# HRPETINA TEORETSKIJIH ZADATAKA
# IZ MAT1

Ovaj fajl sadrži hrpetinu pitanja „teoretskije" naravi, pitanja sam uzeo iz ispita 2005-2013. godine, ne uključujući 2013./14.

Ukoliko prođete kroz ove zadatke, nemojte misliti da ste naučili sve što se tiče teorije. Ima puno izvoda i dokaza koji se nalaze u knjižicama a nisu zastupljeni među ovim zadatcima, tako da toplo preporučam da i njih što više prođete.

Naravno razumno je da dio dokaza(težih) iz knjižica se neće pojaviti na ispitu, no i te teoreme je korisno bar znati.

Nadam se da će vam ovo pomoći u učenju i sretno na ispitima. ☺

## Dobro promućkano

**1.** [2 boda] a)$\neg A \equiv (\exists x_1 \in D(f))(\exists x_2 \in D(f))(x_1 < x_2 \wedge f(x_1) \geq f(x_2))$

b) za $f(x) = \sin x$ $\neg A$ je točan sud; $f$ nije strogo rastuća funkcija;

npr. $\sin \frac{\pi}{2} > \sin \pi$.

---

**1. a)** Dokazati da je formula $(a \wedge b) \Rightarrow (a \vee b)$ identički istinita.

**b)** Zadani su predikati $P(x)$ i $Q(y)$. Služeći se de Morganovim formulama negirati sud $(\forall x)(\exists y)(P(x) \wedge Q(y))$.

**2.** Ako su preslikavanja $f : A \to B$, $g : B \to C$ bijekcije, dokazati da je $g \circ f$ bijekcija.

**3.** Matematičkom indukcijom dokazati formulu za $n$-tu potenciju $(n \in \mathbb{N})$ kompleksnog broja u trigonometrijskom obliku.

**1. a)**

| $a$ | $b$ | $a \wedge b$ | $a \vee b$ | $(a \wedge b) \Rightarrow (a \vee b)$ |
|---|---|---|---|---|
| $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ |
| $T$ | $F$ | $F$ | $T$ | $T$ |
| $F$ | $T$ | $F$ | $T$ | $T$ |
| $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | $T$ |

**b)** $(\exists x)(\forall y)(\neg P(x) \vee \neg Q(y))$.

**2. injektivnost:** $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ (jer je $f$ injekcija) $\Rightarrow g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$ (jer je $g$ injekcija) $\Rightarrow g \circ f$ je injekcija.

**surjektivnost:** neka je $z \in C \Rightarrow \exists y \in B$, $g(y) = z$ (jer je $g$ surjekcija) $\Rightarrow \exists x \in A$, $f(x) = y$ (jer je $f$ surjekcija)$\Rightarrow g(f(x)) = z$, pa je $g \circ f$ surjekcija.

**3. Baza:** za $n = 1$ imamo $z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ ✓

**Pretpostavka:** vrijedi $z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$.

**Korak indukcije:**

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= z^n z = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)) \cdot r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ &= r^{n+1}(\cos(n\varphi)\cos\varphi - \sin(n\varphi)\cos\varphi + i(\cos(n\varphi)\sin\varphi + \sin(n\varphi)\cos\varphi)) \\ &= r^{n+1}(\cos((n+1)\varphi) + i\sin((n+1)\varphi)) \ ✓ \end{aligned}$$

---

**1. [2 boda]** Neka je $f$ realna funkcija realne varijable s prirodnim područjem definicije $D(f)$. Zadan je sud

$$A \equiv (\forall x_1 \in D(f))(\forall x_2 \in D(f))(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)).$$

a) Negiraj sud $A$ (zapiši $\neg A$ bez znaka negacije).

b) Koji sud je točan, $A$ ili $\neg A$, za $f(x) = \sin x$? Obrazloži!

## Matematička indukcija

1. **[5 bodova]** (a) Iskažite načelo (princip) matematičke indukcije.

   (b) Matematičkom indukcijom dokažite da $18 | 2^{2n+1} - 6n + 16$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

   (c) Koristeći matematičku indukciju izračunajte $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^n$ za $n \in \mathbb{N}$.

1. (a) Ako je neka tvrdnja koja ovisi o prirodnom broju $n$ istinita za neki prirodan broj $n_0$, i ako iz istinitosti te tvrdnje za $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq n_0)$ slijedi da je istinita i za $n+1$, onda je ona istinita za sve $n \in \mathbb{N}$ koji su veći od $n_0$.

   (b) Tvrdnja očito vrijedi za $n = 1$. Pretpostavimo da vrijedi

$$18 \mid 2^{2n+1} - 6n + 16$$

za neki $n \geq 1$. Vrijedi

$$\begin{aligned} 2^{2(n+1)+1} - 6(n+1) + 16 &= 4 \cdot 2^{2n+1} - 6n - 6 + 16 \\ &= \left(2^{2n+1} - 6n + 16\right) + \left(3 \cdot 2^{2n+1} - 6\right) \\ &= \left(2^{2n+1} - 6n + 16\right) + 6 \cdot \left(2^{2n} - 1\right), \end{aligned}$$

pa je dovoljno dokazati tvrdnju $3 \mid 2^{2n} - 1$ za sve $n \in \mathbb{N}$, koja očito vrijedi za $n = 1$. Nadalje,

$$\begin{aligned} 2^{2(n+1)} - 1 &= 4 \cdot 2^{2n} - 1 \\ &= \left(2^{2n} - 1\right) + 3 \cdot 2^{2n}, \end{aligned}$$

iz čega matematičkom indukcijom slijedi tražena tvrdnja.

(c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Pretpostavimo da je $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$. Vrijedi

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 + 2^n \\ 0 & 2^n \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2^{n+1} - 1 \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}.$$

---

## Binomna koeficijenti i poučak

1. (2 boda)

   a) (1 bod) Napisati definicijsku formulu za binomni koeficijent $\binom{n}{k}$.

   b) (1 bod) Napisati binomnu formulu (binomni poučak).

**Rješenje:**

a) $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1}{k!)}$ i $\binom{n}{0} = 1$; alternativno: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

b) $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

---

1. [**5 bodova**] (a) Dokažite: $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$, $\forall k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$.

(b) Napišite binomnu formulu.

(c) Izračunajte $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[x^2 - \frac{(x+1)^6}{x^4 + ax^3}\right]$ u ovisnosti o realnom parametru $a$.

1. (a) $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} =$

$= \frac{kn!}{k!(n-k)!(n-k+1)} + \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{kn! + (n-k+1)n!}{k!(n-k)!(n-l+1)} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}.$

(b) $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$

(c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[x^2 - \frac{(x+1)^6}{x^4 + ax^3}\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^6 + ax^5 - (x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1)}{x^4 + ax^3} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(a-6)x^5 - 15x^4 - 20x^3 - 15x^2 - 6x - 1}{x^4 + ax^3} =$

$$\begin{cases} +\infty, & a > 6 \\ -15, & a = 6 \\ -\infty, & a < 6. \end{cases}$$

---

# Komplicirani ;) brojevi

1. [**5 bodova**] (a) (1 bod) Napišite formulu za računanje izraza $\sqrt[n]{z}$, $z \in \mathbb{C}$. Koliko različitih vrijednosti ima $\sqrt[n]{z}$?

(b) (4 boda) U skupu $\mathbb{C}$ riješite jednadžbu $z^3 + i = e^{-\ln 2 - i\frac{7\pi}{6}}$.

Z1. (a) $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

(b) $z_0 = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\cos\frac{4\pi}{9} + i\sin\frac{4\pi}{9}\right)$

$$z_1 = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\cos\frac{10\pi}{9} + i\sin\frac{10\pi}{9}\right)$$

$$z_3 = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\cos\frac{16\pi}{9} + i\sin\frac{16\pi}{9}\right)$$

*Napomena: Treba znati geometrijski interpretirati n-te korijene kompleksna broja(nacrtat)*

---

**10.** [3 boda]

(a) $z = a + ib$, $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$

(b) $z_1 = a + ib$, $z_2 = c + id \Rightarrow \sqrt{(ad+bc)^2 + (ac-bd)^2} = \sqrt{(a^2+b^2)\cdot(c^2+d^2)} \Rightarrow$
$\Rightarrow |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

(c) Nedostaje slika!

**10.** [**3 boda**]

a) Definirati apsolutnu vrijednost kompleksnog broja.

b) Izvesti formulu $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$.

c) Skicirati u kompleksnoj ravnini skup $\{z \in \mathbf{C} : 1 \leq |z - i| \leq 2\}$.

---

## Funkcije

c) Koristeći definiciju funkcije sinus hiperbolički prikažite funkciju $h(x) = \operatorname{arsh}(x)$ pomoću funkcije prirodnog logaritma ln.

c) Neka je $y = e^{\operatorname{arsn}(x)}$. Tada je $\operatorname{sh}(y) = \frac{1}{2}(y + y^{-1}) = \frac{y^{-1}}{2}(y^2 - 1)$. Kako je $\operatorname{sh}(y) = x$, to je $2xy = y^2 - 1$, tj. $y^2 - 2xy - 1 = 0$. Slijedi da je $y_{1,2} = \frac{1}{2}(2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}) = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$. Kako je $y > 0$, to uzimamo samo rješenje sa $+$, pa je $\operatorname{arsh} x = \ln(y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

---

2. [**3 boda**] (a) Napišite definiciju injektivne funkcije (injekcije).

   (b) Odredite najveći mogući realni broj $a$ takav da funkcija $f\colon [0, a] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2+2\cos(5x)$, bude injekcija. Za takav $a$ odredite sliku funkcije $f$, $Im(f)$, i nacrtajte graf te funkcije.

2. (a) Predavanja.

   (b) $a = \dfrac{\pi}{5}$, $Im(f) = [0, 4]$.

---

1. (2 boda) a) Napisati definiciju funkcije $f(x) = \operatorname{ch} x$ i izračunati do kraja vrijednost $\operatorname{ch}(\ln 2)$. (Izračunati do kraja!)

   b) Skicirati graf funkcije $y = \operatorname{ch}(x + 2) - 1$.

Rješenje: a) $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\operatorname{ch}(\ln 2) = \frac{e^{\ln 2} + e^{-\ln 2}}{2} = \frac{2 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{5}{4}$

b) Graf dodiruje $x$-os u točki $(-2, 0)$ i ide eksponencijalno prema gore u oba smjera.

2. (2 boda) Zadana je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\left(\dfrac{2 - \sin x}{2 + \sin x}\right)$. Ispitati je li ta funkcija parna, neparna ili nije ni jedno ni drugo.

Rješenje:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln\left(\frac{2 - \sin(-x)}{2 + \sin(-x)}\right) = \ln\left(\frac{2 + \sin x}{2 - \sin x}\right) \\ &= -\ln\left(\frac{2 - \sin x}{2 + \sin x}\right) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

Zaključujemo da je funkcija **neparna**.

---

4. (a) **(1 bod)** Napisati definiciju parne i definiciju neparne funkcije.

   (b) **(1 bod)** Navesti po jedan primjer parne funkcije, neparne funkcije i funkcije koja nije niti parna niti neparna.

4. (a) Funkcija $f$ je parna (neparna) ako za svaki $x \in D(f)$ je i $-x \in D(f)$ te vrijedi $f(-x) = f(x)$ ($f(-x) = -f(x)$).

   (b) Parna funkcija je npr. $\cos x$, neparna $\sin x$, a niti parna niti neparna $e^x$.

---

**1.** (a) Napisati definiciju funkcije $f(x) = \text{th}x$ s pomoću eksponencijalne funkcije i nacrtati njezin graf.

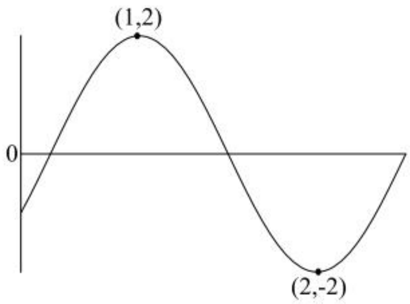
(b) Izvesti formulu za funkciju $f(x) = \text{arth}x$ kojom se arth izražava pomoću funkcije ln, te nacrtati njezin graf.

---

**1.** (a) $thx = \frac{shx}{chx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

(b) $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \Rightarrow ye^{2x} + y - e^{2x} = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} ln(\frac{1+y}{1-y}) \Rightarrow$
$arthx = \frac{1}{2} ln(\frac{1+x}{1-x}), x \in \langle -1, 1 \rangle$.

2. **[5 bodova]** (a) Odredite jednadžbu sinusoide prema slici:




(b) Zadane su funkcije $f(x) = \text{ch}(x+1) - 1$ i $g(x) = 3\,\text{arctg}(2x-1)$. Skicirajte njihove grafove i iz toga odredite domene i slike tih funkcija. Prilikom skiciranja grafova naznačite nul-točke i asimptote. ako postoje.

2. (a) Općeniti oblik sinusoide jest $y = A\sin(\omega x + \varphi)$. Iz slike zaključujemo da je amplituda $A$ jednaka 2, dok je period jednak 2 (udaljenost između označenih točaka predstavlja pola perioda) tako da je $2\pi/\omega = 2$, tj. $\omega = \pi$. Zadana sinusoida je translatirana za $1/2$ u desno u odnosu na sinusoidu $2\sin(\pi x)$ što znači da je $y = 2\sin(\pi(x - 1/2)) = 2\sin(\pi x - \pi/2)$, tj. $\varphi = \pi/2$.

   (b) Domena funkcije $f$ je cijeli $\mathbb{R}$, slika je $[0, +\infty\rangle$. $f$ ima jednu nultočku $(-1, 0)$,a nema asimptota.

   Domena funkcije $g$ je cijeli $\mathbb{R}$, slika je $\langle -\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \rangle$. $g$ ima jednu nultočku u točki $x = -\frac{1}{2}$, te ima dvije horizontalne asimptote (lijeva je $y = -\frac{3\pi}{2}$, a desna $y = \frac{3\pi}{2}$).

2. [**5 bodova**] (a) (2 boda) Napišite definicijsku formulu za funkciju tangens hiperbolički (formulu u kojoj se funkcija th izražava pomoću eksponencijalne funkcije); odredite područje definicije i sliku te funkcije, te nacrtajte njezin graf.

(b) (3 boda) Koristeći definicijsku formulu iz (a), izvedite formulu u kojoj se funkcija area tangens hiperbolički izražava pomoću logaritamske funkcije. Odredite područje definicije i sliku funkcije $f(x) = \operatorname{arth} x$. Nacrtajte njezin graf.

## Nizovi

a) Napisati definiciju limesa niza/slijeda.

a) Niz $(a_n)$ ima limes $L \in \mathbb{R}$ ako $(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(|a_n - L| < \epsilon)$. Alternativno, niz $(a_n)$ ima limes $L \in \mathbb{R}$ ako se izvan svakog okoliša broja $L$ nalazi samo konačno mnogo članova tog niza.

---

**1. [2 boda] a)** Dokaži da je niz $(a_n)$, $a_n = \frac{3^n}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$, monoton počevši od nekog člana, te da je omeđen.

**b)** Izračunaj $\lim_n \frac{3^n}{n!}$, te objasni gdje su u izvodu limesa korištena svojstva iz a).

**1.** [2 boda] a) $a_{n+1} = \frac{3}{n+1} a_n$, pa niz je strogo padajući nakon 3. člana, tj. $a_{n+1} < a_n$, za $n > 3$;

niz je omeđen odozdo s 0.

b)Kako je niz $(a_n)$ strogo padajući nakon trećeg člana i omeđen, slijedi da je $(a_n)$ konvergentan, tj. postoji $L \in \mathbb{R}$, $L = \lim_n a_n$; $\lim_n \frac{3}{n+1} a_n = 0 \cdot L = 0$, pa je $\lim_n \frac{3^n}{n!} = 0$.

---

**1.** [2 boda] Niz $(a_n)$ zadan je rekurzivno sa

$$a_1 = \sqrt{2}, \ a_{n+1} = \sqrt{2a_n}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Dokazati da je niz $(a_n)$ konvergentan i izračunati limes.

**1.** [2 boda] **Monotonost:** niz je rastući; dokaz mat. indukcijom po $n \in \mathbb{N}$;
**Ograničenost:** tvrdimo da je niz ograničen $0 < a_n < 2$; dokaz mat. indukcijom po $n \in \mathbb{N}$;
Niz je monoton i ograničen $\Rightarrow$ niz je konvergentan i $\exists L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$;
$a_{n+1} = \sqrt{2a_n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{2a_n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \sqrt{2 \lim\limits_{n\to\infty} a_n} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow L = \sqrt{2L} \Leftrightarrow L = 0$ ili $L = 2$. Slučaj $L = 0$ otpada, jer je $a_n > 0$.

1. **(2 boda)** Dokazati da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{10^n}{n!} = 0.$$

## Limesi, kontinuiranost, derivacije, integrali?

2. (3 boda)

Rješenje: a) Iskažite definiciju pojma ekvivalentnih neizmjerno malih veličina za $x \to x_0$.
b) Dokažite: ako su $f(x)$ i $g(x)$ ekvivalentne neizmjerno male veličine za $x \to x_0$, te $h(x)$ neizmjerno mala veličina za $x \to x_0$, onda je

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{h(x)}.$$

c) Izračunajte:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^3(2x)}{\ln(1+x^3)}.$$

Rješenje:

a) Za funkcije $f(x)$ i $g(x)$ definirane na nekoj okolini $x_0$ kažemo da su ekvivalentne neizmjerno male veličine za $x \to x_0$ ako vrijedi

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

b) $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}\frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{h(x)} = 1 \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{h(x)}$

c) Kako je $\sin(x) \sim x$, $\ln(1+x) \sim x$ za $x \to 0$, vrijedi da je $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^3(2x)}{\ln(1+x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{(2x)^3}{x^3} = 8$.

---

4. [**5 bodova**] (a) Koristeći teorem o sendviču, dokažite da je $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

(b) Koristeći tvrdnju pod (a), po definiciji izvedite $(\cos x)' = -\sin x$.

(c) Koristeći tvrdnju pod (b), i pravilo za derivaciju inverzne funkcije izvedite

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

---

*Izvod (ln(x))' , ovaj je drukčiji nego i knjižicima, koristi ekvivalentno male veličine i kraći je:*

3. $\ln' x = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln \frac{x+h}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h} = \left[\ln\left(1+\frac{h}{x}\right) \sim \frac{h}{x}\right] = \frac{1}{x}.$

---

4. (a) Za $x > 0$ je $\sin x < x < \tan x$, pa je $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$. Kako je $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$, po teoremu o sendviču zaključujemo da je $\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1$. S obzirom da je funkcija $f(x) = \frac{x}{\sin x}$ parna, zaključujemo da je i $\lim_{x\to 0-} \frac{\sin x}{x} = 1$.

(b) $(\cos x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2\sin\frac{2x+h}{2}\cdot\sin\frac{h}{2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2\sin\frac{2x+h}{2}\cdot\frac{h}{2}}{h}$ $= -\sin x$

(c) $(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'|_{y=\arccos x}} = \frac{1}{-\sin(\arccos x)} = \frac{1}{-\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}} =$ $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

---

a) Zadana je $f(x) = |x-1|$. Koristeći definiciju obrazložite postoji li $f'(1)$.

b) Izvedite pomoću definicije derivaciju funkcije $g(x) = e^{2x+1}$, te koristeći formulu za derivaciju inverzne funkcije izvedite derivaciju inverza od $g$.

a) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{|h|-|0|}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$, no taj limes ne postoji (nije jedinstveno određen: s lijeva je $-1$, zdesna 1), pa ne postoji derivacija u 1.

b) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{e^{2x+2h+1}-e^{2x+1}}{h} = e^{2x+1} \lim\limits_{h\to 0} \frac{e^{2h}-1}{h} = 2e^{2x+1}$. Kako je $(g^{-1})'(g(x)) = \frac{1}{g'(x)}$, to je $(g^{-1})'(g(x)) = \frac{1}{2e^{2x+1}} = \frac{1}{2g(x)}$, pa je $(g^{-1})'(y) = \frac{1}{2y}$.

---

b) Napisati pravilo za derivaciju inverzne funkcije.

(b) $(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)}$

---

(b) Zadana je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Koristeći definiciju derivacije izračunajte $f'(0)$. (U (b) dijelu smijete koristiti L'Hospitalovo pravilo.)

(b) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin h - h}{h^2} = [L'H] = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cos h - 1}{2h} = [L'H] = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-\sin h}{2} = 0.$

---

5. **[5 bodova]** (a) Koristeći definiciju derivacije, dokažite da je $(x^4)' = 4x^3$.

(b) Za koje vrijednosti parametra $a$ je pravac $y = 2x - 6$ tangenta na krivulju $y = ax^4$?

5. (a)

$$(x^4)' = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^4 - x^4}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^4 + 4hx^3 + 6h^2x^2 + 4h^3x + h^4 - x^4}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}(4x^3 + 6hx^2 + 4h^2x + h^3) = 4x^3 \ .$$

(b) Neka je $(x_0, y_0)$ točka dirališta. Budući da se nalazi na presjeku pravca i krivulje dobivamo jednadžbu:

$$ax_0^4 = 2x_0 - 6 \ ,$$

a kako je točka dirališta imamo da je koeficijent smjera pravca jednak koeficijentu smjera tangente na krivulju u točki $(x_0, y_0)$ dobivamo:

$$4ax_0^3 = 2 \ .$$

Dijeljenje tih dviju jednadžbi daje

$$\frac{x_0}{4} = x_0 - 3 \Rightarrow x_0 = 4 \ .$$

Vraćanjem u jednu od gornje dvije jednadžbe dobivamo $a = 1/128$.

---

5. [**5 bodova**]

(a) (3 boda) Odredite realne parametre $a$ i $b$ takve da funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{x^2+1}, & x \leq 1 \\ x^2 + ax + b, & x > 1 \end{cases}$$

bude neprekinuta i derivabilna na $\mathbb{R}$.

(b) (2 boda) Na segmentu $[-1, 4]$ odredite globalne ekstreme funkcije $f$ iz (a) dijela zadatka.

---

(a) Iskažite Taylorov teorem.

(a) Neka je zadana funkcija $f\colon I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$, koja u nekoj odabranoj točki $c \in I$ ima sve derivacije do reda $n+1$. Onda funkciju $f$ možemo prikazati u obliku

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + R_n(x).$$

Ostatak se može napisati u tzv. Lagrangeovom obliku:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_1)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1},$$

pri čemu je $x_1$ neka nepoznata točka koja se nalazi između točaka $x$ i $c$, tj. $x_1 \in \langle c, x\rangle$ ili $x_1 \in \langle x, c\rangle$.

---

**4.** [2 boda] a) Definirati neprekinutost funkcije u točki $x_0$.
b) Odrediti parametar $a \in \mathbb{R}$ takav da funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sin(3x)}, & x > 0 \\ a \cdot \cos(2x), & x \leq 0 \end{cases}$$

bude neprekinuta u točki $x_0 = 0$.

**6.** [2 boda] Koristeći $(\sin x)' = \cos x$ i pravilo za derivaciju inverzne funkcije, izvesti $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

**4.** [2 boda] a)Neka je $x_0 \in \mathbb{R}$. Funkcija $y = f(x)$ je neprekinuta u točki $x_0 \in D_f$ ako je $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

ili

Neka je $x_0 \in \mathbb{R}$. Funkcija $y = f(x)$ je neprekinuta u točki $x_0$ ako je $x_0 \in D_f$ i ako $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ takav da vrijedi:

$$\forall x \in D_f, \; |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

b)Uvjet: $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = f(0) = \lim\limits_{x \to 0-} f(x)$; $f(0) = a$; $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{x}{\sin(3x)} =$
$= \dfrac{1}{3} \Rightarrow a = \dfrac{1}{3}$.

**6.** [3 boda]

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)}$$

$y = \sin x, \; x = \arcsin y$

$(\arcsin y)' = \dfrac{1}{(\sin x)'} = \dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$

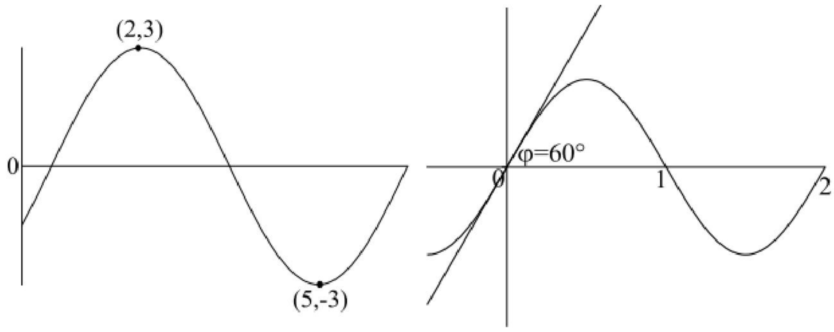
---

b) Dokazati $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$.

(b) $(fg)'(x) = \lim\limits_{h \to 0} (\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h)) + \lim\limits_{h \to 0} (\dfrac{g(x+h) - g(x)}{h} \cdot f(x)) =$
$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

*Napomena: u ispitima se pojavljivao i dokaz parcijalne integracije*

---




Slika 1: Lijevo: (a), desno: (b)

5. **[5 bodova]** Napišite jednadžbe sinusoida prema slici 1.

6. **[5 bodova]** (a) Napišite definiciju desne kose asimptote krivulje $y = f(x)$.

   (b) Ako je $y = kx+l$ desna kosa asimptota krivulje $y = f(x)$, izvedite formule za izračunavanje koeficijenata $k$ i $l$.

   (c) Odredite desnu kosu asimptotu krivulje $y = (2x+1)\operatorname{arctg} x$.

5. (a) Opća jednadžba sinusoide je $y = A\sin(\omega(x - x_0))$, pri čemu je $\omega = \frac{2\pi}{T}$, a $T$ temeljni period.
   Sa slike očitavamo da je $A = 3, \omega = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ i $x_0 = \frac{1}{2}$, pa je jednadžba sinusoide

$$y = 3\sin(\frac{\pi}{3}(x - \frac{1}{2})),$$

   odnosno

$$y = 3\sin(\frac{\pi}{3}x - \frac{\pi}{6}).$$

   (b) Imamo $y = A\sin(\pi x)$. Iz uvjeta $y'(0) = A\pi\cos 0 = A\pi = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, dobivamo da je $A = \frac{\sqrt{3}}{\pi}$ pa je jednadžba sinusoide

$$y = \frac{\sqrt{3}}{\pi}\sin(\pi x).$$

6. (a) $y = kx + l$ je desna kosa asimptota krivulje $y = f(x)$ ako je $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx - l) = 0$.

   (b) Iz definicije slijedi da je

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x) - kx - l}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} - k - \lim_{x\to+\infty}\frac{l}{x} = 0$$

odnosno $k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.
Izravno iz definicije imamo $l = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx)$.

(c) $k = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{x} \cdot \arctan x = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$

**1. način**

$l = \lim_{x\to+\infty}((2x+1)\arctan x - \pi x)$
$= \lim_{x\to+\infty}(2x\arctan x + \arctan x - \pi x)$
$= \lim_{x\to+\infty}(x(2\arctan x - \pi)) + \lim_{x\to+\infty} \arctan x$
$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2\arctan x - \pi}{\frac{1}{x}} + \frac{\pi}{2}$
$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} + \frac{\pi}{2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^2}{1+x^2} + \frac{\pi}{2} = -2 + \frac{\pi}{2}$

**2. način**

$l = \lim_{x\to+\infty} x((2+\frac{1}{x})\arctan x - \pi) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(2+\frac{1}{x})\arctan x - \pi}{\frac{1}{x}}$
$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{-1}{x^2}\arctan x + (2+\frac{1}{x})\cdot\frac{1}{1+x^2}}{\frac{-1}{x^2}}$
$= \lim_{x\to+\infty}(\arctan x) - \lim_{x\to+\infty}((2+\frac{1}{x})\cdot\frac{x^2}{x^2+1}) = \frac{\pi}{2} - 2$

$y = \pi x + \frac{\pi}{2} - 2$ je desna kosa asimptota.

---

8. (a) **(1 bod)** Iskazati Lagrangeov stavak (teorem) o srednjoj vrijednosti.
(b) **(1 bod)** Služeći se tim stavkom dokazati da vrijedi sljedeća tvrdnja: Ako je $f'(x) < 0$ na nekom otvorenom intervalu $I$, onda je $f$ na $I$ strogo padajuća, t.j. za $x_1, x_2 \in I$ i $x_1 < x_2$ je $f(x_1) > f(x_2)$.

8. (a) Neka je $f$ funkcija neprekinuta na zatvorenom intervalu $[a,b]$ i derivabilna na otvorenom intervalu $\langle a,b\rangle$. Tada postoji $c \in \langle a,b\rangle$ takav da vrijedi
$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

(b) Primijenimo Lagrangeov teorem na zatvoreni interval $[x_1, x_2]$ gdje su $x_1, x_2 \in I$ i vrijedi $x_1 < x_2$. Budući da je funkcija $f$ derivabilna na cijelom intervalu $I$ uvjeti teorema su ispunjeni. Stoga teorem kaže da postoji $c \in \langle x_1, x_2\rangle$ takav da vrijedi
$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$
Ali $f'(c) < 0$, a $x_2 - x_1 > 0$ pa je $f(x_2) - f(x_1) < 0$, odnosno $f(x_2) > f(x_1)$.

b) Odrediti točke na grafu funkcije $f(x) = \arcsin x$ u kojima je tangenta na graf funkcije $f$ paralelna sa pravcem koji prolazi točkama grafa čije su apscise $-1$ i $1$.

b) $\frac{1}{\sqrt{1-c^2}} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow c_{1,2} = \pm\sqrt{1-(\frac{2}{\pi})^2}$

*Napomena: uz teoreme srednje vrijednosti se znaju tražiti geometrijske interpretacije(slika :D)*

a) Iskažite teorem (stavak) srednje vrijednosti integralnog računa i geometrijski interpetirajte taj teorem.

b) Služeći se definicijom derivacije i teoremom srednje vrijednosti integralnog računa dokažite da za funkciju $g$, neprekinutu na $[a,b]$, za svaki $x \in \langle a,b \rangle$, vrijedi

$$\frac{d}{dx}\int_a^x g(t)\,dt = g(x).$$

c) Služeći se izvedenim pod b), dokažite Newton-Leibnizovu formulu.

Rješenje: a) Za neprekinutu funkciju $f$ na intervalu $[a,b]$ vrijedi: $\exists \xi \in [a,b], (b-a)f(\xi) = \int_a^b f(x)dx$. Geometrijska interpetacija: u području integracije neprekinute funkcije postoji točka $\xi$ za koju je ploština ispod funkcije $f$ jednaka ploštini pravokutnika čije su stranice duljine $(b-a)$ i $f(\xi)$.

b) $\frac{d}{dx}\int_a^x g(t)dx = \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^{x+h} g(t)dt - \int_a^x g(t)dt}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\int_x^{x+h} g(t)dt}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{hf(\xi_h)}{h} = f(x)$, jer je $\xi_h \in [x, x+h]$ za svaki $h > 0$, pa mora biti $\lim_{h\to 0} \xi_h = x$.

c) Definiramo $\Phi(x) = \int_a^x g(t)\,dt$. Kako je $\Phi'(x) = g(x)$, to je $\Phi$ primitivna funkcija za $g$, pa je svaka primitivna funkcija $F$ za $g$ oblika $F(x) = \Phi(x) + C$. Kako je $\Phi(a) = 0 = F(a) + C$ i $\Phi(b) = F(b) + c$, to je $F(b) - F(a) = \Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b g(t)\,dt$.

## Matrice –shaken not stirred

3. **[5 bodova]** Dokažite da vrijedi

   (a) $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ za regularne matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$.

   (b) $(\mathbf{AB})^\top = \mathbf{B}^\top\mathbf{A}^\top$ za ulančane matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$.

   (c) $(\mathbf{A}^{-1})^\top = (\mathbf{A}^\top)^{-1}$ za regularnu matricu $\mathbf{A}$.

(a) Dokazujemo da je matrica $B^{-1}A^{-1}$ obostrani inverz matrice $AB$:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I,$$
$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B(AA^{-1})B^{-1} = BIB^{-1} = BB^{-1} = I.$$

Iz toga slijedi $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(b)

$$\left[(AB)^T\right]_{ik} = [AB]_{ki} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}b_{ji} = \sum_{j=1}^{n} \left[B^T\right]_{ij} \left[A^T\right]_{jk} = \left[B^T A^T\right]_{ik}$$
$$\Rightarrow \quad (AB)^T = B^T A^T.$$

(c)

$$AA^{-1} = I \overset{T,(b)}{\Rightarrow} \left(A^{-1}\right)^T \cdot A^T = I^T = I,$$
$$A^{-1}A = I \overset{T,(b)}{\Rightarrow} A^T \cdot \left(A^{-1}\right)^T = I^T = I \;\Rightarrow\; \left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T.$$

---

**[4 boda]** (a) (2 boda) Odredite matricu $\mathbf{A}$ takvu da je $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ pri čemu su

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{bmatrix}^\mathrm{T}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_4 & x_2 & x_3 & x_1 & x_5 & x_6 \end{bmatrix}^\mathrm{T}.$$

(b) (2 boda) Neka su $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ dva rješenja linearnog sustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{mn}$. Nađite sve linearne kombinacije vektora $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ koje su također rješenje sustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Z1. a)
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) $\alpha u + (1-\alpha)v, \ \alpha \in \mathbb{R}$

---

(b) (3 boda) Ispitajte istinitost svkog od sljedećih sudova:

$X \equiv (\forall \mathbf{A} \in \mathcal{M}_n)(\forall \mathbf{B} \in \mathcal{M}_n)(\mathbf{AB} = \mathbf{0} \Rightarrow (\mathbf{A} = \mathbf{0} \vee \mathbf{B} = \mathbf{0}))$,

$Y \equiv (\forall \mathbf{A} \in \mathcal{M}_n \setminus \{\mathbf{0}\})(\exists \mathbf{B} \in \mathcal{M}_n)(\mathbf{AB} = \mathbf{I})$,

$Z \equiv (\forall \mathbf{A} \in \mathcal{M}_n)(\exists \mathbf{B} \in \mathcal{M}_n)(\mathbf{AB} = \mathbf{BA})$.

($\mathcal{M}_n$ označava skup realnih matrica reda $n$.) Obrazložite odgovore!

---

3. (2 boda) Izračunajte i dokažite matematičkom indukcijom

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Neka je $\mathbf{A}_n := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^n$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tvrdimo da je $\mathbf{A}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2n & 1 \end{bmatrix}$. Za $n = 1$ tvrdnja očito vrijedi. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve $n = 1, \ldots, k$. Promotrimo $\mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{A}_k \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Po pretpostavci indukcije je $\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2k & 1 \end{bmatrix}$. Tada je $\mathbf{A}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 2k \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 2k \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2(k+1) & 1 \end{bmatrix}$, što je i trebalo pokazati.

---

b) Iskažite Binet-Cauchyev teorem (stavak).

c) Ako je $\det \mathbf{A} = a$, gdje je $a \neq 0$, koristeći Binet-Cauchyev teorem izvedite formulu za $\det \mathbf{A}^{-1}$.

b) Za $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ kvadratne matrice reda $m$ vrijedi:

$$\det \mathbf{AB} = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}.$$

c) $1 = \det \mathbf{I} = \det \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \det A^{-1} \det \mathbf{A} = a \det A^{-1}$, pa je $\frac{1}{a} = \det A^{-1}$.

---

a) Iskažite definiciju pojma linearne nezavisnosti vektora.

b) Jesu li vektori $\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 11 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$ linearno nezavisni? Dokažite!

Rješenje:

a) Za skup vekotar $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ kažemo da je linearno nezavisan ako jednadžba $a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0$ ima jedinstveno rješenje $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.

b) Kako je $\det \begin{bmatrix} -3 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} = -3(1 \cdot (-2) - (-4) \cdot (-2)) + 2(2 \cdot (-2) - 1 \cdot 11) = 30 - 30 = 0$, vektori su zavisni.

[**2 boda**] Dokažite: ako su $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ simetrične matrice, onda je i $\mathbf{AB}+\mathbf{BA}$ simetrična matrica.

$$(\mathbf{AB}+\mathbf{BA})^\top = (\mathbf{AB})^\top + (\mathbf{BA})^\top = \mathbf{B}^\top\mathbf{A}^\top + \mathbf{A}^\top\mathbf{B}^\top = \mathbf{BA}+\mathbf{AB} = \mathbf{AB}+\mathbf{BA}$$

---

[**4 boda**] Kažemo da je kvadratna matrica ortogonalna ako vrijedi $AA^\top = A^\top A = I$.

(a) (1 bod) Ako je $A \in \mathcal{M}_n$ ortogonalna, mora li biti regularna? Objasnite svoju tvrdnju.

(b) (3 boda) Neka je $A \in \mathcal{M}_n$ ortogonalna matrica. Dokažite da je onda i $A^{-1}$ ortogonalna.

(a) iz same definicije, radi jedinstvenosti inverza, $A^{-1} = A^T$

ILI $\det A = \det A^T$ + Binet Cauchyjev tm.

$1 = \det(AA^T) = \det A \cdot \det A^T = (\det A)^2 \Rightarrow \det A \neq 0$

(b) $A^{-1} = A^T$

$B = A^{-1}$

$BB^T = A^{-1}(A^{-1})^T = A^{-1}A = I$ ; $B^TB = (A^{-1})^T A^{-1} = (A^T)^{-1} A^{-1} = AA^{-1} = I$

(iskoristili smo $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, dokaz vidi na predavanjima)

---

## Svojstveni vektori

4. [**5 bodova**] (a) Napišite definiciju svojstvene vrijednosti kvadratne matrice i dokažite da ako je $\lambda$ svojstvena vrijednost matrice, onda je $\lambda$ ujedno i nultočka njezinog karakterističnog polinoma.

4. (a) Skalar $\lambda$ je svojstvena vrijednost kvadratne matrice $A$ ako postoji vektor $v \neq 0$ za kojeg vrijedi $Av = \lambda v$. Tada je $(\lambda I - A)\,v = 0$, pa zbog $v \neq 0$ vidimo da je matrica $\lambda I - A$ singularna. Zato je $\kappa(\lambda) = \det(\lambda I - A) = 0$.

---

(b) (1 bod) Neka je $\vec{\mathbf{x}}$ svojstveni vektor, a $\lambda$ pripadna svojstvena vrijednost matrice $\mathbf{A}$. Dokažite da je tada $\vec{\mathbf{x}}$ svojstveni vektor matrice $\mathbf{A}^2$ s pripadnom svojstvenom vrijednošću $\lambda^2$.

(b)

$$\mathbf{A}^2\mathbf{x} = \mathbf{AAx} = \mathbf{A}\lambda\mathbf{x} = \lambda\mathbf{Ax} = \lambda^2\mathbf{x}.$$

4. [**5 bodova**]

(a) (1 bod) Pokažite da $\lambda = 0$ ne može biti svojstvena vrijednost regularne matrice $A$.

(b) (2 boda) Dokažite tvrdnju: $\lambda$ je svojstvena vrijednost regularne matrice $A$ ako i samo ako je $\frac{1}{\lambda}$ svojstvena vrijednost matrice $A^{-1}$.

## Determinante

**6. a)** Koje su elementarne transformacije kvadratne matrice i kako one utječu na vrijednost determinante?

**6. a)** 1. Zamjena dvaju redaka (determinanta mijenja predznak),

2. množenje nekog retka skalarom $\alpha$ različitim od nule (determinanta se množi sa $\alpha$),

3. dodavanje nekog retka nekom drugom retku (determinanta se ne mijenja).

a) (1 bod) Dokazati: ako determinanta ima dva ista retka, tada je ona jednaka nuli.

b) (1 bod) Koristeći tvrdnju pod a), dokazati: ako nekom retku determinante dodamo neki drugi redak pomnožen skalarom, onda se vrijednost determinante neće promijeniti.

a) Očito je $\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = 0$. To je baza indukcije. Za korak indukcije pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve determinante reda $n$. Neka determinanta reda $n+1$ ima $i$-ti i $j$-ti jendak redak, $i \neq j$. Tada razvojem po $k$-tom retku (različitom od $i$ i $j$) dobivamo $n+1$ determinantu $n$-tog retka, svaku sa parom jednakih redaka, pa su sve te determinante jednake nuli, pa je i determinanta reda $n+1$ jednaka nuli.

b) $$\begin{vmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_i \\ \vdots \\ \vec{a}_j + \lambda\vec{a}_i \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_i \\ \vdots \\ \vec{a}_j \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_i \\ \vdots \\ \vec{a}_i \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_i \\ \vdots \\ \vec{a}_j \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{vmatrix}.$$

3. **[3 boda]** (a) (2 boda) Matematičkom indukcijom dokažite: ako determinanta ima dva ista retka, tada je ona jednaka nuli.

(b) (1 bod) Koristeći tvrdnju pod (a), dokažite: ako nekom retku determinante dodamo neki drugi redak pomnožen skalarom, onda se vrijednost determinante neće promijeniti.

3. (a) Knjižica 3. stranica 20.

(b) Knjižica 3. stranica 23.

---

4. **[2 boda]** Ako za kvadratnu matricu $\mathbf{A}$ reda $n$ vrijedi $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}^\top$, koje sve vrijednosti može poprimiti $\det \mathbf{A}$? Obrazložite!

4.

$$(\det \mathbf{A})^2 = \det \mathbf{A}^2 = \det \mathbf{A}^\top = \det \mathbf{A}$$

$$\Rightarrow (\det \mathbf{A})^2 = \det \mathbf{A} \Rightarrow \det \mathbf{A} \in \{0, 1\}$$

Nadalje, kako nul-matrica reda $n$ ima determinantu 0, a jedinična matrica reda $n$ ima determinantu 1 (za njih vrijedi svojstvo $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}^\top$), možemo zaključiti da je skup svih vrijednosti koje determinanta matrice $\mathbf{A}$ može poprimiti zaista jednak $\{0, 1\}$.

## Inverz i regularna matrica

---

a) Napisati definiciju inverzne matrice kvadratne matrice $\mathbf{A}$.

Pod a), matrica $\mathbf{A}^{-1}$ je inverzna matrica kvadratne matrice $\mathbf{A}$ ako je

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

---

(a) (2 boda) Odredite inverz matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Po definiciji provjerite da se zaista radi o inverzu.

(b) (3 boda) Dokažite da je inverz regularne simetrične matrice također simetrična matrica.

---

5. (2 boda) Neka su $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ kvadratne matrice takve da je $\mathbf{AB} + \mathbf{A} = \mathbf{I}$.

   a) (1 bod) Dokazati da je $\mathbf{A}$ regularna.

   b) (1 bod) Izračunati $\mathbf{A}^{-1}$ ako je $\mathbf{B} = (b_{ij}) \in \mathscr{M}_3$ zadana općim elementom $b_{ij} = i + j$.

a) $\mathbf{I} = \mathbf{AB} + \mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{I})$, pa je $\mathbf{A}$ regularna i $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B} + \mathbf{I}$.

b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

**1. način:** $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B} + \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}$.

**2. način:** $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{I}) = I$ povlači $\mathbf{A} = (\mathbf{B} + \mathbf{I})^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}^{-1}$, pa je $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

---

**5.** [**2 boda**] a) Ako je $\mathbf{A}$ regularna matrica, dokaži da je $\det \mathbf{A} \neq 0$.

b) Neka su $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ regularne matrice. Dokaži da je $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$.

**5.** [2 boda] a) $\mathbf{A}$ je regularna matrica, tj. postoji matrica $\mathbf{A}^{-1}$ takva da je $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$. Po Binet-Cauchyevom teoremu je $\det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{A}^{-1} =$

$= \det \mathbf{I} = 1$, pa mora biti $\det \mathbf{A} \neq 0$.

b) $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^{-1})\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$,

$(\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}) \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{B}^{-1} \cdot (\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I}$.

---

[**4 boda**] (a) Napišite i izvedite formulu u kojoj se inverz umnoška matrica $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ i $\mathbf{C}$ izražava pomoću inverza tih matrica.

(a) $(\mathbf{ABC})^{-1} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$, jer je
$\mathbf{ABCC}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$.