2.4. ODREĐIVANJE MINIMUMA FJA VIŠE VARIJABLI S OGRANIČENJIMA

- 2 pristupa rješavanju: 1. matematički transformirati problem sa ograničenjima u problem bez ograničenja i primijeniti prikladni postupak optimiranja
  2. razviti/upotrijebiti prilagođeni postupak optimiranja koji uzima ograničenja

2.4.1. PROBLEM OPTIMIRANJA S OGRANIČENJIMA

1. EKSPLICITNA OGRANIČENJA
   - gornja i donja granica; tj interval unutar kojeg se mora nalaziti rješenje

2. IMPLICITNA OGRANIČENJA
   a) NEJEDNADŽBE: proizvoljna funkcija $g_i(x) \geq 0$; ograničenja su međusobno neovisna
   b) JEDNADŽBE: $h(x) = 0$; ograničenja su međusobno neovisna

2.4.2. UVOĐENJE NOVIH VARIJABLI ZA ODSTRANJIVANJE EKSPLICITNIH OGRANIČENJA

- matematička transformacija problema s ograničenjima u problem bez ograničenja
- supstitucijama se uklanjaju dvostrana i jednostrana ograničenja

2.4.3. TRANSFORMACIJA U PROBLEM BEZ OGRANIČENJA S UNUTARNJOM POČETNOM TOČKOM

- uzimamo pomoćne funkcije koja raste u beskonačnost kako se približavamo rubovima područja → logaritamska funkcija
- dodatno koristimo fju $s(r) = r$
- uzimamo početnu točku koja je sigurno unutar ograničenja
- simplex algoritmom tražimo minimum fje
- u sljedećoj iteraciji smanjimo $s(r)$ za npr. pola i uzimamo za početnu točku rješenje prethodne iteracije
- točka unutar ograničenja može se naći korištenjem funkcije čija vrijednost je fja ograničenja
- točka koja zadovoljava ograničenja ima fju cilja rezultata 0

2.4.4. TRANSFORMACIJA U PROBLEM BEZ OGRANIČENJA S VANJSKOM POČETNOM TOČKOM

2.4.5. TRANSFORMACIJA U PROBLEM BEZ OGRANIČENJA NA MIJEŠANI NAČIN

2.4.6. POSTUPAK PO BOXU

- treba uzeti više od $(n+1)$ točke da se ne bi dogodilo da točke tijekom iteracija postanu kolinearne → nije simpleks

ZADATAK

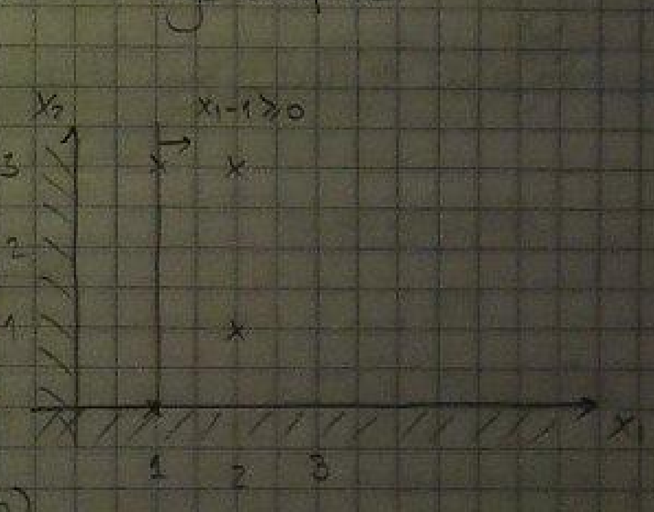
$$F(\underline{x}) = x_1^2 + (x_2 - 1)^2$$

$x_1, x_2 \in [0, \infty\rangle$

$x_1 - 1 \geq 0$

$(1,0), (2,1), (2,3), (1,3)$

$\alpha = 2$



①

x	$(1,0)$	$(2,1)$	$(2,3)$	$(1,3)$
$f(x)$	2	4	8	5

→ najlošija x_4

$x_R = (1+\alpha)x_c - \alpha x_H = (4,4) - (4,6) = (0,-2)$

$\hookrightarrow x_R' = (0,0)$ ... zadovoljavanje eksplicitnog ogr.

$\hookrightarrow x_R'' = \frac{1}{2}(x_R' + x_c) = (2/3, 2/3)$ ... ne zadovoljava implicitno

$\hookrightarrow x_R''' = \frac{1}{2}(x_R'' + x_c) = (1,1)$ ✓

$\longrightarrow$ i dalje najlošija ? $f(x_R''') > 5$? NE $\rightarrow$ napredak

2.

x	$(1,0)$	$(2,1)$	$(1,1)$	$(1,3)$
$f(x)$	2	4	1	5

x_H

$x_c = (4/3, 2/3)$

$x_R = (1+\alpha)x_c - \alpha x_H = (4,2) - (2,6) = (2,-4)$

$\hookrightarrow x_R' = (2,0)$ ... zadovoljavanje eksplicitnog i implicitnog

$\longrightarrow$ i dalje najlošija ? $f(x_R') > 4$? DA $\rightarrow x_R'' = \frac{1}{2}(x_R' + x_c)$

$= (5/3, 1/3)$

3.

x	$(1,0)$	$(2,1)$	$(1,1)$	$(5/3, 1/3)$
$f(x)$	2	4	1	

itd.

$\longrightarrow$ KRITERIJ ZAUSTAVLJANJA : uvjet zaustavljanja simplex algoritma

2.5 PRONALAŽENJE OPTIMUMA FUNKCIJE VIŠE VARIJABLI UZ UPOTREBU DERIVACIJA

2.5.1 METODA NAJBRŽEG SPUSTA

ZADATAK

$f(x) = (x_1 - 4)^2 + 4(x_2 - 2)^2$

$X_0 = (0, 0)$

Provesti 1 iteraciju metode najbržeg spusta (min. na pravcu odrediti analitički)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} &= 2(x_1 - 4) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} &= 8(x_2 - 2) \end{aligned}\right\} \nabla f$$

$$\nabla f \Big|_{x_0} = \begin{bmatrix} -8 \\ -16 \end{bmatrix}$$

$$\| \nabla f \| = \sqrt{320}$$

$$v = \begin{bmatrix} \sqrt{0.2} \\ \sqrt{0.8} \end{bmatrix}$$

uz nenormirani vektor smjera

$$v_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \ldots \text{najjednostavnije}$$

$$f(x_0 + \lambda v_0) = (\lambda - 4)^2 + 4(2\lambda - 2)^2 = 17\lambda^2 - 40\lambda + 32$$

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = 34\lambda - 40 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{40}{34}$$

$$x_1 = x_0 + \lambda v_0 = \begin{bmatrix} 1.1765 \\ 2.3529 \end{bmatrix}$$

2.5.2 NEWTON - RAPHSONOV POSTUPAK

- brže i bolje od gradijentnog spusta
- zahtjeva puno informacija koje trebamo "znati" za postupak
- ne koristi se samostalno

2.5.3 POSTUPAK PO FLETCHERU i POWELLU

- algoritam procjene i aproksimacije inverzije matrice drugih derivacija $\rightarrow G$
- Hessova matrica kvadratne funkcije je uvijek jednaka

2.5.4. NEWTON-RAPHSONOV P. ZA SUSTAVE NELINEARNIH JEDNADŽBI

ZADATAK

$$\sin^2 x + y^2 = 0$$
$$\sqrt{x} - y^3 = 0$$

$$G(x) = 0$$

$$G(x) = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ g_n(x) \end{bmatrix}$$

- PRISTUP 1: 1 fja cilja $F(x)$, $F(x) = \sum g(x)^2$
- PRISTUP 2: Newton - Raphsonov postupak za sustav

$$\underline{X}_{k+1} = \underline{X}_k - \underline{J}^{-1}(x_k) \cdot G(x_k)$$

$$\underline{J}(x_k) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}\Big|_{x_k} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}\Big|_{x_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1}\Big|_{x_k} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n}\Big|_{x_k} \end{bmatrix}$$

$$\underline{X}_{k+1} - \underline{X}_k = -\underline{J}^{-1}\underline{G} = \underline{\Delta x}$$

$\hookrightarrow$ rješava se kao sustav linearnih algebarskih jednadžbi

$$\underline{J}(x_k) \cdot \Delta x_k = -G(x_k)$$

$$X_{k+1} = X_k + \Delta x_k$$

POSTUPAK (x_0, ε)

$x = x_0$

PONAVLJAJ

IZRAČUNAJ $G(x)$ i $J(x)$

RIJEŠI $J \cdot \Delta x = -G$ / nađi Δx

$x = x + \Delta x$

DOK JE $\Delta x > \varepsilon$

- MODIFIKACIJA: postupak koristi konstantnu matricu J izračunatu u početnoj točki
- korak k: $\Delta x_k = -\underbrace{J^{-1}}_{\text{konst.}} G(x_k)$
- PROBLEM: moguća lošija stabilnost postupka (koraci nas vode sve dalje od minimuma $\rightarrow$ divergira)

ZADATAK

$$\left.\begin{array}{l} x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \quad \longrightarrow g_1(x) \\ x_1 - 2x_2 = 0 \quad \longrightarrow g_2(x) \end{array}\right\} \underline{G}(x)$$

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

- $x_0 = (1, 1)$

$$\underline{J}\,\underline{\Delta x} = -\underline{G} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \Delta x = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2\Delta x_1 + 2\Delta x_2 = -1 \\ \Delta x_1 - 2\Delta x_2 = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Delta x_1 = 0 \\ \Delta x_2 = -1/2 \end{array}$$

$x_1 = (1, 1/2)$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \underline{\Delta x} = \begin{bmatrix} -1/4 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \Delta x_1 = -1/10 \\ \Delta x_2 = -1/20 \end{array}$$

$x_1 = (0.9, 0.45)$

$x_2 = (0.[illegible], 0.[illegible]) \longrightarrow G(x_2) = \begin{bmatrix} 3 \cdot 10^{-5} \\ 0 \end{bmatrix}$

2.6. GENETSKI ALGORITMI

- dio stohastičkih algoritama za pronalazak rješenja (višestrukim pokretanjem algoritama nalaze se različita rješenja)
- prethodno opisane metode optimiranja traže samo lokalni min/max ("hill-climbing")
- prikaz rješenja → linearno preslikavanje između donje (00..0) i gornje (11..1) granice vrijednosti

PRIMJER

$f(x) = (x-2)^2$

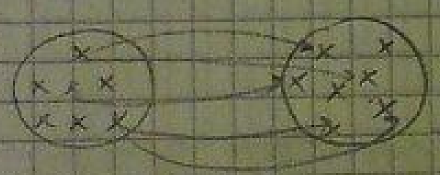
$F_i = f_{max} - f_i$

$x \in [-5, 5]$

preciznost 1 decimale → 100 vrijednosti

=> 7 bitova : $2^7 = 128 > 100$

GENERACIJSKI ODABIR

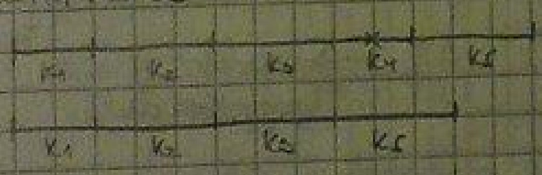


- dobre jedinke se kopiraju (jednom ili više puta) u novu generaciju, a loše se zanemaruju
- dok nova generacija nema isti br. el.

ELIMINACIJSKI ODABIR

- identificiramo loše jedinke i eliminiramo ih i kombinirajući razne postupke i preostale jedinke stvaramo nove
- dok nova generacija nema isti br. el.

ELIMINACIJSKI JEDNOSTAVNI ODABIR



- eliminacija populacije određenog postotka

- KRIŽANJE S 1 TOČKOM PREKIDA : 1. dio 1. roditelja i 2. dio 2. roditelja
- KRIŽANJE S 2 TOČKE PREKIDA : 1. i 3. dio 1. roditelja, 2. dio 2. roditelja