duljine δ po obodu stroja.

Duljina jednog polnog koraka iznosi $\tau_p = D\pi/2p$.

Budući da se raspodjela protjecanja ponavlja za svaki par polova, najčešće ju prikazujemo kao funkciju električnog kuta α_{el} . Odnos između geometrijskog i električnog kuta je $\alpha_{el}=p\alpha_g$. Za $2p=2$ vrijedi $\alpha_{el}=\alpha_g$.

Odnos između električnog kuta i položaja x na obodu stroja glasi $\alpha_{el}=(\pi/\tau_p)x$.

Amplituda v -tog prostornog harmonika protjecanja jednog svitka

$$\Theta_v = \frac{4}{v\pi} \frac{w_{sv} i}{2}, \quad v=1,3,5,\dots$$

Osnovni harmonik protjecanja jednog svitka

$$\Theta_1(x) = \Theta_1 \sin\left(\frac{\pi}{\tau_p} x\right)$$

Magnetska indukcija u zračnom rasporu

Za jednu silnicu magnetskog polja se primjenom zakona protjecanja može pisati

$$\oint \vec{H} d\vec{\ell} = 2H_\delta \delta + H_{Fe} \ell_{Fe} = iw_{sv}$$

Zanemari li se pad magnetskog napona kroz željezo statora i rotora zbog $\mu_{Fe} \gg \mu_0$, dobijemo

$$\oint \vec{H} d\vec{\ell} = 2H_\delta \delta = iw_{sv}$$

$$2H_\delta \delta = iw_{sv} \Rightarrow H_\delta \delta = \frac{iw_{sv}}{2} = \Theta_\delta$$

$$B_\delta = \mu_0 H_\delta = \frac{\mu_0}{\delta} \Theta_\delta = \Lambda \Theta_\delta$$

Λ predstavlja magnetsku vodljivost zračnog raspora.

Ako svitkom teče istosmjerna struja, stvara se dvopolno mirno (stojeće) magnetsko polje.

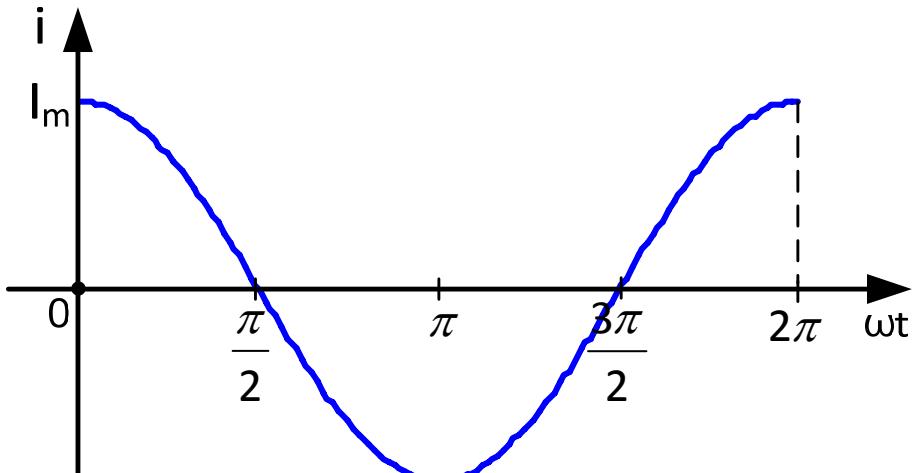
Prostorna raspodjela magnetske indukcije $B_\delta(x)$ je istog oblika kao i protjecanje $\Theta_\delta(x)$, tj. oni su proporcionalni. To vrijedi samo za zračni raspor konstantne duljine.

Protjecanje jednog svitka pri izmjeničnoj struji

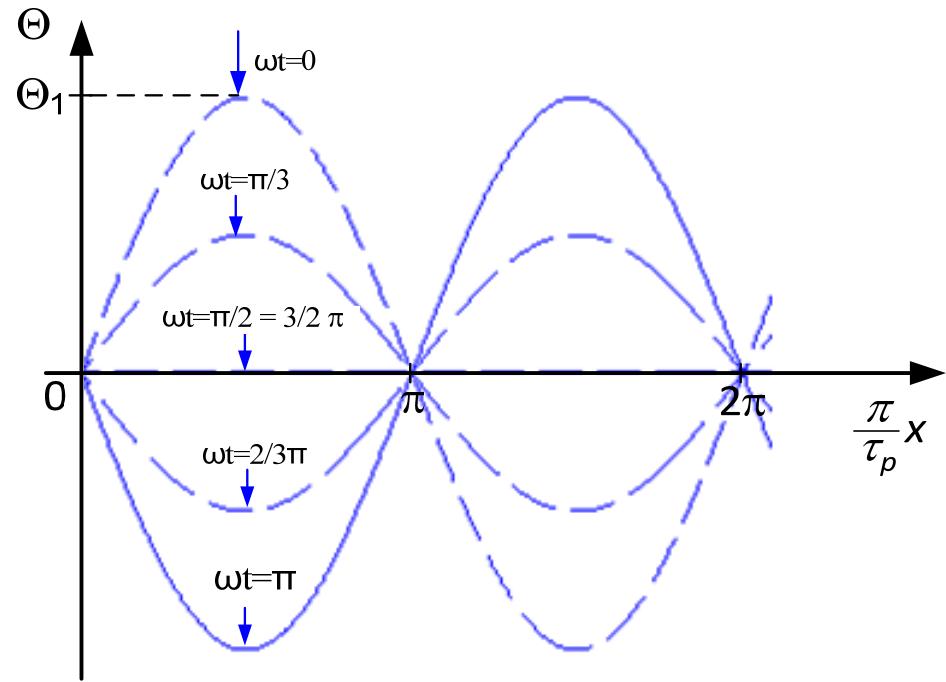
Ako svitkom teče izmjenična struja valnog oblika

$$i(t) = I_m \cos(\omega t) = I\sqrt{2} \cos(\omega t),$$

stvorit će se pulsirajuće protjecanje kojemu se veličina na svakome mjestu po obodu stroja (zračnog raspora) mijenja od maksimalne do minimalne vrijednosti, u skladu s promjenom veličine struje.

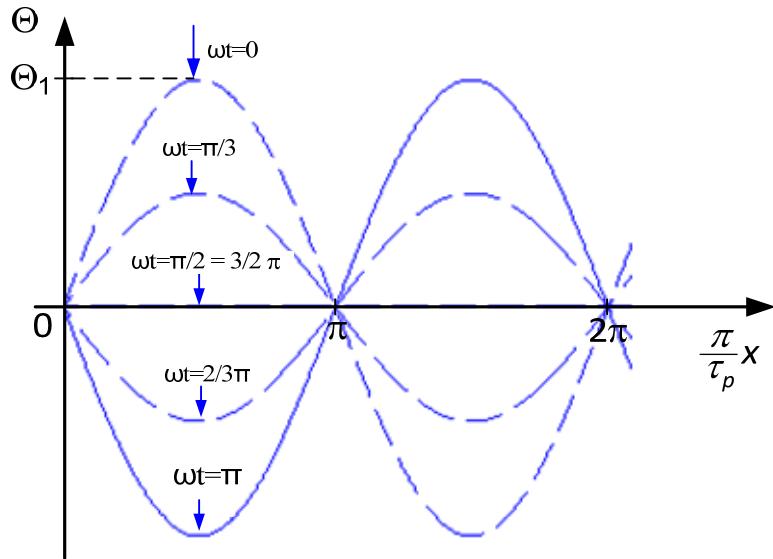


Valni oblik struje svitka



Pulsirajuće protjecanje jednog svitka, osnovni harmonik

Protjecanje jednog svitka pri izmjeničnoj struji



Stvoreno pulsirajuće magnetsko polje se može prikazati izrazom

$$\Theta(x,t) = \Theta_1 \cos(\omega t) \sin\left(\frac{\pi}{\tau_p} x\right)$$

Θ_1 – amplituda protjecanja u trenutku $\omega t=0$
(kada je struja maksimalna)

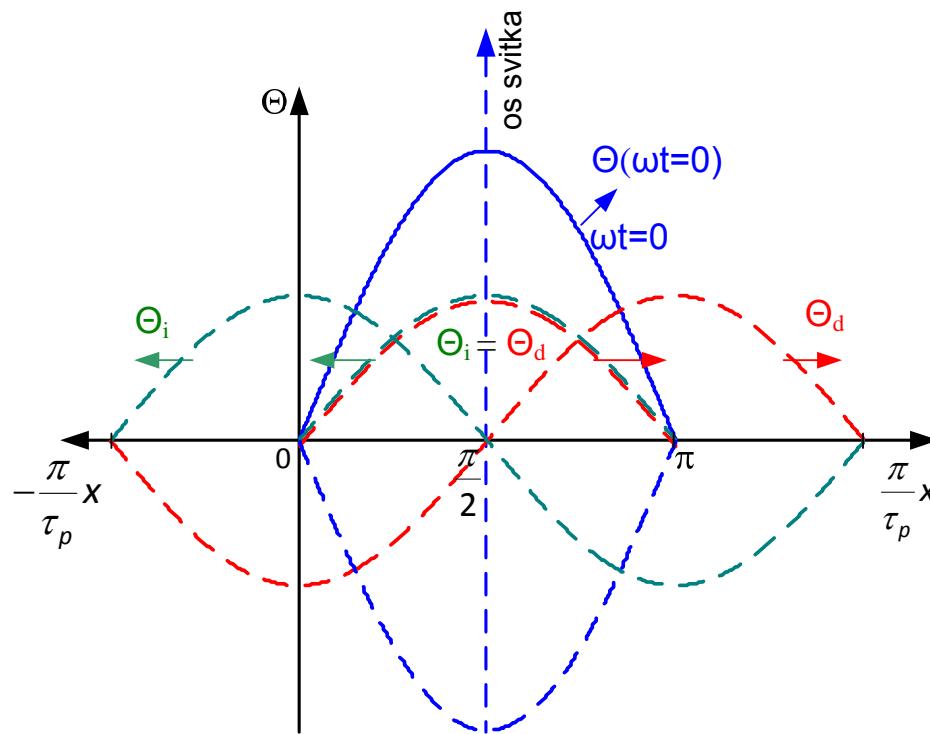
Pulsirajuće protjecanje se može prikazati s dva okretna protjecanja (direktno i inverzno)

$$\underbrace{\Theta_1 \cos(\omega t) \sin\left(\frac{\pi}{\tau_p} x\right)}_{\text{Pulsirajuće protjecanje}} = \underbrace{\frac{1}{2} \Theta_1 \sin\left(\frac{\pi}{\tau_p} x - \omega t\right)}_{\text{Direktno protjecanje}} + \underbrace{\frac{1}{2} \Theta_1 \sin\left(\frac{\pi}{\tau_p} x + \omega t\right)}_{\text{Inverzno protjecanje}}$$

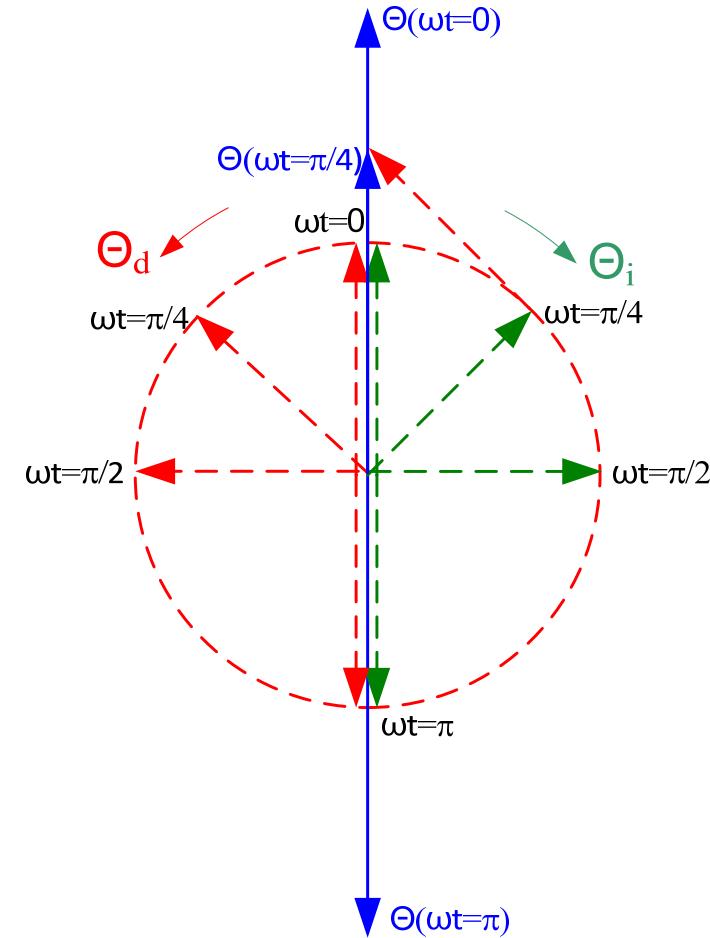
$$\Theta(x,t) = \Theta_d(x,t) + \Theta_i(x,t)$$

Direktno i inverzno protjecanje su dva sinusna vala koja se kreću po obodu stroja u suprotnim smjerovima, a amplituda im je jednaka polovici amplitude pulsirajućeg protjecanja.

Protjecanje jednog svitka pri izmjeničnoj struji



Prostorna raspodjela pulsirajućeg protjecanja,
prikaz s dvije okretne komponente



Prikaz pulsirajućeg protjecanja s dva
rotirajuća vektora

Brzina gibanja okretnog protjecanja

Val protjecanja konstantne amplitude giba se po obodu brzinom koju dobijemo na slijedeći način:

$$\frac{1}{2} \Theta_1 \sin\left(\frac{\pi}{\tau_p} x - \omega t\right) = \text{konst.}$$

To će biti zadovoljeno kada je

$$\sin\left(\frac{\pi}{\tau_p} x - \omega t\right) = \text{konst.} \quad \text{odnosno} \quad \left(\frac{\pi}{\tau_p} x - \omega t\right) = \text{konst.}$$

gdje je x položaj na obodu rotora, a ω je kružna frekvencija .

$$x = vt + x_0$$

Za $x_0=0$

$$\left(\frac{\pi}{\tau_p} v - \omega\right)t = \text{konst.} \Rightarrow \left(\frac{\pi}{\tau_p} v - \omega\right) = 0$$

Brzina gibanja okretnog protjecanja

Mehanička brzina gibanja vala protjecanja po obodu stroja je onda

$$v = \omega \frac{\tau_p}{\pi}$$

Mehanička kutna brzina ω_m koja odgovara brzini v će biti

$$\omega_m = \frac{v}{D/2} = \omega \frac{\tau_p}{\pi} \frac{2}{D} = \frac{\omega}{p}$$

Za negativni (inverzni) val se dobije na isti način

$$\omega_m = -\frac{\omega}{p}$$

ω_m je stvarna kutna brzina kojom se prostorno kreće val za razliku od električne kutne brzine ω koja prikazuje električni kut prevaljen u 1 sekundi.

Električna kutna brzina vala jednaka je kružnoj frekvenciji $2\pi f$. Tom bi se brzinom val kretao po obodu kada bi stroj bio dvopolni: $p=1$, $\alpha_{el}=\alpha_g$.

Brzina gibanja okretnog protjecanja

Zaključak

Okretno polje kreće se uvijek takvom brzinom da prijeđe 1 par polova dok struja prijeđe jednu punu periodu.

U praksi se često koristi pojam brzine vrtnje n umjesto kutne brzine ω_m .

Brzina vrtnje n pokazuje koliko ima punih okretaja u 1 minuti ili 1 sekundi.

$$1 \text{ puni okretaj} = 2\pi \text{ radijana}$$

$$n \text{ okretaja u minuti} = n/60 \text{ okretaja u sekundi}$$

Brzini vrtnje n onda odgovara kutna brzina

$$\omega_m = \frac{2\pi n}{60}, \text{ rad/s}$$

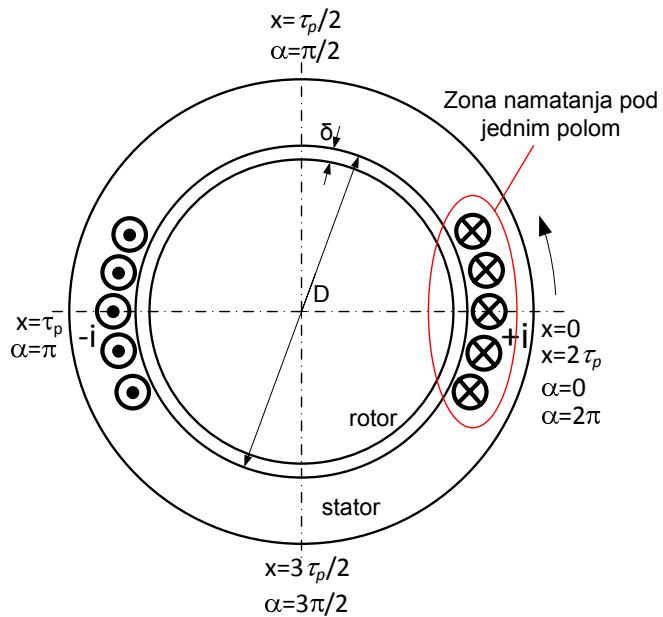
Brzina vrtnje okretnog polja će biti

$$n = \frac{60\omega_m}{2\pi} = \frac{60}{2\pi} \frac{2\pi f}{p} = \frac{60f}{p}, \text{o/min}$$

a veza između frekvencije induciranih napona i brzine vrtnje polja je onda

$$f = \frac{pn}{60}, \text{ Hz}$$

Protjecanje namota jedne faze



Prikaz namota jedne faze
statora u dvopolnom stroju

Osnovni harmonik protjecanja namota jedne faze dobije se tako da se zbroje okretna protjecanja svih svitaka u zoni jednog pola uzimajući u obzir fazni pomak među njima. Svici su smješteni u utorima.

Kada je po obodu stroja s p pari polova jednoliko raspodijeljeno ukupno N utora, električni kut α_{el} između dva susjedna utora će biti

$$\alpha_{el} = p \frac{2\pi}{N}$$

Broj utora u zoni pod polom označavamo s q

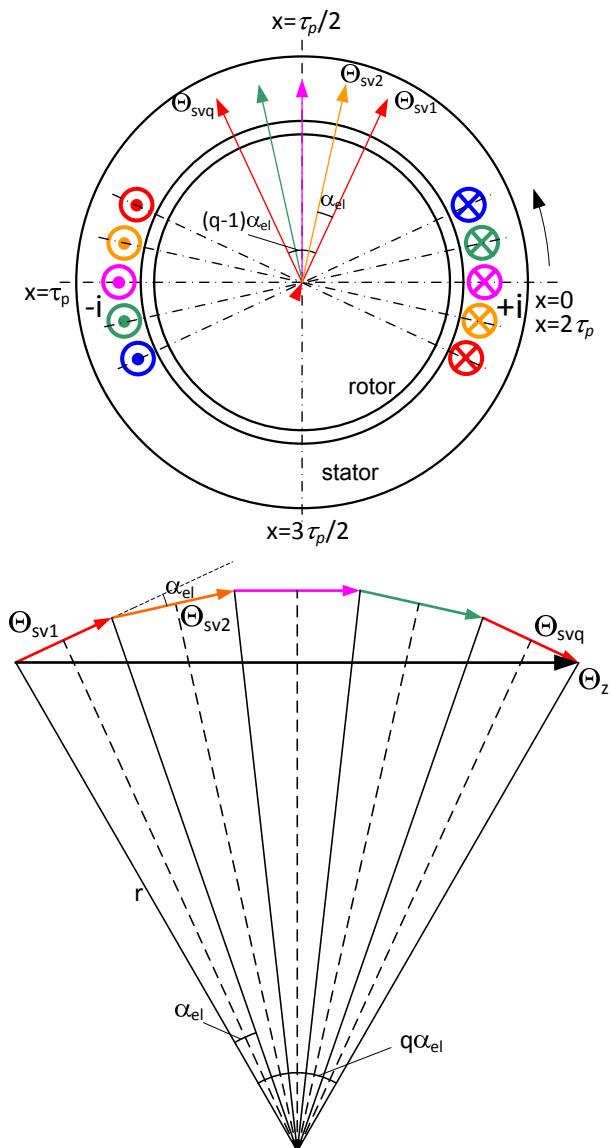
$$q = \frac{N}{2pm}$$

gdje je m broj faza.

Ukupno protjecanje namota jedne faze se može pisati kao

$$\Theta_f(x, t) = \Theta_1 \cos(\omega t) \sum_{i=1}^q \sin \left[\frac{\pi}{\tau_p} x - \left(i - \frac{q+1}{2} \right) \alpha_{el} \right]$$

Protjecanje namota jedne faze (zonski faktor namota)



Prostorno razmaknuta sinusna protjecanja se mogu zbrajati vektorski. Vektori protjecanja se nalaze u osima pripadnih svitaka.

Ako sve vektore nadovežemo jedan na drugi, njihovi krajevi će se nalaziti na obodu kružnice polumjera r . Ako amplituda protjecanja Θ_{sv} svakog svitka iznosi Θ_1 , onda vrijedi

$$\frac{\Theta_1}{2} = r \sin\left(\frac{\alpha_{el}}{2}\right)$$

Budući da je središnji kut za sva protjecanja zone pola qa , vrijedi

$$\frac{\Theta_z}{2} = r \sin\left(q \frac{\alpha_{el}}{2}\right)$$

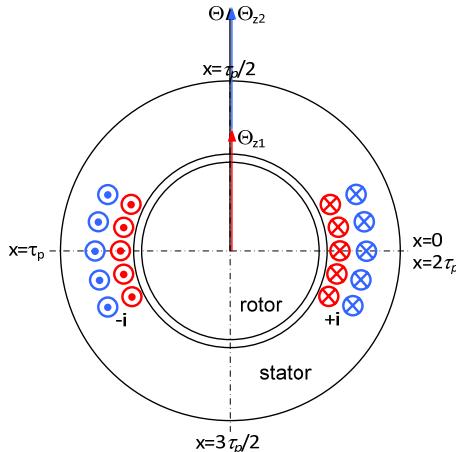
Algebarska suma svih protjecanja u zoni je $q\Theta_1$, a stvarna vektorska suma iznosi

$$\Theta_z = q\Theta_1 f_z$$

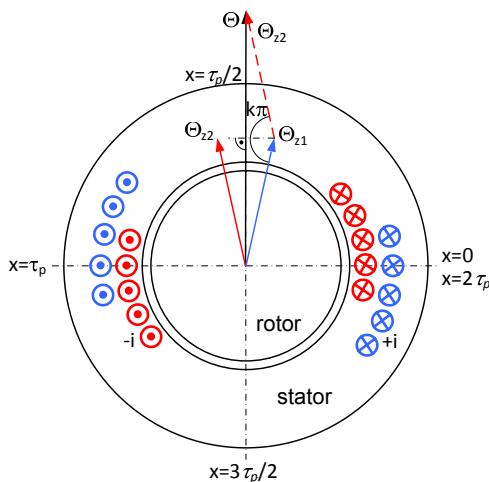
Faktor f_z nazivamo **zonskim faktorom namota**. On je omjer stvarne amplitude protjecanja faze i algebarske sume protjecanja svih svitaka u zoni, tj.

$$f_z = \frac{\Theta_z}{q\Theta_1} = \frac{\sin\left(q \frac{\alpha_{el}}{2}\right)}{q \sin\left(\frac{\alpha_{el}}{2}\right)}$$

Protjecanje namota jedne faze (tetivni faktor namota)



Prostorni raspored dvoslojnog namota s dijametalnim svicima ($k=1$)



Prostorni raspored dvoslojnog namota sa skraćenim svicima ($k=13/15$)

Svici u namotu mogu biti *dijametalni* ili *skraćeni*. U dijametalnom svitku razmak između strana svitaka, koji nazivamo širinom svitka y , jednak je polnom koraku $τ_p$, tj. $y=τ_p$. Kod skraćenog svitka je $y<τ_p$.

Odnos širine svitka i polnog koraka nazivamo *skraćenjem*

$$k = \frac{y}{τ_p}$$

Obično se y i $τ_p$ izražavaju brojem utorskih koraka. Npr. skraćenje $10/12$ znači da je $y=10$ utorskih koraka, a polni korak je $τ_p=12$ utorskih koraka.

Dijametalni svitak – protjecanja $Θ_{z1}$ i $Θ_{z2}$ su u fazi

Skraćeni svitak – protjecanja $Θ_{z1}$ i $Θ_{z2}$ su fazno pomaknuta za $(1-k)π$

Ukupno protjecanje jednako je vektorskoj sumi protjecanja $Θ_{z1}$ i $Θ_{z2}$.

U općenitom slučaju vrijedi

$$\Theta = 2Θ_z \sin\left(k \frac{\pi}{2}\right) = 2Θ_z \sin\left(\frac{y}{τ_p} \frac{\pi}{2}\right)$$

Odnos ukupnog protjecanja i algebarskog zbroja zonskih protjecanja nazivamo **tetivnim faktorom namota**.

$$f_t = \frac{\Theta}{2Θ_z} = \sin\left(\frac{y}{τ_p} \frac{\pi}{2}\right)$$

Amplituda ukupnog protjecanja namota jedne faze

Amplituda ukupnog protjecanja jedne faze Θ_f računa se tako da se algebarski zbroje amplitude protjecanja svih svitaka na jednom paru polova i rezultat pomnoži zonskim i tetivnim faktorom namota, ili jednostavnije ukupnim **faktorom namota**

$$f_n = f_z f_t$$

Faktor namota obuhvaća utjecaj geometrije stroja na iznos i harmonički sastav protjecanja, a time i na raspodjelu magnetskog polja u zračnom rasporu i valni oblik induciranih napona u vodičima.

Amplituda osnovnog harmonika protjecanja jednog svitka napajanog izmjeničnom strujom iznosi

$$\Theta_1 = \frac{4 w_{sv}}{\pi} / \sqrt{2}$$

Ukupni broj zavoja na jednom paru polova iznosi $w_{pp} = q w_{sv}$ za jednoslojni namot, odnosno $w_{pp} = 2q w_{sv}$ za dvoslojni namot. U oba slučaja vrijedi

$$w_{pp} = \frac{w}{p}$$

gdje je w/p omjer ukupnog broja zavoja jedne faze po svim polovima i broja pari polova. Odatle slijedi

$$\Theta_{f1} = \frac{4 I \sqrt{2}}{\pi} \frac{w}{2} f_n$$

Ako u namotu postoji a paralelnih grana, onda je struja u svitku a puta manja od ukupne fazne struje I . Tada vrijedi

$$\Theta_{f1} = \frac{4 I \sqrt{2}}{\pi} \frac{w}{2a} f_n$$

Protjecanje (primjer)

U dvoslojnom namotu statora jednofaznog 8-polnog stroja s 240 zavoja spojenih u seriju i faktorom namota 0,91 teče struja 10 A, 50 Hz, a rotor se vrti brzinom 720 o/min. Kolika je:

- a) amplituda osnovnog harmonika pulsirajućeg protjecanja statora,
- b) brzina vrtnje direktnog okretnog protjecanja u odnosu na rotor,
- c) brzina vrtnje inverznog okretnog protjecanja u odnosu na rotor?

a)

$$\Theta_{f1} = \frac{4 I \sqrt{2}}{\pi 2a} \frac{w}{p} f_n = \frac{4 \cdot 10 \sqrt{2}}{\pi \cdot 2 \cdot 1} \frac{240}{4} \cdot 0,91 = 491,57 \text{ A}$$

b)

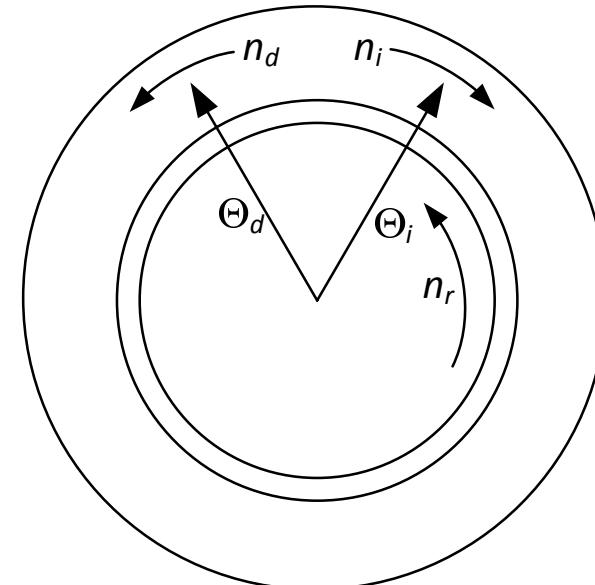
$$n_d = \frac{60f}{p} = \frac{60 \cdot 50}{4} = 750 \text{ o/min}$$

$$n_{dr} = |n_d - n_r| = |750 - 720| = 30 \text{ o/min}$$

c)

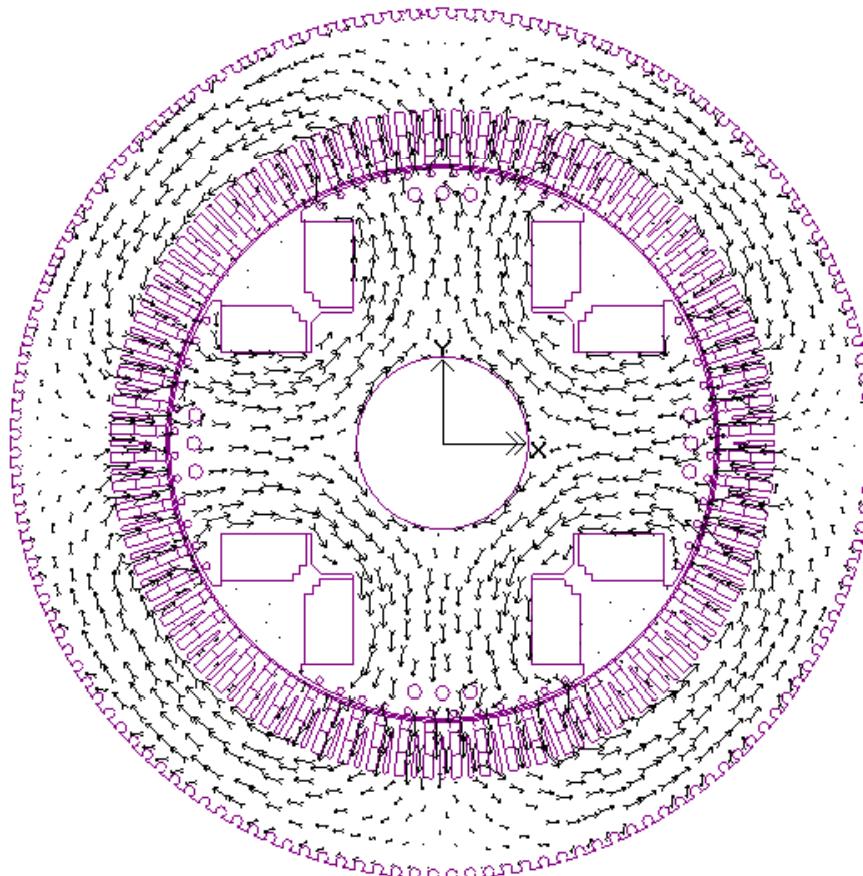
$$n_i = -n_d = -750 \text{ o/min}$$

$$n_{ir} = |n_i - n_r| = |-750 - 720| = 1470 \text{ o/min}$$



Primjer pulsirajućeg polja u sinkronom generatoru s istaknutim polovima

Faza A generatora je napajana izmjeničnom strujom. Struje u fazama B i C jednake su nuli. Rotor miruje u položaju u kojemu se os rotora podudara s osi faze A.



Shema namota (primjer 1)

Nacrtajte razvijenu shemu trofaznog dvoslojnog petljastog namota: $N=24$, $2p=4$, $y=5$ i izračunajte faktore namota (zonski, tetivni i ukupni).

$$\tau_p = \frac{N}{2p} = \frac{24}{2 \cdot 2} = 6$$

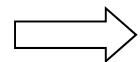
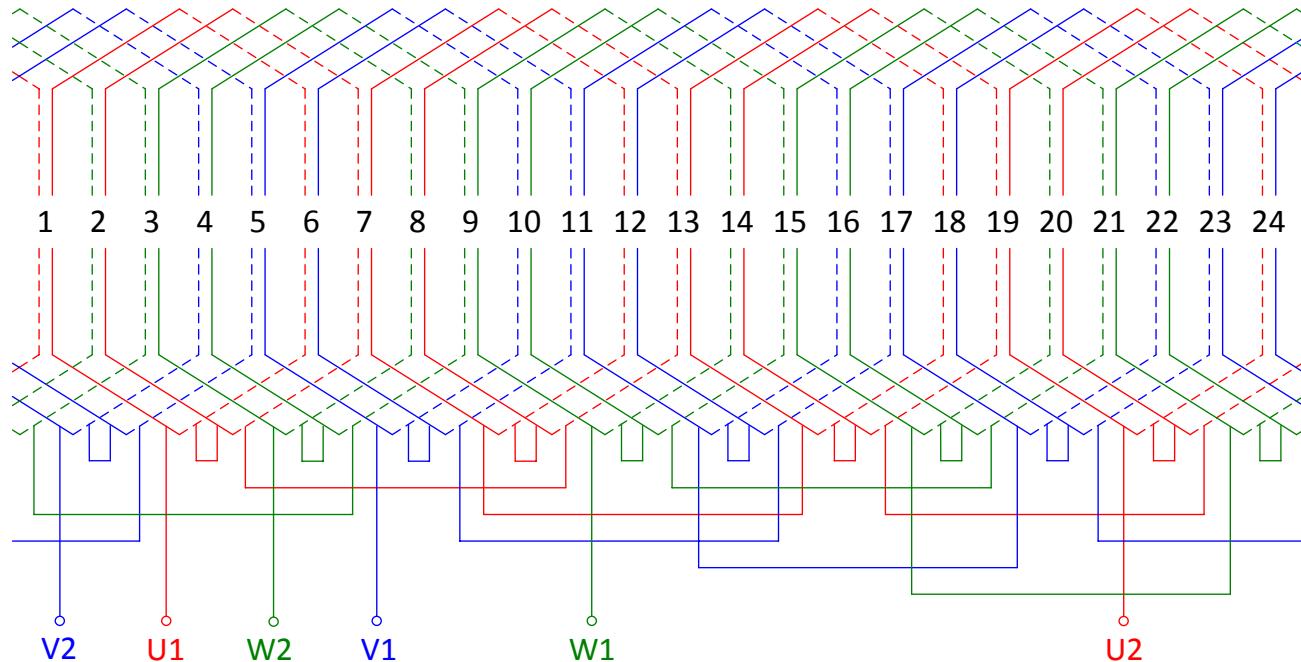
$$\alpha = p \frac{360^\circ}{N} = 2 \frac{360^\circ}{24} = 30^\circ$$

$$q = \frac{N}{2pm} = \frac{24}{2 \cdot 2 \cdot 3} = 2$$

$$k = \frac{y}{\tau_p} = \frac{5}{6}$$

$$f_z = \frac{\sin\left(q \frac{\alpha}{2}\right)}{q \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\sin\left(2 \frac{30^\circ}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{30^\circ}{2}\right)} = 0,9659$$

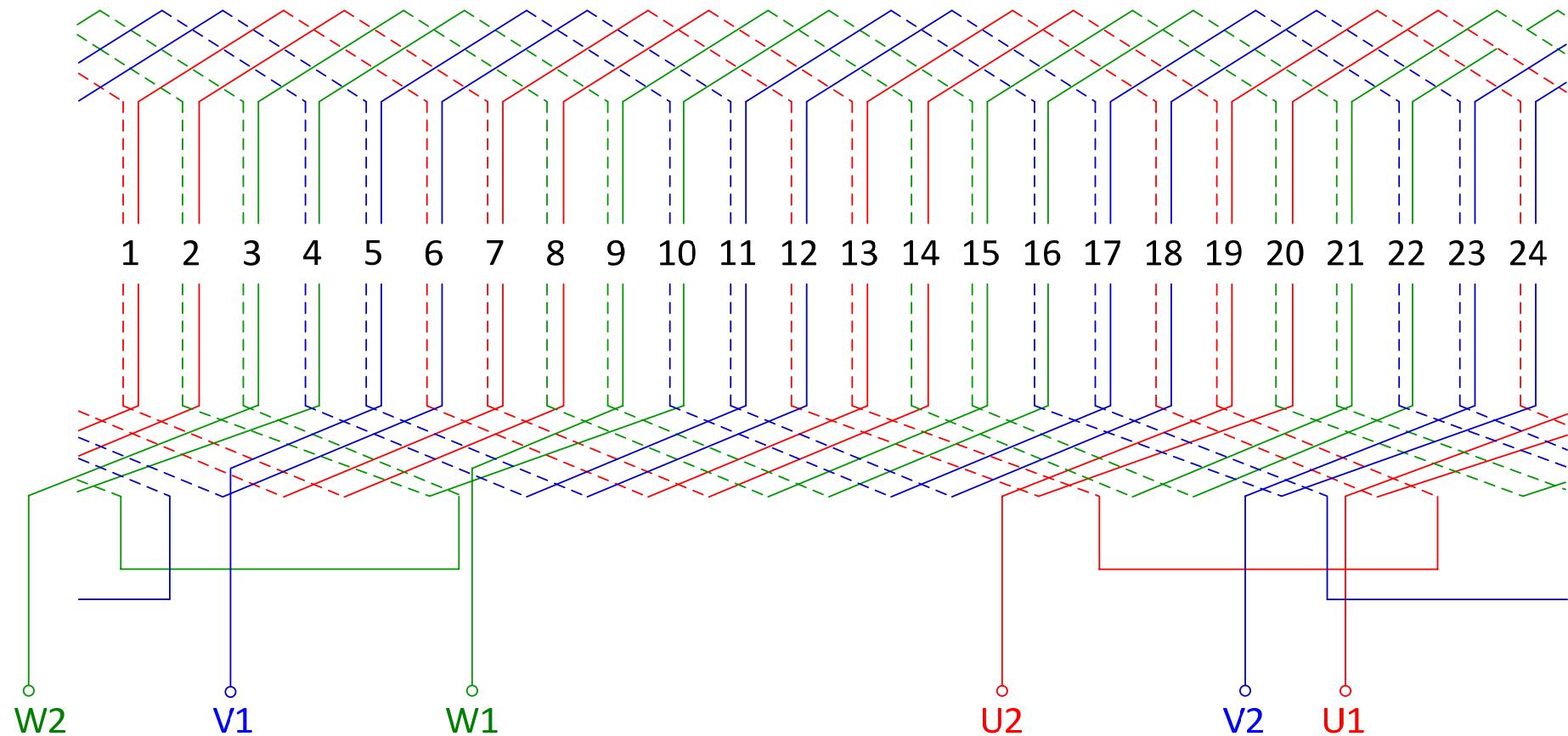
$$f_t = \sin\left(\frac{y \pi}{\tau_p 2}\right) = \sin\left(\frac{5 \pi}{6 2}\right) = 0,9659$$



$$f_n = f_z f_t = 0,9659 \cdot 0,9659 = 0,9330$$

Shema namota (primjer 2)

Nacrtajte razvijenu shemu trofaznog valovitog namota: $N=24$, $2p=4$, $y_1=5$, $y_2=7$.



Trofazna okretna polja

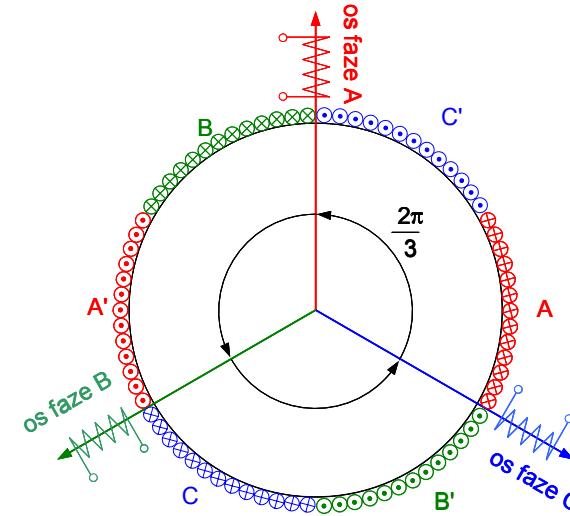
Osnovni prostorni harmonički članovi protjecanja triju prostorno za $2\pi/3$ pomaknutih namota (faza) A, B i C su:

$$\Theta_A(x) = \Theta_{f1A} \sin \frac{\pi}{\tau_p} x$$

$$\Theta_B(x) = \Theta_{f1B} \sin \left(\frac{\pi}{\tau_p} x - \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$\Theta_C(x) = \Theta_{f1C} \sin \left(\frac{\pi}{\tau_p} x - \frac{4\pi}{3} \right)$$

Sljedeća faza

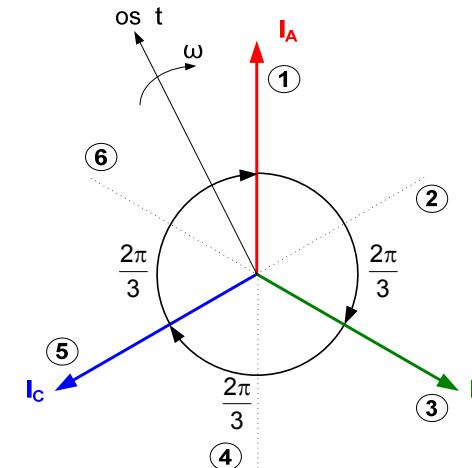


Ako namotima A, B i C teku izmjenične struje vremenski (fazno) međusobno pomaknute za $2\pi/3$, u svakom namotu se stvaraju pulsirajuća protjecanja

$$\Theta_A(x, t) = \Theta_{f1A} \cos \omega t \sin \frac{\pi}{\tau_p} x$$

$$\Theta_B(x, t) = \Theta_{f1B} \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}) \sin \left(\frac{\pi}{\tau_p} x - \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$\Theta_C(x, t) = \Theta_{f1C} \cos(\omega t - \frac{4\pi}{3}) \sin \left(\frac{\pi}{\tau_p} x - \frac{4\pi}{3} \right)$$



Trofazna okretna polja

Ako su struje u svim svicima jednake i ako su brojevi vodiča (zavoja) jednaki, amplitude protjecanja u osima faza A, B i C su jednake. Pulsirajuća protjecanja svake faze možemo prikazati s dva okretna protjecanja:

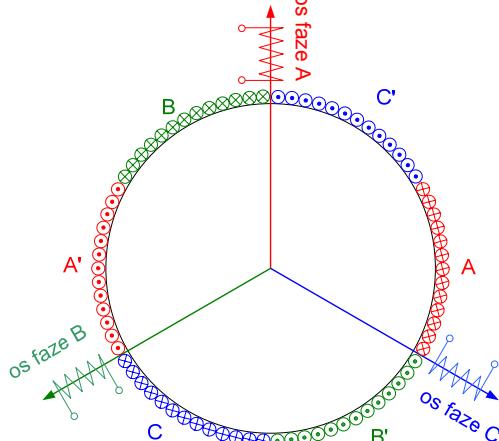
$$\left. \begin{aligned} \Theta_A(x,t) &= \frac{1}{2}\Theta_{f1} \sin\left(\frac{\pi}{\tau_p}x - \omega t\right) + \frac{1}{2}\Theta_{f1} \sin\left(\frac{\pi}{\tau_p}x + \omega t\right) \\ \Theta_B(x,t) &= \frac{1}{2}\Theta_{f1} \sin\left(\frac{\pi}{\tau_p}x - \omega t\right) + \frac{1}{2}\Theta_{f1} \sin\left(\frac{\pi}{\tau_p}x + \omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \\ \Theta_C(x,t) &= \frac{1}{2}\Theta_{f1} \sin\left(\frac{\pi}{\tau_p}x - \omega t\right) + \frac{1}{2}\Theta_{f1} \sin\left(\frac{\pi}{\tau_p}x + \omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned} \right\} +$$
$$\Theta_{ABC}(x,t) = \Theta_A(x,t) + \Theta_B(x,t) + \Theta_C(x,t) = \frac{3}{2}\Theta_{f1} \sin\left(\frac{\pi}{\tau_p}x - \omega t\right) + 0$$

Ako se sva tri direktna i sva tri inverzna vala protjecanja zbroje, dobije se direktno okretno protjecanje amplitude 50 % veće od amplitude protjecanja jedne faze. Inverzna protjecanja se poništavaju, $\sum \Theta_i = 0$. Okretna protjecanja bez inverzne komponente se nazivaju **simetrična okretna protjecanja (polja)**. Ona se vrte sinkronom brzinom

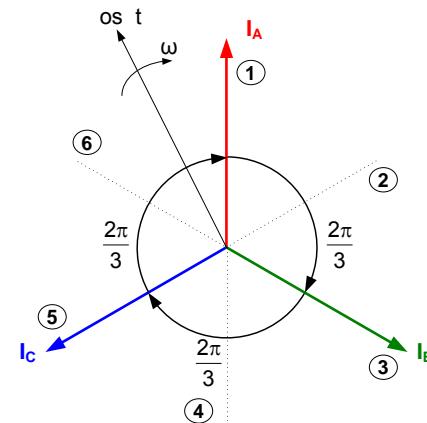
$$n_s = \frac{60f}{p}, \text{o/min}$$

Trofazna okretna protjecanja, prikaz rotirajućim vektorima

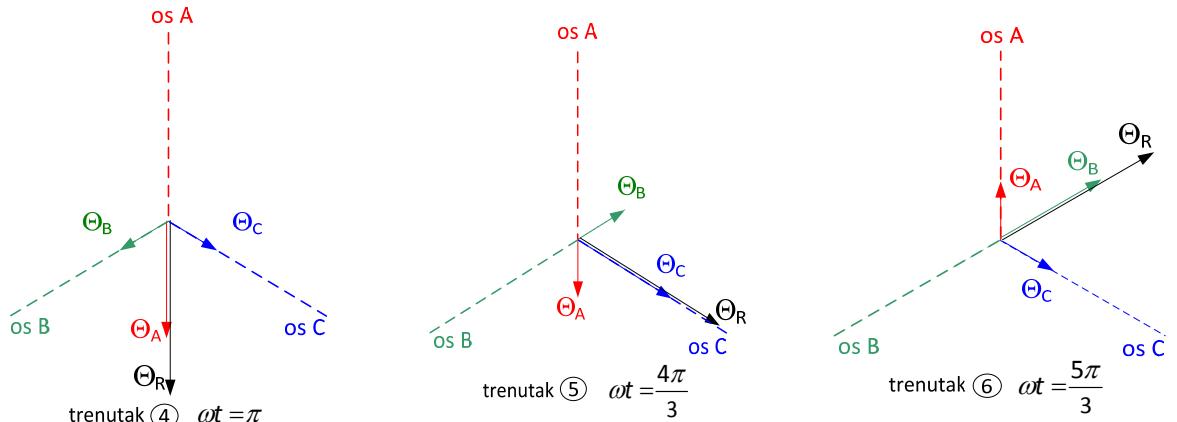
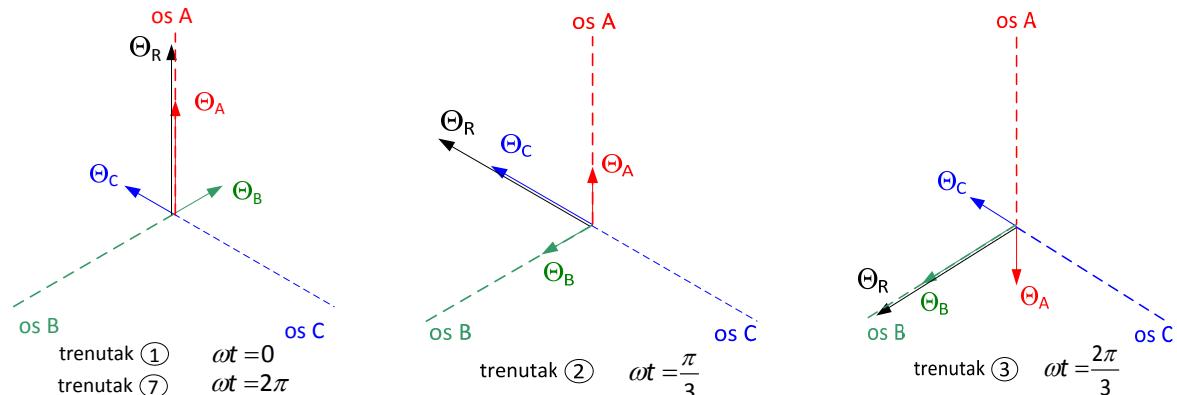
Prostorna raspodjela 3-faznih namota



Fazori struja kroz namote



Promotrimo položaje i iznose rezultirajućeg protjecanja Θ_R u prostoru za trenutke kada je vremenska os t u položajima 1 do 7.



Θ_A – protjecanje faze A
 Θ_B – protjecanje faze B
 Θ_C – protjecanje faze C
 Θ_R – rezultantno protjecanje

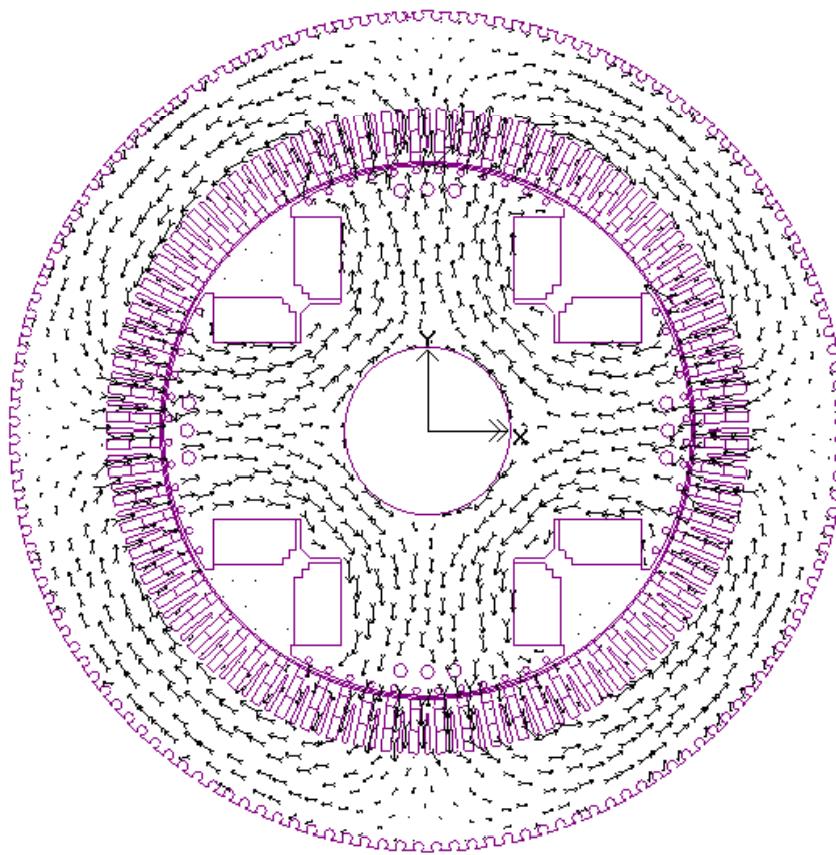
Sljedeći
trenutak

Prikaz okretnog magnetskog polja

Program
za prikaz okretnog
magnetskog polja

Primjer okretnog polja u sinkronom generatoru s istaknutim polovima

Faze A, B i C generatora su prostorno pomaknute za električni kut 120^0 i napajane su izmjeničnim sinusnim strujama fazno pomaknutima za 120^0 . Rotor rotira istom brzinom kao i okretno polje. U trenutku $t = 0$ os rotora se podudara s osi faze A.



Protjecanja m -faznih namota

Ako se općenito uzme m faznih namota i simetrično ih se raspodijeli po obodu nekog stroja s prostornim pomakom za kut

$$\alpha = \frac{2\pi}{m}$$

i ako tim namotima teku struje fazno (vremenski) pomaknute za kut

$$\alpha = \frac{2\pi}{m}$$

stupnjeva, stvorit će se simetrično okretno polje amplitude Θ_d

$$\Theta_d = \frac{m}{2} \Theta_1$$

i brzine vrtnje

$$n = \frac{60f}{p}, \text{ o/min}$$

Protjecanja m -faznih namota

Analitički se to može jednostavno prikazati izrazima

za 1. fazu $\Theta_1(x,t) = \Theta_{f1} \sin\left(\frac{\pi}{\tau_p}x\right) \cos \omega t$

za 2. fazu $\Theta_2(x,t) = \Theta_{f1} \sin\left(\frac{\pi}{\tau_p}x - \frac{2\pi}{m}\right) \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{m}\right)$

:

za n -tu fazu $\Theta_n(x,t) = \Theta_{f1} \sin\left[\frac{\pi}{\tau_p}x - (n-1)\frac{2\pi}{m}\right] \cos\left[\omega t - (n-1)\frac{2\pi}{m}\right]$

:

za m -tu fazu $\Theta_m(x,t) = \Theta_{f1} \sin\left[\frac{\pi}{\tau_p}x - (m-1)\frac{2\pi}{m}\right] \cos\left[\omega t - (m-1)\frac{2\pi}{m}\right]$

Transformacijom umnoška sin·cos u zbroj dvaju sinusnih izraza i njihovim sumiranjem za svih m faza dobiva se rezultat

$$\Theta_d = \frac{m}{2} \Theta_{f1}, \quad \Theta_i = 0$$

Protjecanja m -faznih namota

Uvjeti za simetrična okretna protjecanja m -faznog sustava:

- prostorni pomak faznih namota mora biti jednak vremenskom pomaku struja,
- namoti moraju biti simetrično raspoređeni po obodu stroja,
- amplitude struja i brojevi zavoja moraju biti jednaki u svim fazama.

U praksi se koriste:

- najčešće 3 faze (industrija, proizvodnja i prijenos električne energije), vrlo rijetko više od 3 (specijalni strojevi),
- jednofazni sustav, jer je instalacija i dovod struje najjednostavniji.

Nesimetrična okretna protjecanja

Ako nisu ispunjeni uvjeti za simetrično okretno polje, a postoji prostorni i vremenski (fazni) pomak, stvorit će se okretna protjecanja, ali ne više simetrična (kružna) nego eliptična.

Program
za prikaz okretnog
magnetskog polja

Inducirani napon

Uz sinusnu raspodjelu indukcije u zračnom rasporu, napon koji se u takvom polju inducira u jednom vodiču bit će sinusnog valnog oblika efektivne vrijednosti

$$E_{v1} = \frac{1}{\sqrt{2}} B_\delta l v$$

gdje je B_δ maksimalna vrijednost indukcije, l je duljina vodiča, a v je obodna brzina.
Magnetski tok po jednom polu iznosi

$$\Phi = \int_0^{\tau_p} B_\delta \sin\left(\frac{\pi}{\tau_p} x\right) l dx = \frac{2}{\pi} B_\delta \tau_p l = B_\delta \frac{Dl}{p}$$

Ako se obodna brzina izrazi brzinom vrtnje n

$$v = \frac{D}{2} \omega_m = \frac{D n \pi}{2 \cdot 30},$$

a magnetska indukcija tokom jednog pola

$$B_\delta = \frac{\Phi p}{Dl},$$

dobiva se

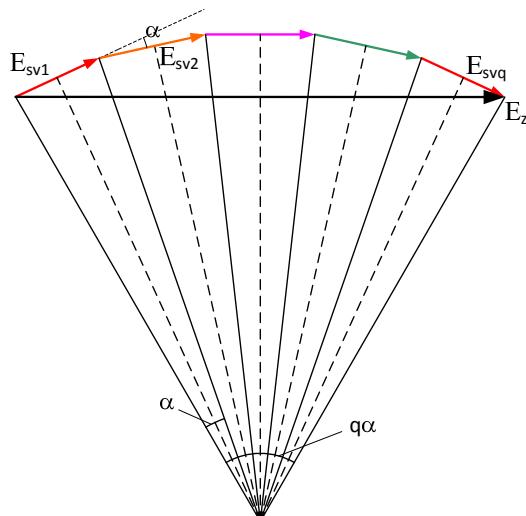
$$E_{v1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\Phi p}{Dl} l \frac{D n \pi}{2 \cdot 30} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \Phi \frac{pn}{60} .$$

Inducirani napon

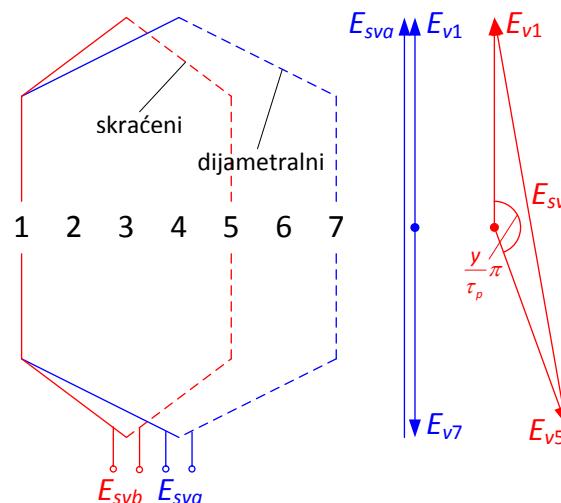
Vodiči u utorima se spajaju u svitke. Naponi inducirani u susjednim svicima zone jednog pola su fazno pomaknuti za električni kut $\alpha = p(2\pi)/(N)$, gdje je p broj pari polova, a N je broj utora. Broj svitaka jedne zone jednak je broju utora po polu i fazi q , tj. $q = (N)/(2pm)$, gdje je m broj faza.

Naponi jedne zone se sumiraju vektorski pri čemu se uzima u obzir njihov fazni pomak. Omjer amplitude vektorske i algebarske sume napona jednak je zonskom faktoru namota koji se jednako računa za inducirani napon i protjecanje.

Stranice svitka mogu biti razmagnute za jedan polni korak τ_p (dijametalni svitak) ili je korak svitka skraćen ($y < \tau_p$). Zbog skraćenja ukupni napon svitka je manji od zbroja napona svake strane, što se uzima u obzir tetivnim faktorom namota koji se jednako računa za inducirani napon i protjecanje.



Vektorska suma napona jedne zone



Svici sa a) dijametalnim i b) skraćenim korakom

$$f_z = \frac{E_z}{qE_{sv}} = \frac{\sin\left(q \frac{\alpha}{2}\right)}{q \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$f_t = \frac{E_{sv}}{2E_v} = \sin\left(\frac{y \pi}{\tau_p 2}\right)$$

$$f_n = f_z f_t$$

Inducirani napon

Napon induciran po jednom paru polova jednak je

$$E_{pp} = 2E_{v1}w_{pp}f_n$$

gdje je w_{pp} broj zavoja namota po paru polova. Ukupni napon svih vodiča spojenih u seriju

$$E = pE_{pp} = p2E_{v1} \frac{w}{p} f_n = 2E_{v1}wf_n$$

Ako u namotu postoji a paralelnih grana, a w je ukupni broj zavoja po fazi, onda vrijedi

$$E = 2 \frac{w}{a} E_{v1} f_n$$

Uvrštavajući izraz za E_{v1} u prethodnu jednadžbu dobiva se

$$E = \frac{2\pi w}{\sqrt{2} a} \Phi \underbrace{\frac{pn}{60}}_{f, \text{Hz}} f_n = 4,44 \frac{w}{a} \Phi f f_n$$

Frekvencija induciranih napona jednaka je frekvenciji okretnog polja. Faktorom namota se uzima u obzir fazni pomak induciranih napona u prostorno razmaknutim vodičima po obodu stroja koji su spojeni u seriju.

Eliminacija viših harmoničkih članova napona

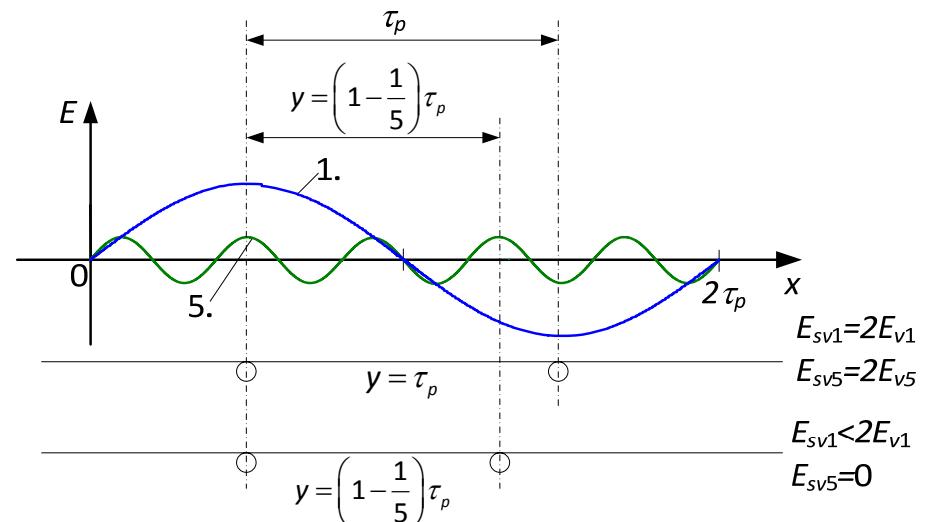
Skraćenjem koraka svitka postiže se ušteda u duljini glava namota i njihov lakši smještaj. Osim toga skraćenje omogućuje eliminaciju ili smanjenje nekih viših harmoničkih članova u valnom obliku induciranih napona.

Općenito vrijedi da će se u valnom obliku napona eliminirati v -ti harmonik napona ako se odabere korak svitka

$$y = \left(1 - \frac{1}{v}\right) \tau_p$$

Viši harmonici napona induciraju se od viših prostornih harmonika u raspodjeli protjecanja.

$$\Theta_f = \Theta_{f1} \sin\left(\frac{\pi}{\tau_p} x\right) + \Theta_{f3} \sin\left(3 \frac{\pi}{\tau_p} x\right) + \dots + \Theta_{fv} \sin\left(v \frac{\pi}{\tau_p} x\right)$$



Primjer eliminacije 5. harmonika napona skraćenjem koraka svitka na $y=4/5 \tau_p$

Eliminacija viših harmoničkih članova napona

Za više harmonike je polni korak ν -tog harmonika ν puta manji, tj.

$$\tau_{p\nu} = \frac{1}{\nu} \tau_{p1}$$

U vodičima smještenima u utorima će se inducirati napon koji se vremenski mijenja kao što se prostorno mijenja protjecanje, tj. indukcija u zračnom rasporu. To znači da će ν -ti prostorni harmonik indukcije inducirati napon ν puta veće frekvencije od frekvencije osnovnog harmonika. Električni kut će također biti ν puta veći jer je perioda ν -tог harmonika napona ν puta kraća.

$$\alpha_\nu = \nu \alpha_1 = \nu p \alpha_g$$

Po analogiji s osnovnim harmonikom i za više harmonike napona se mogu definirati zonski i tetivni faktori namota

$$f_{z\nu} = \frac{\sin\left(q \frac{\nu \alpha}{2}\right)}{q \sin\left(\frac{\nu \alpha}{2}\right)}$$

$$f_{t\nu} = \sin\left(\nu \frac{y}{\tau_p} \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f_{n\nu} = f_{z\nu} f_{t\nu}$$

Primjer: Ako se u strani svitka induciraju harmonički članovi napona E_1, E_3, E_5 i E_7 , onda je napon cijelog svitka za različite korake svitka prikazan u tablici.

y/τ_p	1	2/3	4/5	6/7
$\nu=1 \quad 2E_1 \times$	1	0,87	0,95	0,97
$\nu=3 \quad 2E_3 \times$	1	0	0,59	0,78
$\nu=5 \quad 2E_5 \times$	1	0,87	0	0,43
$\nu=7 \quad 2E_7 \times$	1	0,87	0,59	0

Inducirani napon (primjer)

Dvoslojni namot statora trofaznog 4-polnog izmjeničnog stroja smješten je u 60 utora. U svakom vodiču inducira se napon od 3 V, a svaki je svitak namotan s 4 zavoja i skraćen tako da se eliminira 5. harmonik napona. Koliki je napon svitka i napon svake pojedine faze?

$$\left. \begin{aligned} y &= \left(1 - \frac{1}{5}\right) \tau_p = \frac{4}{5} \tau_p \\ f_t &= \sin\left(\frac{y \pi}{\tau_p 2}\right) = \sin\left(\frac{4 \pi}{5 \cdot 2}\right) = 0,951 \\ q &= \frac{N}{2pm} = \frac{60}{2 \cdot 2 \cdot 3} = 5 \\ \alpha &= p \frac{360^\circ}{N} = 2 \cdot \frac{360^\circ}{60} = 12^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow f_z = \frac{\sin\left(q \frac{\alpha}{2}\right)}{q \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\sin\left(5 \frac{12^\circ}{2}\right)}{5 \sin\left(\frac{12^\circ}{2}\right)} = 0,9567$$

$$E_{sv} = 2E_v w_{sv} f_t = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 0,951 = \boxed{22,82 \text{ V}}$$

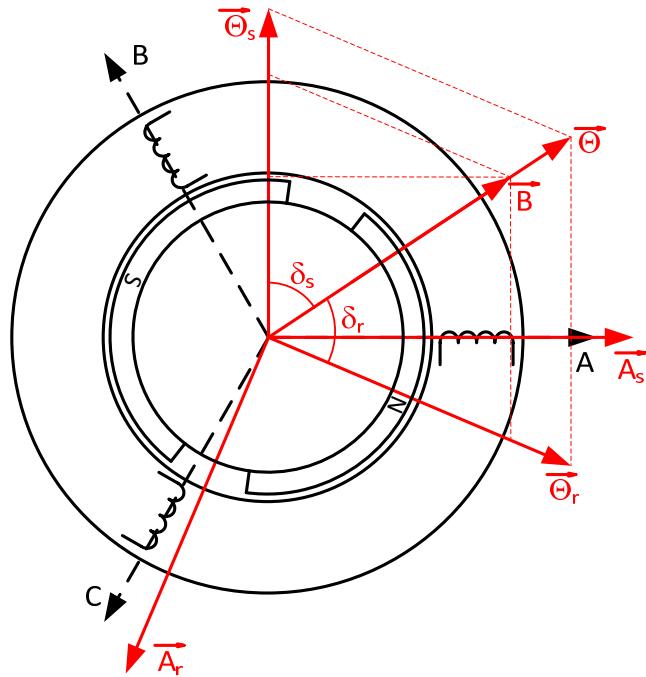
$$E_f = 2pqE_{sv}f_z = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 22,82 \cdot 0,9567 = \boxed{436,7 \text{ V}}$$

ili

$$w = 2pqw_{sv} = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 = 80 \text{ ili } w = \frac{N}{m} w_{sv} = \frac{60}{3} \cdot 4 = 80$$

$$E = 2 \frac{w}{a} E_{v1} f_n = 2 \frac{w}{a} E_{v1} f_z f_t = 2 \frac{80}{1} \cdot 3 \cdot 0,9567 \cdot 0,951 = \boxed{436,7 \text{ V}}$$

Moment izmjeničnog stroja



$\vec{\Theta}_r$ – protjecanje rotora

$\vec{\Theta}_s$ – protjecanje statora

$\vec{\Theta}$ – rezultantno protjecanje

\vec{A}_r – strujni oblog rotora

\vec{A}_s – strujni oblog statora

\vec{B} – magnetska indukcija

Računamo moment koji djeluje na rotor. Na element oboda rotora duljine dx , uz strujni oblog na tom mjestu $A_r(x)$ i indukciju $B(x)$ djeluje sila

$$dF = -B(x)IA_r(x)dx$$

Prostorna raspodjela strujnog obloga, protjecanja i indukcije može se prikazati izrazima

$$A_r(x) = A_r \cos \frac{\pi}{\tau_p} x$$

$$\Theta_r(x) = \Theta_r \sin \frac{\pi}{\tau_p} x$$

$$\Theta_r(x) = \int_x A_r(x) dx \Rightarrow \Theta_r = A_r \frac{\tau_p}{\pi}$$

$$B(x) = B \sin \left(\frac{\pi}{\tau_p} x - \delta_r \right)$$

Moment izmjeničnog stroja

Obodna sila za jedan pol dobiva se integracijom sile na element duljine dx kroz cijeli polni korak

$$F_p = - \int_0^{\tau_p} B(x) A_r(x) I dx = -BA_r I \int_0^{\tau_p} \sin\left(\frac{\pi}{\tau_p}x - \delta_r\right) \cos\left(\frac{\pi}{\tau_p}x\right) dx = \frac{1}{2} BA_r I \tau_p \sin \delta_r$$

Ako se uvede

$$A_r = \Theta_r \frac{\pi}{\tau_p}$$

Onda je obodna sila za svih $2p$ polova

$$F = 2pF_p = p\pi I B \Theta_r \sin \delta_r$$

Ukupni moment koji djeluje na rotor

$$M_r = F \frac{D}{2} = \frac{Dp\pi I}{2} B \Theta_r \sin \delta_r$$

Moment se pojavljuje kada je kut δ_r između vektora protjecanja rotora i vektora indukcije različit od nule. Taj kut se naziva **kut opterećenja**.

Za stator se na isti način može izvesti izraz

$$M_s = \frac{Dp\pi I}{2} B \Theta_s \sin \delta_s$$

Moment izmjeničnog stroja

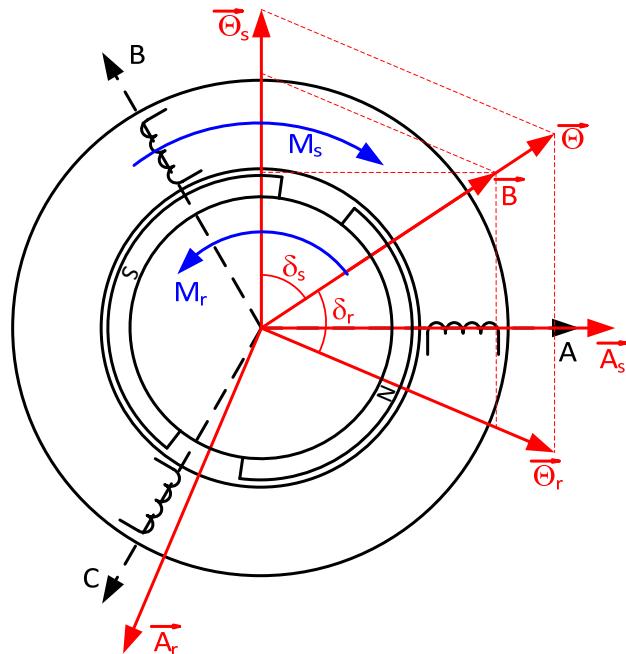
Budući da resultantno protjecanje uvijek leži između protjecanja statora i rotora, to znači da kutevi δ_r i δ_s moraju biti suprotnog predznaka

Također vrijedi

$$|\Theta_r \sin \delta_r| = |\Theta_s \sin \delta_s|$$

Odatle slijedi

$$M_r = -M_s$$



Pozitivan moment djeluje na rotor u smjeru vrtnje u slučaju kada vektor indukcije prethodi vektoru protjecanja rotora. Smjer momenta je uvijek takav da osi pojedinih protjecanja nastoje dovesti u os rezultantnog protjecanja.

Moment izmjeničnog stroja

Moment M_s se može napisati i na drugačiji način:

Ulančeni tok statorskog namota

$$\Psi_s = \frac{w}{a} f_n \Phi_s = \frac{w}{a} f_n B \frac{DI}{p} \Rightarrow B = \Psi_s \frac{ap}{wf_n DI}$$

Protjecanje statorskog namota

$$\Theta_s = \frac{3}{2} \frac{4}{\pi} \frac{I_{sm}}{2a} \frac{w}{p} f_n, \quad I_{sm} = I_s \sqrt{2}$$

I_s – efektivna vrijednost sinusne struje statora

I_{sm} – maksimalna vrijednost sinusne struje statora

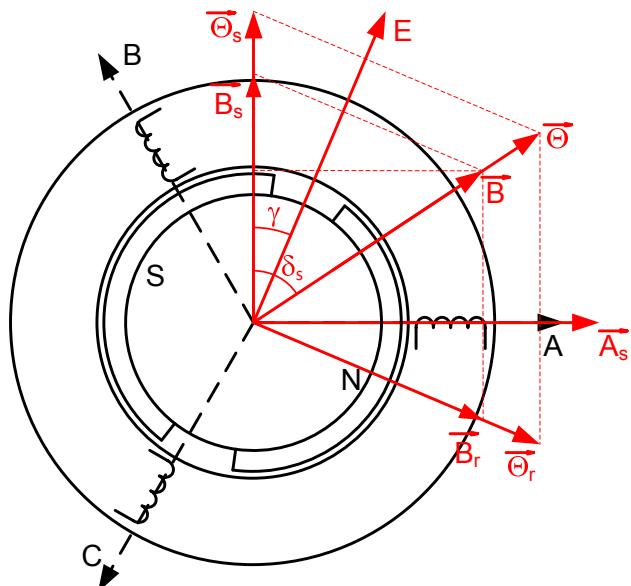
Moment koji djeluje na stator

$$M_s = \frac{Dp\pi l}{2} B \Theta_s \sin \delta_s = \frac{Dp\pi l}{2} \underbrace{\Psi_s \frac{ap}{wf_n DI}}_B \underbrace{\frac{3}{2} \frac{4}{\pi} \frac{I_{sm}}{2a} \frac{w}{p} f_n}_\Theta \sin \delta_s = \frac{3}{2} p \Psi_s I_{sm} \sin \delta_s$$

$$M_s = \frac{3}{2} p |\vec{\Psi}_s \times \vec{I}_{sm}|$$

Moment je proporcionalan modulu vektorskog produkta vektora ulančenog toka i vektora struje statora.

Primjer sinkronog motora s trajnim magnetima



Moment koji djeluje na stator: $M_s = \frac{Dp\pi l}{2} B \Theta_s \sin \delta_s$

Iz slike slijedi: $B \sin \delta_s = B_r \cos \gamma$

Protjecanje statora: $\Theta_s = \frac{m}{2} \frac{4}{\pi} \frac{l \sqrt{2}}{2a} \frac{w}{p} f_n$

Napon induciran u namotu statora u praznom hodu pri brzini vrtnje rotora ω_{rm}

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} B_r l v = \frac{1}{\sqrt{2}} B_r l \frac{D}{2} \omega_{rm} \quad - \text{napon jednog vodiča}$$

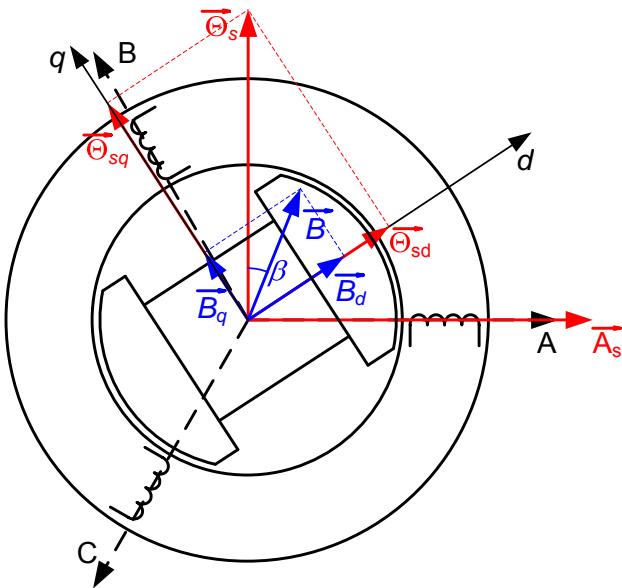
$$E = 2 \frac{w}{a} e_1 f_n = \sqrt{2} \frac{w}{a} f_n B_r l \frac{D}{2} \omega_{rm} \quad - \text{napon po fazi}$$

$$M_s = \frac{D}{2} l p \pi \Theta_s B_r \cos \gamma = \frac{D}{2} l p \pi \frac{m}{2} \frac{4}{\pi} \frac{l \sqrt{2}}{2a} \frac{w}{p} f_n B_r \cos \gamma$$

$$= \frac{1}{\omega_{rm}} m \underbrace{\sqrt{2} \frac{w}{a} f_n B_r l \frac{D}{2}}_E \omega_{rm} l \cos \gamma = \boxed{\frac{1}{\omega_{rm}} m E l \cos \gamma}$$

Maksimalni moment se postiže kada je protjecanje trajnih magneta (Θ_r) okomito na protjecanje statora (Θ_s). Tada je $\gamma=0$, a moment za trofazni motor iznosi $M_s = 1/\omega_{rm} 3EI$.

Reluktantni moment



U rotoru s istaknutim polovima postoji magnetska nesimetrija zračnog raspora u dvije međusobno okomite osi. Magnetska vodljivost u uzdužnoj (d) osi je veća od vodljivosti u poprečnoj (q) osi, tj $\Lambda_d > \Lambda_q$. Ako u stroju djeluje samo protjecanje statora ($\Theta_r = 0$), onda komponente protjecanja Θ_d i Θ_q neće rezultirati proporcionalnim komponentama magnetske indukcije B_d i B_q jer vrijedi

$$B_d = \Theta_d \Lambda_d$$

$$B_q = \Theta_q \Lambda_q$$

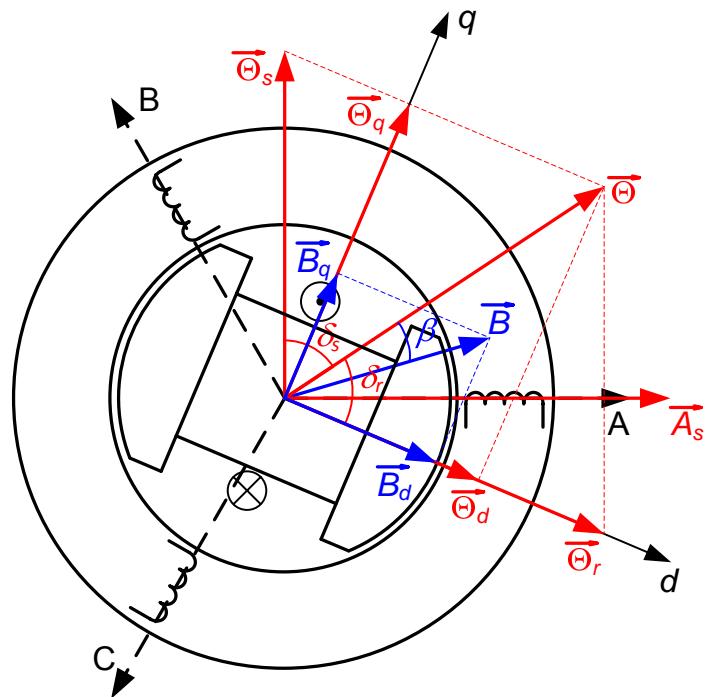
$$\Lambda_d > \Lambda_q$$

Kao rezultat javlja se fazni pomak β između vektora protjecanja i vektora indukcije i to tako da je os indukcije pomaknuta prema osi pola, tj. u smjeru veće magnetske vodljivosti. Pojavit će se **reluktantni moment** koji nastoji da se os protjecanja poklopi s osi najveće magnetske vodljivosti (d os).

$$M_{srel} = -\frac{Dp\pi I}{2} B \Theta_s \sin \beta$$

Po zakonu akcije i reakcije moment istog iznosa, ali suprotnog smjera djeluje i na rotor. Reluktantni moment djeluje kada je struja u rotorskom namotu jednaka nuli u slučaju promjenjive magnetske vodljivosti zračnog raspora.

Ukupni moment (elektromagnetski+reluktantni)



U slučaju rotora s istaknutim polovima kada namotima statora i rotora teče struja stroj će razvijati moment zbog međudjelovanja protjecanja statora i rotora i reluktantni moment. Ukupni moment se računa prema izrazu

$$M_r = -M_s$$

$$M_s = -\frac{Dp\pi l}{2} B \Theta_s \sin(\delta_s + \beta)$$

$$M_r = \underbrace{\frac{Dp\pi l}{2} (B \cos \beta) \Theta_s \sin \delta_s}_{\text{Elektromagnetski moment}} + \underbrace{\frac{Dp\pi l}{2} B (\Theta_s \cos \delta_s) \sin \beta}_{\text{Reluktantni moment}}$$

$B \cos \beta$ – komponenta indukcije u smjeru rezultantnog protjecanja

$\Theta_s \cos \delta_s$ – komponenta protjecanja statora u smjeru rezultantnog protjecanja

DINAMIČKI MODEL ASINKRONOG MOTORA

Protjecanja, funkcija namota, induktiviteti

Kompleksni vektori, transformacija koordinata

Bilanca snage i elektromagnetski moment

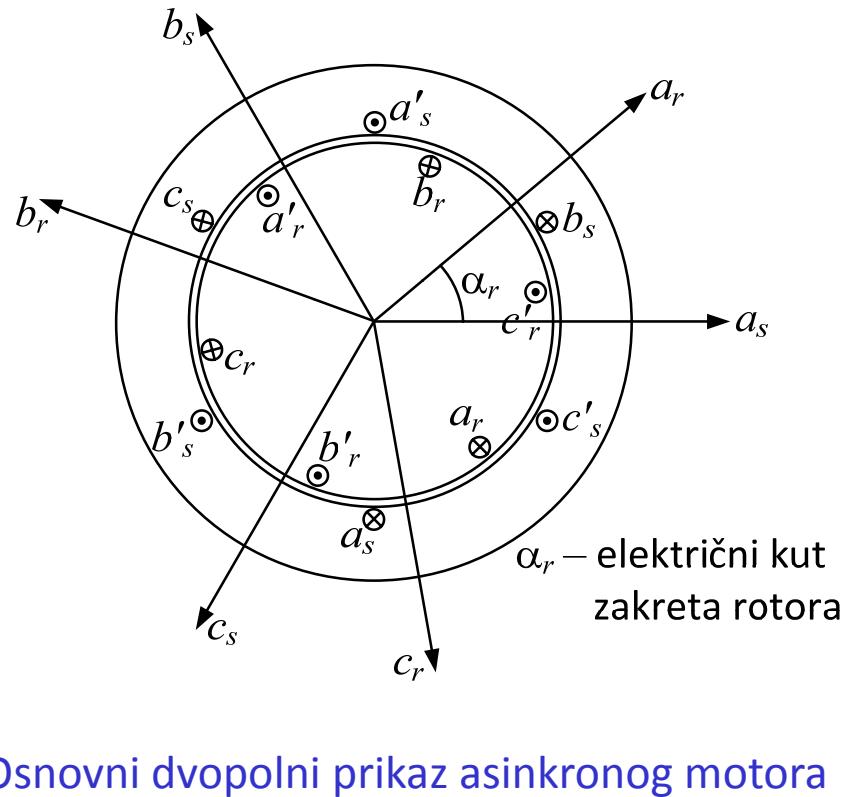
Stacionarno stanje

Sustav jediničnih vrijednosti

Prof. dr. sc. Damir Žarko



Osnovni model



Naponska jednadžba statora

$$\begin{bmatrix} u_{as} \\ u_{bs} \\ u_{cs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 \\ 0 & 0 & R_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{as} \\ i_{bs} \\ i_{cs} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_{as} \\ \psi_{bs} \\ \psi_{cs} \end{bmatrix}$$

Naponska jednadžba rotora

$$\begin{bmatrix} u_{ar} \\ u_{br} \\ u_{cr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_r & 0 & 0 \\ 0 & R_r & 0 \\ 0 & 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{ar} \\ i_{br} \\ i_{cr} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_{ar} \\ \psi_{br} \\ \psi_{cr} \end{bmatrix}$$

Osnovni model

Ulančeni tokovi statora

$$\begin{bmatrix} \psi_{as} \\ \psi_{bs} \\ \psi_{cs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{asas} + L_{\sigma s} & L_{asbs} & L_{asc_s} \\ L_{bsas} & L_{bsbs} + L_{\sigma s} & L_{bscs} \\ L_{csas} & L_{csbs} & L_{cscs} + L_{\sigma s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{as} \\ i_{bs} \\ i_{cs} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{asar} & L_{asbr} & L_{ascr} \\ L_{bsar} & L_{bsbr} & L_{bscr} \\ L_{csar} & L_{csbr} & L_{cscr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{ar} \\ i_{br} \\ i_{cr} \end{bmatrix}$$

Ulančeni tokovi rotora

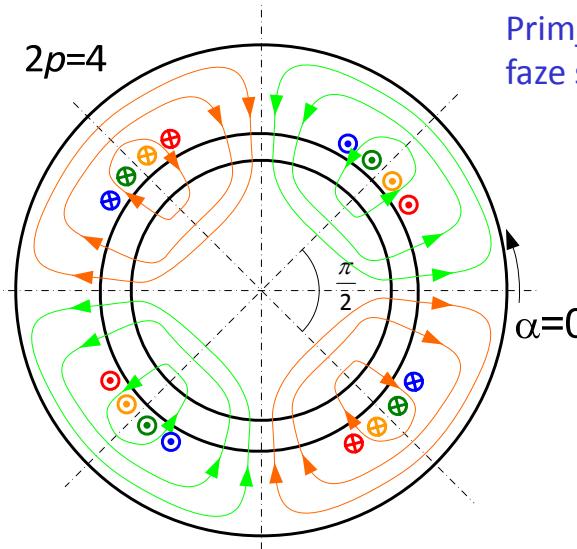
$$\begin{bmatrix} \psi_{ar} \\ \psi_{br} \\ \psi_{cr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{aras} & L_{arbs} & L_{arc_s} \\ L_{bras} & L_{brbs} & L_{brcs} \\ L_{cras} & L_{crbs} & L_{crcs} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{as} \\ i_{bs} \\ i_{cs} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{arar} + L_{\sigma r} & L_{arbr} & L_{arc_r} \\ L_{brar} & L_{brbr} + L_{\sigma r} & L_{brcr} \\ L_{crar} & L_{crbr} & L_{crcr} + L_{\sigma r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{ar} \\ i_{br} \\ i_{cr} \end{bmatrix}$$

Prepostavke i zanemarenja u modelu

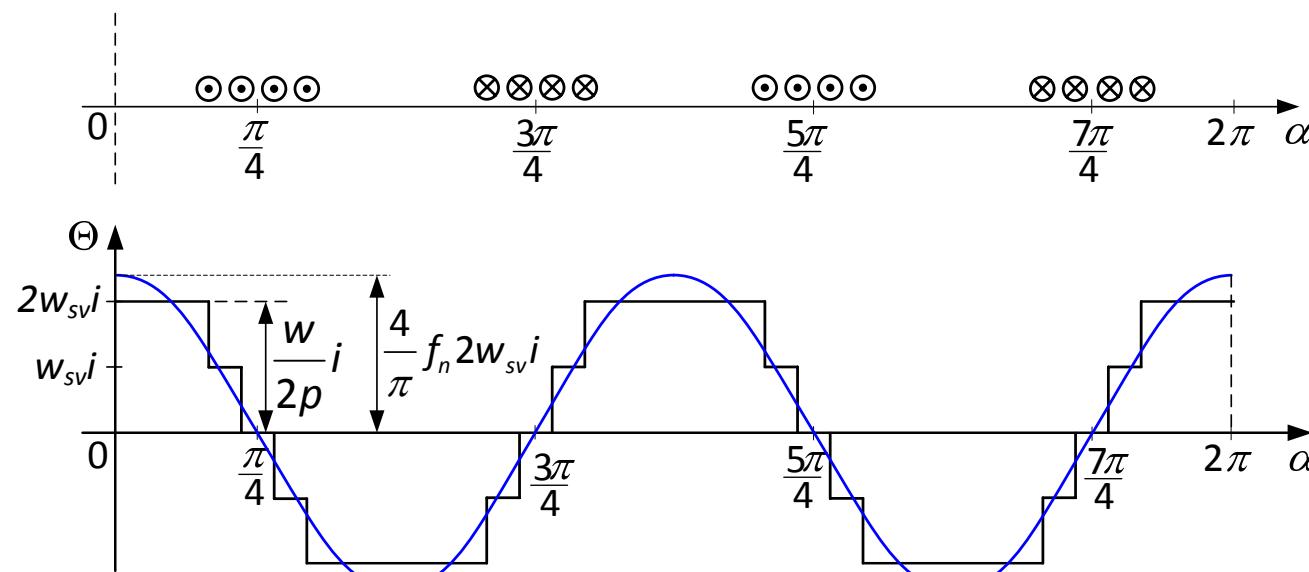
- Prepostavlja se da su napon i frekvencija mreže konstantnog iznosa
- Zanemaruju se viši prostorni harmonici protjecanja
- Zanemaruje se pad magnetskog napona u željezu i zasićenje \Rightarrow magnetski krug je LINEARAN
- Zanemaruje se potiskivanje struje u vodičima statorskog i rotorskog namota
- Zanemaruju se gubici u željezu i mehanički gubici
- Zanemaruje se utjecaj zagrijavanja na iznose otpora namota

Raspodjela namota i protjecanje

w – broj zavoja spojenih u seriju
 w_{sv} – broj zavoja po svitku
 p – broj pari polova
 i – trenutna vrijednost struje svitka



Primjer rasporeda vodiča jedne faze statora 4-polnog stroja



Funkcija raspodjele namota

Amplituda v -tog prostornog harmonika pravokutnog protjecanja jedne faze s w zavoja spojenih u seriju se računa prema izrazu

$$\Theta_v = \frac{4}{v\pi} \frac{wi}{2p} f_{nv}, \quad v = 1, 3, 5, \dots$$

Ukupno protjecanje jedne faze po obodu stroja je onda

$$\Theta(\alpha) = \sum_{v=1,3,5,\dots}^{\infty} \Theta_v \cos(v p \alpha)$$

FUNKCIJA RASPODJELE NAMOTA se definira kao omjer protjecanja i struje namota

$$N(\alpha) = \frac{\Theta(\alpha)}{i}$$

Indukcija u rasporu, ulančeni tok i induktivitet

Prema Ampereovom zakonu protjecanja u zračnom rasporu vrijedi

$$\Theta(\alpha) = H(\alpha)\delta = \frac{B(\alpha)}{\mu_0}\delta \Rightarrow B(\alpha) = \Theta(\alpha)\frac{\mu_0}{\delta} = N(\alpha)i\frac{\mu_0}{\delta}$$

δ - duljina zračnog raspora

Indukcija, ulančeni tok i vlastiti induktivitet faze a (statora ili rotora) se računaju prema sljedećim izrazima:

$$B_a(\alpha) = N_a(\alpha)i_a \frac{\mu_0}{\delta} \quad \text{- indukcija u zračnom rasporu koju stvara struja koja teče namotom faze } a$$

$$\psi_{aa} = r_0 l \int_0^{2\pi} N_a(\alpha) B_a(\alpha) d\alpha = \frac{\mu_0 r_0 l}{\delta} i_a \int_0^{2\pi} [N_a(\alpha)]^2 d\alpha$$

r_0 - poluprecnik u zračnom rasporu na kojem se vrši integracija
 l - aksijalna duljina paketa

$$L_{aa} = \frac{\psi_{aa}}{i_a} = \frac{\mu_0 r_0 l}{\delta} \int_0^{2\pi} [N_a(\alpha)]^2 d\alpha$$

Indukcija u rasporu, ulančeni tok i induktivitet

Međuinduktivitet između faza a i b se onda računa na sljedeći način:

$$\psi_{ab} = r_0 l \int_0^{2\pi} N_a(\alpha) B_b(\alpha) d\alpha$$

-ulančeni tok namota faze a zbog indukcije u zračnom rasporu koju stvara struja koja teče namotom faze b

$$B_b(\alpha) = N_b(\alpha) i_b \frac{\mu_0}{\delta}$$

- indukcija u zračnom rasporu koju stvara struja koja teče namotom faze b

$$L_{ab} = \frac{\psi_{ab}}{i_b} = \frac{\mu_0 r_0 l}{\delta} \int_0^{2\pi} N_a(\alpha) N_b(\alpha) d\alpha$$

- međuinduktivitet između faza a i b

Međuinduktivitet između faza b i c

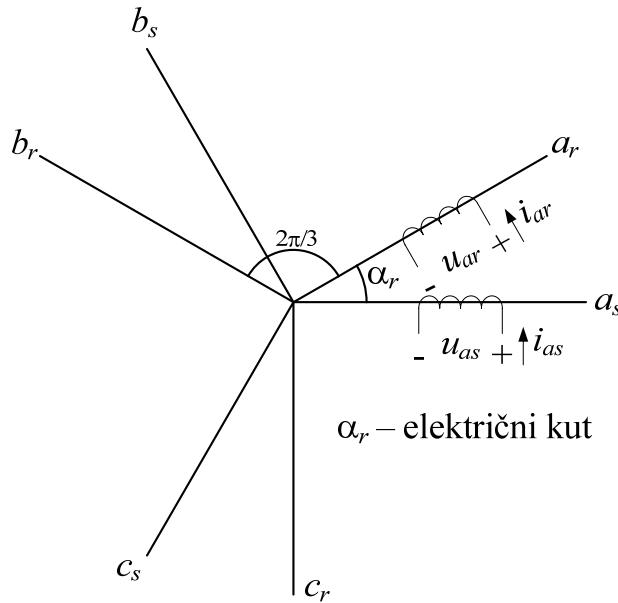
$$L_{bc} = \frac{\psi_{bc}}{i_c} = \frac{\mu_0 r_0 l}{\delta} \int_0^{2\pi} N_b(\alpha) N_c(\alpha) d\alpha$$

Međuinduktivitet između faza a i c

$$L_{ac} = \frac{\psi_{ac}}{i_c} = \frac{\mu_0 r_0 l}{\delta} \int_0^{2\pi} N_a(\alpha) N_c(\alpha) d\alpha$$

Iz izraza slijedi da je $L_{ab} = L_{ba}$, $L_{bc} = L_{cb}$, $L_{ac} = L_{ca}$

Induktiviteti od osnovnog harmonika polja u zračnom rasporu



Pojednostavljeni prikaz prostornog položaja osi namota statora i rotora

$$\alpha_{0a} = 0$$

$$\alpha_{0b} = -\frac{1}{p} \frac{2\pi}{3}$$

$$\alpha_{0c} = -\frac{1}{p} \frac{4\pi}{3},$$

Funkcija namota faze *a* statora se može prikazati u obliku

$$N_a(\alpha) = \frac{4}{\pi} \frac{w_s}{2p} \sum_{v=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{f_{nsv}}{v} \cos[p(\alpha + \alpha_{0a})]$$

w_s – broj zavoja statorskog namota spojenih u seriju

f_{nsv} – faktor namota statora za v -ti harmonik

Ako se promatra samo osnovni harmonik, vrijedi

$$N_{a1}(\alpha) = \frac{4}{\pi} \frac{w_s}{2p} f_{ns1} \cos[p(\alpha + \alpha_{0a})]$$

Vlastiti induktivitet faze *a* statora za osnovni harmonik

$$L_{asas} = \frac{\mu_0 r_0 l}{\delta} \left(\frac{4}{\pi} \frac{w_s}{2p} f_{ns1} \right)^2 \int_0^{2\pi} \cos[p(\alpha + \alpha_{0a})]^2 d\alpha = \boxed{\frac{4}{\pi p^2} \frac{\mu_0 r_0 l}{\delta} (w_s f_{ns1})^2}$$

Međuinduktivitet između faza *a* i *b* statora za osnovni harmonik

$$L_{asbs} = \frac{\mu_0 r_0 l}{\delta} \left(\frac{4}{\pi} \frac{w_s}{2p} f_{ns1} \right)^2 \int_0^{2\pi} \cos[p(\alpha + \alpha_{0a})] \cos[p(\alpha + \alpha_{0b})] d\alpha = \boxed{-\frac{1}{2} \frac{4}{\pi p^2} \frac{\mu_0 r_0 l}{\delta} (w_s f_{ns1})^2}$$

Induktiviteti od osnovnog harmonika polja u zračnom rasporu

Ukupni vlastiti induktivitet namota jedne faze STATORA

$$L_{asas} + L_{\sigma s} = \underbrace{\frac{4}{\pi p^2} \frac{\mu_0 r_0 l}{\delta} (w_s f_{ns1})^2}_{L_{ms}} + \underbrace{L_{\sigma v} + L_{\sigma u}}_{L_{\sigma s}}$$

$L_{\sigma v}$ - rasipni induktivitet od viših harmoničkih članova protjecanja

$L_{\sigma u}$ - rasipni induktivitet (utori, glave zubi, glave namota)

$$L_{asas} = L_{bsbs} = L_{cscs}$$

Ukupni vlastiti induktivitet namota jedne faze ROTORA

$$L_{arar} + L_{\sigma r} = \frac{4}{\pi p^2} \frac{\mu_0 r_0 l}{\delta} (w_r f_{nr1})^2 + L_{\sigma r} = L_{ms} \left(\frac{w_r f_{nr1}}{w_s f_{ns1}} \right)^2 + L_{\sigma r}$$

$$L_{arar} = L_{brbr} = L_{crcr}$$

Međuinduktiviteti Stator - Stator

$$L_{asbs} = \frac{4}{\pi p^2} \frac{\mu_0 r_0 l}{\delta} (w_s f_{ns1})^2 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = L_{ms} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{L_{ms}}{2}$$

$$L_{ascr} = L_{ms} \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{L_{ms}}{2}$$

$$L_{asbs} = L_{ascr} = L_{bscs} = L_{bsas} = L_{csas} = L_{csbs} = -\frac{L_{ms}}{2}$$

Induktiviteti od osnovnog harmonika polja u zračnom rasporu

Međuinduktiviteti Rotor - Rotor

$$L_{arbr} = -\frac{L_{mr}}{2}$$

$$L_{arbr} = L_{arcr} = L_{brcr} = L_{brar} = L_{crar} = L_{crbr} = -\frac{L_{mr}}{2} = -\left(\frac{w_r f_{nr1}}{w_s f_{ns1}}\right)^2 \frac{L_{ms}}{2}$$

Međuinduktiviteti Stator - Rotor

$$L_{asar} = \frac{4}{\pi p^2} \frac{\mu_0 r_0 l}{\delta} (w_s f_{ns1} w_r f_{nr1}) \cos(\alpha_r) = L_{msr} \cos(\alpha_r) = \left(\frac{w_r f_{nr1}}{w_s f_{ns1}}\right) L_{ms} \cos(\alpha_r)$$

$$L_{asar} = L_{bsbr} = L_{cscr} = L_{aras} = L_{brbs} = L_{crcs}$$

$$L_{asbr} = \left(\frac{w_r f_{nr1}}{w_s f_{ns1}}\right) L_{ms} \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha_r\right)$$

$$L_{ascr} = \left(\frac{w_r f_{nr1}}{w_s f_{ns1}}\right) L_{ms} \cos\left(\frac{4\pi}{3} + \alpha_r\right)$$

$$L_{asbr} = L_{bscr} = L_{csar} = L_{bras} = L_{crbs} = L_{arcs}$$

$$L_{ascr} = L_{bsar} = L_{csbr} = L_{cras} = L_{arbs} = L_{brcs}$$

Prikaz trofaznih veličina pomoću vektora u kompleksnoj ravnini

Definicija prostornog vektora struje statora u kompleksnoj ravnini

$$\bar{i}_{abcs} = \frac{2}{3} (i_{as} + ai_{bs} + a^2 i_{cs}) , \quad a = e^{j\frac{2\pi}{3}}$$

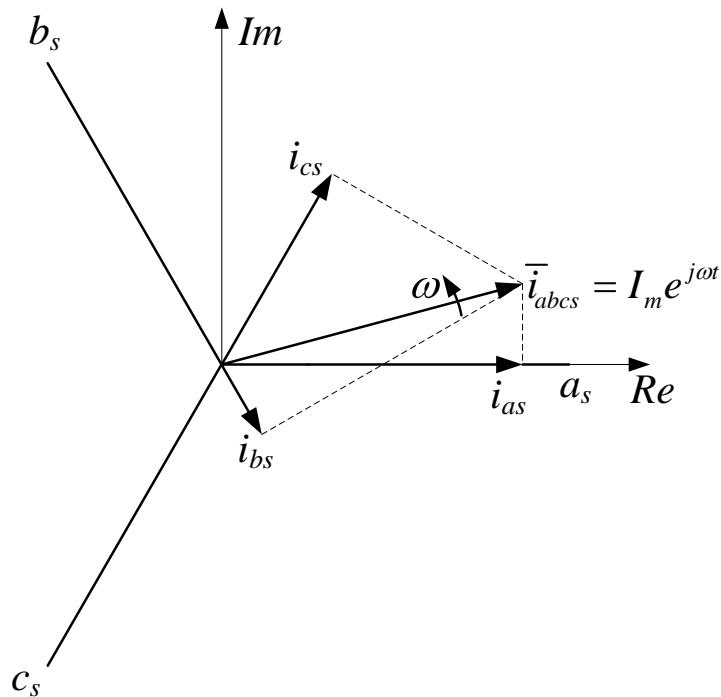
$$i_{as} = I_m \cos \omega t , \quad i_{bs} = I_m \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right) , \quad i_{cs} = I_m \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} \right) \quad - \text{trenutne vrijednosti faznih struja}$$

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t \Rightarrow \cos \omega t = \frac{1}{2} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}), \quad \sin \omega t = \frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} (i_{as} + ai_{bs} + a^2 i_{cs}) &= \frac{2}{3} \frac{1}{2} I_m \left\{ e^{j\omega t} + e^{-j\omega t} + e^{j\frac{2\pi}{3}} \left[e^{j\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)} + e^{-j\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)} \right] + e^{j\frac{4\pi}{3}} \left[e^{j\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)} + e^{-j\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)} \right] \right\} \\ &= \frac{2}{3} \frac{1}{2} I_m \left[3e^{j\omega t} + e^{-j\omega t} \underbrace{\left(1 + e^{j\frac{4\pi}{3}} + e^{j\frac{8\pi}{3}} \right)}_{=0} \right] = I_m e^{j\omega t} \end{aligned}$$

$$\bar{i}_{abcs} = I_m e^{j\omega t}$$

Određivanje trenutnih vrijednosti trofaznih veličina iz kompleksnih vektora



Trenutne vrijednosti trofaznih veličina (napon, struja, ulančeni tok) odgovaraju duljinama projekcija kompleksnog vektora na osi odgovarajućih namota.

$$f = u, i, \psi$$

$$\bar{f}_{abc} = \frac{2}{3}(f_a + af_b + a^2 f_c) = \frac{2}{3} \left[f_a + \left(-\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) f_b + \left(-\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) f_c \right]$$

$$f_0 = \frac{1}{3}(f_a + f_b + f_c)$$

$$\bar{f}_{abc} = \frac{2}{3} \left[f_a - \frac{1}{2} \left(\underbrace{f_b + f_c}_{3f_0 - f_a} \right) + j \frac{\sqrt{3}}{2} (f_b - f_c) \right] = f_a - f_0 + j \frac{\sqrt{3}}{3} (f_b - f_c)$$

$$\Re(\bar{f}_{abc}) = f_a - f_0 \Rightarrow f_a = \Re(\bar{f}_{abc}) + f_0$$

$$\Re(a^2 \bar{f}_{abc}) = f_b - f_0 \Rightarrow f_b = \Re(a^2 \bar{f}_{abc}) + f_0$$

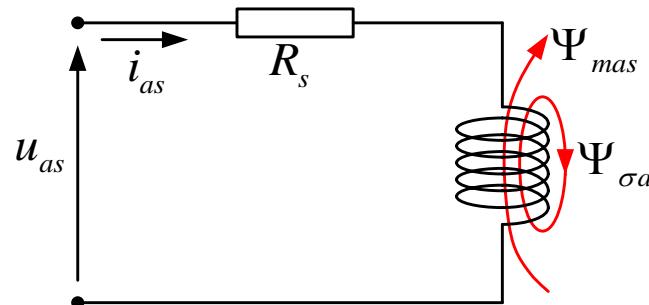
$$\Re(af_{abc}) = f_c - f_0 \Rightarrow f_c = \Re(af_{abc}) + f_0$$

Naponske jednadžbe asinkronog stroja izražene pomoću kompleksnih vektora

Primjer naponske jednadžbe faze a statora u vremenskoj domeni

$$u_{as} = i_{as} R_s + \frac{d\psi_{as}}{dt}$$

$$\psi_{as} = (L_{asas} + L_{\sigma s}) i_{as} + L_{asbs} i_{bs} + L_{ascr} i_{cr} + L_{asar} i_{ar} + L_{asbr} i_{br}$$



$$u_{as} = i_{as} R_s + (L_{ms} + L_{\sigma s}) \frac{di_{as}}{dt} - \frac{L_{ms}}{2} \frac{di_{bs}}{dt} - \frac{L_{ms}}{2} \frac{di_{cr}}{dt} + \frac{w_r f_{nr1}}{w_s f_{ns1}} L_{ms} \left\{ \frac{d}{dt} (i_{ar} \cos \alpha_r) + \right.$$

$$\left. \frac{d}{dt} \left[i_{br} \cos \left(\alpha_r + \frac{2\pi}{3} \right) \right] + \frac{d}{dt} \left[i_{cr} \cos \left(\alpha_r + \frac{4\pi}{3} \right) \right] \right\}$$

$$\frac{d}{dt} (i_{ar} \cos \alpha_r) = \underbrace{\cos \alpha_r \frac{di_{ar}}{dt}}_{\text{napon zbog vremenske promjene struje}} - \underbrace{\sin \alpha_r i_{ar} \frac{d\alpha_r}{dt}}_{\text{napon zbog rotacije}}$$

Naponske jednadžbe asinkronog stroja izražene pomoću kompleksnih vektora

Primjer naponske jednadžbe faze b statora u vremenskoj domeni

$$u_{bs} = i_{bs}R_s + (L_{ms} + L_{\sigma s}) \frac{di_{bs}}{dt} - \frac{L_{ms}}{2} \frac{di_{as}}{dt} - \frac{L_{ms}}{2} \frac{di_{cs}}{dt} + \frac{w_r f_{nr1}}{w_s f_{ns1}} L_{ms} \left\{ \frac{d}{dt} \left[i_{ar} \cos \left(\alpha_r + \frac{4\pi}{3} \right) \right] + \frac{d}{dt} (i_{br} \cos \alpha_r) + \frac{d}{dt} \left[i_{cr} \cos \left(\alpha_r + \frac{2\pi}{3} \right) \right] \right\}$$

Primjer naponske jednadžbe faze c statora u vremenskoj domeni

$$u_{cs} = i_{cs}R_s + (L_{ms} + L_{\sigma s}) \frac{di_{cs}}{dt} - \frac{L_{ms}}{2} \frac{di_{as}}{dt} - \frac{L_{ms}}{2} \frac{di_{bs}}{dt} + \frac{w_r f_{nr1}}{w_s f_{ns1}} L_{ms} \left\{ \frac{d}{dt} \left[i_{ar} \cos \left(\alpha_r + \frac{2\pi}{3} \right) \right] + \frac{d}{dt} \left[i_{br} \cos \left(\alpha_r + \frac{4\pi}{3} \right) \right] + \frac{d}{dt} (i_{cr} \cos \alpha_r) \right\}$$

Naponska jednadžba statora izražena pomoću kompleksnih vektora

Vektor napona statora

$$\bar{u}_{abcs} = \frac{2}{3}(u_{as} + au_{bs} + a^2u_{cs})$$

Vektor pada napona na otporu statora

$$\frac{2}{3}(i_{as}R_s + ai_{bs}R_s + a^2i_{cs}R_s) = R_s \frac{2}{3}(i_{as} + ai_{bs} + a^2i_{cs}) = \boxed{R_s \bar{i}_{abcs}}$$

Vektor pada napona na vlastitom induktivitetu

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \left[(L_{ms} + L_{\sigma s}) \frac{di_{as}}{dt} + a(L_{ms} + L_{\sigma s}) \frac{di_{bs}}{dt} + a^2(L_{ms} + L_{\sigma s}) \frac{di_{cs}}{dt} \right] = \\ (L_{ms} + L_{\sigma s}) \frac{d}{dt} \left[\frac{2}{3}(i_{as} + ai_{bs} + a^2i_{cs}) \right] = \boxed{(L_{ms} + L_{\sigma s}) \frac{d\bar{i}_{abcs}}{dt}} \end{aligned}$$

Vektor pada napona na međuinduktivitetima između statorskih namota

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \left[-\frac{L_{ms}}{2} \frac{d}{dt} (i_{bs} + i_{cs}) - a \frac{L_{ms}}{2} \frac{d}{dt} (i_{as} + i_{cs}) - a^2 \frac{L_{ms}}{2} \frac{d}{dt} (i_{as} + i_{bs}) \right] = \\ -\frac{L_{ms}}{2} \frac{2}{3} \frac{d}{dt} \left[\left(\underbrace{a+a^2}_{-1} \right) i_{as} + \left(\underbrace{1+a^2}_{-a} \right) i_{bs} + \left(\underbrace{1+a}_{-a^2} \right) i_{cs} \right] = \boxed{\frac{L_{ms}}{2} \frac{d\bar{i}_{abcs}}{dt}} \end{aligned}$$

Naponska jednadžba statora izražena pomoću kompleksnih vektora

Vektor pada napona na međuinduktivitetima između statorskih i rotorskih namota

$$\begin{aligned}
 & \frac{2}{3} \left(\frac{w_r f_{nr1}}{w_s f_{ns1}} \right) L_{ms} \frac{d}{dt} \left\{ i_{ar} \cos \alpha_r + i_{br} \cos \left(\alpha_r + \frac{2\pi}{3} \right) + i_{cr} \cos \left(\alpha_r + \frac{4\pi}{3} \right) + a \left[i_{ar} \cos \left(\alpha_r + \frac{4\pi}{3} \right) + i_{br} \cos \alpha_r + i_{cr} \cos \left(\alpha_r + \frac{2\pi}{3} \right) \right] + \right. \\
 & \left. a^2 \left[i_{ar} \cos \left(\alpha_r + \frac{2\pi}{3} \right) + i_{br} \cos \left(\alpha_r + \frac{4\pi}{3} \right) + i_{cr} \cos \alpha_r \right] \right\} = \\
 & = \left(\frac{w_r f_{nr1}}{w_s f_{ns1}} \right) L_{ms} \frac{d}{dt} \left[\cos \alpha_r \underbrace{\frac{2}{3} (i_{ar} + ai_{br} + a^2 i_{cr})}_{\bar{i}_{abcr}} + \cos \left(\alpha_r + \frac{2\pi}{3} \right) \underbrace{\frac{2}{3} (a^2 i_{ar} + i_{br} + ai_{cr})}_{a^2 \bar{i}_{abcr}} + \right. \\
 & \left. \cos \left(\alpha_r + \frac{4\pi}{3} \right) \underbrace{\frac{2}{3} (ai_{ar} + a^2 i_{br} + i_{cr})}_{a \bar{i}_{abcr}} \right] \\
 & = \left(\frac{w_r f_{nr1}}{w_s f_{ns1}} \right) L_{ms} \frac{d}{dt} \left\{ \bar{i}_{abcr} \frac{1}{2} \left[e^{j\alpha_r} + e^{-j\alpha_r} + \left(e^{j\alpha_r} e^{j\frac{2\pi}{3}} + e^{-j\alpha_r} e^{-j\frac{2\pi}{3}} \right) e^{j\frac{4\pi}{3}} + \right. \right. \\
 & \left. \left. \left(e^{j\alpha_r} e^{j\frac{4\pi}{3}} + e^{-j\alpha_r} e^{-j\frac{4\pi}{3}} \right) e^{j\frac{2\pi}{3}} \right] \right\} \\
 & = \boxed{\left(\frac{w_r f_{nr1}}{w_s f_{ns1}} \right) L_{ms} \frac{d}{dt} \left\{ \bar{i}_{abcr} \frac{1}{2} \left[3e^{j\alpha_r} + e^{-j\alpha_r} \left(\underbrace{1+a+a^2}_{=0} \right) \right] \right\} = \boxed{\left(\frac{w_r f_{nr1}}{w_s f_{ns1}} \right) L_{ms} \frac{d}{dt} (\bar{i}_{abcr} e^{j\alpha_r})}}
 \end{aligned}$$

Naponska jednadžba statora izražena pomoću kompleksnih vektora

Naponska jednadžba STATORA izražena pomoću kompleksnih vektora

$$\bar{u}_{abcs} = R_s \bar{i}_{abcs} + \left(L_{\sigma s} + \frac{3}{2} L_{ms} \right) \frac{d\bar{i}_{abcs}}{dt} + \frac{3}{2} \frac{w_r f_{nr1}}{w_s f_{ns1}} L_{ms} \frac{d}{dt} \left(\bar{i}_{abcr} e^{j\alpha_r} \right)$$

Naponska jednadžba ROTORA izražena pomoću kompleksnih vektora

$$\bar{u}_{abcr} = R_r \bar{i}_{abcr} + \left[L_{\sigma r} + \frac{3}{2} \left(\frac{w_r f_{nr1}}{w_s f_{ns1}} \right)^2 L_{ms} \right] \frac{d\bar{i}_{abcr}}{dt} + \frac{3}{2} \left(\frac{w_r f_{nr1}}{w_s f_{ns1}} \right) L_{ms} \frac{d}{dt} \left(\bar{i}_{abcs} e^{-j\alpha_r} \right)$$

Preračunavanje rotorskih veličina na statorsku stranu

Napon rotora

$$\bar{u}'_{abcr} = \frac{w_s f_{ns1}}{w_r f_{nr1}} \bar{u}_{abcr}$$

Struja rotora

$$\bar{i}'_{abcr} = \frac{w_r f_{nr1}}{w_s f_{ns1}} \bar{i}_{abcr}$$

Naponska jednadžba STATORA izražena pomoću kompleksnih vektora

$$\bar{u}_{abcs} = R_s \bar{i}_{abcs} + (L_{\sigma s} + L_m) \frac{d \bar{i}_{abcs}}{dt} + L_m \frac{d}{dt} (\bar{i}'_{abcr} e^{j\alpha_r}) , \quad L_m = \frac{3}{2} L_{ms}$$

$$\bar{\psi}_{abcs} = (L_{\sigma s} + L_m) \bar{i}_{abcs} + L_m \bar{i}'_{abcr} e^{j\alpha_r}$$

Naponska jednadžba ROTORA izražena pomoću kompleksnih vektora

$$\frac{w_s f_{ns1}}{w_r f_{nr1}} \bar{u}_{abcr} = \underbrace{\left(\frac{w_s f_{ns1}}{w_r f_{nr1}} \right)^2 R_r}_{R'_r} \left(\underbrace{\frac{w_r f_{nr1}}{w_s f_{ns1}} \bar{i}_{abcr}}_{\bar{i}'_{abcr}} \right) + \left(\frac{w_s f_{ns1}}{w_r f_{nr1}} \right)^2 \left[L_{\sigma r} + \left(\frac{w_r f_{nr1}}{w_s f_{ns1}} \right)^2 L_m \right] \frac{d}{dt} \left(\underbrace{\frac{w_r f_{nr1}}{w_s f_{ns1}} \bar{i}_{abcr}}_{\bar{i}'_{abcr}} \right) + L_m \frac{d}{dt} (\bar{i}_{abcs} e^{-j\alpha_r})$$

$$\bar{u}'_{abcr} = R'_r \bar{i}'_{abcr} + (L'_{\sigma r} + L_m) \frac{d \bar{i}'_{abcr}}{dt} + L_m \frac{d}{dt} (\bar{i}_{abcs} e^{-j\alpha_r})$$

$$\bar{\psi}'_{abcr} = (L'_{\sigma r} + L_m) \bar{i}'_{abcr} + L_m \bar{i}_{abcs} e^{-j\alpha_r}$$

Naponska jednadžba za nultu komponentu

Nulta komponenta napona statora

$$u_{0s} = \frac{1}{3}(u_{as} + u_{bs} + u_{cs})$$

Nulta komponenta struje statora

$$i_{0s} = \frac{1}{3}(i_{as} + i_{bs} + i_{cs})$$

Nulta komponenta pada napona na otporu statora

$$\frac{1}{3}R_s(i_{as} + i_{bs} + i_{cs}) = \boxed{R_s i_{0s}}$$

Nulta komponenta pada napona na vlastitom induktivitetu statora

$$\frac{1}{3}(L_{\sigma s} + L_{ms}) \frac{d}{dt}(i_{as} + i_{bs} + i_{cs}) = \boxed{(L_{\sigma s} + L_{ms}) \frac{di_{0s}}{dt}}$$

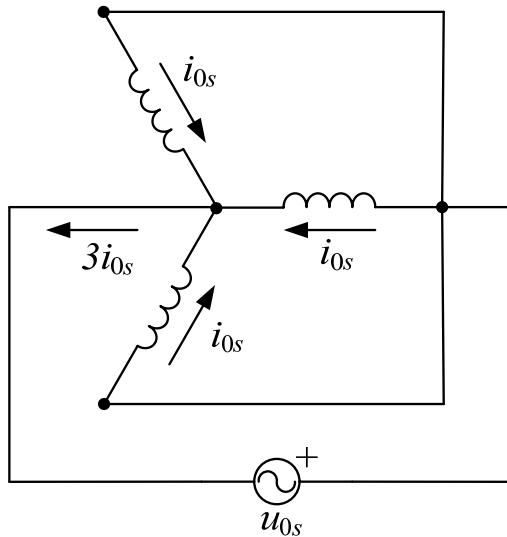
Nulta komponenta pada napona na međuinduktivitetima između statorskih namota

$$\frac{1}{3}\left(-\frac{L_{ms}}{2}\right) \frac{d}{dt} [(i_{bs} + i_{cs}) + (i_{as} + i_{cs}) + (i_{as} + i_{bs})] = \boxed{-L_{ms} \frac{di_{0s}}{dt}}$$

Nulta komponenta pada napona na međuinduktivitetima između statorskih i rotorskih namota

$$\frac{w_r f_{nr1}}{w_s f_{ns1}} L_{ms} \frac{d}{dt} \left\{ \underbrace{\frac{1}{3}(i_{ar} + i_{br} + i_{cr})}_{i_{0r}} \left[\underbrace{\cos \alpha_r + \cos\left(\alpha_r + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\alpha_r + \frac{4\pi}{3}\right)}_0 \right] \right\} = \boxed{0}$$

Naponska jednadžba za nultu komponentu



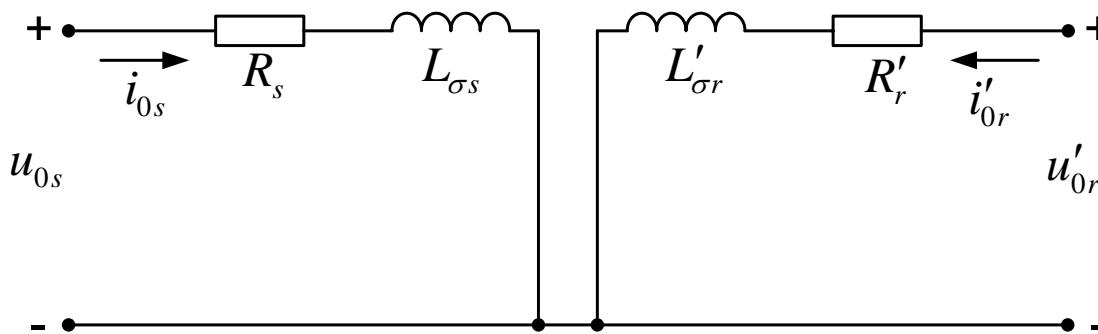
Električni krug asinkronog stroja za nultu komponentu napona i struje statora

Naponska jednadžba statora za nultu komponentu

$$u_{0s} = R_s i_{0s} + L_{\sigma s} \frac{di_{0s}}{dt} \quad \psi_{0s} = L_{\sigma s} i_{0s}$$
$$L_{\sigma s} \doteq L_{0s}$$

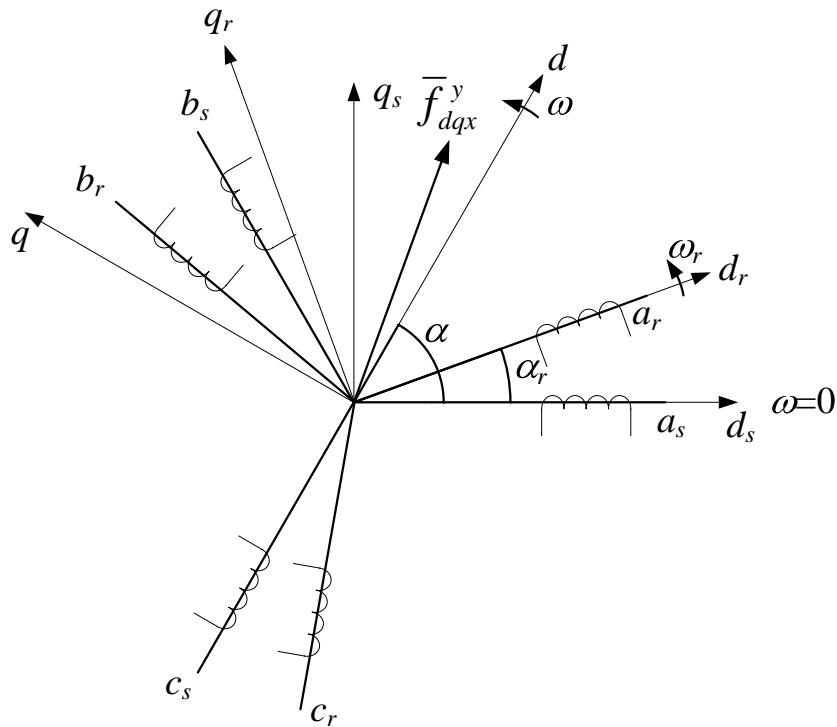
Naponska jednadžba rotora za nultu komponentu

$$u'_{0r} = R'_r i'_{0r} + L'_{\sigma r} \frac{di'_{0r}}{dt}$$
$$\psi'_{0r} = L'_{\sigma r} i'_{0r}$$



Nadomjesna shema asinkronog stroja za nultu komponentu

Rotirajući koordinatni sustav



Prikaz kompleksnog vektora i različitih rotirajućih koordinatnih sustava

\bar{f}_{dqx}^y - općeniti kompleksni vektor statorske ili rotorske varijable motora

f - u, i, ψ

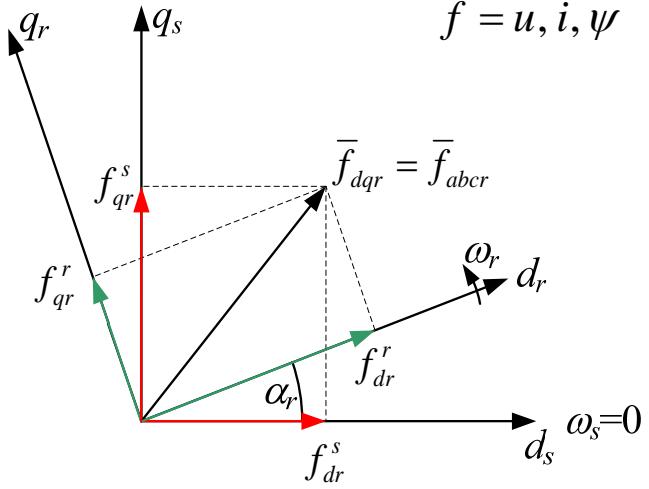
x - statorska ili rotorska varijabla

y - koordinatni sustav (statorski, rotorski, proizvoljno rotirajući)

U bilo kojem rotirajućem koordinatnom sustavu može se pisati

$$\bar{f}_{dqx}^y = f_{dx}^y + j f_{qx}^y$$

Rotirajući koordinatni sustav i pretvorba koordinata



Prikaz kompleksnog vektora rotora i njegovih komponenata u statorskom i rotorskom koordinatnom sustavu

Rotorski koordinatni sustav

$$\bar{f}_{dqr}^r = f_{dr}^r + j f_{qr}^r$$

Statorskni koordinatni sustav

$$f_{dr}^s = f_{dr}^r \cos \alpha_r - f_{qr}^r \sin \alpha_r$$

$$f_{qr}^s = f_{dr}^r \sin \alpha_r + f_{qr}^r \cos \alpha_r$$

$$\begin{bmatrix} f_{dr}^s \\ f_{qr}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_r & -\sin \alpha_r \\ \sin \alpha_r & \cos \alpha_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{dr}^r \\ f_{qr}^r \end{bmatrix}$$

$$\bar{f}_{dqr}^s = f_{dr}^s + j f_{qr}^s = (f_{dr}^r + j f_{qr}^r) \underbrace{\left(\cos \alpha_r + j \sin \alpha_r \right)}_{e^{j\alpha_r}} = \bar{f}_{dqr}^r e^{j\alpha_r}$$

$$\boxed{\bar{f}_{dqr}^s = \bar{f}_{dqr}^r e^{j\alpha_r}} \quad \text{rotorski} \Rightarrow \text{statorskni}$$

$$\boxed{\bar{f}_{dqr}^r = \bar{f}_{dqr}^s e^{-j\alpha_r}} \quad \text{statorskni} \Rightarrow \text{rotorski}$$

Rotirajući koordinatni sustav i pretvorba koordinata

Isti princip pretvorbe koordinata može se primijeniti za sve ostale kombinacije koordinatnih sustava

$$\bar{f}_{dqs}^s = \bar{f}_{dqs} e^{j\alpha}$$

proizvoljno rotirajući \Rightarrow statorski

$$\bar{f}_{dqs} = \bar{f}_{dqs}^s e^{-j\alpha}$$

statorski \Rightarrow proizvoljno rotirajući

$$\bar{f}_{dqr}^r = \bar{f}_{dqr} e^{j(\alpha - \alpha_r)}$$

proizvoljno rotirajući \Rightarrow rotorski

$$\bar{f}_{dqr} = \bar{f}_{dqr}^r e^{-j(\alpha - \alpha_r)}$$

rotorski \Rightarrow proizvoljno rotirajući

Veza između varijabli u proizvoljno rotirajućem koordinatnom dq sustavu i abc koordinatama (Parkove transformacije)

Statorski namot

$$\begin{aligned}\bar{f}_{dqs} &= f_{ds} + j f_{qs} = \bar{f}_{dqs}^s e^{-j\alpha} = \bar{f}_{abcs} e^{-j\alpha} = \frac{2}{3} (f_{as} + a f_{bs} + a^2 f_{cs}) e^{-j\alpha} \\ &= \frac{2}{3} \left(f_{as} + e^{j\frac{2\pi}{3}} f_{bs} + e^{j\frac{4\pi}{3}} f_{cs} \right) e^{-j\alpha} = \frac{2}{3} \left(f_{as} e^{-j\alpha} + e^{j\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)} f_{bs} + e^{j\left(\frac{4\pi}{3}-\alpha\right)} f_{cs} \right) \\ &= \frac{2}{3} \left\{ f_{as} \cos \alpha + f_{bs} \cos \left(\alpha - \frac{2\pi}{3} \right) + f_{cs} \cos \left(\alpha - \frac{4\pi}{3} \right) - \right. \\ &\quad \left. j \left[f_{as} \sin \alpha + f_{bs} \sin \left(\alpha - \frac{2\pi}{3} \right) + f_{cs} \sin \left(\alpha - \frac{4\pi}{3} \right) \right] \right\}\end{aligned}$$

$$f_{0s} = \frac{1}{3} (f_{as} + f_{bs} + f_{cs})$$

Veza između varijabli u proizvoljno rotirajućem koordinatnom dq sustavu i abc koordinatama (Parkove transformacije)

Statorski namot

$$\begin{bmatrix} f_{ds} \\ f_{qs} \\ f_{0s} \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \cos\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\alpha - \frac{4\pi}{3}\right) \\ -\sin \alpha & -\sin\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\alpha - \frac{4\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{as} \\ f_{bs} \\ f_{cs} \end{bmatrix}$$

Rotorski namot

$$\begin{aligned} \bar{f}_{dqr} &= f_{dr} + j f_{qr} = \bar{f}_{dqr}^r e^{-j(\alpha - \alpha_r)} \\ \begin{bmatrix} f_{dr} \\ f_{qr} \\ f_{0r} \end{bmatrix} &= \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos(\alpha - \alpha_r) & \cos\left(\alpha - \alpha_r - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\alpha - \alpha_r - \frac{4\pi}{3}\right) \\ -\sin(\alpha - \alpha_r) & -\sin\left(\alpha - \alpha_r - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\alpha - \alpha_r - \frac{4\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{ar} \\ f_{br} \\ f_{cr} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} f_{as} \\ f_{bs} \\ f_{cs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 1 \\ \cos\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) & 1 \\ \cos\left(\alpha - \frac{4\pi}{3}\right) & -\sin\left(\alpha - \frac{4\pi}{3}\right) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{ds} \\ f_{qs} \\ f_{0s} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f_{ar} \\ f_{br} \\ f_{cr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha - \alpha_r) & -\sin(\alpha - \alpha_r) & 1 \\ \cos\left(\alpha - \alpha_r - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\alpha - \alpha_r - \frac{2\pi}{3}\right) & 1 \\ \cos\left(\alpha - \alpha_r - \frac{4\pi}{3}\right) & -\sin\left(\alpha - \alpha_r - \frac{4\pi}{3}\right) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{dr} \\ f_{qr} \\ f_{0r} \end{bmatrix}$$

Jednadžbe asinkronog stroja u statorskom koordinatnom sustavu

Stator

$$\bar{u}_{abcs} = \bar{u}_{dqs}^s$$

$$\bar{i}_{abcs} = \bar{i}_{dqs}^s$$

$$L_s = L_{\sigma s} + L_m = L_{\sigma s} + \frac{3}{2} L_{ms}$$

$$\bar{u}_{dqs}^s = R_s \bar{i}_{dqs}^s + L_s \frac{d \bar{i}_{dqs}^s}{dt} + L_m \frac{d}{dt} (\bar{i}_{dqr}^r e^{j\alpha_r})$$

Rotor

$$\bar{u}'_{abcr} = \bar{u}_{dqr}^{r'}$$

$$\bar{i}'_{abcr} = \bar{i}_{dqr}^{r'}$$

$$L'_r = L'_{\sigma r} + L_m = L'_{\sigma r} + \frac{3}{2} L_{ms}$$

$$\bar{u}'_{dqr}^r = R'_r \bar{i}_{dqr}^r + L'_r \frac{d \bar{i}_{dqr}^r}{dt} + L_m \frac{d}{dt} (\bar{i}_{dqs}^s e^{-j\alpha_r})$$

$$\bar{u}'_{dqr} e^{j\alpha_r} = R'_r \bar{i}_{dqr}^r e^{j\alpha_r} + L'_r e^{j\alpha_r} \frac{d \bar{i}_{dqr}^r}{dt} + L_m e^{j\alpha_r} \frac{d}{dt} (\bar{i}_{dqs}^s e^{-j\alpha_r})$$

$$\bar{i}'_{dqr}^r e^{j\alpha_r} = \bar{i}_{dqr}^s$$

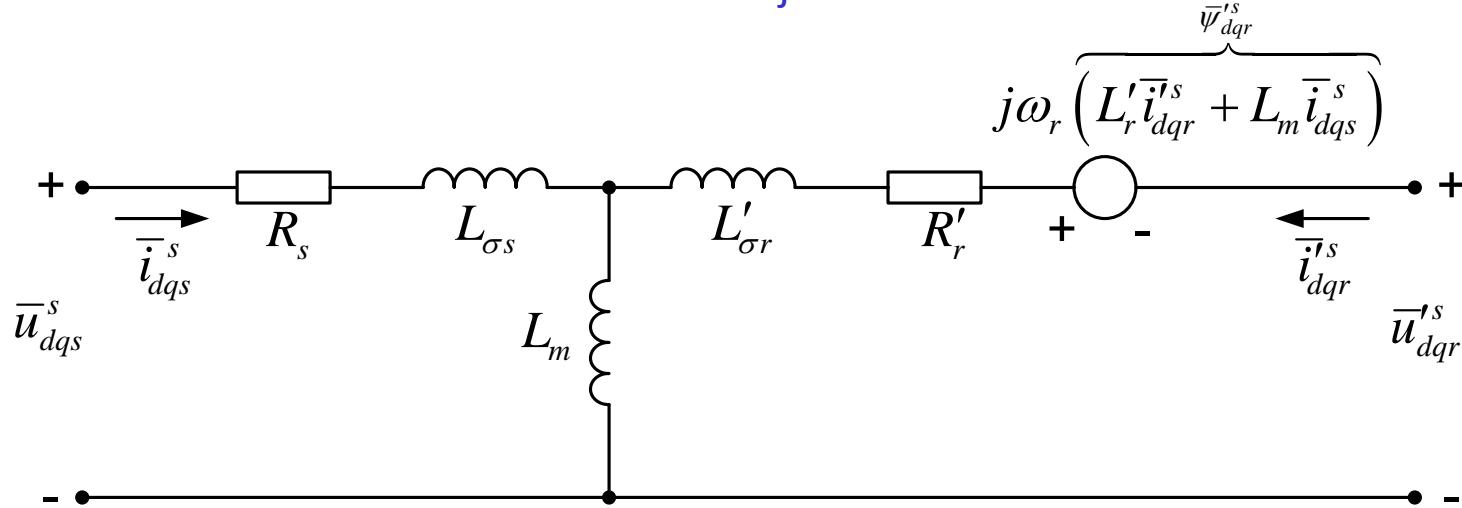
$$\frac{d}{dt} \left(\underbrace{e^{j\alpha_r} \bar{i}_{dqr}^r}_{\bar{i}_{dqr}^s} \right) = j \underbrace{\frac{d\alpha_r}{dt}}_{\omega_r} \underbrace{e^{j\alpha_r} \bar{i}_{dqr}^r}_{\bar{i}_{dqr}^s} + e^{j\alpha_r} \frac{d \bar{i}_{dqr}^r}{dt} \Rightarrow e^{j\alpha_r} \frac{d \bar{i}_{dqr}^r}{dt} = \frac{d \bar{i}_{dqr}^s}{dt} - j \omega_r \bar{i}_{dqr}^s$$

$$e^{j\alpha_r} \frac{d}{dt} (\bar{i}_{dqs}^s e^{-j\alpha_r}) = e^{j\alpha_r} e^{-j\alpha_r} \frac{d \bar{i}_{dqs}^s}{dt} - j \underbrace{\frac{d\alpha_r}{dt}}_{\omega_r} e^{j\alpha_r} e^{-j\alpha_r} \bar{i}_{dqs}^s = \frac{d \bar{i}_{dqs}^s}{dt} - j \omega_r \bar{i}_{dqs}^s$$

$$\boxed{\bar{u}'_{dqr}^s = R'_r \bar{i}_{dqr}^s + L'_r \left(\frac{d \bar{i}_{dqr}^s}{dt} - j \omega_r \bar{i}_{dqr}^s \right) + L_m \left(\frac{d \bar{i}_{dqs}^s}{dt} - j \omega_r \bar{i}_{dqs}^s \right)}$$

Nadomjesna shema asinkronog stroja u statorskom koordinatnom sustavu

Vektorska nadomjesna shema



$$\bar{\psi}_{dqs}^s = L_s \bar{i}_{dqs}^s + L_m \bar{i}_{dqr}^s$$

$$L_{\sigma s} = L_s - L_m$$

$$\bar{\psi}'_{dqr}^s = L'_r \bar{i}_{dqr}^s + L_m \bar{i}_{dqs}^s$$

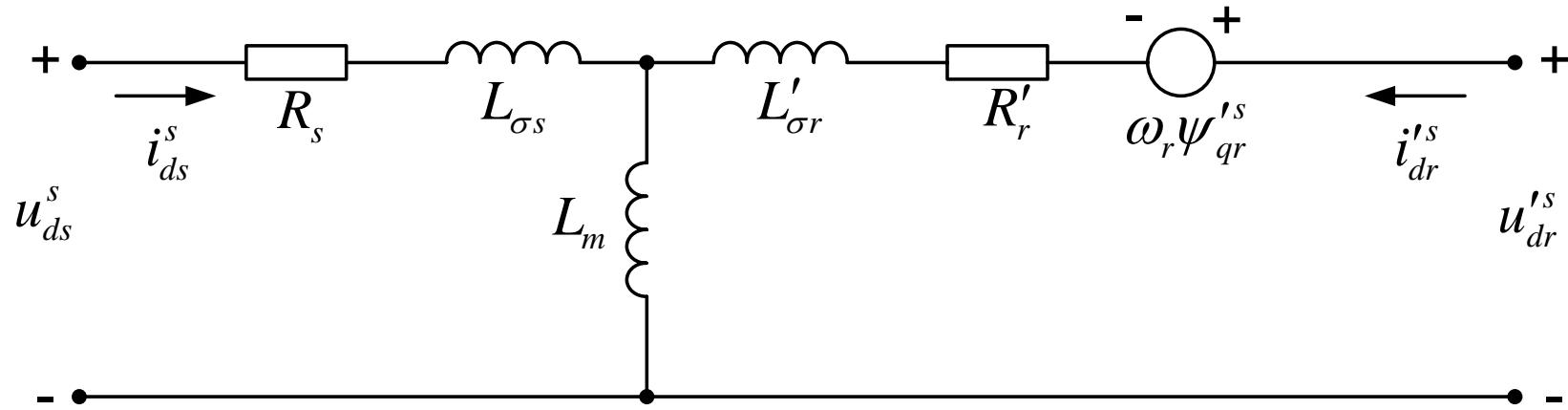
$$L'_{\sigma r} = L'_r - L_m$$

$$\bar{u}_{dqs}^s = R_s \bar{i}_{dqs}^s + \frac{d\bar{\psi}_{dqs}^s}{dt}$$

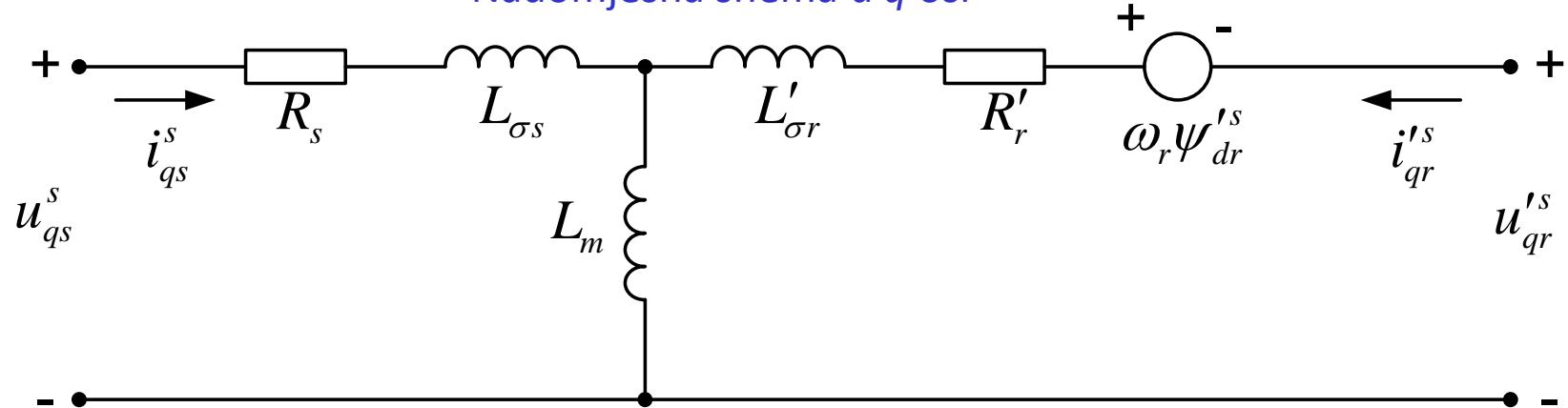
$$\bar{u}'_{dqr}^s = R'_r \bar{i}_{dqr}^s + \frac{d\bar{\psi}'_{dqr}^s}{dt} - j\omega_r \bar{\psi}'_{dqr}^s$$

Nadomjesna shema asinkronog stroja u statorskom koordinatnom sustavu

Nadomjesna shema u *d* osi



Nadomjesna shema u *q* osi



Jednadžbe asinkronog stroja u proizvoljno rotirajućem koordinatnom sustavu

$$\bar{u}_{dqs}^s = R_s \bar{i}_{dqs}^s + L_s \frac{d\bar{i}_{dqs}^s}{dt} + L_m \frac{d\bar{i}_{dqr}^s}{dt} \quad \text{Statorski koordinatni sustav}$$

$$\bar{f}_{dqs} = \bar{f}_{dqs}^s e^{-j\alpha} \quad \text{Transformacija koordinata}$$

$$\boxed{\bar{u}_{dqs} = R_s \bar{i}_{dqs} + L_s \left(\frac{d\bar{i}_{dqs}}{dt} + j\omega \bar{i}_{dqs} \right) + L_m \left(\frac{d\bar{i}_{dqr}}{dt} + j\omega \bar{i}_{dqr} \right)} \quad \text{Proizvoljno rotirajući koordinatni sustav}$$

$$\bar{u}_{dqr}^s = R_r' \bar{i}_{dqr}^s + L_r' \left(\frac{d\bar{i}_{dqr}^s}{dt} - j\omega_r \bar{i}_{dqr}^s \right) + L_m \left(\frac{d\bar{i}_{dqs}^s}{dt} - j\omega_r \bar{i}_{dqs}^s \right) \quad \text{Statorski koordinatni sustav}$$

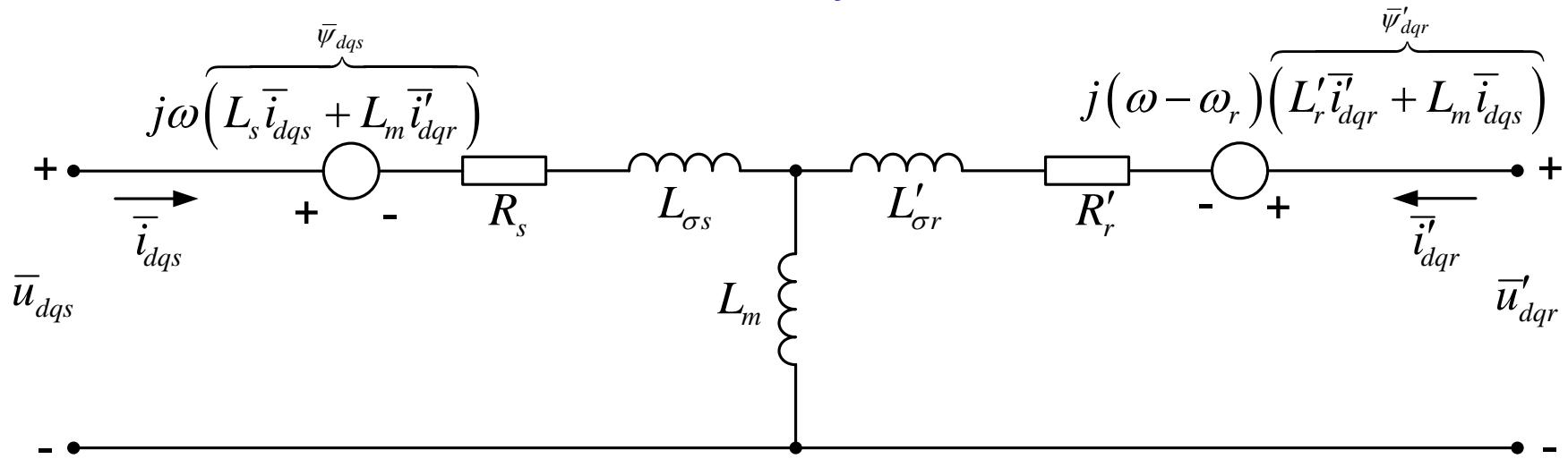
$$\boxed{\bar{u}_{dqr} = R_r' \bar{i}_{dqr} + L_r' \left[\frac{d\bar{i}_{dqr}}{dt} + j(\omega - \omega_r) \bar{i}_{dqr} \right] + L_m \left[\frac{d\bar{i}_{dqs}}{dt} + j(\omega - \omega_r) \bar{i}_{dqs} \right]} \quad \text{Proizvoljno rotirajući koordinatni sustav}$$

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt}$$

- električna kutna brzina vrtnje koordinatnog sustava

Nadomjesna shema asinkronog stroja u proizvoljno rotirajućem koordinatnom sustavu

Vektorska nadomjesna shema



$$\bar{\psi}_{dqs} = L_s \bar{i}_{dqs} + L_m \bar{i}'_{dqr}$$

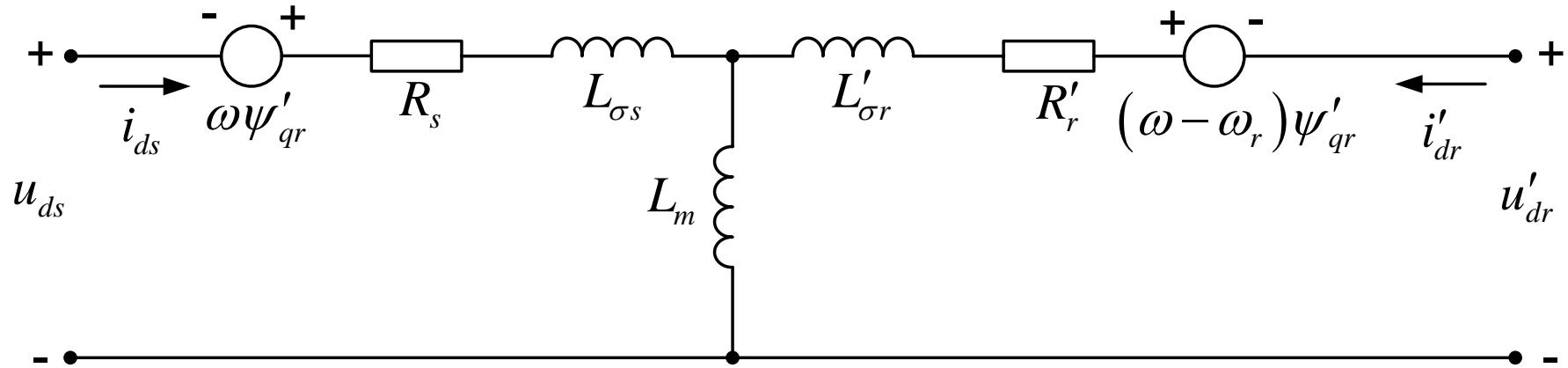
$$\bar{\psi}'_{dqr} = L'_r \bar{i}'_{dqr} + L_m \bar{i}_{dqs}$$

$$\bar{u}_{dqs} = R_s \bar{i}_{dqs} + \frac{d\bar{\psi}_{dqs}}{dt} + j\omega \bar{\psi}_{dqs}$$

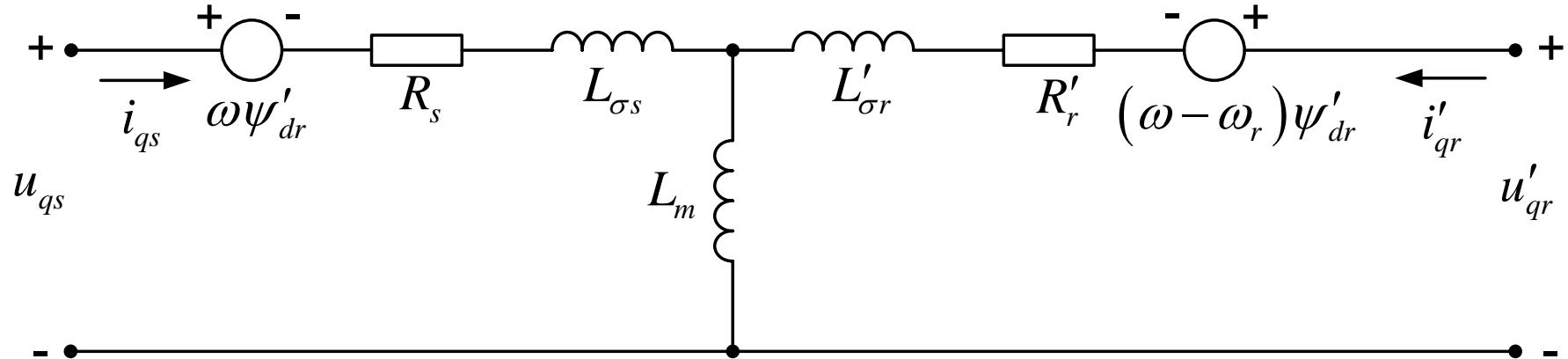
$$\bar{u}'_{dqr} = R'_r \bar{i}'_{dqr} + \frac{d\bar{\psi}'_{dqr}}{dt} + j(\omega - \omega_r) \bar{\psi}'_{dqr}$$

Nadomjesna shema asinkronog stroja u proizvoljno rotirajućem koordinatnom sustavu

Nadomjesna shema u d osi



Nadomjesna shema u q osi



Bilanca snage asinkronog stroja

Trenutna vrijednost snage

$$P = \Re e(\bar{u}_{dq} \bar{i}_{dq}^*) = \Re e[(u_d + j u_q)(i_d - j i_q)] = u_d i_d + u_q i_q$$

Trenutna vrijednost snage u statoru

$$\begin{aligned} P_{dqs} &= \Re e(\bar{u}_{dqs} \bar{i}_{dqs}^*) = \Re e\left[\bar{u}_{dqs}^s e^{-j\alpha} (\bar{i}_{dqs}^s e^{-j\alpha})^*\right] = \Re e(\bar{u}_{dqs}^s \bar{i}_{dqs}^{s*}) \\ &= \Re e\left[\frac{2}{3}(u_{as} + a u_{bs} + a^2 u_{cs}) \frac{2}{3}(i_{as} + a i_{bs} + a^2 i_{cs})^*\right] \end{aligned}$$

$$u_{as} + u_{bs} + u_{cs} = 3u_{0s}$$

$$i_{as} + i_{bs} + i_{cs} = 3i_{0s}$$

$$P_{dqs} = \frac{2}{3}(u_{as}i_{as} + u_{bs}i_{bs} + u_{cs}i_{cs}) - 2u_{0s}i_{0s} = \frac{2}{3}P_{abcs} - 2P_{0s}$$

$$P_{abcs} = \frac{3}{2}P_{dqs} + 3P_{0s}$$

Iraz za snagu ne ovisi
o koordinatnom
sustavu koji se koristi

Trenutna vrijednost snage u rotoru

$$P_{abcr} = \frac{3}{2}P_{dqr} + 3P_{0r}$$

Proračun momenta asinkronog stroja (statorski koordinatni sustav)

Mehanička snaga

$$\begin{aligned} P_{meh} &= \frac{3}{2} \Re e \left[-j\omega_r \bar{\psi}_{dqr}^s \bar{i}_{dqr}^{s*} \right] \\ &= \frac{3}{2} \Re e \left[-j\omega_r \left(L'_r \bar{i}_{dqr}^s + L_m \bar{i}_{dqs}^s \right) \bar{i}_{dqr}^{s*} \right] \end{aligned}$$

$$\left(\bar{i}_{dqr}^s \bar{i}_{dqr}^{s*} = |\bar{i}_{dqr}^s|^2 = \text{real} \Rightarrow \text{real} \cdot j\omega = \text{imag} \right)$$

$$= \frac{3}{2} \Re e \left[-j\omega_r L_m \bar{i}_{dqs}^s \bar{i}_{dqr}^{s*} \right]$$

$$\Re e \left(-j\bar{i}_{dqs}^s \bar{i}_{dqr}^{s*} \right) = \Im m \left(\bar{i}_{dqs}^s \bar{i}_{dqr}^{s*} \right)$$

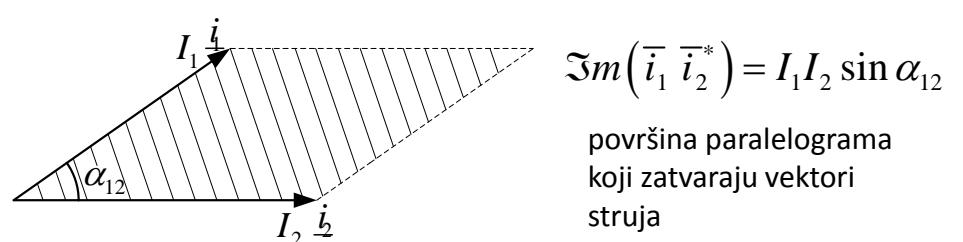
$$P_{meh} = \frac{3}{2} \omega_r L_m \Im m \left(\bar{i}_{dqs}^s \bar{i}_{dqr}^{s*} \right)$$

Moment

$\omega_r = p\omega_{rm}$ - električna kutna brzina vrtnje rotora

$$P_{meh} = M_{em} \omega_{rm}$$

$$M_{em} = \frac{3}{2} p L_m \Im m \left(\bar{i}_{dqs}^s \bar{i}_{dqr}^{s*} \right)$$



površina paralelograma
koji zatvaraju vektori
struja

$$\bar{\psi}_{dqs}^s = L_s \bar{i}_{dqs}^s + L_m \bar{i}_{dqr}^s \Rightarrow \bar{i}_{dqr}^s = \frac{\bar{\psi}_{dqs}^s - L_s \bar{i}_{dqs}^s}{L_m}$$

$$M_{em} = \frac{3}{2} p L_m \frac{1}{L_m} \Im m \left(\bar{i}_{dqs}^s \bar{\psi}_{dqs}^{s*} - L_s \underbrace{\bar{i}_{dqs}^s \bar{i}_{dqs}^{s*}}_{\text{real}} \right) = \frac{3}{2} p \Im m \left(\bar{i}_{dqs}^s \bar{\psi}_{dqs}^{s*} \right)$$

$$M_{em} = \frac{3}{2} p \left(\psi_{ds}^s i_{qs}^s - \psi_{qs}^s i_{ds}^s \right)$$

Proračun momenta asinkronog stroja (proizvoljno rotirajući koordinatni sustav)

$$\begin{aligned} P_{meh} &= \frac{3}{2} \Re e \left[j\omega \bar{\psi}_{dqs} \bar{i}_{dqs}^* + j(\omega - \omega_r) \bar{\psi}'_{dqr} \bar{i}'_{dqr}^* \right] \\ &= \frac{3}{2} \Re e \left[j\omega (L_s \bar{i}_{dqs} + L_m \bar{i}'_{dqr}) \bar{i}_{dqs}^* + j(\omega - \omega_r) (L'_r \bar{i}'_{dqr} + L_m \bar{i}_{dqs}) \bar{i}'_{dqr}^* \right] \end{aligned}$$

$$\bar{i}_{dqs} \bar{i}_{dqs}^* = \text{real} \Rightarrow \text{real} \cdot j\omega = \text{imag}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{3}{2} \Re e \left[j\omega L_m \bar{i}'_{dqr} \bar{i}_{dqs}^* + j(\omega - \omega_r) L_m \bar{i}_{dqs} \bar{i}'_{dqr}^* \right] \\ &= \frac{3}{2} \Re e \left[j\omega L_m \underbrace{(\bar{i}'_{dqr} \bar{i}_{dqs}^* + \bar{i}_{dqs} \bar{i}'_{dqr}^*)}_{\text{real}} - j\omega_r L_m \bar{i}_{dqs} \bar{i}'_{dqr}^* \right] \end{aligned}$$

$$\boxed{\left. \begin{aligned} P_{meh} &= \frac{3}{2} \omega_r L_m \Im m (\bar{i}_{dqs} \bar{i}'_{dqr}^*) \\ \bar{\psi}_{dqs} &= L_s \bar{i}_{dqs} + L_m \bar{i}'_{dqr} \end{aligned} \right\} \Rightarrow M_{em} = \frac{3}{2} p (\psi_{ds} i_{qs} - \psi_{qs} i_{ds})}$$

Model asinkronog stroja za stacionarno stanje

U stacionarnom stanju motor se vrti konstantnom brzinom ω_r

$$\omega_r = \text{konst.} \Rightarrow \frac{d\omega_r}{dt} = 0$$

Fazni naponi statora u vremenskoj domeni

$$u_{as} = U_{as} \cos(\omega_s t + \varphi_a) \quad \omega_s = 2\pi f \text{ - sinkrona kružna frekvencija}$$

$$u_{bs} = U_{bs} \cos(\omega_s t + \varphi_b)$$

$$u_{cs} = U_{cs} \cos(\omega_s t + \varphi_c)$$

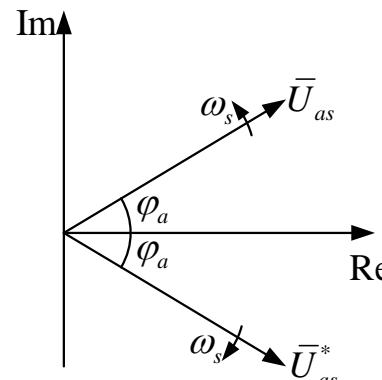
Napon faze a statora se može prikazati u obliku

$$u_{as} = \frac{1}{2} [U_{as} e^{j(\omega_s t + \varphi_a)} + U_{as} e^{-j(\omega_s t + \varphi_a)}]$$

$$\bar{U}_{as} = U_{as} e^{j\varphi_a} \text{ - fazor napona faze } a$$

Vektor napona statora

$$\begin{aligned} \bar{u}_{dqs}^s &= \frac{2}{3} (u_{as} + au_{bs} + a^2 u_{cs}) \\ &= \underbrace{\frac{1}{3} (\bar{U}_{as} + a\bar{U}_{bs} + a^2\bar{U}_{cs}) e^{j\omega_s t}}_{\bar{U}_{sp}} + \underbrace{\frac{1}{3} (\bar{U}_{as}^* + a\bar{U}_{bs}^* + a^2\bar{U}_{cs}^*) e^{-j\omega_s t}}_{\frac{1}{3} (\bar{U}_{as} + a^2\bar{U}_{bs} + a\bar{U}_{cs})^* = \bar{U}_{sn}} \end{aligned}$$



$$\left. \begin{aligned} \bar{U}_{sp} &= \frac{1}{3} (\bar{U}_{as} + a\bar{U}_{bs} + a^2\bar{U}_{cs}) \\ \bar{U}_{sn} &= \frac{1}{3} (\bar{U}_{as} + a^2\bar{U}_{bs} + a\bar{U}_{cs}) \end{aligned} \right\} \text{Direktna i inverzna komponenta napona prema teroji simetričnih komponenata}$$

Nadomjesna shema u statorskom koordinatnom sustavu

Vektorske naponske jednadžbe u statorskom koordinatnom sustavu

$$\bar{u}_{dqs}^s = \bar{U}_{sp} e^{j\omega_s t} + \bar{U}_{sn}^* e^{-j\omega_s t}$$

$$\bar{u}_{dqs}^s = R_s \bar{i}_{dqs}^s + L_s \frac{d\bar{i}_{dqs}^s}{dt} + L_m \frac{d\bar{i}_{dqr}^s}{dt}$$

$$0 = \bar{R}_r' \bar{i}_{dqr}^s + L'_r \left(\frac{d\bar{i}_{dqr}^s}{dt} - j\omega_r \bar{i}_{dqr}^s \right) + L_m \left(\frac{d\bar{i}_{dqs}^s}{dt} - j\omega_r \bar{i}_{dqs}^s \right)$$

Budući da su jednadžbe linearne, direktna i inverzna komponenta se mogu analizirati odvojeno.

Direktna komponenta

$$\bar{i}_{dqs}^s = \bar{I}_{sp} e^{j\omega_s t}, \quad \bar{i}_{dqr}^s = \bar{I}'_{rp} e^{j\omega_s t}$$

$$\frac{d}{dt}(e^{j\omega_s t}) = j\omega_s e^{j\omega_s t}$$

$$\boxed{\bar{U}_{sp} = (R_s + j\omega_s L_s) \bar{I}_{sp} + j\omega_s L_m \bar{I}'_{rp}}$$

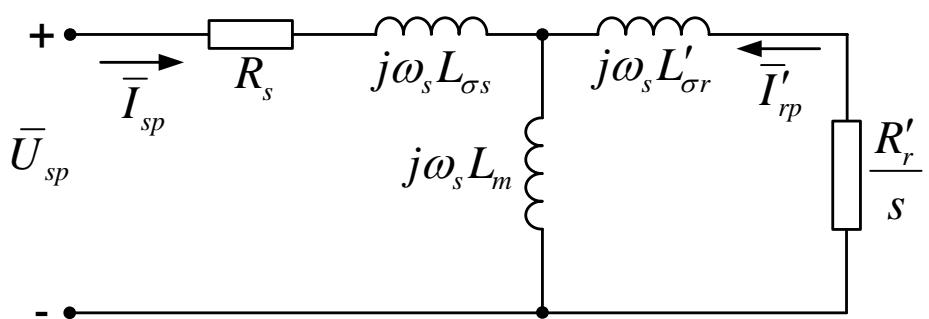
$$0 = [R'_r + j(\omega_s - \omega_r)L'_r] \bar{I}'_{rp} + j(\omega_s - \omega_r)L_m \bar{I}_{sp}$$

Rotorska jednadžba se množi s $\frac{\omega_s}{\omega_s - \omega_r} = \frac{1}{s}$ (s je klizanje).

$$\boxed{0 = [R'_r \frac{\omega_s}{\omega_s - \omega_r} + j\omega_s L'_r] \bar{I}'_{rp} + j\omega_s L_m \bar{I}_{sp}}$$

$$L_s = L_{\sigma s} + L_m$$

$$L'_r = L'_{\sigma r} + L_m$$



Nadomjesna shema asinkronog stroja u stacionarnom stanju za DIREKTNU komponentu

Nadomjesna shema u statorskom koordinatnom sustavu

Inverzna komponenta

$$\bar{U}_{dqs}^s = \bar{U}_{sn}^* e^{-j\omega_s t}, \quad \bar{i}_{dqs}^s = \bar{I}_{sn}^* e^{-j\omega_s t}, \quad \bar{i}_{dqrn}^s = \bar{I}'_{rn}^* e^{-j\omega_s t}$$

$$\frac{d}{dt}(e^{-j\omega_s t}) = -j\omega_s e^{-j\omega_s t}$$

$$\bar{U}_{sn}^* = (R_s - j\omega_s L_s) \bar{I}_{sn}^* - j\omega_s L_m \bar{I}_{rn}^*$$

$$0 = [R'_r - j(\omega_s + \omega_r)L'_r] \bar{I}'_{rn} - j(\omega_s + \omega_r)L_m \bar{I}_{sn}^*$$

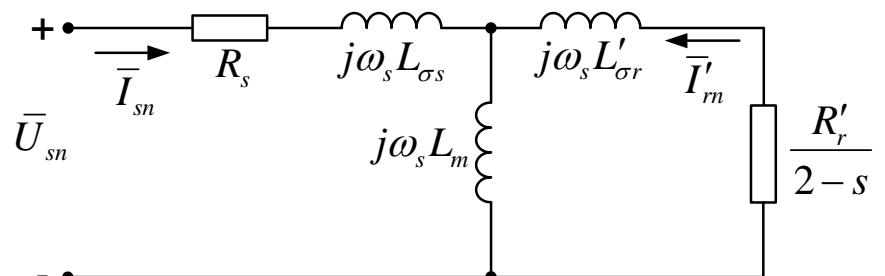
Nakon primjene pravila za konjugirano-kompleksne brojeve dobiva se

$$\bar{U}_{sn} = (R_s + j\omega_s L_s) \bar{I}_{sn} + j\omega_s L_m \bar{I}'_{rn}$$

$$0 = [R'_r + j(\omega_s + \omega_r)L'_r] \bar{I}'_{rn} + j(\omega_s + \omega_r)L_m \bar{I}_{sn}$$

Rotorska jednadžba se množi s $\frac{\omega_s}{\omega_s + \omega_r} = \frac{1}{2-s}$ (s je klizanje).

$$0 = \left[\frac{R'_r}{2-s} + j\omega_s L'_r \right] \bar{I}'_{rn} + j\omega_s L_m \bar{I}_{sn}$$



Nadomjesna shema asinkronog stroja u stacionarnom stanju za INVERZNU komponentu

Jednadžbe stroja i pripadne nadomjesne sheme u stacionarnom stanju su identične u svim koordinatnim sustavima.

Proračun momenta u stacionarnom stanju

$$M_{em} = \frac{3}{2} p L_m \Im m \left(\bar{i}_{dqs}^s \bar{i}_{dqr}^{s*} \right) = \frac{3}{2} p L_m \Im m \left[\left(\bar{I}_{sp} e^{j\omega_s t} + \bar{I}_{sn}^* e^{-j\omega_s t} \right) \left(\bar{I}_{rp}^* e^{-j\omega_s t} + \bar{I}_{rn} e^{j\omega_s t} \right) \right]$$

Srednja vrijednost momenta

$$M_{em0} = \frac{3}{2} p L_m \Im m \left(\bar{I}_{sp} \bar{I}_{rp}^* + \bar{I}_{sn}^* \bar{I}_{rn} \right)$$

Pulzacijski moment

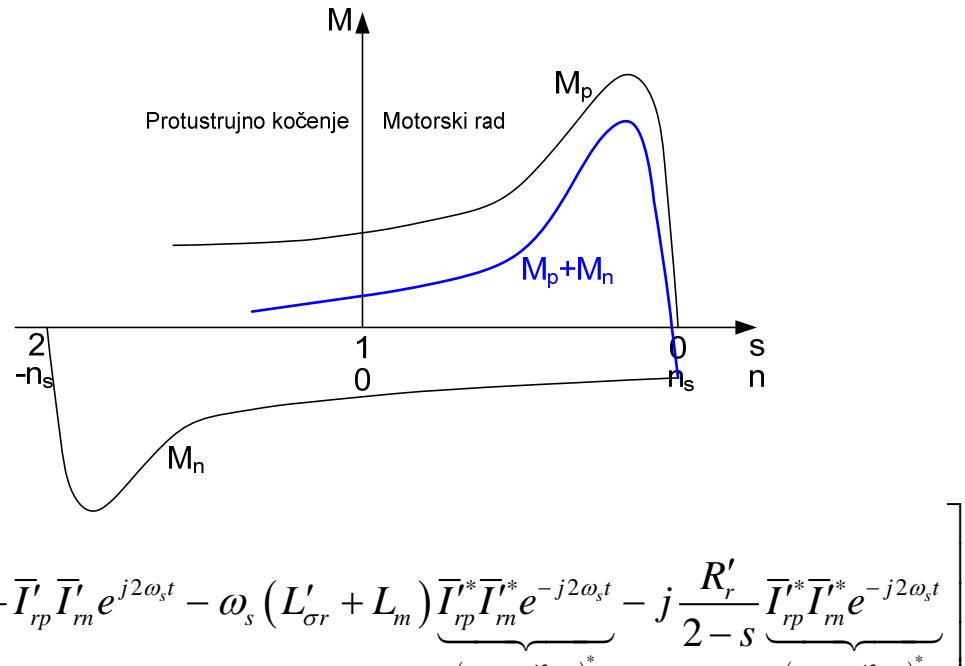
$$M_{em2} = \frac{3}{2} p L_m \Im m \left(\bar{I}_{sp} \bar{I}_{rn} e^{j2\omega_s t} + \bar{I}_{sn}^* \bar{I}_{rp}^* e^{-j2\omega_s t} \right)$$

Iz nadomjesnih shema za direktnu i inverznu komponentu slijedi

$$\bar{I}_{sp} = \frac{1}{\omega_s L_m} \left[-\omega_s (L'_{\sigma r} + L_m) + j \frac{R'_r}{s} \right] \bar{I}_{rp}$$

$$\bar{I}_{sn}^* = \frac{1}{\omega_s L_m} \left[-\omega_e (L'_{\sigma r} + L_m) - j \frac{R'_r}{2-s} \right] \bar{I}_{rn}^*$$

$$M_{em0} = \frac{3}{2} p \frac{1}{\omega_s} \left(\underbrace{\left| \bar{I}_{rp} \right|^2 \frac{R'_r}{s}}_{M_p} - \underbrace{\left| \bar{I}_{rn} \right|^2 \frac{R'_r}{2-s}}_{M_n} \right)$$



$$M_{em2} = \frac{3}{2} p \frac{1}{\omega_s} \Im m \left[-\omega_s (L'_{\sigma r} + L_m) \bar{I}_{rp} \bar{I}_{rn} e^{j2\omega_s t} + j \frac{R'_r}{s} \bar{I}_{rp} \bar{I}_{rn} e^{j2\omega_s t} - \omega_s (L'_{\sigma r} + L_m) \underbrace{\bar{I}_{rp}^* \bar{I}_{rn}^* e^{-j2\omega_s t}}_{\left(\bar{I}_{rp} \bar{I}_{rn} e^{j2\omega_s t} \right)^*} - j \frac{R'_r}{2-s} \underbrace{\bar{I}_{rp}^* \bar{I}_{rn}^* e^{-j2\omega_s t}}_{\left(\bar{I}_{rp} \bar{I}_{rn} e^{j2\omega_s t} \right)^*} \right]$$

$$M_{em2} = \frac{3}{2} p \frac{1}{\omega_s} \left(\frac{R'_r}{s} - \frac{R'_r}{2-s} \right) \Re e \left(\bar{I}_{rp} \bar{I}_{rn} e^{j2\omega_s t} \right)$$

Sustav jediničnih vrijednosti primijenjen na asinkroni stroj

Prikaz varijabli asinkronog stroja u jediničnim (per-unit) vrijednostima olakšava usporedbu strojeva različitih snaga te daje bolji uvid u relativne veličine njihovih parametara. Najčešće korišteni sustav jediničnih vrijednosti je baziran na nazivnoj snazi na osovini stroja. Osnovne bazne vrijednosti su onda:

Bazni napon: $U_B = \sqrt{2}U_{fn}$ – vršna vrijednost nazivnog faznog napona

Bazna snaga: $P_B = P_n$ – nazivna mehanička snaga na osovini motora

Bazna električna kutna brzina: $\omega_B = \omega_s = 2\pi f_n$ – nazivna električna kutna brzina.

Iz osnovnih vrijednosti slijede izvedene bazne vrijednosti:

$$\text{Bazna struja: } I_B = \frac{2}{3} \frac{P_B}{U_B} = \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{P_n}{U_{fn}}$$

$$\text{Bazni induktivitet: } L_B = \frac{Z_B}{\omega_B}$$

$$\text{Bazna impedancija: } Z_B = \frac{U_B}{I_B} = \frac{3U_{fn}^2}{P_n}$$

$$\text{Bazna mehanička kutna brzina: } \omega_{mB} = \frac{\omega_B}{p} \quad (p - \text{broj pari polova})$$

$$\text{Bazni moment: } M_B = \frac{P_B}{\omega_{mB}} = p \frac{P_n}{\omega_s}$$

Sustav jediničnih vrijednosti primijenjen na asinkroni stroj

Važno je primijetiti da u ovom per-unit sustavu:

1. Za sve proračune se koriste iste jednadžbe kao i za model sa stvarnim jedinicama, osim što se u izrazima u per-unit sustavu više ne pojavljuju broj faza i broj pari polova.
2. Nazivna struja je nešto veća od 1 pu, jer I_B ne uključuje utjecaj faktora snage i korisnosti.
3. Nazivni moment je nešto veći od 1 pu, jer je M_B baziran na sinkronoj brzini, a ne na nazivnoj brzini.
Nazivni moment je jednak

$$M_{n(pu)} = \frac{M_n}{M_B} = \frac{1}{M_B} \frac{P_n}{\omega_{mn}} = \frac{1}{M_B} \frac{P_B}{\omega_{mB}(1-s_n)} = \frac{1}{M_B} \frac{M_B}{1-s_n} = \frac{1}{1-s_n}$$

gdje je s_n nazivno klizanje. Elektromagnetski moment u stacionarnom stanju je

$$M_{em(pu)} = \frac{M_{em}}{M_B} = \frac{\frac{3}{2} \frac{p}{\omega_s} |\bar{I}'_{rp}|^2 \frac{R'_r}{s}}{\frac{3}{2} \frac{p}{\omega_B} I_B^2 Z_B} = \boxed{|\bar{I}'_{rp(pu)}|^2 \frac{R'_{r(pu)}}{\omega_{s(pu)} s}}$$

$$\left(M_B = \frac{P_B}{\omega_{mB}} = \frac{3}{2} U_B I_B \frac{p}{\omega_B} = \frac{3}{2} \frac{p}{\omega_B} I_B^2 Z_B \right)$$

Sustav jediničnih vrijednosti primijenjen na asinkroni stroj

Jednadžba gibanja u per-unit sustavu se modificira na sljedeći način:

$$J \frac{d\omega_m}{dt} = M_m - M_t \Rightarrow \frac{1}{M_B} \frac{\omega_B}{p} J \frac{d\left(\frac{\omega}{\omega_B}\right)}{dt} = \frac{M_m - M_t}{M_B} \Rightarrow \frac{J}{M_B} \frac{\omega_B}{p} \frac{d\omega_{(pu)}}{dt} = M_{m(pu)} - M_{t(pu)}$$

Odatle slijedi izraz za nadomjesni moment inercije u per-unit sustavu koji se definira kao

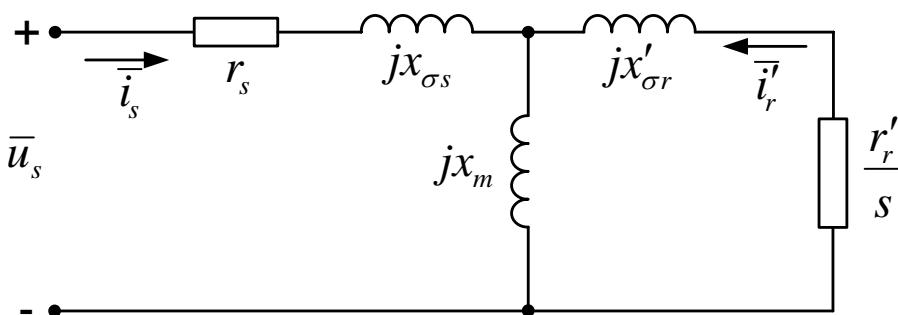
$$T_m = \frac{J}{M_B} \frac{\omega_B}{p}$$

Mjerna jedinica za T_m je sekunda. Druga veličina koja se često koristi u jednadžbi gibanja u per-unit modelima je konstanta inercije H koja se definira kao omjer pohranjene mehaničke energije u vrtnji pri brzini ω_{mB} i bazne vrijednosti snage P_B , tj.

$$H = \frac{\frac{1}{2} J \omega_{mB}^2}{P_B} = \frac{\frac{1}{2} J \left(\frac{\omega_B}{p}\right)^2}{P_B} = \frac{1}{2} \frac{J}{M_B} \frac{\omega_B}{p} = \frac{1}{2} T_m$$

Primjer primjene sustava jediničnih vrijednosti na asinkroni motor

Za asinkroni motor 400 V, 100 kW, 50 Hz, 1463,5 o/min, spoj Y s parametrima nadomjesne sheme $R_s=0,04 \Omega$, $L_{\sigma s}=0,205 \text{ mH}$, $R'_r=0,034 \Omega$, $L'_{\sigma r}=0,22 \text{ mH}$, $L_m=8,2 \text{ mH}$ izračunajte nazivnu struju armature, faktor snage i nazivni moment u jediničnim vrijednostima.



$$Z_B = \frac{U_B}{I_B} = \frac{3U_{fn}^2}{P_n} = \frac{3\left(\frac{400}{\sqrt{3}}\right)^2}{100 \cdot 10^3} = 1,6 \Omega$$

$$\omega_s = 2\pi f_n = 2\pi 50 = 314,15 \text{ s}^{-1}$$

$$x'_{\sigma r} = \frac{L'_{\sigma r} \omega_s}{Z_B} = \frac{0,22 \cdot 10^{-3} \cdot 314,15}{1,6} = 0,0432$$

$$x_m = \frac{L_m \omega_s}{Z_B} = \frac{8,2 \cdot 10^{-3} \cdot 314,15}{1,6} = 1,61$$

$$s_n = \frac{n_s - n_n}{n_s} = \frac{1500 - 1463,5}{1500} = 0,0243$$

$$\bar{u}_s = \frac{\sqrt{2}U_{fn}}{U_B} = \frac{\sqrt{2}U_{fn}}{\sqrt{2}U_{fn}} = 1|0^0$$

$$r_s = \frac{R_s}{Z_B} = \frac{0,04}{1,6} = 0,025$$

$$x_{\sigma s} = \frac{L_{\sigma s} \omega_s}{Z_B} = \frac{0,205 \cdot 10^{-3} \cdot 314,15}{1,6} = 0,04025$$

$$r'_r = \frac{R'_r}{Z_B} = \frac{0,032}{1,6} = 0,02125$$

Primjer primjene sustava jediničnih vrijednosti na asinkroni motor

$$z = r_s + jx_{\sigma s} + \frac{jx_m \left(jx'_{\sigma r} + \frac{r'_r}{s_n} \right)}{jx_m + jx'_{\sigma r} + \frac{r'_r}{s_n}} = 0,025 + j0,04025 + \frac{j1,61 \left(j0,0432 + \frac{0,02125}{0,024\dot{3}} \right)}{j1,61 + j0,0432 + \frac{0,02125}{0,024\dot{3}}} = 0,7953 \underline{|32,25^0}$$

$$\bar{i}_s = \frac{\bar{u}_s}{z} = \frac{1\underline{|0^0}}{0,7953 \underline{|32,25^0}} = 1,2575 \underline{|-32,25^0}$$

$$\cos \varphi_n = \cos 32,25^0 = 0,8457$$

$$M_n = \frac{1}{1 - s_n} = \frac{1}{1 - 0,024\dot{3}} = 1,025$$

ili

$$\bar{i}'_r = -\bar{i}_s \frac{jx_m}{jx_m + jx'_{\sigma r} + \frac{r'_r}{s_n}} = -1,2575 \underline{|-32,25^0} \frac{j1,61}{j1,61 + j0,0432 + \frac{0,02125}{0,024\dot{3}}} = 1,0828 \underline{|175,59^0}$$

$$M_n = |\bar{i}'_r|^2 \frac{r'_r}{\omega_{s(pu)} s_n} = 1,0828^2 \frac{0,02125}{1 \cdot 0,024\dot{3}} = 1,025$$

Opći oblik vektorske nadomjesne sheme

U motoru osim glavnog magnetskog toka koji ulančuju zajedno statorski i rotorski namot postoje i rasipni tokovi koje ulančuju samo namot statora i samo namot rotora. Odatle slijedi

$$\frac{L_{sr}}{L_s} = \frac{\frac{3}{2} \frac{4}{\pi p^2} \frac{\mu_0 r_0 l}{\delta} (w_s f_{ns1} w_r f_{nr1})}{L_{\sigma s} + \frac{3}{2} \frac{4}{\pi p^2} \frac{\mu_0 r_0 l}{\delta} (w_s f_{ns1})^2} = k_s \frac{w_r f_{nr1}}{w_s f_{ns1}}, \quad k_s < 1$$

$$\frac{L_{sr}}{L_r} = \frac{\frac{3}{2} \frac{4}{\pi p^2} \frac{\mu_0 r_0 l}{\delta} (w_s f_{ns1} w_r f_{nr1})}{L_{\sigma r} + \frac{3}{2} \frac{4}{\pi p^2} \frac{\mu_0 r_0 l}{\delta} (w_r f_{nr1})^2} = k_r \frac{w_s f_{ns1}}{w_r f_{nr1}}, \quad k_r < 1$$

Ukupni koeficijent ulančenja: $k = \sqrt{k_s k_r} = \frac{L_{sr}}{\sqrt{L_s L_r}} < 1$

Koeficijent rasipanja: $\sigma = \sqrt{1 - k^2}$

Opći oblik vektorske nadomjesne sheme

Ako se umjesto omjera broja zavoja u vektorske jednadžbe u proizvoljno rotirajućem koordinatnom sustavu uvrsti koeficijent a različit od nule i od beskonačnosti, onda se može pisati

$$\bar{u}_{dqs} = R_s \bar{i}_{dqs} + L_s \left(\frac{d\bar{i}_{dqs}}{dt} + j\omega \bar{i}_{dqs} \right) + aL_{sr} \left(\frac{1}{a} \frac{d\bar{i}_{dqr}}{dt} + j\omega \frac{1}{a} \bar{i}_{dqr} \right)$$

$$a\bar{u}_{dqr} = a^2 R_r \frac{1}{a} \bar{i}_{dqr} + a^2 L_r \left[\frac{1}{a} \frac{d\bar{i}_{dqr}}{dt} + j(\omega - \omega_r) \frac{1}{a} \bar{i}_{dqr} \right] + aL_{sr} \left[\frac{d\bar{i}_{dqs}}{dt} + j(\omega - \omega_r) \bar{i}_{dqs} \right]$$

Odatle teoretski slijedi da postoji beskonačan broj ekvivalentnih nadomjesnih shema kojima se može prikazati asinkroni motor. Međutim, fizikalno je ispravno da vrijedi

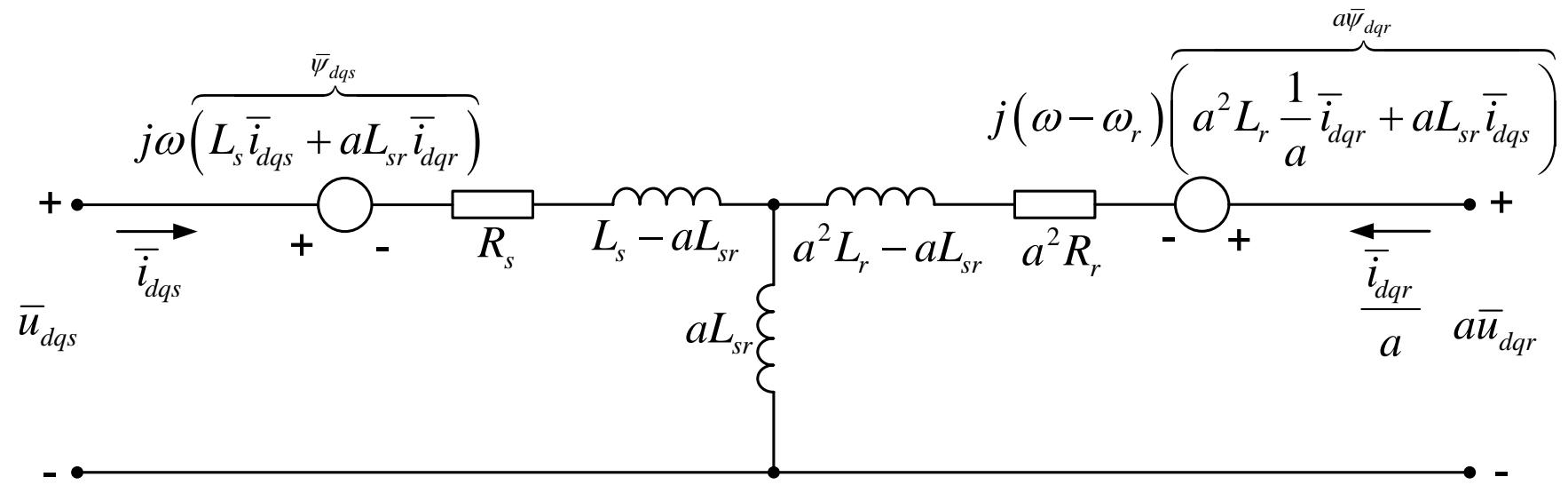
$$L_s - L_{sr} \frac{w_s f_{ns1}}{w_r f_{nr1}} = L_s (1 - k_s) > 0$$

$$L_r - L_{sr} \frac{w_r f_{nr1}}{w_s f_{ns1}} = L_r (1 - k_r) > 0$$

Zato je za dobivanje fizikalno prihvatljivih parametara nadomjesne sheme poželjno odabrati koeficijent a u intervalu

$$k_r \frac{w_s f_{ns1}}{w_r f_{nr1}} = \frac{L_{sr}}{L_r} \leq a \leq \frac{L_s}{L_{sr}} = \frac{1}{k_s} \frac{w_s f_{ns1}}{w_r f_{nr1}}$$

Opći oblik vektorske nadomjesne sheme



Ako se u opći oblik vektorske nadomjesne sheme uvrsti

$$a = \frac{w_s f_{ns1}}{w_r f_{nr1}}$$

dobije se standardna nadomjesna shema s rotorskim veličinama reduciranim na statorskiju stranu.

Opći oblik nadomjesne sheme u stacionarnom stanju

U proizvoljno rotirajućem koordinatnom sustavu za **simetrični** trofazni sustav vrijedi

$$\bar{u}_{dqs} = \bar{u}_{dqs}^s e^{-j\alpha} = \bar{u}_{dqs}^s e^{-j(\omega t + \alpha_0)} = \bar{U}_s e^{j\omega_s t} e^{-j(\omega t + \alpha_0)} = \bar{U}_s e^{j[(\omega_s - \omega)t - \alpha_0]}$$

$$\bar{i}_{dqs} = \bar{I}_s e^{j[(\omega_s - \omega)t - \alpha_0]}, \quad \bar{i}_{dqr} = \bar{I}_r e^{j[(\omega_s - \omega)t - \alpha_0]}$$

$$\frac{d}{dt} \left[e^{j(\omega_s - \omega)t} \right] = j(\omega_s - \omega) e^{j(\omega_s - \omega)t}$$

Nakon uvrštavanja u naponsku jednadžbu za stator dobiva se

$$\bar{U}_s e^{j[(\omega_s - \omega)t - \alpha_0]} = R_s \bar{I}_s e^{j[(\omega_s - \omega)t - \alpha_0]} + L_s [j(\omega_s - \omega) + j\omega] \bar{I}_s e^{j[(\omega_s - \omega)t - \alpha_0]} +$$

$$aL_{sr} [j(\omega_s - \omega) + j\omega] \frac{1}{a} \bar{I}_r e^{j[(\omega_s - \omega)t - \alpha_0]}$$

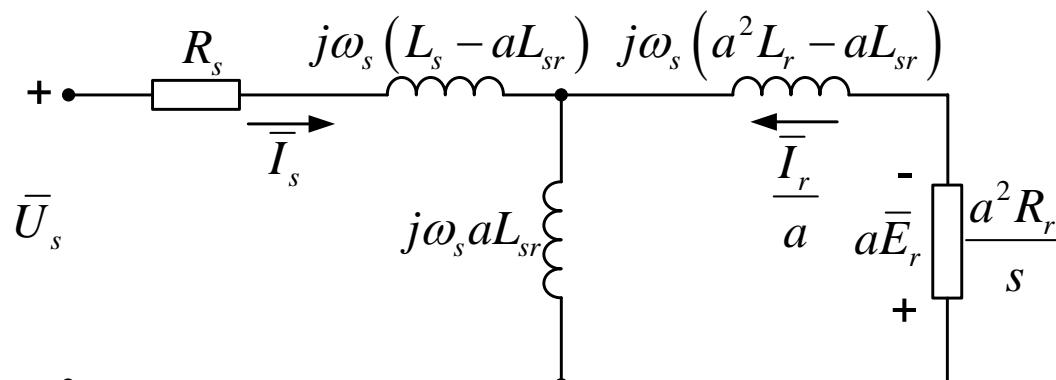
$$\boxed{\bar{U}_s = (R_s + j\omega_s L_s) \bar{I}_s + j\omega_s aL_{sr} \frac{1}{a} \bar{I}_r}$$

Opći oblik nadomjesne sheme u stacionarnom stanju

Nakon uvrštavanja u naponsku jednadžbu za rotor uz $u_{dqr}=0$ dobiva se

$$0 = a^2 R_r \frac{1}{a} \bar{I}_r e^{j[(\omega_s - \omega)t - \alpha_0]} + a^2 L_r [j(\omega_s - \omega) + j(\omega - \omega_r)] \frac{1}{a} \bar{I}_r e^{j[(\omega_s - \omega)t - \alpha_0]} + a L_{sr} [j(\omega_s - \omega) + j(\omega - \omega_r)] \bar{I}_s e^{j[(\omega_s - \omega)t - \alpha_0]}$$

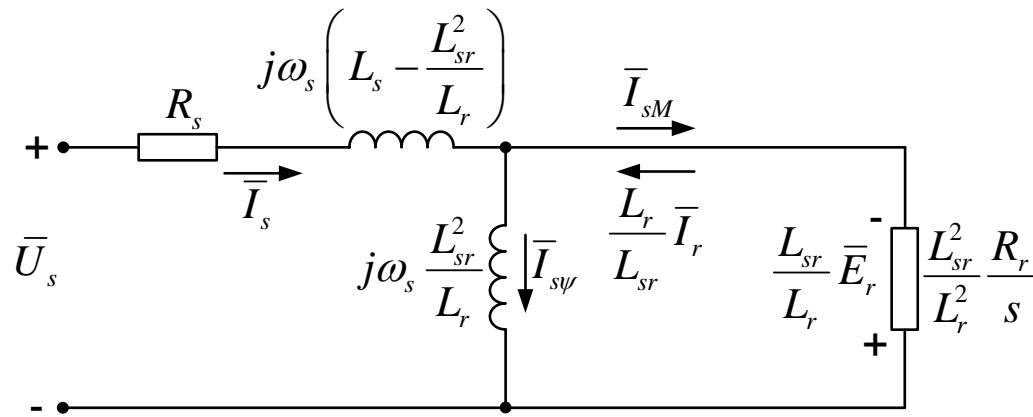
$$\boxed{0 = [a^2 R_r \underbrace{\frac{\omega_s}{\omega_s - \omega_r}}_{1/s} + j\omega_s a^2 L_r] \frac{1}{a} \bar{I}_r + j\omega_s a L_{sr} \bar{I}_{sp}}$$



E_r – napon induciran u rotorskom namotu

Oblik nadomjesne sheme bez rotorske rasipne reaktancije

Korisno je odabrati onu vrijednost koeficijenta a kojom se postiže da član $a^2L_r - aL_{sr}$ bude jednak nuli. Odatle slijedi da je $a=L_{sr}/L_r$.



U novoj nadomjesnoj shemi struja statora se dijeli na dvije komponente $I_{s\psi}$ i I_{sM} . Struje $I_{s\psi}$ i I_{sM} su međusobno okomite jer jedna teče kroz reaktanciju, a druga kroz omski otpor. Dakle, vrijedi

$$\bar{I}_s^2 = \bar{I}_{sM}^2 + \bar{I}_{s\psi}^2$$

$$\bar{I}_{sM} = -\frac{L_r}{L_{sr}} \bar{I}_r$$

Oblik nadomjesne sheme bez rotorske rasipne reaktancije

Također vrijedi

$$j\omega_s \frac{L_{sr}^2}{L_r} \bar{I}_{s\psi} = -\frac{L_{sr}}{L_r} \bar{E}_r \Rightarrow \bar{E}_r = -j\omega_s L_{sr} \bar{I}_{s\psi}$$

$$\bar{E}_r = -j\omega_s \bar{\Psi}_r \Rightarrow \boxed{\bar{\Psi}_r = L_{sr} \bar{I}_{s\psi}}$$

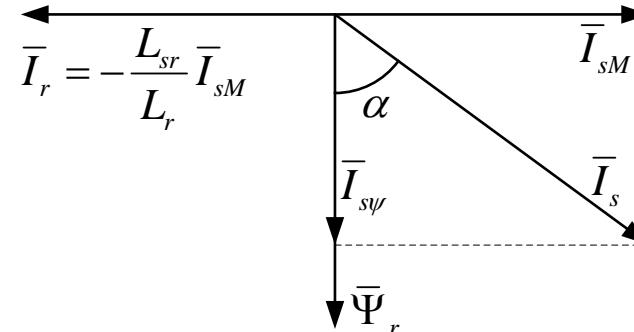
Za elektromagnetski moment vrijedi

$$M_{em} = \frac{3}{2} p \frac{1}{\omega_s} |\bar{I}_r|^2 \frac{R_r}{s} = \frac{3}{2} p \frac{1}{\omega_s} |\bar{E}_r \bar{I}_r|$$

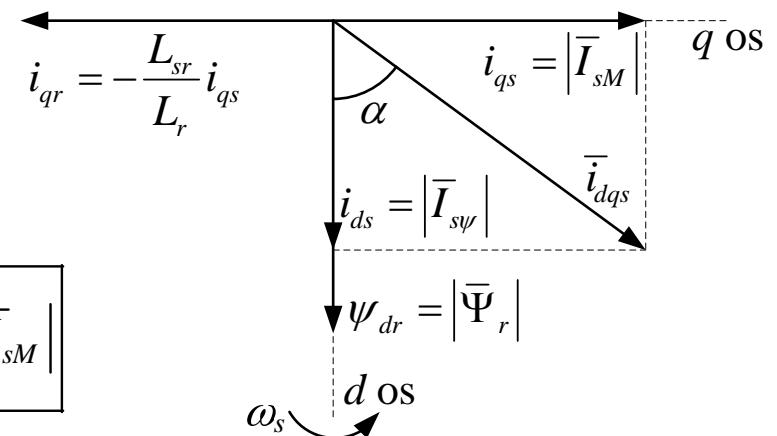
$$\bar{I}_r = -\frac{L_{sr}}{L_r} \bar{I}_{sM}$$

$$M_{em} = \frac{3}{2} p \frac{1}{\omega_s} \left| -j\omega_s L_{sr} \bar{I}_{s\psi} \left(-\frac{L_{sr}}{L_r} \bar{I}_{sM} \right) \right| = \boxed{\frac{3}{2} p \frac{L_{sr}^2}{L_r} |\bar{I}_{s\psi} \bar{I}_{sM}|}$$

$$M_{em} = \frac{3}{2} p \frac{L_{sr}^2}{L_r} |\bar{I}_{s\psi} \bar{I}_{sM}| = \boxed{\frac{3}{2} p \frac{L_{sr}}{L_r} |\bar{\Psi}_r \bar{I}_{sM}|}$$



Fazorski dijagram statorske i rotorske struje i ulančenog toka



Vektorski dijagram statorske i rotorske struje i ulančenog toka u koordinatnom sustavu koji rotira sinkronom brzinom vrtnje

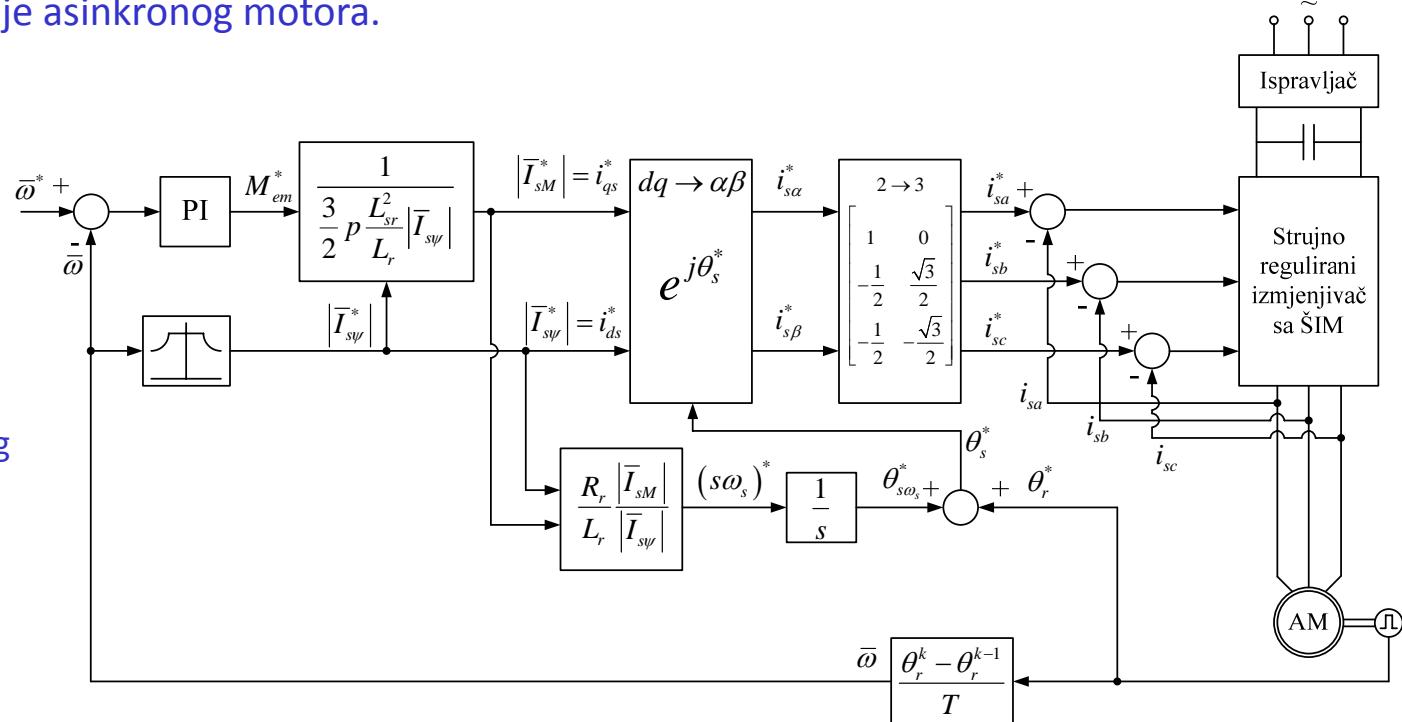
Oblik nadomjesne sheme bez rotorske rasipne reaktancije

Iz nadomjesne sheme izvodi se izraz za kliznu frekvenciju

$$j\omega_s \frac{L_{sr}^2}{L_r} \bar{I}_{s\psi} = \frac{L_{sr}^2}{L_r^2} \frac{R_r}{s} \bar{I}_{sM} \Rightarrow s\omega_s = -j \frac{R_r}{L_r} \frac{|\bar{I}_{sM}|}{(-j)|\bar{I}_{s\psi}|} = \boxed{\frac{R_r |\bar{I}_{sM}|}{L_r |\bar{I}_{s\psi}|}}$$

Iz napisanih jednadžbi slijedi da se komponentom statorske struje $I_{s\psi}$ može upravljati magnetskim tokom rotora, dok se komponentom I_{sM} može direktno upravljati momentom stroja. Komponente I_{sM} i $I_{s\psi}$ jednoznačno određuju iznos statorske struje I_s i kliznu frekvenciju $s\omega_s$. To je osnova za indirektno vektorsko upravljanje asinkronog motora.

Principna shema
indirektnog vektorskog
upravljanja u
stacionarnom stanju



Primjer simulacije dinamičkih stanja asinkronog motora

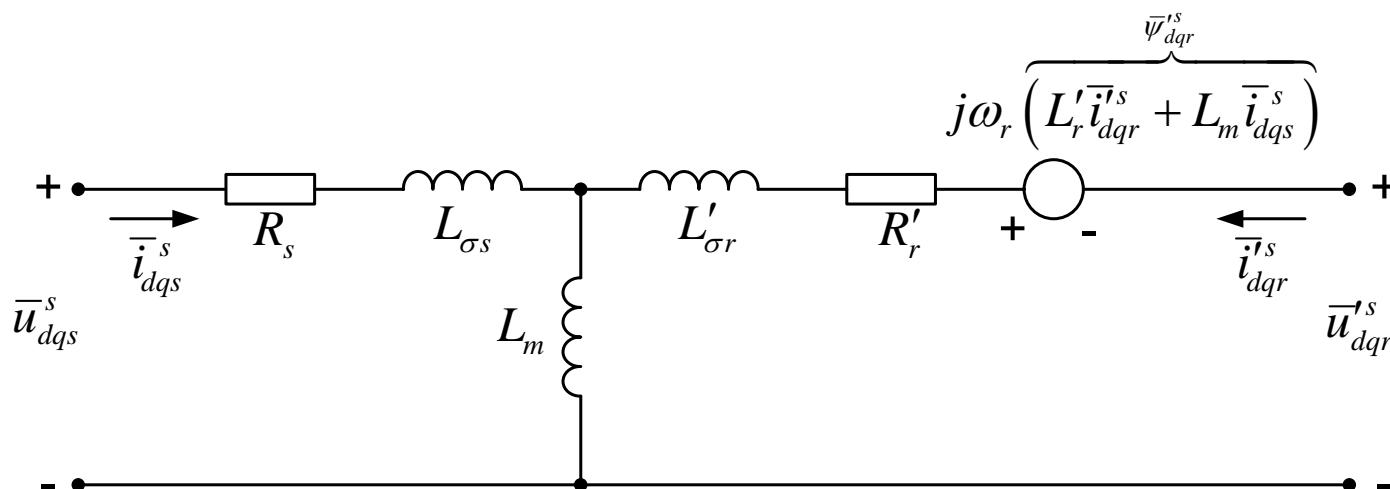
PODACI TROFAZNOG KAVEZNOG ASINKRONOG MOTORA

400 V, 160 kW, 284 A, $\cos \varphi = 0,887$, 50 Hz, 1441 o/min

$$R_s = 0,03379 \Omega, L_{\sigma s} = 0,247 \text{ mH}$$

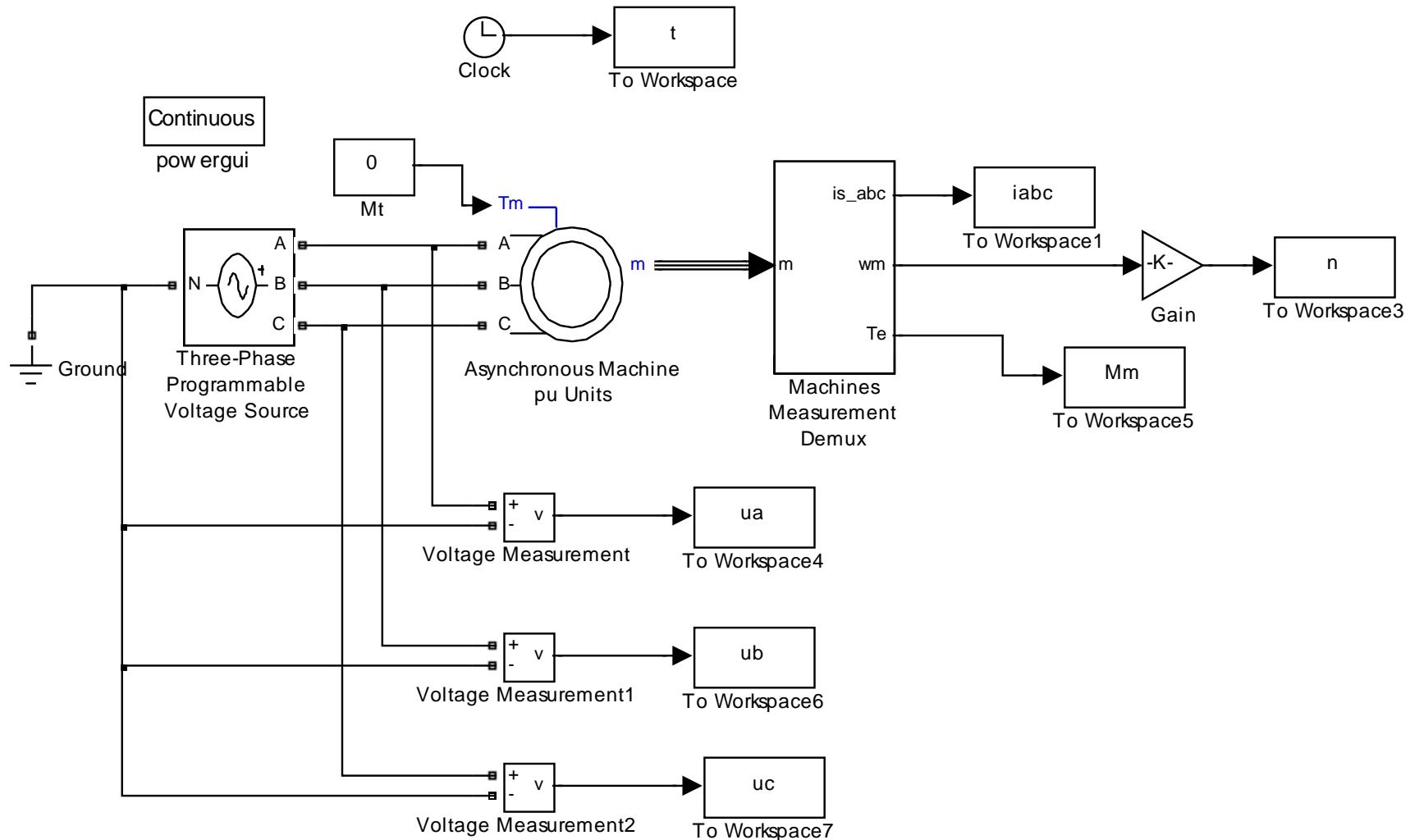
$$R'_r = 0,03173 \Omega, L'_{\sigma r} = 0,247 \text{ mH}$$

$$L_m = 7,69 \text{ mH}, J = 2,59 \text{ kgm}^2$$



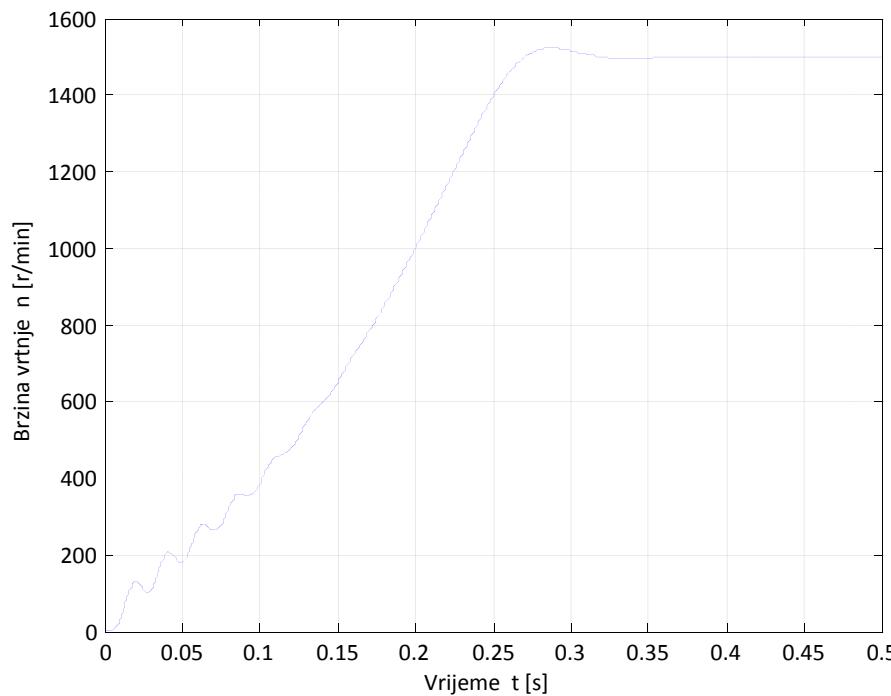
Zalet neopterećenog asinkronog motora

MATLAB/SIMULINK model

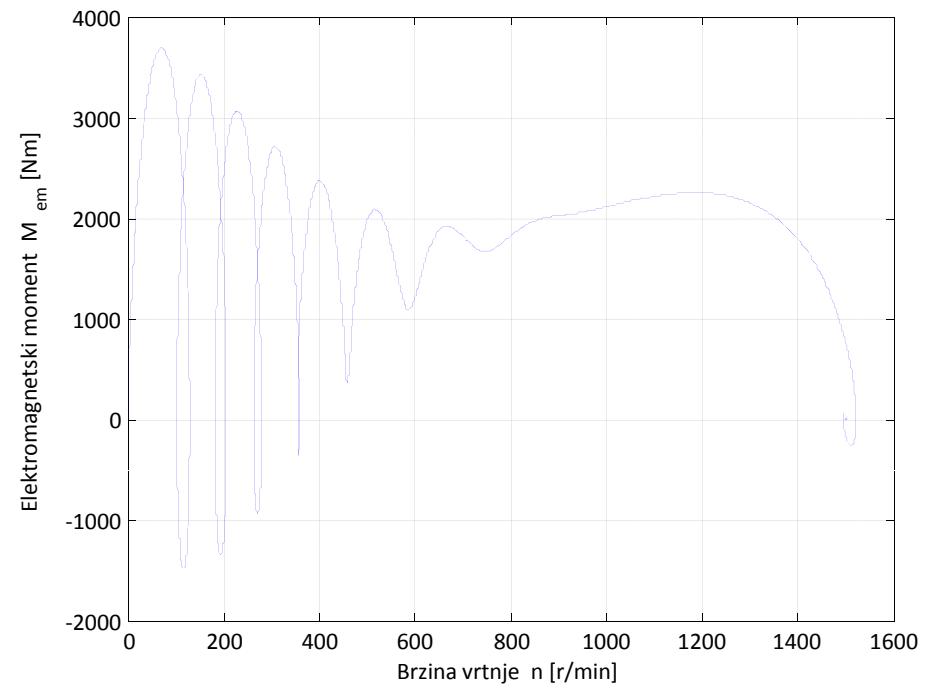


Zalet neopterećenog asinkronog motora

Brzina vrtnje

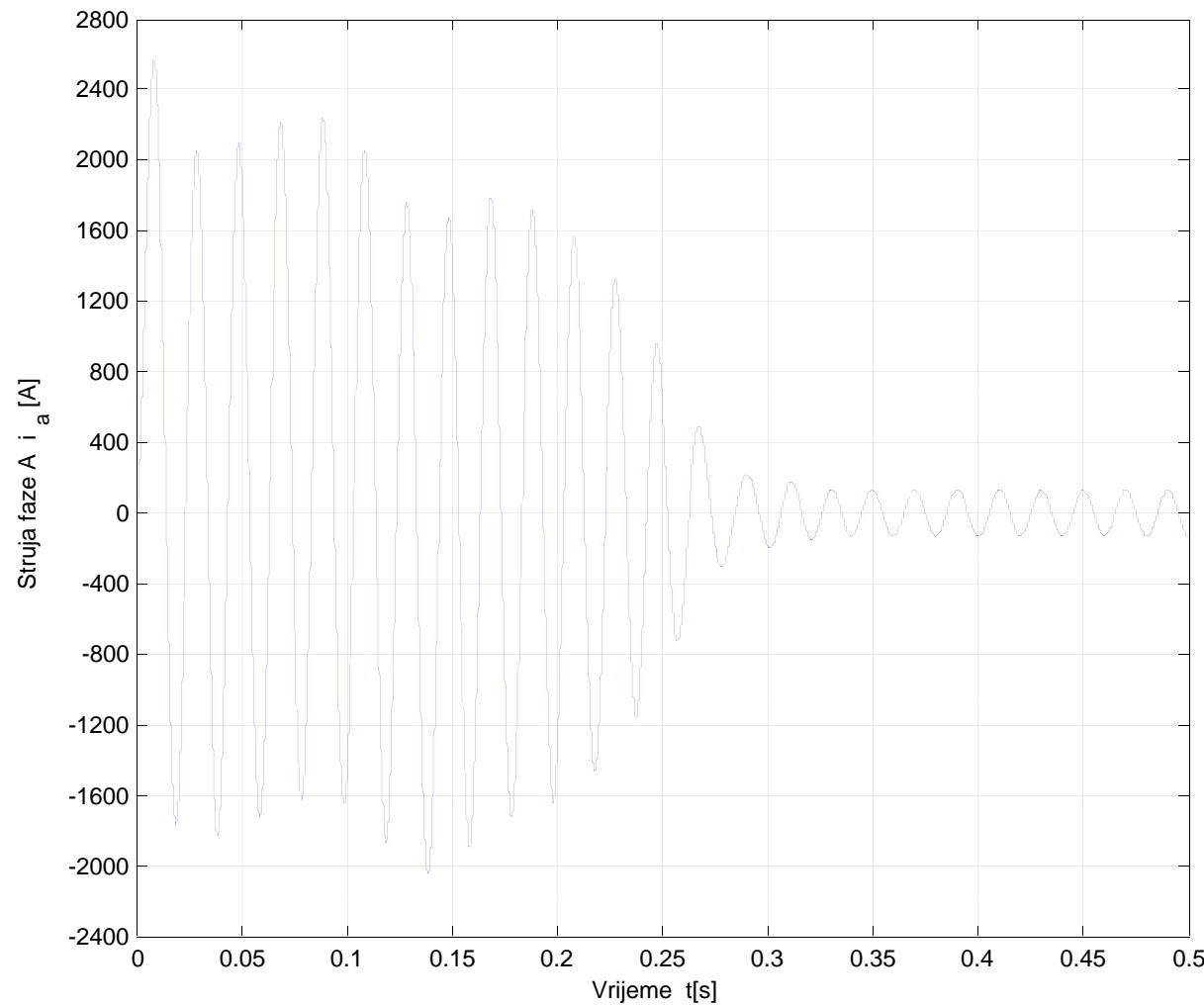


Elektromagnetski moment



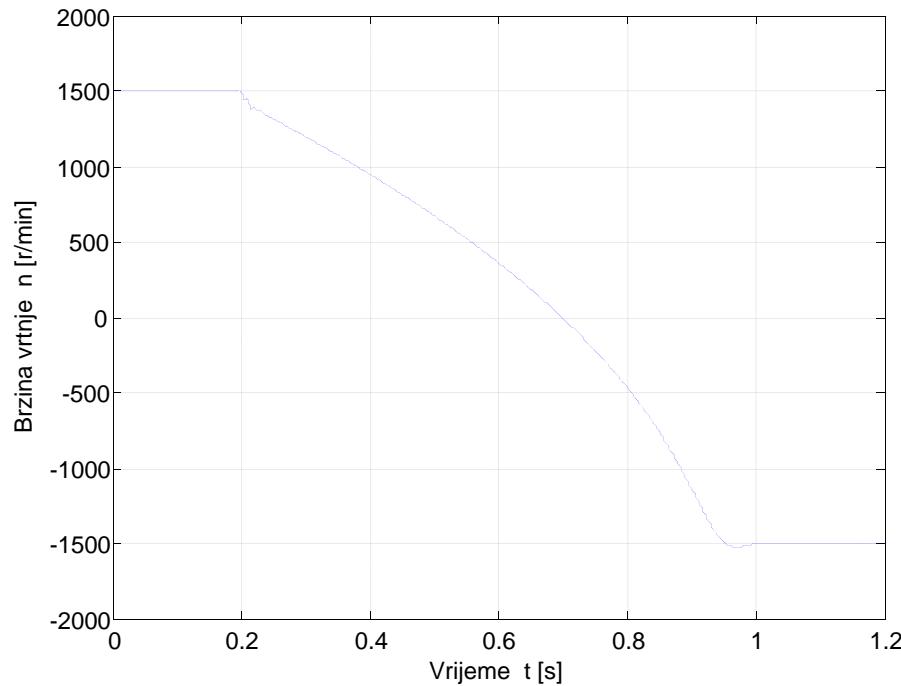
Zalet neopterećenog asinkronog motora

Struja faze A

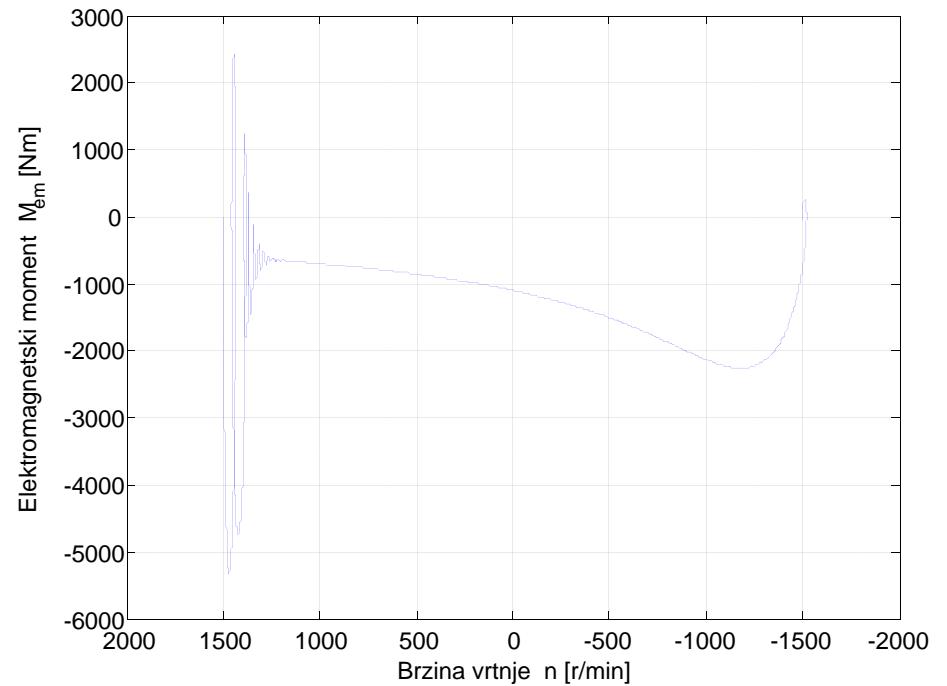


Reverziranje neopterećenog asinkronog motora

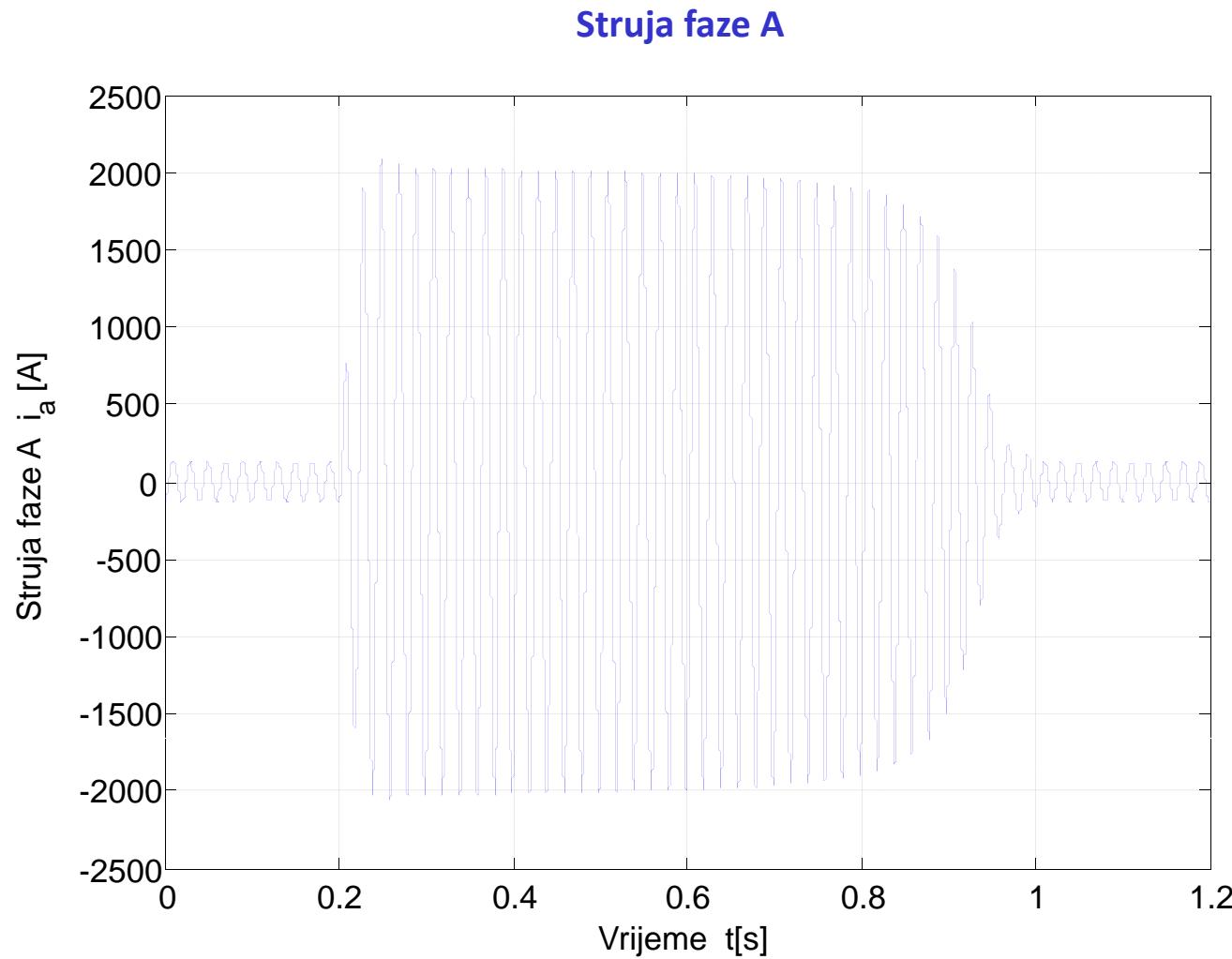
Brzina vrtnje



Elektromagnetski moment

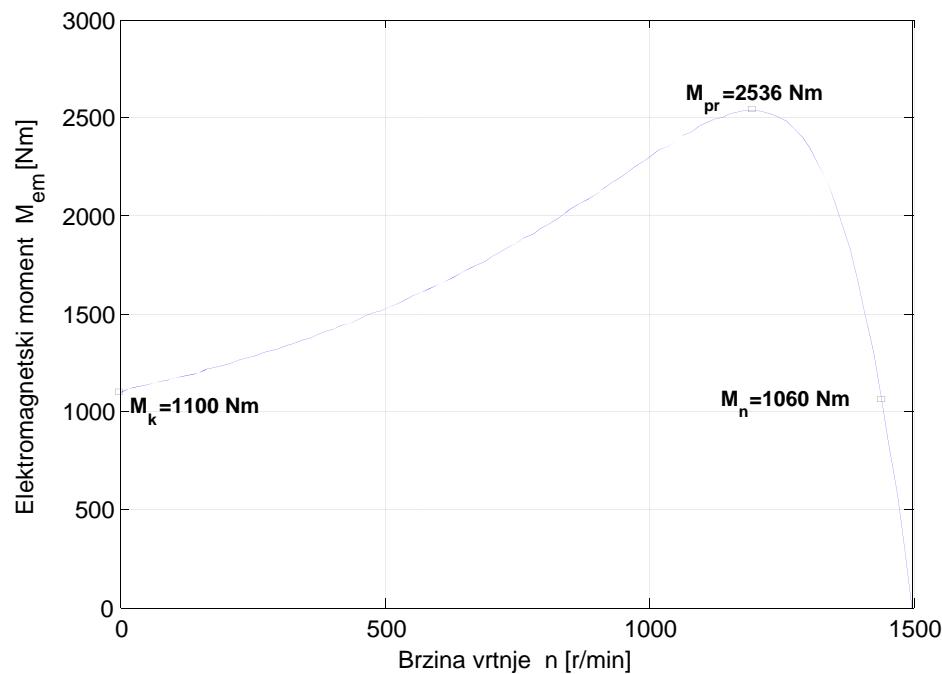


Reverziranje neopterećenog asinkronog motora

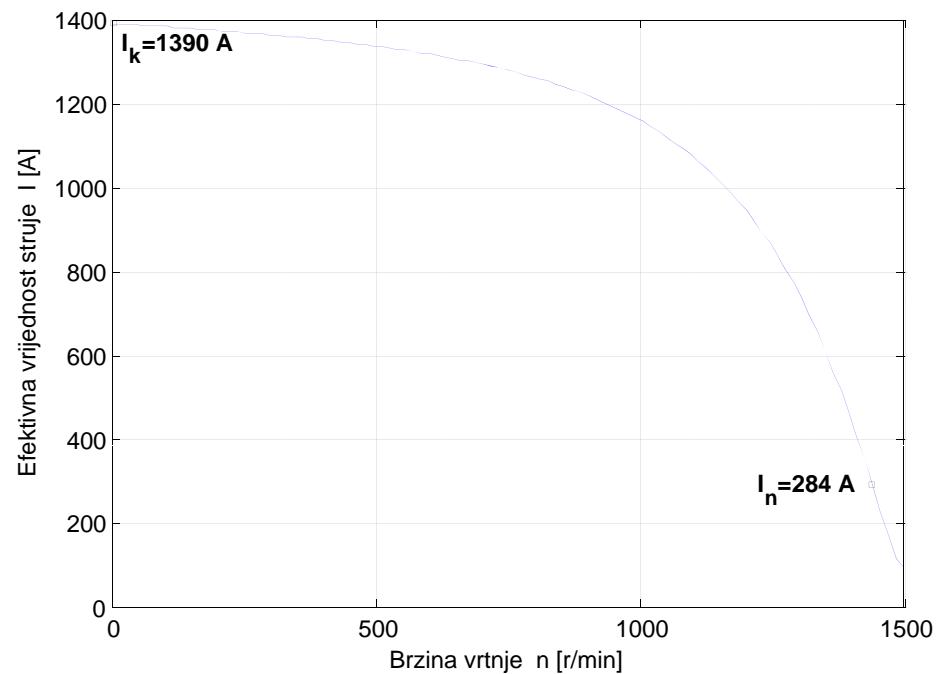


Statičke karakteristike asinkronog motora

Moment u ovisnosti o brzini vrtnje



Struja armature u ovisnosti o brzini vrtnje



$$\frac{M_{pr}}{M_n} = \frac{2536}{1060} = 2,39 \quad , \quad \frac{M_k}{M_n} = \frac{1100}{1060} = 1,04$$

$$\frac{I_k}{I_n} = \frac{1390}{284} = 4,89$$

DINAMIČKI MODEL SINKRONOG STROJA

Induktiviteti

Naponske jednadžbe u rotirajućem koordinatnom sustavu

Bilanca snage i elektromagnetski moment

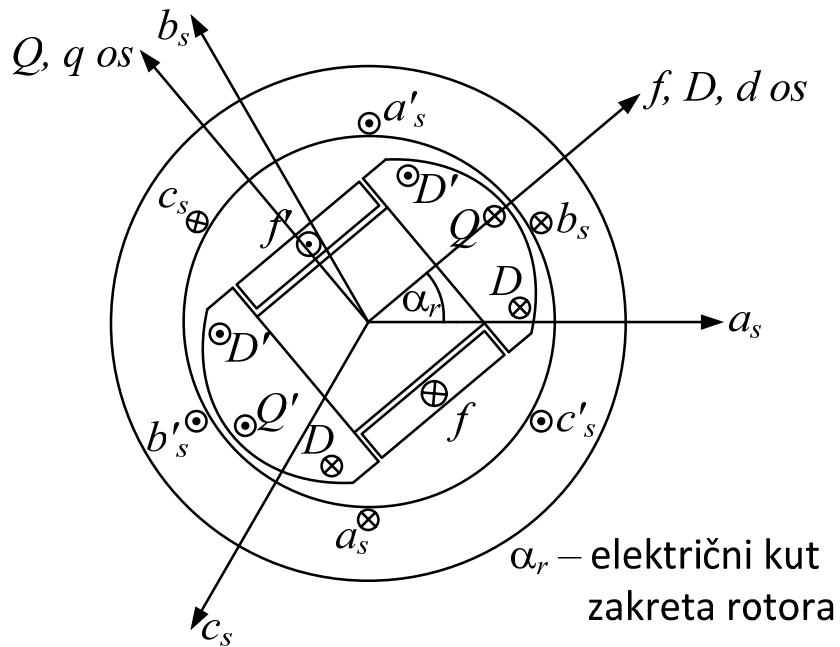
Stacionarno stanje

Motori s trajnim magnetima

Prof.dr.sc. Damir Žarko



Osnovni model



Osnovni dvopolni prikaz sinkronog stroja s istaknutim polovima

Naponska jednadžba statora

$$\begin{bmatrix} u_{as} \\ u_{bs} \\ u_{cs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 \\ 0 & 0 & R_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{as} \\ i_{bs} \\ i_{cs} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_{as} \\ \psi_{bs} \\ \psi_{cs} \end{bmatrix}$$

Naponska jednadžba rotora

$$\begin{bmatrix} u_f \\ u_D \\ u_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_f & 0 & 0 \\ 0 & R_D & 0 \\ 0 & 0 & R_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_f \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_f \\ \psi_D \\ \psi_Q \end{bmatrix}$$

Osnovni model

Ulančeni tokovi statora

$$\begin{bmatrix} \psi_{as} \\ \psi_{bs} \\ \psi_{cs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{asas} + L_{\sigma s} & L_{asbs} & L_{ascS} \\ L_{bsas} & L_{bsbs} + L_{\sigma s} & L_{bscs} \\ L_{csas} & L_{csbs} & L_{cscs} + L_{\sigma s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{as} \\ i_{bs} \\ i_{cs} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{asf} & L_{asD} & L_{asQ} \\ L_{bsf} & L_{bsD} & L_{bsQ} \\ L_{csf} & L_{csD} & L_{csQ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_f \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix}$$

Ulančeni tokovi rotora

$$\begin{bmatrix} \psi_f \\ \psi_D \\ \psi_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{fas} & L_{fbs} & L_{fcs} \\ L_{Das} & L_{Dbs} & L_{Dcs} \\ L_{Qas} & L_{Qbs} & L_{Qcs} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{as} \\ i_{bs} \\ i_{cs} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{ff} + L_{\sigma f} & L_{fD} & 0 \\ L_{Df} & L_{DD} + L_{\sigma D} & 0 \\ 0 & 0 & L_{QQ} + L_{\sigma Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_f \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix}$$

Prepostavke i zanemarenja u modelu

- Prepostavlja se da su napon i frekvencija mreže konstantnog iznosa
- Zanemaruju se viši prostorni harmonici protjecanja
- Zanemaruje se pad magnetskog napona u željezu i zasićenje \Rightarrow magnetski krug je LINEARAN
- Zanemaruje se potiskivanje struje u vodičima statorskog i rotorskog namota
- Zanemaruju se gubici u željezu i mehanički gubici
- Zanemaruje se utjecaj zagrijavanja na iznose otpora namota

Induktiviteti namota statora i rotora

Primjer faze a statora

$$L_{asas} = \mu_0 r_0 l \int_0^{2\pi} \frac{\left[N_{as1}(\alpha) \right]^2}{\delta(\alpha, \alpha_r)} d\alpha$$

δ - duljina zračnog raspora ovisna o položaju rotora

N_{as1} – funkcija namota faze a statora za osnovni harmonik

r_0 - radijus u zračnom rasporu na kojem se vrši integracija

l - aksijalna duljina paketa

Budući da se geometrija rotora ponavlja sa svakim polom, uz pretpostavku postojanja samo osnovnog harmonika polja u zračnom rasporu, duljina zračnog raspora je proporcionalna kosinusu dvostrukog kuta α .

$$\delta(\alpha, \alpha_r) = \frac{1}{2} (\delta_{\min} + \delta_{\max}) + \frac{1}{2} (\delta_{\min} - \delta_{\max}) \cos[2(p\alpha - \alpha_r)]$$

Ako se promatra samo osnovni harmonik, vrijedi

$$N_{as1}(\alpha) = \frac{4}{\pi} \frac{w_s}{2p} f_{ns1} \cos(p\alpha) = \frac{N_{s1}}{2} \cos(p\alpha)$$

w_s – broj zavoja statorskog namota spojenih u seriju

f_{ns1} – faktor namota statora za osnovni harmonik

N_{s1} – efektivni broj zavoja statorskog namota

$$L_{asas} = \mu_0 r_0 l \left(\frac{N_{s1}}{2} \right)^2 \int_0^{2\pi} \frac{\left[\cos(p\alpha) \right]^2}{\frac{1}{2} (\delta_{\min} + \delta_{\max}) + \frac{1}{2} (\delta_{\min} - \delta_{\max}) \cos[2(p\alpha - \alpha_r)]} d\alpha$$

Induktiviteti namota statora i rotora

$$L_{asas} = L_{s0} + L_{s2} \cos(2\alpha_r)$$

$$L_{s0} = \mu_0 r_0 l \frac{\pi}{4} \frac{1}{\sqrt{\delta_{\min} \delta_{\max}}} N_{s1}^2$$

$$L_{s2} = \mu_0 r_0 l \frac{\pi}{4} \frac{\delta_{\max} + \delta_{\min} - 2\sqrt{\delta_{\min} \delta_{\max}}}{(\delta_{\max} - \delta_{\min}) \sqrt{\delta_{\min} \delta_{\max}}} N_{s1}^2$$

Induktiviteti za druge dvije faze se dobiju na sličan način.

$$L_{bsbs} = L_{s0} + L_{s2} \cos\left(2\alpha_r + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$L_{cscs} = L_{s0} + L_{s2} \cos\left(2\alpha_r - \frac{2\pi}{3}\right)$$

Induktiviteti namota statora i rotora

Međuinduktivitet između faza a i b statora

$$\psi_{asbs} = r_0 l \int_0^{2\pi} N_{as1}(\alpha) B_{b1}(\alpha) d\alpha$$

-ulančeni tok namota faze a zbog indukcije u zračnom rasporu koju stvara struja koja teče namotom faze b

$$B_{b1}(\alpha) = N_{bs1}(\alpha) i_{bs} \frac{\mu_0}{\delta(\alpha, \alpha_r)}$$

- indukcija u zračnom rasporu koju stvara struja koja teče namotom faze b

$$N_{bs1}(\alpha) = \frac{N_{s1}}{2} \cos\left(p\alpha - \frac{2\pi}{3}\right)$$

- funkcija namota faze b

$$N_{as1}(\alpha) = \frac{N_{s1}}{2} \cos(p\alpha)$$

- funkcija namota faze a

$$L_{asbs} = \frac{\psi_{asbs}}{i_{bs}} = \mu_0 r_0 l \int_0^{2\pi} \frac{N_{as1}(\alpha) N_{bs1}(\alpha)}{\delta(\alpha, \alpha_r)} d\alpha$$

- međuinduktivitet između faza a i b

Induktiviteti namota statora i rotora

Međuinduktivitet između faza a i b statora

$$L_{asbs} = L_{bsas} = -\frac{1}{2}L_{s0} + L_{s2} \cos\left(2\alpha_r - \frac{2\pi}{3}\right)$$

Međuinduktivitet između faza a i c statora

$$L_{ascs} = L_{csas} = -\frac{1}{2}L_{s0} + L_{s2} \cos\left(2\alpha_r + \frac{2\pi}{3}\right)$$

Međuinduktivitet između faza b i c statora

$$L_{bscs} = L_{csbs} = -\frac{1}{2}L_{s0} + L_{s2} \cos(2\alpha_r)$$

Induktiviteti namota statora i rotora

Vlastiti induktivitet uzbudnog namota

$$N_{f1}(\alpha) = \frac{4}{\pi} \frac{w_f}{2p} f_{nf1} \cos(p\alpha - \alpha_r) = \frac{N_{f1}}{2} \cos(p\alpha - \alpha_r) \quad \text{- funkcija uzbudnog namota}$$

w_f – broj zavoja uzbudnog namota spojenih u seriju

f_{nf1} – faktor namota za osnovni harmonik

N_{f1} – efektivni broj zavoja uzbudnog namota

$$\begin{aligned} L_{ff} &= \mu_0 r_0 l \int_0^{2\pi} \frac{N_{f1}^2(\alpha)}{\delta(\alpha, \alpha_r)} d\alpha = \mu_0 r_0 l \left(\frac{N_{f1}}{2} \right)^2 \times \\ &\quad \int_0^{2\pi} \frac{[\cos(p\alpha - \alpha_r)]^2}{\frac{1}{2}(\delta_{\min} + \delta_{\max}) + \frac{1}{2}(\delta_{\min} - \delta_{\max}) \cos[2(p\alpha - \alpha_r)]} d\alpha \\ &= \boxed{\mu_0 r_0 l \frac{\pi}{4} \frac{2(\delta_{\max} - \sqrt{\delta_{\min} \delta_{\max}})}{(\delta_{\max} - \delta_{\min}) \sqrt{\delta_{\min} \delta_{\max}}} N_{f1}^2} \end{aligned}$$

Induktiviteti namota statora i rotora

Međuinduktivitet između uzbudnog namota i namota faze a statora

$$\begin{aligned} L_{fas} = L_{asf} &= \mu_0 r_0 l \int_0^{2\pi} \frac{N_{f1}(\alpha) N_{s1}(\alpha)}{\delta(\alpha, \alpha_r)} d\alpha = \mu_0 r_0 l \left(\frac{N_{f1}}{2} \frac{N_{s1}}{2} \right) \times \\ &\quad \int_0^{2\pi} \frac{\cos(p\alpha - \alpha_r) \cos(p\alpha)}{\frac{1}{2}(\delta_{\min} + \delta_{\max}) + \frac{1}{2}(\delta_{\min} - \delta_{\max}) \cos[2(p\alpha - \alpha_r)]} d\alpha \\ &= \boxed{\mu_0 r_0 l \frac{\pi}{4} \frac{2(\delta_{\max} - \sqrt{\delta_{\min} \delta_{\max}})}{(\delta_{\max} - \delta_{\min}) \sqrt{\delta_{\min} \delta_{\max}}} (N_{f1} N_{s1}) \cos \alpha_r = L_{sf} \cos \alpha_r} \end{aligned}$$

Međuinduktivitet između uzbudnog namota i namota faze b statora

$$L_{fbs} = L_{bsf} = L_{sf} \cos\left(\alpha_r - \frac{2\pi}{3}\right)$$

Međuinduktivitet između uzbudnog namota i namota faze c statora

$$L_{fcs} = L_{csf} = L_{sf} \cos\left(\alpha_r + \frac{2\pi}{3}\right)$$

Induktiviteti namota statora i rotora

Vlastiti induktivitet prigušnog namota u d osi

$$N_{D1}(\alpha) = \frac{N_{D1}}{2} \cos(p\alpha - \alpha_r) \quad \text{- funkcija prigušnog namota u } d \text{ osi}$$

N_{D1} – efektivni broj zavoja prigušnog namota u d osi

$$\begin{aligned} L_{DD} &= \mu_0 r_0 l \int_0^{2\pi} \frac{N_{D1}^2(\alpha)}{\delta(\alpha, \alpha_r)} d\alpha = \mu_0 r_0 l \left(\frac{N_{D1}}{2} \right)^2 \times \\ &\quad \int_0^{2\pi} \frac{[\cos(p\alpha - \alpha_r)]^2}{\frac{1}{2}(\delta_{\min} + \delta_{\max}) + \frac{1}{2}(\delta_{\min} - \delta_{\max}) \cos[2(p\alpha - \alpha_r)]} d\alpha \\ &= \boxed{\mu_0 r_0 l \frac{\pi}{4} \frac{2(\delta_{\max} - \sqrt{\delta_{\min} \delta_{\max}})}{(\delta_{\max} - \delta_{\min}) \sqrt{\delta_{\min} \delta_{\max}}} N_{D1}^2} \end{aligned}$$

Induktiviteti namota statora i rotora

Međuinduktivitet između prigušnog namota u d osi i namota faze a statora

$$\begin{aligned} L_{Das} = L_{asD} &= \mu_0 r_0 l \int_0^{2\pi} \frac{N_{D1}(\alpha) N_{s1}(\alpha)}{\delta(\alpha, \alpha_r)} d\alpha = \mu_0 r_0 l \left(\frac{N_{D1}}{2} \frac{N_{s1}}{2} \right) \times \\ &\quad \int_0^{2\pi} \frac{\cos(p\alpha - \alpha_r) \cos(p\alpha)}{\frac{1}{2}(\delta_{\min} + \delta_{\max}) + \frac{1}{2}(\delta_{\min} - \delta_{\max}) \cos[2(p\alpha - \alpha_r)]} d\alpha \\ &= \boxed{\mu_0 r_0 l \frac{\pi}{4} \frac{2(\delta_{\max} - \sqrt{\delta_{\min} \delta_{\max}})}{(\delta_{\max} - \delta_{\min}) \sqrt{\delta_{\min} \delta_{\max}}} (N_{D1} N_{s1}) \cos \alpha_r = L_{sD} \cos \alpha_r} \end{aligned}$$

Međuinduktivitet između prigušnog namota u d osi i namota faze b statora

$$L_{Dbs} = L_{bsD} = L_{sD} \cos\left(\alpha_r - \frac{2\pi}{3}\right)$$

Međuinduktivitet između prigušnog namota u d osi i namota faze c statora

$$L_{Dcs} = L_{csD} = L_{sD} \cos\left(\alpha_r + \frac{2\pi}{3}\right)$$

Induktiviteti namota statora i rotora

Međuinduktivitet između prigušnog namota u d osi i uzbudnog namota

$$\begin{aligned} L_{Df} = L_{fD} &= \mu_0 r_0 l \int_0^{2\pi} \frac{N_{D1}(\alpha) N_{f1}(\alpha)}{\delta(\alpha, \alpha_r)} d\alpha = \mu_0 r_0 l \left(\frac{N_{f1}}{2} \frac{N_{s1}}{2} \right) \times \\ &\quad \int_0^{2\pi} \frac{[\cos(p\alpha - \alpha_r)]^2}{\frac{1}{2}(\delta_{\min} + \delta_{\max}) + \frac{1}{2}(\delta_{\min} - \delta_{\max}) \cos[2(p\alpha - \alpha_r)]} d\alpha \\ &= \boxed{\mu_0 r_0 l \frac{\pi}{4} \frac{2(\delta_{\max} - \sqrt{\delta_{\min} \delta_{\max}})}{(\delta_{\max} - \delta_{\min}) \sqrt{\delta_{\min} \delta_{\max}}} (N_{f1} N_{s1})} \end{aligned}$$

Međuinduktivitet između prigušnog namota u q osi i uzbudnog namota

$$\boxed{L_{Qf} = L_{fQ} = 0}$$
 - osi prigušnog namota u q osi i uzbudnog namota su međusobno **okomite**

Induktiviteti namota statora i rotora

Vlastiti induktivitet prigušnog namota u q osi

$$N_{Q1}(\alpha) = \frac{N_{Q1}}{2} \sin(p\alpha - \alpha_r) \text{- funkcija prigušnog namota u } q \text{ osi}$$

N_{Q1} – efektivni broj zavoja prigušnog namota u q osi

$$\begin{aligned} L_{QQ} &= \mu_0 r_0 l \int_0^{2\pi} \frac{N_{Q1}^2(\alpha)}{\delta(\alpha, \alpha_r)} d\alpha = \mu_0 r_0 l \left(\frac{N_{Q1}}{2} \right)^2 \times \\ &\quad \int_0^{2\pi} \frac{\left[\sin(p\alpha - \alpha_r) \right]^2}{\frac{1}{2} (\delta_{\min} + \delta_{\max}) + \frac{1}{2} (\delta_{\min} - \delta_{\max}) \cos[2(p\alpha - \alpha_r)]} d\alpha \\ &= \boxed{\mu_0 r_0 l \frac{\pi}{4} \frac{2(\sqrt{\delta_{\min} \delta_{\max}} - \delta_{\min})}{(\delta_{\max} - \delta_{\min}) \sqrt{\delta_{\min} \delta_{\max}}} N_{Q1}^2} \end{aligned}$$

Induktiviteti namota statora i rotora

Međuinduktivitet između prigušnog namota u q osi i namota faze a statora

$$\begin{aligned} L_{Qas} = L_{asQ} &= \mu_0 r_0 l \int_0^{2\pi} \frac{N_{Q1}(\alpha) N_{as1}(\alpha)}{\delta(\alpha, \alpha_r)} d\alpha = \mu_0 r_0 l \left(\frac{N_{Q1}}{2} \frac{N_{s1}}{2} \right) \times \\ &\quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin(p\alpha - \alpha_r) \cos(p\alpha)}{\frac{1}{2}(\delta_{\min} + \delta_{\max}) + \frac{1}{2}(\delta_{\min} - \delta_{\max}) \cos[2(p\alpha - \alpha_r)]} d\alpha \\ &= \boxed{-\mu_0 r_0 l \frac{\pi}{4} \frac{2(\sqrt{\delta_{\min} \delta_{\max}} - \delta_{\min})}{(\delta_{\max} - \delta_{\min}) \sqrt{\delta_{\min} \delta_{\max}}} (N_{Q1} N_{s1}) \sin \alpha_r = -L_{sQ} \sin \alpha_r} \end{aligned}$$

Međuinduktivitet između prigušnog namota u q osi i namota faze b statora

$$L_{Qbs} = L_{bsQ} = -L_{sQ} \sin\left(\alpha_r - \frac{2\pi}{3}\right)$$

Međuinduktivitet između prigušnog namota u q osi i namota faze c statora

$$L_{Qcs} = L_{csQ} = -L_{sQ} \sin\left(\alpha_r + \frac{2\pi}{3}\right)$$

Naponske jednadžbe statora izražene u matričnom obliku

Za stator se u matričnom obliku može pisati

$$\begin{bmatrix} u_{as} \\ u_{bs} \\ u_{cs} \end{bmatrix} = R_s \begin{bmatrix} i_{as} \\ i_{bs} \\ i_{cs} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_{as} \\ \psi_{bs} \\ \psi_{cs} \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} \psi_{as} \\ \psi_{bs} \\ \psi_{cs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{\sigma s} + L_{s0} + L_{s2} \cos(2\alpha_r) & -\frac{1}{2}L_{s0} + L_{s2} \cos\left(2\alpha_r - \frac{2\pi}{3}\right) & -\frac{1}{2}L_{s0} + L_{s2} \cos\left(2\alpha_r + \frac{2\pi}{3}\right) \\ -\frac{1}{2}L_{s0} + L_{s2} \cos\left(2\alpha_r - \frac{2\pi}{3}\right) & L_{\sigma s} + L_{s0} + L_{s2} \cos\left(2\alpha_r + \frac{2\pi}{3}\right) & -\frac{1}{2}L_{s0} + L_{s2} \cos(2\alpha_r) \\ -\frac{1}{2}L_{s0} + L_{s2} \cos\left(2\alpha_r + \frac{2\pi}{3}\right) & -\frac{1}{2}L_{s0} + L_{s2} \cos(2\alpha_r) & L_{\sigma s} + L_{s0} + L_{s2} \cos\left(2\alpha_r - \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{as} \\ i_{bs} \\ i_{cs} \end{bmatrix} +$$
$$\begin{bmatrix} L_{sf} \cos \alpha_r & L_{sD} \cos \alpha_r & -L_{sQ} \sin \alpha_r \\ L_{sf} \cos\left(\alpha_r - \frac{2\pi}{3}\right) & L_{sD} \cos\left(\alpha_r - \frac{2\pi}{3}\right) & -L_{sQ} \sin\left(\alpha_r - \frac{2\pi}{3}\right) \\ L_{sf} \cos\left(\alpha_r + \frac{2\pi}{3}\right) & L_{sD} \cos\left(\alpha_r + \frac{2\pi}{3}\right) & -L_{sQ} \sin\left(\alpha_r + \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_f \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix}$$

Naponske jednadžbe statora izražene u matričnom obliku

Jednadžbe za ulančene tokove se mogu pisati i u obliku

$$\begin{bmatrix} \psi_{as} \\ \psi_{bs} \\ \psi_{cs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{\sigma s} + L_{s0} & -\frac{1}{2}L_{s0} & -\frac{1}{2}L_{s0} \\ -\frac{1}{2}L_{s0} & L_{\sigma s} + L_{s0} & -\frac{1}{2}L_{s0} \\ -\frac{1}{2}L_{s0} & -\frac{1}{2}L_{s0} & L_{\sigma s} + L_{s0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{as} \\ i_{bs} \\ i_{cs} \end{bmatrix} -$$
$$\frac{L_{s2}}{2} \left\{ \begin{bmatrix} e^{j2\alpha_r} & a^2e^{j2\alpha_r} & ae^{j2\alpha_r} \\ a^2e^{j2\alpha_r} & ae^{j2\alpha_r} & e^{j2\alpha_r} \\ ae^{j2\alpha_r} & e^{j2\alpha_r} & a^2e^{j2\alpha_r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-j2\alpha_r} & ae^{-j2\alpha_r} & a^2e^{-j2\alpha_r} \\ ae^{-j2\alpha_r} & a^2e^{-j2\alpha_r} & e^{-j2\alpha_r} \\ a^2e^{-j2\alpha_r} & e^{-j2\alpha_r} & ae^{-j2\alpha_r} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} i_{as} \\ i_{bs} \\ i_{cs} \end{bmatrix} +$$
$$\frac{L_{sf}}{2} \left\{ \begin{bmatrix} e^{j\alpha_r} \\ a^2e^{j\alpha_r} \\ ae^{j\alpha_r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-j\alpha_r} \\ ae^{-j\alpha_r} \\ a^2e^{-j\alpha_r} \end{bmatrix} \right\} i_f + \frac{L_{sD}}{2} \left\{ \begin{bmatrix} e^{j\alpha_r} \\ a^2e^{j\alpha_r} \\ ae^{j\alpha_r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-j\alpha_r} \\ ae^{-j\alpha_r} \\ a^2e^{-j\alpha_r} \end{bmatrix} \right\} i_D - \frac{L_{sQ}}{2j} \left\{ \begin{bmatrix} e^{j\alpha_r} \\ a^2e^{j\alpha_r} \\ ae^{j\alpha_r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-j\alpha_r} \\ ae^{-j\alpha_r} \\ a^2e^{-j\alpha_r} \end{bmatrix} \right\} i_Q$$

Naponske jednadžbe statora izražene u vektorskem obliku

Množenjem drugog i trećeg reda u matričnim jednadžbama s a i a^2 i zbrajanjem s prvim redom te množenjem ukupne sume s $2/3$ dobiva se

$$\frac{2}{3}(\psi_{as} + a\psi_{bs} + a^2\psi_{cs}) = \left(L_{\sigma s} + \frac{3}{2}L_{s0}\right)\frac{2}{3}(i_{as} + ai_{bs} + a^2i_{cs}) + \frac{3}{2}L_{s2}\frac{2}{3}(i_{as} + a^2i_{bs} + ai_{cs})e^{j2\alpha_r} + \\ L_{sf}i_f e^{j\alpha_r} + L_{sD}i_D e^{j\alpha_r} - L_{sQ}i_Q e^{j\left(\alpha_r - \frac{\pi}{2}\right)}$$

Ako se uzmu u obzir osnovne definicije kompleksnih vektora napona, struje i ulančenog toka, može se pisati

$$\bar{\psi}_{abcs} = \left(L_{\sigma s} + \frac{3}{2}L_{s0}\right)\bar{i}_{abcs} + \frac{3}{2}L_{s2}\bar{i}_{abcs}^* e^{j2\alpha_r} + L_{sf}i_f e^{j\alpha_r} + L_{sD}i_D e^{j\alpha_r} - L_{sQ}i_Q e^{j\left(\alpha_r - \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\bar{u}_{abcs} = R_s \bar{i}_{abcs} + \frac{d\bar{\psi}_{abcs}}{dt}$$

Naponske jednadžbe statora izražene u vektorskem obliku

Pojednostavljenje jednadžbe statora se postiže transformacijom u rotirajući dq koordinatni sustav koji rotira brzinom vrtnje rotora ($\omega_r = d\alpha_r/dt$).

$$\bar{f}_{dqs}^r = \bar{f}_{abcs} e^{-j\alpha_r}$$

$$\bar{u}_{abcs} e^{-j\alpha_r} = R_s \bar{i}_{abcs} e^{-j\alpha_r} + e^{-j\alpha_r} \frac{d\bar{\psi}_{abcs}}{dt}$$

$$\bar{\psi}_{abcs} e^{-j\alpha_r} = \left(L_{\sigma s} + \frac{3}{2} L_{s0} \right) \bar{i}_{abcs} e^{-j\alpha_r} + \frac{3}{2} L_{s2} \bar{i}_{abcs}^* e^{j\alpha_r} + L_{sf} i_f + L_{sD} i_D - L_{sQ} i_Q e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

Koristeći pravila za deriviranje uz transformaciju koordinata dobiva se konačni oblik jednadžbe statora izražene u vektorskem obliku u rotorskom koordinatnom sustavu

$$\bar{u}_{dqs}^r = R_s \bar{i}_{dqs}^r + \frac{d\bar{\psi}_{dqs}^r}{dt} + j\omega_r \bar{\psi}_{dqs}^r$$

$$\bar{\psi}_{dqs}^r = \left(L_{\sigma s} + \frac{3}{2} L_{s0} \right) \bar{i}_{dqs}^r + \frac{3}{2} L_{s2} (\bar{i}_{dqs}^r)^* + L_{sf} i_f + L_{sD} i_D + jL_{sQ} i_Q$$

Naponske jednadžbe rotora izražene u matričnom obliku

Za rotor se u matričnom obliku može pisati

$$\begin{bmatrix} u_f \\ u_D \\ u_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_f & 0 & 0 \\ 0 & R_D & 0 \\ 0 & 0 & R_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_f \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_f \\ \psi_D \\ \psi_Q \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \psi_f \\ \psi_D \\ \psi_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{ff} + L_{\sigma f} & L_{fD} & 0 \\ L_{Df} & L_{DD} + L_{\sigma D} & 0 \\ 0 & 0 & L_{QQ} + L_{\sigma Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_f \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} +$$
$$\begin{bmatrix} L_{sf} \cos \alpha_r & L_{fs} \cos\left(\alpha_r - \frac{2\pi}{3}\right) & L_{fs} \cos\left(\alpha_r + \frac{2\pi}{3}\right) \\ L_{sD} \cos \alpha_r & L_{sD} \cos\left(\alpha_r - \frac{2\pi}{3}\right) & L_{sD} \cos\left(\alpha_r + \frac{2\pi}{3}\right) \\ -L_{sQ} \sin \alpha_r & -L_{sQ} \sin\left(\alpha_r - \frac{2\pi}{3}\right) & -L_{sQ} \sin\left(\alpha_r + \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{as} \\ i_{bs} \\ i_{cs} \end{bmatrix}$$

Naponske jednadžbe rotora izražene u vektorskem obliku

Jednadžbe rotora se također mogu pojednostaviti korištenjem kompleksnih vektora, no pojednostavljenje je u ovom slučaju ograničeno budući da se rotorske veličine ne mogu prikazati kompleksnim vektorom zato što induktiviteti i otpori rotorskih namota u d i q osi nisu jednaki.

$$\begin{aligned}u_f &= R_f i_f + \frac{d\psi_f}{dt} \\u_D &= R_D i_D + \frac{d\psi_D}{dt} \\u_Q &= R_Q i_Q + \frac{d\psi_Q}{dt}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_f &= (L_{ff} + L_{\sigma f}) i_f + L_{fD} i_D + \frac{3}{4} L_{sf} \left[\bar{i}_{dqs}^r + (\bar{i}_{dqs}^r)^* \right] \\ \psi_D &= (L_{DD} + L_{\sigma D}) i_D + L_{fD} i_f + \frac{3}{4} L_{sD} \left[\bar{i}_{dqs}^r + (\bar{i}_{dqs}^r)^* \right] \\ \psi_Q &= (L_{QQ} + L_{\sigma Q}) i_Q - j \frac{3}{4} L_{sQ} \left[\bar{i}_{dqs}^r - (\bar{i}_{dqs}^r)^* \right]\end{aligned}$$

Preračunavanje rotorskih veličina na statorskiju stranu

Dodatno pojednostavljenje statorskih i rotorskih jednadžbi se može postići preračunavanjem rotorskih veličina na statorskiju stranu korištenjem omjera broja zavoja odgovarajućih namota. Ako se definiraju glavni induktiviteti u d i q osi (L_{md} i L_{mq}), može se pisati

$$L_{md} = \frac{3}{2}(L_{s0} + L_{s2}) = \frac{3}{2} \left(\frac{N_{s1}}{N_{f1}} \right)^2 L_{ff} = \frac{3}{2} \left(\frac{N_{s1}}{N_{D1}} \right)^2 L_{DD} =$$

$$= \frac{3}{2} \frac{(N_{s1})^2}{N_{D1} N_{f1}} L_{fD} = \frac{3}{2} \frac{N_{s1}}{N_{f1}} L_{sf} = \frac{3}{2} \frac{N_{s1}}{N_{D1}} L_{sD}$$

$$L_{mq} = \frac{3}{2}(L_{s0} - L_{s2}) = \frac{3}{2} \left(\frac{N_{s1}}{N_{Q1}} \right)^2 L_{QQ} = \frac{3}{2} \frac{N_{s1}}{N_{Q1}} L_{sQ}$$

Preračunavanje rotorskih veličina na statorsk stranu

Preračunate veličine se definiraju na sljedeći način:

$$i'_f = \frac{2}{3} \frac{N_{f1}}{N_{s1}} i_f, \quad i'_D = \frac{2}{3} \frac{N_{D1}}{N_{s1}} i_D, \quad i'_Q = \frac{2}{3} \frac{N_{Q1}}{N_{s1}} i_Q$$

$$\psi'_f = \frac{N_{s1}}{N_{f1}} \psi_f, \quad \psi'_D = \frac{N_{s1}}{N_{D1}} \psi_D, \quad \psi'_Q = \frac{N_{s1}}{N_{Q1}} \psi_Q$$

$$u'_f = \frac{N_{s1}}{N_{f1}} u_f, \quad u'_D = \frac{N_{s1}}{N_{D1}} u_D, \quad u'_Q = \frac{N_{s1}}{N_{Q1}} u_Q$$

$$R'_f = \frac{3}{2} \left(\frac{N_{s1}}{N_{f1}} \right)^2 R_f, \quad R'_D = \frac{3}{2} \left(\frac{N_{s1}}{N_{D1}} \right)^2 R_D, \quad R'_Q = \frac{3}{2} \left(\frac{N_{s1}}{N_{Q1}} \right)^2 R_Q$$

$$L'_{\sigma f} = \frac{3}{2} \left(\frac{N_{s1}}{N_{f1}} \right)^2 L_{\sigma f}, \quad L'_{\sigma D} = \frac{3}{2} \left(\frac{N_{s1}}{N_{D1}} \right)^2 L_{\sigma D}, \quad L'_{\sigma Q} = \frac{3}{2} \left(\frac{N_{s1}}{N_{Q1}} \right)^2 L_{\sigma Q}$$

Preračunavanje rotorskih veličina na statorsk stranu

Množenjem jednadžbe za ulančeni tok uzbudnog namota s N_{s1}/N_{f1} dobiva se

$$\underbrace{\psi_f \frac{N_{s1}}{N_{f1}}}_{\psi'_f} = \underbrace{\left(L_{ff} + L_{\sigma f} \right) \frac{3}{2} \left(\frac{N_{s1}}{N_{f1}} \right)^2}_{L_{md} + L'_{\sigma f}} \underbrace{\frac{2}{3} \frac{N_{f1}}{N_{s1}} i_f}_{i'_f} + \\ + \underbrace{L_{fD} \frac{3}{2} \frac{\left(N_{s1} \right)^2}{N_{D1} N_{f1}}}_{L_{md}} \underbrace{\frac{2}{3} \frac{N_{D1}}{N_{s1}} i_D}_{i'_D} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{3}{2} \frac{N_{s1}}{N_{f1}} L_{sf}}_{L_{md}} \left[\bar{i}_{dqs}^r + \left(\bar{i}_{dqs}^r \right)^* \right]$$

$$\boxed{\psi'_f = L'_{\sigma f} i'_f + L_{md} \left\{ i'_f + i'_D + \frac{1}{2} \left[\bar{i}_{dqs}^r + \left(\bar{i}_{dqs}^r \right)^* \right] \right\}}$$

Na sličan način se dobiju i jednadžbe za prigušne namote

$$\boxed{\psi'_D = L'_{\sigma D} i'_D + L_{md} \left\{ i'_D + i'_f + \frac{1}{2} \left[\bar{i}_{dqs}^r + \left(\bar{i}_{dqs}^r \right)^* \right] \right\}}$$

$$\boxed{\psi'_Q = L'_{\sigma Q} i'_Q + L_{mq} \left\{ i'_Q - j \frac{1}{2} \left[\bar{i}_{dqs}^r - \left(\bar{i}_{dqs}^r \right)^* \right] \right\}}$$

Konačni oblik jednadžbi sinkronog stroja u d, q koordinatnom sustavu

Ako se uzme u obzir da je $\bar{u}_{dqs}^r = u_{ds}^r + ju_{qs}^r$, $\bar{i}_{dqs}^r = i_{ds}^r + ji_{qs}^r$, dobiva se:

$$u_{ds}^r = R_s i_{ds}^r + \frac{d\psi_{ds}^r}{dt} - \omega_r \psi_{qs}^r$$

$$u_{qs}^r = R_s i_{qs}^r + \frac{d\psi_{qs}^r}{dt} + \omega_r \psi_{ds}^r$$

$$u_f' = R_f' i_f' + \frac{d\psi_f'}{dt}$$

$$u_D' = R_D' i_D' + \frac{d\psi_D'}{dt}$$

$$u_Q' = R_Q' i_Q' + \frac{d\psi_Q'}{dt}$$

$$\psi_{ds}^r = L_{\sigma s} i_{ds}^r + L_{md} (i_{ds}^r + i_f' + i_D')$$

$$\psi_{qs}^r = L_{\sigma s} i_{qs}^r + L_{mq} (i_{qs}^r + i_Q')$$

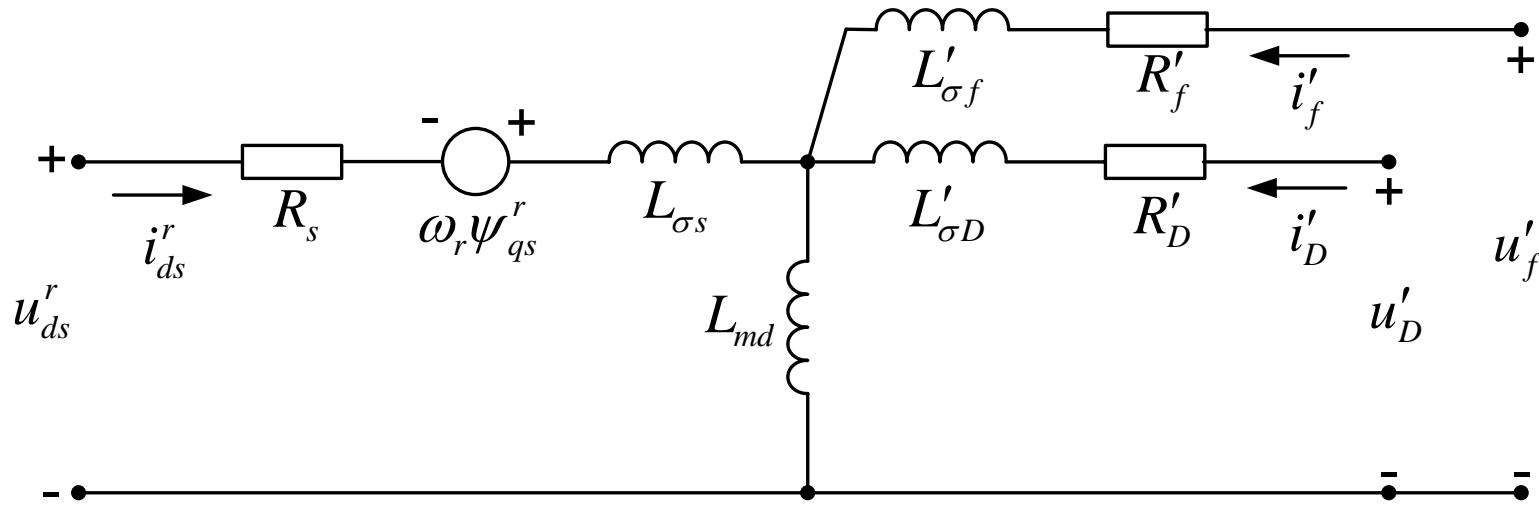
$$\psi_f' = L_{\sigma f}' i_f' + L_{md} (i_f' + i_D' + i_{ds}^r)$$

$$\psi_D' = L_{\sigma D}' i_D' + L_{md} (i_D' + i_f' + i_{ds}^r)$$

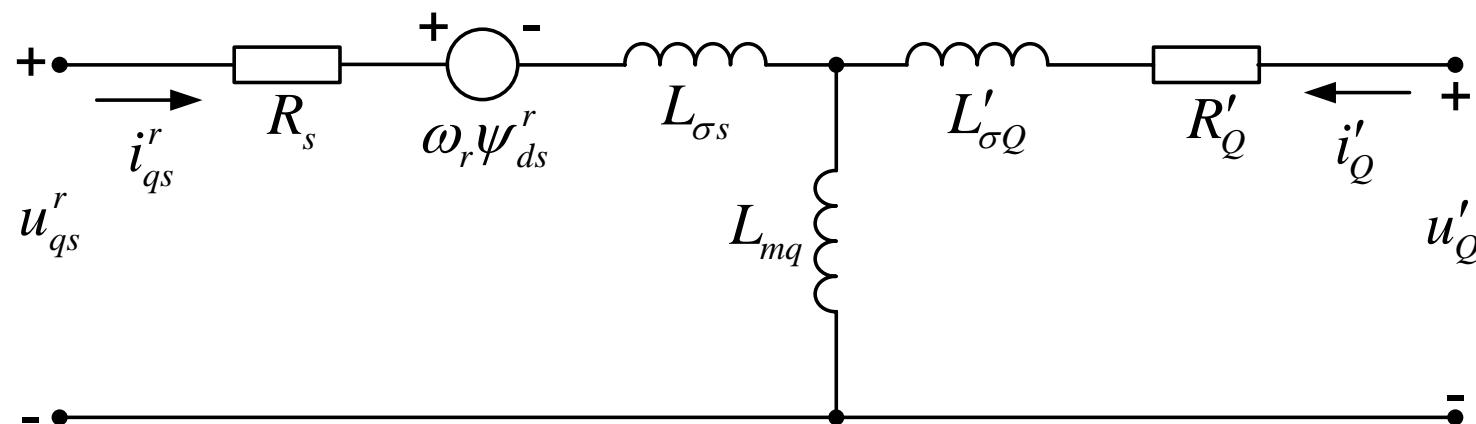
$$\psi_Q' = L_{\sigma Q}' i_Q' + L_{mq} (i_Q' + i_{qs}^r)$$

Nadomjesna shema sinkronog stroja u d , q koordinatnom sustavu

Nadomjesna shema u d osi



Nadomjesna shema u q osi



Proračun momenta sinkronog stroja

Mehanička snaga

$$P_{meh} = \frac{3}{2} (\omega_r \psi_{ds}^r i_{qs}^r - \omega_r \psi_{qs}^r i_{ds}^r) = \boxed{\frac{3}{2} \omega_r (\psi_{ds}^r i_{qs}^r - \psi_{qs}^r i_{ds}^r)}$$

Moment

$$\omega_r = p\omega_{rm} \text{ - električna kutna brzina vrtnje rotora}$$

$$P_{meh} = M_{em} \omega_{rm}$$

$$M_{em} = \frac{3}{2} p (\psi_{ds}^r i_{qs}^r - \psi_{qs}^r i_{ds}^r)$$

$$\begin{aligned}\psi_{ds}^r &= L_{\sigma s} i_{ds}^r + L_{md} (i_{ds}^r + i_f' + i_D') \\ \psi_{qs}^r &= L_{\sigma s} i_{qs}^r + L_{mq} (i_{qs}^r + i_Q')\end{aligned}$$

$$M_{em} = \frac{3}{2} p \left\{ \left[\underbrace{L_{\sigma s} + L_{md}}_{L_d} - \left(\underbrace{L_{\sigma s} + L_{mq}}_{L_q} \right) \right] i_{ds}^r i_{qs}^r + L_{md} i_f' i_{qs}^r + L_{md} i_D' i_{qs}^r - L_{mq} i_Q' i_{ds}^r \right\}$$

$$M_{em} = \frac{3}{2} p [\underbrace{(L_d - L_q) i_{ds}^r i_{qs}^r}_{\text{Reluktantni moment}} + \underbrace{L_{md} i_f' i_{qs}^r}_{\text{Moment zbog međudjelovanja uzbude i armature}} + \underbrace{L_{md} i_D' i_{qs}^r}_{\text{Moment zbog međudjelovanja prig. namota u } d \text{ osi i armature}} - \underbrace{L_{mq} i_Q' i_{ds}^r}_{\text{Moment zbog međudjelovanja prig. namota u } q \text{ osi i armature}}]$$

L_d – sinkrona reaktancija u d osi
 L_q – sinkrona reaktancija u q osi

Model sinkronog stroja za stacionarno stanje

U stacionarnom stanju stroj se vrti konstantnom brzinom ω_r

$$\omega_r = \text{konst.} \Rightarrow \frac{d\omega_r}{dt} = 0$$

Fazni naponi statora u vremenskoj domeni

$$u_{as} = U_{as} \cos(\omega_s t + \varphi_a) \quad \omega_s = 2\pi f \text{ - sinkrona kružna frekvencija}$$

$$u_{bs} = U_{bs} \cos(\omega_s t + \varphi_b)$$

$$u_{cs} = U_{cs} \cos(\omega_s t + \varphi_c)$$

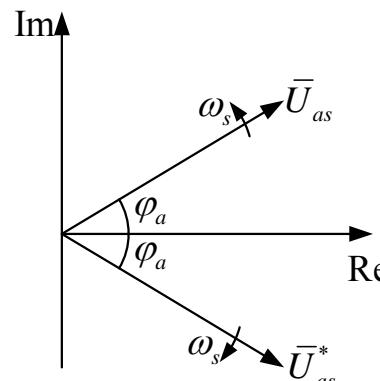
Napon faze a statora se može prikazati u obliku

$$u_{as} = \frac{1}{2} [U_{as} e^{j(\omega_s t + \varphi_a)} + U_{as} e^{-j(\omega_s t + \varphi_a)}]$$

$$\bar{U}_{as} = U_{as} e^{j\varphi_a} \text{ - fazor napona faze } a$$

Vektor napona statora

$$\begin{aligned} \bar{u}_{dqs}^s &= \frac{2}{3} (u_{as} + a u_{bs} + a^2 u_{cs}) \\ &= \underbrace{\frac{1}{3} (\bar{U}_{as} + a \bar{U}_{bs} + a^2 \bar{U}_{cs}) e^{j\omega_s t}}_{\bar{U}_{sp}} + \underbrace{\frac{1}{3} (\bar{U}_{as}^* + a \bar{U}_{bs}^* + a^2 \bar{U}_{cs}^*) e^{-j\omega_s t}}_{\frac{1}{3} (\bar{U}_{as} + a^2 \bar{U}_{bs} + a \bar{U}_{cs})^* = \bar{U}_{sn}} \end{aligned}$$



$$\left. \begin{aligned} \bar{U}_{sp} &= \frac{1}{3} (\bar{U}_{as} + a \bar{U}_{bs} + a^2 \bar{U}_{cs}) \\ \bar{U}_{sn} &= \frac{1}{3} (\bar{U}_{as} + a^2 \bar{U}_{bs} + a \bar{U}_{cs}) \end{aligned} \right\} \text{Direktna i inverzna komponenta napona prema teroji simetričnih komponenata}$$

Model sinkronog stroja za stacionarno stanje

Uz pretpostavku simetričnog trofaznog sustava napona inverzna komponenta je jednaka nuli ($\bar{U}_{sn} = 0$).

Za vektore napona, struje i ulančenog toka u statorskem koordinatnom sustavu tada vrijedi

$$\bar{U}_s = \bar{U}_{sp}, \quad \bar{u}_{dqs}^s = \bar{U}_s e^{j\omega_s t}, \quad \bar{i}_{dqs}^s = \bar{I}_s e^{j\omega_s t}, \quad \bar{\psi}_{dqs}^r = \bar{\Psi}_s e^{j\omega_s t}$$

Transformacijom koordinata u rotorski koordinatni sustav, uzimajući u obzir da je u stacionarnom stanju brzina vrtnje rotora (ω_r) jednaka sinkronoj brzini vrtnje (ω_s), dobiva se

$$\bar{f}_{dqs}^r = \bar{f}_{dqs}^s e^{-j\omega_r t} \Rightarrow \bar{u}_{dqs}^r = \bar{U}_s e^{j(\omega_s - \omega_r)t} = \bar{U}_s, \quad \bar{i}_{dqs}^r = \bar{I}_s e^{j(\omega_s - \omega_r)t} = \bar{I}_s, \quad \bar{\psi}_{dqs}^r = \bar{\Psi}_s e^{j(\omega_s - \omega_r)t} = \bar{\Psi}_s$$

Na uzbudni krug narinut je istosmjerni napon (struja i_f je konstantna), dok su naponi prigušnih namota u d i q osima (u_D i u_Q) jednaki nuli. Odatle slijedi da su struje i_D i i_Q u stacionarnom stanju jednake nuli. Naponske jednadžbe statora i rotora u stacionarnom stanju su onda

$$\bar{u}_{dqs}^r = R_s \bar{i}_{dqs}^r + \frac{d\bar{\psi}_{dqs}^r}{dt} + j\omega_r \bar{\psi}_{dqs}^r \Rightarrow \boxed{\bar{U}_s = R_s \bar{I}_s + j\omega_s \bar{\Psi}_s}$$

$$\bar{\psi}_{dqs}^r = \left(L_{\sigma s} + \frac{3}{2} L_{s0} \right) \bar{i}_{dqs}^r + \frac{3}{2} L_{s2} \left(\bar{i}_{dqs}^r \right)^* + L_{sf} i_f + \underbrace{L_{sD} i_D + j L_{sQ} i_Q}_{=0}$$

$$\boxed{\bar{\Psi}_s = \left(L_{\sigma s} + \frac{3}{2} L_{s0} \right) \bar{I}_s + \frac{3}{2} L_{s2} \left(\bar{I}_s \right)^* + L_{sf} I_f}$$

Model sinkronog stroja za stacionarno stanje

Ako se napon, struja i ulančeni tok i izraze preko svojih d i q komponenata, može se pisati

$$\bar{U}_s = U_{ds}^r + jU_{qs}^r$$

$$\bar{I}_s = I_{ds}^r + jI_{qs}^r$$

$$\bar{\Psi}_s = \Psi_{ds}^r + j\Psi_{qs}^r$$

$$\Psi_{ds}^r = [\underbrace{L_{\sigma s} + \frac{3}{2}(L_{s0} + L_{s2})}_{L_d}]I_{ds}^r + L_{sf}I_f$$

$$\Psi_{qs}^r = [\underbrace{L_{\sigma s} + \frac{3}{2}(L_{s0} - L_{s2})}_{L_q}]I_{qs}^r$$

$$U_{ds}^r + jU_{qs}^r = R_s(I_{ds}^r + jI_{qs}^r) + j\omega_s(\Psi_{ds}^r + j\Psi_{qs}^r) = R_s(I_{ds}^r + jI_{qs}^r) + j\omega_s(L_d I_{ds}^r + L_{sf} I_f) - \omega_s L_q I_{qs}^r$$

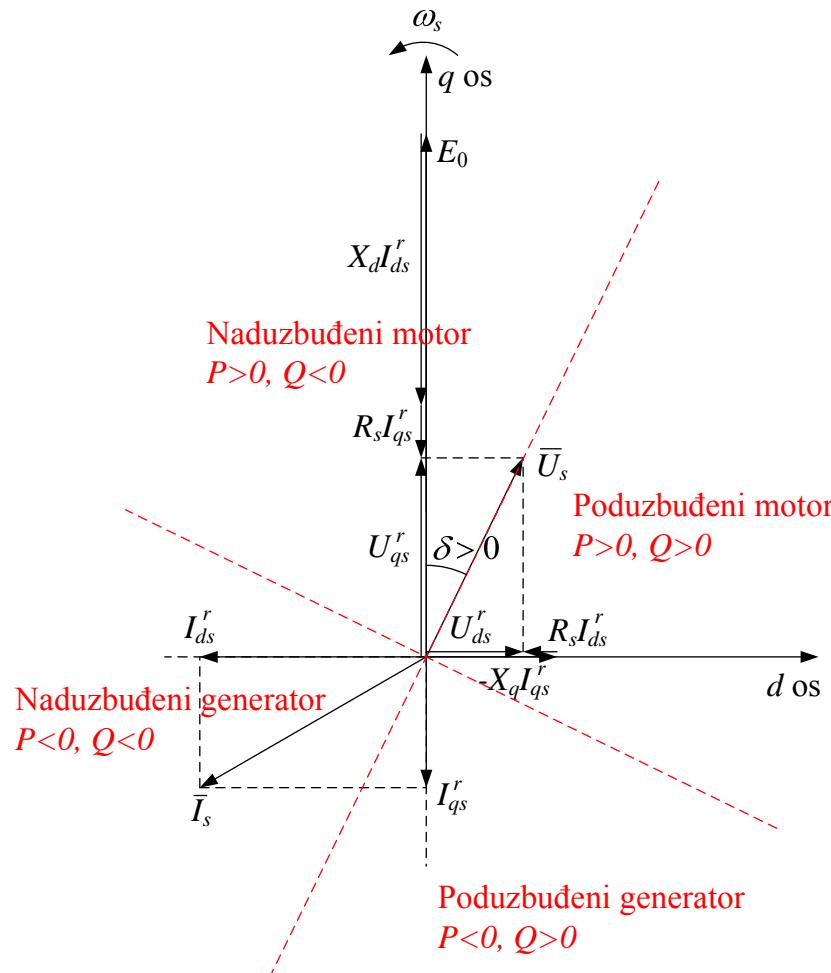
$$U_{ds}^r = R_s I_{ds}^r - X_q I_{qs}^r$$

$$U_{qs}^r = R_s I_{qs}^r + X_d I_{ds}^r + E_0$$

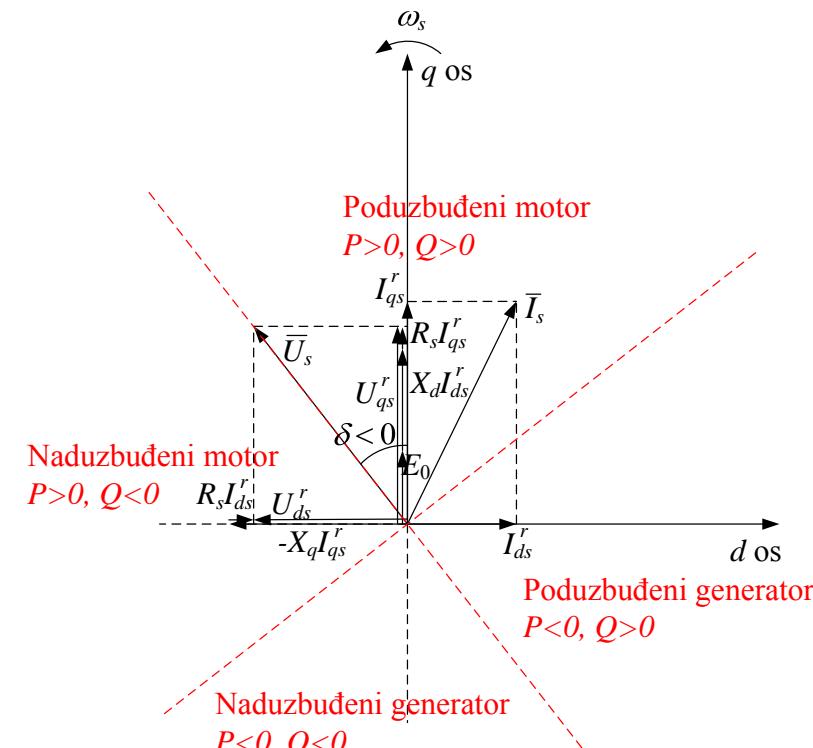
$$E_0 = \omega_s L_{sf} I_f = \omega_s L_{md} I'_f = X_{md} I'_f$$

Jednadžba statorskog kruga u rotirajućem koordinatnom sustavu za stacionarno stanje

Primjeri vektorskog dijagrama sinkronog stroja



Naduzbuđeni generator u motorskom prikazu



Poduzbuđeni motor u motorskom prikazu

Proračun momenta sinkronog stroja u stacionarnom stanju

U stacionarnom stanju vrijedi

$$i_D = 0$$

$$i_Q = 0$$

$$M_{em} = \frac{3}{2} p [(L_d - L_q) I_{ds}^r I_{qs}^r + L_{md} I_f' I_{qs}^r] = \frac{3}{2} \frac{p}{\omega_s} [(X_d - X_q) I_{ds}^r I_{qs}^r + E_0 I_{qs}^r]$$

Ako se kut između vektora napona U_s i induciranih napona E_0 označi s δ , onda uz zanemarenje statorskog otpora iz naponskih jednadžbi slijedi

$$U_{ds}^r = -X_q I_{qs}^r \Rightarrow I_{qs}^r = -\frac{U_{ds}^r}{X_q} = -\frac{U_s \sin \delta}{X_q}$$

$$U_{qs}^r = X_d I_{ds}^r + E_0 \Rightarrow I_{ds}^r = \frac{U_{qs}^r - E_0}{X_d} = \frac{U_s \cos \delta - E_0}{X_d}$$

$$U_s = \sqrt{(U_{ds}^r)^2 + (U_{qs}^r)^2}$$

Uvrštavanjem dobivenih izraza za struje I_{ds} i I_{qs} u jednadžbu za moment dobiva se

$$M_{em} = -\frac{3}{2} \frac{p}{\omega_s} \left[\frac{E_0 U_s}{X_d} \sin \delta + \frac{U_s^2}{2} \left(\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d} \right) \sin(2\delta) \right]$$

$M_{em} > 0$ – motorski režim rada
 $M_{em} < 0$ – generatorski režim rada

Sustav jediničnih vrijednosti primijenjen na sinkroni stroj

Prikaz varijabli asinkronog stroja u jediničnim (per-unit) vrijednostima olakšava usporedbu strojeva različitih snaga te daje bolji uvid u relativne veličine njihovih parametara. Najčešće korišteni sustav jediničnih vrijednosti je baziran na nazivnoj prividnoj snazi na stezalkama armaturnog namota. Osnovne bazne vrijednosti su :

Bazni napon: $U_B = \sqrt{2}U_{fn}$ – vršna vrijednost nazivnog faznog napona

Bazna struja: $I_B = \sqrt{2}I_{fn}$ – vršna vrijednost nazivne fazne struje

Bazna električna kutna brzina: $\omega_B = \omega_s = 2\pi f_n$ – nazivna električna kutna brzina.

Iz osnovnih vrijednosti slijede izvedene bazne vrijednosti:

$$\text{Bazna snaga: } S_B = \frac{3}{2}U_B I_B = S_n$$

$$\text{Bazni induktivitet: } L_B = \frac{Z_B}{\omega_B}$$

$$\text{Bazna impedancija: } Z_B = \frac{U_B}{I_B}$$

$$\text{Bazni ulančeni tok: } \Psi_B = \frac{U_B}{\omega_B}$$

$$\text{Bazna mehanička kutna brzina: } \omega_{mB} = \frac{\omega_B}{p}$$

$$\text{Bazni moment: } M_B = \frac{S_B}{\omega_{mB}} = p \frac{S_n}{\omega_s}$$

Sustav jediničnih vrijednosti primijenjen na sinkroni stroj

Važno je primijetiti da u ovom per-unit sustavu:

1. Za sve proračune se koriste iste jednadžbe kao i za model sa stvarnim jedinicama, osim što se u izrazima u per-unit sustavu više ne pojavljuju broj faza i broj pari polova.
2. Nazivna struja, nazivni napon i nazivna prividna snaga su jednaki 1 pu.
3. Nazivni elektromagnetski moment je manji od 1 pu, jer je M_B baziran na nazivnoj prividnoj snazi, a ne na nazivnoj radnoj snazi.

Elektromagnetski moment u stacionarnom stanju je

$$M_{em(pu)} = \frac{M_{em}}{M_B} = \frac{-\frac{3}{2} \frac{p}{\omega_s} \left[\frac{E_0 U_s}{X_d} \sin \delta + \frac{U_s^2}{2} \left(\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d} \right) \sin(2\delta) \right]}{\frac{3}{2} \frac{p}{\omega_B} \frac{U_B^2}{Z_B}}$$

$$M_{em(pu)} = -\frac{1}{\omega_{s(pu)}} \left[\frac{E_{0(pu)} U_{s(pu)}}{X_{d(pu)}} \sin \delta + \frac{U_{s(pu)}^2}{2} \left(\frac{1}{X_{q(pu)}} - \frac{1}{X_{d(pu)}} \right) \sin(2\delta) \right]$$

$$\left(M_B = \frac{S_B}{\omega_{mB}} = \frac{3}{2} U_B I_B \frac{p}{\omega_B} = \frac{3}{2} \frac{p}{\omega_B} \frac{U_B^2}{Z_B} \right)$$

Sustav jediničnih vrijednosti primijenjen na sinkroni stroj

Jednadžba gibanja u per-unit sustavu se modificira na sljedeći način:

$$J \frac{d\omega_m}{dt} = M_{em} - M_t \Rightarrow \frac{1}{M_B} \frac{\omega_B}{p} J \frac{d\left(\frac{\omega}{\omega_B}\right)}{dt} = \frac{M_{em} - M_t}{M_B} \Rightarrow \frac{J}{M_B} \frac{\omega_B}{p} \frac{d\omega_{(pu)}}{dt} = M_{em(pu)} - M_{t(pu)}$$

Odatle slijedi izraz za nadomjesni moment inercije u per-unit sustavu koji se definira kao

$$T_m = \frac{J}{M_B} \frac{\omega_B}{p} = \frac{J}{S_n} \left(\frac{\omega_s}{p} \right)^2$$

Mjerna jedinica za T_m je sekunda. Druga veličina koja se često koristi u jednadžbi gibanja u per-unit modelima je konstanta inercije H koja se definira kao omjer pohranjene mehaničke energije u vrtnji pri brzini ω_{mB} i bazne vrijednosti snage P_B , tj.

$$H = \frac{\frac{1}{2} J \omega_{mB}^2}{P_B} = \frac{\frac{1}{2} J \left(\frac{\omega_B}{p} \right)^2}{P_B} = \frac{1}{2} \frac{J}{M_B} \frac{\omega_B}{p} = \frac{1}{2} T_m$$

Primjer simulacije dinamičkih stanja sinkronog generatora

PODACI TROFAZNOG SINKRONOG TURBOGENERATORA

Parametar	Simbol	Vrijednost
Prividna snaga	S	835 MVA
Linijski napon	U_l	26 kV
Faktor snage	$\cos\varphi$	0.85
Frekvencija	f	50 Hz
Brzina vrtnje	n_n	3000 o/min
Moment inercije	J	$0.0658 \cdot 10^6 \text{ kgm}^2$
Konstanta inercije	H	5.6 s
Otpor armature	r_s	0.00243 Ω , 0.003 pu
Rasipna reaktancija armaturnog namota	x_{os}	0.1538 Ω , 0.19 pu
Sinkrona reaktancija u q osi	x_q	1.457 Ω , 1.8 pu
Sinkrona reaktancija u d osi	x_d	1.457 Ω , 1.8 pu
Otpor prvog prigušnog namota u q osi	r'_{Q1}	0.00144 Ω , 0.00178 pu
Rasipna reaktancija prvog prigušnog namota u q osi	x'_{oQ1}	0.6578 Ω , 0.8125 pu
Otpor drugog prigušnog namota u q osi	r'_{Q2}	0.00681 Ω , 0.00841 pu
Rasipna reaktancija drugog prigušnog namota u q osi	x'_{oQ2}	0.07602 Ω , 0.0939 pu
Otpor uzbudnog namota	r'_f	0.00075 Ω , 0.000929 pu
Rasipna reaktancija uzbudnog namota	x'_{of}	0.1145 Ω , 0.1414 pu
Otpor prigušnog namota u d osi	r'_D	0.0108 Ω , 0.01334 pu
Rasipna reaktancija prigušnog namota u d osi	x'_{oD}	0.06577 Ω , 0.08125 pu

Početni uvjeti

Generator je priključen na mrežu krutog napona i frekvencije i u početnom trenutku ($t=0$) radi u nazivnoj radnoj točki uz sljedeće nazivne veličine:

Napon mreže: $\bar{U}_{s(pu)} = 1|0^0$

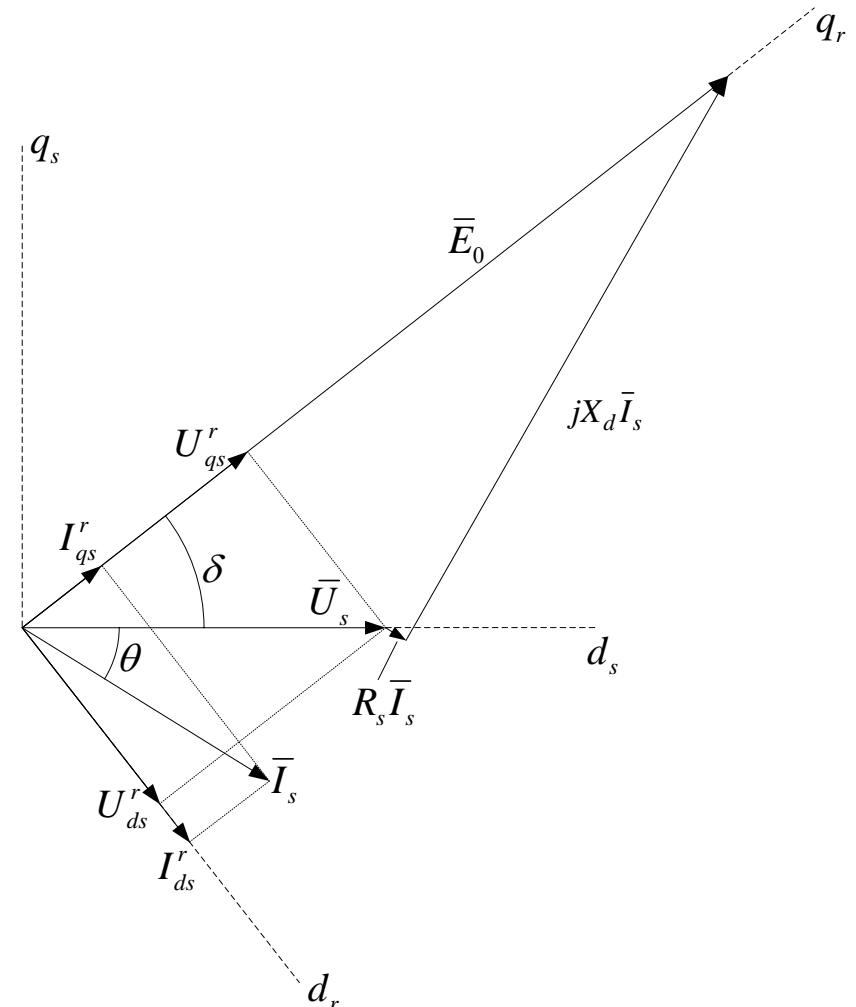
Struja armature: $\bar{I}_{s(pu)} = 1|-31.788^0$

Prividni inducirani napon: $\bar{E}_{0(pu)} = 2.4782|38.0787^0$

Kut opeterećenja: $\delta = 38.0787^0$

Početni položaj rotora: $\alpha_{r0} = -(90^0 - \delta)$

Napon uzbude: $U_{f(pu)} = 2.4782$



Zadatak simulacije

U gotovom modelu sinkronog stroja u MATLAB/SIMULINK-u kao bazna vrijednost struje uzbude I_{fB} odabrana je struja I_{f0} koja mora teći uzbudnim namotom da bi se u praznom hodu u armaturnom namotu inducirao nazivni napon. Napon U_{f0} koji u tom slučaju treba dovesti uzbudnom namotu se uzima kao bazna vrijednost napona uzbude U_{fB} . U tom slučaju se može pisati

$$U_{f0} = I_{f0} R_f$$

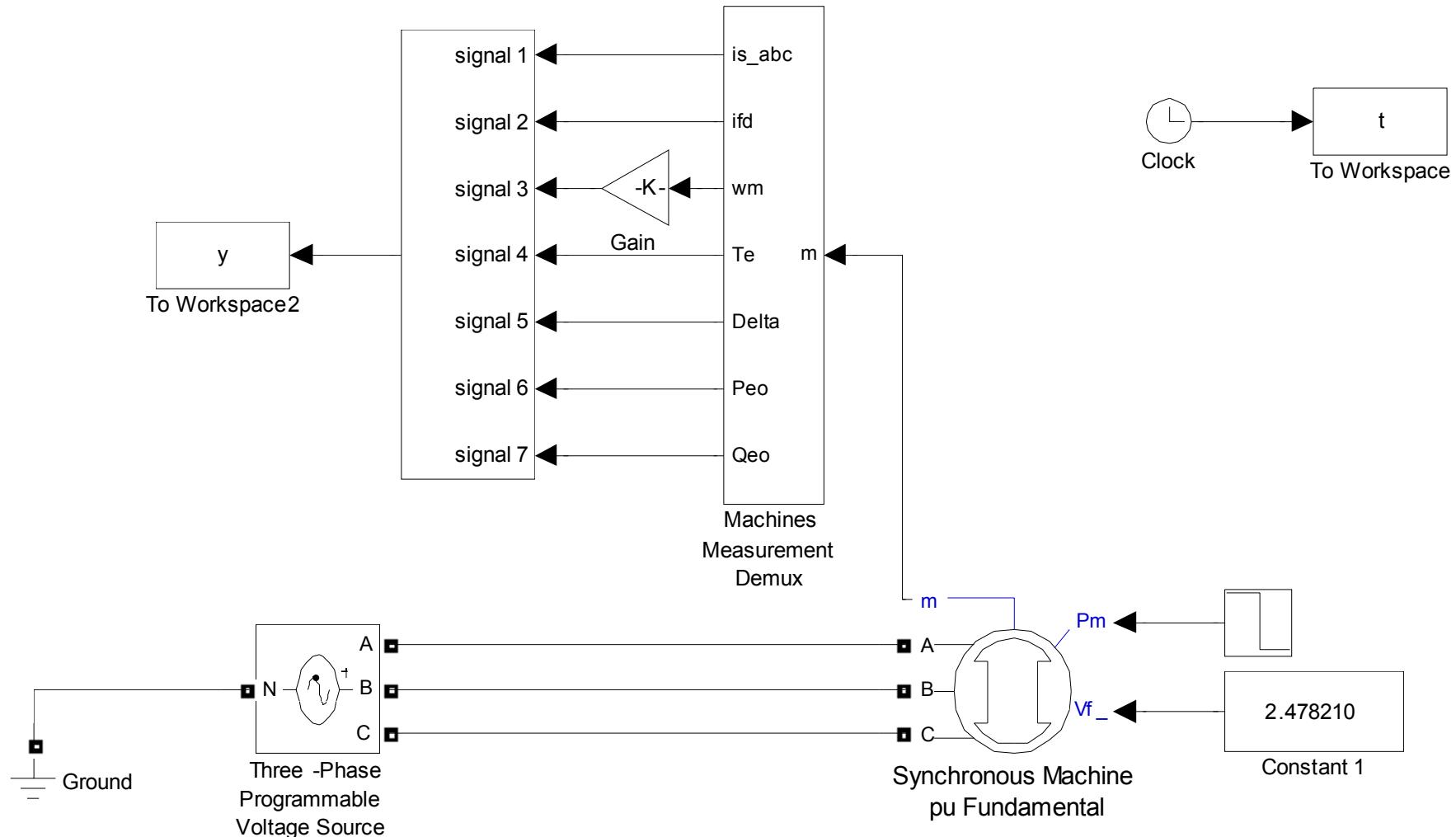
pri čemu je $U_{f0}=U_{fB}$, a $I_{f0}=I_{fB}$. Budući da je vrijednost nazivnog napona armature jednaka 1 pu, a prividni inducirani napon E_0 je proporcionalan uzbudnoj struji, odatle slijedi da je per-unit vrijednost napona uzbude za neku stacionarnu radnu točku generatora jednaka per-unit vrijednosti napona E_0 , tj. može se pisati

$$U_{f(pu)} = E_{0(pu)}$$

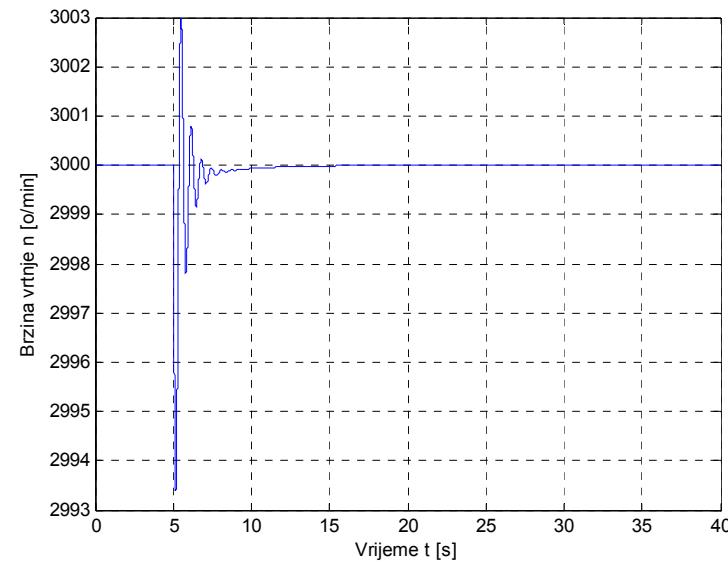
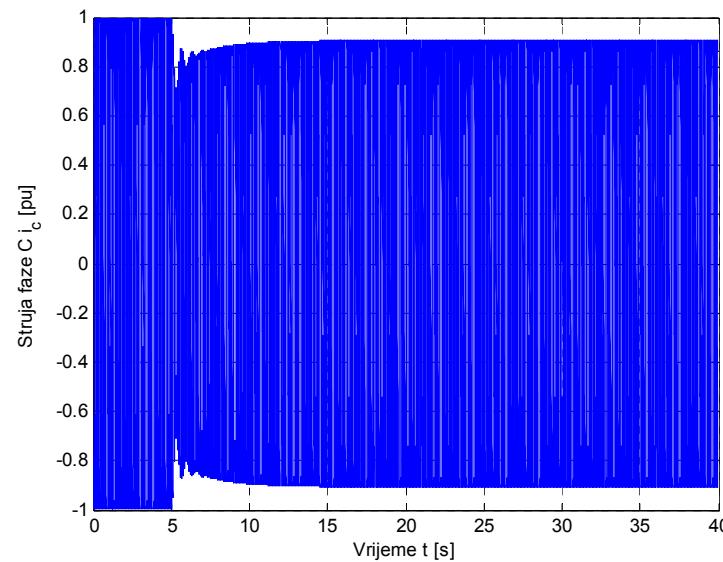
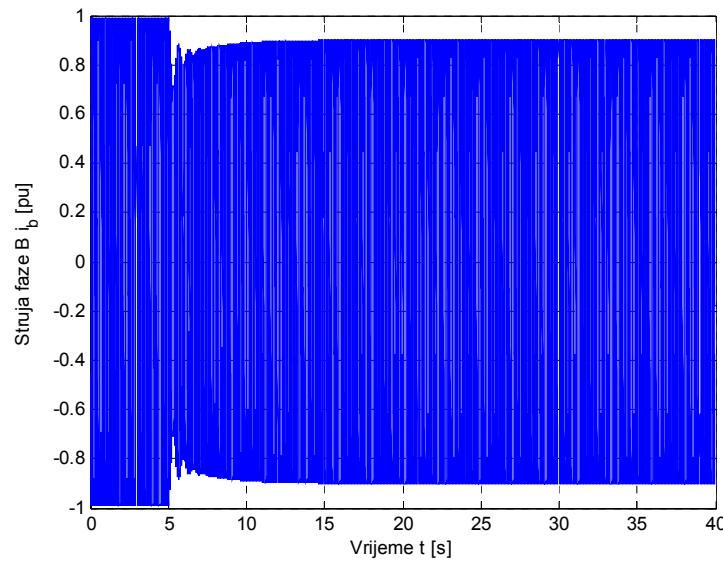
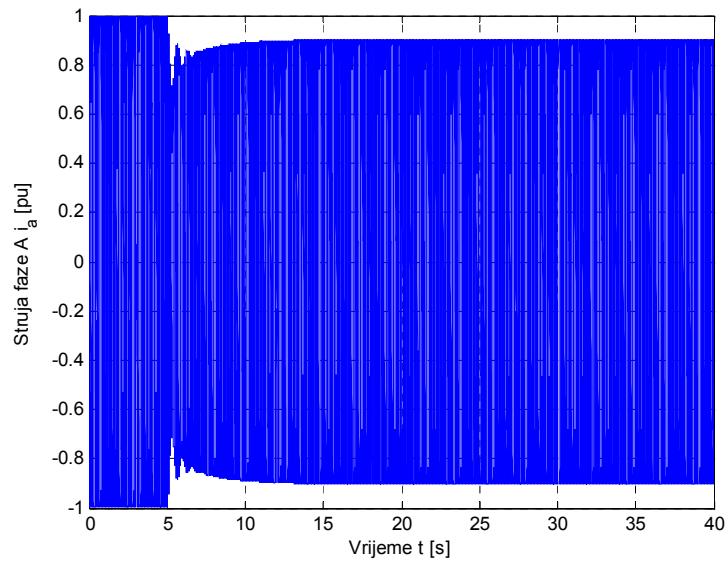
ZADATAK SIMULACIJE

U trenutku $t=5$ s naglo se smanji pogonski moment s nazivne vrijednosti (0,85 pu) na 0,6 pu. Potrebno je simulirati prijelaznu pojavu koja nastaje nakon spomenute promjene.

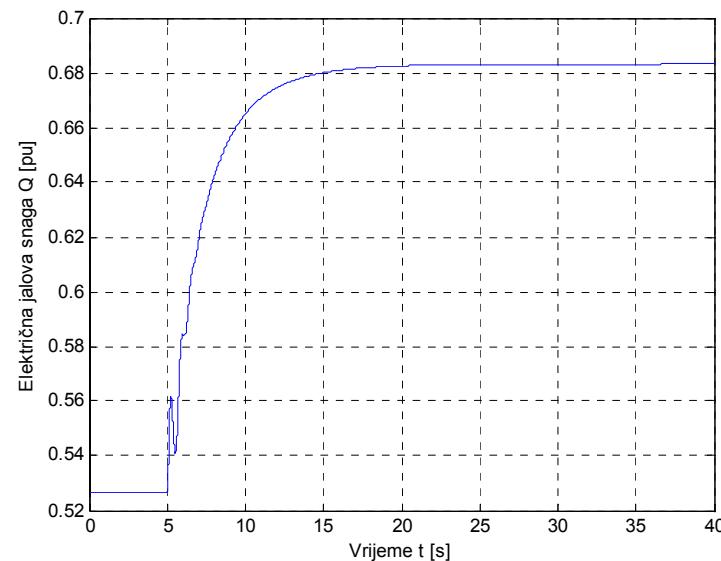
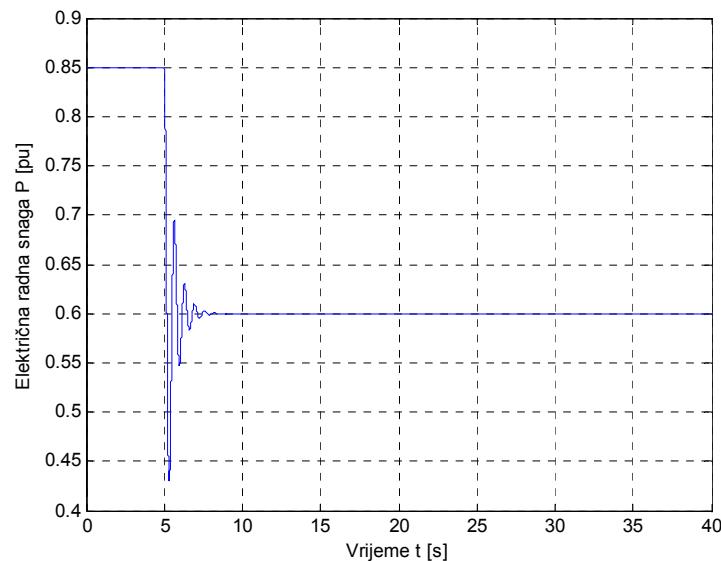
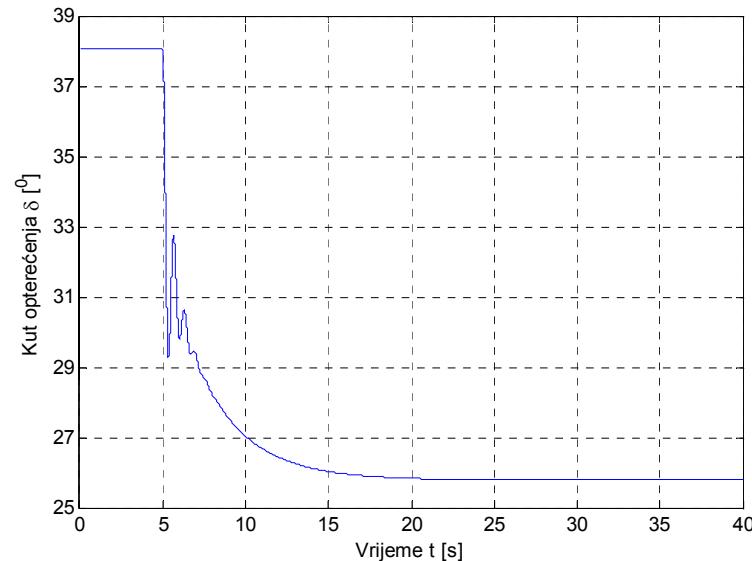
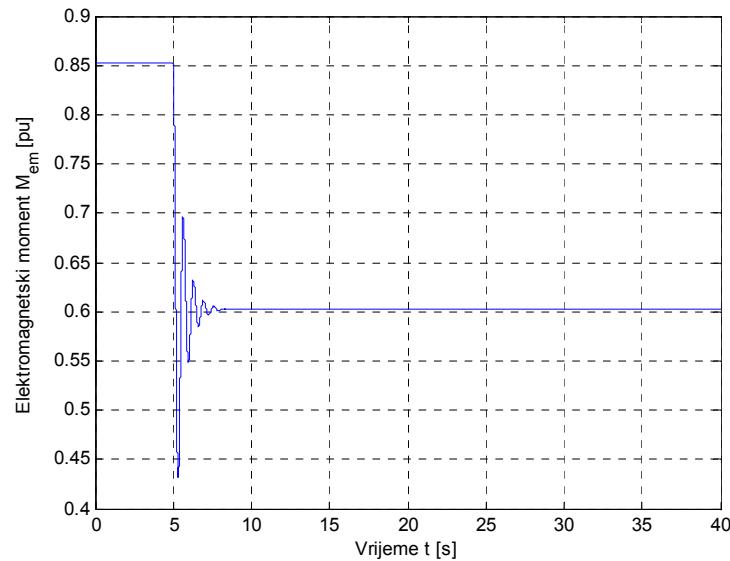
MATLAB/SIMULINK model



Rezultati simulacije



Rezultati simulacije



Dinamički model sinkronog motora s trajnim magnetima

Osnovna podjela motora s trajnim magnetima

- Kolektorski istosmjerni motori
- Elektronički komutirani motori
- Sinkroni motori s trajnim magnetima

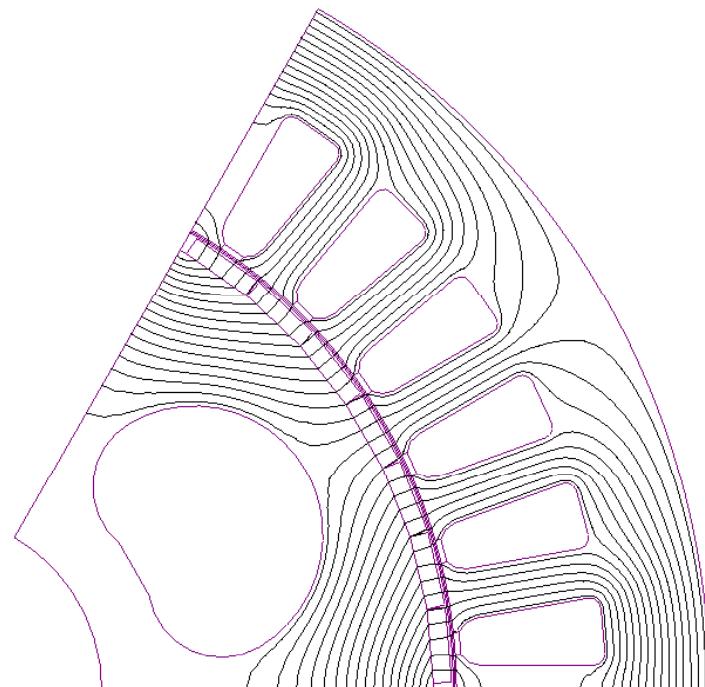
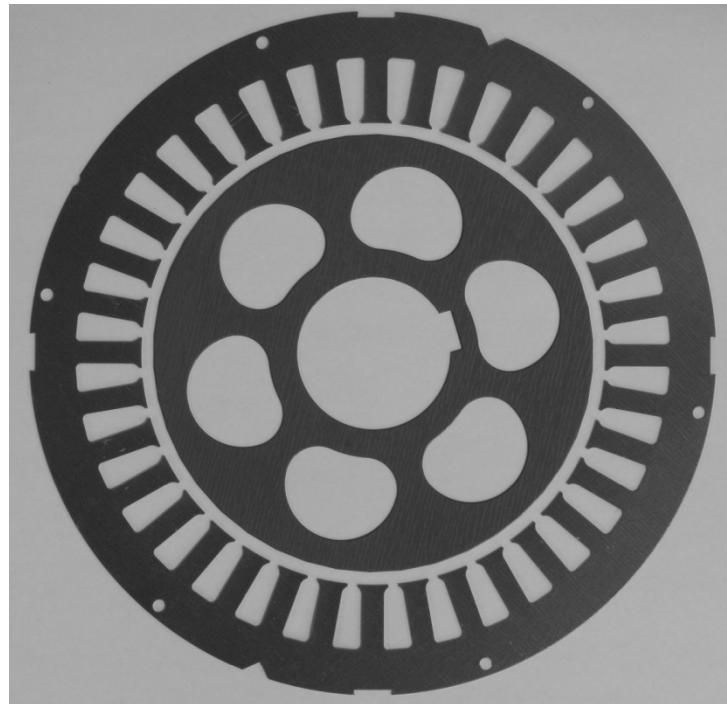
Kolektorskim istosmjernim motorima je uzbudni namot zamijenjen trajnim magnetima, najčešće feritima.

Elektronički komutirani motor je trofazni motor s trajnim magnetima na rotoru napajan strujama trapeznog valnog oblika pri čemu struju istovremeno vode samo dvije faze, što odgovara načinu rada mehaničkog kolektora.

Sinkroni motor s trajnim magnetima je trofazni motor s trajnim magnetima na rotoru napajan strujama sinusnog valnog oblika pri čemu struju istovremeno vode sve tri faze.

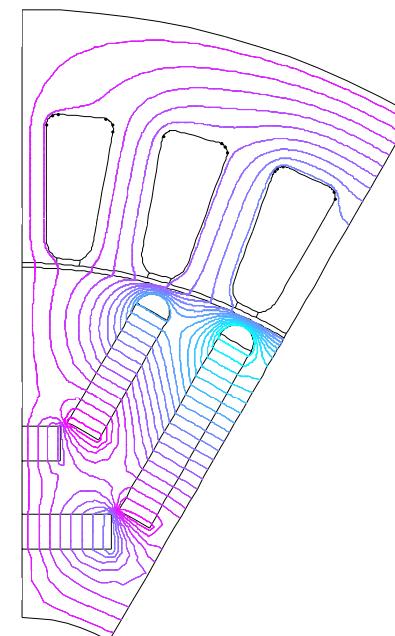
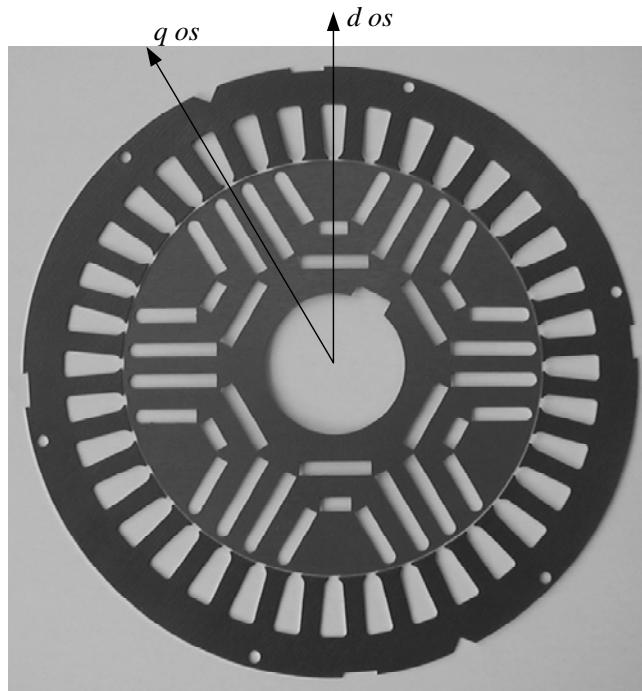
Sinkroni motor s magnetima na površini

- radijalno ili paralelno magnetizirani magneti
- ugrađuju se magneti na bazi rijetkih zemalja visoke remanencije ($>0.8\text{ T}$)
- magneti su zalipljeni na površinu rotora
- za dodatno osiguranje magneta od djelovanja centrifugalnih sila pri visokim brzinama koristi se ovojnica od staklenih vlakana, kevlara ili nemagnetskog čelika
- nisu pogodni za pogone koji zahtijevaju veliki raspon brzina vrtnje



Sinkroni motor s unutarnjim magnetima

- magneti se magnetiziraju poprečno na najdulju stranicu
- koriste se magneti niske remanencije (0.2-0.5 T) zbog ograničenja napona pri maksimalnoj brzini vrtnje u slučaju prekida napajanja. Mogu se koristiti i magneti visoke remanencije uz zaštitu istosmjernog međukruga od prenapona pravovremenim isključivanjem pretvarača.
- $X_q > X_d$ jer magnetski tok armature u q osi može prolaziti kroz željezo jarma rotora bez prolaska kroz PM
- osim elektromagnetskog, razvijaju i reluktantni moment
- mogu se koristiti na visokim brzinama vrtnje
- pogodni su za pogone koji zahtijevaju veliki raspon brzina vrtnje (npr. električna vuča)



Jednadžbe sinkronog motora s trajnim magnetima u d, q koordinatnom sustavu

U jednadžbama motora uzbuda ostvarena trajnim magnetima je ekvivalentna uzbudnoj struji konstantnog iznosa čime se definira uzbudni tok također konstatnog iznosa

$$\Psi'_f = L_{md} i'_f$$

Jednadžbe motora u d, q koordinatnom sustavu su onda

$$u_{ds}^r = R_s i_{ds}^r + \frac{d\psi_{ds}^r}{dt} - \omega_r \psi_{qs}^r$$

$$u_{qs}^r = R_s i_{qs}^r + \frac{d\psi_{qs}^r}{dt} + \omega_r \psi_{ds}^r$$

$$\psi_{ds}^r = L_{\sigma s} i_{ds}^r + L_{md} i_{ds}^r + \Psi'_f$$

$$\psi_{qs}^r = L_{\sigma s} i_{qs}^r + L_{mq} i_{qs}^r$$

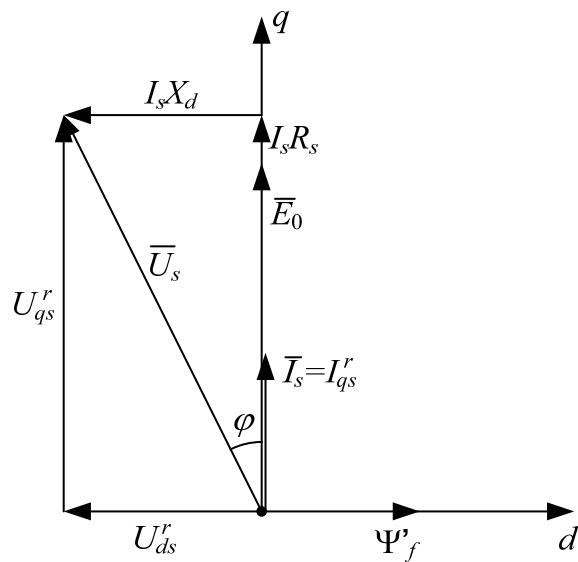
Model sinkronog motora s trajnim magnetima za stacionarno stanje

Jednadžbe statorskog kruga u rotirajućem koordinatnom sustavu za stacionarno stanje

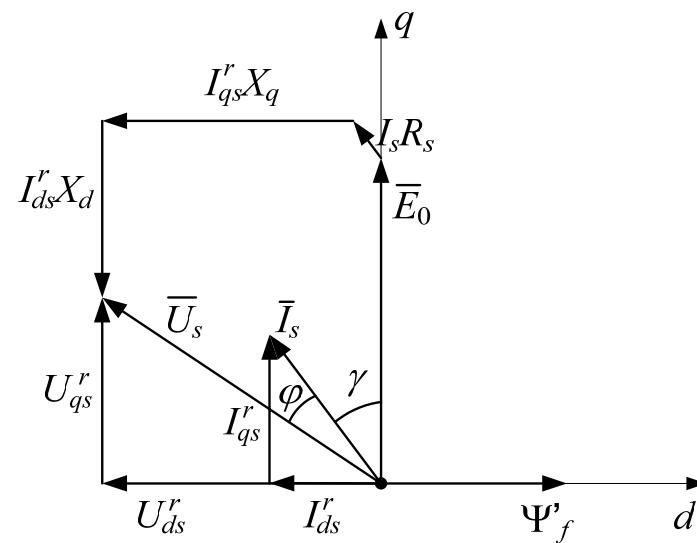
$$\begin{aligned}U_{ds}^r &= R_s I_{ds}^r - X_q I_{qs}^r \\U_{qs}^r &= R_s I_{qs}^r + X_d I_{ds}^r + E_0 \\E_0 &= \omega_s \Psi_f'\end{aligned}$$

$$X_d = X_q, \gamma = 0$$

$$X_d < X_q, \gamma < 0$$



Fazorski dijagram motora s površinskim magnetima



Fazorski dijagram motora s unutarnjim magnetima

Moment sinkronog motora s trajnim magnetima u stacionarnom stanju

$$M_{em} = \frac{3}{2} \frac{p}{\omega_s} \left[E_0 I_{qs}^r + (X_d - X_q) I_{ds}^r I_{qs}^r \right]$$
$$M_{em} = \frac{3}{2} \frac{p}{\omega_s} \left[E_0 I_s \cos \gamma + \frac{1}{2} (X_d - X_q) I_s^2 \sin(2\gamma) \right]$$
$$I_s = \sqrt{(I_{ds}^r)^2 + (I_{qs}^r)^2}$$

Motor s površinskim magnetima

$$X_d = X_q, \gamma = 0$$

$$M_{em} = \frac{3}{2} \frac{p}{\omega_s} E_0 I_s$$

Za postizanje maksimalnog momenta motora s površinskim magnetima za bilo koju struju I_s potrebno je upravljati vektorom struje tako da on prethodi induciranom naponu E_0 za kut γ . Za određenu radnu točku može se pronaći optimalni kut γ kod kojeg se postiže maksimalni moment. Motor tada razvija elektromagnetski i reluktantni moment.

Motor s unutarnjim magnetima

$$X_d < X_q, \gamma < 0$$

$$M_{em} = \frac{3}{2} \frac{p}{\omega_s} \left[E_0 I_s \cos \gamma + \frac{1}{2} (X_d - X_q) I_s^2 \sin(2\gamma) \right]$$

Za postizanje maksimalnog momenta motora s površinskim magnetima potrebno je upravljati vektorom struje tako da on prethodi induciranom naponu E_0 za kut γ . Za određenu radnu točku može se pronaći optimalni kut γ kod kojeg se postiže maksimalni moment. Motor tada razvija elektromagnetski i reluktantni moment.

Primjer

Motor s površinskim trajnim magnetima ima parametre zadane u jediničnim vrijednostima: $E_0=0.8$, $X_d=0.4$, $R_s=0.05$, $\omega_s=1$. Motor je napajan iz elektroničkog energetskog pretvarača s regulacijom struje armature koji koristi senzor za određivanje položaja rotora u povratnoj vezi i na taj način održava položaj vektora struje takav da je $\gamma=0$. Odredite:

- Struje i napone statora kojima se postižu momenti 1.0, 0.5 i 0 pri frekvenciji $\omega=\omega_s=1$.
- Ponovite sve pod a) za slučaj kada je $\omega=0.5$.
- Ponovite sve pod a) za slučaj kada je $\omega=0$.

a)

$$M_{em} = 1.0$$

$$M_{em} = \frac{1}{\omega} E_0 I_s \Rightarrow I_s = \omega \frac{M_{em}}{E_0} = 1.0 \frac{1.0}{0.8} = \boxed{1.25}$$

$$U_s = \sqrt{(E_0 + I_s R_s)^2 + (I_s X_d)^2} = \sqrt{(0.8 + 1.25 \cdot 0.05)^2 + (1.25 \cdot 0.4)^2} = \boxed{1.0}$$

$$M_{em} = 0.5 \Rightarrow I_s = 1.0 \frac{0.5}{0.8} = \boxed{0.625}$$

$$U_s = \sqrt{(0.8 + 0.625 \cdot 0.05)^2 + (0.625 \cdot 0.4)^2} = \boxed{0.868}$$

$$M_{em} = 0 \Rightarrow I_s = \boxed{0}$$

$$U_s = \sqrt{(0.8 + 0 \cdot 0.05)^2 + (0 \cdot 0.4)^2} = \boxed{0.8}$$

Primjer

b)

$$\omega = 0.5 \Rightarrow E_0 = 0.5 \cdot 0.8 = 0.4, \quad X_d = 0.5 \cdot 0.4 = 0.2$$

$$M_{em} = 1.0$$

$$M_{em} = \frac{1}{\omega} E_0 I_s \Rightarrow I_s = \omega \frac{M_{em}}{E_0} = 0.5 \frac{1.0}{0.4} = \boxed{1.25}$$

$$U_s = \sqrt{(E_0 + I_s R_s)^2 + (I_s X_d)^2} = \sqrt{(0.4 + 1.25 \cdot 0.05)^2 + (1.25 \cdot 0.2)^2} = \boxed{0.526}$$

$$M_{em} = 0.5 \Rightarrow I_s = 0.5 \frac{0.5}{0.4} = \boxed{0.625}$$

$$U_s = \sqrt{(0.4 + 0.625 \cdot 0.05)^2 + (0.625 \cdot 0.2)^2} = \boxed{0.449}$$

$$M_{em} = 0 \Rightarrow I_s = \boxed{0}$$

$$U_s = \sqrt{(0.4 + 0 \cdot 0.05)^2 + (0 \cdot 0.4)^2} = \boxed{0.4}$$

Primjer

c)

$$\omega = 0 \Rightarrow E_0 = 0, X_d = 0$$

$$M_{em} = 1.0$$

$$M_{em} = \psi_{ds}^r I_{qs}^r - \psi_{qs}^r I_{ds}^r$$

$$I_{ds}^r = 0, I_{qs}^r = I_s \Rightarrow M_{em} = \psi_{ds}^r I_s$$

$$\psi_{ds}^r = L_d I_{ds}^r + \Psi'_f = \Psi'_f \Rightarrow M_{em} = \Psi'_f I_s$$

$$\Psi'_f = \frac{E_0}{\omega_s} = \frac{0.8}{1.0} = 0.8 \Rightarrow I_s = \frac{M_{em}}{\Psi'_f} = \frac{1.0}{0.8} = \boxed{1.25}$$

$$U_s = \sqrt{(E_0 + I_s R_s)^2 + (I_s X_d)^2} = \sqrt{(0 + 1.25 \cdot 0.05)^2 + (1.25 \cdot 0)^2} = \boxed{0.0625}$$

$$M_{em} = 0.5 \Rightarrow I_s = \frac{0.5}{0.8} = \boxed{0.625}$$

$$U_s = \sqrt{(0 + 0.625 \cdot 0.05)^2 + (0.625 \cdot 0)^2} = \boxed{0.03125}$$

$$M_{em} = 0 \Rightarrow I_s = \boxed{0}$$

$$U_s = \sqrt{(0 + 0 \cdot 0.05)^2 + (0 \cdot 0.4)^2} = \boxed{0}$$