VELIKI PI-SHOE

"VIS"

Shoe - Pac

Vjerojatnost

i

statistika

NASTAVNIK: dr. sc. **Tomislav Burić** aka dr. π

GRUPA: PA02

TERMINI: NEPARNI TJEDAN (1. TJEDAN NASTAVE): UTORAK → $10^{00} - 12^{00}$ A202

ČETVRTAK → $8^{00} - 10^{00}$ A202

PARNI TJEDAN: UTORAK → $16^{00} - 18^{00}$

ČETVRTAK → $14^{00} - 16^{00}$

KNJIŽICA I

§ 1. DISKRETNA VJEROJATNOST

1. VJEROJATNOST

1.1. ALGEBRA DOGAĐAJA

def. SLUČAJNI POKUS – svaki pokus kojem unaprijed ne znamo ishod

def. ELEMENTARNI DOGAĐAJ – ishod pokusa ($\omega_1, \omega_2, \omega_3 \ldots$)

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\} \rightarrow \text{skup svih elementarnih događaja}$$

$|\Omega|$ ...... KARDINALNI BROJ skupa → broj elemenata skupa

$\emptyset$ ...... PRAZAN SKUP = NEMOGUĆ DOGAĐAJ

def. DOGAĐAJ – podskup od Ω (oznaka A, B, C ....)

„NA ISPITU ČAK BILO JEDNOM" II

1zzV – 3.) Bacamo 2 kocke. Opišite prostor elementarnih događaja.

$\omega_1 = 11$, $\omega_2 = 12$, $\omega_3 = 13$ ...... $\omega_{36} = 66$

ishod: prva kocka, druga kocka

$$\Omega = \{11, 12, 13, \ldots 66\}$$

$A = \{\text{oba broja manja od } 3\} = \{11, 12, 21, 22\}$

$B = \{\text{zbroj je manji od } 5\} = \{11, 12, 13, 21, 22, 31\}$

⇝ UNIJA: $A \cup B \; [A+B] = \{11, 12, 13, 21, 22, 31\}$

⇝ ILI U A ILI U B! PRIMIJETI! $A \subset B$

⇝ PRESJEK: $A \cap B \; [A \cdot B] = \{11, 12, 21, 22\}$

⇝ I U A I U B!

⇝ RAZLIKA: $B \setminus A \; [B-A] = \{13, 31\}$ → dogodio se B, a NIJE se dogodi A

⇝ KOMPLEMENT (SUPROTAN DOGAĐAJ): $\overline{B} \; [B^c] = \Omega \setminus B = \{14, 41 \ldots 66\}$

npr. $\overline{\overline{A}} = A$

$$\boxed{A \setminus B = A \cap \overline{B}}$$

!

•••DE MORGANOVA PRAVILA•••

!

$$\boxed{\begin{aligned} \overline{A \cup B} &= \overline{A} \cap \overline{B} \\ \overline{A \cap B} &= \overline{A} \cup \overline{B} \end{aligned}}$$

„PROŠLE, PRETPROŠLE, BIO DOKAZ NA ISPITU" !!

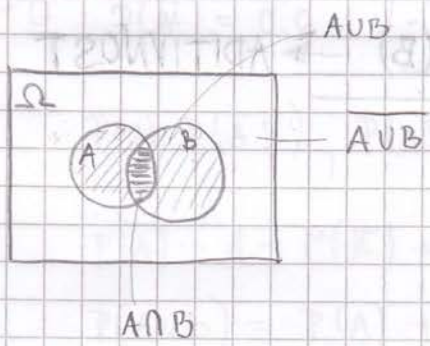
DOKAZIĆ (jer je mini i lagan):

$\omega \in \overline{A \cup B}$

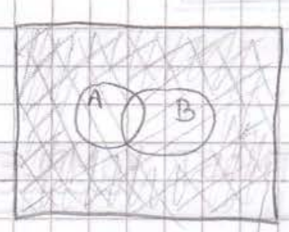
$\omega \notin A \cup B \Rightarrow \omega \notin A$ i $\omega \notin B \Rightarrow \omega \in \overline{A}$ i $\omega \in \overline{B}$

$\Rightarrow \omega \in \overline{A} \cap \overline{B}$ //

VENNOVI DIJAGRAMI



DE MORGAN:



$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$

→ ALGEBRA DOGAĐAJA – familija F podskupova od Ω na kojoj su definirane binarna operacija zbrajanja i unarna operacija komplementa sa sljedećim svojstvima:

i) $\Omega \in F$, $\emptyset \in F$ $\{\Omega$ ima 2^n podskupova$\}$

ii) $A \in F \Rightarrow \overline{A} \in F$

iii) $A, B \in F \Rightarrow A + B \in F$

UOČI !! $\overline{A+B} \in F$

po De Morganu:

$\overline{A} \cdot \overline{B} \in F$

1.2. VJEROJATNOST

„NAJBITNIJA DEFINICIJA U CIJELOM POGLAVLJU"

def. **VJEROJATNOST** – preslikavanje $P: F \to [0,1]$ (→ od 0 do 100 %) definirana na algebri događaja F koja ima svojstva:

1) $P(\Omega) = 1$, $P(\phi) = 0$ → NORMIRANOST

2) ako je $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$ → MONOTONOST

3) ako su A i B DISJUNKTNI (presjek im je prazan skup → nemaju presjek) $(A \cap B = \phi)$ tada $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ → ADITIVNOST

•• VJEROJATNOST KOMPLEMENTA :

$$\boxed{p(\bar{A}) = 1 - p(A)}$$

!

„BILO JE JEDNE GODINE (MOŽDA PROŠLE 2012.) DOKAZ OVOGA"

DOKAZIĆ :

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$$

→ KORISTIMO ADITIVNOST JER SU TO DISJUNKTNI DOGAĐAJI

$$\Rightarrow p(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

••• VJEROJATNOST UNIJE :

⟶ AKO DOGAĐAJI NISU DISJUNKTNI

$$\boxed{P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)}$$

ODUZET JER SMO TAJ DIO OBUHVATILI 2 PUTA !!

„JEDNOM U 5 GODINA NA ISPITU, MOŽDA NA ŠKOLSKOJ IL' NEGDJE"

1.DZ-2.)

$P(A\cup B) = 0.8$

$P(AB) = 0.2$

$P(\bar{A}) = 0.6$

$P(B), P(\bar{A}\bar{B}), P(A\bar{B}) = ?$

$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 0.4$

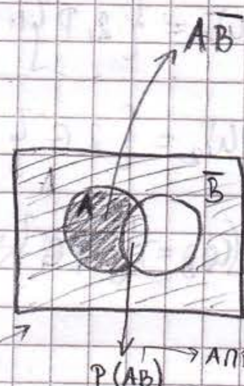
$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) =$

$0.8 = 0.4 + P(B) - 0.2$

$\Rightarrow \underline{P(B) = 0.6}$

$P(\bar{A}\bar{B}) = P(\overline{A\cup B}) = 1 - P(A\cup B)$

$\Rightarrow \underline{P(\bar{A}\bar{B}) = 0.2}$



$P(A\bar{B}) = P(A\setminus B) = P(A) - P(AB) = \underline{0.2}$

ZAKLJUČI POMOĆU VENNOVIH

1.3. KONAČNI VJEROJATNOSNI PROSTOR

def. VJEROJATNOSNI PROSTOR Ω koji posjeduje konačno mnogo elemenata događaja nazivamo KONAČNI VJEROJATNOSNI PROSTOR

$$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\} \longrightarrow P(\omega_1) = p_1, \dots, P(\omega_n) = p_n$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{n} p_i = 1}$$

Primjer: D'Alembertov problem:

⇝ bacamo 2 novčića !

$\omega_1 = \{2P\}$

$\omega_2 = \{2G\}$ $\longrightarrow P(\omega_i) = \frac{1}{3}$? (po njemu) NETOČNO !

$\omega_3 = \{P, G\}$ $\begin{cases} \omega_3 = \{PG\} \\ \omega_3 = \{GP\} \end{cases} \Rightarrow P(1P, 1G) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

ZAKLJUČAK:

SVI ELEMENTARNI DOGAĐAJI SU JEDNAKO VJEROJATNI !

$$p_1 = p_2 = \dots = p_n = P$$

$$\Rightarrow \sum p_i = n \cdot P = 1 \rightarrow \boxed{P = \frac{1}{n}}$$

⇝ Tada je vjerojatnost događaja $A = \{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_n}\}$

$$\boxed{P(A) = m \cdot p = \frac{m}{n} = \frac{\text{BROJ POVOLJNIH}}{\text{UKUPAN BROJ ISHODA}}}$$!

↳ KLASIČNA DEFINICIJA → KORISTITI JE SAMO KADA SU SVI ELEM. DOGAĐAJI JEDNAKO VJEROJATNI !

1.DZ-4) Bacamo 2 kocke. Izračunajte vjerojatnosti:

a) da su pala 2 ista broja

b) zbroj 8

c) barem jedna četvorka

d) broj djeljiv s 2 ili sa 3

a) $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ (6 povoljnih → 11, 22, 33, 44, 55, 66)

ISHOD 1.K, ISHOD 2.K

(36 ukupno → $\underset{1.K}{6} \cdot \underset{2.K}{6}$)

b) $P(B) = \frac{5}{36}$ (5 povoljnih → 26, 35, 44, 53, 62)

c) $P(C) = \frac{11}{36}$ {povoljne: 41, 42, 43, 44, 45, 46
14, 24, 34, 54, 64}

d) $P(D) = \frac{32}{36}$ → LAKŠE IZRAČUNATI SUPROTNO !

SUPROTNO: 11, 15, 51, 55 → $\frac{4}{36} \Rightarrow \frac{32}{36} = P(D)$

→ ZA CIJELU KOMBINATORIKU TREBA ZNATI 2 PRAVILA: ! !

1) PRODUKTNO PRAVILO

$\square \quad \square \quad \square \quad \square$
$5 \cdot 4 \cdot 10 \cdot 3$

2) KOMBINACIJE

$\binom{n}{k}$ = ODABIR k ELEMENATA OD n

! PODSJETNIK:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}$$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} \qquad *\binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad *\binom{n}{1} = n$$

$$*\binom{n}{n} = 1$$

DIGITRON: npr. $\boxed{5}$ + $\boxed{SHIFT}$ + $\boxed{nCr}$ + $\boxed{2}$ = $\binom{5}{2}$

1ZZV-62.) Bacamo 6 kocaka. Izračunajte vjerojatnost:

a) da je palo 6 različitih brojeva
b) 6 brojeva manjih od 5
c) $\underbrace{3}_{}$ različita para jednakih brojeva

a) $P(A) = \dfrac{6!}{6^6}$

$\square \; \square \; \square \; \square \; \square \; \square$
$6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$ → UKUPAN BR. ISHODA
$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ → POVOLJNI ISHODI

6: SVE MOŽE
5: NE MOŽE ONO NA PRVOJ ŠTO JE PALO

b) $P(B) = \dfrac{4^6}{6^6}$

$\square \; \square \; \square \; \square \; \square \; \square$
$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$

c) 3 različita para; 1. par, 2. par, 3. par

$$P(C) = \frac{\binom{6}{3}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{6^6}$$

"SAVJET! NAPISATI NEKE KOMBINACIJE!"

"BITNO! RJEŠITI ŠTO VIŠE ZADATAKA I ONDA ĆE NAM TO UĆI, MALO BAR" !!

1.MI-2008.-4) 12 ping-pong loptica. Izvlačimo 7. 4 su defektne.
Izračunaj vjerojatnost da smo izvukli:

a) točno jednu defektnu

b) najviše jednu defektnu

c) barem jednu defektnu

a) $$P(A) = \frac{\binom{4}{1}\binom{8}{6}}{\binom{12}{7}}$$ → OSTALE, ISPRAVNE!

b) NULA DEFEKTNIH ← → ILI; NEMAJU NIŠTA ZAJEDNIČKO. DISJUNKTNI

$$P(B) = \frac{\binom{8}{7} + \binom{4}{1}\binom{8}{6}}{\binom{12}{7}}$$

c) $$P(C) = 1 - \boxed{\frac{\binom{8}{7}}{\binom{12}{7}}}$$ → DA NEMA NITI JEDNE DEFEKTNE!

ZZV-70.) U žari 5B, 4C, 2Z. Izvlačimo 4 kuglice. Izračunaj vjerojatnost:
(B – bijele, C – crne, Z – zelene)

a) zastupljene sve tri boje

b) broj crnih veći od broja bijelih

DO UTORKA ZNATI → str. 58... → 1-6, 8 - NADALJE ⇒ NATJECANJE II

14-16

28-33 (Izračunaj vjerojatnost, ne opisivati!)

52-85

a) $$P(A) = \frac{\underbrace{\binom{5}{2}\binom{4}{1}\binom{2}{1}}_{\text{1. slučaj: 2 bijele, 1 crn., 1 zel.}} + \underbrace{\binom{5}{1}\binom{4}{2}\binom{2}{1}}_{\text{2. slučaj}} + \underbrace{\binom{5}{1}\binom{4}{1}\binom{2}{2}}_{\text{3. slučaj}}}{\binom{11}{4}}$$

!! TIPIČNA GREŠKA:

$$P(A) = \frac{\binom{5}{1}\binom{4}{1}\binom{2}{1}\binom{8}{1}}{\binom{11}{4}}$$

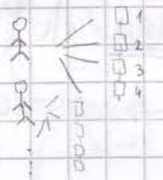
→ PREBROJALI VIŠE KOMB. NEGO IH IMA! DUPLO PREB.!

b) $$P(B) = \frac{\underset{\text{sve crne}}{\binom{4}{4}} + \underset{\text{3 crne, 1 bijela}}{\binom{4}{3}\binom{5}{1}} + \underset{\text{3 crne, 1 zelena}}{\binom{4}{3}\binom{2}{1}} + \underset{\text{2 crne, 2 zelene}}{\binom{4}{2}\binom{2}{2}} + \underset{\text{2 crne, 1 bijela, 1 zel.}}{\binom{4}{2}\binom{5}{1}\binom{2}{1}}}{\binom{11}{4}}$$

Zad. „HŽ") 12 putnika, 4 vagona. Izračunaj vjerojatnost:

a) u svaki vagon je ušlo po 3 putnika

$$P(A) = \frac{\overset{\overset{1.\text{ vagon}}{\uparrow}}{\binom{12}{3}} \overset{\overset{2.\text{ vag.}}{\uparrow}}{\binom{9}{3}} \overset{\overset{3.}{\uparrow}}{\binom{6}{3}} \overset{\overset{4.}{\uparrow}}{\binom{3}{3}}}{4^{12}}$$



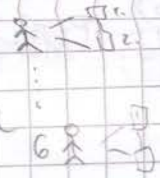
12 ljudi → svaki može odabrati 1 od 4 vagona

b) u prvi i treći vagon po 3 putnika

$$P(B) = \frac{\overset{\overset{1.}{\uparrow}}{\binom{12}{3}} \overset{\overset{3.}{\uparrow}}{\binom{9}{3}} \cdot 2^{6}}{4^{12}}$$

6 → ostalo 6 ljudi

2 → mogu otići još u 2 vagona



1.MI-2010-1.) Wyatt Earp igra poker s 4 revolveraša. Svaki igrač je dobio 5 karata od 52. Izračunajte vjerojatnost da je Wyatt dobio:

a) flush → (5 karata iste boje)

b) ROYAL-FLUSH → (od 10 do asa u istoj boji) $\overbrace{10\ D\ B\ K\ A}^{5}$

c) FULL-HOUSE → (3 karte iste jačine i dvije karte neke druge jačine)

a)
$$P(A) = \frac{4 \cdot \binom{13}{5}}{\binom{52}{5}}$$

4 → $\binom{4}{1}$ odabir boje

$\binom{13}{5}$ → 5 karata od 13 od te boje!

b)
$$P(B) = \frac{4}{\binom{52}{5}}$$

4 → $\binom{4}{1}$

samo treba odabrati boju → karte su ZADANE! $\cdot \binom{5}{5}$

13 različitih jačina   3 od 4 različite boje

c) $P(c) = \dfrac{\overset{\binom{13}{1}}{13} \cdot \binom{4}{3} \cdot \overset{\binom{12}{1}}{12} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{52}{5}}$ ILI

II NAČIN:

$\binom{13}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{2} \cdot 2 \rightarrow \binom{2}{1}$

2 jačine: 7, 10   boja   boja

DA BI POVEZALI

d) dva para

2 jačine

NE SMIJEMO IZVUĆI 10 NI A → 8 KARATA!

ZA PRIMJER DOLJE

$$P(D) = \frac{\binom{13}{2}\binom{4}{2}\binom{4}{2} \cdot \binom{44}{1}}{\binom{52}{5}}$$

10 10 A A bilošta $\binom{2}{1}$

ILI $11 \cdot 4 = \binom{44}{1}$

→ NISMO IMALI ·2 JER NAM JE SVEJEDNO KOJI PAR JE PRVI KOJI PAR JE DRUGI! TRIK!

Zad.) Problem rođendana. (str. 18)

U skupini od 80 ljudi barem 2 rođene na isti datum.

$$P(A) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdots (365-80+1)}{365^{80}} = 0{,}9999$$ WOW!

NA 80 LJUDI GOTOVO 100 % ĆE BAREM DVOJE IMATI ROĐENDAN NA ISTI DAN!

PONAVLJANJE POKUSA

Pr. Bacamo kocku 3 puta. Vjerojatnost da je svaki put pala šestica?

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$$

⟶ ISTO KAO DA SMO UZELI 3 KOCKE I BACILI JEDNOM!

⟶ ti događaji su NEZAVISNI i računamo tako da MNOŽIMO vjerojatnosti.

Zad.) Strijelac gađa metu 10 puta. Vjerojatnost pogotka je 0.8.

a) Kolika je vjerojatnost da je svaki put promašio?

b) –II– točno 2 puta pogodio

c) –II– barem 2 puta pogodio

a) $P(A) = 0.2^{10}$

b) $P(B) = 0.8^2 \cdot 0.2^8 \cdot \binom{10}{2}$

! NAJČEŠĆA GREŠKA:

MORAMO ODABRATI 2 GAĐANJA OD 10 U KOJIMA JE POGODIO!

⟶ BITAN REDOSLIJED

c) $P(C) = 1 - \underbrace{0.2^{10}}_{\text{svih 10 puta promašio}} - \underbrace{0.2^9 \cdot 0.8 \binom{10}{1}}_{\text{SAMO 1 pogodio}}$

⟶ nije nijednom pogodio

1MI-09-1) 6B, 4C, izvlačimo 7 kuglica iz bubnja. Izračunajmo vjerojatnost da smo izvukli barem 5B ako izvlačimo:

a) bez vraćanja (odjednom svih 7)

b) s vraćanjem u bubanj (izvučemo jednu pa je vratimo itd.)

a) $$P(A) = \frac{\binom{6}{5}\binom{4}{2} + \binom{6}{6}\binom{4}{1}}{\binom{10}{7}} = \underline{0.333}$$

5B, 2 crne, 6B, 1 crna

→ SMIJEMO KALKULATOR IMATI !

→ NAPIŠI TO RJ. U ISPITU

! b) NE ZABORAVI ! U KOJEM SMO IZVLAČENJU IZVUKLI !!!

$$P(B) = \underbrace{\left(\frac{6}{10}\right)^5\left(\frac{4}{10}\right)^2\binom{7}{5}}_{5B} + \underbrace{\left(\frac{6}{10}\right)^6\left(\frac{4}{10}\right)^1\binom{7}{6}}_{6B} + \underbrace{\left(\frac{6}{10}\right)^7}_{7B} = 0.42$$

7B → MOŽE JER VRAĆAMO! (IAKO IMA 6B!)

NEMA ISPITA BEZ ZADATKA OVOG TIPA, SA PONAVLJANJEM POKUSA !

OVO PONAVLJANJE BAŠ JAKO VOLE :)

1.4. BESKONAČNI VJEROJATNOSNI PROSTOR

def. ALGEBRA DOGAĐAJA $\mathcal{F}$ je σ - ALGEBRA ako vrijedi

$$\boxed{A_1, A_2 \ldots \in \mathcal{F} \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}}$$

$\rightsquigarrow$ Tada vjerojatnost P mora zadovoljiti uvjet σ - ADITIVNOSTI :

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \quad \text{za disjunktne } A_1, A_2 \ldots$$

• SVOJSTVO NEPREKINUTOSTI VJEROJATNOSTI :

$$\boxed{A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(A)}$$

„neprekinutost kao kod funkcija iz MAT2"

DOKAZ NA 2 str. u knjižici, ZA NAPREDNE GENICE :) NEĆE SIGURNO BITI

Ω beskonačan
- PREBROJIVA $\longrightarrow \Omega = \{\omega_1, \omega_2 \ldots\}$ možemo ih poredati u niz !
- NEPREBROJIVA $\longrightarrow \Omega = \mathbb{R}$ (GEOMETRIJSKA VJER. - sljedeći put radimo)

Zad.) Dva igrača, Valentino i Renato, izvlače kuglicu iz bubnja u kojem su 2B i 6C. Pobjednik je koji prvi izvuče B. Tko ima veću vjerojatnost pobjede ?

HEH, BITNO JE TKO PRVI KRENE U TIM IGRAMA ! :)

$$\Omega = \{\overset{V\to 1.}{B}, \overset{2.}{CB}, \overset{V\to 3.}{CCB}, \overset{4.}{CCCB}, \overset{V\to 5.}{CCCCB} \ldots \infty\}$$

$$V_{alentino} = \{\overset{V}{B}, \overset{V\,R\,V}{CCB}, \overset{V\,R\,V\,R\,V}{CCCCB} \ldots \infty\} \rightarrow \text{NEPARAN BROJ IZVLAČENJA}$$

!! σ-ADITIVNOST: (DISJUNKTNI SU)

$$P(V) = P(B) + P(CCB) + P(CCCCB) + \dots$$

$$= \frac{2}{8} + \frac{6}{8}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{2}{8} + \frac{6}{8}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{2}{8} + \dots$$

$$= \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2\frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^4\frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^6\frac{1}{4} + \dots$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{2n} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{9}{16}} = \frac{4}{7} \Rightarrow P(R) = \frac{3}{7}$$

! PODSJETNIK

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \text{ za } |x| < 1 \rightarrow \text{u vjerojatnosti uvijek vrijedi!}$$

** Izračunaj ovaj zadatak, ali kuglice se ne vraćaju u bubanj!

→ KONAČNI VJEROJATNOSNI PROSTOR

$$P(V) = \underbrace{\frac{2}{8}}_{B} + \underbrace{\frac{6}{8}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{2}{6}}_{CCB} + \underbrace{\frac{6}{8}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}}_{CCCCB} + \underbrace{\frac{6}{8}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2}}_{CCCCCCB}$$

CCB → JER SMO 1 CRNU IZVUKLI

CCCCCCB → izvukli svih 6C - kraj!

→ JOŠ OSTALO 4 KUGLICE U BUBNJU (IZVUKLI 4 CRNE PRETHODNO)

JOŠ 2 OSTALE U BUBNJU

$$P(V) = \frac{4}{7}$$ → ISTO! WOW !! INCRASTING...

NA ISPITU JAKO VOLE ZADATKE TIPA a) S VRAĆANJEM

b) BEZ VRAĆANJA "

1.DZ - 9.) Novčić bacamo dok se 2 puta zaredom ne pojavi isti znak. Vjerojatnost da smo bacali paran broj puta?

$$\Omega = \{PP, GG, PGG, GPP, PGPP, GPGG, \dots\}$$

·2 (paran br. bacanja)

·2 → ovisi jesmo završili sa P ili G

vidljivije u 29.ZZV.

$$P(A) = 2\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{1}{16} + 2\cdot\frac{1}{2^6} + 2\cdot\frac{1}{2^8} + \dots =$$

ovisi jesmo završili sa PP ili GG (2 takve)

PAZI !! TRIK! JER SUMA IDE OD 1!

$$= 2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 2\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}} - 1\right) = \frac{2}{3}$$!!!!

→ DUPLO VEĆA VJEROJATNOST !!

ZADACI:

Zad.) „ZABAVAN"

U bubnju se nalaze kuglice s brojevima 1-14 (njih 14). Izvlačimo 5. Vjerojatnost da je zbroj najveća 2 od tih 5 barem 25?

$$P(A) = \frac{\binom{12}{3} + \binom{11}{3} + \binom{10}{3} + \binom{11}{3}}{\binom{14}{5}} \quad //$$

14+13
14+12
14+11
13+12 → 11 brojeva na raspolaganju jer ako izvučemo 14 onda su 14 i 13 najveći!

1MI-11'-1) „Tombola"

⇝ 1 igrač ima 15 brojeva od 90. Izvlači se sve dok se nekom ne izvuče svih 15 brojeva.

Vjerojatnost da u točno n izvlačenja dobijete „Bingo" tj. da je izvučeno vaših 15 brojeva.

$$P(A) = \frac{\binom{15}{1}\binom{n-1}{14} \cdot 14! \cdot \binom{75}{n-15}(n-15)!}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot \ldots \cdot (90-n+1)} \quad //$$

→ poredak - gdje mi koji od mojih br.

$\boxed{n=20}$

14 13 ... 14! 20

ostala mjesta

$\binom{n-1}{14}$ → „naših" 14 br. mora biti izvučeno prije

$\binom{15}{1}$

dr. Burek says:

„ZA NAJHRABIJE PREK VIKENDA a) DIO ZADATKA Ⓘ"

Zad.) Koliko puta trebamo bacit 2 kocke da bi vjerojatnost da su barem jednom pali isti brojevi veća od 90%?

n → ne znamo koliko puta će se to ponoviti

$$P(A) = 1 - \left(\frac{30}{36}\right)^n > 0.9$$

↳ da nisu pali isti brojevi

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n < 0.1 \quad / \ln\left(\frac{5}{6}\right)$$

→ BAZA < 1 ⇒ MIJENJAMO ZNAK NEJEDNAKOSTI!

$$n > 12.63$$

$$\boxed{n=13}$$

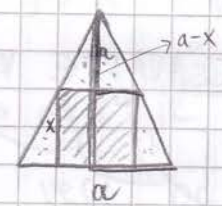
1.5. GEOMETRIJSKA VJEROJATNOST

⟶ zadnje što dolazi u školske

Pr.)

$P(A) = \frac{1}{3}$ → vjer. da smo uzeli točku iz osjenčanog djela dužine

1.DZ-5.) U jednakokračan trokut upisan je kvadrat. Na sreću biramo točku unutar trokuta. Kolika je vjerojatnost da se nalazi u kvadratu? Osnovica i visina a.



$$P(A) = \frac{P_\square}{P_\triangle} = \frac{x^2}{\frac{1}{2}a^2}$$

(površina)

$$(a-x) : \frac{x}{2} = a : \frac{a}{2}$$ (sličnost trokuta)

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{a}{2}}$$

$$\frac{a(a-x)}{2} = \frac{ax}{2}$$

$$x = a - x$$

$$2x = a \Rightarrow \boxed{x = \frac{a}{2}}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{\frac{a^2}{\cancel{4}_2}}{\frac{a^2}{\cancel{2}_1}} = \frac{1}{2}$$

def.

GEOMETRIJSKU VJEROJATNOST definiramo kao $P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$.

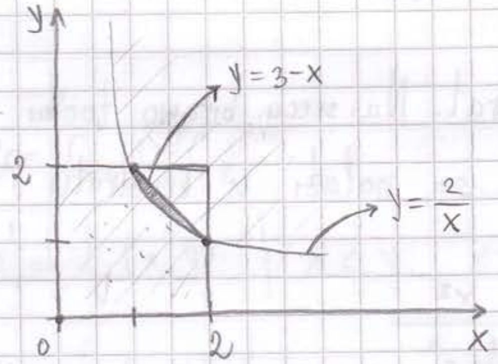
! UOČIMO Treba pokazati svojstvo normiranosti, aditivnosti, monotonosti. Trivijalno slijede svojstva vjerojatnosti.

Burek says: „MOŽE DOKAZ (TO) DOĆI NA ISPITU."

1ZZV-43.) Biramo $x, y \in [0,2]$ (dvije točke). Izračunajte vjerojatnost da je njihova suma manja od 3, a produkt veći od 2.

$x+y < 3$

$x \cdot y > 2$



$y < 3-x$

$y > \frac{2}{x}$

$$P(A) = \frac{\int_1^2 \left(3-x-\frac{2}{x}\right)dx}{4}$$

$$P(A) = \frac{\frac{3}{2} - 2\ln 2}{4}$$

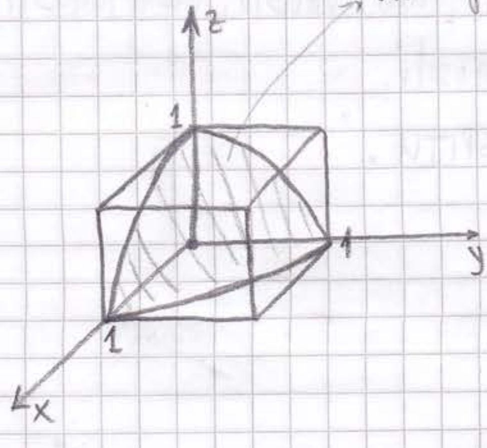
dr. Burek says:
POVRŠINE RJEŠAVAJTE KAKOGOD ŽELITE!

→ Kolika je vjerojatnost da odaberemo točku sa ruba kvadrata, ili na pravcu?

NULA! JER JE TO 1-DIMENZIJA, NEMA POVRŠINE.

Zad.) Biramo na sreću 3 broja $x, y, z \in [0,1]$. Izračunajte vjerojatnost da je zbroj njihovih kvadrata manji od 1.

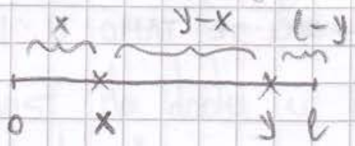
$x^2+y^2+z^2 < 1$ ← dio kugle



$$P(A) = \frac{\frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3}\pi}{1} = \frac{\pi}{6}$$

π „SAMO JE NEBO GRANICA,
ŠTO SE TIČE TEŽINE ZADATAKA,
JER MOGU DATI BILOKOJU PLOHU ....

1-MI-08-3.) Štap duljine l je prelomljen na 2 mjesta. Ako je vjerojatnost prijeloma na svakom mjestu jednaka, izračunajte vjerojatnost da je najkraći dio od ova tri dijela veći od $\frac{1}{4}l$?



$\frac{1}{4}l$

⟶ ekvivalentno da smo odabrali x i y iz $[0, l]$

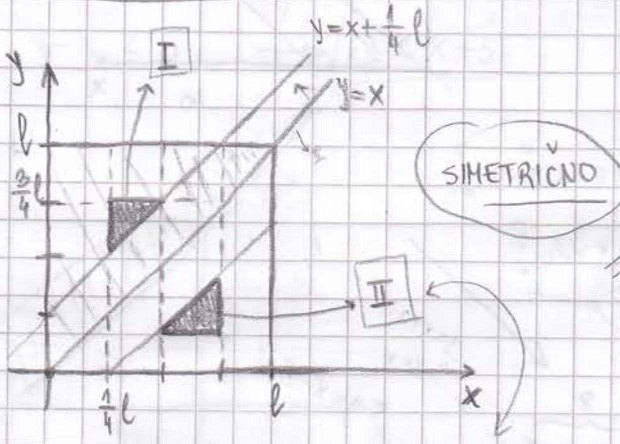
$\boxed{\text{I}}$ $y > x$ (pretp.) {I slučaj}

⟶ ako je najmanji veći od $\frac{1}{4}l$ onda su i svi ostali veći od $\frac{1}{4}l$ (TO JE SVE ŠTO TREBA ZAKLJUČITI)

$x > \frac{1}{4}l$ (TO NAM MORA VRIJEDITI !)

$y - x > \frac{1}{4}l \longrightarrow y > x + \frac{1}{4}l$

$l - y > \frac{1}{4}l \longrightarrow y < \frac{3}{4}l$



$$P(A) = \frac{\frac{1}{4}l \cdot \frac{1}{4}l}{l^2} = \frac{1}{16}$$ //

$\boxed{\text{II}}$ $y < x$ (II slučaj ⟶ NE ZABORAVI !!!)

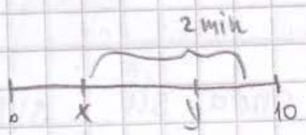
$\Rightarrow y,\ x-y,\ l-x > \frac{1}{4}l$

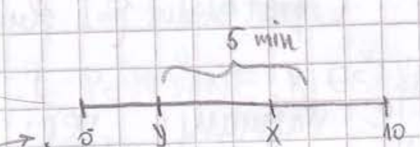
1.MI-09-3.) Provalnik provaljuje u mjenjačnicu između 2.50 i 3.00 h. Nezavisno od njega, u tom vremenu i policajac obilazi mjenjačnicu. Lopovu treba 2 min za provalu, a policajac se zadržava 5 min. Izračunajte vjerojatnost:

a) policajac ulovi lopova (→ NAĆI SE TAMO U ISTOM TRENUTKU)

x: provalnik → 2 min
y: policajac → 5 min
} NIJE SIMETRIČNO!

$x, y \in [0, 10]$

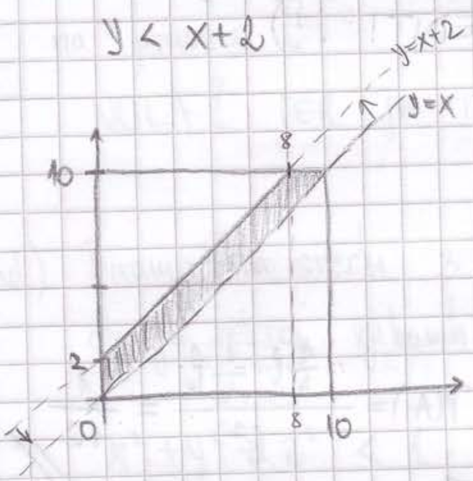


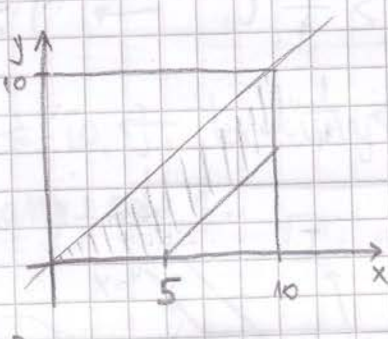


1.) $x < y$ ILI → UNIJA   2.) $y < x$

$y < x + 2$ $x < y + 5$

$y > x - 5$

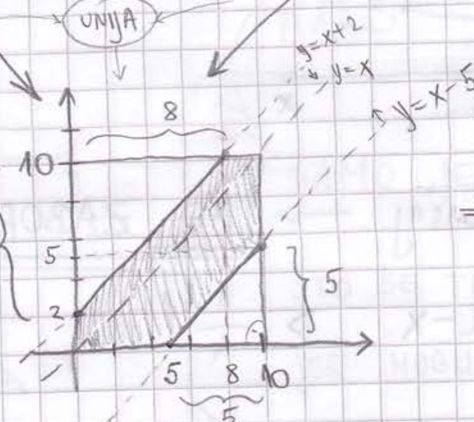




NIJE SIMETRIČNO!

NEMA · 2 !

UNIJA



$$\Rightarrow P(A) = \frac{100 - \frac{5 \cdot 5}{2} - \frac{8 \cdot 8}{2}}{100}$$

$$P(A) = \frac{111}{200}$$ ///

b) da provalnik dođe, provali i otiđe prije policajca

⇝ to je 1. slučaj, lijevi TROKUT $(x<y) \Rightarrow \boxed{y>x}$

↳ DA GA NE ULOVI POLICAJAC!

$$P(B) = \frac{\frac{1}{2} 8^2}{100} = \frac{32}{100} \;//$$

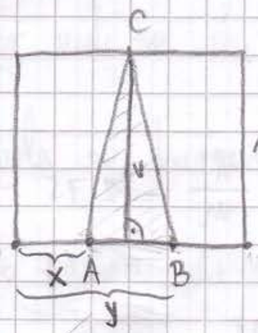
NEMA $y<x+2$ JER NEMA POLICAJ.

⇒ sve osim osjenčanog → suprotan dog.

⇝ vjerojatnost da dođu u istom trenutku je NULA! $y=x$ → pravac → 1-DIMENZ.

1.MI-11-2.) Na jednoj stranici kvadrata stranice 10 biramo dvije točke A, B, a na nasuprotnoj stranici točka C. Izračunajte vjerojatnost da je površina trokuta ABC manja od 25.

ILKO ZAD II



⇝ C NIJE BITNO! GDJE GOD JE STAVIMO VISINA JE ISTA!! JER MORA BITI ⊥

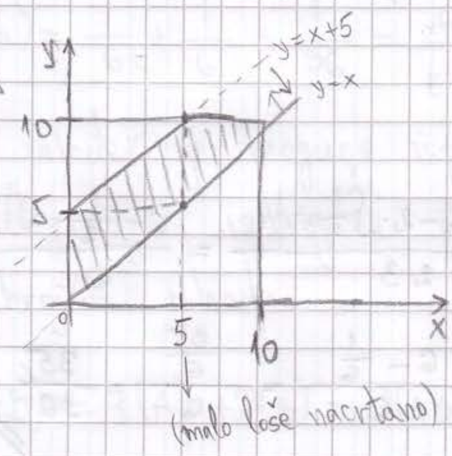
NE U 3-DIMENZIJE.

1) $x<y$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{(y-x)\cdot 10}{2} < 25 \quad | :5$$

$y>x$

$y-x<5 \longrightarrow y<x+5$



(malo loše nacrtano)

NE TREBA GLEDATI DRUGI SLUČAJ JER JE SIMETRIČAN!

ILI AKO GA GLEDAMO ODUZETI OD 100...

$$P(A) = \frac{100 - 2\frac{1}{2}\cdot 25}{100} = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$$

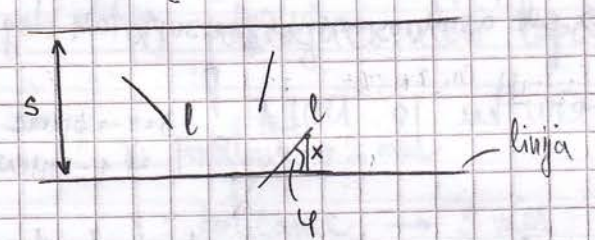
$$P(A) = \frac{50 - \frac{1}{2}\cdot 25}{50} = \frac{3}{4} \;//$$

1. „PI (π) POKUS" π

l – duljina iglice

s – razmak između linija

Random bacamo iglice na pod na kojem se nalaze vodoravne linije razmaknute za s.



UVJET DA SIJEČE: $x < \frac{l}{2}\sin\varphi$

Vjerojatnost da iglica presječe vodoravne linije?

⇝ detaljno u knjižici, ispadne:

$$P(A) = \frac{2l}{\pi s}$$

MZ $\underline{s = 2l}$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{2l}{\pi 2l} = \frac{1}{\pi} \approx \frac{m}{n} \Longrightarrow \pi = \frac{n}{m} = 2.75 \rightarrow$$ UUUUU. LOOOŠEE!!

⇝ MALI POKUS POVODOM π-DAY-A → 14. 3. 2013.

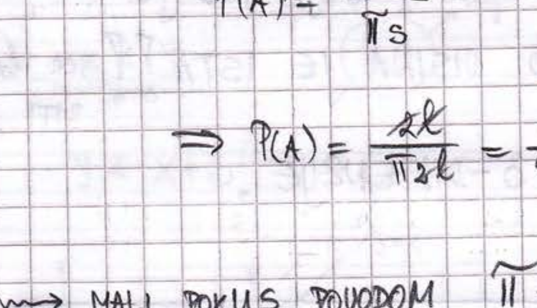
Zad.) Biramo na sreću $a \in [-1, 1]$, $b \in [0, 3]$. Izračunajte vjerojatnost da je $x^2 + ax + b > 0$ za $\forall x \in \mathbb{R}$.

$D < 0 \longrightarrow a^2 - 4b < 0$

$b > \frac{1}{4}a^2$

$a \rightarrow x$

$b \rightarrow y$



$$P(A) = \frac{6 - 2\cdot\int_0^1 \frac{1}{4}a^2\,da}{2\cdot 3} = \frac{6 - \frac{1}{6}\cdot a^3\Big|_0^1}{6} =$$

$$= \frac{6 - \frac{1}{6}}{6} = \frac{\frac{35}{6}}{6} = \frac{35}{36}$$