KRITERIJI KONVERGENCIJE ①

CAUCHYJEV kriterij konvergencije reda:

Red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentan onda i samo onda kad pripadni niz parcijalnih suma S_n ima Cauchyjevo svojstvo:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) : (\forall k \in \mathbb{N}) \text{ vrijedi}$$

$$|a_{n+1} + \ldots + a_{n+k}| < \varepsilon \quad \text{čim je } \underline{\underline{n \geq n_0}}$$

NUŽDAN uvjet konvergencije reda:

Da bi $\sum a_n$ konvergirao, nužno je da bude $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

DOKAZ: Opći član može se napisati kao razlika dviju uzastopnih parcijalnih suma: $a_n = S_n - S_{n-1}$
Ako je red konvergentan, onda je konvergentan niz S_n.
U tom slučaju možemo u ovoj relaciji pustiti da n teži u beskonačnost:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0}$$

//NAPOMENA: Ovaj uvjet je nuždan, ali ne i dovoljan za konvergenciju reda.//

Konvergencija reda s POZITIVNIM članovima:

Red s pozitivnim članovima konvergira onda i samo onda ako mu je odozgo ograđen niz parcijalnih suma.
Uvjet je nuždan, jer svaki konvergentni niz mora biti omeđen.
Uvjet je i dovoljan, jer vrijedi $S_n = S_{n-1} + a_n \geq S_{n-1}$, pa je niz S_n monotono rastući. Kako je ograđen odozgo, onda mora konvergirati.

KRITERIJI KONVERGENCIJE ②

POREDBENI kriterij:

Pretpostavimo da za nizove (a_n) i (b_n) vrijedi sljedeće: postoji prirodan broj N takav da vrijedi

$$a_n \leq b_n, \quad \text{čim je } n > N.$$

① Ako red $\sum b_n$ konvergira, tad konvergira i red $\sum a_n$.

② Ako red $\sum a_n$ divergira, tad divergira i red $\sum b_n$

<u>DOKAZ</u>: knjižica 1, str: 12; /* PAPIR „DOKAZI ①" */

Poredbeni kriterij. GRANIČNI oblik:

Neka su a_n i b_n nizovi s pozitivnim članovima takvi da postoji konačan limes

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L,$$

gdje je L broj različit od nule. Tada ili oba reda $\sum a_n$ i $\sum b_n$ konvergiraju, ili oba divergiraju.

<u>DOKAZ</u>: Zbog pretpostavljene konvergencije, za dovoljno velike n vrijedi: $\frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} < 2L$.

Zato je $a_n \leq (2L) \cdot b_n$, za dovoljno velike n. Stoga iz konvergencije reda $\sum b_n$ slijedi i konvergencija reda $\sum a_n$. Također, iz divergencije reda $\sum a_n$ slijedi i divergencija reda $\sum b_n$.

Druge dvije tvrdnje slijede iz nejednakosti $\frac{L}{2} \cdot b_n \leq a_n$

KRITERIJI KONVERGENCIJE ③

~~INTEGRA~~ INTEGRALNI kriterij:

Neka je $a_n = f(n)$ pri čemu je funkcija f pozitivna, neprekinuta i opadajuća na intervalu $\langle N, +\infty\rangle$. Tada red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i integral $\int_N^{\infty} f(x)\,dx$ ili oba konvergiraju ili oba divergiraju.

DOKAZ: Knjižica 1, str. 14,

D'ALEMBERT-ov kriterij: (limes razmjera)

Neka je $\sum a_n$ red s pozitivnim članovima. Ako postoji limes

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q}$$

onda za: $q < 1$, red konvergira, za $q > 1$, red divergira, za $q = 1$, nema odluke

DOKAZ: Knjižica 1, str: 16 , /* DOKAZI ② */

CAUCHY-ev kriterij:

Neka je $\sum a_n$ red s pozitivnim članovima.
Ako postoji limes

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q}$$

onda za:

$q < 1 \rightarrow$ red konvergira
$q > 1 \rightarrow$ red divergira
$q = 1 \rightarrow$ nema odluke

TAYLOROV I MACLAURINOV RED

Ako je f funkcija definirana u nekoj okolini točke a i ako ona ima derivacije svakoga reda, tada se red

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$$

naziva **Taylorov red** funkcije f oko točke a.

Ako izaberemo red potencija oko ishodišta, tj. za $a=0$, onda se dobiveni red naziva **Maclaurinov red** funkcije f:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots$$

TAYLOROVA FORMULA

Neka $f^{(n)}$ postoji u intervalu $\langle a-\delta, a+\delta \rangle$. Tada $\forall x \in \langle a-\delta, a+\delta \rangle$ vrijedi formula:

$$\boxed{f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + R_n(x)}$$

Tu je $R_n(x)$ ostatak koji se može prikazati na različite načine:

(1) Lagrangeov ostatak:

$$R_n^L(x) = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a+\vartheta(x-a)), \quad \text{za neki } \vartheta \in \langle 0,1 \rangle$$

(2) Cauchyjev ostatak:

$$R_n^C(x) = \frac{(x-a)^n(1-\vartheta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a+\vartheta(x-a)), \quad \text{za neki } \vartheta \in \langle 0,1 \rangle$$

DOKAZI (1)

Dokaz poredbenog kriterija:

Vrijedi slijedeće:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \ldots + a_k + \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n = a_1 + \ldots + a_k + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+k}$$

tako da je ponašanje reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ identično ponašanju reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+k}$.

Pretpostavit ćemo da nejednakost $a_n \leq b_n$ vrijedi $\forall n$, stoga slijedi

1) Ako je $\sum b_n$ konvergentan, onda je i omeđen, pa vrijedi $\sum b_n \leq M$, za neki poz. br. M.

Za niz parcijalnih suma reda $\sum a_n$ vrijedi

$$S_n = a_1 + \ldots + a_n \leq b_1 + \ldots + b_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n \leq M,$$

time je ispunjen kriterij konvergencije reda s pozitivnim članovima, stoga i $\sum a_n$ konvergira.

2) Na isti način slijedi i ako $\sum a_n$ divergira, onda mu niz parcijalnih suma nije ograničen odozgo, analogno tome nije ograničen ni niz parcijalnih suma reda $\sum b_n$, stoga je i on divergentan.

DOKAZI ②

Dokaz D'Alembertovog kriterija:

Po definiciji limesa niza je $\forall \varepsilon > 0 \ \frac{a_{n+1}}{a_n} \in (g-\varepsilon, g+\varepsilon)$, za $n > n_0$
Odaberimo takav ε da je $g+\varepsilon$ manji od 1, onda vrijedi:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq g+\varepsilon$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \leq g+\varepsilon \quad / \cdot a_{n-1}$$

$$a_n \leq (g+\varepsilon) a_{n-1} \leq (g+\varepsilon)^2 a_{n-2} \leq \ldots \leq (g+\varepsilon)^{n-n_0} \cdot a_{n_0}$$

$$a_n \leq \frac{a_{n_0}}{(g+\varepsilon)^{n_0}} \cdot (g+\varepsilon)^n$$

$$\sum_{n_0}^{\infty} a_n = \frac{a_{n_0}}{(g+\varepsilon)^{n_0}} \cdot \sum_{n_0}^{\infty} (g+\varepsilon)^n$$

Prema ovome red $\sum a_n$ konvergira prema usporednom kriteriju (majoriziran je konvergentnim redom)

b) $g > 1$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \in (g-\varepsilon, g+\varepsilon)$$

Odaberimo ε takav da je $g-\varepsilon > 1$

Sada je $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant g-\varepsilon$

$$a_{n+1} \geqslant (g-\varepsilon) a_n \geqslant a_n$$

pa je, dakle, počevši od nekog člana niz (a_n) monotono rastući, pa ne može biti ispunjen nuždan uvjet konvergencije reda, red divergira.

DOKAZI 3

Dokaz Cauchyjevog kriterija: knjižica 1, 18. str.

Neka je n_0 indeks takav da vrijedi $\sqrt[n]{a_n} \leq q$, odnosno $a_n \leq q^n$, za sve $n \geq n_0$. Budući je $q<1$, geom. red $q^n + q^{n+1} + \dots$ konvergira. Prema poredbenom kriteriju konvergira i red $a_n + a_{n+1} + \dots$ pa onda konvergira i početni red $\sum a_n$.

Ako je pak $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ za beskonačno mnogo indeksa $n \in \mathbb{N}$, tada vrijedi $a_n \geq 1$ za beskonačno mnogo tih indeksa pa niz a_n ne može težiti u nulu. Dakle, nije ispunjen nuždan uvjet konvergencije, pa red $\sum a_n$ divergira.

RAVNINA je određena JEDNOM TOČKOM i VEKTOROM NORMALE ⇒ vektor <u>OKOMIT</u> na tu ravninu

Jednadžba ravnine zadane TOČKOM i VEKTOROM NORMALE

Jednadžba ravnine koja sadrži točku $\boxed{T_1(x_1, y_1, z_1)}$ i ima vektor normale: $\boxed{\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}}$ jest

$$\boxed{A(x-x_1) + B(y-y_1) + C(z-z_1) = 0}$$

JEDNADŽBA RAVNINE

$$Ax + By + Cz \underbrace{- Ax_1 - By_1 - Cz_1}_{D} = 0$$

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$$

OPĆA JEDNADŽBA RAVNINE

JEDNADŽBA RAVNINE ZADANE S 3 TOČKE

$$\left.\begin{array}{l} T_1(x_1, y_1, z_1) \\ T_2(x_2, y_2, z_2) \\ T_3(x_3, y_3, z_3) \end{array}\right\} \text{tri nekolinearne točke}$$

$T(x, y, z)$ → bilo koja točka pripadajuća ravnini

uvjet

$$\boxed{\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0}$$

SEGMENTNI OBLIK JEDNADŽBE RAVNINE:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

→ ako je $D=0$ ravnina PROLAZI ISHODIŠTEM

→ za $D \neq 0$ imamo:

$$\boxed{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1}$$

p, q, r ... odresci ravnine na koordinatnim osima

PARAMETARSKA JEDNADŽBA RAVNINE:

$$\boxed{\left.\begin{aligned} x &= x_1 + \lambda a_x + \mu b_x \\ y &= y_1 + \lambda a_y + \mu b_y \\ z &= z_1 + \lambda a_z + \mu b_z \end{aligned}\right\} \dots \pi}$$

$\vec{a}, \vec{b}$ nekolinearni, leže u π

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}$$

NORMIRANI OBLIK JEDNADŽBE RAVNINE:

$$\vec{n} = \cos\alpha\, \vec{i} + \cos\beta\, \vec{j} + \cos\gamma\, \vec{k}$$

α, β, γ ... kutovi što ih zatvaraju jedinični vektor s pozitivnim dijelovima koordinatnih osi

$$\boxed{(\cos\alpha)x + (\cos\beta)y + (\cos\gamma)z - p = 0}$$

$$\cos\alpha,\beta,\gamma = \frac{(\pm D)A,B,C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

⇒ normirana ili HESSEOVA jednadžba ravnine

$$p = \frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

UDALJENOST TOČKE OD RAVNINE

Udaljenost točke $T(x,y,z)$ od ravnine $\pi \ldots Ax+By+Cz+D=0$ iznosi

$$\boxed{d(T,\pi)=\frac{|Ax+By+Cz+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$$

PRESJEK PRAVCA I RAVNINE

Pravac ravninu siječe u JEDNOJ TOČKI

Koordinate te točke najlakše određujemo preko PARAMETARSKE JEDNADŽBE PRAVCA

KUT IZMEĐU PRAVCA I RAVNINE

To je kut između pravca p i NJEGOVE ORTOGONALNE PROJEKCIJE na ravninu π

$$\boxed{\sin\varphi=\frac{|\vec{c}\cdot\vec{n}|}{|\vec{c}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}}$$

PRAVAC JE PARALELAN S RAVNINOM AKO VRIJEDI:

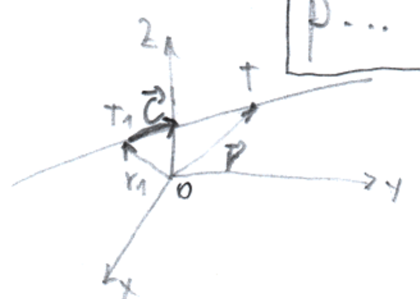
$$\boxed{\begin{gathered}\vec{c}\cdot\vec{n}=0\\ Al+Bm+Cn=0\end{gathered}}$$

PRAVAC JE OKOMIT NA RAVNINU AKO JE:

$$\boxed{\begin{gathered}\vec{c}=\lambda\vec{n}\\ \frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}\end{gathered}}$$

PRAVAC:

Pravac p u prostoru određen je JEDNOM TOČKOM i VEKTOROM SMJERA



$$\boxed{p \ldots \ \vec r = \vec r_1 + \lambda \vec c}$$

$$\overrightarrow{T_1T} = \lambda \vec c$$

$$\vec r - \vec r_1 = \lambda \vec c$$

PRAVAC KROZ 2 TOČKE:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

– u kanonskoj formi:

$$\vec c = l\vec i + m\vec j + n\vec k$$

$$\Rightarrow x\vec i + y\vec j + z\vec k = x_1\vec i + y_1\vec j + z_1\vec k + \lambda(l\vec i + m\vec j + n\vec k)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x &= x_1 + \lambda l \\ y &= y_1 + \lambda m \\ z &= z_1 + \lambda n \end{aligned}}$$

→ PARAMETARSKA JEDNADŽBA PRAVCA!

eliminacijom „λ" iz gornjih jednadžbi dobivamo:

$$\boxed{\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}}$$

→ KANONSKA JEDNADŽBA PRAVCA!

npr. $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+2}{-1}$ → pravac kroz točku $T_1(2,1,-2)$ sa vektorom smjera $\vec c = 3\vec i + \vec k$

SKALARNI PRODUKT VEKTORA

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi \qquad |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$$

SKALARNA PROJEKCIJA:

$$a_b = |\vec{a}|\cos\varphi$$ $\Rightarrow$ skalarna projekcija a u smjeru b

„RAČUNANJE SKALARNOG PRODUKTA"

Skalarni umnožak dvaju vektora:

$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ računa se formulom

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}$$ skalar

DULJINA VEKTORA $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

KUT IZMEĐU VEKTORA:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|a||b|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

VEKTORSKI UMNOŽAK!

$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ računa se formulom

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

5.KNJIŽICA

NAJVAŽNIJE PLOHE 2. REDA

1. RAVNINA

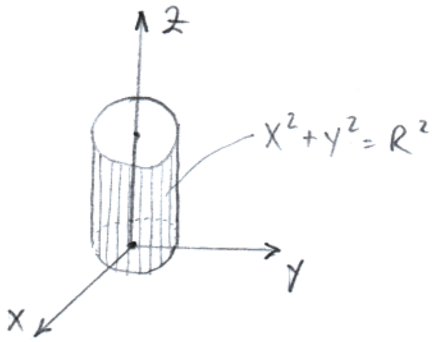
$$\boxed{Ax+By+Cz+D=0}$$

2. CILINDRI

→ manjka jedna varijabla u jednadžbi plohe! (npr. z fali)

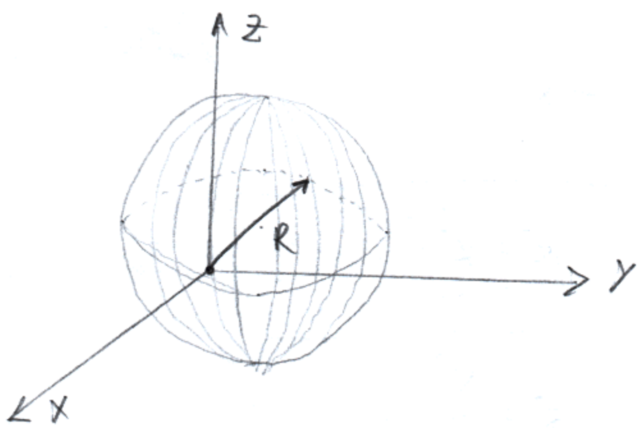
→ najtipičniji: KRUŽNI CILINDAR

$$\boxed{x^2+y^2=R^2}$$



3. SFERA

$$\boxed{x^2+y^2+z^2=R^2}$$



→ specijalno: ELIPSOID

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}$$

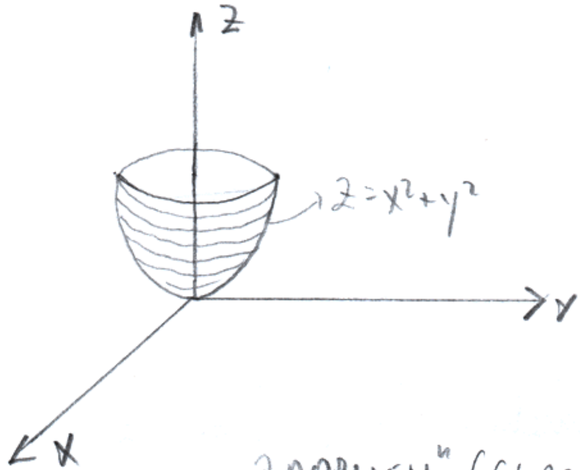
4. ROTACIJSKI PARABOLOID

$$\boxed{z = x^2 + y^2}$$

→ specijalno

(A) $\boxed{z = k(x^2+y^2)}$ → ili je uže ili šire

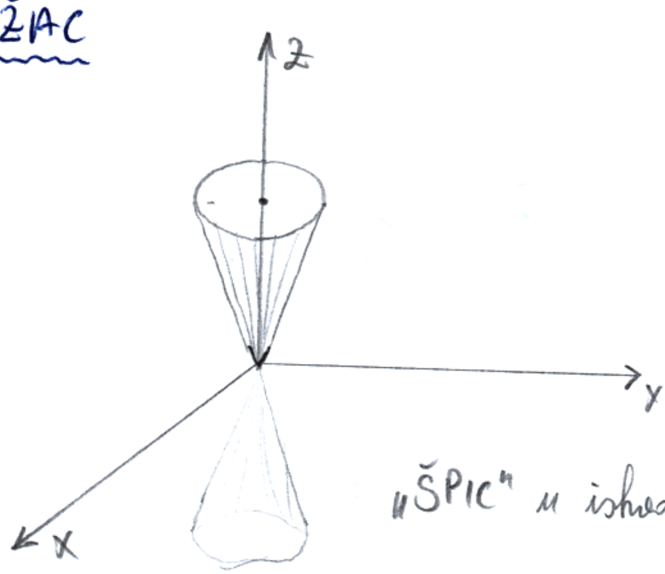
(B) $\boxed{z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$ → eliptični paraboloid



„ZAOBLJEN" (GLADAK) u ishodištu

5. ROTACIJSKI STOŽAC

$$\boxed{z^2 = x^2 + y^2}$$



„ŠPIC" u ishodištu

→ specijalno: (A) $\boxed{z^2 = k^2(x^2+y^2)}$ → šire, uže

(B) $\boxed{z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$ → eliptični stožac

---

NAPOMENA -

→ ovdje je svugdje os simetrije z, analogno vrijedi sve isto i ako bi uzeli os simetrije y ili x !!

→ algoritam dobivanja rotacijske plohe treba znati!

OSTALE PLOHE 2. REDA

* JEDNOPLOŠNI ELIPTIČKI HIPERBOLOID

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1}$$

Ako je $\boxed{a=b}$

$\Rightarrow$ JEDNOPLOŠNI ROTACIJSKI HIPERBOLOID

* DVOPLOŠNI ELIPTIČKI HIPERBOLOID

$$\boxed{-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}$$

Ako je $\boxed{a=b}$

$\Rightarrow$ DVOPLOŠNI ROTACIJSKI HIPERBOLOID

* HIPERBOLIČKI PARABOLOID

„SEDLASTA PLOHA"

$$\boxed{z=x^2-y^2}$$

NIVO KRIVULJE I NIVO PLOHE

Neka je zadana funkcija $f: D \to \mathbb{R}$, gdje je $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Skup svih točaka u prostoru $\mathbb{R}^3$

$$\{T(x, y, f(x,y)) : (x,y) \in D\}$$

je graf funkcije $z = f(x,y)$. Presjek ovog grafa i ravnine $z = C$ paralelne s koordinatnom ravninom XOY je krivulja na kojoj su sve točke tog grafa koje se nalaze na istoj visini C, odnosno u kojima funkcija f poprima stalnu vrijednost C. Ove krivulje se zovu NIVO KRIVULJA i ima jednadžbu

$f(x,y) = C$

DIFERENCIJALNI RAČUN FUNKCIJA VIŠE VARIJABLI

1. LIMES NIZA:

Točka $\vec{x}_0$ je limes niza $(\vec{x}_k)$, oznakom: $\boxed{\vec{x}_0 = \lim_{k\to\infty} \vec{x}_k}$ ako svaki ε-okoliš od x_0 sadrži beskonačno mnogo članova niza, a izvan takvog okoliša ih je samo konačno mnogo.

Tj. $\vec{x}_0 = \lim_{k\to\infty} \vec{x}_k \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists k_0 \in \mathbb{N})(k > k_0 \Rightarrow |\vec{x}_k - \vec{x}_0|_0 < \varepsilon)$

2. LIMES F-IJA VIŠE VARIJABLI - HEINE

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = L \Leftrightarrow \forall (\vec{x}_k)\left[\left(\{\vec{x}_k\} \subseteq \mathcal{D}(f) \setminus \{\vec{x}_0\} \wedge \lim_{k\to\infty} \vec{x}_k = \vec{x}_0\right) \Rightarrow \lim_{k\to\infty} f(\vec{x}_k) = L\right]$$

3. OSNOVNI TEOREM KOJI POVEZUJE NEPREKINUTOST I LIMES:

$f(x)$ je neprekinuta u $\vec{x}_0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)$

4. PARCIJALNE DERIVACIJE:

Neka je $z = f(x,y)$ nepr. funkc. definirana na otvorenom skupu $M \subseteq \mathbb{R}$, $T_0(x,y) \in M$, onda su funkcije $\varphi_1(x) = f(x, y_0)$ i $\varphi_2(y) = f(x_0, y)$ funkcije jedne varijable. Derivacije $\varphi_1'(x_0)$ i $\varphi_2'(y_0)$, ukoliko postoje, zovu se parcijalne derivacije funkcije f po x i y, a piše se:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = f_x'(x_0, y_0) := \varphi_1'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = f_y'(x_0, y_0) := \varphi_2'(y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

5. TANGENCIJALNA RAVNINA

Jednadžba tangencijalne ravnine π na plohu $z = f(x,y)$ u točki plohe $T_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ glasi:

$$\boxed{\pi \ldots \quad z - z_0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0 (y - y_0)}$$

Jednadžba normale $\vec{n}$ točkom T_0 glasi:

$$\boxed{\vec{n} \ldots \quad \frac{x - x_0}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0} = \frac{y - y_0}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0} = \frac{z - z_0}{-1}}$$

Ako je ploha $z = f(x,y)$ zadana implicitno jednadžbom $f(x,y,z) = 0$ i $T_0(x_0, y_0, z_0)$ točka plohe, onda jednadžba tangencijalne ravnine i normale na f u točki $T_0(x_0, y_0, z_0)$ glasi:

$$\boxed{\pi \ldots \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) (z - z_0) = 0}$$

$$\boxed{n \ldots \quad \frac{x - x_0}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0} = \frac{y - y_0}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0} = \frac{z - z_0}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0}}$$

③ ⇒ IZA SCHWARZ-OV TEOR.

6. PRVI DIFERENCIJAL

⇒ za funkciju 2 varijable ; ostale slijede analogno

$z = f(x,y)$ ⇓

$$\boxed{dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy}$$ ⇒ prvi (totalni) diferencijal

7. GRADIJENT

Ako je $f(\vec{x})$ diferencijabilna funkcija u točki $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ onda se njen gradijent računa formulom:

$$\text{grad } f = \underset{\text{nabla}}{\nabla} f(\vec{x}) := \frac{\partial f}{\partial x_1}\vec{e_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\vec{e_n}$$

⇒ u slučaju $u = u(x,y,z)$

$$\boxed{\text{grad } u = \nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}}$$

8. PRIBLIŽNO IZRAČUNAVANJE VRIJEDNOSTI F-IJE

$$f(\vec{x}+\vec{h}) \approx f(\vec{x}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i$$

slučaj za 2 i 3 var:

$z = z(x,y)$

$$z(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx z(x,y) + \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

$u = u(x,y,z)$

$$u(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) \approx u(x,y,z) + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z$$

9. SCHWARZOV TEOREM

Neka je $z = f(x,y)$, $D(f) = M$, $T_0 \in M$. Ako u nekom okolišu točke T_0 postoje derivacije f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}, pri čemu su f''_{xy} i f''_{yx} neprekinute u T_0, onda je:

$$\boxed{f''_{xy}(x_0,y_0) = f''_{yx}(x_0,y_0)}$$

---

*NEPREKINUTOST F-IJE U TOČKI

Kažemo da je realna funkcija $f(x)$ definirana na M neprekinuta u točki $x_0 \in M$, ako za svaki ε okoliš točke $f(x_0)$ postoji δ okoliš točke x_0 koji se čitav preslikava u promatrani ε okoliš od $f(x_0)$, dakle:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)(\|x - x_0\|_\infty < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

7. KNJIŽICA:

1. DERIVACIJA SLOŽENE FUNKCIJE:

Neka je $v = f(u_1, \dots, u_m)$

$u_i = \varphi_i(x_i, \dots, x_m)$, $i = 1, 2, \dots, m$

sada je $v = f[\varphi_1(x_1, \dots, x_m), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_m)] = f_1(x_1, \dots, x_m)$

i vrijedi:

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} = \frac{\partial v}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \frac{\partial v}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial v}{\partial u_m} \cdot \frac{\partial u_m}{\partial x_i}$$

ili

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial v}{\partial u_j} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial x_i}} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Posebice, $v = f(u_1, \dots, u_m)$, $u_i = \varphi_i(t) \dots$, $i = 1, \dots, m$ onda je $v = f[\varphi_1(t) \dots \varphi_m(t)] = f_1(t)$, sada je

$$\boxed{\frac{dv}{dt} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial v}{\partial u_j} \cdot \frac{du_j}{dt}}$$

$\Rightarrow$ IZA

„DERIVACIJA VEKTORSKE FUNKCIJE"

$$\boxed{\vec{r}'(t) := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}}$$

IZRAČUN DERIVACIJE $\vec{r}'(t)$:

$$\vec{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t)\vec{i} + y(t+\Delta t)\vec{j} + z(t+\Delta t)\vec{k} - (x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k})}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}\vec{i} + \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}\vec{j} + \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t}\vec{k} \right] =$$

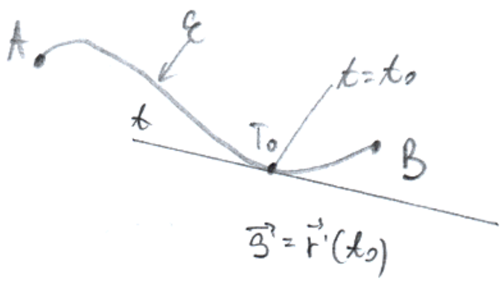
$$= \left[\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \right]\vec{i} + \left[\lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} \right]\vec{j} + \left[\lim_{t \to 0} \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t} \right]\vec{k}$$

$$= \vec{x}'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{r}'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}}$$

TANGENTA NA PROSTORNU KRIVULJU

Dakle, ako je $\mathcal{E} \ldots \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ $\quad t = t_0 \Rightarrow T_0(x_0, y_0, z_0)$



JEDNADŽBA <u>TANGENTE</u> NA PROSTORNU KRIVULJU $\mathcal{E}$ U TOČKI T_0 :

$$\boxed{t \ldots \frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}}$$

8. KNJIŽICA:

1. USMJERENA DERIVACIJA:

Usmjerena derivacija funkcije $f(\vec{x})$ u točki $\vec{x}$, u smjeru vektora $\vec{h}$, oznakom $\frac{\partial f}{\partial \vec{h}}$ je:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{h}} := \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x} + t \cdot \vec{h}) - f(x)}{t}} \quad \text{gdje je } \vec{h}_0 = \frac{\vec{h}}{\|\vec{h}\|}$$

Primjedba: Ako se promatra $f(t)$ realne varijable t, koja t pridružuje vrijednost $f(\vec{x} + t \cdot \vec{h}_0)$ onda je derivacija te funkcije u točki $t = 0$ jednaka:

$$f'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{\overbrace{f(\vec{x} + t \cdot \vec{h}_0)}^{\text{za } t=0} - f(x)}{t - 0} = \frac{\partial f}{\partial \vec{h}}$$

$$\boxed{f'(0) = \frac{\partial f}{\partial \vec{h}}}$$

Dakle,

$f'(t=0) = \frac{\partial f}{\partial \vec{h}}$, uz funkciju f danu sa $t : f(\vec{x} + t \cdot \vec{h}_0)$

=> IZA

„FORMULA ZA IZRAČUNAVANJE USMJERENE DERIVACIJE"

Ako je $f(\vec{x})$ diferencijabilna funkcija, onda usmjerena derivacija od f u smjeru zadanog vektora $\vec{h}$ iznosi :

$$\boxed{\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial \vec{h}} = \operatorname{grad} f(\vec{x}) \cdot \vec{h_0} = \vec{h_0} \cdot \operatorname{grad} f(\vec{x})}$$

$$\boxed{\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \vec{e_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \vec{e_2} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \vec{e_n}}$$

kada je f SKALARNO POLJE $\Rightarrow$ funkcija 3 varijable $f = f(x,y,z)$

$$\boxed{\vec{h_0} = \frac{h_1 \vec{i} + h_2 \vec{j} + h_3 \vec{k}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}} = h_{1_0} \vec{i} + h_{2_0} \vec{j} + h_{3_0} \vec{k}}$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial \vec{h}} = \vec{h_0} \cdot \operatorname{grad} f(\vec{x}) = \left(h_{1_0} \vec{i} + h_{2_0} \vec{j} + h_{3_0} \vec{k}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}\right)$$

$$= h_{1_0} \frac{\partial f}{\partial x} + h_{2_0} \frac{\partial f}{\partial y} + h_{3_0} \frac{\partial f}{\partial z}$$

$\Leftarrow$ 1

8. KNJIŽICA: ②

Budući da je skalarni produkt $\vec{a}\cdot\vec{b}$ zadanih duljina $\|\vec{a}\|, \|\vec{b}\|$ najveći kad su vektori kolinearni (iz: $\vec{a}\cdot\vec{b} = \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot \underbrace{\cos\sphericalangle\vec{a},\vec{b}}$)

$\varphi = 0$ 1 MAX!

↳ KOLINEARNI

$\Rightarrow$ produkt $\vec{h}_0 \cdot \operatorname{grad} f(\vec{x})$ je najveći onda kada vektor $\vec{h}$ gleda u smjeru $\operatorname{grad} f(\vec{x})$

NAJBRŽI RAST $f(\vec{x})$ u $\vec{x}$, dakle NAJVEĆA VRIJEDNOST usmjerene derivacije $\frac{\partial f}{\partial \vec{h}}$ postiže se u smjeru vektora $\vec{h} = \operatorname{grad} f(\vec{x})$

Taj je vektor okomit na nivo plohu od f koja prolazi točkom $\vec{x}$.

$\Rightarrow$ NAPOMENA! Najbrži PAD $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{h} = -\operatorname{grad} f(\vec{x})}$

LAGRANGEOV TEOREM O SREDNJOJ VRIJEDNOSTI ZA F-IJE VV

Neka je $f: U \to \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija definirana na otvorenom skupu $U \subseteq \mathbb{R}^n$, i $\vec{a}, \vec{b} \in U$ takvi da je spojnica točaka $\vec{a}$ i $\vec{b}$ također u U. Onda na toj spojnici postoji točka $\vec{c}$ takva da je

$$\boxed{f(\vec{b}) - f(\vec{a}) = \nabla f(\vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{a})}$$

gdje je $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ gradijent funkcije f, a umnožak "$\cdot$" na desnoj strani je skalarni produkt dvaju vektora u $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$

TM 4

Neka je U otvoren i povezan skup u $\mathbb{R}^n$. Pretpostavimo da su funkcije $f, g: U \to \mathbb{R}$ diferencijabilne.

1] Ako je $\nabla f \equiv 0$ na U (tj. $\nabla f(\vec{x}) = 0 \ \forall x \in U$), onda je f konstantna.

2] Ako je $\nabla f \equiv \nabla g$, onda se f i g razlikuju za konstantu, tj. postoji konstanta C tako da za $\forall x \in U$ vrijedi $f(\vec{x}) = g(\vec{x}) + C$.

RAČUN S ∇-OPERATOROM

$\Rightarrow$ Npr. $n=3$

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla &:= \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \\ \nabla f &:= \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} = \operatorname{grad} f \end{aligned}}$$

„PRAVILA ZA RAČUNANJE S ∇-OPERATOROM"

1] $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$

2] $\nabla(f \cdot g) = \nabla f \cdot g + f \cdot \nabla g$

3] $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{(\nabla f)\cdot g - f\cdot(\nabla g)}{g^2}$

ANALOGNO DERIVIRANJU!

*PROĆI DOKAZE!

$\Leftarrow$ 2

8. KNJIŽICA: (3)

DJELOVANJE ∇-OPERATORA NA FUNKCIJE RADIJ-VEKTORA

$$\vec{r} = (x_1, x_2, \dots x_n)$$

$$r = \|\vec{r}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

$\Rightarrow$ ako se radi o funkciji $\vec{r} \mapsto f(r)$ takve se funkcije nazivaju FUNKCIJOM RADIJ-VEKTORA ili RADIJALNA FUNKCIJA ili RADIJALNO SKALARNO POLJE, $f(r)$ konst.

Analogno: $\vec{r} \mapsto f(r)\vec{r}$ je RADIJALNO VEKTORSKO POLJE

1] $\boxed{\nabla r = \frac{\vec{r}}{r} = \vec{r_0}}$ $\Rightarrow \nabla r = \text{grad } r$

2] $\nabla f(r) = \text{grad } f(r)$, gdje je f poznata funkcija

$$\boxed{\nabla f(r) = f'(r) \cdot \vec{r_0}}$$

$\Rightarrow$ gradijent skalarnog radijalnog polja je vektorsko radijalno polje!

primjeri:

1] $\text{grad}(r^2) = (r^2)' \cdot \vec{r_0} = 2r \cdot \vec{r_0} = \boxed{2\vec{r}}$ $\to$ $\hookrightarrow \vec{r} = \vec{r_0} \cdot r$

2] $\text{grad}(\sin r) = \cos r \cdot \vec{r_0} = \boxed{\frac{\cos r}{r} \cdot \vec{r}}$ $\to$ $\frac{\vec{r}}{r} = \vec{r_0} = \nabla r$

3] $\text{grad}\left(\frac{K}{r}\right) = K \cdot \left(-\frac{1}{r^2}\right)\vec{r_0} = \boxed{\frac{-K}{r^3}\vec{r}}$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}(r \sin r) = \left(\frac{\sin r}{r} + \cos r\right) x}$$

$\Rightarrow$

„STAVAK O IMPLICITNOJ FUNKCIJI"

Neka je U otvoren skup u ravnini, i neka je $f: U \mapsto \mathbb{R}$ funkcija klase C^1 (neprekinuto diferencijabilna po obje varijable) te $f(x_0, y_0) = 0$. Ako je $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ onda postoji jednoznačno određena funkcija $y = \varphi(x)$ klase C^1 definirana na nekom intervalu I oko točke $f(x,y)=0$ takva da je $f(x, \varphi(x)) \equiv 0, \forall x \in I$, $\varphi(x_0) = y_0$.

Pri tome vrijedi: $\varphi'(x_0) = -\frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)}$ ili

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}}$$

Dokaz: $\Rightarrow$ iz $f(x,y) = 0 \Rightarrow df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0$

$$dy \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial x} dx \quad / \cdot dx \qquad \frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

"općenitije:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}}{\frac{\partial f}{\partial u}}, \text{ gdje } i = 1, \ldots, n}$$

što slijedi zbog jednoznačnosti prvog diferencijala!

⇐ 3

IMPLICITNO ZADANA FUNKCIJA ⇒ nastavak

parcijalne derivacije:

$f(x,y,z)=0$

$f(x,y,z(x,y))=0$

$z(x_0,y_0)=z_0$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}} \qquad \boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}}$$

TANGENCIJALNA RAVNINA

$$\boxed{\pi \ldots \ (F'_x)_0(x-x_0)+(F'_y)_0(y-y_0)+(F'_z)_0(z-z_0)=0}$$

$$\boxed{\vec{n} \ldots \ \frac{x-x_0}{(F'_x)_0}=\frac{y-y_0}{(F'_y)_0}=\frac{z-z_0}{(F'_z)_0}}$$ ⇒ vektor normale

⇒

DIFERENCIJALI VIŠEG REDA

⇒ ponavljamo, prvi diferencijal funkcije $z = z(x,y)$ u točki $T(x,y)$:

$$\boxed{\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy}$$

DRUGI DIFERENCIJAL od $z(x,y)$ definiramo kao $d(dz)$ pri čemu diferencijale dx i dy SMATRAMO KONSTANTAMA

$$\boxed{d^2 z := d(dz)}$$

općenitije: $\boxed{d^n z := d(d^{n-1} z)}$ za $n \geq 2$

$$\boxed{\begin{aligned} & z = z(x,y) \\ & d^2 z = z''_{xx}(dx)^2 + 2 z''_{xy}\,dx\,dy + z''_{yy}(dy)^2 \end{aligned}}$$

⇒ VAŽNO!

* naučiti izvod!

→ možemo zapisati $d^2 z = dz^{[2]} = (z'_x\,dx + z'_y\,dy)^{[2]}$ → „SIMBOLIČNI" KVADRAT

$(dz)^2$ ⇒ „PRAVI" kvadrat od dz bio bi:

$$(dz)^2 = (z'_x)^2 (dx)^2 + 2 z'_x z'_y (dx)(dy) + (z'_y)^2 (dy)^2$$

$$\boxed{d^3 z = z'''_{xxx}(dx)^3 + 3 z'''_{xxy}(dx)^2 dy + 3 z'''_{xyy}\,dx\,(dy)^2 + z'''_{yyy}(dy)^3}$$

⇒ naučiti, ali se rijetko pojavljuje - * izvod!

TAYLOROVA FORMULA ZA F-IJE 2 VARIJABLI

Tm 5: Neka je $f(x,y)$ definirana na otvorenom skupu na $U \subseteq \mathbb{R}^2$ i ima neprekinute sve parcijalne derivacije do uključivo reda $n+1$ (f je klase C^{n+1}). Neka je $(x_0,y_0) \in U$, onda vrijedi Taylorova formula:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x,y) = {} & f(x_0,y_0) + \frac{1}{1!}\left[(f'_x)_0(x-x_0) + (f'_y)_0(y-y_0)\right] + \frac{1}{2!}\left[(f''_{xx})_0(x-x_0)^2 + \ldots\right. \\ & \left. 2(f''_{xy})_0(x-x_0)(y-y_0) + (f''_{yy})_0(y-y_0)^2\right] + \ldots + \frac{1}{n!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{[n]} \\ & f(x_0,y_0) + R_n(x,y) \end{aligned}}$$

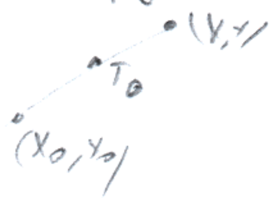
Skraćeno:

$$f(x,y) = T_n(x,y) + R_n(x,y)$$ — LAGRANGE-OV n-ti ostatak

Taylorov polinom u okolišu od (x_0,y_0)

$$R_n(x,y) = \frac{1}{(n+1)!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{[n+1]} f(T_0)$$

točka na spojnici (x_0,y_0), (x,y)



Dokaz: 8. knj. str 23. i 24.

9. KNJIŽICA:

„NUŽNI UVJET ZA LOKALNI EKSTREM"

Ako je u točki $\vec{a}$ lokalni ekstrem diferencijabilne funkcije $f(\vec{x})$ onda je:

$$\boxed{df(\vec{a})=0} \quad \text{ili} \quad \nabla f(\vec{a})=\vec{0}$$

tj.

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_1}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}=0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}=0} \quad !$$

Rješenje ovog sustava od n jednadžbi čije su nepoznanice $x_1, x_2 \ldots x_n$ zovu se STACIONARNE TOČKE funkcije f.

$\Rightarrow$ Stacionarne točke imaju svojstvo da im je tangencijalna ravnina PARALELNA sa XoY

---

* DOKAZ: Neka je $\vec{a}=(a_1, a_2, \ldots a_n)$ stacionarna točka. Budući da je funkcija jedne varijable $\{f_1\}$ dobivena restrikcijom funkcije f na pravac paralelan sa x_1-osi (tj. funkcija $f_1(x)=f(x_1, a_2 \ldots a_n)$) ima u točki $x_1=a_1$ lokalni ekstrem, onda je:

$$\frac{df_1}{dx_1}(a_1)=0 \quad \text{tj.} \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)=0$$

Na isti je način $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a})=0$ za sve ostale i, dakle:

$$\nabla f(\vec{a})=\vec{0} \Leftrightarrow df(\vec{a})=0$$

$\Longrightarrow$

„DOSTATNI UVJETI ZA LOKALNE EKSTREME"

Neka je U otvoren skup u $\mathbb{R}^n$ i $f: U \to \mathbb{R}$ dvaput neprekinuto diferencijabilna funkcija (klase C^2). Pretpostavimo da je $T_0 \in \mathbb{R}^n$ stacionarna točka od funkcije f, tj. $df(T_0) = 0$.

a) $d^2 f(T_0)$ pozitivno definitna forma, tj. ako je

$\boxed{d^2 f(T_0)(d\vec{x}) > 0}$, $\forall\, d\vec{x} \neq \vec{0}$, $d\vec{x} = (dx_1, dx_2 \dots dx_n)$

onda $\Rightarrow T_0$ je lokalni MINIMUM od f.

b) ako je $d^2 f(T_0)$ NEGATIVNO definitna forma, tj. ako je

$\boxed{d^2 f(T_0)(d\vec{x}) < 0}$, $\forall\, d\vec{x} \neq \vec{0}$

slijedi $\Rightarrow T_0$ je lokalni MAKSIMUM od f.

c) ako je $d^2 f(T_0)$ INDEFINITNA forma, tj. ako postoje $(d\vec{x})_1$ i $(d\vec{x})_2$ takvi da je $d^2 f(T_0)(d\vec{x})_1 > 0$ i $d^2 f(T_0)(d\vec{x})_2 < 0$

$\Rightarrow$ to NIJE točka lokalnog ekstrema nego se radi o SEDLU

$\Leftarrow$ 1

„SYLVESTER-ov TEOREM"

a) Neka je $S(X_0, Y_0)$ stacionarna točka $z = f(X, Y)$. Definiramo HESSEOVU MATRICU od f u S, i njene minore:

$$Hf(S) := \begin{bmatrix} (f''_{XX})_S & (f''_{XY})_S \\ (f''_{XY})_S & (f''_{YY})_S \end{bmatrix}$$

MINORE od $Hf(S)$:

$$M_1 := \left| (f''_{XX})_S \right| = (f''_{XX})_S$$

$$M_2 := \begin{vmatrix} (f''_{XX})_S & (f''_{XY})_S \\ (f''_{XY})_S & (f''_{YY})_S \end{vmatrix}$$ determinanta

Vrijedi:

sgn M_1	sgn M_2	$d^2 f(S)$	karakter od S
+	+	+ definitna forma	MINIMUM
−	+	− definitna forma	MAKSIMUM
+ −	−	indefinitna forma	SEDLO

$\Longrightarrow$

„SYLVESTEROV TEOREM" - nastavak

b) Neka je $S(x_0, y_0, z_0)$ stacionarna točka $u = f(x,y,z)$. Definiramo HESSEOVU MATRICU od f u točki S i njene minore:

$$Hf(S) := \begin{bmatrix} (f''_{xx})_S & (f''_{xy})_S & (f''_{xz})_S \\ (f''_{xy})_S & (f''_{yy})_S & (f''_{yz})_S \\ (f''_{xz})_S & (f''_{yz})_S & (f''_{zz})_S \end{bmatrix}$$

MINORE od $Hf(S)$:

$$M_1 := |(f''_{xx})_S| = (f''_{xx})_S$$

$$M_2 := \begin{vmatrix} (f''_{xx})_S & (f''_{xy})_S \\ (f''_{xy})_S & (f''_{yy})_S \end{vmatrix}$$

$$M_3 := \begin{vmatrix} (f''_{xx})_S & (f''_{xy})_S & (f''_{xz})_S \\ (f''_{xy})_S & (f''_{yy})_S & (f''_{yz})_S \\ (f''_{xz})_S & (f''_{yz})_S & (f''_{zz})_S \end{vmatrix}$$

sgn M_1	sgn M_2	sgn M_3	$d^2f(S)$	karakter od S
+	+	+	+ definitna forma	MINIMUM
−	+	−	− definitna forma	MAKSIMUM
+	+	−	INDEFINITNA FORMA	SEDLO
+	−	−		
−	+	+		
−	−	+		
−	−	−		

Napomena: Ako je bilo koja od minora M_1, M_2, M_3 jednaka NULI teorem je <u>NEUPOTREBLJIV!</u>

⇐ 2

Tm 4 Neka je $u = F(\vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, pri čemu su nezavisne varijable $x_1, x_2, \dots, x_n$ VEZANE UVJETIMA:

$$\boxed{\varphi_i(\vec{x}) = 0} \qquad i = 1,2,\dots,m \ ; \ m<n$$

↳ broj uvjeta mora biti manji od broja varijabli!

Neka su $F, \varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_m$ dvaput neprekinuto diferencijabilne funkcije (klase C^2). Onda funkcija $u = F(x)$ postiže VEZANI EKSTREM u točki $\vec{x} = \vec{x}_0$ onda i samo onda ako takav ekstrem u $\vec{x}_0$ postiže LAGRANGE-ovu FUNKCIJU:

$$\boxed{L(\vec{x}) := F(\vec{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(\vec{x})} \quad !$$

⇒ pri tome se stacionarne točke $\vec{x}_0$ i pripadni parametri $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_m$ zovu LAGRANGE-ovi MULTIPLIKATORI i određuju se iz uvjeta:

$$\boxed{L'_{x_j} = F'_{x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (\varphi_i)'_{x_j} = 0} \qquad j = 1,2\dots n$$

$$\boxed{\varphi_i(\vec{x}) = 0} \qquad i = 1,2,\dots,m$$

⇒ $(m+n)$ jednadžbi za određivanje nepoznanica $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}^n$

NASTAVAK: ⇒

Tm 4, nastavak

⇒ radi ustanovljavanja karaktera ekstrema u $\vec{x}_0$ treba ispitati predznak drugog diferencijala $d^2L(\vec{x}_0)$ pri čemu treba uzeti u obzir jednakosti:

$$\boxed{d\varphi_i = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right)_0 dx_j \quad i = 1, 2, \dots, m}$$

* u našem slučaju uvjeta će biti $i=2$ ili 3

NAPOMENA: U određivanju predznaka NE SMIJE se koristiti SYLVESTER-ov TEOREM prije uzimanja uvjeta u obzir!

---

poseban slučaj: $n=2$: $z = F(x,y)$

$\varphi(x,y) = 0$ ⇒ jednadžba uvjeta!

ALGORITAM: 1) KONSTRUIRA SE LAGRANGE-ova FUNKCIJA

$$\boxed{L(x,y;\lambda) := F(x,y) + \lambda \cdot \varphi(x,y)}$$

2) NUŽNI UVJETI EKSTREMA OD L

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= F'_x + \lambda \varphi'_x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= F'_y + \lambda \varphi'_y = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= \varphi(x,y) = 0 \end{aligned}\right\} \text{STACIONARNA TOČKA } S(x_0, y_0)_{\lambda = \lambda_0}$$

3) DOVOLJNI UVJETI, ISPITIVANJE KARAKTERA STAC. TOČKE PREKO PREDZNAKA OD d^2L

$$\boxed{d^2L(S) = L''_{xx}(S)(dx)^2 + 2L''_{xy}(S)\,dx\,dy + L''_{yy}(S)(dy)^2} \;!$$

pri čemu su dif. dx, dy povezani uvjetom:

$$\boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy = 0} \;! \text{ VAŽNO!}$$

$(d^2L)_S > 0 \to$ u S je minimum

$(d^2L)_S < 0 \to$ u S je maksimum

$(d^2L)_S \gtrless 0$ (promjena predznaka) u S je sedlo, nema ekstrema!

⇐ 3

DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE $\Rightarrow$ OPĆENITO

Jednadžba oblika $F(x, y, y', \dots y^{(n)}) = 0$ zove se **DIFERENCIJALNA JEDNADŽBA REDA n**

$\Rightarrow$ rješenje ovakve jednadžbe je funkcija $y = \varphi(x)$ definirana na nekom intervalu koja ima sve potrebne derivacije na tom intervalu koje uvrštene u gornju jednadžbu nju identički zadovoljavaju.

$\Rightarrow$ Rješenje svake dif. jed. n-tog reda može se napisati u obliku $\boxed{y = \varphi(x, C_1, \dots, C_n)}$ $\rightarrow$ „OPĆE RJEŠENJE"

ili $\boxed{\phi(x, y, C_1, \dots, C_n) = 0}$ $\Rightarrow$ „OPĆI INTEGRAL DIF. JED."

$\Updownarrow$ OBRAT:

Svakoj FAMILIJI KRIVULJA $\phi(x, y, C_1 \dots C_n) = 0$ možemo pridružiti dif. jednadžbu, koju sve te krivulje zadovoljavaju.

ALGORITAM:

$\Rightarrow$ Zadanu jednadžbu familije $\phi(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ treba DERIVIRATI n-puta i zatim iz dobivenog sustava ELIMINIRATI SVE KONSTANTE $C_1 \dots C_n$

$\Rightarrow$ IZA

POLJE SMJEROVA I IZOKLINE

⇒ promatra se dif. jednadžba oblika $\boxed{y' = f(x,y)}$

⇒ ova jednadžba ima slijedeću <u>GEOMETRIJSKU INTERPRETACIJU</u>

⇒ u svakoj točki (x,y) iz područja definicije f, određen je smjer tangente na krivulju y u smjeru te točke [koeficijent smjera tangente iznosi upravo $f(x,y)$]

⇒ ako iscrtamo sve smjerove u svim točkama domene oni će nam dati tzv. <u>POLJE SMJEROVA</u>, iz kojeg možemo naći grafove integralnih krivulja.

⇒ zbog lakšeg crtanja određujemo <u>IZOKLINE</u> : krivulje u čijim se točkama podudaraju smjerovi. To su krivulje $f(x,y) = C$ jer je na njima $y' = C$.

⇒ njih obično crtamo za cjelobrojne vrijednosti konstante C.

TIPOVI DIFERENCIJALNIH JEDNADŽBI PRVOG REDA

1. DIF. JED. SA SEPARIRANIM VARIJABLAMA

Opći oblik:

$$\boxed{f(y)\,dy = g(x)\,dx} \qquad y' = \frac{g(x)}{f(y)}$$

ALGORITAM RJEŠENJA:

⇒ Neposrednim INTEGRIRANJEM obje strane jednadžbe

$$\boxed{\int f(y)\,dy = \int g(x)\,dx + C}$$ ⇒ opće rješenje

2. DIF. JED. OBLIKA $y' = f(ax+by+c)$

⇒ svodi se na dif. jednadžbu sa SEPARIRANIM varijablama

SUPSTITUCIJOM: $\boxed{ax+by+c = z}$ ⇒ z → NOVA ZAVISNA VARIJABLA!

$$ax+by+c = z \quad \Big/ \frac{d}{dx}$$

$$a + by' = z'$$

$$\frac{z'-a}{b} = f(z)$$

$$\frac{dz}{dx} = a + b\cdot f(z)$$

$$\frac{dz}{a+b\cdot f(z)} = dx \quad \Big/ \int$$

... itd

⇒ IZA 2

3) HOMOGENE DIF. JED. PRVOG REDA

②

Za f-iju $M(x,y)$ kažemo da je HOMOGENA FUNKCIJA u varijablama x, y, ako za svaki $t>0$ vrijedi:

$$\boxed{M(t\cdot x, t\cdot y) = t^{\alpha}\cdot M(x,y)}$$

↳ stupanj homogenosti od M

Za dif. jed. kažemo da je HOMOGENA ako je možemo svesti na oblik:

$$\boxed{y' = f\left(\frac{y}{x}\right)}$$

ALGORITAM RJEŠENJA:

⇒ SUPSTITUCIJA : $\boxed{\frac{y}{x} = z}$ → z je NOVA ZAVISNA VARIJABLA

$$y = x\cdot z \quad \Big/ \frac{d}{dx}$$

$y' = z + x\cdot z'$ → uvrstiti u zadanu jednadžbu

$$z + x\cdot z' = f(z)$$

$$x\cdot\frac{dz}{dx} = f(z) - z$$

$\ln|x| + C$

$$\frac{dz}{f(z)-z} = \frac{dx}{x} \quad \Big/ \int$$

itd...

⇐ IZA ①

TIPOVI DIF. JED. PRVOG REDA

4) DIF. JED. KOJE SE SVODE NA HOMOGENU

OBLIK:

$$\boxed{y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)}$$

⇒ moguće su dva slučaja:

1) $\boxed{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0}$, tj: PRAVCI predstavljeni jednadžbama

$p_1 \ldots a_1x + b_1y + c_1 = 0$ i

$p_2 \ldots a_2x + b_2y + c_2 = 0$

su PARALELNI!

⇒ imamo supstituciju: $\boxed{a_1x + b_1y = z}$ ⇒ z → NOVA ZAVISNA VARIJABLA

$$a_1 + b_1y' = z'$$

$$y' = \frac{z' - a_1}{b_1}$$

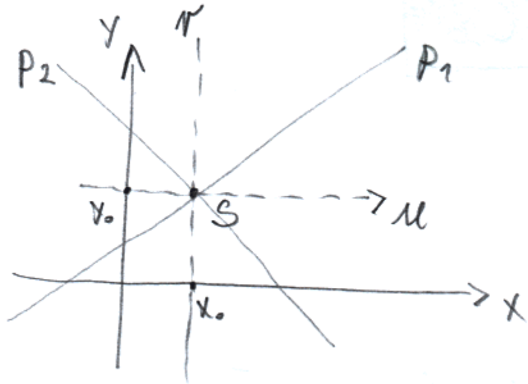
$$\frac{z' - a_1}{b_1} = f\left(\frac{z + c_1}{\frac{a_2}{a_1}z + c_2}\right)$$

$$\frac{dz}{dx} = a_1 + b_1 f\left(\frac{z + c_1}{k \cdot z + c_2}\right)$$ ... itd.. separacijom

⇒ IZA 4

②

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0}$$, tj. PRAVCI $p_1 \ldots a_1x+b_1y+c_1=0$ i $p_2 \ldots a_2x+b_2y+c_2=0$ se SIJEKU u točki $S(x_0,y_0)$



⇒ uvodi novi koordinatni sustav u, v iz središta $S(x_0,y_0)$

SUPSTITUCIJA :

$$\boxed{\begin{aligned} x &= u + x_0 \\ y &= v + y_0 \end{aligned}}$$

NOVA NEZAVISNA VARIJABLA (u)

NOVA ZAVISNA VARIJABLA (v)

$$y' = \boxed{\frac{dy}{dx}} = \frac{d(v+y_0)}{d(u+x_0)} = \boxed{\frac{dv}{du}}$$

⇒ uvrštavamo u zadanu jednadžbu:

$$y' = \frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1u+b_1v}{a_2u+b_2v}\right) = f\left(\frac{a_1+b_1\frac{v}{u}}{a_2+b_2\frac{v}{u}}\right) = f_1\left(\frac{v}{u}\right)$$ ⇒ HOMOGENA JEDNADŽBA u varijablama u, v

⇐ IZA ③

5.) LINEARNA DIF. JED. PRVOG REDA

opći oblik:

$$\boxed{y' + f(x) \cdot y = g(x)}$$

$g(x)$ → funkcija smetnje „PERTURBACIJSKA F-IJA"

⇒ linearna jer je derivirana „NA PRVU"

„METODA VARIJACIJE KONSTANTE"

1] riješi se skraćena (homogena) jednadžba koja se dobije ODBACIVANJEM DESNE STRANE

$$y' + f(x) \cdot y = \underline{0}$$

$$\frac{dy}{y} + f(x)dx = 0$$

$$\ln y + \int f(x)\,dx = \ln C$$

$$\ln y = \ln C - \ln e^{-\int f(x)dx}$$

$$\underline{y_0 = C \cdot e^{-\int f(x)dx}}$$ ⇒ opće rješenje skraćene jednadžbe

$$\underline{y_0 = C \cdot e^{-\int f(x)dx}}$$

NASTAVAK ⇒ IZA ⇒ (6)

2] U općem rješenju skraćene jednadžbe INTEGRACIJSKU KONSTANTU C SMATRAMO ZA F-IJU $\underline{C = C(x)}$ (6)

Rješenje zadane jednadžbe:

$$\boxed{y = C(x) e^{-\int f(x) dx}}$$

treba odrediti uvrštenjem u početnu jednadžbu

$$\underbrace{C'(x) e^{-\int f(x) dx} + C(x) e^{-\int f(x) dx}(-f(x))}_{y'} + \underbrace{f(x) \cdot C(x) e^{-\int f(x) dx}}_{f(x) \cdot y} = g(x)$$

MORA SE POKRATITI!

⇒ PROVJERA DA SMO DOBRO RADILI!

$$C'(x) e^{-\int f(x) dx} = g(x) \quad / \; e^{\int f(x) dx}$$

$$C'(x) = \frac{dC(x)}{dx} = g(x) \cdot e^{\int f(x) dx} \quad \Rightarrow \quad C(x) = \int g(x) e^{\int f(x) dx} dx + C_1$$

3] VRAĆAMO C(x) u y:

OPĆE RJEŠENJE LIN. JED.

koristiti kao gotovu formulu

$$\boxed{y = e^{-\int f(x) dx} \left[\int g(x) e^{\int f(x) dx} dx + C_1 \right]}$$

ili

$$\boxed{y = \underbrace{C_1 e^{-\int f(x) dx}}_{y_0} + \underbrace{e^{-\int f(x) dx} \cdot \int g(x) e^{\int f(x) dx} dx}_{y_P}}$$

gdje je y_0 rješenje skraćene (homogene) jednadžbe, a y_P partikularno rješenje početne jednadžbe uzrokovano funkcijom smetnje $g(x)$

⇒ vrijedi samo za linearne!

BERNOULLI-jeva DIF. JED.

opći oblik:

$$\boxed{y' + f(x)\cdot y = g(x)\cdot y^{\alpha}} \quad , \alpha \neq 0, \ \alpha \neq 1$$

$$/ : y^{\alpha}$$

$$\boxed{\frac{y'}{y^{\alpha}} + f(x)\cdot y^{1-\alpha} = g(x)}$$

SUPSTITUCIJA: $\boxed{y^{1-\alpha} = z}$ $\Rightarrow z \Rightarrow$ NOVA ZAVISNA VARIJABLA

$$/ \frac{d}{dx}$$

$$(1-\alpha)\, y^{-\alpha} \cdot y' = z'$$

$$\frac{y'}{y^{\alpha}} = \frac{z'}{1-\alpha} \quad \Rightarrow \text{uvrstiti u zadanu jednadžbu}$$

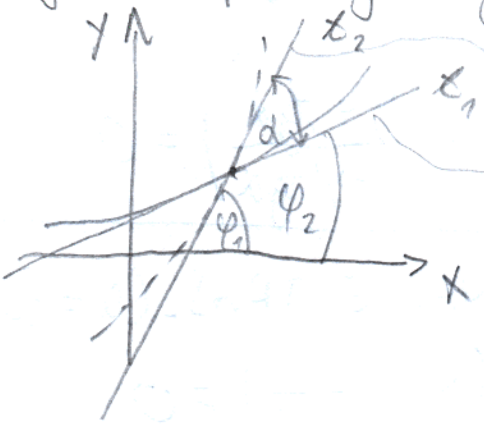
$$\frac{y'}{y^{\alpha}} + f(x)\, y^{1-\alpha} = g(x)$$

$$\frac{z'}{1-\alpha} + f(x)\cdot z = g(x) \quad \Rightarrow \text{LINEARNA DIF. JEDN.}$$

$\Rightarrow$ supstitucijom $y^{1-\alpha} = z$ Bernoullijeva jednadžba svodi se na linearnu. Međutim, može se i bez supstitucije rješavati istim metodama kao linearna.

ORTOGONALNE I IZOGONALNE TRAJEKTORIJE

Neka je $F_1(x,y,y')=0$ dif. jed iz familije krivulje $\Phi_1(x,y,C_1)=0$. Tražimo jednadžbu familije krivulje koje sijeku zadanu familiju krivulje pod kutem α, tj. svake 2 krivulje iz pojedinih familija sijeku se pod tim kutem.



t_1 → jedna krivulja zadane familije $\Phi_1(x,y,C_1)=0$

t_2 → jedna krivulja tražene familije $\Phi_2(x,y,C_2)=0$

$$\alpha=\varphi_1-\varphi_2$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}(\varphi_1-\varphi_1)=\frac{\operatorname{tg}\varphi_1-\operatorname{tg}\varphi_2}{1+\operatorname{tg}\varphi_1\cdot\operatorname{tg}\varphi_2}=$$

$$=\frac{y_1'-y_2'}{1+y_1'y_2'}$$

$$\Rightarrow y_1'=\frac{y_2'+\operatorname{tg}\alpha}{1-y_2'\operatorname{tg}\alpha}$$

Dakle, dif. jed. izogonalnih trajektorija je:

$$F\left(x,y,\frac{y'+\operatorname{tg}\alpha}{1-y'\operatorname{tg}\alpha}\right)=0$$

⇒ rješenje te dif. jed je tražena familija izogonalnih trajektorija

//NAPOMENA:

⇒ Zamjenom α sa $-\alpha$ dobiva se još jedno rješenje, a za $\alpha=90^\circ$ izogonalne trajektorije zovu se ORTOGONALNE

⇒ IZA

TABLICA:

DIF. JED. ZADANE FAMILIJE KRIVULJA	DIF. JED. IZOGONALNIH TRAJEKTORIJA POD KUTEM α
$f(x,y,y')=0$	(A) $F\left(x,y,\frac{y'-\operatorname{tg}\alpha}{1+y'\operatorname{tg}\alpha}\right)=0$ (B) $F\left(x,y,\frac{y'+\operatorname{tg}\alpha}{1-y'\operatorname{tg}\alpha}\right)=0$
$F(x,y,y')=0$	ORTOGONALNE TRAJ. ($\alpha=90°$) $F\left(x,y,-\frac{1}{y'}\right)=0$

dobivamo iz jednadžbe
$\phi(x,y,C)=0$ eliminacijom „C"

EGZAKTNA

Za diferencijalnu jednadžbu $\boxed{P(x,y)\cdot dx + Q(x,y)\cdot dy = 0}$

kažemo da je EGZAKTNA ili jednadžba s TOTALNIM DIFERENCIJALOM ako postoji funkcija $u = u(x)$ čiji je totalni diferencijal lijeve strane ove jednadžbe,

tj: $$\boxed{du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = P\cdot dx + Q\cdot dy}$$ onda je

funkcija $u(x,y) = C$ opće rješenje početne jednadžbe.

„UVJET EGZAKTNOSTI"

Neka su $P(x,y),\ Q(x,y) \in C^2$ na nekom području $D \subseteq \mathbb{R}^2$.
Da bi izraz $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ bio totalni diferencijal neke funkcije $u = u(x,y)$, nužno je i dostatno da vrijedi

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}} \quad !$$

u svakoj točki prostora D.

DOKAZ ⇒ IZA

DOKAZ „UVJETA EGZAKTNOSTI"

(1) nužnost: Neka je $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = P\,dx + Q\,dy$, (1)

onda je $P = \frac{\partial u}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial u}{\partial y}$

$$\left.\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\right\} \text{ po Schwarzovom teoremu!}$$

(2) Neka je $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, pokazat ćemo da postoji funkcija $u(x,y)$ koja zadovoljava (1)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P \Rightarrow u = \int_{x_0}^{x} P(x,y)\,dx + \varphi(y) \rightarrow \text{treba odrediti}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dx + \frac{d\varphi(y)}{dy} =$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}dx + \frac{d\varphi(x)}{dy} = Q(x,y)\Big|_{x_0}^{x} + \frac{d\varphi(y)}{dy} =$$

$$= Q(x,y) - Q(x_0,y) + \frac{d\varphi(y)}{dy}$$

$$\overset{\overset{Q(x,y)}{\parallel}}{\frac{\partial u}{\partial y}} = Q(x,y) - Q(x_0,y) + \frac{d\varphi(y)}{dy}$$

$$\frac{d\varphi(y)}{dy} = Q(x_0,y) \quad \Rightarrow \varphi(y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,dy$$

$\Rightarrow u = u(x,y)$ koja zadovoljava (1) dana je formulom:

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,dy$$

EGZAKTNA ⇒ NASTAVAK

⇒ krenemo li u dokazu (2) od $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$ dobije se još jedan oblik od $u(x,y)$

Egzaktna dif. jed. je jednadžba oblika:

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

, pri čemu je ispunjen uvjet egzaktnosti $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, u tom je slučaju rješenje jednadžbe:

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,dy = C$$

ili

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,dy = C$$

EULER-ov MULTIPLIKATOR

Jednadžba $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, uz $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$, uvijek se može svesti na egzaktnu MNOŽENJEM sa nepoznatom funkcijom $\mu = \mu(x,y)$

$$\underbrace{\mu(x,y)\cdot P(x,y)}_{P_1(x,y)}\,dx + \underbrace{\mu(x,y)\cdot Q(x,y)}_{Q_1(x,y)}\,dy = 0$$

UVJET EGZAKTNOSTI:

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{\partial Q_1}{\partial x}$$

$$\mu'_y P + \mu \cdot P'_y = \mu'_x \cdot Q + \mu \cdot Q'_x$$

$$\boxed{\mu'_y \cdot P - \mu'_x Q = \mu(Q'_x - P'_y)}$$

IZA ⇒

*

Jednadžba (*) postaje jednostavnija ukoliko f-ija μ ima

SPECIJALAN OBLIK

f samo od „x“

$$\boxed{\ln \mu(x) = \int \frac{1}{Q}\left[\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right]dx}$$

ANALOGNO:

f samo od „y“

$$\boxed{\ln \mu(y) = -\int \frac{1}{P}\left[\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right]dy}$$

DIF. JED. 1. REDA KOJE SE RJEŠAVAJU PARAMETRIZACIJOM

$\Rightarrow f(x, y, y') = 0$

	TIP. DIF. JED.	PARAMETRIZACIJA	ALGORITAM RJEŠAVANJA
1.	$y = f(x, y')$	$\boxed{y' = p}$, $p = p(x)$	$\frac{d}{dx}$ i iz dobivene dif. jed. nalazimo $p = p(x, c)$
2.	$x = f(y, y')$	$\boxed{y' = p}$, $p = p(y)$	$\frac{d}{dy}$ i iz dobivene dif. jed. nalazimo $p = p(y, c)$
3.	$x = f(y')$	$\boxed{y' = p}$, $p = p(x)$	$y = \int p \cdot f'(p)\, dp + C$
4.	$y = f(y')$	$\boxed{y' = p}$, $p = p(y)$	$x = \int \frac{1}{p} \cdot f'(p)\, dp + C$

češće dolaze na ispitima

CLAIRAUT-ova DIF. JED.

OPĆI OBLIK: $\boxed{y = x\cdot y' + \varphi(y')}$ $\Rightarrow$ spec. slučaj od $y=f(x,y')$

tj. 1 = PARAMETARSKA

SUPSTITUCIJA:

$$\boxed{y' = p}\ ,\ p = p(x)\ ,\ \frac{d}{dx}$$

$$\boxed{y = x\cdot p + \varphi(p)}\ \ \frac{d}{dx}$$

$$y' = \cancel{p} = \cancel{1\cdot p} + x\cdot\frac{dp}{dx} + \varphi'(p)\cdot\frac{dp}{dx}$$

$$x\frac{dp}{dx} + \varphi'(p)\cdot\frac{dp}{dx} = 0$$

$$\frac{dp}{dx}\left(x + \varphi'(p)\right) = 0$$

(1) $\frac{dp}{dx} = 0$ → vodi na opće rješenje

(2) $x + \varphi'(p) = 0$ → vodi na singularno rješenje

(1) $\frac{dp}{dx} = 0$

$\Rightarrow dp = 0 \Rightarrow \boxed{p = C}$ VRATITI NATRAG!

$\Rightarrow \boxed{y = C\cdot x + \varphi(c)}$ $\Rightarrow$ FAMILIJA PRAVACA koja se dobije zamjenom u polaznoj jednadžbi $y' \to C$

$\Rightarrow$ dakle samo umjesto y' pišemo C i rješenje je gotovo!

$\Rightarrow$ ne moramo uopće rješiti, samo napišemo opće rješenje.

$\Rightarrow$ IZA

(2) $x+\varphi'(p)=0$

$\Rightarrow x=-\varphi'(p) \rightarrow$ uvrstimo u polaznu jednadžbu $y=xp+\varphi(p)$

$\Rightarrow y=-p\cdot\varphi'(p)+\varphi(p)$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x&=-\varphi'(p)\\ y&=-p\cdot\varphi'(p)+\varphi(p)\end{aligned}}$$

$\Rightarrow$ SINGULARNO RJEŠENJE u parametarskom obliku

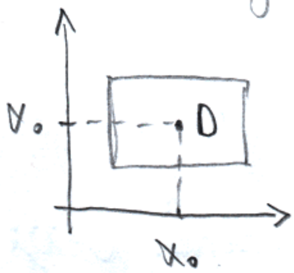
↳ NEMA konstante!

EGZISTENCIJA I JEDNOZNAČNOST RJEŠENJA DIF. JED. PRVOG REDA. SINGULARNA RJEŠENJA

⇒ promatra se Cauchyev problem: $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$

„PEANOV TEOREM EGZISTENCIJE"

Ako je $f(x,y)$ f-ija definirana na pravokutniku D oko točke (x_0, y_0) NEPREKINUTA FUNKCIJA, onda Cauchyev problem ima barem jedno rješenje u nekom okolišu x_0. !



// ČESTO SE POJAVLJUJE NA ISPITIMA

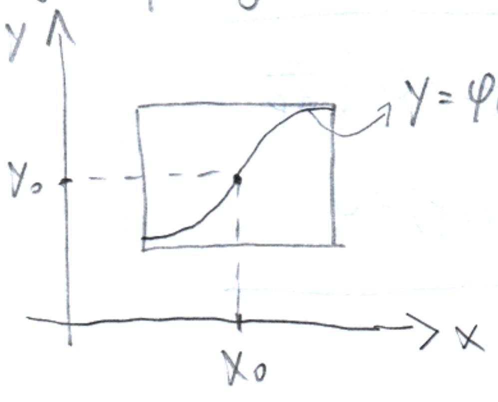
„PICARDOV TEOREM O JEDNOZNAČNOSTI RJEŠENJA"

Neka je funkcija $f(x,y)$ definirana na pravokutniku D oko točke (x_0, y_0) i ima svojstva:

(1) f je NEPREKINUTA na D

(2) $\frac{\partial f}{\partial y}$ JE OMEĐENA na D

Ako su ovi uvjeti ispunjeni onda postoji interval $(x_0 - h, x_0 + h)$ na kojem postoji JEDNOZNAČNO rješenje Cauchyevog problema.



$y = \varphi(x)$ ⇒ JEDNOZNAČNO RJEŠENJE KROZ (x_0, y_0) !

// JAKO ČESTO NA ISPITIMA

⇒ IZA

SINGULARNO RJEŠENJE

Singularno rješenje dif. jed. $F(x,y,y')=0$ jest ono rješenje te jednadžbe koje NITI U JEDNOJ TOČKI ne zadovoljava uvjet jednoznačnosti rješenja!

„ALGORITAM TRAŽENJA SINGULARNIH RJEŠENJA"

Neka je $F(x,y,y')=0$ dif. jed. koja je riješena po y' tako da je $y'=f(x,y)$. Prema Picardovom teoremu jednoznačnost rješenja ove jednadžbe u točki (x,y) narušena je ako je $\frac{\partial f}{\partial y}$ neomeđena. Taj izraz računamo po TM o impl. f-iji:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial y'}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial y'}}}\quad !$$

Dakle, vrijedi:

TM4 „UVJETI EGZISTENCIJE SINGULARNOG RJEŠENJA"

Singularna rješenja jednadžbe $F(x,y,y')=0$ postižu se (eventualno) u točkama u kojima su ispunjeni uvjeti:

$$\boxed{\begin{array}{ll}(1) & F(x,y,y')=0\\ (2) & \frac{\partial}{\partial y'}F(x,y,y')=0\end{array}}\quad \text{ili}\quad \boxed{\begin{array}{l}F(x,y,p)=0 \;\Big|\; \frac{d}{dp}\\ \frac{\partial F}{\partial p}(x,y,p)=0\end{array}}\quad !$$

REZULTAT OVOGA SE MORA PROVJERITI !!!

$\Rightarrow$ provjeriti zadovoljava li $y=\varphi(x)$ jednadžbu! $\Leftarrow$

DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE VIŠEG REDA

INTEGRIRANJE SNIŽAVANJEM REDA JED.

OPĆI OBLIK: $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ * → JED. n-tog REDA

OPĆE RJEŠENJE: $\phi(x, y, C_1, \dots, C_n) = 0$

OBLIK $\boxed{y^{(n)} = f(x)}$ ⇒ rješava se uzastopnim INTEGRIRANJEM

OBLIK $\boxed{F(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n)}) = 0}$

⇒ u jed. najčešće NEMA $y, y', \dots, y^{(k-1)}$ ⇒ najčešće NEMA „y"

⇒ SUPSTITUCIJOM $\boxed{y^{(k)} = z}$ ⇒ z ⇒ NOVA ZAVISNA VARIJABLA

⇒ snižava se red zadane jed. za k $F(x, z, \dots, z^{(n-k)}) = 0$

OBLIK $\boxed{F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0}$

⇒ NEMA „x"

⇒ SUPSTITUCIJA $\boxed{y' = p}$ $\boxed{p = p(y)}$ → BITNO!

TRIK

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dx} \cdot \frac{dy}{dy} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \cdot \frac{dp}{dy} = \boxed{p \cdot p'}$$

$y' = p$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \cdot \frac{d}{dy}(p \cdot p') = p \cdot [1 \cdot p' + p' \cdot p']$$

⇒ IZA

DIF. JED. $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$, HOMOGENA U VARIJABLAMA $y, y', \ldots, y^{(n)}$

Vrijedi

$$\boxed{F(x, ty, ty', \ldots, ty^{(n)}) = t^{\alpha} \cdot F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})}$$

$\alpha \Rightarrow$ stupanj homogenosti

$\Rightarrow$ red promatrane jed. SNIŽAVA se za 1 SUPSTITUCIJOM

$$\boxed{y = e^{\int z\,dx}} \rightarrow z \Rightarrow \text{NOVA ZAVISNA VARIJABLA}$$

$$\boxed{y'} = \frac{dy}{dx} = e^{\int z\,dx} \cdot z = \boxed{z \cdot y}$$

$$\boxed{y''} = \frac{dy'}{dx} = z'y + zy' = z'y + z \cdot zy = \boxed{(z' + z^2)\,y}$$

DIF. JED. ZA KOJE VRIJEDI:

$$\boxed{F(x, y, \ldots, y^{(n)}) = \frac{d}{dx}\phi(x, y, \ldots, y^{(n-1)}) = 0}$$

$\Rightarrow$ Ako je gornji uvjet ispunjen, zadanu dif. jed. možemo direktno integrirati:

$$\int d\phi(x, y, \ldots, y^{(n-1)}) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi(x, y, \ldots, y^{(n-1)}) = C_1}$$

⇐ IZA

LINEARNE DIF. JED. VIŠEG REDA

=> jed. oblika:

$$* \quad \boxed{A_n(x)\cdot y^{(n)} + A_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + A_1(x)\, y' + A_0(x)\cdot y = \underbrace{f(x)}_{\text{funkcija smetnje}}}$$

zove se linearna jed. n-tog REDA.

=> ako je $f(x) \equiv 0$ za jednadžbu kažemo da je HOMOGENA.

=> ako su f-ije $A_n, A_{n-1}, A_{n-2}, \ldots, A_1, A_0$ konstante, jednadžba * je linearna diferencijalna jednadžba s konstantnim koeficijentima

=> posebno nas zanimaju DRUGOG REDA!

LIN. DIF. JED. DRUGOG REDA

=> opći oblik:

$$\boxed{y'' + p(x)\cdot y' + q(x)\cdot y = 0} \quad (*)$$

zove se HOMOGENA LIN. DIF. JED DRUGOG REDA s nekonstantnim koeficijentima.

„SVOJSTVO LINEARNOSTI SKUPA RJEŠENJA" (*)

(A) Ako je y_1 rješenje (*) onda je rješenje od (*) također i funkcija Cy_1 za bilo koju vrijednost od C.

=> HOMOGENOST RJEŠENJA

=> IZA

B Ako su y_1, y_2 dva rješenja (*) onda je i funkcija $y_1 + y_2$ također rješenje od (*)

$\Rightarrow$ ADITIVNOST RJEŠENJA

DOKAZI:

A $\rightarrow$ pretpostavka je da je y_1 rješenje od (*) tj.

$$y_1'' + p(x) \cdot y_1' + g(x) \cdot y_1 = 0$$

$$\Rightarrow (Cy_1)'' + p(x)(Cy_1)' + g(x)(Cy_1) =$$
$$= C \cdot y_1'' + p(x) \cdot C \cdot y_1' + g(x) \cdot C \cdot y_1 =$$
$$= C\underbrace{(y_1'' + p(x) y_1' + g(x) \cdot y_1)}_{=0 \ \rightarrow \text{ po pretpostavci!}}$$

B $\rightarrow$ pretpostavka:

$$\left.\begin{aligned} y_1'' + p(x) y_1' + g(x) y_1 \equiv 0 \\ y_2'' + p(x) y_2' + g(x) y_2 \equiv 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow (y_1 + y_2)'' + p(x)(y_1 + y_2)' + g(x)(y_1 + y_2) =$$
$$= y_1'' + y_2'' + p(x)(y_1' + y_2') + g(x)(y_1 + y_2) =$$
$$= \Big[\underbrace{y_1'' + p(x) y_1' + g(x) y_1}_{=0 \text{ p.p}}\Big] + \Big[\underbrace{y_2'' + p(x) y_2' + g(x) y_2}_{=0 \text{ p.p.}}\Big] =$$

Tm2. Ako je y_1 bilo koje rješenje homogene lin. dif. jed (*), onda je svako drugo rješenje oblika:

$$\boxed{y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)} \quad \text{gdje je:} \quad \boxed{y_2(x) = y_1(x) \cdot \int \left[\frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int p(x)\,dx} \right] dx}$$

$\Leftarrow$ IZA

DIF. JED. VIŠEG REDA

LIN. HOM. DIF. JED. DRUGOG REDA S KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA

⇒ opći oblik:

$$\boxed{y'' + a_1 y' + a_0 y = 0} \quad (1)$$

⇒ potražimo rješenje jednadžbe (1) u obliku

$$y = e^{r \cdot x}$$

⇒ uvrštenjem pretpostavljenog rješenja u (1) dobivamo:

$$r^2 e^{r \cdot x} + a_1 r e^{r \cdot x} + a_0 e^{r \cdot x} = 0 \;\Big/ : e^{r \cdot x} \quad (\text{NIKADA NIJE } 0)$$

$$\Rightarrow \boxed{r^2 + a_1 r + a_0 = 0} \quad \ldots (2)$$

↳ tzv. KARAKTERISTIČNA JED. LIN. DIF. JED. (1)

↳ dobiva se iz (1) zamjenama:

$$y'' \rightarrow r^2, \quad y' \rightarrow r, \quad y \rightarrow 1$$

⇒ neka su r_1, r_2 rješenje jedn. (2). S obzirom na diskriminantu ove kvadratne jednadžbe imamo 3 mogućnosti:

IZA ⇒

1] $r_1, r_2 \rightarrow$ REALNI I RAZLIČITI

$y_1 = e^{r_1 x}$ $\quad y_2 = e^{r_2 x}$ $\rightarrow$ 2 lin. nezavisna rješenja od (1)

OPĆE RJEŠENJE: $\boxed{y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}}$

2] $r_1, r_2 \rightarrow$ REALNI I ISTI

$r_1 = r_2 = r = -\frac{a_1}{2}$

$\Rightarrow$ primjenom TM_2 nalazimo rješenje y_2:

$y_1 = e^{rx}$ $\rightarrow$ JEST RJEŠENJE

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int p(x)dx} dx = e^{rx} \int \frac{1}{e^{2rx}} e^{-\int a_1 dx} dx =$$

$$= e^{rx} \int e^{(-a_1 - 2r)x} dx =$$

zbog $r_1 = r_2 = -\frac{a_1}{2}$ to je jednako 0!

$$= e^{rx} \int dx = x \cdot e^{rx} \quad \Rightarrow \quad y_2(x) = x \cdot e^{rx}$$

OPĆE RJEŠENJE: $\boxed{y = (C_1 + C_2 x) e^{rx}}$

3] $r_1, r_2 \rightarrow$ KONJUGIRANO - KOMPLEKSNI PAR

$r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$

OPĆE RJEŠENJE:

$$\boxed{y = e^{\alpha x}\left[k_1 \cos(\beta x) + k_2 \sin(\beta x)\right]}$$

⇐ IZA NASTAVAK STR 7

DIF. JED. VIŠEG REDA

NASTAVAK SA STR. 6

TM3 Homogene lin. dif. jed drugog reda s KONST. KOEF.

$$\boxed{y'' + a_1 y' + a_0 y = 0}$$

ima za BAZU RJEŠENJA slijedeće funkcije, ovisno o korijenima (rješenjima) r_1, r_2 pripadne KARAKTERISTIČNE JEDNADŽBE

$$\varphi(r) \equiv r^2 + a_1 r + a_0 = 0$$

1. $r_1, r_2 \rightarrow$ REALNI I RAZLIČITI

$$\boxed{y_1 = e^{r_1 x}}, \quad \boxed{y_2 = e^{r_2 x}}$$

2. $r_1 = r_2 = r$

$$\boxed{y_1 = e^{rx}}, \quad \boxed{y_2 = x \cdot e^{rx}}$$

3. $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$

$$\boxed{y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x)}, \quad \boxed{y_2 = e^{\alpha x} \sin(\beta x)}$$

Opće rješenje u sva 3 slučaja je

$$\boxed{y = C_1 y_1 + C_2 y_2}$$

$\Rightarrow$ POSEBNO VAŽAN TEOREM

DETERMINANTA WRONSKOG

Neka su $y_1(x), \dots, y_n(x) \in C^{(n-1)}_{[a,b]}$. Determinanta WRONSKOG [WRONSKIJAN] definira se:

$$W(y_1, \dots, y_n) := \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow$ Ako Wronskijan NIJE identički jednak nuli tada su funkcije $y_1(x), \dots, y_n(x)$ LINEARNO NEZAVISNE

Dakle:

$$\boxed{\begin{aligned} W(y_1, \dots, y_n) \neq 0 &\Rightarrow \text{LINEARNO NEZAVISNE} \\ W(y_1, \dots, y_n) = 0 &\Rightarrow \text{LINEARNO ZAVISNE} \end{aligned}}$$

LINEARNA DIF. JED. n-tog REDA S KONST. VRIJEDNOSTIMA

$$\boxed{L(y) \equiv y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0} \quad (1)$$

KAR. POL. kao i kod 2. reda:

O.R. $\boxed{y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n}$

Par rješenja $x^s \cdot e^{(\alpha + i\beta)x}$, $x^s \cdot e^{(\alpha - i\beta)x}$, $0 \leq s \leq k-1$

možemo zamijeniti parom $x^s \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x)$, $x^s \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x)$

$\Rightarrow$ LIN. NEZ!

$\Rightarrow$ IZA

ALGORITAM ZA RJ. HOMOGENE LDJ (1)

1] Naći sve nultočke karak. polinoma!

2] Svakom realnom korijenu r_i višestrukosti n_i odgovara n_i nezavisnih rješenja:

$$e^{r_i x}, x e^{r_i x}, \ldots, x^{r_i - 1} \cdot e^{r_i x}$$

3] Svakom paru konjug. kompl. nultočaka $r_i = \alpha + i\beta$, $r_{i+1} = \alpha - i\beta$ višestruk. n_i odgovara $2 \cdot n_i$ nezavisnih rješenja:

$$e^{\alpha x}\cos(\beta x), x e^{\alpha x}\cos(\beta x), \ldots, x^{n-1} e^{\alpha x}\cos(\beta x)$$

$$e^{\alpha x}\sin(\beta x), x e^{\alpha x}\sin(\beta x), \ldots, x^{n-1} e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

4] Opće rješenje LDJ jest linearna komb. svih rješenja gore navedenih oblika

---

NEHOMOGENE LDJ

OPĆI OBLIK: $\boxed{y^{(n)} + a_n y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(x)}$ (*)

O.R. $\boxed{y = y_H + y_P}$ → y_P: PARTIKULARNO rj. NEHOM. JED (*)

→ y_H: RJEŠENJE HOMOGENE jed.

$$\boxed{y_H = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)}$$

⇒ opće rješenje dobijemo tako da $C_1 = C_1(x)$, $C_2 = C_2(x)$

PRI TOME F-IJE $C_1(x)$ i $C_2(x)$ određujemo iz sustava:

$$\boxed{\begin{aligned} C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) &= 0 \\ C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) &= f(x) \end{aligned}}$$