1. a) Primijetimo da je $X \in M_{2,3}$

Napišemo li $X = \begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{bmatrix}$, i pretpostavimo li da je X rješenje, nužno dobivamo jednadžbe

$$2a+b = 4a+2b = 6a+3b = 0$$

$$2c+d = 4c+2d = 6c+3d = 0$$

$$2e+f = 4e+2f = 6e+3f = 0$$

odnosno $b = -2a$, $d = -2c$ i $f = -2e$.

Također, vidimo da su ovo i dovoljni uvjeti da bi matrica X bila rješenje zadane jednadžbe.

Zaključujemo da je

$$\left\{ \begin{bmatrix} a & c & e \\ -2a & -2c & -2e \end{bmatrix} : a,c,e \in \mathbb{R} \right\}$$ skup rješenja

polazne jednadžbe.

b) Budući da je matrica s desne strane jednakosti jedinična (invertibilna), zaključujemo da jednadžba ima rješenje ako i samo ako je matrica $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{bmatrix}$ invertibilna.

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{vmatrix} \begin{matrix})+(\cdot(-2)) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ Spomenuta matrica nije invertibilna pa jednadžba nema rješenja.

2. a)

(i) $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =: T_1$$

(ii) $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =: T_2$$

(iii) $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =: T_3$$

b)
$$T_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = T_1$$

$$T_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =: T_4$$

$$T_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =: T_5$$

$T_1^{-1} \rightsquigarrow$ zamjena prvog i drugog retka

$T_2^{-1} \rightsquigarrow$ množenje drugog retka s $\frac{1}{3}$

$T_3^{-1} \rightsquigarrow$ dodavanje trećeg retka, pomnoženog s -2, prvom

(c) Uvjet zapisujemo na sljedeći način:

$$T_3(T_2(T_1 X)) = I, \text{ odnosno}$$

$$T_3 T_2 T_1 X = I \quad / (T_3 T_2 T_1)^{-1} \cdot (\quad)$$

$\Leftrightarrow$

$$X = (T_3 T_2 T_1)^{-1} = T_1^{-1} T_2^{-1} T_3^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \ldots$$

2. c) nastavak

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. (a)

Sustar $A \cdot x = b$ ima rješenje ako i samo ako matrica sustava (matrica A) ima jednak rang kao i proširena matrica sustava (matrica $[A \,\vdots\, b]$).

(b) Pretpostavimo li da sustar ima neko rješenje $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ dobivamo da nužno vrijedi:

$$b_1 = -4x_1$$
$$b_2 = -3x_1 + 2x_2$$
$$b_3 = -x_1 + 2x_2,$$

odnosno

$$b_2 - \frac{3}{4} b_1 = b_3 - \frac{1}{4} b_1.$$

S druge strane, ako vrijedi jednakost

$b_2 - \frac{3}{4} b_1 = b_3 - \frac{1}{4} b_1 = 2y$, onda se direktnom

provjerom vidi da je $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ rješenje, gdje je

$x = -\frac{1}{4} b_1$.

$\Rightarrow$ Sustav ima rješenje ako i samo ako je $b_2 - \frac{3}{4} b_1 = b_3 - \frac{1}{4} b_1$.

2. način

Primijetimo da matrica $\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ima rang jednak 2. Sada zaključujemo da je matrica $\begin{bmatrix} -4 & 0 & b_1 \\ -3 & 2 & b_2 \\ -1 & 2 & b_3 \end{bmatrix}$ ranga jednakog 2 ili 3, tj. da je ranga 2 ako i samo ako nije invertibilna (determinanta joj je 0).

$$\begin{vmatrix} -4 & 0 & b_1 \\ -3 & 2 & b_2 \\ -1 & 2 & b_3 \end{vmatrix} = -8b_3 + 8b_2 - 4b_1 .$$

Po uvjetu iz (a) dijela zadatka i gornjoj diskusiji, zaključujemo da sustav ima rješenje ako i samo ako je $0 = -8b_3 + 8b_2 - 4b_1$.

4. (a)

Baza vektorskog prostora je linearno nezavisan sustav izvodnica.

(b)

Označimo elemente baze B s $b_1, b_2, \ldots b_n$. Zbog toga što je baza sustav izvodnica znamo da je vektor v prikaziv kao linearna kombinacija elemenata baze: $v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \ldots + \alpha_n b_n$.

Pretpostavimo da v ima 2 zapisa ovog oblika:

$$V = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \ldots + \alpha_n b_n$$

$$= \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \ldots + \beta_n b_n$$

$$\Rightarrow \quad 0 = (\alpha_1 - \beta_1) b_1 + (\alpha_2 - \beta_2) b_2 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n) b_n$$

Linearna nezavisnost sada daje

$\alpha_1 - \beta_1 = \alpha_2 - \beta_2 = \ldots = \alpha_n - \beta_n = 0$, odnosno

$$\alpha_1 = \beta_1$$
$$\alpha_2 = \beta_2$$
$$\vdots$$
$$\alpha_n = \beta_n$$

iz čega vidimo da su ova 2 zapisa nužno

ista, odnosno da je zapis jedinstven.

(c) Primijetimo da je

$$u = \frac{1}{2}(u+v) + \frac{1}{2}(w+u) - \frac{1}{2}(v+w)$$

$$v = \frac{1}{2}(u+v) + \frac{1}{2}(v+w) - \frac{1}{2}(u+w)$$

$$w = \frac{1}{2}(v+w) + \frac{1}{2}(u+w) - \frac{1}{2}(u+v)$$

pa zaključujemo da je $\{u+v, v+w, w+u\}$ sustav izvodnica, jer je to i $\{u, v, w\}$.

Pokažimo i da je linearno nezavisan:

$$\alpha(u+v) + \beta(v+w) + \gamma(w+u) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(\alpha+\gamma)u + (\alpha+\beta)v + (\gamma+\beta)w = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\alpha+\gamma = 0, \ \alpha+\beta = 0, \ \gamma+\beta = 0 \quad (\text{zbog lin. nez. } \{u,v,w\})$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}\left[(\alpha+\gamma) + (\alpha+\beta) - (\gamma+\beta)\right] = 0$$

$$\Rightarrow \beta = \gamma = 0$$

Ovaj izvod pokazuje linearnu nezavisnost.

∎

5. (a)

Kanonska baza $e = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$.

$$A(E_{11}) = A\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = E_{11} + E_{21}$$

$$A(E_{12}) = A\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = E_{11} + E_{12}$$

$$A(E_{21}) = A\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \cancel{E} \; E_{21} + E_{22}$$

$$A(E_{22}) = A\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E_{12} + E_{22}$$

$$A(e,e) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Rang operatora jednak je rangu bilo kojeg matričnog prikaza.

$$r\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= r\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 3.$$

Rang operatora $r(A) = 3$. Po teoremu o rangu i defektu, defekt operatora je $d(A) = 4 - r(A) = 1$.

(c) Pretpostavimo da je $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ matrica takva da je $A(M) = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}$.

$$\Rightarrow \quad a_{11} + a_{12} = 5$$
$$a_{12} + a_{22} = -5$$
$$a_{22} + a_{21} = 5$$
$$a_{21} + a_{11} = -5$$

$$\Rightarrow 0 = (a_{11} + a_{12}) - (a_{12} + a_{22}) + (a_{22} + a_{21}) - (a_{21} + a_{11}) =$$
$$= 5 - (-5) + 5 - (-5) = 20$$
$$\Rightarrow \Leftarrow$$

Došli smo do kontradikcije, odnosno nema takvih matrica M.

5. d)

$$A\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$$

$$A\left(\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$$

$$A\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$A\left(\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} = 0$$

Zapis operatora A u bazi $b = \left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\right\}$

je $A(b,b) = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

6.

(a) Provjeravamo svojstva skalarnog produkta.

Simetričnost:

$$\langle p_1(t) | p_2(t) \rangle = \int_{-1}^{1} t^2 p_1(t) p_2(t)\, dt = \int_{-1}^{1} t^2 p_2(t) p_1(t)\, dt =$$

$$= \langle p_2(t) | p_1(t) \rangle$$

Zbog simetričnosti je dovoljno provjeriti linearnost samo u jednom argumentu:

Linearnost (u prvom argumentu):

$$\langle \alpha p(t) + \beta q(t) | r(t) \rangle = \int_{-1}^{1} t^2 [\alpha p(t) + \beta q(t)] r(t)\, dt =$$

$$= \int_{-1}^{1} [\alpha t^2 p(t) r(t) + \beta t^2 q(t) r(t)]\, dt = [\text{linearnost integrala}]$$

$$= \alpha \int_{-1}^{1} t^2 p(t) r(t)\, dt + \beta \int_{-1}^{1} t^2 q(t) r(t)\, dt =$$

$$= \alpha \langle p(t) | r(t) \rangle + \beta \langle q(t) | r(t) \rangle$$

Pozitivna definitnost:

Za $p \in \mathcal{P}_2$ imamo da je $t^2 p(t)^2$ pozitivna funkcija pa slijedi da je

$$\langle p \mid p \rangle = \int_{-1}^{1} t^2 p(t)^2 \, dt \geq 0.$$

Ako je $\langle p \mid p \rangle = 0$, nužno je $t^2 p(t)^2 = 0$, ~~kt~~ $\forall t \in [-1,1]$

(jer je $t^2 p(t)^2$ neprekidna)

$\Rightarrow p(t) = 0$ za beskonačno mnogo t pa je p nul-polinom tj $p = 0$.

6.b) Dovoljno je pronaći sve polinome

$q \in \mathcal{P}_2$ takve da je

$$\langle q | p_1 \rangle = 0 \quad \&$$

$$\langle q | p_2 \rangle = 0$$

Potražimo ih u općem obliku

$$q(t) = at^2 + bt + c$$

$$0 = \langle q | p_1 \rangle = \int_{-1}^{1} t^2 (t+1)(at^2 + b\cancel{t} + c)\, dt =$$

$$= \int_{-1}^{1} t^2 \left(at^3 + (a+b)t^2 + (b+c)t + c\right] dt =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[at^5 + (a+b)t^4 + (b+c)t^3 + ct^2\right] dt =$$

$$= \left(\frac{a}{6}t^6 + \frac{a+b}{5}t^5 + \frac{b+c}{4}t^4 + \frac{c}{3}t^3\right)\Big|_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{2}{5}(a+b) + \frac{2}{3}c \qquad (*)$$

$$0 = \langle q | p_2 \rangle = \int_{-1}^{1} t^2 (2t+3)(at^2+bt+c)\, dt =$$

$$= \int_{-1}^{1} t^2 \left(2at^3 + (3a+2b)t^2 + (3b+2c)t + 3c\right) dt =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[2at^5 + (3a+2b)t^4 + (3b+2c)t^3 + 3ct^2\right] dt =$$

$$= \left(\frac{a}{3}t^6 + \frac{3a+2b}{5}t^5 + \frac{3b+2c}{4}t^4 + ct^3\right)\Big|_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{2}{5}(3a+2b) + 2c =$$

$$= 3\underbrace{\left[\frac{2}{5}(a+b) + \frac{2}{3}c\right]}_{=0} - \frac{2}{5}b$$

$$\Rightarrow b = 0$$

$$\Rightarrow c = -\frac{3}{5}a$$

$$\Rightarrow L^{\perp} = \left\{ at^2 - \frac{3}{5}a : a \in \mathbb{R} \right\}$$