1 X X O E Z 0 0 1

A.Pavić-I.Felja

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE (07/08)

ZADACI ZA VJEŽBU (1. CIKLUS)

Sadržaj (po tjednima nastave)

I.tjedan
I.1 Osnove elektriciteta.

II.tjedan
II.1 Električna struja i pripadne pojave .
II.2 Osnovne veličine električnih krugova (Kirchhoffovi zakoni).

III.tjedan
III.1 Jednostavni krugovi istosmjerne struje.
III.2 Kondenzatorski spojevi.

IV.tjedan
IV.1 Složeni krugovi istosmjerne struje.

FOTOKOPIRANO
S DOZVOLOM
AUTORA

Predgovor

Rješavanje problema (zadataka) u okviru Osnova elektrotehnike djelotvoran je oblik učenja koji studentima pomaže da bolje shvate teorijsku podlogu nastavnog gradiva te da razviju inženjerski pristup neophodan za kasnije rješavanje složenijih problema.

Zadaća ove zbirke zadataka jest dati širi izbor zadataka, grupiranih po tjednima nastave (a unutar njih po temama novog nastavnog programa) koji će omogućiti pripremanje međuispita i završnog ispita, kao i kontinuirano samostalno vježbanje koje najdjelotvornije otkriva praznine i slabosti u razumijevanju nastavnog gradiva. Obrađeni problemi karakteristični su za pojedine nastavne cjeline, a ukupni broj problema nastojali smo održati u studentima prihvatljivim granicama.

Među problemima u svakoj temi ima i onih (označenih zvjezdicom), koji po zahtjevnosti prelaze granice obvezatnog nastavnog gradiva, a namijenjeni su kao izazov i prilika studentima željnim proširenja znanja.

Na početku svake teme navedeni su njome obuhvaćeni pojmovi, kao i jednadžbe (formule) potrebne za rješavanje u temi obrađenih problema. Uz to, da bi se studente uvelo u postupke rješavanja, svaka tema započinje s nekoliko karakterističnih primjera za koje su prikazani postupci rješavanja. Zadaci su predviđeni za samostalan rad studenata i provjeru vladanja gradivom pojedinih tema. Oni ne sugeriraju moguće oblike odgovora i traže da student samostalno dođe i do oblika i brojčanog iznosa rješenja, nakon čega je studenti lakše rješavaju ispitne zadatke s ponuđenim odgovorima.

Zagreb, 7. rujna 2007.

Autori

I. Tjedan predavanja

Tema I.1 Osnove elektriciteta

OBUHVAĆENI POJMOVI

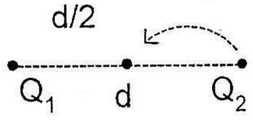
- -električna sila i naboj, točkasti i plošni raspored naboja;
- - električno polje, jakost polja, silnice, homogeno polje;
- - potencijalna energija naboja, električni potencijal i napon;
- - ekvipotencijalne linije i plohe, odnos polja i potencijala;
- - vodiči i izolatori, električna influencija i polarizacija, dielektričnost i dielektrička čvrstoća izolatora;.
- - električni kapacitet i kondanzator, energija na kapacitetu.

POTREBNE JEDNADŽBE:

$\varepsilon_o=8{,}854\cdot10^{-12}$ C/Vm	*dielektričnost* vakuuma (električna konstanta)
$\varepsilon_r=\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$	*relativna dielektričnost* za sredstvo s dielektričnošću ε (za zrak se uzima da je ε_r=1)
$F=\dfrac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon d^2}$	iznos električne (Coulombove) sile između dvaju naboja Q_1 i Q_2 razmaknutih za *d* u sredstvu s dielektričnošću ε
E=F/Q	jakost električnog polja na mjestu gdje bi na dovedeni naboj *Q* djelovala električna sila *F* (definicija jakosti el. polja)
$E=\dfrac{\sigma}{\varepsilon}$	iznos jakosti električnog polja ispred ravne metalne ploče s jednolikom površinskom gustoćom naboja σ, u sredstvu dielektričnosti ε.
$\varphi_A = W_p/Q$	veza potencijala točke A u el. polju i potencijalne energije W_p koju ima naboj *Q* kada se dovede u tu točku
$\varphi(x) = - E\cdot x + \varphi_0$	promjena potencijala u smjeru (*x*) homogenog električnog polja jakosti ***E***, gdje je φ_0 potencijal početne (referentne) točke
$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B$	električni napon između točaka A i B jest razlika njihovih potencijala
$A_{12} = W_1 - W_2 = Q\,U_{12}$	rad električnih sila pri pomicanju naboja *Q* iz točke 1 u točku 2 (kao razlika početne i konačne energije naboja)
$C = Q/U$	električni kapacitet kao omjer naboja i napona (definicija)
$C = \varepsilon\cdot S/d$	kapacitet pločastog kondenzatora s izolatorom dielektričnosti ε između ploča površine *S* razmaknutih za *d*
$Wc=QU/2=Q^2/2C=CU^2/2$	energija na kapacitetu (energija kondenzatora kapaciteta C na kojemu je razdvojen naboj *Q* uz napon *U*

Primjeri I.1

I.1-P1. Dva pozitivna točkasta naboja Q_1 i Q_2 nalaze se u zraku na međusobnoj udaljenosti *d*, daleko od drugih naboja. Odredite : a) iznos i smjer sile na svaki od naboja b) kolika će biti sila ako naboj Q_2 primaknemo naboju Q_1 na dvostruko manji razmak? c) iznos i smjer električnog polja koje naboj Q_1 stvara u točki gdje se nalazi naboj Q_2

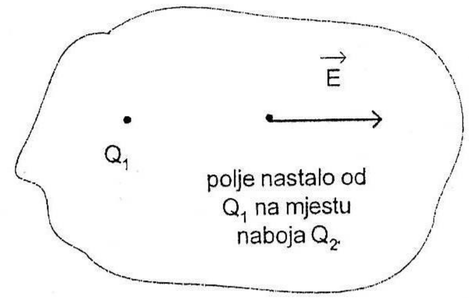


Zadano je: Q_1=1 nAs; Q_2=0,1 nAs *d*=5 mm ; ε_r=1 ; ε_o=8.854•10^{-12} As/Vm

Rješenje: Naboji su jednakog polariteta pa je sila odbojna. Iznos te sile izračunamo pomoću Coulombovog zakona. Vodimo računa da je sila vektorska veličina. Na svaki od naboja djeluje jednaka sila.

Coulombove sile

$$F=\frac{(Q_1\cdot Q_2)}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_r\cdot\varepsilon_o\cdot d^2} \qquad F=3.595\times10^{-3}\,\mathrm{N}$$



energetski uzbuđen prostor oko Q_1

Iz jednadžbe slijedi: dvostruko manji razmak → četverostruko veće sile.
Silu na naboj Q_2 možemo izračunati koristeći koncepciju elektrostatskog polja. Zamislimo na čas da u prostoru imamo samo naboj Q_1. Taj naboj u okolnom prostoru stvara posebno energetsko stanje koje nazivamo elektrostatsko polje. Na naboj Q_2 postavljen u taj prostor zbog toga (posredstvom polja) djeluje sila. Ako iznos te sile (koju na gornji način izračunamo) podijelimo sa samim nabojem Q_2 dobivamo fizikalnu veličinu koju nazivamo jakost elektrostatskog polja,

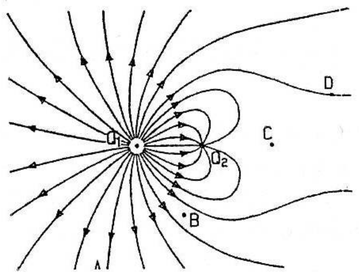
$$E=\frac{F}{Q_2} \qquad E=3.595\times10^{6}\,\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s^3A}} \qquad E=3.595\cdot10^{6}\cdot\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$$

Uobičajeno je da u elektrotehničkoj praksi jakost polja izražavamo jedinicom: V/m.
Pažnja: Ako vektor (silu) djelimo sa skalarom (naboj) dobivamo vektor. Dogovorno je uzeto da je smjer vektora polja, smjer sile na pozitivan naboj. Naboj Q_2 kojim smo se "poslužili" naziva se općenito: probni naboj. Sila na naboj Q_2 je sada: $F=E\cdot Q_2$
Zaključak: Ako odredimo vektor elektrostatskog polja naboja Q_1 u svim točkama prostora možemo jednostavno određivati smjer iznos sila na bilo koji naboj koji postavljamo u te točke. Na ovaj način došli smo zapravo do jednadžbe ("formule") za izračun polja točkastog naboja

$$E=\frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_r\cdot\varepsilon_o\cdot r^2}$$

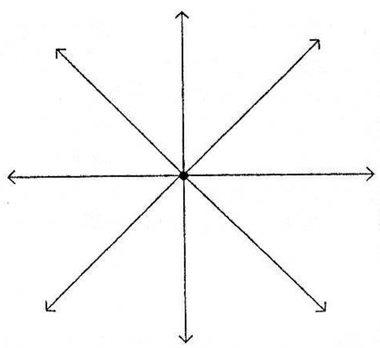
Sa *r* (ili x) označavamo udaljenost točke u kojoj želimo izračunati polje. Zaključak: 1. polje opada sa kvadratom udaljenosti 2. postoje točke na kuglastim plohama oko naboja. u kojima polje ima jednaki iznos. 3. smjer polja je radijalan 4. polje je radijalno simetrično 5. polje je slabije u sredstvu sa većom dielektričkom konstantom .

I.1-P2. Na slici desno su prikazane silnice polja dvaju točkastih naboja Q_1 i Q_2. Kojih su predznaka naboji, i koji je odnos njihovih veličina? U kojoj od označenih točaka je polje najjače ? Opišite ukratko pojam: silnice polja.

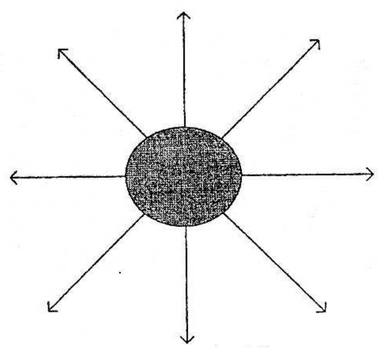


Rješenje: Silnice elektrostatskog polja su linije koje "izviru" na pozitivnim, a "poniru" (završavaju) na negativnim nabojima. Njihova gustoća ukazuje na jakost polja. Prema obliku silnica razlikujemo homogena i nehomogena polja. Kod homogenih su silnice jednake gustoće. Silnice su linije sile tj. tangenta na silnicu u nekoj točki pokazuje smjer sile na naboj koji bismo postavili u tu točku. U prikazanom slučaju polje je nehomogeno. Lijevi naboj je pozitivan jer iz njega silnice izlaze. Ujedno je taj naboj veći po iznosu od desnog, jer dio njegovih silnice odlazi (završava) negdje drugdje. Polje je najveće tamo gdje su silnice najgušće (točka B). Poseban slučaj su silnice usamljenog točkastog naboja. To su (za pozitivan naboj) radijalni pravci koji "završavaju" u beskonačnosti. Pojam točkastog naboja važan je u stvaranju teorije (modela) električnog polja. U stvarnosti naboji imaju konačne dimenzije kao i masu (nabijene čestice). Pojedine nakupine naboja mogu se pri tom "zamijeniti" skupinama točkastih naboja. Silnice usamljene metalne kuglaste elektrode slične su silnicama točkastog naboja. Počinju na površini kugle (za pozitivno nabijenu kuglu) i šire se radijalno na sve strane. Pri tom su okomite na površinu elektrode. Unutar metalne elektrode nema elektrostatskog polja niti silnica.

Polje je prostorni fenomen pa se tako i silnice nalaze u prostoru. Grafički prikaz polja silnicama u prostoru (3D) je prilično složen I nepregledan. Zato se silnice prikazuju u dvije dimenzije I zapravo predstavljaju sliku polja u presjeku sa nekom ravninom.



pozitivan točkasti naboj



pozitivno nabijena metalna kugla

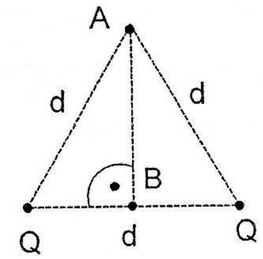
Naboj na usamljenoj kugli rasporedi se jednoliko po površini. Taj se naboj "zamijeni" skupinom jednoliko raspoređenih točkastih naboja. Kod elektroda nepravilnog oblika više se naboja nakuplja na "isturenim" dijelovima npr. na šiljcima. Silnice su međutim i u tom slučaju, okomite na površinu elektrode.

I.1-P3. Dva jednaka pozitivna točkasta naboja $Q_1 = Q_2 = Q$ nalaze se u zraku na međusobnoj udaljenosti d, daleko od drugih naboja. Odredite : a) iznos i smjer električnog polja koje zadani naboji stvaraju u točkama A i B. b)* potencijal u točkama A i B elektrostatskog polja.

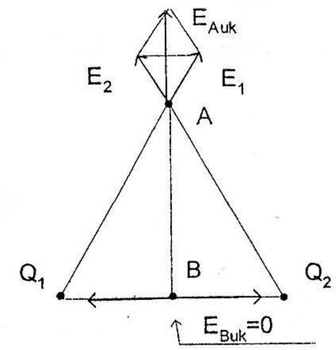
Zadano je: Q=1 nAs; d=5 mm ; ε_r=1 ;

ε_o=8.854•10^{-12} As/Vm

*nije obvezno



Rješenje: U ovom slučaju električno polje u prostoru nastaje zajedničkim djelovanjem zadanih naboja. Svaki od naboja stvara u pojedinim točkama «svoj» vektor polja. Nakon određivanja tih vektora ukupno polje dobivamo njihovim zbrajanjem. Jednostavno je npr. određivanje ukupnog vektora polja u točki B. Pojedinačni vektori polja imaju očigledno jednaki iznos, a suprotan smjer pa je ukupno polje jednako nuli. Nije tako jednostavno u točki A. Tamo imamo dva vektora koje stvarno treba zbrojiti po pravilima zbrajanja vektora. To možemo učiniti grafički, kako je prikazano slikom ili računski.



Prije bilo kakvog računanja potrebna je skica u pravokutnom kordinantnom sustavu. . Pojedinačnim vektorima odredimo sastavnice (komponente) u smjeru osi x kao i u smjeru osi y. Zbog simetrije su u ovom slučaju komponente u smjeru osi x jednakog iznosa , a protivnog smjera pa se poništavaju. Preostaju komponente u smjeru osi y koje su jednakog iznosa. Rezultantno polje je zbroj tih komponenti. Potrebno je dakako poznavanje trigonometrijskih formula. Npr. komponenta polja E_1 u smjeru osi y će biti: $E_{1y}=E_1 \cdot \cos 30^0$. Polja E_1 i E_2 izračunavamo prema jednadžbi za polje točkastog naboja.

$$E_1 = \frac{(Q_1)}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_r\cdot\varepsilon_o\cdot d^2} \qquad E_1 = 3.595\cdot 10^5 \frac{V}{m}$$

$$E_{1y} = E_1\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \qquad E_{1y} = 3.113\cdot 10^5 \frac{V}{m}$$

$$E_{2y} = E_{1y} \qquad E_y = E_{2y} + E_{1y}$$

$$E_{1x} = E_1 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \qquad E_{1x} = 1.797 \cdot 10^5 \frac{V}{m}$$

$$E_{2x} = -E_{1x} \qquad E_x = E_{1x} + E_{2x} \qquad E_x = 0$$

$$E_{uk} = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} \qquad E_{uk} = 6.226 \cdot 10^5 \frac{V}{m}$$

U općenitom slučaju kada su naboji različita iznosa i polariteta proračun polja, iako se radi prema istom načelu, neće biti tako jednostavan. Još će biti složeniji proračun polja kada u prostoru postoji veći broj naboja.
*napomena: Naprotiv je proračun potencijala i u slučaju većeg broja naboja doista jednostavan. Naime potencijal je definiran kao potencijalna energija jediničnog naboja. Energija, a prema tome i potencijal su skalarne veličine. Biti će potrebno algebarski zbrojiti (sa predznakom) doprinose potencijalu svih naboja koji se nalaze u promatranom prostoru. Jednadžba za proračun potencijala u polju točkastog naboja je: $\varphi = Q/4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r$ gdje je r udaljenost od točkastog naboja, točke u kojoj želimo izračunati potencijal.
U svakoj točki prostora gdje postoji elektrostatsko polje osim vektora polja imamo i skalarnu veličinu-potencijal. Točke jednakog potencijala čine tzv. ekvipotencijalnu plohu. (u dvodimenzionalnom prikazu dobivamo ekvipotencijalne linije). Polje možemo osim sa silnicama prikazati ekvipotencijalnim linijama. Kod točkastog naboja ekvipotencijalne linije su koncentrične kružnice. Lako je zaključiti da su silnice i ekvipotencijalne linije međusobno okomite. Slijedi proračun potencijala za točke A i B:

$$\varphi_{1A} = \frac{Q_1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot d} \qquad \varphi_{1A} = 1.798 \times 10^3 V$$

$$\varphi_{2A} = \frac{Q_2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot d} \qquad \varphi_{2A} = 1.798 \times 10^3 V$$

ukupno u tocki A: $\varphi_A = \varphi_{1A} + \varphi_{2A} \qquad \varphi_A = 3.595 \times 10^3 V$

$$\varphi_{1B} = \frac{Q_1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot 0.5 \cdot d} \qquad \varphi_{1B} = 3.595 \times 10^3 V$$

$$\varphi_{2B} = \frac{Q_2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot 0.5 \cdot d} \qquad \varphi_{2B} = 3.595 \times 10^3 V$$

ukupno u tocki B $\varphi_B = \varphi_{1B} + \varphi_{2B} \qquad \varphi_B = 7.19 \times 10^3 V$

I.1-P4. Naboj Q u točki A električnog polja ima potencijalnu energiju W_A. Premjesti li se taj naboj u točku B polja u njoj će imati potencijalnu energiju W_B. Odredite: a) rad izvršen pri premještanju naboja b) napon U_{AB}.

Zadano je: Q=50 nAs; $W_A = 2 \cdot 10^{-5}$ Ws ; $W_B = 4 \cdot 10^{-5}$ Ws

Rješenje. Rad na putu od A prema B je razlika potencijalnih energija. Potencijalna energija je veća u točki B. To znači da je utrošen vanjski rad za premještanje naboja. Pri tom su vanjskom silom savladane sile polja. Energija će se vratiti prilikom premještanja naboja iz točke B u točku A. Ovo premještanje izvršile bi sile polja (naboj bi se sam vratio u točku A), a rad bi bio pozitivan. Ako to napišemo "matematički" dobivamo:

$$A_{AB} = W_A - W_B \quad A_{AB} = -2 \times 10^{-5} J \quad A_{BA} = W_B - W_A \quad A_{BA} = 2 \times 10^{-5} J$$

Kod ovakvog računanja (redoslijeda) nam negativan predznak rezultata ukazuje da je rad utrošen. Potencijali u točkama A i B su:

$$\varphi_A = \frac{W_A}{Q} \qquad \varphi_A = 400V \qquad \varphi_B = \frac{W_B}{Q} \qquad \varphi_B = 800V$$

Napon je razlika potencijala: $U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = -400V$. Točka A je negativnija od točke B.
Zaključak: Ako pozitivan naboj premještavamo u točku polja višeg potencijala potrebno je utrošiti vanjski rad (energiju). Takav rad, matematički gledano, je negativan.

I.1-P5. Električna sila pomakne naboj Q iz točke 1 s potencijalom φ_1=-40V u točku 2 s potencijalom φ_2=0V. Ako pri tom električne sile izvrše rad ΔW=0,1mWs odredite koliki je napon U_{12} b) predznak i veličinu naboja Q.

Rješenje: Rad izvrše električne sile. Naboj ide iz točke nižeg potencijala (-40V) u točku višeg potencijala (0V) . To je moguće samo ako je naboj negativan, jer su onda sile privlačne.

a) $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 \qquad U_{12} = -40V$

b) iznos naboja je $Q = \frac{\Delta W}{U_{12}} \qquad Q = -2.5 \times 10^{-6} C$

I.1-P6. Pločasti kondenzator s pločama površine *S* razmaknutim za *d*, ispunjen je izolatorom dielektričnosti ε_r probojne čvrstoće E_p. Kondenzator je priključen na stalni napon U. Odredite: a) kapacitet kondenzatora b) naboj na elektrodama kondenzatora c) energiju pohranjenu u kondenzatoru d) maksimalni napon koji možemo priključiti na kondenzator. e) kolika je plošna gustoća naboja na elektrodama.
Zadano je: S=0,5 m^2: d=1 mm; ε_r=1 $\varepsilon_o = 8.854 \cdot 10^{-12}$ As/Vm; Ep=3 kV/mm; U=1 kV

Rješenje:

$$C = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_o \cdot \frac{S}{d} \qquad C = 4.427 \times 10^{-9}\,\mathrm{F}$$

$$Q = C \cdot U \qquad Q = 4.427 \times 10^{-6}\,\mathrm{C}$$

$$W = \frac{Q^2}{2 \cdot C} \qquad W = 2.213 \times 10^{-3}\,\mathrm{J}$$

$$E = \frac{U}{d} \qquad E = 10^6 \frac{V}{m}$$

$$U_{max} = E_p \cdot d \qquad U_{max} = 3 \times 10^3\,\mathrm{V}$$

Veći napon mogao bi pruzročiti proboj u izolatoru što bi se kod zračnog kongenzatora vidjelo odnosno čulo kao iskra. U krutom dielektriku dolazi do trajnog uništenja tj. gubitka svojstva izolatora. Takav kondenzator je neispravan tj. gubi svoj kapacitet.
e) naboj se u kondenzatoru rasporedi u tankom sloju na unutarnjim površinama ploča. Plošna gustoća tog naboja je $\sigma = Q/S = 8{,}854\ \mu\mathrm{As/m^2}$.

Zadaci I.1

I.1-1. Iznosi naboja dvaju točkastih naboja odnose se ovako: $|Q_1/Q_2| = n$. Naboji razmaknuti za d postavljeni su u zraku i privlače se silom F. Odredite a) iznos sile F b) predznak naboja Q_2 ako je Q_1 pozitivan c) silu kada se razmak smanji na $d/2$
Zadano: Q_1=+30 nC; n=10, d=10 cm, $\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}$ As/Vm.

Rezultat: a) 81μN b) neg. c) poveća se na 324 μN

I.1-2. Kako se promijeni sila na naboj Q_2 iz prethodnog zadatka (1-1) ako se na polovinu razmaka postavi treći naboj i to: a) $Q_3 = +Q_1$ b) $Q_3 = -Q_1$

Rezultat: a) 405 μN b) 243 μN (odbojna)

I.1-3. Dvije jednake metalne kuglice mase m i polumjera r naelektrizirane su jednakim količinama naboja Q i obješene su o tanke niti od izolatora duljine l *(zanemarive mase)* . U ravnotežnom položaju (ravnoteža elektrostatske i gravitacijske sile) kuglice su razmaknute za d. a) Odredite Q b) razmak kuglica ako se naboj nejednoliko raspodjeli na kuglice tako da prva primi 3/4 , a druga 1/4 ukupnog naboja. Napomena: pojednostavnite izraze uzmajući u obzir da je: $l >> d$ i $r << d$.
Zzadano: $m = 10^{-3}$ kg, l = 1 m, d = 0,1 m.

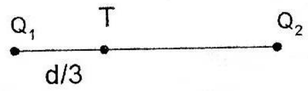
Rezultat: a) $2.336 \cdot 10^{-8}$ b) 9.1 cm

I.1-4. Dva točkasta naboja Q i $3Q$ postavljena su u točke A i B na razmaku d. U koju točku na spojnici točaka A i B treba postaviti probni naboj pa da sila na taj naboj bude jednaka nuli. U rješenju navedite udaljenost tražene točke od naboja Q.
Rezultat: 0.366• d

I.1-5. Na silnici polja točkastog naboja odabrane su točke A, B i C tako da je točka B na sredini dužine AC. Uz zadane iznose polja u točkama A i C a) odredite polje u točki B. b) Izračunajte iznos naboja ako je udaljenost točke C od naboja 1 cm.
Zadano: E_A=36 V/m; E_C=9 V/m.

Rezultat: 16 V/m; 10^{-13} C (kulona)

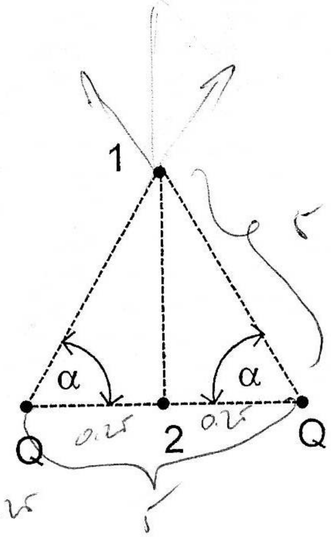
I.1-6. Dva pozitivna točkasta naboja Q_1 i Q_2 postavljena su na razmak d. Ako je jakost polja u točki T jednaka nuli odredite odnos naboja Q_2/Q_1. Koliki je potencijal u točki T?
Zadano: Q_1= 1 nAs, d=1 cm



Rezultat: 4; 8.1 kV

I.1-7. Dva točkasta naboja jednakih iznosa postavljena su na razmak d. Odredite iznos jakosti polja u točki **1** te omjer jakosti električnog polja u točkama **2** i **1** (E_2/E_1) ako su naboji a) istog b) različitog polariteta.
Zadano: |Q|=1nAs, d= 5 cm, $\alpha = 60^0$.

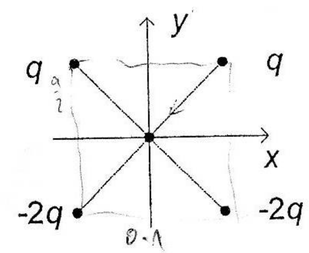
Rezultat: a) 6.235 kV/m, nula b) 3.6 kV/m, 8.



I.1-8. Izračunajte razliku potencijala točaka 1 i 2 iz prethodnog zadatka ako su naboji a) pozitivni b) negativni c) različitog polariteta. Napomena: napon između dvije točke je razlika potencijala $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$.

Rezultat: a) U_{12}= -360 V b) +360V c) nula

I.1-9. Četiri točkasta naboja nalaze se u vrhovima kvadrata stranice a. Središte kvadrata je u ishodištu xy kordinantnog sustava. Odredite: a) smjer i iznos el.polja u ishodištu b) potencijal u ishodištu.
Zadano: a=10 cm, q=1 nAs



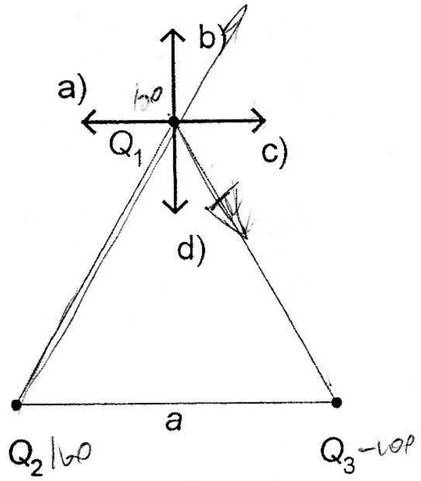
Rezultat: a) smjer –y , 7637 V/m b) –254 V

I.1-10. Četiri točkasta naboja smještena su u vrhovima kvadrata stranice a. Naboji su istog iznosa i polariteta. Ako silu između dva naboja razmaknuta za a označimo sa F kolika će biti rezultantna sila na svaki od naboja?

*Rezultat:*1.91 F

I.1-11. Tri točkasta naboja smještena su u vrhove jednakostraničnog trokuta stranice *a*. U kojem od označenih smjerova djeluje rezultantna sila na naboj Q_1 ? Kolika je ta sila ?
Zadano: $Q_1=Q_2=100$ nAs; $Q_3=-100$ nAs; $a=2$ cm; $\varepsilon_r=1$.

Rezultat: smjer c) , 225 mN .



I.1-12. Da bi se naboj od q prenio iz točke A u točku B električnog polja potrebno je obaviti rad *W*. Kolika je razlika potencijala (napon) između tih točaka? Koja je točka na višem potencijalu?
Zadano: $q = +1\mu C$ $W = 20\ \mu J$

Rezultat: 20 V, na višem potencijalu je točka B.

I.1-13. Naboj *Q* u točki A ima potencijalnu energiju W_{pA}. Premjesti li se naboj u točku B, u njoj će imati potencijalnu energiju W_{pB}. Odredite rad izvršen pri tom premještanju naboja. Zadano: $Q=-2{,}5\cdot10^{-7}$ As; $W_{pA}=-10^{-4}$ Ws; $W_{pB}=-2\cdot10^{-4}$ Ws.

Rezultat: 0.1 mWs

I.1-14. Pločasti zračni kondenzator s dvjema pločama površine *S* i razmaka *d*, spojen je na izvor stalnog napona *U*. Odredite kapacitet ploča, te na njima razdvojeni naboj.
Zadano: $U=1{,}7$ kV; $S=200$ cm^2; $d=1$ mm.

Rezultat : 177 pF, 300 nAs

I.1-15. Dvije paralelne i suprotno nabijene metalne ploče razmaknute su na razmak *d*. Ploče su nabijene nabojima *Q* suprotnog predznaka. Negativna ploča je uzemljena. Da bi se probni naboj +*q* prebacio sa negativne do pozitivne ploče potrebno je obaviti rad *W*. Koliki je napon između ploča (napon izvora)? Koliki je potencijal negativne ploče? Kolika je jakost električnog polja u prostoru između ploča? Nacrtajte graf promjene potencijala idući od negativne prema pozitivnoj ploči. Kako se promijeni graf potencijala ako ploče približimo na d/2.
Zadano: $d = 4$ cm, $q = 10$ nC, $W = 20\mu J$.

Rezultat: 2000V; potencijal je nula; 50 kV/m .

I.1-16. Pločasti kondenzator površine ploča *S*, razmaknutih za *d*, ispunjen je izolatorom dielektričke čvrstoće E_p. Koliki je probojni napon kondenzatora? Koliki

maksimalni naboj može primiti ovaj kondenzator te kolika je maksimalna energija koja se u njemu može pohraniti?
Zadano: $S=100$ cm^2; $d=0{,}2$ mm; $E_p=60$ kV/cm, $\varepsilon_r=3$.

Rezultat: 1.2 kV, 1.6 μAs , 960 μJ

I.1-17. Kolika je energija pohranjena u kondenzatoru te koliki je kapacitet ako je prilikom priključenja na napon *U* nabijen nabojem *Q*? Koliki je prirast energije ako se napon poveća na 2*U*?
Zadano : $U=400$ V; $Q=60$ μAs.

Rezultat: 12 mVAs, 0.15 μF, 36 mJ.

I.1-18*. Dvije jednake paralelne metalne ploče (oznaka 1 i 2), postavljene u zraku (daleko od drugih izvora električnog polja) na međusobnoj udaljenosti *d*, nabijene nabojima istog iznosa *Q*, a suprotnih predznaka, privlače se silom *F*. Koliki je napon između ploča.
Zadano: $d=1$ mm; $Q=177$ nAs; $F=177$ mN.

Rezultat: 2 kV, 1000 V/m

I.1-19*. Probojna čvrstoća zraka je 3 kV/mm. Sa kolikim maksimalnim nabojem možemo nabiti usamljenu metalnu kuglu polumjera $R=10$ cm koja ima kapacitet $C=11.1$ pF? Koliki je potencijal (napon prema Zemlji) tako nabijene kugle ? Napomena : « usamljena » je elektroda ako je dovoljno udaljena od okolnih predmeta npr. za ovu kuglu bi predmeti morali biti udaljeni barem 1 m.

Rezultat : 3.34 μAs , 300kV. Uputa : maksimalno polje je tik uz površinu kugle koje se računa pomoću formule : $Q/4\pi\varepsilon R^2$. Napomena : probojna čvrstoća zraka ovisi o raznim faktorima (npr. vlažnost). Obično je manja od navedene tako da je maksimalni potencijal manji od 300 kV. U prirodi je npr. oblak neka vrst nabijene « elektrode ». Kako se povećava naboj sakupljen u oblaku raste potencijal (napon prema Zemlji) i el. polje pa dolazi do munje (proboja).

II. Tjedan predavanja

Tema II.1. Električna struja,otpor i energija, Ohmov zakon

OBUHVAĆENI POJMOVI:

- električna struja, gustoća struje
- električna otpornost i provodnost tvari
- električni otpor i vodljivost vodiča
- temperaturna ovisnost otpora
- Ohmov zakon
- Jouleova toplina, električna snaga

POTREBNE JEDNADŽBE:

$I = Q/t$	-	jakost struje kod jednolikog strujanja naboja
$J = N \cdot q \cdot v$	-	gustoća struje u materijalu s N pokretnih nosilaca naboja q po jedinici volumena, koji se gibaju srednjom brzinom v
$J = \chi \cdot E = I/S$	-	veza gustoće struje i električnog polja, preko provodnosti (specifične vodljivosti) materijala χ
$R = U/I = 1/G$	-	veza struje, napona i otpora (vodljivosti) vodiča, Ohmov zakon
$R = \rho \cdot l / S$	-	otpor vodiča duljine l, površine presjeka S i otpornosti (tj. specifičnog otpora) ρ
$G = \chi \cdot S / l$	-	vodljivost vodiča duljine l, površine presjeka S i provodnosti (tj. specifične vodljivosti) χ
$R_\vartheta = R_{20}(1+\alpha\,(\vartheta-20))$	-	ovisnost otpora s temperaturnim koeficijentom α (određenim u odnosu na veličinu otpora R_{20} pri 20°C) o temperaturi ϑ
$W = I^2 \cdot R \cdot t$	-	energija koja se, uz stalnu struju I, u vremenu t pretvori u toplinu na otporu R
$P = U \cdot I = I^2 \cdot R = U^2/R$	-	el. snaga (= brzina promjene el. energije u vremenu = energija koja se otporu R pretvori u toplinu u jedinici vremena)

Primjeri II.1

II.1-P1. Kroz poprečni presjek vodiča tijekom 1 minute prostruji količina naboja od Q=30 C. Uzevši brzinu gibanja naboja stalnom, odredite jakost struje kroz vodič u tom vremenu. Kolika je gustoća struje ako je presjek vodiča 0,2 mm^2?

Rješenje: Jednoliko strujanje naboja znači da je struja stalna (istosmjerna)

$Q = 30\,C \qquad t = 1 \cdot 60\,s \qquad I = \frac{Q}{t} \qquad I = 0.5\,A$

U svakoj sekundi kroz poprečni presjek vodiča prolazi naboj 0,5 As.
Naboji u vodiču (elektroni) gibaju se pod djelovanjem električnih sila, jer se u vodiču uspostavi električno polje. Radi se o gibanju ogromnog broja naboja. U stvarnosti su brzine i putanje pojedinih naboja vrlo različite. U mnoštvu putanja i brzina, statistički gledano, može se govoriti o nekoj srednjoj brzini elektrona (eng. drift) i o usmjerenom gibanju. Zanimljivo je da je ta srednja brzina naboja vrlo mala , ali se efekt sile (polje) širi velikom brzinom po vodiču tako da se gotovo "istovremeno" svi naboji (elektroni) počinju gibati (oni s početka i kraja voda). Još nešto je jako važno: Iako se u metalu stvarno usmjereno gibaju elektroni, kao smjer struje se uzima onaj suprotni tj. kao da se giba pozitivan naboj. Gustoća struje je J=0,5/0,2= 2,5 A/mm^2.

II.1-P2. Vodič iz prethodnog primjera dugačak je 10 metara i načinjen je od bakra. Odredite otpor vodiča i utrošenu energiju u vodiču. Koliki je napon (pad napona) između krajeva vodiča? Bakar ima specifičnu otpornost $\rho = 1{,}75 \cdot 10^{-8}\,\Omega m$.

Rješenje: $R = \rho \cdot l/S = 1{,}75 \cdot 10^{-8} \cdot 10/0{,}2 \cdot 10^{-6} = 0{,}875\,\Omega$
Napon između krajeva vodiča je $\Delta U = 0{,}875 \cdot 0{,}5 = 0{,}44\,V$
Energija utrošena u vodiču je $W = I^2 \cdot R \cdot t = 0{,}5^2 \cdot 0{,}875 \cdot 60 = 13{,}125\,J$
napomena: Prilikom prolaska struje dolazi do zagrijavanja vodiča. Prevelika struja dovela bi do prevelikog zagrijavanja. Zato je za svaki vodič i uvjete njegova korištenja propisana nazivna (dozvoljena) gustoća struje.

II.1-P3. Kroz otpornik priključen na napon od 120 V teče struja od 800 mA. Odredite otpor ,vodljivost i snagu otpornika.
Rješenje: Primijenimo Ohmov zakon i dobivamo da je :

$R = \frac{U}{I} \qquad R = 150\,\Omega \qquad G = \frac{1}{R} \qquad G = 6.667 \times 10^{-3}\,S$

vodljivost možemo izračunati i direktno ovako: $G = \frac{I}{U}$

snaga je: $P = I^2 \cdot R = I^2/G = U^2/R = U^2 \cdot G = U \cdot I = 96\,W$

II.1-P4. Otpor bakrenog namota pri 20^{0}C iznosi 30Ω. Za koliko se taj otpor poveća pri temperaturi od 80 ^{o}C? Temperaturni koeficijent otpora za baker je : $\alpha = 0.0039 \quad 1/^oC$

Rješenje:Otpor metalnih vodiča raste s temperaturom. Kao početna temperatura se uzima 20 °C. Za temperature u uobičajenom području rada uređaja uzimamo da ta ovisnost linearna (na vrlo visokim i vrlo niskim temperaturama ovisnost nije linearna i iskazuje se kompliciranijim formulama kojima se ovdje ne bavimo).
Za rješavanja ovog zadatka koristimo jednostavnu formulu (pravac-nacrtajte ga):

$R_\vartheta = R_{20} \cdot [1 + \alpha \cdot (\vartheta - 20)] \qquad R_\vartheta = 37.02\,\Omega$

Povećanje otpora je za 7Ω. napomena: mjerenjem otpora možemo posredno odrediti temperaturu namota!

II.1-P5. Otpor bakrenog namota nekog transformatora od 440Ω pri 20°C u radu poraste na 510 Ω. Kolika je radna temperatura?
Zadano: $R_{20} = 440\Omega \quad R_\vartheta = 510\Omega \quad \alpha = 0.0039$

Rješenje: Preuredimo formulu iz prethodnog primjera tako da je nepoznanica temperatura ϑ :

$\vartheta = 20 + \frac{(R_\vartheta - R_{20})}{R_{20} \cdot \alpha} \qquad \vartheta = 60.8^0 C$

II.1-P6. Ugljeni otpornik na 20^{0}C ima otpor 1000 Ω. Odredite njegov otpor na a)100^{0}C b) -30^{0}C.
Zadano $R_{20} = 1000\Omega \quad \vartheta_1 = 100 \quad \vartheta_2 = -30 \quad ^oC \quad \alpha = -0.0008$

Rješenje: Ugljen za razliku od metalnih vodiča ima *negativan temperaturni* koeficijent otpora tj. otpor mu pada sa porastom temperature. Formula za izračun je ista s tim da se α uvrštava kao negativan broj.

a) $R_{\vartheta 1} = R_{20}\cdot\left[1 + \alpha\cdot(\vartheta_1 - 20)\right]$ $\quad R_{\vartheta 1} = 936\,\Omega$

b) $R_{\vartheta 2} = R_{20}\cdot\left[1 + \alpha\cdot(\vartheta_2 - 20)\right]$ $\quad R_{\vartheta 2} = 1.04 \times 10^3\,\Omega$

napomena: Osim ugljena postoje i neki drugi materijali koji pokazuju takvo svojstvo. Od njih se izrađuju tzv. NTC otpornici koji se koriste u elektroničkim (mjernim i regulacijskim) sklopovima....Posebnim postupcima legiranja dobiveni su temperaturno postojani materijali koji se onda koriste za izradu preciznih otpornika. Temperaturni koeficijent otpora takvih materijala je praktički jednak nuli (npr. manganin).

Zadaci II.1

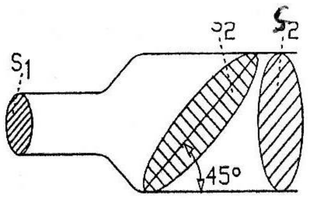
II.1-1. Ravni vodič duljine l priključen je na izvor stalnog napona U. Ako kroz poprečni presjek vodiča S u svakoj sekundi prostruji $6{,}24\cdot10^{18}$ elektrona, odredite a) struju b) otpor vodiča c) specifičan otpor d) gustoću struje c) električno polje u vodiču.
Zadano: U=1,11 V; l = 1 m; S = 1 mm^2.

Rezultat: a) 1 A b) 1.1 Ω c) $1.1\cdot 10^{-6}$ Ωm d) 1.11 V/m

II.1-2 Odredite srednju brzinu gibanja elektrona u ravnom vodiču protjecanom strujom stalne gustoće J, uzevši da u jednom cm^3 volumena vodiča ima N slobodnih elektrona.
Zadano: J=8 A/mm^2; N=10^{22} elektrona/cm^3.

Rezultat: 5 mm/s

II.1-3. U vodiču nejednakog presjeka prema slici gustoća struje kroz presjek S_2 iznosi J_2. Odredite a) struju kroz presjek S_1. b) struju kroz presjek S_2' c) gustoću struje kroz S_1
Zadano: S_1=0,5 mm^2; S_2=2 mm^2; J_2=10^6 A/m^2.

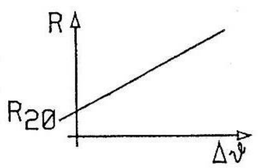


Rezultat: a) 2 A b) 2 A c) $4\cdot10^6$ A/m^2

II.1-4. Vodič specifičnog otpora ρ priključen na napon U razvija u svakoj sekundi toplinu W. Odredite a) otpor vodiča. b) struju c) duljinu vodiča ako je S=0.23 mm^2
Zadano: U=220 V; W=2000 Ws; ρ=1,11 Ωmm^2/m.

Rezultat : a) 24.2 Ω b) 9.1 A c) 5 m

II.1-5. Otpor vodiča pri temperaturi 20 °C je R_{20}. Ako zagrijavanjem otpor linearno raste s temperaturom uz temperaturni koeficijent otpora α, odredite otpor vodiča pri temperaturi ϑ. Da li temperaturni koeficijent otpora ovisi o početnoj temperaturi?
Zadano: R_{20}=100 Ω; α=0,004 1/°C; ϑ=120 °C.



Rezultat: 140 Ω, da

II.1-6. Bakreni vodič presjeka S treba zamijeniti aluminijskim jednake duljine i otpora. Ako je poznat omjer otpornosti bakra i aluminija (ρ_{Cu}/ρ_{Al}), odredite potrebni presjek aluminijskog vodiča. Koji vodič pri opisanoj zamjeni ima veću masu? Zadano: S_{Cu}=1,5 mm^2; ρ_{Cu}/ρ_{Al}=0,63.

Rezultat: 2.38 mm^2, bakreni

II.1-7. Grijač otpora R priključen je na stalni napon U. Koliko se električne energije pretvori u toplinsku na grijaču u vremenu od pola sata? Za koliko posto se smanji ta energija ako je napon manji za 10%? Zadano: R=25 Ω; U=110 V.

Rezultat: 871 kJ, smanji se za 19%.

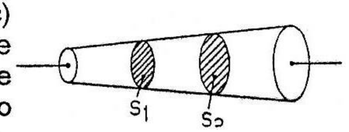
II.1-8. S porastom temperature otpori dvaju otpornika rastu linearno od iste početne vrijednosti R (pri 20 °C) do vrijednosti 3•R (prvi otpornik) odnosno 2•R (drugi otpornik) na nekoj temperaturi ϑ. Koliki je omjer temperaturnih koeficijenata otpora α1/α2.

Rezultat: 2

II.1-9. Za koliko se postotaka poveća otpor bakrenog namotaja stroja, ako mu se temperatura poveća za Δϑ uz zadani temperaturni koeficijent za bakar α ?
Zadano: Δϑ=40 °C; α=0,004 1/°C.

Rezultat: 16%

II.1-10. Vodič nejednolikog presjeka (krnji stožac) priključen je svojim krajevima na izvor električne energije konstantnog napona. U kakvom su odnosu a) gustoće struje kroz presjek S_1 i S_2? b) jakosti polja u točkama po presjeku S_1 i S_2?



Rezultat : a) veća je gustoća po presjeku S_1 b) jače je polje po presjeku S_1

II.1-11. Od iste količine vodljivog materijala otpornosti (specifičnog otpora) ρ načinjena su dva cilindrična vodiča. Prvi vodič ima presjek S, a drugi dvostruko veći presjek 2 S. Koji je odnos otpora vodiča?

Rezultat: R_1=4R_2

II.1-12. Koliko naboja je prošlo kroz neki otpornik ako je prvih 5 sati jakost struje bila 2 A, a slijedeća 2 sata 1 A. Naboj izrazite u As (kulon) i Ah (ampersati).

Rezultat: 12Ah; 4,32x10^4As

II.1-13. Žica ima promjer *d* i duljinu *l*. Mjerenjem je ustanovljen otpor žice R. (na temperaturi od 20 ^{0}C) Kolika je specifična vodljivost materijala tog vodiča.
Zadano: d=0.4 mm, l=33 m , R=80 Ω

Rezultat: κ=3,28 Sm/mm^2 napomena: ovaj podatak se odnosi na temperaturu od 20 ^{0}C

II.1-14. Na okrugli komad izolatora (valjak) namotana je zavojnica sa bakrenom žicom promjera 0,4 mm. Zavojnica ima 1620 zavoja.Duljina jednog zavoja je 8,4 cm. Izračunajte omski otpor te zavojnice. Uzmite da je specifičan otpor 1,75x10^{-8}Ωm.

Rezultat: R=18,96Ω

II.1-15. Koliko žice od konstantana presjeka 0.07 mm^2 trebamo za izradu otpornika od 2,5 Ω? (konstantan je materijal za izradu otpornika, ima specifičnu vodljivost 2 Sm/mm^2).

Rezultat: 350 mm

II.1-16. Prvi otpornik je načinjen od otporne žice okruglog presjeka koja ima promjer *d* i duljinu *l*. Drugi otpornik je napravljen od žice koja ima 20 % veći promjer i 20% manju duljinu. Koliki je otpor tog otpornika u odnosu na onaj prvi. Materijal je u oba slučaja isti.

Rezultat: R_2=0,55 R_1

II.1-17. Na koju temperaturu treba zagrijati bakreni namot da bi se otpor namota povećao za 20% u odnosu na onaj pri 20 °C. Temperaturni koeficijent za bakar je 0,0039 1/°C.

Rezultat: 71,3 °C

II.1-18. Za koliko se promijeni otpor otpornika koji je napravljen od a) konstantana b) volframa , ako se zagrije od 20 na 120 °C? Promjenu otpora izrazite u postotku.

Rezultat: ±0,4% ; +41%

II.1-19. Temperaturno promjenjivi otpornik (senzor) koristimo pri mjerenju temperature. U hladnom stanju (20°C) otpor tog otpornika je 1000 Ω. Pri povećanju temperature za 80 °C se je otpor smanjio na 400 Ω. Koliki je temperaturni koeficijent otpora? Koja je kratica za otpore koji imaju takvo svojstvo?

Rezultat: -0,0075 1/°C, NTC

II.1-20. Namotaj aluminijske žice s temperaturnim koeficijentom α=0,0037 °C^{-1} i namotaj mjedene žice s temperaturnim koeficijentom α =0,0015 °C^{-1} imaju na sobnoj temperaturi (20°C) isti otpor, R_{Al}=R_{Mj}=2 Ω .Na kojoj će temperaturi otpor aluminijske žice biti za 30% veći od otpora mjedene žice. Koliki će tada (pri toj temperaturi) biti R_{Al} i R_{Mj}?

Rezultat: ϑ=191,43 °C; R_{Al} = 3,27Ω R_{Mj} =2,514 Ω

SREDNJA VRIJEDNOST!

II.1-21. Otpornik je priključen na napon od 12 V koji se postepeno (linearno) smanjuje na 10V kroz vrijeme od 1 sat (npr. akumulator koji se troši-prazni). Struja je u početku bila 1,2 A. a) Koliko je naboja prošlo kroz taj otpornik b) Koliko bi naboja prošlo da je napon cijelo vrijeme bio jednak onom početnom?
Rezultat: 1,1 Ah; 1,2 Ah

II.1-22. Napon na žarulji se postepeno povećava i pri tom se mjeri struja. Dobiveni su rezultati prikazani tabelarno. Nacrtajte graf ovisnosti struje o naponu. Dobivate nelinearnu ovisnost struje o naponu, a) Odredite otpor žarulje pri naponu 25, 100 i 220 V. b) Zbog čega taj otpor nije konstantan? c) Koliki je omjer snage žarulje pri naponu od 220 i 25 V

U,V	0	25	50	75	100	120	140	160	180	200	220
I,mA	0	41	73	96	112	123	133	143	152	159	168

Rezultat: a) 610 Ω, 892 Ω , 1310 Ω. b) zbog temperaturne ovisnosti volframa c) 3.7

Tema II.2 Osnovne veličine električnih krugova (Kirchhoffovi zakoni)

OBUHVAĆENI POJMOVI:

napon, struja, snaga, predznaci (smjerovi, polariteti)
UI-karakteristike, statički i dinamički otpor
Kirchhoffovi zakoni
serijski i paralelni spojevi elemenata
(idealni) naponski i strujni izvor
nadomjesni (ukupni) otpor spoja
djelilo struje
djelilo napona
potencijal u strujnom krugu (referentna točka-masa)

POTREBNE JEDNADŽBE:

$U=R\cdot I$ $I=U/R$	ovisnost napona i struje *za otpor* R
$\Sigma I_n = 0$	Kirchhoffov zakon za struje *(KZS)*, gdje su I_n sve struje koje se sastaju u bilo kojoj točki (čvoru) el. kruga (struje koje ulaze u čvor upisuju se sa pozitivnim predznakom)
$\Sigma U_n = 0$	Kirchhoffov zakon za napone *(KZN)*, gdje su u_n svi naponi u bilo kojoj petlji (konturi) strujnog kruga (naponi koji imaju + u smjeru obilaženja upisuju se sa pozitivnim predznakom
$R_s=R_1+R_2$	ukupni otpor *serijskog spoja otpora* R_1 i R_2
$R_p=R_1\cdot R_2/(R_1+R_2)$	ukupni otpor *paralelnog spoja otpora* R_1 i R_2

serijski otpor - stalna struja

Primjeri II.2

II.2-P1. Serijski su spojena dva otpornika i priključena su na izvor stalnog napona *U*. Odredite:
a) ukupan otpor spoja b) struju i napon svakog otpornika
c) snagu na svakom otporniku kao i ukupnu snagu spoja.
Zadano: R_1=220 Ω ; R_2=150 Ω; U=12 V

Rješenje: a) ukupan otpor je $R_{12}=R_1+R_2$=220 Ω+150 Ω=370 Ω
napomena: ukupan otpor se naziva još: ekvivalentni ili nadomjesni otpor. Osim indeksa koji označavaju od kojih se otpornika sastoji, rabimo još i oznake R_{uk}, R_{ekv} isl.
b) struja je jednaka kroz svaki otpor $I=U/R_{12}$= 12/370=32,4 mA !!!
naponi na otpornicima su: $U_1=I\cdot R_1$=7,135 V; $U_2=I\cdot R_2$=4,865 V
suma tih napona mora biti jednaka naponu izvora (Kirchhoffov zakon za napone)!
c) snage su: $P_1=I^2\cdot R_1$=0,23 W; $P_2=I^2\cdot R_2$=0,16W $P_{12}=I^2\cdot R_{12}=P_1+P_2$=0,39 W

napomena: 1. struja koju daje izvor stalnog napona (naponski izvor) ovisi o ukupnom otporu koji priključimo na njegove stezaljke. 2. serijski spoj otpornika nazivamo: naponsko djelilo, jer se ukupan napon raspodijeli po otpornicima. Na manjem otporu pri tom je manji napon.

Čitatelju prepuštamo da izvede praktične jednadžbe (formule) za djelilo napona: $U_1=U\cdot R_1/(R_1+R_2)$ i $U_2=U\cdot R_2/(R_1+R_2)$ koje ponekada znatno "ubrzavaju" proračun napona u serijskom spoju.

II.2-P2. Serijski su spojena dva otpornika i priključena su na izvor stalne struje *I*. Odredite: a) ukupan otpor spoja b) struju i napon svakog otpornika
c) snagu na svakom otporniku kao i ukupnu snagu spoja.
Zadano: R_1=220 Ω ; R_2=150 Ω; I=50 mA.

Rješenje: a) ukupan otpor je $R_{12}=R_1+R_2$=220 Ω+150 Ω=370 Ω
b) struja je jednaka kroz svaki otpor I=50 mA
naponi na otpornicima su: $U_1=I\cdot R_1$=11 V; $U_2=I\cdot R_2$=7.5 V
suma tih napona mora biti jednaka naponu na stezaljkama izvora (Kirchhoffov zakon za napone)! U=18,5 V
c) snage su: $P_1=I^2\cdot R_1$=0,55 W; $P_2=I^2\cdot R_2$=0,375W $P_{12}=I^2\cdot R_{12}=P_1+P_2$=0,925 W
napomena: napon na stezaljkama izvora stalne struje (strujni izvor) ovisi o ukupnom otporu koji priključimo na njegove stezaljke.

II.2-P3. Paralelno su spojena dva otpornika i priključena su na izvor stalnog napona *U*. Odredite:
a) ukupan otpor spoja b) struju i napon svakog otpornika
c) snagu na svakom otporniku kao i ukupnu snagu spoja.
Zadano: R_1=220 Ω ; R_2=150 Ω; U=12 V

Rješenje: a) ukupan otpor je $R_{12}= R_1\cdot R_2/(R_1+R_2)$= 89,2 Ω

Napomena: ukupan otpor kod paralelnog spoja uvijek je manji od onog najmanjeg u tom spoju! Ako je paralelno spojeno više od dva otpornika , ukupan otpor možemo određivati zbrajanjem njihovih vodljivosti.

b) struje kroz otpornike su $I_1=U/R_1$= 12/220=54,5 mA; $I_2=U/R_2$= 12/150=80 mA
(naponi na otpornicima su jednaki naponu izvora)
Ukupna struja je zbroj struja $I=I_1+I_2$=134,5 mA, (Kirchhoffov zakon za struje)! Ta se struja može izračunati i ovako: $I=U/R_{12}$=12/89,2=134,5 mA

c) snage su: $P_1=I_1^2\cdot R_1$=0,653 W; $P_2=I_2^2\cdot R_2$=0,96 W $P_{12}= P_1+P_2$=1,61 W
ukupnu snagu možemo izračunati i ovako: $P_{12}=U^2/R_{12}=I^2\cdot R_{12}$=1,61 W

napomena: paralelni spoj otpornika nazivamo: strujno djelilo jer se ukupna struja raspodijeli po otpornicima. Kroz manji otpor pri tom prolazi veća struja.

II.2-P4. Paralelno su spojena dva otpornika i priključena su na izvor stalne struje *I*. Odredite: a) ukupan otpor spoja b) struju i napon svakog otpornika
c) snagu na svakom otporniku kao i ukupnu snagu spoja.
Zadano: R_1=220 Ω ; R_2=150 Ω; I=50 mA

Rješenje: a) ukupan otpor je $R_{12}= R_1\cdot R_2/(R_1+R_2)$= 89,2 Ω
b) ukupna struja spoja je sada upravo struja izvora (50 mA). Ta se struja dijeli u dva dijela. Preko ukupnog otpora spoja izračunamo napon $U=I\cdot R_{12}$=0,05•89,2=4,46 V
Pojedine struje su $I_1=U/R_1$=4,46/220=20,2 mA; $I_2=U/R_2$=4,46/150=29,8 mA
Ako zbrojimo ove "pojedinačne" struje dobivamo ukupnu struju. Čitatelju prepuštamo da izvede praktične jednadžbe (formule) za djelilo struje: $I_1=I\cdot R_2/(R_1+R_2)$ i
$I_2=I\cdot R_1/(R_1+R_2)$ koje ponekada znatno "ubrzavaju" proračun struja u paralelnom spoju.

c)snage će biti: $P_1=U^2/R_1=0{,}09$ W; $P_2=U^2/R_2=0{,}133$ W; $P_{12}=I_2 \cdot R_{12}=0{,}223$ W

Zadaci II.2

II.2-1. Otpori R_1 i R_2 spojeni su serijski, pri čemu su na njima naponi U_1 i U_2. Ako je poznat otpor R_2 koliki je R_1? Zadano je: $U_1 = 14.4$V $U_2 = 9.6$V $R_2 = 100\Omega$

Rezultat: 150 Ω

II.2-2. Koliki otpor treba spojiti u seriju sa žaruljom oznake 12V/0,5A da bi u spoju na izvor napona U (većeg od nazivnog napona žarulje) žarulja normalno svijetlila?
Zadano je: $U_n = 12$V $U = 24$V $I_n = 0.5$A

Rezultat: 24 Ω

II.2-3. Koliki je ukupni otpor serijskog spoja otpora ako je odnos napona na nijma 1:2:3. Poznat je napon na prvom i struja drugog otpornika.
Zadano je još: $U_1 = 60$V $I_2 = 0.5$A

Rezultat 720 Ω

II.2-4. Paralelno su spojeni otpori R_1 i R_2. Poznata je (izmjerena je) struja I_1 kroz otpor R_1. Treba izračunati napon izvora, struju kroz drugi otpor I_2, ukupnu struju I_{uk} te ukupni (nadomjesni) otpor spoja.
Zadano je: $R_1 = 12\Omega$ $R_2 = 6\Omega$ $I_1 = 2$A

Rezultat: 24 V, 4 A, 6 A , 4 Ω

II.2-5. Struje kroz tri paralelno spojena otpora se odnose ovako $I_1:I_2:I_3=2:3:6$. Ako je poznat otpor R_2 izračunajte R_1 ,R_3 i ukupnI otpor spoja.Kolika je ukupna struja ako je spoj priključen na napon U. Zadano: $R_2=33\ \Omega$ $U=99$ V

Rezultat: $R_1=49.5\ \Omega$, $R_3=16.5\ \Omega$, $I_{uk}=11$ A

II.2-6. U električnoj grijalici se koriste dva grijača jednakih otpora. Ovisno o stupnju grijanja grijače spajamo u seriju ili u paralelu. Ako pri paralelnom spoju grijalica uzima struju I_p kolika je struja I_s kada grijače spojimo u seriju? Odredite odnos snaga $P_{paralelno}/P_{serijski}$. Zadano: $I_p=8$ A
Rezultat: $I_s = 2$ A, odnos snaga je ¼

II.2-7. Dva jednaka otpornika nazivnih snaga P_n i napona U_n spojeni su serijski i priključeni su na napon $U=U_n$. Kolika je ukupna snaga spoja? (nazivna snaga je ona za koju je otpornik projektiran, veća snaga može prozročiti pregaranje otpornika)

Rezultat: $0.5P_n$

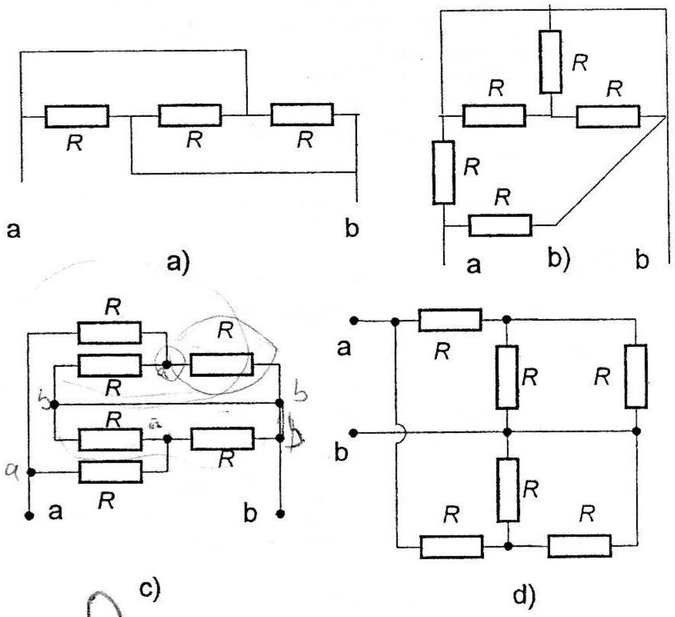
II.2-8. U serijskom spoju snage otpornika R_1 i R_2 odnose se kao $P_1:P_2=3:2$. Kako će se odnositi snage ako otpornike spojimo paralelno?

Rezultat: 2/3

kad je serijski spoj
$P=I^2R$

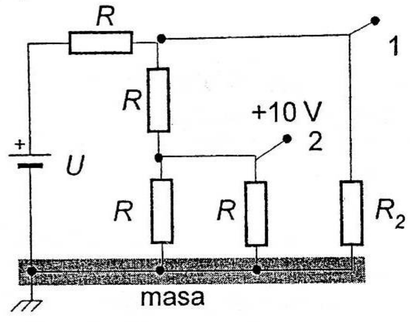
kad je paralelno
$P=\frac{U^2}{R}$

II.2-9. Odredite ukupni otpor s točaka **a** i **b** u prikazanim spojevima ako je otpor R=10 Ω. Uputa: spojeve treba drugačije nacrtati tako da se vide serijski i paraleni spojevi.



Rezultat: a) 3.33 oma b) 5 oma c) 7.5 oma d) 7.5 oma

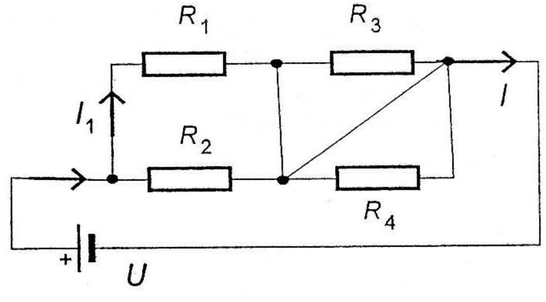
II.2-10. Primjenom Kirchhoffovih zakona odredite potencijal točke **1** i napon izvora ako potencijal točke **2** iznosi 10 V. (potencijal je napon prema masi). Kako će se promijeniti potencijal točke **2** ako odspojimo otpor R_2? Svi otpori imaju po 10 oma.



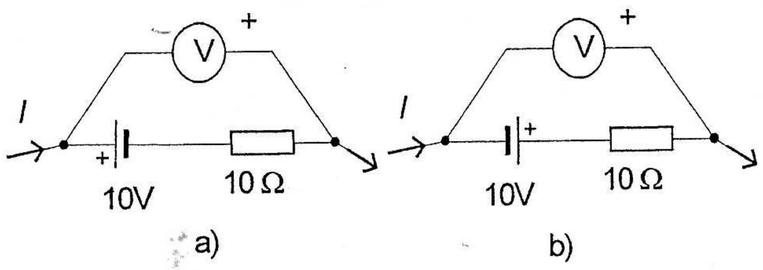
Rezultat: potencijal točke **1** je +30 V, a napon izvora 80 V. Ako odspojimo R_2 potencijal točke **2** je +16 V.

II.2-11 Ako je poznata struja I_1 i svi otpori odredite primjenom Kirchhoffovih zakona ukupnu struju I te napon izvora U. Zadano: $R_1=6\ \Omega$; $R_2=3\ \Omega$; $R_3=8\ \Omega$; $R_4=8\ \Omega$; $I_1=1$ A.

Rezultat: 6 V, 3A
Uputa: treba primjetiti da su R_3 i R_4 kratko spojeni



II.2-12. Na slici a) i b) je prikazan dio strujnog kruga. Koristeći KZN odredite kolika je struja I ako idealni voltmetar pokazuje 20 V označenog polariteta? Riješite zadatak i za slučaj kada je polaritet napona voltmetra suprotan.



Rezultat: a) –3 A b) –1 A (negativan predznak znači struju u suprotnom smjeru), za suprotan polaritet: a) 1 A b) 3 A

II.2-13. Struja kroz serijski spoj nelinearnog elementa i omskog (linearnog) otpornika ima stalan iznos od 2 A. Ovisnost struje i napona za otpornik je $I=k_1 \cdot U$ (k_1=1 A/V) dok je za nelinearni element ta ovisnost $U=k_2 \cdot I^2$. (k_2=1 V/A^2) Koliki je ukupni napon na tom spoju elemenata?Nacrtajte u istom kordinatnom sustavu UI-karakteristike opisanih elemenata.

Rezultat: 6 V

II.2-14. Paralelno su spojeni omski otpornik i nelinearni element iz zadatka 3-14 . Spoj je priključen na napon od 4 V. Kolika je ukupna struja spoja?

Rezultat: 6 A

II.2-15. Nelinearni otponik ima ovisnost struje o naponu $I=k \cdot U^2$ (k =0.1 mA/V^2). Nacrtajte graf ovisnosti struje za napone od 0 do 5 V. Na istom grafu nacrtajte ovisnost struje o naponu za (linearni) otpornik od 2 kΩ. Ako taj nelinearni element i otpornik od 2 kΩ spojimo paralelno na napon od 2,5 V odredite ukupnu struju i snagu spoja.

Rezultat: 1.875 mA, 4.68 mW

II.2-16. Kako se mijenja otpor nelinearnog elementa sa porastom struje ako je ovisnost napona o struji zadana funkcijom $U=f(I)=k \cdot I^{0.5}$ (k=1 V/A$^{0.5}$) Ako u seriju sa ovim elementom spojimo otpornik od 1 Ω struja u krugu je 2 A. Koliki je napon na spoju?

Rezultat: otpor pada, U=3.41 V

III. Tjedan predavanja

Tema III.1 Jednostavni krugovi istosmjerne struje

OBUHVAĆENI POJMOVI:

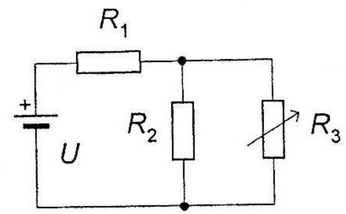
- realni izvor, UI-karakteristika, unutrašnji otpor, napon praznog hoda, struja kratkog spoja
- naponski i strujni model realnog izvora, stupanj korisnosti, prilagođenje trošila na izvor
- kombinirani spoj otpora, nadomjesni otpor
- spojevi kondenzatora, kapacitivni djelitelj napona

POTREBNE JEDNADŽBE:

$U_{p.h.}=I_{k.s.} \cdot R_i$	- veza napona praznog hoda, struje kratkog spoja i unutrašnjeg otpora R_i realnog izvora
$\eta_n=R_t/(R_t+R_i)$	- stupanj korisnosti *(eta)* za naponski model realnog izvora opterećenog trošilom otpora R_t
$\eta_s=R_i/(R_t+R_i)$	- stupanj korisnosti *(eta)* za strujni model realnog izvora opterećenog trošilom otpora R_t
$R_t = R_i$	- uvjet za najveću snagu (prilagođenje) trošila spojenog na realni izvor

Primjeri III.1

III.1-P1. Izračunajte struje kroz sve otpornike u prikazanom strujnom krugu.
Zadano: R_1=20 Ω; R_2=60 Ω; R_3=30Ω; U=40 V.

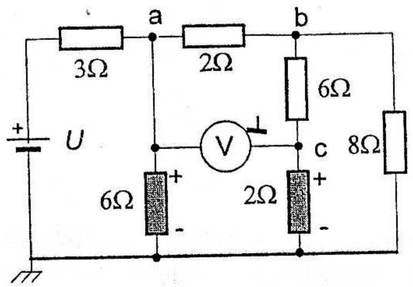


Rješenje: Najprije odredimo ukupan otpor mješovitog spoja otpornika. Paralelni spoj R_2 i R_3 zamijenimo sa jednim otpornikom koji ima iznos $R_{23}=R_2 \cdot R_3/(R_2+R_3)$=20Ω. Sada imamo pojednostavljenu shemu u kojoj su na izvor serijski spojena dva otpornika R_1 i R_{23} koje zamijenimo sa jednim otpornikom $R_{uk}=R_1+R_{23}$=40Ω. Ohmovim zakonom izračunamo ukupnu struju $I_{uk}=U/R_{uk}$=1 A. To je ujedno struja kroz R_1. Ta se struja grana na paraleli R_2 i R_3. Napon na paraleli je $U_{12}=U-I_1 \cdot R_1$=20 V. Pojedine struje su $I_2=U_{12}/R_2$=20/60=1/3 A; $I_3=U_{12}/R_3$=2/3 A (naravno provjerom trebamo ustanoviti da je $I_1=I_2+I_3$)
Kod rješavanja ovog i sličnih zadataka korisno je nacrtati sve pojednostavljene sheme i na njima upisivati izračunate veličine (struje, napone , nadomjesne otpore ,smjerove struja ,polaritete napona...)
napomena: Ovdje se javlja problem označavanja nadomjesnih otpora, napona i struja. Polazište su oznake otpornika. Prikladno je nadomjesne otpore označavati indeksiranim oznakama u kojima se nalaze oznake otpora npr. nadomjesni otpor paralelnog spoja R_2 i R_3 označen je sa R_{23}. U tom smislu bi se R_{uk} ovdje mogao označiti kao R_{123}.

III.1-P2. Na koji iznos treba podesiti promjenjivi otpornik R_3 u spoju iz prethodnog primjera da bi na otporu R_2 napon bio $U/5$? Zadano: R_1=20 Ω; R_2=60 Ω. Kako se mijenja struja kroz R_2 prilikom smanjivanja otpora R_3?

Rješenje: Napon na R_2 je napon na paraleli R_{23}. Na izvor kao da su serijski spojena dva otpornika: R_1 i R_{23}. Ako je na R_{23} napon $U/5$ znači da je taj otpor 4 puta manji od R_1 tj. 5Ω. Dakle, vrijedi jednakost $R_{23}=R_2 \cdot R_3/(R_2+R_3)=5$. Iz "ovoga" izračunamo da R_3 mora biti 5,45 Ω.
Promjenom nekog parametra strujnog kruga dolazi do promjene pojedinih fizikalnih veličina: struja, napona i snaga. Konkretno u ovom primjeru analiziramo posljedice koje nastupaju kada se R_3 smanjuje. Potrebno je napraviti niz zaključaka u kojima moraju biti poštovani Ohmov i Kirchhoffovi zakoni. Krenimo: Ako se R_3 smanji tada se smanji iznos nadomjesnog otpora paralele. To povlači za sobom smanjenje ukupnog otpora. Znači da se poveća ukupna struja odnosno struja kroz R_1. To opet znači da se poveća napon na R_1. Veći napon na R_1 (zbog Kirchhoffovog zakona za napone) znači smanjenje napona na paraleli pa prema tome i smanjenje napona na R_2. Manji napon na R_2 znači i manju struja kroz taj otpornik. Ponekada je prikladno funkcijsku povezanost pojedinih veličina strujnog kruga prikazati grafom. Za vježbu nacrtajte (skicirajte) graf funkcije $I_2=f(R_3)$. Početna vrijednost R_3 neka je nula (na mjestu otpornika R_3 je kratkospojnik), a završna beskonačno (otpor R_3 je odspojen). Čitatelju prepuštamo da analizira i druge fizikalne veličine ovog strujnog kruga kao i promjene drugih parametara kruga.

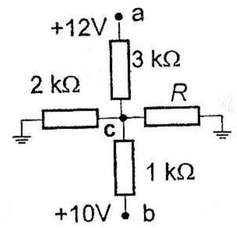
III.1-P3. U prikazanom električnom krugu voltmetrom je izmjeren napon od +10V. Izračunajte ukupan otpor spoja otpornika kao i napon izvora U. Koliki je napon U_{ab}?



Rješenje: U ovom primjeru je na naponski izvor priključen mješoviti spoj otpornika. Ukupan otpor određujemo postepeno uočavajući serijske i paralelne spojeve koje onda zamjenjujemo njihovim nadomjesnim otporima. Krenemo od serije 6 i 2 Ω za koju je ukupni otpor 8Ω. Taj otpor je u paraleli sa (sasvim desno) otpornikom od 8 Ω. Ukupan otpor ove paralele je dakle 4 Ω. U seriju sa tim otporom je otpornik od 2 Ω što daje 6 Ω. Taj je pak u paraleli sa 6 Ω što daje 3 Ω. Preostaje serijski spoj 3+3 pa je ukupan otpor gledano sa stezaljki izvora 6Ω. Sve smo računali "napamet" zbog jednostavnih zadanih podataka. Jasno da bi u općenitom slučaju trebalo više računanja sa kalkulatorom. Dapače u takvom slučaju čitatelju se preporuča postepeno crtanje nadomjesnih shema sa upisivanjem izračunatih vrijednosti pojedinih nadomjesnih otpora. Time je prvi dio zadatka riješen. Za drugi dio tj. za proračun napona izvora treba malo razmisliti. U točki *a* ukupna struja se dijeli u dva dijela. Zanimljivo je da su ta dva dijela struje jednaka, jer zapravo imamo zatamnjeni otpornik od 6Ω paralelno sa onim nadomjesnim od 6 Ω. Struju kroz zatamnjeni otpornik od 6 Ω označimo sa I, a zatim se pitamo kolika je struja kroz zatamnjeni otpornik od 2 Ω. Ta je struja I/2 jer se u čvoru *b* struja opet grana u

dvije jednake struje. Označimo polaritet napona na zatamnjenim otpornicima. Tamo gdje struja ulazi postavimo oznaku + (ta stezaljka otpornika je na višem potencijalu). Napon voltmetra je algebarska suma napona na zatamnjenim otpornicima. Polazimo od referentne stezaljke voltmetra:
$U_V=-U_2+U_6=-0{,}5 \cdot I \cdot 2+I \cdot 6$ iz čega slijedi da je $I=U_V/5=2$A. Ukupna struja koja ulazi u čvor ***a*** je dakle 4 A pa je napon izvora $U=4 \cdot R_{uk}=4A \cdot 6\Omega=24$ V
Napon U_{ab} je napon na otporniku od 2 Ω kroz koji prolazi struja od 2 A: U_{ab}=4V. Treba primjetiri da će napon U_{ba} biti –4 V (promjena redoslijeda stezaljki mijenja polaritet napona)

III.1-P4. Izračunajte kod kojeg iznosa otpora R će potencijal točke **c** u spoju na slici desno biti jednak +6 V

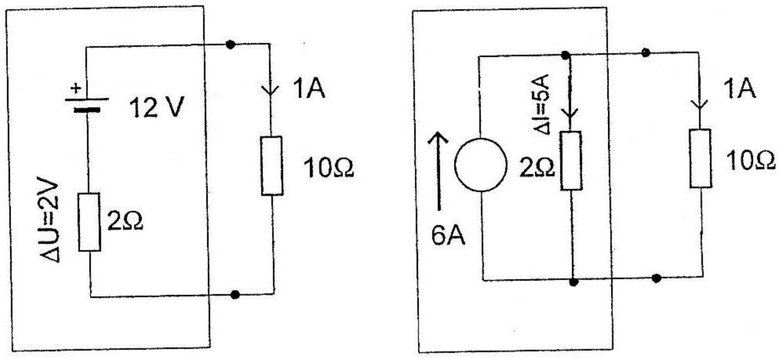


Rješenje: Ponekada na shemama (osobito u elektronici) koristimo posebnu oznaku za masu tj. za zajedničku točku strujnog kruga (eng. ground). Treba voditi računa da su sve «mase» galvanski (vodljivo) međusobno spojene. U ovom primjeru je dakle otpornik R spojen paralelno sa otpornikom od 2 kΩ. Na shemi su označeni potencijali pojedinih točaka prema masi. Npr. točka ***a*** je na +12 V što znači da bismo mogli ucrtati naponski izvor od 12 V između točke **a** i mase. Iz poznatih potencijala možemo odrediti napone na pojedinim otpornicima, a zatim i njihove struje.
Napon na otporniku od 3 kΩ je 6 V (razlika potencijala točaka **a** i **c**) . Pozitivna je gornja stezaljka tog otpornika pa struja teče "od gore prema dolje" I_3=2 mA. Na jednak način dobivamo struju kroz otpornik od 1 kΩ: I_1=4 mA (smjer prema čvoru **c**). Struja kroz otpornik od 2 kΩ ima smjer "u lijevo" tj. teče od čvora **c** prema masi. Iznos te struje je 6V/2kΩ=3mA. Sada treba primjeniti Kirchhoffov zakon za struje na čvor **c** i ustanoviti da kroz (zasada) nepoznati otpornik R prolazi struja od 3 mA i to "u desno" tj. od čvora **c** prema masi. Budući da je napon na otporniku R, 6 V tada iz Ohmovog zakona slijedi da je R=6/0.003=2000Ω=2kΩ. Čitatelju preporučamo da prilikom rješavanja ovog i sličnih zadataka na shemi upisuje pojedine struje i napone (pazeći na smjer i polaritet).

III.1-P5. Istosmjerni izvor ima napon praznog hoda 12 V. Ako na taj izvor priključimo otpornik (trošilo) od 10 Ω napon na stezaljkama se smanji na 10V. koliki je unutarnji otpor tog izvora? Prikažite opisani izvor shematski a) naponskim b) strujnim modelom.

Rješenje: Struja kroz otpornik (trošilo) je I=10/10=1 A. Smanjenje napona za 2 V možemo protumačiti "padom napona" unutar samog izvora. U seriji sa (idealnim) naponskim izvorom od 12 V treba zamisliti serijski spojen unutarnji otpor izvora. Taj otpor lako izračunamo jer znamo pad napona na njemu (2 V) i struju (1 A). Dakle unutarnji otpor je: R_i=2V/1A=2 Ω . Time je dobiven model (realnog) naponskog izvora. Možemo izračunati struju koju bi takav izvor davao ako mu stezaljke kratko spojimo. Ta struja je I_{ks}=12/2=6 A. Međutim kada na izvor spojimo otpornik od 10 Ω struja će biti samo 1 A. Znači da se dio struje "troši" u samom izvoru. Možemo zamisliti kao da je paralelno (idealnom) strujnom izvoru od 6 A spojen "unutarnji" otpornik kroz koji prolazi

struja 5 A. Kako je na stezaljkama izvora napon od 10 V taj unutarnji otpornik ima iznos 10/5=2 Ω. Zaključujemo da su u modelu naponskog i strujnog realnog izvora unutarnji otpori jednaki. Za vanjski krug (trošilo) je sasvim svejedno koji model izvora koristimo. Pažnja: struje i naponi na unutarnjem otporu ovise o modelu.



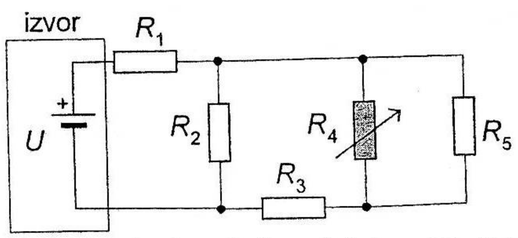
naponski model — strujni model

Zadaci III.1

III.1-1. Na nekom istosmjernom izvoru električne energije izvršena su dva mjerenja. Prvo mjerenje je bilo sa otporom trošila 10 Ω kada je ustanovljena struja od 1 A. Kod drugog mjerenja je otpor trošila promijenjen na 2,5 Ω, a struja je bila 2 A. Odredite (uz pretpostavku da je UI-karakteristika tog izvora pravac) koliki su a) struja kratkog spoja b) napon praznog hoda c) unutarnji otpor . Nacrtajte UI-karakteristiku izvora i njegovu shemu koristeći model strujnog odnosno naponskog izvora. d) Izračunajte snagu trošila ako je otpor trošila redom: 2,5 Ω; 5 Ω i 10 Ω.

Rezultat: a) 3 A b) 15 V c) 5 Ω d) 10W, 11.25 W i opet 10 W

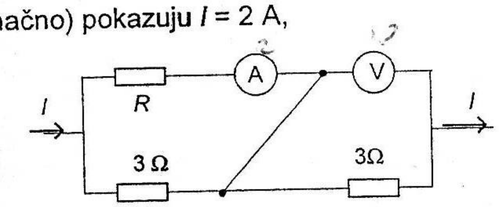
III.1-2. U spoju na slici smanjuje se otpor R_4. S tim u vezi navedene su sljedeće tvrdnje: **1.** R_{uk} pada **2.** I_1 raste **3.** I_2 se ne mijenja; **4.** I_3 pada; **5.** I_5 raste . (indeksi struja i napona odnose se na otpore). Koje su tvrdnje točne?



Rezultat: 1. i 2. je točno Uputa: kod ovakvih zadataka prikladno je koristiti oznake: ↑ raste , ↓ pada, – ne mijenja se. Treba krenuti od veličine koja je zadana kao promjenjiva: R_4 ↓ (pada) posljedica je da R_{45} ↓ pa onda R_{345} ↓, R_{2345} ↓, R_{uk} ↓, I_1 ↑, U_1 ↑, U_2 ↓ itd. Kod zaključivanja o promjeni pojedine struje ili napona treba voditi računa o KZS odnosno o KZN.

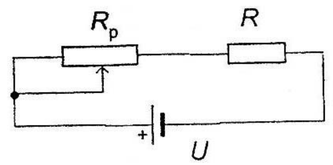
Pitanje Na prikazani spoj otpornika umjesto naponskog izvora U priključimo strujni I. Koje su u tom slučaju tvrdnje ispravne ako se R_4 smanjuje?odg. točno je 1.

III.1-3. Idealni instrumenti (R_a=0, R_v=beskonačno) pokazuju I = 2 A, U = 18 V . Koliki su a) iznos otpora R b) struja I c) ukupna snaga spoja.



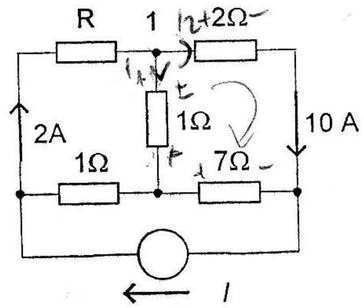
Rezultat: R = 6Ω, I = 6A, P = 180 W

III.1-4. Koji od kliznih otpornika R_p (zadanih svojim nazivnim otporom i nazivnom strujom) biste odabrati za regulaciju napona trošila R=20 Ω u granicama od 40 do 160 V prema slici desno? Napon izvora je 220 V.
A) 90 Ω, 2 A B)120 Ω, 10 A
C) 90 Ω, 8 A D)170 Ω, 4 A E)20 Ω, 8 A



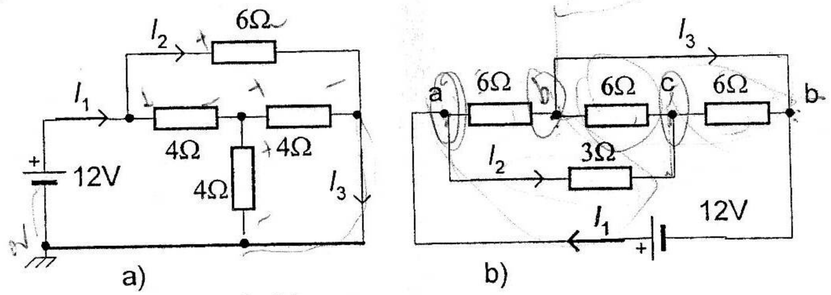
Odgovor: B) ili C)

III.1-5. Uz poznate otpore i struje označene na slici desno, odredite otpor R i struju izvora I te napon na stezaljkama strujnog izvora. Uputa primjenite najprije KZS za čvor 1 , zatim KZN za desnu konturu itd.



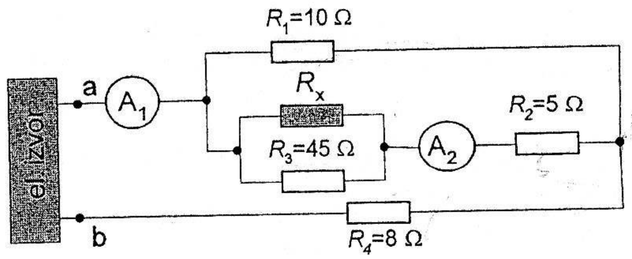
Rezultat: 10 Ω, 14 A, 40 V

III.1-6. U prikazanom spoju otpornika prema slici a) i b) izračunajte struje I_1,I_2 i I_3. Koliki je potencijal točke **c** u spoju na slici b) ako je referentna točka minus pol izvora?



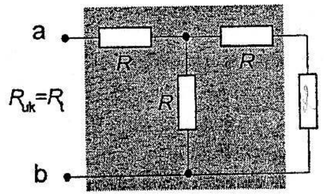
Rezultat: a) I_2=2A, I_1=4A, I_3=3A.
b) I_2=2A, I_1=4A, I_3=3A. Potencijal točke **c** je +6V.

III.1-7. U prikazanom mješovitom spoju otpornika izmjerene su struje I_1=3A i I_2=1A. Svi otpornici su poznati (zadani) osim onog koji je označen s R_x. Koliki je taj R_x? Kakav bi se "idealni" izvor mogao nalaziti u kutiji sa oznakom el. izvor?



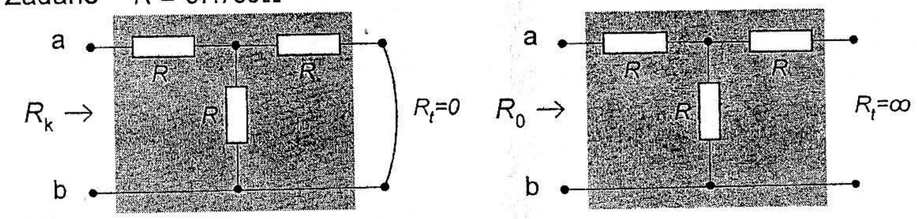
Rezultat: R_x=22,5 Ω. u kutiji se može nalaziti strujni izvor I = 3 A ili naponski U = 44 V.

III.1-8. U prikazanom spoju otpornika treba izračunati otpor R uz koji će ukupan otpor sa priključnica **a** i **b** biti jednak R_t (tj. jednak je kao da n
Zadano R_t = 100Ω



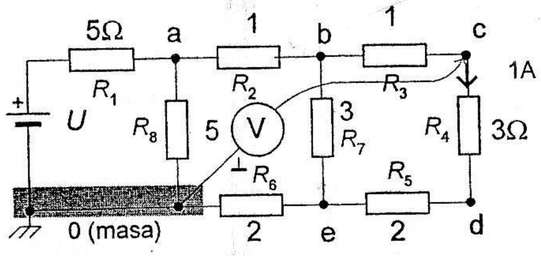
Rezultat: R = 57.735 Ω

III.1-9. Odredite otpor sa stezaljki **a** i **b** ako otpor R_t iz prethodnog zadatka ima iznos nula (kratki spoj označite ga s R_k) slika lijevo odnosno beskonačno (prekid označite ga s R_o) slika desno. Izračunajte $\sqrt{R_o R_k}$ i dobiveni rezultat usporedite sa prethodnim zadatkom!
Zadano R = 57.735Ω



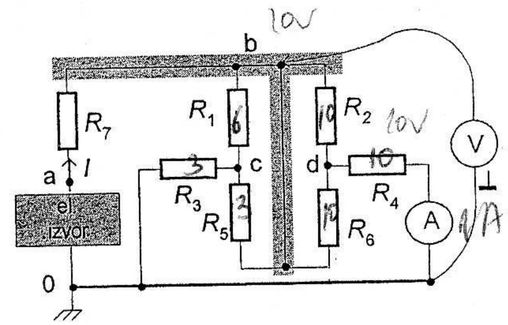
Rezultat: R_k=86,6Ω R_0=115,47 Ω

III.1-10. U prikazanom mješovitom spoju otpornika poznata je označena struja i vrijednosti svih otpornika. Odredite napon izvora i potencijale (napone prema masi) točaka **a**,**b**,**c**,**d** i **e** (na slici je prikazan voltmetar kako mjeri potencijal točke **c**) Rezultate upišite na shemu spoja (označite polaritete napona i smjerove struja).



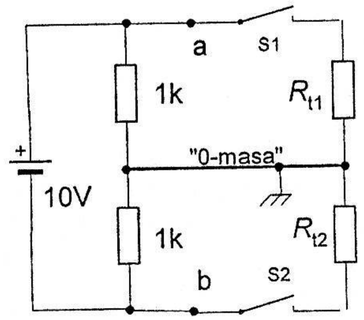
Rezultat: φ_a=+15 V, φ_b=+12V, φ_c=+11 V, φ_d=+8 V, φ_e=+6 V.

III.1-11. U prikazanom spoju ampermetrom je izmjerena struja kroz R_4. Izračunajte ukupnu struju i napon izvora te potencijale označenih točaka. Potencijali su naponi prema masi koje bi pokazivao voltmetar (nacrtan je kako mjeri potencijal točke b. Kakav bi izvor mogao biti u zatamnjenoj kutiji (na kojoj piše el.izvor)?
Zadano: R_1 = 6Ω R_2 = 10Ω R_3=3 Ω
R_4=10Ω R_5=3 Ω R_6 = 10Ω R_7=1Ω
I_{R4}= 1A

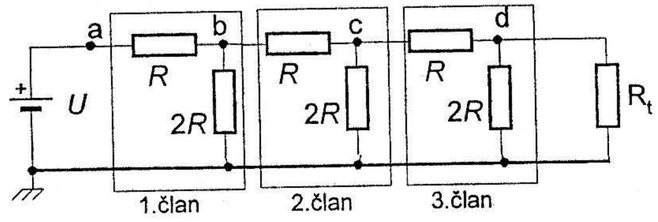


Rezultat: I=4A φ_a=19V φ_c=9V φ_d=10V, strujni od 4 A ili naponski od 19 V.

III.1-12. U prikazanom spoju naponskog djelila treba odrediti potencijale točaka **a** i **b** u tri slučaja **1.** djelilo je neopterećeno (sklopke S1 i S2 su otvorene) 2. sklopka S1 je zatvorena, a S2 otvorena 3. sklopke S1 i S2 su zatvorene
Zadano R_{t1} = 10kΩ R_{t2} = 20kΩ
U = 10V (1 k je skraćenica od 1 kΩ)
Rezultat: **1.** neopterećeno djelilo
φ_a = 5 V φ_b = −5 V
2. opterećen je gornji (pozitivni) dio djelila
φ_a = 4.762 V φ_b = −5.238 V
3. opterećen je gornji i donji dio djelila.
φ_a = 4.884 V φ_b = −5.116 V



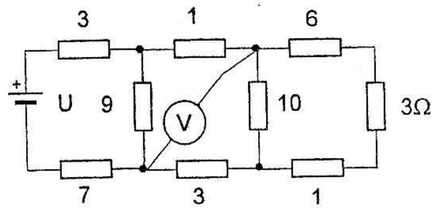
III.1-13. Na izvor napona U spojeno je trošilo R_t=2R preko tri "R-2R" člana kako je prikazano slikom. Treba izračunati a) ukupan otpor ovog mješovitog spoja otpornika sa strane izvora b) potencijale točke **a** ako je potencijal točke **d** 1V.



Rezultat: a) ukupan otpor 2R bez obzira na broj članova "R-2R" u nizu .

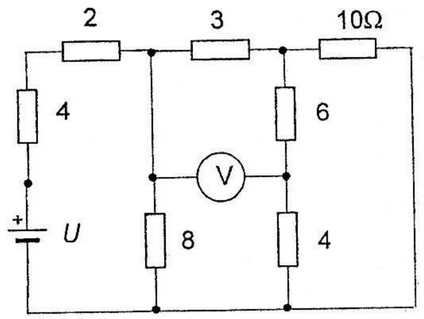
b) potencijal točke **a** je 8 V. To je ujedno napon izvora.

III.1-14. Koliki je napon izvora ako voltmeter pokazuje 16 V?



Rezultat: 58 V

III.1-15. Izračunajte snagu izvora kao i snage na pojedinim otpornicima ako voltmetar pokazuje U_V=6 V? Koliko će pokazivati voltmeter ako umjesto naponskog izvora priključimo strujni od 4 A?

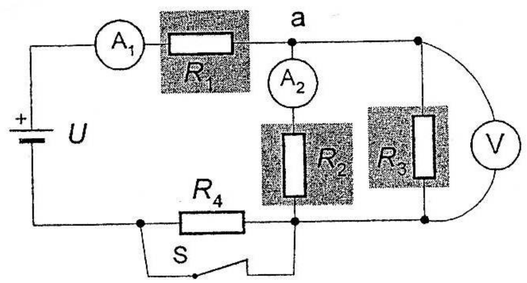


Rezultat: 40 W, 12 V

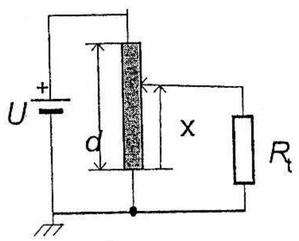
III.1-16. Izmjerene su struje I_1 I_2 te napon U_V. a) Kirchhoffovim zakonima (i naravno Ohmovim zakonom) odredite nepoznate otpore. b) izračunajte pokazivanja instrumenata nakon otvaranja sklopke S
Zadano je I_1 = 1A I_2 = 0.6A U_V = 6V U = 12V R_4 = 6Ω

Rezultat:

a) R_3=15Ω, R_2=10Ω, R_1=6Ω
b) I_{1n} = 0.667 A I_{2n} = 0.4 A. U_{Vn} = 4 V



III.1-17. Za podešavanje napona na trošilu R_t=55 Ω koristi se prikazani spoj sa kliznim otpornikom. Duljina kliznog otpornika d=30 cm, a ukupan otpor je 55 Ω. U koji položaj treba postaviti kliznik (x=?) da bismo na trošilu dobili napon a)0.25U b) 0.5 U c) 0.75 U. Skicirajte graf funkcije U_t=f(x).



Rezultat: a) 9.1 cm b) 18,5 cm c) 25.4 cm

III.1-18. Serijski su spojena dva otpornika R_1=10 Ω i promjenjivi otpornik R_2 (od nula do 100 Ω). Spoj je priključen na naponski izvor od 12 V nazivne struje 2A. a) Kod kojeg iznosa R_2 će snaga na R_2 biti najveća moguća b) Kolika je ta snaga c) Kod kojih iznosa otpora R_2 će snaga na R_2 biti jednaka polovici maksimalne d) Kolika treba biti nazivna struja otpornika .

Rezultat: a) najveća snaga je kod R_2= R_1 = 10 Ω, b) 3.6 W c) 1.7157Ω i 58.284 Ω
d) nazivna struja treba biti veća od 1,2 A.

Tema III.2 Kondenzatorski spojevi

OBUHVAĆENI POJMOVI:

- serijski spoj, kapacitivno djelilo napona
- paralelni spoj
- očuvanje naboja
- mješoviti spoj kodenzatora
- nabijanje i izbijanje kondenzatora
- pohranjena energija

POTREBNE JEDNADŽBE:

$Q=C\cdot U$	- veza između kapaciteta,naboja i napona
$W=Q^2/2C$	- energija kondenzatora
$C_{uk}=C_1C_2/(C_1+C_2)$	ukupni kapacitet serijskog spoja kapaciteta C_1 i C_2
$C_{uk}=C_1+C_2$	ukupni kapacitet paralelnog spoja kapaciteta C_1 i C_2

Primjeri III.2

III.2-P1. Imamo dva kondenzatora C_1 = 3,3 μF C_2 = 4,7 μF. Prvi je predviđen za nazivni napon od 63 V, a drugi za 100V. Koliki najveći napon smijemo priključiti na: a) paralelno b) serijski spojene kondenzatore? Izračunajte naboje na kondenzatorima za oba slučaja.

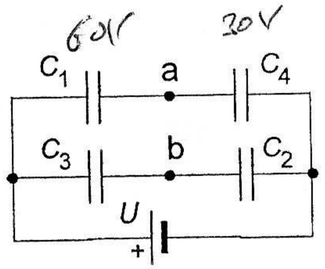
Rješenje: Ako se napon na kondenzatoru poveća iznad nazivnog napona električno polje u kondenzatoru postaje preveliko i može doći do proboja u izolatoru odnosno do uništenja kondenzatora.
a) U paralelnom spoju napon će biti jednak na oba kondenzatora. Najveći napon koji smijemo priključiti na ovaj spoj je 63 V. Time je prvi kondenzator maksimalno opterećen, a drugi podopterećen. Naboji će biti: $Q_1=C_1\cdot 63$=207 μAs; $Q_2=C_2\cdot 63$=296 μAs. Ukupan naboj na kondenzatorima je $Q=Q_1+Q_2$= 503 μAs
b) Kod serijskog spoja se napon izvora raspodijeli na kondenzatorima. Pri tom manji kondenzator dobiva veći napon. Prvi kondenzator dakle C_1 će dobiti veći napon. Taj napon može biti najviše 63 V. Naboji na kondenzatorima su jednaki: $C_1\cdot 63=C_2\cdot U_2$ iz čega slijedi da je $U_2=63\cdot C_1/C_2$=44,23 V. Ukupan napon je dakle: $U=U_1+U_2$=107,23 V Iznosi naboja na kondenzatorima su $Q_1=Q_2$=207μAs. Taj naboj možemo izračunati i ovako: ukupan kapacitet je $C_{uk}=C_1\cdot C_2/(C_1+C_2)$=1,93μF, a zatim je $Q=C_{uk}\cdot U$=1,93• 107,23=207μAs.

III.2-P2. Kondenzator $C_1=C$ nabijemo na napon U, a zatim ga odspojimo sa izvora. Na stezaljke kondenzatora spojimo prazan kondenzator C_2 kapaciteta 3C. Koliki će biti naboj na svakom od kondenzatora? Koliki je napon na kondenzatorima?
Zadano C = 10 nF i U = 100 V

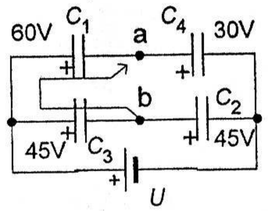
Rješenje: Priključivanjem na izvor od 100V , kondenzator C_1 primi naboj $Q=C_1\cdot 100V$=1000nAs. Nakon odspajanja izvora i spajanja kondenzatora C_2 dio naboja sa kondenzatora C_1 prelazi na C_2. Ukupan naboj sustava ostaje jednak početnom naboju koji je bio na C_1. Prijelaz naboja prestaje kada se naponi na kondenzatorima izjednače. Taj napon označimo kao U_k. To možemo matematički iskazati jednadžbama:

$U_k=Q_1/C_1=Q_2/C_2$ i $Q_1+Q_2=Q$. Dobivamo da će napon na kondenzatorima biti: $U_k=Q/(C_1+C_2)=25$ V.
Preostali naboj na C_1 je : $25\cdot C_1=250$ nAs dok je C_2 primio naboj: $25\cdot C_2=750$ nAs.

III.2-P3. Izračunajte napon između točaka ***a*** i ***b*** u prikazanom spoju kondenzatora. Koliki je ukupan naboj kojim je izvor nabio ovaj spoj kondenzatora?
Zadano: $C_1=30$ nF $C_3=C_2=C_4=60$ nF
$U=90$V



Rješenje: Na izvor su paralelno spojene dva serijska spoja kondenzatora. Svaki od spojeva možemo zasebno rješavati tj. izračunati napone na kondenzatorima. Napon na C_1 će biti: $U_{C1}=U\cdot C_4/(C_1+C_4)=60$ V, a na C_4 je napon $U_{C4}=U-U_{C1}=30$ V. Na serijskom spoju C_2 i C_3 dobivamo jednake napone, jer su kapaciteti tih kondenzatora jednaki. $U_{C2}=U_{C3}=U/2=45$V. Izračunati naponi su prikazani na slici:



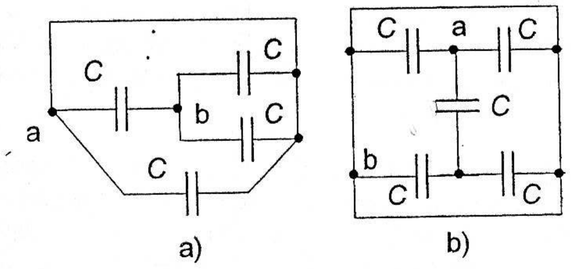
Za dobivanje napona U_{ab} treba krenuti od točke **b** i "pokupiti" napone (sa polaritetom) na putu prema točki **a**. Dobivamo: $U_{ab}=+45V-60V=-15$ V. Točka **a** je negativna u odnosu na točku **b**.
Ukupan kapacitet spoja je: $C_{uk}=C_1\cdot C_4/(C_1+C_4)$ + $C_2\cdot C_3/(C_2+C_3)$ = 50 nF. Prilikom nabijanja spoj je primio naboj $Q=U\cdot C_{uk}=4500$ nAs.

Zadaci III.2

III.2-1 Na naponski izvor U spojimo u seriji kondenzatore C_1 i C_2. Koji je odnos kapaciteta kondenzatora C_2/C_1 ako je odnos napona U/U_2 a) 2 b) 9?

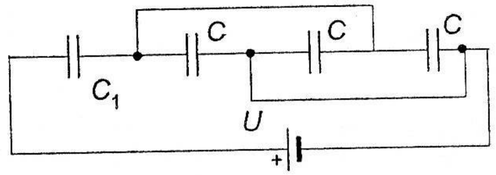
Rezultat: a) 1 b) 8

III.2-2 Koliki je ukupni kapacitet sa stezaljki **a** i **b** u spoju prema slici a) i b) ?



Rezultat: a) 2/3 C b) 8/3 C

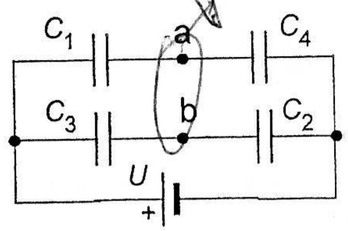
III.2-3 U prikazanom spoju kondenzatora izračunajte ukupan kapacitet i napon na kondenzatoru C_1.
Zadano: $C=10$ nF $C_1=30$ nF $U=10$V



Rezultat: $C_{uk}=15$ nF, 5 V.

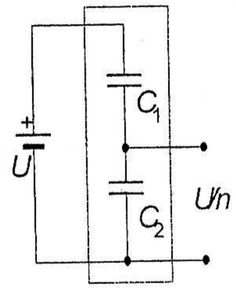
III.2-4. Izračunajte napon između točaka *a* i *b* u prikazanom spoju kondenzatora. Koliki bi bio taj napon ako C_1 i C_4 zamijene mjesta?
Zadano: $C_1=C_3=30$ nF $C_2=C_4=60$ nF $U=90$V

Točke istog potencijala



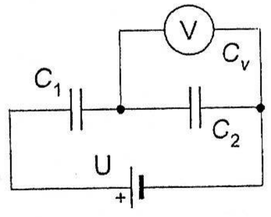
Rezultat: nula (most je u ravnoteži),
$U_{ab}=+30$V (tj. plus je na a)

III.2-5. Neki izvor visokog napona ima napon U. Potrebno je proračunati kondenzatore kapacitivnog djelila napona kojim će se napon smanjiti n puta. Pritom ukupna energija koja će se pohraniti u djelilu treba biti W_{uk}.
Zadano: $U=20$ kV, $n=100$, $W_{uk}=0.1$ J



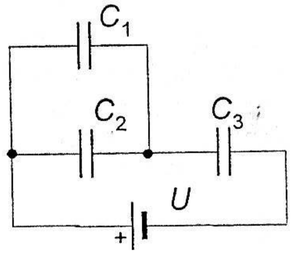
Rezultat: $C_1=505{,}1$ pF $C_2=50$ nF.

III.2-6. Elektrostatskim voltmetrom mjerimo napon na kondenzatoru C_2 u prikazanom spoju. Kolika je pogreška (apsolutna i relativna) izmjerenog napona ako voltmetar ima kapacitet C_v?
Zadano: $C_1=2{,}2$ nF $C_2=330$ pF $C_v=150$ pF
$U=100$ V



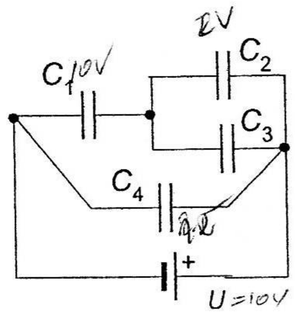
Rezultat: -4,867V, -5,6%

III.2-7. U spoju prema slici poznate su veličine: C_2, C_3, Q_{C1} i U_{C3}. Odredite a) kapacitet kondenzatora C_1 b) napon izvora U c) ukupan kapacitet spoja
Zadano: $C_2=5\mu$F, $C_3=11\mu$F, $Q_{C1}=100\mu$C, $U_{C3}=20$V.



Rezultat: a) $U=44$V , b) $C_1=4{,}16\ \mu$F c) $C_{uk}=5\ \mu$F .

III.2-8. Odredite naboj na C_4 ako je zadano: Q_1=10 nA C_1=1 nF C_2=2 nF C_3= 3 nF C_4=4 nF.



Rezultat: 48 nAs

III.2-9..Serijski su spojeni kondenzator C_1 i kondenzator promjenjivog kapaciteta C_2. Spoj je priključen na stalan napon U. Na koji iznos treba podesiti C_2 da bi njegova energija bila najveća moguća (maksimalna)? Kolika je ta energija? Nacrtajte graf ovisnosti energije o C_2 ako se C_2 mijenja od 2 do 20 nF.
Zadano: C_1 = 10 nF, U = 10 V

Rezultat: C_2=10 nF , 125 nJ

IV. Tjedan nastave

Tema IV.1 Složeni krugovi istosmjerne struje

OBUHVAĆENI POJMOVI:

- spoj elemenata u trokut i zvijezdu, pretvorbe trokut:zvijezda
- spoj u most, ravnoteža mosta
- el. krugovi s više izvora
- načelo *superpozicije*

POTREBNE JEDNADŽBE:

$R_1=R_{12}R_{31}/(R_{12}+R_{23}+R_{31})$
$R_2=R_{23}R_{12}/(R_{12}+R_{23}+R_{31})$
$R_3=R_{31}R_{23}/(R_{12}+R_{23}+R_{31})$

- pretvorba *spoja trokuta* otpora R_{12}, R_{23} i R_{31} (među točkama 1,2 i 3) u *spoj zvijezde* otpora R_1, R_2 i R_3

$R_{12}=R_1+R_2+R_1R_2/R_3$
$R_{23}=R_2+R_3+R_2R_3/R_1$
$R_{31}=R_3+R_1+R_3R_1/R_2$

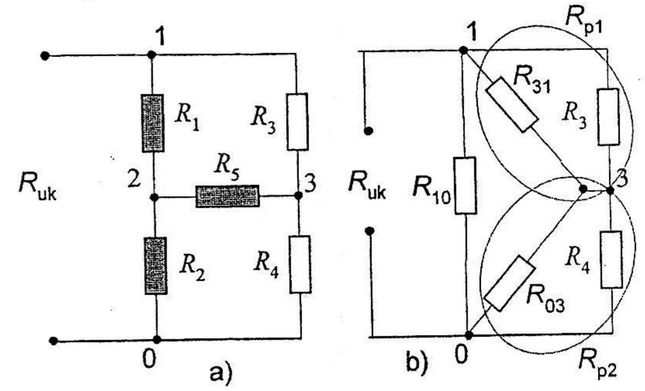
- pretvorba *spoja zvijezde* otpora R_1, R_2 i R_3 (među točkama 1,2 i 3) u *spoj trokuta* otpora R_{12}, R_{23} i R_{31}

$R_1R_4=R_2R_3$

- uvjet *ravnoteže mosta*, gdje su R_1 i R_4, te R_2 i R_3 otpori u (dijagonalno) nasuprotnim granama mosnog spoja otpora

Primjeri IV.1

IV.1-P1. Za prikazan spoj otpornika izračunajte ukupan otpor koristeći transformaciju označene (zatamnjene) zvijezde (slika a) u trokut (slika b).
Zadano R_1 = 4Ω R_2 = 1.6Ω R_3 = 6Ω R_4 = 12Ω R_5 = 4Ω



Rješenje: Prikazani spoj otpornika nazivamo: električni most (Wheatstoneov most). Dosadašnji postupak određivanja ukupnog otpora (serije-paralele) nije moguć. Potrebno je nešto novo... Pokazalo se da je moguće otpornike spojene u zvijezdu zamijeniti spojem u trokut. (i obrnuto). Nakon takve zamjene dobivamo spoj prema slici b) u kojem uočavamo paralele i serije pa možemo uobičajenim postupkom izračunati ukupan otpor.
Najprije preko vodljivost izračunamo tzv. otpor zvijezde :

$$G_Z = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5} \qquad R_Z = \frac{1}{G_Z} \qquad R_Z = 0.889\,\Omega \quad \text{(otpor zvijezde)}$$

pri označavanju otpora trokutnog spoja koristimo oznake čvorova

$$R_{10} = \frac{(R_1 \cdot R_2)}{R_Z} \qquad R_{03} = \frac{(R_2 \cdot R_5)}{R_Z} \qquad R_{31} = \frac{(R_1 \cdot R_5)}{R_Z}$$

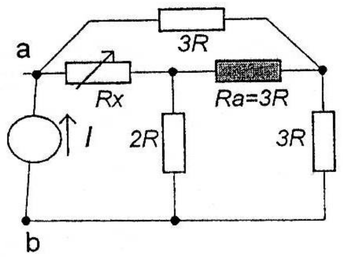
$R_{31} = 18\,\Omega$ $\quad R_{10} = 7.2\,\Omega$ $\quad R_{03} = 7.2\,\Omega$

Za nadomjesni spoj prema slici b) postepenim rješavanjem spojeva otpornika dobivamo da je R_{uk}: $R_{p1} = \frac{(R_{31} \cdot R_3)}{R_{31} + R_3}$ $\quad R_{p2} = \frac{(R_{03} \cdot R_4)}{R_{03} + R_4}$

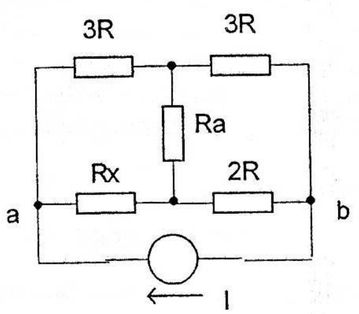
$R_{p1} = 4.5\,\Omega$ $\quad R_{p2} = 4.5\,\Omega$ $\quad R_{uk} = \frac{[R_{10} \cdot (R_{p1} + R_{p2})]}{R_{10} + R_{p1} + R_{p2}}$ $\quad R_{uk} = 4\,\Omega$

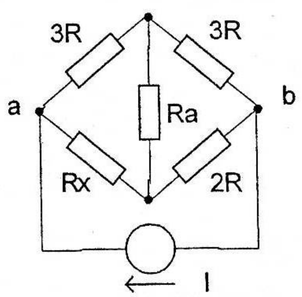
Treba voditi računa da električni most može biti u posebnom stanju koje nazivamo ravnoteža mosta. To stanje bi u ovom primjeru nastupilo ako vrijedi: $R_1 \cdot R_4 = R_2 \cdot R_3$. U stanju ravnoteže nema razlike potencijala između točaka 2 i 3 pa se otpornik R_5 može odstraniti ili kratko spojiti. Preporuka je : prije bilo kakvog računanja na mosnom spoju treba provjeriti da li je most u ravnoteži, jer su za slučaj ravnoteže proračuni jednostavniji. Formule za transformaciju trokuta u zvijezdu i obratno nalaze se u popisu formula.

IV.1-P2. Koliki treba biti iznos promjenjivog otpora da bi struja kroz *Ra* bila jednaka nuli? Koliki je u tom slučaju napon između točaka a i b?
Zadano: R=3 Ω I=1,5 A



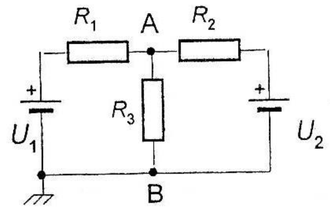
Rješenje: Spoj prikazan na slici je (prikriveni) mosni spoj što možemo «otkriti» ako elemente malo drugačije rasporedimo (pazeći da spojevi između njih ostanu sačuvani -slika dolje). Traženi otpor označimo sa *Rx*. Otpornik *Ra* je u dijagonali mosta. Da bi struja kroz *Ra* bila nula, most mora biti u ravnoteži. U ovom slučaju to znači da mora vrijediti: $Rx \cdot 3R = 2R \cdot 3R$ odnosno $Rx = 2R = 6\,\Omega$. Ukupan otpor spoja između točaka a i b je (za slučaj ravnoteže) 7,2 Ω pa je napon između a i b $U_{ab} = I \cdot 7{,}2 = 10{,}8$V





Ako umjesto strujnog izvora spojimo naponski od 10,8 V ukupna struja će opet biti 1,5 A. U mjernoj tehnici se umjesto otpornika *Ra* spaja instrument (indikator) koji će pokazati nulu kada je most uravnotežen.

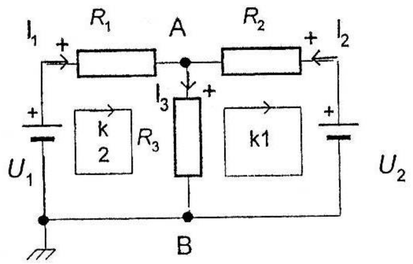
IV.1-P3. Odredite struje u granama prikazane mreže a) izravnom primjenom Kirchhoffovih zakona b) superpozicijom
Zadano je: R_1=3 Ω; R_2=3 Ω; R_3=6 Ω;
U_1=24 V; U_2=12 V.



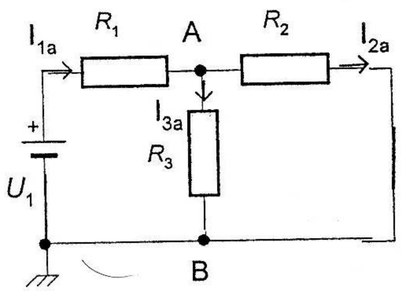
Rješenje: a)Kod izravne primjene Kirchhoffovih zakona treba najprije označiti struje u granama (oznake se mogu dati prema otpornicima, a smjer je proizvoljan). Nakon toga se stavi oznaka + na svakom otporniku tamo gdje struja ulazi. Slijedi odabir kontura sa smjerom obilaženja (obično se uzima u smjeru kazaljke na satu) i označavanje čvorova. Time su izvršene pripreme za pisanje jednadžbi K. zak.

$I_1 - I_3 + I_2 = 0$ za čvor A
$U_1 - I_1R_1 - I_3R_3 = 0$ kontura 1
$-U_2 + I_3R_3 + I_2R_2 = 0$ kontura 2

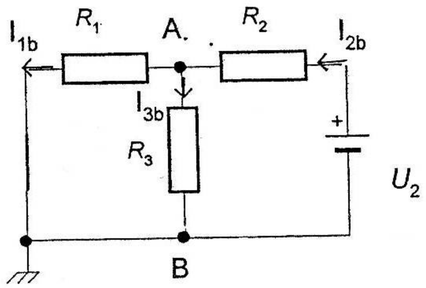
nepoznanice su struje I_1 I_2 I_3 nakon provedenog postupka rješavanja sustava jednadžbi dobivamo:
I_1 =3,2 A (prema čvoru A) , I_2 = -0,8 A
I_3=-2.4 A (iz čvora A)



Negativan predznak rezultata indicira smjer struje suprotan od pretpostavljenog Pretpostavljeni smjer struje (ucrtani smjer) je u tom smislu referentan tj. predznak struje se odnosi na taj smjer.
b)Kod superpozicije izračunavamo struje za svaki izvor posebno (tzv. parcijalne struje). Jedan izvor u mreži ostane aktivan, a sve preostale izvore "umrtvimo". Na mjesto naponskog izvora se pri tom stavlja kratkospojnik dok se na mjestu strujnog ostavlja prekid. U ovom primjeru dobivamo na taj način spojeve prema slici a) i b) koje rješavamo uobičajenim postupkom za mješovite spojeve otpornika.



a)



b)

Ukupne struje dobivamo algebarskim zbrajanjem tj. vodimo računa o predznacima odnosno smjerovima "parcijalnih" struja.

spoj prema slici a)

$$R_{uka} = R_1 + \frac{(R_2 \cdot R_3)}{R_2 + R_3} \qquad R_{uka} = 5\Omega$$

$$I_{1a} = \frac{U_1}{R_{uka}} \qquad I_{1a} = 4.8\text{A}$$

$$I_{3a} = I_{1a} \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3} \qquad I_{3a} = 1.6\text{A} \quad I_{2a} = I_{1a} - I_{3a} \qquad I_{2a} = 3.2\text{A}$$

spoj prema slici b)

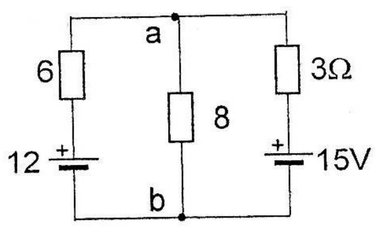
$$R_{ukb} = R_2 + \frac{(R_1 \cdot R_3)}{R_1 + R_3} \qquad R_{ukb} = 5\Omega$$

$$I_{2b} = \frac{U_2}{R_{ukb}} \qquad I_{2b} = 2.4\text{A}$$

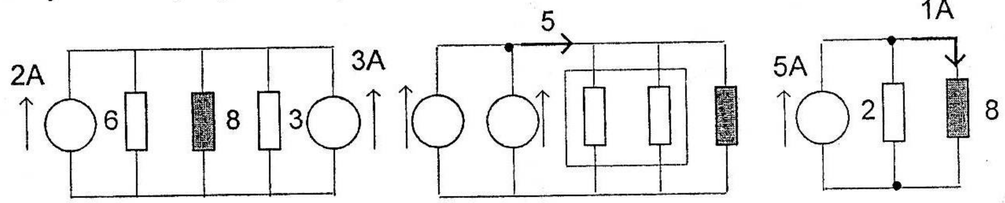
$$I_{3b} = I_{2b} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_3} \qquad I_{3b} = 0.8\text{A} \quad I_{1b} = I_{2b} - I_{3b} \qquad I_{1b} = 1.6\text{A}$$

Ukupna struja kroz R_1 je $I_1 = I_{1a} - I_{1b} = 3{,}2$ A (u smjeru struje I_{1a})
kroz R_3: $I_3 = I_{3a} + I_{3b} = 1{,}6 - 0{,}8 = 2{,}4$A
kroz R_2: $I_2 = I_{2a} - I_{2b} = 3{,}2 - 2.4 = 0{,}8$A (u smjeru struje I_{2a})

IV.1-P4. U prikazanon spoju izračunajte struju kroz otpornik od 8Ω. Koristite pretvorbu naponskih izvora u strujne.



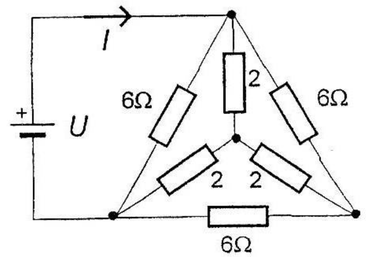
Rješenje: Otpornike od 6 i 3 Ω možemo tretirati kao da su to unutarnji otpori izvora od 12 odnosno 15 V (iako nisu). Izvršimo li pretvorbu u strujne izvore dobivamo spoj prema slici a). U tom spoju premjestimo paralelno spojene elemente kako je prikazano na slici b) . Strujne izvore u skladu sa Kirchhoffovim zakonom "stopimo" u jedan od 5 A kao i "unutarnje otpore" od 6 i 3 Ω u 2 Ω (paralela) . Dobivamo spoj prema slici c). To je djelilo struje u kojem potražimo struju kroz otpornik od 8 Ω.. $I_8 = 5 \cdot 2/(2+8) = 1$A. Napon na otporniku od 8 Ω je 8 V. To je ujedno napon između točaka **a** i *b* u "polaznoj" shemi.



a) b) c)

Zadaci IV.1

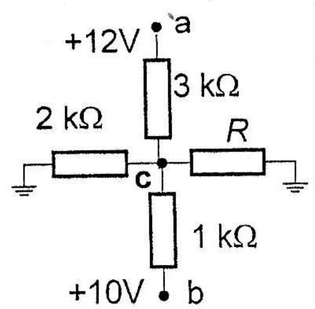
IV.1-1. U spoju prema slici odredite kolika je struja *I* ako je *U*=5V? Zadatak riješite na dva načina: a) zamjenom trokut-zvijezda i b) zamjenom zvijezda-trokut. Koji je način jednostavniji ?



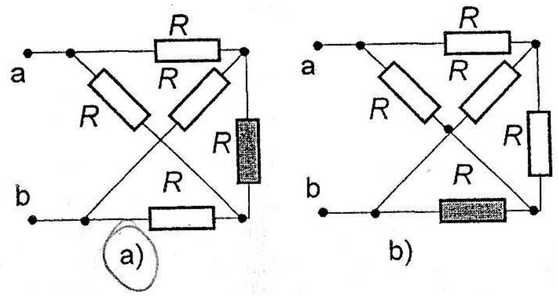
Rezultat: 2,5 A ; jednostavniji je postupak a)

IV.1-2. Izračunajte potencijal točke **c** u spoju na slici desno ako je *R* = 2kΩ . Točke **a** i **b** su na poznatim potencijalima (naponima prema masi). Pitanje: kako će se promijeniti potencijal točke **c** dođe li a) do prekida u otporu *R* b) do «kratkog spoja» otpora *R*.

Rezultat: 6 V, odg.: a) 10.5 V b) 0 V

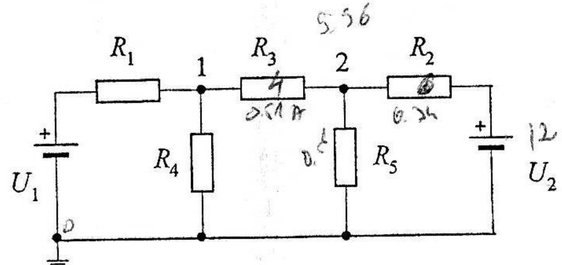


IV.1-3. Izračunajte ukupan otpor sa stezaljki **a** i **b** spoja otpornika sa slike a) i b) ako je *R*=1Ω.



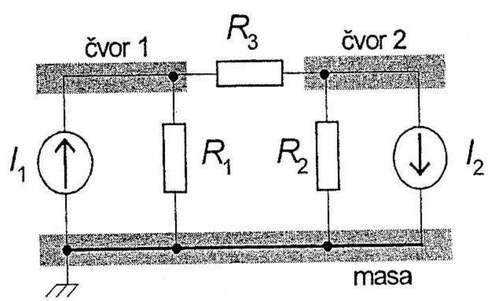
Rezultat: a) 1 Ω b) 0.6 Ω uputa: Spojeve drugačije nacrtati. Na slici a) trebate "otkriti" most, a na slici b) je zatamnjeni otpornik u "kratkom spoju".

IV.1-4. Zadana je električna mreža prikazana slikom. Odredite struje kroz R_2 ,R_3 i R_5 ako su poznati (izmjereni) naponi čvorova **1** i **2**.
Zadano $R_3 = 4\Omega$ $R_2 = 6\Omega$ $U_2 = 12V$ $\varphi_1 = 12V$ $\varphi_2 = 9.96V$

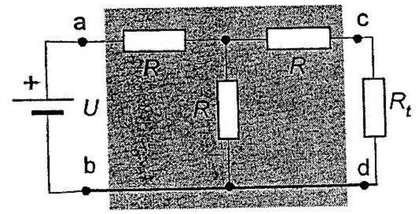


Rezultat: I_{R2}=0,34A I_{R3}=0,51A I_{R5}=0,85 A

IV.1-5. Izračunajte potencijale čvorova 1 i 2 u prikazanom spoju el.elemenata. Koristite a)superpoziciju. b) pretvorbu strujnog u naponski izvor. Koliki je napon U_{12} te kolika struja prolazi kroz R_3?
Zadano $R_1 = 2\Omega$ $R_2 = 6\Omega$ $R_3 = 12\Omega$
$I_1 = 4A$ $I_2 = 2A$
Rezultat: φ_1=6V, a φ_2=-6 V
I3=1A (smjer od čvora 1)

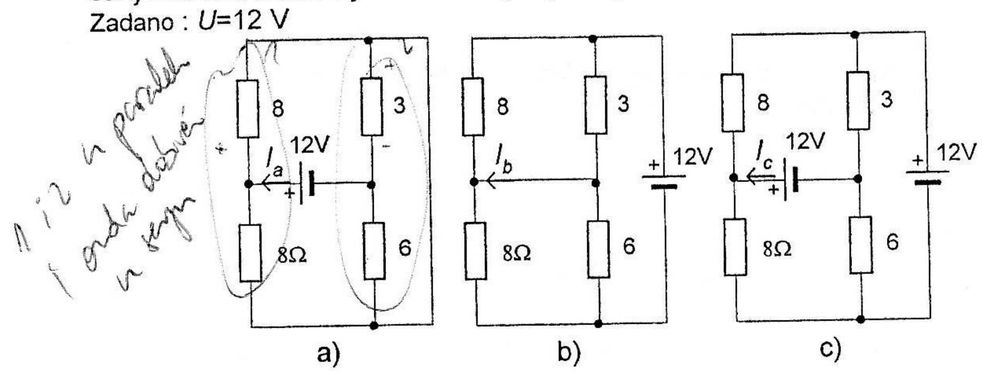


IV.1-6. Na stezaljke **a** i **b** priključen je (ulazni) napon U. Izračunajte (izlazni) napon na stezaljkama trošila odnosno napon između točaka **c** i **d**. Koji je odnos tih napona U_{cd}/U_{ab}=?
Zadano U= 12 V, R_t=100 Ω, R=57.735 Ω



Rezultat: Odnos napona je 0.268 Samo 26,8 % ulaznog napona se pojavi na izlazu.

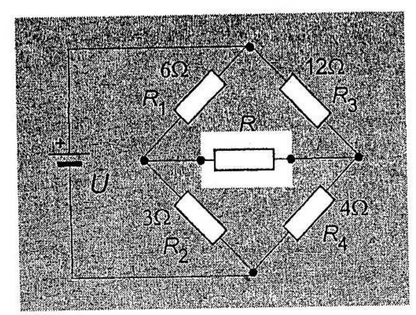
IV.1-7. Izračunajte označenu struju u prikazanom spoju na slici a) i b) . Kolika bi bila struja na tom istom mjestu u slučaju c) u kojem su na shemi uključena oba izvora.
Zadano : U=12 V



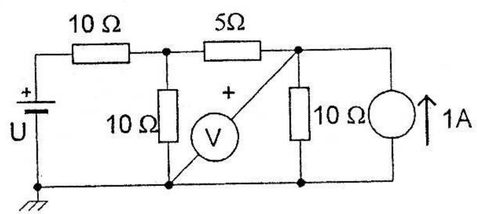
Rezultat: I_a= 2A I_b=0,333A I_c=2,333A (superpozicija)

IV.1-8. U prikazanom mosnom spoju izračunajte struju kroz otpornik koji je u dijagonali mosta. Kolika bi bila struja kroz dijagonalu mosta kada je taj otpor (R) jednak nuli? Koliki treba biti R_1 da bi struja kroz otpornik R bila jednaka nuli?

Zadano: U = 72V R = 5Ω R_1 = 6Ω
R_2 = 3Ω R_3 = 12Ω R_4 = 4Ω
Rezultat: I_R=0,6A , R_1=9Ω
Uputa: Zadatak možete riješiti izravnom primjenom Kirchhoffovig zakona (teže) ili transformacijom trokut-zvijezda.



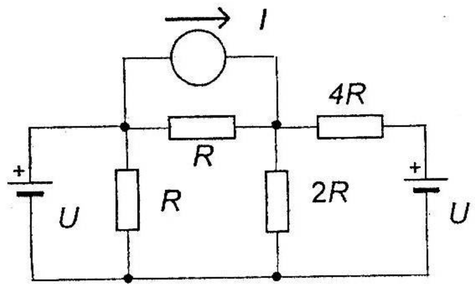
IV.1-9. Koliki je napon izvora (slika lijevo) ako voltmeter pokazuje Uv=15 V označenog polariteta? Koliko će pokazivati voltmeter ako napon izvora smanjimo na polovinu prvotnog iznosa?



Rezultat: 40 V, odg.: napon voltmetra je 10 V.

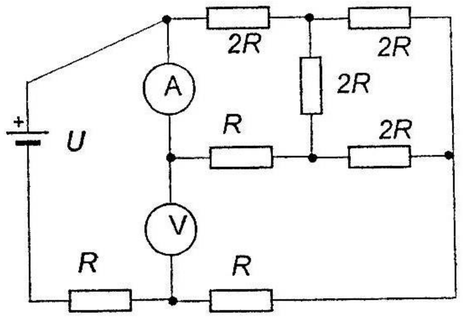
IV.1-10. Odredite napon na otporniku $2R$ u prikazanom spoju. Zadano je R=5 Ω I=2 A U=20V. Koliki je taj napon ako se promijeni smjer struje strujnog izvora?

Rezultat: 20 V, 8,57 V



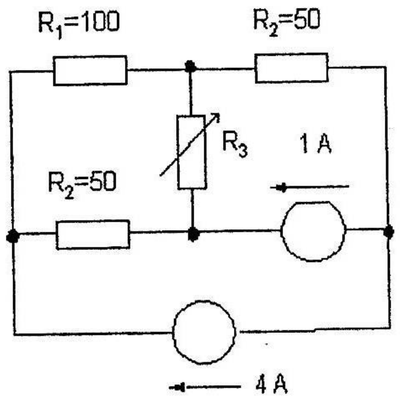
IV.1-11. Koliku struju pokazuje (idealni) ampermetar ako voltmetar pokazuje U_V=7 V? Zadano jer R=1 Ω.

Rezultat: 1.6 A



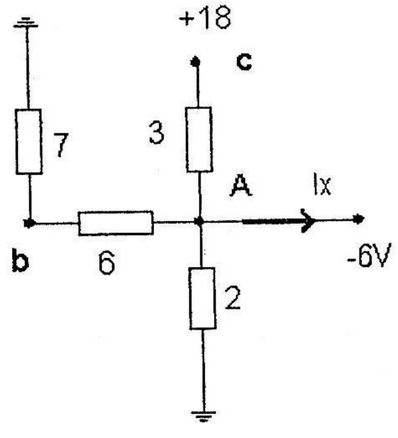
IV.1-12. Koliki treba biti otpor otpornika R_3 da bi struje kroz R_1 i R_2 bile jednake?

Rezultat: 100/3 Ω
Uputa: treba primjetiti da će stuje kroz R_1 i R_2 biti po 2 A. nakon toga se primjenjuju Kirchhoffovi zakoni...



IV.1-13. Na slici a) je prikazan spoj u kojem su poznati potencijali točaka A (-6V) i **c** (+18 V). Potrebno izračunati struju I_x te potencijal točke **b**.
Rezultat: -3,23 V; 11,46 A

Uputa spoj treba drugačije nacrtati:. Nacrtaju se dvije usporedne linije. Donja je masa, a na gornjoj je točka A. Između tih linija (sabirnica) "spoje se" elementi : otpornik od 2 Ω, serijski spoj 6 i 7 Ω , izvor od 6 V (minus na A) te serijski spoj izvora od 18 V i otpornika od 3 Ω (minus na masi).



a)