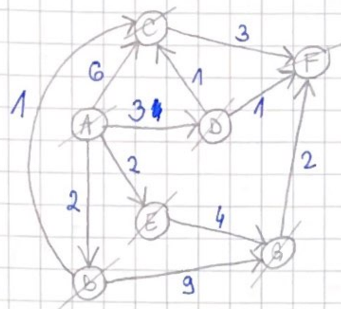
DIJKSTRA

KORIŠTENJEM DIJKSTRINOG ALGORITMA PRONAĐITE NAJKRAĆU UDALJENOST OD VRHA A DO VRHA F.



1° TABLICA (S LIJEVE STRANE SVI VRHOVI, PO STUPCIMA OZNAČAVAM ITERACIJE OD 0 DO m)

↳ U 0. ITERACIJI RADI SE INICIJALIZACIJA: ONAJ VRH OD KOJEG KREĆEM JE 0, SVI OSTALI SU ∞

↳ IDUĆA ITERACIJA JE VRH S NAJMANJOM UDALJENOSTI OD POČETNOG VRHA: IZRAČUNAVAM UDALJENOSTI SVIH SUSJEDA OD TOG VRHA (FORMA: UDALJENOST/PRETHODNIK)

↳ SVE OSTALE VRIJEDNOSTI PREPIŠEM IZ PRETHODNE ITERACIJE

↳ ODABIR SVAKOG SLJEDEĆEG VRHA JE VRH NAJMANJE UDALJEN OD POČETNOG VRHA!

NEMA SUSJEDE PA SAMO PREPISUJEM AKTIVNE VRHOVE!

GLEDAM IZ VRHA:		A	B	E	C	D	F	G
	0	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
⇒A	∅							
B	∞	2/A						
C	∞	6/A	2+1/B	3/B				
⇒D	∞	3/A	3/A	3/A	3/A			
E	∞	2/A	2/A					
⇒F	∞	∞	∞	∞	3+3/C	3+1/D		
G	∞	∞	2+9/B	2+4/E	6/E	6/E	6/E	

NAJKRAĆA UDALJENOST IZ A JE DO VRHA B, UZIMAM B U IDUĆOJ ITERACIJI!

I BRIŠEM VRH A IZ LISTE !!!

ZA UDALJENOSTI UZIMAM ZBROJ UDALJENOSTI OD POČETNE TOČKE DO TOČKE KOJU SAD GLEDAM + UDALJENOST OD OVE TOČKE DO IDUĆE PO RETCIMA
↳ ZNAČI U OVOM SLUČAJU AB + BG, AB + BC

↳ PREPISUJEM VRHOVE KOJI SU OSTALI U LISTI, A VRH A VIŠE NIJE U LISTI

UDALJENOST = AE + E-VRH S KOJIM JE SPOJEN, TAKOĐER GLEDAM DA LI JE NOVI ZBROJ MANJI OD PRETHODNOG (AKO JE UPISUJEM GA, AKO NIJE ZANEMARUJEM GA I PIŠEM PRETHODNI ZBROJ)

OVU INFO ZA BRID DC NE PIŠEM JER SAM C IZBACILA VAN IZ LISTE!

2° NAJKRAĆA PUTANJA I UDALJENOST:

GLEDAM REDAK F NAJDESNIJU VRIJEDNOST (VIDIM DA JE TO 4/D, ZNAČI DA SE U F DOŠLO IZ D)

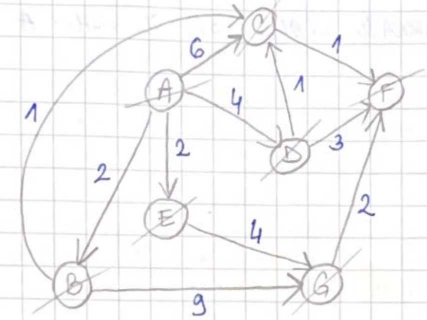
↳ ZATIM GLEDAM REDAK VRHA KOJI JE ZA REDAK F PISAO KAO PRETHODNIK (DAKLE VRH D) I ČITAM NAJDESNIJU VRIJEDNOST (TO JE 3/A, DAKLE U D SE DOŠLO IZ POČETNOG VRHA A)

↳ PUTANJA: A → D → F //

UKUPNA UDALJENOST: TO JE VRIJEDNOST U RETKU F JER TO JE ZBROJ OD POČ. TOČKE

↳ 4 //

DIJKSTRA: PRONAĐITE NAJKRAĆU UDALJENOST OD VRHA A DO VRHA F.



NEMA SUSJEDE PA SAMO PREPISUJEM AKTIVNE VRHOVE

	A	B	E	C	D	F	G
	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.

	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
⇒A	∅							
⇒B	∞	2/A						
⇒C	∞	6/A	2+1/B	3/B				
D	∞	4/A	4/A	4/A	4/A			
E	∞	2/A	2/A					
⇒F	∞	∞	∞	∞	3+1/C	4/C		
G	∞	∞	2+9/B	2+4/E	6/E	6/E	6/E	

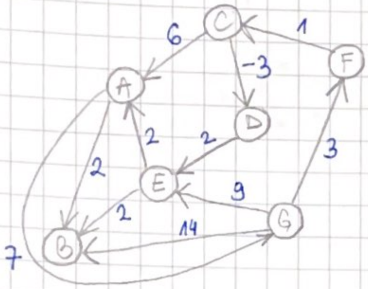
OD DVIJE UDALJENOSTI JA BIRAM ONU KOJA JE ABECEDNO PRVA

4+3=7>4, DAKLE OSTAVLJAM PRETHODNU VRIJEDNOST

UDALJENOST: ~~8~~ 4 , PUTANJA: A → B → C → F //

BELLMAN – FORD

KORIŠTENJEM BF ALGORITMA PRONAĐITE NAJKRAĆU UDALJENOST OD VRHA F DO SVIH OSTALIH VRHOVA. ODREDITE NAJKRAĆU UDALJENOST I PUTANJU OD VRHA F DO VRHA B.



1° NAPRAVITI SORTIRANU LISTU SVIH BRIDOVA:

AB, AG, CA, CD, DE, EA, EB, FC, GB, GE, GF

↳ VRH A UDALJEN ∞, PA ĆE I VRH B BITI UDALJEN ∞
↳ TO SE DOGAĐA SVE DO BRIDA FC!

2° TABLICA (S LIJEVE STRANE VRHOVI GRAFA, A PO STUPCIMA IDU ITERACIJE OD 0 DO m)

↳ U 0. ITERACIJI JE INICIJALIZACIJA: POČETNI VRH NA 0, SVI OSTALI ∞

↳ U SVAKOJ IDUĆOJ ITERACIJI PROLAZIMO KROZ SVE BRIDOVE U LISTI (FORMA: UDALJENOST OD POČ. VRHA / PRETHODNIK)

UVJET ZA AŽURIRANJE:
$d(u) + w(uv) < d(v)$

– ALGORITAM SE RADI DOK VIŠE NEMA LABELA ZA AŽURIRATI, ILI DOK NISMO DOSEGLI $|V|-1$ ITERACIJA KROZ SVE BRIDOVE!

		F	C		A
U: \ IZ:	0.	1.	2.		3.
A	∞	∞	1+6/C	1-3+2+2/E	
1 ⇒ B	∞		1-3+2+2/E		
4 ⇒ C	∞	1/F			
3 ⇒ D	∞		1-3/C		
2 ⇒ E	∞		1-3+2/D		
5 ⇒ F	∅				
G	∞				2+7/A

VIŠE NE MOŽEMO AŽURIRATI LABELE VRHOVA, ALGORITAM JE KONVERGIRAO I NEMA VIŠE PROMJENA PO LABELAMA

SADA VIŠE NIJE UDALJEN ∞, NEGO 1 S PRETHODNIKOM F!

UDALJENOST = FC + C-VRH S KOJIM JE SPOJEN (I JOŠ PLUS NASTAVNI BRID)

MOŽE OD C DO E I PREKO A, ALI PREKO E JE KRAĆI PUT!

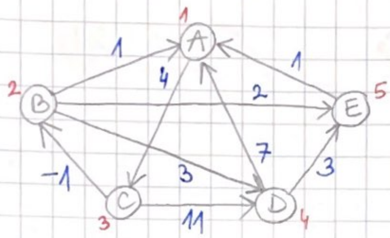
AŽURIRANJE LABELE!

NE AŽURIRAM JER 2+2=4 > 2 TAKO DA OSTAJE PUTANJA IZ E

NAJKRAĆA UDALJENOST OD F DO B: 2 , PUTANJA: F → C → D → E → B

WFI → WARSHALL - FLOYD - INGERMAN

KORIŠTENJEM WFI ALGORITMA PRONAĐITE NAJMANJE UDALJENOSTI IZMEĐU SVIH VRHOVA. ZATIM PRONAĐITE NAJMANJU UDALJENOST I PUTANJU IZMEĐU VRHOVA A I D.



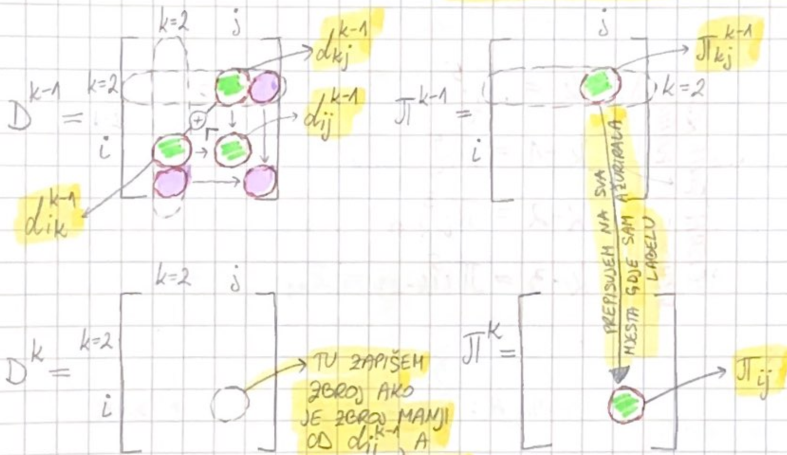
$$d_{ij}^{k} = \begin{cases} w_{ij}, & k=0 \\ \min\left(d_{ij}^{k-1},\ d_{ij}^{k-1} + d_{kj}^{k-1}\right), & k \geq 1 \end{cases}$$

d_{ij}^{k} → UDALJENOST IZMEĐU VRHA i I j U KORAKU k

$$\pi_{ij}^{k} = \begin{cases} \pi_{ij}^{k-1}, & d_{ij}^{k-1} \leq d_{ik}^{k-1} + d_{kj}^{k-1} \\ \pi_{kj}^{k-1}, & d_{ij}^{k-1} > d_{ik}^{k-1} + d_{kj}^{k-1} \end{cases}$$

π_{ij}^{k} → PUTANJA

⇒ MATRICA JE $n \times n$ GDJE JE n BROJ VRHOVA U GRAFU!



TU ZAPIŠEM ZBROJ AKO JE ZBROJ MANJI OD d_{ij}^{k-1}, A AKO NIJE ONDA SAMO PREPISUJEMO VRIJEDNOST IZ PRETHODNE TABLICE

(1) INICIJALNA MATRICA PUTANJA: POSTAVLJAM POVEZANOSTI (PRVI REDAK 1 ZA A, DRUGI REDAK 2 ZA B, ...), OSTALO STAVLJAM X

(1) INICIJALNA MATRICA UDALJENOSTI: POSTAVLJAM UDALJENOSTI (DIREKTNE UDALJENOSTI), OSTALO STAVLJAM ∞
↳ DIJAGONALA JE 0!

$\boxed{k=0}$

$$D^0 = \begin{array}{c|ccccc} \text{OD:} \backslash \text{DO:} & A & B & C & D & E \\ \hline A & 0 & \infty & 4 & \infty & \infty \\ B & 1 & 0 & \infty & 3 & 2 \\ C & \infty & -1 & 0 & 11 & \infty \\ D & 7 & \infty & \infty & 0 & 3 \\ E & 1 & \infty & \infty & \infty & 0 \end{array} \qquad \pi^0 = \begin{array}{c|ccccc} & A & B & C & D & E \\ \hline A & \times & \times & 1 & \times & \times \\ B & 2 & \times & \times & 2 & 2 \\ C & \times & 3 & \times & 3 & \times \\ D & 4 & \times & \times & \times & 4 \\ E & 5 & \times & \times & \times & \times \end{array}$$

$\boxed{k=1}$ ⇒ 1. REDAK I 1. STUPAC U D^0!

$$D^1 = \begin{bmatrix} 0 & \infty & 4 & \infty & \infty \\ 1 & 0 & 5 & 3 & 2 \\ \infty & -1 & 0 & 11 & \infty \\ 7 & \infty & 11 & 0 & 3 \\ 1 & \infty & 5 & \infty & 0 \end{bmatrix} \qquad \pi^1 = \begin{bmatrix} \times & \times & 1 & \times & \times \\ 2 & \times & 1 & 2 & 2 \\ \times & 3 & \times & 3 & \times \\ 4 & \times & 1 & \times & 4 \\ 5 & \times & 1 & \times & \times \end{bmatrix}$$

NOVE (MANJE) VRIJEDNOSTI UPIŠEM, OSTALE PREPIŠEM!

NA MJESTA NA KOJA SU U D^1 IŠLE NOVE VRIJEDNOSTI OVDJE STAVLJAM VRIJEDNOST TOG STUPCA U REDKU KOJI MI JE TRENUTNO OZNAČEN, OSTALE PREPIŠEM!

$\boxed{k=2}$ $1+(-1)=0<\infty$ $\quad 2+(-1)=1<\infty$
$3+(-1)=2<11$

$$D^2 = \begin{bmatrix} 0 & \infty & 4 & \infty & \infty \\ 1 & 0 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 7 & \infty & 11 & 0 & 3 \\ 1 & \infty & 5 & \infty & 0 \end{bmatrix} \qquad \pi^2 = \begin{bmatrix} \times & \times & 1 & \times & \times \\ 2 & \times & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & \times & 2 & 2 \\ 4 & \times & 1 & \times & 4 \\ 5 & \times & 1 & \times & \times \end{bmatrix}$$

$\boxed{k=3}$

$$D^3 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 & 6 & 5 \\ 1 & 0 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 7 & 10 & 11 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 5 & 7 & 0 \end{bmatrix} \qquad \Pi^3 = \begin{bmatrix} x & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & x & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & x & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & x & 4 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & x \end{bmatrix}$$

$\boxed{x=4}$ → NEMA PROMJENE, PREPISUJEM SVE

$$D^4 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 & 6 & 5 \\ 1 & 0 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 7 & 10 & 11 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 5 & 7 & 0 \end{bmatrix} \qquad \Pi^4 = \begin{bmatrix} x & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & x & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & x & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & x & 4 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & x \end{bmatrix}$$

$\boxed{x=5}$

$$D^5 = \begin{array}{c|ccccc} & A & B & C & D & E \\ \hline A & 0 & 3 & 4 & 6 & 5 \\ B & 1 & 0 & 5 & 3 & 2 \\ C & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ D & 4 & 7 & 8 & 0 & 3 \\ E & 1 & 4 & 5 & 7 & 0 \end{array} \qquad \Pi^5 = \begin{array}{c|ccccc} & \Pi_{11} & \Pi_{12} & \Pi_{13} & \overset{j}{\Pi_{14}} & \Pi_{15} \\ \hline i & x & 3 & 1 & 2 & 2 \\ & 2 & x & 1 & 2 & 2 \\ & 2 & 3 & x & 2 & 2 \\ & 5 & 3 & 1 & x & 4 \\ & 5 & 3 & 1 & 2 & x \end{array}$$

NAJMANJA UDALJENOST OD A DO D JE 6!

$$d_{AD} = d_{14}^5 = 6$$

ZA PUTANJU IDEMO UNATRAG KROZ MATRICU Π^5 OD Π_{14}^5, GDJE JE $i=1$ (REDAK),

$j = 4$ (STUPAC)

$i=1$, $j=4$

ČITAM OVIM REDOM VRHOVE U PUTANJI

$$k = \Pi_{ij}^5 = \Pi_{14}^5 = 2 = B$$
$$k-1 = \Pi_{ik}^5 = \Pi_{12}^5 = 3 = C$$
$$k-2 = \Pi_{i(k-1)}^5 = \Pi_{13}^5 = 1 = A$$
$$k-3 = \Pi_{i(k-2)}^5 = \Pi_{11}^5 = X$$

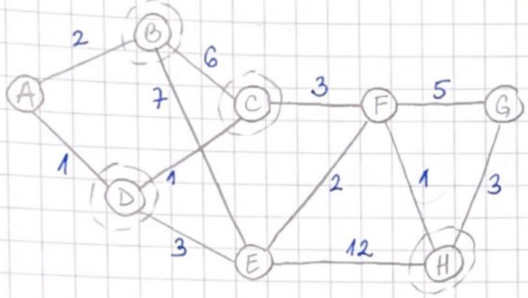
$\Downarrow$

PUTANJA: $k-2 \to k-1 \to k \to$ KRAJ

$A \to C \to B \to D$

CPP – PROBLEM KINESKOG POŠTARA

KOJI JE NAJEFIKASNIJI PUT PO SUSJEDSTVU KOJI MAMA I LARA TREBAJU PROĆI DA PRONAĐU FLEKICU? MAMA I LARA ZAPOČINJU TRAŽITI U VRHU C.
↳ TAMO GDJE POČINJU TAMO I ZAVRŠAVAJU!



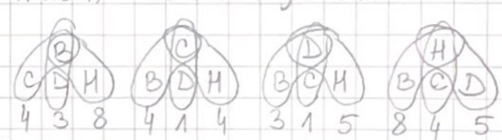
→ UVJET ZA RIJEŠITI OVAJ ZAD JE DA IMAMO EULEROV GRAF!

PROVJERA DA JE EULEROV GRAF: AKO IMAMO BAREM JEDAN VRH U GRAFU KOJI JE NEPARNOG STUPNJA (STUPANJ VRHA = BROJ BRIDOVA KOJI IZLAZE IZ NJEGA), TADA GRAF MORAMO EULERIZIRATI!!!

POSTUPAK EULERIZACIJE:

1°) IZOLIRAMO SVE VRHOVE NEPARNOG STUPNJA (B, C, D i H)

2°) POMOĆNA TABLICA ZA ODREDITI NAJOPTIMALNIJE PAROVE NEPARNIH VRHOVA – KOMBINACIJE PAROVA VRHOVA:



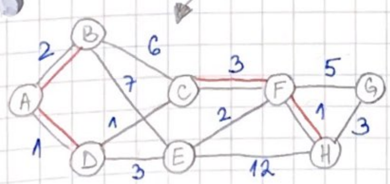
ZA PRONALAZAK NAJKRAĆIH PUTEVA IZMEĐU OVIH PAROVA TREBA KORISTITI WFI, ALI BRŽE JE NAPAMET (TREBA PAZITI!)

↳ BC: B→A→D→C , d = 4
BD: B→A→D , d = 3
BH: B→A→D→C→F→H , d = 8
CB: C→D→A→B , d = 4
CD: C→D , d = 1
CH: C→F→H , d = 4
DB: D→A→B , d = 3
DC: D→C , d = 1
DH: D→C→F→H , d = 5
HB: H→F→C→D→A→B , d = 8
HC: H→F→C , d = 4
HD: H→F→C→D , d = 5

3°) TESTIRAMO PAROVE I TRAŽIMO NAJOPTIMAL. KOMBINACIJU PAROVA:

BC + DH = 4 + 5 = 9
BD + CH = 3 + 4 = 7 W
BH + CD = 8 + 1 = 9

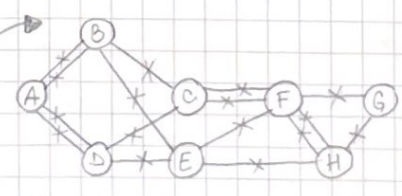
TO JE NAŠA DOBITNA KOMBA!



4°) SPAJAMO VRHOVE IZ DOBITNE KOMBE I CRTAMO EULERIZIRANI GRAF:

5°) DOBIVANJE EULEROVOG KRUGA:

↳ KREĆEMO IZ C I MORAMO ZAVRŠITI U C
↳ PRVO ISKORISTITI SVE BRIDOVE KOJI NISU MOSTOVI, PA TEK ONDA ISKORISTITI BRIDOVE KOJI JESU MOSTOVI!
↳ MOST = BRID ČIJIM UKLANJANJEM ČINIM GRAF NEPOVEZANIM!
↳ KORISTITI METODU MICANJA BRIDOVA DA NE BISMO PROŠLI KROZ BRID DVA PUTA!

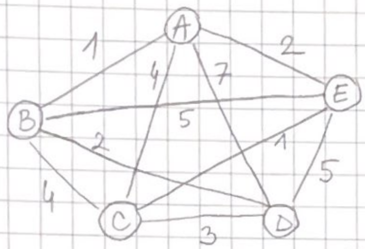


$C \overset{6}{-} B \overset{2}{-} A \overset{1}{-} D \overset{3}{-} E \overset{7}{-} B \overset{2}{-} A \overset{1}{-} D \overset{1}{-} C \overset{3}{-}$
$F \overset{1}{-} H \overset{3}{-} G \overset{5}{-} F \overset{1}{-} H \overset{12}{-} E \overset{2}{-} F \overset{3}{-} C$

6°) DULJINA EULEROVOG KRUG = TROŠAK PROLASKA KROZ CIJELO SUSJEDSTVO = 53

PROBLEM PUTUJUĆEG TRGOVCA / 2-MST HEURISTIKA

KORIŠTENJEM 2-MST HEURISTIKE PRONAĐITE NAJEFIKASNIJI PUT TRGOVCA KROZ MODEL U SLJEDEĆEM GRAFU. TRGOVAC POČINJE OBILAZITI KLIJENTE IZ VRHA A.



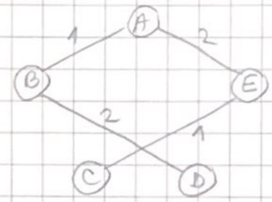
1° PRONAĆI MINIMALNO RAZAPINJUJUĆE STABLO IZ GRAFA NPR. KRUSKALOVIM ALGORITMOM ZA PRONALAZAK MIN RAZAPINJUJUĆEG STABLA:

OVAJ ALGORITAM JE ISKLJUČIVO ZA NEUSMJERENE GRAFOVE!

1.1° PREPIŠEMO VRHOVE GRAFA, ZATIM GLEDAMO BRIDOVE U GRAFU I SORTIRAMO IH PO TEŽINAMA

↳ CRTAMO PRVO TEŽINE 1, PA TEŽINE 2,... I GLEDAMO KADA ĆEMO DOBITI MIN. RAZAPINJUJUĆE STABLO

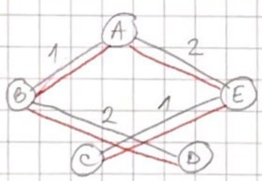
PAZITI DA NEMA CIKLUSA!



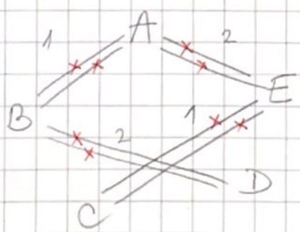
DOBILI GA NAKON TEŽINA 1 I 2, OSTALI TEŽI BRIDOVI NAM NE TREBAJU

2° EULERIZACIJA MIN. RAZAPINJUJUĆEG STABLA:

2.1° PODUPLAMO SVE BRIDOVE U MST:



2.2° DETEKTIRAMO EULEROV KRUG: ⇒ KREĆEMO IZ VRHA A I MORAMO ZAVRŠITI U A!



A – B – D – B – A – E – C – E – A

2.3° GLEDAMO SVE VRHOVE KOJE SMO OBILAZILI 2. PUT I IZBACUJEMO IH VAN:

A B D B A E C E A ⇒ HAMILTONOV CIKLUS:

A – B – D – E – C – A

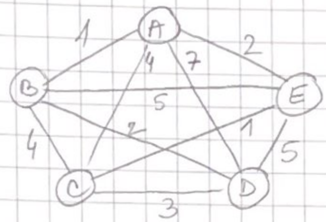
1 2 5 1 4 → UZIMAM TEŽINE IZ ORIGINALNOG GRAFA

3° NAJEFIKASNIJI PUT TRGOVCA JE ZBROJ TEŽINA IZ HAMILTONOVOG CIKLUSA:

$1+2+5+1+4=13$ → TO JE NAŠ TROŠAK PUTA!

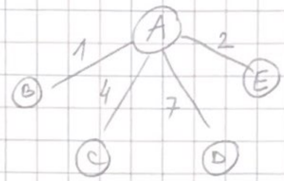
DIJKSTRA – MST

KORIŠTENJEM 2-MST HEURISTIKE PRONAĐITE NAJEFIKASNIJI PUT KROZ MODEL U SLJEDEĆEM GRAFU. TRGOVAC POČINJE OBILAZITI KLIJENTE IZ VRHA A.

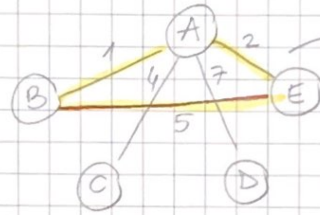


1° PRONAĆI MIN. RAZ. STABLO PREKO DIJKSTRE:

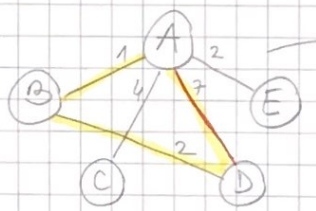
1.1° CRTAM SVE BRIDOVE KOJI IZLAZE IZ POČ. VRHA:



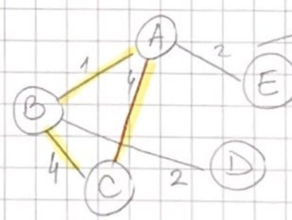
1.2° ZATIM SE MIČEM NA VRH B I CRTAM SVE BRIDOVE KOJI IZLAZE IZ NJEGA:



→ CIKLUS A-B-E-A
⇓
ZNAČI DA BRIŠEM NAJTEŽI BRID CIKLUSA (BRID B-E)

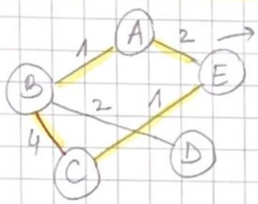


→ CIKLUS A-B-D-A
⇓
BRIŠEM NAJTEŽI BRID CIKLUSA (BRID A-D)

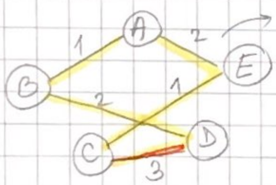


→ CIKLUS A-B-C-A
⇓
BRIŠEM BILO KOJI BRID OD NAJTEŽIH (ILI B-C ILI A-C)

1.3° ZATIM PRELAZIM NA VRH C:

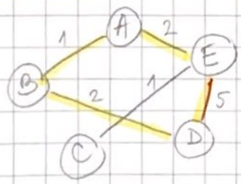


→ CIKLUS A-B-C-E-A
⇓
BRIŠEM BRID BC



→ CIKLUS A-B-D-C-E-A
⇓
BRIŠEM BRID CD

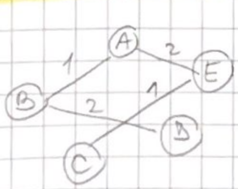
1.4° ZATIM PRELAZIM NA VRH D:



→ CIKLUS A-B-D-E-A
⇓
BRIŠEM BRID DE

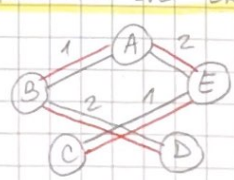
1.5° PRELAZIM NA VRH E:

SVE BRIDOVE SPOJENE S E SMO VEĆ PROVJERILI, DAKLE OVO JE NAŠ MST:



2° EULERIZACIJA MIN. RAZ. STABLA:

2.1° PODUPLAMO SVE BRIDOVE U MST:



2.2° DETEKTIRAMO EULEROV KRUG: ⇒ KREĆEMO IZ A, MORAMO ZAVRŠITI U A!

A – B – D – B – A – E – C – E – A

2.3° SVE VRHOVE KOJE OBILAZIMO 2. PUT IZBACUJEMO VAN:

A B D ~~B~~ ~~A~~ E C ~~E~~ A

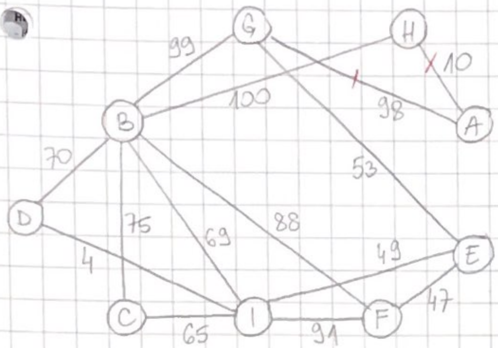
2.4° HAMILTONOV CIKLUS: ABDECA

2.5° TROŠAK PUTA = 1+2+5+1+4 = 13

ZBROJ TEŽINA HAM. CIKLUSA

PRIMOV ALGORITAM

ISKORISTITE PRIMOV ALGORITAM ZA PRONALAZAK MIN. RAZAPINJUJUĆEG STABLA (MST):



→ PRIMOV ALGORITAM POSTEPENO DODAJE NOVE ČVOROVE I BRIDOVE U MST IZ ORIGINALNOG GRAFA

V_r = SKUP VRHOVA STABLA KOJI NISU U MST

V_g / E_g = SKUP VRHOVA / BRIDOVA MST

↳ SPAJA JEDAN VRH IZ V_r I JEDAN VRH IZ V_g

↳ TAKO DUGO DOK IMAMO VRHOVA U V_r ($V_r \neq 0$) RADI:

1° ODABERI NAJMANJI BRID uv KOJI SPAJA VRHOVE IZ V_r I V_g

2° $V_g = V_g \cup \{u \in V_r\}$ ⇒ DODAJEMO VRH IZ V_r u V_g

3° $V_r = V_r \setminus \{u \in V_r\}$ ⇒ MIČEMO TAJ VRH IZ V_r

4° $E_g = E_g \cup \{uv\}$ ⇒ DODAJEMO BRID KOJI SPAJA VRH S NEKIM ČVOROM IZ V_r

V_r JE NA POČETKU JEDNAK SVIM VRHOVIMA GRAFA: $V_r = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I\}$

V_g JE NA POČETKU PRAZAN: $V_g = \{\}$

E_g JE NA POČETKU PRAZAN: $E_g = \{\}$

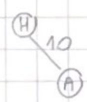
→ SA STRANE IMAM TABLICU Q U KOJU PIŠEM KOJI BRIDOVI MI TRENUTNO ULAZE U OBZIR

→ NA POČETKU UZIMAM PROIZVOLJAN POČETNI VRH (TREBA SE DOBITI ISTO RJ. KOJI GOD DA SE UZME)

↳ UZETI ĆU A: $V_r = \{\cancel{A}, B, C, D, E, F, G, \cancel{H}, I\}$

$V_g = \{A, H\}$

$E_g = \{AH\}$



Q: AH: 10 → ON JE NAJMANJI PA UZIMAM NJEGA!
AG: 98

↳ MIČEM H IZ V_r I STAVLJAM BRID AH U E_g, A VRH H U V_g

↳ SADA UZIMAM H: $V_r = \{B, C, D, E, F, \cancel{G}, I\}$

$V_g = \{A, H, G\}$

$E_g = \{AH, AG\}$

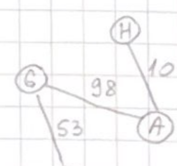
Q: AG: 98
HB: 100

↳ SADA UZIMAM G: $V_r = \{B, C, D, \cancel{E}, F, I\}$

$V_g = \{A, H, G, E\}$

$E_g = \{AH, AG, GE\}$

Q: HB: 100
GB: 99
GE: 53

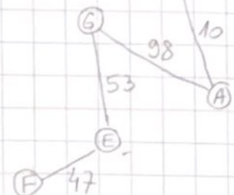


↳ SADA UZIMAM E: $V_r = \{B, C, D, \cancel{F}, I\}$

$V_g = \{A, H, G, E, F$

$E_g = \{AH, AG, GE, EF\}$

Q: HB: 100
GB: 99
EI: 49
EF: 47

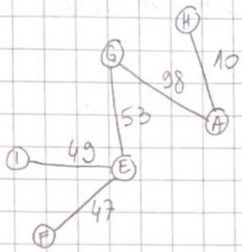


↳ SADA UZIMAM F: $V_r = \{B, C, D, \cancel{I}\}$

$V_g = \{A, H, G, E, F, I\}$

$E_g = \{AH, AG, GE, EF, EI\}$

Q:
HB: 100
GB: 99
EI: 49
FB: 88
FI: 91

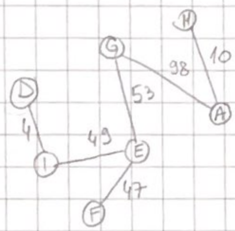


↳ SADA UZIMAM I: $V_r = \{B, C, \cancel{D}\}$

$V_g = \{A, H, G, E, F, I, D\}$

$E_g = \{AH, AG, GE, EF, EI, ID\}$

Q:
HB: 100
GB: 99
FB: 88
FI: 91
IB: 69
IC: 65
ID: 4

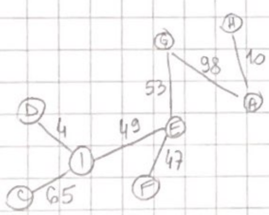


↳ SADA UZIMAM D: $V_r = \{B, \cancel{C}\}$

$V_g = \{A, H, G, E, F, I, D, C\}$

$E_g = \{AH, AG, GE, EF, EI, ID, IC\}$

Q:
HB: 100
GB: 99
FB: 88
FI: 91
IB: 69
IC: 65
DB: 70

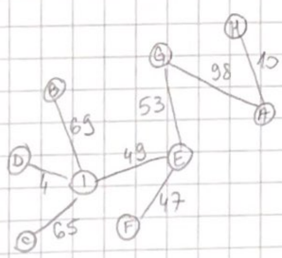


↳ SADA UZIMAM C: $V_r = \{\cancel{B}\}$

$V_g = \{A, H, G, E, F, I, D, C, B\}$

$E_g = \{AH, AG, GE, EF, EI, ID, IC, IB\}$

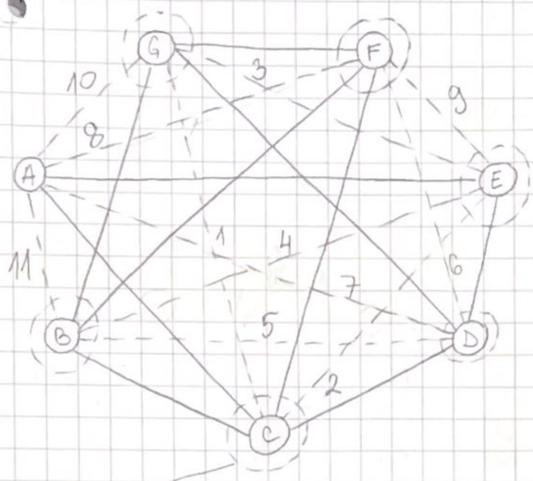
Q:
HB: 100
GB: 99
FB: 88
FI: 91
IB: 69
DB: 70
CB: 75



→ $V_r = \emptyset$, GOTOVI SMO I OVO JE NAŠE RAZAPINJUĆE STABLO! //

BONDY - CHVATAL

KORIŠTENJEM BONDY-CHVATAL TEOREMA PRONAĐITE HAMILTONOV CIKLUS U SLJEDEĆEM GRAFU.



VRH C IMA NAJVEĆI STUPANJ PA UZIMAM NJEGA U 1. KORAKU

$\deg(C) = 4$, $|V| = 7$

$\deg(C) + \deg(v) \geq 7$

$\deg(v) \geq 7 - 4 = 3 \Rightarrow \deg(v) \in \{3, 4, 5, 6\}$

SPAJAM C SA SVIM VRHOVIMA S KOJIMA VEĆ NIJE SPOJEN, A DA IM JE STUPANJ ≥ 3, DAKLE TO JE JEDINO VRH G (S B I D JE VEĆ SPOJEN) I ZAPISUJEM REDNI BROJ DODANOG BRIDA

SADA JE $\deg(C) = 5$ PA MOGU GLEDATI VRHOVE S KOJIMA JOŠ NIJE SPOJEN, A IMAJU $\deg(v) = 2$, DAKLE TO JE VRH E (S A JE VEĆ SPOJEN); $\deg(C)$ SADA JE 6, GOTOVA SAM S TIM VRHOM JER JE POVEZAN SA SVIMA DRUGIMA

SADA GLEDAM IDUĆI NAJVEĆI STUPANJ, TO JE G ($\deg(G) = 4$)

$\deg(v) \geq 3 \Rightarrow \deg(v) \in \{3, 4, 5, 6\}$

SPAJAM GA S VRHOM E I ZAPISUJEM REDNI BROJ DODANOG BRIDA

SADA JE $\deg(G) = 5$ PA MOGU GLEDATI VRHOVE S KOJIMA JOŠ NIJE SPOJEN, A IMAJU $\deg(v) = 2$, DAKLE TO JE VRH A $\Rightarrow$ ALI GA NEĆU SADA SPOJITI S NJIM JER JE TO VANJSKI, A NJIH ČUVAM ZA KRAJ!!

SADA GLEDAM IDUĆI NAJVEĆI STUPANJ, TO JE VRH E ($\deg(E) = 4$)

SPAJAM GA S VRHOM B (S VRHOM F ODGAĐAM SPAJANJE JER JE VANJSKI)

SADA JE $\deg(E) = 5$, MOGU GA GLEDATI S VRHOVIMA STUPNJA $\deg(v) = 2$, ALI S TAKVIM JE VEĆ SPOJEN

IDUĆI NAJVEĆI STUPANJ JE U VRHU B ($\deg(B) = 4$)

SPAJAM GA S VRHOM D JER $\deg(D) = 3$, $\deg(B) + \deg(D) = 7$

SADA JE $\deg(B) = 5$, GLEDAM VRHOVE S $\deg(v) = 2$, ALI NE SPAJAM JER TO MI JE VANJSKI BRID

SADA GLEDAM VRH D ($\deg(D) = 4$)

SPAJAM GA S VRHOM F JER $\deg(F) = 3$

SADA JE $\deg(D) = 5$ PA GA SPAJAM S A

1° PRONAĆI ZATVARAČ GRAFA:

TAKO DA SE U ORIGINALNI GRAF DODAJU BRIDOVI PREMA PRAVILU:

IZMEĐU VRHA u I v MOŽEMO DODATI BRID SAMO AKO STUPANJ VRHA u + STUPANJ VRHA $v \geq$ UKUPNOM BROJU VRHOVA U GRAFU

$\boxed{\deg(u) + \deg(v) \geq |V|}$

ONOG TRENUTKA KADA VIŠE NE MOŽEMO DODATI NIJEDAN BRID U GRAF, DOBILI SMO ZATVARAČ G'

U 1. KORAKU UZIMAM VRH S NAJVEĆIM STUPNJEM I KOMBINIRAM GA S NEKIM OD DRUGIH VRHOVA TAKO DA $\deg(u) + \deg(v) \geq |V|$

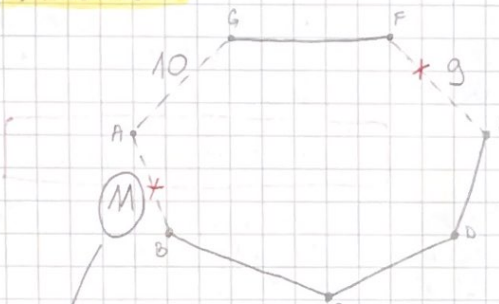
↳ SADA GLEDAM VRH F ($deg(F) = 4$) I SPAJAM GA S VRHOM A ($deg(A) = 3$)

→ SADA SAM POSPAJALA SVE UNUTARNJE BRIDOVE, OSTAJE MI SPOJITI VANJSKE

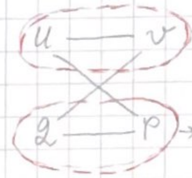
↳ SPOJITI ĆU IH SMJEROM OBRNUTIM OD KAZAJKE NA SATU (PRVO FE, PA GA, PA AB)

2° PRONAĆI HAMILTONOV CIKLUS U ZATVARAČU:

↳ KORISTIMO SAMO VANJSKE BRIDOVE U ZATVARAČU



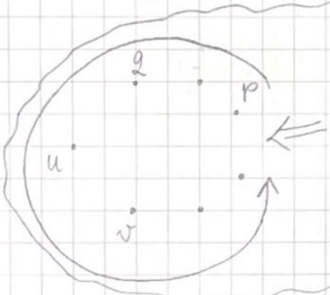
2.1° UZIMAM DODATNI BRID S NAJVEĆIM REDNIM BROJEM I UZIMAM GA ZA BRID $u-v$:



→ BRID S NAJVIŠIM REDNIM BROJEM

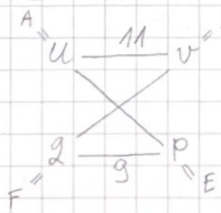
→ BRID TAKAV DA IMAMO BRIDOVE $u-p$ I $v-q$ (KRIŽNO POSTAVLJEMI BRIDOVI)

↳ KRIŽANI BRIDOVI MOGU BITI ILI REDOVNI BRIDOVI ILI DODATNI BRIDOVI S REDNIM BROJEM MANJIM OD BRIDA $u-v$!!!

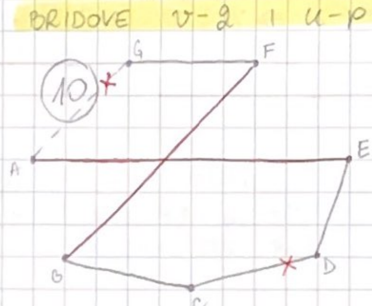


u, v, p, q MORAJU PRATITI REDOSLIJED VRHOVA U HAMILTONOVOM CIKLUSU I SVA 4 MORAJU BITI RAZLIČITI VRHOVI (NEMA DIJELJENJA VRHA MEĐU BRIDOVIMA)

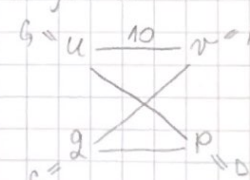
OVO JE DODATNI BRID S NAJVEĆIM REDNIM BROJEM →



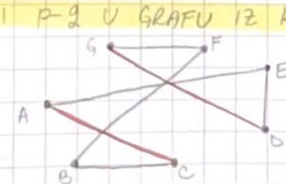
2.2° KRIŽAM BRIDOVE $u-v$ I $p-q$ U GRAFU IZ KORAKA 2° I DODAJEM BRIDOVE $v-q$ I $u-p$:



2.3° UZIMAM DODATNI BRID S NAJVEĆIM REDNIM BROJEM OD OVIH KOJI SU OSTALI, A OSTAO JE SAMO BRID AG, NJEGA STAVLJAM ZA BRID $u-v$:



2.4° KRIŽAM BRIDOVE $u-v$ I $p-q$ U GRAFU IZ KORAKA 2.2° I DODAJEM BRIDOVE $v-q$ I $u-p$:



⟹ NEMA VIŠE DODATNIH BRIDOVA, DOBILI SMO HAMILTONOV CIKLUS U GRAFU G! //

O-1 KNAPSACK OPTIMALNO

RIJEŠI PROBLEM NAPRTNJAČE KAPACITETA $C = 8$ SA SLJEDEĆIM 5 STVARI:

STVAR	1	2	3	4	5
v	2	4	8	16	20
s	1	4	2	5	7

VRIJEDNOST (v)
ZAUZEĆE (s)

– MORAMO PRONAĆI RJ. KOJE MAKSIMIRA VRIJEDNOST ODABRANIH STVARI PRI ČEMU ZAUZEĆE MORA BITI ≤ 8!

1° TABLICA (ZAUZEĆA s, STVARI) $\rightarrow$ VRIJEDNOST

(ZAUZEĆA = RETCI, STVARI = STUPCI)

STVARI NA IZBOR

s	{1}	{1,2}	{1,2,3}	{1,2,3,4}	{1,2,3,4,5}
	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0
⇒ 1	2	2	2	2	2
2	2	2	0+8	8	8
⇒ 3	2	2	2+8	10	10
4	2	0+4	2+8	10	10
5	2	2+4	2+8	0+16	16
6	2	2+4	4+8	2+16	18
7	2	2+4	6+8	8+16	24
⇒ 8	2	2+4	6+8	10+16	$\boxed{26}$
	UZIMAM	NE UZIMAM (2=2)	UZIMAM (2≠10)	UZIMAM (14≠16)	NE UZIMAM (26=26)

SVI MOGUĆI KAPACITETI NAPRTNJAČE

OVO JE MOJA OPTIMALNA VRIJEDNOST ZA $C = 8$

↳ USPOREĐUJEM OVAJ IZNOS SA STUPCEM ULIJEVO U ISTOM RETKU

↳ OBJE VRIJEDNOSTI ISTE ⇒ ZNAČI DA OVU ZADNJU STVAR NE UZIMAM

↳ VRIJEDNOSTI RAZLIČITE ⇒ UZIMAM OVU STVAR I ODUZIMAM NJENO ZAUZEĆE OD UKUPNOG KAPACITETA

JER $\max(24, 0+20) = \max(24, 20) = 24$

AKO KAPACITET NAPRTNJAČE I DALJE RASTE, A JA NA IZBOR IMAM SAMO STVAR 1, I DALJE MOGU OSTVARITI MAX VRIJEDNOST 2 JER SAMO STVAR 1 MOGU STAVITI U RUKSAK

max(VRIJEDNOST SLIJEVA, OVA OVDJE)

$\max(2, 0+4) \Rightarrow \max(2, 4) = 4$

STVAR 4 $\Rightarrow$ $s = 5$ $\Rightarrow$ $8 - 5 = 3$ $\Rightarrow$ IDEM NA REDAK BROJ 3

STVAR 3 $\Rightarrow$ $s = 2$ $\Rightarrow$ $3 - 2 = 1$ $\Rightarrow$ IDEM NA REDAK BROJ 1

STVAR 1 $\Rightarrow$ $s = 1$ $\Rightarrow$ $1 - 1 = \emptyset$

RJ. STVARI 1, 3 I 4 UZ ZAUZEĆE $1 + 2 + 5 = 8$

0-1 KNAPSACK FPTAS

0.1 - PRIBLIŽNIM ALGORITMOM

BILO KOJI $\alpha \in (0,1)$

NAĆI RJ. KOJE U NAJGOREM SLUČAJU POSTIŽE VRIJEDNOST 10 PUTA MANJU OD OPTIMALNE

POGREŠKA 0.9 (90%)

$C = 8$

	1	2	3	4	5
v	2	4	8	16	20
s	1	4	2	5	7

(1°) MIJENJAMO VRIJEDNOSTI IZ TABLICE:

epsilon = pogreška koju naš algoritam radi

epsilon = $1 - \alpha$ $= 1 - 0.1 = 0.9$

N = vrijednost najvrijednije stvari od svih koje imam u tablici

$N = 20$

m = broj stvari u tablici

$m = 5$

μ = KVANTIZACIJSKA JEDINICA

μ = epsilon $\cdot N / m$

$\mu = 0.9 \cdot 20 / 5 = 3,6$

$v' = \text{FLOOR}(v/\mu)$ → PRVI CIJELI BROJ MANJI ILI JEDNAK BROJU v/μ

OPTIMALNO VS. FPTAS:

$(s, \text{STVAR}) \to v$ $\quad$ $(v', \text{STVAR}) \to s$

	1	2	3	4	5
v'	0	1	2	4	5
s	1	4	2	5	7

DEFAULT VRIJEDNOST = **C + 1** = 9

(2°) TABLICA $(v', \text{STVAR}) \to s$

v'	{1}	{1,2}	{1,2,3}	{1,2,3,4}	{1,2,3,4,5}
	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0
1	9	4	4	4	4
2		9	0+2	2	2
3			4+2	6	6
4			9	5	5
5				9	7
6				7	$\boxed{7}$
				9	9

UZIMAM (9≠2) $\quad$ UZIMAM (9≠7) $\quad$ NE UZIMAM (7=7)

SAMO RETCI KOJI IMAJU U SEBI BROJ < 9!

min (0, 1) = 0 !!

min (9, 4) = 4!

U ZADNJEM STUPCU ZADNJI REDAK KOJI JE MANJI OD DEFAULT VRIJEDNOSTI JE NAŠE RJ.!

↳ RJ. ZAUZIMA C = 7 OD DOSTUPNIH 8 I SADRŽI STVARI 3 I 4

↳ VRIJEDNOST JE 8 + 16 = 24

$$\frac{\text{FPTAS}}{\text{OPTIMALNO}} = \frac{24}{26} = 0.92 \text{ - PRIBLIŽNO RJ.!}$$

$v' = 6$ I OD TOGA ODUZIMAM PRAVU VRIJEDNOST: $v' - v = 6 - 4 = 2$

$v' - v = 2 - 2 = 0$

LCG – LINEARNI KONGRUENTNI GENERATOR

PROIZVEDITE 5 SLUČAJNIH BROJEVA KORISTEĆI LINEARNI KONGRUENTNI GENERATOR SA SLJEDEĆIM PARAMETRIMA:

$a = 13$
$c = 150$
$m = 256$
$seed = 42$

FORMULA ZA LCG:

$$\underbrace{X_{n+1}}_{\text{SLJEDEĆI SLUČ. BROJ}} = (a \underbrace{X_n}_{\text{SLUČ. BROJ}} + c) \bmod m$$

1° $X_0 = seed$ (TO JE NULTI ELEMENT NAŠE SEKVENCE)

↳ ON SE NE UBRAJA U TIH 5 BROJEVA KOJI SE TRAŽE U ZADATKU!

2° $X_1 = (13 \cdot X_0 + 150) \bmod 256$

$X_1 = 696 \bmod 256 = 184$

3° $X_2 = (13 \cdot X_1 + 150) \bmod 256$

$X_2 = 2542 \bmod 256 = 238$

4° $X_3 = (13 \cdot X_2 + 150) \bmod 256$

$X_3 = 3244 \bmod 256 = 172$

5° $X_4 = (13 \cdot X_3 + 150) \bmod 256$

$X_4 = 2386 \bmod 256 = 82$

6° $X_5 = (13 \cdot X_4 + 150) \bmod 256$

$X_5 = 1216 \bmod 256 = 192$

NA KALKULATORU:

1° $\boxed{\text{MENU}}$ → $\boxed{3}$ (MODE Dec)

2° X mod Y

⇓

X $\boxed{-}$ X $\boxed{\div}$ Y $\boxed{\times}$ Y