

Bojan Trkulja

Elektromagnetska polja – zadaci za vježbu



Zagreb, 2012

UDŽBENICI SVEUČILIŠTA U ZAGREBU
MANUALIA UNIVERSITATIS STUDIORUM ZAGRABIENSIS



Bojan Trkulja

Elektromagnetska polja – zadaci za vježbu

ISBN 978-953-184-171-9

Recenzenti:

Prof.dr.sc. Željko Štih

Prof.dr.sc. Livio Šušnjić

Objavljivanje ovog sveučilišnog priručnika odobrio je Senat Sveučilišta u Zagrebu odlukom br:
380-061/117-12-2



Ovo djelo je dano na korištenje pod licencom [Creative Commons Imenovanje-Nekomercijalno-Bez prerada 3.0 Hrvatska](#).

Sadržaj

1. Vektorska analiza.....	4
1.1 Vektorska notacija i algebra	4
1.2 Koordinatni sustavi.....	6
1.3 Skalarno polje	7
1.4 Vektorsko polje.....	7
1.5 Nabla (Hamiltonov) operator i Laplaceov operator	8
1.6 Integralni teoremi.....	8
1.7 Vektorske operacije u koordinatnim sustavima.....	8
1.8 Zadaci za vježbu	10
2. Statičko električno polje	14
2.1 Osnovne veličine statičkog električnog polja	14
2.2 Coulombov zakon	14
2.3 Jakost električnog polja	15
2.4 Gaussov zakon	16
2.5 Električni tok i odnos vektora D i E	17
2.6 Električni potencijal, rad i energija u statičkom električnom polju	17
2.7 Metoda odslikavanja na uzemljenoj vodljivoj plohi	20
2.8 Uvjeti na granici dva materijala u statičkom električnom polju.....	20
2.9 Konvencija o označavanju	21
2.10 Riješeni primjeri.....	21
2.11 Zadaci za vježbu	30
3. Magnetostatika	42
3.1 Osnovne veličine statičkog magnetskog polja.....	42
3.2 Biot-Savartov zakon.....	42
3.3 Ampereov zakon.....	44
3.4 Magnetski tok.....	45
3.5 Gaussov zakon u magnetskom polju	45
3.6 Uvjeti na granici dva magnetska materijala	46
3.7 Magnetski krugovi	46
3.8 Vektorski magnetski potencijal	48
3.9 Sile u statičkom magnetskom polju.....	49
3.10 Energija statičkog magnetskog polja	50
3.11 Proračun induktiviteta.....	51

| Elektromagnetska polja – Zadaci za vježbu

3.12 Proračun međuinduktiviteta	51
3.13 Zadaci za vježbu.....	60
4. Elektromagnetizam	74
4.1 Faradayev zakon elektromagnetske indukcije	74
4.2 Maxwellove jednadžbe u diferencijalnom obliku	75
4.3 Maxwellove jednadžbe u integralnom obliku	75
4.4 Relacije građe	76
4.5 Poyntingov teorem i Poyntingov vektor.....	76
4.6 Jednadžbe ravnog vala u realnim dielektricima i vodičima.....	76
4.7 Jednadžbe ravnog vala u sredstvima bez gubitaka	78
4.8 Zadaci za vježbu.....	82
Popis literature	93

1. Vektorska analiza

1.1 Vektorska notacija i algebra

U okviru ove zbirke uvodi se sljedeća notacija. Za vektore, veličine koje osim iznosa imaju zadan i smjer, koristi se podebljani kurziv, npr. vektor \mathbf{A} . Jedinični vektor, označava se malim slovom \mathbf{a} , je bezdimenzionalna veličina koja služi za obilježavanje smjera vektora. Tako se primjerice Kartezijev koordinatni sustav karakterizira jediničnim vektorima \mathbf{a}_x u smjeru osi x, \mathbf{a}_y u smjeru osi y i \mathbf{a}_z u smjeru osi z.

Općenito vektor \mathbf{A} možemo u Kartezijevom koordinatnom sustavu pisati u obliku:

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z. \quad (1.1)$$

Veličina vektora \mathbf{A} određena je izrazom:

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}, \quad (1.2)$$

a jedinični vektor u smjeru vektora \mathbf{A} možemo odrediti izrazom:

$$\mathbf{a}_A = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \frac{A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}} \quad (1.3)$$

Zbrajanje i oduzimanje vektora izvodi se prema jednadžbi:

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = (A_x \pm B_x) \mathbf{a}_x + (A_y \pm B_y) \mathbf{a}_y + (A_z \pm B_z) \mathbf{a}_z \quad (1.4)$$

Vrijede zakoni asocijativnosti, distributivnosti i komutativnosti u vektorskим operacijama:

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$$

$$k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B} \quad (1.5)$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

Pri tom je k skalarna konstanta.

Skalarni produkt dva vektora \mathbf{A} i \mathbf{B} je skalarna veličina, određena veličinom vektora i kosinusom manjeg kuta između njih:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos(\angle \mathbf{A}, \mathbf{B}) \quad (1.6)$$

U Kartezijevom koordinatnom sustavu vrijedi:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z, \quad (1.7)$$

jer je skalarni produkt dva jedinična vektora u istom smjeru jednak $\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_x = 1$, a u različitim smjerovima $\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_z = 0$

Vektorski produkt dva vektora \mathbf{A} i \mathbf{B} je vektorska veličina, određena veličinom vektora i sinusom manjeg kuta između njih:

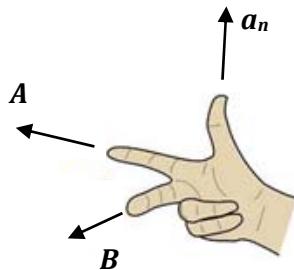
$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin(\varphi_{\mathbf{A}, \mathbf{B}}) \mathbf{a}_n. \quad (1.8)$$

Pri tom je \mathbf{a}_n jedinični vektor usmjeren okomito na ravninu koju razapinju vektori \mathbf{A} i \mathbf{B} .

U Kartezijevom sustavu koristimo za izračun vektorskog produkta izraz:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}. \quad (1.9)$$

Smjer vektora \mathbf{a}_n možemo odrediti pravilom desne ruke. Kažiprst desne ruke postavimo u smjer vektora \mathbf{A} , a srednji prst u \mathbf{B} . Tada palac pokazuje smjer vektora \mathbf{a}_n , prema slici 1.1.

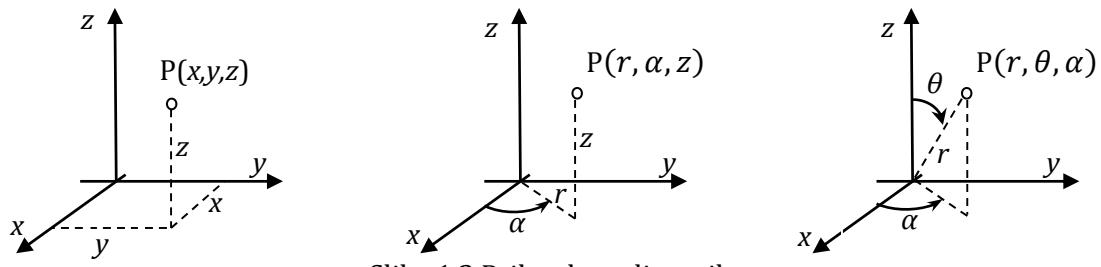


Slika 1.1 Pravilo desne ruke

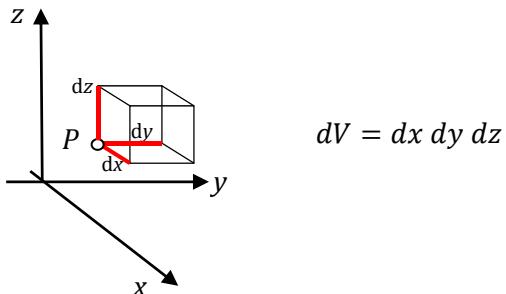
1.2 Koordinatni sustavi

Za probleme koji su u svojoj geometriji pravokutni uputno je koristiti već spomenuti Kartezijev koordinatni sustav. Međutim, problemi za koje je geometrija osno simetrična (cilindrična) ili centralno simetrična (sferna) bi rješavanjem u Kartezijevom sustavu postali bespotrebno kompleksni.

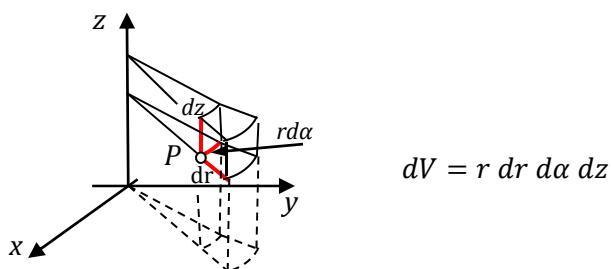
U tu svrhu uvodimo dva nova koordinatna sustava, cilindrični i sferni. U cilindričnom je sustavu točka određena sa skupom koordinata (r, α, z) , a u sfernom sa skupom koordinata (r, θ, α) . Kutovi mogu imati vrijednosti u intervalima: $0 \leq \alpha \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi$. Definicija koordinata za sva tri sustava prikazana je slikom 1.2.



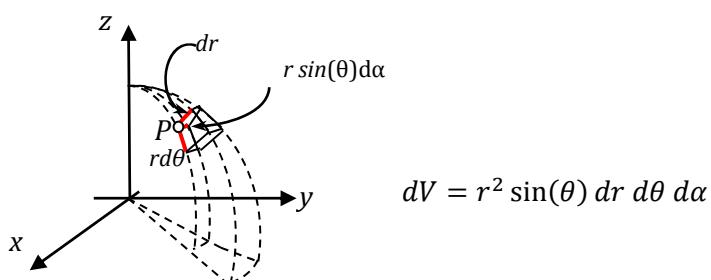
Slika 1.2 Prikaz koordinatnih sustava



Slika 1.3 Diferencijalni element u Kartezijevom koordinatnom sustavu



Slika 1.4 Diferencijalni element u cilindričnom koordinatnom sustavu



Slika 1.5 Diferencijalni element u sfernom koordinatnom sustavu

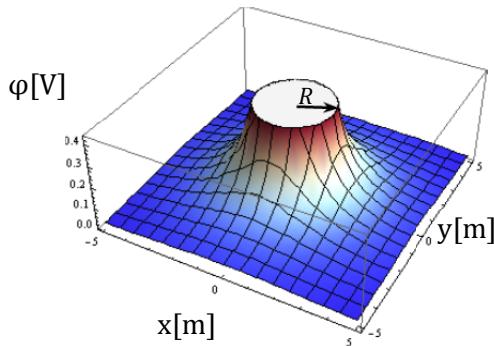
1.3 Skalarno polje

Ako svakoj točki prostora ili dijela prostora P pridružimo brojčanu vrijednost (skalar) φ ,

$$\varphi = \varphi(P),$$

takvo pridruživanje nazivamo skalarnim poljem.

Primjer skalarnog polja je polje gustoće, temperature, električnog potencijala (slika 1.5).



Slika 1.5 Električni potencijal u okolini nabijene kugle radijusa R

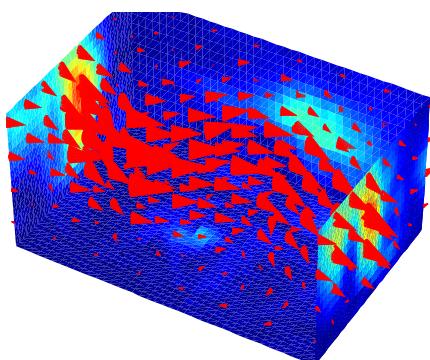
1.4 Vektorsko polje

Ako svakoj točki prostora P pridružimo vektor \mathbf{A} :

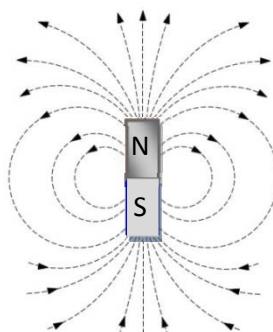
$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(P),$$

time je definirano vektorsko polje.

Primjeri vektorskog polja su polje tekućine koja struji (slika 1.6), električno polje i magnetsko polje (slika 1.7).



Slika 1.6 Polje fluida



Slika 1.7 Polje permanentnog magneta

1.5 Nabla (Hamiltonov) operator i Laplaceov operator

Nabla operator je simbolički vektor ∇ koji se koristi kod prostornog diferenciranja, a njegova upotreba pojednostavljuje računanje u vektorskoj analizi. Za operatore gradijenta, divergencije i rotacije za skalarnu funkciju φ i vektorskiju funkciju \mathbf{A} vrijedi:

$$\begin{aligned} \text{grad } \varphi &= \nabla \varphi \\ \text{div } \mathbf{A} &= \nabla \cdot \mathbf{A} \\ \text{rot } \mathbf{A} &= \nabla \times \mathbf{A} \end{aligned} \tag{1.10}$$

Laplaceov operator Δ je skalarni kvadrat nabla operatora.

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 \tag{1.11}$$

Laplaceov operator pridružuje skalarnim i vektorskim funkcijama sumu drugih parcijalnih derivacija.

1.6 Integralni teoremi

Gaussov teorem:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \oint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS \tag{1.12}$$

Volumen V okružen je zatvorenom plohom S na kojoj je definirana normala \mathbf{n} .

Stokesov teorem

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} dS = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \tag{1.13}$$

Površina S obrubljena je zatvorenom krivuljom c na kojoj je definiran diferencijalni element $d\mathbf{l}$.

1.7 Vektorske operacije u koordinatnim sustavima

Kartezijev koordinatni sustav

$$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{a}_z \tag{1.14}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{1.15}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \tag{1.16}$$

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \tag{1.17}$$

Cilindrični koordinatni sustav

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\mathbf{a}_\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{a}_z \quad (1.18)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\alpha}{\partial\alpha} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1.19)$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial z} \right) \mathbf{a}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \mathbf{a}_\alpha + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\alpha) - \frac{\partial A_r}{\partial\alpha} \right) \mathbf{a}_z \quad (1.20)$$

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} \left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \quad (1.21)$$

Sferni koordinatni sustav

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\mathbf{a}_\theta + \frac{1}{rsin(\theta)}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\mathbf{a}_\alpha \quad (1.22)$$

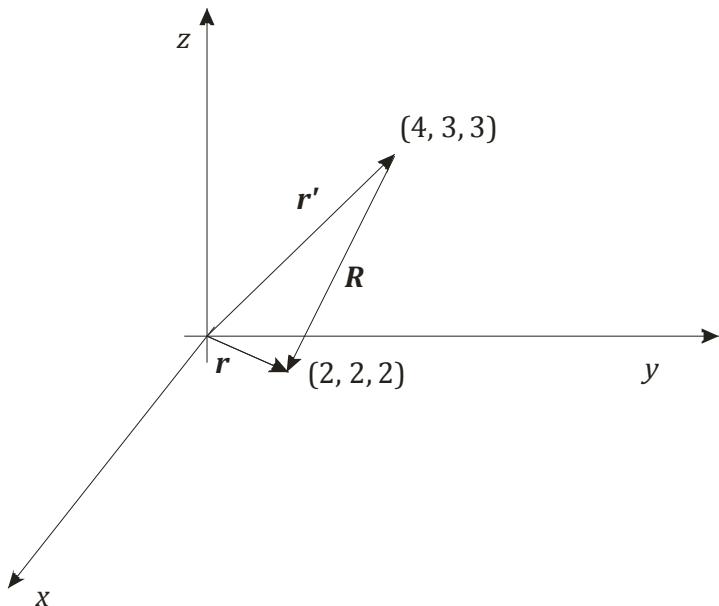
$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r) + \frac{1}{rsin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}(sin(\theta)A_\theta) + \frac{1}{rsin(\theta)}\frac{\partial A_\alpha}{\partial\alpha} \quad (1.23)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} = & \frac{1}{rsin(\theta)} \left(\frac{\partial}{\partial\theta}(sin(\theta)A_\alpha) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\alpha} \right) \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{sin(\theta)}\frac{\partial A_r}{\partial\alpha} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\alpha) \right) \mathbf{a}_\theta \\ & + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta} \right) \mathbf{a}_\alpha \end{aligned} \quad (1.24)$$

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta} \left(sin(\theta)\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{r^2sin^2(\theta)}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} \quad (1.25)$$

1.8 Zadaci za vježbu

1.1 Dva su radijvektora \mathbf{r} i \mathbf{r}' zadana slikom. Odredite vektor $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ i jedinični vektor \mathbf{a}_R u smjeru vektora \mathbf{R} .



$$\text{Rj. } \mathbf{R} = -2\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z; \quad \mathbf{a}_R = -\sqrt{\frac{2}{3}}\mathbf{a}_x - \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{a}_y - \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{a}_z$$

1.2 Za točku T (2, 1, 3) zadanu u Kartezijevom koordinatnom sustavu odredi koordinate u cilindričnom i sfernom koordinatnom sustavu.

$$\text{Rj. } T_{cil} (2,236; 0,464; 3); \quad T_{sfe} (3,742; 0,641; 0,464)$$

1.3 Za zadane vektorske funkcije $\mathbf{A} = yz \mathbf{a}_x - 2x \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$ i $\mathbf{B} = \mathbf{a}_x + z \mathbf{a}_y$ odredite u točki T (3; 1; 1) :

- a) $\mathbf{A} - \mathbf{B}$
- b) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$
- c) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$
- d) $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$

Rj.

- a) $\mathbf{A} - \mathbf{B} = -7\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$
- b) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = 2\mathbf{a}_x - 5\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$
- c) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = -5$
- d) $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + 7\mathbf{a}_z$

1.4 Integracijom odredite površinu S definiranu u sfernom koordinatnom sustavu s $r = 1,5 \text{ m}$; $0 \leq \alpha \leq 2\pi$; $\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

$$\text{Rj. } 7,07 \text{ m}^2$$

1.5 Integracijom odredite u cilindričnom koordinatnom sustavu volumen V područja definiranog s $1\text{m} \leq r \leq 3\text{m}$; $\pi \leq \alpha \leq \frac{3}{2}\pi$; $1\text{m} \leq z \leq 2\text{m}$.
 Rj. $6,28\text{m}^3$

1.6 Za zadane vektore $\mathbf{A} = 2\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$ i $\mathbf{B} = \mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$ odredite projekciju vektora \mathbf{B} na vektor \mathbf{A} i manji kut između vektora primjenom relacije za skalarni produkt vektora \mathbf{A} i \mathbf{B} .
 Rj. $-0,485; 101,42^\circ$

1.7 Za vektore iz zadatka 1.6 odredite manji kut između vektora \mathbf{A} i \mathbf{B} primjenom izraza za vektorski produkt.
 Rj. $101,42^\circ$ (napomena: primjenom vektorskog produkta dobivaju se dva rješenja $78,58^\circ$ i $101,42^\circ$ zbog svojstava funkcije sinus, od kojih je samo jedno točno. Primjenom skalarnog produkta kao u 6. zadatku dobiva se jedno rješenje. Rezultat je lako provjeriti skiciranjem vektora.)

1.8 Neka je vektor $\mathbf{A} = (y+2)\mathbf{a}_x + (x-1)\mathbf{a}_y$. Odredite vektor u točki $(7; 5; 1)$ i njegovu projekciju na vektor $\mathbf{B} = 2\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$.
 Rj. $\mathbf{A}(7, 5, 1) = 7\mathbf{a}_x + 6\mathbf{a}_y; \frac{-4}{\sqrt{17}}$

1.9 Odredite površinu dijela valjkaste plohe, određene s radiusom $r=3\text{m}$, visinom $h=2\text{m}$ i kutem $10^\circ \leq \alpha \leq 100^\circ$.
 Rj. $S=3\pi \text{ m}^2$

1.10 Za vektor $\mathbf{A} = 5\mathbf{a}_x$ i vektor $\mathbf{B} = 4\mathbf{a}_x + B_y\mathbf{a}_y$ odredite B_y takav da je kut između vektora \mathbf{A} i \mathbf{B} jednak 45° .
 Rj. $B_y = \pm 4$

1.11 Odredite jedinični vektor između točaka $(2; -5; -2)$ i $(14; -5; 3)$.

$$\text{Rj. } \mathbf{a} = \frac{12}{13}\mathbf{a}_x + \frac{5}{13}\mathbf{a}_z$$

1.12 Za koje su vrijednosti α i β vektori:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= 2\mathbf{a}_r + 2\pi\mathbf{a}_\alpha + 4\mathbf{a}_z \text{ i} \\ \mathbf{B} &= \alpha\mathbf{a}_r + \beta\mathbf{a}_\alpha - 2\mathbf{a}_z \text{ paralelni?} \end{aligned}$$

$$\text{Rj. } \alpha = -1; \beta = -\pi$$

1.13 Za koje su vrijednosti α vektori $\mathbf{A} = 2\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$ i $\mathbf{B} = \alpha\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$ međusobno okomiti?
 Rj. $\alpha = -3$

1.14 Neka je zadano skalarno polje $\varphi = x \cdot z - y \cdot z$. Odredite gradijent polja φ , $\frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{a}_z$ u točki (2; 1; 1).

Rj. $1\mathbf{a}_x - 1\mathbf{a}_y + 1\mathbf{a}_z$

1.15 Zadano je vektorsko polje $\mathbf{E} = \frac{10}{r} \mathbf{a}_r - 2\mathbf{a}_z$. Odredite jedinični vektor \mathbf{a}_E u točki (2; 30° ; 2) u Kartezijevom sustavu.

Rj. $0,8\mathbf{a}_x + 0,46\mathbf{a}_y - 0,37\mathbf{a}_z$

1.16 Za vektorsko polje iz zadatka 1.15 odredite površinu za koju vrijedi $|\mathbf{E}| = 8$.

Rj. $r=1,3$ cilindrična ploha.

1.17 U točki P prostora dva su vektora definirana u sfernom koordinatnom sustavu jednadžbama $\mathbf{A} = 2\mathbf{a}_r + 3\mathbf{a}_\theta + 5\mathbf{a}_\alpha$ i $\mathbf{B} = 1\mathbf{a}_r + 5\mathbf{a}_\theta + 3\mathbf{a}_\alpha$. Odredite skalarnu komponentu vektora \mathbf{B} u smjeru vektora \mathbf{A} .

Rj. 5,19

1.18 Odredite vektor koji je u točki P okomit na ravninu koju određuju vektori \mathbf{A} i \mathbf{B} iz zadatka 1.17.

Rj. $0,914\mathbf{a}_r + 0,057\mathbf{a}_\theta - 0,4\mathbf{a}_\alpha$

1.19 Izrazite vektorsko polje $\mathbf{A} = (x^2 - y^2) \mathbf{a}_y + (x \cdot z) \mathbf{a}_z$ u koordinatama cilindričnog sustava u točki P ($r = 6, \alpha = 60^\circ, z = -4$).

Rj. $-9\sqrt{3}\mathbf{a}_r - 9\mathbf{a}_\alpha - 12\mathbf{a}_z$

1.20 Unutar sfere radijusa 0,2m nalazi se naboj volumne gustoće $\rho = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{C}{m^3}$. Odredite ukupni naboj unutar sfere.

Rj. Q=0,394 C

1.21 Odredite gradijent polja $f(x, y, z) = 2x + 6x \cdot z - x \cdot y + 11$.

Rj. $(2 + 6z - y)\mathbf{a}_x + (-x)\mathbf{a}_y + 6x\mathbf{a}_z$

1.22 Odredite gradijent polja $f(x, y, z) = \sin(\alpha) + r \cdot z + 4$.

Rj. $z\mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \cos(\alpha) \mathbf{a}_\alpha + r\mathbf{a}_z$

1.23 Odredite gradijent polja $f(x, y, z) = 2r \cos(\vartheta) - 5\alpha + 2$.

Rj. $2 \cos(\vartheta) \mathbf{a}_r - 2 \sin(\vartheta) \mathbf{a}_\theta - \frac{5}{r \sin(\vartheta)} \mathbf{a}_\alpha$.

1.24 Odredite gradijent skalarnog polja $f(x, y, z) = x - y + 3z^2$ u točki (2; 1; 1) u smjeru vektora $2\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$

Rj. $\frac{10}{3}$

1.25 Odredite linijski integral vektorskog polja $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y)\mathbf{a}_x - x\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z$ po dužini od točke A(0; 1; 2) do B (1; 0; 2).

Rj. 1,5

1.26 Odredite linijski integral vektorskog polja $\mathbf{F}(x, y, z) = -2\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$ po kružnom luku od točke A(1; 0; 1) do B (0; 1; 1). Središte kružnog luka je u točki (0; 0; 1).

Rj. 4

1.27 Odredite tok vektorskog polja $\mathbf{F}(x, y, z) = 4x^2 \cdot y\mathbf{a}_x + 2z\mathbf{a}_y + 2y\mathbf{a}_z$ kroz jediničnu kocku $0 \leq x, y, z \leq 1$.

Rj. 2

1.28 Odredite divergenciju vektorskog polja:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = e^{-5y}(\cos(3x)\mathbf{a}_x - \sin(3x)\mathbf{a}_y)$$

Rj. $2e^{-5y}\sin(3x)$

1.29 Odredite divergenciju vektorskog polja $\mathbf{F}(x, y, z) = 2x^2 \cdot \sin(\pi x)\mathbf{a}_x$ u točki x = 0,8.

Rj. -1,37

1.30 Odredite rotor vektorskog polja $\mathbf{F}(x, y, z) = 3x \cdot y\mathbf{a}_x + y \cdot z\mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z$.

Rj. $-y\mathbf{a}_x - 3x\mathbf{a}_z$

1.31 Odredite rotor vektorskog polja $\mathbf{F}(x, y, z) = 5\mathbf{a}_r + \cos(\alpha)\mathbf{a}_\alpha - 2z\mathbf{a}_z$.

Rj. $\frac{\cos(\alpha)}{r}\mathbf{a}_z$

1.32 Odredite linijski integral vektorskog polja $\mathbf{F}(x, y, z) = x \cdot y\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y$ po zatvorenoj krivulji određenoj točkama (0; 0; 0), (1; 0; 0) i (0; 1; 0). Smjer obilaska definiran je redoslijedom točaka.

Rj. $-\frac{1}{6}$

2. Statičko električno polje

2.1 Osnovne veličine statičkog električnog polja

Statičko električno polje uvjetovano je postojanjem raspodjele mirujućih električnih naboja kao izvora polja u prostoru.

U Tablici 2.1. nalazi se podsjetnik važnijih veličina u statičkom električnom polju i njihovih iznosa ukoliko je riječ o konstantama.

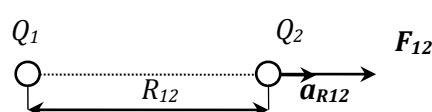
Oznaka	Veličina	Mjerna jedinica
ϵ_0	Dielektričnost vakuma	$8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$
ϵ_r	Relativna dielektričnost	1
Q	Električni naboј	C
λ	Linijska gustoća naboja	C/m
σ	Površinska gustoća naboja	C/m ²
ρ	Volumna gustoća naboja	C/m ³
\mathbf{E}	Jakost električnog polja	V/m
\mathbf{D}	Gustoća električnog toka	C/m ²
C	Električni kapacitet	F
φ	Električni potencijal	V
Φ_e	Električni tok	C

Tablica 2.1. Važnije veličine u statičkom električnom polju

Sljedeće jednadžbe i zakoni opisuju statičko električno polje u prostoru.

2.2 Coulombov zakon

Sila između dva naboja proporcionalna je umnošku iznosa naboja, a obrnuto je proporcionalna kvadratu udaljenosti između dva naboja (slika 2.1).



Slika 2.1 Coulombov zakon

Sila kojom naboj Q_1 djeluje na naboj Q_2 određena je u vakuumu jednadžbom:

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{12}^2} \mathbf{a}_{R12} \quad (2.1)$$

Pritom je \mathbf{a}_{R12} jedinični vektor usmjeren od naboja Q_1 prema naboju Q_2 .

2.3 Jakost električnog polja

Jakost električnog polja u točki prostora jednaka je sili na jedinični pozitivni naboj:

$$\mathbf{E} = \lim_{Q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}}{Q} \quad (2.2)$$

Za točkasti naboj vrijedi:

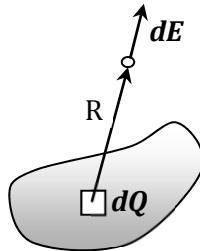
$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{a}_R \quad (2.3)$$

Pritom je R udaljenost od naboja do točke u kojoj se računa polje, dok je \mathbf{a}_R jedinični vektor usmjeren od izvora polja, naboja, do točke u kojoj se računa polje.

Vrijedi princip superpozicije za statičko električno polje u linearnim, izotropnim i homogenim sredstvima:

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 R_i^2} \mathbf{a}_{ri} \quad (2.4)$$

Električno polje volumne razdiobe naboja (slika 2.2) računa se na sljedeći način:



Slika 2.2 Električno polje volumne raspodjele naboja

Električno polje diferencijalnog dijela naboja $d\mathbf{Q}$ je:

$$d\mathbf{E} = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{a}_R$$

Uz $dQ = \rho \cdot dV$ električno polje volumne raspodjele naboja je:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho \mathbf{a}_R}{R^2} dV \quad (2.5)$$

Analogno za plošnu raspodjelu naboja koristi se za izračun električnog polja izraz:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma \mathbf{a}_R}{R^2} dS \quad (2.6)$$

Za linijsku raspodjelu naboja se električno polje računa prema:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l \frac{\lambda \mathbf{a}_R}{R^2} dl \quad (2.7)$$

2.4 Gaussov zakon

Tok vektora gustoće električnog toka \mathbf{D} kroz bilo koju zatvorenu plohu S u slobodnom prostoru jednak je naboju koji se nalazi unutar zatvorene plohe S .

U integralnoj formulaciji Gaussov se zakon može zapisati u obliku:

$$\iint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = Q, \quad (2.8)$$

Vektor \mathbf{n} je jedinični vektor normale na plohu S .

U diferencijalnom obliku Gaussov zakon glasi:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho. \quad (2.9)$$

Koristeći Gaussov integralni teorem za vektorsko polje \mathbf{A} (jednadžba 1.12):

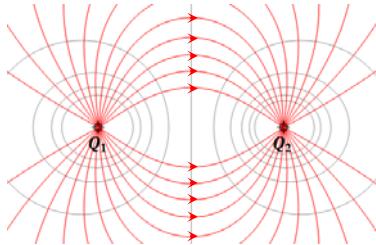
$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV$$

uz uvjet neprekidnosti \mathbf{A} , te postojanja i neprekidnosti i prvih derivacija vektorskog polja \mathbf{A} možemo Gaussov zakon formulirati i u obliku:

$$\iint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{D}) dV = \int_V \rho dV \quad (2.10)$$

2.5 Električni tok i odnos vektora D i E

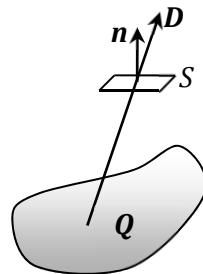
Tok vektora D ima izvor u pozitivnom naboju Q_1 , a ponor u negativnom naboju Q_2 (slika 2.3). Smjer silnica električnog polja je od pozitivnog prema negativnom naboju. Zatvorene krivulje u okolini naboja na slici 2.3 označavaju ekvipotencijalne plohe.



Slika 2.3 Silnice i ekvipotencijalne plohe za sustav dvaju točkastih naboja

Tok Φ_e vektora gustoće električnog toka kroz neku plohu S može se izračunati izrazom:

$$\Phi_e = \iint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.11)$$



Slika 2.4 Tok Φ_e dobiva se integracijom okomite komponente vektora D na plohu S

Jakost električnog polja E i vektor gustoće električnog toka D u linearном, izotropnom i homogenom (LIH) sredstvu permitivnosti ϵ povezani su izrazima:

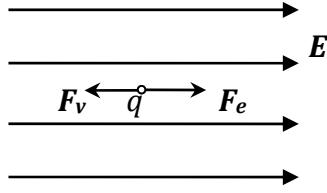
$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon \cdot \mathbf{E} \\ \epsilon &= \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \end{aligned} \quad (2.12)$$

2.6 Električni potencijal, rad i energija u statičkom električnom polju

Neka se točasti naboј q nalazi u prostoru u kojem postoji električno polje jakosti E . Tada električno polje djeluje na naboј q silom iznosa:

$$\mathbf{F}_e = q \cdot \mathbf{E}, \quad (2.13)$$

kao na slici 2.5.



Slika 2.5 Točkasti naboј u vanjskom električnom polju

Naboј u ravnoteži drži vanjska sila \mathbf{F}_v jednakog iznosa kao i \mathbf{F}_e , a suprotnog smjera.

$$\mathbf{F}_v = -q \cdot \mathbf{E}$$

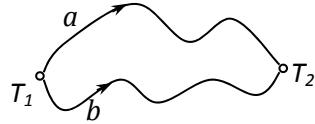
Diferencijalni rad vanjske sile koji je potrebno uložiti u pomicanje naboja za udaljenost $d\mathbf{l}$ jednak je:

$$dW = \mathbf{F}_v \cdot d\mathbf{l} = -q \cdot \mathbf{E} d\mathbf{l}$$

Statičko električno polje je *konzervativno polje*. Integral $\int_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ neovisan je o putu integracije, krivulji c .

Iz tog slijedi da je integral jakosti električnog polja po bilo kojoj zatvorenoj konturi (slika 2.6) a i b jednak nuli.

$$\oint_{a-b} \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0 \quad (2.14)$$



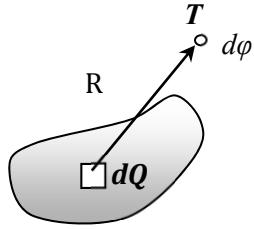
Slika 2.6 Konzervativnost statičkog električnog polja

Električni potencijal točkastog naboja Q , u točki T u blizini naboja je rad koji je potrebno uložiti da se jedinični pozitivni naboј dovede iz beskonačnosti u T .

$$\varphi = - \int_{\infty}^T \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{\infty}^T \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \mathbf{a}_R \cdot dr \mathbf{a}_R = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_T} - \frac{1}{\infty} \right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_T}$$

Potencijal prostorne raspodjele naboja (Slika 2.7) u točki T određen je jednadžbom:

$$\varphi = \int_V \frac{\rho \cdot dV}{4\pi\varepsilon R} \quad (2.15)$$



Slika 2.7 Potencijal prostorne raspodjele naboja

Jakost električnog polja \mathbf{E} i skalarni potencijal φ povezani su jednadžbom:

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi \quad (2.16)$$

Električno polje jednako je negativnom *gradijentu* električnog potencijala, što znači da smjer električnog polja odgovara smjeru opadanja električnog potencijala φ .

Energija statičkog električnog polja skupine točkastih naboja može se odrediti iz jednadžbe:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (Q_i \cdot \varphi_i) \quad (2.17)$$

Pritom φ_i označava potencijal svih ostalih naboja na mjestu naboja i .

Ukoliko je riječ o prostornoj distribuciji naboja energija se računa integralom:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \varphi \rho dV \quad (2.18)$$

Energiju izraženu preko vektora \mathbf{E} i \mathbf{D} računamo u LIH sredstvu prema izrazima:

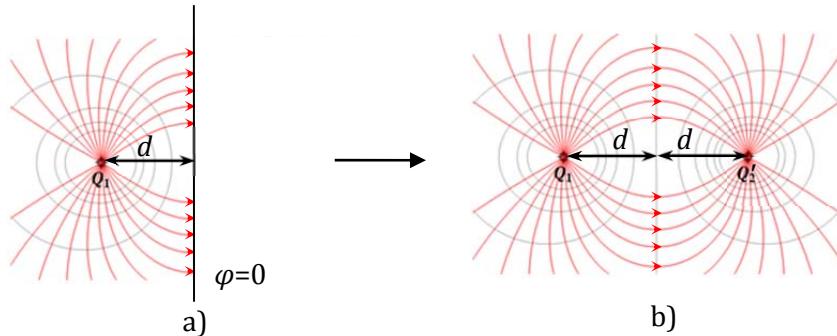
$$W = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV = \frac{1}{2} \epsilon \int_V E^2 dV = \frac{1}{2\epsilon} \int_V D^2 dV \quad (2.19)$$

U nelinearnom sredstvu:

$$W = \frac{1}{2} \int_V dV \int_D \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} \quad (2.20)$$

2.7 Metoda odslikavanja na uzemljenoj vodljivoj plohi

Probleme koji uključuju točkaste naboje, linijske, plošne ili volumne raspodjele naboja u blizini uzemljenih vodljivih ploha moguće je riješiti primjenom metode odslikavanja (slika 2.8).



Slika 2.8 Metoda odslikavanja za točkasti naboje

Sustav koji čine točkasti naboje Q_1 i uzemljena ravnina $\varphi=0$ (slika 2.8 a), može se pojednostaviti kako je prikazano na slici 2.8 b) uvođenjem odslikanog naboja Q'_2 kojim je nadomeštena ravnina $\varphi=0$. Iznos odslikanog naboja Q'_2 na uzemljenoj ravnini u statičkom električnom polju jednak je iznosu originalnog naboja Q_1 , a suprotnog je predznaka.

$$Q'_2 = -Q_1$$

Odslikani nabolj nalazi se na jednakoj udaljenosti d od ravnine odslikavanja kao i originalni nabolj. Problem računanja polja u okolini originalnog nabolja Q_1 (lijevi poluprostor na slici 2.8 a) možemo jednostavno riješiti superpozicijom doprinosa originalnog i odslikanog nabolja.

2.8 Uvjeti na granici dva materijala u statičkom električnom polju

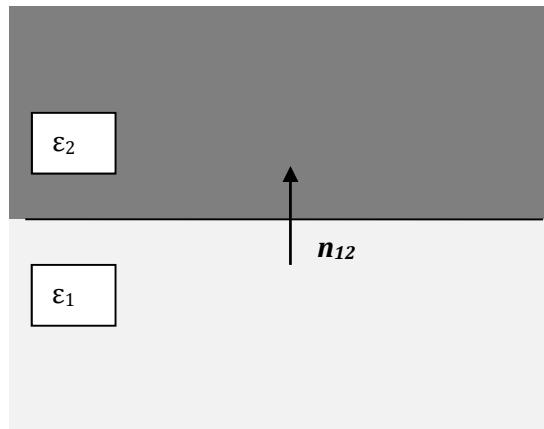
Na granici dvaju materijala različitih svojstava (slika 2.9) za komponente vektora jakosti električnog polja i gustoće električnog toka vrijedi:

Tangencijalne komponente jakosti električnog polja su jednake u oba sredstva:

$$\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \mathbf{0} \quad (2.21)$$

Komponenta vektora gustoće električnog toka \mathbf{D} okomita na granicu na granici se mijenja za iznos gustoće slobodnog nabolja na granici σ .

$$\mathbf{n}_{12} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma \quad (2.22)$$



Slika 2.9 Uvjeti na granici

2.9 Konvencija o označavanju

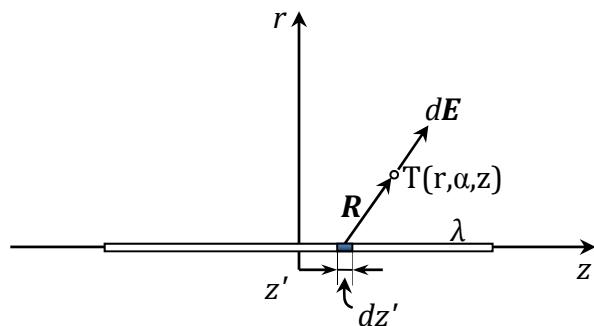
r radijvektor točke u kojoj računamo polje

r' radijvektor diferencijalnog elementa izvora

R vektor udaljenosti točke promatranja r od diferencijalnog elementa izvora r' tako da vrijedi $R = r - r'$

2.10 Riješeni primjeri

Primjer 2.1 Odredite električno polje štapa duljine 1m prema slici, nabijenog linijskim nabojem gustoće 1nC/m u točki T ($r=0,25\text{m}$; $z=0,25\text{m}$).



Slika 2.10 Polje u okolini nabijenog štapa

Radi jednostavnosti u računu koristimo cilindrični koordinatni sustav ($r; \alpha; z$), jer je i štap cilindrične geometrije. Neka je L duljina štapa.

U cilindričnom koordinatnom sustavu radijvektor diferencijalnog elementa izvora je:

$$r' = z' \mathbf{a}_z,$$

radijvektor točke u kojoj računamo polje je:

$$\mathbf{r} = r\mathbf{a}_r + z\mathbf{a}_z,$$

i vrijedi:

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = r\mathbf{a}_r + (z - z')\mathbf{a}_z,$$

$$R = |\mathbf{R}| = \sqrt{r^2 + (z - z')^2},$$

$$\mathbf{a}_R = \frac{\mathbf{R}}{R},$$

Električno polje računamo prema izrazu:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l \frac{\lambda \mathbf{a}_R}{R^2} dl = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{z'=-0,5L}^{0,5L} \frac{\lambda \frac{r\mathbf{a}_r + (z - z')\mathbf{a}_z}{\sqrt{r^2 + (z - z')^2}}}{\left(\sqrt{r^2 + (z - z')^2}\right)^2} dz'$$

Sređivanjem prethodnog izraza dobivamo po smjerovima:

$$E_r = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{z'=-0,5L}^{0,5L} \frac{r}{\left(\sqrt{r^2 + (z - z')^2}\right)^3} dz'$$

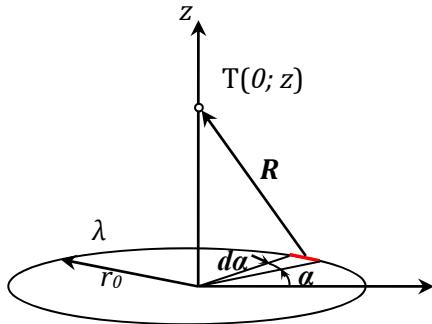
$$E_z = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{z'=-0,5L}^{0,5L} \frac{(z - z')}{\left(\sqrt{r^2 + (z - z')^2}\right)^3} dz'$$

Konačno:

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \left(\frac{\frac{L}{2} + z}{\sqrt{\left(\frac{L}{2} + z\right)^2 + r^2}} + \frac{\frac{L}{2} - z}{\sqrt{\left(\frac{L}{2} - z\right)^2 + r^2}} \right) \\ &= \left\{ L = 1 \text{ m}, r = 0,25 \text{ m}, z = 0,25 \text{ m}, \lambda = 1 \frac{\text{nC}}{\text{m}} \right\} = 59,53 \frac{\text{V}}{\text{m}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \left(\frac{r}{\sqrt{\left(\frac{L}{2} - z\right)^2 + r^2}} - \frac{r}{\sqrt{\left(\frac{L}{2} + z\right)^2 + r^2}} \right) = \\ &= \left\{ L = 1 \text{ m}, r = 0,25 \text{ m}, z = 0,25 \text{ m}, \lambda = 1 \frac{\text{nC}}{\text{m}} \right\} = 14,05 \frac{\text{V}}{\text{m}} \end{aligned}$$

Primjer 2.2 Kružni prsten zanemarivog poprečnog presjeka, radijusa 2m, prema slici, nabijen je nabojem linijske gustoće $\lambda=1\text{nC/m}$. Odredite jakost električnog polja u točki T (0; 1m) na osi prstena.



Slika 2.11. Kružni prsten nabijen nabojem gustoće λ

Radijvektor diferencijalnog elementa izvora je:

$$\mathbf{r}' = r_0 \mathbf{a}_r,$$

Radijvektor točke u kojoj računamo polje je:

$$\mathbf{r} = z \mathbf{a}_z,$$

i vrijedi:

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = -r_0 \mathbf{a}_r + z \mathbf{a}_z,$$

$$R = |\mathbf{R}| = \sqrt{r_0^2 + z^2},$$

$$\mathbf{a}_R = \frac{\mathbf{R}}{R},$$

Električno polje je:

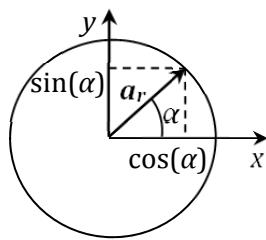
$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l \frac{\lambda \mathbf{a}_R}{R^2} dl = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\alpha=0}^{\alpha=2\pi} \frac{\lambda(-r_0 \mathbf{a}_r + z \mathbf{a}_z)}{(\sqrt{r_0^2 + z^2})^3} r_0 d\alpha$$

Rastavimo li električno polje po komponentama na E_r i E_z :

$$\mathbf{a}_r E_r = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{-r_0^2}{(\sqrt{r_0^2 + z^2})^3} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \mathbf{a}_r d\alpha = 0$$

jer je npr. pretvorbom u Kartezijev koordinatni sustav evidentno (slika 2.12):

$$\int_{\alpha=0}^{2\pi} \mathbf{a}_r d\alpha = \int_{\alpha=0}^{2\pi} (\mathbf{a}_x \cos(\alpha) + \mathbf{a}_y \sin(\alpha)) d\alpha = 0$$



Slika 2.12. Rastavljanje jediničnog vektora \mathbf{a}_r na \mathbf{a}_x i \mathbf{a}_y

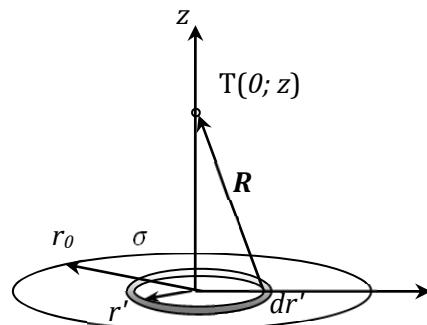
Integral i sinusne i kosinusne funkcije u intervalu argumenta $[0, 2\pi]$ jednak je nuli.

Jakost električnog polja u aksijalnom je smjeru:

$$E_z = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_0 z}{(\sqrt{r_0^2 + z^2})^3} \int_{\alpha=0}^{2\pi} d\alpha = \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \frac{r_0 z}{(\sqrt{r_0^2 + z^2})^3} = \left\{ r_0 = 2 \text{ m}, z = 1 \text{ m}, \lambda = 1 \frac{\text{nC}}{\text{m}} \right\}$$

$$= 10,1 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Primjer 2.3 Kružni disk radijusa 1m prema slici nabijen je nabojem površinske gustoće $\sigma = 2 \frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$. Odredite jakost električnog polja u točki $T(0; 2\text{m})$ na osi prstena.



Slika 2.12. Disk nabijen nabojem gustoće σ

Disk se sastoji od diferencijalnih prstena debljine dr' . Električno polje na osi prstena riješeno je u Primjeru 2.2 i postoji samo u aksijalnom smjeru, pa je rezultat:

$$E_z = \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \frac{r_0 z}{(\sqrt{r_0^2 + z^2})^3}$$

potrebno integrirati po radiusu diska kako bi se izračunalo ukupno električno polje diska.

Gustoća naboja λ dio je površinske gustoće naboja σ koji se nalazi na prstenu debljine dr .

$$\lambda = \sigma dr'$$

Električno polje diska je:

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}_z \int_{r'=0}^{r_0} \sigma \frac{r' \cdot z}{2\epsilon_0 (\sqrt{r'^2 + z^2})^3} dr' = \mathbf{a}_z \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{r_0^2 + z^2}} \right) =$$

$$\left\{ r_0 = 1 \text{ m}, \sigma = 2 \frac{\text{nC}}{\text{m}^2}, z = 2 \text{ m} \right\} = \mathbf{a}_z 11,9 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

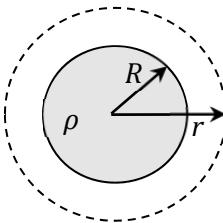
Primjer 2.4 Odredite jakost električnog polja u okolini sfere radijusa R unutar koje se nalazi naboj Q jednoliko raspoređen po volumenu.

Primjenom Gaussovog zakona može se riješiti ovakav problem:

$$\iint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \rho dV$$

Za Gaussovou plohu i problem prema slici 2.13 vrijedi:

- ploha radijusa r okružuje ukupan naboj Q u sferi radijusa R ,
- problem je centralno simetričan i jakost električnog polja \mathbf{E} ima isključivo radijalan smjer,
- iznos jakosti električnog polja je jednak u svakoj točki Gaussove plohe radijusa r .



Slika 2.13 Naboj unutar sfere radijusa R

Vrijedi:

$$\iint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_S \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \epsilon_0 E \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_r r^2 \sin(\theta) da d\theta = \epsilon_0 E 4\pi r^2 = Q$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r$$

Polje izvan sfere identično je situaciji u kojoj je cijeli naboј koncentriran u središtu sfere, dakle jednako je kao u slučaju točkastog naboja istog iznosa Q u središtu sfere.

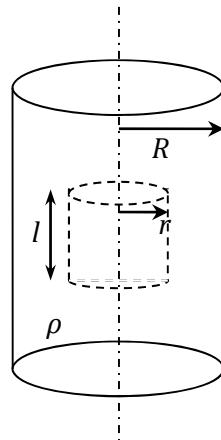
Primjer 2.5 Unutar dugačkog cilindra radijusa R nalazi se naboј prostorne gustoće ρ koja se s udaljenosti od osi cilindra mijenja po zakonu $\rho = k \cdot r$, pri čemu je k konstanta. Odredite jakost električnog polja unutar cilindra.

Gaussova ploha radijusa r prikazana je na slici 2.14 crtanom linijom. Naboј Q' unutar Gaussove plohe je:

$$\iint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_S \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = Q'$$

Kako bismo odredili jakost električnog polja unutar cilindra potrebno je izračunati naboј Q' . Integracijom funkcije gustoće naboja po volumenu određenom Gaussovom plohom dobije se Q' :

$$Q' = \int_V \rho dV = \int_{r'=0}^r \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{z=0}^l k \cdot r' \cdot r' dr' d\alpha dz = 2\pi k l \frac{r^3}{3}$$



Slika 2.14 Naboј volumne gustoće ρ unutar cilindra radijusa R

Jakost električnog polja zbog osne simetrije ima samo radijalni smjer i jednaka je po iznosu u svim točkama na udaljenosti r od osi :

$$\iint_S \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \epsilon_0 E \cdot 2\pi r \cdot l = Q'$$

$$E = \frac{Q'}{\epsilon_0 2\pi r l} = \frac{2\pi k l \frac{r^3}{3}}{\epsilon_0 2\pi r l} = \frac{k r^2}{\epsilon_0 3}$$

$$\mathbf{E} = \frac{k}{\epsilon_0} \frac{r^2}{3} \mathbf{a}_r$$

Primjer 2.6 Odredite kapacitet dviju koncentričnih sfernih ljuski radijusa R_1 i R_2 .

Neka je na unutrašnjoj ljusci naboј $+Q$, a na vanjskoj naboј $-Q$. Jakost električnog polja između dviju ljuski jednaka je kao za točkasti naboј:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r$$

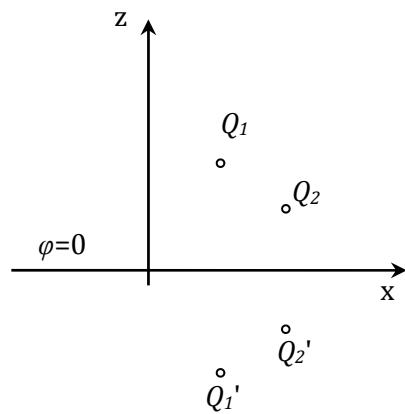
Da bismo odredili kapacitet potrebno je odrediti napon između dviju ljuski:

$$U = \varphi_{R_1} - \varphi_{R_2} = - \int_{R_2}^{R_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_2}^{R_1} \frac{1}{r^2} \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_r dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Konačno kapacitet treba odrediti korištenjem izraza:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)}$$

Primjer 2.7 Dva se točkasta naboјa $Q_1 = 1\text{nC}$ i $Q_2 = 2\text{nC}$ nalaze u točkama $T_1 (1\text{m}; 0; 2\text{m})$ i $T_2 (2\text{m}; 0; 1\text{m})$ iznad uzemljene vodljive plohe postavljene u ravninu $z=0$, prema slici. Odredite omjer potencijala $\frac{\varphi_A}{\varphi_B}$ u točkama A ($2\text{m}; 3\text{m}; 5\text{m}$) i B ($3\text{m}; 0; 0,5\text{m}$).



Slika 2.15 Odslikavanje točkastih naboјa

Naboјi Q_1 i Q_2 se prema slici 2.15 odslikavaju u Q_1' i Q_2' koji se nalaze na istoj udaljenosti od ravnine $z=0$ i suprotnog su predznaka:

$$Q_1'(1\text{m}; 0; -2\text{m}) = -1\text{nC},$$

$$Q_2'(2\text{m}; 0; -1\text{m}) = -2\text{nC},$$

Ukupni potencijal u točkama A i B zbroj je doprinosa originalnih i odslikanih naboja.

Radijvektori naboja i točaka A i B su:

$$\mathbf{r}_{Q_1} = \mathbf{a}_x + 2 \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{r}_{Q_2} = 2\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{r}_{Q_1'} = \mathbf{a}_x - 2 \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{r}_{Q_2'} = 2\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{r}_A = 2\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_y + 5 \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{r}_B = 3\mathbf{a}_x + 0,5 \mathbf{a}_z$$

Potencijal točke A može se dobiti koristeći princip superpozicije i izraz za potencijal točkastog naboja $\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$:

$$\varphi_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_{Q_1}|} + \frac{Q_2}{|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_{Q_2}|} + \frac{Q_1'}{|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_{Q_1'}|} + \frac{Q_2'}{|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_{Q_2'}|} \right) = 1,81 \text{ V}$$

Potencijal točke B je:

$$\varphi_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{|\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_{Q_1}|} + \frac{Q_2}{|\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_{Q_2}|} + \frac{Q_1'}{|\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_{Q_1'}|} + \frac{Q_2'}{|\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_{Q_2'}|} \right) = 6,89 \text{ V}$$

Omjer potencijala je:

$$\frac{\varphi_A}{\varphi_B} = 0,26$$

Primjer 2.8 Odredite jakost električnog polja u točki A za geometriju iz Primjera 2.7.

Električno polje računamo prema:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{a}_R = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \mathbf{R}$$

Koristeći izraze za radijvektore iz Primjera 2.7 vrijedi:

$$\mathbf{E}_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_{Q_1}|^3} (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_{Q_1}) + \frac{Q_2}{|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_{Q_2}|^3} (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_{Q_2}) + \frac{Q_1'}{|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_{Q_1'}|^3} (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_{Q_1'}) + \frac{Q_2'}{|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_{Q_2'}|^3} (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_{Q_2'}) \right)$$

$$\mathbf{E}_A = 0,09 \mathbf{a}_x + 0,52 \mathbf{a}_y + 0,40 \mathbf{a}_z \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

$$E_A = 0,66 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Primjer 2.9 Neka je u prostoru zadano električno polje:

$$\mathbf{E} = y \mathbf{a}_y \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Odredite rad električne sile koji se obavi pri pomicanju jediničnog pozitivnog naboja iz točke $(0; 0; 0)$ do točke $(1\text{m}; 1\text{m}; 0)$ po paraboličnoj putanji $y = x^2, z = 0$.

Diferencijalni dio puta $d\mathbf{l}$ jednak je:

$$d\mathbf{l} = dx \mathbf{a}_x + dy \mathbf{a}_y = dx \mathbf{a}_x + \frac{d}{dx}(x^2) dx \mathbf{a}_y = dx \mathbf{a}_x + 2x dx \mathbf{a}_y$$

Potrebno je od točke $(0; 0; 0)$ do točke $(1\text{m}; 1\text{m}; 0)$ izračunati krivuljni integral:

$$\int_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

Vrijedi:

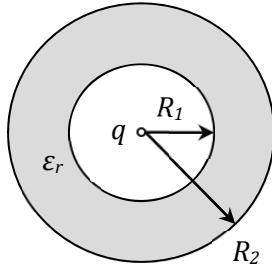
$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = y \mathbf{a}_y \cdot (dx \mathbf{a}_x + 2x dx \mathbf{a}_y) = 2xy dx = 2x \cdot x^2 dx = 2x^3 dx$$

Rad pri premještanju naboja iz točke $(0; 0; 0)$ u točku $(1\text{m}; 1\text{m}; 0)$ je:

$$W = e \int_{(0,0,0)}^{(1,1,0)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = e \int_{(0,0,0)}^{(1,1,0)} 2x^3 dx = e \frac{2x^4}{4} \Big|_{x=0}^1$$

$$W = 8 \cdot 10^{-20} \text{J}$$

Primjer 2.10 Neka se u središtu sferne dielektrične ljske unutrašnjeg radijusa R_1 i vanjskog radijusa R_2 nalazi točkasti naboј iznosa $q=3\text{nC}$. Odredite vektor polarizacije \mathbf{P} u dielektriku relativne dielektričnosti $\epsilon_r = 2,2$.



Slika 2.16 Točkasti naboј unutar dielektrične ljske

Električna polarizacija u dielektriku dobiva se iz jednadžbe:

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \epsilon_0 \mathbf{E}$$

Jakost električnog polja \mathbf{E} i vektor gustoće električnog toka \mathbf{D} u dielektriku su za centralno simetrični slučaj određeni u primjeru 2.4:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2} \mathbf{a}_r, \quad R_1 < r < R_2$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \epsilon_0 \mathbf{E} = \frac{q}{4\pi r^2} \mathbf{a}_r - \frac{q}{4\pi\epsilon_r r^2} \mathbf{a}_r = \frac{q}{4\pi r^2} \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \mathbf{a}_r$$

$$\mathbf{P} = \frac{1,3 \cdot 10^{-10}}{r^2} \mathbf{a}_r$$

2.11 Zadaci za vježbu

- 2.1 Dva beskonačno duga linijska naboja s jednoliko raspodijeljenom gustoćom iznosa 2nC/m leže u ravnini $x=0$ paralelno s osi z , na lokacijama $y_1=+3\text{m}$ i $y_2=-3\text{m}$. Odredite jakost električnog polja točki $(5\text{m}; 0; 10\text{m})$.

Rj. $10,57 \text{ V/m}$

- 2.2 Naboј plošne gustoće $\sigma=5 \cdot 10^{-4} \text{ C/m}^2$ raspoređen je na kružnom disku radijusa 5m . Odredite jakost električnog polja na osi diska u točki udaljenoj 4m od ravnine na kojoj leži disk.

Rj. $5,51 \text{ MV/m}$

- 2.3 Odredite električni tok kroz sferu radijusa 3m, ako ona obuhvaća naboј gustoće $\rho=5\sin^2(\alpha)r^{-2}$ [C/m³], koji se nalazi između dvije koncentrične sfere radijusa $R_1=1$ m i $R_2=2$ m.
Rj. 31,42 C
- 2.4 Ukupni naboј 30nC raspoređen je jednoliko po disku radijusa 1m. Odredite potencijal u točki na osi diska 2m udaljenoj od ravnine diska.
Rj. 127,03 V
- 2.5 Na točkasti naboј iznosa $q_1=300$ nC, koji se nalazi u točki (1m; -1m; 3m), djeluje sila $\mathbf{F}=8\mathbf{a}_x-8\mathbf{a}_y-4\mathbf{a}_z$ [mN], uzrokovana naboјem q_2 u točki (3m; -3m; 2m). Odredite q_2 .
Rj. -40,05 μC
- 2.6 Naboј jednolike gustoće 0,3 nC/m² raspoređen je po ravnini zadanoj jednadžbom $2x-3y+z = 6$ [m]. Odredite x komponentu jakosti električnog polja u ishodištu.
Rj. -9,05 V/m
- 2.7 Za zadani vektor gustoće električnog toka $\mathbf{D}=10x^3 \mathbf{a}_x$ Cm⁻² odredite električni tok koji prolazi površinom 2m² okomitom na x os, na x = 2m.
Rj. 160 C
- 2.8 U cilindričnom koordinatnom sustavu jakost električnog polja zadana je u obliku $\mathbf{E}=5r^2 \mathbf{a}_r$ V/m za $0 < r \leq 2$ m i $\mathbf{E}=2.5r^{-1} \mathbf{a}_r$ V/m za $r > 2$ m. Odredite razliku potencijala U_{AB} između točaka A(1m; 0; 0) i B(4m; 0; 0), pri čemu je točka zadana u obliku (r; α; z).
Rj. 4,23 V
- 2.9 Osam jednakih naboјa iznosa 100nC svaki, postavljeni su na kružnicu radijusa 5m tako da su međusobno jednakim razdaljama. Odredite silu na naboј iznosa 20nC, smješten u točki na osi kružnice, koji je od ravnine kružnice udaljen 2m.
Rj. 1,84 μN
- 2.10 Linijski naboј gustoće 5nCm⁻¹ leži na x osi. Odredite y komponentu vektora gustoće električnog toka u točki (3m; 3m; 1m).
Rj. 0,239 nCm⁻²
- 2.11 Četiri jednakih naboјa iznosa $Q=20$ nC svaki, nalaze se u točkama (-4m; 0; 0), (4m; 0; 0), (0; 4m; 0) i (0; -4m; 0). Odredite iznos sile na naboј iznosa 100nC smješten u točki (0; 0; 3m).
Rj. 1,73 μN

2.12 Naboј linijske gustoće 30 nC/m raspoređen je po z osi od $z = -8 \text{ m}$ do $-\infty$ i od $z=8\text{m}$ do $+\infty$. Odredite jakost električnog polja u točki $(3\text{m}; 0; 0)$.

Rj. $11,45 \text{ V/m}$

2.13 Naboј linijske gustoće 1nCm^{-1} je jednoliko raspoređen po rubovima kvadrata koji je zadan vrhovima $(3\text{m}; -3\text{m}; 0)$, $(3\text{m}; 3\text{m}; 0)$, $(-3\text{m}; 3\text{m}; 0)$, $(-3\text{m}; -3\text{m}; 0)$. Odredite potencijal u točki $(0; 0; 5\text{m})$.

Rj. $35,53 \text{ V}$

2.14 Naboј plošne gustoće $\sigma=10^{-9}\cos^2\alpha \text{ C/m}^2$ raspoređen je po kružnom disku radijusa 4m . Odredite jakost električnog polja u točki na osi diska udaljenoj od diska 2m .

Rj. $15,61 \text{ V/m}$

2.15 U sfernem koordinatnom sustavu postoji polje $\mathbf{E}=-16r^2\mathbf{a}_r \text{ V/m}$. Odredite napon U_{AB} između točaka A $(2\text{m}; \pi; \pi/2)$ i B $(4\text{m}; 0; \pi)$, pri čemu su točke zadane kao $(r; \theta; \alpha)$.

Rj. -4 V

2.16 Tri naboja iznosa 10nC svaki nalaze se u točkama $(0; 0; 0)$, $(1\text{m}; 0; 0)$ i $(1\text{m}; 1\text{m}; 1\text{m})$. Odredite iznos sile na naboј $q_2= 20\text{nC}$ smješten u točki $(0; 0; 1\text{m})$.

Rj. $2,82 \mu\text{N}$

2.17 Linijski naboј jednoliko je raspoređen po pravcu i leži na x osi Kartezijskog koordinatnog sustava. Odredite postotni dio električnog toka koji prolazi dijelom ravnine $y=6\text{m}$ za $-1\text{m} \leq z \leq 1\text{m}$.

Rj. $5,26\%$

2.18 Točkasti naboј iznosa 18nC smješten je u ishodište sfernog koordinatnog sustava. Odredite tok koji prolazi površinom $4\pi\text{m}^2$ koncentrične sfere radijusa 3m .

Rj. 2 nC

2.19 Naboј plošne gustoće $\sigma=3(x^2+y^2+1)^{3/2} \text{ [nC/m}^2]$ raspoređen je po pravokutniku $-2 \leq x \leq 2$, $-2 \leq y \leq 2 \text{ [m]}$ u ravnini $z=0$. Odredite jakost električnog polja u točki $(0; 0; 1\text{m})$.

Rj. $431,41 \text{ V/m}$

2.20 Za zadanu funkciju linijske gustoće naboja $\lambda(x,y,z)=x+3y-z \text{ [C/m]}$, odredite ukupni naboј na dužini od $(2\text{m}; 1\text{m}; 2\text{m})$ do $(4\text{m}; 4\text{m}; 5\text{m})$.

Rj. $32,8\text{C}$

2.21 Linijski naboј gustoće $0,1 \mu\text{C/m}$ paralelan je s osi z i prolazi točkom $(3\text{m}; -3\text{m}; 0)$. Odredite jakost električnog polja u točki $(-3\text{m}, 0, 5\text{m})$.

Rj. $-240\mathbf{a}_x+120\mathbf{a}_y \text{ V/m}$

2.22 Ravnina $y=2\text{m}$ nabijena je nabojem površinske gustoće $(1/(100\pi)) \ [\mu\text{C}/\text{m}^2]$. Odredite jakost električnog polja u prostoru.

Rj. $\mathbf{E} = 180 \mathbf{a}_y \text{ V/m}$; $y > 2\text{m}$

$\mathbf{E} = -180 \mathbf{a}_y \text{ V/m}$; $y < 2\text{m}$.

2.23 Beskonačno dugi linijski naboј konstantne linijske gustoće λ leži u z osi. Odredite divergenciju jakosti električnog polja u točki $(1; 1; 1)$.

Rj. 0

2.24 Dva točkasta naboja $Q_a=40 \text{ nC}$ i $Q_b=20\text{nC}$ razmaknuta su na udaljenost od 25cm u slobodnom prostoru. Odredite jakost električnog polja u točki koja je za 15 cm udaljena od Q_a , a za 20 cm udaljena od Q_b .

Rj. $16,62 \text{ kV/m}$

2.25 Unutar sfere radijusa 1m nalazi se naboј gustoće $\rho(r)=1-r^3$. Odredite jakost električnog polja za $r = 3\text{m}$.

Rj. $\frac{1}{54\varepsilon_0}$

2.26 Vektor gustoće električnog toka zadan je jednadžbom u sfernom koordinatnom

sustavu: $D_r = \begin{cases} \frac{5r^2}{4} & r \leq 2 \\ \frac{20}{r^2} & r > 2 \end{cases}$. Odredite gustoću naboja u prostoru.

Rj. $\rho = \begin{cases} 5r & r \leq 2 \\ 0 & r > 2 \end{cases}$

2.27 Unutar sfere radijusa 5m nalazi se naboј gustoće $\rho = 2,4(5 - 2r) \ [\frac{\mu\text{C}}{\text{m}^3}]$. Odredite gustoću električnog toka na udaljenosti 10m od centra sfere.

Rj. $-2,5 \ \mu\text{C}/\text{m}^2$.

2.28 Optičko vlakno nabijeno je nabojem linijske gustoće $|x| \text{ nC/m}$. Ukoliko je segment nabijenog optičkog vlakna postavljen između $(-2\text{m}; 0; 0)$ i $(2\text{m}; 0; 0)$ u Kartezijevom koordinatnom sustavu, odredite potencijal u točki T $(0; 2\text{m}; 0)$.

Rj. $14,89 \text{ V}$

2.29 Odredite jakost električnog polja u točki T iz zadatka 2.28.

Rj. $5,26 \text{ V/m}$.

2.30 Električno je polje zadano izrazom $\mathbf{E} = 4x \mathbf{a}_x + 2 \mathbf{a}_y \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right]$. Odredite rad potreban za pomicanje jediničnog pozitivnog naboja po krivulji $x \cdot y = 4$ od točke $(2\text{m}; 2\text{m})$ do točke $(4\text{m}; 1\text{m})$.

Rj. 22 eV

2.31 Šuplja sfera nabijena je nabojem gustoće σ . Odredite jakost električnog polja na udaljenosti $r > R$ od sfere, pri čemu je R radijus sfere.

$$\text{Rj. } \mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \mathbf{a}_r$$

2.32 Odredite raspodjelu potencijala za sferu iz zadatka 2.31.

$$\text{Rj. } \varphi = \begin{cases} \frac{\sigma R^2}{\epsilon r} & r > R \\ \frac{\sigma R}{\epsilon} & r < R \end{cases}$$

2.33 Beskonačno dugački cilindar radijusa 1m ispunjen je nabojem gustoće ρ . Ako je potencijal na površini cilindra $\varphi_0 = 1V$, odredite raspodjelu potencijala unutar cilindra.

$$\text{Rj. } \varphi = 1 + \frac{\rho}{4\epsilon} (1 - r^2)$$

2.34 Naboј linijske gustoće $5 \mu\text{C}/\text{m}$ leži na z osi cilindričnog koordinatnog sustava. Odredite razliku potencijala između točaka A (1 m; π ; 4 m) i B (3m; π ; 4 m).

$$\text{Rj. } U_{BA} = -98,74 \text{ kV}$$

2.35 Za zadanu funkciju potencijala $\varphi = x + y$ [V] u slobodnom prostoru odredite energiju pohranjenu u kocki $0 \leq x, y, z \leq 1\text{m}$.

$$\text{Rj. } \frac{10^{-9}}{36\pi} \text{ J}$$

2.36 Električno polje između dva suosna cilindrična vodiča radijusa $R_1=1 \text{ cm}$ i $R_2=3 \text{ cm}$ zadano je izrazom $\mathbf{E} = \frac{10^5}{r} \mathbf{a}_r$ [$\frac{\text{V}}{\text{m}}$]. Odredite energiju pohranjenu u 1m dužine vodiča.

$$\text{Rj. } 0,3 \text{ J}$$

2.37 U prostoru je jakost električnog polja zadana u cilindričnom koordinatnom sustavu jednadžbom $\mathbf{E} = -e^{-\frac{r}{a}} \mathbf{a}_r$. Odredite energiju pohranjenu u volumenu određenom s $0 \leq r \leq a$, $0 \leq z \leq 3a$.

$$\text{Rj. } 1,24 \cdot 10^{-11} a^3$$

2.38 Za zadanu funkciju potencijala $\varphi = 3x^2 + 4y^2$ [V] u slobodnom prostoru odredite energiju pohranjenu u dijelu prostora $1 \leq x, y, z \leq 3\text{m}$.

$$\text{Rj. } 15,3 \text{ nJ}$$

2.39 Uz zadano električno polje $\mathbf{E}_1 = \mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z$ [V/m] u materijalu (1), dielektričnosti $\epsilon_{r1} = 2$, koji se nalazi u prostoru $z > 0$, odredite jakost električnog polja u materijalu 2, u prostoru $z < 0$, dielektričnosti $\epsilon_{r2} = 5$.

$$\text{Rj. } \mathbf{E}_2 = \mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z \text{ [V/m]}$$

2.40 Odredite kuteve θ_1 i θ_2 koje vektori iz zadatka 2.39. E_1 i E_2 zatvaraju s ravninom xy .

$$\text{Rj. } \theta_1 = 65,9^\circ; \theta_2 = 41,8^\circ$$

2.41 Odredite polarizaciju P u dielektriku relativne dielektričnosti $\epsilon_r = 3,2$ ako je iznos vektora električne indukcije $D = 2 \cdot 10^{-6} \mathbf{a}_x \left[\frac{\text{C}}{\text{m}^2} \right]$.

$$\text{Rj. } P = 1,375 \cdot 10^{-6} \mathbf{a}_x \left[\frac{\text{C}}{\text{m}^2} \right]$$

2.42 Granica dielektrika i slobodnog prostora određena je jednadžbom $3x + 2y + 3z = 12$. Ako je u području u kojem se nalazi ishodište relativne dielektričnosti $\epsilon_r = 3$, zadana jakost električnog polja $E_1 = 2\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_z$ [V/m], odredite jakost električnog polja u slobodnom prostoru.

$$\text{Rj. } E_2 = 5,27\mathbf{a}_x + 2,18\mathbf{a}_y + 5,27\mathbf{a}_z \text{ [V/m]}$$

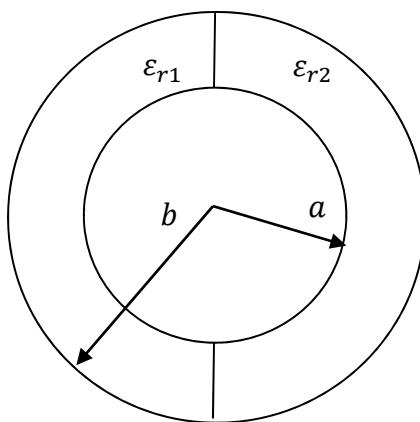
2.43 Granica dva dielektrika dana je jednadžbom $3x + z = 5$. Na strani u kojoj se nalazi ishodište je električna indukcija $D_1 = (\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_z) \cdot 10^{-7}$ [C/m²] i $\epsilon_{r1} = 4,3$, dok je za drugi dielektrik $\epsilon_{r2} = 1,8$. Odredite iznos vektora D_2 .

$$\text{Rj. } D_2 = 1,3 \cdot 10^{-7} \text{ [C/m}^2\text{]}$$

2.44 Ploče kondenzatora su u cilindričnom koordinatnom sustavu zadane s $r_1 \leq r \leq r_2$ i $0 \leq z \leq Z$. Ako je kut između ploča $\alpha = 5^\circ$, a relativna dielektričnost ϵ_r odredite kapacitet kondenzatora.

$$\text{Rj. } C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r Z}{\alpha[\text{rad}]} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

2.45 Cilindrični kondenzator sadrži dva dielektrika $\epsilon_{r1} = 1,3$ i $\epsilon_{r2} = 3,7$ od kojih svaki zauzima polovicu volumena između ploča kondenzatora kao na slici. Ukoliko je potrebno zamijeniti dielektrike samo jednim nadomjesnim dielektrikom tako da kapacitet ostane jednak, odredite relativnu dielektričnost nadomjesnog dielektrika.



$$\text{Rj. } \epsilon_{r3} = 2,5$$

2.46 Odredite funkciju potencijala za prostor između dva suosna metalna cilindra, unutrašnjeg radijusa 1mm, na potencijalu $\varphi_u = 0$, i vanjskog radijusa 20 mm, koji je na potencijalu $\varphi_v = 10V$.

$$\text{Rj. } \varphi = 3,3 \ln(r) + 23 \text{ [V]}$$

2.47 Odredite jakost električnog polja za zadatak 2.46.

$$\text{Rj. } \mathbf{E} = \frac{3,3}{r} (-\mathbf{a}_r) \left[\frac{V}{m} \right]$$

2.48 Za kuglasti kondenzator zadani su unutrašnji radijus 20 cm, na potencijalu $\varphi_u = 0$, i vanjski radijus 2 m, koji je na potencijalu $\varphi_v = 100V$. Odredite funkciju potencijala u prostoru između elektroda.

$$\text{Rj. } \varphi = \frac{-22,2}{r} + 111,11 \text{ [V]}$$

2.49 Odredite električnu indukciju u prostoru između elektroda prema zadatku 2.48.

$$\text{Rj. } \mathbf{D} = \frac{-1,97 \cdot 10^{-10}}{r^2} \mathbf{a}_r \left[\frac{C}{m^2} \right]$$

2.50 Vodljive ravnine zadane su u cilindričnom koordinatnom sustavu s $\alpha = 0$, na kojoj je potencijal 0 V i $\alpha = 10^\circ$ na kojoj je potencijal 100V. Ukoliko je u prostoru između ravnina relativna dielektričnost $\varepsilon_r = 2$, odredite električnu indukciju u prostoru između ravnina.

$$\text{Rj. } \mathbf{D} = \frac{-10,1}{r} \mathbf{a}_\alpha \left[\frac{nC}{m^2} \right]$$

2.51 Dva suosna metalna cilindra nalaze se u slobodnom prostoru. Radijus unutrašnjeg vodiča, koji je uzemljen je 5mm, a vanjskog vodiča, koji je na potencijalu φ_0 je 30 mm. Ako je jakost električnog polja $\mathbf{E} = -4 \cdot 10^3 \mathbf{a}_r \left[\frac{V}{m} \right]$ na udaljenosti 15mm od osi, odredite φ_0 .

$$\text{Rj. } \varphi_0 = 107,5 \text{ V}$$

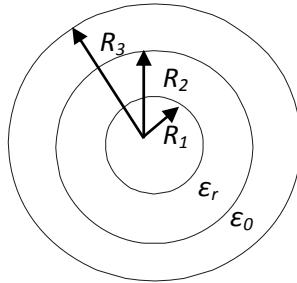
2.52 Odredite gustoću naboja na vanjskom vodiču za zadatak 2.51.

$$\text{Rj. } \sigma = 17,7 \text{ nC/m}^2$$

2.53 Dvoslojni kuglasti kondenzator radijusa unutrašnje elektrode $R_1 = 8\text{cm}$ i radijusa vanjske elektrode $R_3 = 24\text{cm}$, prikazan je slikom. Unutrašnja elektroda nabijena je nabojem $+Q$, a vanjska nabojem $-Q$. U prostoru između elektroda za $8\text{cm} \leq r \leq 16\text{ cm}$, nalazi se dielektrik relativne dielektričnosti $\varepsilon_r = 4$, a u prostoru $16\text{cm} \leq r \leq 24\text{ cm}$ nalazi se zrak. Zadano je $Q=15 \text{ nC}$.

a) Odredite jakost električnog polja na udaljenosti 14cm od ishodišta.

$$\text{Rj. } 1720 \text{ V/m}$$



- b) Odredite jakost električnog polja na udaljenosti 18 cm od ishodišta.

Rj. 4161 V/m

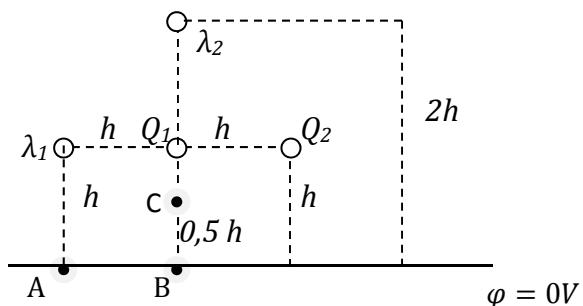
- c) Odredite vektor polarizacije \mathbf{P} na vanjskoj površini dielektrika.

Rj. 35 nC/m²

- d) Odredite ukupni polarizirani naboj na vanjskoj površini dielektrika.

Rj. 11,3 nC.

2.54 Točkasti i linijski naboji nalaze se iznad beskonačno velike metalne plohe na potencijalu $\varphi = 0V$ prema slici. Zadano je $h=3m$, $Q_1=20\text{nC}$, $Q_2=-40\text{nC}$, $\lambda_1=45 \text{ nC/m}$ i $\lambda_2=-10 \text{ nC/m}$.



- a) Odredite jakost električnog polja u točki A.

Rj. 498 V/m

- b) Odredite jakost električnog polja u točki B.

Rj. 221 V/m

- c) Odredite potencijal točke C koja se nalazi na polovini udaljenosti od točke B do naboja Q_1 .

Rj. 334 V

- d) Odredite iznos rada koji je potrebno napraviti za pomicanje točkastog naboja $Q=15 \text{ pC}$ od točke A do točke C.

Rj. 5 nJ

2.55 U prostoru je u Kartezijevom koordinatnom sustavu zadana jakost električnog polja jednadžbom $\mathbf{E} = A \cos(k \cdot x) \cos(k \cdot y) \mathbf{a}_x + \sin(k \cdot x) \sin(k \cdot y) \mathbf{a}_y$. Konstanta $k = 2 \text{ rad/m}$.

- a) Odredite jakost električnog polja u točki (1; 2; 3).

Rj. 740 mV/m

- b) Odredite gustoću slobodnog naboja u točki (1; 2; 4).

Rj. -21 pC/m³

- c) Odredite tok vektora električne indukcije \mathbf{D} kroz kocku određenu koordinatama prostorne dijagonale (1; 1; 1) i (3; 3; 3).

Rj. 29 pC

- d) Odredite $\nabla \times \mathbf{E}$ u točki (2; 1; 2).

Rj. 0

2.56 Granica dva dielektrika relativne dielektričnosti $\epsilon_{r1}=3$ i $\epsilon_{r2}=2$ zadana je jednadžbom $2x + 4y + z = 17$. Dio prostora koji sadrži ishodište je relativne dielektričnosti ϵ_{r1} . Jakost električnog polja u prostoru 1 je $\mathbf{E}_1 = -2\mathbf{a}_x - 1\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$ [V/m].

- a) Odredite vektor električne indukcije u sredstvu 2 u smjeru x , D_{2x} .

Rj. -40,5 pC/m²

- b) Odredite vektor električne indukcije u sredstvu 2 u smjeru y , D_{2y} .

Rj. -27,8 pC/m²

- c) Odredite vektor električne indukcije u sredstvu 2 u smjeru z , D_{2z} .

Rj. 32,9 pC/m²

- d) Odredite napon U_{AB} između točaka A (0,0,0) i B (1,0,0).

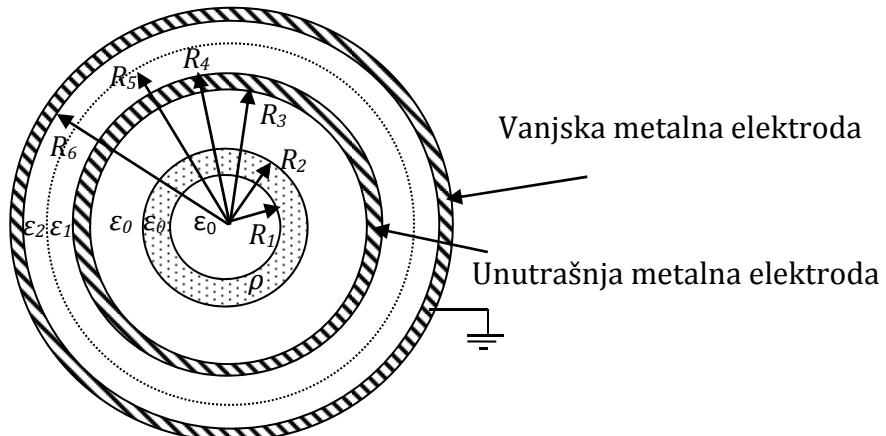
Rj. -2V

2.57 Cilindrični kondenzator s dva sloja dielektrika prikazan je slikom. U prostoru $r < R_3$ se gustoća naboja mijenja prema izrazu:

$$\rho = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \frac{1}{r^4 + 81} & R_1 \leq r \leq R_2 \\ 0 & r > R_2 \end{cases} \quad [\frac{\text{C}}{\text{m}^3}]$$

Vanjska je metalna elektroda uzemljena. Zadano je $\epsilon_{r1}=4$, $\epsilon_{r2}=2$, $R_1=1$ cm, $R_2=3$ cm, $R_3=4.5$ cm, $R_4=5$ cm, $R_5=10$ cm, $R_6=20$ cm.

- a) Odredite jakost električnog polja u prostoru dielektričnosti ϵ_{r1} na udaljenosti 9 cm od osi kondenzatora.



Rj. 1550 kV/m

- b) Odredite vektor polarizacije u prostoru dielektričnosti ϵ_{r2} na udaljenosti 12 cm od osi kondenzatora.

Rj. $20,6 \mu\text{C}/\text{m}^2$

- c) Odredite energiju po jedinici duljine kondenzatora određenog s unutrašnjom i vanjskom metalnom elektrodom, te slojevima dielektrika ϵ_1 i ϵ_2 .

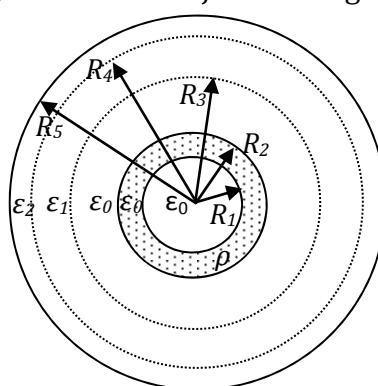
Rj. $4,5 \text{ J}/\text{m}$

- d) Odredite kapacitet po jedinici duljine kondenzatora određenog s unutrašnjom i vanjskom metalnom elektrodom, te slojevima dielektrika ϵ_1 i ϵ_2 .

Rj. $107 \text{ pF}/\text{m}$

2.58 Između sfernih ljuški polumjera R_1 i R_2 nalazi se naboј volumne gustoće ρ određene jednadžbom:

$$\rho = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \frac{10^{-6}}{r+1} & R_1 \leq r \leq R_2 \\ 0 & r > R_2 \end{cases} \quad [\frac{\text{C}}{\text{m}^3}].$$



Zadano je $\epsilon_{r1}=4$, $\epsilon_{r2}=2$, $R_1=1$ cm, $R_2=3$ cm, $R_3=4.5$ cm, $R_4=10$ cm, $R_5=14$ cm.

- a) Odredite jakost električnog polja u točki udaljenoj za 2cm od središta sfere.

Rj. 648,4 V/m

- b) Odredite iznos električne indukcije u točki udaljenoj za 4cm od središta sfere.

Rj. 5,3 nC/m²

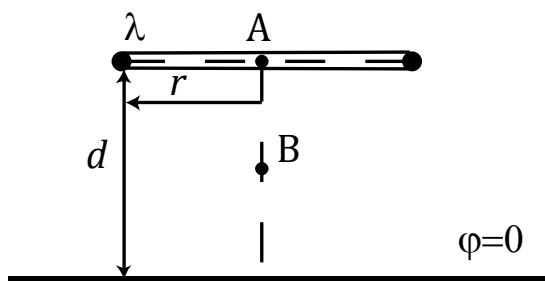
- c) Odredite iznos električne polarizacije u točki udaljenoj za 13cm od središta sfere.

Rj. 251 pC/m²

- d) Odredite energiju pohranjenu u elektrostatskom polju u dijelu volumena između R_2 i R_3 .

Rj. 0,57 nJ

2.59 Na udaljenosti $d=1\text{m}$ od uzemljene metalne ravnine nalazi se prsten zanemarivog poprečnog presjeka, polumjera $r=0,5\text{m}$ nabijen nabojem $\lambda=17 \text{ nC/m}$ prema slici.



- a) Odredite iznos jakosti električnog polja u točki A u središtu prstena.

Rj. 109,6 V/m

- b) Odredite iznos jakosti električnog polja u točki B na osi prstena na udaljenosti 0,5m od ravnine.

Rj. 861 V/m

- c) Odredite iznos rada koji je potrebno utrošiti da se proton iz beskonačnosti dovede u točku A.

Rj. $1,16 \cdot 10^{-16} \text{ J}$

2.60 U cilindričnom koordinatnom sustavu raspodjela naboja u slobodnom prostoru zadana je s:

$$\rho = \begin{cases} 0 & r < 0,5\text{m} \\ \frac{10^{-9}}{r^4} & 0,5\text{m} \leq r \leq 1\text{m} \\ \frac{10^{-9}}{r^3} & 1\text{m} \leq r \leq 2\text{m} \end{cases} \quad \left[\frac{\text{C}}{\text{m}^3} \right]$$

Točka referentnog potencijala nalazi se na polumjeru 10m, $\varphi(r = 10\text{m}) = 0$.

- a) Odredite potencijal u točki (3m; 0; 0)

Rj. 272 V

- b) Odredite jakost električnog polja u točki (1,4m; 0; 0).

Rj. 144,1 V/m

- c) Odredite jakost električnog polja u točki (0,7m; 0; 0).

Rj. 158,1 V/m

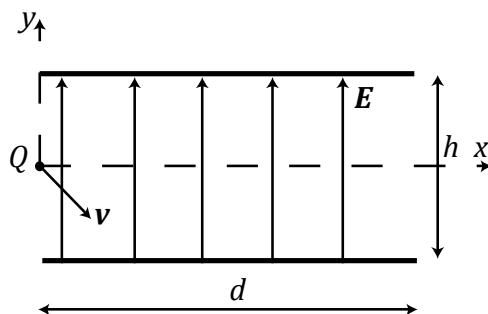
- d) Odredite potencijal u ishodištu (0; 0; 0).

Rj. 574,7 V

2.61 Pozitivni točkasti naboj Q mase $m = 10^{-12} \text{ kg}$ upada početnom brzinom

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}_x - \boldsymbol{a}_y \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

prema slici u područje između ploča pločastog kondenzatora unutar kojeg vlada homogeno električno polje iznosa $E = 2 \frac{\text{V}}{\text{m}}$. Zadano je: $d=0,01\text{m}$, $h=0,2\text{m}$, $Q=1\text{nC}$. Gravitacijsku silu zanemariti.



- a) Odredite iznos brzine na izlazu iz kondenzatora.

Rj. 19 m/s

- b) Odredite minimalnu koordinatu u smjeru osi y, y_{\min} koju će doseći naboj.

Rj. -0,25mm

- c) Odredite trenutak u kojem je dosegnuta minimalna koordinata $y = y_{\min}$.

Rj. 0,5ms

- d) Odredite y koordinatu naboja pri izlazu iz kondenzatora y_{\min} .

Rj. 9cm

3. Magnetostatika

3.1 Osnovne veličine statičkog magnetskog polja

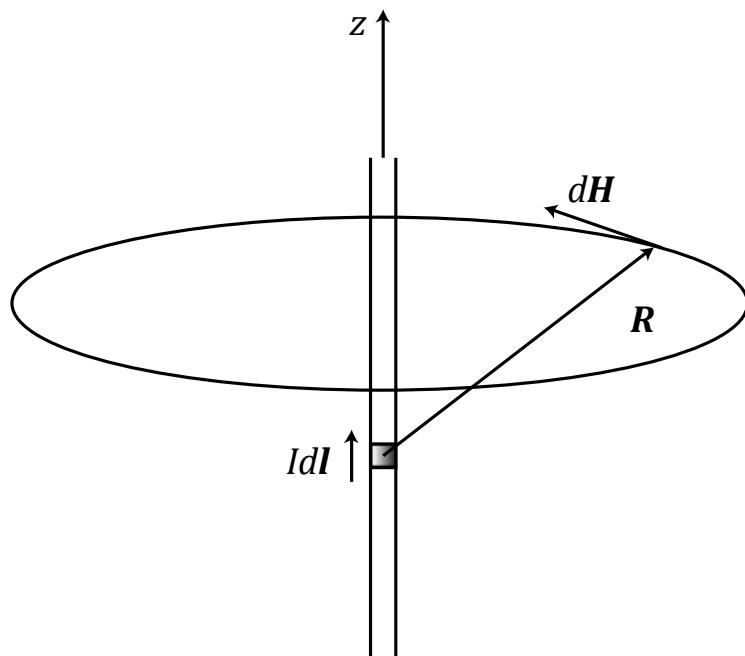
Izvori statičkog magnetskog polja su struje nepromjenjive u vremenu i permanentni magneti. U Tablici 3.1 nalazi se podsjetnik važnijih veličina u statičkom magnetskom polju i njihovih iznosa ukoliko je riječ o konstantama.

Oznaka	Veličina	Mjerna jedinica
μ_0	Permeabilnost vakuum-a	$4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$
μ_r	Relativna permeabilnost	1
κ	Električna provodnost	S/m
I	Jakost struje	A
K	Plošna gustoća struje	A/m
J	Gustoća struje	A/m ²
R	Električni otpor	Ω
H	Jakost magnetskog polja	A/m
B	Magnetska indukcija	T
L	Induktivitet	H
M	Međuinduktivitet	H
A	Vektorski magnetski potencijal	V
Φ_m	Magnetski tok	Tm ²
R_m	Magnetski otpor	A/(V·s)
U	Napon	V

Tablica 3.1 Važnije veličine u statičkom magnetskom polju

3.2 Biot-Savartov zakon

Diferencijalni dio jakosti magnetskog polja dH , rezultat je djelovanja diferencijalnog dijela strujnice $I \cdot dl$ koji je udaljen za udaljenost R od točke u kojoj se računa jakost magnetskog polja. Jakost magnetskog polja opada s kvadratom udaljenosti od elementa strujnice, a smjer je magnetskog polja određen vektorskim produktom $dl \times R$ (Slika 3.1)

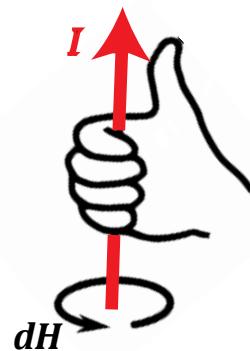


Slika 3.1 Smjer diferencijalnog dijela jakosti magnetskog polja uslijed strujnog elementa $I \cdot dl$.

Iznos diferencijalnog dijela jakosti magnetskog polja $d\mathbf{H}$, uslijed djelovanja diferencijalnog dijela strujnice $I \cdot dl$ na udaljenosti R određen je Biot-Savartovim zakonom:

$$d\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi} \frac{dl \times \mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} \quad \left[\frac{\text{A}}{\text{m}} \right] \quad (3.2)$$

Smjer djelovanja magnetskog polja određen je vektorskim produktom (Slika 3.2). Obuhvatimo li prstima desne ruke vodič kroz koji protječe struja, tako da palac pokazuje smjer struje, prsti nam pokazuju smjer polja.



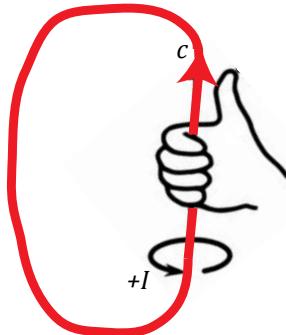
Slika 3.2 Pravilo desne ruke za određivanje smjera magnetskog polja

3.3 Ampereov zakon

Linijski integral tangencijalne komponente magnetskog polja po zatvorenoj krivulji c jednak je ukupnoj struji koja protječe površinom unutar krivulje c .

$$\oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I \quad (3.2)$$

Predznak struje određen je pravilom desne ruke, analogno kao kod Biot-Savartovog zakona. Krivulju obilaska c „obuhvatimo“ desnom rukom tako da palac pokazuje smjer obilaska. Smjer prstiju daje nam pozitivan smjer struje I (slika 3.3).



Slika 3.3 Pravilo desne ruke za određivanje smjera struje kod Ampereovog kružnog zakona

Primjenom Stokesovog teorema na izraz za Ampereov kružni zakon uz korištenje jednadžbe:

$$I = \iint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS \quad (3.3)$$

moguće je povezati magnetsko polje \mathbf{H} i gustoću struje \mathbf{J} .

Pri tome \mathbf{J} označava vektor gustoće struje po plohi S obrubljenoj krivuljom c (slika 3.3), a \mathbf{n} jedinični vektor normale na S , određen pravilom desne ruke (iz ravnine crtanja prema slici 3.3).

$$\oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS = \iint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS \quad (3.4)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

3.4 Magnetski tok

Magnetski je tok Φ_m određen integralom okomite komponente vektora gustoće magnetskog toka \mathbf{B} na plohu integracije S :

$$\Phi_m = \iint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS \text{ [Wb]} \quad (3.5)$$

Gustoća magnetskog toka ili magnetska indukcija \mathbf{B} , s jakosti magnetskog polja \mathbf{H} u vakuumu je povezana preko konstante permeabilnosti vakuma μ_0 :

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \text{ [T]} \quad (3.6)$$

U linearnim, izotropnim i homogenim materijalima vrijedi:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (3.7)$$

Permeabilnost materijala μ određena je jednadžbom:

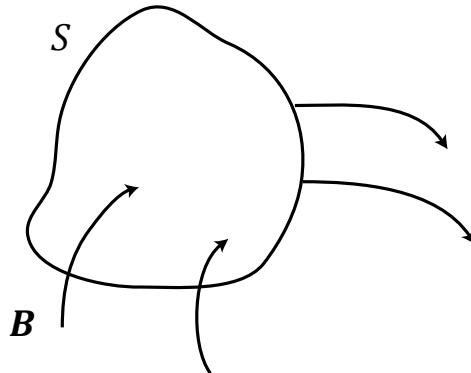
$$\mu = \mu_0 \mu_r. \quad (3.8)$$

Pri tom je μ_r relativna permeabilnost skalarna bezdimenzionalna konstanta.

3.5 Gaussov zakon u magnetskom polju

Integral gustoće magnetskog toka \mathbf{B} po zatvorenoj plohi S jednak je nuli. Silnice magnetskog polja su zatvorene krivulje i nije moguće izolirati magnetski monopolni izvor koji bi odgovarao pozitivnom i negativnom naboju kao izvoru i ponoru kod električnog polja. Broj silnica koje ulaze u zatvorenu plohu jednak je broju silnica koje izlaze iz plohe (slika 3.4).

$$\iint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (3.9)$$



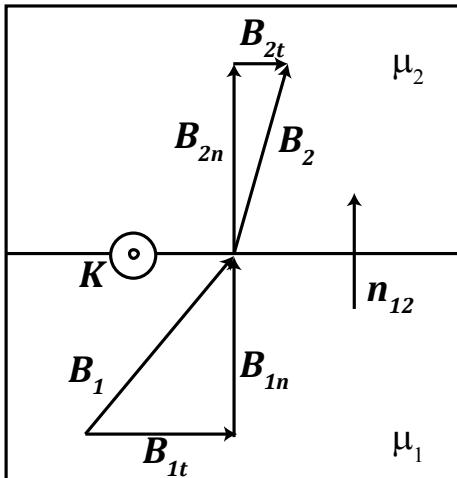
Slika 3.4 Gaussov zakon u magnetskom polju

Diferencijalni oblik Gaussovog zakona je:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.10)$$

3.6 Uvjeti na granici dva magnetska materijala

Na granici dva sredstva permeabilnosti μ_1 i μ_2 , definirana je okomica na granicu \mathbf{n}_{12} prema slici 3.5. U sredstvu 1 magnetska indukcija ima iznos \mathbf{B}_1 , a u sredstvu 2 magnetska indukcija ima iznos \mathbf{B}_2 .



Slika 3.5 Uvjeti na granici dva materijala u magnetskom polju

Za komponente magnetske indukcije okomite na granicu vrijedi:

$$\mathbf{n}_{12} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0, \quad (3.11)$$

odnosno jednostavnije pisano:

$$\mathbf{B}_{1n} = \mathbf{B}_{2n}. \quad (3.12)$$

Za komponente jakosti magnetskog polja tangencijalne na granicu vrijedi:

$$\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K} \quad (3.13)$$

Veličina \mathbf{K} označava strujni oblog slobodnih struja na granici.

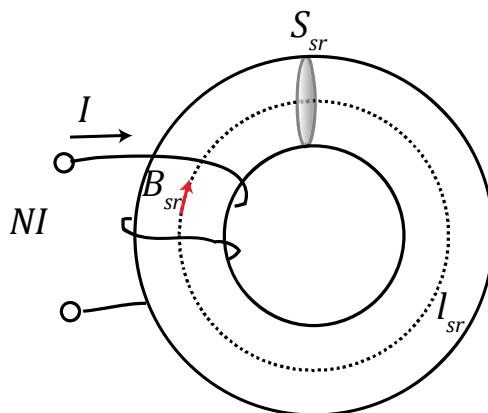
3.7 Magnetski krugovi

Feromagnetski materijal je za magnetsko polje bitno bolji vodič nego slobodni prostor. Pristup rješavanju nekih problema u magnetskim poljima značajno je olakšan primjenom analogije s električnim krugovima. Ukoliko uvedemo pojednostavljenje da je u krugu prema slici 3.6 srednji iznos magnetskog toka jednak umnošku srednje magnetske indukcije B_{sr} i prosječne površine S_{sr} :

$$\Phi_{sr} = B_{sr} \cdot S_{sr} \quad (3.14)$$

i primijenimo Ampereov kružni zakon za srednju jakost magnetskog polja H_{sr} duž srednje duljine kruga l_{sr} , uz uzbudu NI vrijedi:

$$NI = H_{sr} l_{sr} \quad (3.15)$$

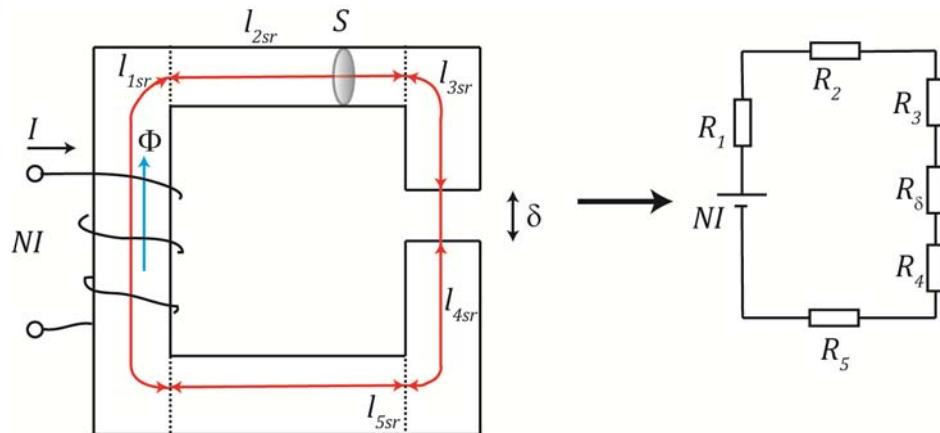


Slika 3.6 Jednostavni magnetski krug

Magnetski je otpor određen s:

$$R_m = \frac{NI}{\Phi_{sr}} = \frac{H_{sr} l_{sr}}{B_{sr} S_{sr}} = \frac{1}{\mu} \frac{l_{sr}}{S_{sr}} \quad (3.16)$$

Za serijski magnetski krug prema slici 3.7 vrijedit će tako analogija s električnim krugom prikazanim na slici.



Slika 3.7 Analogija magnetskog i strujnog kruga

Za serijski krug prema slici 3.7 vrijedi:

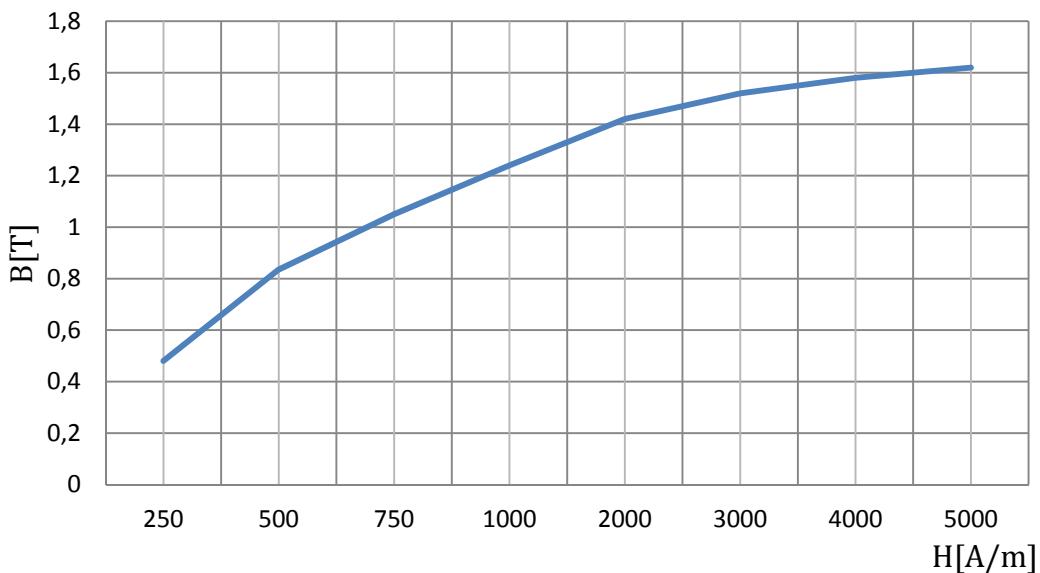
1. Magnetski tok je u svakom dijelu kruga isti:

$$\Phi = B_1 S_1 = B_2 S_2 = B_3 S_3 = B_4 S_4 = B_5 S_5 = B_\delta S_\delta$$

2. Ampereov kružni zakon primjeni se po segmentima:

$$NI = H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_3 l_3 + H_4 l_4 + H_5 l_5 + H_\delta l_\delta$$

Poveznica jakosti magnetskog polja i magnetske indukcije u materijalu je BH krivulja materijala koja može biti zadana tabelarno ili slikom.



Slika 3.8 Po segmentima linearizirana B-H krivulja za čelik

3.8 Vektorski magnetski potencijal

Vektorski magnetski potencijal \mathbf{A} vezan je s magnetskom indukcijom \mathbf{B} diferencijalnom jednadžbom:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (3.17)$$

Uz propisivanje divergencije vektorskog magnetskog potencijala:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (3.18)$$

za statičko magnetsko polje dobije se jednadžba potencijala:

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \quad (3.19)$$

Na granici dvaju sredstava različitih permeabilnosti vektorski magnetski potencijal se ne mijenja:

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2 \quad (3.20)$$

U integralnom obliku je vektorski magnetski potencijal \mathbf{A} prostorne struje plošne gustoće \mathbf{J} u točki određenoj radijvektorom \mathbf{r} :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} dV \quad (3.21)$$

Pritom je R udaljenost od točke \mathbf{r} u kojoj se računa potencijal do točke u kojoj se nalazi strujni element \mathbf{r}' .

$$R = |\mathbf{R}| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$$

Ukoliko je struja približena strujnicom po konturi c , vektorski je potencijal određen s:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_c \frac{l}{R} d\mathbf{l} \quad (3.22)$$

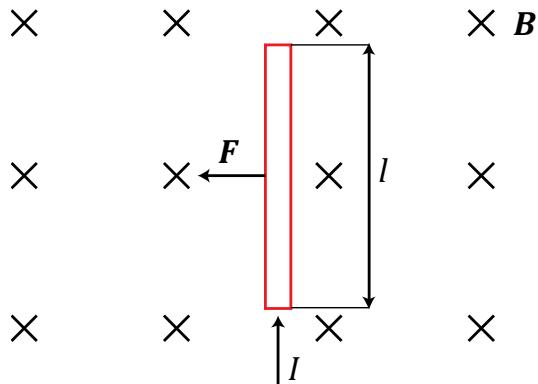
Pri tome je smjer diferencijalnog elementa konture $d\mathbf{l}$ određen smjerom struje.

3.9 Sile u statičkom magnetskom polju

Prepostavimo da u dijelu prostora postoji homogeno magnetsko polje \mathbf{B} i da se u tom dijelu nalazi ravni vodič duljine l , kojim protječe struja I , prema slici 3.9. Sila \mathbf{F} kojom magnetsko polje djeluje na vodič određena je jednadžbom:

$$\mathbf{F} = I(\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \quad (3.23)$$

Vektor \mathbf{l} u gornjoj jednadžbi ima smjer određen smjerom struje, a iznos određen duljinom vodiča l .



Slika 3.9 Sila na vodič u magnetskom polju

Ukoliko polje u dijelu prostora nije homogeno ili vodič nije ravnog oblika potrebno je primijeniti integralnu jednadžbu po konturi vodiča:

$$\mathbf{F} = \int_c I(d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \quad (3.24)$$

Ukoliko je u vodiču u magnetskom polju indukcije \mathbf{B} zadana struja plošne gustoće \mathbf{J} sila na vodič računa se integracijom:

$$F = \int_V \mathbf{J} \times \mathbf{B} dV \quad (3.25)$$

po volumenu V vodiča.

Sila se može računati i iz energije statičkog magnetskog polja.

U izoliranim linearnim sustavima, u kojima je magnetski tok Φ nepromjenjiv, sila u smjeru puta s je:

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{2}\Phi^2 \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{L} \right) \mathbf{a}_s \quad (3.26)$$

U neizoliranim linearnim sustavima, u kojima su struje i nepromjenjive, sila u smjeru puta s je:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2}i^2 \frac{\partial}{\partial s} (L) \mathbf{a}_s \quad (3.27)$$

Ukoliko u linearnim izoliranim sustavima postoje dva kruga sila između krugova je:

$$\mathbf{F} = -\Phi_{12}\Phi_{21} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{M} \right) \mathbf{a}_s \quad (3.28)$$

pri čemu je Φ_{12} magnetski tok petlje 1 obuhvaćen petljom 2, a Φ_{21} magnetski tok petlje 2 obuhvaćen petljom 1.

U neizoliranim linearnim sustavima sila je između dviju petlji kroz koje teku struje:

$$\mathbf{F} = i_1 i_2 \frac{\partial}{\partial s} (M) \mathbf{a}_s \quad (3.29)$$

3.10 Energija statičkog magnetskog polja

Ukoliko u prostoru postoji n strujnih petlji kojima protječu struje i_i energija interakcije petlji pohranjena u magnetskom polju sustava računa se prema:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n i_i \Phi_i \quad (3.30)$$

Φ_i je ukupni tok, odnosno zbroj doprinosa toku svih petlji osim i -te petlje, koji je obuhvaćen i -tom petljom.

Ukupna energija, koja sadrži i energiju interakcije i vlastitu energiju, može se u linearnim sustavima odrediti integracijom umnoška gustoće struje \mathbf{J} i vektorskog magnetskog potencijala \mathbf{A} u volumenu u kojem se nalaze struje:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} dV \quad (3.31)$$

Energija se može izraziti i preko veličina polja:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dV = \frac{1}{2} \mu \int_V H^2 dV = \frac{1}{2\mu} \int_V B^2 dV \quad (3.32)$$

3.11 Proračun induktiviteta

Induktivitet se može u linearnim sustavima računati iz energije pohranjene u statičkom magnetskom polju prema poglavlju 3.10, koristeći uz poznatu struju I u petlji vezu:

$$\begin{aligned} W &= \frac{L \cdot I^2}{2} \\ L &= \frac{2W}{I^2} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Induktivitet se uz poznatu struju I kroz petlju može računati i iz izraza za obuhvaćeni magnetski tok dobiven integracijom po plohi S magnetske indukcije \mathbf{B} :

$$\psi_m = \iint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS \quad (3.34)$$

ili integracijom po konturi c vektorskog magnetskog potencijala:

$$\psi_m = \oint_c \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (3.35)$$

Koristeći jednadžbu:

$$L = \frac{\psi_m}{I}$$

dobije se rješenje za induktivitet iz obuhvaćenog magnetskog toka.

3.12 Proračun međuinduktiviteta

Međuinduktivitet se može računati iz vektorskog magnetskog potencijala petlje c_2 kojom teče struja I_2 .

Obuhvaćeni magnetski tok petlje c_1 uvjetovan strujom kroz petlju c_2 može se računati iz:

$$\psi_{12} = \oint_{c_1} \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{l}_1 \quad (3.36)$$

Međuinduktivitet se računa prema jednadžbi:

$$M = \frac{\psi_{12}}{I_2} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{c_1} \oint_{c_2} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{R} \quad (3.37)$$

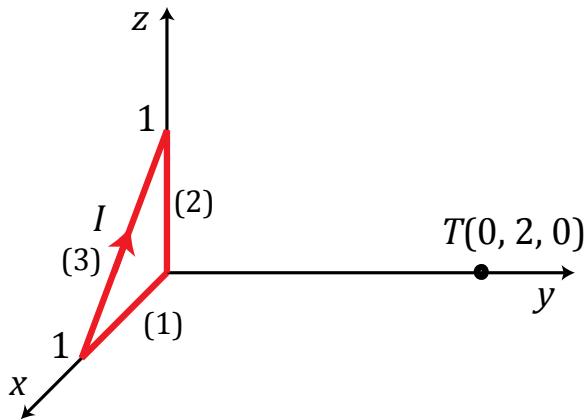
Drugi način je proračun iz integracije magnetske indukcije \mathbf{B}_2 u okolini strujne petlje c_2 po površini plohe S_1 koju zatvara petlja c_1 :

$$\psi_{12} = \iint_{S_1} \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n} dS \quad (3.38)$$

i primjene jednadžbe:

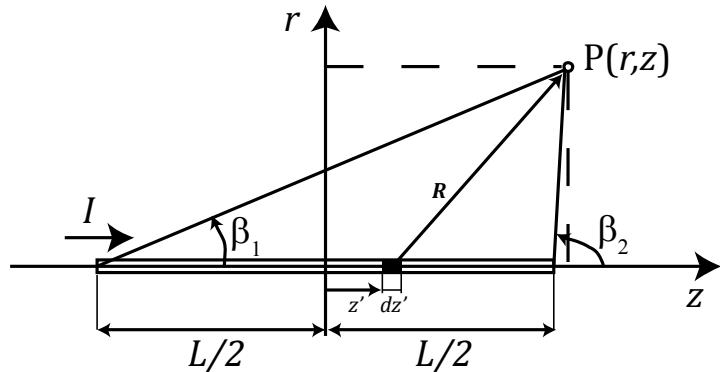
$$M = \frac{\psi_{12}}{I_2} \quad (3.39)$$

Primjer 3.1 Strujnicom prema slici teče struja $I=1\text{A}$. Odredite jakost magnetskog polja u točki T.



Slika 3.10 Strujnica u xz ravnini

Strujnica se sastoji od tri kratka ravna vodiča. Polje jednog štapnog vodiča računa se na sljedeći način. Prema slici 3.11a, zadan je štapni vodič duljine L , kroz koji protječe struja I .



Slika 3.11a Polje štapnog vodiča

Radijvektor točke T ($r; z$) je:

$$\mathbf{r} = r \mathbf{a}_r + z \mathbf{a}_z$$

Radijvektor diferencijalnog dijela izvora dz' je:

$$\mathbf{r}' = z' \mathbf{a}_z$$

Vektor udaljenosti točke u kojoj se računa polje od diferencijalnog dijela izvora i njegova duljina su:

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = r\mathbf{a}_r + (z - z')\mathbf{a}_z,$$

$$|\mathbf{R}| = \sqrt{r^2 + (z - z')^2}$$

Vektor diferencijalnog dijela izvora elementa određen iznosom dz' i smjerom struje je:

$$d\mathbf{l} = dz'\mathbf{a}_z$$

Određeni su svi parametri jednadžbe Biot-Savartovog zakona za diferencijalni element:

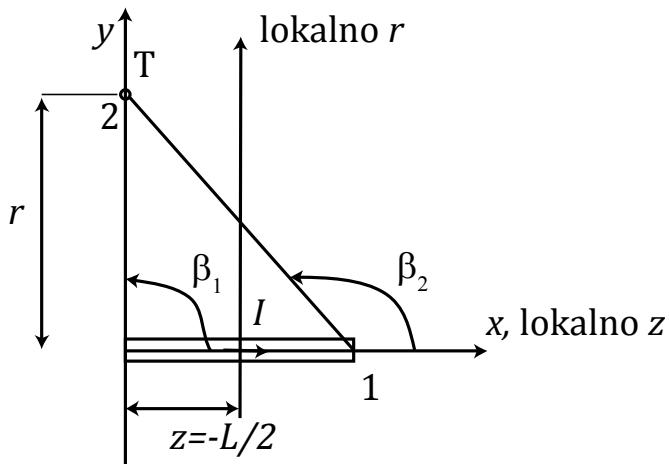
$$d\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3}$$

koju je potrebno integrirati po vodiču kako bi se dobilo ukupno polje u točki P.

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{I}{4\pi} \int_{z'=-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{dz' \mathbf{a}_z \times (r\mathbf{a}_r + (z - z')\mathbf{a}_z)}{\left(\sqrt{r^2 + (z - z')^2}\right)^3} = \frac{I}{4\pi} \int_{z'=-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{rdz'}{(r^2 + (z - z')^2)^{\frac{3}{2}}} \mathbf{a}_\alpha \\ \mathbf{H} &= \frac{I}{4\pi r} \left(\frac{\frac{L}{2} + z}{\sqrt{\left(\frac{L}{2} + z\right)^2 + r^2}} + \frac{\frac{L}{2} - z}{\sqrt{\left(\frac{L}{2} - z\right)^2 + r^2}} \right) \mathbf{a}_\alpha = \frac{I}{4\pi r} (\cos(\beta_1) - \cos(\beta_2)) \mathbf{a}_\alpha \end{aligned}$$

Izraz za polje štapnog vodiča primjenimo po segmentima (1), (2) i (3), prema slici 3.10. Ukupno će polje biti jednak zbroju doprinosa po segmentima.

Za segment (1) prema slici 3.11b:



Slika 3.11b Lokalni koordinatni sustav za određivanje parametara r i z

Najkraća udaljenost od segmenta (1) do točke T je $r=2$. Projekcija točke T na os na kojoj leži segment (1) je $z=-L/2$ u lokalnom koordinatnom sustavu prema slici 3.11b. Smjer magnetskog polja određen pravilom desne ruke u lokalnom koordinatnom sustavu \mathbf{a}_α odgovara smjeru \mathbf{a}_z u globalnom koordinatnom sustavu.

Primijenimo uz ($r=2$; $z=-1/2$; $L=1$):

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_1 &= \frac{I}{4\pi r} \left(\frac{\frac{L}{2} + z}{\sqrt{\left(\frac{L}{2} + z\right)^2 + r^2}} + \frac{\frac{L}{2} - z}{\sqrt{\left(\frac{L}{2} - z\right)^2 + r^2}} \right) \mathbf{a}_\alpha \\ &= \frac{1}{4\pi \cdot 2} \left(\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{\sqrt{\sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + 2^2}}} + \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{\sqrt{\sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 + 2^2}}} \right) \mathbf{a}_z = \frac{1}{8\pi\sqrt{5}} \mathbf{a}_z\end{aligned}$$

Za segment (2) je analogno ($r=2$; $z=1/2$; $L=1$), a smjer \mathbf{a}_α odgovara smjeru \mathbf{a}_x u globalnom koordinatnom sustavu:

$$\mathbf{H}_2 = \frac{1}{8\pi\sqrt{5}} \mathbf{a}_x$$

Za segment (3) analiza je kompleksnija, a prilike možemo pojednostaviti vektorskim pristupom.

Neka je točka O u središtu segmenta (3). Koordinate točke O su:

$$O \left(\frac{x_{poč,(3)} + x_{kon,(3)}}{2}, \frac{y_{poč,(3)} + y_{kon,(3)}}{2}, \frac{z_{poč,(3)} + z_{kon,(3)}}{2} \right) = \left(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2} \right)$$

Vektor \overrightarrow{OT} je:

$$\overrightarrow{OT} = (x_T - x_O) \mathbf{a}_x + (y_T - y_O) \mathbf{a}_y + (z_T - z_O) \mathbf{a}_z = -\frac{1}{2} \mathbf{a}_x + 2 \mathbf{a}_y - \frac{1}{2} \mathbf{a}_z$$

Jedinični vektor u smjeru toka struje kroz segment (3) je:

$$\vec{l} = \frac{(x_{kon,(3)} - x_{poč,(3)}) \mathbf{a}_x + (y_{kon,(3)} - y_{poč,(3)}) \mathbf{a}_y + (z_{kon,(3)} - z_{poč,(3)}) \mathbf{a}_z}{\sqrt{(x_{kon,(3)} - x_{poč,(3)})^2 + (y_{kon,(3)} - y_{poč,(3)})^2 + (z_{kon,(3)} - z_{poč,(3)})^2}} = \frac{-\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_z}{\sqrt{2}}$$

Projekcija točke T na pravac na kojem leži segment (3) je:

$$z = \vec{l} \cdot \overrightarrow{OT} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = 0$$

Najkraća udaljenost od točke T do pravca na kojem leži segmenta (3) je:

$$r = \sqrt{|\vec{OT}|^2 - z^2} = \sqrt{9/2}$$

Duljina segmenta (3) je:

$$L = \sqrt{(x_{kon,(3)} - x_{poč,(3)})^2 + (y_{kon,(3)} - y_{poč,(3)})^2 + (z_{kon,(3)} - z_{poč,(3)})^2} = \sqrt{2}$$

Smjer magnetskog polja segmenta (3) u točki T određen je normalom na ravninu koju razapinju početna točka segmenta (3) (1; 0; 0), konačna točka segmenta 3(0; 0; 1) i točka T.

Jednadžba ravnine kroz tri točke je:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = Ax + By + Cz + D = -2x - y - 2z + 2$$

Normala na ravninu određuje smjer magnetskog polja:

$$\mathbf{a}_\alpha = \mathbf{n} = \frac{A\mathbf{a}_x + B\mathbf{a}_y + C\mathbf{a}_z}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{1}{3}(-2\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y - 2\mathbf{a}_z)$$

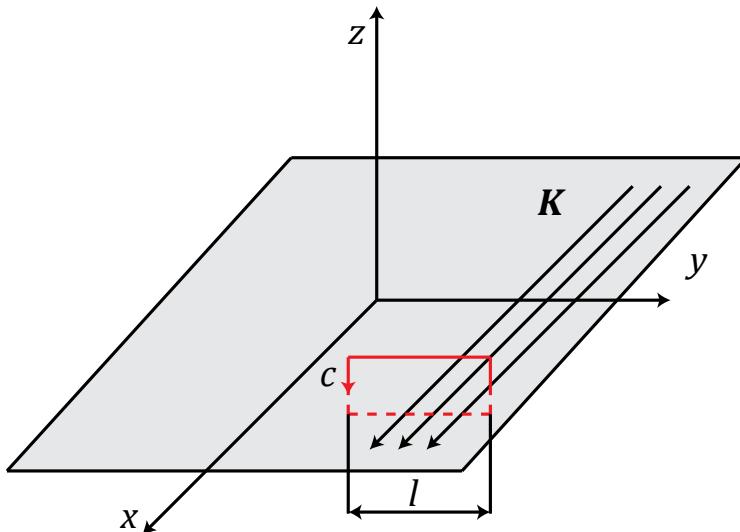
Doprinos je segmenta (3) uz ($r=\sqrt{9/2}$, $z=0$, $L=\sqrt{2}$, $\mathbf{a}_\alpha = \frac{1}{3}(-2\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y - 2\mathbf{a}_z)$):

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_3 &= \frac{I}{4\pi r} \left(\frac{\frac{L}{2} + z}{\sqrt{\left(\frac{L}{2} + z\right)^2 + r^2}} + \frac{\frac{L}{2} - z}{\sqrt{\left(\frac{L}{2} - z\right)^2 + r^2}} \right) \mathbf{a}_\alpha \\ &= -\frac{1}{\sqrt{5} \cdot 9\pi} \mathbf{a}_x - \frac{1}{\sqrt{5} \cdot 18\pi} \mathbf{a}_y - \frac{1}{\sqrt{5} \cdot 9\pi} \mathbf{a}_z \end{aligned}$$

Konačno, ukupno je magnetsko polje:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 + \mathbf{H}_3 = \frac{1}{\sqrt{5}\pi} \frac{1}{72} \mathbf{a}_x - \frac{1}{\sqrt{5}\pi} \frac{1}{18} \mathbf{a}_y + \frac{1}{\sqrt{5}\pi} \frac{1}{72} \mathbf{a}_z$$

Primjer 3.2 Ravninom xy teče plošna struja gustoće $\mathbf{K} = K \mathbf{a}_x$. Odredite jakost magnetskog polja u poluprostorima $z > 0$ i $z < 0$.



Slika 3.12 Plošna struja linijske gustoće \mathbf{K} u xy ravnini

Razmotrimo prilike za proračun polja prema slici 3.12. Jakost magnetskog polja ne može imati x smjer jer je prema Biot-Savartovom zakonu magnetsko polje okomito na smjer struje. ($d\mathbf{l} \times \mathbf{R}$ svakako je okomito na $d\mathbf{l}$)

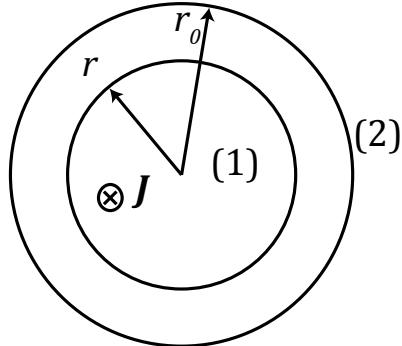
Jakost magnetskog polja ne može imati niti z smjer jer bi se u bilo kojoj točki prostora doprinos polju sa $+y$ poluravnine poništio s doprinosom $-y$ poluravnine. Prema tome, jakost magnetskog polja može imati samo y smjer. Iznos magnetskog polja možemo odrediti primjenom Ampereovog kružnog zakona na pravokutnu petlju c prema slici 3.12. Integral tangencijalne komponente magnetskog polja po petlji c ima doprinose iznosa $H \cdot l$ na gornjem i donjem segmentu krivulje c paralelnima s ravninom xy . Struja I_c je struja zatvorena petljom c i dobije se kao umnožak iznosa linijske gustoće struje i duljine l .

$$\oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 2 \cdot H \cdot l = I_c = K \cdot l$$

$$\mathbf{H} = \begin{cases} \mathbf{a}_y \frac{K}{2} & z < 0 \\ -\mathbf{a}_y \frac{K}{2} & z > 0 \end{cases}$$

Jakost magnetskog polja neovisna je o udaljenosti od ravnine, slično kao u slučaju jakosti električnog polja ravnine nabijene nabojem plošne gustoće σ .

Primjer 3.3 Unutar cilindričnog vodiča radijusa r_0 teče struja gustoće $\mathbf{J} = J_0 r \mathbf{a}_z$ prema slici 3.13. Odredite magnetsku indukciju unutar i izvan vodiča.



Slika 3.13 Cilindrični vodič radijusa r_0

Unutar vodiča jakost magnetskog polja uvjetovana je dijelom struje koju zatvara petlja radijusa r . Primijenimo Ampereov kružni zakon u području (1) za koje je $r < r_0$:

$$\oint_c \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 \iint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = \mu_0 J_0 \int_{\alpha=0}^{2\pi} d\alpha \int_{r=0}^r r \cdot r dr = \frac{2\pi\mu_0 J_0 r^3}{3}$$

$$B = \frac{\mu_0 J_0 r^2}{3} \quad \text{za } r < r_0$$

U području (2) za $r > r_0$ vrijedi:

$$\oint_c \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 J_0 \int_{\alpha=0}^{2\pi} d\alpha \int_{r=0}^r r \cdot r dr = \frac{2\pi\mu_0 J_0 r_0^3}{3}$$

$$B = \frac{\mu_0 J_0 r_0^3}{3r} \quad \text{za } r > r_0$$

Primjer 3.4 Pokažite da u homogenom polju vrijedi u točki \mathbf{r} prostora:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2}(\mathbf{r} \times \mathbf{B})$$

Potrebno je provjeriti vrijede li jednadžbe za vektorski magnetski potencijal:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Neka su zadani vektori u općem obliku:

$$\mathbf{r} = x \mathbf{a}_x + y \mathbf{a}_y + z \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{B} = B_x \mathbf{a}_x + B_y \mathbf{a}_y + B_z \mathbf{a}_z$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{A} &= \nabla \cdot \left(-\frac{1}{2}(\mathbf{r} \times \mathbf{B}) \right) = \nabla \cdot \left(\frac{1}{2}(-B_z y + B_y z) \mathbf{a}_x + \frac{1}{2}(B_z x - B_x z) \mathbf{a}_y + \frac{1}{2}(-B_y x + B_x y) \mathbf{a}_z \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2}(-B_z y + B_y z) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{2}(B_z x - B_x z) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{2}(-B_y x + B_x y) \right] = 0\end{aligned}$$

Potrebno je još provjeriti vezu magnetske indukcije i potencijala:

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \left[-\frac{1}{2}(\mathbf{r} \times \mathbf{B}) \right] = \\ &= \nabla \times \left(\frac{1}{2}(-B_z y + B_y z) \mathbf{a}_x + \frac{1}{2}(B_z x - B_x z) \mathbf{a}_y + \frac{1}{2}(-B_y x + B_x y) \mathbf{a}_z \right) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{2}(-B_z y + B_y z) & \frac{1}{2}(B_z x - B_x z) & \frac{1}{2}(-B_y x + B_x y) \end{vmatrix} = B_x \mathbf{a}_x + B_y \mathbf{a}_y + B_z \mathbf{a}_z\end{aligned}$$

Obje su jednadžbe zadovoljene, prema tome vrijedi:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2}(\mathbf{r} \times \mathbf{B})$$

Primjer 3.5 Dva magnetska materijala razdvaja ravnina $z=0$. U dijelu $z < 0$ nalazi se materijal relativne permeabilnosti $\mu_{r1}=5$, a u dijelu $z > 0$ materijal relativne permeabilnosti $\mu_{r2}=2$. Ako je u prostoru $z < 0$ zadana indukcija $\mathbf{B}_1 = 5\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$ i strujni oblog na granici sredstava $\mathbf{K} = \frac{2}{\mu_0} \mathbf{a}_y$ odredite indukciju u prostoru $z > 0$.

Vrijede jednadžbe uvjeta na granici prema slici 3.5 iz kojih slijedi:

$$\mathbf{n}_{12} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0$$

Uz uvođenje:

$$\mathbf{n}_{12} = \mathbf{a}_z,$$

$$\mathbf{B}_2 = B_{2x} \mathbf{a}_x + B_{2y} \mathbf{a}_y + B_{2z} \mathbf{a}_z$$

Slijedi za komponente okomite na granicu:

$$\mathbf{a}_z \cdot [(B_{2x} - 5)\mathbf{a}_x + (B_{2y} - 3)\mathbf{a}_y + (B_{2z} - 2)\mathbf{a}_z] = 0$$

$$B_{2z} = 2$$

$$\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K}$$

$$\mathbf{a}_z \times \left(\frac{\mathbf{B}_2}{\mu_2} - \frac{\mathbf{B}_1}{\mu_1} \right) = \frac{2}{\mu_0} \mathbf{a}_y / \cdot \mu_0$$

$$\mathbf{a}_z \times \left[\frac{1}{\mu_{r2}} (B_{2x} \mathbf{a}_x + B_{2y} \mathbf{a}_y + B_{2z} \mathbf{a}_z) - \frac{1}{\mu_{r1}} (5 \mathbf{a}_x + 3 \mathbf{a}_y + 2 \mathbf{a}_z) \right] = 2 \mathbf{a}_y$$

Rastavljamo po komponentama. U smjeru \mathbf{a}_z nema doprinosa jer je $\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_z = 0$.

U smjeru \mathbf{a}_x :

$$-\frac{1}{2} B_{2y} + \frac{3}{5} = 0$$

$$B_{2y} = \frac{6}{5}$$

U smjeru \mathbf{a}_y :

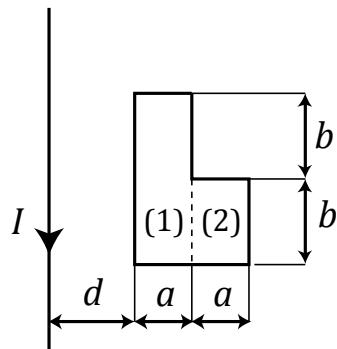
$$\frac{1}{2} B_{2x} - 1 = 2$$

$$B_{2x} = 6$$

Ukupno magnetska je indukcija u sredstvu 2:

$$\mathbf{B}_2 = 6 \mathbf{a}_x + \frac{6}{5} \mathbf{a}_y + 2 \mathbf{a}_z$$

Primjer 3.6 Pored beskonačno dugog vodiča kojim teče struja I prema slici nalazi se petlja. Odredite magnetski tok kroz petlju i međuinduktivitet petlje i vodiča.



Slika 3.14 Petlja u okolini dugog ravnog vodiča

Magnetski tok odredit će se integracijom magnetske indukcije koja je za beskonačnu strujnicu određena jednadžbom:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Za ukupni magnetski tok potrebno je zbrojiti tokove kroz pravokutnike (1) i (2) prema slici 3.14.

$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\int_{r=d}^{r=d+a} \frac{1}{r} 2b \cdot dr + \int_{r=d+a}^{r=d+2a} \frac{1}{r} b \cdot dr \right] = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[2b \ln\left(\frac{d+a}{d}\right) + b \ln\left(\frac{d+2a}{d+a}\right) \right]$$

Međuinduktivitet petlje i vodiča odredit ćemo iz jednadžbe:

$$M = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[2b \ln\left(\frac{d+a}{d}\right) + b \ln\left(\frac{d+2a}{d+a}\right) \right]$$

3.13 Zadaci za vježbu

- 3.1 Vektorski magnetski potencijal u sfernom koordinatnom sustavu zadan je izrazom $\mathbf{A} = 2,5 \mathbf{a}_\theta + 5\mathbf{a}_\alpha$ [Tm]. Odredite magnetsku indukciju u točki (2m; $\pi/6$; 0) u smjeru \mathbf{a}_α , pri čemu je točka označena u obliku $(r; \theta; \alpha)$.

Rj. 1,25 T

- 3.2 Odredite jakost struje koja prolazi dijelom ravnine $x=0$ određene s:

$$-0,25\pi \text{ m} \leq y \leq 0,25\pi \text{ m}, -0,01\text{m} \leq z \leq 0,01\text{m}$$

ukoliko je gustoća struje zadana izrazom:

$$\mathbf{J} = 100y \sin(2y) \mathbf{a}_x \text{ [Am}^{-2}\text{]}$$

Rj. 1 A

- 3.3 Strujni oblog $K=6,5\mathbf{a}_z$ [Am $^{-1}$] je zadan na granici $x=0$ koja razdvaja područje 1, $x < 0$, za koje je jakost magnetskog polja $\mathbf{H}_1=10\mathbf{a}_y$ [Am $^{-1}$] i područje 2, $x > 0$. Odredite jakost magnetskog polja u području 2.

Rj. 16,5 Am $^{-1}$

- 3.4 Vektorski magnetski potencijal zadan je izrazom $\mathbf{A} = \cos(x)\sin(y)\mathbf{a}_x + \sin(x)\cos(y)\mathbf{a}_y$ [Tm]. Odredite magnetsku indukciju u točki (1m, 1m, 1m).

Rj. 0

- 3.5 Područje 1, za koje je relativna permeabilnost $\mu_{r1}=4$, je na strani ravnine $4x+4y+2z=8$ [m] koja uključuje ishodište. Za područje 2 vrijedi $\mu_{r2}=3$. Uz zadanu jakost magnetskog polja u području 1 $\mathbf{H}_1=(\mu_0^{-1})(2\mathbf{a}_x - 1\mathbf{a}_y)$ [Am $^{-1}$] odredite komponentu magnetske indukcije u području 2 u smjeru osi y.

Rj. -2,56 T

- 3.6 Vektorski magnetski potencijal zadan je u cilindričnom koordinatnom sustavu jednadžbom $\mathbf{A} = e^{-2z}(\sin(0,5\alpha))\mathbf{a}_\alpha$ [Tm]. Odredite komponentu magnetske indukcije u smjeru \mathbf{a}_r u točki $(0,8\text{m}; \pi/3; 0,5\text{m})$, pri čemu je točka označena u obliku $(r; \alpha; z)$.
Rj. $0,37 \text{ T}$

- 3.7 Odredite jakost struje koja prolazi dijelom ravnine $y=0$ određene s:
 $-0,1\text{m} \leq x \leq 0,1\text{m}, -0,002\text{m} \leq z \leq 0,002\text{m}$

Gustoće struje je zadana izrazom:

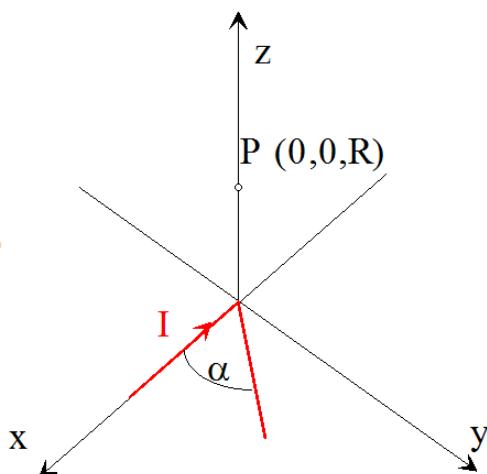
$$J = 100 |x| \mathbf{a}_y [\text{Am}^{-2}]$$

Rj. 4 mA

- 3.8 Strujni oblog $K=9 \mathbf{a}_y [\text{Am}^{-1}]$ je zadan na granici $z=0$ koja razdvaja područje 1, $z < 0$, $\mu_{r1}=4$, i područje 2, $z > 0$, $\mu_{r2}=3$. Ako je jakost magnetskog polja u području 2 $\mathbf{H}_2 = 14,5\mathbf{a}_x + 8\mathbf{a}_z [\text{Am}^{-1}]$, odredite tangencijalnu komponentu jakosti magnetskog polja u području 1.

Rj. $5,5 \text{ Am}^{-1}$

- 3.9 Strujnicom prema slici teče struja $I=10\text{A}$. Odredite komponentu jakosti magnetskog polja u smjeru osi x u točki P, uz zadane vrijednosti:
 $R=1\text{m}, \alpha=\pi/3$.



Slika 3.15 Strujnica

Rj. $0,69 \text{ Am}^{-1}$

- 3.10 Strujnicom prema slici iz zadatka 3.9. teče struja $I=10\text{A}$. Odredite komponentu jakosti magnetskog polja u smjeru osi y u točki P, uz zadane vrijednosti
 $(R=1\text{m}, \alpha=\pi/4)$.

Rj. $0,23 \text{ Am}^{-1}$

3.11 Strujni oblog $K=9 \mathbf{a}_y [\text{Am}^{-1}]$ je zadan na granici $z=0$ koja razdvaja područje 1, $z<0$, $\mu_{r1}=4$, i područje 2, $z>0$, $\mu_{r2}=3$. Ako je jakost magnetskog polja u području 2 $\mathbf{H}_2=14,5 \mathbf{a}_x + 8\mathbf{a}_z [\text{Am}^{-1}]$, odredite komponentu jakosti magnetskog polja u području 1 okomitu na granicu.

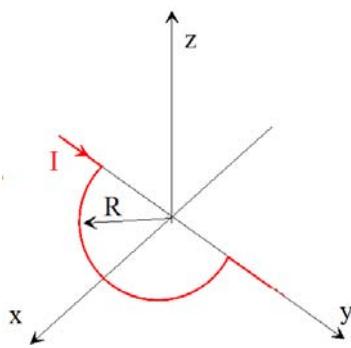
Rj. 6 Am^{-1}

3.12 Područje 1, za koje je relativna permeabilnost $\mu_{r1}=5$ je na strani ravnine $6x+4y+3z=12 [\text{m}]$ koja uključuje ishodište. Za područje 2 vrijedi $\mu_{r2}=3$. Uz zadanu jakost magnetskog polja u području 1 $\mathbf{H}_1=(\mu_0^{-1})(3\mathbf{a}_x - 0.5\mathbf{a}_y) [\text{Am}^{-1}]$ odredite komponentu magnetske indukcije u području 2 u smjeru osi x.

Rj. $12,15 \text{ T}$

3.13 Strujna petlja protjecana strujom 1 A prema slici leži u xy ravnini. Odredite jakost magnetskog polja u točki $(0; 0; R)$, pri čemu je $R=1\text{m}$.

Rj. $0,103\mathbf{a}_x + 0,09\mathbf{a}_z \text{ Am}^{-1}$



Slika 3.16 Strujnica

3.14 Magnetsko je polje zadano jednadžbom:

$$\mathbf{H} = (y \cos(2x))\mathbf{a}_x + (y + e^x)\mathbf{a}_z [\text{Am}^{-1}].$$

Odredite gustoću struje u prostoru.

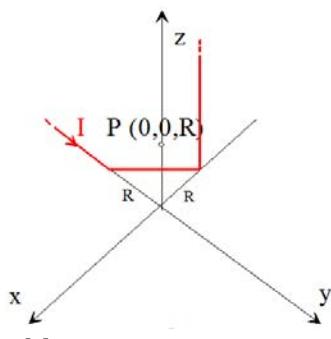
$$\text{Rj. } \mathbf{J} = \mathbf{a}_x - e^x \mathbf{a}_y - \cos(2x) \mathbf{a}_z \text{ Am}^{-2}$$

3.15 Za polje iz zadatka 3.14 odredite gustoću struje u yz ravnini.

$$\text{Rj. } 1,73 \text{ Am}^{-2}$$

3.16 Strujnicom prema slici 3.17 teče struja $I=10\text{A}$. Odredite komponentu jakosti magnetskog polja u smjeru osi x u točki P $(0, 0, R)$, uz zadanu vrijednost $R=1\text{m}$.

$$\text{Rj. } 0,608\mathbf{a}_x + 1,7336\mathbf{a}_y - 0,375\mathbf{a}_z \text{ Am}^{-1}$$



Slika 3.17 Strujnica

3.17 U cilindričnom koordinatnom sustavu u području $0 < r < 0,5\text{m}$ gustoća je struje $\mathbf{J} = 10 e^{-2r} \mathbf{a}_z \text{ Am}^{-2}$. Odredite \mathbf{H} u $[\text{Am}^{-1}]$ u prostoru.

$$\text{Rj. } \mathbf{H} = \begin{cases} \frac{0,66}{r} \mathbf{a}_\alpha & r > 0,5\text{m} \\ \frac{2,5}{r} (1 - e^{-2r} - 2r e^{-2r}) \mathbf{a}_\alpha & 0 < r < 0,5\text{m} \end{cases}$$

3.18 Cilindrični vodič vodi struju koja rezultira poljem $\mathbf{H} = 2r \mathbf{a}_\alpha [\text{Am}^{-1}]$. Odredite gustoću struje u vodiču.

Rj. $4\mathbf{a}_z \text{ Am}^{-2}$

3.19 Odredite struju koja rezultira magnetskim poljem $\mathbf{H} = k \sin(x) \mathbf{a}_y$ pri čemu je k konstanta.

Rj. $\mathbf{J} = k \cos(x) \mathbf{a}_z$

3.20 Unutar cilindričnog vodiča gustoća struje mijenja se prema $\mathbf{J} = K e^{-a \cdot r} \mathbf{a}_z$ pri čemu su K i a konstante. Odredite magnetsko polje unutar vodiča radijusa r_0 .

Rj. $\mathbf{H} = \mathbf{a}_\alpha \frac{K}{a^2 r} (1 - (1 + a \cdot r) e^{-a \cdot r})$

3.21 Za vodič s gustoćom struje prema zadatku 3.20 odredite jakost polja izvan vodiča.

Rj. $\mathbf{H} = \mathbf{a}_\alpha \frac{K}{a^2 r} (1 - (1 + a \cdot r_0) e^{-a \cdot r_0})$

3.22 Struja gustoće $J = J_0 e^{-(r_1 - r)}$ teče unutrašnjim vodičem koaksijalnog kabela pri čemu je r_1 radius unutrašnjeg vodiča, a J_0 gustoća struje na površini unutrašnjeg vodiča. Povratna struja teče vanjskim vodičem, koji je beskonačna tanka ljuska unutrašnjeg radijusa r_2 .

Odredite jakost magnetskog polja u prostoru $r < r_1$.

Rj. $\mathbf{H} = \mathbf{a}_\alpha \frac{J_0 e^{-r_1}}{r} ((r - 1) e^r + 1)$

3.23 Za struju prema zadatku 3.22 odredite \mathbf{H} u prostoru $r_1 < r < r_2$.

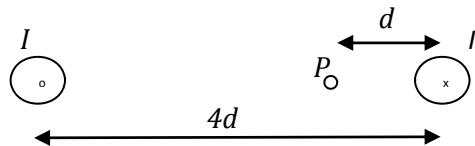
Rj. $\mathbf{H} = \mathbf{a}_\alpha \frac{J_0}{r} (r_1 - 1 + e^{-r_1})$

3.24 Za struju prema zadatku 3.22 odredite \mathbf{H} u prostoru $r > r_2$.

Rj. $\mathbf{H} = 0$

3.25 Dvije beskonačno duge strujnice kroz koje protječe struja I u suprotnim smjerovima razmaknute su za $4d$. Odredite magnetsko polje u točki P prema slici.

Rj. $H = \frac{2I}{3\pi d}$



Slika 3.18

3.26 Kružna strujnica radijusa 1m leži u xy ravnini i središte joj je u ishodištu koordinatnog sustava, a kroz nju protječe struja iznosa 1 A, tako da rezultira poljem u smjeru pozitivne osi z. U prostoru je postavljena još jedna strujnica radijusa 1m, sa središtem u točki (0; 0; 2m), koja leži u ravnini z=2m kroz koju protječe struja 1 A tako da rezultira poljem u smjeru pozitivne osi z. Odredite jakost magnetskog polja u točki (0; 0; 2m).

Rj. $\mathbf{H} = \mathbf{a}_z 0,545 \text{ Am}^{-1}$

3.27 Za sustav iz prošlog zadatka odredite magnetskog polja u točki (0; 0; 1m).

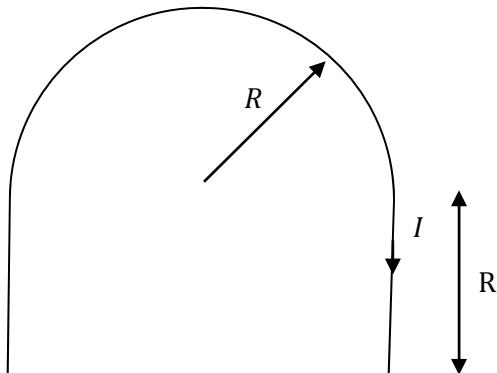
Rj. $\mathbf{H} = \mathbf{a}_z 0,354 \text{ Am}^{-1}$

3.28 Strujni oblog zadan je jednadžbom $\mathbf{K} = k \mathbf{a}_x$ u xy ravnini. Beskonačno dugim ravnim vodičem zanemarivog presjeka koji prolazi točkom (0; 0; 2) i paralelan je s x osi teče struja I. Odredite struju I tako da je jakost magnetskog polja u točki (0; 0; 1) jednaka nuli.

Rj. $I = \pi k$

3.29 Strujnica se sastoji od 3 ravna dijela i polukružnog dijela prema slici. Ukoliko strujnicom teče struja iznosa 1 A odredite jakost magnetskog polja u središtu polukružne petlje. $R=1\text{m}$.

Rj. $0,25(1 + 2\sqrt{2} \pi^{-1}) \text{ Am}^{-1}$



3.30 Vodič zanemarivog poprečnog presjeka leži u osi z za $-1,5 \leq z \leq 1,5[\text{m}]$, a njime teče struja iznosa 10 A u smjeru negativne z osi. Ako je zadana indukcija u prostoru prema jednadžbi $\mathbf{B} = 3 \cdot 10^{-4} e^{-0,1x} \mathbf{a}_y [\text{T}]$ odredite iznos energije koji je potreban za pomicanje vodiča konstantnom brzinom za 3m u smjeru \mathbf{a}_x .

Rj. 0,023 J

3.31 Dva metra dug vodič zanemarivog poprečnog presjeka leži u y osi, tako da mu je središte u ishodištu koordinatnog sustava. Struja kroz vodič ima iznos od $2,5 \text{ A}$ i teče u smjeru \mathbf{a}_y . Ako je sila na vodič $1,0607 (\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_z) [\text{N}]$, uzrokovana jednolikom indukcijom u prostoru, odredite indukciju.

Rj. $0,212 (-\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_z) \text{ T}$

3.32 Strujni oblog $K = 15\mathbf{a}_y \text{ Am}^{-1}$ nalazi se u ravnini $z = -5\text{m}$. Beskonačno dugi vodič zanemarivog presjeka nalazi se u osi y , a njime teče struja iznosa $2,5\text{A}$ u smjeru \mathbf{a}_y . Odredite silu na vodič po jedinici duljine vodiča.

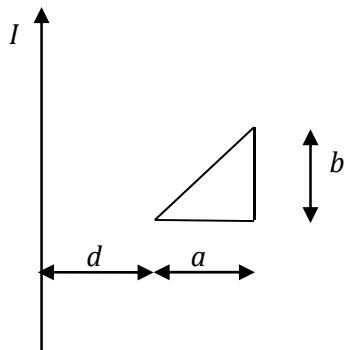
Rj. $23,6 \mu\text{Nm}^{-1}$

3.33 Odredite induktivitet po jedinici duljine koaksijalnog kabela unutrašnjeg radijusa 2 mm , vanjskog radijusa 9 mm uz pretpostavku da je permeabilnost jednaka permeabilnosti vakuuma.

Rj. 301 nHm^{-1}

3.34 Odredite međuinduktivitet strujnice i petlje prema slici. ($d=2\text{m}$, $a=1\text{m}$, $b=1\text{m}$)

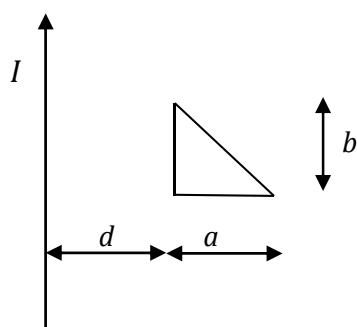
Rj. $37,8 \text{ nH}$



Slika 3.19 Strujnica uz primjer 3.34

3.35 Odredite međuinduktivitet strujnice i petlje prema slici. ($d=2\text{m}$, $a=1\text{m}$, $b=1\text{m}$)

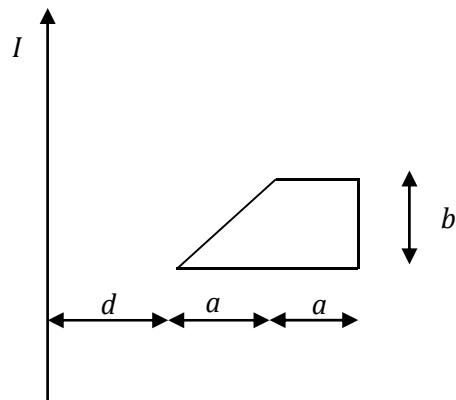
Rj. 43 nH



Slika 3.20 Strujnica uz primjer 3.35

3.36 Odredite međuinduktivitet strujnice i petlje prema slici. ($d=2\text{m}$, $a=1\text{m}$, $b=1\text{m}$)

Rj. 95,35 nH

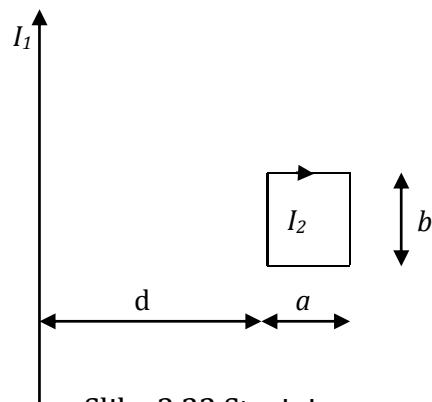


Slika 3.21 Strujnica uz primjer 3.36

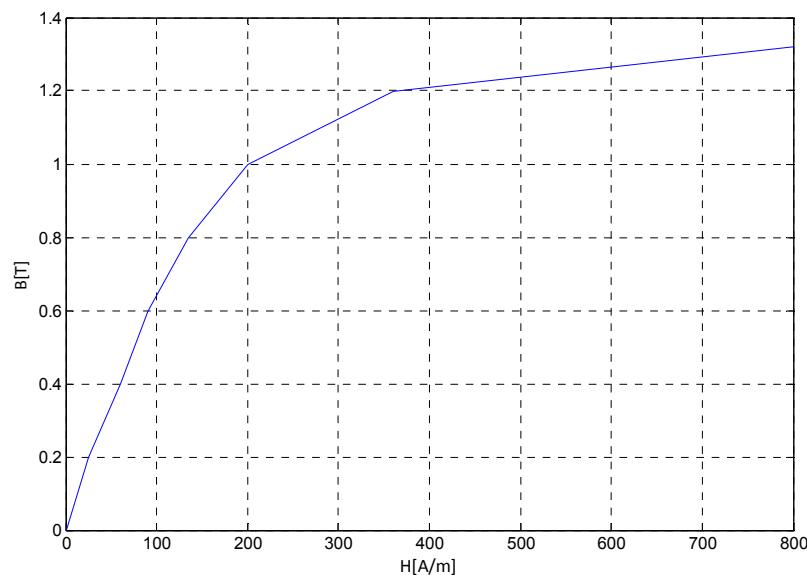
3.37 Odredite iznos sile između strujnice i petlje prema slici.

($d=2\text{m}$, $a=1\text{m}$, $b=1\text{m}$, $I_1 = I_2 = 1 \text{ A}$)

Rj. 33,33 nN

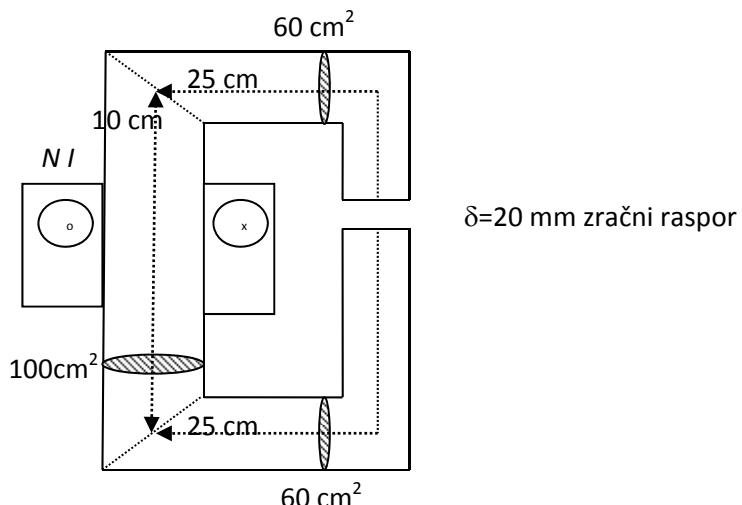


Slika 3.22 Strujnica



Slika 3.23 Krivulja magnetiziranja željeza

3.38 Magnetski krug sa zračnim rasporom ima kao feromagnetik željezo zadano krivuljom magnetiziranja prema slici 3.23.



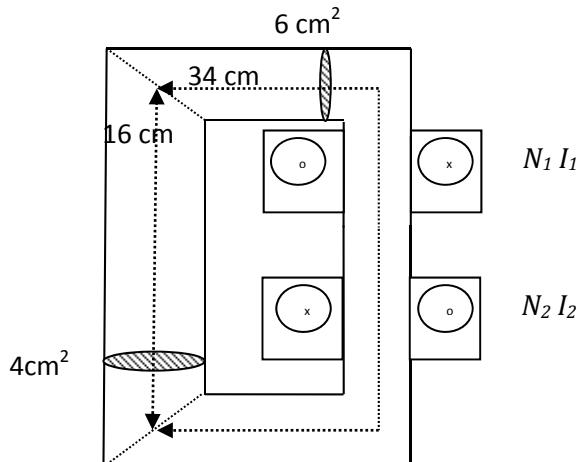
Slika 3.24 Magnetski krug

- Ukoliko je magnetska indukcija u zračnom rasporu 1 [T], a kroz zavojnicu može protjecati maksimalna struja 10 [A], odredite potreban broj zavoja zavojnice.
Rj. $N=1603$
- Odredite energiju pohranjenu u zračnom rasporu kruga.
Rj. 47,75 J
- Odredite relativnu magnetsku permeabilnost dijela jezgre dugog 25 cm u radnoj točki za koju je magnetska indukcija u zračnom rasporu 1 [T].
Rj. $\mu_r= 3979$
- Odredite energiju pohranjenu u dijelu feromagnetskog materijala duljine 25 cm.
Rj. 0,15 J

3.39 Magnetski krug s dvije uzbude prikazan je slikom 3.25. Zadano je $I_2=0,5\text{A}$, $N_1 = 200$, $N_2 = 100$, a magnetski tok $120\mu\text{Wb}$. BH krivulja zadana je tablicom.

B[T]	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
H[A/m]	100	145	185	220	245	260

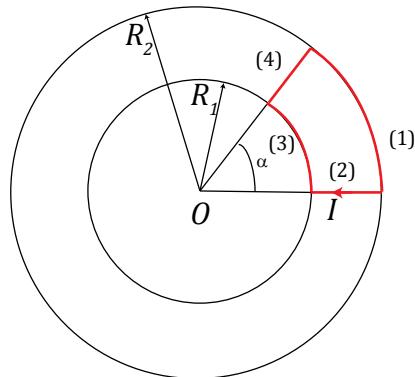
- Odredite struju I_1
Rj. 0,65 A
- Odredite energiju sadržanu u materijalu duljine 34 cm.
Rj. 3 mJ



Slika 3.25 Magnetski krug

- c) Odredite energiju sadržanu u materijalu duljine 16 cm.
Rj. 1,8 mJ

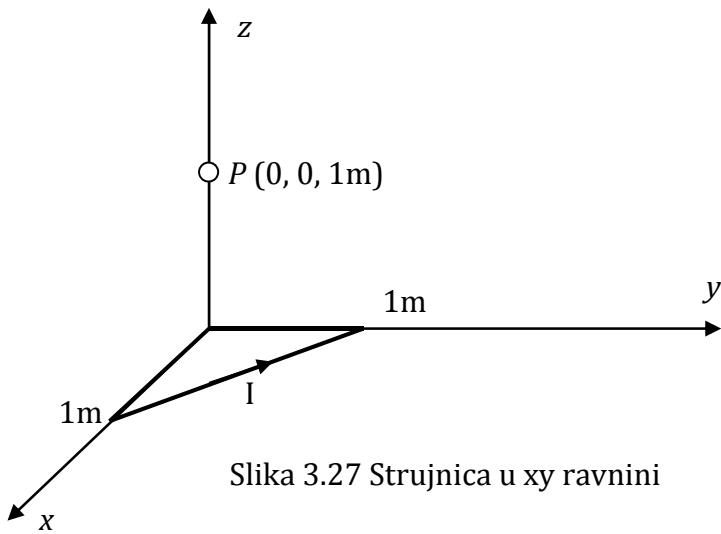
3.40 Odredite jakost magnetskog polja u točki O u ravnini petlje prema slici 3.26.



Slika 3.26 Petlja sa segmentima kružnice

$$\text{Rj. } \frac{\alpha}{4\pi} I \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

3.41 Strujnicom u xy ravnini teče struja iznosa 1 A, prema slici 3.27.



Slika 3.27 Strujnica u xy ravnini

Odredite iznos magnetske indukcije u smjeru osi x B_x u točki P.

Rj. -23,6nT

3.42 Odredite za petlju prema slici 3.27 iznos magnetske indukcije u smjeru osi z B_z u točki P.

Rj. 47,1nT

3.43 Odredite za petlju prema slici 3.27 iznos vektorskog magnetskog potencijala u smjeru osi x A_x u točki P.

Rj. 10,5 nTm

3.44 Odredite za petlju prema slici 3.27 iznos vektorskog magnetskog potencijala u smjeru osi z A_z u točki P.

Rj. 0

3.45 U prostoru je u sfernom koordinatnom sustavu vektorski magnetski potencijal zadan jednadžbom $\mathbf{A} = r^2 \mathbf{a}_r + 2 \sin(\theta) \mathbf{a}_\theta$ [Tm]. Odredite iznos magnetske indukcije $|\mathbf{B}|$ u točki ($r = 1$ m; $\theta = \frac{\pi}{6}$; $\alpha = \frac{\pi}{2}$).

Rj. 1 T

3.46 Za jednadžbu vektorskog magnetskog potencijala iz zadatka 3.45 odredite iznos gustoće struje $|\mathbf{J}|$ u točki ($r = 1$ m, $\theta = 0, \alpha = 0$).

Rj. 3183,1 kA/m²

3.47 Za jednadžbu vektorskog magnetskog potencijala iz zadatka 3.45 odredite gustoću energije w u točki ($r = 1$ m, $\theta = 0, \alpha = \frac{\pi}{2}$).

Rj. 0

3.48 Za jednadžbu vektorskog magnetskog potencijala iz zadatka 3.45 odredite iznos $\nabla \cdot \mathbf{H}$ u točki ($r = 1$ m, $\vartheta = 0, \alpha = 0$).

Rj. 0

3.49 Dva magnetska materijala razdvaja ravnina $x=0$. U poluprostoru $x < 0$ zadana je relativna permeabilnost sredstva $\mu_{r1} = 2$. U poluprostoru $x > 0$ nalazi se materijal $\mu_{r2} = 4$. Ukoliko je zadana magnetska indukcija za $x < 0$ jednadžbom $\mathbf{B}_1 = 0,5 \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$ [T] i strujni oblog na granici $\mathbf{K} = \frac{-0,5}{\mu_0} \mathbf{a}_y + \frac{0,5}{\mu_0} \mathbf{a}_z$ [$\frac{A}{m}$] odredite magnetsku indukciju u sredstvu 2.

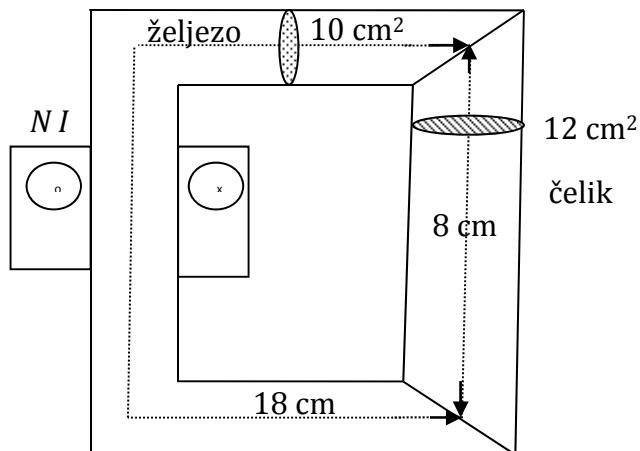
Rj. $0,5 \mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z$ T

3.50 Odredite iznos tangencijalne komponente magnetske indukcije u sredstvu 2 za primjer 3.49.

Rj. 5,66 T

3.51 Magnetski krug je zadan slikom i krvuljom magnetiziranja materijala (slika 3.29).

Zadana je magnetska indukcija u čeliku iznosa 1 T i broj zavoja $N=100$.



Slika 3.28 Magnetski krug

a) Odredite iznos magnetske indukcije u željezu.

Rj. 1,2 T

b) Odredite magnetsku energiju pohranjenu u čeliku uz pretpostavku linearnosti magnetskog materijala.

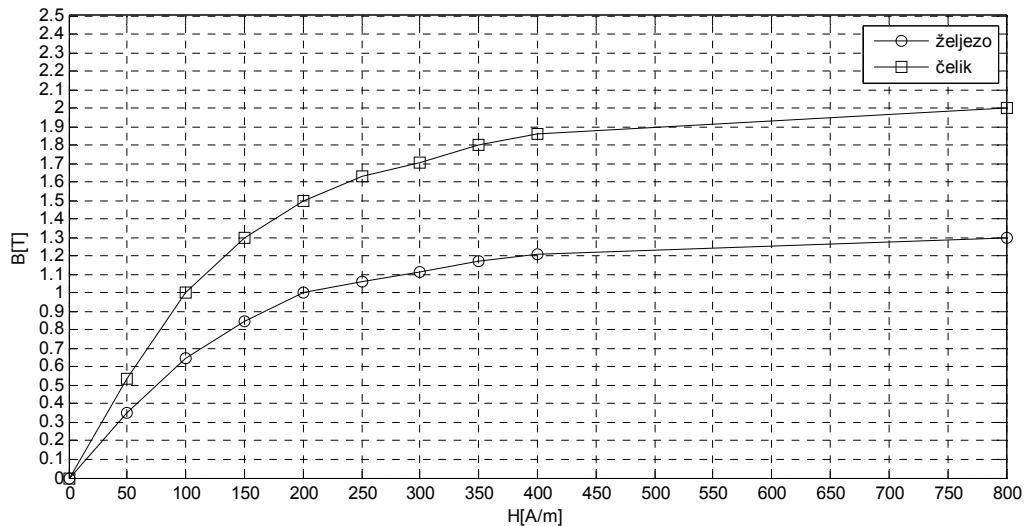
Rj. 4,8 mJ

c) Odredite jakost magnetskog polja u željezu.

Rj. 400 A/m

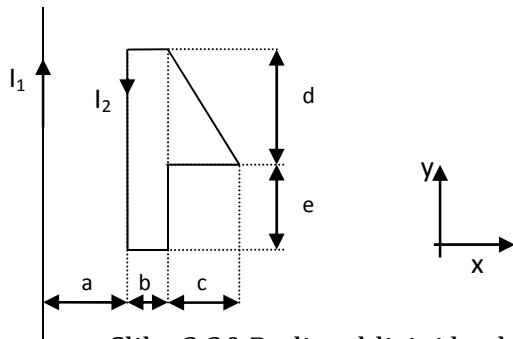
d) Odredite struju zavojnice.

Rj. 0,8 A



Slika 3.29 B-H karakteristika željeza i čelika

3.52 Zadana je petlja prema slici. Ukoliko su struje $I_1=1$ A i $I_2=2$ A i zadano je: $a=10$ cm, $b=5$ cm, $c=10$ cm, $d=10$ cm, $e=10$ cm odredite međuinduktivitet između strujnice i petlje.



Slika 3.30 Petlja u blizini beskonačno dugog vodiča

Rj. 21,8 nH

3.53 Odredite iznos sile u smjeru osi x F_x prema zadatku 3.52.

Rj. 329 nN

3.54 Odredite iznos sile u smjeru osi y F_y prema zadatku 3.52.

Rj. 0

3.55 Odredite smjer magnetske indukcije proizvedene strujom strujnice I_1 kroz petlju prema zadatku 3.52.

Rj. $-a_z$

3.56 Vektorski magnetski potencijal u cilindričnom koordinatnom sustavu je zadan jednadžbom u sredstvu ($\mu = \mu_0$):

$$\mathbf{A} = \frac{z}{r} \left(\frac{1}{4} \sin(2r) - \frac{r}{2} \cos(2r) \right) \mathbf{a}_r + \frac{z^2}{K} \sin(2r) \mathbf{a}_z$$

Primjenom Coulombovog baždarenja odredite konstantu K .

Rj. $K=-2$

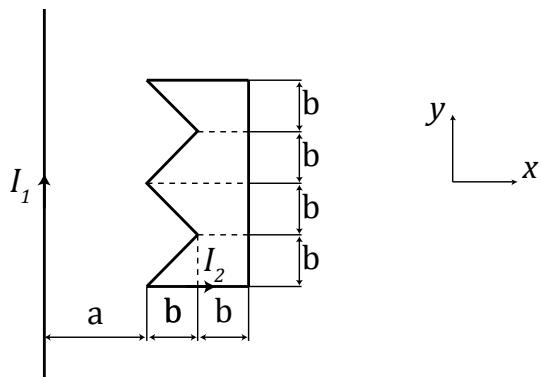
3.57 Odredite iznos magnetske indukcije \mathbf{B} u točki ($r = \frac{\pi}{8}$; $\alpha = \frac{\pi}{4}$; $z = 2$) za zadatak 3.56.

Rj. $B=2,9$ T

3.58 Odredite iznos gustoće struje \mathbf{J} u točki ($r = \frac{\pi}{8}$; $\alpha = \frac{\pi}{4}$; $z = 2$) za zadatak 3.56.

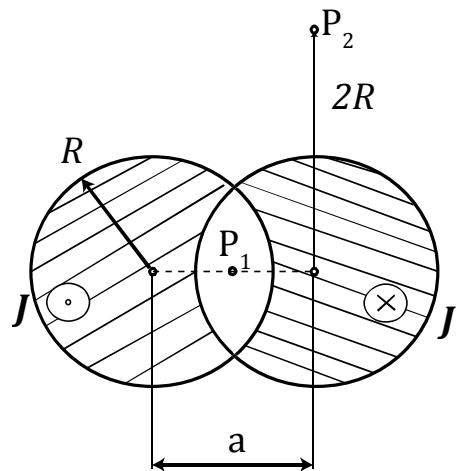
Rj. $J=2,9$ A/mm²

3.59 U blizini beskonačno dugog vodiča zanemarivog presjeka kojim teče struja $I_1 = 2$ A nalazi se petlja kojom teče struja $I_2 = 1$ A prema slici ($a=1$ m, $b=1$ m). Odredite iznos sile kojom vodič djeluje na petlju.



Rj. $F=0,58$ μN

3.60 Vodom čiji je presjek zadan slikom teče struja gustoće $0,5$ A/mm² u suprotnim smjerovima. Vod se sastoji od dva dijela koja su u osnovi kružnog poprečnog presjeka, ali je u srednjem dijelu koji nije šrafiran i koji sadrži točku P₁ ostavljena rupa za potrebe hlađenja tekućim dušikom. Srednjim nešrafiranim dijelom ne teče struja ($R=1$ mm, $a=1,25$ mm).



Odredite iznos jakosti magnetskog polja u točki P_1 koja se nalazi na polovištu spojnica središta vodiča prema slici.

$$\text{Rj. } H=312,5 \text{ A/m}$$

- 3.61 Odredite iznos jakosti magnetskog polja u točki P_2 koja se nalazi na udaljenosti $2R$ vertikalno iznad osi vodiča kojim teče struja smjera „u ravninu crtanja“ za zadatak 3.74.

$$\text{Rj. } H=66,2 \text{ A/m}$$

4. Elektromagnetizam

U tablici 4.1. nalazi se podsjetnik važnijih veličina u vremenski promjenjivim elektromagnetskim poljima (uz tablice 2.1 i 3.1).

Oznaka	Veličina	Mjerna jedinica
N	Poyntingov vektor	W/m^2
P	Snaga	W
γ	Valna konstanta	m^{-1}
ω	Kružna frekvencija	rad/s
α	Prigušna konstanta	m^{-1}
β	Fazna konstanta	m^{-1}
c_0	Brzina svjetlosti u vakuumu	$3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
c	Brzina čela vala	m/s
Z	Valna impedancija	Ω
λ	Valna duljina	m
d	Dubina prodiranja	m

Tablica 4.1. Osnovne veličine u promjenjivim elektromagnetskim poljima

4.1 Faradayev zakon elektromagnetske indukcije

U vodljivoj petlji površine S , obrubljenoj konturom c , koja se nalazi u magnetskom polju indukcije \mathbf{B} , inducirani napon ovisi o vremenskoj promjeni magnetskog toka na način:

$$u_{ind} = \oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS \quad (4.1)$$

Derivacija po vremenu odnosi se i na prvi i na drugi član pod znakom integrala u gornjoj jednadžbi. Ukoliko je magnetska indukcija promjenjiva u vremenu, a petlja se giba brzinom v u magnetskom polju, gornji se integral može zapisati u formi:

$$\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS + \oint_c (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad (4.2)$$

Prvi član odnosi se na inducirani napon uslijed vremenske promjene gustoće magnetskog toka, a drugi član na inducirani napon zbog gibanja petlje brzinom v u magnetskom polju.

4.2 Maxwellove jednadžbe u diferencijalnom obliku

1. Faradayev zakon elektromagnetske indukcije:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (4.3)$$

2. Ampereov kružni zakon protjecanja

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (4.4)$$

3. Gaussov zakon za električno polje

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (4.5)$$

4. Gaussov zakon za magnetsko polje

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4.6)$$

4.3 Maxwellove jednadžbe u integralnom obliku

1. Faradayev zakon elektromagnetske indukcije:

$$\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_s \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS \quad (4.7)$$

2. Ampereov kružni zakon protjecanja

$$\oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_s \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS + \int_s \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS \quad (4.8)$$

3. Gaussov zakon za električno polje

$$\iint_s \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \int_v \rho dV \quad (4.9)$$

4. Gaussov zakon za magnetsko polje

$$\iint_s \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (4.10)$$

4.4 Relacije građe

Relacije građe povezuju veličine polja preko parametara dielektričnosti ϵ , permeabilnosti μ i provodnosti κ , na način:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (4.11)$$

$$\mathbf{J} = \kappa \mathbf{E}$$

4.5 Poyntingov teorem i Poyntingov vektor

Za proračune koji uključuju strujanje energije u prostoru uvodimo Poyntingov vektor \mathbf{N} :

$$\mathbf{N} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad [\text{W/m}^2] \quad (4.12)$$

Integralom:

$$P = \iint_S \mathbf{N} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS \quad (4.13)$$

određen je tok elektromagnetske snage kroz zatvorenu plohu S .

Poyntingov teorem je oblika:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \right) dV = \int_V \frac{J^2}{\kappa} dV + \iint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS \quad (4.14)$$

Član s lijeve strane znaka jednakosti označava smanjenje energije pohranjene u elektromagnetskom polju. Smanjenje energije jednako je zbroju gubitaka u prostoru $\int_V \frac{J^2}{\kappa} dV$ i strujanja energije iz promatranog prostora $\iint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS$.

4.6 Jednadžbe ravnog vala u realnim dielektricima i vodičima

U linearnom, izotropnom i homogenom sredstvu u kojem nema izvora ($\rho_s = 0, J_s = 0$), valne su jednadžbe oblika:

$$\begin{aligned} \Delta \underline{\mathbf{E}} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{E}}}{\partial t^2} - \mu \kappa \frac{\partial \underline{\mathbf{E}}}{\partial t} &= 0 \\ \Delta \underline{\mathbf{H}} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{H}}}{\partial t^2} - \mu \kappa \frac{\partial \underline{\mathbf{H}}}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

Uz pretpostavku harmonički promjenjivog polja vremenski ovisnog s funkcijom $e^{j\omega t}$ račun možemo pojednostaviti uvođenjem fazora:

$$\begin{aligned} \Delta \underline{\mathbf{E}} &= \gamma^2 \underline{\mathbf{E}} \\ \Delta \underline{\mathbf{H}} &= \gamma^2 \underline{\mathbf{H}} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Pri tom je kompleksni broj γ valna konstanta:

$$\gamma^2 = -\omega^2 \mu \epsilon + j \omega \mu \kappa \quad (4.17)$$

Realni dio valne konstante naziva se prigušna konstanta i označava s α , a imaginarni dio se naziva fazna konstanta i označava se s β .

Prepostavimo da val putuje npr. u smjeru z , i ne ovisi o prostornim koordinatama x i y . Takav val naziva se ravnim valom jer su vrijednosti polja u bilo kojoj ravnini okomitoj na smjer rasprostiranja konstantne. Pored toga jakosti električnog i magnetskog polja su okomite i međusobno i na smjer rasprostiranja vala.

U Kartezijevom koordinatnom sustavu rješenja su valnih jednadžbi za ravni val:

$$\begin{aligned} E &= E_1 e^{\gamma z} + E_2 e^{-\gamma z} \\ H &= H_1 e^{\gamma z} + H_2 e^{-\gamma z} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Za prigušnu i faznu konstantu vrijede jednadžbe:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\omega}{\sqrt{2}c} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{\omega \epsilon}\right)^2} - 1} \\ \beta &= \frac{\omega}{\sqrt{2}c} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{\omega \epsilon}\right)^2} + 1} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Veličina c je brzina čela vala:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} \quad (4.20)$$

Uvedimo i valnu impedanciju Z :

$$Z = \frac{j \omega \mu}{\gamma} = \frac{E_2}{H_2} = -\frac{E_1}{H_1} \quad (4.21)$$

Valnu duljinu λ u smjeru prostiranja vala računamo prema jednadžbi:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad (4.22)$$

Dubina prodiranja d definira se omjerom:

$$d = \frac{1}{\alpha} \quad (4.23)$$

Period T ponavljanja je:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (4.24)$$

4.7 Jednadžbe ravnog vala u sredstvima bez gubitaka

Rješenje valne jednadžbe u fazorskom obliku:

$$\Delta \underline{E} = \gamma^2 \underline{E} \quad (4.25)$$

Uz $\kappa=0$ i uz pretpostavku: $\underline{E} = E_x(z, t) \mathbf{a}_x$ je:

$$\underline{E} = (E_0^+ \cos(\omega(t - z\sqrt{\mu\varepsilon}) + \varphi) + E_0^- \cos(\omega(t + z\sqrt{\mu\varepsilon}) + \varphi)) \mathbf{a}_x \quad (4.26)$$

E_0^+ predstavlja amplitudu vala koji putuje u smjeru z , a E_0^- amplitudu vala koji putuje u smjeru $-z$.

Ukoliko se val giba u proizvoljnom smjeru definiranom vektorom β :

$$\beta = \beta_x \mathbf{a}_x + \beta_y \mathbf{a}_y + \beta_z \mathbf{a}_z,$$

uz vektor položaja točke $\mathbf{r} = x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z$, fazu (argument funkcije kosinus) možemo pisati na način:

$$\omega t - \beta \cdot \mathbf{r} + \varphi. \quad (4.27)$$

U fazorskom obliku sada možemo pisati za električno polje:

$$\underline{E} = \underline{E}_0 e^{j\varphi} e^{-j\beta \cdot \mathbf{r}} = \underline{E}_0 e^{-j\beta \cdot \mathbf{r}} \quad (4.28)$$

i analogno:

$$\underline{H} = \underline{H}_0 e^{j\varphi} e^{-j\beta \cdot \mathbf{r}} = \underline{H}_0 e^{-j\beta \cdot \mathbf{r}}. \quad (4.29)$$

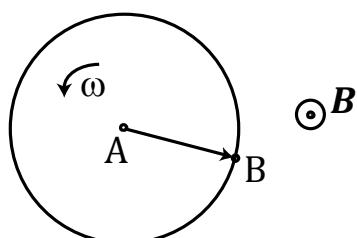
Veza između \underline{E} i \underline{H} je:

$$\underline{H} = \frac{1}{\omega\mu} \beta \times \underline{E} \quad (4.30)$$

Valni otpor Z_0 povezuje amplitude E_0 i H_0 .

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{E_0}{H_0} \quad (4.31)$$

Primjer 4.1 Kružni disk radijusa r_0 prema slici rotira kružnom frekvencijom ω u homogenom polju $\mathbf{B} = B \mathbf{a}_z$. Odredite inducirani napon u_{BA} između točke na obodu diska i središta diska.



Na udaljenosti r od središta diska obodna je brzina:

$$\mathbf{v} = \omega r \mathbf{a}_\alpha,$$

Vrijedi:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \omega r \mathbf{a}_\alpha \times B \mathbf{a}_z = \omega r B \mathbf{a}_r$$

Inducirani napon između točaka B i A je uz $d\mathbf{l} = dr \mathbf{a}_r$:

$$u_{BA} = \int_r^{r_0} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \int_{r=0}^{r_0} \omega r B \mathbf{a}_r \cdot dr \mathbf{a}_r = \frac{\omega r_0^2 B}{2}$$

Primjer 4.2 Magnetska je indukcija u prostoru određena jednadžbom:

$$\mathbf{B} = 0,1 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) \sin(377t) \mathbf{a}_z [\text{T}].$$

Odredite inducirani napon u petlji kvadratnog oblika koja leži u xy ravnini s vrhovima $(0,0,0)$, $(1\text{m},0,0)$, $(1\text{m},1\text{m},0)$, $(0,1\text{m},0)$.

Magnetski tok kroz petlju s normalom $\mathbf{n} = \mathbf{a}_z$ je:

$$\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0,1 \sin(377t) \int_{x=0}^1 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx \int_{y=0}^1 \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right) dy = \frac{0,4}{\pi^2} \sin(377t)$$

Inducirani je napon:

$$u = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{0,4}{\pi^2} \cdot 377 \cos(377t) = 15,28 \text{V}$$

Primjer 4.3 Odredite gustoću struje pomaka u blizini uređaja koji emitira signal s jakosti magnetskog polja:

$$\mathbf{H} = 0,2 \cos(6,3 \cdot 10^8 t - 2,1x) \mathbf{a}_z \left[\frac{\text{A}}{\text{m}}\right].$$

Rotor magnetskog polja je:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

jer je u zraku $\kappa = 0$ pa nema protjecanja provodne struje \mathbf{J} .

$$\nabla \times \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & H_z \end{vmatrix} = \frac{\partial H_z}{\partial y} \mathbf{a}_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} \mathbf{a}_y = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Gustoća struja pomaka je:

$$\mathbf{J}_p = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -\frac{\partial H_z}{\partial x} \mathbf{a}_y = -0,2 \cdot 2,1 \sin(6,3 \cdot 10^8 t - 2,1x) \mathbf{a}_y$$

$$\mathbf{J}_p = -0,42 \cdot \sin(6,3 \cdot 10^8 t - 2,1x) \mathbf{a}_y$$

Primjer 4.4 Odredite omjer amplitude gustoće provodnih struja i amplitude gustoće struja pomaka u materijalu s parametrima (ϵ, μ, κ) u kojem vlada polje jakosti:

$$\mathbf{E} = E_0 \cos(\omega t) \mathbf{a}_x.$$

Gustoća provodnih struja je:

$$\mathbf{J} = \kappa \mathbf{E} = \kappa E_0 \cos(\omega t) \mathbf{a}_x$$

Amplituda gustoće provodnih struja je:

$$J_m = \kappa E_0$$

Gustoća struje pomaka je:

$$\mathbf{J}_p = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -\epsilon \omega E_0 \sin(\omega t) \mathbf{a}_x$$

Amplituda gustoće provodnih struja je:

$$J_{p,m} = \epsilon \omega E_0$$

Omjer amplitude gustoće provodnih struja i amplitude gustoće struja pomaka:

$$\frac{J_m}{J_{p,m}} = \frac{\kappa}{\epsilon \omega}$$

Primjer 4.5 Odredite Poytingov vektor za polje:

$$\mathbf{E} = \cos(-\omega t + \beta z) \mathbf{a}_x + \sin(-\omega t + \beta z) \mathbf{a}_y$$

Iz Faradayeva zakona možemo dobiti jakost magnetskog polja:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Odredimo prvo rotor električnog polja:

$$\nabla \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial E_y}{\partial z} \mathbf{a}_x + \frac{\partial E_x}{\partial z} \mathbf{a}_y =$$

$$= -\beta(\cos(-\omega t + \beta z)\mathbf{a}_x + \sin(-\omega t + \beta z)\mathbf{a}_y)$$

Integracijom u vremenu dobije se magnetska indukcija:

$$\mathbf{B} = -\frac{\beta}{\omega}(\sin(-\omega t + \beta z)\mathbf{a}_x - \cos(-\omega t + \beta z)\mathbf{a}_y)$$

Poytingov je vektor definiran jednadžbom:

$$\mathbf{N} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{1}{\mu}(\mathbf{E} \times \mathbf{B})$$

Uvrštenjem jednadžbi za \mathbf{E} i \mathbf{B} dobije se:

$$\mathbf{N} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \cos(-\omega t + \beta z) & \sin(-\omega t + \beta z) & 0 \\ -\frac{\beta}{\omega} \sin(-\omega t + \beta z) & \frac{\beta}{\omega} \cos(-\omega t + \beta z) & 0 \end{vmatrix} = \frac{\beta}{\mu\omega} \mathbf{a}_z$$

Primjer 4.6 Jakost električnog polja ravnog vala koji se širi u materijalu zadana je izrazom:

$$\mathbf{E} = 2\cos(2 \cdot 10^8 t - 2x)\mathbf{a}_y.$$

Odredite relativnu dielektričnost prostora, faznu konstantu, prigušnu konstantu, valnu duljinu vala i odgovarajuću jednadžbu magnetskog polja vala.

Iz jednadžbe za jakost električnog polja slijedi:

$$\beta = 2$$

$$\alpha = 0$$

Val se rasprostire u smjeru $+x$, a jakost magnetskog polja ima smjer \mathbf{a}_z . S obzirom da nema prigušenja radi se o izolatoru pa se valna duljina može računati prema:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \pi \text{ [m]}$$

Brzina čela vala je:

$$c = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2 \cdot 10^8}{2} = 10^8 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

Relativna dielektričnost dobije se iz jednadžbe:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

$$\varepsilon_r = \frac{1}{c^2 \mu_r \mu_0 \varepsilon_0} = 9$$

Jakost je magnetskog polja:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{Z_0} (2\cos(2 \cdot 10^8 t - 2x) \mathbf{a}_z) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (2\cos(2 \cdot 10^8 t - 2x) \mathbf{a}_z) = \frac{1}{40\pi} (2\cos(2 \cdot 10^8 t - 2x) \mathbf{a}_z)$$

4.8 Zadaci za vježbu

- 4.1 U vakuumu je zadana jakost električnog polja jednadžbom $\mathbf{E} = 2x \mathbf{a}_y$ kV/m. Odredite gustoću energije električnog polja u točki (4m; 5m; 7m), pri čemu je točka označena u obliku (x; y; z).

Rj. $283,3 \text{ } \mu\text{Jm}^{-3}$

- 4.2 Za materijal koji ima provodnost 5 Sm^{-1} i $\varepsilon_r=1,5$ jakost električnog polja zadana je izrazom $E=250 \sin(10^{10} t) [\text{V/m}]$. Odredite frekvenciju pri kojoj gustoće pomačne i provodne struje imaju jednaku amplitudu.

Rj. 59,9 GHz

- 4.3 U prostoru je jakost električnog polja zadana izrazom $\mathbf{E}=E_m \sin(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_y$. Odredite amplitudu (pozitivan broj) magnetske indukcije ukoliko je zadano:
 $E_m = 10 \text{ V/m}$, $\beta = 0.6 \text{ m}^{-1}$, $\omega = 10000 \text{ rad/s}$.

Rj. 0,6 mT

- 4.4 U vakuumu je električno polje zadano jednadžbom $\mathbf{E}(z,t)=50 \cos(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_x$ [V/m]. Odredite srednju snagu koja prolazi krugom radijusa 2,5 m u ravnini $z=2 \text{ m}$.

Rj. 65,1 W

- 4.5 U vakuumu je zadana jakost električnog polja jednadžbom $\mathbf{E}=x \mathbf{a}_y$ [kV/m]. Odredite gustoću energije električnog polja u točki (1m; 5m; 7m), pri čemu je točka označena u obliku (x; y; z).

Rj. $0,000217 \text{ Jm}^{-3}$

- 4.6 U vakuumu je električno polje zadano jednadžbom $\mathbf{E}(z,t)=10 \cos(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_x$ [V/m]. Odredite srednju snagu koja prolazi krugom radijusa 1,5 m u ravnini $z=2 \text{ m}$.

Rj. 0,938 W

- 4.7 U vakuumu je zadana jakost magnetskog polja jednadžbom $\mathbf{H}=200x \mathbf{a}_y$ [A/m]. Odredite gustoću energije magnetskog polja u točki (2m; 5m; 1m), pri čemu je točka označena u obliku (x; y; z).

Rj. $100,5 \text{ mJm}^{-3}$

- 4.8 Vlažno tlo ima provodnost 10^{-3} Sm^{-1} i relativnu dielektričnost 2,5. Odredite amplitudu gustoće provodnih struja u točki u kojoj je $E=6 \cdot 10^{-6} \sin(9 \cdot 10^9 t) \text{ [V/m]}$.

Rj. 6 nAm^{-2}

- 4.9 Odredite amplitudu vala zadanog izrazom:

$$\mathbf{E}(z,t)=10\sin(\omega t - \beta z)\mathbf{a}_x - 15\sin(\omega t - \beta z)\mathbf{a}_y \quad [\text{V/m}]$$

u $t=0, z=0,75\lambda$.

Rj. $18,03 \text{ V/m}$

- 4.10 U vakuumu je električno polje zadano jednadžbom $\mathbf{E}(z,t)=150 \sin(\omega t - \beta z)\mathbf{a}_x \text{ [V/m]}$. Odredite srednju snagu koja prolazi pravokutnikom stranica 3cm i 1,5cm u ravnini $z=2\text{m}$.

Rj. $0,0134 \text{ W}$

- 4.11 U vakuumu je zadana jakost magnetskog polja jednadžbom $\mathbf{H} = 100xy \mathbf{a}_z \text{ A/m}$. Odredite gustoću energije magnetskog polja u točki (2m; 5m; 1m), pri čemu je točka označena u obliku (x; y; z).

Rj. $628,3 \text{ mJm}^{-3}$

- 4.12 Vlažno tlo ima provodnost 10^{-3} Sm^{-1} i relativnu dielektričnost 2,5. Odredite amplitudu gustoće pomačnih struja u točki u kojoj je:

$$E=6 \cdot 10^{-6} \sin(9 \cdot 10^9 t) \text{ V/m.}$$

Rj. $1,19 \mu\text{A}/\text{m}^2$

- 4.13 Kružna petlja radijusa 5 cm nalazi se u xy ravnini u polju indukcije

$$\mathbf{B} = 0,5 \cos(377t) (4\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z) \text{ [T].}$$

Odredite inducirani napon u petlji.

Rj. $5,92\sin(377t) \text{ V}$

- 4.14 Provjerite da li polje određeno s:

$$\mathbf{E} = E_m \sin(x) \sin(t) \mathbf{a}_y \text{ i}$$

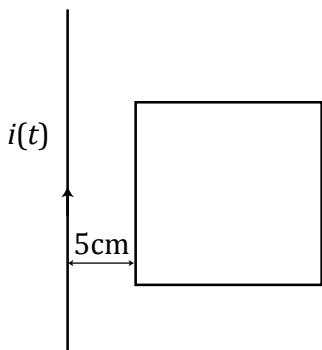
$$\mathbf{H} = \frac{E_m}{\mu_0} \cos(x) \cos(t) \mathbf{a}_z$$

zadovoljava Maxwellove jednadžbe.

Rj. Polje ne zadovoljava Maxwellove jednadžbe.

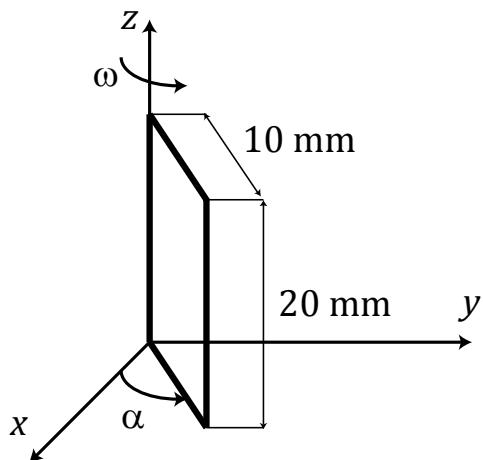
4.15 Kvadratna petlja stranice 20 cm nalazi se pored beskonačno duge strujnice prema slici. Ako strujnicom protječe sinusna struja efektivne vrijednosti 1 A, frekvencije 5 kHz, odredite inducirani napon u petlji.

Rj. 2mV



4.16 Pravokutna petlja ukupnog otpora žice 20 mΩ rotira frekvencijom 2 rad/s oko jedne svoje stranice u polju indukcije $\mathbf{B} = 10\mathbf{a}_y$ mT, prema slici. Odredite inducirana struju u petlji u trenutku u kojem je petlja u položaju $\alpha = 0,25\pi$.

Rj. 0,14 mA



4.17 Polje u vakuumu zadano je jednadžbama:

$$\mathbf{E} = E_m \cos(\omega \cdot t - k_2 \cdot z) \mathbf{a}_x \text{ i}$$

$$\mathbf{H} = \frac{E_m}{k_1} \cos(\omega \cdot t - k_2 \cdot z) \mathbf{a}_y$$

pri čemu su k_1 i k_2 konstante.

a) Odredite konstantu k_1 .

$$\text{Rj. } k_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

b) odredite konstantu k_2 .

$$\text{Rj. } k_2 = \omega \cdot \varepsilon_0 \cdot \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$$

4.18 Za zadano električno polje u slobodnom prostoru:

$$\mathbf{E} = E_m \cos(\beta \cdot x) \cos(\omega t) \mathbf{a}_z$$

odredite magnetsko polje.

$$\text{Rj. } \mathbf{H} = -\frac{\beta}{\omega} \cdot \varepsilon_0 E_m \sin(\beta \cdot x) \sin(\omega t) \mathbf{a}_y$$

4.19 Za zadatak 4.18. odredite omjer $\frac{\omega}{\beta}$.

$$\text{Rj. } \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \cdot \varepsilon_0}}$$

4.20 Neka je polje u prostoru zadano jednadžbama:

$$\mathbf{E} = 100 \cos(\omega t + \frac{2\pi}{5}x) \mathbf{a}_z \text{ [V/m]}$$

$$\mathbf{H} = \frac{100}{120\pi} \cos(\omega t + \frac{2\pi}{5}x) \mathbf{a}_y \text{ [A/m]}$$

Odredite iznos fazora Poyntingovog vektora.

$$\text{Rj. } -26,53 \text{ W/m}^2$$

4.21 Neka je polje u prostoru zadano jednadžbama ($\omega=200$ krad/s):

$$\mathbf{E} = 100 \cos(\omega t + \frac{4\pi}{3}x) \mathbf{a}_z \text{ [V/m]}$$

$$\mathbf{H} = \frac{100}{120\pi} \cos(\omega t + \frac{4\pi}{3}x) \mathbf{a}_y \text{ [A/m]}$$

a) Odredite fazor električnog polja \mathbf{E} .

$$\text{Rj. } 100e^{j\frac{4}{3}\pi x} \mathbf{a}_z \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

b) Odredite fazor magnetskog polja \mathbf{H} .

$$\text{Rj. } \frac{100}{120\pi} e^{j\frac{4}{3}\pi x} \mathbf{a}_y \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

c) Odredite trenutnu vrijednost Poytingova vektora u $x=1$ m i $t=2$ s u smjeru \mathbf{a}_x .

$$\text{Rj. } -10,14 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

d) Odredite prosječnu snagu koja prolazi pravokutnikom određenim točkama $(0; 0)$, $(0; 2; 0)$, $(0; 2; 2)$ i $(0; 0; 2)$ i normalom $\mathbf{n} = \mathbf{a}_x$.

$$\text{Rj. } -53 \text{ W}$$

4.22 Jakost električnog polja ravnog elektromagnetskog vala koji se širi dielektrikom relativne magnetske permeabilnosti $\mu_r = 1$ zadana je jednadžbom:

$$\mathbf{E} = 3 \sin(2 \cdot 10^8 t - 2x) \mathbf{a}_y \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

a) Odredite smjer u kojem se giba val.

Rj. \mathbf{a}_x

b) Odredite valnu duljinu λ .

Rj. $\pi \text{ m}$

c) Odredite relativnu dielektričnost sredstva ϵ_r .

Rj. 9

d) Odredite vektor \mathbf{H} .

$$\text{Rj. } 0,024 \sin(2 \cdot 10^8 t - 2x) \mathbf{a}_z \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

4.23 Cilindrični kondenzator radijusa unutrašnje elektrode 5mm, radijusa vanjske elektrode 6mm, duljine 500mm ispunjen je dielektrikom relativne dielektričnosti $\epsilon_r = 6,7$. Ako je unutrašnja elektroda uzemljena, a vanjska na potencijalu $\varphi = 250 \sin(377t) \text{ V}$ odredite:

a) Jakost električnog polja u dielektriku na udaljenosti $r=5,5 \text{ mm}$ od osi kondenzatora.

$$\text{Rj. } -249310 \sin(377t) \mathbf{a}_r \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

b) Gustoću struje pomaka u dielektriku na udaljenosti $r=5,2\text{mm}$ od osi kondenzatora.

$$\text{Rj. } -5,9 \cdot 10^{-3} \cos(377t) \mathbf{a}_r \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$$

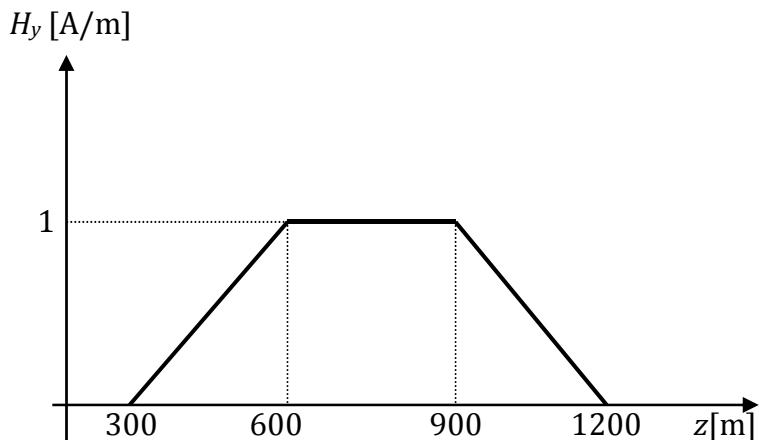
c) Iznos ukupne struje pomaka

$$\text{Rj. } 9,63 \cdot 10^{-5} \cos(377t) \text{ A}$$

d) Kapacitet kondenzatora

Rj. 1 nF

4.24 Ravni val giba se u $+z$ smjeru u prostoru ($\mu_r = 1$; $\epsilon_r = 4$). Jakost električnog polja ima samo x komponentu, a prostorna promjena jakosti magnetskog polja, koje ima samo y komponentu zadana je slikom u $t = 1 \mu\text{s}$.



a) Odredite $E(t=-1\mu\text{s}, z=0)$.

Rj. 0

b) Odredite $E(t=-1,5\mu\text{s}, z=0)$.

Rj. $47,13 \frac{\text{V}}{\text{m}}$

c) Odredite $E(t=-4\mu\text{s}, z=0)$.

Rj. $188,5 \frac{\text{V}}{\text{m}}$

d) Odredite $E(t=-6\mu\text{s}, z=0)$.

Rj. $94,25 \frac{\text{V}}{\text{m}}$

4.25 Sat s metalnim kazaljkama, koji leži u xy ravnini nalazi se u homogenom magnetskom polju indukcije $0,5 \text{ T}$ usmjerenom u ravninu crtanja prema slici. Kazaljka 1, koja pokazuje minute dugačka je 20cm . Kazaljka 2, koja pokazuje sate dugačka je 10cm . Kazaljka 3, koja pokazuje sekunde dugačka je 5cm . Uz pretpostavku da se kazaljke gibaju kontinuirano u vremenu i da su osovine svih kazaljki električki spojene odredite:

a) Iznos napona U_{AB} induciranih između vrhova kazaljki za minute i sate u trenutku kad sat pokazuje $t_h=2\text{h}15\text{min}30\text{s}$.

Rj. $17,1\mu\text{V}$

b) Iznos napona U_{AC} induciranih između vrhova kazaljki za minute i sekunde u trenutku kad sat pokazuje $t_h=2\text{h}15\text{min}30\text{s}$.

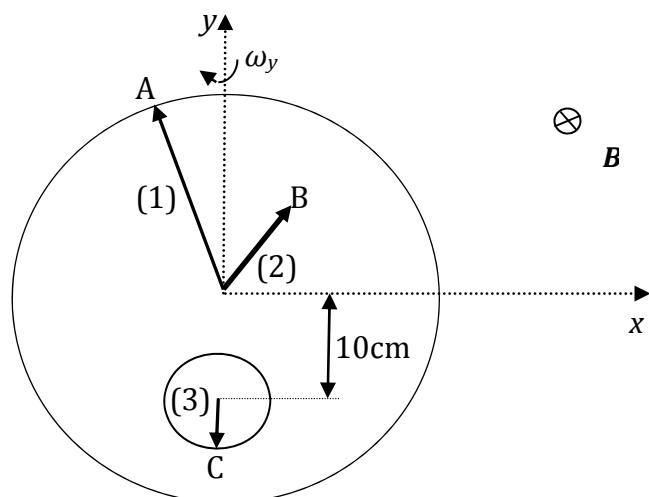
Rj. $48 \mu\text{V}$

- c) U trenutku kad sat pokazuje $th=3h30min30s$, sat počinje rotirati kutnom brzinom $\omega_y = 0,5\pi$ rad/s oko osi y. Odredite iznos induciranih napona U_{AC} između vrhova kazaljki za minute i sekunde u trenutku kad sat pokazuje $t_h=3h30min32s$.

Rj. $48 \mu V$

- d) U trenutku kad sat pokazuje $th=3h30min30s$, sat počinje rotirati kutnom brzinom $\omega_y = 0,5\pi$ rad/s oko osi y. Odredite iznos induciranih napona U_{AC} između vrhova kazaljki za minute i sekunde u trenutku kad sat pokazuje $t_h=3h30min34s$.

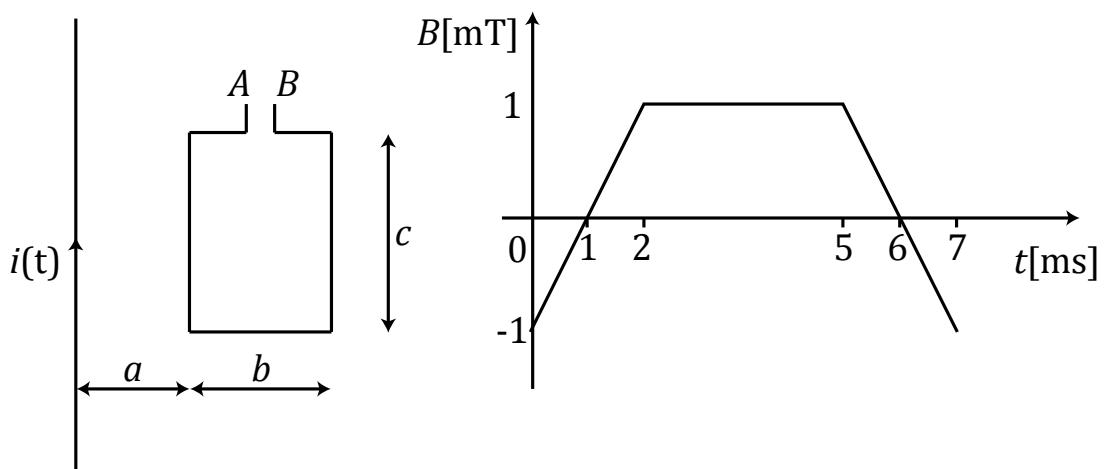
Rj. $48 \mu V$



- 4.26 Na udaljenosti 1m od beskonačno dugog vodiča kroz koji protječe struja $i(t)$ izmjerena je magnetska indukcija prikazana slikom. Zadano je: $a=2\text{m}$, $b=1\text{m}$, $c=2\text{m}$.

- a) Odredite struju u beskonačno dugom vodiču u trenutku $t = 4 \text{ ms}$.

Rj. 5 kA



b) Odredite inducirani napon U_{AB} u petlji u trenutku $t = 1 \text{ ms}$.

Rj. -0,8 V

c) Odredite inducirani napon U_{AB} u petlji u trenutku $t = 3 \text{ ms}$.

Rj. 0

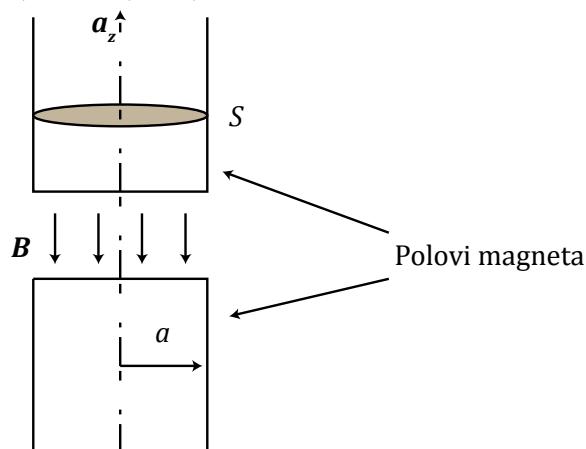
d) Odredite inducirani napon U_{AB} u petlji u trenutku $t = 5,5 \text{ ms}$.

Rj. 0,8 V

4.27 Između dva pola cilindričnih magneta prema slici magnetska indukcija može se aproksimirati jednadžbom:

$$\mathbf{B} = \begin{cases} -B_0 \frac{a \cdot t}{\sqrt{a^2 + r^2}} \mathbf{a}_z & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Zadano je: $a=0,1 \text{ m}$, $B_0=1 \text{ T}$, $\kappa=0$, $\varepsilon_r=1$.



a) Odredite primjenom Faradayevog zakona iznos jakosti električnog polja u prostoru između polova u trenutku $t=1 \text{ ms}$ za $r=0,05 \text{ m}$.

Rj. 23,6 mV/m

b) Odredite primjenom Faradayevog zakona iznos jakosti električnog polja u prostoru između polova u trenutku $t=3 \text{ ms}$ za $r=0,1 \text{ m}$.

Rj. 41,4 mV/m

c) Odredite primjenom Faradayevog zakona iznos jakosti električnog polja u prostoru između polova u trenutku $t=-1 \text{ ms}$ za $r=0,05 \text{ m}$.

Rj. 0

d) Odredite iznos magnetskog toka koji prolazi plohom S magneta u $t=1 \text{ ms}$.

Rj. 26 μWb

- 4.28 Smjer širenja vala frekvencije 10 MHz u slobodnom prostoru prikazan je slikom. Smjer širenja vala čini kut od 30° s $+z$ osi, a njegova projekcija na x - y ravninu čini kut od 45° s $+x$ osi. Jakost električnog polja nema z komponentu, a u $t=10^{-6}$ s u točki ($x=0$, $y=0$, $z=0$) ima iznos $10\cos(\omega \cdot t - \pi/6)$ V/m. Uz pretpostavku $E_{0x} > 0$:

a) Odredite E_{0x}

Rj. 7,1 V/m

b) Odredite E_{0y}

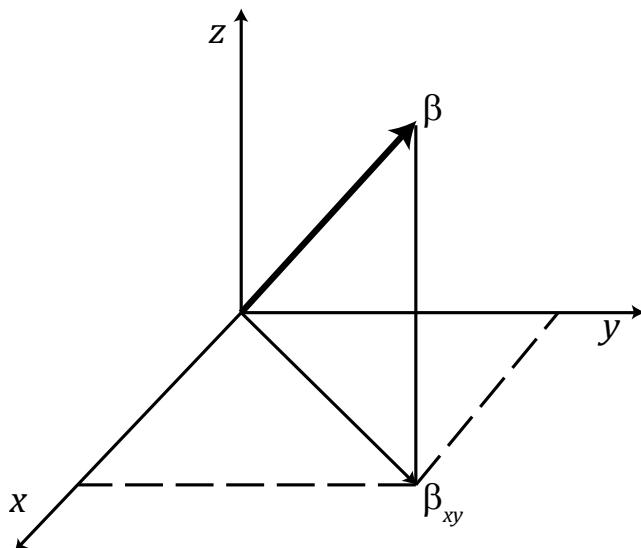
Rj. -7,1 V/m

c) Odredite H_{0x} .

Rj. 16,2 mA/m

d) Odredite H_{0y}

Rj. 16,2 mA/m



- 4.29 Ravni val je u sredstvu ($\mu_r = 1$, $\epsilon_r = 2$) zadani jednadžbom za jakost magnetskog polja:

$$\mathbf{H} = \mathbf{a}_y 10 \cos(\omega t - 3x) \text{ A/m}$$

a) Odredite faznu konstantu β .

Rj. 3 m^{-1}

b) Odredite brzinu širenja vala.

Rj. $2,12 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

c) Odredite jakost električnog polja u $t = 10 \text{ ns}$ i $x = 0,4 \text{ m}$.

Rj. $1,2 \text{ kV/m}$

d) Odredite smjer širenja vala.

Rj. \mathbf{a}_x

- 4.30 U ishodištu sfernog koordinatnog sustava nalazi se izvor polja:

$$\mathbf{E} = 100 \sin(\vartheta) \cdot r^{-1} \cdot \cos(10^{10}t - r) \mathbf{a}_\vartheta \quad [\frac{\text{V}}{\text{m}}]$$

$$\mathbf{H} = \frac{100}{120\pi} \sin(\vartheta) \cdot r^{-1} \cdot \cos(10^{10}t - r) \mathbf{a}_\alpha \quad [\frac{\text{A}}{\text{m}}]$$

a) Odredite smjer prostiranja vala.

Rj. \mathbf{a}_r

b) Odredite iznos Poyntingova vektora \mathbf{N} na udaljenosti $r=2\text{m}$ u trenutku $t = 1 \text{ ns}$ za $\vartheta = \pi/6$.

Rj. $35,1 \text{ mW/m}^2$

c) Odredite srednju vrijednost Poyntingova vektora \mathbf{N}_{sr} za $r = 4\text{m}$ i $\vartheta = \pi/4$.

Rj. $414,5 \text{ mW/m}^2$

d) Odredite ukupnu srednju snagu izvora.

Rj. 111 W

4.31 Neka je u sredstvu s $\mu_r = 1$ jakost magnetskog polja zadana jednadžbom:

$$\mathbf{H} = \frac{e^{-200y}}{10} \cos(2\pi \cdot 10^{10}t - 300y) \mathbf{a}_x \left[\frac{\text{A}}{\text{m}} \right].$$

Odredite valnu impedanciju sredstva.

Rj. $219\angle34^\circ \Omega$

4.32 Odredite jakost električnog polja u trenutku $t = 2\text{ns}$ i $y=0,1\text{m}$ za zadatak 4.32.

Rj. $-18,9 \text{ nV/m}$

4.33 Neka su jakost električnog polja i magnetska indukcija ravnog vala u slobodnom prostoru dane jednadžbama:

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \mathbf{E}_0(x, y) \cdot e^{j(10^8 \cdot t - k \cdot z)}$$

$$\mathbf{B}(x, y, z, t) = \mathbf{B}_0(x, y) \cdot e^{j(10^8 \cdot t - k \cdot z)}$$

Pri tom je k konstanta, a \mathbf{E}_0 i \mathbf{B}_0 su vektori u xy ravnini.

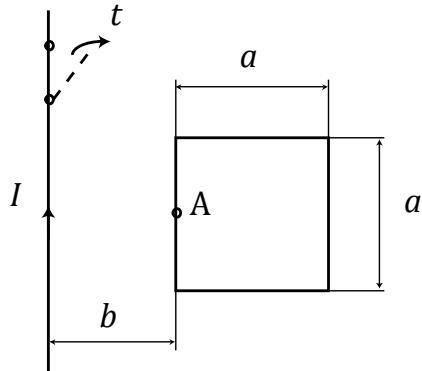
Odredite konstantu k tako da su zadovoljene Maxwellove jednadžbe.

Rj. $k=0,33 \text{ m}^{-1}$

4.34 Odredite valnu duljinu vala za zadatak 4.34.

Rj. $6\pi\text{m}$

4.35 Žičana petlja kvadratnog oblika, stranice a i ukupnog otpora žice R , nalazi se na udaljenosti b od beskonačno dugog vodiča kojim teče struja I prema slici. U trenutku t , struha kroz žicu je prekinuta. ($a=1\text{m}$, $b=1\text{m}$, $I=1\text{A}$, $R=1\Omega$)



Odredite ukupni naboј koji prođe točkom A na petlji za vrijeme u kojem struha teče petljom.

Rj. $Q=138,6 \text{nC}$

4.36 Sinusno promjenjivi ravni val se širi u realnom sredstvu za koje je zadano $\epsilon_r=6$, $\mu_r=1$, $\kappa=0,5 \text{ S/m}$. Frekvencija vala je $f=200 \text{ MHz}$, a početna amplituda je $E_0=200 \text{ V/m}$.

Odredite omjer iznosa električnog polja $E(x=0)/E(x=2\lambda)$ gdje je λ valna duljina.

Rj. 59879

4.37 Odredite valnu impedanciju za zadatak 4.37.

Rj. $Z=6,0\angle 41^\circ \Omega$

4.38 Odredite srednju vrijednost realnog dijela Poyntingova vektora na udaljenosti $x=0,8d$ (d je dubina prodiranja).

Rj. $N_{sr}=54,3 \text{ W/m}^2$

4.39 U ishodištu sfernog koordinatnog sustava nalazi se izvor polja:

$$\mathbf{E} = 50 \sin(\vartheta) \cdot r^{-1} \cdot \cos(10^9 t - 2r) \mathbf{a}_\vartheta \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right]$$

$$\mathbf{H} = \frac{50}{120\pi} \sin(\vartheta) \cdot r^{-1} \cdot \cos(10^9 t - 2r) \mathbf{a}_\alpha \left[\frac{\text{A}}{\text{m}} \right]$$

Odredite iznos Poyntingova vektora \mathbf{N} na udaljenosti $r=3\text{m}$ u trenutku $t=2\text{ns}$ za $\vartheta = \pi/5$ i ukupnu srednju snagu izvora.

Rj. $N=108,8 \text{ mW/m}^2$; $P_{sr}=27,8 \text{ W}$

I. VEKTORSKA ANALIZA

1.1.

$$\bar{r}^2 = 2\bar{a}_x' + 2\bar{a}_y' + 2\bar{a}_z'$$

$$\bar{r}' = 4\bar{a}_x' + 3\bar{a}_y' + 3\bar{a}_z'$$

$$\bar{R}' = \bar{r}' - \bar{r}^2 = -2\bar{a}_x' - \bar{a}_y' - \bar{a}_z'$$

$$\bar{a}_r = \frac{\bar{R}'}{|\bar{R}'|} = \frac{-2\bar{a}_x' - \bar{a}_y' - \bar{a}_z'}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = -\sqrt{\frac{2}{3}}\bar{a}_x - \frac{1}{\sqrt{6}}\bar{a}_y - \frac{1}{\sqrt{6}}\bar{a}_z$$

1.2.

$$T_{KAR} (2, 1, 3)$$

CILINDRIČNE KOORDINATE: $T_{CIL} (2, 2.236, 0.964, 3)$

$$g = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5} = 2.236$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{y}{x} = \tan^{-1} \frac{1}{2} \Rightarrow \phi = 26.56505^\circ$$

$$\phi [rad] = \phi [^\circ] \cdot \frac{\pi}{180} \Rightarrow \phi [rad] = 0.964$$

$$z = 3$$

SFERNE KOORDINATE

$$T_{SFE} (3.742, 0.641, 0.964)$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \cos^{-1} \frac{3}{\sqrt{4+1+9}} = \cos^{-1} \frac{3}{\sqrt{14}}$$

$$\theta = 36.69922 [^\circ] \Rightarrow \theta = 0.641 [rad]$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{14} = 3.742 \quad \phi_{cyl} = \phi_{SFE}$$

$$m 85.0 = V$$

1.3.

$$\vec{A}' = yz \vec{ax} - 2x \vec{ay} + \vec{az}$$

$$\vec{B}' = \vec{ax} + 2\vec{ay}$$

 $T(3,1,1)$

a) $\vec{A}' - \vec{B}' = (yz-1) \vec{ax} + (-2x-z) \vec{ay} + \vec{az}$
 $\text{u } T(3,1,1) \Rightarrow \boxed{\vec{A}' - \vec{B}' = -7\vec{ay} + \vec{az}}$

b) $\vec{A}' + \vec{B}' = (yz+1) \vec{ax} + (-2x+z) \vec{ay} + \vec{az}$
 $\text{u } T(3,1,1) \Rightarrow \boxed{\vec{A}' + \vec{B}' = 2\vec{ax} - 5\vec{ay} + \vec{az}}$

c) $\vec{A}' \cdot \vec{B}' = yz \vec{ax} \cdot \vec{ax} + (-2x-z) \vec{ay} \cdot \vec{ay}$
 $\text{u } T(3,1,1) \Rightarrow \boxed{\vec{A}' \cdot \vec{B}' = yz - 2xz = 1 - 6 = -5}$

d) $\vec{A}' \times \vec{B}' = yz \cdot z \vec{ax} \times \vec{ay} - 2x \vec{ay} \times \vec{ax} + \vec{az} \times \vec{ax}$
 $+ z \vec{az} \times \vec{ay} = yz^2 \vec{az} + 2x \vec{az} + \vec{ay} - z \vec{ax}$
 $\text{u } T(3,1,1) \Rightarrow \boxed{\vec{A}' \times \vec{B}' = -1 \cdot \vec{ax} + \vec{ay} + 7\vec{az}}$

1.4.

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta dd \quad \text{SFERNI KOORDINATNI SUSTAV}$$

$$\text{za } r=\text{konst. } dS = r^2 \sin \theta d\theta dd \quad \frac{\pi}{2}$$

$$P = \iiint r^2 \sin \theta d\theta dd = r^2 \int \sin \theta d\theta \int dd$$

$$P = 1.5^2 \left(-\cos \theta \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \right) \cdot 2\pi = \pi \cdot 1.5^2 \left(-\cos \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\boxed{P = 7.07 \text{ m}^2}$$

1.5.

$$dV = r dr d\theta dz$$

$$V = \int_1^3 r dr \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\theta \int_0^1 dz = \frac{r^2}{2} \Big|_1^3 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\theta \int_0^1 dz$$

$$V = \frac{3^2 - 1}{2} \cdot \left(\frac{3\pi}{2} - \pi \right) \cdot 1 = 4 \cdot \frac{\pi}{2} = 6.28 \text{ m}^3$$

$$\boxed{V = 6.28 \text{ m}^3}$$

1.6.

$$\bar{A}' = 2\bar{a}_x - 3\bar{a}_y + 2\bar{a}_z$$

$$\bar{B}' = \bar{a}_x + 2\bar{a}_y + \bar{a}_z$$

PROJEKCIJA VERTIKALNA, \bar{B}' MA VERTIKALNI \bar{A}' , JE UNIREDJAK $\bar{B}' \cdot \bar{A}_0$,
GORE JE $\bar{A}_0' = \frac{\bar{A}}{|\bar{A}'|}$

$$\bar{A}_0' = \frac{2\bar{a}_x - 3\bar{a}_y + 2\bar{a}_z}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 2^2}} = 0.48507 \bar{a}_x - 0.7276 \bar{a}_y + 0.48507 \bar{a}_z$$

$$\bar{B}' \cdot \bar{A}_0' = 0.98507 - 2 \cdot 0.7276 + 0.48507$$

$$\boxed{\bar{B}' \cdot \bar{A}_0' = -0.485}$$

$$\bar{A}' \cdot \bar{B}' = |\bar{A}'| \cdot |\bar{B}'| \cdot \cos \varphi(\bar{A}', \bar{B}')$$

$$\cos \varphi(\bar{A}', \bar{B}') = \frac{-2}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{6}} \Rightarrow \boxed{\varphi(\bar{A}', \bar{B}') = 101.42^\circ}$$

1.7.

$$|\bar{A}' \times \bar{B}'| = |\bar{A}'| \cdot |\bar{B}'| \cdot |\sin \varphi(\bar{A}', \bar{B}')|$$

$$|\bar{A}' \times \bar{B}'| = \begin{vmatrix} \bar{a}_x' & \bar{a}_y' & \bar{a}_z' \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7\bar{a}_x' + 7\bar{a}_z' \\ \sqrt{98} \end{vmatrix}$$

$$|\sin \varphi| = \frac{\sqrt{98}}{\sqrt{102}} = 0.980196058$$

$$\sin \varphi = \pm 0.980196058$$

$$\varphi_1 = 78.57824^\circ$$

$$\boxed{\varphi_2 = 101.42176^\circ}$$

- projekcije se shicivaju

$$1.8. \quad \bar{A}' = (y+2) \bar{u}_x' + (x-1) \bar{u}_y' \text{ zu } T(7,5,1)$$

$$\boxed{\bar{A}'(T)} = (5+2) \bar{u}_x' + (7-1) \bar{u}_y' = \boxed{7 \bar{u}_x' + 6 \bar{u}_y'}$$

$$\bar{A}' \cdot \bar{B}_0' \Rightarrow \bar{B}_0' = \frac{2}{\sqrt{17}} \bar{u}_x' - \frac{3}{\sqrt{17}} \bar{u}_y' + \frac{2}{\sqrt{17}} \bar{u}_z'$$

$$\boxed{\bar{A}' \cdot \bar{B}_0' = -\frac{4}{\sqrt{17}}}$$

$$1.9. \quad dS = r dd \alpha_2$$

$$P = r \int_{\frac{10\pi}{180}}^{\frac{50\pi}{180}} d\alpha \int_0^{dS} dz = 3 \cdot \frac{50\pi}{180} \cdot 2$$

$$\boxed{P = 3\pi \text{ m}^2}$$

$$1.10. \quad \bar{A}' = s \bar{u}_x', \quad \bar{B}' = 4 \bar{u}_x' + By \bar{u}_y' \quad By = ? \quad \bar{A}' \cdot \bar{B}' = 4s^2$$

$$\bar{A}' \cdot \bar{B}' = |\bar{A}'| \cdot |\bar{B}'| \cos 45^\circ$$

$$20 = 5 \sqrt{16 + By^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} / 2$$

$$40 = 5 \sqrt{2} \sqrt{16 + By^2} / :5$$

$$8 = \sqrt{32 + 2By^2} / \sqrt{2} \Rightarrow 64 = 32 + 2By^2 \quad By^2 = 16 \quad \boxed{By = \pm 4}$$

$$1.11. \quad T_1(2, -5, -2), T_2(19, -5, 3)$$

$$\bar{N}_1' = 2 \bar{u}_x' - 5 \bar{u}_y' - 2 \bar{u}_z' \quad \bar{N}_2' = 19 \bar{u}_x' - 5 \bar{u}_y' + 3 \bar{u}_z'$$

$$\bar{R}' = \bar{N}_2' - \bar{N}_1' = 17 \bar{u}_x' + 5 \bar{u}_z' \quad |\bar{R}'| = \sqrt{169} = 13$$

$$\boxed{\bar{R}_0'} = \frac{\bar{R}'}{|\bar{R}'|} = \boxed{\frac{17}{13} \bar{u}_x' + \frac{5}{13} \bar{u}_z'}$$

1.12.

$$\bar{A} = \bar{u}_1' + \pi \bar{u}_2' + 3 \bar{u}_3'$$

$$\bar{B} = 2 \bar{u}_1' + 3 \bar{u}_2' - 6 \bar{u}_3'$$

UVJET ZA PARALELност VETORA:

$$\sin \varphi \quad \bar{A}' \cdot \bar{B}' = 0$$

$$|\bar{A}' \times \bar{B}'| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \bar{u}_1' & \bar{u}_2' & \bar{u}_3' \\ 1 & \pi & 3 \\ 2 & 3 & -6 \end{vmatrix} = \bar{u}_1' (-6\pi - 3z) \\ - \bar{u}_2' (-6 - 3z) \\ + \bar{u}_3' (3 - 2\pi) = 0$$

$$- 6\pi - 3z = 0$$

$$-3z = 6\pi$$

$$z = -2\pi$$

$$-6 - 3z = 0$$

$$-3z = 6$$

$$z = -2$$

$$3 - 2\pi = 0$$

$$\begin{aligned} -2\pi &= -3 \\ z &= \frac{3}{\pi} \end{aligned}$$

1.13.

$$\bar{A} = \bar{u}_x' + 2\bar{u}_y' - \bar{u}_z'$$

$$\bar{B} = 2\bar{u}_x' + \bar{u}_y' + 3\bar{u}_z'$$

UVJET ZA ORIJINTOST VETORA:

$$\cos \varphi \quad \bar{A}' \cdot \bar{B}' = 0$$

$$\bar{A}' \cdot \bar{B}' = 0$$

$$\bar{A}' \cdot \bar{B}' = 0 \Rightarrow 2 + 2 - 3 = 0 \Rightarrow z = 1$$

1.14.

$$\varphi = 2xy - \frac{z}{2} \quad \nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \bar{u}_x' + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \bar{u}_y' + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \bar{u}_z'$$

$$\nabla \varphi = 2y \bar{u}_x' + 2x \bar{u}_y' - \frac{1}{2} \bar{u}_z'$$

$$\nabla \varphi(1, 2, 3) = 4\bar{u}_x' + 2\bar{u}_y' - \frac{1}{2} \bar{u}_z'$$

$$1.15. \quad \bar{E}' = \frac{50}{n} \bar{u}_r' - 4 \bar{u}_2' \quad \bar{u}_E' \text{ u } T(10, 20^\circ, 2)$$

$$\bar{E}'(T) = 5 \bar{u}_r' - 4 \bar{u}_2'$$

$$\lambda = \tan^{-1} \frac{y}{x} / \tan$$

$$\tan 20^\circ = \frac{y}{x} \Rightarrow y = 0.36397 \cdot x$$

$$n=5 \Rightarrow 5 = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow s = \sqrt{x^2 + 0.13297 x^2}$$

$$s = \sqrt{1.13297 x^2} \quad |^2 \quad 25 = 1.13297 x^2$$

$$x^2 = \frac{25}{1.13297}$$

$$x = 4.69846$$

$$y = 1.71009$$

$$z = -4$$

$$|\bar{E}'| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$|\bar{E}'| = 6.40312$$

$$\bar{E}_0' = 0.73377 \bar{a}_x' + 0.26707 \bar{a}_y' - 0.628 \bar{a}_z'$$

1.16.

$$|\bar{E}'| = 10$$

$$\frac{50}{n^2} = 84$$

$$\sqrt{\left(\frac{50}{n}\right)^2 + 16} = 10 \quad |^2$$

$$n^2 = \frac{50^2}{84} = 5.45$$

1.17.

$$\bar{A}' = 10 \bar{u}_r' - 3 \bar{u}_\theta' + 5 \bar{u}_2' \quad |\bar{A}'| = \sqrt{134} = 11.57583$$

$$\bar{B}' = 2 \bar{u}_r' + 5 \bar{u}_\theta' + 3 \bar{u}_2'$$

$$\bar{A}_0' = \frac{\bar{A}'}{|\bar{A}'|} = 0.86386 \bar{u}_r' - 0.25916 \bar{u}_\theta' + 0.43193 \bar{u}_2'$$

$$\bar{B}' \cdot \bar{A}_0' = 2 \cdot 0.86386 - 5 \cdot 0.25916 + 3 \cdot 0.43193$$

$$\bar{B}' \cdot \bar{A}_0' = 1.72771$$

$$1.18. \bar{m}' = \bar{A}' \times \bar{B}' = \begin{vmatrix} \bar{a}_v' & \bar{a}_\theta' & \bar{a}_\lambda' \\ 10 & -3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \bar{a}_v'(-34) - \bar{a}_\theta'(20) + \bar{a}_\lambda'(56)$$

$$\bar{m}_0 = \frac{\bar{m}'}{|\bar{m}'|} = \frac{-34 \bar{a}_v' - 20 \bar{a}_\theta' + 56 \bar{a}_\lambda'}{\sqrt{1256 + 900 + 3136}}$$

$$\boxed{\bar{m}_0 = -0.996 \bar{a}_v' - 0.292 \bar{a}_\theta' + 0.818 \bar{a}_\lambda'}$$

1.19.

$$\bar{A}_{kin}^2 = (x^2 - y^2) \bar{a}_y^2 + (x \cdot z) \bar{a}_z^2$$

$$P(6, 60^\circ, -4)$$

$$6 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$6 = \sqrt{9x^2}$$

$$x = 3$$

$$\frac{60\pi}{180} = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

$$y = 1.73205 \cdot x \quad \boxed{y = 5.19675}$$

$$A_y = -18$$

$$A_z = -12$$

$$A_s = -18 \cdot \bar{a}_y' \cdot \bar{a}_s' = -18 \cdot \sin \phi = -18 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{-3\sqrt{3}}$$

$$A_\alpha = -18 \cdot \bar{a}_y' \cdot \bar{a}_\alpha' = -18 \cdot \cos \phi = -18 \cdot \frac{1}{2} = \boxed{-9}$$

$$\boxed{\bar{A}_{kin}^2 = -3\sqrt{3} \bar{a}_v^2 - 9 \bar{a}_\lambda^2 - 12 \bar{a}_z^2}$$

1.20.

$$dQ = \delta dV / f \quad r=0.2 \text{ m}, \quad f = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$Q = \iiint \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} r^2 \sin \theta dr d\theta dz$$

SPHERICAL COORDINATES:

$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$x^2 + y^2 = r^2 \sin^2 \theta (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi)$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r \sin \theta$$

$$Q = \frac{1}{r \sin \theta} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

$$Q = \frac{1}{2} r^2 \Big|_{r=0}^{r=0.2} \cdot 2\pi \cdot \pi$$

$$Q = 0.2^2 \cdot \pi^2$$

$$\boxed{Q = 0.39478 \text{ C}}$$

1.21. $f(x, y, z) = 5x + 10xz - xy + 6$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \bar{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \bar{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \bar{u}_z$$

$$\nabla f = (5+10z-y) \bar{u}_x + (-x) \bar{u}_y + 10x \bar{u}_z$$

1.22. $f(x, y, z) = 2 \sin(\alpha) - \nu \cdot z + 4$

$$\nabla f = -2 \bar{u}_\nu + \frac{2}{\nu} \cos \alpha \bar{u}_z - \nu \bar{u}_z$$

1.23. $f(x, y, z) = 2\nu \cos \theta - s\alpha + 2$

$$\nabla f = 2 \cos \theta \bar{u}_\nu + (-2 \sin \theta) \bar{u}_\theta - \frac{5}{\nu \sin \theta} \bar{u}_z$$

1.24. $f(x, y, z) = xy + 2z^2$

$$\nabla f = y \bar{u}_x + x \bar{u}_y + 4z \bar{u}_z$$

$$\nabla f(1, 1, 1) = \bar{u}_x + \bar{u}_y + 4 \bar{u}_z$$

$$\bar{A} = \bar{u}_x - 2\bar{u}_y + \bar{u}_z \quad |\bar{A}| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$$

$$\bar{A}_0 = \frac{1}{\sqrt{6}} \bar{u}_x - \frac{2}{\sqrt{6}} \bar{u}_y + \frac{1}{\sqrt{6}} \bar{u}_z$$

$$\boxed{\nabla f \cdot \bar{A}_0} = \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{4}{\sqrt{6}} = \boxed{\frac{3}{\sqrt{6}}}$$

1.25. $\vec{F}(x, y, z) = (x+y) \bar{u}_x - x \bar{u}_y + z \bar{u}_z$

užil. A(0, 1, 2) do B(1, 0, 2)

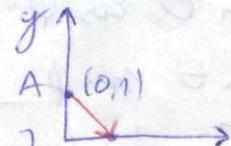
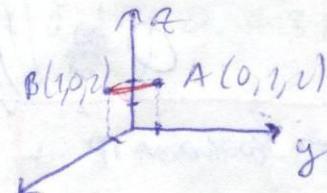
$$I = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B [(x+y)dx - xdy + zdz]$$

PARAMETRIZACNA DULIZNE \overline{AB} :

$$x = t \quad \rightarrow \quad dx = dt$$

$$y = 1-t \quad \rightarrow \quad dy = -dt \quad \left\{ t \in [0, 1] \right.$$

$$z = 2 \quad \rightarrow \quad dz = 0$$



$$I = \int_0^1 (t+1-t) dt - t(-dt) + 2 \cdot 0 = \int_0^1 (1+t) dt =$$

$$[t + \frac{t^2}{2}]_0^1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad \boxed{F=1.5}$$

1.26. $\vec{F}(x, y, z) = \bar{a}_x^2 + 2\bar{a}_y^2 + \bar{a}_z^2$

$x = \cos t$
 $y = \sin t$
 $t \in (0, \frac{\pi}{2})$

$dx = -\sin t dt$

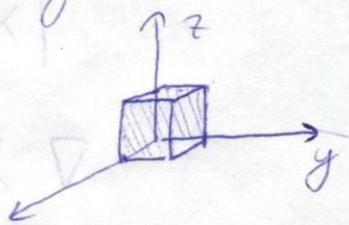
$dy = \cos t dt$

$dz = 0$

$I = \int dx + 2dy + dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin t dt + 2\cos t dt)$
 $I = \left[(\cos t + 2\sin t) \right]_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} = (0 - 1 + 2 - 0) = 1$

1.27. $\vec{F}'(x, y, z) = 2x^2y \bar{a}_x^2 + 2 \cdot \bar{a}_y^2 + y \bar{a}_z^2$

$$\oint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz$$



$\Phi = \int (xy + 0 + 0) dx dy dz$

$\Phi = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 xy dx dy dz = 4 \left(\frac{x^2}{2} \cdot \frac{y^2}{2} \cdot z \right)_0^1 = 1$

1.28. $\vec{F}''(x, y, z) = e^{-2y} (\cos(3x) \bar{a}_x^2 - \sin(3x) \bar{a}_y^2)$

$$\nabla \vec{F}'' = \frac{-e^{-2y} \sin(3x) \cdot 3 - (-d \cdot e^{-2y} \cdot \sin(3x))}{e^{-2y} \sin 3x (-3 + d)}$$

1.29.

$$\vec{F}(x, y, z) = 5x^2 \sin(\pi x) \vec{ax} + T(x=0.5) \vec{u}_z$$

$$\nabla \cdot \vec{F} = 5 \cdot 2x \cdot 1 \cdot \sin(\pi x) + 5x^2 \cos(\pi x) \cdot \pi$$

$$\nabla \cdot \vec{F}' = 10x \sin(\pi x) + 5x^2 \cdot \pi \cdot \cos(\pi x)$$

$$\nabla \cdot \vec{F}'(T) = 5 \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_0 + \underbrace{\frac{5}{4} \pi \cdot \cos \frac{\pi}{2}}_0$$

$$\nabla \cdot \vec{F}'(T) = 5$$

1.30.

$$\vec{F}(x, y, z) = x \vec{y} \cdot \vec{ax} + zy \cdot z \cdot \vec{ay} - \vec{az}$$

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{ax} & \vec{ay} & \vec{az} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & zy & -z \end{vmatrix} = \vec{ax} (0 - zy) - \vec{ay} (0 - 0) + \vec{az} (0 - x)$$

$$\nabla \times \vec{F}' = -zy \vec{ax} - x \vec{az}$$

1.31.

$$\vec{F}'(x, y, z) = 2 \vec{ar} + \sin(\alpha) \vec{az} - z \cdot \vec{ar}$$

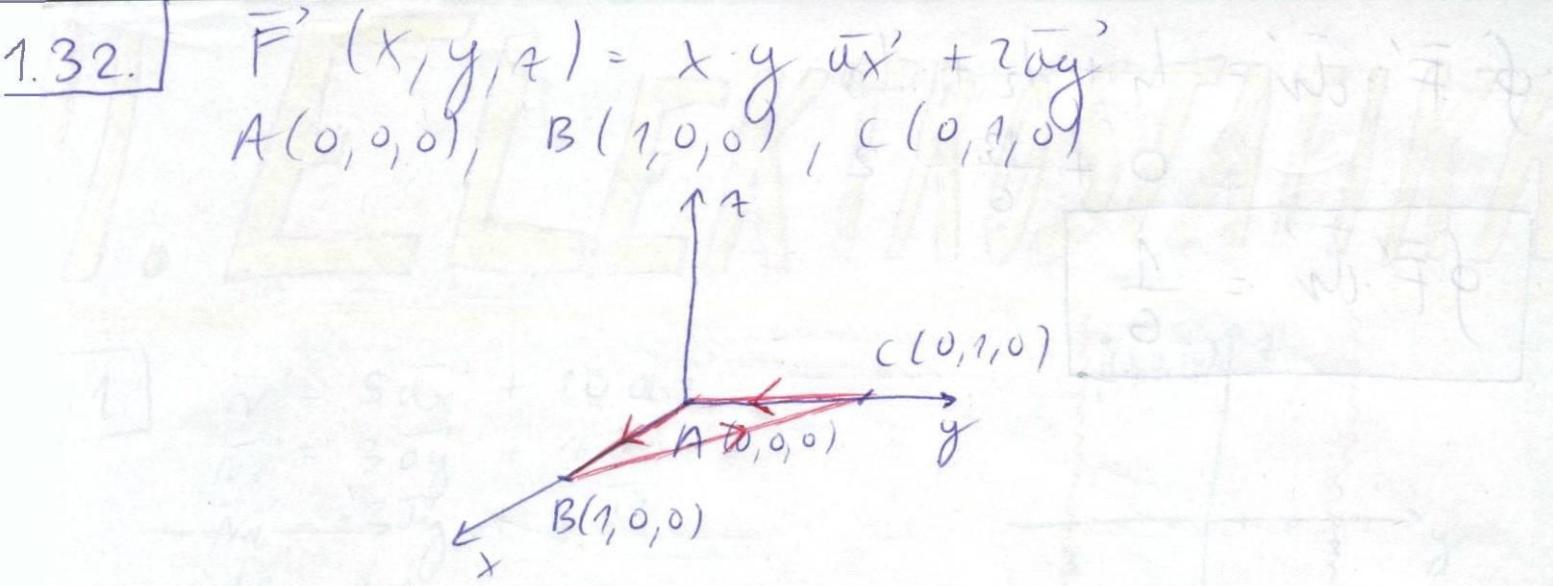
$$\nabla \times \vec{F}' = \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial A_r}{\partial z} \right) \vec{ar}$$

$$+ \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{az}$$

$$+ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r \cdot A_z) - \frac{\partial A_r}{\partial z} \right) \vec{az}$$

$$\nabla \times \vec{F}' = \left(\frac{1}{r} \cdot 0 - 0 \right) \vec{ar} + (0 - 0) \vec{az} + \frac{1}{r} (\sin \alpha - 0) \vec{az}$$

$$\nabla \times \vec{F}' = \frac{1}{r} \sin \alpha \cdot \vec{az}$$



$$\overline{AB} \quad t = x \quad t \in (0, 1) \quad dx = dt$$

$$y = 0 \quad dy = 0$$

$$z = 0 \quad dz = 0$$

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint xy \, dx + 2 \, dy$$

$$l_1 = \int_A^B 0$$

$$\overline{BC} \quad x = -t + 1 \quad t \in (0, 1) \quad dx = -dt$$

$$y = t \quad dy = dt$$

$$z = 0 \quad dz = 0$$

$$= \int_C [(-t+1) \cdot t (-dt) + 2dt]$$

$$= \left[\int_0^1 ((t^2 - t) dt + 2 \int_0^1 dt) \right] = \left(\frac{1}{3} t^3 - \frac{1}{2} t^2 \right) \Big|_0^1 + 2$$

$$l_2 = \boxed{\frac{2 - 1 + 2}{6}} = \boxed{\frac{13}{6}}$$

$$\overline{CA} \quad x = 0 \quad t \in (1, 0) \quad dx = 0$$

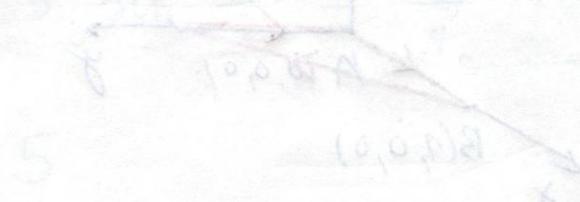
$$y = t \quad dy = dt$$

$$z = 0 \quad dz = 0$$

$$l_3 = \boxed{\int_{-1}^0 [0 \cdot t \cdot 0 + 2dt]} = 2 \int_{-1}^0 dt = \boxed{-2}$$

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = l_1 + l_2 + l_3 = 0 + \frac{13}{6} - 2$$

$$\boxed{\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{6}}$$



$$= \text{Area} \times (1,0) + 3(2) \times (0,1)$$

$$= 5 \times (1,0) + 3(2) \times (0,1)$$

$$= 5 + 6 = 11$$

$$= 11$$

$$= 11$$

$$= 11$$

$$= 11$$

$$= 11$$

$$= 11$$

$$= 11$$

$$= 11$$

III. ELEKTROSTATIKA

2.1.

$$\vec{r}' = 5\vec{x} + 10\vec{z}$$

$$\vec{r}_1' = 3\vec{y} + 2\vec{z}$$

$$\vec{r}_2' = -3\vec{y} + 2\vec{z}$$

$$dl = dz$$

$$\lambda = 2 \cdot 10^{-9} \frac{C}{m}$$

$$\vec{R}_1' = \vec{r}' - \vec{r}_1' = 5\vec{x} - 3\vec{y} + (10-z)\vec{z}$$

$$\vec{E}_1' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^z \frac{\lambda \cdot \vec{R}_1'}{|\vec{R}_1'|^3} dz$$

$$\vec{E}_1' = \frac{2 \cdot 10^{-9}}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^z \frac{[5\vec{x} - 3\vec{y} + (10-z)\vec{z}]}{(\sqrt{z^2 - 20z + 134})^3} dz$$

$$E_{1x} = \frac{10^{-8}}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^z \frac{dz}{(\sqrt{z^2 - 20z + 134})^3}$$

$$E_{1x} = \frac{10^{-8}}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{2z - 20}{68 \cdot \sqrt{z^2 - 20z + 134}} \right) \Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

$$E_{1x} = \frac{10^{-8}}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{2\infty - 20}{68 \sqrt{\dots}} - \frac{2(-\infty) - 20}{68 \sqrt{\dots}} \right)$$

$$E_{1x} = \frac{10^{-8}}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{4}{68} = 5.2869$$

$$E_{2x} = E_{1x}$$

$$E_{1y} = -E_{2y}$$

$$E_{1z} = -E_{2z}$$

$$\boxed{\vec{E}_{uk}^2 = 2 \cdot E_{1x} \vec{x}'} = \boxed{10.57 \vec{x}'}$$

- PONISTAVAM SE ZBOG SINETMSE

- PONISTAVAM SE ZBOG INTEGRACIJE

$$2.2 \quad G = \frac{5 \cdot 10^{-4}}{N}$$

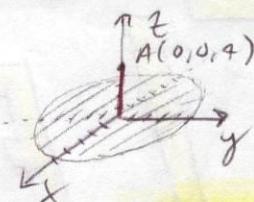
$$\lambda = 5 \cdot dV$$

$$\vec{E} = \vec{a}_r \int_{r=0}^5 G \frac{N \cdot z}{2 \epsilon_0 (\sqrt{r^2 + z^2})^3} dr \quad \left(\frac{dr}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right)^3 = \frac{N}{4^2 \sqrt{r^2 + z^2}}$$

$$E_z = \frac{4 \cdot 5 \cdot 10^{-4}}{\lambda \cdot \epsilon_0} \int_{r=0}^5 \frac{1}{N} \left(\frac{N}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right)^3 dr = \frac{10^{-3}}{\epsilon_0} \frac{1}{16} \left(\frac{N}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right) \Big|_{r=0}^5$$

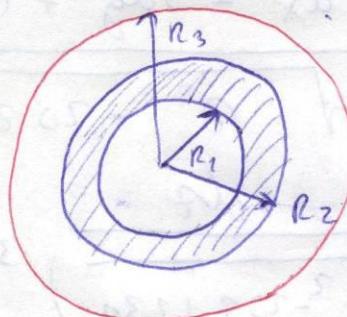
$$E_z = \frac{10^{-3}}{\epsilon_0} \cdot \left(\frac{5}{16 \sqrt{5^2 + 4^2}} - 0 \right) = \frac{10^{-3}}{\epsilon_0} \cdot \frac{5}{16 \sqrt{41}}$$

$$E_z = 5.51211 \frac{MV}{m}$$



2.3.

$$\int \sin^2 \alpha d\alpha = \\ = \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\alpha$$



$$R_1 = 1 \text{ m}, R_2 = 2 \text{ m}, R_3 = 3 \text{ m}$$

$$\rho = \frac{5 \sin^2(\alpha)}{r^2} \left[\frac{C}{m^3} \right]$$

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\alpha$$

$$\Phi = \oint \vec{B} \cdot \vec{d}l = \int_V \rho dV = \int_V \frac{5 \sin^2(\alpha)}{r^2} r^2 \sin \theta d\alpha d\theta dr$$

$$\Phi = 5 \int_1^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} \sin^2(\alpha) d\alpha =$$

$$\Phi = 5 \cdot 2 \cdot \left(\frac{2\pi}{2} - \frac{1}{4} \sin 4\pi - \frac{0}{2} + \frac{1}{4} \sin 0 \right)$$

$$\Phi = 5 \cdot 2 \cdot \pi$$

$$\Phi = 10\pi$$

$$\boxed{\Phi = 31.42 [C]}$$

$$2.4. \quad Q = 30 \cdot 10^{-9} [C] \quad r_0 = 1 \text{ m}$$

$$Q = \int \sigma dS = \sigma \cdot r_0^2 \pi = \sigma \pi$$

$$\sigma = \frac{30 \cdot 10^{-9}}{\pi}$$

$$\vec{r}'^2 = 2\vec{a}_z^2$$

$$\vec{r}'^2 = x\vec{a}_x + y\vec{a}_y$$

$$|\vec{r}' - \vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + 4}$$

$$\varphi(r') = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\sigma}{|\vec{r}' - \vec{r}|} dS = r dr dd$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{30 \cdot 10^{-9}}{\pi} \int \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}} \rightarrow r^2$$

$$\varphi = \frac{30 \cdot 10^{-9}}{4\pi^2 \epsilon} \int \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + 2^2}} \cdot \int dd = \int \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + 2^2}} = \sqrt{r^2 + 2^2}$$

$$\varphi = \frac{30 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 4\pi^2 \epsilon} \cdot 2\pi \cdot (\sqrt{r^2 + 4}) \Big|_{r=0}^{r=5}$$

$$\varphi = \frac{15 \cdot 10^{-9}}{\pi \epsilon} \left(\sqrt{1+4} - \sqrt{4} \right) = \frac{15 \cdot 10^{-9}}{\pi \epsilon} (\sqrt{5} - 2)$$

$$\boxed{\varphi = 127,30309 [V]}$$

$$2.5. \quad Q_A = 300 \cdot 10^{-9} [C], A(1, -1, 3)$$

$$Q_B = ? \quad B(3, -3, 2)$$

$$\vec{F}_{BA} = (8\vec{a}_x - 8\vec{a}_y - 9\vec{a}_z) \cdot 10^{-3} [N]$$

$$\vec{NA} = \vec{a}_x - \vec{a}_y + 3\vec{a}_z$$

$$\vec{NB} = 3\vec{a}_x - 3\vec{a}_y + 2\vec{a}_z$$

$$\vec{R}_{BA} = \vec{NA} - \vec{NB} = -2\vec{a}_x + 2\vec{a}_y + \vec{a}_z$$

$$|\vec{R}_{BA}| = \sqrt{9} = 3 \quad |\vec{R}_{BA}|^3 = 27$$

$$\vec{F}_{BA} = \frac{Q_B \cdot Q_A}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{(-2\vec{a}_x + 2\vec{a}_y + \vec{a}_z)}{27}$$

$$(8\vec{a}_x - 8\vec{a}_y - 9\vec{a}_z) \cdot 10^{-3} = \frac{Q_B \cdot 300 \cdot 10^{-9}}{4\pi\epsilon} \left(\frac{-2\vec{a}_x + 2\vec{a}_y + \vec{a}_z}{27} \right)$$

$$\frac{8 \cdot 10^{-3} \cdot 4\pi \cdot \epsilon \cdot 27 \cdot 3}{-2 \cdot 300 \cdot 10^{-9} \cdot 63} = \frac{36\pi\epsilon}{-25 \cdot 10^{-6}} = \boxed{-40.05 \mu C}$$

$$2.6. \quad \sigma = 0.3 \cdot 10^{-9} \left[\frac{C}{m^2} \right]$$

$$2x - 3y + z = 6$$

$$\vec{n}_{12} = 2\vec{ax} - 3\vec{ay} + \vec{az}$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{n}_{12}}{|\vec{n}_{12}|} = \frac{2\vec{ax} - 3\vec{ay} + \vec{az}}{\sqrt{14}}$$

$$\vec{N}' = x\vec{ax} + y\vec{ay}$$

$$\vec{N}' = (\alpha) \vec{az}$$

voziljenost točke
T do ravni

je α

$$2 \cdot 2t - 3(-3t) + t = 6$$

$$4t + 9t + t = 6$$

$$14t = 6$$

$$t = \frac{3}{7}$$

POSTAVLJAMO SMO ZADANU
RAVNU U XY, MÈUNAMO
KOORDINATE TOČKE KOJA
PREDSVJEDI VODJENOST RAVNI DO ISKUŠTA

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{1} = t$$

$$x = 2t \quad y = -3t \quad z = t$$

KOORDINATE TE TOČKE SU:

$$T \left(\frac{6}{7}, -\frac{9}{7}, \frac{3}{7} \right)$$

$$\alpha = \sqrt{\left(\frac{6}{7}\right)^2 + \left(-\frac{9}{7}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^2}$$

$$\alpha = \frac{3\sqrt{14}}{7} \quad \vec{N}' = \frac{3\sqrt{14}}{7} \vec{ax}$$

$$\vec{E}' = \frac{1}{9\pi\epsilon_0} \iint \sigma dS \frac{\frac{3\sqrt{14}}{7} \vec{az} - x\vec{ax} - y\vec{ay}}{\left(\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{3\sqrt{14}}{49}\right)^3}$$

PAVEZAT U POLARNE KOORDINATE (ZAPRIMLJENO KOMPONENTE OT X I Y)

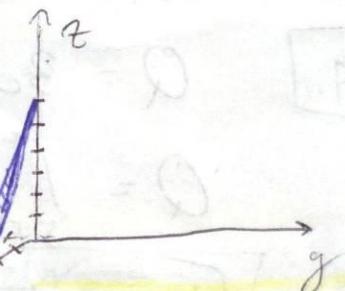
$$E_z = \frac{\sigma}{9\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^r r dr \frac{\frac{3\sqrt{14}}{7}}{\left(\frac{9\cdot 14}{49} + r^2\right)^{1.5}} = \frac{-\sigma}{2\epsilon_0}$$

OVO JE IZNOŠ POJEA U ZAŠTEV POMAKNUTIH KOORDINATnih SUSTAV
POTREBNO JE PREDACI SE U POCETNI (normalni) KOORDINATNI SUSTAV.
VEKTOR JAKOSTI POJEA MORA PREVATI U ZAŠTEV VECTORA ORIJENTIR
NA RAVMNU. STOGA JE POTREBNO PONOVITI IZNOŠ POJEA E_z S
JEDINICOM VENATORI U ZAŠTEV VENATORI PREDVISEM \vec{m} .

$$\vec{E}' = \frac{-\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \frac{2\vec{ax} - 3\vec{ay} + \vec{az}}{\sqrt{14}} = 16 \cdot 9 \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} (2\vec{ax} - 3\vec{ay} + \vec{az})$$

$$\vec{E}' = -9.05561 \vec{ax} + 13.58341 \vec{ay} - 4.5278 \vec{az}$$

$$E_x = -9.05 \left[\frac{V}{m} \right]$$

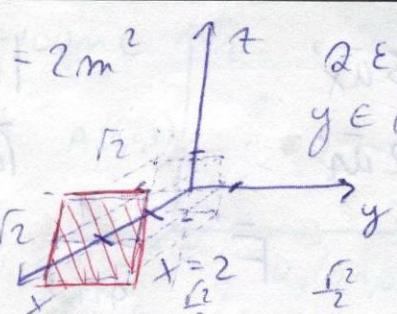


2.7. $\bar{D} = 10 \cdot x^3 \bar{a}_x \left[\frac{C}{m^2} \right]$ $S = 2m^2$ $z \in (-\frac{r_2}{2}, \frac{r_2}{2})$

$$\Phi = \iint_S \bar{D} \cdot \bar{n} \cdot dS$$

$$\bar{n} = \bar{a}_x$$

$$dS = dy dz$$



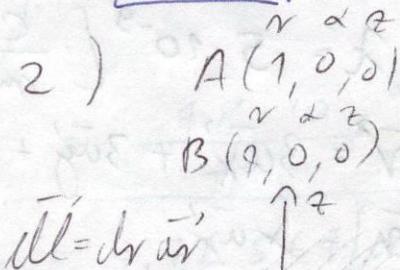
$$\Phi = \iint_S 10x^3 \bar{a}_x \cdot \bar{a}_x \cdot dy dz = 10x^3 \int_{x=2}^{-r_2/2} dy \int_{z=-r_2/2}^{r_2/2} dz$$

$$\boxed{\Phi = 10 \cdot 2^3 \cdot \frac{r_2}{2} \cdot 2 \cdot \frac{r_2}{2} \cdot 2 = 10 \cdot 2^4 = 160 C}$$

2.8. $\bar{E}_1' = \frac{5}{r^2} \bar{a}_r' \quad (0 < r \leq 2)$ $A(1, 0, 0)$

$$\bar{E}_2' = \frac{2 \cdot 5}{r} \bar{a}_r \quad (r \geq 2)$$

$$B(7, 0, 0)$$



$$V_{AB} = \ell(A) - \ell(B) = \int \bar{E}' \cdot d\ell$$

$$V_{AB} = \int_{r_1=1}^{r_2=2} \bar{E}_1' dr + \int_{r_2=2}^{r_3=4} \bar{E}_2' dr$$

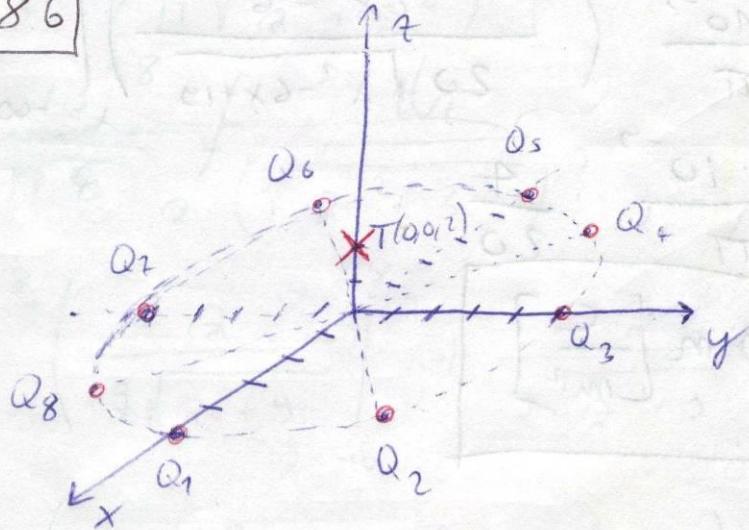
$$V_{AB} = \int_{r_1=1}^{r_2=2} \frac{5}{r^2} dr + \int_{r_2=2}^{r_3=4} \frac{2 \cdot 5}{r} dr$$

$$V_{AB} = -5 \left(\frac{1}{r} \right) \Big|_{r=1} + 2 \cdot 5 \cdot \ln r \Big|_{r=2}$$

$$V_{AB} = -5 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1} \right) + 2 \cdot 5 \ln \frac{4}{2}$$

$$\boxed{V_{AB} = 4.23286}$$

2.9.



$$\bar{N}_1' = 5 \bar{a}x'$$

$$\bar{N}_T' = 2 \bar{a}z'$$

$$|R_{TT}| = \sqrt{29}$$

$$|\bar{R}_{1T}'| = 2 \bar{a}z - 5 \bar{a}x$$

$$\bar{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon} Q_1 \cdot Q_2 \cdot \frac{2 \bar{a}z - 5 \bar{a}x}{(\sqrt{29})^3}$$

$$F_z = \frac{1}{4\pi\epsilon} Q_1 \cdot Q_2 \cdot \frac{2}{29^{1.5}} = 2.3 \cdot 10^{-7} N$$

$$F_{\text{tot}} = 8 \cdot F_z = 1.84 [\mu N]$$

$$Q_1 = Q_2 = \dots = Q_8 = 100 \text{nC}$$

$$Q_T = 20 \text{ nC}$$

sile u x i y
sijem je se povišiti
nab. sinetne

2.10.

$$\chi = 5 \cdot 10^{-9} \left[\frac{\text{C}}{\text{m}} \right]$$

T(3, 3, 1)

$$\bar{r} = 3 \bar{a}x + 3 \bar{a}y + \bar{a}z$$

$$\bar{r}' = x \bar{a}x$$

$$\frac{\bar{r}' - \bar{r}'}{|\bar{r}' - \bar{r}'|^3} = \frac{(3-x) \bar{a}x + 3 \bar{a}y + \bar{a}z}{(3-x)^2 + 9 + 1}$$

$$\bar{D}' = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \, dL(\bar{r}' - \bar{r}')} {|\bar{r}' - \bar{r}'|^3}$$

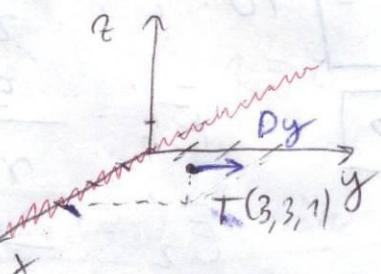
$$\bar{D}' = \frac{5 \cdot 10^{-9}}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{(3-x) \bar{a}x + 3 \bar{a}y + \bar{a}z}{(x^2 - 6x + 19)^{\frac{3}{2}}} \right] dx$$

$$D_y = \frac{15 \cdot 10^{-9}}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 - 6x + 19)^{\frac{3}{2}}}$$

$$D_y = \frac{15 \cdot 10^{-9}}{4\pi} \left(\frac{2x - 6}{20 \sqrt{x^2 - 6x + 19}} \right) \Big|_{x=-\infty}^{+\infty}$$

$$D_y = \frac{15 \cdot 10^{-9}}{4\pi} \cdot \frac{4}{20}$$

$$D_y = 0.239 \text{ m} \left[\frac{\text{C}}{\text{m}^2} \right]$$



$$\bar{D}' = \epsilon \cdot \bar{E}'$$

2.11.

$$\vec{N}' = 3\vec{u}_z \quad Q_m = 20 \text{ nC} \quad Q_A = 100 \text{ nC}$$

$$\vec{N}_1' = 4\vec{u}_x, \vec{N}_2' = -4\vec{u}_x, \vec{N}_3' = 4\vec{u}_y, \vec{N}_4' = -4\vec{u}_y$$

$$|\vec{R}_{mA}'| = \sqrt{2s} = 5$$

NANI SINI MUSI POMISTAWU SE
KOMPONENTE SILE U YIA X SISWERU

$$\vec{F}_{\text{on}} = \frac{Q_m Q_A}{4\pi\epsilon} \left(\frac{3}{s^3} \cdot 4 \right) \vec{u}_z$$

$$\vec{F} = \frac{20 \cdot 100 \cdot 10^{-18}}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{12}{s^3} = \frac{48 \cdot 10^{-18}}{\pi\epsilon} \vec{u}_z$$

$$F = 1.72564 \mu\text{N}$$

2.12. $\lambda = 30 \cdot 10^{-9} \frac{\text{C}}{\text{m}}$

$$\lambda \in (-\infty, -8) \cup (8, +\infty)$$

$$\vec{N}' = 3\vec{u}_x$$

$$\vec{N}' = 2\vec{u}_z$$

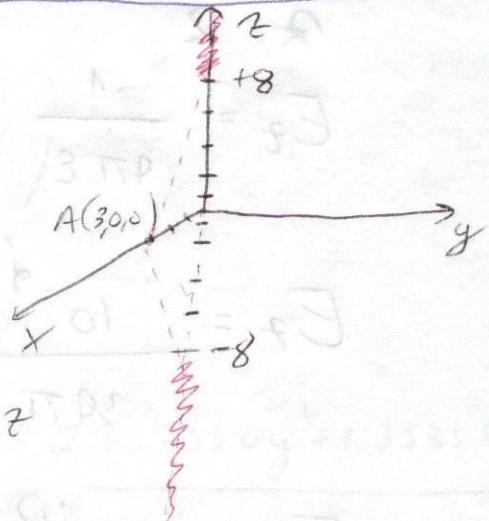
$$\vec{E}' = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \lambda \left(\frac{3\vec{u}_x - 2\vec{u}_z}{(\sqrt{z^2 + 3^2})^3} \right) dz$$

$$\vec{E}' = \frac{3 \cdot 10^{-8}}{4\pi\epsilon} \int \left[\frac{3\vec{u}_x - 2\vec{u}_z}{(\sqrt{z^2 + 3^2})^3} \right] dz$$

$$E_x = \frac{9 \cdot 10^{-8}}{4\pi\epsilon} \int \frac{dz}{(\sqrt{z^2 + 3^2})^3} \quad \left| \frac{dz}{(\sqrt{z^2 + u^2})^3} = \frac{u}{u^2 \sqrt{z^2 + u^2}} \right.$$

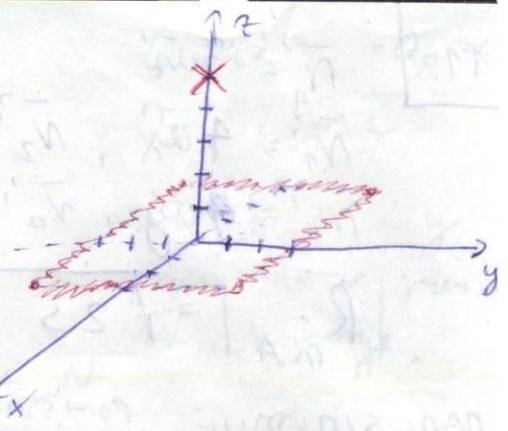
$$E_x = \frac{9 \cdot 10^{-8}}{4\pi\epsilon} \left(\left. \frac{2}{9\sqrt{z^2 + 9}} \right|_{z=-\infty}^{-8} + \left. \frac{2}{9\sqrt{z^2 + 9}} \right|_8^{+\infty} \right)$$

$$E_x = \frac{9 \cdot 10^{-8}}{4\pi\epsilon} \left(-\frac{8}{9\sqrt{8^2 + 9}} \cdot 2 + \frac{1}{9} \cdot 2 \right) \Rightarrow E_x = 11.45 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$



KOMPONENTE U Z
SISWERU SE POMISTAWU
NANI SINI MUSI

$$2.13. \quad \varphi = \frac{x}{4\pi\epsilon} \left(2 \int_{-3}^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3^2 + 5^2}} + 2 \int_{-3}^3 \frac{dy}{\sqrt{y^2 + 3^2}} \right)$$



$$\varphi = \frac{10^{-9}}{4\pi\epsilon} \left[4 \cdot \left(\ln \left| x + \sqrt{x^2 + 3^2} \right| \right)^3 \right]$$

$$\varphi = \frac{10^{-9}}{4\pi\epsilon} \left[4 \left(\ln \frac{3 + \sqrt{9+3^2}}{-3 + \sqrt{43}} \right) \right] \Rightarrow \boxed{\varphi = 35.52958 \text{ V}}$$

$$2.14. \quad \sigma = 10^{-9} \cos^2(\alpha) \left[\frac{c}{m^2} \right] \quad \vec{r}' = 2\vec{a}_z \quad \vec{r}'' = x\vec{a}_x + y\vec{a}_y \\ n = 4 \quad \vec{R}' = (-x\vec{a}_y - y\vec{a}_x) + 2\vec{a}_z \\ \alpha = 2 \quad |\vec{r}|^3 = (\sqrt{x^2 + y^2 + 4})^3 \quad dS$$

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iint_S \sigma \cdot \frac{2}{(\sqrt{x^2 + y^2} + 4)^3} r dr d\theta$$

$$E_z = \frac{10^{-9} \cdot 2}{24\pi\epsilon} \int_0^4 \frac{n}{(\sqrt{r^2 + 2^2})^3} \int_0^{2\pi} \cos^2 \alpha d\theta dr$$

$$E_z = \frac{10^{-9}}{2\pi\epsilon} \left[\left(-\frac{1}{\sqrt{r^2 + 4}} \right) \Big|_{n=0}^4 \cdot \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\alpha \right) \right]^{2\pi}$$

$$E_z = \frac{10^{-9}}{2\pi\epsilon} \left[-\left(\frac{1}{\sqrt{4^2 + 4}} - \frac{1}{\sqrt{4^2 + 4}} \right) \cdot \left(\frac{2\pi}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\pi - 0 \right) \right]$$

$$E_z = \frac{10^{-9}}{2\pi\epsilon} \cdot 0.27639 \cdot \pi \quad \boxed{E_z = 15.60838 \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right]}$$

2.15.

$$\vec{E} = \frac{-16}{r^2} \hat{ar}$$

$$A(2, \pi, \frac{\pi}{2})$$

$$B(4, 0, \pi)$$

dl = dr \hat{ar}

POVE SE NUVJJA S V KOORDINATOM

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot dl = - \int_2^4 16 \cdot \frac{1}{r^2} dr = -16 \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_2^4$$

$$U_{AB} = 16 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) = -4$$

2.16.

$$\vec{n}_m = \hat{ax}$$

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = 10 \cdot 10^{-9}, Q_n = 2 \cdot 10^{-8}$$

$$\vec{n}_1 = 0$$

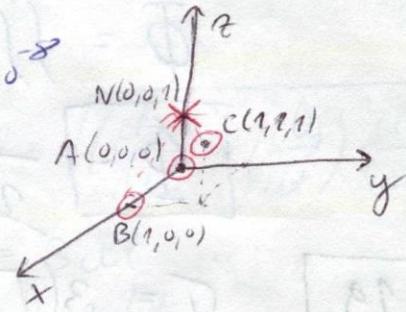
$$\vec{n}_1 = \hat{az}$$

$$\vec{n}_2 = \hat{ay}$$

$$\vec{n}_2 = -\hat{ax} + \hat{az}$$

$$\vec{n}_3 = \hat{ax} + \hat{ay} + \hat{az}$$

$$\vec{n}_3 = -\hat{ax} - \hat{ay}$$



$$\vec{F}_1 = \frac{Q_1 \cdot Q_n}{4\pi \epsilon} \cdot \frac{\hat{ay}'}{(1)^3}$$

$$\vec{F}_2 = \frac{Q_2 \cdot Q_n}{4\pi \epsilon} \cdot \left(\frac{-\hat{ax} + \hat{az}}{(\sqrt{2})^3} \right)$$

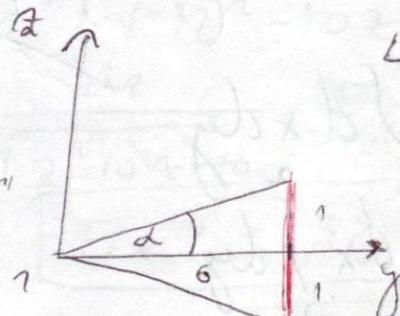
$$\vec{F}_3 = \frac{Q_3 \cdot Q_n}{4\pi \epsilon} \cdot \left(\frac{-\hat{ax} - \hat{ay}}{(\sqrt{2})^3} \right)$$

$$\vec{F}_{uk} = \frac{2 \cdot 10^{-16}}{24\pi \epsilon} \left(-0.7071 \hat{ax} - 0.35355 \hat{ay} + 1.35355 \hat{az} \right)$$

$$F_{uk} = \frac{10^{-16}}{2\pi \epsilon} \cdot 1.56751 = 2.81768 \mu N$$

2.17.

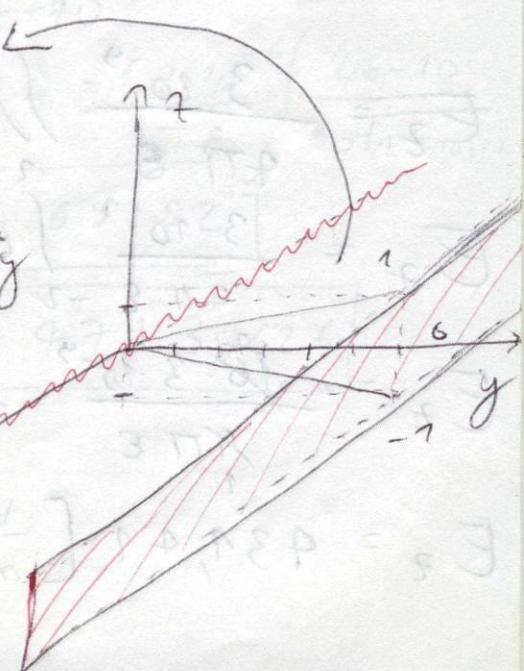
ZADATAK SE NESTAVI
GRAFIKU. RAČUNA SE
KUT PON KODR U KUTU
NAKO "GLEDAJ" NA DIO
RAUMNE $y=6, -1 < x < 1$



$$\alpha = \tan^{-1} \frac{1}{6} = 0.16514 \text{ [rad]}$$

$$2\alpha = 0.33029 \text{ [rad]} = X$$

$$y[\%] = \frac{X}{2\pi} = 5.25684$$



2.18.

$$Q = 18 \cdot 10^{-9} \text{ C}, n = 3$$

$$\oint_S D \cdot \bar{n} \cdot dS = Q$$

$$D \cdot 4 \cdot n^2 \cdot \pi = 18 \cdot 10^{-9}$$

$$D = \frac{18 \cdot 10^{-9}}{8 \cdot \pi \cdot 3^2} = \frac{1}{2\pi} \cdot 10^{-9}$$

$$\Phi = \iint_D D \cdot \bar{n} \cdot dS = 4\pi m^2$$

$$\boxed{\Phi = \frac{1}{2\pi} \cdot 10^{-9} \cdot 4\pi} = \boxed{2 \text{ mC}}$$

2.19.

$$\sigma = 3(\sqrt{x^2+y^2+1})^3 \cdot 10^{-9}$$

$$T(0,0,1)$$

$$\bar{n}' = \bar{a}_z$$

$$\bar{n}' = x\bar{a}_x + y\bar{a}_y$$

$$\bar{R}' = \bar{n}' - \bar{n} = -x\bar{a}_x - y\bar{a}_y + \bar{a}_z$$

$$|\bar{n}'| = \sqrt{x^2+y^2+1}$$

$$\bar{E}' = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iint_S \sigma \cdot dS \cdot \frac{\bar{R}'}{|\bar{R}'|^3}$$

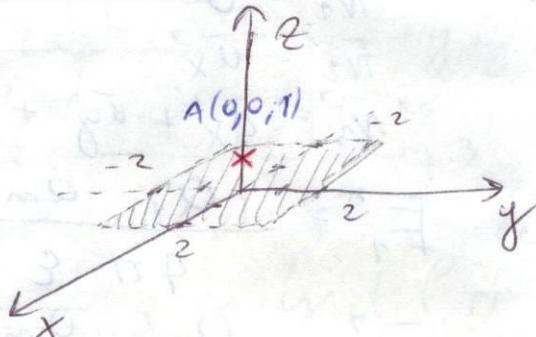
$$\bar{E}' = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iint_S 3 \cdot (\sqrt{x^2+y^2+1})^3 \cdot 10^{-9} \cdot (-x\bar{a}_x - y\bar{a}_y + \bar{a}_z) \cdot \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2+1})^3}$$

$$E_z = \frac{3 \cdot 10^{-9}}{4\pi\epsilon} \iint_S dx dy$$

$$E_z = \frac{3 \cdot 10^{-9}}{4\pi\epsilon} \int_{-2}^2 dx \int_{-2}^2 dy$$

$$E_z = \frac{18 \cdot 3 \cdot 10^{-9}}{4\pi\epsilon} = \frac{12 \cdot 10^{-9}}{\pi \cdot \epsilon}$$

$$E_z = 431,41 \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right]$$



POMÍSTAVAJ SE
NAOJ SÍMETRIE

2.20. $x(x, y, z) = 2x + 3y - 4z \left[\frac{C}{m} \right]$

PARAMETRIZACIA PROVCA $t \in (0, 1)$ $A(2, 1, 5) \rightarrow B(4, 3, 6)$

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A} = t$$

$$\frac{x - 2}{2} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 5}{1} = t$$

$$x = 2t + 2 \\ y = 2t + 1 \\ z = t + 5$$

$$\frac{dx}{dt} = 2$$

$$\frac{dy}{dt} = 2 \\ \frac{dz}{dt} = 1$$

$$dl = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt$$

$$dl = 3dt$$

$$Q = \int x dl = \int (9t + 9 + 6t + 3 - 9t \cdot 20) \cdot 3 dt$$

$$Q = 18 \int_0^1 t dt - 33 \int_0^1 dt = 18 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1^2 - 33 = 9 - 33 = -30$$

2.21. $\vec{x} = 0.4 \cdot 10^{-6} \left[\frac{C}{m} \right]$

$$\vec{v}' = -3\vec{ax}' + 5\vec{az}'$$

$$\vec{v}' = 3\vec{ay}' - 3\vec{ay}' + 2\vec{az}'$$

$$\vec{R}' = \vec{v}' - \vec{v} = -6\vec{ax}' + 3\vec{ay}' + (5-2)\vec{az}'$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\vec{x} \cdot dl}{|\vec{v}' - \vec{v}|^3} \cdot (\vec{v}' - \vec{v}) \quad dl = dz$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot 0.9 \cdot 10^{-6} \int \frac{-6\vec{ax}' + 3\vec{ay}' + (5-2)\vec{az}'}{(\sqrt{z^2 - 10z + 70})^3} dz$$

$$E_x = \frac{-6 \cdot 0.9 \cdot 10^{-6}}{4\pi\epsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 10z + 70}} \quad E_x = \frac{-1.2 \cdot 10^{-6}}{2\pi\epsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2z - 10}{90z^2 - 10z + 70} dz$$

$$E_x = \frac{-1.2 \cdot 10^{-6}}{2\pi\epsilon} \cdot \frac{4}{90}$$

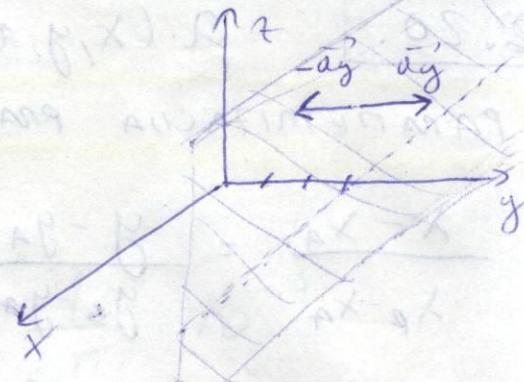
$$E_x = -958.69252$$

$$E_y = \frac{3 \cdot 0.9 \cdot 10^{-6}}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{4}{90} \Rightarrow E_y = 479.39626$$

$$\vec{E} = -960\vec{ax}' + 480\vec{ay}'$$

$$2.22. \quad G = \frac{1}{600\pi} \cdot 10^{-6}$$

$$\bar{E}^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint G \cdot dS \cdot \frac{(\bar{r}' - \bar{r}^2)}{|\bar{r}' - \bar{r}^2|^3}$$



$$\bar{r}^2 = x \bar{a}_x + y \bar{a}_y + z \bar{a}_z$$

$$\bar{r}^2 = 3 \bar{a}_y$$

$$\bar{r}' - \bar{r}^2 = x \bar{a}_x + (y-3) \bar{a}_y + z \bar{a}_z$$

$$\bar{E}^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint G \cdot \frac{[x \bar{a}_x + (y-3) \bar{a}_y + z \bar{a}_z]}{(x^2 + z^2 + (y-3)^2)^{\frac{3}{2}}} dx dz$$

$$E_x = \frac{G}{4\pi\epsilon_0} \int d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n \cos \varphi \cdot n dr}{(r^2 + (y-3)^2)^{\frac{3}{2}}} = 0 \quad E_z = 0$$

$$E_y = \frac{G}{4\pi\epsilon_0} \int d\varphi \int_0^{\infty} \frac{(y-3) n dr}{(r^2 + (y-3)^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow$$

$$\left| \begin{array}{l} y-3 = a \\ u = r^2 + a^2 \\ du = 2r dr \\ r \Big|_0^\infty \approx u \Big|_{a^2}^\infty \end{array} \right.$$

$$a) \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{2r dr}{(r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2} \int_{a^2}^\infty u^{-\frac{3}{2}} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \cdot (-2) \Big|_{a^2}^\infty = \frac{1}{101}$$

$$E_y = \frac{G}{4\pi\epsilon_0} \cdot 2\pi \cdot \frac{a}{|a|} = \frac{G}{2\epsilon_0} \cdot \frac{y-3}{|y-3|} = 29.96 \frac{y-3}{|y-3|}$$

$$\bar{E}_y = \begin{cases} -29.96 \bar{a}_y, & y < 3 \\ 29.96 \bar{a}_y, & y > 3 \end{cases}$$

2.23.

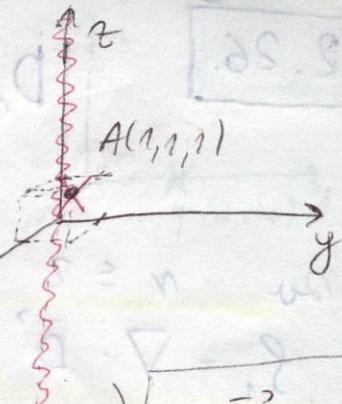
$$\bar{N}' = 2 \bar{u}_2$$

$$\bar{N}'' = \bar{u}_x + \bar{u}_y + \bar{u}_z$$

$$\bar{R}' = \bar{u}_x + \bar{u}_y + (1-z) \bar{u}_z$$

$$\bar{E}' = \frac{x}{4\pi\epsilon} \left(\int \frac{dz}{(x^2 - z^2 + 3)^{\frac{3}{2}}} \bar{u}_x + \int \frac{dz}{(x^2 - z^2 + 3)^{\frac{3}{2}}} \bar{u}_y \right)$$

$$\bar{E}'' = \frac{x}{4\pi\epsilon} \left(2 \cdot \left. \frac{2z - 3}{4\sqrt{x^2 - z^2 + 3}} \right|_{z=0} \right) (\bar{u}_x + \bar{u}_y) = \frac{x}{4\pi\epsilon} (\bar{u}_x + \bar{u}_y) \quad \boxed{\nabla \cdot \bar{E} = 0}$$



2.24.

$$Q_A = 20 \cdot 10^{-9} \text{ C}$$

$$Q_B = 10 \cdot 10^{-9} \text{ C}$$

$$E_A = \frac{Q_A}{4\pi\epsilon d^2} = \frac{20 \cdot 10^{-9}}{4\pi\epsilon (0.15)^2} = 7989.10438$$

$$E_B = \frac{Q_B}{4\pi\epsilon d^2} = \frac{10 \cdot 10^{-9}}{4\pi\epsilon (0.2)^2} = 2296.9356$$

$$E_{UK} = \sqrt{E_A^2 + E_B^2}$$

$$E_{UK} = 8,29906 \text{ V/m}$$

2.25.

$$\oint \bar{D} \cdot \bar{n} \cdot dS = \int \int \bar{D} dV$$

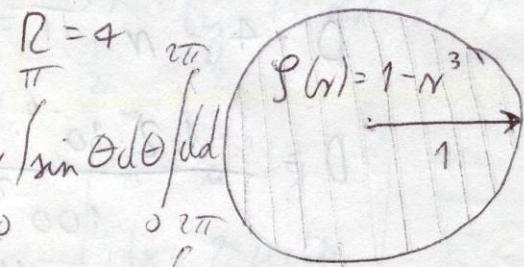
$$E \cdot E \cdot 4 \cdot R^2 \pi = \int (1-r^3) r^2 dr / \sin\theta d\theta / d\phi$$

$$E \cdot E \cdot 4 \cdot 4^2 \cdot \pi = \int (r^2 - r^5) dr / \sin\theta d\theta / d\phi$$

$$E \cdot E \cdot 4^2 \cdot 4 \cdot \pi = \left[\left(\frac{1}{3} r^3 \right) \Big|_0^1 - \frac{1}{6} r^6 \Big|_0^1 \right] \cdot 2 \cdot 2\pi$$

$$E \cdot E \cdot 16 = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{6}$$

$$E = \frac{1}{8 \cdot 16 \cdot 6} = \frac{1}{96 \epsilon_0}$$



2.26.

$$D_r = \begin{cases} \frac{5r^2}{4}, & r \leq 2 \\ \frac{20}{r^2}, & r > 2 \end{cases}$$

zu $r \leq 2$

$$f_1 = \nabla \cdot \vec{D} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 D_r \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{5r^2}{4} \right)$$

$$f_1 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{5}{4} r^4 \right) = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{5}{4} \cdot 4r^3 = \boxed{5r}$$

zu $r > 2$

$$f_2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{20}{r^2} \right) = \boxed{0}$$

$$f = \begin{cases} 5r, & r \leq 2 \\ 0, & r > 2 \end{cases}$$

2.27.

$$N_0 = 5 \text{ m}$$

$$N = 100 \text{ m}$$

$$S = 1.2 (S - 2r) \cdot 10^{-6} \left[\frac{\text{C}}{\text{m}^3} \right]$$

$$D \cdot 4 \cdot N^2 \pi = \int_{0}^{100} 1.2 (S - 2r) \cdot 10^{-6} \cdot r^2 dr \int_{0}^{\pi} \sin \theta d\theta \int_{0}^{2\pi} d\phi$$

$$D = \frac{1.2 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 2\pi}{100^2 \pi} \int_{0}^{100} (Sr^2 - 2r^3) dr$$

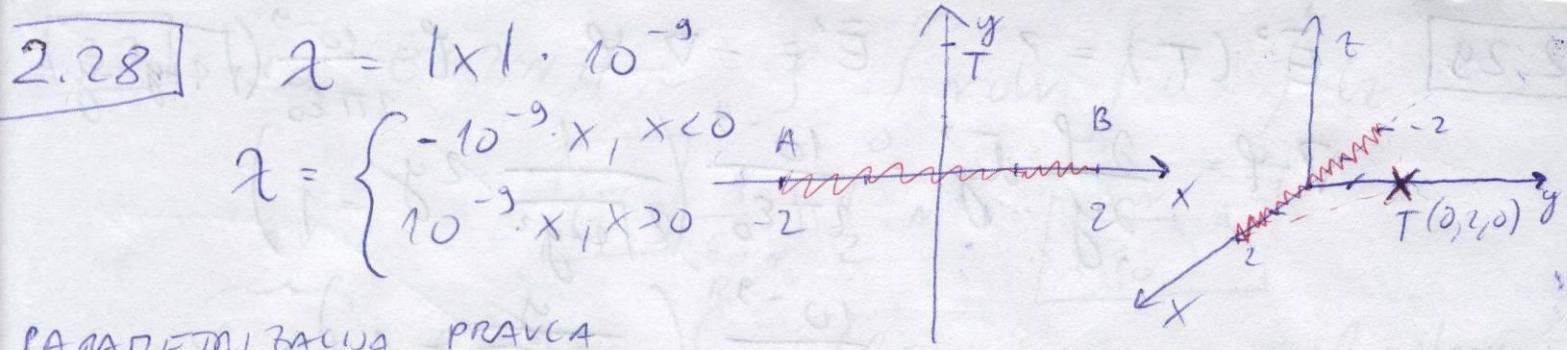
$$D = 4.8 \cdot 10^{-16} \left(S \cdot \frac{1}{3} r^3 \Big|_0^5 - 2 \frac{1}{4} r^4 \Big|_0^5 \right)$$

$$D = 4.8 \cdot 10^{-10} \left(S \cdot \frac{1}{3} \cdot 5^3 - 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 5^4 \right)$$

$$D = 4.8 \cdot 10^{-10} \left(\frac{5^4}{3} - \frac{5^4}{2} \right)$$

$$D = 4.8 \cdot 10^{-10} (-104.16667)$$

$$D = -12.5 \cdot 10^{-9} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$$



PARAMETRI ZAČUVA PRAVCA

$$\frac{x+2}{4} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0} = t$$

$$x = 4t - 2$$

$$y = 0$$

$$z = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = 4 \quad dt = 4 dt$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(4t-2)^2 + y^2} = \sqrt{(4t-2)^2 + 0^2} = 4(t-1)$$

$$\varphi = \frac{1}{\mu \pi \epsilon_0} \int_0^1 \frac{x \lambda dt}{(y^2 + (4t-2)^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\mu \pi \epsilon_0} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-10^{-9}(4t-2) dt}{(y^2 + (4t-2)^2)^{\frac{1}{2}}} + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{10^{-9}(4t-2) dt}{(y^2 + (4t-2)^2)^{\frac{1}{2}}} \right)$$

$$\int_a^b \frac{(4t-2) dt}{(y^2 + (4t-2)^2)^{\frac{1}{2}}} = \left| \begin{array}{l} u = 4t-2 \\ du = 4 dt \\ u_1 = 4a-2 \\ u_2 = 4b-2 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} x = u^2 + y^2 \\ dx = 2u du \\ x_1 = (4a-2)^2 + y^2 \\ x_2 = (4b-2)^2 + y^2 \end{array} \right| =$$

$$= \int_{4a-2}^{4b-2} \frac{\frac{1}{4} \cdot u \cdot du}{(y^2 + u^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{4} \int_{4a-2}^{4b-2} \frac{u du}{(u^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{8} \int_{(4a-2)^2 + y^2}^{(4b-2)^2 + y^2} \frac{0(x)}{\sqrt{x}} = \frac{1}{8} \cdot 2\sqrt{x} \Big|_{x=(4a-2)^2+y^2}^{x=(4b-2)^2+y^2}$$

$$= \frac{1}{4} \left(\sqrt{(4b-2)^2 + y^2} - \sqrt{(4a-2)^2 + y^2} \right)$$

$$\varphi = \frac{10^{-9}}{\mu \pi \epsilon_0} \left[\frac{1}{4} \left(\sqrt{(4 \cdot 0 - 2)^2 + y^2} - \sqrt{(4 \cdot \frac{1}{2} - 2)^2 + y^2} \right) + \frac{1}{4} \left(\sqrt{(4 \cdot 2 - 2)^2 + y^2} - \sqrt{(4 \cdot \frac{1}{2} - 2)^2 + y^2} \right) \right]$$

$$\varphi = \frac{10^{-9}}{2 \cdot \mu \pi \epsilon_0} \left[2\sqrt{4+y^2} - 2y \right] = \frac{10^{-9}}{2 \mu \pi \epsilon_0} \left(\sqrt{4+y^2} - y \right)$$

$$\text{dla } y = 2$$

$$\boxed{\varphi(2) = \frac{10^{-9}}{2 \mu \pi \epsilon_0} \cdot (2\sqrt{2} - 2) = \frac{10^{-9}}{\mu \pi \epsilon_0} (\sqrt{2} - 1) = 17.89 \text{ V}}$$

2.29. $\vec{E}^*(T) = ?$ $\vec{E}^* = -\nabla \varphi$ $\varphi = \frac{10^{-9}}{2\pi\epsilon_0} (\sqrt{4+y^2} - y)$

$$\nabla \cdot \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \hat{y} = \frac{10^{-9}}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{2\sqrt{4+y^2}} \cdot 2y - 1 \right)$$

$$= \frac{10^{-9}}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{y}{\sqrt{y^2+4}} - 1 \right)$$

$$\boxed{\vec{E}^*} = -\frac{10^{-9}}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{2}{\sqrt{8}} - 1 \right) = -\frac{10^{-9}}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right) = 5.26 \frac{V}{m}$$

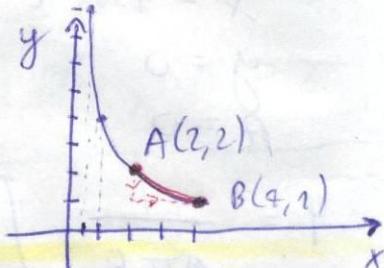
2.30. $\vec{E}^* = 4x \hat{x}' + 2 \hat{y} [V/m]$

$y = \frac{4}{x} \quad A(2,2), \quad B(4,1)$

$W(a) - W(b) = - \int_{(y_1)}^{(y_2)} y \cdot \vec{E} \cdot d\vec{l}$

$A = -g \int_{(4,1)}^{(2,2)} 4x dx + 2 dy = -g \left(4 \int_{4}^2 x dx + 2 \int_{1}^2 dy \right)$

$\boxed{A} = -g \cdot \left(4 \cdot \frac{1}{2} x^2 \Big|_{x=4}^2 + 2 \right) = -g \cdot (22) = \boxed{-22eV}$



ZA OZNA PUTA INTEGRACIJE
DUBINE SE ISZN NEZULATI
POTENCIJALNA ENERGIJA NABOJA
U STACIONARU OBRAZOVANU POJU
NE OVISI O PUTU, VEC SANTO O
POZICIJSKI KLASI, TO JEST NOG PUTA

2.31. $E \cdot E \cdot r^2 \pi = \sigma \cdot \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\varphi$

$E \cdot E \cdot r^2 \pi = \sigma \cdot \frac{1}{2} \pi r^2 \Big|_0^R \cdot 2\pi = \frac{1}{2} \sigma \cdot R^2 \cdot \pi$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma \cdot R^2}{\epsilon \cdot r^2} \cdot \hat{r}}$$

2.32. $\varphi = - \int_{r_{ref}}^R \vec{E} \cdot d\vec{l}$

za $r > R$ $\varphi = - \int_{\infty}^R \frac{\sigma \cdot R^2}{\epsilon \cdot r^2} dr = - \frac{\sigma \cdot R^2}{\epsilon} \int_{\infty}^R \frac{dr}{r^2}$

$\boxed{\varphi = \frac{\sigma \cdot R^2}{\epsilon \cdot r}}$

$$\boxed{\varphi = \begin{cases} \frac{\sigma \cdot R}{\epsilon}, & r < R \\ \frac{\sigma \cdot r^2}{\epsilon \cdot R}, & r > R \end{cases}}$$

$$\left(-\frac{1}{r} \right)^R_{r=\infty}$$

$$\boxed{\frac{1}{R} - \frac{1}{\infty}}$$

za $r < R$ $\boxed{\left(-\frac{1}{r} \right)^R_{r=0}}$

$$\boxed{\frac{1}{R}}$$

$$2.33. \quad \epsilon_0 \cdot E \cdot 2\pi r \cdot L = g \cdot \int_{r}^{R} \rho_{\text{rohr}} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\alpha \int_{0}^{2\pi} dz$$

$$\boxed{\bar{E} = \frac{g}{\epsilon_0 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{r^2}{R^2} x} = \boxed{\frac{g \cdot r}{2 \epsilon_0} \bar{a}_r}$$

$$\varphi(R) - \varphi(r) = - \int \bar{E} \cdot d\bar{l}$$

$$\varphi(r) = 1 + \int_r^R \frac{g \cdot r}{2 \epsilon_0} dr$$

$$\varphi(r) = 1 + \frac{g}{2 \epsilon_0} \left(\frac{1}{2} r^2 \right) \Big|_{r=r}^R = 1 + \frac{g}{2 \epsilon_0} \cdot \frac{1}{2} (R^2 - r^2)$$

$$\boxed{\varphi(r) = 1 + \frac{g}{4 \epsilon_0} (1 - r^2)}$$

A (1, II, 4)

B (3, II, 4)

$$\bar{E} = \frac{x}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{x \bar{a}_x + y \bar{a}_y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\bar{E} = \frac{x}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\bar{r}}{r}$$

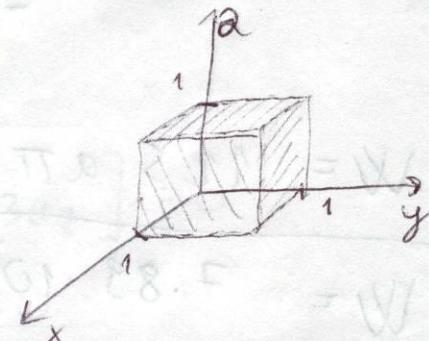
$$U_{BA} = \varphi(B) - \varphi(A) = - \int_A^B \bar{E} \cdot d\bar{r} = - \int_1^3 \frac{x}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} dr$$

$$U_{BA} = - \frac{x}{2\pi\epsilon_0} \ln r \Big|_{r=1}^3 = - \frac{x}{2\pi\epsilon_0} \cdot \ln \frac{3}{1} \Rightarrow \boxed{U_{BA} = -98,74 \text{ kV}}$$

$$f = 2x + 9y$$

$$\bar{E} = -\nabla \cdot f = - (2 \bar{a}_x + 9 \bar{a}_y)$$

$$|\bar{E}| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} \quad |\bar{E}|^2 = 25$$



$$W = \frac{1}{2} \int_V \epsilon \cdot |\bar{E}|^2 dV$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot \epsilon \cdot 20 \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz$$

$$W = 10 \cdot \epsilon_0 = 8.859 \cdot 10^{-11}$$

$$2.36. \quad \vec{E} = \frac{10^5}{r} \hat{a}_r \quad |\vec{E}|^2 = \frac{10^{10}}{r^2}$$

$$dV = r dr dd dz$$

$$W = \frac{1}{2} \int_0^{10} \epsilon \cdot |\vec{E}|^2 dV$$

$$W = \frac{10^{10}}{2} \cdot \epsilon \int_{0.01}^{0.05} \frac{1}{r^2} \cdot r dr \int dd \int dz$$

$$W = \frac{\epsilon \cdot 10^{10}}{2} \ln \frac{0.05}{0.01} \cdot 2\pi \cdot 0.5 = 0.22383 J$$

$$2.37. \quad \vec{E} = -5 e^{-\frac{r}{a}} \hat{a}_r \quad 0 \leq r \leq 2a$$

$$|\vec{E}|^2 = 25 e^{-2 \frac{r}{a}} \quad 0 \leq r \leq 5a$$

$$W = \frac{1}{2} \epsilon \cdot 25 \int e^{-\frac{2r}{a}} r dr \int dd \int dz$$

$$W = \frac{25}{2} \cdot \epsilon \cdot 2\pi \cdot 5a \left(\frac{u^2 e^{-\frac{2r}{a}}}{4} \left(-\frac{2}{a} N - 1 \right) \right) \Big|_{r=0}^{2a} \quad \begin{aligned} & \int x \cdot e^{cx} dx = \frac{e^{cx}}{c^2} (cx - 1) \\ & N \cdot e^{-\frac{2r}{a}} dr = \frac{e^{-\frac{2r}{a}}}{\frac{2}{a}} \end{aligned}$$

$$W = 125 \pi \epsilon \left[\left(\frac{u^2 e^{-\frac{2 \cdot 2a}{a}}}{4} \cdot \left(-\frac{2 \cdot 2a}{a} - 1 \right) \right) - \left(\frac{u^2 e^0}{4} \cdot (-1) \right) \right]$$

$$W = 125 \pi \epsilon \left[\frac{u^2}{4} \left(1 - e^{-4} \cdot 5 \right) \right]$$

$$W = 7.89 \cdot 10^{-10} \frac{a^3}{a^3}$$

$$2.38. \quad \varphi = 3x^2 + 4y^2 [V]$$

$$\vec{E} = -\nabla \cdot \varphi = -(6x \hat{a}_x + 8y \hat{a}_y)$$

$$|\vec{E}| = \sqrt{36x^2 + 64y^2} \quad |\vec{E}|^2 = 36x^2 + 64y^2$$

$$W = \frac{\epsilon}{2} \left(\int 36x^2 dx dy dz + \int 64y^2 dx dy dz \right)$$

$$W = \frac{\epsilon}{2} \left(36 \int_1^3 x^2 dx \int_1^3 dy \int_0^3 dz \right. \\ \left. + 6 + \int_1^3 y^2 dy \int_1^3 dx \int_0^3 dz \right) =$$

$$W = \frac{\epsilon}{2} \left(36 \cdot \frac{1}{3} x^3 \Big|_1^3 \cdot 2 \cdot 2 + 6 + \frac{1}{3} y^3 \Big|_1^3 \cdot 2 \cdot 2 \right)$$

$$W = \frac{\epsilon}{2} \left(\frac{36}{3} (3^3 - 1) \cdot 4 + \frac{64}{3} (3^3 - 1) \cdot 4 \right)$$

$$W = \frac{\epsilon}{2} (1298 + 2218.66667)$$

$$\boxed{W = 15.34693 \text{ mJ}}$$

2.39. $\bar{E}_2' = 2\bar{a}_x' - 3\bar{a}_y' + 5\bar{a}_z'$, $\epsilon_{r2} = 2, \epsilon > 0$
 $\bar{E}_1' = ?$, $\epsilon_{r1} = 5, \epsilon < 0$

$$\bar{n}_{12}' = \bar{n}_2'$$

$$\bar{n}_{12}' \cdot (\epsilon_{r2} \cdot \bar{E}_2' - \epsilon_r \cdot \bar{E}_1') = 0$$

$$\bar{n}_{12}' \cdot (9\bar{a}_x' - 6\bar{a}_y' + 10\bar{a}_z' - 5\bar{E}_{1x}\bar{a}_x' - 5\bar{E}_{1y}\bar{a}_y' - 5\bar{E}_{1z}\bar{a}_z') = 0 \\ 10 - 5\bar{E}_{1z} = 0 \\ -5\bar{E}_{1z} = -10 \\ \boxed{\bar{E}_{1z} = 2}$$

$$\bar{n}_{12}' \times (\bar{E}_2' - \bar{E}_1')$$

$$\bar{n}_2' \times [(2 - \bar{E}_{1x})\bar{a}_x' + (-3 - \bar{E}_{1y})\bar{a}_y' + 3\bar{a}_z'] = 0$$

$$\bar{a}_y' (2 - \bar{E}_{1x}) - \bar{a}_x' (-3 - \bar{E}_{1y}) = 0$$

$$\boxed{\bar{E}_{1x} = 2}$$

$$\boxed{\bar{E}_{1y} = -3}$$

$$\boxed{\bar{E}_1' = 2\bar{a}_x' - 3\bar{a}_y' + 2\bar{a}_z'}$$

$$0 = (22 - 55) + (535 + 1538) \frac{63}{99}$$

2.40.

$$\bar{E}_2 = 2\bar{a}_x' - 3\bar{a}_y + 5\bar{a}_z'$$

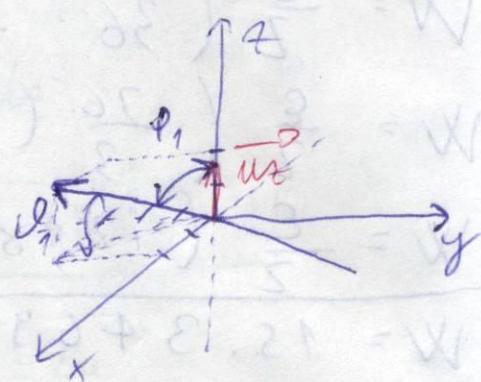
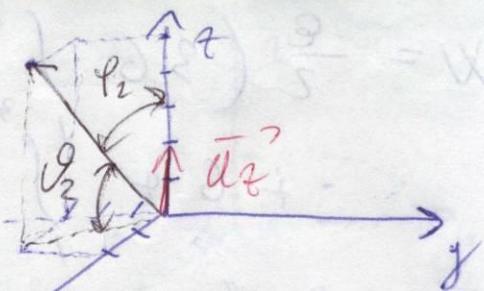
$$\cos \varphi_2 = \frac{\bar{E}_2 \cdot \bar{a}_z'}{|\bar{E}_2| |\bar{a}_z'|} = \frac{(2\bar{a}_x' - 3\bar{a}_y + 5\bar{a}_z') \cdot \bar{a}_z'}{\sqrt{4+9+25} \sqrt{1}}$$

$$\cos \varphi_2 = \frac{s}{\sqrt{38}} \Rightarrow \varphi_2 = 35.8^\circ$$

$$\boxed{\vartheta_2 = 90^\circ - \varphi_2 = 59.2^\circ}$$

$$\cos \varphi_1 = \frac{\bar{E}_1 \cdot \bar{a}_x'}{|\bar{E}_1| |\bar{a}_x'|} = \frac{2}{\sqrt{17}} \Rightarrow \varphi_1 = 61^\circ$$

$$\boxed{\vartheta_1 = 90^\circ - \varphi_1 = 29^\circ}$$



2.41.

$$\epsilon_r = 3.2$$

$$\bar{D}' = 2 \cdot 10^{-6} \bar{a}_x' \left[\frac{C}{m^2} \right]$$

$$\bar{P}' = (1 - 0.3125) \cdot 2 \cdot 10^{-6} \bar{a}_x'$$

$$\boxed{\bar{P}' = 1.375 \cdot 10^{-6} \bar{a}_x'}$$

$$\bar{P}' = (\epsilon_r - 1) \cdot \epsilon_0 \cdot \bar{E}'$$

$$\bar{P}' = \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \cdot \bar{D}'$$

2.42.

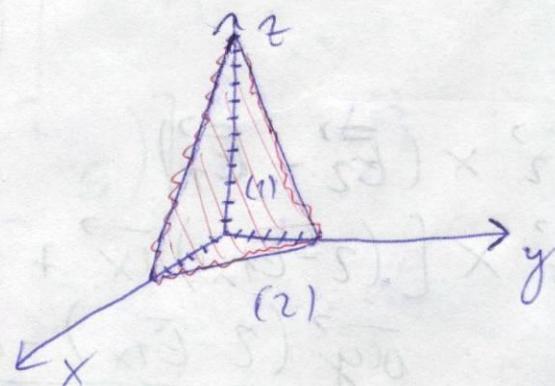
$$3x + 2y + z = 12$$

$$\epsilon_{r1} = 3 \quad \epsilon_{r2} = 1$$

$$\bar{n}_m' = \frac{3\bar{a}_x' + 2\bar{a}_y + \bar{a}_z'}{\sqrt{14}}$$

$$\bar{n}_m' (\epsilon_0 \cdot \epsilon_{r2} \cdot \bar{E}_2' - \epsilon_0 \cdot \epsilon_{r1} \cdot \bar{E}_1') = 0$$

$$\bar{E}_1' = 2\bar{a}_x' + 5\bar{a}_z'$$



$$\epsilon_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} (3\bar{a}_x' + 2\bar{a}_y + \bar{a}_z') [(E_{2x} - 6)\bar{a}_x' + E_{2y}\bar{a}_y + (E_{2z} - 15)\bar{a}_z']$$

$$\epsilon_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} [3(E_{2x} - 6) + 2E_{2y} + E_{2z} - 15] = 0$$

$$\frac{\epsilon_0}{\sqrt{14}} (3E_{2x} + 2E_{2y} + E_{2z} - 33) = 0 \quad (4)$$

$$\bar{m}_{12} \times (\bar{E}_2' - \bar{E}_1') = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{14}} \begin{vmatrix} \bar{a}_x' & \bar{a}_y' & \bar{a}_z' \\ 3 & 2 & 1 \\ \bar{E}_{2x}-5 & \bar{E}_{2y} & \bar{E}_{2z}-5 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{14}} \bar{a}_x' [2 \cdot (\bar{E}_{2z}-5) - \bar{E}_{2y}] \quad (1)$$

$$- \frac{1}{\sqrt{14}} \bar{a}_y' [3(\bar{E}_{2z}-5) - \bar{E}_{2x} + 2] \quad (2)$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{14}} \bar{a}_z' (3\bar{E}_{2y} - 2\bar{E}_{2x} + 4) \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{E}_{2z} &= 5 + \frac{1}{2} \bar{E}_{2y} \\ \bar{E}_{2x} &= \frac{3}{2} \bar{E}_{2y} + 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (4) \quad \frac{9}{2} \bar{E}_{2y} + 6 + \frac{5}{2} \bar{E}_{2y} - 28 = 0$$

$$\bar{E}_{2x} = \frac{3}{2} \bar{E}_{2y} + 2$$

$$\bar{E}_{2y} \left(\frac{9}{2} + \frac{5}{2} \right) = 22 \quad \boxed{\bar{E}_{2y}} \quad \frac{9+s}{2} = 22 = \boxed{3.74}$$

$$\boxed{\bar{E}_{2x} = 6.71}$$

$$\boxed{\bar{E}_{2z} = 6.57}$$

$$\boxed{\bar{E}_2 = 6.71 \bar{a}_x' + 3.74 \bar{a}_y' + 6.57 \bar{a}_z'}$$

2.43.

$$3x + z = 5$$

$$\bar{D}_1' = (9.5 \bar{a}_x' + 3.2 \bar{a}_z') \cdot 10^{-7}, \epsilon_{n1} = 4.3$$

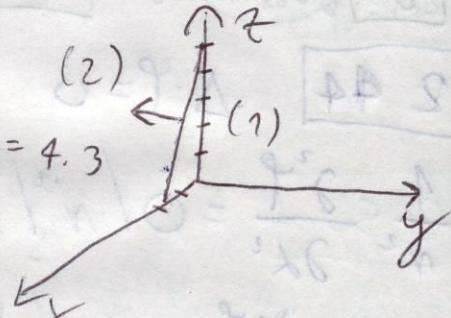
$$\bar{D}_2' = ?, \epsilon_{n2} = 1.8$$

$$\bar{m}_{12} = \frac{3 \bar{a}_y' + \bar{a}_z'}{\sqrt{10}}$$

$$\bar{m}_{12}' \cdot (\bar{D}_2' - \bar{D}_1') = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{10}} \cdot (3 \bar{a}_x' + \bar{a}_z') \cdot [(D_{2x} - 4.5 \cdot 10^{-7}) \bar{a}_x + D_{2y} \bar{a}_y + (D_{2z} - 3.2 \cdot 10^{-7}) \bar{a}_z] = 0 \quad (4)$$

$$3 D_{2x} - 3 \cdot 4.5 \cdot 10^{-7} + D_{2z} - 3.2 \cdot 10^{-7} = 0 \quad (4)$$



$$\bar{m}_{22} \times \left[\left(\frac{D_{2x}}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_{nr}} - \frac{4.5 \cdot 10^{-7}}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_{nr}} \right) \bar{a}_x + \bar{a}_y \left(\frac{D_{2y}}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_{nr}} \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{D_{2z}}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_{nr}} - \frac{3.2 \cdot 10^{-7}}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_{nr}} \right) \bar{a}_z \right]$$

$$\frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \begin{vmatrix} \bar{a}_x & \bar{a}_y & \bar{a}_z \\ 3 & 0 & 1 \\ \frac{D_{2x}}{1.8} - \frac{4.5 \cdot 10^{-7}}{9.3} & \frac{D_{2y}}{1.8} - \frac{3.2 \cdot 10^{-7}}{9.3} & \frac{D_{2z}}{1.8} - \frac{3 \cdot D_{2x} - 3 \cdot 4.5 \cdot 10^{-7}}{4.3} \end{vmatrix} = \bar{a}_x \left(-\frac{D_{2y}}{1.8} \right) \\ + \bar{a}_y \left(\frac{3 \cdot D_{2x} - 3 \cdot 4.5 \cdot 10^{-7}}{1.8} \right) + \bar{a}_z \left(\frac{3}{1.8} D_{2y} \right)$$

$$D_{2x} = 0.33334 D_{2x} + 0.71162 \cdot 10^{-7} \quad (1)$$

$$(1) \Rightarrow (2)$$

$$3 D_{2x} + 0.33334 D_{2x} + [0.71162 - (3 \cdot 4.5 + 3.2)] \cdot 10^{-7}$$

$$B = \sqrt{D_{2x}^2 + D_{2z}^2} = 5.32398 \cdot 10^{-7}$$

$$D_{2x} = 4.79651 \cdot 10^{-7}$$

$$D_{2z} = 2.31046 \cdot 10^{-7}$$

$$2.44 \quad \Delta \cdot \varphi = 0$$

KUT JE PIKSAN,
IZBODOMA VANO DERIVACIJA
PO KUN S NUCOM

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 / r^2 / f$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = C_1 / f \quad \varphi(z) = C_1 z + C_2$$

$$\varphi(0) = C_2 = \varphi_0$$

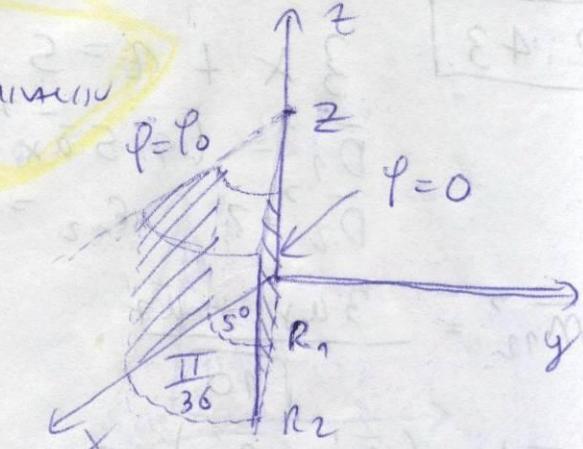
$$\varphi(z) = -\frac{36 \varphi_0}{\pi} z + \varphi_0 \quad \varphi\left(\frac{\pi}{36}\right) = 0$$

$$\vec{E} = -\nabla \varphi = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{a}_z \quad C_1 \cdot \frac{\pi}{36} + C_2 = 0 \quad C_1 = -\frac{36}{\pi} \cdot C_2$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{36 \varphi_0}{\pi} \frac{\pi}{36} R_2 \quad \vec{E} = \frac{36 \varphi_0}{\pi \cdot R_2} \vec{a}_z \quad |\vec{E}|^2 = \left(\frac{36 \varphi_0}{\pi \cdot R_2} \right)^2$$

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_0^{R_2} dz \int_{R_1}^{R_2} dR \left[\pi \cdot \frac{1}{R^2} \right] dr \cdot \frac{36^2 \varphi_0^2}{\pi^2} \quad d=5^\circ$$

$$W = \frac{18 \epsilon_0 \varphi_0^2}{\pi} \cdot 2 \cdot \ln \frac{R_2}{R_1} \quad W = \frac{1}{2} C \cdot U^2 \quad U^2 = \varphi_0^2$$



$$C = \frac{2 \cdot W}{U^2} = \frac{36}{\pi} \cdot \epsilon_0 \cdot 2 \cdot \ln \frac{R_2}{R_1}$$

2.45.

AKO JE GRANICA DILEKTIVNA OKONINA
MA PLOČE KONDENZATORA ODMAŠU
KOMPONENTE E_1 I E_2 JEDNAKE,
A UVRATAN MABOJ MA KONDENZATOR
JE PODIJELJEN AKA DIFERENCIJALNO
OUNOŠU O POMJERI KAO ZAHTIJAVU

$$E_1 = E_2$$

$$\epsilon_{r1} = 1.3$$

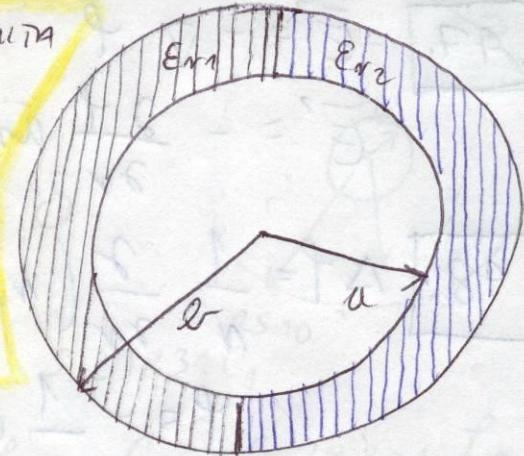
$$\epsilon_{r2} = 3.7$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot \vec{n} dS = Q = D_1 S_1 + D_2 S_2$$

$$\epsilon_0 \cdot \epsilon_{r1} \cdot E \cdot 2\pi k (n_B - n_A) \cdot \frac{1}{2} +$$

$$\epsilon_0 \cdot \epsilon_{r2} \cdot E \cdot 2\pi k (n_B - n_A) \cdot \frac{1}{2} = Q = \epsilon_0 \epsilon_{r3} E 2\pi k n_B$$

$$\epsilon_{r3} = \frac{(\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2})}{2} = \frac{1.3 + 3.7}{2} = 2.5$$



2.46.

$$\Delta \varphi = 0$$

$$\Delta \varphi = \frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = 0 / r / S$$

$$N \frac{\partial \varphi}{\partial r} = C_1 / : N / S$$

$$\varphi(r) = C_1 \ln r + C_2$$

$$\varphi(10^{-3}) = C_1 \cdot \ln 10^{-3} + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -C_1 \cdot \ln 10^{-3}$$

$$\varphi(2010^{-3}) = C_1 \cdot \ln 2 \cdot 10^{-2} + C_2 = 150$$

$$C_1 \ln 2 \cdot 10^{-2} - C_1 \ln 10^{-3} = 150$$

$$C_1 (\ln 2 \cdot 10^{-2} - \ln 10^{-3}) = 150$$

$$C_1 = 50.07123$$

$$C_2 = 345.8798$$

$$\varphi(r) = 50.07123 \ln r + 345.8798$$

2.47.

$$\vec{E}^2 = -\nabla \cdot \vec{\varphi}$$

$$\vec{E}^2 = -\frac{2}{r} \bar{u}_r^2 = -\frac{50.07123}{r} \bar{u}_r^2$$

2.48.

$$\Delta \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = 0$$

$$\varphi = -\frac{1}{r} C_1 + C_2$$

$$\varphi(0.1) = 2 - \frac{1}{0.1} C_1 + C_2 = 0$$

$$C_2 = 10 C_1$$

$$\varphi(2) = -\frac{1}{2} C_1 + 10 C_1 = 100$$

$$C_1 = 10.52631$$

$$C_2 = 105.26315$$

$$\varphi(r) = -\frac{1}{r} 10.52631 + 105.26315$$

$$\vec{E}^2 = -\nabla \cdot \vec{\varphi} = -\frac{2}{r} \bar{u}_r^2 = -\left(\frac{1}{r^2} 10.52631\right) \bar{u}_r^2$$

$$\vec{E}^2 = \epsilon_0 \cdot \vec{D}' \Rightarrow \vec{D}' = \frac{-9.31993 \cdot 10^{-11}}{r^2} \bar{u}_r^2$$

2.50.

$$\epsilon_r = 1.65$$

$$\varphi(\alpha) = C_1 \cdot \alpha + C_2$$

$$\varphi(0) = C_2 = 0$$

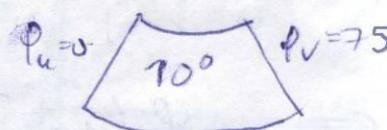
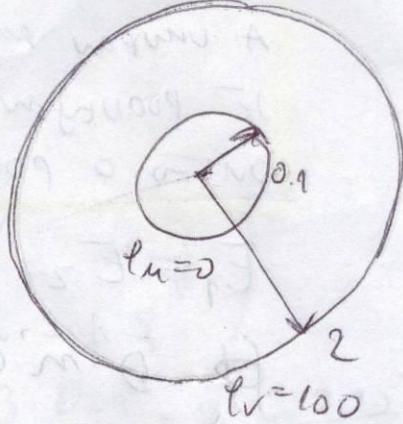
$$\varphi\left(\frac{\pi}{18}\right) = C_1 \cdot \frac{\pi}{18} = 75 \Rightarrow C_1 = \frac{1350}{\pi}$$

$$\varphi(\alpha) = \frac{1350}{\pi} \cdot \alpha$$

$$\vec{E}^2 = -\nabla \cdot \vec{\varphi} = -\left(\frac{1}{r} \frac{7350}{\pi} \bar{u}_2^2\right)$$

$$\vec{D}' = \epsilon_0 \epsilon_r \cdot \left(-\frac{1}{r} \cdot \frac{7350}{\pi}\right) \bar{u}_2^2$$

$$\vec{D}' = -\frac{6.27773}{r} \cdot 10^{-9} \bar{u}_2^2 \left[\frac{C}{m^2}\right]$$



$$2.51. \quad \vec{E}'(0.015) = -8.28 \cdot 10^3 \bar{u}_r^3$$

$$\varphi = C_1 \ln r + C_2$$

$$\varphi(0.005) = C_1 \cdot \ln 0.005 + C_2 = 0$$

$$C_2 = 5.29831 C_1$$

$$\varphi(0.025) = \varphi_0 = C_1 \cdot \ln 0.025 + 5.29831 C_1$$

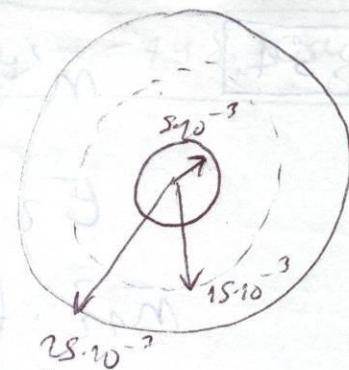
$$C_1 = 0.62133 \varphi_0 \quad C_2 = 3.29204 \varphi_0$$

$$\varphi(r) = \varphi_0 (0.62133 \ln r + 3.29204)$$

$$\vec{E}' = -\nabla \cdot \varphi$$

$$8.28 \cdot 10^3 \bar{u}_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}$$

$$8.28 \cdot 10^3 = \frac{\varphi_0 \cdot 0.62133^3}{r} \Rightarrow \varphi_0 = 199.89377 V$$



$$2.52. \quad Q = \oint_S \epsilon \cdot \vec{E} \cdot \bar{n}' dS = \iint_S \sigma dS \quad \bar{n}' = \bar{u}_r$$

$$\epsilon \cdot 0.02 \cdot 2\pi r L = 0.2 \pi r L$$

$$\boxed{\sigma = \epsilon \cdot E = 43.98667 \frac{C}{m^2}}$$

$$\vec{E}' = -\nabla \varphi = -\frac{129 \cdot 10^3}{r} \bar{u}_r \quad E(0.025) = 4967.99984$$

$$2.53. \quad R_1 = 0.08, +Q \quad R_3 = 0.24, -Q$$

$$R_2 = 0.16 \quad \epsilon_r = 4 \quad Q = 15 \cdot 10^{-9}$$

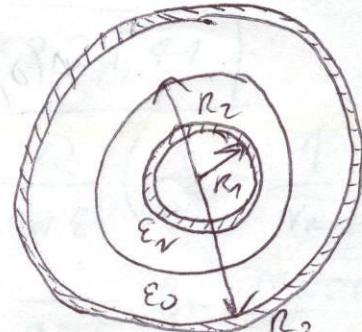
$$\text{zu } r < R_1, \vec{E}' = 0$$

$$\text{zu } R_1 < r < R_2$$

$$\oint_D \vec{D} \cdot \bar{n}' dS = Q$$

$$\epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot E \cdot 4 \cdot 0.19^2 \pi = Q$$

$$\boxed{E = \frac{Q}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot 4 \cdot 0.19^2 \pi} = 1719.59357 \frac{V}{m}}$$



2.54.

$$\vec{m}' = \vec{u}_r \quad E_1 = \frac{Q}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot r} \cdot \vec{u}_r$$

$$E_2 = E_{2r} \cdot \vec{u}_r$$

$$\vec{m}'_2 \cdot (\epsilon_0 \cdot E_{2r} \vec{u}_r - \frac{Q}{4 \cdot \pi^2 \cdot r} \vec{u}_r) = 0$$

$$\epsilon_0 \cdot E_{2r} - \frac{Q}{4 \cdot \pi^2 \cdot r} = 0 \quad E_{2r} = \frac{Q}{\epsilon_0 \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot r}$$

$$E_{2r}(0.18) = 9160.99186 \frac{V}{m}$$

2.55.

$$\vec{P}' = (\epsilon_r - 1) \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E}'$$

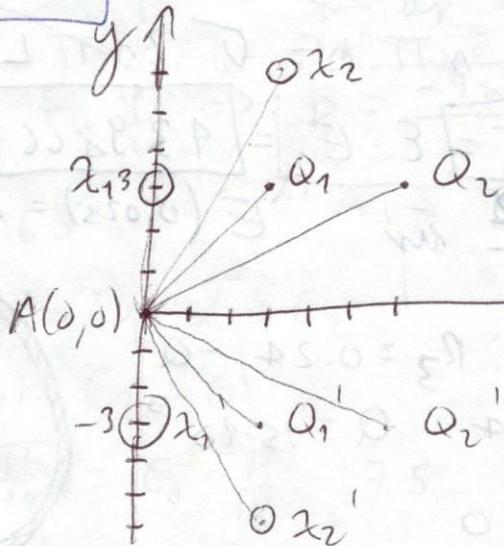
$$\vec{P}' = 34.97056 \text{ N} \frac{C}{m^2}$$

2.56.

$$Q_{PDC} = \oint \vec{P} \cdot \vec{n} \cdot dS \quad \text{zu } n=0.16$$

$$Q_{PDC} = 34.97056 \cdot 10^{-9} \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot r = 11.28 \text{ nC}$$

2.57.



$$\vec{E}_x = \frac{x}{2\pi\epsilon_0 h} (\cos \vec{ax} + \sin \vec{ay})$$

$$\vec{E}_y = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 h^2} (\cos \vec{ax} + \sin \vec{ay})$$

ORIGINALLY:

$$\vec{E}_{x_1} = \frac{x_1}{2\pi\epsilon_0 \cdot 3} (-\vec{ay})$$

$$\vec{E}_{x_1}' = \frac{x_1'}{2\pi\epsilon_0 \cdot 3} \cdot \vec{ay}$$

$$\vec{E}_{x_2} = \frac{x_2}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{9s}} \left(-\frac{3}{\sqrt{9s}} \vec{ax} - \frac{6}{\sqrt{9s}} \vec{ay} \right) \vec{E}_{x_2}' = \frac{x_2'}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{9s}} \left(\frac{3}{\sqrt{9s}} \vec{ax} + \frac{6}{\sqrt{9s}} \vec{ay} \right)$$

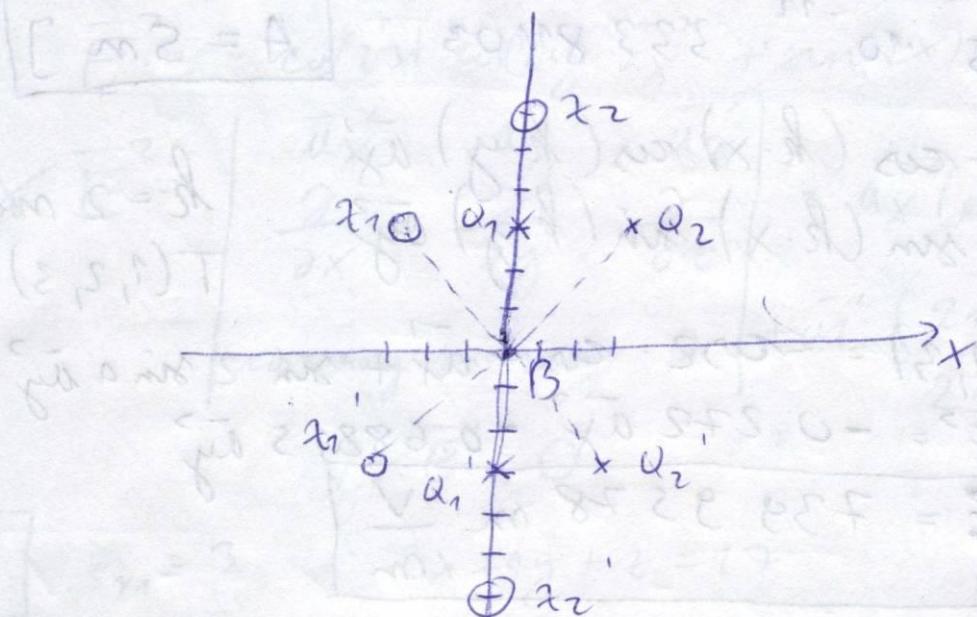
$$\vec{E}_{a_1} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 (3\sqrt{2})^2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{ax} - \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{ay} \right) \vec{E}_{a_1}' = \frac{Q_1'}{4\pi\epsilon_0 (3\sqrt{2})} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{ax} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{ay} \right)$$

$$\vec{E}_{a_2} = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 (\sqrt{9s})} \left(-\frac{6}{\sqrt{9s}} \vec{ax} - \frac{3}{\sqrt{9s}} \vec{ay} \right) \vec{E}_{a_2}' = \frac{Q_2'}{4\pi\epsilon_0 (\sqrt{9s})} \left(\frac{6}{\sqrt{9s}} \vec{ax} + \frac{3}{\sqrt{9s}} \vec{ay} \right)$$

KOMPONENTE V SMERU OX SE PONISTE, A $\bar{E}_y = -498.30 \text{ dy}$

2.58.

$$C_{\infty} = A$$



ORIGINÁL:

$$\bar{E}_{x_1} = \frac{x_1}{2\pi\epsilon_0 \cdot 3\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \bar{ax} - \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{ay} \right)$$

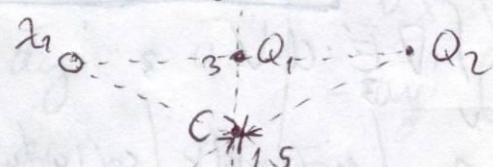
$$\bar{E}_{x_2} = \frac{x_2}{2\pi\epsilon_0 \cdot 6} (-\bar{ay})$$

$$\bar{E}_{Q_1} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 \cdot 3^2} (-\bar{ay})$$

$$\bar{E}_{Q_2} = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 (3\sqrt{2})} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \bar{ax} - \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{ay} \right)$$

$$\bar{E}_{\text{uk}} = \emptyset \cdot \bar{ax} - 221,41376 \frac{\bar{ay}}{0.22}$$

2.59.



ORIGINÁL:

$$\varphi_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{1.5} - \frac{1}{3} \right)$$

$$\varphi_{Q_2} = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{1.5^2 + 3^2}} - \frac{1}{3} \right) x_1, 0$$

$$\varphi_{x_1} = \frac{x_1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{3}{\sqrt{3^2 + 1.5^2}}$$

$$\varphi_{x_2} = \frac{x_2}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{6}{1.5}$$

$$\boxed{\varphi_{\text{ukc}} = 333.81103}$$

SUMA:

$$\bar{E}_{x_1} = \frac{x_1}{2\pi\epsilon_0 \cdot 3\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \bar{ax} + \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{ay} \right)$$

$$\bar{E}_{x_2} = \frac{x_2}{2\pi\epsilon_0 \cdot 6} \cdot \bar{ay}$$

$$\bar{E}_{Q_1} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 \cdot 3^2} \bar{ay}$$

$$\bar{E}_{Q_2} = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 (3\sqrt{2})} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \bar{ax} + \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{ay} \right)$$

$$\boxed{\varphi_{\text{uk}} = 221,41}$$

$$\varphi_Q = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_{\text{REF}}} \right)$$

$$\varphi_x = \frac{x}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_{\text{REF}}}{r}$$

$\varphi = 0 \text{ V}$ SUMA:

$$\varphi_{Q_1} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{1.5} - \frac{1}{3} \right)$$

$$\varphi_{Q_2} = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{1.5^2 + 3^2}} - \frac{1}{3} \right)$$

$$\varphi_{x_1} = \frac{x_1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{3}{\sqrt{3^2 + 1.5^2}}$$

$$\varphi_{x_2} = \frac{x_2}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{6}{1.5}$$

$$2.60. \quad A = Q \cdot (\varphi_c - \varphi_0)$$

$$A = 15 \cdot 10^{-12} \cdot 333.81103$$

$$A = 5 \text{ nJ}$$

829

$$2.61. \quad \vec{E}^2 = -\cos(k \cdot x) \cos(k \cdot y) \vec{ax} + \sin(k \cdot x) \sin(k \cdot y) \vec{ay}$$

$$k = 2 \text{ rad/m}$$

$$T(1, 2, 3)$$

$$\vec{E}'(1, 2, 3) = -\cos 2 \cdot \cos 4 \vec{ax} + \sin 2 \sin 4 \vec{ay}$$

$$\vec{E}' = -0.272 \vec{ax} - 0.68815 \vec{ay}$$

$$\boxed{\vec{E} = 739.9578 \text{ m} \frac{\text{V}}{\text{m}}}$$

$$2.62. \quad E_x = -\cos 2x \cos 2y$$

$$E_y = \sin 2x \sin 2y$$

$$\frac{dE_x}{dx} = -(-\sin(2x) \cdot \cos(2y) \cdot 2) = 2 \sin(2x) \cos(2y)$$

$$\frac{dE_y}{dy} = \sin(2x) \cos(2y) \cdot 2 = 2 \sin(2x) \cos(2y)$$

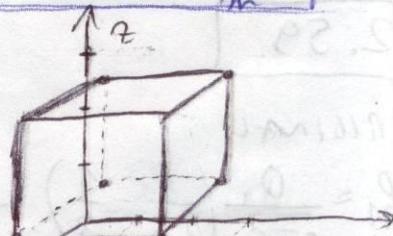
$$\nabla \cdot \vec{E}^2 = 4 \sin(2x) \cos(2y)$$

$$S_s = \epsilon_0 \cdot \nabla \cdot \vec{E}'(1, 2, 4) = 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 4 \cdot \sin(2) \cos(2)$$

$$\boxed{S_s = -21.04972 \text{ pC}}$$

$$2.63. \quad \oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = \epsilon_0 \int \nabla \cdot \vec{E} \cdot dV$$

$$\phi = \epsilon_0 \cdot \frac{1}{4} \int \int \int \sin(2x) dx \int \cos(2y) dy$$



$$\phi = 2 \cdot \epsilon_0 \cdot \left[\left(-\cos(2x) \cdot \frac{1}{2} \right) \right] \Big|_{x=1}^{x=0} \cdot \left[\frac{1}{2} \sin(2y) \right] \Big|_{y=1}^{y=0}$$

$$\phi = 2 \cdot \epsilon_0 \cdot (-1.37631) \cdot (-1.18871)$$

$$\boxed{\phi = 28.97095 \text{ pC}}$$

2.64.

$$\nabla \times \vec{E}^2 \text{ u } T(2,1,2)$$

$$\vec{E}^2 = -\cos(2x) \cos(2y) \vec{ax} + \sin(2x) \sin(2y) \vec{ay}$$

$$\nabla \times \vec{E}^2 = \begin{vmatrix} \vec{ax}' & \vec{ay}' & \vec{az}' \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\cos 2x \cos 2y & \sin 2x \sin 2y & 0 \end{vmatrix} = \vec{ax}'(\phi) - \vec{ay}'(\phi) + \vec{az}' \left(2 \cos(2x) \sin(2y) - 2 \cos(2x) \sin(2y) \right)$$

$$\nabla \times \vec{E}' = 0$$

2.65.

$$\epsilon_{r1} = 3$$

$$2x + 4y + z = 17$$

$$\epsilon_{r2} = 2$$

$$\vec{E}_1' = -2\vec{ax}' - \vec{ay}' + 2\vec{az}'$$

$$\vec{M}_{12} = \frac{2\vec{ax}' + 4\vec{ay}' + \vec{az}'}{\sqrt{21}}$$

$$\vec{m}_{12} \cdot [(D_{2x} - (-2 \cdot 3 \cdot \epsilon_0)) \vec{ax}' + (D_{2y} - (-1 \cdot 3 \cdot \epsilon_0)) \vec{ay}' + (D_{2z} - (2 \cdot 3 \cdot \epsilon_0)) \vec{az}'] = 0 \quad (4)$$

$$\frac{2}{\sqrt{21}} (D_{2x} + 6\epsilon_0) + \frac{4}{\sqrt{21}} (D_{2y} + 3\epsilon_0) + \frac{1}{\sqrt{21}} (D_{2z} - 6\epsilon_0) = 0 / \frac{1}{\sqrt{21}}$$

$$\vec{m}_{12} \times (\vec{E}_2' - \vec{E}_1') = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{21}} \begin{vmatrix} \vec{ax} & \vec{ay}' & \vec{az}' \\ 2 & 4 & 1 \\ E_{2x} + 2 & E_{2y} + 1 & E_{2z} - 2 \end{vmatrix} = \vec{ax}'(4E_{2z} - 8 - E_{2y} - 1) - \vec{ay}'(2E_{2z} - 4 - E_{2x} - 2) + \vec{az}'(2E_{2y} + 2 - 9E_{2x} - 8) = 0$$

$$E_{2y} = 4E_{2z} - 9 \quad (1) ; 2(E_{r2}E_{2x} + 6) + 4(\epsilon_{r2}E_{2y} + 3) + (\epsilon_{r2}E_{2x} - 6) =$$

$$E_{2x} = 2E_{2z} - 6 \quad (2) ; 8E_{2z} - 24 + 12 + 32E_{2z} - 72 + 12 + 2E_{2z} - 6 = 0$$

$$(1), (2) \Rightarrow (4)$$

$$E_{2x} = -2.28571$$

$$D_{2x} = -40.97542 \mu \frac{C}{m^2}$$

2.66.

$$E_{2y} = -1.57142$$

$$D_{2y} = -27.82685 \text{ p} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$$

2.67.

$$E_{2z} = 1.85714$$

$$D_{2z} = 32.88628 \text{ p} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$$

2.68

$$A(0,0,0) \quad U_{AB} = - \int_A^B \vec{E}_1 \cdot d\vec{l}$$

$$B(1,0,0)$$

$$U_{AB} = - \int_1^0 (-2) dx = -2 \text{ V}$$

2.69.

$$R_1 = 0.01 \quad R_2 = 0.03 \quad R_3 = 0.045$$

$$R_4 = 0.05 \quad R_5 = 0.1 \quad R_6 = 0.2$$

$$\epsilon_{r1} = 4 \quad \epsilon_{r2} = 2$$

$$f = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \frac{1}{r^2 + 81} & R_1 \leq r \leq R_2 \\ 0 & r > R_2 \end{cases}$$

$$\text{zu } r < R_1, \quad \vec{E} = 0$$

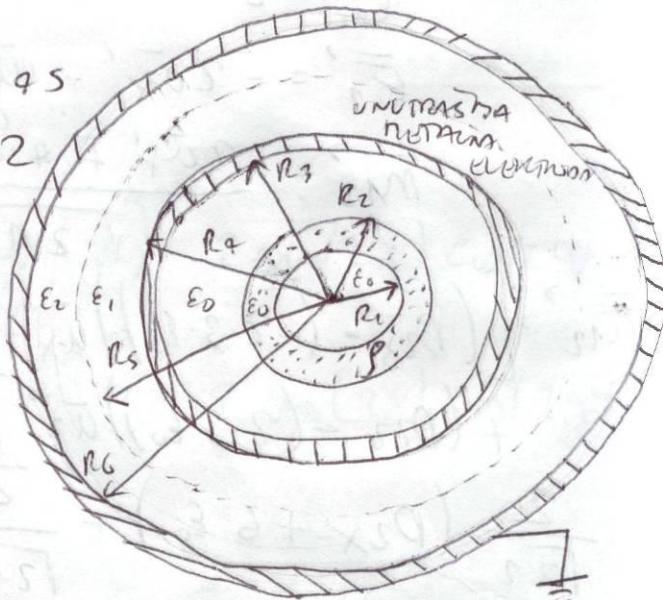
$$\text{zu } R_1 \leq r \leq R_2 \quad \text{zu } r < R_3$$

$$\epsilon_0 \cdot E \cdot 2\pi r \cdot L = \int_0^{R_2} \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{r}{r^2 + 81} dr$$

$$0 = 18 \quad \epsilon_0 \cdot E \cdot 2\pi r \cdot L = 2\pi r \cdot L \cdot \frac{1}{2 \cdot 3^2} \arctg \left(\frac{R_2}{3} \right)^2 \quad R = 0.01$$

$$\epsilon_0 \cdot E \cdot r = \frac{1}{2 \cdot 9} \cdot \left(\arctg \frac{0.03}{9} - \arctg \frac{0.01}{9} \right)$$

$$\vec{E}_1 = \frac{557749.7014 \text{ m}^{-2}}{r}$$



WANDEL
HÖRMER
GEGENWAHR

$$\bar{M}_{12} = \bar{a}_r \xrightarrow{\text{sumu je } \epsilon_{r_1} = 1 \text{ zvola}} \bar{M}_{12} (\epsilon_0 \cdot \epsilon_{r_2} \cdot \bar{E}_2 - \epsilon_0 \cdot \epsilon_{r_1} \bar{E}_1) = 0$$

$$4 \cdot \bar{E}_2 - \frac{557744.7019}{\pi} = 0$$

$$\bar{E}_2 = \frac{139436.1754}{\pi} \quad \text{zu } \pi = 0.09$$

$$\boxed{\bar{E}_2 = 1549.29083 \text{ hV/m}}$$

2.70. *tvar se \bar{P} ' u postot* $R_s \leq r \leq R_6$ *su* $\epsilon_r = 2$

$$\bar{E}_3 = \frac{\epsilon_{r_2}}{\epsilon_{r_2} \epsilon_{r_3}} \cdot \bar{E}_2 \Rightarrow \boxed{\bar{E}_3 = \frac{278872.3508 \bar{E}_2}{\pi}}$$

$$\bar{P} = (\epsilon_{r_3} - 1) \cdot \epsilon_0 \cdot \bar{E}_3 = 1 \cdot \epsilon_0 \cdot \bar{E}_3$$

$$\text{zu } \pi = 0.09 \quad \boxed{P = 20.57613 \mu \frac{C}{m^2}}$$

2.71. $W = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2$

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{0.1}^{0.2} (\epsilon_{r_2} \cdot \bar{E}_2^2 + \epsilon_{r_3} \cdot \bar{E}_3^2) dV$$

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\epsilon_{r_2} \int_{0.05}^{0.1} \frac{1.9442 \cdot 10^{10}}{N^x} \cdot \pi dr + \epsilon_{r_3} \int_{0.1}^{0.2} \frac{7.77697 \cdot 10^{10}}{N^x} \cdot \pi dr \right)$$

TADA SE ENERGIJA PO JEDINICI DULJINE KONCENTRACIJE

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\epsilon_{r_2} \cdot 1.9442 \cdot 10^{10} \ln \frac{0.1}{0.05} + \epsilon_{r_3} \cdot 7.77697 \cdot 10^{10} \ln \frac{0.2}{0.1} \right)$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot k \cdot \epsilon_0 \left(5.39057 \cdot 10^{10} + 1.07811 \cdot 10^{11} \right) \frac{R_s}{R_6} = 4.49827 \frac{J}{m}$$

2.72. $U = - \int_B^A \bar{E} \cdot d\ell = \int_{R_4}^{R_5} \bar{E}_2 \cdot dr + \int_{R_5}^{R_6} \bar{E}_3 \cdot dr$

$$U = 96649.79185 + 193299.5837 = \boxed{289949.3755}$$

$$C = \frac{2W}{U^2} = \frac{9}{8.90706 \cdot 10^{10}} = \boxed{107.05283 \mu \frac{F}{m}}$$

III. MAGNETOSTATIKA

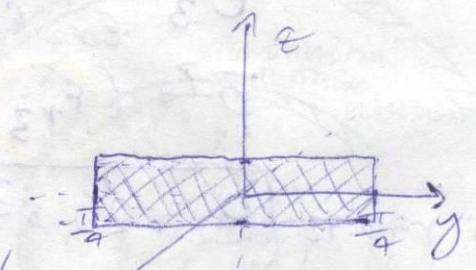
3.1. $\vec{A} = 2.5 \vec{a}_\theta + 5 \vec{a}_\alpha$ $T(2, \frac{\pi}{6}, 0)$

 $A_\theta = 2.5 \quad A_\alpha = 5$

$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ $B_\alpha = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right)$

 $B_\alpha = \frac{1}{2} \cdot 2.5 \quad B_\alpha(T) = 1.25$

3.2. $\vec{j} = 100y \sin(2y) \vec{a}_x \left[\frac{A}{m^2} \right]$

$I = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{n} \cdot dS$ $\vec{n} = \vec{a}_x$ 

$I = \iint_S 100y \sin(2y) \vec{a}_x \cdot \vec{a}_x \cdot dy \cdot dz$

$I = 100 \int_{-0.01}^{0.01} dz \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} y \cdot \sin(2y) dy$

$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$ $u = y \quad du = dy$
 $v = \sin(2y) \quad dv = \cos(2y) dy$

$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} y \cdot \sin(2y) dy = y \cdot \left(-\frac{1}{2} \cos(2y) \right) \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$ $v = -\frac{1}{2} \cos(2y)$

$- \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} -\frac{1}{2} \cos(2y) dy = \frac{\pi}{4} \left[-\frac{1}{2} \cos(2 \cdot \frac{\pi}{4}) \right] - \left(-\frac{\pi}{4} \right) \left[-\frac{1}{2} \cos(2 \cdot (-\frac{\pi}{4})) \right]$

$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin 2y \right) \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$

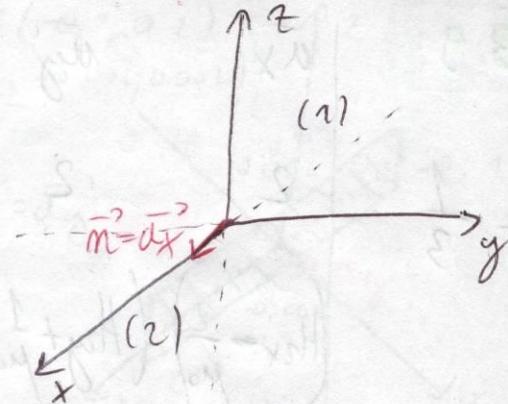
$= \frac{1}{4} (\sin \frac{\pi}{2} - (\sin(-\frac{\pi}{2}))) = \frac{1}{4} \cdot 2 = \boxed{\frac{1}{2}}$

$$I = 100 \cdot 2 \cdot 0.01 \cdot \frac{1}{2} = 1 [A]$$

$$3.3. \quad \bar{K} = 6.5 \bar{m} \left[\frac{A}{m} \right]$$

$$(1) \text{ zu } x < 0, H_1 = 10 \bar{a}_y \left[\frac{A}{m} \right] \quad \bar{m} = \bar{a}_x$$

$$(2) \text{ zu } x > 0, H_2 = ? \left[\frac{A}{m} \right]$$



$$\bar{m} \times (\bar{H}_2 - \bar{H}_1) = \bar{K}$$

$$\bar{a}_x \times [H_{2x} \bar{a}_x + (H_{2y} - 10) \bar{a}_y + H_{2z} \bar{a}_z] = 6.5 \bar{a}_x$$

$$\bar{a}_x (H_{2y} - 10) - H_{2z} \bar{a}_y = 6.5 \bar{a}_x, \quad H_{2x} = H_{2z} = 0$$

$$H_{2y} - 10 = 6.5$$

$$H_{2y} = 16.5$$

$$3.4. \quad \bar{A} = \cos x \sin y \bar{a}_x + \sin x \cos y \bar{a}_y [T_m]$$

$$\bar{B} = \nabla \times \bar{A} = \begin{vmatrix} \bar{a}_x & \bar{a}_y & \bar{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \cos x \sin y & \sin x \cos y & 0 \end{vmatrix} = \bar{a}_z (\cos x \cos y - \cos x \cos y) = 0$$

$$3.5. \quad 4x + 9y + 2z = 8$$

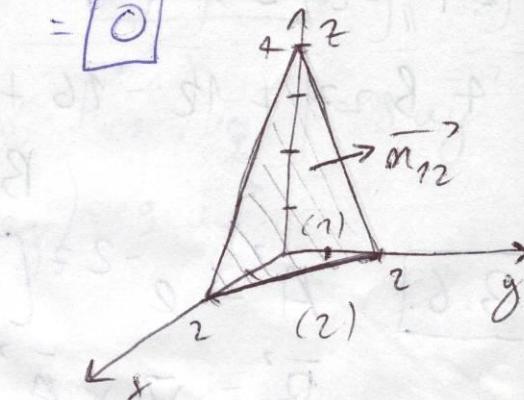
$$(1) \quad \bar{H}_1 = \frac{P}{\mu_0} (2\bar{a}_x - \bar{a}_y), \quad \mu_m = 4$$

$$(2) \quad \bar{H}_2 = ?, \quad \mu_{m2} = 3$$

$$\bar{m} = 4\bar{a}_x + 9\bar{a}_y + 2\bar{a}_z$$

$$\bar{m}_{12} = \frac{4\bar{a}_x + 9\bar{a}_y + 2\bar{a}_z}{\sqrt{36}} = \frac{1}{3} (2\bar{a}_x + 2\bar{a}_y + \bar{a}_z)$$

$$\bar{m}_{12} \times (\bar{H}_2 - \bar{H}_1) = 0$$



$$\frac{1}{3} (2\bar{a}_x + 2\bar{a}_y + \bar{a}_z) \times \left[\left(H_{2x} - \frac{1}{\mu_0} \cdot 2 \right) \bar{a}_x + \bar{a}_y \left(H_{2y} + \frac{1}{\mu_0} \right) + \bar{a}_z \left(H_{2z} \right) \right]$$

$$H = \frac{B}{\mu_0 \cdot \mu_r}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{vmatrix} \bar{a}_x' & \bar{a}_y' & \bar{a}_z' \\ 2 & 2 & 1 \\ \left(H_{2x} - \frac{2}{\mu_0}\right) & \left(H_{2y} + \frac{1}{\mu_0}\right) & H_{2z} \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \left[\bar{a}_x' \left(2H_{2z} - H_{2y} - \frac{1}{\mu_0}\right) + \bar{a}_y' \left(2H_{2z} - H_{2x} + \frac{2}{\mu_0}\right) + \bar{a}_z' \left(2H_{2y} + \frac{2}{\mu_0} - 2H_{2x} + \frac{4}{\mu_0}\right) \right] = 0$$

$$(-1) \quad 2H_{2z} - H_{2y} - \frac{1}{\mu_0} = 0 \Rightarrow H_{2z} = \frac{1}{2} \left(H_{2y} + \frac{1}{\mu_0}\right) \boxed{B_{2z} = \frac{B_{2y}}{2} + \frac{1}{2}}$$

$$(-2) \quad 2H_{2z} - H_{2x} + \frac{2}{\mu_0} = 0 \Rightarrow H_{2x} = 2 \left(H_{2z} + \frac{1}{\mu_0}\right) \boxed{B_{2x} = 2B_{2z} + 6}$$

$$(-3) \quad 2H_{2y} + \frac{6}{\mu_0} - 2H_{2x} = 0$$

$$\bar{n}_{12}^2 \cdot (\bar{B}_2' - \bar{B}_1') = \frac{1}{3} (2\bar{a}_x' + 2\bar{a}_y' + \bar{a}_z')$$

$$(-4) \quad 12B_{2x} - 16 + 2B_{2y} + 8 + B_{2z} = 0 \quad \left[\left(B_{2x} - \frac{2}{\mu_0} \cdot 4\right)\bar{a}_x' + \left(B_{2y} + \frac{1}{\mu_0} \cdot 9\right)\bar{a}_y' + B_{2z}\bar{a}_z' \right] = 0$$

$$(-1)(-2) = 2(-4) \quad 4B_{2z} + 12 - 16 + 2B_{2y} + 8 + \frac{B_{2y}}{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} = 0$$

$$B_{2y} \left(\frac{9}{2}\right) = -\frac{23}{2} \quad \boxed{B_{2y} = -\frac{23}{9}} = -2.56$$

$$3.6. \quad \bar{A}' = e^{-2z} [\sin(0.5z)] \bar{a}_z'$$

$$\bar{B}' = \nabla \times \bar{A}' \quad B_r(0.8, \frac{\pi}{3}, 0.5) = ?$$

$$B_{rz} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$B_{rz} = - \left(-2e^{-2z} \sin(0.5z) \right)$$

$$B_r = 2e^{-2 \cdot 0.5} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{B_r = e^{-1} = 0.36787}$$

3.7.

$$\bar{y}' = 100 |x| \bar{a}y'$$

$$\bar{y}' = \begin{cases} -100x, & x < 0 \\ 100x, & x > 0 \end{cases}$$

$$I = \iint_S 100 |x| \bar{a}y' \bar{a}y' dx dy$$

$$I = 100 \int_{-0.1}^{0.1} |x| dx \int_{-0.002}^{0.002} \bar{a}y' dy$$

$$I = 100 \left(\int_{-0.1}^0 (-x) dx + \int_0^{0.1} x dx \right) \cdot 2 \cdot 0.002$$

$$I = 100 \left(-\frac{1}{2}x^2 \Big|_{x=-0.1}^0 + \frac{1}{2}x^2 \Big|_0^{0.1} \right) \cdot 0.004$$

$$I = 0.4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 0.1^2 + \frac{1}{2} \cdot 0.1^2 \right) = 0.004 \quad [I[mA] = 4]$$

3.8.

$$\bar{k}' = 9 \bar{a}y'$$

$$\bar{H}_1' = ? , \mu_{n_1} = 4$$

$$\alpha > 0 \quad \bar{H}_2' = 14.5 \bar{a}x + 8 \bar{a}z, \mu_{n_2} = 3$$

$$\bar{m}_{n_2} \times \left[(19.5 - H_{1x}) \bar{a}x' + (-H_{1y}) \bar{a}y' + (8 - H_{1z}) \bar{a}z' \right] = 9 \bar{a}y'$$

$$(19.5 - H_{1x}) \bar{a}y' - \bar{a}x' (-H_{1y}) = 9 \bar{a}y'$$

$$19.5 - H_{1x} = 9$$

$$[H_{1x} = 5.5]$$

$$\bar{m}_{n_2} \cdot (\bar{B}_2' - \bar{B}_1') = \bar{a}z' \left(\bar{H}_2' \cdot \mu_0 \mu_{n_2} - \bar{H}_1' \cdot \mu_0 \mu_{n_1} \right)$$

$$= \mu_0 \cdot \bar{a}z' \left[(19.5 \cdot 3 - 5 \cdot 4) \bar{a}x' + (-H_{1y} \mu_{n_1}) \right. \\ \left. + (8 \cdot 3 - H_{1z} \cdot 4) \bar{a}z' \right] = 0$$

$$8 \cdot 3 - H_{1z} \cdot 4 = 0$$

$$[H_{1z} = 6]$$

$$\bar{H}_{1m}' = H_{1m} \cdot \bar{m}'$$

$$\bar{H}_{1m}' = 6 \bar{a}z'$$

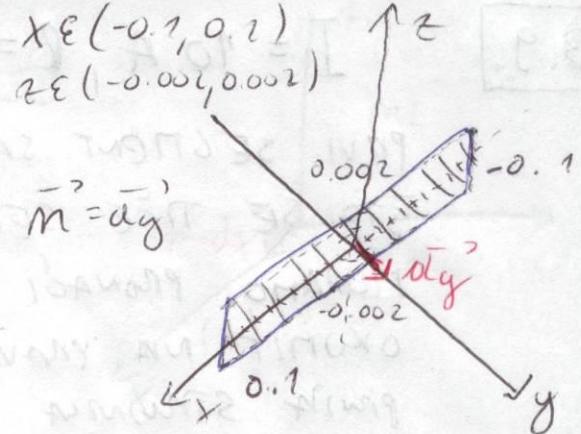
$$\bar{H}_{1t}' = H_{1t} - \bar{H}_{1m}'$$

$$\bar{H}_{1t}' = 5.5 \bar{a}x'$$

$$H_{1t} = 5.5$$

$$\bar{H}_1' = 5.5 \bar{a}x' + 6 \bar{a}z'$$

$$3.11. \quad [H_{1m} = 6]$$



3.9.

$$I = 10 \text{ A}, R = 1 \text{ m}, \alpha = \frac{\pi}{3}$$

PRVI SEGMENT SAONIĆI SAMO y -KOMPONENTU
ŠTO SE TIČE SEGMENTA (2),

MORAMO PRONAĆI JEDINICNI VEKTOR
OKOMIT NA PRAVAC KOJIM SE
POMIŠLJA SMIJENICA I NA PRAVAC
NA KOJEM SE MALAŽI TOČKA U

KOJOJ TRAJE X-KOMPONENTU JAKOSTI MAGNETNOG POJA

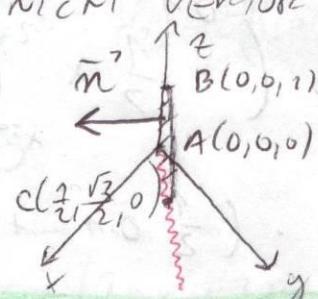
IZABRANOMO TRI TOČKA KOJE SE MALAŽE NA ISTOJ

RAVNINI I TRAJE JEDINICNI VEKTOR OKOMIT NA TU RAVNU

$$A(0, 0, 0)$$

$$B(0, 0, 1)$$

$$C\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$$



JEDNODRGA RAVNINA OPREZIMA S TRI TOČKE:

$$(2) \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{vmatrix} = x\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - y\left(-\frac{1}{2}\right) + z \cdot 0 = 0$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y = 0$$

VODIMO DA BI JEDINICNI VEKTOR S OVIN
KOEFICIENTIMA UNIJEAO DA JE SMIJENICA
S DRUGIM SMIJENOM SMOJE (SUPROTNA).

$$\vec{m}' = \frac{\sqrt{3}}{2} \bar{u}\vec{x}' - \frac{1}{2} \bar{u}\vec{y}'$$

$$\vec{H}_{12} = \frac{I}{4\pi \cdot \mu} \cdot (\sin 0^\circ + \sin 90^\circ) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \bar{a}\vec{x}' - \frac{1}{2} \bar{a}\vec{y}' \right)$$

$$3.10. \quad \boxed{H_{2x}} = \frac{S\sqrt{3}}{4\pi} = \boxed{0.69}$$

$$\boxed{H_{1y}} = \frac{10}{4\pi \cdot 1} \cdot 1 \cancel{(\bar{a}\vec{y})} = \boxed{\frac{10}{4\pi}}$$

A (0, 0, 0)

B (0, 0, 1)

C ($\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 0)

$$\vec{H}_2 = \frac{10}{4\pi \cdot 1}$$

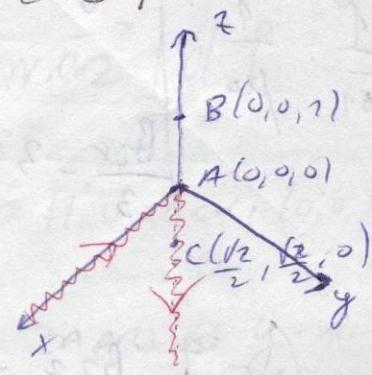
$$\boxed{H_{2y}} = -\frac{S\sqrt{2}}{4\pi}$$

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{array} = -\frac{\sqrt{2}}{2} x + \frac{\sqrt{2}}{2} y$$

$$\vec{m}' = \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{a}\vec{x}' - \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{a}\vec{y}'$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{a}\vec{x}' - \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{a}\vec{y}'$$

$$\boxed{H_y} = H_{1y} + H_{2y} = \boxed{0.23307}$$



3.11.

RJEŠENJE U SKLOPU ZADATKA 3.8. NA STRANICI 47.

3.12.

$$6x + 9y + 3z = 12$$

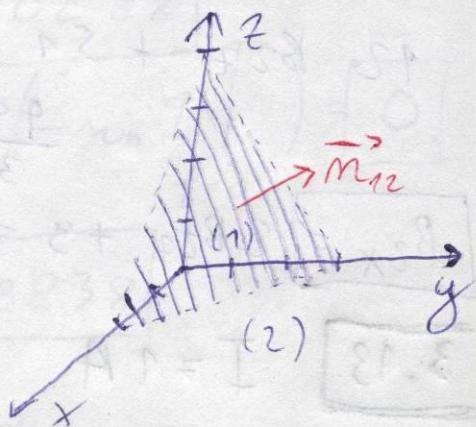
$$\vec{H}_1 = \frac{1}{\mu_0} (3 \bar{a}\vec{x} - 0.5 \bar{a}\vec{y}), \mu_m = 5$$

$$B_{2x} = ? \quad \mu_{mr} = 3$$

$$\vec{m}_{12} = \frac{1}{\sqrt{61}} (6 \bar{u}\vec{x} + 9 \bar{u}\vec{y} + 3 \bar{u}\vec{z})$$

$$\vec{m}_{12} \times \left[\left(\frac{B_{2x}}{\mu_0 \mu_{mr}} - H_{1x} \right) \bar{a}\vec{x} + \left(\frac{B_{2y}}{\mu_0 \mu_{mr}} + H_{1y} \right) \bar{a}\vec{y} + \frac{B_{2z}}{\mu_0 \mu_{mr}} \bar{a}\vec{z} \right] = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{61}} \cdot \frac{1}{\mu_0} \cdot (6 \bar{a}\vec{x} + 9 \bar{a}\vec{y} + 3 \bar{a}\vec{z}) \times \left[\left(\frac{B_{2x}}{3} - 3 \right) \bar{a}\vec{x} + \left(\frac{B_{2y}}{3} + \frac{1}{2} \bar{a}\vec{y} \right) \bar{a}\vec{y} + \frac{B_{2z}}{3} \bar{a}\vec{z} \right] = 0$$



$$\frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{1}{61} \begin{vmatrix} \vec{ax} & \vec{ay} & \vec{az} \\ 6 & 4 & 3 \\ \frac{B_{2x}-3}{3} & \frac{B_{2y}+1}{3} & \frac{B_{2z}}{3} \end{vmatrix} = \left[\begin{array}{l} \left(\frac{4}{3}B_{2z} - B_{2y} - \frac{3}{2} \right) \vec{ax} - \\ \cdot \left(2B_{2z} - B_{2x} + 9 \right) \vec{ay} + \\ + \left(2B_{2y} + 3 - \frac{4}{3}B_{2x} + 12 \right) \vec{az} \end{array} \right]$$

$$= \begin{cases} \frac{4}{3}B_{2z} - B_{2y} - \frac{3}{2} = 0 & \Rightarrow B_{2y} = \frac{4}{3}B_{2z} - \frac{3}{2} \\ 2B_{2z} - B_{2x} + 9 = 0 & \Rightarrow B_{2x} = 2B_{2z} + 9 \end{cases}$$

$$\vec{m}_{12} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \frac{1}{61} (6\vec{ax} + 4\vec{ay} + 3\vec{az}) \cdot [(B_{2x}-15)\vec{ax} + (B_{2y}+25)\vec{ay} + B_{2z}\vec{az}] = 0$$

$$6B_{2x} - 90 + 4B_{2y} + 10 + 3B_{2z} = 0$$

$$6(2B_{2z} + 9) - 90 + 4\left(\frac{4}{3}B_{2z} - \frac{3}{2}\right) + 10 + 3B_{2z} = 0$$

$$12B_{2z} + 54 - 90 + \frac{16}{3}B_{2z} - 6 + 10 + 3B_{2z} = 0$$

$$\frac{45}{3}B_{2z} + \frac{16}{3}B_{2z} - 32 = 0 \Rightarrow B_{2z} = \frac{96}{81}$$

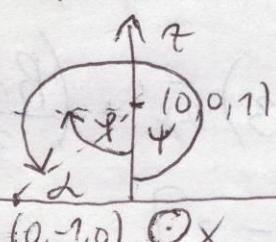
$$\boxed{\therefore B_{2x} = 2B_{2z} + 9 = 2 \cdot \frac{96}{81} + 9 = 12.14754}$$

$$3.13. \quad I = 1 \text{ A} \quad n = 1$$

SPRAWNIKI DZIELĄCIE NA TRÓJSEGMENTA.
UDZIAŁY SEGMENTÓW (1) i (3) JESTEJĄ RÓWNE

$$H_1 = H_3$$

$$\vec{m} = \vec{ax}$$



(1), (3)

$$H_1 = H_3 = \frac{I}{4\pi N} (\sin \varphi + \sin \psi) \cdot \vec{m}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

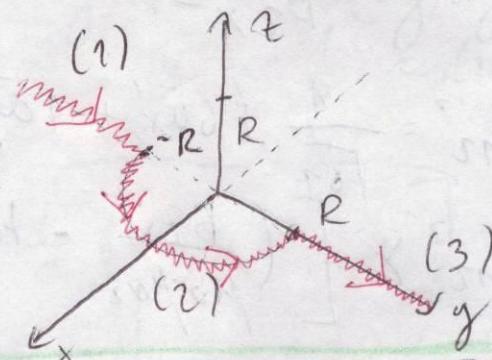
$$\psi = 360^\circ - \varphi$$

$$\psi = 360^\circ - 90^\circ$$

$$\psi = 315^\circ$$

$$H_1 = \frac{1}{4\pi \cdot 1} \cdot (\sin 90^\circ + \sin 315^\circ) \cdot \vec{ax}$$

$$H_1 = \frac{1}{4\pi} \left(-1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \vec{ax}$$

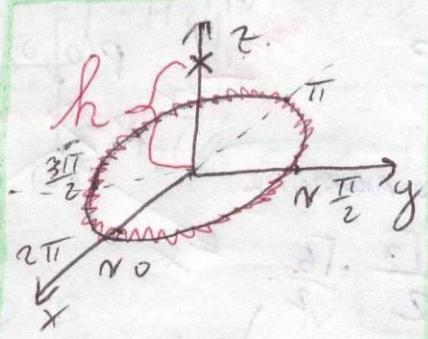


ODINICM
VEKTOR
SNIJEN JAKO
MAG. POJED
PRONAMNANO
TO CM

$$H_1 = 0.0233 = H_3$$

(2)

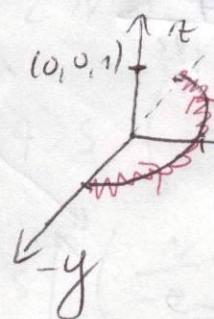
PRIKAZ
STRUJNICE
KOJA ZATVARA
PUNI KRUG



$$\vec{H} = \frac{I \cdot N}{4\pi(h^2 + r^2)^{3/2}} \left[h \cos \varphi \hat{a}_x + h \sin \varphi \hat{a}_y + \frac{r^2}{h^2 + r^2} \hat{a}_z \right] d\varphi$$

FORMULA ZA IZRAZU \vec{H} U TOČKI $(0,0,h)$

• ZADATAK



x -komponenta je zatvara y -komponenta je originalne formula

$$H_{2x} = \frac{1 \cdot 1}{4\pi 2^{3/2}} \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi$$

$$H_{2x} = \frac{1}{4\pi 2^{3/2}} (-\cos \varphi) \Big|_0^\pi = \frac{1}{4\pi 2^{3/2}} (-(\cos \pi - \cos 0))$$

$$H_{2x} = \frac{1}{4\pi 2^{3/2}} \cdot 2 = \frac{2}{4\pi} = 0.05626$$

$$H_{ukx} = H_1 + H_{2x} + H_3 = 0.10288$$

$$H_{2y} = \frac{1}{4\pi 2^{3/2}} \int_0^\pi -\cos \varphi = \frac{1}{2^{3/2} \pi} (-\sin \varphi) \Big|_0^\pi = 0$$

$$H_{2z} = \frac{1}{2^{3/2} \pi} \int_0^\pi 1 \cdot d\varphi = 0.08838$$

$$\vec{H} = (y \cos(ax)) \hat{a}_x + (y + e^x) \hat{a}_z$$

$$\vec{j} = \nabla \times \vec{H}$$

$$\begin{array}{ccc} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{array} = \vec{a}_x - e^x \vec{a}_y - \cos(ax) \vec{a}_z$$

$$\vec{j} = y \cos(ax) \vec{a}_x + (y + e^x) \vec{a}_z$$

$$\vec{j}(x=0) = \sqrt{3} = 1.73$$

$$3.18. \quad I = 10 A$$

$$(1) \quad H_{1x} = ?$$

$$H_1 = \frac{10}{4\pi} \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \bar{a}_x$$

$$\boxed{H_{1x} = 0.233}$$

$$(2) \quad A(0, -1, 0)$$

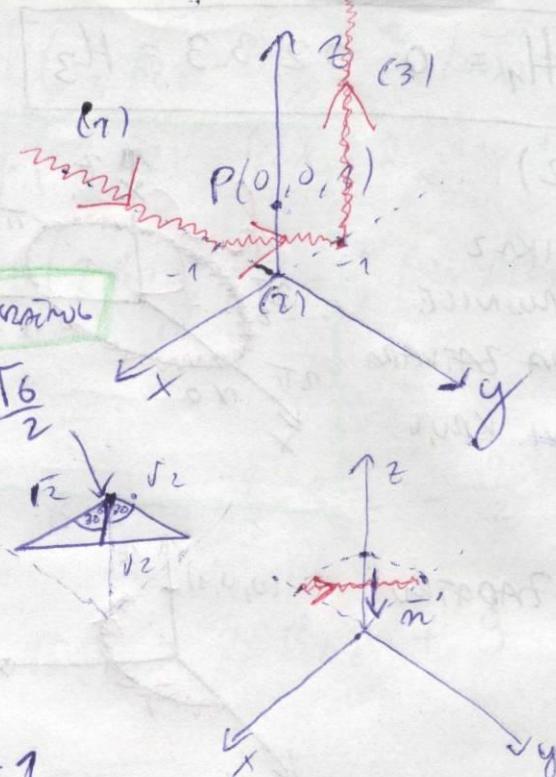
$$B(-1, 0, 0)$$

$$C(0, 0, 1)$$

VISINA JEZGAKOVANJA
TRIKUTA

$$N = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\varphi = \psi = 30^\circ$$



$$\begin{vmatrix} x & y+1 & z \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x + y - z = -1$$

$$\bar{m}' = \frac{\bar{a}_x + \bar{a}_y - \bar{a}_z}{\sqrt{3}}$$

$$H_{2x} = \frac{10}{2 \cdot 4\pi \cdot N} (\sin 30^\circ + \sin 30^\circ) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{H_{2x} = \frac{5}{2\pi \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}} \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\pi \sqrt{18}} = 0.375}$$

SEGMENT (3) MERA X KOMPONENTU U TOČKI P(0, 0, 1) $\boxed{H_{3x} = 0}$

$$H_{3x} = H_{1x} + H_{2x} = 0.608$$

$$3.19. (2) \quad \boxed{H_{2y} = H_{2x} = 0.375}$$

(1) SEGMENT NE SAOZNI Y-KOMPONENTA

$$\boxed{H_{1y} = 0}$$

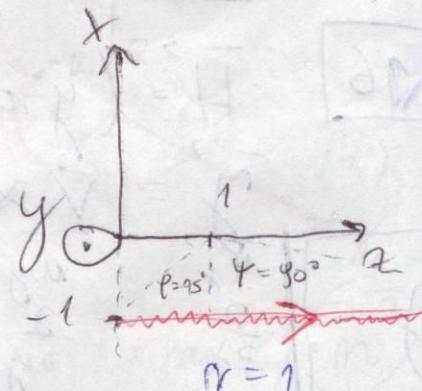
$$(3) \quad H_3 = \frac{10}{4\pi \cdot N} (\sin \varphi + \sin \psi) \cdot \bar{a}_y$$

$$H_{3y} = \frac{5}{2\pi} \cdot \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$H_{3y} = \frac{10 + 5\sqrt{2}}{4\pi}$$

$$\boxed{H_{3y} = 1.358}$$

$$\boxed{H_{1y} = H_{2y} + H_{3y} = 1.733}$$



3.20.

$$H_{12} = H_{32} = 0$$

$$H_{22} = -H_{2y} = -H_{2x} = -0.375$$

3.21.

$$\oint_C \vec{H}' \cdot d\vec{l} = \sum I = \int_S \vec{j}_s \cdot \vec{n}^* dS$$

zu $r < 0.5$

$$H_1 \cdot 2r\pi = \int_0^r 4.5 N \cdot e^{-2r} dr \int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$H_1 \cdot 2r\pi = 4.5 \left(\frac{N}{-2} - \frac{1}{4} \right) e^{-2r} \Big|_0^{2\pi}$$

$$H_1 \cdot r = 4.5 \left[\left(\frac{N}{-2} - \frac{1}{4} \right) e^{-2r} - \left(-\frac{1}{4} \right) e^0 \right] =$$

$$H_1 \cdot r = 4.5 \left(\frac{1}{4} - \frac{2r+1}{4} e^{-2r} \right)$$

$$\boxed{\vec{H}_1 = \frac{4.5}{N} \cdot \frac{1}{4} (1 - 2r e^{-2r} - e^{-2r})} = \boxed{\frac{1.125}{N} (1 - e^{-2r} - 2r e^{-2r}) \vec{u}_r}$$

zu $r > 0.5$

$$H_2 \cdot 2r\pi = 4.5 \int_0^{0.5} r e^{-2r} dr \cdot 2\pi$$

$$H_2 \cdot r = 4.5 \left[\left(\frac{0.5}{-2} - \frac{1}{4} \right) e^{-2 \cdot 0.5} + \frac{1}{4} \right]$$

$$H_2 \cdot r = 4.5 \left(-\frac{1}{2} e^{-1} + \frac{1}{4} \right)$$

$$\boxed{H_2 = \frac{0.297}{N} \vec{u}_r}$$

3.22.

$$\vec{H}' = 3r \vec{u}_z'$$

$$\vec{j} = \nabla \times \vec{H}' = \frac{1}{N} \left(\frac{2}{2r} (r A_z) - \frac{\partial A_r}{\partial z} \right) \vec{u}_z$$

$$\vec{j} = \frac{1}{N} \left(\frac{2}{2r} (3r^2) - 0 \right) \vec{u}_z$$

$$\vec{j} = \frac{6r}{N} \vec{u}_z \quad \boxed{\vec{j} = 6 \vec{u}_z}$$

3.23.

$$\vec{H} = k \cdot \sin x \vec{u}_y$$

$$\vec{j} = \vec{u}_z \left[-\frac{\partial}{\partial x} (Ay) - \frac{\partial}{\partial y} (Ax) \right]$$

$$\vec{j} = k \cos x \vec{u}_z$$

$$\vec{J} = \nabla \times \vec{H}$$

$$\begin{bmatrix} \vec{u}_x \\ \vec{u}_y \\ \vec{u}_z \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \vec{u}_x \\ \vec{u}_y \\ \vec{u}_z \end{bmatrix}$$

3.29.

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS$$

$$H \cdot 2r\pi = \int K e^{-ar} r dr \int d\varphi r$$

$$H \cdot 2r\pi = K \left(\frac{r}{a} - \frac{1}{a^2} \right) e^{-ar} \Big|_0^{2r\pi} \cdot 2\pi$$

$$H \cdot r = K \left[\left(\frac{r}{a} - \frac{1}{a^2} \right) e^{-ar} - \left(-\frac{1}{a^2} \right) \cdot 1 \right]$$

$$H \cdot r = K \cdot \frac{1}{a^2} \left(1 - (1 + a \cdot r) e^{-ar} \right)$$

$$\boxed{H = \frac{K}{a^2 \cdot r} \left[1 - (1 + a \cdot r) e^{-ar} \right] \vec{u}_z}$$

3.25.

ISTI REZULTAT VAO U PREDVODOM ZAOSTAVU, SANO SE U ODNESENOM INTEGRALU ZAPISUJEM N SA NO = RADIUS KOMICA

$$\boxed{H = \frac{K}{a^2 \cdot r} \left[1 - (1 + a \cdot r_0) e^{-a \cdot r_0} \right] \vec{u}_z}$$

3.26.

$$\vec{j} = j_0 e^{-(r_1 - r)}$$

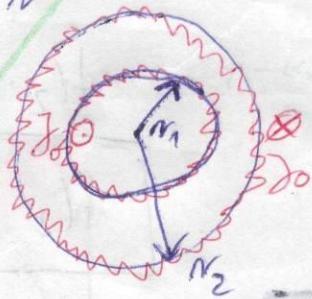
$$H \cdot 2r\pi = j_0 \int e^{-r_1} e^{-r} \cdot r dr \int d\varphi$$

$$H \cdot 2r\pi = j_0 \cdot e^{-r_1} \left[(N-1) e^{-r_1} \right]_{r=0}^{r=r_1} \cdot 2\pi$$

$$H \cdot r = j_0 \cdot e^{-r_1} \left[(N-1) e^{-r} - (-1) \cdot 1 \right]$$

$$\boxed{H = \frac{j_0 \cdot e^{-r_1}}{N} \left[(N-1) e^{-r} + 1 \right]}$$

$$\boxed{N e^{-r} = (N-1) e^{-r}}$$



3.27.

$n_1 < r < n_2$

$$H \cdot 2\pi r = J_0 \cdot e^{-n_1} \int_{r_1}^{r_2} r e^{-n_1} dr \cdot 2\pi$$

$$H \cdot r = J_0 \cdot e^{-n_1} \left[(n_2 - 1) e^{-n_1} + 1 \right]$$

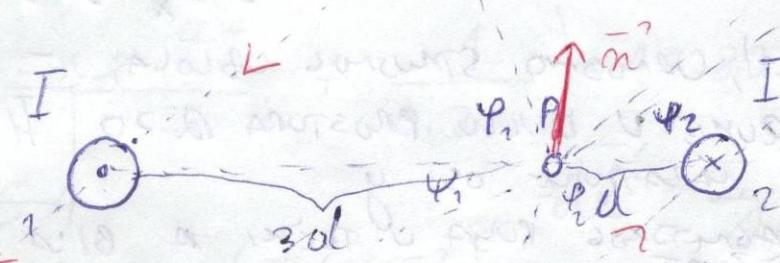
$$H = \frac{J_0}{r} \left(n_2 - 1 + e^{-n_1} \right)$$

3.28.

$H = 0$

au $r > n_2$ POMIŠTAVU SE STRUVA UNUTRŠNJE VODICA (n_1) I PONATNA STRUVA BESKONACNE TANKE JUSKE RADIJUSA R_2 .

3.29.



$$\varphi_1 = \varphi_2 = 90^\circ$$

$$\rho_1 = \rho_2 = 90^\circ$$

DUPNINOS JAKOSTI MAGNETSKOG POJG U TOČKI P ODOBJE SINUŠNICE JE U ISTOM SORIJERU

$$H_1 = \frac{I}{4\pi \cdot 3d} \cdot (\sin 90^\circ + \sin 90^\circ) = \frac{I}{2\pi \cdot 3d}$$

$$H_2 = \frac{I}{4\pi \cdot d} \cdot (\sin 90^\circ + \sin 90^\circ) = \frac{I}{2\pi \cdot d}$$

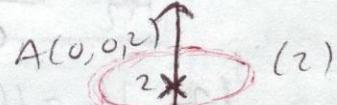
$$H_{\text{un}} = H_1 + H_2 = \frac{I + 3I}{2\pi \cdot 3d} = \frac{4I}{2\pi \cdot 3d} = \frac{2I}{3\pi \cdot d}$$

3.30.

RAČUNAMO DUPNINSKO MAG. POJG U TOČKI A
OD ODOBJE KRUŽNE SINUŠNICE

$$(1) \quad \vec{H}_1 = \frac{I \cdot 1}{4\pi(\sqrt{4+1})^3} \int_0^{2\pi} (2\cos \bar{\alpha}x + 2\sin \bar{\alpha}y + 1 \cdot \bar{\alpha}z) d\theta$$

$$\vec{H}_1 = \frac{I}{4\pi \cdot 5^{1/2}} \cdot 2\pi \bar{\alpha}z = [0.04472 \bar{\alpha}z]$$



$$(2) \quad \vec{H}_2 = \frac{I \cdot 1}{4\pi(\sqrt{10+1})^3} \int_0^{2\pi} (0 \cdot \cos \bar{\alpha}x + 0 \cdot \sin \bar{\alpha}y + 1 \cdot \bar{\alpha}z) d\theta$$

$$H_2 = 0.5 \bar{\alpha}z$$

$$H_{\text{un}} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2 = [0.54472 \bar{\alpha}z]$$

3.31.

$$H_1 = H_2$$

$$H_1 = \frac{I \cdot 1}{2 \cdot 9\pi (\sqrt{1+1})^3} \cdot 2\pi \bar{a}_2' = \frac{1}{2^{2.5}} - 0.17677$$

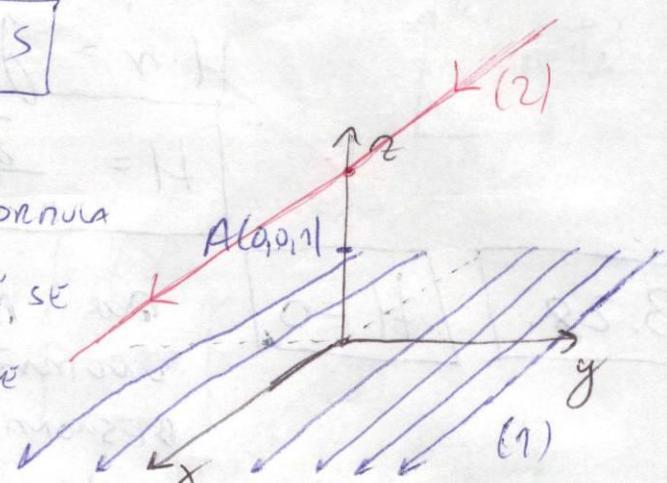
$$H_{\text{tot}} = 2 \cdot H_1 = 0.35355$$

3.32.

$$\vec{K}' = k \cdot \bar{a}_x'$$

$$\vec{H}' = \frac{|k|}{2} \bar{a}_m'$$

Predena formula za struju
oblog, um. se
osmislite
pravilom desne
ruke



Smjer segmenta (1), odnosno strujnog obloga, je zadan \bar{a}_x'
pravilom desne ruke u diversu prostora $\alpha > 0$ $H_1 = -\frac{k}{2} \bar{a}_y'$
dakle ima smjer negativne osi y .

Da B_1 jačnost magnetskog polja u točki A bila jeonamnuč
struja jačosti $|H_1| \cdot \frac{2\pi}{R}$ postiže u smjeru x osi da B_1 se
pomšte je jačost u točki A.

Za segment (2) $H_2 = \frac{I}{4\pi \cdot 1} (\sin 90^\circ + \sin 90^\circ) = \frac{I}{2\pi} \bar{a}_y$

$$|H_1| = |H_2| \quad \frac{k}{2} = \frac{I}{2\pi}$$

$$I = \pi \cdot k$$

3.33.

$$(1) H_1 = \frac{I}{4\pi \cdot R} \cdot \left(0 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) (-\bar{a}_z')$$

$$(2) H_2 = \frac{I}{4\pi \cdot R} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) (-\bar{a}_z')$$

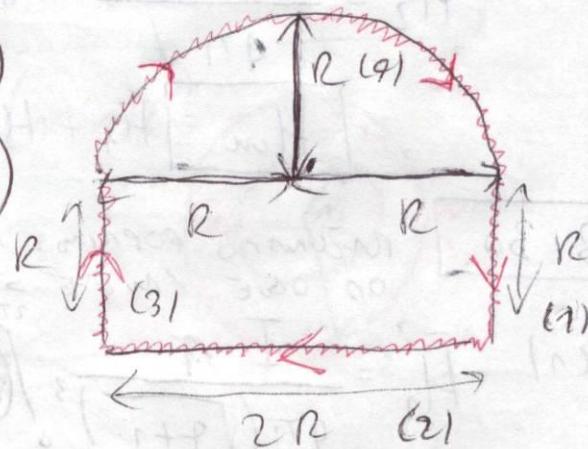
$$(3) H_3 = H_1$$

$$(4) H_4 = \frac{I \cdot R}{4\pi (\sqrt{R^2})^3} \int_{\pi} ((R \cdot \bar{a}_z') d\varphi)$$

$$H_4 = \frac{I}{4\pi} (-\pi) \bar{a}_z' = \frac{I}{4} (-\bar{a}_z')$$

$$H_{\text{tot}} = H_1 \cdot 2 + H_2 + H_4 = -\frac{1}{9\pi} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 - \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{4}$$

$$H_{\text{tot}} = -\frac{1}{4} \left(1 + \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \right) \quad |H_{\text{tot}}| = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \right)$$



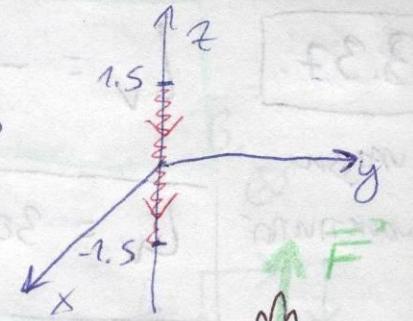
3.34.

$$I = 10 \text{ A} \quad \bar{B}' = 3 \cdot 10^{-4} e^{-0.2x} \bar{a}_y$$

$$\bar{F}' = \int \limits_{-l}^l I (\bar{dl}' \times \bar{B}')$$

$$\bar{dl}' = -\bar{a}_z$$

SUVEN
STRUJNICE



$$\bar{F}' = \int \limits_{-l}^l 10 \cdot 3 \cdot 10^{-4} e^{-0.2x} \bar{a}_y \cdot \bar{a}_z dx$$

$$\boxed{\bar{F}' = 3 \cdot 10^{-3} e^{-0.2x}}$$

$$W = \int \limits_{-l}^l \bar{F}' dS = \int \limits_{-l}^l 3 \cdot 10^{-3} e^{-0.2x} dx = 3 \cdot 10^{-3} \left(-\frac{1}{0.2} e^{-0.2x} \right) \Big|_{x=0}^{x=l}$$

$$W = 3 \cdot 10^{-3} \left(-\frac{e^{-0.4}}{0.2} + \frac{1}{0.2} \right) = 14.8355 \cdot 10^{-3} \quad \boxed{W = 0.015 \text{ J}}$$

3.35.

$$I = 5 \text{ A}$$

$$\bar{dl}' = \bar{a}_y$$

$$\bar{F}' = 1.0607 (\bar{a}_x + \bar{a}_z)$$

$$\bar{F}' = \int \limits_{-l}^l I \cdot \bar{a}_y \times (B_x \bar{a}_x + B_y \bar{a}_y + B_z \bar{a}_z) dy$$

$$\bar{F}' = 5 \int \limits_{-l}^l (-\bar{a}_z B_x + \bar{a}_x B_z) dy$$

$$1.0607 (\bar{a}_x + \bar{a}_z) = 10 (B_z \bar{a}_x - B_x \bar{a}_z)$$

$$\boxed{\bar{B}' = 0.10607 (-\bar{a}_x + \bar{a}_z) [\text{T}]}$$

$$\bar{a}_z$$

$$\bar{a}_x$$

$$\bar{a}_y$$

$$\bar{a}_z$$

3.36.

$$\bar{B}' = \mu_0 \cdot \frac{|K'|}{2} \bar{a}_x \quad (x > -s)$$

$$\bar{F}' = \int \limits_{-l}^l I \cdot \bar{dl}' \times \bar{B}' = \int \limits_{-l}^l I \cdot \bar{a}_y \times (\mu_0 15 \cdot \bar{a}_x) dl$$

$$\bar{F}' = \int \limits_{-l}^l 5 \cdot \mu_0 \cdot 15 \cdot (-\bar{a}_z) dl = -75 \mu_0 \cdot l \cdot \bar{a}_z$$

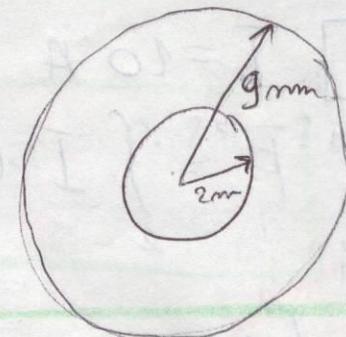
$$\boxed{\bar{F}' = -75 \mu_0 \cdot \bar{a}_z \quad \left| \frac{\bar{F}'}{l} \right| = 94.2 \mu \frac{N}{m}}$$

3.37.

$$L_V = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{N_2}{N_1}$$

VARIJEN
INDUKTIVITÄT

$$L_V = 300,81547 \text{ mH}$$



3.38.

$$M = \frac{\Phi}{I}$$

$$\Phi = \int \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \cdot dS$$

$$dS = y \cdot dx$$

dS = dy dx

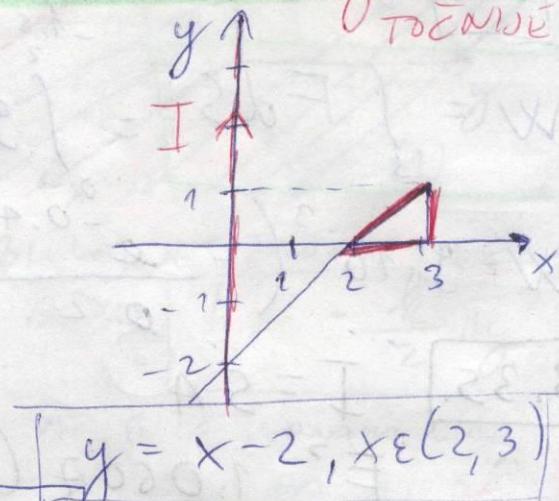
TOČNOSTE

$$\Phi = \int_x^3 \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi} \cdot \frac{1}{x} \cdot (x-2) dx =$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi} \int_2^3 \left(1 - \frac{2}{x}\right) dx =$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi} \left(1 - 2 \ln \frac{3}{2}\right)$$

$$\Phi = I \cdot 0.37813 \cdot 10^{-7} \quad [M = 37.81395 \text{ mH}]$$



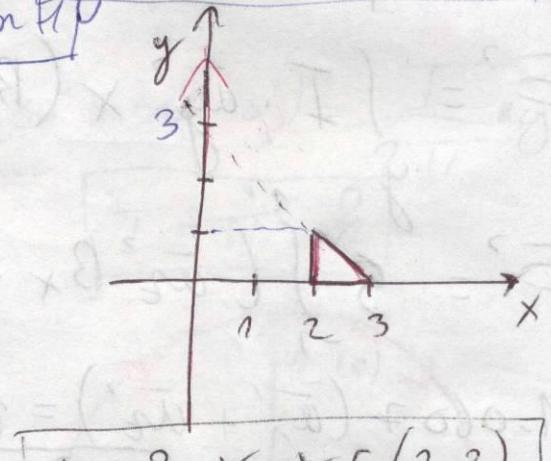
3.39.

$$\Phi = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi} \int_2^3 \left(\frac{3}{x} - 1\right) dx$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi} \cdot \left(3 \ln 1.5 - 1\right)$$

$$\Phi = 0.43279 \cdot 10^{-7} \cdot I$$

$$[M = 43.27906 \text{ mH}]$$



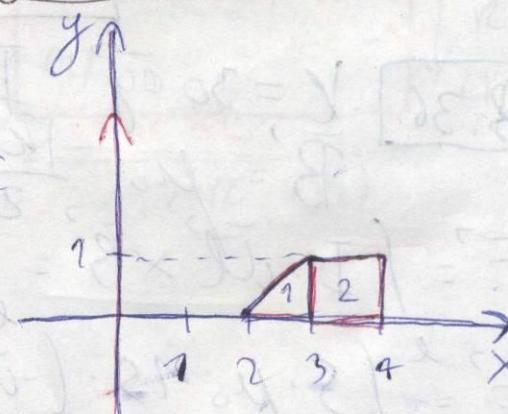
3.40.

$$[M_1 = 37.81395 \text{ mH}]$$

$$\Phi_2 = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi} \int_3^4 \frac{1}{x} dx = 2 \cdot 10^{-7} \cdot \ln \frac{4}{3} \cdot I$$

$$[M_2 = 57.53644 \text{ mH}]$$

$$M_{\text{sum}} = M_1 + M_2 = [95,35036 \text{ mH}]$$



$$y_1 = x - 2, x \in [2, 3]$$

$$y_2 = 1, x \in [3, 4]$$

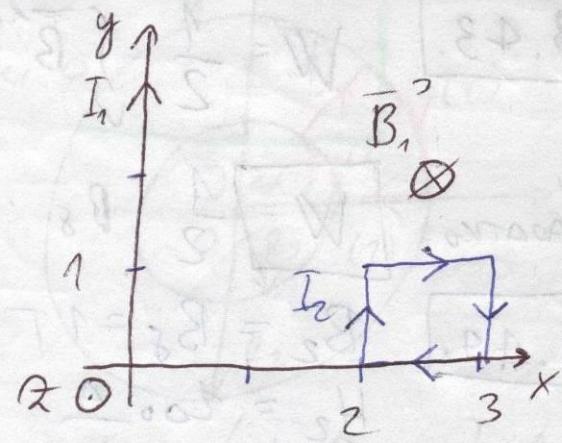
$$3.41. \quad \vec{F}' = I \cdot \int (\vec{dl}' \times \vec{B}')$$

$$\vec{B}' = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} e^x (-\vec{ax}')$$

$$d\vec{l}' = dx \vec{ax}' + dy \vec{ay}' + dz \vec{az}'$$

$$\vec{dl}' \times \vec{B}' = \vec{ay}' \left(\frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} dx \right)$$

$$- \vec{ax}' \left(\frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} dy \right)$$



$$\vec{F}_{12}' = I_2 \cdot \left(\int_{-\infty}^y \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} dx \vec{ay}' - \int_y^{\infty} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} dy \vec{ax}' \right)$$

$$\vec{F}_{12}' = \frac{\mu_0 \cdot I_1 \cdot I_2}{2\pi} \left[\vec{ay}' \left(\int_2^1 \frac{1}{x} dx + \int_0^1 \frac{1}{x} dx \right) - \vec{ax}' \left(\int_0^1 \frac{1}{x} dy + \int_{x=2}^1 \frac{1}{x} dy \right) \right]$$

$$\vec{F}_{12}' = 2 \cdot 10^{-7} \left[\vec{ay}' \left(\ln \frac{3}{2} + \ln \frac{2}{3} \right) - \vec{ax}' \left(\frac{1}{6} \right) \right]$$

$$\boxed{\vec{F}_{12}' = 33.33 \text{ mN} (-\vec{ax}')}}$$

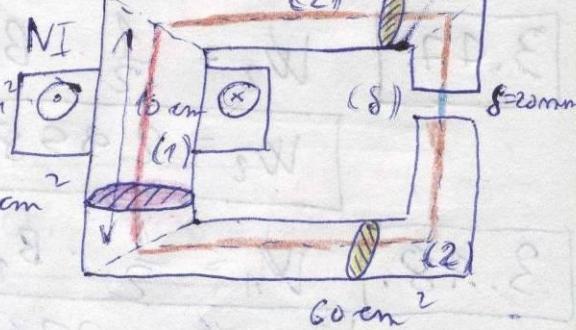
3.42. KRVUJA MAGNETIZACIJA NA SLICI U ZBIRCI.

$$B_8 = 1 \text{ T} \quad I = 10 \text{ A} \quad N = ?$$

$$\oint_C \vec{H}' \cdot d\vec{l}' = NI$$

$$S_1 = 0.01 \text{ m}^2$$

$$S_2 = 0.006 \text{ m}^2$$



$$H_1 \cdot l_1 + H_2 \cdot l_2 + H_8 \cdot l_8 = N \cdot I$$

$$\text{IZ GRATA} \Rightarrow B_8 = B_2 = 1 \text{ T} \Rightarrow H_2 = 200 \frac{A}{m}$$

$$B_1 \cdot S_1 = B_2 \cdot S_2$$

$$B_1 = \frac{1 \cdot 0.006}{0.01} = 0.6$$

$$H_8 = \frac{B_8}{\mu_0 \cdot \mu_r} = \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 795779.7155$$

$$N = \frac{95 \cdot 0.1 + 200 \cdot 0.58 + 795779.7155 \cdot 0.02}{40}$$

IZ GRATA:

$$H_1 = 95$$

$$-59-08-$$

$$\boxed{N = 1603}$$

3.43. $W = \frac{1}{2} \int \vec{B} \cdot \vec{H} \cdot dV$ - Energija magnetskog polja saočarana u volumenu V

započek: $W = \frac{1}{2} \cdot B_8 \cdot H_8 \cdot S_8 \cdot \delta \int dV = 47.74698 J$

3.44. $B_2 = B_8 = 1 T$ $H_2 = \frac{B_2}{\mu_0 \mu_r} \Rightarrow \mu_r = \frac{B_2}{H_2} \cdot \frac{1}{\mu_0}$
 $H_2 = 200 \frac{A}{m}$ $\mu_r = \frac{1}{8\pi \cdot 10^{-6}} = 3978.87$

3.45. $W_2 = \frac{1}{2} \cdot B_2 \cdot H_2 \cdot S_2 \cdot l_2$

$W_2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 200 \cdot 0.006 \cdot 0.25 = 0.15 J$

3.46. $I_1 = ?$ $N_1 = 200$ $\phi = \text{const} = 120 \cdot 10^{-6}$

$I_2 = 0.5$ $N_2 = 100$

$S_1 = 4 \cdot 10^{-4}$, $l_1 = 16 \cdot 10^{-2}$

$S_2 = 6 \cdot 10^{-4}$, $l_2 = 39 \cdot 10^{-2}$

$\phi = B_1 \cdot S_1 \Rightarrow B_1 = \frac{120 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 10^{-4}} = 0.3$

$B_1 \cdot S_1 = B_2 \cdot S_2 \Rightarrow B_2 = \frac{0.3 \cdot 9 \cdot 10^{-2}}{38 \cdot 10^{-4}} = 0.2$

in tablici:

$H_1 = 185$

$H_2 = 195$

$N_1 l_1 - N_2 l_2 = H_1 l_1 + H_2 l_2$

$I_1 = 0.6495 A$

3.47. $W_2 = \frac{1}{2} \cdot B_2 \cdot H_2 \cdot S_2 \cdot l_2 = \frac{1}{2} \cdot 0.2 \cdot 145 \cdot 6 \cdot 10^{-4} \cdot 34 \cdot 10^{-2}$

$W_2 = 2.958 mJ$

3.48. $W_1 = \frac{1}{2} \cdot B_1 \cdot H_1 \cdot S_1 \cdot l_1 = \frac{1}{2} \cdot 0.3 \cdot 185 \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot 16 \cdot 10^{-2}$

$W_1 = 1.776 mJ$

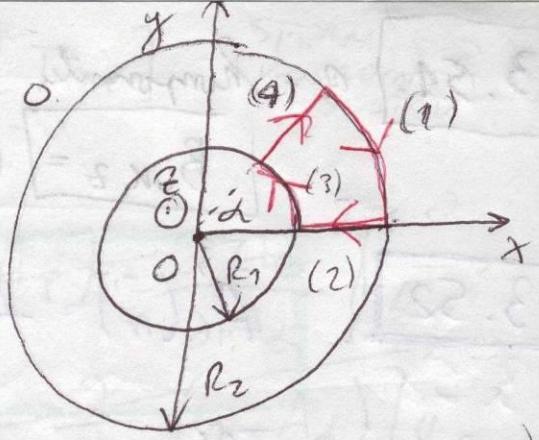
3.49. Segmenti (2) i (3) nemaju uticaja
na jakost magnetskog polja u točki O.

$$\vec{H}_1 = \frac{I \cdot R_2}{4\pi (\sqrt{R_2^2})^3} \int R_2 \vec{a}_z$$

$$\vec{H}_1 = \frac{I \cdot d}{4\pi R_2} (-\vec{a}_x)$$

$$\vec{H}_3 = \frac{I \cdot d}{4\pi R_1} \vec{a}_z \quad H_{\text{uk}} = |\vec{H}_3| - |\vec{H}_1| = \left(\frac{I \cdot d}{4\pi R_1} - \frac{I \cdot d}{4\pi R_2} \right)$$

$$H_{\text{uk}} = \frac{d}{4\pi} I \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$



3.50.

$$(1) N = n = \frac{\alpha F_3}{2} = \frac{F_2 F_3}{2}$$

$$\alpha = \sqrt{2}$$

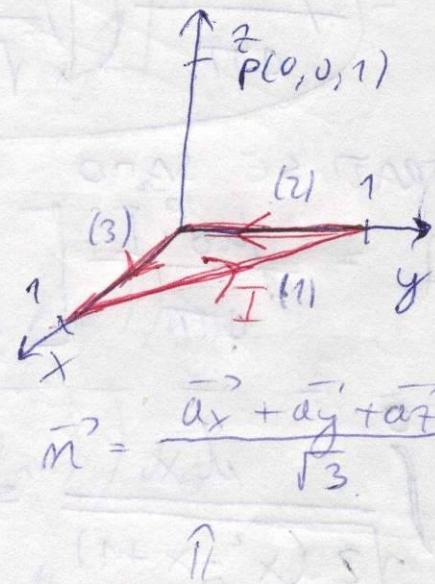
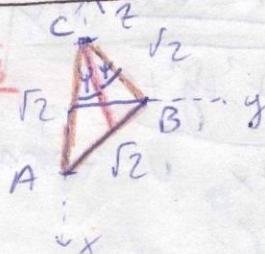
$$\varphi = \psi = 30^\circ$$

$$A(1,0,0)$$

$$B(0,1,0)$$

$$C(0,0,1)$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad I = 1A$$



$$\vec{m} = \frac{\vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z}{\sqrt{3}}$$

$$(x-1)(1) - y(-1) + z(-1) = 0 \Rightarrow x+y+z = 1$$

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi R_1^2} \left(x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \left(\vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z \right) \right]$$

$$B_{1x} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi \cdot \sqrt{18}} = 47.14045 \text{ mT}$$

(2)

$$B_{2x} = - \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot 1} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -70.71067$$

(3) komponenta im sared 7-smjern.

$$B_{\text{uk},x} = B_{1x} + B_{2x} = -23.57021$$

3.51. \vec{B} -komponentu vira sumo pri segment strynece, duoble:

$$B_{0KZ} = B_{1X} = 47.14095 \text{ mT}$$

3.52.

$$\vec{A}'(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{l}}{c |\vec{r} - \vec{r}'|}$$

JESENADZBA VREDNOSTI
MAGNETSKOG POTENCIJALA
za unutarnje stope

$$d\vec{l} = dx \vec{ax} + dy \vec{ay} + dz \vec{az}, \quad dz = 0 \text{ jer je } z-\text{kosi}$$

$$\vec{r}' = \vec{ax}$$

$$\vec{r}' = x \vec{ax} + y \vec{ay}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$P(0, 0, z)$$

$$\vec{A}' = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \vec{ax} + \int \frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \vec{ay} \right)$$

TRAJNI SE SAVO A_x U ZAOSNI

$$x = \text{const.} = 0$$

$$A_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + (-x+1)^2 + 1}} \right]$$

$$+ 0 + \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 0^2 + 1}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2(x^2 - x + 1)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}} = \begin{cases} \alpha = x - \frac{1}{2} \\ \frac{dx}{dx} = 1 \Rightarrow dx = dz \\ z_0 = \frac{1}{2}, z_1 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$= \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2}} = \ln |z + \sqrt{z^2 + \frac{3}{4}}| \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \ln \frac{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}}}{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2(x^2 - x + 1)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \ln \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = -0.77683$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \ln |x + \sqrt{x^2 + 1}| \Big|_0^1 = \ln \frac{1 + \sqrt{2}}{1} = 0.88137$$

$$A_x = 10^{-7} [-0.77683 + 0.88137] = 10.45337$$

3.53

$A_z = 0$

3.54

$$\bar{A}^2 = r^2 \bar{a}_r^2 + 2 \sin \theta \bar{a}_\theta^2 [Tm]$$

Sturm
koordinaten
sustav

$$|\bar{B}(1, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})| = ?$$

$$\begin{aligned}\bar{B}^2 &= \nabla \times \bar{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{2}{2\theta} (\sin \theta A_\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial r} \right] \bar{a}_r^2 \\ &\quad + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{2}{r} (r \cdot A_\theta) \right] \bar{a}_\theta^2 \\ &\quad + \left(\frac{1}{r} \left[\frac{2}{2r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \bar{a}_z^2 \right)\end{aligned}$$

$$\bar{B}^2 = \bar{a}_z^2 \left(\frac{2 \sin \theta}{r} \right) \boxed{B} = \frac{2 \cdot \sin \frac{\pi}{6}}{1} = \boxed{1}$$

3.55

$$\bar{H}^2 = \frac{2 \cdot \sin \theta}{\mu_0 \cdot r} \bar{a}_z^2$$

$$\begin{aligned}\bar{J}^2 &= \nabla \times \bar{H} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{2}{2\theta} (\sin \theta \cdot A_\theta) \right) \bar{a}_r^2 \\ &\quad + \frac{1}{r} \left(-\frac{2}{2r} (r \cdot A_\theta) \right) \bar{a}_\theta^2\end{aligned}$$

$$J_r = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{2}{2\theta} \left(\frac{2 \sin^2 \theta}{\mu_0 \cdot r} \right) \right) = \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{2}{\mu_0 \cdot r} \cdot 2 \sin^2 \theta$$

$$J_r = \frac{4 \cos \theta}{\mu_0 \cdot r^2} \quad J_\theta = \frac{1}{r} \left(-\frac{2}{2r} \left(r \cdot \frac{2 \sin \theta}{\mu_0 \cdot r} \right) \right) = 0$$

$$|\bar{J}| = J_r = \frac{4 \cdot \cos 0}{\mu_0 \cdot 0^2} = 3183.09886 \text{ A/m}^2$$

3.56

$$W_M = \frac{1}{2\mu} B^2 = \frac{1}{2} \mu \cdot H^2 \left[\frac{J}{m^3} \right]$$

GUSTOČA
MAGNETSKE ENERGIJE

$$W_M = \frac{1}{2} \mu_0 \cdot |\bar{H}|^2 = \frac{1}{2} \mu_0 \left(\frac{2 \cdot \sin \theta}{\mu_0 \cdot r} \right)^2$$

$$\mu T(1, 0, \frac{\pi}{2}) \boxed{W_M = 0}$$

$$3.57 \quad \bar{H}' = \frac{2 \cdot \sin \theta}{\mu_0 \cdot N} \bar{ax}'$$

$$\nabla \cdot \bar{H}' = \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial A_d}{\partial r} = 0 \quad \boxed{\nabla \cdot \bar{H}' = 0}$$

$$3.58. \quad \bar{B}_1' = 0.5 \bar{ax}' + \bar{ay}' + \bar{az}'$$

$$\bar{m}' = \bar{ax}', \quad \bar{k}' = -\frac{1}{\mu_0 \cdot 2} \bar{ay}' + \frac{1}{\mu_0 \cdot 2} \bar{az}'$$

$$\bar{m}' \times (\bar{H}_2' - \bar{H}_1) = \bar{k}$$

$$\bar{ax}' \times [(\bar{H}_{2x} - \bar{H}_{1x}) \bar{ax}' + (\bar{H}_{2y} - \bar{H}_{1y}) \bar{ay}' + (\bar{H}_{2z} - \bar{H}_{1z}) \bar{az}'] = -\frac{1}{\mu_0 \cdot 2} \bar{ay}' + \frac{1}{\mu_0 \cdot 2} \bar{az}'$$

$$\bar{az}' (\bar{H}_{2y} - \bar{H}_{1y}) - \bar{ay}' (\bar{H}_{2z} - \bar{H}_{1z}) = -\frac{1}{\mu_0 \cdot 2} \bar{ay}' + \frac{1}{\mu_0 \cdot 2} \bar{az}'$$

$$H_{2y} - H_{1y} = \frac{1}{2\mu_0} \Rightarrow H_{2y} = \frac{1}{2\mu_0} + H_{1y} \quad \boxed{3.59}$$

$$H_{2z} - H_{1z} = \frac{1}{2\mu_0} \quad \frac{B_{2y}}{\mu_0 \cdot \mu_{nr}} = \frac{1}{2\mu_0} + \frac{1}{\mu_0 \cdot \mu_{nr}} \Rightarrow B_{2y} = \frac{\mu_{nr}}{2} + \frac{\mu_n}{\mu_{nr}}$$

3.60.

$$\bar{B}_{2z} = B_{2y} = \boxed{4}$$

$$\bar{m}' (\bar{B}_2' - \bar{B}_1') = 0 \Rightarrow \bar{ax}' \cdot [(\bar{B}_{2x} - \bar{B}_{1x}) \bar{ax}' + \dots] = 0$$

$$\bar{B}_{2x} - 0.5 = 0 \Rightarrow \boxed{B_{2x} = 0.5}$$

3.61.

$$\bar{B}_2' = 0.5 \bar{ax}' + 4 \bar{ay}' + 4 \bar{az}'$$

$$\bar{B}_m = (\bar{B}_2' \cdot \bar{m}') \cdot \bar{m}' = 0.5 \bar{ax}'$$

$$\bar{B}_t' = \bar{B}_2' - \bar{B}_m = 4 \bar{ay}' + 4 \bar{az}' \quad \boxed{B_t = \sqrt{32} = 5.65}$$

3.62.

$$N = 100$$

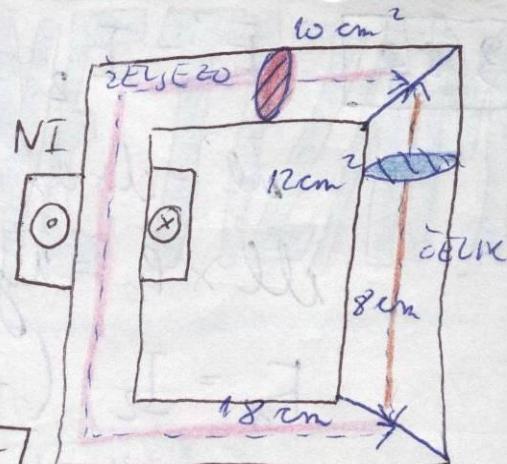
$$B_C = 1 \text{ T}$$

$$S_C = 12 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$l_C = 8 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$S_C = 10 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$l_C = 18 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$



$$B_C \cdot S_C = B_C \cdot S_C$$

$$B_C = \frac{B_C \cdot S_C}{S_C} = \frac{1 \cdot 12 \cdot 10^{-4}}{10 \cdot 10^{-4}} = 1.2 \text{ T}$$

3.63.

$$H_C \text{ is gyufu osítan} \Rightarrow H_C = 100 \cdot \frac{A}{m}$$

$$W_C = \frac{1}{2} \cdot B_C \cdot H_C \cdot S_C \cdot l_C$$

$$W_C = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 100 \cdot 12 \cdot 10^{-4} \cdot 8 \cdot 10^{-2} = 4.8 \text{ mJ}$$

3.64.

$$H_C \text{ is gyufu osítan} \Rightarrow H_C = 400 \frac{A}{m}$$

3.65.

$$N \cdot I = H_C \cdot l_C + H_I \cdot l_I$$

$$I = \frac{100 \cdot 8 \cdot 10^{-2} + 400 \cdot 18 \cdot 10^{-2}}{100}$$

$$I = 0.8$$

3.66.

$$I_1 = 1 \text{ A} \quad I_2 = 2 \text{ A}$$

$$M = \frac{\Phi_{12}}{I_2} \approx \frac{\Phi_{21}}{I_1}$$

$$\Phi_{21} = \iint_{S_2} \vec{B}_1 \cdot \vec{m} dS$$

$$B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1}{x_{0.15}} \Rightarrow \Phi_{21} = \iint_{S_2} \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2\pi} \frac{1}{x_{0.15}} \frac{1}{y_{0.2}} y dx dy$$

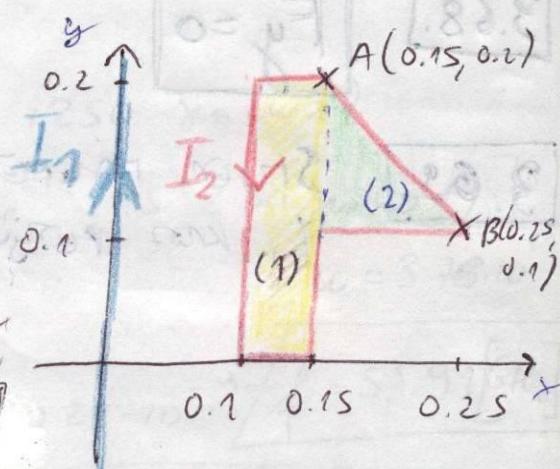
$$\Phi_{21} = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2\pi} \left[\int_{0.1}^{0.2} \frac{1}{x} dx \int_{0}^{0.2} dy + \int_{0.15}^{0.25} \frac{1}{x} dx \int_{0.1}^{0.2} dy \right]$$

$$\Phi_{21} = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2\pi} \left[0.2 \ln 0.1 + \int_{0.1}^{0.2} \ln(0.35y) dy - \ln 0.15 \int_{0.1}^{0.2} dy \right]$$

$$\Phi_{21} = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2\pi} \left[0.08103 + \left(\frac{0.35-y}{1} \ln(0.35y) + y \right) \Big|_{y=0.1}^{y=0.2} \right]$$

$$\Phi_{21} = 2 \cdot 10^{-7} \cdot 0.10879 \cdot I_1$$

$$\int \ln(ax+b) dx = \frac{1}{a} [ax+b] \ln(ax+b) - x$$



jezdnička pravca kroz
djure točne za segment (2)
A(0.15, 0.2), B(0.25, 0.1)

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

$$y - 0.2 = \frac{0.1 - 0.2}{0.25 - 0.15} (x - 0.15)$$

$$y - 0.2 = -x + 0.15$$

$$y = -x + 0.35$$

$$3.67. \quad \vec{F} = I_2 \cdot \int_{\text{ell}} \vec{dl} \times \vec{B}_1, \quad \vec{B}_1 = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2\pi} \cdot \frac{1}{x} \cdot (-\vec{a}_z)$$

$$\vec{dl} = dx \vec{a}_x + dy \vec{a}_y$$

$$\vec{dl} \times \vec{B}_1 = \vec{a}_y \left(\frac{\mu_0 \cdot I_1}{2\pi} \cdot \frac{1}{x} dx \right) - \vec{a}_x \left(\frac{\mu_0 \cdot I_1}{2\pi} \cdot \frac{1}{x} dy \right)$$

$$F_x = I_2 \cdot \left(- \int_y^0 \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2\pi} \cdot \frac{1}{x} dy \right)$$

$$F_x = - \frac{I_1 \cdot I_2 \cdot \mu_0}{2\pi} \left(\int_{0.1}^{0.2} \frac{1}{0.1} dy + 0 + \int_{0.15}^0 \frac{1}{0.15} dy + 0 \right. \\ \left. + \int_{0.1}^{0.2} \frac{1}{0.35-y} dy + 0 \right)$$

$$F_x = - \frac{I_1 \cdot I_2 \cdot \mu_0}{2\pi} \left(\frac{1}{0.1} \cdot (-0.2) + \frac{1}{0.15} \cdot 0.1 - \ln |y-0.35| \Big|_{y=0.1} \right)$$

$$F_x = - \frac{I_1 \cdot I_2 \cdot \mu_0}{2\pi} \left(-2 + \frac{0.1}{0.15} - \ln \frac{0.15}{0.25} \right) = - \frac{I_1 \cdot I_2 \cdot \mu_0}{2\pi} (-0.822507704)$$

$$F_x = 4 \cdot 0.82250 \cdot 10^{-7} = [329 \text{ mN}]$$

3.68.

$$F_y = 0$$

3.69.

Smer magnetické momentu je $-\vec{a}_z$

$$[-\vec{a}_z]$$

IV. ELEKTROMAGNETIZAM

4.1. $\vec{E} = 2 \times 10^3 \text{ V/m}$ T(4, 5, 7)

GUSTOČA POHODJENÉ
ENERGOVÉ U
ELENČNÝM POJU

$$W_E = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} = \frac{1}{2} \epsilon |\vec{E}|^2$$

$$|\vec{E}|^2 = 4 \cdot 10^6 \cdot x^2$$

$$\epsilon = 8.854 \cdot 10^{-12}$$

$$W_E = \frac{1}{2} \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{4 \cdot 10^6 \cdot x^2}{283.328 \mu \frac{J}{m^3}}$$

4.2. $K = S \left[\frac{S}{m} \right]$
 $E = 250 \sin(10\pi t) \text{ V/m}$

$$\epsilon_r = 1.5 \quad f = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$\begin{aligned} \vec{j} &= K \cdot \vec{E} \\ j_p &= \frac{d\vec{D}}{dt} \end{aligned}$$

GUSTOČA PROVODNÉ STRUKE

GUSTOČA STRUKE POMÍKANIA (pomíkanie strúky)

$$j = K \cdot E = 5 \cdot 250 \sin(\omega t) = 1250 \sin(\omega t)$$

$$j_p = \frac{d}{dt} (\epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot E) = \frac{d}{dt} [8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 1.5 \cdot 250 \sin(\omega t)]$$

$$j_p = 3.32025 \cdot 10^{-9} \cdot \omega \cos(\omega t)$$

$$j_0 = j_{p0} \Rightarrow 1250 = \omega \cdot 3.32025 \cdot 10^{-9} \quad \omega = 3.78 \cdot 10^{11}$$

$$f = 59.91 \text{ GHz}$$

4.3. $\vec{E} = E_m \sin(\omega t - 3z) \hat{y}$

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

FARADAYOV ZAKON

$$\nabla \times \vec{E} = - \bar{a}_x \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} \right) = - \bar{a}_x [E_m \cdot (-3) \cdot \cos(\omega t - 3z)]$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = - \bar{a}_x [3 \cdot E_m \cdot \cos(\omega t - 3z)] \text{ A/m}$$

$$B_x = - 3 \cdot E_m \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \sin(\omega t - 3z)$$

$$B_{x0} = 0.6 \cdot 10 \cdot \frac{1}{10000} \quad B_{x0} = 0.6 \text{ mT}$$

$$4.4. \quad \vec{E}'(z, t) = 50 \cos(\omega t - 3z) \vec{u}_x$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad \nabla \times \vec{E}' = -\vec{u}_y \cdot \left(-\frac{\partial \vec{E}_x}{\partial z} \right)$$

$$= \vec{u}_y \cdot 50 \cdot 3 \cdot \sin(\omega t - 3z)$$

$$\nabla \times \vec{E}' = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial z} \quad | \quad \text{Set} \Rightarrow \vec{H} = \left[-\frac{50 \cdot 3}{\mu t} \int \sin(\omega t - 3z) dt \right] \vec{u}_y$$

$$\vec{H}' = \frac{50 \cdot 3}{\mu} \cdot \frac{1}{\omega} \cos(\omega t - 3z) \vec{u}_y$$

$$\vec{N}' = \vec{E}' \times \vec{H}' = \vec{u}_z \left[\frac{50^2 \cdot 3}{\mu \cdot \omega} \cos^2(\omega t - 3z) \right] \quad 3 = \omega \cdot \sqrt{\mu \epsilon}$$

$$\vec{N}_{\text{Sn}} = \frac{1}{2} \vec{N}' = \frac{1}{2} \cdot \frac{50^2 \cdot \omega \cdot \sqrt{\mu \epsilon}}{\mu \cdot \omega} \vec{u}_z \quad P_{\text{Sn}} = \oint N_{\text{Sn}} \cdot \vec{n} \cdot dS$$

$$P_{\text{Sn}} = N_{\text{Sn}} \cdot N^2 \pi = \frac{50^2}{2} \cdot \frac{18 \cdot 859 \cdot 10^{-12}}{\sqrt{4\pi \cdot 10^{-7}}} \cdot 2 \cdot \pi^2 \cdot \pi = 65.14 \text{ W}$$

$$4.5. \quad \vec{E}' = x \cdot z \cdot \vec{u}_y \cdot 10^3 \quad \psi_E = \frac{1}{2} \cdot \epsilon \cdot |\vec{E}'|^2 = \frac{1}{2} \cdot \epsilon \cdot x^2 \cdot z^2 \cdot 10^6$$

$$\psi_E(1, 5, 7) = 4.427 \cdot 10^{-6} \cdot 1^2 \cdot 7^2 = 0.000216923 \left[\frac{J}{m^3} \right]$$

$$4.6. \quad \vec{E}'(z, t) = 10 \cos(\omega t - 3z) \vec{u}_x \quad (\text{haw u. 4.4})$$

$$\vec{H}' = \frac{10 \cdot 3}{\mu \cdot \omega} \cos(\omega t - 3z) \vec{u}_y$$

$$\vec{N}' = \vec{E}' \times \vec{H}' = \vec{u}_z \frac{10^2 \cdot 3}{\mu \cdot \omega} \cos^2(\omega t - 3z)$$

$$\vec{N}_{\text{Sn}} = \frac{1}{2} \vec{N}' = \frac{1}{2} \frac{10^2 \omega \sqrt{\mu \epsilon}}{\mu \cdot \omega} \vec{u}_z$$

$$\vec{N}_{\text{Sn}} = \frac{1}{2} \cdot 10^2 \cdot \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cdot \vec{u}_z \quad M = \vec{u}_z$$

$$P_{\text{Sn}} = \oint N_{\text{Sn}} \cdot \vec{n} \cdot dS = \frac{1}{2} \cdot 10^2 \cdot \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cdot 1 \cdot 5^2 \cdot \pi$$

$$P_{\text{Sn}} = 0.938 \text{ [W]}$$

4.7. $\bar{H}^2 = 200 \times \bar{u}_y^2$ $W_m = \frac{1}{2} \mu |\bar{H}|^2$ Gustoča počna
njene energije u momčkom polju

$$W_m(2, S, 1) = \frac{1}{2} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 200^2 \cdot 2^2 = 100 \cdot 53 \frac{\text{mJ}}{\text{m}^3}$$

4.8. $K = 10^{-3} \left[\frac{S}{m} \right] \epsilon_r = 2.5$
 $E = 6 \cdot 10^{-6} \sin(9 \cdot 10^9 t) \left[\frac{V}{m} \right] \vec{j} = K \cdot \vec{E}$
 $j_0 = 10^{-3} \cdot 6 \cdot 10^{-6} = 6 \left[\frac{A}{m^2} \right]$

4.9. $\vec{E}(z, t) = 10 \sin(\omega t - 3z) \bar{u}_x + 15 \sin(\omega t - 3z) \bar{u}_y$

$$\vec{E}(0, 0.75z) = 10 \sin(-3 \cdot 0.75 z) \bar{u}_x + 15 \sin(-3 \cdot 0.75 z) \bar{u}_y$$

$$z = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

$$\vec{E}(0, 0.75z) = 10 \sin\left(-3 \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2\pi}{3}\right) \bar{u}_x + 15 \sin\left(-3 \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2\pi}{3}\right) \bar{u}_y$$

$$\vec{E}(0, 0.75z) = -10 \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \bar{u}_x + 15 \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \bar{u}_y$$

$$\vec{E}(0, 0.75z) = 10 \bar{u}_x - 15 \bar{u}_y \quad |\vec{E}| = \sqrt{10^2 + 15^2} = 18.02775$$

4.10. $\vec{E}(z, t) = 150 \sin(\omega t - 3z) \bar{u}_x, \omega = 3 \cdot 10^{-2}, \ell = 1.5 \cdot 10^{-2}$
 $P_{SN} = ? \quad \bar{m} = \bar{u}_z \quad dS = a \cdot \ell = 4.5 \cdot 10^{-4}$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \cdot \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \quad \nabla \times \vec{E} = -\bar{u}_y [150 \cdot 3 \cdot \cos(\omega t - 3z)]$$

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = \frac{150 \cdot 3}{\mu} \cos(\omega t - 3z) \bar{u}_y / dt \Rightarrow \bar{H} = \frac{150 \cdot 3}{\mu \cdot \omega} \cdot \sin(\omega t - 3z) \bar{u}_y$$

$$\bar{N} = \vec{E} \times \vec{H} = \bar{u}_z \left[\frac{150^2 \cdot 3}{\mu \cdot \omega} \sin^2(\omega t - 3z) \right] \bar{N}_{SR} = \frac{1}{2} \cdot \frac{150^2 \cdot 3}{\mu \cdot \omega} \bar{u}_z$$

$$P_{SN} = \oint \bar{N}_{SR} \cdot \bar{m} \cdot dS = \frac{1}{2} \cdot \frac{150^2 \cdot 30 \cdot \sqrt{\mu \cdot \omega}}{\mu \cdot \omega} \cdot 4.5 \cdot 10^{-4}$$

$$P_{SR} = 0.013937852 [\text{W}]$$

4.11.

$$\vec{H} = 100 \times y \vec{ax}$$

$$w_n = \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot H^2 = \frac{1}{2} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 100^2 \cdot 2^2 \cdot 5^2$$

$$w_n(2,5,1) = \frac{1}{2} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 100^2 \cdot 2^2 \cdot 5^2$$

$$w_n = \frac{\pi}{2} \cdot 10^{-3} \cdot 2^3 \cdot 5^2 = 5^2 \pi = 0.2 \cdot \pi = 628.31 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

4.12.

$$K = 10^{-3} \quad E = 6 \cdot 10^{-6} \sin(9 \cdot 10^9 t)$$

$$\epsilon_r = 2.5 \quad J_p = \frac{\partial D}{\partial t} = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot 6 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\sin(9 \cdot 10^9 t))$$

$$J_p = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot 6 \cdot 10^{-6} \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot \cos(9 \cdot 10^9 t)$$

$$J_{p0} = 1.19529 \cdot 10^{-6} \left[\frac{A}{\text{m}^2} \right]$$

4.13.

$$\vec{B}' = 0.5 \cos(377t) (9\vec{ay} + 4\vec{az}) \quad \vec{m} = \vec{ax}$$

$$\phi = \iint_S \vec{B}' \cdot \vec{m} \cdot dS = \iint_S 0.5 \cos(377t) (9\vec{ay} + 4\vec{az}) \cdot \vec{ax} \cdot r dr d\varphi$$

$$\phi = 0.5 \cos(377t) \cdot 4 \int r dr \int d\varphi$$

$$\phi = 0.5 \cos(377t) \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2 \Big|_{r=0}^{0.05} \cdot 2\pi = 2\pi \cos(377t) \cdot 0.05^2$$

$$M_{ind} = -\frac{d\phi}{dt} \quad \mu = -2\pi \cdot 0.05^2 \cdot 377 \cdot (-\sin(377t))$$

$$\mu = 4 \cdot 1.98047 \sin(377t) \Rightarrow \mu_0 = 5.92$$

INDUCTION MAPON

4.14.

$$\vec{E}' = E_m \sin(x) \sin(t) \vec{ay}$$

$$\vec{H}' = \frac{E_m}{\mu_0} \cos(x) \cos(t) \vec{az}$$

PRVITA PREDVEMEN JE CI POVEĆ ZADOVOJSTVA MAXWELLOVE
SEZNAMOTIĆE

$$\nabla \times \vec{E}' = -\mu \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \rightarrow \text{ZADOVOJSTVA}$$

$$\nabla \times \vec{H}' = \frac{\partial \vec{E}'}{\partial t} \rightarrow \boxed{\text{NE ZADOVOJSTVA}}$$

4.15.

$$\bar{B} = \frac{\mu_0 \cdot i(t)}{2\pi x} (-\bar{ax}^2)$$

$$\phi = - \iint_S \frac{\mu_0 \cdot i(t)}{2\pi x} dx dy$$

$$i(t) = \sin(\pi \cdot 10^4 t)$$

$$\phi = - \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot i(t)}{2\pi} \ln \frac{0.25}{0.05} \cdot 0.2$$

$$\phi = -0.64377 \cdot 10^{-7} \sin(\pi \cdot 10^4 t) \quad \text{Minel} = -\frac{d\phi}{dt} = 0.64 \cdot 10^{-3} \pi \cos(\pi \cdot 10^4 t)$$

$$\mu_0 = 0.64377 \cdot \pi \cdot 10^{-3} \quad u = 2.02247 \text{ mV}$$

4.16.

$$R = 20 \cdot 10^{-3} \quad \bar{B}' = 10 \cdot 10^{-3} \bar{ay}^2$$

$$w = 2 \quad L = 0.25\pi$$

$$S = 2 \cdot 0.10 \cdot 10^{-6} = 2 \cdot 10^{-6}$$

$$\phi = B \cdot S \cdot \cos(wt) = 2 \cdot 10^{-6} \cos\left(\frac{wt}{0.25\pi}\right)$$

$$i_{\text{minel}} = -\frac{d\phi}{dt} = 2 \cdot 10^{-6} \cdot w \cdot \sin(wt)$$

$$u = 2\sqrt{2} \cdot 10^{-6} \quad i_{\text{minel}} = \frac{i_{\text{minel}}}{R} = \frac{2\sqrt{2} \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^{-3}} = \sqrt{2} \cdot 10^{-4}$$

4.17.

$$\bar{E}' = E_m \cos(wt - k_2 z) \bar{ax}$$

$$\bar{H}' = \frac{E_m}{k_1} \cos(wt - k_2 z) \bar{ay}$$

$$i_{\text{minel}} = 0.14142 \text{ mA}$$

$$\frac{E_0}{H_0} = Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon}}$$

$$\frac{E_m}{E_m/k_1} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = k_1$$

4.18. isti postupek kao u zadatku 4.17, trouzi se k_2 , iz napisanog se vidi da je $k_2 = Z$, a $Z = w\sqrt{\mu\epsilon}$.

$$k_2 = w \cdot \epsilon_0 \cdot \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

$$4.19. \quad \vec{E} = E_m \cos(3x) \cos(\omega t) \vec{u}_z$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\vec{a}_y [E_m \cdot 3 \cdot (-\sin(3x)) \cdot \cos(\omega t)]$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} 3 \cdot E_m \cdot \sin(3x) \cdot \cos(\omega t) \vec{a}_y$$

$$\vec{H} = -\frac{1}{\mu} \cdot 3 \cdot E_m \cdot \sin(3x) \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \sin(\omega t) \cdot \vec{a}_y$$

$$\vec{H} = -\frac{\sqrt{\epsilon_0}}{\mu_0} \cdot E_m \sin(3x) \cdot \sin(\omega t) \vec{a}_y$$

4.20. trudzi się uniją $\frac{\omega}{3}$ iż postępujący skurczy się zgodnie

$$\frac{\omega}{3} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

$$4.21. \quad \vec{E} = 100 \cos(\omega t + \frac{2\pi}{5}x) \vec{u}_z \quad \vec{E} = 100 e^{j \frac{2\pi}{5}x} \vec{u}_z$$

$$\vec{H} = \frac{100}{120\pi} \cos(\omega t + \frac{2\pi}{5}x) \vec{a}_y \quad \vec{H}^* = \frac{100}{120\pi} e^{-j \frac{2\pi}{5}x} \vec{a}_y$$

$$\vec{N} = \vec{E} \times \vec{H}^* \quad \vec{N} = -\vec{a}_x \left(\frac{100^2}{120\pi} e^0 \right) \Rightarrow \vec{N} = -26.52582 \vec{a}_x$$

$$4.22. \quad \vec{E} = 100 \cos(\omega t + \frac{4\pi}{3}x) \vec{u}_z \quad \vec{H} = \frac{100}{120\pi} \cos(\omega t + \frac{4\pi}{3}x) \vec{a}_y$$

$$a) \quad \vec{E} = 100 e^{j \frac{4\pi}{3}x} \vec{u}_z \quad b) \quad \vec{H} = \frac{100}{120\pi} e^{j \frac{4\pi}{3}x} \vec{a}_y$$

$$\vec{N} = \vec{E} \times \vec{H} = -\vec{a}_x \left[\frac{100^2}{120\pi} \cos^2 \left(\omega t + \frac{4\pi}{3}x \right) \right] \quad \omega = 2 \cdot 10^5$$

$$N(x=1, t=2) = -\vec{a}_x \left[\frac{100^2}{120\pi} \cos^2 \left(2 \cdot 10^5 \cdot 2 + \frac{4\pi}{3} \right) \right] = -10.14 \vec{a}_x$$

$$d) \quad \bar{N}_{SR} = \frac{1}{2} \bar{N} = \frac{1}{2} \frac{100^2}{120\pi} (-\vec{a}_x) \quad \bar{n} = \vec{a}_x$$

$$P_{SR} = \iint_S \bar{N}_{SR} \cdot \bar{n} \cdot dS = -\frac{1}{2} \cdot \frac{100^2}{120\pi} \cdot \int_0^2 \int_0^2 dxdy dt$$

$$P_{SR} = -2 \cdot \frac{100^2}{60 \cdot 120\pi} = -\frac{100^2}{60\pi} = -53.05164 W$$

4.23. $\mu_r = 1, \bar{E}' = 3 \sin(2 \cdot 10^8 t - 2x) \bar{a}_y$

a) Slijen u kojen se giba val $\downarrow \bar{a}_x'$

b) $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

c) $Z = \omega \cdot \sqrt{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r} / \pi = \omega^2 \mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$

$$\epsilon_r = \frac{3}{\omega^2 \mu_0 \cdot \epsilon_0} = 8.98774$$

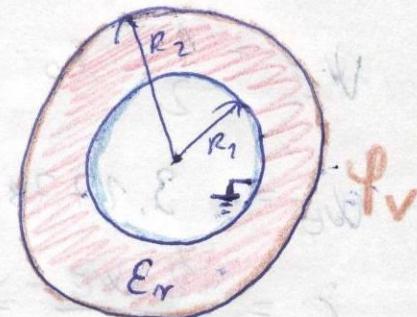
d) $\nabla \times \bar{E}' = \bar{a}_z' (-6 \cos(2 \cdot 10^8 t - 2x)) = -\mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}$

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = \frac{6}{\mu} \cos(2 \cdot 10^8 t - 2x) \bar{a}_z' / \text{Solt}$$

$$\bar{H}' = \frac{6}{\mu} \cdot \frac{1}{2 \cdot 10^8} \sin(2 \cdot 10^8 t - 2x) \bar{a}_z'$$

$$\bar{H}' = 0.024 \sin(2 \cdot 10^8 t - 2x) \bar{a}_z'$$

4.29. $R_1 = 5 \cdot 10^{-3}, R_2 = 6 \cdot 10^{-3}, l = 500 \cdot 10^{-3}$
 $\epsilon_r = 6.7, \varphi_v = 250 \sin(377t)$



a) $\Delta \varphi(r) = 0 \Rightarrow \varphi = \ln r \cdot C_1 + C_2$

$$\varphi(R_1) = 0 \Rightarrow \ln R_1 \cdot C_1 + C_2 = 0$$

$$C_2 = 5.29831 C_1 \Rightarrow C_1 = 1367.67681 \sin(377t)$$

$$\varphi(R_2) = \varphi_v \Rightarrow \varphi_v = \ln R_2 \cdot C_1 + C_2$$

$$C_2 = 250 \sin(377t) + 5.11539 C_1$$

$$\varphi(r) = \ln r (1367.67681 \sin(377t)) + C_2$$

$$\bar{E}' = -\nabla \varphi(r) \Rightarrow \nabla \varphi(r) = \frac{1}{r} \cdot 1367.67681 \sin(377t) \bar{a}_r$$

$$\bar{E}' (r = 5.5 \cdot 10^{-3}) = -\frac{1}{5.5 \cdot 10^{-3}} \cdot 1367.67681 \sin(377t) \bar{a}_r$$

$$\bar{E}' = -248668.5109 \sin(377t) \bar{a}_r$$

b) $\bar{J}_P' = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = -8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 6.7 \cdot \underline{1367.67}$

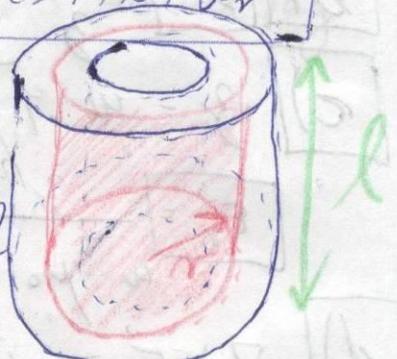
$\cdot 377 \cdot \cos(377t) \bar{a}_r'$

$\boxed{\bar{J}_P' (n=5.2 \cdot 10^{-3}) = -5.87923 \cdot 10^{-3} \cos(377t) \bar{a}_r'}$

c) $I_P = \iint_S \bar{J}_P \cdot \bar{n} \cdot dS \quad \bar{n}' = -\bar{a}_r'$

$I_P = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{1367.67}{N} \cdot 377 \cdot \cos(377t) \cdot \pi l$

$\boxed{I_P = 9.60923 \cdot 10^{-5} \cos(377t)}$



$dS = N d\ell d\varphi$
 $\ell = 500 \cdot 10^{-3}$

d) $W_E = \frac{1}{2} \iint_S \epsilon |E'|^2 dV$

$|E'|^2 = \frac{1870539.857}{N^2} \cdot \sin^2(377t)$

$W_E = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot 1870539.857 \cdot \sin^2(377t) \int_{m_1}^{m_2} \int_{N^2}^{N^2} \int_0^l d\varphi d\ell dV$

$W_E = 3.17789237 \cdot 10^{-5} \sin^2(377t)$

$C = \frac{2 \cdot W_E}{U^2} = \frac{6.355784739 \cdot 10^{-5}}{62500} \cdot \frac{\sin^2(377t)}{\sin^2(377t)}$

$\boxed{C = 1.01692 \cdot 10^{-9} F}$

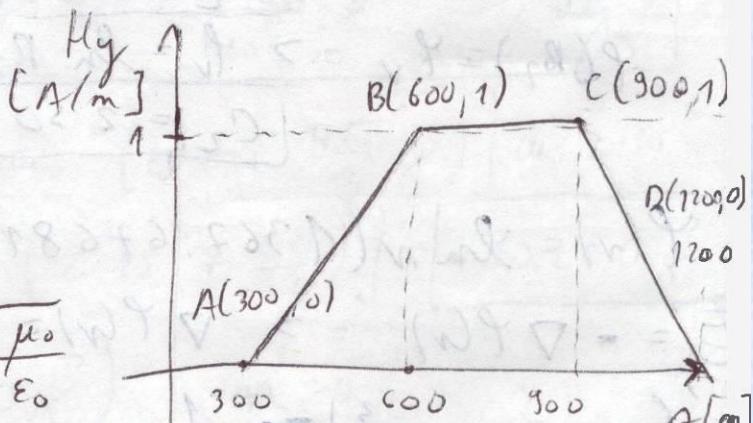
4.25. a) $\frac{E_m}{H_m} = Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$

$\epsilon_r = 4$

$Z = \sqrt{\frac{\mu_0 \cdot \mu_r}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$

$Z = 188.36715$

$N = \frac{1}{\sqrt{\mu \cdot \epsilon}} = 1.49897 \cdot 10^8 \frac{m}{A}$



$\boxed{N = \frac{A_2 - z_1}{x_2 - x_1}}$

$z_1 = 0$
 $x_2 = 1 \mu s$

$$Q_2 - 0 = N(t_2 - t_1) \quad \text{u.a) dlejte rovnice} \quad t_1 = -\mu s$$

$$Q_2 = 1.99897 \cdot 10^8 (1\mu s - (-1\mu s)) = 299.79563$$

je gnefa $A = 299.79563 = ?$ $H = 0 \Rightarrow E = 0$

b) $t_1 = -1.5 \mu s$

$$Q_2 = 1.99897 \cdot 10^8 (1\mu s + 1.5\mu s) = 374.7425$$

jednoridla pravca: $y - 0 = \frac{1-0}{600-300} (x - 300)$

$$H = 0.24914 \quad y = \frac{1}{300} x - 1$$

$$\begin{aligned} E &= H \cdot Z \\ E &= 46.9301 \end{aligned} \quad y = \frac{1}{300} \cdot 374.7425 - 1 = 0.24914$$

c) $t_1 = -7 \mu s$

$$Q_2 = 1.99897 \cdot 10^8 (5\mu s) = 749.35 \quad H = 1$$

$E = 188.36715$

d) $t_1 = -6 \mu s$

$$Q_2 = 1.99897 \cdot 10^8 \cdot 7\mu s = 1049.09$$

jednoridla pravca: $y - 1 = \frac{0-1}{1200-900} (x - 900)$

$$H = 0.50303$$

$$E = 94.75495 \quad y = -\frac{1}{300} x + 3 + 1 = -\frac{1}{300} x + 4$$

4.26. $\vec{B}' = -0.5 \vec{ax}$

$$\vec{n} = \vec{ar} \times \vec{a}\vec{z} \quad \vec{N} = -w \cdot \vec{r} \cdot \vec{a}\vec{z}$$

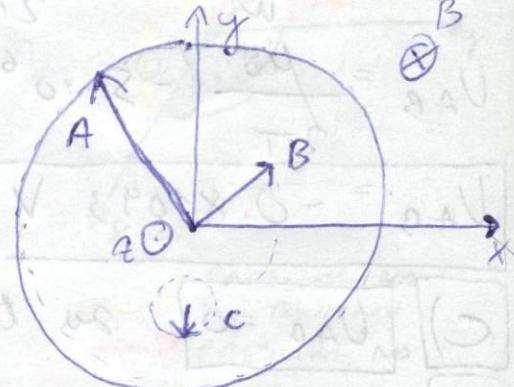
$$\vec{n} \times \vec{B}' = w r B \vec{ar}$$

$$M_{ind} = \int (\vec{n} \times \vec{B}') \cdot \vec{dl} = w \cdot B \int r dr$$

$$\omega_A = \frac{2\pi}{3600} \quad \omega_B = \frac{2\pi}{12 \cdot 3600} \quad \omega_C = \frac{2\pi}{60}$$

$$M_{indA} = \omega_A B \cdot \frac{1}{2} \cdot r_A^2 = 0.17453 \cdot 10^{-4}$$

$$M_{indB} = \omega_B B \cdot \frac{1}{2} \cdot r_B^2 = 0.36362 \cdot 10^{-6}$$



$$N_A = 20 \cdot 10^{-2} = 0.2$$

$$N_B = 10 \cdot 10^{-2} = 0.1$$

$$N_C = 5 \cdot 10^{-2} = 0.05$$

$U_{AC} = M_{indA} - M_{indB} = 17.08438 \mu V$ - 75 -

$$b) U_{\text{induc}} = \omega_c B \cdot \frac{1}{2} \cdot n c^2$$

$$\omega_c = \frac{2\pi}{60}$$

$$U_{\text{induc}} = 0.65 + 998469 \cdot 10^{-4}$$

$$U_{AC} = U_{\text{induc}} - U_{\text{indc}} = -47.99684 \mu V$$

c), d) SAT POČIJE ROTIRATI BRZINOM $\omega = \frac{\pi}{2} \text{ rad/s}$.
 ZA OVE SEKUNDE (c) ICI 4 SEKUNDE (d)
 SAT NEGRANIČNO POLA ICI CIJEVI KRUŠ TAKO DA
 KOLICINA MAGNETSKOG TOKA U OBZIRU SLUŽI
 OSTAJE JEDNAKA.

$$c) \bar{n} = \omega r \cdot \bar{a}_2 \Rightarrow U_{AC} = 47.99684 \mu V \quad |d) U_{AC} = -47.99684 \mu V$$

4.27. a) za $t=4 \text{ ms}$

$$B = 10^{-3} \text{ T}$$

$$B = \frac{\mu_0 \cdot i(t)}{2\pi \cdot 1}$$

$$i(t) = \frac{10^{-3}}{2 \cdot 10^{-7}} = 5 \text{ mA}$$

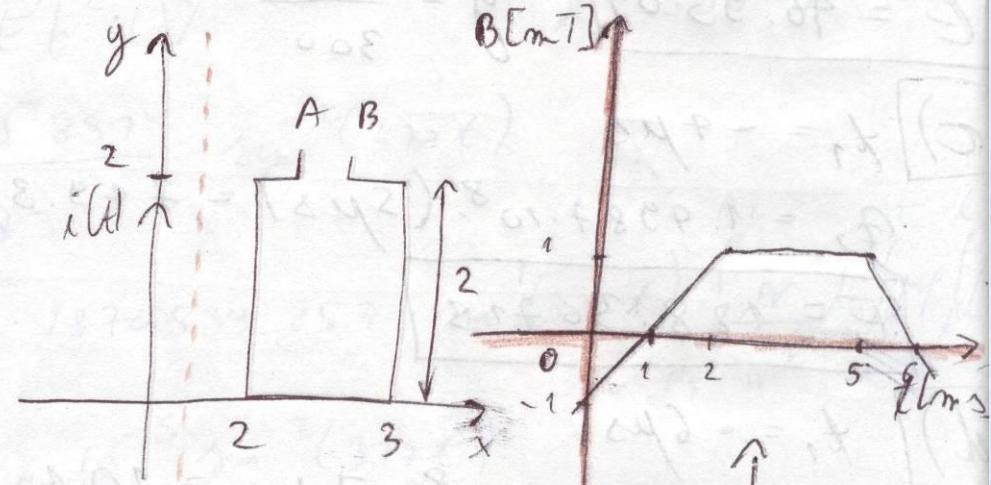
b) za $t=1 \text{ ms}$

$$U_{AB} = - \frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot dS$$

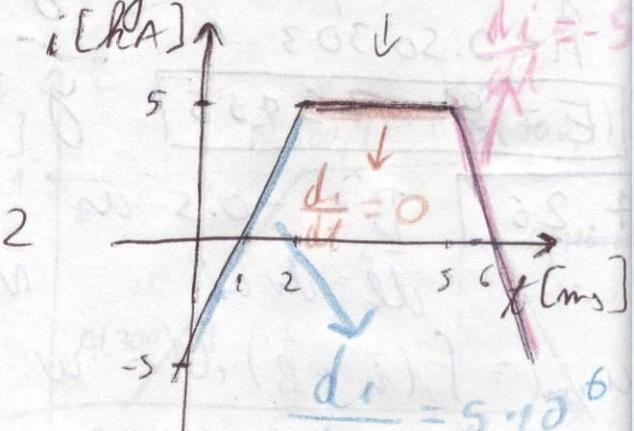
$$U_{AB} = - \frac{d}{dt} (i(t)) \cdot \frac{\mu_0}{2\pi} \int_2^1 \frac{1}{x} dx \int dy$$

$$U_{AB} = \frac{\mu_0}{2\pi} (-5 \cdot 10^{-6}) \cdot 2 \cdot 10^{-7} \cdot \ln(1.5) \cdot 2$$

$$U_{AB} = -0.81093 \text{ V}$$



- na udaljenosti 1 m od niti
 - na udaljenosti 2.3 m od niti



c) $U_{AB} = 0$ za $t=3 \text{ ms}$ jer je $\frac{di(t)}{dt} = 0$

d) za $t=5.5 \text{ ms} \Rightarrow \frac{di}{dt} = -5 \cdot 10^6$ tako da $U_{AB} = 0.81093 \text{ V}$

$$4.28. \quad \vec{B}' = \begin{cases} -B_0 \frac{a \cdot t}{\sqrt{a^2 + r^2}} \hat{a}_r, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} a = 0.1 \\ B_0 = 1 \\ K = 0 \end{array}$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot dS$$

$$E_d \cdot 2\pi r = -\frac{\partial}{\partial t} \int_0^r r dr \int_0^{2\pi} d\varphi \left(-\frac{B_0 \cdot a \cdot t}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right)$$

$$E_d \cdot 2\pi r = B_0 \cdot a \cdot 2\pi \int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 + a^2}} dr$$

$$E_d \cdot r = B_0 \cdot a \cdot (\sqrt{r^2 + a^2} - a)$$

a) zu $r = 0.05 \Rightarrow E_d = 23.60679 \text{ m V/m}$

b) zu $r = 0.1 \Rightarrow E_d = 41.42135 \text{ m V/m}$

c) zu $t = -1 \text{ ms} \Rightarrow B = 0 \Rightarrow E = 0$

d) $\emptyset = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot dS = \int_0^r B_0 \cdot \frac{a \cdot t}{\sqrt{r^2 + a^2}} r dr \int_0^{2\pi} d\varphi$

$$q = 2\pi \cdot 1 \cdot 0.1 \cdot 10^{-3} (\sqrt{2}a - a) = 26.0258 \cdot 10^{-6} \text{ As}$$

4.29. $f = 10^7, \omega = 2\pi f$

$$\vec{z}' = \vec{z}_x \hat{a}_x + \vec{z}_y \hat{a}_y + \vec{z}_z \hat{a}_z$$

$$\vec{z}' = [\cos 45^\circ \cdot \cos 60^\circ \hat{a}_x + \sin 45^\circ \cos 60^\circ \hat{a}_y + \sin 30^\circ \hat{a}_z] \cdot \vec{z}$$

$$z = \omega \cdot \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = 0.20958$$

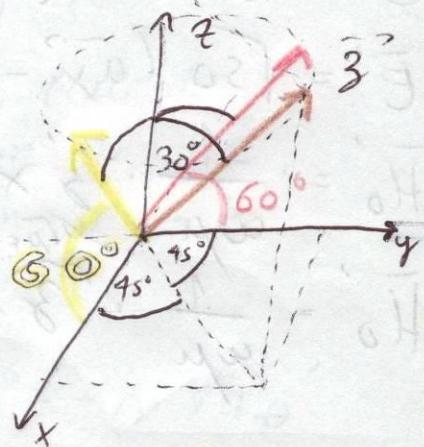
$$\vec{z}' = 0.20958 \left(\frac{\sqrt{2}}{4} \hat{a}_x + \frac{\sqrt{2}}{4} \hat{a}_y + \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{a}_z \right)$$

$$\vec{E}' = \vec{E}_0 e^{-j \vec{z}' \cdot \vec{r}}$$

$$\vec{E}'_0 = \frac{E_{0x}}{2} \hat{a}_x + \frac{E_{0y}}{2} \hat{a}_y$$

$$\vec{E}' \perp \vec{z}' \rightarrow \vec{z}' \cdot \vec{E}'_0 = 0$$

$$E_{0z} = 0$$



PRESLINA NA
x MUMANA

PRESLINA NA
y MUMANA

U OBA SLOVAKA KUT

120° PRESLINA PRESLINA 120°

je 30° (120° PRESLINA PRESLINA)

1 x 170 si 60°

$$3x \underline{E_{0x}} + 3y \underline{E_{0y}} = 0$$

$$\underline{E_{0x}} = E_{0x} e^{j\omega t}$$

$$\underline{E_{0y}} = E_{0y} e^{j\omega t}$$

$$\underline{\bar{E}_0} = (E_{0x} \bar{a}_x' + E_{0y} \bar{a}_y') e^{j\omega t}$$

$$3x = 3y = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$3x \underline{E_{0x}} + 3y \underline{E_{0y}} = 0 \quad E_{0x} = -E_{0y}$$

$$|\bar{E}'(0,0,0)| = |\bar{E}_0| = |E_{0x} \bar{a}_x' + E_{0y} \bar{a}_y'| e^{j\omega t} = w \cos(\omega t) \left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\omega = -\frac{\pi}{6} = -30^\circ, \quad w = 2\pi \cdot 10^7 \cdot 10^{-6} = 20\pi = 2\pi \cdot 10$$

$$10 \cos(\omega t - \frac{\pi}{6}) = 10 e^{-j\frac{\pi}{6}} \quad [a] \quad \boxed{E_{0x} = \sqrt{150} = 7.1}$$

$$E_{0x}^2 + E_{0y}^2 = 100$$

\Rightarrow $E_{0x} > 0$

$$2E_{0y}^2 = 100$$

$$\vec{n} = x\bar{a}_x' + y\bar{a}_y' + z\bar{a}_z'$$

$$[b] \quad \boxed{E_{0y} = \sqrt{150} = -7.1}$$

$$\bar{E}' = \bar{E}_0 \cdot e^{-j\frac{\pi}{6}}$$

$$\bar{E}' = e^{-j\frac{\pi}{6}} (\sqrt{150} \bar{a}_x' - \sqrt{150} \bar{a}_y') \cdot e^{-j \cdot 3 \left(\frac{\sqrt{2}}{4} x + \frac{\sqrt{2}}{4} y + \frac{\sqrt{3}}{2} z \right)}$$

$$\bar{E}' = \sqrt{150} (\bar{a}_x' - \bar{a}_y') \cos(\omega t - 0.20958 \left(\frac{\sqrt{2}}{4} x + \frac{\sqrt{2}}{4} y + \frac{\sqrt{3}}{2} z \right) - \frac{\pi}{6})$$

$$\bar{H}'_0 = \frac{1}{\omega \mu} \cdot \bar{Z}' \times \bar{E}'_0$$

$$\bar{H}'_0 = \frac{1}{\omega \mu} \cdot \bar{Z}' \cdot \begin{vmatrix} \bar{a}_x' & \bar{a}_y' & \bar{a}_z' \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{150} & -\sqrt{150} & 0 \end{vmatrix} = \frac{\epsilon}{\mu_0} \begin{vmatrix} \bar{a}_x' \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{150} \right) \\ -\bar{a}_y' \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{150} \right) \\ \bar{a}_z' \left(-2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \sqrt{150} \right) \end{vmatrix}$$

$$\bar{H}'_0 = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \left[\bar{a}_x' \cdot \frac{\sqrt{150}}{2} + \bar{a}_y' \cdot \frac{\sqrt{150}}{2} - \bar{a}_z' \right]$$

$$c) H_{0x} = 26.25475 \text{ mA/m} = [H_{0y} d]$$

4.30. $\mu_r = 1, \epsilon_r = 2$ ($\vec{H} = \bar{a}_y 10 \cos(\omega t - 3x)$)

(a) $\beta = 3$ mpr. $\vec{A} = \bar{a} \cos(\omega t - b \cdot x) \cdot \vec{n}$

BRZINA SINUSI VALA: UNIKOMOST JE β

(b) $\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \cdot \epsilon_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} = [2.11987 \cdot 10^8 \frac{m}{s}]$

(c) $Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} = 266.3913$

 $\omega = \frac{3}{\sqrt{\mu_0 \cdot \epsilon_0} \cdot \sqrt{\epsilon_r}} = 6.35962 \cdot 10^8$

$E_0 = Z \Rightarrow E_0 = 2663.9138$

H_0

$E = E_0 \cos(\omega t - 3x) \text{ u } t = 10 \text{ i } x = 0.4$

$E = 1.15207 \text{ kV/m}$

(d) SNIJEN SINUSI VALA UNIKOMOST 12
IZMERA ZA \vec{E} ili \vec{H} (ili \vec{N})

mpr. $\vec{A} = \bar{a} \cdot \cos(\omega t - b \cdot c) \cdot \vec{n}$

GOJE JE NOVE BITI x, y, z, r, φ ili θ ,
AKO JE - ISPECO ANDA JE SNIJEN $v + \vec{c}$,
AKO JE + ISPECO ANDA JE SNIJEN $v - \vec{c}$.

v OVON ZNAKU TU JE $+\bar{a}_x^2$

4.31. $\vec{E}^2 = 100 \sin(\theta) \cdot \frac{1}{N} \cos(10^10 t - r) \bar{a}_\theta^2$

 $\vec{H} = \frac{100}{120\pi} \sin(\theta) \cdot \frac{1}{N} \cos(10^10 t - r) \bar{a}_x^2$

(d) SNIJEN PROSTRAJNA VALA JE \bar{a}_r

(e) $\vec{N} = \vec{E} \times \vec{H} = \bar{a}_r \cdot \frac{100^2}{120\pi} \sin^2(\theta) \cdot \frac{1}{N^2} \cos^2(10^10 t - r)$

$$\vec{N}' \left(n=2, t=10^{-9}, \theta = \frac{\pi}{6} \right) = \frac{100^2}{120\pi} \sin^2 \frac{\pi}{6} \cdot \frac{1}{2} \cos^2 \left(\frac{10^8}{10 \cdot 10^{-2}} \right)$$

$$\boxed{\vec{N}' = 1.65786 \cdot \cos^2 8^\circ = 35.09741 \text{ m} \frac{W}{m^2}}$$

on $n=4 \text{ m}, \theta = \frac{\pi}{4}$

(c) $N_{Sn} = \frac{1}{2} |\vec{N}'| = \frac{1}{2} \cdot \frac{100^2}{120\pi} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \cdot \frac{1}{4^2}$

$$N_{Sn} = 414,46599 \text{ m} \frac{W}{m^2}$$

(d) $P_{Sn} = \oint_S N_{Sn}^2 \cdot \vec{n} \cdot dS = \frac{1}{2} \cdot \frac{100^2}{120\pi} \sin^2(\theta) \cdot \frac{1}{4^2} \cdot \pi^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^\pi d\theta$

$$P_{Sn} = \frac{250}{3} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{250}{3} \left(-\frac{\sin^2 \theta \cos \theta}{3} \Big|_0^\pi \right) + \frac{2}{3} \int_0^\pi \sin \theta d\theta$$

$$\boxed{P_{Sn} = \frac{250}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot (-\cos \theta) \Big|_0^\pi = \frac{500}{9} \cdot 2 = 111.111 \text{ W}}$$

