LINEARNA ALGEBRA

Ljetni ispitni rok (5.7.2021.)

- RJEŠENJA ZADATAKA -

1. (a) $A^2 = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^2 & \alpha+\beta \\ 0 & \beta^2 \end{bmatrix} = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha^2 = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \beta^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

(b) Uočimo da je

$$(I+A)(I-A) = I - A + A - A^2 = I - A^2. \qquad (*)$$

Dakle,

$A \in \mathcal{M}_{22}$ nilpotentna $\Leftrightarrow A^2 = 0$

$\Leftrightarrow I - A^2 = I$

$\overset{(*)}{\Leftrightarrow} (I+A)(I-A) = I$

$\Leftrightarrow I+A$ regularna matrica i $(I+A)^{-1} = I - A$

(po definiciji regularnosti matrice)

(c) Neka je $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{22}$ nilpotentna matrica. Imamo

$$A^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc+d^2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2+bc = 0 \\ b(a+d) = 0 \\ c(a+d) = 0 \\ bc+d^2 = 0 \end{cases}$$

Pretpostavimo da je $a+d \neq 0$. Tada iz druge i treće jednakosti slijedi $b = c = 0$. Uvrštavanjem u prvu i četvrtu jednakost dobivamo $a^2 = d^2 = 0$, tj. $a = d = 0$ pa $a+d = 0$. Kontradikcija, dakle, $a+d = 0$.

2. Najveći broj linearno nezavisnih vektora među zadanima jednak je rangu matrice čiji su stupci (ili retci) zadani vektori:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & \lambda^2 & 1 \\ \lambda & \lambda^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ |\cdot(-1) \\ + \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & \lambda^2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} |\cdot(-\lambda) \\ + \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda(\lambda-1) & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Razlikujemo slučajeve u ovisnosti o λ:

1° $\lambda = 1$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow r(A) = 1$$

2° $\lambda = 0$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow r(A) = 2$$

3° $\lambda \neq 0, 1$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda(\lambda-1) & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ |: \lambda(\lambda-1) \neq 0 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{\lambda} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow r(A) = 2$$

Dakle, u zadanom je skupu najveći mogući broj linearno nezavisnih vektora jednak 2 i taj broj se postiže za sve $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

3. $\vec{v} = \alpha \vec{u}_1 + \beta \vec{u}_2 + \gamma \vec{u}_3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma = 1 \\ 2\alpha + 6\beta + 7\gamma = 3 \\ \alpha + 5\beta + 8\gamma = 2 \end{cases}$$

Rješavamo dobiveni linearni sustav:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 7 & 3 \\ 1 & 5 & 8 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} |\cdot(-2) \\ + \\ + \ |\cdot(-1) \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 7 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ |\cdot(-1) \\ + \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} + \ |\cdot(-2) \\ + \\ |\cdot(-2) \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} + \\ |\cdot 3 \ \ |\cdot(-1) \\ + \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \Rightarrow \alpha = 4 \\ \Rightarrow \gamma = 1 \\ \Rightarrow \beta = -2 \end{array}$$

Dakle,

$$\vec{v} = 4\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 + \vec{u}_3$$

4. (a) Neka su $p, q \in V$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ proizvoljni. Imamo

$$(\alpha p + \beta q)(1) = \alpha \underbrace{p(1)}_{=0} + \beta \underbrace{q(1)}_{=0} = 0$$

(jer $p, q \in V$)

pa slijedi $\alpha p + \beta q \in V$, tj. V je vektorski potprostor od $\mathcal{P}_4$.

(b) Neka je $p(t) = at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e \in V$ proizvoljan. Imamo

$$\begin{aligned} p \in V &\Rightarrow p(1) = 0 \\ &\Rightarrow a+b+c+d+e = 0 \\ &\Rightarrow e = -(a+b+c+d) \end{aligned}$$

Dakle,

$$\begin{aligned} p(t) &= at^4 + bt^3 + ct^2 + dt - (a+b+c+d) \\ &= a\underbrace{(t^4-1)}_{=p_1(t)} + b\underbrace{(t^3-1)}_{=p_2(t)} + c\underbrace{(t^2-1)}_{=p_3(t)} + d\underbrace{(t-1)}_{=p_4(t)}, \qquad a,b,c,d \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Vidimo da se svaki polinom iz V može zapisati kao linearna kombinacija polinoma p_1, p_2, p_3, p_4, a budući da su ti polinomi elementi V, oni razapinju taj potprostor. Provjerimo njihovu linearnu nezavisnost:

$$\alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma p_3 + \delta p_4 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha t^4 + \beta t^3 + \gamma t^2 + \delta t - (\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0 \qquad \text{(teorem o jednakosti polinoma)}$$

Dakle, ti polinomi su i linearno nezavisni pa čine jednu bazu za V i $\dim V = 4$.

5. (a) $\boxed{\Rightarrow}$ Neka je $A: X \to Y$ injekcija i $\vec{x} \in \operatorname{Ker} A$ proizvoljan.

Zbog

$$A\vec{x} = \vec{0} = A\vec{0}$$

te injektivnosti A slijedi $\vec{x} = \vec{0}$, tj. $\operatorname{Ker} A = \{\vec{0}\}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Neka je $\operatorname{Ker} A = \{\vec{0}\}$ te neka su $\vec{x}, \vec{y} \in X$ takvi da je $A\vec{x} = A\vec{y}$.

Zbog linearnosti A

$$\vec{0} = A\vec{x} - A\vec{y} = A(\vec{x} - \vec{y}),$$

tj. $\vec{x} - \vec{y} \in \operatorname{Ker} A$ pa $\vec{x} - \vec{y} = 0$ odakle slijedi $\vec{x} = \vec{y}$.

Dakle, A je injekcija.

(b) Prema teoremu o rangu i defektu

$$r(A) + d(A) = \dim \mathbb{R}^3 = 3$$

$$\Rightarrow d(A) = 3 - r(A)$$

Prema (a) podzadatku imamo

$$\begin{aligned} A \text{ injekcija} &\Leftrightarrow \operatorname{Ker} A = \{\vec{0}\} \\ &\Leftrightarrow d(A) = 0 \\ &\Leftrightarrow 3 - r(A) = 0 \\ &\Leftrightarrow r(A) = 3 \end{aligned}$$

(c) <u>1. način</u>

Koristimo (b) podzadatak. Neka je $A(e)$ matrica od A u kanonskoj bazi, tj.

$$A(e) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Znamo da je rang ove matrice jednak rangu operatora A pa je dovoljno naći vrijednosti a za koje je rang ove matrice jednak 3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a+1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vidimo da je $r(A(e)) = 2$ za $a=-1$ te $r(A(e)) = 3$ za $a \neq -1$ pa je A injekcija za sve $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

2. način

Koristimo (a) podzadatak, tj. određujemo za koje vrijednosti a homogeni sustav $A\vec{x} = \vec{0}$ ima jedinstveno rješenje $\vec{x} = \vec{0}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{c} \text{iste transformacije} \\ \text{kao u prvom rješenju} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Za $a=-1$ je rang matrice sustava jednak 2 pa sustav ima beskonačno mnogo rješenja (koja ovise o $3-2=1$ parametru), dok u slučaju $a \neq -1$ vidimo da sustav ima jedinstveno rješenje.

Dakle, A je injekcija za sve $a \neq -1$.

6. Odredimo svojstvene vrijednosti od A:

$$\mathcal{H}_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \lambda-4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \lambda-4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1\cdot(-1) \\ + \\ + \quad 1\cdot(-1) \\ + \quad 1\cdot(-1) \\ + \quad 1\cdot(-1) \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda-4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 3-\lambda & \lambda-3 & 0 & 0 & 0 \\ 3-\lambda & 0 & \lambda-3 & 0 & 0 \\ 3-\lambda & 0 & 0 & \lambda-3 & 0 \\ 3-\lambda & 0 & 0 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix}$$

$$+\,1\cdot 1 \quad +\,1\cdot 1 \quad +\,1\cdot 1 \quad +\,1\cdot 1$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda-8 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda-3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-8)(\lambda-3)^4$$

Dakle, svojstvene vrijednosti od A su 8 i 3. Odredimo svojstveni vektor za svojstvenu vrijednost 8:

- $(8I - A)\vec{x} = \vec{0}$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} 1\cdot(-1) \quad 1\cdot(-1) \quad 1\cdot(-1) \quad 1\cdot(-1) \\ + \quad + \quad + \quad + \end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} + \quad 1\cdot 1 \\ + \quad 1\cdot 1 \\ + \quad 1\cdot 1 \end{matrix}$$

$$
\sim \left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & -4 & 0 \\
-1 & 4 & -1 & -1 & -1 & 0 \\
-1 & -1 & 4 & -1 & -1 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & 4 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

$$
\sim \left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & -4 & 0 \\
0 & 5 & 0 & 0 & -5 & 0 \\
0 & 0 & 5 & 0 & -5 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 5 & -5 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

$$
\sim \left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 5 & 0 & 0 & -5 & 0 \\
0 & 0 & 5 & 0 & -5 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 5 & -5 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
\Rightarrow x_1 = x_5 \\
\Rightarrow x_2 = x_5 \\
\Rightarrow x_3 = x_5 \\
\Rightarrow x_4 = x_5 \\
\\
\end{array}
$$

Dakle, svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti 8 je

$$
\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_5 \\ x_5 \\ x_5 \\ x_5 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_5 \in \mathbb{R}.
$$

Budući da je A simetrična matrica, ona se može dijagonalizirati (štoviše, postoji ortonormirana baza njenih svojstvenih vektora).