1. **BRZINA** - omjer prijeđenog puta i za to potrebnog vremena

SREDNJA BRZINA - nagib sekante

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

TRENUTNA BRZINA - nagib tangente

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

AKCELERACIJA - opisuje promjenu brzine

SREDNJA AKCELERACIJA

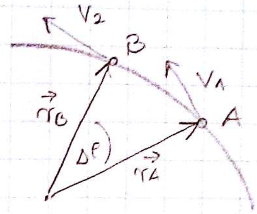
$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{V_2 - V_1}{t_2 - t_1}$$

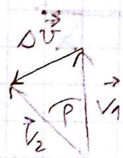
TRENUTNA AKCELERACIJA

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad \vec{a} = \frac{d}{dt}\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

CENTRIPETALNA AKCELERACIJA

→ mijenja smjer obodne brzine ali ne i mijenja iznos





$$|\Delta v| = v \cdot d\varphi \quad / \Delta t$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta v|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v\,d\varphi}{dt} =$$

$$r \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{d\varphi}{dt} = v\omega$$

$$\vec{a}_{cp} = -r\omega^2 \hat{r}_0 = -\frac{v^2}{r}\hat{r}_0 = \vec{\omega} \times \vec{v}$$

TANGENCIJALNA AKCELERACIJA

→ nastaje zbog promjene iznosa obodne brzine

$$\vec{a}_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(r\omega)}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\alpha$$

gdje je

$$\vec{\alpha} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \text{ kutna akceleracija.}$$

$$\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r}$$

2.

KUTNA BRZINA

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

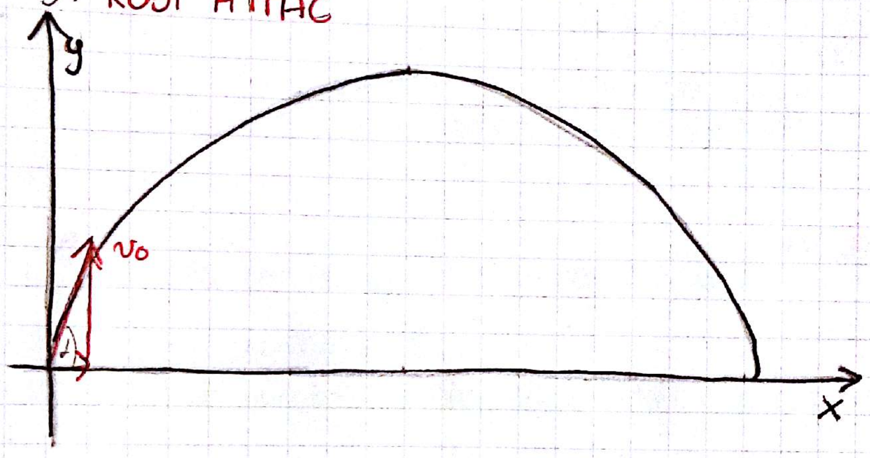
- ima smjer na pravcu osi rotacije, određen pravilom desne ruke, prsti slijede materijalnu točku palac pokazuje ω

KUTNA AKCELERACIJA

- smjer okomit na ravninu kruženja (isti ili suprotan $\vec{\omega}$)

$$\vec{\alpha} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

3. KOSI HITAC



POČETNI UVJETI:

$x = 0 \qquad v_x = v_0 \cos\alpha$

$y = 0 \qquad v_y = v_0 \sin\alpha$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{dx}{dt} = 0 \quad / \int$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = C$$

$$v_x(t=0) = C = v_0 \cos\alpha$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha$$

$$\int_0^x dx = \int_0^t v_0 \cos\alpha \, dt$$

$$x = v_0 \cos\alpha \, t$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -gt + C$$

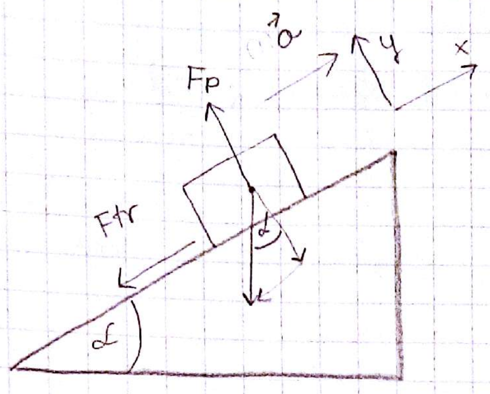
$$v_y(t=0) = C = v_0 \sin\alpha$$

$$\frac{dy}{dt} = -gt + v_0 \sin\alpha$$

$$\int_0^y dy = \int_0^t (-gt + v_0 \sin\alpha)\, dt$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 \sin\alpha \, t$$

4.



GIBANJE UZ KOSINU

x os: $-mg\sin\alpha - F_{tr} + F = ma$

y os: $mg\cos\alpha = F_p$

$F_{tr} = mg\cos\alpha \cdot \mu$

$$-mg\sin\alpha - mg\cos\alpha \cdot \mu + F = m\vec{a}$$

GIBANJE NIZ KOSINU

x os: $-F_{tr} + mg\sin\alpha = ma$

y os: $mg\cos\alpha = F_p$

$$-\cancel{m}g\cos\alpha\,\mu + \cancel{m}g\sin\alpha = \cancel{m}a$$

$$g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = \vec{a}$$

5. Gibanje pod djelovanjem sile linearno ovisne o brzini

$\vec{F} = -bm\vec{v}$

u 1 D: $\vec{F} = -bmv\vec{i}$

POČETNI UVJETI:
$x(t=0) = 0$
$v_x(t=0) = v_{x0}$

$$\cancel{m}\frac{d^2x}{dt^2} = -b\cancel{m}v$$

$$\frac{dv}{dt} = -bv$$

$$\frac{dv}{v} = -b\,dt$$

$$\int_{v_{x0}}^{v_x} \frac{dv}{v} = \int_0^t -b\,dt$$

$$\ln(v_x) - \ln(v_{x0}) = -bt$$

$$\ln\left(\frac{v_x}{v_{x0}}\right) = -bt \;/e^{()}$$

$$\frac{v_x}{v_{x0}} = e^{-bt}$$

$$v_x(t) = v_{x0}e^{-bt}$$

$$\frac{dx}{dt} = v_{x0}e^{-bt}$$

$$\int dx = \int v_{x0}e^{-bt}$$

$$x = v_{x0} \cdot \frac{e^{-bt}}{-b} + C$$

$$x(0) = \frac{v_{x0}}{-b} + C = 0$$

$$\Rightarrow C = \frac{v_{x0}}{b}$$

$$x(t) = \frac{v_{x0}}{b}(1 - e^{-bt})$$

$$y = \frac{-gt^2}{2} + v_0 \sin\alpha\, t$$ / deriviranjem po varijabli t

$$y' = -gt + v_0 \sin\alpha t = 0$$

$$t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$

$$y_{maks} = -\frac{\cancel{g}}{2} \cdot \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g^{\cancel{2}}} + v_0 \sin\alpha \cdot \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$

$$= \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

$$t \text{ za domet} = \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g}$$

$$D = v_0 \cos\alpha \cdot \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{v_0 \sin 2\alpha}{g}$$

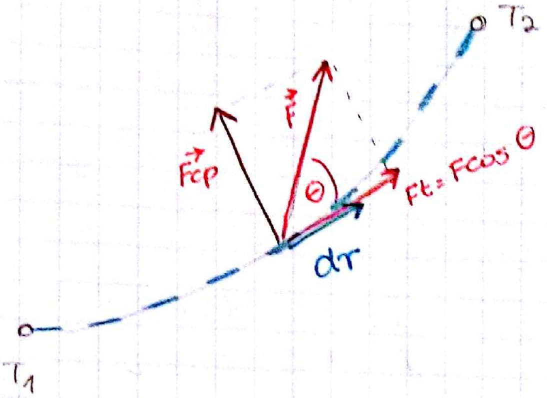
$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

$$y(x) = \frac{-g}{2} \cdot \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} + v_0 \sin\alpha \cdot \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

$$= \frac{-gx^2}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} + x \operatorname{tg}\alpha$$

Scanned by CamScanner

7. RAD CENTRIPETALNE SILE



$$W = \int_{T_1}^{T_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

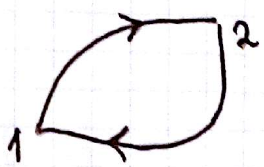
$$W = \underbrace{\int_{T_1}^{T_2} \vec{F_{cp}} \cdot d\vec{r}}_{} + \int_{T_1}^{T_2} \vec{F_t}\, d\vec{r}$$

$W_{cp} = 0$ jer je $\vec{F_{cp}} \perp d\vec{r}$

$$W = \int_{T_1}^{T_2} \vec{F_t} \cdot d\vec{r} = F\cos\Theta\, dr$$

8. KONZERVATIVNE SILE (gravitacijska, elastična potencijalna)

- rad konzervativne sile ne ovisi o obliku putanje, nego samo o početnoj i konačnoj točki
- rad konzervativne sile po zatvorenoj putanji jednak je 0



$$W = \oint \vec{F}\, d\vec{r} = 0$$

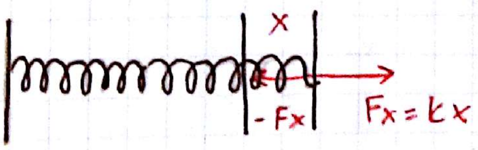
POTENCIJALNA ENERGIJA - sposobnost tijela da obavi rad koja dolazi zbog njegova položaja prema drugim tijelima ili zbog konfiguracije tijela.

Promjena potencijalne energije definira se kao negativni rad konzervativne sile

$$\Delta U = -W_{konz.\,sile}$$

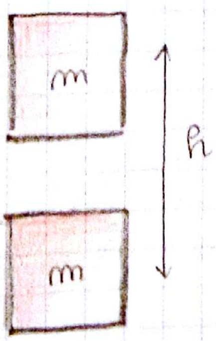
$$U_2 - U_1 = -\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}$$ možemo uzeti $U_1 = 0$ izbor referentne točke

OPRUGA KONSTANTE ELASTIČNOSTI k



$$U_{el} = -\int_0^x -F_x\, dx = \int_0^x kx\, dx = \frac{kx^2}{2}$$

PODIZANJE TIJELA MASE m na VISINU h

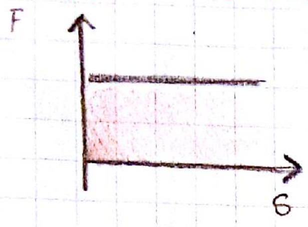


$$U_g = -\int_0^h -mg\, dx$$

$$U_g = mgh$$

6. **RAD** je savladavanje sile na određenom putu.

RAD STALNE SILE

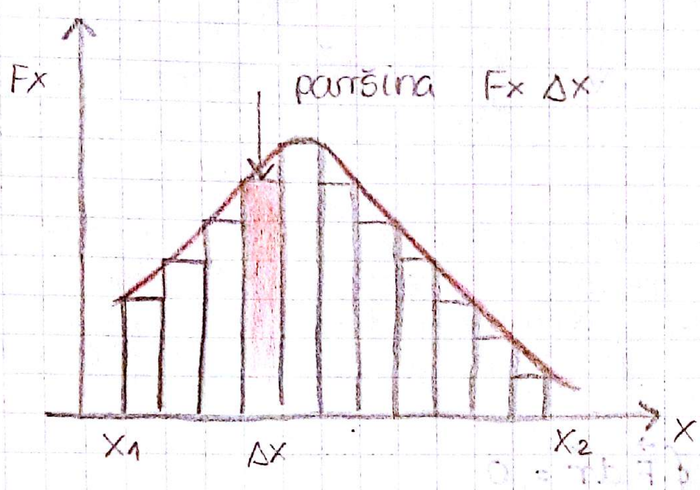


$$W = F \cdot s$$

ako sila djeluje pod nekim kutem rad obavlja samo komponenta sile u smjeru puta

$$W = F \cdot s \cdot \cos\alpha$$

RAD PROMJENJIVE SILE



$$W = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x_1}^{x_2} F_x \Delta x = \int_{x_1}^{x_2} F_x \, dx$$

KINETIČKA ENERGIJA - sposobnost tijela da izvrši rad zbog toga što ima određenu brzinu

TEOREM O RADU I KINETIČKOJ E.

da bismo izračunali kinetičku energiju tijela mase m koje se giba brzinom v, izračunajmo rad koji bi obavila sila F ubrzavajući to tijelo na putu s iz stanja mirovanja

$$W = \int F \cdot ds = \int m \cdot a\, ds = \int m \cdot \frac{dv}{dt} \cdot s = m \int \frac{dv}{dt} \cdot v\, dt = \frac{1}{2} m v^2$$

ako sila F ubrzava tijelo od v_1 do v_2:

$$W = \int_{s_1}^{s_2} F \cdot ds = \int_{s_1}^{s_2} m \cdot a \cdot ds = \int_{v_1}^{v_2} m \cdot \frac{dv}{dt} \cdot v \cdot dt$$

$$= m \cdot \int_{v_1}^{v_2} v\, dv = \frac{mv^2}{2} \Big|_{v_1}^{v_2} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}$$

9. MEHANIČKA ENERGIJA $E = E_k + U$

- mehanička energija sustava očuvana je ako u sustavu djeluju samo konzervativne sile

$W = \Delta E_k$ teorem o radu i kinetičkoj energiji

$W = -\Delta U$

$\Delta E + \Delta U = 0 \Rightarrow \Delta E = 0$

$E = E_k + U = konst$

GIBANJE U KOJEM JE OČUVANA MEHANIČKA ENERGIJA

→ slobodni pad

→ tijelo na početku ima mgh

→ kada prevali put s ima $E = mg(h-s) + \frac{1}{2}m(\sqrt{2gs})^2$

$E = mgh$

→ u trenutku kada padne na tlo ima samo kinetičku energiju $E_k = \frac{m \cdot (\sqrt{2gh})^2}{2} = mgh$

→ u svakoj točki putanje zbroj kinetičke i potencijalne energije je konst.

GIBANJE U KOJEM NIJE OČUVANA MEHANIČKA ENERGIJA

→ vučemo tijelo uz kosinu silom F, tada je rad vanjske sile

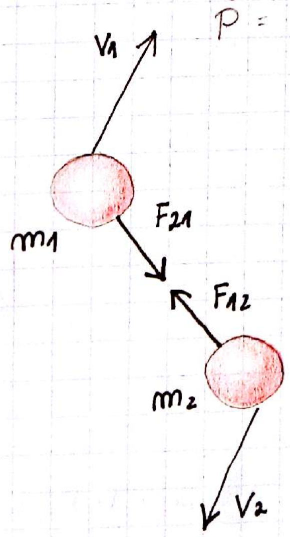
$$W' = \Delta E_k + \Delta E_p - W_{tr} = \underbrace{E_2 - E_1}_{\text{ukupna mehanička energija}} - W_{tr}$$

W_{tr} – rad sile trenja

→ mehanička E nije očuvana

10. KOLIČINA GIBANJA

vektorska veličina koja opisuje gibanje čestice ili sustava čestica



$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ m = masa tijela, $\vec{v}$ = brzina centra mase

prema 3.N.Z: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

$$m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 = 0$$

$$m_1\frac{d\vec{v}_1}{dt} + m_2\frac{d\vec{v}_2}{dt} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2) = 0$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0$$

$$P_{uk} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = konst.$$

Zaključak možemo proširiti na sustav od n čestica

Iz drugog Newtonova zakona za izolirani sustav od n čestica vrijedi:

$$\vec{F}_u = \sum \vec{F}_{un} + \sum \vec{F}_v = \frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 \dots + \vec{p}_n) = \frac{d\vec{p}_u}{dt}$$

Budući da je $\sum \vec{F}_v = 0$, a unutrašnje sile se po trećem Newtonovu zakonu poništavaju u parovima, slijedi:

$$\frac{d\vec{p}_u}{dt} = 0$$

odnosno

$$\vec{p}_u = \sum_i^n m_i \vec{v}_i = konst.$$

11. Vektor položaja centra mase

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 \dots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 \dots + m_n} \qquad \vec{r}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \Rightarrow \vec{v}_{cm} \frac{\sum_{i=1}^n \vec{p}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{P_{uk}}{m_{uk}} \Rightarrow \vec{P} = m \vec{V}_{CM}$$

$$\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{V}_{cm}}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

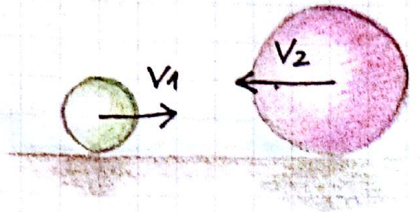
$$\vec{a}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i a_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i = \underbrace{\sum_{i=1}^n \vec{F}_{uni}}_{\substack{=0 \text{ jer se} \\ \text{parovi sila} \\ \text{poništavaju}}} + \sum_{i=1}^n \vec{F}_{vi} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{vi} = F_{vuk}$$

$$\vec{a}_{CM} = \frac{F_{vuk}}{m_{uk}} \qquad \vec{F}_{vuk} = 0 \Rightarrow \vec{a}_{cm} = 0 \Rightarrow \vec{V}_{cm} = konst.$$

12. SAVRŠENO ELASTIČNI SUDAR

očuvana je kinetička energija



$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2'$$

$$\frac{1}{2} m_1\vec{v}_1^{\,2} + \frac{1}{2} m_2\vec{v}_2^{\,2} = \frac{1}{2} m_1\vec{v}_1'^{\,2} + \frac{1}{2} m_2\vec{v}_2'^{\,2}$$

$$\vec{v}_1' = \frac{(m_1 - m_2)\vec{v}_1 + 2m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} \qquad \vec{v}_2' = \frac{2m_1\vec{v}_1 + (m_2 - m_1)\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

SAVRŠENO NEELASTIČNI SUDAR

- kugle se nakon sudara deformiraju, slijepe i gibaju zajedno
- pri sudaru kinetička energija nije sačuvana, jedan njen dio utroši se na promjenu unutarnje energije

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}\,'$$

$$\vec{v}\,' = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

13. KOEFICIJENT RESTITUCIJE

$$k = \left| \frac{\vec{v}_1' - \vec{v}_2'}{\vec{v}_1 - \vec{v}_2} \right|$$

omjer relativnih brzina prije i nakon sudara

$k = 1$ savršeno elastičan
$0 < k < 1$ neelastičan
$k = 0$ savršeno neelastičan

Koeficijent restitucije za savršeno elastičan sudar

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2'$$

$$\frac{1}{2} m_1\vec{v}_1^{\,2} + \frac{1}{2} m_2\vec{v}_2^{\,2} = \frac{1}{2} m_1\vec{v}_1'^{\,2} + \frac{1}{2} m_2\vec{v}_2'^{\,2}$$

$$m_1(\vec{v}_1 - \vec{v}_1') = m_2(\vec{v}_2' - \vec{v}_2)$$

$$m_1(\vec{v}_1^{\,2} - \vec{v}_1'^{\,2}) = m_2(\vec{v}_2'^{\,2} - \vec{v}_2^{\,2})$$

$$m_1(\vec{v}_1 - \vec{v}_1')(\vec{v}_1 + \vec{v}_1') = m_2(\vec{v}_2' - \vec{v}_2)(\vec{v}_2' + \vec{v}_2)$$

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_1' = \vec{v}_2' + \vec{v}_2$$

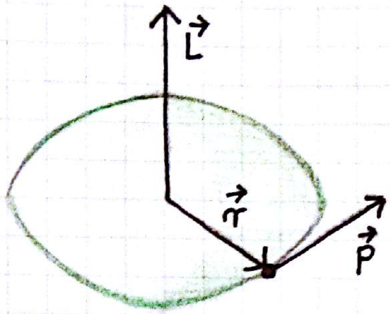
$$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = -(\vec{v}_1' - \vec{v}_2')$$

relativna brzina ostaje ista po iznosu ali joj se mijenja smjer

$$k = 1$$

14. moment sile $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

kutna količina gibanja: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$



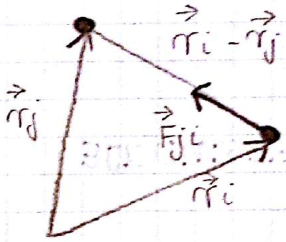
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p})$$

$$= \underbrace{\vec{v} \times \vec{p}}_{=0} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$

jer je $\vec{v} \parallel \vec{p}$

15. KUTNA KOLIČINA GIBANJA SUSTAVA ČESTICA

$$\vec{L}_{uk} = \sum_{i=1}^{m} \vec{L}_i$$



$$\frac{d\vec{L}_{uk}}{dt} = \sum_{i=1}^{m} \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{m} \vec{M}_i =$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \vec{M}_{un\,i}}_{=0} + \sum_{i=1}^{m} \vec{M}_{v\,i} = \vec{M}_{vuk}$$

$=0$ jer se momenti poništavaju

$$\vec{M}_{ij} + \vec{M}_{ji} = \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ij} = (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ji} = 0$$

$$\frac{d\vec{L}_{uk}}{dt} = \vec{M}_{vuk}$$

$\vec{M}_{vuk} = 0 \Rightarrow \vec{L}_{uk} = \text{konst.}$

16 KRUTO TIJELO

- realno tijelo određenih dimenzija i mase
- deformacija krutog tijela zbog djelovanja vanjskih sila zanemarive su u odnosu na dimenzije tijela
- može se opisati kao sustav materijalnih točaka između kojih se ne mijenja udaljenost

STUPNJEVI SLOBODE KRUTOG TIJELA

translacija u x, y, z smjeru
rotacija oko x, y, z osi

$\Big\}$ ukupno 6 stupnjeva slobode krutog tijela

UVJETI STATIKE KRUTOG TIJELA

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} \vec{M_i} = 0$$

NEMA TRANSLACIJE NEMA ROTACIJE

17 GRAVITACIJSKA SILA NA KRUTO TIJELO

$$x_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

$$(m_1 g_1 + m_2 g_2 + \dots + m_n g_n) \cdot x_t = m_1 g_1 x_1 + m_2 g_2 x_2 + \dots + m_n g_n x_n$$

ako je g konst.

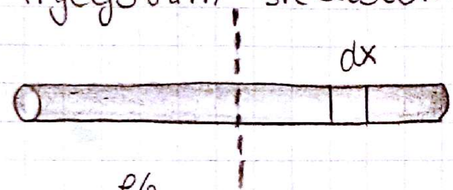
$$x_t = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = x_{CM}$$

- analogno za y i z
- hvatište ukupne gravitacijske sile je u težištu koje se podudara s CM
- ako je g konst. težište $\Leftrightarrow$ centar mase

18. Moment tromosti jest veličina karakteristična za svako tijelo koje rotira oko izabrane osi; on utječe na rotaciju slično kao što masa utječe na translaciju materijalne točke. Moment tromosti je mjera tromosti tijela pri rotaciji.

$$I = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i r_i^2 = \int r^2 \, dm$$

a) moment tromosti tankog homogenog štapa duljine l i mase m ako je os okomita na štap i prolazi njegovim središtem



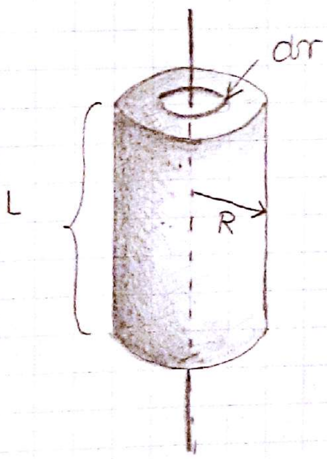
$$I = \int r^2 \, dm \qquad \mu = \frac{M}{L} = \frac{dm}{dx}$$

$$\Rightarrow dm = \mu \, dx$$

$$I = \int_{-l/2}^{l/2} x^2 \mu \, dx = \mu \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx = \mu \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}$$

$$= \frac{M}{L} \cdot \left(\frac{l^3}{24} + \frac{l^3}{24} \right) = \frac{M}{L} \cdot \frac{l^3}{12} = \frac{1}{12} ML^2$$

b) moment tromosti homogenog valjka promjera $2r$ i mase m ako se os podudara s osi simetrije valjka



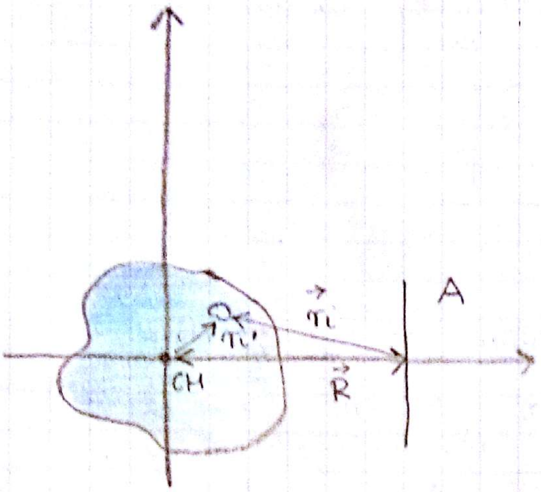
$$V = 2\pi r \cdot L \qquad \rho = \frac{dm}{dV} \Rightarrow dm = \rho \, dV$$

$$I = \int r^2 dm = \int_0^R r^2 \cdot 2\pi r L \cdot \rho \cdot dr$$

$$= \rho \cdot 2\pi L \int_0^R r^3 dr$$

$$= \frac{M}{R^2 \pi L} \cdot 2\pi L \frac{r^4}{4} \Big|_0^R = \frac{MR^2}{2}$$

Steinerov poučak - teorem o paralelnim osima



$$\vec{r}_i = \vec{r}_i' + \vec{R}$$

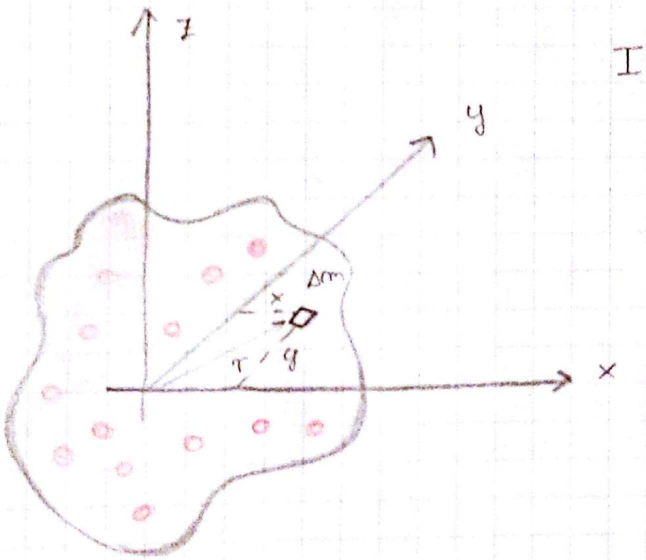
$$I = \sum_{i=1}^{m} m_i r_i^2 = \sum_{i=1}^{m} m_i \cdot (\vec{R} + \vec{r}_i')^2 =$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{m} m_i}_{M} \cdot R^2 + 2R \underbrace{\sum_{i=1}^{m} m_i \vec{r}_i'}_{0} + \underbrace{\sum_{i=1}^{m} m_i \vec{r}_i'^2}_{I_{CH}}$$

centar mase je u ishodištu

$$I = MR^2 + I_{CH}$$

Teorem o okomitim osima

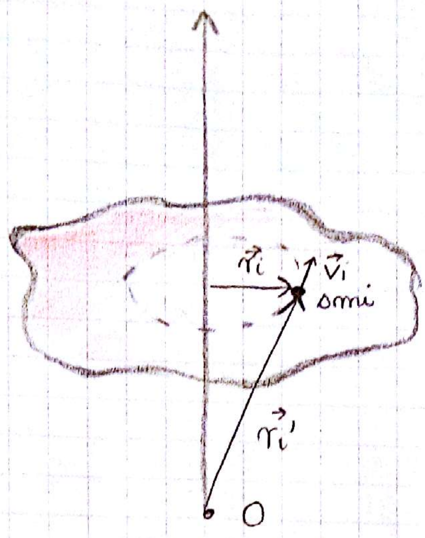


$$I_z = \sum_{i=1}^{m} m_i r_i^2 = \sum_{i=1}^{m} m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} m_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{m} m_i y_i^2 =$$

$$= I_x + I_y$$

21.



kruto tijelo podijelimo na materijalne točke mase Δm_i i brzine v_i

moment količine gibanja s obzirom na točku O

$$\Delta L_i = \vec{r}_i' \times \Delta m_i \vec{v}_i$$

projekcija vektora ΔL_i na os rotacije $\quad [\, v_i = r_i \omega \,]$

$$\Delta L_{zi} = \Delta m_i v_i r_i = \Delta m_i r_i^2 \omega$$

projekcija ukupnog momenta količine gibanja na os z dobije se zbrajanjem momenata svih čestica

$$L_z = \sum_i \Delta L_{zi} = \sum_i m_i r_i^2 \omega = I_z \omega$$

NIJE DIO ISPITNOG PITANJA

$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$ moment količine gibanja jedne od materijalnih točaka tijela

deriviranjem po vremenu

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} \times \vec{p}_i + \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} =$$

$$= \underbrace{\vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i}_{=0} + \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{M}_i$$

zbrajanjem momenta svih čestica

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i \vec{L}_i\right) = \sum_i \vec{M}_i$$

$$\Rightarrow \quad \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{d}{dt}(I_z \omega_z) = I_z \cdot \frac{d\omega_z}{dt} = I_z \alpha = M_z$$

Ako je zvrk poduprt u svom težištu te ako je sila teža jedina vanjska sila koja djeluje na zvrk, tada je ukupan moment vanjskih sila jednak nuli i kažemo da je zvrk slobodan.

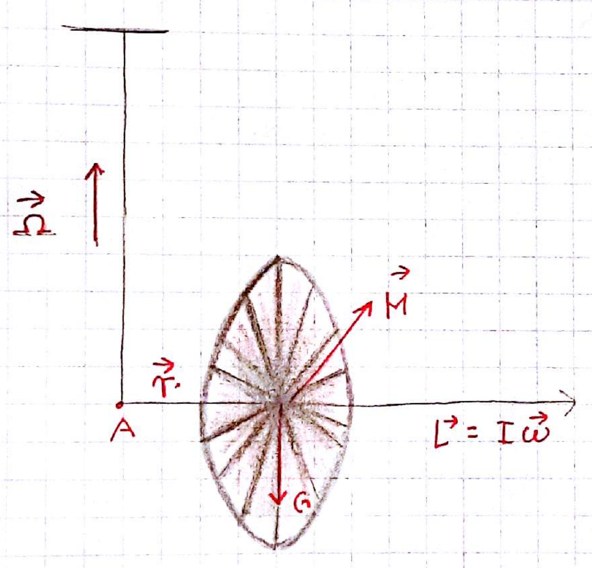
$$\vec{M}_A = \frac{dL_A}{dt} \qquad \vec{M}_A = 0 \Rightarrow \frac{dL_A}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L}_A = konst.$$

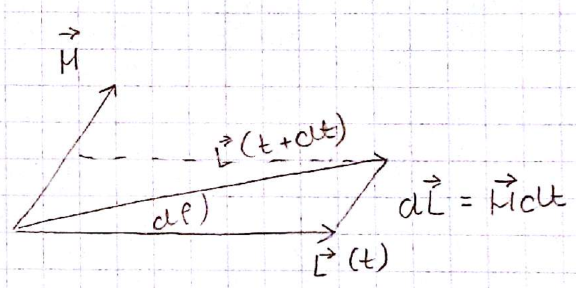
23. Precesija zvrka

→ zvrk nije učvršćen u težištu, nego u nekoj drugoj točki A, tada će na os zvrka stalno djelovati moment sile teže te zvrk izvodi gibanje koje nazivamo precesija

Na zvrk djeluje moment sile koji nastaje zbog njegove težine $G = mg$

$\vec{M}_A = \vec{r}_A \times \vec{G}$ - okomit na os rotacije i smjer $\vec{G}$





Moment količine gibanja u smjeru osi rotacije i s njim polako precesira oko točke A

U vremenskom intervalu dt $\vec{L}$ će se promijeniti za određeni $d\vec{L} = \vec{M}dt$ i u trenutku $t + dt$ bit će $\vec{L} + d\vec{L}$. Budući da je $\vec{M}$ uvijek okomit na $\vec{L}$ smjer od $\vec{L}$ stalno se mijenja, a njegov iznos ostaje konst. vrh vektora $\vec{L}$ opisuje kružnicu

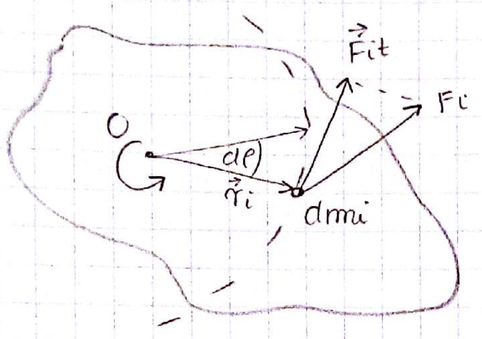
os zvrka (kao i $\vec{L}$) u vremenu dt opiše kut $d\varphi$

$$\Omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{|d\vec{L}|}{L\,dt} = \frac{M\,dt}{L\,dt} = \frac{M}{L}$$

$$\vec{M} = \vec{\Omega} \times \vec{L}$$

$$\Omega = \frac{M}{I_z \omega}$$

20. tijelo rotira kutnom brzinom ω oko nepomične osi z, koja prolazi kroz točku O okomito na ravninu slike



na materijalnu točku dm_i djeluje unutrašnja i vanjska sila
$$\vec{F}_i = \vec{F}_{ui} + \vec{F}_{vi}$$

rad obavlja samo tangencijalna komponenta sile koja ima smjer pomaka $d\vec{s}$

$$dW = F_{it}\, ds_i = \underbrace{F_{it} \cdot r_i}\, d\varphi$$

komponenta momenta sile s obzirom na os rotacije

$$dW_i = M_{iz}\, d\varphi$$

zbrajanjem doprinosa po svim elementarnim masama:

$$dW = \sum dW_i = M_z\, d\varphi$$

komponenta ukupnog momenta vanjskih sila, jer je zbroj momenata svih unutrašnjih sila jednak nuli

Pri rotaciji za kut φ rad je

$$W = \int_0^{\varphi} M_z\, d\varphi$$

Kinetičku energiju tijela koje rotira oko nepomične osi možemo odrediti tako da uzmemo u obzir da se taj rad pretvara u kinetičku energiju rotacije

$$dE_k = dW = M_z\, d\varphi = I_z \alpha\, \omega\, dt = I_z \cdot \frac{d\omega}{dt} \cdot \omega\, dt = I_z\, \omega\, d\omega$$

$$E_k = \int_0^{\omega} I_z\, \omega\, d\omega = \frac{1}{2} I_z\, \omega^2$$

II. NAČIN

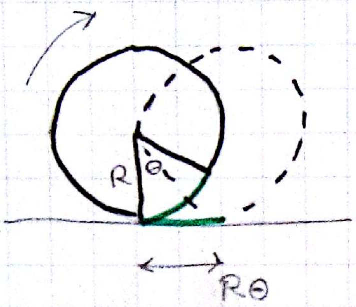
kinetička energija materijalne točke: $E_{ki} = \frac{1}{2} \Delta m_i\, r_i^2\, \omega^2$ jer je $v_i = r_i\, \omega$

kinetička energija krutog tijela

$$E_k = \sum_i E_{ki} = \frac{1}{2} \sum m_i\, r_i^2\, \omega^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \underbrace{\sum_i \Delta m_i r_i^2} = \frac{1}{2} I_z\, \omega^2$$

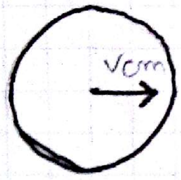
moment tromosti s obzirom na os z

22. kotač momenta tromosti I i polumjera r



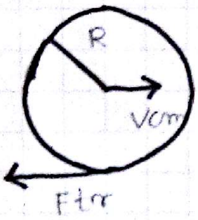
$v_{CM} > R\omega \qquad F_{tr} = -\mu_D N$

$v_{CM} < R\omega \qquad F_{tr} = \mu_D \cdot N$



$Ma_{CM} = -F_{tr} = -\mu Mg$

$a_{CM} = -\mu g$



$M_Z = I_Z \cdot \alpha = -RF_{tr} = -R\mu Mg$

$\alpha = -\dfrac{R\mu Mg}{I_Z}$