FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

Analiza i projektiranje računalom

Auditorne vježbe

ZAGREB

Samo je jedan Mali Ivica!

RAZRED:

apstraktan niz podataka (varijabli) i funkcija (metoda)

Npr:

```
class broj{
    public:            //može se pristupiti sa svih
                       //mjesta program. koda
        double V;
        povecaj (void);
};                     f-ja je dio razreda "broj"

void broj :: povecaj (void){
    V+=1;
}
```

→ razred opisuje ponašanje elemenata --> objekata

OBJEKT:

Npr.

```
broj A;        → stvoren na stogu (briše se nakon
                 izlaza iz prog)

A.v=5;          //pristupanje var. objekta
cout << A.v;
A.povecaj ();
cout << A.v;
...
```

Korištenje razreda preko pokazivača! OBJEKT JOŠ NIJE STVOREN!

```
broj *pbroj;
pbroj = new broj;    //tek sad je objekt stvoren
                     → stvoren u memo. (obv. DELETE!)
pbroj -> v=5;
...
delete pbroj;
```

KONSTRUKTOR:

metoda koja se poziva u trenutku stvaranja objekta [zauzima memo, inicijalizira var...]

Npr:

```
class broj {
    public:
        double v;
        povecaj (void);
        broj (void);
        broj (double);
        ...
};
                                  → ili samo V=0;
broj :: broj (void){
    (*this). V = 0;        //inicijalizira V na 0
}                          → //pokaz. na objekt u kojem trenutno jesmo
```

```
broj :: broj (double _v ){
        (*this).v =_v ;
  }
```

Glavni program:

```
  broj  A(5) ;        // poziv konstruktora  broj(double)
  broj  B    ;        //   -"-          -"-  broj(void)
```

REZ: A=5 i B=∅!

DESTRUKTOR:

metoda koja oslobađa zauzetu memoriju objekta

Npr

```
   class  pbroj {
         public:
               double *pv ;
                pbroj ();
               ~pbroj ();
   };

   pbroj :: pbroj (){
          pv = new double ;
   }

   pbroj :: ~pbroj (){
          delete pv;
   }
```

Gl. program:

```
     pbroj  A ;
     *(A. pv) = 5 ;
       ⋮
```

(čim izađemo iz dosega objekta, poziva se destr. koji oslobađa memo.)

COPY KONSTRUKTOR

Npr:

```
          ...
          b = 5+ funk(a);
          ...
          double funk (double a){
              double rez ;
              ...
              return rez;
          }
```

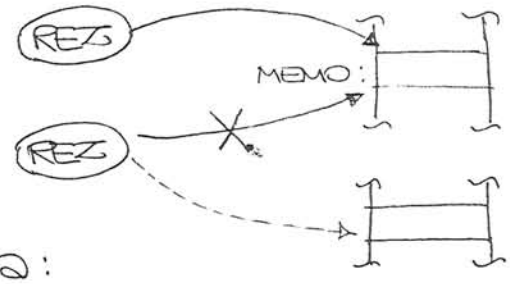
(compiler generira kôd koji vrijed. "rez" kopira s 1mjesta u drugo u memoriji, byte po byte)

→ primjer s objektima?

```
pbroj funk(...){
    pbroj rez;
    ...
    return rez;
}
```

COPY CONSTRUCTOR

(u ovom slučaju se poziva copy construktor!)
ako ga ne napišemo, stvara se defaultni!
Ne valja u slučaju 2 objekta: (koji zauz. memo)



Sintaksa copy konstruktora:

```
pbroj::pbroj (const pbroj &src){     //zauzimanje svoje memo
    pv = new double;
    *pv = *src.pv;
}
```

NADGRADNJA OPERATORA: //operator overloading)

A + B   (A,B → objekti)

Npr

```
class pbroj{
    public:
        double *pv;
        pbroj ();
        ~pbroj ();
        pbroj (const pbroj&);   // copy constructor

        pbroj operator= (pbroj&);
        pbroj operator+ (pbroj&);
};
```

BOLJE! → const

```
pbroj  pbroj::operator = (pbroj &src){
        *pv= *src.pv;
        return *this;
```

A = B

```
pbroj  pbroj::operator+ (pbroj &op2) {
       pbroj rez;

       *rez.pv = *pv + *op2.pv;
       return  rez;
}
```

C = A + B

→ gdje god možeš, stavi const!!
→ unarni operator nema ul. arg.!!

1 Rješavanje sustava linearnih algebarskih jednadžbi

$\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$

$\underline{A}$ - $n \times n$

$\underline{x}$ - $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

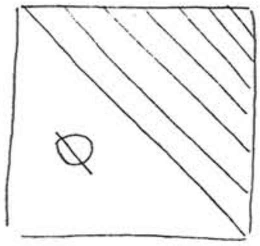
$\underline{b}$ - $\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

Rješenje inverzijom:

$\underline{x} = \underline{A}^{-1} \cdot \underline{b}$

→ (neefikasno)

1.1. GAUSSOVA ELIMINACIJA



$\underline{U} \cdot \underline{x} = \underline{b}$

SUPSTITUCIJA UNATRAG:

$x_n = \frac{b_n}{u_{nn}}$

$x_{n-1} = \dots$

$\vdots$

$x_1 = \dots$

FORMULA:

$$\boxed{x_j = \left(b_j - \sum_{k=j+1}^{n} u_{jk} \cdot x_k\right) / u_{jj}}$$

$\forall j = n, \dots, 1$

a) Tokom Gaussove eliminacije može se dogoditi da element matrice s kojom dijelimo postane = nuli.

U k-tom koraku; dijelimo s el. mat A : a_{kk} → STOŽERNI (PIVOT) ELEMENT

b) Ako su stožerni elementi mali, može doći do pogreške zbog zaokruživanja : $a_{kk} \ll$

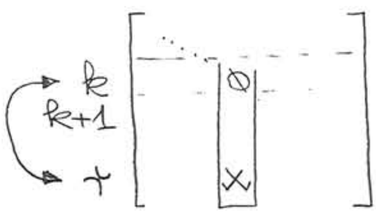
1.2. PIVOTIZIRANJE (STOŽERNI RAZVOJ)

⇒ zamjena stupaca ili redaka da bi za stožerni element dobili onaj sa što većom aps. vrijednošću

a) DJELOMIČNO PIVOTIRANJE : pivotiranje ili po stupcima ili po retcima

◦ PO STUPCIMA → zamjena <u>REDAKA</u> !

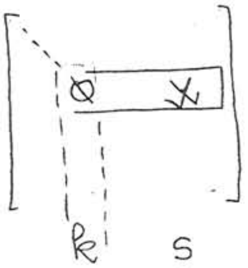
u k-tom koraku:



x ima max. aps. vrijednost u stupcu ispod ϕ elementa!

$$|a_{rk}^{(k)}| = \max |a_{jk}^{(k)}|, \quad j = k(+1),..,n$$

∘ PO RETCIMA $\mapsto$ zamjena <u>STUPACA</u>!



b) POTPUNO PIVOTIRANJE: pivotiranje i po retcima i po stupcima

$\rightarrow$ tražimo i r i s koji ćemo zamijeniti s k-tim retkom/stupcem

$$r,s \Rightarrow |a_{rs}^{(k)}| = \max |a_{ij}^{(k)}| \quad i,j = k,..,n$$

1.3. LU DEKOMPOZICIJA

$$\underline{A}\,\underline{x} = \underline{b}$$

$$\underline{A} = \underline{L} \cdot \underline{U}$$

! <u>Varijanta 1</u>: $L = \begin{bmatrix} 1 & & \phi \\ l & 1 & \\ l & l & 1 \\ l & l & l & 1 \end{bmatrix}$ $\quad U = \begin{bmatrix} u & u & u & u \\ & u & u & u \\ & \phi & u & u \\ & & & u \end{bmatrix}$

<u>Varijanta 2</u>: <u>U</u> ima 11...1 na gl. dijagonali; a <u>L</u> nema (nužno)

$$\underline{L} \cdot \underbrace{\underline{U} \cdot \underline{x}} = \underline{b}$$

$$\underline{U} \cdot \underline{x} = \underline{y}$$

① $\underline{L} \cdot \underline{y} = \underline{b} \rightarrow y_1 = b_1$, $y_2 = \dots$, $\vdots$, $y_n = \dots$

<u>SUPSTITUCIJA UNAPRIJED</u>!

$$\boxed{y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} \cdot y_j} \quad \forall i = 1,..,n$$

② $\underline{U} \cdot \underline{x} = \underline{y} \rightarrow x_n = y_n / u_n$, $x_{n-1} = \dots$, $\vdots$, $x_1 = \dots$

<u>SUPSTITUCIJA UNATRAG</u>!

DEKOMPOZICIJA

$$\boxed{\begin{aligned} u_{ij} &= a_{ij} - \sum_{p=1}^{i-1} l_{ip} \cdot u_{pj} \quad ; \; j=1,..,n \\ l_{ki} &= \frac{1}{u_{ii}} \left(a_{ki} - \sum_{p=1}^{i-1} l_{kp} \cdot u_{pi} \right) \; ; \; k=i+1,..,n \end{aligned}} \quad \forall i = 1,..,n$$

Najčešće se memorijski prostor matrice $\underline{A}$ koristi za smještaj matrica $\underline{L}$ i $\underline{U}$.

$$\underline{L}/\underline{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ l_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ l_{31} & l_{32} & & \vdots \\ \vdots & & & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Formule se tada svode na: (nema indexa l_{xx} i u_{yy})

$$\boxed{\begin{aligned} a_{ji} &= a_{ji} / a_{ii} \; ; \; j=i+1,..,n \\ a_{jk} &= a_{jk} - a_{ji} \cdot a_{ik} \; ; \; j=i+1,..,n \\ & \qquad\qquad\qquad\quad k=i+1,..,n \end{aligned}} \quad \forall i=1,..,n-1$$

Memorijski prostor vektora $\underline{b}$ se 1. koristi za vektor $\underline{y}$, a zatim za vektor $\underline{X}$.

Algoritam dekompozicije u pseudokodu:

```
ZA i=1 DO n-1
    ZA j=i+1 DO n
        A[j,i]/= A[i,i]
        ZA k=i+1 DO n
            A[j,k]-= A[j,i]*A[i,k];
```
} rastav $\underline{A}$ na $\underline{L}/\underline{U}$

```
ZA i=1 DO n-1
    ZA j=i+1 DO n
        b[j] -= A[j,i]*b[i];
```
} supstitucija unaprijed ($\underline{b} \to \underline{y}$)

```
ZA i=n DO 1
    b[i] /= A[i,i];
    ZA j=1 DO i-1
        b[j]-= A[j,i]*b[i];
```
} supstitucija unatrag ($\underline{y} \to \underline{X}$)

KRAJ

⇒ PIVOTIRANJE u slučaju da je elem. kojim dijelimo $=0$ ili ≈ 0 ($\ll$) ??

⇒ Ako rješenja ima, $\underline{A}$ se može svesti na $\underline{L}\underline{U}$ za neku određenu permutaciju redaka i stupaca od $\underline{A}$.

↳ LUP dekompozicija!

Zdk:

1)

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \underline{L} \backslash \underline{U}$$

Rastavi $\underline{A}$ na $\underline{L}$ i $\underline{U}$!

$$\twoheadrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{3} & 4 & 1 & -1 \\ 1/3 & -1-4/3 & 2-1/3 & 1+1/3 \\ 5/3 & 2-20/3 & 3-5/3 & 2+5/3 \\ 2/3 & -3-8/3 & 0-2/3 & -1+2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & -1 \\ 1/3 & -7/3 & 5/3 & 4/3 \\ 5/3 & -14/3 & 4/3 & 11/3 \\ 2/3 & -17/3 & -2/3 & -1/3 \end{bmatrix} \twoheadrightarrow$$

$$\twoheadrightarrow \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \boxed{-7/3} & 5/3 & 4/3 \\ \cdot & 2 & 4/3-10/3 & 11/3-8/3 \\ \cdot & -17/7 & \cdots & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -7/3 & 5/3 & 4/3 \\ \cdot & 2 & -2 & 1 \\ \cdot & -17/7 & -33/7 & -25/7 \end{bmatrix} \twoheadrightarrow$$

$$\twoheadrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & -1 \\ 1/3 & -7/3 & 5/3 & 4/3 \\ 5/3 & 2 & -2 & 1 \\ 2/3 & +17/7 & 33/14 & -83/14 \end{bmatrix} \quad //$$

$\underline{U}$ → uključujući gl. dijagonalu

$\underline{L}$ → 1 na gl. dijagonali

2) Riješi sustav jednadžbi $\underline{LU}$ dekompozicijom.

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 10 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \underline{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{L} \backslash \underline{U} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 10 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \twoheadrightarrow \begin{bmatrix} 6 & 2 & 10 \\ 1/3 & 7/3 & -10/3 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \twoheadrightarrow \begin{bmatrix} 6 & 2 & 10 \\ 1/3 & 7/3 & -10/3 \\ 0 & 12/7 & 54/7 \end{bmatrix} \quad //$$

$2 + 10/3 \cdot (12/7)$

$\underline{L}(\underline{U}\underline{x}) = \underline{b}$

a) $\underline{L} \cdot \underline{y} = \underline{b}$ → supst. unaprijed → $\underline{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7/3 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) $\underline{U} \cdot \underline{x} = \underline{y}$ → supst. unatrag → $\underline{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

PRIMJER:

$$\underline{L} \backslash \underline{U} \; (= \underline{A}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \twoheadrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \boxed{0} & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Matrica NIJE singularna ali se ne može napraviti LU dekompozicija!

TEOREM: LUP-dekompozicija:
$\forall$ nesingularna matrica $\underline{A}$ može se svesti na $\underline{L}$ i $\underline{U}$ za određenu permutaciju (P) stupaca i redaka od $\underline{A}$

LUP dekompozicija

Algoritam: (zamjena indeksa)

[r je redak s max |elem| i r mijenjamo s i]

```
NAPUNI POLJE π INDEKSIMA REDAKA;
ZA i=1 DO n-1
|   ODABERI PIVOT ELEMENT |a_ri^(i)| = max |a_ji^(i)|, j=i,..,n
|   AKO A[r,i] == 0 KRAJ
|   ZAMJENI(π[r], π[i]);
|   ZA j=i+1 DO n
|   |   A[π[j], i] /= A[π[i], i];
|   |   ZA k=i+1 DO n
|   |   |   A[π[j], k] -= A[π[j], i] * A[π[i], k];
```

// SUPSTITUCIJA UNAPRIJED } ali pristupamo el. matrica $\underline{A}$ i $\underline{b}$
// SUPSTITUCIJA UNATRAG } preko polja indeksa π // !

Uspoređivanje s 0:

$|A[r,i]| < \varepsilon$, gdje je $\varepsilon \ll$!!!

Primjer (isti):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \underline{x} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \overset{*(2)}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \underline{b}'$$

$$\underline{L} \backslash \underline{U} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{*(i)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \underline{L} \backslash \underline{U} \;//$$

$\underline{L} \cdot \underline{U} \cdot \underline{x} = \underline{b}'$

$\underline{L} \cdot \underline{y} = \underline{b}'$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{y} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}$$

$\underline{U} \cdot \underline{x} = \underline{y}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \underline{x} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ -1/2 \\ 3/4 \end{bmatrix}$$

2. POSTUPCI NELINEARNIH OPTIMIRANJA

2.1. PRONALAŽENJE UNIMODALNOG INTERVALA

Unimodalni interval: područje u kojem je samo 1 optimum

Početna točka x_0
Usporedba vrijednosti: $f(x_0-h)$, $f(x_0)$, $f(x_0+h)$

① $f(x_0-2^i \cdot h)$ SVE DO $\Leftarrow$
$f(x_0-2^k h) > f(x_0-2^{k-1} h)$
INTERVAL $\langle x_0-2^k \cdot h,\ x_0-2^{k-2} \cdot h \rangle$

② $f(x_0+2^i \cdot h)$ SVE DO $\Leftarrow$
$f(x_0+2^k h) < f(x_0+2^{k-1} h)$
INTERVAL $\langle x_0+2^{k-2} h,\ x_0+2^k \cdot h \rangle$

③ INTERVAL $\langle x_0-h,\ x_0+h \rangle$ $\Leftarrow$

④ f-ja je višemodalna! $\Leftarrow$

Zadana je funkcija $f(x)=x^2-2$
$x_0=100$, $h=1$. Pronađi unimod. interval

$f(x_0+h)$ $f(x_0)$ $\Rightarrow$ $f(101) > f(100)$ ※ ✓[①]
$f(x_0-h) > f(x_0)$ $f(99) < f(100)$ ✓ [①]

	x_0-h	x_0-2h	x_0-4h	x_0-8h	...	x_0-64h	x_0-128h	x_0-256h
x	99	98	96	92	...	36	-28	-156
f	9799 >	9602 >	9214 >	8462 >	>	1294 >	+786 <	+24334

INTERVAL $\langle -156, 36 \rangle$

2.2. SIMPLEX ALG. (Nelder & Mead)

```
POČETAK
    IZRAČUNAJ/ODREDI X[j], j=1,...,m
    PONAVLJAJ
        ODREDI INDEKSE h, l: F(X[h]) = max ;
                             F(X[l]) = min ;
        ODREDI Xc ; (centroid - aritm. sred bez X[h]!!)
        REFLEKSIJA : Xr ;  (X[h] prebaci preko Xc na 2. str.)
        AKO F(Xr) < F(Xl) TADA
            EKSPANZIJA : Xe
            AKO F(Xe) < F(X[l]) TADA
                X[h] := Xe ;
            INAČE X[h] := Xr ;
```

```
      INAČE
         AKO F(X_R) > F(X[j]), ∀j ≠ h TADA
            AKO F(X_R) < F(X[h]) TADA
                X[h] = X_R;
            KONTRAKCIJA : X_K;
            AKO F(X_K) < F(X[h]) TADA
                X[h] = X_K;
            INAČE
                POMAKNI_SVE_TOČKE KA X[l];
         INAČE
            X[h] = X_R;
   DOK_NIJE_ZADOVOLJEN_UVJET_ZAUSTAVLJANJA;
KRAJ
```

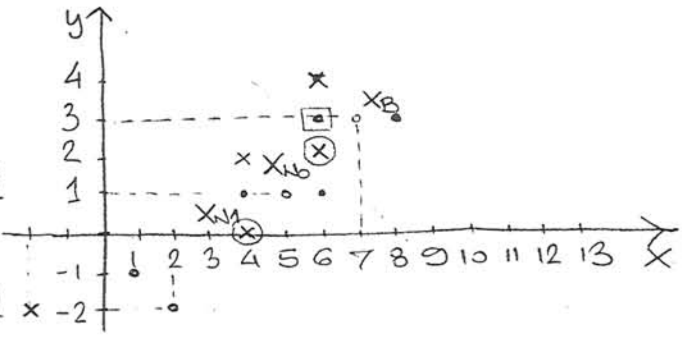
2.3. HOOKE-JEEVES ALGORITAM

→ Algoritam je na Webu (točan)

Zadana je f-ja $f(x,y) = x^2 + 4y^2$.
Naći opt. Hooke-Jeeves algoritmom!
Poč. točka je $x_0 = (7,3)$
Poč. pomak $\Delta x = 1$, faktor 1/2
Napisati pregledno
- točke x_B (bazna točka)
- -"- x_P (poč. točka pretraživanja)
- -"- x_N (točka dobivena pretraživanjem)

za ∀ iteraciju.
Postupak provoditi dok Δx ne padne na 0.5.

	x_B	x_P	x_N	Δx
0	7,3	7,3	6,2	DA(1)
1	6,2	5,1	4,0	DA(1)
2	4,0	2,-2	1,-1	DA(1)
3	1,-1	-2,-2	~~-1,-1~~	NE(0.5)
4	1,-1	1,-1	0.5,-0.5	DA(-"-)
5	0.5,-0.5	0,0	0,0	DA(-"-)
6	0,0	-0.5,0.5	0,0	NE(0.25)
7	0,0	0,0		



Rješenje je zadnja bazna točka u zadnjoj iteraciji!

$$x_N(i) = \pm\Delta \text{ nad } x_P(i)$$
$$x_P(i+1) = 2x_N(i) - x_B(i)$$!

Samo je jedan Mali Ivica!

2.4. NR POSTUPAK ZA SUSTAV NELIN. JEDN.

SUSTAV $\underline{G}(\underline{x}) = \underline{0}$

$$\underline{G}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} g_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ g_n(\underline{x}) \end{bmatrix}$$

$\forall$ od vekt. f-ja $g_i(\underline{x})$ je $= 0$

a) Definirati 1 f-ju:

$$F(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} g_i(\underline{x})^2$$

b) $\boxed{\underline{x}^{k+1} = x^k - \underline{J}^{-1}(x^k) \cdot \underline{G}(\underline{x}^k)}$

J - matrica Jakobijan

$$J(x^k) = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial g_1}{\partial x_1}\right|_{x^k} & \cdots & \left.\frac{\partial g_n}{\partial x_n}\right|_{x^k} \\ \left.\frac{\partial g_2}{\partial x_1}\right|_{x^k} & \cdots & \left.\frac{\partial g_2}{\partial x_n}\right|_{x^k} \\ \vdots & & \vdots \\ \left.\frac{\partial g_n}{\partial x_1}\right|_{x^k} & & \left.\frac{\partial g_n}{\partial x_n}\right|_{x^k} \end{bmatrix}$$

Rješava se kao slijed. sustav:

$$\underline{J}(\underline{x}^k) \cdot \Delta \underline{x}^k = -\underline{G}(\underline{x}^k)$$

$$\underline{x}^{k+1} = \underline{x}^k + \Delta \underline{x}^k$$

ALGORITAM:

ε → toleracije za $\forall$ komponentu vektora x

```
POČETAK (X0, ε)
    Xp = X0
    PONAVLJAJ
            IZRAČUNAJ G(Xp)
            IZRAČUNAJ J(Xp)
            RIJEŠI J ΔX = −G;   // nađi ΔX
            Xp = Xp + ΔX
    DOK JE ΔX > ε;
    RJEŠENJE Xp
KRAJ
```

Varijacija uz pretpostavku:
- vrijednosti Jakobijana ≈ konst.

Modifikacija ⇒ računanje s konstantnom Jakobijanovom matricom

$\underline{J}\Delta\underline{x} = -\underline{G}$

POČETAK ($\underline{X}_0$, $\underline{\varepsilon}$)
    $\underline{X}_P = \underline{X}_0$
    IZRAČUNAJ $\underline{J}(X_P)$;
    IZRAČUNAJ $\underline{J}^{-1}$;
    POnAVLJAJ
        IZRAČUNAJ $G(X_P)$
        $\Delta X = -\underline{J}^{-1}\underline{G}$
        $\underline{X}_P = \underline{X}_P + \Delta\underline{X}$;
    DOK JE $\Delta\underline{X} > \varepsilon$;
    RJEŠENJE X_P;
KRAJ

2.5. POSTUPAK PO BOX-U

$F(x)$; // naći minimum

Eksplicitna ograničenja: $\underline{X}_d \leq \underline{X} \leq \underline{X}_g$

Implicitna ograničenja: $g(\underline{x}) \geq \underline{0}$

Postupak po Boxu:
- temelji se na simplex postupku
- $2n$ točaka; operacija refleksije
- $\alpha = 1,3$

POČETAK
    NAĐI $\underline{X}_0$; $\underline{X}_d \leq \underline{X}_0 \leq \underline{X}_g$, $g(\underline{X}_0) \geq \underline{0}$ // zadaje korisnik
    $\underline{X}_c = \underline{X}_0$;
    ZA $t = 1$ DO $2*n$
        ZA $i = 1$ DO n
            $r = RAND[0,1]$;
            $X_i[t] = X_{di} + r * (X_{gi} - X_{di})$
        } zadovoljenje eksplicitnih ograničenja
        DOK $\exists g_i(\underline{X}) \mid g_i(X[t]) < \underline{0}$
            POMAKNI $X[t] = 1/2 * (\underline{X}[t] + \underline{X}_c)$
            IZRAČUNAJ NOVI $\underline{X}_c$
        } zadovoljenje implicitnih ograničenja
    POnAVLJAJ
        ODREDI h, h_2 // indeksi 2 najlošija
        IZRAČUNAJ $\underline{X}_c$ // bez najlošijeg !!
        $\underline{X}_r = (1+\alpha)\underline{X}_c - \alpha \cdot \underline{X}_h$
        ZA $i = 1$ DO n
            AKO $X_{ri} < X_{di}$ $X_{ri} = X_{di}$;
            INAČE AKO $X_{ri} > X_{gi}$ $X_{ri} = X_{gi}$;
        } expl.
        DOK $\exists g_i(X_r) \mid g_i(X_r) < \underline{0}$
            $\underline{X}_r = 1/2 * (\underline{X}_r + \underline{X}_c)$
        AKO $F(\underline{X}_r) > F(\underline{X}_{h2})$ POMAKNI X_r PREMA X_c
        $\underline{X}_h = \underline{X}_r$
    DOK NIJE $|\underline{X}_h - \underline{X}_c| < \underline{\varepsilon}_1$ ili $|F(X_h) - F(X_c)| < \underline{\varepsilon}_2$;
KRAJ

GENETSKI ALGORITMI

- stohastička metoda optimiranja

<u>početak</u>
  stvori populaciju $P(0)$
  <u>ponavljaj</u>
    odaberi $P(t)$ iz $P(t-1)$
    primjeni genetske operatore na $P(t)$
  <u>dok</u> nije zadovoljen uvjet zaustavljanja
<u>kraj</u>

- elementi GA
  - f-ja cilja, f-ja dobrote (fitness function)
  - prikaz rješenja [BINARNI PRIKAZ]
  - početno generiranje rješ. [RANDOM ODABIR]
  - selekcija
  - gen. operatori : križanje (bin.op). i mutacija (un.op)
  - uvjet zaustavljanja
  - izbor parametra

$b=0$ 0...0 (dg)
$b=2^n-1$ 1...1 (gg)

$$x = dg + \frac{b}{2^n-1}(gg-dg)$$

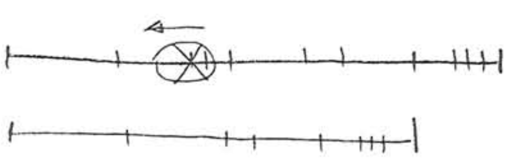
$$b = \frac{x-dg}{gg-dg}(2^n-1)$$

<u>Preciznost</u> :

$$n \geq \frac{\log[(gg-dg)*10^p+1]}{\log 2}$$

Npr.
za $gg-dg=100$, $p=4$ decimale $\Rightarrow n>=20$
Višedim. f-je $\Rightarrow$ više brojeva u 1 kromosomu

SELEKCIJA:
∀jedinka ima vjeroj. preživljavanja $\in\langle 0,1\rangle$
Nema determinizma! (vj.pr. $\neq 0$ ili $\neq 1$)
Vrste selekcije
1) GENERACIJSKI : nova populacija se stvara od stare
2) ELIMINACIJSKI : neke jed. se eliminiraju, a nove ih nadomještaju.



DOBROTA (1)
KAZNA (2)
↓
nakon ∀eliminacije se smanjuje mjerilo kazne!

OSTALI
- Turnirski odabir
- Elitizam (paradigma) - očuvanje najbolje jedinke

Samo je jedan Mali Ivica!

K-TURNIRSKI ODABIR

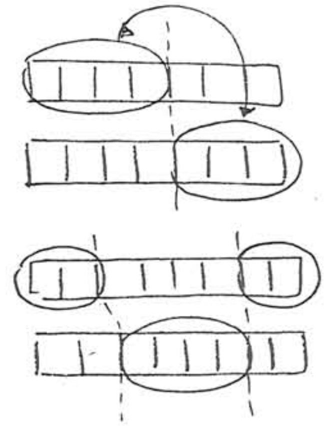
<u>početak</u>
- stvori populaciju P(0)
- <u>ponavljaj</u>
  - odaberi k jedinki iz populacije
  - pronađi i obriši najlošiju od k odabranih
  - generiraj novu jedinku pomoću gen. operatora
- <u>dok</u> nije zadovoljen uvjet zaustavljanja

<u>kraj</u>.

KRIŽANJE:

1) ... s 1 točkom prekida

2) ... s >1 točkom prekida



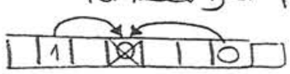
} za velike populacije

3) Uniformno križanje:

DIJETE = AB + R (A ⊕ B) } za male populacije

- u generacijskom odabiru: parametar vjerojatnosti križanja p_c

MUTACIJA:



- unarni operator

1) Jednostavna mutacija: slučajna Δ 1 bita unutar kromosoma

→ parametar: vj. mutacije 1 bita (p_m)

$p_k \approx 1-(1-p_m)^n$ vj. mutacije 1 kromosoma

n → broj bitova u kromosomu

⇒ Ukupan br. mutacija uz promjenu svih članova populacije $p_k * N$

Uloga mutacije
- izbjegavanje lok. optimuma
- obnavljanje izgubljenog gen. materijala (npr. neki bit je = 0 u ∀ kromosomima)

<u>početak</u> (K-TURNIRSKI ODABIR)
- stvori populaciju
- <u>ponavljaj</u>
  - odaberi k jedinki
  - pronađi i obriši najlošiju
  - nova_jedinka = križanje (2 sluč. odabrane)
  - primjeni mutaciju na novu jed. s vjer. p_k
- <u>dok</u>

<u>kraj</u>.

GA s jednostavnim odabirom

početak

stvori populaciju P(0)

ponavljaj

provedi N odabira jedinki iz P(t) [mogući]

definiraj P(t+1)

primjeni križanje s vj. p_k na P(t+1)

primjeni mutaciju s vj. p_m na P(t+1)

P(t) = P(t+1)

dok nije zad. uvj. zaust.

kraj

Uvjet zaustavljanja:

- br. iteracija
- br. evaluacije f-je cilja
- dostignuta vrijednost f-je cilja
- br. iteracija bez poboljšanja
- vrem. ograničenje

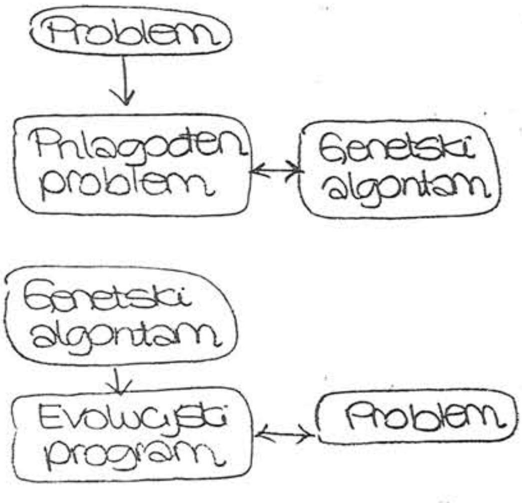
Omogućiti nastavak rada

PARAMETRI GA

- veličina kromosoma, populacije (20-200)
- postotak eliminacije (0.2-0.8)
- veličina turnira (3-8)
- vjer. križanja (0.2-0.8), mutacije (0.001, 0.05)

PRISTUPI

1) 2)



- prilagoditi problem gen. algoritmu

- prilagoditi GA problemu

GA (prednosti i nedostatci)

+ proizvoljni opt. problem
+ ponavljanje postupka
+ daje skup rješenja
+ višemodalni problemi
+ jednostavnost izvedbe

– potrebno prilagođavanje
– velik utj. parametar
– priroda rješ. nepoznata
– nema 100% učinkovitost

SIMULIRANO KALJENJE (SIMULATED ANNEALING)

- podvrsta stohastičkih optimizacijskih algoritama
- kreće od 1 poč. rješ
- poč. rješ zamjenjujemo boljim ili gorim, uz neku vj.
- vjer. prihvaćanja lošijeg rješ ↓ napretkom alg.
- nalazi (i) globalni optimum

Konfig. atomske rešetke – moguće rješ. problema
Energija – f-ja cilja
Temperatura – parametar c (kontrolni)

```
početak
    i = i0
    c = c0
    Ci = C(i);
    ponavljaj
        ponavljaj
            j = susjedno_rješ(i);
            Cj = C(j);
            ΔC = Cj - Ci;          ΔC<0 (bolje j)
            prihvati = false
            ako ΔC<0 tada
                    prihvati = true
            inače
                ako je exp(-ΔC/c) > rand[0,1] tada
                    prihvati = true
            ako je (prihvati = true) tada
                i = j
                Ci = Cj;
        do termalne_ravnoteže
    do zamrzavanja
kraj
```

prihvat lošijeg rješ. uz neku vjer.

Početni c > 50%
$c_0 = \Delta C^+ / \ln(1/p_0)$
↳ prosječno povećanje C-a

Konačna vrijednost c_F se ne zadaje, već se vanjska petlja ponavlja određeni br. iteracija.

Alg. za problem trg. putnika metodom simultanog kaljenja je na Webu ??

Samo je jedan Mali Ivica!

2.6. TRANSFORMACIJA U PROBLEM BEZ OGRANIČENJA NA MJEŠOVITI NAČIN

$F(\underline{x})$ – funkcija cilja

Expl. $g_i(\underline{x}) \geq 0,\ i = 1, .., \ell$ EKSPLICITNA OGRANIČENJA
Impl. $h_j(\underline{x}) = 0,\ j = 1, .., k$ IMPLICITNA OGRANIČENJA

(1) Transf. u problem bez ograničenja s unutarnjom poč. točkom

$$U(\underline{x}, r) = F(\underline{x}) - r \sum_{i=1}^{\ell} \ln g_i(\underline{x});$$

$r \to$ parametar (poč. vrijed. = 1)
smanjuje se tokom postupka

(2) Transf. u problem bez ograničenja s vanjskom početnom točkom

– Poč. točka ne mora biti unutar dozvoljenog područja

$$U(\underline{x}, t) = F(\underline{x}) + t \sum_{i=1}^{\ell} \underbrace{\tfrac{1}{4}\left(g_i(x) - |g_i(\underline{x})|\right)^2}_{h_i^2(\underline{x})}$$

$h_j(\underline{x}) = 0$ ← – ako je ograničenje implicitno
$\to h_j(\underline{x}) \geq 0$
$\to h_j(\underline{x}) \leq 0$ tj. $-h_j(\underline{x}) \geq 0$

$t \to$ parametar
povećava se (točka se sve više "gura" u dopušteno područje)

(3) Transf. u problem bez ogr. na mješoviti način $\boxed{t = \frac{1}{r}}$

$$U(\underline{x}, r) = F(\underline{x}) - r \sum_{i=1}^{\ell} \ln g_i(\underline{x}) + \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{k} h_j^2(\underline{x})$$

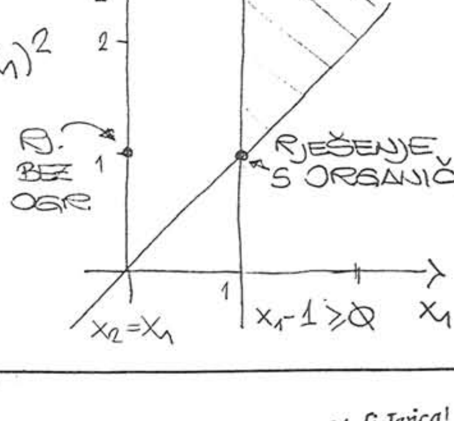
$r \to$ smanjuje se

Pr.: $F(x) = x_1^2 + (x_2 - 1)^2$ $\quad$ R. $(0, 1)$ (bez ogran.)
$g_1(\underline{x}) = x_1 - 1 \geq 0$
$h_1(\underline{x}) = x_2 - x_1 = 0$

$$U(\underline{x}, r) = x_1^2 + (x_2 - 1)^2 - r \ln(x_1 - 1) + \frac{1}{r}(x_2 - x_1)^2$$

$\frac{\partial U}{\partial x_1} = \ldots = 0 \quad \frac{\partial U}{\partial x_2} = \ldots = 0$] sustav s 2 jedn.

$x_1(r) = \ldots$
$x_2(r) = \ldots$



t	x_1	x_2
1	1.333	1.666
$2^{-1}=0.5$	1.189	1.126
$\vdots$		
2^{-7}	1.0038	1.0038

Zdk.) $f(x)=(x-4)^2$
Početne granice intervala su $[-2,6]$ m
Lokaliziraj minimum ($\forall$ granice intervala)
metodom Fibonacci, točnosti $\varepsilon \leq 1$
(preciznost)

UVJET: $\varphi_N \geq \dfrac{b-a}{\varepsilon}$ a – donja granica int.
b – gornja –"–   –"–

$$\varphi_N \geq \frac{6+2}{1} \geq 8 \quad \text{Fibonacci: } 1,1,2,3,5,\boxed{8},\dots,\varphi_i$$

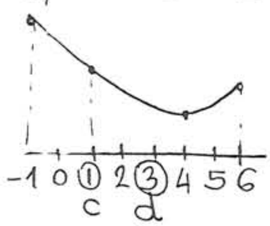
Postupak:

	a	c	d	b
1	$\cancel{-2}$	1	3	6
2	$\cancel{1}$	3	4	6
3	3	4	5	$\cancel{6}$
4	$\cancel{3}$	$\cancel{4}$	4	$\cancel{5}$
5	$\cancel{3}$	4	4	4

$$d = a + \frac{\varphi_{(N-1)}}{\varphi_{(N)}}(b-a)$$

$$c = b - \frac{\varphi_{(N-1)}}{\varphi_{(N)}}(b-a)$$

$1:\ d_1 = -2 + \frac{5}{\cancel{8}}\cdot\cancel{8} = 3$
$c_1 = 6 - 5 = 1$



U $\forall$ iteraciji se odbacuje ili a ili b!

$2:\ d_2 = 1 + \frac{3}{\cancel{5}}\cdot\cancel{5} = 4$ jer $f(c) > f(d)$

$3:\ d_3 = \dots = 5$ jer $f(c) > f(d)$

$4:\ f(c) < f(d) \rightarrow$ odbacujemo b! $c_4 = \dots = 3 + \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2} = 4$

Ako $f(c) = f(d)$, –"– ili a ili b

$5:\ \varepsilon \leq b - a = 1$ pa algoritam staje!!

Rj: $[3,4]$ ili $[4,5]$ (ovisi koju smo granicu odbacili)

3. GENETSKI ALGORITMI

3.1. BINARNI PRIKAZ KROMOSOMA

MUTACIJA: (unarni operator)

(1) JEDNOSTAVNA (SIMPLE) M.:
promjenimo nasumce odabrani bit (invertiramo)

(2) JEDNOLIKA (UNIFORM) M.:
svi bitovi poprimaju slučajne vrijednosti

(3) NEJEDNOLIKA (NONUNIFORM) M:
kod "boljih" jedinki može se promijeniti samo podskup bitova manje težine

PR $BITOVI = 1 + n\left(1 - \frac{f - f'}{f_{max} - f'}\right)$ $f > f'$ (samo za kromos. bolje od prosjeka)

f – fitness value pojedinog kromosoma
f' – srednja vrijed.
n – duljina kromosoma (br. bitova)
f_{max} – najbolja vrijednost

(4) GRANIČNA (BOUNDARY) M:
pomicanje na gornju ili donju granicu
(u sve 00...00 ili sve 11...11)

KRIŽANJE: (binarni operator)

(1) ... S 1 TOČKOM PREKIDA (1P)
(2) ... S 2 ili VIŠE TOČAKA PREKIDA

ako x i y nemaju = iti bit

(3) UNIFORMNO KRIŽANJE:
$z = (X \text{ AND } y) \text{ OR } (R \text{ AND } (X \text{ XOR } y))$
$R \rightarrow$ slučajni kromosom

VIŠEDIMENZIONALNI KROMOSOMI
- mogu se primjeniti isti genetski operatori
- dodaje se i JEDNOSTAVNO KRIŽANJE:
  - zamjenjuju se dijelovi višedim. krom. (vektori) (permutacija)

3.2. PRIKAZ GRAYEVIM KODOM

2 kromosoma su jednako udaljeni i u
- PRIKAZNOJ (bitovskoj) DOMENI, i u
- PROBLEMSKOJ DOMENI

BINARNI KR. $b = \langle b_1 b_2 \ldots b_n \rangle$
GRAYEV KR. $g = \langle g_1 g_2 \ldots g_n \rangle$

Bin → Gray
$g_1 = b_1$
ZA $k = 2$ DO n $g_k = b_{k-1}$ XOR b_k;

Samo je jedan Mali Ivica!

Gray → Bin

$v = g_1;$
$b_1 = v;$
za $k = 2$ DO n
  Ako $g_k = 1$ $v = not(v);$
  $b_k = v;$

PRIMJER Područje rješ: 0–10
Preciznost : 0,1 (1 decimala) → $p = 1$

$\frac{10}{0.1} = 100$ $n = 7$ jer $2^7 = 128 > 100$ donja granica

Npr $1011101 \rightarrow (\overset{b}{93}) \Rightarrow 7.3228 = x$ $\frac{93}{127} \cdot 10 + \overset{\sim}{0}$

$$n \geq \frac{\log[(gg-dg) \cdot 10^p + 1]}{\log 2}$$

$$x = dg + \frac{b}{2^n - 1}(gg - dg)$$

KRIŽANJE

· 0111 | 010   4.57
· 0010 | 111   1.81

a) 1PC(bit 3): 0111 111 (nova jedinka) = 4.96
ili 0010 010

b) UC: R = 1100011
Nova jed: 0110011

x 0111010
y 0010111
R 1100011
0110011 = 4.01

MUTIRANJE: 0111111 (4.96)

a) 011111$\boxed{0}$ (4.88)

3.3. PRIKAZ KROMOSOMA KAO FLOATING POINT BROJA

MUTACIJA:
(1) JEDNOLIKA (UNIFORMNA) M:
odaberemo slučajni broj u intervalu [dg, gg]
(2) NEJEDNOLIKA M:
opseg je manji za bolje jedinke
(3) GRANIČNA M:
nova jedinka = ili gg ili dg

KRIŽANJE:
(1) ARITMETIČKO KRIŽANJE: $\underline{X_3} = a * \underline{X_1} + (1-a) * \underline{X_2}$
$a \in [0, 1]$

(2) JEDNOSTAVNO KRIŽANJE (samo za višedim. k.)
zamjenjuju se dijelovi višedim. kromosoma

$\Rightarrow$ jednostavniji za implementaciju od binarnog prikaza.
$\Rightarrow$ daje lošija rješenja !!

4. ANALIZA PRIJELAZNIH POJAVA

1 var. stanja :
$\rightarrow$ POČ. STANJE x_0 i vrijeme t_0

$x(t) = ?$

$$\frac{dx}{dt} = x' = \dot{x} = f(x, t)$$

promjena var. stanja u ovisnosti o preth. vrijednosti var. i vremeni

$\rightarrow$ NUMERIČKA INTEGRACIJA (izbjeći integraciju)

>1 var. stanja : $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, t)$

Opć. $\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{B}t + \underline{C}$

$\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$ također mogu ovisiti o t (komplicirano), pa je nama $=$ const.

Ako znamo vrijed. var. st. u t_0,
pronalazimo ga (numerički) za $t_0+T, t_0+2T, \ldots, t_0+nT, \ldots$

4.1. EULER

$$x_{k+1} = x_k + T \cdot \dot{x}_k = x_k + T \cdot f(x_k, t_k)$$

Pravilo stabilnosti : $|1+\lambda T| \leq 1$

T - period integracije
λ - svojstvene vrijednosti matrice sustava $\underline{A}$
(komplexan broj) $\lambda = \sigma + j\omega$

$\det(\lambda \underline{E} - \underline{A}) = 0$ (nađemo λ)

$$|1+\lambda T| = |1+(\sigma + j\omega)T| = |(1+\sigma T) + j\omega T| = \sqrt{(1+\sigma T)^2 + (\omega T)^2} \leq 1 \quad /()^2$$

$$\cancel{1} + 2\sigma T + \sigma^2 T^2 + \omega^2 T^2 \leq \cancel{1}$$

$$T^2 \underbrace{(\sigma^2 + \omega^2)}_{|\lambda|^2} + 2\sigma T \leq 0$$

$$T(|\lambda|^2 \cdot T + 2\sigma) \leq 0$$

$$\cancel{T \leq 0}$$

$$\boxed{T \leq -\frac{2\sigma}{|\lambda|^2}}$$

Samo je jedan Mali Ivica!

1) Za zadani sustav odredi T_{max} i $\underline{x}(t=0.8)$ po Euleru:

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -5 \end{bmatrix} \underline{x} \quad ; \quad \underline{x}(t=0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(njihalo s prigušenjem)
(osc. krug s otporom)

$$\det(\lambda \underline{E} - \underline{A}) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 10 & \lambda+5 \end{bmatrix}\right) = \lambda(\lambda+5) + \overset{-(-10)}{10} = \lambda^2 + 5\lambda + 10 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-40}}{2} = -\frac{5}{2} \pm i\frac{\sqrt{15}}{2}$$

$$|\lambda| = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{15}{4}} = \sqrt{10}$$

$$T \leq -\frac{2\sigma}{|\lambda|^2} = \frac{+\cancel{2}\cdot\frac{5}{\cancel{2}}}{10} = +0.5 = T_{MAX}$$

Odabirem $T=0.4$

$$x_{1,k+1} = x_{1,k} + T \cdot \overbrace{(0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2)}^{1.\text{ redak } Ax}$$
$$x_{2,k+1} = x_{2,k} + T(-10x_{1,k} - 5_{2,k})$$

$$x_{1,1} = x_{1,0} + Tx_{2,0} = 1 + 0 = 1$$
$$x_{2,1} = x_{2,0} + T(-10x_{1,0} - 5x_{2,0}) = 0 + 0.4(-10 \cdot 1 - 5 \cdot 0) = -4$$

$$x_{1,2} = \ldots = 1 + 0.4(-4) = -0.6$$
$$x_{2,2} = \ldots = -4 + 0.4(-10 - 5(-4)) = -4 + 4 = 0$$

$$\underline{x}(t=0.8) = \begin{bmatrix} -0.6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4.2. OBRNUTI EULER

$$x_{k+1} = x_k + T \cdot \dot{x}_{k+1} = x_k + T \cdot f(x_{k+1}, t_{k+1})$$

implicitan postupak

$$|1 - \lambda T| \geq 1$$

$$\boxed{T \geq \frac{2\sigma}{|\lambda|^2}}$$

4.3. TRAPEZNI POSTUPAK

$$x_{k+1} = x_k + \frac{T}{2}(\dot{x}_{k+1} + \dot{x}_k)$$

impl. post.

$$\frac{1 + \frac{T}{2}\cdot\lambda}{1 - \frac{T}{2}\cdot\lambda} \leq 1 \quad \Rightarrow \ldots \Rightarrow \quad \boxed{\sigma \leq 0}$$

stabilnost postupka ne ovisi o T, već o samom sustavu ($Re\{\lambda\} \leq 0$)

4.4. HEUNOV POSTUPAK

$$(2)\quad x_{k+1} = x_k + \frac{T}{2}\Big[\underbrace{f(x_k,t_k)}_{\dot{x}_k} + \underbrace{f(\overline{x_{k+1}}, t_{k+1})}_{\overline{\dot{x}_{k+1}}}\Big]$$

$\overline{\dot{x}_{k+1}} \rightarrow$ tj. $\dot{x}_{k+1}$ aproksimirano!

$$(1)\quad \overline{x_{k+1}} = x_k + T\cdot\dot{x}_k$$

$$\left|1 + \lambda T + \frac{(\lambda T)^2}{2}\right| \leq 1$$

$T = ?$ D.Z.

Zdk:

$$\underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -200 & -102 \end{bmatrix} \underline{x}$$

FIZIKALNO NJIHALO S PRIGUŠENJEM $\rightarrow \begin{pmatrix} x & \text{položaj} \\ \dot{x} & \text{brzina} \end{pmatrix}$

$$x(t=0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Naći $x(t=0.02)$ uz period integracije $T=0.01$ na 4 decimale po obrnutom Eulerovom postupku.

$$\underline{x}_{n+1} = \underline{x}_n + Tf(\underline{x}_{n+1})$$

$$x_{1,n+1} = x_{1,n} + T\cdot(0\cdot x_{1,n+1} + 1\cdot x_{2,n+1})$$
$$x_{2,n+1} = x_{2,n} + T\cdot(-200\cdot x_{1,n+1} - 102\cdot x_{2,n+1})$$

LIN. SUSTAV 2 JEDN. S 2 NEPOZNANICE

[Ako sustav nije linearan, koristimo metode rješavanja nelinearnog sustava (U SVAKOJ ITERACIJI!) iz prošlog poglavlja!!]

$$x_{2,n+1} = x_{2,n} + T\cdot(-200(x_{1,n} + Tx_{2,n+1}) - 102\cdot x_{2,n+1})$$
$$\vdots$$
$$x_{2,n+1}(1 + 200T^2 + 102T) = x_{2,n} - 200T\,x_{1,n}$$
$$x_{2,n+1} = \frac{x_{2,n} - 200T\,x_{1,n}}{1 + 200T^2 + 102T} \quad //$$

$$x_{1,n+1} = x_{1,n} + T x_{2,n+1}$$
$$= x_{1,n} + T\cdot\left(\frac{x_{2,n} - 200T x_{1,n}}{1 + 200T^2 + 102T}\right) \quad //$$

$\boxed{t=0.01}$: $$x_2 = \frac{-2 - 200\cdot 0.01\cdot 1}{1 + 200(0.01)^2 + 102\cdot(0.01)} = -1.96078$$

$$x_1 = 1 + 0.01\cdot(-1.96078) = 0.98039$$

$\boxed{t=0.02}$: $$x_2 = \ldots = -1.92233$$
$$x_1 = \ldots = 0.96116 \quad //$$

Samo je jedan Mali Ivica!

Zdk. Za isti sustav provjeri <u>stabilnost</u> postupka za $T=10^{-2}$ po HEUNOVOJ formuli.
Naći $\underline{X}(t=0.02)$!

<u>Svoj. vrijedn.</u>: $|\lambda E - A| = \emptyset$

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 200 & \lambda+102 \end{vmatrix} = \emptyset$$

$$\lambda(\lambda+102) - (-200) = \emptyset$$
$$\lambda^2 + 102\lambda + 200 = \emptyset$$
$$\lambda_{1,2} = \frac{-102 \pm \sqrt{102^2 - 800}}{2} = -51 \pm 49$$

$$\boxed{\begin{aligned}\lambda_1 &= -2\\ \lambda_2 &= -100\end{aligned}}$$

STABILNOST: $\left| 1 + \lambda T + \frac{(\lambda T)^2}{2} \right| \leq 1$

$\boxed{\lambda = -2}$
$$1 - 2 \cdot 0.01 + \frac{(-2 \cdot 0.01)^2}{2} = 0.9802 \leq 1$$

$\boxed{\lambda = -100}$
$$1 - \underbrace{100 \cdot 0.01}_{1} + \frac{(1)^2}{2} = \frac{1}{2} \leq 1$$

OK!

$$\check{X}_{n+1} = X_n + T \cdot \dot{X}_n \quad \text{(EULER)}$$
$$X_{n+1} = X_n + \frac{T}{2}\left[f(X_n, t_n) + f(\check{X}_{n+1}, t_{n+1}) \right] \quad \text{(TRAPEZ)}$$

$\boxed{t = 0.01}$

$$\check{X}_{1,1} = X_{1,0} + T(X_{2,0}) = 0.96$$ ← GREŠKA! $= 0.98$!
$$\check{X}_{2,1} = X_{2,0} + T(-200X_{1,0} - 102X_{2,0}) = -1.96$$
$$X_{1,1} = X_{1,0} + \frac{T}{2}(X_{2,0} + \check{X}_{2,1}) = \ldots = 0.9802$$
$$X_{2,1} = X_{2,0} + \frac{T}{2}\left[(-200X_{1,0} - 102X_{2,0}) + (-200\check{X}_{1,1} - 102\check{X}_{2,1})\right] = \ldots =$$
$$= -1.9404$$ ← GREŠKA! $= -1.9604$

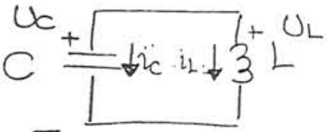
$\boxed{t = 0.02}$

$$\check{X}_{1,2} = X_{1,1} + T(X_{2,1}) = 0.96079$$ ← GREŠKA! $= 0.96059$
$$\check{X}_{2,2} = \ldots = -1.9216$$ ← -''- ! $= -1.921192$

$$\boxed{\begin{aligned} X_{1,2} &= \ldots = 0.96089 \\ X_{2,2} &= \ldots = -1.9118 \end{aligned}}$$
← 0.96079
← -1.92158

Samo je jedan Mali Ivica!

Zdk: (prošlogodišnji kolokvij)



$C = 1mF$
$L = 0.1H$

Formulirati sustav u obliku
$\dot{X} = AX + B$
za zadanu mrežu. Provjerite može li se rješavati po Euleru.
Predložiti odg. postupak i dopušteni korak integracije T.

(Harmonički oscilator; matematičko njihalo)

$u_C = u_L$
$i_C = -i_L$

$\boxed{i_C = C\frac{du_C}{dt}}$ $\boxed{u_L = L\frac{di_L}{dt}}$

$u_C = u_L = L\frac{di_L}{dt} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} i = i_C = -i_L \\ u = u_C = u_L \end{array} \right\} \rightarrow u = L\frac{di}{dt}$

$C\frac{du_C}{dt} = -i_L$ $\qquad i = -C\frac{du}{dt}$

$i' = \frac{1}{L}u$
$u' = -\frac{1}{C}i$
$\Rightarrow \begin{bmatrix} i' \\ u' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ -1000 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ u \end{bmatrix}$ //

Test za stabilnost po Euleru: $\boxed{T \leqslant \frac{-2\sigma}{|\lambda|^2}}$

$|\lambda E - A| = 0$

$\begin{vmatrix} \lambda & -10 \\ +1000 & \lambda \end{vmatrix} = 0$

$\lambda^2 + 10\,000 = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 100i \qquad \sigma = 0 \;;\; \omega = \pm 100$

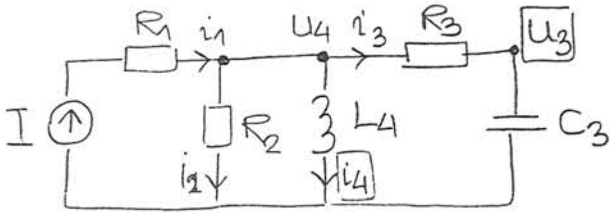
$T \leqslant 0$ za λ_1 i λ_2 $\Rightarrow$ ne možemo primjeniti Eulera za ovaj postupak!

Koji možemo?

OBRNUTI EULER: $T \geqslant \frac{2\sigma}{|\lambda|^2} = \pm 0$ (MOŽE!)
(BOLJA PRECIZNOST ŠTO MANJI T)

TRAPEZNI također može!

Zdk:



$i_1 = I$

$I = i_2 + i_3 + i_4$
$u_4 - i_3 R_3 - u_3 = 0$

$\frac{1}{R_2} \cdot L\frac{di_4}{dt} + C_3\frac{du_3}{dt} + i_4 = I$

$L\frac{di_4}{dt} - C_3\frac{du_3}{dt} \cdot R_3 - u_3 = 0$

Samo je jedan Mali Ivica!

EULER: $x_{n+1} = x_n + T \cdot \dot{x}_n$

$$\boxed{\dot{x}_n = \frac{x_{n+1}}{T} - \frac{x_n}{T}}$$

$f(n)$ tj. f-ja vremena (diskretnog)

$$\frac{L_4}{R_2}\left(\frac{i_{4,n+1}}{T} - \frac{i_{4,n}}{T}\right) + C_3\left(\frac{u_{3,n+1}}{T} - \frac{u_{3,n}}{T}\right) + i_{4,n} = I_n$$

$$L_4\left(\frac{i_{4,n+1}}{T} - \frac{i_{4,n}}{T}\right) - R_3 C_3\left(\frac{u_{3,n+1}}{T} - \frac{u_{3,n}}{T}\right) - u_{3,n} = 0$$

Veličine u koraku $n+1$ su nepoznate! $i_{4,n+1}$, $u_{3,n+1}$

$$\begin{bmatrix} \frac{L_4}{R_2 T} & \frac{C_3}{T} \\ \frac{L_4}{T} & -\frac{R_3 C_3}{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{4,n+1} \\ u_{3,n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L_4}{R_2}\frac{i_{4,n}}{T} + \frac{C_3}{T}\cdot u_{3,n} - i_{4,n} + I_n \\ \frac{L_4}{T}\cdot i_{4,n} - \frac{R_3 C_3}{T}\cdot u_{3,n} + u_{3,n} \end{bmatrix}$$

$$\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

OBRNUTI EULER: $x_{n+1} = x_n + T \cdot \dot{x}_{n+1}$

$$\boxed{\dot{x}_{n+1} = \frac{x_{n+1}}{T} - \frac{x_n}{T}}$$

$$\frac{L_4}{R_2 T}\left(i_{4,n+1} - i_{4,n}\right) + \frac{C_3}{T}\left(u_{3,n+1} - u_{3,n}\right) + i_{4,n+1} = I_{n+1}$$

$$\frac{L_4}{T}\left(i_{4,n+1} - i_{4,n}\right) - \frac{R_3 C_3}{T}\left(u_{3,n+1} - u_{3,n}\right) - u_{3,n+1} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1+\frac{L_4}{R_2 T} & \frac{C_3}{T}+1 \\ \frac{L_4}{T} & -1-\frac{R_3 C_3}{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{4,n+1} \\ u_{3,n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L_4}{R_2 T} & \frac{C_3}{T} \\ \frac{L_4}{T} & -\frac{R_3 C_3}{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{4,n} \\ u_{3,n} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} I_{n+1} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{VEKTOR POBUDE}}$$

Zdk (1 bod)

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -20 & -2 \end{bmatrix} \underline{x}$$

Pronaći najveći dopušteni korak integracije po Eulerovom postupku.

$$\det(\lambda \underline{E} - \underline{A}) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 20 & \lambda+2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+2) + 20 = \lambda^2 + 2\lambda + 20 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-80}}{2} = -1 \pm i\frac{\sqrt{76}}{2}$$

EULER: $T \leq -\frac{2\sigma}{|\lambda|^2}$ $\qquad |\lambda|^2 = 1+19 = 20$

$$\boxed{T \leq -\frac{2\cdot(-1)}{20} = 0.1}$$

§5. FLOATING POINT ZAPIS

IEEE 754

z	e	f
1	k	p

z – predznak
e – eksponent
f – signifikant

a – posmak u eksponentu

$\beta = 2$ (baza)

DENORMIRANI SIGNIFIKANT $(0,\langle f \rangle)$

e	f	VRIJEDNOST
0	0	$(-1)^z \cdot 0 = \pm 0$
0	$1 \leq f \leq 2^p - 1$	$(-1)^z \cdot 2^{-a+1} \cdot (0,\langle f \rangle)$; $a = 2^{(k-1)} - 1$
$1 \leq e \leq 2^k - 2$	$0 \leq f \leq 2^p - 1$	$(-1)^z \cdot 2^{e-a} \cdot (1,\langle f \rangle)$; NORMIRANI SIGN.
$2^k - 1$	0	$(-1)^z \cdot \infty$
$2^k - 1$	$f <> 0$	NaN (Not A Number)

APSOLUTNA POGREŠKA $= |fl(x) - x|$

povećanje $0 \to k\uparrow$
-"- granulacije $\to p\uparrow$

Za $\beta=2$: Max.aps.pogr $= 2^{a-p-1}$

RELATIVNA POGREŠKA $= \frac{|fl(x)-x|}{|x|}$

Za $\beta=2$: Rel.pog. $= \varepsilon = 2^{-p}$

PRIMJER: $\left.\begin{array}{l} k=3 \\ p=5 \\ \text{nema predznaka} \end{array}\right\}$ Napiši najmanju i najveću mog. vrijednost, 0 i ∞ te max. aps. pogrešku.

Min. moguća vrijed: DENORMIRANI SIGNIFIKANT

$a = 2^{(k-1)} - 1 = 3$

$-a+1 = -2$

$\text{MIN} = 000\,00001 \Rightarrow 2^{-2} \cdot 0.00001_{(2)} = 2^{-2} \cdot 0.03125_{10} = 0.0078125$

Max. mog. vrijed $= \text{MAX} = 110|11111 \Rightarrow 2^3 \cdot 1.11111_{(2)} = \ldots = 15.75$

"0" $= 000|00000$
"∞" $= 111|00000$

$\text{MAP} = 2^{+a-p-1} = 2^{-3} = 0.125$

$\text{MAXnext} = 110|11110 \Rightarrow \ldots\ 15.5 \Rightarrow \Delta = 15.75 - 15.5 = 0.25 = \underline{\underline{2\cdot\text{MAP}}}$

Zdk: $k=4$ → $a = 2^3 - 1 = 7$ → $2^7 = 128$
$p=5$

Predstavi brojeve 249.5 i -25.25 u tom formatu.
Zbroji ih, dekodiraj rez. i utvrdi nastalu pogrešku.

$249.5 \Rightarrow 2^7 \cdot 1.11111 = 252$
$2^7 \cdot 1.11110 = \boxed{248}$ → ova je bliža 249.5

$-25.25 \Rightarrow 2^4 \cdot 1.10011 = 25.5$
$2^4 \cdot 1.10010 = \underline{25.0}$ → analogno

SVODIMO NA VEĆI EXP!

$$\begin{array}{r} 2^7 \cdot 1.11110 \\ - \; 2^7 \cdot 0.00110 \; \cancel{010} \\ \hline 2^7 \cdot 1.11000 \Rightarrow 224 \end{array}$$

Stvarni zbroj: $249.5 - 25.25 = 224.25$

→ greška = 0.25

OBRATNI SMJER: $(25 - 249.5)$:

$$\begin{array}{r} 2^7 \cdot 0.00110\cancel{010} \\ - \; 2^7 \cdot 1.11110 \\ \hline + \; 2^7 \; \boxed{1}0,01000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1,10111 \\ + \quad\quad 1 \\ \hline 1,11000 \end{array}$$

$\ominus 2^7$ $1,11000$ → s neg pred. $= -224$

Zdk: 1 bit predz.
$k=3$ → $a = 2^2 - 1 = 3$
$p=4$

a) $(4.75 + 0.25) + 10$
b) $4.75 + (0.25 + 10)$

(A) $4.75 \equiv 2^2 \cdot 1.0011_{(2)} \equiv 101 \mid 0011$ $\quad 2+3=5 = 101$
(B) $0.25 \equiv 2^{-2} \cdot 1.0000_{(2)} \equiv 001 \mid 0000$ $\quad -2+3 = 1 = 001$
(C) $10 \equiv 2^3 \cdot 1.0100_{(2)} \equiv 110 \mid 0100$ $\quad 3+3 = 6 = 110$

a)
$$\begin{array}{rl} 2^2 \cdot 1,0011 & (A) \\ + \, 2^2 \cdot 0,0001 & (B) \\ \hline (R) \quad 2^2 \cdot 1,0100 \equiv 5 & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 2^3 \cdot 1.0100 & (C) \\ + \, 2^3 \cdot 0.1010 & (R) \\ \hline 2^3 \cdot 1.1110 \equiv (15)_{10} & \end{array}$$

Samo je jedan Mali Ivica!

b) $\begin{array}{r} 2^3 \cdot 1.0100' \ (C) \\ + \ 2^3 \cdot 0.0000 \not{1} \ (B) \\ \hline 2^3 \cdot 1.0100' \ (R) \equiv 10 \end{array}$ $\qquad$ $\begin{array}{r} 2^3 \cdot 1.0100 \ (R) \\ + \ 2^3 \cdot 0.1001 \ (A) \\ \hline 2^3 \cdot 1.1101 \equiv (14.5)_{b} \end{array}$

Zaključak: u ovom prikazu ne vrijedi asocijativnost.

§6. SLOŽENOST ALGORITAMA

- VREMENSKA SLOŽENOST
- PROSTORNA SLOŽENOST

- APOSTERIORI (eksperimentom)
- APRIORI (analizom alg.)

} OCJENA SLOŽENOSTI

O-NOTACIJA

$f(n)$ – broj operacija (funkcija od n) algoritma

$$f(n) = O(g(n)) \iff \exists c, n_0 > 0 : |f(n)| \leq c|g(n)| \quad \forall n \geq n_0$$

σ-NOTACIJA

$$f(n) = \sigma(g(n)) \iff \lim_{n \to \infty} \frac{|f(n)|}{|g(n)|} = 1$$

POLINOMSKA SLOŽENOST:

$$f(n) = a_k \cdot n^k + a_{k-1} \cdot n^{k-1} + \ldots + a_1 n + a_0$$

$O(n^k)$

$\sigma(a_k \cdot n^k)$

PRIMJER

1) $f(n) = 256 + 32n \cdot \ln(n)$ $\qquad$ $O(n \cdot \ln(n))$, $\sigma(32n \cdot \ln(n))$

2) Ocjeni složenost supstitucije unaprijed i unatrag u O i σ notaciji u ovisnosti o broju množenja i dijeljenja.

a) SUPSTITUCIJA UNAPRIJED ($Ly = b$)

$$y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j \ ; \quad i = 1, \ldots, n$$

$O(n^2)$

$\sigma\left(\frac{n^2}{2}\right)$

$i = 1$ $\quad$ $\emptyset$

$i = 2$ $\quad$ 1

$\vdots \quad \vdots$

$i = n$ $\quad$ $n-1$ oper. *

$$\sum_{i=1}^{n} (i-1) = \frac{n^2 - n}{2}$$

b) SUPSTITUCIJA UNATRAG ($Ux = y$)

$$x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left(y_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j \right) \quad i = n, \ldots, 1$$

Samo je jedan Mali Ivica!

i_ti korak: $n-i$ množenja
1 dijeljenje

$$\sum_{i=1}^{n}(n-i+1) = \sum_{i=1}^{n} n - \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1 = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} + n = \frac{n^2+n}{2}$$

$O(n^2)$

$\sigma(\frac{n^2}{2})$

3) Odredi slož. alg. s obzirom na br. * i / u ovisnosti o parametru n:

```
POČETAK(n)
  X=1; y=1; z=1; k=0;
  ZA i=1 DO 100
  |  X=X/0.99;
  ZA i=1 DO 2*n
  |  y=y*X/i;
  |  k=k+i; j=k;
  |  PONAVLJAJ
  |  |   z=z*y/k;
  |  |   j=j-1
  |  DOK(j != 0);
KRAJ
```

100 dijeljenja

1 množ

2n množ

2n dijeljenja $\Big]\ 2\cdot 2n$

+1

$X(n)$

$f(n)$

$$X(n) = \underbrace{\sum_{i=1}^{2n}}_{\text{ZA 1 DO 2n}} \sum_{j=1}^{k(i)} 2 = \sum_{i=1}^{2n} 2\cdot k(i) = \sum_{i=1}^{2n} \cancel{2}\,\frac{i(i+1)}{\cancel{2}} = \sum_{i=1}^{2n} i^2 + \sum_{i=1}^{2n} i =$$

$$\left[\ k(i) = \text{suma } i \text{ brojeva} = \frac{i(i+1)}{2}\ \right]$$

OPĆ: $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n}{6}(2n^2+3n+1)$

$$= \frac{2n}{6}\left(2(2n)^2+3(2n)+1\right) + \frac{(\cancel{2}n)(2n+1)}{\cancel{2}} =$$

$$= \frac{8}{3}n^3 + 4n^2 + \frac{4}{3}n -$$

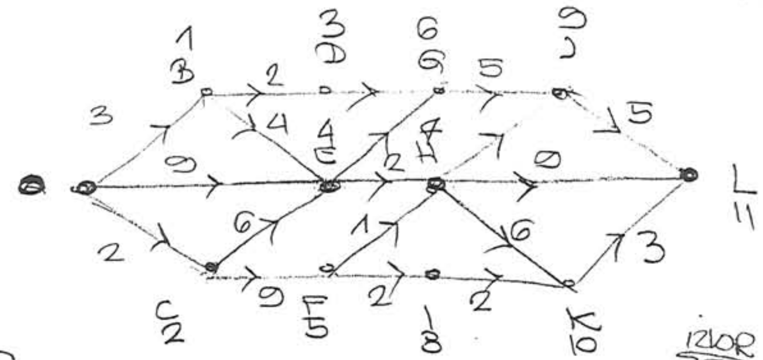
UKUPNO: $f(n) = \frac{8}{3}n^3 + 4n^2 + \frac{16}{3}n + 100 + 1$

$O(n^3)$

$\sigma(\frac{8}{3}n^3)$

2KZ. 70-80% novo gradivo
zadnje pogl. pred. (ponašanje diskretnih sustava!!)
nema velikih zdk. (def kaotičnih sustava, def fiksne točke diskretnih sustava)

ČET 11 (MATLAB)



Stupci ?

IZLOR

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Ponor

$\boxed{A}$

Prepiši redak A:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
i = ~~0~~	0	3	2	–	9	–	–	–	–	–	–	–

3 2 st#1

i = 1	–	0	–	2	3 4	–	–	–	–	–	–	–

2+3

x = poc
T[1][x] = 2

~~neobr. susjedi od X (i)~~
~~označi ih s T[1][i] = 1~~
ako ∃ dir. veza poc – i nova_v je ta veza T[2][i] = poc
ako ∃ posr. veza poc-x-i kraća: nova_v = T[0][x] + T[x][i] T[2][i] = x
u T[0][i] = nova_v
nalazim min od ozn. parova
x = min
T[1][x] = 2 ~~while~~ if (x == kraj) ! BREAK
goto ●

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	3	2	2	9	–	–	–	–	–	–	–
1	2	2	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0
2												

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	3	2	5	9							
1	2	2	2	2	2							
2	0	0	0	1	0							

~~i = x+1~~

ako u ~~i~~ tom stupcu ima samo 1 1 (j) → T[0][i] = TEZINA[~~x~~][i]
T[1][~~i~~] = 2
ako ih ima više → T[0][i] = TEZINA[X][i]
T[1][~~i~~] = 1

x++ if T[1][X]=2 continue s novim xom

i=x T[0][i] = ~~0~~
T[1][i] = 2

nova_v = 9 7 8 T[2][i] = 0 1 2

i++ ako ∃ direktna veza poc–i nova_v = TEZINA[POC][i]
T[2][i] = POC
for (~~x~~ = i)
ako ∃ posr. veza poc–$\boxed{X}$–i $\boxed{duža}$ nova_v = T[0][X] + TEZINA[X][i] 3+2=5
T[2][i] = X

T[0][1] = nova_v

9 –

Samo je jedan Mali Ivica!

$n * m \quad m * k$

$$i \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 5+2\cdot 7 & 1\cdot 6+2\cdot 8 \\ 3\cdot 5+4\cdot 7 & 3\cdot 6+4\cdot 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 24 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$$

1 2 3 4 5

i

j

$$\begin{matrix} 2 & 3 & -1 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & -3 & -6 & 2 \\ 7 & -1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 3 & 4 \\ -5 & 1 & -5 & 1 & 5 \end{matrix} = \begin{matrix} 26 \\ -46 \\ 22 \\ 51 \\ 11 \end{matrix}$$

$$x_{k+1} = x_k + T\psi(x_k, t_k, T) \rightarrow \text{razvoj ješ} \qquad T\psi$$

$$x(t_k+T) = x(t_{k+1}) = x(t_k) + \boxed{T\dot{x}(t_k) + \frac{T^2}{2}\cdot\ddot{x}(t_k) + \frac{T^3}{6}\dddot{x}(t_k) + \dots}$$

$$\dot{x}(t_k) = f(x_k, t_k)$$

$$\ddot{x}(t_k) = \frac{d}{dt}(\dot{x}) = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t} = \boxed{\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\dot{x}(t_k) + \frac{\partial f}{\partial t}}$$

$$\dddot{x}(t_k) = \frac{d}{dt}(\ddot{x}) = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\dot{x}(t_k) + \frac{\partial f}{\partial t}\right] =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\dot{x}(t_k)\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{d}{dt}(\dot{x}) + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot(\dot{x}(t_k))^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\cdot\dot{x}(t_k) + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

$$\dddot{x}(t_k) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial f}{\partial t}\right]\overset{\dot{x}}{\frac{\partial x}{\partial t}} + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\dot{x} + \frac{\partial f}{\partial t}\right] =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\dot{x})^2 + \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\dot{x} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial t}\cdot\dot{x} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial t}\cdot\dot{x} + \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{d}{dt}\cdot\dot{x} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}f^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\cdot f + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial t}\cdot f + \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

$$T\cdot\psi = T\cdot f + \frac{T^2}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\cdot f + \frac{\partial f}{\partial t}\right] + \frac{T^3}{6}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}f^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 f + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial t}\cdot f + \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right] + \dots$$

$$= T\cdot f + \qquad 1 + \lambda T + \frac{\lambda T^2}{2}$$

Stab. $\dot{x} = \lambda x$

$t = t_{k+1} \qquad x(t) = e^{\lambda T}x(0)$

$0 = t_k \qquad x_{k+1} = (1$

Samo je jedan Mali Ivica!