

Elektromagnetska polja -skripta

Sadržaj

ELEKROSTATIKA

1. Uvod	1
2. Predstavljanje elektromagnetskih polja.....	2
2.1. Definicije polja E i B	2
3. Izvori polja	4
3.1. Makroskopski model vodljivog materijala.....	4
3.2. Gustoće naboja i struja	4
3.3. Jednadžba kontinuiteta	6
3.4. Singularne gustoće izvora	6
3.4.1. Gustoća plošnog naboja	6
3.4.2. Gustoća linijskog naboja	7
3.4.3. Točkasti naboј	8
3.4.4. Plošna struja	8
3.4.5. Linijska struja	9
4. Coulombov zakon	11
5. Jakost električnog polja.....	14
5.1. Električno polje skupine točkastih naboja.....	16
5.2. Električno polje kontinuiranih raspodjela naboja.....	17
5.2.1. Električno polje prostorne raspodjele naboja	17
5.2.2. Električno polje plošne raspodjele naboja.....	17
5.2.3. Električno polje linijske raspodjele naboja	18
5.3. Električni naboј i polje u vodiču	19
5.4. Silnice električnog polja.....	19
6. Materijali u električnom polju	22
6.1. Vodič u električnom polju	22
6.2. Izolator u električnom polju	23
6.2.1. Vektor električne indukcije i dielektričnost	25
6.2.2. Dielektrična čvrstoća	26
6.2.3. Linearnost, izotropnost i homogenost dielektričnog materijala	27
7. Električni tok	29
8. Gaussov zakon.....	31
8.1. Diferencijalni oblik Gaussovog zakona	33
9. Potencijal u električnom polju.....	35
9.1. Potencijalna energija naboja u električnom polju	35
9.2. Diferencijalni oblik zakona o konzervativnosti električnog polja	40
9.3. Električni potencijal	41
9.3.1. Potencijal točkastog naboja	41
9.3.2. Potencijal skupine točkastih naboja	42
9.3.3. Potencijal kontinuiranih raspodjela naboja	42
9.4. Razlika potencijala (napon).....	43
9.5. Veza između jakosti električnog polja i potencijala.....	44
9.6. Ekvipotencijalne plohe	47
9.7. Diferencijalna jednadžba potencijala	49
9.8. Jedinstvenost rješenja Poissonove i Laplaceove jednadžbe	50
10. Uvjeti na granici	53
10.1. Uvjeti na granici dva dielektrika	53
10.2. Uvjeti na granici vodič-dielektrik	55

11. Kapacitet i kondenzator.....	57
11.1. Kapacitet kondenzatora	58
11.2. Sustav vodiča i parcijalni kapaciteti	59
12. Energija statičkog električnog polja	63
12.1. Potencijalna energija sustava točkastog naboja.....	63
12.2. Potencijalna energija kontinuiranih raspodjela naboja.....	66
12.3. Energija prikazana preko veličina polja	67
12.4. Energija kondenzatora.....	68
13. Sile u statičkom električnom polju.....	70
13.1. Sila na površini nabijenog vodiča	70
13.2. Određivanje sila pomoću energije	71
14. Primjena metode odslikavanja u rješavanju statičkih električnih polja	74

MAGNETOSTATIKA

15. Vođenje električne struje u vodičima.....	76
15.1. Otpor i Ohmov zakon	76
15.2. Ponašanje vodiča u statičkim uvjetima	77
15.3. Analogija statičkoh strujnog polja i statičkog električnog polja	78
15.4. Uvjeti na granici dva vodiča.....	79
15.5. Odslikavanje na granici vodič-dielektrik	81
16. Magnetska sila na naboju u gibanju	84
16.1. Hallov učinak	84
17. Magnetska sila na vodič protjecan strujom	86
17.1. Magnetska sila i zakretni moment na strujnu petlju.....	87
18. Magnetski tok	89
19. Gaussov zakon.....	90
20. Biot-Savartov zakon	92
20.1. Magnetsko polje ravne duge strujnice.....	93
21. Ampéreov zakon kružnog protjecanja.....	94
21.1. Diferencijalni oblik Ampéreovog zakona	95
22. Materijali u magnetskom polju	97
22.1. Utjecaj magnetizacije na magnetsko polje	99
22.2. Podjela materijala	100
22.3. Linearnost, izotropnost i homogenost magnetskog materijala	104
23. Uvjeti na granici	106
23.1. Uvjeti na granici 2 magnetska materijala	106
23.2. Uvjeti na granici feromagnetski materijal – zrak	109
24. Magnetski krugovi.....	110
24.1. Rješavanje magnetskih krugova.....	112
24.1.1. Serijski magnetski krug	113
24.1.2. Paralelni magnetski krug	114
24.1.3. Magnetski krug sa zračnim rasporom	116
25. Vektorski magnetski potencijal	119
25.1. Diferencijalna jednadžba vektorskog magnetskog potencijala	120
25.2. Integralne jednadžbe vektorskog magnetskog potencijala	121
25.3. Slika statičkog magnetskog polja	122
26. Induktivitet i međuinduktivitet	123
26.1. Induktivitet	123
26.2. Međuinduktivitet	124

27. Energija statičkog magnetskog polja.....	128
27.1. Energija strujnice u statičkom magnetskom polju	128
27.2. Magnetska energija sustava strujnica	129
27.3. Magnetska energija prostorno raspodijeljene struje.....	130
27.4. Magnetska energija prikazana preko veličina polja	131
27.5. Magnetska energija strujnog kruga	134
27.6. Magnetska energija dva strujna kruga.....	134
28. Sile u statičkom magnetskom polju	136
28.1. Sila na vodič protjecan strujom	136
28.2. Određivanje sile pomoću energije.....	136
ELEKTRODINAMIKA	
29. Faradayev zakon elektromagnetske indukcije.....	139
29.1. Elektromagnetska indukcija u vodiču koji se giba u magnetskom polju ...	139
29.2. Polaritet inducirano napon i smjer inducirane struje(Lenzovo pravilo). .	142
29.3. Faradayev zakon elektromagnetske indukcije.....	143
29.4. Inducirani napon uslijed samoindukcije i međuindukcije	146
29.5. Diferencijalni oblik Faradayevog zakona	147
29.6. Inducirani napon u rotirajućoj vodljivoj petlji	147
29.7. Načelo rada transformatora	148
29.8. Vrtložne struje	150
MAXWELLOVE JEDNADŽBE	
30. Poopćenje Ampéreovog kružnog zakona	151
31. Energija u elektromagnetskom polju.....	155
31.1. Sile na naboje u gibanju	155
31.2. Energija i snaga predana nabojima u gibanju.....	156
31.3. Očuvanje elektromagnetske energije – Poyntingov teorem.....	157
31.4. Pohranjena elektromagnetska energija.....	161
31.5. Tok elektromagnetske energije. Poyntingov vektor.....	162
31.6. Potencijali u elektromagnetskim poljima.....	164
31.7. Integralno predstavljanje potencijala	166
31.8. Vremenski sinusno promjenjiva polja i fazorska notacija.....	169
31.9. Energija i snaga u sinusno promjenjivim poljima	170
ELEKTROMAGNETSKI VALOVI	
32. Uvod	172
33. Elektromagnetski valovi u sredstvima bez gubitaka	173
34. Elektromagnetski valovi u realnim dielektricima i vodičima	184
34.1. Površinski učinak	190

ELEKTROMAGNETSKA POLJA

1. UVOD

Elektromagnetska teorija polja je osnovna teorija koja opisuje sve pojave u elektrotehnici. Temelji se na eksperimentalno utvrđenim zakonima, koji su kasnije uobličeni u jedinstvenu teoriju elektromagnetskih polja:

- Coulombov zakon za silu između nabijenih tijela (1785. g.)
- Biot-Savartov zakon za magnetsku indukciju proizvedenu strujom (1820. g.)
- Ohmov zakon za vođenje struje kroz vodiče (1826. g.)
- Ampèreov zakon kružnog protjecanja za statička magnetska polja (1820. g.)
- Faradayev zakon elektromagnetske indukcije (1831. g.)
- Kirchhoffovi zakoni za strujno-naponske odnose u strujnim krugovima (1847. g.)

Sve ove zakone Maxwell je 1862. g. uobliočio u jedinstvenu teoriju elektromagnetskih polja opisanu u Maxwellovim jednadžbama. To je tzv. *klasična teorija elektromagnetskih polja* koja matematički opisuje *makroskopske* elektromagnetske pojave, povezujući ih s *nabojima* i *strujama* kao *izvorima* elektromagnetskih polja, potpuno primjenjiva za rješavanje inženjerskih zadaća. Prema tome, teorija elektromagnetskih polja nije hipotetska, već je utemeljena na prirodnim, eksperimentalno potvrđenim zakonima.

U okviru klasične elektromagnetske teorije razmatraju se sljedeća zasebna područja:

- Elektrostatika: razmatraju se električne pojave proizvedene mirujućim nabojima kao izvorima električnog polja
- Magnetostatika: razmatraju se magnetske pojave proizvedene istosmjernim strujama nepromjenjivim u vremenu kao izvorima magnetskog polja
- Elektromagnetizam: razmatra se jedinstveno vremenski promjenjivo elektromagnetsko polje.

2. PREDSTAVLJANJE ELEKTROMAGNETSKIH POLJA

Polje je skup vrijednosti pridruženih svakoj točki prostora u danom području, koji opisuje neko stanje. Ako je vrijednost skalarna fizikalna veličina, onda kažemo da se radi o *skalarnom polju*, a ako je vrijednost vektorska veličina onda kažemo da se radi o *vektorskem polju*. Dakle, skalarno ili vektorsko polje funkcije su koordinata prostora, a ako im se veličina još pri tome vremenski mijenja, onda su ta polja još i funkcije vremena.

2.1. Definicije polja E i B

Sile opažene u elektromagnetskim pokusima pripisuјemo postojanju električnog naboja i njegovom gibanju (električna struja). Raspodjelu naboja i njihovo gibanje u prostoru možemo promatrati kao *uzrok* ili *izvor*, a opaženu silu kao *posljedicu* ili *učinak*. Postojanje naboja i njegovo gibanje stvaraju elektromagnetsko polje u prostoru. Brojni pokusi s elektromagnetskim silama pokazuju slaganje s nekoliko temeljnih postulata:

Postojanje električnog naboja

Prema atomsko-elektronskoj teoriji elektriciteta postoje dvije vrste električnih naboja: *pozitivni* (vezani uz protone) i *negativni* (vezani uz elektrone). Svi su naboji u prirodi cjelobrojni višekratnici naboja elektrona (*elementarni naboј*) iznosa $1,602 \cdot 10^{-19}$ C.

Očuvanje električnog naboja

U svakom izoliranom sustavu algebarska suma naboja je konstantna. Naboј ne može niti nastati niti nestati. Ovaj postulat uvodi naboј kao temeljnu fizikalnu veličinu u elektromagnetskoj teoriji.

Zakon Lorentzove sile

Elektromagnetsku silu na ispitni naboј koji se nalazi u zadanoj točki u prostoru može se izraziti pomoću veličina elektromagnetskog polja u toј točki.

Ukupna sila \mathbf{F} na točkasti naboј q koji se giba brzinom v iznosi:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (2.1)$$

Jednadžba (2.1) je jednadžba *Lorentzove sile* na naboј u elektromagnetskom polju čije djelovanje je opisano s dva vektorska polja: *jakost električnog polja E* i *magnetska indukcija B* . Ova jednadžba je definicijska relacija za ova dva vektorska polja.

Iz jednadžbe za Lorentzovu silu (2.1) slijedi definicija za jakost električnog polja E :

$$\mathbf{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \left[\frac{\mathbf{F}}{q} \right] ; \quad \mathbf{v} = 0 \quad (2.2)$$

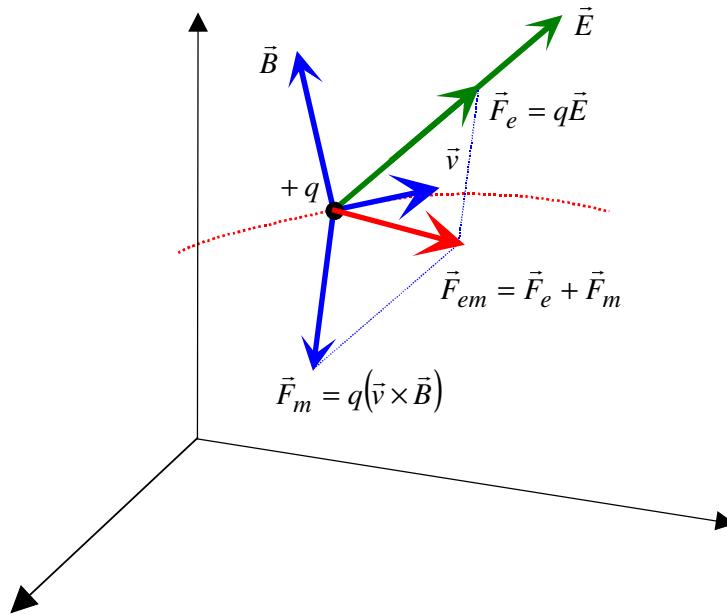
Jakost električnog polja E (V/m) omjer je sile na naboј u mirovanju ($v = 0$) i iznosa naboja q . Pri tome je potrebno da ispitni naboј q bude nabijena čestica vrlo malih dimenzija (najbolje bi bilo točka) kako bi se mjerilo polje u točki prostora. Nadalje se još postavlja uvjet da je iznos ispitnog naboja što je moguće manji ($q \rightarrow 0$) kako unošenje ispitnog naboja ne bi mijenjalo polje koje se mjeri.

Nakon što se odredi jakost električnog polja, naboj je potrebno gibati brzinom v i nakon što se od ukupne izmjerene sile odbije sila električnog polja $q \cdot \vec{E}$ odredi se magnetska indukcija \vec{B} :

$$\vec{v} \times \vec{B} = \frac{1}{q} (\vec{F} - q \cdot \vec{E}) \quad (2.3)$$

Jedinica za magnetsku indukciju je $1\text{T}=1\text{Wb/m}^2$.

Ovo je definicijski postupak za određivanje magnetske indukcije. Praktična mjerena magnetska indukcija obavljaju se drugim postupcima.



Slika 2.1. Lorentzova sila na električni naboj

3. IZVORI POLJA: NABOJI I STRUJE

Obrađivat ćemo *makroskopsku teoriju klasičnog elektromagnetizma* u kojoj se razmatra elektromagnetsko polje unutar vremenskih intervala i dijelova prostora koji su veliki u odnosu na atomska mjerila, tj. razmatraju se prosječne vrijednosti elektromagnetskog polja uslijed učinaka velikog broja atoma. U makroskopskom pristupu kao izvori elektromagnetskog polja uzimaju se tzv. „*glatke*“ razdiobe naboja i struja, koje su kontinuirane funkcije koordinata prostora i vremena. Električni naboji i njihovo uređeno gibanje koje tvori električnu struju su primarni izvori elektromagnetskog polja, a kako je naboј uvek udružen s materijom, onda je nabijena materija primarni izvor elektromagnetskog polja. Analiza elektromagnetskih polja u međuatomskim prostorima spada u područje tzv. *mikroskopske odnosno kvantne teorije polja*.

3.1. Makroskopski model vodljivog materijala

Materijale možemo klasificirati kao *vodiče, poluvodiče i izolatore*, ovisno o njihovu odzivu na narinuto električno polje. Prema klasičnom planetarnom modelu atom se sastoji iz čvrsto vezane, pozitivno nabijene jezgre, okružene difuznim elektronskim oblakom koji ima jednaku količinu negativnog naboja. Većina elektrona je također čvrsto vezana za jezgru pa ih nazivamo *vezani elektroni*. Ti vezani elektroni mogu se pomicati, ali ne i napušati matični atom pod djelovanjem električnog polja. Osim vezanih elektrona, atomi posjeduju i tzv. *slobodne elektrone* (elektroni iz vanjskih elektronskih ljudski) koji su stalno u stanju neuređenog termičkog gibanja, napuštajući matični atom i seleći se u drugi. Ako nije narinuto vanjsko električno polje njihovo gibanje je potpuno nasumično i u globalu se poništava. Ako se narine električno polje, onda će se pod djelovanjem Coulombove sile pojaviti dodatna brzina koja se superponira na nasumična gibanja i prouzrokuje strujanje slobodnih elektrona u smjeru suprotnom od smjera električnog polja. Taj proces nazivamo *vođenjem struje*, a materijale u kojima veliki broj slobodnih elektrona može sudjelovati u vođenju struje nazivamo *električnim vodičima*. U nekim materijalima samo mali ili zanemariv broj slobodnih elektrona može sudjelovati u vođenju pa ih nazivamo *dielektričnim materijalima* ili *izolatorima*. Za njih je pod djelovanjem narinutog električnog polja karakterističan tzv. proces *polarizacije*. Posebna vrsta materijala su tzv. poluvodiči u kojima se vođenje struje u materijalu događa seljenjem vanjskih elektrona, odnosno „*šupljina*“ u susjedne atome dodanih „nečistoća“ drugog materijala, čime se popunjavaju tzv. kovalentne veze.

3.2. Gustoće naboja i struja

Gustoća naboja u nekoj točki prostora definira se kao:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{dQ}{dV} \quad (3.1)$$

Gustoća naboja mjeri se u (C/m³).

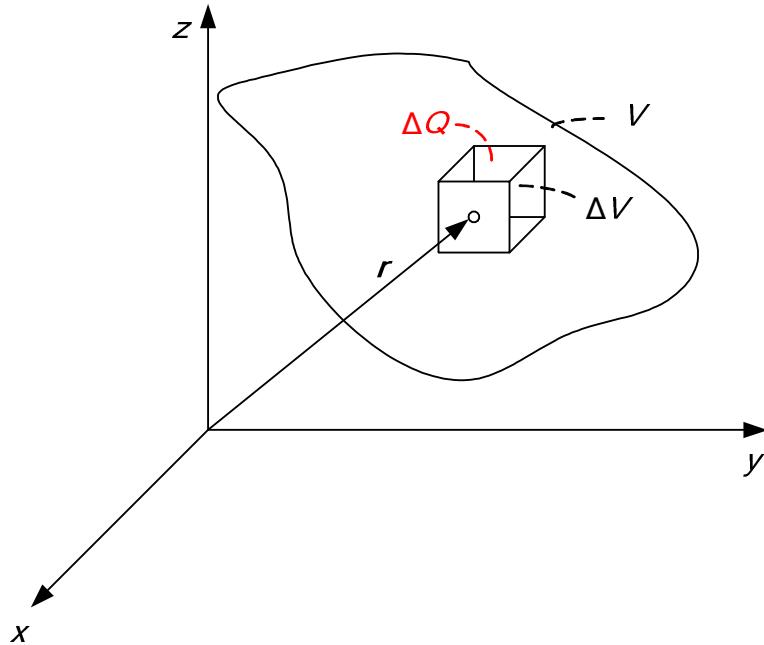
Količina naboja u zatvorenom prostoru volumena V je:

$$Q(t) = \int_V \rho(\mathbf{r}, t) dV \quad (3.2)$$

Jakost struje prema definiciji je:

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} \quad (3.3)$$

Jakost struje mjeri se u (A). Dogovorno je definirano da je pozitivan predznak za struju koja teče u smjeru gibanja pozitivnih naboja.



Slika 3.1. Uz definiciju gustoće prostornog naboja ρ

Gustoća struje koja teče okomito kroz element površine ΔS je:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{a}_v \left[\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta S} \right] = \mathbf{a}_v \frac{dI}{dS} \quad (3.4)$$

gdje je \mathbf{a}_v jedinični vektor u smjeru gibanja pozitivnog naboja. Gustoća struje mjeri se u (A/m^2).

Za *kondukcijske* struje koje su rezultat strujanja elektrona i/ili iona u metalima, poluvodičima, elektrolitskim otopinama i plinovitim plazmama, gustoća struje ne ovisi o ukupnoj gustoći naboja ρ već je izravno proporcionalna jakosti električnog polja \mathbf{E} prema *Ohmovom zakonu*:

$$\mathbf{J} = \kappa \cdot \mathbf{E} \quad (3.5)$$

gdje je κ električna provodnost (S/m) materijala.

Struja koja prolazi kroz plohu S , na kojoj je normala \mathbf{n} je:

$$I(t) = \int_S \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} \cdot dS \quad (3.6)$$

3.3. Jednadžba kontinuiteta

U svim fizikalnim pokusima opaženo je da je ukupni naboј uвijek očuvan па je *postulat o očuvanju električnog naboјa* jedan od temeljnih postulata teorijske fizike. On utvrđuje da je tok električnog naboјa (struja) I iz zatvorenog konačnog prostora volumena V koјег obrubljuje ploha S jednak iznosu smanjenja naboјa Q unutar tog prostora:

$$\begin{aligned} I &= -\frac{dQ}{dt} \\ \oint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \cdot dS &= -\frac{d}{dt} \int_V \rho \cdot dV \end{aligned} \quad (3.7)$$

gdje je \mathbf{n} normala na plohu S . Ova parcijalna diferencijalna jednadžba naziva se *jednadžba kontinuiteta*.

Primjeni li se Gaussov teorem:

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \cdot dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} \cdot dV$$

dobije se diferencijalni oblik jednadžbe kontinuiteta:

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = \nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (3.8)$$

3.4. Singularne gustoće izvora

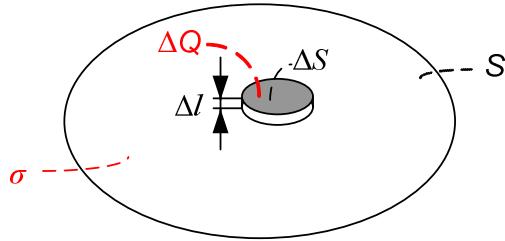
Sva fizikalna polja u prirodi su konačna i kontinuirana, stvorena izvorima čije su prostorene gustoće također uвijek konačne. U približnoj, makroskopskoj teoriji polja često je matematički pogodno stvarne prostorne gustoće naboјa i struja kao izvora polja idealizirano predstaviti u obliku plošnih ili linijskih gustoća, odnosno kao izvore koncentrirane u točku. Takve idealizacije rezultiraju u beskonačnoj, tj. *singularnoj* prostornoj gustoći naboјa i struja. Te nestvarne gustoće izvora proizvode diskontinuirana, a u nekim slučajevima i beskonačna polja. Stoga idealizaciju stvarnih raspodjela naboјa i struja singularnim gustoćama, koja nam omogućava potrebnu matematičku jednostavnost, treba sprovoditi s oprezom.

3.4.1. Gustoća plošnog naboјa

Plošni naboј je naboј raspodijeljen u sloju debljine nula, pa je njegova gustoća σ na plohi S :

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} = \frac{dQ}{dS} \quad (3.9)$$

Gustoća plošnog naboјa mjeri se u (C/m^2) .

Slika 3.2. Uz definiciju gustoće plošnog naboja σ

Zamislimo vrlo mali valjak volumena $\Delta V = \Delta S \cdot \Delta l$ gdje je ΔS površina baze a Δl visina u kojem je naboј prostorne gustoće ρ . Ako smanjujemo visinu valjka Δl , valjak će degenerirati u plošni element površine ΔS , zbog čega će gustoća prostornog naboja ρ postati beskonačna (tj. singularna):

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\rho \cdot \Delta S \cdot \Delta l}{\Delta S} = \lim_{\substack{\rho \rightarrow \infty \\ \Delta l \rightarrow 0}} (\rho \cdot \Delta l) \quad (3.10)$$

Ukupna količina naboja na plohi S je:

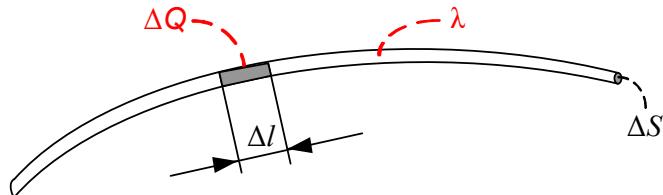
$$Q = \int_S \sigma \, dS \quad (3.11)$$

3.4.2. Gustoća linijskog naboja

Za nabijene vodiče velike duljine a zanemarivog poprečnog presjeka pogodno je uvesti pojам gustoće *linijskog naboja*. Linijski naboј je naboј raspodijeljen po presjeku debljine nula, pa je njegova gustoća λ na liniji l :

$$\lambda = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta l} = \frac{dQ}{dl} \quad (3.12)$$

Gustoća linijskog naboja mjeri se u (C/m).

Slika 3.3. Uz definiciju gustoće linijskog naboja λ

Zamislimo vrlo mali valjak volumena $\Delta V = \Delta S \cdot \Delta l$ gdje je ΔS površina baze a Δl visina u kojem je naboј prostorne gustoće ρ . Ako smanjujemo površinu valjka ΔS , valjak će degenerirati u linijski element duljine Δl , zbog čega će gustoća prostornog naboja ρ postati beskonačna (tj. singularna):

$$\lambda = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\rho \cdot \Delta S \cdot \Delta l}{\Delta l} = \lim_{\substack{\rho \rightarrow \infty \\ \Delta S \rightarrow 0}} (\rho \cdot \Delta S) \quad (3.13)$$

Ukupna količina naboja na liniji (duljini) l je:

$$Q = \int_l \lambda \, dl \quad (3.14)$$

3.4.3. Točkasti naboј

Na velikim udaljenostima od prostorno raspoređenog naboja čiji ukupni iznos je $q \neq 0$ polje se može pripisati *točkastom* naboju q smještenom u središte raspodjele naboja \mathbf{r}' . Takva idealizacija rezultira u beskonačnoj, tj. singularnoj gustoći naboja u točki \mathbf{r}' pa se pomoću Diracove δ funkcije koja je definirana kao:

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') &= 0 & \mathbf{r} \neq \mathbf{r}' \\ \int_V \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot dV &= 1 & \mathbf{r} \in V \\ \int_V \Psi(\mathbf{r}) \cdot \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot dV &= \begin{cases} \Psi(\mathbf{r}') & \mathbf{r}' \in V \\ 0 & \mathbf{r}' \notin V \end{cases} \end{aligned}$$

može izraziti kao:

$$\rho(\mathbf{r}) = q \cdot \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (3.15)$$

a ukupni naboј je:

$$\int_V \rho(\mathbf{r}) \cdot dV = \int_V q \cdot \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot dV = q \quad (3.16)$$

Ovakve izvore čije su gustoće predstavljene impulsima oblika Diracove funkcije nazivamo *diskretnim*, odnosno *točkastim* izvorima.

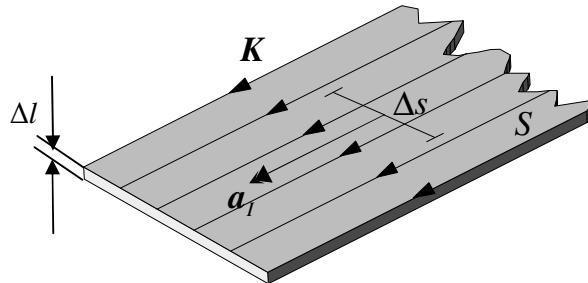
3.4.4. Plošna struja

Plošna struja (strujni oblog) je struja koja teče duž plošnog sloja debljine nula. Gustoća plošne struje \mathbf{K} na plohi S je:

$$\mathbf{K} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left(\mathbf{a}_I \frac{\Delta I}{\Delta s} \right) = \mathbf{a}_I \frac{dI}{ds} \quad (3.17)$$

gdje je ΔI iznos struje koja teče kroz element duljine Δs postavljen okomito na tok struje ΔI , a \mathbf{a}_I je jedinični vektor u smjeru toka struje. Gustoća plošne struje mjeri se u (A/m). Ako je debljina sloja u kojem teče struja Δl onda je iznos struje $\Delta I = J \cdot \Delta l \cdot \Delta s$ pa će gustoća struje J postati beskonačna (tj. singularna):

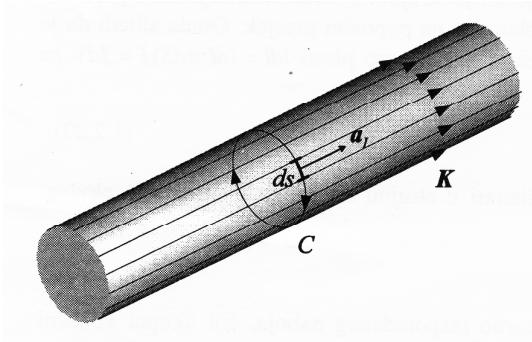
$$\mathbf{K} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left(\mathbf{a}_I \frac{\Delta I}{\Delta s} \right) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left(\frac{\mathbf{J} \cdot \Delta s \cdot \Delta l}{\Delta s} \right) = \lim_{\substack{J \rightarrow \infty \\ \Delta l \rightarrow 0}} (\mathbf{J} \cdot \Delta l) \quad (3.18)$$



Slika 3.4. Uz definiciju plošne struje

Ukupna struja koja teče vodičem po njegovom opsegu c je:

$$I = \oint_c (\mathbf{K} \cdot \mathbf{a}_I) \cdot d\mathbf{s} \quad (3.19)$$

Slika 3.5. Ukupna struja vodiča protjecanog plošnom strujom \mathbf{K}

3.4.5. Linijska struja

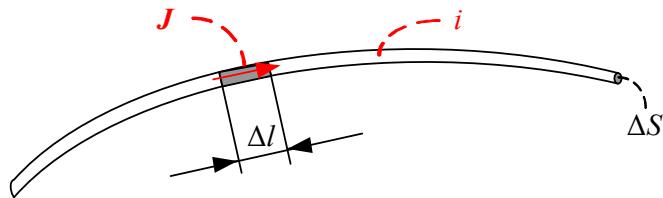
Ako vodičem velike duljine a zanemarivog poprečnog presjeka teče struja pogodno je uvesti pojam *linijske struje* ili *strujnice*. Linijska struja mjeri se u (A).

Zamislimo vrlo mali valjak volumena $\Delta V = \Delta S \cdot \Delta l$ gdje je ΔS površina baze a Δl visina u kojem je struja prostorne gustoće \mathbf{J} . Kroz valjak teče struja gustoće $J = J \Delta l / \Delta l$, gdje je smjer struje vektorski pridijeljen Δl . Struja kroz poprečni presjek ΔS je $i = \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \cdot \Delta S$ gdje je \mathbf{n} vektor okomice na poprečni presjek ΔS u smjeru struje. Slijedi:

$$\begin{aligned} i \cdot \Delta l &= (\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \cdot \Delta S) \cdot \Delta l = (\Delta l \cdot \mathbf{n} \cdot \Delta S) \cdot \mathbf{J} = \mathbf{J} \cdot \Delta V \\ i \cdot d\mathbf{l} &= \mathbf{J} \cdot dV \end{aligned} \quad (3.20)$$

Ako smanjujemo površinu valjka ΔS , valjak će degenerirati u linijski element dužine Δl , zbog čega će gustoća prostorne struje J postati beskonačna (tj. singularna):

$$i = \lim_{\substack{\mathbf{J} \rightarrow \infty \\ \Delta S \rightarrow 0}} (\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \cdot \Delta S) \quad (3.21)$$



Slika 3.6. Uz definiciju linijске struje i

4. COULOMBOV ZAKON

Još su stari Grci, najmanje 600 g. prije nove ere, poznavali djelovanje statičkog elektriciteta pa i naziv *elektricitet* potječe iz njihovog naziva za jantar, budići su ustanovili da se trljanjem jantara privlače sitne čestice vune. Nakon toga tek se 1600. g. engleski fizičar Gilbert ponovno bavio sličnim pokusima.

Nakon njega, 1785. g. francuski vojni inženjer Charles Coulomb je proveo niz pokusa na posebno konstruiranoj torzionoj vazi u namjeri da precizno utvrdi silu između tijela nabijenih statičkim elektricitetom. Coulomb je ustanovio da je sila između dva vrlo mala nabijena tijela koja se nalaze u vakuumu (praznom prostoru) na udaljenosti koja je puno veća od dimenzija tijela proporcionalna naboju na svakom od tijela i obrnuto proporcionalna kvadratu udaljenosti između tijela. Iznos sile koju je izmjerio Coulomb (*Coulombov zakon*) je:

$$F = k \frac{Q_1 \cdot Q_2}{R^2} \quad (4.1)$$

gdje su Q_1 i Q_2 iznosi naboja na tijelima, R je njihova udaljenost a k je konstanta proporcionalnosti. U međunarodnom sustavu mjera konstanta proporcionalnosti iznosi:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad (4.2)$$

gdje je ϵ_0 dielektrična konstanta praznog prostora iznosa:

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \approx \frac{10^{-9}}{36\pi} \quad \text{As/Vm} = \text{F/m} \quad (4.3)$$

Coulombov zakon se onda može pisati:

$$F = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi\epsilon_0 \cdot R^2} \quad (4.4)$$

Po svojem obliku Coulombov zakon je sličan Newtonovom zakonu gravitacije.

U svojim pokusima Coulomb je također ustanovio da sila djeluje uzduž spojnica nabijenih tijela i da je privlačna ako su naboji raznoimeni, a odbojna ako su naboji istoimeni. Da bi se definirao vektorski karakter sile, označimo vektorom položaja (radijus vektorom) \mathbf{r}_1 položaj naboja Q_1 i vektorom položaja \mathbf{r}_2 položaj naboja Q_2 u prostoru. Vektor udaljenosti između naboja Q_1 i Q_2 usmjeren od naboja Q_1 prema naboju Q_2 je $\mathbf{R}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. Sila kojom naboj Q_1 djeluje na naboj Q_2 je:

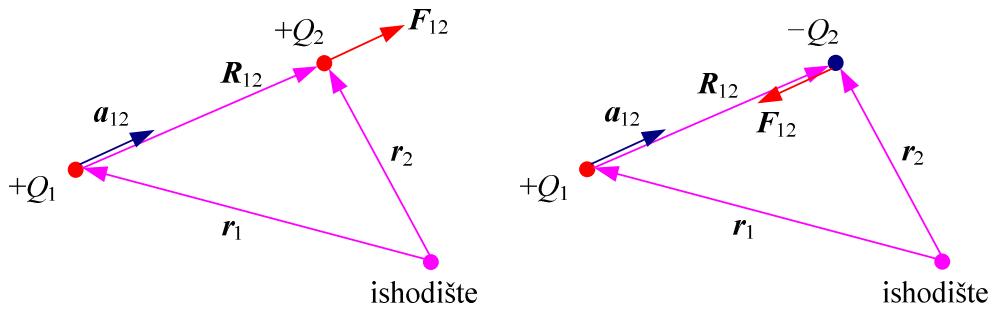
$$\mathbf{F}_{12} = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi\epsilon_0 \cdot R_{12}^2} \mathbf{a}_{12} \quad (4.5)$$

gdje je \mathbf{a}_{12} jedinični vektor u smjeru vektora udaljenosti \mathbf{R}_{12} :

$$\mathbf{a}_{12} = \frac{\mathbf{R}_{12}}{|\mathbf{R}_{12}|} = \frac{\mathbf{R}_{12}}{R_{12}} = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \quad (4.6)$$

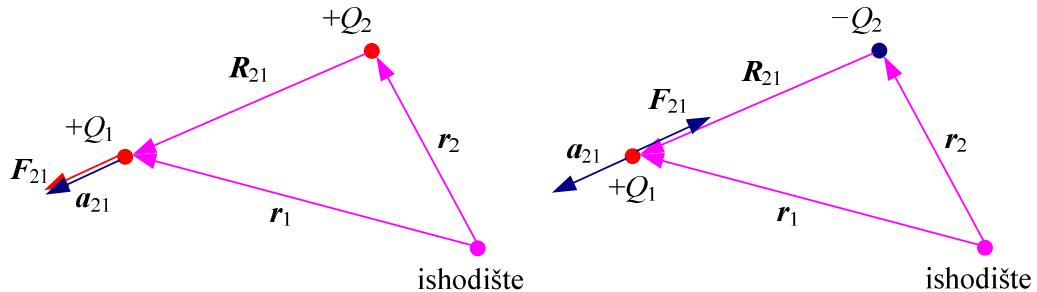
odnosno, sila se može izraziti i kao:

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi\epsilon_0 \cdot R_{12}^3} \mathbf{R}_{12} \quad (4.7)$$



Slika 4.1. Sila kojom naboj Q_1 djeluje na naboj Q_2

Naboj Q_2 također djeluje silom na naboj Q_1 . Vektor udaljenosti između naboja Q_1 i Q_2 usmjeren od naboja Q_2 prema naboju Q_1 je $\mathbf{R}_{21} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$.



Slika 4.2. Sila kojom naboj Q_2 djeluje na naboj Q_1

Sila kojom naboj Q_2 djeluje na naboj Q_1 je:

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi\epsilon_0 \cdot R_{21}^2} \mathbf{a}_{21} = -\frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi\epsilon_0 \cdot R_{21}^2} \mathbf{a}_{12} = -\mathbf{F}_{12} \quad (4.8)$$

gdje je \mathbf{a}_{21} jedinični vektor u smjeru vektora udaljenosti \mathbf{R}_{21} :

$$\mathbf{a}_{21} = \frac{\mathbf{R}_{21}}{|\mathbf{R}_{21}|} = \frac{\mathbf{R}_{21}}{R_{21}} = \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = -\mathbf{a}_{12} \quad \text{jer je: } R_{21} = R_{12} \quad (4.9)$$

Coulombov zakon je linearan: ako n puta uvećamo naboj Q_1 sila na naboj Q_2 će se n puta uvećati. Za izračun ukupne sile kojom skupina naboja djeluje na promatrani naboj

primjenjujemo *načelo superpozicije*: ukupna sila na promatrani naboј *vektorski je zbroј* sila pojedinih naboјa na promatrani naboј.

Coulombov zakon je temeljni zakon elektrostatike, tj. međusobnog djelovanja naboјa koji su u mirovanju. Elektrostatička sila definirana Coulombovim zakonom određuje strukturu materije. Sila između pozitivnih protona u jezgri i negativnih elektrona u elektronskim ljkuskama je privlačna, ali je uravnotežena centrifugalnom silom kružnog gibanja elektrona oko jezgre, pa se elektroni ne mogu „zalijepiti“ za jezgru. U jezgri je odbojna sila između pozitivnih protona uravnotežena snažnim nuklearnim privlačnim silama koje drže jezgru na okupu.

5. JAKOST ELEKTRIČNOG POLJA

Ako jedan od dva naboja, npr. naboj Q_1 držimo fiksnim a drugi naboj Q_2 lagano pomjeramo u okolišu naboja Q_1 primjetićemo da u svakoj točki naboja Q_1 djeluje silom na naboja Q_2 . Drugim riječima, naboja Q_2 ukazuje na postojanje *polja sila* koje stvara naboja Q_1 . Nazovimo naboja Q_2 pokušnim nabojem Q_p pa je sila na njega prema Coulombovu zakonu:

$$\mathbf{F}_{1p} = \frac{Q_1 \cdot Q_p}{4\pi\epsilon_0 \cdot R_{1p}^2} \mathbf{a}_{1p} \quad (5.1)$$

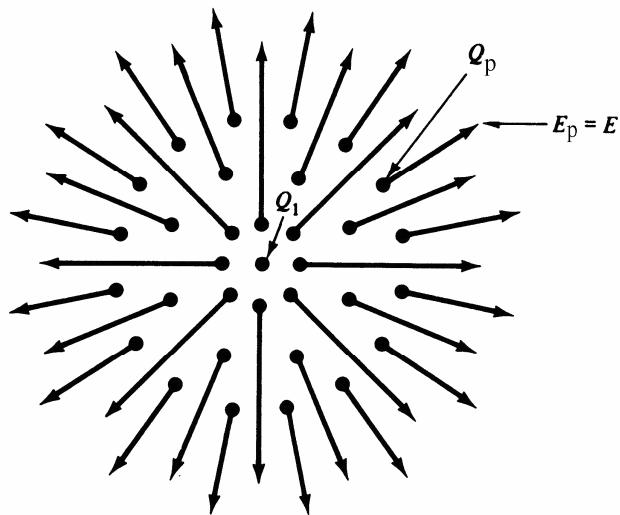
Izrazimo tu silu po jedinici naboja:

$$\frac{\mathbf{F}_{1p}}{Q_p} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 \cdot R_{1p}^2} \mathbf{a}_{1p} \quad (5.2)$$

Veličina na desnoj strani funkcija je samo naboja Q_1 i vektora udaljenosti od naboja Q_1 do pokušnog naboja Q_p . Ona dakle opisuje *vektorsko polje* čiju veličinu nazivamo *jakost električnog polja* E :

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}_{1p}}{Q_p} \quad (5.3)$$

Jakost električnog polja definiramo kao silu na jedinični naboju. Mjeri se u (N/C=V/m). Jednadžba (5.3) je definicijska relacija za jakost električnog polja i u skladu je s jednadžbom (2.2) iz *Lorentzove sile*. *Električno polje* možemo opisati kao pobjuđeno stanje prostora u okolišu mirujućih naboja u kojem se osjeća djelovanje električne, Coulombove sile na mirujući pokušni naboje.



Slika 5.1. Grafički prikaz određivanja jakosti električnog polja pokušnim nabojem Q_p

Iz relacija (5.2) i (5.3) slijedi izraz za jakost električnog polja proizvedenog jednim točkastim nabojem Q_1 u vakuumu:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_{1p}^2} \mathbf{a}_{1p} \quad (5.4)$$

Označimo s R duljinu vektora udaljenosti \mathbf{R} od točke u kojoj se nalazi točkasti naboј Q do točke u kojoj izračunavamo jakost električnog polja \mathbf{E} i s \mathbf{a}_R jedinični vektor od \mathbf{R} . Jakost električnog polja je onda:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{a}_R \quad (5.5)$$

Ako točkasti naboј Q postavimo u središte sfernog koordinatnog sustava tada jedinični vektor \mathbf{a}_R postaje radijalni jedinični vektor \mathbf{a}_r a udaljenost R postaje r -koordinata u sfernom koordinatnom sustavu, pa je jakost električnog polja:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r \quad (5.6)$$

U pravocrtnom koordinatnom sustavu vrijedi:

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} = \mathbf{a}_x x + \mathbf{a}_y y + \mathbf{a}_z z ; \quad R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\mathbf{a}_r = \frac{\mathbf{a}_x x + \mathbf{a}_y y + \mathbf{a}_z z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

pa jakost električnog polja ima sve tri komponente:

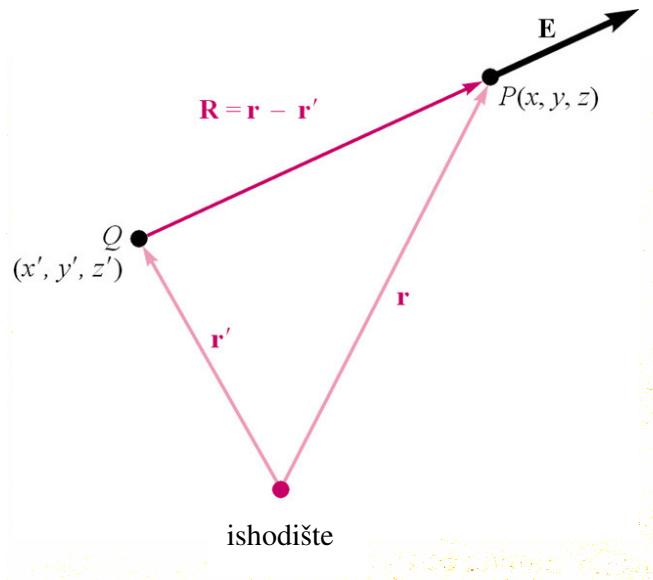
$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)} \left(\mathbf{a}_x \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \mathbf{a}_y \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \mathbf{a}_z \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \quad (5.7)$$

Ako je naboј Q smješten u proizvoljnoj točki $Q(x', y', z')$ određenoj s vektorom položaja \mathbf{r}' a točka u kojoj izračunavamo polje je $P(x, y, z)$, određena s vektorom položaja \mathbf{r} tada je vektor udaljenosti $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{a}_x x' + \mathbf{a}_y y' + \mathbf{a}_z z' ; \quad \mathbf{r} = \mathbf{a}_x x + \mathbf{a}_y y + \mathbf{a}_z z \\ \mathbf{R} &= \mathbf{r} - \mathbf{r}' = \mathbf{a}_x (x - x') + \mathbf{a}_y (y - y') + \mathbf{a}_z (z - z') \\ R &= \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \end{aligned}$$

a jakost električnog polja je:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{a}_R = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \frac{\mathbf{R}}{R} = \frac{QR}{4\pi\epsilon_0 R^3} \\ \mathbf{E} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')]^{3/2}} [\mathbf{a}_x (x - x') + \mathbf{a}_y (y - y') + \mathbf{a}_z (z - z')] \end{aligned} \quad (5.8)$$

Slika 5.2. Jakost električnog polja točkastog naboja Q smještenog u proizvoljnoj točki

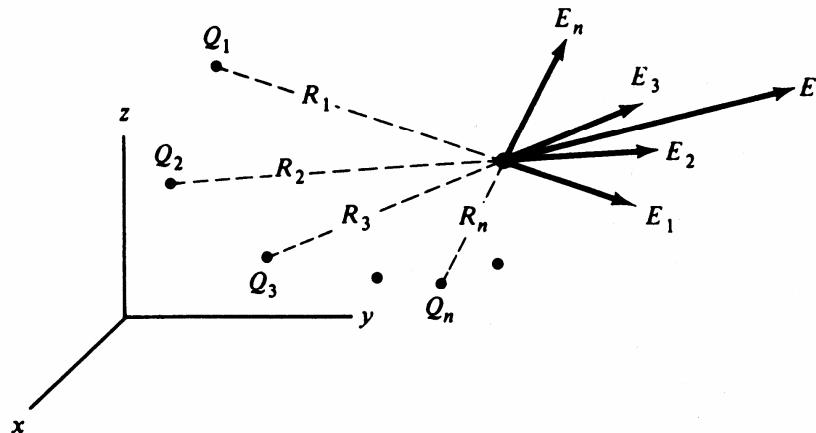
5.1. Električno polje skupine točkastih naboja

Zbog linearnosti, ukupnu jakost električnog polja koju u točki prostora $P(\mathbf{r})$ stvara skupina od n točkastih naboja Q_i čiji položaji u prostoru su određeni vektorima položaja \mathbf{r}'_i , određujemo primjenjujući načelo superpozicije kao *vektorski zbroj* jakosti polja pojedinih naboja u promatranoj točki:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 R_i^2} \mathbf{a}_{R_i} = \sum_{i=1}^n \frac{Q_i \mathbf{R}_i}{4\pi\epsilon_0 R_i^3} \quad (5.9)$$

gdje su vektori udaljenosti točke $P(\mathbf{r})$ od pojedinih naboja:

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{r} - \mathbf{r}'_i$$



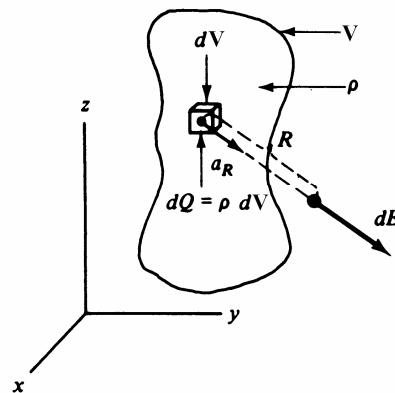
Slika 5.3. Jakost električnog polja skupine točkastih naboja

5.2. Električno polje kontinuiranih raspodjela naboja

Jakost električnog polja kontinuiranih raspodjela naboja: prostorne ρ , plošne σ ili linijske λ , izračunavamo također primjenjujući načelo superpozicije.

5.2.1.1. Električno polje prostorne raspodjele naboja

Ako je naboј raspodijeljen unutar volumena V sa zadanom prostornom gustoćom ρ , diferencijalno mali volumen dV u kojem se nalazi diferencijalna količina naboja $dQ = \rho \cdot dV$ smatramo točkastim nabojem kojemu je jakost električnog polja određena s (5.5).



Slika 5.4. Jakost električnog polja prostornog naboja

Ukupnu jakost električnog polja izračunavamo „zbrajanjem“ doprinosa tih diferencijalnih naboja dQ . Kako se ovdje radi o kontinuiranoj raspodjeli naboja, umjesto vektorske sumacije koju sprovodimo kod skupine diskretnih točkastih naboja (5.9), ovdje je potrebno sprovesti integraciju po volumenu V . Vektor udaljenosti točke $P(\mathbf{r})$ u kojoj izračunavamo jakost polja stvorenog diferencijalnim nabojem dQ u diferencijalnom volumenu dV , čiji položaj je određen vektorom položaja \mathbf{r}' , iznosi $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Jakost električnog polja je:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_V \frac{dQ \cdot \mathbf{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3} = \int_V \frac{\rho \cdot dV \cdot \mathbf{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho \cdot dV \cdot \mathbf{R}}{R^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho \cdot dV \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (5.10)$$

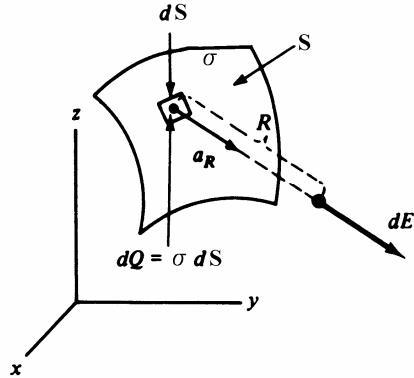
Kod primjene izraza (5.10) potrebno je voditi računa o tome da je vektor položaja diferencijalnog naboja \mathbf{r}' i vektor udaljenosti \mathbf{R} potrebno iskazati kao funkcije prostornih koordinata u odgovarajućem koordinatnom sustavu, te da se integral iz (5.10) rastavi na komponente jakosti polja po koordinatnim osima.

5.2.1.2. Električno polje plošne raspodjele naboja

Ako je naboј raspodijeljen po površini S sa zadanom plošnom gustoćom σ , diferencijalno malu površinu dS na kojoj se nalazi diferencijalna količina naboja $dQ = \sigma \cdot dS$ smatramo točkastim nabojem kojemu je jakost električnog polja određena s (5.5). Ukupnu jakost električnog polja izračunavamo „zbrajanjem“ doprinosa tih diferencijalnih naboja dQ . Kako se ovdje radi o kontinuiranoj raspodjeli naboja, također je potrebno sprovesti integraciju po površini S . Vektor udaljenosti točke $P(\mathbf{r})$ u kojoj izračunavamo jakost polja stvorenog

diferencijalnim nabojem dQ na diferencijalnoj površini dS , čiji položaj je određen vektorom položaja \mathbf{r}' iznosi $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Jakost električnog polja je:

$$E(\mathbf{r}) = \int_S \frac{dQ \cdot \mathbf{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3} = \int_S \frac{\sigma \cdot dS \cdot \mathbf{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma \cdot dS \cdot \mathbf{R}}{R^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \sigma \cdot dS \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (5.11)$$

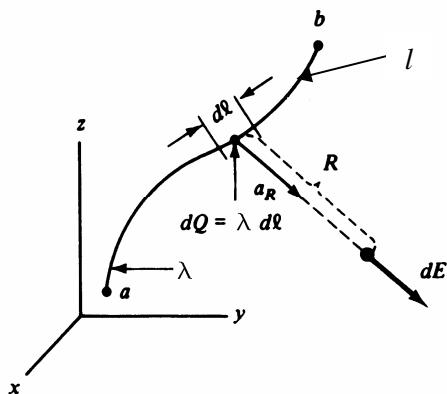


Slika 5.5. Jakost električnog polja plošnog naboja

Kod primjene izraza (5.11) također je potrebno voditi računa o tome da je vektor položaja diferencijalnog naboja \mathbf{r}' i vektor udaljenosti \mathbf{R} potrebno iskazati kao funkcije prostornih koordinata u odgovarajućem koordinatnom sustavu, te da se integral iz (5.11) rastavi na komponente jakosti polja po koordinatnim osima.

5.2.1.3. Električno polje linijske raspodjele naboja

Ako je naboje raspodijeljen po liniji l sa zadanom linijskom gustoćom λ , diferencijalno malu dužinu dl na kojoj se nalazi diferencijalna količina naboja $dQ = \lambda \cdot dl$ smatramo točkastim nabojem kojemu je jakost električnog polja određena s (5.5).



Slika 5.6. Jakost električnog polja linijskog naboja

Ukupnu jakost električnog polja izračunavamo „zbrajanjem“ doprinosa tih diferencijalnih naboja dQ . Kako se ovdje radi o kontinuiranoj raspodjeli naboja, također je potrebno

sprovesti integraciju po liniji l . Vektor udaljenosti točke $P(\mathbf{r})$ u kojoj izračunavamo jakost polja stvorenog diferencijalnim nabojem dQ na diferencijalnoj dužini dl , čiji položaj je određen vektorom položaja \mathbf{r}' iznosi $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Jakost električnog polja je:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_l \frac{dQ \cdot \mathbf{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3} = \int_l \frac{\lambda \cdot dl \cdot \mathbf{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l \frac{\lambda \cdot dl \cdot \mathbf{R}}{R^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l \lambda \cdot dl \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (5.12)$$

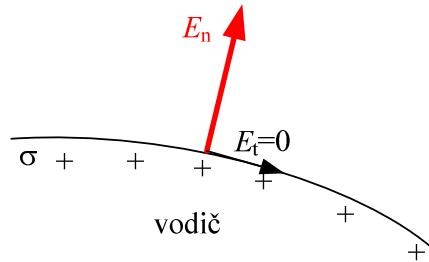
Kod primjene izraza (5.12) također je potrebno voditi računa o tome da je vektor položaja diferencijalnog naboja \mathbf{r}' i vektor udaljenosti \mathbf{R} potrebno iskazati kao funkcije prostornih koordinata u odgovarajućem koordinatnom sustavu, te da se integral iz (5.12) rastavi na komponente jakosti polja po koordinatnim osima.

5.3. Električni naboј i polje u vodiču

Statičko električno polje je stacionarno polje uzrokovano stacionarnim nabojima, tj. nabojima u mirovanju. Unutar vodljivog materijala *ne može postojati statičko električno polje* budući bi njegovo prisustvo u vodljivom materijalu uzrokovalo tok slobodnih naboga (električnu struju) čime više ne bismo imali statičke uvjete: $\mathbf{E} \equiv 0$.

U vodiču *ne mogu postojati niti naboji* u statičkim uvjetima: $\rho \equiv 0$. Pretpostavimo da smo u unutrašnjost vodiča unijeli neku količinu naboga. Djelovanjem odbojnih Coulombovih sila naboji će se udaljavati jedan od drugoga i u konačnici raspoređiti na površinu vodiča. Pri tome će raspodjela naboga na površini vodiča biti takva da se svaki pojedini elementarni naboј nalazi u stanju ravnoteže sila svih ostalih naboga koji djeluju na njega.

Nadalje, možemo zaključiti da u statičkim uvjetima na površini nabijenog vodiča postoji samo komponenta polja okomita na površinu vodiča. Naime, kad bi postojala i komponenta polja koja je tangencijalna na površinu vodiča, ona bi stvarala силу koja bi uzrokovala pomjeranje slobodnih naboga, a time više ne bi bio ispunjen uvjet stacionarnosti naboga.



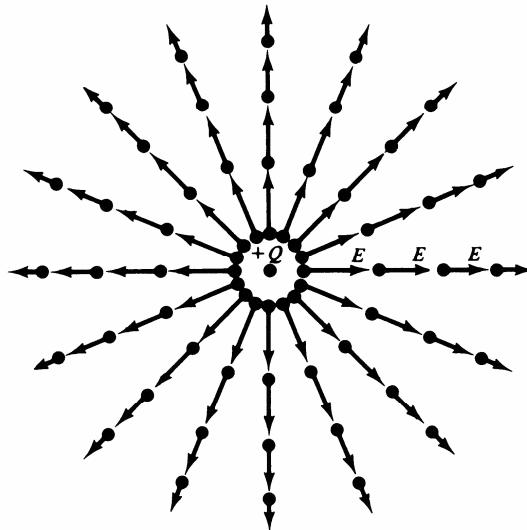
Slika 5.7. Jakost električnog polja na površini nabijenog vodiča

5.4. Silnice električnog polja

Grafički prikaz električnog polja preko vektora jakosti električnog polja je neprikladan, kako je vidljivo sa slike 5.8. za pozitivni točkasti naboј. Pokusni naboј se u električnom polju pod djelovanjem sile električnog polja giba određenom putanjom. Tu putanju možemo smatrati linijom djelovanja sile. Tangenta u svakoj točki te putanje ima smjer djelovanja sile na pozitivni pokušni naboј, a to je ujedno i smjer električnog polja. Naime, vrijedi:

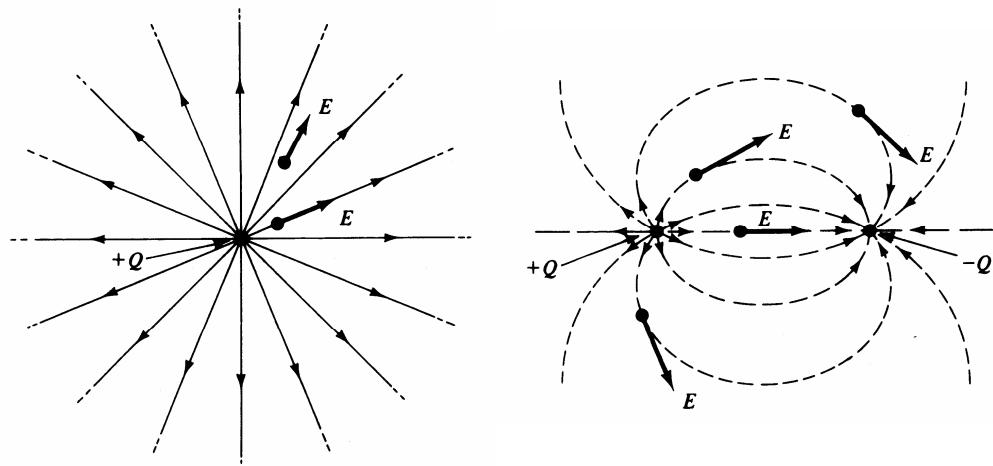
$$\mathbf{F} = Q_p \cdot \mathbf{E} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (5.13)$$

odakle slijedi da je električno polje \mathbf{E} u smjeru vektora brzine gibanja \mathbf{v} naboja Q_p .



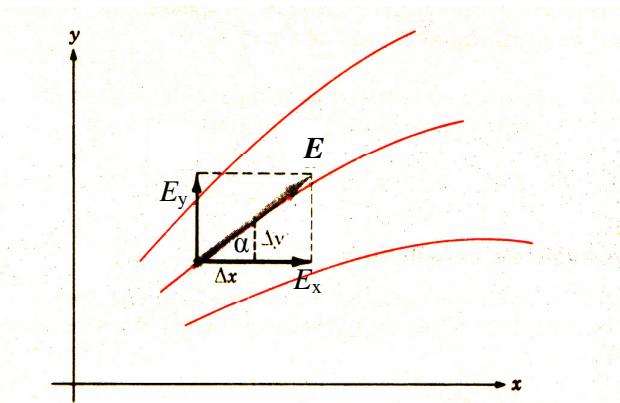
Slika 5.8. Grafički prikaz vektora jakosti električnog polja točkastog naboja Q

Putanje kojima se u električnom polju gibaju pokusni pozitivni naboji nazivamo *linijama polja \mathbf{E} , linijama sile* odnosno *silnicama*. Silnice nam služe da geometrijski, zorno prikažemo električno polje. No, prema navedenoj definiciji, silnice opisuju samo smjer djelovanja električnog polja, ali ne i njegovu jakost. Stoga je konvencijom usvojeno da se silnice prikazuju tako da je njihova gustoća proporcionalna jakosti električnog polja. Pri tome se konstanta proporcionalnosti odabire potpuno proizvoljno.



Slika 5.9. Silnice električnog polja
a) pozitivnog točkastog naboja Q ; b) dvaju točkastih naboja $\pm Q$

Prikaz električnog polja preko silnica je primjenjiv za dvodimenzionalna polja. Neka je polje ovisno o x i y -koordinatama i prikazano na slici 5.10. pomoću silnica.



Slika 5.10. Uz određivanje jednadžbe silnica

Iz slike je vidljivo da vrijedi:

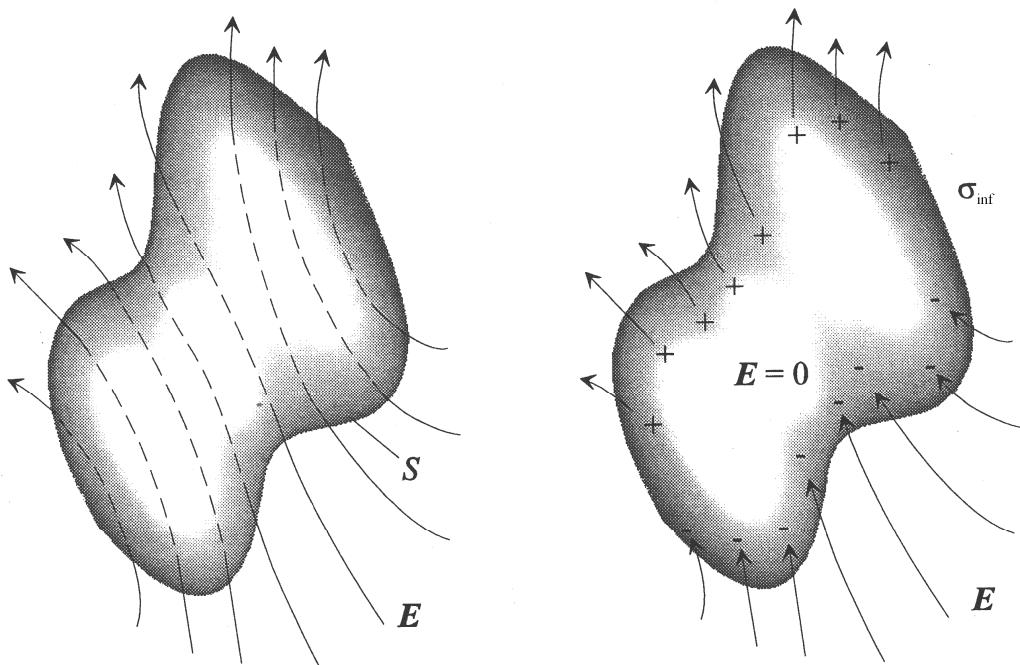
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{E_y}{E_x} = \frac{dy}{dx} \quad (5.14)$$

Relacija (5.14) daje nam jednadžbu silnica. Potrebno je za zadalu rasopdjelu naboja izračunati funkcijeske ovisnosti za komponente polja $E_x = E_x(x, y)$ i $E_y = E_y(x, y)$, uvrstiti ih u (5.14) čime se dobije diferencijalna jednadžba silnica.

6. MATERIJALI U ELEKTRIČNOM POLJU

6.1. Vodič u električnom polju

Značajka vodljivih materijala (vodiča) je da u njima postoje slobodni naboji koji se mogu po vodiču gibati pod djelovanjem sile električnog polja. Ako se vodljivi materijal postavi u električno polje, električno polje će na slobodne elektrone u vodiču djelovati silom koja je usmjerena suprotno od smjera električnog polja. Slobodni elektroni u vodiču će se stoga grupirati uz površinu vodiča na dijelu vodiča gdje električno polje ulazi u vodič, a na suprotnoj strani gdje električno polje izlazi iz vodiča preostat će manjak slobodnih elektrona, tj. ostat će pozitivni naboji. Ova pojava se naziva *električna influencija* a razdvojeni pozitivni i negativni naboje na vodiču naziva se *influencirani (inducirani) naboje*. Vodič je i dalje ostao električki neutralan (postulat o očuvanju električnog naboja), iz čega zaključujemo da je količina influenciranog pozitivnog naboja jednaka količini influenciranog negativnog naboja.

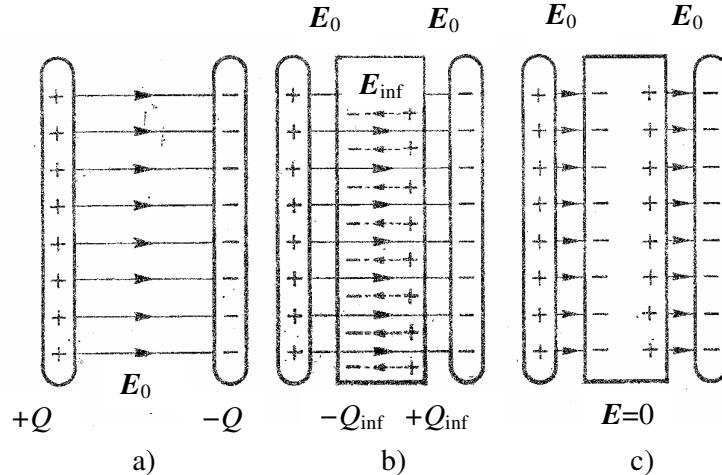


Slika 6.1. Pojava influenciranog plošnog naboja σ_{inf} na površini neutralnog vodiča unešenog u električno polje jakosti E

Influencirani naboje nalaze se na površini vodiča, jer u unutrašnjosti vodiča ne može biti naboja. Budući da u unutrašnjosti vodiča nema niti električnog polja, influencirani naboje su upravo takav da u unutrašnjosti vodiča u potpunosti poništava vanjsko električno polje. Ujedno, influencirani naboje stvara u vanjskom prostoru svoje vlastito, sekundarno električno polje koje se superponira na vanjsko narinuto polje i modificira ga. Ako uklonimo vanjsko električno polje doći će do rekombinacije influencijom razdvojenih pozitivnih i negativnih naboja i vodič će ponovno biti neutralan.

Dakle, djelovanje vanjskog električnog polja na vodič može se nadomjestiti odgovarajućom raspodjeljom plošnog slobodnog naboja na vodiču gustoće σ_{inf} .

Za ilustraciju poništavanja vanjskog polja u vodiču uzimimo primjer u kojem je vanjsko polje homogeno električno polje E_0 stvoreno dvjema paralelnim ravnim pločama velike površine, koje su nabijene jednakom količinom naboja suprotnog predznaka $\pm Q$ (slika 6.2.a).

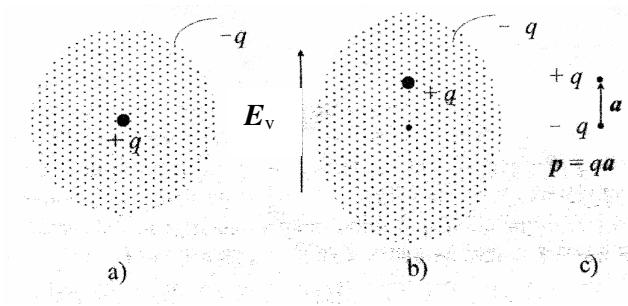


Slika 6.2. Unošenje vodiča u električno polje

Postavimo li u prostor između ploča vodljivi materijal, na površinama vodljivog materijala influencirat će se naboj $\pm Q_{\text{inf}}$, takav da je $Q_{\text{inf}} = Q$. Influencirani naboj stvara unutar vodiča svoje električno polje E_{inf} istoga iznosa kao vanjsko električno polje ali suprotno usmjereno od njega (slika 6.2.b). Ukupno električno polje unutar vodiča je onda poništeno (slika 6.2.c): $E = E_0 + E_{\text{inf}} = 0$.

6.2. Izolator u električnom polju

Značajka dielektričnih materijala ili izolatora je da ne posjeduju slobodne elektrone, već su njihovi elektroni vezani za matične atome i ne mogu ih pod djelovanjem vanjskog električnog polja napuštati. U dielektričnim materijalima, pod djelovanjem vanjskog električnog polja dolazi do poremećaja u raspodjeli pozitivnog i negativnog naboja koji se naziva *električna polarizacija*. Ako nema vanjskog električnog polja atom dielektričnog materijala ima simetričnu raspodjelu pozitivnog i negativnog naboja čija djelovanja se u potpunosti neutraliziraju (slika 6.3.a).



Slika 6.3. Polarizacija vezanog naboja u atomu pod djelovanjem električnog polja

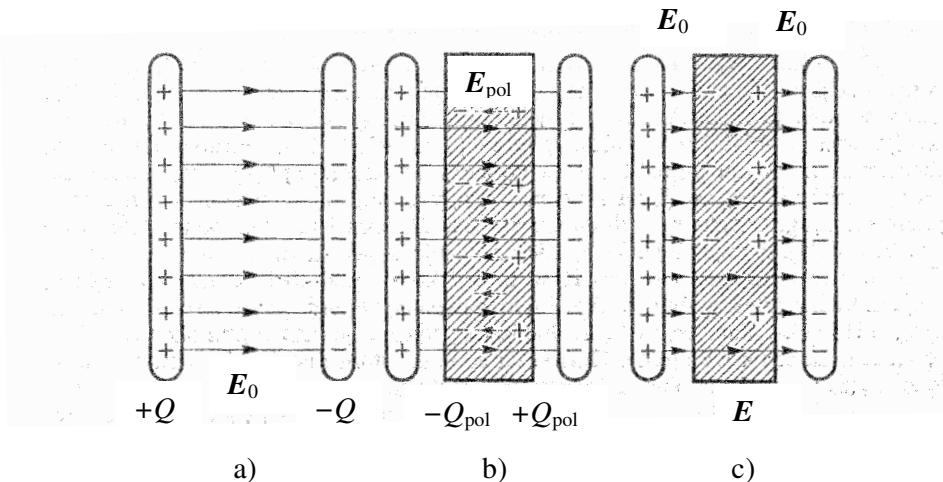
Na atome dielektrika vanjsko električko polje djeluje tako da uzrokuje pomak pozitivnog i negativnog naboja unutar atoma. Vanjsko električno polje uzrokovat će pomak pozitivne jezgre u smjeru polja i deformaciju elektronske putanje izdužujući je u elipsast oblik suprotno do smjera polja (slika 6.3.b). U prvoj aproksimaciji takav poremećaj u raspodjeli naboja atoma može se prikazati kao dipol \mathbf{p} (slika 6.3.c) čije električno polje je usmjereni suprotno od vanjskog električnog polja.

Za dipol definiramo dipolni moment:

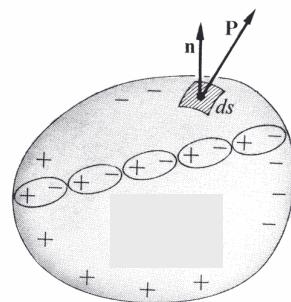
$$\mathbf{p} = q \cdot \mathbf{a} \quad (6.1)$$

gdje je q količina naboja svakog od dva po iznosu jednak, a po predznaku suprotna točkasta naboja koji su međusobno pomaknuti za a , a vektor pomaka \mathbf{a} je usmjerena od negativnog prema pozitivnom naboju.

Za ilustraciju djelovanja polarizacije na polje u dielektriku opet uzmimo da je vanjsko polje homogeno električno polje \mathbf{E}_0 stvoreno dvjema paralelnim ravnim pločama velike površine, koje su nabijene jednakom količinom naboja suprotnog predznaka $\pm Q$ (slika 6.4.a).



Slika 6.4. Unošenje izolatora u električno polje



Slika 6.5. Detalj polarizacije unutar dielektričnog materijala

Postavimo li u prostor između ploča dielektrični materijal, unutar dielektričnog materijala formirat će se dipoli. Djelovanje dipola će se u unutrašnjosti dielektričnog materijala poništavati, a samo će na površinama dielektričnog materijala postojati polarizacijski naboje \pm

Q_{pol} , prema slici 6.5. Ukupni naboј u dielektričnom materijalu, makroskopski gledano, ostao je jednak nuli, tj. dielektrički materijal je i dalje ostao električki neutralan.

Polarizacijski naboј stvara unutar dielektrika svoje električno polje \mathbf{E}_{pol} suprotno usmjereno od vanjskog električnog polja (slika 6.4.b). Ukupno električno polje unutar dielektričnog materijala je zbog djelovanja polarizacijskog polja smanjeno (slika 6.4.c): $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_{\text{pol}} < \mathbf{E}_0$.

6.2.1.1. Vektor električne indukcije i dielektričnost

Opisane fizikalne pojave kvantificiramo u makroskopskom pristupu na sljedeći način. Jakost električnog polja kojeg stvara polarizacijski naboј \mathbf{E}_{pol} proporcionalna je jakosti ukupnog električnog polja u dielektričnom materijalu \mathbf{E} i ovisna je o vrsti dielektričnog materijala:

$$\mathbf{E}_{\text{pol}} = -\chi_e \cdot \mathbf{E} \quad (6.2)$$

gdje je χ_e električna susceptibilnost. Električna susceptibilnost je bezdimenziona konstanta koja je značajka dielektričnog materijala, a kojom se kvantificira utjecaj vanjskog električnog polja na polarizaciju. Predznak „-“ u (6.2) označava da je polje polarizacijskog naboja suprotno usmjereno od vanjskog električnog polja, odnosno ukupnog električnog polja u dielektričnom materijalu.

Ukupno električno polje u dielektričnom materijalu je:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_{\text{pol}} = \mathbf{E}_0 - \chi_e \cdot \mathbf{E} \quad (6.3)$$

Pomnožimo li (6.3) s ϵ_0 dobije se:

$$\epsilon_0 \cdot \mathbf{E} = \epsilon_0 \cdot \mathbf{E}_0 + \epsilon_0 \cdot \mathbf{E}_{\text{pol}} = \epsilon_0 \cdot \mathbf{E}_0 - \epsilon_0 \cdot \chi_e \cdot \mathbf{E} = \epsilon_0 \cdot \mathbf{E}_0 - \mathbf{P} \quad (6.4)$$

gdje je \mathbf{P} vektor polarizacije:

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \cdot \chi_e \cdot \mathbf{E} = -\epsilon_0 \cdot \mathbf{E}_{\text{pol}} \quad (6.5)$$

Preuređimo (6.4):

$$\epsilon_0 \cdot \mathbf{E}_0 = \epsilon_0 \cdot \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0 \cdot \mathbf{E} + \epsilon_0 \cdot \chi_e \cdot \mathbf{E} = \epsilon_0 \cdot \mathbf{E}(1 + \chi_e) \quad (6.6)$$

Uvodimo novu veličinu:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \cdot \mathbf{E}_0 \quad (6.7)$$

koju zovemo vektor električne indukcije ili vektor električnog pomaka. To je vektor istoga smjera kao i vanjsko električno polje. Naziv „vektor pomaka“ je povijesni naziv koji nema suvremeno fizikalno objašnjenje, a posljedica je ideje da je on rezultat gibanja, odnosno pomaka unutar dielektričnog materijala. Vektor električne indukcije \mathbf{D} nema jasno fizikalno značenje kao jakost električnog polja \mathbf{E} koja je izravno definirana iz Coulombovog zakona za silu. On nam služi da kvantificiramo utjecaj električnog polja na dielektrični materijal i uvodi

se kao dodatna veličina, koja također spada u kategoriju fundamentalnih veličina za predstavljanje polja. Jedinica za vektore \mathbf{D} i \mathbf{P} je (C/m^2).

Jednadžba (6.6) onda glasi:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \cdot \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0 \cdot \mathbf{E}(1 + \chi_e) = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \mathbf{E} = \epsilon \cdot \mathbf{E} \quad (6.8)$$

gdje je ϵ_r relativna dielektrična konstanta:

$$\epsilon_r = 1 + \chi_e \quad (6.9)$$

a ϵ apsolutna dielektrična konstanta ili dielektričnost sredstva:

$$\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \quad (6.10)$$

Dielektričnost sredstva ϵ je najčešće konstantna, pa se stoga često naziva dielektrična konstanta.

Iz relacije (6.7) vidimo da vektor \mathbf{D} određuju ϵ_0 i jakost vanjskog električnog polja \mathbf{E}_0 koje je stvoreno slobodnim nabojima $\pm Q$ te da ne ovisi o polarizaciji materijala.

Iz jednadžbe (6.8) može se izraziti ukupna jakost električnog polja u dielektričnom materijalu \mathbf{E} :

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D} - \mathbf{P}}{\epsilon_0} = \mathbf{E}_0 - \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r} = \frac{\mathbf{E}_0}{\epsilon_r} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon} \quad (6.11)$$

Dakle, vanjsko električno polje \mathbf{E}_0 u dielektričnom materijalu smanjuje se uslijed polarizacije materijala za iznos \mathbf{P}/ϵ_0 , odnosno smanjuje se ϵ_r puta u odnosu na jakost polja u vakuumu.

Složene fizikalne pojave polarizacije dielektričnog materijala u makroskopskom pristupu obuhvatili smo kroz jednu bezdimenzionu konstantu ϵ_r koja je značajka materijala.

Izrazi za Coulombovu silu (4.5) i svi izrazi za jakost električnog polja koji su bili dani za vakuum, u prisustvu dielektričnog materijala modificiraju se tako da se umjesto dielektrične konstante vakuma ϵ_0 piše dielektrična konstanta sredstva: $\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$.

6.2.1.2. Dielektrična čvrstoća

Pri povećavanju jakosti vanjskog električnog polja koje je narinuto na izolacijski materijal rastu električne sile koje djeluju na vezane elektrone atoma materijala. Kod velikih iznosa jakosti električnog polja sile električnog polja mogu otrgnuti vezane elektrone iz vanjskih elektronskih ljuški atoma, čime se stvara mnoštvo slobodnih nabroja. Izolator time gubi svoja izolacijska svojstva i oštećeće se. Ta pojava naziva se *električni proboj* a granična vrijednost električnog polja pri kojoj proboj nastaje naziva se *dielektrična čvrstoća* i jedna je od značajki izolacijskih materijala.

Dielektrična čvrstoća ovisi o obliku, trajanju i načinu povećavanja napona koji stvara električno polje, o temperaturi, tlaku i vlažnosti materijala, o obliku elektroda koje stvaraju

električno polje, nehomogenosti izolatora i debljini sloja izolatora. Npr. kapljice vode u transformatorskom ulju znatno mu smanjuju dielektričnu čvrstoću. Kako je dielektrična čvrstoća važna značajka izolacijskih materijala, pri projektiranju i gradnji električnih uređaja i naprava važno je oblikovati električno polje tako da njegove najveće vrijednosti ne premašuju dielektričnu čvrstoću upotrijebljenog izolacijskog materijala.

U tablici 6.1. su dane relativne dielektrične konstante i dielektrične čvrstoće za neke izolacijske materijale.

Tablica 6.1. Relativne dielektričnosti i probojne čvrstoće nekih izolacijskih materijala

Materijal	Debljina (μm)	Relativna dielektričnost ε_r	Dielektrična čvrstoća (kV/cm)
suhu zrak		1	21 – 30
mineralno ulje		5	120 – 200
kvarc taljeni		3,2 – 3,9	120 – 150
mramor		8,3 – 10,3	200 – 500
porculan		5 – 7,5	200
staklo borosilikatno		4,9 – 6	300
natron-papir	15 - 250	1,4 – 2,6	80 – 140
polietilen	25 - 500	2,2	800 – 2000
tinjac		6 – 7	250 – 2000
izolacijski lak		3,5	> 300

6.2.1.3. Linearnost, izotropnost i homogenost dielektričnog materijala

Dielektrični materijal je *linearan* ako je u svakoj točki materijala dielektričnost ε konstanta. Tada je odnos između vektora D i E prema (6.8) linearan. Ako je dielektričnost ε u svakoj točki materijala ovisna o iznosu jakosti električnog polja $|E|$, tj. $\varepsilon = \varepsilon(|E|)$, materijal je *nelinearan*.

Dielektrični materijal je *homogen* ako se iznos dielektričnosti ε ne mijenja od točke do točke materijala, tj. neovisan je o položaju točke unutar materijala. Ako se dielektričnost ε mijenja s položajem točke unutar dielektričnog materijala, tj. $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r})$ tada je materijal *nehomogen*.

Ako se dielektrični materijal polarizira jednakom u svim smjerovima, takav materijal se naziva *izotropnim* i u njemu su vektor jakosti električnog polja E i vektor polarizacije P u istome smjeru, tj. električna susceptibilnost χ_e je u svim smjerovima konstanta. U izotropnom materijalu vrijedi:

$$\begin{aligned} P_x &= \varepsilon_0 \cdot \chi_e \cdot E_x & ; \quad P_y &= \varepsilon_0 \cdot \chi_e \cdot E_y & ; \quad P_z &= \varepsilon_0 \cdot \chi_e \cdot E_z \\ D_x &= \varepsilon \cdot E_x & ; \quad D_y &= \varepsilon \cdot E_y & ; \quad D_z &= \varepsilon \cdot E_z \end{aligned} \tag{6.12}$$

Za materijal koji nije izotropan (*anizotropan*), kao što su npr. kristali, vektor jakosti električnog polja E i vektor polarizacije P nisu u istome smjeru, pošto periodična struktura kristalnih materijala omogućava puno lakšu polarizaciju uzduž osi kristala. U takvим materijalima električna susceptibilnost χ_e je različita u različitim smjerovima, pa vrijedi:

$$\begin{aligned} P_x &= \epsilon_0 \cdot \chi_{e11} \cdot E_x + \epsilon_0 \cdot \chi_{e12} \cdot E_y + \epsilon_0 \cdot \chi_{e13} \cdot E_z \\ P_y &= \epsilon_0 \cdot \chi_{e21} \cdot E_x + \epsilon_0 \cdot \chi_{e22} \cdot E_y + \epsilon_0 \cdot \chi_{e23} \cdot E_z \\ P_z &= \epsilon_0 \cdot \chi_{e31} \cdot E_x + \epsilon_0 \cdot \chi_{e32} \cdot E_y + \epsilon_0 \cdot \chi_{e33} \cdot E_z \end{aligned} \quad (6.13)$$

gdje općenito postoji devet različitih susceptibilnosti χ_e ovisnih o smjeru polarizacije materijala i iznosu jakosti električnog polja koje polarizira materijal u tom smjeru. Vektori električne indukcije po smjerovima su:

$$\begin{aligned} D_x &= \epsilon_{11} \cdot E_x + \epsilon_{12} \cdot E_y + \epsilon_{13} \cdot E_z \\ D_y &= \epsilon_{21} \cdot E_x + \epsilon_{22} \cdot E_y + \epsilon_{23} \cdot E_z \\ D_z &= \epsilon_{31} \cdot E_x + \epsilon_{32} \cdot E_y + \epsilon_{33} \cdot E_z \end{aligned} \quad (6.14)$$

s općenito devet različitih dielektričnosti ϵ_{ij} koje tvore tenzor dielektričnosti. Jednadžba (6.14) može se napisati u matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

U vektorskoj i matričnoj formi jednadžba (6.15) može se pisati kao:

$$[D] = [\epsilon][E] \quad (6.16)$$

Ako su $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_{33} = \epsilon$ a svi ostali elementi u matrici $[\epsilon]$ su jednaki nuli, sredstvo je izotropno i jednadžba (6.16) može se pisati kao:

$$[D] = \epsilon [E] \quad (6.17)$$

Dielektrična konstanta ϵ dielektričnih materijala također može ovisiti o frekvenciji polja i temperaturi. Frekvencijska ovisnost kod visokih frekvencija je važna činjenica koju treba uzeti u obzir. Mi ćemo se *u osnovi dalje baviti* dielektričnim materijalima koji su ***linearni, homogeni i izotropni***.

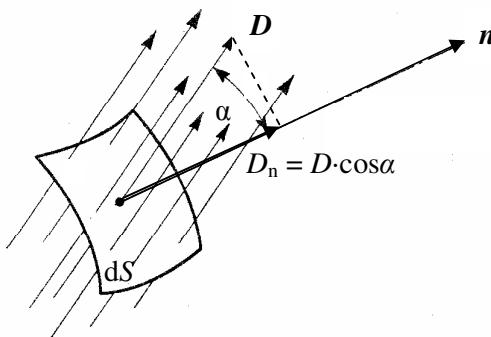
7. ELEKTRIČNI TOK

Električni tok je integralna veličina koja nam je važna za objašnjenje djelovanja električnog polja od jedne do druge točke u prostoru.

Električni tok kroz površinu S je integral normalne komponente vektora D kroz površinu S :

$$\phi_e = \int_S D \cdot n \cdot dS = \int_S D_n \cdot dS = \int_S D \cdot \cos \alpha \cdot dS \quad (7.1)$$

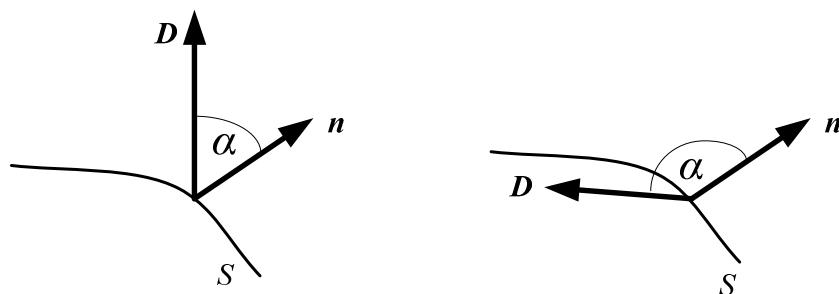
gdje je n normala na element površine dS .



Slika 7.1. Uz definiciju električnog toka

Električni tok vezan je za površinu S kroz koju prolazi pa je integralna, skalarna veličina za razliku od vektora E i D koje su diferencijalne veličine definirane za svaku točku prostora. Električni tok mjeri se u (C).

Električni tok može biti pozitivan, ako izlazi iz površine S (slika 7.2.a) ili negativan, ako ulazi kroz površinu S (slika 7.2.b):



- a) $\alpha < 90^\circ$, oštri kut
 $D \cdot n > 0, \Phi_e > 0$
- b) $\alpha > 90^\circ$, tupi kut
 $D \cdot n < 0, \Phi_e < 0$.

Slika 7.2. Električni tok koji izlazi (a) i ulazi (b) kroz površinu S

Ako je između normale n na površinu S i vektora D kut $\alpha = 90^\circ$, tada električno polje samo tangira površinu S i nema električnog toka kroz površinu S : $\Phi_e = 0$.

Diferenciramo li izraz (7.1) za električni tok dobije se:

$$d\phi_e = \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \cdot dS$$

Pomnoži li se dobijeni izraz s \mathbf{n} i podijeli s dS dobije se:

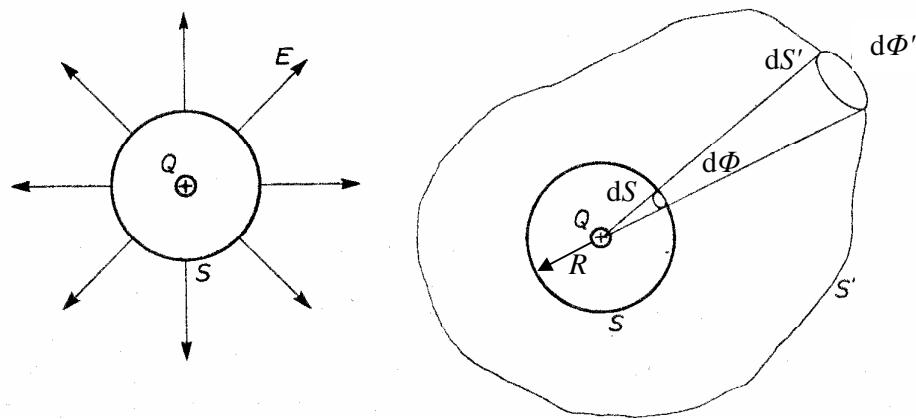
$$\mathbf{D} = \mathbf{n} \frac{d\phi_e}{dS} ; \quad D = \frac{d\phi_e}{dS} \quad (7.2)$$

Prema tome, vektor \mathbf{D} ima još jedno značenje: on predstavlja gustoću električnog toka u bilo kojoj točki prostora.

U okolišu nabijenih tijela linije vektora \mathbf{D} nazivaju se **D -linije** ili *linije električnog toka*. Za *linearne* dielektrični materijal one su podudarne s **E -linijama** odnosno silnicama.

8. GAUSSOV ZAKON

Gaussov zakon je, pored Coulombovog zakona, jedan od temeljnih zakona elektrostatike. Ilustrirat ćemo ga na primjeru točkastog naboja Q kojeg okružimo s dvije zatvorene površine: kuglom površine S , polumjera R čije središte je podudarno s položajem točkastog naboja Q i nekom proizvoljnom zatvorenom površinom S' prema slici 8.1.



Slika 8.1. Električni tok točkastog naboja

Iz točkastog naboja radijalno (zrakasto) izlaze silnice električnog polja (linije električnog toka) i njihova gustoća, koja je srazmerna jakosti električnog polja, opada s udaljenošću r od točkastog naboja s $1/r^2$.

Ako promotrimo jedan stožac kojeg obrubljuju silnice električnog polja, kroz sve presjeke takvoga stošca dS i dS' , koje su na različitim udaljenostima od točkastog naboja Q , prolazi isti broj silnica, tj. isti je električni tok kroz te presjeke: $d\Phi_e = d\Phi'_e$. Nadalje, možemo zaključiti da će i ukupni električni tok kroz obje površine biti isti:

$$\int_S d\phi_e = \int_{S'} d\phi'_e \quad (8.1)$$

Dakle, tok električnog polja kroz bilo kakvu zatvorenu površinu oko točkastog naboja Q , kao izvora električnog polja, uvijek je isti i neovisan o obliku zatvorene površine.

Izračunajmo tok električnog polja kroz kuglu površine S sa slike 8.1. Postavimo ishodište sfernog koordinatnog sustava u središte kugle. Jakost električnog polja na površini kugle je konstantnog iznosa i radijalna:

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}_r \frac{Q}{4\pi\epsilon \cdot R^2} = \text{konst.}$$

Vektor \mathbf{D} na površini kugle je također konstantnog iznosa i radijalan:

$$\mathbf{D} = \epsilon \cdot \mathbf{E} = \mathbf{a}_r \frac{Q}{4\pi \cdot R^2} = \text{konst.}$$

Normala na kuglu je radijalni vektor $\mathbf{n} = \mathbf{a}_r$ pa vrijedi:

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_r \frac{Q}{4\pi \cdot R^2} = \frac{Q}{4\pi \cdot R^2} = \text{konst.}$$

pa je električni tok kroz zatvorenu površinu (kuglu) S :

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \cdot dS = \oint_S \frac{Q}{4\pi \cdot R^2} dS = \frac{Q}{4\pi \cdot R^2} \oint_S dS = \frac{Q}{4\pi \cdot R^2} S = \frac{Q}{4\pi \cdot R^2} 4\pi \cdot R^2 = Q \quad (8.2)$$

Dobili smo interesantan rezultat da je ukupni električni tok kroz zatvorenu površinu koja obuhvaća točasti naboј Q po iznosu točno jednak točkastom naboјu Q . Kako smo već zaključili da je tok električnog polja točkastog naboјa Q kroz bilo kakvu zatvorenu površinu koja je zatvorena oko točkastog naboјa uvijek isti, vrijedi da je za bilo kakvu zatvorenu površinu S :

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \cdot dS = Q \quad (8.3)$$

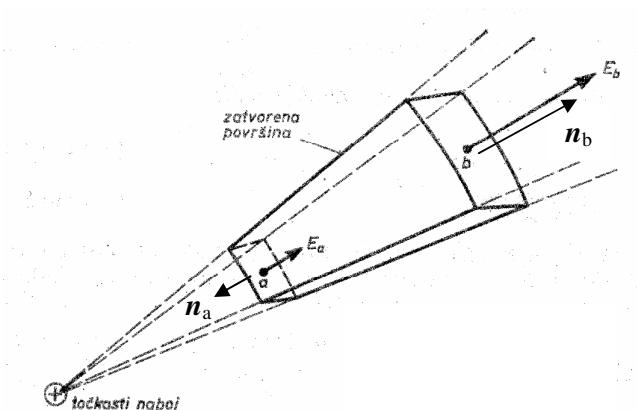
Proširimo navedeno razmatranje za dva točkasta naboјa Q_1 i Q_2 . Primjenimo načelo superpozicije pa vrijedi:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2 \\ \oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \cdot dS &= \oint_S \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n} \cdot dS + \oint_S \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{n} \cdot dS = Q_1 + Q_2 = \sum Q \end{aligned} \quad (8.4)$$

Ako unutar zatvorene površine S nema naboјa onda prema (8.4) vrijedi:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \cdot dS = 0 \quad (8.5)$$

U tom slučaju, sve silnice električnog polja koje ulaze u zatvorenu površinu i izlaze iz te zatvorene površine, budući da unutar zatvorene površine nema pozitivnih odnosno negativnih naboјa koji su izvori odnosno ponori električnog polja.



Slika 8.2. Električni tok kroz zatvorenu površinu unutar koje nema naboјa

Vrijedi:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_a &= -\mathbf{n}_b \\ \oint_{S_a} \mathbf{D}_a \cdot \mathbf{n}_a \cdot dS < 0 & ; \quad \phi_a = \oint_{S_b} \mathbf{D}_b \cdot \mathbf{n}_b \cdot dS > 0 \quad ; \quad |\phi_a| = |\phi_b| \\ \oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \cdot dS &= \oint_{S_a} \mathbf{D}_a \cdot \mathbf{n}_a \cdot dS + \oint_{S_b} \mathbf{D}_b \cdot \mathbf{n}_b \cdot dS = \phi_a + \phi_b = 0 \end{aligned} \quad (8.6)$$

Načelo superpozicije možemo primijeniti za bilo koju kontinuiranu raspodjelu naboja prostornu, plošnu ili linjsku. Ako uzmemo kao opći slučaj prostornu raspodjelu naboja možemo općenito pisati:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \cdot dS = \int_V \rho_s \cdot dV \quad (8.7)$$

gdje je S bilo kakva zatvorena površina koja obrubljuje prostor volumena V unutar kojega se nalazi prostorna gustoća **slobodnog** naboja ρ_s koji stvara električno polje, odnosno vektor električne indukcije \mathbf{D} . Na desnoj strani relacije (8.7) ne pojavljuje se prostorna gustoća polarizacijskog naboja, budući da vektor električne indukcije \mathbf{D} stvaraju slobodni naboji. Osim toga, ukupna količina polarizacijskog naboja u dielektriku volumena V jednaka je nuli.

Relacija (8.7) je *Gaussov zakon*. Važnost Gaussovog zakona je u sljedećem:

- ako nam je poznato električno polje u prostoru volumena V s pomoću Gaussovog zakona možemo izračunati ukupni naboј u tom prostoru,
- za jednostavne, simetrične raspodjele naboja primjenom Gaussovog zakona možemo izračunati jakost električnog polja. Ovakvi izračuni su ograničeni na slučajeve u kojima možemo odabrati Gaussovou površinu po kojoj radimo integraciju na lijevoj strani u (8.7) takvu da možemo izvući vektor \mathbf{D} iz integrala u (8.7).

8.1. Diferencijalni oblik Gaussovog zakona

Divergencija nekog vektorskog polja \mathbf{A} je skalar koji je definiran u svakoj točki polja i koji je prostorna derivacija tog polja:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \cdot dS}{V}$$

gdje je S zatvorena površina koja obrubljuje volumen V , a \mathbf{n} je normala usmjerena izvan diferencijalne površine dS .

Ako za vektorsko polje uzmemo polje vektora električne indukcije \mathbf{D} i primjenimo Gaussov zakon (8.7) dobijemo da je njegova divergencija:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{D} &= \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \cdot dS}{V} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\int_V \rho_s \cdot dV}{V} \\ \operatorname{div} \mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_s \end{aligned} \quad (8.8)$$

Dakle, divergencija vektora električne indukcije \mathbf{D} jednaka je prostornoj gustoći slobodnog naboja ρ_s . Drugim riječima, *slobodni naboji* su *izvori* (pozitivni) i *ponori* (negativni) vektora električne indukcije \mathbf{D} . Relacija (8.8) je Gaussov zakon u diferencijalnom obliku i odnosi se na bilo koju točku prostora u kojem postoji električno polje.

Do istog rezultata došli bismo ako na Gaussov zakon primjenimo Gaussov teorem:

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \cdot dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} \cdot dV$$

Dobije se:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \cdot dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{D} \cdot dV = \int_V \rho_s \cdot dV$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_s$$

U pravocrtnom koordinatnom sustavu (x, y, z) divergencija vektora \mathbf{D} je:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho_s \quad (8.9)$$

U cilindričnom koordinatnom sustavu (r, α, z) divergencija vektora \mathbf{D} je:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \cdot D_r) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial D_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho_s \quad (8.10)$$

U sfernom koordinatnom sustavu (r, ϑ, α) divergencija vektora \mathbf{D} je:

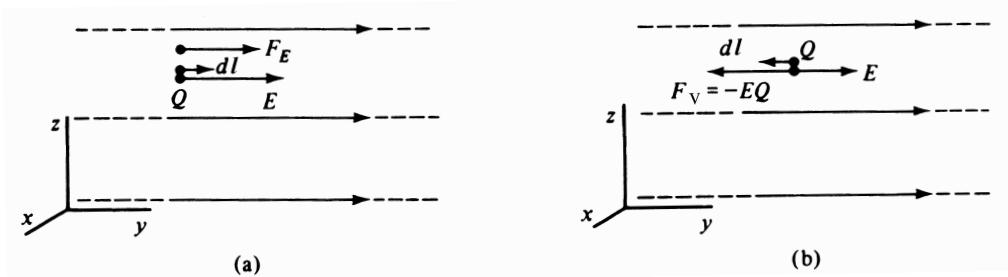
$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \cdot D_r) \right] + \frac{1}{r \cdot \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (D_\vartheta \cdot \sin \vartheta) \right] + \frac{1}{r \cdot \sin \vartheta} \frac{\partial D_\alpha}{\partial \alpha} = \rho_s \quad (8.11)$$

9. POTENCIJAL U ELEKTRIČNOM POLJU

Materija je u svom osnovnom stanju neutralna, tj. isti je broj pozitivnih i negativnih naboja. Osim toga, vrijedi postulat o očuvanju električnog naboja kojim se iskazuje da je u svakom izoliranom sustavu algebarska suma naboja konstantna. Prema tome, ako želimo dobiti izdvojene pozitivne i negativne naboje u izoliranom sustavu, npr. sustavu od dvije paralelne vodljive ploče, onda pozitivni naboje na jednoj ploči i negativni naboje na drugoj ploči možemo stvoriti tako da odvodimo s jedne ploče negativne naboje (čime ona postaje nabijena pozitivnim nabojem $+Q$) i prenosimo ih na drugu ploču (čime ona postaje nabijena negativnim nabojem $-Q$). Budući da je takav sustav izoliran, ukupni naboje i dalje ostaje konstantan, tj. jednak nuli. Za razdvajanje naboja potrebno je utrošiti energiju koja se manifestira u privlačnoj sili između ploča nabijenih raznoimenim nabojima $\pm Q$, odnosno u električnom polju stvorenom između ploča, koje Coulombovom silom djeluje na pokusni naboje unešen u to polje. Ta energija naboja u električnom polju je *potencijalna energija naboja* koja se može iskazati preko veličine koja se naziva *električni potencijal*.

9.1. Potencijalna energija naboja u električnom polju

Analizirajmo primjer u kojem se pozitivni točkasti naboje $+q$ nalazi u električnom polju jakosti E . Na točkasti naboje q djeluje sila električnog polja $\mathbf{F}_E = q \cdot \mathbf{E}$. Kako je naboje q pozitivan, smjer sile \mathbf{F}_E bit će isti kao i smjer električnog polja \mathbf{E} . Ako je naboje q sloboden, tj. ne držimo ga nikakvom silom, sila električnog polja će uzrokovati pomak naboja u smjeru polja (slika 9.1.a). Pomakom naboja povećat će se njegova kinetička energija. To povećanje kinetičke energije naboja dobija se iz električnog polja pa će energija sustava nabijenih ploča biti umanjena za taj iznos.



Slika 9.1. Prikaz sile na naboju q

a) naboje je slobodan u polju E ; b) na naboje djeluje vanjska sila \mathbf{F}_v

Diferencijalna energija koju električno polje predstavlja točkastom naboju q pri njegovom diferencijalnom pomaku $d\mathbf{l}$ je:

$$dW_E = \mathbf{F}_E \cdot d\mathbf{l} = q \cdot \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (9.1)$$

Diferencijalna energija dW_E iz (9.1) je diferencijalni rad kojeg je izvršilo električno polje E .

Načinimo sada diferencijalni pomak $d\mathbf{l}$ naboja u polju nekom vanjskom silom \mathbf{F}_v suprotno smjeru djelovanja polja E (slika 9.1.b). Vanjska sila \mathbf{F}_v mora svladati silu električnog polja, tj. mora joj biti jednak po iznosu i suprotnog smjera: $\mathbf{F}_v = -\mathbf{F}_E = -q \cdot \mathbf{E}$ (uz ovaj uvjet nema povećanja brzine naboja, odnosno nema povećanja njegove kinetičke energije). Diferencijalni rad kojeg obavi vanjska sila \mathbf{F}_v je:

$$dW = \mathbf{F}_v \cdot d\mathbf{l} = -\mathbf{F}_E \cdot d\mathbf{l} = -q \cdot \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (9.2)$$

Vidimo da su diferencijalne energije iz (9.1) i (9.2) jednake po iznosu, suprotnog smjera. To znači da pozitivni rad izvršen silom električnog polja dW_E odgovara negativnom radu kojeg je izvršila vanjska sila dW .

Ako je pomak $d\mathbf{l}$ okomit na smjer polja, tada je $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ jednak nuli i nema promjene energije.

Pogodno je ove odnose usporediti s pomicanjem mase u gravitacijskom polju. Ako masu podižemo uvis, suprotno djelovanju gravitacijske sile, potrebno je utrošiti rad. Taj se rad iskazuje u povećanju potencijalne energije mase. Ako oslobodimo masu, ona će sama padati prema dolje, dakle izvršit će se rad na račun smanjenja potencijalne energije mase. Ako pak, masu pomjeramo okomito na gravitacijsku silu, tj. na istoj visini onda nema promjena u njezinoj potencijalnoj energiji.

Analizirajmo detaljnije odnose pri pomaku naboja suprotno smjeru električnog polja i pretpostavimo da pri takvom pomaku dolazi i do promjene brzine naboja. Vrijedi jednadžba gibanja prema II Newtonovom zakonu:

$$\mathbf{F}_v + \mathbf{F}_E = m \cdot \mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{l}} \cdot \frac{d\mathbf{l}}{dt} = m \cdot \mathbf{v} \frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{l}} \quad (9.3)$$

gdje je m masa naboja (čestice), \mathbf{a} je ubrzanje naboja, \mathbf{v} brzina naboja a $d\mathbf{l}$ diferencijalni pomak naboja. Pomnožimo li (9.3) s $d\mathbf{l}$ dobije se:

$$\mathbf{F}_v \cdot d\mathbf{l} + \mathbf{F}_E \cdot d\mathbf{l} = m \cdot \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} \quad (9.4)$$

odnosno:

$$\mathbf{F}_v \cdot d\mathbf{l} = d\left(\frac{m \cdot v^2}{2}\right) - \mathbf{F}_E \cdot d\mathbf{l} \quad (9.5)$$

U (9.5) su:

$$\mathbf{F}_v \cdot d\mathbf{l} = dA \quad - \text{utrošeni rad vanjske sile } \mathbf{F}_v,$$

$$d\left(\frac{m \cdot v^2}{2}\right) = dW_k \quad - \text{promjena kinetičke energije naboja},$$

$$-\mathbf{F}_E \cdot d\mathbf{l} = dW_p \quad - \text{promjena potencijalne energije naboja}.$$

Dakle, (9.5) se može pisati u obliku:

$$dA = dW_k + dW_p \quad (9.6)$$

Rad vanjske sile dA utroši se na promjenu kinetičke energije naboja dW_k i promjenu potencijalne energije naboja dW_p .

Ukupni utrošeni rad pri pomicanju naboja iz točke b do točke a u električnom polju E suprotno smjeru polja je onda:

$$A = \int_b^a \mathbf{F}_v \cdot d\mathbf{l} = \int_{v_b}^{v_a} d \left(\frac{m \cdot v^2}{2} \right) - \int_b^a \mathbf{F}_E \cdot d\mathbf{l} \quad (9.7)$$

gdje su v_b i v_a brzine naboja u točki b , odnosno točki a .

Ako pri pomaku naboja iz točke b u točku a nije promijenjena njegova kinetrička energija, tj. $v_b = v_a$, utrošeni rad vanjske sile mogao se pretvoriti samo u povećanje njegove potencijalne energije:

$$A = \int_b^a \mathbf{F}_v \cdot d\mathbf{l} = - \int_b^a \mathbf{F}_E \cdot d\mathbf{l} = W_p(a) - W_p(b) \quad (9.8)$$

Ako pak na naboju ne djeluje vanjska sila $\mathbf{F}_v = 0$, tada je utrošeni rad vanjske sile nula i vrijedi:

$$\begin{aligned} A &= \int_b^a \mathbf{F}_v \cdot d\mathbf{l} = 0 \\ \int_{v_b}^{v_a} d \left(\frac{m \cdot v^2}{2} \right) - \int_b^a \mathbf{F}_E \cdot d\mathbf{l} &= 0 \\ W_k(a) - W_k(b) + W_p(a) - W_p(b) &= 0 \end{aligned} \quad (9.9)$$

odnosno:

$$W_k(a) + W_p(a) = W_k(b) + W_p(b) \quad (9.10)$$

Pod djelovanjem sile električnog polja naboju će se pomicati iz točke a u točku b , u smjeru polja. Pri tome će mu se smanjivati njegova potencijalna energija, a povećavati kinetička energija, tj. naboju će se pod djelovanjem sile električnog polja ubrzavati.

Dakle, razlika potencijalnih energija naboja u točkama a i b u električnom polju prema (9.8) je:

$$W_p(a) - W_p(b) = - \int_b^a \mathbf{F}_E \cdot d\mathbf{l} = - \int_b^a q \cdot \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (9.11)$$

Potencijalna energija naboja u jednoj točki polja može se prema (9.11) iskazati samo u odnosu na neku referentnu točku. Naime, svaka je potencijalna energija neodrediva do na konstantu čija vrijednost ovisi o izboru referentne točke u kojoj uzimamo da je potencijalna energija jednaka nuli. Tako npr. za gravitacijsku potencijalnu energiju uzimamo da je referentna točka na razini mora, tj. na nultoj nadmorskoj visini, na kojoj je potencijalna gravitacijska energija nula. U statičkom električnom polju za referentnu točku obično

uzimamo beskonačnost. U beskonačno dalekoj točki jakost električnog polja jednaka je nuli pa je i potencijalna energija naboja jednaka nuli.

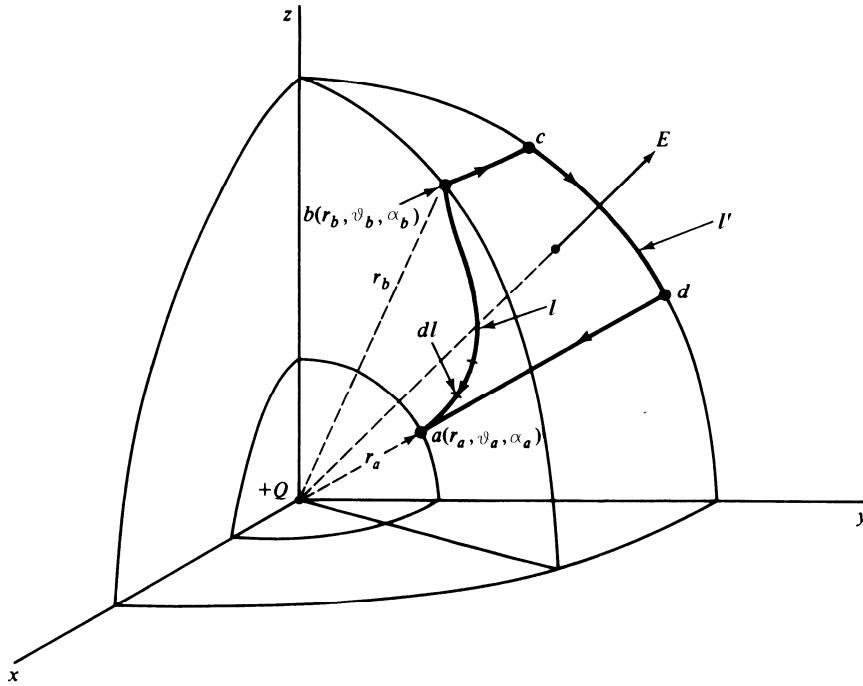
Dakle, ako je točka $b = \infty$ u kojoj je $W_p(\infty) = 0$, onda je potencijalna energija naboja u točki a :

$$W_p(a) = - \int_{\infty}^a \mathbf{F}_E \cdot d\mathbf{l} = - \int_{\infty}^a q \cdot \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (9.12)$$

Relaciju (9.12) možemo riječima opisati na sljedeći način: potencijalna energija naboja q u nekoj točki električnog polja a jednaka je radu kojeg je potrebno izvršiti da bi se naboju q iz beskonačnosti (gdje nema polja) doveo u točku polja a , suprotno djelovanju sile električnog polja.

Iz (9.11) i (9.12) vidi se da je potencijalna energija naboja u nekoj točki polja funkcija te točke $W_p = W_p(\mathbf{r})$ ali nije razvidno da li je ovisna o putu kojim smo izvršili pomak naboja iz točke a u točku b , odnosno iz ∞ u točku a . Da bi odredili postoji li ovisnost o putu, analizirajmo jednostavni primjer da je polje \mathbf{E} stvoreno točkastim nabojem Q smještenim u središte sfernog koordinatnog sustava (slika 9.2):

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}_r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$



Slika 9.2. Prikaz izračuna razlike potencijalnih energija u polju točkastog naboja Q

Izračunajmo razliku potencijalnih energija pri pomaku pokusnog naboja q od točke $a(r_a, \vartheta_a, \alpha_a)$ do točke $b(r_b, \vartheta_b, \alpha_b)$ proizvoljnim putem l prema slici 9.2. Diferencijalni put dl je:

$$dl = \mathbf{a}_r dr + \mathbf{a}_\vartheta r d\vartheta + \mathbf{a}_\alpha r \sin \vartheta d\alpha$$

Razlika potencijalnih energija prema (9.11) je:

$$\begin{aligned} W_p(a) - W_p(b) &= - \int_b^a q \cdot \mathbf{E} \cdot dl = - \frac{Q \cdot q}{4\pi\epsilon_0} \int_b^a \mathbf{a}_r \frac{1}{r^2} (\mathbf{a}_r dr + \mathbf{a}_\vartheta r d\vartheta + \mathbf{a}_\alpha r \sin \vartheta d\alpha) \\ W_p(a) - W_p(b) &= - \frac{Q \cdot q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_b}^{r_a} \frac{r_a dr}{r^2} = - \frac{Q \cdot q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_b}^{r_a} = \frac{Q \cdot q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right) \end{aligned}$$

Kako je $r_a < r_b$, uz pozitivan točkasti naboje Q , vrijedi da je $W_p(a) > W_p(b)$, tj. veća je potencijalna energija pokusnog naboja q u bližoj točki a (gdje je jače polje točkastog naboja Q) nego u daljoj točki b .

Izračunajmo sada razliku potencijalnih energija pri pomaku pokusnog naboja q od točke a do točke b drugim putem \mathbf{l}' prema slici 9.2. Integracija po putu \mathbf{l}' ide od točke b do točke c , zatim od točke c do točke d i konačno od točke d do točke a . Diferencijalni putevi su:

$$\text{od } b \text{ do } c: \quad dl'_1 = \mathbf{a}_\alpha r_b \sin \vartheta_b d\alpha \quad ; \quad \alpha_b < \alpha < \alpha_a$$

$$\text{od } c \text{ do } d: \quad dl'_2 = \mathbf{a}_\vartheta r_b d\vartheta \quad ; \quad \vartheta_b < \vartheta < \vartheta_a$$

$$\text{od } d \text{ do } a: \quad dl'_3 = \mathbf{a}_r dr \quad ; \quad r_b < r < r_a$$

Razlika potencijalnih energija prema (9.11) je:

$$\begin{aligned} W_p(a) - W_p(b) &= - \frac{Q \cdot q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \int_b^c \mathbf{a}_r \frac{1}{r_b^2} (\mathbf{a}_\alpha r_b \sin \vartheta_b d\alpha) + \int_c^d \mathbf{a}_r \frac{1}{r_b^2} (\mathbf{a}_\vartheta r_b d\vartheta) + \int_d^a \mathbf{a}_r \frac{1}{r^2} (\mathbf{a}_r dr) \right\} \\ W_p(a) - W_p(b) &= - \frac{Q \cdot q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ 0 + 0 + \int_{r_b}^{r_a} \frac{r_a dr}{r^2} \right\} = - \frac{Q \cdot q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_b}^{r_a} = \frac{Q \cdot q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right) \end{aligned}$$

Za oba puta integracije dobijen je isti rezultat. Dakle, potencijalna energija naboja u statičkom električnom polju ne ovisi o putu, već samo o početnoj i krajnjoj točki toga puta.

Također možemo napisati da vrijedi:

$$W_p(a) - W_p(b) = - \int_b^a q \cdot \mathbf{E} \cdot dl \quad \text{po nekom putu } \mathbf{l}$$

$$W_p(b) - W_p(a) = - \int_a^b q \cdot \mathbf{E} \cdot dl \quad \text{po nekom putu } \mathbf{l}'$$

Zbrojimo li prethodne dvije relacije dobije se:

$$0 = - \int_b^a q \cdot \mathbf{E} \cdot dl - \int_a^b q \cdot \mathbf{E} \cdot dl$$

odnosno:

$$\oint_l q \cdot \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (9.13)$$

Promjena potencijalne energije (utrošeni rad) pri pomaku naboja q po bilo kojoj zatvorenoj krivulji l (pomak od točke b po bilo kojem putu i povratak natrag u istu točku b) jednaka je nuli, tj. potencijalna energija naboja u statičkom električnom polju je konzervirana. Stoga za statičko električno polje kažemo da je *konzervativno*, što iskazujemo s:

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (9.14)$$

Integral jakosti električnog polja \mathbf{E} po bilo kojoj zatvorenoj krivulji l jednak je nuli.

9.2. Diferencijalni oblik zakona o konzervativnosti električnog polja

Primjenimo na relaciju (9.14) Stokesov teorem:

$$\oint_c \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} \cdot dS$$

gdje je \mathbf{A} vektorsko polje koje prolazi kroz površinu S , na kojoj je definirana normala \mathbf{n} , a površina S je obrubljena konturom c . Primjena na (9.14) daje:

$$\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{n} \cdot dS = 0$$

odakle slijedi:

$$\nabla \times \mathbf{E} = \text{rot } \mathbf{E} = 0 \quad (9.15)$$

Dakle, rotacija vektora jakosti statičkog električnog polja \mathbf{E} jednaka je nuli. Relacija (9.15) iskazuje konzervativnost statičkog električnog polja u diferencijalnom obliku i odnosi se na bilo koju točku prostora u kojem postoji električno polje.

U pravocrtnom koordinatnom sustavu (x, y, z) rotacija vektora \mathbf{E} je:

$$\nabla \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \mathbf{a}_x \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \mathbf{a}_y \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \mathbf{a}_z \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) = 0 \quad (9.16)$$

U cilindričnom koordinatnom sustavu (r, α, z) rotacija vektora \mathbf{E} je:

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{a}_r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial E_\alpha}{\partial z} \right) + \mathbf{a}_\alpha \left(\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) + \mathbf{a}_z \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r E_\alpha) - \frac{\partial E_r}{\partial \alpha} \right] = 0 \quad (9.17)$$

U sfernom koordinatnom sustavu (r, ϑ, α) rotacija vektora \mathbf{E} je:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} = & \mathbf{a}_r \frac{1}{r \cdot \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta \cdot E_\alpha) - \frac{\partial E_\vartheta}{\partial \alpha} \right] + \mathbf{a}_\vartheta \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial E_r}{\partial \alpha} - \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot E_\alpha) \right] + \\ & + \mathbf{a}_\alpha \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \cdot E_\vartheta) - \frac{\partial E_r}{\partial \vartheta} \right] = 0 \end{aligned} \quad (9.18)$$

9.3. Električni potencijal

Električni potencijal u nekoj točki električnog polja je omjer potencijalne energije naboja u toj točki polja i iznosa tog naboja:

$$\varphi(a) = \frac{W_p(a)}{q} \quad (9.19)$$

Možemo također reći da je električni potencijal u nekoj točki električnog polja po iznosu jednak potencijalnoj energiji jediničnog naboja $q = 1 \text{ C}$ u toj točki.

Jedinica za električni potencijal je volt: $1V = 1J/1C$. Veće jedinice koje se susreću u energetici su kV i MV , a manje koje susrećemo u elektronici mV i μV .

Iz (9.12) slijedi da električni potencijal u nekoj točki polja možemo izračunati iz poznate jakosti električnog polja \mathbf{E} :

$$\varphi(a) = - \int_{\infty}^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (9.20)$$

Prema zaključcima iz prethodnog potpoglavlja, izračun potencijala prema (9.20) također je neovisan o putu integracije od ∞ do točke a u kojoj se potencijal izračunava.

Električni potencijal je druga veličina koja nam služi za kvantificiranje pojave u električnom polju. Prva veličina je bila vektorska veličina – jakost električnog polja \mathbf{E} koja je definirana u svakoj točki polja. Za razliku od jakosti električnog polja, električni potencijal je skalarna veličina, također definirana u svakoj točki polja. Budući da je potencijal skalarna veličina, u mnogim zadaćama je jednostavnije izračunati skalarno polje potencijala $\varphi(r)$, pa onda naknadno iz njega izračunati vektorsko polje jakosti polja $\mathbf{E}(r)$.

9.3.1.1. Potencijal točkastog naboja

Izračunajmo potencijal točkastog naboja primjenjujući (9.20). Jakost električnog polja točkastog naboja Q u sfernom koordinatnom sustavu je:

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}_r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Kako je izračun potencijala prema (9.20) neovisan o putu integracije, treba odabrati najpogodniji put integracije, a to je radijalni, istoga smjera kao i jakost električnog polja: $d\mathbf{l} = \mathbf{a}_r dr$. Potencijal točke koja je na udaljenosti r od točkastog naboja je:

$$\begin{aligned}\varphi(r) &= -\int_{\infty}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \mathbf{a}_r \left(\frac{1}{r^2} \right) \cdot \mathbf{a}_r dr = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{r=\infty}^r \\ \varphi(r) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}\end{aligned}\quad (9.21)$$

9.3.1.2. Potencijal skupine točkastih naboja

Zbog linearnosti, ukupni električni potencijal kojeg u točki prostora $\mathbf{P}(r)$ stvara skupina od n točkastih naboja Q_i čiji položaji u prostoru su određeni vektorima položaja \mathbf{r}'_i , određujemo primjenjujući načelo superpozicije kao **algebarski zbroj** potencijala pojedinih naboja u promatranoj točki:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 R_i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{R_i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i|} \quad (9.22)$$

gdje su udaljenosti točke $\mathbf{P}(r)$ od pojedinih naboja:

$$R_i = |\mathbf{R}_i| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i|$$

9.3.1.3. Potencijal kontinuiranih raspodjela naboja

Potencijal kontinuiranih raspodjela naboja: prostorne ρ , plošne σ ili linjske λ , izračunavamo također primjenjujući načelo superpozicije.

9.3.1.3.1. Potencijal prostorne raspodjele naboja

Ako je naboј raspodijeljen unutar volumena V sa zadanom prostornom gustoćom ρ , diferencijalno mali volumen dV u kojem se nalazi diferencijalna količina naboja $dQ = \rho \cdot dV$ smatramo točkastim nabojem kojemu je potencijal određen s (9.21). Ukupni potencijal izračunavamo „zbrajanjem“ doprinosa tih diferencijalnih naboja dQ . Kako se ovdje radi o kontinuiranoj raspodjeli naboja, umjesto sumacije koju sprovodimo kod skupine diskretnih točkastih naboja (9.22), ovdje je potrebno sprovesti integraciju po volumenu V . Udaljenost točke $\mathbf{P}(r)$ u kojoj izračunavamo potencijal stvoren diferencijalnim nabojem dQ u diferencijalnom volumenu dV , čiji položaj je određen vektorom položaja \mathbf{r}' iznosi $R = |\mathbf{R}| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$. Potencijal je:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_V \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 R} = \int_V \frac{\rho \cdot dV}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho \cdot dV}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho \cdot dV}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (9.23)$$

Kod primjene izraza (9.23) potrebno je voditi računa o tome da je vektor položaja diferencijalnog naboja \mathbf{r}' i vektor udaljenosti \mathbf{R} potrebno iskazati kao funkcije prostornih koordinata u odgovarajućem koordinatnom sustavu.

9.3.1.3.2. Potencijal plošne raspodjele naboja

Ako je naboј raspodijeljen po površini S sa zadanom plošnom gustoćom σ , diferencijalno malu površinu dS na kojoj se nalazi diferencijalna količina naboja $dQ = \sigma \cdot dS$ smatramo točkastim naboјem kojemu je potencijal određen s (9.21). Ukupni potencijal izračunavamo „zbrajanjem“ doprinosa tih diferencijalnih naboja dQ . Kako se ovdje radi o kontinuiranoj raspodjeli naboja, također je potrebno sprovesti integraciju po površini S . Udaljenost točke $P(\mathbf{r})$ u kojoj izračunavamo potencijal stvoren diferencijalnim naboјem dQ na diferencijalnoj površini dS , čiji položaj je određen vektorom položaja \mathbf{r}' iznosi $R = |\mathbf{R}| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$. Potencijal je:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_S \frac{dQ}{4\pi\epsilon R} = \int_S \frac{\sigma \cdot dS}{4\pi\epsilon R} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_S \frac{\sigma \cdot dS}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_S \frac{\sigma \cdot dS}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (9.24)$$

Kod primjene izraza (9.24) također je potrebno voditi računa o tome da je vektor položaja diferencijalnog naboja \mathbf{r}' i vektor udaljenosti \mathbf{R} potrebno iskazati kao funkcije prostornih koordinata u odgovarajućem koordinatnom sustavu.

9.3.1.3.3. Potencijal linijske raspodjele naboja

Ako je naboј raspodijeljen po liniji l sa zadanom linijskom gustoćom λ , diferencijalno malu dužinu dl na kojoj se nalazi diferencijalna količina naboja $dQ = \lambda \cdot dl$ smatramo točkastim naboјem kojemu je potencijal određen s (9.21). Ukupni potencijal izračunavamo „zbrajanjem“ doprinosa tih diferencijalnih naboja dQ . Kako se ovdje radi o kontinuiranoj raspodjeli naboja, također je potrebno sprovesti integraciju po liniji l . Udaljenost točke $P(\mathbf{r})$ u kojoj izračunavamo potencijal stvoren diferencijalnim naboјem dQ na diferencijalnoj dužini dl , čiji položaj je određen vektorom položaja \mathbf{r}' iznosi $R = |\mathbf{R}| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$. Potencijal je:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_l \frac{dQ}{4\pi\epsilon R} = \int_l \frac{\lambda \cdot dl}{4\pi\epsilon R} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_l \frac{\lambda \cdot dl}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_l \frac{\lambda \cdot dl}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (9.25)$$

Kod primjene izraza (9.25) također je potrebno voditi računa o tome da je vektor položaja diferencijalnog naboja \mathbf{r}' i vektor udaljenosti \mathbf{R} potrebno iskazati kao funkcije prostornih koordinata u odgovarajućem koordinatnom sustavu.

9.4. Razlika potencijala (napon)

Iz (9.11) i (9.19) možemo izraziti razliku potencijala (*električni napon*) između dvije točke a i b električnog polja \mathbf{E} :

$$U_{ab} = \varphi(a) - \varphi(b) = - \int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (9.26)$$

Razlika potencijala (napon) U_{ab} označava da je to potencijal točke a u odnosu na potencijal točke b . Ako je električni napon U_{ab} pozitivan, to znači da je točka a na višem potencijalu (pozitivni točkasti naboј ima višu potencijalnu energiju u toј točki) nego točka b .

Napon između točaka b i a je:

$$U_{ba} = \varphi(b) - \varphi(a) = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -U_{ab} \quad (9.27)$$

Napon između točaka a i b u polju točkastog naboja Q prema (9.26) je:

$$\begin{aligned} U_{ab} &= - \int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{Q}{4\pi\epsilon} \int_{r_b}^{r_a} \mathbf{a}_r \left(\frac{1}{r^2} \right) \cdot \mathbf{a}_r dr = - \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{r=r_b}^{r=r_a} \\ U_{ab} &= \varphi(a) - \varphi(b) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right) \end{aligned} \quad (9.28)$$

Ako je točasti naboј Q pozitivan i ako je $r_a < r_b$, vrijedi da je $U_{ab} > 0$, tj. $\varphi(a) > \varphi(b)$, tj. veći je potencijal u bližoj točki a (gdje je jače polje točkastog naboja Q) nego u daljoj točki b .

Iz (9.28) slijedi također potencijal točkastog naboja u odnosu na beskonačno daleku točku; ako postavimo $b \rightarrow \infty$, $\varphi(\infty) \rightarrow 0$, slijedi:

$$\varphi(a) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r_a}$$

što je identično relaciji (9.21).

Ako potencijal neke točke a iskažemo u odnosu na potencijal referentne točke b , $r_b = R_{ref}$, $\varphi(r_b) = \varphi_{ref}$, iz (9.28) slijedi:

$$\varphi(a) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{R_{ref}} \right) + \varphi_{ref} \quad (9.29)$$

ili općenito, dijeljenjem (9.11) s q dobije se:

$$\varphi(a) = - \int_{R_{ref}}^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \varphi_{ref} \quad (9.30)$$

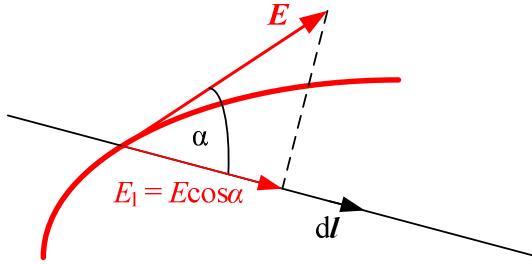
Prema tome, potencijal neke točke u električnom polju možemo odrediti uz proizvoljan izbor referentne točke R_{ref} i potencijala u referentnoj točki $\varphi(R_{ref})$. Time se ne utječe na razlike potencijala, odnosno napone u polju. To se naziva *skaliranje* električnog potencijala.

9.5. Veza između jakosti električnog polja i potencijala

Iz definicijske relacije za razliku potencijala (9.26) slijedi da je diferencijalna razlika potencijala $d\varphi$ na udaljenosti $d\mathbf{l}$ duž puta od točke b do točke a :

$$d\varphi = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -|\mathbf{E}| \cdot |d\mathbf{l}| \cdot \cos \alpha = -E \cdot dl \cdot \cos \alpha = -E_l \cdot dl \quad (9.31)$$

gdje je α kut između vektorâ jakosti električnog polja \mathbf{E} i puta $d\mathbf{l}$, a E_l je komponenta jakosti električnog polja \mathbf{E} usmjerena duž puta $d\mathbf{l}$ (slika 9.3).



Slika 9.3. Uz definiciju veze između jakosti električnog polja i potencijala

Iz (9.31) slijedi:

$$\frac{d\varphi}{dl} = -E \cdot \cos \alpha = -E_l \quad (9.32)$$

gdje je $d\varphi/dl$ derivacija potencijala u smjeru dl . Ova derivacija je usmjerena derivacija koja ovisi o smjeru dl pa time o kutu α . Ako je dl u smjeru jediničnog vektora \mathbf{a}_E jakosti električnog polja \mathbf{E} , tj. $dl = \mathbf{a}_E \cdot dl$, tada je $\alpha = 0$ i vrijedi:

$$\left. \frac{d\varphi}{dl} \right|_{dl=\mathbf{a}_E dl} = -E$$

Ako je dl suprotan od smjera jediničnog vektora \mathbf{a}_E jakosti električnog polja \mathbf{E} , tj. $dl = -\mathbf{a}_E \cdot dl$, tada je $\alpha = \pi$ i vrijedi:

$$\left. \frac{d\varphi}{dl} \right|_{dl=-\mathbf{a}_E dl} = \left. \frac{d\varphi}{dl} \right|_{\max} = E \quad (9.33)$$

Dakle, maksimalna derivacija potencijala je u smjeru suprotnom od smjera električnog polja \mathbf{E} i po iznosu je jednaka jakosti električnog polja E . Pomnožimo li (9.33) s jediničnim vektorom $-\mathbf{a}_E = \mathbf{a}_{-E}$ usmjerenim suprotno od smjera jakosti električnog polja \mathbf{E} , dobijemo:

$$\mathbf{a}_{-E} \left. \frac{d\varphi}{dl} \right|_{\max} = \mathbf{a}_{-E} \cdot E = -\mathbf{a}_E \cdot E = -\mathbf{E} \quad (9.34)$$

Izraz na lijevoj strani u (9.34) predstavlja vektorsku veličinu koju nazivamo gradijentom od φ :

$$\mathbf{a}_{-E} \left. \frac{d\varphi}{dl} \right|_{\max} = \text{grad } \varphi = \nabla \varphi = -\mathbf{E} \quad (9.35)$$

odnosno:

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi = -\nabla \varphi \quad (9.36)$$

Relacija (9.36) ukazuje nam da je **vektor jakosti električnog polja E usmjeren u smjeru pada potencijala**, tj. od višeg k nižem potencijalu. To je u skladu s objašnjenjima danim za napon U_{ab} u polju točkastog naboja (9.28).

Do istog izraza možemo doći ako u (9.31) uvrstimo vektore E i dl u pravocrtnom koordinatnom sustavu:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{a}_x E_x + \mathbf{a}_y E_y + \mathbf{a}_z E_z ; \quad dl = \mathbf{a}_x dx + \mathbf{a}_y dy + \mathbf{a}_z dz \\ d\varphi &= -\mathbf{E} \cdot dl = -(\mathbf{a}_x E_x + \mathbf{a}_y E_y + \mathbf{a}_z E_z) \cdot (\mathbf{a}_x dx + \mathbf{a}_y dy + \mathbf{a}_z dz) \end{aligned}$$

Ako uzmemo da je $dl = \mathbf{a}_x dx$ i $dy = dz = 0$, tada je:

$$\begin{aligned} d\varphi &= -\mathbf{E} \cdot dl = -(\mathbf{a}_x E_x + \mathbf{a}_y E_y + \mathbf{a}_z E_z) \cdot (\mathbf{a}_x dx) = -E_x dx \\ \frac{d\varphi}{dx} \Bigg|_{\substack{y=\text{konst.} \\ z=\text{konst.}}} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -E_x \end{aligned}$$

Ako uzmemo da je $dl = \mathbf{a}_y dy$ i $dx = dz = 0$, tada je:

$$\begin{aligned} d\varphi &= -\mathbf{E} \cdot dl = -(\mathbf{a}_x E_x + \mathbf{a}_y E_y + \mathbf{a}_z E_z) \cdot (\mathbf{a}_y dy) = -E_y dy \\ \frac{d\varphi}{dy} \Bigg|_{\substack{x=\text{konst.} \\ z=\text{konst.}}} &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -E_y \end{aligned}$$

Ako uzmemo da je $dl = \mathbf{a}_z dz$ i $dx = dy = 0$, tada je:

$$\begin{aligned} d\varphi &= -\mathbf{E} \cdot dl = -(\mathbf{a}_x E_x + \mathbf{a}_y E_y + \mathbf{a}_z E_z) \cdot (\mathbf{a}_z dz) = -E_z dz \\ \frac{d\varphi}{dz} \Bigg|_{\substack{x=\text{konst.} \\ y=\text{konst.}}} &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -E_z \end{aligned}$$

Jakost električnog polja je onda:

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}_x E_x + \mathbf{a}_y E_y + \mathbf{a}_z E_z = -\left(\mathbf{a}_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{a}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = -\text{grad } \varphi = -\nabla \varphi \quad (9.37)$$

U pravocrtnom koordinatnom sustavu (x, y, z) jakost električnog polja E izražena preko gradijenta potencijala φ je:

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi = -\left(\mathbf{a}_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{a}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \quad (9.38)$$

U cilindričnom koordinatnom sustavu (r, α, z) jakost električnog polja \mathbf{E} izražena preko gradijenta potencijala φ je:

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi = -\left(\mathbf{a}_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \mathbf{a}_\alpha \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \mathbf{a}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \quad (9.39)$$

U sfernom koordinatnom sustavu (r, ϑ, α) jakost električnog polja \mathbf{E} izražena preko gradijenta potencijala φ je:

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi = -\left(\mathbf{a}_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \mathbf{a}_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} + \mathbf{a}_\alpha \frac{1}{r \cdot \sin \vartheta} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right) \quad (9.40)$$

Kako je jakost električnog polja \mathbf{E} derivacija potencijala prema (9.36) slijedi važno svojstvo električnog potencijala φ : **električni potencijal je kontinuirana funkcija**. Ukoliko bi potencijal bio diskontinuirana funkcija, na mjestu diskontinuiteta bi onda prema (9.36) imali beskonačan iznos jakosti električnog polja, što je fizikalno nemoguće.

9.6. Ekvipotencijalne plohe

Ekvipotencijalne plohe su geometrijsko mjesto točaka u prostoru gdje postoji električno polje na kojima je potencijal konstantan:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi_e = \text{konst.} \quad (9.41)$$

Ako se radi o električnom polju koje je prikazano u ravnini, onda govorimo o *ekvipotencijalnim linijama* koje su krivulje u prostoru na kojima je potencijal konstantan.

U skladu s definicijom potencijala (9.19), ekvipotencijalne plohe (linije) su također geometrijsko mjesto točaka u prostoru gdje postoji električno polje na kojima je konstantna potencijalna energija pokusnog naboja q :

$$\varphi(a) = \frac{W_p(a)}{q} ; \quad W_e = q \cdot \varphi_e = \text{konst.} \quad (9.42)$$

Ekvipotencijalne plohe imaju dva važna svojstva:

- Prema (9.42) u svakoj točki ekvipotencijalne plohe, potencijalna energija pokusnog naboja q je ista. Zato se pri pomicanju pokusnog naboja q po ekvipotencijalnoj plohi ne troši niti dobija nikakav rad. Daljnja posljedica ovoga je da je električno polje okomito na ekvipotencijalnu plohu. Naime, kad bi električno polje imalo komponentu tangencijalnu na ekvipotencijalnu plohu, onda bi se pri pomicanju naboja po ekvipotencijalnoj plohi dobijao ili trošio rad, čime bi se mijenjala potencijalna energija naboja, a to je u suprotnosti s definicijom ekvipotencijalnih ploha. Prema tome **silnice električnog polja i ekvipotencijalne plohe su međusobno okomite**. Nadalje, u potpoglavlju 5.3. zaključili smo da na površini vodiča u statičkim uvjetima postoji samo normalna komponenta polja. Iz tога slijedi da je **površina vodiča u statičkim uvjetima ekvipotencijalna ploha**.

- Drugo svojstvo slijedi iz činjenice da je prema (9.36) jakost električnog polja E jednaka derivaciji potencijala. To znači da je *gustoća ekvipotencijala srazmjerna jakosti polja*. Neka polje ima samo jednu komponentu, npr. E_x . Tada je prema (9.37):

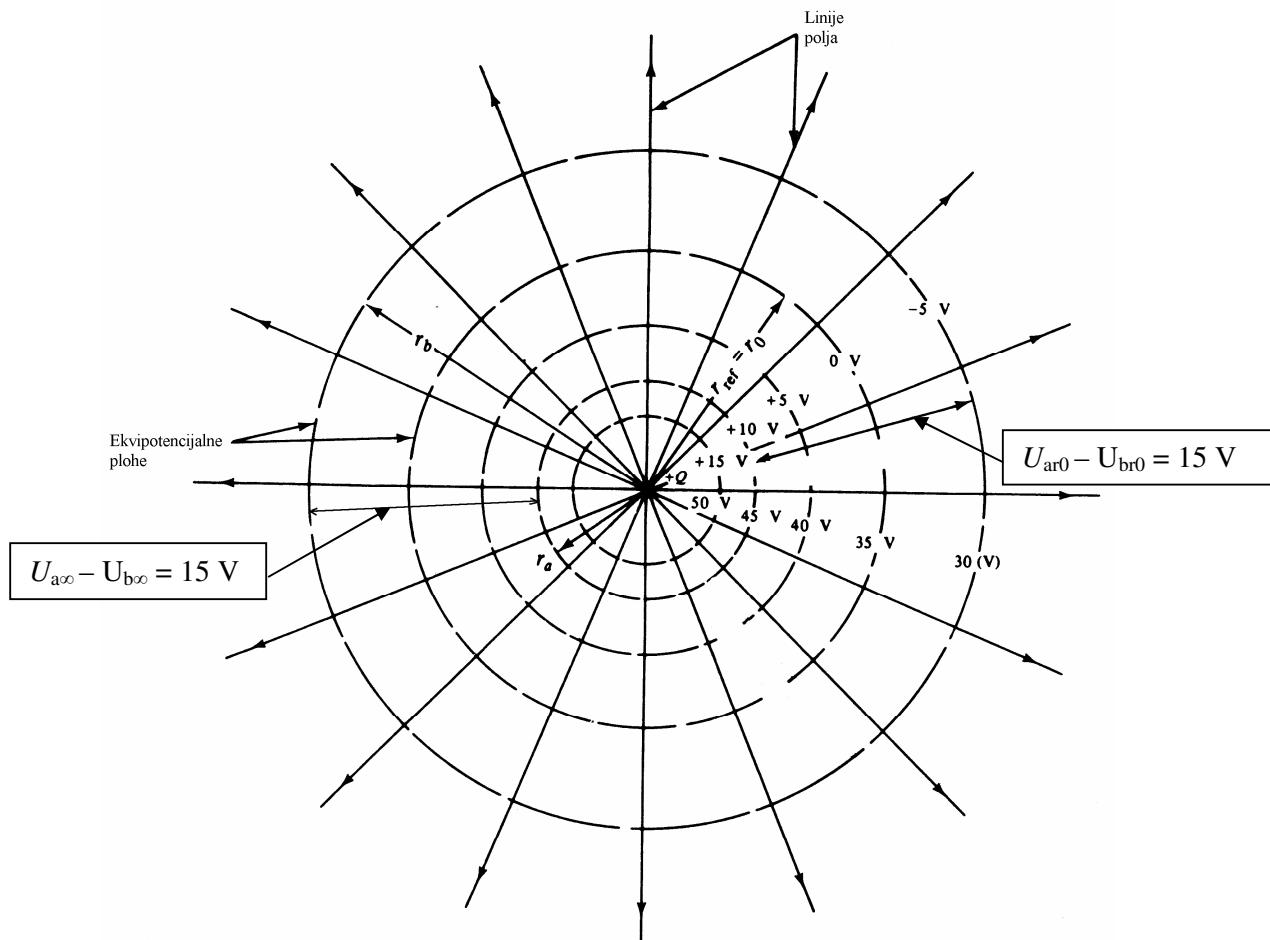
$$\mathbf{E} = \mathbf{a}_x E_x = -\mathbf{a}_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} \approx -\mathbf{a}_x \frac{\Delta \varphi}{\Delta x} \Rightarrow \Delta x = -\frac{\Delta \varphi}{E_x} \quad (9.43)$$

Ako nacrtamo ekvipotencijale tako da je razlika potencijala $\Delta\varphi$ između njih jednak, onda će razmak između ekvipotencijala Δx biti to manji što je veća jakost električnog polja E_x .

Ekvipotencijalne plohe točkastog naboja su kugle:

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r} = \varphi_e \Rightarrow r = \frac{Q}{4\pi\epsilon\varphi_e} = \text{konst.} \quad (9.44)$$

a to je jednadžba kugli. U ravninskom prikazu to su kružnice. Na slici 9.4. prikazane su ekvipotencijale i silnice točkastog naboja.



Slika 9.4. Ekvipotencijale i silnice točkastog naboja

Prikaz ekvipotencijala načinjen je s razlikom potencijala između dviju susjednih ekvipotencijala $\Delta\varphi = 5 \text{ V}$. Na slici su također dane ekvipotencijale uz dva različita skaliranja potencijala: na gornjoj polovici slike prikazane su ekvipotencijale uz $R_{\text{ref}} = r_0$, a na donjoj uz $R_{\text{ref}} = \infty$. U oba slučaja je $\varphi(R_{\text{ref}}) = 0$. Sa slike uočavamo irelevantnost izbora referentne točke na napon (razliku potencijala). Ta irelevantnost prisutna je i kod određivanja jakosti električnog polja. Prema (9.36) ista je jakost električnog polja za familiju potencijalnih funkcija koje se međusobno razlikuju za konstantu. Jakost električnog polja, koja je jednaka derivaciji potencijala, bit će ista za sve te potencijalne funkcije bez obzira na izbor referentne točke R_{ref} i potencijala u referentnoj točki $\varphi(R_{\text{ref}})$. Jakost električnog polja je fizikalna veličina, definirana iz sile na naboj (Coulombov zakon) dok je električni potencijal izvedena veličina, uvedena da se olakša izračun jakosti električnog polja.

Za ilustraciju, odredimo primjenom izraza (9.29) potencijale točkastog naboja na tri udaljenosti $r_1 = 1 \text{ m}$, $r_2 = 2 \text{ m}$, $r_3 = 3 \text{ m}$, pri čemu je:

- a) $R_{\text{ref}} = \infty$, $\varphi(R_{\text{ref}}) = 0$,
- b) $R_{\text{ref}} = r_0 = 2 \text{ m}$, $\varphi(R_{\text{ref}}) = 0$.

Iz (9.29):

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_{\text{ref}}} \right) + \varphi_{\text{ref}}$$

slijedi:

a)

$$\varphi(r_1) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r_1} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} ; \quad \varphi(r_2) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r_2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{2} ; \quad \varphi(r_3) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r_3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{3}$$

$$U_{13} = \varphi(r_1) - \varphi(r_3) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{2}{3}$$

b)

$$\varphi(r_1) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{2} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{2} ; \quad \varphi(r_2) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{2} \right) = 0 ; \quad \varphi(r_3) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{2} \right) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{6}$$

$$U_{13} = \varphi(r_1) - \varphi(r_3) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{6} \right) \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{2}{3}$$

Na primjeru ovog jednostavnog izračuna ilustrirana je proizvoljnost izbora referentne točke R_{ref} i potencijala u referentnoj točki $\varphi(R_{\text{ref}})$.

9.7. Diferencijalna jednadžba potencijala

Gaussov zakon u diferencijalnom obliku dan je relacijom (8.8):

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = \rho_s \quad (8.8)$$

Uvrstimo li jakost električnog polja \mathbf{E} iz (9.32):

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi = -\nabla \varphi \quad (9.36)$$

dobije se:

$$\nabla \cdot [\epsilon(-\nabla \varphi)] = \rho_s \quad (9.45)$$

Ako je sredstvo homogeno ($\epsilon = \text{konst.}$) onda relacija (9.45) prelazi u:

$$\nabla \cdot \nabla \varphi = -\frac{\rho_s}{\epsilon} \quad (9.46)$$

odnosno:

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho_s}{\epsilon} \quad (9.47)$$

Diferencijalna jednadžba (9.47) naziva se *Poissonova jednadžba* i primjenjuje se na rješavanje potencijala u homogenom sredstvu.

Ako u prostoru nema slobodnih naboja $\rho_s = 0$, tada Poissonova jednadžba (9.47) prelazi u *Laplaceovu jednadžbu* u homogenom prostoru:

$$\Delta \varphi = 0 \quad (9.48)$$

U pravocrtnom koordinatnom sustavu (x, y, z) Poissonova jednadžba (9.47) je:

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho_s}{\epsilon} \quad (9.49)$$

U cilindričnom koordinatnom sustavu (r, α, z) Poissonova jednadžba (9.47) je:

$$\Delta \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho_s}{\epsilon} \quad (9.50)$$

U sfernom koordinatnom sustavu (r, ϑ, α) Poissonova jednadžba (9.47) je:

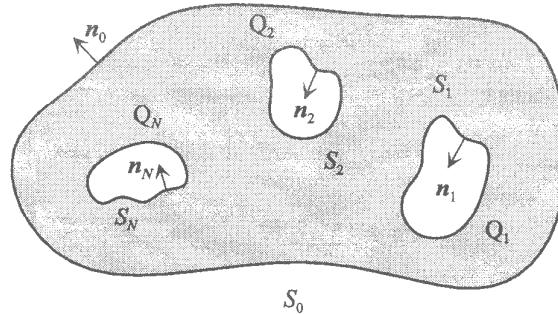
$$\Delta \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = -\frac{\rho_s}{\epsilon} \quad (9.51)$$

Odgovarajuće Laplaceove jednadžbe na desnoj strani imaju nulu.

9.8. Jedinstvenost rješenja Poissonove i Laplaceove jednadžbe

Beskonačno mnogo rješenja za skalarno polje potencijala može zadovoljiti Laplaceovu (9.48) odnosno Poissonovu jednadžbu (9.47). Da bi rješenje potencijala neke elektrostatičke zadaće bilo jedinstveno, ono mora zadovoljavati Laplaceovu odnosno Poissonovu jednadžbu, te također uvjete potencijala na rubovima područja proračuna (*rubni uvjeti*).

Za određivanje potrebnih rubnih uvjeta koji daju jednoznačno rješenje potencijala, analizirajmo sustav statičkog električnog polja prikazanog na slici 9.5. Neka se unutar prostora volumena V ograničenog površinom S koja se sastoji od više površina S_0, S_1, \dots, S_N nalazi linearni homogeni dielektrični materijal dielektričnosti ϵ i neka se unutar volumena V nalazi slobodni naboj prostorne gustoće ρ (naboj ne mora postojati, pa će onda rješenje potencijala biti opisano Laplaceovom jednadžbom).



Slika 9.5. Sustav statičkog električnog polja

Prepostavimo da postoje dva različita rješenja potencijala φ_1 i φ_2 Poissonove jednadžbe u volumenu V . Mora vrijediti:

$$\Delta\varphi_1 = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad ; \quad \Delta\varphi_2 = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (9.52)$$

Ako te dvije Poissonove jednadžbe oduzmemos dobije se:

$$\Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2 = \Delta(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \quad (9.53)$$

Dakle, razlika rješenja mora zadovoljavati Laplaceovu jednadžbu. Rješenje statičkog električnog polja:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi$$

bit će jedinstveno ako je:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 0 \quad \text{ili} \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \text{konst. u } V \quad (9.54)$$

Da bismo ispitali pod kojim je uvjetima to ispunjeno, primjenimo prvi Greenov identitet:

$$\oint_S u \frac{\partial v}{\partial n} dS = \int_V [u \Delta v + \nabla u \cdot \nabla v] dV \quad (9.55)$$

u kojem uvrstimo $u = v = \varphi_1 - \varphi_2$. Dobije se, uvažavajući (9.53):

$$\oint_S (\varphi_1 - \varphi_2) \frac{\partial(\varphi_1 - \varphi_2)}{\partial n} dS = \int_V [\nabla(\varphi_1 - \varphi_2)]^2 dV \quad (9.56)$$

Da bi rješenje statičkog električnog polja bilo jedinstveno prema uvjetu (9.54), desna strana u jednadžbi (9.56) mora biti jednaka nuli. Ljeva strana u jednadžbi (9.56) jednaka je nuli u sljedećim karakterističnim slučajevima:

1. $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$, odnosno $\varphi_1 = \varphi_2$ u svim točkama površine S . Tada i u cijelom području V vrijedi $\varphi_1 = \varphi_2$.
2. $\partial\varphi_1/\partial n - \partial\varphi_2/\partial n = 0$, odnosno $\partial\varphi_1/\partial n = \partial\varphi_2/\partial n$ u svim točkama površine S . Tada i u cijelom području V vrijedi $\varphi_1 = \varphi_2 + \varphi_0$.
3. $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$ na jednom dijelu površine S , a $\partial\varphi_1/\partial n - \partial\varphi_2/\partial n = 0$ na ostatku površine S . Tada i u cijelom području V vrijedi $\varphi_1 = \varphi_2$.

Sukladno tome, rješenje Poissonove (Laplaceove) jednadžbe je jedinstveno ako su na rubovima proračuna zadani rubni uvjeti definirani u ova tri karakteristična slučaja. Prema tome razlikujemo tri formulacije rubnih uvjeta u rješavanju Poissonove (Laplaceove) jednadžbe:

1. *Dirichletovi uvjeti*: Rješenje Poissonove (Laplaceove) jednadžbe jedinstveno je u području proračuna V ako je zadan potencijal na zatvorenoj površini S koja obuhvaća područje proračuna V .
2. *Neumannovi uvjeti*: Rješenje Poissonove (Laplaceove) jednadžbe jedinstveno je do na konstantu u području proračuna V ako je zadana derivacija potencijala $\partial\varphi/\partial n$ na zatvorenoj površini S koja obuhvaća područje proračuna V .
3. *Miješani uvjeti*: Rješenje Poissonove (Laplaceove) jednadžbe jedinstveno je u području proračuna V ako je na jednom dijelu zatvorene površine S koja obuhvaća područje proračuna V zadan potencijal a na ostatku površine S zadana derivacija potencijala $\partial\varphi/\partial n$.

U svakoj od tih formulacija vektori \mathbf{D} i \mathbf{E} će također biti jedinstveni u području proračuna V i na zatvorenoj površini S koja obuhvaća područje proračuna V .

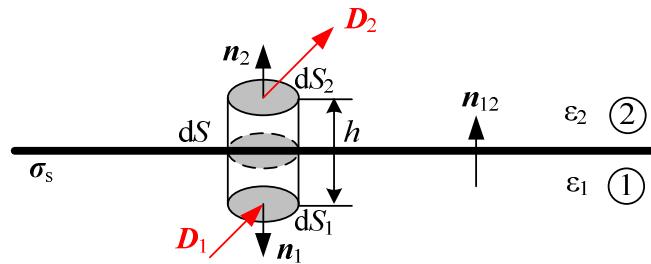
Izravna posljedica jedinstvenosti rješenja Poissonove (Laplaceove) jednadžbe je da se statičko električno polje ne mijenja ako bilo koji dio ili cijelu ekvipotencijalnu površinu prekrijemo tankim slojem metala zanemarive debljine. Zbog svojstva metala da je u statičkom električnom polju ekvipotencijalan, potencijal na toj površini se neće promijeniti. Zbog jedinstvenosti rješenja Poissonove (Laplaceove) jednadžbe potencijal se neće promijeniti niti u jednoj točki polja.

10. UVJETI NA GRANICI

U makroskopskom pristupu izvore polja koji su stvarne gustoće prostornog naboja idealiziramo u obliku singularnih gustoća naboja: plošnih i linijskih. Takve idealizacije mogu onda imati za posljedicu diskontinuitete u veličinama polja.

10.1. Uvjeti na granici dva dielektrika

Uzmimo da se na graničnoj površini S dva dielektrika dielektričnosti ϵ_1 i ϵ_2 nalazi slobodni naboј plošne gustoće σ_s . Neka je s \mathbf{n}_{12} označena normala na graničnu površinu S , usmjerena iz sredstva „1“ u sredstvo „2“ prema slici 10.1.



Slika 10.1. Određivanje vektora električne indukcije \mathbf{D} na granici

Primjenimo Gaussov zakon na mali cilindar površine baze dS , visine h . Vrijedi: $\mathbf{n}_{12} = -\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_2$, te $dS = dS_1 = dS_2$. Primjena Gaussovog zakona (8.7) daje:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \cdot dS = \int_V \rho_s \cdot dV \quad (10.1)$$

$$\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n}_1 \cdot dS_1 + \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{n}_2 \cdot dS_2 + (\text{doprinos toku kroz plašt}) = \rho_s \cdot h \cdot dS$$

Ako visinu cilindra h smanjujemo ($h \rightarrow 0$) dobije se:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \{-\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n}_{12} \cdot dS + \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{n}_{12} \cdot dS + (\text{doprinos toku kroz plašt})\} = \lim_{h \rightarrow 0} \{\rho_s \cdot h \cdot dS\} \quad (10.2)$$

Kad visina cilindra $h \rightarrow 0$, doprinos toku kroz plašt cilindra također $\rightarrow 0$. Podijelimo li (10.2) s dS , na desnoj strani prema (3.10) dobijemo plošnu gustoću slobodnog naboja σ_s . Relacija (10.2) prelazi u:

$$\mathbf{n}_{12}(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma_s \quad (10.3)$$

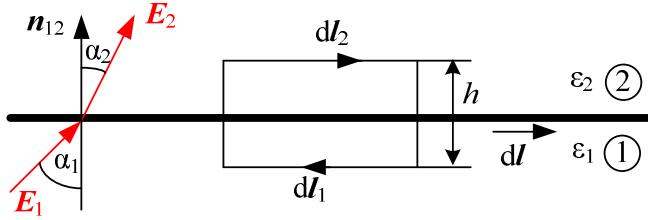
Normalna komponenta vektora električne indukcije \mathbf{D} mijenja se na granici za iznos gustoće plošnog slobodnog naboja na granici. Ako na granici nema slobodnog naboja $\sigma_s = 0$, onda su normalne komponente vektora električne indukcije \mathbf{D} s obje strane granice jednake:

$$\mathbf{n}_{12}(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = 0 \Rightarrow D_{1n} = D_{2n} \quad (10.4)$$

a normalne komponente vektora jakosti električnog polja \mathbf{E} obrnuto su srazmjerene dielektričnostima:

$$D_{1n} = D_{2n} \Rightarrow \epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n} \Rightarrow \frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \quad (10.5)$$

Primjenimo uvjet konzervativnosti statičkog električnog polja (9.14) na malu pravokutnu petlju stranica dl i h prema slici 10.2. Vrijedi: $dl = -dl_1 = dl_2$.



Slika 10.2. Određivanje vektora jakosti električnog polja \mathbf{E} na granici

Primjena (9.14) daje:

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (10.6)$$

$$E_1 \cdot dl_1 + E_2 \cdot dl_2 + (\text{doprinosi na stranicama } h) = 0$$

Ako stranice h smanjujemo ($h \rightarrow 0$) dobije se:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \{-E_1 \cdot dl + E_2 \cdot dl + (\text{doprinosi na stranicama } h)\} = 0 \quad (10.7)$$

Kad stranice $h \rightarrow 0$, doprinos na bočnim stranicama h također $\rightarrow 0$. Relacija (10.7) prelazi u:

$$E_1 \cdot dl = E_2 \cdot dl \quad (10.8)$$

Vrijedi:

$$E_1 \cdot dl = E_1 \cdot dl \cdot \cos(90^\circ - \alpha_1) = E_1 \cdot dl \cdot \sin \alpha_1 \quad (10.9)$$

$$E_2 \cdot dl = E_2 \cdot dl \cdot \cos(90^\circ - \alpha_2) = E_2 \cdot dl \cdot \sin \alpha_2$$

pa (10.8) prelazi u:

$$E_1 \cdot dl \cdot \sin \alpha_1 = E_2 \cdot dl \cdot \sin \alpha_2 \quad (10.10)$$

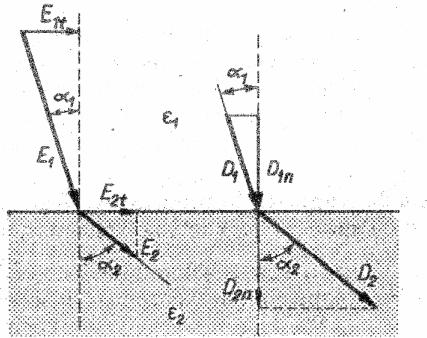
Podijelimo li (10.10) s dl , dobije se:

$$E_1 \cdot \sin \alpha_1 = E_2 \cdot \sin \alpha_2 \Rightarrow E_{1t} = E_{2t} \Rightarrow \mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \quad (10.11)$$

Tangencijalne komponente vektora jakosti električnog polja \mathbf{E} ne mijenjaju se na granici, a normalne komponente vektora električne indukcije \mathbf{D} srazmjerene su dielektričnostima:

$$E_{1t} = E_{2t} \Rightarrow \frac{D_{1t}}{\epsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\epsilon_2} \Rightarrow \frac{D_{1t}}{D_{2t}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \quad (10.12)$$

Iz uvjeta (10.4) i (10.11) slijedi zakon loma silnice električnog polja na granici bez slobodnog naboja (slika 10.3):



Slika 10.3. Zakon loma silnice električnog polja

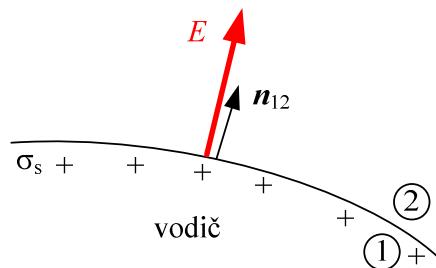
Vrijedi:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_1 &= \frac{E_{1t}}{E_{1n}} \quad ; \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{E_{2t}}{E_{2n}} \\ \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} &= \frac{\frac{E_{1t}}{E_{1n}}}{\frac{E_{2t}}{E_{2n}}} = \frac{E_{1t} \cdot E_{2n}}{E_{2t} \cdot E_{1n}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \end{aligned} \quad (10.13)$$

10.2. Uvjeti na granici vodič-dielelektrik

Uvjeti (10.3) i (10.11) mogu se primjeniti i na granicu vodič-dielelektrik imajući u vidu svojstvo vodiča da u vodiču u statičkim uvjetima nema električnog polja. Neka je sredstvo „1“ vodič, a sredstvo „2“ dielektrične konstante ϵ prema slici 10.4. U vodiču nema polja, $D_1 = 0$, pa uvjet (10.3) prelazi u:

$$\mathbf{n}_{12}(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma_s \Rightarrow \mathbf{n}_{12}\mathbf{D}_2 = \sigma_s \Rightarrow D_{2n} = \sigma_s \quad ; \quad E_{2n} = \frac{\sigma_s}{\epsilon} \quad (10.14)$$



Slika 10.4. Električno polje na granici vodič-dielelektrik

Na površini nabijenog vodiča postoji samo normalna komponenta vektora električne indukcije \mathbf{D} jednaka u svakoj točki plošnoj gustoći slobodnog naboja na površini vodiča u toj točki, odnosno na površini nabijenog vodiča postoji samo normalna komponenta jakosti električnog polja \mathbf{E} .

U vodiču nema polja, $E_1 = 0$, pa uvjet (10.11) prelazi u:

$$E_{1t} = E_{2t} \quad \Rightarrow \quad E_{2t} = 0 \quad (10.15)$$

Na površini nabijenog vodiča nema tangencijalne komponente jakosti električnog polja \mathbf{E} . Dobijeni rezultati u skladu su s fizikalnim razmatranjima načinjenim u potpoglavlju 5.3.

11. KAPACITET I KONDENZATOR

Ako izoliranom vodiču dovodimo naboј onda će i njegov potencijal rasti. To je evidentno iz svih izraza za potencijal različitih raspodjela naboja (9.17) do (9.21). Ako se vodljivo tijelo koje nabijamo nalazi u linearном dielektričnom materijalu, potencijal vodiča bit će srazmjeran naboju na vodiču, što iskazujemo s:

$$Q = C \cdot \varphi \quad (11.1)$$

Konstantu proporcionalnosti:

$$C = \frac{Q}{\varphi} \quad (11.2)$$

nazivamo *kapacitet* promatranog tijela. Jedinica za kapacitet je farad: $1F = 1C/1V$. U linearnim dielektričnim materijalima kapacitet je geometrijska karakteristika statičkog električnog polja i dielektričnosti, a neovisan je o naboju i potencijalu vodiča.

Odredimo kapacitet usamljene vodljive kugle polumjera R , nabijene nabojem Q , u sredstvu dielektričnosti ϵ . Primjenom Gaussovog zakona lako možemo izračunati da je jakost električnog polja kugle na udaljenosti $r > R$ od njezina središta:

$$E(r) = a_r \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \quad (11.3)$$

tj. ista je kao jakost električnog polja kojeg stvara točkasti naboј Q smješten u središtu kugle. Stoga je i potencijal nabijene kugle na udaljenosti $r > R$ od njezina središta isti kao potencijal kojeg stvara točkasti naboј Q smješten u središtu kugle:

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r} \quad (11.4)$$

Potencijal na površini kugle ($r = R$) prema (11.4) je:

$$\varphi(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon R} \quad (11.5)$$

a kapacitet usamljene vodljive kugle prema (11.2) je onda:

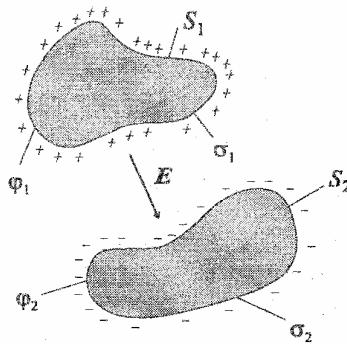
$$C = \frac{Q}{\varphi(R)} = 4\pi\epsilon R \quad (11.6)$$

Iz (11.6) vidmo da kapacitet ovisi samo o geometriji (polumjeru kugle R) i dielektričnosti sredstva ϵ .

11.1. Kapacitet kondenzatora

Potencijal nabijenog vodljivog tijela ovisan je o količini naboja koja se na tom tijelu nalazi, ali također ovisi i o nabojima (njihovom iznosu i predznaku) na vodljivim tijelima koja se nalaze u njegovoj blizini. Tako npr. ako u blizinu vodljive kugle nabijene pozitivnim nabojem dovedemo drugu kuglu nabijenu negativnim nabojem, potencijal pozitivno nabijene kugle će se smanjiti. Kako je naboje pozitivno nabijene kugle ostao nepromijenjen, a potencijal joj se smanjio, prema (11.2) povećat će joj se kapacitet. Dakle, kapacitet nabijenog vodljivog tijela možemo povećati tako da mu se u blizinu dovede vodljivo tijelo nabijeno nabojem suprotnog predznaka.

Specijalni slučaj, koji najčešće susrećemo u praksi, jeste kada dva bliska, međusobno izolirana vodljiva tijela, nabijemo istim nabojima Q suprotnog predznaka. Takve naprave zovemo *kondenzatori* a služe nam za pohranjivanje naboja, odnosno energije električnog polja. Vodljiva tijela koja se nalaze u prostoru ispunjenom materijalom dielektričnosti ϵ nazivamo *elektrodama* (slika 11.1). Nabijanje kondenzatora možemo načiniti spajanjem elektroda kondenzatora na izvor istosmjernog napona, npr. na bateriju.



Slika 11.1. Kondenzator kao sustav dviju elektroda

Električno polje E u tom sustavu povezano je s nabojima na vodičima, a napon (razlika potencijala) povezan je s poljem E preko jednadžbe (9.22). Ako je materijal između elektroda kondenzatora linearan, jakost električnog polja E je u svakoj točki srazmjeran naboju Q (ili $-Q$) a to znači da je i napon između elektroda srazmjeran naboju:

$$Q = C(\varphi_1 - \varphi_2) = C \cdot U_{12} = C \cdot U \quad (11.7)$$

Veličinu C , koja je konstantna, nazivamo *kapacitetom kondenzatora*:

$$C = \frac{Q}{U} \quad (11.8)$$

Kod izračunavanja kapaciteta kondenzatora može biti zadan naboje na elektrodama ili napon između elektroda. Ako je zadan naboje Q na elektrodama, potrebno je prvo izračunati jakost električnog polja E za zadanu razdiobu naboja, iz koje se onda prema (9.22) izračuna napon:

$$U = U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = -\int_2^1 E \cdot dl \quad (9.22)$$

a kapacitet je onda:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{-\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}} \quad (11.9)$$

Ako je zadan napon U između elektroda, potrebno je prvo izračunati jakost električnog polja \mathbf{E} za zadani napon, rješenjem diferencijalne jednadžbe potencijala. Naboј na jednoj od elektroda odredi se onda primjenom Gaussovog zakona (8.3):

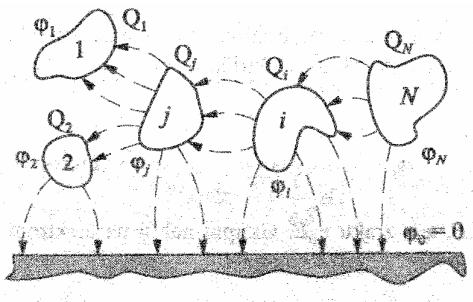
$$Q = \oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \cdot dS \quad (8.3)$$

pri čemu se površina S postavlja tako da obuhvaća jednu od elektroda. Kapacitet je onda:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \cdot dS}{U} \quad (11.10)$$

11.2. Sustav vodiča i parcijalni kapaciteti

Razmotrit ćemo sada odnose u statičkom električnom polju koje je formirano od N odvojenih nabijenih vodljivih tijela prema slici 11.2.



Slika 11.2. Električno polje sustava od N nabijenih vodiča

Sva su ta tijela povezana preko električnog polja: raspodjela naboјa na svakom tijelu nastala je pod utjecajem naboјa svih ostalih tijela i statičko električno polje nastaje djelovanjem naboјa sa svih tijela. U takvom sustavu odaberemo referentnu ekvipotencijalnu plohu kojoj pridjeljujemo nulli potencijal. U statičkim električnim poljima najčešće za tu referentnu plohu odabiremo površinu zemlje.

Sa nekog i -tog vodljivog tijela polaze linije električnog toka (\mathbf{D} -linije) na preostalih $N-1$ tijela i na referentnu plohu kojoj pridjeljujemo indeks „0“. Ukupni električni tok s nekog i -tog tijela jednak je zbroju električnih tokova koji odlaze prema ostalim tijelima:

$$\phi_i = \phi_{i0} + \phi_{i1} + \dots + \phi_{i,i-1} + \phi_{i,i+1} + \dots + \phi_{i,N} \quad ; \quad i = 0, \dots, N \quad (11.11)$$

Ukupni električni tok s i -tog tijela Φ_i prema Gaussovom zakonu (8.3) jednak je naboju na tom tijelu Q_i . Električni tokovi koji s i -tog tijela odlaze na neko j -to tijelo Φ_{ij} jednaki su naboju Q_{ij} na j -tom tijelu (dio ukupnog naboja na j -tom tijelu) kojeg veže električnim poljem električni tok Φ_{ij} . Dakle, vrijedi:

$$Q_i = Q_{i0} + Q_{i1} + \dots + Q_{i,i-1} + Q_{i,i+1} + \dots + Q_{i,N} = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N Q_{ij} \quad ; \quad i = 0, \dots, N \quad (11.12)$$

U linearim dielektričnim sredstvima naboje srazmjeran razlici potencijala, pa uvodimo pojam *parcijalnih kapaciteta* C_{ij} kao omjer naboja koji je vezan električnim poljem između dva tijela Q_{ij} i razlike potencijala između tih tijela:

$$\begin{aligned} C_{ij} &= \frac{Q_{ij}}{\varphi_i - \varphi_j} \quad ; \quad i = 0, \dots, N \quad ; \quad i \neq j \\ C_{ii} &= C_{ii} = 0 \quad ; \quad i = j \end{aligned} \quad (11.13)$$

Zbog simetrije vrijedi: $C_{ij} = C_{ji}$. Uvrštenjem parcijalnih kapaciteta (11.13) u (11.12) dobije se:

$$Q_i = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N Q_{ij} = \sum_{j=0}^N C_{ij} (\varphi_i - \varphi_j) \quad ; \quad i = 0, \dots, N \quad (11.14)$$

U mnogim primjenama pogodno je izraz (11.14) preuređiti tako da umjesto ovisnosti naboja o razlikama potencijala izrazimo ovisnost naboja o potencijalu pojedinih vodiča:

$$Q_i = \left\{ \sum_{j=0}^N C_{ij} \right\} \varphi_i + \sum_{j=0}^N (-C_{ij}) \varphi_j = \sum_{j=0}^N b_{ij} \varphi_j \quad ; \quad i = 0, \dots, N \quad (11.15)$$

gdje su b_{ij} *koeficijenti indukcije* ili *kapacitivni koeficijenti*. Iz (11.15) slijedi veza između parcijalnih kapaciteta i kapacitivnih koeficijenata:

$$\begin{aligned} b_{ij} &= -C_{ij} \quad ; \quad i = 0, \dots, N \quad ; \quad j = 0, \dots, N; j \neq i \\ b_{ij} &= b_{ii} = \sum_{k=0}^N C_{ik} \quad ; \quad i = 0, \dots, N \quad ; \quad j = i \end{aligned} \quad (11.16)$$

U sustavu sa slike 11.2. ukupni naboje u sustavu za statičko električno polje jednaki su nuli. Takve sustave nazivamo *potpunim sustavima*. Čak i ako su sva vodljiva tijela nabijena nabojem istoga predznaka, npr. pozitivnim, sav električni tok koji odlazi sa tih tijela završit će na referentnoj plohi (zemlji) i na njoj inducirati naboje Q_0 negativnog predznaka iznosa istoga kao zbroj svih pozitivnih naboja na tijelima. To znači da možemo postaviti dodatnu jednadžbu:

$$Q_0 = -\sum_{i=1}^N Q_i \quad (11.17)$$

Naboj Q_0 možemo izraziti iz (11.14) preko parcijalnih kapaciteta tijelâ C_{0j} prema referentnoj plohi:

$$Q_0 = \sum_{j=1}^N Q_{0j} = \sum_{j=1}^N C_{0j} (\varphi_0 - \varphi_j) \quad (11.18)$$

Kako obično uzimamo da je potencijal referentne plohe $\varphi_0 = 0$, (11.18) prelazi u:

$$Q_0 = - \sum_{j=1}^N C_{0j} \cdot \varphi_j \quad (11.19)$$

Suma naboja Q_i prema (11.15) je:

$$\sum_{i=1}^N Q_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N b_{ij} \varphi_j \quad (11.20)$$

Uvrštavanjem (11.19) i (11.20) u (11.17) dobije se:

$$- \sum_{j=1}^N C_{0j} \cdot \varphi_j = - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N b_{ij} \varphi_j = - \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N b_{ij} \varphi_j \quad (11.21)$$

odakle slijedi parcijalni kapacitet j -tog tijela prema referentnoj plohi:

$$C_{j0} = C_{0j} = \sum_{i=1}^N b_{ij} = \sum_{i=1}^N b_{ji} \quad (11.22)$$

jer je $b_{ij} = -C_{ij}$, $C_{ij} = C_{ji}$ pa je $b_{ij} = b_{ji}$.

Veza između potencijala i naboja na tijelima (11.15) tada je:

$$Q_i = \sum_{j=1}^N b_{ij} \varphi_j \quad ; \quad i = 1, \dots, N \quad (11.23)$$

što se može zapisati matrično:

$$[Q] = [b] \cdot [\varphi] \quad (11.24)$$

Obično je jednostavnije izraziti potencijale u ovisnosti o nabojima na tijelima:

$$[\varphi] = [a] \cdot [Q] \quad (11.25)$$

gdje su a_{ij} takozvani *potencijalni koeficijenti*. Iz (11.24) i (11.25) vidimo da lako možemo odrediti članove matrice kapacitivnih koeficijenata $[b]$ inverzijom matrice potencijalnih koeficijenata $[a]$:

$$[b] = [a]^{-1} \quad (11.26)$$

iz kojih se onda prema (11.16) i (11.22) odrede svi parcijalni kapaciteti:

$$\begin{aligned} C_{ij} &= -b_{ij} \quad ; \quad i = 0, \dots, N \quad ; \quad j = 0, \dots, N; j \neq i \\ C_{j0} &= \sum_{j=1}^N b_{ij} \end{aligned} \tag{11.27}$$

Sustav vodiča možemo onda prikazati nadomjesnom shemom parcijalnih kapaciteta. Potencijal i -tog čvora u takvoj shemi odgovara potencijalu i -tog vodiča u polju, a parcijalni kapacitet C_{ij} spajamo između i -tog i j -tog čvora.

12. ENERGIJA STATIČKOG ELEKTRIČNOG POLJA

U potpoglavlju (9.1) analizirali smo potencijalnu energiju naboja q koji se dovodi u električno polje jakosti \mathbf{E} :

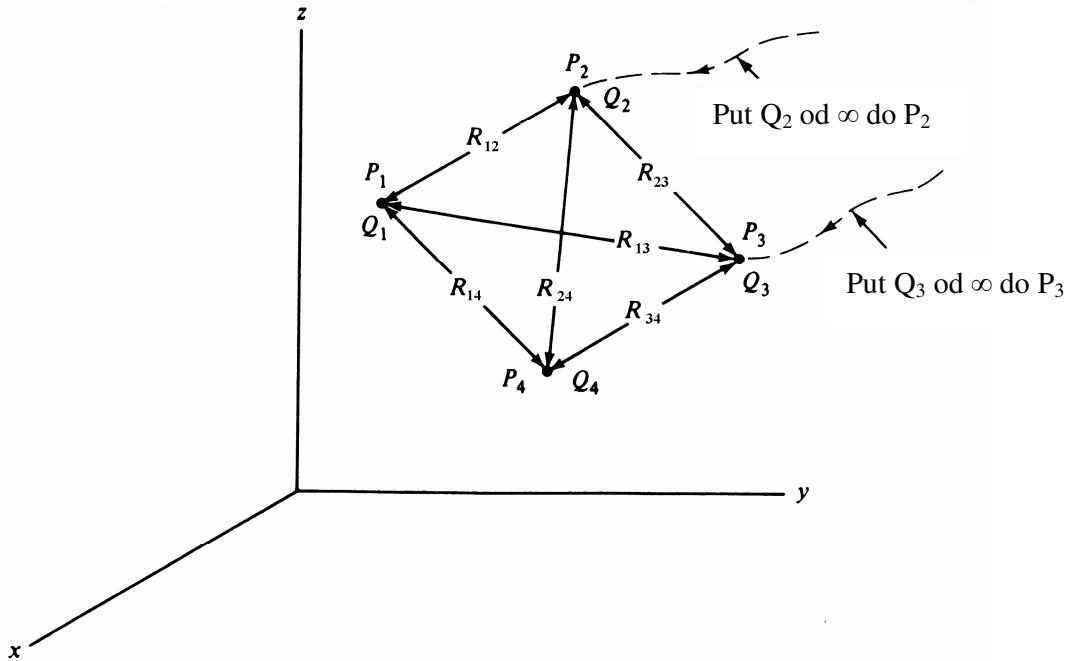
$$W_p(a) = - \int_{\infty}^a \mathbf{F}_E \cdot d\mathbf{l} = - \int_{\infty}^a q \cdot \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = q \cdot \varphi(a) \quad (9.12)$$

Relacija (9.12) predstavlja *energiju međudjelovanja (energiju interakcije)* naboja q i nekog vanjskog električnog polja \mathbf{E} , koje je opisano skalarnim poljem potencijala $\varphi(\mathbf{r})$.

Analizirat ćemo sada energiju koju je potrebno utrošiti da se izgradi sustav naboja.

12.1. Potencijalna energija sustava točkastih naboja

Analizirat ćemo energiju koju je potrebno utrošiti da bi se formirao skup od 4 pozitivna točkasta naboja Q_1, Q_2, Q_3 i Q_4 prema slici 12.1. Pretpostavimo da su svi naboji početno bili u beskonačnosti i da sustav naboja gradimo tako da jedan po jedan naboj dovodimo iz beskonačnosti.



Slika 12.1. Formiranje sustava od 4 točkasta naboja

Za dovođenje prvog naboja Q_1 iz beskonačnosti u točku P_1 nije potrebno utrošiti nikakav rad budući da u prostoru ne postoji nikakvo električno polje.

Za dovođenje drugog naboja Q_2 iz beskonačnosti u točku P_2 potrebno je utrošiti energiju da se u prostor, u kojem postoji električno polje stvoreno nabojem Q_1 , naboj Q_2 iz beskonačnosti doveđe u točku P_2 . Ta energija prema (9.12) je:

$$W_2 = \varphi_{12} \cdot Q_2 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon R_{12}} Q_2 \quad (12.1)$$

gdje je s φ_{12} označen potencijal kojeg u točki P₂ stvara točkasti naboј Q_1 , a s R_{12} označena udaljenost naboja Q_1 i Q_2 (udaljenost između točaka P₁ i P₂).

Jasno je da bi istu energiju trebalo utrošiti da smo prvo iz beskonačnosti doveli naboј Q_2 u točku P₂, a zatim iz beskonačnosti u točku P₁ doveli naboј Q_1 , što iskazujemo relacijom:

$$W_2 = \varphi_{21} \cdot Q_1 = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon R_{12}} Q_1 \quad (12.2)$$

gdje je s φ_{21} označen potencijal kojeg u točki P₁ stvara točkasti naboј Q_2 , a s R_{12} označena udaljenost naboja Q_1 i Q_2 (udaljenost između točaka P₁ i P₂).

Za dovođenje trećeg naboja Q_3 iz beskonačnosti u točku P₃ potrebno je utrošiti energiju da se u prostor, u kojem postoji električno polje stvoreno nabojima Q_1 i Q_2 , naboј Q_3 iz beskonačnosti dovede u točku P₃. Ta energija prema (9.12) je:

$$W_3 = \varphi_{13} \cdot Q_3 + \varphi_{23} \cdot Q_3 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon R_{13}} Q_3 + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon R_{23}} Q_3 \quad (12.3)$$

gdje je su φ_{13} i φ_{23} potencijali koje u točki P₃ stvaraju točkasti naboјi Q_1 i Q_2 , a R_{13} i R_{23} su udaljenosti naboja Q_1 i Q_2 od naboja Q_3 (udaljenost između točaka P₁ i P₃ odnosno između točaka P₂ i P₃).

Ista energija bila bi potrebna ako je prvo naboј Q_3 iz beskonačnosti doveden u točku P₃, a zatim da su dovođeni naboјi Q_1 i Q_2 :

$$W_3 = \varphi_{31} \cdot Q_1 + \varphi_{32} \cdot Q_2 = \frac{Q_3}{4\pi\epsilon R_{13}} Q_1 + \frac{Q_3}{4\pi\epsilon R_{23}} Q_2 \quad (12.4)$$

gdje je su φ_{31} i φ_{32} potencijali koje u točkama P₁ i P₂ stvara točkasti naboј Q_3 .

Za dovođenje četvrtog naboja Q_4 iz beskonačnosti u točku P₄ potrebno je utrošiti energiju da se u prostor, u kojem postoji električno polje stvoreno nabojima Q_1 , Q_2 i Q_3 , naboј Q_4 iz beskonačnosti dovede u točku P₄. Ta energija prema (9.12) je:

$$W_4 = \varphi_{14} \cdot Q_4 + \varphi_{24} \cdot Q_4 + \varphi_{34} \cdot Q_4 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon R_{14}} Q_4 + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon R_{24}} Q_4 + \frac{Q_3}{4\pi\epsilon R_{34}} Q_4 \quad (12.5)$$

gdje je su φ_{14} , φ_{24} i φ_{34} potencijali koje u točki P₄ stvaraju točkasti naboјi Q_1 , Q_2 i Q_3 , a R_{14} , R_{24} i R_{34} su udaljenosti naboja Q_1 , Q_2 i Q_3 od naboja Q_4 .

Ista energija bila bi potrebna ako je prvo naboј Q_4 iz beskonačnosti doveden u točku P₄, a zatim da su dovođeni naboјi Q_1 , Q_2 i Q_3 :

$$W_4 = \varphi_{41} \cdot Q_1 + \varphi_{42} \cdot Q_2 + \varphi_{43} \cdot Q_3 = \frac{Q_4}{4\pi\epsilon R_{14}} Q_1 + \frac{Q_4}{4\pi\epsilon R_{24}} Q_2 + \frac{Q_4}{4\pi\epsilon R_{34}} Q_3 \quad (12.6)$$

gdje je su φ_{41} , φ_{42} i φ_{43} potencijali koje u točkama P_1 , P_2 i P_3 stvara točkasti naboј Q_4 .

Ukupna energija potrebna da se formira sustav naboja dobije se zbrojem (12.1), (12.3) i (12.5):

$$W = W_2 + W_3 + W_4 = (\varphi_{12} \cdot Q_2) + (\varphi_{13} \cdot Q_3) + (\varphi_{14} \cdot Q_4) + (\varphi_{23} \cdot Q_3) + (\varphi_{24} \cdot Q_4) + (\varphi_{34} \cdot Q_4) \quad (12.7)$$

Ukupna energija potrebna da se formira sustav naboja dobije se također zbrojem (12.2), (12.4) i (12.6):

$$W = W_2 + W_3 + W_4 = (\varphi_{21} \cdot Q_1) + (\varphi_{31} \cdot Q_1) + (\varphi_{32} \cdot Q_2) + (\varphi_{41} \cdot Q_1) + (\varphi_{42} \cdot Q_2) + (\varphi_{43} \cdot Q_3) \quad (12.8)$$

Ako (12.7) i (12.8) zbrojimo i podijelimo s dva dobije se ukupna energija W potrebna da se formira sustav od 4 točkasta naboja:

$$W = \frac{1}{2} [(\varphi_{21} + \varphi_{31} + \varphi_{41}) Q_1 + (\varphi_{12} + \varphi_{32} + \varphi_{42}) Q_2 + (\varphi_{13} + \varphi_{23} + \varphi_{43}) Q_3 + (\varphi_{14} + \varphi_{24} + \varphi_{34}) Q_4] \quad (12.9)$$

Uočimo da u izrazu (12.9) nema članova energije $\varphi_{11} \cdot Q_1$, $\varphi_{22} \cdot Q_2$, $\varphi_{33} \cdot Q_3$ i $\varphi_{44} \cdot Q_4$ koji su proizvodi jednog naboja i vlastitog potencijala kojeg na mjestu naboja stvara sam naboј. Taj potencijal je beskonačan, pa su i energije beskonačne. Ovi članovi energije $\varphi_{11} \cdot Q_1$, $\varphi_{22} \cdot Q_2$, $\varphi_{33} \cdot Q_3$ i $\varphi_{44} \cdot Q_4$ nazivaju se *vlastite energije* točkastog naboja i predstavljaju energiju potrebnu da se formira točkasti naboј. Energija potrebna da se formira točkasti naboј (naboј stisnut u geometrijsku točku volumena nula) je beskonačna. Dakle, u izrazu (12.9) za energiju potrebnu za stvaranje sustava točkastih naboja nije sadržana i vlastita energija potrebna da se izgrade točkasti naboji Q_1 , Q_2 , Q_3 i Q_4 .

Izraz $(\varphi_{21} + \varphi_{31} + \varphi_{41})$ predstavlja zbroj potencijala u točki P_1 koje stvaraju točkasti naboji Q_2 , Q_3 i Q_4 kada sami djeluju. Označimo taj potencijal s φ_1 i analogno označimo ostale zbrojeve potencijala u (12.9):

$$\varphi_1 = \varphi_{21} + \varphi_{31} + \varphi_{41} ; \quad \varphi_2 = \varphi_{12} + \varphi_{32} + \varphi_{42} ; \quad \varphi_3 = \varphi_{13} + \varphi_{23} + \varphi_{43} ; \quad \varphi_4 = \varphi_{14} + \varphi_{24} + \varphi_{34} \quad (12.10)$$

pa (12.9) prelazi u:

$$W = \frac{1}{2} (\varphi_1 \cdot Q_1 + \varphi_2 \cdot Q_2 + \varphi_3 \cdot Q_3 + \varphi_4 \cdot Q_4) \quad (12.11)$$

Za skupinu od n točkastih naboja, možemo pisati:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i \cdot \varphi_i \quad (12.12)$$

gdje je Q_i naboј donešen iz beskonačnosti u točku P_i a φ_i je potencijal kojeg u točki P_i (na mjestu i -og naboјa Q_i) stvaraju svi ostali točkasti naboјi, osim naboјa Q_i .

12.2. Potencijalna energija kontinuiranih raspodjela naboјa

12.2.1.1. Potencijalna energija prostorne raspodjele naboјa

Ako imamo naboј prostorne gustoće ρ raspodijeljen u prostoru volumena V , diferencijalno mali volumen dV u kojem se nalazi diferencijalni naboј $dQ = \rho \cdot dV$ možemo smatrati točkastim naboјem kojemu je energija određena s (12.12). Ukupnu energiju izračunavamo „zbrajanjem“ doprinosa tih diferencijalnih naboјa dQ . Kako se ovdje radi o kontinuiranoj raspodjeli naboјa, umjesto sumacije koju sprovodimo kod skupine diskretnih točkastih naboјa (12.12), ovdje je potrebno sprovesti integraciju po volumenu V :

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho \cdot \varphi \cdot dV \quad (12.13)$$

gdje je φ ukupni potencijal na mjestu diferencijalnog volumena dV kojeg stvaraju svi naboјi u sustavu, uključujući i naboј $dQ = \rho \cdot dV$. Ako je zadana kontinuirana raspodjela naboјa ρ , onda će i potencijal biti kontinuirana funkcija. Stoga je u izrazu (12.13) sadržana ukupna energija raspodjele naboјa, uključujući i vlastitu energiju. U tome se (12.13) razlikuje od izraza (12.12) za energiju sustava točkastih naboјa. Kada bi izraz (12.13) primjenili na sustav točkastih naboјa na mjestu naboјa „1“ dobili bi da je $\varphi_{11} = \infty$ i $\rho = \infty$.

12.2.1.2. Potencijalna energija plošne raspodjele naboјa

Ako je naboј raspodijeljen po površini S sa zadanom plošnom gustoćom σ , diferencijalno malu površinu dS na kojoj se nalazi diferencijalna količina naboјa $dQ = \sigma \cdot dS$ smatramo točkastim naboјem kojemu je energija određena s (12.12). Ukupnu energiju izračunavamo „zbrajanjem“ doprinosa tih diferencijalnih naboјa dQ . Kako se ovdje radi o kontinuiranoj raspodjeli naboјa, umjesto sumacije koju sprovodimo kod skupine diskretnih točkastih naboјa (12.12), ovdje je potrebno sprovesti integraciju po površini S :

$$W = \frac{1}{2} \int_S \sigma \cdot \varphi \cdot dS \quad (12.14)$$

gdje je φ ukupni potencijal na mjestu diferencijalne površine dS kojeg stvaraju svi naboјi u sustavu, uključujući i naboј $dQ = \sigma \cdot dS$. Ako je zadana kontinuirana raspodjela naboјa σ , onda će i potencijal biti kontinuirana funkcija, pa je stoga u izrazu (12.14) sadržana ukupna energija raspodjele naboјa, uključujući i vlastitu energiju.

12.2.1.3. Potencijalna energija linijske raspodjele naboјa

Ako je naboј raspodijeljen po liniji l sa zadanom linijskom gustoćom λ , diferencijalno malu dužinu dl na kojoj se nalazi diferencijalna količina naboјa $dQ = \lambda \cdot dl$ smatramo točkastim naboјem kojemu je energija određena s (12.12). Ukupnu energiju izračunavamo „zbrajanjem“ doprinosa tih diferencijalnih naboјa dQ . Kako se ovdje radi o kontinuiranoj raspodjeli naboјa, umjesto sumacije koju sprovodimo kod skupine diskretnih točkastih naboјa (12.12), ovdje je potrebno sprovesti integraciju po liniji l :

$$W = \frac{1}{2} \int_l \lambda \cdot \varphi \cdot dl \quad (12.15)$$

gdje je φ ukupni potencijal na mjestu diferencijalne duljine dl kojeg stvaraju svi naboji u sustavu, uključujući i naboj $dQ = \lambda \cdot dl$. Ako je zadana kontinuirana raspodjela naboja λ , onda će i potencijal biti kontinuirana funkcija, pa je stoga u izrazu (12.15) sadržana ukupna energija raspodjele naboja, uključujući i vlastitu energiju.

12.3. Energija prikazana preko veličina polja

Primjenimo na izraz (12.13) Gaussov zakon u diferencijalnom obliku (8.8):

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_s \quad (8.8)$$

pa izraz za energiju prostorne raspodjele naboja (12.13) prelazi u:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \varphi (\nabla \cdot \mathbf{D}) \cdot dV \quad (12.16)$$

Primjenimo identitet:

$$\nabla \cdot (f \cdot \mathbf{A}) = f \cdot (\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla f)$$

gdje je f skalar a \mathbf{A} vektor, uz $f = \varphi$ i $\mathbf{A} = \mathbf{D}$. Dobijemo:

$$\nabla \cdot (\varphi \cdot \mathbf{D}) = \varphi \cdot (\nabla \cdot \mathbf{D}) + \mathbf{D} \cdot (\nabla \varphi)$$

odakle je:

$$\varphi \cdot (\nabla \cdot \mathbf{D}) = \nabla \cdot (\varphi \cdot \mathbf{D}) - \mathbf{D} \cdot (\nabla \varphi) = \nabla \cdot (\varphi \cdot \mathbf{D}) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \quad (12.17)$$

jer je prema (9.32) $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$. Uvrštenjem (12.17) u (12.16) dobije se:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \varphi \cdot (\nabla \cdot \mathbf{D}) dV = \frac{1}{2} \int_V \nabla \cdot (\varphi \cdot \mathbf{D}) dV + \frac{1}{2} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV \quad (12.18)$$

Primjenimo li Gaussov teorem:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} \cdot dV = \oint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \cdot dS$$

Dobije se:

$$W = \frac{1}{2} \oint_S \varphi \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \cdot dS + \frac{1}{2} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV \quad (12.19)$$

Ako dio prostora u kojem postoji električno polje ograničimo volumenom V , onda drugi integral iz (12.19) predstavlja energiju električnog polja sadržanu u volumenu V , a prvi integral predstavlja doprinos energiji električnog polja u prostoru izvan volumena V .

Uzmimo sada da volumen V uključuje cijeli prostor; tada površina S postaje zatvorena površina u beskonačnosti. Potencijal φ će s porastom udaljenosti r opadati s $1/r$, vektor električne indukcije \mathbf{D} opadat će s $1/r^2$, pa će produkt $\varphi \cdot \mathbf{D}$ opadati s $1/r^3$, a pri tome će površina S rasti s r^2 . Prema tome, kada $r \rightarrow \infty$, onda će podintegralna funkcija u prvom integralu težiti k nuli. U tom slučaju (12.19) prelazi u:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV = \frac{1}{2} \int_V \epsilon \cdot E^2 dV \quad (12.20)$$

gdje volumen V obuhvaća cijeli prostor do u beskonačnost (odnosno cijeli prostor u kojem postoji električno polje).

Iz relacije (12.12) slijedi da je energija utrošena za izgradnju sustava naboja sadržana u nabojima, dok iz relacije (12.19) slijedi da je energija sadržana u električnom polju. Naime, u volumenu V ne moraju uopće postojati naboji koji stvaraju električno polje; oni mogu biti smješteni izvan volumena V i stvarati električno polje izvan i unutar volumena V . Prema (12.19) slijedi da i u volumenu V , u kojem nema naboja, postoji energija električnog polja, sadržana u polju.

Iz (12.20) slijedi da je gustoća energije električnog polja:

$$w = \frac{1}{2} \epsilon \cdot E^2 \quad (\text{J/m}^3) \quad (12.21)$$

12.4. Energija kondenzatora

Primjenom (12.14) možemo izračunati energiju potrebnu da se izgradi sustav razdvojenih nabuja na kondenzatoru s dvije elektrode. U kondenzatoru naboј na elektrodama je isti, suprotnih predznaka $\pm Q$. Energija naboja na pozitivno nabijenoj elektrodi čiji potencijal je φ_1 je:

$$W_1 = \frac{1}{2} \int_S \sigma \cdot \varphi_1 \cdot dS = \frac{1}{2} \varphi_1 \int_S \sigma \cdot dS = \frac{1}{2} Q \cdot \varphi_1 \quad (12.22)$$

jer je elektroda ekvipotencijalna $\varphi_1 = \text{konst.}$, a ukupni naboј na njoj je Q .

Energija naboja na negativno nabijenoj elektrodi čiji potencijal je φ_2 je:

$$W_2 = \frac{1}{2} \int_S \sigma \cdot \varphi_2 \cdot dS = -\frac{1}{2} Q \cdot \varphi_2 \quad (12.23)$$

jer je elektroda ekvipotencijalna $\varphi_2 = \text{konst.}$, a ukupni naboј je $-Q$.

Ukupna energija sadržana u električnom polju kondenzatora onda je:

$$W = W_1 + W_2 = \frac{1}{2}Q \cdot \varphi_1 - \frac{1}{2}Q \cdot \varphi_2 = \frac{1}{2}Q(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2}Q \cdot U_{12} = \frac{1}{2}Q \cdot U \quad (12.24)$$

odnosno uz $Q = C \cdot U$ slijedi:

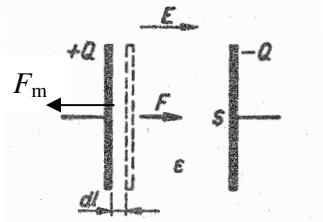
$$W = \frac{1}{2}C \cdot U^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (12.25)$$

ovisno o tome je li zadan napon U ili naboj Q kondenzatora.

13. SILE U STATIČKOM ELEKTRIČNOM POLJU

13.1. Sila na površini nabijenog vodiča

Izraz za silu na površinu nabijenog vodiča izvest ćemo na primjeru homogenog polja u pločastom kondenzatoru, površine ploča S , razmaknutih za d , koje su nabijene istim količinama naboja suprotnog predznaka $\pm Q$ (slika 13.1).



Slika 13.1. Uz određivanje sila u pločastom kondenzatoru

Kako su elektrode nabijene nabojem suprotnog predznaka između njih djeluje privlačna sila F_e . Ako djelovanjem vanjske, mehaničke sile F_m izvršimo pomak pozitivno nabijene elektrode za diferencijalnu duljinu dl suprotno smjeru djelovanja polja E (odnosno suprotno od smjera električne sile F_e) utrošit će se rad koji se iskaže u povećanju energije kondenzatora:

$$dW_m = dW_e \quad \Rightarrow \quad F_m \cdot dl = w \cdot dV = \frac{1}{2} \epsilon E^2 dV = \frac{1}{2} \epsilon E^2 S \cdot dl \quad (13.1)$$

Radi se o izoliranom sustavu (kondenzator nabijen i odspojen) pa se naboј na elektrodama neće promjeniti, $Q = \text{konst}$. Stoga će jakost električnog polja između elektroda kondenzatora ostati nepromjenjena zbog $D = \sigma = \text{konst}$. Mehanička sila po iznosu je jednak električnoj sili, $F_m = F_e$ pa iz (13.1) slijedi da je iznos sile na elektrodu pločastog kondenzatora:

$$F_e = F_m = \frac{1}{2} \epsilon E^2 S \quad (13.2)$$

Sila na jedinicu površine je:

$$f = \frac{F_e}{S} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} D \cdot E \quad (13.3)$$

Kako je na površini vodiča $D = \sigma$ prema (10.14), izraz (13.3) se može pisati:

$$f = \frac{1}{2} \sigma \cdot E = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\epsilon} \quad (13.4)$$

Izraz (13.4) za jediničnu silu vrijedi općenito i za nehomogeno polje. Iznos ukupne sile na površinu nabijenog vodiča u slučaju nehomogenog polja dobijemo integriranjem jedinične sile f iz (13.4) po površini S vodiča:

$$F = \int_S f \cdot dS = \frac{1}{2} \int_S \epsilon \cdot E^2 \cdot dS = \frac{1}{2} \int_S \sigma \cdot E \cdot dS = \frac{1}{2} \int_S \frac{\sigma^2}{\epsilon} \cdot dS \quad (13.5)$$

Kako je jakost električnog polja E normalna na površinu nabijenog vodiča i sila, koja je posljedica polja, bit će okomita na površinu, pa je sila u vektorskom zapisu:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} \int_S \epsilon \cdot E^2 \cdot \mathbf{n} \cdot dS = \frac{1}{2} \int_S \frac{\sigma^2}{\epsilon} \cdot \mathbf{n} \cdot dS \quad (13.6)$$

Sila na jednu elektrodu pločastog kondenzatora iz analiziranog primjera prema (13.5) je:

$$F = \frac{1}{2} \int_S \sigma \cdot E \cdot dS = \frac{1}{2} E \int_S \sigma \cdot dS = \frac{1}{2} Q \cdot E \quad (13.7)$$

jer je polje homogeno: $E = \text{konst.}$

13.2. Određivanje sila pomoću energije

Određivanje sila pomoću energije pohranjene u statičkom električnom polju temelji se na zakonu o očuvanju energije i načelu virtualnog pomaka poznatog iz mehanike. Na taj način možemo odrediti rezultantnu силу ali nam ta metoda ne daje uvid u prostorni raspored sila.

Analizirajmo sustav statičkog električnog polja kojeg stvara N nabijenih vodiča. Zamislimo da je električna sila koja djeluje na jedan vodič iz tog sustava pomaknula taj vodič za virtualno mali pomak δs u smjeru osi s . Ako je s -komponenta sile na taj vodič F_s , ta je sila izvršila rad:

$$\delta A_e = F_s \cdot \delta s \quad (13.8)$$

pa je s -komponenta sile:

$$F_s = \frac{\delta A_e}{\delta s} \quad (13.9)$$

Rad električne sile δA_e možemo izraziti iz promjene energije pohranjene u statičkom električnom polju. Razlikujemo dva slučaja:

- a) *Naboji u sustavu vodiča ostaju konstantni (izolirani sustav).* To znači da smo vodiče spojili na izvor, nabili i nakon toga odspojili od izvora. Svi pomaci u sustavu (rad) u tom slučaju mogu biti izvršeni samo na račun energije pohranjene u statičkom električnom polju, pa vrijedi:

$$\delta A_e = -\delta W_e \quad (13.10)$$

Sila je onda:

$$F_s = -\frac{\delta W_e}{\delta s} \quad (13.11)$$

- b) *Potencijali u sustavu ostaju konstantni (neizolirani sustav).* To znači da su vodiči ostali spojeni na izvore koji im održavaju potencijale konstantnim bez obzira na pomake. Da bi to bilo moguće moraju se pri pomaku nekog vodiča za δs iz izvora dovesti na sve vodiče dodatni naboji δQ_k jer su se promijenili parcijalni kapaciteti pa se mijenjaju i naboji na vodičima prema (11.14). Ukupni rad kojeg pri tome obave izvori δA_i prema (9.12) je:

$$\delta A_i = \sum_{k=1}^N \varphi_k \cdot \delta Q_k \quad (13.12)$$

Prema zakonu o očuvanju energije taj rad se može utrošiti na rad električnih sila δA_e i na povećanje energije pohranjene u polju:

$$\delta A_i = \delta A_e + \delta W_e \quad (13.13)$$

Prema (12.12) pohranjena energija u polju povećala se za:

$$\delta W_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \varphi_k \cdot \delta Q_k \quad (13.14)$$

Iz (13.12), (13.13) i (13.14) slijedi da je:

$$\delta A_e = \delta W_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \varphi_k \cdot \delta Q_k \quad (13.15)$$

pa je sila:

$$F_s = \frac{\delta W_e}{\delta s} \quad (13.16)$$

Odredimo primjenom izrazâ (13.11) i (13.16) silu u smjeru osi s u kondenzatoru kapaciteta C . Za izolirani kondenzator prema (13.11) slijedi:

$$F_s = -\left\{ \frac{\delta W_e}{\delta s} \right\}_{Q=\text{konst.}} = -\frac{\partial}{\partial s} \left\{ \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \right\}_{Q=\text{konst.}} = -\frac{1}{2} Q^2 \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{C} \right) \quad (13.17)$$

Za neizolirani kondenzator prema (13.16) slijedi:

$$F_s = \left\{ \frac{\delta W_e}{\delta s} \right\}_{U=\text{konst.}} = \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \frac{1}{2} C U^2 \right\}_{U=\text{konst.}} = \frac{1}{2} U^2 \frac{\partial C}{\partial s} \quad (13.18)$$

Primjenimo ove izraze na pločasti kondenzator iz primjera sa slike 13.1. Neka je os s u kojoj računamo silu razmak ploča d .

Za izolirani kondenzator ($Q = \text{konst.}$) prema (13.17) sila je:

$$F_d = -\frac{1}{2}Q^2 \frac{\partial}{\partial d} \left(\frac{1}{C} \right) = -\frac{1}{2}Q^2 \frac{\partial}{\partial d} \left(\frac{d}{\epsilon S} \right) = -\frac{1}{2}Q^2 \frac{1}{\epsilon S} \quad (13.19)$$

Sila je negativna, tj. djeluje u smjeru smanjenja razmaka d između elektroda. Time se povećava kapacitet i smanjuje energija pohranjena u polju. Ta je sila jednaka onoj izračunatoj u (13.7). Naime, vrijedi:

$$E = \frac{D}{\epsilon} = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{Q}{S \cdot \epsilon} \quad ; \quad F = \frac{1}{2}Q^2 \frac{1}{\epsilon S} = \frac{1}{2}Q \cdot E$$

Za neizolirani kondenzator ($U = \text{konst.}$) prema (13.18) sila je:

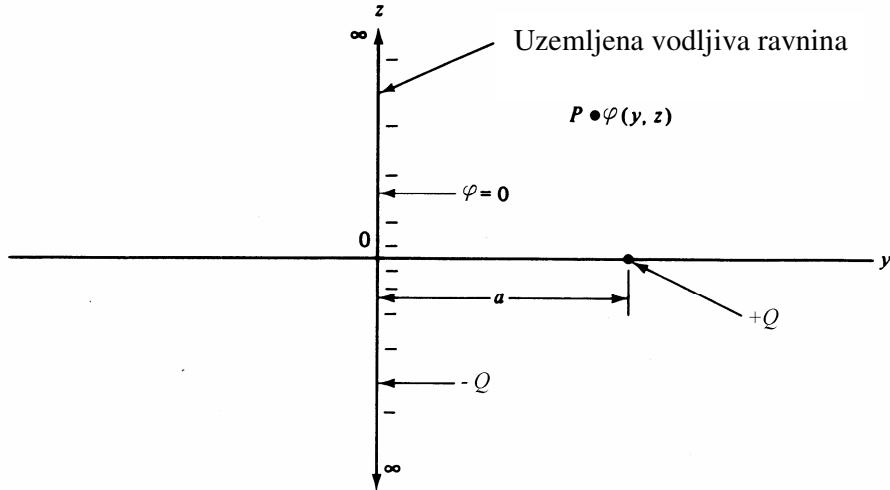
$$F_d = \frac{1}{2}U^2 \frac{\partial C}{\partial d} = \frac{1}{2}U^2 \frac{\partial}{\partial d} \left(\frac{\epsilon S}{d} \right) = -\frac{1}{2}U^2 \frac{\epsilon S}{d^2} \quad (13.20)$$

Sila je negativna, tj. djeluje u smjeru smanjenja razmaka d između elektroda. Time se povećava kapacitet i povećava energija pohranjena u polju.

Dakle, u oba slučaja sila djeluje tako da nastoji povećati kapacitet. U izoliranom sustavu sile djeluju tako da se sustav postavi u stanje u kojem ima minimalnu energiju. U neizoliranom sustavu sile djeluju tako da se sustav postavi u stanje u kojem ima maksimalnu energiju.

14. PRIMJENA METODE ODSLICKAVANJA U RJEŠAVANJU STATIČKIH ELEKTRIČNIH POLJA

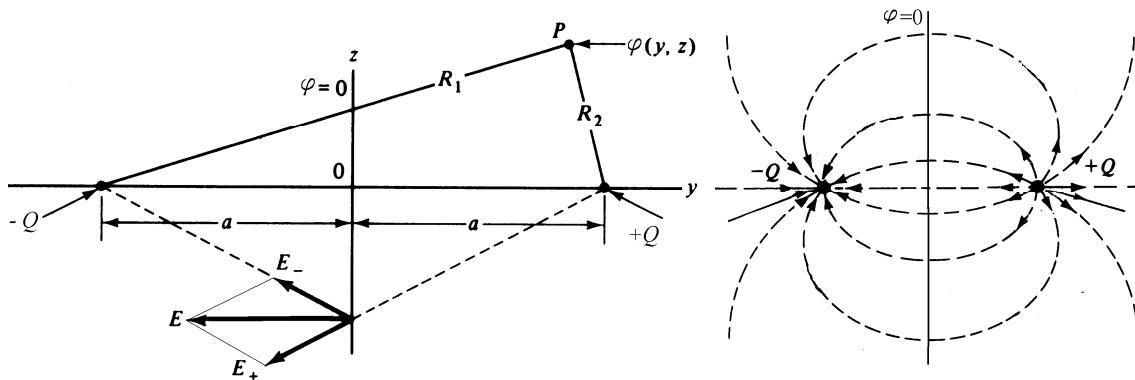
Neke složene zadaće statičkih električnih polja u ograničenom prostoru mogu se egzaktno i vrlo jednostavno riješiti primjenom *metode odslikavanja*. Razmotrit ćemo najjednostavniju Direchletovu rubnu zadaću: pozitivni točkasti naboј $+Q$ nalazi se ispred beskonačne vodljive ravnine koja je uzemljena, tj. ravnina je na nultom potencijalu prema slici 14.1.



Slika 14.1. Točkasti naboј ispred vodljive uzemljene ravnine

Sve silnice električnog polja točkastog naboja završavaju na vodljivoj ravni i na njoj influenciraju negativne naboje. Ukupni influencirani naboј jednak je $-Q$. Plošna gustoća influenciranog naboja na ravni je različita i opada s povećanjem udaljenosti od točkastog naboja.

Ako zamijenimo vodljivu ravnu na kojoj se nalazi nejednolika gustoća influenciranog naboja s točkastim naboјem $-Q$, smještenim na udaljenosti a lijevo od ravni, na mjestu ravni ($y = 0$) bit će potencijal nula, $\varphi = 0$, te će u svim točkama na površini ravni jakost električnog polja biti normalna na ravni (slika 14.2.).

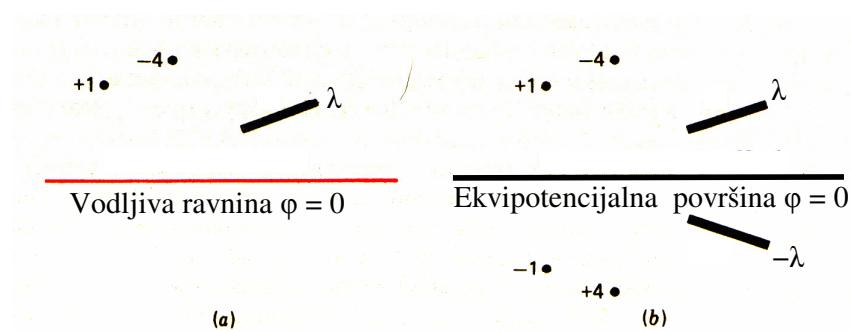


Slika 14.2. Potencijal i polje dva točkasta naboja: izvornog $+Q$ i odslikanog $-Q$

Točkasti naboј $-Q$ koјим smo prema slici 14.2. zamijenili vodljivu ravninu s nejednolikom raspodjelom influenciranog naboja naziva se *odslikani naboј*, a postupak zamjene naziva se *metoda odslikavanja*.

Kako je na graničnoj ravnini $y = 0$ na slikama 14.1. i 14.2. isti potencijal $\varphi = 0$, prema teoremu o jedinstvenosti rješenja jednadžbe potencijala (opisanom u potpoglavlju 9.7.) bit će u cijelom desnom poluprostoru (uključujući i vodljivu ravninu $y = 0$) isti potencijali za obje zadaće: izvornu zadaću s izvornim točkastim naboјem i influenciranim naboјem, te nadomjesnu zadaću s izvornim i odslikanim točkastim naboјem. Jednakost potencijala u svim točkama poluprostora znači da su jednaki i jakost električnog polja E i vektor električne indukcije D .

Kod izračunavanja jakosti električnog polja koјег stvaraju kontinuirane raspodjele naboja u linearnim sredstvima primjenjujemo načelo superpozicije. To znači, da možemo primijeniti metodu odslikavanja na bilo koju raspodjelu naboja u linearном sredstvu ispred uzemljene vodljive ravnine, prema slici 14.3.



Slika 14.3. Primjeri odslikavanja naboja na uzemljenoj vodljivoj ravnini

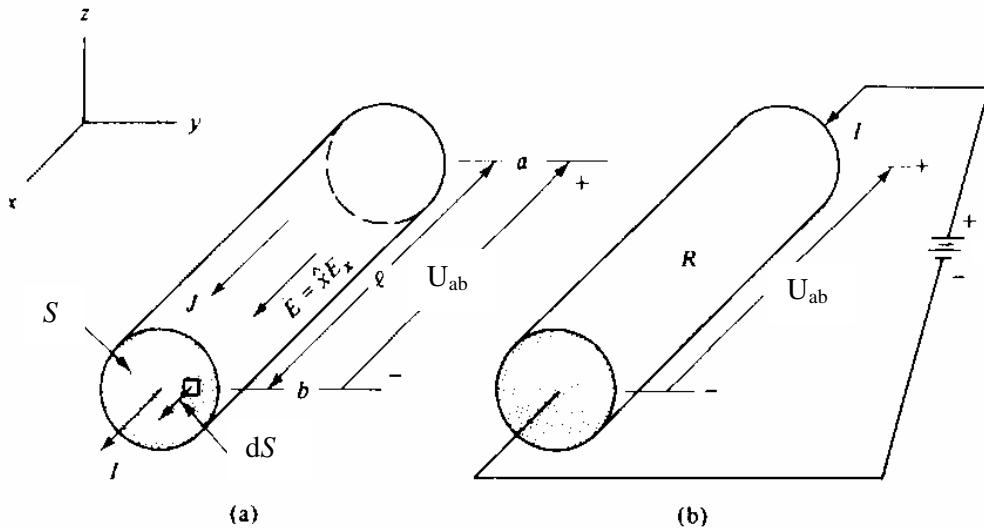
Metoda odslikavanja primjenjuje se još u brojnim primjerima: odslikavanje točkastog naboja na vodljivoj kugli, odslikavanje na cilindričnim vodičima, odslikavanje točkastog naboja na granici dva dielektrika itd.

15. VOĐENJE ELEKTRIČNE STRUJE U VODIĆIMA

15.1. Otpor i Ohmov zakon

U dobrim vodičima je srednja brzina slobodnih elektrona relativno mala što je posljedica sudara slobodnih elektrona s kristalnom strukturom atoma. Pri tim sudarima kinetička energija slobodnih elektrona pretvara se u toplinsku energiju. Stoga je pri vođenju struje kroz vodiče prisutan *otpor* takvom vođenju.

Odredimo električni otpor vodiča duljine l , jednakog poprečnog presjeka S , načinjenog od materijala provodnosti κ . Neka je električno polje u vodiču homogeno duž vodiča i po njegovom presjeku i usmjereno u x smjeru: $\mathbf{E} = \mathbf{a}_x E_x$, prema slici 15.1.a):



Slika 15.1. a) Uz određivanje otpora vodiča; b) Jednostavni električni krug

Iz Ohmovog zakona koji je definiran za svaku točku u vodljivom materijalu (3.5) i izraza za struju (3.6) dobije se:

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \cdot dS = \int_S \kappa \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \cdot dS = \int_S \kappa \cdot \mathbf{a}_x E_x \cdot \mathbf{a}_x \cdot dS = \kappa E_x \cdot S \quad (15.1)$$

jer je normala na površinu presjeka vodiča $\mathbf{n} = \mathbf{a}_x$. Napon između krajnjih točaka vodiča a i b prema (9.22) je:

$$U_{ab} = \varphi(a) - \varphi(b) = - \int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_b^a \mathbf{a}_x E_x \cdot \mathbf{a}_x dx = E_x \cdot \int_a^b dx = E_x \cdot l \quad (15.2)$$

Odavde je jakost električnog polja:

$$E_x = \frac{U_{ab}}{l}$$

pa se uvrštavanjem u (15.1) dobije:

$$I = \kappa E_x \cdot S = \kappa \frac{U_{ab}}{l} S \quad (15.3)$$

odakle je električni otpor:

$$R = \frac{U_{ab}}{I} = \frac{1}{\kappa} \frac{l}{S} \quad (15.4)$$

Iz (15.4) slijedi:

$$U_{ab} = I \cdot R \quad (15.5)$$

što se naziva *Ohmovim zakonom* u električnim krugovima.

Postavimo analizirani vodič u zatvoreni električni krug kako je prikazano na slici 15.1.b). U električnom krugu taj vodič je element kruga kojeg nazivamo *otpornikom*, predstavljen svojim otporom R . Stalno električno polje u vodiču omogućava vanjski izvor napona iz kojeg se pokrivaju toplinski gubici energije uzrokovani tokom električne struje kroz vodič. Sa slike vidimo da je viši potencijal kraja a vodiča i da električna struja kroz vodič teče od točke višeg prema točki nižeg potencijala.

Izračun električnog otpora vodiča koji ima nejednoliki presjek i u kojem jakost električnog polja E , a time i gustoća struje J nisu konstantni, obavlja se isti postupkom, s tim da se primjene integralni oblici izraza u (15.1) i (15.2). Opći izraz za otpor je onda:

$$R = \frac{U_{ab}}{I} = \frac{-\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}{\int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \cdot dS} = \frac{-\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}{\int_S \kappa \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \cdot dS} \quad (15.6)$$

15.2. Ponašanje vodiča u statičkim uvjetima

U vodiču postoje statički uvjeti kada u njemu nema usmjerenog gibanja slobodnih elektrona, tj. kada je ukupna struja vodiča jednaka nuli. Za analizu električnog naboja u vodiču (koji se ne nalazi u vanjskom, narinutom električnom polju) zamislimo da smo neku početnu količinu naboja ρ_0 unijeli u unutrašnjost vodiča. Postojanje električnog naboja unutar vodiča uzrokovat će električno polje u vodiču, a naboј i njegovo gibanje u vodiču (električna struja) moraju zadovoljavati jednadžbu kontinuiteta (3.8):

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = \nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (3.8)$$

Gustoća struje i jakost električnog polja povezani su Ohmovim zakonom (3.5):

$$\mathbf{J} = \kappa \cdot \mathbf{E} \quad (3.5)$$

Ako je vodič linearan, homogen i izotropan, uvrštenjem Ohmovog zakona u jednadžbu kontinuiteta dobije se:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{1}{\kappa} \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (15.7)$$

Vrijedi također Gaussov zakon (8.8):

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_s \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (15.8)$$

Iz (15.7) i (15.8) slijedi diferencijalna jednadžba ovisnosti gustoće naboja ρ o vremenu t :

$$\frac{\rho}{\epsilon} = -\frac{1}{\kappa} \frac{\partial \rho}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\kappa}{\epsilon} \rho = 0 \quad (15.9)$$

čije je rješenje:

$$\rho(t) = \rho_0 \cdot e^{-\left(\frac{\kappa}{\epsilon}\right)t} = \rho_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau_r}} \quad (15.10)$$

gdje je τ_r vremenska konstanta relaksacije naboja:

$$\tau_r = \frac{\epsilon}{\kappa} \quad (\text{s}) \quad (15.11)$$

Nakon 3 do 5 vremenskih konstanti relaksacije u unutrašnjosti vodiča više nema naboja i sav se rasporedi na površinu vodiča. Za vodiče je $\epsilon = \epsilon_0$ osim za vrlo visoke frekvencije. Tako za bakar koji ima $\kappa = 58 \text{ MS/m}$, vremenska konstanta relaksacije naboja iznosi $1,5 \cdot 10^{-19} \text{ s}$. Znači da se naboј unešen u unutrašnjost vodiča praktički trenutno rasprši na njegovu površinu. Važno je napomenuti da će kroz to kratko vrijeme u vodiču teći struja i nećemo imati statičke uvjete. Za jako dobre izolatore kod kojih je provodnost κ jako mala, vremenska konstanta je reda veličine nekoliko sati ili čak dana.

15.3. Analogija statičkog strujnog polja i statičkog električnog polja

Električno polje koje uzrokuje vođenje struje u vodičima nazivamo *statičkim strujnim poljem*. Da bi imali statičko strujno polje u vodiču, tj. istosmjernu struju, mora jednadžba kontinuiteta struje (3.8) glasiti:

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = \nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (15.12)$$

jer se radi o stacionarnom strujanju ($\partial/\partial t = 0$).

Postoje analogije između statičkog električnog polja u dielektriku i statičkog strujnog polja u vodiču. Električno polje u dielektriku stvara električni tok a električno polje u vodiču stvara električnu struju. Analogije između jednadžbi statičkog električnog polja u homogenom dielektriku u kojem nema naboja i jednadžbi statičkog strujnog polja dane su u tablici 15.1:

Tablica 15.1. Analogije jednadžbi statičkog električnog polja i statičkog strujnog polja

Homogeni dielektrik bez naboja: $\rho_s = 0$	Vodljivi materijal (stacionarno strujanje): $\partial\rho_s/\partial t = 0$
Gaussov zakon: $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$	Jednadžba kontinuiteta: $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$
$\mathbf{D} = \epsilon \cdot \mathbf{E}$	$\mathbf{J} = \kappa \cdot \mathbf{E}$
$\mathbf{E} = -\nabla \cdot \varphi$	$\mathbf{E} = -\nabla \cdot \varphi$
Laplaceova jednadžba: $\Delta\varphi = 0$	Laplaceova jednadžba: $\Delta\varphi = 0$
Električni tok (vektora \mathbf{D}): $\phi_e = \int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \cdot dS$	Strujni tok (vektora \mathbf{J}): $I = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \cdot dS$
Kapacitet: $C = \frac{Q}{U_{ab}} = \frac{\int_a^b \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \cdot dS}{-\int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}$	Vodljivost: $G = \frac{I}{U_{ab}} = \frac{\int_a^b \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \cdot dS}{-\int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}$

Za statičko strujno polje također vrijedi Laplaceova jednadžba potencijala. Naime, iz prve tri relacije:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad ; \quad \mathbf{J} = \kappa \cdot \mathbf{E} \quad ; \quad \mathbf{E} = -\nabla \cdot \varphi$$

slijedi:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \nabla \cdot (\kappa \cdot \mathbf{E}) = \nabla \cdot (-\kappa \cdot \nabla \varphi) = 0$$

odnosno:

$$\Delta\varphi = 0 \tag{15.13}$$

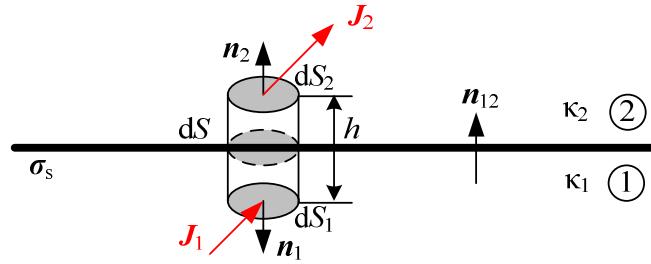
Prema tome, analogne veličine su dane u tablici 15.2.

Tablica 15.2. Analoge veličine statičkog električnog polja i statičkog strujnog polja

Homogeni dielektrik bez naboja: $\rho_s = 0$	Vodljivi materijal (stacionarno strujanje): $\partial\rho_s/\partial t = 0$
\mathbf{D}	\mathbf{J}
\mathbf{E}	\mathbf{E}
ϵ	κ
φ	φ
Φ_e	I
C	G

15.4. Uvjeti na granici dva vodiča

Uzmimo da se na graničnoj površini S dva vodiča provodnosti κ_1 i κ_2 nalazi slobodni naboj plošne gustoće σ_s . Neka je s \mathbf{n}_{12} označena normala na graničnu površinu S , usmjerena iz sredstva „1“ u sredstvo „2“ prema slici 15.2.

Slika 15.2. Određivanje vektora gustoće struje \mathbf{J} na granici

Primjenimo jednadžbu kontinuiteta na mali cilindar površine baze dS , visine h . Vrijedi: $\mathbf{n}_{12} = -\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_2$, te $dS = dS_1 = dS_2$. Primjena jednadžbe kontinuiteta (3.7) daje:

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \cdot dS &= -\frac{d}{dt} \int_V \rho_s \cdot dV \\ \mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{n}_1 \cdot dS_1 + \mathbf{J}_2 \cdot \mathbf{n}_2 \cdot dS_2 + (\text{doprinos struji kroz plašt}) &= -\frac{d}{dt} (\rho_s \cdot h \cdot dS) \end{aligned} \quad (15.14)$$

Ako visinu cilindra h smanjujemo ($h \rightarrow 0$) dobije se:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \{-\mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{n}_{12} \cdot dS + \mathbf{J}_2 \cdot \mathbf{n}_{12} \cdot dS + (\text{doprinos struji kroz plašt})\} = -\frac{d}{dt} \lim_{h \rightarrow 0} \{\rho_s \cdot h \cdot dS\} \quad (15.15)$$

Kad visina cilindra $h \rightarrow 0$, doprinos struji kroz plašt cilindra također $\rightarrow 0$. Podijelimo li (15.15) s dS , na desnoj strani prema (3.10) dobijemo plošnu gustoću slobodnog naboja σ_s . Relacija (15.15) prelazi u:

$$\mathbf{n}_{12}(\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1) = -\frac{d\sigma_s}{dt} \quad (15.16)$$

Normalna komponenta vektora gustoće struje \mathbf{J} mijenja se na granici za iznos vremenske promjene gustoće plošnog slobodnog naboja na granici. Ako na granici nema slobodnog naboja $\sigma_s = 0$ ili se on ne mijenja u vremenu $d\sigma_s/dt = 0$, onda su normalne komponente vektora gustoće struje \mathbf{J} s obje strane granice jednake:

$$\mathbf{n}_{12}(\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1) = 0 \Rightarrow J_{1n} = J_{2n} \quad (15.17)$$

a normalne komponente vektora jakosti električnog polja \mathbf{E} obrnuto su srazmjerene provodnostima:

$$J_{1n} = J_{2n} \Rightarrow \kappa_1 E_{1n} = \kappa_2 E_{2n} \Rightarrow \frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \quad (15.18)$$

Za promjenu jakosti električnog polja vrijede isti uvjeti kao za statičko električno polje (10.11):

$$E_{1t} = E_{2t} \Rightarrow \mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \quad (15.19)$$

Tangencijalne komponente vektora jakosti električnog polja \mathbf{E} ne mijenjaju se na granici, a normalne komponente vektora gustoće struje \mathbf{J} srazmjerene su provodnostima:

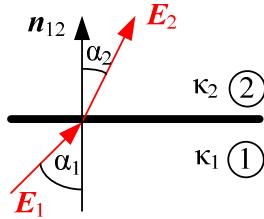
$$E_{1t} = E_{2t} \Rightarrow \frac{J_{1t}}{\kappa_1} = \frac{J_{2t}}{\kappa_2} \Rightarrow \frac{J_{1t}}{J_{2t}} = \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \quad (15.20)$$

Na granici dva vodiča različitih provodnosti u slučaju statičkog strujanja prema (15.17) i (15.19) vrijede uvjeti:

$$\mathbf{n}_{12}(\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1) = -\frac{\partial \sigma_s}{\partial t} = 0 \quad ; \quad \mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \quad (15.21)$$

Normalne komponente gustoće struje \mathbf{J} i tangencijalne komponente jakosti električnog polja \mathbf{E} ne mijenjaju se na granici dva vodiča različitih provodnosti.

Iz uvjeta za statičko strujanje (15.18) i (15.20) slijedi zakon loma strujnice na granici (slika 15.3):



Slika 15.3. Zakon loma strujnice u vodiču

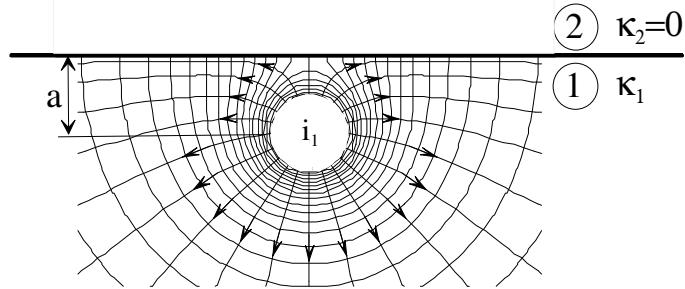
Vrijedi:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_1 &= \frac{E_{1t}}{E_{1n}} \quad ; \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{E_{2t}}{E_{2n}} \\ \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} &= \frac{\frac{E_{1t}}{E_{1n}}}{\frac{E_{2t}}{E_{2n}}} = \frac{E_{1t} \cdot E_{2n}}{E_{2t} \cdot E_{1n}} = \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \end{aligned} \quad (15.22)$$

15.5. Odslikavanje na granici vodič-dielektrik

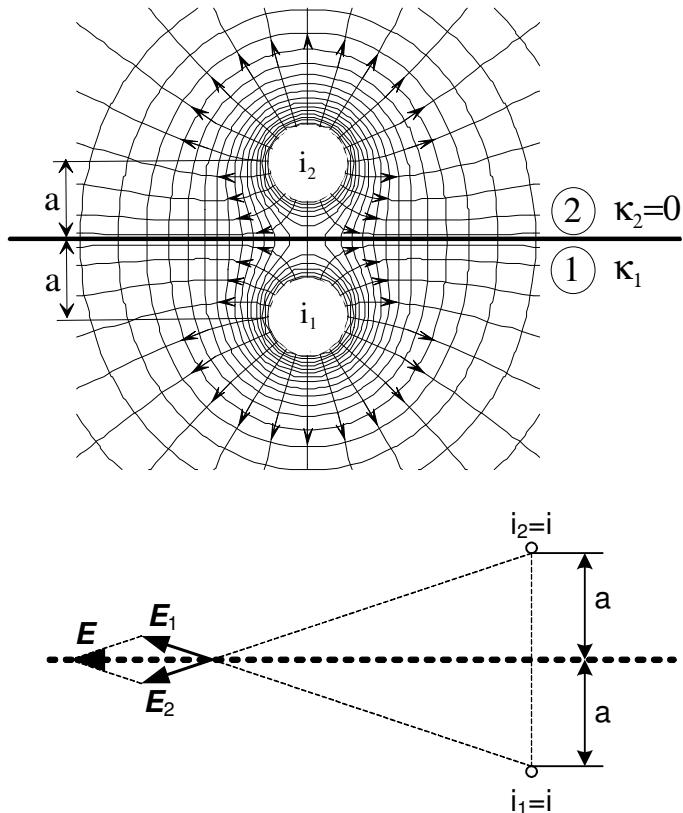
Neka se u vodljivom sredstvu „1“ provodnosti κ_1 nalazi točasti strujni izvor $i_1 = i$ na udaljenosti a od granice s dielektrikom koji ima $\kappa_2 = 0$ prema slici 15.4. U sredstvu „2“ koje nije vodljivo nema strujnog polja, pa je prema (15.18):

$$J_{1n} = J_{2n} \quad ; \quad J_{2n} = 0 \quad \Rightarrow \quad J_{1n} = 0 \quad ; \quad E_{1n} = E_{2n} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = 0 \quad (15.23)$$



Slika 15.4. Točkasti strujni izvor ispred granice vodič-dielektrik

Uvjet (15.23) u statičkom električnom polju postiže se u slučaju dvaju točkastih naboja istog predznaka odmaknutih za a od granične ravnine. Prema analogiji, uvjet (15.23) u statičkom strujnom polju je ispunjen u slučaju dvaju točkastih strujnih izvora istog predznaka odmaknutih za a od granične ravnine.

Slika 15.5. Polje dva točkasta strujna izvora: izvornog $i_1 = i$ i odslikanog $i_2 = i_1 = i$

Prema tome, ako zamijenimo utjecaj granice vodič-dielektrik s točkastim strujnim izvorom $i_2 = i_1 = i$ na udaljenosti a od granice, u svim točkama na granici bit će ispunjen uvjet (15.23), tj. na granici će postojati samo tangencijalna komponenta jakosti električnog polja, slika 15.5.

Točkasti strujni izvor i_2 naziva se *odslikani strujni izvor* a postupak zamjene naziva se *metoda odslikavanja* u statičkom strujnom polju.

Kako je na graničnoj ravnini na slikama 15.4. i 15.5. ispunjen uvjet $\partial\phi/\partial n = 0$, te pošto potencijal u beskonačnosti iščezava $\varphi(\infty) = 0$, prema teoremu o jedinstvenosti rješenja jednadžbe potencijala (opisanom u potpoglavlju 9.7.) bit će u cijelom poluprostoru „1“ (uključujući i graničnu ravninu) isti potencijali za obje zadaće: izvornu zadaću s izvornim točkastim strujnim izvorom i graničnom ravninom, te nadomjesnu zadaću s izvornim i odslikanim točkastim strujnim izvorom. Jednakost potencijala u svim točkama poluprostora „1“ znači da su jednaki i jakost električnog polja E i vektor gustoće struje J .

Kod izračunavanja jakosti električnog polja kojeg stvaraju kontinuirane raspodjele struja u lineranim sredstvima primjenjujemo načelo superpozicije. To znači, da možemo primijeniti metodu odslikavanja na bilo koju raspodjelu struje u linearном sredstvu ispred granice vodič-dielektrik, tako da struju odslikavamo u istu takvu struju, tj. istoga smjera i na istoj udaljenosti s druge strane granice.

16. MAGNETSKA SILA NA NABOJ U GIBANJU

Magnetske pojave su bile poznate još u starom vijeku. Stari Grci su ih uočili na komadima rude (koji su privlačili željezo). Tu rudu su kopali u blizini grada Magnezija, pa su ti komadi rude prozvani *magnetima*. Prvi opis magnetskih pojava dao je 1600. g. engleski fizičar Gilbert. Sve do 19. stoljeća nije se uočavala veza između elektriciteta i magnetizma. Tu vezu je eksperimentalno potvrdio 1819. g. danski fizičar Öersted, što spada u jedno od najvećih otkrića u povijesti znanosti.

Danas je u znanosti općenito prihvaćeno da magnetske pojave dolaze od sila koje uzrokuju električni naboji u gibanju, tj. električna struja.

U poglavlju Magnetostatike bavit će se magnetskim pojavama koje uzrokuju vremenski nepromjenjive, tj. istosmjerne struje za koje je jednadžba kontinuiteta (3.8):

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = \nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (16.1)$$

Istosmjerne struje stvaraju vremenski nepromjenjivo magnetsko polje koje nazivamo *statičkim magnetskim poljem*. Statičko magnetsko polje stvaraju također permanentni magneti i električno polje koje se linearno mijenja u vremenu.

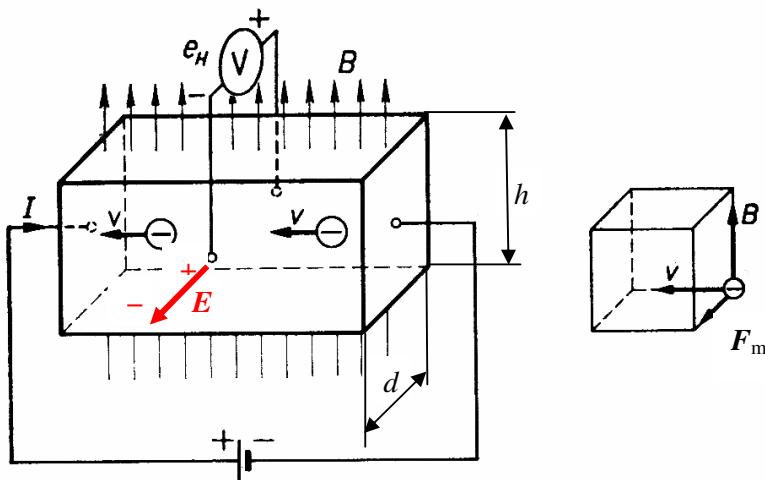
U poglavlju 2. uveden je zakon Lorentzove sile na električni naboj kao definicijska relacija za kvantifikaciju učinaka električnog i magnetskog polja. Iz zakona Lorentzove sile (2.1) slijedi da je magnetska sila \mathbf{F} kojom magnetsko polje indukcije \mathbf{B} djeluje na točkasti naboj q koji se giba brzinom v prostorom u kojem nema električnog polja:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (16.2)$$

Magnetska indukcija Zemlje iznosi oko 10^{-5} T, a u električnim strojevima i napravama doseže iznose od nekoliko T.

16.1. Hallov učinak

Djelovanje magnetskog polja na električne naboje u gibanju možemo iskoristiti za razdvajanje naboja u vodiču protjecanom strujom. Uzmimo da je istosmjerni izvor napona priključen na vodič pravokutnog poprečnog presjeka $d \times h$ i da se vodič nalazi u homogenom magnetskom polju indukcije \mathbf{B} prema slici 16.1. Izvor uspostavlja kroz vodič električnu struju koja je usmjereno gibanje slobodnih elektrona u vodiču u smjeru suprotnom od smjera električnog polja kojeg u vodiču uspostavlja izvor, tj. u smjeru suprotnom od konvencionalnog smjera struje. Na slobodne elektrone koji se gibaju u magnetskom polju djeluje magnetska sila \mathbf{F}_m određena s (16.2). Pri primjeni izraza (16.2) treba uzeti u obzir da je naboj q slobodnih elektrona negativan. Ta sila će uzrokovati otklon slobodnih elektrona u poprečnom smjeru, pa će u prednjem dijelu vodiča gustoća elektrona koji struje biti veća nego u stražnjem dijelu vodiča. Zbog toga će prednja površina vodiča postati negativno nabijena a stražnja površina vodiča pozitivno nabijena.



Slika 16.1. Uz objašnjenje Hallovog učinka

Razdvojeni naboji stvaraju električno polje i razliku potencijala (*Hallov napon* U_H) između prednje i stražnje površine vodiča. Uz pretpostavku da je to električno polje homogeno njegova je jakost:

$$E = \frac{U_H}{d} \quad (16.3)$$

Električno polje koje stvaraju razdvojeni naboji djeluje na slobodne elektrone električnom silom \mathbf{F}_e koja je:

$$\mathbf{F}_e = q \cdot \mathbf{E} \quad (16.4)$$

i suprotno je usmjerena od magnetske sile \mathbf{F}_m .

Otklanjanje slobodnih elektrona u vodiču trajat će sve dotle dok količina razdvojenih naboja ne stvori toliku jakost električnog polja i time električnu силу koja će uravnovežiti magnetsku silu:

$$F_e = F_m \quad ; \quad qvB = q \frac{U_H}{d} \quad (16.5)$$

iz čega slijedi da je Hallov napon:

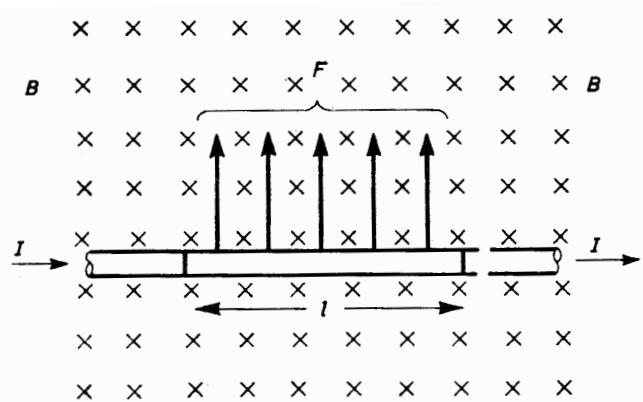
$$U_H = vdB \quad (16.6)$$

Dakle, iznos Hallovog napona srazmjeran je magnetskoj indukciji B pa se ovakve naprave (*Hallove sonde*) koriste za mjerjenje magnetske indukcije.

17. MAGNETSKA SILA NA VODIČ PROTJECAN STRUJOM

Ako se vodič protjecan strujom nalazi u magnetskom polju, na slobodne elektrone u vodiču, čije gibanje predstavlja električnu struju, djelovat će magnetska sila koja se prenosi na čitav materijal vodiča.

Promotrimo ravni vodič duljine l , površine poprečnog presjeka S , kojim teče istosmjerna struja I a koji se nalazi u homogenom magnetskom polju indukcije \mathbf{B} prema slici 17.1.



Slika 17.1. Sila kojom magnetsko polje djeluje na vodič protjecan strujom

Sila na svaki pojedini naboj prema (16.2) je:

$$\mathbf{f} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (17.1)$$

gdje je \mathbf{v} srednja brzina naboja. Ako je n broj naboja po jedinici volumena vodiča, ukupan broj naboja u vodiču je onda $N = n \cdot l \cdot S$, pa je ukupna sila na vodič:

$$\mathbf{F} = N \cdot \mathbf{f} = n \cdot l \cdot S \cdot q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (17.2)$$

Količina naboja dQ koja u diferencijalnom vremenu dt prođe kroz presjek vodiča od jednog do drugog kraja vodiča je:

$$dQ = N \cdot q = n \cdot l \cdot S \cdot q = n \cdot v \cdot dt \cdot S \cdot q \quad (17.3)$$

jer je $l = v \cdot dt$. Jakost električne struje prema (3.3) može se onda izraziti preko gibanja elementarnih naboja:

$$I = \frac{dQ}{dt} = n \cdot v \cdot S \cdot q \quad (17.4)$$

Iz (17.2) i (17.4) slijedi da je sila na vodič protjecan strujom u magnetskom polju:

$$\mathbf{F} = I(l \times \mathbf{B}) \quad (17.5)$$

gdje je vektorsko značenje brzine \mathbf{v} (brzina pozitivnih naboja, konvencionalni smjer struje) pridijeljeno duljini vodiča l .

Ako magnetsko polje nije homogeno ili ako vodič nije ravni, onda prvo izračunamo diferencijalnu силу $d\mathbf{F}$ na diferencijalno mali dio vodiča dl za kojeg možemo smatrati da se nalazi u magnetskom polju iste indukcije:

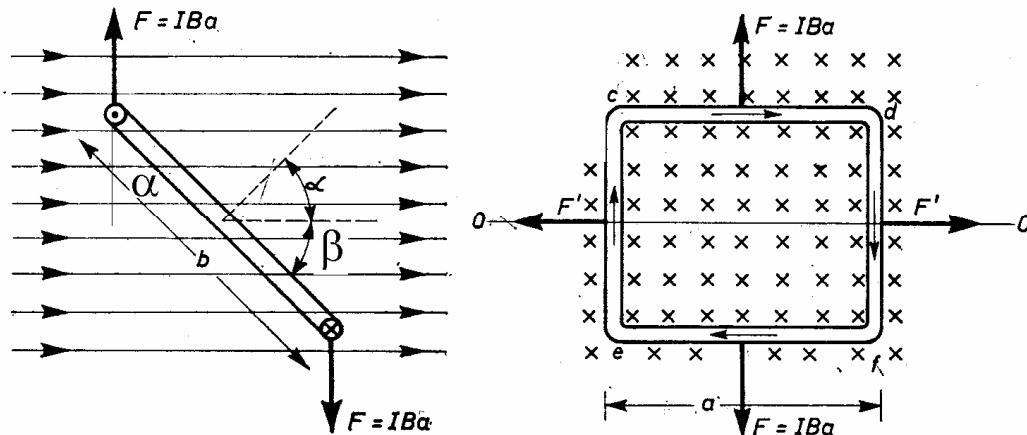
$$d\mathbf{F} = I(dl \times \mathbf{B}) \quad (17.6)$$

a ukupnu силу na vodič dobijemo integracijom diferencijalne силе uzduž vodiča:

$$\mathbf{F} = \int_l d\mathbf{F} = \int_l I(dl \times \mathbf{B}) \quad (17.7)$$

17.1. Magnetska sila i zakretni moment na strujnu petlju

Neka se pravokutna petlja dimenzija $a \times b$, protjecana strujom I , nalazi u homogenom magnetskom polju indukcije \mathbf{B} prema slici 17.2.



Slika 17.2. Djelovanje magnetskog polja na pravokutnu strujnu petlju

Stranice petlje cd i ef okomite su na magnetsko polje pa na njih djeluju sile jednakoga iznosa, koje su zbog suprotnih smjerova struje suprotno usmjerene:

$$F = I \cdot B \cdot a \quad (17.8)$$

Stranice ce i df s vektorom magnetske indukcije zatvaraju kut β . Sile na njih će također biti jednakoga iznosa, suprotno usmjerene:

$$F' = I \cdot B \cdot b \cdot \sin \beta \quad (17.9)$$

Zbroj svih sila jednak je nuli, jer se sile u parovima poništavaju. Međutim, na stranice cd i ef djeluje par sila F zakretnim momentom na kraku duljine $b \cdot \sin \alpha$:

$$M = F \cdot b \cdot \sin \alpha = I \cdot B \cdot a \cdot b \cdot \sin \alpha = I \cdot B \cdot S \cdot \sin \alpha \quad (17.10)$$

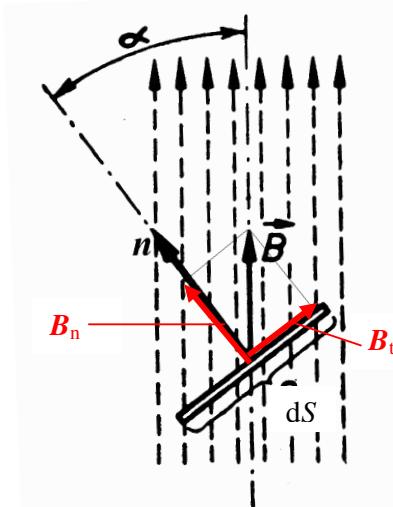
Zakretni moment djeluje tako da nastoji postaviti ravninu petlje okomito na smjer magnetskog polja ($\alpha = 0$). U tom položaju zakretni moment je $M = 0$ a kroz strujnu petlju prolazi maksimalni tok magnetskog polja. Najveći zakretni moment nastaje kad je ravnina petlje u smjeru magnetskog polja ($\alpha = 90^\circ$). Opisano djelovanje magnetskog polja zakretnim momentom na strujnu petlju predstavlja načelo rada električnog motora.

18. MAGNETSKI TOK

Magnetski tok kroz površinu S je integral normalne komponente vektora \mathbf{B} kroz površinu S :

$$\phi_m = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \cdot dS = \int_S B_n \cdot dS = \int_S B \cdot \cos \alpha \cdot dS \quad (18.1)$$

gdje je \mathbf{n} normala na element površine dS .



Slika 18.1. Uz definiciju magnetskog toka

Magnetski tok vezan je za površinu S kroz koju prolazi pa je integralna, skalarna veličina za razliku od vektora \mathbf{B} koji je diferencijalna veličina definirana za svaku točku prostora. Magnetski tok mjeri se u weberima ($1\text{Wb} = 1\text{Vs}$).

Magnetski tok, kao i električni, može biti pozitivan, ako izlazi iz površine S ili negativan, ako ulazi u površinu S . Ako je između normale \mathbf{n} na površinu S i vektora indukcije \mathbf{B} kut $\alpha = 90^\circ$, tada magnetsko polje samo tangira površinu S i nema magnetskog toka kroz površinu S : $\Phi_m = 0$.

Diferenciramo li izraz (18.1) za magnetski tok dobije se:

$$d\phi_m = \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \cdot dS$$

Pomnoži li se dobijeni izraz s \mathbf{n} i podijeli s dS dobije se:

$$\mathbf{B} = \mathbf{n} \frac{d\phi_m}{dS} \quad ; \quad B = \frac{d\phi_m}{dS} \quad (18.2)$$

Prema tome, vektor magnetske indukcije \mathbf{B} predstavlja gustoću magnetskog toka u bilo kojoj točki prostora.

U okolišu vodiča protjecanih strujama linije vektora \mathbf{B} nazivaju se *silnice (\mathbf{B} -linije)* ili *linije magnetskog toka*. To su linije na kojima je u svakoj točki vektor \mathbf{B} tangencijalan.

19. GAUSSOV ZAKON

Eksperimentalna je činjenica da su linije magnetskog toka krivulje zatvorene same u sebe. Ne postoje izolirani magnetski naboji (monopoli) kao što postoje izolirani električni naboji, pozitivni i negativni. Odsutnost izoliranog magnetskog pola može se dokazati time da kako god cijepali magnetski štapić, svaki će novi dio biti potpuni magnet, sa svojim sjevernim i južnim polom.

Linije električnog toka polaze na pozitivnim nabolima, kao izvorima električnog polja, i završavaju na negativnim nabolima, kao ponorima električnog polja. To smo iskazali Gaussovim zakonom za električno polje (8.7):

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \cdot dS = \int_V \rho_s \cdot dV = \sum Q \quad (8.7)$$

Ako postavimo neku zatvorenu površinu S u magnetskom polju, svaka linija magnetskog toka koja uđe u tu zatvorenu površinu mora iz nje i izaći, budući da unutar zatvorene površine S nema izoliranih magnetskih polova (naboja) na kojima bi te linije ponirale, ili se stvarale nove. To iskazujemo *Gaussovim zakonom za magnetsko polje*:

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \cdot dS = 0 \quad (19.1)$$

tj. ukupni magnetski tok kroz bilo kakvu zatvorenu površinu S jednak je nuli.

Divergencija nekog vektorskog polja \mathbf{A} je skalar koji je definiran u svakoj točki polja i koji je prostorna derivacija tog polja:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \cdot dS}{V}$$

gdje je S zatvorena površina koja obrubljuje volumen V , a \mathbf{n} je normala usmjerena izvan diferencijalne površine dS .

Ako za vektorsko polje uzmemos polje vektora električne indukcije \mathbf{B} i primjenimo Gaussov zakon (19.1) dobijemo da je njegova divergencija:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{B} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \cdot dS}{V} = 0$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (19.2)$$

Dakle, divergencija vektora magnetske indukcije \mathbf{B} jednaka je nuli. Relacija (19.2) je Gaussov zakon u diferencijalnom obliku i odnosi se na bilo koju točku prostora u kojem postoji magnetsko polje.

Do istog rezultata došli bismo ako na Gaussov zakon primjenimo Gaussov teorem:

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \cdot dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} \cdot dV$$

Dobije se:

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \cdot dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{B} \cdot dV = 0$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

U pravocrtnom koordinatnom sustavu (x, y, z) divergencija vektora \mathbf{B} je:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (19.3)$$

U cilindričnom koordinatnom sustavu (r, α, z) divergencija vektora \mathbf{B} je:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \cdot B_r) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (19.4)$$

U sfernom koordinatnom sustavu (r, ϑ, α) divergencija vektora \mathbf{B} je:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \cdot B_r) \right] + \frac{1}{r \cdot \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (B_\vartheta \cdot \sin \vartheta) \right] + \frac{1}{r \cdot \sin \vartheta} \frac{\partial B_\alpha}{\partial \alpha} = 0 \quad (19.5)$$

20. BIOT-SAVARTOV ZAKON

Öerstedovo otkriće da električna struja u svom okolišu stvara magnetsko polje, kvantificirano je u formi *Biot-Savartovog zakona*. Diferencijalni dio strujnice $d\vec{l}$ protjecan strujom I u vakuumu stvara u točki koja je od njega udaljena za R magnetsku indukciju (slika 20.1):

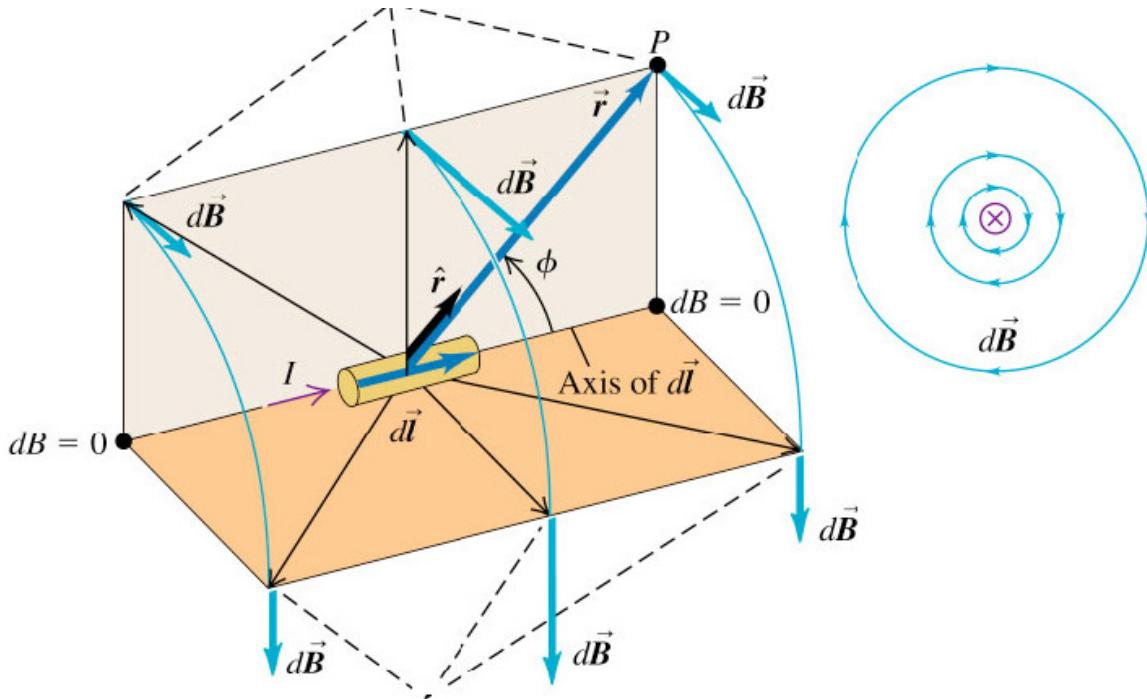
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{R}}{R^3} \quad (20.1)$$

gdje je \vec{R} vektor udaljenosti usmjeren od diferencijalnog dijela strujnice $d\vec{l}$ prema točki izračuna magnetske indukcije. Ako je položaj dijela strujnice određen s vektorom položaja \vec{r}' a točka u kojoj izračunavamo magnetsku indukciju je određena s vektorom položaja \vec{r} tada je vektor udaljenosti $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$. U relaciji (20.1) vektorsko značenje diferencijalne duljine vodiča $d\vec{l}$ određuje smjer struje

Konstanta μ_0 iz (20.1) je *magnetska permeabilnost vakuuma* (praznog prostora) iznosa:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am} = \text{H/m} \quad (20.2)$$

Vektor magnetske indukcije $d\vec{B}$ leži u ravnini okomitoj na os strujnog elementa $d\vec{l}$ i postavljen je okomito na vektor strujnog elementa $d\vec{l}$ i vektor udaljenosti \vec{R} .



Slika 20.1. Magnetska indukcija strujnog elementa

Ukupna magnetska indukcija dobije se integracijom izraza (20.1) po konturi vodiča l :

$$\mathbf{B} = \int_l d\mathbf{B} = \int_l \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \times \mathbf{R}}{R^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_l I \frac{dl \times \mathbf{R}}{R^3} \quad (20.3)$$

Relacija (20.3) predstavlja *Biot-Savartov zakon* koji nam služi da odredimo magnetsku indukciju strujnice.

Za plošnu struju gustoće \mathbf{K} raspoređenu po plohi S Biot-Savartov zakon glasi:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{K} \times \mathbf{R}}{R^3} dS \quad (20.4)$$

Za prostornu struju gustoće \mathbf{J} raspoređenu po volumenu V Biot-Savartov zakon glasi:

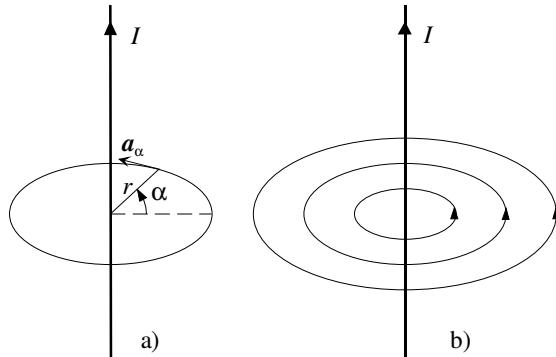
$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{R}}{R^3} dV \quad (20.5)$$

20.1. Magnetsko polje ravne dugе strujnice

Silnice magnetskog polja ravne, beskonačno dugе strujnice protjecane strujom I su kružnice u ravnini okomitoj na strujnicu, koncentrične s osi strujnice. Primjena Biot-Savartovog zakona (20.3) na izračun magnetske indukcije na udaljenosti r od osi strujnice daje:

$$\mathbf{B} = a_\alpha \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (20.6)$$

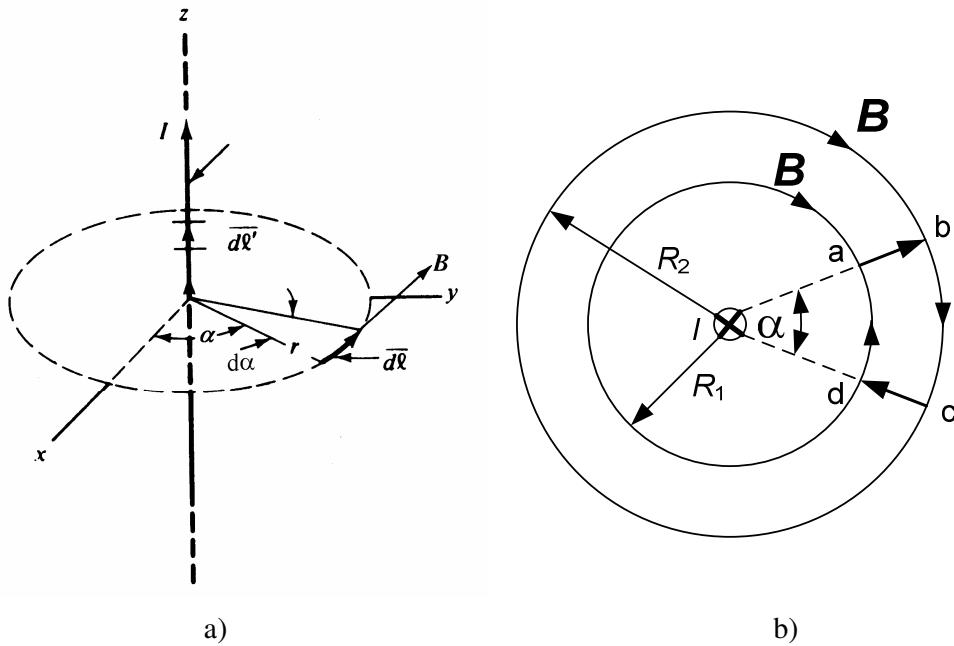
gdje je a_α jedinični tangencijalni vektor u cilindričnom koordinatnom sustavu. Kažemo da ravna struja stvara u svom okolišu kružno magnetsko polje (slika 20.2).



Slika 20.2. Magnetsko polje beskonačno dugе strujnice

21. AMPÈREOV ZAKON KRUŽNOG PROTJECANJA

Izračunajmo krivuljni integral magnetske indukcije po kružnici polumjera r koja je koncentrična s ravnom, beskonačno dugom strujnicom protjecanom strujom I prema slici 21.1.a).



Slika 21.1. Uz objašnjenje Ampèreovog zakona

Magnetska indukcija ravne, beskonačno duge strujnice na kružnici polumjera r je prema (20.6) konstantna:

$$\mathbf{B} = \mathbf{a}_\alpha \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \text{konst.} \quad (20.6)$$

Diferencijalni put dl je duljina luka u cilindričnom koordinatnom sustavu:

$$dl = \mathbf{a}_\alpha r d\alpha$$

pa je integral magnetske indukcije po kružnici:

$$\oint_c \mathbf{B} \cdot dl = \oint_c \mathbf{a}_\alpha \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{a}_\alpha r d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_c d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi} 2\pi = \mu_0 I \quad (21.1)$$

Dakle, integral magnetske indukcije po nekoj zatvorenoj krivulji jednak je struji koja je obuhvaćena tom krivuljom, pomnoženom s μ_0 .

Načinimo isto izračunavanje za krivulju $a-b-c-d$ pokraj ravne, beskonačno duge strujnice prema slici 21.1.b). Dijelovi krivulje su: $dl_{a-b} = \mathbf{a}_r dr$, $dl_{b-c} = \mathbf{a}_\alpha R_2 d\alpha$, $dl_{c-d} = -\mathbf{a}_r dr$ i $dl_{d-a} = -\mathbf{a}_\alpha R_1 d\alpha$. Integral magnetske indukcije je:

$$\begin{aligned} \oint_c \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \int_{r=R_1}^{R_2} \mathbf{a}_\alpha \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{a}_r dr + \int_b^c \mathbf{a}_\alpha \frac{\mu_0 I}{2\pi R_2} \mathbf{a}_\alpha R_2 d\alpha - \int_{r=R_1}^{R_2} \mathbf{a}_\alpha \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{a}_r dr - \int_d^a \mathbf{a}_\alpha \frac{\mu_0 I}{2\pi R_1} \mathbf{a}_\alpha R_1 d\alpha \\ &= 0 + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_b^c d\alpha - 0 - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_d^a d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \alpha - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \alpha = 0 \end{aligned} \quad (21.2)$$

Dakle, integral magnetske indukcije po zatvorenoj krivulji sada je jednak nuli, jer krivulja ne obuhvaća strujnicu.

Opći je onda zaključak da je integral magnetske indukcije po zatvorenoj krivulji jednak zbroju struja obuhvaćenih krivuljom, pomnoženom s μ_0 :

$$\oint_c \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I \quad (21.3)$$

Predznak struja u jednadžbi (21.3) povezan je sa smjerom obilaska krivulje *pravilom desne ruke*: zakriviljeni prsti desne ruke postave se u smjeru obilaska krivulje a ispruženi palac određuje pozitivan smjer za struju.

Relaciju (21.3) možemo proširiti na prostornu struju gustoće \mathbf{J}_s :

$$\oint_c \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{n} \cdot dS \quad (21.4)$$

Relacija (21.4) predstavlja *Ampèreov zakon (zakon kružnog protjecanja)*: integral magnetske indukcije po bilo kojoj zatvorenoj krivulji c jednak je integralu gustoće slobodne struje koja prolazi kroz površinu S , obrubljenu krivuljom c , pomnoženom s μ_0 . Pozitivni smjer obilaska krivulje c i normala \mathbf{n} na površinu S povezani su pravilom desne ruke: uz zakriviljene prste desne ruke postavljene u smjeru obilaska krivulje ispruženi palac daje pozitivan smjer normale na površinu.

21.1. Diferencijalni oblik Ampèreovog zakona

Primjenimo na Ampèreov zakon (21.4) Stokesov teorem:

$$\oint_c \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} \cdot dS$$

gdje je \mathbf{A} vektorsko polje koje prolazi kroz površinu S , na kojoj je definirana normala \mathbf{n} , a površina S je obrubljena konturom c . Primjena na Ampèreov zakon daje:

$$\oint_c \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n} \cdot dS = \mu_0 \int_S \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{n} \cdot dS$$

odakle slijedi:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_s \quad (21.5)$$

Dakle, rotacija vektora magnetske indukcije \mathbf{B} statičkog magnetskog polja u praznom prostoru jednaka je gustoći slobodne struje \mathbf{J}_s pomnoženoj s μ_0 . Relacija (21.5) je Ampèreov zakon u diferencijalnom obliku i odnosi se na bilo koju točku prostora u kojem postoji magnetsko polje.

U pravocrtnom koordinatnom sustavu (x, y, z) rotacija vektora \mathbf{B} je:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \mathbf{a}_x \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) + \mathbf{a}_y \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) + \mathbf{a}_z \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) = \mu_0 \mathbf{J}_s \quad (21.6)$$

U cilindričnom koordinatnom sustavu (r, α, z) rotacija vektora \mathbf{B} je:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{a}_r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial B_\alpha}{\partial z} \right) + \mathbf{a}_\alpha \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) + \mathbf{a}_z \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r B_\alpha) - \frac{\partial B_r}{\partial \alpha} \right] = \mu_0 \mathbf{J}_s \quad (21.7)$$

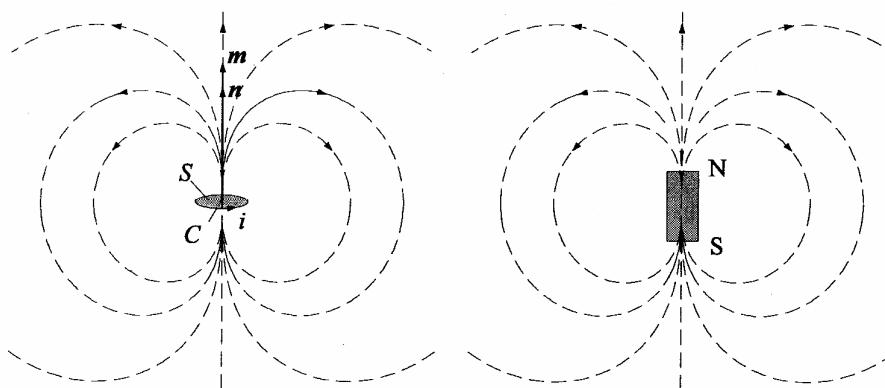
U sfernom koordinatnom sustavu (r, ϑ, α) rotacija vektora \mathbf{B} je:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} = & \mathbf{a}_r \frac{1}{r \cdot \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta \cdot B_\alpha) - \frac{\partial B_\vartheta}{\partial \alpha} \right] + \mathbf{a}_\vartheta \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial B_r}{\partial \alpha} - \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot B_\alpha) \right] + \\ & + \mathbf{a}_\alpha \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \cdot B_\vartheta) - \frac{\partial B_r}{\partial \vartheta} \right] = \mu_0 \mathbf{J}_s \end{aligned} \quad (21.8)$$

22. MATERIJALI U MAGNETSKOM POLJU

Eksperimentalno je opaženo da neki materijali unijeti u magnetsko polje djeluju na polje i mijenjaju ga. Poznato je da je odziv materijala na narinuto vanjsko magnetsko polje uzrokovani mikroskopskim elementarnim *magnetskim dipolima* koje stvara gibanje vezanih naboja u materijalu. Rezultirajuća promjena koja se iskazuje u mikroskopskim magnetskim dipolnim momentima naziva se *magnetiziranje* materijala.

Struja i koja teče petljom c i obrubljuje plohu S stvara magnetsko polje koje je na većim udaljenostima isto kao polje malog permanentnog magneta čiji je sjeverni pol orijentiran u smjeru pozitivne okomice n na plohu S , prema slici 22.1.



Slika 22.1. Magnetsko polje strujne petlje i malog permanentnog magneta

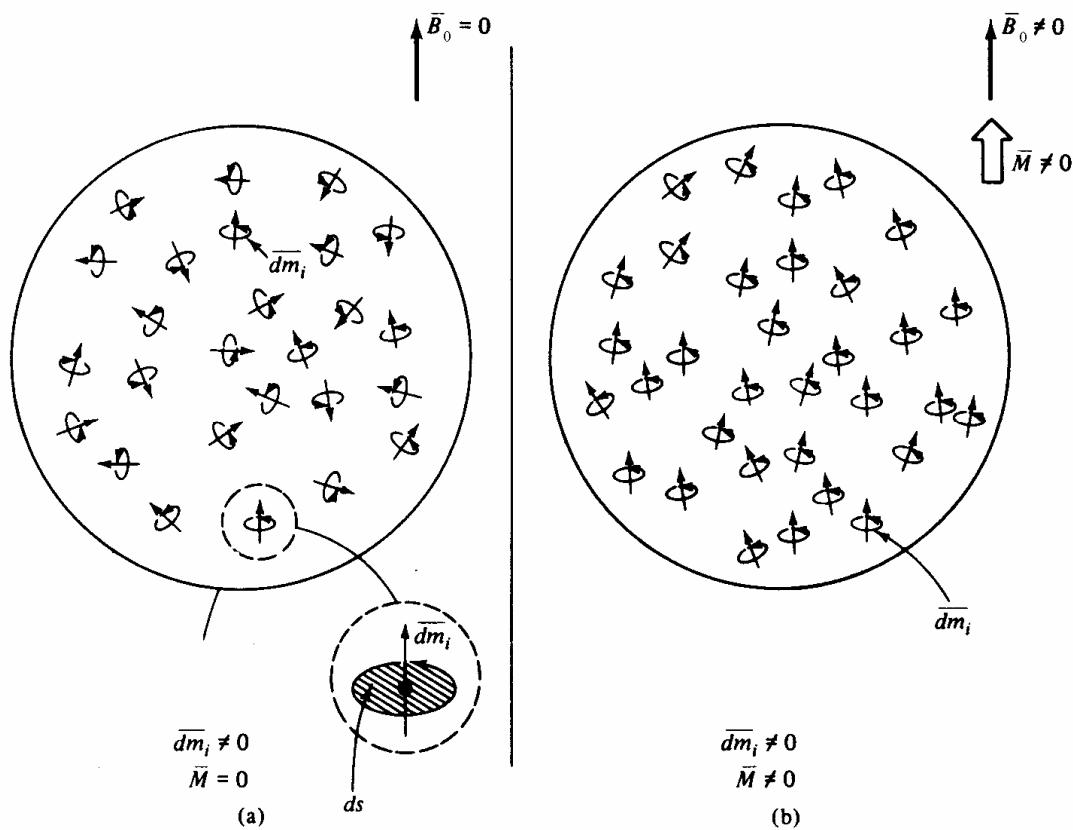
Magnetski moment strujne petlje je:

$$\mathbf{m} = \mathbf{n} \cdot i \cdot S \quad (22.1)$$

gdje je normala \mathbf{n} određena pravilom desne ruke (zakriviljeni prsti desne ruke postave se u smjeru struje a ispruženi palac daje smjer normale).

Kako gibanje naboja tvori električnu struju, svaki atom, prema pojednostavljenom planetarnom modelu, možemo opisati zbrojem magnetskih dipolnih momenata koji nastaju zbog orbitalnog gibanja elektrona, spina elektrona i spina jezgre. Magnetski moment uslijed spina jezgre, zbog njene manje kutne brzine, znatno je manji nego magnetski moment uslijed spina elektrona, pa ga možemo zanemariti, a u razmatranje uzeti samo prva dva uzroka: orbitalno gibanje elektrona i spin elektrona.

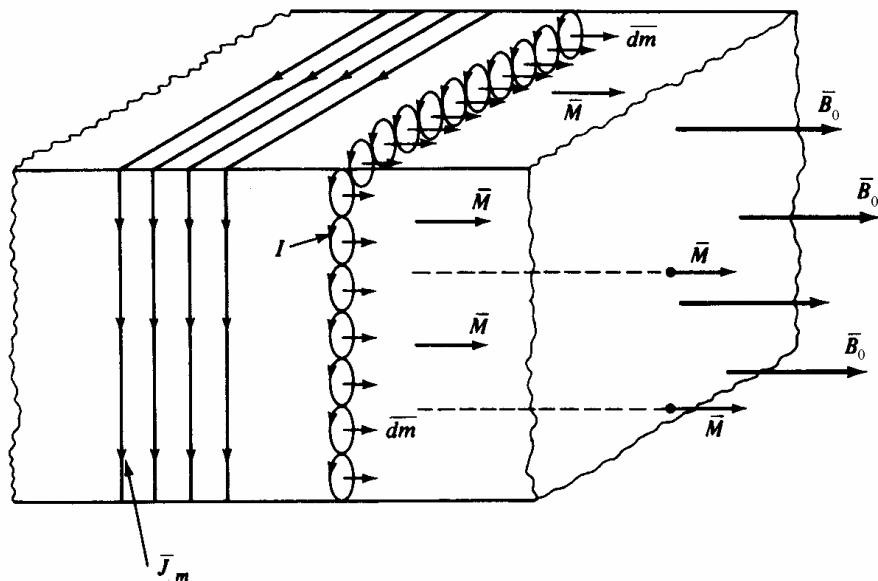
Na slici 22.2.a) prikazani su magnetski dipoli atoma unutar materijala kada je narinuto vanjsko magnetsko polje nula, $\mathbf{B}_0 = 0$. Kako su magnetski dipolni momenti orijentirani u svim mogućim smjerovima zbroj svih magnetskih momenata na makroskopskoj razini je nula, pa je i *magnetizacija* materijala $\mathbf{M} = 0$. Ako se narine vanjsko magnetsko polje \mathbf{B}_0 prema slici 22.2.b), ono će zakretnim momentom djelovati na dipole (opisano u potpoglavlju 17.1) nastojeći ih usmjeriti u smjeru vanjskog magnetskog polja \mathbf{B}_0 . Postojat će sada, na makroskopskoj razini, ukupna magnetizacija materijala \mathbf{M} . U cilju jednostavnijeg grafičkog prikaza mi ćemo prepostavljati da su svi magnetski dipoli orijentirani u smjeru vanjskog magnetskog polja.



Slika 22.2. Magnetski dipolni momenti u materijalu

a) bez vanjskog magnetskog polja; b) s narinutim vanjskim magnetskim poljem

Uzmimo sada da imamo komad materijala koji je postavljen u homogeno vanjsko magnetsko polje indukcije \bar{B}_0 prema slici 22.3.



Slika 22.3. Stvaranje plošne magnetizacijske struje u materijalu

Homogeno vanjsko magnetsko polje indukcije \mathbf{B}_0 , koje je stvoreno slobodnim strujama gustoće \mathbf{J}_s npr. kroz zavojnicu omotanu oko materijala, u materijalu će uzrokovati jednoliku magnetizaciju. Na slici su prikazane mikroskopske strujne petlje koje stvaraju magnetske momente. Struje susjednih strujnih petlji će se u unutrašnjosti materijala svugdje poništavati, a samo na površini materijala ostat će rezultirajuća plošna struja magnetizacije koju nazivamo *amperska struja* gustoće \mathbf{J}_M . Ukupno magnetsko polje unutar materijala određuju onda vanjske slobodne struje \mathbf{J}_s koje stvaraju vanjsko magnetsko polje indukcije \mathbf{B}_0 i amperske struje magnetizacije u materijalu \mathbf{J}_M koje stvaraju svoje magnetsko polje indukcije \mathbf{B}_M .

22.1. Utjecaj magnetizacije na magnetsko polje

Opisane fizikalne pojave kvantificiramo u makroskopskom pristupu na sljedeći način. Ukupna magnetska indukcija u materijalu je:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_M \quad (22.2)$$

Indukcija \mathbf{B}_0 stvorena vanjskom strujom kroz zavojnicu je:

$$\mathbf{B}_0 = \mathbf{B} - \mathbf{B}_M \quad (22.3)$$

Primjenimo li Ampèreeov zakon (21.4) dobije se:

$$\oint_c \mathbf{B}_0 \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{n} \cdot dS \quad ; \quad \oint_c (\mathbf{B} - \mathbf{B}_M) \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{n} \cdot dS \quad (22.4)$$

Podijeli li se (22.4) s μ_0 dobije se:

$$\oint_c \left(\frac{\mathbf{B} - \mathbf{B}_M}{\mu_0} \right) \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{n} \cdot dS \quad (22.5)$$

Uvodimo nove veličine – jakost magnetskog polja \mathbf{H} i vektor gustoće magnetiziranja \mathbf{M} :

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}_0}{\mu_0} = \frac{\mathbf{B} - \mathbf{B}_M}{\mu_0} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad ; \quad \mathbf{M} = \frac{\mathbf{B}_M}{\mu_0} \quad (22.6)$$

Jedinica za jakost magnetskog polja \mathbf{H} i vektor gustoće magnetiziranja \mathbf{M} je (A/m). Jakost magnetskog polja \mathbf{H} je omjer indukcije \mathbf{B}_0 koju su stvorile slobodne struje i permeabilnosti praznog prostora μ_0 , tj. određuju je slobodne struje zavojnice. Vektor gustoće magnetiziranja \mathbf{M} je omjer indukcije \mathbf{B}_M koju su stvorile struje magnetizacije i permeabilnosti praznog prostora μ_0 , tj. određuju ga struje unutarnje magnetizacije materijala. Dakle, Ampèreeov zakon u prisustvu materijala glasi:

$$\oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{n} \cdot dS \quad (22.7)$$

Ukupna magnetska indukcija u materijalu je onda:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_M \quad ; \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M} \quad (22.8)$$

Vektor gustoće magnetiziranja \mathbf{M} proporcionalan je jakosti magnetskog polja i ovisan je o vrsti materijala:

$$\mathbf{M} = \chi_m \cdot \mathbf{H} \quad (22.9)$$

gdje je χ_m magnetska susceptibilnost. Magnetska susceptibilnost je bezdimenziona konstanta koja je značajka materijala, a kojom se kvantificira unutarnja magnetizacija materijala zbog utjecaja vanjskog magnetskog polja.

Ukupna magnetska indukcija u materijalu se onda izrazi kao:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_M = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0 \mathbf{H} (1 + \chi_m) = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \mathbf{H} = \mu \cdot \mathbf{H} \quad (22.10)$$

gdje je μ_r relativna permeabilnost materijala:

$$\mu_r = 1 + \chi_m \quad (22.11)$$

a μ apsolutna permeabilnost ili permeabilnost materijala:

$$\mu = \mu_0 \cdot \mu_r \quad (22.12)$$

Dakle, vanjska magnetska indukcija \mathbf{B}_0 u materijalu se mijenja uslijed magnetizacije materijala za iznos \mathbf{B}_M , odnosno mijenja se μ_r puta u odnosu na magnetsku indukciju u vakuumu.

Složene fizikalne pojave magnetizacije materijala u makroskopskom pristupu obuhvatili smo kroz jednu bezdimenzionu konstantu μ_r koja je značajka materijala.

Biot-Savartov zakon (20.1) te Ampèreov zakon u integralnom (21.4) i diferencijalnom obliku (21.5) koji su bili dani za vakuum, u prisustvu materijala modificiraju se tako da se umjesto permeabilnosti vakuma μ_0 piše permeabilnost sredstva $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu \cdot I}{4\pi} \frac{dl \times \mathbf{R}}{R^3} \quad ; \quad d\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi} \frac{dl \times \mathbf{R}}{R^3} \quad (20.1.a)$$

$$\oint_c \mathbf{B} \cdot dl = \mu \int_S \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{n} \cdot dS \quad ; \quad \oint_c \mathbf{H} \cdot dl = \int_S \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{n} \cdot dS \quad (21.4.a)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{B} = \mu \mathbf{J}_s \quad ; \quad \nabla \times \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}_s \quad (21.5.a)$$

22.2. Podjela materijala

Postoje tri osnovne vrste magnetskih učinaka u materijalu: *dijagnetizam*, *paramagnetizam* i *feromagnetizam*. Paramagnetizam i feromagnetizam pretežno su uzrokovani permanentnim magnetskim dipolnim momentima koji su rezultat spinova elektrona oko vlastite osi. Samo vrlo mali udjel u magnetiziranju materijala može se pripisati struji koja je proizvedena

orbitalnim gibanjima elektrona oko jezgre. Dijamagnetizam nastaje upravo iz promjena induciranih u magnetskim dipolima orbitalnih elektrona kada se narine vanjsko magnetsko polje.

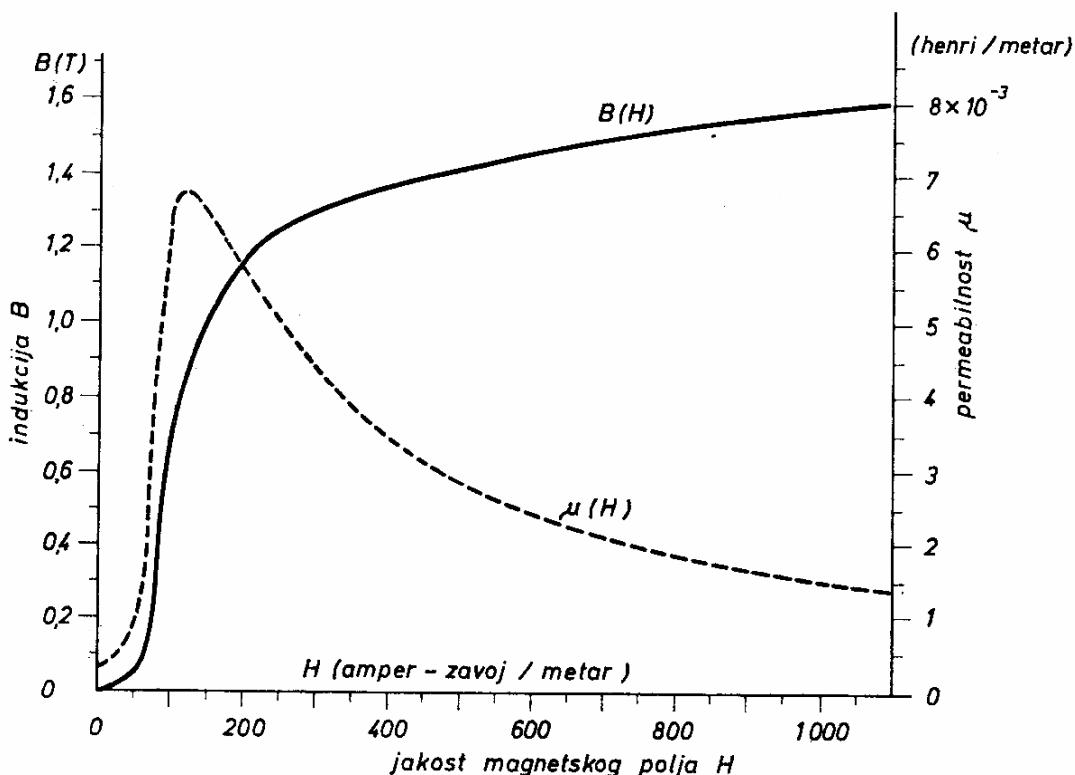
Dijamagnetizam je osnovno svojstvo svih materijala, ali kod nekih prevladavaju drugi učinci – paramagnetizam i feromagnetizam. Dijamagnetski učinak je posljedica djelovanja magnetskog polja na orbitalne elektrone. Ako je smjer narinutog magnetskog polja podudaran sa smjerom magnetskog dipolnog momenta orbitalnog elektrona, pojavit će se dodatna magnetska sila usmjerena kao i centrifugalna sila kružnog gibanja elektrona, što će izazvati neravnotežu s privlačnom Coulombovom silom između elektrona i jezgre. Kako su polumjeri orbita elektrona kvantificirani i ne mogu se mijenjati, neravnoteža sila se kompenzira smanjenjem brzine orbitalnog elektrona, čime se smanji i njegov magnetski moment. To smanjenje magnetskog momenta u odnosu na stanje koje je bilo bez prisustva magnetskog polja možemo iskazati stvaranjem dodatnog magnetskog momenta orbitalnog elektrona koji je suprotno usmjeren od narinutog magnetskog polja. U makroskopskom pogledu, dijamagnetski učinak predstavlja se postojanjem vektora magnetizacije \mathbf{M} koji je suprotan narinutom magnetskom polju. To znači da je magnetska susceptibilnost dijamagnetičkih materijala negativna, a relativna magnetska permeabilnost manja je od 1. Npr. za bizmut je magnetska susceptibilnost $\chi_m = -1,66 \cdot 10^{-5}$, a relativna magnetska permeabilnost $\mu_r = 0,9999834$. Dijamagnetsko ponašanje je jako slabo izraženo pa su za sve dijamagnetske materijale relativne magnetske permeabilnosti neznatno manje od 1. Dijamagnetički materijali su još vodik, helij, inertni plinovi, bakar, zlato, silicij, ugljik, sumpor itd.

Kod paramagnetskih materijala postoje permanentni magnetski dipolni momenti atoma uzrokovani spinom elektrona i bez prisustva vanjskog magnetskog polja. Ti magnetski momenti su nasumce orijentirani tako da je ukupno magnetiziranje materijala u makroskopskim razmjerama jednako nuli. Narinuto vanjsko magnetsko polje zakreće te dipole u djelomično usmjerenu poredak u smjeru polja, čime se ukupno magnetsko polje u paramagnetskom materijalu povećava. U makroskopskom pogledu, paramagnetski učinak predstavlja se postojanjem vektora magnetizacije \mathbf{M} koji je u smjeru narinutog magnetskog polja. To znači da je magnetska susceptibilnost paramagnetičkih materijala pozitivna, a relativna magnetska permeabilnost veća od 1. Npr. za kisik je magnetska susceptibilnost $\chi_m = 133 \cdot 10^{-5}$, a relativna magnetska permeabilnost $\mu_r = 1,00133$. Paramagnetsko ponašanje je jače izraženo nego dijamagnetsko, ali je također jako slabo izraženo pa su za sve paramagnetske materijale relativne magnetske permeabilnosti neznatno veće od 1. Paramagnetički materijali su još aluminij, željezni klorid, olovo itd.

Kod feromagnetskih materijala kristalna struktura materijala uzrokuje da su sile između susjednih molekularnih dipolnih momenata dovoljno jake u odnosu na neuređene učinke termičkih gibanja tako da mogu orijentirati dipole u istom smjeru unutar malih područja koja se zovu *domene*. Pod djelovanjem vanjskog magnetskog polja magnetski momenti domena postavljaju se u smjer polja što se očituje u porastu ukupnog makroskopskog magnetiziranja materijala u smjeru polja. Magnetizacija kod feromagnetskih materijala je mnogo veća nego kod dijamagnetskih i paramagnetskih. Feromagnetski materijali su željezo, kobalt i nikal i neke njihove legure, ali također i legure nekih elemenata koji sami nisu feromagnetični.

Povećanjem jakosti vanjskog magnetskog polja, povećava se broj domena koje se usmjeravaju u smjeru vanjskog polja. Kod dovoljno velike jakosti magnetskog polja nastupa u materijalu *zasićenje*. Daljnja posljedica toga je da je relativna magnetska permeabilnost feromagnetskih materijala ovisna o vanjskom magnetskom polju, tj. feromagnetski materijal

je nelinearan $\mu_r = f(H)$. Na slici 22.4. prikazana je *krivulja magnetiziranja*, tj. ovisnost magnetske indukcije B o vanjskom magnetskom polju H , te ovisnost permeabilnosti o polju H za željezo.



Slika 22.4. Krivulja magnetiziranja i magnetska permeabilnost za željezo

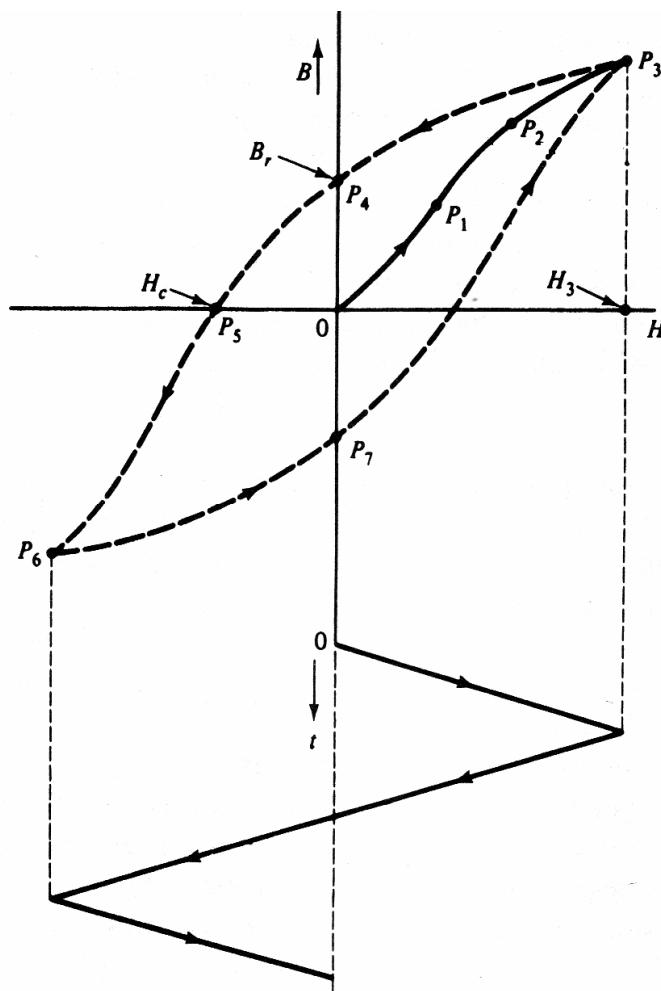
U tablici 22.1. prikazane su brojčane vrijednosti jakosti vanjskog magnetskog polja H , magnetske indukcije B , permeabilnosti μ i μ_r , magnetizacije M i indukcije uslijed magnetizacije B_M za isti materijal.

Tablica 22.1. Krivulja magnetiziranja i permeabilnost željeza

H (A/m)	B (T)	$\mu \times 10^7$ (H/m)	μ_r	M (A/m)	B_M (T)
0	0	3 100	247	0	0
10	0,0042	4 200	334	3 332	0,00419
20	0,01	5 000	398	7 938	0,00997
50	0,043	8 600	684	34 168	0,0429
100	0,67	67 000	5 332	533 069	0,6699
150	1,01	67 333	5 358	803 582	1,0098
200	1,18	59 000	4 695	938 814	1,1797
500	1,44	28 800	2 292	1 145 416	1,4394
1 000	1,58	15 800	1 257	1 256 324	1,5787
10 000	1,72	1 720	137	1 358 732	1,707
100 000	2,26	226	18	1 698 451	2,134
800 000	3,15	39	3,1	1 796 690	2,145

Iz tablice 22.1. vidi se da je za male vrijednosti jakosti vanjskog magnetskog polja H praktički čitava indukcija u materijalu posljedica magnetiziranja unutar materijala B_M . Za veće vrijednosti jakosti vanjskog magnetskog polja H magnetska indukcija sve sporije raste (nastupa zasićenje) tako da je porast indukcije u materijalu sve manje posljedica magnetiziranja unutar materijala B_M , a raste utjecaj vanjskog magnetskog polja H na magnetiziranje. To je također očito iz iznosa permeabilnosti koja za velike vrijednosti vanjskog magnetskog polja H teži k permeabilnosti vakuuma.

Magnetiziranje feromagnetskih materijala također ovisi o njihovoj magnetskoj pretpovijesti, tj. da li je materijal prethodno bio magnetiziran. Krivulja magnetiziranja prikazana na slici 22.4. vrijedi za uzorak koji prethodno nije bio izložen vanjskom magnetskom polju, pa se stoga takva krivulja zove *krivulja prvog magnetiziranja*.



Slika 22.5. Izmjenično magnetiziranje feromagnetskog materijala

Ako materijal magnetiziramo povećavajući jakost vanjskog magnetskog polja H do iznosa H_3 prema slici 22.5. doći ćemo u točku P_3 . Smanjenjem jakosti magnetskog polja H , smanjenje magnetske indukcije neće se odvijati po istoj krivulji. Zbog toga kad jakost magnetskog polja H postane jednaka nuli, u materijalu će se zadržati unutarnja remanentna magnetizacija, odnosno *remanentna indukcija* B_r (točka P_4). Da bi se indukcija svela na nulu, potrebno je promijeniti smjer vanjskog magnetskog polja H . Jakost magnetskog polja pri kojoj dolazi do

poništenja magnetske indukcije naziva se *koercitivna sila* H_c (točka P₅). Povećanjem jakosti magnetskog polja H u suprotnom smjeru do točke P₆ pa njegovim smanjenjem na nulu (točka P₇) opet će ostati remanentna indukcija – B_r . Pri takvom izmjeničnom magnetiziranju feromagnetskog materijala opisuje se simetrična zatvorena krivulja koja se naziva *petlja histereze*.

Za neku drugu vrijednost maksimalne jakosti narinutog magnetskog polja opisuje se neka druga petlja histereze. Posebno je važna ona petlja histereze kod koje se postiže gotovo potpuno zasićenje. Ona se naziva *granična petlja histereze* i za nju se definiraju remanentna indukcija B_r i koercitivna sila H_c . Materijali koji imaju veliku remanentnu indukciju i veliku koercitivnu silu, tako da ih samo jaka vanjska polja suprotnoga smjera mogu razmagnetizirati, koriste se za izradu *permanentnih magneta*. Npr. za legirani materijal poznat pod nazivom alnico 5 remanentna je indukcija $B_r = 1,25$ T, a koercitivna sila $H_c = 44$ kA/m. Za supermagloy (legura samarija i kobalta) remanentna je indukcija $B_r = 1,1$ T, a koercitivna sila $H_c = 840$ kA/m.

Razmagnetiziranje feromagnetskih materijala vrši se tako da se on magnetizira sa sve manjim vrijednostima maksimalne jakosti narinutog magnetskog polja (po sve užim petljama histereze), tako da se svakim novim magnetiziranjem dobija sve manja remanentna indukcija.

Treće karakteristično svojstvo feromagnetskih materijala je da oni kod povišene temperature, koja se naziva *Curieva temperatura*, gube svoju feromagnetičnost, no nakon hlađenja opet postaju feromagnetični. Ta temperatura za čisto željezo iznosi 770 °C, a za nikal 358 °C.

22.3. Linearost, izotropnost i homogenost magnetskog materijala

Magnetski materijal je *linearan* ako je u svakoj točki materijala permeabilnost μ konstanta. Tada je odnos između vektora \mathbf{B} i \mathbf{H} prema (22.10) linearan. Ako je permeabilnost μ u svakoj točki materijala ovisna o iznosu jakosti magnetskog polja $|\mathbf{H}|$, tj. $\mu = \mu(|\mathbf{H}|)$, materijal je *nelinearan*.

Magnetski materijal je *homogen* ako se iznos permeabilnosti μ ne mijenja od točke do točke materijala, tj. neovisan je o položaju točke unutar materijala. Ako se permeabilnost μ mijenja s položajem točke unutar magnetskog materijala, tj. $\mu = \mu(\mathbf{r})$ tada je materijal *nehomogen*.

Ako se magnetski materijal magnetizira jednako u svim smjerovima, takav materijal se naziva *izotropnim* i u njemu su vektor jakosti magnetskog polja \mathbf{H} i vektor magnetizacije \mathbf{M} u istome smjeru, tj. magnetska susceptibilnost χ_m je u svim smjerovima konstanta. U izotropnom materijalu vrijedi:

$$\begin{aligned} M_x &= \chi_m \cdot H_x & ; \quad M_y &= \chi_m \cdot H_y & ; \quad M_z &= \chi_m \cdot H_z \\ B_x &= \mu \cdot H_x & ; \quad B_y &= \mu \cdot H_y & ; \quad B_z &= \mu \cdot H_z \end{aligned} \tag{22.13}$$

Za materijal koji nije izotropan (*anizotropan*), vektor jakosti magnetskog polja \mathbf{H} i vektor magnetizacije \mathbf{M} nisu u istome smjeru. U takvim materijalima magnetska susceptibilnost χ_m je različita u različitim smjerovima, pa vrijedi:

$$\begin{aligned} M_x &= \chi_{m11} \cdot H_x + \chi_{m12} \cdot H_y + \chi_{m13} \cdot H_z \\ M_y &= \chi_{m21} \cdot H_x + \chi_{m22} \cdot H_y + \chi_{m23} \cdot H_z \\ M_z &= \chi_{m31} \cdot H_x + \chi_{m32} \cdot H_y + \chi_{m33} \cdot H_z \end{aligned} \quad (22.14)$$

gdje općenito postoji devet različitih susceptibilnosti χ_m ovisnih o smjeru magnetizacije materijala i iznosu jakosti magnetskog polja koje magnetizira materijal u tom smjeru. Vektori magnetske indukcije po smjerovima su:

$$\begin{aligned} B_x &= \mu_{11} \cdot H_x + \mu_{12} \cdot H_y + \mu_{13} \cdot H_z \\ B_y &= \mu_{21} \cdot H_x + \mu_{22} \cdot H_y + \mu_{23} \cdot H_z \\ B_z &= \mu_{31} \cdot H_x + \mu_{32} \cdot H_y + \mu_{33} \cdot H_z \end{aligned} \quad (22.15)$$

s općenito devet različitih permeabilnosti μ_{ij} koje tvore tenzor permeabilnosti. Jednadžba (22.15) može se napisati u matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} \quad (22.16)$$

U vektorskoj i matričnoj formi jednadžba (22.16) može se pisati kao:

$$[\mathbf{B}] = [\boldsymbol{\mu}] \cdot [\mathbf{H}] \quad (22.17)$$

Ako su $\mu_{11} = \mu_{22} = \mu_{33} = \mu$ a svi ostali elementi u matrici $[\boldsymbol{\mu}]$ su jednaki nuli, sredstvo je izotropno i jednadžba (22.17) može se pisati kao:

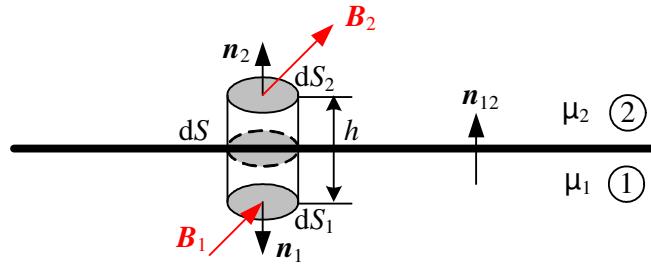
$$[\mathbf{B}] = \mu [\mathbf{H}] \quad (22.18)$$

23. UVJETI NA GRANICI

U makroskopskom pristupu izvore magnetskog polja koji su stvarne gustoće prostorne struje i struja magnetizacije idealiziramo u obliku singularnih gustoća struja: plošnih i linijskih. Takve idealizacije mogu onda imati za posljedicu diskontinuitete u veličinama polja.

23.1. Uvjeti na granici dva magnetska materijala

Uzmimo da se na graničnoj površini S dva magnetska materijala permeabilnosti μ_1 i μ_2 nalazi slobodna plošna struja gustoće K_s . Neka je s \mathbf{n}_{12} označena normala na graničnu površinu S , usmjerena iz sredstva „1“ u sredstvo „2“ prema slici 23.1.



Slika 23.1. Određivanje vektora magnetske indukcije \mathbf{B} na granici

Primjenimo Gaussov zakon na mali cilindar površine baze dS , visine h . Vrijedi: $\mathbf{n}_{12} = -\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_2$, te $dS = dS_1 = dS_2$. Primjena Gaussovog zakona (19.1) daje:

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \cdot dS = 0 \quad (23.1)$$

$$\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n}_1 \cdot dS_1 + \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}_2 \cdot dS_2 + (\text{doprinos toku kroz plastičnu plaštinu}) = 0$$

Ako visinu cilindra h smanjujemo ($h \rightarrow 0$) dobije se:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \{-\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n}_{12} \cdot dS + \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}_{12} \cdot dS + (\text{doprinos toku kroz plastičnu plaštinu})\} = 0 \quad (23.2)$$

Kad visina cilindra $h \rightarrow 0$, doprinos toku kroz plastičnu plaštinu također $\rightarrow 0$. Podijelimo li (23.2) s dS dobijemo:

$$\mathbf{n}_{12}(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \quad (23.3)$$

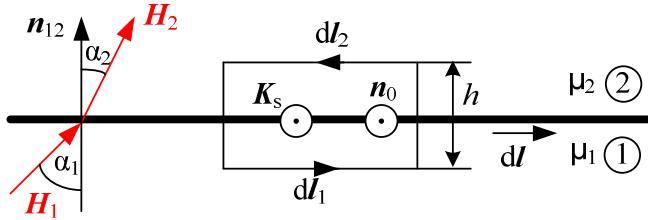
Normalna komponenta vektora magnetske indukcije \mathbf{B} ne mijenja se na granici, tj. normalne komponente vektora magnetske indukcije \mathbf{B} s obje strane granice su jednake:

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (23.4)$$

a normalne komponente jakosti magnetskog polja \mathbf{H} obrnuto su srazmjerene permeabilnostima:

$$B_{1n} = B_{2n} \Rightarrow \mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n} \Rightarrow \frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \quad (23.5)$$

Primjenimo Ampèreov zakon kružnog protjecanja (21.4.a) na malu pravokutnu petlju stranica dl i h prema slici 23.2. Vrijedi: $dl = t \cdot dl = dl_1 = -dl_2$, gdje je t jedinični tangencijalni vektor na granicu.



Slika 23.2. Određivanje vektora jakosti magnetskog polja \mathbf{H} na granici

Primjena (21.4.a) daje:

$$\oint_{l} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{n} \cdot dS \quad (23.6)$$

$$\mathbf{H}_1 \cdot dl_1 + \mathbf{H}_2 \cdot dl_2 + (\text{doprinosi na stranicama } h) = \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{n}_0 \cdot h \cdot dl$$

gdje je normala na površinu \mathbf{n}_0 određena obilaskom petlje u smjeru orijentacije petlje po pravilu desne ruke. Ako stranice h smanjujemo ($h \rightarrow 0$) dobije se:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \{\mathbf{H}_1 \cdot t \cdot dl - \mathbf{H}_2 \cdot t \cdot dl + (\text{doprinosi na stranicama } h)\} = \lim_{h \rightarrow 0} \{\mathbf{J}_s \cdot \mathbf{n}_0 \cdot h \cdot dl\} \quad (23.7)$$

Kad stranice $h \rightarrow 0$, doprinosi na bočnim stranicama h također $\rightarrow 0$. Podijelimo li (23.7) s dl na desnoj strani dobije se prema (3.18) strujni oblog \mathbf{K}_s :

$$(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \cdot t = \mathbf{n}_0 \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \{\mathbf{J}_s \cdot h\} = \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{K}_s \quad (23.8)$$

Jedinični tangencijalni vektor t možemo izraziti i kao:

$$t = -(\mathbf{n}_0 \times \mathbf{n}_{12})$$

pa (23.8) prelazi u:

$$(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot (\mathbf{n}_0 \times \mathbf{n}_{12}) = \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{K}_s \quad (23.9)$$

Primjenom vektorskog identiteta za mješoviti produkt vektora:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A})$$

relacija (23.9) prelazi u:

$$\mathbf{n}_0 \cdot \{\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)\} = \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{K}_s$$

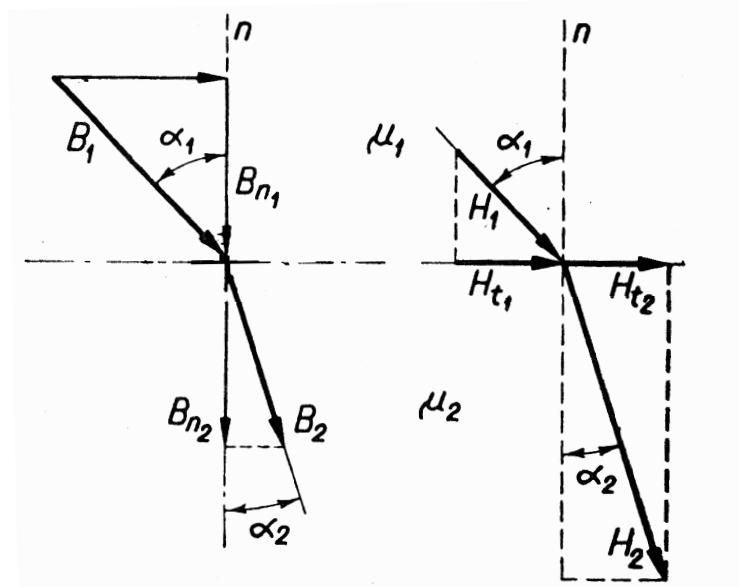
odnosno, dijeljenjem s n_0 dobije se konačni oblik uvjeta za promjenu magnetskog polja \mathbf{H} na granici:

$$\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K}_s \quad (23.10)$$

Tangencijalne komponente vektora jakosti magnetskog polja \mathbf{H} mijenjaju se na granici za iznos strujnog obloga slobodnih struja \mathbf{K}_s (ne magnetizacijskih) na granici. Ako na granici nema strujnog obloga slobodnih struja tangencijalne komponente vektora jakosti magnetskog polja \mathbf{H} se ne mijenjaju na granici, a normalne komponente vektora magnetske indukcije \mathbf{B} srazmjerene su permeabilnostima:

$$H_{1t} = H_{2t} \Rightarrow \frac{B_{1t}}{\mu_1} = \frac{B_{2t}}{\mu_2} \Rightarrow \frac{B_{1t}}{B_{2t}} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad (23.11)$$

Iz uvjeta (23.5) i (23.11) slijedi zakon loma silnice magnetskog polja na granici bez strujnog obloga (slika 23.3):



Slika 23.3. Zakon loma silnice magnetskog polja

Vrijedi:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{H_{1t}}{H_{1n}} ; \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{H_{2t}}{H_{2n}}$$

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\frac{H_{1t}}{H_{1n}}}{\frac{H_{2t}}{H_{2n}}} = \frac{H_{1t} \cdot H_{2n}}{H_{2t} \cdot H_{1n}} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad (23.12)$$

23.2. Uvjeti na granici feromagnetski materijal - zrak

Uvjet (23.12) može se primjeniti na granicu feromagnetski materijal-zrak, imajući u vidu da feromagnetski materijal ima vrlo visoku permeabilnost.

Ako magnetsko polje izlazi iz feromagnetskog materijala (sredstvo „1“ s $\mu_1 \gg$) u zrak (sredstvo „2“ s $\mu_2 = \mu_0$), tada je prema (23.12):

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{tg} \alpha_1 \frac{\mu_2}{\mu_1} \approx 0 \Rightarrow \alpha_2 \approx 0$$

tj. silnica magnetskog polja izlazi iz feromagnetskog materijala u okolni zrak pod pravim kutem (90°) u odnosu na granicu feromagnetski materijal-zrak.

Ako magnetsko polje ulazi iz zraka (sredstvo „1“ s $\mu_1 = \mu_0$) u feromagnetski materijal (sredstvo „2“ s $\mu_2 \gg$) u tada je prema (23.12):

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{tg} \alpha_1 \frac{\mu_2}{\mu_1} \gg \Rightarrow \alpha_2 \approx 90^\circ$$

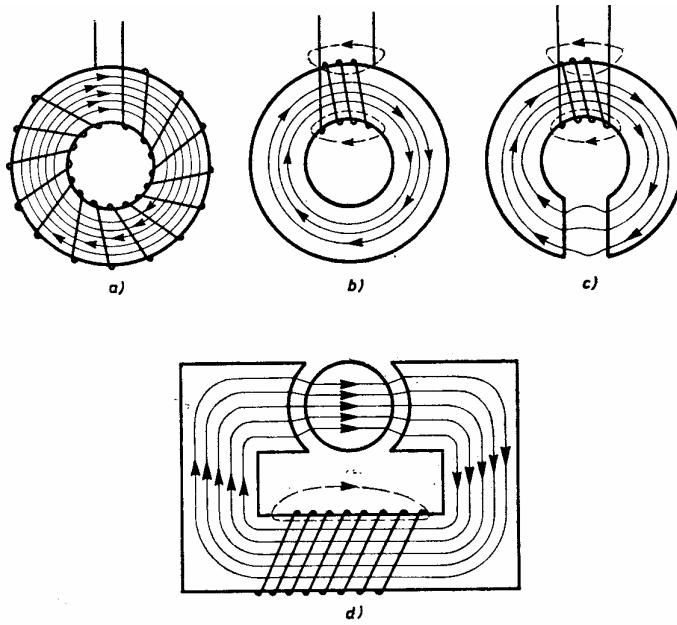
tj. iz zraka silnica ulazi u feromagnetski materijal pod kutem 0° u odnosu na granicu feromagnetski materijal-zrak, odnosno lomi se tangencijalno uzduž granice. Ako magnetsko polje ulazi iz zraka okomito u feromagnetski materijal (pod kutem $\alpha_1 = 0^\circ$) u feromagnetskom materijalu će ostati isti kut ($\alpha_2 = 0^\circ$), tj. silnica se neće otkloniti.

Opisana analiza je načelna, izvedena za slučaj da je granica dvaju materijala beskonačna ravnina, a stvarni prijelaz silnice magnetskog polje kroz granicu feromagnetski materijal – zrak ovisi o obliku granične površine.

24. MAGNETSKI KRUGOVI

Silnice magnetskog polja su zatvorene krivulje koje se zgušnjavaju u feromagnetskom materijalu, tj. feromagnetski materijal vodi magnetsko polje znatno bolje nego drugi materijali. Prostor u kojem je gustoća magnetskih silnica znatno veća nego u preostalom dijelu prostora naziva se *magnetski krug*, prema analogiji s električnim krugom (u kojem je gustoća struje u vodičima neusporedivo veća u odnosu na gustoću struje u okolnoj izolaciji gdje je praktički jednaka nuli). Pristup rješavanju magnetskih polja preko magnetskih krugova omogućava jednostavnu i brzu kvalitativnu analizu, a za kvantitativnu analizu potrebno je uvesti korekcijske faktore ili izvršiti točniji proračun magnetskog polja, npr. primjenom numeričkih metoda.

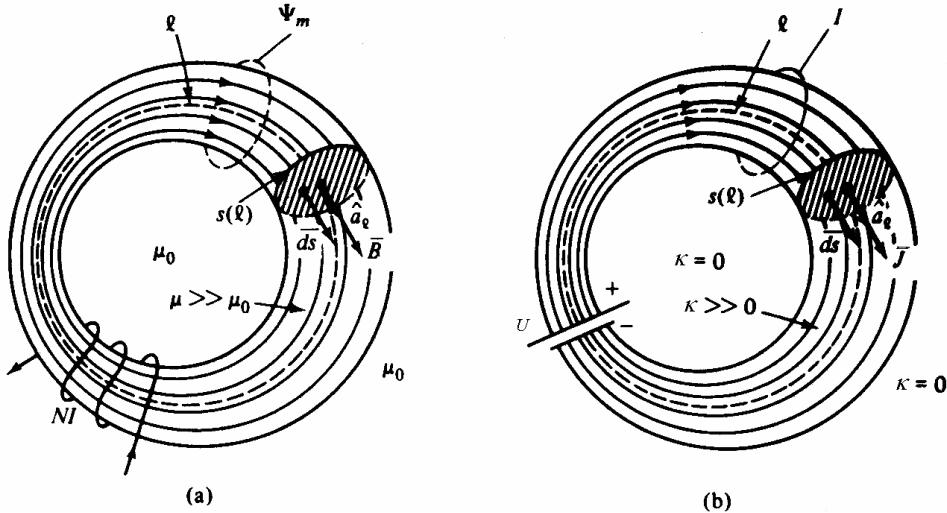
Primjeri magnetskih krugova dani su na slici 24.1. Najjednostavniji primjer magnetskog kruga je prsten od feromagnetskog materijala (npr. željeza) oko kojeg je namotana zavojnica po cijelom njegovom opsegu (slika 24.1.a). Magnetski tok tada gotovo sav prolazi kroz prsten. Ako je prsten samo djelomično omotan zavojnicom (slika 24.1.b) dio magnetskog toka zatvarat će se i kroz okolni zrak (*magnetsko rasipno polje*). Ako u prstenu prorežemo pukotinu (slika 24.1.c) magnetsko polje će proći kroz tu pukotinu i dalje se zatvoriti kroz okolni zrak. Konačno, na slici 24.1.d. prikazan je magnetski krug u elektromotoru ili generatoru. Očito je da je za vođenje magnetskog toka proizvedenog zavojnicom kroz feromagnetski materijal, dakle za realizaciju magnetskog kruga, potrebno magnetizirati magnetski krug vanjskim magnetskim poljem tako da mu permeabilnost bude velika. Ako magnetski krug dođe u zasićenje ($\mu_r \rightarrow \mu_0$) tada će se značajan dio ukupnog magnetskog toka zatvarati kroz okolni zrak.



Slika 24.1. Primjeri magnetskih krugova

Usporedimo dva slična kruga, istih dimenzija, danih na slici 24.2. Na slici 24.2.a prikazan je visokopermeabilni magnetski krug u kojem magnetsko polje stvara zavojnica s N zavoja protjecanim strujom I , a na slici 24.2.b prikazan je vodljivi električki krug s materijalom

vodljivosti κ na kojeg je priključen izvor napona U . U oba kruga magnetsko, odnosno električno polje su zbog različitih presjeka nehomogena.



Slika 24.2. Magnetski (a) i električki (b) krug nejednolikog presjeka

Ako sav magnetski tok u magnetskom krugu prolazi kroz krug, tada će na bilo kojem presjeku S , na kojem je normala \mathbf{n} , magnetski tok biti:

$$\phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \cdot dS \quad (24.1)$$

Analogno, električna struja (strujni tok) u električkom krugu će biti:

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \cdot dS \quad (24.2)$$

Prema tome, analogne su veličine: magnetski tok Φ i električna struja I , te magnetska indukcija (gustoća magnetskog toka) \mathbf{B} i gustoća električne struje (gustoća strujnog toka) \mathbf{J} .

Primjenimo Ampèreov zakon kružnog protjecanja na zatvorenu krivulju c magnetskog kruga:

$$\oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = NI \quad (24.3)$$

Napon u električkom krugu jednak je naponu izvora:

$$\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = U \quad (24.4)$$

Prema tome, analogne su veličine: jakost magnetskog polja \mathbf{H} i jakost električnog polja \mathbf{E} , te NI i napon U . Veličina NI se stoga naziva *magnetomotorna sila* (po analogiji s elektromotornom silom izvora) ili *magnetska pobuda* Θ :

$$\Theta = NI \quad (24.5)$$

Jedinica za magnetsku pobudu θ je (A) ili (Az – amperzavoji).

Omjer magnetske pobude i magnetskog toka naziva se *magnetski otpor* ili *reluktancija*:

$$R_m = \frac{\Theta}{\phi} = \frac{\frac{c}{S} \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}}{\int \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \cdot dS} = \frac{\frac{c}{S} \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}}{\int \mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} \cdot dS} \quad (24.6)$$

po analogiji s električnim otporom (15.6):

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\frac{c}{S} \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}{\int \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \cdot dS} = \frac{\frac{c}{S} \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}{\int \kappa \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \cdot dS} \quad (15.6)$$

Magnetski otpor mjeri se u ($A/Vs = 1/\Omega s = 1/H$). Recipročna vrijednost magnetskog otpora naziva se *magnetska vodljivost* A i mjeri se u ($\Omega s = H$).

Analogne su prema tome još veličine magnetska permeabilnost μ i električna provodnost κ . U tablici 24.1. dane su analogije magnetskog i električnog kruga.

Tablica 24.1. Analogije jednadžbi i veličina magnetskog i električnog kruga

Magnetski krug	Električni krug
Magnetski tok (vektora \mathbf{B}): $\phi_m = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \cdot dS$	Strujni tok (vektora \mathbf{J}): $I = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \cdot dS$
Magnetska indukcija \mathbf{B} : $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$	Gustoća struje \mathbf{J} : $\mathbf{J} = \kappa \mathbf{E}$
Jakost magnetskog polja \mathbf{H}	Jakost električnog polja \mathbf{E}
Magnetska permeabilnost μ	Električna provodnost κ
Magnetska pobuda: $NI = \frac{c}{S} \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$	Napon: $U = \frac{c}{c} \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$
Magnetski otpor:	Električni otpor:
$R_m = \frac{\Theta}{\phi} = \frac{\frac{c}{S} \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}}{\int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \cdot dS} = \frac{\frac{c}{S} \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}}{\int_S \mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} \cdot dS}$	$R = \frac{U}{I} = \frac{\frac{c}{S} \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}{\int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \cdot dS} = \frac{\frac{c}{S} \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}{\int_S \kappa \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \cdot dS}$
Magnetska vodljivost:	Električna vodljivost:
$A = \frac{\phi}{\Theta} = \frac{1}{R_m} = \frac{\frac{1}{S} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \cdot dS}{\frac{c}{S} \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}}$	$G = \frac{I}{U} = \frac{1}{R} = \frac{\frac{1}{S} \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \cdot dS}{\frac{c}{c} \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}$

24.1. Rješavanje magnetskih krugova

U magnetskim krugovima rješavamo dvije vrste zadaća:

- zadana je magnetska indukcija u magnetskom krugu ili njegovom dijelu, a potrebno je odrediti magnetsku pobudu,
- zadana je magnetska pobuda a potrebno je odrediti magnetsku indukciju.

Prva zadaća se relativno lako rješava i njezino rješavanje će biti prikazano na sljedećim primjerima. Druga zadaća je, zbog nelinearnosti magnetskog materijala, složenija i bit će prikazana na primjeru magnetskog kruga sa zračnim rasporom.

Kod rješavanja magnetskih krugova uvodimo slijedeća pojednostavnjena. Ako u magnetskom krugu vrijedi da je magnetsko polje približno homogeno po svim presjecima indukcije B_{sr} , usmjerene kao i normala \mathbf{n} na prosječni presjek S_{sr} , magnetski tok prema (24.1) je:

$$\phi = B_{sr} S_{sr} \quad (24.7)$$

Srednja vrijednost magnetskog polja \mathbf{H}_{sr} usmjerena je kao i element konture $d\mathbf{l}$, pa Ampèreov zakon (24.3) daje:

$$H_{sr} \cdot l_{sr} = NI = \Theta \quad (24.8)$$

gdje je l_{sr} srednja duljina magnetskih silnica.

Magnetski otpor je:

$$R_m = \frac{\Theta}{\phi} = \frac{H_{sr} \cdot l_{sr}}{B_{sr} \cdot S_{sr}} = \frac{1}{\mu} \frac{l_{sr}}{S_{sr}} \quad (24.9)$$

Navedena razmatranja su potpunosti ispunjena kada se radi o magnetskom krugu duljine l , konstantnog presjeka S i konstantne permeabilnosti μ :

$$R_m = \frac{1}{\mu} \frac{l}{S} \quad (24.10)$$

24.1.1.1. Serijski magnetski krug

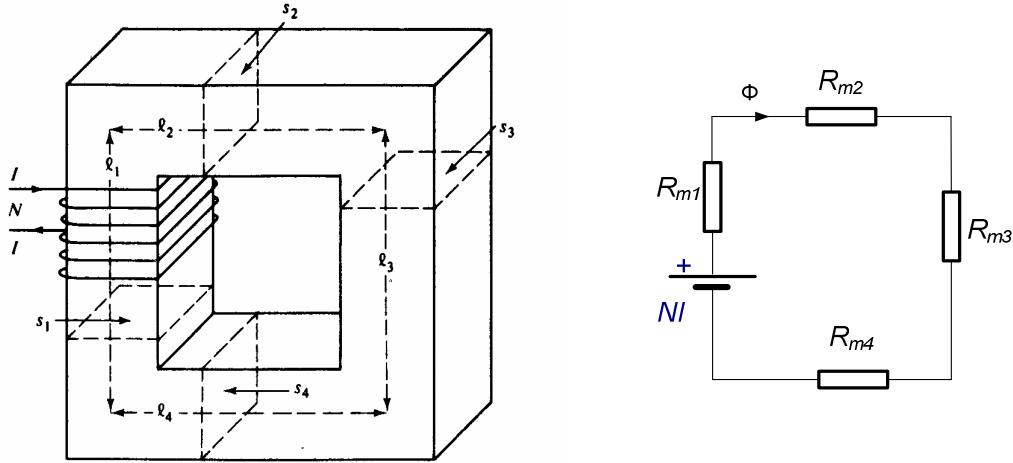
Na slici 24.3.a prikazan je magnetski krug koji se sastoji od 4 dijela duljina l_1, \dots, l_4 s konstantnim poprečnim presjecima S_1, \dots, S_4 . Prepostaviti ćemo da su magnetske indukcije a time i magnetske permeabilnosti po dijelovima konstantne μ_1, \dots, μ_4 .

Magnetski tok prolazi kroz sve dijelove kruga u nizu jednim po jednim dijelom, tj. krug je sastavljen od 4 serijski povezana dijela. Stoga je magnetski tok po svim presjecima isti:

$$\phi = B_1 S_1 = B_2 S_2 = B_3 S_3 = B_4 S_4 \quad (24.11)$$

Neka je zadana magnetska indukcija u jednom dijelu kruga, npr. B_1 . Iz (24.11) izračunaju se magnetske indukcije u preostalim dijelovima kruga B_1, \dots, B_3 . Za magnetske indukcije po dijelovima kruga B_i iz krivulje magnetiziranja materijala odrede se pripadajuće jakosti magnetskih polja H_i . Primjena Ampèreovog zakona (24.3) daje:

$$H_1 \cdot l_1 + H_2 \cdot l_2 + H_3 \cdot l_3 + H_4 \cdot l_4 = NI = \Theta \quad (24.12)$$



Slika 24.3. Serijski magnetski krug

Ukupni magnetski otpor u krugu je:

$$R_m = \frac{H_1 \cdot l_1 + H_2 \cdot l_2 + H_3 \cdot l_3 + H_4 \cdot l_4}{\phi} = \frac{H_1 \cdot l_1}{B_1 \cdot S_1} + \frac{H_2 \cdot l_2}{B_2 \cdot S_2} + \frac{H_3 \cdot l_3}{B_3 \cdot S_3} + \frac{H_4 \cdot l_4}{B_4 \cdot S_4} \quad (24.13)$$

$$R_m = \frac{l_1}{\mu_1 \cdot S_1} + \frac{l_2}{\mu_2 \cdot S_2} + \frac{l_3}{\mu_3 \cdot S_3} + \frac{l_4}{\mu_4 \cdot S_4} = R_{m1} + R_{m2} + R_{m3} + R_{m4}$$

Ukupni magnetski otpor jednak je zbroju magnetskih otpora pojedinih dijelova, analogno kao kod serijskog spoja otpora u električnom krugu (slika 24.3.b).

Ukupna magnetska pobuda iz (24.12) raspodijeli se na 4 dijela, pa se pojedini dijelovi $H_i \cdot l_i$ nazivaju *magnetski naponi* U_m . Relacija (24.12) onda se može pisati:

$$\Theta = U_{m1} + U_{m2} + U_{m3} + U_{m4} = \sum_{i=1}^4 U_{mi} \quad (24.14)$$

Relacija (24.14) prema analogiji s električnim krugovima naziva se *drugi Kirchhoffov zakon za magnetski krug*: magnetska pobuda θ „troši“ se na pokrivanje magnetskih padova napona U_{mi} na serijski povezanim magnetskim otporima R_{mi} .

24.1.1.2. Paralelni magnetski krug

Na slici 24.4.a prikazan je magnetski krug koji se sastoji od 3 dijela duljina l_1, \dots, l_3 s konstantnim poprečnim presjecima S_1, \dots, S_3 . Pretpostaviti ćemo da su magnetske indukcije a time i magnetske permeabilnosti po dijelovima konstantne μ_1, \dots, μ_3 . Magnetska pobuda NI smještena je na srednjem stupu.

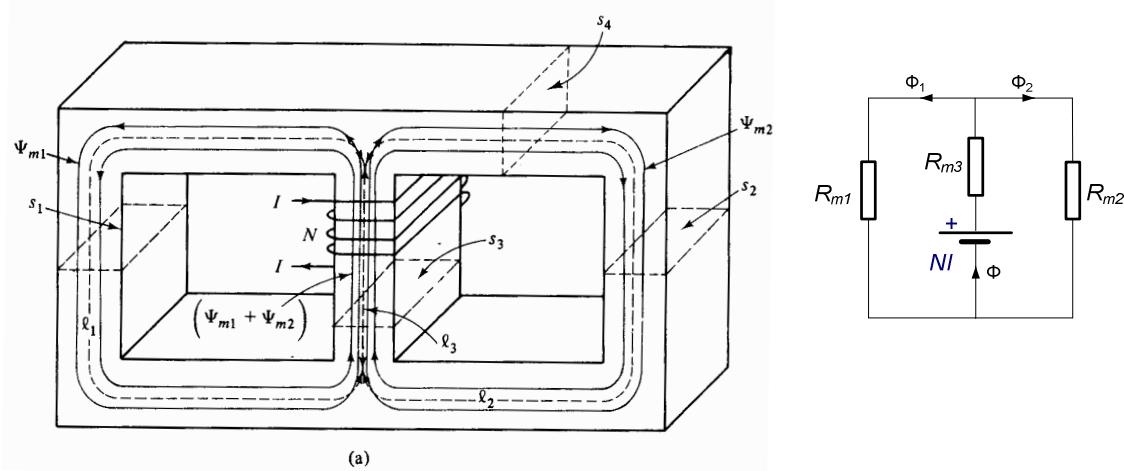
Neka je zadana magnetska indukcija u lijevom stupu B_1 . Za magnetsku indukciju B_1 iz krivulje magnetiziranja materijala odredi se pripadajuća jakost magnetskog polja H_1 . Magnetski tok stvoren magnetskom pobudom je:

$$\phi = B_3 S_3 \quad (24.15)$$

Magnetski tok izlazi iz srednjeg stupa i grana se na lijevi stup Φ_1 i desni stup Φ_2 . Očito je da vrijedi jednakost:

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 \quad (24.16)$$

Relacija (24.16) prema analogiji s električnim krugovima naziva se *prvi Kirchhoffov zakon za magnetski krug*: magnetski tok koji ulazi u točku grananja jednak je zbroju magnetskih tokova koji izlaze iz točke grananja.



Slika 24.4. Paralelni magnetski krug

Magnetski naponi $U_{m1} = H_1 \cdot l_1$ i $U_{m2} = H_2 \cdot l_2$ su jednaki budući su ti dijelovi kruga spojeni paralelno. To je također vidljivo ako se za te dijelove kruga napiše Ampèreov zakon:

$$H_1 \cdot l_1 + H_3 \cdot l_3 = NI = \Theta \quad ; \quad H_2 \cdot l_2 + H_3 \cdot l_3 = NI = \Theta \quad (24.17)$$

Magnetski tokovi Φ_1 i Φ_2 obrnuto su srazmjerni magnetskim otporima:

$$\phi_1 = \frac{U_{m1}}{R_{m1}} \quad ; \quad \phi_2 = \frac{U_{m2}}{R_{m2}} \quad ; \quad \frac{\phi_1}{\phi_2} = \frac{R_{m2}}{R_{m1}} \quad (24.18)$$

analognog granjanju struje na dva paralelna otpora u strujnom krugu. Iz jednakosti magnetskih napona u stupovima „1“ i „2“, od kojih je poznat napon u stupu „1“, izračuna se magnetsko polje u stupu „2“:

$$U_{m1} = H_1 \cdot l_1 = U_{m2} = H_2 \cdot l_2 \quad \Rightarrow \quad H_2 = \frac{H_1 \cdot l_1}{l_2} \quad (24.19)$$

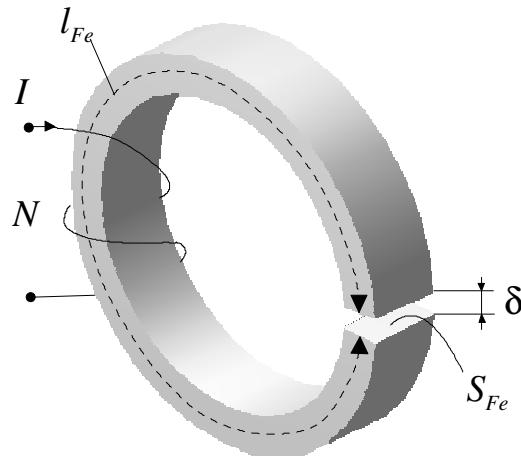
pa se iz krivulje magnetiziranja materijala odredi pripadajuća magnetska indukcija B_2 . Sada se mogu izračunati magnetski tok Φ_2 :

$$\phi_2 = B_2 S_2 \quad (24.20)$$

i ukupni magnetski tok Φ prema (24.16), te magnetska indukcija B_3 prema (24.15). Iz krivulje magnetiziranja materijala odredi se i pripadajuća jakost magnetskog polja H_3 . Konačno se iz (24.17) odredi potrebna magnetska pobuda. Analogni električni krug prikazan je na slici 24.4.b.

24.1.1.3. Magnetski krug sa zračnim rasporom

Na slici 24.5. prikazan je prstenasti magnetski krug sa zračnim rasporom. To je serijski magnetski krug sastavljen od željezne jezgre i zračnog raspora. Neka je srednja duljina magnetskih silnica u željeznoj jezgri l_{Fe} a duljina zračnog raspora δ .



Slika 24.5. Prstenasti magnetski krug sa zračnim rasporom

Prepostavimo da sav magnetski tok iz željezne jezgre prođe kroz zračni raspored: $\Phi_{Fe} = \Phi_\delta$. Ako je širina zračnog raspora mala, magnetski tok će proći preko zračnog raspora približno kroz isti presjek: $S_{Fe} = S_\delta$. Stoga će magnetske indukcije u zračnom rasporu i željeznoj jezgri biti jednake:

$$\phi_{Fe} = \phi_\delta \quad ; \quad B_{Fe} \cdot S_{Fe} = B_\delta \cdot S_\delta \quad \Rightarrow \quad B_{Fe} = B_\delta \quad (24.21)$$

Ako je zadana indukcija u zračnom rasporu $B_\delta = B_{Fe}$, onda se iz krivulje magnetiziranja željeza odredi jakost magnetskog polja u željezu H_{Fe} , a jakost magnetskog polja u zračnom rasporu određena je s:

$$H_\delta = \frac{B_\delta}{\mu_0} \quad ; \quad H_{Fe} = \frac{B_{Fe}}{\mu_0 \cdot \mu_r} = \frac{H_\delta}{\mu_r} \quad (24.22)$$

Primjena Ampèreovog kružnog zakona daje potrebnu magnetsku uzbudu:

$$H_{Fe} \cdot l_{Fe} + H_\delta \cdot \delta = NI = \Theta \quad (24.23)$$

Jakost magnetskog polja u željeznoj jezgri je prema (24.22) puno manja (μ_r puta) od jakosti magnetskog polja u zračnom rasporu, tj. magnetski napon zračnog raspora je μ_r puta veći od magnetskog napona željezne jezgre. To znači da se najveći dio magnetske pobude troši na

uspostavljanje magnetskog toka kroz zračni raspor. Isto objašnjenje slijedi i iz činjenice da je magnetski otpor zračnog raspora puno veći od magnetskog otpora željezne jezgre. Stoga se svi elektrotehnički uređaji s magnetskim krugom sa zračnim rasporom (motori i generatori, elektromagneti,...) izvode s minimalnim zračnim rasporom kako bi bila potrebna što manja magnetska pobuda.

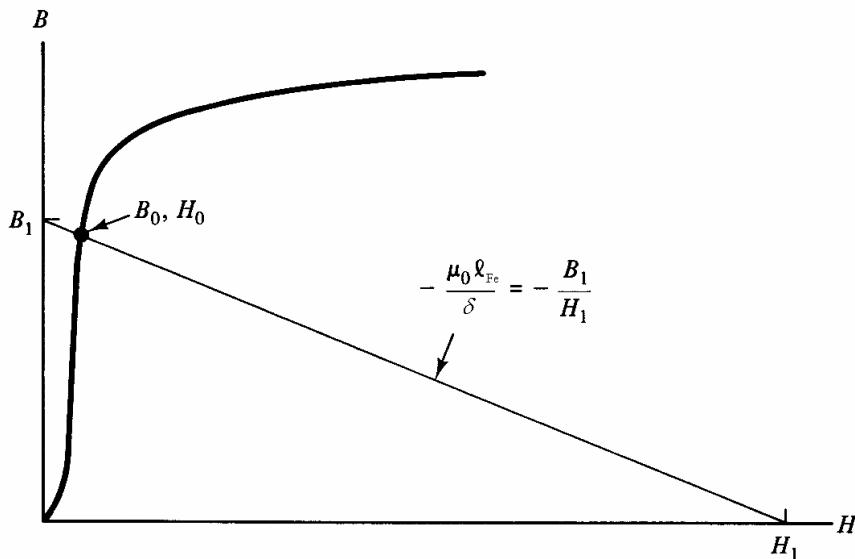
Ako je zadana magnetska pobuda, zbog nelinearnosti željeza nije jednostavno odrediti magnetsku indukciju. Naime, magnetski otpor željeza ovisi o permeabilnosti, tj. o jakosti magnetskog polja koja je nepoznata. Moguće je primjeniti iterativni postupak tako da se pretpostavi neka početna vrijednost permeabilnosti željeza s kojom se izračuna magnetski otpor željezne jezgre. S pomoću ukupnog magnetskog otpora (željezne jezgre i zračnog raspora) iz (24.9) odredi se magnetski tok Φ . Magnetska indukcija odredi se iz (24.21) pa se za pripadajuću magnetsku indukciju u željeznoj jezgri iz krivulje magnetiziranja odredi nova vrijednost permeabilnosti željeza s kojom se cijeli postupak ponavlja dok se ne postigne zanemarivo odstupanje permeabilnosti u dva uzastopna koraka.

Drugi postupak je grafički. Uvrštenjem $H_\delta = B_\delta/\mu_0 = B_{Fe}/\mu_0$ u Ampèreov kružni zakon (24.23) dobije se:

$$H_{Fe} \cdot l_{Fe} + \frac{B_{Fe}}{\mu_0} \cdot \delta = NI \quad (24.24)$$

slijedi:

$$B_{Fe} = \frac{\mu_0}{\delta} (NI - H_{Fe} \cdot l_{Fe}) \quad (24.25)$$



Slika 24.6. Grafički postupak rješavanja magnetskog kruga sa zračnim rasporom uz zadanu magnetsku pobudu

Jednadžba (24.25) je jednadžba pravca koju ucrtamo u karakteristiku magnetiziranja feromagnetskog materijala. Karakteristične točke su:

- ako je feromagnetski materijal s beskonačnom permeabilnošću $\mu_{Fe} \rightarrow \infty$, tada je jakost magnetskog polja u željezu $H_{Fe} = 0$ i sva se magnetska pobuda troši na magnetiziranje zračnog raspora. Magnetska indukcija u željezu prema (24.25) je:

$$B_{Fe} = B_1 = \frac{\mu_0 \cdot NI}{\delta} \quad (24.25.a)$$

- ako je feromagnetski materijal s nultom permeabilnošću $\mu_{Fe} \rightarrow 0$, sva se magnetska pobuda troši na magnetiziranje željezne jezgre. Tada je magnetska indukcija u željezu $B_{Fe} = 0$, a jakost magnetskog polja u željezu prema (24.25) je:

$$H_{Fe} = H_1 = \frac{NI}{l_{Fe}} \quad (24.25.b)$$

Presjecište jednadžbe pravca (24.25) i krivulje magnetiziranja feromagnetskog materijala daje rješenje za magnetsku indukciju i jakost magnetskog polja u željezu (B_0, H_0) prema slici 24.6.

25. VEKTORSKI MAGNETSKI POTENCIJAL

U poglavlju 19. ustanovljeno je da za magnetsko polje vrijedi Gaussov zakon:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (19.2)$$

Kako za bilo koji vektor \mathbf{F} vrijedi vektorski identitet:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) \equiv 0$$

možemo uvesti novo vektorsko polje \mathbf{A} takvo da vrijedi:

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (25.1)$$

čime je zadovoljen Gaussov zakon (19.2). Veličina \mathbf{A} naziva se *vektorski magnetski potencijal* i mjeri se u Wb/m = Vs/m.

U pravocrtnom koordinatnom sustavu (x, y, z) magnetska indukcija \mathbf{B} izražena preko rotacije vektorskog magnetskog potencijala \mathbf{A} je:

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{a}_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \mathbf{a}_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \mathbf{a}_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \quad (25.2)$$

U cilindričnom koordinatnom sustavu (r, α, z) magnetska indukcija \mathbf{B} izražena preko rotacije vektorskog magnetskog potencijala \mathbf{A} je:

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{a}_r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial z} \right) + \mathbf{a}_\alpha \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) + \mathbf{a}_z \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \cdot A_\alpha) - \frac{\partial A_r}{\partial \alpha} \right] \quad (25.3)$$

U sfernom koordinatnom sustavu (r, ϑ, α) magnetska indukcija \mathbf{B} izražena preko rotacije vektorskog magnetskog potencijala \mathbf{A} je:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} = & \mathbf{a}_r \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta \cdot A_\alpha) - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \alpha} \right] + \mathbf{a}_\vartheta \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial A_r}{\partial \alpha} - \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot A_\alpha) \right] + \\ & + \mathbf{a}_\alpha \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \cdot A_\vartheta) - \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta} \right] \end{aligned} \quad (25.4)$$

Kako je magnetska indukcija \mathbf{B} derivacija potencijala prema (25.1) slijedi važno svojstvo vektorskog magnetskog potencijala \mathbf{A} : **vektorski magnetski potencijal je kontinuirana funkcija**. Ukoliko bi potencijal bio diskontinuirana funkcija, na mjestu diskontinuiteta bi onda prema (25.1) imali beskonačan iznos magnetske indukcije, što je fizikalno nemoguće.

Vektorska funkcija jedinstveno je definirana ako su joj propisani rotacija i divergencija. Jednadžbom (25.1) propisana je samo rotacija vektorskog polja \mathbf{A} . To znači da je moguće imati beskonačno mnogo rješenja za vektorski magnetski potencijal \mathbf{A} koja se razlikuju za konstantu, a sva ta rješenja zadovoljavaju relaciju (25.1), tj. daju istu magnetsku indukciju \mathbf{B} . Najjednostavnije je propisati sljedeći dodatni uvjet (*Coulombovo baždarenje*):

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (25.5)$$

čime se osigurava jedinstvenost magnetskog vektorskog potencijala.

Magnetski tok kroz površinu S , na kojem je normala \mathbf{n} prema (18.1) je:

$$\phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \cdot dS \quad (18.1)$$

Ako umjesto magnetske indukcije \mathbf{B} uvrstimo (25.1) i primjenimo Stokesov teorem:

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \cdot dS = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

gdje je c kontura koja obrubljuje površinu S , a $d\mathbf{l}$ je element konture, dobije se:

$$\phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \cdot dS = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \cdot dS = \oint_c \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (25.6)$$

Magnetski tok se može jednostavnije izračunati primjenom relacije (25.6) nego (18.1) pošto se umjesto integracije magnetske indukcije \mathbf{B} po površini S , sprovodi integracija vektorskog magnetskog potencijala \mathbf{A} po konturi površine c . Nadalje, u nekim slučajevima lakše se može definirati kontura c nego površina S koju ta kontura obrubljuje.

25.1. Diferencijalna jednadžba vektorskog magnetskog potencijala

Ampèreov zakon u diferencijalnom obliku za magnetsko polje u materijalu je:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}_s \quad (21.5.a)$$

Uvrstimo li $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu = \operatorname{rot} \mathbf{A}/\mu$ dobijemo:

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \right) = \mathbf{J}_s \quad (25.7)$$

Za linerani, izotropni i homogeni materijal ($\mu = \text{konst.}$), slijedi:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu \cdot \mathbf{J}_s \quad (25.8)$$

Zamjenom dvostrukе rotacije i uz uvažavanje Coulombovog baždarenja (25.5) dobije se:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} = \mu \cdot \mathbf{J}_s \quad ; \quad \Delta \mathbf{A} = -\mu \cdot \mathbf{J}_s \quad (25.9)$$

Diferencijalna jednadžba (25.9) naziva se *Poissonova jednadžba*. Ako u prostoru nema slobodnih struja $\mathbf{J}_s = 0$, tada Poissonova jednadžba (25.9) prelazi u *Laplaceovu jednadžbu*:

$$\Delta \mathbf{A} = 0 \quad (25.10)$$

U pravocrtnom koordinatnom sustavu (x, y, z) Poissonova jednadžba (25.9) je:

$$\Delta \mathbf{A} = \mathbf{a}_x \Delta A_x + \mathbf{a}_y \Delta A_y + \mathbf{a}_z \Delta A_z = -\mu \cdot \mathbf{J}_s \quad (25.11)$$

U cilindričnom koordinatnom sustavu (r, α, z) Poissonova jednadžba (25.9) je:

$$\Delta \mathbf{A} = \mathbf{a}_r \left[\Delta A_r - \frac{1}{r^2} \left(A_r + 2 \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha} \right) \right] + \mathbf{a}_\alpha \left[\Delta A_\alpha - \frac{1}{r^2} \left(A_\alpha - 2 \frac{\partial A_r}{\partial \alpha} \right) \right] + \mathbf{a}_z \Delta A_z = -\mu \cdot \mathbf{J}_s \quad (25.12)$$

U sfernom koordinatnom sustavu (r, ϑ, α) Poissonova jednadžba (25.9) je:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{A} = & \mathbf{a}_r \left[\Delta A_r - \frac{2}{r^2} \left(A_r + \operatorname{ctg} \vartheta \cdot A_\vartheta + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \vartheta} \right) \right] + \\ & + \mathbf{a}_\vartheta \left[\Delta A_\vartheta - \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{\sin^2 \vartheta} A_\vartheta - 2 \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta} + \frac{2 \cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha} \right) \right] + \\ & + \mathbf{a}_\alpha \left[\Delta A_\alpha - \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{\sin^2 \vartheta} A_\alpha - \frac{2}{\sin \vartheta} \frac{\partial A_r}{\partial \alpha} - \frac{2 \cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \alpha} \right) \right] = -\mu \cdot \mathbf{J}_s \end{aligned} \quad (25.13)$$

Odgovarajuće Laplaceove jednadžbe na desnoj strani imaju nulu.

25.2. Integralne jednadžbe vektorskog magnetskog potencijala

Poissonova jednadžba za vektorski magnetski potencijal u pravocrtnom koordinatnom sustavu (25.11) svodi se na tri skalarne diferencijalne jednadžbe po komponentama (x, y, z):

$$\Delta A_x = -\mu \cdot J_x \quad ; \quad \Delta A_y = -\mu \cdot J_y \quad ; \quad \Delta A_z = -\mu \cdot J_z \quad (25.14)$$

gdje su J_x, J_y i J_z komponente struje. Svaka od tih diferencijalnih jednadžbi slična je Poissonovoj jednadžbi za skalarni električni potencijal (9.43):

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho_s}{\epsilon} \quad (9.43)$$

Analogne veličine su A i φ , te μ i $1/\epsilon$. Iz te analogije slijede integralne jednadžbe vektorskog magnetskog potencijala za prostornu struju gustoće \mathbf{J} , plošnu struju gustoće \mathbf{K} i linijsku struju (strujnicu) I , analogne jednadžbama za skalarni električni potencijal (9.19), (9.20) i (9.21).

Jednadžbe vektorskog magnetskog potencijala u točki promatranja \mathbf{r} su:

- za prostornu struju gustoće \mathbf{J} :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot dV}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (25.15)$$

- za plošnu struju gustoće \mathbf{K} :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{S}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (25.16)$$

- za strujnicu I :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu \cdot I}{4\pi} \int_l \frac{d\mathbf{l}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (25.17)$$

Kod primjene izraza (25.15), (25.16) i (25.17) potrebno je voditi računa o tome da je vektor položaja diferencijalne struje \mathbf{r}' i vektor udaljenosti \mathbf{R} potrebno iskazati kao funkcije prostornih koordinata u odgovarajućem koordinatnom sustavu.

Iz integralnih izraza za vektorski magnetski potencijal, evidentno je da je smjer vektorskog magnetskog potencijala određen smjerom struje.

25.3. Slika statičkog magnetskog polja

Sliku statičkog magnetskog polja čine silnice (\mathbf{B} – linije). Silnice određujemo pomoću diferencijalnih jednadžbi slično kao za statičko električno polje (5.14):

$$\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y} = \frac{dz}{B_z} \quad (25.18)$$

U dvodimenzionalnim zadaćama silnice možemo odrediti izravno iz vektorskog magnetskog potencijala. U pravocrtnom koordinatnom sustavu u kojem je zadana struja $\mathbf{J} = a_z J(x,y)$, rješenje za vektorski magnetski potencijal je $\mathbf{A} = a_z A(x,y)$, a magnetska indukcija prema (25.2) ima dvije komponente:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = a_x \frac{\partial A_z(x,y)}{\partial y} - a_y \frac{\partial A_z(x,y)}{\partial x} = a_x B_x + a_y B_y \quad (25.19)$$

Uvrštenjem (25.19) u (25.18) slijedi:

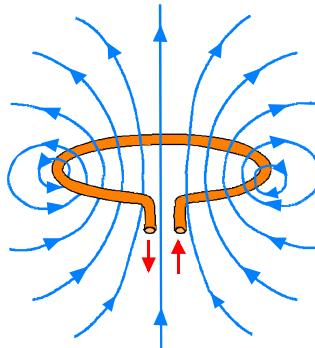
$$\begin{aligned} B_x \cdot dy - B_y \cdot dx &= 0 \quad ; \quad \frac{\partial A_z(x,y)}{\partial y} dy + \frac{\partial A_z(x,y)}{\partial x} dx = 0 \\ \Rightarrow dA(x,y) &= 0 \quad \Rightarrow \quad A(x,y) = \text{konst.} \end{aligned} \quad (25.20)$$

Dakle, u dvodimenzionalnim zadaćama statičkih magnetskih polja linije konstantnog vektorskog magnetskog potencijala identične su silnicama.

26. INDUKTIVITET I MEĐUINDUKTIVITET

26.1. Induktivitet

Eksperimentalna je činjenica da električna struja stvara oko sebe magnetsko polje što je kvantitativno opisano Biot-Savartovim zakonom (20.1). Električna struja uvijek teče u zatvorenim strujnim krugovima, pa kroz takav zatvoren strujni krug prolazi magnetski tok magnetskog polja stvorenog električnom strujom, slika 26.1.



Slika 26.1. Strujna petlja protjecana strujom i magnetski tok kroz petlju

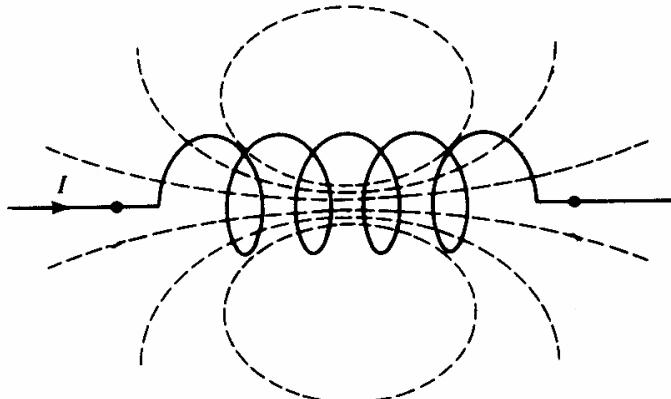
Omjer magnetskog toka i električne struje naziva se *koeficijent samoindukcije, samoinduktivitet odnosno induktivitet L*:

$$L = \frac{\phi}{I} \quad (26.1)$$

Jedinica za induktivitet je henri: $1\text{H} = \text{Vs/A} = \Omega\text{s}$.

Ako je strujna petlja načinjena s N zavoja kroz koje prolazi cijeli magnetski tok Φ prema slici 26.2., svaki zavoj obuhvaća ukupni magnetski tok Φ , pa uvodimo novi pojam *obuhvaćenog (ulančenog) magnetskog toka Ψ* :

$$\Psi = N \cdot \phi \quad (26.2)$$



Slika 26.2. Obuhvaćeni magnetski tok

Induktivitet u tom slučaju definiramo kao omjer obuhvaćenog magnetskog toka Ψ i struje koja je stvorila magnetsko polje:

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{N \cdot \phi}{I} \quad (26.3)$$

Ako s Φ_1 označimo magnetski tok stvoren jednim zavojem, onda je magnetski tok od svih N zavoja N puta veći $\Phi = N \cdot \Phi_1$, a induktivitet je:

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{N \cdot \phi}{I} = \frac{N \cdot N \cdot \phi_1}{I} = N^2 \frac{\phi_1}{I} = N^2 \cdot L_1 \quad (26.4)$$

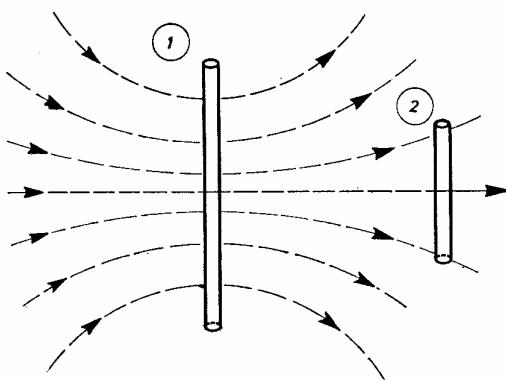
gdje je s L_1 označen induktivitet samo jednog zavoja. Dakle, induktivitet je srazmjeran kvadratu broja zavoja.

Ako računamo magnetski tok koji je obuhvaćen vodičem strujnog kruga, iz dijela magnetskog toka koji prolazi izvan vodiča računamo tzv. *vanjski induktivitet*, dok iz dijela magnetskog toka koji prolazi kroz presjek vodiča izračunavamo tzv. *unutarnji induktivitet*. Ukupni induktivitet zbroj je vanjskog i unutarnjeg induktiviteta.

Magnetski tok ovisi o magnetskoj indukciji \mathbf{B} koja je povezana s jakošću magnetskog polja \mathbf{H} preko permeabilnosti μ . Jakost magnetskog polja \mathbf{H} je prema Biot-Savartovom zakonu povezana sa strujom I . Prema tome induktivitet ovisi o permeabilnosti μ pa je za linearne materijale ($\mu = \text{konst.}$) neovisan o jakosti magnetskog polja, odnosno struji i određen je samo konstantnom permeabilnošću i geometrijskim karakteristikama strujnog kruga. Za nelinearne (feromagnetske) materijale zbog $\mu = \mu(H)$ induktivitet ovisi o jakosti magnetskog polja, tj. o struji i nelinearna je veličina.

26.2. Međuniduktivitet

Ako imamo dva strujna kruga koja su blizu jedan drugoga, tada će magnetski tok proizveden strujom I_1 u strujnom krugu „1“ u cijelosti ili djelomično prolaziti kroz strujni krug „2“ i biti njime obuhvaćen, i obratno (slika 26.3).



Slika 26.3. Magnetski tok dva bliska strujna kruga

Ako ukupni magnetski tok stvoren krugom „1“ označimo s Φ_1 , samo dio tog magnetskog toka Φ_{21} prolazit će i kroz krug „2“:

$$\phi_{21} = k_1 \cdot \phi_1 \quad ; \quad k_1 \leq 1 \quad (26.5)$$

Omjer magnetskog toka obuhvaćenog krugom „2“ Φ_{21} i struje I_1 strujnog kruga „1“ koja je proizvela taj magnetski tok naziva se *koeficijent međuindukcije* ili *međuinduktivitet* M_{21} između krugova „1“ i „2“:

$$M_{21} = \frac{\phi_{21}}{I_1} \quad (26.6)$$

Ako je petlja strujnog kruga „1“ načinjena s N_1 zavoja tada će njezin ukupni magnetski tok Φ_{1u} kao i dio tog toka koji prolazi kroz petlju „2“ Φ_{21u} biti N_1 puta veći:

$$\phi_{1u} = N_1 \cdot \phi_1 \quad ; \quad \phi_{21u} = N_1 \cdot \phi_{21} = k_1 \cdot N_1 \cdot \phi_1 = k_1 \cdot \phi_{1u} \quad (26.7)$$

Ako je petlja strujnog kruga „2“ načinjena s N_2 zavoja tada će ukupni magnetski tok kojeg ona obuhvaća Ψ_{21u} biti N_2 puta veći:

$$\Psi_{21u} = N_2 \cdot \phi_{21u} = N_2 \cdot N_1 \cdot \phi_{21} \quad (26.8)$$

Međuinduktivitet je onda:

$$M_{21} = \frac{\Psi_{21u}}{I_1} = \frac{N_2 \cdot N_1 \cdot \phi_{21}}{I_1} \quad (26.9)$$

Analogno, vrijedi za međuinduktivitet između krugova „2“ i „1“:

$$M_{12} = \frac{\phi_{12}}{I_2} \quad ; \quad \phi_{12} = k_2 \cdot \phi_2 \quad ; \quad k_2 \leq 1 \quad (26.10)$$

odnosno za petlje strujnih krugova s N_1 i N_2 zavoja:

$$\phi_{2u} = N_2 \cdot \phi_2 \quad ; \quad \phi_{12u} = N_2 \cdot \phi_{12} = k_2 \cdot N_2 \cdot \phi_2 = k_2 \cdot \phi_{2u} \quad (26.11)$$

$$\Psi_{12u} = N_1 \cdot \phi_{12u} = N_1 \cdot N_2 \cdot \phi_{12} \quad (26.12)$$

$$M_{12} = \frac{\Psi_{12u}}{I_2} = \frac{N_1 \cdot N_2 \cdot \phi_{12}}{I_2} \quad (26.13)$$

Međuinduktiviteti M_{12} i M_{21} su jednaki, jer je svejedno kojem krugu pridijelimo indeks „1“ a kojem indeks „2“.

Međuinduktivite možemo izraziti preko induktiviteta L_1 i L_2 :

$$M_{12} = \frac{\psi_{12u}}{I_2} = \frac{N_1 \cdot N_2 \cdot \phi_{12}}{I_2} = \frac{N_1 \cdot N_2 \cdot k_2 \cdot \phi_2}{I_2} = N_1 \cdot k_2 \frac{N_2 \cdot \phi_2}{I_2} = k_2 \cdot N_1 \frac{L_2}{N_2} \quad (26.14)$$

$$M_{21} = \frac{\psi_{21u}}{I_1} = \frac{N_2 \cdot N_1 \cdot \phi_{21}}{I_1} = \frac{N_2 \cdot N_1 \cdot k_1 \cdot \phi_1}{I_1} = N_2 \cdot k_1 \frac{N_1 \cdot \phi_1}{I_1} = k_1 \cdot N_2 \frac{L_1}{N_1} \quad (26.15)$$

jer su induktiviteti krugova „1“ i „2“:

$$L_1 = \frac{\psi_{1u}}{I_1} = \frac{N_1 \cdot \phi_{1u}}{I_1} = \frac{N_1 \cdot N_1 \cdot \phi_1}{I_1} \quad ; \quad L_2 = \frac{\psi_{2u}}{I_2} = \frac{N_2 \cdot \phi_{2u}}{I_2} = \frac{N_2 \cdot N_2 \cdot \phi_2}{I_2} \quad (26.16)$$

Izmnožimo li (26.14) i (26.15) dobijemo:

$$M_{12} \cdot M_{21} = M^2 = k_1 \cdot k_2 \cdot L_1 L_2 = k^2 L_1 \cdot L_2$$

odnosno:

$$M = k \sqrt{L_1 L_2} \leq \sqrt{L_1 L_2} \quad (26.17)$$

Koeficijent k naziva se *koeficijent magnetske sprege* i uvijek je ≤ 1 . Ako su strujni krugovi idealno magnetski spregnuti, tada sav magnetski tok proizведен jednim krugom prolazi i kroz drugi krug ($k_1 = k_2 = 1$) i koeficijent magnetske sprege je $k = 1$. Međusobnim udaljavanjem krugova, sve manji dio magnetskog toka proizведенog jednim krugom prolazi kroz drugi krug i koeficijent magnetske sprege se smanjuje.

Za linearne materijale međuinduktivitet je ovisan o permeabilnosti materijala i geometrijskim karakteristikama strujnih krugova. Za nelinearne (feromagnetske) materijale zbog $\mu = \mu(H)$ međuinduktivitet ovisi o magnetskom polju, tj. o struci i nelinearna je veličina. Jedinica za međuinduktivitet je henri kao i za induktivitet.

Ako magnetsko polje stvara strujnica „1“ konture l_1 , protjecana strujom I_1 , njezin vektorski magnetski potencijal prema (25.17) je:

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{r}) = \frac{\mu \cdot I_1}{4\pi} \oint_{l_1} \frac{d\mathbf{l}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (26.18)$$

Obuhvaćeni magnetski tok strujnicom „2“ konture l_2 prema (25.6) je:

$$\psi_{21} = \oint_{l_2} \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{l}_2 = \frac{\mu \cdot I_1}{4\pi} \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (26.19)$$

Međuinduktivitet je:

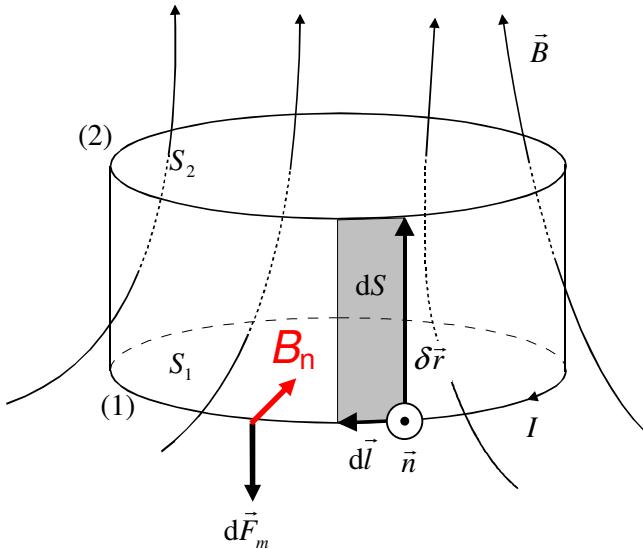
$$M_{21} = M = \frac{\psi_{21}}{I_1} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (26.20)$$

Iz (26.20) uočavamo da je međuinduktivitet dvaju međusobno okomitih dijelova strujnica, zbog $dL_1 \cdot dL_2 = 0$, jednak nuli.

27. ENERGIJA STATIČKOG MAGNETSKOG POLJA

27.1. Energija strujnice u statičkom magnetskom polju

Analizirat ćemo energetske odnose pri pomaku strujne petlje (strujnice), protjecane stalnom strujom I , u magnetskom polju indukcije \vec{B} , iz položaja „1“ u položaj „2“ za diferencijalni pomak $\delta\vec{r}$ prema slici 27.1.



Slika 27.1. Pomak strujne petlje u magnetskom polju

Na diferencijalni dio strujnice $d\vec{l}$ djeluje magnetska sila koja je prema (17.5):

$$d\vec{F}_m = I(d\vec{l} \times \vec{B}) \quad (27.1)$$

Aksijalnu silu, suprotnu od smjera pomaka, stvara komponenta magnetske indukcije B_n okomita na struju. Stoga treba primjeniti vanjsku silu $d\vec{F}_v$ koja mora svladati magnetsku silu, tj. mora joj biti jednaka po iznosu i suprotnog smjera: $d\vec{F}_v = -d\vec{F}_m$. Diferencijalni rad kojeg obavi vanjska sila $d\vec{F}_v$ pri pomaku strujnice za $\delta\vec{r}$ pretvor se u povećanje energije strujnice:

$$\delta W = d\vec{F}_v \cdot \delta\vec{r} = -d\vec{F}_m \cdot \delta\vec{r} = -I(d\vec{l} \times \vec{B}) \cdot \delta\vec{r} \quad (27.2)$$

Primjenom vektorskog identiteta za mješoviti produkt vektora:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

relacija (27.2) prelazi u:

$$\delta W = -I \cdot \vec{B} (\delta\vec{r} \times d\vec{l}) = -I \cdot \vec{B} \cdot \mathbf{n} \cdot dS ; \quad \delta\vec{r} \times d\vec{l} = \mathbf{n} \cdot dS \quad (27.3)$$

gdje je dS šrafirana površina koju pri pomaku za $\delta\vec{r}$ opiše diferencijalni dio strujnice $d\vec{l}$, a \mathbf{n} je normalna na tu površinu.

Pri pomaku strujnice iz položaja „1“ u položaj „2“ strujnica opiše valjak baza S_1 i S_2 , a kroz diferencijalnu površinu plašta tog valjka dS uđe diferencijalni magnetski tok:

$$\delta\phi_{pl} = \mathbf{B}(-\mathbf{n})dS \quad (27.4)$$

pa je diferencijalno povećanje energije:

$$\delta W = -I \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \cdot dS = I \cdot \delta\phi_{pl} \quad (27.5)$$

odnosno, ukupno povećanje energije cijele strujnice pri pomaku iz položaja „1“ u položaj „2“ je:

$$dW = I \cdot d\phi_{pl} \quad (27.6)$$

gdje je s $d\Phi_{pl}$ označen ukupni magnetski tok kroz plašt, kojeg možemo izraziti kao:

$$d\phi_{pl} = \phi_2 - \phi_1 \quad (27.7)$$

gdje su s Φ_1 i Φ_2 označeni magnetski tokovi kroz strujnicu u položajima „1“ i „2“.

Ako strujnicu donesemo iz prostora u kojem nije bilo polja ($\Phi_1 = 0$) u magnetsko polje u položaj „2“ u kojem kroz strujnicu prolazi magnetski tok Φ_2 bit će $\Phi_{pl} = \Phi_2$ a ukupna energija koju će strujnica dobiti unošenjem u magnetsko polje bit će:

$$W = I \cdot \phi_2 = I \cdot \phi \quad (27.8)$$

gdje je s ϕ označen magnetski tok kroz strujnicu koja je donešena u magnetsko polje. Naglasimo da je u navedenoj analizi struja strujnice I konstantna.

Izraz (27.8) predstavlja magnetsku energiju strujnice u magnetskom polju, odnosno energiju interakcije strujnice i vanjskog magnetskog polja. U izrazu nije sadržana vlastita energija same strujnice.

27.2. Magnetska energija sustava strujnica

Magnetsko polje u kojem pomičemo jednu strujnicu može biti stvoreno nekom drugom strujnicom. Neka se u magnetsko polje strujnice „1“, stvoreno njezinom strujom I_1 , a koju držimo fiksiranom, dovodi strujnica „2“ protjecana strujom I_2 . Da bi se takav pomak ostvario potrebno je utrošiti rad koji se manifestira u povećanju magnetske energije strujnice „2“ iznosa:

$$W = \phi_{12} \cdot I_2 \quad (27.9)$$

gdje je s ϕ_{12} označen magnetski tok stvoren strujnicom I_1 , a obuhvaćen strujnicom I_2 .

Jasno je da bi istu energiju trebalo utrošiti i da smo prvo držali fiksiranom strujnicu „2“ a u njeno polje doveli strujnicu „1“, što iskazujemo relacijom:

$$W = \phi_{21} \cdot I_1 \quad (27.10)$$

gdje je s Φ_{21} označen magnetski tok stvoren strujnicom I_2 , a obuhvaćen strujnicom I_1 .

Ako (27.9) i (27.10) zbrojimo i podijelimo s dva dobije se ukupna energija W potrebna da se formira sustav dviju strujnica:

$$W = \frac{1}{2}(\phi_{12} \cdot I_2 + \phi_{21} \cdot I_1) \quad (27.11)$$

Uočimo da u izrazu (27.11) nema članova energije $\Phi_{11} \cdot I_1$ i $\Phi_{22} \cdot I_2$ koji su produkti jedne struje i vlastitog magnetskog toka stvorenog tom strujom i obuhvaćenog tom strujom. Taj magnetski tok je beskonačan, pa su i energije beskonačne. Ovi članovi energije nazivaju se *vlastite energije* strujnica i predstavljaju energiju potrebnu da se formira strujnica. Energija potrebna da se formira strujnica (struja stisnuta u geometrijsku crtu presjeka nula) je beskonačna. Dakle, u izrazu (27.11) za energiju potrebnu za stvaranje sustava strujnica nije sadržana i vlastita energija potrebna da se izgrade strujnice I_1 i I_2 .

Za skupinu od n strujnica, možemo pisati:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i \cdot \sum_{j=1}^n \phi_{ji} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i \cdot \phi_i \quad (27.12)$$

gdje je ϕ_i magnetski tok kojeg obuhvaća i -ta strujnica I_i a stvoren je od svih ostalih strujnica, osim strujnice I_i . Relacija (27.12) zbog superpozicije primjenjene u izračunavanju ukupnog obuhvaćenog magnetskog toka valjana je za strujnice koje se nalaze u linearном sredstvu.

27.3. Magnetska energija prostorno raspodijeljene struje

Ako prostorom kroz n vodiča teku struje gustoće J_i , ukupni obuhvaćeni magnetski tok kroz i -ti vodič je:

$$\phi_i = \sum_{j=1}^n \oint_{l_i} \mathbf{A}_j \cdot d\mathbf{l}_j \quad (27.13)$$

gdje je l_i kontura i -tog vodiča, a \mathbf{A}_j vektorski magnetski potencijal stvoren j -tim vodičem.

Struja kroz i -ti vodič je:

$$I_i = \int_{S_i} \mathbf{J}_i \cdot \mathbf{n}_i \cdot dS_i \quad (27.14)$$

gdje su S_i i \mathbf{n}_i površina presjeka i normala na površinu i -tog vodiča.

Ukupna magnetska energija prema (27.12) je:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i \cdot \phi_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{S_i} \mathbf{J}_i \cdot \mathbf{n}_i \cdot d\mathbf{S}_i \left(\sum_{j=1}^n \oint_{l_j} \mathbf{A}_j \cdot d\mathbf{l}_j \right) \quad (27.15)$$

Vrijedi:

$$\mathbf{n}_i \cdot d\mathbf{l}_i = dl_i \quad ; \quad dS_i \cdot dl_i = dV_i$$

jer su \mathbf{n}_i i \mathbf{l}_i kolinearni vektori, a dV_i je diferencijalni volumen i -tog vodiča. Ako umjesto diskretnih vodiča prijeđemo na cijeli prostor u kojima se ti vodiči nalaze, sumacija po vodičima iz (27.15) zamjenjuje se integracijom po prostoru pa (27.15) prelazi u:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} \cdot dV \quad (27.16)$$

gdje je \mathbf{A} ukupni vektorski magnetski potencijal kojeg na mjestu diferencijalnog volumena dV stvaraju sve struje u prostoru. Integracija se sprovodi po cijelom prostoru V kojim teku zatvorene struje.

Ako je zadana kontinuirana raspodjela struje \mathbf{J} , onda će i vektorski magnetski potencijal biti kontinuirana funkcija. Stoga je u izrazu (27.16) sadržana ukupna energija magnetskog polja, uključujući i vlastitu energiju. U tome se (27.16) razlikuje od izraza (27.12) za energiju sustava strujnica.

27.4. Magnetska energija prikazana preko veličina polja

Primjenimo vektorskiju operaciju divergencije na vektorski produkt $\mathbf{H} \times \mathbf{A}$:

$$\operatorname{div}(\mathbf{H} \times \mathbf{A}) = \nabla \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \quad (27.17)$$

jer je prema Ampèreovom zakonu (21.5.a) rot $\mathbf{H} = \mathbf{J}$ i prema (25.1) rot $\mathbf{A} = \mathbf{B}$. Iz (27.17) slijedi:

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} + \nabla \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{A}) \quad (27.18)$$

Uvrštenjem u (27.16) dobije se:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} \cdot dV = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \cdot dV + \frac{1}{2} \int_V \nabla \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{A}) \cdot dV$$

Primjenimo li Gaussov teorem:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} \cdot dV = \oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \cdot dS$$

dobijemo:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \cdot dV + \frac{1}{2} \oint_S (\mathbf{H} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} \cdot dS \quad (27.19)$$

Ako dio prostora u kojem postoji magnetsko polje ograničimo volumenom V , onda prvi integral iz (27.19) predstavlja energiju magnetskog polja sadržanu u volumenu V , a drugi integral predstavlja doprinos energiji magnetskog polja u prostoru izvan volumena V .

Uzmimo sada da volumen V uključuje cijeli prostor; tada površina S postaje zatvorena površina u beskonačnosti. Vektorski magnetski potencijal \mathbf{A} će s porastom udaljenosti r opadati s $1/r$, vektor jakosti magnetskog polja \mathbf{H} opadat će s $1/r^2$, pa će produkt $\mathbf{H} \cdot \mathbf{A}$ opadati s $1/r^3$, a pri tome će površina S rasti s r^2 . Prema tome, kada $r \rightarrow \infty$, onda će podintegralna funkcija u drugom integralu težiti k nuli. U tom slučaju (27.19) prelazi u:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \cdot dV \quad (27.20)$$

gdje volumen V obuhvaća cijeli prostor do u beskonačnost (odnosno cijeli prostor u kojem postoji magnetsko polje).

Iz relacije (27.16) slijedi da je energija magnetskog polja sadržana u strujama, dok iz relacije (27.19) slijedi da je energija sadržana u magnetskom polju. Naime, u volumenu V ne moraju uopće postojati struje koje stvaraju magnetsko polje; one mogu biti smještene izvan volumena V i stvarati magnetsko polje izvan i unutar volumena V . Prema (27.19) slijedi da i u volumenu V , u kojem nema struja, postoji energija magnetskog polja, sadržana u polju.

Ako je magnetski materijal linearan, homogen i izotropan, vrijedi $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, odnosno $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$ pa se (27.20) može pisati i kao:

$$W = \frac{1}{2} \mu \int_V H^2 dV = \frac{1}{2\mu} \int_V B^2 dV \quad (27.21)$$

Ako se magnetsko polje izgrađuje u vremenu tako da se struja koja ga stvara postupno povećava od ništice do konačne vrijednosti I , tada magnetska indukcija postupno raste od ništice do konačne vrijednosti B . Kod neke struje i povećanje obuhvaćenog magnetskog toka za $d\Phi$ dat će prirast magnetske energije koji prema (27.8) iznosi:

$$dW = i \cdot d\phi \quad (27.22)$$

kako je:

$$d\phi = \int_S \mathbf{dB} \cdot \mathbf{n} \cdot dS \quad ; \quad i = \oint_l \mathbf{H} \cdot dl \quad ; \quad \mathbf{n} \cdot dl = dl \quad ; \quad dS \cdot dl = dV \quad (27.23)$$

prirast magnetske energije je:

$$dW = \int_V \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} \cdot dV \quad (27.24)$$

Ukupna magnetska energija je:

$$W = \int_V \left(\int_{B=0}^B \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} \right) dV \quad (27.25)$$

Iz (27.25) slijedi da je gustoća energije magnetskog polja:

$$w = \int_{B=0}^B \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} \quad (27.26)$$

Za linearan, homogen i izotropan magnetski materijal ($\mu = \text{konst.}$), gustoća magnetske energije je:

$$w = \int_{B=0}^B \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} = \frac{1}{\mu} \int_{B=0}^B B \cdot dB = \frac{1}{2\mu} B^2 = \frac{1}{2} \mu \cdot H^2 \quad (\text{J/m}^3) \quad (27.27)$$

i ukupna magnetska energija je dana s (27.21). Za nelinearne magnetske materijale potrebno je po dijelovima prostora dV , u kojima su različite vrijednosti magnetske indukcije \mathbf{B} , računati gustoću magnetske energije w prema (27.26) i ukupnu energiju računati integrirajući po prostoru prema (27.25).

Ako linearni materijal magnetiziramo tako da povećavamo indukciju od ništice do iznosa B , $dB > 0$, pa je gustoća magnetske energije:

$$w = \int_{B=0}^B \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} > 0$$

tj. izvor predaje energiju magnetskom polju.

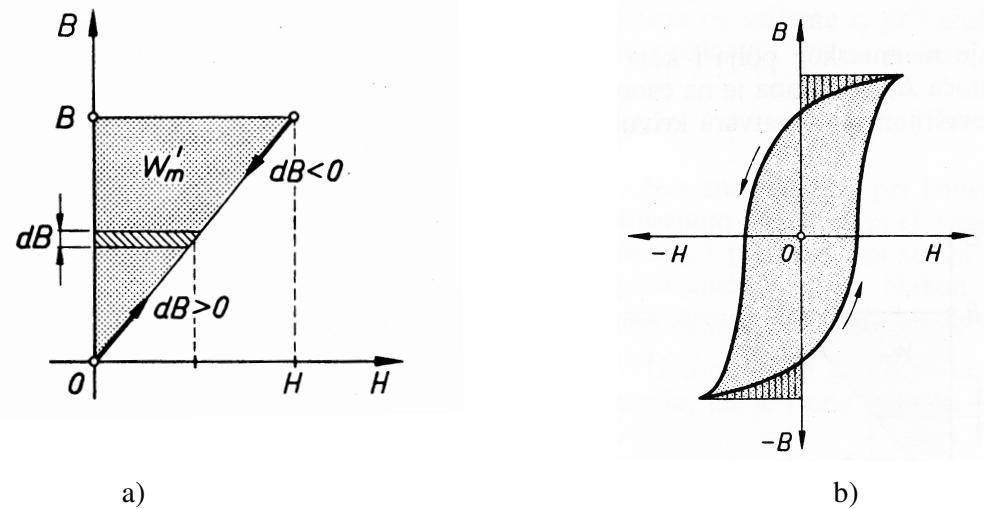
Ako linearni materijal onda demagnetiziramo tako da smanjujemo indukciju od iznosa B do ništice, $dB < 0$, pa je gustoća magnetske energije:

$$w = \int_{B=0}^B \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} < 0$$

tj. magnetsko polje vraća energiju izvoru. Obje energije su jednake, što znači da se energija uložena u izgradnju magnetskog polja u cijelosti vratila pri njegovoj razgradnji, slika 27.2.a).

Kod feromagnetskih materijala to nije slučaj. Pri magnetiziranju materijala, tj. povećanju magnetske indukcije od ništice do iznosa B , izvor daje energiju magnetskom polju koja odgovara zasjenjenoj površini na slici 27.2.b). Pri razmagnetiziranju magnetsko polje vraća energiju izvoru koja odgovara vertikalno šrafiranoj površini na slici 27.2.b). Dalnjim magnetiziranjem u suprotnom smjeru, pa demagnetiziranjem, opisuje se petlja histereze, a razlika u predanoj i vraćenoj energiji srazmjerna je površini petlje histereze. Taj gubitak energije koji nastaje pri izmjeničnom magnetiziranju feromagnetskog materijala pretvara se u toplinu, a posljedica je trenja domena u feromagnetskom materijalu pri magnetiziranju i

razmagnetiziranju. Za čelične magnetske limove koji se upotrebljavaju u elektrotehnici ti gubici iznose od 1 do 10 W/kg pri indukciji 1 T.



Slika 27.2. Izmjenično magnetiziranje a) linearne i b) feromagnetskog materijala

27.5. Magnetska energija strujnog kruga

Obuhvaćeni magnetski tok strujnog kruga prema (26.1) može se izraziti preko induktiviteta:

$$\phi = L \cdot I \quad (27.28)$$

Magnetska energija strujnog kruga prema (27.12) je onda:

$$W = \frac{1}{2} I \cdot \phi = \frac{1}{2} L \cdot I^2 = \frac{1}{2L} \phi^2 \quad (27.29)$$

ovisno o tome je li zadana struja I ili magnetski tok Φ strujnog kruga.

27.6. Magnetska energija dva strujna kruga

Ako imamo dva bliska strujna kruga induktiviteta L_1 i L_2 , protjecana stalnim strujama I_1 i I_2 , između kojih postoji međuinduktivna sprega iskazana preko međuinduktiviteta M , ukupni magnetski tokovi kroz te strujne krugove su:

$$\phi_1 = L_1 I_1 \pm M I_2 \quad ; \quad \phi_2 = L_2 I_2 \pm M I_1 \quad (27.30)$$

U (27.30) prvi članovi predstavljaju magnetske tokove stvorene vlastitim strujama, a drugi članovi magnetske tokove proizvedene strujom drugog strujnog kruga. Predznak „+“ je za tzv. *suglasnu vezu* u kojoj se ti magnetski tokovi podudaraju, a predznak „–“ je za tzv. *nesuglasnu vezu* u kojoj se ti magnetski tokovi ne podudaraju.

Magnetska energija je onda prema (27.12):

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} I_1 \cdot \phi_1 + \frac{1}{2} I_2 \cdot \phi_2 = \frac{1}{2} I_1 (L_1 I_1 \pm M I_2) + \frac{1}{2} I_2 (L_2 I_2 \pm M I_1) \\ W &= \frac{1}{2} L_1 \cdot I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 \cdot I_2^2 \pm M I_1 I_2 \end{aligned} \quad (27.31)$$

Prvi i drugi član u (27.31) predstavljaju vlastite magnetske energije strujnih krugova, a treći član magnetsku energiju njihove interakcije, koja može povećavati ili smanjivati ukupnu magnetsku energiju sustava, ovisno o tome jesu li magnetski tokovi podudarni ili ne. Međusobnim udaljavanjem strujnih krugova slab magnetska sprega među njima, što se očituje i kroz smanjenje međuinduktiviteta M , čime se ujedno smanjuje i energija interakcije. Ako krugove dovoljno udaljimo, tako da ne postoji magnetska sprega između njih ($M \approx 0$) nestaje energija interakcije i preostaju samo njihove vlastite energije.

Relacija (27.31) može se napisati i preko magnetskih tokova:

$$W = \frac{1}{2} I_1 \cdot \phi_1 + \frac{1}{2} I_2 \cdot \phi_2 = \frac{1}{2} I_1 (\phi_{11} \pm \phi_{12}) + \frac{1}{2} I_2 (\phi_{22} \pm \phi_{21})$$

gdje Φ_{11} i Φ_{22} označavaju vlastite magnetske tokove.

Kako vrijedi:

$$I_1 = \frac{\phi_{11}}{L_1} \quad ; \quad I_1 = \frac{\phi_{21}}{M} \quad ; \quad I_2 = \frac{\phi_{22}}{L_2} \quad ; \quad I_2 = \frac{\phi_{12}}{M}$$

slijedi izraz za magnetsku energiju:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \frac{\phi_{11}^2}{L_1} \pm \frac{1}{2} \frac{\phi_{21}}{M} \phi_{12} + \frac{1}{2} \frac{\phi_{22}^2}{L_2} \pm \frac{1}{2} \frac{\phi_{12}}{M} \phi_{21} \\ W &= \frac{1}{2} \frac{\phi_{11}^2}{L_1} + \frac{1}{2} \frac{\phi_{22}^2}{L_2} \pm \frac{\phi_{12} \cdot \phi_{21}}{M} \end{aligned} \quad (27.32)$$

28. SILE U STATIČKOM MAGNETSKOM POLJU

28.1. Sila na vodič protjecan strujom

U poglavljiju 17. određena je sila na strujnicu duljine l , protjecanu strujom I koja se nalazi u magnetskom polju indukcije \mathbf{B} :

$$\mathbf{F} = \int_l I(\mathbf{dl} \times \mathbf{B}) \quad (17.7)$$

Prema (3.20) veza između strujnice i i prostorno raspodijeljene struje gustoće \mathbf{J} je:

$$i \cdot \mathbf{dl} = \mathbf{J} \cdot dV \quad (3.20)$$

Iz toga slijedi relacija za silu na vodič kojim teče prostorno raspodijeljena struja gustoće \mathbf{J} , a koji se nalazi u magnetskom polju indukcije \mathbf{B} :

$$\mathbf{F} = \int_V (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) dV \quad (28.1)$$

28.2. Određivanje sila pomoću energije

Određivanje sila pomoću energije pohranjene u statičkom magnetskom polju temelji se na zakonu o očuvanju energije i načelu virtualnog pomaka poznatog iz mehanike. Na taj način možemo odrediti rezultantnu силу ali nam ta metoda ne daje uvid u prostorni raspored sila.

Analizirajmo sustav statičkog magnetskog polja kojeg stvara N vodiča protjecanih strujama. Zamislimo da je magnetska sila koja djeluje na jedan vodič iz tog sustava pomaknula taj vodič za virtualno mali pomak δs u smjeru osi s . Ako je s -komponenta sile na taj vodič F_s , ta je sila izvršila rad:

$$\delta A_m = F_s \cdot \delta s \quad (28.2)$$

pa je s -komponenta sile:

$$F_s = \frac{\delta A_m}{\delta s} \quad (28.3)$$

Rad magnetske sile δA_m možemo izraziti iz promjene energije pohranjene u statičkom magnetskom polju. Razlikujemo dva slučaja:

- a) *Magnetski vektorski potencijali u sustavu vodiča ostaju konstantni (izolirani sustav).* To znači da smo vodiče spojili na izvor, doveli u supravodljivo stanje i otspojili od izvora, pa se onda magnetski tokovi ne mijenjaju. Svi pomaci u sustavu (rad) u tom slučaju mogu biti izvršeni samo na račun energije pohranjene u statičkom magnetskom polju, pa vrijedi:

$$\delta A_m = -\delta W_m \quad (28.4)$$

Sila je onda:

$$F_s = -\frac{\delta W_m}{\delta s} \quad (28.5)$$

- b) *Gustoće struja \mathbf{J} u svim vodičima u sustavu ostaju konstante (neizolirani sustav).* To znači da su vodiči ostali spojeni na izvore koji im održavaju struje konstantnim bez obzira na pomake. No zbog pomaka promijenili su se vektorski magnetski potencijali a time su se promijenili i obuhvaćeni magnetski tokovi. Zbog toga izvori trebaju dati dodatnu energiju u sustav. Rad kojeg obave izvori (dodatna energija) prema (27.8) je:

$$\delta A_i = \sum_{i=1}^N I_i \cdot d\phi_i = \int_V \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} \cdot dV \quad (28.6)$$

Prema zakonu o očuvanju energije taj rad se može utrošiti na rad magnetskih sila δA_m i na povećanje magnetske energije pohranjene u polju:

$$\delta A_i = \delta A_m + \delta W_m \quad (28.7)$$

Ako su materijali linearni, priraštaj pohranjene magnetske energije u sustavu prema (27.16) je:

$$\delta W_m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} \cdot dV \quad (28.8)$$

Iz (28.6), (28.7) i (28.8) slijedi da je:

$$\delta A_m = \delta W_m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} \cdot dV \quad (28.9)$$

pa je sila:

$$F_s = \frac{\delta W_m}{\delta s} \quad (28.10)$$

Odredimo primjenom izrazâ (28.5) i (28.10), te (27.29) silu u smjeru osi s u strujnom krugu induktiviteta L . Za izolirani strujni krug prema (28.5) slijedi:

$$F_s = -\left\{ \frac{\delta W_m}{\delta s} \right\}_{\phi=\text{konst.}} = -\frac{\partial}{\partial s} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\phi^2}{L} \right\}_{\phi=\text{konst.}} = -\frac{1}{2} \phi^2 \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{L} \right) \quad (28.11)$$

Za neizolirani strujni krug prema (28.10) slijedi:

$$F_s = \left\{ \frac{\delta W_m}{\delta s} \right\}_{I=\text{konst.}} = \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \frac{1}{2} L I^2 \right\}_{I=\text{konst.}} = \frac{1}{2} I^2 \frac{\partial L}{\partial s} \quad (28.12)$$

U oba slučaja sila djeluje tako da nastoji povećati induktivitet. U izoliranom strujnom krugu sile djeluju tako da se strujni krug postavi u stanje u kojem ima minimalnu energiju. U neizoliranom strujnom krugu sile djeluju tako da se strujni krug postavi u stanje u kojem ima maksimalnu energiju.

Odredimo također primjenom izrazâ (28.5) i (28.10), silu u smjeru osi s u sustavu dva strujna kruga s međuinduktivitetom M . Za izolirani sustav prema (28.5) i (27.32) slijedi:

$$F_s = -\left\{ \frac{\delta W_m}{\delta s} \right\}_{\phi=\text{konst.}} = -\frac{\partial}{\partial s} \left\{ \pm \frac{\phi_{12} \cdot \phi_{21}}{M} \right\}_{\phi=\text{konst.}} = \mp \phi_{12} \cdot \phi_{21} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{M} \right) \quad (28.13)$$

Za neizolirani sustav prema (28.10) i (27.31) slijedi:

$$F_s = \left\{ \frac{\delta W_m}{\delta s} \right\}_{I=\text{konst.}} = \frac{\partial}{\partial s} \{ \pm M I_1 \cdot I_2 \}_{I=\text{konst.}} = \pm I_1 \cdot I_2 \frac{\partial M}{\partial s} \quad (28.14)$$

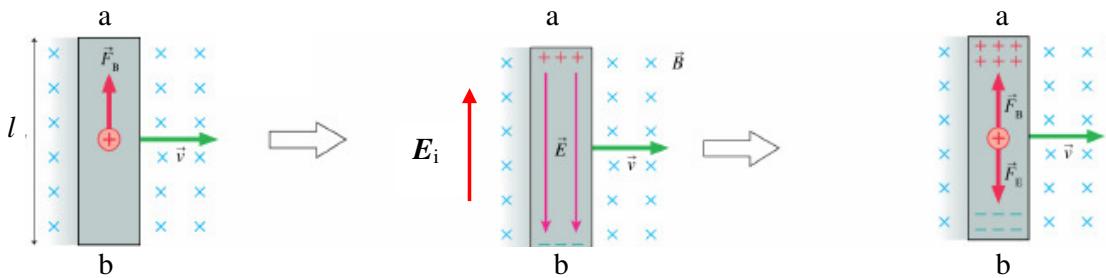
I ovdje u oba slučaja sila djeluje tako da nastoji povećati ukupni induktivitet sustava. U izoliranom sustavu sile djeluju tako da se sustav postavi u stanje u kojem ima minimalnu energiju. U neizoliranom sustavu sile djeluju tako da se sustav postavi u stanje u kojem ima maksimalnu energiju.

29. FARADAYEV ZAKON ELEKTROMAGNETSKE INDUKCIJE

Poslije Öerstedova otkrića 1820. godine koje je pokazalo da električna struja stvara magnetsko polje, mnogo je istraživača pokušavalo doći do odgovora na pitanje da li se magnetskim poljem može proizvesti električna struja. Bitan korak načinio je M. Faraday koji je uočio onaj dio koji je u dotadašnjim pokusima nedostajao, a to je da će se električni učinci pojaviti samo ako dolazi do promjena u magnetskom polju. To otkriće formulirano u *Faradayevom zakonu elektromagnetske indukcije* predstavlja jedno od fundamentalnih otkrića u povijesti znanosti, te je dovelo do razvijanja elektrotehnike koja je omogućila brz razvoj civilizacije poznat pod nazivom „industrijska revolucija XX stoljeća“.

29.1. Elektromagnetska indukcija u vodiču koji se giba u magnetskom polju

Na slici 29.1. prikazan je vodič duljine l , koji se brzinom v giba u homogenom magnetskom polju indukcije \vec{B} .



Slika 29.1. Gibanje vodiča u homogenom magnetskom polju

Na naboje u vodiču, koji se gibaju u magnetskom polju, djelovat će magnetska sila određena s (16.2):

$$\mathbf{F}_m = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (16.2)$$

Magnetska sila će na pozitivne naboje biti usmjerena uzduž vodiča prema gore, a na negativne naboje ta sila će biti suprotno usmjerena. Posljedica djelovanja magnetske sile je ta da će se na gornjem kraju vodiča pojaviti višak pozitivnih a na donjem kraju vodiča višak negativnih naboja. Magnetska sila djeluje na naboje u vodiču na isti način kao kad bi se vodič nalazio u homogenom *induciranom električnom polju* jakosti \mathbf{E}_i usmjerrenom kao i magnetska sila \mathbf{F}_m :

$$\mathbf{F}_m = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = q \cdot \mathbf{E}_i \quad ; \quad \mathbf{E}_i = \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (29.1)$$

Međutim, razdvojeni pozitivni i negativni naboji na krajevima vodiča stvaraju svoje električno polje jakosti \mathbf{E}' , usmjereno od pozitivnih prema negativnim naboljima, tj. suprotno od induciranih električnih polja \mathbf{E}_i . To električno polje djeluje električnom silom na naboje, koja je suprotno usmjerena od magnetske sile:

$$\mathbf{F}_e = q \cdot \mathbf{E}' \quad (29.2)$$

Razdvajanje naboja odvijat će se sve dotle dok se ne uspostavi ravnoteža magnetske \mathbf{F}_m i električne sile \mathbf{F}_e na naboje, tj. sve dotle dok količina razdvojenih naboja ne postane dovoljno velika da stvari električno polje jakosti \mathbf{E}' iznosa potrebnog da poništi magnetsku silu \mathbf{F}_m , tj. kad je:

$$\mathbf{E}_i + \mathbf{E}' = 0 \quad ; \quad \mathbf{E}_i = -\mathbf{E}' \quad (29.3)$$

Uzduž vodiča stvoreno je *elektromagnetskom indukcijom* inducirano električno polje \mathbf{E}_i , pa stoga između krajeva „a“ i „b“ vodiča postoji razlika potencijala, odnosno *inducirani napon (elektromotorna sila)*. Iznos tog napona možemo odrediti iz sljedećeg razmatranja.

Pomakom naboja, magnetska sila je izvršila rad (dobijen iz djelovanja vanjske mehaničke sile kojom je ostvareno gibanje vodiča). Pomak naboja ostvaren je duž puta \mathbf{l} usmjerenog od kraja b do kraja a vodiča. Rad je:

$$A = \mathbf{F}_m \cdot \mathbf{l} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{l} \quad (29.4)$$

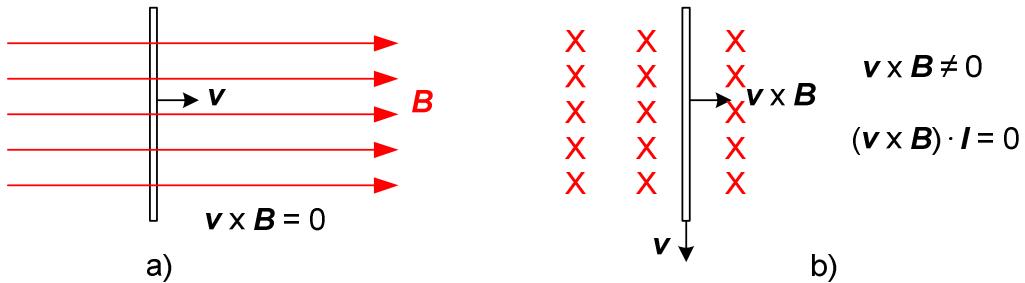
Taj rad je pretvoren u potencijalnu energiju razdvojenih naboja: $W = A$. Inducirani napon je onda:

$$u_i = u_{ab} = \frac{W}{q} = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{l} \quad (29.5)$$

Ako su svi vektori \mathbf{v} , \mathbf{B} i \mathbf{l} međusobno okomiti (kao u primjeru na slici 29.1.) inducirani napon je:

$$u_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{l} \quad (29.6)$$

Relacija (29.5) ukazuje da se inducirani napon pojavljuje samo ako vodič *siječe* silnice magnetskog polja $\mathbf{v} \times \mathbf{B} \neq 0$ (slika 29.2.a). Osim toga, da bi došlo do induciranja napona, gibanje vodiča ne smije biti u ravnini koju određuju magnetska indukcija i uzdužna dimenzija vodiča (slika 29.2.b):



Slika 29.2. Primjeri kada nema inducirana napona pri gibanju vodiča

Ako vodič nije ravni, ili ako magnetsko polje nije homogeno, inducirani napon u diferencijalnom dijelu vodiča $d\mathbf{l}$ je:

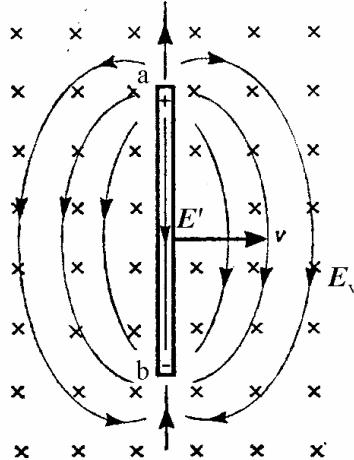
$$du_i = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad (29.7)$$

a ukupni inducirani napon računamo integracijom po cijeloj duljini vodiča \mathbf{l} :

$$u_i = \int_l (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad (29.8)$$

Inducirani napon nastao gibanjem vodiča u magnetskom polju nazivamo *napon gibanja (rotacije)*.

Inducirani napon možemo prikazati i na sljedeći način. Razdvojeni naboji na krajevima vodiča stvaraju izvan vodiča staticko električno polje E_v usmjerenog od „+“ prema „–“ kraju vodiča, te unutar vodiča električno polje E' također usmjerenog od „+“ prema „–“ kraju vodiča, slika 29.3.



Slika 29.3. Statičko električno polje razdvojenih naboja u vodiču

Statičko električno polje je konzervativno polje, pa za njega vrijedi relacija (9.14):

$$\oint_c \mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (9.14)$$

Primjenimo li uvjet konzervativnosti za to staticko električno polje, dobijemo:

$$\int_b^a \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} + \int_a^b \mathbf{E}_v \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad ; \quad \int_b^a \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} - \int_b^a \mathbf{E}_v \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad ; \quad \int_b^a \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} + u_{ab} = 0 \quad (29.9)$$

odakle slijedi:

$$u_{ab} = - \int_b^a \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = \int_b^a \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = \int_b^a (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad (29.10)$$

što je identično (29.5) odnosno (29.8). Primjenimo li krivuljni integral $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ po bilo kojoj zatvorenoj krivulji c na ukupno električno polje kojeg unutar vodiča čine staticko električno polje razdvojenih naboja \mathbf{E}' i inducirano električno polje \mathbf{E}_i , a izvan vodiča vanjsko polje \mathbf{E}_v , dobijemo:

$$\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_b^a (\mathbf{E}_i + \mathbf{E}') \cdot d\mathbf{l} + \int_a^b \mathbf{E}_v \cdot d\mathbf{l} = \int_b^a \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} + \int_b^a \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} - \int_b^a \mathbf{E}_v \cdot d\mathbf{l}$$

Zbroj drugog i trećeg integrala prema (29.9) daje nulu, pa je konačno:

$$\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_c^a \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = u_i$$

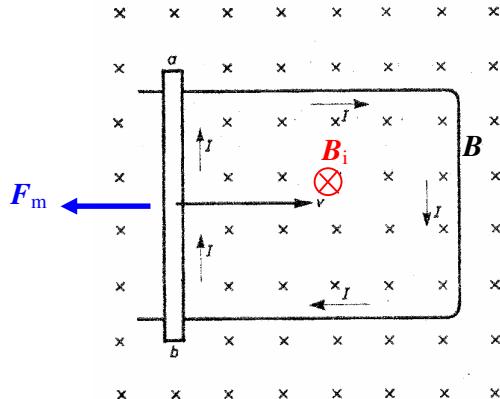
odnosno:

$$u_i = \oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \oint_c \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = \oint_c (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad (29.11)$$

jer je inducirano električno polje izvan vodiča jednako nuli.

29.2. Polaritet induciranog napona i smjer inducirane struje – Lenzovo pravilo

Uzmimo sada da se vodič giba po vodljivim tračnicama zatvorenim u obliku slova U prema slici 29.4. Inducirani napon u vodiču koji je izvor električne energije uspostavit će kroz vodljivi krug inducirnu struju koja će se u vanjskom dijelu kruga (tračnice) zatvarati od „+“ kraja vodiča prema „–“ kraju vodiča, a kroz vodič (izvor) od „–“ prema „+“ polu izvora.



Slika 29.4. Inducirana struja u vodiču koji se giba u magnetskom polju

Pomakom vodiča u smjeru gibanja, smanjuje se magnetski tok kojeg obuhvaća petlja koju čine vodič i tračnice, jer se smanjuje površina kroz koju magnetski tok prolazi. Inducirana struja stvorit će svoje magnetsko polje indukcije \mathbf{B}_i koja je usmjerena kao i magnetska indukcija vanjskog magnetskog polja \mathbf{B} . Ukupna magnetska indukcija će se stoga povećati, čime se nastoji kompenzirati smanjenje magnetskog toka zbog smanjenja površine. Dakle, inducirana struja je takvog smjera da se suprotstavlja promjeni magnetskog toka. Ovo pravilo za induciranu struju naziva se *Lenzovo pravilo*.

Lenzovo pravilo uočavamo i u slijedećem. Naime, kroz vodič koji se giba u magnetskom polju teče struja i stoga na njega djeluje magnetska sila određena sa (17.5):

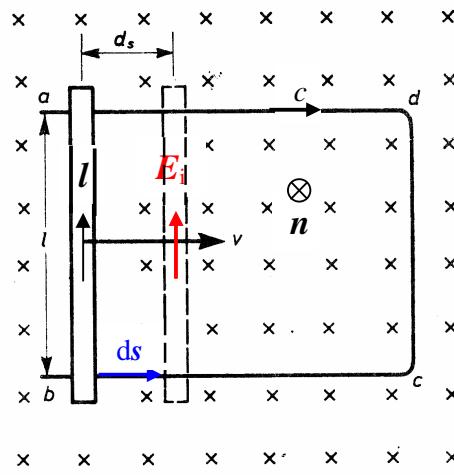
$$\mathbf{F}_m = I(\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \quad (17.5)$$

Smjer te sile je suprotan od smjera gibanja vodiča. To znači da je učinak inducirane električne struje takav da se suprotstavlja gibanju vodiča – *Lenzovo pravilo*.

Prikazani sustav na slici 29.4. predstavlja osnovu pretvorbe mehaničke energije u električnu energiju. Potrebno je uložiti mehaničku energiju kako bi se ostvarilo gibanje vodiča a posljedica toga je induciranje napona i struje, tj. generiranje električne energije. Zamislimo da tračnice na kraju nisu zatvorene već da na kraju spajamo trošila. Što je veća struja koju trošila trebaju (veća električna energija trošila), bit će veća kočna magnetska sila (17.5), pa je potrebno uložiti veću mehaničku energiju da bi se gibanje vodiča i proizvodnja električne energije nastavili.

29.3. Faradayev zakon elektromagnetske indukcije

Analizirajmo promjenu magnetskog toka koji prolazi kroz zatvorenu površinu koju čine vodič i tračnice pri gibanju vodiča prema slici 29.5.



Slika 29.5. Promjena obuhvaćenog magnetskog toka pri gibanju vodiča

Ako se vodič giba brzinom v , u diferencijalnom vremenu dt prijeći će put ds i doći u crtkani položaj. Prijedjeni put je: $ds = v \cdot dt$. Inducirano električno polje je prema (29.1) jakosti:

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (29.1)$$

Obiđemo li u smjeru kazaljke na satu zatvorenu konturu koju čine vodič i tračnice dobit ćemo prema (29.11) inducirani napon:

$$u_i = \oint_{c} \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = \oint_{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{l} \quad (29.11.a)$$

Obilazak konture u smjeru kazaljke na satu daje normalu \mathbf{n} na površinu S petlje (prema pravilu desne ruke) usmjerenu u papir.

Gibanjem vodiča smanjila se površina kroz koju prolazi magnetski tok za diferencijalnu površinu dS :

$$\mathbf{n} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{l} \times d\mathbf{s} \quad (29.12)$$

To smanjenje magnetskog toka je:

$$d\phi = -\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \cdot dS = -\mathbf{B} \cdot (\mathbf{l} \times d\mathbf{s}) \quad (29.13)$$

Primjenom vektorskog identiteta za mješoviti produkt vektora:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A})$$

relacija (29.13) prelazi u:

$$d\phi = -\mathbf{l} \cdot (\mathbf{ds} \times \mathbf{B}) = -\mathbf{l} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) dt \quad (29.14)$$

odakle slijedi:

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{l} = -\frac{d\phi}{dt} \quad (29.15)$$

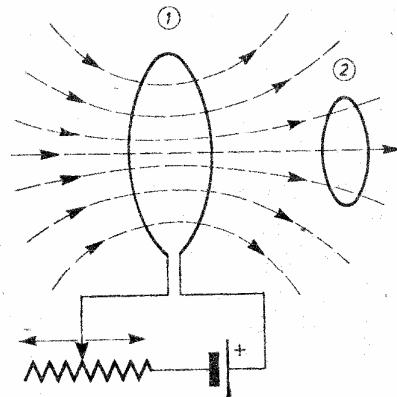
Izjednačavanjem (29.15) s (29.11.a) slijedi:

$$u_{ind} = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \cdot dS \quad (29.16)$$

Relacija (29.16) ukazuje da inducirani napon nastaje zbog vremenske promjene magnetskog toka. Predznak „–“ u (29.16) ne treba uzimati strogo matematički pri izračunavanju polariteta induciranih napona, već se polaritet određuje primjenom Lenzovog pravila.

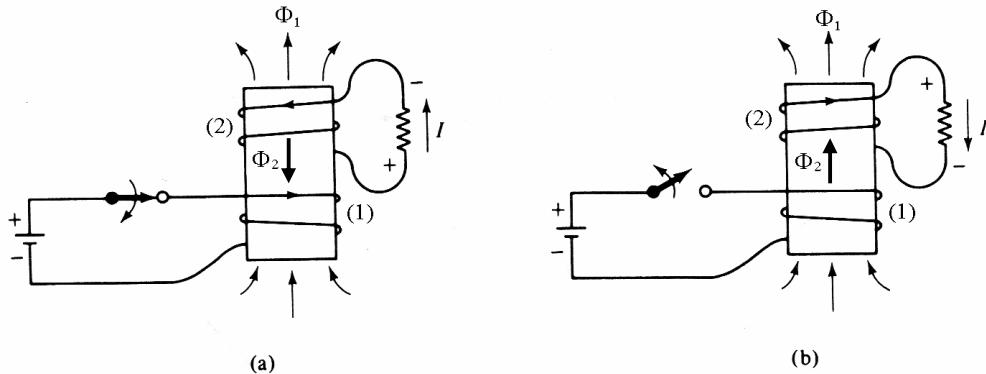
Iz (29.16) vidimo da induciranje napona može nastati i ako nema gibanja vodiča u magnetskom polju, ali postoji vremenska promjena magnetskog toka obuhvaćenog vodljivom petljom. Inducirani napon nastao zbog vremenske promjene obuhvaćenog magnetskog toka nazivamo *napon transformacije*.

Npr. ako imamo dvije vodljive nepomične petlje jednu pokraj druge prema slici 29.6., vremenska promjena struje u petlji „1“ uzrokovat će vremenski promjenjivo magnetsko polje koje dijelom prolazi i kroz petlju „2“. Obuhvaćeni magnetski tok petljom „2“ bit će vremenski promjenjiv, pa će se stoga u petlji „2“ prema (29.16) inducirati napon.



Slika 29.6. Induciranje napona zbog vremenske promjene obuhvaćenog magnetskog toka

Primjena Lenzovog pravila na određivanje polariteta induciranih napona i smjera inducirane struje prikazana je na slici 29.7. na primjeru dvije magnetski spregnute zavojnice.



Slika 29.7. Inducirana struja u magnetski spregnutoj zavojnici „2“

a) kod uspostavljanja struje kroz zavojnicu „1“; b) kod prekida struje kroz zavojnicu „1“

Na slici 29.7.a) prikazano je uspostavljanje struje u zavojnici „1“. Kako struja postupno raste, povećava se magnetski tok kroz jezgru preko koje je magnetski spregnuta zavojnica „2“. Prema Lenzovom pravilu, polaritet induciranih napona i smjer inducirane struje bit će takvi da se suprotstave povećanju magnetskog toka kroz jezgru. Stoga će inducirana struja u zavojnici „2“ biti naznačenog smjera i stvarat će svoj magnetski tok suprotan od rastućeg toka zavojnice „1“. Zavojnica „2“ predstavlja izvor induciranih napona kroz kojeg struja teče od „–“ prema „+“ polaritetu a u vanjskom dijelu strujnog kruga zavojnice „2“ (kroz priključeni otpornik) od „+“ prema „–“ polaritetu. Time je određen polaritet induciranih napona.

Na slici 29.7.b) prikazano je prekidanje struje kroz zavojnicu „1“. Kako se struja postupno smanjuje, smanjuje se magnetski tok kroz jezgru preko koje je magnetski spregnuta zavojnica „2“. Prema Lenzovom pravilu polaritet induciranih napona i smjer inducirane struje bit će takvi da se suprotstave smanjenju magnetskog toka kroz jezgru. Stoga će inducirana struja u zavojnici „2“ biti naznačenog smjera i stvarat će svoj magnetski tok istog smjera kao i opadajući tok zavojnice „1“. Time je određen i polaritet induciranih napona.

Ako se vodljiva petlja giba brzinom v u nehomogenom magnetskom polju indukcije \mathbf{B} , koja se još mijenja u vremenu, totalna derivacija indukcije je:

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{s}} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + v_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{s}} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} \quad (29.17)$$

Primjenimo vektorski identitet:

$$\text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{v})$$

u kojem vrijedi:

$$(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v} = 0 \quad ; \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = \text{div } \mathbf{v} = 0$$

te uz uvažavanje Gaussovog zakona (19.2) $\text{div } \mathbf{B} = 0$, relacija (29.17) prelazi u:

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (29.18)$$

Inducirani napon prema (29.16) je:

$$u_{ind} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \cdot dS = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} \cdot dS + \int_S \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n} \cdot dS \quad (29.19)$$

Primjenimo li na drugi integral iz (29.19) Stokesov teorem:

$$\int_S \text{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \cdot dS = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

gdje je c kontura koja obrubljuje površinu S , a $d\mathbf{l}$ je element konture, dobije se:

$$u_{ind} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} \cdot dS + \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad (29.20)$$

Ukupni inducirani napon također se može izraziti preko totalne promjene magnetskog toka:

$$u_{ind} = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial s}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial s} = -\frac{\partial \phi}{\partial t} - v_s \frac{\partial \phi}{\partial s} = -\frac{\partial \phi}{\partial t} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \phi = -\frac{\partial \phi}{\partial t} - \mathbf{v} \cdot \text{grad} \phi \quad (29.21)$$

U relacijama (29.20) i (29.21) prvi pribrojnici na desnoj strani predstavljaju inducirani napon uslijed vremenske promjene obuhvaćenog magnetskog toka (napon transformacije) a drugi pribrojnici predstavljaju inducirani napon uslijed gibanja vodiča u magnetskom polju (napon gibanja).

29.4. Inducirani napon uslijed samoindukcije i međuindukcije

Vremenski promjenjiv magnetski tok proizveden vremenski promjenjivom strujom i u strujnom krugu i obuhvaćen istim tim strujnim krugom ψ , prema (26.3) možemo izraziti preko induktiviteta L :

$$L = \frac{\psi}{I} \Rightarrow \psi = L \cdot i \quad (26.3.a)$$

Inducirani napon prema (29.16) je:

$$u_{ind} = -\frac{d\psi}{dt} = -\frac{d}{dt}(L \cdot i) = -L \frac{di}{dt} \quad (29.22)$$

Vremenski promjenjiv magnetski tok proizveden vremenski promjenjivom strujom i_1 u strujnom krugu „1“ i obuhvaćen strujnim krugom „2“ ψ_{21} , prema (26.9) možemo izraziti preko međuinduktiviteta $M_{21} = M$:

$$M_{21} = \frac{\psi_{21}}{I_1} \Rightarrow \psi_{21} = M \cdot i_1 \quad (26.9.a)$$

Inducirani napon u strujnom krugu „2“ prema (29.16) je:

$$u_{ind2} = -\frac{d\psi_{21}}{dt} = -\frac{d}{dt}(M \cdot i_1) = -M \frac{di_1}{dt} \quad (29.23)$$

29.5. Diferencijalni oblik Faradayevog zakona

Primjenimo na izraz za inducirani napon (29.16):

$$u_{ind} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \cdot dS \quad (29.16)$$

Stokesov teorem:

$$\int_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \cdot dS = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

gdje je c kontura koja obrubljuje površinu S , a $d\mathbf{l}$ je element konture. Dobije se:

$$\int_S \text{rot } \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \cdot dS = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \cdot dS \quad (29.24)$$

Iz (29.24) slijedi diferencijalni oblik Faradejevog zakona elektromagnetske indukcije:

$$\nabla \times \mathbf{E} = \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (29.25)$$

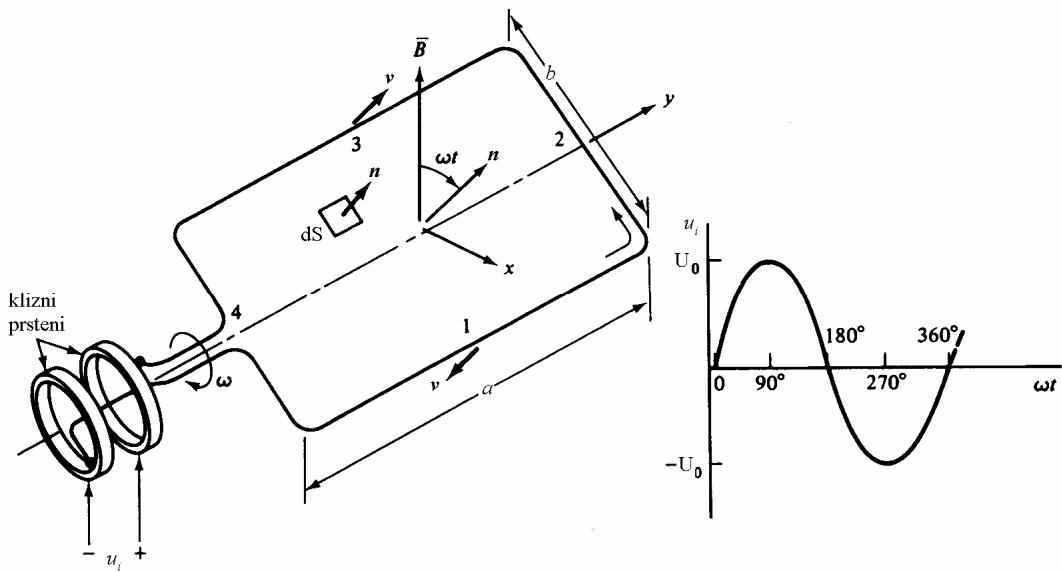
29.6. Inducirani napon u rotirajućoj vodljivoj petlji

Mehanička se energija najlakše pretvara u električnu energiju uz pomoć rotirajućeg sustava prikazanog na slici 29.8. Vodljivi zavoj površine S rotira oko svoje osi u homogenom magnetskom polju indukcije \mathbf{B} . Krajevi zavoja spojeni su na vodljive klizne prstenove koji rotiraju zajedno sa zavojem, a kontakt s vanjskim strujnim krugom ostvaruje se preko četkica koje klize po prstenovima. U nekom trenutku prikazanom na slici kut između normale na zavoj \mathbf{n} i magnetske indukcije \mathbf{B} je $\alpha = \omega t$. Magnetski tok kroz zavoj je:

$$\phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \cdot dS = \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \cdot S = B \cdot S \cdot \cos(\alpha) = B \cdot S \cdot \cos(\omega t) \quad (29.26)$$

Iznos induciranih napona prema (29.16) je:

$$|u_i| = \left| -\frac{d\phi}{dt} \right| = B \cdot S \cdot \omega \cdot \sin(\omega t) \quad (29.27)$$



Slika 29.8. Induciranje napona u rotirajućem zavoju

Ako umjesto jednog zavoja imamo namot s N zavoja spojenih u seriju, inducirani napon će biti:

$$u_i = N \cdot B \cdot S \cdot \omega \cdot \sin(\omega t) \quad (29.28)$$

Dakle, u takvom namotu inducira se napon sinusno promjenjiv u vremenu.

Polaritet induciranog napona određen primjenom Lenzovog zakona prikazan je na slici 29.8. U trenutku $t = 0$, smjer normale na zavoj i smjer magnetske indukcije se podudaraju. Rotacijom zavoja magnetski tok kroz zavoj se smanjuje pa je smjer inducirane struje takav da svojim magnetskim poljem podržava smanjujući magnetski tok. Kad se promjeni smjer magnetskog polja kroz zavoj (nakon prijeđenog kuta $\alpha = \pi$) promijenit će se smjer inducirane struje i polaritet induciranog napona.

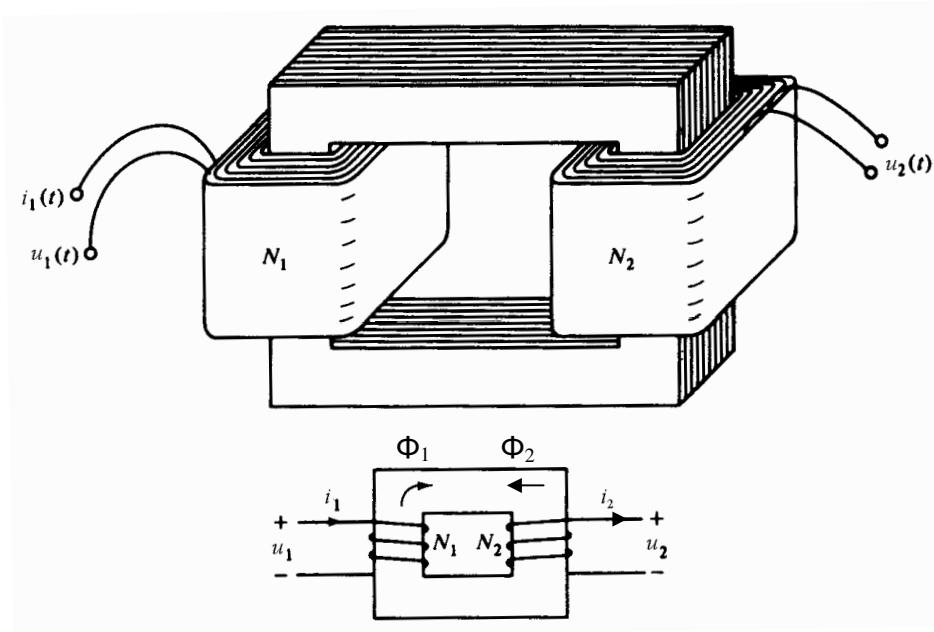
29.7. Načelo rada transformatora

Tipični transformator prikazan je na slici 29.9. Transformator se sastoji od dva namota: *primarnog* s N_1 zavoja i *sekundarnog* s N_2 zavoja namotanih na zajedničku jezgru načinjenu od feromagnetskih limova. Ako kroz primarni namot teče vremenski promjenjiva struja i_{1m} , a stezaljke sekundarnog namota su otvorene, primarna struja će stvoriti vremenski promjenjivi magnetski tok kroz jezgru Φ_m . Struja i_{1m} se naziva *struja magnetiziranja*. Taj magnetski tok obuhvaćen je zavojima primarnog i sekundarnog namota, pa će u njima inducirati napone prema (29.16):

$$u_1 = N_1 \frac{d\phi_m}{dt} \quad ; \quad u_2 = N_2 \frac{d\phi_m}{dt} \quad (29.29)$$

Napon u_1 je inducirani napon primarnog namota koji je u ravnoteži s narinutim naponom izvora koji daje struju magnetiziranja i_{1m} . Napon u_2 je napon otvorenih stezaljki sekundarnog namota. Omjer napona jednak je omjeru broja zavoja namota:

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad ; \quad u_2 = u_1 \frac{N_2}{N_1} \quad (29.30)$$



Slika 29.9. Transformator

Ako zatvorimo strujni krug sekundara tako da na stezaljke spojimo npr. otpornik, kroz sekundarni namot će poteći struja i_2 čiji smjer je po Lenzovom zakonu takav da stvara svoj magnetski tok suprotstavljen primarnom magnetskom toku. Da bi se očuvao magnetski tok u jezgri, mora iz izvora poteći dodatna struja i_1 takvog iznosa kojim će se poništiti magnetski tok sekundarne struje i_2 , tj. mora biti:

$$N_1 \cdot i_1 = N_2 \cdot i_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{i_1}{i_2} = \frac{N_2}{N_1} \quad ; \quad i_2 = i_1 \frac{N_1}{N_2} \quad (29.31)$$

Omjer struja obrnuto je srazmjeran omjeru broja zavoja namota. Transformator služi da električnu energiju jednih parametara (u_1, i_1) transformiramo u električnu energiju drugih parametara (u_2, i_2).

Ukupna struja kroz primarni namot bit će:

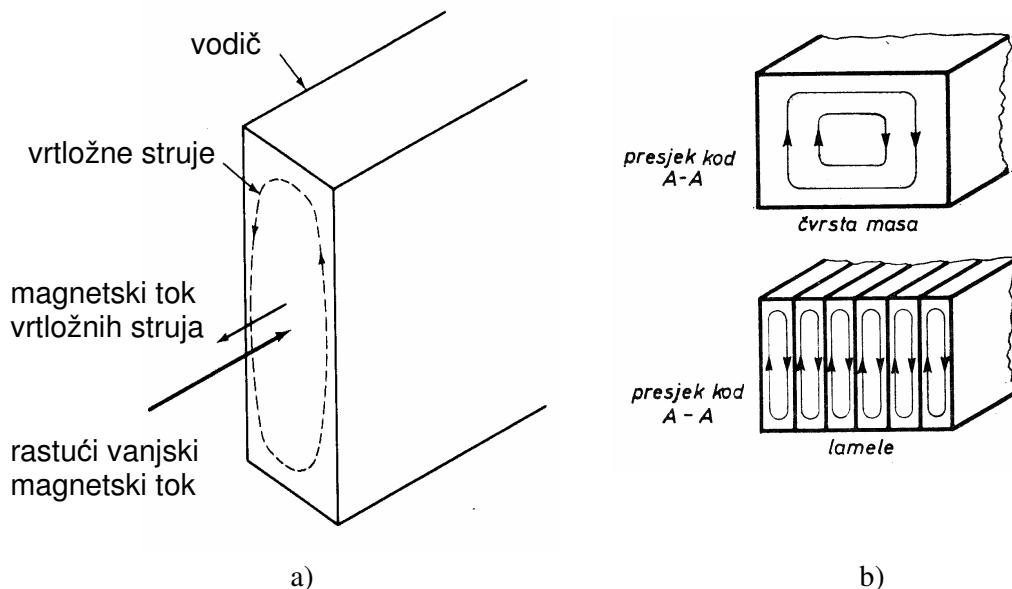
$$i_1 = i_{1m} + \left(\frac{N_2}{N_1} \right) i_2 \quad (29.32)$$

Zanemarimo li struju magnetiziranja i gubitke koji nastaju u transformatoru (toplinske gubitke u vodičima namota, gubitke uslijed histereze), transformatorom se prenosi ista električna snaga:

$$p_2 = u_2 \cdot i_2 = u_1 \frac{N_2}{N_1} i_1 \frac{N_1}{N_2} = u_1 \cdot i_1 = p_1 \quad (29.33)$$

29.8. Vrtložne struje

U masivnom vodljivom materijalu koji se nalazi u promjenjivom magnetskom polju nastaju kružne inducirane struje koje nazivamo *vrtložnim strujama*, slika 29.10.



Slika 29.10. Vrtložne struje

Na slici 29.10.a) prikazan je masivni vodljivi materijal kroz koji prolazi magnetski tok Φ . Ako taj tok u vremenu raste, u vodljivom materijalu će se, prema Lenzovom pravilu, inducirati kružne vrtložne struje koje će stvoriti vlastiti magnetski tok Φ_v , suprotnog smjera od rastućeg magnetskog toka Φ . Time će se reducirati magnetski tok kroz materijal a osim toga tok vrtložnih struja u vodljivom materijalu uzrokovat će dodatne toplinske gubitke. Suzbijanje nastanka vrtložnih struja sprovodi se tako da se vodljivi dijelovi ne izvode kao masivni, već se izrađuju kao izolirane metalne lamele, slika 29.10.b). Time se povećava ukupni otpor, zbog povećane ukupne duljine toka vrtložnih struja.

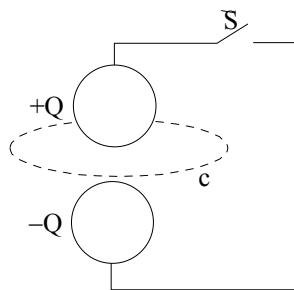
MAXWELLOVE JEDNADŽBE

Poopćenje Amperèovog kružnog zakona

Amperèov kružni zakon smo izveli za statička magnetska polja u obliku:

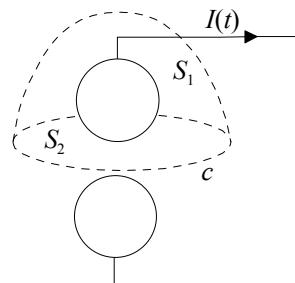
$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I$$

što znači da je linijski integral vektora jakosti magnetskog polja \vec{H} po bilo kojoj zatvorenoj krivulji jednak ukupnoj struji obuhvaćenoj tom krivuljom. Pokazali smo primjenu tog zakona na magnetskim poljima uzrokovanim istosmernim strujama i budući da istosmjerne struje moraju teći u zatvorenim krugovima njegova primjena je bila jasna i nedvosmislena. Razmotrimo sada sljedeći primer: dvije nabijene metalne kugle su spojene žicom uz otvorenu sklopku S (slika 1.):



Slika 1.

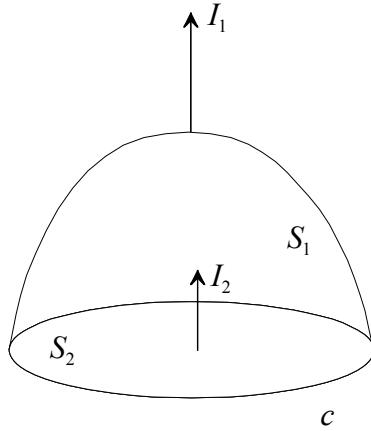
Kad u nekom trenutku zatvorimo sklopku S poteći će struja kroz žicu. Krug u kojem teče ta struja nije zatvoren. Gibanje naboja (struja) postoji u žici, ali ne i u prostoru između kugli koji je ispunjen idealnim izolatorom. Struja kroz žicu će uzrokovati magnetsko polje, ali nije jasno kako se može Amperèov kružni zakon primijeniti na to polje budući da je teško reći da li zatvorena kontura c obuhvaća struju ili ne (slika 2.).



Slika 2.

Naime, Amperèov kružni zakon u obliku definiranom prethodnom jednadžbom prepostavlja da struja teče u zatvorenim petljama. Ako se naboji nakupljaju ili nestaju u bilo kojem dijelu sustava, struja neće teći u zatvorenim konturama i Amperèov kružni zakon u tom obliku neće biti primjenjiv. Smjernicu za upotpunjivanje tog zakona možemo dobiti ako uočimo da poteškoća u definiranju struje obuhvaćene zatvorenom krivuljom c leži u činjenici da su površine S_1 i S_2 obrubljene istom

krivuljom c , a da ih presijecaju različite struje (slika 2.). Razmotrimo sada općenitiji slučaj. Neka je krivulja c u regiji koja je djelomice ili u potpunosti vodljiva i neka ona obrubljuje dvije otvorene površine S_1 i S_2 (slika 3.).



Slika 3.

Ako struje I_1 i I_2 prolaze kroz te površine u naznačenom smjeru u svakom trenutku, onda za ukupni naboј Q u prostoru između S_1 i S_2 mora vrijediti:

$$I_2 - I_1 = \frac{dQ}{dt}$$

U skladu s Gaussovim zakonom Q je jednak električnom toku koji izlazi iz tog međuprostora. Ako je Φ_{e1} električni tok kroz površinu S_1 , a Φ_{e2} električni tok kroz S_2 (referentni smjerovi tokova su jednaki smjerovima struja), onda je

$$Q = \Phi_{e1} - \Phi_{e2}$$

Iz prethodne dvije jednadžbe dobije se:

$$I_2 - I_1 = \frac{d\Phi_{e1}}{dt} - \frac{d\Phi_{e2}}{dt} \Rightarrow I_1 + \frac{d\Phi_{e1}}{dt} = I_2 + \frac{d\Phi_{e2}}{dt}$$

pa iako obuhvaćena struja nije jednaka za sve površine obrubljene krivuljom c veličina $(I + \frac{d\Phi_e}{dt})$ jest jednaka za sve takve površine. Stoga Amperèov kružni zakon u općenitom slučaju ima oblik:

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = I + \frac{d\Phi_e}{dt}$$

I je provodna struja koja prolazi kroz bilo koju površinu omeđenu sa c , a Φ_e je električni tok koji prolazi kroz tu površinu. Budući da je Φ_e u stvari tok vektora \vec{D} kojeg nazivamo i vektor električnog pomaka, veličinu $\frac{d\Phi_e}{dt}$ nazivamo *struja pomaka* iako ne predstavlja nikakav provodni tok naboja. U statičkim (vremenski nepromjenjivim) uvjetima $\frac{d\Phi_e}{dt}$ je nula, pa Amperèov kružni zakon poprima prije izvedeni oblik.

U praznom prostoru ne postoje provodne struje ($\kappa=0$), ali može postojati električno polje. Ako se to električno polje mijenja u vremenu tada mora postojati i magnetsko polje koje je s električnim povezano jednadžbom:

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{d\Phi_e}{dt}$$

Već smo ranije vidjeli da u prostoru vremenski promjenjivog magnetskog toka mora postojati električno polje. Ta dva polja povezana su Faradayevim zakonom elektromagnetske indukcije

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$

Sličnost ovih jednadžbi je velika, razlikuju se samo u predznaku. Te dvije jednadžbe usko povezuju električne i magnetske veličine u jedinstveni entitet: *elektromagnetsko polje*. Ta činjenica nije bila poznata do sredine 19. stoljeća. Tada je škotski matematičar i fizičar J.C. Maxwell (1831.-1879.) uočio nesklad Amperèova kružnog zakona i jednadžbe kontinuiteta. Primjenom identiteta:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) \equiv 0$$

na diferencijalni oblik Amperèova kružnog zakona

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \nabla \cdot \vec{J}_s \equiv 0$$

rezultira kontradikcijom jednadžbi kontinuiteta

$$\nabla \cdot \vec{J}_s = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t} = -\nabla \cdot \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)$$

Stoga je Maxwell korigirao Amperèov kružni zakon u oblik:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_s + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Primijenimo li Stokesov teorem na lijevu stranu ove jednadžbe dobivamo integralni oblik poopćenog Amperèovog kružnog zakona:

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{J}_s \cdot \vec{n} dS + \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{D} \cdot \vec{n} dS$$

To otkriće, temeljeno na matematičkoj skladnosti i kasnije potvrđeno Hertzovim pokusima, jedan je od najvažnijih doprinosa u povijesti znanosti.

Poopćenje Ampèreova zakona koje je uveo Maxwell rezultiralo je fizikalno i matematički skladnim skupom fundamentalnih jednadžbi koje točno opisuju ponašanje vremenski promjenjivog elektromagnetskog polja:

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} &= \vec{J}_s + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{D} &= \rho_s \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0\end{aligned}$$

koje zovemo **Maxwellove jednadžbe**. U prirodnim zadaćama izvor (slobodni naboji ρ_s) i slobodne struje \vec{J}_s moraju biti zadani tako da zadovoljavaju jednadžbu kontinuiteta:

$$\nabla \cdot \vec{J}_s + \frac{\partial \rho_s}{\partial t} = 0$$

Integralni oblik Maxwellovih jednadžbi je:

$$\begin{aligned}\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} &= -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS \\ \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} &= \iint_S \vec{J}_s \cdot \vec{n} dS + \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{D} \cdot \vec{n} dS \\ \iint_S \vec{D} \cdot \vec{n} dS &= \iiint_V \rho_s dV \\ \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS &= 0\end{aligned}$$

Odgovarajući uvjeti na graničnoj plohi između dva homogena izotropna materijala jesu:

$$\begin{aligned}\vec{n}_{12} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) &= 0 \\ \vec{n}_{12} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) &= \vec{K}_s \\ \vec{n}_{12} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) &= \rho_s \\ \vec{n}_{12} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) &= 0\end{aligned}$$

gdje je \vec{n}_{12} okomica usmjerena iz sredstva 1 u sredstvo 2.

Vektore polja povezuju relacije građe koje za linearne homogene izotropne materijale glase:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\vec{J} = \kappa \vec{E}$$

Maxwellove jednadžbe i relacije građe tvore potpun sustav jednadžbi za jedinstveno određivanje vektora elektromagnetskog polja za zadane izvore, te rubne i početne uvjete. Ako u području zanimanja postoje različiti materijali tada na graničnim plohama moraju biti zadane raspodjele slobodnih plošnih naboja σ_s i slobodnih plošnih struja K_s koje također moraju zadovoljavati jednadžbu kontinuiteta.

ENERGIJA U ELEKTROMAGNETSKOM POLJU

Predmet ovoga poglavlja jest uvođenje energetske točke promatranja u studij elektromagnetskih polja. Pojam energije jedan je od najznačajnijih pojmova u fizici. Proširit ćemo stoga shvaćanje pojma energije, koju obično povezujemo s materijalnim tijelima, i na prostor u kojem djeluju elektromagnetske sile. Do sada smo elektromagnetsko polje definirali kao prostor u kojem djeluju sile na naboje i struje. Učinit ćemo korak dalje i pridružiti energiju elektromagnetskom polju. Iz definicija vektora polja \mathbf{E} i \mathbf{B} , koje se temelje na izrazu za Lorentzovu silu na naboju u gibanju, očito je da se prostor u kojem postoji elektromagnetsko polje nalazi u posebnom stanju. Svakom elementu toga prostora možemo pridružiti određenu energiju. U svezi s tim moglo bi se postaviti pitanje realnosti elektromagnetskog polja kao neovisnog fizikalnog entiteta. Poznato je da se još Maxwell odvažio da elektromagnetskom polju pripiše velik stupanj fizikalne realnosti na izravan mehanički način. Treba naglasiti Maxwellovo shvaćanje elektromagnetskog polja kao realne fizikalne biti u kojoj je pohranjena energija, a ne kao matematičke veličine koja služi za opisivanje sile na jedinični naboј. Prostor u kojem djeluje polje je izmijenjen. Polje samo po sebi nosi energiju, bez obzira na to da li u prostoru u kojem ono postoji ima naboja ili ih nema.

Energetska točka promatranja je također korisno oruđe u određivanju ostalih svojstava elektromagnetskog sustava. Mnoge zadaće u elektromehaničkim sustavima bitno se pojednostavnjuju pomoću energetskih analiza i razmatranja.

Jednadžbu za Lorentzovu silu upotrijebili smo za definiranje polja \mathbf{E} i \mathbf{B} , no još nismo analizirali radnju koja je povezana s djelovanjem sile na naboju u gibanju. Iz mehanike nam je poznato da će djelovanje sile na materijalnu česticu biti uzrokom promjene brzine gibanja, što će imati za posljedicu promjenu kinetičke energije čestice, tj. njezinog energetskog stanja. Drugim riječima, pri gibanju nabijene čestice u elektromagnetskom polju u vakuumu polje će, djelujući Lorentzovom silom na naboј, obaviti radnju koja će biti utrošena na promjenu putanje i brzine čestice. To će imati za posljedicu promjenu ukupne energije nabijene čestice.

Sile na naboje u gibanju

Usmjerimo našu pažnju na određivanje sila interakcije kojima elektromagnetsko polje djeluje na različite raspodjele električnih naboja i struja. Smatrat ćemo da se svi naboji gibaju i struje teku u praznom prostoru, što će nam poslužiti za jednostavan elektromagnetski opis unesenih materijala u polje.

Započet ćemo s izrazom za Lorentzovu silu na diskretni točkasti električni naboј q , koji se giba brzinom \mathbf{v} u vakuumu

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

gdje su \mathbf{E} (u V/m) i \mathbf{B} (u Vs/m²) zadani vektori vanjskog narinutog elektromagnetskog polja. \mathbf{F} je sila kojom to polje djeluje na električni naboј i mjeri se u *njutnima* (N). Učinit ćemo korak dalje u proučavanju sila na naboje u elektromagnetskim poljima. Lako je od izraza za sile na individualne naboje prijeći na izraze za sile na naboje u elementu volumena dV . Prethodno je potrebno pojam singularne raspodjele naboja zadane delta funkcijama, tj. diskretnu raspodjelu točkastih naboja, zamijeniti kontinuiranom raspodjelom naboja. Kontinuirana raspodjela naboja u vakuumu opisuje se neprekinutim funkcijama odrednica prostora $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$. Sila na beskonačno mali djelić volumena dV , koji sadrži električni naboј iznosa $dQ = \rho dV$ je

$$d\vec{F} = dQ(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = (\rho \vec{E} + \rho \vec{v} \times \vec{B}) dV$$

Ukupna sila kojom elektromagnetsko polje djeluje na sustav kontinuirano raspodijeljenih električnih u gibanju u vakuumu, unutar konačne regije volumena V , određuje se integracijom po volumenu V :

$$\vec{F} = \iiint_V (\rho \vec{E} + \rho \vec{v} \times \vec{B}) dV$$

Preostaje još da odredimo volumnu gustoću sile, tj. sile po jedinici volumena kojima polje djeluje na kontinuiranu raspodjelu električnih naboja u jediničnom volumenu u okolišu promatrane točke:

$$f = \rho \vec{E} + \rho \vec{v} \times \vec{B}$$

Te sile se često nazivaju "volumne sile" i mjere se u *njutnima po prostornom metru* (N/m^3). Uvedemo li gustoću električne struje u vakuumu $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$, dobivamo volumnu силу на električне naboje ρ и električne struje \mathbf{J} u polju u praznom prostoru kao:

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}$$

Ovime smo utvrdili sve potrebne relacije za sile interakcije elektromagnetskih polja i sustava kontinuiranih raspodjela naboja i struja. One će nam pomoći da bismo odredili energetske odnose u takvim interakcijama.

Energija i snaga predana nabojima u gibanju

Pristup elektromagnetskoj energiji temeljiti će se na utvrđivanju snage predane od elektromagnetskog polja nabojima u gibanju u praznom prostoru. Pritom ćemo pod snagom razumijevati brzinu prijenosa energije iz polja k nabojima u gibanju. Trenutna vrijednost snage određuje se iz relacije:

$$P = \frac{dW}{dt}$$

i mjeri se u *volt-amperima* tj. *vatima* (W). S W smo obilježili energiju mjerenu u *vat-sekundama* (Ws) odnosno *džulima* (J), a s t vrijeme mjereno u *sekundama* (s).

Odredit ćemo najprije energiju predanu u jedinici vremena tj. snagu predanu od elektromagnetskog polja (\mathbf{E}, \mathbf{B}) točkastom električnom naboju q koji se giba brzinom \mathbf{v} u vakuumu. Ona je upravo jednaka obavljenom radu u jedinici vremena kada polje djeluje silom \mathbf{F} na naboj u gibanju. Na putu $d\mathbf{l}$ sila \mathbf{F} obavi rad:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{l} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = q \left(\vec{E} + \frac{d\vec{l}}{dt} \times \vec{B} \right) \cdot d\vec{l} = q \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

pa je polje naboju predalo snagu:

$$P = \frac{dW}{dt} = q \vec{E} \cdot \frac{d\vec{l}}{dt} = q \vec{E} \cdot \vec{v}$$

Usmjerimo našu pažnju na električne naboje čija je kontinuirana raspodjela u praznom prostoru dana funkcijom $\rho(\mathbf{r}, t)$ koji se gibaju brzinama $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$. Sile kojima će elektromagnetsko polje djelovati na naboje u elementarnom volumenu dV dane su s:

$$d\vec{F} = (\rho \vec{E} + \rho \vec{v} \times \vec{B}) dV$$

Ove sile predaju ukupnu energiju u jedinici vremena ili ukupnu trenutnu snagu električnim nabojima u gibanju unutar elementarnog volumena određenu izrazom:

$$dP = d\vec{F} \cdot \vec{v} = (\rho\vec{E} + \rho\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} dV = \rho\vec{v} \cdot \vec{E} dV = \vec{J} \cdot \vec{E} dV$$

Ukupna energija predana od elektromagnetskog polja u jedinici vremena (trenutna predana snaga) nabojima u volumenu V određuje se integracijom:

$$P = \iiint_V \vec{J} \cdot \vec{E} dV$$

Električni naboji u gibanju mogu biti slobodni i vezani. Slobodni naboji mogu predstavljati vanjske (konvekcijske) naboje, čije gibanje se ubrzava ili usporava poljem \mathbf{E} . Takve raspodjele mogu se naći npr. u ioniziranim plinovima i plazmama i u snopu elektrona u vakuumskim cijevima. Slobodni naboji mogu također predstavljati i unutarnje (konduksijske) naboje u materijalu, a brzina im je algebarski povezana s električnim poljem \mathbf{E} . U ovoj relaciji izrazili smo gustoću energije predane u jedinici vremena od elektromagnetskog polja u danoj točki električnim nabojima u gibanju u praznom prostoru kao skalarni produkt električnog polja \mathbf{E} i ukupne gustoće električne struje \mathbf{J} u točki. Ovdje \mathbf{J} predstavlja doprinose struji kako od gibanja slobodnih električnih naboja, tako i od vezanih električnih naboja koji rezultiraju iz makroskopskog modela polariziranog materijala te doprinose amperskih struja iz makroskopskog modela magnetiziranog materijala.

Iz prethodnog možemo zaključiti da iako se volumna energija predana u jedinici vremena odnosi na raspodjele \mathbf{J} u vakuumu, ovaj izraz može korisno poslužiti i dovoljno je općenit za primjenu i u ekvivalentnim makroskopskim modelima materijala, koje nadomještamo raspodjelama električnih naboja i amperskih struja u praznom prostoru.

Očuvanje elektromagnetske energije – Poyntingov teorem

Ukupna trenutna snaga predana od elektromagnetskog polja slobodnim (konduksijskim i konvekcijskim) i vezanim (električnim) nabojima, koji se uvijek nalaze u stanju gibanja, prema iskustvu iz mehanike pretvara se jednim dijelom u neki drugi *reverzibilni oblik energije*; npr. kroz ubrzanje ili usporenje naboja u povećanje ili smanjenje kinetičke energije, ili pak kroz promjenu medusobnog položaja naboja u povećanje ili smanjenje potencijalne energije sustava naboja. Drugim dijelom za prepostaviti je da se nabojima od polja predana energija pretvara i u *ireverzibilni oblik energije*, tj. u toplinu. Toplina nastala pomacima, i uopće gibanjem naboja, predstavlja nepovratno izgubljenu elektromagnetsku energiju. Nazivamo je stoga gubitkom energije ili jednostavno *gubitkom* (snage). S druge strane univerzalno prirodno *načelo očuvanja energije* upućuje nas na prepostavku da se snaga predana od elektromagnetskog polja nabojima u gibanju mora namiriti i iskazati kao smanjenje energije polja i kao tok snage prenesene poljem iz izvora. Suprotno načelu djelovanja na daljinu, načelo polja kao što je već rečeno uvodi polje sila, koje lokalnom interakcijom prenose učinke od točke do točke kroz prostor. Suglasno ideji polja mi govorimo o *energiji koja je pohranjena* u samom polju i koja se *prenosi poljem*, tj. kroz prostor. *To nam omogućuje da energiju koja ostaje ili se prenosi pomoću elektromagnetskog polja nazivamo "elektromagnetskom energijom"*.

U ovom odjeljku analizirat ćemo prijenos i pohranjivanje elektromagnetske energije u praznom prostoru. Središnja točka te analize bit će *Poyntingov teorem*, temeljna relacija očuvanja energije u elektromagnetskom sustavu. Pokazat ćemo da je

s matematičke točke gledišta Poyntingov teorem izravna posljedica Maxwellovih jednadžbi. Njegova fizikalna interpretacija od bitnog je značaja za studij energetskih odnosa u elektromagnetskom polju i u elektromagnetskoj teoriji uopće.

Temeljnu relaciju za očuvanje energije u elektromagnetskom sustavu, Poyntingov teorem u diferencijalnom obliku, izvest ćemo polazeći od izraza za ukupnu trenutnu volumnu snagu koju elektromagnetsko polje predaje električnim i magnetskim nabojima u gibanju:

$$dP = pdV = \vec{J} \cdot \vec{E} dV \Rightarrow p = \vec{J} \cdot \vec{E}$$

Korištenjem identiteta:

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})$$

i Maxwellovih jednadžbi

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

dobivamo

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = -\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{J} \cdot \vec{E}$$

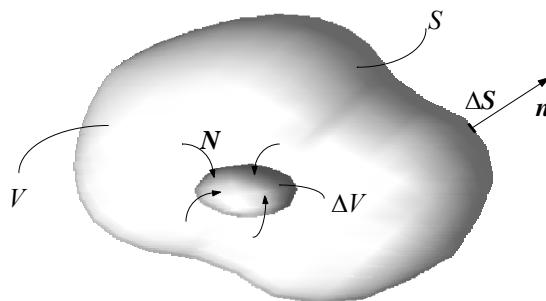
U linearnim izotropnim materijalima vrijedi:

$$\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} \right), \quad \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} \right)$$

pa možemo konačno napisati izraz za snagu

$$p = \vec{J} \cdot \vec{E} = -\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} + \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} \right)$$

koju elektromagnetsko polje predaje svim električnim nabojima u gibanju unutar jediničnog volumena praznog prostora ili materijala. Prethodna jednadžba je *Poyntingov teorem u diferencijalnom obliku*. Predstavlja temeljnu relaciju očuvanja elektromagnetske energije u općem slučaju. Izveo ju je prvi put 1884. godine Poynting, a potom iste godine i Heaviside.



Slika 4. Tok energije u volumenu V , kojeg zatvara ploha S

Integracijom obiju strana prethodne relacije po ukupnom volumenu V , kojega zatvara ploha S , kao na slici 4., dobivamo:

$$\iiint_V p dV = \iiint_V \vec{J} \cdot \vec{E} dV = - \iiint_V \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) dV + \frac{d}{dt} \iiint_V \left\{ \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} + \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} \right\} dV$$

Totalna derivacija zamijenila je parcijalnu derivaciju budući da volumen V ne ovisi o vremenu. Uz primjenu Gaussova teorema divergencije slijedi *relacija za Poyntingov energetski teorem u integralnom obliku*:

$$\iiint_V p dV = \iiint_V \vec{J} \cdot \vec{E} dV = - \iint_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot \vec{n} dS + \frac{d}{dt} \iiint_V \left\{ \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} + \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} \right\} dV$$

Ove relacije predstavljaju integralni oblik Poyntingova teorema. One vrijede općenito, tj. i u praznom prostoru i u prostoru ispunjenom materijalom.

Pojašnjenje Poyntingova teorema o očuvanju energije u općenito vremenski ovisnim elektromagnetskim poljima započet ćemo tumačenjem pojedinih članova u ovom izrazu. Značenje desne strane postat će razumljivije uvedemo li dvije nove veličine. Prije svega uvest ćemo skalarnu veličinu:

$$w = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} + \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B}$$

koju možemo protumačiti kao *volumnu gustoću energije pohranjene u elektromagnetskom polju*.

Za vremenski ovisna elektromagnetska polja gustoća pohranjene energije w , koja je raspodijeljena po prostoru, također je funkcija vremena. Zato pojam vremenski ovisne gustoće energije u raznim točkama u prostoru mora biti udružen s hipotezom o toku energije u polju. Ova ideja nameće se ako želimo da načelo očuvanja energije bude zadržano. U svakom slučaju promjena jakosti polja (\mathbf{E}, \mathbf{H}) i gustoće energije w mora biti povezana s idejom o toku energije u elektromagnetskom polju. Uvedimo zato još jednu novu vektorsku veličinu:

$$\vec{N} = \vec{E} \times \vec{H}$$

poznatu pod nazivom *Poyntingov vektor*.

Promotrimo najprije diferencijalni oblik Poyntingova teorema koji sada možemo pojednostavnjeno pisati kao:

$$-\nabla \cdot \vec{N} - \frac{\partial w}{\partial t} = p$$

Desna strana izvedena je iz sila koje djeluju na sve vrste električnih naboja i predstavlja energiju koju u jedinici vremena elektromagnetsko polje predaje svim nabojima u gibanju unutar jediničnog volumena prostora. Drugim riječima to je snaga kojom elektromagnetsko polje snabdijeva nabaje u gibanju u jedinici volumena. Ta snaga će biti oduzeta od elektromagnetskog polja bilo iz njegove lokalno pohranjene energije u okolišu točke u kojoj se nalazi naboј, bilo pak negdje drugdje, što onda podrazumijeva prijenos energije poljem kroz prostor. Lijeva strana te jednadžbe reducirana je na dva člana koji sadrže samo polja \mathbf{E} i \mathbf{H} i njihove prostorne i vremenske derivacije. To sugerira da ta dva člana predstavljaju inherentne značajke elektromagnetskog polja povezane s pohranjivanjem i s protokom energije u njemu. Iz matematičkog oblika tih izraza identificirat ćemo jedan kao divergenciju toka elektromagnetske snage i drugi kao iznos vremenske promjene elektromagnetske energije pohranjene u polju.

Prvi član u jednadžbi je gustoća s kojom vektorsko polje \mathbf{N} ponire u bilo kojoj točki prostora u kojem postoji elektromagnetsko polje. Može se tumačiti kao gustoća toka snage od elektromagnetskog polja izvan ΔV u ΔV (prema slici 4.). To znači da se \mathbf{N} može tumačiti kao tok elektromagnetske snage po jedinici površine koja se prenosi kroz prostor ispunjen elektromagnetskim poljem.

Drugi član na lijevoj strani jednadžbe je negativna vremenska derivacija skalarne veličine w , koja ima dimenziju energije po jedinici volumena. To nas navodi da drugi član protumačimo kao gustoću kojom se snaga predaje nabojsima lokalno pomoću elektromagnetskog polja. U tom je slučaju naša pretpostavka za w kao o gustoći energije pohranjene u elektromagnetskom polju valjana.

Tako ovu relaciju, koja predstavlja Poyntingov teorem u diferencijalnom obliku, možemo tumačiti na sljedeći način: ako je gustoća snage predane nabojsima u jediničnom volumenu ΔV kao na slici 4., tada se ta snaga oduzima dijelom od energije w pohranjene lokalno pomoću \mathbf{E} i \mathbf{H} polja unutar ΔV ($-\partial w/\partial t$ je iznos za koji se ta energija u ΔV smanjuje) a dijelom se prenosi, tj. dotječe iz okolnog prostora gdje god egzistira elektromagnetsko (\mathbf{E} , \mathbf{H}) polje ($-\operatorname{div}(\mathbf{N})$ je iznos energije koja u jedinici vremena doteče iz cijelog vanjskog prostora u jedinični volumen ΔV). Kao što se može vidjeti, mjerne jedinice svih članova jesu: *vati po prostornom metru* (W/m^3). Zanimljiv je slučaj u prostoru bez naboja. Tada je i snaga predana nabojsima $p=0$, pa Poyntingov teorem poprima oblik:

$$\nabla \cdot \vec{N} + \frac{\partial w}{\partial t} = 0$$

koji je sličan jednadžbi kontinuiteta za očuvanje naboja. Očito je, po analogiji, da ova jednadžba kontinuiteta izražava *očuvanje elektromagnetske energije u regiji bez naboja*, pri čemu je w funkcija distribucije energije, a \mathbf{N} vektor toka energije.

Integralni oblik Poyntingova teorema češće je u upotrebi. Pojednostavljeno pisan glasi:

$$-\iint_S \vec{N} \cdot \vec{n} dS - \frac{d}{dt} \iiint_V w dV = P$$

gdje je P ukupna (trenutna) elektromagnetska snaga predana nabojsima u gibanju unutar zatvorenog volumena V i mjeri se u *vatima* (W). Prvi član na lijevoj strani, negativni integral od \mathbf{N} po zatvorenoj plohi S (prema slici 4.), mora biti ukupna elektromagnetska snaga koja utječe u volumen V izvana iz okolnog prostora kroz zatvorenu plohu S . Drugi član predstavlja vremensku promjenu, tj. smanjenje (ako ga uzmemos s negativnim predznakom) ukupne energije pohranjene u elektromagnetskom polju unutar zatvorenog volumena V .

Iz ove jednadžbe i načela o očuvanju energije, na temelju rečenog možemo zaključiti da ukupna elektromagnetska snaga P predana svim električnim i magnetskim nabojsima unutar volumena V mora biti nadoknađena iz vremenske promjene koja rezultira smanjenjem ukupne elektromagnetske energije W pohranjene u elektromagnetskom polju unutar V , i također od "čistog" toka elektromagnetske snage P_N u V iz vanjskog prostora (gdje negativni predznak označava tok prema unutra u V kroz zatvorenu plohu S).

Pohranjena elektromagnetska energija

Poči ćemo od izraza za skalarnu veličinu

$$w = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} + \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} = \frac{1}{2} \epsilon |\vec{E}|^2 + \frac{1}{2} \mu |\vec{H}|^2$$

koju smo uveli kao volumnu gustoću energije pohranjene u elektromagnetskom polju u vakuumu. Otuda je očito da je elektromagnetska energija pohranjena u onom dijelu prostora gdje se nalazi elektromagnetsko polje (\mathbf{E} , \mathbf{H}). Na taj smo način pridružili energiju elektromagnetskom polju. Kako se vidi iz prethodne relacije *pohranjena energija* w je funkcija veličina polja \mathbf{E} i \mathbf{H} , tj. neovisna je o izvorima polja bilo slobodnim ili vezanim u materiji. Ova činjenica nam omogućava da odijelimo elektromagnetsku energiju od ostalih oblika energije koji istovremeno mogu biti prisutni u prostoru. Moguće je dalje gustoću w pohranjene energije u elektromagnetskom polju razlučiti u dio:

$$w_E = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} = \frac{1}{2} \epsilon |\vec{E}|^2$$

udružen s električnim poljem koji predstavlja gustoću energije pohranjene u električnom polju i u dio

$$w_M = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} = \frac{1}{2} \mu |\vec{H}|^2$$

udružen s magnetskim poljem koji predstavlja gustoću energije pohranjene u magnetskom polju.

S druge strane Poyntingov vektor, tj. gustoća N toka elektromagnetske snage rezultira iz interakcije električnog i magnetskog polja, i zato ne može biti razdvojen u komponente udružene odvojeno s \mathbf{E} i s \mathbf{H} . Uz poznatu gustoću w elektromagnetske energije moguće je odrediti ukupnu pohranjenu elektromagnetsku energiju W u prostoru zadanoj volumenu V pomoću:

$$W = \iiint_V w dV = \iiint_V \left(\frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} + \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} \right) dV$$

Isto tako ukupnu pohranjenu elektromagnetsku energiju možemo odijeliti u ukupnu energiju pohranjenu u električnom polju unutar V :

$$W_E = \iiint_V w_E dV = \iiint_V \frac{\epsilon}{2} |\vec{E}|^2 dV$$

i u ukupnu energiju pohranjenu u magnetskom polju unutar V

$$W_M = \iiint_V w_M dV = \iiint_V \frac{\mu}{2} |\vec{H}|^2 dV$$

Potrebno je, također, skrenuti pozornost na činjenicu da se može opaziti određena nejedinstvenost pri izvođenju članova za pohranjenu električnu i magnetsku energiju u elektromagnetskom polju. Gustoće pohranjene energije izvedene su iz člana s vremenskom derivacijom u Poyntingovu teoremu. Očito je da se uvijek može dodati kojigod vremenski neovisan član obadvjema i w_E i w_H , bez utjecaja na iznos njihove vremenske derivacije, tj. bez utjecaja na bilancu snage u Poyntingovu teoremu. Tu

više značnost možemo lako izbjegći tako da jednostavno izaberemo proizvoljni nulti nivo gustoće pohranjene elektromagnetske energije u sustavu kada je on elektromagnetski "umrtvljen", tj. kada su sve elektromagnetske veličine jednake ništici.

Tok elektromagnetske energije. Poyntingov vektor

U prethodnim poglavljima izveli smo Poyntingov teorem u diferencijalnom obliku za očuvanje elektromagnetske energije u elementarnom volumenu. Tako smo uveli vektorsku veličinu:

$$\vec{N} = \vec{E} \times \vec{H}$$

poznatu pod nazivom *Poyntingov vektor*. Ona predstavlja gustoću toka elektromagnetske snage, tj. energiju koja proteče u jedinici vremena kroz jediničnu površinu u okolišu točke u prostoru u kojem postoji elektromagnetsko polje. Jedinica za N u SI sustavu je *vat po četvornom metru* (W/m^2). Integral od N :

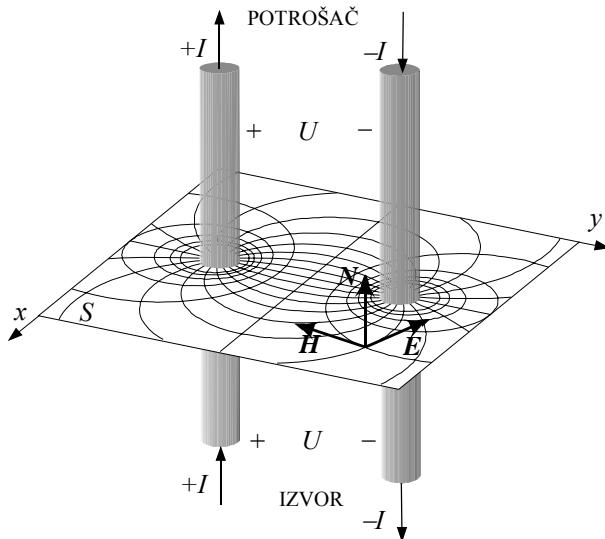
$$\iint_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot \vec{n} dS = \iint_S \vec{N} \cdot \vec{n} dS = P_N$$

jedinstveno određuje tok elektromagnetske snage kroz zatvorenu plohu S . Važno je upozoriti da naše tumačenje Poyntingova vektora $\vec{N} = \vec{E} \times \vec{H}$ kao gustoće elektromagnetske snage u svakoj točki prostora nije strogo opravdano za oba oblika Poyntingova teorema. Poteškoća je u tome što iako divergencija od $\vec{E} \times \vec{H}$ (ili integral od $\vec{E} \times \vec{H}$ preko zatvorene plohe) uvijek daje točnu vrijednost snage prenesene elektromagnetskim poljem, vektoru $\vec{N} = \vec{E} \times \vec{H}$ uvijek se može dodati kojigod vektor \vec{C} koji je bez izvora (čija je divergencija jednak nula: $\text{div } \vec{C} = 0$), tako da bude $\vec{N}' = \vec{N} + \vec{C} = \vec{E} \times \vec{H} + \vec{C}$. Obje vrijednosti i \vec{N} i \vec{N}' zadovoljavaju oba oblika Poyntingova teorema. Drugim riječima, ekstrapolacija prave vrijednosti vektora \vec{N} iz njegove divergencije u danoj regiji nije jedinstven postupak. Potrebne su dodatne informacije.

Usvajanje definicije Poyntingova vektora $\vec{N} = \vec{E} \times \vec{H}$ samoga, bez dodatnog člana, kao gustoće toka elektromagnetske snage u točki, ima nekoliko prednosti:

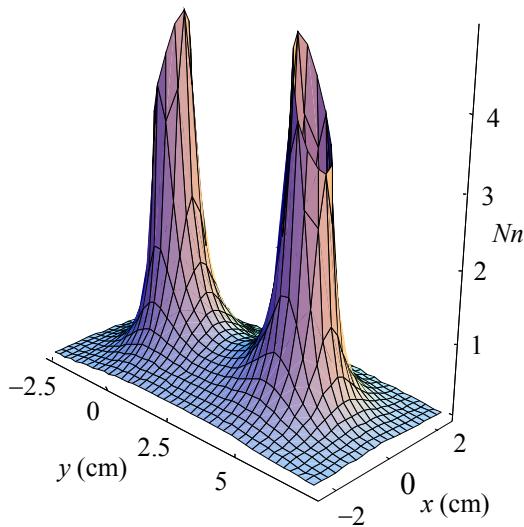
- 1) daje uvijek točne vrijednosti za ukupnu snagu koja protjeće iz ili u zatvorenu regiju;
- 2) u elektrostatičkom sustavu gdje je $\vec{H} = 0$ i u magnetostatičkom sustavu gdje je $\vec{E} = 0$, rezultantna vrijednost za $\vec{N} = \vec{E} \times \vec{H} = 0$ je u suglasju s nepostojanjem bilo kojeg opaženog toka snage utvrđenog eksperimentalno;
- 3) vrlo je jednostavna.

U suglasju s prije rečenim postuliramo da je tok elektromagnetske snage kroz jediničnu plohu u svakoj točki prostora određen Poyntingovim vektorom $\vec{N} = \vec{E} \times \vec{H}$. Na primjeru dvožičnog prijenosnog voda pokazat ćemo kako se tok elektromagnetske snage u prostoru oko vodiča može predočiti pomoću Poyntingova vektora. Na slici 2 prikazali smo dvožični vod koji služi za prijenos elektromagnetske energije od izvora do potrošača.



Slika 5. Dvožični prijenosni vod; slika polja vektora E i H

Materijal vodiča je idealni provodnik ($\kappa \rightarrow \infty$), tako da u vodičima nema gubitaka niti uzdužne komponente jakosti električnog polja, $E_z = 0$. Vektori električnog polja E i magnetskog polja H međusobno su okomiti u svakoj točki P i imaju samo transverzalne komponente, tj. leže u poprečnoj ravnini S . Njihove veličine mogu se odrediti jednostavnim proračunom pomoću zadanog napona između vodiča i struja koje teku vodičima, te pomoću koordinata točke P . Lako se onda izračuna Poyntingov vektor kao $N = E \times H$ u svakoj točki P . N je uvijek okomit na ravninu S , tj. kolinearan je s osima vodiča, pa ima samo N_z komponentu.



Slika 6. Dvožični prijenosni vod; raspodjela normalizirane gustoće toka snage $N_n = N/N_0$; udaljenost između vodiča $d = 5$ cm, polumjer vodiča $r_0 = d/10$, $N_0 = UI/[4\pi \ln(d/r_0)]$

To pokazuje da sva elektromagnetska snaga protječe duž voda od izvora prema potrošaču. Njezinu normaliziranu raspodjelu oko vodiča u poprečnoj ravnini S prikazali smo dijagramom na slici 6.

Potencijali u elektromagnetskim poljima

U prethodnom poglavlju opisali smo različite oblike Maxwellovih jednadžbi pomoću kojih se rješavaju elektromagnetska polja. Polja smo predstavljali glavnim vektorima polja \mathbf{E} i \mathbf{B} i pomoćnim vektorima polja \mathbf{D} i \mathbf{H} . Sljedeći korak učinit ćemo u ovom poglavlju tako da ćemo za predstavljanje polja uvesti pomoćne funkcije poznate kao *elektromagnetski potencijali*. Te pomoćne matematičke funkcije, nazvane *vektorski i skalarni potencijali*, bit će uvedene tako da budu suglasne s Maxwellovim jednadžbama. S druge strane, ako se upotrijebi potencijali, proračun i analiza elektromagnetskih polja često će biti znatno pojednostavljeni i olakšani.

Općenito smo zainteresirani za pronalaženje *pomoćnih funkcija* pomoću kojih bi što jednostavnije predstavljali i proračunavali elektromagnetska polja. Različiti oblici sustava Maxwellovih jednadžbi, za polja u vakuumu tj. slobodnom prostoru i u materijalu koji se ne giba, uvedeni u prethodnom poglavlju, predstavljaju skupove međusobno povezanih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda. Da bi se proračunalo elektromagnetsko polje, nužno je cijeli sustav jednadžbi, zbog njihove međusobne povezanosti, rješavati simultano. Simultano rješavanje tako velikih sustava jednadžbi vrlo je teška, a često i nerješiva zadaća.

Očita je potreba da se uvede nova klasa funkcija pomoću kojih ćemo predstavljati elektromagnetska polja, umjesto do sada upotrebljavanih vektorskog funkcija jakosti polja \mathbf{E} i \mathbf{H} , te indukcija \mathbf{B} i \mathbf{D} . Definiranje i uvođenje novih potencijalnih funkcija u teoriju elektromagnetskih polja imat će smisla ako se njihovim uvođenjem prvo bitno smanji broj jednadžbi koje treba rješavati u matematičkom modelu polja i drugo, ako uvođenje tih funkcija omogući razdvajanje jednadžbi u sustavu tako da ih se može pojedinačno i odvojeno rješavati. U ovom odjeljku pokazat ćemo upravo to, uvođenjem dviju klasa potencijalnih funkcija koje ćemo nazvati *potencijalima*.

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} &= \vec{J}_s + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{D} &= \rho_s \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0\end{aligned}$$

Budući da je magnetsko polje uvijek *solenoidalno* (bez izvora) vektor \mathbf{B} može biti predstavljen kao rotor drugog vektora \mathbf{A} , tj.:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

Vektorsko polje \mathbf{A} je vektorska potencijalna funkcija elektromagnetskog polja i naziva se *magnetski vektorski potencijal*. Vektorski identitet:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) \equiv 0$$

osigurava valjanost Maxwellove jednadžbe:

$$\nabla \cdot \vec{B} \equiv 0$$

Slijedi:

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{A}) = 0 \Rightarrow \nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

budući da je:

$$\nabla \times (\nabla \varphi) = 0$$

Negativni predznak pred gradijentom je posljedica definicije potencijala φ ; prema dogovoru želimo da u statičkom električnom polju vektor \mathbf{E} ima smjer od većeg prema manjem potencijalu. Jedinica za vektorski potencijal \mathbf{A} je *veber po metru* (Wb/m), a za skalarni potencijal φ je *volt* (V).

Ove jednadžbe dopuštaju da se polja \mathbf{E} i \mathbf{B} u ovom sustavu izraze pomoću dva potencijala φ i \mathbf{A} . Potencijali su dvije potpuno proizvoljne i neovisne funkcije prostora i vremena.

U primjenjenoj teoriji elektromagnetskih polja ima slučajeva kada je polja i njihove potencijale pogodno računati iz zadane raspodjele neovisnih izvora. Pod neovisnim izvorima razumijevamo one na čiju raspodjelu ne djeluju polja obuhvaćena sustavom Maxwellovih jednadžbi koje rješavamo. Zato ćemo sad izvesti diferencijalne jednadžbe u kojima ćemo povezati neovisne izvore polja i odgovarajuće potencijale \mathbf{A} i φ koje oni uzrokuju.

Prepostavit ćemo da polje postoji u neograničenom prostoru koji je ispunjen linearnim homogenim izotropnim materijalom sa zadanim značajkama ϵ , μ i κ , koje su općenito različite od nule. Raspodjela neovisnih izvora zadana je tako da je zadana neovisna raspodjela slobodnih naboja, koju ćemo označiti s ρ_s da bi istakli da je neovisna i da na nju izračunato polje ne djeluje. Za gustoću slobodne struje \mathbf{J}_s pretpostavit ćemo da se sastoji iz dva dijela: jednog koji je ovisan o polju koje se računa i koji je određen Ohmovim zakonom te iznosi $\kappa\mathbf{E}$, i drugog dijela koji je zadan sa \mathbf{J}'_s i koji uzimamo da ne ovisi o polju koje računamo. To možemo pisati tako da je $\mathbf{J}_s' = \kappa\mathbf{E}'$, gdje je \mathbf{E}' električno polje koje nije obuhvaćeno Maxwellovim jednadžbama, za razliku od polja \mathbf{E} koje računamo iz Maxwellovih jednadžbi. Drugim riječima, \mathbf{J}_s' je dio zadane gustoće struje koji proizvode vanjske elektromotorne sile. On ne sadrži niti jedan dio struje uzrokovanu električnim poljima u vodljivom materijalu. Dakle, imamo:

$$\vec{J}_s = \kappa \vec{E} + \vec{J}'_s = \kappa(\vec{E} + \vec{E}')$$

Sustav Maxwellovih jednadžbi u ovom slučaju poprima oblik:

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} &= \vec{J}'_s + \kappa \vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{D} &= \rho_s \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0\end{aligned}$$

Uvođenjem vektorskog potencijala:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

i skalarnog potencijala

$$\vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

dobivamo jednadžbe:

$$\begin{aligned}\Delta \vec{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \mu\kappa \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} &= -\mu \vec{J}'_s + \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \mu\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mu\kappa \varphi \right) \\ \Delta \varphi + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{A}) &= -\frac{\rho_s}{\epsilon}\end{aligned}$$

par povezanih linearnih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi drugog reda za potencijale φ i \vec{A} , koje se mogu razdvojiti pogodnim izborom potencijala. U ove jednadžbe uveden je Laplaceov skalarni operator kao:

$$\Delta \varphi = \nabla \cdot (\nabla \varphi)$$

a Laplaceov vektorski operator $\Delta \vec{A}$ određuje se iz vektorske relacije:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

Vektorski i skalarni potencijali za jedno te isto elektromagnetsko polje *nisu jedinstveni*. S druge strane, sva parcijalna rješenja sustava jednadžbi za φ i \vec{A} vode k istim vektorima \mathbf{E} i \mathbf{B} elektromagnetskog polja, ako su subjekt istih rubnih i početnih uvjeta. Ta parcijalna rješenja za potencijale razlikovat će se međusobno za proizvoljnu funkciju Ψ . Ova sloboda u izboru potencijala dopušta nam da zahtijevamo da vektorski i skalarni potencijali zadovoljavaju još i jedan drugi uvjet, osim uvjeta da određuju upravo željene vektore polja \mathbf{E} i \mathbf{B} . Taj *dodatni uvjet* sastoji se u propisivanju divergencije vektorskog potencijala. Taj izbor je uvijek moguć budući da su rotor i divergencija bilo kojeg vektorskog polja (takvog kao \mathbf{A}) potpuno neovisna svojstva polja, a samo smo rot \mathbf{A} do sada propisali.

Dodatni uvjet se općenito bira tako da razdvoji i pojednostavni jednadžbe koje treba riješiti da bi se izračunali potencijali. Nalazimo da će se potencijali φ i \vec{A} razdvojiti u jednadžbama ako propišemo da divergencija \mathbf{A} iznosi:

$$\nabla \cdot \vec{A} = -\mu\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \mu\kappa \varphi$$

Taj je uvjet poznat kao *Lorentzov uvjet*. Uvrštenjem Lorentzovog uvjeta u jednadžbe potencijala dobivamo simetrične valne jednadžbe:

$$\begin{aligned}\Delta \vec{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \mu\kappa \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} &= -\mu \vec{J}'_s \\ \Delta \varphi - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \mu\kappa \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= -\frac{\rho_s'}{\epsilon}\end{aligned}$$

To su *nehomogene prigušene valne jednadžbe* iz kojih se u linearном izotropnom i homogenom materijalu mogu izračunati potencijali \mathbf{A} i φ kao posljedica neovisnih izvora elektromagnetskog polja zadanih pomoću gustoća ρ_s' i \mathbf{J}_s' . Parcijalna rješenja tih jednadžbi mogu se izraziti kao integrali preko zadanih raspodjela naboja i struja, dok su njihova komplementarna rješenja, tj. ona od homogenih dijelova jednadžbi, očigledno valna rješenja.

Integralno predstavljanje potencijala

U ovom odjeljku prikazat ćemo pristup elektromagnetskim zadaćama pomoću integralnih jednadžbi, koji ćemo razviti usporedo s dosad obrađenim pristupom

poljima putem diferencijalnih jednadžbi. Matematički modeli u elektromagnetskoj teoriji koji sadrže integralne jednadžbe čine osnovu tzv. metode momenata.

Razmatrat ćemo izvore i temeljnu zadaću određivanja elektromagnetskog polja izgrađenog zadanim raspodjelom neovisnih naboja i struja. Formalno, matematički problem povezivanja polja s njihovim izvorima jest rješenje nehomogene valne jednadžbe elektromagnetskih potencijala.

Uz Lorentzovo baždarenje, za zadane raspodjele struja i naboja, skalarni potencijal φ i kartezijiske komponente vektorskog potencijala \mathbf{A} u jednadžbama potencijala zadovoljavaju skalarnu nehomogenu valnu jednadžbu oblika:

$$\Delta\psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -g(\vec{r}, t)$$

Ovdje funkcija ψ predstavlja skalarni potencijal ili bilo koju pravokutnu komponentu vektora polja ili vektorskog potencijala, a funkcija $g(\mathbf{r}, t)$ funkciju gustoće izvora. Prepostavljamo da je zadana raspodjela izvora moguća, tj. da ne proturječi jednadžbama polja, i još k tome da je raspodjela struja i naboja neovisna, tj. da izračunato polje ne utječe na nju niti je mijenja. U prethodnoj jednadžbi stavili smo $\mu\epsilon$ da je jednako $1/c^2$, gdje c ima dimenziju brzine (m/s). Prepostavili smo također da je prostor ispunjen materijalom koji je homogen i izotropan i koji ima vodljivost jednaku nuli.

Rješavanju valne jednadžbe pristupit ćemo postupno. Prvo ćemo riješiti polje točkastog izvora, a potom ćemo izvesti opći integral jednadžbe za kontinuiranu raspodjelu izvora u neograničenom prostoru. U stvarnosti samo neki od idealiziranih slučajeva mogu biti riješeni relativno jednostavno. Za praktične primjene pri dobivanju integralnih rješenja u zadaćama zamršene geometrije potrebno je koristiti numeričke metode.

Najjednostavnija raspodjela naboja koju možemo promatrati je ona koja je posvuda mala izuzev u neposrednom okolišu ishodišta. To nas vodi prema hipotetički idealiziranom modelu naboja koncentriranog u ishodište sustava. Takav izvor nazivamo točkastim nabojem. Gustoća takvog točkastog naboja posvuda je nula, izuzev u naboju gdje je beskonačna. Zamislimo dalje točkasti naboje iznosa $g(t)$ koji miruje, ali se njegov iznos vremenski mijenja, tj. poznata je funkcija vremena. To je fizikalno nemoguće, ali će nam ta pretpostavka pomoći da učinimo prvi korak prema rješenju postavljene zadaće. Radi jednostavnosti smjestili smo naboje u ishodište sfernog koordinatnog sustava. Homogeni dio jednadžbe potencijala:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0$$

mora vrijediti za sve točke neograničenog prostora izuzev za ishodište sustava. S φ smo označili skalarni potencijal točkastog naboja smještenog u ishodištu. Očito je da potencijal ovisi samo o radijalnoj udaljenosti od ishodišta \mathbf{r} i da je neovisan o smjeru. Prema tome, zbog sferne simetrije φ je funkcija samo od \mathbf{r} i t . Zato ova jednadžba pisana u sfernem koordinatnom sustavu glasi:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0$$

Rješenje ove jednadžbe dano je izrazom:

$$\varphi = \frac{g\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} + \frac{h\left(t + \frac{r}{c}\right)}{r}$$

Razmotrimo prvo član $g(t - r/c)$ u rješenju jednadžbe. Ako t poraste na $t + t'$ i r se poveća na $r + ct'$, argument od g ostaje nepromijenjen. Drugim riječima, ako g ima neku vrijednost u trenutku t u točki na udaljenosti r , ona će imati istu vrijednost nakon vremena t' kasnije i u točki na udaljenosti većoj za ct' od prijašnje. Tako smo dobili val koji se giba prema vani od ishodišta brzinom c . Zaključimo da prvi član od φ predstavlja izlazeći val čija se amplituda smanjuje zbog faktora $1/r$ kako se val giba prema vani. Slično i drugi član od φ predstavlja ulazeći val koji putuje prema ishodištu i čija amplituda stalno raste kako se on giba prema ishodištu. Točno određivanje funkcija g i h ovisi o postavljenim uvjetima. Ako npr. pretpostavimo da smo odjednom postavili naboj u ishodište neograničenog prostora, to će uzrokovati val koji će se rasprostirati prema vani, i tada moramo staviti da je h identično jednako nuli, jer h predstavlja val koji putuje prema unutra. Općenito h predstavlja poremećaj koji možemo opaziti prije nego li ga je proizveo izvor. Budući da je takvo ponašanje u suprotnosti s makroskopskim eksperimentalnim opažanjima u elektromagnetizmu, to ćemo pretpostaviti da je h jednako nuli. Funkciju g treba tako izabrati da točno određuje naboj u ishodištu. Ako naboj ima konstantan iznos Q , tada je elektrostatički potencijal $\varphi = Q/4\pi\epsilon r$, pri čemu se pretpostavlja da je potencijal u beskonačnosti jednak nuli. Konačno, skalarni potencijal točkastog naboja iznosa $q(t)$ smještenog u ishodištu neograničenog prostora jest:

$$\varphi = \frac{q\left(t - \frac{r}{c}\right)}{4\pi\epsilon r}$$

Potencijal naboja smještenog u točki \mathbf{r}' u točki \mathbf{r} neograničenog prostora je:

$$\varphi = \frac{q\left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{4\pi\epsilon|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Ako su u neograničenom prostoru unutar volumena V' zadane raspodjele naboja:

$$\rho_s(\vec{r}', t)$$

i struja

$$\vec{J}_s(\vec{r}', t)$$

onda su njihovi potencijali u točki \mathbf{r} :

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_{V'} \frac{\rho_s\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' , \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\vec{J}_s\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

Vremenski sinusno promjenjiva polja i fazorska notacija

U dinamičkim elektromagnetskim poljima često analiziramo vremenski sinusno promjenjiva polja koja se često nazivaju i harmonička polja. U takvima propisujemo da se sve veličine polja mijenjaju sinusno po vremenu na istoj kružnoj frekvenciji ω_0 . Iako takvo propisivanje na prvi pogled izgleda jako ograničavajuće, u velikom broju zadaća veličine polja se mijenjaju sinusno, ili ih pomoću Fourierova reda možemo nadomjestiti sumom sinusno promjenjivih članova. Vektor jakosti električnog polja u harmoničkim se poljima može općenito izraziti kao:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_x(\vec{r}) \cos[\omega_0 t + \psi_x(\vec{r})] \vec{a}_x + E_y(\vec{r}) \cos[\omega_0 t + \psi_y(\vec{r})] \vec{a}_y + E_z(\vec{r}) \cos[\omega_0 t + \psi_z(\vec{r})] \vec{a}_z$$

Analogno izražavamo i ostale veličine elektromagnetskog polja. Prikaz sinusne funkcije vremena kao realnog dijela kompleksne funkcije:

$$A \cos(\omega t + \psi) = \operatorname{Re}\{A e^{i\omega t}\} = \operatorname{Re}\{\underline{A} e^{i\omega t}\}$$

vodi na prikaz takve funkcije kompleksnim brojem \underline{A} kojeg nazivamo *fazor*. Primjenom takvog prikaza na skalarne i vektorske veličine sinusno promjenjivih elektromagnetskih polja dobivamo njihov prikaz fazorima. Tako za jakost električnog polja vrijedi:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \operatorname{Re}\left\{ [E_x(\vec{r}) e^{i\psi_x(\vec{r})} \vec{a}_x + E_y(\vec{r}) e^{i\psi_y(\vec{r})} \vec{a}_y + E_z(\vec{r}) e^{i\psi_z(\vec{r})} \vec{a}_z] e^{i\omega_0 t} \right\} = \operatorname{Re}\{\underline{E}(\vec{r}) e^{i\omega_0 t}\}$$

Uvođenjem fazorske notacije *preslikavamo veličine elektromagnetskog polja iz vremenske u fazorsku domenu*. Time izbacujemo vremensku ovisnost iz veličina elektromagnetskog polja i one su u fazorskoj domeni funkcije samo prostornih varijabli. Jedina je poteškoća predočavanje fazora kao vektora u trodimenzionalnom prostoru. Svaka komponenta je kompleksni broj, pa je u svakoj točki fazor određen sa šest brojeva. Uobičajeno je da posebno prikazujemo amplitude i fazne kutove takvih polja.

U sustavu Maxwellovih jednadžbi pojavljuju se parcijalne derivacije po vremenu. U fazorskoj domeni one se svode na množenje s kompleksnim brojem $j\omega$. Vrijedi:

$$\frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \operatorname{Re}\{j\omega \underline{E}(\vec{r}) e^{i\omega t}\}$$

pa sustav Maxwellovih jednadžbi u fazorskoj domeni ima oblik:

$$\begin{aligned} \nabla \times \underline{\vec{E}} &= -j\omega \underline{\vec{B}} \\ \nabla \times \underline{\vec{H}} &= \underline{\vec{J}} + j\omega \underline{\vec{D}} \\ \nabla \cdot \underline{\vec{D}} &= \underline{\rho}_s \\ \nabla \cdot \underline{\vec{B}} &= 0 \end{aligned}$$

Jednadžba kontinuiteta u fazorskoj domeni je:

$$\nabla \cdot \underline{\vec{J}} = -j\omega \underline{\rho}$$

a vektorski i skalarni potencijal uvodimo pomoću izraza:

$$\underline{\vec{B}} = \nabla \times \underline{\vec{A}} \quad ; \quad \underline{\vec{E}} = -\nabla \varphi - j\omega \underline{\vec{A}}$$

Prijelaz iz fazorske u vremensku domenu se svodi se na množenje absolutne vrijednosti vektora u fazorskoj domeni s faktorom $\cos(\omega_0 t + \psi)$.

Energija i snaga u sinusno promjenjivim poljima

U sinusno promjenjivim elektromagnetskim poljima zanimaju nas srednje, a ne trenutne vrijednosti toka energije. Ako su vektori \mathbf{E} i \mathbf{H} zadani s komponentama ($E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z$ su maksimalne vrijednosti):

$$\begin{aligned}\vec{E} &= E_x \cos(\omega_0 t + \psi_{E_x}) \vec{a}_x + E_y \cos(\omega_0 t + \psi_{E_y}) \vec{a}_y + E_z \cos(\omega_0 t + \psi_{E_z}) \vec{a}_z \\ \vec{H} &= H_x \cos(\omega_0 t + \psi_{H_x}) \vec{a}_x + H_y \cos(\omega_0 t + \psi_{H_y}) \vec{a}_y + H_z \cos(\omega_0 t + \psi_{H_z}) \vec{a}_z\end{aligned}$$

srednja vrijednost Poyntingova vektora za sinusno promjenjivo polje perioda T iznosi:

$$\vec{N}_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^T (\vec{E} \times \vec{H}) dt$$

Korištenjem identiteta:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t) dt = \frac{1}{2}$$

dobivamo izraz za srednju vrijednost Poyntingova vektora:

$$\begin{aligned}\vec{N}_{sr} &= \frac{1}{2} [E_y H_z \cos(\psi_{E_y} - \psi_{H_z}) - E_z H_y \cos(\psi_{E_z} - \psi_{H_y})] \vec{a}_x + \\ &+ \frac{1}{2} [E_z H_x \cos(\psi_{E_z} - \psi_{H_x}) - E_x H_z \cos(\psi_{E_x} - \psi_{H_z})] \vec{a}_y + \\ &+ \frac{1}{2} [E_x H_y \cos(\psi_{E_x} - \psi_{H_y}) - E_y H_x \cos(\psi_{E_y} - \psi_{H_x})] \vec{a}_z = \text{Re} \left\{ \frac{1}{2} (\underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^*) \right\}\end{aligned}$$

gdje je $\underline{\vec{H}}^*$ konjugirano kompleksni fazor $\underline{\vec{H}}$:

$$\underline{\vec{H}}^* = H_x e^{-j\psi_{H_x}} \vec{a}_x + H_y e^{-j\psi_{H_y}} \vec{a}_y + H_z e^{-j\psi_{H_z}} \vec{a}_z$$

Srednji gubici za sinusno promjenjiva polja izraženi u funkciji fazora $\underline{\mathbf{J}}$ (J_x, J_y, J_z su maksimalne vrijednosti) jesu:

$$\begin{aligned}P_{g,sr} &= \frac{1}{\kappa} \frac{1}{T} \int_0^T dt \iiint_V \left| J_x \cos(\omega t + \psi_{J_x}) \vec{a}_x + J_y \cos(\omega t + \psi_{J_y}) \vec{a}_y + J_z \cos(\omega t + \psi_{J_z}) \vec{a}_z \right|^2 dV = \\ &= \frac{1}{2\kappa} \iiint_V |\underline{\vec{J}}|^2 dV\end{aligned}$$

Srednja energija pohranjena u magnetskom polju izražena u funkciji fazora $\underline{\vec{H}}$ (H_x, H_y, H_z su maksimalne vrijednosti) jest:

$$\begin{aligned}W_{m,sr} &= \frac{\mu}{2} \frac{1}{T} \int_0^T dt \iiint_V \left| H_x \cos(\omega t + \psi_{H_x}) \vec{a}_x + H_y \cos(\omega t + \psi_{H_y}) \vec{a}_y + H_z \cos(\omega t + \psi_{H_z}) \vec{a}_z \right|^2 dV = \\ &= \frac{\mu}{4} \iiint_V |\underline{\vec{H}}|^2 dV\end{aligned}$$

a srednja energija pohranjena u električnom polju izražena u funkciji fazora \underline{E} (E_x, E_y, E_z su maksimalne vrijednosti) jest:

$$\begin{aligned} W_{e,sr} &= \frac{\epsilon}{2} \frac{1}{T} \int_0^T dt \iiint_V \left| E_x \cos(\omega t + \psi_{E_x}) \vec{a}_x + E_y \cos(\omega t + \psi_{E_y}) \vec{a}_y + E_z \cos(\omega t + \psi_{E_z}) \vec{a}_z \right|^2 dV = \\ &= \frac{\epsilon}{4} \iiint_V |\vec{E}|^2 dV \end{aligned}$$

Napišimo sada prošireni Amperèov kružni zakon za konjugirano kompleksne fazore $\underline{H}^*, \underline{E}^*$ i \underline{J}^* i Faradayev zakon za fazore \underline{H}^* i \underline{E}^* :

$$\begin{aligned} \nabla \times \underline{\vec{H}}^* &= \underline{\vec{J}}^* - j\omega \epsilon \underline{\vec{E}} \\ \nabla \times \underline{\vec{E}} &= -j\omega \mu \underline{\vec{H}} \end{aligned}$$

Ako prvu od ove dvije jednadžbe pomnožimo s fazorom \underline{E} , a drugu sa konjugirano kompleksnim fazorom \underline{H}^* i odbijemo prvu od druge, dobivamo:

$$\underline{\vec{H}}^* \cdot (\nabla \times \underline{\vec{E}}) - \underline{\vec{E}} \cdot (\nabla \times \underline{\vec{H}}^*) = -\underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{J}}^* - j\omega (\mu \underline{\vec{H}} \cdot \underline{\vec{H}}^* - \epsilon \underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{E}}^*)$$

Nakon primjene vektorskog identiteta

$$-\nabla \cdot (\underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^*) = \underline{\vec{E}} \cdot (\nabla \times \underline{\vec{H}}^*) - \underline{\vec{H}}^* (\nabla \times \underline{\vec{E}})$$

i integracije po volumenu V kojeg ograničava ploha S , uz korištenje Gaussova teorema o divergenciji, slijedi

$$\iint_S (\underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^*) \cdot \vec{n} dS = - \iiint_V \underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{J}}^* dV + j\omega \iiint_V (\epsilon \underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{E}}^* - \mu \underline{\vec{H}} \cdot \underline{\vec{H}}^*) dV$$

Množenjem ove jednadžbe s faktorom $1/2$ i usporedbom s izrazima srednju energiju pohranjenu u magnetskom i električnom polju te srednje gubitke, dobivamo *kompleksnu relaciju za Poyntingov teorem* koja izražava načelo očuvanja energije u sinusno promjenjivom elektromagnetskom polju

$$P_N = \iint_S \underline{\vec{N}} \cdot \vec{n} dS = -P_{g,sr} + 2j\omega (W_{e,sr} - W_{m,sr})$$

P_N nazivamo *prividnom srednjom snagom* koja u jedinici vremena proteče kroz zatvorenu plohu S . Ova jednadžba kazuje da je u sinusno promjenjivim elektromagnetskim poljima negativni realni dio prividne srednje snage jednak srednjim gubicima u volumenu V , dok je imaginarni dio prividne srednje snage jednak umnošku 2ω i razlike srednjih vrijednosti ukupne električne i magnetske energije pohranjene u volumenu V . Stoga u sinusno promjenjivim elektromagnetskim poljima možemo nadomjesne elemente mreže odrediti iz imaginarnog i realnog dijela prividne snage.

ELEKTROMAGNETSKI VALOVI

Maxwellovo otkriće elektromagnetskih valova, i to dva desetljeća prije Hertzova eksperimentalnog dokaza, i objašnjenje elektromagnetske naravi svjetlosti jedan je od najvećih doprinosa¹ znanosti u XIX. stoljeću. Temeljno svojstvo Maxwellovih jednadžbi za elektromagnetsko polje jest postojanje rješenja za *putujuće valove* koji predstavljaju prijenos energije kroz prostor. Opisat ćemo zato vektorske i skalarne *valne jednadžbe*, koje ćemo izvesti iz sustava Maxwellovih jednadžbi. Ograničit ćemo našu pažnju na rješavanje valnih jednadžbi u neograničenom linearnom, homogenom, izotropnom materijalu *bez izvora* polja. Drugim riječima, studirat ćemo svojstva valova bez da se zanimamo kako su takva polja proizvedena.

S izuzetkom statickih polja, koja smo do sad razmatrali, najjednostavnija rješenja sustava jednadžbi dinamičkih polja su ona koja ovise o vremenu i o samo jednoj prostornoj varijabli. Takva jednodimenzionalna rješenja u pravocrtnom sustavu predstavljaju *ravne valove*. Mnoge značajke prostiranja elektromagnetskih valova bit će pojašnjene kroz studij svojstava ravnih valova, i zato je analiza ravnih valova subjekt od temeljne važnosti u elektromagnetskoj teoriji.

Raspon frekvencija elektromagnetskih valova koji se koriste u elektrotehnici vrlo je velik i obuhvaća područje od nula do nekoliko tisuća gigaherca. U Tablici 1. dali smo pregled frekvencija, valnih duljina i valnih područja koja se koriste za radiofoniju, televiziju i radar. Treba upozoriti da je kod tih najviših frekvencija još dozvoljen makroskopski pristup i da se tu približavamo granicama valjanosti klasične elektromagnetske teorije, tj. klasične elektrodinamike.

Tablica 1. Valna područja za elektromagnetske valove u radiofoniji i televiziji prema CCIR²

Područje	Pojas broj	Američka oznaka	Valna duljina (m)	Frekvencija
marijametarsko	4	VLF	$10^3 - 10^4$	3 – 30 kHz
kilometarsko	5 dugi val	LF	$10^4 - 10^3$	30 – 300 kHz
hektometarsko	6 srednji val	MF	$10^3 - 10^2$	300 – 3000 kHz
dekametarsko	7 kratki val	HF	$10^2 - 10$	3 – 30 MHz
metarsko	8 UKV	VHF	$10 - 1$	30 – 300 MHz
decimetarsko	9	UHF	$1 - 0.1$	300 – 3000 MHz
centimetarsko	10	SHF	$0.1 - 0.01$	3 – 30 GHz
milimetarsko	11	EHF	$10^{-2} - 10^{-3}$	30 – 300 GHz
decimilimetarsko	12	–	$10^{-3} - 10^{14}$	300 – 3000 GHz

¹ Suvremenih hrvatskih fizičara Nikola Cindro u svojoj knjizi *Fizika 2* o tome otkriću piše:

"Spoznaja da je svjetlost elektromagnetski val, i svodenje tako različitim znanstvenih područja kao što su elektricitet, magnetizam i optika u jedinstvenu cjelinu nadilazi sve što je znanost XIX. stoljeća do tada pružila. XX. stoljeće je u tim područjima donijelo samo komplementarna otkrića o kvantnoj prirodi zračenja. Međutim, ono što u tom pogledu karakterizira naše stoljeće jest neslućeni razvoj primjene elektromagnetskih valova u telekomunikacijama."

Spektar elektromagnetskog zračenja, kako ga danas pozajmimo, obuhvaća zračenje koje se međusobno toliko razlikuje da je njegovo svodenje na zajedničku prirodu ! elektromagnetske valove koji se razlikuju samo po frekvenciji ! prvorazredni znanstveni uspjeh. Od niskofrekventnog šuma, preko mikrovalova, infracrvenih (toplinskih), svjetlosnih i ultraljubičastih valova, te x- i gama-zraka, ovaj spektar obuhvaća pravilno titranje električnog i magnetskog polja od nekoliko herca do stotine eksaherca (10^{20} Hz). Sve to zračenje ima istu prirodu: sve su to elektromagnetski valovi koji se šire prostorom brzinom 3×10^8 m/s".

² Raspodjela frekvencija prema International Radio Consultative Committee.

Elektromagnetski valovi u sredstvima bez gubitaka

Razmotrimo prostor ispunjen idealnim dielektrikom sa značajkama $\epsilon=konst.$, $\mu=konst.$ i $\kappa=0$. U prostoru ne postoje izvori polja ($\rho_s=0, J_s=0$). Maxwellove jednadžbe u tom slučaju imaju oblik:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Primjenom operatora rotora na Faradayev zakon dobivamo izraz

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Korištenjem vektorskog identiteta

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} \equiv \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

i zamjenom redoslijeda deriviranja po vremenu i prostornim koordinatama dobivamo

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{B})$$

Budući da vrijedi

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu(\nabla \times \vec{H}) = \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

ova se jednadžba reducira na

$$\Delta \vec{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Ovo je vektorska valna jednadžba, a rastavljanjem na komponente u Kartezijevom koordinatnom sustavu dobivamo tri skalarne valne jednadžbe

$$\Delta E_x - \mu \epsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta E_y - \mu \epsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta E_z - \mu \epsilon \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0$$

U općem se slučaju mogu pojaviti sve tri komponente \vec{E} i svaka od njih može ovisiti o sve tri prostorne koordinate x, y i z , te o vremenu t .

Zbog jednostavnosti ćemo prepostaviti da su $E_y=E_z=0$. Tada dobivamo trodimenzionalnu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu

$$\Delta E_x - \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$

pa ćemo uvesti dodatno pojednostavljenje prepostavkom da E_x ne ovisi o koordinatama x i y , t.j.

$$\vec{E} = E_x(z, t) \vec{a}_x$$

Time dobivamo skalarnu valnu jednadžbu

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$

Rješenje ove jednadžbe ima oblik

$$E_x(z, t) = Af(t - z\sqrt{\mu\epsilon}) + Bg(t + z\sqrt{\mu\epsilon})$$

Ovdje su f i g proizvoljne funkcije z i t , a A i B su proizvoljne konstante. Dokaz da ovo rješenje zadovoljava skalarnu valnu jednadžbu izvest ćemo deriviranjem

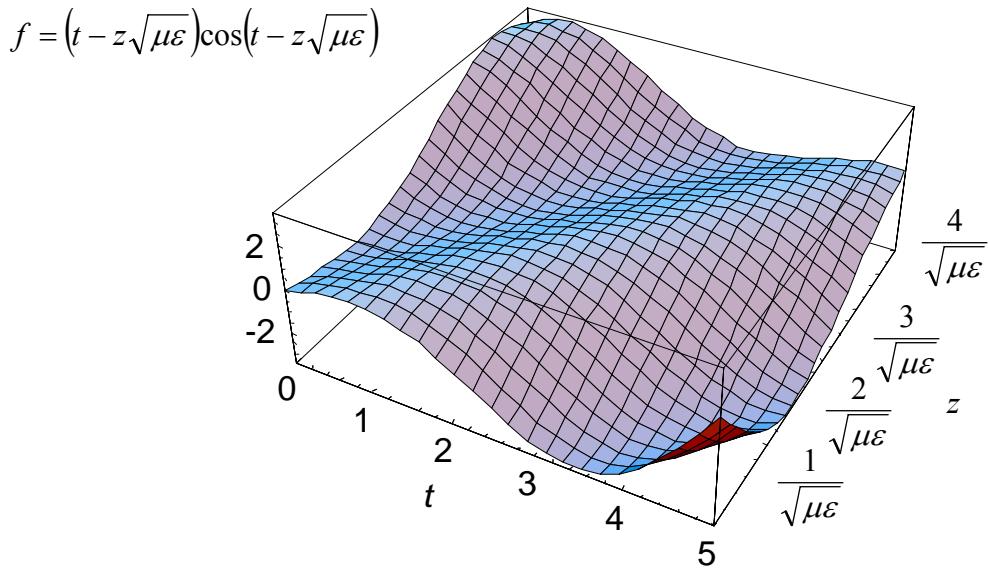
$$\begin{aligned}\frac{\partial E_x}{\partial z} &= -A\sqrt{\mu\epsilon}f'(t - z\sqrt{\mu\epsilon}) + B\sqrt{\mu\epsilon}g'(t + z\sqrt{\mu\epsilon}) \\ \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} &= A\mu\epsilon f''(t - z\sqrt{\mu\epsilon}) + B\mu\epsilon g''(t + z\sqrt{\mu\epsilon}) \\ \frac{\partial E_x}{\partial t} &= Af'(t - z\sqrt{\mu\epsilon}) + Bg'(t + z\sqrt{\mu\epsilon}) \\ \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} &= Af''(t - z\sqrt{\mu\epsilon}) + Bg''(t + z\sqrt{\mu\epsilon})\end{aligned}$$

Oblik funkcija f i g ovisi o problemu koji rješavamo. Neki primjeri jesu:

$$\cos[\omega(t - z\sqrt{\mu\epsilon})], e^{-(t-z\sqrt{\mu\epsilon})}, (t + z\sqrt{\mu\epsilon})\sin(t + z\sqrt{\mu\epsilon})$$

Razmotrimo značenje funkcija f i g u rješenju skalarne valne jednadžbe analizom primjera (Slika 1)

$$f = (t - z\sqrt{\mu\epsilon})\cos(t - z\sqrt{\mu\epsilon})$$



Slika 1. Prikaz funkcije $f = (t - z\sqrt{\mu\varepsilon}) \cos(t - z\sqrt{\mu\varepsilon})$

U jednom trenutku t funkcija poprima niz vrijednosti u ovisnosti od z . Na Slici 1. možemo uočiti da je funkcija od z u proizvoljnom trenutku t jednaka funkciji od z u trenutku koji prethodi, ali pomaknuta u smjeru rastućeg z . Na primjer, od trenutka $t=1$ do trenutka $t=2$ ekstrem funkcije f se pomakne od mjesta $z=1/(\mu\varepsilon)^{0.5}$ do mjesta $z=2/(\mu\varepsilon)^{0.5}$. Stoga funkcija

$$f(t - z\sqrt{\mu\varepsilon})$$

predstavlja val koji se giba u smjeru osi $+z$ sa brzinom $1/(\mu\varepsilon)^{0.5}$. Brzinu prostiranja vala možemo odrediti i ako pratimo određenu točku funkcije i definiramo njezine pozicije z_1 i z_2 u trenutcima t_1 i t_2 . Budući da funkcija ima istu vrijednost, njezini argumenti moraju biti jednaki

$$t_1 - z_1\sqrt{\mu\varepsilon} = t_2 - z_2\sqrt{\mu\varepsilon}$$

pa brzina prostiranja vala iznosi:

$$v = \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

U vakuumu (slobodnom prostoru) brzina prostiranja vala iznosi

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Funkcija

$$g(t + z\sqrt{\mu\varepsilon})$$

predstavlja val koji se giba u smjeru $-z$. Ako slijedimo određenu točku promatrač se u vremenu i prostoru mora gibati tako da vrijedi

$$t + z\sqrt{\mu\varepsilon} = \text{konst.} \Rightarrow dt + \sqrt{\mu\varepsilon}dz = 0 \Rightarrow v = \frac{dz}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

Negativni predznak brzine ukazuje da se promatrač mora gibati u smjeru $-z$, pa funkcija g predstavlja val koji putuje u smjeru $-z$.

Jakost magnetskog polja određujemo korištenjem jednadžbe

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times \vec{E} \Rightarrow -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial z} \vec{a}_y$$

Vrijedi

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial z} &= -A\sqrt{\mu\varepsilon}f'(t-z\sqrt{\mu\varepsilon}) + B\sqrt{\mu\varepsilon}g'(t+z\sqrt{\mu\varepsilon}) \\ \vec{B} &= -\vec{a}_y \int \frac{\partial E_x}{\partial z} dt = [A\sqrt{\mu\varepsilon}f(t-z\sqrt{\mu\varepsilon}) - B\sqrt{\mu\varepsilon}g(t+z\sqrt{\mu\varepsilon})] \vec{a}_y \end{aligned}$$

pa je

$$\vec{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} [Af(t-z\sqrt{\mu\varepsilon}) - B\sqrt{\mu\varepsilon}g(t+z\sqrt{\mu\varepsilon})] \vec{a}_y$$

Ako definiramo valni otpor sredstva bez gubitaka kao

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

Onda vrijedi

$$\vec{H} = \frac{1}{Z} [Af(t-z\sqrt{\mu\varepsilon}) - B\sqrt{\mu\varepsilon}g(t+z\sqrt{\mu\varepsilon})] \vec{a}_y$$

Za vakuum (slobodni prostor) vrijedi $Z=Z_0=120\pi=377\Omega$. Ako označimo električna polja u $(+z)$ i $(-z)$ smjeru s E_x^+ i E_x^- , a magnetska polja u $(+z)$ i $(-z)$ smjeru s H_x^+ i H_x^- vrijedi

$$H_y^+ = \frac{E_x^+}{Z} ; \quad H_y^- = -\frac{E_x^-}{Z}$$

Poyntingov vektor pridružen direktnom i inverznom valu je

$$\begin{aligned} \vec{P}^+ &= E_x^+ \vec{a}_x \times H_y^+ \vec{a}_y = \frac{(E_x^+)^2}{Z} \vec{a}_z \\ \vec{P}^- &= E_x^- \vec{a}_x \times H_y^- \vec{a}_y = -\frac{(E_x^-)^2}{Z} \vec{a}_z \end{aligned}$$

Ove jednadžbe ukazuju da je tijek snage pridružen direktnom valu usmjeren u $+z$ smjeru, a da je tijek snage pridružen inverznom valu usmjeren u $-z$ smjeru.

Zaključno, možemo konstatirati da vremenski promjenjiva električna i magnetska polja rezultiraju prostiranjem elektromagnetskih valova. Najjednostavnije rješenje se sastoji od direktnih valova koji se prostiru u $+z$ i inverznih valova koji se prostiru u $-z$ smjeru. U tom slučaju je jakost električnog polja u potpunosti usmjerena u smjeru osi x, a jakost magnetskog polja je u potpunosti usmjerena u smjeru osi y. Nadalje, polja su

homogena u ravnini okomitoj na smjer prostiranja ($z=\text{konst.}$). Stoga ovakve valove zovemo homogeni ravni valovi. U prirodi ovakvi valovi ne postoje, ali na udaljenostima dalekim od izvora polja i tla elektromagnetski valovi se mogu dobro približiti ravnim valovima.

Posvetimo sad pažnju sinusno promjenjivim elektromagnetskim poljima. Vrijedi

$$\frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = -\omega^2 \underline{\vec{E}}$$

pa skalarna valna jednadžba u fazorskoj domeni poprima oblik

$$\Delta \underline{\vec{E}} + \omega^2 \mu \epsilon \underline{\vec{E}} = 0$$

Rješenje ove jednadžbe u vremenskoj domeni je

$$\vec{E} = E_x(z, t) \vec{a}_x = \left\{ E_0^+ \cos[\omega(t - z\sqrt{\mu\epsilon}) + \varphi] + E_0^- \cos[\omega(t + z\sqrt{\mu\epsilon}) + \varphi] \right\} \vec{a}_x$$

pa iz diferencijalnog oblika Faradayevog zakona u fazorskoj domeni

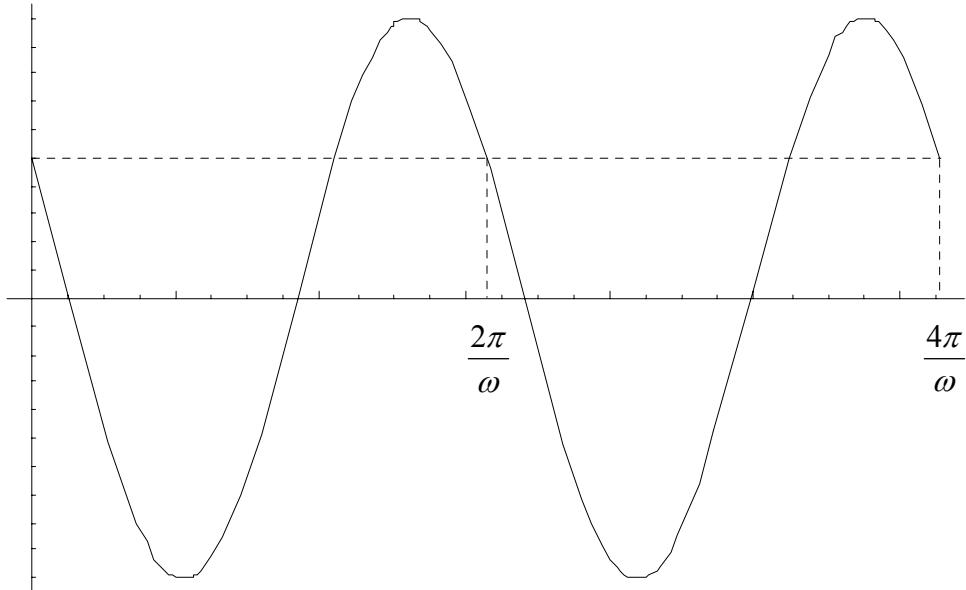
$$\nabla \times \underline{\vec{E}} = -j\omega \mu \vec{H}$$

slijedi

$$\vec{H} = H_y(z, t) \vec{a}_y = \left\{ \frac{E_0^+}{Z} \cos[\omega(t - z\sqrt{\mu\epsilon}) + \varphi] - \frac{E_0^-}{Z} \cos[\omega(t + z\sqrt{\mu\epsilon}) + \varphi] \right\} \vec{a}_y$$

Na svakom mjestu $z=\text{konst.}$ Polja se mijenjaju u vremenu kao što smo prikazali na Slici 2.

$E_x(t, z = \text{konst.})$

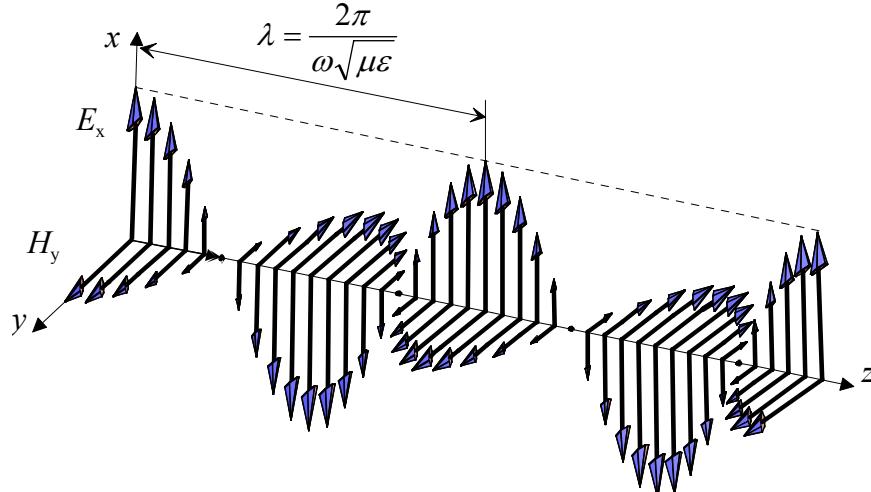


Slika 2. Jakost električnog polja u ravnini $z=\text{konst.}$

Svaka vrijednost polja se ponavlja u vremenskim intervalima $2\pi/\omega$. Broj ponavljanja u jednoj sekundi je *frekvencija*:

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

U određenom trenutku $t=t_0$ električno i magnetsko polje vala se mijenjaju s udaljenošću kao što smo prikazali na Slici 3.



Slika 3. Elektromagnetsko polje u trenutku $t=t_0$

Svaka vrijednost polja se ponavlja u prostornim intervalima

$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{f\sqrt{\mu\epsilon}}$$

Taj interval zovemo *valna dužina*. Argumente funkcije kosinus

$$\omega(t \mp z\sqrt{\mu\epsilon}) + \varphi$$

zovemo *faze*. Val se prostire brzinom

$$v_f = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

U ovom slučaju tu brzinu nazivamo *fazna brzina* budući da se promatrač mora gibati tom brzinom u smjeru osi z da bi mjerio stalno istu fazu

$$\omega t \mp \omega\sqrt{\mu\epsilon}z + \varphi = \text{konst.} \Rightarrow \omega dt \mp \omega\sqrt{\mu\epsilon}dz = 0 \Rightarrow v_f = \pm \frac{dz}{dt} = \pm \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

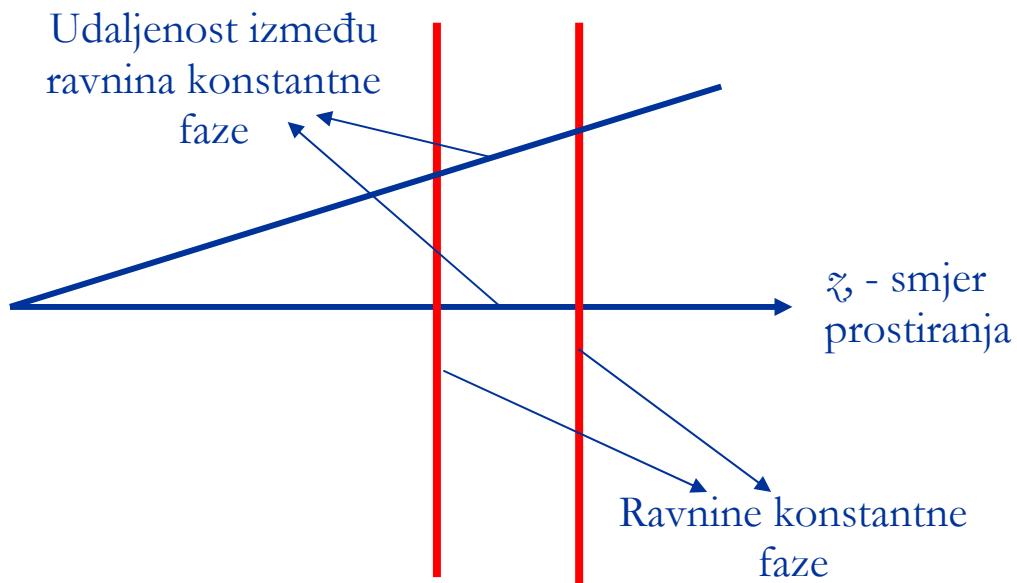
Vrijedi $v_f = \lambda f$. Ovaj izraz povezuje prostornu i vremensku promjenu polja u elektromagnetskom valu. Veličinu

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$$

zovemo *fazna konstanta*. Ona je mjeru brzine promjene faze s udaljenošću z u određenom trenutku $t=t_0$. Valnu dužinu i faznu brzinu možemo izraziti i u funkciji fazne konstante kao

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} ; \quad v_f = \frac{\omega}{\beta}$$

Brzina promjene faze je za val koji se prostire u z smjeru najveća u tom istom smjeru budući da je udaljenost između dvije površine konstantnih faza u svakom drugom smjeru veća (Slika 4).



Slika 4. Udaljenost između ravnina konstantne faze

Sukladno tome, ako odaberemo koordinatni sustav takav da se val prostire u proizvolnjem smjeru (a ne u smjeru osi z) brzine promjene faza u smjeru koordinatnih osi će biti manje od brzine kojom se faza mijenja u smjeru prostiranja koji je okomit na ravnine konstantnih faza. Ako fazne konstante u mjeru koordinatnih osi označimo kao $\beta_x, \beta_y, \beta_z$ i fazu u $t=0$ kao φ onda je faza u bilo kojoj točki (x,y,z) zadana s

$$\omega t - (\beta_x x + \beta_y y + \beta_z z) + \varphi$$

Ravnine konstantne faze su zadane s

$$\beta_x x + \beta_y y + \beta_z z = \text{konst.}$$

Smjer gradijenta skalarne funkcije $\beta_x x + \beta_y y + \beta_z z$ je smjer okomice na površine konstantne faze i ujedno smjer prostiranja vala, a veličina gradijenta daje mjeru promjene faze s udaljenošću, odnosno faznu konstantu β u smjeru širenja vala

$$\nabla(\beta_x x + \beta_y y + \beta_z z) = \beta_x \vec{a}_x + \beta_y \vec{a}_y + \beta_z \vec{a}_z$$

Veličina gradijenta je

$$\beta = \sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2}$$

Ako uvedemo vektor

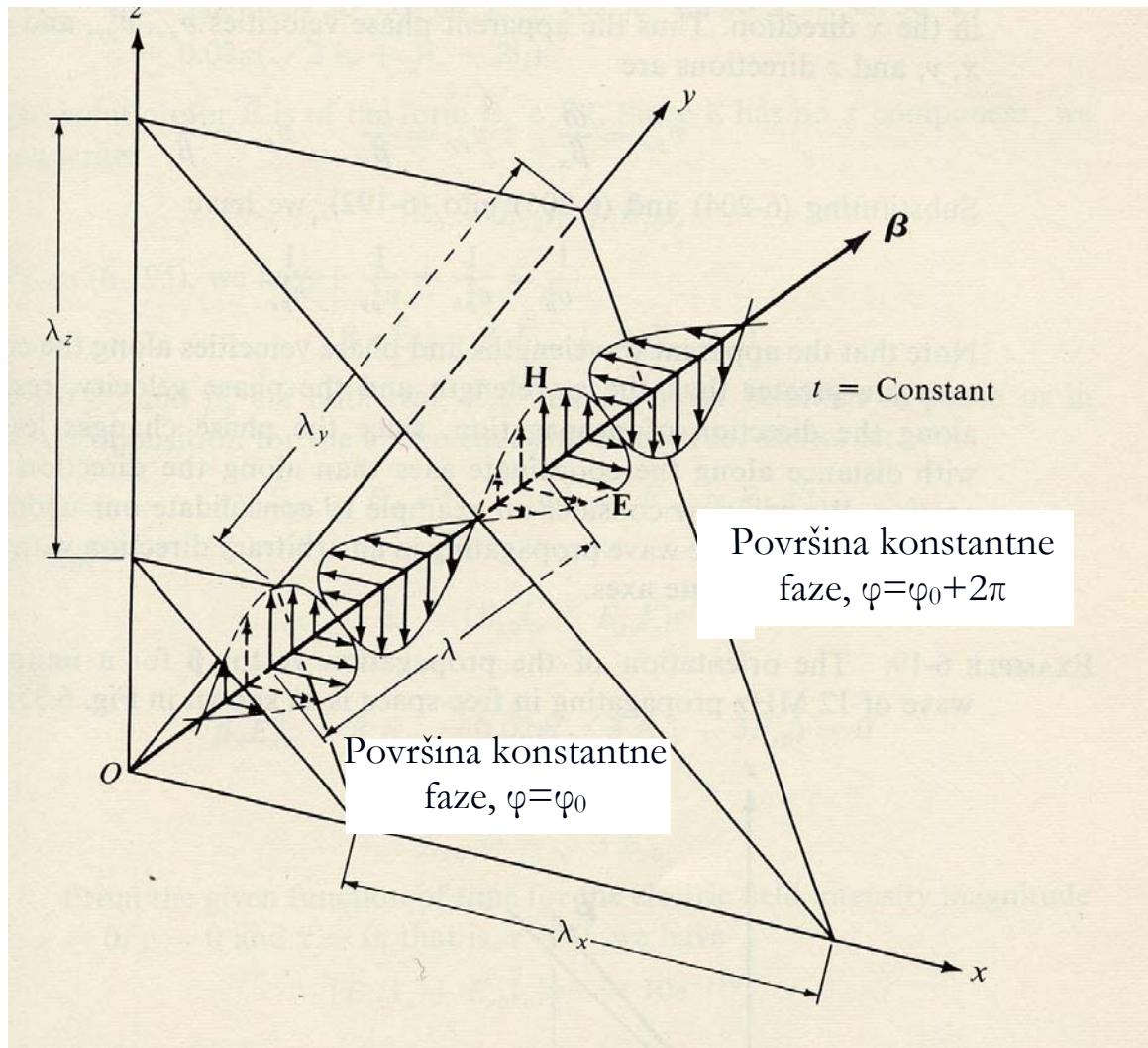
$$\vec{\beta} = \beta_x \vec{a}_x + \beta_y \vec{a}_y + \beta_z \vec{a}_z$$

i vektor položaja točke (x, y, z)

$$\vec{r} = x \vec{a}_x + y \vec{a}_y + z \vec{a}_z$$

fazu u proizvoljnoj točki možemo pisati kao

$$\omega t - \vec{\beta} \cdot \vec{r} + \varphi$$



Slika 5. Prostiranje vala u proizvoljnem smjeru

Ako označimo jakost električnog polja u ravnini nulte faze s \mathbf{E}_0 možemo napisati izraz za vektor jakosti električnog polja pridružen homogenom ravnom valu koji se prostire u smjeru β kao

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{\beta} \cdot \vec{r} + \varphi)$$

U fazorskoj domeni pišemo

$$\underline{\vec{E}} = \vec{E}_0 e^{j\varphi} e^{-j\vec{\beta} \cdot \vec{r}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{-j\vec{\beta} \cdot \vec{r}}$$

Budući da \mathbf{E}_0 mora biti u ravnini okomitoj na smjer prostiranja vala mora vrijediti

$$\vec{E} \cdot \vec{\beta} = \vec{E}_0 \cdot \vec{\beta} = \underline{\vec{E}}_0 \cdot \vec{\beta} = 0$$

Slično, vektor jakosti magnetskog polja pridružen homogenom ravnom valu koji se prostire u smjeru β je

$$\vec{H} = \vec{H}_0 \cos(\omega t - \vec{\beta} \cdot \vec{r} + \varphi) ; \quad \underline{\vec{H}} = \vec{H}_0 e^{j\varphi} e^{-j\vec{\beta} \cdot \vec{r}} = \underline{\vec{H}}_0 e^{-j\vec{\beta} \cdot \vec{r}}$$

Budući da \mathbf{H}_0 mora biti u ravnini okomitoj na smjer prostiranja vala mora vrijediti

$$\vec{H} \cdot \vec{\beta} = \vec{H}_0 \cdot \vec{\beta} = \underline{\vec{H}}_0 \cdot \vec{\beta} = 0$$

Nadalje, \mathbf{E}_0 i \mathbf{H}_0 moraju biti u međusobno okomiti, a njihov vektorski produkt (Poyntingov vektor) mora biti usmjeren u smjeru prostiranja vala. Omjer njihovih apsolutnih vrijednosti mora biti jednak valnom otporu pa je

$$\frac{E_0}{H_0} = Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \frac{\omega\mu}{\omega\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{\omega\mu}{\beta} \Rightarrow \vec{H}_0 = \frac{1}{\omega\mu} \vec{\beta} \times \vec{E}_0 ; \quad \vec{H} = \frac{1}{\omega\mu} \vec{\beta} \times \vec{E}$$

Valna dužina λ u smjeru prostiranja vala je

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

a prividne valne dužine u smjeru koordinatnih osi jesu

$$\lambda_x = \frac{2\pi}{\beta_x}, \lambda_y = \frac{2\pi}{\beta_y}, \lambda_z = \frac{2\pi}{\beta_z}$$

pa vrijedi

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda_x^2} + \frac{1}{\lambda_y^2} + \frac{1}{\lambda_z^2}$$

Fazna brzina u smjeru prostiranja je

$$\lambda = \frac{\omega}{\beta}$$

Za promatrača koji se giba u smjeru osi x su y i z konstantni. Stoga se on mora gibati brzinom

$$v_{fx} = \frac{\omega}{\beta_x}$$

da bi mjerio stalno istu fazu. Tu brzinu zovemo prividna fazna brzina u smjeru osi x . Prividne brzine u smjeru y i z osi jesu

$$v_{fy} = \frac{\omega}{\beta_y} ; \quad v_{fz} = \frac{\omega}{\beta_z}$$

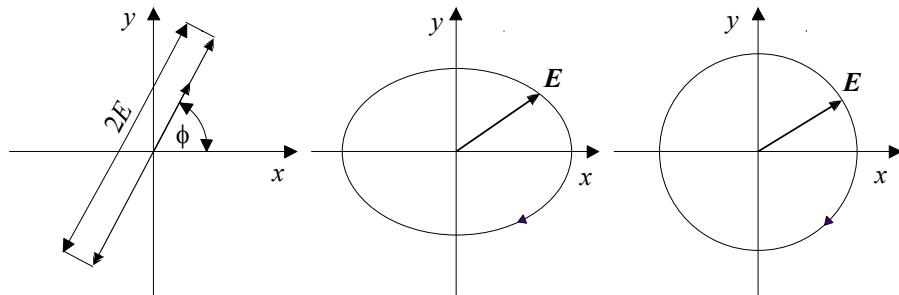
pa vrijedi

$$\frac{1}{v_{fx}^2} = \frac{1}{v_{fx}^2} + \frac{1}{v_{fy}^2} + \frac{1}{v_{fz}^2}$$

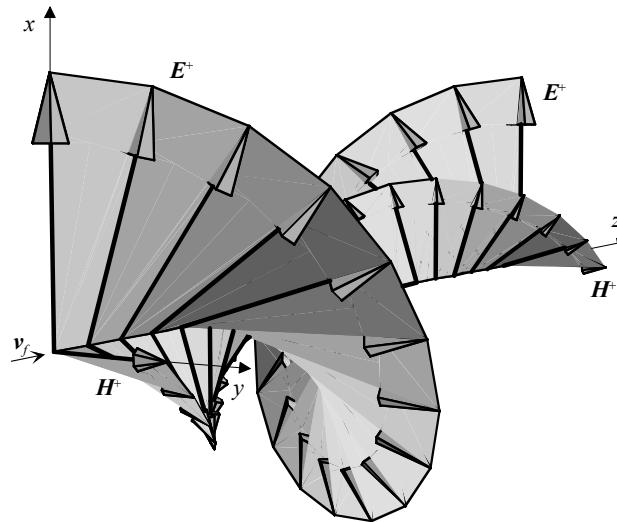
Prividne valne dužine i fazne brzine u smjeru koordinatnih osi su veće od valne dužine i fazne brzine u smjeru prostiranja vala.

Polarizacija

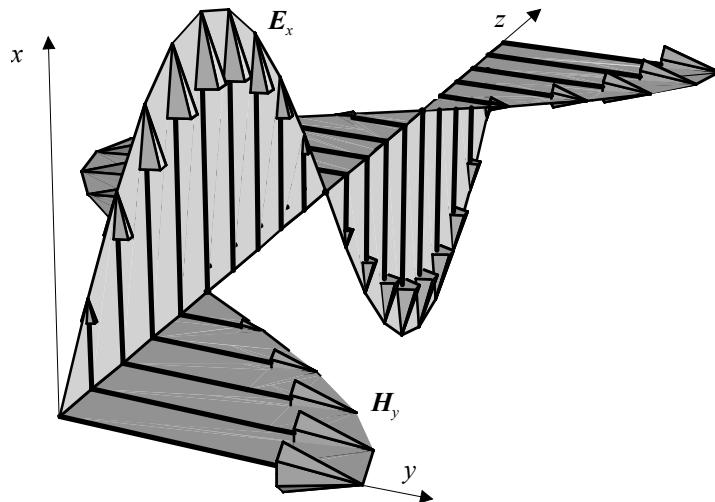
Krivulja položaja vrha vektora \mathbf{E} ravnog vala, koja je funkcija vremena u danoj točki u prostoru, općenito određuje polarizaciju vala. U slučaju linearne polarizacije ta krivulja je pravac, dok je u slučaju kružne polarizacije kružnica. U općem slučaju krivulja koju opisuje vrh vektora \mathbf{E} je elipsa, čije se dimenzije mogu odrediti pomoću analitičke geometrije.



Slika 6. Linearno, eliptički i kružno polarizirano električno polje ravnog vala



Slika 7. Kružno polarizirani direktni val



Slika 8. Linearno polarizirani direktni val

Na kraju možemo zaključiti da:

1. U dielektriku, zato jer je $\kappa = 0$, nema gubitka snage pri prostiranju vala.
2. Zato jer nema gubitaka snage, val se u dielektriku giba bez prigušenja. Konstanta prostiranja vala je imaginarna, $\gamma = j\omega/c$.
3. Fazna brzina gibanja ravnine konstantne faze u dielektriku jednaka je brzini svjetlosti u danom materijalu $v_f = c$.
4. Budući da nema prigušenja amplitude vala, i budući da su fazne brzine valova različitih frekvencija iste, to u idealnom dielektriku nema ni distorzije signala, koji može biti sastavljen iz cijelog spektra sinusnih valova različite frekvencije. To je vrlo važno svojstvo idealnog dielektrika. Slične osobine pokazuju i izrazito dobri izolatori.
6. Valna impedancija dielektrika je realan broj. To uključuje da je fazni pomak između fazora električnog i magnetskog polja vala jednak nuli, $\phi = 0$, tj. oni su u fazi. Dakle, prostorno su vektori električnog i magnetskog polja postavljeni pod kutom od 90° , dok su vremenski promatrano oni u fazi.
7. Srednja vrijednost kompleksnog Poyntingova vektora za direktni val u smjeru $+z$ u dielektriku je realna i konstantna pa srednja snaga koja se valom prenosi kroz jedinicu površine u dielektriku ne ovisi o prijeđenom putu z .

Elektromagnetski valovi u realnim dielektricima i vodičima (prigušenje i površinski učinak)

Do sad smo se bavili prostiranjem valova u idealnim dielektricima ($\kappa=0$), a sad ćemo razmotriti prostiranje valova u sredstvima s gubicima, posebice u dobim vodičima. Maxwellove jednadžbe u tom slučaju ($\rho_s=J_s=0$) poprimaju oblik

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \kappa \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{D} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} &= \mu \nabla \cdot \vec{H} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta \vec{E} - \mu \kappa \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Uz pretpostavku $E_y = E_z = 0$ ova se jednadžba svodi na

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \mu \kappa \frac{\partial E_x}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$

Ako uvedemo uvjet $\vec{E} = E_x(z, t) \vec{a}_x$ (ravni val) slijedi

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \mu \kappa \frac{\partial E_x}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$

Ograničit ćemo naše razmatranje samo na sinusno promjenjiva polja, pa ova jednadžba u fazorskoj domeni poprima oblik

$$\frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial z^2} - j \omega \mu \kappa \underline{E}_x + \omega^2 \mu \epsilon \underline{E}_x = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial z^2} = j \omega \mu (\kappa + j \omega \epsilon) \underline{E}_x$$

Definiramo kompleksnu konstantu γ

$$\gamma^2 = j \omega \mu (\kappa + j \omega \epsilon)$$

koju zovemo *konstanta prostiranja*. Možemo pisati

$$\frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial z^2} = \gamma^2 \underline{E}_x \Rightarrow \underline{E}_x(z) = \underline{A} e^{-\gamma z} + \underline{B} e^{\gamma z}$$

Ovdje su \underline{A} i \underline{B} proizvoljne kompleksne konstante

$$\underline{A} = A e^{j\delta} \quad ; \quad \underline{B} = B e^{j\nu}$$

Budući da je γ kompleksan broj možemo ga pisati u obliku

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

gdje je α realni a β imaginarni dio γ . Izrazi za α i β slijede iz jednakosti

$$\begin{aligned} \gamma^2 &= -\omega^2 \mu \epsilon + j \omega \mu \kappa \Rightarrow \alpha^2 - \beta^2 = -\omega^2 \mu \epsilon \quad ; \quad 2\alpha\beta = \omega \mu \kappa \\ \alpha &= \frac{\omega}{\sqrt{2c}} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{\omega \epsilon}\right)^2} - 1} \quad ; \quad \beta = \frac{\omega}{\sqrt{2c}} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{\omega \epsilon}\right)^2} + 1} \quad ; \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \end{aligned}$$

Uvrštavanjem α i β u rješenje za električno polje u fazorskoj domeni dobivamo

$$\underline{E}_x(z) = Ae^{-\alpha z}e^{-j\beta z}e^{j\delta} + Be^{\alpha z}e^{j\beta z}e^{j\nu}$$

Preslikavanje u vremensku domenu rezultira s

$$E_x(z, t) = \operatorname{Re}\{\underline{E}_x(z)e^{j\omega t}\} = Ae^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \delta) + Be^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z + \nu)$$

Zanemarimo načas članove $e^{-\alpha z}$ i $e^{\alpha z}$ u ovom rješenju. Uočavamo da prvi i drugi član predstavljaju direktni (Slika 9a) i inverzni val (Slika 9b). Član $e^{-\alpha z}$ smanjuje vrijednost polja s rastućim z i time prigušuje direktni val koji se giba u $+z$ smjeru. Član $e^{\alpha z}$ smanjuje vrijednost polja s padajućim z i time prigušuje inverzni val koji se giba u $-z$ smjeru. Stoga konstantu α zovemo *prigušna konstanta*. Konstantu β zovemo *fazna konstanta* jer utječe na fazu putujućeg vala. Budući da smo identificirali direktni i inverzni val umjesto A i B možemo pisati

$$\underline{E}_x(z) = E_x^+ e^{-\gamma z} + E_x^- e^{\gamma z}$$

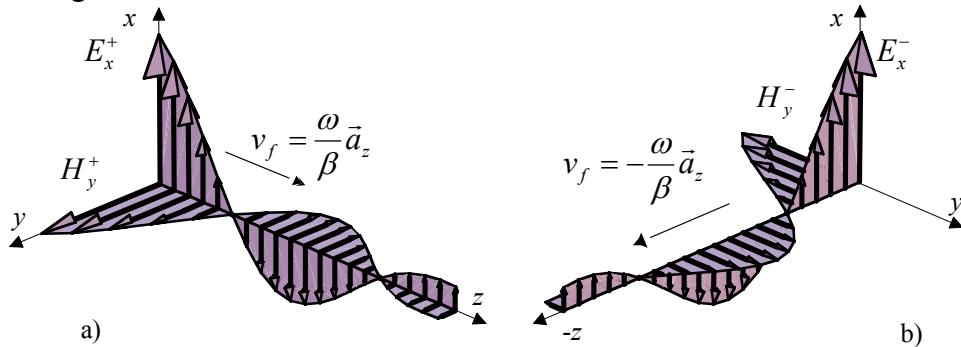
Odgovarajuće rješenje za jakost magnetskog polja slijedi iz Faradayevog zakona

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \Rightarrow \vec{H} = \underline{H}_y(z)\vec{a}_y = \frac{1}{Z}(\underline{E}_x^+ e^{-\gamma z} - \underline{E}_x^- e^{\gamma z})\vec{a}_y$$

Ovdje je Z valna impedancija materijala s gubicima koja iznosi

$$Z = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\kappa + j\omega\epsilon}} = \frac{\omega\mu}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} e^{j\arctan\frac{\alpha}{\beta}}$$

Ona je kompleksni broj. Naše rješenje predstavlja ravni val u materijalu s gubicima budući da su u ravnini konstantne faze amplitude polja svugdje jednake, a prigušuju se od jedne do druge ravnine.



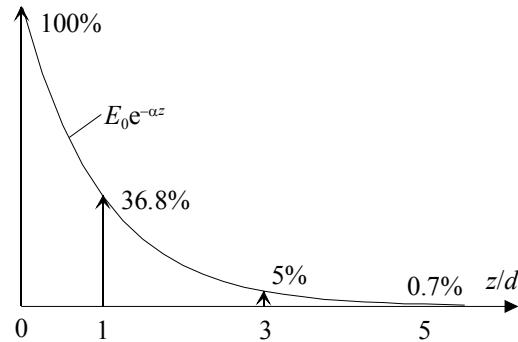
Slika 9. Direktni i inverzni val u materijalu s gubicima

Fazna brzina u materijalu s gubicima je

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\pm c\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{\omega\epsilon}\right)^2 + 1}}$$

Općenite značajke o prostiranju sinusnog ravnog vala u *vodljivom materijalu s gubicima* jesu:

1. U vodljivom materijalu, zbog konačne provodnosti ($\kappa \neq 0$), prigušna konstanta je uvijek različita od nule $\alpha \neq 0$, pa su oba i električno i magnetsko polje putujućeg vala *prigušeni* u smjeru gibanja vala.
2. Prigušenje amplituda oba polja u ravnini konstantne faze vala određeno je konstantom prigušenja α , koja ovisi o frekvenciji polja vala. Prigušenje raste s frekvencijom vala i s povećanjem provodnosti materijala.
3. U analizi elektromagnetskih valova rabi se pojam "dubine prodiranja" vala u vodljivi materijal. To je udaljenost na kojoj se amplituda polja vala priguši na iznos $1/e = 0,368$, tj. na približno 36,8% početne vrijednosti, kao što je prikazano na slici 10.



Slika 10. Eksponencijalno prigušenje amplitude električnog polja ravnog vala u smjeru gibanja vala duž osi $+z$ u vodljivom materijalu

Dubina prodiranja vala definirana je sa $z=d$, kada je $\alpha z = \alpha d = 1$, što daje

$$d = \frac{1}{\alpha} = \frac{c\sqrt{2}}{\omega} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{\omega\epsilon}\right)^2} - 1}$$

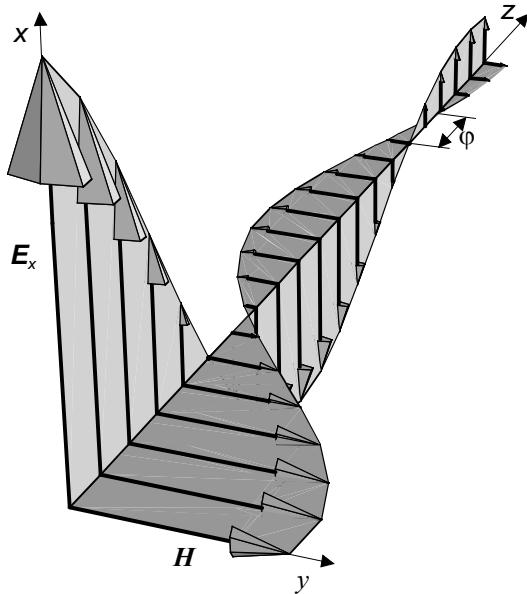
Mjeri se u *metrima* (m). Dubina prodiranja vala ovisi o frekvenciji vala i o značajkama materijala. Dubina prodiranja vala je to manja što je frekvencija viša, jer se val brže prigušuje. Isto tako materijal s većom provodnošću κ ima manju dubinu prodiranja. Uobičajeno je u primjenjenoj teoriji elektromagnetskih polja računati s udaljenošću $z=3d$, odnosno $z=5d$, na kojoj se amplituda polja priguši na približno 5%, odnosno približno 0.7% početnog iznosa, kao s udaljenošću na kojoj se polje praktički potpuno priguši. Dakle, *uzima se da val iščezne na udaljenosti jednakoj trostrukoj dubini prodiranja* i to s pogreškom od 5%, ili na udaljenosti jednakoj peterostrukoj dubini prodiranja, tada s pogreškom od 0.7%.

1. *Električno i magnetsko polje nisu u fazi*. Magnetsko polje zaostaje za električnim za fazni kut ϕ . Njegov iznos je

$$\phi = \arctan \frac{\alpha}{\beta}$$

i ovisi o frekvenciji i gradivnim značajkama materijala. Što je provodnost materijala veća i što je niža frekvencija polja, to je kut faznog pomaka između

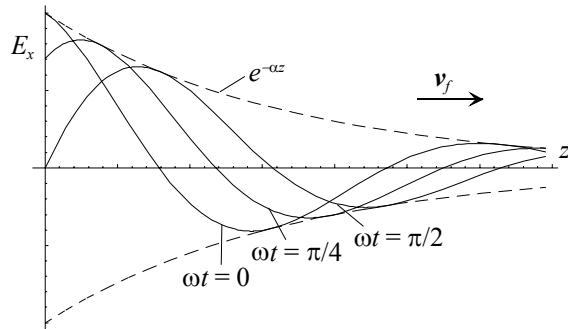
električnog i magnetskog polja veći. Lako je pokazati da je za dielektrike i za materijale sa zanemarivo malom provodnošću $\phi \approx 0$, a da je za materijale s vrlo velikom provodnošću, kao npr. za kovine $\phi \approx 45^\circ$. Zato se može ustvrditi da se za sve materijale i za cijelo područje tehničkih frekvencija kut faznog pomaka nalazi u granicama $0 \leq \phi \leq 45^\circ$.



Slika 11. Vektori električnog i magnetskog polja ravnog prigušenog vala u vodljivom materijalu s gubicima

Na slici 11. prikazana je ovisnost vektora E_x i H_y o odrednici z u određenom vremenskom trenutku $t=0$, gdje amplitude električnog i magnetskog polja opadaju eksponencijalno, kako se val giba duž osi z . Val magnetskog polja fazno je pomaknut prema valu električnog polja za kut ϕ .

5. Konačna provodnost materijala $\kappa \neq 0$ ne samo da ima za posljedicu prigušenje putujućeg TEM vala, nego utječe i na njegovu faznu brzinu. Ravnina konstantne faze prostire se faznom brzinom, koja v_f raste s frekvencijom vala tako dugo dok su značajke ϵ , μ , κ neovisne o frekvenciji.



Slika 12. Gibanje električnog polja ravnog vala koji je linearno polariziran i prostire se duž osi z , prikazano u nekoliko vremenskih trenutaka

- Na slici 12. prikazali smo kako se električno polje putujućeg TEM vala giba brzinom v_f duž osi z tijekom vremena. Istovremeno se val i amplitudno prigušuje.
6. Prigušenje putujućeg vala, koji se prostire u vodljivom materijalu, posljedica je gubitaka energije na tom putu. Srednja snaga koja se prenosi putujućim valom kroz jediničnu površinu u okolišu točke na udaljenosti z od ishodišta određena je izrazom

$$N_{\text{Re},sr} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{|Z|} e^{-2\alpha z} \cos \varphi$$

E_0 je amplituda, tj. maksimalna vrijednost električnog polja u početnoj točki $z=0$. Razumljivo je da zbog prigušenja i električnog i magnetskog polja srednja specifična elektromagnetska snaga koju TEM val nosi sobom opada eksponencijalno s $e^{-2\alpha z}$. Za dano polje ta snaga ovisi o modulu impedancije, faznom pomaku i prigušenju u materijalu, koji su pak ovisni o frekvenciji i značajkama materijala.

Dvije su vrste materijala od posebnog interesa u analizi prostiranja ravnih valova. Jedni su *dobri izolatori*, u njima su struje pomaka mnogo veće od provodnih struja, tj. $\kappa/\omega\epsilon \ll 1$. Drugi su *dobri vodiči*, u njima su provodne struje mnogo veće od struja pomaka, tj. $\kappa/\omega\epsilon \gg 1$. Očito je da je temeljni kriterij za razvrstavanje jednostavnih materijala pri zadanoj frekvenciji polja u grupu dobrih izolatora, odnosno dobrih vodiča, iznos omjera provodnih i struja pomaka. Taj omjer $\kappa/\omega\epsilon$ određuje ponašanje materijala u polju elektromagnetskog vala zadane frekvencije. Sad ćemo razviti *približne izraze* za značajke α , β , γ , Z , v_f za ova dva slučaja. Dobiveni izrazi bitno će pojednostaviti i olakšati analizu prostiranja valova u materijalima s gubicima.

Dobri izolatori su materijali u kojima je provodna struja jako mala pa vrijedi

$$\frac{\kappa}{\omega\epsilon} \ll 1 \Rightarrow \sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{\omega\epsilon}\right)^2} \approx 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa}{\omega\epsilon}\right)^2$$

Pojednostavljeni izrazi za značajke vala u tom slučaju jesu

$$\alpha = \frac{\kappa}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad ; \quad \beta = \frac{\omega}{c} \quad ; \quad \gamma = \frac{\kappa}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} + j \frac{\omega}{c} \quad ; \quad Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

- Kod materijala i pri frekvenciji polja, kod kojih je $\kappa/\omega\epsilon \leq 0.2$, (tj. struje pomaka pet i više puta veće od provodnih), pogreška u proračunu prigušne konstante prema približnom izrazu iznosi samo 0.5% i manje. Očito je da prigušna konstanta nije ovisna o frekvenciji, dok je linearno proporcionalna provodnosti izolatora i idealnoj valnoj impedanciji (otporu).
- Prva aproksimacija za faznu konstantu kod dobrih izolatora je jednaka onoj kod idealnog dielektrika. Analiza točnosti je ista kao za prigušnu konstantu, već kod omjera $\kappa/\omega\epsilon \leq 0.2$ postiže se točnost s pogreškom od samo 0.5%. Fazna konstanta je linearno ovisna o frekvenciji.
- Ako je omjer $\kappa/\omega\epsilon \leq 0.2$, valnu impedanciju možemo izjednačiti s valnim otporom idealnog dielektrika. Pri tome činimo u realnom članu pogrešku od najviše 1.5%. Zanemarenjem imaginarnog člana činimo pogrešku od najviše 10%.

Na kraju možemo zaključiti, da se zbog vrlo malih vrijednosti provodnosti κ , polje sinusnog vala vrlo malo, tj. neznatno prigušuje u dobrom izolatoru, dok se u svemu drugom val praktično ponaša kao da se prostire u idealnom dielektriku. Tako npr. prigušna konstanta za porculan kod svih frekvencija do reda 10 GHz iznosi približno $16 \cdot 10^{-12}$ 1/m, što predstavlja vrlo malu vrijednost. Ili drugi primjer, val frekvencije 10 MHz prigušuje se u polistirenu samo 0.5% po kilometru duljine, a električno i magnetsko polje su mu fazno pomaknuti za kut $\varphi = 0.003^\circ$. Valna impedancija, fazna brzina i valna duljina u dobrom izolatoru manji su nego u vakuumu, budući je obično $\epsilon > \epsilon_0$ i $\mu = \mu_0$. Gubici u jedinici volumena, vrlo su mali, budući je provodnost κ vrlo mala u dobrim izolatorima.

Dobri vodiči su u sinusnim poljima karakterizirani omjerom $\kappa/\omega\epsilon \gg 1$. U dobrom vodiču struje pomaka mogu biti potpuno zanemarene u usporedbi s provodnim strujama. To je jedna od bitnih značajki ponašanja vodiča u sinusno promjenjivim poljima. Analizu ponašanja sinusnog vala u dobrim vodičima učinit ćemo preglednjom ako izvedemo približne izraze za temeljne značajke γ , α , β , Z i v_f materijala uvažavajući da je $\kappa/\omega \gg 1$. Dobri vodiči su materijali za koje je

$$\frac{\kappa}{\omega\epsilon} \gg 1 \Rightarrow \sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{\omega\epsilon}\right)^2} \approx \frac{\kappa}{\omega\epsilon}$$

Pojednostavljeni izrazi za značajke vala u to slučaju jesu

$$\begin{aligned} \alpha = \beta &= \sqrt{\frac{\omega\mu\kappa}{2}} \quad ; \quad \gamma = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu\kappa}{2}} \quad ; \quad Z = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\kappa}} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\kappa}} e^{j\frac{\pi}{4}} \\ v_f &= \frac{\omega}{\beta} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\kappa}} \quad ; \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\omega\mu\kappa}{2}}} \\ \vec{N}_{sr} &= \frac{1}{2} \left(\vec{E} \times \vec{H}^* \right) = \frac{1}{2} |\underline{H}_0|^2 e^{-2\alpha z} (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\kappa}} \vec{a}_z \end{aligned}$$

- Prigušna konstanta je za dobre vodiče vrlo velika. Tako za bakar kod 50 Hz ona iznosi 106 1/m, kod 10 MHz je 47000 1/m, a kod 1 GHz ona iznosi 470000 1/m. Prigušenje u dobrim vodičima vrlo je veliko, i to veće što su vodljivost i permeabilnost materijala veći i što je frekvencija polja viša. Tako se npr. val od 10 MHz u *bakru* na putu od 0.06 mm priguši na 5.8% početne vrijednosti. To znači da se val praktički potpuno prigušio i da valovi ne prodiru duboko u kovine. *Kovine djeluju kao štit protiv elektromagnetskih valova*. S druge strane i materijali s lošijom provodnošću, kao npr. *morska voda* sa značajkama $\kappa = 5$ S/m, $\epsilon = 81\epsilon_0$ i $\mu = \mu_0$, kod određenih frekvencija ponašaju se kao dobri vodiči. Uvjet koji mora biti ispunjen da bi morska voda bila dobar vodič jest da bude $\kappa/\omega\epsilon \geq 100$. Dakle, za valove frekvencije $f \leq 11$ MHz morska voda se ponaša kao dobar vodič. To je vrlo široki opseg frekvencija. Pa je tako npr. prigušna konstanta za morskou vodu za valove frekvencije 50 Hz $\alpha = 0.0314$ 1/m, za valove 10 kHz $\alpha = 0.4427$ 1/m i za valove 10 MHz $\alpha = 14.042$ 1/m. Zato će se u morskoj vodi elektromagnetski

valovi frekvencije 50 Hz na dubini od 50 m prigušiti na 20.8% početnog iznosa. Približno na isti iznos prigušit će se i valovi frekvencije 10 kHz na dubini od 7.1 m, odnosno valovi frekvencije 10 MHz na dubini od 0.225 m.

- Fazna konstanta približno je jednaka prigušnoj konstanti. Proporcionalna je drugom korijenu frekvencije, permeabilnosti i provodnosti materijala. Jedinica joj je 1/m. Vrijednosti fazne konstante za dobre vodiče su vrlo velike u usporedbi s iznosom fazne konstante za dobre izolatore pri istoj frekvenciji.
- Valna impedancija dobrih vodiča je kompleksna i ekstremno mala kod radiofrekvencija. Tako valna impedancija bakra ima modul 0.012Ω za frekvenciju 10 MHz. Proporcionalna je drugom korijenu frekvencije, permeabilnosti i recipročne vrijednosti provodnosti materijala. Realni i imaginarni dio su joj približno jednak, pa *fazni pomak između fazora električnog i magnetskog polja iznosi 45°* .
- Fazna brzina u dobrim vodičima je mnogo manja nego u praznom prostoru. Mjeri se u metrima po sekundi. Posebno treba istaknuti frekvencijsku ovisnost fazne brzine u dobrim vodičima i u vodljivim materijalima uopće. Tako su harmonici višeg reda složenog vala konstantno ubrzani u odnosu na one nižega reda.
- Fazna brzina vala u dobrom vodiču je mnogo manja od brzine vala iste frekvencije u vakuumu $v_f = c_0 = 1/(\mu_0 \epsilon_0)^{1/2}$, pa je *valna duljina u dobrom vodiču mnogo manja od one u vakuumu*. Općenito možemo zaključiti da je valna duljina u dobrom vodiču vrlo mala u usporedbi s valnom duljinom u praznom prostoru. Npr. kod frekvencije od 10 MHz valna duljina u vakuumu je 30 m, dok je u morskoj vodi 0.45 m, a u bakru je samo 0.133 mm.
- Budući je κ dobrih vodiča vrlo visok, pogotovo kovina, to su specifični gubici veliki, posebno na početku ($z=0$) dok val nije prigušen.

Na kraju možemo zaključiti da se u dobrim vodičima mogu zanemariti struje pomaka (prema provodnim strujama). Polje sinusnog vala se jako prigušuje, budući su specifični gubici u materijalu veliki. Magnetsko polje zaostaje za električnim za fazni kut koji približno iznosi $\phi \approx 45^\circ$. Kovine kao izrazito dobri vodiči su reflektori elektromagnetskih valova.

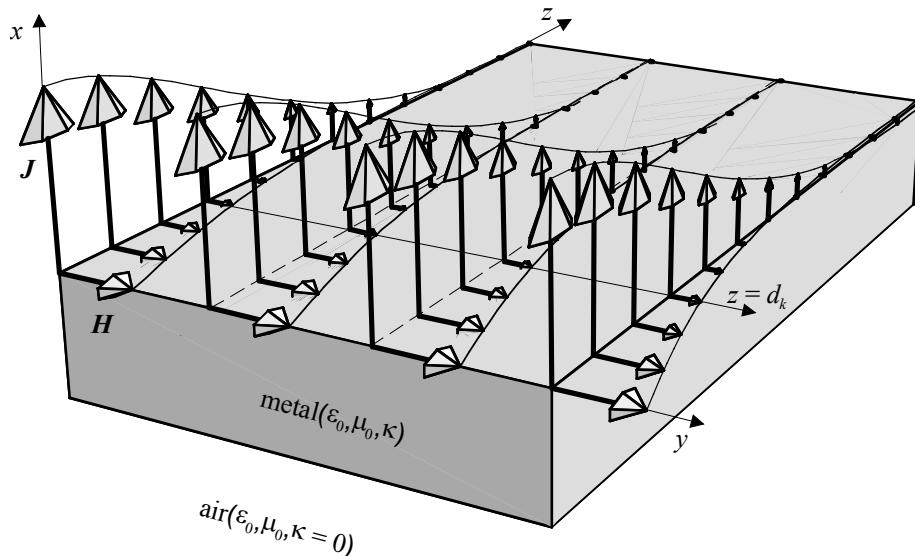
Površinski učinak

Prostiranje valova dosad smo analizirali u vodljivim materijalima s gubicima u i posebno u dobrim vodičima (čiji su izraziti predstavnici kovine). Utvrđili smo da se val koji polazi od površine dobrog vodiča i prostire u njegovu unutrašnjost, vrlo brzo priguši na beznačajnu vrijednost. Zato je u kovinama sinusno elektromagnetsko polje lokalizirano u tankom sloju uz površinu. To ima za posljedicu da su i sinusne provodne struje gustoće $J = \kappa E$, koje teku u kovinama kao posljedica polja, potisnute prema površini i usredotočene u tankom površinskom sloju vodiča. Ova pojava poznata je u elektromagnetskoj teoriji pod nazivom *površinski učinak* (skin efekt).

Objasnili smo da se u praktičnim tehničkim zadaćama uzima da se val u kovinama priguši na beznačajnu vrijednost (na približno 5% početnog iznosa, tj. polja na površini vodiča) na dubini $3d_k$ ispod površine kovine

$$d_k = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \kappa}}$$

Očito je da elektromagnetsko polje iščezne puno prije (nakon $3d_k$) nego što val uspije prijeći u kovini put koji bi bio jednak jednoj valnoj duljini ($\lambda_k = 6.28d_k$), pa o elektromagnetskom valu u kovini nema smisla govoriti. Budući da je sva struja u kovini usredotočena uz površinu u sloju debljine $3d_k$, to se često govorи o *strujnom oblogu* na površini vodiča.



Slika 13. Potiskivanje struja i jakosti magnetskog polja prema površini kovine

Iznos debljine tog strujnog sloja u bakru i aluminiju, koji su izrazito dobri tehnički vodiči, pri različitim frekvencijama polja dan je u tablici 2. Očito je da su te debljine strujnog sloja npr. u bakru reda od 28 mm pri 50 Hz do 2 μm pri frekvenciji od 10 GHz (mikrovalna frekvencija za radar i druge primjene) vrlo male. Stvarno ima smisla govoriti o strujnom oblogu, a nikako o jednolikoj raspodjeli struje u kovini.

Tablica 2. Dubina prodiranja i debljina strujnog sloja uz površinu bakra i aluminija

Frekvencija (Hz)	Bakar		Aluminij	
	Dubina prodiranja d_k (mm)	Debljina strujnog sloja $3d_k$ (mm)	Dubina prodiranja d_k (mm)	Debljina strujnog sloja $3d_k$ (mm)
50	9,4	28,2	12	36
60	8,6	25,8	11	33
10^3	2,1	6,3	2,7	8,1
10^6	0,07	0,21	0,08	0,24
10^9	0,002	0,006	0,003	0,009
10^{10}	$0,7 \cdot 10^{-3}$	$2,1 \cdot 10^{-3}$	$0,85 \cdot 10^{-3}$	$2,4 \cdot 10^{-3}$