

OSL
PITANJA ZA PROVJERU ZNANJA

(1)

Definirati Fourierovu transformaciju vremenski kontinuiranog signala (CTFT) i inverznu Fourierovu transformaciju vremenski kontinuiranog signala (CTFT). Opisati vezu Laplaceove i Fourierove transformacije. Opisati vezu između impulsnog odziva kontinuiranog sustava, njegove prijenosne funkcije te frekvencijske karakteristike.

CTFT

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

ICTFT

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

LAPLACE

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

Laplace i Fourier su juko slične transformacije
Dvije zajedničke karakteristike su

- 1) Za Laplace-a je donja granica integriranja ϕ , a ne $-\infty$
- 2) Laplace-ova transformacija koristi transformacijsku varijable s u kompleksnoj ravnini, dok je kod Fouriera ona potpuno imaginarni broj ograničen na $|s=j\omega|$

Generalno Laplace-ova transformacija koristi se za polje beskonačne ili djelomično kontinuirane funkcije (step ili pravokutni puls)

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt$$

FOURIER

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-st} dt$$

LAPLACE

$|H(\omega)|$ - amplitudna frekvencijska karakteristika
 $\angle H(\omega)$ - fazna karakteristika

- (2) Definirati Fourierovu transformaciju vremenski diskretnog signala (DTFT) i inverznu Fourierovu transformaciju vremenski diskretnog signala (IDTFT). Opisati vezu između Z-transformacije i Fourierove transformacije. Opisati vezu između impulsnog odziva diskretnog sustava, njegove prijenosne funkcije te frekvencijske karakteristike.

$$DTFT: X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

$$IDTFT: x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega$$

$$\mathcal{Z}[f[n]] = \sum_{n=0}^{+\infty} f[n] z^{-n}, \text{ ako napravimo supstituciju } z = e^{j\omega}$$

dobivamo DTFT kausalnog signala

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f[n] e^{-j\omega n}$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] e^{-j\omega n}, |H(e^{j\omega})| - \text{amplitudna特性 karakteristika}$$

$\angle H(e^{j\omega})$ - fazna karakteristika

DTFT je specijalni slučaj Z-transformacije

(3.)

Definirati diskretnu Fourierovu transformaciju (DFT) i inverznu diskretnu Fourierovu transformaciju (IDFT). Kakve razlike se mogu pojaviti u rezultatu koji daje DTFT i DFT kao posljedica činjenice da diskretna Fourierova transformacija podrazumijeva kauzalan signal. Što je brza Fourierova transformacija (FFT)?

$$\text{DFT} \quad X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}, \quad W_N^{kn} = e^{-j \frac{2\pi kn}{N}}$$

$$\text{IDFT} \quad \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn}$$

DFT podrazumijeva da je ulazni signal diskretan i konacan te daje spektar koji je diskretan, periodican, kauzalan te ima oznaku uzorka, koliko ih je imao i signal
DTFT podrazumijeva da je ulazni signal diskretan i beskonacan te je spektar koji je kontinuiran i periodican

FFT je algoritam za obrano računanje DFT-a karakterizirajući DFT matricu. DFT ima složenos $O(N^2)$, dok FFT ima složenos $O(N \log N)$

4)

Definirati Hilbertovu transformaciju vremenski kontinuiranih signala. Izvesti izraz za impulsni odziv idealnog vremenski kontinuiranog Hilbertovog transformatora, te napisati izraz za njegovu frekvencijsku karakteristiku. Nacrtati amplitudnu i faznu karakteristiku idealnog Hilbertovog transformatora.

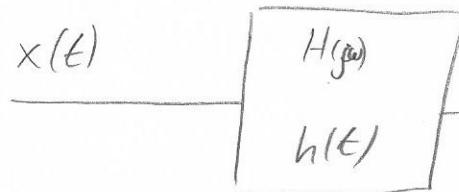
Hilbertova transformacija

povezuje vremenski i vremensku domenu

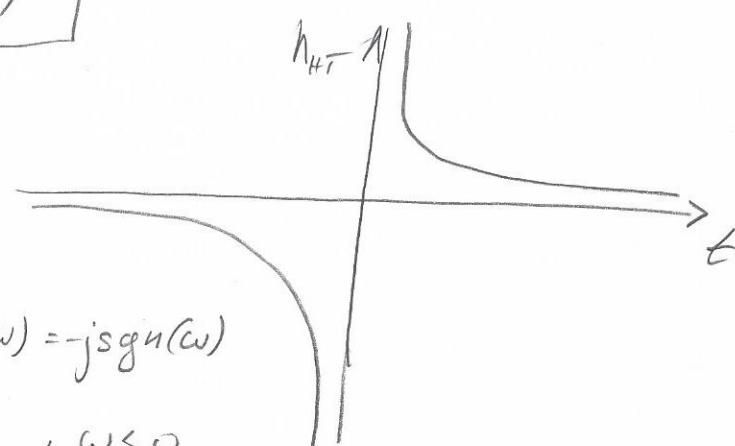
$\xrightarrow{\text{value principle integral - racunamo ga pomocu linesa}}$

$$H[x(t)] = \hat{x}(t) = \frac{1}{\pi} (\text{v.p.}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau} d\tau$$

$$H^{-1}[\hat{x}(t)] = x(t) = -\frac{1}{\pi} (\text{v.p.}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{x}(\tau)}{t-\tau} d\tau$$



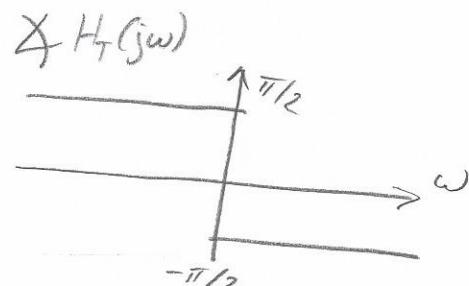
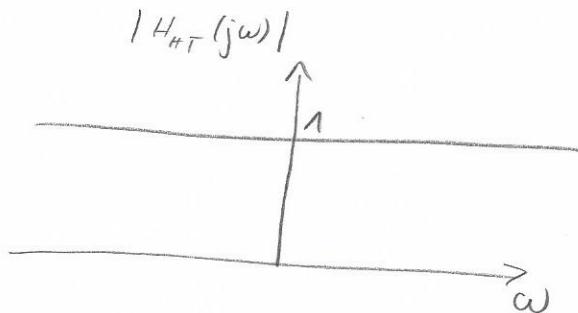
$$h_{HT}(t) = \frac{1}{\pi t}$$



$$\mathcal{F}[h_{HT}(t)] = H_{HT}(j\omega) = -j \operatorname{sgn}(\omega)$$

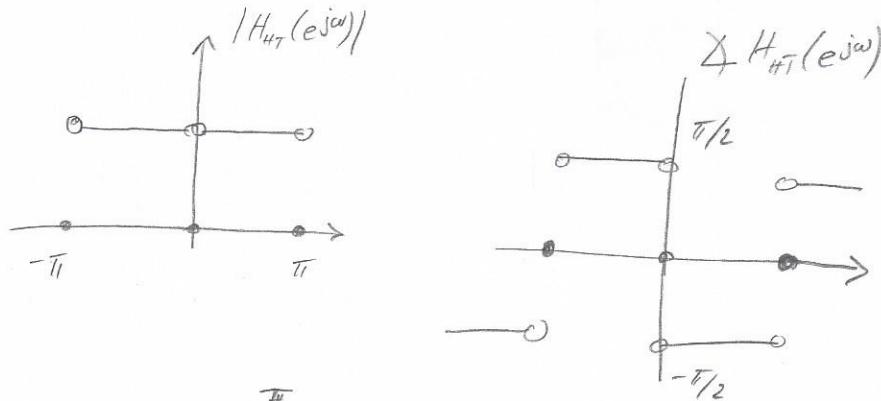
$$\operatorname{sgn}(\omega) = \begin{cases} -1, & \omega < 0 \\ 0, & \omega = 0 \\ 1, & \omega > 0 \end{cases}$$

$\hat{X}(j\omega) = -j \operatorname{sgn}(\omega) X(j\omega) \rightarrow HT \text{ je sustav koji ne dija amplitudu, a sve faze zahrece za } 90^\circ \left(\frac{\pi}{2}\right)$



(5)

Izvesti izraz za impulsni odziv idealnog diskretnog Hilbertovog transformatora. Skicirati odziv.



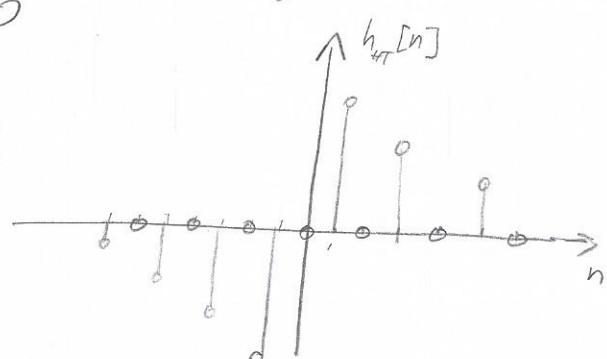
$$h_{HT}[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{HT}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad \text{IDFT}$$

$$\rightarrow H_{HT}(e^{j\omega}) = -j \operatorname{sgn}(\omega)$$

$$\begin{aligned} h_{HT}[n] &= -\frac{j}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sgn}(\omega) e^{j\omega n} d\omega = -\frac{j}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^0 \operatorname{sgn}(\omega) \cos(\omega n) d\omega + j \int_0^{\pi} \operatorname{sgn}(\omega) \sin(\omega n) d\omega \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 \operatorname{sgn}(\omega) \sin(\omega n) d\omega = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sgn}(\omega) \sin(\omega n) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(\omega n) d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{-1}{n} \left(\cos(\omega n) \Big|_0^\pi \right) = \frac{1}{\pi n} \left[1 - \cos(n\pi) \right] \dots \sin^2(x) = \frac{1}{2} [1 - \cos(2x)] \end{aligned}$$

$$h_{HT}[n] = \frac{2}{\pi n} \sin^2\left(n \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \text{parni } n = 0$$

$$\rightarrow \text{neparni } n = \frac{2}{\pi n}$$



⑥

- Defini ti analitički signal. Dokazati da njegov spektar ne sadrži komponente na frekvencijama $\omega < 0$. Objasniti razliku između analitičkog signala i njemu konjugiranog signala.

$$z(t) = x(t) + j\hat{x}(t) \rightarrow \text{hilbertov transformat}$$

Analitički signal je signal čiji spektar ne sadrži komponente na frekvencijama $\omega < 0$

$$Z(j\omega) = X(j\omega) + j\hat{X}(j\omega) \rightarrow -j\text{sgn}(\omega)X(j\omega)$$

$$Z(j\omega) = X(j\omega) + j[-j\text{sgn}(\omega)X(j\omega)] = X(j\omega) + \underbrace{\text{sgn}(\omega)X(j\omega)}$$

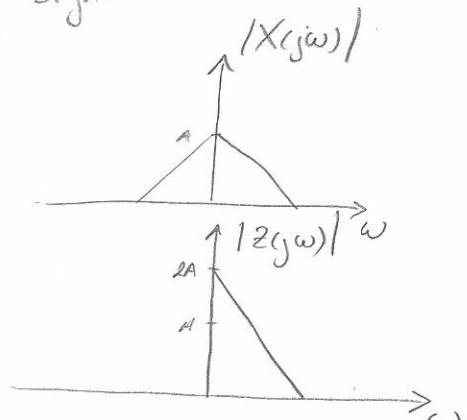
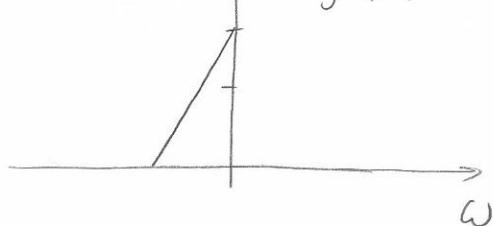
$$X(j\omega) = \underbrace{X_N(j\omega)}_{\omega < 0} + \underbrace{X(j0)}_{\omega=0} + \underbrace{X_P(j\omega)}_{\omega > 0}$$

$$Z(j\omega) = \underbrace{X_N(j\omega)}_{\text{zbog signuma na } \omega < 0} + X(j0) + X_P(j\omega) \rightarrow \text{signum u } 0 = 0$$

$$Z(j\omega) = X(j0) + 2X_P(j\omega)$$

$$\hat{z}^*(j\omega) = x(t) - j\hat{x}(t)$$

$$Z^*(j\omega) = X(j0) + 2X_N(j\omega)$$



- (7) Poću analize u vremenskoj domeni, na primjeru sinusnog signala objasniti pojavu preslušavanja između komponenata spektra kod diskretne Fourierove transformacije. Napisati uvjet pod kojim do preslušavanje ne dolazi.

DFT daje spektar koji predstavlja periodičko proširenje položajnog odječaka

ANALIZA U VREMENSKOJ DOMENI

$$x_1[n] = \cos\left(2\pi \frac{2}{N} n - \frac{\pi}{3}\right)$$

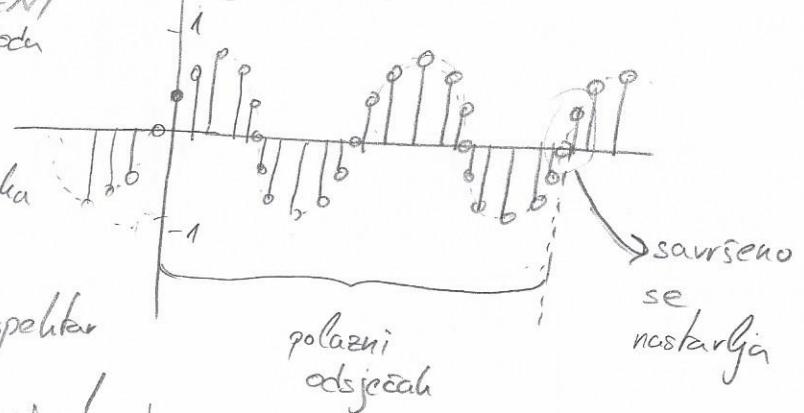
2 puncta perioda

- sadrži komponentu koja u N učoraka

sadrži k perioda

- daje čistu sinusoidu \Rightarrow uzak spektar

UVJET da ne dođe do preslušavanja!



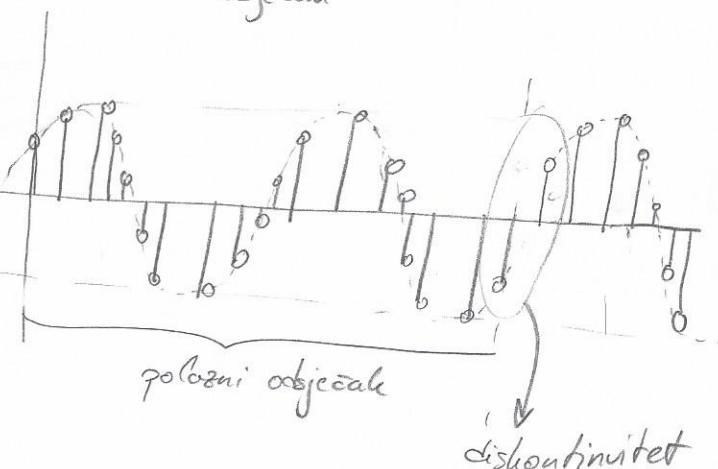
$$x_2[n] = \cos\left(2\pi \frac{26}{N} n - \frac{\pi}{3}\right)$$

- sadrži komponentu koja u N

učoraka NE sadrži k perioda

- sadrži diskontinuitete kao posljedicu nadovezivanja djelomičnih perioda

\Rightarrow širok spektar



(8)

- Pomoću analize u frekvencijskoj domeni, na primjeru sinusnog signala objasniti pojavu preslušavanja između komponenata spektra kod diskretne Fourierove transformacije. Napisati uvjet pod kojim do preslušavanje ne dolazi.

$x[n]$ dobivamo množenjem s pravolinijskim prozorom $w[n]$ zbroj DFT-a

$$x[n] = x_0[n] \cdot w[n], \quad w[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n > N \end{cases}, \quad x_0[n] = \cos(\omega_0 n + \phi), \quad -\infty \leq n \leq \infty$$

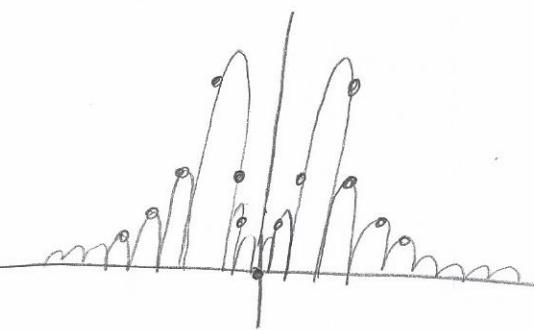
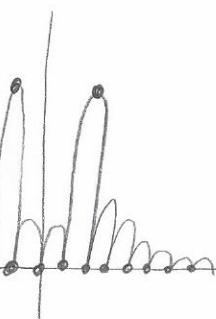
$$X(e^{j\omega}) = X_0(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega})$$

$$W(e^{j\omega}) = e^{-j\omega \frac{N}{2}} \frac{\sin(\frac{\omega N}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})}$$

$$X_0(e^{j\omega}) = \pi e^{j\omega \frac{\phi}{\omega_0}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\delta(\omega - \omega_0 - 2k\pi) + \delta(\omega + \omega_0 + 2k\pi)]$$

$$\omega_0 = 2\pi \frac{3}{N}$$

$$\omega_0 = 2\pi \frac{45}{N}$$



N sadrži cijeli broj perioda

- uzorci DFT-a poklapaju se s nultočinama kontinuiranog spektra

- N ne sadrži cijeli broj perioda

- uzorci DFT-a se NE poklapaju s nultočinama kontinuiranog spektra

- jedna komponenta dala je doprinos svim uzorcima DFT

(9)

Izvesti izraz za maksimalnu pogrešku procjene amplitude iz uzorka diskretne Fourierove transformacije pod pretpostavkom da spektar nije interpoliran, te da je korišten pravokutni otvor.

$$\Delta f = \frac{\Delta \omega}{N} - razmak između uzoraka$$

$\omega_a = \frac{\Delta \omega}{2} = \frac{\pi}{N}$ - frekvencija na kojoj dolazi do najveće pogreške
faza nisu za ovo ne zanima

$$W(e^{j\omega}) = e^{-j\omega N/2} \cdot \frac{\sin(\frac{\omega N}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})} \Rightarrow \text{spektar pravokutnog otvora}$$

$$W_{\max} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\sin(\frac{\omega N}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})} \stackrel{L'H}{=} \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\frac{N}{2} \cos(\frac{\omega N}{2})}{\frac{1}{2} \cos(\frac{\omega}{2})} = N$$

amplituda na frekv. ω_a

$$W_a = W(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\omega_a=\frac{\pi}{N}} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2})}{\sin(\frac{\pi}{2N})} = \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2N})}$$

$$\frac{W_a}{W_{\max}} = \frac{1}{N \sin(\frac{\pi}{2N})} \Rightarrow W_a/W_{\max} raste s N, ali ima granicnu vrijednost$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N \sin\left(\frac{\pi}{2N}\right) = 0 \cdot 0 = \frac{1}{1} \sin\left(\frac{\pi}{2N}\right) \stackrel{\text{kor } 0/0}{=} \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{N} \cos\left(\frac{\pi}{2N}\right)}{-\frac{1}{N^2}} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \left(\frac{W_a}{W_{\max}} \right)_{\min} = \frac{2}{\pi}$$

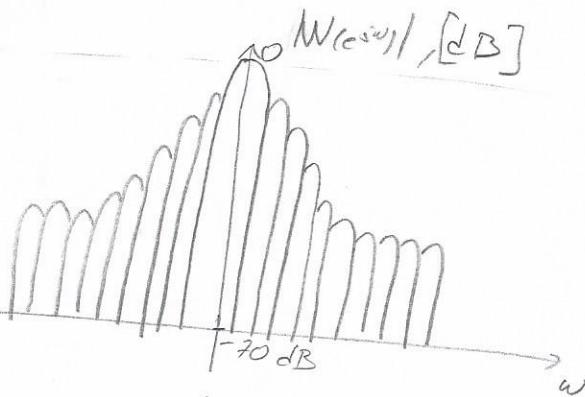
najveća?

(10)

Razvrstati sljedeće otvore u skupine sa sličnim svojstvima: pravokutni, Hannov i Blackmanov, Hammingov i Dolph-Chebyshevov. Po kojim se svojstvima ove skupine razlikuju? Po čemu je specifičan Dolph-Chebyshevov otvor?

Pravokutni otvor

$$W[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{inace} \end{cases}$$



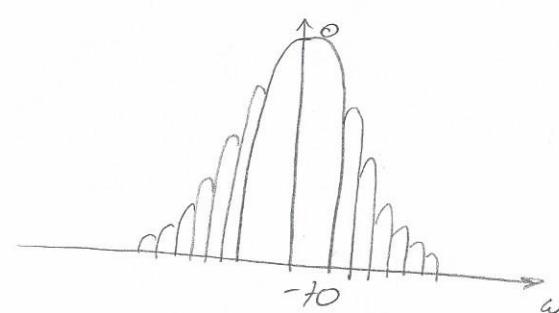
- najslabije lokaliziran u frekvenciji

\Rightarrow veliko preljevanje

- najveća razlučivost

Hannov otvor

$$W[n] = \begin{cases} 0,5(1-\cos(\frac{2\pi n}{N-1})), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{inace} \end{cases}$$



Blackman

$$W[n] = \begin{cases} 0,42 - 0,5\cos(\frac{2\pi n}{N}) - 0,08\cos(\frac{4\pi n}{N}), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{inace} \end{cases}$$

Svojstva Hann i Black

- sira glama latice

- manje istiravanje

- bolja lokalizacija u frekvenciji

- pad amplitude bočnih latica 18 dB/octavi

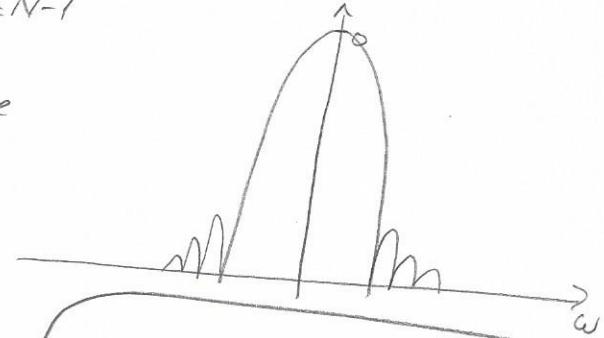
- najmanja razlučivost

- najmanje preljevanje

Hammingov otvor

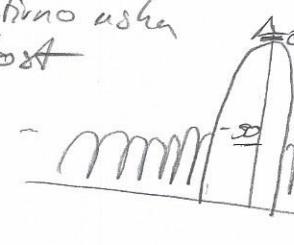
$$W[n] = \begin{cases} 0,54 - 0,46\cos(\frac{2\pi n}{N-1}), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{inace} \end{cases}$$

, inace



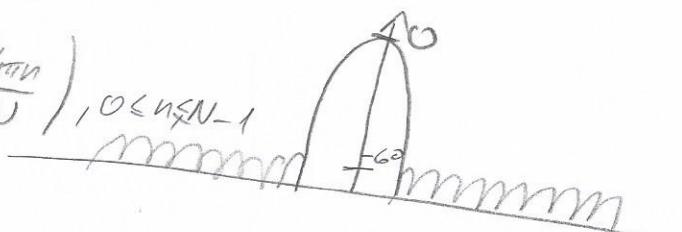
Hann i D-C svojstva:

- glama latica je relativno uska
- ujednačena valovitost



Dolph-Chebyshevov otvor

$$W[n] = \begin{cases} 0,42 - 0,5\cos(\frac{2\pi n}{N}) - 0,08\cos(\frac{4\pi n}{N}), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{inace} \end{cases}$$



- 11) Opisati model diskretne Fourierove transformacije temeljen na slogu prilagođenih filtara. Definirati dobitak uslijed pojačanja (processing gain) za slučaj korištenja pravokutnog otvora. O čemu dobitak ovisi i kako ga možemo procijeniti.

DFT možemo interpretirati kao slup od N prilagođenih filtara

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{N}, k=0, \dots, N-1 \text{ centralna frekvencija filtra}$$

$$X_k[n] = W[n] \cos\left(\frac{2\pi k}{N} n\right) + j W[n] \sin\left(\frac{2\pi k}{N} n\right) = W[n] e^{j \frac{2\pi k n}{N}}$$

↳ filtri su prilagođeni na broj uzoraka signala (N)

$$X[n] = S[n] + Q[n], S[n] = A e^{j(\omega_p n + \varphi)}, Q[n] \text{ hijeli sum snage } \tilde{g}_q^2$$

Zanima nas izlaz iz p -og filtra jer želimo detektirati komponentu na frekvenciji ω_p

N.a.

$$P_s = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |A e^{j(\omega_p n + \varphi)}|^2 = \frac{A^2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |\cos(\omega_p n + \varphi) + j \sin(\omega_p n + \varphi)|^2 = A^2$$

Omjer snage signala i sume na ulazu

$$SNR_{ulaz-p} = \frac{A^2}{\tilde{g}_q^2}$$

IZLAZ FILTARA

$$X_w[n] = W[n] \cdot S[n] + W[n] \cdot Q[n] = S_w[n] + Q_w[n]$$

$$DFT \{X_w[n]\} = DFT \{S_w[n]\} + DFT \{Q_w[n]\}$$

$X_k = 0$, kif P -amplituda signala je 0 na svim izlazima, osim na p -tom

$$X_p = A \sum_{n=0}^{N-1} W[n] - amplituda signala na izlazu p-og filtra$$

$$\left(A \sum_{n=0}^{N-1} W[n] \right)^2 - snaga signala na izlazu p-og filtra$$

DFT suma

$$Q[h] = \sum_{n=0}^{N-1} w[n] g[n] e^{-j \frac{2\pi nh}{N}}$$

znača se suma na izlazu p-tog filtra

$$\begin{aligned} E\{|Q[p]|^2\} &= E\{Q[p] \cdot Q^*[p]\} = E\left\{\left(\sum_{n=0}^{N-1} w[n] g[n] e^{-j \frac{2\pi nh}{N}}\right) \left(\sum_{n=0}^{N-1} w[n] g^*[n] e^{j \frac{2\pi nh}{N}}\right)\right\} = \\ &= E\left\{\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} w[n] \cdot w[m] \cdot g[n] \cdot g^*[m] \cdot e^{-j \frac{2\pi nh}{N}} \cdot e^{j \frac{2\pi nm}{N}}\right\} \end{aligned}$$

$g[n]$ i $g^*[n]$ su slučajne varijable

$$E\{|Q[p]|^2\} = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} w[n] w[m] g[n] g^*[m] e^{-j \frac{2\pi nh}{N}} e^{j \frac{2\pi mk}{N}}$$

$$E\{g[n] \cdot g^*[m]\} = \sigma_g^2 \Rightarrow E\{|Q[p]|^2\} = \sigma_g^2 \sum_{n=0}^{N-1} w^2[n]$$

$$\text{SNR}_{\text{izlaz-p}} = \frac{\left(A \sum_{n=0}^{N-1} w[n]\right)^2}{\sigma_g^2 \sum_{n=0}^{N-1} w^2[n]}$$

processing
gain

$$PG = \frac{\text{SNR}_{\text{izlaz-p}}}{\text{SNR}_{\text{ulaz-p}}} = \frac{\frac{\left(A \sum_{n=0}^{N-1} w[n]\right)^2}{\sigma_g^2 \sum_{n=0}^{N-1} w^2[n]}}{\cancel{\sigma_g^2 \sum_{n=0}^{N-1} w^2[n]}} = \frac{\left(\sum_{n=0}^{N-1} w[n]\right)^2}{\cancel{\sum_{n=0}^{N-1} w^2[n]}}$$

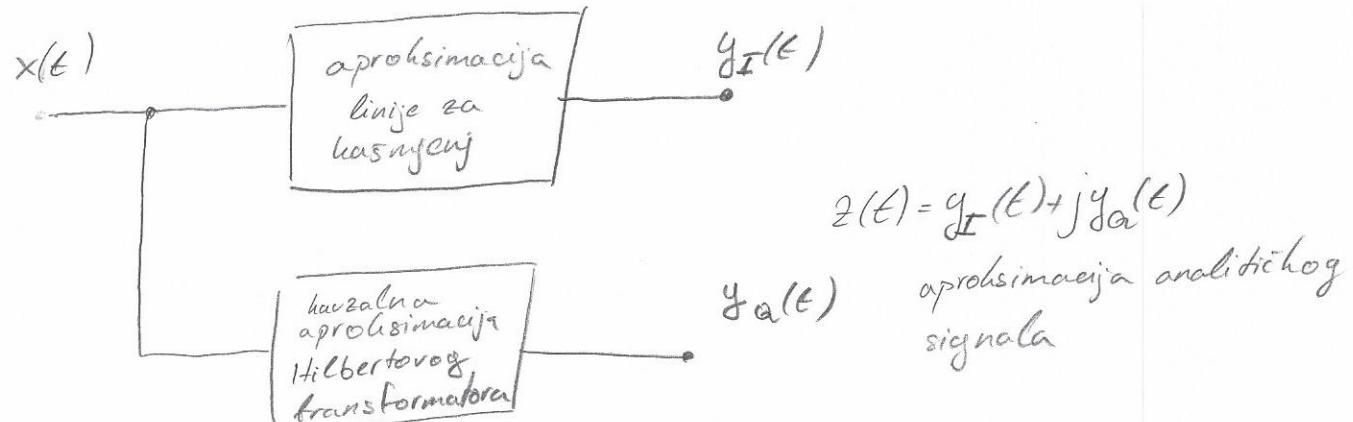
za pravoučni otvor - svih uzorci su 1

$$PG = \frac{\left(\sum_{n=0}^{N-1} 1\right)^2}{\sum_{n=0}^{N-1} 1^2} = \frac{N^2}{N} = N$$

Dobitak ovisi isključivo o obliku otvora kojeg koristimo

(12)

Nacrtati blokovsku shemu kauzalnog analognog Hilbertovog filtra. Izvesti izraz za frekvencijsku karakteristiku realne i frekvencijsku karakteristiku imaginarnе grane.



IZVESTI ?

(12.) Dokazati da je FIR filter s antisimetričnim impulsnim odzivom pogodan za realizaciju Hilbertovih transformatora.

Tip 3 i Tip 4 → antisimetričan impulsni odziv

↓
neparni N ↓
parni N

TIP 3

$$H(z) = \sum_{n=0}^N h[n] z^{-n}$$

$$h[n] = -h[N-n]$$

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} h[n] (z^{-n} - z^{-(N-n)}) + O z^{-N/2} \\ &= z^{-\frac{N}{2}} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h[n] \left(z^{\frac{N}{2}-n} - z^{\frac{N}{2}-n} \right) \end{aligned}$$

$$H(cj\omega) = e^{-j\frac{\omega N}{2}} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h[n] \left(e^{-j\omega(\frac{N}{2}-n)} - e^{-j\omega(\frac{N}{2}-n)} \right) = e^{-j\frac{\omega N}{2}} \left(e^{-j\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h[n] \sin(\omega(\frac{N}{2}-n)) \right) \cdot (-2)$$

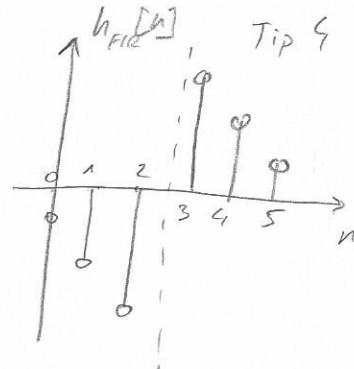
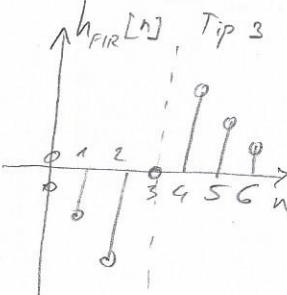
TIP 4

$$H(z) = \sum_{n=0}^N h[n] z^{-n}$$

$$h[n] = -h[N-n]$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{(N-1)/2} h[n] \left[z^{-n} - z^{-(N-n)} \right] = z^{-\frac{N}{2}} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h[n] \left[z^{\frac{N}{2}-n} - z^{\frac{N}{2}+n} \right]$$

$$\begin{aligned} H(cj\omega) &= e^{-j\omega \frac{N}{2}} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h[n] \left(e^{-j\omega(\frac{N}{2}-n)} - e^{j\omega(\frac{N}{2}-n)} \right) = e^{-j\omega \frac{N}{2}} \left(e^{-j\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h[n] (-2) \sin(\omega(\frac{N}{2}-n)) \right) \\ &\quad \text{rozlika od Tipa 3} \\ &\quad \text{može biti Hilbertov transformator} \end{aligned}$$



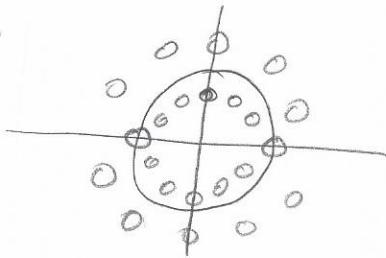
(14) Nacrtati raspored polova i nula FIR Hilbertovog transformatora parnog i neparnog reda te pokazati i obrazložiti koji od ovih transformatora može aproksimirati konstantnu amplitudu u širem frekvenčnom području.

$$\text{faza } \varphi(\omega) = -\omega \frac{N}{2} - \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(\omega) \Rightarrow \dot{\varphi} = -\frac{d\varphi}{d\omega} = \frac{N}{2}$$

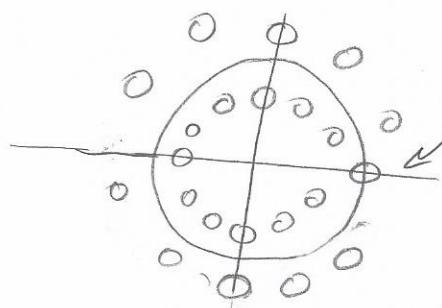
Tražimo sloki o fazi $\omega = \pi$?

$$\Delta \varphi = \varphi(\pi) - \varphi(-\pi)$$

$$\left. \begin{array}{l} \varphi(-\pi) = \frac{N\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \\ \varphi(\pi) = -\frac{N\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \Delta \varphi = -N\pi - \pi = -\pi(N+1) \Rightarrow \begin{array}{ll} N_{\text{paran}} & \Delta \varphi = -\pi \\ N_{\text{neparan}} & \Delta \varphi = 0 \end{array}$$



paran N



neparan N

samo jedna nultočka na kružnici

\rightarrow za neparne N frekvenčno područje može se proširiti do π !

(15)

Opisati postupak projektiranja IIR Hilbertovih transformatora.

IIR filtri - moguće napraviti idealnu amplitudu, a faza se aproksimira
Idealna amplitudna karakteristika dobiva se svepropusnim filterom

$$H_{HT}(z) = (-1)^N \frac{\prod_{k=1}^N (d_k - z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})} \rightarrow \begin{array}{l} \text{polovi su } d_k \\ \text{nultočke su } 1/d_k \end{array}$$

željena fuzna karakteristika

$$f_d(\omega) = -N\omega - \frac{\pi}{2}$$

stvarna fuzna karakteristika

$$\varphi(\omega, d) = \arg[H(e^{j\omega}, d)], \quad d = [d_1, \dots, d_N]^T$$

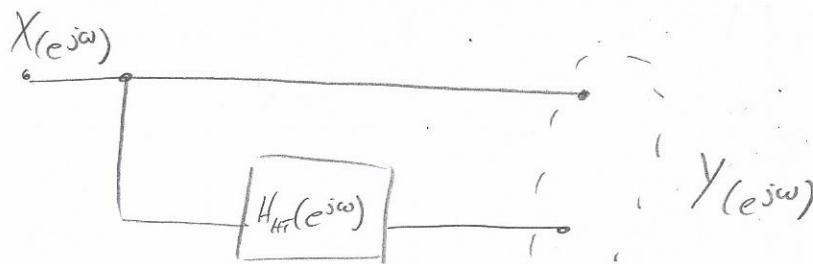
odstupanje od željene karakteristike

$$\epsilon_p = \int_{\omega_1}^{\omega_2} w(\omega) \cdot |\varphi(\omega, d) - \varphi_d(\omega)|^p d\omega$$

$$\text{minimizacija odstupanja} \quad d_{HT} = \underset{d}{\operatorname{arg\,min}} \epsilon_p$$

(16)

Napisati izraz i nacrtati prijenosnu funkciju idealnog pozitivno propusnog i idealnog negativno propusnog filtra. Kakva je veza između prijenosnih funkcija ovih filtera.

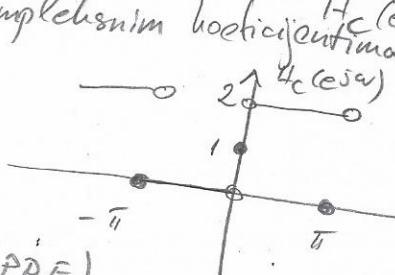


$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) + j H_{HT}(e^{j\omega}) X(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \underbrace{\left[1 + H_{HT}(e^{j\omega}) \right]}_{-j \operatorname{sgn}(\omega)}$$

\hookrightarrow filter s kompleksnim koeficijentima

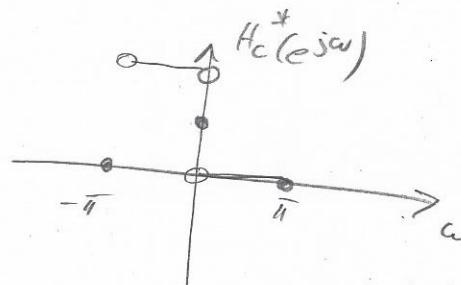
$$H_C(e^{j\omega}) = \begin{cases} 2, & 0 < \omega < \pi \\ 1, & \omega = 0 \\ 0, & -\pi < \omega < 0 \end{cases}$$

\hookrightarrow Pozitivno propustan filter (PPF)



$$H_C^*(e^{j\omega}) = j \operatorname{sgn}(\omega) = \begin{cases} 2, & -\pi < \omega < 0 \\ 1, & \omega = 0 \\ 0, & 0 < \omega < \pi \end{cases}$$

\hookrightarrow Negativno propustan filter (NPF)



$$NPF = PPF^*$$

(17)

Opisati princip dobivanja Hilbertovog transformata u frekvencijskoj domeni. Opisati prednosti i nedostatke takvog postupka.

- 1) Napraviti FFT
- 2) postaviti u 0 uzorki na $w < 0$
- 3) Napraviti IFFT

Problem

- 1) originalna sekvencija signala je periodički proširena
- 2) ovakva implementacija konvolucije zahvaća i drugi period

(18)

Nacrtati realizaciju filtra s kompleksnim koeficijentima pomoću filtra s realnim koeficijentima. Napisati izraz iz kojeg se vidi kako se dobiva realna odnosno imaginarna komponenta izlaznog signala.

(19)

Izvesti izraz za spektar signala koji je dobiven množenjem kosinusnog signala sa signalom čiji je spektar $U_p(j\omega)$.

$$\begin{aligned}
 u(t) &= u_p(t) \cdot \cos(\omega_0 t) & \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) \\
 U(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} u_p(t) \cos(\omega_0 t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u_p(t) (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) e^{-j\omega t} dt = \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u_p(t) \left(e^{-jt(\omega-\omega_0)} + e^{-jt(\omega+\omega_0)} \right) dt = \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u_p(t) e^{-jt(\omega-\omega_0)} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u_p(t) e^{-jt(\omega+\omega_0)} dt = \\
 &= \frac{1}{2} U_p(j(\omega-\omega_0)) + \frac{1}{2} U_p(j(\omega+\omega_0))
 \end{aligned}$$

(20)

Objasniti pojmove: komunikacija, komunikacijski sustav, kanal. Kakvi tipovi veza postoje? Kakvi mogu biti sustavi za prijenos obzirom na način slanja informacija?

KOMUNIKACIJA - prijenos informacija između duge točke

KOMUNIKACIJSKI SUSTAV - skup sredstava koja su potrebna da bi se jedna ili više poruka prenijele s jednog mjesto na drugo putem elektromagnetskih procesa

KANAL - sustav za prijenos informacija

\Rightarrow veza: dvosmjerna

jednosmjerna

reverzibilna

\Rightarrow način slanja poruka: (malo jedan, malo drugi smjer)

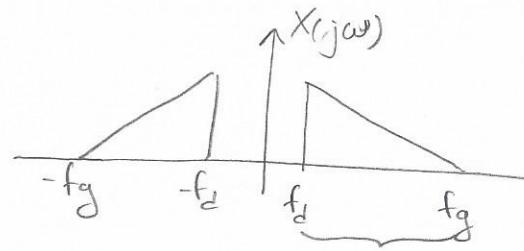
radiodifuzija (broadcasting)

od točke do točke (point to point)

(21)

Navesti i opisati podjelu tehnika prijenosa obzirom na frekvenčijsko područje koje zauzima signal poruke.

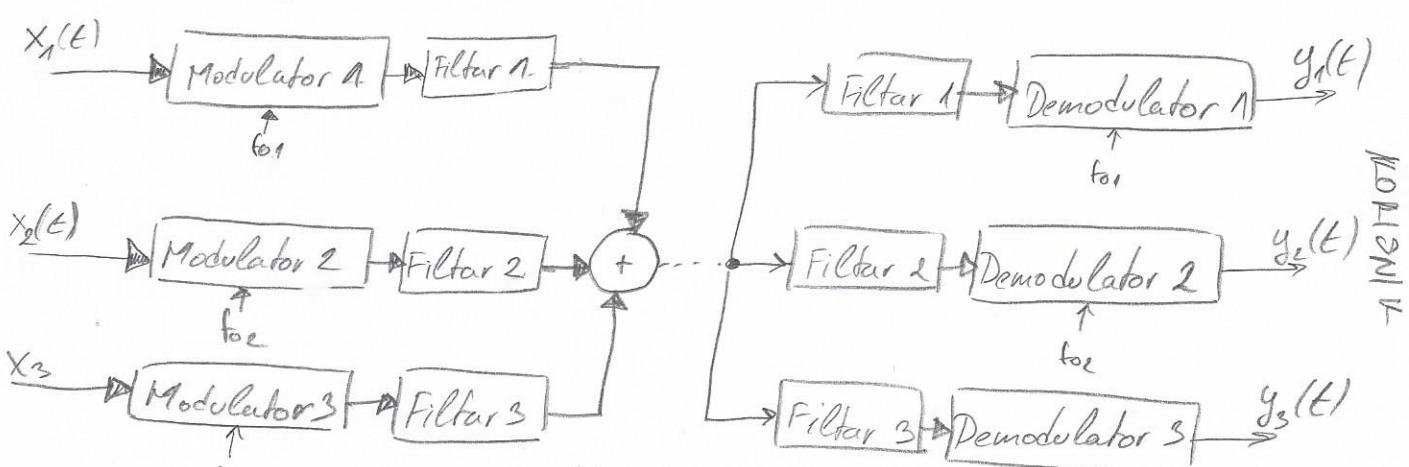
- 1) Uškopojaoni signali (narrowband signals)
- 2) Širokopojasni signali (wideband signals)
- 3) Signali s vrlo širokim frekv. pojasom (ultra wideband signals)



$$B = f_g - f_d \rightarrow \text{širina frekvenčnog područja}$$

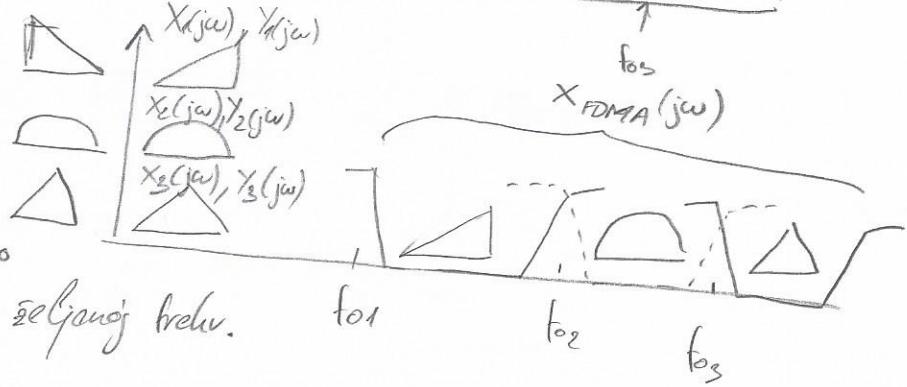
(22)

Nacrtati i objasniti princip frekvenčnog multipleksa. Koje frekvenčijsko područje tokom prijenosa zauzimaju pojedini signali. Kako se izvodi rekonstrukcija signala?



RJEŠENJE

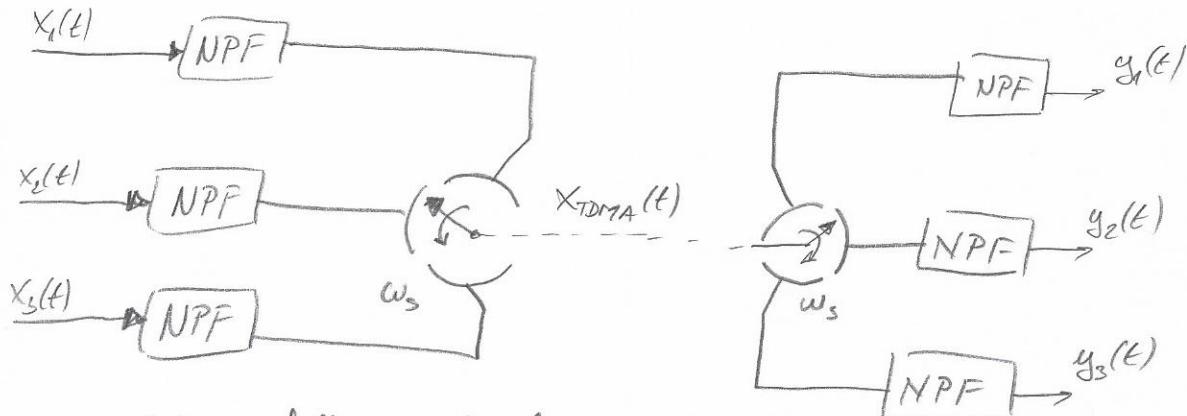
Različite signale moduliramo tako da ih raspoređimo na različite frekvencije. Kada de-moduliramo, tada koristimo pojasno propusni filter na odgovarajućoj frekv. i de-modulator.



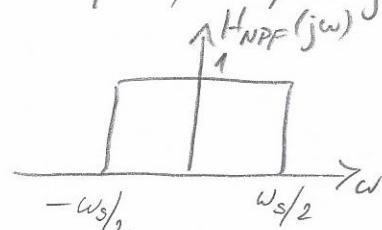
(23.)

Nacrtati i objasniti princip vremenskog multipleksa. Koje frekvencijsko područje tokom prijenosa zauzimaju pojedini signali. Kako se izvodi rekonstrukcija signala?

VREMENSKI MULTIPLEX



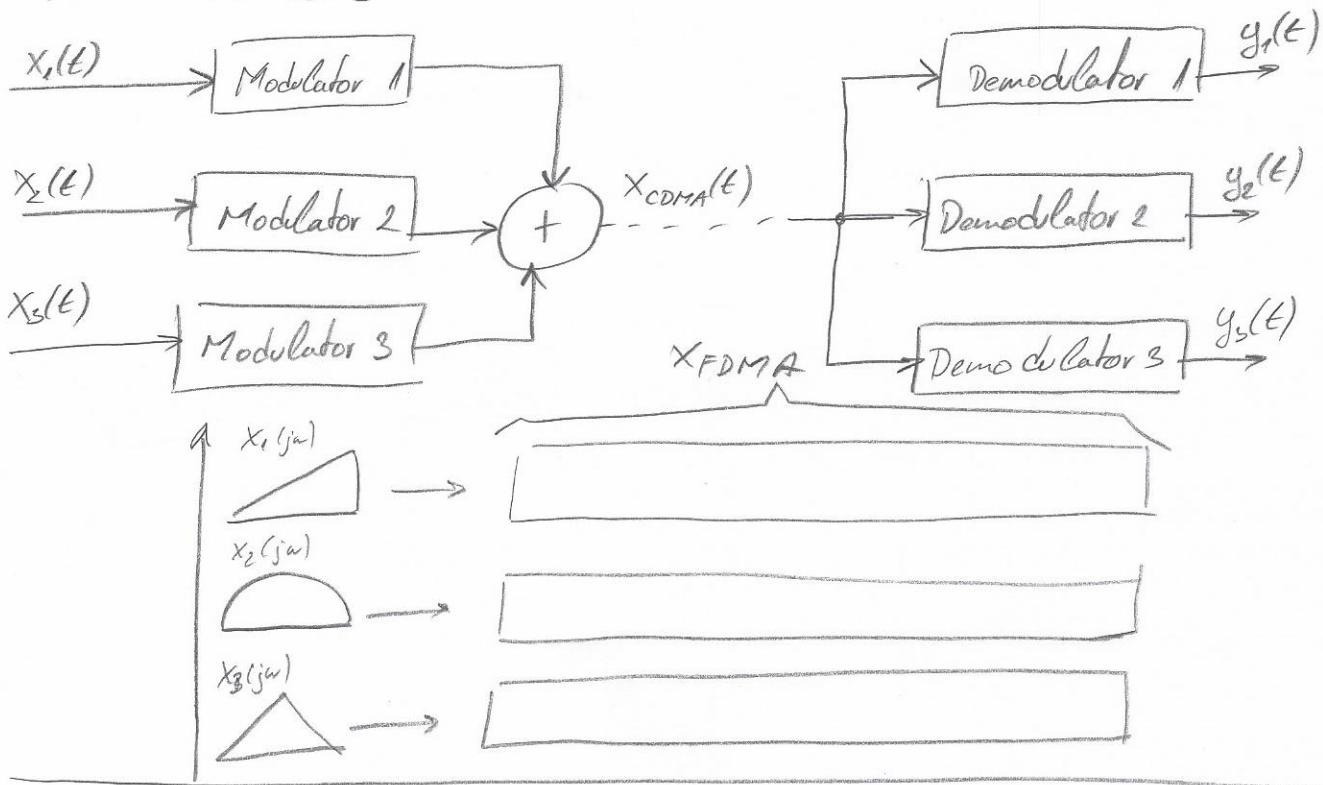
Analiasing filtri u odesiljaci, interpolacijski filtri u prijemniku



(24.)

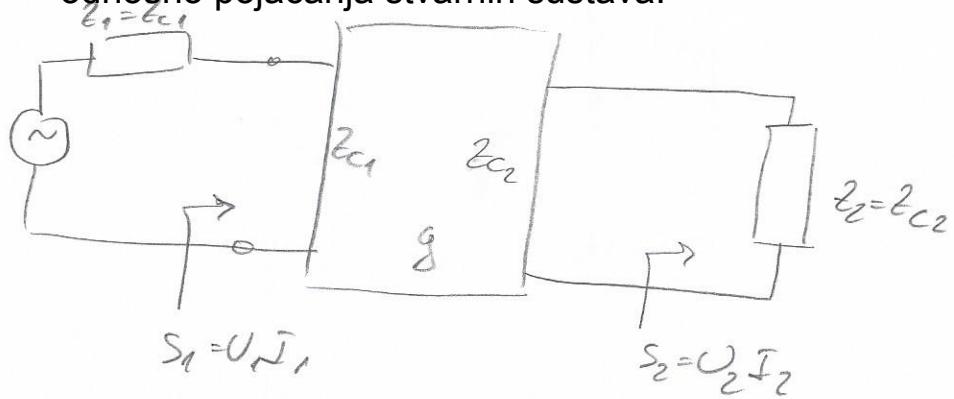
Nacrtati i objasniti princip kodnog multipleksa. Koje frekvencijsko područje tokom prijenosa zauzimaju pojedini signali. Kako se izvodi rekonstrukcija signala?

KODNI MULTIPLEX



(25)

Na primjeru četveropola zaključenog zrcalnim impedancijama pokazati od čega se sastoji zrcalna konstanta prijenosa. Objasniti vezu između zrcalne konstante gušenja idealnog četveropola zaključenog zrcalnim impedancijama te gušenja odnosno pojačanja stvarnih sustava.



$$\frac{U_1}{U_2} = \sqrt{\frac{Z_{c1}}{Z_{c2}}} e^{j\gamma} \text{ zrcalna konst. prijenosa}$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \sqrt{\frac{Z_{c2}}{Z_{c1}}} e^{j\gamma} \Rightarrow \frac{U_1 I_1}{U_2 I_2} = e^{j\gamma}$$

$$g = \frac{1}{2} \ln \frac{U_1 I_1}{U_2 I_2} = \frac{1}{2} \ln \frac{S_1}{S_2}$$

$$\ln z = \ln|z| + j \arg z \quad \text{zrc. konst. gus.}$$

$$g = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{U_1 I_1}{U_2 I_2} \right| + \frac{1}{2} j(\varphi_1 - \varphi_2 + \theta_1 - \theta_2) = a + jb \quad \rightarrow \text{zrc. konstanta}$$

$a = \frac{1}{2} \ln \frac{|S_1|}{|S_2|}$ - vrijedi za linearan četveropol zatvoren zrcalnim impedancijama

$$A = 10 \log_{10} \frac{|S_1|}{|S_2|} \quad - \text{kod stvarnih sustava}$$

(26)

Na primjeru četveropola zaključenog zrcalnim impedancijama potrebno je objasniti pojavu amplitudnih i faznih izobličenja.

četveropol je zaključen zrcalnim impedancijama

$$\frac{U_1}{U_2} = \sqrt{\frac{Z_{C_1}}{Z_{C_2}}} e^g \quad \text{pretp } Z_{C_1} = Z_{C_2} = Z_C$$

$$\frac{U_1}{U_2} = e^g \Rightarrow U_2 = U_1 e^{-g}, \text{ ulazni napon je sinusnog oblika}$$

$$U_1 = |U_1| e^{j(\omega t + \phi_1)}$$

$$U_2 = |U_1| e^{j(\omega t + \phi_1)} e^{-a - jb} \quad g = a + jb$$

$$U_2 = |U_1| \underbrace{(e^{-a})}_{\text{izgasevanje amplitude}} e^{j(\omega t + \phi_1 - b)} \quad -\text{faza}$$

$a = a(\omega)$ — amplitudno izobličenje
 $a = \text{const}$ — neuna amp. izobličenja

$b = b(\omega) \Rightarrow$ fazno izobličenje

$b = \omega t_0 \Rightarrow$ linearna faza i neuna izobličenja

$$C = \frac{db}{d\omega} = t_0 \Rightarrow \text{konst hastijanje}$$

(22)

Što je razina? Kako se ona definira i izražava preko snage, napona i struje u pojedinim točkama prijenosnog sustava? Definirati razinu za najčešće korištene referentne veličine. Izvesti izraz za gušenje izraženo pomoću razina signala na ulazu i izlazu prijenosnog sustava.

Razina signala

Poznata snaga

$$P_S = 10 \log_{10} \frac{|S|}{1mW}$$

Poznat napon

$$P_U = 20 \log_{10} \frac{U_{rms}}{0}$$

Poznata struja

$$P_I = 20 \log_{10} \frac{I_{rms}}{I}$$

$$U_{rms} = V_{rms} \cdot 10^{\frac{P_S}{20}}$$

Zavisno otvo se zaviseo impedancija

$$1 \cdot 10^{-3} W = U^2 / R$$

$$1 \cdot 10^{-3} W = I^2 / Z$$

$$A = 10 \log_{10} \frac{|S_1|}{|S_2|}$$

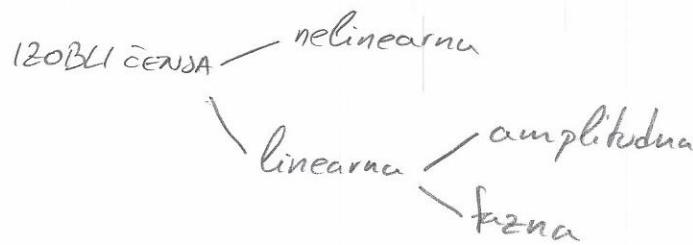
$$A_V = 10 \log_{10} \frac{\frac{|S_1|}{1mW}}{\frac{|S_2|}{1mW}} = 10 \log_{10} \frac{|S_1|}{1mW} - 10 \log_{10} \frac{|S_2|}{1mW}$$

P_{S_1} P_{S_2}

$$A_V = P_{S_1} - P_{S_2}$$

(28)

Navesti podjelu i uzroke izobličenja. Definirati THD i SFDR.



LINARNA IZOBЛИЦЕЊА

U izlaznom signalu postoji samo frekvencijske komponente koje postoje i u ulaznom signalu. Postojećim komponentama može se promijeniti amplituda i faza.

Vnose ih liniarni oszilatori.

NELINIARNA IZOBЛИЦЕЊА

U izlaznom signalu pojavljuju se frekvencijske komponente koje ne postoje u ulaznom signalu.

Pojavljuju se u suskrima koji sadrže nelinearne elemente (diode, transistori...).

THD (Total Harmonic Distortion) - koeficijent udjela harmoničkog izobličenja

$$THD = \frac{\text{snaga neželjene harmonike}}{\text{snaga osnovnog harmonika}} = 10 \log_{10} \frac{U_2^2_{\text{rms}} + U_3^2_{\text{rms}} + U_4^2_{\text{rms}} + \dots}{U_1^2_{\text{rms}}} \quad [\text{dB}]$$

SFDR (Spurious Free Dynamic Range) - Dinamički raspon signala bez neželenih komponenta

$$SFDR = 10 \log_{10} \frac{U_{s,\text{rms}}^2}{U_{1,\text{rms}}^2} \quad [\text{dBc}]$$

$\hookrightarrow \text{dB below carrier}$

(29)

Opisati vrste preslušavanja u komunikacijskim sustavima. Gdje i zašto do njega dolazi? Kako se ono kvantitativno izražava?

Dijelimo s obzirom na izvor: 1) Preslušavanje na blizjem kraju

(Near End Cross Talk NEXT)

2) Preslušavanje na dalnjem kraju

(Far End Cross Talk FEXT)

Ozroci: 1) postojanje nečišćene električne veze

→ parazitnimi kapacitetima

2) postojanje nečišćene magnetske veze

→ magnetoduktivna veza

Pojavljuje se kuo nečišćini prijenos između oddajnika i primatelja

$$A_c = 10 \log_{10} \frac{P_1}{P_2}$$

Na primjeru četverožične veze opisati princip prijenosa analognih signala u osnovnom frekvencijskom području. Koje elemente treba sadržavati sklop za pojačavanje signala. Koja fizikalna ograničenja sprečavaju korištenje velikog broja ovakvih sklopova?

Pregostavljam da imamo liniju bez izobličenja duljine ℓ

$$\frac{R}{L} = \frac{G}{C} \quad Z_0 = \sqrt{\frac{R+j\omega L}{G+j\omega C}} = \sqrt{\frac{L}{C} \frac{R/L+j\omega}{G/C+j\omega}} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$Y = \frac{1}{(R+j\omega L)(G+j\omega C)} = \frac{1}{RG} + j\omega \sqrt{\frac{1}{LC}} = a + jb = \ell \sqrt{\frac{1}{RG}} + j\omega \ell \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

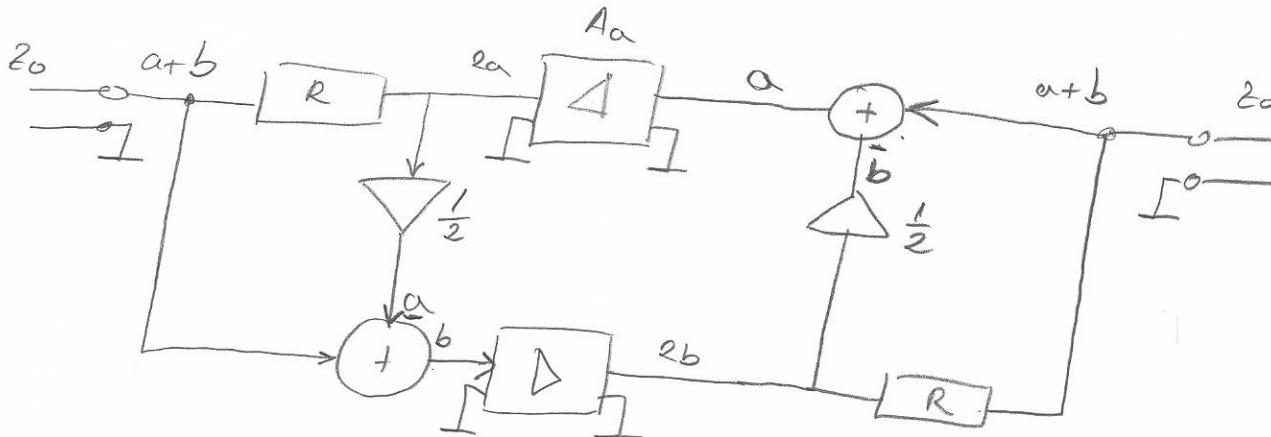
$$RG + Rj\omega C + Gj\omega L - \omega^2 LC$$



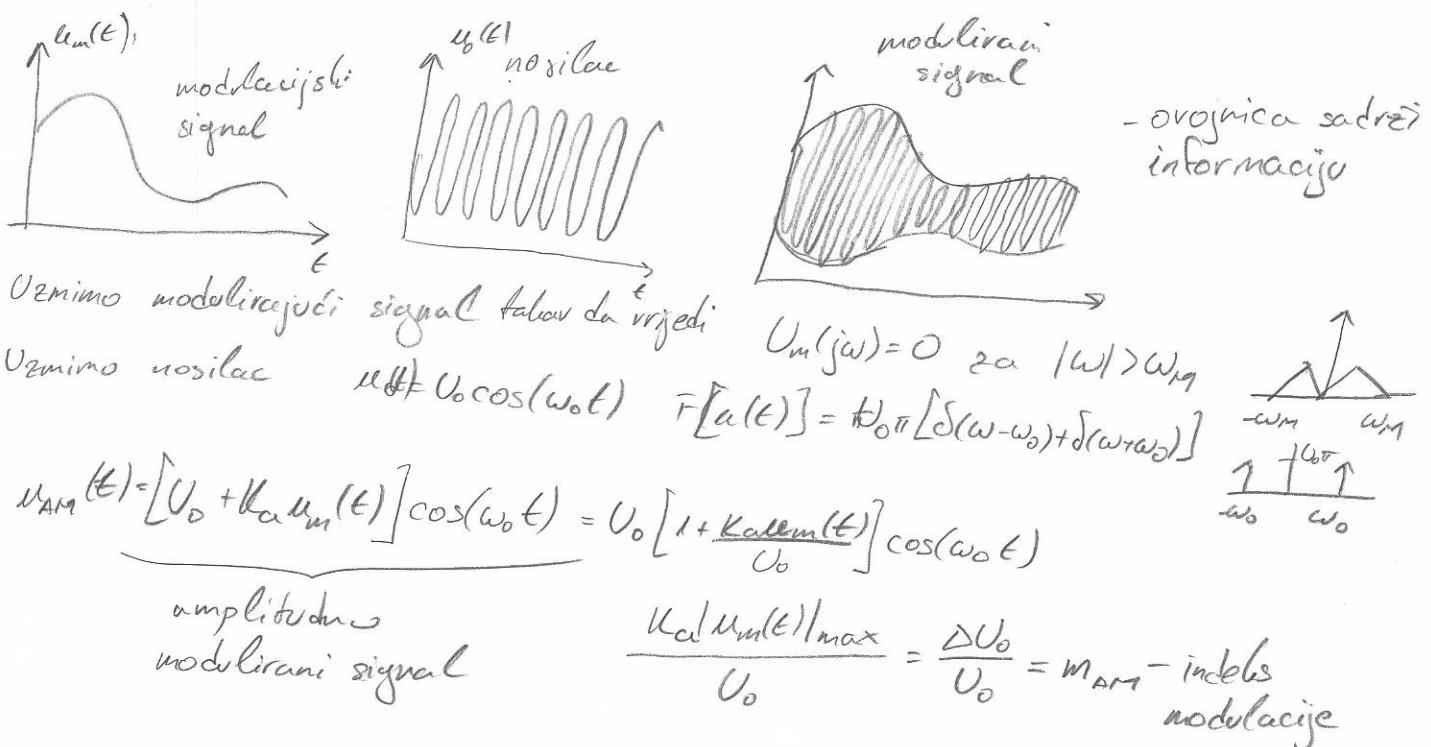
- svaki pojačalo unosi svoj sum!

- linija unosi gaće je kraj ne ovisi o frekvenciji te treba dodati pojačalo
- linija unosi fazni pomak proporcionalan frekvenciji, neva duncirnih izobličenja

(31) Nacrtati shemu i objasniti princip rada sklopa za razdvajanje kod višestrukog pristupa preko dvožične veze. Opisati probleme koji nastaju zbog tolerancija komponenata.



(32) Opisati princip prijenosa pomoću DSB-TC-AM signala? Nacrtati valne oblike nosioca, modulacijskog signala i moduliranog signala. Napisati izraz za amplitudno modulirani signal i definirati indeks modulacije.



(B3) Odrediti izraz za snagu DSB-TC-AM signala, pod pretpostavkom da je modulacijski signal sinusnog valnog oblika. Na osnovi dobivenog rezultata objasniti zašto je ovaj postupak neekonomičan?

$$u_m(t) = U_m \cos(\omega_m t)$$

$$u_{AM}(t) = [U_0 + k_a u_m(t)] \cos(\omega_0 t)$$

$$u_{AM}(t) = [U_0 + k_a U_m \cos(\omega_m t)] \cos(\omega_0 t)$$

$$u_{AM}(t) = U_0 \left[1 + \frac{k_a U_m}{U_0} \cos(\omega_m t) \right] \cos(\omega_0 t)$$

$$u_{AM}(t) = U_0 \left[1 + m_{AM} \cos(\omega_m t) \right] \cos(\omega_0 t) = U_0 \cos(\omega_0 t) + U_0 m_{AM} \cos(\omega_m t) \cos(\omega_0 t)$$

$$u_{AM}(t) = U_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{1}{2} U_0 m_{AM} \cos((\omega_0 + \omega_m)t) + \frac{1}{2} U_0 m_{AM} \cos((\omega_0 - \omega_m)t)$$

$$P = \frac{U_{eff}^2}{R} = \frac{1}{R} \left[\frac{U_0^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{U_0^2 m_{AM}^2}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{U_0^2 m_{AM}^2}{4} \right] = \frac{1}{R} \left[\frac{U_0^2}{2} + \frac{U_0^2 m_{AM}^2}{4} \right]$$

$$P = \frac{U_0^2}{2R} \left[1 + \frac{m_{AM}^2}{2} \right] \quad \Rightarrow \quad P_{USB} = P_{LSB} = \frac{U_0^2 m_{AM}^2}{8R}$$

$$\eta = \frac{P_{USB}}{P} = \frac{P_{LSB}}{P} = \frac{\frac{U_0^2 m_{AM}^2}{8R}}{\frac{U_0^2}{2R} \left[1 + \frac{m_{AM}^2}{2} \right]} = \frac{\frac{m_{AM}^2}{4}}{1 + \frac{m_{AM}^2}{2}} = \frac{\frac{m_{AM}^2}{2}}{2 + m_{AM}^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_{AM}^2}{2 + m_{AM}^2}$$

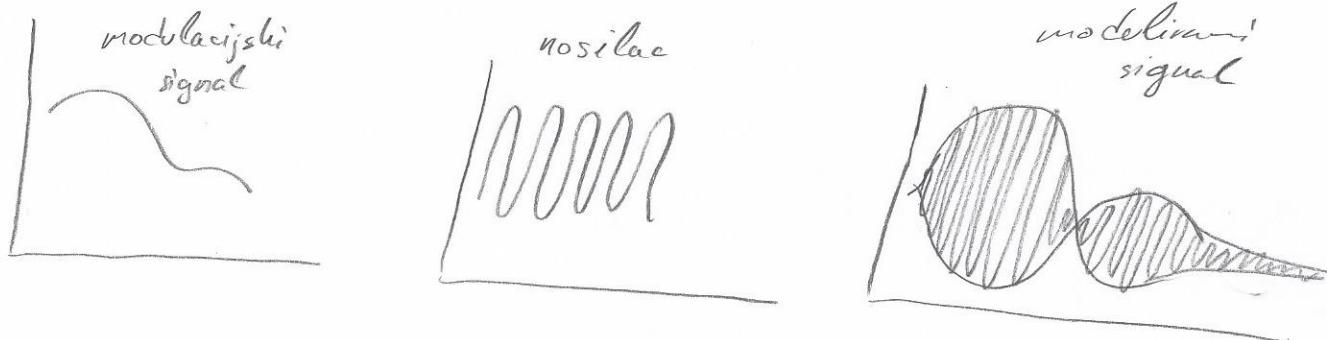
najveći faktor iskočitevija

$$\text{za } m=1 \Rightarrow \eta = \frac{1}{6}$$

- priznac je neekonomičan s
aspekta snage i frekvencijiskog
područja

(34)

Odrediti izraz za snagu DSB-TC-AM signala, pod prepostavkom da je modulacijski signal sinusnog valnog oblika. Na osnovi dobivenog rezultata objasniti zašto je ovaj postupak neekonomičan?

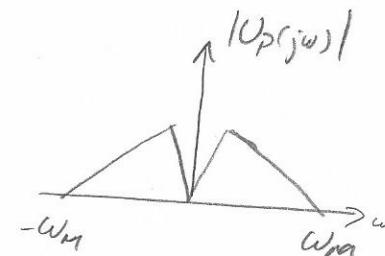


$$U_{AM} = K_a u_m(t) \cos(\omega_0 t)$$

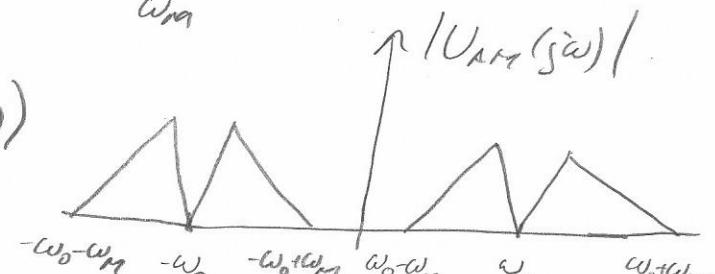
produljena modulacija

- srajnicica NC sadrži informaciju

$$U_{AM} = \underbrace{K_a u_m(t) \cos(\omega_0 t)}_{U_p(t)} \cdot U_0$$



$$U_{AM}(j\omega) = \frac{1}{2} U_p(j(\omega - \omega_0)) + \frac{1}{2} U_p(j(\omega + \omega_0))$$

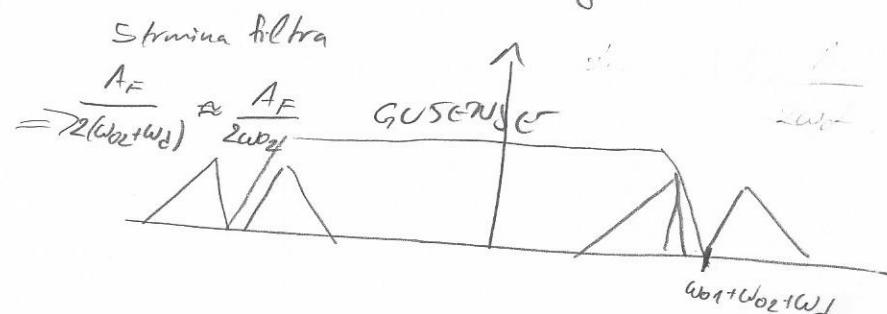
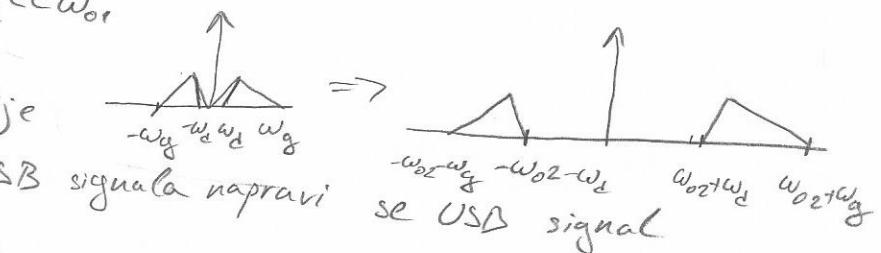


(35)

Opisati princip **dobivanja SSB signala** pomoću višestruke transpozicije i filtracije.

1) Pomoću jednostruke transpozicije i filtracije napravi se USB signal na frekvenciji nosioca $\omega_2 \ll \omega_0$.

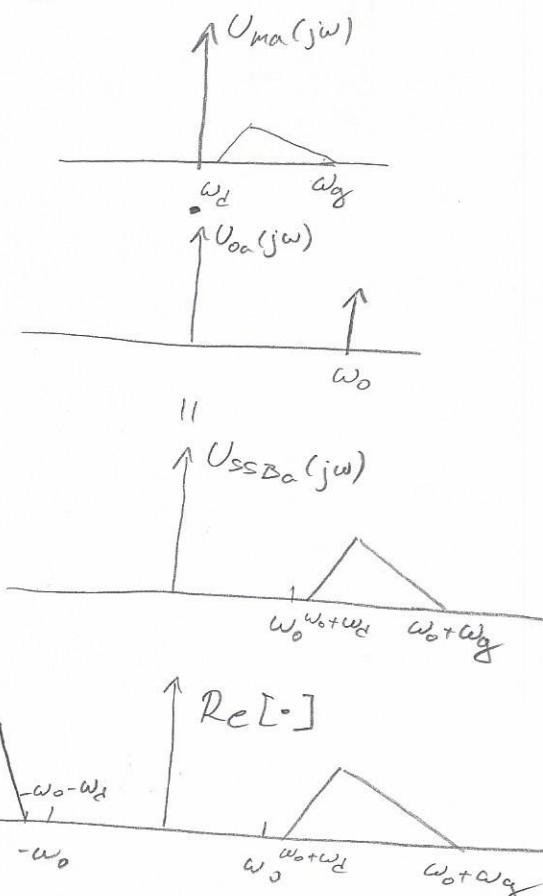
2) Pomoću jednostruke transpozicije i filtracije iz dobivenog USB signala napravi se SSB signal na frekvenciji nosioca ω_1 .



(36) Korištenjem analitičkih signala nosioca te modulacijskog signala izvesti izraz i nacrtati implementaciju sklopa za dobivanje SSB signala.

$$u_{ma}(t) \cdot u_{oa}(t) = u_{ss_{Ba}}(t)$$

\ /
analitici
signalî



SSB можно обити на

$$e_{\text{USB}}(\epsilon) = \operatorname{Re} \left[(\mu_m(\epsilon) + j\tilde{\mu}_m(\epsilon)) \cdot e^{j\omega t} \right]$$

$$u_{LSB}(\epsilon) = \operatorname{Re} \left[(u_m(\epsilon) - j\hat{e}_m(\epsilon)) \cdot e^{j\omega t} \right]$$

$$u_{OSD}(\epsilon) = \operatorname{Re}\left[(u_m(\epsilon) + j\hat{v}_m(\epsilon))e^{j\omega t}\right] = \operatorname{Re}\left[\left(u_m(\epsilon) + j\hat{v}_m^*(\epsilon)\right)/\left(c_0 e^{j(\omega t - \phi_m(\epsilon))}\right)\right]$$

$$U_{\text{res}}(\epsilon) = P_0 \left[-\frac{1}{2} \left(\text{Re}[U_m(\epsilon)] + j\text{Im}[U_m(\epsilon)] \right) (\cos(\omega_0 t) + j \sin(\omega_0 t)) \right]$$

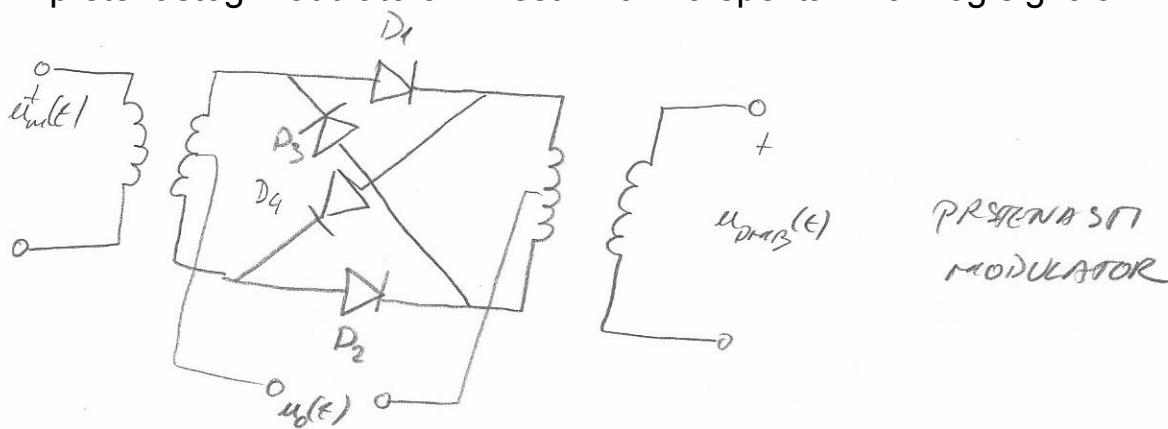
realer,

$$u_{USB}(\epsilon) = u_n(\epsilon) \cos(\omega_0 \epsilon) - \hat{u}_m(\epsilon) \sin(\omega_0 \epsilon)$$

imaginari

(37)

Nacrtati shemu i objasniti princip **dobivanja DSB-SC-AM** signala pomoću prstenastog modulatora. Izvesti izraz za spektar izlaznog signala.



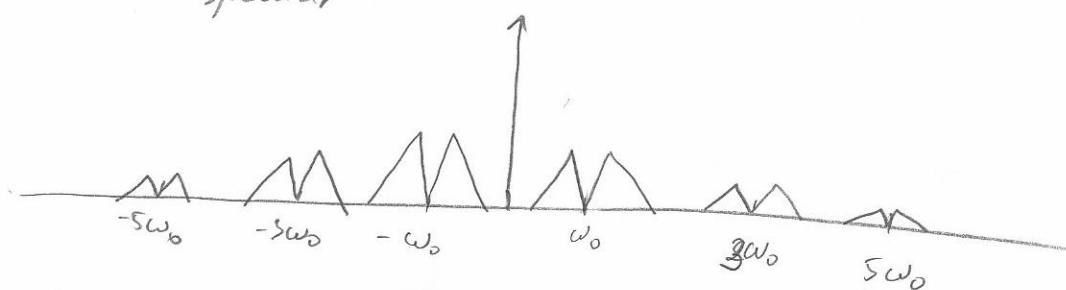
$$u_o(t) = U_o \cos(\omega_o t)$$

$$u_{PO}(t) = \operatorname{sgn}(u_o(t))$$

$$u_{DSB} = u_{PO}(t) \cdot u_m(t) , \quad u_{PO}(t) = \frac{4}{\pi} \left[\cos(\omega_o t) - \frac{\cos(3\omega_o t)}{3} + \frac{\cos(5\omega_o t)}{5} \dots \right]$$

$$u_{DSB} = \frac{4}{\pi} u_m(t) \cos(\omega_o t) - \frac{4}{3\pi} u_m(t) \cos(3\omega_o t) + \frac{4}{5\pi} u_m(t) \cos(5\omega_o t) - \dots$$

→ očitavamo spektralnu



⇒ da bi se dobio DSB signal potrebno je filtrirajuje NP ili PP filterom

(38) Izvesti izraze te opisati postupak produktne kompleksne demodulacije AM signala. Koja je glavna značajka ovog postupka?

$$u_{AM}(t) = u_p(t) \cos(\omega_0 t) \quad u_p(t) = e^{j(\omega_0 t + \vartheta)}$$

$$u(t) = u_{AM}(t) \cdot u_p(t)$$

$$u(t) = u_p(t) \cos(\omega_0 t) \cdot e^{j(\omega_0 t + \vartheta)}$$

$$u(t) = u_p(t) \cos(\omega_0 t) (\cos(\omega_0 t + \vartheta) + j \sin(\omega_0 t + \vartheta))$$

$$u(t) = u_p(t) \cos(\omega_0 t) \cos(\omega_0 t + \vartheta) + j u_p(t) \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t + \vartheta)$$

$$u(t) = \frac{1}{2} u_p(t) [\cos(-\vartheta) + \cos(2\omega_0 t + \vartheta) - j \sin(-\vartheta) - j \sin(2\omega_0 t + \vartheta)]$$

grupiranje po položaju u spektru

$$u(t) = \frac{1}{2} u_p(t) \cos(\vartheta) + j \frac{1}{2} u_p(t) \sin(\vartheta) + \frac{1}{2} u_p(t) \cos(2\omega_0 t + \vartheta) + j \frac{1}{2} u_p(t) \sin(2\omega_0 t + \vartheta)$$

Dobiveni signal sadrži

DOBRO 1) kompleksnu komponentu proporcionalnu modulacijskom signalu $\cos \vartheta$

LOŠE 2) kompleksnu komponentu na frekvenciji $2\omega_0$

↪ ulitenjano filterom

(39) Nacrtati i objasniti princip rada detektora ovojnica. Nacrtati karakteristične valne oblike. O čemu treba voditi računa kod izbora vremenske konstante detektora?

