A.Pavić-I.Felja

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE (07/08)

ZADACI ZA VJEŽBU (3. CIKLUS)

Sadržaj (po tjednima nastave)

IX.tjedan
Snaga u krugovima izmjenične struje .....1.

X..tjedan
Električne mreže (istosmjerne).....10.

XI.tjedan

Električne mreže (izmjenične).....22

XII.tjedan

Višefazni sustavi (trofazne mreže).....33

XIII.tjedan

Nesinusni periodički valni oblici.....43
Prijelazne pojave.....49

Predgovor

Rješavanje problema (zadataka) u okviru Osnova elektrotehnike djelotvoran je oblik učenja koji studentima pomaže da bolje shvate teorijsku podlogu nastavnog gradiva te da razviju inženjerski pristup neophodan za kasnije rješavanje složenijih problema.

Zadaća ove zbirke zadataka jest dati širi izbor zadataka, grupiranih po tjednima nastave (a unutar njih po temama novog nastavnog programa) koji će omogućiti pripremanje međuispita i završnog ispita, kao i kontinuirano samostalno vježbanje koje najdjelotvornije otkriva praznine i slabosti u razumijevanju nastavnog gradiva. Obrađeni problemi karakteristični su za pojedine nastavne cjeline, a ukupni broj problema nastojali smo održati u studentima prihvatljivim granicama. Nakon rješavanja zadataka preporuča se studentima odgovarati na pitanja za provjeru znanja u obliku testova sa ponuđenim odgovorima, koja nalazite na kraju svake nastavne cjeline.

Zagreb 28.11.2007.

Autori

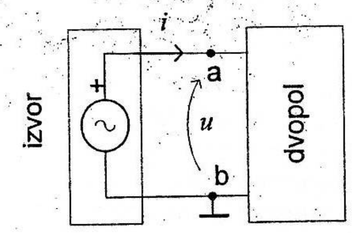
1XXOEY3

FOTOKOPIRANO S DOZVOLOM AUTORA

IX. Tjedan predavanja

Snaga u krugovima izmjenične struje u stacionarnom stanju

1. Poznati su napon i struja nekog dvopola. Odredite analitički izraz za trenutnu snagu. Nacrtajte graf trenutne snage. Koja je srednja vrijednost funkcije kojom je prikazana trenutna snaga. Ustanovite i ostale značajke te funkcije



$u(t)= u_{ab}(t)= 5\cdot \sin(314t)$ V

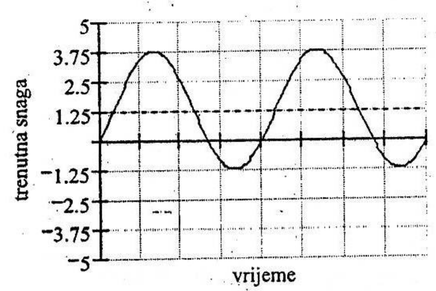
$i(t)=1\cdot\sin(\omega t+\pi/3)$ A

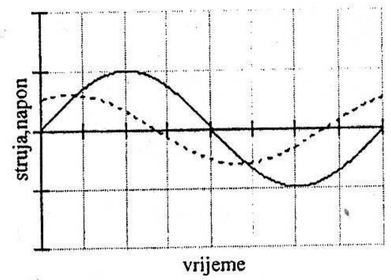
struja ulazi u stezaljku **a** !
stezaljka **b** je referentna

Rješenje: Općenito je trenutna snaga umnožak struje i napona. Razmatramo dvopol prikazan slikom na kojoj su označeni referentni smjer struje i napon između stezaljki. Struja fazno prethodi naponu za 60 stupnjeva. To znači da je dvopol kapacitivnog karaktera npr. u najjednostavnijem slučaju serijski spoj otpornika i kondenzatora. Treba «zaviriti» u matematički priručnik i ustanoviti da se umnožak p(t)=u(t) i(t) u ovom slučaju može prikazati ovako:

$p(t)=U\cdot I\cdot\cos\varphi - U\cdot I\cdot\cos(2\omega t-\varphi)$ gdje je: $\varphi=\alpha_u-\alpha_i=-\pi/3$, a U i I su efektive vrijednosti

Dobiveni izraz se sastoji od dva dijela. Prvi dio $U\cdot I\cos\varphi=1{,}25$ VA predstavlja istosmjernu komponentu (srednju vrijednost) funkcije snage, dok je drugi dio harmonijska funkcija dvostruke frekvencije u odnosu na frekvenciju napona i struje. Amplituda te sinusne funkcije je $U\cdot I=2{,}5$ VA. Na grafu to izgleda ovako:





Nultočke na grafu trenutne snage su u trenucima u kojima je napon ili struja nula.
Trenutna snaga je «podignuta» sinusoida dvostruke frekvencije. Vidimo da se izmjenjuju intervali vremena u kojima je snaga pozitivna (iznad vremenske osi) s intervalima kada je negativna. Površina ispod krivulje snage predstavlja energiju. To znači da se zapravo izmjenjuju intervali u kojima dvopol prima energiju s intervalima u kojima energiju daje tj. vraća. Objašnjenje ove pojave je u tome što ovaj dvopol sadrži uz otpornik i kondenzator. Kondenzator kao što je poznato prilikom nabijanja sakuplja energiju, a kod izbijanja je vraća. Jednako se «ponaša» zavojnica. Naprotiv, otpornik je element koji može samo primati energiju (koja se naravno pretvara u neki drugi oblik). Kombinacijom djelovanja otpornika i kondenzatora nastala je gore opisana krivulja trenutne snage. U elektrotehničkom se rječniku koristi poseban naziv za elemente tipa *L* i *C*: reaktivni elementi. Ovisno o sastavu dvopola graf trenutne snage poprima različite oblike glede

srednje vrijednosti. U tom smislu posebno su zanimljiva dva slučaja: **a.** dvopol je «čisti *C* ili *L* **b.** dvopol je otpornik. U prvom je slučaju srednja vrijednost snage nula (graf trenutne snage je sinusoida dvostruke frekvencije), dok u drugom nema negativnih vrijednosti jer otpornik ne može ništa vraćati (graf je sinusoida «podignuta» za $UI\cos\varphi$).

2. Za dvopol iz prethodnog zadatka koji se sastoji od serijski spojenog otpornika i kondenzatora odredite radnu, reaktivnu i prividnu snagu te iznose otpora i kapacitivnog otpora. Zadano je: U=3,5 V I=0,7 A $\varphi=-60^0$

Rješenje: Proračun snage vezan uz uobičajene metode za rješavanje strujnih krugova (el. mreža) tj. nakon izračuna napona i struje pristupa se proračunu snage. Osnovne su relacije: $P=I^2R$ $Q=I^2X$ $S=I^2Z$ koje se zorno prikazuju pravokutnim trokutom (tzv. trokut snage). P se naziva radna snaga i odnosi se na otpornik (to je srednja vrijednost grafa trenutne snage) . Q je reaktivna snaga na elementima tipa C odnosno L. U ovom zadatku dobivamo da je: $S=U\cdot I$=2,5 VA $P=U\cdot I\cdot\cos\varphi$=1,25 W $Q=U\cdot I\cdot\sin\varphi$=-2,16 VAR. Dogovorno su (u elektroenergetici) uvedeni posebni nazivi mjernih jedinica za tri «vrste» snage : voltamperi,vati i voltamperi reaktivni. Važno je uočiti da reaktivna snaga kondenzatora ima negativan predznak. Ako se navodi samo iznos reaktivne snage treba napisati da li je induktivna ili kapacitivna. Npr. Q=2,16 VAR (kap.). Snagu dvopola možemo izračunati pomoću fazora napona i struje tako da fazor napona pomnožimo sa **konjugirano** kompleksnim brojem fazora struje (time se dobiva ispravan fazni kut). Realni dio dobivenog kompleksnog broja je radna snaga , a imaginarni reaktivna. U ovom slučaju to izgleda ovako: $\underline{U}=3.5\underline{/0^0}$ $\underline{I}^*=0,7\underline{/-60^0}$ $\underline{S}=2,5\underline{/-60}^0$ = 1,25-2,16j VA. Imaginarni dio je negativan što odmah pokazuje da je reaktivna snaga kapacitivna...

3. Maksimalna trenutna snaga trošila iznosi 300 VA, a minimalna -100 VA. Kolike su radna, jalova (reaktivna) i prividna snaga?

Rezultat: S=200 VA; P=100 W; Q=173 VAR

4. Trenutačna snaga p(t) na trošilu doseže najveću vrijednost p_{max}, a najnižu vrijednost p_{min}. Odredite jalovu te faktor snage trošila.
Zadano: p_{max}=1600 VA; p_{min}=-400 VA.

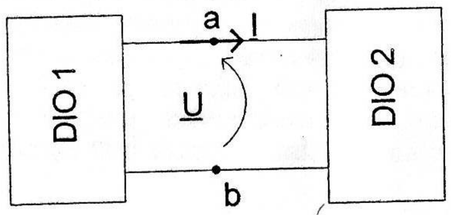
Rezultat: Q=800 VAR faktor snage je 0,6

5. Električna mreža izmjenične struje podijeljena je u dva dijela označena kao dio (1) i dio (2), kako je prikazano na slici. Napon i struja zadani su efektivnim vrijednostima i početnim kutevima. Referentni smjer struje i referentni polaritet napona prikazani su na slici. Napišite struju i napon u kompleksnom obliku, a zatim izračunajte snage $\underline{S}_1$ i $\underline{S}_2$ u kompleksnom obliku. Razmotrite na temelju predzaka snaga tok energije između ova dva dijela električne mreže. Zadano: U=220 V; I=10 A; α_u=0; $\alpha_i=45^0$.

Rezultat:

za dio (1) S_1=-1566+j1566 VA

za dio (2) S_2=1566-j1566 VA



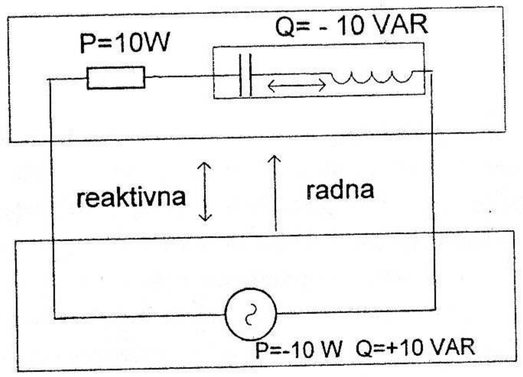
6. Kroz serijski spojene elementa: R=10 Ω X_L=5 Ω X_C=15 Ω prolazi struja od 1 A. Izračunajte snage na pojedinim elementima i ukupnu snagu spoja. Nacrtajte trokut snage i odredite fazni kut impedancije.

Rezultat: snage na elementima su P=10W, Q_L=5 VAR Q_C=-15 VAR 2. Snaga spoja (dvopola) je: S=14,1 VA, Q=-10 VAR , P=10 W. Fazni kut je –45 stupnjeva tj. spoj je kapacitivan i struja prethodi naponu (napon priključen na spoj je 14,1 V)

Pitanje : Kako će se promijeniti struja i snage ako napon dvaput povećamo (na 28,2 V)?
Odgovor: struja se poveća **dvaput** ,a snage **četiri** puta.

7. Razmotrite «balans snaga» u spoju iz prethodnog zadatka. Koji je matematički gledano predznak snaga izvora?

Rješenje: U svakom strujnom (električnom) krugu uspostave se takve strujne i naponske prilike kojima se ostvaruje balans snage (energije). To znači da suma snaga mora biti jednaka nuli. Matematički se ovdje to ostvaruje tako da je radna snaga izvora negativna, a reaktivna pozitivna. Pi=-10 W Qi=+10 VAR. Dio reaktivne energije se razmjenjuje između kondenzatora i zavojnice unutar spoja. Spoj promatran kao cjelina (dvopol) ostatak reaktivne energije razmjenjuje sa izvorom. U nekom spojevima se može postići da se reaktivna energija u cjelosti razmjenjuje unutar spoja (suma reaktivnih snaga je nula). Prema «van» nema u tom slučaju nikakve razmjene reaktivne energije. Konkretno u spoju koji razmatramo to bi se dogodilo ako je npr. X_C=5 Ω. Uzimajući u obzir ovaj «energetski» aspekt ponašanja strujnog kruga postaje jasniji pojam rezonancije. Ako je spoj u rezonanciji reaktivna se energija zapravo u cjelosti razmjenjuje na reaktivnim elementima unutar spoja.



8. Trošilo impedancije Z, priključeno je na izvor napona U frekvencije f. Odredite način spajanja i iznos kapaciteta kondenzatora s pomoću kojega ćemo faktor snage trošila povećati na a) 0,95 b) 1 . Zadano: $\underline{U}$=120 V; f=50 Hz; $\underline{Z}$=20+j30 Ω.

Rezultat: paralelno 30 μF

9. Na nekom elektromotoru (trošilu) nalazimo podatke Un=220 V; f=50 Hz; In=4,5 A, $\cos\varphi$=0,866. Odredite iznos kapaciteta potrebnog za poboljšanje faktora snage na 0,95

(ind) kada je motor pod punim opterećenjem (struja je u tom slučaju jednaka nazivnoj struji).

Rezultat: 12,2 μF

10. Na izvor su paralelno priključena tri trošila zadana slijedećim podacima: 1. S_1=250 VA; $\cos\varphi_1$=0,5(ind); 2. P_2=180 W; $\cos\varphi_2$=0,8 (kap); 3. S_3=300 VA; Q_3=100 VAR (ind).Odredite ukupnu prividnu, jalovu (reaktivnu) i radnu snagu. Nacrtajte trokut snage. Koji element treba u ovom slučaju spojiti paralelno opisanom trošilu da struja i napon izvora budu u fazi?

Rezultat: P=588 W Q= 188 VAR (ind) S=614 VA ukupna reaktivna snaga je induktivna. Da bi struja i napon "došli" u fazu potrebno je paralelno spojiti kondenzator koji će "preuzeti" 188 VAR. Za proračun kapaciteta potreban je napon izvora: $C=Q/\omega U^2$

11. Faktor snage (cos φ) otpornika i kondenzatora spojenih paralelno iznosi 0,5. Koliki je faktor snage ako ih spojimo serijski?

Rezultat: 0,5√3

12. Na izvor sinusoidnog napona *U* i unutrašnje impedancije Z_i (R_i i X_i) priključeno je trošilo kojemu se može mijenjati radni i reaktivni dio u granicama od R_{tp}=0 do R_{tk} (konačna vrijednost otpora) i isto tako X_t od X_{tp} do X_{tk}. Odredite: a) uz koju impedanciju će na trošilu biti najveća snaga; b) kolika je ta snaga.
Zadano: *U*=100 V; R_i=10 Ω; X_i=5 Ω (kap); R_{tk}=20 Ω; X_{tp}=20 Ω (kap); X_{tk}=20 Ω (ind).

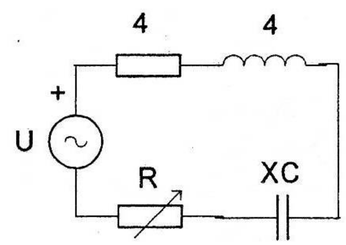
Rezultat 10+j5; 250 W

$Z_i = 10-5j$ – KONPL-KONJ JE MAKS

13. Trošilo sastavljeno od serijskog spoja kapacitivnog otpora X_C i radnog otpora R priključeno je na izvor napona *U* i unutrašnje impedancije Z_i. Ako se otpor *R* trošila mijenja u granicama od R_1 do R_2, pri kojem otporu *R* će na trošilu biti najveća snaga. Kolika je ta snaga?
Zadano: *U*=110 V; $\underline{Z}_i=4\sqrt{2}\,\underline{/45^0}$ Ω; X_C=-j10 Ω; R_1=40 Ω; R_2=80 Ω.

Rezultat: 40 Ω

14. Ako je kapacitivni otpor na slici jednak 1 Ω, koliki mora biti otpor *R* da bi radna snaga na njemu bila najveća moguća? Kolika je ta snaga ako je *U*=9,48 V?



Rezultat: R=5 Ω P=5W

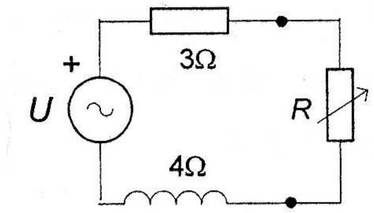
15. Koliki **otpor** treba priključiti na sinusoidni izvor s parametrima $\underline{U}$ i $\underline{Z}_i$=5+j5 da bi snaga na njemu bila najveća moguća?

Rezultat: 7,07 oma *Pitanje*: Koju impedanciju treba priključiti pa da snaga bude maksimalna? (odg 5-j5 u tom slučaju u krugu jnastupa rezonancija!

$P_{max} = \frac{U^2}{4R_k}$

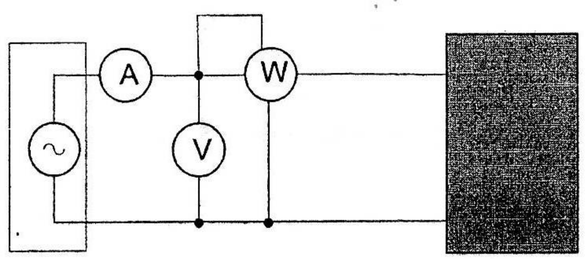
16. Što se događa s radnom snagom trošila u spoju prema slici ako se otpor otpornika *R* smanjuje od 8 do 2 Ω ?

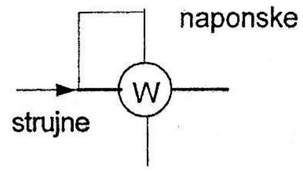
Odgovor: raste pa pada
Odgovorite na pitanje ako zamijenimo naponski izvor sa strujnim.(smanjuje se)



17. U zatamnjenoj kutiji je serijski spoj radnog otpora i svitka. Mjerimo napon struju i snagu. Odredite koji su elementi «unutra». Koliki je fazni kut impedancije.

Zadano: *P*=30 W *U*=220 V *I*=300 mA *f*=50Hz





Uputa: Da bi riješili ovaj problem trebate voditi računa da je :
pokazivanje vatmetra= U · I · cosinus kuta između struje i napona tj. u vatmetru se «automatski» množe navedene veličine. Zato vatmetar ima strujne i naponske priključnice (jedna je zajednička) . Strujna grana mora imati što manji, a naponska što veći otpor (kod idealnog vatmetra to je nula odnosno beskonačno).

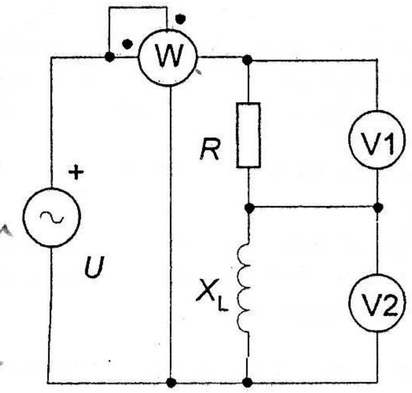
Rezultat: R=333 Ω, *L*=2,07H; φ=+63^0

18. Ako su poznata pokazivanja instrumenata, odredite otpor *R* i napon *U* u spoju na slici. Koiliki je faktor snage?

Zadano: U_{V1}=30 V; U_{V2}=50 V; P_W=30 W

SNAGA NA OTPORNIKU

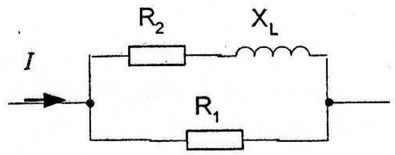
Rezultat. 30 Ω; 58 V



FAKTOR SNAGE $\cos\varphi = \frac{U_R}{U} = \frac{30V}{58V} = 0.51725$

Z_i^*

19. Izračunajte struju I, ako je ukupna radna snaga u krugu na slici jednaka P_{uk} ?



Zadano: R_1=10 Ω; R_2=3 Ω; X_L=4 Ω; P_{uk}=1100 W.

Rezultat 19,24 A

20. Serijski su spojeni otpor R=5 Ω i impedancija $\underline{Z}$=3+j4 Ω. Ako je jalova snaga spoja 100 VAR kolika je radna snaga spoja?

Rezultat: 200 W

21. Što se događa s iznosom radne snage idealnog strujnog izvora na koji je priključen paralelni RC spoj, ako frekvencija raste?

Odgovor: pada

22. Serijski su spojeni R=5 Ω i induktivitet X_L=15 Ω. Napon na otporniku je 31,6 V. Kolika je snaga izražena u kompleksnom obliku?

Rezultat: 200+j600 VA

23. Paralelno su spojene dvije impedancije $\underline{Z}_1$=2-j4 i $\underline{Z}_2$=4+j2. Radna snaga na $\underline{Z}_2$ je 20 W. Izračunajte ukupnu radnu jalovu i prividnu snagu.

Rezultat 31,6 VA, 30W,10VAR (kap) Uputa: pažljivi čitatelj će primjetiti da su struje u granama jednakog iznosa, (a nakon toga trebalo bi sve ići zaključivanjem:... ako je na 4 oma 20 W tada je na 2 oma 10 W pa je to ukupno 30 W itd. Treba naravno uzeti u obzir da je kapacitivna reaktivna snaga negativna..)

24. Izvor (transformator) ima nazivnu snagu 25 kVA. Na izvor je priključeno trošilo 12 kW sa faktorom snage 0,6. Odredite a) postotak opterećenja izvora b) Koliku dodatnu radnu snagu može dati izvor do punog opterećenja? Zadatak riješite pomoću trokuta snage.

Rezultat: a) 80 % b) 7,2 kW

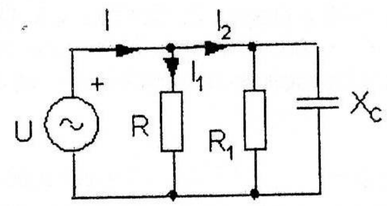
25. Paralelno spojeni R=10 Ω i impedancija Z=8/-30 ^{0} priključeni su na strujni izvor I=5 A. Izračunajte ukupnu radnu i jalovu (reaktivnu) snagu. Kolike su snage na pojedinim elementima spoja?

Rezultat: P=110 W Q=23 VAR (kap.)

26. Paralelno su spojene dvije impedancije $\underline{Z}_1$=2+3j i $\underline{Z}_2$=3+j6. Ukupna radna snaga spoja je 1500 W. Izračunajte jalovu snagu i faktor snage.

Rezultat: Q=2480 VAR cosφ=0,518 (ind.)

27. Izračunajte radnu snagu na otporniku R u spoju prema slici ako su izmjerene struje I=3 A, I_1=2 A, I_2=2 A. Otpornik R_1=4 oma. (X_C nije zadan)



Rezultat: 2 W Uputa: prije izračunavanja nacrtajte vektorski dijagram...)

TEST PITANJA

1) Na otporniku od 600 Ω mjerimo efektivnu vrijednost napona i dobivamo 0,775 V. Kolika je snaga na tom otporniku?

A) 1 mW
B) 0,775 mW
C) 1 W
D) 7,75 W

2) Trenutna snaga sinusoidnog izvora frekvencije f na koji je priključen kondenzator je:

A) sinusoidna funkcija frekvencije 2f
B) sinusoidna funkcija frekvencije f
C) konstanta različita od nule
D) nula

3) Faktor snage je odnos:

A) radne i jalove snage
B) prividne i jalove snage
C) prividne i radne snage
D) radne i prividne snage

4) Kako se mijenja ukupna struja paralelnog RC spoja ako se frekvencija naponskog izvora povećava?

A) raste
B) pada
C) ne ovisi o frekvenciji

5) Faktor snage nekog induktivnog trošila manji je od 1. Kako se taj faktor može povećati , a da radna snaga ostane jednaka?

A) paralelnim spajanjem kondenzatora
B) paralelnim spajanjem zavojnice
C) nikako (nemoguće)
D) serijskom spajanjem kondenzatora

6) Što se dogada sa iznosom radne snage naponskog izvora, stalne amplitude

napona i promjenjive frekvencije, na koji je priključen serijski *RL* krug ako frekvencija raste?

A) raste
B) pada
C) ne mijenja se

7) Za koliko posto se smanji snaga grijača ako se napon smanji za 5%?

A) za 5 %
B) za 9 %
C) za 21 %
D) ne promijeni se

8) Što se dogodi s iznosom radne snage strujnog sinusnog izvora na koji je priključen paralelni *RC* spoj ako se frekvencija izvora smanji?

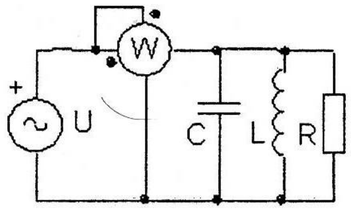
A) poraste
B) smanji se
C) ne promijeni se

9) Trenutna snaga nekog trošila ima pozitivan maksimum 300 VA, a negativan -100 VA. Kolika je prividna snaga?

A) 400 VA
B) 300 VA
C) 200 VA
D) 100 VA
E) nula

10) Prikazani spoj je u rezonanciji. Vatmetar pokazuje neku snagu P. Hoće li se i kako promijeniti pokazivanje vatmetra ako se poveća frekvencija izvora?

A) ne promijeni se
B) smanji se
C) poveća se
D) nema dovoljno podataka



11) Induktivno trošilo priključeno je na napon *U*. Kako se promijeni reaktivna (jalova) snaga ako se napon izvora poveća za 10 %?

A) ne promijeni se
B) poraste za 10 %
C) poraste za 21 %
D) smanji se za 10 %
E) poraste za 5 %

12) Paralelno su spojene dvije impedancije: $\underline{Z}_1$=3+j4 i $\underline{Z}_2$=0-j5. Snaga na otporniku od 3 Ω je 45 W. Kolika je ukupna jalova snaga?

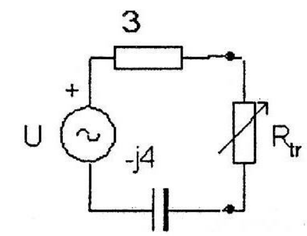
A) 15 VAr ind.
B) 15 VAr kap.
C) 5 VAr ind.
D) 5 VAr kap.
E) nula

13) Koliki otpor (trošilo) treba priključiti na sinusodni izvor koji ima parametre *U*, R_i=1 Ω, X_i=1 Ω(induktivno) da bi snaga na njemu bila najveća moguća?

A) 2 Ω,
B) 1 Ω,
C) 1,41 Ω,
D) 0,707 Ω

14) Što se događa sa snagom trošila ako se otpor trošila u prikazanom spoju povećava od 2 do 8 Ω?

A) stalno raste
B) stalno pada
C) pada pa raste
D) raste pa pada

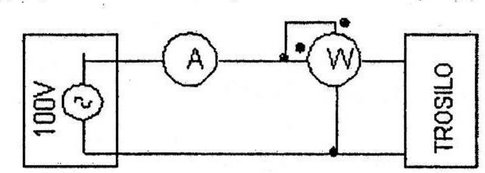


15) Koliki **otpor** treba priključiti na izvor s parametrima *U* i $Z_i = R_i + jX_i$ da bi snaga na njemu bila maksimalna?

A) $R=|Z_i|$
B) $R=|X_i|$
C) $R=R_i$
D) $R=R_i-jX_i$

16) Ampermetar pokazuje 1 A, a vatmetar 80 W. Kolika je vršna vrijednost trenutne snage?

A) 180 VA
B) 100 VA
C) 80 VA
D) 60 VA

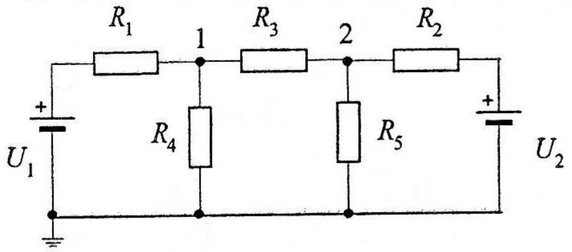


1 A 2 A 3 D 4 A 5 A 6 B 7 B 8 A 9 C 10 A 11 C 12 B 13 C 14 D 15 A 16 A

X. TJEDAN PREDAVANJA

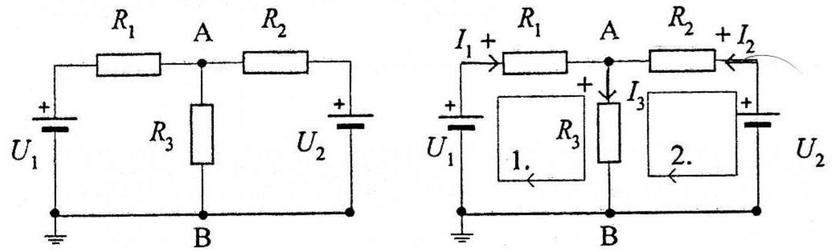
Istosmjerne mreže

1. Zadana je električna mreža prikazana slikom. a) Odredite broj: grana, čvorova (spojišta) te broj petlji i nezavisnih petlji.



Rješenje: Grana je dio mreže kojim prolazi ista struja. Grana se može sastojati od više serijskih elemenata. U prikazanoj električnoj mreži ima 5 grana. Kod rješavanja mreže struje grana valja označiti i ucrtati ih na shemu (smjer struja se pri tom odabire proizvoljno). Čvor je mjesto u mreži na koje je spojeno 3 ili više grana. U ovom slučaju postoje tri čvora. Jedan od njih označen je kao referentan dok su preostala dva označena brojevima. Zatvoreni put (od nekog čvora kroz mrežu do tog istog čvora) naziva se petlja. Petlja obuhvaća više grana (ali svaku samo jednom). Ovdje ima 6 takvih petlji. Posebno su značajne nezavisne petlje. To su one, koje se od ostalih razlikuju barem za jednu granu (nezavisna petlja mora imati barem jednu «svoju» granu). Ovdje su tri nezavisne petlje, koje se mogu jednostavno prepoznati kao okna ili konture plošno nacrtane mreže (zbog toga se nezavisne petlje još nazivaju *konture*.

2. Primjenom jednadžbi Kirchhoffovih zakona odredite struje u granama mreže koja je prikazana na donjoj slici (lijevo).
Zadano je: $R_1 = 6\Omega$ $R_2 = 3\Omega$ $R_3 = 6\Omega$ $U_1 = 24V$ $U_2 = 12V$



Rješenje: Slika (lijevo) prikazuje mrežu s dvije nezavisne konture. Na slici desno su prikazane predradnje koje treba napraviti prije pisanja jednadžbi, a to su: **1.** označiti i odabrati smjer struja; **2.** označiti polaritet napona na elementima mreže (strana otpornika na koju ulazi struja dobiva oznaku +); **3.** označiti petlje te odabrati i označiti smjer obilaženja petlji (obično je to smjer kazaljke na satu). Slijedi pisanje jednadžbi KZS i KZN. Budući da su nepoznate tri veličine (struje), trebaju nam tri jednadžbe. To su:

$I_1 + I_2 - I_3 = 0$ čvor A – KZS (Kirchhoffov zakon za struje)

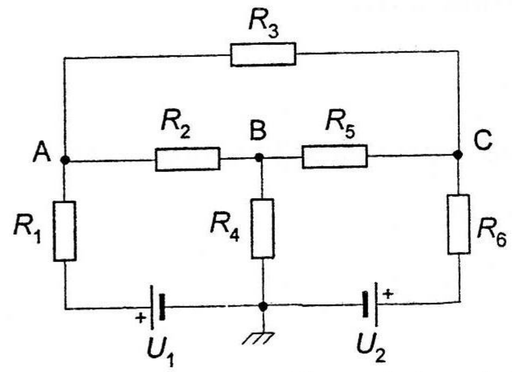
$U_1 - I_1 \cdot R_1 - I_3 \cdot R_3 = 0$ petlja 1 – KZN (Kirchhoffov zakon za napone)

$-U_2 + I_3 \cdot R_3 + I_2 \cdot R_2 = 0$ petlja 2 – KZN (Kirchhoffov zakon za napone)

Treba napomenuti da je pravilno napisan sustav jednadžbi osnovni uvjet za dobivanje ispravnog rješenja. Nakon uvrštavanja zadanih podataka slijedi «matematički dio» zadatka, a to je rješavanje sustava *n* jednadžbi s *n* nepoznanica (ovdje 3). Postupak prepuštamo

čitatelju. Dobivamo $I_2=0$ $I_1=2$ $I_3=2$. Uz zadani skup parametara imamo zanimljivo stanje, gdje kroz granu s otporom R_2 i izvorom U_2 uopće ne teče struja! Taj dio kruga možemo odspojiti, a da se u ostatku kruga ništa ne promijeni. Međutim, promjenom nekog parametra mreže stanje u mreži će se promijeniti. Sastavni dio rješavanja zadatka je **provjera dobivenih rezultata** (struja). Točno izračunate struje će zadovoljiti Kirchhoffove zakone (za struje i za napone) .Tek nakon provjere zadatak treba smatrati riješenim!
Napomena: Podsjetimo se: postupkom superpozicije mreža se svodi na mješovite spojeve otpora s jednim izvorom. Time se zaobilazi sustav jednadžbi sa više nepoznanica!

3. Metodom napona čvorova odredite struju kroz R_3 u mreži na donjoj slici.
Zadano $R_1=6\Omega$, $R_2=2\Omega$, $R_3=3\Omega$, $R_4=2\Omega$, $R_5=2\Omega$, $R_6=12\Omega$, $U_1=12V$ i $U_2=24V$



Rješenje: Mreža ima četiri čvora. Jedan od njih uzimamo za referentan (*masa* mreže) i pridajemo mu potencijal 0 V (čvor nultog potencijala). Ostalim čvorovima dali smo oznake A B i C (što je naknadno učinjeno na shemi). Zamislite da se voltmetar spoji referentnom priključnicom na masu pa se tad naponi čvorova jednostavno izmjere spajanjem druge priključnice voltmetra na čvorove A, B i C. Iz poznatih napona između čvorova lako bi se mogli izračunati struje i naponi na pojedinim otporima. U teorijskom postupku se, umjesto mjerenja napona, izračunavaju potencijali ostalih čvorova prema referentnom čvoru. Ti se potencijali označavaju grčkim slovom φ s oznakom čvora u indeksu (npr. φ_A je potencijal čvora A). Dobivaju se sljedeće jednadžbe, u kojima su nepoznanice potencijali čvorova

$$\varphi A \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) - \varphi B \cdot \frac{1}{R_2} - \varphi C \cdot \frac{1}{R_3} = \frac{U_1}{R_1} \quad \text{jednadžba čvora A}$$

$$-\varphi A \cdot \frac{1}{R_2} + \varphi B \cdot \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right) - \varphi C \cdot \frac{1}{R_5} = 0 \quad \text{jednadžba čvora B}$$

$$-\varphi A \cdot \frac{1}{R_3} - \varphi 2 \cdot \frac{1}{R_5} + \varphi 3 \cdot \left(\frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_3}\right) = \frac{U_2}{R_6} \quad \text{jednadžba čvora C}$$

Nakon uvrštavanja zadanih podataka dobivamo sustav jednadžbi:

$$1 \cdot \varphi_A - 0.5 \cdot \varphi_B - 0.333 \cdot \varphi_C = 2$$

$$-0.5 \cdot \varphi_A + 1.5 \cdot \varphi_B - 0.5 \cdot \varphi_C = 0$$

$$-0.333 \cdot \varphi_A - 0.5 \cdot \varphi_B + 0.917 \cdot \varphi_C = 2$$

Koeficijenti uz nepoznanice ovdje imaju dimenziju električne vodljivosti (simens). Dobivamo sljedeća rješenja za potencijale čvorova:

φ_A=6,667V φ_B=4,593V φ_C=7,11 V

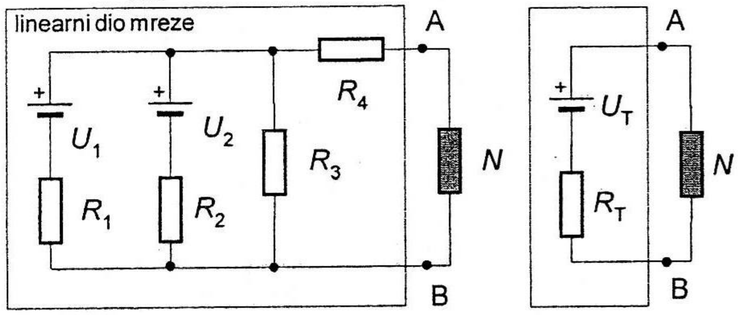
Napon na R_3 je razlika potencijala: φ_C-φ_A=0,444V (plus tog napona je na C)
Struja kroz R_3 je 0,444/R_3=0.148 A (smjer od C prema A)

Zaključak: kod metode napona čvorova najprije izračunavamo napone između čvorova, a zatim struje, snage itd. Ova je metoda pogodna u mrežama koje imaju malo čvorova, a puno petlji. Česta je primjena ove metode u (elektroenergetskim) mrežama sa dva čvora (sabirnica). Tada metoda ima i poseban naziv: Millmanova metoda.

4. Ako je poznato da je napon na nelinearnom elementu u spoju prema slici jednak U_{NE} odredite struje kroz otpore R_1, R_2, R_3 i R_4.

Zadano $U_1 = 1.2V$ $U_2 = 1.2V$ $R_1 = 0.8\Omega$ $R_2 = 0.8\Omega$

$R_3 = 6\Omega$ $R_4 = 1.5\Omega$ $U_{NE} = 0.5V$



Rješenje: Mreža koja sadrži nelinearni element može se podijeliti u dva dijela (lijeva slika). Linearni dio mreže se može zamijeniti Thevenenovim naponskim izvorom kako je prikazano na desnoj slici. Parametre tog izvora odredimo tako da odspojimo nelinearni element i zatim izračunamo napon koji se pojavi između točaka A i B. Otpor R_4 nema utjecaja na taj napon, jer kroz njega ne prolazi nikakva struja.

Koristimo Millmanovu formulu $$U_{AB} = \frac{\left(\frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2}\right)}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} \qquad U_{AB} = 1.125\ V$$

$$U_T = U_{AB}$$

Theveninov otpor dobivamo tako da izračunamo nadomjesni otpor sa stezaljki A i B, mješovitog spoja koji dobijemo kada umjesto naponskih izvora postavimo kratkospojnike.

$$R_T = R_4 + \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} \qquad R_T = 1.875\,\Omega$$

Sada idemo unatrag preko Thevenenovog spoja: Ako je napon na nelinearnom elementu U_{NE} poznat (npr. izmjeren) tada je pad napona na R_T (slika desno)

$$U_{RT} = U_T - U_{NE} \qquad U_{RT} = 0.625\ V$$

Time je struja u krugu na desnoj slici (to je struja kroz nelinearni element) jednaka

$$I_{NE} = \frac{U_{RT}}{R_T} \qquad I_{NE} = 0.333\ A$$

Tome je jednaka i struja kroz R_4 na lijevoj slici (vraćamo se u polazni spoj)

$I_{R4} = I_{NE}$

Napon na R_4 je $U_{R4} = I_{R4}R_4$ $U_{R4} = 0.5V$

Prema Kirchhoffovom zakonu za napone, napon na R_3 jednak je zbroju napona na R_4 i napona na nelinearnom elementu:

$U_{R3} = U_{NE} + U_{R4}$ $U_{R3} = 1\,V$

Struja kroz R_3 je $I_{R3} = \frac{U_{R3}}{R_3}$ $I_{R3} = 0.167\ A$

napon između točaka C i B jednak je naponu na otporniku R_3

$U_{CB} = U_{R3}$

napon na R_1 jednak je

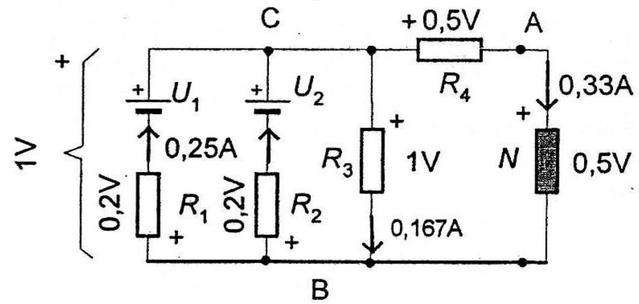
$U_{R1} = U_1 - U_{CB}$ $U_{R1} = 0.2\,V$

struja kroz R_1 je prema Ohmovom zakonu $I_{R1} = \frac{U_{R1}}{R_1}$ $I_{R1} = 0.25\ A$

napon na R_2 jednak je $U_{R2} = U_2 - U_{CB}$ $U_{R2} = 0.2V$

struja kroz R2 je $I_{R2} = \frac{U_{R2}}{R_2}$ $I_{R2} = 0.25\ A$

Sve izračunate veličine su prikazane na slici:



povjera Kirchhoffovog zakona za struje u čvoru C:

$I_{R1} + I_{R2} - I_{R3} - I_{NE} = 0\,A$ zadovoljava!

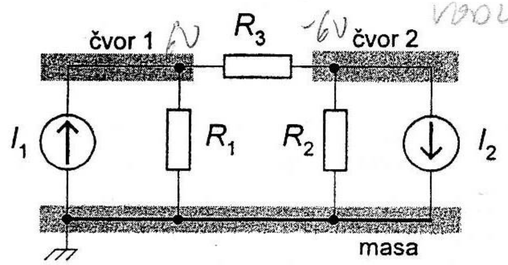
5. Izračunajte potencijale čvorova 1 i 2 u prikazanom spoju el.elemenata. Koristite metodu napona čvorova. Koliki je napon U_{12} te kolika struja prolazi kroz R_3?

Zadano $R_1 = 2\Omega$ $R_2 = 6\Omega$ $R_3 = 12\Omega$

$I_1 = 4A$ $I_2 = 2A$

Rezultat: φ_1=6V, a φ_2=-6 V

I3=1A (smjer od čvora 1)

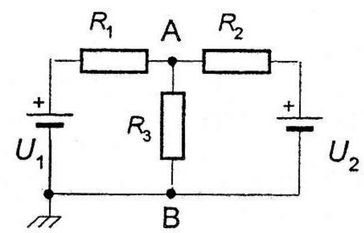


6. Odredite struje u granama prikazane mreže a) izravnom primjenom Kirchhoffovih zakona b) Millmanovom metodom

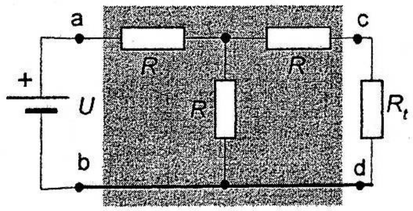
Zadano je: R_1=3 Ω; R_2=3 Ω; R_3=6 Ω; U_1=24 V; U_2=12 V.

Rezultat: U_{AB} = 14,4 V (Millmanova metoda)

I_1 =– 3,2 A I_2 = 0,8 A



7. Na stezaljke a i b priključen je (ulazni) napon U. Izračunajte (izlazni) napon na stezaljkama trošila odnosno napon između točaka **c** i **d**. Koji je odnos tih napona U_{cd}/U_{ab}=? Zadatak riješite na tri načina: 1. kao mješoviti spoj otpornika 2. pomoću Theveninove metode. 3.Nortonove metode
Zadano U= 12 V, R_t=100 Ω, R=57.735 Ω

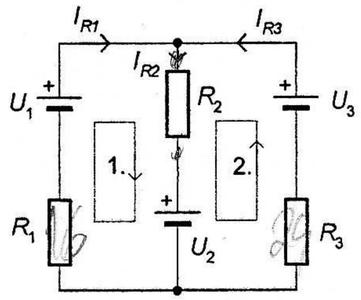


Rezultat: Odnos napona je 0.268 Samo 26,8 % ulaznog napona se pojavi na izlazu.

8. Odredite struju kroz R_2 (I_{R2}) na ove načine a) izravnom primjenom Kirchhoffovih zakona, (jednadžbe treba napisati u skladu s označenim smjerom obilaženja kontura) b) metodom napona čvorova (Millman) c) Theveninovom metodom d) Nortonovom metodom e) superpozicijom.

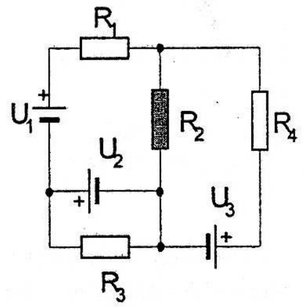
Zadano: R_1 = 16Ω R_2 = 4Ω R_3 = 24Ω
U_1 = 72V U_2 = 8V U_3 = 48V

Rezultat: I_{R1} = 3 A I_{R2} = 4 A I_{R3} = 1 A



9. U mreži prikazanoj na slici, Thevenivom metodom odredite struju kroz otpornik R_2 i pad napona na njegovim krajevima. Koliki bi trebao biti R_2 pa da snaga na njemu bude maksimalna?
Zadano R_1=4Ω R_2=8Ω R_3=5Ω R_4=5 Ω U_1=26 V
U_2=30 V U_3=14 V

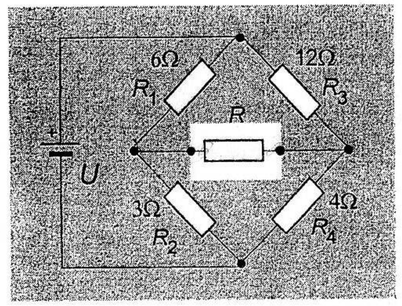
Rezultat: I_2=3,652 U_2=29,217
za maksimalnu snagu R_2=2,222Ω



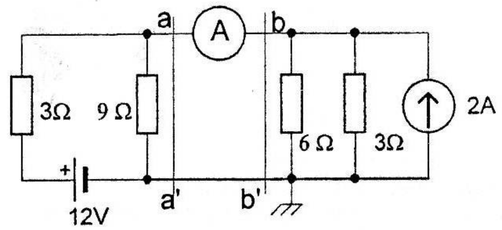
10. U prikazanom mosnom spoju izračunajte struju kroz otpornik koji je u dijagonali mosta. Kolika bi bila struja kroz dijagonalu mosta kada je taj otpor (R) jednak nuli? Koliki treba biti R_1 da bi struja kroz otpornik R bila jednaka nuli? Primijenite Theveninovu ili Nortonovu metodu.

Zadano: U = 72V R = 5Ω R_1 = 6Ω R_2 = 3Ω
R_3 = 12Ω R_4 = 4Ω

Rezultat: I_R=0,6A , R_1=9Ω



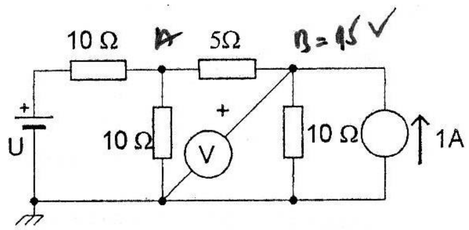
11. U prikazanom spoju elemenata odredite struju koju mjeri ampermetar a) Thevenenovom metodom tako da spoj podijelite po presjeku aa' i bb'. b) metodom napona čvorovba. Koliki je potencijal lijeve i desne stezaljke ampermetra (pretpostavite Ra=0).



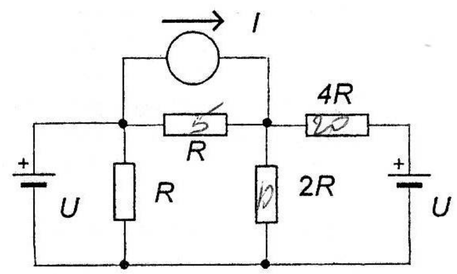
Rezultat: I_A=1,176A , ako je R_a jednak nuli (idealan ampermetar) potencijal obje stezaljke je 6,353 V

12. Koliki je napon izvora (slika lijevo) ako voltmeter pokazuje Uv=15 V označenog polariteta?

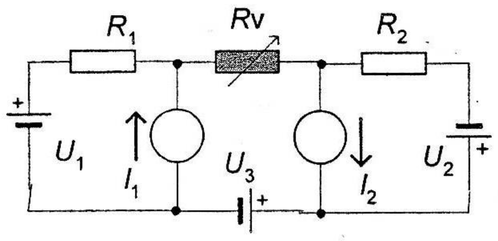
Rezultat: 40 V



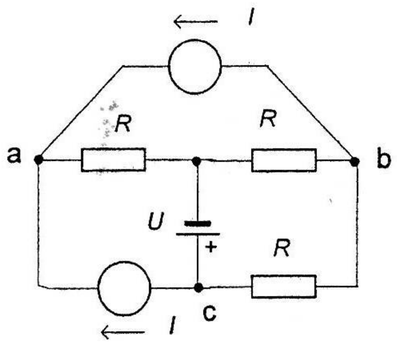
13. Odredite napon na otporniku 2R u prikazanom spoju. Zadano je R=5 Ω I=2 A U=20V. Koliki je taj napon ako se promijeni smjer struje strujnog izvora?
Rezultat: 20 V



14. Odredite maksimalnu snagu na otporniku Rv. Zadano je: R_1=20 Ω R_2=10Ω ,U_1=U_3=20 V, U_2 = 30 V, I_1=I_2=1 A. *Rezultat:* 30 W



15. Prikazani spoj elemenata nadomjestiti prema a) Thevenenovom b) Nortonovom teoremu sa točaka a i c kao i između točaka b i c. U=1 V R= 1 Ω I=1 A

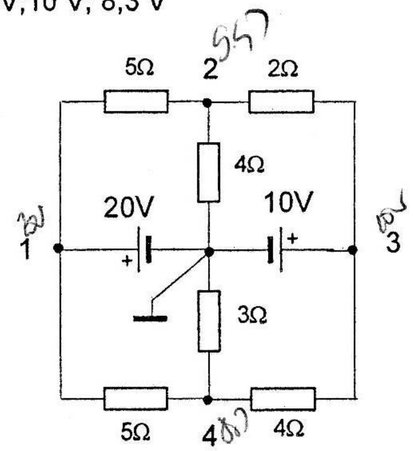


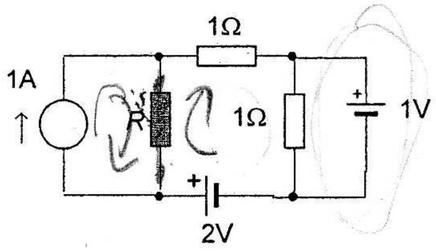
Rezultat: između točaka a i c:
U_T=1 V (+na a) R_T=R_N=1 Ω I_N=1 A
Između točaka b i c: U_T=1,5 V (+na c) R_T=R_N=0,5 Ω I_N=3A

U_{TH}=1V R_{TH}=0,5Ω I_N=2A

Pitanje Kolika će biti struja kroz otpornik od 1 Ω koji spojimo između točaka a i c? (0,5 A)

16. Odredite potencijale čvorova 1,2,3 i 4 , a zatim izračunajte napone na svim otpornicima "vanjske" konture . Rezultat provjerite preko KZN. Rezultat 20 V;9,47 V;10 V; 8,3 V

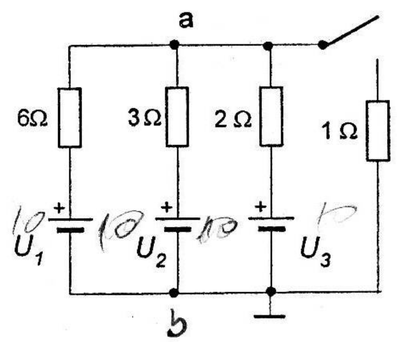


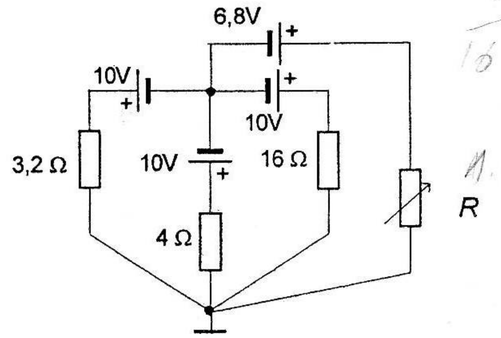


17. Izračunajte struju kroz otpornik R=1 Ω.(slika desno gore) Kolika je ta struja ako strujni izvor promijeni smjer struje

0 2

18. Izračunajte potencijal točke **a** prije i poslije zatvaranja sklopke. Zadano je U_1=U_2=U_3=10 V. *Rezultat* 10 V; 5 V



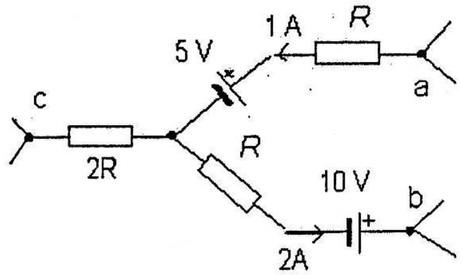


19. Izračunajte otpor R (slika gore desno) uz koji će snaga na njemu biti najveća moguća. Kolika je ta snaga? Rezultat: 1,6 Ω; 1,6W

Test pitanja

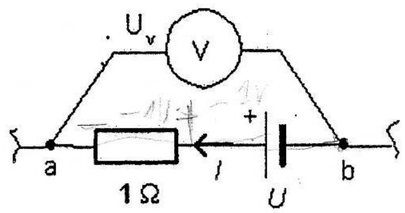
1) Na slici je prikazan dio istosmjerne mreže. Koliki je napon između čvorova a i b (Uab?) ako je R=5Ω.

A) 10 V
B) 20 V
C) -20 V
D) -10 V
E) -30V



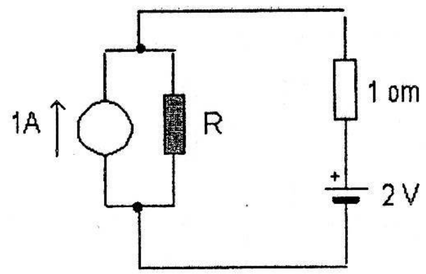
2) Ako je u prikazanom dijelu strujnog kruga (grani mreže)) napon U=1 V; I=1 A, koliko pokazuje voltmetar?

A) 1 V + na a
B) nulu
C) 2 V +na a
D) 1 V - na a
E) 2 V - na a



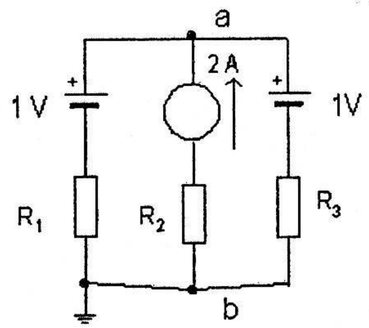
3) Kolika je struja kroz otpornik R= 1 Ω u prikazanom spoju?

A) nula
B) 0,5 A
C) 1 A
D) 1,5 A
E) 2 A



4) Koliki je napon U_{ab} ako su otpori R_1=R_2=R_3=1 Ω?

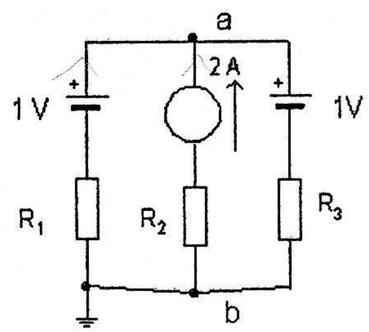
A) nula
B) 1 V
C) 2 V
D) 3 V
E) -1 V



$U_{ab} = \frac{1+2+1}{3}$

5) Kolika je struja kroz R_1 ako je U_{ab}=+2V?

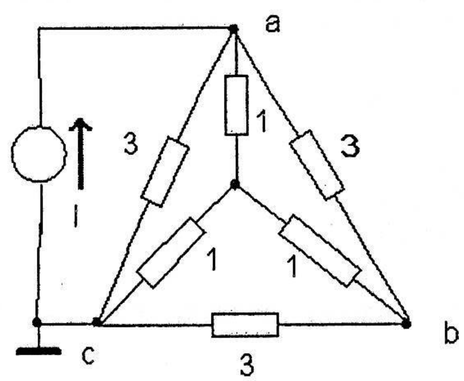
A) nula
B) 1 A, smjer prema dolje
C) 1 A, smjer prema gore
D) 2 A, smjer prema dolje
E) 2 A smjer prema gore



$I_1 = \frac{2V+1V}{}$

6) Koliki je potencijal točke *a* ako je struja *I*=1 A?

A) 3 V
B) 2 V
C) 1 V
D) nula



7) Prilikom određivanja Theveninovog otpora treba sa izvorima postupiti ovako:

A) strujne kratko spojiti
B) naponske odspojiti

C) strujne odspojiti
D) naponske kratko spojiti

8) Thevenenov nadomjesni spoj se sastoji od:

A) naponskog izvora u paraleli sa otpornikom
B) naponskog izvora u seriji sa otpornikom
C) strujnog izvora u seriju sa otpornikom
D) strujnog izvora u paraleli sa otpornikom

9) Na aktivnu (istosmjernu) mrežu spojen je promjenjivi otpor. Maksimalna snaga na tom otporu bit će ako je otpor:

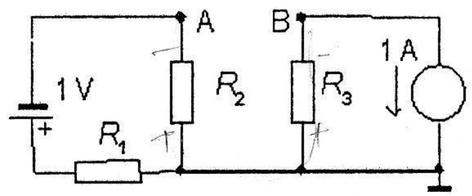
A) jednak Theveninovom otporu
B) manji od Theveninovog otpora
C) veći od Theveninovog otpora

10) Što od navedenog treba učiniti sa izvorima prilikom određivanja Nortonovog otpora :

A) strujne kratko spojiti
B) naponske odspojiti
C) strujne odspojiti
D) sve izvore kratko spojiti
E) sve izvore odspojiti

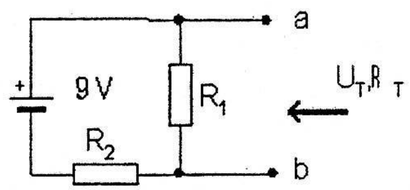
11) Svi su otpori jednaki *R*=1 Ω. Koliki je napon U_{AB}?

A) 1,0 V
B) 0,5 V (+ na A)
C) nula
D) -0,5 V
E) -1,0 V



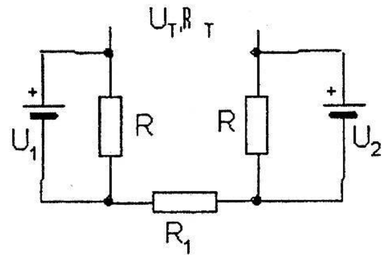
12) Koliki su R_T i U_T ako je R_1=6 i R_2=3 Ω ?

A) 6 V, 9 Ω
B) 6 V, 2 Ω
C) 3 V, 2 Ω
D) 3 V, 9 Ω
E) 6 V, 6 Ω



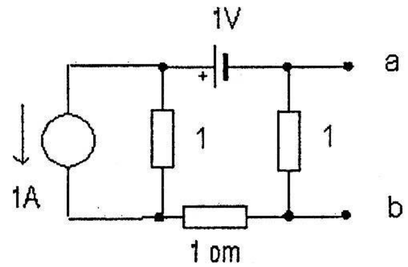
13) Koliki je Theveninov napon ako je U_1=10 V, U_2=5 V R=10 Ω?

A) nula
B) 15 V
C) 5 V
D) nema dovoljno podataka
E) 10 V



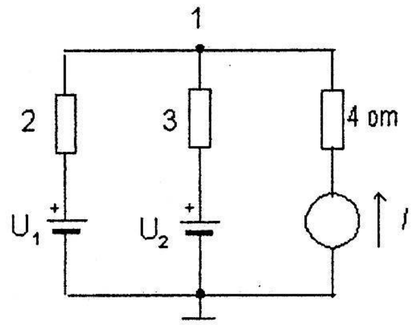
14) Koliki su Theveninov otpor i napon gledano sa točaka a i b?

A) U_T=2 V
B) U_T=2/3 V
C) U_T=0 V
D) R_T=1 Ω
E) R_T=2/3 Ω



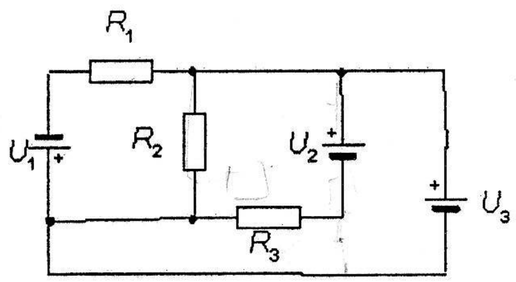
15) Potencijal točke 1 iznosi 10 V. Koliki će biti taj potencijal ako sve otpornike povećamo 10 puta?

A) 10 V
B) 100 V
C) 1 V
D) nema dovoljno podataka



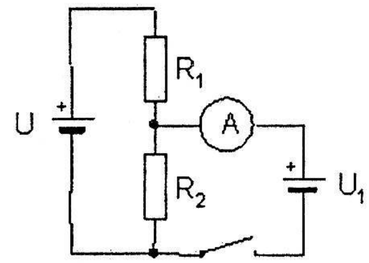
16) U prikazanom spoju svi izvori imaju napon od 10 V, a otpori otpor od 10 Ω. Kolika je struja kroz R_3?

A) nula
B) 1 A
C) 2 A
D) 3 A
E) 1,5 A



17) U prikazanom spoju je R_1=3R_2. Koliki treba biti napon U_1 pa da nakon zatvaranja sklopke struja ampermetra bude jednaka nuli?

A) U_1=0,25 U
B) U_1=U
C) U_1=0
D) U_1=0,66 U
E) U_1=0,75 U



18) Na stezaljke mreže nadomještene po Thevenenu priključimo otpornik R_1=1 Ω , a nakon toga otpornik R_2=4 Ω. Snaga na priključenom otporniku je u oba slučaja bila jednaka. Koliki je Thevenenov otpor R_T?

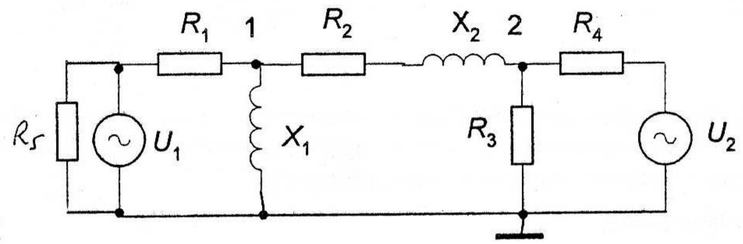
A) nema dovoljno podataka
B) 2 Ω
C) 1 Ω
D) 4 Ω
E) nula

1.D **2**.B **3**.D **4**.C **5**.B **6**.C **7**.CD **8**.B **9**.A **10**.C **11**.B **12**.B **13**.C **14**.BE **15**.A **16**.A **17**.A **18**.B

XI. TJEDAN PREDAVANJA

Mreže izmjenične struje

1. U mreži prikazanoj na slici izračunajte struje kroz pojedine grane (elemente u granama). Koristite. Naponi izvora su u fazi (uzmite da je početni fazni kut za oba napona izvora nula).
Zadano: R_1=5 Ω, X_1=5 Ω, R_2=2 Ω, R_3=6 Ω, R_4=4 Ω, X_2=3 Ω, U_1=30 V i U_2=20 V.



Rezultat: I_{R1}=3,58 A I_{R2}=I_{X2}=1,73 A I_{R4}=1,38 A I_{R3}=2,57 A I_{X1}=3,4 A

Uputa: U kompleksnom području možemo napisati jednadžbe Kirchhoffovih zakona. Nnihovim preuređenjem dobiva se "recept" za pisanje jednadžbi konturnih struja odnosno napona čvorova (pogledati predavanja) . Nepoznanice su u prvom slučaju struje, a u drugom potencijali (naponi) čvorova. Jednadžbe se zatim rješavaju uobičajenim postupcima (npr.determinantama/matricama, supstitucijom, računalnim programima itd.). Koeficijenti u jednadžbama su kompleksni brojevi. Nakon izračuna struja odnosno napona možemo izračunavati snage na elementima mreže.Preporučamo korištenje metode napona čvorova. Pažnja: element u seriji sa strujnim izvorom kao i onaj paralelan naponskom izvoru ne ulazi u jednadžbe.

2. Izračunajte snage na pojedinim elementima mreže iz prethodnog zadatka.

Rezultat: radna snaga *P*uk=117,2 W reaktivna snaga *Q*uk=66,76 VAR ind.

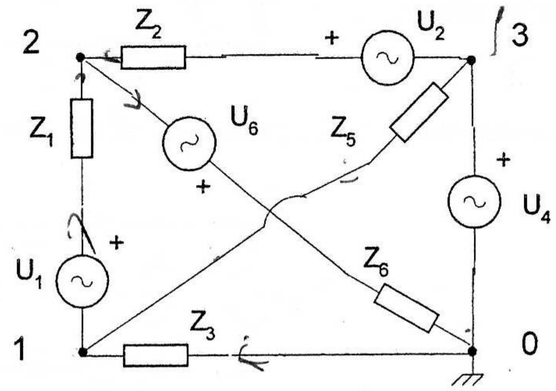
Uputa : navedene snage odnose se na pasivne elemente spoja. Za kontrolu "balansa" snaga potrebno je izračunati snage izvora. Dobiva se da prvi izvor daje 93,1 W a drugi 24,1 W . Reaktivnu snagu izvori "pokrivaju" ovako: prvi izvor ima 53,3 VAR kap. a drugi 13,4 VAR kap.

3. U spoju prema slici iz zadatka 1 otpornik R_2 je promjenjiva otpora. Treba odrediti iznos otpora R_2 uz koji će snaga na R_2 biti maksimalna kao i iznos te snage.

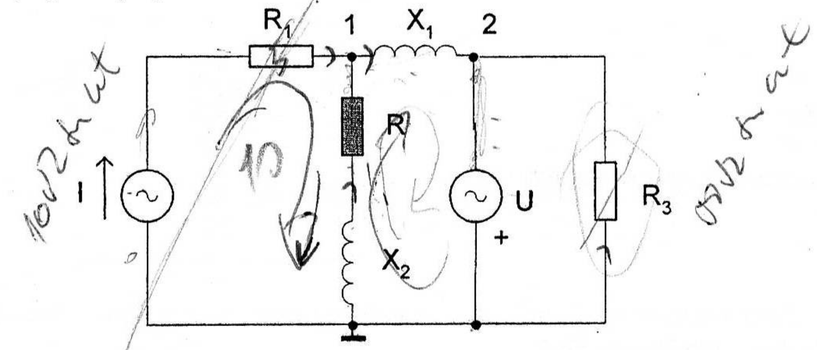
Rezultat: R_2=7,366 Ω P_{max}=9,54 W *Uputa*: Ovakvi problemi rješavaju se primjenom Thevenonovog (Nortonovog) teorema. Mreža se podijeli u dva dijela. Otpornik R_2 se "izvadi" a preostali dio mreže se zamijeni sa naponskim (Thevenenovim) ili strujnim (Nortonovim) izvorom. Sada su dvije mogućnosti. U prvoj se može mijenjati samo otpor trošila. Za postizanje maksimuma mora biti $R=|Z_{th}|$. U drugoj se može mijenjati radni i reaktivni dio trošila. Tada mora biti $Z_{trošila} = Z_{th}^*$ (konjugirano) Postupak izračunavanja parametara nadomjesnog spoja je u načelu jednak kao onaj koji smo promjenjivali kod istosmjernih mreža, ali se sve računa u kompleksnom području.

4. U mreži prema slici izračunajte potencijale čvorova, a zatim struju kroz granu sa $\underline{Z}_1$.
Zadano: $\underline{U}_1$=4 V; $\underline{U}_2$=j8 V; $\underline{U}_4$=4-j4 V; $\underline{U}_6$=-j4 V; Z_1=1+j Ω; Z_2=-j2 Ω; Z_3=1 Ω; $\underline{Z}_5$=j Ω i $\underline{Z}_6$=j2 Ω.

Rezultat: $\underline{\varphi}_1$=-1-3j V; $\underline{\varphi}_2$=1-j V; $\underline{I}_1$=j2 A; I_1=2 A; $i_1(t)$= 2√2 sin(ωt+π/2)

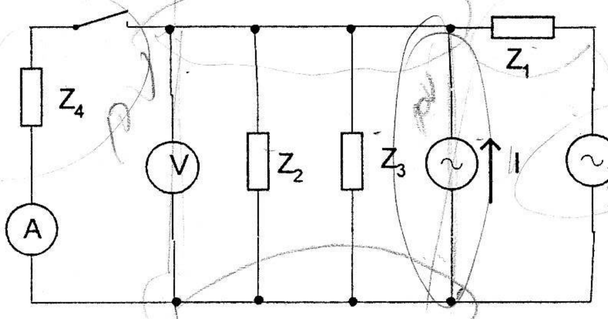


5.Izračunajte koristeći metodu napona čvorova snagu na otporniku *R* u mreži prema slici. Rezultat provjerite a)postupkom superpozicije b) Thevenenovom metodom
Zadano: i =10√2sin(ωt)A, u=50√2sin(ωt) V
R_1=5 Ω, X_1=5 Ω, X_2=4 Ω, R_3=2 Ω i *R*=3 Ω.



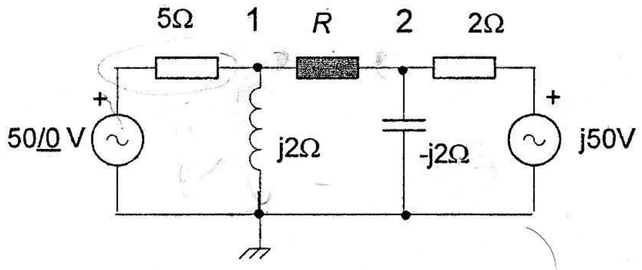
Rezultat: I_R= 3,33+6,66j A (smjer "prema dolje") Uputa: kod superpozicije se izračunava djelovanje svakog izvora posebno tj. razmatra se spoj sa jednim izvorom toliko puta koliko ima uzvora u mreži (ovdje dva). Preostali izvori se "umrtve" tako da se na mjesto naponskih stavlja kratki spoj ,a na mjesto strujnih prekid. *Pažnja paralelni element naponskom izvoru kao i onaj u seriji sa strujnim nema utjecaja na struju kroz R.*

6. U mreži prikazanoj na slici, uz otvorenu sklopku voltmetar pokazuje Uv=10 V. Odredite struju kroz ampermetar i pokazivanje voltmetra nakon zatvaranja sklopke.
Zadano: $\underline{Z}_1$=2+j2 Ω, $\underline{Z}_2$=2-j2 Ω, $\underline{Z}_3$=2 Ω, $\underline{Z}_4$=1+j2 Ω



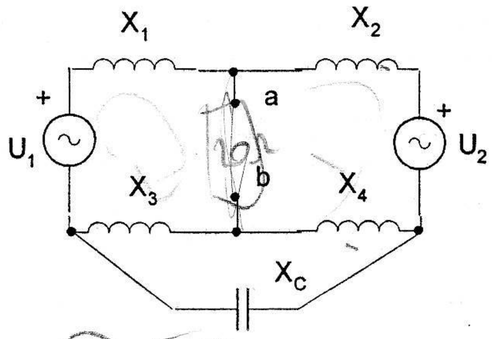
Rezultat: I_A=3,54 A; Uv=7,93 V. Uputa: koristite Theveninov teorem

7. Izračunajte struju kroz otpor *R*= 4 Ω . Koristite postupke: a) konturne struje, b) napone čvorova c) superpoziciju i d) Thevenenov teorem.



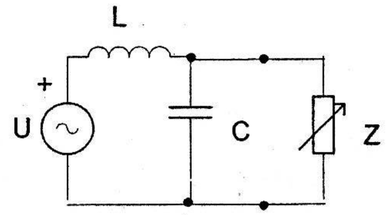
Rezultat: 3,4 A

8. Mrežu prema slici nadomjestite prema Nortonu teoremu s točaka a i b. Kolika struja bi tekla kroz otpornik *R*=20 Ω koji priključimo između tih točaka?
Zadano: X_1=X_4=20, X_3=40, X_2=10, X_C=30 Ω, U_1=10 V (početni fazni kut 0) U_2=10 V (početni fazni kut +90^0).



Rezultat : $\underline{Z}_N$=j20 Ω $\underline{I}_N$=0,37/-26,5 ^{0}; 0,26 A

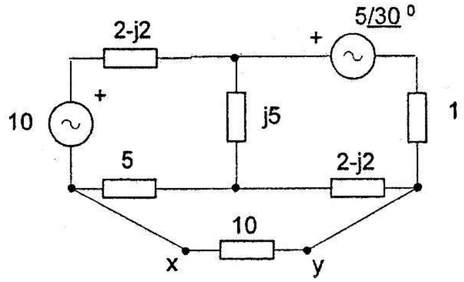
9. Izračunajte iznose kapaciteta kondenzatora i induktiviteta zavojnice (zanemarivog omskog otpora) koje treba uključiti u spoj prema slici, pa da struja kroz impedanciju *Z* bude neovisna o njenom iznosu i jednaka 0.1 A. Napon izvora je *U*=120 V *f*=50 Hz. Da li su dozvoljene vrijednosti impedancije nula odnosno beskonačno?



Rezultat: 2,65 μF; 3,82 H Uputa primijenite Nortonov teorem

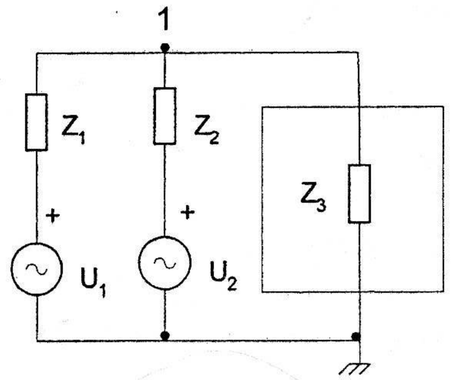
10. Izračunajte napon između točaka označenih s x i y.

Rezultat: 4,35 /-194 ^{0} Uputa: primijenite Theveninov teorem



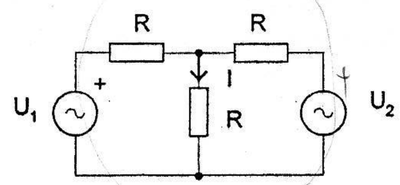
11. Na trošilo Z_3 spojena su paralelno dva izvora. Izračunajte struju trošila. Koristite Millmanovu formulu. Zadano je: $\underline{Z}_1$=1+j, $\underline{Z}_2$=1-j, $\underline{Z}_3$=1+j2 Ω, $\underline{U}_1$=10+j0 V, $\underline{U}_2$=5-j8,66 V.

Rezultat: 4,82 A



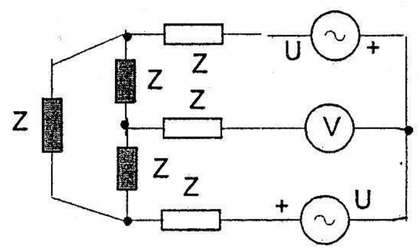
12. U spoju prema slici uz $\underline{U}_1$=$\underline{U}_2$ struja I=1 A. Kolika je struja I ako napon U_1 smanjimo na polovicu prvotne vrijednosti?

Rezultat: 0,75 A

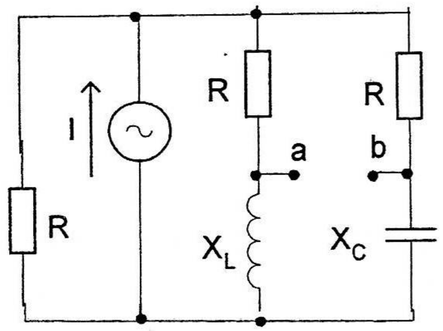


13. Izračunajte napon koji bi mjerio idealni voltmetar u spoju na slici. Zadano je $\underline{Z}$=1+1j, $\underline{U}$=1 V

Rezultat: nula Uputa zamijenite označeni trokut impedancija zvije zdom i zatim primijenite "Millmana". Pitanje Koliko pokazuje voltmeter ako zamijenimo "polaritet" jednog izvora (premjestimo oznaku +) odg: *U*



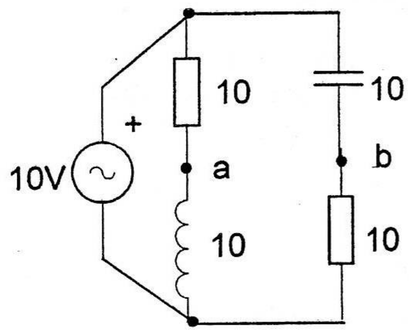
14. U spoju prema slici je $R=X_L=X_C$. I=1A. Kolika je Nortonova struja sa stezaljki a i b?
Rezultat: 1 A



15. Koliki su Thevenenov napon i impedancija između točaka a i b u mreži na slici desno?

Rezultat: 0, 10 Ω

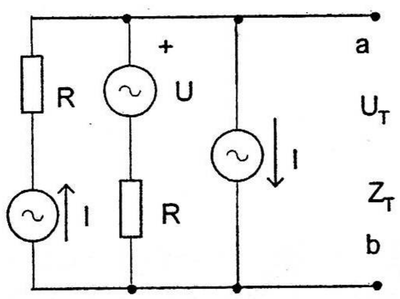
Pitanje: Koliki su U_T i Z_T ako otpornik i kondenzator u desnoj grani zamijene mjesta?
Odgovor: 10V; 10 Ω



16. Odredite elemente nadomjesnog Theveninovog izvora za mrežu na slici ako je R=1 Ω, I=1 A, U=1 V

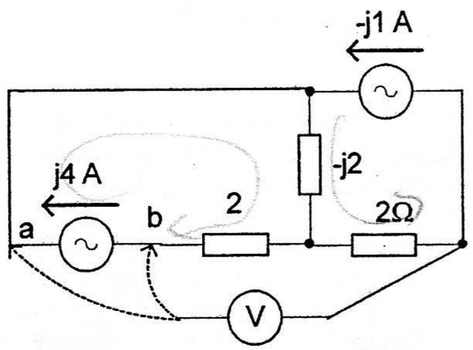
Rezultat: U_T=1 V; Z_T= 1 Ω

Pitanje: Koliki su U_T i Z_T ako desni strujni izvor promijeni smjer struje? Odg. Z_T=1 Ω, U_T= 3 V

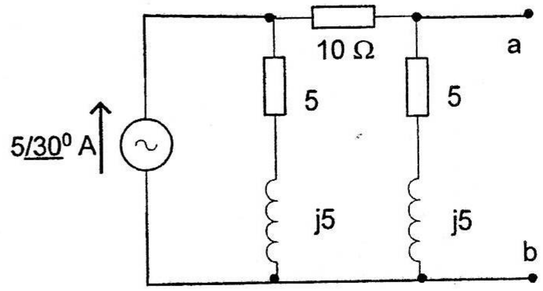


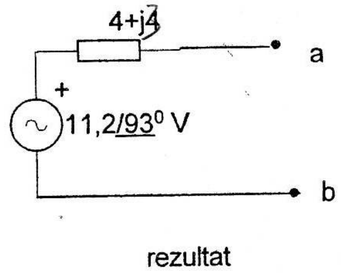
17. Koliki napon mjeri voltmetar (efektivna vrijednost) u spoju prema slici desno ako je spojen na točku a odnosno na točku b?

Rezultat: $2\sqrt{10}$; 10 V

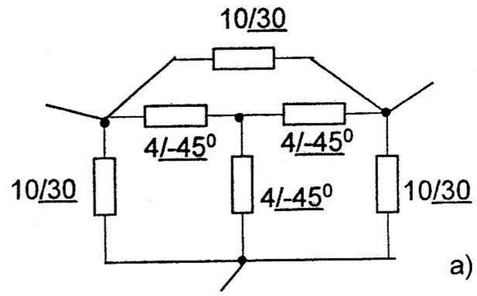


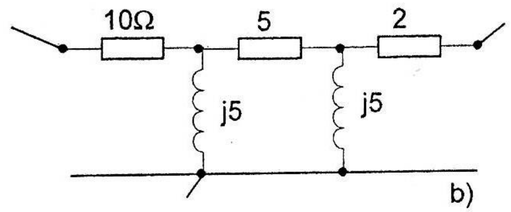
18. Odredite parametre Theveninovog nadomjesnog izvora sa stezaljki **a** i **b**.





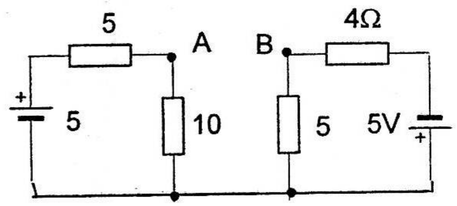
19. Zamijenite prikazane spojeve impedancija na slici a) i b) sa spojem impedancija u zvijezdu (Y spoj).



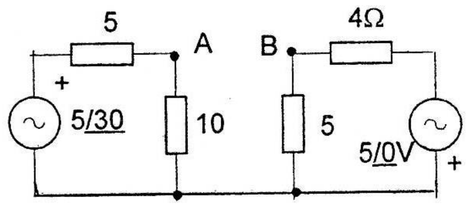


Rezultat a) Z=2,29/-3,5 (simetrična zvijezda) b) (12+j1); (-1+j2); (4+j1)

20. Odredite parametre Theveninovog nadomjesnog izvora sa stezaljki A i B za spoj prikazan na slici a ("istosmjerna mreža) i b (izmjenična mreža).



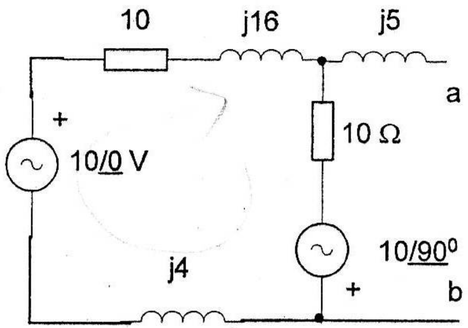
a)

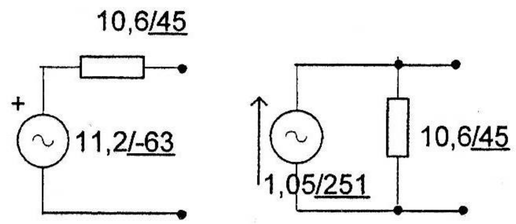


b)

Rezultat a) 6,11 V; 5,55 Ω b) 5,9/16,4 ⁰ V ; 5,55/0 Ω

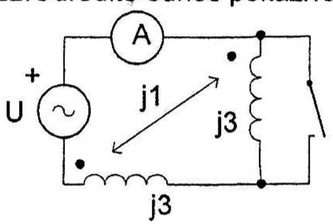
21. Odredite parametre nadomjesnog izvora sa stezaljki a i b po Theveninu ,a zatim po Nortonu.





rezultat

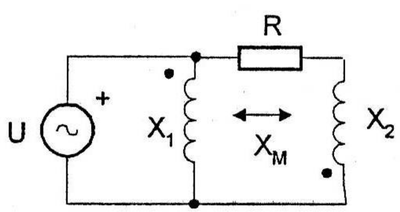
22. Odredite odnos pokazivanja ampermetra uz otvorenu i zatvorenu sklopku. I_{ot}/I_{zat}=?



2/3

Rezultat 5/6 Uputa primjenite nadomjesni spoj bez međuinduktivne veze.

23 Izračunajte snagu na otporniku R=25 Ω u spoju prema slici. Zadano je : X_1=X_2=25 Ω, X_M=20 Ω, U=25 V.

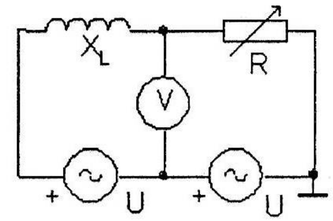


Rezultat 71 W

TEST PITANJA

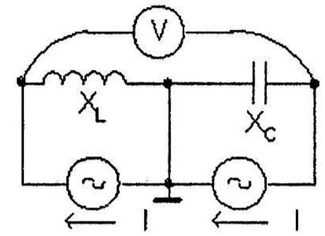
1) Koliki je napon voltmetra ako je $\underline{U}$=10 $\underline{|0^0}$. R=X_L?

A) 10 V
B) 20 V
C) nula
D) 14,1
E) 7,07 V



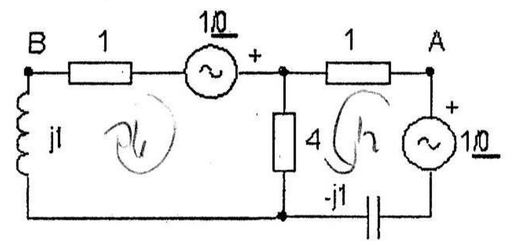
2) Struja I=1 A (efektivno), X_C=X_L=1 Ω. Koliko pokazuje voltmetar (efektivno)?

A) nula V
B) 1,41 V
C) 2 V
D) 0,707 V
E) 2,82 V



3) Odredite napon U_{AB}:

A) -0,5-0,1j
B) 0,5+0,1j
C) -1-0,2j
D) 1+0,2j
E) 1-0,1j V



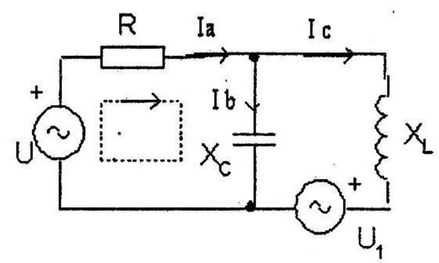
4) Kolika je kompleksna vodljivost grane električne mreže koja se sastoji od serijskog spoja strujnog izvora i induktivnog otpora $\underline{X}_L$=j12 Ω

A) j12
B) 1/j12
C) ∞
D) 0
E) j/12

VODLJIVOST GRANE S A STRUJNIM IZVOROM JE 0 R=∞

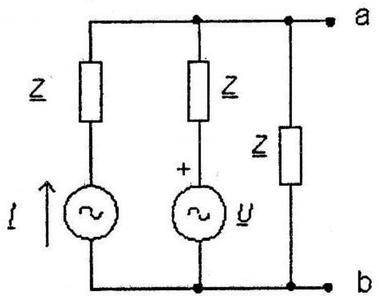
5) Koja od napisanih jednadžbi odgovara za označenu konturu?

A) $\underline{U}$-$\underline{I}$a•R-$\underline{I}$b•$\underline{X}$c=0
B) $\underline{U}$+$\underline{I}$a•R+$\underline{I}$b•$\underline{X}$c=0
C) $\underline{U}$+$\underline{I}$a•R-$\underline{I}$b•$\underline{X}$c=0
D) -$\underline{U}$+$\underline{I}$a•R-$\underline{I}$b•$\underline{X}$c=0



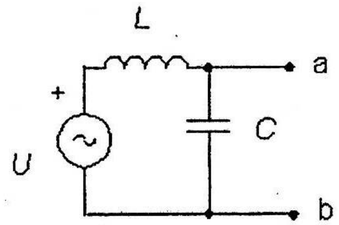
6) Za prikazani spoj odredite Thevenenovu impedenciju sa stezaljki a i b.

A) $\underline{Z}$
B) $\underline{Z}/2$
C) $\underline{Z}/3$
D) $3\underline{Z}$
E) $2\underline{Z}$



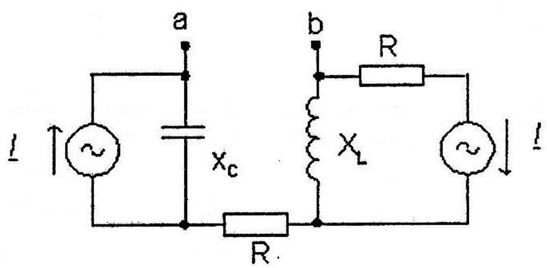
7) Koliki su Nortonova impedancija i struja gledano sa priključnica a i b ako je X_L=10 Ω, X_C=10 Ω U=10 V.

A) Z_N je beskonačno
B) I_N=1 A
C) Z_N=nula
D) I_N=2 A



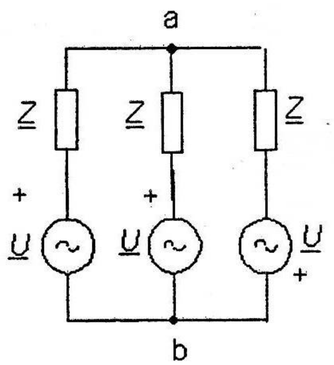
8) Odredite Thevenenovu impedanciju sa stezaljki a i b ako je R= X_L= X_C=10 Ω

A) 10+0j Ω
B) 10+10j Ω
C) 10+20j Ω
D) 30+10j Ω



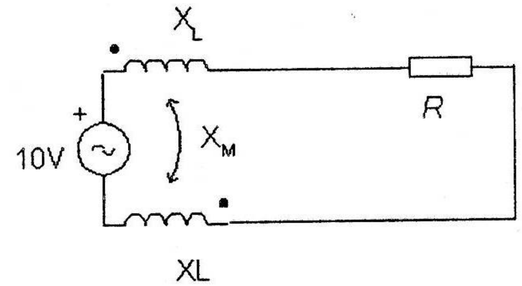
9) Koliki je napon između točaka a i b (koristite Millmanovu metodu):

A) $\underline{U}$
B) $\underline{U}/2$
C) $\underline{U}/3$
D) $2\underline{U}$
E) nula



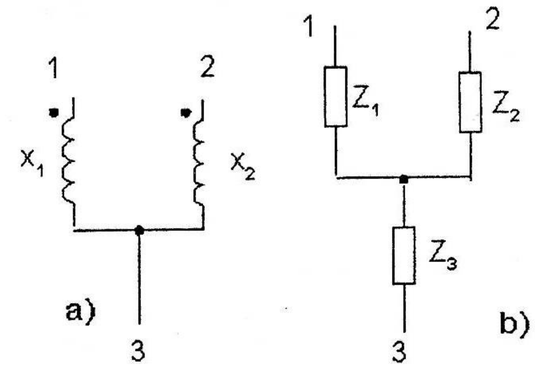
10) Kolika je struja u prikazanom spoju ako je: R=10 Ω X_L=X_M=2,5 Ω?

A) 1 A
B) 0,7 A
C) 2 A
D) 1,41 A
E) 0,5 A



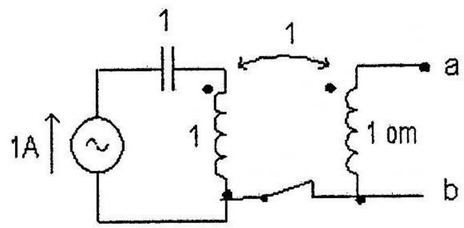
11) Za spoj prema slici a) postoji nadomjesni spoj prema slici b) bez međuinduktivno povezanih elemenata. Koliki su Z_1, Z_2 i Z_3 u nadomjesnom spoju? Odaberite točne odgovore

A) Z_1=X_1-X_M
B) Z_1=X_1+X_M
C) Z_2=X_2+X_M
D) Z_3=X_M
E) Z_3=-X_M



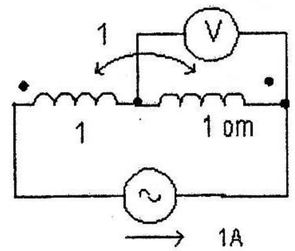
12) Hoće li se i kako promijeniti napon voltmetra ako otvorimo sklopku S?

A) napon se ne mijenja
B) poraste
C) smanji se



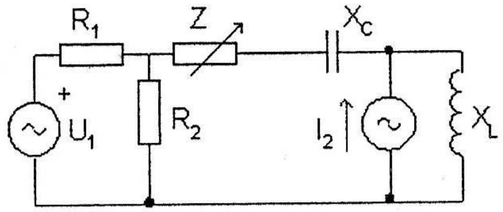
13) Odredite pokazivanje voltmetra.

A) nula
B) 1 V
C) 2 V
D) 0,7 V
E) 2 V



14) U spoju prema slici impedancija Z odabrana je tako da snaga na njoj bude maksimalna. Kolika je ta snaga? R_1=10, R_2=10, X_C=5 X_L=5 Ω, $\underline{U_1}$=50/0, $\underline{I_2}$=5/0.

A) 42,5 W
B) 62,5 W
C) 91,8 W
D) 122,5 W
E) 137,1 W



1.A **2.**A **3.**D **4.**D **5.**A **6.**B **7.**AB **8.**A **9.**C **10.**B **11.**D **12.**A **13.**A **14.**B

XII.TJEDAN PREDAVANJA

Višefazni sustavi

Napomena: u svim zadacima (osim ako nije posebno naglašeno) smatramo da je trofazni izvor simetričan sa redoslijedom faza R S T, a to znači da napon faze S fazno zaostaje za 120^0, a napon faze T za 240^0 u odnosu na napon faze R te da su efektivne vrijednosti napona po fazama jednake.

1. Trofazno simetrično trošilo spojeno je u zvijezdu. Impedancija pojedine faze je $\underline{Z}$=100/0 Ω, a linijska struja I=1 A. Koliki je linijski napon izvora? Kolika je struja kroz nul vod ?

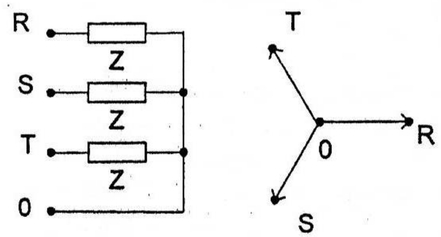
Rezultat : 173 V, 0 A *Uputa* : Linijska struja u ovom spoju prolazi i kroz impedancije od kojih je sastavljeno trošilo... Suma struja u zvjezdištu trošila je nula, jer je trošilo simetrično (nul vod je u ovom slučaju nepotreban).

2. Trofazno simetrično trošilo spojeno je u trokut. Impedancija pojedine faze je $\underline{Z}$=100/0 Ω, a linijska struja I=1 A. Koliki je linijski napon?

Rezultat : 57,8 V

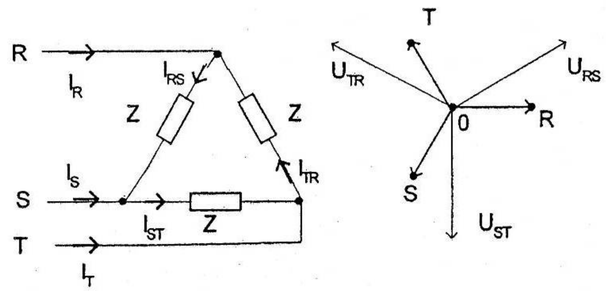
3. Trofazno simetrično trošilo spojeno u zvijezdu četverovodno je priključeno na trofazni izvor linijskog napona 12 V. Impedancija pojedine faze je $\underline{Z}$=100/0 Ω. Izračunajte a) fazni napon b) faznu struju c) linijsku struju d) struju nul vodiča. e) ukupnu radnu snagu. Nacrtajte topografski dijagram napona na trošilu. Uzmite da je fazni napon faze R pod nula stupnjeva.

Rezultat: U_f=6,94 V, I_f=69,4 mA , I_l=69,4 mA, I_o=0, P=1,43 W *Pitanje:* što se promijeni u izračunatim podacima ako se prekine nul vodič? (ništa, jer je trošilo simetrično)



4. Trofazno simetrično trošilo spojeno u trokut priključeno je na trofazni izvor linijskog napona 12 V. Impedancija pojedine faze je $\underline{Z}$=100/0 Ω. Izračunajte a) fazni napon trošila b) faznu struju c) linijsku struju. d) ukupnu radnu snagu. Nacrtajte vektorski-topografski dijagram napona na trošilu. Uzmite da je napon faze R pod nula stupnjeva.

Rezultat; U_f=12 V
I_f= 120 mA I_l=207 mA
P=4,32 W



Uputa : Prilikom označavanja struja i napona koristimo indekse. Kod napona drugi indeks označava referentnu točku za taj napon. Struja ima referentni smjer od prvog prema drugom indeksu. Pod faznom strujom podrazumijevamo struju koja prolazi pojedinom impedancijom trošila. Ako je trošilo u zvijezda spoju tada je linijska struja jednaka faznoj. Kod **simetričnog trošila** u trokut spoju su fazne struje za 1,73 puta manje od linijskih. Nadalje, treba razlikovati fazni napon na impedancijama trošila od faznog napona izvora. Ovdje su na impedancijama trošila naponi U_{RS}, U_{TR} i U_{ST}. Usporedbom snaga za zadatke 3 i 4. vidimo da je snaga u zadatku 4. tri puta veća nego ona u zadatku 3. Zaključak : ako iste impedancije prespojimo u trokut snaga je tri puta veća.

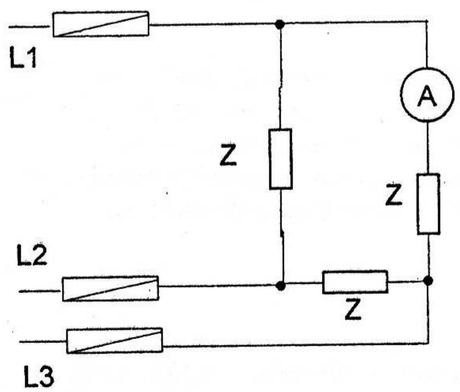
5. Tri jednaka otpornika spojena su u zvijezda spoj i priključena su na trofazni izvor. Kako se promijene linijske struje i ukupna snaga ako otpornike prespojimo u trokut spoj.

Rezultat : povećaju se tri puta
Uputa Snagu (radnu) kod **simetričnog** trošila bez obzira na način spajanja (u « zvijezdu » ili « u trokut ») računamo formulom $P=\sqrt{3}\, U_l \cdot I_l \cos\varphi$ (izvedite je)
Pitanje : Koja je formula za proračun prividne (jalove) snage kod **simetričnih** trošila? Kako izračunavamo ukupnu (radnu,prividnu i reaktivnu) snagu nesimetričnih trošila ?

6. Ampermetar u prikazanom spoju trošila pokazuje 3 A. Koliko će ampermetar pokazivati ako pregori osigurač u linijskom vodu sa oznakom L1 ?

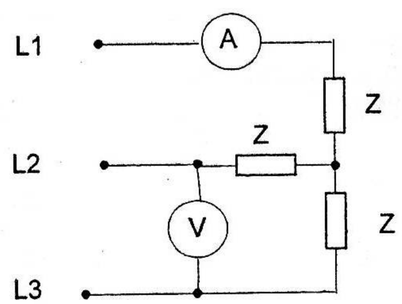
Rezultat : 1,5 A ;jer impedancija koja je u seriji sa ampermetrom dobiva dvaputa manji napon

Uputa: Treba razlikovati normalni režim rada u kojem je sve spojeno kako je predviđeno od « neregularnog ». Iz raznih razloga može doći do prekida u pojedinim vodičima trofaznog sustava. Neki prekidi mogu prouzročiti neugodne posljedice. Osobito je pri tom opasan **prekid nul vodiča u nesimetričnom zvijezda spoju !!!** Spomenuti « prekid » može nastati zbog nepravilne montaže, mehaničkog oštećenja vodova, pregaranja osigurača isl.



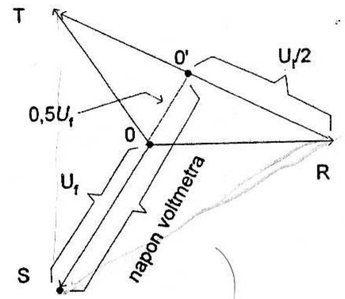
7. U mreži prema slici voltmetar pokazuje 200 V, a ampermetar 1,5 A. Koliki je iznos impedancije Z?

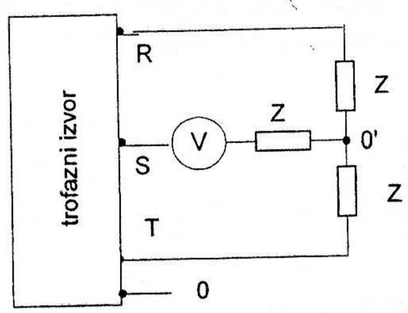
Rezultat : 77 Ω Uputa : U_V je linijski napon, a I_A je linijska struja. Fazni napon na impedancijama trošila je za 1,73 puta manji od linijskog dok je struja jednaka linijskoj.. 200/(1,73·1,5) =...



8. Koliki su fazni i linijski naponi trofaznog simetričnog izvora ako ovako spojen voltmetar pokazuje 120 V. Zadatak riješite pomoću topografskog dijagrama.

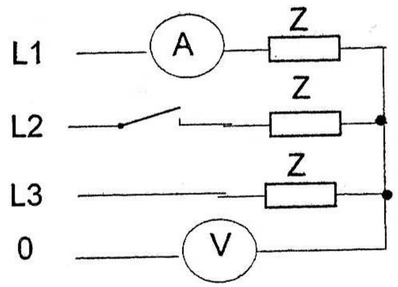
Rezultat 80 V; 138 V





Uputa : voltmetar ima vrlo veliki otpor pa je prema tome u ovom zadatku vod S zapravo u « prekidu » *Pitanje* : Koliko bi pokazao voltmetar koji bi spojili između točaka 0 i 0' te između 0' i R ? Odg. 40 V , 69 V (pogledajte na dijagramu)

9. Ako u spoju na slici ampermetar uz zatvorenu sklopku pokazuje 1 A, a voltmetar uz otvorenu 50 V, koliki je iznos *Z*? Koliko će pokazati voltmeter nakon zatvaranja sklopke?



Rezultat: 100 Ω, 0 V *Uputa*: voltmetar mjeri napon između nul točke izvora i zvjezdišta trošila, a pritom prekida nul vod

10. Na trofazni izvor priključeno je simetrično trošilo u trokut spoju. Radna snaga trošila je 1000 W. Kolika je radna snaga trošila nakon što pregori osigurač u jednom od linijskih vodova?

Rezultat: 500 W

11. Na trofazni izvor četverovodno je priključeno simetrično trošilo u zvijezda spoju. Snaga trošila je *P*. Kolika je snaga trošila ako pregori osigurač u jednom od linijskih vodiča.

Rezultat: 2/3 *P*

12. Na trofazni izvor priključeno je simetrično trošilo u zvijezda spoju bez nul vodiča. Snaga trošila je *P*. Kolika je snaga trošila ako pregori osigurač u jednom od linijskih vodiča.

Rezultat: *P*/2

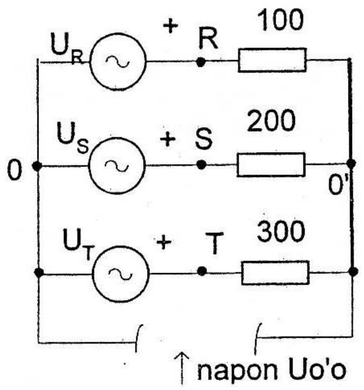
13. Nesimetrično trošilo u zvijezda spoju četverovodno je priključeno na trofazni simetričan izvor. U pojedinim fazama su otpori 100, 200 i 300 Ω. Fazni napon je 220 V. Izračunajte napon između zvjezdišta izvora (0) i zvjezdišta trošila (0') ako se prekine nul vodič. Uzmite da je napon faze R pod nula stupnjeva. Koristite Millmanovu formulu. Na slici je prikazan spoj pripremljen za primjenu navedene formule.

Rezultat : $\underline{U}_{0'0}$= 70 - 17,3j

Iznos tog napona je 72 V (to bi pokazao Voltmetar)

Uputa : Sustav napona je
$\underline{U}_R$=220+0j $\underline{U}_S$=-110-190j $\underline{U}_T$=-110+190j

Točka nula, zvjezdište izvora je referentna točka sustava



14. U normalnom režimu rada (kada nije prekinut nul vodič) svaka impedancija (otpor) trošila iz prethodnog zadatka dobiva fazni napon od 220 V. Izračunajte napone u fazama trošila nakon prekida nul vodiča.

Rezultat : otpor u fazi R (100 Ω) dobiva napon od 151 V, u fazi S 250 V, a u fazi T 274 V, *Komentar* : Očito je da zbog prekida nul vodiča nastupa nepovoljna situacija jer kao što znamo sva trošila (žarulje, grijalice, TV prijemnici itd itd.) su napravljena za nazivni napon od 220 V. Zbog prekida nul vodiča neka će dobiti manji, a druga preveliki napon koji onda može biti uzrok kvara trošila. Naponi na trošilu postaju nesimetrični.

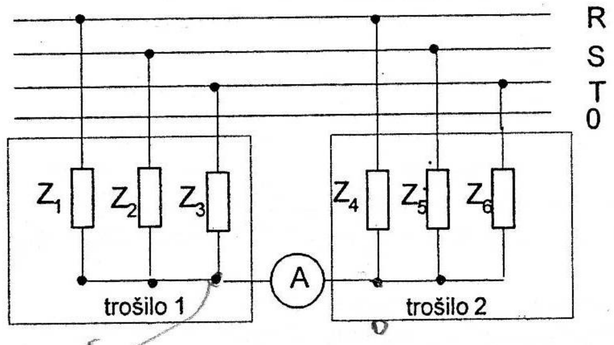
15. Između točaka 1, 2 i 3 spojene su u zvijezdu tri jednake impedancije ($\underline{Z}_1$=$\underline{Z}_2$=$\underline{Z}_3$) i priključene četverovodno na simetrični trofazni generator (R, S, T) faznog napona U_f. Odredite napone i struje pojedinih faza trošila. Kolika je ukupna snaga trošila? Uzevši fazni napon U_R za referentan (s kutem 0°), nacrtati vektore struja te topografski dijagram napona. Koristiti mjerilo 40 V/cm i 1 A/cm.
Zadano: Z_1=Z_2=Z_3=100 Ω; φ_1=φ_2=φ_3=30°; U_f=220 V.

Rezultat : 0 V ; 2,2 A

16. Nesimetrično trofazno trošilo (Z_1, Z_2, Z_3) u spoju zvijezde priključeno je bez nulvodiča na simetrični trofazni generator (R, S, T). Odrediti napon $U_{0'0}$ te napone i struje pojedinih faza trošila. Koji je omjer snaga na fazi 3 i fazi 1 trošila (P_3/P_1) ? Nacrtati vektore struja te topografski dijagram, tako da je fazni napon U_R referentan (s kutem 0°). Dijagram crtati u mjerilu 40 V/jed i 1 A/jed.
Zadano: Z_1 = 100 Ω, φ_1 = 0°; Z_2 = 100 Ω, φ_2 = -90°; Z_3 = 100 Ω, φ_3 = 0°.

Rezultat: 136-27j; 1/14

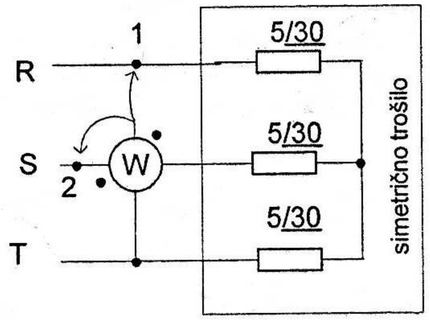
17. Na trofaznu mrežu priključena su dva trošila oba u zvijezda spoju. Nul-točke trošila *nisu spojene* na nul-točku izvora. Između nul-točaka spojimo ampermetar. Izračunajte struju koju pokazuje ampermetar. Otpor vodova kao i unutrašnji otpor izvora je zanemarivo mali. Koristite Theveninov teorem.
Zadano: U_f=220 V, Z_1=60, Z_2=60 Z_3=15 Ω, Z_4=Z_5=Z_6=20+j20.



Rezultat: Uth=-55+95,3j *Zth*=16,7+6,7j *Iamp*=| *Uth/Zth* |=6,1 A
Uputa: Theveninov teorem koristimo i u trofaznim mrežama. Napon *U*th ovdje izračunamo kao razliku potencijale zvjezdišta trošila. "Olakšavajuća okolnost" je da je potencijal zvjezdišta kod trošila 2 jednak nuli (simetrično trošilo). Theveninova impedancija nakon "kratkog spajanja" svih izvora je serijski spoj dviju paralelnih grupa impedancija.

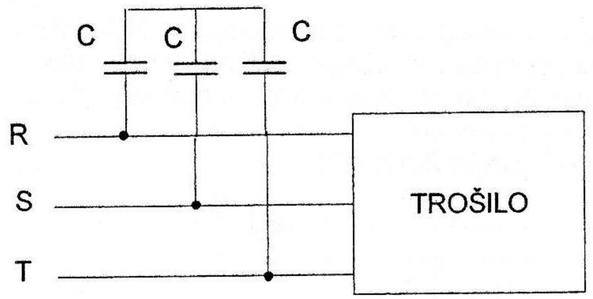
18. Trofazno simetrično trošilo u zvijezda spoju priključeno je na trofazni simetričan izvor linijskog napona U_l= 380 V. Odredite pokazivanje vatmetra (koji ima + i ! pokazivanje) ako mu je prema slici naponska stezaljka spojena: a) na točku 1; b) na točku 2. Izračunajte radnu jalovu i prividnu snagu trošila.

R=4,33



Rezultat: -985 W ; 681,9 W

19. Trofazno simetrično trošilo, radne snage *P* i faktora snage cosφ, priključeno je na trofazni izvor frekvencije *f*. Odredite kapacitet kondenzatora *C* u spoju prema slici, tako da se faktor snage izvora poveća na cosφ' (ind.).
Zadano: U_l=380 V, *f*=50 Hz; *P*=3,5 kW; cos φ=0,6; cosφ'=0,8.



Rezultat: 44,7μF
Uputa: Kompenzacija jalove snage se u trofaznom sustavu vrši sa grupom kndenzatora koja je spojena u zvijezdu ili trokut (ovdje u zvijezdu). Računamo kao kod jednofaznog sustava. Pretpostavimo da je trošilo u zvijeda spoju....

20. Kondenzator kapaciteta *C* priključuje se prvo između stezaljki R i S , a zatim između stezaljki R i 0 trofaznog (simetričnnog) generatora. Ako je u drugom slučaju iznos struje kroz kondenzator manja za ΔI nego u prvom izračunajte linijski napon mreže. Zadano: *C*=150 μF; ΔI=7.59 A.

Rezultat: 381 V

21. Na trofazni simetričan generator (R,S,T) linijskog napona U_l spojeno je trošilo sastavljeno od tri otpornika u zvijezda spoju bez nul-vodiča. Otpornici u fazama R i S su jednakog iznosa *R*, dok otpornik u fazi T ima otpor *R*/4. Ako je ukupna snaga trošila *P* izračunajte otpor *R*. Zadano: U_l=380 V; *P*=2000 W.

Rezultat: 108,7 Ω

22. Na trofazni izvor (A,B,C) priključeno je trošilo u zvijezda spoju s nul-vodičem. U fazama B i C nalaze se jednaki radni otpornici (R) dok je u fazi A čisti kapacitivni otpor. Poznat je iznos linijskih struja I_A, I_B i I_C. Uz prekinuti nul-vodič poznata je radna snaga trošila *P*. Odredite otpor *R*. Zadano: I_A=1 A; I_B=I_C=2A; *P*=690 W.

Rezultat: 98 W
Komentar: Osim označavanja sa R S T korisi se alternativno označavanje slovima A B C....

23. Tri impedancije spojene u zvijezdu, priključene su na trofaznu četverovodnu mrežu. Impedancija u fazi R je čisto kapacitivna, dok su impedancije u fazama S i T čisto omske. Ako ampermetri u linijskim vodičima pokazuju I_R=I_S=I_T=5 A, odredite njihova pokazivanja kada dođe do prekida nulvodiča.

Rezultat : 6,7 A 7,5 A 2 A

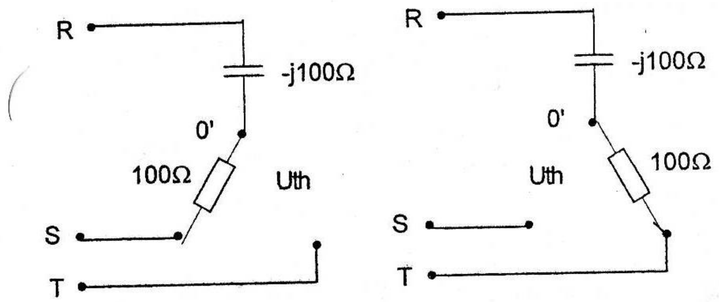
24. Tri grijača snage *P*, 2*P* i 3*P* (cos φ=1) u zvijezda spoju priključena su četverovodno na trofazni simetričan izvor linijskog napona U_l=380 V. Odredite struju kroz nul vodič ako je snaga *P*=380 W.

Rezultat: 3 A

25. Trofazno trošilo u spoju zvijezde s nul vodičem sastavljeno je od: otpornika (u fazi R), kondenzatora (u fazi S) i zavojnice (u fazi T), priključeno je na trofazni izvor. Snaga trošila je *P*=20 W. Odredite radnu snagu trošila ako se prekine nul vodič uz R=X_C=X_L.

Rezultat: 60 W

26. Nadomjestite po Theveninu trofaznu mrežu sa točaka T i 0' odnosno S i 0' Fazni napon izvora je 220 V, a početni fazni kut napona U_R je nula. U kojem je slučaju Theveninov napon veći ?



Rezultat:

140 V i 520 V

TEST PITANJA

1) Početni fazni kut napona faze R je nula stupnjeva. Odredite početni fazni kut napona faze S:

A) +150 stupnjeva
B) +120 stupnjeva
C) -2π/3 radijana
D) -π/4 rad
E) -π/3 rad

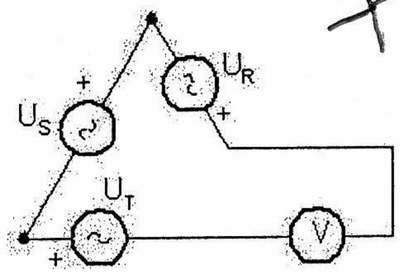
2) Fazni napon simetričnog izvora je 220 V. Ako fazor napona faze R ima početni fazni kut nula , odredite fazor napona U_{TR}.

A) -330+j190
B) -330-j190
C) 220+j190
D) 220-j110

3) Trofazni simetrični teret spojen je u zvijezdu bez nul voda. Impedancija svake faze je *Z*, a linijska struja *I*. Koliki je linijski napon?

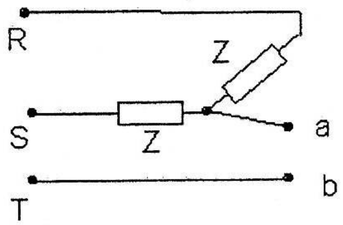
A) 2.2 *I*•*Z*
B) 1,73 *I*•*Z*
C) 1,41 *I*•*Z*
D) 3 *I*•*Z*
E) *I*•*Z*

4) Koliki napon pokazuje voltmetar u prikazanom spoju?



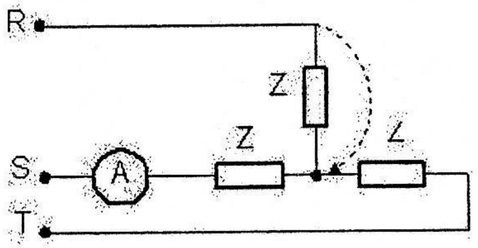
A) fazni napon
B) linijski (međufazni) napon
C) nula
D) 3 Uf
E) Uf/3

5) Na trofazni naponski izvor priključen je spoj prikazan slikom. Koliki je Z_T (Theveninova impedancija) sa stezaljki a i b?



A) 2 Z
B) Z/2
C) Z
D) nula
E) beskonačno

6) Hoće li se i kako promijeniti struja kroz ampermetar ako dođe do kratkog spoja u označenoj fazi?

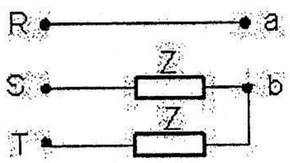


A) neae
B) porasti ae 1,73 puta
C) porasti ae tri puta
D) smanjt će se 3 puta
E) smanjit će se 1,73 puta

7) Simetrično trošilo spojeno je u trokut i priključeno je na simetričan trofazni izvor. Kolika je linijska struja ako je fazna struja 1 A?

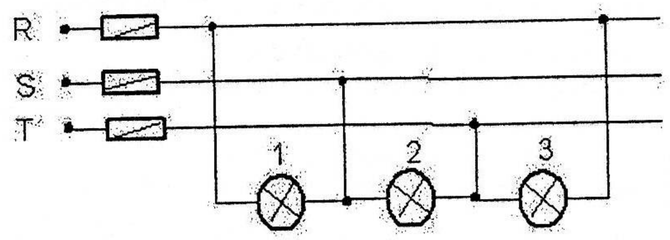
A) 3 A
B) 1 A
C) 1,73 A
D) 1/1,73 A

8) Koliki je Theveninov napon sa stezaljki a i b ako je trofazni izvor simetričan faznog napona 220 V?



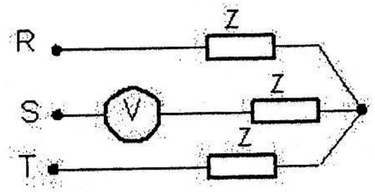
A) 220 V
B) 190 V
C) 380 V
D) 330 V
E) nula

9) Ako pregori osigurač u linijskom vodu faze R dogoditi će se slijedeće:



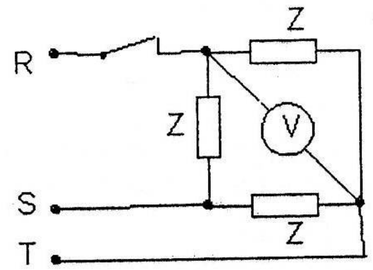
A) ugasi se žarulje 1
B) ugasi se žarulja 2
C) sve žarulje svjetle slabije
D) žarulje 1 i 2 svjetle slabije , a 3 normalno
E) žarulje 1 i 3 svjetle slabije, a 2 normalno

10) Koliki je fazni napon ako idealan voltmetar pokazuje 220 V?



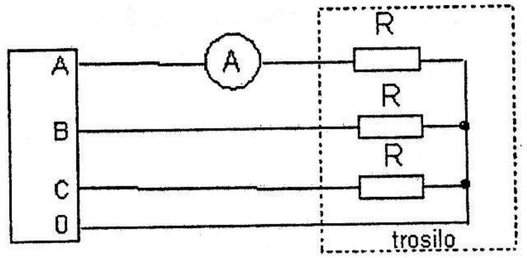
A) 220 V
B) 146,6 V
C) 380 V
D) 110 V
E) 330 V

11) Hoće li se i kako promijeniti pokazivanje voltmetra ako se otvori sklopka (prekine se linijski vod faze R)?



A) poveća se
B) smanji se
C) ostane jednako

12) Ampermetrom mjerimo linijsku struju. Kako se promijeni pokazivanje ampermetra ako otpornike prespojimo u trokut (nul vodič pri tom odspojimo)?



A) poraste 3 puta
B) poraste 1,73 puta
C) ostane jednako
D) smanji se tri puta
E) smanji se 1,73 puta

13) Nesimetrično trošilo (u zvijezda spoju) je četverovodno spojeno na trofazni izvor. Koje od navedenih posljedica mogu nastupiti pri prekidu nul vodiča?

A) nema nikakvih posljedica
B) u nekim fazama se napon smanji, a u nekima se poveća
C) u svim fazama se napon malo smanji
D) u svim fazama se napon poveća
E) u svim fazama napon padne na nulu

14) Nesimetrično trošilo je spojeno u trokut. Dolazi do prekida jednog linijskog voda. Koje posljedice nastupaju na trošilima u pojedinim fazama?

A) u svim fazama se napon smanji
B) u jednoj fazi se napon smanji u ostalima ostane jednak
C) u dvije faze se napon smanji u trećoj ostane jednak
D) u svim fazama se napon poveća
E) nema nikakvih posljedica glede napona

15) Kako se promijeni snaga simetričnog trošila koje iz spoja zvijezda prespojimo u trokut spoj?

A) ne promijeni se
B) poraste 1,73 puta
C) poraste 3 puta
D) smanji se tri puta
E) smanji se 1,73 puta

16) Simetrično trošilo u zvijezda spoju bez nul voda ima snagu *P* (ukupno). Kako se promijeni ukupna snaga ako pregori osigurač u jednoj od faza?

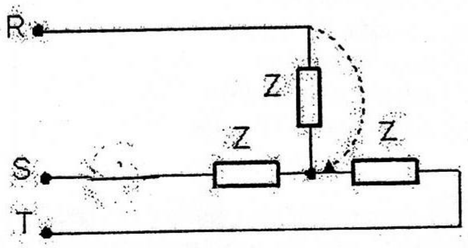
A) smanji se dva puta
B) smanji se tri puta
C) poveća se 1,73 puta
D) ne promijeni se
E) smanji se 1,73 puta

17) Trofazno simetrično trošilo spojeno je četverovodno na trofazni izvor. Kako se promijeni snaga trošila ako se napon **jedne** faze smanji za 10%?

A) smanji se 20 %
B) smanji se 6,3 %
C) smanji se 12 %
D) smanji se 3,25 %

18) U simetričnom trošilu (bez nulvodiča) došlo je do kratkog spoja faze R i nultočke trošila. Kolika struja poteče kroz kratkospojnik ako je fazni napon 220 V, a *Z* je radni otpor od 100 Ω?

A) 2,2 A
B) 3,8 A
C) 6,6 A
D) beskonačno
E) nula



1.C 2.A 3.B 4.C 5.B 6.B 7.C 8.D 9.E 10.B 11.B 12.A 13.B 14.C 15.C 16.A 17.B 18.C

XIII. TJEDAN PREDAVANJA

1. Nesinusni periodički valni oblici

1.1. Odredite srednju i efektivnu vrijednost pilastog napona koji tijekom svake periode T=2 s linearno poraste od nule do U_m=50 V i tad trenutačno padne na nulu. Nacrtajte graf zadanog napona kroz vrijeme 4 s.

Rješenje: $u(t) = \frac{Um}{T}\cdot t \qquad Usr = \frac{1}{T}\cdot\int_0^T \frac{Um}{T}\cdot t\,dt \qquad Usr = \frac{Um}{2} \qquad Usr = 25$

$$Uef = \sqrt{\frac{1}{T}\cdot\int_0^T \left(\frac{Um}{T}\cdot t\right)^2 dt} \qquad Uef = \frac{Um}{\sqrt{3}} \qquad Uef = 28.868$$

Za usporedbu različitih valnih oblika važna su dva odnosa i to:

$\sigma = \frac{Um}{Uef} \qquad \sigma = 1.732$ odnos maksimalne i efektivne vrijednosti

$\xi = \frac{Uef}{Usr} \qquad \xi = 1.155$ odnos efektivne i srednje vrijednosti

Napomena: srednja i efektivna vrijednost ne ovise o frekvenciji

1.2. Izračunajte srednju i efektivnu vrijednost za napon oblika pozitivnog pravokutnog impulsa koji ima trajanje T_i=10 ms i periodu ponavljanja *T*=20 ms. Vršna vrijednost je 5 V. Kolika je frekvencija tih impulsa? Koji je odnos impuls/pauza ?

Rezultat: 2,5 V; 3,536 V *Uputa*: temeljem "definicijske formule" izvedemo formulu za srednju i efektivnu vrijednost pravokutnih impulsa i dobijemo

$Um = 5 \qquad f = 50\,\text{Hz} \qquad T = \frac{1}{f} \qquad Ti = 0.010\,\text{s}$

$Usr = Um\cdot\frac{Ti}{T} \qquad Usr = 2.5$ V

$Uef = Um\cdot\sqrt{\frac{Ti}{T}} \qquad Uef = \frac{Um}{\sqrt{2}} \qquad Uef = 3.536$ V

Pitanje: Kolike su ove vrijednosti ako smanjimo trajanje impulsa na 1 ms ? Odg. U_{sr}=0,25 V , a U_{ef}= 1,118 V

Komentar. Impulsni valni oblici imaju u novije vrijeme veliki značaj. Njihov oblik ne mora biti pravokutan. Općenitija formula za efektivnu vrijednost uzima u obzir efektivnu vrijednost neprekinutog niza impula U_{efo} (u kojem nema razmaka između pojedinih impulsa) je ova : $U_{ef}=U_{efo}\cdot\sqrt{Ti/T}$.

1.3. Izračunajte efektivnu vrijednost za trokutasti napon koji ima napon od vrha do vrha U_{pp}=8 V , a srednja vrijednost mu je nula. Kolika bi bila efektivna vrijednost impulsa u obliku trokuta koji imaju trajanje Ti=T/2, a vršna vrijednost im je 4 V? Nacrtajte grafove ovih valnih oblika.

Rezultat: $4/\sqrt{3}$; $4/\sqrt{3}\cdot\sqrt{1/2}$

1.4. Ako se sinusna struja poluvalno ispravi i takva propusti kroz grijač otpora 100 Ω izračunajte njegovu snagu. Amplituda struje I_m je 1 A.

Rezultat: 25 W *Uputa*: potrebno je izračunati efektivnu vrijednost za poluvalno ispravljeni sinusni signal:

$$Ief = \sqrt{\frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int_0^{\pi}(Im\cdot sin(\omega t))^2\,d\omega t} \qquad Ief = 0.5 \quad A$$

Pitanja: Kolika je srednja vrijednost ovako "ispravljene" struje? Odg.

$$Isr = \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int_0^{\pi} Im\cdot sin(\omega t)\,d\omega t \qquad Isr = 0.318 \quad A$$

Kolika bi bila snaga istog grijača ako bi kroz njega propustili "normalnu" sinusnu struju jednake amplitude? Odg. 50 W.

Kako bi izračunali efektivnu vrijednost poluvalno ispravljenog napona primjenom formule navedene u komentaru zadatka 2 (poluvalno ispravljeni sinusni signal možemo smatrati nizom impulsa u obliku sinusnog poluvala)?

1.5. Na otporu R=25 Ω srednja snaga iznosi P = 400W. Kolika je vršna vrijednost struje ako je struja a) sinusna b) trokutasta c) pilasta d) poluvalno ispravljena sinusna e) pravokutna sa odnosom impuls/pauza jedan?

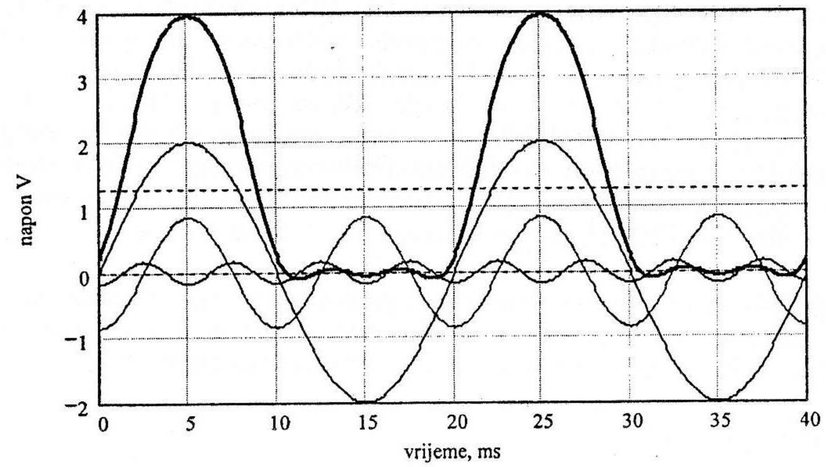
Rezultat: a) I_m=5,64 b) 6,92 c) 6,92 d) 8 A e) 5,64 A *Uputa:* iz snage i otpora izračunamo potrebnu efektivnu vrijednost struje I_{ef}= 4 A. Svaki od navedenih valnih oblika ima svoj odnos I_m/I_{ef} (taj odnos se proračuna temeljem definicije efektivne vrijednosti). Za sinus je to 1,41 tj. maksimalna je 1,41 puta veća od efektivne, za trokutasti signal to je 1,73, za poluvalno ispravljeni sinus 2 itd.

1.6. Pravokutni impulsi amplitude 5 V imaju trajanje 10 ms i efektivnu vrijednost 3,536 V. Kolika je frekvencija njihova ponavljanja.?

Rezultat: 50 Hz

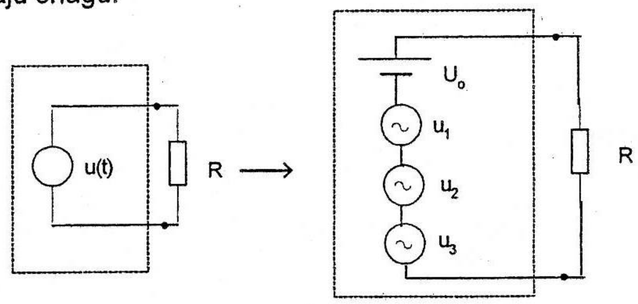
1.7. Otpornik R=10 Ω priključen je na napon složenog valnog oblika: $u(t)$=1,27+2sin(ωt)+0.85sin(2ωt-π/2)+0,17sin(4ωt-π/2). Nacrtajte valni oblik tog napona ako je ω=314 s^{-1} za prvih 40 ms. b) izračunajte efektivnu vrijednost struje i snagu na otporniku c) nacrtajte nadomjesni spoj izvora koji bi na svojim stezaljkama dao takav napon.

Rješenje: Možemo zamisliti kao da u seriju imamo spojena 4 izvora: istosmjerni i 3 sinusna koji imaju frekvencije (f, $2f$ i $3f$). Ako nacrtamo na istom grafu sva četiri napona možemo zbrojiti momentalne vrijednosti i tako dobiti graf ukupnog napona (za takav postupak najbolje je koristiti računalni program).



Ukupan napon je periodički signal koji zapravo predstavlja poluvalno ispravljeni sinusni napon amplitude 4 V (to je sinusni napon kojemu "odstranimo" negativni poluval). Pažljivi čitatelj će primjetiti da rezultantni napon nije baš "idealno" ispravljeni sinus. Očito je da nešto nedostaje. Amplitude pojedinih napona nisu nasumce odabrane nego su dobivene matematičkim postupkom koji se zove Fourierova analiza. Periodička funkcija može "rastaviti" na sastavne komponente i to na: istosmjernu komponentu i čitav niz sinusnih, koje imaju odgovarajuće amplitude i faze (osnovni član i viši harmonici). Sve to zajedno se naziva trigonometrijski red koji ima puno članova. Ako neke od njih izostavimo, dobiveni ukupan napon neće biti "idealan" tj. razlikovati će se od početnog. Sam postupak "rastavljanja" je matematički problem u koji ovdje ne ulazimo. Treba kazati da je za sve važnije periodičke funkcije (pilaste, trokutaste, pravokutne isl.) to odavno napravljeno pa u svakom boljem mat. priručniku možete pronaći odgovarajuće članove tog reda. Isto tako su napravljeni programi koji rade Fourierovu analizu i za druge, po volji zadane valne oblike signala. Mogućnost takvog "rastavljanja" signala uz **metodu superpozicije** "otvara nam vrata" za rješavanje strujnih krugova i sa nesinusnom pobudom. Naravno, moramo znati rješavati istosmjerne i izmjenične krugove ("fazorsku" ili "vektorsku" metodu).

Postoje dva načina izračuna efektivne vrijednosti. Za poluvalno ispravljeni sinus preko formule izvedene na temelju definicije ef. vrijednosti dobivamo da je to $U_m/2$=2 V. Druga je mogućnost korištenje formule za sastavljene valne oblike: $U_{ef}=\sqrt{U_o^2+U_1^2+U_2^2+U_3^2}$..... prema kojoj dobivamo 1,997 V (jer nedostaju neki članovi trig. reda). (U_1,U_2 itd. su efektivne vrijednosti). Snaga na otporniku je U_{ef}^2/R=400 mW. Efektivna vrijednost struje je U_{ef}/R=0,2 A. Još nešto će zapaziti pažljivi čitatelj: snagu "daju" samo struja i napon iste frekvencije. To znači da npr. istosmjerni napon i struja frekvencije f na daju snagu.



Zaključak: ako strujni krug pobudimo poluvalno ispravljenim sinusnim naponom tada ovu pobudu (sa dovoljnom točnošću) možemo zamijeniti istosmjernim izvorom u seriji sa tri sinusna izvora. Parametri takvih "zamjenskih " izvora dobivaju se Fourierovom analizom. Isto vrijedi i za druge periodičke nesinusne signale. Ako je srednja vrijednost nesinusnog signala jednaka nuli tada otpada istosmjerni izvor. Zorno možemo parametre "zamjenskih" izvora prikazati linijskim spektrom amplituda i faza u kojem na apcisu nanosimo frekvencije (0,*f*,2*f*,3*f* itd) a na ordinatu iznos amplitude odnosno faze. Spektar za neke važnije valne oblike možete pogledati na WEB stranicama osnova: Fourierova analiza

1.8. Kroz otpornik *R*=1 Ω prolazi vremenski promjenjiva struja i(t)=1+2sinωt. Izračunajte srednju snagu. Kolika bi bila ta snaga ako struja nema istosmjernu komponentu? Koji element može "zaustaviti" istosmjernu komponentu, a propuštati izmjeničnu?

Rezultat: 3 W, 2W, kondenzator

1.9. Efektivna vrijednost napona zadanog izrazom $u(t)=1+U_{1m}\sin\omega t$ V jednaka je 1,73 V. Kolika je veličina U_{1m}?

Rezultat: 2 V

1.10. Kolika je perioda napona zadanog izrazom $u(t)=10\sin 100t+1\sin(300t+\pi/2)$ V?

Rezultat: 62,8 ms

1.11. Na serijski spoj otpora *R* i induktiviteta *L* priključen je nesinusidni napon u(t). Fourierovom analizom se pokazalo da se taj napon s dovoljnim točnošću može prikazati kao: $u(t)=10+50\sin\omega t+25\sin 3\omega t$ V, gdje je ω =314 s^{-1}.Odredite a) valni oblik struje b) srednju snagu na otporniku. Nacrtajte valni oblik zadanog napona i napona na otporniku. Da li sa običnim multimetrom možemo mjeriti efektivnu vrijednost zadanog napona i izračunate struje? Zadano: *R*=5 Ω *L*=0.02 H

Rješenje: amplitude sastavnica su: $Uo = 10$ V $U_1 = 50$ V $U_3 = 25$ V

istosmjerna komponenta daje struju

$$Io = \frac{Uo}{R} \qquad Io = 2$$

proračun struje za osnovni član:

$$I_1 = \frac{U_1}{\sqrt{R^2+(\omega\cdot L)^2}} \qquad \varphi_1 = atan\left(\omega\cdot\frac{L}{R}\right) \qquad \varphi_1 = 0.898 \text{ rad} \qquad I_1 = 6.229 \text{ A}$$

$$i_1(t) = I_1\cdot sin(\omega\cdot t+\varphi_1)$$

proračun struje za treći harmonik:

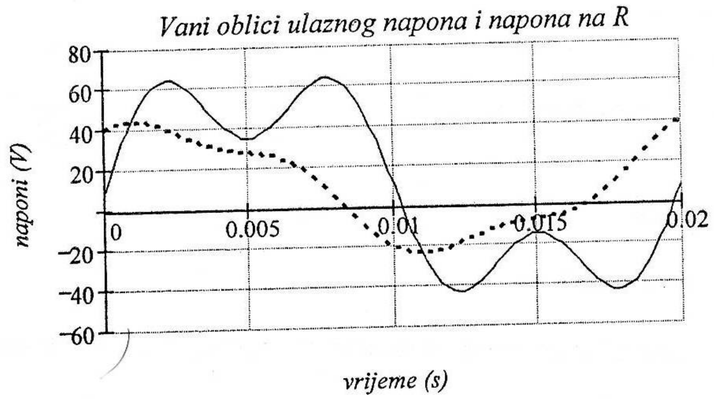
$$I_3 = \frac{U_3}{\sqrt{R^2+(3\cdot\omega\cdot L)^2}} \qquad \varphi_3 = atan\left(3\cdot\omega\cdot\frac{L}{R}\right) \qquad \varphi_3 = 1.311 \text{ rad} \qquad I_3 = 1.283 \text{ A}$$

$$i_3(t) = I_3\cdot sin(\omega\cdot t+\varphi_3)$$

Ukupna struja je::

$$i(t) = Io + I_1\cdot sin(\omega\cdot t+\varphi_1) + I_3\cdot sin(3\cdot\omega\cdot t+\varphi_3)$$

Napon na otporniku je $u_R(t) = i(t)\cdot R$



puna linija: graf zadanog napona
crtkana linija : graf napona na otporniku

b) snagu možemo izračunati na dva načina:

preko efektivne vrijednosti struje

$$I = \sqrt{Io^2+\left(\frac{I_1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{I_3}{\sqrt{2}}\right)^2} \qquad I = 4.921 \qquad P = I^2\cdot R \qquad P = 121.104 \text{ W}$$

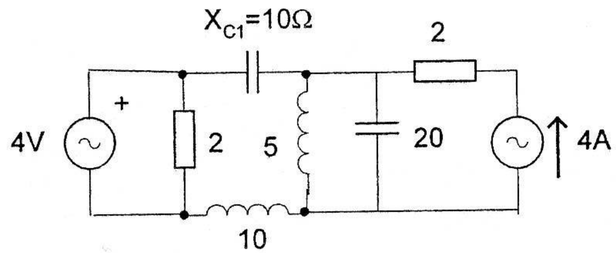
zadani spoj promatramo kao dvopol. Snagu računamo preko struje i napona dvopola. Snagu "daju" samo sastavnice iste frekvencije.

$$P = Uo\cdot Io + \frac{U_1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{I_1}{\sqrt{2}}\cdot cos(\varphi_1) + \frac{U_3}{\sqrt{2}}\cdot\frac{I_3}{\sqrt{2}}\cdot cos(\varphi_3) \qquad P = 121.104$$

Za mjerenje nesinusnih struja i napona postoje posebni instrumenti. Dolaze pod nazivom: multimetar za mjerenje prave efektivne vrijednosti (eng.:true rms). Pažnja: obični multimetri predviđeni su samo za mjerenje efektivnih vrijednosti sinusnih struja i napona.

Komentar: Ovaj spoj različito reagira na pojedine sastavnice pobude. Istosmjerni dio pobude "vidi" samo otpornik jer je *L* za taj dio signala (u stacionarnom stanju) kratki spoj. Za frekvenciju 3ω induktivni je otpor veći pa će to znatno smanjiti udio trećeg harmonika u struji , a s tim u vezi i napona na otporniku. Treći harmonik napona se "zadržava" na induktivitetu. Ako npr. napon na otporniku razmatramo kao izlazni napon tada zaključujemo da dolazi do promjene valnog oblika signala (pogledajte grafove). Pitanja za razmatranje: 1.Kako bi se promijenili naponi (koje bi im bile sastavnice) ako induktivitet zamijenima sa kapacitetom uz jednaku pobudu. 2. Da li bi došlo do promjene (i kakve) valnog oblika ako se nesinusna pobuda dovede na spoj sastavljen isključivo od otpornika?

1.12. U mreži prikazanoj slikom djeluju dva izvora koji imaju različite frekvencije (ω-strujni izvor i 2ω-naponski). Iznosi reaktivnih otpora zadani su za frekvenciju ω. Kolika je efektivna vrijednost struje kroz kapacitet C_1?



66.00245
14.89

Rezultat: 4A uputa: koristite superpoziciju, za 2ω su induktivni otpori dva puta veći, s kapacitivni dva puta manji! Obratite pozornost na eventualne rezonancije...

1.13. Analizom valnih oblika struje i napona na priključnicama jednog dvopola dobiveno je da se napon i struja s dovoljnom točnošću mogu prikazati u obliku:

$u(t)=50+50\sin(5\cdot10^3t)+30\sin(10^4t)+20\sin(2\cdot10^4t)$ V, te

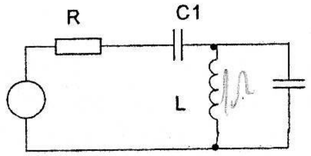
$i(t)=11{,}2\sin(5\cdot10^3t+63{,}4^0)+10{,}6\sin(10^4t+45^0)+8{,}97\sin(2\cdot10^4t+26{,}6^0)$ A.

Kolika je srednja snaga tog dvopola ?

Rezultat: 317,7 W

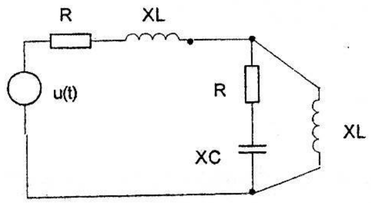
1.14. U spoju prema slici, napon izvora je složenog valnog oblika danog slijedećim izrazom: $u(t)=100+14{,}1\sin\omega t+14{,}1\sin3\omega t$ V. Ako je R=2,5 Ω, $1/(\omega C_1)$=1,125 Ω, ωL=1 Ω, i $1/(\omega C_2)$=9 Ω, izračunajte efektivnu vrijednost:

a) ukupne struje;
b) napona na serijskoj kombinaciji RC_1;
c) napona na paraleli LC_2.



Rezultat: 40A;148 V;110 V

1.15. Napon izvora u krugu na slici ima prvi i peti harmonik. Efektivna vrijednost struje prvog (osnovno harmonika u lijevoj grani iznosi I_{C1}=2 A, a petog harmonika u desnoj grani I_{L5}=0,1 A. Ako su vrijednos otpora za osnovni harmonik $R=X_L=X_C$=5 Ω, odredite efektivnu vrijednost priključenog napona.



Rezultat: 31,13 V

1.16. Na serijski RC spoj R=8 Ω i C=31,8 μF priključen je napon složenog oblika kojemu je osnovna frekvencija f_1=500 Hz. Efektivna vrijednost priključenog napona je U=120 V, a efektivne vrijednosti viših harmonika su $U_3=0{,}6U_1$, $U_5=0{,}25U_1$ i $U_7=0{,}132U_1$. Izračunajte: a) efektivnu vrijednost struje b) radnu snagu koja se troši u mreži.

Rezultat: 11 A ;968 W

1.17. Na serijski spoj R=5 Ω, C=50 μF i L=5 mH priključen je napon koji se može prikazati ovako: 150 sin1000t+100 sin2000t+75 sin3000t V. Odredte srednju snagu na otporu.

Rješenje : 1374 W

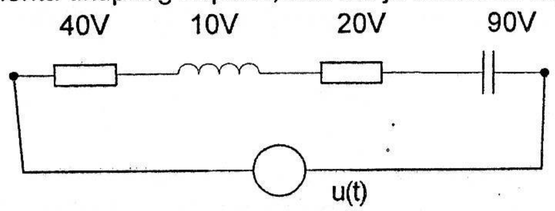
Rezultat: 1374 W

1.18. Otpornik R=5 Ω spojen je u seriju s paralelnom kombinacijom induktiviteta i kapaciteta. Odredite ukupnu struju i(t) ako je spoj priključen na napon u(t) = 50 + 20 sin500t + 10 sin1000t V, a za osnovnu frekvenciju X_L=2 Ω i X_C=8 Ω. Kolika je radna snaga spoja?

REZONANCIJA NA 1000

Rezultat: $i(t)=10+3{,}53\sin(500t-0{,}49)$ A *Komentar*: na 1000 s^{-1} paralela dolazi u rezonanciju i ne propušta struju!

1.19. U spoju prema slici struja je sastavljena od prvog i trećeg harmonika, pri čemu je amplituda trećeg harmonika upola manja od amplitude prvog harmonika. Na slici su označene efektivne vrijednosti prvog harmonika napona na pojedinim elementima. Kolika je istosmjerna komponenta ukupnog napona, ako mu je efektivna vrijednost 115 V?



Rezultat: 48 V

2. Prijelazne pojave u RC i RL spojevima

2.1. Kondenzator kapaciteta 220 μF priključuje se na izvor napona U=100 V preko otpora R=100 Ω. Nakon koliko vremena će se kondenzator nabiti. Odredite energiju koju je kondenzator dobio od izvora.

Rješenje: Kondenzator je spojen u seriju s otpornikom. Trenutak zatvaranja sklopke je početak mjerenja vremena (kao da istovremeno s zatvaranjem sklopke pokrenemo «štopericu» Taj se trenutak naziva t=0. Od tog trenutka počinje se kondenzator nabijati. U prvi čas (taj trenutak označavamo sa $t=0^+$) je napon na kondenzatoru nula (jer je prazan). Na kraju kada se kondenzator nabije, napon postane jednak naponu izvora. Važno je zapaziti da u **svakom trenutku** (prema Kirchhoffovom zakonu za napone) mora suma napona na otporniku i kondenzatoru biti jednaka naponu izvora, dakle $U=u_R+u_C$. To znači da u trenutku $t=0^+$ napon na otporniku jednak U, a struja je U/R. Napon na kondenzatoru raste po eksponencijalnoj funkciji $u_C(t)=U(1-e^{-t/\tau})$. Veličina o kojoj ovisi brzina promjene napona i struje $\tau=R\cdot C$ naziva se vremenska konstanta . Nakon 5τ nabijanje je praktički završeno tj. napon na kondenzatoru postane jednak U.
Kako se napon na kondezatoru povećava tako se pojačava i električno polje. Za izgradnju (nastanak) polja tj. razdvajanje naboja potrebno je utrošiti neku energiju koja ostaje sačuvana u kondenzatoru. Iznos energije je: $W_C=CU^2/2$ =1,1 J

napomena: Kod proučavanja prijelaznih stanja koristi se poseban način označavanja vremena. U tom označavanju t=0 znači trenutak u kojem je došlo do ukapčanja ili iskapčanja (općenito neke promjene u krugu) $t=0^-$ je trenutak neposredno prije , a $t=0^+$ poslije toga.

2.2. Kondenzator kapaciteta C=10μF priključen je na napon *U* i nabijen. Ako je poznata energija na kondenzatoru W_C = 5J izračunajte napon izvora.

Rezultat: 1000V

2.3. Kondenzator kapaciteta *C*=100μF priključen je na napon *U*=100 V preko otpora *R*=10kΩ. Odredite vrijeme nakon kojeg će napon na kondenzatoru doseći iznos od 0,63*U*.

Rezultat: nakon 1 s.

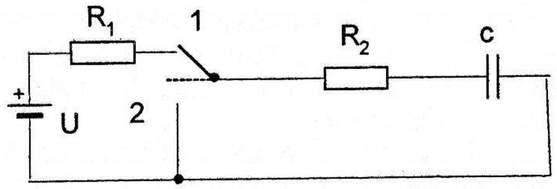
2.4. Nenabijeni kondenzator nepoznatog kapaciteta *C* priključuje se na izvor napona *U* preko otpora *R*=1000Ω. Ako se kondezator u potpunosti nabije nakon 11 s koliki je kapacitet kondenzatora?

Rezultat: $2{,}2 \times 10^{-3}$ F

2.5. Kondenzator kapaciteta *C*=220 pF nabijen je na napon *U*=100V i odspojen je sa izvora. Ako se sada na kondenzator spoji otpornik *R*=10kΩ dolazi do njegova izbijanja. Odredite: a) početnu struju izbijanja b) trenutak u kojem će se napon na kondenzatoru smanjiti na 37% početnog napona *U* i c) struju u tom trenutku

Rezultati: 0.01 A τ=2,2 μs i(τ)=3,7 mA
Komentar: U času kada spojimo na nabijeni kondenzator zadani otpornik počinjemo mjeriti vrijeme («aktiviramo štopericu»). To je sada trenutak koji se označava kao *t*=0. Od tog trenutka napon na kondenzatoru (a zajedno s njim i napon na otporniku) se smanjuje prema vremenskom grafu koji je analitički opisan eksponencijalnom funkcijom $u_C(t)=U\,e^{-t/\tau}$ Nakon jedne vremenske konstante napon postane jednak 0,37*U* ,a nakon 5 vremenskih konstanti napon se praktički smanji na nulu. To znači da je potrošena sva energija koja je bila pohranjena u kondenzatoru.

2.6. U trenutku t=0 sklopku postavimo u položaj 1. Nakon 30 ms prebacimo je u položaj 2. Koliki će biti napon na kondenzatoru 12 ms nakon prebacivanja u položaj 2. Koja je vremenska konstanta nabijanja, a kolika izbijanja kondenzatora. Zadano je R_1=600 Ω R_2=2,4 kΩ , *U*=12 V, *C*=5μF.



Rezultat: 3,82 V

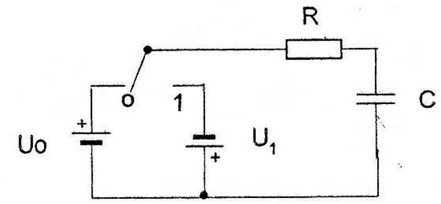
2.7. U krugu na slici sklopka je dulje vrijeme u položaju 0. U trenutku *t=0* sklopka se prebacuje u položaj 1. Odredite napon na kondenzatoru i otporniku te struju u krugu u trenutku $t=0^+$ Odredite konačan napon kondenzatora i vrijeme koje je potrebno za postizanje tog napona. Nacrtajte vremensku promjenu struje.
Zadano: U_0=20 V; U_1=40 V; *R*=100 Ω; *C*=5 μF .

T=RC=100·5μF=500μs
vrijeme nabijanja

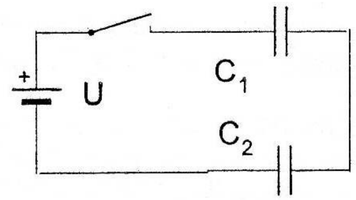
Rezultat:

20 V,60 V, 600 mA

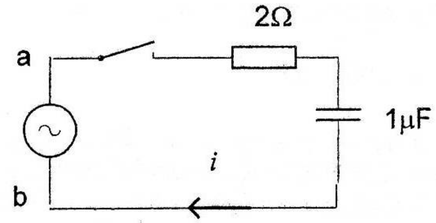
40 V, 500μs



2.8. U trenutku *t=0* zatvori se sklopka u krugu na slici. Odredite napon na kondenzatoru C_2 u trenutku t_1. Zadano: *U*=10 V; *R*=1 kΩ; t_1=20 ms; C_1=30 μF; C_2=60 μF
Rezultat: 1,1 V Uputa: odredite ukupan *C* serije I napon na njemu. Zatim prema formuli za kapacitivni djelitelj napona izračunajte napon na C_2



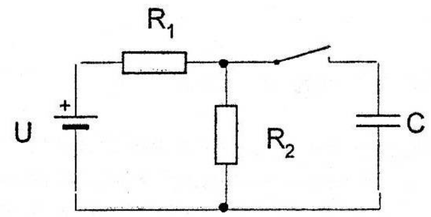
2.9. Sklopku zatvaramo u trenutku kada je napon u_{ab}=-5 V. Odredite struju, napon na kondenzatoru i napon na otporniku u trenutku $t=0^+$ (neposredno nakon zatvaranja sklopke).



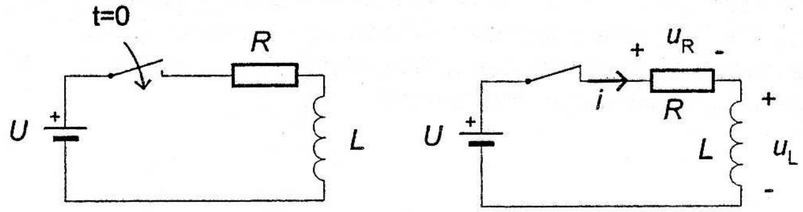
Rezultat: -2,5 A,nula,5 V

2.10. Kondenzator je prazan. U trenutku t=0 zatvara sa sklopka. Koliko će se naboja naći na kondenzatoru u momentu *t*=150 μs. Kolika struja u tom trenutku teče otpornikom R_2. Zadano je: R_1=4kΩ, R_2=12 kΩ,C=25 nF i *U*=120 V

Rezultat: 1,945 μAs, 6,48 mA. *Uputa*: koristite Theveninov nadomjesni izvor tj. Kao da se kondenzator spaja na taj izvor. (R_{th}=3 kΩ, U_{th}= 90 V)



2.11. Svitak induktiviteta 10 mH priključuje se u trenutku *t*=0 na izvor napona od 100V preko otpora od 100 Ω. Odredite a) struju i napon svitka u trenutku priključenja b) vrijeme nakon kojeg će napon na svitku iznositi 37 V c) struju svitka u tom trenutku d) vrijeme nakon kojeg će napon na svitku praktički pasti na nulu c) struju svitka u tom trenutku.

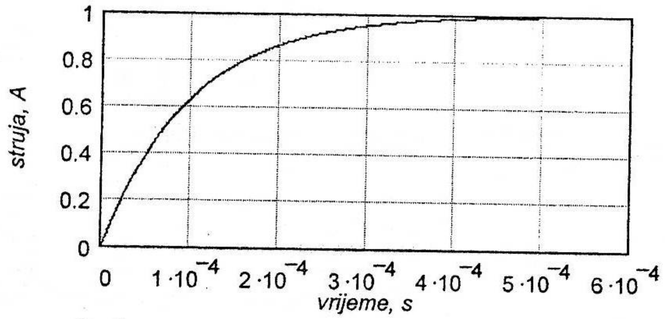


$T = \frac{L}{R}$

Zadano: *L*=0,01 H *U*=100 V *R*=100 Ω

napon na ind je max

Rješenje: U trenutku uključenje struja je jednaka nuli. Nakon toga struja **postupno** (po eksponencijalnom zakonu) **raste** prema iznosu U/R=1A kako je pokazano na grafu struje. Stanje u krugu za vrijeme porasta struje naziva se: prijelazno stanje. Praktički je trajanje tog stanja jednako 5 vremenskih konstanti : $\tau=L/R$=0,1 ms



Ovdje, naravno, vrijedi Kirchhoffov zakon za napone. Kada je struje u krugu nula, napon na otporniku jednak je nuli pa je napon na induktivitetu jednak naponu izvora U. Kako struja raste tako raste napon na otporniku ($u_R=iR$). Istovremeno napon na induktivitetu pada (suma tih dvaju napona uvijek je jednaka naponu izvora. Pokazuje se da nakon jedne vremenske konstante struja poprimi 63% konačnog iznosa, a da napon na induktivitetu padne na iznos 0,37U. Matematički napisana funkcija porasta struje je :
$i(t)=U/R\,(1-e^{-t/\tau})$
Nakon uspostavljanja konačnog (stacionarnog) stanja struja u krugu je U/R=1A. U svitku je pohranjena magnetska energija $W_L=LI^2/2$. Ta se energija mora potrošiti prilikom iskapčanja strujnog kruga.
napomena: Čitatelju se preporuča da sada usporedi situaciju u pogledu napona i struje pri ukapčanju serijskog RC i serijskog RL spoja na izvor napona.

2.12. Svitak induktiviteta 100 mH protjecan strujom od 10 A iskapča se iz strujnog kruga tako da se u trenutku t=0 kratko spaja preko otpora od 10 Ω. Odredite napon na tom otporu u trenutku iskapčanja. Nakon kojeg vremena će struja svitka praktički pasti na nulu? Zadano: L=0.1 H, I=10 A R=10Ω

Ri: 100V

Rješenje: U svitku je uspostavljeno stacionarno stanje u kojem kroz svitak prolazi struja od 10 A. Zbog toga je svitak "pun energije". Nagli prekid struje mogao bi prouzročiti neprilike, jer se energija mora potrošiti. Budući da je strujni krug prekinut (veliki otpor) inducira se jako veliki napon koji ipak potjera struju tako da se pojavi iskra. Zato se iskapčanje provodi tako da se, istodobno s iskapčanjem kruga paralelno svitku spoji neki otpornik. Ovdje je to otpor od 10 Ω. Struja u trenutku iskapčanja mora ostati ista kao što je bila neposredno prije dakle, u našem primjeru 10 A. Ta struja će stvoriti početni napon na otporniku od 100 V. Nakon jedne vremenske konstante napon padne na 37% početne vrijednosti tj. na 37 V. Kako se energija svitka troši tako i struja postepeno (po eksponencijalnom zakonu) pada prema nuli. Nakon isteka vremena od **5 vremenskih konstanti** uzimamo da je struja pala na nulu, a svitak "prazan" tj. u njemu nema energije. Budući da je vremenska konstanta t=L/R=10 ms struja će biti nula nakon 50 ms.

2.13. Serijski RL-krug priključuje se u trenutku t=0 na istosmjerni naponski izvor U.Izračunati vremensku konstantu kruga τ, te napon na otporu u trenutku t_1.
Zadano: R=2 Ω, L=0,01 H, U=10 V; t_1=5 ms.

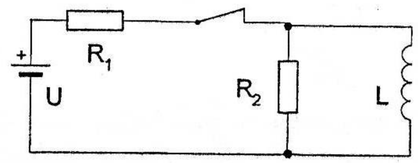
Rezultat: 5 ms; 6,32 V

2.14. Odredite analitičke izraze za snage: p_i (snaga izvora), p_R i p_L. Odredite snage na elementima zadanog kruga za trenutak $t=0^+$ i trenutak $t=t_1=5\tau$.

Rezultat: $p_i=U^2(1-e^{-t/\tau})/R$ $p_R=U^2(1-e^{-t/\tau})^2/R$ $p_L=U^2(1-e^{-t/\tau})e^{-t/\tau}/R$. *Uputa* : Snaga je umnožak napona i struje. Kod vremenski promjenjvih napona i struja i snaga će biti vremenski promjenjiva. Ako je jedna os tih veličina nula i snaga će biti nula. Graf snage može imati maksimum npr. To je slučaj kod snage na induktivitetu. Energija je površina ispod grafa koji prikazuje snagu.

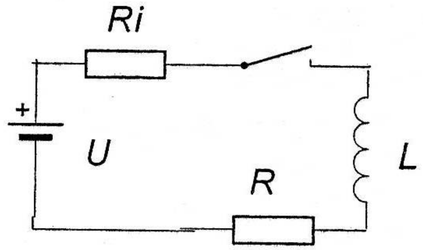
2.15. U trenutku t=0 serijski RL-spoj priključuje se na izvor istosmjernog napona U=10V. Izračunajte snagu izvora u trenutku t=0,2 s. Zadano je R=5 Ω, L=1 H.
Rezultat: 12,6 W

2.16. Nakon što je dulje vrijeme bila zatvorena, sklopka na slici otvori se u trenutku $t=0$. Odredite napon u_{12} u trenutku $t=0^+$. Zadano: U=12 V; R_1=20 Ω; R_2=20 kΩ.
Rezultat: 12 kV



2.17. U trenutku $t=0$ zatvori se sklopka u krugu na slici. Ako u trenutku t_1 napon na induktivitetu iznosi U_L, odredite energiju pohranjenu u magnetskom polju svitka nakon završenog prijelaznog stanja. Zadano: U=100 V; $R_i=R$=10 Ω; t_1=40 ms; U_L=60 V.

Rezultat: 19,6 W



2.18. Svitak otpora zavoja R_s priključuje se u trenutku $t=0$ na naponski izvor stalnog napona U i unutrašnjeg otpora R_i. Ako je u trenutku t_1 na svitku izmjeren napon U_s, odredite induktivitet svitka L_s. Zadano: U=125 V; R_i=2 Ω; R_s=2 Ω; t_1=40 ms; U_s=85,5 V.

Rezultat: 160 mH

TEST PITANJA

1) Punovalni ispravljeni sinusni signal ima amplitudu 10 V. Kolika je efektivna vrijednost?

A) ovisi o frekvenciji
B) 6,36 V
C) 7,07 V
D) 5 V
E) 10 V

2) Kolika je efektivna vrijednost poluvalno ispravljenog sinusnog napona koji ima srednju vrijednost 0,318 V?

A) 0,707V
B) 0,5V
C) 1V
D) 1,41V

3) Pravokutni impulsi napona imaju amplitudu 10 V , trajanje 5 ms i frekvenciju ponavljanja 50 Hz. Kolike su srednja i efektivna vrijednost opisanog impulsnog niza?

A) U_{sr}=2,5 V
B) U_{sr}=5 V
C) U_{sr}=1 V
D) U_{ef}=5 V
E) U_{ef}=7,07 V

4) U neprekinutom niz trokutastih impulsa trajanje impulsa je 1 ms. Kolika je frekvencija?

A) 1 Hz
B) 10 Hz
C) 100 Hz
D) 1000 Hz
E) ovisi o amplitudi

5) Trokutasti impulsi imaju napon od vrha do vrha U_{pp}=5 V i srednju vrijednost 1 V. Kolika je vršna vrijednost napona?

A) 1V
B) 3,5 V
C) 6 V
D) 4 V

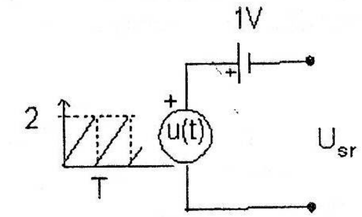
6) Kolika je srednja vrijednost struje i(t)=1+1sinωt?

A) 1,41 A
B) nula
C) 1,318 A
D) 1 A
E) 1,636 A

srednja vrijednost izmjeničnog komponenti

7) Serijski su spojeni istosmjeran i "pilasti" izvor (U_{max}=2 V). Kolika je srednja vrijednost ukupnog napona?

A) 0,58 V
B) 1 V
C) nula
D) 2 V
E) 3 V



8) Koji je izraz za izračun efektivne vrijednosti složenog valnog : $u=U_o+U_{m1}\cdot\sin(\omega t)-U_{m2}\cdot\sin(3\omega t)$:

A) A
B) B
C) C
D) D

A. $\sqrt{U_o^2+U_{m1}^2+U_{m2}^2}$

B. $\sqrt{U_o^2+U_{m1}^2-U_{m2}^2}$

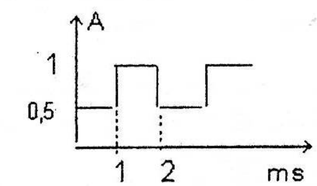
C. $\sqrt{U_o^2+0.5\left(U_{m1}^2+U_{m2}^2\right)}$

D. $\sqrt{U_o^2+0.25\left(U_{m1}^2+U_{m2}^2\right)}$

E. $\sqrt{U_o^2+0.5\left(U_{m1}^2-U_{m2}^2\right)}$

9) Kroz otpornik R=1 Ω prolazi struja koja ima valni oblik prikazan slikom. Kolika je srednja snaga na otporniku?

A) 0,625 W
B) 1 W
C) 1,41 W
D) 2,5 W
E) 2,25 W

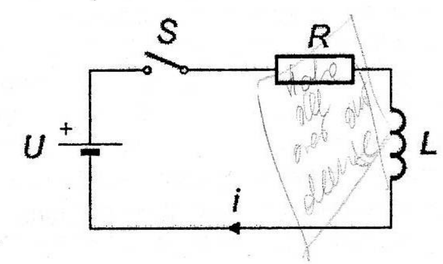


10) Otpornik R=5 Ω spojen je u seriju sa paralelnim spojem L i C. Na frekvenciji ω=500 rad/s reaktancije su X_L=2 Ω, X_C=8 Ω. Odredite efektivnu vrijednost ukupne struje ako je spoj priključen na napon:50+66,57sin(500t)+50,5 sin(1000t) V.

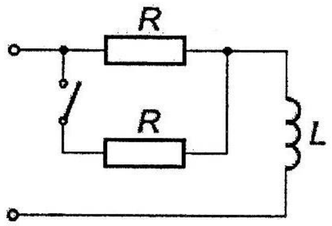
A) 3,83 A
B) 10 A
C) 10,31 A
D) 13 A
E) 16 A

11) Koliki je napon na otporniku u trenutku $t=0^+$ (to je trenutak neposredno nakon zatvaranja sklopke)?

A) nula
B) U
C) U/2
D) 0,63 U
E) 0,37 U

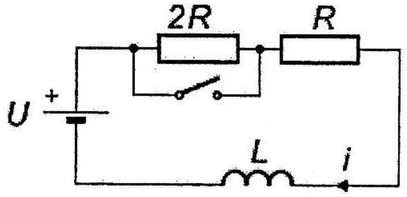


12) Hoće li se i kako promijeniti vremenska konstanta spoja nakon zatvaranja sklopke?



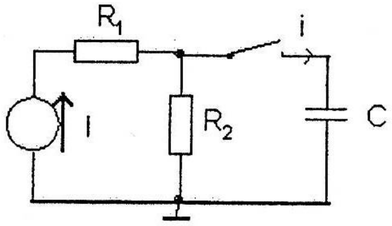
A) ne mijenja se
B) poraste dva puta
C) smanji se dva puta
D) poraste 4 puta
E) smanji se 4 puta

13) Koliki je napon na otporniku R neposredno nakon zatvaranja sklopke ($t=0^+$)



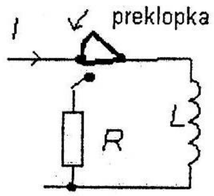
A) U/3
B) 2U/3
C) nula
D) U

14) Koliki je konačni napon na kondenzatoru u prikazanom spoju?



A) IR_1
B) IR_2
C) $I(R_1+R_2)$
D) IR_1R_2/R_1+R_2
E) nula

15) Kroz zavojnicu L=1 H prolazi struja od 1 A. U nekom trenutku istovremeno s prekidom strujnog kruga na krajeve zavojnice spojimo otpornik od 1000 Ω. Koliki je napon na stezaljkama zavojnice u taj čas?



A) 10 V
B) 100 V
C) 1000 V
D) 10 kV

16) Koliki je napon na kondenzatoru 10 s nakon priključka serijskog RC spoja na naponski izvor od 10 V ako je C=1 μF R= 10 MΩ?

A) 10 V
B) 6,3 V
C) 3,7 V
D) 5 V

17) Napunjeni kondenzator kapaciteta C spoji se na otpornik R. Koliko vremena treba da se potroši sva energija tog kondenzatora?

A) 5R•C
B) R/5C
C) C/R
D) ovisi o naponu
E) R•C

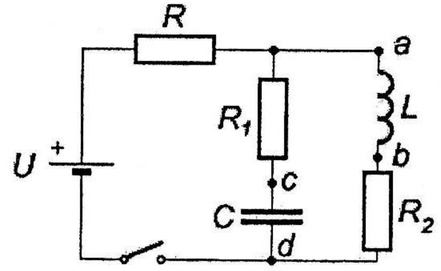
18) Serijski *RLC* krug uključuje se u trenutku t=0 na istosmjerni naponski izvor od 10 V. Koliki su neposredno nakon priključenja ($t=0^+$) naponi na elementima spoja? Odaberite točne odgovore

A) na R je nula
B) na R je 10 V
C) na C je 10 V
D) na L je 10 V
E) na svim elementima je nula

19) Napunjeni kondenzator *C* se spaja na induktivitet *L*. Kakva bi se struja uspostavila u krugu ako su elementi idealni?

A) eksponencijalno padajuća
B) eksponencijalno rastuća
C) sinusoidna stalne amplitude
D) sinusoidna padajuće amplitude
E) u takvom krugu nema struje

20) U trenutku zatvaranja sklopke za napon U_{cb} vrijedi ovo:



A) U_{cb}<0 (-na c)
B) U_{cb}>0
C) U_{cb}=nula
D) nema dovoljno podataka

1.C **2**.B **3**.D **4**.D **5**.B **6**.D **7**.C **8**.C **9**.A **10**.D **11**.A **12**.B **13**.A **14**.B **15**.C **16**.B **17**.A **18**.AD **19**.C **20**.C