# Teorija DisMat

## Gornja negacija

$$\binom{-N}{n} = \frac{(-N)(-N-1)\dots(-N-n+1)}{n!} = \frac{(-1)^n N(N+1)(N+2)\dots(N+n-1)}{n!} =$$

$$= (-1)^n \binom{N+n-1}{n}$$

## Teorem

Broj $n$-članih podskupova $N$-članog skupa je $\binom{N}{n}$

## Dokaz

$S = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$

$(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_N)$ → suma s $2^n$ članova

→ $1+x_i$ se odnosi na element $x_i$ skupa $S$ → biramo je li el. u podskupu ili nije

→ svaki član gornje sume jednoznačno određuje podskup skupa $S$

→ zanima nas broj podskupova, ne moramo ih razlikovati

→ gornja suma degenerira u
$$(1+x)^N$$

→ broj $n$-članih podskupova jednak je koeficijentu uz $x^n$

$$(1+x)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} x^k$$ , ako je $k=n$, koef. $=\binom{N}{n}$ Q.E.D.

## Teorem (Pascalov identitet)

$$\binom{\alpha}{n} = \binom{\alpha-1}{n} + \binom{\alpha-1}{n-1}$$

## Dokaz

$f(x) = (1+x)^\alpha$

$\langle x^n \rangle f(x) = \binom{\alpha}{n}$

$f(x) = (1+x)(1+x)^{\alpha-1}$

$= (1+x)^{\alpha-1} + x(1+x)^{\alpha-1} = g(x)$

$\langle x^n \rangle g(x) = \binom{\alpha-1}{n} + \binom{\alpha-1}{n-1}$

↳ indeks je pomaknut zbog $x$

Teorem

Skup svih rješenja homogene linearne rekurzivne relacije s konstantnim koeficijentima

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_r a_{n-r}$$

je $r$-dimenzionalan vektorski prostor (nad $\mathbb{C}$)

Dokaz

$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$ ; $\lambda \cdot (a_n) = (\lambda a_n)$

→ Ako je $a_n$ jedno rješenje i $b_n$ neko drugo rješenje, treba provjeriti da je njihova linearna kombinacija rješenje (VPP)

$(\alpha a_n + \beta b_n) =$

$= c_1 (\alpha a_{n-1} + \beta b_{n-1}) + c_2 (\alpha a_{n-2} + \beta b_{n-2}) + \dots + c_r (\alpha a_{n-r} + \beta b_{n-r})$

$= \alpha (c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_r a_{n-r}) + \beta (c_1 b_{n-1} + c_2 b_{n-2} + \dots + c_r b_{n-r})$

$= \alpha (a_n) + \beta (b_n)$ Q.E.D.

Teorem

Svako rješenje linearne rekurzivne relacije s konstantnim koeficijentima se može zapisati kao zbroj rješenja pripadne homogene relacije i partikularnog rješenja

Dokaz

1) Provjeravamo da je $a_n = a_n^h + a_n^p$ vistinu rješenje

$c_1 \cdot (a_{n-1}^h + a_{n-1}^p) + \dots + c_r (a_{n-r}^h + a_{n-r}^p) + f(n) =$

$= (c_1 a_{n-1}^h + \dots + c_r a_{n-r}^h) + (c_1 a_{n-1}^p + c_2 a_{n-2}^p + \dots + c_r a_{n-r}^p) + f(n) =$

$= a_n^h + a_n^p$ W

2)

$a_n^q$ → rješenje linearne rekurzivne relacije

$a_n^q - a_n^p = c_1 a_{n-1}^q + \dots + c_r a_{n-r}^q + f(n)$

$- c_1 a_{n-1}^p + \dots + (-c_r a_{n-r}^p) - f(n)$

$= c_1 (a_{n-1}^q - a_{n-1}^p) + \dots + c_r (a_{n-r}^q - a_{n-r}^p)$

→ zadovoljava pripadnu homogenu jednadžbu

$a_n^h = a_n^q - a_n^p \Rightarrow a_n = a_n^h + a_n^p$ Q.E.D.

## Teorem

Ako su $x_1, x_2, \dots x_r$ međusobno različita rješenja karakteristične jednadžbe, opće rješenje pripadne homogene rekurzivne relacije dano je s:

$$a_n = \lambda_1 x_1^n + \lambda_2 x_2^n + \dots + \lambda_r x_r^n$$

## Dokaz

$a_n$ zaista je rješenje od zadane rekurzije

→ rješenje je vektorski prostor razapet vektorima

$x_1^n, \dots, x_r^n$

→ ako $x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1^n$ i $x_2^n$ linearno nezavisni

Ako je zadano $r$ početnih članova:

$n=0$ : $\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 1 + \dots + \lambda_r \cdot 1 = a_0$

$n=0$ : $\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 + \dots + \lambda_r \cdot x_r = a_1$

$\vdots$ $\vdots$

$n=r$ : $\lambda_1 \cdot x_1^r + \lambda_2 \cdot x_2^r + \dots + \lambda_r \cdot x_r^r = a_r$

Linearni sustav u lambdama ima jedinstveno rješenje ako je $\det \neq 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_r \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^r & x_2^r & \dots & x_r^r \end{vmatrix}$$

→ Vandermondeova determinanta

$$= \prod_{1 \leq i < j \leq r} (x_j - x_i)$$

$= 0$ jer su svi $x_j, x_i$ različiti

→ sustav ima rješenje

⇒ Svako rješenje se može podvesti pod izraz Q.E.D.

## Lema

Ako je $x_i$ N.T. polinoma $P(x)$ kratnosti $r_i$, tada je $x_i$ N.T. $j$-te derivacije $P^{(j)}(x)$ kratnosti $r_i - j$.

## Dokaz

$$P(x) = (x - x_i)^r \cdot Q(x) \,\Big|\, \frac{d}{dx}$$

$$P'(x) = r_i (x - x_i)^{r_i - 1} \cdot Q(x) + (x - x_i)^r \cdot Q'(x)$$

$$= (x - x_i)^{r_i - 1} \cdot [\text{polinom}] \text{ itd.}$$

Q.E.D.

## Propozicija

$x_i$ N.T. kratnosti $r_i$ od karakteristične jednadžbe

$x_i^n, \; n \cdot x_i^n, \; \dots, \; n^{r_i - 1} x_i^n$

su sve rješenja zadane rekurzije (nultočka kratnosti $r_i \rightarrow r_i$ lin. nez. rješenja)

## Dokaz

$$x^n = c_1 \cdot x^{n-1} + c_2 \cdot x^{n-2} + \dots + c_r x^{n-r} \quad / \tfrac{d}{dx} / \cdot x$$

$$n x^n = c_1 \cdot (n-1) x^{n-1} + c_2 x^{r-2} \cdot (n-2) + \dots + (n-r) \cdot c_r x^{n-r}$$

$\vdots$ itd.

→ svaki od dobivenih nizova zaista je rješenje zadane rekurzije

Q.E.D.

## Lema (o rukovanju)

U svakom grafu je zbroj stupnjeva svih vrhova paran broj, tj. vrijedi $\sum \deg(v) \equiv 0 \pmod 2$

## Dokaz

Prebrojavamo sve incidencije $\{(v,e) \mid v \in V(G), e \in E(G), v \in e\}$

Ako krenemo od vrhova → incidencija ima koliko je stupanj svakog vrha, dakle ukupno ih ima $\sum \deg(v)$

Ako krenemo od bridova, svaki brid mora biti incidentan s 2 vrha, dakle ukupno ih ima $|E| \cdot 2$

$$\Rightarrow \sum \deg(v) = |E| \cdot 2 \equiv 0 \pmod 2$$ Q.E.D.

## Teorem (Dirichletov princip)

Ako je $n$ predmeta smješteno u $m$ kutija, $n > m$, postoji kutija s barem 2 predmeta.

## Dokaz

Očigledno je. Kad bi u kutijama bilo najviše 1 predmet, ukupni najveći broj predmeta bio bi $m$, što je u kontradikciji s pretpostavkom $n > m$

## Teorem (Poopćeni Dirichletov princip)

Ako je $n$ predmeta u $m$ kutija, postoji kutija s barem

$$\left\lfloor \frac{n-1}{m} \right\rfloor + 1 \text{ predmeta}$$

## Dokaz

Pretp. suprotno → svaka kutija $\leq \left\lfloor \frac{n-1}{m} \right\rfloor$ predmeta → ukupan broj predmeta u $m$ kutija $\leq m \cdot \left\lfloor \frac{n-1}{m} \right\rfloor \leq m \cdot \frac{n-1}{m} = n-1$ → kontradikcija ↯

## Teorem

Relacija $\sim$ (biti povezan) relacija je ekvivalencije

## Dokaz

1) Refleksivnost

$v \sim v \rightarrow$ postoji šetnja duljine 0 ✓

2) Simetričnost

$u \sim v \Rightarrow u \rightarrow u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow \ldots \rightarrow u_{k-1} \rightarrow v$

$\Rightarrow \exists\ v \rightarrow u_{k-1} \rightarrow \ldots \rightarrow u_2 \rightarrow u_1 \rightarrow u$

$\Rightarrow v \sim u$ ✓

3) Tranzitivnost

$u \sim v \Rightarrow \exists\ u \rightarrow u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow \ldots \rightarrow u_{k-1} \rightarrow v$
$v \sim w \quad\ \ \exists\ v \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \ldots \rightarrow v_{l-1} \rightarrow w$

$\Rightarrow \exists\ u \rightarrow u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow \ldots \rightarrow u_{k-1} \rightarrow v \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \ldots \rightarrow v_{l-1} \rightarrow w$

$\Rightarrow u \sim w$ ✓ Q.E.D.

## Teorem

G je bipartitan $\Leftrightarrow \forall$ ciklus $\in G$ je parne duljine

## Dokaz

$(\Rightarrow)$

$$\begin{array}{ccccccccc} v_0 & \rightarrow & v_1 & \rightarrow \ldots \rightarrow & v_{n-1} & \rightarrow & v_n & \rightarrow & v_0 \\ \cap & & \cap & & \cap & & \cap & & \cap \\ A & & B & & A & & B & & A \end{array}$$

$v_0$ iz $A \Rightarrow$ nužno $v_1$ iz $B$

Indeksi vrhova iz $B$ neparni: $n = 2k-1$

$l = n+1 = 2k-1+1 = 2k$

## Teorem

G jednostavan s $n$ vrhova s $k$ komponenata povezanosti, za broj bridova $m$ vrijedi

$$n-k \leq m \leq \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}$$

## Dokaz

Za donju među: Indukcija

$\boxed{B}$ nul-graf

$n-n \leq 0$ ✓

$\boxed{P}$ Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve koji imaju manje bridova od zadanog te neka $G$ ima najmanji mogući $m$

$\rightarrow$ ako maknemo brid iz $G \rightarrow n$ vrh, $m-1$ brid, $k+1$ komp. pov.

$\rightarrow$ za taj graf vrijedi pretp. $m-1 \geq n-(k+1) \Rightarrow m \geq n-k$ Q.E.D.

Za gornju među:

Pretpostavimo da je svaka komp. povezanosti potpuni graf. Gledamo max. broj bridova

$C_i$ i $C_j$ komp. pov. s $n_i$ i $n_j$ vrhova

$n_i \geq n_j \geq 1$

Ako bismo u $G$ zamijenili $C_i$ i $C_j$ s potpunim podgr. nad $n_i + 1$ i $n_j - 1$ vrhova, broj vrhova ostaje isti, a broj bridova se mijenja za

$$\left[\frac{(n_i+1)n_i}{2} - \frac{n_i(n_i-1)}{2}\right] - \left[\frac{n_j(n_j-1)}{2} - \frac{(n_j-1)(n_j-2)}{2}\right]$$

$$= n_i - n_j + 1 > 0$$

$\Rightarrow$ $m$ se povećava ako većim komp. pov. povećavamo broj vrhova → ekstr. slučaj → potpuni podgraf s $n-k+1$ vrhova i $k-1$ izoliranih vrhova

$$\Rightarrow m = \binom{n-k+1}{2} = \frac{(n-k+1)(n-k)}{2}$$

**Korolar**

~~Ako takav graf nije povezan~~

Svaki jedn. graf s $n$ vrhova i $m > \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ je povezan

**Dokaz**

Ako takav graf nije povezan, ima bar 2 komp. pov., no po prethodnom teoremu morao bi imati ~~[illegible]~~ najviše $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ vrha

$\Rightarrow$ ↯ Q.E.D.

**Lema** obrat ne

Ako je $G$ t. d. $\deg(v) \geq 2$, $\forall v \in V(G)$, sadrži ciklus

**Dokaz**

$v \in V(G)$, konstruiramo šetnju $v \to v_1 \to v_2 \to \dots$ tako da biramo sljedeći kao susjeda trenutnog koji nije prethodni. Možemo izabrati niz vrhova $\{v_i\}$ jer je stupanj svakog vrha barem 2. → Skup vrhova grafa konačan, u nekome času ćemo izabrati prethodno izabrani vrh → ciklus.

**Teorem** (Euler)

Ako je $G$ povezani graf,

$G$ je eulerovski $\Leftrightarrow \deg(v) \equiv 0 \pmod 2$, $\forall v \in V(G)$

**Dokaz**

($\Rightarrow$)

$G$ je eulerovski i $P$ eulerovska staza. Pri prolazku vrhom, staza doprinosi stupnju za 2. Budući da se svakim bridom prođe točno jednom, svaki vrh mora imati $\deg(v) \equiv 0 \pmod 2$

($\Leftarrow$)

Indukcija po broju bridova $m$

$\boxed{B}$ $m=1$:

 je Eulerovski ✓

$\boxed{P}$ Pretp. da tvrdnja vrijedi za sve grafove s $< m$ bridova

$\boxed{K}$ $m$:

$\deg(v) \neq 0$ jer je graf povezan:

$\deg(v) \geq 2$

$\Rightarrow$ u $G$ postoji ciklus $C$

1°) Ciklus $C$ postoji i prolazi kroz sve bridove

↳ Eulerovska staza

2°) Ciklus $C$ ne prolazi kroz sve bridove

- Promotrimo $G - C$

$G - C = G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_k$

- više nije nužno povezan
- raspao se na $k$ komponenata povezanosti
- svi preostali vrhovi imaju paran stupanj (oduzeli smo ili 0 ili 2)
- na svaku od komponenata povezanosti primijenimo pretpostavku indukcije

↳ Svaka ima Eulerovsku stazu

Eulerovsku stazu pronalazimo za $G$ slijedeći vrhove od $C$ dok ne dođemo do neizoliranog vrha neke komponente povezanosti, prođemo po njoj natrag Eulerovsku stazu i nastavimo do kraja.

Teorem (Fleuryev algoritam)

G eulerovski → sljedeća konstrukcija je moguća i dolazi do eulerovske staze. Započni u bilo kojem vrhu v i prolazi vrhovima u bilo kojem redoslijedu pazeći na pravila:

1) Obriši bridove nakon prolaska i izolirane vrhove
2) Prijeđi mostom samo ako nema druge mogućnosti

Dokaz skripta str. 89

Teorem Ore

Ako je G jedn. s $n$ vrhova, $n \geq 3$ te ako vrijedi

$$deg(v) + deg(w) \geq n$$

za svaki par nesusjednih vrhova $v$ i $w$, G je hamiltonovski

Dokaz

Pretpostavimo suprotno → G nehamiltonovski graf s $n$ vrhova koji zadovoljava danu relaciju

Dodajmo G bridove tako da dođemo na korak do hamiltonovosti, tj dodatkom još jednog brida, graf bi bio hamiltonovski

↳ nismo kvarili početnu relaciju

Kako smo na korak do hamiltonovosti, možemo naći nezatvoreni put $v_1 \to v_2 \to \dots \to v_n$ kroz svaki vrh, $v_1$ i $v_n$ nisu susjedni,

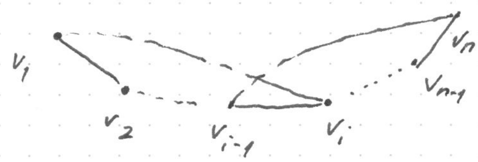
za njih vrijedi $deg(v_1) + deg(v_n) \geq n$

→ $v_1$ i $v_n$ imaju drugih susjeda osim $v_2$ i $v_{n-1}$

Definirajmo:

$$A = \{ i \mid 2 \leq i \leq n, \ v_i \text{ susjedan s } v_1 \}$$

$$B = \{ i \mid 2 \leq i \leq n, \ v_{i-1} \text{ susjedan s } v_n \}$$




$|A| = deg(v_1) \quad |B| = deg(v_n) \quad |A| + |B| \geq n$

$|A \cup B| \leq n-1 \quad \Rightarrow \quad |A \cap B| \geq 1$

→ Postoji $v_i$ susjedan s $v_1$ t. d. $v_{i-1}$ susjedan s $v_n$

⇒ Postoji hamiltonovski ciklus

$$v_1 \to v_2 \to \dots \to v_{i-1} \to v_n \to v_{n-1} \to \dots \to v_i \to v_1$$

Teorem (Dirac)

Ako je G jedn. s $n$ vrhova, $n \geq 3$ te ako $\forall v \in G: \ deg(v) \geq \frac{n}{2}$, G je hamiltonovski

Dokaz direktno slijedi iz ORE-ovog