

Fakultet elektrotehnike i računarstva

Finansijska matematika

Zadaci za samostalan rad

23. 2. 2010.

1. Poduzeće duguje 60000 kn za dvije godine od danas i 140000 kn za četiri godine od danas. Odlučeno je da će se ukupni dug otplatiti s dvije jednakе rate koje dospijevaju danas i početkom druge godine od danas. Izračunajte iznos rata ako je godišnji kamatnjak 5%. (Rj. $R=86868.35$ kn)

2. Osoba je prije tri godine uložila 4000 kn, prije dvije godine 8000 kn, a prije godinu dana podigla 5000 kn. Koliko ta osoba ima na računu danas, ako je banka prve dvije godine primjenjivala godišnji kamatnjak 2%, a u preostalom razdoblju 1%? (Rj. $V_3=7394.82$ kn)

3. Glavnica, uložena neko vrijeme uz 10% godišnjih kamata, a zatim još tri puta duže uz 20% godišnjih kamata, poveća se za 90.08%. Koliko je godina ta glavnica bila uložena uz prvu, a koliko godina uz drugu kamatnu stopu? (Rj. $t_1=1$ godina, $t_2=3$ godine)

4. Koliki iznos treba oraći danas na 10 godina uz godišnji kamatnjak 4% za prve četiri godine, a 3% u preostalom razdoblju, ako se želi da konačna vrijednost bude 30000 kn? (Rj. $V_0=21476.55$ kn)

5. Neka je osoba uplaćivala u banku početkom svake godine po 5000 eura kroz 5 godina. Koliko će ta osoba imati u banci na kraju desete godine ako je banka prve tri godine primjenjivala kamatnu stopu 6%, u preostalom razdoblju 5%, i ako je osoba na kraju sedme godine podigla iznos od 10000 eura? (Rj. $V_{10}=25901.84$ eura)

6. Neka osoba uloži u banku početkom prve godine 5000 kn, a početkom četvrte podigne 2000 kn. Koliku će svotu ta osoba imati u banci krajem četvrte godine ako je godišnji kamatnjak 2%, a obračun kamata mjesecni, uz
a) relativni kamatnjak, (Rj. $V_{48}=3375.71$ kn)
b) konformni kamatnjak? (Rj. $V_{48}=3372.16$ kn)

7. Neka osoba uloži u banku početkom prve godine 50000 eura, a početkom treće i četvrte godine podigne po 10000 eura. Koliku će svotu ta osoba imati u banci na kraju pete godine ako je obračun

a) godišnji, (Rj. $V_5=52099.91$ euro)

b) mjesecni, (Rj. $V_{60}=53244.46$ euro)

a godišnja kamatna stopa 9%?

8. Neka osoba uloži u banku 10000 eura. Koliku će svotu imati ta osoba u banci krajem pete godine ako banka prve tri godine primjenjuje godišnju kamatnu stopu 10%, a zadnje dvije 7%? Obračun kamata polugodišnji. (Rj. $V_{10}=15377.91$ eura)

9. Početkom svake godine osoba uplaćuje u banku po 10000 eura kroz tri godine. Na početku četvrte godine počinje joj se isplaćivati polugodišnja renta početkom svakog polugodišta kroz dvije godine. Izračunajte visinu rente ako banka za prve tri godine primjenjuje godišnju kamatnu stopu 6%, a u preostalom razdoblju 5%. Obračun kamata je polugodišnji. (Rj. $R=8766.70$ eura)

10. Poduzeće traži zajam od 200000 kn uz 9% godišnjih kamata i može plaćati anuitet od 50000 kn krajem godine. Odredite vrijeme amortizacije i ukupne kamate. (Rj. $t=5.178684533$ godina => pet anuiteta po 50000 kn i šesti krnji od 9253.29 kn => ukupne kamate=59253.29 kn)

11. Zajam od 100000 kn treba otplatiti u dvije godine jednakim anuitetima krajem polugodišta. Koliki su anuiteti ako se prve godine primjenjuje mjesecni kamatnjak 1.1%, a druge godine godišnji kamatnjak 10%. Obračun kamata je polugodišnji. (Rj. $a=28948.72$ kn)

Napomena:

Ukoliko nije drugačije naznačeno, obračun je kamata godišnji i složen.

①.

$$V(2) = 60000$$

$$V(4) = 140000$$

$$r = 5\% = 0,05$$

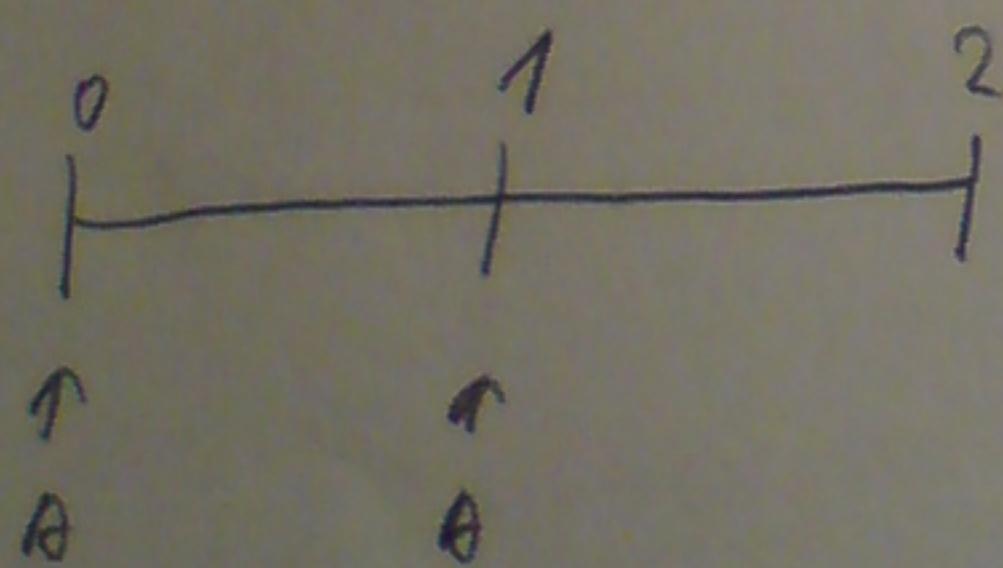
$$V(t) = V(0) \cdot (1+r)^t$$

$$V(2) = V(0) \cdot 1,05^2$$

$$V(0)_1 = \frac{V(2)}{1,05^2} = 54421,77$$

$$V(0)_2 = \frac{V(4)}{1,05^4} = 115178,35$$

$$V(0) = V(0)_1 + V(0)_2 = \boxed{169,600,12 \text{ kN}}$$

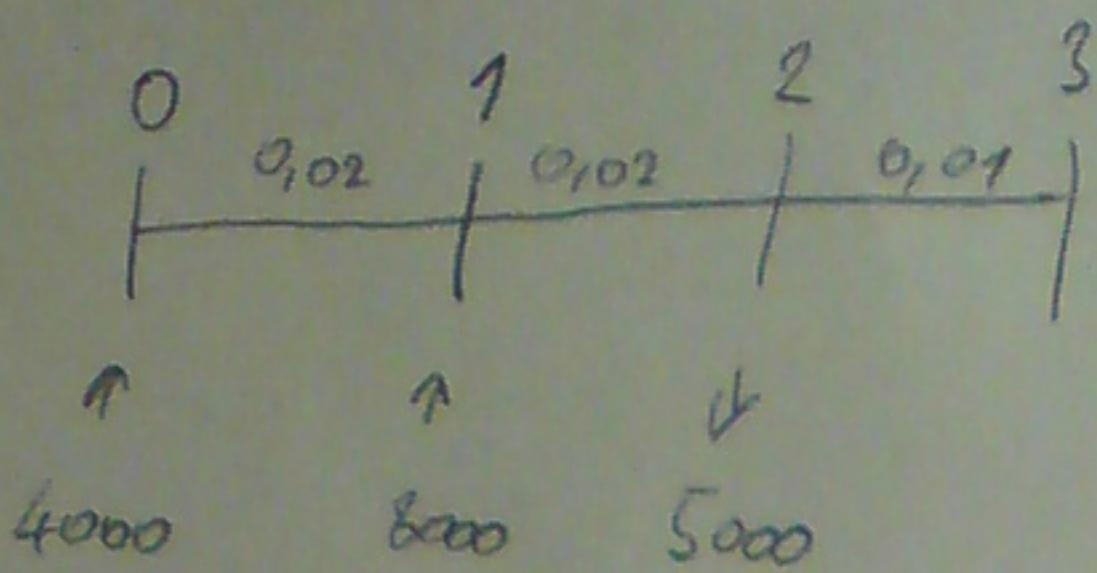


$$V(0) = A + \frac{A}{1+r} = \frac{A}{1+r} \left(1 + (1+r) \right)$$

$$V(0) = A \left(1 + \frac{1}{1+r} \right)$$

$$A = \frac{V(0)}{1 + \frac{1}{1+r}} = \frac{169600,12}{1 + \frac{1}{1,05}} = \boxed{86866,35 \text{ kN}}$$

②



$$V(0) = 4000$$

$$V(1) = 4000 \cdot 1,02 + 6000 = 12080$$

$$V(2) = 12080 \cdot 1,02 - 5000 = 7321,6$$

$$V(3) = 7321,6 \cdot 1,01 = \boxed{7394,816 \text{ KN}}$$

③

$$r_1 = 0,1$$

$$r_2 = 0,2$$

$$t_2 = 3t_1$$

$$2^2 \cdot 2^6$$

$$\underline{V(t_1+t_2) = V(0) \cdot 1,9008} \Rightarrow V(0) = \frac{V(t_1+t_2)}{1,9008}$$

$$t_1, t_2 = ?$$

$$V(t) = V(0) \cdot (1+r)^t$$

$$V(t_1+t_2) = V(0) \cdot (1+r)^{t_1} \cdot (1+r)^{t_2}$$

$$1,9008 = (1+r_1)^{t_1} \cdot (1+r_2)^{t_2}$$

$$t_2 = 3t_1$$

$$1,9008 = (1+r_1)^{t_1} \cdot (1+r_1)^{3t_1}$$

$$1,9008 = 1,1^{t_1} \cdot 1,2^{3t_1}$$

$$\log 1,9008 = t_1 \log 1,1 + 3t_1 \log 1,2$$

$$\log 1,9008 = t_1 (\log 1,1 + 3 \log 1,2)$$

$$t_1 = \frac{\log 1,9008}{\log 1,1 + 3 \log 1,2}$$

$$\boxed{t_1 = 1}$$

$$\boxed{t_2 = 3}$$

④

$$t = 10 \text{ J}$$

$$r_1 = 0,04$$

$$r_2 = 0,03$$

$$\epsilon_1 = 4$$

$$\epsilon_2 = 6$$

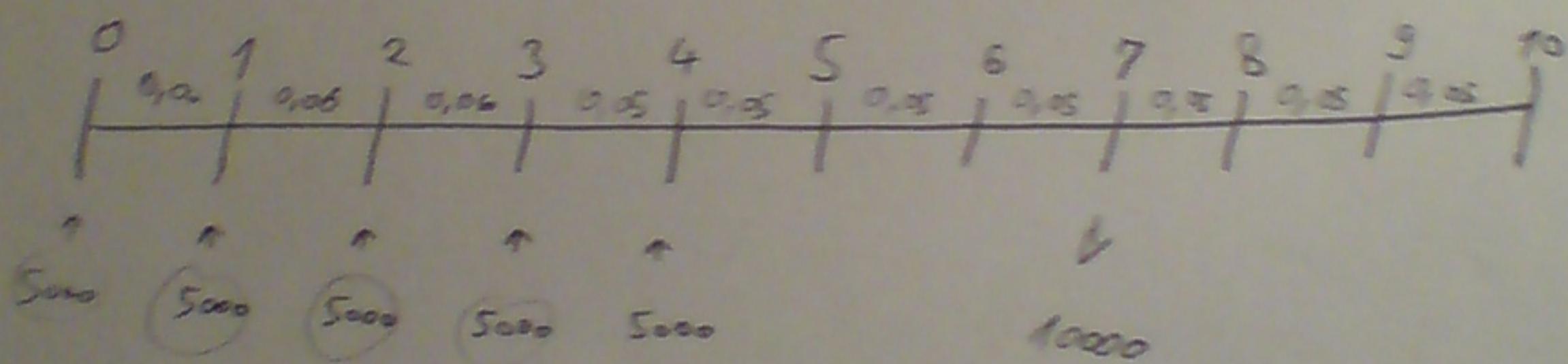
$$\underline{V(t) = 30000 \text{ UW}}$$

$$V(0) = ?$$

$$V(t) = V(0) \cdot (1+r_1)^{\epsilon_1} (1+r_2)^{\epsilon_2}$$

$$V(0) = \frac{V(t)}{(1+r_1)^{\epsilon_1} (1+r_2)^{\epsilon_2}} = \frac{30000}{1,04^4 \cdot 1,03^6} = 21476,55 \text{ UW}$$

⑤



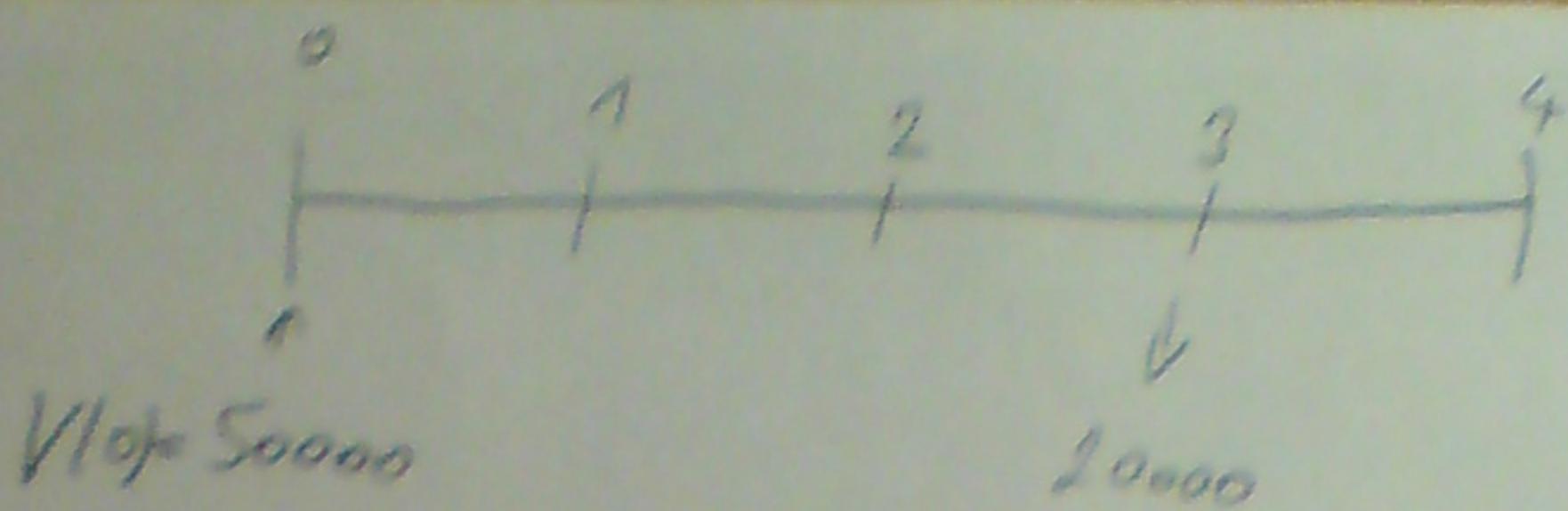
$$V(10) = 5000 \cdot 1,06^3 \cdot 1,05^7 + 5000 \cdot 1,06^2 \cdot 1,05^6 + 5000 \cdot 1,06 \cdot 1,05^5 + \\ + 5000 \cdot 1,05^7 + 5000 \cdot 1,05^6 - 10000 \cdot 1,05^3$$

$$V(10) = 5000 [1,06^3 \cdot 1,05^7 + 1,06^2 \cdot 1,05^6 + 1,06 \cdot 1,05^5 + 1,05^7 + 1,05^6] - 10000 \cdot 1,05^3$$

$$\boxed{V(10) = 25301,84332 \text{ UW}}$$

⑥

$$r = 0,02\%$$



$$V(0) = 50000$$

$$20000$$

$$V_{min} = 0,001651581 \text{ (A)}$$

$$V_{max} = 0,00166666 \text{ (B)}$$

$$V(t) = V(0) \cdot (1+r)^t$$

$$V(3)_{\text{max}} = V(0) \cdot (1+r)^{36}$$

$$V(3)_{\text{maxK}} = 53060,4 \text{ KN}$$

$$\underline{V(3)_{\text{maxR}} = 53039,17575 \text{ KN}}$$

$$V(36)_{\text{loseK}} = V(34)_{\text{lose}} - 20000$$

$$V(36)_{\text{loseKN}} = 33060,4 \text{ KN}$$

$$\boxed{V(36)_{\text{loseR}} = 33039,17575 \text{ KN}}$$

$$V(48) = V(36)_{\text{loseR}} \cdot (1+r)^{12}$$

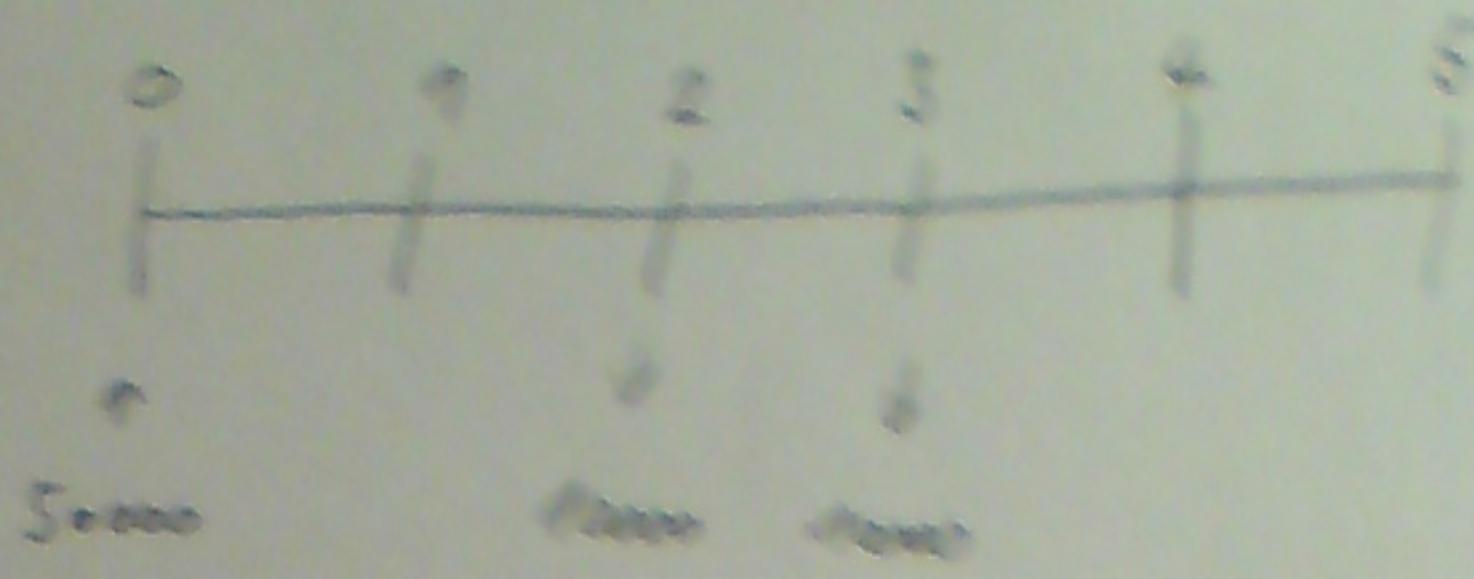
$$V(48)_1 = 33721,602 \text{ KN}$$

$$\boxed{V(48)_R = 33759,059 \text{ KN}}$$

⑦

$$r_g = 0,09$$

$$V(5) = ?$$



$$r_{m,i} = 7,5 \cdot 10^{-3} \text{ (B)}$$

a) 60015 N

$$V(2) = 50000 \cdot (1+r_g)^2$$

$$V(2)_{\text{true}} = 59405 \text{ kN}$$

$$V(2)_{\text{positive}} = 49405 \text{ kN}$$

$$V(3)_{\text{true}} = 53851,45 \text{ kN}$$

$$V(3)_{\text{positive}} = 43651,45 \text{ kN}$$

$$\boxed{V(5) = 52099,90775 \text{ kN}}$$

b) MUSEUM

$$V(24) = 50000 \cdot (1+r_g)^{24}$$

$$V(24)_{\text{true}} = 59820,67647 \text{ kN}$$

$$V(24)_{\text{positive}} = 49820,67647 \text{ kN}$$

$$V(36)_{\text{true}} = V(24)_{\text{true}} \cdot (1+r_g)^{12}$$

$$V(36)_{\text{true}} = 54630,2 \text{ kN}$$

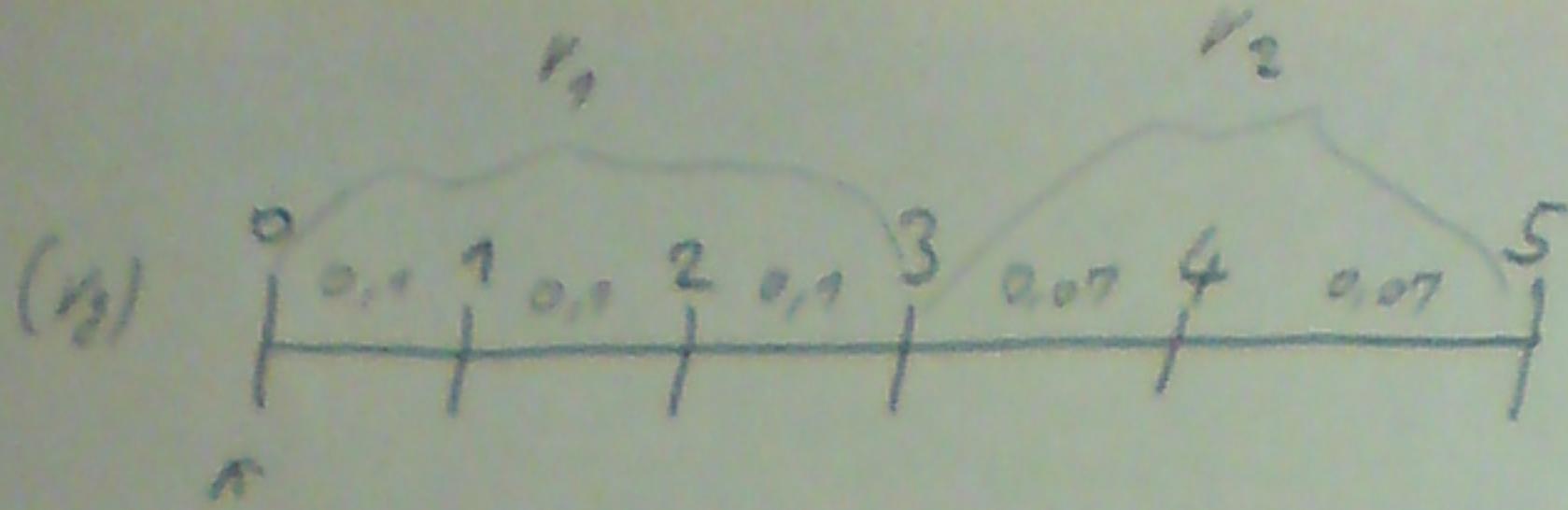
$$V(36)_{\text{positive}} = 44630,2 \text{ kN}$$

$$V(60) = V(36)_{\text{true}} \cdot (1+r_g)^{24}$$

$$\boxed{V(60) = 53233,46234 \text{ kN}}$$

⑧

$$V_{1\text{pg}} = 0,05 \quad (\text{A})$$



$$V_{2\text{pg}} = 0,035 \quad (\text{B})$$

$$10 \cdot \frac{1}{3} g = 5g$$

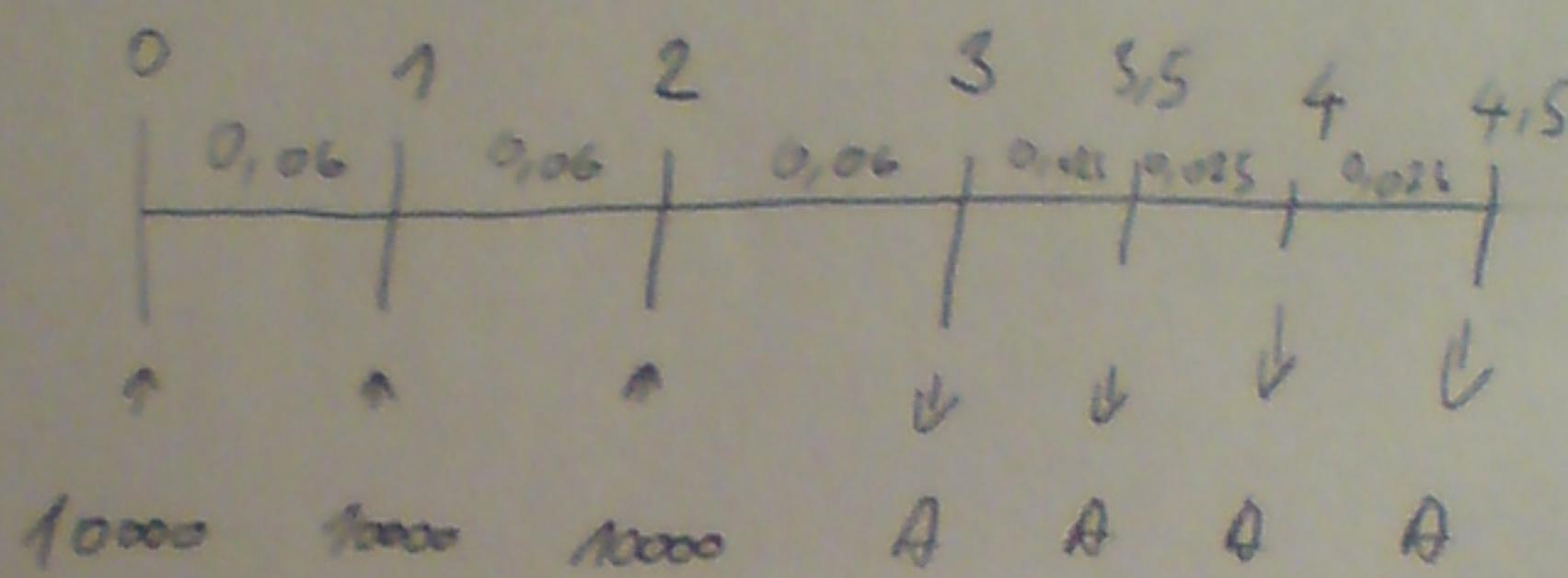
$$V(10) = 10000 \cdot (1 + V_{1\text{pg}})^6 \cdot (1 + V_{2\text{pg}})^4$$

$$\boxed{V(10) = 15377,90571 \text{ kN}}$$

⑨

$$V_{gR} = 0,0609$$

$$V_{pg2} = 0,025$$



$$V(3)_{\text{true}} = 10000 (1,06)^3 \cdot \frac{(1,06)^3 - 1}{0,0609} = \boxed{33804,61107 \text{ kN}}$$

$$V(0) = A + A(1 + V_{pg2})^1 + A(1 + V_{pg2})^2 + A(1 + V_{pg2})^3$$

$$V(0) = A + \frac{A}{1 + V_{pg2}} + \frac{A}{(1 + V_{pg2})^2} + \frac{A}{(1 + V_{pg2})^3} + (1 + V_{pg2})^3$$

$$V(0) = \frac{A}{(1 + V_{pg2})^3} \left(1 + (1 + V_{pg2}) + (1 + V_{pg2})^2 \right) = \frac{A}{(1 + V_{pg2})^3} \cdot \frac{1 - (1 + V_{pg2})^4}{1 - (1 + V_{pg2})}$$

$$A = \frac{V(0) \cdot (1 + V_{pg2})^3 \cdot V_{pg2}}{(1 + V_{pg2})^4 - 1} = \boxed{8766,702492 \text{ kN}}$$

10.

$$V(0) = 200000 \text{ KN}$$

$$r = 0,09$$

$$A = 50000 \text{ KN}$$

$$V(0) = \frac{A}{(1+r)^t} \cdot \frac{(1+r)^t - 1}{r}$$

$$V(0) \cdot (1+r)^t = \frac{A}{r} \cdot (1+r)^t - \frac{A}{r}$$

$$V(0) \cdot (1+r)^t - \frac{A}{r} (1+r)^t = - \frac{A}{r}$$

$$(1+r)^t \left(V(0) - \frac{A}{r} \right) = - \frac{A}{r}$$

$$(1+r)^t = \frac{-\frac{A}{r}}{V(0) - \frac{A}{r}} = \frac{\frac{A}{r}}{\frac{A}{r} - V(0)}$$

$$t \log(1+r) = \log \frac{\frac{A}{r}}{\frac{A}{r} - V(0)}$$

$$t = \frac{\log \frac{\frac{A}{r}}{\frac{A}{r} - V(0)}}{\log(1+r)} = \frac{\log \frac{\frac{50000}{0,09}}{\frac{50000}{0,09} - 200000}}{\log 1,09} \Rightarrow 6,3$$

$$\text{UWURKE HAMMER} = 58935 \text{ N}$$

ANNUITET U T = 6,3

$$A = \frac{V(0) \cdot (1+r)^t \cdot r}{(1+r)^t - 1}$$

$$A = 44583,96 \text{ KN}$$

$$\text{UWURKE HAMMER} = 67503,74 \text{ KN}$$

SA 200AHM HAMMER DURCHSTROM

$$A_{\text{HMR}} = (V(0) - V(5)) \cdot (1+r)^5$$

\rightarrow PRO GELEGENHEIT VERWENDEN S. ANH.

$$V(5) = \frac{A}{1+r} + \frac{A}{(1+r)^2} + \dots + \frac{A}{(1+r)^5}$$

$$= \frac{A}{(1+r)^5} (1 + (1+r) + \dots + (1+r)^4)$$

$$= \frac{A}{(1+r)^5} \cdot \frac{(1+r)^5 - 1}{r} = 134482,58$$

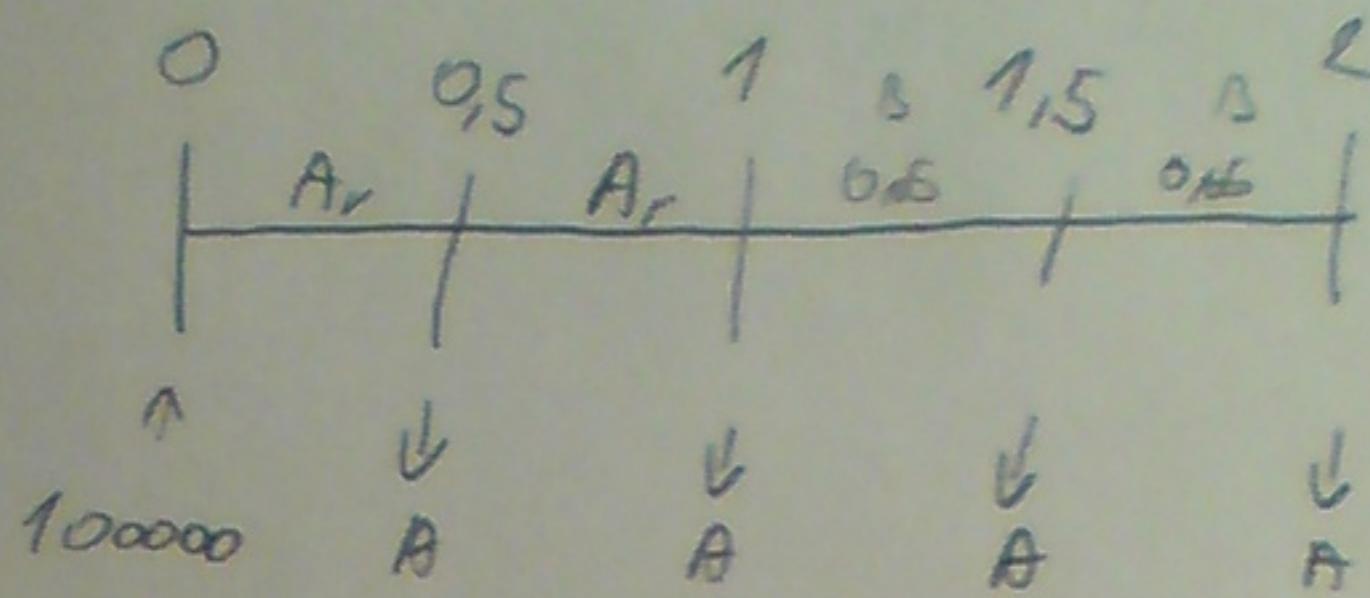
$$A_{\text{HMR}} = 9253,293923$$

$$\text{UWURKE HAMMER} = 5953,293923$$

11.

$$A = \frac{1,1}{\frac{1}{6}} = 1,1 \cdot 6 = 6,6 = 1,066$$

$$V(0) = 100000$$



$$V(0) = \frac{A}{1+r_A} + \frac{A}{(1+r_A)^2} + \frac{A}{(1+r_A)^2(1+\delta)} + \frac{A}{(1+r_A)^2(1+\delta)^2}$$

$$V(0) = A \left[\frac{1}{1+r_A} + \frac{1}{(1+r_A)^2} + \frac{1}{(1+r_A)^2(1+\delta)} + \frac{1}{(1+r_A)^2(1+\delta)^2} \right]$$

$$A = \frac{V(0)}{\frac{1}{1+r_A} \left(1 + \frac{1}{1+r_A} + \frac{1}{(1+r_A)(1+\delta)} + \frac{1}{(1+r_A)(1+\delta)^2} \right)}$$

$A = 28948,7181 \text{ MN}$
