1. međuispit iz Stohastičkih procesa
15.11.2011.

1. **(9 bodova)**
(a) Definirajte funkciju izvodnicu $\psi(z)$ diskretne slučajne varijable X te pomoću nje izvedite formulu za $E[X]$.
(b) Izvedite funkciju izvodnicu za Poissonovu slučajnu varijablu sa parametrom λ te odredite očekivanje.
(c) Broj stradalih u pojedinoj motociklističkoj nesreći je slučajna varijabla sa zakonom razdiobe
$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{12} & \frac{2}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix},$$
a godišnji broj nesreća ravna se po Poissonovoj razdiobi s parametrom 0.2. Napišite funkciju izvodnicu za ukupan broj stradalih u motociklističkim nesrećama u jednoj godini.
(d) Izračunajte očekivani broj stradalih tijekom jedne godine.

2. **(9 bodova)**
(a) Definirajte polinomijalnu razdiobu.
(b) Dijete svako jutro nasumce izvlači šaku bombona iz posude u koju mu roditelji svaku večer dodaju bombone tako da ih ujutro bude točno 5. Vjerojatnost da dijete izvuče određeni broj bombona dana je sa
$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$
Odredite vjerojatnost događaja
$A = \{$dijete u tjedan dana izvuče jednom 2 bombona, dva puta 3 bombona i 4 puta više od 3 bombona$\}$.
(c) Definirajte povratni događaj, te postojan i prolazan povratni događaj.
(d) Da li je događaj A povratan i, ako jest, odredite da li je postojan ili prolazan te vrijeme čekanja.

3. **(5 bodova)**
(a) Definirajte slučajnu šetnju.
(b) Igra igra igru na sreću po sljedećem pravilu: u svakoj igri potpuno slučajno ili dobiva 1 žeton, ili gubi jedan žeton, ili ostaje na istom broju. Napišite rekurzivnu relaciju za vjerojatnost propasti, odredite početne uvjete te izračunajte vjerojatnost propasti ako igrač starta sa 2 žetona, a prestaje igrati kada osvoji 20 žetona.

4. **(10 bodova)**
(a) Definirajte Markovljevo svojstvo i homogeni Markovljev lanac.
(b) Izvedite jednadžbu lanca za homogeni Markovljev lanac.
(c) Definirajte ergodički Markovljev lanac i iskažite ergodički teorem.
(d) Čestica kreće u točki 2 i giba se po cjelobrojnim točkama intervala $[0,4]$. Pretpostavimo da je šetnja simetrična. Napišite matrice prijelaza u slučaju da su

(a) rubna stanja apsorbirajuća[1],

(b) rubna stanja reflektirajuća sa vjerojatnošću refleksije 1/3.

(e) Koristeći matrice prijelaza, obrazložite da li su Markovljevi lanci iz (d) dijela zadatka ergodički i zašto.

5. **(7 bodova)**
(a) Definirajte bitni skup stanja i nebitno stanje.
(b) Klasificirajte stanja lanaca sa skupom stanja $S = \{1, 2, 3, 4\}$ i sljedećim matricama prijelaznih vjerojatnosti

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 5/6 \end{bmatrix}, \quad \Pi_2 = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(c) Je li neki od lanaca iz prethodnog dijela zadatka ergodičan? Obrazložite. Ako jest, odredite mu prosječno vrijeme zadržavanja u stanju 2.

Dozvoljena je upotreba kalkulatora.

[1] stanje je apsorbirajuće ako sistem kada jednom uđe u njega zauvijek ostaje u njemu

1. (a) Definicija $\Psi(z)$ od X, $E(X)$ = pomoću Ψ.

Definicija: $\Psi(z) := c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ / izvodnica niza (c_n)

$\Psi(z) = E(X^z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n$ funkcija izvodnica diskr. slučajne varijable X

$E(x) = ?$

$\Psi'(z) = \sum_{n=1} n p_n z^{n-1} \Rightarrow \Psi'(1) = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n = E(X)$.

(b) Funkcija izvodnica za Poissonovu slučajnu varijablu s parametrom λ i $E(x) = ?$

$X \sim P(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

$$\boxed{\sum_{k=0} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda + \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^3}{6} + \ldots = e^{\lambda}}$$

$\Psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \cdot z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{\lambda z} \cdot e^{-\lambda} = e^{\lambda(z-1)}$

$E(X) = \Psi'(1) = \left\{ \Psi'(z) = \lambda e^{\lambda(z-1)} \right\} = \lambda \cdot e^0 = \lambda$

c) broj stradalih u pojedinoj motociklističkoj nesreći $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{12} & \frac{2}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

godišnji broj nesreća (Poissonova razdioba) $P(\lambda)$, $\lambda = 0.2$

$\Psi(z)$ (f. izvodnica) za ukupan broj stradalih u 1 god

$\Psi_X(z) = \frac{1}{12} + \frac{2}{3} z + \frac{1}{4} z^2$

$S_N = X_1 + X_2 + \ldots X_N$ (broj stradalih u 1. nesreći, u 2.) – nezavisne kopije od X

N nezavisno od $X_1, X_2, \ldots$

$\Psi_N(z) = e^{0.2(z-1)}$

$\Psi_{S_N}(z) = \Psi_N(\Psi_X(z)) = e^{0.2\left(\frac{1}{12} + \frac{2}{3}z + \frac{1}{4}z^2 - 1\right)} = e^{0.2\left(\frac{1}{4}z^2 + \frac{2}{3}z - \frac{11}{12}\right)}$

d) $E(N) = ?$ (očekivani broj stradalih u 1. god)

$E(S_N) = \Psi'_{S_N}(1)$

$\Psi'(z) = 0.2\left(\frac{1}{4}z^2 + \frac{2}{3}z - \frac{11}{2}\right)' e^{0.2\left(\frac{1}{4}z^2 + \frac{2}{3}z - \frac{11}{12}\right)} = 0.2\left(\frac{1}{2}z + \frac{2}{3}\right) e^{0.2\left(\frac{1}{4}z^2 + \frac{2}{3}z - \frac{11}{12}\right)}$

$\Psi'(1) = 0.2\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) e^0 = \frac{7}{30}$

③ a) Def: slučajna šetnja

$Y_n \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ q_n & p_n \end{pmatrix}$ q_n - vjerojatnost pomaka ulijevo

p_n - " - " - udesno

$X_0 = x_0$

$X_n = x_0 + Y_1 + \ldots + Y_n$, $n \geq 1$ nn (X_n): slučajno pomicanje

b) $p = q = r = \frac{1}{3}$ rekurzivna relacija za vjerojatnost propasti, početni uvjet, vjerojatnost propasti ako igrač starta s 2 žetona, a prestaje kad ima 20.

Poč uvjeti

$a_0 = 1$

$a_{20} = 0$ (sigurna propast)

$$a_n = p a_{n+1} + r a_n + q a_{n-1}$$

$p \neq q$

$(1-r) a_n = p a_{n+1} + q a_{n-1}$

$p' = \frac{p}{1-r}$ $q' = \frac{q}{1-r}$

$a_n = p' a_{n+1} + q' a_{n-1}$

$p' + q' = \frac{p}{1-r} + \frac{q}{1-r} = \frac{1-r}{1-r} = 1$

vj propasti $\Rightarrow a_n = \frac{\left(\frac{q'}{p'}\right)^n - \left(\frac{q'}{p'}\right)^s}{1 - \left(\frac{q'}{p'}\right)^s}$

$\frac{q'}{p'} = \frac{\frac{q}{1-r}}{\frac{p}{1-r}} = \frac{q}{p}$

$a_n = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^n - \left(\frac{q}{p}\right)^s}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^s}$

$$a_n = \frac{1}{3} a_{n+1} + \frac{1}{3} a_n + \frac{1}{3} a_{n-1}$$

$a_n = 1 - \frac{n}{s} \Rightarrow$ (formula glasi $\frac{n}{s}$, ali nije logična ???)

$a_2 = \frac{9}{10}$

④ a) def. Markovljevo svojstvo i homogeni Markovljev lanac

Markovljevo svojstvo (odsustvo pamćenja) - Ako je poznat položaj čestice u trenutku t_n, tada njezin budući položaj ne ovisi o načinu na koji je čestica stigla u točku

Homogeni Markovljev lanac: $X_0, X_1, \ldots$ $i_0 \ldots i_n$, ~~ti~~ vrijedi da

$$P(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n, \ldots X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n)$$

b) Homogen. Markovljev lanac - jednadžba lanca

$$p(n) = p(0)\Pi^n$$
$$p(n) = p(n-1)\Pi$$

Izvod: t_k - stanje u prethodnom trenutku

$$p_j(k) = P(X_k = j)$$
$$= \sum_i P(X_{k-1} = i)\, P(X_k = j \mid X_{k-1} = i)$$
$$= \sum_i p_i(k-1)\, p_{ij}$$

$$p(k) = p(k-1)\Pi$$
$$p(n) = p(n-1)\Pi = p(n-2)\Pi^2 = \ldots = p(0)\cdot\Pi^n \quad \blacksquare$$

c) Ergodički Markovljev lanac (def) i ergodički teorem

Ergodički Markovljev lanac - Markovljev lanac za kojeg postoji $\lim_{n\to\infty} p_{ij} = \Pi_j$

Ergodički teorem: Ako postoji broj n takav da su svi elementi matrice Π^n strogo pozitivni (kroz n koraka iz svakog u bilo koje drugo stanje), tada za svaki j (ne ovisi o i) postoji

$$\Pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}(n)$$

(d) čestica kreće u točki 2 i gibe se u intervalu $[0, 4]$, matrice prijelaza

a) rubna stanja apsorbirajuća
b) rubna stanja reflektirajuća s vjerojatnošću refleksije $\frac{1}{3}$

(a)
$$\Pi_1 = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

NIJE ERGODIČAN
(iz rubnih stanja, nijedno nije dostižno)

(b)
$$\Pi_2 = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \end{array}$$

ERGODIČAN (u konačnom broju koraka ($n=6$) iz svakog je stanje moguće doći u bilo koje drugo)

Π_2^6 svi elementi > 0 strogo

e)

⑤ a) Bitni skup stanja, nebitno stanje (def.)

Bitni skup stanja - svako stanje $i \in H$ je bitno

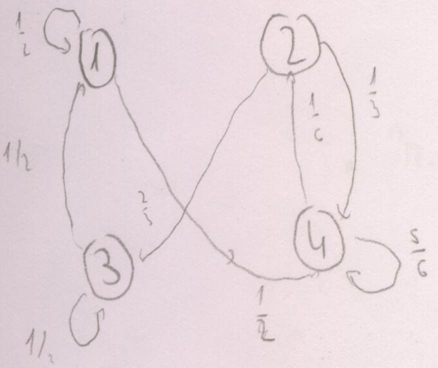
$i, j \in H \quad i \leftrightarrow j \quad \forall i,j \quad \leftrightarrow$ međusobno dostižni

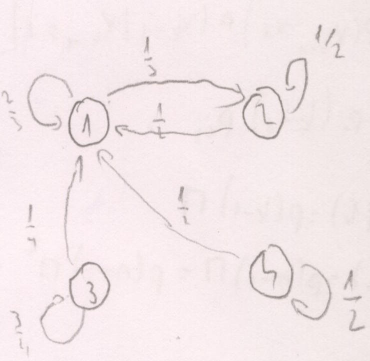
$i \in H, \quad j \notin H \quad i \not\to j$

nebitno stanje $(i \to j, \; j \not\to i)$

b) Klasificiranje stanja lanaca $S = \{1,2,3,4\}$

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 5/6 \end{bmatrix} \qquad \Pi_2 = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$





$1 \to 1$	$1 \to 4$
$2 \to 3$	$2 \to 4$
$3 \to 1$	$3 \to 3$
$4 \to 2$	$4 \to 4$

$H_0 = \{1, 2, 3, 4\}$ - bitni skup

$1 \to 1$	$1 \to 2$
$2 \to 1$	$2 \to 2$
$3 \to 1$	$3 \to 3$
$4 \to 1$	$4 \to 4$

$H_0 = \{1, 2\}$ - bitni skup

3, 4 - nebitna stanja

(c) ERGODIČNOST $\Rightarrow$?: ako je prosječno vrijeme zadržavanja u stanju 2 (stacionarne vjerojatnosti)

2. nije ergodičan (iz 1 i 2 ne može se ni u 3 ni u 4)

1. je ergodičan (u nekom fiksnom konačnom broju koraka svako stanje dostižno iz svakoga)

$$p(0) = \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ (0 & 1 & 0 & 0) \end{array}$$

$P_1 = P_0(\Pi_1) = (0 \;\; 0 \;\; 2/3 \;\; 1/3)$

$P_2 = P_1 \Pi_1 = (1/3 \;\; 1/18 \;\; 1/3 \;\; 5/18)$

$P_3 = P\Pi_1 \, (\neq) \, \frac{3}{29}$

$P_n = P_0 \Pi^n$

$= \left(\frac{4}{29} \;\; \frac{3}{29} \;\; \frac{4}{29} \;\; \frac{18}{29}\right)$

Π_2