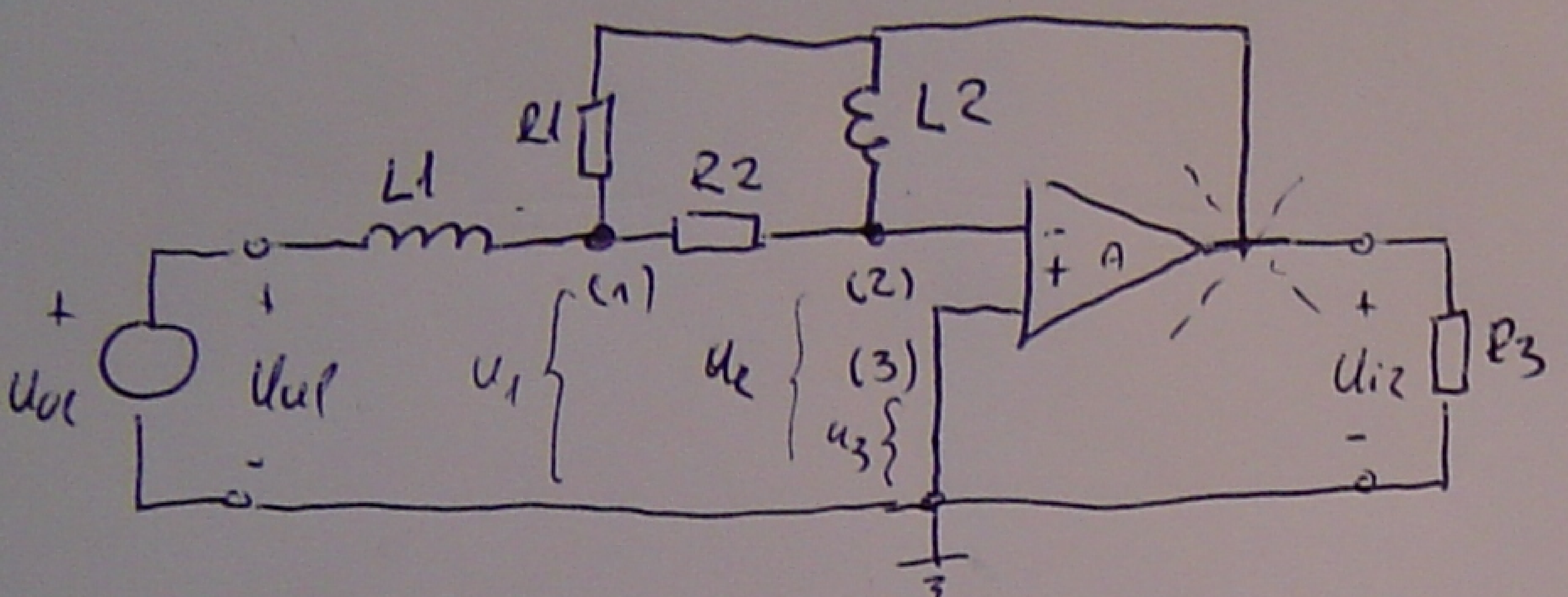
– PRIJENOSNE FUNKCIJE –

(10) (ZADACI ZA VJEŽBU)



– cilj: – pronaći jednadžbu $U_{iz} = \dots \cdot U_{ul}$

– to ćemo raditi tako da najprije označimo čvorove na shemi i napišemo jednadžbe čvorova po starom principu iz prošlog ciklusa (napon čvora x suma vodljivosti od njega minus nap. susjednih čvorova x suma vodljivosti prema njima = suma struja koje ulaze u čvor)

(1) $U_1\left[\frac{1}{sL_1}+\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right] - U_{ul}\left[\frac{1}{sL_1}\right] - U_2\left[\frac{1}{R_2}\right] - U_{iz}\left[\frac{1}{R_1}\right] = 0$

(2) $U_2\left[\frac{1}{R_2}+\frac{1}{sL_2}\right] - U_1\left[\frac{1}{R_2}\right] - U_{iz}\left[\frac{1}{sL_2}\right] = 0$

imamo i jedn. pojačala iz koje je $U_2 = U_3 = 0$ i to uvrstimo gore:

nakon kratkog računa dobijemo:

$$U_{iz} = -\frac{s\sqrt{2}}{s^2 \quad s\sqrt{2}+1}\, U_{ul}$$

– e sada prijenosna funkcija T(s) izgleda ovako: $T(s) = \frac{U_{iz}}{U_{ul}}$;

– odnosno u našem slučaju: $T(s) = -\frac{\sqrt{2}\,s}{s^2+\sqrt{2}\,s+1}$

- odnosno u našem slučaju: $T(s) = \frac{-\sqrt{2}\,s}{s^2 + \sqrt{2}\,s + 1}$

- OPĆENITO O PRIJENOSNIM FUNKCIJAMA:

- funkcija izgleda ovako: $T(s) = k \cdot \frac{(s - s_{n1})(s - s_{n2}) \cdots}{(s - s_{p1})(s - s_{p2}) \cdots}$

  k - konstanta (neki broj)
  n - nula
  p - pol

- kada tražimo nule, brojnik izjednačimo s nulom, a kada tražimo polove nazivnik izjednačimo s nulom ⇒ traženje nula: brojnik = 0

  traženje polova: nazivnik = 0

- za primjer uzmimo prijenosnu funkciju koja izgleda ovako:

$$T(s) = 4 \cdot \frac{s^2+4s+3}{s^2+2s+2}$$

- najprije tražimo nule i polove:

nule: $\Rightarrow s^2+4s+3=0$

$\rightarrow s_{n_1}=-1$

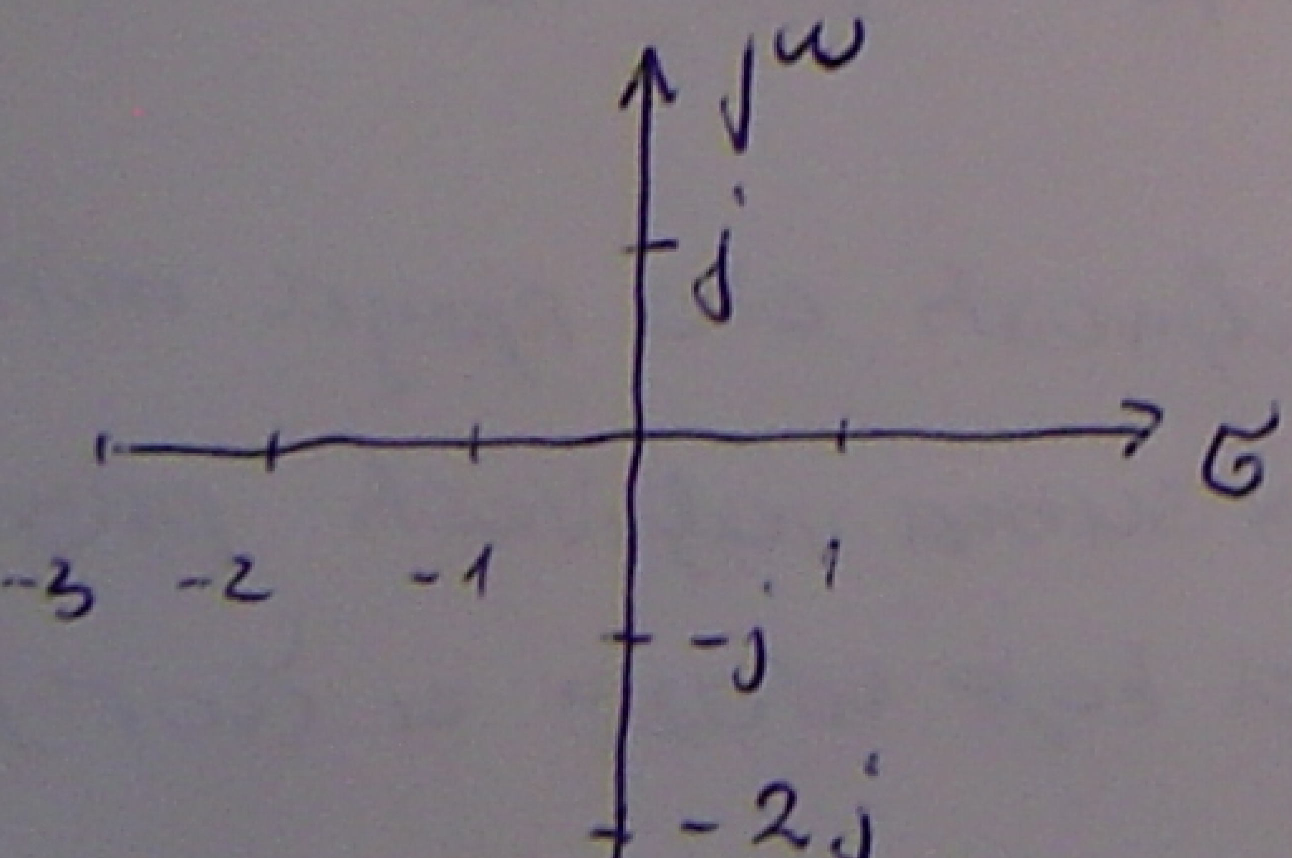
$s_{n_2}=-3$

polovi: $\Rightarrow s^2+2s+2=0$

$s_{p_{1,2}} = \frac{-2 \pm j2}{2}$; $s_{p_1}=-1-j$

$s_{p_2}=-1+j$

- sada ove brojke trebamo smjestiti u kompleksnu ravninu koja izgleda ovako:

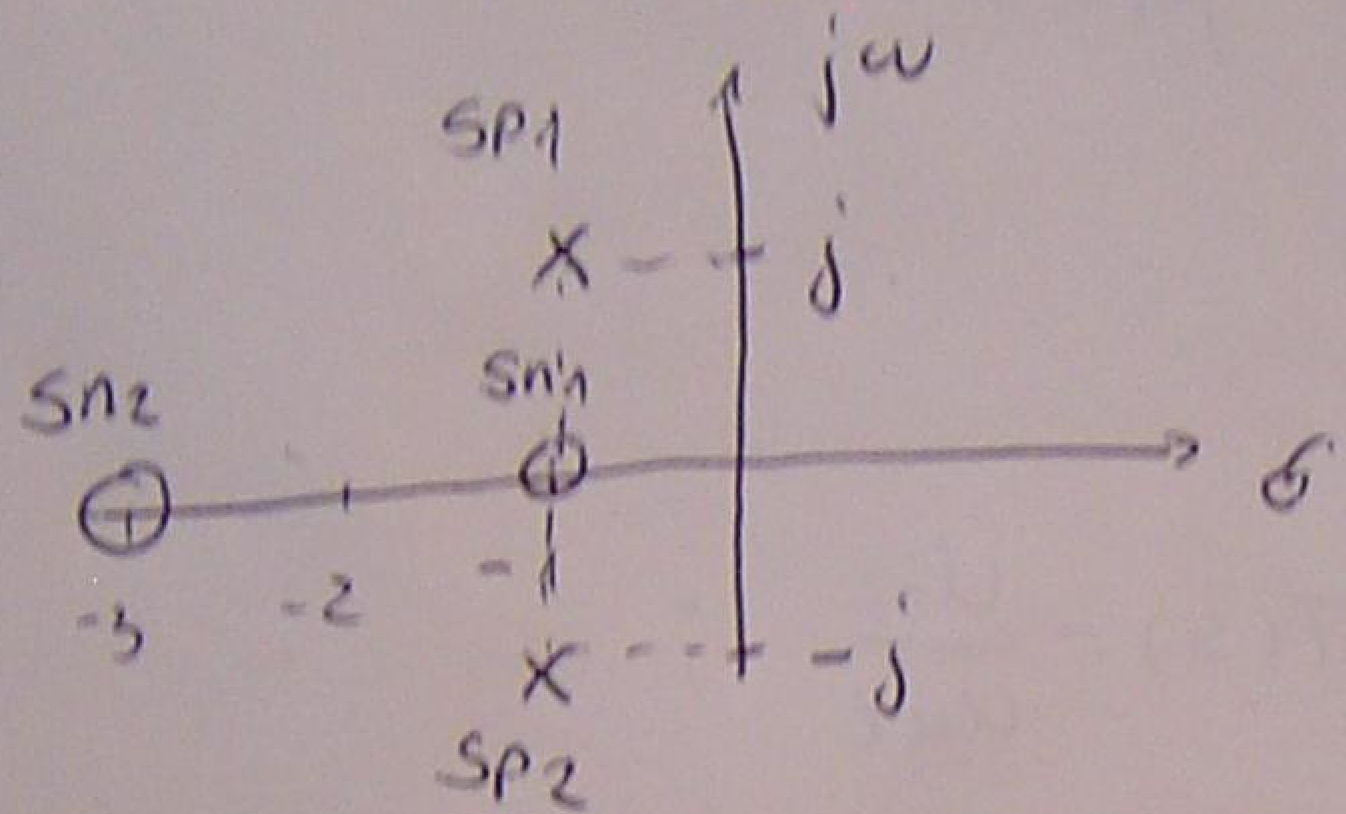


→ ukoliko 1 pol padne na "0" onda je to granično stabilan sustav

→ ukoliko pol padne "desno", odnosno na pozitivni dio apscice onda je to nestabilan sustav.

→ nule mogu biti bilo gdje

-nule označavamo sa "o", a polove sa "x";



- sada moramo pronaći Amplituda!

mi imamo funkcija oblika $T(s)$ ... a trebamo $T(j\omega)$

dakle samo umjesto s pišemo $j\omega$ $(s = j\omega)$

$$T(j\omega) = 4 \cdot \frac{-\omega^2 + 4j\omega + 3}{-\omega^2 + 2j\omega + 2} \quad ; \left\{ (j)^2 = -1 \right\}$$

amplituda je jednaka apsolutnoj vrijednosti $T(j\omega)$

$$A(\omega) = |T(j\omega)|$$

$\Rightarrow$ apsolutna vrijednost kompl. broja $= \sqrt{\text{realni dio}^2 + \text{imaginarni dio}^2}$

a mi možemo računati aps. vrij. za svaki dio ~~i~~ odnosno posebno za brojnik, posebno nazivnik jer je

$$\left| \frac{\text{nešto}}{\text{nešto}} \right| = \frac{|\text{nešto}|}{|\text{nešto}|}$$

-konkretno za naš slučaj:

$$|T(j\omega)| = 4 \cdot \frac{\sqrt{(3-\omega^2)^2 + (4\omega)^2}}{\sqrt{(2-\omega^2)^2 + (2\omega)^2}}$$

$$Z = a + jb$$

$$|Z| = \sqrt{a^2+b^2}$$

-još moramo pronaći $\varphi(\omega)$

$$\varphi(\omega) = \measuredangle T(j\omega)$$

općenito: $\varphi = tg^{-1}\frac{b}{a}$ ili $\varphi = \mathrm{arctg}\frac{b}{a}$ imaginarni realni

- u našem slučaju imamo razlomak

$$T(j\omega) = 4 \cdot \frac{3-\omega^2+4j\omega}{2-\omega^2+2j\omega}$$

$\Rightarrow$ 1. kompleksni broj

$\Rightarrow$ 2. kompleksni broj

dakle između ova dva kompl. broja je operacija dijeljenja, a to znači da ćemo izračunati kut prvog kompleksnog broja i kut drugog kompl. broja, a između staviti minus (zbog dijeljenja) ili plus (kod množenja)

$$\varphi(\omega) = 0 + tg^{-1}\frac{4\omega}{3-\omega^2} - tg^{-1}\frac{2\omega}{2-\omega^2}$$

- rješenje: ukoliko za primjer uzmemo ulazni napon oblika

$$u_{ul} = 3\cos(4t + 20^\circ) \quad \text{onda}$$

$\to \omega$

izlazni izgleda ovako:

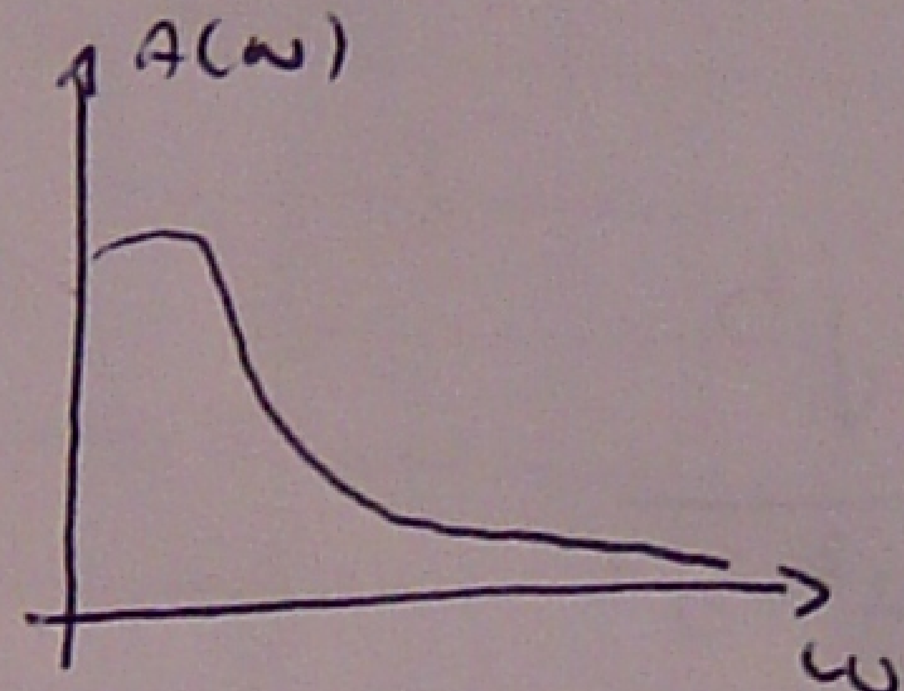
$$u_{iz} = 3 \cdot A(4) \cdot \cos(4t + 20^\circ + \varphi(4))$$

Crtanje :

- na kraju još moramo i skicirati našu funkciju i ona je sigurno jedna od ove 4 ponuđene :

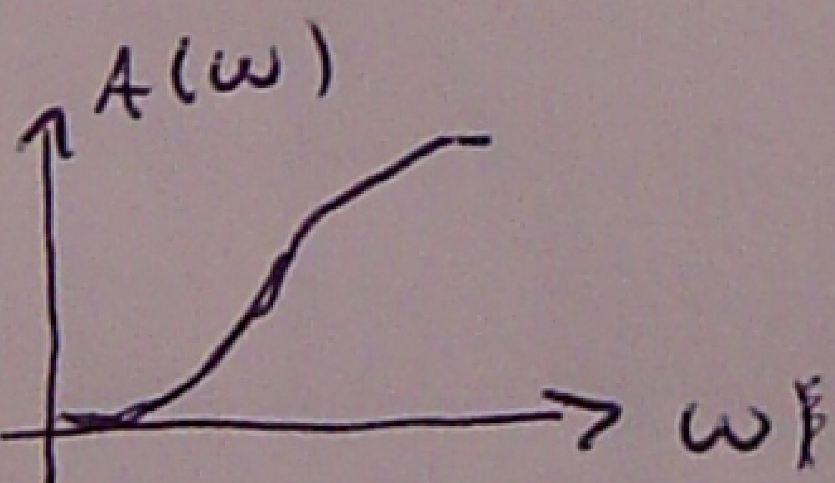
1) NISKOPROPUSNI FILTER

$$T(s) = \frac{a}{s^2 + bs + c}$$



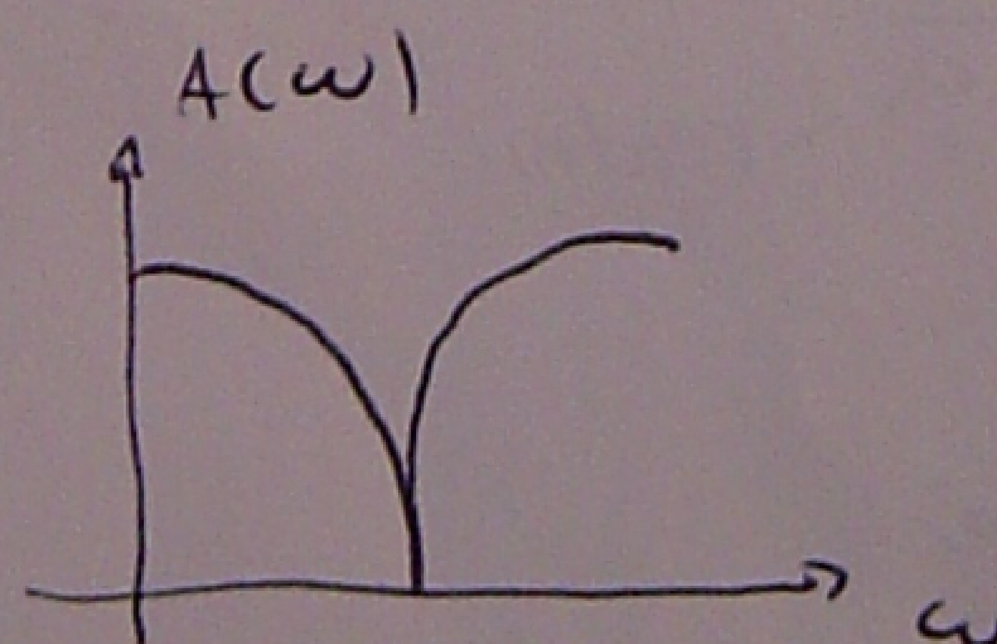
2) VISOKOPROPUSNI FILTER

$$T(s) = \frac{as^2}{s^2 + bs + c}$$



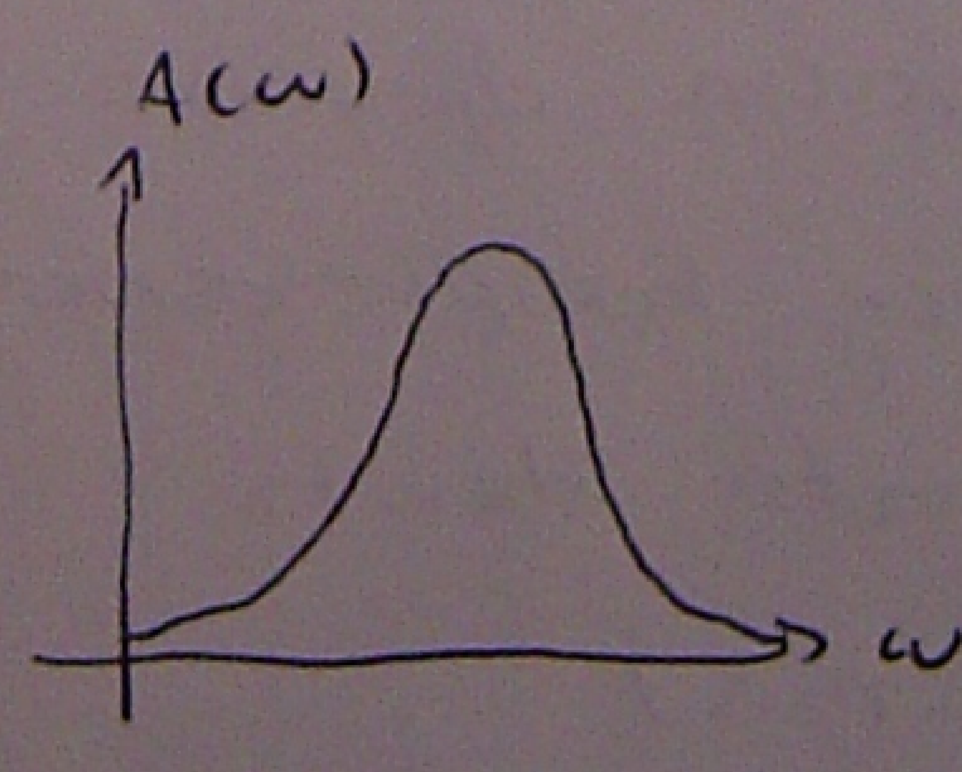
3) POJASNA BRANA

$$T(s) = \frac{as^2 + b}{cs^2 + ds + e}$$

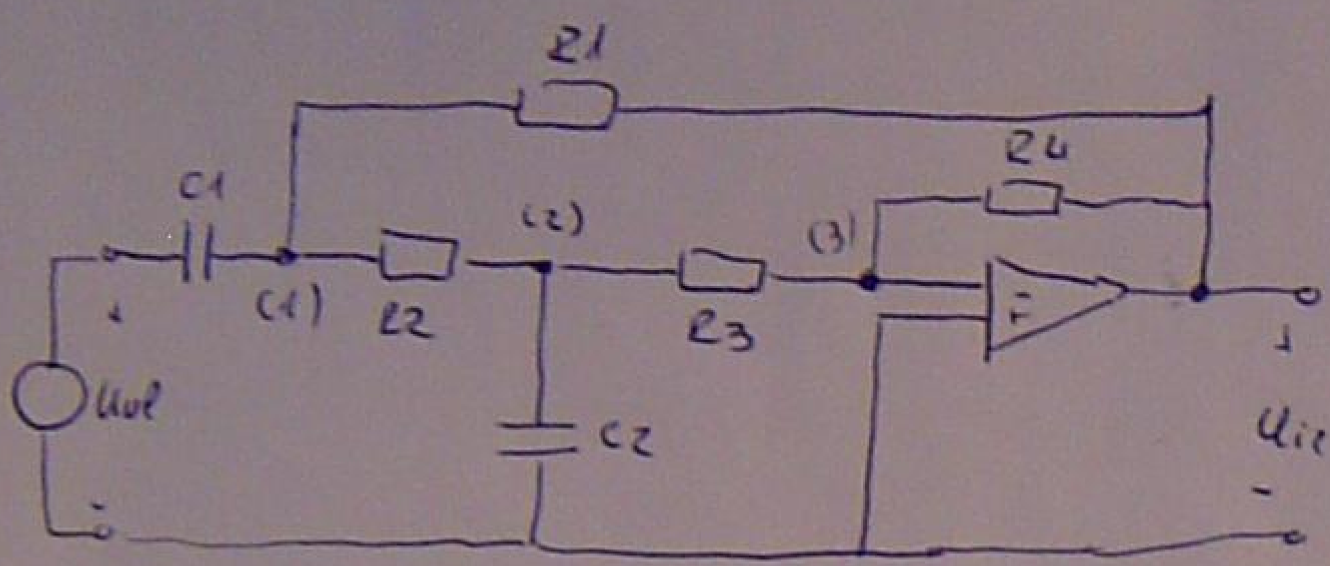


4) POJASNO-PROPUSNI FILTER

$$T(s) = \frac{s}{cs^2 + ds + e}$$



③ ISPIT 06



- prvo postavimo jednadžbe čvorova:

$$(1)\ U_1\left[sC_1+\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right]-U_2\left[\frac{1}{R_2}\right]-U_{ul}[sC_1]-U_{iz}\left[\frac{1}{R_1}\right]=0$$

$$(2)\ U_2\left[\frac{1}{R_2}+sC_2+\frac{1}{R_3}\right]-U_1\left[\frac{1}{R_2}\right]-U_3\left[\frac{1}{R_3}\right]=0$$

$$(3)\ U_3\left[\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right]-U_2\left[\frac{1}{R_3}\right]-U_{iz}\left[\frac{1}{R_4}\right]=0$$

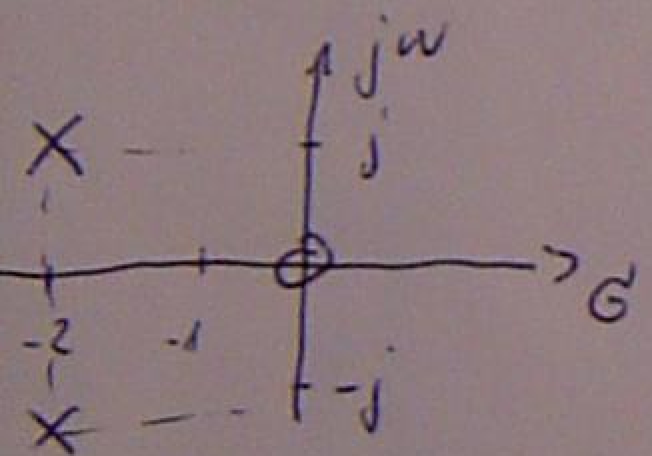
→ iz jednadžbe pojačala $U_3=0$ i zada to uvrstimo u ove jednadžbe i sredimo te uvrstimo u $T(s)$ dobijemo:

$$T(s)=\frac{U_{iz}}{U_{ul}}=\frac{-2s}{s^2+4s+5}$$

→ daje odredimo nule i polove i nacrtamo to u kompl. ravninu:

nule: $-2s=0 \Rightarrow s=0$

poloni: $s^2+4s+5=0 \Rightarrow s_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16-20}}{2}=-2\pm j$

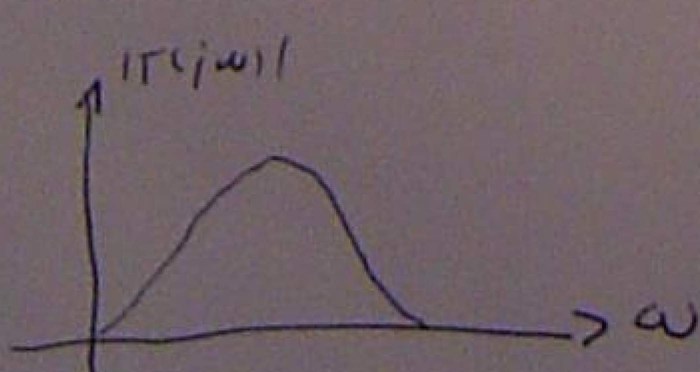


- daje nas u zadatku traži da izračunamo i nacrtamo A/F karakteristiku.
- prvo napravimo $T(j\omega)$

$$T(j\omega)=\frac{-2j\omega}{5-\omega^2+4j\omega}$$; daje radimo $|T(j\omega)|$

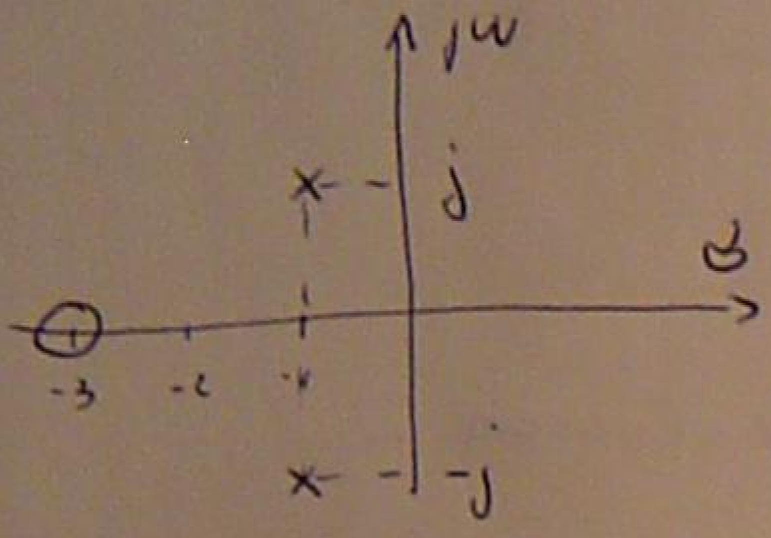
$$|T(j\omega)|=\frac{2\omega}{\sqrt{(5-\omega^2)^2+j\omega 2}}$$ (po onoj formuli za kompleksne brojeve)

- i sad pogledamo našu prijenosnu funkciju i usporedimo sa ona 4 crteža i skiciramo



→ gotovo ←

(4) ISPIT 2006 Zadana je prijenosna funkcija $H(s) = \frac{U_{iz}(s)}{U_{ul}(s)}$, graf i uvjet $|H(j\omega)| = 1$ za $\omega = 1$; odrediti fazor ako je $u_{ul}(t) = \cos(3t + 20°)$



- prvo iz grafa očitamo nule i polove:

polovi: $-1 \pm j$ nula: -3

- naša funkcija mora imati oblik

$$H(s) = k \cdot \frac{(s - s_{n1})(s - s_{n2}) \ldots}{(s - s_{p1})(s - s_{p2}) \ldots}$$

- uvrštavamo vrijednosti iz grafa:

$$H(s) = k \cdot \frac{(s+3)}{(s+2)(s-(-1-j))(s-(-1+j))} = k \cdot \frac{s+3}{(s+2)(s+1+j)(s+1-j)}$$

=> ovdje je važno da se ne zaboravi koeficijent k jer je on nepoznat a i treba nam

=> umjesto s uvrstimo $j\omega$

$$H(j\omega) = k \cdot \frac{j\omega + 3}{(j\omega+2)(j\omega+1+j)(j\omega+1-j)}$$

=> odredimo modul ili apsolutnu vrijednost kompleksnog broja

$$|H(j\omega)| = k \cdot \frac{\sqrt{3^2+\omega^2}}{\sqrt{\omega^2+4}\sqrt{(\omega+1)^2+1}\sqrt{(\omega+1)^2+1}}$$; za ω uvrstimo $\omega = 1$ i modul $= 1$

$$1 = k \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} \; ; \; k = \frac{5}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{10}}{10} \; ; \; k = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

sada konačno naša prijenosna funkcija ima izgled:

$$H(s) = \frac{\sqrt{10}}{2} \cdot \frac{(s+3)}{(s+2)(s^2+2s+2)}$$

$$H(j\omega) = \frac{\sqrt{10}}{2} \cdot \frac{j\omega+3}{(j\omega+2)(2-\omega^2+2j\omega)}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{\sqrt{10}}{2} \cdot \frac{\sqrt{\omega^2+9}}{\sqrt{\omega^2+4}\sqrt{(2-\omega^2)^2+4\omega^2}}$$

-odradimo fazor:

$$\rightarrow (*)\; u_{iz}(t) = |H(j\omega)|\Big|_{\omega_1} \cdot \cos(3t + 20^\circ + \varphi)$$

$\rightarrow \omega$

$(*) \Rightarrow$ sada u naš $|H(j\omega)|$ uvrstimo $\omega = 3$ i izračunamo

$$|H(j\omega)|\Big|_{\omega_1} = 0.201$$

$\rightarrow$ izračunamo $\varphi(\omega)$

$$\hookrightarrow = \operatorname{arctg}\frac{\omega}{3} - \left[\operatorname{arctg}\frac{\omega}{2} + \operatorname{arctg}\frac{2\omega}{2-\omega^2}\right] \;;\; \text{za } \omega = 3$$

$$= 150{,}7^\circ$$

sve to uvrstimo u (*)

$$u_{iz}(t) = 0{,}201 \cdot 1 \cdot \cos(3t + 20^\circ - 150{,}7^\circ)$$

$$= 0.201 \cos(3t - 130{,}7^\circ)$$

ili u fazorskom obliku $\Rightarrow$ $0.201 \cdot e^{-j130{,}7}$

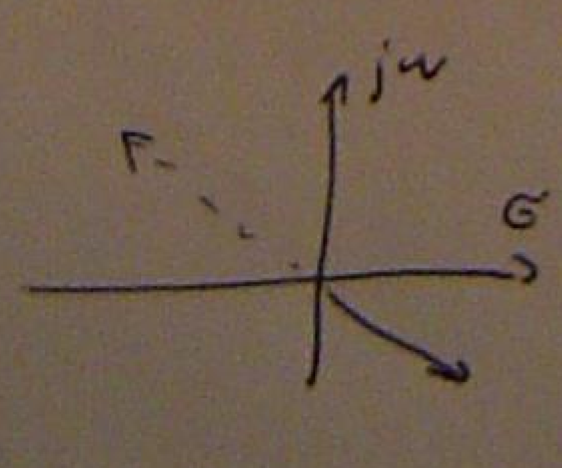
$\rightarrow$ fazor $\rightarrow$ ako imamo $A(\omega t + \varphi)$ onda je $\rightarrow A \cdot e^{j\varphi}$

<u>Primjer</u> - BITNO!

ako imamo $\varphi = tg^{-1}\frac{2\omega}{2-\omega^2}$; $\omega=3$; $tg^{-1}\frac{6}{-7} = -40{,}6^\circ$ ne valja!

zašto? mi imamo ovo: $z = -7 + j6$ i

to je



a mi trebamo dobiti ovo iscrtkano:

pravi kut = $\varphi = 180^\circ - 40{,}6^\circ$