30.04.2010.

$E(X \mid X_1, \dots, X_m)$:

$x_1, \dots, x_m$ - diskretne vrijednosti

$E(X \mid X_1 = x_1, \dots, X_m = x_m) = F(x_1, \dots, x_m)$

$E(X \mid X_1, \dots, X_m) = F(X_1, \dots, X_m)$

$E(X \mid X_1, \dots, X_m) = EX$

X nezavisna sa slučajnim vektorom $(X_1, \dots, X_m)$

$\downarrow$

sredina je ista kao da ne znamo što je bilo prije

$S^D(n) = S(n)(1+r)^{-n}$ diskontirana vrijednost cijene neke dionice

$E(S^D(n+1) \mid S(n)) = S^D(n)$

$\downarrow$

svojstvo martingalnosti

$E^*(S^D(n+1) \mid S(n), S(n-1), \dots, S(0)) = S^D(n)$

$= \underbrace{E^*(S^D(n+1) \mid S(n))}$ u slučaju Markovljeva lanca

(uvjet da na tržištu nema prilike za arbitražu)

short selling - nešto što nemam, prodajem!

Investicijske strategije

- svaki trenutak biramo udjele svojih dionica
- promjenu koju vršimo, vršimo na temelju podataka danas (nema spekulanja)

$V(n) = \sum_{i=1}^{m} x_i(n) S_i(n) + y(n) A(n)$ u trenutku $n \geq 1$

$V(0) = \sum_{i=1}^{m} x_i(1) S_i(0) + y(1) A(0)$ u $n = 0$

svejedno je n ili $n+1$

(gledamo vrijednost portfelja danas, n)

Primjer 1

$$\left.\begin{array}{l} S_1(0)=60,\ S_1(1)=65,\ S_1(2)=75 \\ S_2(0)=20,\ S_2(1)=15,\ S_2(2)=25 \\ A(0)=100,\ A(1)=110,\ A(2)=121 \end{array}\right\}$$ brojevi uzeti za primjer

Samofinancirajuća strategija

$$V(n)=\sum_{i=1}^{m} x_i(n+1)\,S_i(n)+y(n+1)\,A(n)$$

- imamo mogućnost posuđivanja i ulaganja u banku

$$x_1(n+1)=F_1(S_1,\dots,S_n)$$

$$x_2(n+1)=F_2(S_1,\dots,S_n)$$

$$x_m(n+1)=F_m(S_1,\dots,S_n)$$

$$y(n+1)=G(S_1,\dots,S_n)$$

Predvidivost

$V(0)=200$

$A(0)=100,\ A(1)=110,\ A(2)=121$

$x_1(1)=35.24,\ x_1(2)=-40.5$

$S_1(0)=60,\ S_1(1)=65,\ S_1(2)=75$

$x_2(1)=24.78,\ x_2(2)=10.13$

$S_2(0)=20,\ S_2(1)=15,\ S_2(2)=25$

predvidiva i samofinancirajuća strategija ?

$$200=35.24\cdot 60+24.78\cdot 20+y(1)\cdot 100$$

$y(1)=-23.98$ (200 nije bilo dosta, već smo povukli novac iz obveznica)

$$V(1)=35.24\cdot 65+24.78\cdot 15+(-23.98)\cdot 110$$

$V(1)=15.5$

$$15.5=-40.5\cdot 65+10.13\cdot 15+y(2)\cdot 110$$

$y(2)=22.69$ (jer je napravio short selling dionice 1)

$$V(2)=-40.5\cdot 75+10.13\cdot 25+22.69\cdot 121$$

$V(2)=-38.64$

Dopustivost

- ne dopuštamo negativnu strategiju

$$V(n) \geq 0 \quad \text{s vjerojatnosti } 1$$

Pretpostavka nearbitraže

- ne postoji dopustiva investicijska strategija za koju vrijedi

$$V(0) = 0 \text{ i } V(n) > 0 \quad \text{s pozitivnom vjerojatnosti za neki } n = 1, 2, \ldots$$

(nije bitno da li nam je negdje vrijednost < 0)

Zadatak 2.

0

(x_1', y_1')

$V(0) = 0$

1

(x_1', y_1')

(x_2', y_2')

$V(1) < 0$ s pozitivnom vjerojatnosti

2

(x_2', y_2')

$V(2) > 0$ s poz. vjerojatnosti

$V(2) \geq 0$

$V(0) = 0$ ne radimo ništa

$x_1 = 0$, $y_1 = 0$ } ne ulažemo u ništa

- u trenutku 1 gledamo stanje $V(1)$

$$(V'(1) = 0)$$

- ukoliko je $V(1) \geq 0$ ne radimo ništa, odnosno:

$$x_2 = 0$$

$$y_2 = 0$$

- kada je $V(1) < 0$, uzimamo $x_2 = x_2'$
- s obzirom da nemamo ništa u trenutku 0:

$$x_2 \cdot S(1) + y_2 \cdot A(1) = 0$$

$$y_2 = -\frac{x_2 S(1)}{A(1)}$$

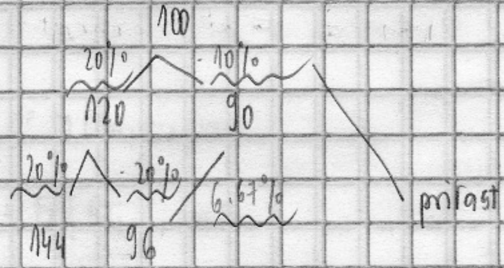
$V(1) = x_2' S(1) + y_2' A(1) < 0$

$$y_2' = \frac{V(1) - x_2 S(1)}{A(1)} < y_2$$

jer je $V(1)/A(1) < 0$

$x_2 S(2) + y_2 A(2) = x_2' S(2) + y_2 A(2) > x_2' S(2) + y_2' A(2) > 0$

Arbitraža (cont)



$A(0) = 100$
$A(1) = 110$ — kamatna stopa 10%
$A(2) = 121$

- prilika za arbitražu : scenarij u kojem ćemo nešto zaraditi
 (short selling rizične imovine, i kupnja nerizične)

$$\frac{90}{110} \cdot 121 - 96 = 3$$

$0 = x(1) \cdot S(0) + y(1) A(0)$, $A(0) = 1$

$y = -a$

$$x(1) = \frac{a A(0)}{S(0)}$$

- ukoliko je $a = 0 \Rightarrow x(1) = 0$ nismo se mogli zadužiti

$x(1) S(1) + y(1) A(1) = 0$, $A(1) = 1 + m$

slučaj $a > 0$ $\qquad A(1)$ $\quad \parallel$

$$V(1) = \frac{a}{S(0)} S(1) + (-a)(1+r)$$

- moramo se uvjeriti da nema arbitraže

(svugdje je $=0$ ili negdje <0 kad vrijedi nearbitraža)

$$V(1) = \begin{cases} a(1+g) - a(1+r) = a(g-r) > 0 \\ a(1+d) - a(1+r) = a(d-r) < 0 \end{cases}$$

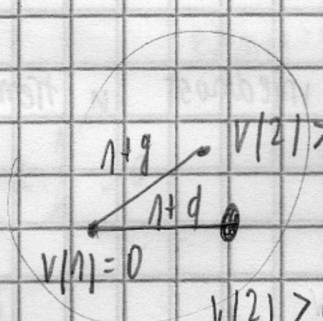
- prirast nerizične mora biti između najmanje i najveće vrijednosti rizične imovine

(nerizična imovina je između prirasta i pada)

Višeperiodni model

$d < r < g$

0 $\qquad$ 1 $\qquad$ 2



$V(2) > 0$

$V(2) \geq 0$

postoji prilika za arbitražu

pa ne vrijedi $\cancel{d < r < g}$

Fundamentalni teorem vrednovanja imovine

- neka je $\{F_n\}$, $n=0,1,\dots$ rastući niz sigma-algebri na vjerojatnosnom prostoru (Ω, F, P)

- takve nizove zovemo filtracije

$$E(X|X_1, X_2, \dots, X_n)$$

$$(\Omega, F, P)$$

$$F_n \subset F \qquad F_n \subseteq F \subseteq F(\Omega)$$

$$F_1 \subseteq F_2 \subseteq F_3 \dots$$

$$\{X_2 < X_3\} \in F_3$$

Martingal - "pravedna igra"

$$E^P[X(n+1) \mid F_n] = X(n)$$

$$E^P[X_{n+1} - X_n \mid F_n] = 0$$

(ne možemo zaraditi ništa čak i ako znamo vrijednost u trenutku $n+1$)

$$X_1, X_2, X_3, X_4, \dots, X_n : F_n$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \{X_3 = x\} \in F_3$$

$$\forall A \in F_3$$

Martingalna mjera

- vjerojatnosna mjera Q za koju vrijedi da je diskontirani proces cijene rizične imovine Q-martingal, nazivamo martingalna mjera za imovinu S

(1)

$$X_i \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ p & 1-p \end{pmatrix}$$

$$S_n = X_0 + \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$E(S_{n+1} \mid S_1, \dots, S_n) = E(S_{n+1} \mid \underbrace{X_1, \dots X_n}_{F_n})$$

$$S_{n+1} = X_0 + \sum_{i=1}^{n} X_i + X_{n+1}$$

$$E\left(X_0 + \sum_{i=1}^{n} X_i + X_{n+1} \mid X_1, \dots, X_n\right)$$

$$= E\left(X_0 + \sum_{i=1}^{n} X_i \mid X_1, \dots, X_n\right) + E\left(X_{n+1} \mid X_1, \dots, X_n\right)$$

$$= X_0 + \sum_{i=1}^{n} X_n + EX_{n+1} = S_n + EX_{n+1} = S_n$$

$$EX_{n+1} = 0 = EX_0 = p + (-1)(1-p) = 0$$

$$(p = 0.5)$$

2. $X_n \sim \begin{pmatrix} -1 & x \\ 5/6 & 1/6 \end{pmatrix}$

$$S_n = X_0 + \sum_{i=1}^{n} iX_i$$

$$E(S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = S_n + EX_{n+1} = S_n$$

$$EX_{n+1} = 0$$

$$(-1) \cdot \frac{5}{\cancel{6}} + x \cdot \frac{1}{\cancel{6}} = 0$$

$$x = 5$$

$$E(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) < X_n$$

3. $X_n \sim \begin{pmatrix} -1 & 35 \\ 36/37 & 1/37 \end{pmatrix}$

$$S_n = X_i + \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$E(S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = S_n + EX_{n+1} < S_n$$