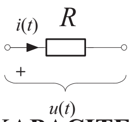
Električni krugovi

Sve potrebno za ispit

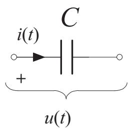
By: Bobinator and friends

OTPOR 1.1



$$i(t)=\frac{u(t)}{R} \qquad u(t)=R\cdot i(t)$$

KAPACITET

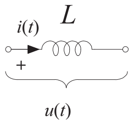


$$i(t)=C\frac{\mathrm{d}\,u(t)}{\mathrm{d}\,t}$$

$$u(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}i(\tau)\mathrm{d}\tau=u_C(0)+\frac{1}{C}\int_{0}^{t}i(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$Z(s)=\frac{1}{sC}$$

INDUKTIVITET

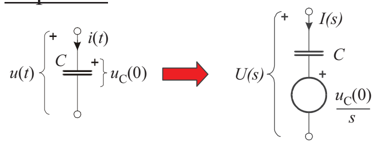


$$i(t)=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}u(\tau)\mathrm{d}\tau=i_L(0)+\frac{1}{L}\int_{0}^{t}u(\tau)\mathrm{d}\tau$$

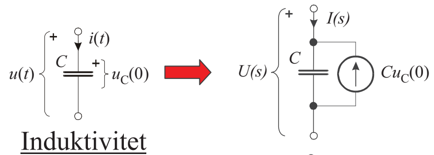
$$u(t)=L\frac{\mathrm{d}\,i(t)}{\mathrm{d}\,t}$$

$$Z(s)=sL$$

1.2 Kapacitet

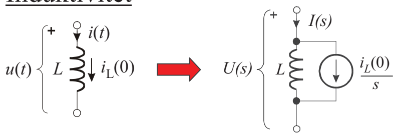


$$U(s)=\frac{1}{sC}I(s)+\frac{u_C(0)}{s}$$

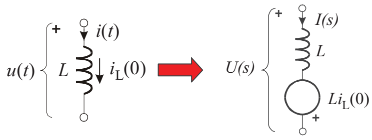


$$I(s)=sCU(s)-Cu_C(0)$$

Induktivitet



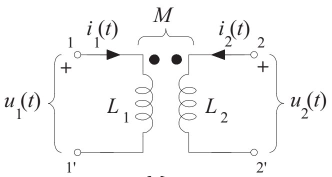
$$I(s)=\frac{1}{sL}U(s)+\frac{i_L(0)}{s}$$



$$U(s)=sLI(s)-Li_L(0)$$

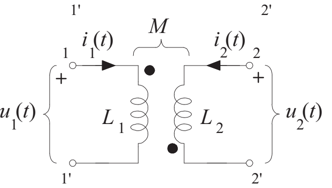
1.3

- ***Transformator*** → dva induktiviteta koji su međuinduktivno vezani



$$u_1(t)=L_1\frac{di_1}{dt}+M\frac{di_2}{dt}$$

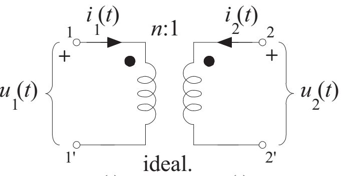
$$u_2(t)=+M\frac{di_1}{dt}+L_2\frac{di_2}{dt}$$



$$u_1(t)=L_1\frac{di_1}{dt}-M\frac{di_2}{dt}$$

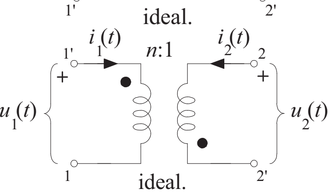
$$u_2(t)=-M\frac{di_1}{dt}+L_2\frac{di_2}{dt}$$

1.4



$$u_1(t)=n\cdot u_2(t)$$

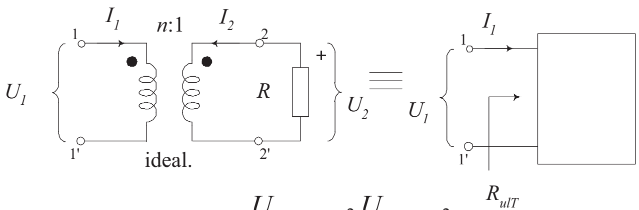
$$i_1(t)=-\frac{1}{n}\cdot i_2(t)$$



$$u_1(t)=-n\cdot u_2(t)$$

$$i_1(t)=\frac{1}{n}\cdot i_2(t)$$

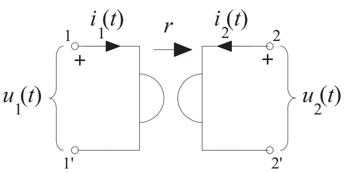
→transformator **mijenja** vrijednost otpora



$$R_{ul_T}=\frac{U_1}{I_1}=-n^2\frac{U_2}{I_2}=n^2R$$

1.5

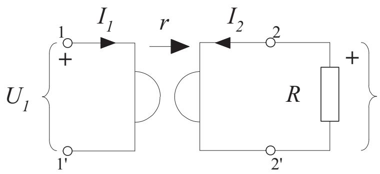
- **Girator** je četveropol određen simbolom



$$u_1(t)=r\cdot i_2(t)$$

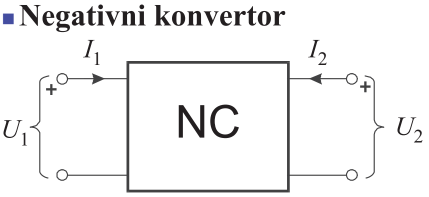
$$u_2(t)=-r\cdot i_1(t)$$

→girator **invertira** vrijednost otpora



$$R_{ul_G}=\frac{U_1}{I_1}=-r^2\frac{I_2}{U_2}=\frac{r^2}{R}$$

- **Negativni konvertor**

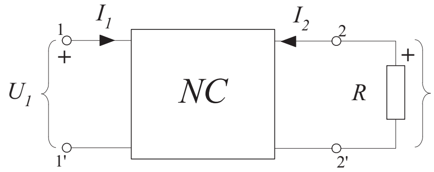


$$u_1(t)=k_1\cdot u_2(t)$$

$$i_2(t)=k_2\cdot i_1(t)$$

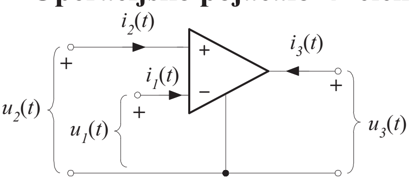
$$k=k_1\cdot k_2$$

→ negativni konvertor **mijenja predznak**



$$R_{ul_{NK}}=\frac{U_1}{I_1}=\frac{k_1\cdot U_2}{k_2^{-1}\cdot I_2}=-k_1k_2R$$

- **Operacijsko pojačalo** → element sa 3 prilaza.



$$u_2-u_1=\frac{u_3}{A}\to 0$$

$$\mathbf{U}_g = \mathbf{Z}_p \cdot \mathbf{I}_p$$

U_g → vektor naponskih izvora i početnih veličina u petljama

$$\mathbf{U}_p = \begin{bmatrix} U_{g1}(s) + \frac{u_{C5}(0)}{s} - L_2 i_{L2}(0) \\ L_2 i_{L2}(0) \\ -\frac{u_{C5}(0)}{s} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{Z}_p$ kvadratna matrica → ***matrica impedancija petlji*** :

$$\mathbf{Z}_p = \begin{bmatrix} R_1 + sL_2 + \frac{1}{sC_5} & -sL_2 & -\frac{1}{sC_5} \\ -sL_2 & R_3 + R_4 + sL_2 & -R_4 \\ -\frac{1}{sC_5} & -R_4 & R_4 + R_6 + \frac{1}{sC_5} \end{bmatrix}$$

- Element glavne dijagonale
  - → suma impedancija u promatranoj petlji.
- Elementi izvan glavne dijagonale
  - → impedancije, zajedničke dvjema petljama.
- Elementi izvan glavne dijagonale imaju negativan predznak
  → posljedica odabira istoga smjera za sve struje petlji.

I_p → vektor struja petlji

$$\mathbf{I}_p = \begin{bmatrix} I_{p1} \\ I_{p2} \\ I_{p3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I}_g = \mathbf{Y}_v \cdot \mathbf{U}_v$$

$\mathbf{I}_g$ → vektor strujnih izvora

$$\mathbf{I}_g = \begin{bmatrix} \frac{U_{g1}(s)}{R_1} + \frac{i_{L2}(0)}{s} \\ -\frac{i_{L2}(0)}{s} - C_5 u_{C5}(0) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{Y}_v$ kvadratna matrica → **matrica admitancija čvorišta**.

$$\mathbf{Y}_v = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{sL_2} + \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{sL_2} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{sL_2} & \frac{1}{sL_2} + \frac{1}{R_4} + sC_5 & -\frac{1}{R_4} \\ -\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_4} & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_6} \end{bmatrix}$$

- Element glavne dijagonale matrice
- → suma admitancija grana vezanih na promatrano čvorište.
- Elementi izvan glavne dijagonale
- → admitancije grana, spojenih na dva promatrana čvorišta.
- Negativni predznaci elemenata izvan glavne dijagonale
  → posljedica odabira orijentacija napona čvorišta.

$\mathbf{U}_v$ → vektor napona čvorišta

$$\mathbf{U}_v = \begin{bmatrix} U_{v1} \\ U_{v2} \\ U_{v3} \end{bmatrix}$$

Tablica $\mathcal{L}$ transformacije

$1 \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s}$

$t \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s^2}$

$e^{-at} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s+a}$

$\frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt}) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{(s+a)(s+b)}$

$\frac{1}{a-b}(ae^{-at} - be^{-bt}) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{s}{(s+a)(s+b)}$

$\frac{1}{a}e^{-bt}\sin(at) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{(s+b)^2+a^2}$

$e^{-bt}(\cos(at) - \frac{b}{a}\sin(at)) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{s}{(s+b)^2+a^2}$

$\sin \omega t \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$, $\cos \omega t \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{s}{s^2+\omega^2}$,

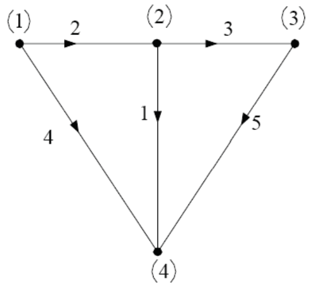
$\mathrm{sh}\, \omega t \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{\omega}{s^2-\omega^2}$, $\mathrm{ch}\, \omega t \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{s}{s^2-\omega^2}$.

$\delta = 1$

$S(t) = \frac{1}{s}$

- **b** → grana (odnosno grane)
- **v** → čvor (čvorovi)
- **p** → petlja (petlje)
- **t** → grana stabla (grane stabla)
- **s** → spona (spone)
- **r** → rez (rezovi)
- **N** → broj nečega (npr. N_b – broj grana)

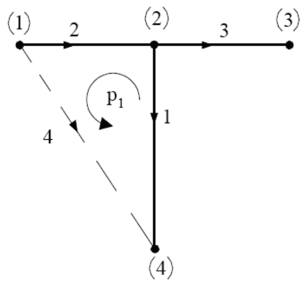
- $N_t = N_r = N_v - 1$
- $N_s = N_p = N_b - N_v + 1$

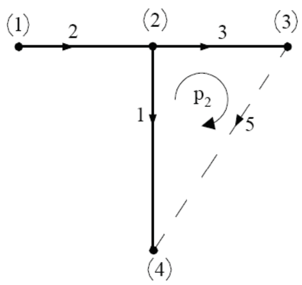


$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{matrix} g1 & g2 & g3 & g4 & g5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} \text{č}1 \\ \text{č}2 \\ \text{č}3 \end{matrix}$$

ulazi: -1

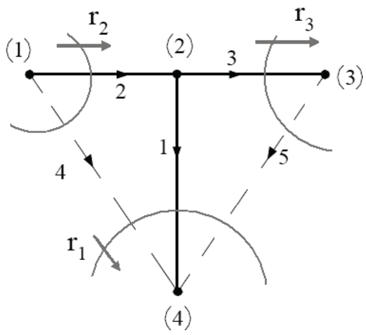
- $\mathbf{A_a}$ → matrica incidencije; veličine je $N_v \times N_b$
- **A** → reducirana matrica incidencije; veličine je $N_t \times N_b$
- **S** → spojna matrica; veličine je $N_s \times N_b$
- **Q** → rastavna matrica; veličine je $N_t \times N_b$





$$\mathbf{S} = \begin{array}{c} \begin{matrix} g1 & g2 & g3 & g4 & g5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} p1 \\ p2 \end{matrix}$$

u smjeru spone: 1



$$\mathbf{Q} = \begin{array}{c} \begin{matrix} g1 & g2 & g3 & g4 & g5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} r1 \\ r2 \\ r3 \end{matrix}$$

u smjeru reza: 1

Nepoznanice su:

- $\mathbf{U_b}$ → vektor stupac duljine N_b gdje svaki član matrice predstavlja jedan napon grane
- $\mathbf{U_v}$ → vektor stupac duljine N_v gdje svaki član matrice predstavlja jedan napon čvora
- $\mathbf{U_r}$ → vektor stupac duljine N_r gdje svaki član matrice predstavlja jedan napon reza
- $\mathbf{I_b}$ → vektor stupac duljine N_b gdje svaki član matrice predstavlja jednu struju grane
- $\mathbf{I_p}$ → vektor stupac duljine N_p gdje svaki član matrice predstavlja jednu struju petlje

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a \cdot d - b \cdot c} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Poznate matrice:

- $\mathbf{U_{0b}}$ → vektor stupac duljine N_b gdje svaki član matrice predstavlja vrijednost napona izvora i početnih uvjeta u grani
- $\mathbf{U_{0p}}$ → vektor stupac duljine N_p gdje svaki član matrice predstavlja vrijednost napona izvora i početnih uvjeta u petlji
- $\mathbf{I_{0b}}$ → vektor stupac duljine N_b gdje svaki član matrice predstavlja vrijednost struje izvora i početnih uvjeta u grani
- $\mathbf{I_{0v}}$ → vektor stupac duljine N_v gdje svaki član matrice predstavlja vrijednost struje izvora i početnih uvjeta čvora
- $\mathbf{I_{0r}}$ → vektor stupac duljine N_r gdje svaki član matrice predstavlja vrijednost struje izvora i početnih uvjeta reza
- $\mathbf{Z_b}$ → kvadratna matrica veličine $N_b \times N_b$; sadrži impedancije grana
- $\mathbf{Z_p}$ → kvadratna matrica veličine $N_p \times N_p$; sadrži impedancije petlji
- $\mathbf{Y_b}$ → kvadratna matrica veličine $N_b \times N_b$; sadrži admitancije grana
- $\mathbf{Y_v}$ → kvadratna matrica veličine $N_v \times N_v$; sadrži admitancije čvorova
- $\mathbf{Y_r}$ → kvadratna matrica veličine $N_r \times N_r$; sadrži admitancije rezova

Jednadžbe strujno naponskih relacija:

$$\mathbf{U}_b = \mathbf{Z}_b \cdot \mathbf{I}_b + \mathbf{U}_{0b}$$

$$\mathbf{I}_b = \mathbf{Y}_b \cdot \mathbf{U}_b + \mathbf{I}_{0b}$$

- Jednadžbe petlji → $\mathbf{Z}_p \cdot \mathbf{I}_p = \mathbf{U}_{op}$

$$\mathbf{Z}_p = \mathbf{S} \cdot \mathbf{Z}_b \cdot \mathbf{S}^T$$

$$\mathbf{U}_{0p} = -\mathbf{S} \cdot \mathbf{U}_{0b}$$

- Jednadžbe čvorova → $\mathbf{Y}_v \cdot \mathbf{U}_v = \mathbf{I}_{ov}$

$$\mathbf{Y}_v = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Y}_b \cdot \mathbf{A}^T$$

$$\mathbf{I}_{0v} = -\mathbf{A} \cdot \mathbf{I}_{0b}$$

- Jednadžbe rezova → $\mathbf{Y}_r \cdot \mathbf{U}_r = \mathbf{I}_{or}$

$$\mathbf{Y}_r = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Y}_b \cdot \mathbf{Q}^T$$

$$\mathbf{I}_{0r} = -\mathbf{Q} \cdot \mathbf{I}_{0b}$$

$$H(s)=\frac{\textbf{odziv}}{\textbf{pobuda}}$$

$$\alpha(\omega)=20\log|H(j\omega)|$$

$$H(s)=|H(s)|e^{j\angle H(s)}$$

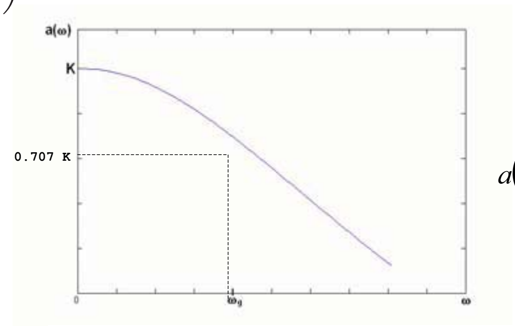
$$|H(j\omega)|=\sqrt{(Re[H(j\omega)])^2+(Im[H(j\omega)])^2}$$

$$\angle H(j\omega)=\arctan\left(\frac{Im[H(j\omega)]}{Re[H(j\omega)]}\right)$$

1) Niskopropusni (NP)

$$H(s)=K\cdot\frac{\omega_g}{s+\omega_g}$$

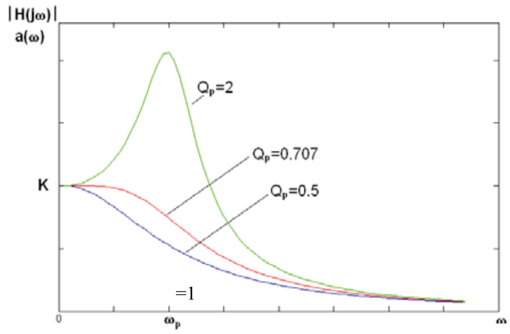
$$a(\omega)=\frac{K}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2}}$$



$$a(\omega_g)=\frac{K}{\sqrt{2}}=0{,}707K$$

$$H(s)=K\frac{\omega_p^2}{s^2+\frac{\omega_p}{Q_p}s+\omega_p^2}$$

$$a(\omega)=K\frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2\right)^2+\left(\frac{1}{Q_p}\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2}}$$

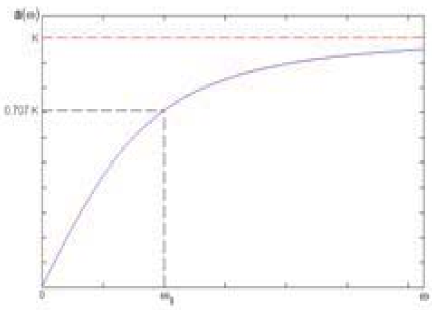


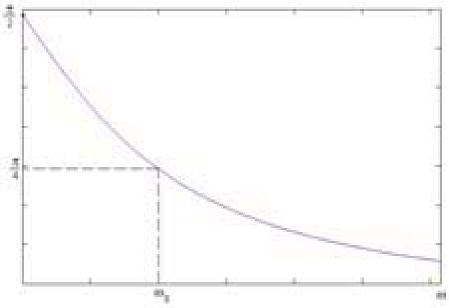
2) Visokopropusni (VP)

$$H_{VP}(s)=\frac{K\cdot s}{s+\omega_g}$$

$$a(\omega)=K\frac{|\omega|}{\sqrt{\omega^2+\omega_g^2}}$$

$$\varphi(\omega)=\frac{\pi}{2}-arctg\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)$$

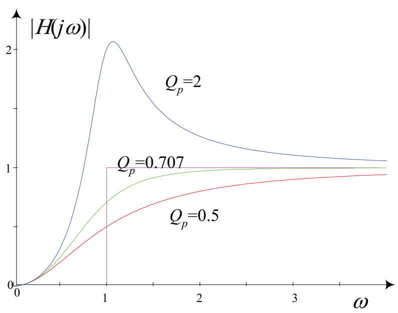


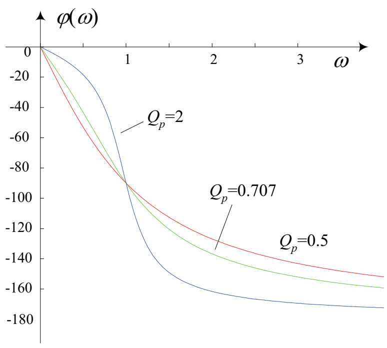


$$H(s)=K\cdot\frac{s^2}{s^2+\frac{\omega_p}{Q_p}s+\omega_p^2}$$

$$a(\omega)=|H(j\omega)|=K\frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega_p^2-\omega^2)^2+\left(\frac{\omega\omega_p}{Q_p}\right)^2}}$$

$$\varphi(\omega)=\pi-\mathrm{arctg}\frac{\omega_p\cdot\omega/Q_p}{\omega_p^2-\omega^2}$$



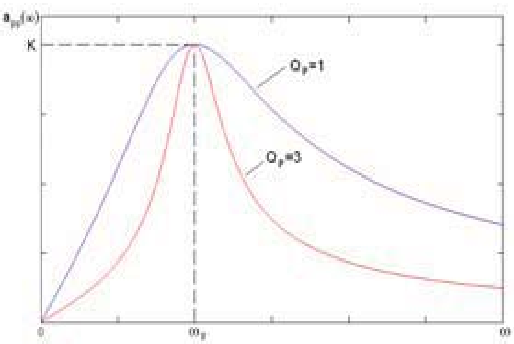


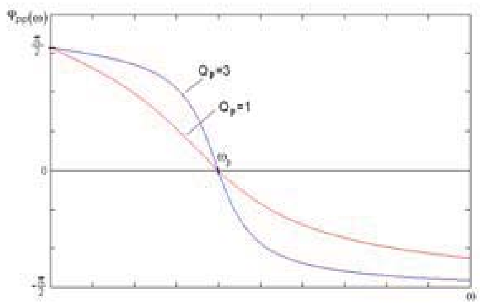
3) Pojasno propusni (PP)

$$H_{PP}(s)=K\cdot\frac{s\cdot\frac{\omega_p}{Q_p}}{s^2+\frac{\omega_p}{Q_p}s+\omega_p^2}$$

$$a_{pp}(\omega)=\frac{K}{\sqrt{1+Q_P^2\left(\frac{\omega}{\omega_p}-\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}}$$

$$\varphi_{pp}(\omega)=-\mathrm{arctg}\left[Q\left(\frac{\omega}{\omega_p}-\frac{\omega_p}{\omega}\right)\right]$$



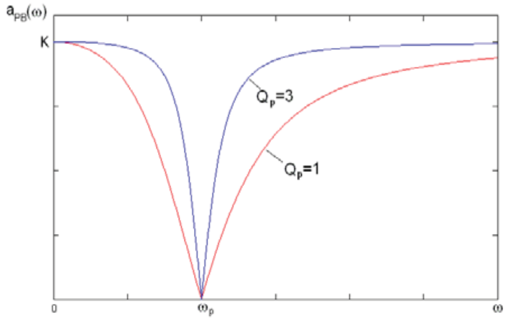


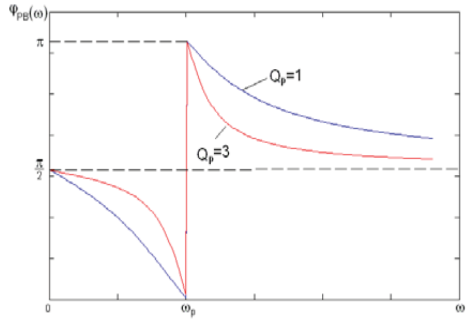
4) Pojasna brana (PB)

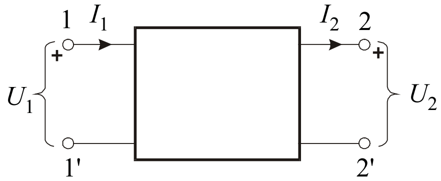
$$H_{PB}(s) = K \cdot \frac{s^2 + \omega_p^2}{s^2 + \frac{\omega_p}{Q_p} s + \omega_p^2}$$

$$a_{PB}(\omega) = K \cdot \frac{Q_p \left| \frac{\omega_p}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_p} \right|}{\sqrt{1 + Q_p^2 \left(\frac{\omega_p}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_p} \right)^2}}$$

$$\varphi_{PB}(\omega) = \pi\, S(\omega - \omega_p) - \mathrm{arctg}\left(Q_p \left(\frac{\omega_p}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_p} \right) \right)$$





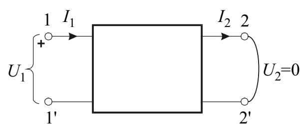


Strujne jednadžbe četveropola

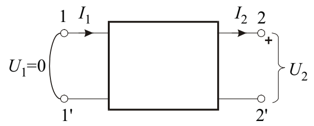
$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & -y_{12} \\ y_{21} & -y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

- y-parametri $\rightarrow$ iz četveropola na kratko

$$y_{11} = \left.\frac{I_1}{U_1}\right|_{U_2=0} \qquad y_{21} = \left.\frac{I_2}{U_1}\right|_{U_2=0}$$



$$y_{12} = -\left.\frac{I_1}{U_2}\right|_{U_1=0} \qquad y_{22} = -\left.\frac{I_2}{U_2}\right|_{U_1=0}$$

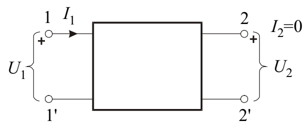


Naponske jednadžbe četveropola

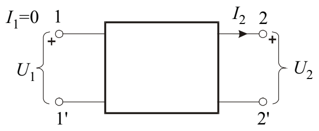
$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & -z_{12} \\ z_{21} & -z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

z-parametri $\rightarrow$ iz četveropola na prazno

$$z_{11} = \left.\frac{U_1}{I_1}\right|_{I_2=0} \qquad z_{21} = \left.\frac{U_2}{I_1}\right|_{I_2=0}$$



$$z_{12} = -\left.\frac{U_1}{I_2}\right|_{I_1=0} \qquad z_{22} = -\left.\frac{U_2}{I_2}\right|_{I_1=0}$$

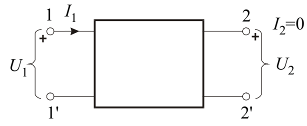


Prijenosne jednadžbe četveropola

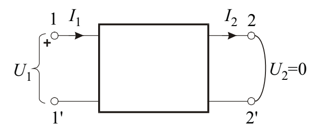
$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

a-parametri $\rightarrow$ iz 2-2' na prazno i na kratko

$$A = \left.\frac{U_1}{U_2}\right|_{I_2=0} \qquad C = \left.\frac{I_1}{U_2}\right|_{I_2=0}$$



$$B = \left.\frac{U_1}{I_2}\right|_{U_2=0} \qquad D = \left.\frac{I_1}{I_2}\right|_{U_2=0}$$



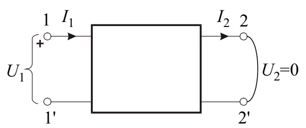
$$[z] = [y]^{-1}$$

Hibridne jednadžbe četveropola

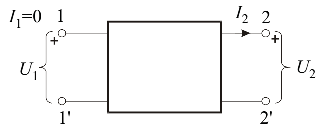
$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

h-parametri $\rightarrow$ iz 1-1' na prazno i 2-2' na kratko

$$h_{11} = \left.\frac{U_1}{I_1}\right|_{U_2=0} \qquad h_{21} = \left.\frac{I_2}{I_1}\right|_{U_2=0}$$



$$h_{12} = \left.\frac{U_1}{U_2}\right|_{I_1=0} \qquad h_{22} = \left.\frac{I_2}{U_2}\right|_{I_1=0}$$

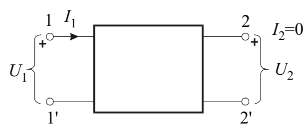


Hibridne jednadžbe četveropola

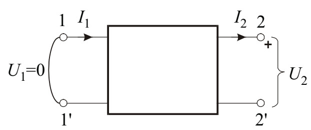
$$\begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

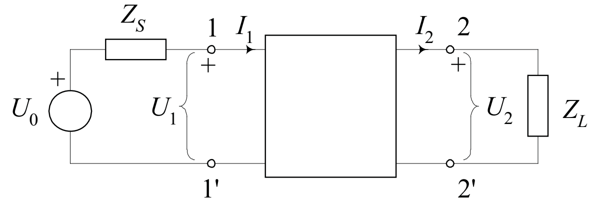
g-parametri $\rightarrow$ iz 2-2' na prazno i 1-1' na kratko

$$g_{11} = \left.\frac{I_1}{U_1}\right|_{I_2=0} \qquad g_{21} = \left.\frac{U_2}{U_1}\right|_{I_2=0}$$



$$g_{12} = \left.\frac{I_1}{I_2}\right|_{U_1=0} \qquad g_{22} = \left.\frac{U_2}{I_2}\right|_{U_1=0}$$





- Prijenosnu funkciju napona $H_u(s)=U_2(s)/U_1(s)$
- Prijenosnu funkciju struje $H_i(s)=I_2(s)/I_1(s)$
- Ekvivalentnu ulaznu impedanciju $Z_u(s)=U_1(s)/I_1(s)$
- Ekvivalentnu izlaznu impedanciju $Z_i(s)=-U_2(s)/I_2(s)|_{U_0=0}$

Prijenosne funkcije izražene z-parametrima

$$H_i(s) = \frac{I_2}{I_1} = \frac{z_{21}}{Z_L + z_{22}}$$

$$H_u(s) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{Z_L z_{21}}{z_{11}(z_{22}+Z_L) - z_{12}z_{21}} = \frac{Z_L z_{21}}{\Delta_z + z_{11}Z_L}$$

$$H(s) = \frac{U_2}{U_0} = \frac{Z_L z_{21}}{(z_{11}+Z_s)(z_{22}+Z_L) - z_{12}z_{21}}$$

$$Z_{ul1} = \frac{U_1}{I_1} = z_{11} - z_{12}\cdot\frac{z_{21}}{Z_2 + z_{22}}$$

$$Z_{ul2} = -\frac{U_2}{I_2} = z_{22} - \frac{z_{12}z_{21}}{z_{11} + Z_1}$$

Prijenosne funkcije izražene y-parametrima

$$H_i(s) = \frac{I_2}{I_1} = \frac{Y_L y_{21}}{y_{11}(y_{22}+Y_L) - y_{12}y_{21}} = \frac{Y_L y_{21}}{\Delta_y + y_{11}Y_L}$$

$$H_u(s) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{y_{21}}{Y_L + y_{22}}$$

$$Y_{ul1} = y_{11} - \frac{y_{12}y_{21}}{Y_2 + y_{22}}$$

$$Y_{ul2} = y_{22} - \frac{y_{12}y_{21}}{Y_1 + y_{11}}$$

Prijenosne funkcije izražene prijenosnim parametrima

$$H_i(s) = \frac{I_2}{I_1} = \frac{1}{CZ_L + D}$$

$$H_u(s) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{Z_L}{AZ_L + B}$$

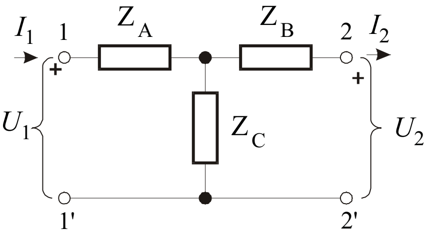
$$H(s) = \frac{U_2}{U_0} = \frac{Z_L}{AZ_L + B + Z_s(CZ_L + D)}$$

$$Z_{ul} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{AZ_2 + B}{CZ_2 + D}$$

$$Z_{ul2} = -\frac{U_2}{I_2} = \frac{DZ_1 + B}{CZ_1 + A}$$

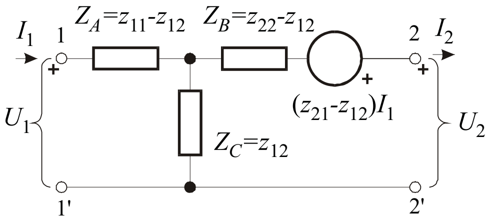
Ekvivalentni četveropol u T-spoju

Recipročni četveropol $z_{12}=z_{21}$



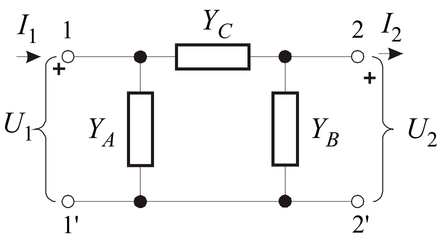
$$Z_A = z_{11} - z_{12}$$
$$Z_B = z_{22} - z_{12}$$
$$Z_C = z_{12} = z_{21}$$

Nerecipročni četveropol $z_{12} \neq z_{21}$



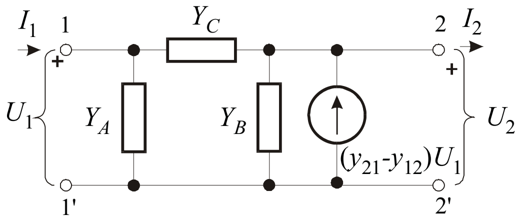
Ekvivalentni četveropol u Π-spoju

Recipročni četveropol $y_{12}=y_{21}$



$$Y_A = y_{11} - y_{12}$$
$$Y_B = y_{22} - y_{12}$$
$$Y_C = y_{12} = y_{21}$$

Nerecipročni četveropol $y_{12} \neq y_{21}$



simetričan četveropol

$$z_{11} = z_{22}$$
$$y_{11} = y_{22}$$
$$A = D$$
$$\begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix} = -1$$
$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = 1$$

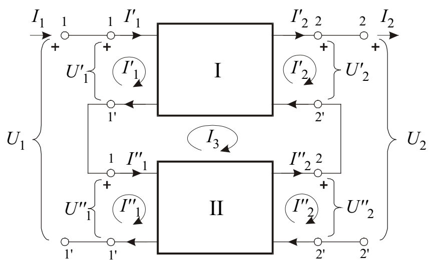
recipročan četveropol

$z_{12}=z_{21}$

$y_{12}=y_{21}$

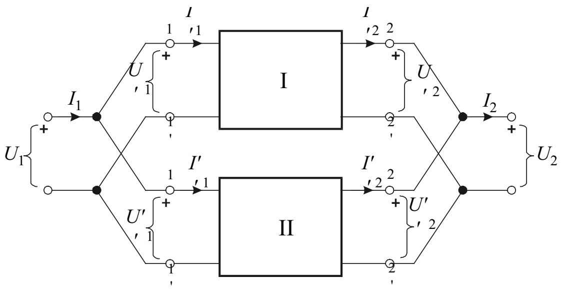
$$\Delta_A = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = AD - BC = 1$$

▪ Serijski spoj četveropola:



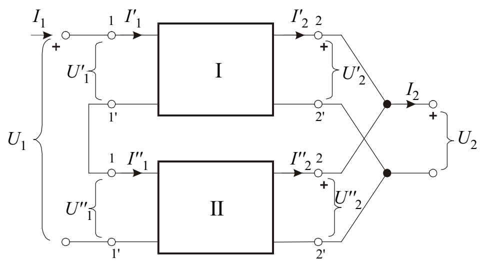
$$[z] = [z'] + [z'']$$

Paralelni spoj četveropola:



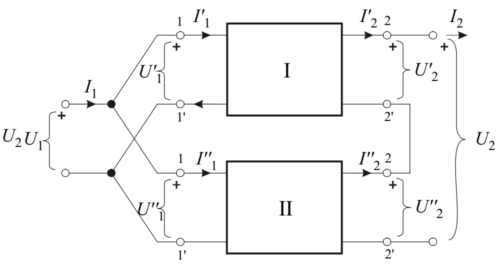
$$[y] = [y'] + [y'']$$

▪ Serijsko-paralelni spoj četveropola:



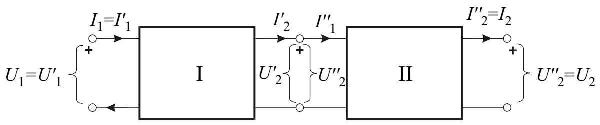
$$[h] = [h'] + [h'']$$

Paralelno-serijski spoj četveropola:



$$[g] = [g'] + [g'']$$

Lanac ili kaskada četveropola:



$$[a] = [a'] \cdot [a'']$$

$$Z_0=\sqrt{\frac{R+sL}{G+sC}}$$

$$\gamma=\sqrt{(R+sL)(G+sC)}$$

$$g=\gamma\cdot l$$

sinusoidalna pobuda:

$$Z_0=\sqrt{\frac{R+j\omega L}{G+j\omega C}}$$

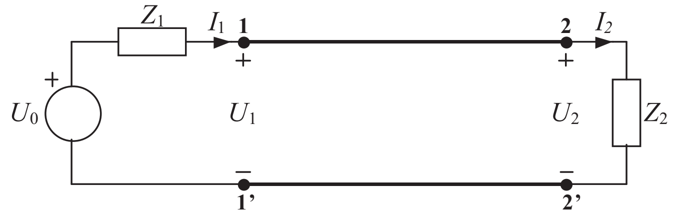
$$\gamma=\sqrt{(R+j\omega L)\ (G+j\omega C)}$$

$$U(l)=U(0)\operatorname{ch}g-I(0)Z_0\operatorname{sh}g$$

$$I(l)=-U(0)\frac{\operatorname{sh}g}{Z_0}+I(0)\operatorname{ch}g$$

$$U(0)=U(l)\operatorname{ch}g+I(l)Z_0\operatorname{sh}g$$

$$I(0)=U(l)\frac{\operatorname{sh}g}{Z_0}+I(l)\operatorname{ch}g$$



$$Z_{ul}=\frac{U_1}{I_1}=\frac{U_2\operatorname{ch}g+I_2Z_0\operatorname{sh}g}{U_2\dfrac{\operatorname{sh}g}{Z_0}+I_2\operatorname{ch}g}$$

$$U_2=I_2\cdot Z_2$$

$$Z_{ul}=Z_0\frac{Z_2\operatorname{ch}g+Z_0\operatorname{sh}g}{Z_2\operatorname{sh}g+Z_0\operatorname{ch}g}$$

$$\Gamma_2=\frac{Z_2-Z_0}{Z_2+Z_0}\qquad \Gamma_1=\frac{Z_1-Z_0}{Z_1+Z_0}$$

$$|\Gamma_2|=\frac{|U_{odb}|}{|U_{pol}|}$$

$$u(x,t)=U(x)\mathrm{e}^{st}$$

$$i(x,t)=I(x)\mathrm{e}^{st}$$

$$U(x)=U(0)\operatorname{ch}\gamma x-I(0)Z_0\operatorname{sh}\gamma x$$

$$I(x)=-U(0)\frac{\operatorname{sh}\gamma x}{Z_0}+I(0)\operatorname{ch}\gamma x$$

x - udaljenost od početka linije

γ i Z_0 - sekundarni parametri linije

$U(0)$ i $I(0)$ - napon i struja na početku linije

sinusoidalan izvor frekvencije ω_0

valna duljina λ_0: $\lambda_0=\dfrac{2\pi}{\beta}=\dfrac{2\pi}{\omega_0\sqrt{LC}}$

$$\gamma=\sqrt{(R+j\omega L)(G+j\omega C)}=\alpha+j\beta$$

$$g=(\alpha+j\beta)l=a+jb$$

α - faktor gušenja linije po jedinici duljine

β - faktor faze linije po jedinici duljine

$$\beta=\omega\sqrt{LC}$$

$$v=\frac{\omega}{\beta}=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$g=\gamma\cdot l=\gamma\cdot k\cdot\lambda=j\omega\sqrt{LC}\cdot k\cdot\frac{2\pi}{\omega\sqrt{LC}}=j2\pi k$$

1. LINIJA BEZ GUBITAKA

$$R=G=0$$

$$Z_0=\sqrt{\frac{L}{C}}\qquad \gamma=s\sqrt{LC}$$

Za $s=j\omega\rightarrow$ sinusna pobuda

$$\gamma=j\omega\sqrt{LC}=j\beta\qquad \alpha=0$$

2. LINIJA BEZ DISTORZIJE

$$RC=GL$$

$$Z_0=\sqrt{\frac{L}{C}}\qquad \gamma=\sqrt{RG}+s\sqrt{LC}$$

Za $s=j\omega\rightarrow$ sinusna pobuda

$$\gamma=\sqrt{RC}+j\omega\sqrt{LC}$$

$$\alpha=R\sqrt{\frac{C}{L}}=\sqrt{RG}\qquad \beta=\omega\sqrt{LC}$$

$$v=\frac{\omega}{\beta}=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

3. RC-LINIJA

$$G=0\quad L=0$$

$$Z_0=\sqrt{\frac{R}{sC}}$$

$$Z_0=\sqrt{\frac{R}{j\omega C}}=\sqrt{\frac{R}{\omega C}}\cdot e^{-j45^\circ}$$

$$\gamma=\sqrt{R\cdot j\omega C}=\sqrt{\omega RC e^{j45^\circ}}=\sqrt{\frac{\omega RC}{2}}+j\sqrt{\frac{\omega RC}{2}}$$

$$\alpha=\beta=\sqrt{\frac{\omega RC}{2}}$$

4. LINIJA S MALIM GUBICIMA

$$\omega L>>R\quad \omega C>>G$$

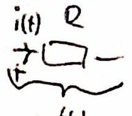
$$Z_0=\sqrt{\frac{L}{C}}\cdot e^{-j\left(\frac{R}{2\omega L}-\frac{G}{2\omega C}\right)}$$

$$\gamma\cong\left(\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}+\frac{G}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}\right)+j\omega\sqrt{LC}$$

$$\alpha=\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}+\frac{G}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

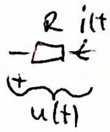
$$\beta=\omega\sqrt{LC}$$

Dvopoli: *OTPOR



$i(t)=\frac{u(t)}{R}$

$u(t)=R\cdot i(t)$



$i(t)=\frac{-u(t)}{R}$

$u(t)=-R\cdot i(t)$

Bitno: Pozitivniji pol je onaj gdje struja ulazi. Ako je pretpostavljeni napon obrnuto okrenut, onda je napon negativan. Vrijedi za sve elemente!

*KONDENZATOR
*ZAVOJNICA (INDUKTIVITET) } formule 1.1

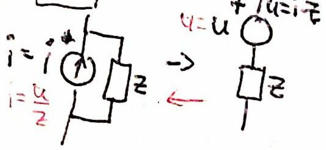
IZVORI: *Strujni

S1.2

*Naponski

Pretvorba jednog u drugi:

P.1

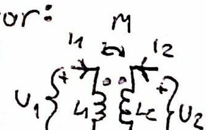


Koristimo samo $I=\frac{U}{R}$, odnosno $I=\frac{U}{Z}$

$\boxed{u=i\cdot Z}$ za $i=i$

P.2 za $u=u$ $\boxed{i=\frac{u}{Z}}$

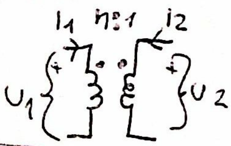
Transformator: (u Laplaceu)



F1.3

Kad pišemo napone, pišemo standardno $u=i\cdot Z$, u ovom slučaju $u_1=I_1\cdot sL_1$, no postoji i međuinduktivna veza, što znači da jedan djeluje na drugi, a to ne smijemo zaboravit! Na L_1 nam djeluje sM koji je prouzročila struja I_2. Zbog toga nam je $\boxed{u_1=I_1 sL_1+sMI_2}$. Pozitivan je predznak kad obje struje ulaze ili kad obje izlaze na točkice. Ako jedna ulazi, a druga izlazi na točku, onda je predznak negativan!

Idealni transformator:

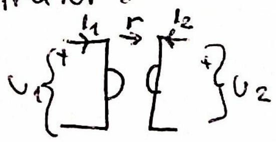


F1.4

Jedino bitno za zapamtit: Ako su točke na istoj strani, koristimo $u_1=nu_2$, ako je jedna gore, druga dolje, $u_1=-nU_2$. Struje: Ako obje ulaze/izlaze na točke $i_1=-\frac{I_2}{n}$, ako jedna ulazi, a druga izlazi $i_1=\frac{I_2}{n}$

Pripazi na kojoj je strani 'n'! Ako je 1:n, onda je lijevo U_2 desno U_1!

Girator:



F1.5

Postavimo napone tako da su im plusevi na istim stranama ovako: nakon toga pišemo ~~pozitivan predznak~~,

U_1: Ako I_2 ulazi na + pol napona U_2, pišemo $U_1=r\cdot I_2$

Ako I_2 izlazi iz + pola napona U_2, onda $U_1=-r\cdot I_2$

U_2: Obrnuto! Ako I_1 ulazi u $+U_1$, onda $U_2=-I_1 r$

Ako I_1 izlazi iz $+U_1$, onda $U_2=rI_1$

Pazi gdje je okrenuta strelica r. Ako je na lijevu stranu, onda zamjeni brojeve 1 i 2! Predznak

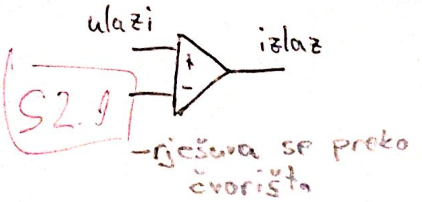
Ekvivalent impedancije:

F1.6

Ako su u zadatku transformator ili girator, na koje je vezan samo jedan element na drugoj strani, možemo se riješiti trans./giratora i ostaviti samo ekvivalentnu impedanciju.

Koristimo formule 1.6, sa prethodno objašnjenim predznacima

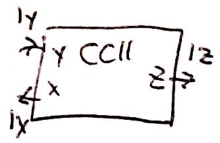
Operacijsko pojačalo: Tu nema neke nauke. Kad dođe u zadatku, bitno je zapamtit samo ~~dvije~~ 3 stvari:



1. Ne smiju se pisat jednadžbe u čvorištu izlaza
2. Gledamo kao da struje ne ulaze u pojačalo
3. Dva ulaza gledamo kao kratki spoj i izjednačimo njihove napone.

Dodadno: Ako je u zadatku zadan napon napajanja pojačala, bitno je znati da je to max napon na izlazu!

Strujni prijenosnik:



Bitno: $u_X = u_Y$

$I_Y = 0$

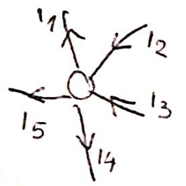
$I_Z = I_X$

Kad dođe u zadatku izjednačimo napone, tj napišemo da je $u_X = u_Y$ i postavimo struje.

Pisanje jednadžbi

S2.3

Čvorište:



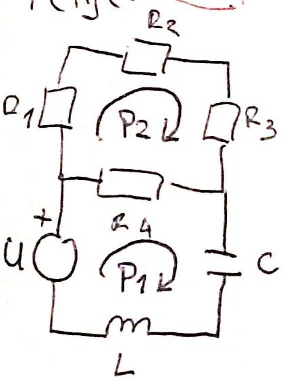
Bitno! Kod pisanja čvorova, zadaj da sve struje ulaze/izlaze iz čvora!

Pišemo tako da sve koje ulaze imaju jedan predznak, a koje izlaze drugi. Nije bitno koje su + a koje - je je to ista jednadžba pomnožena sa -1.

$-I_1+I_2+I_3-I_4-I_5=0$ ili $I_1-I_2-I_3+I_4+I_5=0$

Kada idemo rješavat zadatke pomoću čvorova, za svaku točku gledamo kao da sve struje izlaze!!!

Petlje: S2.4



Petlje zadajemo proizvoljno. Petlja nam je zapravo struja koja prolazi kroz elemente. Ako ulazimo na + pol izvora onda je pozitivan predznak, ako na - onda je negativan.

$P_1: -U + \underbrace{I_1R_4 - I_2R_4} + I_1 \cdot \frac{1}{sC} + I_1 sL = 0$

kroz R_4 prolaze I_1 i I_2, ali u suprotnim smjerovima pa je I_2 negativan.

$P_2: I_2R_1 + I_2R_2 + I_2R_3 + I_2R_4 - \underbrace{I_1R_4}_{\text{suprotan smjer}} = 0$

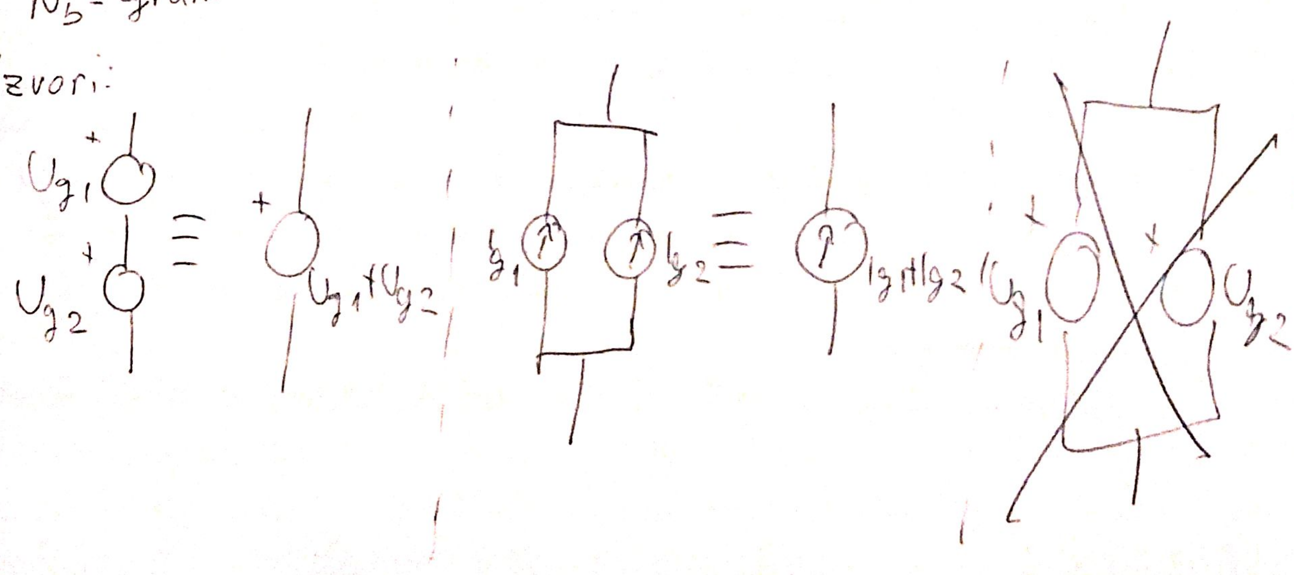
Jednadžbe:

N_v - čvorišta

N_b - grane

Broj lin. neovisnih jed. $= N_b - N_v + 1$

Izvori:



Zabranjeno, osim ako je $U_{g1} = U_{g2}$, onda je $U_{g_{uk}} = U_{g1} = U_{g2}$

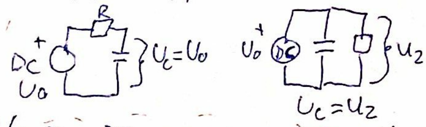
Prijelazne pojave

- Prvo se računaju početne vrijednosti na - induktiviteta
  - kondenzatora

$t<0$ $\quad$ AC $\quad \frac{1}{sC} = \frac{1}{j\omega C}$

1. Ucrtaj spoj samo sa djelovima koji sudjeluju u $t<0$
2. Ako postoji trafo/girator na koji je spojen samo jedan element, izračunaj ekvivalentnu impedanciju $\boxed{S1.6}$
3. Ako je moguće, napravi zamjene strujni ⇔ naponski, kako bi spoj bio jednostavniji $\boxed{S1.2}$
4. Napiši jednadžbe kruga i iz njih izračunaj $U_c(0)$ i $I_L(0)$! $\boxed{S2.3, S2.4}$
5. Prelazimo u $t \geq 0$ gdje koristimo laplacea
6. Ponovno ~~crtamo~~ crtamo spoj, ali sa elementima koji sudjeluju u $t \geq 0$.
7. Uz C i L koji su sudjelovali u $t<0$, sada crtamo i pripadajuće $U_c(0)$ i $I_L(0)$ koje smo izračunali u $\boxed{T4}$
8. ~~Pišemo jednadžbe i računamo~~
   Pretvaramo izvore kako bi dobili jednostavniji spoj
9. Pišemo jednadžbe kruga i računamo traženo.

Ako je DC izvor, kroz kondenzator neće teći struja! U_c će biti jednak napona izvora/paralelne grane



↳ za DC, zavojnica nema otpor

Ako izračunamo početni napon npr $E = 10V$, za $t \geq 0$ to će biti $E = 10V$ ⊶ $E(s) = \frac{10}{s}$

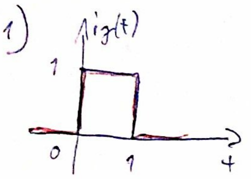
Dodatno: - fazori
+ pojačala
- izvor zadan slikom

Sve E $t<0$ pretvori u $\frac{E}{s}$ za $t \geq 0$

Pojačala: S2.1

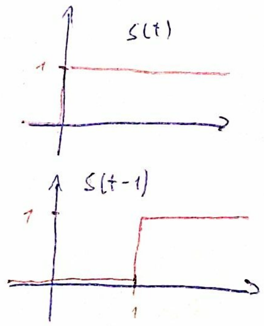
Izvor zadan slikom:

Pr 1)



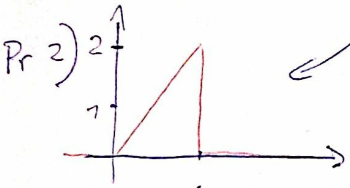
$I_g(t) = S(t) - S(t-1)$

$I_g(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-s} = \frac{1}{s}(1 - e^{-t})$ $\equiv$



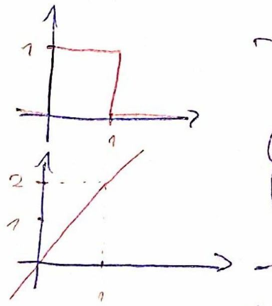
Ako oduzmemo ova dva signala, tj $S(t) - S(t-1)$ dobit ćemo traženi signal

Pr 2)



$2t[S(t) - S(t-1)]$

dobijemo ga množenjem f-je $2t$ i primjera prije



Ako ova dva pomnožimo, dobit ćemo traženi

- Ako je $I_b(t) = A \sin t$, a izračunamo $I_L(j\omega) = B \cdot e^{-jk}$, onda vrijedi $I_L(t) = B \sin(t - k)$

Prijenosne f-je

$s = j\omega$

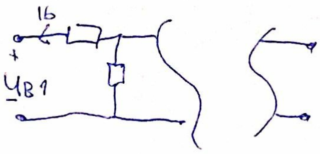
Amp-frek $|H(j\omega)| = \dfrac{|\quad\quad|}{|\quad\quad|}$ Fazno-frek. $\varphi(\omega) = \mathrm{arctg}\,\dfrac{\mathrm{Im}(N)}{\mathrm{Re}(N)} - \mathrm{arctg}\,\dfrac{\mathrm{Im}(D)}{\mathrm{Re}(D)}$; $H = \dfrac{N}{D}$

pazi jel ° ili rad

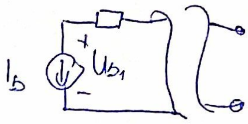
Ako je - početni signal $\cos(2t-45°)$
- prijenosna -> amp-frek. 1,58
  ↳ faz. frek. -108°

} izlazni napon $U_{iz} = H \cdot U_{iz} = 1{,}58 \cdot \cos(2t+45°-108°)$

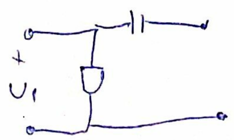
Ako je zadana shema



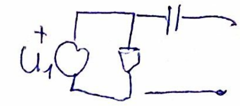
smijemo ->



ili



smijemo ->



Filtri

-> prijenosna -> svedi da je "s" na najveću potenciju sam i usporedi s formulom
↳ ako brojnik nije dobar, izlači nešto ili dodaj kao K
-> očitaj ω^2 u nazivniku (pazi jer je kvadrat), pa tek onda Q

- Amp. frek. -> pretvori "s" u "jω"

Denormalizacija

$R = R_0 \cdot R_n$

$C = \dfrac{C_n}{\omega_0 R_0}$

$L = \dfrac{L_n \cdot R_0}{\omega_0}$

Normalizacija

$R_n = \dfrac{R}{R_0}$

$Z_{Cn} = \dfrac{1}{sCR_0} = \dfrac{1}{\dfrac{s}{\omega_0} \cdot \underbrace{\omega_0 C R_0}_{C_n}}$

$Z_{Ln} = \dfrac{sL}{R_0} = \dfrac{s}{\omega_0} \cdot \dfrac{\omega_0 L}{R_0}$

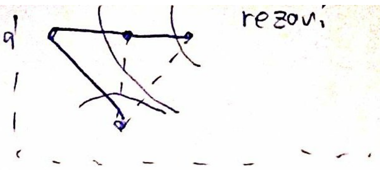
} R_0 i ω_0 su vrijednosti po kojima normaliziramo

R_n, C_n, L_n su nakon normalizacije

Grafovi i matrice

→ ako postoji grana koja ima samo izvor, treba promijenit jer neće bit reducirana

rezovi



$$A = \begin{array}{c|c} & g_1\ g_2\ g_3 \dots \\ \hline \check{c}_1,\ \check{c}_2,\ \check{c}_3 & [\quad] \end{array}$$ incidencija $\begin{cases} -1 & \text{kad ulazi u čvor} \\ 1 & \text{kad izlazi} \\ 0 & \text{nema veze} \end{cases}$

$$S = \begin{array}{c|c} & g_1\ g_2\ g_3 \dots \\ \hline p_1,\ p_2,\ p_3 & [\quad] \end{array}$$ spojna → petlja u smjeru grane $\begin{cases} 1 & \text{podudara se} \\ -1 & \text{suprotne} \\ 0 & \text{nema veze} \end{cases}$

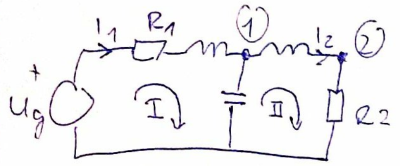
Petlja smije hvatat samo jednu granu!!!

$$Q = \begin{array}{c|c} & g_1\ g_r \dots \\ \hline r_1,\ r_2,\ r_3 & [\quad] \end{array}$$ temeljni rezovi → režemo samo jednu granu i rez je u smjeru te grane $\begin{cases} 1 & \text{poklapaju se} \\ -1 & \text{suprotne} \\ 0 & \text{nema veze} \end{cases}$

→ ima ih koliko ima grana (debelih)

Rang grafa $= R = N_{ST}$

Nulitet -||- $= \phi = N_{SP}$



Metoda petlji: $Z_p \cdot I_p = V_{0p}$

$$\begin{bmatrix} R+sL+\frac{1}{sC} & -\frac{1}{sC} \\ -\frac{1}{s} & R_2+sL+\frac{1}{sC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_g \\ 0 \end{bmatrix}$$

$I_1 = \frac{\Delta 1}{\Delta}$ $\quad I_2 = \frac{\Delta 2}{\Delta}$

$$\Delta = \left| \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \right| = AD - BC \qquad \Delta_1 = \left| \begin{bmatrix} u_g & -\frac{1}{sC} \\ 0 & R_2+sL+\frac{1}{sC} \end{bmatrix} \right| ; \Delta_2 = \left| \begin{bmatrix} R+sL+\frac{1}{sC} & u_g \\ -\frac{1}{sC} & 0 \end{bmatrix} \right|$$

Metoda čvorova $\quad Y_v \cdot U_v = I_{0v}$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix}$$

$$\Delta 1 = \left| \begin{bmatrix} E & B \\ F & D \end{bmatrix} \right| \quad \Delta 2 = \left| \begin{bmatrix} A & E \\ C & F \end{bmatrix} \right|$$

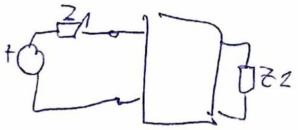
$U_1 = \frac{\Delta 1}{\Delta}$ $\quad U_2 = \frac{\Delta 2}{\Delta}$

Ako treba I_1: $I_1 = \frac{u_g - U_1}{R_1} = \frac{u_g - \frac{\Delta 1}{\Delta}}{R_1} = \frac{u_g}{R_1} - \frac{1}{R_1} \cdot \frac{\Delta 1}{\Delta}$

Četveropoli

Ako je recipročan $\quad Z_1 = Z_2$

$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{A}{D}$



Pretvorbe: * $Y_{11} = \frac{D}{B}$ $\quad Y_{21} = \frac{1}{B}$ $\quad Y_{12} = \frac{AD-BC}{B}$ $\quad Y_{22} = \frac{A}{B}$

* $[Y] = [Z]^{-1}$ $\quad Y_{11} = \frac{Z_{22}}{|\Delta Z|}$ $\quad Y_{12} = \frac{Z_{12}}{|\Delta Z|}$ $\quad Y_{21} = \frac{Z_{21}}{|\Delta Z|}$ $\quad Y_{22} = \frac{Z_{11}}{|\Delta Z|}$

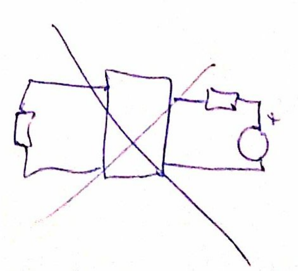
* $h_{11} = \frac{B}{D}$ $\quad h_{12} = A - \frac{BC}{D} = \frac{AD-BC}{D}$ $\quad h_{21} = \frac{1}{D}$ $\quad h_{22} = \frac{-C}{D}$

Zrcalni parametri $\quad Z_{P1} = Z_{11}$ $\quad Z_{K1} = \frac{1}{Y_{11}}$ $\quad Z_C = \sqrt{Z_{K1} \cdot Z_{P1}}$; $Z_{C1} = \sqrt{Z_{P1} Z_{K1}}$ $\quad Z_{C2} = \sqrt{Z_{P2} Z_{K2}}$ $\quad th(\gamma) = \sqrt{\frac{Z_{K1}}{Z_{P1}}} = \sqrt{\frac{Z_{K2}}{Z_{P2}}}$

$Z_1 = Z_{C1} = \sqrt{\frac{AB}{CD}}$ $\quad Z_2 = Z_{C2} = \sqrt{\frac{BD}{AC}}$

$A = \sqrt{\frac{Z_{C1}}{Z_{C2}}} \cdot ch\gamma$ $\quad C = \frac{1}{\sqrt{Z_{C1} Z_{C2}}} \cdot sh\gamma = \frac{1}{n \cdot Z_{C2}} \cdot sh\gamma$

$B = \sqrt{Z_{C1} Z_{C2}} \cdot sh\gamma = n \cdot Z_{C2} \cdot sh\gamma$ $\quad D = \sqrt{\frac{Z_{C2}}{Z_{C1}}} \cdot ch\gamma$



-regularna matrica nema nul-red

Linije

Prvo računaj Z_0 i β (trebat će)

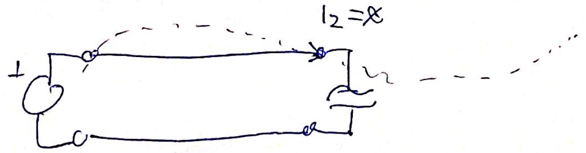
$Ch(j\beta) = \cos\beta$

$sh(j\beta) = j\sin\beta$

- kad je linija zaključena sa $Z_0 \rightarrow \Gamma_2 = \emptyset$

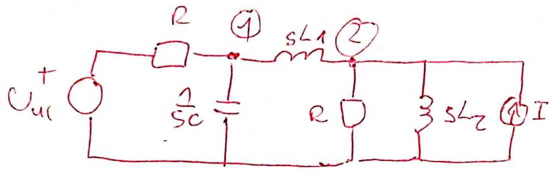
$\searrow Z_{ul} = Z_0$

- ako je na izlazu $i_2 = \emptyset$, a $l = \frac{\lambda_0}{2}$, onda je i na ulazu $I_1 = \emptyset$



Bitno!

Za sklop NPR



ako pišemo jednadžbu za čvor 1, gledamo kao da sve struje iz njega izlaze, tj.

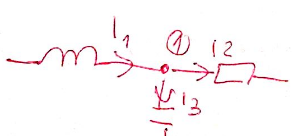
(1) $\frac{U_1 - U_{ul}}{R} + U_1 sC + \frac{U_1 - U_2}{sL_1} = \emptyset$

ali kad pišemo za čvor 2, ne gledamo kao da kroz zavojnicu L_1 struja teče desno, nego opet kao da sve struje teku van, tj:

$\hookrightarrow$ osim ako struja strujnog izvora ulazi (za nju pišemo kako je)

(2) $\frac{U_2 - U_1}{sL_1} + \frac{U_2}{R} + \frac{U_2}{sL_2} - I = \emptyset$

Ovo vrijedi kad ovako pišemo, a ne za slučaj kad zadamo struje npr.:



$\rightarrow$ u ovom slučaju pišemo kako ulaze/izlaze!

Širina pojasa PP

$$B = \omega_g - \omega_d = \frac{\omega_P}{Q_P}$$

$$B = \frac{\omega_P}{Q_P} \ [rad/s]$$

$$s = j\omega$$

$$s^2 = j^2\omega^2 = -\omega^2$$

Granične frekvencije PP

$$\omega_{g,d} = \omega_P \sqrt{1 + \frac{1}{4Q_P^2}} \pm \frac{\omega_P}{2Q_P}$$

$$f_c = (f_g f_d)^{\frac{1}{2}}$$

$$\omega_P^2 = \omega_d \cdot \omega_g$$

$$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$B \ll \omega_c$

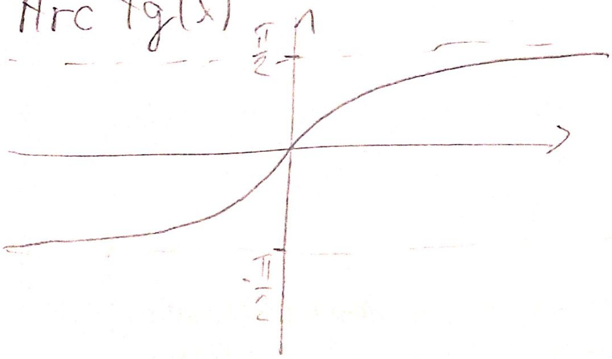
$$Q = \frac{\omega_c}{B} \geq 10$$

$$\omega_{g,d} \approx \omega_P \pm \frac{\omega_P}{2Q_P} = \omega_P \pm \frac{1}{2}B$$

PP

$$H(s) = k \frac{\prod_i (s - s_{oi})}{\prod_j (s - s_{pj})}$$

Arc tg(x)



2. stupnja $\frac{s^2}{\text{nešto}}$ ima dvostruku nulu

fazno-frekvencijska

$$\varphi(\omega) = \text{arctg} \frac{Im[H(j\omega)]}{Re[H(j\omega)]}$$

$$H(j\omega) = \frac{a + bj}{c + dj}$$

$$\varphi(\omega) = \text{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) - \text{arctg}\left(\frac{d}{c}\right)$$

Fazoni: $f(t) = A \cdot e^{j(\omega t+\varphi)} = A \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t} = A\, e^{j\omega t}$

$X_1 = X_1 e^{j\varphi_1}$

$X_2 = X_2 e^{j\varphi_2}$

$U \cdot e^{j\omega t} = U\cos(\omega t) + j\, U\sin(\omega t)$

Stvarna pobuda: → realni dio

$u(t) = U\cos(\omega t) = Re[U \cdot e^{j\omega t}]$

$X_1 \cdot X_2 = X_1 X_2 \cdot e^{j(\varphi_1+\varphi_2)}$

$X_1 \cdot X_2 = A_1 A_2 - B_1 B_2 + j(A_1 B_2 + A_2 B_1)$

Odzivi → eksponencijalna

$U_c e^{j(\omega t+\varphi)}$

Stvarni odziv → realni dio

$u_c(t) = U_c \cos(\omega t+\varphi) = Re[U_c \cdot e^{j(\omega t+\varphi)}]$

fer2.net

Električni krugovi

Tutorial - Grafovi (matrice)

by: Tywin

Svaku mrežu možemo jednoznačno opisati uz pomoć grafova. Pri tome se služimo matricama. Kako bi nam bilo što lakše pratiti proučimo prvo oznake kojima ćemo se koristiti:

- **b** → grana (odnosno grane)
- **v** → čvor (čvorovi)
- **p** → petlja (petlje)
- **t** → grana stabla (grane stabla)
- **s** → spona (spone)
- **r** → rez (rezovi)
- **N** → broj nečega (npr. N_b – broj grana)

Osnovne relacije i pojmovi koje nam olakšavaju računanje su:

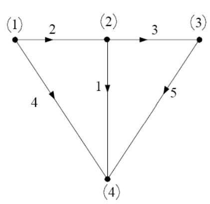
- Stablo je skup grana koje obuhvaćaju sva čvorišta ali ne tvore zatvoreni strujni krug (u stablu nema toka struje)
- Spone su preostale grane mreže, a dodavanjem jedne spone u stablo stvaramo jednu petlju (gdje postoji tok struje)
- Prilikom označavanja rednog broja grana na prva mjesta dolaze grane stabla a tek poslije grane spona.
- $N_t = N_r = N_v - 1$
- $N_s = N_p = N_b - N_v + 1$

Matrice uz pomoć kojih možemo opisati izgled mreže, ali ne i njezin sastav su:

- $\mathbf{A_a}$ → matrica incidencije; veličine je $N_v \times N_b$
- $\mathbf{A}$ → reducirana matrica incidencije; veličine je $N_t \times N_b$
- $\mathbf{S}$ → spojna matrica; veličine je $N_s \times N_b$
- $\mathbf{Q}$ → rastavna matrica; veličine je $N_t \times N_b$

Uz ove matrice postoje još i matrice **U**, **I**, **Z** i **Y** ali ćemo o njima nešto više tek kasnije. Prvo pogledajmo kako se određuju matrice **A**, **S** i **Q**. Matricu $\mathbf{A_a}$ ne koristimo u računu pa nju nećemo obradit (iako se radi analogno kao i **A** samo što postoji još jedan redak za referentni čvor).

Evo primjera na kojem se objašnjava (znam da je isti takav i u slajdovima al je najbolji). Dakle, broj čvorova je 4, broj grana je 5, što znači da je matrica incidencije **A** veličine 3 × 5. Pri tome smo jedan čvor izbacili jer smo ga proglasili referentnim (uzemljen je), neka to bude čvor (4). Matricu popunjavamo tako da promatramo međusobni odnos grana i čvorova. Ako grana ulazi u čvor pišemo vrijednost „**-1**", ako iz čvora izlazi vrijednost „**1**" a ako nisu u odnosu „**0**". Tako naša matica **A** iznosi:

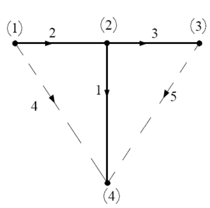


$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} g1 & g2 & g3 & g4 & g5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ č1 \\ č2 \\ č3 \end{array}$$

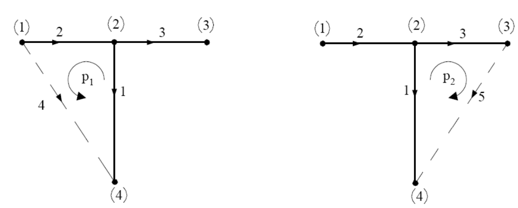
Računamo broj stablenih grana → 3,
te broj spona → 2.

Dogovorno vrijedi da su grane 1, 2 i 3 grane stabla a ostale grane, 4 i 5, spone.

Grane stabla su označene podebljanom, a spone isprekidanom crtom.

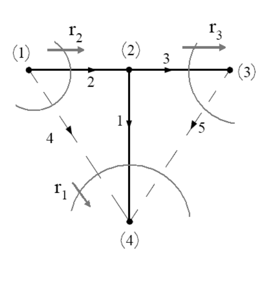


Kada pišemo spojnu matricu **S** tada za svaki redak gledamo stablo i samo jednu sponu. Dodajući jednu sponu u stablo stvaramo jedan zatvoreni krug, odnosno jednu temeljnu petlju, prema tome jedna spona čini jednu petlju. Pa je broj petlji jednak broju spona → 2. Tom petljom obilazimo u smjeru spone a u matricu **S** unosimo „**1**" za grane koje se poklapaju sa smjerom petlje, „**-1**" za one koje su u suprotnom smjeru te „**0**" za one grane koje petlja ne obuhvaća.



$$\mathbf{S} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} g1 & g2 & g3 & g4 & g5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ p1 \\ p2 \end{array}$$

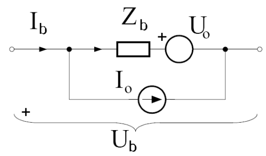
Ostaje nam još samo rastavna matrica, odnosno matrica temeljnih rezova **Q**. Ovu matricu određujemo prema grafu sa svim granama, označenim koje su grane dio stabla a koje su spone. Rezova ima koliko i grana stabla → 3, zbog toga što ćemo svakom rezu pridružiti samo jednu granu stabla. Rez radimo tako da „prerežemo" graf na bilo koji način ali tako da „prerežemo" samo jednu stablenu granu. Tada nam ta stablena grana određuje smjer reza. Pa u matricu unosimo „**1**" za grane koje se poklapaju sa smjerom reza, „**-1**" za grane koje su suprotnog smjera a „**0**" za one koje rez ne obuhvaća.



$$\mathbf{Q} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} g1 & g2 & g3 & g4 & g5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ r1 \\ r2 \\ r3 \end{array}$$

Eto, sad kad znamo kako se pišu ove „obične“ matrice koje obavezno morate znati možemo na prave stvari ☺.

Što je zapravo grana?? Jedna grana može imati maksimalno jedan element (otpornik, zavojnica ili kondenzator). Osim tog jednog elementa u grani se mogu nalaziti izvori i početni uvjeti. Grana je jednoznačno određena strujom i naponom i to na sljedeći način:



U svakoj je grani dopuštena pretvorba izvora iz strujnog u naponski i obratno. Ovo nam je potrebno znati jer je to prvi korak u zapisu grafa u matričnom obliku. Tek sad dolazimo do matrica koje opisuju sastav, ali ne i izgled, grafa. To su matrice **U**, **I**, **Z** i **Y**, a postoji više vrsta svake od ovih matrica. Neke od ovih matrica su nepoznanice a neke su poznate (odnosno vrijednosti u matricama se zapisuju iz grafa). Nepoznanice su:

- $\mathbf{U_b}$ → vektor stupac duljine N_b gdje svaki član matrice predstavlja jedan napon grane
- $\mathbf{U_v}$ → vektor stupac duljine N_v gdje svaki član matrice predstavlja jedan napon čvora
- $\mathbf{U_r}$ → vektor stupac duljine N_r gdje svaki član matrice predstavlja jedan napon reza
- $\mathbf{I_b}$ → vektor stupac duljine N_b gdje svaki član matrice predstavlja jednu struju grane
- $\mathbf{I_p}$ → vektor stupac duljine N_p gdje svaki član matrice predstavlja jednu struju petlje

Poznate matrice, odnosno matrice koje znamo popuniti vrijednostima ili izračunati iz drugih matrica su:

- $\mathbf{U_{0b}}$ → vektor stupac duljine N_b gdje svaki član matrice predstavlja vrijednost napona izvora i početnih uvjeta u grani
- $\mathbf{U_{0p}}$ → vektor stupac duljine N_p gdje svaki član matrice predstavlja vrijednost napona izvora i početnih uvjeta u petlji

- $\mathbf{I_{0b}}$ → vektor stupac duljine N_b gdje svaki član matrice predstavlja vrijednost struje izvora i početnih uvjeta u grani
- $\mathbf{I_{0v}}$ → vektor stupac duljine N_v gdje svaki član matrice predstavlja vrijednost struje izvora i početnih uvjeta čvora
- $\mathbf{I_{0r}}$ → vektor stupac duljine N_r gdje svaki član matrice predstavlja vrijednost struje izvora i početnih uvjeta reza
- $\mathbf{Z_b}$ → kvadratna matrica veličine $N_b \times N_b$; sadrži impedancije grana
- $\mathbf{Z_p}$ → kvadratna matrica veličine $N_p \times N_p$; sadrži impedancije petlji
- $\mathbf{Y_b}$ → kvadratna matrica veličine $N_b \times N_b$; sadrži admitancije grana
- $\mathbf{Y_v}$ → kvadratna matrica veličine $N_v \times N_v$; sadrži admitancije čvorova
- $\mathbf{Y_r}$ → kvadratna matrica veličine $N_r \times N_r$; sadrži admitancije rezova

Oke, gdje koristimo sve te silne matrice?? Koristimo ih pri zapisu matričnih jednadžbi. Dvije najvažnije jednadžbe su jednadžbe strujno-naponskih relacija:

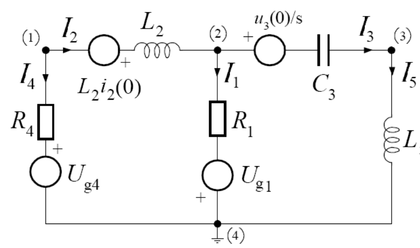
$$\mathbf{U}_b = \mathbf{Z}_b \cdot \mathbf{I}_b + \mathbf{U}_{0b}$$

$$\mathbf{I}_b = \mathbf{Y}_b \cdot \mathbf{U}_b + \mathbf{I}_{0b}$$

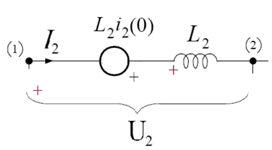
Ostale tri matrične jednadžbe su:

- Jednadžbe petlji → $\mathbf{Z}_p \cdot \mathbf{I}_p = \mathbf{U}_{op}$
- Jednadžbe čvorova → $\mathbf{Y}_v \cdot \mathbf{U}_v = \mathbf{I}_{ov}$
- Jednadžbe rezova → $\mathbf{Y}_r \cdot \mathbf{U}_r = \mathbf{I}_{or}$

Jednadžbe strujno-naponskih relacija su nam najvažnije jer je njih najlakše odrediti a zatim se ostale tri jednadžbe lako odrede množenjem matrica. Da bi zapisali jednadžbe strujno-naponskih relacija prvo je potrebno na temelju mreže napisati strujno-naponske relacije za svaku granu pojedinačno. Napravimo to na primjeru (dani primjer odgovara prije danom grafu, te je već prebačen u Laplaceovu domenu!):



Prvo što trebamo napraviti je zapisati napone svake grane, napon označavamo na prikazani način. I pri tome su crveno označeni + stavljeni tamo gdje struja ulazi. Analogno ovome označavamo i ostale grane.



Te jednadžbe pišemo u matrice na način da prvi redak vektora stupca $\mathbf{U_b}$ odgovara naponu U_1, umnožak prvog retka matrice $\mathbf{Z_b}$ i vektor stupca $\mathbf{I_b}$ padovima napona U_1 što ga čine struje grana te prvi redak vektora stupca $\mathbf{U_{0b}}$ naponima izvora i početnim uvjetima napona U_1. Analogno tome ide i za druge. Strujno-naponske relacije grana te matrična jednadžba $\mathbf{U}_b = \mathbf{Z}_b \cdot \mathbf{I}_b + \mathbf{U}_{0b}$:

$$U_1 = I_1 \cdot R_1 - U_{g1}$$

$$U_2 = I_2 \cdot sL_2 - L_2 i_2(0)$$

$$U_3 = I_3 \cdot \frac{1}{sC_3} + \frac{u_3(0)}{s}$$

$$U_4 = I_4 \cdot R_4 + U_{g4}$$

$$U_5 = I_5 \cdot sL_5$$

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sL_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{sC_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & sL_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -U_{g1} \\ -L_2 i_2(0) \\ \frac{u_3(0)}{s} \\ U_{g4} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Iste te jednadžbe zapisane preko struja te matrična jednadžba $\mathbf{I}_b = \mathbf{Y}_b \cdot \mathbf{U}_b + \mathbf{I}_{0b}$:

$$I_1 = \frac{1}{R_1} \cdot U_1 + \frac{U_{g1}}{R_1}$$

$$I_2 = \frac{1}{sL_2} \cdot U_2 + \frac{i_2(0)}{s}$$

$$I_3 = sC_3 \cdot U_3 - C_3 u_3(0)$$

$$I_4 = \frac{1}{R_4} \cdot U_4 - \frac{U_{g4}}{R_4}$$

$$I_5 = \frac{1}{sL_5} \cdot U_5$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{sL_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & sC_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{sL_5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{U_{g1}}{R_1} \\ \frac{i_2(0)}{s} \\ -C_3 u_3(0) \\ -\frac{U_{g4}}{R_4} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tako smo odredili naše najvažnije matrične jednadžbe, i pri tome vrijedi $\mathbf{Z_b} = \mathbf{Y_b}^{-1}$. Da bi dobili ostale tri matrične jednadžbe koristimo se sljedećim izrazima:

Jednadžbe petlji:

$$\mathbf{Z}_p \cdot \mathbf{I}_p = \mathbf{U}_{op}$$

Formule pretvorbe:

$$\mathbf{Z}_p = \mathbf{S} \cdot \mathbf{Z}_b \cdot \mathbf{S}^T$$

$$\mathbf{U}_{0p} = -\mathbf{S} \cdot \mathbf{U}_{0b}$$

$$\mathbf{U}_{0p} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{Z}_b \cdot \mathbf{I}_{0b}$$

Jednadžbe čvorova:

$$\mathbf{Y}_v \cdot \mathbf{U}_v = \mathbf{I}_{ov}$$

Formule pretvorbe:

$$\mathbf{Y}_v = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Y}_b \cdot \mathbf{A}^T$$

$$\mathbf{I}_{0v} = -\mathbf{A} \cdot \mathbf{I}_{0b}$$

$$\mathbf{I}_{0v} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Y}_b \cdot \mathbf{U}_{0b}$$

Jednadžbe rezova:

$$\mathbf{Y}_r \cdot \mathbf{U}_r = \mathbf{I}_{or}$$

Formule pretvorbe:

$$\mathbf{Y}_r = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Y}_b \cdot \mathbf{Q}^T$$

$$\mathbf{I}_{0r} = -\mathbf{Q} \cdot \mathbf{I}_{0b}$$

$$\mathbf{I}_{0r} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Y}_b \cdot \mathbf{U}_{0b}$$

Daljnji nam su problemi matematičke operacije nad matricama. Ono što je potrebno znati je transponiranje, množenje te traženje inverzne matrice.

Transponiranje matrica:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$$

Množenje matrica:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ p & r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot j + b \cdot m + c \cdot p & a \cdot k + b \cdot n + c \cdot r & a \cdot l + b \cdot o + c \cdot s \\ d \cdot j + e \cdot m + f \cdot p & d \cdot k + e \cdot n + f \cdot r & d \cdot l + e \cdot o + f \cdot s \\ g \cdot j + h \cdot m + i \cdot p & g \cdot k + h \cdot n + i \cdot r & g \cdot l + h \cdot o + i \cdot s \end{bmatrix}$$

Traženje inverzne matrice jedan je od najvećih problema ali nam je važno poznavati kako se to radi jer se u nekim zadacima mora (npr. zapiši jednadžbe čvorova u matričnom obliku, $\mathbf{Y_v}$ odredi preko $\mathbf{Z_b}$ – i tad se mora odrediti $\mathbf{Y_b} = \mathbf{Z_b}^{-1}$). Da bi se mogla odrediti inverzna matrica determinanta mora biti različita od nule (matrica mora biti regularna).

U gore danom primjeru nije problem odrediti inverznu matricu jer ako je matrica ispunjena samo po dijagonali tada svaki element invertiramo zasebno (stavimo na $^{-1}$, okrenemo) i dobili smo invertiranu matricu. Odnosno:

$$\mathbf{Z}_b^{-1}=\begin{bmatrix}R_1&0&0&0&0\\0&sL_2&0&0&0\\0&0&\frac{1}{sC_3}&0&0\\0&0&0&R_4&0\\0&0&0&0&sL_5\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{R_1}&0&0&0&0\\0&\frac{1}{sL_2}&0&0&0\\0&0&sC_3&0&0\\0&0&0&\frac{1}{R_4}&0\\0&0&0&0&\frac{1}{sL_5}\end{bmatrix}=\mathbf{Y}_b$$

U slučaju da matrica nije popunjena samo po dijagonali (što se događa ukoliko imamo zavisne izvore ili međuinduktivitet u mreži) moramo koristiti neki drugi postupak. Prvo što se radi je iz matrice kojoj tražimo inverz odredimo dio (kvadratna submatrica) počevši od jednog kraja dijagonale tako da obuhvatimo što manji dio a opet sve elemente koji nisu na dijagonali. Primjer:

$$\begin{bmatrix}R_1&0&0&0&0\\0&\frac{1}{sC_2}&0&0&0\\0&0&\mathbf{sL_3}&\mathbf{0}&\mathbf{sM}\\0&0&\mathbf{0}&\mathbf{R_4}&\mathbf{0}\\0&0&\mathbf{sM}&\mathbf{0}&\mathbf{sL_5}\end{bmatrix}^{-1}\qquad\begin{bmatrix}\mathbf{R_1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&0&0\\\mathbf{0}&\mathbf{sL_2}&\mathbf{0}&0&0\\\mathbf{0}&\boldsymbol{\alpha}&\mathbf{\frac{1}{sC_3}}&0&0\\0&0&0&R_4&0\\0&0&0&0&sL_5\end{bmatrix}^{-1}$$

Neodređeni dio invertiramo kao da se radi o matrici ispunjenoj samo po dijagonali (okrenemo elemente).

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{R_1}&0&0&0&0\\0&sC_2&0&0&0\\0&0&\multicolumn{3}{c}{\begin{bmatrix}\mathbf{sL_3}&\mathbf{0}&\mathbf{sM}\\\mathbf{0}&\mathbf{R_4}&\mathbf{0}\\\mathbf{sM}&\mathbf{0}&\mathbf{sL_5}\end{bmatrix}^{-1}}\\0&0&&&\end{bmatrix}\qquad\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{R_1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{sL_2}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\boldsymbol{\alpha}&\mathbf{\frac{1}{sC_3}}\end{bmatrix}^{-1}&\begin{matrix}0&0\\0&0\\0&0\end{matrix}\\\begin{matrix}0&0&0\\0&0&0\end{matrix}&\begin{matrix}\frac{1}{R_4}&0\\0&\frac{1}{sL_5}\end{matrix}\end{bmatrix}$$

Dio koji smo označili treba invertirati na jedan od slijedećih načina. Neka je, radi jednostavnosti, zadana matrica:

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}$$

Inverz možemo naći tako da pokraj ove napišemo jediničnu matricu (po dijagonali ispunjenu jedinicama) a zatim zadanu matricu svodimo na jediničnu. Pritom sve operacije koje izvršimo nad zadanom matricom izvršimo i nad jediničnom.

$$\left(\begin{matrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{matrix}\middle|\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}\right)\sim\left(\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}a_2&b_2&c_2\\d_2&e_2&f_2\\g_2&h_2&i_2\end{matrix}\right)$$

I tada vrijedi:

$$\mathbf{M}^{-1}=\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}a_2&b_2&c_2\\d_2&e_2&f_2\\g_2&h_2&i_2\end{bmatrix}$$

Drugi način za određivanje inverza je taj da se prvo odredi determinanta:

$$det\mathbf{M}=\begin{vmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{vmatrix}$$

A zatim se transponirana matrica množitelja (množitelji su oni brojevi koje množimo kada tražimo determinantu početne matrice) podjeli sa determinantom:

$$\mathbf{M}^{-1}=\frac{1}{det\mathbf{M}}\cdot\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}e&f\\h&i\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}d&f\\g&i\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}d&e\\g&h\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}b&c\\h&i\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a&c\\g&i\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}a&b\\g&h\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}b&c\\e&f\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}a&c\\d&f\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a&b\\d&e\end{vmatrix}\end{bmatrix}^T$$

$$=\frac{1}{det\mathbf{M}}\cdot\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}e&f\\h&i\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}b&c\\h&i\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}b&c\\e&f\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}d&f\\g&i\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a&c\\g&i\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}a&c\\d&f\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}d&e\\g&h\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}a&b\\g&h\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a&b\\d&e\end{vmatrix}\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{det\mathbf{M}}\cdot\begin{bmatrix}(e\cdot i-f\cdot h)&(c\cdot h-b\cdot i)&(b\cdot f-c\cdot e)\\(f\cdot g-d\cdot i)&(a\cdot i-c\cdot g)&(c\cdot d-a\cdot f)\\(d\cdot e-g\cdot h)&(b\cdot g-a\cdot h)&(a\cdot e-b\cdot d)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{(e\cdot i-f\cdot h)}{det\mathbf{M}}&\frac{(c\cdot h-b\cdot i)}{det\mathbf{M}}&\frac{(b\cdot f-c\cdot e)}{det\mathbf{M}}\\\frac{(f\cdot g-d\cdot i)}{det\mathbf{M}}&\frac{(a\cdot i-c\cdot g)}{det\mathbf{M}}&\frac{(c\cdot d-a\cdot f)}{det\mathbf{M}}\\\frac{(d\cdot e-g\cdot h)}{det\mathbf{M}}&\frac{(b\cdot g-a\cdot h)}{det\mathbf{M}}&\frac{(a\cdot e-b\cdot d)}{det\mathbf{M}}\end{bmatrix}$$

Ukoliko je matrica manja (2×2) tada je puno lakše:

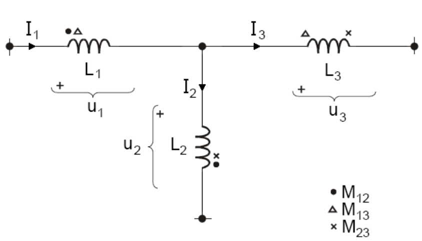
$$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}}\cdot\begin{bmatrix}d&-c\\-b&a\end{bmatrix}^T=\frac{1}{a\cdot d-b\cdot c}\cdot\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{d}{a\cdot d-b\cdot c}&\frac{-b}{a\cdot d-b\cdot c}\\\frac{-c}{a\cdot d-b\cdot c}&\frac{a}{a\cdot d-b\cdot c}\end{bmatrix}$$

Već smo rekli zašto nam je ovo potrebno. No da bi to uopće mogli koristit moramo znati zapisati strujno-naponske jednadžbe grana (problem međuinduktiviteta) ili iste staviti u matrice (problem zavisnih izvora).

Ukoliko u mreži imamo međuinduktivitet tada ga moramo i zapisati a zapisujemo ga kao pad napona. Što je uopće međuinduktivitet?? Međuinduktivitet je pojava da se u zavojnici inducira napon uslijed prolaska struje kroz neku drugu zavojnicu ako su njih dvije međuinduktivno vezane (vezu označavamo točkom, zvjezdicom, trokutom, iksom i sl.).

To znači da ćemo prilikom zapisa napona neke grane osim običnih padova napona koja stvara struja prilikom prolaska kroz zavojnicu grane, napona početnog uvjeta i izvora morat zapisat i pad napona koji stvara neka druga struja a vezana je međuinduktivitetom. Evo jedan primjer (malo teži al eto…)



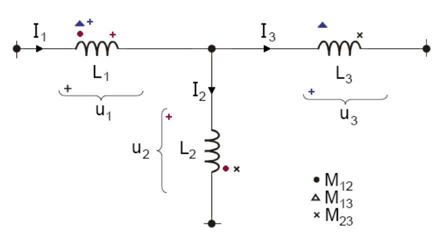
Prvo što trebamo napraviti je odgovarajuće postaviti predznake napona kojeg stvaraju struje na zavojnicama. Promotrimo najprije prvu zavojnicu, ona ima svoj pad napona kojeg stvara struja I_1 → $sL_1\cdot I_1$. No osim njega postoji još i pad napona prouzrokovan međuinduktivnim vezama. To je pad napona kojeg stvara struja I_2 preko veze M_{12} a iznosi → $sM_{12}\cdot I_2$ te pad napona kojeg stvara struja I_3 preko veze M_{13} a iznosi → $sM_{13}\cdot I_3$. Pa za napon prve grane pišemo:

$$U_1=\ sL_1\cdot I_1\ \pm^?\ sM_{12}\cdot I_2\ \pm^?\ sM_{13}\cdot I_3$$

Još je samo potrebno odrediti predznake padova napona stvorenih međuinduktivitetom.

Struja I_2 ulazi u zavojnicu L_2 na mjesto gdje nema točke (**suprotno od točke**) i tamo stvara **+**, to znači da će i na zavojnici L_1, preko međuinduktivne veze, **+** napona $sM_{12}\cdot I_2$ biti tamo gdje nema točke (**suprotno od točke**).

Struja I_3 ulazi u zavojnicu L_3 na mjesto **gdje je trokut** i tamo stvara **+**, to znači da će na zavojnici L_1, preko međuinduktivne veze, **+** napona $sM_{13}\cdot I_3$ biti tamo **gdje je trokut.**



Tako da jednadžba glasi:

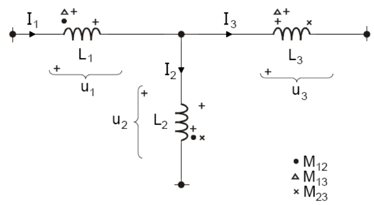
$$U_1=\ sL_1\cdot I_1-sM_{12}\cdot I_2+sM_{13}\cdot I_3$$

Na temelju ovoga možemo zapisati i ostale jednadžbe:

$$U_2=\ sL_2\cdot I_2\ \pm^?\ sM_{12}\cdot I_1\ \pm^?\ sM_{23}\cdot I_3$$

$$U_3=\ sL_3\cdot I_3\ \pm^?\ sM_{13}\cdot I_1\ \pm^?\ sM_{23}\cdot I_2$$

Zapisati predznake pojedinih napona:



Te konačno sve strujno-naponske relacije:

$$U_1 = sL_1 \cdot I_1 - sM_{12} \cdot I_2 + sM_{13} \cdot I_3$$

$$U_2 = sL_2 \cdot I_2 - sM_{12} \cdot I_1 + sM_{23} \cdot I_3$$

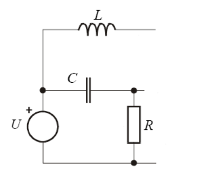
$$U_3 = sL_3 \cdot I_3 + sM_{13} \cdot I_1 + sM_{23} \cdot I_2$$

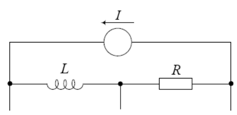
Kod problema zavisnih izvora sve što nam je potrebno su već zapisane strujno-naponske relacije svih grana. Ono što moramo činiti je da ukoliko je potrebno zapisati matričnu jednadžbu $\mathbf{U}_b = \mathbf{Z}_b \cdot \mathbf{I}_b + \mathbf{U}_{0b}$ tada zavisnost izvora moramo zapisati u ovisnosti o struji. A ako se traži matrična jednadžba $\mathbf{I}_b = \mathbf{Y}_b \cdot \mathbf{U}_b + \mathbf{I}_{0b}$ tada zavisnost izvora moramo zapisati preko napona, a u slučaju da imamo i međuinduktivitet tada i njegove strujne ovisnosti moramo zapisati preko napona.

Te zadnji problem, jedan od važnijih.

Uvijek napomenu da matrice $\mathbf{Z}_b$ i $\mathbf{Y}_b$ moraju biti regularne (niti jedan redak ili stupac ispunjen samo nulama), odnosno definicija grane je da mora sadržavati točno jedan otpornik, zavojnicu ili kondenzator. S njim može biti naponski izvor vezan serijski i strujni izvor vezan paralelno (najčešće je samo jedno od ovog dvoje iako može doći kombinacija izvora i početnog uvjeta).

No, u koje grane spadaju ovi izvori:

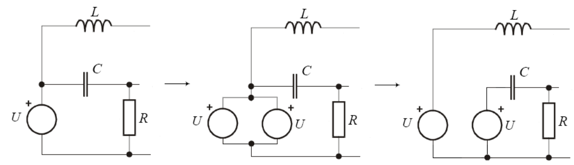




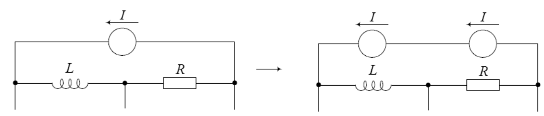
fer2.net Tutorial kroz matrice

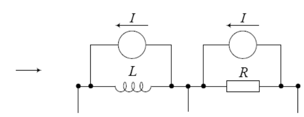
Ove izvore ne možemo stavit u svoju granu jer naponski nema niti jedan element spojen serijski s njime dok strujni nema niti jedan element spojen s njim paralelno (da to napravimo gore navedene matrice ne bi bile regularne!). Sada primjenjujemo nešto što se naziva **posmicanje izvora**. Kako se mogu posmicati izvori??

Naponski se izvor posmiče tako da umjesto jednog izvora napravimo dva izvora istog iznosa spojenih **paralelno**. Zatim tražimo čvorište na jednom od krajeva grane, u kojoj se nalaze izvori, gdje se u čvoru spajaju još dvije grane (ili više ako je potrebno – a često nije) ali tako da je u svakoj jedan element. Tada svaki od izvora **serijski** pridružimo po jednoj grani:



Strujni se izvor posmiče tako da umjesto jednog izvora napravimo dva izvora istog iznosa spojenih **serijski**. Zatim tražimo dvije grane (ili više ako je potrebno – a često nije) koje se nalaze između čvorova grane u kojoj se nalaze izvori ali tako da svaka grana sadrži po jedan element. Tada svaki od izvora **paralelno** pridružujemo po jednoj grani:





I na ovaj način rješavamo problem regularnosti matrica a time i zaključujemo ovo poglavlje o matricama i matričnom računu.

LINIJE

2008./2009.

by LEFTWING

ZA POČETAK MALO TEORIJE:

1. → DO SADA SMO SE BAVILI ELEKTRIČNIM KRUGOVIMA S KONCENTRIRANIM ELEMENTIMA

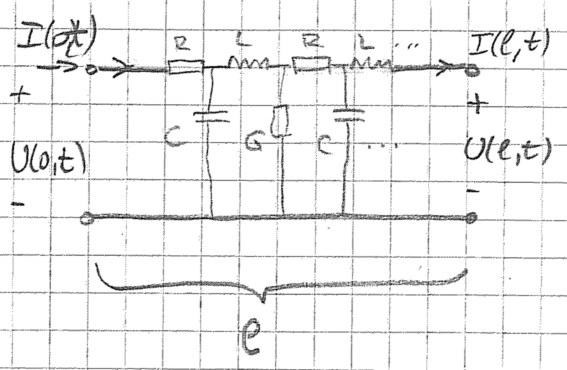
=> TO ZNAČI DA ELEKTRIČNA SVOJSTVA ELEMENATA NE OVISE O NJIHOVIM DIMENZIJAMA TJ. SVAKA PROMJENA SIGNALA U 1 TOČKI UZROKUJE ISTOVREMENI ODZIV U SVIM TOČKAMA MREŽE

2. → NA VRLO VISOKIM FREKVENCIJAMA:

- VALNA DULJINA SIGNALA MOŽE POSTATI SUMJERLJIVA S DIMENZIJAMA ELEMENTA

=> REZULTAT JE DA SIGNAL PUTUJE KROZ MREŽU KONAČNOM BRZINOM, DRUGIM RIJEČIMA NEMA TRENUTNOG ODZIVA, A U RAZLIČITIM TOČKAMA SUSTAVA SIGNAL IMA RAZLIČITE FAZE (TJ. MOŽE IMATI I RAZLIČITE VRIJEDNOSTI)

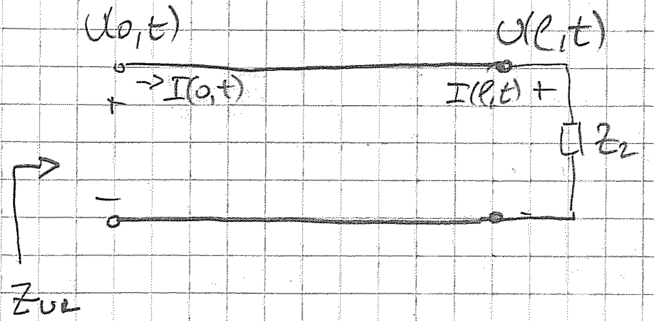
ELEKTRIČNA PRIJENOSNA LINIJA



→ ELEKTRIČNA PRIJENOSNA LINIJA JE ZAPRAVO PAR PARALELNIH, MEĐUSOBNO IZOLIRANIH VODIČA

→ SVAKA JE LINIJA ODREĐENA SVOJIM PRIMARNIM PARAMETRIMA

R → otpor
C → kapacitet
G → vodljivost
L → induktivitet
} po JEDINICI DULJINE



- SVAKA LINIJA IMA I SVOJE KARAKTERISTIČNE PARAMETRE (KOJI SE IZRAŽAVAJU PREKO PRIMARNIH PARAMETARA R, C, G, L)

1. VALNA ILI KARAKTERISTIČNA IMPEDANCIJA

$$\boxed{Z_0 = \sqrt{\frac{R+sL}{G+sC}}}$$

2. FAKTOR PRIJENOSA (PROPAGACIJE)

$$\boxed{\gamma = \sqrt{(R+sL)(G+sC)}}$$

$s \to j\omega$

$\boxed{\gamma = \alpha + j\beta}$ → KOMPLEKSNI BROJ

α - KARAKTERISTIČNI FAKTOR GUŠENJA

β - KARAKT. FAKT. FAZE

⇒ S OBZIROM DA KOD LINIJA DOLAZE VALNA SVOJSTVA SIGNALA DO IZRAŽAJA, A KAD SPOMINJEMO VALOVE, MORAMO SPOMENUTI I REFLEKSIJU

⇒ DAKLE SIGNAL PUTUJE PO LINIJI (VODU), DOĐE DO KRAJA (TJ. ZAKLJUČENJA LINIJE) I DIO SE REFLEKTIRA NAZAD

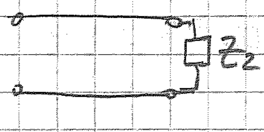
⇒ KOLIKI JE TAJ DIO KOJI SE REFLEKTIRA ?

O TOME NAM GOVORI <u>FAKTOR REFLEKSIJE</u>

PA TAKO IMAMO:

1. FAKTOR REFLEKSIJE NA IZLAZU

$$\boxed{\Gamma_2 = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0}}$$



- koji govori koliki dio se vraća s izlaza na ulaz

$Z_2 \rightarrow$ impedancija kojom je zaključen izlaz

$Z_0 \rightarrow$ karakteristična impedancija linije

2. FAKTOR REFLEKSIJE NA ULAZU

$$\boxed{\Gamma_1 = \frac{Z_1 - Z_0}{Z_1 + Z_0}}$$

- koji govori koliki dio se vraća od ulaza prema izlazu (val koji je već reflektiran na izlazu sad putuje prema ulazu i tamo se opet reflektira)

FORMULE KOJE SE ČESTO KORISTE U ZADACIMA

$$\boxed{v = \frac{\omega}{\beta}} \quad (\gamma = \alpha + j\beta) \qquad \boxed{\lambda = \frac{v}{\beta}}$$

valna duljina

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{\beta}}$$

- MISLIM DA SU IZVODI NEPOTREBNI

KARAKTERISTIČNI SLUČAJEVI KOD LINIJA:

1. LINIJA BEZ GUBITAKA:

$$R = 0$$
$$G = 0$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R+sL}{G+sC}} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\gamma = \sqrt{(R+sL)(G+sC)} = \sqrt{s^2LC} = s\sqrt{LC}$$

=> ako imamo sinusnu pobudu

$$s = j\omega$$

$$\gamma = j\omega\sqrt{LC} \qquad (\text{a isto tako } \gamma = \alpha + j\beta)$$

$$\boxed{j\beta = j\omega\sqrt{LC}}$$

ČESTO POTREBNO U ZADACIMA

2. LINIJA BEZ DISTORZIJE

$$\frac{R}{L} = \frac{G}{C}$$ $\Rightarrow$ uvjet za ostvarenje linije bez distorzije

$$\boxed{Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}}$$

$$\gamma = \underbrace{\sqrt{RC}}_{\alpha} + j\underbrace{\omega\sqrt{LC}}_{\beta}$$

IZRAZI ZA NAPON I STRUJU NA MJESTU X

$$U(x,t) = U(0,t)\,ch(\gamma x) - Z_0 I(0,t)\,sh(\gamma x)$$

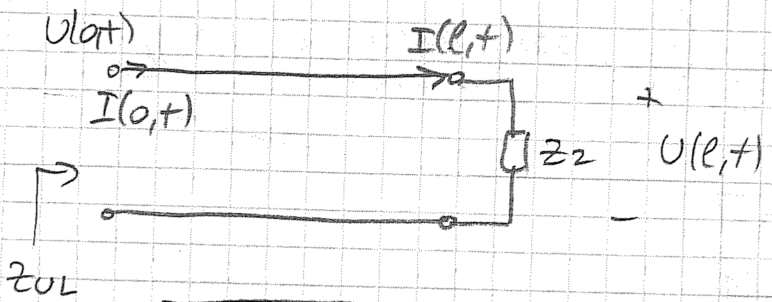
$$I(x,t) = \frac{U(0,t)}{Z_0}\,sh(\gamma x) + I(0,t)\,ch(\gamma x)$$

IZRAZI ZA NAPON I STRUJU NA POČETKU LINIJE

$$U(0,t) = U(l,t)\,ch(\gamma \cdot l) + Z_0 I(l,t)\,sh(\gamma \cdot l)$$

$$I(0,t) = \frac{U(l,t)}{Z_0}\,sh(\gamma l) + I(l,t)\,ch(\gamma l)$$

$l \Rightarrow$ udaljenost od početka



$$\boxed{Z_{UL} = \frac{U(0,t)}{I(0,t)}}$$

ulazna impedancija
$\Rightarrow$ omjer napona i struje na ulazu u liniju

$$\boxed{Z_2 = \frac{U(l,t)}{I(l,t)}}$$

$\Rightarrow$ omjer napona i struje na kraju linije

PRIMJERI:

(1) ZADANA JE LINIJA BEZ GUBITAKA SA PRIM. PARAMETRIMA: $L = 4\,mH/km$, $C = 8\,nF/km$.

a) KOLIKO NAJMANJE MORA BITI DUGA OVA LINIJA DA KOD $\omega = 10^6\,rad/s$ ULAZNA IMPEDANCIJA BUDE $\emptyset$ KAD JE SUPROTNI KRAJ OTVOREN!

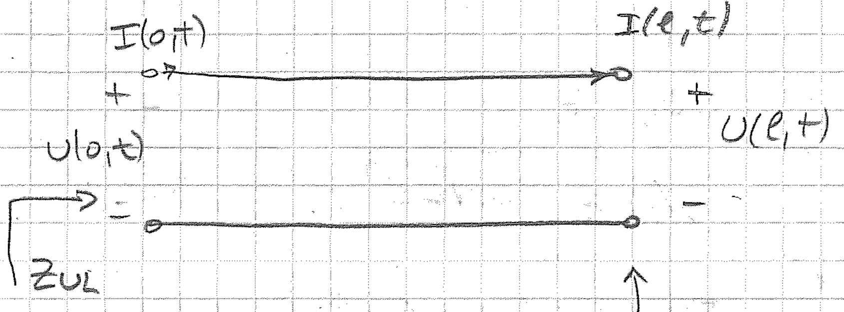
b) KOLIKI SU $U(0,t)$, $I(\ell,t)$, $U(\ell,t)$ NA TOJ LINIJI AKO JE $I(0,t) = 5\cos(10^6 t) = ?$

a) LINIJA BEZ GUBITAKA $\Rightarrow$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\gamma = j\omega\sqrt{LC}$$

$\gamma = s\sqrt{LC}$, ali kako je sinusna pobuda zadana



$\to$ UVJETOM ZADATKA JE ZADANO

$$Z_{UL} = 0$$

$\to$ napon/struja na početku

$$\Rightarrow Z_{UL} = \frac{U(0,t)}{I(0,t)} = \frac{U(\ell,t)\,ch(\gamma\ell) + Z_0 I(\ell,t)\,sh(\gamma\ell)}{\frac{U(\ell,t)}{Z_0}\,sh(\gamma\ell) + I(\ell,t)\,ch\,\gamma(\ell)}$$

$\Rightarrow$ KOLIKA JE $I(\ell,t)$?? $\Rightarrow$ LINIJA NIJE ZATVORENA, PREMA TOME, $I(\ell,t) = 0$

$$\Rightarrow Z_{UL} = \frac{\cancel{U(\ell,t)}\,ch(\gamma\ell)}{\frac{\cancel{U(\ell,t)}}{Z_0}\,sh(\gamma\ell)} = Z_0\frac{ch(\gamma\ell)}{sh(\gamma\ell)}$$

$$Z_{UL} = Z_0 \frac{ch(\gamma l)}{sh(\gamma l)}$$ i mora biti $= 0$

$$Z_0 \frac{ch(\gamma l)}{sh(\gamma l)} = 0$$ $\Rightarrow$ kada je zadovoljeno ??

kada je brojnik $= 0$

$$ch(\gamma l) = 0$$

$$ch(j\omega\sqrt{LC} \cdot l) = 0$$ $\rightarrow$ budući da vrijedi

$$\cos \omega\sqrt{LC} \cdot l = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} ch\, j\beta &= \cos\beta \\ sh\, j\beta &= j\sin\beta \end{aligned}}$$

$$\omega\sqrt{LC} \cdot l = \frac{\pi}{2} + \underbrace{\text{periodičnost}}$$

zanemarimo ju tj. $k=0$, da bi dobili minimalnu duljinu

$$ch\,x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad l = \frac{\pi}{2\omega\sqrt{LC}} = \frac{\pi}{8\sqrt{2}} = 0{,}277\ km = 277\ m$$

b)

$$I(0,t) = 5\cos(10^6 t)$$

$\hookrightarrow$ FAZORSKI $\quad I(0,t) = 5\angle 0°$

$$U(l,t) = \underbrace{U(0,t)}_{=?} ch(\gamma l) - Z_0 I(0,t)\, sh(\gamma l)$$

ALI POGLEDAJMO UVJET ZADATKA

$$Z_{UL} = 0 \Rightarrow Z_{UL} = \frac{U(0,t)}{I(0,t)}$$

$\hookrightarrow$ znamo da je $I(0,t) \neq 0$

$$\Rightarrow \boxed{U(0,t) = 0}$$

$$U(l,t) = -Z_0\, I(0,t)\, sh(\gamma l)$$

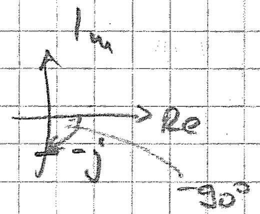
kad se uvrste vrij $\gamma l = j\frac{\pi}{2}$

$$= -\sqrt{\frac{L}{C}} \cdot 5\angle 0^\circ \cdot sh\left(j\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= -\sqrt{\frac{L}{C}} \cdot 5\angle 0^\circ \cdot j\,\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1}$$

$$= -\sqrt{\frac{L}{C}} \cdot -5\angle 0^\circ \cdot j = -5 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}\cdot 10^8} \cdot j =$$

$$= \frac{5\cdot 10^3}{\sqrt{2}}(-j) = \underbrace{\frac{5\cdot 10^3}{\sqrt{2}}\angle -90^\circ}_{\text{fazor}}$$



$$\boxed{U(l,t) = \frac{5\cdot 10^3}{\sqrt{2}}\cos(10^6 t - 90^\circ)}$$

$I(l,t) = 0$ → ranije već zaključeno

② LINIJA BEZ GUBITAKA S $L = 0{,}8\,mH/km$, $C = 80\,nF/km$ DULJINE $l = \frac{\lambda_0}{4}$. NA ULAZU JE SPOJEN GENERATOR ULAZNOG OTPORA R_g, A LINIJA JE ZAKLJUČENA OTPOROM $R_2 = 1\,k\Omega$. KOD FREKVENCIJE $\omega_0 = 10^5\,rad/s$ TREBA ULAZNA IMPEDANCIJA BITI PRILAGOĐENA NA R_g. KOLIKO IZNOSI R_g?

KOLIKO JE DUGA LINIJA?

$U(l,t)$, $I(l,t)$ = ? AKO JE $u_g = 4\cos(\omega_0 t)$

Rješenje:

LIN. BEZ. GUBITAKA

$$\left.\begin{aligned} R &= 0 \\ G &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} Z_0 &= \sqrt{\frac{L}{C}} = 100\,\Omega \\ \gamma &= j\underbrace{\omega\sqrt{LC}}_{\beta} = j\beta \end{aligned}$$

PREMA RANIJE DANOM IZRAZU $\Rightarrow$

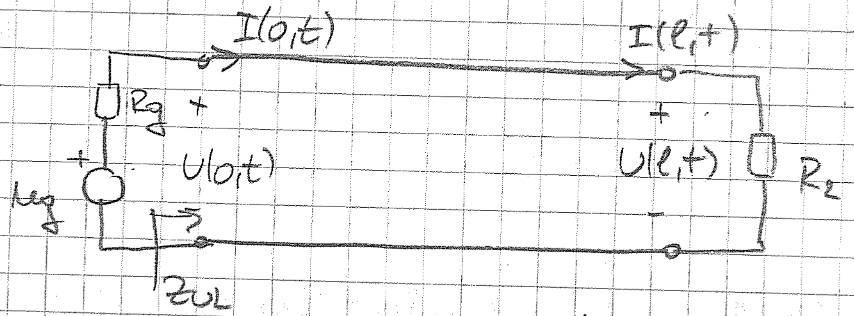
$$\lambda_0 = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{LC}}$$

A UVJETOM ZADATKA $l = \frac{\lambda_0}{4}$

$$\Rightarrow l = \frac{\pi}{2\omega\sqrt{LC}} = 2m$$

$$\boxed{l = 2m}$$

NAŠA LINIJA IZGLEDA OVAKO:



$$\Rightarrow Z_{UL} = \frac{U(0,t)}{I(0,t)} = \left(\begin{array}{l}\text{omjer napona i} \\ \text{struje na početku}\end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ Uvrstimo izraze za $U(0,t)$ i $I(0,t)$

$$Z_{UL} = \frac{U(l,t)\,ch(\gamma l) + Z_0\, I(l,t)\, sh(\gamma l)}{\frac{U(l,t)}{Z_0}\, sh(\gamma l) + I(l,t)\, ch(\gamma l)} =$$

$$= \frac{\cancel{I(l,t)}\left(\frac{U(l,t)}{I(l,t)}\, ch(\gamma l) + Z_0\, sh(\gamma l)\right)}{\cancel{I(l,t)}\left(\frac{U(l,t)}{I(l,t)} \cdot \frac{1}{Z_0}\, sh(\gamma l) + ch(\gamma l)\right)}$$

$\Rightarrow$ UOČIMO DA JE $\frac{U(l,t)}{I(l,t)} = R_2$

$\Rightarrow$

$$Z_{UL} = \frac{R_2\, ch(\gamma l) + Z_0\, sh(\gamma l)}{\frac{R_2}{Z_0}\, sh(\gamma l) + ch(\gamma l)}$$

$\gamma \cdot l = j\frac{\pi}{2}$ $\rightarrow$ kad se uvrste zadane vrij. i izračunati l

$$Z_{UL} = \frac{R_2\, ch(j\frac{\pi}{2}) + Z_0\, sh(j\frac{\pi}{2})}{\frac{R_2}{Z_0}\, sh(j\frac{\pi}{2}) + ch(j\frac{\pi}{2})} =$$

$$= \frac{R_2 \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0} + Z_0 j \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1}}{\frac{R_2}{Z_0} j \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1} + Z_0 j \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0}}$$

$$= \frac{\cancel{j} Z_0}{\cancel{j}\frac{R_2}{Z_0}} \Rightarrow Z_{UL} = \frac{Z_0^2}{R_2} = \frac{100^2}{1000} = 10\,\Omega$$

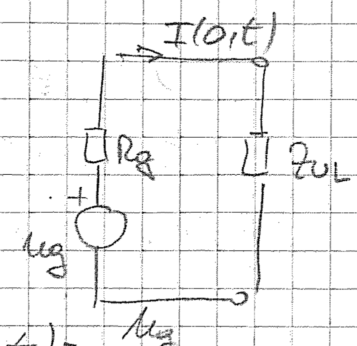
$$\boxed{Z_{UL} = 10\,\Omega}$$

KOLIKI JE R_g?

UVJET PRILAGOĐENJA ZNAČI

$$R_g = Z_{UL} \Rightarrow \boxed{R_g = 10\,\Omega}$$

$$U(l,t) = \underbrace{U(0,t)\, \underbrace{ch(\gamma l)}_{0}}_{0} - Z_0 I(0,t)\, sh(\gamma l)$$



$$U(l,t) = -Z_0 I(0,t)\, j \sin\frac{\pi}{2} = -j Z_0 I(0,t)$$

$$U(l,t) = -j Z_0 \cdot \frac{U_g}{R_g + Z_{UL}} = \ldots = 20\angle{-90^\circ}$$

$$I(0,t) = \frac{u_g}{R_g + Z_{UL}}$$

$$u(l,t) = 20\cos(\omega_0 t - 90^\circ)\ [V]$$

$$I(l,t) = \frac{U(0,t)}{Z_0} sh(\gamma l) + \underbrace{I(0,t)\, ch(\gamma l)}_{0}$$

$$I(l,t) = \frac{U(0,t)}{Z_0} sh(\gamma l) =$$

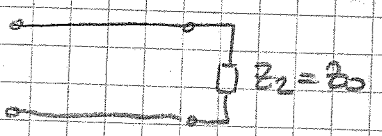
$$= I(0,t) \cdot Z_{UL} \frac{sh(\gamma l)}{Z_0}$$

$$= \dots = \frac{U_g}{2} \cdot \frac{1}{Z_0} \cdot j = -j \frac{1}{50}$$

$$\boxed{I(l,t) = 0{,}02 \cos(\omega_0 t - 90^\circ)}$$

NAPOMENA:

1. KADA JE LINIJA ZAKLJUČENA VLASTITOM KARAKT. IMPEDANCIJOM => NEMA REFLEKTIRANOG VALA, ZAŠTO?



$$\Gamma_2 = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0} = 0$$

faktor refleksije

dolazni

$$u_r = \Gamma_2 \cdot u_d$$

reflektirani

$$\boxed{u_r = 0}$$

(OVO SE ČESTO POJAVLJUJE U ZADACIMA)

2. AKO JE LINIJA ZAKLJUČENA VLASTITOM IMPEDANCIJOM $Z_2 = Z_0$ => TADA JE NJENA ULAZNA IMPEDANCIJA

$$\boxed{Z_{UL} = \frac{U(0,t)}{I(0,t)} = Z_0}$$