Teorem

Neka je T graf s n vrhova. Sljedeće su izreke ekvivalentne

I) T je stablo (povezani graf bez ciklusa)

II) T nema ciklusa i ima $n-1$ brid

III) T je povezan i ima $n-1$ brid

IV) T je povezan i svaki brid mu je most

V) Svaka 2 vrha od T povezana su točno jednim putem

VI) T ne sadrži ciklus, no dodavanjem 1 brida, dobiva se 1 ciklus

Dokaz

Budući da je implikacija tranzitivna, možemo dokazivati ciklički; ne moramo dokazati svih 30.

Ako je $n=1$ svi rezultati su trivijalni - u daljnjem pretpostavljamo $n \geq 2$

I $\Rightarrow$ II :

T nema ciklusa po definiciji

Matematička indukcija:

(P) graf $\underset{s}{\overset{\text{kao u pretpostavci}}{}}$ m vrhova i $m-1$ bridova je povezan za sve grafove s manje od n vrhova

(K) T je stablo s n vrhova

graf $T-e$ nije povezan $\rightarrow$ brid e nije ni u jednom ciklusu, dakle most je

$T-e = T_1 \cup T_2 \rightarrow T_1$ i T_2 povezani grafovi bez ciklusa s n_1 i n_2 vrha

Primijenimo pretp. indukcije

$|E(T_1)| = n_1 - 1 \quad |E(T_2)| = n_2 - 1$; znamo $n_1 + n_2 = n$

$|E(T)| = |E(T_1)| + |E(T_2)| + 1 = n_1 - 1 + n_2 - 1 + 1 = n-1$ Q.E.D

↳ Prema principu matematičke indukcije, povezani graf bez ciklusa ima $n-1$ brid

II $\Rightarrow$ III

T ima $n-1$ brid po pretpostavci; t.d. da je povezan

Pretpostavimo suprotno:

T nije povezan, ima k komp. povezanosti ($k \geq 2$) gdje je svaka komponenta povezani graf bez ciklusa ($n-1$ brid)

$T = T_1 \cup \ldots \cup T_k$

$|E(T)| = |E(T_1)| + \ldots + |E(T_k)| = n_1 - 1 + \ldots + n_k - 1 = n-k \rightarrow$ ↯ po pretp. ima $n-1$ brid

$\Rightarrow T$ je povezan

III ⇒ IV

Pretpostavimo suprotno:

$\exists e$ koji nije most ⇒ $T-e$ je povezan.

Ako je graf povezan, vrijedi: $|E(G)| \geq n-1$

⇒ $|E(T-e)| \geq n-1$ ⇒ $|E(T)| \geq n$ → ↯ → Svi bridovi su mostovi Q.E.D.

IV ⇒ V

T je povezan → između svaka 2 vrha postoji put

Kada bi postojala 2 ili više puta između nekih dviju točaka, njihova unija tvorila bi zatvorenu šetnju → mora postojati barem 1 ciklus. Ako postoji ciklus, bridovi u tom ciklusu nisu mostovi, što je u kontradikciji s pretpostavkom ⇒ postoji samo 1 put između svaka 2 vrha Q.E.D.

V ⇒ VI

1) T ne sadrži ciklus

Pretpostavimo suprotno: T sadrži ciklus

Ako T sadrži ciklus, svaka 2 vrha iz tog ciklusa povezani su barem s 2 puta ↯ ⇒ T ne sadrži ciklus Q.E.D.

2) Dodavanjem jednog brida, dobiva se 1 ciklus

Po pretpostavci svaka 2 vrha povezani jednim putem. Dodavanjem jednog brida stvorili smo drugi put između točaka incidentnih s vrhom → 2 vrha povezana s 2 puta ⇒ ciklus.

Ako smo dodavanjem brida dobili 2 ili više ciklusa, u početnom grafu je moralo postojati ciklus, što je u kontradikciji s pretpostavkom. Q.E.D.

VI ⇒ I

T nema ciklusa → po definiciji je šuma

Pretpostavimo suprotno: T nije povezan

Ako T nije povezan, možemo dodati brid koji spaja 2 komponente povezanosti → tim dodavanjem nismo stvorili ciklus ↯

⇒ T je povezan → T je povezana šuma ⇒ T je stablo Q.E.D.

Korolar

G je šuma s n vrhova i k komponenata povezanosti $\Rightarrow |E(G)| = n-k$

Dokaz

$G = T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_k = n_1 - 1 + \ldots + n_k - 1 = n-k$ Q.E.D.

Teorem (Cayley)

Postoji točno n^{n-2} različitih labeliranih stabala s n vrhova

Dokaz I (Prüfer)

n^{n-2} → broj vektora duljine $n-2$ → na svako mjesto u vektoru stavimo nešto iz skupa $\{1, \ldots, n\}$ $\quad \underbrace{(\, , \, , \, , \ldots , \,)}_{n-2}$

→ treba uspostaviti bijektivnu korespondenciju s labeliranim stablima (BSOP) $n \geq 3$

→ Da bi bila bijekcija, mora vrijediti:

$\exists f^{-1} : f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = id$

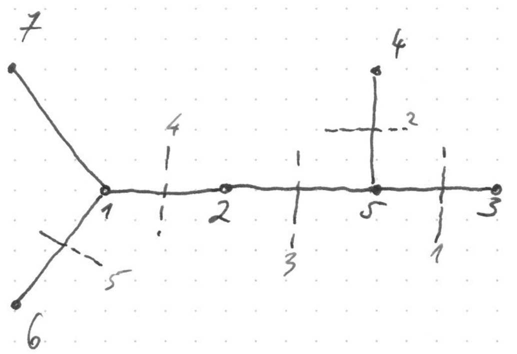
→ Preslikavanje f stablu pridjeljuje $n-2$-torku; f^{-1} $n-2$-torci pridjeljuje labelirano stablo, time da moraju dati original kad se komponiraju

1. smjer:

stablo → $n-2$-torka

1. U T pogledaj sve vrhove stupnja 1 (bar su 2)
   $b_1 :=$ list (vrh stupnja 1) s minimalnom labelom
   $a_1 :=$ jedini susjed od b_1 (b_1 stupnja 1) → a_i → i-ti element $n-1$-torke

2. $T_1 := T - b_1$ (opet stablo)
   → na T_1 opet primijenimo 1.
   → postupak je jednoznačan i uvijek provediv



1: $b_1 = 3 \rightarrow a_1 = 5$
2: $b_2 = 4 \rightarrow a_2 = 5$
3: $b_3 = 5 \rightarrow a_3 = 2$
4: $b_4 = 2 \rightarrow a_4 = 1$
5: $b_5 = 6 \rightarrow a_5 = 1$

→ $(5, 5, 2, 1, 1)$ je pripadna n-torka
↳ Prüferov kod stabla

2. smjer

$n-2$-torka → stablo

(1) $(a_1, \dots, a_{n-2})$

$b_1 :=$ najmanji broj koji nije iz $\{a_1, \dots, a_{n-2}\}$

$a_1 b_1$ je brid od T

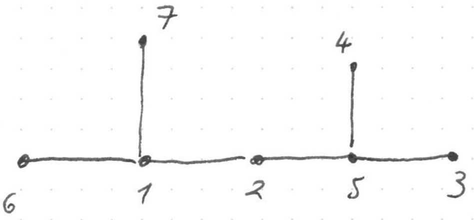
makni a_1 iz skupa, novi b_i nije ni jedan od već iskorištenih

Ponovi (1) dok ne iskoristiš cijeli kod

(2) Preostali brid čine one labele koje još nisu bili b-ovi

→ postupak je jednoznačan i provediv te se lako vidi da njime dobivamo stablo s kojim smo počeli

$(5 \mid 5 \mid 2 \mid 1 \mid 1)$



$b_1 = 3$ $(5,3)$ - brid od T

$b_2 = 4$ $(5,4)$

$b_3 = 5$ $(5,2)$

$b_4 = 2$ $(1,2)$

$b_5 = 6$ $(6,1)$

→ preostali $1, 7$ → $(1,7)$

Dokaz II (Clarke)

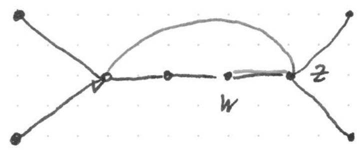
$T(n) = ?$

Fiksiramo jedan vrh

$T(n,k)$ → broj stabala s fiksiranim vrhom stupnja k

$T(n) = T(n,1) + \dots + T(n,n-1)$

$T(n,n-1) = 1$ $T(n,k) = ?$



Izaberi brid koji nije incidentan s v (wz)

Konstruiraj graf tako da izabrani most makneš, a novo stablo kreiraš tako da v spojiš sa z. V pritom ima stupanj više.

Par takvih stabala (A, B) zovemo veza i u daljnjem prebrojavamo koliko takvih veza ima

Krenimo brojati od A: $(A, \_)$:

ima ih $T(n,k-1) \cdot ((n-1)-(k-1))$ broj odabira vrha v, $\deg(v) = k-1$

Krenimo brojati od B: $(\_, B)$:

ima ih: $T(n,k)$ $\deg(v) = k$

→ Odustajem, pogledaj skriptu (Tm. 6.3)

Teorem

T je razapinjuća šuma od G $\Rightarrow$

1) Svaki rezni skup od G ima zajednički brid s T
2) Svaki ciklus u G ima zajednički brid s komplementom od T

Dokaz

1) Neka je C^* bilo koji rezni skup od G. Po definiciji reznog skupa, $G - C^*$ razdvaja neku od komponenata grafa G u podgrafove H i K
U T je sigurno postojao brid koji je povezivao neki vrh iz H s nekim iz K (T je razapinjuća šuma) $\rightarrow$ upravo je to zajednički brid od T i C^*

2) Pretpostavimo suprotno:
Neka $\exists$ ciklus C koji nema zajednički brid s komplementom od T
$\hookrightarrow$ C mora cijeli biti sadržan u T $\rightarrow$ $\lightning$ $\rightarrow$ T je šuma $\rightarrow$ nema ciklus
$\Rightarrow$ Svaki C u G ima zajednički brid s komplementom od T Q.E.D.

Teorem (Kruskalov algoritam)

Neka je G povezani graf s n vrhova. Sljedeći postupak daje minimalno razapinjuće stablo:

1) Neka je e_1 brid najmanje težine od G
2) Definirajmo $e_2, \dots, e_{n-1}$ birajući bridove najmanje težine koji ne zatvaraju ciklus sa već izabranima

Traženo minimalno stablo čine bridovi $e_1, \dots, e_{n-1}$

Dokaz

Jasno je da se dobiva razapinjuće stablo jer imamo graf bez ciklusa s $n-1$ bridom.
Treba još dokazati minimalnost:
Pretpostavimo suprotno:
T... rješenje dobiveno algoritmom ($w(T)$ nije optimalno)
S... neko drugo rješenje ($w(S) < w(T)$)

$T: e_1, \dots, e_k, \dots, e_{n-1}$ $\qquad$ $S: e_1', \dots, e_k', \dots, e_{n-1}'$

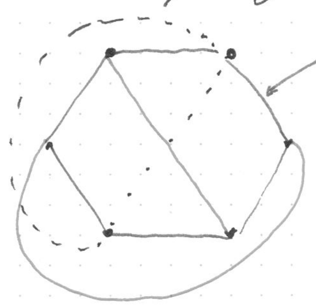
$k \rightarrow$ mjesto gdje je prvi put $e_k' \neq e_k$

Pogledajmo $S \cup \{e_k\} \rightarrow S$ je stablo, dodali smo brid $\rightarrow$ zatvoren 1 ciklus $\rightarrow \exists$ ciklus C. Postoje bridovi iz C koji nisu u T (T je stablo), ali jesu u S. Uočimo jedan takav brid f. Dodamo stablu S brid e_k, a oduzmemo f

$S' = S + e_k - f$, $w(S') < w(S)$ → f je sigurno veći od e_k
→ nastavimo postupak iterativno
→ S' postaje T : $w(T) < w(S)$ ↯

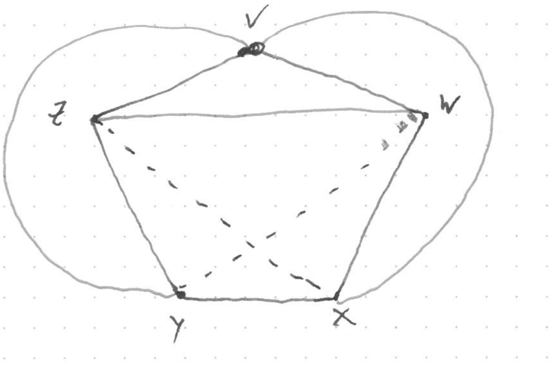
Propozicija
Svaki se graf može prikazati u $\mathbb{R}^3$ bez presijecanja bridova
Dokaz
Konstrukcija:
1) Vrhove grafa smjestimo na pravac
2) Uzmi pramen ravnina koji generira pravac
3) Svaki brid realiziraj u nekoj drugoj ravnini pramena
→ Ravnine se sijeku samo u pravcu → bridovi se sijeku samo kad su incidentni s istim vrhom.

Propozicija
$K_{3,3}$ nije planaran
Dokaz
Pretpostavimo suprotno: $K_{3,3}$ se može smjestiti u ravninu bez presijecanja
Uočimo postoji Hamiltonovski ciklus → dijeli ravninu na dva dijela



→ treba još realizirati 3 glavne dijagonale dobivenog šesterokuta
→ jednu možemo povući unutar šesterokuta, jednu izvan, no treću nikako bez presijecanja → ↯
⇒ $K_{3,3}$ nije planaran Q.E.D.

Propozicija
K_5 nije planaran
Dokaz
Pretpostavimo suprotno: K_5 je planaran
Postoji hamiltonovski ciklus. Potrebno je nacrtati još 5 dijagonala



Bez smanjenja općenitosti smjestimo bridove kao na slici.
Preostale dvije dijagonale moraju biti unutar peterokuta
→ nemoguće bez presijecanja
⇒ K_5 nije planaran Q.E.D.

Teorem

Graf je planaran $\Leftrightarrow$ ne sadrži podgraf stezljiv do K_5 ili $K_{3,3}$

Dokaz

($\Leftarrow$)

Pretpostavimo suprotno: G ne sadrži podgraf stezljiv do K_5 ili $K_{3,3}$ i pritom nije planaran

→ Kuratowskijev teorem → G sadrži podgraf homeomorfan s K_5 ili $K_{3,3}$

→ Stezanjem bridova incidentnih vrhovima stupnja 2 u takvom podgrafu dobivamo podgraf izomorfan s K_5 ili $K_{3,3}$ → $\lightning$

$\Rightarrow$ Ako G ne sadrži podgraf stezljiv do K_5 ili $K_{3,3}$, planaran je

Q.E.D.

($\Rightarrow$)

Neka je G planaran

Pretpostavimo suprotno: sadrži podgraf stezljiv do K_5 ili $K_{3,3}$ → konkretno za $K_{3,3}$

↳ Nije mi jasno, pogledaj skriptu (Tm. 7.5)

Teorem (Eulerova formula)

Neka je G ravninski prikaz povezanog planarnog grafa te neka je n broj vrhova, m broj bridova i f broj strana od G. Vrijedi:

$$n - m + f = 2$$

Dokaz

Matematička indukcija po broju bridova

(B) $m=0$ • $n=1$, $m=0$, $f=1$ $n-m+f = 1-0+1 = 2$ ✓

(P) Pretpostavimo da $n-m+f=2$ vrijedi za sve G s manje od m bridova

(K) Promotrimo G gdje je broj bridova $= m$

2 slučaja:

1°) Stablo

n vrhova, $m = n-1$ $f=1$ („beskonačna" strana) $n-m+f = n-n+1+1 = 2$ ✓

2°) Nije stablo:

$\exists$ ciklus C u G. Neka je $e \in C$, $G - e = G'$

$n' = n$ $m' = m-1$ $f' = f-1$

Po pretpostavci vrijedi: $n' - m' + f' = 2$

$$n - m + 1 + f - 1 = 2$$

$$n - m + f = 2$$ Q.E.D.

Korolar

Ako je G planaran graf s n vrhova, m bridova i k komponenata povezanosti, vrijedi: $n-m+f=k+1$

Dokaz

Primijenimo Eulerovu formulu na svaku od komponenata povezanosti

$$\left.\begin{array}{l} n_1 - m_1 + f_1 = 2 \\ \vdots \\ n_k - m_k + f_k = 2 \end{array}\right| + \qquad \sum_{i=1}^{k} n_i = n \ ; \quad \sum_{i=1}^{k} m_i = m \ ; \quad \sum_{i=1}^{k} f_i = (f-1)\cdot 1 + k$$

$(f-1)\cdot 1$ – sve strane osim ∞ prebrojane jednom

k – ∞ str. prebrojana k puta

$$\Rightarrow n - m + f - 1 + k = 2k$$

$$n - m + f = k + 1 \quad \text{Q.E.D.}$$

Korolar

a) G je jednostavan povezan planaran graf s barem 3 vrha $\Rightarrow$ $m \leq 3n-6$

b) dodatno G nema trokutova $\Rightarrow m \leq 2n-4$

Dokaz

a) Brojimo incidencije brid-strana

Krenimo od strana

$f\cdot 3$ → svaka strana omeđena s najmanje 3 brida

Krenimo od bridova

$m\cdot 2$ → svaki brid incidira s 2 strane

$f\cdot 3 \leq m\cdot 2$ → gornja ocjena

↳ donja ocjena

$f = 2+m-n$ ← Eulerova formula → $3\cdot 2 + 3m - 3n \leq 2m$

$m \leq 3n-6$

b) Nema trokutova

↳ Opet brojimo incidencije samo svaka strana omeđena s najmanje 4 brida

$$4f \leq 2m$$

$$8 + 4m - 4n \leq 2m$$

$$m \leq 2n-4$$

Korolar

K_5 i $K_{3,3}$ nisu planarni

Dokaz

K_5: $n=5$
$m=10$
$m \leq 3n-6$
$10 \leq 9 \rightarrow ↯$

$K_{3,3}$: $n=6$
$m=9$
nema trokutova: $m \leq 2n-4$
$9 \leq 8 \rightarrow ↯$

Teorem

Svaki jednostavni planarni graf ima vrh stupnja ≤ 5

Dokaz

Pretpostavimo suprotno: $\forall v \ \deg(v) \geq 6$

Prebrojimo incidencije brid-vrh

Od vrhova:
$n \cdot 6 \rightarrow$ minimalna ocjena

Od bridova:
$m \cdot 2$

$n \cdot 6 \leq m \cdot 2$

$m \geq 3n$, mora vrijediti i $m \leq 3n-6 \rightarrow ↯$

$\Rightarrow$ mora postojati vrh stupnja ≤ 5 Q.E.D.

Propozicija

Najmanje jedna strana poliedra je k-terokut za $k=3,4,5$

Dokaz

$F_j \rightarrow$ broj strana koje su j-terokuti

$N_i \rightarrow$ broj vrhova stupnja i

$$2M = \sum_{j \geq 3} F_j \cdot j \qquad 2M = \sum_{i \geq 3} N_i \cdot i$$

Pretpostavimo suprotno: $F_3 = F_4 = F_5 = \emptyset$

$$2M = \sum_{j \geq 3} j F_j \geq 6 \cdot \overset{F}{F_6}$$

$\hookrightarrow$ minimalan slučaj $\rightarrow$ sve su 6

$2M \geq 6F$

$3F \leq M$

$$2M = \sum_{i \geq 3} i \cdot N_i \geq 3N$$

$\hookrightarrow$ minimalan slučaj

$3N \leq 2M$

$N - M + F = 2 \quad / \cdot 3$

$6 = 3N - 3M + 3F \leq 2M - 3M + M = 0 \rightarrow ↯$

Teorem

Postoji točno 5 regularnih poliedara (platonova tijela)

Dokaz

→ Barem jedna strana mora biti 3, 4 ili 5-erokut → sve strane moraju biti sukladne ⇒ strane mogu biti samo trokuti, četverokuti ili peterokuti

$$-8 = 4M - 4N - 4F$$

$$= 2M + 2M - 4N - 4F$$

$$= \sum_{k \geq 3} kF_k + \sum_{k \geq 3} kN_k - 4\sum_{k\geq 3} N_k - 4\sum_{k \geq 3} F_k$$

$$= \sum_{k\geq 3}(k-4)F_k + \sum_{k \geq 3}(k-4)N_k =$$

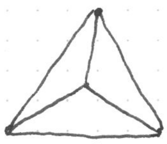
↳ Poliedar je regularan → sume imaju točno po jedan pribrojnik

$$= (s-4)F_s + (t-4)N_t$$

$$3 \leq s,t \leq 5$$

I) $s=3$ $t=3$ $2M = 3N_3$ → $N_3 = F_3$ → $N_3 = 4$ $F_3 = 4$

$-8 = -F_3 - N_3$ $2M = 3F_3$ ↳ tetraedar

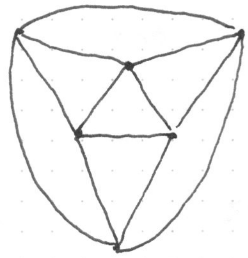


→ Samo računom nismo dokazali postojanje

→ Nismo dokazali da ne postoji niti jedna druga geometrijska realizacija (crtežom)

II) $s=3$ $t=4$ $F_3 = 8$ → $N_4 = 6$ → oktaedar

$-8 = -F_3$ $2M = 3F_3 = 4N_4$

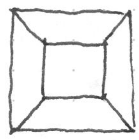


III) $s=3$ $t=5$ $2M = 3F_3 = 5N_5$ → $F_3 = 20$ $N_5 = 12$ → ikosaedar

$-8 = -F_3 + N_5$ $N_5 = \frac{3}{5}F_3$

IV) $s=4$ $t=3$ $2M = 3N_3 = 4F_4$ → $F_4 = 6$ → kocka

$-8 = -N_3$ $N_3 = 8$

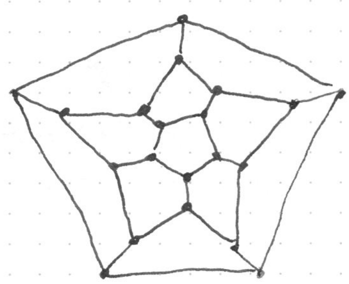


V) $s=4$ $t=4$ $-8 = 0$ ↯

VI) $s=4$ $t=5$ $-8 = N_5$ ↯

VII) $s=5$ $t=3$ $2M = 5F_5 = 3N_3$ → dodekaedar

$-8 = F_5 - N_3$ → $F_5 = 12$ $N_3 = 20$



VIII) $s=5$ $t=4$

$-8 = F_5$ ↯

IX) $s=5$ $t=5$ $-8 = F_5 + N_5$ → ↯

Teorem

G jednostavan, $n \geq 3$; tada gustoća $t(G)$ zadovoljava nejednakosti

$$t(G) \geq \left\lceil \frac{m}{3n-6} \right\rceil \qquad t(G) \geq \left\lfloor \frac{m+3n-7}{3n-6} \right\rfloor$$

Dokaz

1) $t(G) \geq \left\lceil \frac{m}{3n-6} \right\rceil$

Poopćeni Dirichletov princip:

u prvu ravninu stane $m_1 \leq 3n-6$

u drugu $m_2 \leq 3n-6$

$\vdots$

$m_k \leq 3n-6$

$m = m_1 + \ldots + m_k \leq k \cdot (3n-6)$

$\Rightarrow k \geq \frac{m}{3n-6}$, a kako je k prirodan broj $t(G) \geq \left\lceil \frac{m}{3n-6} \right\rceil$

Q.E.D.

2)

$\left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil = \left\lfloor \frac{a+b-1}{b} \right\rfloor$ → uvijek vrijedi

$t(G) \geq \left\lceil \frac{m}{3n-6} \right\rceil = \left\lfloor \frac{m+3n-6-1}{3n-6} \right\rfloor$ Q.E.D.

Lema

G planaran i povezan, G^* je njegov geometrijski dual

Vrijedi: $m^* = m \quad n^* = f \quad f^* = n$

Dokaz

U svakoj strani od G točno jedan vrh od $G^* \Rightarrow n^* = f$

Bridovi grafa i duala su u bijektivnoj korespondenciji $\Rightarrow m^* = m$

G^* je također povezan i planaran → vrijedi Eulerova formula:

$f^* = 2 + m^* - n^* = 2 + m - f = n$

Teorem

G planaran i G^* geom. dual. Skup bridova u G tvori ciklus $\Leftrightarrow$ korespondentni skup bridova u G^* tvori rezni skup

Dokaz

BSOP → G je povezan

Ako je C ciklus → okružuje jednu ili više strana u C → u svojoj unutrašnjosti sadrži neprazan skup vrhova S od G^*. Neposredno slijedi da bridovi od G^* koji sijeku bridove od C tvore rezni skup za G^* → rastavlja G^* na podgraf čiji su vrhovi sadržani u C i podgraf čiji su vrhovi izvan. Obrat se vidi slično

Korolar

Skup bridova od G tvori rezni skup $\Leftrightarrow$ odg. skup bridova u G^* tvori ciklus

Dokaz

Po prethodnom teoremu

Skup bridova od G^* tvori ciklus $\Leftrightarrow$ odg. skup bridova u $(G^*)^*$ tvori rezni skup

$(G^*)^* = G$

$\Leftrightarrow$ odg. skup bridova u G tvori rezni skup

Teorem

Ako je G jednostavni graf u kojem vrhovi imaju stupanj ne veći od Δ, G je $(\Delta+1)$-obojiv

Dokaz

Indukcija po broju vrhova

$G \to$ jednostavni s n vrhova

(P) tvrdnja vrijedi za sve grafove s $n-1$ vrhova i stupnja $\leq \Delta$

(K) U grafu G uočimo vrh v i izbacimo iz grafa, zajedno s njemu incidentnim bridovima

$G-v \to$ ima $n-1$ vrh, stupnja $\leq \Delta$

$\to G-v$ možemo obojati s $\Delta+1$ bojom po pretpostavci

$\to$ zapamtimo bojanje

$\to$ Pogledamo $G \to$ vrh v stupnja najviše $\Delta \to$ obojimo bojom kojom nisu obojani njegovi susjedi $\to G$ je također $(\Delta+1)$-obojiv Q.E.D.

Teorem

Svaki jednostavni planarni graf je 6-obojiv

Dokaz

Indukcija po broju vrhova: G jedn., planaran, n vrhova

(P) Neka su svi jednostavni planarni grafovi s manje od n vrhova 6-obojivi

(K) Pogledajmo G

G je planaran $\to$ mora postojati vrh stupnja ≤ 5

Uzmimo baš ~~taj~~ v za koji $\deg(v) \leq 5$

Promotrimo $G-v \to$ po pretpostavci 6-obojiv $\to$ zapamtimo to bojanje i pogledamo G. Budući da je vrh v max. stupnja 5, postoji neka boja kojom nisu obojani njegovi susjedi $\to$ obojimo ga tom bojom $\Rightarrow G$ je 6-obojiv Q.E.D.

Teorem
Svaki jednostavni planarni graf je 5-obojiv

Dokaz
Matematička indukcija po broju vrhova: G jednostavni planarni s n vrhova

(P) Neka tvrdnja vrijedi za sve grafove s $< n$ vrhova

(K) Promotrimo G:

→ Planaran je → postoji $v \in V(G)$: $\deg(v) \leq 5$

1°) $\deg(v) < 5$ → analogno prošlom dokazu ✓

2°) $\deg(v) = 5$

$v_1, \dots, v_5$ → susjedi od v

↳ sigurno nisu svi međusobno susjedi → činili bi K_5 → u kontradikciji s time da je G planaran

BSMOP → v_1 i v_3 nisu susjedi

Kontrahiramo vv_1 i vv_3

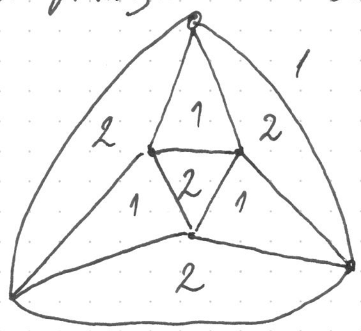
↳ dobijemo graf s $n-2$ vrha → po pretp. 5-obojiv

→ obojamo graf, vratimo u originalno stanje (rastegnemo) i obrišemo boju od v

→ v_1 i v_3 isto obojeni → skup susjeda od v obojen s 4 boje → v obojimo onom petom

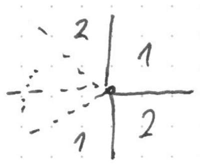
Teorem
Karta je 2-strano obojiva akko je Eulerovski graf

Na primjer oktaedar:



Dokaz
(⇒) Karta je 2-strano obojiva

Pogledamo vrh:



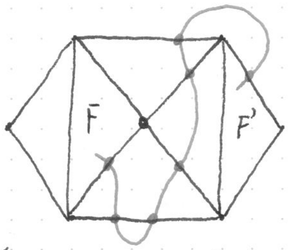
→ boje oko vrha alterniraju

→ broj država koje se „vide" iz vrha je paran

⇒ broj bridova koji čine granice oko država je paran

⇒ vrh ima paran stupanj ⇒ graf je eulerovski

(⇐) Graf je eulerovski



→ Pogledamo stranu F i F'

→ Bojamo li isto ili različito?

→ BSOP → F bojamo s C

→ radimo krivulju iz F u F' prelazeći bridove

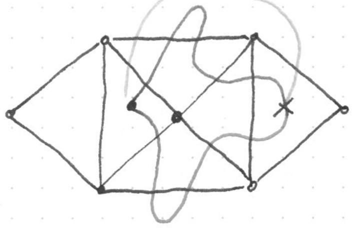
→ Prebrojimo presjecišta krivulje s bridovima → ako je broj neparan, F' moramo obojati različitom bojom, ako je broj paran, istom

Je li parnost očuvana između različitih krivulja?

→ Ako spojimo 2 krivulje, dobijemo zatvorenu krivulju → postoji dio unutar i izvan krivulje

↳ Ciklus koji je nužno parne duljine"

↳ zbog toga što je svaki vrh parne duljine →



ako je obiđen samo 1 vrh, tvrdnja je očevidna

Broj presjecišta = $\deg(v) + 2\cdot\beta$ → broj bridova kroz koje smo 2x prošli

Ako su okružena 2 vrha → ili su susjedni, ili nisu → u oba slučaja broj presjecišta s njihovim vrhovima iste parnosti

Teorem

Neka je G ravninski prikaz jednostavnog planarnog grafa G, te neka je G^* geometrijski dual od G. G je k-vršno obojiv ⇔ G^* je k-strano obojiv

Dokaz

↳ vidi skriptu (tm. 8.7)

Teorem

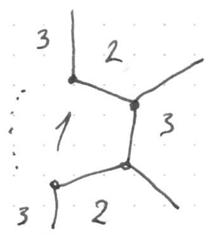
Neka je G kubična (3-regularna) karta.

G je 3-strano obojiva ⇔ svaka strana od G omeđena parnim brojem bridova

Dokaz

(⇒) G je 3-strano obojiva

Uočimo jednu stranu F. Strane susjedne njoj su obojane s 2 boje → moraju alternirati ⇒ svaka strana je omeđena parnim brojem bridova Q.E.D.



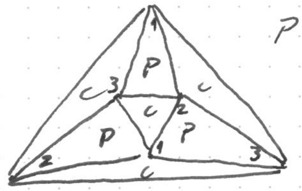
(⇐) T.D.:

Neka je G 3-regularan planaran graf. Ako je svaka strana od G parni ciklus, G je 3-strano obojiva

Dualna tvrdnja (nju ćemo dokazivati):

Neka je u G svaka strana trokut. Ako je svaki vrh parnog stupnja, G je 3-vršno obojiv

Kao primjer uzmimo oktaedar:



G je eulerovski → svi vrhovi parnog stupnja

⇒ G je 2-strano obojiv

→ konstruiramo 3-vršno bojanje tako da uzmemo trokut i ako je P obojan, njegove vrhove obojamo u neg. smjeru, ako je C, u pozitivnom. Takvo je bojanje uvijek moguće provesti

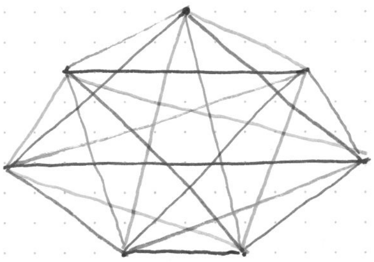
Teorem

$$\chi'(K_n) = \begin{cases} n-1, & n \text{ paran} \\ n, & n \text{ neparan} \end{cases}$$

↳ kromatski indeks

Dokaz

n neparan:



→ postavi vrhove kao vrhove pravilnog n-terokuta

→ uzmi prvu stranu i pobojaj nekom bojom, zatim sve dijagonale paralelne s njom pobojaj istom

→ postupak ponovi za svaku stranu vanjskog hamilton. ciklusa

→ Konstrukcijom smo pokazali da $\chi'(G) \leq n$

→ $\Delta = n-1$, po Vizingu $n-1 \leq \chi'(G) \leq n$

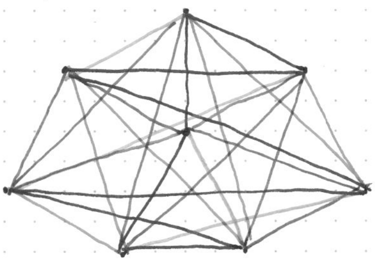
→ trebamo još dokazati da nije $(n-1)$-bridno obojiv

→ u K_n jednom bojom možemo pobojati najviše $\frac{n-1}{2}$ bridova (kad pobojamo jedan brid, okupirali 2 vrha istom bojom → u njima se više ne smije pojaviti brid te boje)

⇒ $n-1$ bojom možemo obojati $\frac{(n-1)^2}{2}$ bridova, ali bridova ima $\frac{n(n-1)}{2}$

⇒ ne može se pobojati $n-1$ bojom Q.E.D.

n paran



→ postavi vrhove u vrhove pravilnog $n-1$-terokuta i zadnji vrh u težište

→ oboji spojnicu vrha i težišta i istom bojom oboji sve okomito na spojnicu

→ napravi postupak za svaki od $n-1$ vanjskih vrhova

→ konstrukcijom pokazali $\chi'(G) \leq n-1$

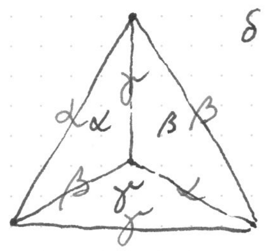
→ $\Delta = n-1$, Vizing: $\chi'(G) \geq n-1 \Rightarrow \chi'(G) = n-1$ Q.E.D.

Teorem — Svaki jednostavni planarni graf je 4-obojiv

Teorem o 4 boje ekvivalentan je tvrdnji $\chi'(G)=3$ za $\forall$ kubičnu (3-reg.) kartu G

Dokaz

($\Rightarrow$)



- Neka $\alpha=(1,0)$, $\beta=(0,1)$, $\gamma=(1,1)$, $\delta=(0,0)$ uz pretpostavljeno dano 4-bojanje strana od G
- Konstruiramo 3-bojanje bridova tako što brid pobojamo bojom čiji kod nastaje binarnim zbrajanjem kodova strana s kojima graniči (binarni XOR po bitovima)

→ Binarnim zbrajanjem kodirane su 4 boje (više sigurno nismo mogli dobiti)

→ Boju kodiranu s $(0,0)$ nismo mogli dobiti jer $(0,0)$ nastaje kao binarni zbroj 2 ista broja, što se neće dogoditi jer su susjedne strane različito obojene

→ Dva susjedna brida su sigurno različito obojana → u suprotnom dolazimo do primjerice situacije $\alpha+\beta=\gamma+\beta$ (vrijek granice s jednom istom stranom - kubična karta) što je kontradikcija

Q.E.D.

($\Leftarrow$) Dano je 3-bojanje bridova u G

→ Pogledaj podgraf obojan s α i β
- eulerovski je i planaran $\Rightarrow$ 2-strano obojiv

→ Pogledaj podgraf obojan s α i γ
- opet 2-strano obojiv

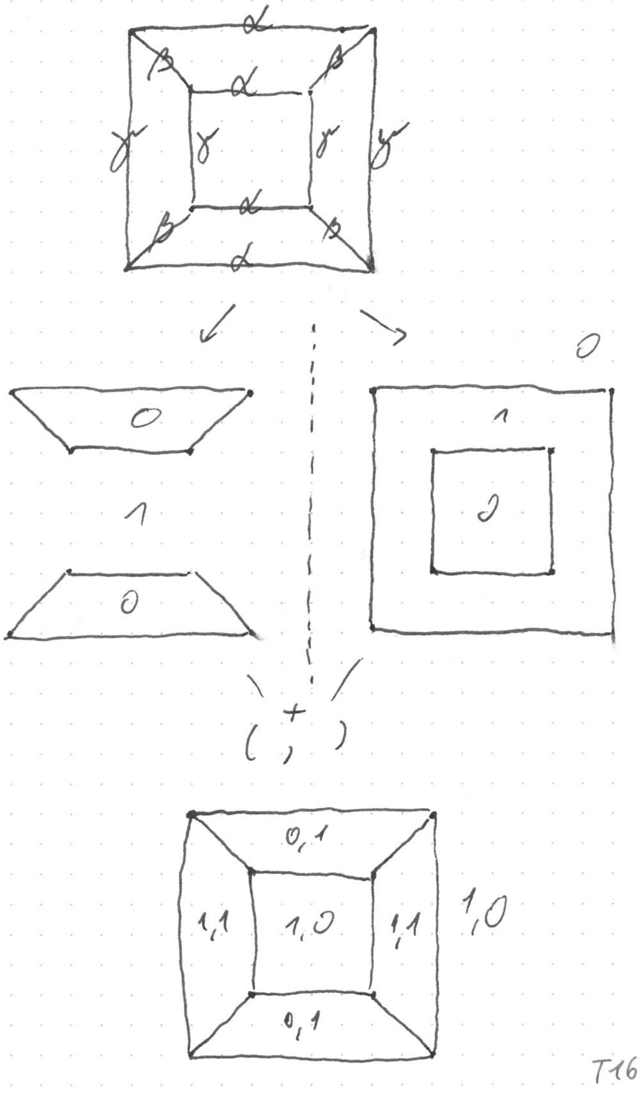
→ Obojimo oba takva podgrafa bojama 0 i 1 i preklopimo natrag → dobivamo nekontradiktorno 4 bojanje

→ 2 su binarne znamenke → može biti samo 4 boje

→ Svaki brid oba podgrafa predstavlja granicu između boja strana → dvije susjedne strane će se sigurno razlikovati bar u jednoj komponenti

→ Takvo bojanje nije kontradiktorno

Q.E.D.

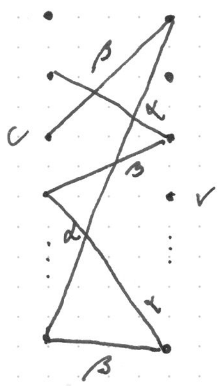


Teorem (König)

Ako je G bipartitan, $\chi'(G) = \Delta$

Dokaz

Matematička indukcija po broju bridova:



- G je bipartitan
- Promotri $G-e$ → i dalje bip., stupnja $\leq \Delta$
- Bridove od $G-e$ bojamo s Δ boja
- Brid e čine vrhovi u i v
- Stupnjevi od u i v najviše $\Delta - 1$ → neka boja nije iskorištena

1°) Ta boja ista → s tom bojom pobojamo e ✓

2°) Ta boja različita

→ Recimo slobodna$(u) = \alpha$, slobodna$(v) = \beta$

→ U u sigurno postoji brid obojen s β → spojimo u preko β s nekim w, ako u w postoji brid s α, idemo dalje → tako se izmjenjujemo dokle god ide

→ Promotrimo tako dobiven podgraf od β i α

→ Zamijenimo α i β u dobivenom podgrafu

→ Sad slobodan$(u) = \beta$ → s β pobojamo uv → možemo jer podgraf nije prošao kroz v Q.E.D.

Teorem

Graf G je usmjeriv ⟺ svaki njegov brid se nalazi u nekom ciklusu

Dokaz

(⇒) G je usmjeriv

→ Pogledajmo brid $\{u, v\}$ → BSO neka je kod dobivanja orijentacije postao (u, v). Zbog usmjerivosti postoji usmjerena šetnja $v \to u$

→ brid $\{u, v\}$ → sigurno je unutar ciklusa Q.E.D.

(⇐) Svaki brid od G nalazi se u nekom ciklusu

→ Algoritam

→ uoči ciklus → orijentiraj bridove ciklički

→ ako nisi gotov, postoji brid susjedan ovom ciklusu → sigurno leži u nekom ciklusu. Bridove orijentiraj ciklički (one koje još nisi) u bilo kojem smjeru

→

→ Postupak uvijek provediv i rezultira dobrom usmjerenošću Q.E.D.

Teorem

1) Svaki nehamiltonovski turnir je skoro hamiltonovski
2) Svaki jako povezani turnir je hamiltonovski

Dokaz

1) Tvrdnja očevidno istinita za manje od 4 vrha

Dokaz za više ili jednako 4 vrha provodimo indukcijom po n

(P) Svaki nehamiltonovski turnir s $n-1$ vrhova je skoro hamiltonovski

(K) $T \to$ nehamiltonovski turnir s n vrhova

$T' = T - v_n \to$ ima $n-1$ vrhova $\to$ po pretpostavci postoji staza:

$v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_{n-1}$

Ako je $v_n \to v_1$: postoji staza $v_n \to v_1 \to \ldots \to v_{n-1} \Rightarrow$ skoro hamilt. ✓

Ako ne, onda je $v_1 \to v_n$:

Ako $\exists i$ t.d. $v_n \to v_i$, $i > 1$, uoči najmanji takav:

postoji staza:

$v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_{i-1} \to v_n \to v_i \to \ldots \to v_{n-1} \Rightarrow$ skoro hamilt. ✓

↳ sigurno postoji luk $v_{i-1}v_n$ jer je v_i najmanji za koji vrijedi $v_n \to v_i$

Ako ne, postoji $v_{n-1} \to v_n$:

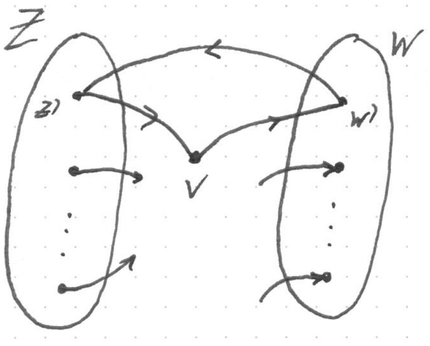
postoji staza:

$v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_{n-1} \to v_n \Rightarrow$ skoro hamilt. ✓

2) Dokazujemo i jaču tvrdnju: jako povezani T s n vrhova ima cikluse svake pojedine duljine od 3 do n

a) Pokažimo da T sadrži ciklus duljine 3

$\to v$ vrh turnira T



→ Z skup svih vrhova t.d. zv luk, W skup svih vrhova t.d. vw luk u T

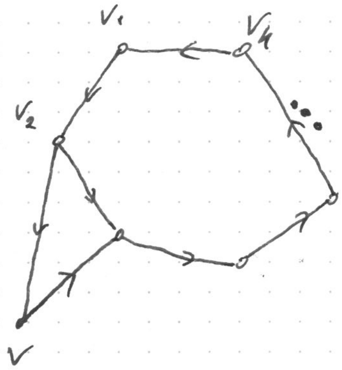
→ T je jako povezan $\Rightarrow Z$ i W sigurno neprazni, mora postojati luk $w'z'$, gdje $w' \in W$, $z' \in Z$

→ traženi ciklus sad je $v \to w' \to z' \to v$

b) Neka a) posluži kao baza indukcije. Tada treba dokazati da ako $\exists$ ciklus duljine k, $k<n$, onda postoji ciklus duljine $k+1$

(P) Postoji ciklus $v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_k \to v_1$ duljine k

(K) Neka postoji v koji nije u tom ciklusu t.d.:



$\to v \in T$ $\exists$ vv_i i v_jv $1 \le i,j \le k$

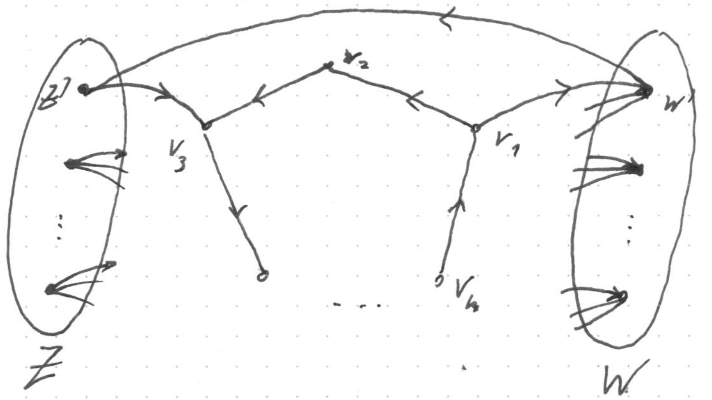
$\Rightarrow \exists\ v_r$ t.d. $v_{r-1}v$ i vv_r lukovi u T

$\to$ traženi ciklus je

$v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_{r-1} \to v \to v_r \to \ldots \to v_k \to v_1$ ✓

Ako nema vrha s prethodnim svojstvom:

$\to$ skup vrhova izvan uočenog ciklusa razdijelimo na disjunktne skupove W i Z, gdje je W skup vrhova w t.d. v_iw luk za $\forall i \in \{1,\ldots,k\}$ i Z skup vrhova z t.d. zv_i luk za svaki i, T jako povezan $\Rightarrow W$ i Z neprazni



$\to$ mora postojati luk $w'z'$ gdje $w' \in W$, $z' \in Z$

$\to$ Traženi ciklus je sada

$v_1 \to w' \to z' \to v_3 \to \ldots \to v_k \to v_1$ ✓

Q.E.D.

Teorem (Hall)

Nužan i dovoljan uvjet za rješenje ženidbenog problema je da bilo koji skup od k djevojaka zajedno poznaje najmanje k momaka, za svaki $1 \le k \le m$.

Dokaz

Nužnost:

Jasno je.

Dovoljnost:

Matematička indukcija po broju djevojaka m

(B) $m=1$ $\to$ jasno da vrijedi

(P) Teorem vrijedi uvijek kad je broj djevojaka manji od m

(K) Pogledajmo situaciju za m djevojaka:

Dva slučaja:

1°) $\forall$ k djevojaka zajedno (k+1) zajedno poznaje k+1 momaka.

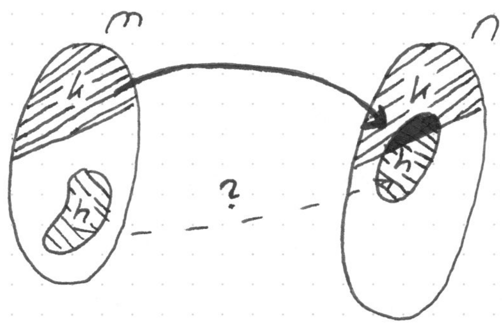
→ Uzmemo jednu (bilo koju) djevojku i udamo je za bilo kojeg momka kojeg poznaje

→ Ostaje m-1 djevojaka i uvjet da svakih k djevojaka poznaje k momaka je i dalje ispunjen. → sparimo po pretpostavci ↯

2°) $\exists$ skup od k djevojaka koje poznaju točno k mladića

→ Po pretpostavci indukcije, za tih k djevojaka je ženidbeni problem rješiv → udamo za dotičnih k momaka

→ Preostalo još m-k djevojaka



• Postoji li skup od h preostalih djevojaka koje skupa poznaju točno h momaka, od kojih su neki već oženjeni za djevojke iz prošlog koraka? (ženidbeni uvjet neispunjen)

→ Nemoguće → tih h, zajedno s k djevojaka iz prošlog koraka, poznavale bi skupa manje od h+k momaka, suprotno uvjetu kojeg ispitujemo

⇒ Ženidbeni uvjet ispunjen za m-k djevojaka → mogu se udati po pretpostavci indukcije. Q.E.D.

Korolar

Neka je G bipartitan graf, $V(G) = V_1 \cup V_2$ te neka je za svaki podskup A skupa vrhova V_1 s $\varphi(A)$ označen skup vrhova od V_2 susjednih s barem jednim vrhom u A.

$$\left(A \subseteq V_1 \quad \varphi(A) = \{ v \in V_2,\ \exists u \in A,\ \{u,v\} \in E(G) \} \right)$$

Potpuno sparivanje iz V_1 u V_2 postoji $\Leftrightarrow |A| \leq |\varphi(A)|, \forall A \in V_1$

Dokaz

Dokaz prošlog teorema

Teorem

Neka je E neprazan konačan skup i $\mathcal{F} = (S_1, \ldots, S_m)$ familija nepraznih podskupova od E. $\mathcal{F}$ ima transverzalu $\Leftrightarrow$ unija bilo kojih k podskupova S_i ima najmanje k elemenata, $1 \leq k \leq m$

(Transverzala familije $\mathcal{F}$ je SKUP (nije poredana) od m različitih elemenata od E, t.d. $\forall$ element izabran iz nekog drugog podskupa S_i)

Dokaz

Nužnost:

Jasno je

Dovoljnost:

Zapravo dokazujemo: ako neki $S_i \in F$ ima više od jednog el., u S_i $\exists$ element kojeg možemo izbaciti iz njega bez da se promijeni početni uvjet. NSO $S_1 \ni x, y$

Pretpostavimo suprotno: ne smijemo izbaciti ni x ni y, tj. i u $S_1 \setminus x, S_2, \dots$ i u $S_1 \setminus y, S_2, \dots$ narušen Hallov uvjet

$\Rightarrow$ Postoje podskupovi A i B te skupovi P i Q definirani s:

$$P = \Big(\bigcup_{i \in A} S_i\Big) \cup (S_1 \setminus \{x\}) \quad ; \quad Q = \Big(\bigcup_{j \in B} S_j\Big) \cup (S_1 \setminus \{y\})$$

↳ Sastavljen od $|A|+1$ el. familije F, uvjet bi trebao glasiti $|P| \geq A+1$ → suprotno $\underline{|P| \leq A}$

↳ analogno: $|Q| \leq B$

Vrijedi:

$$P \cup Q = \Big(\bigcup_{j \in A \cup B} S_j\Big) \cup S_1 \quad , \quad P \cap Q \supseteq \bigcup_{j \in A \cap B} S_j$$

$$\Rightarrow |P \cup Q| = \Big|\Big(\bigcup_{j \in A \cup B} S_j\Big) \cup S_1\Big| \quad i \quad |P \cap Q| \geq \Big|\bigcup_{j \in A \cap B} S_j\Big|$$

$$|A| + |B| \geq |P| + |Q| \overset{FUI}{=} |P \cup Q| + |P \cap Q| \geq$$

$$\Big|\Big(\bigcup_{j \in A \cup B} S_j\Big) \cup S_1\Big| + \Big|\bigcup_{j \in A \cap B} S_j\Big| \overset{\text{uvjet teorema}}{\geq} |A \cup B| + 1 + |A \cap B| \overset{FUI}{=} |A| + |B| + 1 \rightarrow \lightning$$

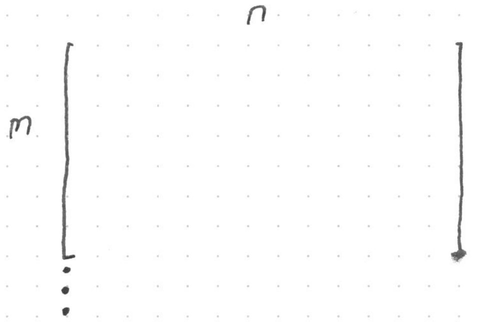
Q.E.D.

Teorem

Neka je M latinski pravokutnik dimenzije $m \times n$, $m < n$. M se može proširiti do latinskog kvadrata dodavanjem $n-m$ redaka.

Dokaz

Dovoljno dokazati $m \times n \rightarrow (m+1) \times n$ moguće → dalje nastavljamo iterativno



$F = (S_1, \dots, S_n)$ gdje S_i skup elemenata od 1 do n koji nedostaju u i-tom stupcu

→ Treba dokazati da F ima transverzalu.

→ Po Hallu, dovoljno dokazati da unija k S_i-ova sadrži minimalno k elemenata

→ Svaka takva unija sadrži ukupno $(n-m) \cdot k$ elemenata, uključujući kratnosti.

PS: ima manje od k različitih ⇒ neki el. se pojavljuje više od $n-m$ puta ⇒ pojavljuje se u manje od m stupaca ⇒ $\lightning$ → Već imamo m redaka → svaki el. je u m stupaca