06.04.2010.

zadaci za vježbu 06

(3) ~~V(1)~~, V(2) $R(1) = R(2)$

$R(0,1) = R(1,2)$

V(0)

$1 + R[0,m] = (1 + R[0,1])(1 + R[1,2]) \ldots (1 + R[m-1,m])$

$kR[0,2] = kR[0,1] + kR[1,2]$

-> sa logaritamskim povratom je lakše računati

Predavanja 07

slajd 8.

$E[S(m)] = S(0)\, E[1 + R(1)]^m$ samo u slučaju nezavisnih

$E[R(1)] = E[R(2)] \cdots E[R(m)]$ i jednako distribuiranih povrata

$E[xy] \neq E[x] \cdot E[y]$

vrijedi :

ako su x, y nezavisne varijable

- želja da se ide u svijet neutralan na rizik : pod uvjetom arbitraže ulazimo u taj svijet

cijena = diskontirano očekivanje vjerojatnosti neutralne na rizik

odražava buduća očekivanja klijenta

rulet

$E[X_{m+1} | \mathcal{F}_m] = X_m$

$\mathcal{F}_m = X_m$

sve vrijednosti do trenutka m

(X_m je najrecentnija vrijednost

koju najčešće uzimamo, iako

su bitne sve prošle vrijednosti)

Fundamentalni teorem vrednovanja imovine

- vjerujemo na najrecentniju informaciju

(samo na osnovu te vrijednosti procjenjujemo stanje):

$$E^{P^*}[S_j^D(n+1) \mid S_j(n)] = S_j^D(n), \quad j = 1, 2, \dots, m$$

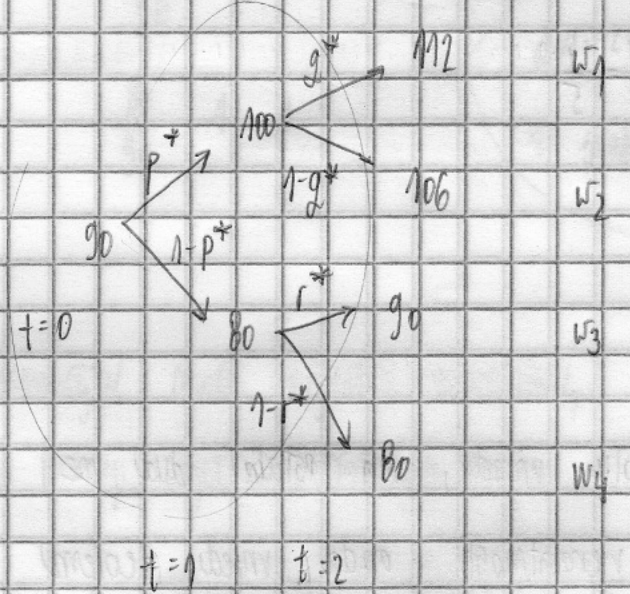
Primjer

$A(0) = 100$

$A(1) = 110$

$A(2) = 121$

$r = 10\%$



(dvoperiodni kanal)

$1-p^* < r < p^*$ -> nema uvjeta arbitraže

$A(0) = 1$

$A(k) = (1+r)^k = e^{rk}$

$S^D(k) = \dfrac{S(k)}{A(k)}$

$E^*\left[\dfrac{S(1)}{A(1)} \mid S(0)\right] = \dfrac{S(0)}{A(0)}$ - znati cijelu prošlost isto je kao znati vrijednost u prethodnome trenutku

$E^*\left[\dfrac{S(2)}{A(2)} \mid S(1)\right] = \dfrac{S(1)}{A(1)}$

- martingal nije proces cijene, već diskontirano očekivanje
- diskont se uzima kako bi sveli cijene na iste vremenske uvjete

$$\frac{100}{110} p^* + \frac{80}{110}(1-p^*) = \frac{90}{100}$$

$$\frac{112}{121} g^* + \frac{106}{121}(1-g^*) = \frac{100}{110}$$

$$\frac{90}{121} r^* + \frac{80}{121}(1-r^*) = \frac{80}{110}$$

$$p^* = \frac{19}{20}, \quad g^* = \frac{2}{3}, \quad r^* = \frac{4}{5}$$

$$1-p^* < r < p^*$$
$$\shortparallel$$
$$0.1$$

na jednom podstablu vrijedi, na ostala dva ne

(ako su jednake vjerojatnosti, onda vrijedi teorem da ako vrijedi na jednom, vrijedit će za sva podstabla i konačno za cijelo stablo - ovdje to ne vrijedi)

podstablo nije scenarij

(scenarij je cijela putanja od 0-2)

$p^*(\omega) \to [0,1]$ $\qquad p^*(\omega_1)$ … ω_4

$112 = 100 \cdot (1+g^*)$ → za vrijednost 112, znamo da smo došli iz čvora 100, i nije nam bitno kako smo došli u čvor 100 (to znači da su nezavisne)

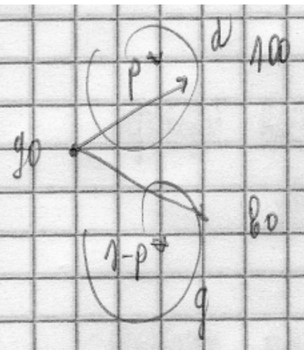
općeniti model

$$p^*(\omega_1) = p^* g^*$$

$$p^*(\omega_2) = p^*(1-g^*)$$

$$p^*(\omega_3) = (1-p^*) r^*$$

$$p^*(\omega_4) = (1-p^*)(1-r^*)$$



(NA)

Uvjet nearbitraže je

odnos između povrata na vjerojatnosti

(d na p^*, g na $(1-p^*)$)

$\frac{100}{90} - 1 = g$

$\frac{80}{90} - 1 = d$

$d < r < g$

za svaki komad stabla

!

- u barem jednom scenariju mora vrijediti arbitraža, onda kažemo da postoji uvjet arbitraže u stablu

$$V(0) = 0 \quad \left.\begin{matrix} V(\omega_1) > 0 \\ V^m(\omega_i) \geq 0 \end{matrix}\right\} \text{ onda postoji arbitraža}$$

(ako polazimo od nule - da nemamo ništa)

- ako je jedan scenarij negativan -> nema arbitraže

Slučajni ugovori

- call i put opcije -> pravo kupnje i prodaje bez obaveze

(ako ne odgovara cijena iz ugovora, ništa ne poduzimamo -> bezvrijedan ugovor)

- izvršnom cijenom jamči izdavatelj

(mi izdavatelju plaćamo za to)

- indeks -> kvalitetan oblik poslovanja
- opcija na indeks mora imati izvršnu cijenu s datumom T
- indeks se općenito jako teško pobjeđuje (pa i vrlo dobrom investitoru to teško ide)

- veći je strah kod prodaje, pa su put opcije puno skuplje

- rizik → koliko smo danas spremni platiti za ugovor

Primjer

$T = 1$

$t = 0, 1$ dospijeće

danas

→ $t = 0, 1, \dots, T$

cijela trajektorija prije

Zadatak

$K = 90$

$N = 6$ mj $= 0.5$ g

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & 87 \\ 86 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & 92 \\ & 97 \end{tikzcd}$$

$C = 8$

$r = 9\%$

$E[\text{dobitak}]$

$$8e^{0.09 \cdot 0.5} = 8.368$$

$$\text{isplata} = [S_T - K]^+ = \max\{S_T - K, 0\}$$

jer je cijena uvijek ≥ 0

$$= \begin{cases} 0 \\ 2 \\ 7 \end{cases}$$

$$\text{dobitak} = \begin{cases} -8.368 \\ -6.368 \\ -1.368 \end{cases}$$

$$E[D] = \frac{1}{3}\left[-8.368 - 6.368 - 1.368\right]$$

$$= -5.368$$

Definicija Replicirajući portfelj

$V^h(T) = X$

- stvaranje portfelja koji će nas zaštititi od najgore opcije

$PX(1; X) = X$ obveznica u trenutku dospijeća

$PX(t; X) = V^h(t)$ $t = 0, 1$
kod nas ($imale$ $t = 0, 1, \dots, T$)

Potpuno tržište

- ako je svaki tržišni zahtjev na tržištu dostižan

(-> idealno tržište)

+ uvođenje izvedenica - time upotpunjujemo tržište

Propozicija (slajd 15)

$(A, S, X) = (y, x, z)$

$PX(0; X)$

prodaja short sell $z = -1$

$A(0) = 1$ (npr.)

PX

$x S(0)$ $\frac{PX - xS(0)}{A(0)} = y^*$ broj udjela/komada po jednoj jedinici novca

u rizičnu

$t = 0$: $M = (y^*, x, -1)$

u nerizičnu

short sell

moj portfelj

$V^M(0) = 0$

1+r ili e^r (svejedno)

$t = 1$: $V^M(1) = xS(1) + y^* A(1) - \underbrace{PX(1; X)}_{= X}$ nominalna vrijednost u trenutku dospijeća

$h = (x, y)$ replicirajući portfelj

$V^h(1) = X$

vrijednost slučajnog zahtjeva

(ono što se treba isplatiti)

$x S(1) + y A(1) - X = 0$

(to mora vrijediti jer je portfelj replicirajući)

$V^H(1) = x S(1) + (PX - x S(0)) A(1) - X$

pretpostavka:

$PX > V^h(0)$

$V^h(0) = x S(0) + y \cdot 1$, odnosno:

$PX - x S(0) > y$

$\Rightarrow V^H(0) > 0$ postoji arbitraža

Propozicija (slajd 18)

$h = (x, y)$

$x = ?$ $y = ?$

$V^h(1) = X = f(x)$

g d

pretpostavka

$A(0) = 1$

$x S(1) + y(1+r) = x S(0)(1+g) + y(1+r) = f(g)$

$(1+r) = A(1)$

$S(1) = S(0)(1+g)$ / $(1+d)$

$x S(1) + y(1+r) = x S(0)(1+d) + y(1+r) = f(d)$

$PX(0; X) = V^h(0)$

$$\boxed{PX(0; X) = \frac{1}{1+r} E^*[X]}$$

diskontirana neutralna cijena

zadatak

uvijek najprije gledamo arbitražu

prva stvar : ne smije biti arbitraže !

$$d < r < g$$

a)

$$PX(0;X) = \frac{1}{1+r} E^*\big[\underbrace{PX(1;X)}_{X}\big] = \frac{1}{1+r} E^*[X]$$

$$X = \max\{K - S(1), 0\} = [K - S(1)]^+$$

$$= \begin{cases} [90 - \underbrace{S(0)(1+g)}_{150}]^+ \\ [90 - \underbrace{S(0)(1+d)}_{50}]^+ \end{cases} = \begin{cases} 0, g \\ 40, d \end{cases}$$

$$S(0) = \frac{1}{1+r} E^*[S(1)] \quad / (1+r)$$

$$\Rightarrow S(0)(1+r) = p^* \cdot 150 + (1-p^*) 50$$

$$p^* = 0.75$$

$$PX(0;X) = \frac{1}{1.25} E^*[X] = \frac{1}{1.25}\left(p^* \cdot 0 + (1-p^*) \cdot 40\right) = 8$$

b) $M = 7 < 8$ da!

$\quad ||$

$V^h(0)$

mogućnost arbitraže

prodam replicirajući portfelj $\Rightarrow$ kupimo opciju, i ostane $8-7$,

ostatak stavimo u banku

$$t = 0 : V^M(0) = 0$$

$$V^M(1) = \underbrace{-V^h(1)}_{=X} + \underbrace{PX(1;X)}_{=X} + \underbrace{1(1+r)}_{=A(1)} > 0$$

iz njega smo iskoristili arbitražu i ostvarili profit