MEĐUISPIT
21.11.2022.
Rješenja zadataka

1. (10 bodova) Na polici je poredano 5 različitih knjiga iz matematike i 5 različitih knjiga iz fizike. Odredite vjerojatnosti sljedećih događaja:

   (a) na početku i na kraju reda se nalazi knjiga iz matematike,

   (b) knjige iz iste struke nalaze se jedna do druge,

   (c) knjige su naizmjence raspoređene, tj. nikoje dvije knjige iz iste struke nisu susjedne.

Neka Ω označava prostor elementarnih događaja (tj. sve moguće poretke knjiga na polici) te A, B, C redom događaje opisane u podzadacima. Tada

$$|\Omega| = 10!,$$

$$|A| = \underbrace{5}_{\text{knjiga iz matematike na početku reda}} \cdot \underbrace{4}_{\text{knjiga iz matematike na kraju reda}} \cdot \underbrace{8!}_{\text{razmještaji preostalih knjiga}}, \quad \Rightarrow \mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{9} = 0.22222$$

$$|B| = \underbrace{2}_{\text{poredak matematike - fizike ili fizike - matematike}} \cdot \underbrace{5!}_{\text{razmještaj knjiga iz matematike}} \cdot \underbrace{5!}_{\text{razmještaj knjiga iz fizike}}, \quad \Rightarrow \mathbb{P}(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{1}{126} = 0.0079365$$

$$|C| = \underbrace{2}_{\text{dvije mogućnosti ovisno o tome počinjemo li s knjigom iz matematike ili fizike}} \cdot \underbrace{5!}_{\text{razmještaj knjiga iz matematike}} \cdot \underbrace{5!}_{\text{razmještaj knjiga iz fizike}} \quad \Rightarrow \mathbb{P}(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{1}{126} = 0.0079365$$

2. (10 bodova)

(a) Neka su A, B, C događaji. Uz pretpostavku da su sve uvjetne vjerojatnosti dobro definirane, dokažite

$$\mathbb{P}(B \cup C \mid A) = \mathbb{P}(B \mid A) + \mathbb{P}(C \mid A) - \mathbb{P}(B \cap C \mid A).$$

(b) Na ulazu u zgradu nalaze se 3 automata za kavu. Jedan je neispravan, jedan uvijek radi, a jedan radi s vjerojatnošću 0.5. S tri kovanice po 5 kn u džepu, Matko želi utvrditi koji je automat potpuno ispravan. Ako je isprobao prvi i nije radio, a zatim drugi dvaput za redom od čega je oba puta radio, kolika je vjerojatnost da je drugi automat potpuno ispravan?

(a) $$\mathbb{P}(B \cup C \mid A) = \frac{\mathbb{P}((B \cup C) \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}((B \cap A) \cup (C \cap A))}{\mathbb{P}(A)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(C \cap A) - \mathbb{P}((B \cap A) \cap (C \cap A))}{\mathbb{P}(A)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} + \frac{\mathbb{P}(C \cap A)}{\mathbb{P}(A)} - \frac{\mathbb{P}((B \cap C) \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$$

$$= \mathbb{P}(B \mid A) + \mathbb{P}(C \mid A) - \mathbb{P}(B \cap C \mid A)$$

(b) Definiramo potpun sustav događaja

$$H_i = \{ i\text{-ti automat je potpuno ispravan} \}, \quad i = 1, 2, 3,$$

te događaj

$$A = \{ \text{prvi automat nije radio, a drugi je dvaput za redom radio} \}.$$

Imamo

$$\mathbb{P}(H_i) = \frac{1}{3}, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\mathbb{P}(A \mid H_1) = 0,$$

vjerojatnost da prvi automat radi s vjerojatnošću 0.5 (uz uvjet H_2)

vjerojatnost događaja A (uz uvjet H_2 i da prvi automat radi s vjerojatnošću 0.5)

$$\underbrace{\mathbb{P}(A \mid H_2)}_{} = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \overbrace{\frac{1}{2} \cdot 1}^{} = \frac{3}{4},$$

ako prvi automat nije potpuno ispravan, onda (s jednakim vjerojatnostima) može biti potpuno neispravan ili raditi s vjerojatnošću 0.5

vjerojatnost da je prvi automat potpuno neispravan (uz uvjet H_2)

vjerojatnost događaja A (uz uvjet H_2 i da je prvi automat potpuno neispravan)

$$\mathbb{P}(A \mid H_3) = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}_{} + \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 0}_{} = \frac{1}{8}.$$

vjerojatnost da je prvi automat potpuno neispravan (uz uvjet H_3)

vjerojatnost događaja A (uz uvjet H_3 i da je prvi automat potpuno neispravan)

vjerojatnost da prvi automat radi s vjerojatnošću 0.5 (uz uvjet H_3)

vjerojatnost događaja A (uz uvjet H_3 i da prvi automat radi s vjerojatnošću 0.5)

Prema Bayesovoj je formuli

$$\mathbb{P}(H_2 \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid H_2)\mathbb{P}(H_2)}{\sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(A \mid H_i)\mathbb{P}(H_i)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{24}} = \frac{6}{7} = 0.85714$$

3. (10 bodova) Slučajni vektor (X, Y) dan je zakonom razdiobe:

$X \setminus Y$	-1	0	1
-1	0	$\frac{1}{4}$	0
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{4}$	0

(a) Izračunajte koeficijent korelacije slučajnih varijabli X i Y.

(b) Jesu li slučajne varijable X i Y nezavisne? Dokažite svoj odgovor.

(c) Jesu li slučajne varijable $X + Y$ i $X - Y$ nezavisne? Dokažite svoj odgovor.

(a) Odredimo najprije marginalne razdiobe

$X \setminus Y$	-1	0	1	
-1	0	$1/4$	0	$1/4$
0	$1/4$	0	$1/4$	$1/2$
1	0	$1/4$	0	$1/4$
	$1/4$	$1/2$	$1/4$	

$$\Rightarrow X, Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}X = \mathbb{E}Y = -\frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{4} = 0$$

$$\mathbb{E}(XY) = -1 \cdot 0 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot 0 \cdot \frac{1}{4} = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y = 0$$

$$\Rightarrow r(X, Y) = 0$$

(b) Budući da

$$\mathbb{P}(X = -1, Y = -1) = 0 \neq \frac{1}{16} = \mathbb{P}(X = -1)\,\mathbb{P}(Y = -1),$$

X i Y nisu nezavisne.

(c) Odredimo najprije razdiobu slučajnog vektora $(X+Y, X-Y)$:

X	Y	p_i	$X+Y$	$X-Y$
-1	-1	0	-2	0
-1	0	$1/4$	-1	-1
-1	1	0	0	-2
0	-1	$1/4$	-1	1
0	0	0	0	0
0	1	$1/4$	1	-1

X	Y	p_i	$X+Y$	$X-Y$
1	-1	0	0	2
1	0	$1/4$	1	1
1	1	0	2	0

$\Rightarrow$

X+Y \ X−Y	−2	−1	0	1	2	
−2	0	0	0	0	0	0
−1	0	1/4	0	1/4	0	1/2
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1/4	0	1/4	0	1/2
2	0	0	0	0	0	0
	0	1/2	0	1/2	0	

$\Rightarrow$

X+Y \ X−Y	−1	1	
−1	1/4	1/4	1/2
1	1/4	1/4	1/2
	1/2	1/2	

Budući da za sve $i, j \in \{-1, 1\}$ vrijedi

$$\mathbb{P}(X+Y=i,\ X-Y=j) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \mathbb{P}(X+Y=i)\,\mathbb{P}(X-Y=j),$$

slijedi da slučajne varijable $X+Y$ i $X-Y$ jesu nezavisne.

4. (10 bodova) Pokus se sastoji od istovremenog bacanja novčića i igraće kocke. Pokus ponavljamo sve dok se ne pojavi pismo na novčiću ili šestica na kocki, to jest, barem jedan od ta dva događaja.

   Neka slučajna varijabla X označava ukupan broj ponavljanja pokusa, a Y ukupan broj pokusa u kojima je na novčiću pala glava.

   (a) Odredite očekivanje slučajne varijable X.

   (b) Odredite očekivanje slučajne varijable Y.

Vjerojatnost uspjeha u jednom ponavljanju pokusa je jednaka

$$p = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{vjerojatnost pojavljivanja pisma na novčiću}} + \underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{vjerojatnost pojavljivanja šestice na kocki}} - \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}}_{\text{vjerojatnost presjeka dva navedena događaja}} = \frac{7}{12}.$$

(a) Uočimo da je X geometrijska slučajna varijabla s parametrom p. Zato

$$\mathbb{E}X = \frac{1}{p} = \frac{12}{7}.$$

(b) Uočimo da Y prima vrijednosti u skupu $\mathbb{N}_0$.

Vidimo da je $Y = 0$ u slučaju da odmah u prvom ponavljanju na novčiću padne pismo (i pokus odmah završi), tj.

$$\mathbb{P}(Y=0) = \frac{1}{2}.$$

Općenito, za $n \in \mathbb{N}$ je $Y = n$ u slučaju da u prvih n ponavljanja na novčiću padne glava, a od toga u prvih $n-1$ ponavljanja na kocki treba pasti broj različit od 6. U n-tom ponavljanju na kocki može pasti 6 (pa pokus završava) ili broj različit od 6, a tada u $(n+1)$-om ponavljanju na novčiću treba pasti pismo (inače bi broj glava bio veći od n).

Zato slijedi

$$\mathbb{P}(Y=n) = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1$$

$$= \left(\frac{5}{12}\right)^{n-1}\cdot\frac{7}{24} \qquad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Dakle,

$$\mathbb{E}Y = 0\cdot\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1}\cdot\frac{7}{24} = \frac{7}{24}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1}$$

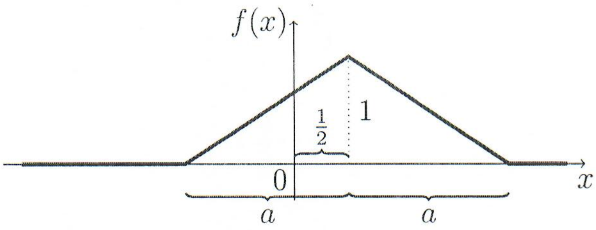
$$= \left[\begin{array}{ll} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad / \frac{d}{dx} & \\ & |x|<1 \\ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} & \end{array}\right]$$

$$= \frac{7}{24}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{5}{12}\right)^2} = \frac{6}{7} = 0.85714$$

5. (10 bodova)

(a) Dokažite da za funkciju razdiobe F_X slučajne varijable X vrijedi $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$.

(b) Funkcija gustoće slučajne varijable X zadana je grafom:



i. Izračunajte $\mathbb{E}(X^3)$.

ii. Odredite gustoću slučajne varijable $Y = X^2 + 1$.

(a) Neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ proizvoljan padajuć niz realnih brojeva takav da $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ stavimo $A_n := \{X \le x_n\}$. Tada je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ padajuć niz događaja (tj. $A_n \supseteq A_{n+1}$ za sve $n \in \mathbb{N}$) i $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$.

Zato slijedi:

$$\lim_{n\to\infty} F_X(x_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \begin{bmatrix}\text{neprekidnost vjerojatnosti} \\ \text{u odnosu na padajuće} \\ \text{nizove događaja}\end{bmatrix} = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$$

pa zbog proizvoljnosti niza (x_n) slijedi $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$.

(b)

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \begin{bmatrix}\text{površina ispod} \\ \text{grafa funkcije} \\ \text{gustoće}\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\cdot 2a \cdot 1 = a \Rightarrow a = 1$$

Dakle, gustoća od X je

$$f_X(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \\ -x + \frac{3}{2}, & x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

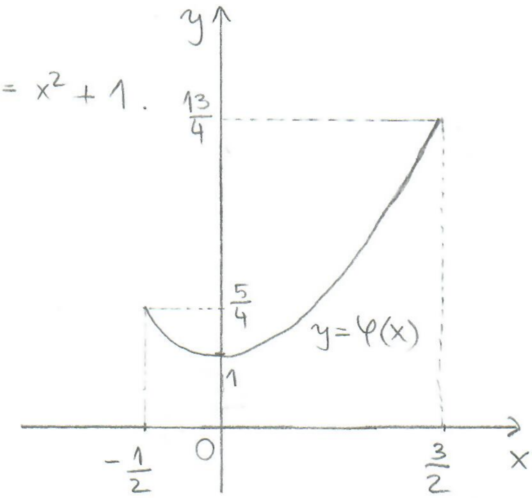
i. $\mathbb{E}(X^3) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^3 f(x)\,dx = \int\limits_{-1/2}^{1/2} x^3\left(x+\frac{1}{2}\right)dx + \int\limits_{1/2}^{3/2} x^3\left(-x+\frac{3}{2}\right)dx$

$$= \left(\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{8}x^4\right)\Bigg|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + \left(-\frac{1}{5}x^5 + \frac{3}{8}x^4\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{80} + \frac{29}{80} = \frac{3}{8} = 0.375$$

ii. Vidimo da je $Y = \varphi(X)$, gdje

$$\varphi : \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = x^2 + 1.$$



Uočimo da je φ injektivna na intervalima $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$ i $\left[0, \frac{3}{2}\right]$ pa zato:

1° $x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right] \Rightarrow y \in \left[1, \frac{5}{4}\right]$

$$y = x^2 + 1 \Rightarrow x = -\sqrt{y-1} =: \psi_1(y)$$

$$\Rightarrow g_1(y) = f_X(\psi_1(y))\,|\psi_1'(y)| = \left(\frac{1}{2} - \sqrt{y-1}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{y-1}}, \quad y \in \left[1, \frac{5}{4}\right]$$

2° $x \in \left[0, \frac{3}{2}\right] \Rightarrow y \in \left[1, \frac{13}{4}\right]$

$$y = x^2 + 1 \Rightarrow x = \sqrt{y-1} =: \psi_2(y)$$

$$\Rightarrow g_2(y) = f_X(\psi_2(y))\,|\psi_2'(y)| = \begin{cases} \left(\frac{1}{2} + \sqrt{y-1}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{y-1}}, & y \in \left[1, \frac{5}{4}\right] \\ \left(\frac{3}{2} - \sqrt{y-1}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{y-1}}, & y \in \left[\frac{5}{4}, \frac{13}{4}\right] \end{cases}$$

Gustoća od Y je jednaka:

$$f_Y(y) = g_1(y) + g_2(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y-1}}, & y \in \left[1, \frac{5}{4}\right] \\ \left(\frac{3}{2} - \sqrt{y-1}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{y-1}}, & y \in \left[\frac{5}{4}, \frac{13}{4}\right] \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$