Pokušaj razotkrivanja EMP-a

by kamilica19

Zahvaljujem svima koji su slikali testove!

Neki zadatci nisu riješeni do kraja :(

Neki zadatci su možda netočno riješeni :(

A neki možda i nisu! :)

Uživajte u Poljima i ako nešto krivo uočite slobodno se javite!

Let's go ↓

Završni ispit EMP

24. 6. 2014.

1.) Izvor proizvodi u vakuumu ravni val duljine 2π metara. Kad se taj val prostire u idealnom dielektriku nepoznatih značajki, valna duljina se smanji 2 puta, a omjer maksimalnih vrijednosti jakosti električnog i magnetskog polja $\frac{E_{2m}}{H_{2m}}$ se poveća $\sqrt{3}$ puta.
Odredite relativnu dielektričnu konstantu dielektrika, relativnu permeabilnost dielektrika, kružnu frekvenciju vala i faznu konstantu u dielektriku!

HINT: ω ostaje isti $\omega_{vak} = \beta_v \cdot c_0$

$c_0 = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$

u vakuumu

$\lambda_v = 2\pi\ m$

$\boxed{\beta = \frac{\omega}{c}}$

$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{\beta}}$

formula

$\beta_v = 1$

$c = c_0$

$\boxed{Z_0 = 120\pi\sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}}$

formula

$\mu_r = 1$

$\varepsilon_r = 1$

$Z_{0_{vakuum}} = 120\pi$

$\boxed{\frac{E_{2m}}{H_{2m}} = |Z|}$

formula

u dielektriku

$\lambda_d = \frac{\lambda_v}{2} = \pi\ m$

$\beta_d = 2$

$c = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r \cdot \varepsilon_r}}$

$\mu_{r_d} = ?$

$\varepsilon_{r_d} = ?$

$\sqrt{3}\,|Z_{vak}| = |Z_{diel}|$

$\sqrt{3}\,|\cancel{Z_{vak}}| = |\cancel{Z_{vak}}| \cdot \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}$

$\boxed{\mu_{r_d} = 3\,\varepsilon_{r_d}}$

za dielektrik

$\mu_r = 3\varepsilon_r\ ; \quad c = \frac{c_0}{\sqrt{3}\cdot\varepsilon_r}$

$\beta = \frac{\omega}{c}$

$\omega = \omega_{vak} = 1 \cdot c_0$

$c = \frac{\omega}{\beta} = \frac{c_0}{2}$

$\frac{\cancel{c_0}}{2} = \frac{\cancel{c_0}}{\sqrt{3}\ \varepsilon_r}$

$\varepsilon_r = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ //

$\mu_r = 2\sqrt{3}$ //

$\omega = c_0$ //

fazna konstanta:

$\omega t \pm \beta x = konst$

$c_0 \cdot t \mp 2x = konst$ //

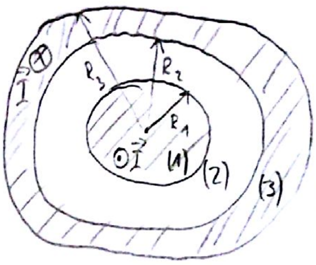
Primjer 9.1.4.

2.) Beskonačno dugi suosni vodič sastoji se od dva koncentrična metalna cilindra kojima teče struja $I = 2A$ prema slici. Odredite jakost magnetskog polja u svakom prostoru uz pretpostavku jednolike raspodjele gustoće struje po presjeku vodiča. Skicirajte raspodjelu magnetskog polja u radijalnom smjeru. Zadano je

$R_1 = 1m$

$R_2 = 2m$

$R_3 = 2.5m$



→ To je suosni vodič

Cilindrični koordinatni sostav

Postavljamo sustav da struja teče u $\vec{a}_z$ smjeru

<u>Amperov zakon</u>

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{a}_z \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r H_\alpha) = \vec{J}$$

(1) $0 \leq r \leq R_1$

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r H_\alpha) = \vec{a}_z \frac{I}{R_1^2 \pi}$$

$$r H_1 = \frac{I}{R_1^2 \pi}\frac{r^2}{2} + C_1$$

$$H_1 = \frac{I}{2\pi R_1^2} \cdot r + \frac{C_1}{r}$$

za $r = 0 \Rightarrow H \neq \infty$

$C_1 = 0$

$$\boxed{\vec{H}_1 = a_\alpha \frac{I}{2\pi R_1^2} \cdot r}$$

(2) $R_1 \leq r \leq R_2$

$$\text{rot } \vec{H}_2 = \vec{a}_z \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r H_\alpha) = 0$$

$$H_2 = \frac{C_2}{r}$$

$$\oint_c \vec{H}_2 \, dl = I$$

$$H_2 \cdot 2\pi R_1 = I$$

$$C_2 = \frac{I}{2\pi}$$

$$\boxed{\vec{H}_2 = a_\alpha \frac{I}{2\pi r}}$$

(3) $R_2 \leq r \leq R_3$ $\quad \vec{I} = I(-\vec{a}_z)$

$$\text{rot } \vec{H}_3 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r H_\alpha) = -\vec{a}_z \frac{I}{(R_3^2 - R_2^2)\pi}$$

$$H_3 = \frac{+I}{(R_2^2 - R_3^2)\pi} \cdot \frac{r}{2} + \frac{C_3}{r}$$

$r \to R_2 \quad H_3(R_2) = H_2(R_2)$

$$C_3 = \frac{I}{2\pi}\left(\frac{R_3^2}{R_3^2 - R_2^2}\right)$$

$$\vec{H}_3 = \frac{I}{2\pi(R_2^2 - R_3^2)} \cdot r + \frac{1}{r} \cdot \frac{I}{2\pi} \cdot \frac{R_3^2}{R_3^2 - R_2^2}$$

(4) $r \geq R_3$

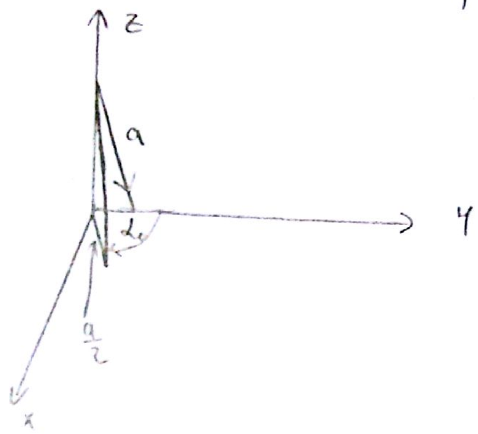
$$\text{rot } \vec{H}_4 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r H_\alpha) = 0$$

$$H_4 = \frac{C_4}{r}$$

$\oint H_4 \, dl = 0$ jer struje teku u različitim smjerovima

Primjer 2.1.6.

3.) Vodljiva kontura oblika jednakostraničnog trokuta stranice a savijena je oko svoje visine pod kutem α prema slici. Kontura se nalazi u magnetskom polju $H = H_I \sin(\omega \cdot t)\,\vec{a_x}$ odredite inducirani napon u konturi



Pravokutni koordinatni sustav

Faradayev zakon

$$U_{ind} = \oint_c E\,dl = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B}\,\vec{n}\,dS$$

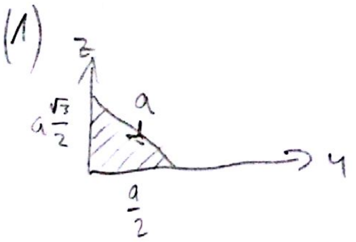
Pretpostavimo da je materijal ima konstan μ_r

$$B = \mu H_I \sin(\omega \cdot t)\,\vec{a_x}$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \omega \mu H_I \cos(\omega t)\,\vec{a_x} \rightarrow$$ ali to nam netreba jer prvo moramo naći tok pa preko toka računat

Problem rastavljamo na dvije konture

(1)



Pravilo desne ruke

$$\vec{n} = -\vec{a_x}$$

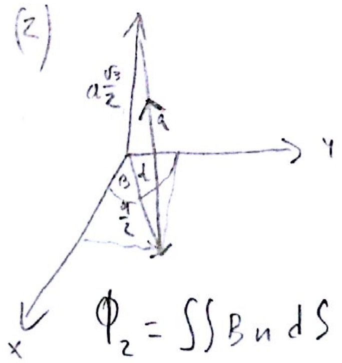
$$dS = dy\,dz$$

$$z = a\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}y$$

$$\Phi_1 = \iint B\,n\,dS$$

$$\Phi_1 = -\mu H_I \sin(\omega t) \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$$

(2)



$$\Phi_2 = \iint B\,n\,dS$$

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$$

normalu pronalazimo pomoću 3 točke $(0,0,0)$

$\left(\frac{a}{2}\sin\alpha, \frac{a}{2}\cos\alpha, 0\right)$

$\left(0, 0, a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

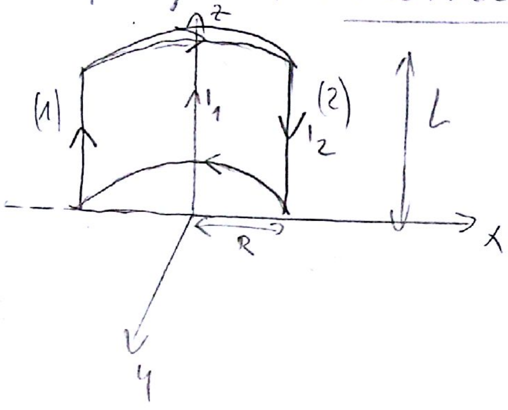
$$\vec{n}_{12} = \cos\alpha\,\vec{a_x} - \sin\alpha\,\vec{a_y}$$

$$\Phi_2 = \mu H_I \sin(\omega t) \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$$

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}\mu \cdot H_I \cdot \sin(\omega t) \cdot (\cos\alpha - 1)$$

$$\boxed{U_{ind} = \frac{-d\Phi}{dt} = -\frac{a^2\sqrt{3}}{8}\mu \cdot H_I \cdot [\cos\alpha - 1] \cdot \omega\cos(\omega t)}$$

4.) Beskonačno dugi ravni vodič kojim teče struja $I_1 = 1A$ postavljen je u os petlje duljine $L = 2m$ i radijusa $R = 1m$ kojim teče struja $I_2 = 2A$ prema slici. Odredite iznos i smjer sile kojom beskonačno dugi vodič djeluje na petlju i međuinduktivitet vodiča i petlje.



Primjer 1.2.1 Sad je odredio $\vec{H}$

1. pitanje, što treba izračunat? silu!

2. Koju formulu koristimo, pa mogli bi ovu $\boxed{\vec{F} = I_2 \int_C dl \times B}$

3. pitanje, šta je što u fomuli!

I_2 je zadano

dl je ova čudna petlja, a B je indukcija beskonačne strujnice

Na polokružnim dijelovima nemamo silu jer su oni polokrugovi iako ih ja baš i nisam takve nacrtao ali kod njih su dl i $\vec{H}$ u istim smjerovima i vektorskim produktom $\vec{F} = 0$ znači imamo samo dio (1) i (2) [dl po pravilu desne ruke]

Sad nam je u primjeru 1.2.1 odredio $\vec{H}$ beskonačnog vodiča koji je $\vec{H} = \frac{I_1}{2\pi r}$ (a_α) → ovdje nije a_α nego se po pravilu desne ruke za određenu strujnicu s obzirom u kojoj se ravnini nalazi određuje. Sad gledamo primjer 8.2.4

(1) $dl = +\vec{a_z}\, dz$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}(+\vec{a_y})$$

$$\vec{F_1} = I_2 \int dl \times \vec{B} = \frac{-I_1 \cdot I_2 \cdot \mu}{2\pi \cdot R} \int_{z=0}^{L} dz\, \vec{a_x} = -\frac{I_1 \cdot I_2 \cdot \mu \cdot L}{2\pi R} \vec{a_x}$$

Scanned by CamScanner

(2) $dl_2 = -\vec{a}_z \, dz$

$$\vec{B} = \frac{\mu I_1}{2\pi r} (-\vec{a}_y)$$

$$F_2 = I_2 \int dl_2 \times B = -\frac{I_1 \cdot I_2 \cdot \mu}{2\pi R} \int_0^L dz \, \vec{a}_x = -\frac{I_1 \cdot I_2 \cdot \mu \cdot L}{2\pi R} \vec{a}_x$$

Vidimo da se sile udvostručavaju $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

$\vec{F} = \frac{-I_1 \cdot I_2 \cdot \mu \cdot L}{\pi R} \vec{a}_x$ Još $M = ?$

$\vec{F} = \vec{a}_s \, i_1 \cdot i_2 \frac{\partial}{\partial s}(M)$ → Kod nas ovaj $\frac{\partial}{\partial s}$ i smjer $\vec{a}_s$ prelaze u $\frac{\partial}{\partial R}$ i $\vec{a}_R$ tj $\vec{a}_x$

jer je $\vec{a}_R$ u smjeru $\vec{a}_x$ kao i sila

$\frac{\partial}{\partial R} M = \frac{+\mu \cdot L}{\pi R}$ → $M = \frac{\mu L}{\pi} \int \frac{1}{R} dR = \frac{\mu L}{\pi} \ln(R) + C$?

$$\boxed{M = \frac{\mu L}{\pi} \cdot \ln(R)}$$

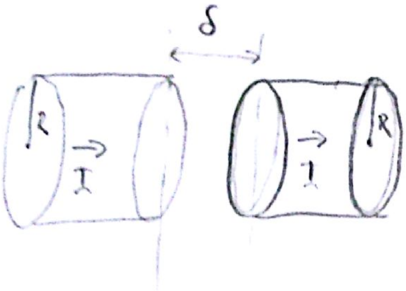
Ali ne treba tako nego treba preko ϕ → $M = \frac{\phi}{i}$

$\phi = \iint B \, n \, dS = 0$ jer je polje tangencijalno na plohu

$M = 0.$

b.) Vodič radijusa R nalazi se u vakuumu i presječen je okomito na os tako da su krajevi razmaknuti za δ ($R \gg \delta$), čime je u rasporu formiran pločasti kondenzator. Vodičem teče struja I, a u trenutku $t=0$ gustoća naboja na krajevima vodiča $\sigma = 0$. Odredite jakost električnog polja i magnetsku indukciju u rasporu kao funkciju udaljenosti od osi vodiča i vremena te gustoću energije i Poyntingov vektor u rasporu!

$$N = \vec{E} \times \vec{H}$$



$$dQ = \iint_S \sigma \, dS$$

$$I = \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \sigma \, dS = \frac{\sigma \cdot r^2 \pi}{t}$$

$$D = \sigma = \frac{I \cdot t}{r^2 \pi} \qquad r \to R \quad D = \frac{I \cdot t}{R^2 \pi}$$

$$\Phi_e = \iint_S D_n \, dS = \iint_S \frac{I \cdot t}{R^2 \pi} \, dS = \frac{I \cdot t \; r^2 \cancel{\pi}}{R^2 \cancel{\pi}} \qquad r \in \langle 0, R \rangle$$

Amperov zakon protjecanja $\to$ Maxwellova jednadžba

$$\oint_C H \, dl = \frac{\Phi_e}{dt}$$

$$2 r \pi H = \frac{r^2 I}{R^2} \quad \Rightarrow \quad H = \frac{I \cdot r}{2 R^2 \pi}$$

$$W = \frac{1}{2} \mu H^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{\varepsilon} D^2$$

$$N = E \times H = \frac{I^2 \cdot r \cdot t}{2 R^4 \pi^2 \varepsilon_0} \left(-\vec{a}_r \right)$$

Scanned by CamScanner

Završni ispit EMP

6. 2013.

1.) U regiji $0 \le z \le 1$ nalazi se materijal relativne permeabilnosti $\mu_r = 3$ Izvan regije $0 \le z \le 1$ je zrak. Ako je indukcija u regiji određena jednadžbom $B = 7y\vec{a_x} - 4x\vec{a_y}\,[\mu T]$ Odredite: iznos gustoće struje u materijalima, iznos gustoće struje magnetizacije u materijalu, x komponentu vektora magnetizacije u materijalu, z komponentu amperske plošne struje na $x=0$!

$J \to$ gustoća struje
$M \to$ magnetizacija materijala
$J_M \to$ gustoća magnetizacijsk struje
$K_A \to$ Amperska plošna struja

a.) $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \vec{J}$

$$\vec{J} = 10^{-6} \cdot \frac{1}{\mu} \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 7y & -4x & 0 \end{vmatrix} = \frac{10^{-6}}{\mu} \left[\vec{a_z} \left(-4 - 7 \right) \right] = \frac{-11}{3\mu_0} \cdot 10^{-6}\, \vec{a_z} =$$

$$= -2.917\, \vec{a_z}\ A/m^2$$

c.) Magnetska susceptibilnost je bezdimenzionalna konstanta koja je značajka materijala $\vec{M} = \chi_m \cdot \vec{H}$; $\mu_r = 1 + \chi_m$

$\vec{M} = (\mu_r - 1) \cdot \vec{H}$ $\qquad \vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$

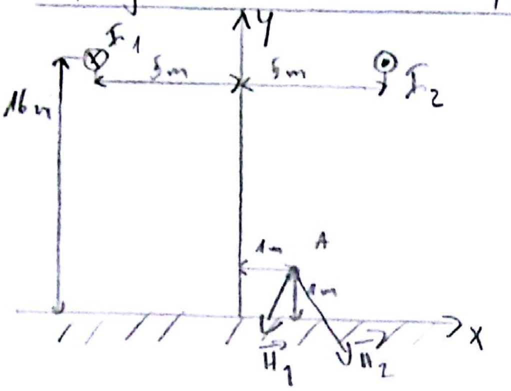
$$\boxed{\vec{M} = \frac{(\mu_r - 1)}{\mu_0 \cdot \mu_r} \cdot \vec{B}} \qquad \vec{M} = 3.71y\,\vec{a_x} - 2.12x\,\vec{a_y} \left[\frac{A}{m}\right]$$

b.)
$$\vec{J}_M = \vec{\nabla} \times \vec{M} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3.71y & -2.12x & 0 \end{vmatrix} = \vec{a_z} \left(-2.12 - 3.71 \right) = -5.83\, \vec{a_z} \left[\frac{A}{m^2}\right]$$

d.) $\vec{K_A} = \vec{M} \times \vec{n_s}$ $\qquad n = \vec{a_z} \Rightarrow$ zbog prostora

$$\vec{K_A} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ M_x & M_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a_x \cdot M_y - a_y M_x \underset{\substack{x=0 \\ \text{ravnina}}}{=} -2.12x\,\vec{a_x} - 3.71y\,\vec{a_y}$$

2.) Dalekovod za istosmjerni prijenos električne energije ima raspored vodiča prema slici. Ukoliko se žice mogu aproksimirati beskonačno dugim ravnim vodičima, a u vodičima teče struja $I = 100\ A$, Odredite iznos jakosti magnetskog polja u točki A prema slici u $\left[\frac{A}{m}\right]$



Prema primjeru 1.2.1 jakost beskonačno dugačke strujnice je $\vec{H} = \vec{a_\phi} \frac{I}{2\pi r}$ gdje je r udaljenost (najkraća) od mjesta promatranja do vodiča.

$|I_1| = |I_2|$

$I_1 = I\,\vec{a_z}$ → u ravninu
$I_2 = I \cdot (-\vec{a_z})$ → iz ravnine

$\Big\}$ po volji

$$a_\phi = \frac{1}{r}\left(\pm y\,\vec{a_x} \pm x\,\vec{a_y}\right) = \pm\frac{y}{r}\vec{a_x} \pm \frac{x}{r}\vec{a_y} \; ; \; r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\boxed{H = \frac{I}{2\pi r^2}\left(\pm\Delta y\,\vec{a_x} \pm \Delta x\,\vec{a_y}\right)}$$

(1) za prvi vodič

$\Delta x = 6\ m \quad \Delta y = 15\ m$

$r = \sqrt{6^2+15^2} = 3\sqrt{29}\ m$

Predznaci su određeni po pravilu desne ruke. Pogledaj na slici na koje smjerove bi rastavio vektor $\vec{H}_1$ da ima x i y komp.

$$H_1 = \frac{I}{522\pi}\left(-15\,\vec{a_x} - 6\,\vec{a_y}\right)$$

$$\boxed{H_1 = -0.914\,\vec{a_x} - 0.3658\,\vec{a_y}}$$

(2) za drugi vodič

$\Delta x = 4\ m \quad \Delta y = 15\ m$

$r = \sqrt{4^2+15^2} = \sqrt{241}$ Rastavi vektor $\vec{H}_2$ na slici

$$H_2 = \frac{I}{482\pi}\left(+15\,\vec{a_x} - 4\,\vec{a_y}\right)$$

$$\boxed{H_2 = 0.9905\,\vec{a_x} - 0.26415\,\vec{a_y}}$$

(3) $\vec{H}_{uk} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$

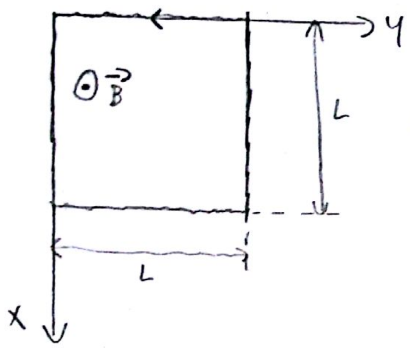
$\vec{H}_{uk} = 0.0765\,\vec{a_x} - 0.62395\,\vec{a_y}$

$|H| = 0.63\ A/m$

3.) Vodič ukupnog otpora 500Ω savijen je u kvadrat stranice $L=2.5$ m i postavljen prema slici u polje indukcije

$$\vec{B}=0.3\cos(120\pi t-\pi y)\,\vec{a_z}\ [\mu T]$$

Ukoliko je induktivitet petlje zanemariv, odredite iznos struje u petlji u [nA] u trenutku $t=30$ [ms]. Odredite iznos magnetskog toka kroz petlju u [nWb] u trenutku $t=20$ ms!



Smjer $\vec{a_z}$ iz ravnine

(1)

$$\frac{dB}{dt}=-0.3\cdot 120\pi\cdot\sin(120\pi t-\pi y)\,\vec{a_z}$$

$$\vec{n}=\vec{a_z}\qquad dS=dx\,dy$$

$$e_{ind}=\iint_S\frac{dB}{dt}\,n\,dS=\int_{x=0}^{L}dx\int_{y=0}^{L}-0.3\cdot 120\pi\sin(120\pi t-\pi y)\,dy$$

$$=L\cdot 36\pi\int_{y=0}^{L}-\sin(120\pi t-\pi y)\,dy=\left\{\begin{matrix}120\pi t-\pi y=z\\ -\pi dy=dz\end{matrix}\right\}$$

$$=L\cdot 36\int_{120\pi t}^{120\pi t-\pi L}\sin(z)\,dz=-36L\left[\cos(z)\right]\Big|_{z=120\pi t}^{120\pi t-\pi L}$$

$$e_{ind}=36L\left[\cos(120\pi t)-\cos(120\pi t-\pi L)\right]\Big|_{t=30\cdot 10^{-3}}=1{,}134\cdot 10^{-4}\,V$$

$$\boxed{I_{ind}=\frac{e_{ind}}{R}=226.8\ nA}$$

(2)

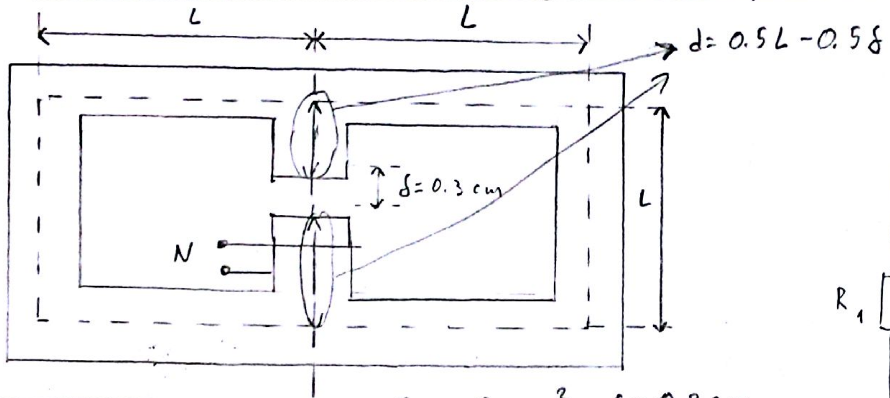
$$\Phi=\iint_S B\,n\,dS=\int_{x=0}^{L}dx\int_{y=0}^{L}0.3\cos(120\pi t-\pi y)\cdot 10^{-6}\,dy=\left\{\begin{matrix}120\pi t-\pi y=z\\ -\pi dy=dz\end{matrix}\right\}$$

$$=L\cdot 0.3\cdot 10^{-6}\int_{120\pi t}^{120\pi t-\pi L}\cos(z)\,dz=0.3\cdot 10^{-6}L\left[\sin(120\pi t-\pi L)-\sin(120\pi t)\right]\Big|_{t=20\cdot 10^{-3}}$$

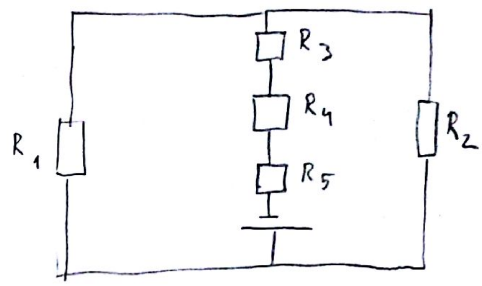
$$\Phi=300.82\ nW$$

Scanned by CamScanner

4.) Magnetski krug je zadan slikom, pri čemu je duljina $L = 10\,cm$. Relativna permeabilnost materijala iznosi $\mu_r = 200$. Površina poprečnog presjeka magnetskog materijala je svugdje jednaka $20\,cm^2$. Odredite induktivitet zavojnice u [mH] ako je $N = 100$. Ukoliko je u zračnom rasporu izmjereno $B = 0.5\,T$, odredite struju zavojnice u [A].



Pojednostavljena skica



$R_1 = R_2$

$R_3 = R_5$

$R_4 = R_\delta$

1)

$$\boxed{L = \frac{N^2}{R_{uk}}\ [H]}$$ induktivitet

$S = 20\,cm^2$ $\quad \delta = 0.3\,cm$

$N = 100$ $\quad L = 10\,cm$

$\mu_r = 200$ $\quad B = 0.5\,T$

$$R_{uk} = (R_1 \| R_2) + R_3 + R_4 + R_5 = \frac{R_1}{2} + 2R_3 + R_\delta$$

$$R_1 = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \cdot \frac{3L}{S} = \frac{1}{200\mu_0} \cdot \frac{3 \cdot 0.1}{20 \cdot 10^{-4}}$$

$$2R_3 = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \cdot \frac{L - \delta}{S} = \frac{1}{200\mu_0} \cdot \frac{0.097}{20 \cdot 10^{-4}}$$

$$R_\delta = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{\delta}{S} = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{3 \cdot 10^{-3}}{20 \cdot 10^{-4}}$$

$R_{uk} = 2{,}4808 \cdot 10^6\ \Omega$

$L = \frac{N^2}{R_{uk}}$

$L = 4{,}03\ mH$

2) $\quad B_\delta = 0.5\,T \qquad H_\delta = \frac{B_\delta}{\mu_0}$

(1) $\quad \Phi_\delta = \Phi_{Fe} \Rightarrow B_\delta \cdot \cancel{S} = B_{Fe} \cdot \cancel{S}$

$$B_\delta = B_{Fe}$$

(2) $\quad N \cdot I = H_\delta \cdot l_\delta + H_{Fe} \cdot l_{Fe}$

$d = 0.5L - 0.5\delta$

$$I = \frac{\frac{B_\delta}{\mu_0} \cdot \delta + \frac{B_\delta}{\mu_0 \cdot \mu_r} \cdot (1)}{N} = \frac{B_\delta}{\mu_0 \cdot N}\left[\delta + \frac{0.5L - 0.5\delta}{\mu_r}\right] = 12.9\ T$$

3.) Jakost električnog polja ravnog elektromagnetskog vala koji se širi sredstvom relativne magnetske permeabilnosti $\mu_r = 2$ zadana je jednadžbom $\vec{E} = 5\sin(1{,}5 \cdot 10^8 t - 5x)\vec{a_y}\ \frac{V}{m}$

Odredite: smjer u kojemu se giba val, valnu duljinu λ u metrima, relativnu dielektričnost sredstva, vektor $\vec{H}$ u trenutku $t = 35\ ms$ i na udaljenosti $x = 50\ m$, te srednju vrijednost Poyntingova vektora!

---

(1) Iz temeljnih uvjeta koje zadovoljava svaki elektromagnetski ravni val znano da ako se električno polje giba u $\vec{a_y}$ smjeru magnetsko se može gibati u $\vec{a_z}$ ili $\vec{a_x}$ a jednako tako i ravni val. U ovom slučaju val se giba u $\vec{a_x}$ jer uz koeficijent β stoji varijabla x, znači $\vec{H}$ je u $\vec{a_z}$ smjeru!

(2) $\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{5}$ Opći oblik jednadžbe: $\vec{E} = E_z e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x)$

(3) $\beta = \frac{\omega}{c}$ $\quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_r \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r}}$ $\quad \beta^2 (\mu_r \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r) = \omega^2$

$$\varepsilon_r = \frac{\omega^2}{\beta^2 \mu_r \mu_0 \varepsilon_0} = 49.93$$

(4) $Z_0 = 120\pi \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}$ $\quad H_{zm} = \frac{E_{zm}}{|Z| = Z_0}$ $\quad \vec{H} = H_{zm} \sin(1.5 \cdot 10^8 t - 5x)\vec{a_z}$

$$\vec{H} = -56.5\,\vec{a_z}$$

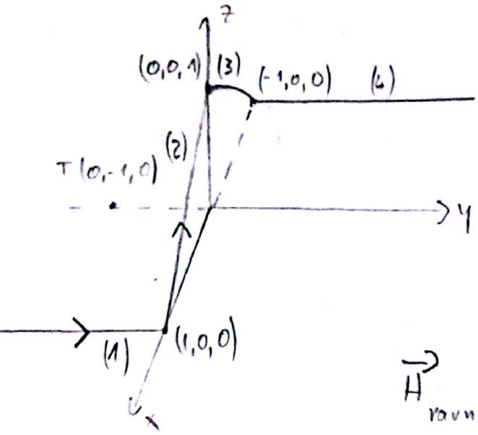
(5) $\vec{N} = \vec{E} \times \vec{H} = E_y \cdot H_z \vec{a_x} = 5 \cdot \frac{5}{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}} \sin^2(\dots)\ \vec{a_x}$ pola je $\frac{1}{2}$

$$\vec{N} = 0.1659\,\vec{a_x} \left[\frac{W}{m^2}\right]$$

Završni ispit EMP

6. 2012

1.) Odredite apsolutnu vrijednost magnetske indukcije u [μT] u točki $T(x=0, y=-1, z=0)$ prema slici. Zadana je struja $I = 12{,}7\ A$. Strujnica se sastoji od tri ravna dijela i četvrtine kruga

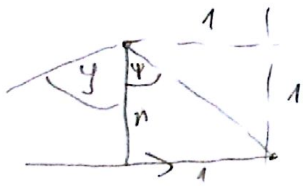


Prvo i logično trebamo podijelit strujnicu na četiri dijela. Ravne dijelove računamo po formuli iz primjera 1.2.1, a prstenaste iz primjera 1.2.5

$$\vec{H}_{ravni} = \frac{I}{4\pi r}(\sin\varphi + \sin\psi)\,\vec{a}_\alpha \quad ; \quad \vec{H}_{prsten} = \frac{I}{2}\,\frac{r_0^2}{(r_0^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,\vec{a}_z$$

---

(1)



$\varphi = \frac{\pi}{2}$; $r = 1$

↓

jer je $\operatorname{arctg}\left(\frac{\infty}{1}\right) = \frac{\pi}{2}$

$\psi = \frac{\pi}{4} \rightarrow \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$

smjer određujemo pravilom desne ruke palac u smjeru strujnice, a prsti pokazuju smjer polja u točki $\vec{n} = \vec{a}_z$

$$\vec{H}_1 = \frac{I}{8\pi}(2+\sqrt{2})\,\vec{a}_z$$

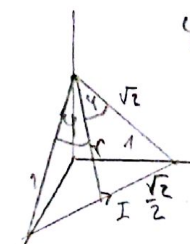
(2) Ovdje je malo kompliciranija situacija s kutovima i normalom. Normalu tražimo kao normalu kroz ravninu s 3 točke

$(1,0,0)$
$(0,0,1)$
$(0,-1,0)$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$(x-1) - y(1) + z(+1) = 0 \qquad x - y + z = 1 \qquad \vec{n}_{12} = \frac{\vec{a}_x - \vec{a}_y + \vec{a}_z}{\sqrt{3}}$

Sad kutevi!



$\varphi = \psi \qquad (\sqrt{2})^2 = r^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

$2 - \frac{2}{4} = r^2 \qquad \boxed{r = \frac{\sqrt{6}}{2}}$ → visina jednakostr. trokuta

$r = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

$a = \sqrt{2}$

$\sin\varphi = \sin\psi = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{1}} = \frac{1}{2}$

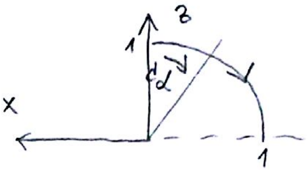
Malo geometrije!

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi\frac{\sqrt{6}}{2}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\vec{a}_x - \vec{a}_y + \vec{a}_z\right)$$

$$\vec{H}_2 = \frac{I}{6\sqrt{2}\,\pi}\left(\vec{a}_x - \vec{a}_y + \vec{a}_z\right)$$

(3) Znači u trećem segmentu imamo dio prstena. Prije nego što počnemo treba proučiti primjer 1.2.5 i 1.2.6. I možemo zaključiti da je super što se točka nalazi na osi prstena, prema formuli možemo lagano odrediti "aksijalnu" komponentu. Uzmemo da je udaljenost po osi od točke promatranja i centra prstena $y=1$ i r_0 prstena je isto $r_0=1$

$$H_y = \frac{I}{2}\frac{r_0^2}{(r_0^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{I}{2}\frac{1}{(1+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{I}{2^{\frac{5}{2}}}$$ → to bi bilo da imamo cijelu kružnicu ali pošto imamo samo četvrtinu, trebamo izraz podijelit sa 4



$$H_y = \frac{I}{2^{\frac{5}{2}}\cdot 2^2} = \boxed{\frac{I}{2^{\frac{9}{2}}} = H_y}$$

→ Treći dio u primjeru 1.2.5 nepostoji radijalna komponenta jer je prsten zatvoren, a kod nas postoji jer je samo četvrt i sad trebamo integrirat malo!

ovo u zagradi je $\vec{a_r}$ raspisan u pravokutnom koordinatnom

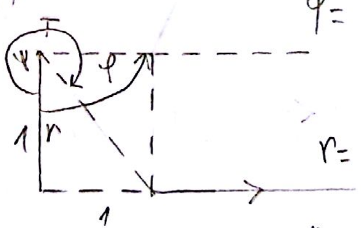
$$\vec{a_r} H_r = \frac{I r_0 y}{4\pi(r_0^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\int_{\alpha=0}^{\frac{\pi}{2}}(\cos\alpha\,\vec{a_z} - \sin\alpha\,\vec{a_x})\,d\alpha$$

$$\vec{a_r} H_r = \frac{I}{4\pi\, 2^{\frac{3}{2}}}\left[\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0)\right]\vec{a_z} + \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos(0)\right]\vec{a_x}\right]$$

$$H_{x,z} = \frac{I}{4\pi\, 2^{\frac{3}{2}}}\left[\vec{a_z} - \vec{a_x}\right]$$

$$\boxed{H_3 = H_y + H_{x,z} = I\left[\frac{-1}{4\pi\, 2^{\frac{3}{2}}}\vec{a_x} + \frac{1}{2^{\frac{9}{2}}} + \frac{1}{4\pi\, 2^{\frac{3}{2}}}\right]}$$

(4) Isto ko i dio (1)



$\varphi = \frac{\pi}{2}$ → jer jedan kraj teži u beskonačnost

$r = 1$

$\varphi = 360 - \text{arctg}(1)$

$\varphi = \frac{7\pi}{4}$

$\boxed{\vec{n} = -\vec{a_z}}$ desna ruka

$$\vec{H_4} = \frac{I}{4\pi}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right) - \vec{a_z}$$

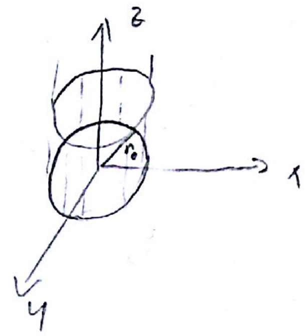
$$\boxed{\vec{H_4} = \frac{I}{8\pi}\left[\sqrt{2} - 2\right]\vec{a_z}}$$

$$\boxed{H_{uk} = H_1 + H_2 + H_3 + H_4}$$

Scanned by CamScanner

2.) U slobodnom prostoru je zadana vremenski promjenjiva magnetska indukcija jednadžbom $\vec{B} = k \cdot B_0 \cdot t \cdot \vec{a}_z$, $B_0 = 2T$, a $k = konst. = 1.5\ s^{-1}$. Uz pretpostavku simetrije magnetskog polja oko osi z odredite vektorski magnetski potencijal u [Tm] u točki $(r = 1;\ \alpha = 30°;\ z = 2)$ u trenutku $t = 2s$. Vektorski magnetski potencijal ne sadrži komponentu konstantnu u vremenu.

Za riješavanje ovog zadatka trebamo si zamisliti neku strujnicu koja omeđuje plohu dS i njena os leži na z koordinati



$$\vec{B} = rot\,\vec{A}$$

Stokesov teorem

$$\oint_c \vec{A}\,d\vec{l} = \iint \vec{B}\,\vec{n}\,dS$$

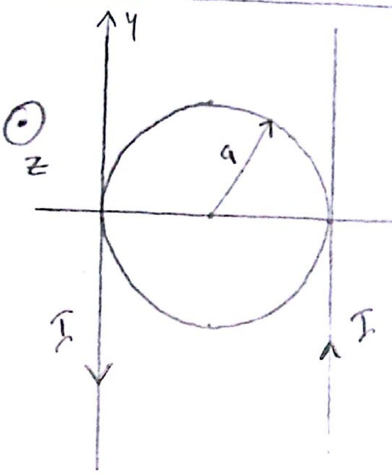
$$A \cdot 2\pi r_0 = B r^2 \pi$$

$r = r_0$ → zamišljena strujnica prolazi kroz točku

$$A = \frac{B \cdot r}{2} = \frac{k \cdot B_0 \cdot t \cdot r}{2} = \frac{1.5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1}{2} = 3\ Tm$$

Slično kao kod Gaussovog teorema gdje zamišljamo Gaussovu plohu, ovdje zamišljamo strujnicu.

3.) Dva su vodiča kojima teče struja $I = 5A$, razmaknuta na udaljenost $2a$ prema slici ($a = 1,5m$). Vodljivi prsten kružnog oblika leži u ravnini sustava dvaju vodiča, polumjera je a i izoliran je od vodiča. Odredite međuinduktivitet u $[\mu H]$ između prstena i dvaju vodiča.



Međuinduktivitet je definiran kao: $M = \frac{\Psi_{12}}{I_2}$

Zamislimo da imamo dvije petlje: c_1 i c_2

Petljom c_1 teče struja I_1, a petljom c_2 struja I_2

Tada je Magnetski tok (Ψ_{12}) proizveden strujom petljom c_2, a obuhvaćen petljom c_1 jednak

$\Psi_{12} = \oint_{c_1} A_2 \, dl_1$ To je opća formula, a mi ćemo se orjentirati prema primjeru 7.3.9

Razlika iz primjera 7.3.9 je što mi imamo dvije strujnice u kojima struje teku različitim smjerom pa će se one po pravilu desne ruke udvostručiti, da idu istim smjerom $M = 0$.

$M = \frac{\Psi_{uk}}{I} = \frac{2\Phi_1}{I}$ → trebamo naći tok koji stvara prva strujnica kroz petlju prsten.

$\Phi = \iint_S B\, n\, dS$ → to vrapci znaju kao i iz primjera 1.2.1

$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{a_\phi}$

Pravilo desne ruke $\vec{a_\phi} = \vec{a_z}$

$\Phi = \iint_S \vec{B}\,\vec{n}\,dS$

$n = \vec{a_z}$

$\vec{B}\cdot\vec{n} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

problem jer je kontura zadana funkcijom

$(x-a)^2 + y^2 = a^2$

$y = \pm\sqrt{a^2-(x-a)^2}$

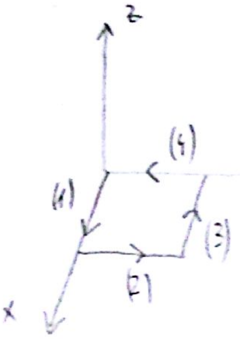
Sad uzimamo $r = x$ i derivirat ćemo po x a $dS = 2y\,dx$

Ova dvojka jer imamo pozitivan i negativan luk prstena po osi y i konačno kad se uvrsti

$$\Phi = \int_{x=0}^{2a} \frac{\mu I}{\cancel{2}\pi \cdot x} \cdot \cancel{2} \cdot \sqrt{a^2-(x-a)^2}\,dx = \mu_0 \cdot I \cdot a$$

$$M = \frac{2\Phi}{I} = 2\mu_0 \cdot a = 3\mu_0 \,//$$

1.) Vektor magnetskog polja u prostoru je zadan jednadžbom $\vec{H} = \frac{1}{2y+4}\vec{a_x}$. Odredite iznos struje u [mA] kroz kvadratnu petlju stranice 1m koja leži u xy ravnini prema slici.



1) način

$$\oint H\,dl = \iint J_n\,dS = I$$

$$\int_{\substack{x=0\\ y=0}}^{1} H\,dx\,\vec{a_x} + \int_{\substack{y=0\\ x=1}}^{1} H\,dy\,\vec{a_y}^{\,0} + \int_{\substack{x=1\\ y=1}}^{0} H\,dx\,\vec{a_x} + \cancel{\int_{\substack{y=1\\ x=0}}^{0} H\,dy\,\vec{a_y}}^{\,0} = I$$

$$\frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6}\cdot(0-1) + 0 = \boxed{I = \frac{1}{12}}$$

2) način

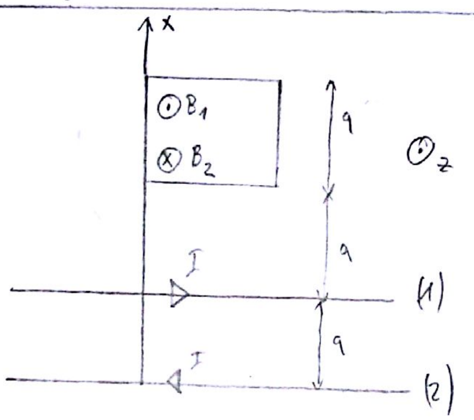
$$\nabla \times H = J$$

$$I = \iint_S \vec{J}\vec{n}\,dS \qquad dS = dx\,dy$$

duži način neda mi se računat

Scanned by CamScanner

5.) Kroz dvije beskonačno duge paralelne žice zanemarivog poprečnog presjeka, razmaknute na udaljenost $a = 1m$, teče struja $I = 10\cos(314t)$ A, prema slici. U ravnini žica na udaljenosti a od gornjeg vodiča nalazi se kvadratna petlja stranice a, otpora jedne stranice iznosa $R = 1\Omega$. Odredite iznos vršne vrijednosti inducirane struje u $[\mu A]$ koja teče kvadratnom petljom!



Struja je promjenjiva u vremenu pa će se zato inducirati napon. Faradayev zakon.

$$U_{ind} = -\frac{d}{dt}\iint_S B\, n\, dS$$

Primjer 1.2.1. $$B = \mu \frac{I}{2\pi r}\vec{a_d}$$

(1)

$$B_1 = \mu \frac{I}{2\pi x}\vec{a_z} \qquad B_2 = \mu \frac{I}{2\pi x}(-\vec{a_z}) \qquad n = \vec{a_z}$$

$$\Phi_1 = \iint_S \vec{B}\vec{n}\, dS = \frac{\mu \cdot I}{2\pi}\int_{x=a}^{2a}\frac{a\,dx}{x} = \frac{\mu \cdot a \cdot I}{2\pi}\ln(2)$$

$$\Phi_2 = \iint_S \vec{B}\vec{n}\, dS = \frac{\mu I}{2\pi}\int_{x=2a}^{3a} -\frac{a\,dx}{x} = -\frac{\mu a \cdot I}{2\pi}\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\Phi_{uk}(t) = \frac{\mu \cdot a}{2\pi}\cdot\left[\ln(2) - \ln\left(\frac{3}{2}\right)\right]\cdot 10\cos(314t) = \frac{5\mu}{\pi}\cdot\ln\left(\frac{4}{3}\right)\cdot\cos(314t)$$

$$e_{ind} = -\frac{d\phi}{dt} = 500\cdot\mu\cdot\ln\left(\frac{4}{3}\right)\cdot\sin(100\pi t)$$

$$i = \frac{e_{ind}}{4R} = 125\,\mu\,\ln\left(\frac{4}{3}\right)\cdot\sin(100\pi t)$$

$$|i| = 45.18\ \mu A$$

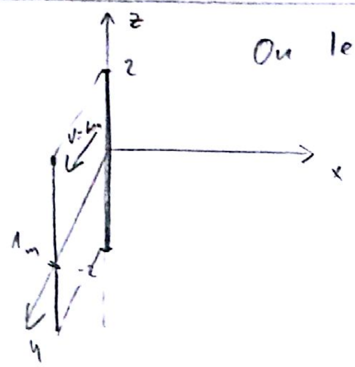
6.) Vodič zanemarivog poprečnog presjeka leži u osi z za $-2 \le z \le 2$ [m] a njime teče struja iznosa 2 A u smjeru negativne z osi. Ako je zadana indukcija u prostoru prema jednadžbi $B = 2 \cdot 10^{-3} e^{-0.1 y} \vec{a_x}$ [T] odredite iznos energije u [mJ] koji je potreban za pomicanje vodiča konstantnom brzinom za 1 m u smjeru $\vec{a_y}$.

Ovaj zadatak nije skiciran!

$I = -2 \vec{a_z}$ $\quad i = 2$

$\vec{V} = k\vec{a_y}$

$\vec{a} = 0$ $\quad s = 1\,m$



On leži u osi z

Ako se vodič zanemarivog presjeka kojim protječe struja i (strujnica) nalazi u magnetskom polju indukcije $\vec{B}$ sila na njega je $\vec{F} = i \int_c d\vec{l} \times \vec{B}$

$\vec{dl} = dz\,\vec{a_z}$

$\vec{B} = 2 \cdot 10^{-3} e^{-0.1 y} \vec{a_x}$

$\vec{dl} \times \vec{B} = 2 \cdot 10^{-3} e^{-0.1 y}\, dz\, \vec{a_y}$

$$F = 4 \cdot \int_{z=-2}^{2} 2 \cdot 10^{-3} e^{-0.1 y}\, dz\, \vec{a_y} = 16 \cdot 10^{-3} e^{-0.1 y}\, \vec{a_y}$$

$$W = \int_{y=0}^{1} F\, dl = \int_{y=0}^{1} 16 \cdot 10^{-3} e^{-0.1 y}\, dy = -16 \cdot 10^{-2} \left[e^{-0.1} - 1 \right] = 15{,}22\ [mJ]$$

7.) U vakuumu je električno polje zadano jednadžbom $E(z,t) = 20\cos(\omega t - \beta z)\vec{a_x}$. Odredite srednju snagu u [W] koja prolazi krugom polumjera 2m u ravnini $z = 1$m.

Trebano uočiti da se ovdje radi o strujanju energije ravnim elektromagnetskim valom koji putuje u z smjeru. To znači da je vektor $\vec{H}$ oblika

$$\vec{H}(z,t) = \frac{20}{120\pi} \cdot \cos(\omega t - \beta z)\vec{a_y}$$

$$\vec{N} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{20^2}{120\pi}\cancel{\cos^2(\omega t - \beta z)}^{\frac{1}{2}}\vec{a_z} = \frac{5}{3\pi}\vec{a_z} \quad \frac{W}{m^2}$$

$$P = \iint_S \vec{N}\vec{n}\,dS = \frac{5}{3\cancel{\pi}} \cdot r^2\cancel{\pi} = \frac{20}{3}\,[W]$$

Scanned by CamScanner

8.) Odredite iznos jakosti električnog polja $|E(t=0,\ x=0.8\lambda)|$ ravnog vala u $\left[\frac{V}{m}\right]$ zadanog jednadžbom

$$E(x,t) = 12 \sin(\omega t - \beta x)\,\vec{a_y} - 16 \sin(\omega t - \beta x)\,\vec{a_z} \quad \left[\frac{V}{m}\right]$$

Ovo je jedan vrlo čudan ravni val jer se širi u $\vec{a_y}$ i $-\vec{a_z}$ smjeru!

$$\left.\begin{aligned} \beta &= \frac{2\pi}{\lambda} \\ x &= 0.8\lambda \end{aligned}\right\} \beta x = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 0.8\lambda = 1{,}6\pi$$

$$E(0.8\lambda, 0) = 12 \sin(-1.6\pi)\,\vec{a_y} - 16 \sin(-1.6\pi)\,\vec{a_z}$$

$$= 11.4126\,\vec{a_y} - 15.216\,\vec{a_z}$$

$$|E| = 19.0210\ \frac{V}{m}$$

Scanned by CamScanner

9.) U sredstvu relativne permeabilnosti $\mu_r = 1$ jakost magnetskog polja zadana je jednadžbom $H = \frac{e^{-y}}{5} \cos(2\pi \cdot 10^8 t - 2y) \vec{a_x} \left[\frac{A}{m}\right]$

Odredite jakost električnog polja u $\left[\frac{V}{m}\right]$ u trenutku $t = 0.02 \mu s$ i $y = 0.2$ m

---

Ovaj zadatak se nemože riješiti pomoću formula za ravni val zato što je fazni kut valne impedancije različit od 0 $\varphi = \text{arc tg}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \text{arc tg}\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$

stoga treba ovako

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

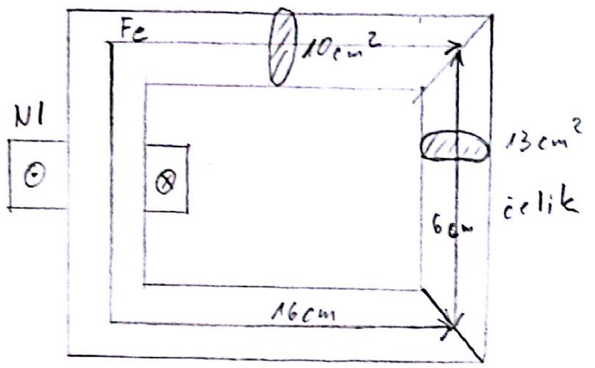
$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{5}\vec{a_z} \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{-y} \cos(2\pi \cdot 10^8 t - 2y)\right)$$

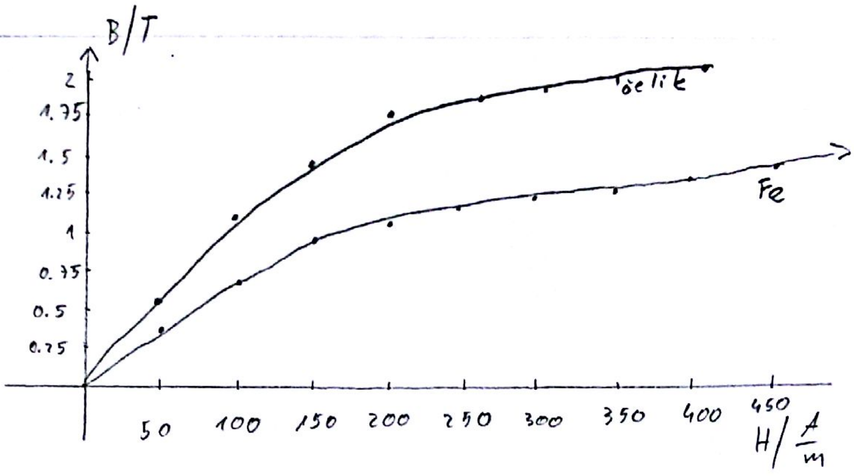
$$= -\frac{1}{5}\vec{a_z}\left[-e^{-y}\cos(2\pi \cdot 10^8 t - 2y) + 2e^{-y}\sin(2\pi \cdot 10^8 t - 2y)\right] = \frac{\partial D}{\partial t}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{5\varepsilon_0} e^{-y} \vec{a_z}\left[\frac{1}{\omega}\sin(\omega t - 2y) + \frac{2}{\omega}\cos(\omega t - 2y)\right] \quad ; \quad \omega = 2\pi 10^8$$

$$E(t = 0.02 \mu s,\ y = 0.2 m) = 42.75 \vec{a_z} \left[\frac{V}{m}\right]$$

10.) Magnetski krug je zadan slikom i krivuljom magnetiziranja materijala. Zadana je magnetska indukcija u željezu iznosa 1,3T i broj zavoja N= 85. Odredite iznos struje u [A] kroz zavojnicu!





1.) Magnetski tok je u svakom dijelu isti

$$\Phi = B_1 \cdot S_1 = B_2 \cdot S_2$$

2.) Amperov kružni zakon primjeni se po segmentima

$$N \cdot I = H_1 \cdot l_1 + H_2 \cdot l_2$$

→ Pošto nam je zadana indukcija za Fe iz grafikona odredimo jakost polja od Fe

$$B_{Fe} = 1{,}3\,T$$

$H_{Fe} = 800 \, \frac{A}{m}$ → nije stalo na moj graf!

→ Iz prve jednadžbe odredimo $B_{čelika}$

$$B_{Fe} \cdot S_{Fe} = B_{čelik} \cdot S_{čelik}$$

$$B_{čelik} = B_{Fe} \cdot \frac{S_{Fe}}{S_{čelik}} = 1\,T$$

→ Iz grafa odredimo $\vec{H}_{čelika} = 100 \, \frac{A}{m}$

→ Uvrstimo jakosti u drugu formulu

$$I = \frac{H_{Fe} \cdot l_{Fe} + H_{čelik} \cdot l_{čelik}}{N} = 1.6\,A$$

3. Međuispit iz EMP

27.6.2011.

1.) Neka je u sredstvu s $\mu_r = 1$ jakost magnetskog polja zadana jednadžbom: $\vec{H} = \frac{e^{-200y}}{10} \cos(2\pi \cdot 10^{10} t - 350y)\, \vec{a}_x \left[\frac{A}{m}\right]$

Odredite: valnu impendanciju sredstva u $[\Omega]$ i jakost električnog polja u trenutku $t = 2ms$ i $y = 0.1m$ u $\left[\frac{nV}{m}\right]$

---

(1) Valna impedancija je kompleksan broj

$\alpha = 200 \qquad \beta = 350$

$$Z = \frac{\omega \mu}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} e^{j \operatorname{arctg}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{2\pi \cdot 10^{10} \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}}{\sqrt{200^2 + 350^2}} e^{j \operatorname{arctg}\left(\frac{200}{350}\right)}$$

$$Z = 196 \angle 30^\circ$$

(2)

$$\nabla \times H = \frac{\partial D}{\partial t} \qquad \nabla \times H = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{10} a_z \frac{\partial}{\partial y}\left[e^{-200y} \cos(2\pi \cdot 10^{10} t - 350y)\right]$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = -\frac{1}{10} \vec{a}_z \left[-200 e^{-200y} \cos(2\pi \cdot 10^{10} t - 350y) + 350 e^{-200y} \sin(2\pi \cdot 10^{10} t - 350y)\right]$$

$$D = \int \left[20 e^{-200y} \cos(2\pi 10^{10} t - 350y) - 35 e^{-200y} \sin(2\pi 10^{10} t - 350y)\right] dt$$

$$D = -20 e^{-200y}\, 2\pi 10^{10} \sin(2\pi 10^{10} t - 350y) - 35 e^{-200y}\, 2\pi 10^{10} \cos(2\pi 10^{10} t - 350y)$$

$D(t = 2ms, y = 0.1m) = 1485.63 - 3712.98 = -2227.35$ ali neznamo koliki je ε_r zato 2 način

$E = ?$

$$E = Z \cdot H$$

$$Z = \frac{E}{H} \rightarrow E = Re\{Z\} \cdot H = 196 \cdot \cos(30) \cdot \frac{e^{-20}}{10} \cos(2 \cdot 180^\circ \cdot 10^{10} \cdot 2 \cdot 10^{-3} - 35)$$

$$= 28.6\ n\frac{V}{m}$$

2.) Neka su jakosti električnog polja i magnetska indukcija ravnog vala u slobodnom prostoru dane jednadžbom

$$E(x,y,z,t) = E_0(x,y)\cdot e^{j(1.5\cdot10^8 t - k\cdot z)}$$

$$B(x,y,z,t) = B_0(x,y)\cdot e^{j(1.5\cdot10^8 t - k\cdot z)}$$

Pri tom je k konstanta, a E_0 i B_0 su vektori u xy ravnini.

Odredite: (1) konstantu k u $[m^{-1}]$ tako da su zadovoljene Maxwellove jed.

(2) valnu duljinu vala u $[m]$.

---

(1) jednadžba

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

Tu treba naći valnu impendanciju. Ovisnost E_0 i B_0 i onda lako....

$$\begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \vec{a}_x\left(\cancel{\frac{\partial E_z}{\partial y}}^{\,0} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) + \vec{a}_y\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \cancel{\frac{\partial E_z}{\partial x}}^{\,0}\right) + \vec{a}_z\left(\cancel{\frac{\partial E_y}{\partial x}}^{\,0} - \cancel{\frac{\partial E_x}{\partial y}}\right)$$

Uzmimo samo u $\vec{a}_x$ smjeru

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial B}{\partial t}$$

$$E_0(-jk)\cdot e^{j(1.5\cdot10^8 t - kz)} = \frac{dB}{dt}$$

$$\boxed{B = \frac{-E_0 k e^{j(1.5\cdot10^8 t - kz)}}{1.5\cdot10^8}}$$

sad smo dobili ovisnost E_0 i B_0

$$\boxed{B_0 = \frac{-E_0 k}{1.5\cdot10^8}}$$

$$H = \frac{B}{\mu_0}$$

$$H_0 = \frac{-E_0\cdot k}{1.5\cdot10^8\mu_0}$$

(2) jednadžba

$$\nabla\times H = \frac{\partial D}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial H}{\partial z} = \varepsilon\frac{\partial E}{\partial t}$$

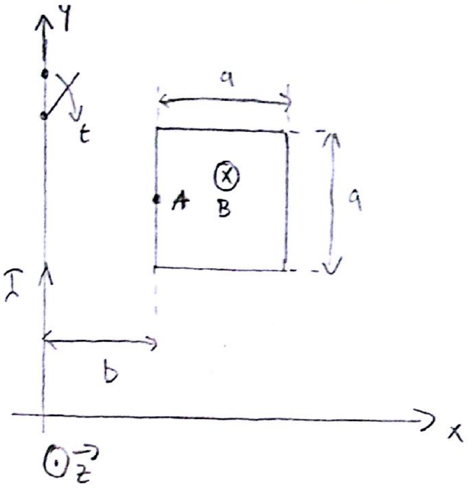
$$\frac{\cancel{E_0}\cdot k}{1.5\cdot10^8\mu_0}(-k\cancel{j})\cdot \cancel{e^{j(1.5\cdot10^8 t - kz)}} = \varepsilon\cancel{E_0}\,1.5\cdot10^8\cancel{j}\,\cancel{e^{j(1.5\cdot10^8 - kz)}}$$

$$k^2 = \varepsilon\cdot\mu\cdot(1.5\cdot10^8)^2$$

$$\boxed{k = 0.5}$$

(2)
$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{0.5} = 4\pi}$$

3.) Žičana petlja kvadratnog oblika, stranice a i ukupnog otpora žice R nalazi se na udaljenosti b od beskonačno dugog vodiča kojim teče struja I prema slici. U trenutku t, struja kroz žicu je prekinuta. ($a=1m$, $b=1m$, $I=1A$, $R=1\Omega$). Odredite ukupni naboj koji prođe točkom A na petlji za vrijeme u kojem struja teče petljom.



$I = I\,\vec{a_y}$

Primjer 1.2.1

$$\vec{H} = \vec{a_\alpha}\,\frac{I}{2\pi r}$$

$$\boxed{\vec{H} = -\vec{a_z}\,\frac{I}{2\pi x}}$$ pravilo desne ruke

Primjenjujemo Faradayev zakon

$$e_{ind}(t) = -\frac{\partial \phi(t)}{\partial t}$$

$dQ = i(t)\,dt$

$$Q = \int i(t)\,dt = \int \frac{e_{ind}(t)}{R}\,dt = \frac{-1}{R}\int \frac{\partial \phi(t)}{\partial t}\,dt = \frac{-\phi}{R} = \frac{1}{R}\iint_S B_n\,dS$$

$\vec{B} = \mu \vec{H}$ $\quad \vec{n} = \vec{a_z}$ $\quad dS = dx\,dy$

$$Q = \frac{-1}{R}\int_{x=b}^{b+a}\int_{y=0}^{a} \frac{-\mu I}{2\pi x}\,dx\,dy = \frac{\mu I}{2R\pi}\cdot a \cdot \ln\left(\frac{b+a}{a}\right) = 138.62\ nC$$

4.) Sinusno promjenjiv val se širi u realnom sredstvu za koje je zadano $\varepsilon_r = 6$, $\mu_r = 1$, $\kappa = 0.5\ \frac{S}{m}$. Frekvencija vala je $f = 150\ MHz$, a početna amplituda je $E_0 = 200\ \frac{V}{m}$. Odredite: omjer iznosa električnog polja $E(x=0)/E(x=2\lambda)$ gdje je λ valna duljina, valnu impedanciju u $[\Omega]$ i srednju vrijednost realnog dijela Poyntingova vektora na udaljenosti $x = 0.8d$ (d je dubina prodiranja) u $[\frac{W}{m^2}]$

Pro trebano naći $\alpha, \beta, \omega, \lambda$

$$\alpha = \frac{\omega}{\sqrt{2}\, c}\sqrt{\sqrt{1+\left(\frac{\kappa}{\omega\varepsilon}\right)^2} - 1} \qquad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \mu_r \cdot \varepsilon_0 \varepsilon_r}} \qquad \omega = 2\pi \cdot f$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

$$\beta = \frac{\omega}{\sqrt{2}\, c}\sqrt{\sqrt{1+\left(\frac{\kappa}{\omega\varepsilon}\right)^2} + 1}$$

$E = E_0\, e^{-\alpha x}\cos(\omega t - \beta x)$ → opća formula

---

1)
$$\frac{E(x=0)}{E(x=2\lambda)} = \frac{\cancel{E_0}\, e^0 \cos(\omega t)}{\cancel{E_0}\, e^{-\alpha 2\lambda}\cos(\omega t - \beta \cdot 2\lambda)} = \frac{\cos(\omega t)}{e^{-4\pi\frac{\alpha}{\beta}}\cos\left(\omega t - 2 \cdot 2\pi \cdot \frac{\beta}{\beta}\right)}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{3}{3.32}$$

$$= \frac{\cancel{\cos(\omega t)}}{e^{-4\pi\frac{3}{3.32}}\cancel{\cos(\omega t - 4\pi)}} = e^{4\pi\frac{3}{3.32}}$$

---

(2)
$$Z = \frac{\omega\mu}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\, e^{j\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}$$

$$= \frac{\cancel{\omega}\,\mu}{\frac{\cancel{\omega}}{\sqrt{2}\,c}\sqrt{3^2 + 3.32^2}}\, e^{j\,\mathrm{arctg}\left(\frac{3}{3.32}\right)}$$

$$= 48.5\angle 42^\circ$$

(3)
$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{d} \\ x &= 0.8d \end{aligned}\right\}\ x = \frac{0.8}{\alpha}$$

$$N_{sr} = \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{|Z|}\, e^{-2\alpha x}\cos\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\frac{200^2}{48.5}\, e^{-2\alpha\frac{0.8}{\alpha}}\cos(42^\circ)$$

$$N_{sr} = 27.8$$

5.) U ishodištu sfernog koordinatnog sustava nalazi se izvor polja $\vec{E} = 50 \sin(\theta) \cdot r^{-1} \cdot \cos(10^9 t - 2r)\, \vec{a}_\theta \ \frac{V}{m}$

$$\vec{H} = \frac{50}{120\pi} \sin(\theta) \cdot r^{-1} \cdot \cos(10^9 t - 2r)\, \vec{a}_\phi \ \frac{A}{m}$$

Odredite iznos Poyntingovog vektora N na udaljenosti r = 3 m u trenutku t = 3 ns za $\theta = \frac{\pi}{5}$ u $\left[\frac{mW}{m^2}\right]$. Odredite ukupnu srednju snagu izvora u [W].

---

(1) $\vec{N} = \vec{E} \times \vec{H} = H \cdot E\, \vec{a_r}$

$$N = \frac{50^2 \sin^2(\theta)}{120\pi\, r^2} \cos^2(10^9 t - 2r)\, \vec{a_r} \Bigg|_{\substack{r=3 \\ \theta = \frac{\pi}{5} \\ t = 3ns}} = 249.5\ m\, \frac{W}{m^2}$$

Zamislimo sferu u sfernom koordinatnom

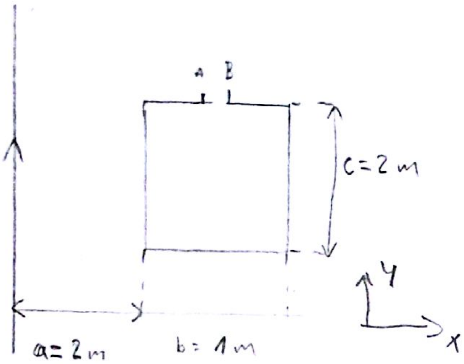
(2) $P = \iint_S N_{sr} \cdot dS$ $\qquad N_{sr} = \frac{1}{2} \frac{50^2 \sin^2(\theta)}{120\pi\, r^2}$ $\qquad dS = r\, dr\, d\theta$

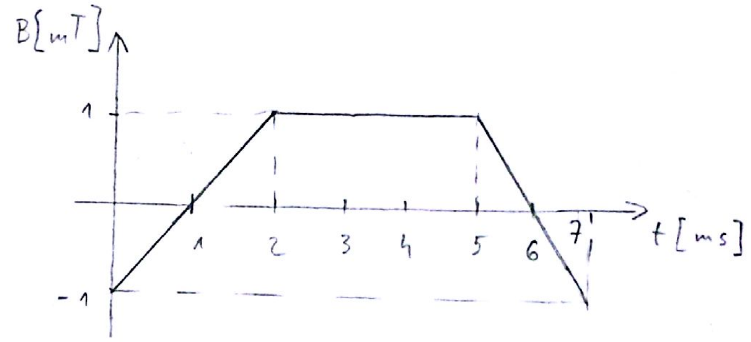
$$P = \frac{1}{2} \frac{50^2}{120\pi} \int_{r=0}^{R} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\sin^2(\theta)}{r}\, dr\, d\theta =$$

3. Međuispit iz EMP

28. 6. 2010.

1.) Na udaljenosti 1m od beskonačno dugog vodiča kroz koji protječe struja $i(t)$ izmjerena je magnetska indukcija prikazana slikom. Odredite: struju u beskonačno dugom vodiču u trenutku $t=4$ ms u [kA], inducirani napon U_{AB} u petlji u trenutku $t=1$ ms, $t=3$ ms i $t=5{,}5$ ms





Prema primjeru 1.2.1. jakost polja vodiča je $\vec{H} = a_\phi \frac{I}{2\pi r}$ za ovu sliku desno $r=1$m. Vidimo da je u trenutku $t=4$ms $B=1$mT

$$B(t) = \frac{\mu \cdot I(t)}{2\pi r}$$

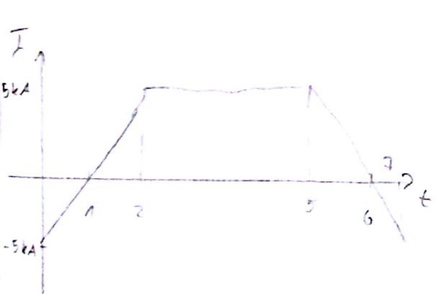
$$I(t) = \frac{2\pi r\, B(t)}{\mu}$$

$$I(t=4\text{ms}) = 5\text{ kA}$$

$$I(t=0\text{ms}) = -5\text{ kA}$$

$$I(t=1\text{ms}) = 0\text{ A}$$

$$I(t=2\text{ms}) = 5\text{ kA}$$



$$B(t) = \frac{2\cdot 10^{-7}}{r} \cdot I(t)$$

$$B(t) = \frac{2\cdot 10^{-1}}{r}(5t - 5\cdot 10^{-3}) \quad t \in \langle 0,2\rangle \text{ms} \qquad \frac{dB}{dt} = \frac{1}{r}$$

$$B(t) = \frac{2\cdot 10^{-1}}{r} \cdot 5\cdot 10^{-3}, \quad t \in \langle 2,5\rangle \text{ms} \qquad \frac{dB}{dt} = 0$$

neće se inducirati napon $t \in \langle 2,5\rangle$ms

$$B(t) = \frac{2\cdot 10^{-1}}{r}(3\cdot 10^{-2} - 5t), \quad t \in \langle 5,7\rangle \text{ms} \qquad \frac{dB}{dt} = \frac{-1}{r}$$

$$U_{ind} = -\int_S \frac{d\vec{B}}{dt}\vec{n}\, dS \quad ; \quad dS = y\,dr \quad ; \quad y = c$$

$$U_{ind} = -c\int_{r=a}^{b} \frac{dr}{r} = -c \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad t \in \langle 0,2\rangle \text{ms}$$

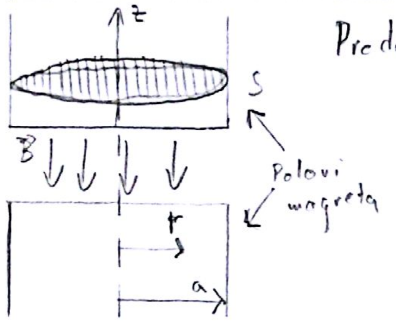
$$U_{ind} = c\int_{r=a}^{b} \frac{dr}{r} = c \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad t \in \langle 5,7\rangle \text{ms}$$

2.) Između dva pola cilindričnih magneta prema slici magnetska indukcija može se aproksimirati jednadžbom: $B = \begin{cases} -B_0 \frac{a \cdot t}{\sqrt{a^2+r^2}} \vec{a_z} & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$

$a = 0.1\,m \quad B_0 = 1T \quad \varkappa = 0 \quad \varepsilon_r = 1$

Odredi primjenom Faradayevog zakona iznos jakosti električnog polja u prostoru između polova u trenutku $t = 1\,ms$ za $r = 0.05\,m$.

Odredite iznos magnetskog toka koji prolazi plohom S magneta u $t = 1\,ms$



Predivna skica. Koristimo 2 Maxwellove formule

$\vec{J} = \varkappa \cdot \vec{E} = 0$

Cilindrični

$\vec{E} = E_r \vec{a_r} + E_\alpha \vec{a_\alpha} + E_z \vec{a_z}$

$\vec{B} = B_z \vec{a_z}$

(1) $\text{rot}\, \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial \alpha}\right)\vec{a_r} + \left(-\frac{\partial H_z}{\partial r}\right)\vec{a_\alpha} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

$\frac{\partial H_z}{\partial \alpha} = 0 \qquad \frac{\partial H_z}{\partial r} \neq 0$

Zaključujemo da postoji samo $\vec{a_\alpha}$ komp. od $\vec{E}$

$\vec{E} = E_\alpha \vec{a_\alpha}$

(2) $\text{rot}\, \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}$

$$\boxed{\begin{aligned} &(2^*)\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\vec{E_\alpha}) = -\frac{\partial}{\partial t} B_z \\ &(1^*)\ -\frac{\partial}{\partial r} H_z = \frac{\partial}{\partial t} \vec{D_\alpha} \end{aligned}}$$

$\vec{B} = \mu \vec{H}$

$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$

$(1^*) \int^t -\frac{B_0 a t}{\mu} \cdot \frac{r}{(a^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}\, dt = D_\alpha$

$E_\alpha = \frac{B_0 \cdot a \cdot r}{\mu} \cdot \frac{1}{(a^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{t^2}{2} \cdot \frac{1}{\varepsilon}$

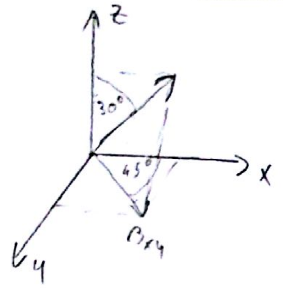
(2^*) Uvrstimo i vidimo da je uredu

$\rightarrow \phi = \iint B_n\, dS \qquad dS = r\,dr\,d\alpha$

$\phi = \int_{r=0}^{a} \int_{\alpha=0}^{2\pi} B_0 \frac{a\,t}{\sqrt{a^2+r^2}}\, r\,dr\,d\alpha$

$= \dots$ Bla Bla Bla

3.) Smjer širenja vala frekvencije 10MHz u slobodnom prostoru prikazan je slikom. Smjer širenja vala čini kut od $30°$ s $+z$ osi, a njegova projekcija na $x-y$ ravninu čini kut od $45°$ s $+x$ osi. Jakost električnog polja nema z komponente, a u $t=10^{-6}$s u točki $(x=0, y=0, z=0)$ ima iznos $10\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right) \frac{V}{m}$. Odredite uz pretpostavku $E_{0x}>0$: E_{0x}, E_{0y}, H_{0x}, H_{0y}.



Val se širi u z smjeru što znači da svaka komponenta jakosti sadrži varijablu z

Vektor širenja vala

$\omega = 2\pi f$

$\beta = \frac{\omega}{c} = 2\pi\sqrt{\mu \cdot \varepsilon} \cdot f$

$\cos(45°)\vec{a_x} + \sin(45°)\vec{a_y} + \cos(30°)\vec{a_z}$

$\beta = 0.2095$

4.) Ravni val u sredstvu ($\mu_r = 1$, $\varepsilon_r = 2$) zadan je jednadžbom za jakost magnetskog polja: $\vec{H} = \vec{a_y}\, 10 \cos(\omega t - 3x)\ \frac{A}{m}$

Odredite β, $v \left[\frac{m}{s}\right]$, $E(t = 10\,ns,\ x = 0.4\,m) = ?\ \left[\frac{kV}{m}\right]$, smjer širenja vala.

$\beta = 3$ smjer širenja vala je $\vec{a_x}$

$v = \pm \frac{\omega}{\beta}$ za $\alpha = 0$ $\beta = \frac{\omega}{c}$ $v = \pm c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r}}$

$v = \pm 211985280\ \frac{m}{s}$

$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = 266.3885$

$\omega = \beta \cdot c = 635955840$

$H_{zm} = \frac{E_{zm}}{Z_0}$ $E_{zm} = 2663.885$

$\vec{E} = \vec{a_z}\ 2663.885 \cos(\omega t - 3x)\ \frac{A}{m}$

$\vec{E}\,(t = 10\,ns,\ x = 0.4) = 2653.09124\ \frac{V}{m} = 2.65\ \frac{kV}{m}$

5.) U ishodištu sfernog koordinatnog sustava nalazi se izvor polja $\vec{E} = 100 \sin(\theta) \cdot r^{-1} \cos(10^{10} t - r)\, \vec{a_\theta}\ \frac{V}{m}$

$$\vec{H} = \frac{100}{120\pi} \sin(\theta) \cdot r^{-1} \cos(10^{10} t - r)\, \vec{a_\phi}\ \frac{A}{m}$$

$$\sin(x) \cdot \cos(y) = \frac{1}{2} \sin(x+y) + \frac{1}{2} \sin(x-y)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{50}{r} \sin(\theta + 10^{10} t - r)\, \vec{a_\theta} + \frac{50}{r} \sin(\theta - 10^{10} t + r)\, \vec{a_\theta} \\ \vec{H} &= \frac{50}{120\pi r} \sin(\theta + 10^{10} t - r)\, \vec{a_\phi} + \frac{50}{120\pi r} \sin(\theta - 10^{10} t + r)\, \vec{a_\phi} \end{aligned}}$$

Val se prostire u $+\vec{a_r}$ smjeru

jer sinus izbljune minus $\sin(-\omega t) = -\sin(\omega t)$

$\Rightarrow$ Treba odredit Poyntingov vektor

$$\vec{N} = \vec{E} \times \vec{H} = \vec{a_r}\, E \cdot H$$

Primjer 9.3.2.

$$N_{sr} = \vec{a_r} \frac{1}{2} \frac{E_m^2}{|Z|} e^{-2\alpha r} \cos\varphi = \vec{a_r} \frac{100^2 \cdot \sin^2\theta}{2\,|120\pi| \cdot r^2}$$

Ukupna snaga se dobije integracijom srednje vrijednosti Poyntovog vektora kroz sfernu površinu polumjera R

$$P = \int_S \vec{N_{sr}}\, \vec{n}\, dS \qquad \vec{n} = \vec{a_r} \qquad dS = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi = 2\pi R^2 \sin\theta\, d\theta$$

$$P = \frac{100^2}{2 \cdot 120\pi R^2}\, 2\pi R^2 \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta = \frac{100^2}{30}$$