MATEMATIKA 3R

TEORIJA

FER, Zagreb

Marko NUFC

1. FOURIEROV RED

1. Periodične funkcije

Periodične funkcije

Kažemo da je $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ **periodična funkcija**, ako postoji $T > 0$ takav da za svaki x iz domene funkcije f vrijedi

$$f(x) = f(x+T). \tag{1.4}$$

Broj T se naziva **period** od f. Najmanji period (ako postoji) nazivamo **osnovni** (ili **temeljni**) period.

2. Ortogonalnost

Ortogonalnost trigonometrijskih funkcija

Za funkcije f, $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ kažemo da su **ortogonalne** na intervalu $[a, b]$ ako vrijedi

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0 \tag{1.6}$$

3. Računanje koeficijenata trigonometrijskog Fourierovog reda:

Računanje koeficijenata trigonometrijskog Fourierovog reda. Relacije (1.7) omogućavaju nam odrediti koeficijente Fourierovog reda. Neka je

$$f(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}(a_m \cos mx + b_m \sin mx) \tag{1.8}$$

Tada integriranjem dobivamo

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = a_0\pi + \sum_{m=1}^{\infty}\left[a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\,\mathrm{d}x + b_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\,\mathrm{d}x\right] = a_0\pi$$

pri čemu smo zamijenili poredak sumiranja i integriranja i iskoristili relacije (1.7). Analogno, množenjem relacije (1.8) s $\cos nx$ i potom integriranjem, uz pomoć relacija (1.7) dobivamo

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,\mathrm{d}x$$
$$+ \sum_{m=1}^{\infty}\left[a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\,\mathrm{d}x + b_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx\,\mathrm{d}x\right] = a_n\pi$$

Na sličan način imamo i

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,\mathrm{d}x$$
$$+ \sum_{m=1}^{\infty}\left[a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx\,\mathrm{d}x + b_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\,\mathrm{d}x\right] = b_n\pi$$

5. Fourierov red:

Fourierov red

Fourierov red zadane funkcije f je red

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{1.9}$$

kojemu se koeficijenti računaju formulama

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\, d\xi, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \cos n\xi \, d\xi, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \sin n\xi \, d\xi. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Koeficijenti a_0, a_1, b_1, a_2, $b_2, \ldots$ nazivaju se **Fourierovi koeficijenti** od f, dok se pribrojnici u formuli (1.9) zovu **harmonici**.
Pišemo $f(x) \sim S(x)$.

6. Dirichletovi uvjeti

Dirichletovi uvjeti

Kažemo da f zadovoljava **Dirichletove uvjete** na intervalu $[a, b]$, ako vrijedi

1) f je po dijelovima neprekinuta i njezini su prekidi prve vrste,
2) f je monotona ili ima najviše konačan broj strogih ekstrema.

7. Konvergencija Fourierovog reda:

Konvergencija Fourierovog reda

Teorem 2. *Neka je f po dijelovima glatka periodična funkcija s periodom 2π koja zadovoljava Dirichletove uvjete. Tada njezin Fourierov red konvergira u svakoj točki $x \in [-\pi, \pi]$ i za sumu $S(x)$ reda vrijedi:*

(i) $S(x) = f(x)$, *ako je f neprekinuta u točki x*
(ii) $S(x) = \frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)]$, *ako je x točka prekida za f.*

8. Računanje koeficijenata periodičnog Fourierovog reda:

Koeficijente računamo formulama

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{L\xi}{\pi}\right)\mathrm{d}\xi = \begin{bmatrix} L\xi/\pi = x \\ \mathrm{d}\xi = \pi/L\,\mathrm{d}x \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{d}x \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\xi)\,\cos n\xi\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{L\xi}{\pi}\right)\,\cos n\xi\,\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\cos\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\xi)\,\sin n\xi\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{L\xi}{\pi}\right)\,\sin n\xi\,\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

9. Trigonometrijski Fourierov red

Trigonometrijski Fourierov red

Trigonometrijski Fourierov red za funkciju f periodičnu s periodom $T = b - a$ glasi:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi x}{T} + b_n\sin\frac{2n\pi x}{T}\right). \tag{1.13}$$

Koeficijenti se računaju formulama

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{T}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \\
a_n &= \frac{2}{T}\int_a^b f(x)\,\cos\frac{2n\pi x}{T}\,\mathrm{d}x, \\
b_n &= \frac{2}{T}\int_a^b f(x)\,\sin\frac{2n\pi x}{T}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{1.14}
$$

10. Fourierov red parnih i neparnih funkcija

Fourierov red parnih i neparnih funkcija

1. Ako je $f(x) = f(-x)$ za svaki x, tj. f parna funkcija, tada je $b_n = 0$ za svaki n, jer je odgovarajuća podintegralna funkcija u formuli (1.12) neparna. Njezin Fourierov red glasi

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}. \tag{1.15}$$

Koeficijenti uz kosinus funkcije računaju se formulama

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \, \mathrm{d}x, \qquad n \geqslant 0. \tag{1.16}$$

2. Ako je $f(x) = -f(x)$ za svaki x, tj. ako je f neparna funkcija, tada zbog istih razloga vrijedi $a_n = 0$ za svaki n. Fourierov red glasi

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}. \tag{1.17}$$

a koeficijenti se računaju formulama

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} \, \mathrm{d}x, \qquad n \geqslant 1. \tag{1.18}$$

Kažemo da smo funkciju f razvili u Fourierov red po kosinus, odnosno sinus funkcijama.

11. Spektar periodične funkcije

Diskretni spektar periodične funkcije

Trigonometrijski Fourierov red može se napisati u obliku

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 x + b_n \sin n\omega_0 x) = \pm \frac{1}{2} c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\omega_0 x + \varphi_n)$$

gdje je, po formulama (1.3)

$$c_0 = |a_0|,$$

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2},$$

$$\operatorname{tg} \varphi_n = \frac{a_n}{b_n}.$$

c_n je **amplituda** n–tog harmonika, a φ_n **fazni pomak** n–tog harmonika. Niz (c_n) naziva se **(diskretni) amplitudni spektar** a (φ_n) **fazni spektar** funkcije f. Nizove $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ zovemo **(diskretni) sinusni**, odnosno **kosinusni spektar** funkcije f.

12. Deriviranje Fourierovog reda

Deriviranje Fourierovog reda

Teorem 6. *Pretpostavimo da je periodična funkcija f perioda 2π neprekinuta na $\mathbf{R}$ i ima sljedeći Fourierov prikaz*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

Ako f' zadovoljava Dirichletove uvjete, onda se ona može prikazati u obliku

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot n \cdot \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty}(-a_n) \cdot n \cdot \sin nx.$$

13. Parsevalova jednakost

Funkcije $\{\frac{1}{2}, \sin(n\omega_0 x + \varphi_n), n \in \mathbf{N}\}$ su također ortogonalne na intervalu $[a,b]$ duljine T. Lako se provjerava

$$\int_a^b \sin^2(n\omega_0 x + \varphi_n)\mathrm{d}x = \frac{T}{2},$$

$$\int_a^b \sin(n\omega_0 x + \varphi_n)\sin(m\omega_0 x + \varphi_m)\mathrm{d}x = 0, \qquad \text{za } n \neq m,$$

$$\int_a^b \tfrac{1}{2} \cdot \sin(n\omega_0 x + \varphi_n)\mathrm{d}x = 0.$$

Sada imamo

$$\begin{aligned}
\int_a^b |f(x)|^2 \mathrm{d}x &= \int_a^b \left(\tfrac{1}{2}c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\omega_0 x + \varphi_n)\right)^2 \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}c_0^2 \int_a^b \mathrm{d}x + 2\sum_{n=1}^{\infty} c_0 c_n \int_a^b \tfrac{1}{2} \cdot \sin(n\omega_0 x + \varphi_n)\mathrm{d}x \\
&\quad + \sum_{n,m=1}^{\infty} c_n c_m \int_a^b \sin(n\omega_0 x + \varphi_n)\sin(m\omega_0 x + \varphi_m)\mathrm{d}x \\
&= \frac{T}{4}c_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \int_a^b \sin^2(n\omega_0 x + \varphi_n)\mathrm{d}x. \\
&= \frac{T}{4}c_0^2 + \frac{T}{2}\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \\
&= \frac{T}{4}a_0^2 + \frac{T}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2).
\end{aligned}$$

Parsevalova jednakost

Za Fourierove koeficijente $a_0, a_1, a_2 \dots$ i $b_1, b_2, \dots$ vrijedi **Parsevalova jednakost**

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \frac{2}{T}\int_a^b |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x. \tag{1.23}$$

2. FOURIEROV INTEGRAL

1. Računanje koeficijenata Fourierovog inegrala

Neka $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ zadovoljava Dirichletove uvjete na svakom konačnom intervalu. Za svaki $L > 0$, čim je x točka neprekidnosti, vrijedi

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right), \quad -L < x < L,$$

a koeficijenti se računaju formulama

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(\xi) \, \mathrm{d}\xi . \\ a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(\xi) \cos \frac{n\pi\xi}{L} \, \mathrm{d}\xi . \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(\xi) \sin \frac{n\pi\xi}{L} \, \mathrm{d}\xi . \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(\xi) \, \mathrm{d}\xi + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(\xi) \cos \frac{n\pi}{L} \mathrm{d}\xi \cdot \cos \frac{n\pi x}{L} \right. \\ &\qquad \left. + \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(\xi) \sin \frac{n\pi}{L} \mathrm{d}\xi \cdot \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(\xi) \, \mathrm{d}\xi + \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-L}^{L} f(\xi) \cos \frac{n\pi}{L} (x - \xi) \, \mathrm{d}\xi . \end{aligned}$$

Pustimo da $L \to \infty$. Ako je ispunjeno $\int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi)| \, \mathrm{d}\xi < \infty$, prvi član će težiti ka nuli. Stavimo nadalje

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{L}, \qquad \Delta\lambda_n = \lambda_{n+1} - \lambda_n = \frac{\pi}{L} .$$

Tada ćemo imati

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{L \to \infty} \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta\lambda_n \int_{-L}^{L} f(\xi) \cos \lambda_n (x - \xi) \, \mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \lambda (x - \xi) \, \mathrm{d}\xi \end{aligned}$$

Ova se formula naziva **Fourierova integralna formula**, a integral s desne strane **Fourierov integral**.

2. Fourierov integral

Fourierov integral

Teorem 1. *Ako je $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ po dijelovima glatka na svakom konačnom intervalu i apsolutno integrabilna, tada postoji njezin Fourierov integral i vrijedi*

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \lambda (x - \xi) \, \mathrm{d}\xi \\ &\quad = \begin{cases} f(x), & \text{ako je } f \text{ neprekinuta u } x \\ \frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)], & \text{ako je } x \text{ točka prekida za } f . \end{cases} \end{aligned} \tag{2.2}$$

3. Fourierov integral i spektar

Pretpostavimo da funkcija f zadovoljava uvjete ovog teorema. Označimo

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ako je } f \text{ neprekinuta u } x, \\ \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)], & \text{ako je } f \text{ prekinuta u } x. \end{cases}$$

Tad za svaki x vrijedi, prema (2.2):

$$\begin{aligned} \widetilde{f}(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\lambda \int_{-\infty}^\infty f(\xi)\left[\cos\lambda x \cos\lambda\xi + \sin\lambda x \sin\lambda\xi\right] \mathrm{d}\xi \\ &= \int_0^\infty \Big[\Big(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(\xi)\, \cos\lambda\xi\, \mathrm{d}\xi\Big) \cos\lambda x \\ &\qquad + \Big(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(\xi)\, \sin\lambda\xi\, \mathrm{d}\xi\Big) \sin\lambda x\Big]\, d\lambda\,, \end{aligned}$$

tj,

$$\widetilde{f}(x) = \int_0^\infty \left[A(\lambda)\, \cos\lambda x + B(\lambda)\, \sin\lambda x\right] d\lambda.$$

Fourierov integral i spektar

Integral

$$\widetilde{f}(x) := \int_0^\infty \Big(A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\Big)\, d\lambda \tag{2.4}$$

naziva se **Fourierov integral** funkcije f. Funkcije $\lambda \mapsto A(\lambda)$, $\lambda \mapsto B(\lambda)$ nazivaju se **kosinusni**, odnosno **sinusni spektar** od f i računaju se formulama

$$A(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(\xi)\, \cos\lambda\xi\, \mathrm{d}\xi\,, \tag{2.5}$$

$$B(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(\xi)\, \sin\lambda\xi\, \mathrm{d}\xi\,. \tag{2.6}$$

4. Amplitudni spektar

Kosinusni i sinusni spektar određuju **amplitudni spektar** $\mathrm{am}(\lambda)$ funkcije f,

$$\mathrm{am}(\lambda) := \sqrt{A(\lambda)^2 + B(\lambda)^2}. \tag{2.7}$$

5. Spektralna funkcija

Spektralna funkcija

Teorem 2. *Fourierov integral može se zapisati u kompleksnom obliku. U točkama neprekinutosti funkcije f vrijedi:*

$$f(x) = \int_0^\infty e^{i\lambda x} F(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda\,. \tag{2.10}$$

Ovdje je

$$F(\lambda) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\xi} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,. \tag{2.11}$$

spektralna funkcija *od f, ili, kratko,* **spektar** *od f.*

6. Fourierova transformacija

Fourierova transformacija

Funkcija $\hat{f}$ definirana formulom

$$\hat{f}(\lambda) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\xi} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi \tag{2.14}$$

naziva se **Fourierov transformat** funkcije f. Obrnuta veza dana je formulom

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}\hat{f}(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda\,, \tag{2.15}$$

Preslikavanje koje funkciji f pridružuje funkciju $\hat{f}$ naziva se **Fourierova transformacija**.

3. LAPLACEOVA TRANSFORMACIJA

1. Laplaceov transformat

Laplaceov transformat

Neka je f funkcija realnog argumenta t, definirana za $t > 0$ i s vrijednostima u skupu realnih ili kompleksnih brojeva. Neka je s realni ili kompleksni parametar. **Laplaceov transformat** funkcije f je funkcija F definirana s

$$F(s) := \int_0^\infty e^{-st} f(t) \mathrm{d}t, \tag{3.1}$$

za svaki s za koji ovaj nepravi integral konvergira.

2. Apsolutna vrijednost kompleksnog broja

Apsolutna vrijednost kompleksnog broja e^z

Za kompleksni broj $z = x + iy$ vrijedi

$$|e^z| = e^x = e^{\mathrm{Re}\, z}.$$

Posebno je, za realni broj α

$$|e^{i\alpha}| = 1.$$

3. Linearnost Laplaceove transformacije

Linearnost Laplaceove transformacije

Teorem 1. *Ako je $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s)$, $g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet G(s)$, tada vrijedi*

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \alpha F(s) + \beta G(s). \tag{3.2}$$

Dokaz. Vrijedi

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(\alpha f + \beta g) &= \int_0^\infty e^{-st}(\alpha f(t) + \beta g(t))\mathrm{d}t \\
&= \alpha \int_0^\infty e^{-st} f(t)\mathrm{d}t + \beta \int_0^\infty e^{-st} g(t)\mathrm{d}t \\
&= \alpha \mathscr{L}(f) + \beta \mathscr{L}(g). \quad \triangleleft
\end{aligned}$$

4. Step funkcija

Njezin Laplaceov transformat iznosi

$$\mathscr{L}(u(t)) = \int_0^\infty e^{-st}\mathrm{d}t = \frac{e^{-st}}{-s}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s}, \quad s > 0.$$

5. Eskponencijalna funkcija

Eksponencijalna funkcija $f(t)=e^{\alpha t}$ ima Laplaceov transformat

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty e^{-st}e^{\alpha t}\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{(\alpha-s)t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{e^{(\alpha-s)t}}{\alpha-s}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s-\alpha}, \qquad s>\alpha \end{aligned}$$

Identična formula vrijedi i u slučaju kad je α imaginaran broj. Tako npr. imamo

$$e^{i\omega t} \circ\!\!-\!\!\bullet \int_0^\infty e^{-st}e^{i\omega t}\mathrm{d}t = \frac{e^{(i\omega-s)t}}{i\omega-s}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s-i\omega} + \lim_{t\to\infty}\frac{e^{(i\omega-s)t}}{i\omega-s}.$$

Apsolutna vrijednost funkcije u brojniku ovog izraza je

$$|e^{(i\omega-s)t}| = |e^{i\omega t}||e^{-st}| = |e^{-st}|$$

pa je limes brojnika jednak nuli za svaki $s>0$.

Slika eksponencijalne funkcije

Za svaki realni ili kompleksni broj α vrijedi

$$e^{\alpha t} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s-\alpha}.$$

6. Trigonometrijske funkcije

$$\operatorname{sh}\omega t = \frac{1}{2}e^{\omega t} - \frac{1}{2}e^{-\omega t} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-\omega} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+\omega} = \frac{\omega}{s^2-\omega^2}, \qquad s>|\omega|.$$

Na identičan način dobivamo

$$\operatorname{ch}\omega t \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{s}{s^2-\omega^2}, \qquad s>|\omega|.$$

Sliku trigonometrijskih funkcija možemo dobiti iz relacije

$$e^{i\omega t} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s-i\omega}.$$

Naime, lijeva se strana može napisati u obliku

$$e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t.$$

Zato je slika funkcije kosinus jednaka realnom dijelu izraza $\frac{1}{s-i\omega}$, a slika funkcije sinus jednaka je imaginarnom dijelu tog izraza. Vrijedi

$$\frac{1}{s-i\omega} = \frac{s}{s^2+\omega^2} + i\frac{\omega}{s^2+\omega^2}.$$

Time smo dobili sljedeće formule:

Slike trigonometrijskih i hiperboličnih funkcija

$$\sin\omega t \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{\omega}{s^2+\omega^2}, \qquad \cos\omega t \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{s}{s^2+\omega^2},$$

$$\operatorname{sh}\omega t \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{\omega}{s^2-\omega^2}, \qquad \operatorname{ch}\omega t \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{s}{s^2-\omega^2}.$$

7. Polinomi

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} t^n \mathrm{d}t = \frac{t^n e^{-st}}{-s} \Bigg|_0^\infty + \frac{n}{s} \int_0^\infty e^{-st} t^{n-1} \mathrm{d}t$$

Za $s > 0$ prvi je član jednak nuli. Time smo dobili **rekurzivnu formulu**:

$$\mathscr{L}(t^n) = \frac{n}{s} \mathscr{L}(t^{n-1}).$$

Iteriranjem te formule dobivamo

$$\mathscr{L}(t^n) = \frac{n}{s} \mathscr{L}(t^{n-1}) = \ldots = \frac{n!}{s^n} \mathscr{L}(1) = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

Slika potencije t^n

Vrijedi

$$1 \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s}, \tag{3.3}$$

$$t \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s^2}, \tag{3.4}$$

$$t^n \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{n!}{s^{n+1}}, \qquad n \in \mathbf{N}. \tag{3.5}$$

8. Original

Original

Za funkciju f ćemo reći da je **original**, ako ona zadovoljava uvjete

1. $f(t) = 0$ za $t < 0$
2. f je na svakom konačnom intervalu po dijelovima neprekidna
3. f je eksponencijalnog rasta, tj. postoje konstante $M > 0$ i $a > 0$ takve da za sve $t > 0$ vrijedi

$$|f(t)| \leqslant Me^{at}. \tag{3.6}$$

Infimum svih konstanti a za koje vrijedi nejednakost (3.6) naziva se **eksponent rasta** funkcije f i označava s a_0.

9. Teorem – eksponent rasta

Teorem 2. *Laplaceov integral $\int_0^\infty e^{-st} f(t)\mathrm{d}t$ konvergira u području $s > a_0$, gdje je a_0 eksponent rasta funkcije f. Ako je $s_0 > a_0$, tada u području $s \geqslant s_0$ taj integral konvergira jednoliko.*

DOKAZ. Neka je $s > a_0$. Tada postoje konstante a i M takve da je $s > a > a_0$ i $|f(t)| \leqslant Me^{at}$. Zato je

$$\begin{aligned}\int_0^\infty |e^{-st} f(t)|\mathrm{d}t &\leqslant \int_0^\infty |e^{-st}| \cdot |f(t)|\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_0^\infty e^{-ts} M e^{at} \mathrm{d}t = \frac{M}{s-a}.\end{aligned}$$

Dakle, $\int_0^\infty e^{-st} f(t)\mathrm{d}t$ konvergira (apsolutno) ako je $s > a_0$. Ako je pak $s \geqslant s_0 > a_0$, tada isti a vrijedi za sve s; $a_0 < a < s_0$:

$$\int_0^\infty |e^{-st} f(t)|\mathrm{d}t \leqslant \frac{M}{s-a} \leqslant \frac{M}{s_0 - a}$$

SVOJSTVA LAPLACEOVE TRANSFORMACIJE

1. Množenje varijable konstantom

Neka je $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s)$ i $a>0$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(f(at)) &= \int_0^\infty e^{-st} f(at)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty e^{-su/a} f(u)\frac{1}{u}du = \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-\frac{s}{a}u} f(u)du\end{aligned}$$

Množenje varijable konstantom

Teorem 4. *Ako je $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s)$, onda vrijedi*

$$f(at) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right). \tag{3.7}$$

$$F(bs) \bullet\!\!-\!\!\circ \frac{1}{b}f\left(\frac{t}{b}\right). \tag{3.8}$$

2. Teorem o prigušenju

Funkciju $e^{-at}f(t)$ zovemo **prigušenjem**[1] funkcije f i a bilo kakav realni (ili kompleksni) broj. Neka je $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s)$. Račun daje

$$\mathscr{L}(e^{-at}f(t)) = \int_0^\infty e^{-st}e^{-at}f(t)\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-(s+a)t}f(t)\mathrm{d}t = F(s+a)$$

Teorem o prigušenju originala

Teorem 5. *Prigušenju u gornjem području odgovara pomak ulijevo u donjem području:*

$$e^{-at}f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s+a) \tag{3.9}$$

3. Teorem o pomaku

Neka je $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s)$ i $a>0$. Tada imamo

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(f(t-a)u(t-a)) &= \int_0^\infty e^{-st}f(t-a)u(t-a)\mathrm{d}t = \int_a^\infty e^{-st}f(t-a)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty e^{-s(u+a)}f(u)du = e^{-sa}\int_0^\infty e^{-su}f(u)du\end{aligned}$$

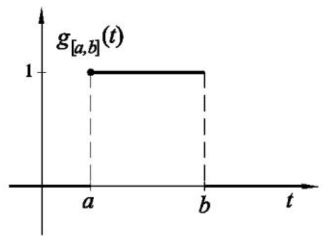
Teorem o pomaku originala

Teorem 6. *Neka je $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s)$ i $a>0$. Pomaku originala udesno odgovara prigušenje u donjem području:*

$$f(t-a)u(t-a) \circ\!\!-\!\!\bullet e^{-as}F(s). \tag{3.10}$$

4. Gate funkcija

$$g_{[a,b]}(t) = \begin{cases} 1, & a \leqslant t \leqslant b, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$



Sl. 3.3. Gate funkcija

Gate funkciju[1] možemo prikazati kao razliku step funkcija:

$$g_{[a,b]}(t) = u(t-a) - u(t-b), \qquad 0 < a < b.$$

Zato je njezin transformat

$$g_{[a,b]}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{e^{-sa}}{s} - \frac{e^{-sb}}{s}.$$

5. Deriviranje originala

Teorem o deriviranju originala

Teorem 7. *Neka je funkcija f n-puta diferencijabilna i original. Tada vrijedi*

$$f'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet sF(s) - f(0), \tag{3.11}$$

i općenito

$$f^{(n)}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0). \tag{3.12}$$

Dokaz. Izvedimo prvu formulu.

$$\mathscr{L}(f'(t)) = \int_0^\infty e^{-st} f'(t) \mathrm{d}t = e^{-st} f(t) \Big|_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} f(t) \mathrm{d}t.$$

Ako je a_0 eksponent rasta od f, tada za $s > a_0$ integral $\int_0^\infty e^{-st} f(t) \mathrm{d}t$ konvergira i zato je nužno $\lim_{t\to\infty} e^{-st} f(t) = 0$. Tako dobivamo

$$f'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet sF(s) - f(0).$$

Uzastopnom primjenom ove formule dobivamo:

$$\begin{aligned} f''(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet s[sF(s) - f(0)] - f'(0) \\ &= s^2 F(s) - sf(0) - f'(0). \end{aligned}$$

Indukcijom slijedi formula (3.12).

6. Deriviranje slike

Neka je $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s)$. Derivirajmo funkciju $F(s)$, koristeći se formulom o deriviranju integrala po njegovom parametru:

$$F'(s) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \int_0^\infty e^{-st} f(t) \mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-st} (-t) f(t) \mathrm{d}t \bullet\!\!-\!\!\circ (-t) f(t).$$

Ovu formulu možemo poopćiti i na derivaciju reda n. Tako dobivamo:

Teorem o deriviranju slike

Teorem 8. *Deriviranju u donjem području odgovara množenje s $-t$ u gornjem području:*

$$(-t) f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F'(s). \tag{3.13}$$

Općenito:

$$(-t)^n f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F^{(n)}(s), \tag{3.14}$$

t.j.

$$t^n f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet (-1)^n F^{(n)}(s), \tag{3.15}$$

7. Integriranje slike

Navedimo sad svojstvo dualno onom iz prethodnog teorema.

Teorem o integriranju slike

Teorem 9. *Neka je* $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s)$. *Ako je* $\frac{f(t)}{t}$ *original, onda vrijedi*

$$\frac{f(t)}{t} \circ\!\!-\!\!\bullet \int_s^\infty F(s)\mathrm{d}s \tag{3.16}$$

Dokaz. Označimo s $\Phi(s)$ sliku funkcije $\frac{f(t)}{t}$. Za svaki Laplaceov transformat vrijedi $\lim_{s\to\infty}\Phi(s) = 0$. Primijenimo sad teorem o deriviranju slike:

$$t \cdot \frac{f(t)}{t} \circ\!\!-\!\!\bullet -\Phi(s)'$$

pa je $\Phi'(s) = -F(s)$. Zato se Φ može dobiti određenim integralom:

$$\Phi(s) = -\int_{s_0}^{s} F(s)\mathrm{d}s + C = \int_s^{s_0} F(s)\mathrm{d}s + C.$$

Stavimo li $s = s_0$, slijedi $C = \Phi(s_0)$. Pustimo sad da $s_0 \to \infty$:

$$\Phi(s) = \lim_{s_0\to\infty}\int_s^{s_0} F(s)\mathrm{d}s + \lim_{s_0\to\infty}\Phi(s_0) = \int_s^\infty F(s)\mathrm{d}s.$$

8. Integriranje originala

Teorem o integriranju originala

Teorem 10. *Ako je* $f(t)$ *original, tada je i*

$$\varphi(t) := \int_0^t f(\tau)d\tau$$

također original i vrijedi

$$\int_0^t f(\tau)d\tau \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{F(s)}{s}. \tag{3.17}$$

Dokaz. Provjerimo eksponencijalni rast:

$$|\varphi(t)| \leqslant \int_0^t |f(\tau)|d\tau \leqslant \int_0^t Me^{a\tau}d\tau = \frac{M}{a}(e^{at}-1) < \frac{M}{a}e^{at}.$$

Zato postoji $\Phi(s) = \mathscr{L}(\varphi(t))$. Primijenimo teorem o deriviranju originala:

$$f(t) = \varphi'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet s\Phi(s) - \varphi(0) = s\Phi(s) = F(s).$$

Odavde slijedi tvrdnja.

9. Slika periodične funkcije

Slika periodične funkcije

Teorem 11. *Slika periodične funkcije f s periodom duljine T računa se formulom*

$$F(s) = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) \mathrm{d}t. \tag{3.18}$$

10. Inverzna transformacija

Za računanje originala $f(t)$ iz poznate slike $F(s)$, moramo odrediti **inverznu transformaciju**

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}(F(s)).$$

11. Dokaz konvolucija

Neka su f_1 i f_2 originali. Funkcija $f_1 * f_2$ definirana s

$$(f_1 * f_2)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \tag{3.21}$$

naziva se **konvolucija** funkcija f_1 i f_2. Jer su f_1 i f_2 originali, podintegralna funkcija se poništava van intervala $[0, t]$. Zato možemo pisati

$$(f_1 * f_2)(t) := \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

i ovu formulu obično koristimo pri računanju konvolucije u zadacima i primjerima. Konvoluciju ćemo uglavnom zapisivati na način $f_1(t) * f_2(t)$, iako je ovaj zapis ponešto neprecizan.

Pokažimo da je konvolucija $f_1 * f_2$ dvaju originala također original:

$$\begin{aligned} |(f_1 * f_2)(t)| &\leqslant \int_0^t |f_1(\tau)||f_2(t-\tau)| d\tau \\ &\leqslant M_1 M_2 \int_0^t e^{a_1 \tau} e^{a_2(t-\tau)} d\tau \\ &= \frac{M_1 M_2}{a_1 - a_2}(e^{a_1 t} - e^{a_2 t}) \leqslant \frac{2 M_1 M_2}{a_1 - a_2} e^{at}, \end{aligned}$$

tu smo označili $a := \max(a_1, a_2)$.

Odredimo u što se preslikava konvolucija:

$$\begin{aligned} f_1(t) * f_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet & \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} (f_1 * f_2)(t) \mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} \mathrm{d}t \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s\tau} f_1(\tau) d\tau \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s(t-\tau)} f_2(t-\tau) \mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s\tau} f_1(\tau) d\tau \int_{-\infty}^{\infty} e^{-su} f_2(u) \mathrm{d}u \\ &= F_1(s) F_2(s). \end{aligned}$$

11. Teorem o konvoluciji

Teorem o konvoluciji

Konvolucija originala f_1 i f_2 definirana je integralom:

$$(f_1 * f_2)(t) := \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{3.22}$$

Teorem 13. *Konvoluciji u gornjem području odgovara umnožak slika u donjem:*

$$f_1(t) * f_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ F_1(s)\,F_2(s) \tag{3.23}$$

Iz formule (3.23) slijede neka svojstva konvolucije (koja se, dakako, mogu dokazati i direktno po definiciji):

asocijativnost

$$f_1 * (f_2 * f_3) = (f_1 * f_2) * f_3.$$

komutativnost

$$f_1 * f_2 = f_2 * f_1.$$

4. SKUPOVI

1. Algebra skupova

Algebra skupova. Kažemo da su skupovi A i B *jednaki* ako vrijedi $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$. U tom slučaju pišemo $A = B$.

2. Pravila skupova

Teorem 1. *Neka su $A, B, C \in 2^X$. Vrijede ova pravila algebre skupova:*

(1) idempotentnost operacija unije i presjeka: $A \cup A = A$, $A \cap A = A$;

(2) asocijativnost: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

(3) komutativnost: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$;

(4) distributivnost: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

(5) **DeMorganove formule**: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

(6) $A \cup \emptyset = A$, $A \cap X = A$;

(7) $A \cup X = X$, $A \cap \emptyset = \emptyset$;

(8) komplementiranost: $A \cup \overline{A} = X$, $A \cap \overline{A} = \emptyset$;

(9) involutivnost komplementiranja: $\overline{\overline{A}} = A$.

3. Kartezijev produkt

DEFINICIJA. Ako su $A_1, \ldots, A_n$ neprazni skupovi, onda definiramo **Kartezijev produkt**

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$$

kao skup svih poredanih n–teraca $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ takvih da je $a_k \in A_k$ za sve $k = 1, \ldots, n$. Taj se skup označava kraće sa $\prod_{k=1}^{n} A_k$.

4. Kardinalni broj

DEFINICIJA. Za neprazan skup A kažemo da je **konačan** ako postoji prirodan broj n i bijekcija $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to A$. Broj n zovemo **kardinalni broj skupa** A i označavamo ga sa $|A|$. Kažemo još da A ima n elemenata. U tom slučaju skup A je moguće zapisati kao $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, gdje je $a_k := f(k)$, $k = 1, \ldots, n$. I prazan skup $\emptyset$ smatramo konačnim skupom s kardinalnim brojem 0.

5. Beskonačni skup

Za skup A kažemo da je **beskonačan** ako nije konačan. Postoje dvije osnovne vrste beskonačnih skupova:

(i) za beskonačan skup A kažemo da je **prebrojiv** ako se skup njegovih elemenata može *poredati u beskonačan slijed*: $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$.

(ii) za beskonačan skup A kažemo da je **neprebrojiv** ako se ne može poredati u slijed.

Jasno je da je $\mathbf{N}$ prebrojiv skup. Vidjet ćemo kasnije da je čak i skup racionalnih brojeva $\mathbf{Q}$ prebrojiv, kao i to da je skup $\mathbf{R}$ neprebrojiv.

6. Propozicija 1. – Skupovi A i B isto broj elemenata

Propozicija 1. *Neka su A i B konačni skupovi koji imaju isti broj elemenata, tj. $|A| = |B|$. Funkcija $f : A \to B$ je injektivna onda i samo onda ako je surjektivna.*

DOKAZ. Neka je f injektivna funkcija. Onda skupovi A i $f(A)$ imaju isti broj elemenata, dotično $|A| = |f(A)|$. Zbog $|A| = |B|$ je onda $|f(A)| = |B|$. Odavde zajedno sa $f(A) \subseteq B$, i jer je B konačan skup, slijedi $f(A) = B$, dakle f je surjekcija.

Obratno, neka je f surjekcija. Onda je $|A| \geqslant |f(A)| = |B|$, pa zbog $|A| = |B|$ imamo $|A| = |f(A)|$. Budući da je A konačan skup, to znači da je f injekcija. ☺

7. Ekvipotentan skup

DEFINICIJA. Kažemo da je skup A **ekvipotentan** (jednakobrojan) sa skupom B ako postoji bijekcija $f : A \to B$.

Ekvipotentnost je zapravo jedna relacija među skupovima, o kojima će više riječi biti u Poglavlju 2.

Teorem 2. *Označimo svojstvo da je skup A ekvipotentan sa skupom B oznakom $A \sim B$. Ekvipotentnost ima ova temeljna svojstva:*
(i) refleksivnost: $A \sim A$ za svaki skup A;
(ii) simetričnost: ako je $A \sim B$, onda je i $B \sim A$;
(iii) tranzitivnost: ako je $A \sim B$ i $B \sim C$, onda je $A \sim C$.

DOKAZ. (i) Identitet $\mathrm{id} : A \to A$, $\mathrm{id}(x) = x$, je bijekcija; (ii) ako je $f : A \to B$ bijekcija, onda je i inverzna funkcija $f^{-1} : B \to A$ također bijekcija; (iii) Ako su funkcije $f : A \to B$ i $g : B \to C$ bijekcije, onda je i njihova kompozicija $g \circ f : A \to C$ također bijekcija. ☺

8. A i B isti kardinalni broj, alef nula, kontinuum

DEFINICIJA. Za skupove A i B kažemo da imaju isti **kardinalni broj** ako su ekvipotentni, dotično ako postoji bijekcija s jednog na drugi. Pišemo $|A| = |B|$.

Ako je zadan konačan skup $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, onda je njegov kardinalni broj jednak n: $|A| = n$.

DEFINICIJA. Ako je skup A prebrojiv, onda njegov kardinalni broj označavamo sa $\aleph_0$ i zovemo "**alef nula**" (prema prvom slovu $\aleph$ "alef" hebrejskoga pisma), i pišemo $|A| = \aleph_0$. Kardinalni broj skupa $\mathbf{R}$ realnih brojeva označavamo sa c i zovemo **kontinuum**. Pišemo $|\mathbf{R}| = c$.

9. Svaki beskonačan podskup prebrojiva skupa je prebrojiv

Teorem 3. *Svaki beskonačan podskup prebrojiva skupa je prebrojiv.*

DOKAZ. Umjesto skupa $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ dovoljno je tvrdnju dokazati za $\mathbf{N} = \{1, 2, \dots\}$. Neka je dakle $A = \mathbf{N}$ i B beskonačan podskup od $\mathbf{N}$. Odaberimo najmanji prirodni broj b_1 u B. Zatim iz B izbacimo b_1 i gledamo najmanji element b_2 u preostalom skupu $B \setminus \{b_1\}$. Neka je zatim b_3 najmanji prirodni broj u $B \setminus \{b_1, b_2\}$, itd. Nije teško provjeriti da je funkcija $f : \mathbf{N} \to B$ definirana sa $f(k) = b_k$ bijekcija, pa je B prebrojiv skup. ☺

10. A beskonačan skup, B njegov konačan podskup. Onda su skupovi A i A\K ekvipotentni

Teorem 4. *Neka je A beskonačan skup i K njegov konačan podskup. Onda su skupovi A i $A \setminus K$ ekvipotentni, tj. $|A| = |A \setminus K|$.*

DOKAZ. Neka je $K = \{a_1, \dots, a_k\}$. Budući da je A beskonačan skup, onda postoji prebrojiv podskup S, koji sadrži K, tj. $S = \{a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots\}$. Funkcija $f : A \to A \setminus K$ definirana kao identitet na $A \setminus S$ i kao pomak za k na slijedu S:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{za } x \in A \setminus S, \\ a_{i+k}, & \text{za } x = a_i \in S, \end{cases}$$

je očevidno bijekcija. ☺

11. Prebrojiv skup

Teorem 1. *Skup $A = \mathbf{N} \cup \mathbf{N}^2 \cup \mathbf{N}^3 \cup \dots$ je prebrojiv. Drugim riječima, skup svih konačnih sljedova prirodnih brojeva je prebrojiv.*

DOKAZ. Odaberimo slijed prostih brojeva $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, $p_5 = 11$ itd. Skup prostih brojeva je beskonačan. Definirajmo funkciju $f : A \to \mathbf{N}$ sa

$$f(n_1, \dots, n_k) = p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k}.$$

Dokažimo da je ova funkcija injekcija. Neka je $f(n_1, \dots, n_k) = f(m_1, \dots, m_j)$, tj. $p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k} = p_1^{m_1} \dots p_j^{m_j}$. Budući da imamo jednakost brojeva koji su rastavljeni na proste faktore, prema *Osnovnom teoremu aritmetike* slijedi da je $k = j$ i $n_i = m_i$ za sve $i = 1, \dots, k$. Time je injektivnost od f dokazana.

Slika preslikavanja f je očevidno beskonačan skup (već za "jednočlane" sljedove n je skup pripadnih vrijednosti oblika $f(n) = 2^n$, dakle beskonačan skup). Tvrdnja slijedi iz Primjedbe 1.3.1. ☺

12. Skupovi cijelih brojeva Z i racionalnih Q su prebrojivi

Teorem 2. *Skupovi cijelih brojeva $\mathbf{Z}$ i racionalnih brojeva $\mathbf{Q}$ su prebrojivi.*

DOKAZ. (i) Najprije ćemo skup svih pozitivnih cijelih brojeva preslikati bijektivno u skup svih parnih prirodnih brojeva, a zatim negativne cijele brojeve i nulu bijektivno u neparne prirodne brojeve. To radi funkcija $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{N}$ koja pozitivnim cijelim brojevima pridružuje parne prirodne brojeve, a nuli i negativnim cijelim brojevima pridružuje neparne prirodne brojeve:

$$f(k) = \begin{cases} 2k & \text{za } k > 0, \\ 2|k| + 1 & \text{za } k \leqslant 0, \end{cases}$$

Ona je očevidno bijekcija.

(ii) Dovoljno je pronaći injektivnu funkciju $f : \mathbf{Q} \to \mathbf{N}$, vidi Teorem 1.3.3. Možemo ju lako konstruirati kodiranjem. Svaki racionalan broj x je određen s tri podatka: predznakom p ($+1$ ili -1), brojnikom $m \in \mathbf{N}_0$ i nazivnikom $n \in \mathbf{N}$. Pretpostavit ćemo da su brojnik i nazivnik skraćeni do kraja (tj. bez zajedničkog djelitelja > 1). Funkcija $f : \mathbf{Q} \to \mathbf{N}$ definirana sa $f(p\frac{m}{n}) = 2^{p+1}3^m5^n$ je injektivna, što se dobiva odmah iz Osnovnog teorema aritmetike. Naime ako je $f(p_1\frac{m_1}{n_1}) = f(p_2\frac{m_2}{n_2})$, onda je $2^{p_1+1}3^{m_1}5^{n_1} = 2^{p_2+1}3^{m_2}5^{n_2}$, dakle $p_1 + 1 = p_2 + 1$, $m_1 = m_2$, $n_1 = n_2$, dotično $p_1\frac{m_1}{n_1} = p_2\frac{m_2}{n_2}$. ☺

13. Neprebrojiv skup

Teorem 1. (Georg Cantor) *Skup* $\mathbf{R}$ *je neprebrojiv, tj. nije ekvipotentan sa skupom* $\mathbf{N}$. *Drugim riječima vrijedi* $\aleph_0 < c$, *tj. skup realnih brojeva ne može se poredati u slijed.*

DOKAZ. (Cantorov dijagonalni postupak) Pretpostavimo suprotno, tj. da je skup $\mathbf{R}$ prebrojiv. Već smo vidjeli da je $\mathbf{R}$ ekvipotentan s intervalom $\langle 0, 1]$, pa se onda i skup

$\langle 0, 1]$ može poredati u slijed: $\langle 0, 1] = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Prikažimo ove brojeve u decimalnom zapisu. Taj prikaz nije jednoznačan, jer se npr. broj s konačnim decimalnim prikazom 0.31 može pisati i u obliku beskonačnog decimalnog prikaza $0.30999\ldots$. Za svaki broj iz $\langle 0, 1]$ rabit ćemo, radi jednoznačnosti, njegov beskonačan decimalni prikaz. Onda vrijedi

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.\boldsymbol{a_{11}}a_{12}a_{13}\ldots \\ x_2 &= 0.a_{21}\boldsymbol{a_{22}}a_{23}\ldots \\ x_3 &= 0.a_{31}a_{32}\boldsymbol{a_{33}}\ldots, \end{aligned}$$

gdje su a_{ij} znamenke između 0 i 9. Pogledajmo sada slijed znamenaka a_{11}, a_{22}, a_{33} itd. na "dijagonali" u gornjem decimalnom prikazu. Odaberimo slijed znamenaka b_n iz skupa $\{1, \ldots, 9\}$ na ovaj način: znamenka b_1 neka je odabrana tako da bude različita od a_{11}, b_2 različita od a_{22} itd. Onda je broj $b := 0.b_1b_2b_3\ldots$ različit od x_1 (ne podudaraju se u prvoj decimali), isto tako $b \neq x_2$ (ne podudaraju se u drugoj decimali), itd. Stoga $b \notin \{x_1, x_2, x_3\ldots\} = \langle 0, 1]$. To je kontradikcija, jer decimalni prikaz od b pokazuje da je $b \in \langle 0, 1]$. ☺

14. Algebarski broj

DEFINICIJA. Za realan broj a kažemo da je **algebarski broj** ako postoji polinom $P(x)$ s cjelobrojnim koeficijentima koji nisu svi 0, takav da je $P(a) = 0$.

15. Skup svih algebarskih brojeva je (samo) prebrojiv

Propozicija 2. *Skup svih algebarskih brojeva je (samo) prebrojiv.*

DOKAZ. Svakom polinomu s cjelobrojnim koeficijentima možemo pridružiti konačan slijed njegovih cjelobrojnih koeficijenata. Budući da je to pridruživanje injektivno, i skup konačnih sljedova cijelih brojeva prebrojiv (po Teoremu 1.4.1), onda je i skup svih polinoma s cjelobrojnim koeficijentima prebrojiv, tj. možemo ga poredati u slijed: $P_1, P_2, P_3, \ldots$ Svakom od tih polinoma pripada konačno mnogo kompleksnih nultočaka (najviše onoliko koliki je stupanj pripadnog polinoma; Gaussov *osnovni teorem algebre*). Prebrojivost skupa svih tih nultočaka (algebarskih brojeva) može se pokazati "nadovezivanjem". Npr. ako je P_1 polinom četvrtog stupnja s nul-točkama z_{11}, z_{12}, z_{13}, z_{14}, onda im pridružimo prirodne brojeve $1, 2, 3, 4$, ako je P_2 polinom desetog stupnja s nultočkama $z_{21}z_{22}\ldots z_{2,10}$, pridružujemo im brojeve $5, 6, \ldots 14$, itd. ☺

5. BINARNE RELACIJE

1. Binarna relacija

DEFINICIJA. **Binarna relacija** na skupu X je bilo koji neprazan podskup $\rho \subseteq X \times X$. Kažemo da su elementi x i y *u relaciji* ρ (ili x je u relaciji s y) ako je $(x, y) \in \rho$. U tom slučaju pišemo $x \rho y$.

DEFINICIJA. Za binarnu relaciju ρ na X kažemo da je

(i) **refleksivna** ako vrijedi $(\forall x \in X)\, x \rho x$;
(ii) **simetrična** ako vrijedi $(\forall x, y \in X)(x \rho y \Rightarrow y \rho x)$;
(iii) **tranzitivna** ako vrijedi $(\forall x, y, z \in X)(x \rho y \wedge y \rho z \Rightarrow x \rho z)$.

2. Relacija ekvivalencije

DEFINICIJA. Binarna relacija $\rho \subseteq X \times X$ zove se **relacija ekvivalencije** ako je refleksivna, simetrična i tranzitivna, tj. ako za sve x, y i z u X vrijedi:

(a) $x \rho x$ (refleksivnost),
(b) iz $x \rho y$ slijedi $y \rho x$ (simetričnost),
(c) iz $x \rho y$ i $y \rho z$ slijedi $x \rho z$ (tranzitivnost).

3. Kongruentnost po modulu

DEFINICIJA. Kažemo da su cijeli brojevi a i b **kongruentni po modulu** n (ili modulo n), $n \in \mathbf{N}$, ako je razlika $a - b$ djeljiva sa n, tj. $n \mid a - b$. U tom slučaju pišemo

$$a \equiv b \pmod{n},$$

i čitamo "a je kongruentan b po modulu (modulo) n". To je isto što i reći da je $a - b \in n\mathbf{Z} = \{0, n, -n, 2n, -2n, \ldots\}$. Nije teško vidjeti da su a i b kongruentni po modulu n onda i samo onda ako a i b pri dijeljenju s n daju isti ostatak.

4. Kongruentnost je relacije ekvivalencije na skupu svih cijelih brojeva Z

Propozicija 1. *Kongruencija po modulu n je relacija ekvivalencije na skupu svih cijelih brojeva $\mathbf{Z}$:*

(i) refleksivnost: $x \equiv x \pmod{n}$;
(ii) simetričnost: ako je $x \equiv y \pmod{n}$, *onda je* $y \equiv x \pmod{n}$;
(iii) tranzitivnost: ako je $x \equiv y \pmod{n}$ *i* $y \equiv z \pmod{n}$, *onda je* $x \equiv z \pmod{n}$.

DOKAZ. (i) Broj n dijeli $x - x = 0$; (ii) ako n dijeli $x - y$ onda n dijeli i broj $-(x-y) = y-x$; (iii) ako n dijeli $x-y$ i $y-z$, onda n dijeli i $(x-y)+(y-z) = x-z$.
☺

5. Razred ekvivalencije

DEFINICIJA. Neka je ρ relacija ekvivalencije na X. **Razred (klasa) ekvivalencije** $[x]$ elementa $x \in X$ je skup svih elemenata iz X koji su u relaciji s x. Dakle $[x]$ je podskup od X definiran sa

$$[x] = \{y \in X : y \rho x\}.$$

Zbog $x \rho x$ je uvijek $x \in [x]$. Bilo koji element y iz $[x]$ zove se *reprezentant razreda* $[x]$.

6. Teorem o relaciji ekvivalencije

Teorem 1. *Neka je ρ relacija ekvivalencije na X. Onda za sve $x, y \in X$ vrijedi ili $[x] = [y]$ ili $[x] \cap [y] = \emptyset$. Pritom je $x \rho y$ onda i samo onda ako je $[x] = [y]$.*

DOKAZ. Pretpostavimo da je $[x] \cap [y] \neq \emptyset$. Trebamo dokazati da je $[x] = [y]$. Ako postoji $z \in X$, $z \in [x] \cap [y]$, onda je $x \rho z$ i $z \rho y$. Zbog tranzitivnosti dobivamo da je $x \rho y$, tj. $x \in [y]$. Prema tome je opet zbog tranzitivnosti $[x] \subseteq [y]$. Na isti način se pokazuje i $y \in [x]$, tj. $[y] \subseteq [x]$. Dakle $[x] = [y]$. ☺

7. Particija

DEFINICIJA. Kažemo da familija podskupova $\{A_i\}_{i \in I}$ od X čini **particiju** (disjunktni rastav) skupa X ako vrijedi

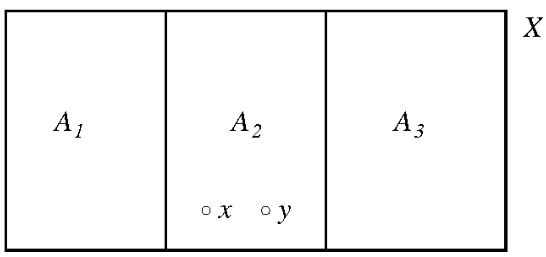
(i) $X = \cup_{i \in I} A_i$,
(ii) $A_i \cap A_j = \emptyset$ za sve $i, j \in I$, $i \neq j$, tj. familija podskupova je disjunktna.

Ponekad ćemo i sam prikaz skupa $X = \cup_{i \in I} A_i$ kao disjunktne unije podskupova A_i zvati particijom od X.

8. Teorem o particiji

Teorem 2. *Neka je $\{A_i\}_{i \in I}$ particija skupa X. Definirajmo relaciju ρ na skupu X tako da je $x \rho y$ onda i samo onda ako x i y pripadaju istom skupu iz particije, tj. postoji $i \in I$ tako da je $x, y \in A_i$. Onda je ρ relacija ekvivalencije. Pripadni razredi ekvivalencije podudaraju se sa skupovima A_i.*

DOKAZ. Tvrdnja je očevidna.



Sl. 2.3. Relacija ekvivalencije određena particijom: $x \rho y$.

9. Kvocijentni skup

DEFINICIJA. Ako je ρ relacija ekvivalencije na skupu X, onda skup svih pripadnih razreda ekvivalencije zovemo **kvocjentni skup** od X s obzirom na relaciju ρ i označavamo sa $X/_\rho$:

$$X/_\rho = \{[x]\}_{x \in X}$$

Propozicija 3. *Kvocjentni skup na skupu cijelih brojeva po relaciji kongruencije $\equiv$ modulo n jednak je sljedećem n-članom skupu:*

$$\mathbf{Z}/_{\equiv} = \{[0], [1], \ldots, [n-1]\}$$

Taj skup zove se **kvocjentni skup ostataka modulo** n*, ili skup razreda ostataka pri dijeljenju sa* n*. Razredi ekvivalencije izgledaju ovako:*

$$\begin{aligned}
[0] &= \{qn : q \in \mathbf{Z}\} \\
[1] &= \{qn + 1 : q \in \mathbf{Z}\} \\
&\vdots \\
[n-1] &= \{qn + (n-1) : q \in \mathbf{Z}\}.
\end{aligned}$$

Razred $[r]$, gdje je $r \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, sadrži skup svih onih cijelih brojeva koji dijeljenjem sa n daju ostatak jednak r, tj. brojeve oblika $qn + r$, $q \in \mathbf{Z}$. Korisno je definirati skup $n\mathbf{Z}$ svih cjelobrojnih višekratnika broja n sa $n\mathbf{Z} = \{kn : k \in \mathbf{Z}\}$. Onda particiju (rastav) skupa cijelih brojeva u Propoziciji 3 možemo pisati i ovako:

$$\mathbf{Z} = n\mathbf{Z} \cup \{n\mathbf{Z} + 1\} \cup \ldots \cup \{n\mathbf{Z} + (n-1)\}.$$

Primijetimo da su dva broja $x, y \in \mathbf{Z}$ u relaciji, tj. $[x] = [y]$, onda i samo onda ako je $x - y \in n\mathbf{Z}$. Na pr. budući da je $(-1) - (n-1) = -n \in n\mathbf{Z}$, onda je $[-1] = [n-1]$, i slično $[-2] = [n-2]$ itd.

Za $n = 2$ imamo $\mathbf{Z}/_{\equiv} = \{[0], [1]\}$, dotično $\mathbf{Z} = [0] \cup [1]$, pri čemu je $[0] = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$ skup svih parnih cijelih brojeva, a $[1] = \{\ldots, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\}$ skup svih neparnih. Ovdje je na pr. $[-1] = [1]$.

6. UVOD U KOMBINATORIKU

1. Produktno pravilo

Teorem 2. (Produktno pravilo) *Neka su $A_1, \ldots, A_n$ neprazni skupovi s konačno mnogo elemenata. Onda je*

$$|A_1 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \ldots |A_n|, \qquad (*)$$

ili kraće $|\prod_{k=1}^{n} A_k| = \prod_{k=1}^{n} |A_k|$.

DOKAZ. Rabit ćemo matematičku indukciju po n. Za $n = 1$ tvrdnja je istinita: $|A_1| = |A_1|$ (baza indukcije).

Prepostavimo da tvrdnja $(*)$ vrijedi za neki prirodan broj n (induktivna pretpostavka). Dokažimo da onda vrijedi i za $n+1$, tj. $|A_1 \times \ldots \times A_n \times A_{n+1}| = |A_1| \ldots |A_n| \cdot |A_{n+1}|$ (induktivni korak).

Očevidno Kartezijev produkt $A_1 \times \ldots \times A_n \times A_{n+1}$ možemo poistovjetiti s Kartezijevim produktom dvaju skupova $A_1 \times \ldots \times A_n$ i A_{n+1}, tj. sa $(A_1 \times \ldots \times A_n) \times A_{n+1}$. Doista, svaki poredani $n+1$-terac $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ možemo poistovjetiti sa poredanim dvojcem $\big((x_1, \ldots, x_n), x_{n+1}\big)$ elementa $(x_1, \ldots, x_n)$ iz $A_1 \times \ldots \times A_n$ i x_{n+1} iz A_n. Prema prethodnoj propoziciji je onda $|(A_1 \times \ldots \times A_n) \times A_{n+1}| = |A_1 \times \ldots \times A_n| \cdot |A_{n+1}|$. Tvrdnja slijedi odmah iz induktivne prepostavke, jer je onda izraz na desnoj strani jednak $(|A_1| \cdot \ldots \cdot |A_n|) \cdot |A_{n+1}| = \prod_{k=1}^{n+1} |A_k|$. ☺

2. Teorem o ukupno m^n elemenata

Teorem 3. *Neka su A i B konačni skupovi, tako da prvi ima n elemenata a drugi m. Onda svih funkcija $f : A \to B$ ima ukupno m^n, tj. vrijedi $|B^A| = m^n$.*

DOKAZ. Bilo koja funkcija $f : A \to B$ može vrijednost $f(a_1)$ poprimiti na $|B| = m$ načina, $f(a_2)$ također, itd. do $f(a_n)$. Prema produktnom pravilu onda funkciju f možemo zadati na $m \cdot m \ldots m = m^n$ načina, tj. $|B^A| = m^n$. ☺

3. Teorem o broju poredanih n-teraca je 2^n

Korolar 4. *Broj poredanih n–teraca sastavljenih od 0 i 1 (ili neka druga dva različita elementa) jednak je 2^n.*

DOKAZ. Tvrdnja slijedi neposredno iz prethodnog teorema uz $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ i $B = \{0, 1\}$. ☺

4. Teorem I X konačnom skupu od n elemenata. Ima ukupno $|2^X|=2^n$ podskupova

Teorem 5. *Neka je X konačan skup od n elemenata. Onda on ima ukupna 2^n podskupova, tj. vrijedi $|2^X| = 2^n$.*

DOKAZ. a) Neka je $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ Dokažimo da postoji bijekcija iz partitivnog skupa 2^X na skup $\{0, 1\}^n$ svih poredanih n–teraca nula i jedinica. Definirajmo $F : 2^X \to \{0, 1\}^n$ *kodiranjem* podskupa $A \in 2^X$ skupa X na sljedeći način. Ako je $A = \emptyset$ stavljamo $F(A) = (0, \ldots, 0)$. Ako je $A \neq \emptyset$, onda neka je $F(A)$ n–terac u kojem jedinice dolaze na k–tom mjestu u n–tercu onda i samo onda ako je $x_k \in A$ (a inače nula). Na pr. za $A = \{x_1, x_3, x_4\}$ stavljamo $F(A) = (1, 0, 1, 1, 0, \ldots, 0)$. Vrijednost $F(A)$ je n–terac koji predstavlja kôd skupa A.

Funkcija F je očevidno injektivna, jer ako su $A, B \in 2^X$ i $F(A) = F(B)$ onda je $A = B$. Funkcija je surjektivna jer za svaki n–terac iz $\{0, 1\}^n$ možemo očitati skup A koji je n–tercem kodiran (ako je na k-tom mjestu jedinica, onda je $x_k \in A$, a ako je nula onda $x_k \notin A$).

b) Budući da je $F : 2^X \to \{0, 1\}^n$ bijekcija, onda je

$$|2^X| = |\{0, 1\}^n| = 2^n,$$

gdje smo u predzadnjoj jednakosti rabili Teorem 2. ☺

5. Propozicija – svih Booleovih funkcija u varijabli n je 2^{2n}

Propozicija 6. *Neka je zadan prirodan broj n. Svih Booleovih funkcija n varijabla, $F : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$, ima ukupno 2^{2^n}.*

DOKAZ. Označimo $B = \{0, 1\}$. Onda je $F \in B^A$. Tražimo dakle $|B^A|$, gdje je $A = B^n$. Zbog Teorema 2 je $|A| = 2^n$. Iz Teorema 5 dobivamo da je $|B^A| = |B|^{|A|} = 2^{2^n}$. ☺

6. Varijacije bez ponavljanja

Teorem 1. *Broj varijacija reda $k \leqslant n$ skupa od n elemenata, tj. broj poredanih k-teraca različitih elemenata iz n-članog skupa, jednak je*

$$n(n-1)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Ukupan broj permutacija n-članog skupa jednak je $n!$.

DOKAZ. Ako smo u nekom k-tercu na prvo mjesto stavili neki od n elemenata, onda na drugo mjesto možemo staviti bilo koji od preostalih $n-1$ elemenata, na treće bilo koji od preostalih $n-2$, itd., na zadnje bilo koji od preostalih $n-k+1$. Prema produktnom pravilu onda imamo ukupno $n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$ varijacija bez ponavljanja reda k. Odavde za $k = n$ dobivamo odmah i broj permutacija. ☺

7. Kombinacije bez ponavljanja

Teorem 2. *Broj k-članih podskupova n-članog skupa (dotično broj kombinacija bez ponavljanja reda k, $k \leqslant n$) jednak je*

$$\binom{n}{k} := \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}.$$

DOKAZ. Prema prethodnom stavku svih *poredanih* k-teraca ima $n(n-1)\dots(n-k+1)$. Neka je $(a_1,\dots,a_k)$ neki takav k-terac. Svaka od njegovih $k!$ permutacija definira isti skup $\{a_1,\dots a_k\}$. To znači da skup od ukupno $n(n-1)\dots(n-k+1)$ poredanih k-teraca možemo grupirati u množine od po $k!$ varijacija od kojih svaka određuje isti skup. Dakle ukupan broj k-članih podskupova iznosi $\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$. ☺

Propozicija 3. *Za sve $n,k \in \mathbf{N}$ $k \leqslant n$ vrijedi* $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

DOKAZ. 1) Prvi način. Tvrdnju je lako dokazati algebarski:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{n-k}{n} + \frac{k}{n}\right)$$
$$= \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

2) Dokažimo istu tvrdnju na drugi način - kombinatorički. Učvrstimo jedan od n elemenata (recimo prvi) u n-članom skupu. Izbor k od ukupno n elemenata možemo provesti na jedan od sljedeća dva načina:

a) ili odabiremo k elemenata *različitih* od prvog, a to je isto što i odabrati k elemenata među preostalih $n-1$ elemenata; to možemo učiniti na $\binom{n-1}{k}$ načina;

b) ili odabiremo k elemenata tako da je među njima i prvi. Tome očevidno odgovara zapravo odabir $k-1$ elemenata među preostalih $n-1$ elemenata, što se može izvršiti na $\binom{n-1}{k-1}$ načina.

3) U Odjeljku 3.6 o funkcijama izvodnicama vidjeti i treći, vrlo jednostavan dokaz ove tvrdnje. (vidi Primjer 3.6.5). ☺

8. Permutacije s ponavljanjem

Teorem 1. *Broj permutacija n-tog reda k-članog skupa $\{a_1,\dots,a_k\}$, u kojima se element a_i pojavljuje n_i puta, $i=1,\dots,k$, $n=n_1+\dots+n_k$, jednak je*

$$\frac{n!}{n_1!\dots n_k!}.$$

DOKAZ. Zamislimo da je zadano n mjesta koja u slijedu popunjavamo na željeni način s elementima skupa $\{a_1,\dots,a_k\}$. Prvih n_1 kopija elementa a_1 možemo na n mjesta razmjestiti na $\binom{n}{n_1}$ načina. Uz bilo koji takav razmještaj pogledajmo preostalih $n-n_1$ mjesta za n_2 kopija elementa a_2. Njih možemo razmjestiti na $\binom{n-n_1}{n_2}$ načina. Zatim uz bilo koji zadani razmještaj n_1 elemenata a_1 i n_2 elemenata a_2 preostaje $n-n_1-n_2$ mjesta. Razmještaj n_3 kopija elementa a_3 na ta mjesta možemo obaviti na $\binom{n-n_1-n_2}{n_3}$ načina, itd. Prema produktnom pravilu, ukupni broj željenih razmještaja (permutacija s ponavljanjem) iznosi

$$\binom{n}{n_1}\cdot\binom{n-n_1}{n_2}\cdot\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\dots\binom{n-n_1-\dots-n_{k-1}}{n_k} =$$
$$= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\,\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}\,\frac{(n-n_1-n_2)!)}{n_3!(n-n_1-n_2-n_3)!}\dots\frac{(n-n_1-\dots-n_{k-1})}{n_k!(n-n_1-\dots-n_k)!}.$$

Nakon skraćivanja svih parova zagrada dobivamo rezultat u teoremu. ☺

9. Multionomni teorem

Teorem 2. (Multinomni teorem) *Broj načina na koji u potenciji*

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n$$

možemo odabrati n_1 *puta varijablu* x_1, n_2 *puta varijablu* $x_2, \ldots, n_k$ *puta varijablu* x_k, *i to po jednu iz svakog od* n *faktora,* $n_1 + n_2 + \ldots n_k = n$, *jednak je*

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}.$$

To je upravo multinomni koeficijent uz $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_k^{n_k}$ *u razvoju* $(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n$, *tj.:*

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n = \sum_{n_1+n_2+\ldots+n_k=n} \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!} x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_k^{n_k}.$$

Zbrajamo po svim k *-tercima cijelih brojeva* $n_1, n_2, \ldots, n_k \geqslant 0$ *takvim da je* $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

DOKAZ. Tvrdnja slijedi neposredno iz Teorema 1. ☺

10. Varijacije s ponavljanjem

B. Varijacije s ponavljanjem.

DEFINICIJA. **Varijacija s ponavljanjem** k-tog reda n-članog skupa $A_n = \{a_1, \ldots, a_n\}$ je svaki *poredani* k-terac elemenata iz A_n. Bilo koji element u k-tercu može se i ponavljati.

Na pr. za $A_2 = \{0, 1\}$ i $k = 3$ imamo ovih osam varijacija s ponavljanjem trećeg reda: $(0,0,0)$, $(0,0,1)$, $(0,1,0)$, $(0,1,1)$, $(1,0,0)$, $(1,0,1)$, $(1,1,0)$, $(1,1,1)$. Zapisali smo ih u leksikografskom poretku.

Teorem 4. *Poredanih* k *-teraca* n *-članog skupa ima ukupno* n^k.

DOKAZ. Skup svih varijacija s ponavljanjem jednak je $A_n \times \ldots \times A_n$ (Kartezijev produkt k skupova). Prema Teoremu 3.1.2 vrijedi $|A_n \times \ldots \times A_n| = |A_n|^k = n^k$. ☺

11. Kombinacije s ponavljanjem

C. Kombinacije s ponavljanjem.

DEFINICIJA. Neka je $A_n = \{a_1, \ldots, a_n\}$. **Kombinacija s ponavljanjem** k**-tog reda** n-članog skupa A_n je bilo koji *neporedani* k-terac elemenata iz A_n. Članovi k-teraca mogu se ponavljati.

Broj kombinacija s ponavljanjem jednak je broju načina biranja k predmeta od ukupno n, s koliko god ponavljanja istog predmeta u kombinaciji.

12. Teorem – broj kombinacija s ponavljanjem k-tog reda

Teorem 5. *Broj kombinacija s ponavljanjem k-tog reda n-članog skupa jednak je*

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

DOKAZ. Svaki element skupa A_n u kombinaciji s ponavljanjem označit ćemo zvjezdicom. Da bismo znali točno o kojem elementu je riječ, koristit ćemo i pregrade. Odaberimo dakle k zvjezdica i $n-1$ pregradu (ukupno $k+n-1$ mjesta), između

kojih ćemo stavljati zvjezdice. Na pr. kombinacija $a_1a_1a_2a_4a_4a_4$ je jednoznačno određena sa

$$* * \mid * \mid \mid * * *$$

Broj ponavljanja zvjezdica odijeljenih susjednim pregradama odgovara kratnosti pripadnog elementa. Razmještaj k zvjezdica na bilo koje od $k+(n-1)$ mjesta (preostala mjesta su za pregrade) može se obaviti na $\binom{k+n-1}{k}$ načina, jer toliko ima k-članih podskupova $(k+n-1)$-članog skupa. ☺

13. FUI – formula uključivanja i isključivanja

Teorem 1. (Formula uključivanja i isključivanja ili Sylvesterova formula) *Neka su $A_1,\ldots,A_n$ konačni skupovi sadržani u X. Onda vrijedi:*

(a)

$$|A_1\cup\ldots\cup A_n| = \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|A_i\cap A_j| + \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}|A_i\cap A_j\cap A_k| - \ldots + (-1)^{n-1}|A_1\cap\ldots\cap A_n|.$$

(b)

$$|\overline{A}_1\cap\ldots\cap\overline{A}_n| = |X| - \sum_{i=1}^{n}|A_i| + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|A_i\cap A_j| - \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}|A_i\cap A_j\cap A_k| + \ldots + (-1)^{n}|A_1\cap\ldots\cap A_n|.$$

Pritom $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}$ znači da se zbraja po svim parovima (i,j) takvim da je $i<j$: $(1,2)$, $(1,3)$,..., $(1,n)$, $(2,3)$,..., $(n-1,n)$. Slično i za preostale sume. Na pr. za $n=3$ je $\sum_{i<j}c_{ij} = c_{12}+c_{13}+c_{23}$.

DOKAZ. (a) Rabit ćemo matematičku indukciju po n. Za $n = 2$ tvrdnja je jasna (vidi gore). Pretpostavimo da tvrdnja u teoremu vrijedi za n. Dokažimo da vrijedi i za $n+1$. Najprije je

$$\begin{aligned}|A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup A_{n+1}| &= |(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \cup A_{n+1}| \\ &= |A_1 \cup \ldots \cup A_n| + |A_{n+1}| - |(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \cap A_{n+1}| \\ &= |A_1 \cup \ldots \cup A_n| + |A_{n+1}| - |(A_1 \cap A_{n+1}) \cup \ldots \cup (A_n \cap A_{n+1})|.\end{aligned}$$

jer tvrdnja vrijedi za uniju dva skupa (tj. za $n = 2$). Sada možemo iskoristiti induktivnu pretpostavku na dva izraza u zadnjem retku, jer se pojavljuju unije od n skupova:

$$\begin{aligned}|A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup A_{n+1}| &= \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \\ &\quad \ldots + (-1)^n |A_1 \cap \ldots \cap A_n| + |A_{n+1}| \\ &\quad - \Big[\sum_{i=1}^{n} |A_i \cap A_{n+1}| - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} |A_i \cap A_{n+1} \cap A_j| + \ldots \\ &\quad + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \ldots \cap A_n \cap A_{n+1}|\Big] \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} |A_i| - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+1} |A_i \cap A_j| + \ldots \\ &\quad + (-1)^n |A_1 \cap \ldots \cap A_{n+1}|.\end{aligned}$$

(b) Druga tvrdnja slijedi primjenom DeMorganove formule i (a): $|\overline{A}_1 \cap \ldots \cap \overline{A}_n| = |\overline{A_1 \cup \ldots \cup A_n}| = |X| - |A_1 \cup \ldots \cup A_n|$. ☺

14. Broj načina na koje možemo m različitih predmeta smjestiti u n istovrsnih kutija

Broj načina na koje možemo *m različitih* predmeta smjestiti u *n istovrsnih* kutija (koje ne razlikujemo), tako da nijedna ne bude prazna, jednak je

$$S(m,n) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k}(n-k)^m.$$

15. Eulerova formula

Teorem 2. (Euler) *Ako n ima rastav na proste faktore $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_l^{\alpha_l}$, pri čemu je $p_1 < \ldots < p_l$, onda vrijedi Eulerova formula:*

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_l}\right).$$

DOKAZ. Označimo $X = \{1, 2, \ldots, n\}$. Neka je A_i skup svih brojeva u X djeljivih sa p_i, $i = 1, \ldots, l$:

$$A_i = \{m \in X : p_i \mid m\}.$$

Brojevi iz X koji su relativno prosti sa n su oni koji nemaju niti jedan p_i kao svoj djelitelj, tj. iz skupa $\overline{A}_1 \cap \ldots \cap \overline{A}_l$. Prema tome je $\varphi(n) = |\overline{A}_1 \cap \ldots \cap \overline{A}_l|$. Rabeći Teorem 1(b) vidimo da je:

$$\varphi(n) = n - \sum_i |A_i| + \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| - \ldots + (-1)^l |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_l|.$$

Jedini brojevi u X koji su djeljivi sa p_i su $p_i, 2p_i, \ldots, \frac{n}{p_i} p_i$, dakle $|A_i| = \frac{n}{p_i}$. Skup $A_i \cap A_j$ predstavljaju svi brojevi iz X koji su djeljivi sa p_i i p_j, dakle sa $p_i p_j$, a to su $p_i p_j, 2p_i p_j, \ldots, \frac{n}{p_i p_j} p_i p_j$. Prema tome je $|A_i \cap A_j| = \frac{n}{p_i p_j}$, itd. Odavde slijedi

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= n - \sum_i \frac{n}{p_i} + \sum_{i<j} \frac{n}{p_i p_j} - \ldots + (-1)^l \frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_l} \\ &= n \left(1 - \sum_i \frac{1}{p_i} + \sum_{i<j} \frac{1}{p_i p_j} - \ldots + \frac{(-1)^l}{p_1 p_2 \cdots p_l} \right). \end{aligned}$$

Odmah se vidi da je gornji izraz u okrugloj zagradi jednak umnošku

$$\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_l}\right).$$

☺

16. Deranžmani

Primjer 5. (Montmort, Euler, 18. st.) Pitamo se koliko ima permutacija bez ponavljanja f skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ takvih da je $f(k) \neq k$ za sve $k = 1, 2, \ldots, n$? Takve permutacije u kojima niti jedan element ne stoji na svome mjestu zovemo *neredima* (tzv. **deranžmani**). Na pr. za $n = 3$ permutacija $(3, 1, 2)$ skupa $\{1, 2, 3\}$ je nered, a permutacija $(3, 2, 1)$ nije, jer je $f(2) = 2$. Cilj nam je prebrojiti sve takve permutacije općenito.

Označimo sa X skup svih permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$. Za bilo koji učvršćeni i, $1 \leqslant i \leqslant n$, bit će zgodno uvesti skup A_i koji sadrži sve permutacija f kod kojih je i-ta komponenta fiksna (nepromijenjena), tj. $f(i) = i$. Drugim riječima, definiramo

$$A_i = \{f \in X : f(i) = i\}.$$

Traženi broj deranžmana iznosi $|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_n|$.

Vrijedi $|X| = n!$ (ukupan broj permutacija n-članog skupa). Odaberimo bilo koji k-člani podskup $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$. Broj $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}|$ predstavlja broj permutacija kod kojih je $f(i_j) = i_j$ za sve $j = 1, 2, \ldots, k$. Budući su za svaki $f \in A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}$ komponente $i_1, \ldots, i_k$ fiksne, preostaje nam $n - k$ slobodnih komponenata za permutiranje. Pripadnih permutacija ima $(n - k)!$. Budući da imamo $\binom{n}{k}$ načina odabira k položaja $i_1, \ldots, i_k$ od n mogućih, onda je broj svih permutacija s (barem) k fiksnih komponenata jednak

$$\sum_{i_1 < \ldots < i_k} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}| = \binom{n}{k} (n-k)! = \frac{n!}{k!}.$$

Prema Teoremu 1(b) dobivamo da je broj deranžmana d_n jednak:

$$\begin{aligned} d_n &= n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \ldots + (-1)^k \frac{n!}{k!} + \ldots + (-1)^n \frac{n!}{n!} \\ &= n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}. \end{aligned}$$

17. Funkcije izvodnice

Osnovna svojstva. Funkcije izvodnice predstavljaju moćno sredstvo u kombinatorici. Neka je zadan slijed realnih brojeva $c_0, c_1, c_2, \ldots$ Cilj nam je da ga zapišemo u što je moguće sažetijem obliku. Pokazuje se da je to moguće napraviti s pomoću funkcija.

DEFINICIJA. Funkcija

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{1}$$

zove se **funkcija izvodnica slijeda** $(c_n)_{n \geqslant 0}$ ili generirajuća funkcija slijeda.

DEFINICIJA. Funkcija $h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{x^n}{n!}$ zove se **eksponencijalna funkcija izvodnica slijeda** $(c_n)_{n \geqslant 0}$.

18. Svojstva izvodnica

A. Svojstvo linearnosti. Pretpostavimo da slijedu $(a_n)_{n \geqslant 0}$ pripada funkcija izvodnica $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, a slijedu $(b_n)_{n \geqslant 0}$ funkcija izvodnica $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. Neka su λ i μ zadani realni brojevi. Onda slijedu $(\lambda a_n + \mu b_n)_{n \geqslant 0} = (\lambda a_0 + \mu b_0, \lambda a_1 + \mu b_1, \ldots)$ odgovara funkcija izvodnica $\lambda f(x) + \mu g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) x^n$.

B. Pravilo deriviranja i integriranja. Ako je $g(x)$ funkcija izvodnica slijeda $(c_k)_{k \geqslant 0}$, onda formalnim deriviranjem iz (1) dobivamo:

$$g'(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} x^n.$$

Posebno, budući da je $x \cdot g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^n$, funkcija izvodnica za slijed $(n \cdot c_n)_{n \geqslant 0} = (0, c_1, 2c_2, 3c_3, \ldots)$ glasi $x \cdot g'(x)$.

Formalnim integriranjem iz (1) dobivamo

$$\int_0^x g(t)\, dt = c_0 x + \frac{1}{2} c_1 x^2 + \frac{1}{3} c_2 x^3 \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} c_{n-1} x^n.$$

19. Binomni koeficijent

(c) Neka je α bilo koji *realan* broj, i $k \in \mathbf{N}_0$. Definirajmo **binomni koeficijent**:

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}, \qquad \binom{\alpha}{0} = 1.$$

Upamtimo dobro, u brojniku imamo umnožak točno k brojeva koji se smanjuju za 1, počevši od α. Slijed realnih brojeva $\binom{\alpha}{k}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, ima kao funkciju izvodnicu:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k. \tag{4}$$

Red na desnoj strani zove se **binomni red**. Da bismo to dokazali, krenimo od poznatog MacLaurinova razvoja $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ funkcije $f(x)$ u red potencija po x. Za funkciju $f(x) = (1+x)^\alpha$ je $f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$, dakle $\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \binom{\alpha}{k}$. Time je (4) dokazano. U važnom specijalnom slučaju $\alpha = -n$, gdje je n prirodan broj, iz (4) dobivamo

$$(1+x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \binom{n+k-1}{k} x^k, \tag{5}$$

jer je

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}. \tag{6}$$

Naime, $\binom{-n}{k} = \frac{(-n)(-n-1)\ldots(-n-k+1)}{k!} = (-1)^k \frac{(n+k-1)\ldots(n+1)n}{k!} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}$. Lako se vidi da svojstvo (a) slijedi iz (5) za $n = 1$ zamjenom x u $-x$. Svojstvo (b) se dobiva iz (5) za $n = 2$ zamjenom x u $-x$, jer je $\binom{k+1}{k} = \binom{k+1}{1} = k+1$. Za ilustraciju binomnog koeficijenta $\binom{\alpha}{k}$ gdje je α bilo koji realan broj, primijetimo da je $\binom{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{2}$, $\binom{4}{9} = 0$, $\binom{-2}{4} = 5$, $\binom{1.5}{4} = \frac{1.5\cdot 0.5\cdot(-0.5)\cdot(-1.5)}{4!} = \frac{3}{128}$, $\binom{-3}{3} = \frac{(-3)\cdot(-4)\cdot(-5)}{3!} = -10$. Vrlo lako se provjeri iz definicije da za svaki $\alpha \in \mathbf{R}$ vrijedi $\binom{\alpha}{k} = \binom{\alpha-1}{k} + \binom{\alpha-1}{k-1}$, što za $\alpha = n$ znamo i iz Propozicije 3.2.3.

20. Dirichletovo načelo

Teorem 1. (Dirichletovo načelo) *Neka je n predmeta smješteno u m kutija i $n > m$. Onda postoji kutija s barem 2 predmeta.*

DOKAZ. Ova tvrdnja je očevidna. Doista, kad bi u svakoj od m kutija bio najviše jedan predmet, onda bi u svim kutijama bilo najviše m predmeta, što je kontradikcija sa $n > m$. ☺

21. Konačni skupovi A i B – postoje dva različita elementa

Teorem 2. *Neka je $f : A \to B$ funkcija između konačnih skupova i $|A| > |B|$. Onda f nije injekcija, tj. postoje dva različita elementa $a_1, a_2 \in A$ takva da je $f(a_1) = f(a_2)$*

DOKAZ. Gledajmo A kao skup od $|A| = n$ predmeta i B kao skup od $|B| = m$ kutija, a f kao funkciju koja 'predmetu' a pridružuje 'kutiju' $f(a)$. Zbog $n > m$ će nekoj kutiji biti pridružena dva predmeta a_1, a_2, tj. $f(a_1) = f(a_2)$. ☺

22. Poopćeno Dirichletovo načelo

Poopćeno Dirichletovo načelo. Ako imamo $n = 2m + 1$ predmeta smještenih u m kutija, onda će u nekoj kutiji biti barem 3 predmeta. Naime kad bi ih u svakoj bilo $\leqslant 2$, njihov ukupan broj bio bi $\leqslant 2m$. Na sličan način može se dobiti poopćenje Dirichletova principa.

Teorem 3. (Poopćeno Dirichletovo načelo) *Ako je n predmeta smješteno u m kutija, onda postoji kutija koja sadrži barem $\lfloor \frac{n-1}{m} \rfloor + 1$ predmeta.*

DOKAZ. Pretpostavimo suprotno, da svaka kutija sadrži $\leqslant \lfloor \frac{n-1}{m} \rfloor$ predmeta. Onda je ukupan broj predmeta u m kutija $\leqslant m \cdot \lfloor \frac{n-1}{m} \rfloor \leqslant m \cdot \frac{n-1}{m} = n - 1$, što je protuslovlje. ☺

7. REKURZIVNE RELACIJE

1. Fibonaccijev niz

DEFINICIJA. **Fibonaccijev slijed** (F_n) definira se s početnim vrijednostima $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ i rekurzivnom relacijom

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n = 2, 3, \dots$$

2. 'Zatvorena formula' za Fibonaccijev niz

Propozicija 1. (A. de Moivre, 18. st.) *Za Fibonaccijev slijed $(F_n)_{n\in\mathbf{N}_0}$ vrijedi ovakva 'zatvorena formula':*

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big[\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n\Big], \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{1}$$

DOKAZ. Zanemarivši na trenutak početne vrijednosti F_0 i F_1, pokušajmo potražiti rješenje Fibonaccijeve rekurzivne relacije $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geqslant 2$, u obliku $F_n = x^n$ (tzv. Eulerova supstitucija). Onda je $x^n = x^{n-1} + x^{n-2}$, tj. $x^{n-2}(x^2 - x - 1) = 0$. Pretpostavimo da je $x \neq 0$. Slijed $F_n = x^n$ je rješenje rekurzivne relacije onda i samo onda ako je

$$x^2 - x - 1 = 0,$$

tj.

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Prema tome su $F_n^{(1)} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ i $F_n^{(2)} = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ rješenja rekurzivne relacije $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Lako se vidi da je onda i linearna kombinacija

$$G_n = \lambda F_n^{(1)} + \mu F_n^{(2)}$$

također rješenje za bilo koje $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. Doista, ako $F_n^{(1)} = F_{n-1}^{(1)} + F_{n-2}^{(1)}$ pomnožimo sa λ, $F_n^{(2)} = F_{n-1}^{(2)} + F_{n-2}^{(2)}$ sa μ i zbrojimo, dobivamo $G_n = G_{n-1} + G_{n-2}$.

Odredimo λ i μ tako da budu ispunjeni početni uvjeti $F_0 = 0$ i $F_1 = 1$. Početni uvjeti daju sustav $\lambda + \mu = 0$, $\lambda \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \mu \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$, čijim rješavanjem dobivamo $\lambda = \frac{1}{\sqrt{5}}$ i $\mu = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. ☺

3. Zlatni prerez

PRIMJEDBA 2. Vrijedi primijetiti da su brojevi F_n opisani prethodnim teoremom doista prirodni brojevi (ili 0), mada iz samog izraza za F_n to nije odmah jasno. Može se lako vidjeti da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618\dots$$

Taj broj zove se **zlatni prerez**. Važan je u arhitekturi i slikarstvu. Naziv je uveo *Leonardo da Vinci*, iako je taj broj bio poznat i mnogo ranije, još u antičkoj Grčkoj. Rabio se također i naziv *božanski omjer* (Luca Pacioli, 16. st.).

4. Fibonaccijev niz, slijed Fn ima eksponencijalni rast

Korolar 2. *Broj F_n u Fibonaccijevom slijedu jednak je cijelom broju koji je najbliži broju $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$. Slijed F_n ima eksponencijalni rast.*

DOKAZ. Označimo $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618\dots$ i $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.618\dots$. Primijetite da u relaciji $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$ slijed β^n teži prema nuli kad $n \to \infty$, jer je $|\beta| < 1$. Odavde vidimo da F_n ima eksponencijalni rast:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{\frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^n} = 1,$$

tj. $F_n \sim \frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^n$ kad $n \to \infty$. Isti zaključak, kao i prvu tvrdnju u korolaru, dobivamo odmah iz:

$$|F_n - \tfrac{1}{\sqrt{5}}\alpha^n| = \frac{1}{\sqrt{5}}|\alpha^n - \beta^n - \alpha^n| = \frac{|\beta^n|}{\sqrt{5}} \leqslant \frac{|\beta|}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}.$$

☺

5. Ako za 2 slijeda vrijedi hom.rekur.relacija onda vrijedi i za njihovu linear.kombinaciju

Propozicija 1. *Ako za dva slijeda* (a'_n) *i* (a''_n), $n \geqslant 0$, *vrijedi homogena rekurzivna relacija (2), onda vrijedi i za njihovu linearnu kombinaciju* $(\lambda a'_n + \mu a''_n)$, *gdje su* λ, μ *bilo koji skalari (realni ili kompleksni brojevi).*

DOKAZ. Pomnožimo $a'_n = c_1 a'_{n-1} + c_2 a'_{n-2} + \ldots + c_r a'_{n-r}$ sa λ, i zatim $a''_n = c_1 a''_{n-1} + c_2 a''_{n-2} + \ldots + c_r a''_{n-r}$ sa μ. Zbrajanjem dobivamo $b_n = c_1 b_{n-1} + c_2 b_{n-2} + \ldots + c_r b_{n-r}$, gdje je $b_n = \lambda a'_n + \mu a''_n$. ☺

6. Opće rješenje homogene rekurzivne jed.za međusobno različite karakt.korijene

Teorem 2. *Neka su* $x_1, \ldots, x_r$ *karakteristični korijeni i pretpostavimo da su svi međusobno različiti. Onda je opće rješenje homogene rekurzivne jednadžbe (2) jednako linearnoj kombinaciji*

$$a_n = \lambda_1 x_1^n + \ldots + \lambda_r x_r^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{4}$$

gdje su $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ *bilo koji kompleksni koeficijenti.*

DOKAZ. Neka je (a_n) neko rješenje od (2). Slijed (a_n) je potpuno određen jednadžbom (2) i sa r svojih početnih vrijednosti $a_0, a_1, \ldots, a_{r-1}$ koje su unaprijed zadani kompleksni brojevi. Znamo da a_n zadan sa (4) ispunjava rekurzivnu relaciju (2) za sve $n \geqslant r$. Treba još samo vidjeti da je moguće pronaći koeficijente $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ tako da budu ispunjeni i početni uvjeti za $n = 0, 1, \ldots, r-1$:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \ldots + \lambda_r &= a_0 \\ \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_r x_r &= a_1 \\ &\vdots \\ \lambda_1 x_1^{r-1} + \ldots + \lambda_r x_r^{r-1} &= a_{r-1}. \end{aligned}$$

To je linearan sustav r jednačaba s r nepoznanica $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$. Determinanta tog sustava je Vandermondeova determinanta (vidi [Elezović]):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_r \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{r-1} & x_2^{r-1} & \ldots & x_r^{r-1} \end{vmatrix} = \prod_{j>i} (x_j - x_i).$$

Budući da su svi korijeni x_i međusobno različiti, onda je i determinanta sustava $\neq 0$. Prema tome sustav je jednoznačno rješiv po $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$. ☺

7. Kompleksni broj k-struki korijen polinoma P(x)

Lema 3. *Ako je kompleksni broj* x_0 k*-struki korijen polinoma* $P(x)$, *onda je on* $(k-1)$*-struki korijen derivacije* $P'(x)$.

DOKAZ. Po definiciji je broj x_0 k-struki korijen polinoma $P(x)$ onda i samo onda ako je on djeljiv sa $(x-x_0)^k$, tj. može se napisati kao $P(x) = (x-x_0)^k Q(x)$, gdje je $Q(x)$ također polinom. Onda deriviranjem produkta dobivamo $P'(x) = (x-x_0)^{k-1}[kQ(x) + (x-x_0)Q'(x)]$, tj. polinom $P'(x)$ je djeljiv sa $(x-x_0)^{k-1}$. ☺

8. K-struki korijen karak.jed.rješenje rekurz.relacije

Propozicija 4. *Ako je x_0 k-struki korijen karakteristične jednadžbe, onda svaki od k sljedova*

$$a_n = x_0^n, \quad a_n = nx_0^n, \quad \dots \quad , a_n = n^{k-1}x_0^n$$

predstavlja rješenje homogene rekurzivne relacije (2).

DOKAZ. Dokaz ćemo sprovesti samo za $k = 3$. U općem slučaju ideja je ista. Neka je dakle x_0 trostruki korijen karakterističnoga polinoma

$$P(x) = x^r - c_1x^{r-1} - c_2x^{r-2} - \dots - c_r.$$

To znači da je $P(x) = (x - x_0)^3 Q(x)$, pa je x_0 trostruki korijen i od polinoma

$$P_n(x) = x^{n-r}P(x) = x^n - c_1x^{n-1} - c_2x^{n-2} - \dots - c_rx^{n-r}.$$

Prema prethodnoj lemi je onda x_0 dvostruki korijen polinoma $P_n'(x)$, dakle i od

$$x \cdot P_n'(x) = nx^n - c_1(n-1)x^{n-1} - c_2(n-2)x^{n-2} - \dots - c_r(n-r)x^{n-r}. \qquad (*)$$

Opet prema prethodnoj lemi je x_0 jednostruki korijen od $[xP_n'(x)]'$, dakle i od

$$x \cdot [xP_n'(x)]' = n^2x^n - c_1(n-1)^2x^{n-1} - c_2(n-2)^2x^{n-2} - \dots - c_r(n-r)^2x^{n-r}.$$

Za $x = x_0$ je dakle vrijednost tog polinoma nula, tj. $n^2x_0^n = c_1(n-1)^2x_0^{n-1} + c_2(n-2)^2x_0^{n-2} + \dots + c_r(n-r)^2x_0^{n-r}$. Time je dokazano da je slijed $a_n = n^2x_0^n$ rješenje rekurzivne relacije (2) za $n = r, r+1, \dots$ Isto tako uvrštavajući $x = x_0$ u izraz $(*)$ dobivamo da je i slijed $a_n = nx_0^n$ rješenje relacije (2). ☺

9. Različiti korijeni koji odgovaraju korijenu xi kratnosti k

Teorem 5. *Neka su $x_1, \dots, x_m$ svi različiti korijeni karakteristične jednadžbe (3) homogene rekurzivne relacije (2), odgovarajućih kratnosti $k_1, \dots, k_m$. Rješenje $a_n^{(i)}$ od (2), koje odgovara korijenu x_i kratnosti k_i, je linearna kombinacija sljedećih k_i sljedova: x_i^n, $nx_i^n, \dots, n^{k_i-1}x_i^n$. Drugim riječima*

$$a_n^{(i)} = \lambda_1^{(i)}x_i^n + \lambda_2^{(i)}nx_i^n + \dots + \lambda_{k_i}^{(i)}n^{k_i-1}x_i^n, \qquad n \geqslant 0,$$

pri čemu su $\lambda_1^{(i)}, \dots, \lambda_{k_i}^{(i)}$ kompleksni koeficijenti. Opće rješenje, u kojem ćemo imati ukupno $r = k_1 + \dots + k_m$ slobodnih koeficijenata, dobiva se kao

$$a_n = a_n^{(1)} + \dots + a_n^{(m)}.$$

SKICA DOKAZA. Dokaz je potpuno analogan kao i za slučaj različitih korijena (kratnosti 1). Pritom se umjesto Vandermondeove determinante dobiva tzv. generalizirana Vandermondeova determinanta koja je također $\neq 0$. Vidi [Veljan, 1. izdanje], str. 186. ☺

10. Zbroj homogenog i partikularnog rješenja

Propozicija 1. *Neka je $(a_n^{(0)})$ opće rješenje pripadne homogene rekurzivne relacije (2) opisano prethodnim teoremom (Teorem 4.3.5). Pretpostavimo da znamo neko partikularno rješenje $(a_n^{(p)})$ od (5). Onda je opće rješenje (a_n) nehomogene jednadžbe (5) zbroj općeg rješenja homogene rekurzivne relacije (2) i partikularnog rješenja od (5):*

$$a_n = a_n^{(0)} + a_n^{(p)}. \qquad (6)$$

DOKAZ. Slijed zadan sa (6) je rješenje nehomogene rekurzivne relacije zbog svojstva linearnosti: budući da slijed $a_n^{(0)}$ ispunjava homogenu rekurzivnu relaciju (2) i $a_n^{(p)}$ nehomogenu, onda zbrajanjem (2) i (5) dobivamo da (a_n) ispunjava nehomogenu relaciju (2) – provjerite.

Dokažimo da se svako rješenje od (5) može napisati u obliku (6). Neka je (a_n) neko rješenje od (5). Istu relaciju ispunjava i partikularno rješenje $a_n^{(p)}$, pa oduzimanjem dobivamo da $a_n - a_n^{(p)}$ ispunjava homogenu rekurzivnu relaciju (2). Budući da je svako njeno rješenje oblika $a_n^{(0)}$, onda je $a_n - a_n^{(p)} = a_n^{(0)}$, odakle slijedi (6). ☺

Teorem 2. (Partikularno rješenje nehomogene jednadžbe)

(i) *Neka je nehomogeni dio $f(n)$ rekurzivne relacije (5) zadan kao polinom k-tog stupnja u n. Ako $x = 1$ nije korijen karakteristične jednadžbe $x^r - c_1x^{r-1} - c_2x^{r-2} - \ldots - c_r = 0$, onda (5) ima partikularno rješenje koje je također polinom k-tog stupnja u n:*

$$a_n^{(p)} = A_0 + A_1n + \ldots + A_kn^k,$$

gdje se konstante A_i određuju uvrštavanjem $a_n^{(p)}$ u (5) i izjednačavanjem koeficijenata uz iste potencije od n. Ako $x = 1$ jest korijen karakteristične jednadžbe, i to kratnosti m, onda (5) posjeduje partikularno rješenje oblika:

$$a_n^{(p)} = A_0n^m + A_1n^{m+1} + \ldots + A_kn^{m+k}.$$

(ii) *Neka je nehomogeni dio od (5) eksponenecijalna funkcija u n, tj. $f(n) = C \cdot b^n$. Ako $x = b$ nije korijen karakteristične jednadžbe, onda postoji partikularno rješenje oblika $a_n^{(p)} = A \cdot b^n$. Ako $x = b$ jest korijen karakteristične jednadžbe, i to kratnosti m, onda možemo uzeti $a_n^{(p)} = An^mb^n$.*

Evo još jednom sadržaj teorema u obliku tablice. Ako $x = 1$ (u zadnjem slučaju u tablici uzimljemo $x = b$) nije korijen karakteristične jednadžbe onda partikularno rješenje nalazimo ovako:

$f(n)$	$a_n^{(p)}$
C (konstanta)	A
Cn	$An + B$
$P_k(n)$	$Q_k(n)$
$C \cdot b^n$	$A \cdot b^n$

Ako $x = 1$ (u zadnjem slučaju u tablici uzimljemo $x = b$) jest korijen karakteristične jednadžbe kratnosti m, onda odgovarajuće izraze iz prethodne tablice treba pomnožiti s n^m:

$f(n)$	$a_n^{(p)}$
C (konstanta)	$A \cdot n^m$
Cn	$n^m(An + B)$
$P_k(n)$	$n^m \cdot Q_k(n)$
Cb^n	An^mb^n

8. GRAFOVI

1. Jednostavan graf

Definicija 1. **Jednostavni graf** G sastoji se od nepraznog konačnog skupa $V(G)$, čije elemente zovemo **vrhovi** (čvorovi) grafa G i konačnog skupa $E(G)$ različitih dvočlanih podskupova skupa $E(G)$ koje zovemo **bridovi.** Skup $V(G)$ zovemo skup vrhova i ako je jasno o kojem je grafu G riječ označavat ćemo ga kraće samo s V, a skup $E(G)$ zovemo skup bridova i označavat ćemo ga i samo s E. Formalno, ponekad ćemo pisati $G = (V(G), E(G))$ ili kraće još i $G = (V, E)$.

2. Bridovi

Definicija 2. Za brid $e = \{v, w\}$ kažemo da **spaja** vrhove v i w i bez mogućnosti zabune kraće ga pišemo vw. U toj situaciji kažemo da su vrhovi v i w grafa G **susjedni**. Također, kažemo da je vrh v **incidentan** s bridom e. Naravno, i w je također incidentan s bridom e.

3. Izomorfizam

Definicija 3. Za grafove G_1 i G_2 kažemo da su **izomorfni** ako postoji bijektivna korespondencija ($1-1$ preslikavanje) između skupova $V(G_1)$ i $V(G_2)$, takva da je broj bridova koji spajaju bilo koja dva izabrana vrha u $V(G_1)$ jednak broju bridova koji spajaju korespondentna dva vrha u $V(G_2)$. Takvu bijekciju zvat ćemo **izomorfizam** grafova.

Iz definicije odmah slijedi da za izomorfne grafove G_1 i G_2 vrijedi

$$|V(G_1)| = |V(G_2)|, \quad |E(G_1)| = |E(G_2)|.$$

4. Broj različitih grafova s n vrhova je jednak 2^n

Zadatak 1. Koliko ima različitih jednostavnih grafova s n vrhova koji su unaprijed obilježeni?

Rješenje. Brid identificiramo kao dvočlani podskup skupa vrhova. Svaki dvočlani podskup skupa vrhova ili jest, ili nije brid u grafu. Dakle, za svaki od $\binom{n}{2}$ podskupova imamo dvije mogućnosti. Stoga je broj različitih grafova s n vrhova jednak $2^{\binom{n}{2}}$.

5. Unija grafova

Definicija 4. Za zadane disjunktne grafove $G_1 = (V(G_1), E(G_1))$ i $G_2 = (V(G_2), E(G_2))$ definiramo njihovu **uniju** $G_1 \cup G_2$ kao graf $G_1 \cup G_2 = (V(G_1) \cup V(G_2), E(G_1) \cup E(G_2))$.

6. Povezan graf

Definicija 5. Graf je **povezan** ako se ne može prikazati kao unija neka dva grafa. U suprotnom kažemo da je graf **nepovezan**. Svaki se nepovezani graf dakle može prikazati kao unija povezanih grafova. Svaki član te unije zovemo **komponenta povezanosti**.

7. Stupanj vrha

Definicija 6. **Stupanj vrha** v grafa G je broj bridova koji su incidentni s v. Označavamo ga s $\deg(v)$. Dogovorno, ako je vrh v petlja, onda ona broju $\deg(v)$ doprinosi s 2. Vrh stupnja 0 zovemo **izolirani vrh**, a vrh stupnja 1 zovemo **krajnji vrh**.

8. Lema o rukovanju

Lema 1. **(o rukovanju)** *U svakom grafu G je zbroj stupnjeva svih vrhova paran, tj. vrijedi*

$$\sum_{v\in G} \deg(v) \equiv 0\ (mod\ 2)$$

Dokaz. Može se zapravo dokazati i konkretnija jednakost: $\sum_{v\in G} \deg(v) = 2\cdot|E(G)|$. Nju pak dokazujemo prebrajanjem svih "incidencija" grafa, tj. skupa $\{(v,e) \mid v \in V(G),\ e \in E(G),\ v \in e\}$ na dva načina. Krenemo li od vrhova, za svaki pojedini vrh takvih incidencija ima točno koliko je stupanj dotičnog vrha. Krenemo li od bridova, vidimo da svaki brid ima "dva kraja", tj. da je dvočlani podskup, pa sveukupno incidencija ima $2\cdot|E(G)|$. Time smo dokazali ovu jednakost. Kako je desna strana

jednakosti očevidno parna, budući je višekratnik broja 2, to parna mora biti i lijeva strana, što upravo dokazuje tvrdnju leme. ■

9. Broj vrhova neparnog stupnja u svakom grafu je paran

Korolar 2. *Broj vrhova neparnog stupnja u svakom grafu je paran.*

10. Regularan graf

Definicija 7. Za graf G kažemo da je **regularan**, ako su svi njegovi vrhovi istog stupnja. Kažemo da je G r-regularan ako je $\deg(v) = r$, $\forall v \in V(G)$. Cijeli broj r tada ćemo zvati **stupanj regularnosti** grafa G.

11. Podgraf

Definicija 8. **Podgraf** grafa G je graf čiji vrhovi pripadaju skupu $V(G)$, a bridovi skupu $E(G)$.

12. Koliko vrhova I bridova imaju grafovi G,G-v, G/e

Rješenje. Graf $G - e$ nastao je brisanjem jednog jedinog brida. Dakle ima isto vrhova koliko i G, n, te bridova za jedan manje, $m - 1$. Graf $G - v$ nastaje uklanjanjem vrha v i svih bridova koji su s njime incidentni, a tih je točno $\deg(v)$. Dakle, vrhova je $n - 1$, a bridova $m - k$. Konačno, kontrahiramo li brid e, u novom grafu $G \setminus e$ imamo $n - 1$ vrhova (jer smo dva vrha slijepili), te $m - 1$ bridova (svi osim kontrahiranog brida e).

13. Matrica susjedstva

Definicija 9. Označimo li vrhove zadanog grafa G s $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, onda definiramo **matricu susjedstva** $A = [a_{ij}]$ kao $n \times n$ matricu čiji je element a_{ij} jednak broju bridova koji spajaju vrh i s vrhom j.

14. Matrica incidencije

Definicija 10. Označimo li dodatno i bridove zadanog grafa G s $E = \{1, 2, \ldots, m\}$, onda definiramo **matricu incidencije** kao $n \times m$ matricu $B = [b_{ij}]$ čiji su elementi

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako je vrh } i \text{ incidentan s bridom } j \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

15. Ako je G jednostavni graf s najmanje 2 vrha, dokaži da G mora sadržavati barem 2 vrha istog stupnja

Rješenje. Općenito, imamo li jednostavni graf s n vrhova, onda stupnjevi pojedinih vrhova mogu biti brojevi $0, 1, \ldots, n - 1$. Mogućnosti je dakle n. Međutim, uočimo da je nemoguće da u grafu istodobno postoji vrh stupnja 0 i stupnja $n - 1$ (takav bi naime bio susjedan svakom drugom vrhu). Dakle, različitih stupnjeva vrhova grafa ima najviše $n - 1$. Sada primijenimo Dirichletov princip, iz kojeg neposredno slijedi da postoje barem dva vrha istoga stupnja.

16. Nul-graf

Primjer 7. Nul-graf je graf čiji je skup bridova prazan skup. Uočimo da su svi nul-grafovi s istim brojem vrhova međusobno izomorfni. Nul-graf s n vrhova označavat ćemo s N_n. U nul-grafu je svaki vrh izoliran, tj. stupanj svakog vrha jednak je nuli.

17. Potpuni jednostavni graf

Primjer 8. Jednostavni graf kod kojeg su svaka dva vrha susjedna zovemo potpuni graf. Potpuni graf s n vrhova označavamo s K_n. Uočimo da potpuni graf ima $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ bridova, te da svaki od n vrhova ima točno $n - 1$ susjeda, pa je K_n $(n - 1)$-regularan.

18. Ciklički graf

Primjer 9. Povezani 2-regularni graf zovemo ciklički graf (ili kratko ciklus). Ciklički graf s n vrhova označavamo s C_n. Ciklus C_n ima n vrhova i n bridova. Što se općenito može reći o grafu koji je 2-regularan? Uočite da to ne mora biti ciklus, već to može biti i disjunktna unija ciklusa.

19. Lanac

Primjer 10. Graf koji dobijemo iz cikličkog grafa brisanjem točno jednog brida zovemo lanac i označavamo s P_n, ako ima n vrhova.

20. Kotač

Primjer 11. Graf koji dobijemo iz ciklusa C_{n-1} tako da svaki njegov vrh spojimo s jednim novim vrhom zovemo kotač s n vrhova i označavamo s W_n. Jednostavno se izračuna da je $|E(W_n)| = 2n - 2$.

21. Bipartitan graf

Definicija 11. Ako skup vrhova grafa G možemo razdvojiti u dva disjunktna skupa A i B tako da svaki brid od G spaja neki vrh skupa A s nekim iz skupa B, onda kažemo da je G **bipartitan graf**.

22. Potpuni bipartitan graf

Primjer 12. Potpuni bipartitni graf je onaj bipartitni graf s particijom skupa vrhova $V(G) = A \cup B$ kod kojeg je svaki vrh iz skupa A spojen sa svakim iz B. Ako je $|A| = r$, te $|B| = s$, onda takav graf označavamo s $K_{r,s}$.

23. Kocka

Primjer 13. k-kocka Q_k je graf čiji vrhovi odgovaraju svim binarnim nizovima $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, $a_i \in \{0, 1\}$, duljine k, te čiji bridovi spajaju one binarne nizove koji se razlikuju točno na jednom mjestu.

Pogledajmo općenito glavna svojstva k-kocke. Jasno je da je broj vrhova k-kocke jednak broju binarnih nizova duljine k, dakle $|V(Q_k)| = 2^k$. Koliko bridova ima takva kocka? Jednostavnije je prvo utvrditi k-regularnost. Naime, svaki vrh je susjedan točno s onim vrhovima s kojima se, shvaćen kao binarni niz, razlikuje na jednoj poziciji. Svaki niz je duljine k, pa ima točno k mjesta na kojima se može razlikovati, dakle točno k susjeda. Sada, kad smo utvrdili k-regularnost, jednostavno je prebrojati skup bridova. Naime, svaki od 2^k vrhova incidentan je s k bridova, no u tom brojanju prebrojali smo svaki brid dvaput. Stoga je

$$|E(Q_k)| = \frac{2^k \cdot k}{2} = k \cdot 2^{k-1}.$$

24. Komplement

Definicija 12. Ako je G jednostavni graf sa skupom vrhova $V(G)$, onda je njegov **komplement** $\overline{G}$ jednostavni graf s istim skupom vrhova $V(G)$, dok su dva vrha u $\overline{G}$ susjedna onda i samo onda ako oni nisu susjedni u grafu G.

9. POVEZANOST

1. Šetnja

Definicija 1. Neka je dan graf G. **Šetnja** u G je konačan slijed bridova oblika $v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{m-1}v_m$, također često u oznaci $v_0 \to v_1 \to \cdots \to v_m$, u kojem su svaka dva uzastopna brida ili susjedna ili jednaka.

2. Staza, put, zatvoreni put ili staza

Definicija 2. Šetnju u kojoj su svi bridovi različiti zovemo **staza.** Ako su, uz to, i svi vrhovi $v_0, v_1, \dots, v_m$ različiti (osim eventualno početni vrh v_0 i krajnji vrh v_m), onda takvu stazu zovemo **put**. Za stazu ili put kažemo da su **zatvoreni** ako je $v_0 = v_m$. Zatvoreni put koji sadrži barem jedan brid zovemo ciklus.

3. Relacija 'biti povezan' definirana na skupu vrhova grafa je relacija ekvivalencije

Teorem 1. *Relacija „biti povezan" definirana na skupu vrhova grafa G je relacija ekvivalencije. Razredi (klase) ekvivalencije te relacije su komponente povezanosti grafa G.*

Dokaz. Moramo dokazati tri svojstva relacije ekvivalencije. Pogledamo li šetnju duljine 0 koja počne u bilo kojem vrhu u i odmah u njemu završi, zaključujemo da je svaki vrh u relaciji sa samim sobom, te da je ova relacija refleksivna. Ako je $u \sim v$, za bilo kako izabrane u i v, to znači da postoji šetnja $u \to v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_s \to v$. No, onda je u tom grafu šetnja i niz vrhova $v \to v_s \to \cdots \to v_1 \to u$, što po definiciji znači da je $v \sim u$, prema tome je relacija povezanosti i simetrična. Konačno, izaberemo li bilo koje u, v i w, takve da je $u \sim v$ i da je $v \sim w$, to znači da postoje šetnje $u \to u_1 \cdots \to u_r \to v$ i $v \to v_1 \to \cdots \to v_s \to w$. No, pogledamo li onda niz susjednih vrhova $u \to u_1 \to \cdots \to u_r \to v \to v_1 \to \cdots \to v_s \to w$, vidimo da su u relaciji i vrhovi u i w, tj. da je $u \sim w$. Ovime je i tranzitivnost dokazana, pa je relacija $\sim$ odista relacija ekvivalencije. Razred ekvivalencije $[u]$ nekog vrha u, sastoji se naravno iz vrha u i svih vrhova do kojih postoji šetnja iz u. No, zbog upravo dokazanih svojstava, to je upravo komponenta povezanosti zadanog grafa G. ■

4. G je bipartitan onda i samo onda ako je svaki ciklus parne duljine

Teorem 2. *G je bipartitan graf onda i samo onda ako je svaki ciklus u grafu G parne duljine.*

Dokaz. Treba dokazati oba smjera ekvivalencije iz tvrdnje teorema. Pretpostavimo prvo da je G bipartitan graf. To znači da njegov skup vrhova možemo podijeliti u dva disjunktna skupa, nazovimo ih A i B, tako da svaki brid od G povezuje neki vrh iz A s nekim iz B. Neka je sada $v_0 \to v_1 \to \cdots \to v_m \to v_0$ ciklus u G i ne smanjujući općenitost pretpostavimo da je $v_0 \in A$. Zbog bipartitnosti je tada $v_1 \in B$, $v_2 \in A$, ..., $v_{2k} \in A$, $v_{2k+1} \in B$. No, jer se ciklus treba zatvoriti, to je $v_m \in B$, dakle je m neparan broj, pa je svaki ciklus parne duljine. Time je prva implikacija dokazana. Dokaz druge implikacije je tehnički nešto složeniji, pa ga ovdje izostavljamo. ■

5. Teorem - ako G ima k komponenata povezanosti onda za broj bridova m vrijedi

Teorem 3. *Neka je G jednostavni graf s n vrhova. Ako G ima k komponenata povezanosti, onda za broj bridova m od G vrijedi*

$$n - k \le m \le \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}.$$

Dokaz. Nejednakost za donju među dokazat ćemo matematičkom indukcijom po broju bridova m grafa G. Bazu indukcije čini već nul-graf. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve grafove koji imaju manje bridova od zadanog grafa G, te neka G ima najmanji mogući broj bridova m, u smislu da micanje bilo kojeg brida nužno povećava broj komponenata povezanosti. Maknemo li sada ipak iz G neki brid, dobivamo graf s n vrhova, $m-1$ bridova, te $k+1$ komponentom povezanosti. Po pretpostavci indukcije, za njega vrijedi ocjena iz iskaza teorema, dakle je $m-1 \ge n-(k+1)$, iz čega neposredno slijedi da je $m \ge n-k$, što smo i trebali dokazati.

Dokažimo još i gornju među. Pretpostavimo (to je očevidno u smislu broja bridova najveći mogući slučaj, no svakako dopustiv) da je svaka komponenta povezanosti od G potpuni graf. Ostaje pitanje, za kakvu particiju skupa vrhova u k komponenata povezanosti se postiže najveća vrijednost za ukupni zbroj bridova, ako je svaka od komponenata povezanosti potpuni podgraf. Pretpostavimo, ne smanjujući općenitost, da komponente povezanosti C_i i C_j imaju n_i odnosno n_j vrhova, te da je $n_i \ge n_j > 1$. Ako bismo u grafu G zamijenili komponente C_i i C_j s potpunim podgrafovima nad

$n_i + 1$ odnosno $n_j - 1$ vrhova, grafu G sveukupno ne bismo promijenili broj vrhova, dok bi se broj bridova promijenio točno za

$$\left[\frac{(n_i+1)n_i}{2} - \frac{n_i(n_i-1)}{2}\right] - \left[\frac{n_j(n_j-1)}{2} - \frac{(n_j-1)(n_j-2)}{2}\right]$$
$$= n_i - n_j + 1 > 0.$$

Prema tome, zaključujemo da se ukupni broj bridova u grafu G povećava ako većim komponentama povezanosti povećamo broj vrhova, pa je najekstremniji slučaj kad bismo u G imali potpuni podgraf s $n-k+1$ vrhova, te još $k-1$ izoliranih vrhova. Tada je pak ukupni broj bridova dan s

$$m = \binom{n-k+1}{2} = \frac{(n-k+1)(n-k)}{2}.$$

Ovime je dokazana i gornja granica za broj bridova jednostavnog grafa s n vrhova i k komponenata povezanosti. ■

6. Svaki jednostavni graf s n vrhova i više od (n-1)(n-2)/2 bridova je povezan

Korolar 4. *Svaki jednostavni graf s n vrhova i više od $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ bridova je povezan.*

Dokaz. Ako takav graf ne bi bio povezan, imao bi barem dvije komponente povezanosti, no po prethodnom teoremu on bi mogao imati najviše $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ bridova, suprotno pretpostavci. Dakle je takav jednostavni graf nužno povezan. ■

7. Nepovezan

Definicija 3. **Rastavljajući skup** povezanog grafa G je skup bridova čijim uklanjanjem G postaje nepovezan.

8. Rezni skup

Definicija 4. Za rastavljajući skup kažemo da je **rezni skup**, ako nijedan njegov pravi podskup nije rastavljajući.

9. Most

Definicija 5. Rezni skup koji se sastoji od jednog jedinog brida zovemo **most**.

10. Bridna povezanost

Definicija 6. Za povezani graf G definiramo **bridnu povezanost** $\lambda(G)$ kao veličinu najmanjeg reznog skupa. Često kažemo da je G k-bridno povezan, ako je $\lambda(G) \geq k$.

11. Separirajući skup

Definicija 7. **Separirajući skup** povezanog grafa G je skup vrhova od G čijim uklanjanjem G postaje nepovezan.

12. Vršna povezanost

Definicija 8. **Vršna povezanost** $\kappa(G)$ je broj elemenata najmanjeg separirajućeg skupa u G.

13. Struk grafa

Zadatak 2. Struk grafa G definiramo kao duljinu njegovog najkraćeg ciklusa.

14. Šuma, stablo

Definicija 9. **Šuma** je graf bez ciklusa, a povezanu šumu zovemo **stablo**.

15. Teoremi o stablu

Teorem 5. *Neka je T graf s n vrhova. Onda su sljedeće izreke ekvivalentne:*
(i) T je stablo.
(ii) T ne sadrži ciklus i ima $n-1$ bridova.
(iii) T je povezan i ima $n-1$ bridova.
(iv) T je povezan i svaki mu je brid most.
(v) Svaka dva vrha od T povezana su točno jednim putom.
(vi) T ne sadrži ciklus, no dodavanjem jednog brida dobit ćemo točno jedan ciklus.

Dokaz. Ako je $n = 1$, onda su svi rezultati trivijalni. Zato u daljnjem pretpostavljamo da je $n \geq 2$.

$(i) \Rightarrow (ii)$: Po definiciji T ne sadrži ciklus. Uklanjanje jednog brida dovodi zato nužno do nepovezanosti, točnije, dobivamo dva stabla s manje vrhova. Razmišljajmo po principu matematičke indukcije, tj. pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve grafove s manje od n vrhova. Po induktivnoj pretpostavci, dva stabla dobivena uklanjanjem jednog brida imaju $n_1 - 1$ odnosno $n_2 - 1$ bridova. Ovo pak znači da smo u početnom stablu, prije uklanjanja brida, imali $(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + 1$ bridova, a kako je $n_1 + n_2 = n$, dobili smo da je početno stablo imalo $n - 1$ bridova, što smo korakom indukcije i trebali dokazati.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Ako bi T bio nepovezan, onda bi svaka komponenta povezanosti od T bila povezani graf bez ciklusa, pa bi imala $n_i - 1$ bridova. Slijedi da bi broj bridova grafa T sveukupno bio $n_1 + n_2 + \ldots + n_k - k$, $k \geq 2$, dakle $n - k$, što je premalo. Prema tome nije istina da je T nepovezan.

$(iii) \Rightarrow (iv)$: Postojala je ocjena da je broj bridova u povezanom grafu $m \geq n - 1$ i ovdje se ta ograda dostiže, što znači da uklanjanje bilo kojeg brida nužno vodi do nepovezanosti grafa, prema tome je svaki brid u takvom grafu most.

$(iv) \Rightarrow (v)$: Kako je T povezan, to između svakog para vrhova postoji put. Ako bi postojala dva različita puta između neka dva vrha, onda bi unija ta dva puta tvorila zatvorenu šetnju, koja svakako sadržava barem jedan ciklus, suprotno pretpostavci da je svaki brid most.

$(v) \Rightarrow (vi)$: Ako bi T sadržavao ciklus, onda bi svaka dva vrha iz tog ciklusa bila povezana s barem dva puta, suprotno pretpostavci. Dodamo li grafu T neki brid e, onda bi vrhovi incidenti s dodanim bridom e bili povezani s dva različita puta, pa smo našli ciklus. Ako bismo pak dodavanjem brida e dobili dva ciklusa, onda možemo lako zaključiti da je i u početnom grafu T postojao ciklus, suprotno pretpostavci.

$(vi) \Rightarrow (i)$: Graf T nema ciklusa, dakle je po definiciji šuma. Kada bi T bio nepovezan, onda dodavanjem brida koji spaja dvije komponente povezanosti ne bismo dobili ciklus, suprotno pretpostavci, pa zaključujemo da je T nužno povezana šuma, dakle stablo. ■

16. Ako je G šuma s n vrhova i k komponenata povezanosti onda G ima n-k vrhova

Korolar 6. *Ako je G šuma s n vrhova i k komponenata povezanosti, onda G ima $n - k$ vrhova.*

Dokaz. Primijenimo prethodni teorem na svaku komponentu povezanosti. ■

17. U svakom stablu postoje barem dva vrha stupnja 1

Zadatak 4. Dokaži da u svakom stablu postoje barem dva vrha stupnja 1.

Rješenje. Prema Lemi o rukovanju, vrijedi da je $\sum_{v \in V} deg(v) = 2 \cdot |E| = 2n - 2$. Po Dirichletovom principu slijedi tvrdnja.

18. Dokaži da je svako stablo bipartitan graf

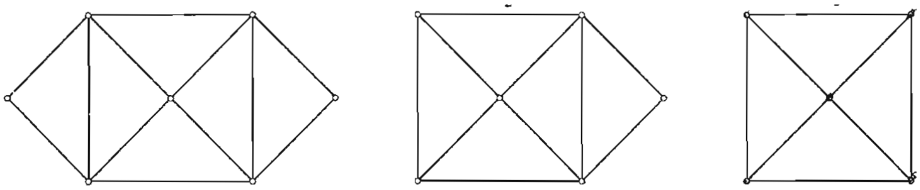
Zadatak 5. Dokaži da je svako stablo bipartitan graf. Koji su potpuni bipartitni grafovi stabla?

Rješenje Kako je svaki ciklus u stablu parne duljine (prazan skup ima svako svojstvo), to tvrdnja neposredno slijedi po toj karakterizaciji bipartitnih grafova. Očevidno su $K_{1,s}$ stabla, za svaki prirodni broj s, kao što su to i $K_{r,1}$. No to su ujedno i jedini potpuni bipartitni grafovi, jer u svim drugim potpunim bipartitnim grafovima postoji ciklus duljine 4.

EULEROVSKI GRAFOVI

1. Eulerovski graf

Definicija 10. Za povezani graf G kažemo da je **eulerovski**, ako postoji zatvorena staza koja sadrži svaki brid od G. Takvu stazu zovemo **eulerovska staza**. Neeulerovski graf je **skoro eulerovski** (semi-eulerovski), ako postoji staza koja sadrži svaki brid od G.



eulerovski *skoro eulerovski* *neeulerovski*

2. Ako je G graf u kojem je stupanj svakog vrha 2, onda G sadrži ciklus

Lema 7. *Ako je G graf u kojem je stupanj svakog vrha najmanje 2, onda G sadrži ciklus.*

Dokaz. Ako G ima petlji ili višestrukih bridova, rezultat jasno slijedi na trivijalan način. Pretpostavimo zato u daljnjem da je G jednostavan graf. Neka je $v \in V(G)$ neki vrh grafa G. Konstruiramo šetnju $v \to v_1 \to v_2 \to \cdots$, induktivno birajući v_1 kao susjeda od v, te zatim za svaki i birajući v_{i+1} kao susjeda od v_i različitog od v_{i-1}. Tako možemo birati niz vrhova $\{v_i\}$, jer je stupanj svakog vrha barem 2. S obzirom da je skup vrhova grafa G konačan, u nekome času ćemo izabrati već prethodno izabrani vrh. Ako je v_k prvi takav, onda slijed vrhova između dva pojavljivanja vrha v_k u našoj šetnji tvori ciklus. ■

3. Povezani graf je ulerovski ako je stupanj svakog vrha paran

Teorem 8. **(Euler, 1736.)** *Povezani graf G je eulerovski onda i samo onda ako je stupanj svakog vrha paran.*

Dokaz. ($\Longrightarrow$) Neka je G eulerovski te neka je P eulerovska staza od G. Pri prolasku nekim vrhom, staza P doprinosi stupnju dotičnog vrha za 2 (stazom se jednim bridom u vrh dođe, a drugim bridom iz vrha ode). Budući da P svakim bridom prolazi točno jednom, svaki vrh mora imati stupanj koji je višekratnik broja 2, dakle je paran broj.

4. Povezani graf je eulerovski ako skup bridova -> disjunktnu uniju ciklusa

Korolar 9. *Povezani graf je eulerovski onda i samo onda ako se njegov skup bridova može rastaviti u disjunktnu uniju ciklusa.*

5. Povezani graf je skoroeulerovski ako ima točno 2 vrha neparnog stupnja

Korolar 10. *Povezani graf je skoro eulerovski onda i samo onda ako ima točno dva vrha neparnog stupnja.*

6. Flueryev algoritam

Teorem 11. (Fleuryev algoritam) *Neka je G eulerovski graf. Tada je sljedeća konstrukcija uvijek moguća i dovodi do eulerovske staze od G. Započni u bilo kojem vrhu u i prolazi vrhovima u bilo kojem redoslijedu, pazeći pritom samo na sljedeća pravila:*

(i) *prebriši bridove kojima si prošao, a ako nakon prolaska vrh ostane izoliran, pobriši i njega.*

(ii) *prijeđi mostom samo ako nemaš druge mogućnosti.*

7. Za koje stupnjeve je potpuni graf Kn, n >=3 eulerovski

Rješenje. Potpuni graf K_n je regularan, i to stupnja $n-1$, jer je svaki vrh susjedan sa svim ostalima, dakle s njih $n-1$. Prema Eulerovom teoremu, jedini uvjet da bi K_n bio eulerovski je da je $n-1$ paran broj, odnosno da je n neparan. Probajte sami graf K_5 rastaviti u disjunktnu uniju ciklusa.

HAMILTONOVSKI GRAFOVI

1. Hamiltonovski ciklus. Hamiltonovski graf. Nehamiltonovski graf.

Definicija 11. Ciklus koji prolazi svim vrhovima zadanog grafa zovemo **hamiltonovski ciklus**. Graf koji posjeduje hamiltonovski ciklus zovemo **hamiltonovski graf**.

Nehamiltonovski graf u kojem možemo naći put kroz svaki vrh (ali koji nije zatvoren, pa nije ciklus) zovemo *skoro hamiltonovski* graf.

2. Teorem Ore

Teorem 12. **(Ore, 1960.)** *Ako je G jednostavni graf s n vrhova, $n \geq 3$, te ako vrijedi*

$$\deg(v) + \deg(w) \geq n$$

za svaki par nesusjednih vrhova v i w grafa G, onda je G hamiltonovski.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. neka je G nehamiltonovski graf s n vrhova koji zadovoljava danu relaciju za stupnjeve. Dodavanjem bridova zadanome grafu G, brid po brid, možemo postići da graf postane hamiltonovski. Zastanimo u tom dodavanju bridova na korak do hamiltonovosti, u smislu da bismo dodavanjem još samo jednog brida dobili hamiltonovski graf. Uočimo da dodavanjem bridova nismo kvarili relaciju za stupnjeve, dapače, stupnjevi vrhova samo su se mogli povećati. Kako smo sada na korak do hamiltonovosti, to znači da možemo naći (nezatvoreni!) put $v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_n$ koji prolazi svakim vrhom. No, budući je G nehamiltonovski, vrhovi v_1 i v_n nisu susjedni, pa za njih vrijedi $\deg(v_1) + \deg(v_n) \geq n$.

No, to znači da v_1 ima i drugih susjeda osim v_2, kao što i v_n ima i drugih susjeda osim v_{n-1}, a istodobno je svaki vrh v_i $(2 \leq i \leq n-1)$ susjedan s barem jednim od vrhova v_1 ili v_n. Dakle, nužno postoji neki v_i, susjedan s v_1, takav da je v_{i-1} susjedan s v_n. Sada je put

$$v_1 \to v_2 \to \cdots v_{i-1} \to v_n \to v_{n-1} \to \cdots v_i \to v_1$$

hamiltonovski ciklus, suprotno pretpostavci da takav ne postoji. ■

3. Teorem Dirac

Teorem 13. **(Dirac, 1952.)** *Ako je G jednostavni graf s n $(n \geq 3)$ vrhova, te ako je $\deg(v) \geq n/2$ za svaki vrh v iz G, onda je G hamiltonovski.*

Dokaz. Direktno možemo primijeniti Oreov teorem, budući je nejednakost iz Oreovog teorema sigurno ispunjena: $\deg(v) + \deg(w) \geq n/2 + n/2 = n$. ■

4. Dokaži da ako je G bipartitan graf s neparnim brojem vrhova onda je G nehamiltonovski.

Rješenje. Dodavanjem bridova ne možemo pokvariti svojstvo hamiltonovosti, pa ako tvrdnju dokažemo za potpune bipartitne grafove s neparnim brojem vrhova, onda smo je dokazali i za bilo kakve bipartitne grafove s neparnim brojem vrhova. No, ako je broj vrhova neparan, onda je u $K_{r,s}$ nužno $r \neq s$. S druge strane, ako su vrhovi bipartitnog grafa podijeljeni u skupove A i B, te ako svaki brid spaja neki vrh iz A s nekim iz B, onda svaki ciklus prolazi kroz jednak broj vrhova iz A kao i iz B. Ako je ciklus hamiltonovski, morao bi proći svim vrhovima, dakle bi moralo biti $|A| = |B|$, što je u kontradikciji s gornjim zaključkom da je $r \neq s$. Dakle, hamiltonovski ciklus ne može postojati.

5. Je li Petersenov graf hamiltonovski? Skoro hamiltonovski?

Zadatak 10. Je li Petersenov graf hamiltonovski? Je li skoro hamiltonovski?

Rješenje. Lako se vidi da nijedan od prethodnih teorema ne daje odgovor na ovo pitanje. Kao način rješavanja ovakvog zadatka nameće se eksplicitna konstrukcija hamiltonovskog ciklusa odnosno hamiltonovskog puta, ili pak iscrpna pretraga koja bi dala eventualno negativno rješenje. Preporučamo vam da iscrpnu pretragu započnete i osjetite koliko je ona uistinu iscrpljujuća, pa tako uvidite i koliko je ovaj problem, sasvim jednostavan za formulirati, zapravo složen. Daljnji prirodni put rješavanja ovakvih problema je programiranje i programsko ispitivanje svojstva hamiltonovosti. Mi ćemo vam ovdje ipak sugerirati rješenje. Petersenov graf nije hamiltonovski, ali jest skoro hamiltonovski. Ukoliko se niste odvažili na programiranje, nađite mu sada sami barem jedan hamiltonovski put.

6. Dokaži da ne postoji skakačev obilazak za kvadratne šahovske ploče neparnog reda

Zadatak 11. Dokaži da ne postoji skakačev obilazak za kvadratne šahovske ploče neparnoga reda.

Rješenje. Uočimo da je graf koji odgovara šahovskoj ploči bipartitan, jer skakač uvijek skačući po ploči mijenja boju polja. Sada se pozovimo na jedan od prethodnih zadataka, u kojem smo dokazali da je bipartitan graf s neparnim brojem vrhova nužno nehamiltonovski. Ako nam je zadana ploča reda $2k-1$, onda je ukupni broj polja ponovno neparan (kvadrat neparnog broja je neparan broj!) prema tome naš graf je upravo bipartitan graf s neparnim brojem vrhova, pa tvrdnja neposredno slijedi.

10. ALGORITMI OPTIMIZACIJE

1. Dijkstrin algoritam

Dijkstrin algoritam za problem najkraćeg puta

1. Stavi $l(u_0) = 0$, $l(v) = \infty$, za $v \neq u_0$. Stavi $S_0 = \{u_0\}$, te $i = 0$.
2. Za svaki vrh $v \in \overline{S_i}$, zamijeni $l(v)$ s $\min\{l(v), l(u_i) + w(u_i v)\}$. Izračunaj $\min_{v \in \overline{S_i}}\{l(v)\}$, te odredi u_{i+1} kao onaj vrh za koji se taj minimum postiže. Stavi $S_{i+1} = S_i \cup \{u_{i+1}\}$.
3. Zamijeni i s $i + 1$. Ako je $i = n - 1$, stani. Ako je $i < n - 1$, vrati se na korak 2.

2. Problem kineskog poštara

Nećemo sada ulaziti u dokazivanje ovog postupka, no prethodna ideja doista daje optimalno rješenje za kineski problem poštara u slučaju skoro eulerovskih težinskih grafova. Ponovimo, kombiniranjem Fleuryevog algoritma za nalaženje skoro eulerovske staze i Dijkstrinog algoritma za nalaženje najkraćeg puta dolazimo do minimalne zatvorene šetnje koja prolazi svakim bridom barem jednom.

3. Problem trgovačkog putnika

Problem trgovačkog putnika jedan je od najčuvenijih i najintrigantnijih problema koji se jednostavno modeliraju i preformuliraju pomoću grafova. Trgovački putnik treba obići nekoliko gradova i vratiti se natrag, a da pri tome sveukupno prijeđe najmanju udaljenost. Pretpostavka je da su svaka dva grada neposredno povezana i da se zna kolika je (najkraća) udaljenost među njima. U teoriji grafova, ekvivalentna formulacija ovog problema bila bi: *U potpunom težinskom grafu nađi hamiltonovski ciklus minimalne duljine.*

4. Pohlepni algoritam

Pogledamo li potpuni težinski graf sa slike, te ispitamo sve mogućnosti, ustanovit ćemo da je najkraći hamiltonovski ciklus duljine 26. Uvjerite se da smo do toga rješenja mogli doći i takozvanim „pohlepnim" razmišljanjem. Pohlepno treba u teoriji algoritama uvijek iščitati kao „trenutno najoptimalnije". Konkretno, to bi ovdje značilo graditi ciklus brid po brid, birajući uvijek kao sljedeći brid onaj koji je dopustiv (dakle, koji se nadovezuje na već formiran lanac, i koji ne zatvara ciklus prije nego se prođe svim vrhovima), a koji je najmanje duljine. Konkretno, takav bi ciklus bio $A - B - D - E - C - A$.