DEFINICIJE

DEF 1. Napisati definiciju reda i definiciju konvergencije reda

DEF. REDA

Red je uređeni par dvaju nizova (a_n) i (S_n). Članove niza (a_n) nazivamo članovima reda, a S_n nazivamo nizom parcijalnih suma toga reda. Red zapisujemo simbolom $\sum a_n$

DEF. KONVERGENCIJE REDA

Kažemo da red $\sum a_n$ konvergira prema S, odnosno da mu je zbroj jednak S ako je ispunjeno $\lim_{n \to \infty} S_n = S$. Pišemo $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = S$

DEF 2: NAPISATI DEFINICIJU SKALARNOG UMNOŠKA DVAJU VEKTORA

Neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ zadani vektori i $\varphi = \measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$. Skalarni umnožak definira se kao

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi$$

DEF 3: NAPISATI VEKTORSKI OBLIK JEDNADŽBE RAVNINE

Neka je T_1 zadana točka ravnine, r_1 je njen radijvektor i neka je $\vec{n}$ normala na ravninu. Vektorski oblik jednadžbe je

$$\vec{n}(\vec{r} - \vec{r}_1) = 0$$

DEF 4: NAPISATI OPĆI OBLIK JEDNADŽBE RAVNINE

$$\Pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$$

DEF 5: NAPISATI DEFINICIJU VEKTORSKOG UMNOŠKA $\vec{a}$ i $\vec{b}$

$$a = a_x i + a_y j + a_z k \qquad b = b_x i + b_y j + b_z k$$

$$a \times b = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

DEF 6: DEFINIRATI DETERMINANTU WRONSKOG ZA FUNKCIJE Y_1 i Y_2

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

DEF 7. ISKAŽITE INTEGRALNI KRITERIJ KONVERGENCIJE REDA REALNIH BROJEVA

Neka je $a_n = f(n)$ pri čemu je f pozitivna, neprekinuta i padajuća f-ja na $\langle N, +\infty \rangle$. Tada red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i integral $\int_N^{\infty} f(t)dt$ ili oba konvergiraju ili oba divergiraju

DEF 8. DEFINIRAJTE SKALARNI PRODUKT DVAJU VEKTORA

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi$$

→ ako su zadani u ortonormiranoj bazi $\{i, j, k\}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

DEF 9: FORMULA I DOKAZ EULEROVOG MULTIPLIKATORA

$$\ln \mu(x) = \int \frac{1}{Q}(P'_y - Q'_x)\,dx$$

$$\ln \mu(y) = -\int \frac{1}{P}(P'_y - Q'_x)\,dx$$

$\mu(x))$ $\quad P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \Rightarrow \mu P(x,y)dx + \mu Q(x,y)dy = 0$

→ 0 jer μ ovisi isključivo o x

$$\frac{\partial \mu P}{\partial y} = \frac{\partial \mu Q}{\partial x} \Rightarrow \mu'_y P + \mu P'_y = \mu'_x Q + \mu Q'_x$$

$$\Rightarrow \mu'_x Q = \mu(P'_y - Q'_x) \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \frac{P'_y - Q'_x}{Q}\,dx$$

$$\Rightarrow \ln \mu = \int \frac{P'_y - Q'_x}{Q}\,dx$$

DEF 10: DEFINIRAJTE POJAM <u>EGZAKTNE</u> DIFERENCIJALNE <u>JDBE</u>

Za jednadžbu $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ kažemo da je egzaktna $\phi(x,y)$ takva da je $d\phi(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$

DEF 11: DEFINIRAJTE POJAM KONVERGENCIJE REDA BROJEVA

Za red brojeva kažemo da konvergira ako konvergira niz njegovih parcijalnih suma

DEF 12: NEKA SU y_1, y_2 i y_3 ~~FUNKCIJE~~ KLASE C^2 na $[a,b]$. DOKAŽITE DA AKO <u>DETERMINANTA WRONSKOG</u> $W(y_1,y_2,y_3)$ NIJE IDENTIČKI JEDNAKA ϕ, TADA SU FUNKCIJE y_1, y_2, y_3 <u>LINEARNO NEZAVISNE</u>

Neka je Wronskijan $W(y_1,y_2,y_3)(x_0) \neq 0$ za neki $x_0 \in [a,b]$. Tada sustav $\alpha_1 y_1^{(k)} + \alpha_2 y_2^{(k)} + \alpha_3 y_3^{(k)} = 0$ za $k = 0,1,2$ ima determinantu sustava $\neq 0$, pa ima jedinstveno rješenje $\alpha_i = 0$. Specijalno, to znači da $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3$ ima jedinstveno rješenje $\alpha_i = 0$, pa su te fje linearno nezavisne

---

KVAZI TEORIJA

1) Prostorna krivulja C zadana je s pomoću vektorske fje

$$r(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

Neka je $T \in C$ kojoj odgovara vrijednost $t = t_0$. Odredite jdbu tangente na C u točki T

$$\frac{x - x(t_0)}{\dot{x}(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{\dot{y}(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{\dot{z}(t_0)}$$

DEF 13: NEPREKINUTOST FUNKCIJE U TOČKI

Kažemo da je realna funkcija $f(x)$ definirana na M neprekinuta u točki $x_0 \in M$, ako za svaki ε-okoliš broja $f(x_0)$ postoji δ-okoliš točke x_0 koji se cijeli preslikava u promatrani ε-okoliš od $f(x_0)$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)(\|x - x_0\|_\infty < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

DEF 14. ISKAŽITE i DOKAŽITE SYLVESTEROV TEOREM (za kvadratne forme dvije varijable)

Zadana je kvadratna forma $Q(h,k) = ah^2 + 2bhk + ck^2$,

gdje su a, b i c zadani brojevi. Neka je A matrica kvadratne forme

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ a) Ako su u matrici A sve glavne minore pozitivne, tj.

$$a > 0, \quad ac - b^2 > 0$$

$\Rightarrow$ onda je kvadratna forma $Q(h,k)$ POZITIVNO DEFINITNA

b) $a < 0, ac - b^2 > 0 \Rightarrow Q(h,k)$ NEGATIVNO DEFINITNA

c) $ac - b^2 < 0 \Rightarrow Q(h,k)$ INDEFINITNA

DOKAZ Pretpostavimo da je $(h,k) \neq (0,0)$, na pr $k \neq 0$. Onda je

$$Q(h,k) = k^2 \left[a\left(\frac{h}{k}\right)^2 + 2b\frac{h}{k} + c \right]$$

Diskriminanta kvadratnog polinoma u zagradi, gledajući $\left(\frac{h}{k}\right)$ kao varijablu je

$(2b)^2 - 4ac \Rightarrow 4(b^2 - ac) < 0$, pa taj polinom nema

realnih nultočaka. Budući da je $a > 0$, onda je taj polinom > 0

$\Rightarrow Q(h,k) > 0$

b) analogno

c) diskriminanta je $4(b^2 - ac) > 0$, pa ona poprima i pozitivne i negativne vrijednosti jer ima dvije različite nultočke

DEF 15. ISKAŽITE DEFINICIJU PARCIJALNE DERIVACIJE $\left(\frac{\delta f}{\delta x_i}\right)_0$ FUNKCIJE f PO VARIJABLI x_i u TOČKI $T(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$

Neka je

$$\varphi_i(x_i) = f(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i^0, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0)$$

Tada je $\left(\frac{\delta f}{\delta x_i}\right)_0 := \varphi_i'(x_i^0) = \lim\limits_{x_i \to x_i^0} \frac{\varphi(x_i) - \varphi_i(x_i^0)}{x_i - x_i^0}$

DEF 16. IZVEDITE FORMULU ZA $\nabla f(r)$, gdje je

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$$

$$\nabla f(r) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(r)}{\partial x_i}\vec{e_i} = \sum_{i=1}^{n} f'(r)\frac{\partial r}{\partial x_i}\vec{e_i} = f'(r)\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i\vec{e_i}}{r} = f'(r)\frac{\vec{r}}{r}$$

DEF 17. NAPIŠITE DEFINICIJU DERIVACIJE FUNKCIJE $z=f(x,y)$ U TOČKI $T_0(x_0,y_0)$ U SMJERU JEDINIČNOG VEKTORA $\vec{h}$

$$\frac{\partial f}{\partial h}(x_0,y_0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+th_1, y_0+th_2) - f(x_0,y_0)}{t} \qquad \vec{h} = h_1\vec{i} + h_2\vec{j}$$

DEF 18. NAPIŠITE I DOKAŽITE FORMULU KOJOM SE USMJERENA DERIVACIJA FUNKCIJE $z=f(x,y)$ U TOČKI $T_0(x_0,y_0)$ U SMJERU JEDINIČNOG VEKTORA $\vec{h}$ RAČUNA POMOĆU ∇f

$$\frac{\partial f}{\partial h}(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0)\cdot\vec{h}$$

DOKAZ Usmjerena derivacija je brzina rasta funkcije duž pravca koji spaja točke (x_0,y_0) i (x_0+th_1, y_0+th_2). TO JE DAKLE derivacija funkcije $t \longrightarrow f(x_0+th_1, y_0+th_2)$ za $t=0$

$$\frac{f(x_0+th_1, y_0+th_2) - f(x_0,y_0)}{t} = \nabla f(x_0,y_0)\cdot h + \frac{o(th)}{t}$$

iz čega prelaskom na limes kada $t\to 0$ slijedi tvrdnja

*DEF 19.: NAPISATI DEFINICIJU PARCIJALNE DERIVACIJE $\frac{\partial f}{\partial y}$ FUNKCIJE $z=f(x,y)$ U TOČKI $T_0(x_0,y_0)$

Neka je $z=f(x,y)$ neprekinuta i definirana na otvorenom skupu $M\subseteq R^2$, $T_0(x_0,y_0)\in M$. Parcijalna derivacija $\frac{\partial f}{\partial y}$ u točki $T_0(x_0,y_0)$ se definira kao

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

DEF 20. NAPISATI DEFINICIJU DIFERENCIJABILNOSTI FUNKCIJE

$z = f(x,y)$ U TOČKI $T_0(x_0, y_0)$

Neka je $z=f(x,y)$ i $h=(h_1,h_2)$ te $o(h)$ beskonačno mala skalarna veličina višeg reda od $\|h\|$ tj.

$$\lim_{h\to 0}\frac{o(h)}{\|h\|} = \lim_{h\to 0}\frac{o(h)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0$$

Ako promjenu funkcije $\Delta f = f(x+h_1, y+h_2) - f(x,y)$ možemo prikazati u obliku

$$f(x+h_1, y+h_2) - f(x,y) = a_1h_1 + a_2h_2 + o(h)$$ za neki

$a=(a_1,a_2)$ onda kažemo da je $f(x,y)$ diferencijabilna u $T(x,y)$

DEF 21. DOKAZATI DA ZA $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ I $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ VRIJEDI $\nabla f(r) = f'(r)\frac{\vec{r}}{r}$

$$\frac{\partial f(r)}{\partial x} = f'(r)\frac{\partial r}{\partial x} = f'(r)\cdot\frac{x}{r} \quad \frac{\partial f(r)}{\partial y} = f'(r)\frac{y}{r} \quad \frac{\partial f(r)}{\partial z} = f'(r)\frac{z}{r}$$, a

znamo da je $\nabla f(r) = \frac{\partial}{\partial x} f(r)\vec{i} + \frac{\partial f(r)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} f(r)\vec{k}$

DEF 22. NUŽDAN UVJET ZA LOKALNI EKSTREM U $T(x,y)$

$$\nabla f(T) = 0$$