ZADACI 10

8.6. 2010.

1.

$t_1 = 1.3.2010.$

$t_2 = 1.6.2010.$

$S(t_2) = 0.9 \cdot S(t_1)$, $r = 6\%$, $T = 1.12.2010.$

$$F(t_1, T) = S(t_1) \cdot e^{r(T-t_1)} = S(t_1) \cdot e^{0.06 \cdot \frac{9}{12}} = 1.046 \cdot S(t_1)$$

$$F(t_2, T) = S(t_2) \cdot e^{r(T-t_2)} = 0.9 \cdot S(t_1) \cdot e^{0.06 \cdot \frac{6}{12}}$$

$$= 0.927 \cdot S(t_1)$$

a) $\Rightarrow F(t_2, T) < F(t_1, T)$

b) $$\frac{F(t_2, T)}{F(t_1, T)} = \frac{0.927 \cdot \cancel{S(t_1)}}{1.046 \cdot \cancel{S(t_1)}} = 0.886$$

$\Rightarrow F(t_2, T)$ je 11.4% manja od $F(t_1, T)$

2.

$r = 8\%$ $F(0,1) = 89$

$r_p = 10\%$ $S(0) = 83$

$r_o = 7\%$ $D = 2$

2 mogućnosti:

a) $\underline{t=0}$: kratka pozicija u ugovoru, posudba 83 i kupnja dionice za 83

$\underline{t=0.5}$: dividenda $D=2$ oročimo uz kamatu 7%

$\underline{t=1}$: dobitak od prodaje dionice po $F(0,1) = 89$,
dobitak od $2 \cdot e^{0.07 \cdot 0.5}$, dug banci
$83 \cdot e^{0.1 \cdot 1} = 91.729 \Rightarrow$ STANJE $= -0.6579 < 0$
$\Rightarrow$ u gubitku smo $\Rightarrow$ nije arbitražna strategija

b) $t=0$: duge pozicije u ugovoru, short sell dionice za 83, oročenje tog iznosa uz kamatu 7%

$t=0.5$: prekid oročenja da bi se isplatila dividend u iznosu 2. Ostatak se oroči dalje uz kktu 7%

$t=1$: Kupujemo dionice po 89 (prema ugovoru) čime se podmiri dionice stvorene short sellingom,

$$\Rightarrow \text{Stanje}: \left(83 \cdot e^{0.07 \cdot 0.5} - 2\right) \cdot e^{0.07 \cdot 0.5} - 89 =$$

$$= -2.053 < 0$$

$\Rightarrow$ niti ovo nije arbitražna strategija!

$\Rightarrow$ Ne postoji arbitražna strategija.

3.

$S(0) = 15.6$

$C^E = 2.83, \quad K = 15$

$T = \frac{3}{12}, \quad r = 6.72\%$

Put - call paritet:

$$C^E - P^E = S(0) - K \cdot e^{-rT}$$

$$\Rightarrow P^E = C^E - S(0) + K \cdot e^{-rT}$$

$$P^E = 2.83 - 15.6 + 15 \cdot e^{-0.0672 \cdot \frac{3}{12}}$$

$$\boxed{P^E = 1.98}$$

(4) $K = 24$, $C^E = 5.09$
$T = 0.5$, $P^E = 7.78$

$S(0) = 20.37$, $r = 7.48\%$

Ako su cijene neoarbitražne, mora biti zadovoljen put-call paritet:

$$C^E - P^E = S(0) - K \cdot e^{-rT}$$
$$5.09 - 7.78 \overset{?}{=} 20.37 - 24 \cdot e^{-0.0748 \cdot 0.5}$$
$$-2.69 \overset{?}{=} -2.748977808$$
$$> \checkmark$$

$\Rightarrow$ Postoji strategija arbitraže:

Kako je lijeva strana tj. $C^E - P^E$ veća od neoarbitražne vrijednosti, to znači da je call opcija precijenjena i/ili put opcija podcijenjena.

$\Rightarrow$ strategija:

$\underline{t=0}$: kupiti put opciju, prodati call opciju, kupiti jednu dionicu za 20.37 (da bi mogli iskoristiti kupljenu put opciju ili izvršiti obavezu stvorenu prodajom call opcije). Za sve to potrebno je posuditi iznos:
$$7.78 + 20.37 - 5.09 = 23.06$$
jer na početku nemamo novca tj $V(0) = 0$.

$t = T = 0.5$:

Ako je $S(T) > K = 24$, osoba kojoj smo prodali call opciju, iskoristit će pravo kupnje dionice za $K = 24$. Put opcija postaje bezvrijedna.

$\Rightarrow$ stanje imovine:

$$V(T) = 24 - 23.06 \cdot e^{0.0748 \cdot 0.5} = 0.06122534 > 0$$

Ako je $S(T) < K = 24$, iskoristit ćemo pravo stečeno kupnjom put opcije i prodat ćemo dionicu za $K = 24$. Call opcija je bezvrijedna.

$\Rightarrow$ stanje imovine:

$$V(T) = 24 - 23.06 \cdot e^{0.0748 \cdot 0.5} = 0.06122534 > 0$$

$\Rightarrow$ imamo arbitražnu strat. jer je $V(0) = 0$ i $V(T) > 0$.

5.

$r_d = 4\%$

$r_f = 3\%$

$P(0) = 7.25$

$$C_0^E = E^*\left[(S(T) - X)^+ \cdot e^{-rT}\right]$$

$$P_0^E = E^*\left[(X - S(T))^+ \cdot e^{-rT}\right]$$

$$\Rightarrow C_0^E - P_0^E = E^*\left[\left((S(T)-X)^+ - (X-S(T))^+\right)e^{-rT}\right]$$
$$= E^*\left[(S(T)-X)\cdot e^{-rT}\right]$$
$$= S(0) - X\cdot e^{-rT} = V_X(0)$$

U slučaju Forward ugovora na tečaj,

$$S(0) = P(0), \quad X = F(0,T)$$

znamo $\quad F(0,T) = P(0)\cdot e^{(r_d - r_s)T}$

$$= 7.25 \cdot e^{0.01\cdot 0.5}$$
$$= 7.2863$$

$$\Rightarrow \boxed{X = 7.2863}$$

6. a) $C^E \leq C^A$ je logično jer američka call opcija daje pravo kupnje dionica bilo kada do zaključno s trenutkom T tj. daje „veće" pravo nego europska call opcija

b) pp. suprotno tj. $C^E > C^A$

$\Rightarrow$ prodamo 1 europsku call opciju i kupimo jednu američku call opciju, iznos $C^E - C^A$ oročimo.

Izvršimo trenutak $t = T$ kada europske i američke opcije vrijede jednako $\left((S(T)-K)^+\right) \Rightarrow$ profit $(C^E - C^A)e^{rT} > 0$

Q.E.D.

c) T: $C^E < S(0)$

pr. suprotno tj. $C^E \geq S(0)$

Prodamo jednu call opciju za C^E i kupimo dionicu za $S(0)$.
Eventualni višak oročimo.
U $t=T$, osoba kojoj smo prodali opciju istu će iskoristiti ako je
$$S(T) > K$$

$\Rightarrow$ imovina u $t=T$ nam iznosi
$$(C^E - S(0))\cdot e^{rT} \geq 0$$

Ako je pak $S(T) \leq K$, osoba neće iskoristiti opciju $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ naša imovina iznosi
$$(C^E - S(0))\cdot e^{rT} + S(T) > 0$$

$\Rightarrow$ ostvarimo strategiju Q.E.D.

7. a) $S(0) \leq X\cdot e^{-rt} + C^E$ vrijedi,
jer iz put-call pariteta imamo
$$C^E - P^E = S(0) - X\cdot e^{-rt},$$
a kako je $P^E \geq 0$

$$\Rightarrow C^E - P^E \leq C^E$$

$$\Rightarrow C^E \geq S(0) - X\cdot e^{-rt}$$

b) $p^E > X \cdot e^{-rt}$ ne vrijedi jer

$$C^E - p^E = S(0) - X \cdot e^{-rt}$$

$$\Rightarrow p^E = \underset{\leq S(0)\ (\text{zad. 6. c)})}{C^E} - S(0) + X \cdot e^{-rT}$$

$$\Rightarrow p^E \leq S(0) - S(0) + X \cdot e^{-rt}$$

$$\Rightarrow p^E \leq X \cdot e^{-rt}$$

c) $X \cdot e^{-rt} - p^E \leq S(0)$ vrijedi jer

$$\underset{\geq 0}{C^E} - p^E = S(0) - X \cdot e^{-rt}$$

$$\Rightarrow -p^E \leq S(0) - X \cdot e^{-rt}$$

$$\Rightarrow X \cdot e^{-rt} - p^E \leq S(0)$$

d) $C^E + X \leq C^E \leq C^A$ ne vrijedi jer

je $X > 0$.

8. $r = 5.5\%$, $\sigma = 0.3$, $\delta = ?$

$$E^*[\ln S(T)] = \ln S(0)$$

$$\cancel{\ln S(0)} + (r - \delta - \tfrac{1}{2}\sigma^2) T = \cancel{\ln S(0)}$$

$$(0.055 - \delta - \tfrac{1}{2} \cdot 0.09) T = 0 \Rightarrow \boxed{\delta = 0.01}$$

(12)

$$S(0) \begin{cases} S(0)\cdot(1+g) \\ S(0)\cdot(1+d) \end{cases} \qquad S_d < X < S_g$$

$$\left(S(1) - X\right)^+ = \begin{cases} S(0)(1+g) - X, & S(1) = S(0)(1+g) \\ 0, & S(1) = S(0)(1+d) \end{cases}$$

$$p^* = \frac{r-d}{g-d} \quad \text{vjer. neutr. mjera}$$

$$C^E = E^*\left[\frac{(S(1)-X)^+}{1+r}\right] =$$

$$= \frac{1}{1+r}\cdot\frac{r-d}{g-d}\cdot\left(S(0)(1+g) - X\right) + 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial C^E}{\partial g} = \frac{1}{1+r}\cdot\frac{r-d}{(g-d)^2}(-1)\left(S(0)(1+g) - X\right) + \frac{1}{1+r}\cdot\frac{r-d}{g-d}S(0)$$

$$= \frac{1}{1+r}\,\frac{r-d}{g-d}\left[\frac{X - S(0)(1+g)}{g-d} + S(0)\frac{g-d}{g-d}\right] =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{1+r}\,\frac{r-d}{g-d}}_{>0}\left(\frac{\overbrace{X - S(0)(1+d)}^{>0}}{\underbrace{g-d}_{>0}}\right) > 0$$

$\Rightarrow C^E$ je rastuća funkcija od g

Analogno
$$\frac{\partial C^E}{\partial d} = -\frac{(g-r)\cdot\left(S(0)(1+g) - X\right)}{(1+r)(g-d)^2} < 0$$

$\Rightarrow C^E$ je padajuća f-ja od d

(10.) $r = 0$, $S(0) = X = 1$

$$C^E(0) = E^*\left[\frac{(S(1)-X)^+}{1+r}\right]$$

a) $g = 5\%$, $d = -5\%$

$$\Rightarrow S(0)\cdot(1+g) = 1.05$$
$$S(0)(1+d) = 0.95$$

$$\Rightarrow C^E(0) = \frac{r-d}{g-d}\cdot\left(S(0)(1+g) - X\right) =$$
$$= \frac{0.05}{0.1}\cdot 0.05 = \boxed{0.025}$$

b) $g = 1\%$, $d = -19\%$

$$\Rightarrow C^E(0) = \frac{0.19}{0.20}\cdot 0.01 = \boxed{0.0095}$$

(11.) $X = S(0) = 100$, $g = 10\%$, $d = -10\%$, $r = 5\%$

Da bi se replicirala call opciju, potrebno je na početku kupiti dionicu i prodati ju u trenutku izvršenja

$$\Rightarrow \quad 110\cdot 0.98\,x + 1.05\,y = 110 - 100$$
$$90\cdot 0.98\,x + 1.05\,y = 0$$
$$\Rightarrow x = 0.5102$$
$$y = -42.8471$$
$$\Rightarrow V(0) = x\cdot 100 + y\cdot 1 = 8.1633$$

U slučaju da nema trans. troškova imamo

$$\left.\begin{aligned} 110x + 1.05y &= 10 \\ 90x + 1.05y &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} 20x &= 10 \\ x &= 0.5 \\ y &= -42.8571 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow V(0) = 100x + 1 \cdot y = \boxed{7.1428}$$

(12) $S(0) = 75$, $g = 20\%$, $d = -10\%$, $X = 75$

call opcije : $x \geq 0$, $y \leq 0 \Rightarrow$ posudba

$$75 \cdot 1.2 \cdot x + 1.12y = 90 - 75 = 15$$
$$75 \cdot 0.9 \cdot x + 1.12y = 0$$

$$\Rightarrow x = 0.6667$$
$$y = -40.1786$$

$$\Rightarrow V(0) = x \cdot 75 + y = \boxed{9.8214}$$

put opcije : $x \leq 0$, $y \geq 0 \Rightarrow$ depozit novca

$$75 \cdot 1.2x + 1.08y = 0$$
$$75 \cdot 0.9x + 1.08y = 75 - 67.5 = 7.5$$

$$x = -0.3333$$
$$y = 27.7778$$

$$\Rightarrow V(0) = x \cdot 75 + y = \boxed{2.7778}$$