

PRVI MEĐUISPIT

8. studenoga 2017.

Napomena. Na svako pitanje odgovorite provodeći korektan matematički postupak.**1. Inverz matrice.**

(a) Dokažite tvrdnju ili je opovrgnite kontra-primjerom:

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}, \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \text{ regularne kvadratne matrice reda } n.$$

(b) Zadane su matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. Riješite matričnu jednadžbu

$$(\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{B}^{-1})^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{B}^2\mathbf{A}^{-1}.$$

2. Determinante.

(a) Dokažite tvrdnju ili je opovrgnite kontra-primjerom:

Determinanta s dva jednaka retka jednaka je 0.

(b) Dokažite tvrdnju ili je opovrgnite kontra-primjerom:

$$\det(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \det \mathbf{A} + \det \mathbf{B}, \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \text{ kvadratne matrice reda } n.$$

(c) Izračunajte vrijednost determinante matrice $A = (a_{ij})$ reda n , ako je $a_{ij} = 2$, za $i = j$ i $a_{ij} = 1$, za $i \neq j$.

3. Linearni sustavi.Zadan je linearni sustav $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Poznat je skup svih rješenja:

$$\left\{ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

Koliki je rang matrice \mathbf{A} i koliko najmanje redaka mora imati matrica \mathbf{A} ?**4. Primjene linearne algebre.**

Hrvatsko ratno zrakoplovstvo obnavlja flotu kupovinom 20 novih vojnih zrakoplova. Na tržištu postoje tri tipa aviona koji se razlikuju po broju putnika i količine tereta koje mogu prevesti. Tri tipa aviona mogu prevesti redom 50, 75, 90 putnika, odnosno 100, 175, 230 tona tereta. Koliko aviona pojedinog tipa moraju kupiti ako je poznato da žele ukupni kapacitet 1400 putnika i 3250 tona tereta?

5. Vektori.

(a) Dokažite tvrdnju ili je opovrgnite kontra-primjerom:

Postoje dva vektora \mathbf{a}, \mathbf{b} u prostoru V^2 za koje vrijedi $|\mathbf{a}| = 1, |\mathbf{b}| = 2$ i $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 3$.

(b) Dani su vektori $\mathbf{a} = 6\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ i $\mathbf{c} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$. Odredite λ tako da vektori $\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$ i \mathbf{c} budu okomiti.