VEKTOR SMJERA TANGENTE NA KRIVULJU - $r'(t) = s(t_0)$

LIMES VEKTORSKE F-JE: $\lim_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \vec{a} \iff \lim_{t\to t_0} \|\vec{r}(t) - \vec{a}\| = 0$

$\lim_{t\to t_0} \sqrt{(x(t)-a_1)^2 + (y(t)-a_2)^2 + (z(t)-a_3)^2} = 0$

$\vec{a} = \lim_{t\to t_0} \vec{r}(t)$ $\boxed{a_1} = \lim_{t\to t_0} x(t)$, $\boxed{a_2} = \lim_{t\to t_0} y(t)$, $\boxed{a_3} = \lim_{t\to t_0} z(t)$

$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$

NEPREKINUTOST VEKTORSKE F-JE $\vec{r}(t)$

$\lim_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$

VEKTORSKA F-JA $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ je neprekinuta u t_0 ako i samo ako su sve njene koordinatne f-je $x(t)$, $y(t)$, i $z(t)$ neprekinute u t_0.

DERIVACIJA VEKTORSKE FJE PO PARAMETRU

$\vec{r}(t)$ je derivabilna u t_0 ako postoji: $\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\vec{r}(t_0+\Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t}$

$r'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}$

$\|r'(t_0)\| = \sqrt{(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2 + (z'(t_0))^2}$

* pripadni vektor brzine $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t)$
* vektor akceleracije $\vec{a}(t) = \vec{r}''(t)$

JEDNADŽBA TANGENTE NA KRIVULJU Γ u t_0

- parametarska jednadžba pravca (tangente) u $T_0(x_0, y_0, z_0)$

$x(u) = x(t_0) + u \cdot x'(t_0)$

$y(u) = y(t_0) + u \cdot y'(t_0)$

$z(u) = z(t_0) + u \cdot z'(t_0)$, $u \in \mathbb{R}$

$\vec{t}(u) = \vec{r}(t_0) + u \cdot \vec{r}'(t_0)$, $u \in \mathbb{R} \Rightarrow \vec{t}(u) = \vec{r}(t_0) + u \cdot s(t_0)$, $u \in \mathbb{R}$

ZAPIS TRAŽENE TANGENTE U VEKTORSKOM OBLIKU

* jednadžba tangente u kanonskom obliku:

$\frac{x - x_0}{s_1} = \frac{y - y_0}{s_2} = \frac{z - z_0}{s_3}$ $\vec{s} = s_1\vec{i} + s_2\vec{j} + s_3\vec{k}$ ONO ŠTO IDE UZ u!

STRUJNICE VEKTORSKOG POLJA $\vec{v}(x,y,z) \rightarrow$ krivulja T čiji je tangencijalni vektor u svakoj njenoj točki (x_0,y_0,z_0) kolinearan s vektorom $\vec{v}(x_0,y_0,z_0)$

$\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$, $t\in[t_1,t_2] \rightarrow$ strujnica zadanog vektorskog polja

$\vec{v}(x,y,z)=v_1(x,y,z)\vec{i}+v_2(x,y,z)\vec{j}+v_3(x,y,z)\vec{k}$

t - TANGENCIJALNI VEKTOR

$\vec{t}=\lambda\vec{v}$; t je vektor smjera tangente na neku strujnicu vektorskog polja $\vec{v}$ u bilo kojoj njenoj točki

$\vec{t}=\vec{r}'(t)=x'(t)\vec{i}+y'(t)\vec{j}+z'(t)\vec{k}$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x'(t)=\lambda v_1 & \frac{dx}{dt}=\lambda v_1 \\ y'(t)=\lambda v_2 & \frac{dy}{dt}=\lambda v_2 \\ z'(t)=\lambda v_3 & \frac{dz}{dt}=\lambda v_3 \end{matrix}\right\}$$

eliminacijom λ slijedi:

$$\frac{dx}{v_1}=\frac{dy}{v_2}=\frac{dz}{v_3}$$

SKALARNA I VEKTORSKA POLJA

Skalarno polje svakoj točki pridružuje neki realni broj - SKALAR (npr. temperatura $T(x,y,z)$; tlak $p(x,y,z)$...)

Vektorsko polje svakoj točki pridružuje VEKTOR čije su koordinate realne f-je točke T.

RAVNINSKA VEKTORSKA POLJA $\vec{f}(x,y)=f_1(x,y)\vec{i}+f_2(x,y)\vec{j}$

PROSTORNA VEKTORSKA POLJA $\vec{f}(x,y,z)=f_1(x,y,z)\vec{i}+f_2(x,y,z)\vec{j}+f_3(x,y,z)\vec{k}$

(npr. gravitacijsko polje Zemlje, električno polje točkastog naboja)

*POJAM : glatka f-ja $\rightarrow$ f-ja koja ima neprekidne parcijalne derivacije onog reda za koji nam je račun potreban.

GRADIJENT SKALARNOG POLJA

$\varphi(x,y,z)$ derivabilno skalarno polje

$$\text{grad}\,\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}$$

$\hookrightarrow$ vektorska f-ja varijabli x, y, z

GRADIJENT SKALARNOG POLJA JE $\boxed{\text{OKOMIT}}$ NA NIVO-KRIVULJE tj. nivo plohe zadanog skalarnog polja

TOTALNI DIFERENCIJAL $\varphi(x,y,z)=C$ $C\in\mathbb{R}$ je konstanta

$$d\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial\varphi}{\partial z}dz=\operatorname{grad}\varphi\cdot d\vec{r}=0$$

zadana NIVO-KRIVULJA skalarne fje $\varphi(x,y,z)$

$$d\vec{r}=dx\,\vec{i}+dy\,\vec{j}+dz\,\vec{k}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y,z)\cdot x'+\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y,z)\,y'+\frac{\partial\varphi}{\partial z}(x,y,z)\,z'=\operatorname{grad}\varphi(x,y,z)\cdot r'=0$$

GRAD φ pokazuje smjer najveće promjene fje φ F-JA SE NAJBRŽE MIJENJA U SMJERU GRADIJENTA

GRAD φ = vektor smjera normale za zadanu plohu u nekoj točki T.

$$\boxed{\operatorname{grad}\varphi=\nabla\varphi}$$

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

∇-nabla operator:

* vektor s koordinatama $\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}$
* dif. OPERATOR koji djeluje na skalarno, tj. vektorsko polje

→ pravila za računanje izraza s gradijentom: $C\in\mathbb{R}$ φ,ψ proizvoljna SKALARNA POLJA

$\nabla(C\varphi)=C\nabla\varphi$, $\forall C\in\mathbb{R}$

$\nabla(\varphi+\psi)=\nabla\varphi+\nabla\psi$

$\nabla(\varphi\cdot\psi)=\varphi(\nabla\psi)+\psi(\nabla\varphi)$

Za ∇r vrijedi: $\nabla f(r)=f'(r)\cdot\vec{r_0}$

$\nabla f(r)=f'(r)\cdot\nabla r$

↳ smjer najveće promjene fje odr. njenim gradijentom

(tj. VEKTOR u čijem smjeru iz neke točke T, fja $f(r)$ najbrže raste)

$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$\nabla r=\vec{r_0}$$

$$\vec{r_0}=\frac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

RAVNINSKE I PROSTORNE KRIVULJE

* parametrizacija krivulje Γ - krivulja

$\vec{r}$ - radijvektor

T - točka $T \in R^2$ realni

(kodgovara parametru (t) argument)

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

PARAMETRIZACIJA RAVNINSKE KRIVULJE

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

PARAMETRIZACIJA PROSTORNE KRIVULJE Γ

* VEKTORSKA FUNKCIJA : $\vec{a} : [t_1, t_2] \to R^3$

ovisi o varijabli t.

$$\vec{a}(t) = a_1(t)\vec{i} + a_2(t)\vec{j} + a_3(t)\vec{k} = \begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \\ a_3(t) \end{pmatrix}$$

$a_1(t)$, $a_2(t)$, $a_3(t)$ su koordinatne f-je vektorske f-je $\vec{a}(t)$

KRIVULJA može biti presjecnica ploha. Krivulju parametriziramo tako da odaberemo jednu varijablu kao parametar (npr. $z = t$ i x i y izrazimo preko z-a).

PARAMETRIZACIJA KRIVULJA : pisanje koordinata krivulja pomoću t parametra.

Granice za t dane su početkom i završetkom krivulje.

Uvrštavajući vrijednost parametra t dobivaju se rubne točke.

PRIMJEDBA

Γ je proizvoljna krivulja koja spaja A i B i njena parametrizacija je $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ $t \in [t_A, t_B]$, $t_A \le t_B$

za $t = t_A$ (nalazimo se u točki A), za $t = t_B$ (u točki B). Ukoliko param. t raste od t_A do t_B gibamo se po krivulji od točke A do točke B. Ukoliko par. t pada od vrijednosti t_B prema t_A smjer gibanja po krivulji Γ se mijenja. Tj. orijentacija krivulje Γ mijenja se ovisno da li param. t raste ili pada. Ravninske krivulje su negativno orijentirane ako idemo u smjeru kazaljke na satu, a pozitivno su orijentirane one suprotno od kazaljke na satu.

DIVERGENCIJA I ROTACIJA VEKTORSKOG POLJA

$\vec{v}(x,y,z) = v_1(x,y,z)\vec{i} + v_2(x,y,z)\vec{j} + v_3(x,y,z)\vec{k}$ – vektorsko polje

$\text{div}\,\vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}$ → skalarno polje $\quad \text{div}\,\vec{v} = \nabla \cdot \vec{v}$

$\text{div}(\varphi\vec{v}) = \text{grad}\,\varphi \cdot \vec{v} + \varphi\,\text{div}\,\vec{v}$

$\text{rot}\,\vec{v} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)\vec{k}$

$\nabla(\nabla\cdot\vec{v}) = \text{grad}(\text{div}\,\vec{v})$

za $\text{rot}\,\vec{v} = 0$ → bezvrtložno gibanje

$\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$

$\text{rot}\,\vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$

$\nabla\times(\nabla\times\vec{v}) = \text{rot}(\text{rot}\,\vec{v})$

$\text{rot}(\varphi\vec{v}) = (\text{grad}\,\varphi)\times\vec{v} + \varphi(\text{rot}\,\vec{v})$

$\text{rot}(\varphi\vec{v}) = \nabla\times(\varphi\vec{v}) = \nabla\times(\varphi\underline{\vec{v}}) + \nabla\times(\underline{\varphi}\vec{v}) = (\nabla\varphi)\times\vec{v} + \varphi(\nabla\times\vec{v})$

$\text{rot}\,\vec{r} = 0$, $\vec{r}$ – radijvektor

* na podvučene članove, operator NE DJELUJE!!!

$\text{rot}(f(r)\vec{r}) = 0$ – bezvrtložna polja!

LAPLACEOV OPERATOR

$\nabla\cdot\nabla = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

$\text{div}(\text{grad}\,p) = \nabla\cdot(\nabla p) = (\nabla\cdot\nabla)p = \Delta p$

$\Delta p = 0$ Laplaceova jednadžba

$\Delta p = f$ Poissonova jednadžba

$\Delta f = (\nabla\cdot\nabla)f = \nabla(\nabla f) = \text{div grad}\,f$ → VRIJEDI ZA SKALARNO POLJE! (ne i za vektorsko!!!)

$\Delta\vec{v} = \text{grad}(\text{div}\,\vec{v}) - \text{rot}(\text{rot}\,\vec{v})$

VEKTORSKI RAČUN S ∇ OPERATOROM

$F(r)$ – dovoljno glatka radijalna fja

$\Delta F(r) = F''(r) + \frac{2}{r}F'(r)$

Harmonijska fja: fja je harmonijska ako zadovoljava Laplaceovu jednadžbu, tj. ako je $\Delta f = 0$

Primjena ∇ operatora na složenije izraze

∇ - vektor i diferencijalni operator $\qquad \nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$

$\nabla \varphi \neq \varphi \nabla \qquad \nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{k} \; ; \; \varphi\nabla = \varphi\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \varphi\frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \varphi\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$

$(\varphi\nabla)\cdot\vec{f} \neq \nabla\cdot(\varphi\vec{f}) \qquad \varphi\nabla\cdot\vec{f} = \varphi\frac{\partial f_1}{\partial x}\vec{i} + \varphi\frac{\partial f_2}{\partial y}\vec{j} + \varphi\frac{\partial f_3}{\partial z}\vec{k} = \varphi \cdot \operatorname{div}\vec{f}$

$\nabla\cdot\vec{f} \neq \vec{f}\cdot\nabla \qquad \nabla\vec{f} = \operatorname{dif}\vec{f} \; ; \; \vec{f}\nabla = f_1\frac{\partial}{\partial x} + f_2\frac{\partial}{\partial y} + f_3\frac{\partial}{\partial z}$

$\nabla\times\vec{f} \neq -f\times\nabla \qquad \nabla\times\vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} \qquad -f\times\nabla = -\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ \partial x & \partial y & \partial z \end{vmatrix}$

φ - skalarno polje

$\vec{f} = f_1\vec{i} + f_2\vec{j} + f_3\vec{k}$ - vektorsko polje

* pravila složenih vektorskih produkata

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}(\vec{c}\times\vec{a})$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c})$$

φ, ψ - skalarna polja $\qquad \operatorname{grad}(\varphi\cdot\psi) = \psi \operatorname{grad}\varphi + \varphi \operatorname{grad}\psi$

$\vec{f}, \vec{g}$ - vektorska polja $\qquad \operatorname{grad}(\vec{f}\cdot\vec{g}) = \nabla(\vec{f}\cdot\vec{g}) = \nabla(\underset{\downarrow}{\vec{f}}\cdot\vec{g}) + \nabla(\vec{f}\cdot\underset{\downarrow}{\vec{g}})$

$$\nabla(\vec{f}\cdot\vec{g}) = \vec{f}\times(\underbrace{\nabla\times\vec{g}}_{\operatorname{rot}\vec{g}}) + \vec{f}\cdot\nabla\vec{g}$$

USMJERENE DERIVACIJE

* SKALARNO POLJE: $f(x,y,z)$

u točki T u smj. vektora $\vec{s}$ računamo $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(x_0,y_0,z_0) = \nabla f(x_0,y_0,z_0) \cdot \vec{s_0}$

$$s_0 = \frac{\vec{s}}{\|\vec{s}\|}$$

φ - kut između $\nabla f(x_0,y_0,z_0)$ i $\vec{s}$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(x_0,y_0,z_0) = \|\nabla f(x_0,y_0,z_0)\| \cdot \cos\varphi$$

USMJERENA DERIVACIJA JE SKALARNA PROJEKCIJA GRADIJENTA F-JE f U TOČKI T_0 NA JEDINIČNI VEKTOR $\vec{s_0}$

- za skalarno polje usmj. der. je skalarna veličina

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}} = (\vec{s_0} \cdot \nabla) f \longrightarrow \text{dobije se SKALAR!}$$

→ radijalno skalarno polje $r = \|\vec{r}\|$; $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$$\frac{\partial f(r)}{\partial \vec{s}} = (\vec{s_0} \cdot \nabla) f(r) = \vec{s_0} \cdot f'(r) \cdot \nabla r = \vec{s_0} f'(r) \cdot \vec{r_0} = f'(r)(\vec{s_0} \cdot \vec{r_0})$$

$$\vec{r_0} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{r}$$

* VEKTORSKO POLJE $\vec{f}(x,y,z) = f_1(x,y,z)\vec{i} + f_2(x,y,z)\vec{j} + f_3(x,y,z)\vec{k}$

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{s}} = \frac{\partial f_1}{\partial \vec{s}}\vec{i} + \frac{\partial f_2}{\partial \vec{s}}\vec{j} + \frac{\partial f_3}{\partial \vec{s}}\vec{k} = \ldots = (\vec{s_0} \cdot \nabla)\vec{f} \quad \rightarrow \text{dobije se vektor!}$$

$$\boxed{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{s}} = \vec{s_0}}$$

za radij. vektor

$$\frac{\partial F(r)\vec{r}}{\partial \vec{s}} = F'(r)(\vec{s_0} \cdot \vec{r_0})\vec{r} + F(r)\vec{s_0}$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{s}} = s_0 \cdot \nabla$$

$\int_\Gamma f(x,y,z)\,ds$ - krivuljni integral skalarnog polja f

za $f(x,y,z)=1 \Rightarrow \int_\Gamma ds$ - duljina luka krivulje.

ds - element duljine luka $\Rightarrow ds = \|r'(t)\|\,dt = \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}$

polarne koordinate $\left.\begin{array}{l} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \end{array}\right\}\ \rho=\rho(\varphi) \qquad \varphi\in[\alpha,\beta]$

$\vec{r}=\rho(\varphi)\cos\varphi\,\vec{i}+\rho(\varphi)\sin\varphi\,\vec{j}$

$\Rightarrow \int_\alpha^\beta \sqrt{(\rho(\varphi))^2+(\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi$ - duljina luka krivulje u polarnim koordinatama.

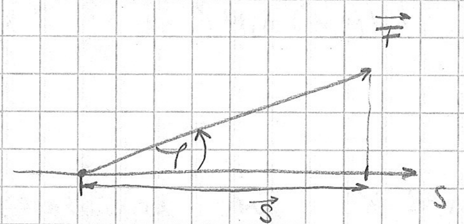
$\int_K [P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy]$

↳ radnja što je vrši materijalna točka pri gibanju po krivulji K u polju sila, koje se nalazi u xy ravnini

$S=\int_K f(x,y)\,ds$ - PLAŠT VALJKA (krivuljni integral po duljini krivulje k)

$A=\int_C^D F(x,y)\cos\varphi\,ds$ - RAD koji sila F vrši prilikom gibanja na putu ds. (tj. od točke C do D)

- φ = kut što ga sila F zatvara sa smjerom gibanja $\varphi=\varphi(x,y)$



RAD U VEKTORSKOM POLJU:

za $\vec{f}(\vec{r}(t))$

$A=\int_A^B \vec{f}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}'(t)\,dt$

$x'=dx \Rightarrow \vec{i}$

$y'=dy \Rightarrow \vec{j}$

$z'=dz \Rightarrow \vec{k}$

$A=\int_\Gamma \vec{f}\cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{f}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}'(t)\,dt$

$d\vec{r}=\vec{r}'(t)\,dt = \|r'(t)\|\,\vec{r_0}'(t)\,dt = \vec{r_0}'(t)\,ds$

$d\vec{r}=r'(t)\,dt = [x'(t)\,\vec{i}+y'(t)\,\vec{j}+z'(t)\,\vec{k}]\,dt = dx\,\vec{i}+dy\,\vec{j}+dz\,\vec{k}$

LINIJSKI INTEGRAL PO PROSTORNOJ KRIVULJI

P, Q, R - neprekinute fje u nekom dijelu prostora

$$\int P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$$

(koordinate)

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned}\right\}$$ odreduju krivulju k u prostoru

* krivuljni integral uzduž krivulje k od točke A do B te krivulje

$$\int_{\widehat{AB}} P(x,y,z)\,\underset{x'(t)}{\underset{\parallel}{dx}} + Q(x,y,z)\,\underset{y'(t)}{\underset{\parallel}{dy}} + R(x,y,z)\,\underset{z'(t)}{\underset{\parallel}{dz}}$$

$dx = x'(t)\,dt$

$dy = y'(t)\,dt$

$dz = z'(t)\,dt$

$$I = \int_\Gamma \vec{f}\,d\vec{r} = \int_\Gamma f_1(x,y,z)\,dx + f_2(x,y,z)\,dy + f_3(x,y,z)\,dz$$

CIRKULACIJA VEKTORSKOG POLJA

$$\oint_\Gamma \vec{f}\,d\vec{r}$$

FORMULA ZA RAČUNANJE POTENCIJALA p VEKTORSKOG POLJA $\vec{f}$:

$$p(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} f_1(t,y,z)\,dt + \int_{y_0}^{y} f_2(x_0,t,z)\,dt + \int_{z_0}^{z} f_3(x_0,y_0,t)\,dt + C$$

za $\boxed{\text{rot}\,\vec{f} = 0}$

Krivuljni integral potencijalnog vektorskog polja:

$$\int_\Gamma \vec{f}\,d\vec{r} = p(B) - p(A)$$

PLOŠNI INTEGRALI

- integral uzet po površini zadane plohe $\boxed{z=z(x,y)}$

površina plohe $S=\iint_S dS = \iint_S 1\cdot dS$

za $f=f(x,y,z) \Rightarrow S=\iint_S f(x,y,z)\,dS$

- zadana ploha S i element plohe dS projiciraju na koordinatnu ravninu

$$\sigma = \frac{\frac{1}{A}\cdot\frac{1}{B}}{2}$$

Kosinusi smjera normale ravnine $Ax+By+Cz+D=0$

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad \cos\beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad \cos\gamma = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

α - kut što ga normala na dS zatvara sa $+x$-osi

β - kut što ga normala na dS zatvara sa $+y$-osi

γ - kut što ga normala na element plohe dS zatvara sa $+z$-osi

- projekcija na xy ravninu:

$$I=\iint_\sigma f[x,y,z(x,y)]\frac{dx\,dy}{\cos\gamma} = \iint_\sigma f[x,y,z(x,y)]\underbrace{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy}_{dS}$$

$\vec{n}=\frac{\partial z}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}-\vec{k}$ - vektor normale

$\hookrightarrow dS=\|\vec{n}\|$

- projekcija na yz ravninu

$$I=\iint_{\sigma_1} f[x,y,z(x,y)]\frac{dy\,dz}{\cos\alpha} = \iint_{\sigma_1} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,dy\,dz$$

- projekcija na xz ravninu

$$I=\iint_{\sigma_2} f[x,y,z(x,y)]\frac{dx\,dz}{\cos\beta} = \iint f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\,dx\,dz$$

$x=r\cos\varphi$

$y=r\sin\varphi$

$dx\,dy=r\,d\varphi\,dr$

Računanje plošnih integrala po koordinatama

$dx\,dy = d\sigma$

$dx\,dy = dS \cdot \cos\gamma \Rightarrow I = \iint_S f(x,y,z)\,dx\,dy = \iint_S f(x,y,z)\cos\gamma\,dS$

$dy\,dz = dS\cos\alpha \Rightarrow \iint_S f(x,y,z)\,dy\,dz = \iint_S f(x,y,z)\cos\alpha\,dS = \iint_{\sigma_1} f[x(y,z),y,z]\,dy\,dz$

σ_1 projekcija plohe S na yz ravninu, α - kut plošne normale S ; $dy\,dz = dS\cos\alpha = d\sigma_1$

$dx\,dz = dS\cos\beta \Rightarrow \iint_S f(x,y,z)\,dx\,dz = \iint_S f(x,y,z)\cos\beta \cdot dS = \iint_{\sigma_2} f[x,y(x,z),z]\,dx\,dz$

$\hookrightarrow dx\,dz = dS\cos\beta = d\sigma_2$

$$\boxed{\begin{aligned}&\iint_S P(x,y,z)\,dy\,dz + Q(x,y,z)\,dx\,dz + R(x,y,z)\,dx\,dy = \\ &= \iint_S \left[P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma\right] dS\end{aligned}}$$