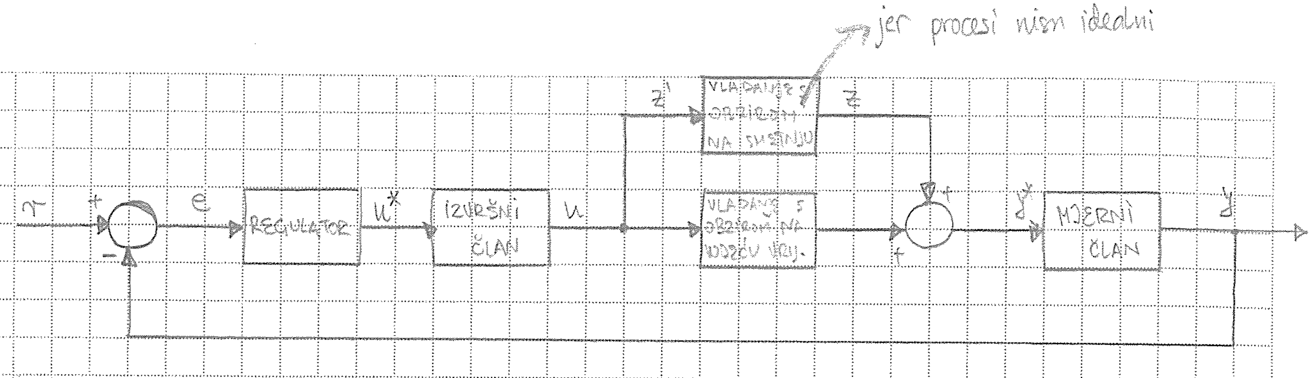
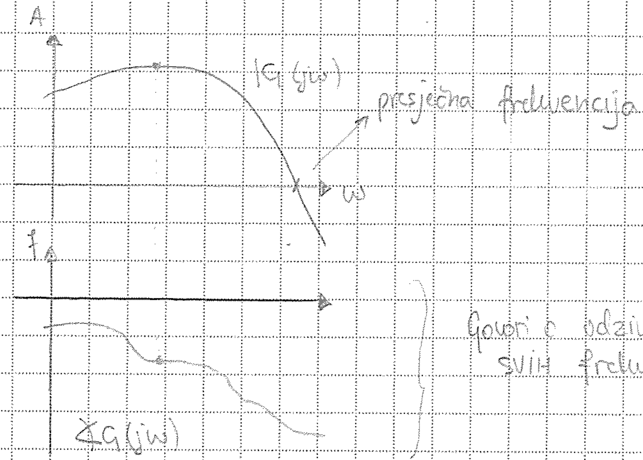
I

REPETITORIJ

Osnovna struktura sustava upravljanja

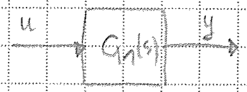


Regulacijski krug = 4 glavna dijela: 1) Proces
2) Mjerni član
3) Regulator
4) Izvršni član (postavni)

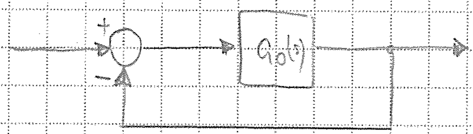


Govori o odzivu sustava SVIH frekvencija!

Linearizacija = "razviti funkciju do prvog reda", ostalo su finese.
Sustav upravljanja mora sadržavati proces - povratnu vezu - regulator.
Idealan proces = onaj na koji djeluje samo regulator.
Anihilirati = poništiti.
Frekvencijska karakteristika sadrži ekormno puno informacija. Nyquist i Bode nose više nego odziv sustava (na step) i Bode se može crtati za svaku prijenosnu funkciju (analiza stabilnosti). Bode se može crtati bilo za otvoreni bilo za zatvoreni sustav.
Tako se radi u z-domeni, i dalje je riječ o frekvencijskoj analizi.



$G_{OL} = G_1(s)$ $\quad G_{CL} = \dfrac{G_o}{1+G_o}$



Optimalno upravljanje ⟶ jednadžbe diferencija i diferencijalne jednadžbe

Definiramo kriterij koji želimo minimizirati. npr. brzo zaustavljanje vlaka ⟶ deceleracija preko vremenskih funkcija)

$$\left.\begin{aligned} x(k+1) &= \mathbf{A}x(k) + \mathbf{B}u(k) \\ y(k) &= \mathbf{C}x(k) + \mathbf{D}u(k) \end{aligned}\right\} \text{opis sustava}$$

Sinteza & Analiza: KRIVULJA MJESTA KORIJENA

10 KORAKA - O čemu trebamo voditi računa pri sintezi regulacijskog kruga?

1) Postaviti opći cilj
2) Modelirati sustav - pojednostaviti ako neophodno
3) Analizirati model - skalirati varijable i odrediti svojstva modela
4) Odrediti varijable koje želimo regulirati, koje su mjerne i upravljačke
5) Izabrati upravljačku strukturu
6) Odrediti oblik regulatora
7) Odrediti pokazatelje kakvoće za sustav upravljanja
8) Parametrirati regulator
9) Analizirati dobiveni sustav upravljanja - Je li zadovoljavajući?
10) Simulirati
*) Ponoviti od koraka 2 ako ne valja

npr. toplinski eng. a) T b) U, I ⟶ b)! U·I
Preko kojih var.?

Želimo ono ponašanje oko radne točke ⟶ to se da linearizirati!

II UPRAVLJANJE U PROSTORU STANJA (state space control)

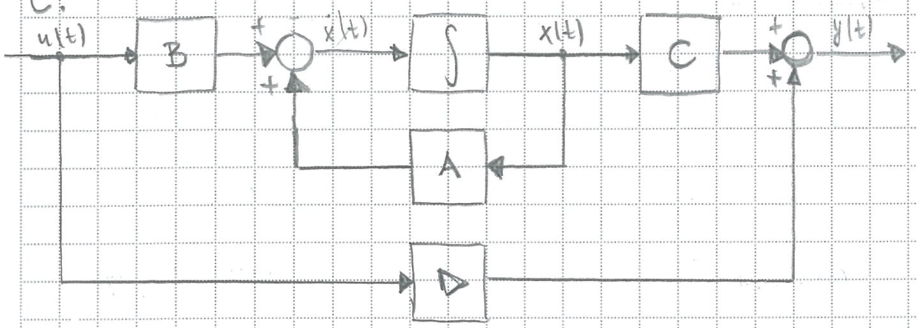
UPRAVLJIVOST && OSMOTRIVOST

LTI (linear time invariant) system

continuous:
$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}\,x(t) + \mathbf{B}\,u(t) \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^q$$
$$y(t) = \mathbf{C}\,x(t) + \mathbf{D}\,u(t) \qquad u \in \mathbb{R}^p,\ t \in \mathbb{R}$$

discrete:
$$x(k+1) = \Phi\, x(k) + \Gamma\, u(k) \qquad k \in \mathbb{Z}$$
$$y(k) = \mathbf{C}\, x(k) + \mathbf{D}\, u(k)$$

C:



D – analogno, zamjena: umjesto $\int$ ide z^{-1}

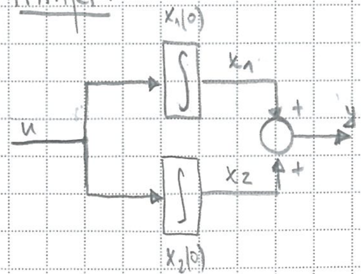
Matricu $\mathbf{D}$ većinom zanemarujemo (ne želimo da ulaz djeluje na izlaz)
Želimo upravljati s $x(t)$ i preko toga dobiti željeni $y(t)$.

Povratna veza po varijablama stanja: State feedback. $u(t) = f(x(t))$

Koji uvjeti omogućuju $u(t) = f(x(t))$?

Controlability = Upravljivost
Observability = Osmotrivost

Primjer.



SISO, 2.reda (2 var.stanja: x_1, x_2)

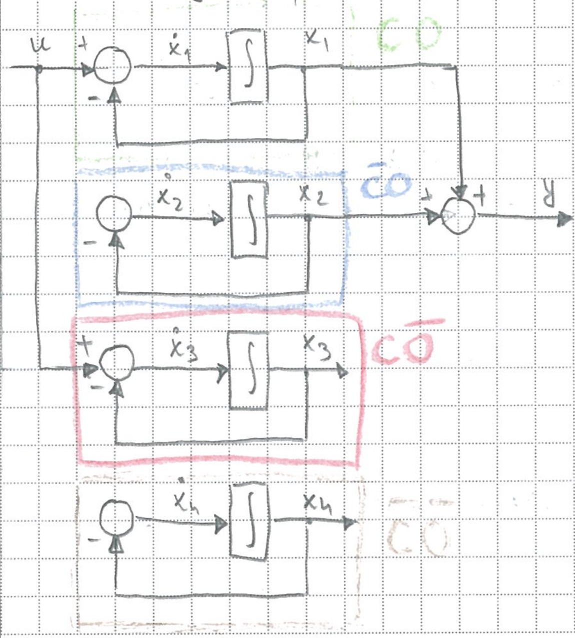
$$y(t) = x_1(0) - x_2(0) \neq f(u,t)$$

Sustav nije osmotriv: Gledajući izlaz ne možemo zaključiti o vrijednostima var. stanja u nekom trenu jer nemamo dovoljno informacija.

Primjer.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} \cdot u \qquad y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \cdot x$$

Uvijek kada gledamo C&O, pretpostavljamo $D = 0$.
Ako SISO (1y i 1u), onda stavimo $D = 0$.



4 podsustava ako komponente:

1. CO = upravljiv && osmotriv
2. $\bar{C}O$ = neupravljiv && osmotriv
3. $C\bar{O}$ = upravljiv && neosmotriv
4. $\bar{C}\bar{O}$ = neupravljiv && neosmotriv

Želimo: CO

Provjeri RANGA MATRICE!

UPRAVLJIVOST (C) := sustav je upravljiv ako se za bilo koje početno stanje x_0 može u konačnom vremenu $T>0$ dovesti u ishodište

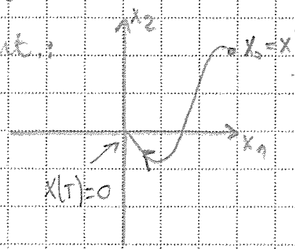
matematički zapis:

$$\boxed{\begin{array}{ll} x_0, T>0 & \\ \forall x(0)=x_0 & \exists T>0 \\ \exists u(\tau) & \tau\in[0,T] \\ x(T)=0 & \end{array}}$$

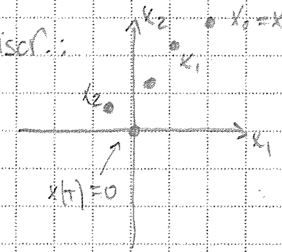
vrijedi za vremenski cont. & discr. sustave.

Upravljački signal nije fiksiran, već proizvoljan.

cont.:



discr.:



→ Ovo treba biti za svako početno stanje, cjelokupni prostor.

Za svaki cont. sustav vrijedi da ako je upravljiv, treba mu ∞ vremena da dođe u ishodište (i za stabilne)! Diskretni nekad zna sam to učiniti.

Rudolf Kalman (~1960) uveo CD pojmove

$\forall$cont. / $\exists$discr. ~~sustavi neće sami od sebe doći u ishodište~~ u konačnom vremenu!

Ako je matrica Φ nilpotentna ($\Phi^T=0$), ostvaruje se dolazak u ishodište bez upravljačkog signala ($T\leq$ reda sustava).

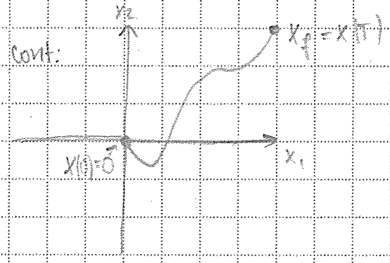
Primjer $A=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix} \longrightarrow A^2=0$

DOHVATLJIVOST (D) := sustav je dohvatljiv ako postoji upravljački signal koji u konačnom vremenu $T>0$ prebaci sustav iz ishodišta $x_0(t)=0$ u željeno konačno stanje $x(T)=x_f$

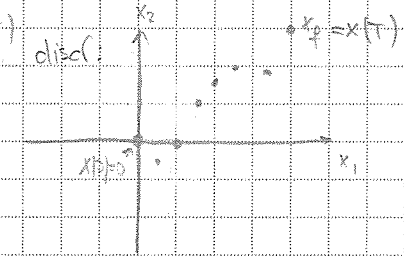
matematički zapis:

$$\boxed{\begin{array}{ll} T>0 & \\ \forall x_f & \exists T>0 \\ \exists u(\tau) & \tau\in[0,T] \\ x(0)=0 & x(T)=x_f \end{array}}$$

cont.:



discr.:



LTI sys u CONT domeni:

AKO UPRAVLJIV, ONDA DOHVATLJIV

i OBRAT

(Dohv $\equiv$ Uprav)

LTI sys u DISCR domeni:

ova dva koncepta $\neq$

(Dohv $\longrightarrow$ Uprav)

xxx

Matrica upravljivosti $\mathcal{C}$ koristi se za test dohvatljivosti:

$$\mathcal{C} := \big[\underbrace{B}_{p} \;|\; \underbrace{A\cdot B}_{p} \;|\; \underbrace{A^2\cdot B}_{p} \;|\; \dots \;|\; \underbrace{A^{n-1}\cdot B}_{p}\big] \}n$$

n = red sustava

blokovski uređena matrica

p = br ulaza = br stupaca
n = red sustava = br redaka

$\mathcal{C}\in\mathbb{R}^{n\times(np)}$ - dimenzije matrice $\mathcal{C}$

A^0 = jedinična matrica

TEST DOHVATLJIVOSTI – teorem

Sustav opisan u prostoru stanja (A,B,C,D matrice) dohvatljiv je ako i samo ako je rang matrice upravljivosti jednak n.

$$\underset{\text{rang}}{\mathrm{rang}}(\mathcal{C}) = n \quad \Leftrightarrow \quad \det(\mathcal{C}\cdot\mathcal{C}^T) \neq 0$$

Za diskretni sustav: $A \to \Phi$, $B \to \Gamma$, sve ostalo isto

Rang matrice: • kvadratična matrica: br ulaza $p=1 \to \mathcal{C} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dodajem uvjet:

$$\det(\mathcal{C}) \neq 0$$

Primjer

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \cdot x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}}_{B} \cdot u \quad \longrightarrow n=4, \text{ cont LTI}$$

$$\mathcal{C} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -11 \\ -1 & 0 & -11 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} B & AB & A^2B & A^3B \end{array} \end{array}$$

$\det(\mathcal{C}) = 100 \neq 0 \Rightarrow$ sys je po def. upravljiv i dohvatljiv

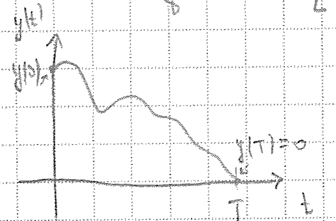
Sve var. stanja su upravljive $\Rightarrow$ potpuna upravljivost
(mi želimo uvijek upravljati svim varijablama)

xxx IZLAZNA UPRAVLJIVOST – isforsirati izlaz da dođe u ishodište

$$y(t) = C\cdot x(t)$$

TEST: $\mathrm{rang}(C\cdot\mathcal{C}) = \underset{\text{br. izlaza}}{q} \Rightarrow$ sys je izlazno upravljiv!

$(y(T) = 0)$



OSMOTRIVOST ($\mathcal{O}$) eng observability

- Može li se gledanjem izlaza zaključiti nešto o varijablama stanja?

:= Ako za bilo koje početno stanje $x(0) = x_0$ postoji konačno vrijeme $T>0$ tako da je poznavanje izlaznog signala $y(\tau)$ na intervalu $\tau \in [0,T]$ dovoljno kako bi se mogao odrediti x u trenutku 0, $x(0)$, onda je sustav osmotriv.

OBNOVLJIVOST ($\mathcal{R}$) eng reconstructability

:= Ako za bilo koje konačno stanje $x(T) = x_f$ postoji konačno vrijeme $T>0$ tako da poznavajući izlazne signale $y(\tau)$, $\tau \in [0,T]$ možemo odrediti $x(T)$, onda je sustav obnovljiv.

Za cont. sys. T se može nesti na malu vrijednost.
Bolje $\longrightarrow$ obnovljivost!

! cont $D \equiv U$, $\mathcal{O} \equiv \mathcal{R}$ diskr. $D \xrightarrow{\text{implicira}} U$, $\mathcal{O} \to \mathcal{R}$

MATRICA OBNOVLJIVOSTI (Kalmanov test osmotrivosti)

$$\underset{(\text{long})}{\mathcal{O}} := \underbrace{\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}}_{n} \begin{array}{l} \}q \\ \}q \\ \}q \\ \}\vdots \\ \}q \end{array} \qquad \mathcal{O} \in \mathbb{R}^{(nq)\times n}$$

(analogno za diskr., samo umjesto A pišemo Φ)

(Postoje i drugi testovi)

Sustav je osmotriv ako je rang matrice osmotrivosti jednak n:

$$\mathrm{rang}(\mathcal{O}) = n \quad \Leftrightarrow \quad \det(\underbrace{\mathcal{O}^T\mathcal{O}}_{\text{kvadratična matrica}}) \neq 0$$

xxx ako $q=1 \longrightarrow$ test determinantom
$\det(\mathcal{O}) \neq 0$

Primjer

$$\dot{x} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \end{bmatrix}}^{A} \cdot x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot u \qquad n = 4, \quad q = 1$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \cdot x$$

Osmotriva?

$$\mathcal{O} = \begin{array}{l} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \} \, C \\ \} \, CA \\ \} \, CA^2 \\ \} \, CA^3 \end{array}$$

Kvadratična dijagonalna s elementima na dijagonali $\neq 0$ $\Rightarrow$ $\det(\mathcal{O}) \neq 0$ $\Rightarrow$ Osmotriv.

Diskretno područje

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k)$$

$$x(n) = \Phi^n x(0) + \sum_{i=0}^{n-1} \Phi^{n-i-1} \cdot \Gamma \cdot u(i)$$

isto

$$x(n) = \Phi^n x(0) + \mathcal{C} \cdot \begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

$$x(n) - \Phi^n \cdot x(0) = \mathcal{C} \cdot \begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

Iz ovoga možemo odrediti upravljačke signale (sekvence). Nećemo, ali je moguće. (Hoćemo nekad, ali rijetko)

HAMILTON-CAYLEY TEOREM

Kvadratična matrica zadovoljava svoju karakterističnu jednadžbu.

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$\det(sI - A) = 0$ kar. jdžba

polinom n-tog reda $P_n(s) = 0$

Primjer $s^2 + 2s + 3 = 0$

$\downarrow$

$A^2 + 2A + 3I_n = 0$ (dokaz wf)

$\downarrow$

Ne mijenja rang matricama $\mathcal{O}, \mathcal{C}$.

Diskretno područje

rang$(\mathcal{C})$

$\det(\mathcal{C}^T\mathcal{C}) \neq 0$

CONTR. $\leftarrow$ REACH.

CONTR. $\rightarrow$ REACH. za nesingularnu Φ: $\det(\Phi) \neq 0$

rang$(\mathcal{O})$

$\det(\mathcal{O}^T\mathcal{O})$

OBSERV. $\rightarrow$ RECON.

RECON. $\rightarrow$ OBSERV.

Primjer $x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0.25 & 0 \end{bmatrix} \cdot x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{bmatrix} \cdot u(k)$

$x(0) = [2 \quad 2]^T$

$x(2) = [0.5 \quad 1]^T$

Dohvatljiv? Stanje $x(2)$ dohvatljivo?

$u(0) = -2$

$u(1) = -3$

$$x(2) = \Phi^2 x(0) + \Phi\Gamma u(0) + \Gamma u(1)$$

$\rightarrow$ 2 jdžbe s 2 nepoznanice: $\Phi^2 = \begin{bmatrix} 0.75 & 1 \\ -0.25 & -0.25 \end{bmatrix}$ $\quad \Phi\Gamma = [0.5 \quad -0.25]^T$

Zaključak: $x(2)$ dohvatljivo, matrica upravljivosti je punog ranga.

III STABILIZABILITY = ako su sva neupravljiva stanja stabilna po sebi (stabilne dinamike)

DETECTABILITY = detektivost
ako su sva neosmotriva stanja stabilne dinamike

$\dot{x} = Ax + Bu$ $\qquad x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k)$ $\qquad x \in \mathbb{R}^n$

$y = Cx + Du$ $\qquad y(k) = Cx(k) + Du(k)$

$\mathcal{C} = [B \;\; AB \; \dots \; A^{n-1}B]$

Svojstva osmotrivost i upravljivost ne ovise o — varijablama stanja:
— M (matrici transformacije)

$\boxed{M \in \mathbb{R}^{n \times n} : \exists M^{-1} \equiv \det(M) \neq 0, \; rang(M) = n}$ → kvadratična matrica za koju postoji inverz

$rang(M) = n$ — puni rang

$\tilde{x} = Mx \longrightarrow x = M^{-1}\tilde{x}$

(Postupak za cont., ali je isto za discr.)

$M^{-1}\dot{\tilde{x}} = AM^{-1}\tilde{x} + B \cdot u \quad / \cdot M$ (slijeva) → ne gubi se rang!

$\dot{\tilde{x}} = MAM^{-1} \cdot \tilde{x} + MB \cdot u$

$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u$ → novi, a zapravo stari, sys

$\tilde{A} = MAM^{-1}$ $\qquad \tilde{\mathcal{C}} = [\tilde{B} \;\; \tilde{A}\tilde{B} \; \dots \; \tilde{A}^{n-1}\tilde{B}]$

$\tilde{B} = MB$ $\qquad \tilde{\mathcal{C}} = [MB \;\; MAB \; \dots \; MA^{n-1}B] = M\mathcal{C}$

matrica punog ranga! → ne mijenja rang matrice koju množi!

$\tilde{A}^2 = MAM^{-1}MAM^{-1} = MA^2M^{-1}$ $\qquad rang(\mathcal{C}) = rang(\tilde{\mathcal{C}})$

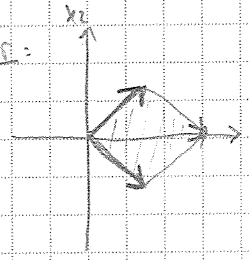
Zaključak: Linearna transformacija ne mijenja matrice upravljivosti i osmotrivosti. Sustavi imaju ista svojstva!

Primjer: Diskretizacija je nelinearna transformacija i nije nužno da diskretizirani sustav nije/je upravlj./osm.

Ako sustav nije dohvatljiv, nije nužno da neka stanja nisu dohvatljiva.

(npr. nekog podsustava jedn.)

Primjer:

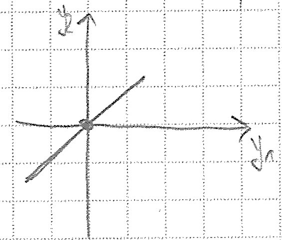


Domena

$x \longrightarrow \underline{\underline{A}}x$

može biti nižeg ranga

x (2D)



Kodomena

SLIKA = sve točke koje je moguće ostvariti u kodomeni (image)

Ax (1D)

(Vektorski) Prostor - ako je suma npr. 2 vektora ∈ prostor, i to je prostor

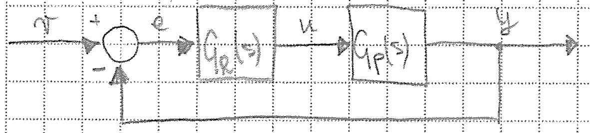
Moguća preslika 2D → 1D, čak 2D → 0D

Transformacija u nižu dimenziju!

PROJEKTIRANJE REGULATORA U PROSTORU STANJA

— regulator po varijablama stanja — regulator nultog reda —

— STATE SPACE CONTROL —



Ovakav regulator povećava red sustava (unosi dodatnu dinamiku preko signala razlike e):

$$G_R(s)=\frac{M(s)}{N(s)} \qquad G_P(s)=\frac{B(s)}{A(s)}$$

$$G_o(s)=G_R(s)\cdot G_P(s)=\frac{MB}{NA}$$

ako N(s) reda >0

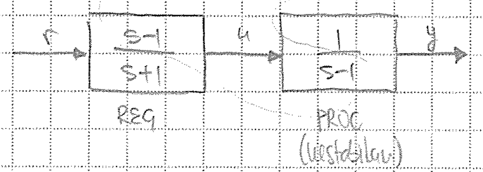
Obični regulator

$$G_{CL}(s)=\frac{G_o}{1+G_o}=\frac{MB}{AN+MB}$$

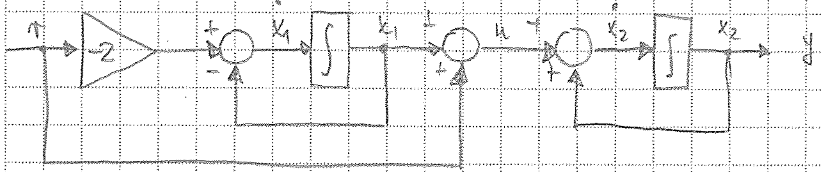
Regulator po varijablama stanja NE UNOSI dodatnu dinamiku u sustav ⟹ REGULATOR NULTOG REDA!

$$\boxed{u=f(x)}$$

Primjer: Ovo nije pametno raditi, ovo je samo eksperiment.



$$\frac{s-1}{s+1}=\frac{s+1-2}{s+1}=1-\frac{2}{s+1}=\frac{U(s)}{R(s)}$$



$$y=[0\ \ 1]\cdot x+\phi\cdot r$$

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}\dot x_1\\ \dot x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}\cdot r$$

Sys koji veže r i y zapisan preko var. stanja

$$\left.\begin{aligned}\dot x_2&=x_2+u\\ u&=r+x_1\end{aligned}\right\}\ \dot x_2=x_1+x_2+r$$

$\mathcal{C}=[B\ \ AB]$ (sys II reda) $\quad \mathcal{C}=\begin{bmatrix}2&2\\-1&-1\end{bmatrix}$ $\quad \det(\mathcal{C})=\phi$

→ Sys NIJE potpuno upravljiv.

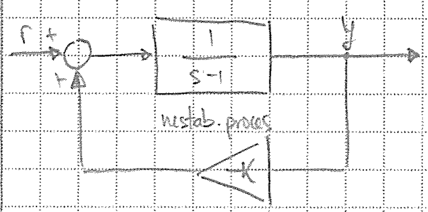
$\mathcal{O}=\begin{bmatrix}C\\CA\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}$ $\quad \det(\mathcal{O})=-1\neq 0$ → Sys JE osmotriv.

xxx početna stanja: xxx

$$\left.\begin{aligned}x_1(0)&=0\\x_2(0)&=0\\r(t)&=0\end{aligned}\right\}\ \begin{aligned}x_1(t)&=0\\x_2(t)&=0\end{aligned} \qquad \left.\begin{aligned}x_1(0)&=0\\x_2(0)&>0\\r(t)&=0\end{aligned}\right\}\ \begin{aligned}&x_1(t)=0\\&\lim_{t\to\infty}x_2(t)\to\infty\end{aligned}$$

KATASTROFA ($x_2(t)$ raste)

Ovo ilustrira korisnost opisa kroz prostor stanja (daleko informativniji).



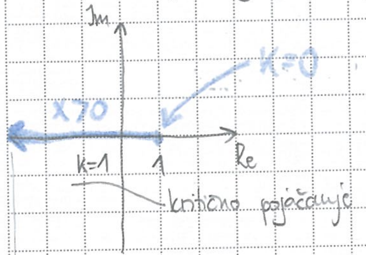
(paralelna veza bez dodatne dinamike)

$K\in\mathbb{R}$ $\qquad G_{CL}(s)=\frac{1}{s+K-1}$

Karakteristični polinom: $\Delta_{CL}(s)=s+K-1$

Karakteristična jednadžba: $\Delta_{CL}(s)=\phi$ → rješenja su polovi zatv. kruga

Prikaz krivulje mjesta korijena (KMK)



$s+K-1=0$

$s_{cl}=1-K$

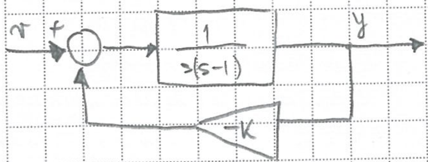
1.

2. vidimo da postoje rješenja u L poluravnini (stabilno!)

1 grana ≡ sys 1. reda.

Položaj polova zatvorenog kruga kao funkcija promjenjivih parametara.

Primjer – sys 2. reda



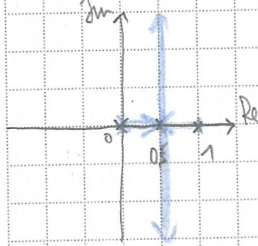
$$G_{cl}(s)=\frac{1}{s^2-s+K}, \quad K\in\mathbb{R}$$

$$\Delta_{cl}(s)=s^2-s+K$$

$$\Delta_{cl}(s)=0 \longrightarrow s_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1-4K}}{2}$$

Moguća rješenja obzirom na K:

2 realna
1 dvostruko
2 konjugirano-kompleksna



K=0: $s_{cl_1}=0$, $s_{cl_2}=1$ } isti kao u $G_0(s)$

K↑: rješenja se postupno približavaju, simetrično do 0.5 do 0.25

K↑: kompleksna rješenja preko 0.25

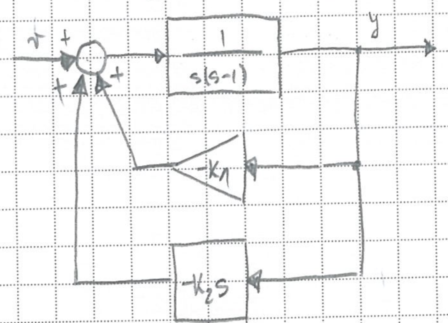
K>0 ne može NIKAD stabilizirati

K<0 daje 1 stabilno, 1 nestabilno rješenje

Zaključak: Nema K∈R koji stabilizira ovaj sustav! → Pojačanje u povr. vezi nije dovoljno.

Uvodimo još jedan signal:

(Ovo nije pametna ideja za praksu, ovo je samo eksperiment.)



$$G_{cl}(s)=\frac{1}{s^2+s(K_2-1)+K_1}$$

$$\Delta_{cl}(s)=s^2+s(K_2-1)+K_1$$

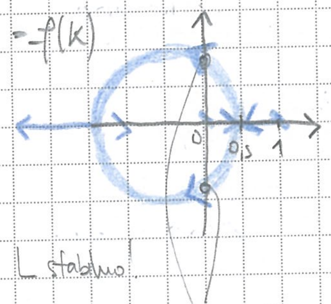
Nećemo analizirati KMK s dva parametra (K_1, K_2), već uvodimo fiksni omjer:

$$\frac{K_1}{K_2}=1$$

$$\Delta_{cl}(s)=0 \xrightarrow{K_1=K_2=K} s^2+s(K-1)+K=0, \quad K\geq 0$$

1 parametar → možemo crtati KMK

$s_{cl_{1,2}}=f(K)$



$$G_{cl}(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=C(sI-A)^{-1}B+\cancel{D}$$

∅ ovdje

Varijable stanja sadrže informacije o derivacijama. Nema potrebe derivirati vanjski signal!

Primjer:
$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx \qquad (D = \phi)$$

$$\Delta_{CL}(s) := \det(sI - A_{CL})$$
$$\Delta_A(s) := \det(sI_n - A) \equiv |sI_n - A|$$

kvadratična matrica

$$\boxed{\text{Hamilton-Cayleyjev teorem: } \Delta_A(A) = 0}$$

Regulator u prostoru stanja: $u = -Kx$, $K \in \mathbb{R}^{1\times n}$

$u(t) = -K\,x(t)$ ili $u(k) = -K\,x(k)$

$$\dot{x} = (A - BK)x \rightarrow \boxed{A - BK = A_{CL}}$$
$$y = Cx$$

matrica autonomnog (zatv.) sysa

Primjer:
$$A = \begin{bmatrix} 6 & -8 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -8 & 6 \end{bmatrix}$$

[Upravljivi kanonski oblik (controllability form): $\neq 0$ $= 1$]

$$u = -Kx = -\begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{CL}(s) = \det(sI - A + BK)$$

$$sI - A + BK = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & -8 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s-6+k_1 & 8+k_2 & +k_3 \\ -1 & s & 0 \\ 0 & -1 & s \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{CL}(s) = \det(sI - A + BK) = s^3 + (k_1 - 6)s^2 + (k_2 + 8)s + (k_3 + 0)$$
$$= s^3 + (k_1 - A_{11})s^2 + (k_2 - A_{12})s + (k_3 - A_{13})$$

1. korak prema sintezi.

Vrijedi li za transponirane? Vrlo vjerojatno.

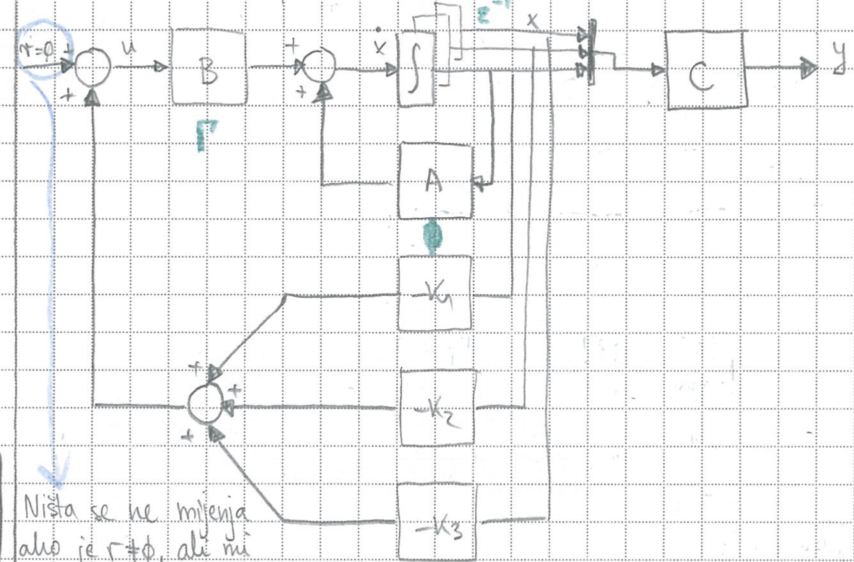
ŽELJENA DINAMIKA se označava s α

Karakt. polinom željene dinamike zat. kruga: $\alpha_{CL}(s)$

Primjer (nastavak):

$$\alpha_{CL}(s) = s^3 + \alpha_{CL1}s^2 + \alpha_{CL2}s + \alpha_{CL3}$$

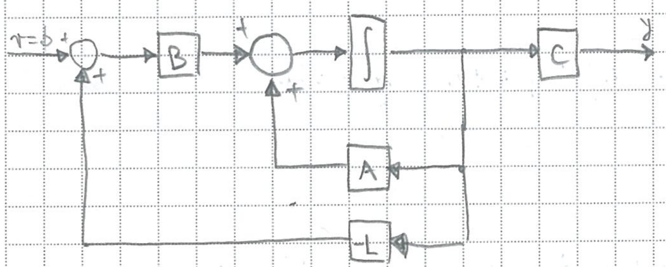
$$\alpha_{CL1} = k_1 - 6, \quad \alpha_{CL2} = k_2 + 8, \quad \alpha_{CL3} = k_3$$



Γ, z^{-1}, Φ — analogija za diskr. sys

Ništa se ne mijenja ako je $r \neq \phi$, ali mi uvijek (i kad je) pogađamo kao da je $r = \phi$

Kompaktan zapis:



$p=q=1$

$L \in \mathbb{R}^{1\times n}$

$L = [l_1 \ l_2 \ldots l_n]$

Svi polovi jedinstveni i realni $\Longrightarrow$ moguća (II) kanonska upravljiva forma

Željena dinamika: $\alpha_{CL}(s) = s^n + \alpha_{CL1} + s^{n-1} + \ldots + \alpha_{CLn}$

Kanon. uprav. oblik: $\Delta_{CL}(s) = s^n + (l_1+a_1)s^{n-1} + \ldots + (l_n+a_n)$

$$A = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \ldots & \ldots & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ovo vrijedi samo za kanon. oblik

$$\Delta_A(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n$$

Rješenje: $\boxed{l_i = \alpha_{CLi} - a_i \quad , i \in \{1,2,\ldots,n\}}$

Numerički primjer: $x(k+1) = \begin{bmatrix} 0{,}627 & 0{,}361 \\ 0{,}0901 & 0{,}853 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0{,}0251 \\ 0{,}115 \end{bmatrix} u(k)$ $\quad y(k)$ = nije bitno

nije kan. oblik, ali ideja vrijedi: $\quad$ SISO – bitan br. ulaza

$\alpha_{CL}(z) = (z-0{,}5+j0{,}2)(z-0{,}5-j0{,}2) = z^2 - z + 0{,}29$ (željena dinamika)

$u \in \mathbb{R} \rightarrow L = [l_1 \ l_2]$

$\phi_{CL} := \phi - \Gamma L = \begin{bmatrix} 0{,}627-0{,}0251 l_1 & 0{,}361-0{,}0251 l_2 \\ 0{,}0901-0{,}115 l_1 & 0{,}853-0{,}113 l_2 \end{bmatrix}$

$\Delta_{CL}(z) = \det(zI - \phi_{CL}) = z^2 + (1{,}48 - 0{,}0251 l_1 - 0{,}115 l_2)z + 0{,}5025 + 0{,}002 l_1 - 0{,}069 l_2$

$$\left.\begin{aligned} -1 &= 1{,}48 - 0{,}0251 l_1 - 0{,}115 l_2 \\ 0{,}29 &= 0{,}5025 + 0{,}002 l_1 - 0{,}069 l_2 \end{aligned}\right\} \quad L = [2{,}24 \quad 3{,}677]$$

IV Matematički podsjetnik

$\boxed{A, B \in \mathbb{R}^{n\times n} \qquad |AB| = |A| \cdot |B|}$

$\boxed{|I_n + M_1 \cdot M_2| = |I_p + M_2 \cdot M_1|}$ $\quad M_1$: $n\times p$, M_2: $p\times n$

Podsjetnik na III

$\Delta_{CL}(z) = |z \cdot I_n - (\phi - \Gamma \cdot L)|$ $\qquad x(k+1) = \phi \cdot x(k) + \Gamma \cdot u(k) \qquad u(k) = -L \cdot x(k)$

$\alpha_{CL}(z) = z^n + \alpha_{CL1} z^{n-1} + \ldots + \alpha_{CLn} = (z - z_{d1}) \cdot \ldots \cdot (z - z_{dn})$

umnošci

d = desired = željene vr.

Povratna veza (regulator) po izlazu	Povratna veza (regulator) po varijablama stanja
+ mjerenje samo izlaza	− mjerenje (estimacija) SVIH varijabli stanja
− povećava red sustava	+ red zatvorenog kruga JEDNAK redu procesa
−* nule regulatora utječu na dinamiku zatvorenog kruga	+ (ako je SISO sys upravljiv) možemo postaviti proizvoljno SVE vlastite vrijednosti zatvorenog kruga

Kako izračunati L? $(p\times n)$ $\qquad$ (analogno vrijedi za cont. sys)

$u(k) = -L x(k)$

I) $\left.\begin{aligned} x(k+1) &= \phi x(k) + \Gamma \cdot u(k) \\ u(k) &= -L x(k) \quad (+r(k)) \end{aligned}\right\}$ kao nema reference $\quad (r(k) = 0)$

Γ: samo 1 ulaz : $p = 1 \longrightarrow u(k) \in \mathbb{R}$

$\Delta_{CL}(z) = |zI_n - \phi + \Gamma \cdot L| = 0$

$$\Delta_{CL}(z) = \left| (zI_n - \phi)\left[I_n + (zI_n-\phi)^{-1}\Gamma L\right] \right| = |zI_n - \phi| \cdot \left| I_n + (zI_n-\phi)^{-1}\Gamma L \right| =$$

$$= \Delta_0(z) \cdot \Delta_d(z)$$

CILJ: $\alpha_{CL}(z) = \Delta_{CL}(z)$

$\Delta_0(z) = |zI_n - \phi| =$ kar. polinom otv. kruga (zapravo k.p. matrice ϕ)

$\Delta_0(z) = \Delta_\phi(z)$ → rješenja = polovi otv. kruga, tj. svojstv. vrij. matrice ϕ

$$\Delta_{CL}(z) = \Delta_0(z) \cdot \left| I_n + (zI_n-\phi)^{-1}\Gamma L \right|$$

Γ^D: $z_{di} = z_{oj}$, $\forall j \in \{1,2,\dots,n\}$ → samo zato da kompaktnije dokažemo teorem. $\left(|I_n + (zI_n-\phi)^{-1}\Gamma L| = 0 \right)$

rješenja $\alpha_{CL}(z)=0$ rješenja $\Delta_0(z)=0$

$$\Rightarrow \left| I_n + \underbrace{(zI_n-\phi)^{-1}}_{M_1}\underbrace{\Gamma L}_{M_2} \right| = \left| I_p + L(zI_n-\phi)^{-1}\Gamma \right|$$

$\boxed{\text{DVA OGRANIČENJA: 1) } \Gamma^D\text{: postoji inverz} \equiv \text{nema višestrukosti; 2) 1 ulaz } p=1}$

* $p=1$

$$\Delta_{CL}(z) = \Delta_0(z) \cdot \left| 1 + L(zI_n-\phi)^{-1}\Gamma \right| = 0, \quad \text{za } \forall z_{di}$$

Kako bi vrijedilo $\alpha_{CL}(z) = \Delta_{CL}(z)$, mora vrijediti $\Delta_{CL}(z_{di}) = 0$, za $\forall i \in \{1,2,\dots,n\}$

$$1 + L \cdot \underbrace{(z_{di}I_n - \phi)^{-1}\Gamma}_{n\times 1,\ \text{vektor } \Psi_i \in \mathbb{R}^{n\times 1}} = 0, \quad \text{za } \forall i \in \{1,2,\dots,n\}$$

n jdžbi svodi se na:

$$L \cdot \underbrace{\left[\Psi_1 \vdots \Psi_2 \vdots \dots \vdots \Psi_n\right]}_{n\times n} = -\underbrace{[1\ 1 \dots 1]}_{n} \quad / \cdot \left[\Psi_1 \vdots \Psi_2 \vdots \dots \vdots \Psi_n\right]^{-1} \text{ sdesna}$$

invertibilna kada su svojstv. vrij. različite

$$L = -\underbrace{[1\ 1 \dots 1]}_{n} \cdot \left[\Psi_1 \vdots \Psi_2 \vdots \dots \vdots \Psi_n\right]^{-1}$$

<u>Primjer:</u>

$$\phi = \begin{bmatrix} 0{,}9909 & 0{,}0861 \\ -0{,}1722 & 0{,}7326 \end{bmatrix} \qquad \Gamma = \begin{bmatrix} 0{,}0045 \\ 0{,}0861 \end{bmatrix}$$

$\Delta_0(z) = 0 \longrightarrow \left.\begin{matrix} z_{o1} = 0{,}9045 \\ z_{o2} = 0{,}8189 \end{matrix}\right\}$ unutar jedin. kružnice $\Rightarrow$ STABILNO!

$$\Delta_0(z) = z^2 - 1{,}7235z + 0{,}7408$$

a) $\left.\begin{matrix} z_{d1} = 0{,}95 \\ z_{d2} = 0{,}85 \end{matrix}\right\}$ $\alpha_{CL}(z) = z^2 - 1{,}8z + 0{,}8075$ (stabilno)

$$\Psi_i = (z_{di}I_2 - \phi)^{-1} \cdot \Gamma \longrightarrow \Psi_1 = \begin{bmatrix} 1{,}4167 \\ -0{,}7267 \end{bmatrix} \qquad \Psi_2 = \begin{bmatrix} -4{,}6339 \\ 7{,}5524 \end{bmatrix}$$

$$L = -[1\ \ 1] \cdot \begin{bmatrix} 1{,}4167 & -4{,}6339 \\ -0{,}7267 & 7{,}5524 \end{bmatrix}^{-1} = [-1{,}7304 \quad -0{,}8282]$$

$$u(k) = -L\,x(k)$$

b) $z_{d1,2} = 0{,}95 \pm j0{,}1$ (stabilno) → na kraju x ponište kompleksni dijelovi i konačno rj. je realno (! realan 1 ulaz)

postupak kao a)

$$\Psi_1 = \begin{bmatrix} -0{,}0799 - j0{,}4576 \\ 0{,}5168 + j0{,}1248 \end{bmatrix} \qquad \Psi_2 = \Psi_1^*$$

$\Rightarrow L = [\quad\quad] \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ realni vektor od 2 broja

c) $z_{d1} = z_{d2} = 0{,}95$ (stabilno)

$\Psi_1 = \Psi_2 \Rightarrow [\Psi_1 \vdots \Psi_2]$ NIJE INVERTIBILNA!

$\Psi_1 = [z_{di}I_2 - \phi]^{-1}\Gamma$ $\quad \boxed{L \cdot \Psi_1 = -1}$

$L \cdot \Psi_2 = -1 \quad / \left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_{z=z_{d2}}$ $\quad$! $\Psi_2 = f(z)$

$$L \cdot \underbrace{\left.\frac{\partial}{\partial z}\left[zI_2 - \phi\right]^{-1}\Gamma\right|_{z=z_{d2}}}_{\Psi_2'} = 0$$

- viša višestrukost ≡ viša derivacija
- svaki element matrice zasebno deriviramo

nastavak I a) $\Psi_1 = \begin{bmatrix} 1{,}4167 \\ -0{,}7267 \end{bmatrix}$

$$L = \begin{bmatrix} \Psi_1 \vdots \Psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_1 \vdots \Psi_2 \end{bmatrix}^{-1}$$ (postoji inverz!)

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} \quad \phi = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{bmatrix}$$

$$\left[z I_2 - \phi \right]^{-1} \cdot \Gamma = \frac{\begin{bmatrix} \gamma_1 (z - \varphi_{22}) + \gamma_2 \varphi_{12} \\ \gamma_2 (z - \varphi_{11}) + \gamma_1 \varphi_{21} \end{bmatrix}}{z^2 - (\varphi_{11} + \varphi_{22}) z + \varphi_{11}\varphi_{22} - \varphi_{12}\varphi_{21}} \Bigg/ \frac{\partial}{\partial z} \Bigg|_{z = z_{d_2}}$$

$z_{d_2} = 0{,}95$

...

$L = [-1{,}71 \quad -1{,}9589]$

PROVJERA:

svojstv. vr. $\phi - \Gamma \cdot L = \phi_{CL}$ mora imati zadanih z_{d_1} i z_{d_2}

II ACKERMANNOVA FORMULA ($p=1$) (analogno za cont.)

$$\boxed{L = [\underbrace{0 \ \dots \ 0 \ 1}_{n}] \cdot \mathcal{C}^{-1} \cdot \alpha_{cl}(\phi)} \quad , \ \alpha_{cl}(\phi) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Primjer: $\alpha_{cl}(z) = z^2 + 1{,}5z + 0{,}5$

$\alpha_{cl}(\phi) = \phi^2 + 1{,}5\phi + 0{,}5 I_2$

Hamilton-Caley ne tvrdi da je $\alpha_{cl}(\phi) = 0$, već $\Delta_\phi = 0$

Što ako $\alpha_{cl}(\phi) = 0 \longrightarrow$ nulvektor, otvoren sys, ne treba regulator

OBA POSTUPKA DAJU ISTE REZULTATE.

Matlab za Ackermanna: L= acker (A,B,P) cont.

L= acker (ϕ,Γ,P) discr.

vektor koji uključuje izabrane pozicije svojstv. vr. polinoma $P = \begin{bmatrix} s_{d1} \\ \vdots \\ s_{dn} \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} z_{d1} \\ \vdots \\ z_{dn} \end{bmatrix}$

PREDNOST ACKERA:

+ nema problema s višestrukim sv.vr.

NEDOSTACI ACKERA:

- samo za $p=1$
- numerički osjetljiv $\boxed{\text{OK za } n < 10}$
- $\mathcal{C}$ mora biti invertibilna $\boxed{\det(\mathcal{C}) \neq 0}$

$$\frac{\text{max sv.vr. iz } \mathcal{C}}{\text{min sv.vr. iz } \mathcal{C}} = \text{cond}(\mathcal{C})$$

raspon brojeva - ne smije biti prevelik (npr. 10^{10} je prevelik)

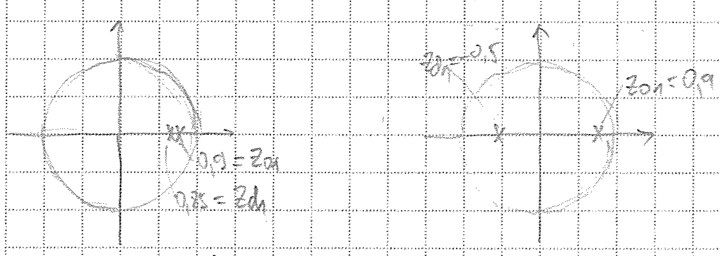
Matlab:

L = place(A,B,P) $\longrightarrow$
+ numerički stabilan postupak
+ može raditi s MIMO sustavima
- br višestrukih željenih sv.vr. NE smije biti > br. ulaza

ako želimo $z_{d_1} = z_{d_2}$, moramo imati bar 2 ulaza

Primjer: $\phi = \begin{bmatrix} 0{,}25 & 0{,}5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\Gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

$\det(\mathcal{C}) = 0$ $\longrightarrow$ Ne može acker
$\longrightarrow$ Može place (ako nema višestrukosti)



$L = 0{,}05$ ——— $L = 0{,}6$
manja ... veća
energetska potrošnja

Primjer: $\phi = \begin{bmatrix} +0{,}95 & +0{,}95 \\ +0{,}1 & +0{,}6 \end{bmatrix}$ $\Gamma = \begin{bmatrix} +0{,}5 \\ -0{,}5 \end{bmatrix}$ $z_{o1,2} = 0{,}75 \pm j\,0{,}2693$

a) $z_{d1} = 0{,}7$
$z_{d2} = 0{,}2$

$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & -0{,}025 \\ -0{,}5 & -0{,}35 \end{bmatrix}$

$\text{rang}(\mathcal{C}) = 2$

acker: $L_a = [0{,}2 \quad 0{,}2]$

b) $z_{d1} = 0{,}1$
$z_{d2} = 0{,}2$

acker: $L_b = [0{,}92 \quad -3{,}32]$

$\|L_a\| < \|L_b\|$ $\rightarrow$ Norma implicira energetski angažman

VREMENSKI OPTIMALNO UPRAVLJANJE (*dead beat control*) DB

$\rightarrow$ samo za vrem. DISCR. sustave
$x(k+1) = \phi x(k) + \Gamma u(k)$

- upravlja se u n koraka iz proizvoljnog $x(0)$ u $x(n) = 0$
  (n – red sustava)

$\boxed{u(k) = -L_{DB} \cdot x(k)}$ DB često vrlo agresivan regulator

1) Hamilton-Cayley: željena dinamika $\alpha_{cl}(z) = ?$
$z_{di} = ?$

Ako $z_{di} = 0, \forall i$ $\xrightarrow{\text{vrijedi}}$ $L = L_{DB}$ (acker)

Zašto? $\Delta_{cl}(z) = \alpha_{cl}(z) = z^n$

$|zI \underbrace{-\phi + \Gamma L}_{\phi_{cl}}| = z^n$

$\Delta_{cl}(z) = |zI - \phi_{cl}|$
$\Delta_{cl}(\phi_{cl}) = 0$ (nulmatrica) $\longrightarrow$ ovo vrijedi 100%

* L takav da vrijedi $\Rightarrow \phi_{cl}^n = 0$ nulmatrica

$x(k+1) = \phi_{cl} x(k)$
$x(n) = \phi_{cl}^n x(0)$

Primjer: $G(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}$ $\qquad \Gamma^D: \alpha_{cl}(z) = z^n$

$$A=\begin{bmatrix}-3 & -2\\ 1 & 0\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \quad C=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix} \quad D=0$$

Matlab:

sys = ss(A,B,C,D)

sysd = c2d (sys, T, 'zoh') $\leftarrow$ 1s

$$\Phi=\begin{bmatrix}12,06 & -9,342\\ 4,671 & -1,952\end{bmatrix} \qquad \Gamma=\begin{bmatrix}4,671\\ 1,476\end{bmatrix}$$

C i D ostaju iste

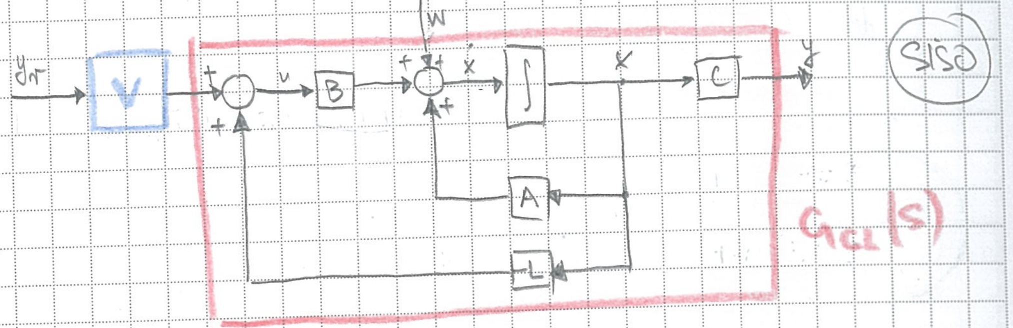
acker T=1s $\qquad$ T=0,1

$L=[2,7385 \quad -1,8178]$ $\qquad$ $L=[16,025 \quad 83,8117]$

! Drastična razlika

$\boxed{T\downarrow \quad \text{izjednačavanje K i D sys} \uparrow}$

V SLIJEDENJE REFERENCE $y_r \neq 0$



$$\frac{Y(s)}{Y_r(s)} = C(sI - A + BL)^{-1}B = G_{CL}(s)$$ $\longrightarrow$ podrazumijeva se da je $D=0$, u praksi se pokušava izbjeći $u=f(y)$

CIJ: $y_\infty = y_r$ $\quad$ ($y_\infty = y(\infty)$ = u stac. stanju)

Teorem o kon. vr.: $y_\infty = \lim_{s\to 0} s\, G_{CL}(s)\cdot\frac{y_r}{s} = G_{CL}(0)\, y_r$

$\boxed{y_\infty = y_r \Longleftrightarrow G_{CL}(0)=1}$ $\longrightarrow$ OSIGURANJE: uvijek uvodimo PREFILTAR

$$V = [G_{CL}(0)]^{-1}, \quad G_{CL}(0)\neq 0$$

Ako je referenca stacionarna, UVIJEK daje jedinicu u teoremu o kon. vr.

POREMEĆAJ NIJE riješen prefiltrom V! Već modificiranjem sheme.

V je fiksna vr. i nema pojma o poremećaju w $\longrightarrow$ svejedno nalazi li se V na početku ili na kraju sheme (konvencija: početak)

V, G_{CL}, W:

$$\dot{x} = Ax + B(Vy_r - Lx) + w$$

$$\dot{x} = (A-BL)x + [BV \quad 1]\begin{bmatrix}y_r\\ w\end{bmatrix}$$

$$y = Cx$$

analogno za diskr.

Kontinuirani sustavi:

C(t): $y_\infty = y_r$

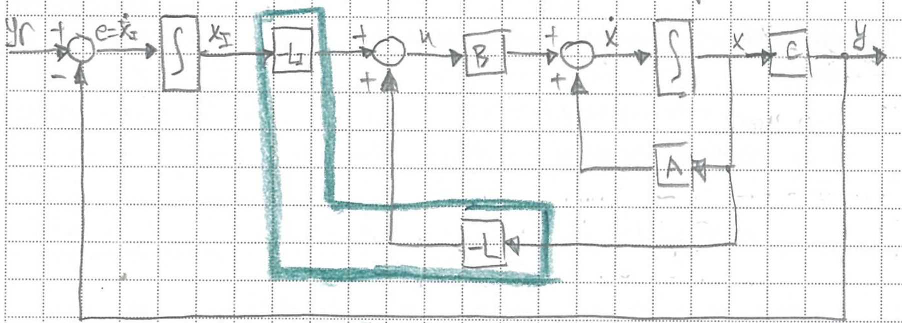
IDEJA: Proširiti vektor stanja: $x_I \equiv$ dodatno stanje koje integrira odstupanje izlaza od željenog izlaza

$e(t) = y_r - y(t)$ regulacijsko odstupanje

$\dot{x}_I(t) = e(t) = y_r - y(t) = y_r - Cx$

$y_r = y_r(t)$, ali ovim zapisom naglašavamo da želimo stac. vr.!

ZADATAK: Isprojektirati regulator za modificirani sys s n+1 stanja



Reg u prostoru stanja

$\bar{L}$

$\bar{x} := \begin{bmatrix} x \\ x_I \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ vektor var. stanja novog sysa

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0_{n\times 1} \\ -C & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ x_I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u + \begin{bmatrix} 0_{n\times 1} \\ 1 \end{bmatrix} y_r$$

$$y = \bar{C}\bar{x} = [C \;\; 0]\,\bar{x}$$

$$u = \underbrace{-[L \;\; L_I]}_{\bar{L}} \begin{bmatrix} x \\ x_I \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} u &= -\bar{L}\bar{x} \\ \dot{\bar{x}} &= \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u \end{aligned}\right\}$$ sa stajališta projektiranja: kao za $y_r = 0$ i dalje 1 ulaz!

Ako je zatv. krug stabilan, osigurano je $e_\infty = 0$

Primjer: $G(s) = \dfrac{1}{s+3} = \dfrac{Y(s)}{U(s)} \longrightarrow \begin{aligned} A &= -3 \\ B &= 1 \end{aligned}$, možemo proglasiti $C = 1$ $(u=1)$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

$$\alpha_{CL}(s) = s^2 + 5s + 25 = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = \frac{Y(s)}{U(s)} \longrightarrow \omega_n = 5,\; \zeta = 0,5$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \bar{C} = [1 \;\; 0]$$

Zadatak: $\bar{L} = [L \;\; L_I]$ izračunati $(u = -\bar{L}\bar{x})$

$\Delta_{CL}(s) = |sI_2 - \bar{A} + \bar{B}\bar{L}| = \alpha_{CL}(s) \longrightarrow$ dizajnerski zahtjev

$$\left| \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [L \;\; L_I] \right| = s^2 + 5s + 25$$

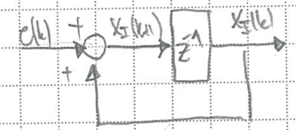
$$\longrightarrow s^2 + (3+L)s - L_I = s^2 + 5s + 25$$

$$\longrightarrow L = 2, \quad L_I = -25$$

Diskretni sustavi:

Integrator u diskr. području

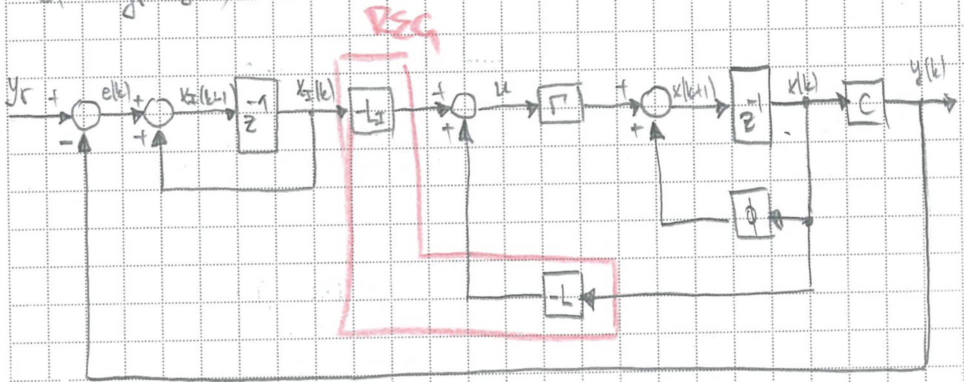
$x_I(k+1) = x_I(k) + e(k)$



$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k)$

$y(k) = C x(k) \qquad (D=0)$

$e(k) = y_r - y(k)$



$\bar{x}(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ \bar{x}(k) \end{bmatrix} \qquad \bar{x}(k+1) = \bar{\Phi}\bar{x}(k) + \bar{\Gamma}u(k) \qquad (\Gamma^{r}\ y_r = 0)$ → samo ovo nas zanima

$y(k) = \bar{C}\bar{x}(k)$

$u(k) = -\bar{L}\bar{x}(k)$

$\bar{\Phi} = \begin{bmatrix} \Phi & 0_{n\times 1} \\ -C & 1 \end{bmatrix}$ — jedina razlika s cont. sys.

$\bar{\Gamma} = \begin{bmatrix} \Gamma \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \bar{C} = [C \quad 0] \qquad \bar{L} = [L \quad L_I]$

$\bar{\Phi}_{CL} = \bar{\Phi} - \bar{\Gamma}\bar{L}$

Glavna snaga ove strukture u odnosu na prefiltar je: rješava fiksni poremećaj

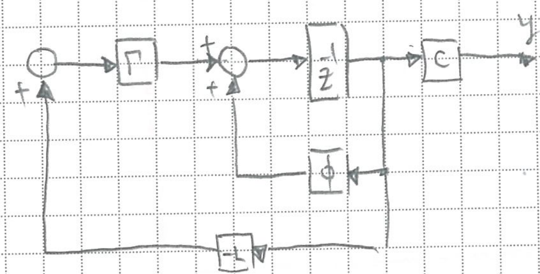
(reg + proc) = (1 + n). red

Primjer:

$\Phi = \begin{bmatrix} 0{,}79 & 0 \\ 0{,}176 & 0{,}857 \end{bmatrix} \qquad \Gamma = \begin{bmatrix} 0{,}281 \\ 0{,}296 \end{bmatrix} \qquad C = [0 \quad 1]$

2 var. st. 1 in 1 out

a)



$\alpha_{CL}(z) = z^2 - 1{,}55z + 0{,}64$

$z_{d_{1,2}} = 0{,}775 \pm j0{,}1984$

acker: $L = [0{,}2508 \quad 0{,}8962]$

b) Prošireni sys koji prati referencu

$\bar{L} = [L \quad L_I]$

razlicito od

$\bar{L} = [0 \ 0 \ 1]\, \bar{\mathcal{C}}^{-1} \cdot \bar{\alpha}_{CL}(\bar{\Phi}) \qquad$ (acker za L)

$\bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ x_I \end{bmatrix} \qquad \bar{\Phi} = \begin{bmatrix} \Phi & 0 \\ -C & 1 \end{bmatrix} \qquad \bar{\Gamma} = \begin{bmatrix} \Gamma \\ 0 \end{bmatrix}$

$\bar{\mathcal{C}} = [\bar{\Gamma} \ \vdots \ \bar{\Phi}\bar{\Gamma} \ \vdots \ \bar{\Phi}^2\bar{\Gamma}]$

p = parametar → definira pol signala pogreške

$\bar{\alpha}_{CL}(z) = \alpha_{CL}(z) \cdot (z - p)$ ← željeno vladanje

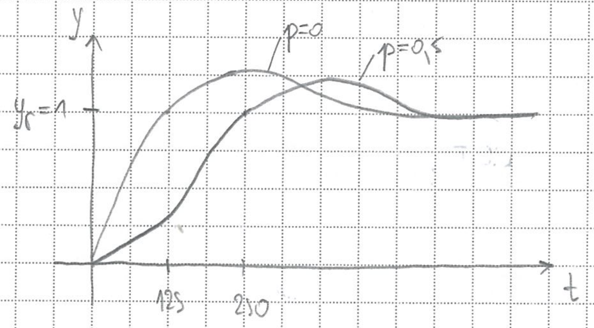
$\bar{L} = [0 \ 0 \ 1]\,[\bar{\Gamma} \ \vdots \ \bar{\Phi}\bar{\Gamma} \ \vdots \ \bar{\Phi}^2\bar{\Gamma}]^{-1} (\bar{\Phi}^2 - 1{,}55\bar{\Phi} + 0{,}64 I_2)(\bar{\Phi} - pI_2)$

$\bar{L} = [L_1 \quad L_2 \quad L_I]$

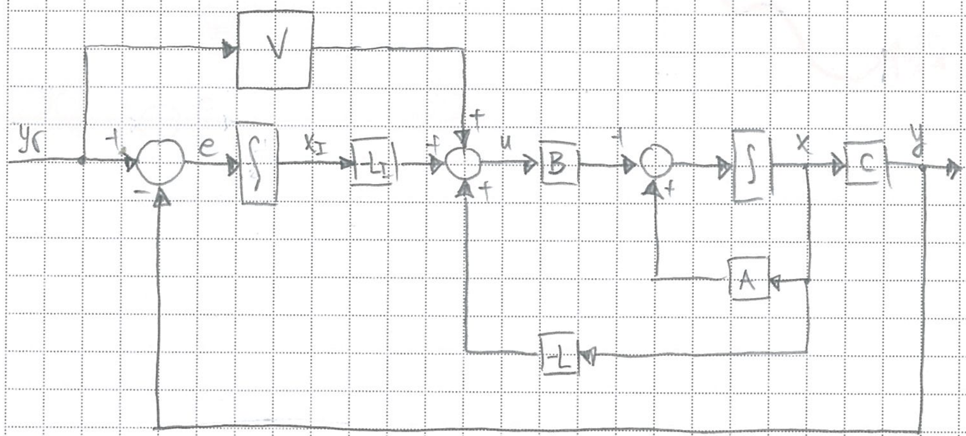
$\bar{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0{,}281 & 0{,}222 & 0{,}1754 \\ 0{,}0296 & 0{,}0748 & 0{,}1032 \\ 0 & -0{,}0296 & -0{,}1044 \end{bmatrix}$

$$(\bar{L})^T = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3{,}028p + 3{,}2788 \\ -5{,}038p + 5{,}9341 \\ 1{,}6166p - 1{,}6166 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{za } p=1: \; L = [L_1 \;\; L_2 \;\; 0]$$

(prekida $-L_I$)



Vrlo često se koristi kombo ovo i prefiltar:

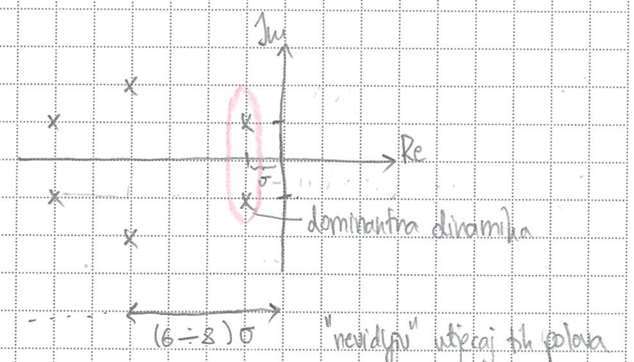


Prefiltar – stavljamo zadaji i to na ↑ tu poziciju!
prefiltar može biti dinamički član (ne nužno fiksna vr.)
iskustvo pokazatelj

IZBOR SVOJSTVENIH VRIJEDNOSTI (dinamike zat. kruga)

– 3 varijante:

I) Svođenje na drugi red



II) Projektiranje po prototipu (modelska funkcija) ⟶ freq. domena

III) Optimalno upravljanje ⟶ reg = posljedica optimiranja

II PROJEKTIRANJE PO PROTOTIPU (modelska f-ja)

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G_m(s) = \frac{1}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + 1} = \alpha_{cl}(s)$$

a_n

daje optimalne a_i

kriterij: minimizacija ITAE ⟶ $\min\limits_{\{a_i\}} \int_0^\infty t\,\underbrace{|e(t)|}_{}\,dt$ (vremenski kriterij)

izbjegava poništavanje signala e(t) kad odbra

ITAE optimalni koeficijenti:

red	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
2	1	1,505	1			
3	1	1,783	2,172	1		
4	1	1,953	3,347	2,648	1	
5	1	2,068	4,499	4,678	3,257	1

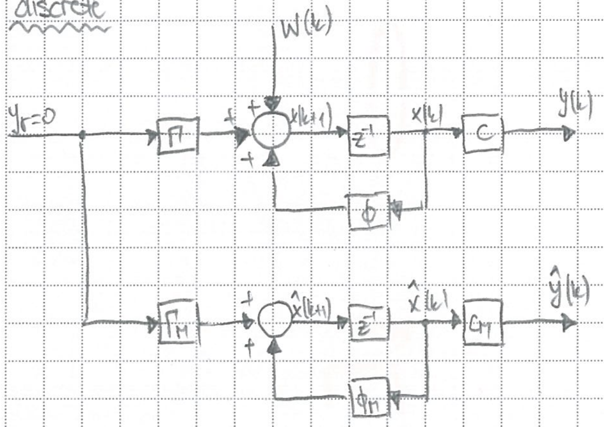
} OVO TOČNI PODACI

(u literaturi greška!)

OBSERVER (rekonstruktor VARIJABLI STANJA) PUNOG REDA

= svih var. stanja

discrete



$x(k+1) = \phi x(k) + \Gamma u(k)$, $w=0$

$y(k) = C x(k)$

$\hat{x}(k+1) = \phi_M \hat{x}(k) + \Gamma_M u(k)$

$\hat{y}(k) = C_M \hat{x}(k)$

Π: $\phi_M = \phi$, $\Gamma_M = \Gamma$, $C_M = C$

uvodimo def.: $\tilde{x}(k) := x(k) - \hat{x}(k)$ = pogreška modela, $\forall k$

$\longrightarrow$ $\tilde{x}(k+1) = x(k+1) - \hat{x}(k+1) = \phi\left[x(k) - \hat{x}(k)\right] = \phi \tilde{x}(k)$

$$\boxed{\text{Dinamika pogreške: } \tilde{x}(k+1) = \phi \tilde{x}(k)}$$

$\Downarrow$

$\tilde{x}(k) = \phi^k \tilde{x}(0)$

matrica procesa (Π: proces sam od sebe stabilan)

a) $\hat{x}(0) = x(0)$

$\Longrightarrow$ $\tilde{x}(0) = 0 \Longrightarrow \tilde{x}(k) = 0$, $w = 0$

b) $\hat{x}(0) \neq x(0)$

$\Longrightarrow$ $\tilde{x}(k) = \phi^k \left[x(0) - \hat{x}(0)\right]$

Za stabilne ϕ, $\tilde{x}(k)$ teži prema ϕ.