Primjer 64. Unutar kvadrata stranice duljine 1 [illegible] Dokažite da postoje 3 od njih koje su sadržane u krugu polumjera $\frac{2}{5}$.

Rješenje. Raščetvorimo kvadrat na 4 manja kvadrata stranice duljine $\frac{1}{2}$ (nacrtajte sliku). Kako je $\lfloor \frac{9-1}{4} \rfloor + 1 = 3$ u jednom od ta 4 manja kvadrata su nužno 3 točke. Polumjer njemu opisane kružnice je $\frac{\sqrt{2}}{4}$, a $\frac{\sqrt{2}}{4} < \frac{2}{5}$. Dakle, te 3 točke se sigurno nalaze u krugu polumjera $\frac{2}{5}$.

Primjer 65. U bijelom Zagrebu gradu u 30 najvećih zgrada živi 61 327 stanara. Onda postoji zgrada s barem 2045 stanara.

Rješenje. Doista, ovdje je $n = 61\,327$ i $m = 30$, pa postoji zgrada sa barem $\lfloor \frac{n-1}{m} \rfloor + 1 = \lfloor \frac{61\,326}{30} \rfloor + 1 = \lfloor 2044.2 \rfloor + 1 = 2045$ stanara. Usput, zna se i više od toga: u zagrebačkoj mamutici (naselje Travno) živi oko 7000 ljudi.

Primjer 66. Među svim stanarima iz prethodnog zadatka ima barem $\lfloor \frac{61\,326}{7} \rfloor + 1 = 8761$ onih koji su rođeni istoga dana u tjednu.

Zadatci za vježbu

1. Koliko se osmoslovnih riječi može načiniti od 30 slova (5 samoglasnika i 25 suglasnika), ako svaka riječ mora sadržavati:
   (1) barem 3 samoglasnika i ne smije sadržavati ista slova;
   (2) barem 3 samoglasnika i slova se smiju ponavljati.

2. Zadana je standardna šahovska ploča 8×8. Na koliko različitih načina može figura doći iz lijevog doljnjeg u desno gornje polje, tako da ne prođe poljem na presjeku trećeg retka i petog stupca, ako se figura u jednom potezu može pomicati samo za jedno polje u desno ili jedno polje gore.

3. Koliko različitih djelitelja ima broj $10!$ (10 faktorijela)? Koliko od toga ih je parnih, a koliko neparnih?

4. Zadana je standardna kvadratna šahovska ploča sa 64 polja. Na koliko različitih načina može figura doći iz lijevog doljnjeg u desno gornje polje, tako da
   (1) ne prođe poljem na presjeku trećeg stupca i petog retka, niti poljem na presjeku petog stupca i sedmog retka,
   (2) ne prođe poljem na presjeku trećeg stupca i petog retka, niti poljem na presjeku petog stupca i četvrtog retka,

   ako se figura u jednom potezu može pomicati samo za jedno polje u desno ili jedno polje gore? Stupci su označeni brojevima od 1 do 8 s lijeva na desno, a redci odozdol prema gore.

5. Nađi broj cjelobrojnih rješenja jednadžbe
$$x_1 + x_2 + x_3 = 28$$
uz uvjete $x_1 \geqslant -3$, $-5 \leqslant x_2 \leqslant 10$, $x_3 \geqslant 4$.

6. Neka je $f(x)$ funkcija izvodnica slijeda a_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Izrazite s pomoću $f(x)$ funkciju izvodnicu $g(x)$ za slijed $b_n = n^2 a_n$. Rabeći dobiveni rezultat odredi funkciju izvodnicu slijeda
$$b_n = n^2 \binom{m}{n}.$$

7. Koliko nenegativnih cjelobrojnih rješenja ima nejednakost
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leqslant 17 \ ?$$

8. Zadana je "povećana šahovska ploča" dimenzije 9×9 od 81 polja. Središnje polje je, dakako, ono na presjeku petog retka i petog stupca. Na koliko različitih načina može figura doći iz lijevog doljnjeg u desno gornje polje, tako da ne prođe središnjim poljem, ako se figura u jednom potezu može pomicati samo za jedno polje u desno ili za jedno polje gore?

9. Nađi broj cjelobrojnih rješenja jednadžbe $x_1 + x_2 + x_3 = 19$ uz uvjete $x_1 \geqslant 3$, $-5 \leqslant x_2 \leqslant 10$, $x_3 \geqslant 4$.

10. Koliko ima $(3n)$-znamenkastih brojeva koji sadrže n parnih i $2n$ neparnih znamenaka? Obrazloži odgovor!

11. Zadan je slijed realnih brojeva (a_n) sa $a_0 = 1$, $a_1 = 10$, $a_2 = 5$, $a_n = (n^4 - 5n^2 + 4)^{-1}$. Nađi funkciju izvodnicu za taj slijed.

12. Zadani su konačni skupovi X i Y, $|X| = 5$, $|Y| = 7$. Koliko ima injektivnih funkcija iz partitivnog skupa od X u skup svih funkcija iz Y u X?

13. Koliko ima kvadrata na šahovskoj ploči dimenzije $n \times n$, koji se mogu sastaviti od osnovnih?

14. Nađi funkciju izvodnicu slijeda (a_n) zadanog sa
$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!}, \quad a_{2k+1} = \frac{1}{2k+1}, \quad k \geqslant 0.$$

15. Na koliko se načina 27 jabuka može podijeliti na desetero djece tako da barem jedno dijete ne dobije niti jednu jabuku?

16. Nađi funkciju izvodnicu za slijed

$$a_n = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{c^n}{d^{n+1}}, \quad n \geq 1.$$

17. Na koliko načina se iz skupa $S = \{1, 2, 3, \ldots, 16\}$ može izabrati četveročlani podskup koji ne sadrži dva uzastopna broja?

18. Nađi funkciju izvodnicu za slijed $a_n = n^2 \cdot 10^n$, $n \geq 1$.

19. Na koliko se načina može složiti *password* koji treba imati 8 do 16 znakova, pri čemu početni znak treba biti slovo te najmanje dva znaka moraju biti znamenke? Pretpostavlja se da je na raspolaganju 30 slova i 10 znamenaka.

20. Koliko ima prirodnih brojeva većih od 1 000 koji u oktalnom brojevnom sustavu imaju zapis od točno 4 znamenke?

21. Koliko ima neparnih djeljitelja broja 46 800 koji su djeljivi s 3?

22. Dokaži, uporabom isključivo produktnog pravila, da partitivni skup n-članog skupa ima 2^n elemenata.

23. Koliko ima prirodnih brojeva manjih od milijun koji imaju sve znamenke različite?

24. Zadani su skupovi $A = \{0, 1\}$ i $B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$. Neka je $C = \{f : A \to B : f \text{ funkcija}\}$. Koliko ima različitih injektivnih preslikavanja sa skupa C u partitivni skup skupa B?

25. Koliko se četveroslovnih riječi može sastaviti od 30 slova hrvatske abecede ako se svaki suglasnik smije pojaviti najviše jednom?

26. Na koliko načina iz špila od 52 karte možemo odabrati 4 karte, a da među njima bude barem jedna crvena karta (herc ili karo)?

27. U školi ima 502 učenika. 213 ne trenira niti jedan sport, nogomet trenira njih 267, a nogomet i košarku 99. Koliko ima učenika koji treniraju samo košarku? Na koliko se načina mogu sastaviti dvije momčadi od 5 košarkaša ako u svakoj smije biti najviše jedan košarkaš koji trenira i nogomet?

28. Na koliko načina možemo od 10 muškaraca i 15 žena napraviti povjerenstvo od 5 članova tako da u povjerenstvu bude više žena?

29. Na prvoj godini studija formirane su 3 grupe studenata. Grupa R1 ima 34 studenta, grupa R2 37 studenata, a grupa R3 32 studenta.
(1) Na koliko načina možemo odabrati dva predstavnika prve godine?
(2) Na koliko načina možemo odabrati dva predstavnika ako oni moraju biti iz različitih grupa?

30. Koliko ima parnih sedmeroznamenkastih brojeva u kojima neparnih znamenaka ima više nego parnih? (0 smatramo parnom znamenkom)

31. Zadan je skup A od k elemenata, $k \geq 4$. Koliki je k, ako je poznato da postoji bijekcija iz skupa svih dvočlanih podskupova skupa A u skup svih četveročlanih podskupova od A? Koliko takvih različitih bijekcija u tom slučaju ima?

32. Koliko ima različitih putova od 11 koraka između točaka $A(0, 0)$ i $B(7, 4)$ u ravnini, ako je svaki korak pomak desno za duljinu 1 ili pomak gore za duljinu 1? Koliko ima takvih putova koji ne prolaze točkom $C(4, 2)$?

33. Na koliko se načina može rasporedti 7 muškaraca i 2 žene u red ako:
(1) žene nisu susjedne,
(2) između žena se nalazi točno dva muškarca.

34. U ravnini je dano 8 zelenih, 10 žutih i 12 crvenih točaka. Koliko ima dužina s vrhovima u tim točkama, uz uvjet da su im vrhovi raznobojni?

35. Nađi broj injektivnih funkcija $f : B^A \to C$, gdje je $A = \{a_1, a_2\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3\}$, $C = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7\}$. Objasni odgovor.

36. Neka su n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 prirodni brojevi takvi da je njihova suma $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5$ djeljiva s 5. Dokaži da je suma $n_1^5 + n_2^5 + n_3^5 + n_4^5 + n_5^5$ djeljiva s 5.

37. Zadana je standardna 8×8 šahovska ploča čiji su retci obilježeni slovima a-h, a stupci brojevima 1-8. Figura na ploči može se pomicati za jedan korak u svih osam smjerova (horizontalno, vertikalno i dijagonalno).

(1) Koliko ima najkraćih putova figure od polja $a3$ do polja $g7$?

(2) Koliko ima najkraćih putova figure od polja $a3$ do polja $g7$ koja ne prolaze poljem $c4$?

(3) Koliko ima najkraćih putova od $a3$ do $g7$ ako zabranimo dijagonalne korake?

38. (1) Odredi koeficijent od $x^4y^2z^3$ u izrazu $(x+y+z)^9$.

(2) Koliko iznosi zbroj koeficijenata u izrazu $(x+y+z)^9$?

39. Koliko članova u izrazu $(x_1 + \ldots + x_7)^7$ ima koeficijent djeljiv sa 7?

40. Nađi broj cjelobrojnih rješenja nejednadžbe

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 20$$

uz uvjet $x_k \geq -k$.

41. Nađi broj rješenja jednadžbe

$$x_1 + x_2 + x_3 = 80$$

$$x_1 \geq 0, \ \ x_2 \geq 0, \ \ x_3 \geq 1, \ \ x_i \in \mathbf{N} \cup \{0\}.$$

42. Koliko ima putova u cjelobrojnoj koordinatnoj mreži od točke (0,0) do točke (8,10) koji prolaze točkom (3,3), a ne prolaze točkom (5,5)? Put se sastoji od koraka udesno $(m,n) \to (m+1,n)$ ili gore $(m,n) \to (m,n+1)$.

43. (1) Koliko ima 20-slovnih riječi sastavljenih od 30 slova hrvatske abecede u kojima se slova ne ponavljaju?

(2) Koliko ima 20-znamenkastih brojeva u kojima se svaka znamenka od 0, 1, ..., 9 ponavlja točno dvaput?

44. Koliko cjelobrojnih rješenja ima nejednadžba

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 5$$

uz uvjete $x_1 \geq -1$, $x_2 \geq 0$ i $x_3 \geq 1$?

45. Izračunaj koeficijent uz $a^2b^3c^3d^2$ u razvoju $(a+b+c+d)^{10}$.

46. Koliko se različitih riječi (ne nužno smislenih) može sastaviti od riječi NARANČA?

47. Koliko se različitih riječi može složiti od svih slova riječi MATEMATIKA tako da samoglasnici ne budu jedan kraj drugog?

48. Koliko cjelobrojnih rješenja (x_1, x_2, x_3, x_4) ima nejednadžba

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 < 6$$

uz uvjete $x_1 > -1$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 1$, $x_4 \geq 2$?

49. Ivici, Marici i Perici treba podijeliti 5 krušaka i 6 jabuka tako da svako dobije bar jednu jabuku i bar jednu krušku. Na koliko načina to možemo učiniti?

50. Koliko ima uređenih četvorki $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{N}^4$, takvih da je $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 9\,000$?

51. Koliko se peteroznamenkastih brojeva može napisati od znamenaka broja 62 774 277?

52. Odredi koeficijent uz x^{12} u razvoju $(1 + x + x^4)^{15}$.

53. Koliko ima prirodnih brojeva koji dijele barem jedan od brojeva 10^{60}, 20^{50}, 30^{40}?

54. Učenici jednog razreda trebaju pregledati svoje domaće zadaće iz matematike. Sve zadaće se stave na jedan kup, promiješaju i podijele učenicima na pregledavanje. U razredu je 30 učenika, od toga petoro ima iz matematike nedovoljan.
Na koliko načina je moguće podijeliti zadaće ako:
(1) svaki nedovoljni treba dobiti na pregledavanje upravo svoju zadaću?
(2) niti jedan nedovoljni ne smije dobiti na pregledavanje svoju zadaću?

55. Na "Okrugli stol o uvjetima studiranja" došlo je 6 studenata i 6 profesora. Student X ne želi sjediti kraj profesora A, B i C jer kod njih nije dobio prolaznu ocjenu. Na koliko se načina svi sudionici mogu rasporediti oko okruglog stola tako da student X ne sjedi niti kraj jednog od te trojice profesora?

56. Koliko ima brojeva između 1 000 i 2 000 (granice su uključene) koji su djeljivi s barem jednim od brojeva 2, 3 i 5, ali ne sa sva tri?

57. U vrtiću je 38 djece, 19 od njih voli bijele bombone, 25 žute, a 24 crvene. Ako 7 djece voli sve bombone, koliko djece voli točno 2 vrste (boje) bombona?

58. Na koliko se načina $2n$ različitih predmeta može rasporediti u n različitih kutija tako da
(1) u svakoj kutiji budu barem dva predmeta,
(2) prva i zadnja kutija budu prazne,
(3) prva i zadnja kutija budu prazne, a u ostalim kutijama bude barem jedan predmet?

59. U studentskom zboru ima 15 predstavnika prve godine, 20 predstavnika druge godine i 10 predstavnika treće godine. Na koliko se načina može odabrati šesteročlana delegacija iz tog studntskog zbora u kojoj mora biti barem jedan predstavnik svake godine?

60. U lift je ušlo 8 ljudi. Na koliko načina mogu izaći na 5 katova tako da na svakom katu izađe bar jedan čovjek?

61. Koliko ima četveroznamenkastih brojeva kojima je
(1) prva znamenka paran broj,
(2) prva znamenka neparan broj,
(3) prva i zadnja znamenka paran broj,
(4) prva ili zadnja znamenka paran broj?

62. (1) Koliko ima deseteroznamenkastih brojeva koji se sastoje od po dvije jedinice, dvije dvojke, dvije trojke, dvije četvorke i dvije petice?
(2) Koliko ima deseteroznamenkastih brojeva koji se sastoje od po dvije jedinice, dvije dvojke, dvije trojke, dvije četvorke i dvije petice, te u kojima su susjedne znamenke različite?

63. Koliko ima djeljitelja broja 4 800 koji su djeljivi s 3 ili 4?

64. U studentskom zboru ima 15 studenata prve godine, 20 studenata druge godine, 10 studenata treće godine i 20 studenata četvrte godine. Na koliko se načina može odabrati šesteročlana delegacija iz tog studentskog zbora u kojoj mora biti barem jedan predstavnik svake godine?

65. Nađi funkciju izvodnicu za niz

$$a_n = \frac{n^3}{n^2+3n+2}, \quad n \geq 0.$$

66. Odredi niz $\{a_n\}$, $n \geq 0$, kojem je funkcija izvodnica $f(x) = \sqrt{1-x^3}$. Pomoću dobivenog rezultata izračunajte $f^{(n)}(0)$, $n \geq 0$.

67. Troje djece treba podijeliti 8 jabuka. Prvo dijete može dobiti samo paran broj jabuka. Drugo dijete može dobiti maksimalno 4 jabuke. Na koliko se načina mogu razdijeliti jabuke tako da svako dijete dobije barem jednu jabuku, a da prethodni uvjeti budu zadovoljeni?

68. Napiši funkciju izvodnicu za niz a_n, gdje je a_n broj podskupova nekog n-članog skupa.

69. Odredi funkciju izvodnicu za niz

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{ako je } n = 2k-1,\ k \in \mathbf{N} \\ 0, & \text{ako je } n = 2k,\ k \in \mathbf{N}_0 \end{cases}$$

70. Neka je $a_n = n^2$. Izračunaj funkciju izvodnicu za niz (a_n).

71. Na koliko načina Anica, Marica, Pero i Ivica mogu podijeliti 40 jabuka, ako Ivica mora dobiti barem jednu, Pero mora dobiti barem dvije, a Marica i Anica ne smiju dobiti više od 5 jabuka?

72. U vrećici se nalazi 40 bombona koje trebaju podijeliti Ivan, Ana, Marko i Marina. Na koliko načina oni mogu raspodijeliti bombone ako Ivan i Ana moraju dobiti paran broj bombona, ali najviše 12, a Marko i Marina neparan broj, ali najviše 13?

73. (1) Nađi funkciju izvodnicu za niz

$$a_n = \frac{2n}{n^2+4n+3}, \ n \geq 0.$$

(2) Nađi niz čija je funkcija izvodnica

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+4x+3}.$$

74. Ante, Marko i Euzebije dijele 12 jabuka. Ante ne želi manje od 2 jabuke, Marko želi maksimalno 8 jabuka, a Euzebije nema posebnih želja uz broj jabuka. Na koliko načina njih trojica mogu podijeliti jabuke?

75. Koliko cjelobrojnih rješenja ima jednadžba

$$x_1 + x_2 + x_3 = 15$$

uz uvjete

$$0 \leq x_1 \leq 10,\ 0 \leq x_2 \leq 7,\ 0 \leq x_3 \leq 12\ ?$$

76. Na koliko se načina može 10 jabuka i 15 čokoladica raspodijeliti na šestero djece tako da svako dijete dobije jednu ili dvije jabuke i ne više od 4 čokoladice?

77. Koliko ima cjelobrojnih rješenja nejednakosti

$$30 \leq x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 60,$$

gdje su svi $x_i \in \mathbf{N}$?

78. Četiri djevojčice, Ane, Mare, Luce i Kate trebaju među sobom podijeliti 24 jednaka bombona. Na koliko načina one to mogu napraviti tako da Ane dobije barem 6, a najviše 11 bombona, a Mare, Luce i Kate barem 2, a najviše 7?

79. (1) Nađi funkciju izvodnicu za niz $a_n = 5^n$, $n \geq 0$.

(2) Nađi funkciju izvodnicu za niz $b_n = \frac{n^2+1}{n}$, $n \geq 1$.

80. Studenti tijekom semestra imaju 3 školske zadaće. Svaka školska zadaća nosi 10 bodova. Neka je S skup studenata koji imaju ukupno najviše 10 bodova. Koliko studenata mora biti u skupu S da bi postojala 3 studnta iz skupa S s identičnim brojem bodova na svakoj školskoj zadaći?

81. Zadano je 19 uređenih parova (n, m) sa cjelobrojnim koordinatama. Dokaži da je moguće naći tri para tako da i prva i druga koordinata prilikom djeljenja sa 3 daju isti ostatak.

82. U jednakostraničan trokut stranice duljine 100, rasporedimo 101 točku. Dokaži da postoji 5 točaka koje se nalaze u krugu polumjera 12.

83. Dokaži da u skupu od 10 prirodnih brojeva postoje dva čiji su zbroj ili razlika djeljivi sa 17.

84. Zadana je kocka stranice 2 u koju je razmješteno 25 točaka. Dokaži da postoje 4 točke koje se sve nalaze unutar kugle promjera $\frac{7}{4}$.

Naputci i rješenja

1. (1) Prebrojavamo riječi s 3 *ili* 4 *ili* 5 različitih samoglasnika (uzmemo najprije bilo koja tri samoglasnika i pet suglasnika, i zatim permutiramo, itd.): $\binom{5}{3}\binom{25}{5}8! + \binom{5}{4}\binom{25}{4}8! + \binom{5}{5}\binom{25}{3}8! = 596850 \cdot 8! \approx 2.4 \cdot 10^{10}$.
(2) Prebrojavamo riječi s 3 *ili* 4 *ili* 5 *ili* 6 *ili* 7 *ili* 8 samoglasnika (koji se mogu ponavljati): $\binom{8}{3}5^3 25^5 + \binom{8}{4}5^4 25^4 + \binom{8}{5}5^5 25^3 + \binom{8}{6}5^6 25^2 + \binom{8}{7}5^7 25 + 5^8$. Drugi način je da najprije riješimo suprotnu zadaću, tj. nađemo broj riječi koje nemaju željeno svojstvo, dotično, imaju 0 *ili* 1 *ili* 2 samoglasnika: $25^8 + \binom{8}{1}5^1 25^7 + \binom{8}{2}5^2 25^6$. Kako je ukupan broj riječi 30^8, traženi broj iznosi $30^8 - 25^8 - \binom{8}{1}5^1 25^7 - \binom{8}{2}5^2 25^6$.

2. Idemo od suprotnog: nađimo najprije na koliko načina možemo od lijevog doljnjeg do desnog gornjeg ugla ploče doći tako da uvijek prođemo kroz polje koje se nalazi u trećem retku i petom stupcu. Prvo, do tog mjesta na ploči treba nam ukupno četiri poteza u desno (D) i dva gore D. Za to imamo ukupno $\frac{6!}{4!2!}$ načina (broj razmještaja četiri D i dva G na 6 mjesta, vidi Teorem 11). Ovo kombiniramo s ukupno $\frac{8!}{3!5!}$ načina na koji možemo zatim od tog mjesta doći do desnog gornjeg ugla ploče: trebamo bilo kojim redosljedom razmjestiti tri D i pet G na osam mjesta. Ukupan broj uspona bez ikakvog ograničenja iznosi $\frac{14!}{7!7!}$ (sedam pomaka D i sedam G). Dakle, traženi broj je $\frac{14!}{7!7!} - \frac{6!}{4!2!} \cdot \frac{8!}{3!5!} = 3432 - 15 \cdot 56 = 2592$.

3. Broj $10! = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = (5\cdot 2)\cdot 3^2\cdot 2^3\cdot 7\cdot (2\cdot 3)\cdot 5\cdot 2^2\cdot 3\cdot 2 = 2^8\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7$ ima ukupno $(8+1)(4+1)(2+1)(1+1) = 9\cdot 5\cdot 3\cdot 2 = 270$ djelitelja, vidi Primjedbu iza Primjera 10. Kod parnih djelitelja broja $10!$ moguće potencije uz bazu 2 su u rasponu od 1 do 8 (njih 8), a uz baze 3, 5 i 7 one su od nula do brojeva 4, 2 i 1 respektivno, pa imamo ukupno $8\cdot 5\cdot 3\cdot 2 = 240$ parnih djelitelja, i $5\cdot 3\cdot 2 = 30$ neparnih.

4. Zadatak se rješava na sličan način kao i zadatak **2**.
(1) $\binom{14}{7} - \frac{6!}{4!2!}\cdot\frac{8!}{5!3!} - \frac{10!}{6!4!}\cdot\frac{4!}{3!1!} + \frac{6!}{4!2!}\cdot\frac{4!}{2!2!}\cdot\frac{4!}{3!1!} = 2112$.
(2) $\binom{14}{7} - \frac{6!}{4!2!}\cdot\frac{8!}{5!3!} - \frac{7!}{4!3!}\cdot\frac{7!}{1!3!} = 1367$.

5. Funkcija izvodnica $f(x)$ ovoga problema je umnožak funkcija izvodnica koje odgovaraju varijablama x_1, x_2 i x_3:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (x^{-3} + x^{-2} + \ldots)\cdot(x^{-5} + x^{-4} + \ldots + x^{10})\cdot(x^4 + x^5 + \ldots)\\
&= x^{-3}(1 + x + \ldots)\cdot x^{-5}(1 + x + \ldots + x^{15})\cdot x^4(1 + x + \ldots)\\
&= x^{-4}(1 - x^{16})(1 - x)^{-3} = x^{-4}(1 - x^{16})\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-3}{k}(-1)^k x^k.
\end{aligned}
$$

Koeficijent uz x^{18} je traženi broj rješenja (rabimo relaciju (4) u Odjeljku 5, i zatim svojstvo simetričnosti binomnih koeficijenata): $\binom{-3}{22}(-1)^{22} - \binom{-3}{6}(-1)^6 = \binom{3+22-1}{22} - \binom{3+6-1}{6} = \binom{24}{2} - \binom{8}{2} = 276 - 28 = 248$.

6. Funkcija izvodnica slijeda $n^2 a_n$ je

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n \\ &= x^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \\ &= x^2 f''(x) + x \cdot f'(x). \end{aligned}$$

Za zadani slijed je $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} x^n = (1+x)^m$, $f'(x) = m(1+x)^{m-1}$, $f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2}$, dakle $g(x) = m(m-1)x^2(1+x)^{m-2} + mx(1+x)^{m-1}$.

7. Uvodimo pomoćnu cjelobrojnu varijablu $x_7 \geqslant 0$. Broj rješenja je isti kao i za jednadžbu $x_1 + x_2 + \ldots + x_6 + x_7 = 17$, $x_i \geqslant 0$, a taj iznosi $\binom{17+7-1}{17} = \binom{23}{6} = 100\,947$, vidi Teorem 14.

8. Pogledajmo suprotnu zadaću: naći broj putanja koje prolaze središnjim poljem. Četiri pomaka u desno i četiri uspona do središnjeg polja možemo obaviti na ukupno $\frac{8!}{4!4!}$ načina. Svaki taj uspon treba kombinirati sa svakim od četiri pomaka u desno i četiri gore počevši od središnjeg polja, kojih ima također $\frac{8!}{4!4!}$. Prema tome ukupan broj putanja za suprotnu zadaću je umnožak ta dva broja, a konačno rješenje je onda: $\frac{16!}{8!8!} - \left(\frac{8!}{4!4!}\right)^2$, pri čemu prvi broj u razlici predstavlja ukupan broj svih mogućih putanja (bez uvjeta prolaska kroz središte).

9.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^{-3} + x^{-2} + \ldots) \cdot (x^{-5} + x^{-4} + \ldots + x^{10}) \cdot (x^4 + x^5 + \ldots) \\ &= x^{-3}(1 + x + \ldots) \cdot x^{-5}(1 + x + \ldots + x^{15}) \cdot x^4(1 + x + \ldots) \\ &= x^{-4} \cdot \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1-x^{16}}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x} = x^{-4}(1-x^{16})(1-x)^{-3} \\ &= x^{-4}(1-x^{16}) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-3}{k} (-1)^k x^k. \end{aligned}$$

Rabeći relaciju (4) u Odjeljku 5, kao i svojstvo simetrije za binomne koeficijente, dobivamo da je koeficijent uz x^{19} u $f(x)$ jednak:

$$\begin{aligned} k &= \binom{-3}{23} \cdot (-1)^{23} - \binom{-3}{7} \cdot (-1)^7 \\ &= \binom{3+23-1}{23} - \binom{3+7-1}{7} = \binom{25}{2} - \binom{9}{2} \\ &= \frac{25 \cdot 24}{2} - \frac{9 \cdot 8}{2} = 264. \end{aligned}$$

10. Imamo ukupno 5 parnih znamenaka: 0, 2, 4, 6, 8, i pet neparnih: 1, 3, 5, 7, 9. Pogledajmo dva slučaja s obzirom na parnost prve znamenke.

(a) Neka je prva znamenka $3n$-znamenkastog broja parna. Onda ona može poprimiti samo 4 vrijednosti, jer mora biti $\neq 0$. Na preostalih $3n-1$ mjesta možemo odabrati $n-1$ položaja za parne znamenke na ukupno $\binom{3n-1}{n-1}$ načina (vidi Teorem 8), i na svaku staviti neki od pet parnih brojeva, a neparne znamenke na preostalih $2n$ mjesta možemo staviti na 5^{2n} načina. Ukupno imamo $4 \cdot \binom{3n-1}{n-1} 5^{n-1} \cdot 5^{2n}$ brojeva čija prva znamenka je parna.

(b) Neka je prva znamenka $3n$-znamenkastog broja neparna. Možemo je birati na 5 načina. Dalje slično kao u (a) dobivamo ukupno $5 \cdot \binom{3n-1}{n} \cdot 5^n \cdot 5^{2n-1}$ brojeva čija prva znamenka je neparna.

Ukupno $3n$-znamenkastih brojeva s traženim svojstvom ima

$$4\cdot\binom{3n-1}{n-1}\cdot 5^{n-1}\cdot 5^{2n}+5\cdot\binom{3n-1}{n}\cdot 5^{n}\cdot 5^{2n-1}=4\cdot 5^{3n-1}\binom{3n-1}{n-1}+5^{3n}\binom{3n-1}{n}.$$

11. Vrijedi $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=1+10x+5x^2+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^n}{n^4-5n^2+4}$. Rabimo rastav na parcijalne razlomke, znajući da je $n^4-5n^2+4=(n^2-1)(n^2-4)=(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)$:

$$\frac{1}{n^4-5n^2+4}=\frac{A}{n-1}+\frac{B}{n+1}+\frac{C}{n-2}+\frac{D}{n+2}.$$

Množenjem sa zajedničkim nazivnikom i uspoređivanjem koeficijenata uz potencije od n dobivamo $1=A(n+1)(n-2)(n+2)+B(n-1)(n-2)(n+2)+C(n-1)(n+1)(n+2)+D(n-1)(n+1)(n-2)$ za sve n. Da bismo odredili nepoznate koeficijente, dovoljno je uvrstiti $n=1$, što odmah daje $A=-1/6$, a uvrštavanjem $n=-1$, -2 i $n=-1$ dobivamo $B=1/6$, $C=1/12$, $D=-1/12$. Znademo da je $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$, odakle formalnom integracijom od 0 do x slijedi $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=-\ln|1-x|$. Sada je

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^n}{n-1}=x\cdot\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n-1}=x\cdot\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}-x\right]=-x\cdot\ln|1-x|-x^2,$$

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}=\frac{1}{x}\cdot\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\frac{1}{x}\cdot\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]$$

$$=-\frac{1}{x^2}\cdot\ln|1-x|-\frac{1}{x}-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{3},$$

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^n}{n-2}=x^2\cdot\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^{n-2}}{n-2}=x^2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=-x\cdot\ln|1-x|,$$

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^n}{n+2}=\ldots=-\frac{1}{x^2}\cdot\ln|1-x|-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}-\frac{x}{3}-\frac{x^2}{4}.$$

Prema tome je

$$\begin{aligned}f(x)&=(1+10x+5x^2)-\frac{1}{6}\left[-x\cdot\ln|1-x|-x^2\right]\\&\quad+\frac{1}{6}\left[-\frac{1}{x^2}\cdot\ln|1-x|-\frac{1}{x}-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{3}\right]-\frac{1}{12}x\cdot\ln|1-x|\\&\quad+\frac{1}{12}\left[-\frac{1}{x^2}\cdot\ln|1-x|-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}-\frac{x}{3}-\frac{x^2}{4}\right]\\&=\ln|1-x|\cdot\frac{-x^4+2x^3-2x+1}{12x^2}+\frac{1}{12x}+\frac{7}{8}+\frac{179}{180}x+\frac{739}{144}x^2.\end{aligned}$$

12. Kako je $|2^X|=32$ (vidi Teorem 5), i $|X^Y|=5^7$ (vidi Teorem 3), onda je broj svih injektivnih funkcija iz skupa 2^X u skup X^Y jednak (vidi Primjer 16): $5^7(5^7-1)(5^7-2)\ldots(5^7-31)$.

13. Na šahovskoj ploči dimenzije $n\times n$ ima ukupno n^2 kvadrata dimenzije 1×1, zatim $(n-1)^2$ kvadrata dimenzije 2×2 (zašto?), itd., do samo jednog kvadrata dimenzije $n\times n$. Ukupan broj svih kvadrata iznosi: $n^2+(n-1)^2+\ldots+1=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

14. Funkciju izvodnicu rastavimo u dva reda s parnim i neparnim članovima: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k}x^{2k}+\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k+1}x^{2k+1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}x^{2k+1}=\cos x+\int_0^x\left(\sum_{k=0}^{\infty}t^{2k}\right)dt$ $=\cos x+\int_0^x\frac{dt}{1-t^2}=\cos x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$.

15. Nađimo broj mogućih raspodjela jabuka sa suprotnim uvjetom. Broj raspodjela gdje će svako dijete dobiti barem jednu jabuku (a taj broj je isti kao broj raspodjela $27-10=17$ jabuka na 10 djece) iznosi $\binom{17+10-1}{17}$ (vidi Teorem 14). Od ukupnog broja mogućih raspodjela 27 jabuka na 10 djece, koji iznosi $\binom{27+10-1}{27}$, treba oduzeti prethodni broj. Rješenje je $\binom{36}{27}-\binom{26}{17}=\binom{36}{9}-\binom{26}{9}=91\,018\,730$.

16. Funkcija izvodnica je $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{c^n}{d^{n+1}}\cdot x^n=\frac{1}{d}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{c}{d}x)^n+\frac{1}{d}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\frac{c}{d}x)^n$. Označimo li zadnju sumu sa $g(x)$, zbog $\int_0^x t^{n-1}\,dt=\frac{1}{n}x^n$ je očevidno da $g(x)$ nastaje integracijom funkcije $g'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{c}{d})^n x^{n-1}=\frac{c}{d}\cdot\frac{1}{1-\frac{c}{d}x}=\frac{c}{d-cx}$ od 0 do x. Dakle $g(x)=\int_0^x\frac{c\cdot dt}{d-ct}=-\ln|d-cx|$, i konačno: $f(x)=\frac{1}{d}\cdot\frac{cx}{d-cx}-\frac{1}{d}\ln|d-cx|$.

17. Dajemo dva rješenja. Prvo koristi formulu uključivanja i isključivanja i malo je duže. Drugo je zasnovano na dosjetci koja je slična drugom dokazu Teorema 14 (broj kombinacija s ponavljanjem).
Prvo rješenje. Definirajmo četveročlane skupove u S koji će zadovoljavati uvjet da sadrže po dva zadana uzastopna broja:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{\text{svi četveročlani podskupovi od } S \text{ koji sadrže } 1 \text{ i } 2\},\\
A_2 &= \{\text{svi četveročlani podskupovi od } S \text{ koji sadrže } 2 \text{ i } 3\},\\
&\vdots\\
A_9 &= \{\text{svi četveročlani podskupovi od } S \text{ koji sadrže } 9 \text{ i } 10\}.
\end{aligned}$$

Traženi broj jednak je $|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\ldots\cap\overline{A}_9|$. Prema formuli uključivanja i isključivanja (Teorem 15(b)) vrijedi

$$|\overline{A}_1\cap\ldots\cap\overline{A}_9|=N-\sum_i|A_i|+\sum_{i,j}|A_i\cap A_j|-\sum_{i,j,k}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\ldots$$

Ukupan broj četveraca brojeva koje možemo odabrati iznosi $N=\binom{10}{4}$. Kako u A_1 svaki četverac već sadrži 1 i 2, onda je $|A_1|$ jednak broju mogućih izbora dva broja među preostalih osam, dakle $\binom{8}{2}$ (vidi Teorem 8). Odatle je $\sum_i|A_i|=9\cdot\binom{8}{2}$.

Imamo dva tipa presjeka po dva skupa: uzastopne i neuzastopne. Ako gledamo uzastopni presjek $A_1\cap A_2$, onda tu već imamo brojeve 1, 2 i 3, pa za izbor četvrtog imamo 7 mogućnosti. Isto tako i za $A_2\cap A_3$, do $A_8\cap A_9$, što daje ukupno $8\cdot 7$ mogućnosti kod uzastopnih presjeka. Ako gledamo neuzastopni presjek $A_1\cap A_3$, tu već imamo potpuno definiran jedan jedini četverac kojeg čine 1, 2, 3, 4, tj. skup $A_1\cap A_3$ je jednočlan. Takvih jednočlanih skupova koji uključuju A_1 ima 7, i slično za ostale kombinacije s neuzastopnim presjecima:

A_1	$A_3\ldots A_9$	7
A_2	$A_4\ldots A_9$	6
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_6	$A_7\ldots A_9$	2
A_7	$A_8\ldots A_9$	1

tj. ukupno $7+6+\ldots+2+1=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 7=28$. Konačno, presjek od po tri skupa može biti četveročlan jedino u slučaju ako je uzastopan, kao na pr. kod $A_1\cap A_2\cap A_3=\{1,2,3,4\}$. Takvih presjeka ima ukupno 7: od netom spomenutog pa do $A_7\cap A_8\cap A_9$. Presjek po četiri različita skupa A_i je očevidno prazan. Traženi broj je dakle:

$$|\overline{A}_1\cap\ldots\cap\overline{A}_9|=\binom{10}{4}-9\cdot\binom{8}{2}+(8\cdot 7+28)-7=35.$$

Drugo rješenje. Zadatak možemo riješiti elegantnije ako se prisjetimo drugog dokaza teorema o broju kombinacija s ponavljanjem. Naime, kako podskupovi ne sadrže dva uzastopna broja, možemo od drugog broja oduzeti 1, od trećeg broja oduzeti 2 i od četvtog broja oduzeti 3. Lako se vidi da sada dobivamo kombinacije bez ponavljanja reda 4 skupa od 7 elemenata kojih ima $\binom{7}{4}=35$.

18. Ovdje ćemo funkciju izvodnicu pripremiti za prikaz s pomoću odgovarajućih derivacija: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 10^n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} [n(n-1)+n](10x)^n = 100x^2 \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)(10x)^{n-2} + 10x \sum_{n=1}^{\infty} n(10x)^{n-1}$. Označimo li $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(10x)^n = \frac{10x}{1-10x}$, dobivamo $f(x) = x^2 g''(x) + x \cdot g'(x)$. Kako je $g'(x) = \frac{10x}{(1-10x)^2}$ i $g''(x) = \frac{200}{(1-10x)^3}$, dobivamo $f(x) = \frac{10x(10x+1)}{(1-10x)^3}$.

19. Računamo broj načina 8, 9 i 10 znakova. Svaki put od svih mogućih riječi oduzimamo one sa 0 i 1 znamenkom:
$(30 \cdot 40^7 - 30^8 - 10 \cdot 7 \cdot 30^7) + (30 \cdot 40^8 - 30^9 - 10 \cdot 8 \cdot 30^8) + (30 \cdot 40^9 - 30^{10} - 10 \cdot 9 \cdot 30^9)$.

20. Najveći prirodan broj koji u oktalnom zapisu ima 4 znamenke je $8^4 - 1 = 4\,095$. Sada oduzimamo prvih $1\,000$ brojeva i dobivamo $3\,095$.

21. Kako je $46\,800 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 13$ neparni djeljitelji koji su djeljivi s 3 imaju oblik $3^n \cdot 5^m \cdot 13^k$ gdje je $n \in \{1, 2\}$, $m \in \{0, 1, 2\}$ i $k \in \{0, 1\}$. Po produktnom pravilu, ima ih 12.

22. Svakom podskupu X skupa A od n elemenata moženmo pridružiti niz $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ od n članova koji se sastoji od 0 i 1 definiran formulom

$$k_j = \begin{cases} 1, & a_j \in X, \\ 0, & a_j \notin X \end{cases}.$$

Lako se vidi da je ovo pridruživanje bijekcija (injekcija i surjekcija). Po produktnom pravilu broj naših nizova je 2^n pa je tako i broj podskupova jednak 2^n.

23. Prebrajamo sve prirodne brojeve koji imaju najviše 6 različitih znamenki, a prva znamenka ne smije biti 0. Traženi broj je

$$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 + 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 + 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 + 9 \cdot 9 \cdot 8 + 9 \cdot 9 + 9 = 168\,570.$$

24. Kako je $|C| = 7^2 = 49$ i $|2^B| = 2^7 = 128$, broj injektivnih preslikavanja sa skupa C u partitivni skup skupa B je $128 \cdot 127 \cdot \ldots \cdot 80 = \frac{128!}{79!}$.

25. Broj samoglasnika može biti 0, 1, 2, 3 ili 4. Dakle, traženi broj je

$$25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 + \binom{4}{1} \cdot 5 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 + \binom{4}{2} \cdot 5^2 \cdot 25 \cdot 24 + \binom{4}{3} \cdot 5^3 \cdot 25 + 5^4 = 682\,725.$$

26. Od svih mogućih izbora oduzimamo one bez crvenih karata: $\binom{52}{4} - \binom{26}{4} = 270\,725 - 14\,950 = 255\,775$.

27. Neki sport trenira 502-213= 289 učenika pa 289-267= 22 trenira samo košarku. Najprije biramo obje momčadi bez nogometaša.To možemo učiniti na $\frac{1}{2}\binom{22}{5}\binom{17}{5}$ načina. Nakon toga biramo jednu momčad bez nogometaša, a nakon toga još jednu, ali sa četiri igrača jer u nju stavljamo jednog nogometaša. To možemo učiniti na $\binom{22}{5}\binom{17}{4}\binom{99}{1}$ načina. Konačno biramo dvije momčadi od četiri igrača i u njih dodajemo po jednog nogometaša. To možemo učiniti na $\frac{1}{2}\binom{22}{4}\binom{99}{1}\binom{18}{4}\binom{98}{1}$ načina. Dobivamo

$$\frac{1}{2}\binom{22}{5}\binom{17}{5} + \binom{22}{5}\binom{17}{4}\binom{99}{1} + \frac{1}{2}\binom{22}{4}\binom{99}{1}\binom{18}{4}\binom{98}{1}.$$

28. U povjerenstvu može biti 3, 4 ili 5 žena. Dobivamo

$$\binom{10}{2} \cdot \binom{15}{3} + \binom{10}{1} \cdot \binom{15}{4} + \binom{10}{0} \cdot \binom{15}{5} = 45 \cdot 455 + 10 \cdot 1\,365 + 1 \cdot 3\,003 = 37\,128.$$

29. (1) Dva predstavnika među 103 studenta se mogu naći na $\binom{103}{2} = 5\,253$ načina.
(2) Postavljeni uvjet nam daje $34 \cdot 37 + 34 \cdot 32 + 37 \cdot 32 = 3\,530$ načina.

30. Broj neparnih znamenaka može biti 6, 5, 4.
6 neparnih znamenaka: $5^6 \cdot 5$.

5 neparnih znamenaka: $5^5(6 \cdot 5 \cdot 5 - 5)$ (oduzimamo one koji počinju nulom, 6 je broj mjesta za drugu parnu znamenku).
4 neparne znamenke: $5^4(\binom{6}{2} \cdot 5^2 \cdot 5 - 5 \cdot 5 \cdot 5)$.
To je ukupno $1\,625\,000$ brojeva.

31. Broj dvočlanih podskupova je jednak $\binom{k}{2}$, a četveročlanih $\binom{k}{4}$ pa vrijedi

$$\binom{k}{2} = \binom{k}{4} \Rightarrow \frac{k(k-1)}{2} = \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{24}.$$

Nakon kraćenja $k(k-1)$ dobivamo kvadratnu jednadžbu $k^2 - 5k - 6 = 0$ i $k = 6$. Dakle, postoji $\binom{k}{2}! = 15!$ bijekcija.

32. Različitih puteva bez uvjeta ima $\binom{11}{7} = 330$, a ako se postavi uvjet tada ih ima $\binom{11}{7} - \binom{6}{4} \cdot \binom{5}{3} = 330 - 15 \cdot 10 = 180$.

33. (1) Od svih mogućih rasporeda, oduzimamo nepovoljne u kojima žene tretiramo kao jednu osobu: $9! - 2 \cdot 8! = 282\,240$.

(2) Žene možemo stavitii na pozicije (1,4), (2,5), (3,6), (4,7), (5,8) i (6,9), a muškarce tada rasporediti na $7!$ načina: $2 \cdot 6 \cdot 7! = 60\,480$. Mogli smo, također, formirati "osobu" žena, dva muškarca, žena na $2 \cdot 7 \cdot 6$ načina i poredati je sa preostalih 5 muškaraca na $6!$ načina.

34. Gledamo dužine kojima su vrhovi obojeni zeleno–žuto, zeleno–crveno, žuto–crveno. Rezultat je

$$8 \cdot 10 + 8 \cdot 12 + 10 \cdot 12 = 296.$$

Drugi način je da od ukupnog broja dužina oduzmemo dužine koje imaju jednobojne vrhove pa dobivamo

$$\binom{30}{2} - \binom{8}{2} - \binom{10}{2} - \binom{12}{2} = 296.$$

35. Injektivne funkcije odgovaraju varijacijama bez ponavljanja u slučaju da je broj elemenata domene manji ili jednak broju elemenata kodomene. No, u našem zadatku, broj elemenata domene je $3^2 = 9$ pa je broj injekcija jednak 0.

36. Računamo 5. potenciju izraza

$$5k = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5.$$

Po multinomnom teoremu dobivamo

$$(5k)^5 = (n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5)^5 =$$
$$= n_1^5 + n_2^5 + n_3^5 + n_4^5 + n_5^5 + \left(\sum_{0 \le k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 \le 4} \frac{5!}{k_1!k_2!k_3!k_4!k_5!} n_1^{k_1} n_2^{k_2} n_3^{k_3} n_4^{k_4} n_5^{k_5} \right).$$

U multinomnim koeficijentima u zagradi na desnoj strani nazivnici nisu djeljivi s 5 pa su svi ti multinomni koeficijenti djeljivi s 5 odnosno cijela zagrada je djeljiva s 5. Kako je cijeli izraz djeljiv s 5, tako je i tražena suma djevljiva s 5.

37. (1) Figura se treba pomaknuti 6 polja gore i 4 polja desno, a se to može ostvariti sa 4 dijagonalna i 2 poteza gore na $\binom{6}{4} = 15$ načina ili 6 dijagonalnih poteza od kojih je jedan lijevo–gore na $\binom{6}{1} = 6$ načina pa je ukupni broj 21.

(2) Od ukupnog broja putova (21) oduzimamo one koji prolaze kroz $c4$. Kako nema putova koji prolaze kroz $c4$, a koji se sastoje od 6 dijagonalnih poteza, ukupan broj puteva kroz $c4$ je $\binom{2}{1}\binom{4}{3} = 8$. Dakle, broj puteve koji ne prolaze kroz $c4$ je 13.

(3) Sada koristimo 6 poteza gore i 4 poteza desno, a to se može rasporediti na $\binom{10}{6} = 210$ načina.

38. (1) $\binom{9}{4,2,3} = \frac{9!}{4!2!3!} = 1\,260$.

(2) Stavimo $x = y = z = 1$ i dobivamo da je zbroj koeficijenata jednak $3^9 = 19\,683$.

39. Kako je koeficijent uz $x_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot x_7^{n_7}$ jednak

$$\binom{7}{n_1, \ldots, n_7} = \frac{7!}{n_1! \ldots n_7!},$$

a 7 je prost broj, taj koeficijent je uvijek djeljiv sa 7 osim u slučaju $n_j = 7$, $n_k = 0$, $k \neq j$ za $j = 1, \ldots, 7$. Dakle od svih rješenja jednadžbe

$$n_1 + \ldots + n_7 = 7$$

kojih ima $\binom{13}{7}$ oduzimamo 7 posebnih rješenja pa dobivamo

$$\binom{13}{7} - 7 = 1\,716 - 7 = 1\,709.$$

40. Stavimo $y_k = x_k + k$, $k = 1, \ldots, 6$. Dobivamo

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 = 20 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 41, \ y_i \geq 0.$$

Broj rješenja je $\binom{47}{41} = \binom{47}{6}$.

41. Stavimo $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$ i $y_3 = x + 3 - 1$ pa dobivamo

$$y_1 + y_2 + y_3 = 79, \ y_i \geq 0.$$

Broj cjelobrojnih rješenja je $\binom{81}{79} = 3\,240$.

42. Uočimo da je točka (5,5) dolazi poslije točke (3,3) pa gledamo puteve od (0,0) do (3,3), a nakon toga puteve od (3,3) do (8,10) koji ne prolaze točkom (5,5):

$$\binom{6}{3}\left(\binom{12}{5} - \binom{4}{2}\binom{8}{3}\right) = 20 \cdot (792 - 6 \cdot 56) = 9\,120.$$

43. (1) $30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot \ldots \cdot 11$.
(2) Od svih permutacija s ponavljananjem oduzimamo one koje počinju nulom:

$$\binom{20}{2,2,2,2,2,2,2,2,2,2} - \binom{19}{2,2,2,2,2,2,2,2,2} = \frac{20!}{2^{10}} - \frac{19!}{2^9} = \frac{19!}{2^9}\left(\frac{20}{2} - 1\right) = \frac{9 \cdot 19!}{2^9}.$$

Mogli smo postaviti na prvo mjesto bilo koju znamenku različitu od 0 na 18 načina, rasporediti prestalih 19 znamenaka i na kraju sve to podijeliti sa 2^{10}.

44. Stavimo $y_1 = x_1 + 1$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_3 - 1$. Sada se početna nejednadžba transformira u jednadžbu

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 5, \ y_i \geq 0$$

pa je broj rješenja $\binom{8}{5} = 56$.

45. $\binom{10}{2,3,3,2} = \frac{10!}{2!3!3!2!} = 25\,200$.

46. $\binom{7}{3,2,1,1} = \frac{7!}{3!2!} = 420$.

47. Označimo mjesto 10 sa 0. Tada su moguća mjesta za samoglasnike 13579, 13570, 13580, 13680, 14680 i 24680. Za svaki raspred možemo naći $\binom{5}{3,1,1}\binom{5}{2,2,1}$ riječi pa je ukupni broj $6 \cdot 20 \cdot 30 = 3\,600$.

48. Uvedimo varijable $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_3 - 1$ i $y_4 = x_4 - 2$. Dobivamo nejednadžbu

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \leq 2, \ y_i \geq 0,$$

odnosno

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 2, \ y_i \geq 0.$$

Broj rješenja je jednak $\binom{6}{2} = 15$.
Zadatak se može riješiti korištenjem funkcija izvodnica.

49. Nakon što im podijelimo po jednu krušku, preostale dvije kruške možemo podijeliti na $\binom{4}{2} = 6$ načina, a nakon što im podijelimo po jednu jabuku, preostale tri jabuke možemo podijeliti na $\binom{5}{3} = 10$ načina pa je ukupni broj podjela 60.
Zadatak se može riješiti i pomoću funkcija izvodnica.

50. Fakoriziramo izraz na desnoj strani: $9\,000 = 2^3 3^2 5^3$, nakon toga rješavamo problem broja cjelobrojnih rješenje jednakosti za svaki prost broj i na kraju sve to pomnožimo. Za prost broj 2 dobivamo

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 3,\ y_i \in \mathbf{N}_0$$

Broj rješenja je $\binom{4+3-1}{3} = 20$. Slično dobivamo za prost broj 3 broj rješenja $\binom{4+2-1}{2} = 10$ i za 5 ponovno 20. Umnožak tih brojeva je $4\,000$.

51. Brojevi moraju sadržavati jednu, dvije, tri ili četiri znamenke 7.
Ako brojevi sadrže jednu znamenku 7, tada sadrže sve ostale znamenke pa kako se znamenka 2 ponavlja, takvih brojeva ima $\frac{5!}{2!} = 60$.
Ako brojevi sadrže dvije znamenke 7, tada mogu sadržavati znamenku 6 i dvije znamenke 2, znamenku 4 i dvije znamenke 2 te znamenke 2, 4, 6 pa dobivamo da takvih brojeva ima $\frac{5!}{2!2!} + \frac{5!}{2!2!} + \frac{5!}{2!} = 30 + 30 + 60 = 120$.
Slično, ako brojevi sadrže tri znamenke 7, tada preostale znamenke mogu biti 22, 24, 26, 46 pa takvih brojeva ima $\frac{5!}{3!2!} + \frac{5!}{3!} + \frac{5!}{3!} + \frac{5!}{3!} = 10 + 20 + 20 + 20 = 70$.
Konačno, ako brojevi sadrže četiri znamenke 7 tada sadrže još jednu znamenku pa takvih brojeva ima $3\frac{5!}{4!} = 15$.
Zbroj dobivenih brojeva je 265.

52. Označim li 1 sa a, x sa b i x^4 sa c, tada računamo zbroj koeficijenata od $a^3b^{12}c^0$, $a^6b^8c^1$, $a^9b^4c^2$ i $a^{12}b^0c^3$ u razvoju $(a+b+c)^{15}$:

$$\frac{15!}{3!12!0!} + \frac{15!}{6!8!1!} + \frac{15!}{9!4!2!} + \frac{15!}{12!0!3!} = 455 + 45\,045 + 75\,075 + 455 = 121\,030.$$

53. Tražimo brojeve koji zadovoljavaju bar jedan uvjet odnosno one koji su u uniji. Stoga gledamo skupove $A_1 = \{n \in \mathbf{N} : n|10^{60}\}$, $A_2 = \{n \in \mathbf{N} : n|20^{50}\}$ i $A_1 = \{n \in \mathbf{N} : n|30^{40}\}$. Računamo $|A_1| = 61 \cdot 61$, $|A_2| = 101 \cdot 51$, $|A_3| = 41 \cdot 41 \cdot 41$, $|A_1 \cap A_2| = 61 \cdot 51$, $|A_1 \cap A_3| = 41 \cdot 41$, $|A_2 \cap A_3| = 41 \cdot 41$ i $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 41 \cdot 41$. To sada uvrstimo u formulu uključivanja i isključivanja:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2| \cap A_3| =$$
$$= 61 \cdot 61 + 101 \cdot 51 + 41 \cdot 41 \cdot 41 - 61 \cdot 51 - 41 \cdot 41 - 41 \cdot 41 + 41 \cdot 41 = 73\,001.$$

54. (1) Podijelimo nedovoljnim učenicima njihove zadaće, a preostalih 25 zadaća možemo podijeliti na $25!$ načina
(2) Označimo s A_i sku raspodjela zadaća u kojima i-ti nedovoljni učenik dobiva svoju zadaću. Tada je traženi broj raspodjela jednak $|\cap_{i=1}^{5} \overline{A_i}|$. Lako se vidi da je $|A_i| = 29!$, $|A_i \cap A_j| = 28!$, $|A_i \cap A_j \cap A_k| = 27!$ $|A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_m| = 26!$ i $|A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_m \cap A_n| = 25!$. Dobivamo

$$|\cap_{i=1}^{5} \overline{A_i}| = 30! - \binom{5}{1}29! + \binom{5}{2}28! - \binom{5}{3}27! + \binom{5}{4}26! - 25!.$$

55. Označimo sa A skup rasporeda u kojima student X sjedi pokraj profesora A, sa B skup rasporeda u kojima student X sjedi pokraj profesora B i sa C skup rasporeda u kojima student X sjedi pokraj profesora C. Označimo sa U sve moguće rasporede. Tada tražimo

$$|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}| = |U| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|.$$

Sada računamo $|U| = 11!$, $|A| = |B| = |C| = 2 \cdot 10!$, $|A \cap B| = |A \cap C| = |B \cap C| = 2 \cdot 9!$ i $|A \cap B \cap C| = 0$ pa dobivamo

$$11! - 3 \cdot 2 \cdot 10! + 3 \cdot 2 \cdot 9! = 9!(110 - 60 + 6) = 56 \cdot 9!.$$

56. Definiramo skupove A_2, A_3 i A_5:

$$A_i = \{n \in \mathbf{N} : 1\,000 \leq n \leq 2\,000, n \text{ je djeljiv s } i\}.$$

Formula uključenja i isključenja nam daje broj brojeva koji su djeljivi s barem jednim od brojeva 2, 3 ili 5. Na kraju oduzimamo one koji nisu djeljivi sa sva tri.

$$\begin{aligned}
|A_2 \cup A_3 \cup A_5| - |A_2 \cap A_3 \cap A_5| &= |A_2| + |A_3| + |A_5| - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_5| - |A_3 \cap A_5| = \\
&= \left\lfloor \frac{2\,000}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{999}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2\,000}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{999}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2\,000}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{999}{5} \right\rfloor - \\
&- \left\lfloor \frac{2\,000}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{999}{6} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2\,000}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{999}{10} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2\,000}{15} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{999}{15} \right\rfloor = \\
&= 1\,000 - 499 + 666 - 333 + 400 - 199 - 333 + 166 - 200 + 99 - 133 + 66 = \\
&= 501 + 333 + 201 - 167 - 101 - 67 = 700.
\end{aligned}$$

57. Označimo skup djece koja vole bijele bombone s B, skup djece koja vole žute bombone sa Z i skup djece koja vole crvene bombone sa C. Po formuli uključenja i isključenja vrijedi

$$38 = 19 + 25 + 24 - |B \cap Z| - |B \cap C| - |Z \cap C| + |B \cap Z \cap C|$$

odnosno

$$|B \cap Z| + |B \cap C| + |Z \cap C| - |B \cap Z \cap C| = 30.$$

Da bismo dobili broj djece koja vole točno 2 vrste bombona moramo od $|B \cap Z| + |B \cap C| + |Z \cap C|$ oduzeti $|B \cap Z \cap C|$ tri puta. Dakle

$$|B \cap Z| + |B \cap C| + |Z \cap C| - 3|B \cap Z \cap C| = 30 - 2 \cdot 7 = 16.$$

58. (1) Zadatak možemo rješavati pomoću kombinacija bez ponavljanja ili permutacija s ponavljanjem:

$$\binom{2n}{2}\binom{2n-2}{2}\cdots\binom{2}{2} = \frac{(2n)!}{2^n}.$$

(2) Sada koristimo varijacije s ponavljanjem: $(n-2)^{2n}$.
(3) Imamo surjekcije s $2n$-članog skupa na $(n-2)$-člani skup:

$$\sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k \binom{n-2}{k} (n-2-k)^{2n}.$$

59. Tražimo broj elemenata u presjeku. Definiramo skupove

$$A_i = \{\text{delegacije bez studenata } i\text{-te godine}\}.$$

Vrijedi $|A_1| = \binom{30}{6}$, $|A_2| = \binom{25}{6}$, $|A_3| = \binom{35}{6}$, $|A_1 \cap A_2| = \binom{10}{6}$, $|A_1 \cap A_3| = \binom{20}{6}$ i $|A_2 \cap A_3| = \binom{15}{6}$. Formula uključenja i isključenja nam daje

$$\binom{45}{6} - \binom{30}{6} - \binom{25}{6} - \binom{35}{6} + \binom{10}{6} + \binom{20}{6} + \binom{15}{6}.$$

60. Tražimo broj elemenata u presjeku. Dakle, neka je

$$A_i = \{\text{nitko nije izašao na katu } i.\}$$

Vrijedi $|A_i| = 4^8$, $|A_i \cap A_j| = 3^8$, $|A_i \cap A_j \cap A_k| = 2^8$ i $|A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_k| = 1^8$. Dobivamo

$$\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4} \cap \overline{A_5} = 5^8 - \binom{5}{1} \cdot 4^8 + \binom{5}{2} \cdot 3^8 - \binom{5}{3} \cdot 2^8 + \binom{5}{4} \cdot 1^8 =$$

$$390\,625 - 327\,680 + 65\,610 - 2\,560 + 5 = 126\,000.$$

61. (1) $4 \cdot 10^3 = 4\,000$.
(2) $5 \cdot 10^3 = 5\,000$.
(3) $20 \cdot 10^2 = 2\,000$.
(4) $4 \cdot 10^3 + 5 \cdot 9 \cdot 10^2 - 20 \cdot 10^2 = 4\,000 + 4\,500 - 2\,000 = 6\,500$.

62. (1) Traženi broj je broj permutacija s ponavljanjem:

$$\binom{10}{2,2,2,2,2} = 113\,400.$$

(2) S obzirom da pet uvjeta mora biti zadovoljeno, koristimo forumulu uključivanja i isključivanja za skup $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4} \cap \overline{A_5}$ gdje su skupovi A_i oblika

$$A_i = \{\text{znamenke } i \text{ su susjedne.}\}$$

Sada te znamenke možemo tretirati kao jednu pa je

$$|A_i| = \binom{9}{2,2,2,2,1}.$$

Također imamo $\binom{5}{1}$ skupova A_i. Imamo $\binom{5}{2}$ skupova $A_i \cap A_j$ i u svakom imamo $\binom{8}{2,2,2,1,1}$ elemenata. Konačno dobivamo

$$\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4} \cap \overline{A_5} = \binom{10}{2,2,2,2,2} - \binom{5}{1}\binom{9}{2,2,2,2,1} + \binom{5}{2}\binom{8}{2,2,2,1,1} -$$
$$-\binom{5}{3}\binom{7}{2,2,1,1,1} + \binom{5}{4}\binom{6}{2,1,1,1,1} - \binom{5}{5}\binom{5}{1,1,1,1,1} =$$
$$= 113\,400 - 113\,400 + 50\,400 - 12\,600 + 1\,800 - 120 = 39\,480.$$

63. Kako je $4\,800 = 2^6 \cdot 3 \cdot 5^2$, djeljitelji od $4\,800$ koji su djeljivi sa 3 imaju oblik $2^n \cdot 3 \cdot 5^k$, $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, $k = 0, 1, 2$, a djeljitelji od $4\,800$ koji su djeljivi sa 4 imaju oblik $2^n \cdot 3^m \cdot 5^k$, $n = 2, 3, 4, 5, 6$, $m = 0, 1$, $k = 0, 1, 2$. Označimo li skup prvih brojeva sa A, a skup drugih sa B, vrijedi

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 7 \cdot 3 + 5 \cdot 2 \cdot 3 - 5 \cdot 3 = 36.$$

64. $S = \{\text{sve 6-člane delegacije}\}$, $A_i = \{\text{nema predstavnika} i\text{-te godine}\}$. Traženi broj je $|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}|$.

$$|S| = \binom{65}{6},\ |A_1| = \binom{50}{6},\ |A_2| = \binom{45}{6},\ |A_3| = \binom{55}{6},\ |A_4| = \binom{45}{6}.$$

65. Nakon dijeljenja i rastavljanja na parcijalne razlomke dobivamo:

$$a_n = n - 3 - \frac{1}{n+1} + \frac{8}{n+2}.$$

Krenimo s poznatim izrazom

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Deriviranjem tog izraza i množenjem s x dobivamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

odnosno funkcija izvodnica niza $a_n = n$ ima oblik $\frac{x}{(1-x)^2}$. Funkcija izvodnica niza $a_n = -3$ ima oblik $-3\frac{1}{1-x}$. Integriranjem našeg izraza (konstanta dobivena integriranjem je 0) dobivamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = -\ln|1-x|$$

pa funkcija izvodnica niza $a_n = -\frac{1}{n+1}$ ima oblik $\frac{1}{x}\ln|1-x|$. Konačno funkcija izvodnica niza $a_n = \frac{8}{n+2}$ ima oblik $\frac{8}{x^2}\left(-\ln|1-x| - x\right)$ pa funkcija izvodnica zadanog niza ima oblik

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)^2} - 3\frac{1}{1-x} + \frac{1}{x}\ln|1-x| + \frac{8}{x^2}\left(-\ln|1-x| - x\right).$$

66. U izraz

$$(1+y)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} y^k$$

uvrstimo $y = -x^3$ i $\alpha = \frac{1}{2}$. Dobivamo

$$\sqrt{1-x^3} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} (-x)^{3k}$$

pa je

$$a_{3k+1} = a_{3k+2} = 0, \; a_{3k} = (-1)^k \binom{\frac{1}{2}}{k}, \; k \geq 0.$$

Kako je $f^{(n)}(0) = n! \cdot a_n$, dobivamo

$$f^{(3k+1)}(0) = f^{(3k+2)}(0) = 0, \; f^{(3k)}(0) = (3k)!(-1)^k \binom{\frac{1}{2}}{k}, \; k \geq 0.$$

67. Prvom djetetu damo 2 jabuke (paran broj), drugom i trećem po jednu i ostaje nam 4 jabuke za podijeliti. Sada funkcija izvodnica ima oblik

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1-x^4}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{1+x^2}{(1-x)^2} = (1+x^2)\sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+1}{k} x^k$$

pri čemu smo koristili formulu $\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}$. Koeficijent uz x^4 je

$$\binom{5}{4} + \binom{3}{2} = 8.$$

Nije teško prebrojati sve raspodjele. Ako prvom djetetu damo 0 jabuka 4 jabuke možemo podijeliti na 4 načina, ako damo 2 jabuke, preostale dvije možemo podijeliti na 3 načina, a ako damo 4 jabuke, postoji još jedna raspodjela.

68. Znamo da je $a_n = 2^n$. Funkcija izvodnica ima oblik

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = \frac{1}{1-2x}.$$

69. Krenimo s poznatim izrazom:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right).$$

Integriranjem dobivamo (konstanta koja se dobije integriranjem je 0)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} x^{2k+1} = \frac{1}{2}\left(\ln|1+x| - \ln|1-x|\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{|1+x|}{|1-x|}.$$

70. Krenimo s poznatim izrazom:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Deriviranjem dobivamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Množenjem s x dobivamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n} = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Ponovno deriviramo i dobivamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2x^{n-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3}.$$

Ponovno množimo s x i dobivamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2x^{n} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

71. Najprije damo Ivici jednu i Peri dvije jabuke i za podjelu preostalih 37 jabuka koristimo funkciju izvodnica:

$$f(x) = \frac{(1-x^6)^2}{(1-x)^4} = (1-2x^6+x^{12})\left(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+3}{k}x^k\right)$$

pri čemu smo koristili formulu $\binom{-n}{k} = (-1)^k\binom{n+k-1}{k}$. Koeficijent uz x^{37} je

$$\binom{40}{37} - 2\binom{34}{31} + \binom{28}{25} = 9\,880 - 11\,968 + 3\,276 = 1\,188.$$

72. Funkcije izvodnica ima oblik

$$f(x) = (1+x^2+\ldots+x^{12})^2(x+x^3+\ldots+x^{13})^2 = x^2\left(\frac{1-x^{14}}{1-x^2}\right)^4.$$

Tražimo koeficijent uz x^{40}. Uvodimo supstituciju $x^2 = y$ i tražimo koeficijent y^{19} u izrazu

$$\left(\frac{1-y^7}{1-y}\right)^4 = (1-y^7)^4\left(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+3}{k}y^k\right)$$

pri čemu smo koristili formulu $\binom{-n}{k} = (-1)^k\binom{n+k-1}{k}$. Dobivamo

$$\binom{22}{19} - 4\binom{15}{12} + 6\binom{8}{5} = 1\,540 - 1\,820 + 336 = 56.$$

73. (1) Kako je $a_n = \frac{2n}{n^2+4n+3} = \frac{3}{n+3} - \frac{1}{n+1}$, $n \geq 0$, zadatak se svodi na nalaženje funkcija izvodnica za ova dva niza.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{n+3} x^n = \frac{3}{x^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+3} x^{n+3} = \frac{3}{x^3} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} - x - \frac{1}{2} x^2 \right) =$$

$$= -\frac{3}{x^3} \ln|1-x| - \frac{3}{x^2} - \frac{3}{2x}$$

Koristili smo jednakost $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = -\ln|1-x|$ koja se lako dobije integriranjem jednakosti $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^n = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = -\frac{1}{x} \ln|1-x|$$

Oduzimanjem izraza na kraju dobivamo

$$f(x) = -\frac{3}{x^3} \ln|1-x| - \frac{3}{x^2} - \frac{3}{2x} + \frac{1}{x} \ln|1-x|$$

(2) Funkcija izvodnica ima oblik

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+4x+3} = \frac{3}{x+3} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{1+\frac{x}{3}} - \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{3^n} - (-1)^n \right) x^n.$$

Dakle, $a_n = (-1)^n \left(\frac{1}{3^n} - 1 \right)$.

74. Funkcija izvodnica ima oblik

$$f(x) = \frac{x^2}{1-x} \frac{1-x^9}{1-x} \frac{1}{1-x} = (x^2 - x^{11})(1-x)^{-3} = (x^2 - x^{11}) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2}{k} x^k$$

pri čemu smo koristili formulu $\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}$. Koeficijent uz x^{12} je

$$\binom{12}{2} - \binom{3}{2} = 66 - 3 = 63.$$

Zadatak smo mogli riješiti samo primjenom kombinacija s ponavljanjem. Najprije damo Anti 2 jabuke. Kako nam ostaje 10, a Marko želi najviše 8, od svih mogućih raspodjela, kojih ima $\binom{12}{2} = 66$, oduzmemo 3 nepovljne u kojima Marko dobiva 9 ili 10 jabuka.

75. Funkcija izvodnica ima oblik

$$f(x) = \frac{1-x^{11}}{1-x} \frac{1-x^8}{1-x} \frac{1-x^{13}}{1-x} =$$

$$= (1 - x^8 - x^{11} - x^{13} + \ldots)(1-x)^{-3} = (1 - x^8 - x^{11} - x^{13} + \ldots) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2}{k} x^k \right)$$

pri čemu smo koristili formulu $\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}$. Traženi koeficijent je jednak

$$\binom{17}{2} - \binom{9}{2} - \binom{6}{2} - \binom{4}{2} = 136 - 36 - 15 - 6 = 79.$$

76. Najprije svako dijete dobije po jednu jabuku, a nakon toga preostale četiri jabuke podijelimo na $\binom{6}{4} = 15$ načina.

Za čokoladice koristimo funkciju izvodnica

$$f(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4)^6 = \left(\frac{1 - x^5}{1 - x}\right)^6 = (1 - x^5)^6 (1 - x)^{-6} =$$
$$= (1 - 6x^5 + 15x^{10} - 20x^{15} + \ldots)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+5}{k} x^k\right)$$

pri čemu smo u zadnjem koraku koristili formulu $\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}$. Koeficijent uz x^{15} je jednak

$$-20\binom{5}{0} + 15\binom{10}{5} - 6\binom{15}{10} + \binom{20}{15} = -20 + 15 \cdot 252 - 6 \cdot 3\,003 + 15\,504 = 1\,246.$$

Ukupan broj raspodjela je jednak umnošku $15 \cdot 1246 = 18\,690$.

77. Broj rješenja nejednadžbe

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 60, \quad x_i \in \mathbf{N}$$

jednak je broju rješenja jednadžbe

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 = 55, \ y_i \in \mathbf{N}_0, \ (y_j = x_j - 1)$$

tj. $\binom{6+55-1}{55} = \binom{60}{5}$. Od toga oduzimamo broj rješenja nejednadžbe

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 = 24, \ y_i \in \mathbf{N}_0,$$

tj. $\binom{6+24-1}{24} = \binom{29}{5}$. Dakle, traženi broj je

$$\binom{60}{5} - \binom{29}{5} = 5\,461\,512 - 118\,755 = 5\,342\,757.$$

78. Funkcija izvodnica je

$$f(x) = (x^6 + x^7 + \ldots + x^{11})(x^2 + x^3 + \ldots + x^7)^3 = x^{12}(1 - x^6)^4 (1 - x)^{-4} =$$
$$= x^{12}\left(1 - \binom{4}{1}x^6 + \binom{4}{2}x^{12} - \ldots\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-4}{k} x^k\right).$$

Koristeći formulu $\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}$, koeficijent uz x^{12} je

$$\binom{15}{3} - 4\binom{9}{3} + 6\binom{3}{3} = 125.$$

79. (1) $f(x) = \sum_{n \geq 0} 5^n x^n = \frac{1}{1-5x}$.

(2) $f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{n^2+1}{n} x^n = \sum_{n \geq 1} n x^n + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} x^n = x \sum_{n \geq 1} n x^{n-1} + \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = x \frac{1}{(1-x)^2} - \ln|1 - x|$.

80. Najprije pogledamo broj razdioba bodova na školskim zadaćama. Označimo s n_1 broj bodova na 1. zadaći, s n_2 na 2. zadaći i s n_3 na 3. zadaći. Tražimo broj rješenja nejednadžbe

$$n_1 + n_2 + n_3 \leq 10, \ n_i \in \mathbf{N} \cup \{0\}.$$

Uvjeti $n_i \leq 10$ nam nisu bitni. Nejednadžbu pretvaramo u jednadžbu dodavanjem pomoćne varijable n_4. Broj rješenja je $\binom{4+10-1}{10} = 286$. Sada broj studenata mora zadovoljavati poopćeno Dirichletovo načelo:

$$\left\lfloor \frac{|S| - 1}{286} \right\rfloor + 1 = 3 \ \Rightarrow \ |S| = 573.$$

81. Pogledajmo najprije prvu koordinatu. Prilikom dijeljenja sa 3 mogući ostatci su 0, 1 i 2. Po Dirichletovom načelu, postoji 7 parova koji daju isti ostatak ($\left\lfloor \frac{19-1}{3} \right\rfloor + 1 = 7$). Sada gledamo tih 7 parova i u njima drugu koordinatu. Ponovno koristimo Dirichletovo načelo i dobivamo da postoje 3 para kojima i druga koordinata ima isti ostatak prilikom dijeljenja sa 3.
Mogli smo istovremeno gledati obje koordinate. Prilikom dijeljenja sa 3, možemo naći 9 različitih parova ostataka. Po Dirichletovom principu postoje 3 para ($\left\lfloor \frac{19-1}{9} \right\rfloor + 1 = 3$) kojima su obje koordinate jednake.

82. Da bismo primijenili poopćeni Dirichletov princip potrebno nam je k manjih trokuta na koji dijelimo zadani trokut gdje k zadovoljava

$$\left\lfloor \frac{101-1}{k} \right\rfloor + 1 \geq 5$$

odnosno $k \leq 25$. Stavimo $k = 25$. Podijelimo sada trokut na 25 manjih trokuta stranice duljine 20 (pravcima paralelnim sa stranicama zadanog trokuta). Veem smo vidjeli da postoji trokut koji sadrži 5 točaka. Polumjer opisane kružnice trokuta stranice 20 je $\frac{20}{3}\sqrt{3}$ i lako se vidi da je to manje od 12.

83. Uočimo relaciju ekvivalencije ρ na skupu $\mathbf{N}$ definiranu izrazom

$$n\,\rho\,m \Leftrightarrow n^2 - m^2 = (n+m)(n-m) = 17k,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Dakle, dva broja su u relaciji ako i samo ako im je zbroj ili razlika djeljiva sa 17. Sada pogledajmo klase:
1, 16, 18, 33, ...
2, 15, 19, 32, ...
3, 14 ,20, 31, ...
4,1 3, 21, 30, ...
5, 12, 22, 29, ...
6, 11, 22, 28, ...
7, 10, 24, 27, ...
8, 9, 25, 26, ...
17, 34, 51, 86, ...
Imamo 9 klasa i 10 brojeva pa po Dirichletovom principu dva broja moraju biti u istoj klasi.

84. Kocku podijelimo na 8 kockica stranice 1. Po Dirichletovom principu, postoji kockica koja sadrži $\left\lfloor \frac{25-1}{8} \right\rfloor + 1 = 4$ točke. Prostorna dijagonala kockice je $D = \sqrt{3}$, a to je manje od $\frac{7}{4}$ pa kockica stane u zadanu kuglu.