Skip liste

Očekivanje: $\boxed{E(n_k) = n \cdot p^{k-1} \cdot (1-p)}$

Potreban stepen: (stepen najvišeg čvora): $\boxed{h \leq 1 + \log_{1/p} n}$ floor(h)

stepeni se broje od nule: $\boxed{h \leq \log_{1/p} n}$

Pretraživanje od $O(\log_2 n)$ ... $O(n)$ najbolje: $O(1)$
najgore: $O(n)$

Primeri: $n=8$ $p=0.5$

$$h \leq 1 + \log_{1/p} n = 1 + \log_2 8 = 1 + 3 = 4$$

$$E(n_k) = n \cdot p^{k-1}(1-p)$$

$\overset{1}{[0, 0.5\rangle}$, $\overset{2}{[0.5, 0.75\rangle}$, $\overset{3}{[0.75, 0.875\rangle}$
$\overset{4}{[0.875, 1]}$

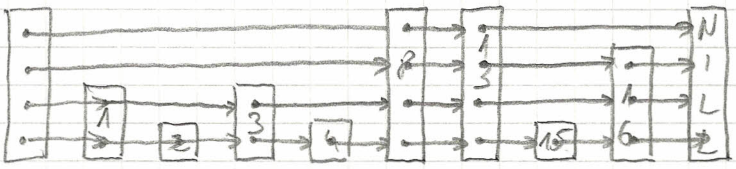
$$E(n_1) = 8 \cdot (0.5)^0 \cdot 0.5 = 4$$

$$E(n_2) = 8 \cdot (0.5)^1 \cdot 0.5 = 2$$

$$E(n_3) = 8 \cdot (0.5)^2 \cdot 0.5 = 1$$

$$E(n_4) = 8 \cdot (0.5)^3 \cdot 0.5 = 0.5 \Rightarrow 1$$

0.81	0.99	0.69	0.91	0.68	0.42	0.09	0.18
16	8	3	13	1	15	2	4
3	4	2	4	2	1	1	1
✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓



Primjer 2: $n=8$ $p=0.5$

$h \leq 1 + \log_{1/p} n = 1 + \log_2 8 = 1+3 = 4$

$E(n_i) = n \cdot p^{i-1}(1-p)$

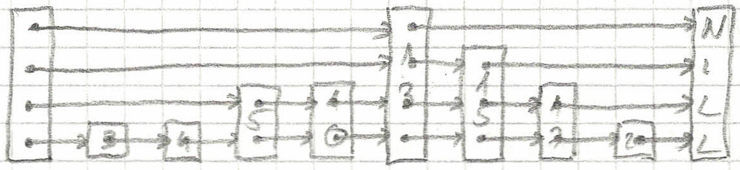
$E(n_1) = 8 \cdot (0.5)^0 \cdot (0.5) = 4$ $\overset{1}{[0, 0.5\rangle}, \overset{2}{[0.5, 0.75\rangle}, \overset{3}{[0.75, 0.875\rangle}$

$E(n_2) = 8 \cdot (0.5)^1 \cdot (0.5) = 2$ $\overset{4}{[0.875, 1]}$

$E(n_3) = 8 \cdot (0.5)^2 \cdot 0.5 = 1$

$E(n_4) = 8 \cdot (0.5)^3 \cdot 0.5 = 1/2 \Rightarrow 1$

0.73	0.33	0.24	0.97	0.58	0.32	0.8	0.67
17	20	4	13	5	3	15	10
2 ✓	1 ✓	1 ✓	4 ✓	2 ✓	1 ✓	3 ✓	2 ✓



5. (6) Računalni sustav neke porezne uprave predviđen je za 4 miliona poreznih obveznika i 30 različitih poreznih olakšica, a statistički podatci pokazuju da obveznici prosječno ostvaruju pravo na 8 olakšica. Ako sustav mora pohraniti podatke za razdoblje od 20 godina i

- podatak o korisniku zauzima 4 B memorije
- podatak o godini zauzima 2 B memorije
- podatak o vrsti olakšice zauzima 1 B memorije
- iznos jedne porezne olakšice zauzima 4 B memorije
- pokazivači zauzimanju po 8 B memorije

a) (3) biste li podatke pohranili u trodimenzionalnu „klasičnu" ili rijetko popunjenu tablicu? Obrazložite odgovor.
b) (3) bi li Vaša odluka bila ista kad bi podatke trebalo pohraniti i za neko duže vremensko razdoblje? Obrazložite odgovor.

Klasična tablica

Dimenzije tablice su 4000000 * 30 * 20.
Jer imaš 4000000 poreznih obveznika, 30 različitih olakšica i sve to bilježiš za 20 godina.

Memorija:

4000000 * 30 * 20 * 4B = 9600000000B = 9600 MB

Rijetko popunjena tablica

4000000 * **8** * 20 * (4 + 2 + 1 + 4 +3*8)B = 22400000000B = 22400 MB

Množiš s 8 umjesto s 30 jer, kao što smo rekli, ne rezerviraš memoriju za svaku ćeliju nego samo one koje ti trebaju, a svaki korisnik u prosjeku koristi 8 olakšica.

a) Vidimo da je sparse tablica veličinom veća pa ćemo koristiti klasičnu tablicu.
b) Za dulje vremensko razdoblje bi također koristili klasičnu tablicu, jer povećavanjem godina obje tablice se linearno povećavaju.

2. (3) Recimo da se ispituje pokretljivost (broj posjeta nekom gradu/općini u kojem ne boravi trajno) građana Sinja tijekom jedne godine unutar RH. Također, pretpostavimo sljedeće:

   I. broj građana neće se mijenjati tijekom pokusa

   II. neće posjetiti neko mjesto više od 255 puta

   III. svaki će u prosjeku posjetiti neki grad 7 puta*(napomena s ispita: 7 različitih gradova)*

   IV. grad Sinj ima 25000 stanovnika

   V. svaki čvor strukture Sparse Table treba 200 byte memorije.

   VI. RH ima 556 gradova*(napomena s ispita: 556 bez Sinja)*

   a. (1;-0,5) Ako je jedini kriterij vrednovanja te dvije mogućnosti potrebna memorija, je li pod navedenim pretpostavkama rezultate pokusa uputnije pohraniti u strukturu Sparse Table ili dvodimenzionalnu tablicu?

      S=25000
      PG=7
      G=556
      m_{ST}=200B

      Za polje u običnoj tablici potreban je 1byte.
      m_T=1B

      sparse
      S*PG* m_{ST}=25000*7*200= 35 000 000B

      obična tablica
      S*G* m_T=25000*556*1= 13 900 000B

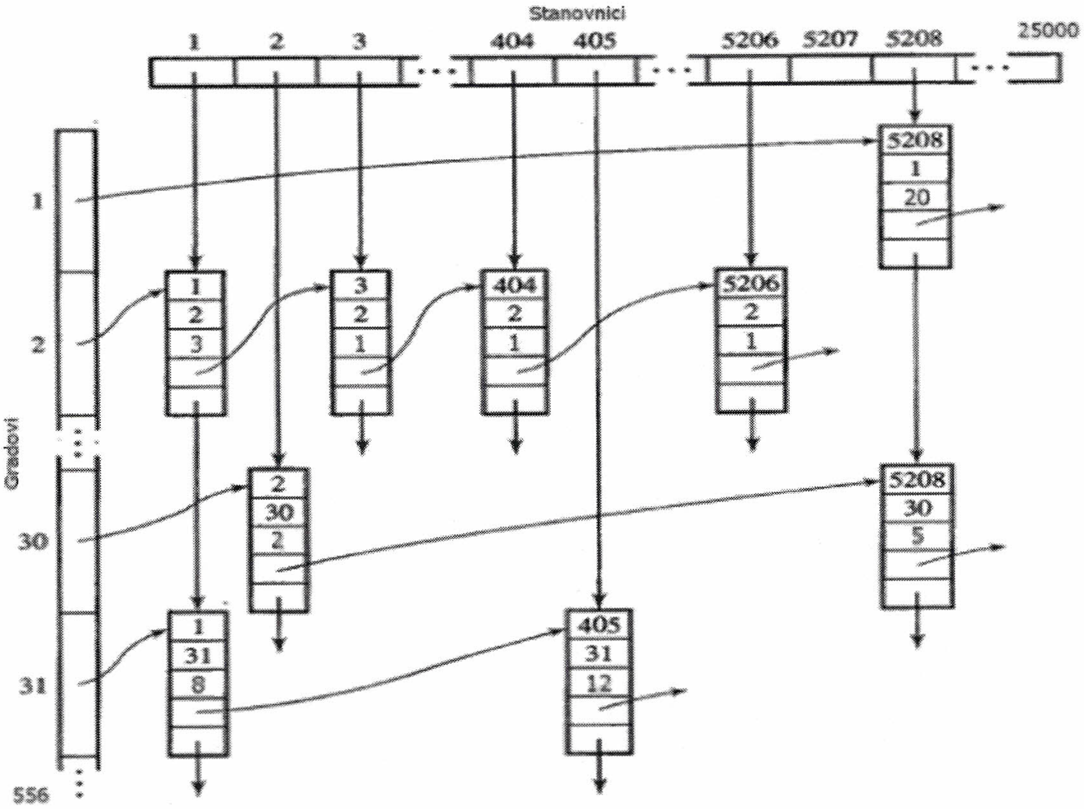
      Dakle, bolja je obična tablica...

   b. (0,5) Kolika bi bila popunjenost (postotna) memorije zauzete tablicom, a kolika one zauzete strukturom Sparse Table?

      μ_{ST}=100%

      $$\mu_T=\frac{S*PG}{S*G}=\frac{PG}{G}=7/556\approx 0.013=1.3\%$$

   c. (1,5) Skicirati strukturu Sparse Table koja bi odgovarala zadanom problemu.



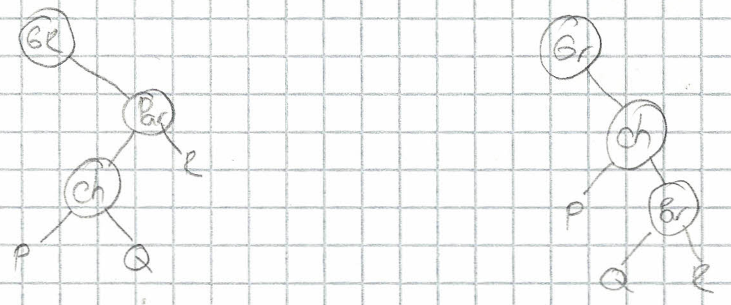
(čvor je u ovoj skici sljedeće strukture

stanovnik
grad
broj posjeta
pok.na sljed.grad
pok.na sljed. stanovnika

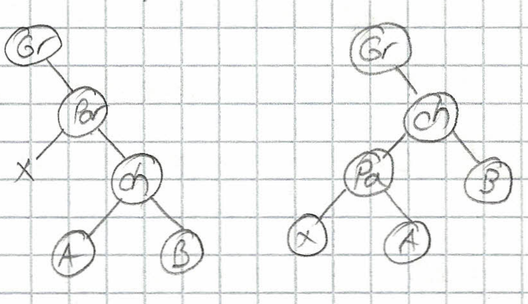
)

DSW algoritam

desna rotacija Ch oko Par



lijeva rotacija Ch oko Par




```
RightRotation (gr, par, ch)
if par is not the root
    redirect right pointer of gr to ch
redirect left pointer of par to right subtree of ch
redirect right pointer of ch to par
```

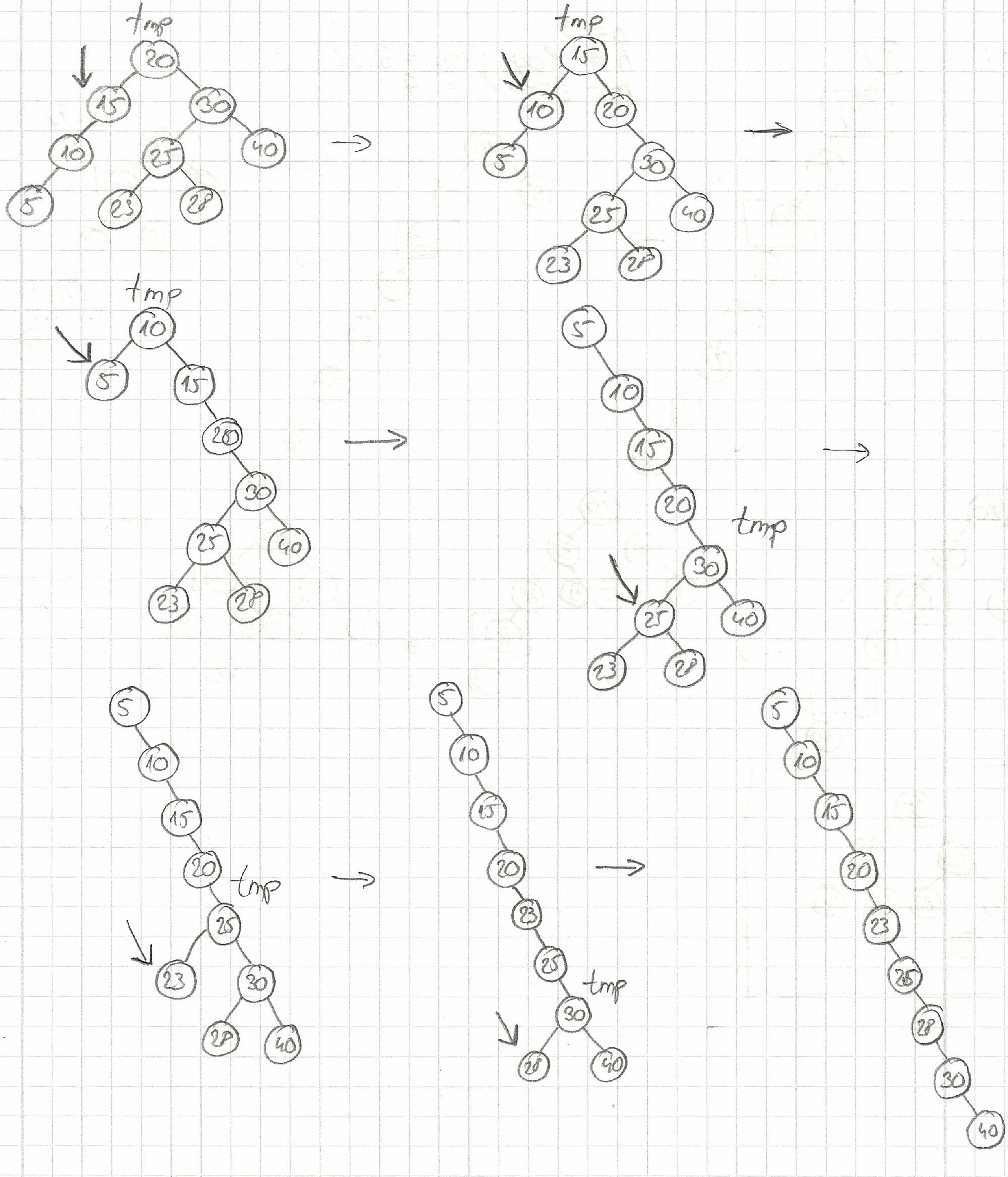
DSW

- pretvaranje binarnog stabla u kralježnicu
- pretvaranje kralježnice u uravnoteženo stablo

```
CreateBackBone (root)
tmp=root;
while (tmp != NULL)            O(n)
    if tmp has left ch
        right rotate ch about tmp;
        redirect tmp to to ch;
    else
        redirect tmp to its right child
```

CreateBackBone (root)

```
tmp = root
while (tmp != null)
    if tmp has left child
        right rotate ch about tmp
        redirect tmp to ch
    else
        redirect tmp to right child
```



CreatePerfectTree (n)

$h = floor(\log_2(n+1))$

$m = 2^h - 1$

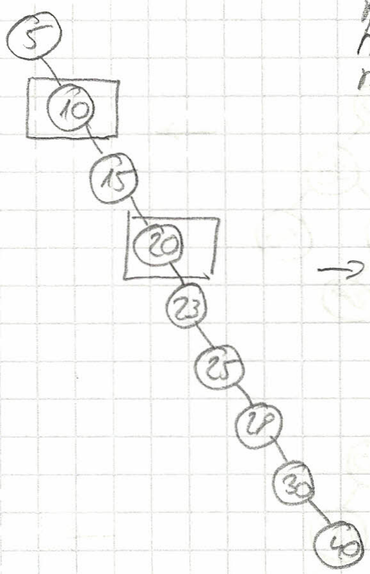
make n-m rotations starting from the top taking every second node

while(m > 1)

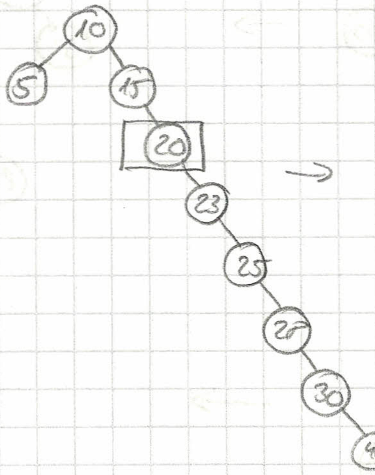
$m = m/2$

make m left rotations, taking every second node and rotating it about his parent

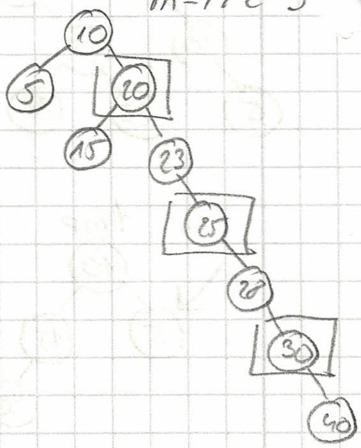
Primer!

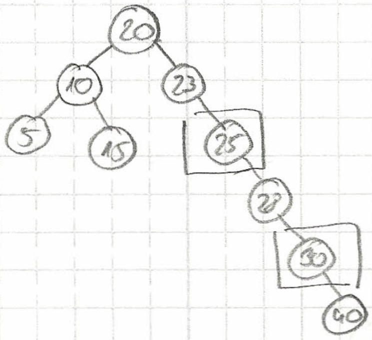


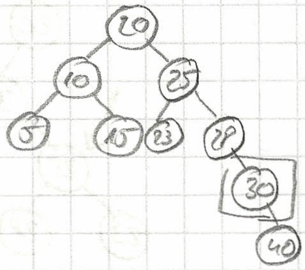
$n = 9$
$h = \log_2(10) = 3.32 = 3$
$m = 2^3 - 1 = 7$



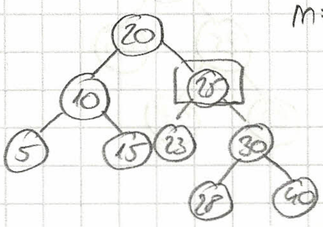
$m = 7/2 = 3$

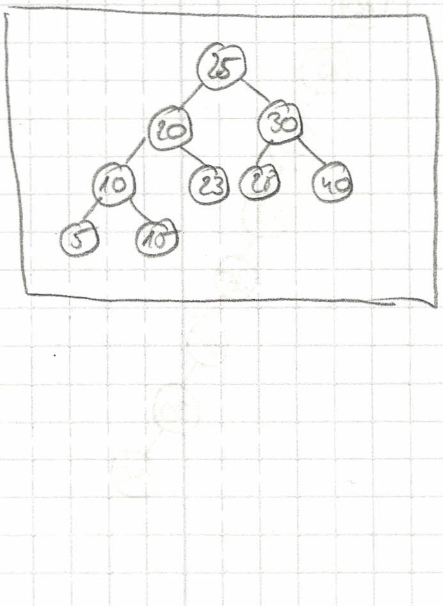






$m = 3/2 = 1$





STABLA

B-stablo

Popunjenost barem 50%

savršeno uravnotežena

AVL stabla

FR - razlika visina desnog i lijevog podstabla

FR mora bih -1, 0, 1

složenost pretraživanja $O(\log_2 n)$

Crveno-Crna stabla

- Proizlaze iz B-stabla 4. reda

Pravila:

1) Svaki čvor je crven ili crn
2) Korijen je crn
3) Svaki list koji ne sadrži informaciju je crn
4) Oba potomka crvenog čvora su crna
5) Svaka staza od nekog čvora do lista koji je njegov potomak prolazi istim brojem crnih čvorova

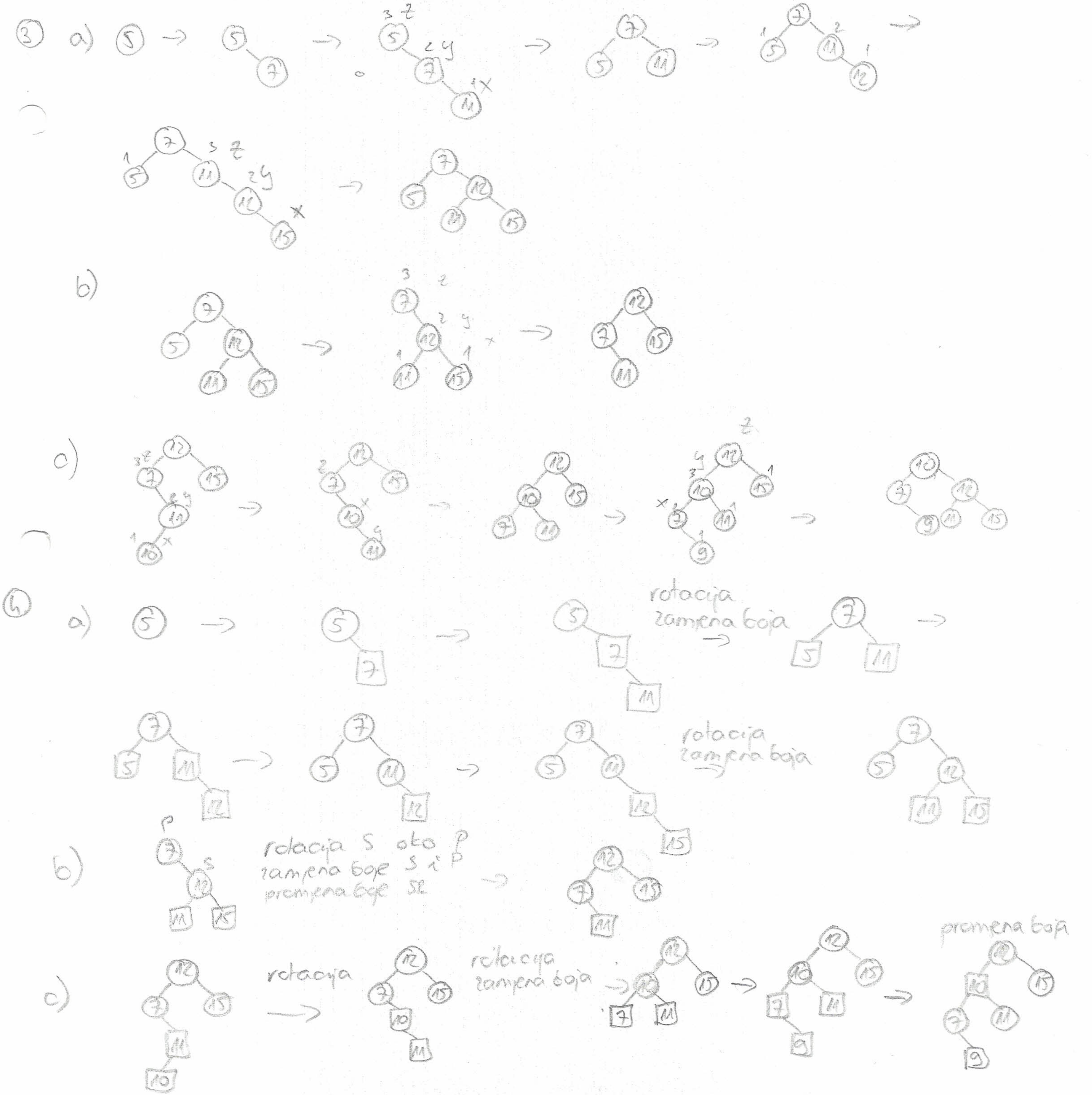
Visina stabla: $h \leq 2 \cdot \log_2 (n+1)$

Pretraživanje: $O(\log_2 n)$

STABLA

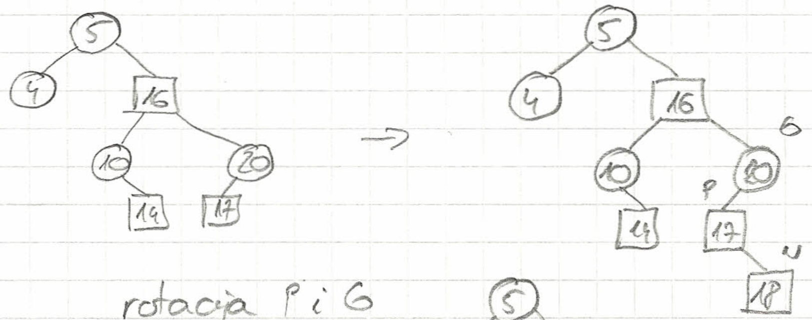
3. (6) Skicirajte izgradnju AVL stabla uslijed sljedećih promjena (redom kojim su navedene):
a) (3) upisivanja redom: 5,7,11,12 i 15
b) (2) uklanjanja 5
c) (1) upisivanja 10 i 9.

4. (7) Skicirajte izgradnju crveno-crnog (RB) stabla uslijed sljedećih promjena (redom kojim su navedene):
a) (3) upisivanja redom: 5,7,11,12 i 15
b) (2) uklanjanja 5
c) (2) upisivanja 10 i 9.
Napomena: crni čvorovi neka budu okrugli, a crveni kvadratični.

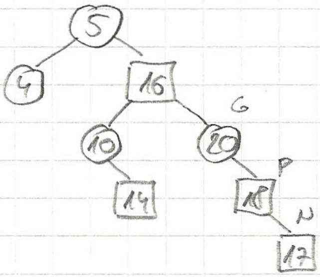


Dodajte 18 pa 21 u Crveno-crno stablo

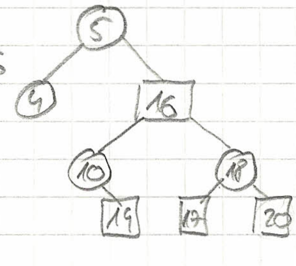
crno ⇔ ○
crveno ⇔ □

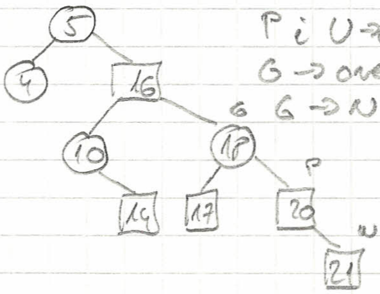


rotacija

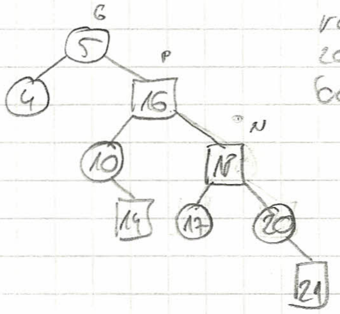


rotacija P i G
zamena boja P i G

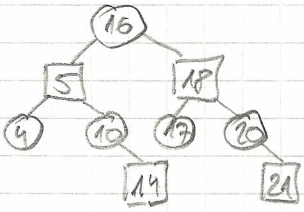




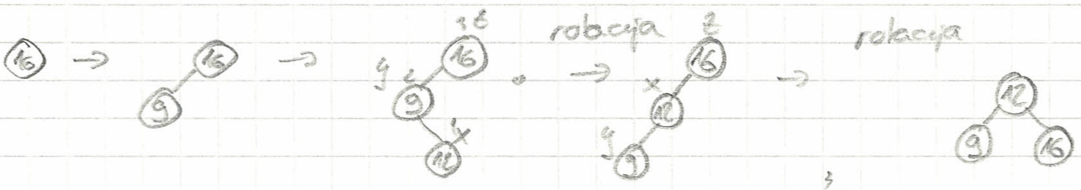
P i U → crno
G → crveno
G → N

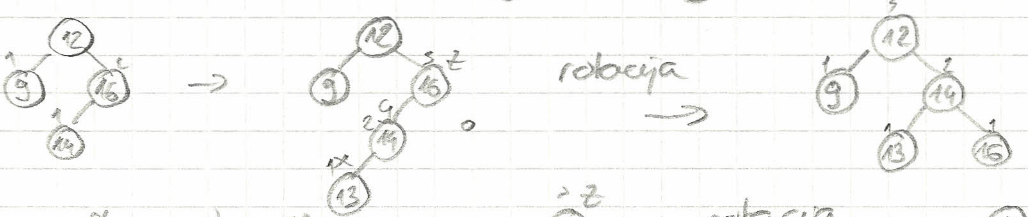


rotacija
zamena
boja

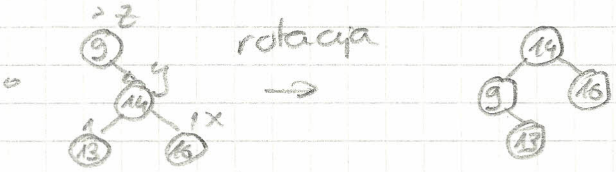


Upisati 16, 9, 12, 14, 13 u AVL stablo, potom obrisati 12

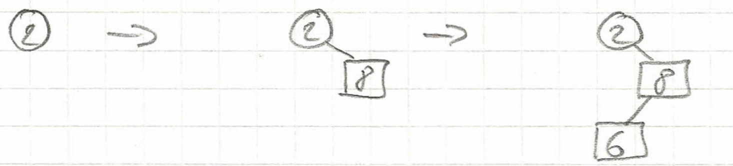




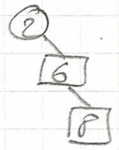
brišemo 9 umesto 12



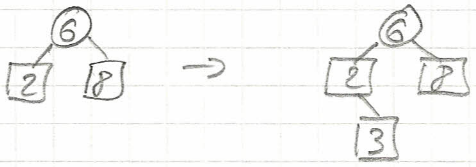
1. a)



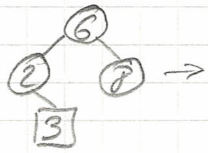
rotacija

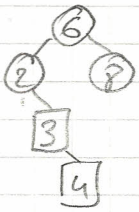


rotacija
zamjena boja

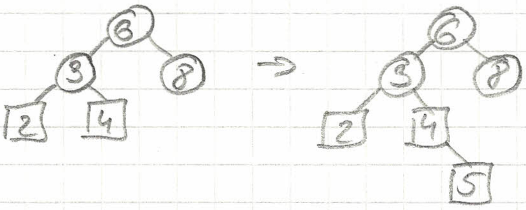


promjena
boja

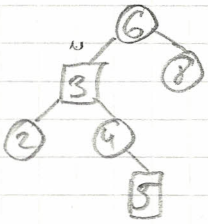




rotacija
zamjena
boja

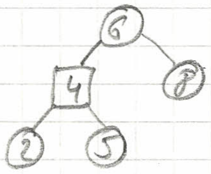


promjena
boja



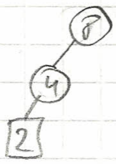
b) Brisanje 3

rotacija
zamjena boja
promjena boje

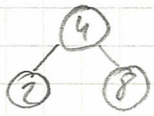


Brisanje 6

Brisanje 5

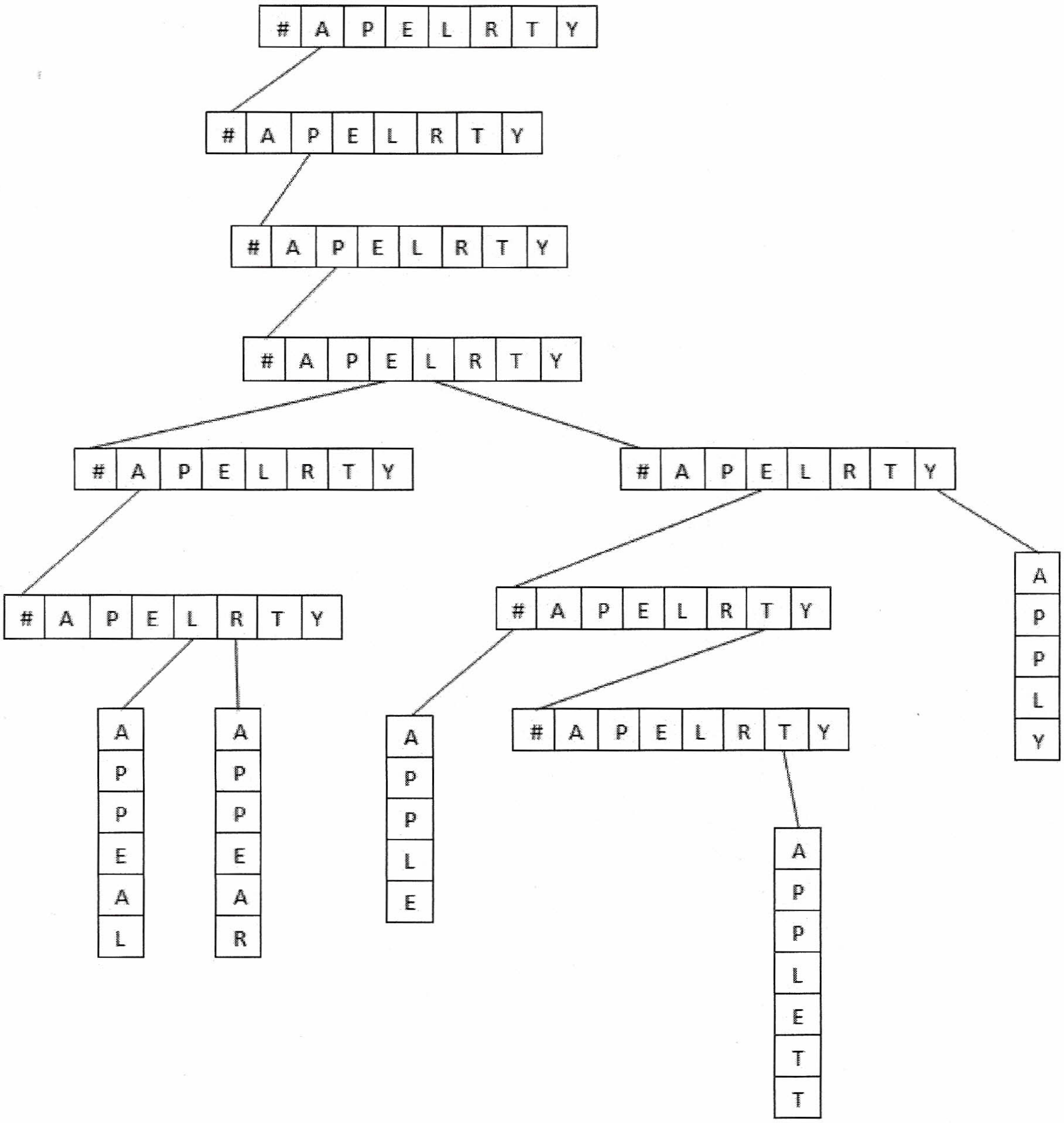


rotacija
zamjena boje
promjena boje SL



3. (2) Skicirajte strukturu Trie koja sadrži riječi: APPEAL, APPEAR, APPLE, APPLETT i APPLY.

Pojavljuju se slova A, P, E, L, R, T, Y



Neuronske mreže

p jednadžbi i n nepoznanica

$p=n$ rješenje je jedinstveno

$p<n$ rješenja ima beskonačno, odabiremo ona najmanje norme

$p>n$ točno rješenje može, ali ne mora postojati

za $p<n \Rightarrow$ Kaczmarzov algoritam

za $p>n \Rightarrow$ Gradijentna metoda

6. (8) Linearni neuron (Adaline) s četiri ulaza treba uvježbati sljedećim parovima podataka:

točka	ulaz 1	ulaz 2	ulaz 3	ulaz 4	izlaz
1	1	0	0	0	1
2	0	0	0	1	1
3	0	0	1	0	0
4	0	1	0	0	0

a) (1) Skicirajte taj neuron.

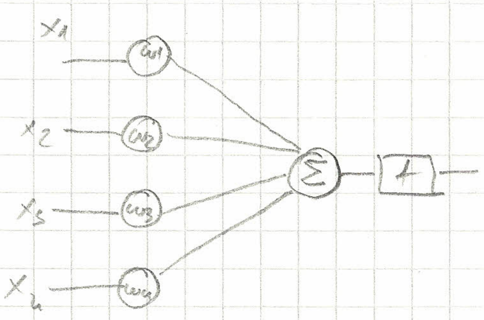
b) (2; −1) Uvježbavanje neurona je optimizacijski problem. Koliko rješenja ima ovaj postavljeni? Drugim riječima, postoji li više skupova različitih optimalnih parametara ili je optimalan (bolji od svih drugih) samo jedan? Ako ih ima više, procijenite koliko.

c) (2) Izračunajte optimalne parametre izravno, dakle ne primjenom nekog iterativnog postupka, nego u jednom koraku.

d) (3) Provedite prvu iteraciju (epohu) uvježbavanja tog neurona LMS algoritmom (koračno uvježbavanje; *on-line learning*). Polazni parametri neka budu $\mathbf{w}^T = [0\ 0\ 0\ 0]$, a točke za uvježbavanje uzimajte redom kojim su navedene u tablici. Ukaže li se potreba za još nekim parametrom, odaberite ga proizvoljno.
(*Savjet: odaberite vrijednost najjednostavniju za daljnje računanje.*)

6.

a)



$f(z) = z$

b) $p = n = 4$ rješenje je jedinstveno ako postoji

c)

$$X_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} \quad y_d = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$Aw = b \qquad A = X_d^T$

$X_d^T \cdot w = y_d$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad w = [1\ 0\ 0\ 1]^T$$

e) $k=0 \quad w^0 = [0\ 0\ 0\ 0]^T \qquad \alpha = 1$

$k=1 \qquad e_1^{(0)} = x_{d,1}^T \cdot w^{(0)} - y_{d,1} = [1\ 0\ 0\ 0] \cdot [0\ 0\ 0\ 0]^T - 1 = -1$

$w^{(1)} = w^{(0)} - 1 \cdot x_{d,1} \cdot e_1^{(0)} = [0\ 0\ 0\ 0] - 1 \cdot [1\ 0\ 0\ 0]^T \cdot (-1) =$

$= [1\ 0\ 0\ 0]^T$

$k=2 \qquad e_2^{(1)} = x_{d,2}^T \cdot w^{(1)} - y_{d,2} = [0\ 0\ 0\ 1] \cdot [1\ 0\ 0\ 0]^T - 1 = -1$

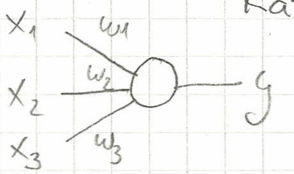
$w^{(2)} = w^{(1)} - 1 \cdot x_{d,2} \cdot e_2^{(1)} = [1\ 0\ 0\ 0]^T - 1 \cdot [0\ 0\ 0\ 1]^T \cdot (-1) =$

$= [1\ 0\ 0\ 1]^T$

$k=3 \qquad e_3^{(2)} = x_{d,3}^T \cdot w^{(2)} - y_{d,3} = [0\ 0\ 1\ 0] \cdot [1\ 0\ 0\ 1]^T - 0 =$

$= [0\ 0\ 0\ 0]$

$w^{(3)} = w^{(2)}$



Katzmanov algoritam

$$x_d = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad y_d = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$y = \sum x_i w_i$$

$$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

$$1 \cdot w_1 + 1 \cdot w_2 + 1 \cdot w_3 = 3$$

$$1 \cdot w_1 - 1 \cdot w_2 - 1 \cdot w_3 = -1$$

$$x_d^T \cdot w = y_d$$

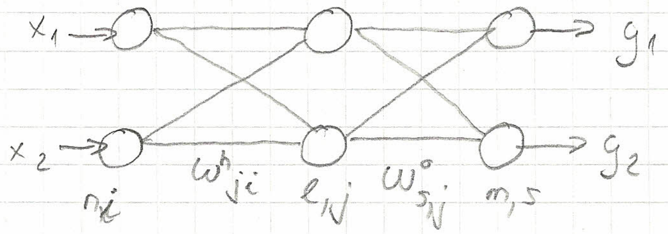
$$w^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad w^{(1)} = w^{(0)} - 1 \cdot \frac{\left\{ [1\,1\,1] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 3 \right\} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{\| [1 \; 1 \; 1]^T \|^2}$$

$$\mu = 1$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{\{0 - 3\} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - (-1) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

5.



$t = 0 \qquad x_{d,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad y_{d,1}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$w^{h(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad w^{o(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Theta_h^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \Theta^{o(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

forward pass
V

$v^{(0)} = w^{h(0)} \cdot x_{d,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$z^{(0)} = \frac{1}{1+e^{-v}} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

$u^{(0)} = W^{o(0)} \cdot z^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$y^{(0)} = \frac{1}{1+e^{-u}} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

$EA^o = y^{(0)} - y_{d,1}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

$EI^o = EA^o \cdot y^{(0)} \cdot (1-y^o) = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/8 \\ 1/8 \end{bmatrix}$

reverse pass

$d^o = \begin{bmatrix} -1/8 \\ 1/8 \end{bmatrix}$

$Ew^o = d^o \cdot z^T = \begin{bmatrix} -1/8 \\ 1/8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/16 & -1/16 \\ 1/16 & 1/16 \end{bmatrix}$

$EA^h = (w^o)^T \cdot EI^o = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1/8 \\ 1/8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$EI^h = EA^h \cdot z^{(0)} \cdot (1-z) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad d^h = EI^h$

$Ew^h = EI^h \cdot x_{d,1}^{(0)\,T} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$E\Theta^o = -EI^o = \begin{bmatrix} 1/8 \\ -1/8 \end{bmatrix} \qquad E\Theta^h = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

osvježavanje parametara

$$w^{h(1)} = w^{h(0)} - \alpha \cdot Ew^{h} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

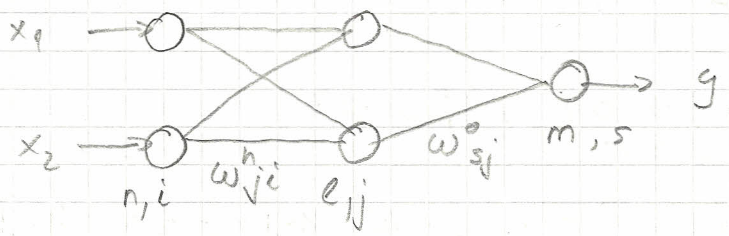
$$w^{o(1)} = w^{o(0)} - \alpha \cdot Ew^{o} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} -1/16 & -1/16 \\ 1/16 & 1/16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/16 & 1/16 \\ -1/16 & -1/16 \end{bmatrix}$$

$$\Theta^{h(1)} = \Theta^{h(0)} - \alpha E\Theta^{h} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Theta^{o(1)} = \Theta^{o(0)} - \alpha E\Theta^{o} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 1/8 \\ -1/8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/8 \\ +1/8 \end{bmatrix}$$

Sljedeći korak ($k=1$) se odvija na isti način, samo su početne vrijednosti parametara jednake $w^{o(1)}$, $w^{h(1)}$, $\Theta^{h(1)}$, $\Theta^{o(1)}$ a par za uvježbavanje je drugi redak u tablici

5. a)



$t = 0 \quad x_{d,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad y^{(0)}_{d,1} = 0$

$W^{h(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad W^{o(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Theta^{h(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Theta^{o(0)} = 0$

– forward pass

$v^{(0)} = W^{h(0)} \cdot x_{d,1} - \Theta^{h(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$z^{(0)} = \frac{1}{1+e^{-v}} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

$u^{(0)} = W^{o(0)} \cdot z^{(0)} - \Theta^{o(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} - 0 = 0$

$y^{(0)} = \frac{1}{1+e^{-u}} = 1/2$

$EA^o = y^{(0)} - y^{(0)}_{d,1} = 1/2 - 0 = 1/2$

$EI^o = EA^o \cdot y^{(0)} \cdot (1 - y^{(0)}) = 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/8 = \delta^o$

– reverse pass

$\rightarrow EW^o = EI^{(0)} \cdot z^{(0)T} = 1/8 \cdot \begin{bmatrix} 1/2 \cdot 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/16 & 1/16 \end{bmatrix}$

$EA^h = (W^{o(0)})^T \cdot EI^o = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 1/8 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$EI^h = EA^h \cdot z^{o(0)} \cdot (1 - z^{o(0)}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\rightarrow EW^h = EI^h \cdot (x^{(0)}_{d,1})^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\boxed{E\Theta^o = -EI^o = -1/8}$

$\boxed{E\Theta^h = -EI^h = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$

osyežavanje parametara:

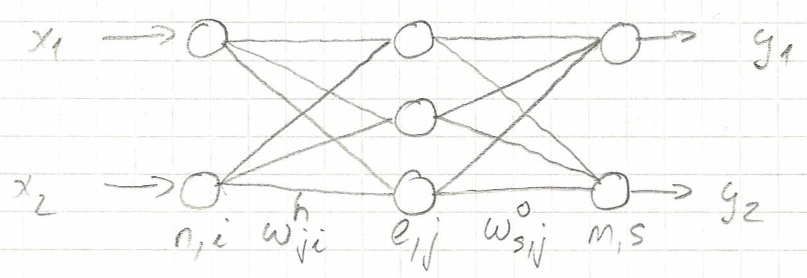
$$w^{h(1)} = w^{h(0)} - \alpha \cdot E w^{h} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$w^{o(1)} = w^{o(0)} - \alpha E w^{o} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 1/16 & 1/16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/16 & -1/16 \end{bmatrix}$$

$$\Theta^{h(1)} = \Theta^{h(0)} - \alpha E \Theta^{h} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Theta^{o(1)} = \Theta^{o(0)} - \alpha E \Theta^{o} = 0 - 1 \cdot (-1/8) = 1/8$$

6.



$k = 0 \qquad x_{d,1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad yd^{(0)}_{d,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$w^{h(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad w^{o(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Theta^{h(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \Theta^{o(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

forward pass

$v^{(0)} = w^{h(0)} \cdot x_{d,1} - \Theta^{h(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$z^{(0)} = \frac{1}{1+e^{-v}} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

$u^{(0)} = w^{o(0)} \cdot z^{(0)} - \Theta^{o(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$y^{(0)} = \frac{1}{1+e^{-u}} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

$EA^o = y^{(0)} - yd^{(0)}_{d,1} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$

$EI^o = EA^o \cdot y^{(0)} \cdot (1 - y^{(0)}) = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/8 \\ -1/8 \end{bmatrix}$

reverse pass

$$\rightarrow EW^o = EI^o \cdot (z^{(0)})^T = \begin{bmatrix} 1/8 \\ -1/8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/16 & 1/16 & 1/16 \\ -1/16 & -1/16 & -1/16 \end{bmatrix}$$

$$EA^h = (w^{o(0)})^T \cdot EI^o = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/8 \\ -1/8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$EI^h = EA^h \cdot z^{(0)} \cdot (1-z) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow EW^h = EI^h (x_{d,1}^{(0)})^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E\Theta^o = -EI^o = \begin{bmatrix} -1/8 \\ 1/8 \end{bmatrix} \qquad E\Theta^h = -EI^h = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

osvježavanje parametara:

$$w^{h(1)} = w^{h(0)} - \alpha EW^h = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$w^{o(1)} = w^{o(0)} - \alpha EW^o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 1/16 & 1/16 & 1/16 \\ -1/16 & -1/16 & -1/16 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1/16 & -1/16 & -1/16 \\ 1/16 & 1/16 & 1/16 \end{bmatrix}$$

$$\Theta^{h(1)} = \Theta^{h(0)} - \alpha E\Theta^h = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Theta^{o(1)} = \Theta^{o(1)} - \alpha E\Theta^o = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} -1/8 \\ 1/8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/8 \\ -1/8 \end{bmatrix}$$

Sljedeći korak ($t=1$) se odvija na isti način, samo su početne vrijednosti parametara $w^{h(1)}$, $w^{o(1)}$, $\Theta^{h(1)}$, $\Theta^{o(1)}$, a par za uvježbavanje je drugi redak u tablici

7. (9) Zadana je potpuno povezana, unaprijedna (*feedforward*) četveroslojna neuronska mreža strukture 1x2x2x1. Aktivacijska funkcija svih neurona u mreži je opći sigmoid.

a) (1) Skicirati tu mrežu.

b) (7) Provesti prvi korak uvježbavanja te mreže (provesti cijeli račun potreban za osvježavanje svih parametara) ako ju treba uvježbati za izvršavanje logičke negacije (funkcija NE), a podatci za uvježbavanje se uzimaju redom iz sljedeće tablice istine:

ulaz	izlaz
0	1
1	0

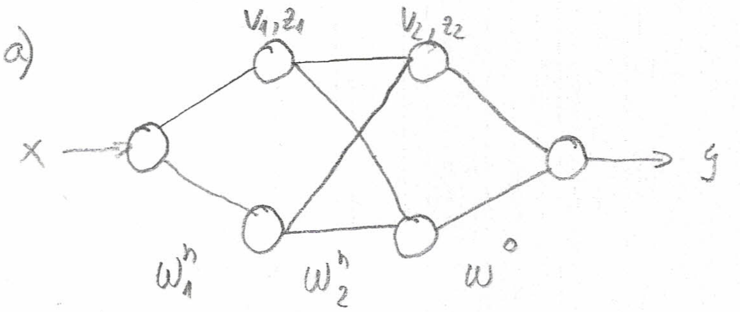
Početne vrijednosti svih parametara mreže postavite na nula, a zatrebaju li Vam još neke veličine, pridijelite im vrijednosti po vlastitom nahođenju, samo jasno navedite svoj izbor i kratko naznačite što ta veličina predstavlja.

Napomena: ne obazirite se na (be)smislenost pokušaja takvog uvježbavanja mreže.

c) (1) Objasniti nastavak postupka, tj. kako bi započeo sljedeći korak uvježbavanja mreže.

Uputa: dovoljna je i samo jedna dobro sročena rečenica. Naravno, svako podrobnije objašnjenje je dobrodošlo i smanjit će mogućnost zabune prilikom ocjenjivanja.

a)



b) $t=0 \quad x_{d,1}=0 \quad y_{d,1}=1$

$$w_1^{h(0)}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \quad w_2^{h(0)}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix} \quad w^{o(0)}=\begin{bmatrix}0&0\end{bmatrix}$$

$$\Theta_1^{h(0)}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \quad \Theta_2^{h(0)}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \quad \Theta^{o(0)}=0$$

forward pass

$$V_1^{(0)}=w_1^{h(0)}\cdot x_{d,1}-\Theta_1^{h(0)}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\cdot 0-\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$z_1^{(0)}=\frac{1}{1+e^{-V_1}}=\begin{bmatrix}1/2\\1/2\end{bmatrix}$$

$$V_2^{(0)}=w_2^{h(0)}\cdot z_1^{(0)}-\Theta_2^{h(0)}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1/2\\1/2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$z_2^{(0)}=\frac{1}{1+e^{-V_2}}=\begin{bmatrix}1/2\\1/2\end{bmatrix}$$

$$v^{(0)}=w^{o(0)}\cdot z_2^{(0)}-\Theta^{o(0)}=\begin{bmatrix}0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/2\\1/2\end{bmatrix}-0=0$$

$$y^{(0)}=\frac{1}{1+e^{-0}}=1/2$$

reverse pass

$EA^o = y^{(0)} - y_{d,1} = 1/2 - 1 = -1/2$

$EI^o = EA^o \cdot y^{(0)} \cdot (1-y^{(0)}) = -1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = -1/8$

$\underline{EW^o} = EI^o \cdot z_2^T = -1/8 \cdot \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/16 & -1/16 \end{bmatrix}$ $\boxed{E\Theta^o = EI^o = 1/8}$

$EA_1^h = (W^{o(0)})^T \cdot EI^o = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot (-1/8) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$EI_1^h = EA_1^h \cdot z_1^{(0)} \cdot (1 - z_1^{(0)}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\underline{EW_1^h} = EI_1^h \cdot x^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\boxed{E\Theta_1^h = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$

$EA_2^h = (W^{o(0)})^T \cdot EI^o = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot (-1/8) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$EI_2^h = EA_2^h \cdot z_2^{(0)} \cdot (1 - z_2^{(0)}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\underline{EW_2^h} = EI_2^h \cdot z_1^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\boxed{E\Theta_2^h = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$

osvježavanje parametara:

$W_1^{h(1)} = W_1^{h(0)} - \alpha EW_1^h = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Theta_1^{h(1)} = \Theta_1^{h(0)} - \alpha E\Theta_1^h = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$W_2^{h(1)} = W_2^{h(0)} - \alpha EW_2^h = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Theta_2^{h(1)} = \Theta_2^{h(0)} - \alpha E\Theta_2^h = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$W^{o(1)} = W^{o(0)} - \alpha EW^o = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} -1/16 & -1/16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/16 & 1/16 \end{bmatrix}$

$\Theta^{o(1)} = \Theta^{o(0)} - \alpha E\Theta^o = 0 - 1 \cdot 1/8 = -1/8$

6. (8) Za punjenje bazena na raspolaganju su dvije pumpe, pri čemu jedna (nazovimo ju „prva") pumpa postiže dvostruko veći protok vode od druge (nazovimo ju „druga"). Tehnički razlozi onemogućuju istodobni rad obje pumpe i, k tome, prva pumpa ne smije raditi ukupno više od 5 sati, a druga više od 7 sati. Nadalje, obje pumpe se pogonskom energijom napajaju iz istog izvora ograničenog kapaciteta koji ima energije za ukupno 9 sati rada tih pumpi (u bilo kojoj kombinaciji). Ako druga pumpa u jednoj jedinici vremena (recimo 1 min) isporuči jednu jedinicu vode (recimo 1 m³), koliko se najviše jedinica vode takvim sustavom može uliti u bazen i koliko dugo svaka pumpa pri tome treba raditi?

Napomena: Ovaj se problem može riješiti i napamet, ali takvo rješenje neće donositi bodove. Priznavat će se isključivo rješenje primjenom neke od formalnih metoda, pri čemu će se postavljanje problema i njegovo rješavanje bodovati odvojeno (4:4).

$$\max\ 2x_1 + x_2 \qquad\Rightarrow\qquad -2x_1 - x_2$$

$$x_1 \leq 5 \qquad\qquad x_1 + x_3 = 5$$

$$x_2 \leq 7 \qquad\qquad x_2 + x_4 = 7$$

$$x_1 + x_2 \leq 9 \qquad\qquad x_1 + x_2 + x_5 = 9$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \qquad\qquad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

	-2	-1	0	0	0	
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0 x_3	1	0	1	0	0	5
0 x_4	0	1	0	1	0	7
0 x_5	1	1	0	0	1	9
$c_j - z_j$	-2	-1	0	0	0	0
-2 x_1	1	0	1	0	0	5
0 x_4	0	1	0	1	0	7
0 x_5	0	1	-1	0	1	4
$c_j - z_j$	0	-1	2	0	0	10
-2 x_1	1	0	1	0	0	5
0 x_4	0	0	1	1	-1	3
-1 x_2	0	1	-1	0	1	4
$c_j - z_j$	0	0	1	0	1	14

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= 5 \\ x_2 &= 4 \\ z &= 14 \end{aligned}}$$

6. (8) Riješiti sljedeći problem:

$$\min \quad 2x_1 + 3x_2$$
$$4x_1 + 2x_2 \geq 12$$
$$x_1 + 4x_2 \geq 6$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Napomena: Grafičko rješenje se ne priznaje, kao ni bilo koja druga neformalna metoda ili rješavanje napamet.

$2x_1 + 3x_2$

$4x_1 + 2x_2 - x_3 = 12$

$x_1 + 4x_2 - x_4 = 6$

$x_1, x_2 \geq 0$

	0	0	0	0	1	1	
	x_1	x_2	x_3	x_4	a_1	a_2	
1 a_1	4	2	-1	0	1	0	12
1 a_2	1	4	0	-1	0	1	6
$c_j - z_j$	-5	-6	1	1	-1	-1	-18
1 a_1	7/2	0	-1	1/2	1	-1/2	9
0 x_2	1/4	1	0	-1/4	0	1/4	3/2
$c_j - z_j$	-7/2	0	1	-1/2	0	3/2	-9
0 x_1	1	0	-2/7	1/7	2/7	-1/7	18/7
0 x_2	0	1	1/14	-2/7	-1/14	2/7	6/7
$c_j - z_j$	0	0	0	0	1	1	0

2 faza

	2	3	0	0	
	x_1	x_2	x_3	x_4	
2 x_1	1	0	-2/7	1/7	18/7
3 x_2	0	1	1/14	-2/7	6/7
$c_j - z_j$	0	0	5/14	4/7	$-\frac{54}{7}$

$$\boxed{x_1 = \frac{18}{7} \quad x_2 = \frac{6}{7} \quad z = -\frac{54}{7}}$$

6. (10) Tvrtka ima dvije tvornice i obje proizvode dva proizvoda (A i B). Dnevna proizvodnja i dnevni trošak proizvodnje su u tablici.

	proizv. A	proizv. B	trošak
tvornica I	10	8	8
tvornica II	6	12	6

Stigla je narudžba za 20 proizvoda A i 16 proizvoda B. Koliko treba raditi pojedina tvornica da bi se proizvelo dovoljno oba proizvoda uz najmanje moguće troškove? Pritom je važno zadovoljiti narudžbu, makar i po cijenu stvaranja viška, tj. zaliha proizvoda.

Napomena: zadatak će se bodovati po dijelovima, stoga ne odustajte unaprijed ako ne znate baš sve i pišite pregledno. Postavljeni problem može se riješiti i napamet, ali očekuje se formalni postupak i jedino će se takvo rješenje priznavati.

Savjet: budite uporni, staloženi i brojeve zapisujte kao razlomke, dakle s kalkulatorom oprezno!

$8x_1 + 6x_2$

$10x_1 + 6x_2 \geq 20$

$8x_1 + 12x_2 \geq 16$

$x_1, x_2 \geq 0$

$8x_1 + 6x_2$

$10x_1 + 6x_2 - x_3 = 20$

$8x_1 + 12x_2 - x_4 = 16$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

	0	0	0	0	1	1	
	x_1	x_2	x_3	x_4	a_1	a_2	
1 a_1	10	6	−1	0	1	0	20
1 a_2	8	12	0	−1	0	1	16
$c_j - z_j$	−18	−18	1	1	0	0	−36
0 x_1	1	3/5	−1/10	0	1/10	0	2
1 a_2	0	36/5	−4/5	−1	−4/5	1	0
$c_j - z_j$	0	−36/5	−4/5	1	9/5	0	0
0 x_1	1	0	−1/6	1/12	1/6	−1/12	2
0 x_2	0	1	1/9	−5/36	−1/9	5/36	0
$c_j - z_j$	0	0	0	0	1	1	0

2 faza

	8	6	0	0	
	x_1	x_2	x_3	x_4	
0 x_1	1	0	−1/6	1/12	2
0 x_2	0	1	1/9	−5/36	0
$c_j - z_j$	8	6	0	0	0
0 x_1	1	0	−1/6	1/12	2
0 x_2	0	1	1/9	−5/36	0
$c_j - z_j$	0	6	4/3	−2/3	−16
0 x_1	1	0	−1/6	1/12	2
0 x_2	0	1	1/9	−5/36	0
$c_j - z_j$	0	0	2/3	[illegible]	−16

u baziČnim stupcima moraju bih nule

$x_1 = 2 \quad x_2 = 0$

$z = -16$

Prva tvornca treba radih 2 dana, dok druga ne treba uopće radih.
Ukupni trošak je 16

3. (10) Poljoprivrednik uzgaja pšenicu i soju na zemljištu površine 10 ha. Zbog uvjeta najma (koncesije) mora zasijati barem 7 ha, pri čemu mu pšenica donosi prihod 1800 kn/ha, a soja 2500 kn/ha. S druge strane, za sijanje pšenice mora uložiti 500 kn/ha i ono traje 1 h/ha, dok sijanje soje košta 1000 kn/ha i traje 2 h/ha. Poljoprivrednik raspolaže s ukupno 6000 kn i zbog vremenskih uvjeta sjetvu mora dovršiti u roku od 12 sati. Koliku površinu treba zasijati pšenicom, a koliku sojom da bi ostvario najveću moguću dobit (dobit je razlika prihoda i rashoda)?

Napomena: Ovaj se problem može riješiti i grafički ili napamet, ali takva rješenja neće donositi bodove. Priznavat će se isključivo rješenje primjenom neke formalne metode, pri čemu će se postavljanje problema i njegovo rješavanje vrednovati zasebno.

max $1300x_1 + 1500x_2$

$x_1 + x_2 \leq 10$

$x_1 + x_2 \geq 7$

$x_1 + 2x_2 \leq 12$

$500x_1 + 1000x_2 \leq 6000$

$x_1, x_2 \geq 0$

$\Rightarrow$

$-1300x_1 - 1500x_2$

$x_1 + x_2 + x_3 = 10$

$x_1 + x_2 - x_4 = 7$

$x_1 + \cancel{2}x_2 + x_5 = 12$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

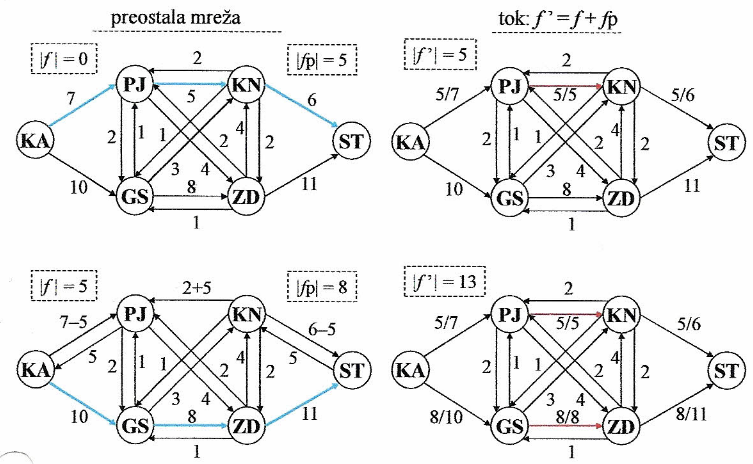
	0	0	0	0	0	1	
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_1	
0 x_3	1	1	1	0	0	0	10
1 a_1	1	1	0	−1	0	1	7
0 x_5	1	2	0	0	1	0	12
$c_j - z_j$	−1	−1	0	1	0	0	−7
0 x_3	0	0	1	1	0	−1	3
0 x_1	1	1	0	−1	0	1	7
0 x_5	0	1	0	1	1	−1	5
$c_j - z_j$	0	0	0	0	0	1	0

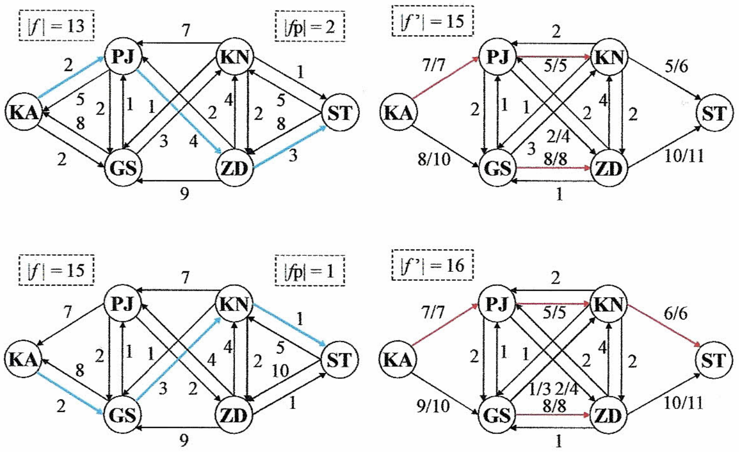
2 faza

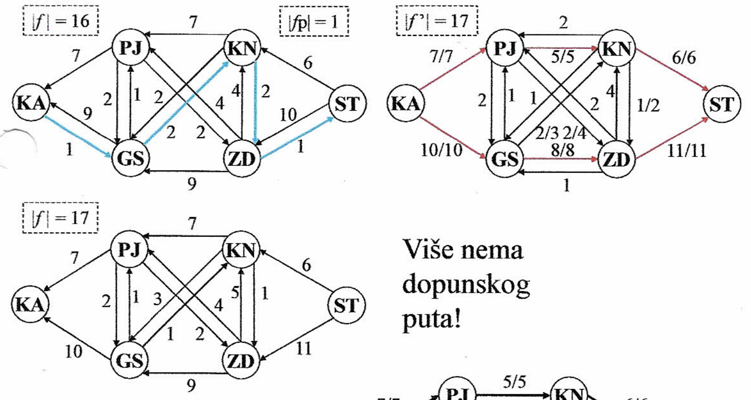
	−1300	−1500	0	0	0	
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0 x_3	0	0	1	1	0	3
−1300 x_1	1	1	0	−1	0	7
0 x_5	0	1	0	1	1	5
$c_j - z_j$	0	−200	0	−1300	0	9100
0 x_4	0	0	1	1	0	3
−1300 x_1	1	1	1	0	0	10
0 x_5	0	1	−1	0	1	2
$c_j - z_j$	0	−200	1300	0	0	13 000
0 x_4	0	0	1	1	0	3
−1300 x_1	1	0	2	0	−1	8
−1500 x_2	0	1	−1	0	1	2
$c_j - z_j$	0	0	1100	0	200	13 400

$\boxed{x_1 = 8 \quad x_2 = 2 \quad z = 13\,400}$

▼ Primjer: rješavanje polaznog problema

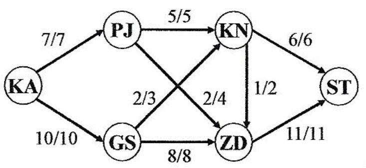






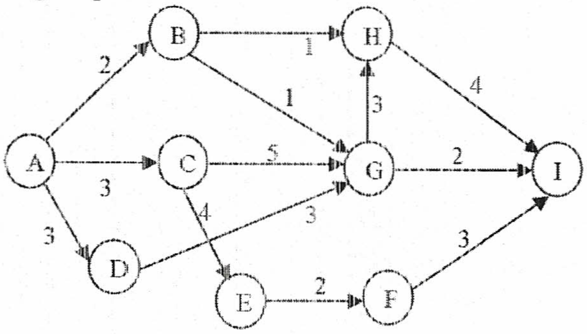
Više nema dopunskog puta!

Iskorištenje prometnica: ⟷



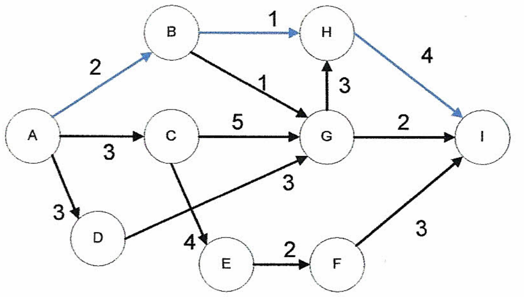
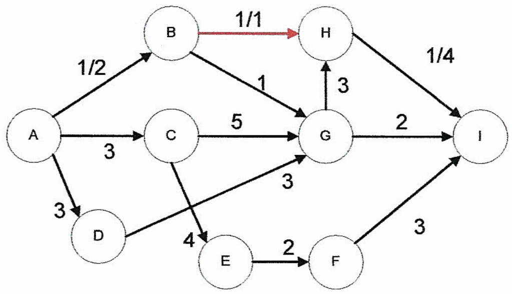
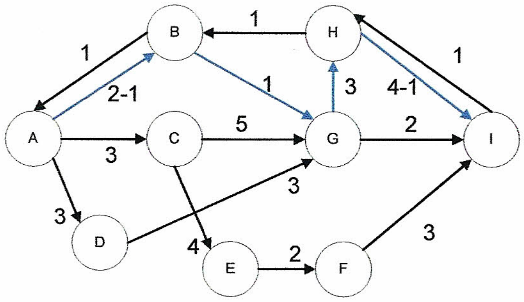
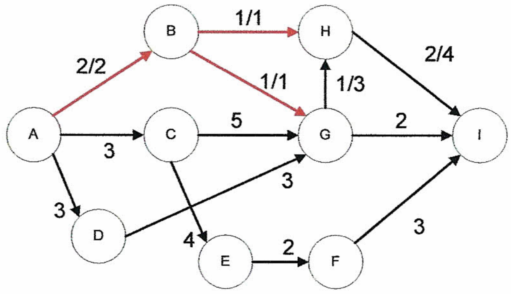
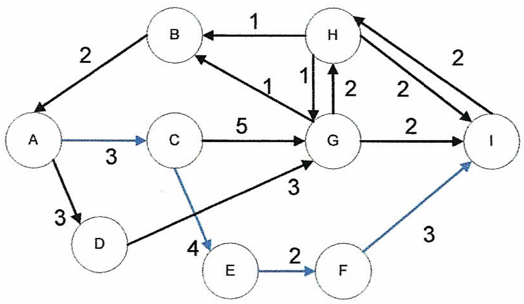
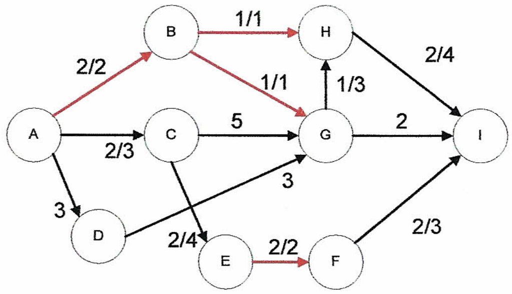
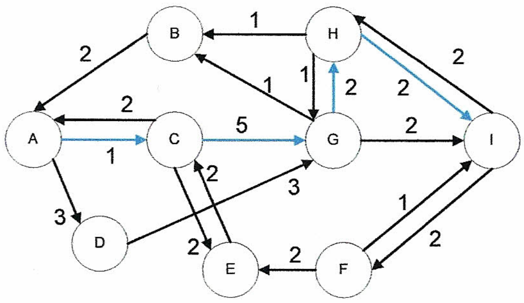
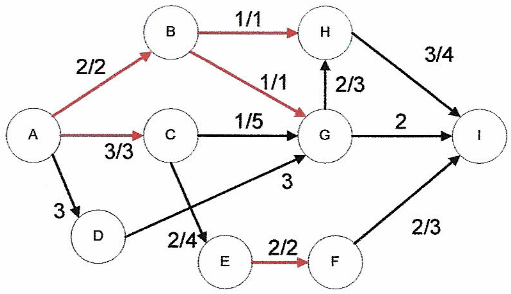
▲

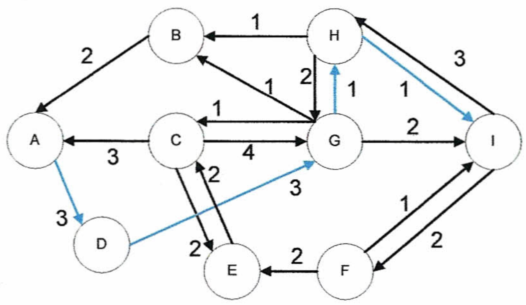
4. (7) Odredite najveći mogući protok između čvorova A i I u mreži na slici.

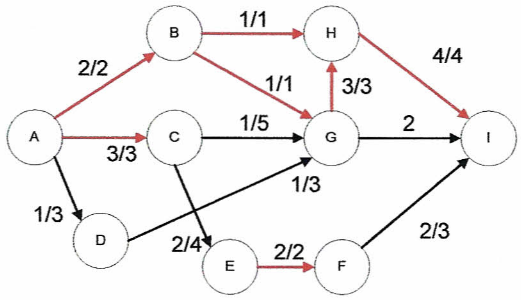


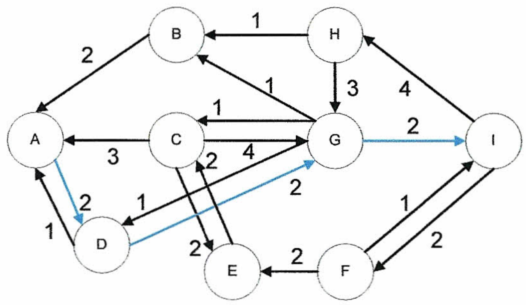
Napomena: Odgovor bez jasnog obrazloženja (skice) postupka kojim se do njega dolazi neće donositi bodove.

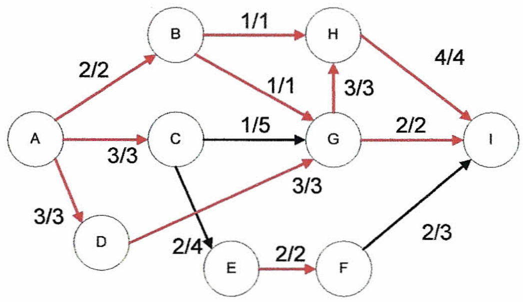
4. *(Jedno od rješenja koja vode maksimalnom protoku od 8)*

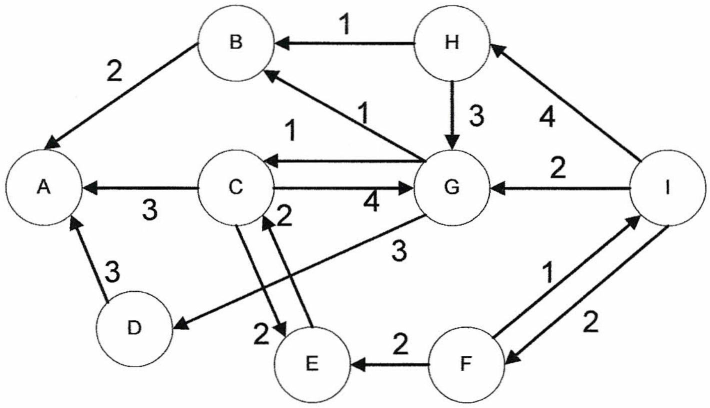
Preostala mreža	Tok
	
	
	
	





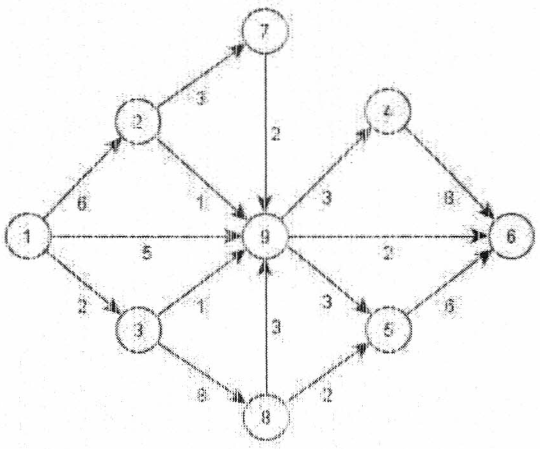






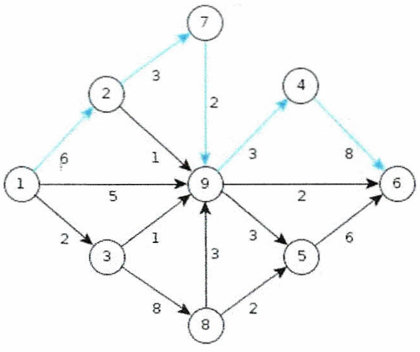
Više nema dopunskih puteva!

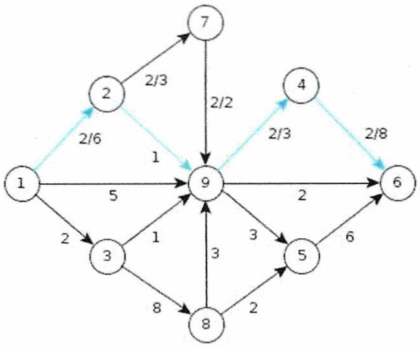
4. (10) Odredite najveći mogući protok između čvorova 1 i 6 mreže na slici.

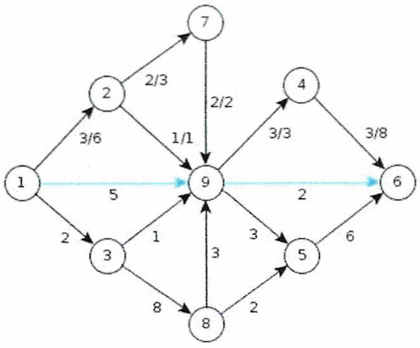


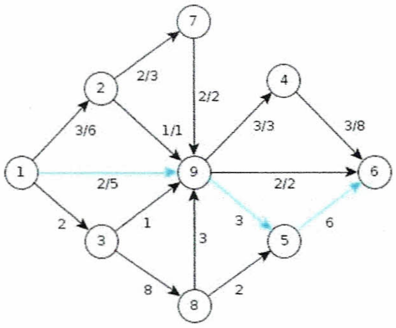
Napomena: Odgovor bez jasnog obrazloženja (skice) postupka kojim se do njega dolazi neće donositi bodove.

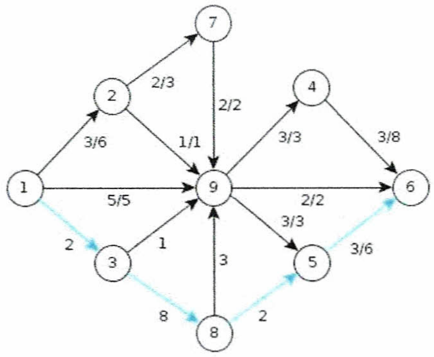
4. Zbog sažetosti, preostala mreža se prikazuje tek nakon iskorištenja svih “očitih” puteva radi provjere postoji li možda još koji dopunski put.

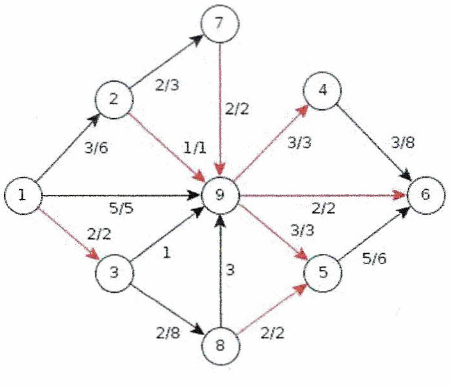




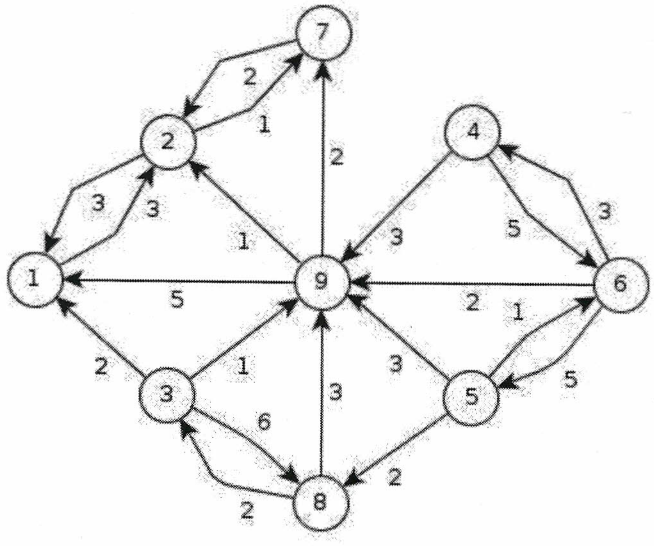








Prikaz toka - zasićeni bridovi su obojani crveno



Preostala mreža – nema dopunskog puta!

```
BreadthFirstSearch (G)
inicijalizacija: svim vrhovima num(v)=0
korak=0;   ostvori pomoćni red spremnik

WHILE u grafu G ima neobiđenih vrhova v
    num(v) = ++ korak;
    dodaj v u red spremnik;
    WHILE još ima vrhova u redu spremnik
      prvi = prvi u redu;
      for svi neobiđeni susjedi u vrha prvi
          num(u) = ++korak;
          u dodaj u red spremnik;
          zabilježi brid (prvi, u);

DepthFirstSearch (G)
inicijalizacija: svim vrhovima num(v)=0
korak=0;
WHILE u grafu G ima neobiđenih vrhova v
      DFS(v);
return edges;

DFS (v)
  num(v) = ++ korak;
  for svi susjedi u vrha v
      if num(u)==0
         zabilježi brid (v,u) u edges;
         DFS(u);
```

```
Dijkstra(source, dest)
inicijalizacija: za sve vrhove d(v)=inf
d(source)=0
ToBeCh = svi vrhovi
WHILE ima vrhova u ToBeCh
    v= vrh sa najmanjom d(v)
    if v== dest
        return;
   remove v from ToBeCh;
   for sve susjede u vrha v and u ToBeCh
        dnew(u)= d(v) + edge(v,u);
        if dnew(u) < d(u)
            d(u) = dnew(u);
            prethodnik(u) = v;
```

```
BellmanFord(graph)
inicijalizacija: za sve vrhove d(v)=inf
d(source)=0;
ToBech = source;
WHILE ima vrhova u ToBeCh
    v= vrh iz ToBeCh;
    remove v from ToBeCh;
    for sve susjede u vrha v
        dnew(u)= d(v)+ edge(v,u);
        if dnew(u) < d(u)
            d(u)= dnew(u);
            prethodnik(u)=v;
            dodaj u u ToBeCh ako već nije;
```

```
WFI(w)
inicijalizacija matrice D;
inicijalizacija matrice π;
for k=1 to |V|
    for i=1 to |V|
        for j=1 to |V|
            if D[i,k] + D[k,j] < D[i,j]
                D[i,j] = D[i,k] + D[k,j];
                π[i,j] = π[k,j];
```

$$d_{ij}^{k} = \begin{cases} w_{ij} & ; k=0 \\ \min(d_{ij}^{k-1}, d_{ik}^{k-1} + d_{kj}^{k-1}) & ; k \geq 1 \end{cases}$$

Kruskal(graph)
tree = null
edges = sortira sve bridove prema težinama;
for ($i=1$; $i \leq |E|$ and $|tree| < |V|-1$; i++)
    if e_i from edges does not form a cycle with edges in tree
        add e_i to tree;

DijkstraMST(graph)
tree = null;
edges = svi bridovi;
for i=1 to |E|
    add e_i to tree;
    if there is a cycle in tree
        remove the maximum weight edge from the cycle;

Primov(graph)
newG = startni vrh;
tree = null;
while number of vertices in newG < |V|
    odaberi vrh v iz graph koji je najbliži vrhovima u newG
    add v to newG;
    add edge(u,v) to tree;

Transformacija

$L'_{ik} = L_{ik} + d_i - d_k$ $L_{ik} = L'_{ik} + d_k - d_i$

Krug = svi bridovi različiti, ali se vrati u isti vrh

Ciklus = svi bridovi i vrhovi različiti, ali se vrati u isti vrh;

Eulerov graf je graf u kojem postoji Eulerov ciklus

Eulerov ciklus krug koji je i putanja tj. svi bridovi različiti i prolazi svim bridovima

Eulerova putanja je putanja koja prolazi svim bridovima grafa

Eulerov ciklus ⇒ svi vrhovi parnog stupnja

Eulerova putanja ⇒ točno dva vrha neparnog svi ostali parnog stupnja

Fleuryev algoritam

Ako se traži ciklus kreni iz bilo kojeg vrha

Ako se traži putanja kreni iz jednog vrha neparnog stupnja

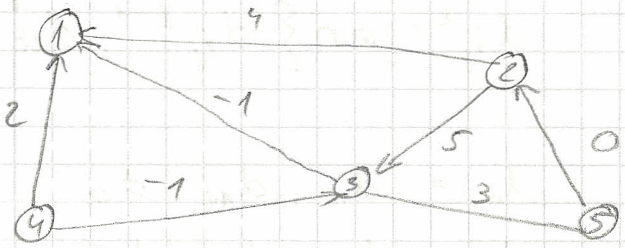
Usmjereni graf ima Eulerov ciklus samo ako vrijedi $indeg(v) = outdeg(v)$

Hamiltonov graf - sadrži Hamiltonov ciklus

Hamiltonov ciklus - svakim vrhom prolazi jednom i završava u početnom vrhu

Bondy - Chvátal

Neka je $G=(V,E)$ jednostavni neusmjereni graf u kojem je $|V| \geq 3$ i neka su u i v nesusjedni vrhovi za koje vrijedi $deg(u)+deg(v) \geq n$ Tada je $G' = G + (u,v)$ Hamiltonov graf ako i samo ako je G Hamiltonov graf



$$d_{ij}^{k} = \min\left(d_{ij}^{k-1},\ d_{ik}^{k-1} + d_{kj}^{k-1}\right)$$

$$D^0 = \begin{array}{c} \begin{matrix} i & j & & & \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 4 & \infty & 5 & \infty & \infty \\ -1 & \infty & \infty & \infty & 3 \\ 2 & \infty & -1 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 3 & \infty & \infty \end{bmatrix} \end{array} \qquad \pi^0 = \begin{bmatrix} nil & nil & nil & nil & nil \\ 2 & nil & 2 & nil & nil \\ 3 & nil & nil & nil & 3 \\ 4 & nil & 4 & nil & nil \\ nil & 5 & 5 & nil & nil \end{bmatrix}$$

$$D^1 = \begin{array}{cc} \begin{matrix} & i & & & \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 4 & \infty & 5 & \infty & \infty \\ -1 & \infty & \infty & \infty & 3 \\ 2 & \infty & -1 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 3 & \infty & \infty \end{bmatrix} & \begin{matrix} \\ j \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array} \qquad \pi^1 = \begin{bmatrix} nil & nil & nil & nil & nil \\ 2 & nil & 2 & nil & nil \\ 3 & nil & nil & nil & 3 \\ 4 & nil & 4 & nil & nil \\ nil & 5 & 5 & nil & nil \end{bmatrix}$$

$$D^2 = \begin{array}{cc} \begin{matrix} & & i & & \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 4 & \infty & 5 & \infty & \infty \\ -1 & \infty & \infty & \infty & 3 \\ 2 & \infty & -1 & \infty & \infty \\ 4 & 0 & 3 & \infty & \infty \end{bmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ j \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array} \qquad \pi^2 = \begin{bmatrix} nil & nil & nil & nil & nil \\ 2 & nil & 2 & nil & nil \\ 3 & nil & nil & nil & 3 \\ 2 & nil & 4 & nil & nil \\ nil & 5 & 5 & nil & nil \end{bmatrix}$$

$$D^3 = \begin{array}{cc} \begin{matrix} & & & i & \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 4 & \infty & \infty & \infty & 8 \\ -1 & \infty & \infty & \infty & 3 \\ -2 & \infty & -1 & \infty & 2 \\ 2 & 0 & 3 & \infty & 6 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ j \\ \\ \end{matrix} \end{array} \qquad \pi^3 = \begin{bmatrix} nil & nil & nil & nil & nil \\ 2 & nil & 2 & nil & 3 \\ 3 & nil & nil & nil & 3 \\ 3 & nil & 4 & nil & 3 \\ 3 & 5 & 5 & nil & 3 \end{bmatrix}$$

$$D^4 = \begin{array}{cc} \begin{matrix} & & & & i \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 4 & \infty & \infty & \infty & 8 \\ -1 & \infty & \infty & \infty & 3 \\ -2 & \infty & -1 & \infty & 2 \\ 2 & 0 & 3 & \infty & 6 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ j \end{matrix} \end{array} \qquad \pi^4 = \begin{bmatrix} nil & nil & nil & nil & nil \\ 2 & nil & 2 & nil & 3 \\ 3 & nil & nil & nil & 3 \\ 3 & nil & 4 & nil & 3 \\ 3 & 5 & 5 & nil & 3 \end{bmatrix}$$

$$D^5 = \begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 4 & 8 & 11 & \infty & 8 \\ -1 & 3 & 6 & \infty & 3 \\ -2 & 2 & -1 & \infty & 2 \\ 2 & 0 & 3 & \infty & 6 \end{bmatrix} \qquad \pi^5 = \begin{bmatrix} nil & nil & nil & nil & nil \\ 2 & 5 & 5 & nil & 3 \\ 3 & 5 & 5 & nil & 3 \\ 3 & 5 & 4 & nil & 3 \\ 3 & 5 & 5 & nil & 3 \end{bmatrix}$$