Materijalna točka ili sitno tijelo u mehanici

Sadržaji i metode fizike

Fizika je **fundamentalna prirodna znanost** koja se bavi proučavanjem općih svojstava i zakona kretanja materije, počevši od gibanja tijela pa sve do strukture i svojstava fizikalnog prostora i polja.

Fizika proučava:
- makrosvijet, tj. tijela na Zemlji, planete, zvijezde itd.
- mikrosvijet, tj. molekule, atome, elementarne čestice i dr.

U fizici se nastoji otkriti zakone ponašanja materije u različitim uvjetima i tako dobivene spoznaje primijeniti u tehnologiji i tehnici. Današnja tehnička i tehnološka dostignuća proizašla su iz dosadašnjih znanstvenih istraživanja u fizici i drugim prirodnim znanostima pa je bez razvoja prirodnih znanosti nezamisliv i budući razvoj tehnike i tehnologije.

Sama riječ **FIZIKA** potječe od grčke riječi $\varphi \upsilon \sigma \iota \zeta$ (fizis), što znači PRIRODA, pa je izvorno proučavala sve prirodne pojave i dugo vremena se zvala *filozofija prirode*.

Fiziku možemo podijeliti na:
- **klasičnu fiziku**, koja proučava pojave iz našeg tzv. makrosvijeta, tj. pojave koje možemo vidjeti i neposredno mjeriti
- **modernu fiziku**, koja se razvila u 20. stoljeću kao odgovor na činjenice koje se nisu mogle uklopiti u okvire klasične fizike

Klasičnu fiziku možemo podijeliti na:
- mehaniku s mehanikom tekućina
- toplinu i termodinamiku
- optiku
- akustiku
- elektromagnetizam

Klasična mehanika je osnovni i najstariji dio fizike koji opisuje gibanja i interakcije (međudjelovanja) «običnih tijela», tj. tijela čije su dimenzije velike u usporedbi s veličinom atoma (10^{-10} m) i koja se gibaju brzinama znantno manjim od brzine svjetlosti ($c = 3 \cdot 10^8$ m/s). Ona se temelji na 3 aksioma koja je Newton formulirao još u 17. stoljeću.

Moderna fizika obuhvaća:
- relativističku mehaniku
- kvantnu mehaniku
- atomsku fiziku
- nuklearnu fiziku
- fiziku elementarnih čestica

Teorijom relativnosti 1905. godine Einstein je radikalno promijenio dotadašnje shvaćanje prostora i vremena te razradio tzv. **relativističku mehaniku** koja promatra gibanje tijela s velikim brzinama (reda veličine brzine svjetlosti). Također je pokazano da zakoni relativističke mehanike prelaze u zakone klasične mehanike kada se radi o brzinama koje su male u usporedbi s brzinom svjetlosti.

Kvantna mehanika objašnjava pojave u atomskom svijetu koje klasična mehanika ne može objasniti.

Fizika je **empirijska** i **egzaktna** znanost:

- **empirijska** jer konačnu potvrdu neke teorije ili zakona daju eksperimentalni rezultati, a svaka hipoteza se mora potvrditi pokusom da bi postala sastavnim dijelom teorije
- **egzaktna** jer su eksperimentalni rezultati reproducibilni, a teorije se formuliraju strogo matematički

Metode fizike

Znanost pokriva mnogo različitih područja i polja **znanja** koja se zasnivaju na provjerenim činjenicama i vezama između činjenica, ili na filozofskom mišljenju. Znanost je osnova i pokretač razvoja moderne civilizacije. Znanstvena otkrića utječu na spoznaju života i samog čovjeka, na spoznaju svijeta te na ljudsku duhovnu i materijalnu kulturu.

Znanstveno istraživanje je stvaralački proces koji počiva na znanstvenoj metodi. Znanstveni pristup uključuje otvorenost rezultata istraživanja, čime je omogućena provjera (verifikacija) znanstvenih rezultata i njihova ponovljivost (reproducibilnost).

Znanstvena metoda je proces koji se može podijeliti na sljedeće faze:

1. Promatranje fizikalnog ili prirodnog procesa i prepoznavanje problema
2. Postavljanje hipoteze – najčešće u obliku općeg principa ili matematičke veze fizikalnih veličina koje su vezane s procesom
3. Predviđanje rezultata temeljeno na postavljenoj hipotezi i na rezultatima srodnih fizikalnih procesa
4. Dizajn i izvođenje eksperimenta za provjeru hipoteze
5. Formuliranje teorije koja povezuje potvrđenu hipotezu s prethodnim znanjima i predviđanjima teorije

Metode fizike se dijele na:

- eksperimentalne metode fizike
- teorijske metode fizike

1. Eksperimentalne metode fizike

Fizikalna istraživanja se temelje na promatranju i/ili na eksperimentu.

Promatranje je *pasivna* metoda u kojoj motritelj čeka da se prirodna pojava dogodi. Ovom metodom se pojave bilježe, razvrstavaju i analiziraju.

Eksperiment je *aktivna* metoda u kojoj eksperimentalni fizičar definira istraživačku pojavu i postavlja uvjete da bi pojavu izazvao i izmjerio mjernim instrumentima, sakupio podatke mjerenja i na kraju obradio.

I aktivna i pasivna metoda koriste mjerne istrumente: komercijalne mjerne istrumente za mjerenje pojedinih veličina, ili instrumente u sastavu eksperimenta postavljenog u laboratoriju. Tipične fizikalne veličine koje se mjere su: duljina, vrijeme, masa, težina, napon, tlak, impuls, udarni presjek, broj događaja, energija...

2. Teorijske metode fizike

Teorijske metode su matematičke ili računalne metode koje dovode do fizikalnih zakona, teorema, modela, hipoteza, paradoksa... Temelj teorijskih metoda je matematika.

Ponavljanjem ciklusa znanstvene metode, ponavljanjem niza provjera i eksperimenata preživjet će samo neke hipoteze koje kao nepromjenjive istine prerastaju u **fizikalni zakon**. Istodobno takav prirodni zakon stalno prolazi provjere istinitosti, provjere primjenjivosti i provjere dosega.

Skepticizam prema apsolutnoj istinitosti fizikalnog zakona je odlučujući korak prema novom istraživanju i stvaranju novih hipoteza.

Znanstvena metoda omogućava racionalni i kvantitativni pristup prirodnim pojavama i samim time objašnjenje i razumijevanje velikog broja prirodnih pojava s ograničenim brojem fundamentalnih zakona.

Fizikalne veličine

Fizikalna veličina je mjerljivo svojstvo (parametar) fizikalnog stanja, procesa ili tijela, koje omogućuje definiranje fizikalne pojave i njeno opisivanje u matematičkom obliku pomoću odgovarajućih jednadžbi.

Primjeri fizikalnih veličina: put, vrijeme, masa, brzina, rad, energija, snaga, temperatura, tlak...

Fizikalne veličine se označavaju malim i velikim slovima latinske abecede i grčkog alfabeta.

Znakovi, odn. simboli fizikalnih veličina se koriste prema međunarodnom dogovoru (ISO – International Standard Organisation, IUPAP – International Union for Pure and Applied Physics). Većinom su to početna slova engleskih ili latinskih naziva odgovarajućih fizikalnih veličina:

- brzina – v – velocity, velocitas
- sila – F – force
- rad – W – work
- vrijeme – t – time, tempus

Fizikalni zakoni se precizno mogu izraziti pomoću fizikalnih jednadžbi (formula) koje povezuju fizikalne veličine u tom zakonu.

Na primjer: pri jednolikom gibanju po pravcu put je jednak umnošku brzine i vremena i to se precizno može izraziti jednadžbom $s = v\,t$.

Mjeriti neku veličinu znači odrediti broj koji pokazuje koliko puta ta veličina sadrži u sebi istovrsnu veličinu dogovorom uzetu za jedinicu.

Na primjer: izmjeriti duljinu stola znači usporediti je s jedinicom duljine (metrom) i utvrditi koliko promatrana duljina ima tih jedinica, ili, koliko je mjernih jedinica (metara) sadržano u duljini stola.

Tako dobijamo brojčanu vrijednost fizikalne veličine koju mjerimo no to nam nije dovoljno jer moramo znati i njezinu jedinicu.

Svaka fizikalna veličina se izražava pomoću brojčane vrijednosti i mjerne jedinice:

$$A = \{A\}\,[A]$$

A - vrijednost fizikalne veličine

$\{A\}$ - brojčana vrijednost (mjerni broj)

$[A]$ - mjerna jedinica

Na primjer: duljina stola je l = 1,06 m
$\{l\}$ =1,06
$[l]$ = m

Problematikom mjerenja i vrijednostima mjernih jedinica bavi se posebna grana fizike i tehnike, mjeriteljska znanost i tehnika pod imenom **metrologija**. Postoje razni međunarodni organi, metrološke organizacije, koje nastoje uskladiti i onda pronaći najpogodnije mjerne jedinice i oznake, te uvesti jedinstveni međunarodni sustav jedinica u sve grane znanosti i tehnike.

Fizikalne veličine dijelimo u dvije glavne skupine:

- **skalarne fizikalne veličine**, koje su potpuno određene svojom brojčanom vrijednošću i odgovarajućom jedinicom (npr. volumen, gustoća, temperatura, masa, frekvencija, rad, snaga, vrijeme...)
- **vektorske fizikalne veličine**, za čije potpuno određivanje moramo znati pravac nositelj, smjer vektora i iznos (brojčana vrijednost izražena u odgovarajućim jedinicama) (npr. brzina, akceleracija, sila, količina gibanja, moment sile...)

SI mjerne jedinice

Na 11. zasjedanju Generalne konferencije za utege i mjere, u listopadu 1960. godine, prihvaćen je **Međunarodni sustav mjernih jedinica**, tzv. **SI** (*Système International d'Unités*), koji je i kod nas obvezatan (Zakon o mjernim jedinicama i mjerilima, NN 58/1993).

Dogovorom je odabrano 7 osnovnih mjernih jedinica Međunarodnog sustava iz kojih se matematičkim operacijama izvode sve ostale jedinice.

Osnovne jedinice Međunarodnog sustava i pripadajuće fizikalne veličine:

Fizikalna veličina	**Znak**	**Mjerna jedinica**	**Znak**
Duljina	*l*	metar	m
Masa	*m*	kilogram	kg
Vrijeme	*t*	sekunda	s
Termodinamička temperatura	*T*	kelvin	K
Električna struja	*I*	amper	A
Jakost svjetlosti	*I*	kandela	cd
Množina (količina tvari)	*n*	mol	mol

Definicije osnovnih jedinica Međunarodnog sustava:

Metar je duljina puta koju svjetlost prijeđe u vakuumu za vrijeme jednog 299 792 458-og dijela sekunde.
Time je definirana i brzina svjetlosti kao prirodna konstanta koja iznosi:
c = 299 792 458 m/s.

Kilogram je masa međunarodne pramjere (etalona) kilograma koja se čuva u Međunarodnom uredu za utege i mjere u Sèvresu kraj Pariza.
Ta međunarodna pramjera izrađena je od legure platine (90%) i iridija (10%) u obliku jednakostraničnog valjka promjera (odn. visine) 39 mm.

Sekunda je trajanje 9 192 631 770 perioda zračenja koje nastaje pri prijelazu elektrona između dviju hiperfinih razina osnovnog stanja atoma cezija 133.

Stalna električna struja ima vrijednost jedan amper ako, prolazeći u svakom od dva paralelna, ravna, beskonačno duga vodiča, zanemarivo malog presjeka, razmaknuta 1 m u vakuumu, uzrokuje između njih silu $2 \cdot 10^{-7}$ N po jednom metru duljine vodiča.

Kelvin je termodinamička temperatura koja je jednaka 273,16-om dijelu termodinamičke temperature trojne točke vode.
Temperatura trojne točke vode je ona temepratura na kojoj je voda u ravnoteži u sva tri agregatna stanja (faze), tj. u čvrstoj, tekućoj i plinovitoj fazi. Za vodu je temperatura trojne točke *t* = 0,01 ºC, odnosno *T* = 273,16 K (pri tom je tlak p_0 = 6,1 mbar).

Kandela je jakost svjetlosti u danom pravcu izvorakoji emitira monokromatsko zračenje frekvencije $5{,}4 \cdot 10^{14}$ Hz i čija je energetska jakost u tom pravcu 1/683 vata po steradijanu.

Mol je količina tvari koja sadrži isto toliko jednakih čestica (molekula, atoma, elektrona, iona i sl.) koliko ima atoma u 0,012 kg izotopa ugljika 12.

Izvedene jedinice izvode se iz osnovnih pomoću algebarskih izraza, matematičkim operacijama.

Na primjer: jedinica brzine izvodi se iz definicijske jednadžbe za brzinu jednolikog gibanja: brzina = put/vrijeme

$v = s/t \qquad [v] = [s]/[\,t] = \mathrm{m/s}$

Spomenimo dvije izvedene fizikalne veličine. To su plošni kut i prostorni kut, čije su jedinice radijan (rad) i steradijan (sr).

Radijan je kut između dva polumjera koji na kružnici isijecaju luk duljine jednake polumjeru.

Steradijan je prostorni kut stošca s vrhom u središtu kugle, koji na plohi kugle omeđuje površinu jednaku površini kvadrata čija je stranica jednaka polumjeru kugle.

Pomoću određenih predmetaka (prefiksa) dobivamo decimalne višekratnike i dijelove jedinica.

Na primjer: kilovat = 1000 vata; 1 kW = 1000 W
milisekunda = 10^{-3} sekundi; 1 ms = 10^{-3} s

Međunarodno prihvaćeni prefiksi fizikalnih jedinica:

Prefiks	**Simbol**	**Vrijednost**
jota	Y	10^{24}
zeta	Z	10^{21}
eksa	E	10^{18}
peta	P	10^{15}
tera	T	10^{12}
giga	G	10^{9}
mega	M	10^{6}
kilo	k	10^{3}
hekto	h	10^{2}
deka	da	10^{1}
deci	d	10^{-1}
centi	c	10^{-2}
mili	m	10^{-3}
mikro	μ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}
piko	p	10^{-12}
femto	f	10^{-15}
ato	a	10^{-18}
zepto	z	10^{-21}
jokto	y	10^{-24}

Zakonom o mjernim jedinicama i mjerilima propisana je upotreba mjernih jedinica. To su mjerne jedinice Međunarodnog sustava jedinica (SI) i jedinice izvan SI koje predviđa zakon. Neke jedinice izvan SI su toliko udomaćene u pojedinim područjima da njihovo izbacivanje ne bi bilo svrsishodno. One će se u tim posebnim područjima i dalje moći upotrebljavati.

Na primjer: morska milja, čvor, hektar (ha), litra (L), stupanj (º), jedinica atomske mase (u), minuta (min), sat (h), dan (d), vatsat (Wh), elektronvolt (eV), Celzijev stupanj (ºC), bar (bar) itd.

Kinematika sitnog tijela

Mehanika je dio fizike koji proučava zakone gibanja tijela, to jest vremensku promjenu položaja tijela u prostoru.

Mehanika se dijeli na:
- kinematiku
- dinamiku
- statiku (kao posebni slučaj dinamike)

Mehaniku možemo podijeliti i na:
- mehaniku materijalne točke (ili sitnog tijela)
- mehaniku sustava materijalnih točaka
- mehaniku krutog tijela
- mehaniku fluida
- mehaniku titranja i valova

Kinematika (grčki *kinein* = gibati) proučava gibanje, bez obzira na uzroke gibanja i na svojstva tijela koja se gibaju, to jest ne uzima u obzir njihovu masu i sile koje djeluju na njih. Kinematika gibanje tretira matematički i određuje položaj, brzinu i akceleraciju tijela ovisno o vremenu.

Dinamika (grčki *dynamis* = sila) proučava uzroke gibanja i utjecaj sile i mase na gibanje. Dinamika daje fizikalnu bit gibanja.

Statika proučava uvjete ravnoteže tijela.

Gibanje je jedan od temeljnih problema fizike.

Prve zakone gibanja našli su:
- **Galileo Galilei** (1564-1642), talijanski fizičar i astronom, jedan od osnivača eksperimentalne metode; pronašao je zakone slobodnog pada, princip inercije i zakon slaganja brzina
- **Isaac Newton** (1643-1727), engleski znanstvenik, jedan od najvećih fizičara; postavio je temelje fizike i zajedno s Leibnizom pronašao infinitenzimalni račun; najpoznatije djelo mu je Philosophiae Naturalis Principia Mathematica

Tijelo se giba ako mijenja položaj prema nekom drugom tijelu ili okolini. Da bismo tu promjenu položaja izmjerili, za okolinu vežemo određeni **referentni sustav**, te kažemo da se tijelo giba ako mijenja položaj prema tom referentnom sustavu. Svako gibanje je **relativno gibanje** prema određenom referentnom sustavu.

Mirovanje je posebni oblik gibanja. Tijelo miruje ako ima stalne, nepromijenjene koordinate s obzirom na izabrani referentni sustav. Budući da u svemiru nema ni jedne točke koja apsolutno miruje i za koju bismo mogli vezati apsolutni referentni sustav, ne postoji apsolutno već samo relativno gibanje, odnosno mirovanje.

Sitno tijelo, materijalna točka ili čestica

Ponekad se pri proučavanju gibanja mogu zanemariti dimenzije tijela i čitavo tijelo predočiti jednom točkom mase *m*. Takva aproksimacija zove se **sitno tijelo**, **materijalna točka** ili **čestica**.

Na primjer:

- vlak, automobil, raketu... pri proučavanju njihova gibanja često aproksimiramo materijalnom točkom
- Zemlju također kada promatramo njeno gibanje oko Sunca (no ne možemo kada promatramo njenu vrtnju oko vlastite osi)
- atom pri promatranju gibanja atoma (ne i kad proučavamo njegovu strukturu)

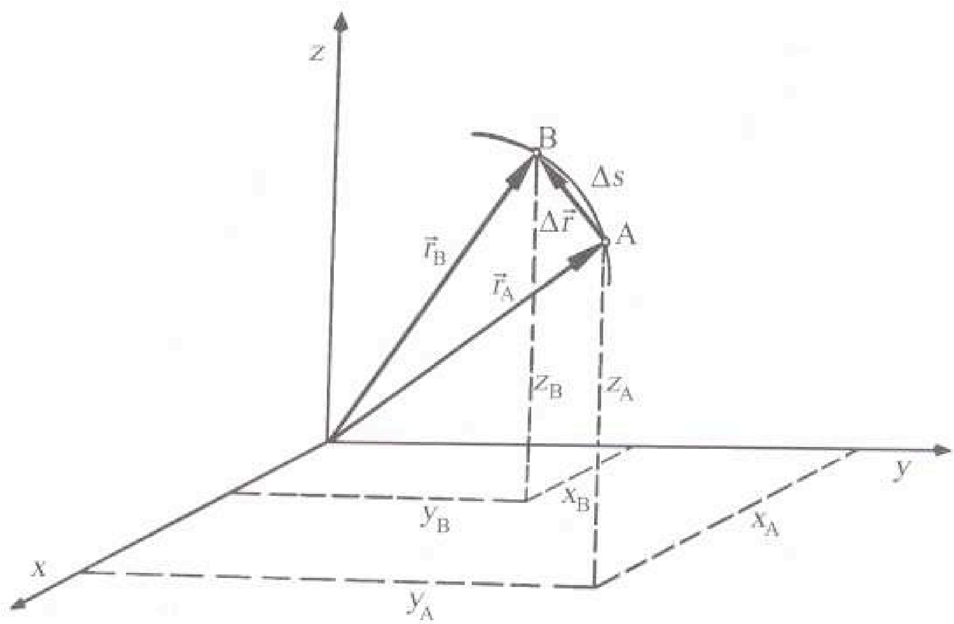
Koordinatni sustav

Položaj, odnosno koordinate materijalne točke ovise o izabranom referentnom sustavu. Izbor referentnog sustava je proizvoljan, ali se obično kao najpraktičniji odabire sustav koji miruje s obzirom na Zemlju, takozvani **laboratorijski sustav**.

Položaj materijalne točke možemo opisati pomoću koordinata u nekom koordinatnom sustavu:

- pravokutnom koordinatnom sustavu (x, y, z)
- cilindričnom koordinatnom sustavu (ρ, φ, z)
- sfernom koordinatnom sustavu (r, φ, θ)
- paraboličkom koordinatnom sustavu (ξ, η, φ)
- eliptičkom koordinatnom sustavu (u, v, z)

Najčešće položaj materijalne točke određujemo pomoću njenih koordinata u pravokutnom Kartezijevom koordinatnom sustavu.



SLIKA: Određivanje položaja materijalne točke - Kulišić, slika 2.1. str.11

Položaj materijalne točke je određen udaljenostima x, y i z od koordinatnih ravnina. Umjesto s x, y i z položaj možemo odrediti i **radijus-vektorom** $\vec{r}$ koji spaja ishodište koordinantnog sustava s materijalnom točkom. Vektor $\vec{r}$ zove se **vektor položaja** materijalne točke.

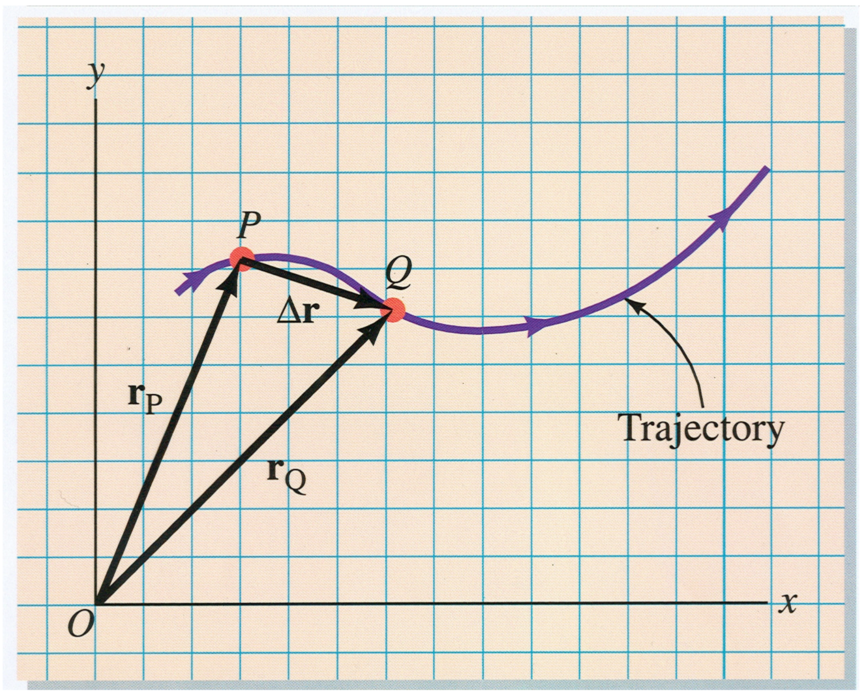
Ako se materijalna točka giba, njezine se koordinate mijenjaju u vremenu pa ona u prostoru opisuje neku krivulju (putanju) čija je jednadžba:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

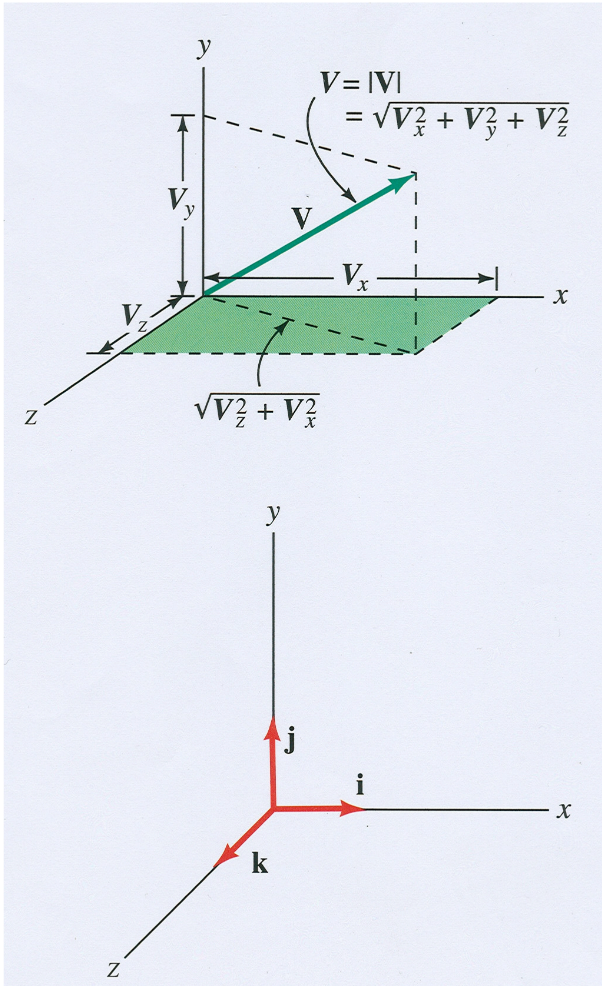
Putanja je skup svih točaka kroz koje prolazi materijalna točka koja se giba. Dio putanje koji materijalna točka prijeđe u određenom vremenu se zove **put**. To je prijeđena udaljenost po putanji od neke početne točke.

Ako je u trenutku t_1 točka bila u položaju A, koji je određen vektorom položaja $\vec{r}_A$, a u trenutku $t_1+\Delta t$ u položaju B, koji je određen vektorom položaja $\vec{r}_B$, onda je put Δs jednak dijelu luka putanje AB.

Vektor $\Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$ se zove **vektor pomaka materijalne točke**. Pomak je promjena vektora položaja.



Općenito za neki vektor $\vec{V}$:



Gibanja materijalne točke s obzirom na njihovu putanju dijelimo na:

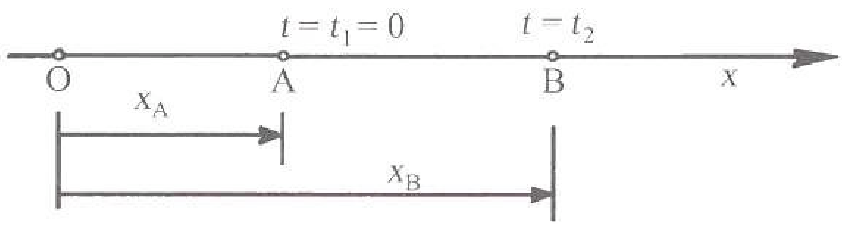
- pravocrtna
- krivocrtna

Brzina i akceleracija

Jednoliko pravocrtno gibanje. Brzina

Najjednostavnije gibanje je jednoliko gibanje po pravcu. Neka je taj pravac x-os našeg koordinatnog sustava. Položaj čestice određujemo koordinatom x, to jest udaljenošću od neke referentne točke koju uzimamo kao ishodište O. Položaj je pozitivan ako je desno od ishodišta i negativan ako je lijevo od ishodišta.

Pomak čestice, to jest promjena njena položaja $\Delta x = x_B - x_A$, je pozitivan kad se čestica giba slijeva nadesno i negativan kad se giba zdesna nalijevo. Kod pravocrtnog gibanja, koje je uvijek u istom smjeru, pomak je jednak prijeđenom putu.



SLIKA: Jednoliko gibanje po pravcu – Kulišić slika 2.2. str.18

U trenutku $t = 0$ tijelo se nalazi u točki A s koordinatom x_A, a nakon vremena t tijelo će doći u točku B s koordinatom x_B. Gibanje je jednoliko što znači da tijelo u jednakim vremenskim intervalima prevaljuje jednake putove.

Omjer prijeđenog puta $s = x_B - x_A$ i za to potrebnog vremena $t = t_2 - t_1$, konstantan je i zove se **brzina** tijela: $v = s/t$.

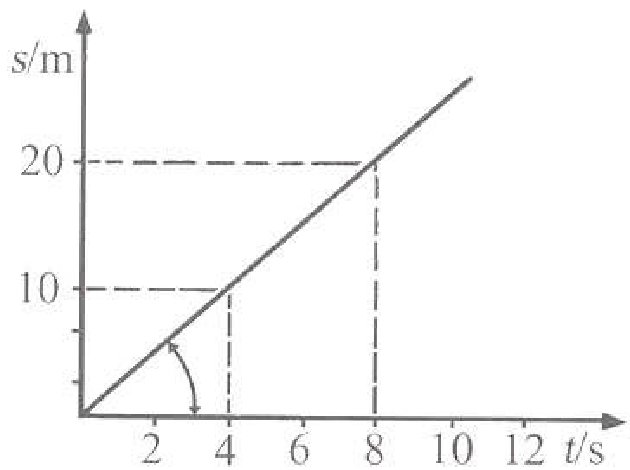
Iz definicijske jednadžbe nalazimo jedinicu brzine: $[v] = [s]/[t] = \text{m/s}$

Pri jednolikom pravocrtnom gibanju put koji prijeđe materijalna točka proporcionalan je vremenu: $s = v\,t$

Položaj materijalne točke mijenja se po zakonu: $x = x_0 + v\,t$, gdje je x_0 koordinata točke u trenutku $t = 0$. To je **zakon jednolikog gibanja po pravcu**.

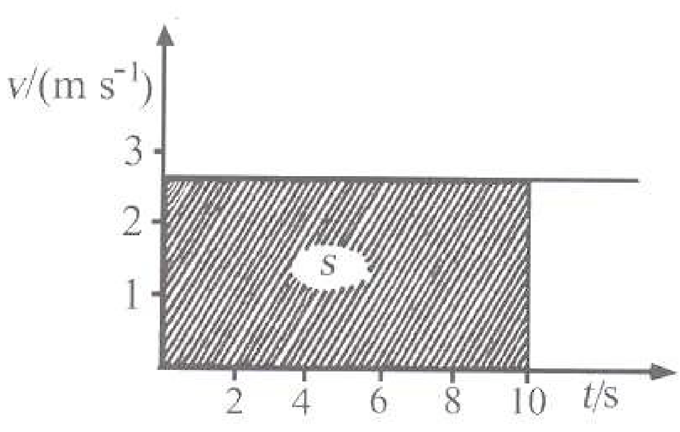
Put materijalne točke kao funkciju vremena možemo prikazati i grafički u prostorno-vremenskom ili $s(t)$ dijagramu, ili brzinu kao funkciju vremena u $v(t)$ dijagramu:

1. Grafički prikaz ovisnosti puta o vremenu pri jednolikom gibanju po pravcu – put je linearna funkcija vremena; koeficijent smjera tog pravca ovisi o brzini tijela.



SLIKA: Grafički prikaz ovisnosti puta o vremenu pri jednolikom gibanju po pravcu – Kulišić slika 2.3. str.19

2. Grafički prikaz ovisnosti brzine o vremenu pri jednolikom gibanju po pravcu – budući je brzina konstanta, $v(t)$ dijagram je pravac paralelan s osi t; površina ispod tog pravca označava prijeđeni put u vremenu t.

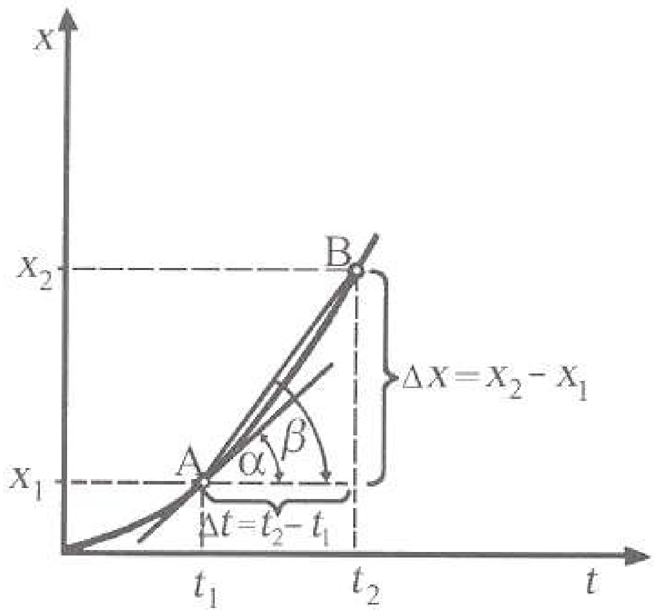


SLIKA: Grafički prikaz ovisnosti brzine o vremenu pri jednolikom gibanju po pravcu – Kulišić slika 2.4. str.19

U ovom razmatranju je brzina bila konstantna i po iznosu i po smjeru pa možemo pisati u vektorskom obliku kao: $\vec{v}$ = konst.

Nejednoliko pravocrtno gibanje. Akceleracija

Pri nejednolikom pravocrtnom gibanju je smjer brzine konstantan, ali se iznos mijenja tijekom vremena. Ovisnost pomaka, odnosno puta o vremenu je neka općenita funkcija vremena pa je $x(t)$, odnosno $s(t)$ dijagram neka krivulja.



SLIKA: $x(t)$ dijagram za nejednoliko gibanje po pravcu – Kulišić slika 2.5. str.20

Pri nejednolikom gibanju brzina se stalno mijenja s vremenom pa često govorimo o srednjoj brzini. Ako je u t_1 položaj čestice određen koordinatom x_1, a u trenutku t_2 koordinatom x_2, tada je **srednja brzina** u tom intervalu:

$$\overline{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Srednja brzina u vremenskom intervalu Δt određena je nagibom (koeficijentom smjera – $\mathrm{tg}\beta$) spojnice točaka A i B (sekante).

Da bismo dobili **pravu, trenutnu brzinu** tijela u trenutku t (na primjer u točki A), zamislimo da je točka B sve bliže točki A i nađemo graničnu vrijednost prema kojoj teži srednja brzina:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \overline{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{x}$$

Tu je $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ vremenska derivacija puta. Trenutna brzina jednaka je prvoj vremenskoj derivaciji koordinate položaja.

Budući da je dx = ds, brzina je također jednaka vremenskoj derivaciji prijeđenog puta $v = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t$.

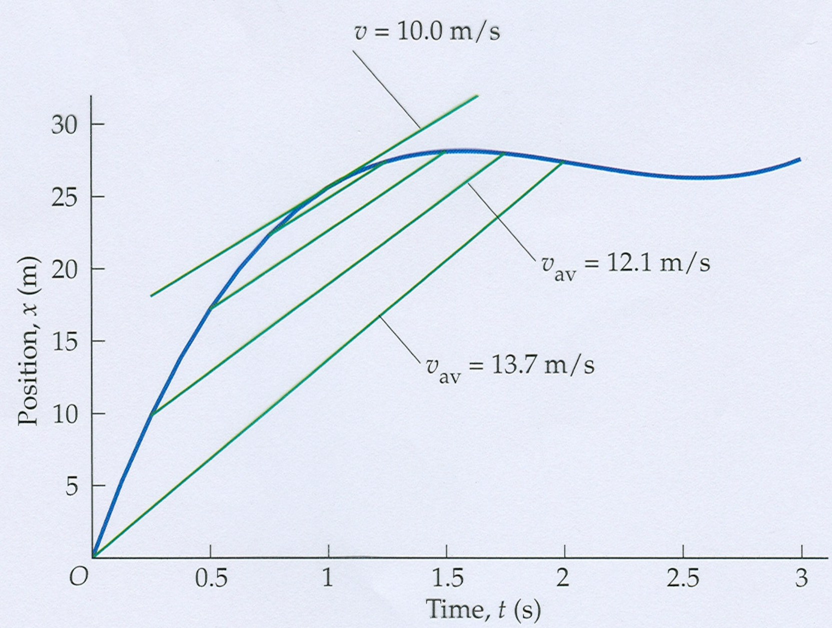
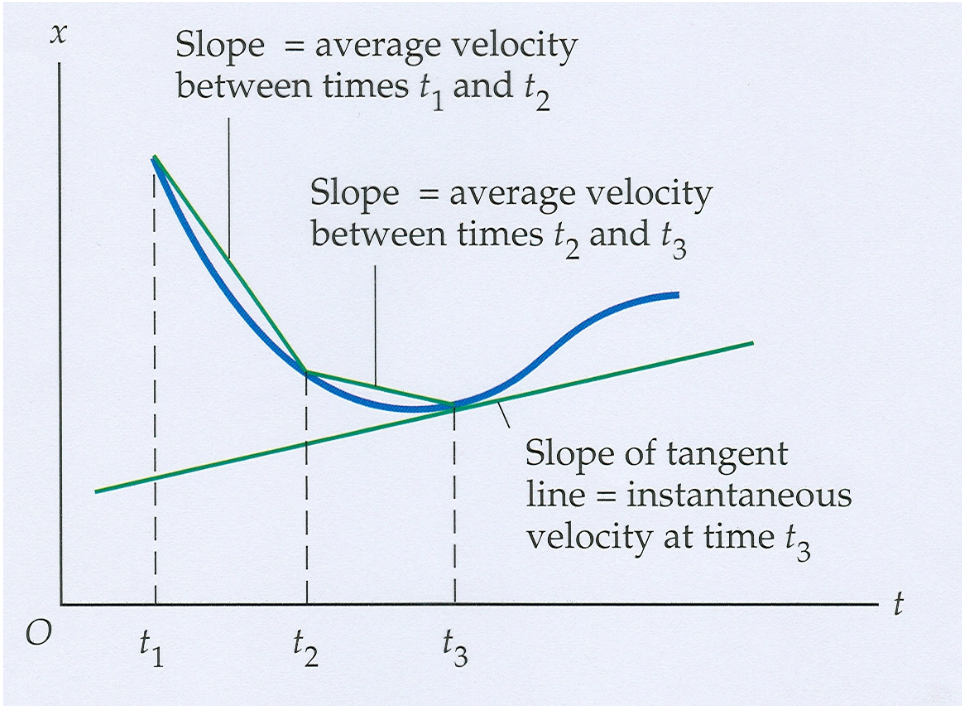


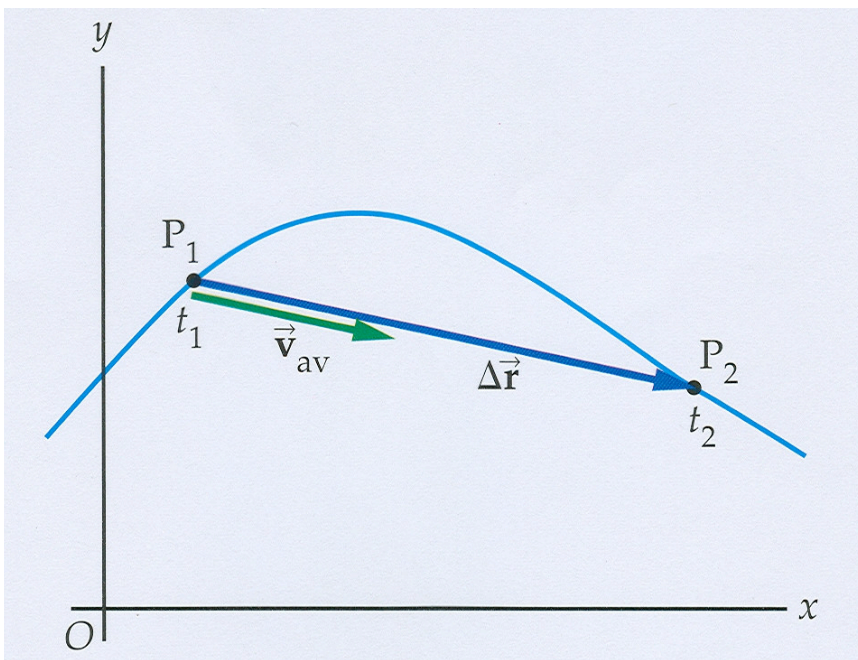
Table 2-1 *x*-versus-*t* values for Figure 2-7

TABLE 2–1
***x*-versus-*t* Values for Figure 2–7**

t (s)	x (m)
0	0
0.25	9.85
0.50	17.2
0.75	22.3
1.00	25.6
1.25	27.4
1.50	28.1
1.75	28.0
2.00	27.4



x
Slope = average velocity
between times t_1 and t_2
Slope = average velocity
between times t_2 and t_3
Slope of tangent
line = instantaneous
velocity at time t_3
O
t_1
t_2
t_3
t



y
P_1
t_1
$\vec{\mathbf{v}}_{av}$
$\Delta\vec{\mathbf{r}}$
P_2
t_2
O
x

Izračunavanje puta iz brzine

Pretpostavimo da je kod nejednolikog gibanja brzina zadana krivuljom $v(t)$. Vremenski interval $t_2 - t_1$, u kojem računamo prijeđeni put, podijelimo na intervale Δt_i i promjenjivu brzinu v u svakom intervalu zamijenimo srednjom vrijednošću $\overline{v}_i$.

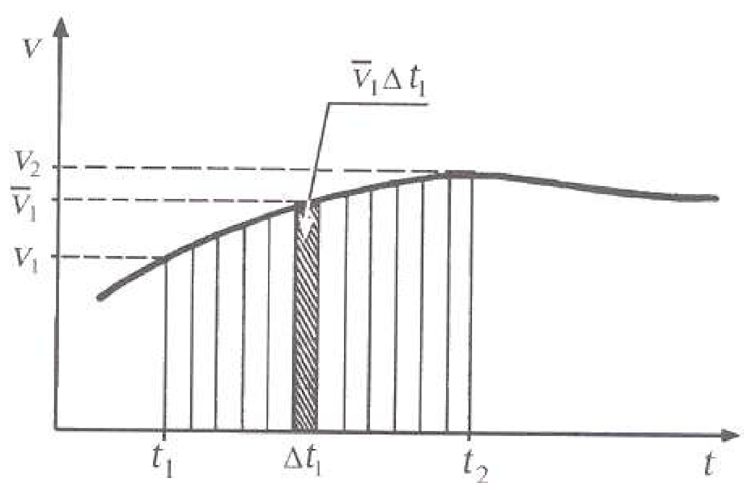
Put prijeđen u intervalu Δt_i približno je jednak $\overline{v}_i \Delta t_i$, a zbroj svih $\overline{v}_i$ Δt_i aproksimacija je prijeđenog puta između t_1 i t_2:

$$s \approx \sum_i \overline{v}_i \Delta t_i$$

Točan izraz za prijeđeni put s dobijemo kao graničnu vrijednost gornjeg zbroja kada svaki vremenski interval Δt_i teži nuli jer tada srednja brzina teži trenutnoj brzini, a prevaljeni put jednak je vremenskom integralu brzine:

$$s = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_i \overline{v}_i \Delta t_i = \int_{t_1}^{t_2} v(t) \mathrm{d}t$$

Prevaljeni put možemo odrediti grafički i on je po iznosu jednak površini ispod krivulje $v(t)$, od početnog do krajnjeg trenutka gibanja.



SLIKA: Izračunavanje prevaljenog puta iz poznate zavisnosti $v(t)$ – Kulišić slika 2.6. str.21

Akceleracija

Promjenu brzine pri nejednolikom gibanju možemo opisati akceleracijom (ubrzanjem). Omjer promjene brzine $\Delta v = v_2 - v_1$ i pripadnog vremenskog intervala $\Delta t = t_2 - t_1$ zovemo **srednjom (prosječnom) akceleracijom**:

$$\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

gdje su v_2 i v_1 brzine materijalne točke u trenucima t_1 i t_2.

Prava (trenutna) akceleracija u trenutku t je granična vrijednost srednje akceleracije:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dot{v}$$

Odnosno: $a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) = \dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{x}$

Trenutna akceleracija jednaka je prvoj derivaciji brzine po vremenu, odnosno drugoj derivaciji koordinate položaja (puta) po vremenu.

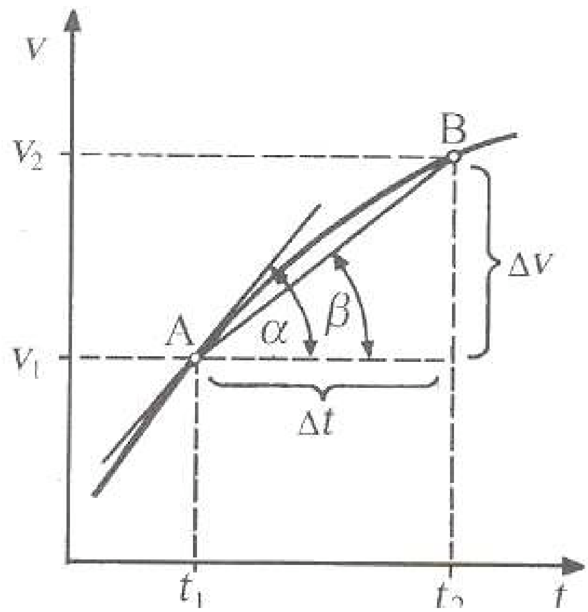
Jedinica akceleracije je metar u sekundi na kvadrat ($\mathrm{m/s^2}$).

Srednja akceleracija u vremenskom intervalu između t_1 i t_2 određena je nagibom sekante AB (tgβ), dok je trenutna akceleracija određena nagibom tangente (tgα u točki A) na krivulju $v(t)$.

Ako znamo akceleraciju $a(t)$, brzinu možemo dobiti integriranjem. Iz $a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ slijedi $\mathrm{d}v = a\,\mathrm{d}t$, pa je:

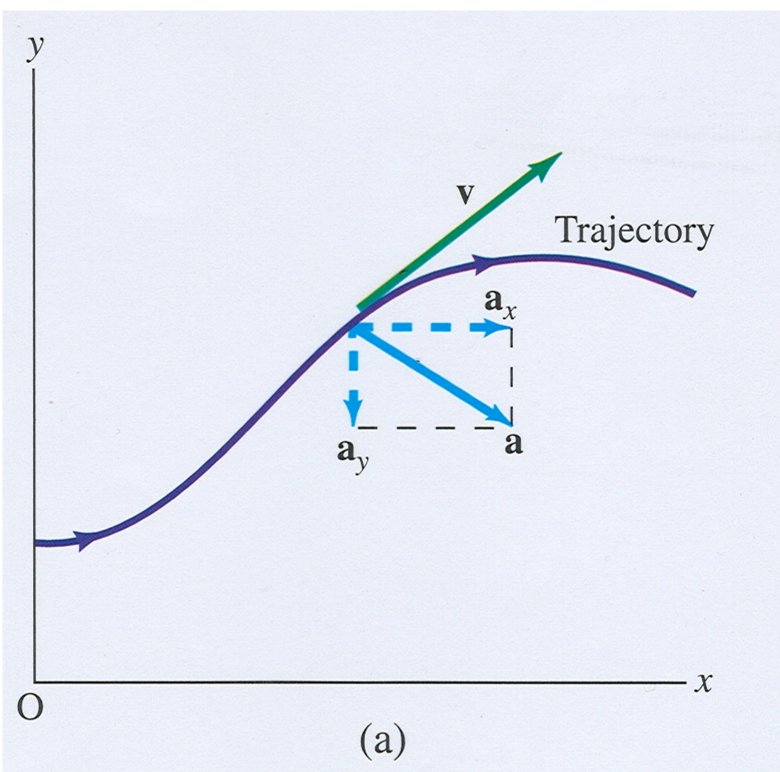
$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t a\mathrm{d}t \qquad \text{ili} \qquad v = v_0 + \int_0^t a\mathrm{d}t$$

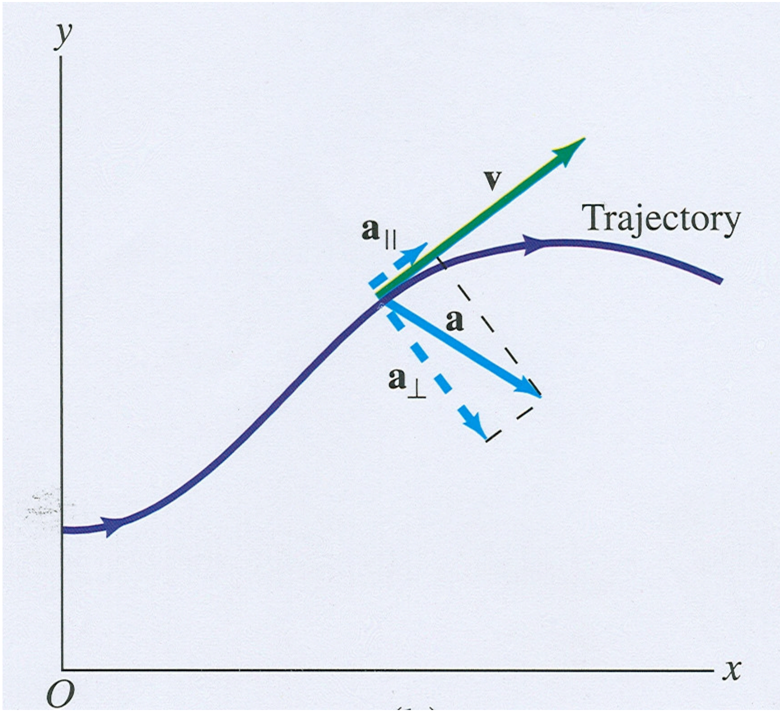
gdje je v_0 početna brzina, to jest brzina u $t = 0$. Brzina je jednaka vremenskom integralu akceleracije.



SLIKA: Ovisnost brzine o vremenu pri ubrzanom gibanju – Kulišić slika 2.7. str.22

Kad se brzina s vremenom povećava, akceleracija je pozitivna, a kad se smanjuje, akceleracija je negativna (onda je zovemo usporenje ili deceleracija).




y
v
Trajectory
$\mathbf{a}_{||}$
a
$\mathbf{a}_{\perp}$
O
x

Gibanje s konstantnom akceleracijom

Gibanje s konstantnom akceleracijom je poseban slučaj nejednolikog gibanja. Pretpostavimo da se tijelo giba u koordinatnom sustavu po osi *x*. Ako je u početnom trenutku $t = 0$ tijelo u točki x_0 i ima početnu brzinu v_0, njegovu brzinu nakon vremena t dobijemo primjenom formule:

$$v = v_0 + \int_0^t a \mathrm{d}t$$

Položaj tijela x u trenutku t dobijemo integriranjem brzine:

$$x = x_0 + \int_0^t v(\mathrm{t})\mathrm{d}t = x_0 + \int_0^t (v_0 + at)\mathrm{d}t$$

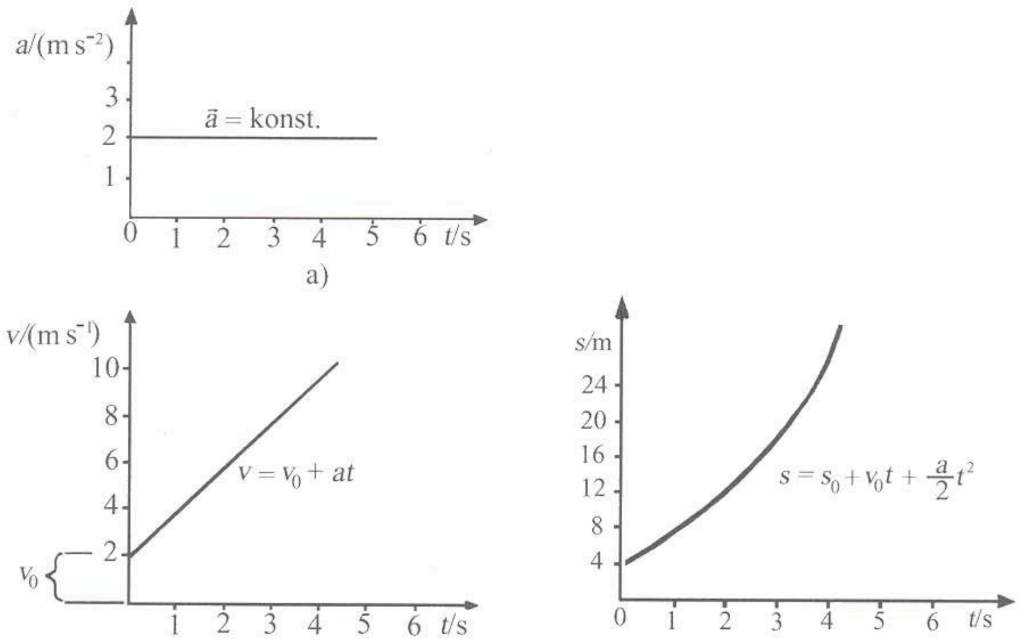
Rješenjem integrala dobijemo izraz za položaj tijela pri gibanju s konstantnom akceleracijom:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Pri pravocrtnom gibanju vektor brzine usmjeren je stalno uzduž istog pravca, dok vektor akceleracije može biti smjera istog ili suprotnog smjeru brzine, pa ako je akceleracija u smjeru brzine, gibanje je ubrzano, a u suprotnom je usporeno. Put, koji tijelo prevali u razdoblju t pri jednolikom gibanju, je:

$s = x - x_0$, odnosno: $s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$

Iz $v = v_0 + at$ slijedi veza između puta i brzine: $v = \sqrt{2as + v_0^2}$



SLIKA: Vremenska zavisnost akceleracije, brzine i prevaljenog puta pri jednoliko ubrzanom gibanju po pravcu – Kulišić slika 2.9. str. 24

Prvi i drugi Newtonov aksiom

Dinamika razmatra fizikalne uzroke gibanja za razliku od kinematike koja proučava zakone gibanja bez obzira na to što je uzrokovalo to gibanje. Osnova su dinamike **3 Newtonova zakona** koje je 1686. godine Isaac Newton formulirao u svom djelu *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica.* Iz tih zakona se može izgraditi takozvana **klasična** ili **Newtonova mehanika**.

Masa i količina gibanja

Masa je svojstvo svakog tijela koje određuje njegovo ponašanje pri djelovanju sile: što je masa veća, to je tijelo tromije, to ga je teže ubrzati ili usporiti, to jest promijeniti mu stanje gibanja. Tijelo se opire promjeni stanja svog gibanja.

Tromost ili **inercija** je svojstvo tijela da održava svoje stanje gibanja (ili, u posebnom slučaju, mirovanja).

Masa je kvantitativna **mjera tromosti tijela** i jedinica joj je kilogram (kg).

Količina gibanja materijalne točke mase m i brzine $\vec{v}$ je: $\vec{p} = m\vec{v}$

Smjer vektora $\vec{p}$ je isti kao i smjer brzine. Jedinica količine gibanja je kilogram metar u sekundi (kg m/s).

Prvi Newtonov aksiom

Još je Galilei uočio da tijelo, na koje ne djeluju vanjske sile, miruje ili se jednoliko giba po pravcu. Znači, da bismo pokrenuli tijelo koje miruje, potrebna je određena sila. Tijelo koje se giba jednoliko po pravcu, ostat će u tom stanju gibanja sve dok na njega ne počne djelovati neka vanjska sila. Svako tijelo ima svojstvo da održava svoje stanje gibanja ili mirovanja – to svojstvo se zove **inercija tijela**.

Proširivši Galilejeva razmatranja Newton je postavio svoj prvi zakon:

Svako tijelo će ostati u stanju mirovanja ili jednolikog gibanja po pravcu sve dok pod djelovanjem vanjskih sila to staje ne promijeni.

Prvi Newtonov zakon često se zove **princip tromosti ili inercije** (ili ustrajnosti).

Po njemu je **djelovanje sile na tijelo uzrok promjene gibanja**.

Ako sila ne djeluje na tijelo, ili ako se djelovanje sila na tijelo poništava tako da je rezultantna sila na tijelo jednaka nuli, akceleracija je nula, a brzina je konstantna.

Položaj tijela s obzirom na neko drugo tijelo ili okolinu određujemo izborom referentnog sustava.

Sustavi u kojima vrijedi 1. Newtonov zakon se zovu **inercijski sustavi**. Svaki sustav, koji miruje ili se jednoliko giba po pravcu s obzirom na neki inercijski sustav, isto je inercijski sustav.

Drugi Newtonov aksiom

Drugi Newtonov zakon opisuje ponašanje tijela kad na njega djeluje određena vanjska sila F. Akceleracija tijela je razmjerna sili i ima smjer sile. Konstanta proporcionalnosti između sile i akceleracije je masa tijela m:

$F = m\,a$

Što je masa veća, to je za isto ubrzanje potrebna veća sila.

Izvedimo jedinicu za masu: $[F] = [m][\,a] = \text{kg m/s}^2 = \text{N}$

Jedinica sile je njutn (N). 1 N je sila koja tijelu mase 1 kg daje akceleraciju 1 m/s^2.

2. Newtonov zakon zapravo kaže kako sila djeluje na promjenu količine gibanja tijela pa ga možemo formulirati i kao: **Vremenska promjena količine gibanja proporcionalna je sili i zbiva se u smjeru djelovanja sile:**

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v}) = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

Prema pravilu deriviranja umnoška funkcija slijedi:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v}) = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{v} + m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$

Ako je masa konstantna, zakon možemo pisati kao:

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v}) = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\vec{a}$$

2. Newtonov zakon se može izraziti u dva oblika:

- općenitom, koji vrijedi i u Newtonovoj i u relativističkoj mehanici (relativistički oblik): $\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$
- nerelativističkom obliku, koji vrijedi samo u Newtonovoj mehanici:
$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Kod rješavanja problema gibanja prvo je potrebno odrediti sve sile koje djeluju na tijelo i napisati jednadžbu:

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_i$$

Zakoni gibanja materijalne točke

Sile u mehanici

Najvažnije fizikalne veličine dinamike su **sila** i **masa**. Teško je točno odgovoriti na pitanje što je sila ili međudjelovanje. Međutim, iz svakodnevnog iskustva znamo kako djeluju razne sile: kad guramo ili vučemo neki predmet, kad istežemo elastičnu oprugu..., kažemo da djelujemo silom. U fizici silu opisujemo pomoću njezina djelovanja.

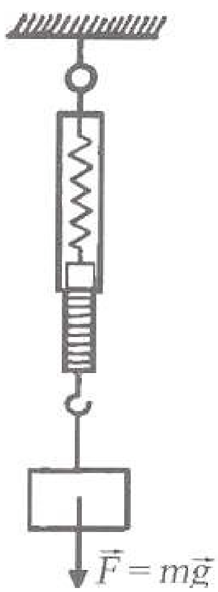
Djelovanje sile može biti dvojako:

- sila može ubrzati ili usporiti neko tijelo, tj. promijeniti mu stanje gibanja
- sila može promijeniti oblik tijela, tj. deformirati ga

U dinamici ćemo proučavati silu kao **uzrok promjene stanja gibanja nekog tijela**, smatrajući pritom da se oblik tijela ne mijenja.

Sila je vektorska fizikalna veličina te je uz iznos važno znati i smjer u kojem djeluje. Označava se znakom $\vec{F}$, koji je kratica za englesku riječ ***force***, što znači sila. Silu možemo odrediti tako da mjerimo ili akceleraciju tijela ili njegovu deformaciju.

Najjednostavnije silu mjerimo pomoću dinamometra, tj. pomoću elastične opruge jednim krajem učvršćene na vrhu metalnog valjka, dok je drugi kraj slobodan i može se izvlačiti pod utjecajem sile.



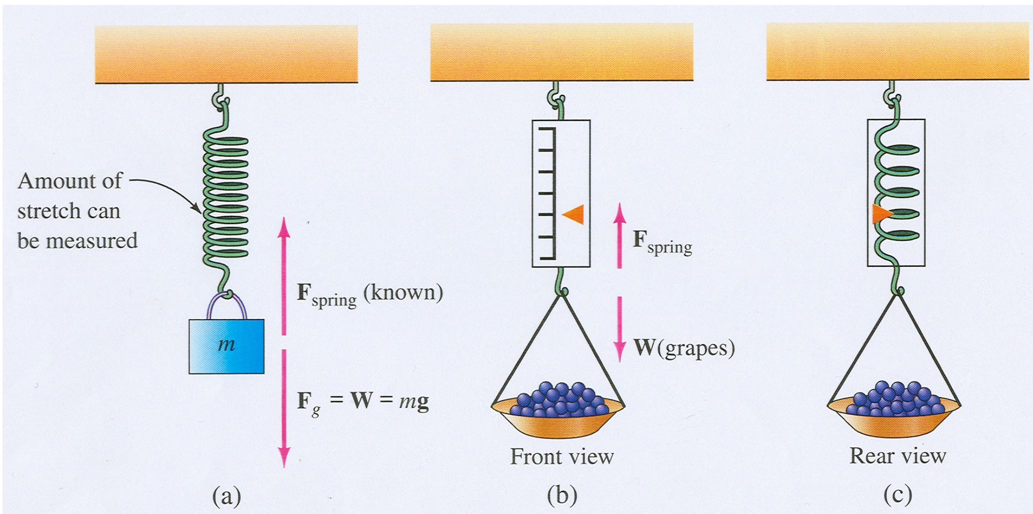
SLIKA: Dinamometar – Kulišić slika 3.1. str.38

Što je veća sila koja djeluje na dinamometar, to će se opruga više produljiti, a mjereći produljenje može se odrediti sila.

Produljenje opruge pod utjecajem vanjske sile linearno je u granicama elastičnosti opruge i može se prikazati kao:

$$F = k\Delta l$$

F je sila koja djeluje na oprugu, a Δl produljenje opruge, dok je k konstanta opruge. Baždarenjem dinamometra može se iz produljenja opruge očitati sila koja djeluje na dinamometar.



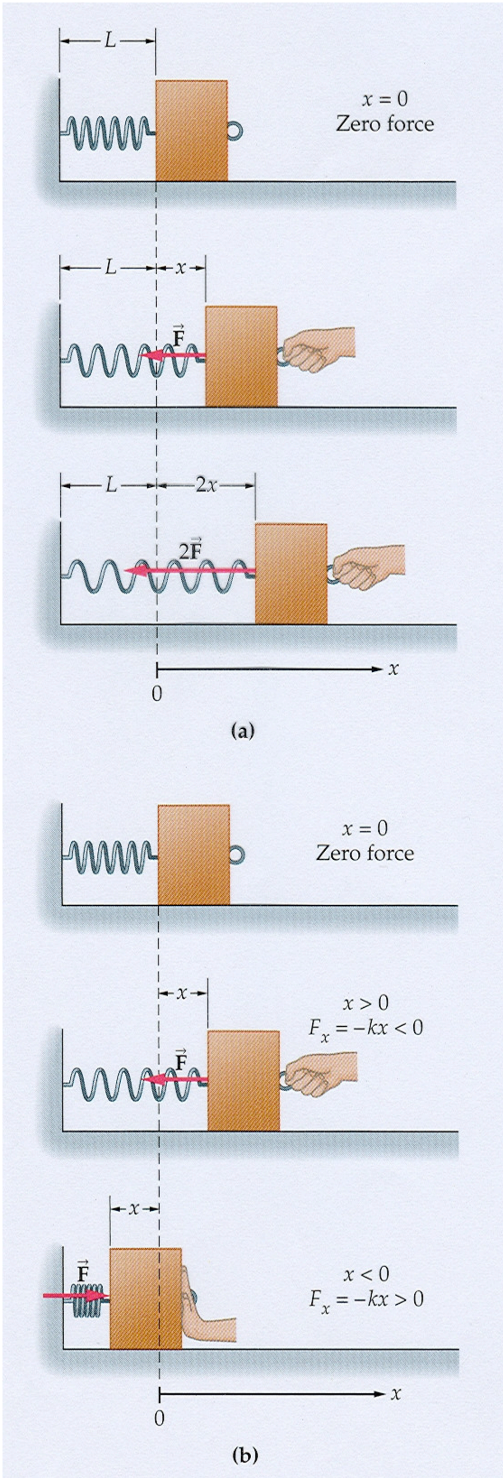
U prirodi se pojavljuju različite sile:
- kad guramo predmet, naprezanje mišića proizvodi silu
- ako tijelo vučemo po podlozi, pojavit će se sila trenja
- na svako tijelo u blizini Zemljine površine djeluje sila teža
- pri deformacijama elastičnih sila pojavljuje se harmonička sila
- magnet djeluje na komad željeza magnetskom silom
- dva se nabijena tijela privlače ili odbijaju elektrostatskom silom
- sastojci jezgre privlače se nuklearnom silom

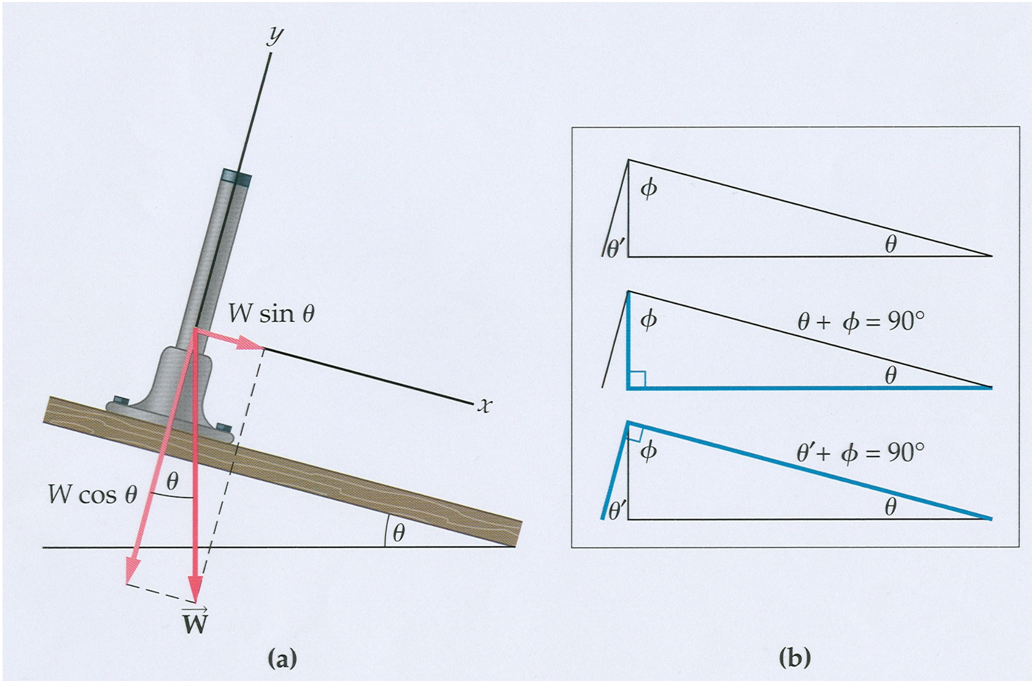
Ipak, unatoč tako velikoj raznolikosti sve sile u prirodi mogu se svesti na 4 osnovne vrste međudjelovanja:

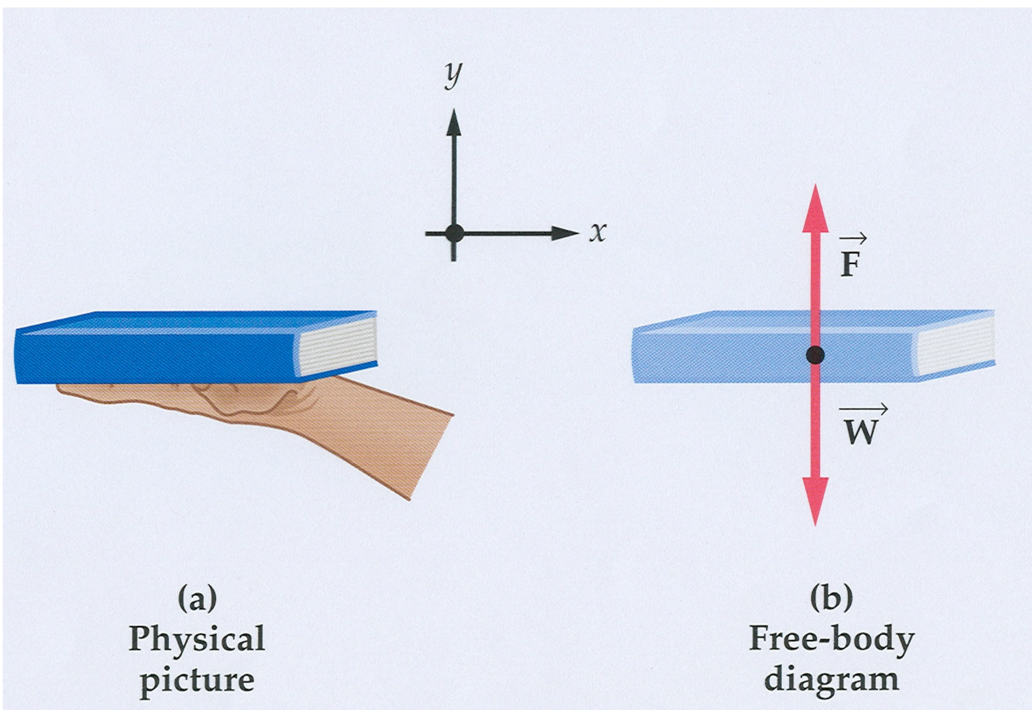
- privlačna **gravitacijska sila** između bilo koja dva tijela
- **elektromagnetska sila** između električnih naboja u mirovanju, odnosno u gibanju
- **sila jake interakcije** između nukleona u jezgri
- **sila slabe interakcije** koja se pojavljuje pri radioaktivnom beta raspadu jezgre

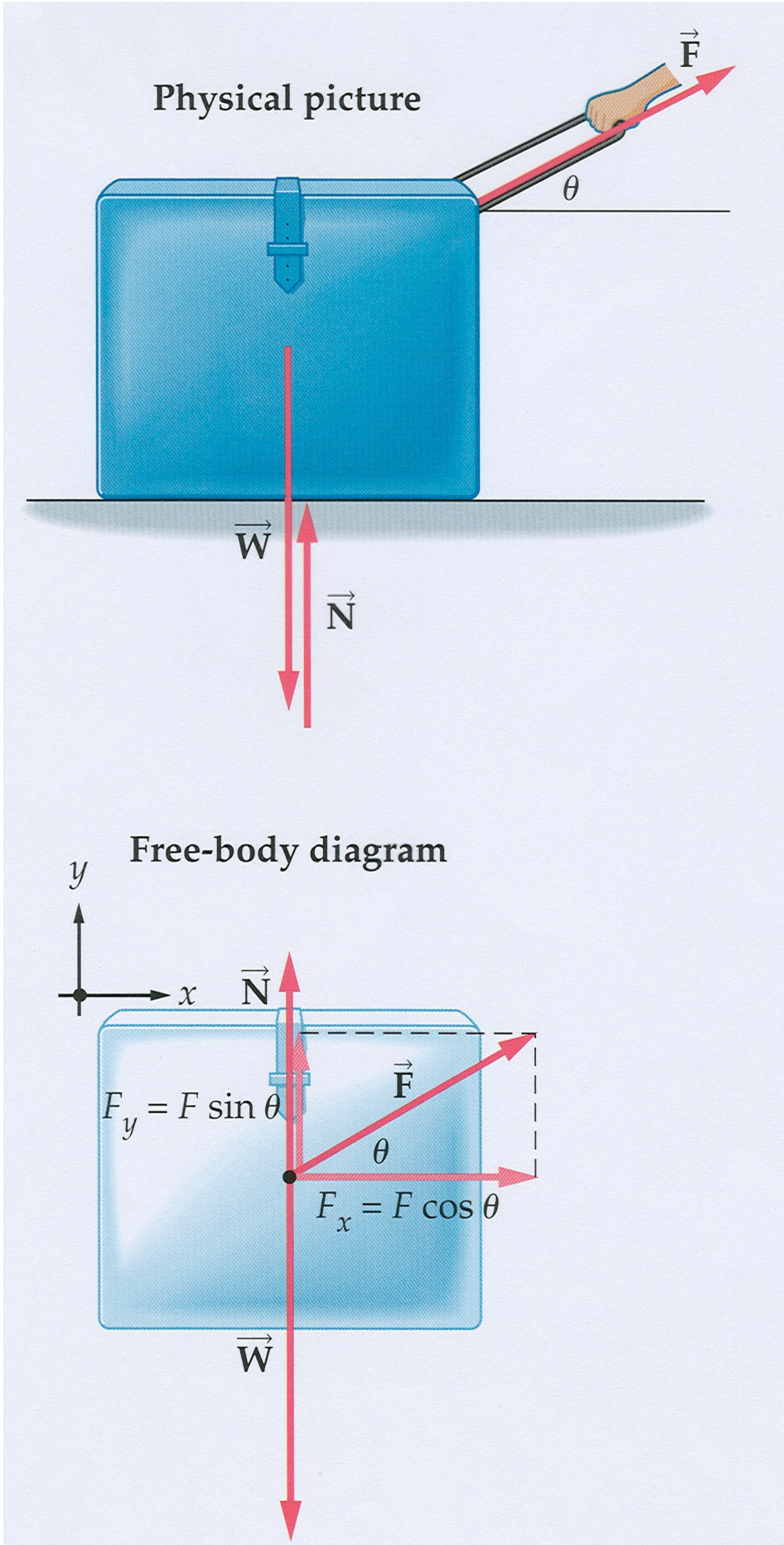
Samo prve dvije od njih pojavljuju se u klasičnoj fizici. Druge sile koje ćemo razmatrati proučavajući klasičnu fiziku mogu se objasniti pomoću njih dvije.

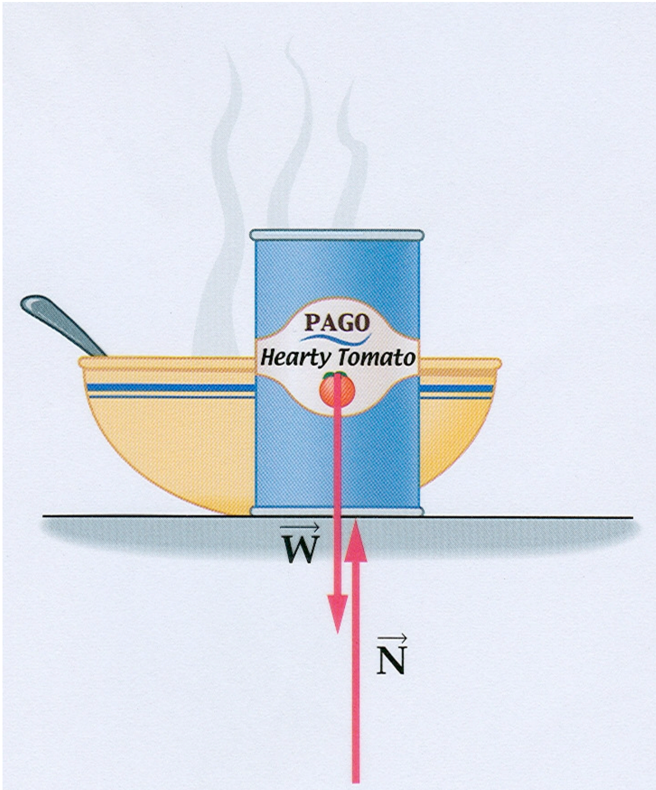
Npr. pri deformaciji se mijenja razmak među atomima u čvrstom tijelu i te se submikroskopske promjene razmaka atoma odražavaju u promjeni veličine i oblika čvrstog tijela, tj. međumolekulske sile, koje su električne prirode, manifestiraju se (gledano makroskopski) kao elastična (harmonička) sila.



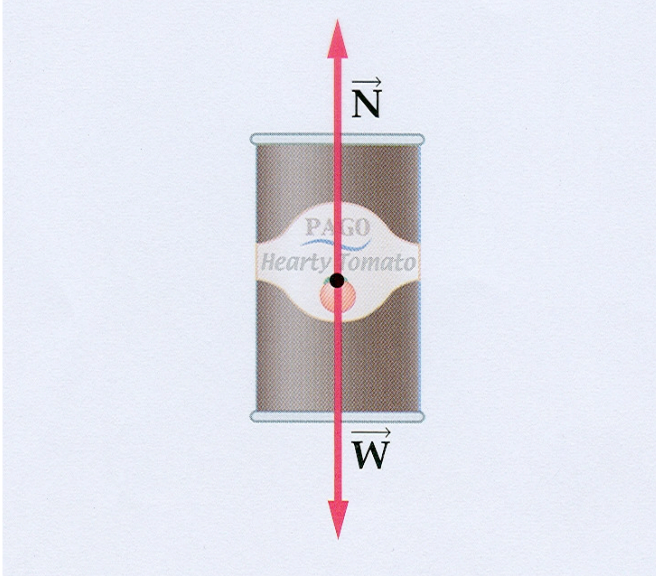

y
W sin θ
x
W cos θ
θ
θ
W
(a)
ϕ
θ′
θ
ϕ
θ + ϕ = 90°
θ
ϕ
θ′+ ϕ = 90°
θ′
θ
(b)


y
x
F
W
(a)
Physical
picture
(b)
Free-body
diagram


Physical picture
$\vec{F}$
θ
$\vec{W}$
$\vec{N}$
Free-body diagram
y
x
$\vec{N}$
$\vec{F}$
$F_y = F \sin\theta$
θ
$F_x = F \cos\theta$
$\vec{W}$



Physical picture



Free-body diagram

Jednadžbe gibanja

STALNA SILA F = konst

Neka sila djeluje duž osi x pa se onda prema 2. Newtovom zakonu i gibanje odvija duž osi x. Pišemo jednadžbu gibanja:

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v = F$$

Pišemo i početne uvjete:

$$x(0) = x_0 \qquad \frac{d}{dt}x(t)\Big|_{t=0} = v(0) = v_0$$

v_0 je početna brzina, a x_0 je početna udaljenost od ishodišta.

Postupak nalaženja rješenja:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} \; / \cdot \; dt$$

$$dv = \frac{F}{m}dt \, / \int$$

$$\int dv = \int \frac{F}{m}dt = \frac{F}{m}\int dt$$

$$v(t) + C' = \frac{F}{m}t + \frac{F}{m}C''$$

$$v(t) = \frac{F}{m}t + C_1$$

C_1 određujemo iz početnog uvjeta $v(0) = v_0$:

$$v(0) = v_0 = \frac{F}{m}\cdot 0 + C_1$$

$$C_1 = v_0$$

$$v(t) = \frac{F}{m}t + v_0$$

Kako je $v(t) = \dfrac{dx}{dt}$, slijedi:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{F}{m}t + v_0 \; / \cdot dt$$

$$dx = \frac{F}{m}tdt + v_0 dt \; / \int$$

$$\int dx = \int \frac{F}{m}tdt + \int v_0 dt = \frac{F}{m}\int tdt + v_0 \int dt$$

$$\int tdt = \frac{t^2}{2} + C'''$$

$$x(t) = \frac{F}{m}\frac{t^2}{2} + v_0 t + C_2$$

Iz drugog početnog uvjeta $x(0) = x_0$ nalazimo C_2:

$$x(0) = x_0 = \frac{F}{m}\frac{0^2}{2} + v_0 0 + C_2$$

$$C_2 = x_0$$

Konačni rezultat za putanju tijela pod djelovanjem stalne sile:

$$x(t) = \frac{F}{m}\frac{t^2}{2} + v_0 t + x_0 \qquad \text{uz} \qquad v(t) = \frac{F}{m}t + v_0$$

Brzina se linearno povećava s vremenom, pa je uz $a = \dfrac{F}{m}$:

$$v(t) = at + v_0 \qquad \text{i} \qquad x(t) = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0$$

Ako na tijelo ne djeluje sila ($F = 0$), onda se vraćamo u okvir prvog Newtonovog aksioma i imamo jednoliko gibanje po pravcu:

$$x(t) = v_0 t + x_0 \qquad \text{i} \qquad v(t) = v_0$$

STALNA SILA – SILA TEŽA $F = G = mg$ = konst

Na svako tijelo koje se nalazi na Zemljinoj površini djeluje sila teža:

$$\vec{F}_G = m\vec{g}$$

$\vec{g}$ je akceleracija sile teže, a m masa tijela.

Sila teža, iako uglavnom dolazi zbog gravitacijskog privlačenja između mase Zemlje i mase tijela, nije sasvim jednaka gravitacijskoj sili, već vektorskom zbroju gravitacijske sile i neinercijalne centrifugalne sile zbog vrtnje Zemlje.

Težina tijela $\vec{G}$ je sila kojom tijelo djeluje na horizontalnu podlogu ili objesište ako je tijelo obješeno. Ako ta podloga ili objesište miruje, ili se jednoliko giba po pravcu relativno prema površini Zemlje, težina tijela jednaka je sili teži:

$$\vec{G} = m\vec{g}$$

Dok je sila teža na određeno tijelo uvijek ista ($m\vec{g}$), bez obzira na to da li tijelo miruje, ili se giba ubrzano, težina ovisi o akceleraciji tijela i jednaka je $m\vec{g}$ samo kad je akceleracija tijela jednaka 0. Budući da se akceleracija sile teže mijenja s geografskom širinom, dogovorena je normirana vrijednost za ubrzanje sile teže g:

$$g = 9{,}80665\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \approx 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Sila teža i težina su sile i izražavaju se u N.

Slobodni pad

Jedan od najvažnijih primjera gibanja s konstantnim ubrzanjem je **slobodni pad na Zemljinoj površini**. Već je G. Galilei, proučavajući slobodni pad s kosog tornja u Pisi, pokazao da je vrijeme padanja lakših i težih tijela gotovo jednako. U to se možemo i sami uvjeriti ako ispustimo manji ili veći kamen: oba će pasti na zemlju gotovo istodobno. Budući da otpor zraka utječe na padanje tijela, tijelo za koje je otpor zraka manji padat će brže.

Ako u staklenu cijev stavimo metalnu kuglicu, komadić papira i perce, te je zatvorimo i preokrenemo, metalna će kuglica pasti najbrže, papirić sporije, a perce najsporije. Međutim, ako iz cijevi isisamo zrak, sva tri predmeta past će istovremeno.

Taj i drugi pokusi pokazuju da u vakuumu sva tijela padaju jednako dugo bez obzira na njihov oblik, veličinu i materijal od kojeg su napravljena.

Proučavajući slobodni pad zanemarit ćemo otpor zraka i pretpostaviti da sva tijela padaju jednako dugo. Naravno, izvedeni zakoni neće vrijediti za padanje tijela za koja je otpor zraka velik (npr. padobranac), dok ćemo ih moći primijeniti za padanje tijela za koja je otpor zraka malen (npr. bomba, kamen i sl.).

Uzrok slobodnom padu tijela na Zemljinoj površini je **sila teža**: to je rezultanta **gravitacijske sile između mase Zemlje i mase tijela koje slobodno pada** i **centrifugalne sile zbog Zemljine vlastite vrtnje**. Ubrzanje koje ta sila uzrokuje, tzv. **ubrzanje sile teže** ovisi o geografskoj širini i nadmorskoj visini.

Tako je:

- na polu $g_p = 9{,}83$ m/s^2,
- na ekvatoru $g_e = 9{,}78$ m/s^2,
- dok je na našoj geografskoj širini oko 9,81 m/s^2

Dogovorom je utvrđeno *normirano ubrzanje padanja* g_n = 9,80665 m/s^2 (zaokruženo 9,81), i tu vrijednost ćemo uglavnom upotrebljavati.

Akceleracija ili ubrzanje slobodnog pada ovisi i o visini iznad površine Zemlje, ali su promjene za slobodni pad od nekoliko stotina metara zanemarive, te ih nećemo uzeti u obzir.

Uz sve te pretpostavke slobodni pad je **jednoliko ubrzano gibanje po pravcu**. Ako u formule:

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \qquad \text{i} \qquad v = v_0 + at$$

uvrstimo:

$$a = g \qquad \text{i} \qquad v_0 = 0$$

slijedi:

$$s = h = \frac{1}{2}gt^2 \qquad \text{i} \qquad v = gt$$

Tijelo koje slobodno pada s visine *h* postići će brzinu: $v = \sqrt{2gh}$

Put, brzina i vrijeme pri slobodnom padu povezani su relacijom: $s = \frac{vt}{2}$

Zakone slobodnog pada možemo pokazati pokusom mjereći vrijeme potrebno da metalna kuglica padne s određene visine.

Vertikalni hitac

Kod slobodnog pada je tijelo ispušteno bez početne brzine s nekog mjesta iznad Zemljine površine. Ako cijeli problem postavimo u pravokutni koordinatni sustav tako da je x-os horizontalna, a y-os vertikalna, onda silu koja uzrokuje gibanje, **težinu tijela**, možemo napisati kao:

$$\vec{G} = -\vec{j}mg$$

Jednadžbu gibanja pišemo kao:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\vec{j}mg \qquad \text{ili} \qquad m\frac{d^2}{dt^2}(\vec{i}x + \vec{j}y) = -\vec{j}mg$$

Početni uvjeti su:

$$x(0) = 0 \qquad \frac{dx}{dt}(0) = v_x(0) = 0$$

$$y(0) = 0 \qquad \frac{dy}{dt}(0) = v_y(0) = 0$$

Jednadžba gibanja u sebi sadrži dvije jednadžbe:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg$$

$$m\frac{dv_x}{dt} = 0 \qquad m\frac{dv_y}{dt} = -mg$$

Rješenje u smjeru x-osi je trivijalno pa je:

$$x(t) = 0 \qquad v_x(t) = 0$$

Za y-os vrijedi:

$$\int dv_y = -g\int dt \qquad v_y(t) = -gt + D_1$$

Iz početnog uvjeta $v_y(0) = 0$ je $D_1 = 0$.

$$v_y(t) = \frac{dy}{dt} = -gt \,/\cdot dt$$

$$\int dy = -g\int tdt$$

$$y(t) = -\frac{gt^2}{2} + D_2$$

Iz početnog uvjeta

$$y(0) = 0 = -\frac{g0^2}{2} + D_2$$

slijedi da je $D_2 = 0$.

Rješenje gibanja zvanog **slobodni pad** je:

$$x(t) = 0 \qquad\qquad v_x(t) = 0$$

$$y(t) = -\frac{gt^2}{2} \qquad\qquad v_y(t) = -gt$$

Ovo smo izveli da bismo vidjeli da mala promjena početnih uvjeta vodi na drugačije oblike gibanja:

- ako bacimo tijelo prema dolje nekom početnom brzinom v_0 (koja samo ima y komponentu, v_{0y}), dobijemo **vertikalni hitac prema dolje**
- ako bacimo tijelo prema gore nekom početnom brzinom v_0 (koja samo ima y komponentu, v_{0y}), dobijemo **vertikalni hitac prema gore**

Vertikalni hitac prema dolje:

Promijenjeni početni uvjet je: $v_y(0) = -v_{0y}$

Slijedi da je konstanta: $D_1 = -v_{0y}$

Sada integriramo sljedeću jednadžbu:

$$v_y(t) = \frac{dy}{dt} = -gt - v_{0y} \ /\cdot dt$$

$$\int dy = -g\int t dt - v_{0y}\int dt$$

$$y(t) = -\frac{gt^2}{2} - v_{0y}t + D_2$$

Rješenja su:

$$y(t) = -\frac{gt^2}{2} - v_{0y}t \qquad\qquad v_y(t) = -gt - v_{0y}$$

Vertikalni hitac prema gore:

Dobijemo ga jednostavnom zamjenom: $v_{0y} \to -v_{0y}$

Ovdje se u jednom segmentu gibanja radi o usporenom gibanju (uspinjanju) sve dok se ne postigne maksimalna visina, a nakon toga ponovo imamo slobodni pad.

Vertikalni hitac prema gore sadrži:

- slobodni pad $y(t) = -\frac{gt^2}{2}$ $v_y(t) = -gt$
- hitac prema dolje $y(t) = -\frac{gt^2}{2} - v_0 t$ $v(t) = -gt - v_0$
- hitac prema gore $y(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$ $v(t) = v_0 - gt$

Sila trenja

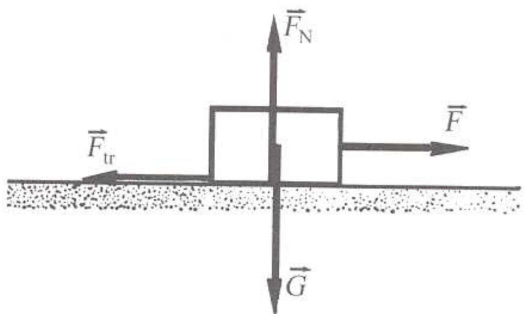
Ako tijelo vučemo po nekoj, npr. horizontalnoj podlozi, osjetit ćemo **silu trenja**, koja djeluje u smjeru paralelnom s dodirnim površinama, a smjer joj je suprotan smjeru sile kojom vučemo tijelo. Sila trenja se pojavljuje uvijek kada se dva tijela, koja su međusobno u kontaktu, gibaju jedno prema drugome.

Razlikujemo:
- trenje među čvrstim površinama (tzv. **vanjsko trenje**)
- trenje među dijelovima fluida, odnosno između čvstog tijela i fluida (**unutrašnje trenje ili viskoznost**)

Sad ćemo govoriti o vanjskom trenju.

Trenje među dvjema površinama bez prisustva nekog sredstva za podmazivanje između njih, se zove suho trenje. Na primjer: kad guramo neki sanduk po podu, ili u kočnicama automobila...

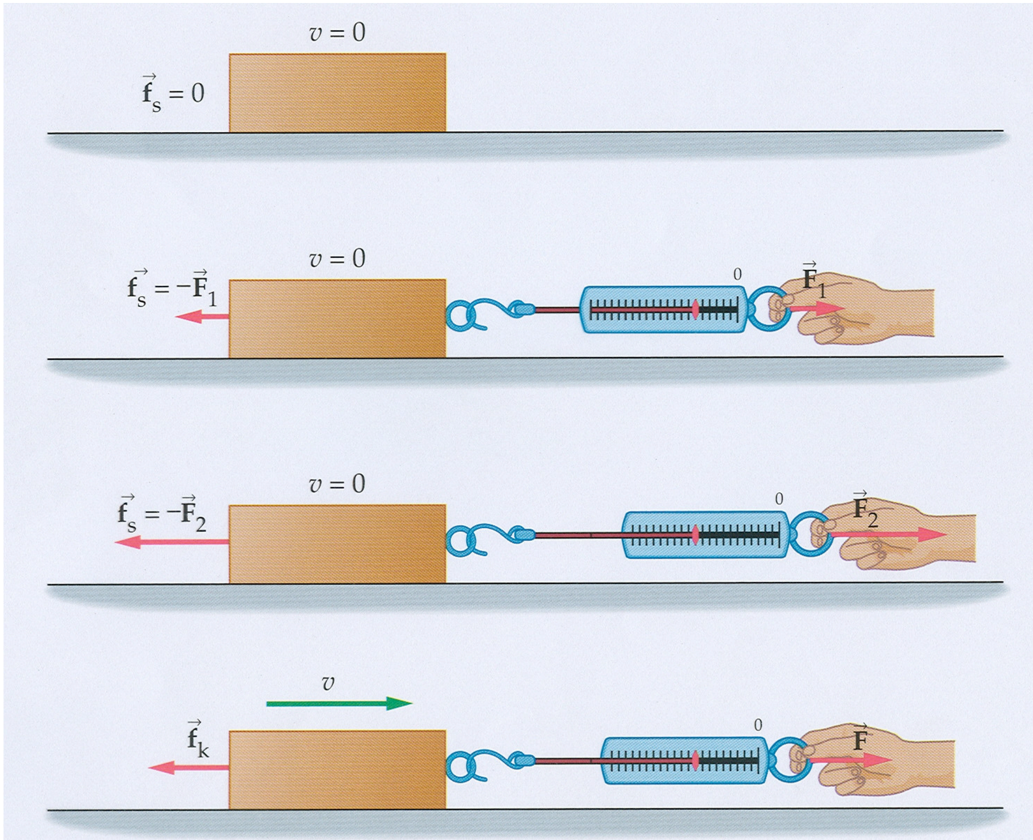
Ako je sila *F* kojom vučemo tijelo dovoljno malena, tijelo će ostati u stanju mirovanja. To znači da osim vučne sile *F* na tijelo djeluje i neka druga sila, koja se zove sila trenja, koja uravnotežuje vučnu silu *F*.



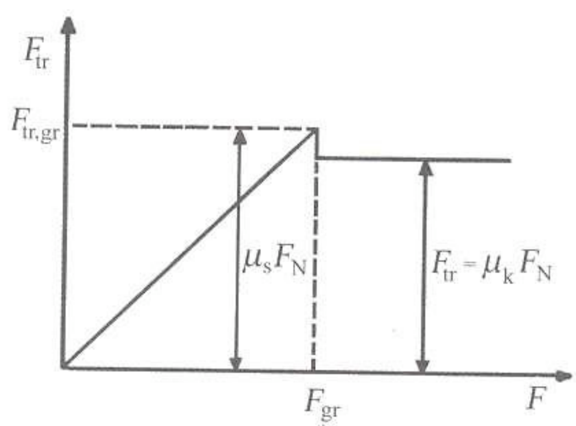
SLIKA: Sila trenja na horizontalnoj podlozi – Kulišić slika 3.11. str.56

Dok tijelo miruje, sila trenja jednaka je po iznosu vučnoj sili *F*. Povećanjem sile *F* doseći ćemo u jednom trenutku maksimalnu silu trenja, premašiti je i predmet će se početi ubrzavati u smjeru sile $\vec{F}$.

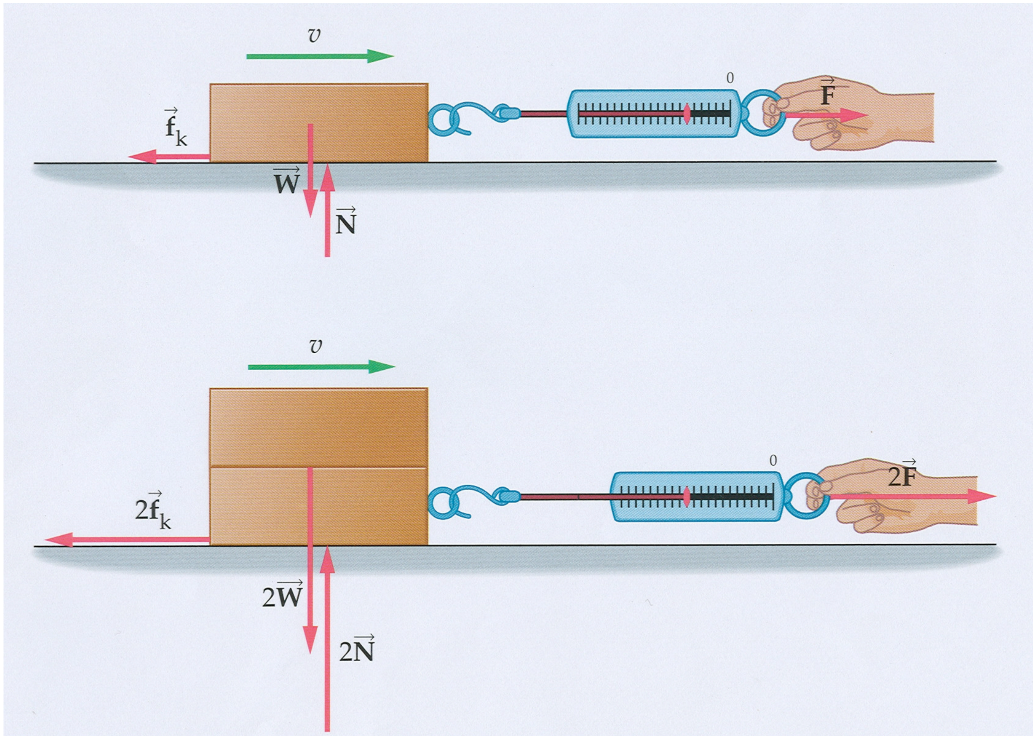
Najveća sila trenja koja prisiljava tijelo da još miruje zove se **sila trenja mirovanja** ili **sila statičkog trenja**. Kad vučna sila nadmaši silu statičkog trenja, tijelo počne kliziti. Iskustvo pokazuje da je sila potrebna za održanje gibanja manja od sile potrebne za pokretanje tijela: **sila trenja gibanja** ili **sila kinetičkog trenja** manja je od sile trenja mirovanja.



Ovisnost sile trenja o vučnoj sili prikazana je na slici.



SLIKA: Ovisnost sile trenja o vučnoj sili – Kulišić slika 3.12. str. 56



Maksimalna vrijednost sile statičkog trenja ne ovisi o veličini dodirnih ploha i proporcionalna je normalnoj komponenti sile kojom tijelo djeluje na podlogu (to jest sili kojom jedna površina pritišće drugu):

$$F_{tr,s} \leq \quad {}_{s}F_{N}$$

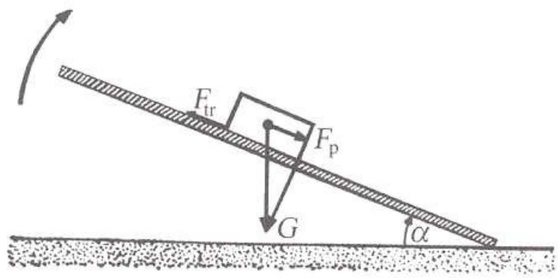
Statički faktor trenja μ_s ovisi o osobinama obiju dodirnih ploha. Sila kinetičkog trenja također ne ovisi o veličini dodirnih ploha već samo o njihovim osobinama i proporcionalna je normalnoj komponenti sile:

$$F_{tr,k} = \quad {}_{k}F_{N}$$

μ_k je **faktor kinetičkog trenja**.

Oba faktora trenja (μ_s i μ_k) ovise o materijalu, hrapavosti i čistoći dodirnih ploha. Kinetički faktor trenja ovisi i o relativnoj brzini dodirnih ploha, ali tu ovisnost često ne uzimamo u obzir jer je premalena.

Faktor trenja se može odrediti pomoću kosine kojoj se može mijenjati nagib α. Kosina se podiže i time se povećava kut α, sve dok tijelo ne počne kliziti. Na horizontalnoj podlozi je normalna komponenta sile F_N jednaka po iznosu težini G.



SLIKA: Određivanje faktora trenja – Kulišić slika 3.13. str. 56

Ako je tijelo na kosini nagiba α, normalna komponenta sile F_N jednaka je komponenti težine $\vec{G}$ u smjeru normale na kosinu:

$$F_N = G\cos\alpha$$

U trenutku kad tijelo počne kliziti niz kosinu (granični kut α_m) komponenta težine paralelna kosini jednaka je sili statičkog trenja:

$$F_P = G\sin\alpha_m = F_{tr,s}$$

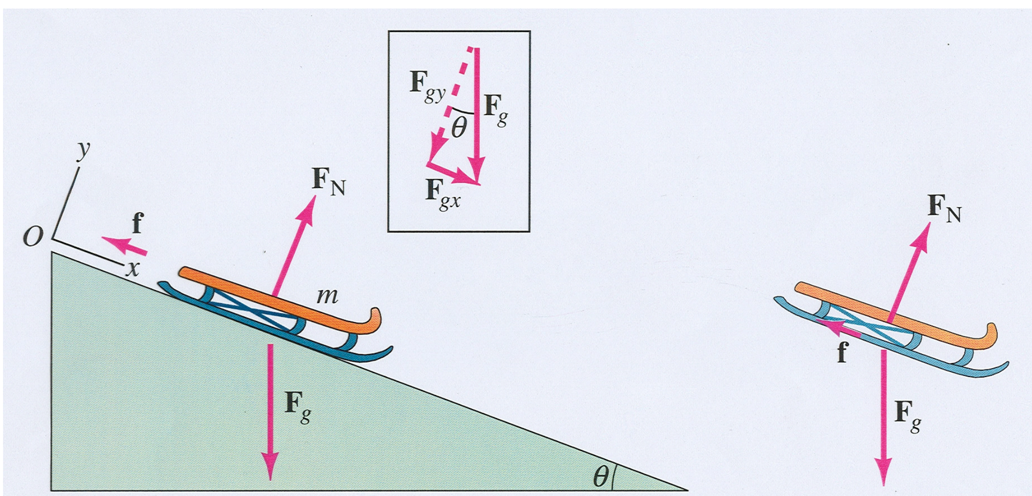
Mjereći kut α_m možemo izračunati faktor trenja mirovanja:

$${}_s = \frac{F_{tr,s}}{F_N} = \frac{G\sin\alpha_m}{G\cos\alpha_m} = \mathrm{tg}\,\alpha_m$$

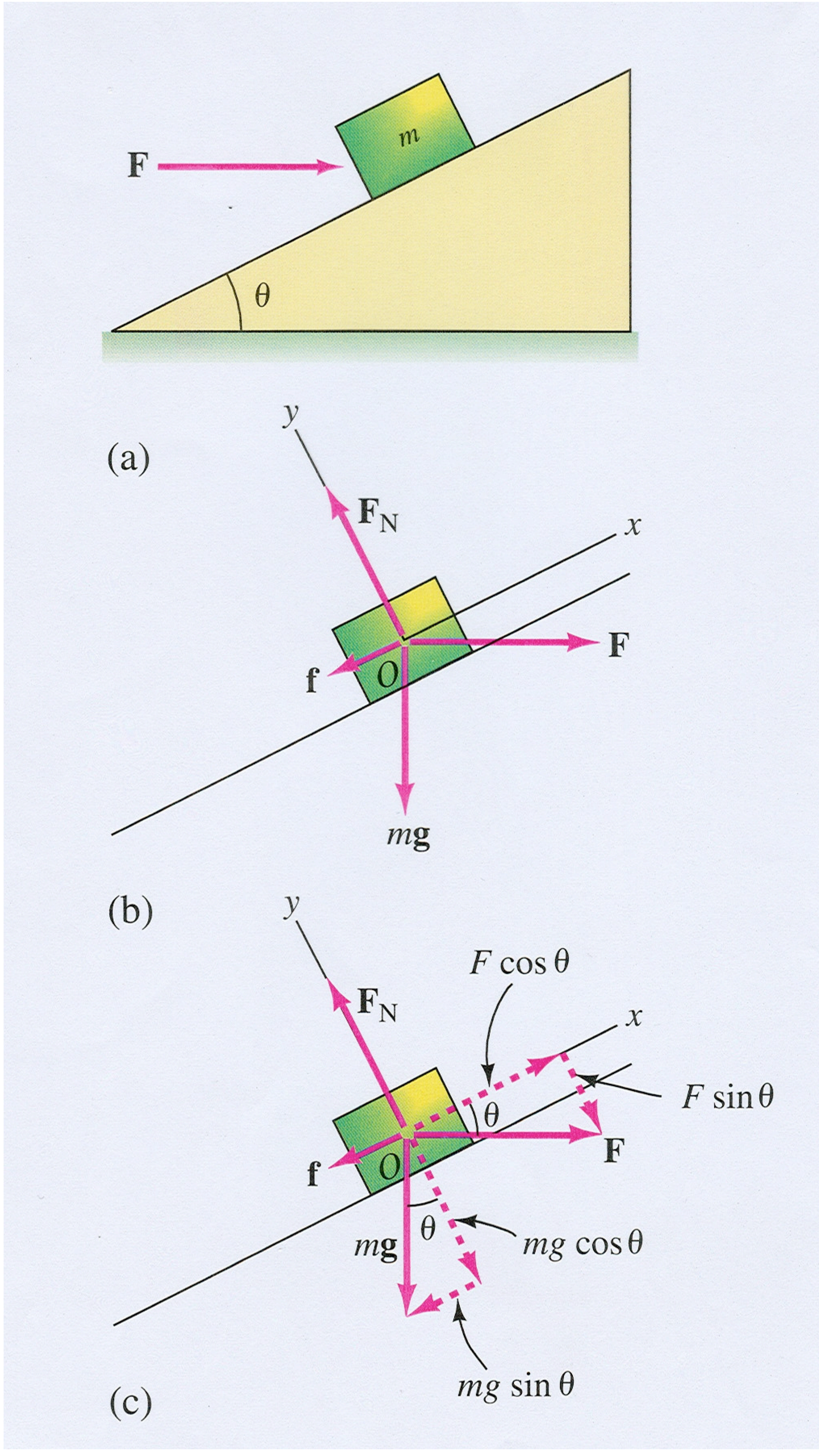
Kad se tijelo već giba po kosini, ono će se gibati i za manji kut nagiba od α_m jer je trenje gibanja manje od trenja mirovanja. Mjereći najmanji kut za koji tijelo još jednoliko klizi možemo odrediti faktor kinetičkog trenja. Ako se tijelo po podlozi kotrlja, trenje je mnogo manje nego pri klizanju. Sila trenja kotrljanja može se definirati na sličan način kao sila kinetičkog trenja, ali je ovdje faktor trenja manji. U praksi upotrebom kugličnih ležajeva i kotača smanjujemo trenje u mnogim uređajima.

TABLICA: Tipični faktori trenja mirovanja, klizanja i kotrljanja

Dodirne površine	Faktor trenja mirovanja	Faktor trenja klizanja	Faktor trenja kotrljanja
Drvo na drvu	0,5	0,3	0,05
Čelik na čeliku	0,7	0,5	0,003
Guma na suhom asfaltu	0,8	0,6	0,01
Guma na mokrom asfaltu	0,3	0,2	0,005
Guma na ledu	0,02	0,01	
Čelik na ledu	0,03	0,01	



(a) (b)



F
m
θ
(a)
y
$\mathbf{F}_N$
x
F
f
O
$m\mathbf{g}$
(b)
y
$F\cos\theta$
$\mathbf{F}_N$
x
$F\sin\theta$
θ
F
f
O
θ
$m\mathbf{g}$
$mg\cos\theta$
$mg\sin\theta$
(c)

Sila otpora s linearnom ovisnošću o brzini

Pri gibanju tijela kroz zrak, odnosno fluid, javlja se sila otpora, koja ovisi o obliku tijela, o fluidu (njegovoj gustoći, temperaturi, viskoznosti...), ali i o načinu gibanja. Pokazuje se da sila otpora vrlo jako ovisi o relativnoj brzini tijela i fluida. Pogledat ćemo utjecaj sile koja ovisi o brzini na gibanje tijela u jednoj dimenziji (duž pravca).

Pretpostavit ćemo da je **ovisnost sile o brzini linearna**:

$$\vec{F} = -\vec{r}kmv$$

Ovdje je:
- $\vec{r}$ jedinični vektor u smjeru gibanja tijela
- k konstanta u koju su ugrađena svojstva konkretnog fluida, kao i geometrijska svojstva tijela (jer o obliku tijela ovisi sila otpora)
- m masa tijela

Tijelo se počne gibati iz ishodišta duž osi x nekom brzinom v_0. Želimo naći gdje će se tijelo nalaziti nakon vremena t i kolika će mu biti brzina. Jednadžba gibanja tijela mase m:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{i}\,kmv \qquad\qquad m\frac{dv}{dt}\vec{i} = -\vec{i}\,kmv$$

Brzina ima samo komponentu duž osi x:

$$\vec{v} = \vec{i}\,v$$

Početni uvjeti:

$$x(0) = 0 \qquad\qquad v(0) = v_0$$

$$m\frac{dv}{dt} = -kmv \,/\quad m\,/\cdot dt$$

$$dv = -kvdt \,/\quad v$$

$$\int\frac{dv}{v} = -k\int dt$$

Iz tablice neodređenih integrala nalazimo:

$$\ln v(t) = -kt + C$$

U konstanti C su integracijske konstante lijeve i desne strane i ona se može prikazati u obliku:

$$C = \ln C_1$$

$\ln v(t) - \ln C_1 = -kt$ ili $\ln \frac{v(t)}{C_1} = -kt$

Slijedi:

$v(t) = C_1 e^{-kt}$

Konstantu C_1 određujemo iz početnih uvjeta: $v(0) = v_0 = C_1 e^{-k0}$

$v_0 = C_1$

$v(t) = v_0 e^{-kt}$

$v(t) = \frac{dx}{dt} = v_0 e^{-kt} \;/\cdot dt /\cdot \int$

$\int dx = v_0 \int e^{-kt} dt$

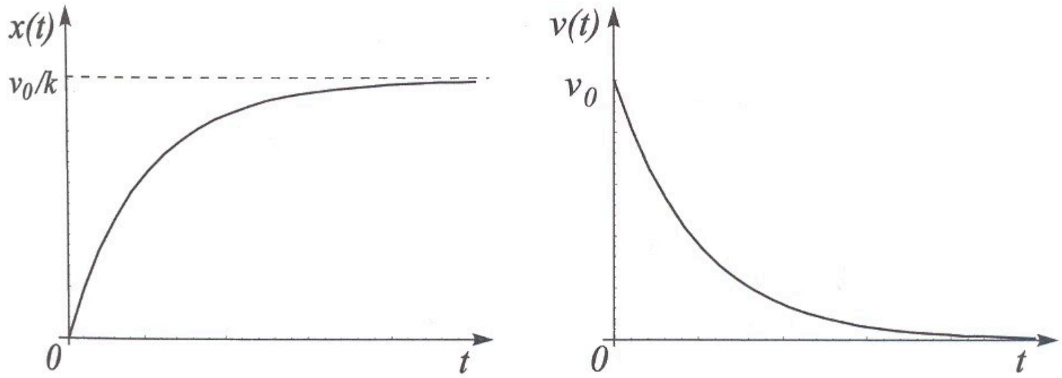
$x(t) = v_0 (-\frac{1}{k}) e^{-kt} + C_2$

Konstantu C_2 određujemo iz početnih uvjeta: $x(0) = 0 = (-\frac{v_0}{k}) e^{-k0} + C_2$

$C_2 = \frac{v_0}{k}$

Konačni rezultat je: $x(t) = \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt})$ $v(t) = v_0 e^{-kt}$

Rezultat je **usporeno**, ali **nejednoliko gibanje**, gdje brzina pada eksponencijalno od početne vrijednosti v_0.



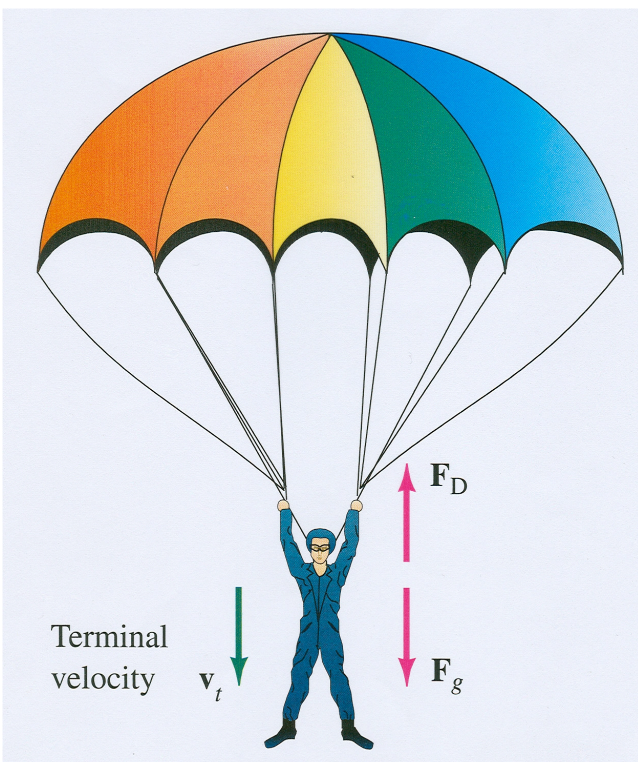
SLIKA: Prikaz rješenja gibanja uz silu otpora sredstva linearno ovisnu o brzini – Horvat slika 1.7. str.1-25

Kad je sila otpora vrlo mala, tj. kad vrijedi $k << 1$, razvojem u Taylorov red dobijemo: $e^{-\delta} = 1 - \delta + \frac{1}{2}\delta^2 + ...$

Uz $\delta = kt$: $$x(t) \approx \frac{v_0}{k}(1 - 1 + kt - \frac{1}{2}k^2t^2) = v_0 t - \frac{1}{2}kv_0 t^2 = v_0 t - \frac{a}{2}t^2$$

$$v(t) \approx v_0(1 - kt) = v_0 - kv_0 t = v_0 - at$$

Dobijemo jednoliko usporeno gibanje uz akceleraciju jednaku $a = kv_0$.



Vrtnja krutog tijela

Vrtnja krutog tijela oko stalne osi

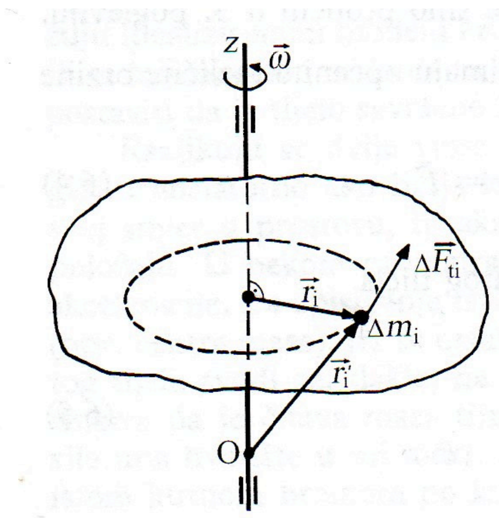
Pri rotaciji krutog tijela oko nepomične osi sve točke tijela izvode gibanje po kružnicama čija središta leže na osi rotacije, za koju pretpostavljamo da se poklapa sa *z*-osi koordinatnog sustava.

U statici moment sile s obzirom na neku točku definiramo kao vektorski produkt vektora položaja hvatišta sile s obzirom na tu točku i vektora sile. Kod rotacije krutog tijela oko nepomične osi moment sile definiramo s obzirom na tu os jer ta komponenta ukupnog momenta opisuje utjecaj sile na rotaciju oko te osi.

Kad na kruto tijelo čija je os rotacije nepomična, djeluje neka vanjska sila $\vec{F}$, tada na rotaciju utječe samo komponenta te sile koja leži u ravnini okomitoj na os rotacije. Komponenta paralelna osi rotacije teži samo pomaknuti tijelo duž osi i ne utječe na rotaciju.

Izvod jednadžbe gibanja za ovakvu rotaciju:

Prvo podijelimo tijelo na n dijelova (materijalnih točaka) od kojih svaki ima masu Δm_i i udaljen je od osi rotacije za r_i.



SLIKA: Uz izvod jednadžbe rotacije krutog tijela – Kulišić slika 6.1. str. 90

Moment sile i-te čestice s obzirom na točku O je: $\Delta\vec{M}_i = \vec{r}_i' \times \Delta\vec{F}_i$

$\Delta\vec{F}_i$ - rezultanta svih sila (vanjskih i unutrašnjih) koje djeluju na tijelo mase Δm_i

$\vec{r}_i'$ - vektor položaja s obzirom na točku O

Na kruženje tijela elementarne mase Δm_i utječe samo tangencijalna komponenta sile ΔF_{ti} , odnosno komponenta momenta sile u smjeru osi z:

$$\Delta M_{zi} = r_i \Delta F_{ti} = r_i \Delta m_i a_{ti} = \alpha \Delta m_i r_i^2$$

Tangencijalna akceleracija točke je: $a_{ti} = \alpha r_i$

α je bez indeksa jer je pri rotacija krutog tijela oko nepomične osi kutna akceleracija za sve točke jednaka.

Zbrojimo po svim elementarnim masama Δm_i na koje smo tijelo podijelili:

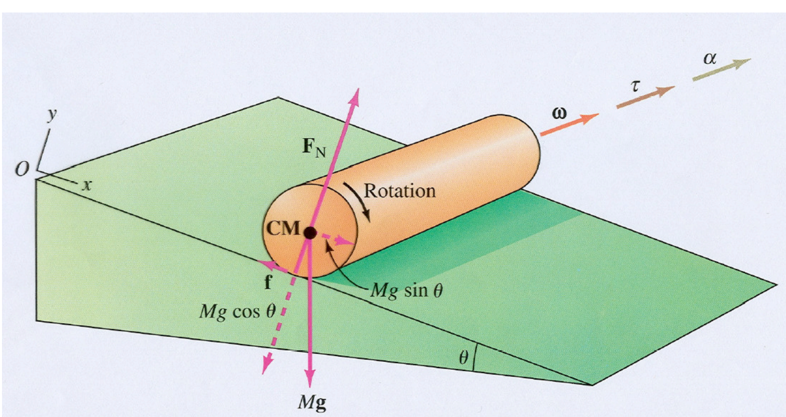
$$M_z = \sum_i \Delta M_{zi} = \alpha \sum_i \Delta m_i r_i^2 = I_z \alpha \qquad (1)$$

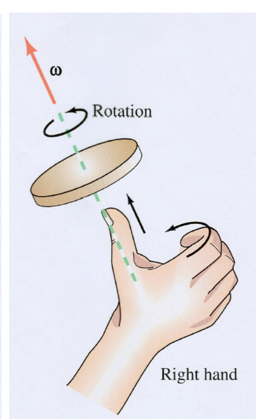
Moment tromosti tijela s obzirom na os z:

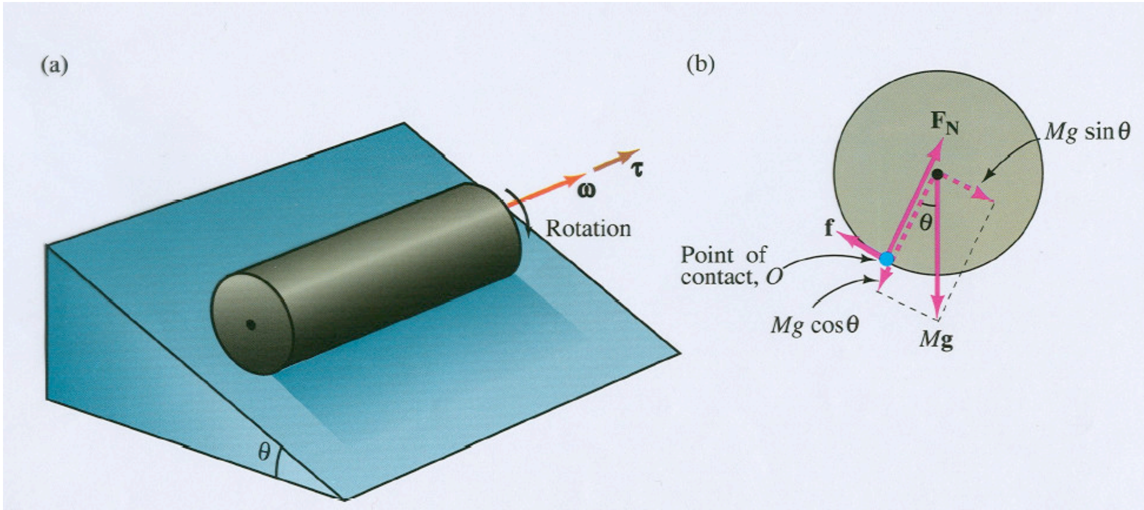
$$I_z = \sum_i \Delta m_i r_i^2 \qquad (2)$$

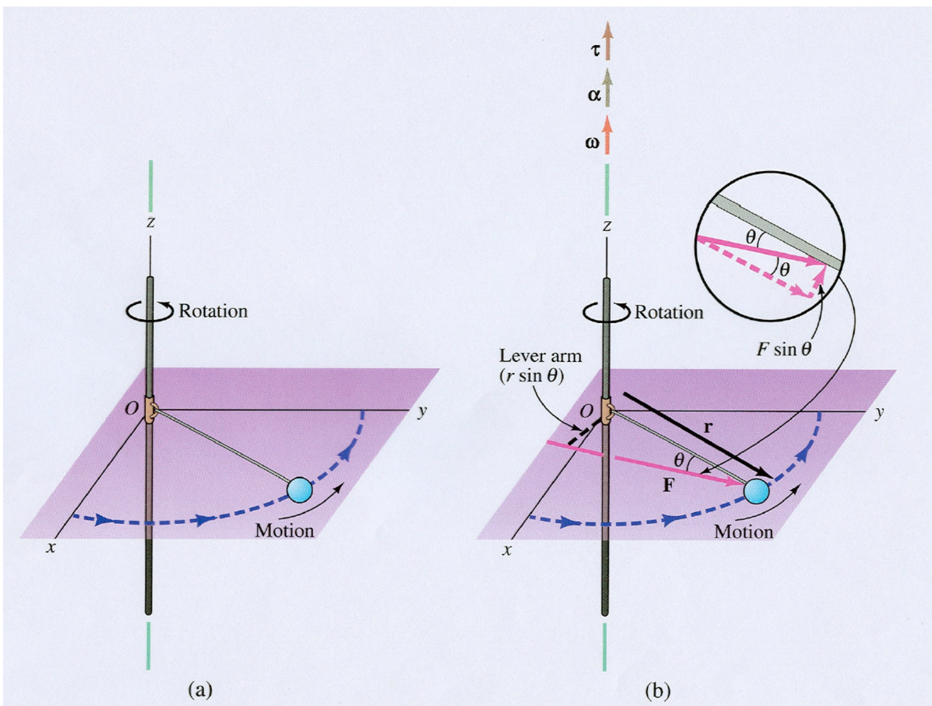
S obzirom da je zbroj svih unutrašnjih sila jednak 0, slijedi da je: $M_z = \sum_i \Delta M_{zi}$ rezultantni moment tangencijalne komponente vanjske sile s obzirom na os rotacije. Jednadžbe (1) i (2) su aproksimativne, a postaju egzaktne u graničnom slučaju kad se Δm_i približavaju materijalnim točkama ($\Delta m_i \rightarrow 0$), a njihov broj $n \rightarrow \infty$, pa slijedi da zbrojevi prelaze u integrale.

Jednadžba $M_z = I_z \alpha$ je osnovna jednadžba (2. Newtonov zakon) za rotaciju krutog tijela oko nepomične osi. Analogna je 2. Newtonovom zakonu za materijalnu točku ($F = ma$): sili odgovara moment sile, a masi moment tromosti, a linearnoj akceleraciji kutna akceleracija.






(a)
ω
τ
Rotation
θ
(b)
$\mathbf{F_N}$
$Mg \sin\theta$
θ
f
Point of contact, O
$Mg \cos\theta$
$M\mathbf{g}$


τ
α
ω
z
Rotation
O
y
x
Motion
(a)
θ
θ
$F \sin\theta$
Lever arm ($r \sin\theta$)
r
F
(b)

Moment tromosti

Moment tromosti je veličina karakteristična za svako tijelo koje rotira oko izabrane osi. On utječe na rotaciju kao što masa utječe na translaciju materijalne točke. Tijela s velikim momentom tromosti teže je zarotirati nego ona s malim momentom tromosti.

Moment tromosti je mjera tromosti tijela pri rotaciji. Moment tromosti krutog tijela s obzirom na neku os rotacije je:

$$I = \lim_{n\to\infty} \sum_i \Delta m_i r_i^2 = \int r^2 dm$$

Obično se integral po masi prevodi u integral po volumenu jer vrijedi $m = \rho V$, pa je $dm = \rho dV$:

$I = \int \rho r^2 dV$ gdje je gustoća: $\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}$

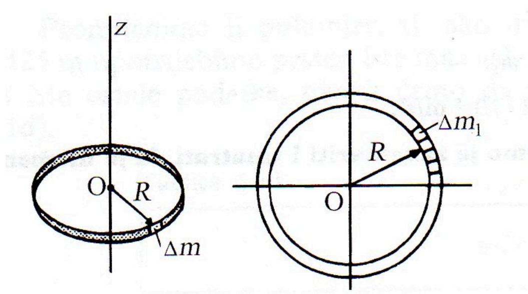
Gustoća može biti funkcija koordinata tijela no za homogena tijela gustoća je konstantna i pišemo:

$I = \rho \int r^2 dV$ gdje integriramo preko čitavog volumena tijela.

Vidimo da moment tromosti ovisi o masi tijela i o raspodjeli mase s obzirom na os rotacije.

MOMENT TROMOSTI PRSTENA

Računamo moment tromosti tankog kružnog prstena polumjera *R* i mase *m* s obzirom na os okomitu na ravninu prstena, koja prolazik kroz središte prstena.



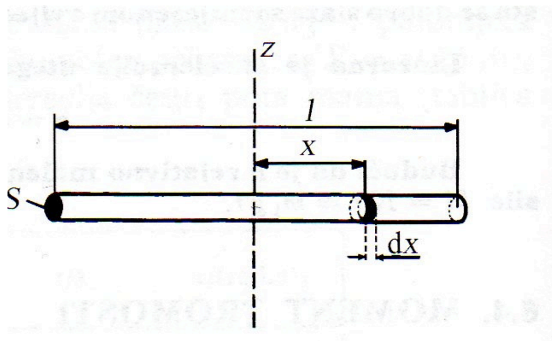
SLIKA: Moment tromosti prstena – Kulišić slika 6.3. str.94

Čitava masa ima jednaku jednaku udaljenost od osi rotacije, pa je *r* = konst:

$$I = \int r^2 dm = R^2 \int dm = mR^2$$

MOMENT TROMOSTI HOMOGENOG ŠTAPA

Računamo moment tromosti štapa duljine l i mase m s obzirom na os okomitu na štap, koja prolazi kroz sredinu štapa.



SLIKA: Moment tromosti štapa – Kulišić slika 6.4. str.94

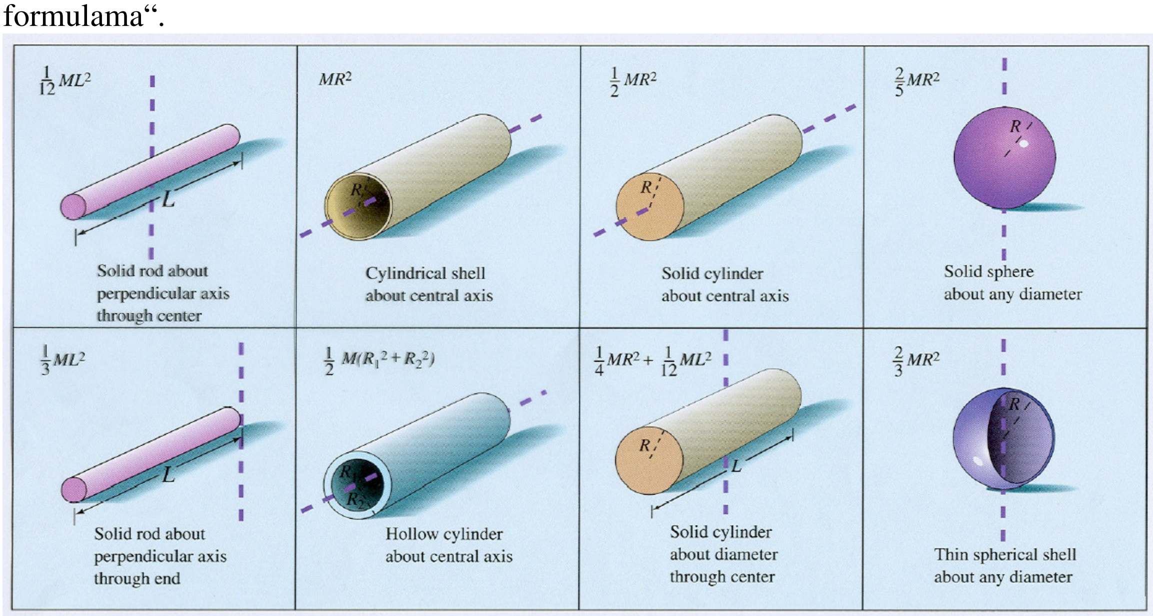
Homogeni štap znači da je gustoća konstantna.

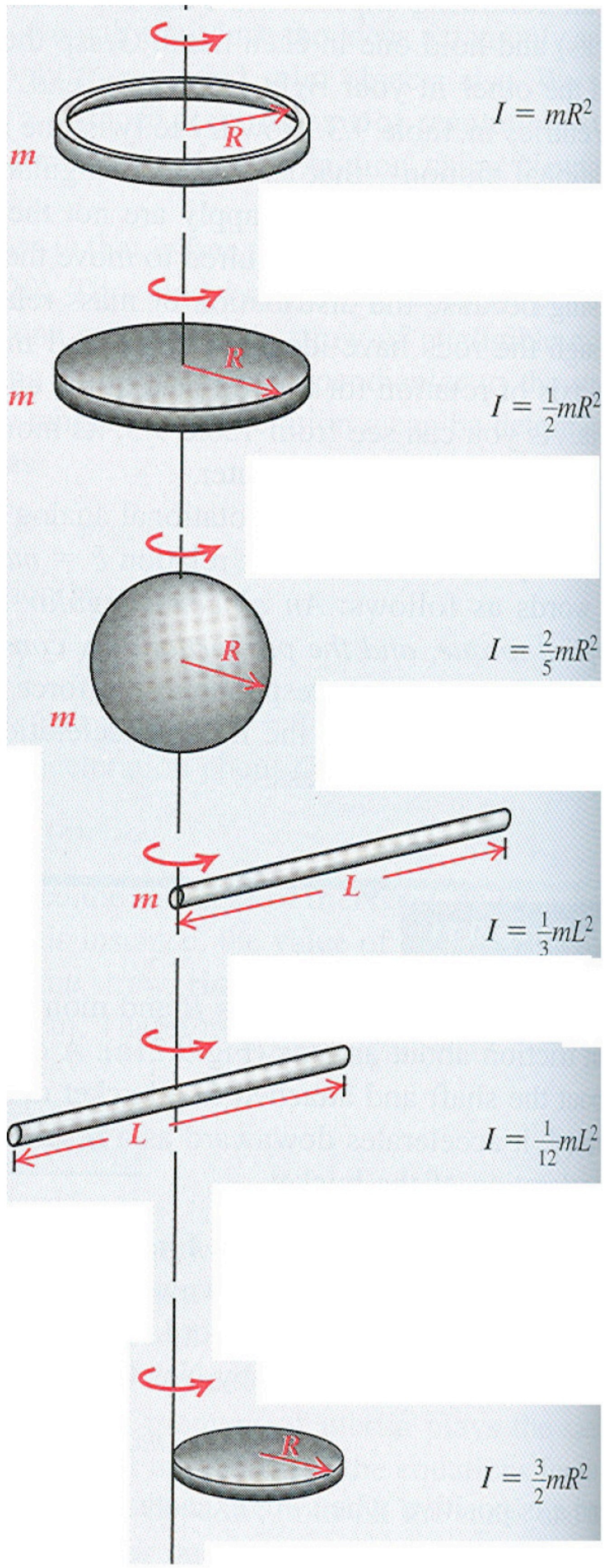
Masa štapa je: $m = \rho V = \rho Sl$

$$I = \int \rho r^2 dV = \rho \int r^2 dV$$

$$I = \rho \int_{-l/2}^{l/2} x^2 S dx = \rho S \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx = \rho S \frac{l^3}{12} = \rho Sl \frac{l^2}{12} = \frac{ml^2}{12}$$

Momenti tromosti drugih jednostavnijih tijela dani su udžbenicima, zbirkama i „žutim formulama“.



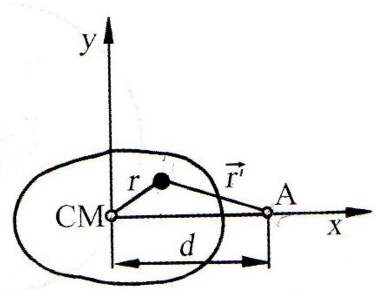


m
R
$I = mR^2$
m
R
$I = \frac{1}{2}mR^2$
R
m
$I = \frac{2}{5}mR^2$
m
L
$I = \frac{1}{3}mL^2$
L
$I = \frac{1}{12}mL^2$
R
$I = \frac{3}{2}mR^2$

Steinerov poučak

Moment tromosti ovisi o osi oko koje tijelo rotira.

Steinerov poučak o paralelnim osima omogućuje računanje momenta tromosti za bilo koju paralelnu os ako je poznat moment tromosti s obzirom na os kroz CM.



SLIKA: Steinerov poučak – Kulišić slika 6.5. str. 95

Neka neko tijelo rotira oko osi *z* pravokutnog koordinatnog sustava koja prolazi kroz centar mase tijela okomito na ravninu slike. Moment tromosti oko te osi je:

$$I_{CM} = \int r^2 dm = \int (x^2 + y^2) dm$$

Moment tromosti za paralelnu os koja prolazi kroz točku A i udaljena je za *d* od osi kroz CM:

$$I = \int r'^2\, dm = \int \left[(d - x)^2 + y^2 \right] dm = \int (x^2 + y^2) dm - \int 2dxdm + \int d^2 dm = I_{CM} - 0 + md^2$$

$\int 2dxdm = 2d \int xdm = 2dx_{CM} m = 0$ uz $x_{CM} = 0$ (CM smo smjestili u ishodište)

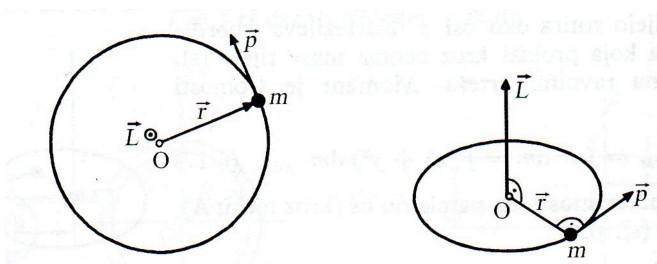
$$I = I_{CM} + md^2 \qquad (*)$$

Moment tromosti s obzirom na neku os jednak je momentu tromosti s obzirom na paralelnu os kroz CM, uvećanu za umnožak mase tijela i kvadrata udaljenosti tih dviju osi.

Iz (*) slijedi da je $I > I_{CM}$, tj. od svih momenata tromosti najmanji je moment tromosti s obzirom na os kroz CM.

Moment količine gibanja (kutna količina gibanja)

Kao što smo jednadžbu gibanja materijalne točke izrazili pomoću količine gibanja ($\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{p}$), rotaciju krutog tijela možemo izraziti pomoću momenta količine gibanja.



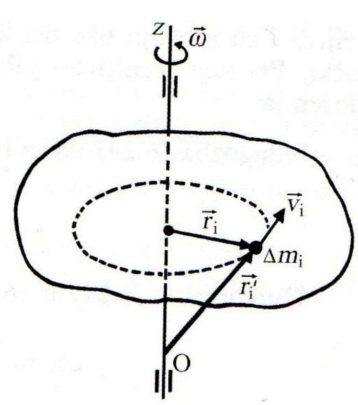
SLIKA: Moment količine gibanja čestice mase *m* koja se giba po kružnici – Kulišić slika 6.6. str.96

Moment količine gibanja $\vec{L}$ materijalne točke mase m i količine gibanja $\vec{p} = m\vec{v}$ s obzirom na referentnu točku O (npr. središte kružnice, koordinatno ishodište i sl.) je vektorski produkt vektora položaja $\vec{r}$ (koji spaja točku O i materijalnu točku) i količine gibanja:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

Jedinica je kgm^2/s. Smjer momenta količine gibanja određuje se pomoću pravila desne ruke. Moment količine gibanja čestice koja se giba po kružnici često se zove orbitalni jer se odnosi na orbitalno gibanje čestice. U slučaju kružnog gibanja čestice $\vec{L}$ ima isti smjer kao $\vec{\omega}$.

Ova razmatranja za materijalnu točku mogu se proširiti na kruto tijelo koje rotira oko nepomične osi.



SLIKA: Moment količine gibanja krutog tijela – Kulišić slika 6.7. str. 97

Podijelimo tijelo na materijalne točke mase Δm_i i brzine v_i. Udaljenost materijalne točke od osi rotacije je $\vec{r_i}$, a $\vec{r_i}'$ je radijus-vektor od točke O, koja se nalazi na osi rotacije. Moment količine gibanja s obzirom na točku O:

$$\Delta\vec{L_i} = \vec{r_i}' \times \Delta m_i \vec{v_i}$$

Projekcija vektora $\Delta\vec{L_i}$ na os rotacije je:

$$\Delta L_{zi} = \Delta m_i r_i v_i = \Delta m_i r_i^2 \omega \qquad \text{jer je: } v_i = r_i \omega$$

Projekcija ukupnog momenta količine gibanja krutog tijela na os z dobije se zbrajanjem momenata svih čestica tijela:

$$L_z = \sum_i \Delta L_{zi} = \sum_i \Delta m_i r_i v_i = I_z \omega \qquad (+)$$

Ovo vrijedi za bilo koju nepomičnu os oko koje rotira tijelo.

Ako homogeno tijelo rotira oko svoje osi simetrije, ukupni moment količine gibanja $\vec{L}$ ima smjer kutne brzine $\vec{\omega}$ pa vrijedi:

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \qquad (*)$$

$\vec{L}$ i $\vec{\omega}$ imaju isti smjer i leže na osi rotacije. Općenito, za nesimetrično tijelo smjer $\vec{L}$ i $\vec{\omega}$ ne mora biti jednak i (*) više ne vrijedi. (+) vrijedi i za simetrična i za nesimetrična tijela.

VEZA IZMEĐU $\vec{L}$ i $\vec{M}$ ZA TIJELO KOJE ROTIRA OKO NEPOMIČNE OSI

$$\vec{L_i} = \vec{r_i} \times \vec{p_i}$$

Moment količine gibanja jedne od materijalnih točaka tijela s obzirom na neku čvrstu točku O koja leži na osi rotacije

$$\vec{L_i} = \vec{r_i} \times \vec{p_i} \,/\, \frac{d}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{L_i} = \frac{d}{dt}\vec{r_i} \times \vec{p_i} + \vec{r_i} \times \frac{d}{dt}\vec{p_i} = \vec{v_i} \times m_i \vec{v_i} + \vec{r_i} \times \vec{F_i} = 0 + \vec{M_i}$$

$$\frac{d}{dt}\sum_i \vec{L_i} = \sum_i \vec{M_i}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \overrightarrow{M}$$

$\sum_i \overrightarrow{L_i} = \vec{L}$ Ukupni moment količine gibanja s obzirom na točku O

$\sum_i \overrightarrow{M_i} = \overrightarrow{M}$ Ukupni moment vanjskih sila s obzirom na istu točku

Ukupni moment unutrašnjih sila jednak je 0 jer je za svaki par sila $\overrightarrow{F_{ij}} = -\overrightarrow{F_{ji}}$ moment

$$\overrightarrow{M_{ij}} = \vec{r_j} \times \overrightarrow{F_{ij}} + \vec{r_i} \times \overrightarrow{F_{ji}} = (\vec{r_j} - \vec{r_i}) \times \overrightarrow{F_{ij}} = 0$$

Za svaku centralnu silu koja ima smjer $(\overrightarrow{r_j} - \overrightarrow{r_i})$.

$\frac{d}{dt}\vec{L} = \overrightarrow{M}$ vrijedi i za projekciju vektora $\vec{L}$ i $\overrightarrow{M}$ na os rotacije *z*:

$$\frac{d}{dt}L_z = M_z$$

Za rotaciju tijela oko nepomične osi vrijedi:

$$\frac{d}{dt}L_z = M_z = \frac{d}{dt}(I_z\omega) = I_z\frac{d}{dt}\omega = I_z\alpha$$

Zakon očuvanja momenta količine gibanja

Moment vanjskih sila koje djeluju na kruto tijelo mijenja njegov moment količine gibanja prema jednadžbi:

$$\overrightarrow{M} = \frac{d}{dt}\vec{L}$$

Ovo smo izveli za kruto tijelo, ali vrijedi i za sustav čestica. Općenito, vremenska promjena ukupnog momenta količine gibanja sustava čestica s obzirom na neku točku jednaka je ukupnom momentu vanjskih sila s obzirom na istu točku.

Ako je sustav zatvoren, odnosno ako na kruto tijelo ne djeluju vanjske sile (ili ako rezultantni moment vanjskih sila iščezava), slijedi da je $\frac{d}{dt}\vec{L}=0$, odnosno $\vec{M}=0$ i $\vec{L}=konst$.

Unutrašnje sile ne mogu promijeniti moment količine gibanja sustava. To mogu učiniti samo vanjske sile ako im je moment različit od 0. U zatvorenom sustavu moment količine gibanja je očuvan.

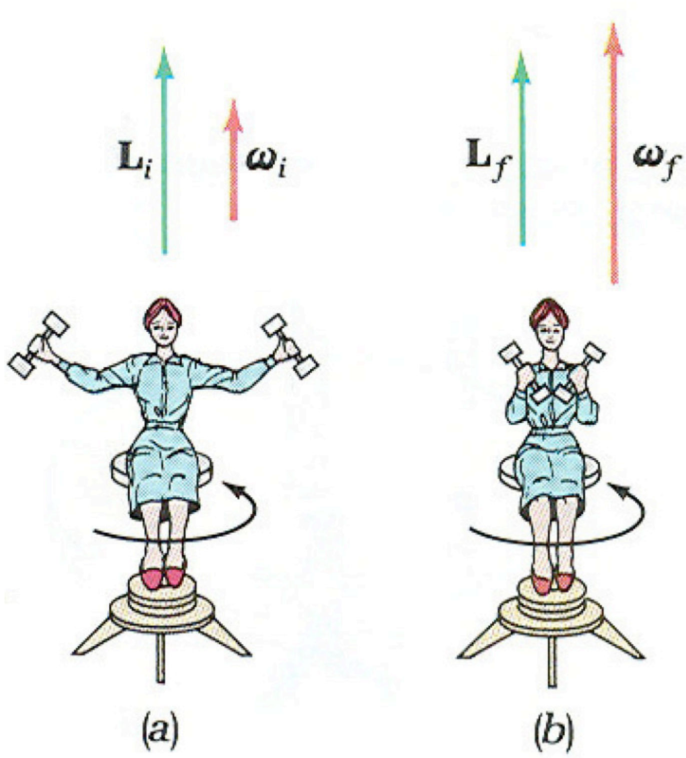
U posebnom slučaju, ako se mehanički sustav vrti oko nepomične osi z, ukupni moment količine gibanja je $L_z = I_z\omega$. Ako je sustav izoliran, odnosno ako je komponenta ukupnog momenta vanjskih sila u smjeru osi z jednaka 0, tada je:

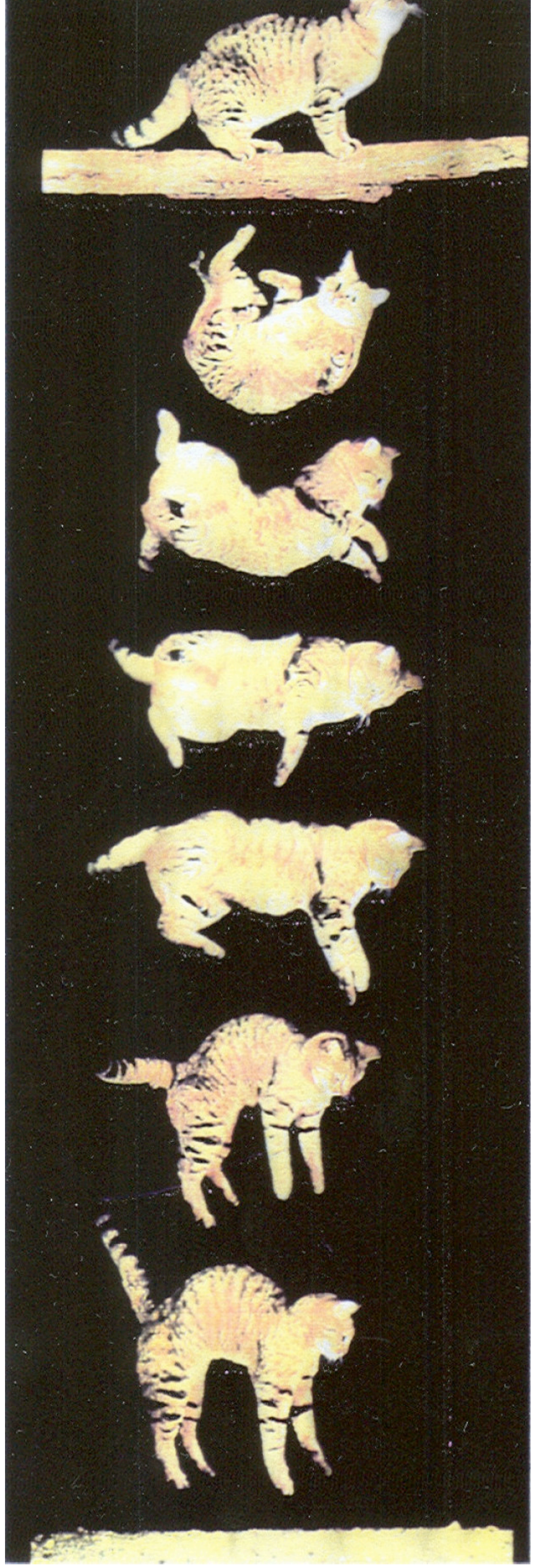
$$L_z = I_z\omega = konst \qquad (*)$$

Ako je $I_z = konst$ (kruto tijelo), iz (*) slijedi da je i $\omega = konst$, tj. kruto tijelo rotira oko čvrste osi stalnom kutnom brzinom.

Ako se I_z mijenja za vrijeme vrtnje (npr. udaljavanjem pojedinih točaka sustava od osi rotacije), tada se i ω mijenja tako da bi $I_z\omega$ bilo konstantno.

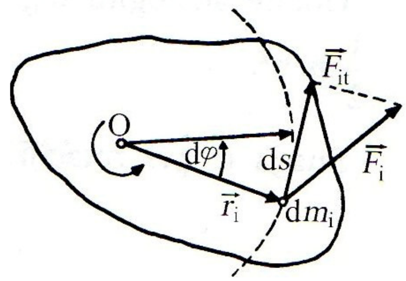
Unutrašnje sile mogu, dakle, mijenjati kutnu brzinu rotirajućeg sustava premda pri tom L_z ostaje konstantan. Primjer: Prandtlov stolac.





Rad i snaga u vrtnji krutog tijela

Promatrajmo tijelo koje rotira kutnom brzinom ω oko nepomične osi z, koja prolazi kroz točku O okomito na ravninu slike.



SLIKA: Izračunavanje rada pri rotaciji – Kulišić slika 6.13. str. 103

Na materijalnu točku mase dm_i pri tom djeluje unutrašnja sila $\overrightarrow{F_{ui}}$ i vanjska sila $\overrightarrow{F_{vi}}$, odnosno ukupna sila $\overrightarrow{F_i} = \overrightarrow{F_{ui}} + \overrightarrow{F_{vi}}$. Rad obavlja samo tangencijalna komponenta sile $\overrightarrow{F_{it}}$ koja ma smjer pomaka $d\vec{s}$:

$$dW_i = F_{it} ds_i = F_{it} r_i d\varphi$$

$ds_i = r_i d\varphi$, gdje je $d\varphi$ kut za koji se tijelo zavrtjelo, a $\frac{d\varphi}{dt}$ kutna brzina vrtnje.

$M_{iz} = F_{it} r_i$ je komponenta momenta sile s obzirom na os rotacije.

$$dW_i = M_{iz} d\varphi$$

Zbrojimo doprinose po svim elementarnim masama i dobijemo elementarni rad koji sila izvrši na tijelo u vremenu dt:

$$dW = \sum_i dW_i = M_z d\varphi$$

Analogno $dW = F_s ds$ pri translaciji.

M_z je komponenta ukupnog momenta vanjskih sila jer je zbroj svih momenata unutrašnjih sila = 0.

Pri rotaciji za kut φ rad je:

$$W = \int_0^{\varphi} M_z d\varphi$$

Kinetičku wenergiju tijela koje rotira oko nepomične osi odredimo tako da uzmemo u obzir da se vaj rad pretvara u rotacijsku kinetičku energiju:

$$dE_k = dW = M_z d\varphi = I_z \alpha \omega dt = I_z \frac{d\omega}{dt} \omega dt = I_z \omega d\omega$$

$$E_k = \int_0^{\omega} I_z \omega d\omega = \frac{1}{2} I_z \omega^2$$

IZVOD E_k PREKO KINETIČKE ENERGIJE MATERIJALNE TOČKE

Kad se tijelo vrti oko nepomične osi, brzina bilo koje njegove točke je $v_i = r_i \omega$, gdje je ω kutna brzina rotacije, a r_i udaljenost točke od osi rotacije. Kinetička energija točke mase Δm_i je: $E_{ki} = \frac{1}{2} \Delta m_i r_i^2 \omega^2$

Kinetička energija krutog tijela jednaka je zbroju kinetičkih energija svih točaka:

$$E_k = \sum_i E_{ki} = \frac{1}{2} \sum_i \Delta m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_i \Delta m_i r_i^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2$$

Analogija s izrazom za kinetičku energiju translacije: $E_k = mv^2 / 2$

Snaga pri rotaciji: $P = \frac{dW}{dt} = M_z \frac{d\varphi}{dt} = M_z \omega$

Može se pokazati da općenito vrijedi:

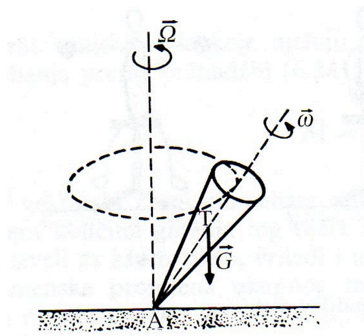
$$P = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$$

tj. snaga je skalarni produkt ukupnog momenta vanjskih sila i vektora kutne brzine.

Analogija kod translacije: $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$

Gibanje zvrka: nutacija, precesija i prisilna precesija

Zvrk je rotacijsko simetrično tijelo koje se vrlo brzo vrti oko svoje osi simetrije, pri čemu je stalno učvršćeno u jednoj točki koja leži na toj osi.



SLIKA: Zvrk – Kulišić slika 6.9. str. 100

Gledamo kako moment vanjskih sila (npr. moment sile teže $\overrightarrow{M_A} = \vec{r_A} \times m\vec{g}$) utječe na gibanje zvrka uz 2 primjera:

- gibanje slobodnog zvrka ($\overrightarrow{M_A} = 0$)
- gibanje zvrka kad se moment s obzirom na točku A razlikuje od 0 (tzv. precesija zvrka)

SLOBODNI ZVRK

Neka je zvrk učvršćen u svom težištu. Ako je sila teža jedina vanjska sila koja djeluje na zvrk, tada je ukupni moment vanjskih sila = 0 ($\overrightarrow{M_A} = 0$) i kažemo da je zvrk slobodan.

Jednadžba gibanja zvrka:

$$\overrightarrow{M_A} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{L_A}$$

$\overrightarrow{M_A}$ - Rezultantni moment vanjskih sila s obzirom na točku A

$\overrightarrow{L_A}$ - Ukupni moment količine gibanja zvrka s obzirom na točku A u kojoj je zvrk učvršćen

$$\overrightarrow{M_A} = 0 \qquad \frac{d}{dt}\overrightarrow{L_A} = 0 \qquad \overrightarrow{L_A} = konst$$

Smjer i iznos momenta količine gibanja konstantni su jer nema vanjskog momenta sile.

Moment količine gibanja je u pravcu osi rotacije, tj. ima smjer vektora $\vec{\omega}$ i iznosi: $\vec{L} = I_z\vec{\omega}$

I_z - moment tromosti s obzirom na os zvrka

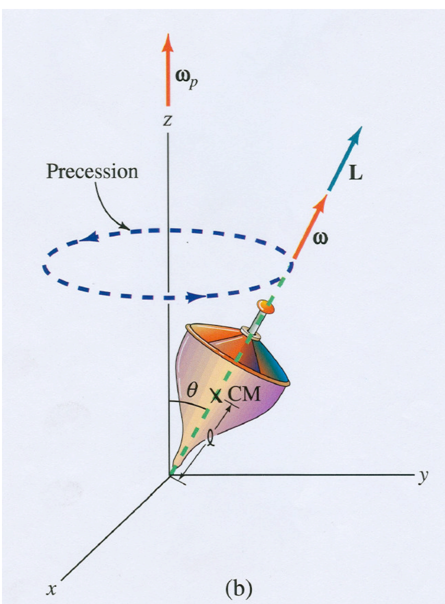
$\vec{\omega}$ - kutna brzina rotacije zvrka oko osi simetrije

Os slobodnog zvrka zadržava stalan pravac u odnosu prema inercijskom referentnom sustavu.

Pri rotaciji Zemlje oko njezine osi samo je Zemljina os nepomična, te slobodan zvrk ne mijenja os vrtnje s obzirom na sustav vezan za Zemlju samo onda kad se os vrtnje zvrka i zemlje poklapaju.

Primjer: Cardanovo učvršćenje

- takav zvrk se može istodobno okretati oko 3 okomite osi koje prolaze kroz težište, a izveden je tako da na njega ne djeluje nikakav vanjski moment
- zvrk stalno zadržava isti smjer svoje osi u prostoru ($\vec{L} = konst$) bez obzira na to kako mi gibamo stalak zvrka
- trenje u težištima utjecat će na gibanje zvrka – prepušten sam sebi nakon nekog vremena se zaustavlja



PRECESIJA ZVRKA

Ako zvrk nije učvršćen u težištu nego u nekoj drugoj točki A, tada će na os zvrka stalno djelovati moment sile teže i zvrk će izvoditi gibanje zvano precesija.

Primjer: Kotač bicikla s produženom osovinom zavrtimo kutnom brzinom $\vec{\omega}$ i objesimo na uže tako da osovina zvrka bude horizontalna.

Kad kotač prepustimo samom sebi, on ne pada premda na njega djeluje sila teža već izvodi precesiju – os zvrka se zakreće, a težište zvrka se giba po kružnici.

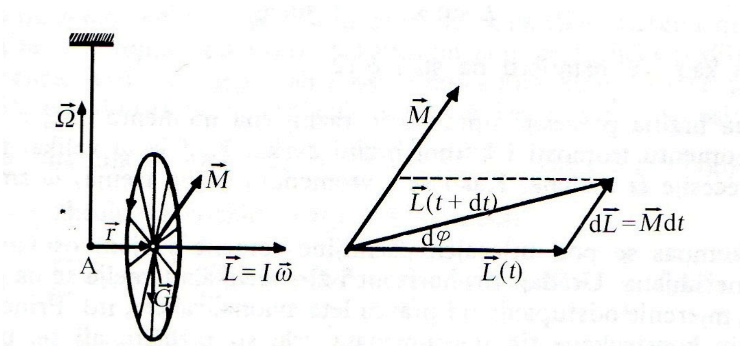
Na zvrk djeluje moment sile zbog njegove težine $\vec{G} = m\vec{g}$: $\overrightarrow{M_A} = \vec{r_A} \times \vec{G}$

$\overrightarrow{M_A}$ je okomita na $\vec{r_A}$ i $\vec{G}$, tj. na os rotacije i smjer sile $\vec{G}$.

Iznos $\overrightarrow{M_A}$ je:

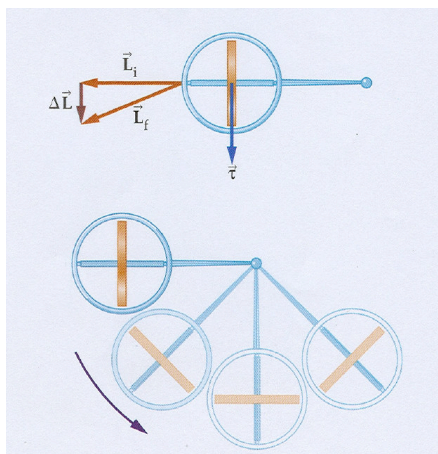
$M = r_A G \sin\alpha$ $\alpha = kut(\vec{r_A}, \vec{G})$

(α je 90º na zadnjoj slici, α je različit od 90º na prijašnjoj slici)



SLIKA: Precesija zvrka – Kulišić slika 6.12. str. 101

Pretpostavljamo da je moment količine gibanja zvrka $\overrightarrow{L_A}$ s obzirom na točku A u smjeru osi rotacije zvrka i da s njim polako precesira oko točke A – približno vrijedi $\vec{L} = I\vec{\omega}$. U vremenskom intervalu dt $\vec{L}$ će se promijeniti za $d\vec{L} = \vec{M}dt$ i u trenutku $(t+dt)$ bit će $(\vec{L} + d\vec{L})$. Budući je $\vec{M}$ uvijek okomit na $\vec{L}$, smjer od $\vec{L}$ se stalno mijenja, a njegov iznos ostaje konstantan – vrh vektora $\vec{L}$ opisuje kružnicu, odn. zvrk precesira.



Analogija kružnom gibanju u kojem je sila $\vec{F}$ okomita na količinu gibanja $\vec{p}$.

Os zvrka (kao i vektor $\vec{L}$ koji koincidira s osi) u vremenu dt opiše kut $d\varphi$ pa je kutna brzina precesije:

$$\Omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\left| d\vec{L} \right|}{Ldt} = \frac{Mdt}{Ldt} = \frac{M}{L}$$

Budući je $\vec{M}$ međusobno okomit na $\vec{L}$ i $\vec{\Omega}$, formulu za kutnu brzinu precesije možemo pisati u vektorskom obliku:

$$\vec{M} = \vec{\Omega} \times \vec{L}$$

Ako je $L_z = I_z\omega$, onda je $\Omega = \dfrac{M}{I_z\omega}$

Za $\alpha = kut(\vec{\Omega}, \vec{L})$ različit od 90º, vrijedi $M = \Omega L \sin\alpha$, odnosno

$$\Omega = \frac{M}{L\sin\alpha} = \frac{mgr\sin\alpha}{L\sin\alpha} = \frac{mgr}{L}$$

Kutna brzina precesije Ω je proporcionalna momentu sile M, a obrnuto proporcionalna momentu tromosti I i kutnoj brzini zvrka ω.

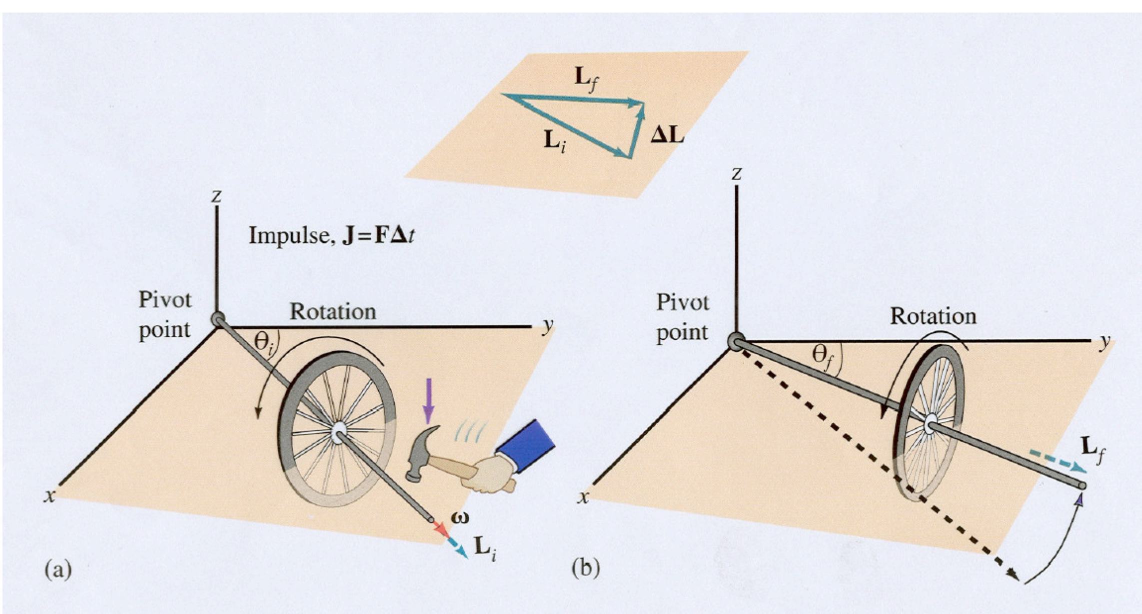
Kako se s vremenom (zbog trenja) ω smanjuje, Ω se povećava.

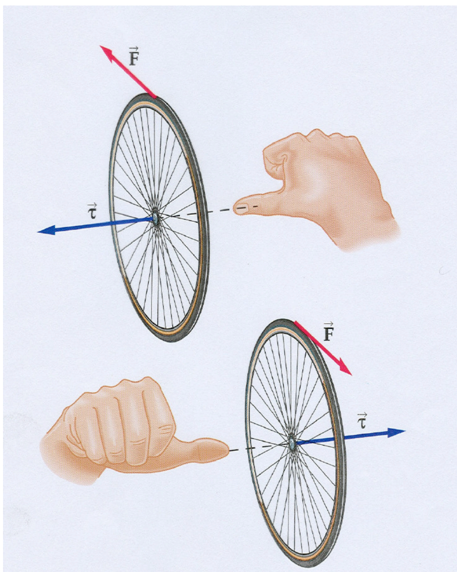
NUTACIJA

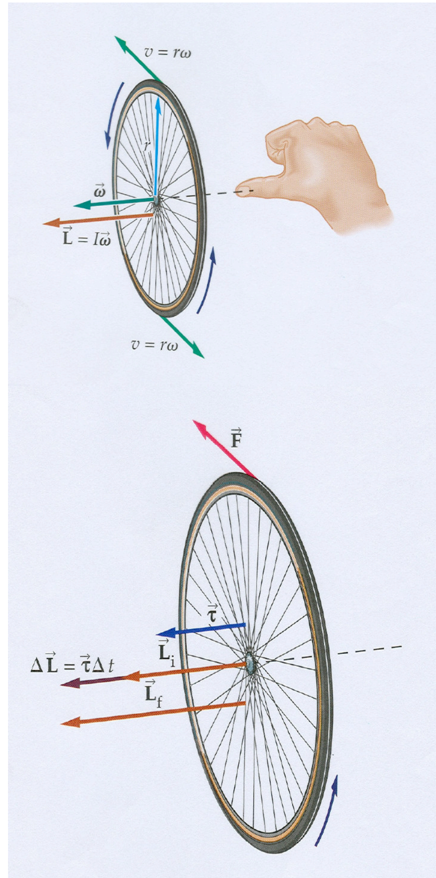
Ako je tijelo simetrično, a os rotacije je ujedno i os simetrije, onda imamo rotaciju bez promjene orijentacije osi. Ako osi rotacije predamo mali impuls (lagano „piknemo“), dolazi do promjene smjera osi rotacije i $\vec{L}$ i $\vec{\omega}$ zatvaraju neki kut α, ali $\vec{\omega}$ stalno mijenja smjer. **SLIKA: Slikoviti prikaz nutacije – Horvat slika 4.36. str. 4-61**

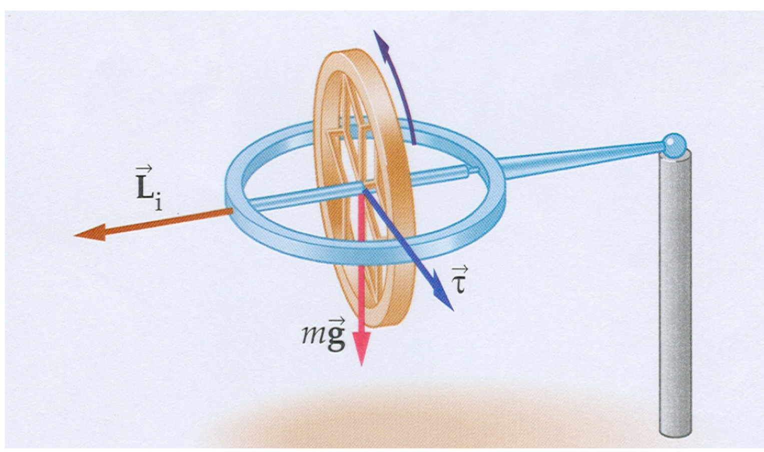
Kao da gledamo 2 stošca koji se kotrljaju jedan u drugom.

$\vec{L}$ - vektor u smjeru osi simetrije manjeg stošca kuta otvora 2α
$\vec{\omega}$ - leži na plaštu većeg stošca
- veći stožac salno obilazi manjeg i naslanja se na njega




$\vec{F}$
$\vec{\tau}$
$\vec{F}$
$\vec{\tau}$


$v = r\omega$
r
$\vec{\omega}$
$\vec{L} = I\vec{\omega}$
$v = r\omega$
$\vec{F}$
$\vec{\tau}$
$\vec{L}_i$
$\Delta\vec{L} = \vec{\tau}\Delta t$
$\vec{L}_f$


$\vec{L}_i$
$\vec{\tau}$
$m\vec{g}$

Princip virtualnog rada

Vanjska sila koja djeluje na tijelo ili sustav tijela, može proizvesti translaciju i rotaciju tijela te izvršiti određeni rad nad tijelom:

$$dW = \sum \vec{F} \cdot d\vec{r} + \sum \vec{M} \cdot d\vec{\varphi}$$

$d\vec{r}$ - linearni pomak materijalne točke tijela

$d\vec{\varphi}$ - kutni pomak materijalne točke tijela – vektor u smjeru kutne brzine rotacije tijela

Da bi tijelo bilo u ravnoteži, ukupni rad vanjskih sila pri bilo kakvoj zamišljenoj (virtualnoj) maloj promjeni položaja mora biti = 0.

(*) Uvjet ravnoteže: $\delta W = 0$, $\sum \vec{F} \cdot \delta\vec{r} + \sum \vec{M} \cdot \delta\vec{\varphi} = 0$

Elementarni virtualni pomaci se označavaju s δ.

Uvjet (*) vrijedi samo ako je: $\sum \vec{F} = 0$ i $\sum \vec{M} = 0$

Te smo uvjete dobili u statici.

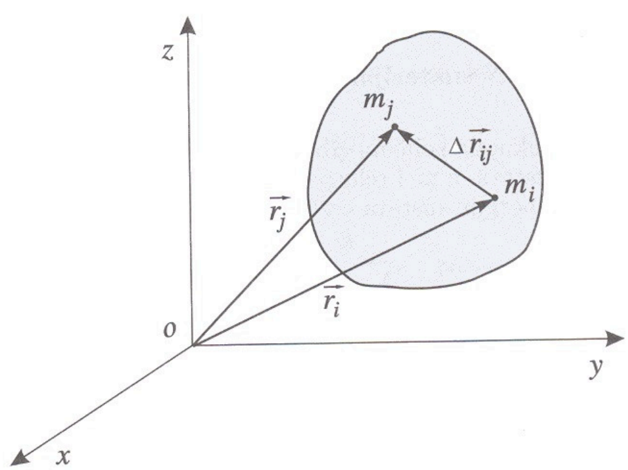
Princip virtualnog rada omogućava rješavanje problema ravnoteže krutog tijela, odnosno sustava tijela.

Mehanika krutog tijela. Statika. Mehanika sustava čestica

Pojam i svojstva krutog tijela

Kruto tijelo je:
- realni predmet određenih dimenzija i dane mase
- tijelo koje se proteže u prostoru
- pri djelovanju sila se vrlo malo promijeni → deformaciju krutog tijela zbog djelovanja vanjske sile možemo zanemariti u odnosu na dimenziju tijela
- dijelovi krutog tijela se pri djelovanju sila ne gibaju relativno, jedan u odnosu na drugi.

Uočimo dvije proizvoljne točke krutog tijela čiji su radijus–vektori $\vec{r}_i$ i $\vec{r}_j$. Relativni vektor pomaka te dvije točke je $\Delta\vec{r}_{ij}$.



SLIKA: Uz definiciju krutog tijela – Horvat slika 3.13. str. 3-28

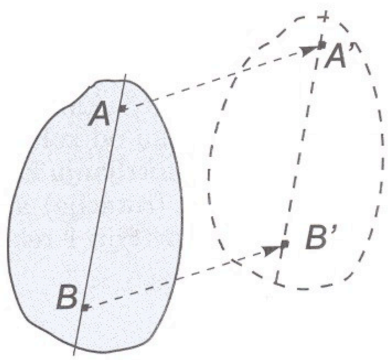
Ako vrijedi da je na bilo koje dvije točke relativni radijus vektor $\Delta\vec{r}_{ij}$ nepomjenjiv u vremenu – konstantan, kažemo da je to **tijelo kruto**. Naravno, kruto tijelo je idealizirani model, a u prirodi ima čvrstih tijela koje se više – manje približavaju idealiziranom modelu krutog tijela. Često se oblik tijela, koje se giba, ne mijenja, ili se mijenja tako malo da tu promjenu možemo zanemariti, i tada možemo pretpostaviti da je tijelo savršeno kruto i na njega primijeniti zakone gibanja krutog tijela.

Načini gibanja krutog tijela

Razlikujemo 2 vrste gibanja krutog tijela: **translacija** i **rotacija**.

TRANSLACIJA

Tijelo se giba translatorno ako linija koja povezuje bilo koje dvije njegove čestice zadržava svoj smjer u prostoru, tj. ako za vrijeme gibanja ostaje paralelna svom početnom položaju. U nekom promatranom trenutku sve točke tijela imaju jednake brzine i akceleracije.

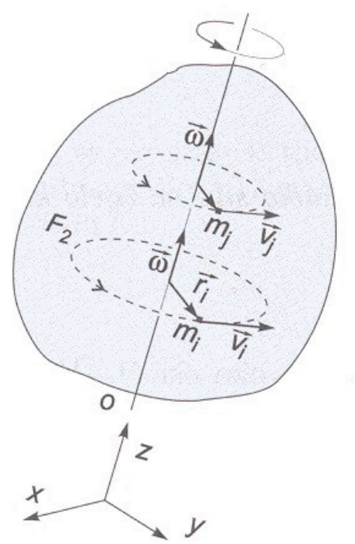


SLIKA: Translacija krutog tijela – Horvat slika3.14. str. 3-28

Za opisivanje translacije dovoljno je znati gibanje 1 točke tijela (CM) jer se ostale točke gibaju na isti način. Pri tom se smatra da je čitava masa tijela u toj točki (centru mase) i da rezultantna sila ima hvatište u toj točki.

ROTACIJA

Kada kruto tijelo rotira, sve se njegove čestice gibaju istom kutnom brzinom po kružnicama čija središta leže na pravcu koji se zove **os rotacije**.



SLIKA: Rotacija krutog tijela oko stalne (nepomične osi) – Horvat slika 3.15. str. 3-29

Možemo smatrati da je najopćenitije gibanje krutog tijela sastavljeno od ta 2 jednostavna oblika gibanja:

- translacije njegova centra mase
- rotacije oko osi koja prolazi kroz centar mase (os može biti nepomična ili tijekom gibanja mijenjati svoj položaj prema tijelu)

Primjer: pravocrtno gibanje automobila - kotač izvodi gibanje složeno od:

- rotacije oko osi kroz CM
- translacije CM kotača u smjeru gibanja automobila

Uvjeti za ravnotežu krutog tijela

Statika je dio mehanike koji proučava zakone slaganja sila koje djeluju na tijela i ravnotežu tijela. Tijelo je u ravnoteži kad se ne ubrzava. Pri tom tijelo može mirovati, gibati se jednoliko po pravcu, ili se jednoliko vrtjeti oko osi koja prolazi kroz CM. Mirovanje je vrsta ravnoteže, a pogrešno je smatrati da biti u ravnoteži znači mirovati. Znači, najjednostavnija vrsta ravnoteže krutog tijela je mirovanje, a najopćenitija je jednolika translacija i jednolika rotacija oko osi koja prolazi kroz CM.

RAVNOTEŽA MATERIJALNE TOČKE

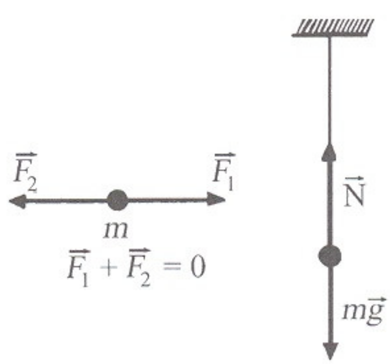
Konkurentne sile:
- sile koje djeluju u istoj točki
- njihova rezultanta je njihov vektorski zbroj: $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... = \sum_i \vec{F}_i$

Čestica je u ravnoteži kad joj je akceleracija 0 $(\vec{a} = 0)$, odn. kako slijedi iz 2. Newtonovog zakona, kad iščezava rezultanta svih sila koje djeluju na nju.

Uvjet ravnoteže čestice: $\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = 0$

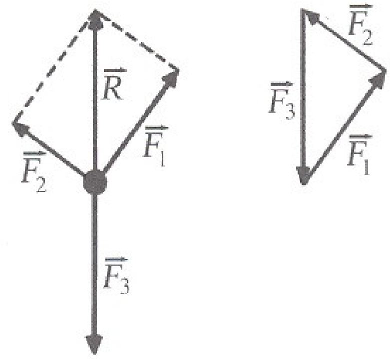
ili: $\sum_i F_{ix} = 0$, $\sum_i F_{iy} = 0$, $\sum_i F_{iz} = 0$

Najjednostavnija vrsta ravnoteže je kad na česticu djeluju konkurentne sile jednakog iznosa, a suprotnog smjera.



SLIKA: RAVNOTEŽA ČESTICE – Kulišić slika 5.1.a) str. 80

Kad na česticu djeluju 3 sile koje su u ravnoteži, tada je rezultanta dviju sila po iznosu jednaka trećoj sili, ali suprotnog smjera.

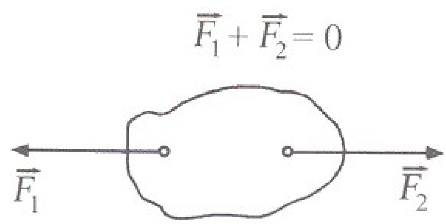


SLIKA: RAVNOTEŽA ČESTICE – Kulišić slika 5.1.b) str. 80

Općenito: čestica je u ravnoteži ako je zatvoren vektorski poligon sila koje djeluju na nju.

DJELOVANJE KONKURENTNIH SILA NA KRUTO TIJELO

Najednostavnije je kad sve sile djeluju u istoj točki krutog tijela, tj. imaju zajedničko **hvatište**, a svodi se na djelovanje sila na materijalnu točku. Rezultanta takvih sila jednaka je njihovu vektorskom zbroju i ima hvatište u toj točki. Da bi kruto tijelo bilo u tom slučaju u ravnoteži, nužno je i dovoljno da bude zatvoren poligon konstruiran od tih sila. Kad na kruto tijelo djeluju 2 sile s različitim hvatištima, koje leže na istom pravcu djelovanja, kruto tijelo je u ravnoteži ako su te sile jednake po iznosu, a suprotnog smjera (jedan od osnovnih aksioma statike): $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$



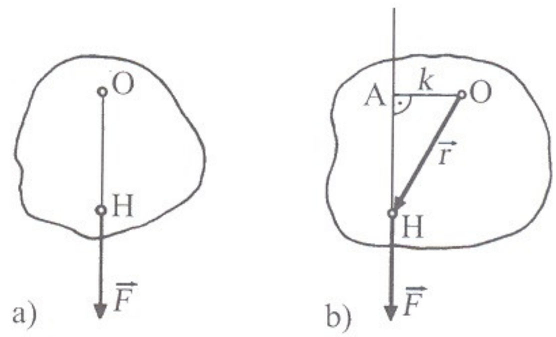
SLIKA: Djelovanje dviju sila na kruto tijelo – Kulišić slika 5.3. str.81

Slijedi da se hvatište sile, koja djeluje na kruto tijelo, može pomicati duž pravca nosioca, a da se pri tom njeno djelovanje na gibanje krutog tijela ne promijeni. Sila koja djeluje na kruto tijelo je klizni vektor.

Sustav sila koje djeluju na različitim točkama krutog tijela, a kojima se pravci djelovanja sijeku u jednoj točki, možemo svesti na sustav sila koje djeluju u jednoj točki i zamijeniti njihovim vektorskim zbrojem koji djeluje u točki gdje se sijeku pravci djelovanja tih sila. Budući se hvatište sila smije pomicati po pravcu nositelju, sve se te sile mogu pomaknuti tako da djeluju u jednoj točki – **sjecištu pravaca djelovanja**, i tako se i ovaj primjer svodi na prethodni.

Moment sile

Kruto tijelo može pod utjecajem sile uz translacijsko gibanje izvoditi i rotaciju oko neke osi ili neke točke. Utjecaj sile na rotaciju se opisuje njenim momentom.



SLIKA: Uz definiciju momenta sile – Kulišić slika 5.4. str. 81

Promatrajmo tijelo koje može rotirati oko točke O. Neka na tijelo djeluje vanjska sila $\vec{F}$. Djelovanje sile na kruto tijelo ne ovisi samo o njezinom iznosu i smjeru, već i o njenu hvatištu, tj. o točki u kojoj ona djeluje na tijelo , ili, točnije, o položaju pravca nositelja te sile s obzirom na kruto tijelo. U primjerima imamo iste iznose i smjerove sila, ali je pravac nositelj različit.

Sila će utjecati na rotaciju tijela oko točke O samo ako pravac sile ne prolazi kroz tu točku (**slika b**). Efikasnost djelovanja sile na rotaciju je veća što je veća okomita udaljenost pravca djelovanja sile od točke O, tzv. krak sile $k = \overline{OA}$. Za opisivanje utjecaja sile na rotaciju se uvodi **moment sile** $\vec{M}$ čiji iznos je jednak: $M = kF$

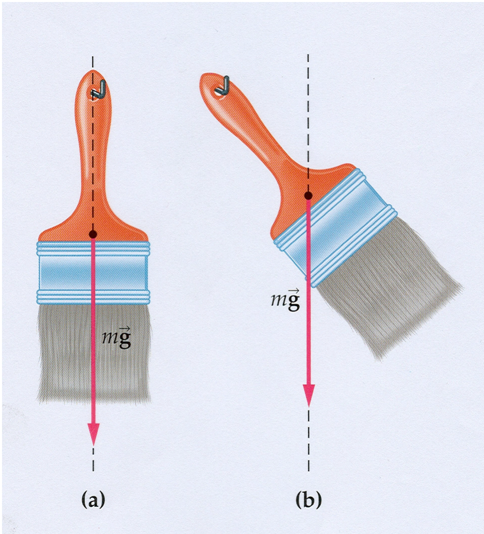
Jedinica momenta sile je Nm.

Ako je $\vec{r} = \overrightarrow{OH}$ vektor položaja hvatišta sile s obzirom na točku 0, moment sile možemo pisati kao: $M = rF\sin\phi$ $\phi = kut(\vec{r}, \vec{F})$

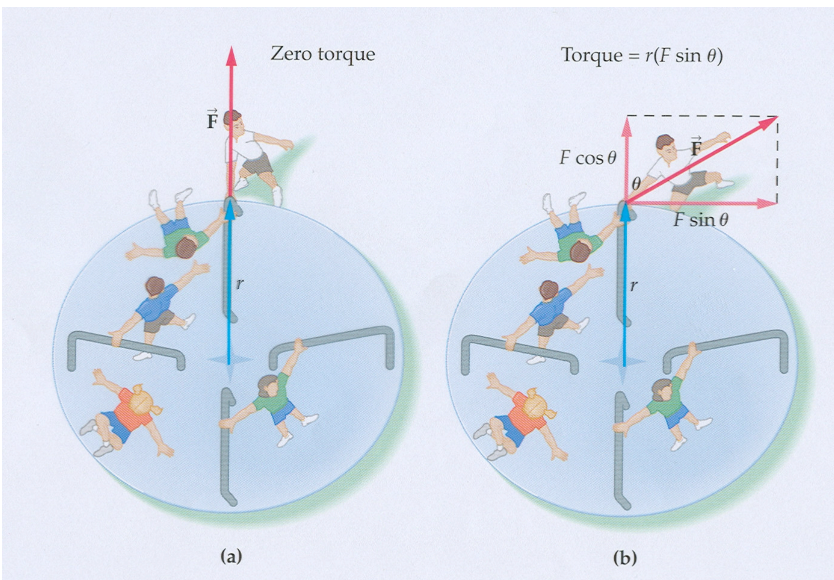
Moment sile je vektor čiji je iznos dan gornjim izrazima, a smjer okomit na ravninu u kojoj leže sila i točka O. Moment sile možemo prikazati kao vektorski produkt radijus–vektora (vektora položaja) hvatišta sile i sile: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

Smjer $\vec{M}$ određujemo pravilom desne ruke: ako idemo prstima od $\vec{r}$ prema $\vec{F}$ kraćim putem, palac pokazuje smjer $\vec{M}$.

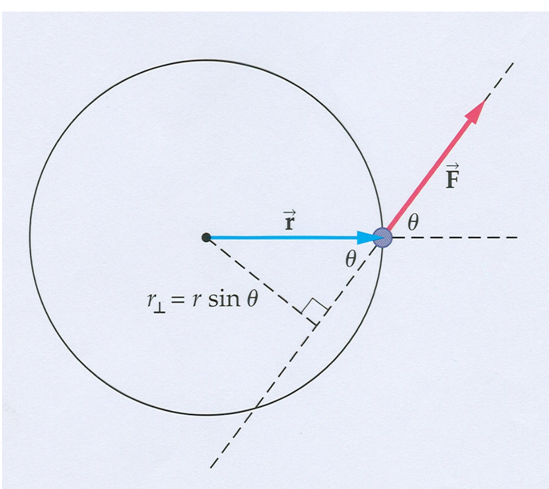
Pravac djelovanja momenta sile može biti bilo gdje okomito na ravninu, a obično se uzima da leži na osi rotacije. Vektore, koji nisu vezani za određeni pravac djelovanja, te se smiju paralelno translatirati zovemo aksijalnim vektorima.



$m\vec{g}$
$m\vec{g}$
(a)
(b)

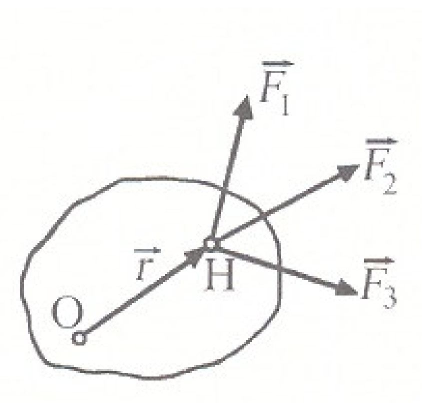


Zero torque
$\vec{F}$
r
Torque = $r(F \sin\theta)$
$F \cos\theta$
θ
$\vec{F}$
$F \sin\theta$
r
(a)
(b)



$\vec{F}$
$\vec{r}$
θ
θ
$r_{\perp} = r \sin\theta$

Ako u točki H djeluje više konkurentnih sila $\vec{F}_1, \vec{F}_2 ...$, moment svake od njih s obzirom na točku O je: $\vec{M}_i = \vec{r} \times \vec{F}_i$



SLIKA: Djelovanje više konkuretnih sila na kruto tijelo – Kulišić slika 5.5 str. 82

Moment rezultante $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ...$ je jednak zbroju momenata sila komponenata:

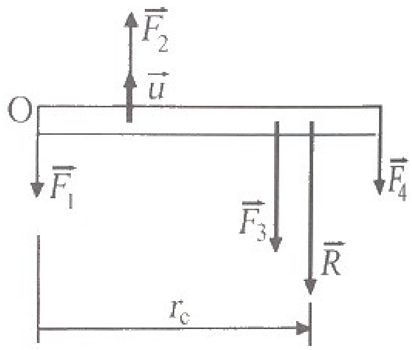
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{R} = \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ...) = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 + ... = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + ...$$

1. DJELOVANJE NEKONKURENTNIH SILA NA KRUTO TIJELO

Kad na kruto tijelo djeluje više nekonkurentnih sila (tj. sila čiji se pravci djelovanja ne sijeku u istoj točki), tada se one općenito ne mogu zamijeniti jednom silom, njihovim vektorskim zbrojem.

PRIMJER: SLAGANJE PARALELNIH SILA

Pretpostavimo da na tijelo djeluju 2 ili više sila kojima su pravci djelovanja paralelni. Odaberemo pozitivan smjer jediničnim vektorom $\vec{u}$. Sile možemo prikazati kao $F_i\vec{u}$, gdje će F_i biti pozitivno ili negativno ovisno o tome da li je smjer sile $\vec{F}_i$ jednak ili suprotan smjeru vektora $\vec{u}$.



SLIKA: Paralelne sile – Kulišić slika 5.6. str. 82

Vektorski zbroj tih sila je $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... = \vec{u}(F_1 + F_2 + ...)$ Pravac djelovanja rezultante paralelan je pravcima djelovanja komponenata.

Moment svake od sila $\vec{F}_i$ je $\vec{M}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$

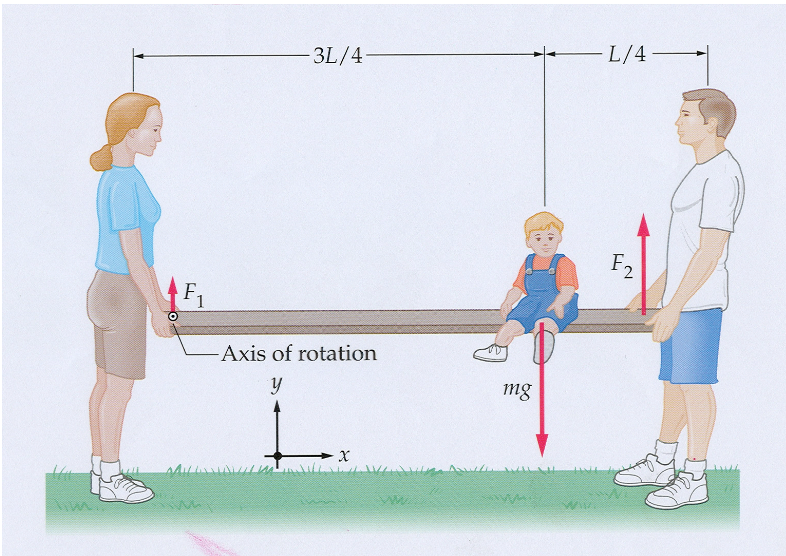
Slijedi: $\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + ... = (\vec{r}_1 F_1 + \vec{r}_2 F_2 + ...) \times \vec{u}$

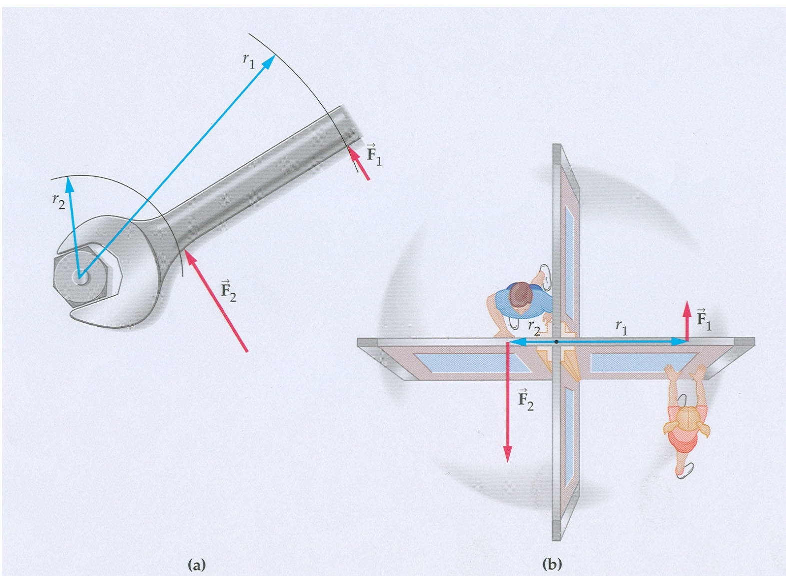
Rezultantni moment je okomit na jedinični vektor $\vec{u}$, te na rezultantu sila $\vec{R}$. Da bi taj moment bio po iznosu jednak momentu rezultante, potrebno je da rezultanta djeluje u točki C određenoj vektorom položaja $\vec{r}_c$ odabranoj tako da je:

$$(\vec{r}_1 F_1 + \vec{r}_2 F_2 + ...) \times \vec{u} = \vec{r}_c \times \vec{R} = \vec{r}_c \times (F_1 + F_2 + ...)\vec{u} = \vec{r}_c (F_1 + F_2 + ...) \times \vec{u}$$

Odatle dobijamo položaj pravca djelovanja rezultantne sile $\vec{R}$:

$$\vec{r}_c = \frac{\vec{r}_1 F_1 + \vec{r}_2 F_2 + ...}{F_1 + F_2 + ...} = \frac{\sum_i \vec{r}_i F_i}{\sum_i F_i}$$



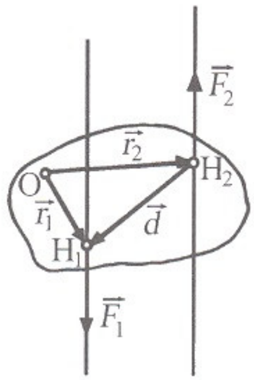


2. PAR SILA

Kad na kruto tijelo djeluje više paralelnih sila $\vec{F}_1, \vec{F}_2 ... \vec{F}_n$ čiji je vektorski zbroj jednak 0 $\left(\sum_i \vec{F}_i = 0 \right)$, one se mogu zamijeniti dvjema paralelnim silama istog iznosa, a suprotnog smjera.

Npr: Zbrojimo prvih (n - 1) sila i dobijemo: $\vec{F} = \sum_{i=1}^{n-1} \vec{F}_i$. Budući je $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0$, onda je $\vec{F}$ jednaka po iznosu, a suprotnog smjera posljednoj sili $\vec{F}_n$ koja će biti $\vec{F}'$. Tako smo sustav od n paralelnih sila, čiji je vektorski zbroj = 0, sveli na 2 antiparalelne sile istog iznosa $\vec{F}$ i $\vec{F}'$, tzv. **par sila**.

Promatramo kako par sila – dviju paralelnih sila $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ istog iznosa, a suprotnog smjera, djeluje na gibanje krutog tijela.



SLIKA: Par sila – Kulišić slika 5.8. str. 84

Rezultanta tih sila je jednaka 0: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$

Rezultantni moment:

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 - \vec{r}_2 \times \vec{F}_1 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1 = \vec{d} \times \vec{F}_1$$

$\vec{d} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ - vektor od hvatišta sile $\vec{F}_2$ do hvatišta sile $\vec{F}_1$

Moment para sila okomit je na ravninu u kojoj leže sile, po iznosu je jednak umnošku jedne od sila i udaljenosti pravaca djelovanja sila (tj. kraka $k = d \sin \phi$) i ne ovisi o izboru točke s obzirom na koju smo računali momente sila.

Rezultanta sila $\vec{R} = 0$, a rezultantni moment sile $\vec{M} \neq 0$, pa par sila ne uzrokuje translaciju već samo rotaciju: Centar mase tijela ostaje na miru, a tijelo se počne vrtjeti oko osi koja prolazi kroz centar mase i određena je smjerom momenta para.

Primjeri para sila:
- okretanje volana
- kotrljanje
- odvijanje vijka

Ravnoteža krutog tijela

Djelovanje sila na kruto tijelo može proizvesti translacijsko i rotacijsko gibanje. Kruto tijelo je u ravnteži ako je, promatrano u nekom inercijskom sustavu, linearna akceleracija njegova centra mase jednaka 0 i ako je njegova kutna akceleracija oko bilo koje nepomične osi u tom sustavu = 0. Moraju biti ispunjena dva uvjeta da bi se osigurala translacijska i rotacijska ravnoteža.

TRANSLACIJA

Translacijsko gibanje tijela – jednadžba:

$m\vec{a}_{CM} = \vec{F}$ = vektorski zbroj svih vanjskih sila koje djeluju na tijelo

U ravnoteži $\vec{a}_{CM}$ mora iščezavati pa je 1. uvjet ravnoteže krutog tijela: $\sum_i \vec{F}_i = 0$

Vektorski zbroj svih vanjskih sila koje djeluju na kruto tijelo u ravnoteži jednak je 0.

ROTACIJA

Uravnoteženo kruto tijelo vrti se stalnom kutnom brzinom ili miruje, tj. njegova kutna akceleracija oko bilo koje nepomične osi mora biti = 0. S obzirom da je kutna akceleracija proporcionalna ukupnom momentu vanjskih sila koje djeluju na tijelo, 2. uvjet ravnoteže je: $\sum_i \vec{M}_i = 0$

Vektorski zbroj svih vanjskih momenata sila (s obzirom na bilo koju točku) koji djeluju uravnoteženo kruto tijelo mora biti = 0.

Kruto tijelo je u ravnoteži samo ako su istovemeno ispunjena oba uvjeta:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \qquad \text{i} \qquad \sum_i \vec{M}_i = 0$$

U tom slučaju tijelo miruje, odn. giba se jednoliko po pravcu ili jednoliko rotira, ili i jedno i drugo.

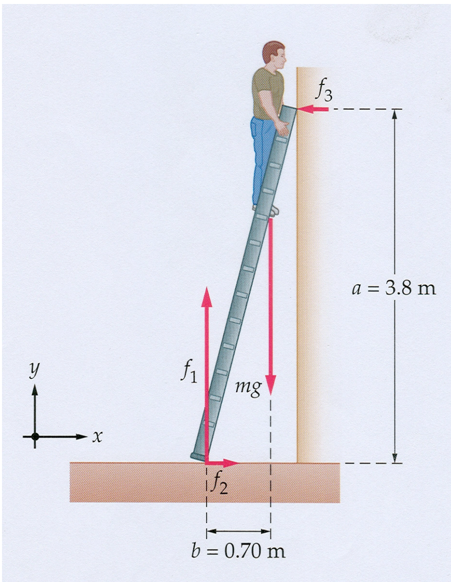
U posebnom slučaju: kad sile, koje djeluju na tijelo, leže u jednoj ravnini, navedeni uvjeti prelaze u 3 skalarne jednadžbe:

$$\sum_i F_{ix} = 0 \qquad \sum_i F_{iy} = 0 \qquad \sum_i M_{iz} = 0$$

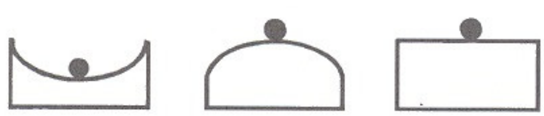
Svi momenti su okomiti na ravninu u kojoj djeluju sile, tj. imaju isti pravac nositelj, samo im se predznak može razlikovati.

Vektorski zbroj momenata sila se pretvara u algebarski s tim da se pazi na predznak:

- momenti sila koji uzrokuju rotaciju u smjeru suprotnom onom kazaljke na satu su pozitivni
- u istom smjeru onom kazaljke na satu su negativni



Razlikujemo 3 vrste ravnoteže tijela.



SLIKA: Vrste ravnoteže tijela – Kulišić Slika 5.9. str. 86

Za sve 3 vrste ravnoteže su ispunjeni uvjeti ravnoteže, ali je stabilnost tijela različita.

STABILNA RAVNOTEŽA (Potencijalna energija je minimalna)
Kada kratkotrajna sila djeluje na tijelo u stabilnoj ravnoteži, ono se malo pomakne iz ravnotežnog položaja, ali se nakon prestanka djelovanja sile vraća u taj položaj.

LABILNA RAVNOTEŽA (Potencijalna energija je maksimalna)
Tijelo pomaknuto iz položaja labilne ravnoteže više se u taj položaj ne vraća već teži da se od njega udalji.

INDIFERENTNA RAVNOTEŽA
Ako tijelo pomaknuto iz ravnotežnog položaja ostane i u novom položaju uravnoteženo, tijelo je u indiferentnoj ravnoteži.

Sustav materijalnih točaka

U prirodi često nailazimo na sustav čestica koje se gibaju. Čvrsta tijela također možemo shvatiti kao sustav velikog broja čestica.

Promatrajmo sustav od n čestica masa m_1, m_2,... m_n.

SLIKA: Sustav čestica – Kulišić slika 3.9. str.52

Na svaku česticu djeluje rezultanta vanjskih sila i unutrašnje sile, kojima ostale čestice djeluju na nju. 2. Newtonov zakon primijenjen na taj sustav:

$$\begin{aligned}
&m_1\overrightarrow{a_1} = \overrightarrow{F_{v1}} + \overrightarrow{F_{12}} + \overrightarrow{F_{13}} + ... + \overrightarrow{F_{1n}} \\
&m_2\overrightarrow{a_2} = \overrightarrow{F_{v2}} + \overrightarrow{F_{21}} + \overrightarrow{F_{23}} + ... + \overrightarrow{F_{2n}} \\
&... \\
&m_n\overrightarrow{a_n} = \overrightarrow{F_{n1}} + \overrightarrow{F_{n1}} + \overrightarrow{F_{n2}} + ... + \overrightarrow{F_{n,n-1}}
\end{aligned}$$

Te sve jednadžbe zbrojimo:

$$m_1\overrightarrow{a_1} + m_2\overrightarrow{a_2} + ... = \overrightarrow{F_{v1}} + \overrightarrow{F_{v2}} + ...\overrightarrow{F_{vn}} + \overrightarrow{F_{12}} + \overrightarrow{F_{21}} + ... + \overrightarrow{F_{n-1,n}} + \overrightarrow{F_{n,n-1}}$$

Prema 3. Newtonovom zakonu je: $\overrightarrow{F_{ij}} + \overrightarrow{F_{ji}} = 0$, pa je zbroj svih unutrašnjih sila 0 bez obzira na veličinu sustava i bez obzira na sile koje djeluju unutar sustava:

$$\sum_{i,j=1,i\neq j}^{n}\overrightarrow{F_{ij}} = 0$$

$\overrightarrow{F_{ij}}$ - unutrašnja sila između *i*-te i *j*-te čestice

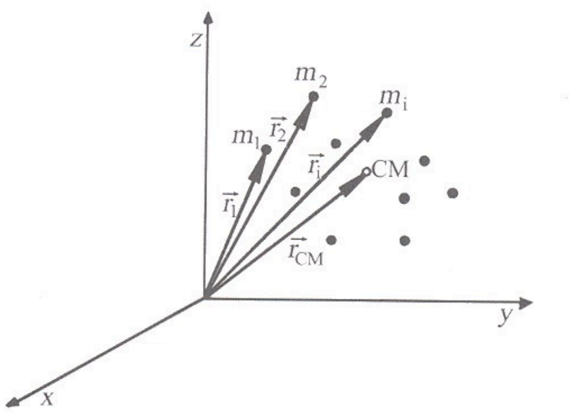
Jednadžbu gibanja sustava možemo pisati kao:

$$m_1\overrightarrow{a_1} + m_2\overrightarrow{a_2} + ... = \overrightarrow{F_{v1}} + \overrightarrow{F_{v2}} + ...\overrightarrow{F_{vn}} = \overrightarrow{F_v}$$

Centar mase

Gibanje sustava mogli bismo proučavati promatranjem gibanja svake pojedine čestice tog sustava.

U slučaju velikog broja čestica je to složeno i gotovo nemoguće pa definiramo posebnu, zamišljenu točku, tzv. centar mase sustava, pomoću kojeg onda lakše i jednostavnije opisujemo gibanje sustava kao cjeline.



SLIKA: Centar mase sustava – Kulišić Slika 3.10 str.53

Centar mase sustava od *n* čestica definiramo kao točku čije koordinate zadovoljavaju relacije:

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + ... + m_n x_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n}$$

$$y_{CM} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + ... + m_n y_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n}$$

$$z_{CM} = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + ... + m_n z_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n}$$

Ili pomoću radijus-vektora:

$$\overrightarrow{r_{CM}} = \frac{m_1 \vec{r_1} + m_2 \vec{r_2} + ... + m_n \vec{r_n}}{m_1 + m_2 + ... + m_n}$$

m_i - masa *i*-te materijalne točke

(x_i, y_i, z_i) - koordinate te točke

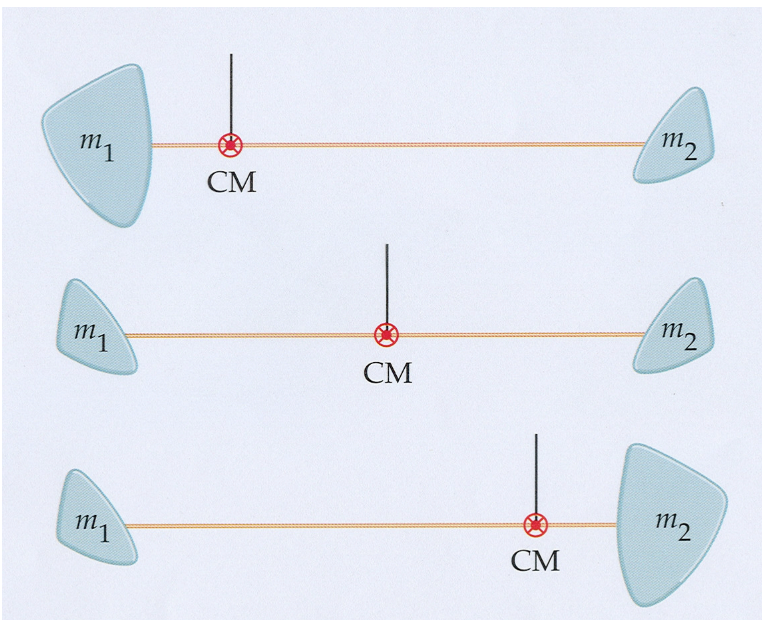
$\vec{r_i}$ - radijus-vektor te točke

$m_1 + m_2 + ... + m_n = m$ - masa sustava

Kruto tijelo je vrsta sustava velikog broja čestica. Koordinate CM krutog tijela dobijemo analognim proširenjem definicije za $\overrightarrow{r_{CM}}$ sustava čestica na beskonačno mnogo čestica infinitenzimalno male mase *dm*, pri čemu računamo integriranjem, a ne zbrajanjem:

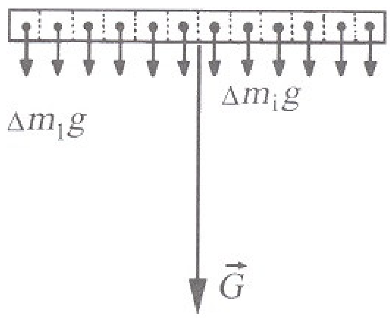
$$\overrightarrow{r_{CM}} = \frac{\int \vec{r}\, dm}{\int dm} = \frac{\int \vec{r} \rho dV}{\int \rho dV}$$

Ili, u komponentama: $x_{CM} = \frac{\int x dm}{\int dm}$, $y_{CM} = \frac{\int y dm}{\int dm}$, $z_{CM} = \frac{\int z dm}{\int dm}$



Težište

Kao primjer djelovanja paralelnih sila na kruto tijelo možemo promatrati djelovanje sile teže na neko tijelo. Zemlja privlači svaku česticu tijela određenom silom, koju nazivamo silom težom i koja je uzrok težine tog tijela. Ako su dimenzije tijela male u usporedbi s dimenzijama Zemlje (tj. ako je u svakoj točki tijela akceleracija sile teže konstantna veličina), možemo smatrati da je ukupna sila teža na tijelo rezultanta paralelnih sila – sila teža na svaku od pojedinih čestica tijela.



SLIKA: Djelovanje sile teže na kruto tijelo – Kulišić slika 5.7. str.83

Kad tijelo miruje, ili se giba jednoliko, težina je jednaka sili teži. Ukupna je težina tijela $\vec{G} = \sum_i \Delta m_i \vec{g}$ s hvatištem u točki:

$$\vec{r_T} = \frac{\sum_i \vec{r_i} \Delta m_i g}{\sum_i \Delta m_i g} = \frac{\sum_i \vec{r_i} \Delta m_i}{m} = \overrightarrow{r_{CM}}$$

Tako određeno hvatište težine zove se **težište**. Vidimo da nema razlike između položaja težišta i položaja CM.

Pri određivanju položaja težišta krutog tijela:
- tijelo podijelimo na velik broj malih volumena ΔV,
- primijenimo izraz za računanje pravca djelovanja rezultantne sile $\vec{R}$ kod djelovanja nekonkurentnih sila,
- pogledamo granični slučaj kad $\Delta V \to 0$ i
- sa zbrajanja prijeđemo na integriranje:

$$x_T = \frac{\int \rho x dV}{\int \rho dV} = \frac{\int x dV}{V}, \qquad y_T = \frac{\int \rho y dV}{\int \rho dV} = \frac{\int y dV}{V}, \qquad z_T = \frac{\int \rho z dV}{\int \rho dV} = \frac{\int z dV}{V}$$

V – volumen tijela, ρ - gustoća tijela (pretpostavljamo da je konst.)

Zakoni gibanja i zakoni sačuvanja u sustavu materijalnih točaka

GIBANJE CENTRA MASE

Pri proučavanju translatornog gibanja čitav sustav se može zamijeniti centrom mase. Vektor položaja CM:

$$\overrightarrow{r_{CM}} = \frac{m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2} + ... + m_n\vec{r_n}}{m_1 + m_2 + ... + m_n} = \frac{\sum_i m_i\vec{r_i}}{m} / \cdot m$$

m je ukupna masa sustava: $m_1 + m_2 + ... + m_n = m$

$$m\overrightarrow{r_{CM}} = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r_i} / \frac{d}{dt}$$

$$m\frac{d}{dt}\overrightarrow{r_{CM}} = m\overrightarrow{v_{CM}} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d}{dt}\vec{r_i} = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v_i} / \frac{d}{dt}$$

$$m\frac{d^2}{dt^2}\overrightarrow{r_{CM}} = m\overrightarrow{a_{CM}} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d^2}{dt^2}\vec{r_i} = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{a_i} = \vec{F_v} + \vec{F_u}$$

$\vec{F_v}$ - rezultanta vanjskih sila
$\vec{F_u}$ - rezultanta unutrašnjih sila

$m_i\vec{a_i}$ je prema 2. Newtonovom zakonu jednako sili $\vec{F_i}$ koja djeluje na česticu mase m_i. Zbroj unutrašnjih sila je 0 prema 3. Newtonovom zakonu.

Možemo pisati: $m\overrightarrow{a_{CM}} = \sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{F_{vi}} = \vec{F_v}$

Centar mase sustava se giba kao da je u njemu koncentrirana ukupna masa sustava i kao da sve vanjske sile djeluju u toj točki. CM se giba kao materijalna točka mase $m_1 + m_2 + ... + m_n = m$ na koju djeluje ukupna vanjska sila $\vec{F_v}$. Gibanje sustava je svedeno na gibanje jedne materijalne točke – CM, bez obzira na složenost sustava.

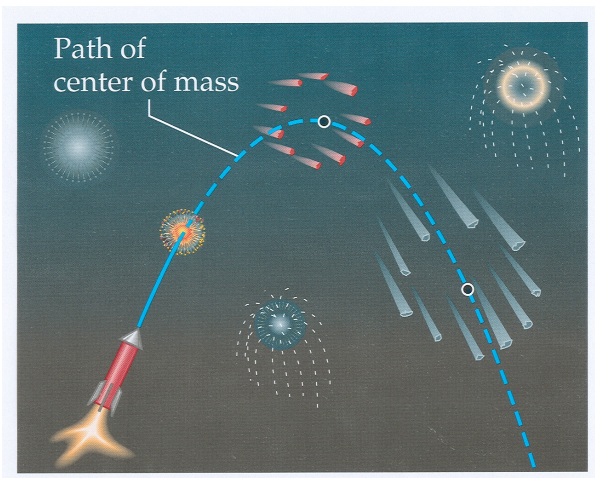
Kad na sustav čestica ne djeluju nikakve vanjske sile, odn. kad je njihova rezultanta = 0, onda je:

$$m\overrightarrow{a_{CM}} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_{vi}} = \overrightarrow{F_v} = 0$$

Uz $\overrightarrow{a_{CM}} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{v_{CM}} = 0$ slijedi: $\overrightarrow{v_{CM}} = konst$

$$\overrightarrow{r_{CM}} = \overrightarrow{v_{CM}}t + \overrightarrow{r_0}$$

Kad je rezultanta vanjskih sila jednaka 0, CM ili miruje ili se giba konstantnom brzinom (jednoliko) po pravcu.



ZAKONI SAČUVANJA U SUSTAVU MATERIJALNIH TOČAKA

1. **ZAKON OČUVANJA KOLIČINE GIBANJA SUSTAVA MATERIJALNIH TOČAKA**

Za izolirani sustav od proizvoljnog broja čestica *n* iz 2. Newtonovog zakona slijedi:

$$\overrightarrow{F_{ukupno}} = \sum \overrightarrow{F_{unutr}} + \sum \overrightarrow{F_{vanj}} = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2} + ... + \overrightarrow{p_n}) = \frac{d}{dt}\overrightarrow{p_{ukupno}}$$

Budući je $\sum \overrightarrow{F_{vanj}} = 0$ jer za izolirani sustav vrijedi da nema vanjskih sila ili se međusobno poništavaju da im je rezultanta 0 i

budući se unutrašnje sile po 3. Newtonovom zakonu u parovima poništavaju ($\sum \overrightarrow{F_{unutr}} = 0$), slijedi:

$\frac{d}{dt}\overrightarrow{p_{ukupno}} = 0$, odn. $\overrightarrow{p_{ukupno}} = \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{v_i} = konst$

Ukupna količina gibanja izoliranog sustava od n čestica je konstantna bez obzira na procese i međudjelovanja u sustavu.

2. KINETIČKA ENERGIJA SUSTAVA MATERIJALNIH TOČAKA

Imamo sustav od n čestica, masa $m_1, m_2, m_3, \ldots m_n$ i brzina $v_1, v_2, v_3, \ldots v_n$.

Kinetička energija sustava je: $E_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2$

Ili preko CM: $E_k = \frac{1}{2} m v_{CM}^2$

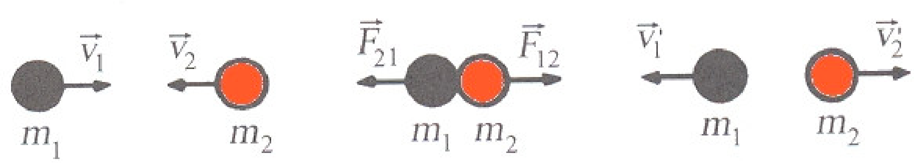
m – ukupna masa tijela, v_{CM} – brzina CM tijela

Zakoni sačuvanja količine gibanja i energije

Zakon sačuvanja količine gibanja

Promatrajmo sustav od dvije ili više čestica mase m_1, m_2, m_3... Čestice unutar sustava mogu djelovati jedna na drugu tzv. **unutrašnjim silama**, a tijela izvan sustava mogu djelovati na sustav tzv. **vanjskim silama**. Ako nema vanjskih sila, ili se njihova djelovanja međusobno poništavaju tako da im je rezultanta nula, kažemo da je sustav **izoliran** ili **zatvoren**. Pokazat ćemo da za izolirani sustav vrijedi zakon sačuvanja količine gibanja.

Zamislimo sustav od dvije čestice mase m_1 i m_2 koje se centralno i elastično sudare.



SLIKA: ZAKON OČUVANJA KOLIČINE GIBANJA ZA SUSTAV OD DVIJE ČESTICE – Kulišić slika 3.7. str. 48.

Brzine čestica prije sudara označimo s $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$, a nakon sudara s $\vec{v}_1'$ i $\vec{v}_2'$.

Za vrijeme sudara koji traje vrlo kratko, čestice djeluju jedna na drugu silama.Prema 3. Newtonovom zakonu, sila kojom prva čestica djeluje na drugu $\vec{F}_{12}$, jednaka je po iznosu, a suprotna po smjeru sili $\vec{F}_{21}$, kojom druga čestica djeluje na prvu: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

Količina gibanja prve čestice prije sudara je $m_1\vec{v}_1$, a nakon sudara je $m_1\vec{v}_1'$. Nastala promjena količine gibanja jednaka je primljenom impulsu sile $\vec{I}_1$:

$$\vec{I}_1 = m_1\vec{v}_1' - m_1\vec{v}_1$$

Slično vrijedi i za drugu česticu: količina gibanja druge čestice prije sudara je $m_2\vec{v}_2$, nakon sudara je $m_2\vec{v}_2'$, a nastala promjena količine gibanja jednaka je primljenom impulsu sile $\vec{I}_2$:

$$\vec{I}_2 = m_2\vec{v}_2' - m_2\vec{v}_2$$

Zbog 3. Newtonovog zakona su i primljeni impulsi sile jednaki po iznosu, a suprotnog smjera:

$\vec{I}_1 = -\vec{I}_2$

Slijedi: $m_1\vec{v}_1' - m_1\vec{v}_1 = -(m_2\vec{v}_2' - m_2\vec{v}_2)$

Odnosno: $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2'$

Na lijevoj strani imamo ukupnu količinu gibanja sustava prije sudara, a na desnoj strani ukupnu količinu gibanja sustava nakon sudara. Pri sudaru se količina gibanja tog zatvorenog sustava od dvije čestice nije promijenila.

Taj zaključak možemo proširiti na izolirani sustav od proizvoljnog broja čestica. Prema 2. Newtonovom zakonu, za izolirani sustav od n čestica imamo:

$$\vec{F}_u = \sum \vec{F}_{unutr} + \sum \vec{F}_{vanj} = \frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + ... + \vec{p}_n) = \frac{d\vec{p}_u}{dt}$$

Za izolirani sustav je:

$$\sum \vec{F}_{vanj} = 0$$

Unutrašnje sile se po 3. Newtonovom zakonu u parovima poništavaju: $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$

Odnosno: $\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = 0$

Slijedi da je: $\dfrac{d\vec{p}_u}{dt} = 0$

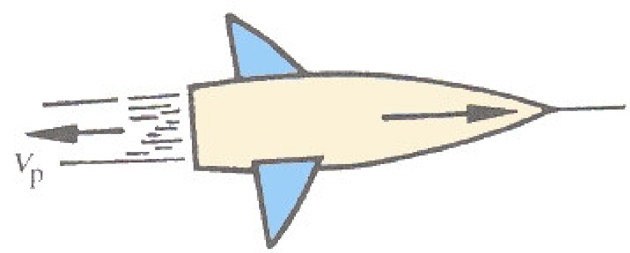
Odnosno: $\vec{p}_u = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i = konst$

Ukupna količina gibanja zatvorenog sustava konstantna je bez obzira na to kakvi se procesi i međudjelovanje događaju u sustavu. To je **zakon sačuvanja količine gibanja**.

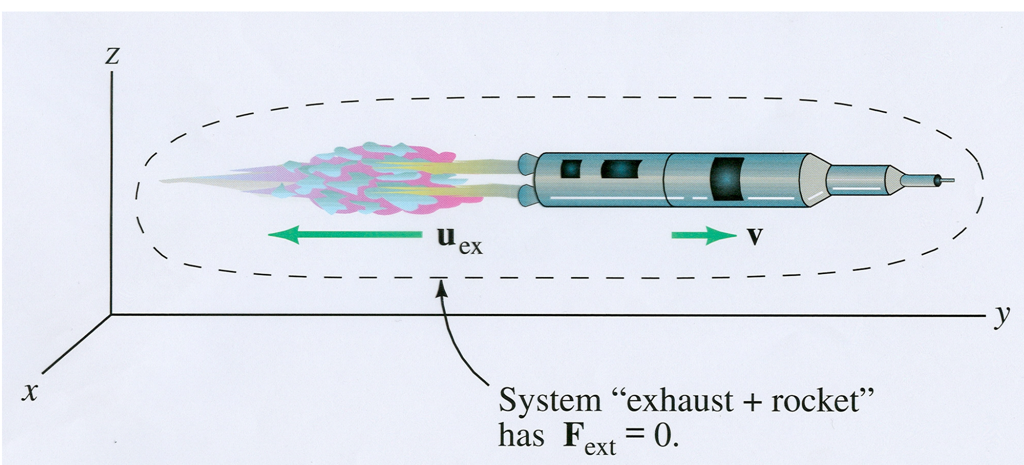
Zakon sačuvanja količine gibanja je jedan od najvažnijih zakona u fizici koji vrijedi za sve zatvorene (izolirane) sustave, bez izuzetka. On proistječe iz homogenosti prostora, tj. iz činjenice da sve točke prostora imaju jednake osobine. Premda je izveden iz Newtonovih zakona, on je općenitiji od njih te vrijedi i onda kad se oni ne mogu primijeniti.

PRIMJENA ZAKONA OČUVANJA KOLIČINE GIBANJA – GIBANJE RAKETE

Raketa je projektil koji se giba tako da izbacuje čestice užarenog plina. Izgaranjem goriva razvijaju se, naime, plinovi koji izlaze kroz mlaznice rakete velikom brzinom koja doseže i do 3000 m/s. Uz gorivo raketa sadrži i sredstvo za izgaranje goriva te joj nije potreban kisik iz atmosfere i može se gibati i u zrakopraznom prostoru. Izgaranjem goriva nastaju plinovi koji tlače stijenke rakete te zbog tog tlaka plinovi izlaze velikom brzinom kroz mlaznicu na stražnjem dijelu rakete. Što je veća sila kojom se izbacuju plinovi (akcija), to je veća i reakcija na suprotnom kraju rakete, odnosno to je veća akceleracija rakete. Raketu, dakle, pokreće potisak $\vec{F}_p$ koji djeluje na zatvorenom kraju (veličina rakete iskazuje se potiskom).



SLIKA: RAKETA – Kulišić slika 3.8. str.50



Masa rakete neprestano se smanjuje zbog izgaranja goriva. Za računanje akceleracije i brzine rakete prvo moramo izračunati povećanje brzine rakete $d\vec{v}$ zbog izbacivanja mase plinova dm_p brzinom $\vec{v}_p$ u odnosu na raketu.

Pretpostavimo da se raketa nalazi daleko od svemirskih tijela i da na nju ne djeluje gravitacija ni druge vanjske sile. U tom slučaju su raketa i produkti izgaranja izolirani (zatvoreni) sustav u kojem je sačuvana ukupna količina gibanja.

Zakon sačuvanja ukupne količine gibanja možemo napisati u obliku:

$$\vec{p}_{ukupno} = \vec{p}_{raketa} + \vec{p}_{plinovi} = konst$$

Ako je u trenutku t masa rakete m, a $\vec{v}$ brzina s obzirom na laboratorijski sustav u kojem promatramo gibanje, tada je ukupna količina gibanja rakete i goriva $m\vec{v}$.

Zbog izbačenog izgorjelog goriva mase dm_p, masa rakete u trenutku ($t+dt$) je ($m - dm_p$), dok je brzina rakete ($\vec{v}+\vec{v}_p$). Pri tom plinovi izlaze iz rakete brzinom $\vec{v}_p$ u odnosu na raketu, odnosno brzinom ($\vec{v}+\vec{v}_p$) u odnosu na laboratorijski sustav. Ukupna količina gibanja sustava (raketa+gorivo, odnosno plinovi) u trenutku ($t+dt$) je:

$$(m - dm_p)(\vec{v} + d\vec{v}) + dm_p(\vec{v} + \vec{v}_p)$$

Zakon sačuvanja količine gibanja daje sljedeće:

$$m\vec{v} = (m - dm_p)(\vec{v} + d\vec{v}) + dm_p(\vec{v} + \vec{v}_p)$$

Sad to izmnožimo:

$$m\vec{v} = m\vec{v} + md\vec{v} - dm_p\vec{v} - dm_p d\vec{v} + dm_p\vec{v} + dm_p\vec{v}_p$$

Nakon sređivanja izraza, uz to da su dm_p i $d\vec{v}$ male veličine pa je i njihov umnožak zanemariv $dm_p d\vec{v}$, dobijemo:

$$md\vec{v} + dm_p\vec{v}_p = 0$$

Promjena brzine rakete je: $d\vec{v} = -\dfrac{dm_p}{m}\vec{v}_p$

Ovdje je:
$\vec{v}_p$ - brzina izbacivanja čestica plina (koja je konstantna)
dm_p - masa izbačenog plina
m - masa rakete u trenutku kad joj je brzina $\vec{v}$

Promjena mase rakete dm jednaka je po iznosu masi izbačenih plinova, ali je negativnog predznaka jer se masa rakete smanjuje: $dm = -dm_p$

Promjena brzine rakete je onda: $d\vec{v} = \dfrac{dm}{m}\vec{v}_p$

Sad je dm promjena mase rakete. Sve podijelimo s dt i dobijemo akceleraciju rakete:

$$d\vec{v} = \frac{dm}{m}\vec{v}_p \; / : dt$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{v}_p}{m}\frac{dm}{dt}$$

Sve pomnožimo s m i dobijemo silu koja pokreće raketu – **potisak rakete** – unutrašnja sila koja nastaje izbacivanjem plinova iz rakete i koja ubrzava raketu:

$$m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}_p\frac{dm}{dt} = \vec{F}_p$$

Ako na raketu djeluju vanjske sile $\vec{F}_{vanj}$, npr. gravitacija, jednadžba gibanja glasi:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{vanj} + \vec{v}_p\frac{dm}{dt}$$

Da bismo dobili brzinu $\vec{v}$, moramo integrirati jednadžbu $d\vec{v} = \frac{dm}{m}\vec{v}_p$ i dobijemo:

$$\int_{v_0}^{v} d\vec{v} = \int_{m_0}^{m} \vec{v}_p \frac{dm}{m}$$

Rezultat je: $\vec{v} = \vec{v}_0 - \vec{v}_p \ln\frac{m_0}{m}$

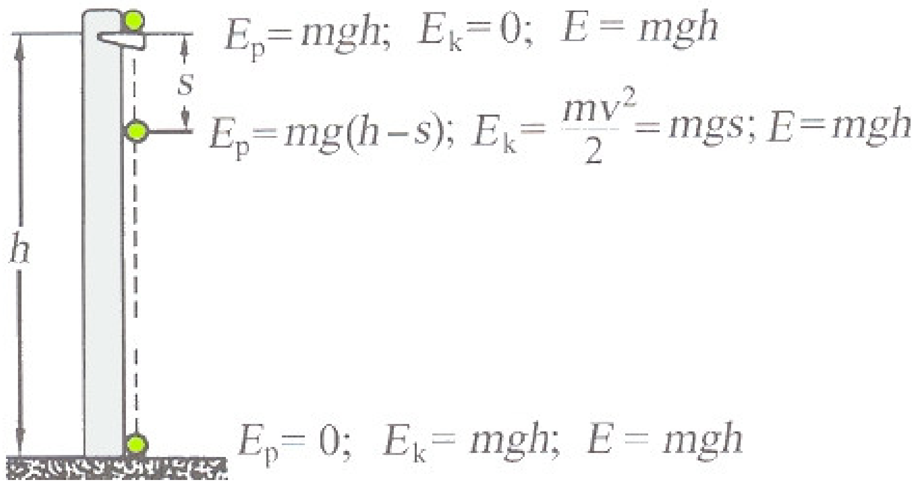
U skalarnom obliku: $v = v_0 + v_p \ln\frac{m_0}{m}$

Ovdje je m_0 početna, a m konačna masa rakete. Paziti na predznak: ako je $+x$-os u smjeru gibanja rakete, tada je $v_x = v$, $v_{0x} = v_0$ i $v_{px} = -v_p$. Konačna brzina rakete ovisi linearno o brzini izbacivanja plinova i o prirodnom logaritmu omjera početne i konačne mase.

Zakon sačuvanja energije

Energija se pojavljuje u različitim oblicima i može se pretvarati iz jednog oblika u drugi no u izoliranom sustavu je zbroj energija uvijek konstantan. To je **zakon sačuvanja ukupne energije.**

Pogledat ćemo primjer sačuvanja ukupne mehaničke energije – slobodni pad.



SLIKA: MEHANIČKA ENERGIJA PRI SLOBODNOM PADU – Kulišić slika 4.9. str. 70

1. Tijelo mase *m* se početno nalazi na visini *h* i miruje: potencijalna energija mu je $E_p = mgh$, a kinetička energija $E_k = 0$ (jer je brzina jednaka 0). Ukupna mehanička energija je $E = E_p + E_k = mgh + 0 = mgh$.

2. Kada tijelo, slobodno padajući, prevali put *s*, potencijalna mu je energija $E_p = mg(h-s)$, a kinetička $E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}m(\sqrt{2gs})^2$. Ukupna mehanička energija je $E = E_p + E_k = mg(h-s) + \frac{1}{2}m2gs = mgh - mgs + mgs = mgh$.

3. U trenutku kad tijelo padne na tlo potencijalna energija je 0, $E_p = 0$, brzina tijela prema jednadžbama za slobodni pad iznosi $v = \sqrt{2gh}$ i kinetička energija je $E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}m(\sqrt{2gh})^2 = \frac{1}{2}m2gh = mgh$. Ukupna mehanička energija je $E = E_p + E_k = 0 + mgh = mgh$.

Vidimo da je u svakoj točki putanje slobodnog pada zbroj kinetičke i potencijalne energije konstantan: **ukupna mehanička energija je sačuvana**: $E = E_p + E_k = \text{konst}$

Iz iskustva znamo da se dio mehaničke energije često zbog trenja pretvara u druge, nemehaničke oblike energije (unurašnja energija). Tako se pri padanju tijela u zraku dio mehaničke energije troši na svladavanje sile otpora zraka, pa u tom slučaju više ne vrijedi relacija o sačuvanju ukupne mehaničke energije.

Npr. vučemo li tijelo uz kosinu nekom vanjskom silom F', tada je rad vanjske sile:

$$W' = \Delta E_k + \Delta E_p - W_{tr} = E_2 - E_1 - W_{tr}$$

Ovdje je W_{tr} rad sile trenja, koji je uvijek negativan, a E_1 i E_2 ukupna mehanička energija u položaju 1 i 2. U tim i mnogim drugim slučajevima mehanička energija nije očuvana.

Zakon očuvanja mehaničke energije vrijedi onda kad su rad sile trenja (disipativne sile) i rad vanjskih sila (nekozervativnih sila) jednaki 0, tj. kad su sve sile, koje djeluju na sustav, konzervativne.

Općenito: kada na česticu djeluju samo konzervativne sile, ukupna mehanička energija čestice je očuvana. Zbog toga sile koje imaju potencijalnu energiju zovemo konzervativnima (od latinskog *conservare* – sačuvati, održati). Međutim, ako osim konzervativnih sila F_k djeluje i sila trenja F_{tr} i neke druge nekonzervativne sile F', tada je ukupni rad svi sila jednak promjeni kinetičke energije:

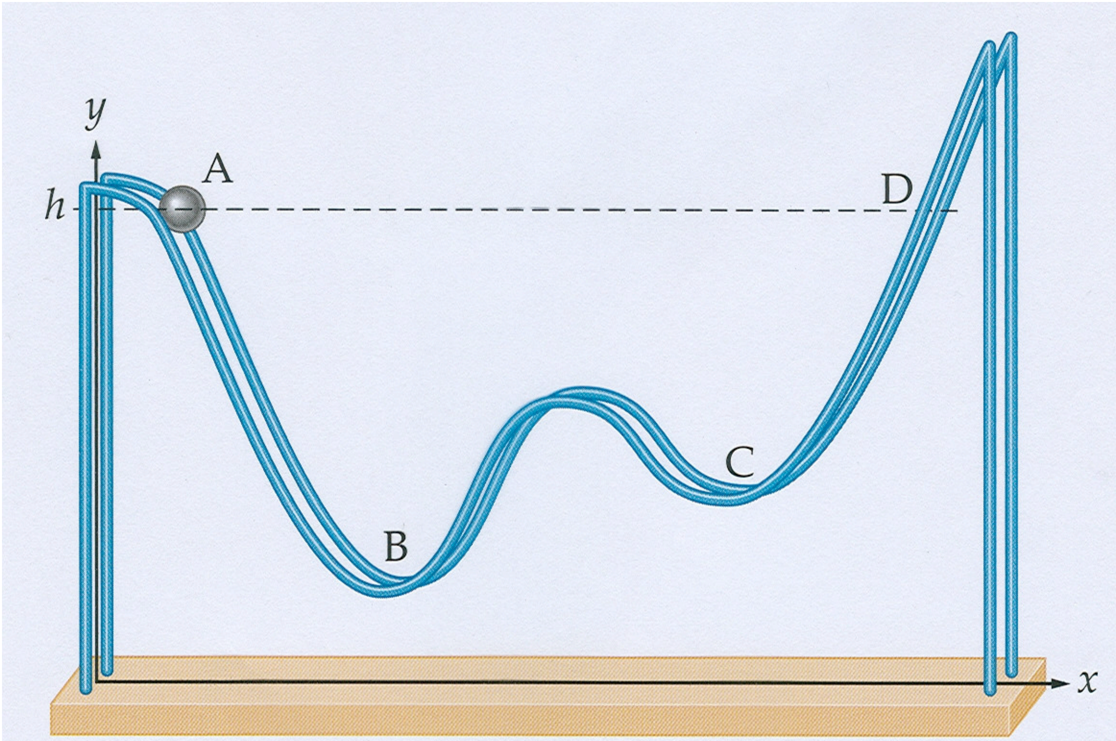
$$W_k + W_{tr} + W' = \Delta E_k$$

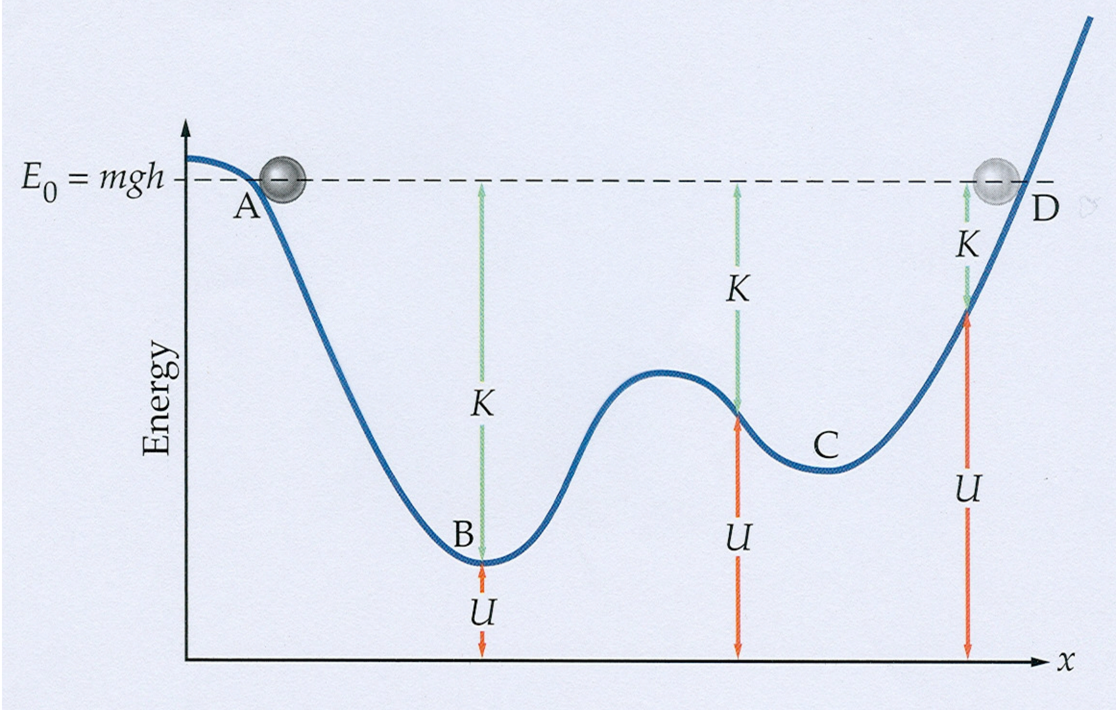
W_k – rad što ga izvrše konzervativne sile
W_{tr} – rad sile trenja
W' – rad nekih drugih nekonzervativnih sila (npr. rad vanjske sile pri gibanju tijela uz kosinu)

Zamijenimo li rad konzervativne sile promjenom potencijalne energije $W_k = -\Delta E_p$, dobijemo:

$$\Delta E_k + \Delta E_p = W_{tr} + W'$$

Ovo je jedan od načina pisanja zakona sačuvanja ukupne energije: ukupna energija se ne može uništiti niti ni iz čega stvoriti, ona se može samo pretvarati iz jednog oblika u drugi. Zakon sačuvanja mehaničke energije izveden je iz Newtonovih aksioma i može se koristiti za rješavanje raznih problema u mehanici.


y
A
h
D
C
B
x


$E_0 = mgh$
A
D
K
K
K
Energy
C
U
B
U
U
x

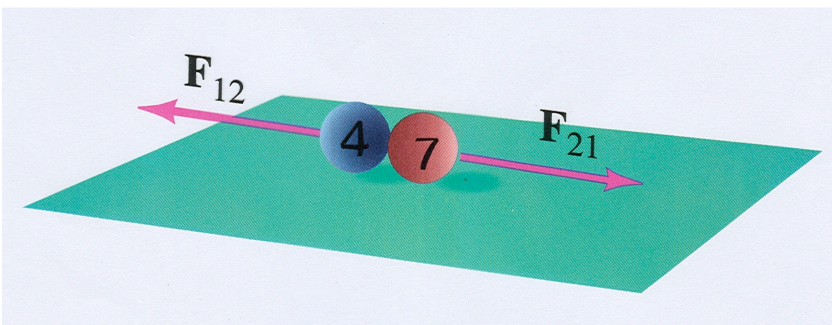
Sudari: elastičan i neelastičan sraz

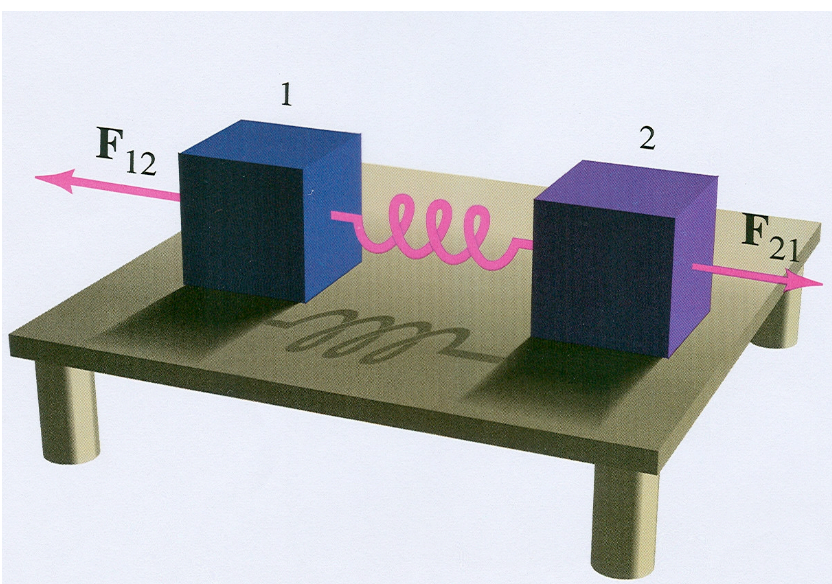
Sudare dviju čestica ćemo promatrati kao primjer primjene zakona sačuvanja količine gibanja i energije. Do sudara dolazi kad dvije čestice (ili dva sustava čestica), približavajući jedna drugoj, međusobno djeluju i time promijene svoje gibanje.

Pri sudaru ne mora uvijek doći do fizičkog kontakta među tijelima kao kod npr. makroskopskog sudara dviju kuglica; kad se proton približava jezgri, odbojne Coulombove sile mijenjaju mu putanju i proton se otkloni prije nego što dotakne jezgru.

Promatrat ćemo centralni sudar, tj. kad se čestice prije i nakon sudara gibaju po istom pravcu. Pretpostavljamo da nema vanjskih sila, odnosno da se sve vanjske sile uravnotežuju (što znači da im je rezultanta jednaka 0), tako da je sustav izoliran.

Čestice jedna na drugu međusobno djeluju za vrijeme sudara unutrašnjim silama $\vec{F}_{12}$ i $\vec{F}_{21}$, pri čemu je prema 3. Newtonovom zakonu: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$





Za takav sustav vrijedi zakon sačuvanja količine gibanja pa je ukupna količina gibanja prije sudara jednaka ukupnoj količini gibanja nakon sudara:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$$

Ovdje su $\vec{p}_1$ i $\vec{p}_2$ količine gibanja čestica prije sudara, a $\vec{p}_1'$ i $\vec{p}_2'$ količine gibanja čestica nakon sudara.

Sudar može biti **savršeno elastičan**, **savršeno neelastičan** i **djelomično elastičan**.

Ako je sudar **savršeno elastičan**, tijela se nakon sudara vraćaju u prvobitan oblik, potencijalna energija elastične deformacije, nastala prilikom sudara tijela, ponovo prelazi u kinetičku energiju, i tijela se razilaze tako da im je ukupna kinetička energija nakon sudara jednaka ukupnoj kinetičkoj energiji prije sudara. Za savršeno elastičan sudar dva makroskopska tijela moraju biti savršeno kruta tako da ne dožive nikakvu deformaciju, ili savršeno elastična tako da unutrašnja potencijalna energija sustava bude jednaka prije i nakon sudara.

Pri **savršeno neelastičnom sudaru** ne nastaje potencijalna energija deformacije već se tijela nakon sudara, slijepljena gibaju zajedno kao jedno tijelo, ili miruju. Pri takvom sudaru kinetička energija se djelomično ili potpuno pretvara u unutrašnju energiju (potencijalnu i kinetičku energiju termičkog gibanja molekula) te se pri takvim sudarima tijela zagriju. U neelastičnim sudarima je sačuvana ukupna količina gibanja, ali ukupna mehanička energija nije jer se jedan njezin dio pretvorio u nemehanički oblik energije.

Većina makroskopskih sudara su **djelomično elastični**.

SAVRŠENO ELASTIČAN SUDAR

Promatrat ćemo centralni, savršeno elastični sudar dviju kuglica, tj. sudar pri kojem brzine obiju kuglica leže na istom pravcu nositelju koji prolazi središtem obiju kuglica.

Dvije kuglice mase m_1 i m_2, i brzine $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ sudaraju se elastično i nakon sudara imaju brzine $\vec{v}_1\,'$ i $\vec{v}_2\,'$.

SLIKA: CENTRALNI ELASTIČNI SUDAR – Kulišić slika 4.12. str. 74

Ovaj sustav je izoliran za vrijeme čitavog procesa i na kuglice ne djeluju vanjske sile, tj. zbroj vanjskih sila je 0. Slijedi da vrijedi zakon sačuvanja količine gibanja:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1\,' + m_2\vec{v}_2\,'$$

prije sudara   nakon sudara

Budući je sudar savršeno elastičan, ukupna kinetička energija prije i nakon sudara je ista:

$$\frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^{\,2} + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^{\,2} = \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^{\,\prime 2} + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^{\,\prime 2}$$

Nakon sređivanja jednadžba je: $m_1(\vec{v}_1^{\,2} - \vec{v}_1^{\,\prime 2}) = -m_2(\vec{v}_2^{\,2} - \vec{v}_2^{\,\prime 2})$

Odnosno: $m_1(\vec{v}_1 - \vec{v}_1\,')(\vec{v}_1 + \vec{v}_1\,') = -m_2(\vec{v}_2 - \vec{v}_2\,')(\vec{v}_2 + \vec{v}_2\,')$

Zakon sačuvanja količine gibanja napišimo u drugom obliku: $m_1(\vec{v}_1 - \vec{v}_1\,') = -m_2(\vec{v}_2 - \vec{v}_2\,')$

To uvrstimo u preinačeni zakon sačuvanja kinetičke energije i dobijemo:

$$(\vec{v}_1 - \vec{v}_1\,')(\vec{v}_1 + \vec{v}_1\,' - \vec{v}_2 - \vec{v}_2\,') = 0$$

Budući su pri centralnom sudaru brzine kolinearni vektori, ovaj uvjet je ispunjen samo ako je jedan od faktora jednak 0. Ako je prvi faktor $(\vec{v}_1 - \vec{v}_1\,')$ jednak 0, brzine se nisu mijenjale te se nije dogodio ni sudar pa to ne dolazi u obzir. Dakle, drugi faktor iščezava:

$(\vec{v}_1 + \vec{v}_1' - \vec{v}_2 - \vec{v}_2') = 0$

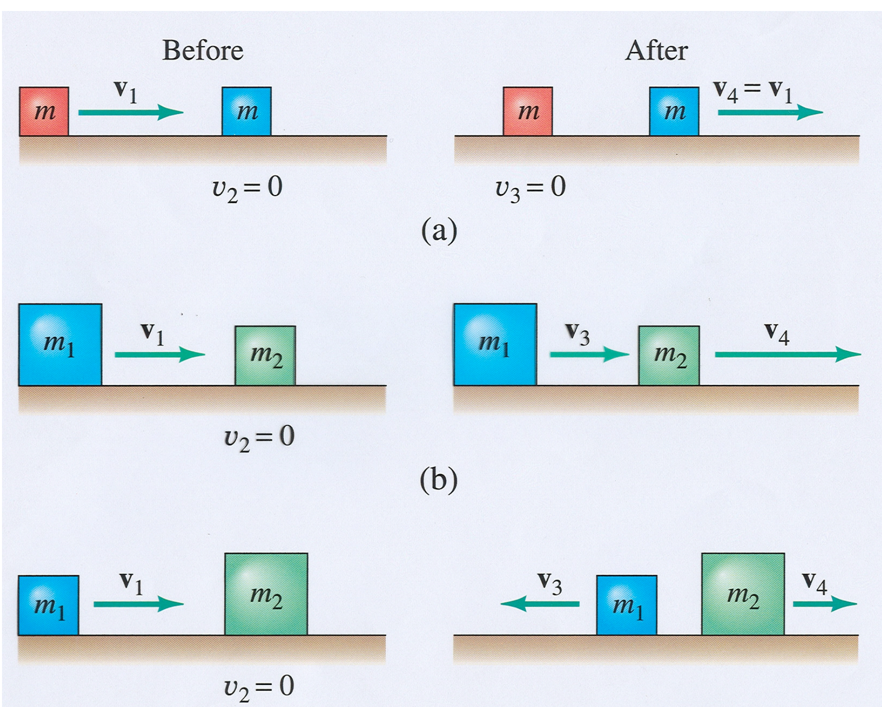
Odnosno: $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = -(\vec{v}_1' - \vec{v}_2')$

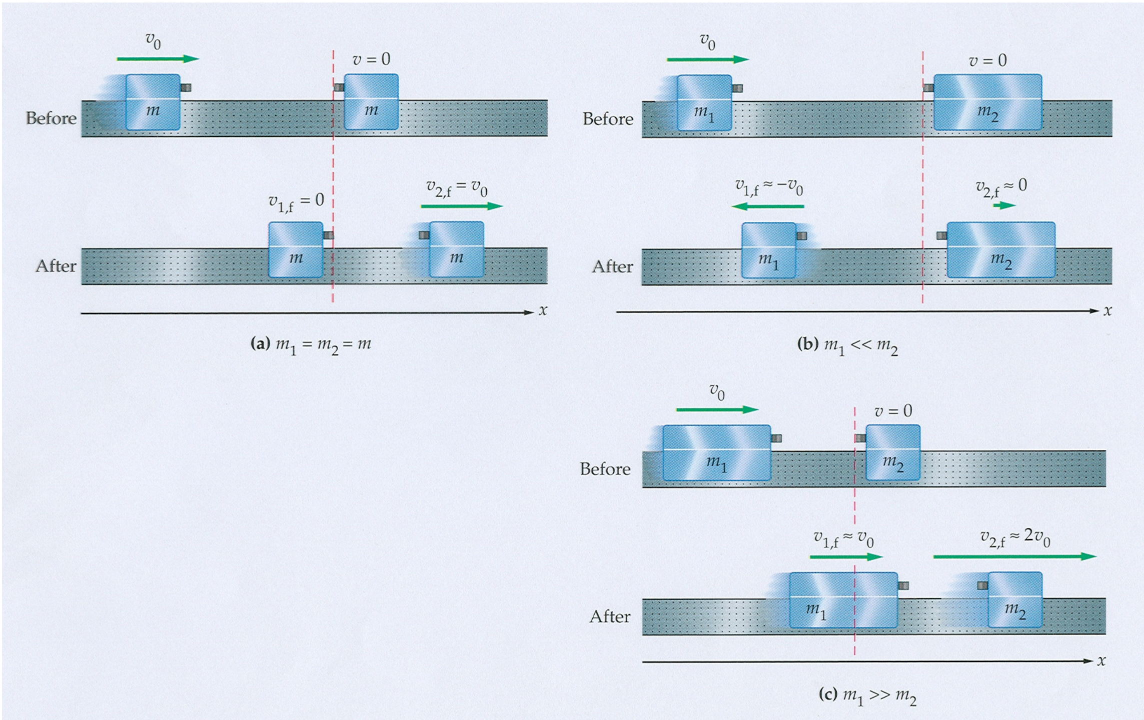
Relativna brzina primicanja kuglica prije sudara jednaka je po iznosu, ali suprotnog smjera relativnoj brzini odmicanja kuglica nakon sudara. Relativne brzine su promijenile samo smjer, a ne i iznos. Brzine kuglica nakon sudara su onda:

$$\vec{v}_1' = \frac{(m_1 - m_2)\vec{v}_1 + 2m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} \qquad \vec{v}_2' = \frac{(m_2 - m_1)\vec{v}_2 + 2m_1\vec{v}_1}{m_1 + m_2}$$

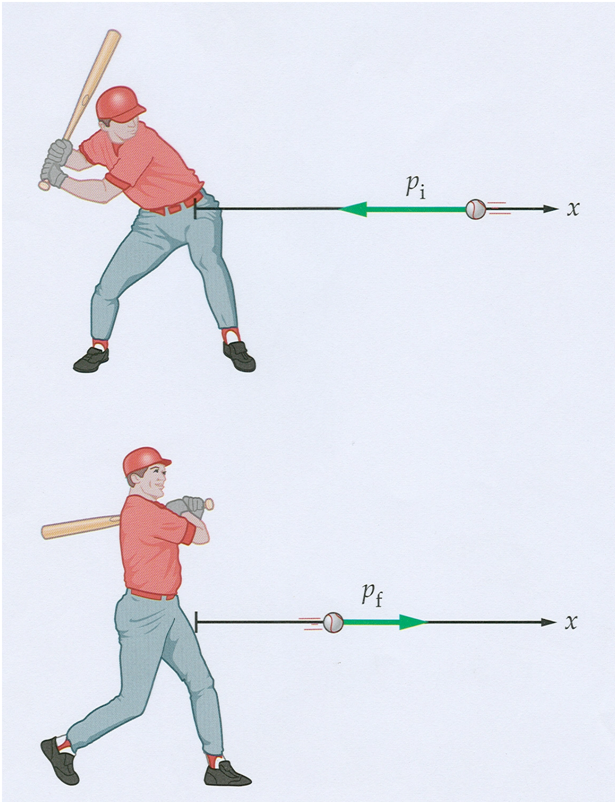
Posebni slučajevi:

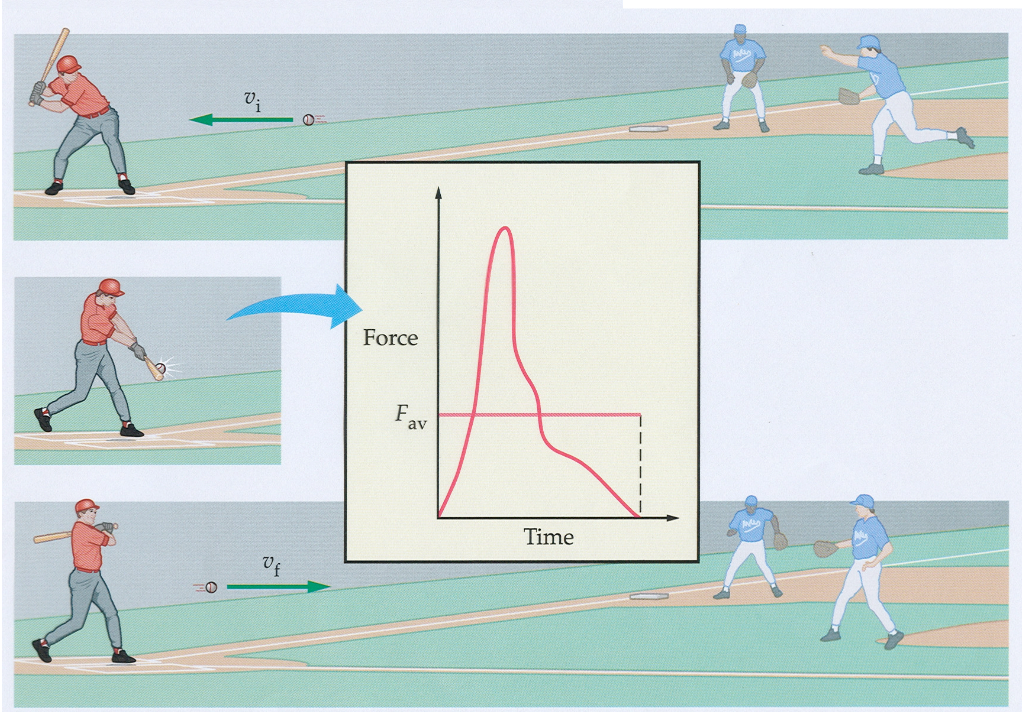
1. U slučaju kad je $m_1 = m_2$ kugle jednostavno zamijene brzine $\vec{v}_1' = \vec{v}_2$ i $\vec{v}_2' = \vec{v}_1$. Ako druga kugla miruje $(\vec{v}_2 = 0)$, tada je i $\vec{v}_1' = 0$, a $\vec{v}_2' = \vec{v}_1$; nakon sudara prva kugla stane dok druga odleti brzinom koju je prije sudara imala prva kugla.
2. U slučaju kad je $m_1 << m_2$, $(\vec{v}_2 = 0)$, tj. kad savršeno elastična kugla mase m_1 i brzine $\vec{v}_1$ udara u vrlo veliku kuglu ili savršeno elastični zid. Slijedi da je $\vec{v}_1' = -\vec{v}_1$, tj. kugla se odbija jednakom brzinom kojom je došla, a zid pri tom dobije impuls sile $2m_1v_1$. Zid ne dobije nikakvu energiju jer kugla prilikom sudara ne mijenja energiju. Ukupna promjena količine gibanja kugle je $2m_1v_1$.
3. U slučaju kad je $m_1 >> m_2$, $(\vec{v}_2 = 0)$, tj. kad vrlo velika kugla mase udari u kuglicu koja miruje. Pri tom se brzina velike kugle vrlo malo promijeni dok lagana kuglica odleti brzinom 2 puta većom od brzine upadne kugle.





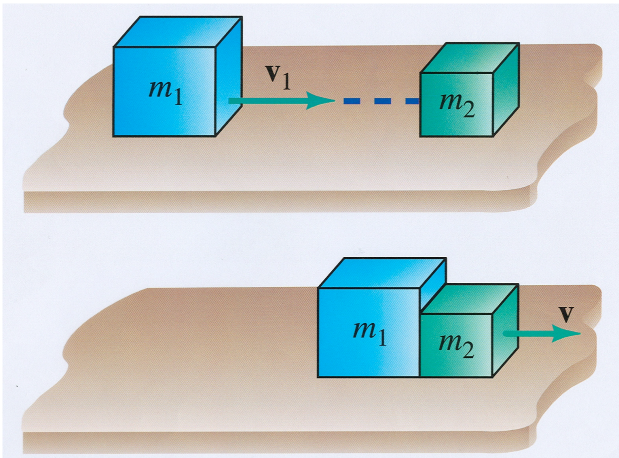
v_0
$v = 0$
Before
m
m
$v_{1,f} = 0$
$v_{2,f} = v_0$
After
m
m
x
(a) $m_1 = m_2 = m$
v_0
$v = 0$
Before
m_1
m_2
$v_{1,f} \approx -v_0$
$v_{2,f} \approx 0$
After
m_1
m_2
x
(b) $m_1 << m_2$
v_0
$v = 0$
Before
m_1
m_2
$v_{1,f} \approx v_0$
$v_{2,f} \approx 2v_0$
After
m_1
m_2
x
(c) $m_1 >> m_2$


p_i
x
p_f
x


v_i
Force
F_{av}
Time
v_f

SAVRŠENO NEELASTIČAN SUDAR

Pri savršeno neelastičnom sudaru kuglice se nakon sudara deformiraju, slijepe i zajedno gibaju brzinom $\vec{v}_1' = \vec{v}_2' = \vec{v}'$



Pri tom sudaru kinetička energija nije sačuvana, tj. jedan njezin dio se utroši na promjenu unutrašnje energije. Pišemo zakon sačuvanja količine gibanja: $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}'$

Odakle je onda brzina nakon sudara: $\vec{v}' = \dfrac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$

Kinetička energija se prilikom sudara smanjuje, a unutrašnja energija se za isti iznos poveća. Ukupna kinetička energija prije sudara je: $E_k = \dfrac{1}{2}m_1\vec{v}_1^{\,2} + \dfrac{1}{2}m_2\vec{v}_2^{\,2}$

Ukupna kinetička energija nakon sudara je: $E_k' = \dfrac{1}{2}(m_1 + m_2)\vec{v}'^2$

Razlika između konačne i početne kinetičke energije je Q-vrijednost sudara:

$$Q = E_k - E_k'$$

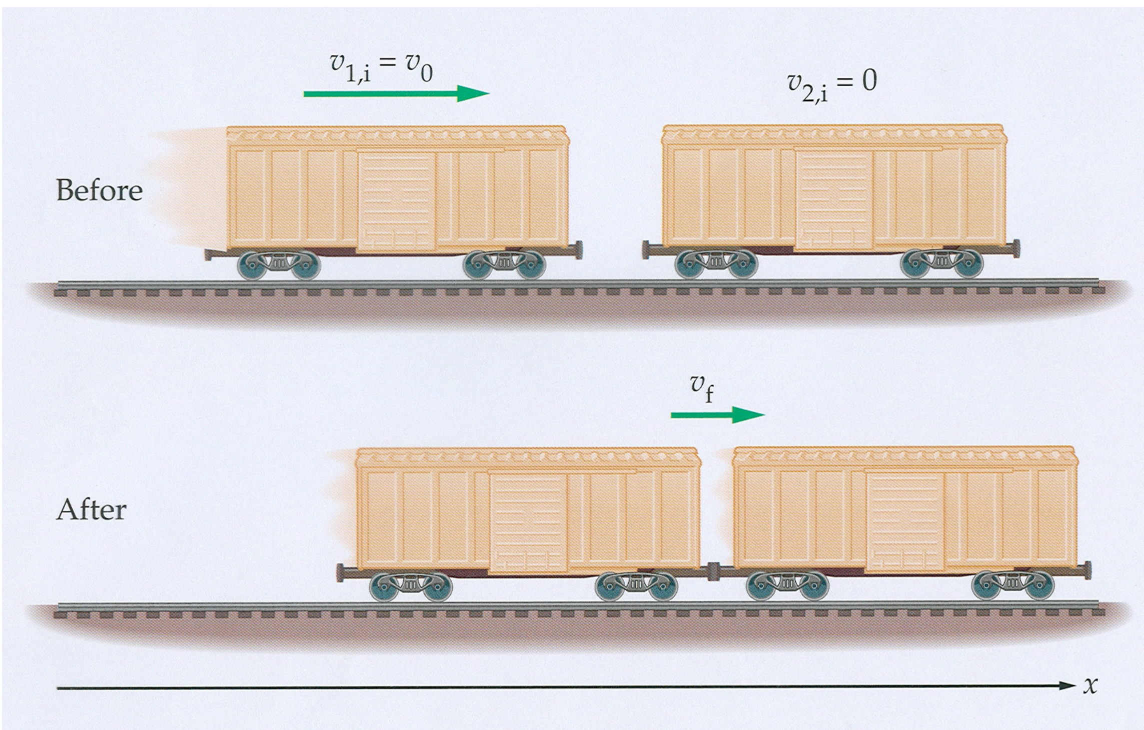
Pri savršeno elastičnom sudaru $E_k = E_k'$, pa je Q vrijednost jednaka 0.

Pri savršeno neelastičnom sudaru $Q < 0$ i iznosi: $Q = -\dfrac{m_1 m_2(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2}{2(m_1 + m_2)}$

Veličina ($-Q$) je promjena unutrašnje energije sustava i pri neelastičnom sudaru je pozitivna veličina.

Posebni slučajevi:

1. U slučaju kad se dvije kuglice jednake mase $m_1 = m_2$ sudare, brzina nakon sudara bit će jednaka polovici vektorskog zbroja brzina prije sudara $\vec{v}' = \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2}$. Ako je prije sudara jedna kugla mirovala, tada obje kugle priljubljene zajedno nastave gibanje brzinom $v' = \frac{v_1}{2}$. Ako su se prije sudara kugle gibale jedna prema drugoj jednakom brzinom $\vec{v}_1 = -\vec{v}_2$, tada nakon sudara obje kugle stanu, tj. $v' = 0$.
2. U slučaju kad je $m_1 << m_2$, $\vec{v}_2 = 0$, slijedi da je $v' = 0$, tj. kad kugla od gline padne na tlo, ondje i ostane. Kada komad željeza na nakovnju udaramo čekićem, kinetička energija čekića pretvara se u energiju deformacije komada željeza i u unutrašnju energiju, i željezo se zagrijava.



FAKTOR RESTITUCIJE

Faktor restitucije pri izravnom centralnom sudaru dvaju tijela jednak je omjeru relativnih brzina nakon i prije sudara:

$$k = \left| \frac{\vec{v}_1' - \vec{v}_2'}{\vec{v}_1 - \vec{v}_2} \right|$$

Za savršeno elastičan sudar $k = 1$, za savršeno neelastičan sudar $k = 0$, a za djelomično elastičan sudar $0 < k < 1$.

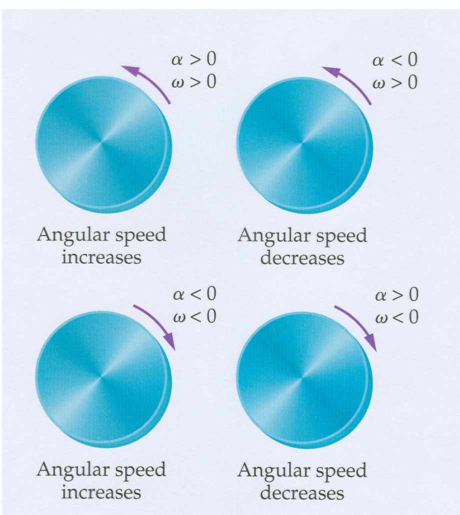
Nejednoliko kružno gibanje. Treći Newtonov aksiom. Rad, energija, snaga

Tangencijalna i kutna akceleracija

Pri nejednolikom kruženju **iznos obodne brzine više nije konstantan**, već se mijenja s vremenom. Zbog toga je ukupna akceleracija sastavljena od **radijalne akceleracije** $\vec{a}_r$ i **tangencijalne akceleracije** $\vec{a}_t$. Radijalna akceleracija komponenta je ukupne akceleracije u smjeru $-\vec{r}$, dok je tangencijalna akceleracija komponenta ukupne akcerelakcije u smjeru tangente, odnosno jediničnog vektora $\vec{t}_0$. **Tangencijalna akceleracija** nastaje zbog promjene iznosa obodne brzine:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(r\omega)}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\alpha$$

gdje je: $\alpha = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ **kutna akceleracija**.



(Komponentu kutne akceleracije nastalu promjenom smjera kutne brzine ovdje nećemo razmatrati jer ćemo pretpostaviti da je os vrtnje nepomična, tj. smjer kutne brzine konstanta.) Jedinica kutne akceleracije jest radijan u sekundi na kvadrat(rad/s^2 ili s^{-2}).

Ako kutnu akceleraciju definiramo kao vektor čiji je iznos određen gornjom formulom, dok joj je smjer okomit na ravninu kruženja (isti ili suprotan smjeru kutne brzine $\vec{\omega}$), tada relaciju za tangencijalnu akceleraciju možemo napisati u vektorskom obliku ovako:

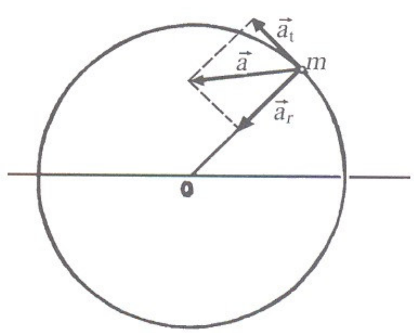
$$\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r}$$

Pri jednolikom gibanju po kružnici $\vec{\omega}$ = konst., odnosno α = 0, te je i tangencijalna akceleracija nula. To je i razumljivo jer se pri takvom gibanju brzina čestice mijenja samo po smjeru, dok joj je iznos konstantan.

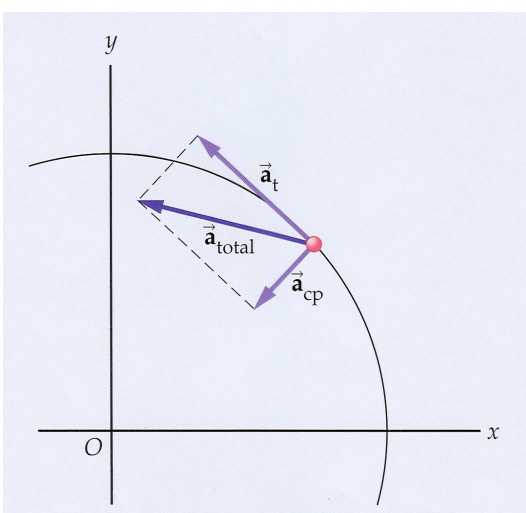
Pri nejednolikom kružnom (ili bilo kojem krivocrtnom) gibanju postoji i radijalna i tangencijalna akceleracija.

Prva od njih ima smjer $-\vec{r}_0$, dakle prema središtu kružnice, dok je druga u smjeru tangente: one su, dakle, okomite jedna na drugu. **Ukupnu akceleraciju** dobivamo ako vektorski zbrojimo te dvije akceleracije: $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_r$

Iznos ukupne akceleracije pri nejednolikom kružnom gibanju je:
$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_t^2 + a_r^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{r^2}}$$



SLIKA: TANGENCIJALNA I RADIJALNA KOMPONENTA AKCELERACIJE – Kulišić slika 2.15. str. 29



Posebni slučaj nejednolikog kružnog gibanja je gibanje s konstantnom kutnom akceleracijom ($\vec{\alpha} = \text{konst}$): α = konst

U $t = 0$ je $\varphi = 0$ i $\omega = \omega_0$.

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \; / \cdot dt \; / \int$$

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t \alpha dt$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \; / \cdot dt \; / \int$$

$$\int_0^{\varphi} d\varphi = \int_0^t (\alpha t + \omega_0) dt$$

$$\varphi = \frac{\alpha}{2} t^2 + \omega_0 t$$

Centripetalna sila

Prema 1. Newtonovom zakonu, ako na tijelo ne djeluje sila, ono miruje ili se jednoliko giba po pravcu. Da bi se tijelo gibalo krivocrtno, odnosno u našem slučaju po kružnici, na njega mora djelovati sila koja će mu mijenjati smjer brzine, odnosno davati mu radijalnu ili centripetalnu akceleraciju. Radijalnu ili centripetalnu akceleraciju $\vec{a}_r$ tijelo dobije kada sila djeluje okomito na brzinu:

$$\vec{F}_{cp} = -m\frac{v^2}{r}\vec{r}_0 = -mr\omega^2\vec{r}_0$$

Sila koja mijenja smjer brzine i usmjerena je prema središtu zakrivljenosti (pri kruženju prema središtu kružnice), zove se **centripetalna ili radijalna sila**. Ovdje su:
m – masa tijela
v - obodna brzina
ω – kutna brzina

Pri nejednolikom kružnom gibanju osim centripetalne sile, koja mijenja smjer brzine, djeluje i tangencijalna sila koja mijenja iznos brzine, pa je ukupna sila njihov vektorski zbroj.

Centripetalna sila može biti različite prirode ovisno o tome što uzrokuje gibanje po kružnici:

1. U slučaju gibanja Mjeseca oko Zemlje centripetalna sila je gravitacijska sila privlačenja Mjeseca i Zemlje.
2. Pri gibanju elektrona oko jezgre centripetalnu silu daje električna privlačna sila.
3. Kada vrtimo neki predmet na užetu, centripetalna sila je rezultanta između sile teže i napetosti niti.

Centripetalna sila nije nova vrsta sile nego poseban naziv za svaku silu koja mijenja smjer brzine i čini da se tijelo giba po krivocrtnoj putanji.

Aksijalni vektori

Vektor kutne brzine $\vec{\omega}$ je **aksijalni vektor**, to jest vektor koji se pri rotaciji koordinatnog sustava transformira kao vektor, ali se pri zrcaljenju ne mijenja. Općenito, uzmimo neki vektor $\vec{r}$ u pravokutnom koordinatnom sustavu:

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y = \vec{i}r\cos\alpha + \vec{j}r\sin\alpha$$

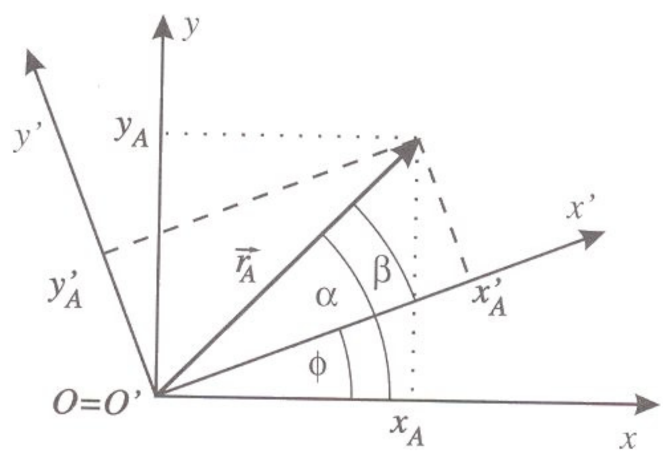
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

U zarotiranom koordinatnom sustavu (rotacija je oko osi *z*, koja gleda „iz papira“, izvedena za kut φ u pozitivnom smjeru) komponente istog vektora su:

$$\vec{r} = \vec{i}\,'x' + \vec{j}\,'y' = \vec{i}\,'r\cos\beta + \vec{j}\,'r\sin\beta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

Vidimo da je iznos vektora nepromjenjiv (invarijantan s obzirom na rotaciju koordinatnog sustava).



SLIKA: KOMPONENTE VEKTORA U DVA MEĐUSOBNO ZAROTIRANA SUSTAVA – Horvat slika str.

Pri **zrcaljenju osi**, za zrcalo postavljeno okomito na *x*-*y* ravninu, koordinate *x* i *y* promijene predznak pa imamo:

$$\vec{r} \xrightarrow{zrcaljenje} (-\vec{r})$$

Pri rotaciji, komponente vektora u fizici kao što su $\vec{v}, \vec{F}, \vec{a}, \vec{\alpha}$ ...mijenjaju se po istom pravilu kao i $\vec{r}$. Pri zrcaljenju vrijedi:

$$\vec{v} \xrightarrow{zrcaljenje} (-\vec{v})$$

$$\vec{F} \xrightarrow{zrcaljenje} (-\vec{F})$$

$$\vec{a} \xrightarrow{zrcaljenje} (-\vec{a})$$

$$\vec{\omega} \xrightarrow{zrcaljenje} (\vec{\omega})$$

Vektori koji se pri zrcaljenju ne mijenjaju zovu se **aksijalni vektori** (ili, ponekad, **pseudovektori**).

Analogija pravocrtnog i kružnog gibanja

Formalna analogija među formulama pravocrtnog i kružnog gibanja. Ako u formule pravocrtnog gibanja umjesto s, v i a uvrstimo φ, ω i α, dobijemo formule kružnog gibanja:

Pravocrtno gibanje	**Kružno gibanje**
$v = \frac{ds}{dt}$	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
$a = \frac{d^2 s}{dt^2}$	$\alpha = \frac{d^2 \varphi}{dt^2}$
$s = vt + s_0$	$\varphi = \omega t + \varphi_0$
$s = \frac{a}{2}t^2 + v_0 t + s_0$	$\varphi = \frac{\alpha}{2}t^2 + \omega_0 t + \varphi_0$
$v^2 = 2as + v_0^2$	$\omega^2 = 2\alpha\varphi + \omega_0^2$

3. Newtonov aksiom

Sile koje djeluju na neko tijelo, potječu iz okoline tog tijela. Treći Newtonov zakon govori o interakciji ili međudjelovanju određenog tijela i njegove okoline. Ako tijelo A djeluje na tijelo B silom $\vec{F}_{AB}$, tada i tijelo B djeluje na tijelo A jednako velikom silom po iznosu, ali suprotnog smjera $\vec{F}_{BA}$: $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$

Prvu silu zovemo **akcija**, a drugu **reakcija** pa je: Sila akcije = - Sila reakcije

Tu činjenicu je Newton izrazio u 3. zakonu mehanike koji glasi: **Svakom djelovanju (akciji) uvijek je suprotno i jednako protudjelovanje (reakcija). Djelovanja dvaju tijela jednoga na drugo uvijek su jednaka i protivnog smjera.**

Primjer: Uteg mase m miruje na horizontalnoj podlozi stola.

Na uteg djeluju dvije sile: sila teža $\vec{F}_G$ kojom ga Zemlja privlači, i sila $\vec{F}_N$ kojom podloga stola djeluje na uteg prema gore.

Budući da uteg miruje ($\vec{a} = 0$), prema drugom Newtonovom zakonu ukupna sila na uteg iščezava pa je $\vec{F}_G = -\vec{F}_N$.

Uteg djeluje na stol svojom težinom $\vec{G}$, koja je prema 3. Newtonovom zakonu, jednaka po iznosu, a suprotna po smjeru sili $\vec{F}_N$ kojom podloga stola djeluje na uteg: $\vec{G} = -\vec{F}_N$.

Odatle slijedi da je težina utega $\vec{G}$, to jest sila kojom uteg djeluje na horizontalnu podlogu jednaka sili teži: $\vec{G} = \vec{F}_G = m\vec{g}$.

Sila akcije $\vec{G}$ djeluje na podlogu stola dok sila reakcije $\vec{F}_N$ djeluje na uteg.

Promatramo li međutim, interakciju utega i Zemlje, sila akcije je sila $\vec{F}_G$ kojom Zemlja privlači uteg, dok silom reakcije uteg privlači Zemlju.

Sile $\vec{F}_G$ i $\vec{F}_N$, premda su jednake po iznosu, a suprotnog smjera, nisu akcija i reakcija – one djeluju na isto tijelo dok sila akcije i reakcije uvijek djeluju na različita tijela.

Impuls sile i količina gibanja

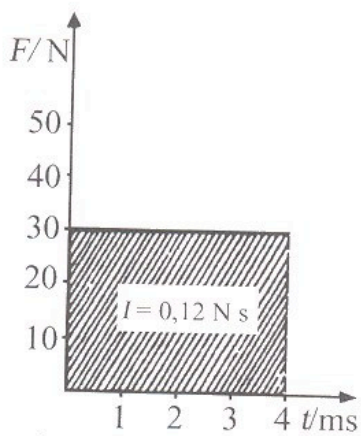
Količinu gibanja materijalne točke definirali smo kao umnožak mase i brzine: $\vec{p} = m\vec{v}$

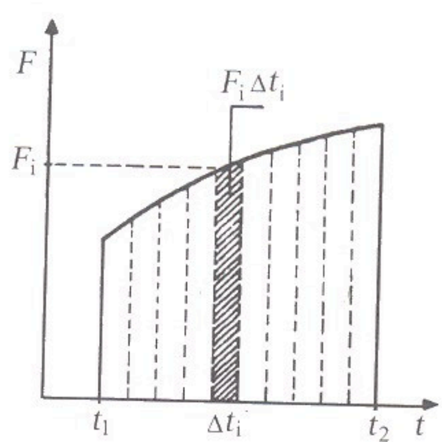
Ta dinamička veličina označava osobinu tijela koje se giba. Znamo iz iskustva da je tijelo s većom količinom gibanja teže zaustaviti nego tijelo s manjom količinom gibanja, i da je za svaku promjenu količine gibanja potrebno da na tijelo neko vrijeme djeluje sila. Što je veća sila koja pri tome djeluje, odnosno što je duži vremenski interval djelovanja, bit će veća i promjena količine gibanja. Definiramo impuls sile da bismo opisali djelovanje sile na tijelo.

Pretpostavimo da na tijelo djeluje stalna sila $\vec{F}$ u određenom vremenskom intervalu Δt i kažemo da je pri tome tijelo dobilo impuls sile $F\Delta t$. **Impuls sile** je umnožak sile i vremenskog intervala u kojem ta sila djeluje. Jedinica impulsa sile je Ns.

Impuls sile $\vec{I}$ je **vektorska veličina** i ima smjer sile: $\vec{I} = \vec{F}\Delta t$

U *F*-*t* dijagramu impuls sile je brojčano jednak površini ispod krivulje *F*(*t*).





SLIKA: IMPULS STALNE SILE – Kulišić slika 3.5.a) str. 46

SLIKA: IMPULS PROMJENJIVE SILE Kulišić slika 3.5.b) str. 46

Ako sila nije stalna nego se mijenja u vremenu, tada impuls sile nađemo tako da vremenski interval podijelimo u mnogo malih intervala. U svakom takvom intervalu impuls sile je približno jednak umnošku sile i vremenskog intervala jer se sila u tako ktatkom vremenskom intervalu značajno ne promijeni.

Ukupni impuls jednak je zbroju svih tih impulsa no to nije točna vrijednost. Nju dobijemo tako da uzmemo graničnu vrijednost tog izraza:

$$\vec{I} = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_i \vec{F}_i \Delta t_i = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt$$

Impuls sile jednak je integralu sile po vremenu u kojem ta sila djeluje.

Prema 2. Newtonovom zakonu sila je jednaka brzini promjene količine gibanja:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(mv)$$

Za infinitenzimalno vrijeme *dt* tijelo ćedobiti impuls sile: $\vec{F}dt = d\vec{p}$

U vremenskom intervalu između t_1 i t_2 primljeni impuls sile bit će jednak:

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt = \int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2} d\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

Impuls sile jednak je promjeni količine gibanja tijela na koje djeluje ta sila. Ako je tijelo prije djelovanja sile, znači u početku, mirovalo, tada je impuls sile jednak količini gibanja koju tijelo ima nakon djelovanja impulsa sile. Vremenska ovisnost sile često nije poznata pa impuls sile ne možemo odrediti integrirajući silu po vremenu. U tom slučaju mjerene promjene količine gibanja i upotreba zadnje relacije je jedini način određivanja impulsa sile.

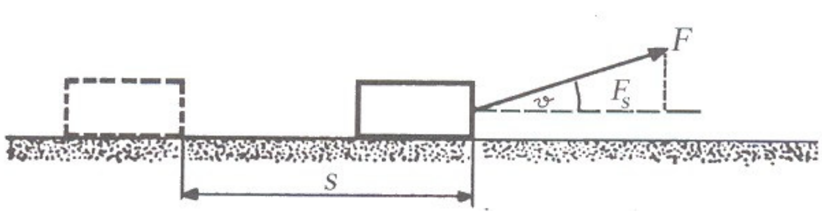
Rad

U fizici je rad definiran kao svladavanje sile na određenom putu. Sila koja djeluje na tijelo mijenja mu brzinu, ili kompenzira djelovanje drugih sila koje djeluju suprotno gibanju, ili oboje. Na primjer: gurajući tijelo uz kosinu svladavamo silu trenja, Zemljinu silu težu i, eventualno, ubrzavamo tijelo.

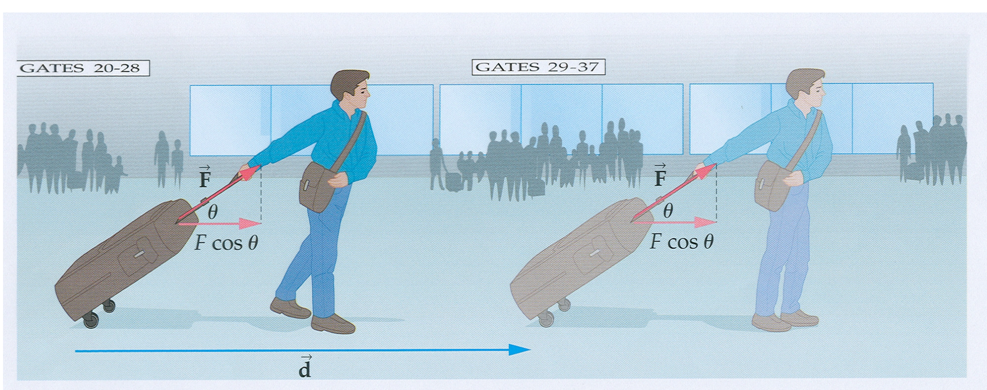
Najjednostavniji primjer je pravocrtno gibanje tijela pod utjecajem stalne sile koja djeluje u smjeru pravca gibanja tijela (odnosno u smjeru brzine tijela). Tada je rad jednak umnošku sile i prijeđenog puta: $W = Fs$

SLIKA: DEFINICIJA RADA SA STALNOM SILOM

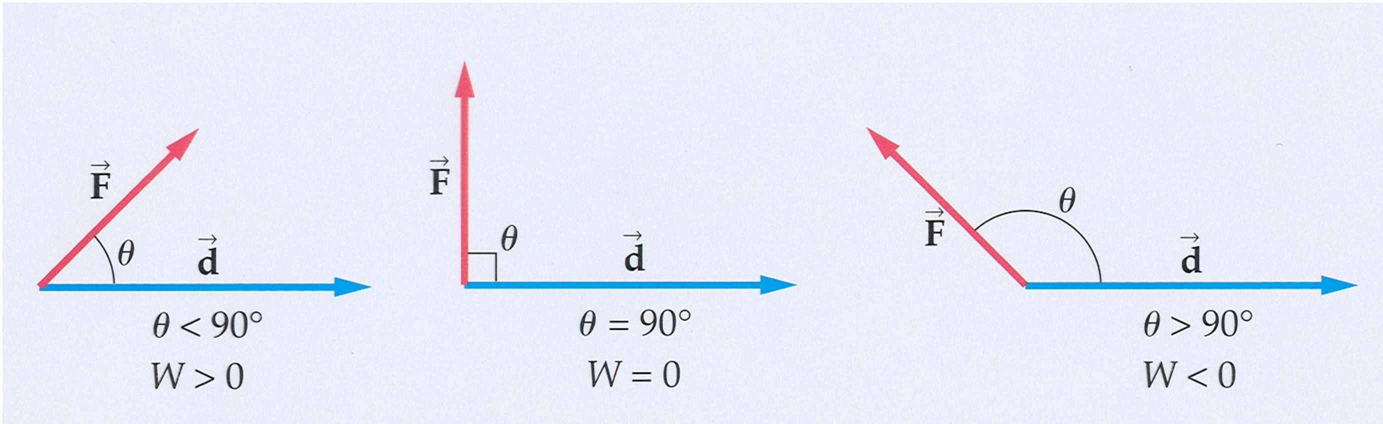
Ako stalna sila F ne djeluje na tijelo u smjeru puta već pod nekim kutom θ u odnosu na put, tada samo komponenta sile u smjeru puta F_s vrši rad te uz pretpostavku da je F_s konstanta, izvršeni rad je: $W = F_s s = Fs\cos\theta$



SLIKA: DEFINICIJA RADA SA STALNOM SILOM POD NEKIM KUTOM – Kulišić slika 4.1. str. 61



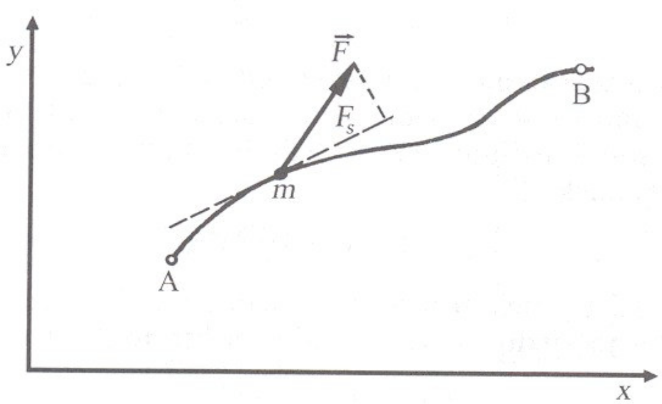
Rad je skalarna veličina koja može biti pozitivna ili negativna:
- Kad je $0 < \theta < \pi/2$, rad je pozitivan.
- Za $\theta = \pi/2$, rad je 0.
- Kad je $\pi/2 < \theta < \pi$, rad je negativan.



Na primjer:

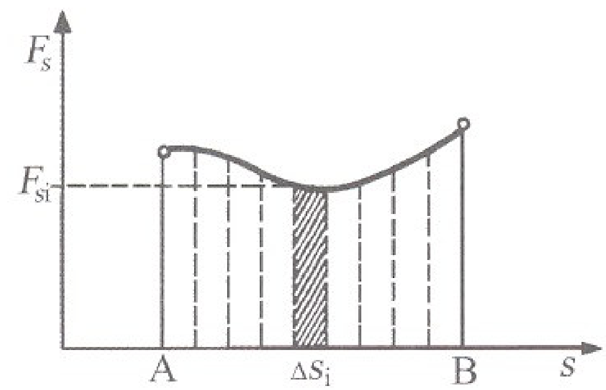
- pri jednolikom kružnom gibanju sila je stalno okomita na put i ne obavlja se nikakav rad
- smjer sile trenja je suprotan smjeru gibanja pa je rad sile trenja negativan
- pri slobodnom padu tijela sila teža je u smjeru gibanja pa je rad sile teže pozitivan

Razmotrimo općenit slučaj kad se čestica giba duž krivocrtne trajektorije od točke A do točke B pod utjecajem promjenjive sile.



SLIKA: RAD PROMJENJIVE SILE – Kulišić slika 4.2. str. 61

Projekcija sile na tangentu na putanju F_s nije na čitavom putu konstantna već je funkcija puta s i može se grafički prikazati.



SLIKA: IZRAČUNAVANJE RADA POMOĆU F_s- s DIJAGRAMA – Kulišić slika 4.3. str. 62

Ukupni put s podijelimo na male dijelove Δs_i i ako je podjela dovoljno fina, tada će sila F_s duž pojedinog Δs_i biti gotovo stalna. Rad sile na tom djeliću jednak je površini uskog pravokutnika: $\Delta W_i \approx F_{si}\Delta s_i$

Ukupni rad jednak je graničnoj vrijednosti zbroja svih radova kad širina svih intervala Δs_i teži prema 0:

$$W = \lim_{\substack{\Delta s_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} F_{si}\Delta s_i = \int_A^B F_s ds$$

Za rješavanje ovog integrala moramo znati silu kao funkciju prostornih koordinata i jednadžbu putanje čestice. Rad se može odrediti i grafički: rad je jednak površini ispod krivulje $F_s(s)$, tj. površini lika omeđenog krivuljom F_s, apscisom s i ordinatama u A i B. Kad se čestica pod djelovanjem sile F pomakne za ds, rad je $dW = F\, ds \cos\theta = F_s\, ds$.

Budući da je iznos elementarnog pomaka $|d\vec{r}|$ jednak elementarnom putu ds, možemo elementarni pomak pisati kao: $d\vec{r} = d\vec{s}$. Elementarni rad je jednak umnošku elementarnog pomaka (puta) i projekcije sile na pravac pomaka.

Sila i pomak su vektorske veličine, a rad je skalarna veličina. Takav produkt dvaju vektora čiji je rezultat skalarna veličina, zovemo skalarni produkt. Općenito: $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\theta$

Služeći se skalarnim produktom vektora izraz za rad sile $\vec{F}$ na elementarnom pomaku $d\vec{r}$ možemo pisati kao: $dW = \vec{F}d\vec{r}$

Kad se čestica giba po putanji od točke A do točke B rad je:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Rad je linijski integral sile uzduž staze od početne do krajnje točke. Jedinica rada dobiva se iz definicijske formule za rad: jednaka je umnošku jedinice sile i jedinice puta.

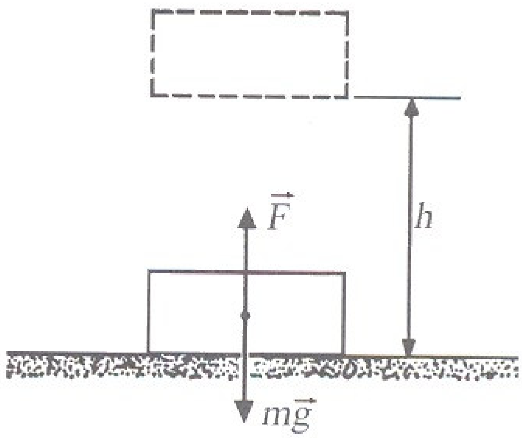
U SI je: J = N m = kg m^2/s^2.

U atomskoj fizici dopuštena je upotreba još jedne jedinice rada: eV = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J.

Rad električne struje često se izražava u: Wh = 3600 J.

RAD DIZANJA

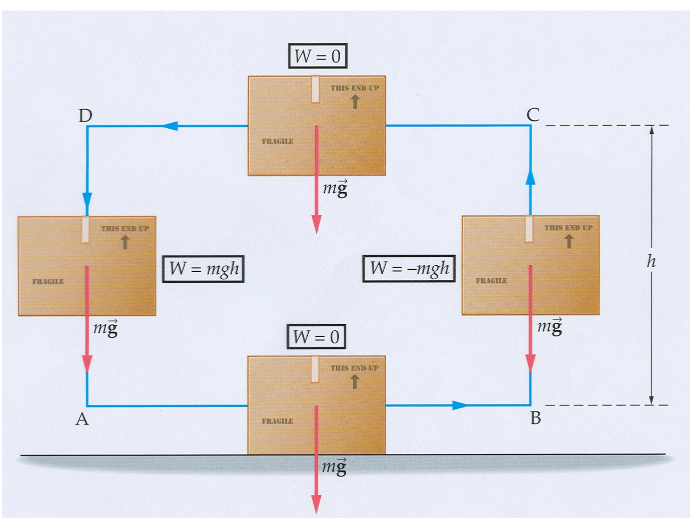
Da bismo tijelo mase *m* podigli na visinu *h*, potrebno je svladati silu težu $G = mg$. Dizanje ćemo izvoditi bez ubrzavanja tijela tako da silu kojom dižemo tijelo, možemo stalno smatrati jednakom po iznosu (ali suprotnog smjera) sili teži *mg*.



SLIKA: IZRAČUNAVANJE RADA PRI DIZANJU TIJELA NA VISINU *h* – Kulišić slika 4.4. str. 63

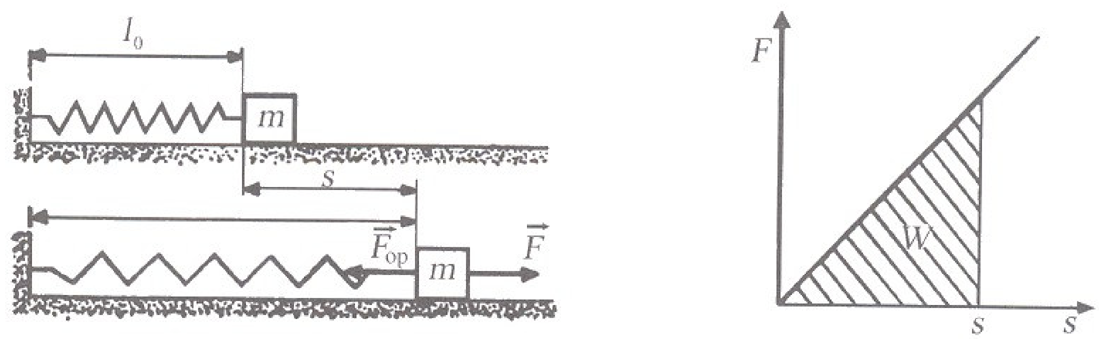
Rad dizanja je: $W = Fs = mgh$

Budući da je vanjska sila uvijek u smjeru puta, njen rad je pozitivan. Rad sile teže pri dizanju je negativan ($-mgh$) jer se tijelo podiže protiv sile teže, tj. sila teža i pomak stalno imaju suprotan predznak. Kad tijelo pada s visine *h*, rad sile teže je pozitivan i iznosi *mgh.*



RAD PRI RASTEZANJU OPRUGE

Rastezanje elastične opruge izvodi se polako, gotovo ravnotežno tako da silu kojom djelujemo na oprugu možemo smatrati po iznosu jednakom, a po smjeru suprotnom elastičnoj sili opruge.



SLIKA: IZRAČUNAVANJE RADA PRI RASTEZANJU OPRUGE i GRAFIČKI PRIKAZ OVISNOSTI SILE O POMAKU – Kulišić slika 4.5. str. 63

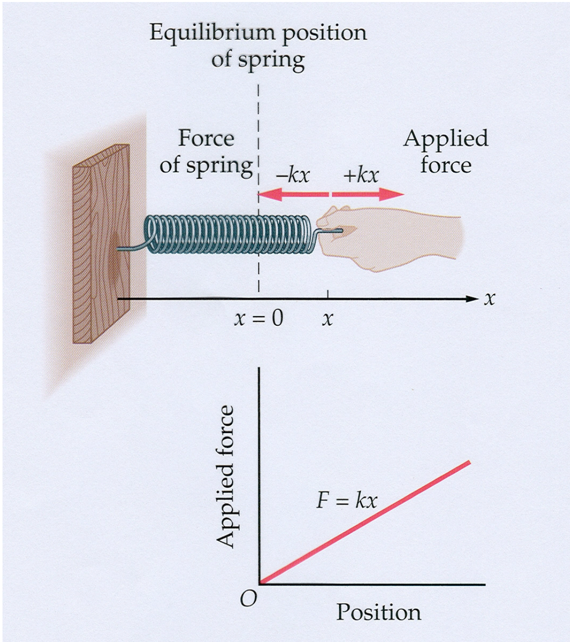
Hookeov zakon kaže da se čvrsta tijela u granicama elastičnosti opiru linearnom istezanju i stlačivanju silom koja je upravno razmjerna deformaciji i suprotnog je smjera: $F = -ks$

F je sila opruge (elastična sila), k je konstanta opruge, a s pomak (produženje ili skraćenje) iz ravnotežnog položaja ($s = \Delta l = l - l_0$). Pri jednolikom izvlačenju opruge primjenjujemo jednaku i suprotnu silu: $F = ks$

Rad izvršen za rastezanje (stezanje) opruge iz položaja ravnoteže za elongaciju s je:

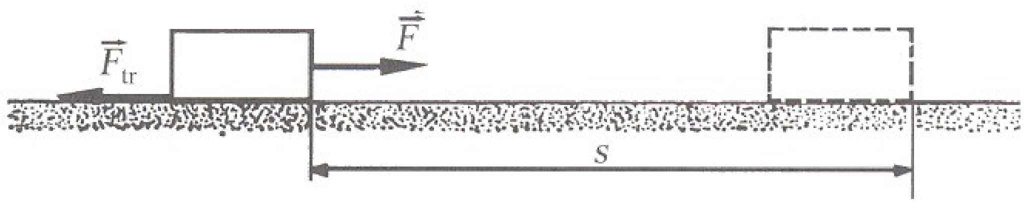
$$W = \int_0^s F ds = \int_0^s ks ds = \frac{1}{2} ks^2$$

Na slici iscrtana površina odgovara radu sile kojom djelujemo na oprugu pri rastezanju opruge iz položaja ravnoteže do neke elongacije s. Rad elastične sile opruge je $-\frac{1}{2}ks^2$ jer je sila opruge uvijek suprotna pomaku.


Equilibrium position
of spring
Force
of spring
Applied
force
−kx
+kx
x
x = 0
x
Applied force
F = kx
O
Position

RAD PRI SVLADAVANJU SILE TRENJA

Da bi se tijelo gibalo jednoliko svladavajući pri tom silu trenja, potrebno je da na njega djeluje vanjska sila F po iznosu jednaka, a po smjeru suprotna sili trenja.

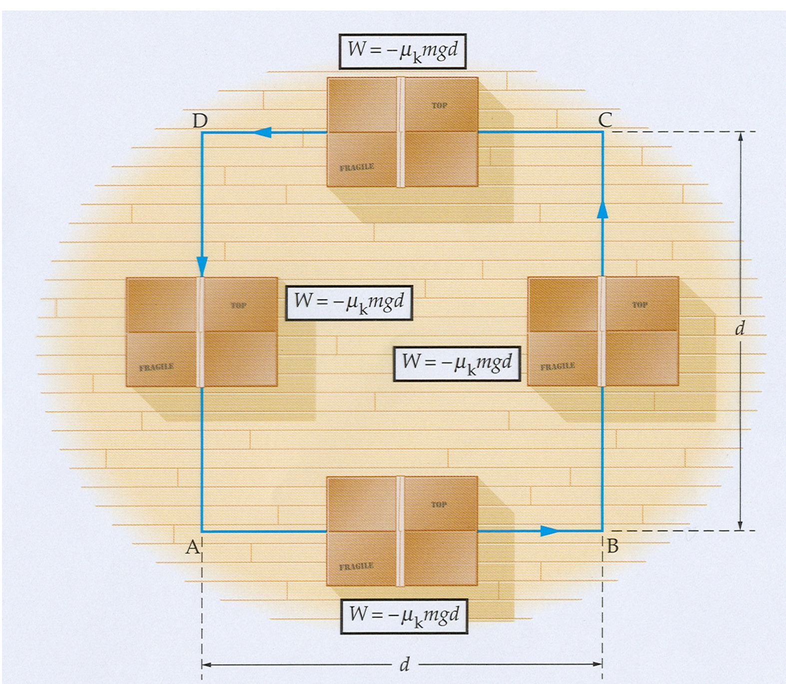


SLIKA: IZRAČUNAVANJE RADA SILE TRENJA – Kulišić slika 4.6. str. 64

Budući je sila trenja F_{tr} suprotna pomaku, onda će sila F biti u smjeru pomaka i potreban je rad:

$$W = \int_0^s F ds = F_{tr} s = \quad F_N s$$

Pri tom je rad sile trenja uvijek negativan, jer je sila trenja suprotna pomaku: $W_{tr} = - \quad F_N s$



Snaga

Snaga se definira omjerom rada i vremena, pa se može shvatiti kao brzina obavljanja rada odnosno prijenosa energije. Ako je u promatranom vremenskom intervalu t_2-t_1 izvršen rad W_2-W_1, odnosno prenesena energija E_2-E_1, srednja snaga je:

$$\overline{P} = \frac{W_2 - W_1}{t_2 - t_1}$$

Odnosno

$$\overline{P} = \frac{E_2 - E_1}{t_2 - t_1}$$

Trenutna vrijednost snage je:

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \overline{P} = \frac{dW}{dt}$$

Budući je $dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = \vec{F} \cdot \vec{v} dt$ snagu možemo pisati kao skalarni produkt sile i brzine:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = Fv \cos \alpha$$

α je kut između smjera sile i smjera brzine.

Jedinica za snagu je : W = J/s.

Do kraja 1980. godine koristila se jedinica snage KS = konjska snaga:

KS = 735,5 W

Kinetička i potencijalna energija

Energija je sposobnost tijela ili sustava tijela da obavljaju rad: što tijelo ima veću energiju, to je sposobnije da obavi veći rad. Kad tijelo obavlja rad, energija mu se smanjuje, i obratno, ako okolina obavlja rad na tijelu, energija tijela se povećava. Rad može prelaziti u energiju i obratno. Jedinica rada i energije je identična. Postoji više oblika energije: mehanička, električna, termalna (unutrašnja), kemijska, solarna, nuklearna... Općenito, postoje mehanički i nemehanički oblici energije.

Mehanička energija makroskopskih tijela ili sustava tijela je zbroj kinetičke i potencijalne energije tih tijela. Kinetičku energiju uzrokuje gibanje tijela nekom brzinom, a potencijalnu energiju uzrokuje položaj tijela unutar sustava. Potencijalna i kinetička energija mogu se pretvarati jedna u drugu, mehanička energija može prelaziti u nemehaničke oblike energije i obratno. Energija može prelaziti iz jednog oblika u drugi, ali se ne može ni stvoriti ni uništiti.

KINETIČKA ENERGIJA

Kinetička energija je sposobnost tijela da mogu vršiti rad zbog toga što imaju određenu brzinu. Da bismo izračunali kolika je kinetička energija tijela mase m koje se giba brzinom v, izračunajmo rad koji je potreban da bi sila F ubrzala to tijelo na nekom putu iz mirovanja ($v = 0$) do brzine v:

$$dW = \int Fds = \int mads = \int m\frac{dv}{dt}ds = m\int \frac{dv}{dt}vdt = m\int_0^v vdv = \frac{1}{2}mv^2$$

$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$ je kinetička energija tijela mase m i brzine v.

Slično, ako sila F ubrzava tijelo od početne brzine v_1 do konačne brzine v_2, rad potreban za to ubrzavanje je:

$$W = \int_{s_1}^{s_2} Fds = m\int_{v_1}^{v_2} vdv = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}$$

Obavljenim radom smo tijelu, koje je na početku imalo kinetičku energiju $\frac{mv_1^2}{2}$, povećali kinetičku energiju na konačnu vrijednost $\frac{mv_2^2}{2}$.

Dakle, promjena kinetičke energije je jednaka izvršenom radu: $W = E_{k2} - E_{k1} = \Delta E_k$

Ova relacija, koja povezuje rad i promjenu kinetičke energije, se zove **poučak o radu i kinetičkoj energiji**.

Ako tijelo izvrši rad ($W < 0$), kinetička energija mu se smanjuje ($\Delta E_k < 0$).

Kad se nad tijelom izvrši rad ($W > 0$), kinetička energija mu se povećava ($\Delta E_k > 0$).

Kad je rad jednak nuli ($W = 0$), kinetička energija tijela ostaje konstantna ($\Delta E_k = 0$).

Kinetička energija sustava čestica:

Ako imamo sustav čestica mase m_1, m_2, m_3,... m_n i brzine v_1, v_2, v_3,... v_n, tada je ukupna kinetička energija sustava:

$$E_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Kruto tijelo možemo smatrati sustavom čestica čiji se međusobni razmak ne mijenja. Pri translaciji krutog tijela sve njegove točke imaju jednaku brzinu, koja je ujedno jednaka brzini centra mase tog tijela. Tada je kinetička energija:

$$E_k = \frac{1}{2} m v_{CM}^2$$

Ovdje je m ukupna masa tijela, a v_{CM} brzina njegova centra mase.

POTENCIJALNA ENERGIJA

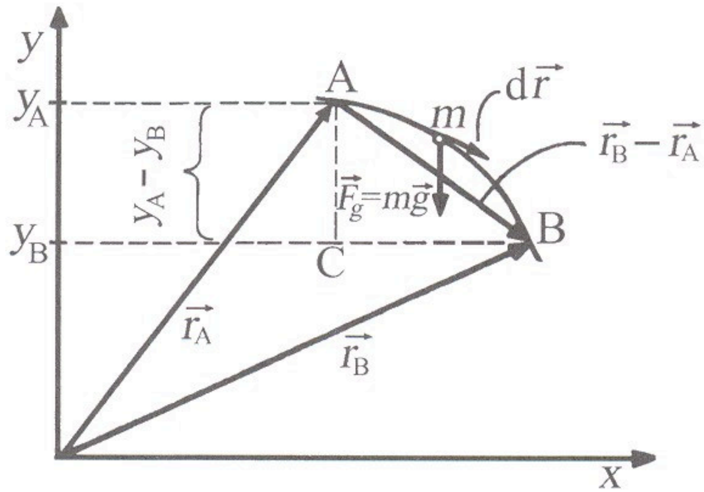
Tijelo može imati i potencijalnu energiju koja dolazi zbog položaja tijela prema drugim tijelima ili zbog konfiguracije tijela ili sustava tijela. Ovisno o sili koja djeluje na tijelo, razlikujemo ove vrste potencijalne energije:

- gravitacijska
- elastična
- elektrostatska
- magnetska

Razmatrat ćemo samo prve dvije u mehanici.

Gravitacijska potencijalna energija

Da bismo izračunali potencijalnu energiju tijela u gravitacijskom polju na Zemljinoj površini, pretpostavimo da se čestica mase m pomiče u homogenom polju sile teže (odnosno u gravitacijskom polju Zemlje što je približno isto) od točke A do točke B.



SLIKA: IZRAČUNAVANJE GRAVITACIJSKE POTENCIJALNE ENERGIJE – Kulišić slika 4.7. str. 66

Pomakne li se čestica za diferencijal puta *ds*, rad sile teže je:

$$dW = \vec{F}_g d\vec{s} = \vec{F}_g d\vec{r}$$

$$\vec{F}_g = m\vec{g}$$

Rad sile teže na putu od A do B:

$$W = \int_A^B \vec{F}_g \cdot d\vec{r} = m\vec{g}\int_A^B d\vec{r} = m\vec{g} \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_A)$$

Budući je:

$\vec{F}_g = m\vec{g} = -mg\vec{j}$ i $\vec{j} \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_A) = y_B - y_A$ slijedi:

$$W = -(mgy_B - mgy_A)$$

Rad sile teže jednak je razlici dviju funkcija položaja. Funkcija *mgy* zove se gravitacijska potencijalna energija tijela na visini *y*: $E_p = mgy$

Razlika potencijalne energije početne i konačne točke jednaka je radu sile teže:

$$W = E_{p1} - E_{p2} = -\Delta E_p$$

Pretpostavili smo da je za y = 0 potencijalna energija jednaka nuli. Referentni nivo (E_p =0) može se odabrati na razne načine (za sustav Zemlja-tijelo na njezinoj površini, kao razina mora, površina tla, pod, ploha stila....) te je potencijalna energija određena do na aditivnu konstantu. U svim razmatranjima se pojavljuje razlika potencijalne energije pa nam ta proizvoljnost ne smeta. Za razliku od kinetičke energije koja može biti samo pozitivna, potencijalna energija može biti i pozitivna i negativna.

Rad sile teže ne ovisi o obliku puta već samo o početnom i konačnom položaju tijela što znači da bismo isti rezultat dobili kad bi se tijelo iz točke A do točke B gibalo bilo kojom putanjom. Vektorska razlika $(\vec{r}_B - \vec{r}_A)$ ista je za bilo koju stazu koja prolazi kroz točke A i B.

Potencijalna energija opruge

Rad vanjske sile pri rastezanju opruge za elongaciju s je: $W = \frac{1}{2}ks^2$

Vanjska sila je bila jednaka po iznosu, a suprotnog smjera sili opruge. Znači da je rad sile opruge jednak radu vanjske sile s negativnim predznakom: $W_{op} = -\frac{1}{2}ks^2$

Rad sile opruge pri pomaku tijela iz položaja s_1 u položaj s_2 je:

$$W_{op} = \int_{s_1}^{s_2} F ds = \frac{1}{2}k{s_1}^2 - \frac{1}{2}k{s_2}^2$$

Potencijalna energija elastične sile opruge definira se izrazom:

$$W = E_p(s_1) - E_p(s_2) = \frac{1}{2}ks_1^2 - \frac{1}{2}ks_2^2$$

Uzmemo li dogovorom da je potencijalna energija nula u položaju ravnoteže (s = 0), tada je potencijalna energija elastične sile opruge:

$$E_p(s) = \frac{1}{2}ks^2$$

Ovdje je s elongacija ili pomak iz položaja ravnoteže.

Konzervativne sile. Nekonzervativne sile

Sila kojoj rad ne ovisi o putu već samo o početnoj i konačnoj točki zove se **konzervativna sila**. Takve sile su: gravitacijska sila, elastična sila i Coulombova sila. One ovise samo o položaju tijela na koje djeluju.

Rad konzervativne sile po zatvorenom putu jednak je nuli: $\oint \vec{F}_k \cdot d\vec{s} = 0$

Kružićem preko znaka integrala smo označili da je put, po kome integriramo, zatvoren.

Ako rad ne ovisi o putu, tada ćemo kao jedan put odabrati put koji se vraća u polaznu točku, dakle, zatvoreni put. Drugi put neka bude nula jer i on povezuje polaznu točku samu sa sobom. Rad po drugom putu jednak je nuli, ali i rad po prvom putu jednak je nuli jer je rad po bilo kojem zatvorenom putu jednak nuli.

Na primjer: Kad se tijelo mase *m* podigne na visinu *h*, rad sile teže je *–mgh,* a kad tijelo padajući s visine *h* dođe u početnu točku, rad sile teže je *+mgh* – ukupni rad po tom zatvorenom putu je nula.

Druga vrsta sila su one kojima rad između dvije iste točke A i B ovisi o putu kojim je tijelo došlo iz jedne točke u drugu točku. To su nekonzervativne sile.

Na primjer: Rad sile trenja ovisi o putu – što je put duži, rad je veći.

Rad nekonzervativne sile po zatvorenom putu različit je od nule. Nekonzervativne sile zovu se i disipativne sile jer kad one djeluju, mehanička energija tijela nije očuvana.

Kada na tijelo djeluje konzervativna sila, tada svakom položaju tijela možemo pridijeliti određenu potencijalnu energiju. Potencijalna energija može se definirati samo za konzervativne sile.

Pri pomaku tijela iz položaja A u položaj B u polju sile teže dobili smo rad $W = -(E_{pB} - E_{pA})$

Taj rezultat vrijedi za svaku konzervativnu silu pa zaključujemo: **Rad svake konzervativne sile možemo izraziti razlikom potencijalnih energija.**

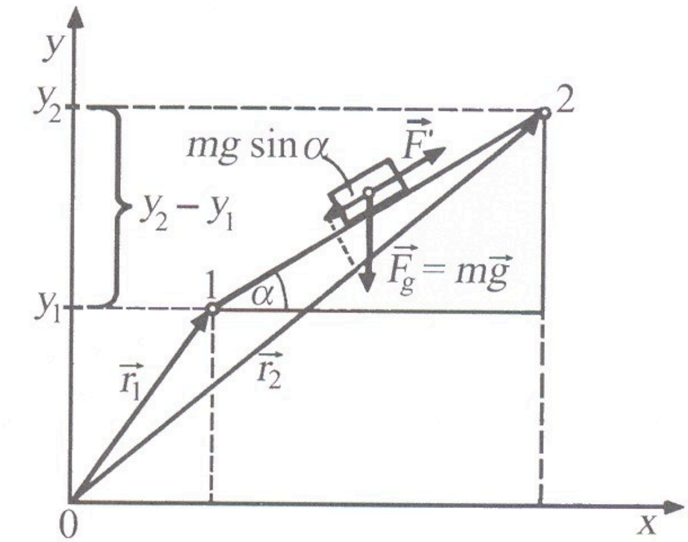
Kad se čestica pomakne u polju konzervativne sile iz jednog položaja u drugi položaj, rad konzervativne sile je:

$$W = \int_A^B \vec{F}_k \cdot d\vec{r} = E_p(\vec{r}_A) - E_p(\vec{r}_B) = -\left[E_p(\vec{r}_B) - E_p(\vec{r}_A)\right]$$

Rad konzervativne sile između dva položaja tijela jednak je razlici potencijalne energije početnog i krajnjeg položaja. To je veza rada i promjene potencijalne energije – poučak o radu i potencijalnoj energiji.

Veza sile i potencijalne energije u konzervativnom polju

Izvedimo još vezu između rada vanjske sile koja djeluje na tijelo i promjene energije sustava. Tijelo se nalazi u prostoru u kojemu, osim te vanjske sile, djeluju i druge konzervativne i nekonzervativne sile. Pretpostavimo da vanjskom silom F' pomičemo tijelo uz kosinu (ili neku drugu putanju) u polju sile teže.



SLIKA: GIBANJE TIJELA UZ KOSINU BEZ TRENJA – Kulišić slika 4.8. str. 69

Smatrat ćemo pri tom da su površine glatke i da nema trenja.

Prema 2. Newtonovom zakonu slijedi: $F' - mg\sin\alpha = ma$

Pri tom je rad vanjske sile:

$$W' = \int F'ds = \int (mg\sin\alpha + m\frac{dv}{dt})ds = \int_{s_1}^{s_2} mg\sin\alpha ds + \int_{v_1}^{v_2} m\frac{dv}{dt}vdt =$$

$$= mg(y_2 - y_1) + \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = E_p(\vec{r}_2) - E_p(\vec{r}_1) + E_{k2} - E_{k1} = \Delta E_p + \Delta E_k$$

Ovaj rezultat koji je izveden za poseban slučaj, vrijedi i općenito. Kad vanjska sila $\vec{F}'$ djeluje na neko tijelo koje se nalazi u polju konzervativnih sila (npr. u polju sile teže), tijelu će se mijenjati i potencijalna i kinetička energija. Rad vanjske sile W' (jedne ili više njih) i rad konzervativne sile W promijenit će kinetičku energiju:

$$W + W' = \int_A^B \vec{F}' \cdot d\vec{s} + \int_A^B \vec{F}_k \cdot d\vec{s} = E_{k2} - E_{k1}$$

Budući da je rad konzervativne sile: $W = \int_A^B \vec{F}_k \cdot d\vec{s} = E_p(\vec{r}_1) - E_p(\vec{r}_2)$,

rad ostalih sila F' je: $W' = E_{p2} - E_{p1} + E_{k2} - E_{k1} = E_2 - E_1$,

gdje su: $E_1 = E_{p1} + E_{k1}$ i $E_2 = E_{p2} + E_{k2}$

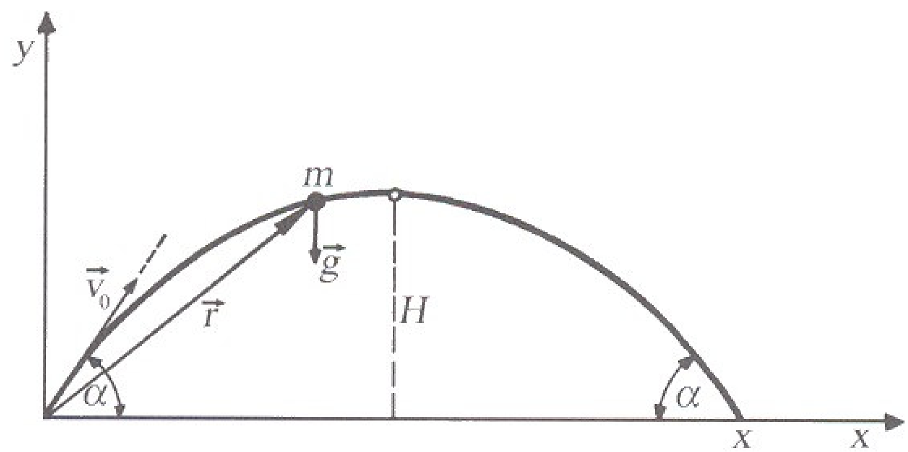
ukupne mehaničke energije sustava u početnom i konačnom položaju.

Relacija $W' = \Delta E_p + \Delta E_k$ je veza između rada vanjskih sila i promjene kinetičke i potencijalne energije – **poučak o radu i ukupnoj energiji**.

Gibanje po krivulji. Jednoliko kružno gibanje

Kosi hitac

Kosi hitac dobijemo kada bacimo tijelo „koso prema gore“ ili „koso prema dolje“ nekom brzinom $\vec{v}_0$, pod nekim kutom α koji se dogovorno mjeri u odnosu na horizontalu. Kut α zove se **kut elevacije**.



SLIKA: KOSI HITAC Kulišić sl. 2.17. str. 33

Za ovo gibanje je odgovorna ista sila kao i za slobodni pad, pa je jednadžba gibanja ova:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=0 \qquad\qquad m\frac{d^2y}{dt^2}=-mg$$

Ili:

$$m\frac{dv_x}{dt}=0 \qquad\qquad m\frac{dv_y}{dt}=-mg$$

Početna brzina $\vec{v}_0$ se može napisati u obliku:

$$\vec{v}_0=\vec{i}\,v_0\cos\alpha+\vec{j}v_0\sin\alpha$$

Početni uvjeti su onda:

$$x(0)=0 \qquad\qquad \frac{dx}{dt}(0)=v_x(0)=v_0\cos\alpha$$

$$y(0)=0 \qquad\qquad \frac{dy}{dt}(0)=v_y(0)=v_0\sin\alpha$$

Ponovo integriramo kao što smo radili da dobijemo rješenja jednadžbe gibanja za slobodni pad:

$$v_x(t) = C_1$$

Uz $v_x(0) = v_0 \cos\alpha = C_1$

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha$$

$$dx = v_0 \cos\alpha dt$$

$$\int dx = v_0 \cos\alpha \int dt$$

$$x(t) = v_0 \cos\alpha \cdot t + C_2$$

Uz početni uvjet $x(0) = 0$ slijedi:

$$x(0) = v_0 \cos\alpha \cdot 0 + C_2 = 0$$

$$C_2 = 0$$

Za gibanje duž *y*–osi imamo:

$$\frac{dv_y}{dt} = -g$$

$$dv_y = -gdt$$

$$\int dv_y = -g\int dt$$

$$v_y(t) = -gt + D_1$$

Uz $v_y(0) = v_0 \sin\alpha$ slijedi:

$$v_y(0) = -g0 + D_1 = v_0 \sin\alpha$$

Odnosno: $D_1 = v_0 \sin\alpha$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -gt + v_0 \sin\alpha / \cdot dt$$

$$dy = -gtdt + v_0 \sin\alpha \cdot dt / \int$$

$$\int dy = -g\int t dt + v_0 \sin\alpha \int dt$$

$$y(t) = -g\frac{t^2}{2} + v_0 \sin\alpha \cdot t + D_2$$

Iz početnog uvjeta $y(0)$ =0 slijedi:

$$y(0) = -g\frac{0^2}{2} + v_0 \sin\alpha \cdot 0 + D_2 = 0$$

$$D_2 = 0$$

Rješenja jednadžbi gibanja su:

$$x(t) = v_0 \cos\alpha \cdot t \qquad\qquad v_x(t) = v_0 \cos\alpha$$

(**jednoliko gibanje po pravcu**)

$$y(t) = -g\frac{t^2}{2} + v_0 \sin\alpha \cdot t \qquad\qquad v_y = v_0 \sin\alpha - gt$$

(**jednoliko usporeno/ubrzano gibanje**)

Tijelo istodobno izvodi dva jednostavna gibanja pa govorimo o **složenom gibanju**. Matematički gledano, ovdje imamo krivulju koja je **zadana parametarski**, a **parametar** je t. Da bismo dobili oblik putanje u prepoznatljivom obliku (y = f(x)), trebamo eliminirati parametar t. Izrazimo ga iz jednadžbe za x(t) i uvrstimo u $y(t)$.

Iz $x(t) = v_0 \cos\alpha \cdot t$ slijedi:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

Uvrstimo:

$$y(t) = -g\frac{t^2}{2} + v_0 \sin\alpha \cdot t = -\frac{g}{2}\frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} + v_0 \sin\alpha \frac{x}{v_0 \cos\alpha} = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}x^2 + tg\alpha \cdot x$$

Putanja tijela kod kosog hica je **parabola**.

Maksimalni domet x_M je (druga) nultočka parabole:

$$x_M = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Maksimalna visina y_M je:

$$y_M = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

Sad ćemo ih izvesti.

Maksimalni domet ili **horizontalni domet** je horizontalna udaljenost između polazne i udarne točke, a možemo je izračunati iz jednadžbe putanje izjednačavajući ordinatu y s 0 ($y = 0$):

$$y = 0 = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x_M^2 + \mathrm{tg}\alpha \cdot x_M$$

$$y = 0 = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x_M^2 + \mathrm{tg}\alpha \cdot x_M$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{gx_M}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

Uz $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$ slijedi:

$$x_M = \frac{2v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$ je **maksimalni domet hica**.

Maksimalna visina hica je ordinata tjemena parabole, a nju ćemo dobiti ako u jednadžbu putanje uvrstimo da je vrijeme uspinjanja t_H jednako vremenu da dođe u tu točku: $t = t_H$ i da je $y = y_M$. No prvo odredimo vrijeme uspinjanja. Na najvećoj visini (tj. u tjemenu putanje) vertikalna komponenta brzine je 0: $v_y = 0$

Iz $v_y = v_0 \sin\alpha - gt$ slijedi: $v_y(t_H) = v_0 \sin\alpha - gt_H = 0$

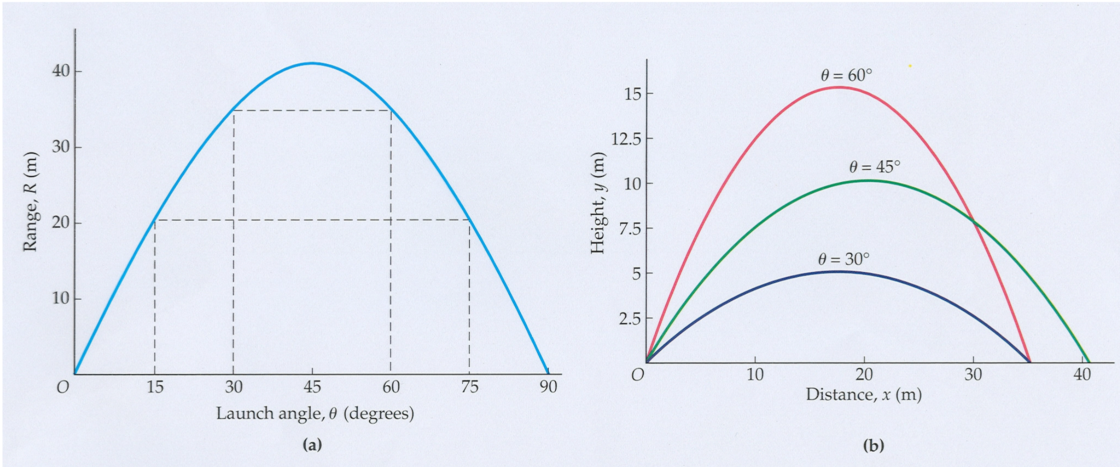
$$v_0 \sin\alpha = gt_H$$

$$t_H = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$ je **vrijeme uspinjanja**.

Za y_M :

$$y(t_H) = y_M = -g\frac{t_H^2}{2} + v_0 \sin\alpha \cdot t_H = -\frac{g}{2}\frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g^2} + v_0 \sin\alpha \frac{v_0 \sin\alpha}{g} = -\frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} + \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g}$$

$$y_M = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$$ je **maksimalna visina hica**.



40
30
20
10
Range, R (m)
O
15
30
45
60
75
90
Launch angle, θ (degrees)
(a)
θ = 60°
θ = 45°
θ = 30°
15
12.5
10
7.5
5
2.5
Height, y (m)
O
10
20
30
40
Distance, x (m)
(b)

Kosi hitac sa silom otpora. Balističke krivulje

Rješavamo kosi hitac sa **silom otpora linearno proporcionalnom brzini**, tj. $\vec{F} = -km\vec{v}$ (uz mali koeficijent otpora k dobijemo „nesmetani“ kosi hitac).

Jednadžbe gibanja:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -km\frac{dx}{dt} \qquad (1) \qquad\qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg - km\frac{dy}{dt} \qquad (2)$$

$$m\frac{dv_x(t)}{dt} = 0 \qquad\qquad m\frac{dv_y(t)}{dt} = -mg$$

Početni uvjeti (ostaju isti kao kod kosog hica bez sile otpora):

$$x(0) = 0 \qquad\qquad y(0) = 0$$

$$\frac{dx}{dt}(0) = v_x(0) = v_0 \cos\alpha \qquad\qquad \frac{dy}{dt}(0) = v_y(0) = v_0 \sin\alpha$$

Rješenje za (1) – za x-os (uz promjenu početnog uvjeta u rješenju za 1D silu otpora linearno ovisnu o brzini $v_0 \to v_0 \cos\alpha$):

$$x(t) = \frac{v_0 \cos\alpha}{k}(1 - e^{-kt}) \qquad\qquad v(t) = v_0 \cos\alpha e^{-kt}$$

Sad gledamo jednadžbu za $y(t)$:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg - km\frac{dy}{dt} \,/ : m$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g - k\frac{dy}{dt}$$

Uz $\frac{dy}{dt} = v_y$ slijedi:

$$\frac{dv_y}{dt} = -g - kv_y \,/ \cdot dt$$

$$dv_y = (-g - kv_y) \,/ : (g + kv_y) \,/ \int$$

$$\int \frac{dv_y}{g + kv_y} = -\int dt$$

$$\frac{1}{k}\ln(g + kv_y(t)) = -t + C_1$$

C_1 iz uvjeta $v_y(0) = v_0 \sin\alpha$:

$$\frac{1}{k}\ln(g + kv_0 \sin\alpha) = -0 + C_1$$

$$\frac{1}{k}\ln(g + kv_0 \sin\alpha) = C_1$$

$$\frac{1}{k}\ln(g + kv_y(t)) = -t + \frac{1}{k}\ln(g + kv_0 \sin\alpha) /\cdot k$$

$$\ln(g + kv_y(t)) = -kt + \ln(g + kv_0 \sin\alpha)$$

$$\ln(g + kv_y(t)) - \ln(g + kv_0 \sin\alpha) = -kt$$

$$\ln\frac{g + kv_y(t)}{g + kv_0 \sin\alpha} = -kt / e$$

$$\frac{g + kv_y(t)}{g + kv_0 \sin\alpha} = e^{-kt}$$

$$v_y(t) = -\frac{g}{k} + (\frac{g}{k} + v_0 \sin\alpha)e^{-kt}$$

$$v_y(t) = -\frac{g}{k} + \frac{g}{k}(1 + \frac{k}{g}v_0 \sin\alpha)e^{-kt}$$

$$v_y(t) = \frac{dy}{dt} = -\frac{g}{k} + \frac{g}{k}(1 + \frac{k}{g}v_0 \sin\alpha)e^{-kt} /\cdot dt / \int$$

$$\int dy = -\frac{g}{k}\int dt + \frac{g}{k}(1 + \frac{k}{g}v_0 \sin\alpha)\int e^{-kt}dt$$

$$y(t) = -\frac{g}{k}t + \frac{g}{k}(1 + \frac{k}{g}v_0 \sin\alpha)(-\frac{1}{k})e^{-kt} + C_2$$

$$y(t) = -\frac{g}{k}t - \frac{g}{k^2}(1 + \frac{k}{g}v_0 \sin\alpha)e^{-kt} + C_2$$

C_2 iz početnog uvjeta $y(0) = 0$:

$$y(0) = -\frac{g}{k}0 - \frac{g}{k^2}(1 + \frac{k}{g}v_0 \sin\alpha)e^{-k0} + C_2 = 0$$

$$\frac{g}{k^2}(1 + \frac{k}{g}v_0 \sin\alpha) = C_2$$

$$y(t) = -\frac{g}{k}t - \frac{g}{k^2}(1 + \frac{k}{g}v_0 \sin\alpha)e^{-kt} + \frac{g}{k^2}(1 + \frac{k}{g}v_0 \sin\alpha)$$

Konačno imamo **rješenja**:

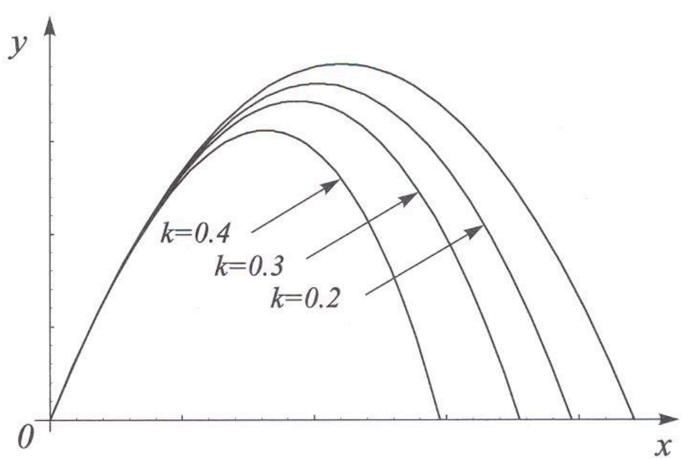
$$x(t) = \frac{v_0 \cos\alpha}{k}(1 - e^{-kt})$$

$$v(t) = v_0 \cos\alpha e^{-kt}$$

$$y(t) = -\frac{g}{k}t - \frac{g}{k^2}(1 + \frac{k}{g}v_0 \sin\alpha)(1 - e^{-kt})$$

$$v_y(t) = -\frac{g}{k} + \frac{g}{k}(1 + \frac{k}{g}v_0 \sin\alpha)e^{-kt}$$

Rezultat ovisi o koeficijentu sile otpora *k*. Balističke krivulje za razne *k*.



SLIKA: BALISTIČKE KRIVULJE ZA RAZNE *k*-HORVAT slika 1.8 str. 1-29

Balističke krivulje za razne *k*: domet je veći što je *k* manji. Najveći domet daje „čisti" kosi hitac bez sile otpora sredstva. Krivulje se zovu **BALISTIČKE KRIVULJE** jer su povezane s putanjama projektila iz topova npr.

Ako eliminiramo parametar *t* iz izraza *x*(*t*), uvrstimo u *y*(*t*), dobit ćemo krivulju *y*(*x*):

$$x(t)=\frac{v_0\cos\alpha}{k}(1-e^{-kt})\,/\cdot\frac{k}{v_0\cos\alpha}$$

$$\frac{kx}{v_0\cos\alpha}=1-e^{-kt}$$

$$1-\frac{kx}{v_0\cos\alpha}=e^{-kt}\,/\ln$$

$$-kt=\ln(1-\frac{kx}{v_0\cos\alpha})\,/:(-k)$$

$$t=-\frac{1}{k}\ln(1-\frac{kx}{v_0\cos\alpha})$$

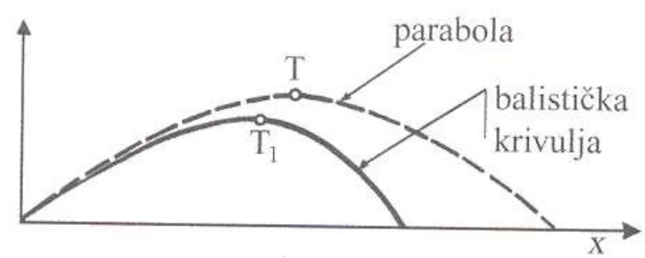
$$y(t)=-\frac{g}{k}t-\frac{g}{k^2}(1+\frac{k}{g}v_0\sin\alpha)(1-e^{-kt})$$

$$y(x)=\frac{g}{k^2}\ln(1-\frac{kx}{v_0\cos\alpha})+x(tg\alpha+\frac{g}{v_0k\cos\alpha})$$

Za izračunavanje dometa rješavamo jednadžbu: $y(x)\big|_{x=x_M}=0$

Za mali iznos k (tj. $k\to 0$) vraćamo se na poznato rješenje za kosi hitac (uzimamo logaritamski razvoj funkcije $\ln(1-x)\approx -x-\frac{x^2}{2}$)

Tjeme parabole (T_2) je na polovici dometa dok je tjeme balističke krivulje (T_1) bliže cilju.



SLIKA: BALISTIČKA KRIVULJA – Kulišić slika 2.18. str. 35

Za iste početne uvjete stvarni domet i visina hica u zraku manji su nego za kosi hitac u vakumu. Otpor zraka ovisi o mnogim faktorima: presjek i oblik zrna, brzina gibanja, temperatura, tlak, vjetar i sl. Stoga i oblik i domet balističke krivulje ovisi o tim faktorima.

Horizontalni hitac

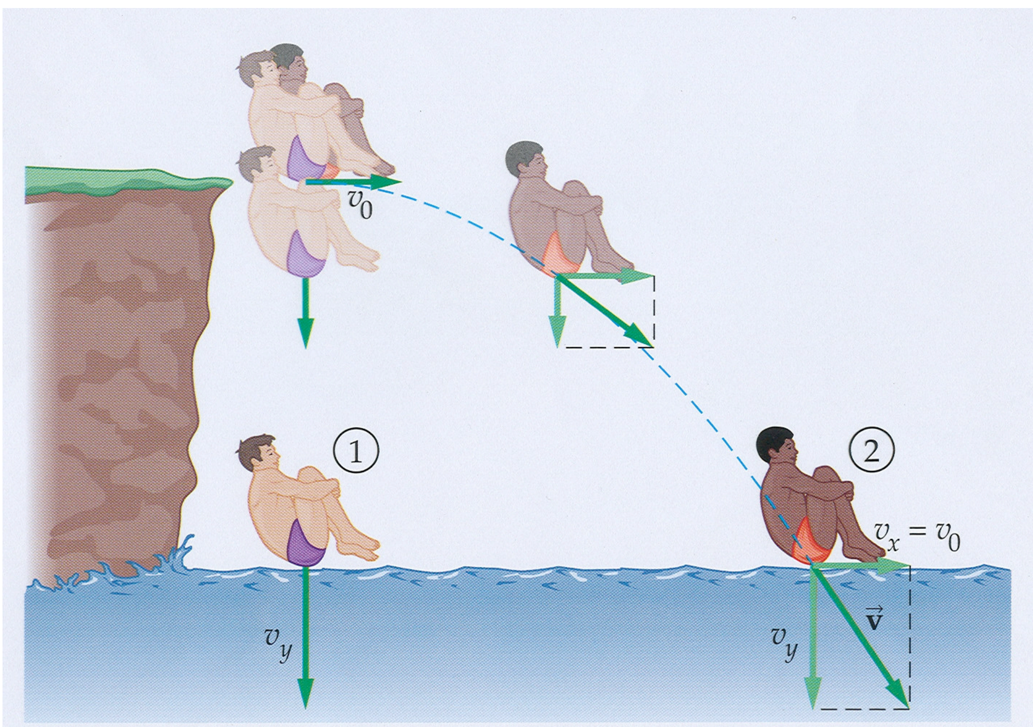
Jednadžba krivulje (parabole) za kosi hitac: $y(x) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + tg\alpha \cdot x$

Maksimalni domet: $x_M = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$

Može se pokazati da je **maksimalni domet kosog hica** za $\alpha = 45^o$.

Neki cilj možemo pogoditi pucajući istom početnom brzinom iz dva elevacijska kuta α i (90^o- α) jer je u tom slučaju domet isti.

Ako je kut elevacije $\alpha = 0^o$, govorimo o **horizontalnom hicu**.



Rješenja jednadžbe gibanja kosog hica:

$x(t) = v_0 \cos\alpha \cdot t$ $\qquad$ $v_x(t) = v_0 \cos\alpha$

$y(t) = -g\frac{t^2}{2} + v_0 \sin\alpha \cdot t$ $\qquad$ $v_y = v_0 \sin\alpha - gt$

Uvrstimo $\alpha = 0^o$ u rješenja jednadžbe gibanja kosog hica i dobijemo rješenja za **horizontalni hitac**:

$x(t) = v_0 t \qquad\qquad v_x(t) = v_0$

$y(t) = -g\frac{t^2}{2} \qquad\qquad v_y = -gt$

Ako uvrstimo $\alpha = 90^o$, imamo **vertikalni hitac prema gore**:

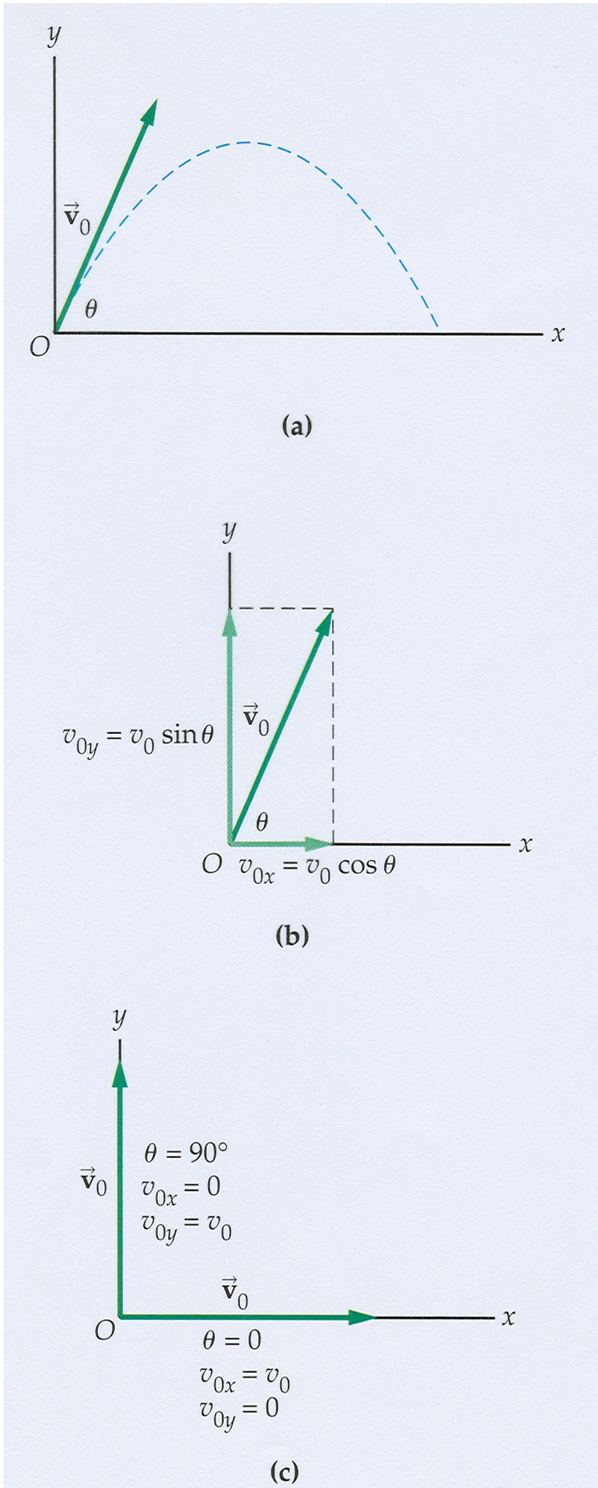
$x(t) = 0 \qquad\qquad v_x(t) = 0$

$y(t) = -g\frac{t^2}{2} + v_0 t \qquad\qquad v_y = v_0 - gt$

Ako uvrstimo $\alpha = 270^o$, imamo **vertikalni hitac prema dolje**:

$x(t) = 0 \qquad\qquad v_x(t) = 0$

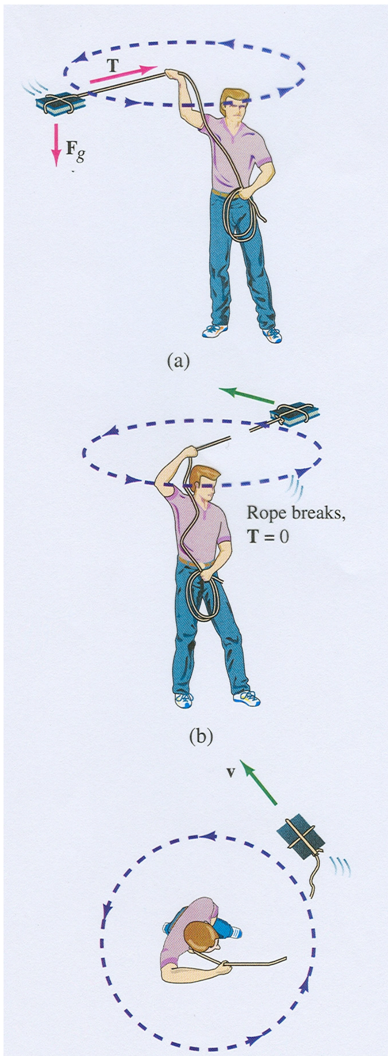
$y(t) = -g\frac{t^2}{2} - v_0 t \qquad\qquad v_y = -v_0 - gt$

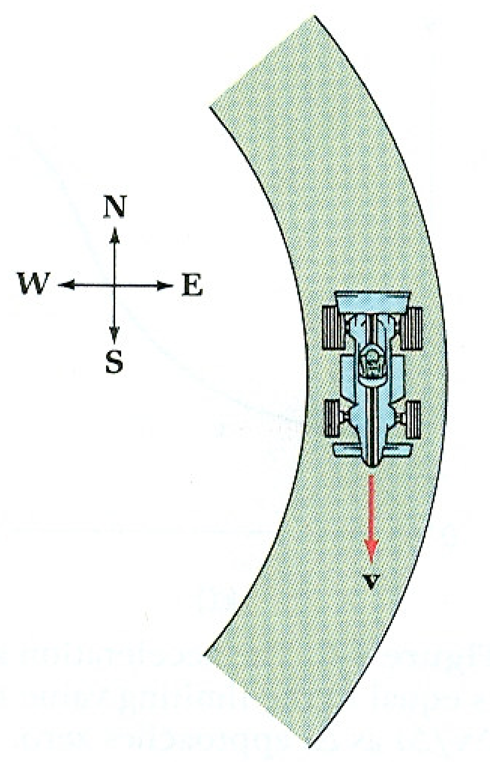


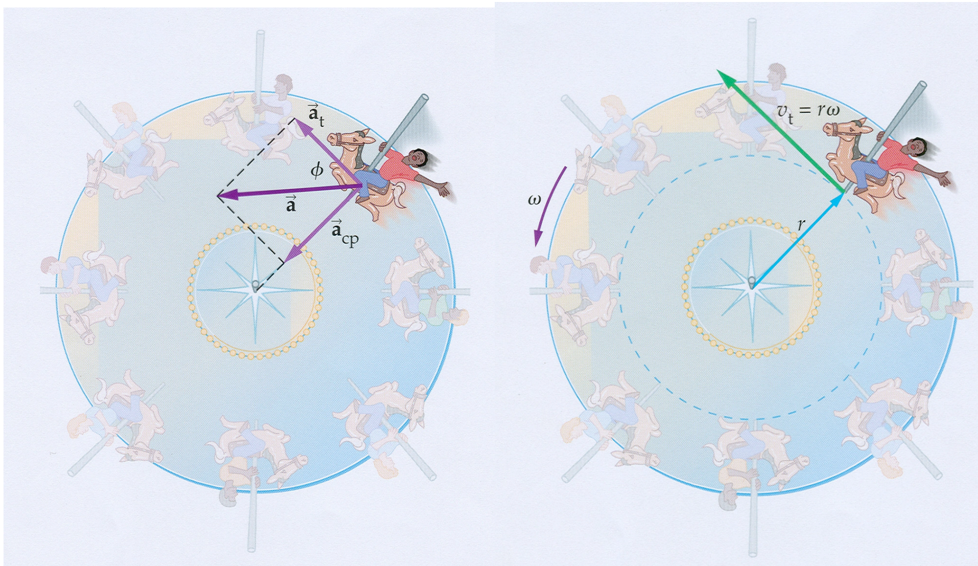
http://www.glenbrook.k12.il.us/gbssci/phys/Class/vectors/u3l1f.html
http://www.physicsclassroom.com/mmedia/#vectors
http://eskola.hfd.hr/inter_fizika/if2.htm

Jednoliko kružno gibanje: kutna i obodna brzina

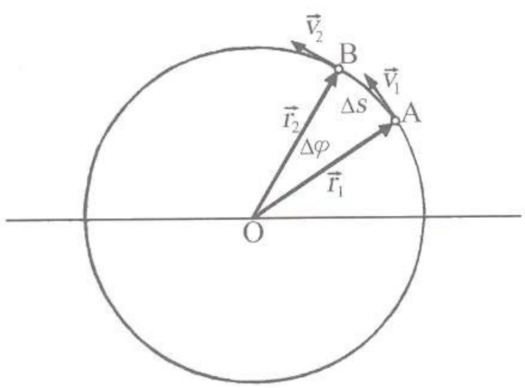
Kad akceleracija materijalne točke nema isti pravac kao brzina, već s brzinom zatvara kut različit od nule, materijalna točka se giba po zakrivljenoj liniji.







Najjednostavnije krivocrtno gibanje je **jednoliko kruženje**. Kod jednolikog kruženja brzina ostaje konstantna po iznosu, ali stalno mijenja smjer što rezultira radijalnom akceleracijom prema središtu kružnice.

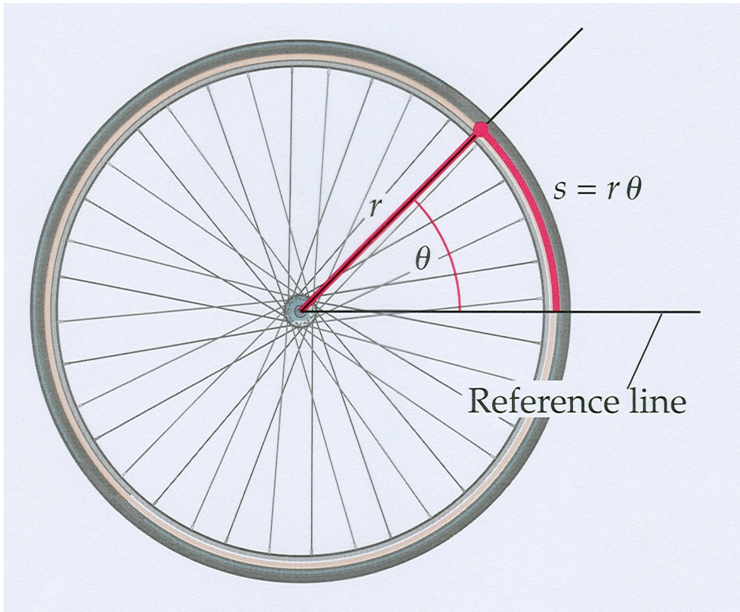


SLIKA: GIBANJE PO KRUŽNICI – Kulišić slika 2.12. str. 26

Za vrijeme Δt materijalna točka, gibajući se po kružnici prevali put Δs (dio kružnog luka), odnosno kut $\Delta\varphi$, gibajući se od točke A do točke B na kružnici. Svaka od točaka je određena svojim vektorom položaja, znači vektorima $\vec{r}_1$ i $\vec{r}_2$. **Pomak materijalne točke** je: $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$.

Veza između prijeđenog kuta $\Delta\varphi$ i prijeđenog puta Δs je: $\Delta s = r\Delta\varphi$

Prijeđeni kut se izražava u **radijanima**: 1 rad = 180º /π = 57,3º

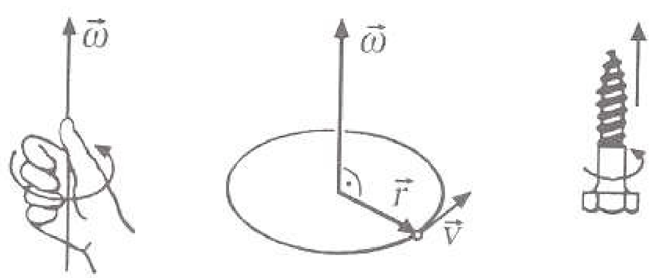


Linearna (obodna) brzina pri gibanju materijalne točke po kružnici je:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r\Delta\varphi}{\Delta t} = r \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = r\frac{d\varphi}{dt} = r\omega$$

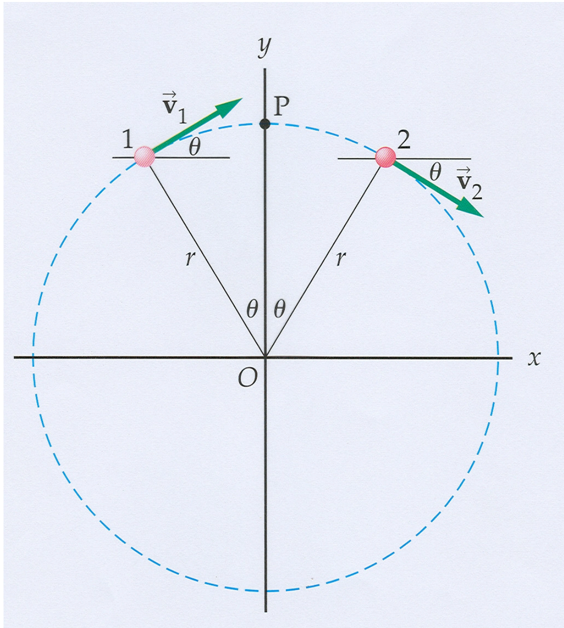
Ovdje je $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ **kutna brzina** tijela. Jedinica kutne brzine je radijan u sekundi (rad/s) ili samo s^{-1} (jer često jedinicu za radijan – rad – često pišemo samo 1).

Kutna brzina je vektor koji definira gornjom jednadžbom $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ i po definiciji ima smjer po pravcu osi rotacije, a određen je **pravilom desne ruke.**



SLIKA: SMJER KUTNE BRZINE – Kulišić slika 2.13. str. 27

Ako prsti desne ruke slijede materijalnu točku, palac pokazuje smjer kutne brzine $\vec{\omega}$. Smjer vektora $\vec{\omega}$ možemo odrediti i pomoću desnog vijka: ako se vijak vrti u smjeru kruženja materijalne točke, kutna brzina će imati smjer napredovanja vijka. Pravac vektora kutne brzine uvijek je okomit na ravninu kruženja.



Budući su sve tri veličine u jednadžbi $v = r\omega$ vektorske veličine (obodna brzina $\vec{v}$, kutna brzina $\vec{\omega}$ i radijus vektor $\vec{r}$, koji ide od ishodišta do materijalne točke), ta jednadžba se može napisati i u vektorskom obliku.

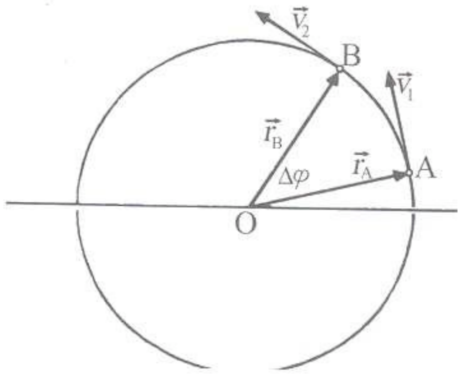
Prisjetimo se da je vektorski produkt dva vektora (npr. $\vec{a}$ i $\vec{b}$) opet vektor $\vec{c}$: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$

Iznos tog vektora je $c = ab\sin\alpha$

Obodna brzina $\vec{v}$ uvijek je okomita i na vektor $\vec{\omega}$ i na vektor $\vec{r}$. Kut između $\vec{r}$ i $\vec{\omega}$ iznosi π/2, tj. $\sin\alpha = 1$. Zbog toga gornju relaciju možemo pisati kao vektorski produkt: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

Treba paziti na redoslijed vektora $\vec{\omega}$ i $\vec{r}$ jer se zamjenom redoslijeda mijenja predznak: $\vec{\omega} \times \vec{r} = -\vec{r} \times \vec{\omega}$

Jednoliko kružno gibanje zapravo je **ubrzano gibanje** jer se pri njemu stalno mijenja smjer obodne brzine iako njen iznos ostaje konstantan. Da bismo odredili ubrzanje koje nastaje promjenom smjera brzine, tzv. radijalnu ili centripetalnu akceleraciju, promatrajmo jednoliko kruženje kao na slici.



SLIKA: IZRAČUNAVANJE CENTRIPETALNE AKCELERACIJE – Kulišić slika 2.14. str. 27

Neka se materijalna točka u trenutku t_1 nalazi u točki A, a u trenutku $t_2 = t_1 + \Delta t$ u točki B. Pri tom se brzina mijenja po smjeru od $\vec{v}_1$ do $\vec{v}_2$. Da bismo odredili $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$, dovedemo translacijom oba vektora u istu točku i nađemo njihovu razliku. Iz jednakokračnog trokuta slijedi da je iznos vektora $\Delta\vec{v}$: $|\Delta\vec{v}| = v\Delta\varphi$ (za male $\Delta\varphi$, odnosno Δt).

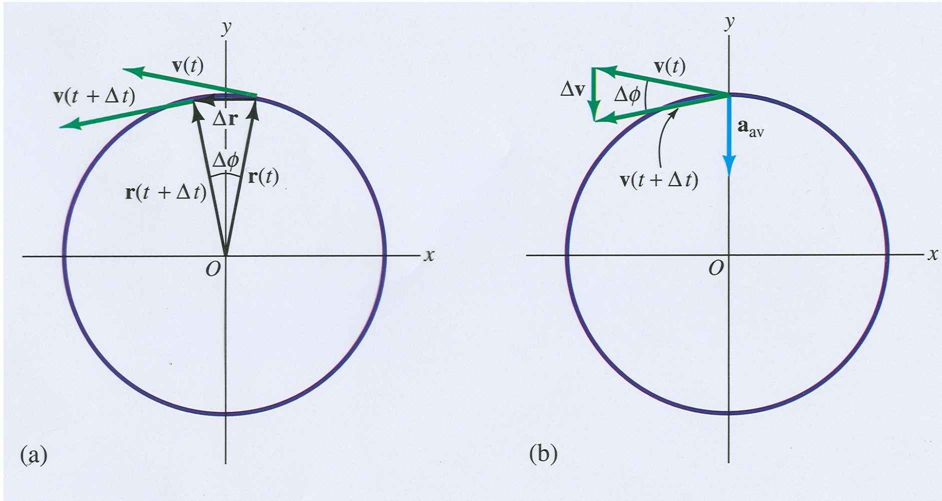
Podijelimo li obje stane relacije s Δt , u graničnom slučaju $\Delta t \to 0$, za akceleraciju nastalu promjenom smjera brzine dobijemo

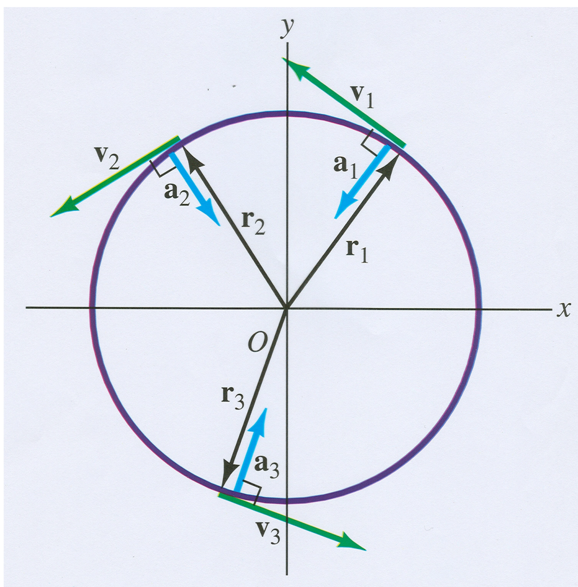
$$a_r = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v\Delta\varphi}{\Delta t} = v \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = v\frac{d\varphi}{dt} = v\omega$$

Ta akceleracija ima smjer prema središtu kružnice i zato se zove **radijalna** ili **centripetalna akceleracija**.

Ako s $-\vec{r}_0$ označimo jedinični radijus vektor radijalno prema središtu kružnice, izraz za radijalnu akceleraciju možemo zapisati i vektorski:

$$\vec{a}_r = -r\omega^2\vec{r}_0 = -\frac{v^2}{r}\vec{r}_0 = \vec{\omega}\times\vec{v}$$





Jednoliko kružno gibanje je kruženje s konstantnom kutnom brzinom $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$=konst.
Integriranjem tog izraza dobijemo linearnu ovisnost prijeđenog kuta o vremenu:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} / \cdot dt$$

$$d\varphi = \omega dt / \int$$

$$\int d\varphi = \int \omega dt = \omega \int dt$$

$\varphi = \varphi_0 + \omega t$, gdje je φ_0 kut u trenutku $t = 0$.

To je analogno relaciji za jednoliko pravocrtno gibanje: $x = x_0 + vt$

Za opisivanje jednolikog kružnog gibanja trebamo još definirati frekvenciju i ophodno vrijeme. Omjer broja okreta i vremena, odnosno broja okreta u sekundi, je **frekvencija** f. **Ophodno vrijeme** T je vrijeme koje je potrebno da materijalna točka jednom obiđe kružnicu.

$$\omega = 2\pi f$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Gravitacija. Inercijski sustavi

Keplerovi zakoni

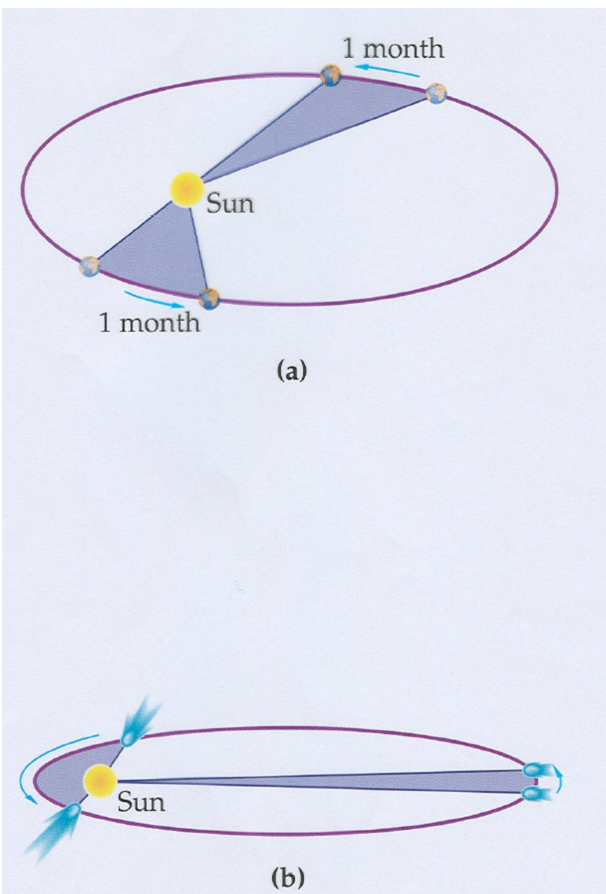
16. st. – Nikola Kopernik – postavio teoriju heliocentričkog sustava pretpostavivši da Zemlja nije središte svemira (kao što je bilo prema Ptolomejevom geocentričkom sustavu), već da se s ostalim planetima okreće oko Sunca.

Johannes Kepler (1571 – 1630), njemački astronom – pronašao je 3 zakona gibanja planeta oko Sunca iz kojih je kasnije Newton izveo opći zakon gravitacije.

1. Svi planeti se kreću po elipsama u čijem se jednom žarištu nalazi Sunce.

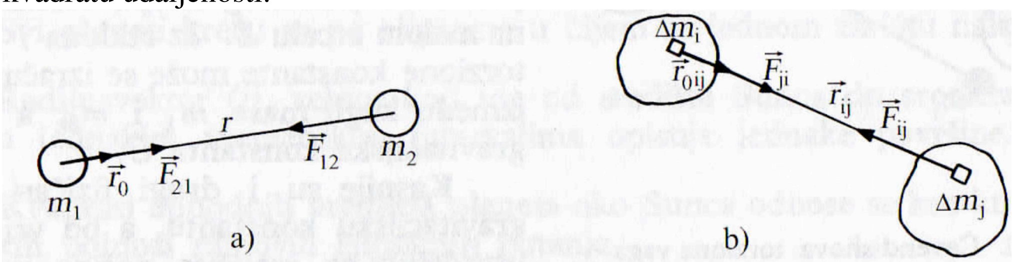
2. Radijus – vektor (tj. vektor koji ide od središta Sunca do središta planeta) u jednakim vremenskim intervalima opisuje jednake površine.

3. Kvadrati ophodnih vremena planeta oko Sunca odnose se kao kubovi velikih poluosi njihovih eliptičnih putanja: $T_1^2 : T_2^2 = a_1^3 : a_2^3$



Newtonov opći zakon gravitacije

Proučavanjem gibanja nebeskih tijela otkriveno je da među tijelima postoji privlačna sila nazvana **gravitacija** koja je uzrok gibanja nebeskih tijela i Zemljine sile teže. **Gravitacijska sila** djeluje među svim tijelima, ali ju je često teško opaziti zbog relativno slabog intenziteta. Iz činjenice da akceleracija slobodnog pada ne ovisi o masi tijela koje pada zaključujemo da je gravitacijska sila proporcionalna masi tijela. Po zakonu akcije i reakcije, sila kojom jedno tijelo privlači drugo, jednaka je po iznosu sili kojom drugo tijelo privlači prvo $\Rightarrow$ gravitacijska sila mora biti proporcionalna umnošku masa obaju tijela. Gravitacijska sila ovisi i o udaljenosti među tijelima $\Rightarrow$ obrnuto je proporcionalna kvadratu udaljenosti.



(SLIKA: Gravitacijska sila između 2 materijalne točke i 2 tijela – Kulišić slika 8.1. str. 119)

$$\vec{F}_{12} = \frac{-Gm_1m_2}{r^2}\vec{r}_0$$

Za određivanje gravitacijske sile među tijelima, masu tijela raščlanimo na elementarne mase Δm_i, od kojih se svaka može smatrati materijalnom točkom. Sila kojom takva materijalna točka prvog tijela mase Δm_i djeluje na materijalnu točku mase Δm_j drugog tijela je:

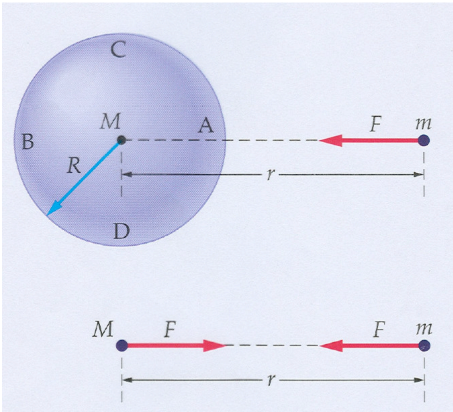
$$\Delta\vec{F}_{ij} = -G\frac{\Delta m_i \Delta m_j}{r^2{}_{ij}}\vec{r}_{oij},$$

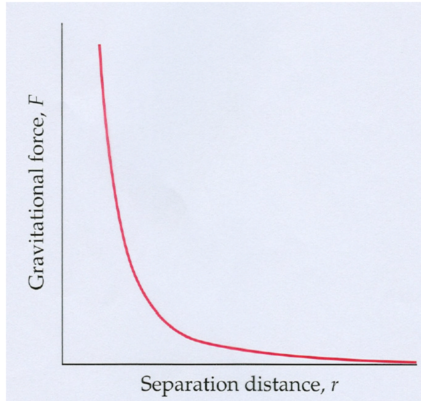
r_{ij} – udaljenost elementarnih masa
$\vec{r}_{oij}$ - jedinični vektor usmjeren od mase Δm_i prema masi Δm_j

Sila kojom prvo tijelo djeluje na drugo dobije se zbrajanjem:

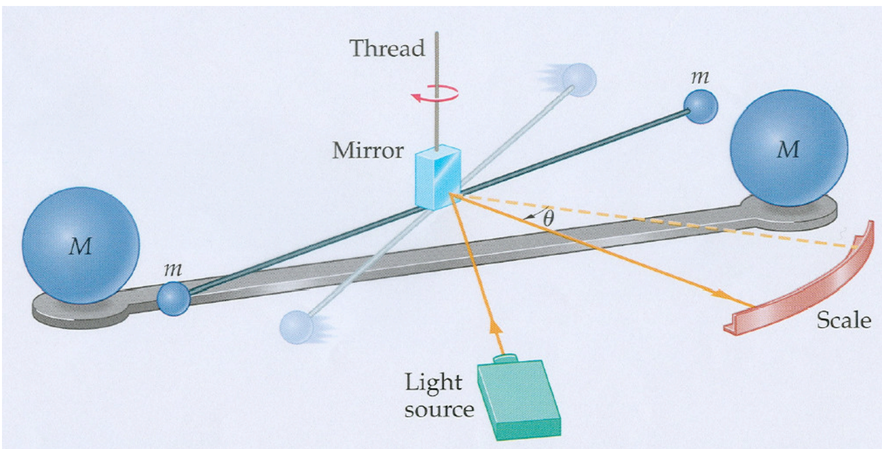
$$\vec{F}_{12} = -\sum_i\sum_j G\frac{\Delta m_i \Delta m_j}{r_{ij}^2}\vec{r}_{oij}$$

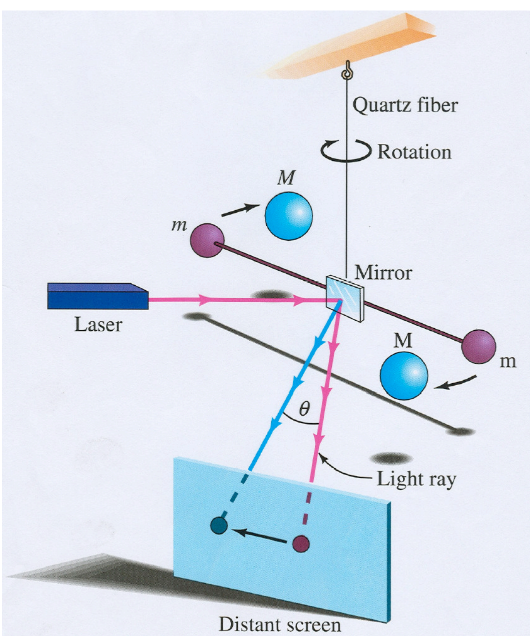
Zbrajanje, tj. integriranje je složeno osim za kuglasta tijela konstantne gustoće (homogena tijela) ili radijalno ovisne gustoće (centralno simetrična raspodjela mase).
Newtonov zakon gravitacije – jedan od osnovnih zakona mehanike i jedno od najvećih dostignuća u povijesti znanosti.





ODREĐIVANJE GRAVITACIJSKE KONSTANTE – CAVENDISHOVA TORZIONA VAGA





(a)

Gravitacijsko polje, potencijal i potencijalna energija

GRAVITACIJSKO POLJE

Određeno tijelo mase *m* djeluje na sva ostala tijela u prostoru gravitacijskom silom danom Newtonovim zakonom:

$$\vec{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{r}_o$$

Svako tijelo, koje ima masu, oko sebe u prostoru stvara **gravitacijsko polje.** Prostor oko svakog tijela ima posebna svojstva. Umjesto računanja uzajamnog djelovanja dvaju tijela, naći ćemo polje jednog tijela i utjecaj tog polja na drugo tijelo.

Tijelo mase m_1 proizvodi u prostoru oko sebe gravitacijsko polje. Što smo bliže tijelu, polje je jače, a kako se udaljavamo, polje pada s kvadratom udaljenosti. Svako tijelo mase m_2, koje se nađe u tom polju osjeća njegovo djelovanje – što mu je veća masa, veće je djelovanje.

Jakost gravitacijskog polja tijela mase m_1 je omjer gravitacijske sile i mase tijela na koje djeluje ta sila:

$$\vec{\gamma} = \frac{\vec{F}_{12}}{m_2} = -\frac{Gm_1 m_2}{m_2}\frac{\vec{r}_o}{r^2} = -G\frac{m_1}{r^2}\vec{r}_o$$

Jedinica za jakost gravitacijskog polja je N/kg ili m/s^2 (ista kao za akceleraciju).

Gravitacijsko polje je vektorsko polje i svakoj točki prostora oko nekog tijela mase m_1 pridružen je vektor dan zadnjom relacijom. Smjer gravitacijskog polja uvijek je prema tijelu koje ga je proizvelo. Ako ima više materijalnih točaka masa m_1, m_2 .... m_n, svaka od njih proizvest će u prostoru svoje gravitacijsko polje.

Ukupna sila na materijalnu točku mase m u nekoj točki prostora T bit će:

$$\vec{F} = m\vec{\gamma}_1 + m\vec{\gamma}_2 + ... + m\vec{\gamma}_n = m(\vec{\gamma}_1 + \vec{\gamma}_2 + ...\vec{\gamma}_n)$$

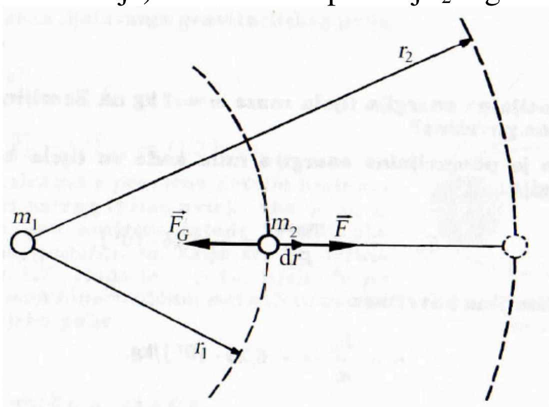
gdje je $\vec{\gamma}_i$ gravitacijsko polje mase m_i.

Slijedi da je ukupno gravitacijsko polje vektorski zbroj pojedinih polja:

$$\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_1 + \vec{\gamma}_2 + ...\vec{\gamma}_n$$

GRAVITACIJSKA POTENCIJALNA ENERGIJA I POTENCIJAL

Od prije znamo da je gravitacijska sila konzervativna i da tijela u polju te sile imaju potencijalnu energiju. Sad ćemo računati rad dizanja (npr. rad potreban za lansiranje rakete, satelita i sl.). Pretpostavimo da masu m_2 iz položaja r_1 dovoljno sporo (bez ubrzavanja) dovedemo u položaj r_2 u gravitacijskom polju mase m_1.



(SLIKA: Računanje gravitacijske potencijalne energije – Kulišić slika 8.5. str. 127)

Pri tom je sila $\vec{F}$, kojom se tijelo stalno podiže, u ravnoteži s gravitacijskom silom $\vec{F}_G$:

$$\vec{F} = -\vec{F}_G$$

Rad obavljen pri premještanju tijela je:

$$W = \int_{r_1}^{r_2} F dr = \int_{r_1}^{r_2} G \frac{m_1 m_2}{r^2} dr = G m_1 m_2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

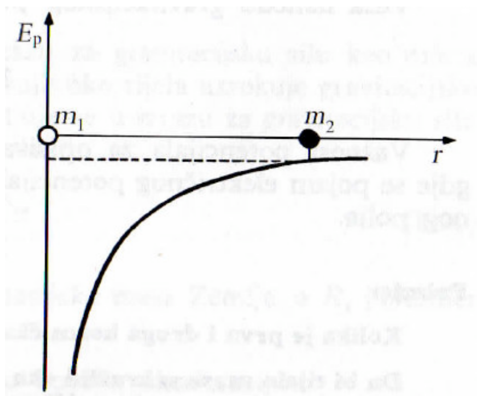
Ovo je rad potreban da bi se tijelo mase m_2 u gravitacijskom polju tijela mase m_1 «podiglo» od r_1 do r_2. Taj rad ne ovisi o putu već samo o početnom i konačnom položaju tijela mase m_1 i m_2, pa se može izraziti razlikom potencijalnih energija:

$$W = E_p(r_2) - E_p(r_1) = G m_1 m_2 (\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})$$

Obično se uzima da je $E_p\,(r) = 0$ kad su tijela beskonačno daleko jer je tada i sila jednaka 0. Uz taj dogovor, uvrštavanjem $r_1 \rightarrow \infty$, $r_2 = r$ u zadnji izraz, dobijemo potencijalnu energiju dvaju tijela masa m_1 i m_2 udaljenih za r:

$$E_p(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r}$$

Potencijalna energija je uvijek negativna i raste kad se povećava udaljenost r.



(**SLIKA: Ovisnost potencijalne energije dviju materijalnih točaka o njihovoj udaljenosti: *$E_p(r)$* za 2 mase: *m_1* i *m_2* – Kulišić slika 8.6. str. 127)**

Kad se radi o potencijalnoj energiji nekog tijela s obzirom na Zemlju, često se uzima da je na Zemljinoj površini $E_p = 0$.

Uvrstimo $r_1 = R_Z$ (polumjer Zemlje) i $r_2 = r$ i dobijemo potencijalnu energiju:

$$E_p(r) = Gm_1m_Z\left(\frac{1}{R_Z} - \frac{1}{r}\right) \quad \text{ili} \quad E_p(r) = Gm_1m_Z\frac{r - R_Z}{R_Z r}$$

Ako je visina $h = r - R_Z << R_Z$, slijedi:

$$E_p = \frac{Gm_1m_Z}{R_Z^{\ 2}}h = m_1gh \qquad \text{jer je} \quad g = \frac{Gm_Z}{R_Z^{\ 2}}$$

Djelovanje konzervativne sile možemo opisati potencijalnom energijom, a konzervativno polje možemo opisati potencijalom.

Potencijal je omjer potencijalne energije i mase:

$$\varphi(r) = \frac{E_p(r)}{m_1} = -\frac{Gm_2}{r}$$

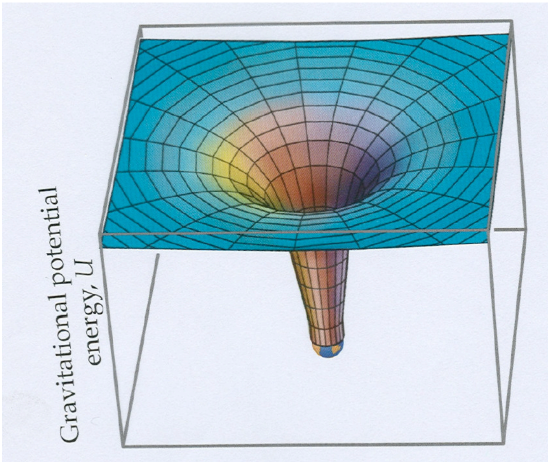
Potencijalna energija je: $E_p(r) = m_1\ \varphi(r)$

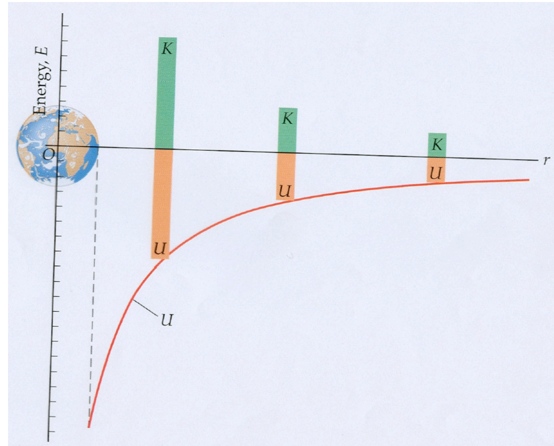
Gravitacijska sila je centralna sila, tj. ovisi samo o iznosu radijus – vektora r.

Usporedbom izraza $\vec{F}_{12} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\vec{r}_0$ i $E_p(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r}$ dobijemo vezu između sile i potencijalne energije:

$$\vec{F} = -\frac{dE_p}{dr}\vec{r}_0 = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\vec{r}_0$$

Veza između gravitacijskog polja i potencijala je: $\vec{\gamma} = -\frac{d\varphi}{dr}r_0$


Gravitational potential
energy, U


Energy, E
K
K
K
O
r
U
U
U
U

Ubrzanje sile teže

Na svako tijelo na Zemljinoj površini djeluje privlačna sila vertikalno prema dolje, koja se zove **sila teža**. Zemlja daje svakom tijelu, koje slobodno pada, određenu akceleraciju padanja, tzv. akceleraciju sile teže $\vec{g}$. Sila teža koja djeluje na tijelo mase *m* je $\vec{G} = m\vec{g}$.

Tijelo će mirovati s obzirom na Zemljinu površinu ako se sila teža $\vec{G}$ uravnoteži sa silom reakcije oslonca ili objesišta, pa je težina tijela (po definiciji sila kojom tijelo djeluje na oslonac ili na objesište) jednaka sili teži koja djeluje na tijelo.

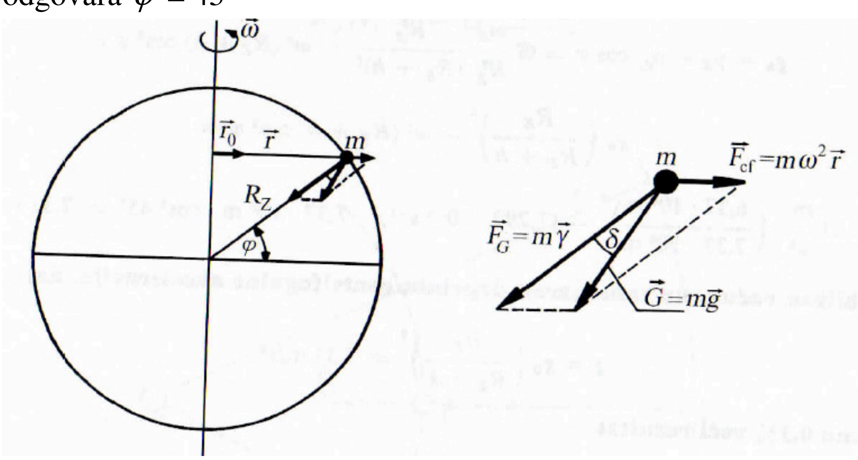
Referentni sustav vezan za Zemlju nije inercijski jer Zemlja kruži oko Sunca i vrti se oko svoje osi. Akceleracija zbog gibanja oko Sunca mnogo je manja nego zbog vrtnje Zemlje oko vlastite osi, pa ovo drugo uzimamo kao glavni uzrok neinercijalnosti sustava. Zbog toga na tijelo mase *m*, koje se nalazi na Zemljinoj površini, djeluje inercijska sila, poznata kao centrifugalna sila $\vec{F}_{cf}$.

Tako je sila teža zapravo rezultanta gravitacijske i centrifugalne sile:
$\vec{G} = \vec{F}_G + \vec{F}_{cf}$

Sila teža $\vec{G}$ se razlikuje od gravitacijske sile $\vec{F}_G$ i po smjeru i po iznosu, ali ne previše jer je $\vec{F}_{cf} << \vec{F}_G$.

To rezultira promjenom akceleracije sile teže s geografskom širinom jer je $\vec{F}_{cf} = m\omega^2\vec{r} = m\omega^2 R_Z \cos\varphi \vec{r}_0$
(R_Z – polumjer Zemlje, ω - kutna brzina Zemlje, φ- geografska širina):
- na polovima g_p = 9,832 m/s^2
- na ekvatoru g_e = 9,780 m/s^2

Dogovorom utvrđena normirana vrijednost je: $g_n = 9{,}80665 m/s^2 \approx 9{,}81 m/s^2$ što odgovara $\varphi = 45^0$



(SLIKA: Sila teža – Kulišić slika 8.4. str. 125)

Gravitacijsko polje Zemlje, a time i akceleracija sile teže se mijenja s udaljenošću r od središta Zemlje kao $1/r^2$. U točki na nadmorskoj visini h, udaljenoj za $R_Z + h$ od središta Zemlje, gravitacijsko polje iznosi:

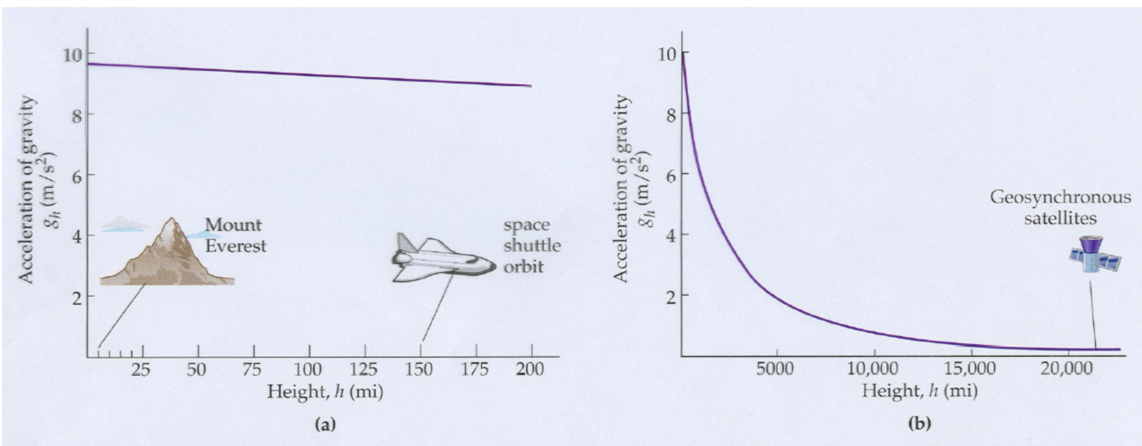
$$\gamma_Z = G\frac{m_Z}{(R_Z+h)^2} = G\frac{m_Z}{{R_Z}^2}\left(\frac{R_Z}{R_Z+h}\right)^2$$

Ako zanemarimo maleni doprinos centrifugalne akceleracije, gravitacijsko polje je:

$$\gamma_Z = g_0\left(\frac{R_Z}{R_Z+h}\right)^2 = g$$

g je akceleracija sile teže, a g_o akceleracija na Zemljinoj površini:

$$g_0 = G\frac{m_Z}{{R_Z}^2}$$



Troma i teška masa. Princip ekvivalencije

U dinamici smo se susreli s tromom masom da bismo iskazali tromost ili inerciju nekog tijela. Svako tijelo je tromo jer je za njegovo ubrzanje potrebna određena sila. **Tromu ili inertnu masu** m_i možemo odrediti mjerenjem akceleracije koju tijelo dobije pod utjecajem određene sile $F = m_i a$ (tzv. dinamičko mjerenje mase). Za istu silu akcelaracija je obrnuto proporcionalna inertnoj masi tijela.

Masa se pojavljuje u izrazu za gravitacijsku silu kao također jednog svojstva tijela. To je **teška ili gravitacijska masa**.

Gravitacijska sila za tijelo blizu Zemljine površine je: $F_g = G\dfrac{m_g m_{Zg}}{R_Z}$

m_g – gravitacijska masa tijela
m_{Zg} – gravitacijska masa Zemlje
R_Z – polumjer Zemlje

Pod djelovanjem gravitacijske sile tijelo dobije akceleraciju: $a = \dfrac{F_g}{m_i} = G\dfrac{m_{Zg}}{{R_Z}^2}\dfrac{m_g}{m_i}$

Pokusi sa slobodnim padom pokazuju da je ta akceleracija za sva tijela jednaka bez obzira na njihov oblik, masu i materijal od kojeg su načinjena.

Budući je i $G\dfrac{m_{Zg}}{{R_Z}^2}$ za sva tijela jednako, slijedi da je omjer teške i trome mase za sva tijela jednaki. Zato ne razlikujemo tromu i tešku masu i govorimo samo o masi m.

Osnova principa ekvivalencije je upravo tolika točnost proporcionalnosti teške i trome mase.

Princip ekvivalencije kaže da ne možemo razlikovati inercijski sustav u gravitacijskom polju, gdje je ubrzavanje gravitacije g, od neinercijskog sustava daleko od svih drugih tijela, koji se giba ubrzano s $\vec{a} = -\vec{g}$.

Gravitacijska sila $m_g\ \vec{g}$ na tijelo u prvom inercijskom sustavu jednaka je inercijskoj sili $-m_i\vec{a} = m_i\vec{g}$ u drugom neinercijskom sustavu jer su teška i troma masa jednake.

To je osnova Einsteinove opće teorije relativnosti.

Inercijski sustavi. Galileijeve transformacije

Da bismo opisali neko gibanje, moramo odabrati određeni koordinatni sustav i proučavati gibanje relativno prema njemu. Vektor položaja, brzina i akceleracija materijalne točke ovise o izboru referentnog sustava pa se mijenjaju prijelazom iz jednog sustava u drugi. Obično se odabire referentni sustav vezan za Zemljinu površinu (npr. laboratorij), ali se mogu izabrati i drugi sustavi, koji se u odnosu na laboratorijski sustav gibaju jednoliko ili ubrzano. Vanjske sile, koje djeluju na tijelo, ovise samo o međusobnom položaju tijela i okoline, a ne o izboru sustava.

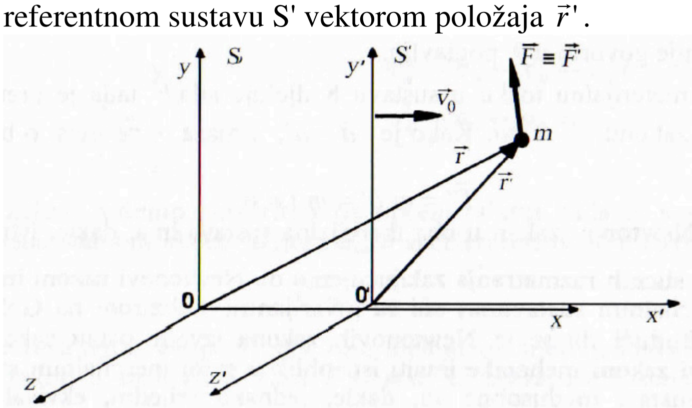
Budući da 2. Newtonov zakon kaže da je a proporcionalna F, taj zakon ima isti oblik u svim sustavima u kojima je akceleracija tijela jednaka.

To su **inercijski referentni sustavi** koji se jedan u odnosu na drugi gibaju jednoliko po pravcu.

Za tijela u ubrzanim sustavima ne vrijedi 1. Newtonov zakon ($\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{a} = 0$): iako ne djeluje vanjska sila, tijelo se ubrzava.

Sustavi u kojima vrijede Newtonovi zakoni (posebno 1. Newtonov zakon) su inercijski sustavi. Ako je sustav S inercijski, tada je inercijski svaki drugi sustav S' koji se u odnosu prema njemu giba jednoliko po pravcu ili miruje.

Razmotrimo 2 inercijska sustava S i S', koji se jedan prema drugom gibaju stalnom brzinom $\vec{v}_0$. Radi jednostavnosti pretpostavimo da su to pravokutni Kartezijevi koordinatni sustavi čije se osi x i x' poklapaju, a osi y i y', te z i z' su paralelne. U početnom trenutku $t = t' = 0$ sustavi se poklapaju, tj. ishodišta 0 i 0' su u istoj točki. Položaj materijalne točke u referentnom sustavu S određen je vektorom položaja $\vec{r}$, a u referentnom sustavu S' vektorom položaja $\vec{r}\,'$.



(SLIKA: Izvod Galilejevih transformacija – Kulišić slika 7.1. str. 109)

Ishodišta oba sustava vezana su vektorom $\vec{r}_0 = \overrightarrow{00'}$, a vektori položaja vezani su relacijom: $\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{r}_0$. Promatrači u oba sustava sinhroniziraju svoje satove tako da pokazuju isto vrijeme u oba sustava: $t = t'$.

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r_0} \,/\, \frac{d}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} + \frac{d\vec{r_0}}{dt} \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0 \,/\, \frac{d}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d\vec{v_0}}{dt} = \vec{a} = \vec{a}' + 0 \Rightarrow$$

$\vec{v}$ - brzina u sustavu S
$\vec{v}\,'$ - brzina u sustavu S'
$\vec{v}_0$ - brzina sustava S' prema sustavu S

$$\vec{a} = \vec{a}'$$

$\vec{a}$ - akceleracija tijela u sustavu S
$\vec{a}\,'$ - akceleracija tijela u sustavu S'

Relacije umjesto u vektorskom obliku možemo pisati i pomoću komponenata:

$x = x' + v_o t$
$y = y'$
$z = z'$
$\vec{a} = \vec{a}\,'$
$v_x = v_x' + v_o$
$v_y = v_y'$
$v_z = v_z'$

To su **Galilejeve transformacije** za koordinate, brzine i akceleracije materijalne točke u inercijskim sustavima S i S'.

Primjeri:

- metarske vrpce se ne mijenjaju ako se jedna prema drugoj relativno gibaju
- satovi pokazuju isto vrijeme bez obzira na to da li miruju ili se relativno gibaju jedan prema drugom
- u klasičnoj fizici gibanje ne utječe na vrijeme i prostor $\rightarrow$ dužinski i vremenski intervali su apsolutni i ne ovise o koordinatnom sustavu.

Ako na materijalnu točku u sustavu S djeluje sila $\vec{F}$, tada je po 2. Newtonovom zakonu: $\vec{F} = m\vec{a}$.

Kako je $\vec{a} = \vec{a}'$, a masa m u klasičnoj fizici ne ovisi o brzini, slijedi da je:

$$\vec{F}' = m\vec{a}' = m\vec{a} = \vec{F}$$

2. Newtonov zakon ima isti oblik u oba inercijska sustava.

Zaključujemo da Newtonovi zakoni imaju isti oblik u svim inercijskim sustavima $\rightarrow$ oni su **invarijatni s obzirom a Galilejeve transformacije**. Budući se iz Newtonovih zakona izvode ostali zakoni mehanike, slijedi da svi zakoni mehanike imaju isti oblik u svim inercijskim sustavima. Svi inercijski sustavi su međusobno jednako vrijedni i ni na koji način ne možemo pokusima ustanoviti koji sustav miruje, a koji se jednoliko giba. Svaki od njih možemo smatrati «apsolutno» mirnim, što znači da nema apsolutno mirnog sustava.

To je **Galilejev princip relativnosti** koji vrijedi u klasičnoj mehanici.

Neinercijski sustavi

Ubrzani sustavi. Inercijske sile i translacijsko gibanje

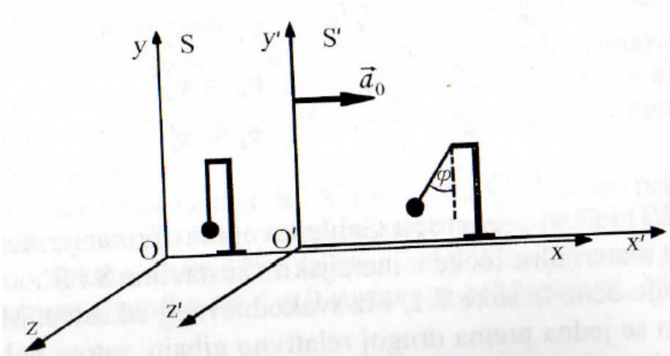
U ubrzanim sustavima ne vrijede Newtonovi zakoni.
Primjeri:

kad automobil ubrzava, osjećamo silu prema natrag
pri kočenju djeluje sila prema naprijed

Javljaju se sile, ne zbog djelovanja drugih tijela, već zbog neinercijalnosti sustava.

Zovemo ih **inercijskim silama**, a nekad i fiktivnim, odn. pseudo silama da bi se istakla razlika prema silama nastalima međudjelovanjem s drugim tijelima.

Neka se neinercijski sustav S' giba translatorno prema inercijskom sustavu S konstantnom akceleracijom $\vec{a}_o$ u smjeru +x-osi.



SLIKA: Jednoliko ubrzani sustav – Kulišić slika 7.2. str. 110.

Položaj materijalne točke u sustavu S određen je koordinatama x, y, z, a u sustavu S' kordinatama x', y', z'. Brzina i akceleracija u sustavu S su $\vec{v}$ i $\vec{a}$, a u S' $\vec{v}'$ i $\vec{a}'$. Veza između veličine u sustavima S i S' je za ovaj posebni slučaj:

$$x' = x - v_0 t - \frac{a_0}{2} t^2$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = t$$

$$v_x' = v_x - v_0 - a_0 t$$

$$v_y' = v_y$$

$$v_z' = v_z$$

$$a_x' = a_x - a_0$$

$$a_y' = a_y$$

$$a_z' = a_z$$

Općenito: $\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_0$

Ako je rezultanta vanjskih sila koje djeluju na tijelo jednaka $\vec{F}$, tada 2. Newtonov zakon u sustavu S glasi $\vec{F} = m\vec{a}$.

U ubrzanom sustavu S’ taj zakon prelazi u: $m\vec{a}' = m(\vec{a} - \vec{a}_0) = m\vec{a} - m\vec{a}_0 = \vec{F} - m\vec{a}_0$

Čak i kad je rezultanta vanjskih sila $\vec{F} = 0$ tijelo će se s obzirom na sustav S' gibati ubrzano kao da na njega djeluje sila $(-m\vec{a}_0)$. Tu silu zovemo **inercijskom silom** i posljedica je ubrzanja referentnog sustava: $\vec{F}_i = -m\vec{a}_0$.

2. Newtonov zakon imat će formalno isti oblik i u ubrzanom sustavu samo ako silama koje nastaju zbog djelovanja drugih tijela dodamo i inercijsku silu koja nastaje zbog neinercijalnosti sustava.

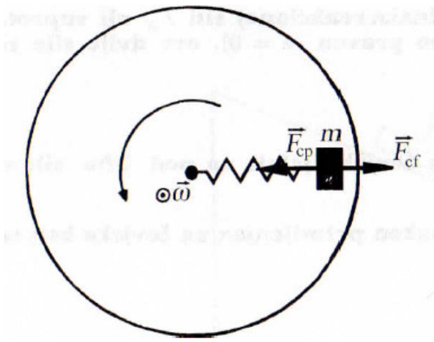
Za sustav S' 2. Newtonov zakon je: $m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_i$

Primjer:

ubrzani sustav vezan za dizalo (na auditornim vježbama)
ubrzani sustav vezan za kolica koja se gibaju niz kosinu

Inercijske sile i rotacijsko gibanje. Coriolisova sila

Razmatramo sustav S' koji rotira konstantnom kutnom brzinom $\vec{\omega}$ ($\vec{\omega}$ = konst) s obzirom na neki inercijski sustav S. Oba sustava imaju isto ishodište. Sustav je vezan za ploču, odn. disk koji rotira oko osi z' okomite na ploču kroz njeno središte. Predmet mase m pričvršćen je za središte ploče pomoću opruge.



SLIKA: Rotirajući sustav – Kulišić slika 7.5. str. 114

Dok ploča rotira kutnom brzinom ω, opruga je nategnuta silom $\vec{F}_{cp} = -m\omega^2\vec{r}$.

Promatrač iz inercijskog sustava (laboratorija) vidi da se predmet giba po kružnici jer mu sila opruge za to osigurava potrebnu centripetalnu silu:

$$\vec{F}_{cp} = \vec{F}_{op} = -m\omega^2\vec{r}$$

Položaj tijela određen je u inercijskom sustavu S vektorom položaja $\vec{r}$, a u rotirajućem sustavu S' vektorom položaja $\vec{r}\,'$ i ta su dva vektora identična: $\vec{r} = \vec{r}\,'$.

Promatrač u ubrzanom sustavu vezanom za ploču (tj. onaj koji bi rotirao zajedno s pločom) opaža da predmet miruje u tom sustavu iako opruga na njega djeluje određenom silom $\vec{F}_{op}$.

Stoga se uvodi inercijska sila F_{cf} koja na tijelo djeluje od središta ploče prema van tako da rezultanta tih dviju sila bude 0: $\vec{F}_{op} + \vec{F}_{cf} = 0$.

Slijedi: $\vec{F}_{cf} - \vec{F}_{op} = m\omega^2\vec{r}\,'$.

Inercijska sila koja djeluje na tijelo u rotirajućem sustavu zove se **centrifugalna sila**. Po iznosu je jednaka centripetalnoj sili, ali je suprotnog smjera, tj. usmjerena je od osi rotacije prema obodu. Međutim, postoji bitna razlika izmedu centrifugalne i centripetalne sile. Centripetalna sila je naziv za silu koja uzrokuje kružno gibanje i nije neka posebna vrsta sile. Centrifugalna sila je sila koja se javlja u rotirajućem sustavu kao inercijska sila

CORIOLISOVA SILA

Kad se tijelo giba s obzirom na rotirajući sustav nekom brzinom $\vec{v}'$, tada na njega uz centrifugalnu silu $\vec{F}_{cf} = m\omega^2 \vec{r}'$ djeluje i tzv. Coriolisova sila dana izrazom: $\vec{F}_c = 2m\vec{v}' \times \vec{\omega}$

m - masa tijela
$\vec{v}'$ - brzina tijela s obzirom na rotirajući sustav
$\vec{\omega}$ - kutna brzina rotacije sustava

Coriolisova sila je uvijek okomita na smjer brzine tijela i smjer kutne brzine, a smjer joj se može odrediti pomoću pravila za smjer vektorskog produkta. Iznos Coriolisove sile je $F_c = 2mv' \sin(\text{kuta}(\vec{v}', \vec{\omega}'))$. Ona iščezava ako tijelo s obzirom na sustav miruje, odn. ako je brzina $\vec{v}'$ paralelna s kutnom brzinom $\vec{\omega}$.

Ukupna inercijska sila koja djeluje na tijelo u rotirajućem sustavu je zbroj centrifugalne i Coriolisove sile: $\vec{F}_i = m\omega^2 \vec{r}' + 2m\vec{v}' \times \vec{\omega}$ (*)

Ovaj izraz (*) za inercijsku silu ćemo izvesti kad se materijalna točka giba u sustavu S' jednoliko u radijalnom smjeru brzinom $v' = \frac{dr'}{dt} = \frac{dr}{dt}$.

S obzirom na inercijski sustav S točka ima 2 komponente brzine:

- radijalnu $v' = \frac{dr'}{dt}$
- tangencijalnu (obodnu) $v = \omega r$

U sustavu S' točka se giba jednoliko, ali je s obzirom na sustav S gibanje ubrzano pa postoje radijalna i tangencijalna komponenta akceleracije.

Radijalna akceleracija materijalne točke u sustavu S nastaje zbog radijalne komponente promjene brzine:

$$a_r = \lim_{\Delta t \to 0} \omega \frac{r \Delta \varphi}{\Delta t} = \omega r \frac{d\varphi}{dt} = \omega r \omega = \omega^2 r$$

Vektorski pisano: $\vec{a}_r = -\omega^2 \vec{r}$

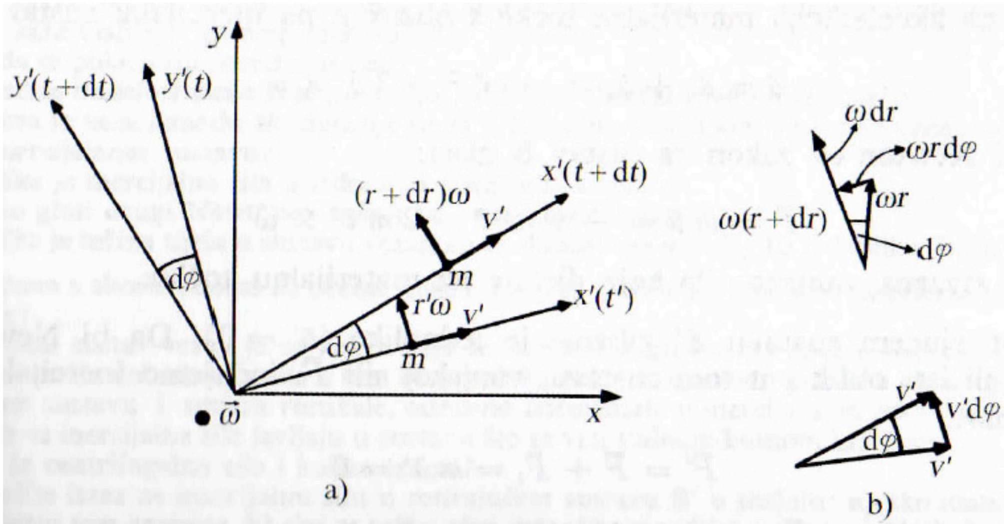
Tangencijalna akceleracija nastaje i zbog promjene radijalne brzine tijela po smjeru i zbog promjene tangencijalne komponente brzine po iznosu:

$$a_t = v' \frac{d\varphi}{dt} + \frac{dv}{dt} = v' \frac{d\varphi}{dt} + \omega \frac{dr}{dt} = v' \omega + \omega v' = 2\omega v'$$

$v' \frac{d\varphi}{dt}$ - promjena radijalne brzine po smjeru

$\frac{dv}{dt}$ - promjena tangencijalne brzine po iznosu

Vektorski pisano: $\vec{a}_t = -2\vec{v}'\times\vec{\omega}$



SLIKA: Uz izvod Coriolisove sile – Kulišić slika 7.6. str. 115

Ukupna akceleracija materijalne točke s obzirom na inercijski sustav S je:

$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_t = -\omega^2\vec{r} - 2\vec{v}'\times\vec{\omega}$

2. Newtonov zakon za sustav S je:

$\vec{F} = m\vec{a} = -m\omega^2\vec{r} - 2m\vec{v}'\times\vec{\omega}$

$\vec{F}$ je stvarna vanjska sila koja djeluje na materijalnu točku.

U rotirajućem sustavu S'gibanje je jednoliko pa je $\vec{a}' = 0$.

Da bi Newtonovi zakoni imali isti oblik i u tom sustavu, vanjskoj sili $\vec{F}$ dodajemo inercijsku silu $\vec{F}_i$:

$\vec{F}' = \vec{F} + \vec{F}_i = m\vec{a}' = 0 \Rightarrow \vec{F}_i = -\vec{F}, \vec{F} = -m\omega^2\vec{r} - 2m\vec{v}'\times\vec{\omega}$

Uz $\vec{F} = -m\omega^2\vec{r} - 2m\vec{v}'\times\vec{\omega}$ slijedi: $\vec{F}_i = -\vec{F} = m\omega^2\vec{r} + 2m\vec{v}'\times\vec{\omega}$

$m\omega^2\vec{r}$ - centrifugalna sila

$2m\vec{v}'\times\vec{\omega}$ - Coriolisova sila

$\vec{F}_i = m\omega^2\vec{r} + 2m\vec{v}'\times\vec{\omega}$ smo izveli za posebni slučaj kad se materijalna točka u sustavu S' giba jednoliko u radijalnom smjeru, ali to vrijedi i općenito za bilo kakvo gibanje čestice u rotirajućem sustavu.

Slobodni pad i Coriolisova sila

Kad je tijelo ispušteno na nekoj visini iznad Zemlje, ono slobodno padajući, izvodi gibanje u rotirajućem sustavu što vodi na pojavu Coriolisove sile.
Na tijelo u njegovom sustavu, a to je neinercijski sustav Zemlje, djeluju 3 sile:

težina tijela $\vec{G}$ (za male visine ne uzimamo Newtonow opći zakon gravitacije za opis težine tijela)

centrifugalna sila $\vec{F}_{cf}$

Coriolisova sila $\vec{F}_c$

Pri razmatranju utjecaja centrifugalne sile na slobodni pad moramo uzeti u obzir zemljopisnu širinu ($a_{cf} = R_z \omega^2 \cos\varphi$, φ je zemljopisna širina), no taj utjecaj je mali pa ćemo razmatrati samo Coriolisovu silu.

Ako je brzina tijela ispuštenog s visine h jednaka $v'(t) = gt$, onda iz jednadžbe gibanja $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = 2m\omega v' \sin(kuta(\vec{\omega}, \vec{v}'))$ dobijemo pomak u smjeru sile, tj. horizontalni pomak $x(t) = \dfrac{\omega g t^3}{3}\cos\varphi$

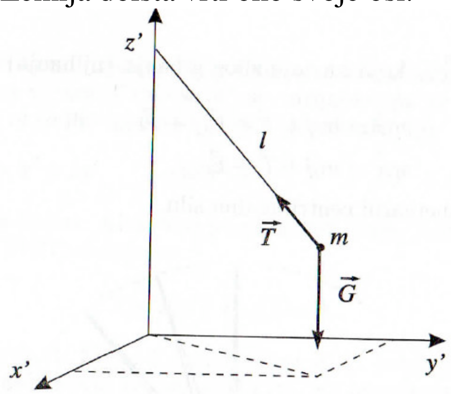
Ovo je zapravo x' komponenta gibanja u neinercijskom sustavu S'.

Jednadžba gibanja pisana vektorski zapravo je: $m\dfrac{d^2\vec{r}'}{dt^2} = m\vec{g} - 2m\vec{\omega} \times \dfrac{d\vec{r}'}{dt}$

No cijela stvar se svede na horizontalni pomak pa ostale komponente ne razmatramo.

Foucaultovo njihalo

Gibanje tijela u sustavu vezanom za Zemlju uzrokuju pojavu inercijske sile - Coriolisove sile čiji efekti se održavaju kroz globalne (zemljopisne, meterološke) pojave. To je potaklo Foucaulta da 1851. god. pokaže pomoću velikog matematičkog njihala da se Zemlja doista vrti oko svoje osi.



SLIKA: Proizvoljno gibanje matematičkog njihala u neinercijskom sustavu S'

Napetost niti i težina tijela djeluju u inercijskom sustavu i opisuju njihanje. U neinercijskom sustavu djeluju i 2 neinercijske sile:

- centrifugalna sila $\vec{F}_{cf}$ i
- Coriolisova sila $\vec{F}_c$ koja nastaje zbog gibanja tijela.

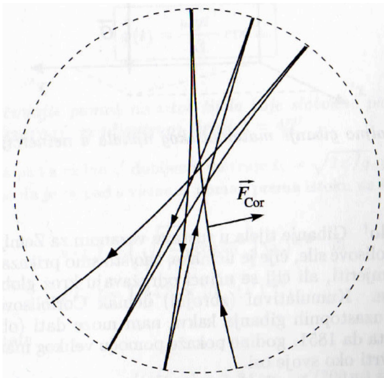
Jednadžba gibanja je: $m\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_{cf} + \vec{F}_c$

ili zanemarivanje centrifugalne sile: $m\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_c$

To nećemo rješavati, ali rezultat će biti skretanje pravca gibanja tijela na desno ako se gleda u smjeru gibanja i to za Sjevernu polutku. Za Južnu polutku imamo skretanje u lijevo.

Zamislimo pokus s matematičkim njihalom (točkasta masa *m* obješena na nerastezljivu nit zanemarive mase) na Sjevernom polu. Ravnina u kojoj se njiše njihalo ostaje cijelo vrijeme mirno u odnosu na neki inercijski sustav. To znači da će ravnina rotirati u odnosu na promatrača, koji sjedi na Sjevernom polu, u smjeru suprotnom od rotacije Zemlje, a brzina rotacije je jednaka 15^o na sat, odn. 360^o na dan. Objašnjenje te rotacije u sustavu promatrača je u uvođenju Coriolisove sile koja je na polu maksimalna jer je tamo brzina gibanja tijela okomita na kutnu brzinu Zemlje $\vec{\omega}$.

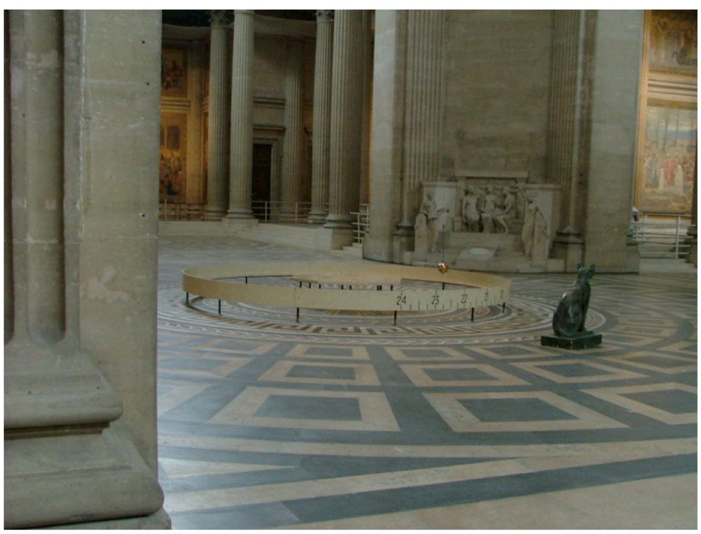
Sila uvijek djeluje „na desno“ u odnosu na smjer gibanja i leži u horizontalnoj ravnini.

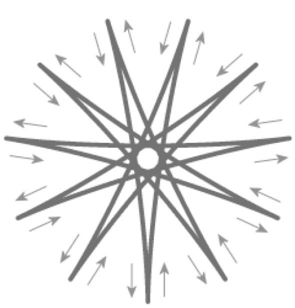


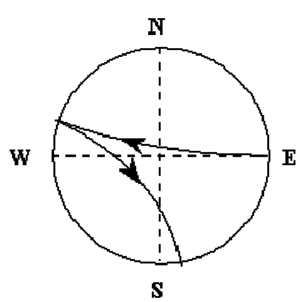
SLIKA: Skretanje ravnine njihanja Foucaultovog njihala kako ga vide promatrači u neinercijskom sustavu (npr. mi)

Coriolisova sila djeluje na njihalo slijeva nadesno kad se tijelo udaljava od promatrača i u suprotnom smjeru kad se približava promatraču. Ako je njihalo na zemljopisnoj širini φ, onda se efekt Coriolisove sile reducira za faktor $\sin\varphi$ jer ako se napiše kutna brzina po komponentama, onda je njena radijalna komponenta jednaka $\omega\sin\varphi$, a tangencijalna $\omega\cos\varphi$ (paralelna s površinom).

Tangencijalna komponenta doprinosi vertikalnoj Coriolisovoj sili koja neznatno mijenja napetost niti dok radijalna komponenta izaziva „precesiju“ njihala (prema slici).







15. Termodinamika

15.1. Termodinamičke veličine kao funkcije stanja i procesa

Termodinamika je dio eksperimentalne fizike koji proučava vezu između topline i drugih oblika energije i posebno uvjete pretvaranja topline u mehanički rad. Proučavanje je na makroskopsku nivou što znači da se proučavaju veličine: tlak, toplina, temperatura, rad, entalpija, interakcije među sustavima i promjene sustava između različitih ravnotežnih stanja.

Termodinamički sustav se sastoji od određene količine tvari unutar neke zatvorene površine. Primjer: idealni plin u cilindru s klipom → u ravnotežnom stanju u svim točkama tog sustava vlada jednaki tlak i temperatura i na takvo stanje se primjenjuje jednadžba stanja idealnog plina.

Termodinamički proces je promjena stanja nekog sustava. Primjer: kružni procesi u kojima se sustav vraća u poč. stanje. Vrste termodinamičkih procesa:

- reverzibilni (povratni) - sustav prolazi kroz niz ravnotežnih stanja i proces se može odvijati i u suprotnom smjeru vraćajući se kroz ista ravnotežna stanja u početno stanje
- ireverzibilni (nepovratni) - stvarni procesi su uvijek manje - više ireverzibilni

Primjer reverzibilnog procesa:

- idealnom plinu povećamo povećamo izohorno (V = konst.) tlak za dp → temperatura mu naraste za dT→plin iz jedne termodinamičke ravnoteže prelazi u drugu
- prije procesa sve točke termodinamičkog sustava su imale iste termodinamičke koordinate (p, V, T)
- nakon procesa sve točke sustava imaju jednake koordinate ($p+dp, V, T+dT$)
- plin se vraća u početno stanje smanjivanjem tlaka za dp, pri čemu se temperatura snizi za dT.

Reverzibilni proces se mora odvijati dovoljno sporo da sustav bude u ravnoteži u svakom trenutku procesa → proces vodi sustav preko niza ravnotežnih stanja od početnog do konačnog. Ako plin iz početnog u konačno stanje prelazi kroz niz neravnotežnih stanja (npr. pri naglој kompresiji plina), proces će biti ireverzibilan i neće se moći opisati krivuljom u p-V dijagramu, niti načiniti u obrnutom smjeru. Idealni reverzibilni procesi u prirodi ne postoje no na osnovu njih možemo zaključivati o ponašanju stvarnih sustava.

Zagrijavanjem energija u obliku topline prelazi u neki sustav i može povećati unutrašnju energiju sustava ili osposobiti sustav da izvrši određeni mehanički rad. Unutrašnja energija nekog tijela je zbroj kinetičke energije nekog gibanja i potencijalne energije međumolekularnog djelovanja. U idealnom plinu nema međumolekulskog djelovanja pa je unutrašnja energija jednaka zbroju kinetičkih energija svih molekula.

Kad se dva sustava različite temperature dovedu u međusobni kontakt, molekule sustava više temperature će predavati sudarima energiju molekulama sustava niže temperature dok se temperature ne izjednače. Unutrašnja energija toplijeg tijela će se smanjiti, a hladnijeg povećati. Unutrašnja energija se može mijenjati i radom:

kad sustav obavlja rad - unutrašnja energija se smanjuje

kad se rad obavlja nad sustavom - unutrašnja energija se povećava

Unutrašnja energija je svojstvo sustava. Rad i toplina označavaju razmjenu energije između sustava i okoline.

Primjer:rad pri rastezanju plina. Imamo cilindar s klipom u kojem je idealni plin. Kad sustavu dovedemo toplinu Q, ona se troši na promjenu unutrašnje energije sustava i na rad koji sustav obavi nad okolinom.

*Izohorni proces (V = konst.) → klip se ne može pomicati i dovedena količina topline je jednaka promjeni unutrašnje energije: $Q = \Delta U$
*Ako se klip može pomicati, dovođenjem Q plin se širi klip se podiže i obavlja rad:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = pSdx = pdV$$

dx - infinitenzimalni pomak klipa
S - površina klipa
dV - infinitenzimalna promjena promjena volumena plina
Pretpostavimo da se ukupna promjena volumena sastoji od beskonačnog broja takvih ravnotežnih dV.

Promatramo procese u kojima nizom infinitenzimalnih promjena p, V, T plin dovodimo iz početnog u konačno stanje preko beskonačno mnogo ravnotežnih stanja (prikaz u p-V dijagramu). Ukupni rad je proporcionalan površini ispod krivulje:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} pdV$$

Postoji beskonačan broj različitih procesa kojima se sustav može dovesti iz početnog u konačno stanje.

Rad ovisi o načinu kako smo iz početnog stanja došli u konačno - rad je funkcija procesa, a ne funkcija stanja. Toplina Q, koja ulazi (ili izlazi) u sustav je isto funkcija procesa, a ne funkcija stanja. Promjena unutrašnje energije ne ovisi o procesu već samo o poč. i konačnom stanju sustava (poč. i kon. temperaturi plina)

Infinitenzimalna promjena unutrašnje energije dU je totalni diferencijal funkcije U. Infinitenzimalna promjena količine topline nije totalni diferencijal jer Q nije jednoznačno definiran (oznaka $đQ$). Isto vrijedi za rad W ($đW$).

Integral od dU ovisi samo o poč. i kon. stanju (granicama integracije) dok za integrale od $đQ$ i $đW$ osim granica integracije treba specificirati i proces kojim sustav prevodimo iz početnog stanja u konačno stanje.

15.2. Prvi zakon termodinamike

Kad sustavu dovodimo toplinu Q, jedan njen dio se troši na povećanje unutrašnje energije sustava ΔU, a ostatak se pretvara u rad W.

Zakon očuvanja energije: $Q = \Delta U + W$ →1. zakon termodinamike.

U izoliranom sustavu ukupna energija ostaje konst. bez obzira na procese koji se događaju u sustavu.

Q - pozitivna - kad toplina ulazi u sustav
- negativna - kad toplina izlazi iz sustava

W - pozitivan - kad ga vrši sustav
- negativan - kad ga okolina vrši nad sustavom

Za infinitenzimalne procese vrijedi: $đQ=mc_v dT+pdV$

*Izohorni proces (V = konst.) – $dU = 0$ → sva dovedena toplina pretvara se u unutrašnju energiju $đQ = dU$
*Izotermni proces (T = konst.) – $dU = 0$ → sva dovedena toplina Q prelazi u mehanički rad $đQ = đW$
*Adijabatski proces ($đQ = 0$)→rad se obavlja na račun promjene unutrašnje energije $đW = dU$

Za kružni proces poč. i kon. stanje su identični: $\Delta U = 0$, $Q = W$ (toplina koja se dovede sustavu za vrijeme kružnog procesa u toplinsku struju jednaka je radu što ga izvrši sustav).

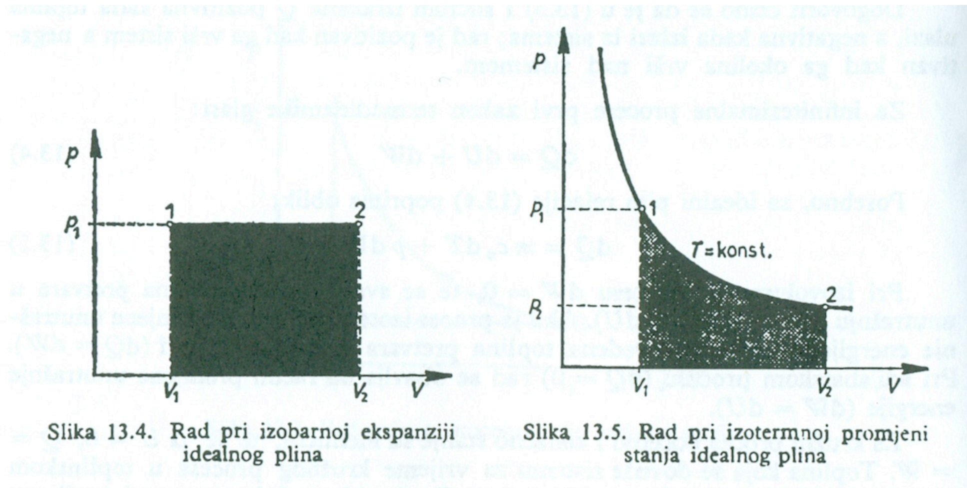
No nemoguće je konstruirati stroj koji bi dao više energije u obliku rada nego što je apsorbirao u obliku topline. Nemoguće je napraviti stroj koji stvarao energiju ni iz čega.

Prvi zakon termodinamike kaže da je perpetum mobile 1. vrste nemoguć.

15.3. Rad idealnog plina u termodinamičkim procesima

*Izohorno zagrijavanje (odn. hlađenje) V = konst. i $dV = 0$ → ne vrši se rad $đW=0$ → 1. zakon termodinamike: $đW = dU$. Sva apsorbirana toplina se troši na povećanje unutrašnje energije sustava.

*Izobarno zagrijavanje (p_1 = konst)



Slika 13.4. Rad pri izobarnoj ekspanziji idealnog plina

Slika 13.5. Rad pri izotermnoj promjeni stanja idealnog plina

SLIKA: RAD PRI IZOBARNOJ EKSPANZIJI IDEALNOG PLINA – KULIŠIĆ – slika 13.4. str. 212

SLIKA: RAD PRI IZOTERMNOJ PROMJENI STANJA IDEALNOG PLINA – KULIŠIĆ – slika 13.5. str. 212

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p_1 dV = p_1(V_2 - V_1)$$

Rad proporcionalan površini ispod krivulje izobare, omeđene pravcima $V = V_1$ i $V = V_2$

*Izotermna ekspanzija (T = konst.) - plin se ponaša po Boyle - Mariotteovu zakonu pV = konst. (jednadžba stanja $pV = nRT$):

$$W_i = \int_1^2 pdV = \int_1^2 \frac{nRT}{V} dV = nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = nRT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = nRT \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)$$

Rad je jednak površini ispod izoterme u p-V dijagramu omeđenog pravcima $V=V_1$ i $V=V_2$

*Adijabatski proces - sustav ne razmjenjuje toplinu s okolinom $đQ = 0 \rightarrow dU = -đW$
U adijabatskoj ekspanziji, kad sustav vrši rad, njegova se unutrašnja energija (i toplina) smanjuje i on se hladi.

U adijabatskoj kompresiji, kad se vrši rad nad sustavom, on se grije.
Proces je adijabatski ako je sustav dobro toplinski izoliran.

Prijenos topline ide sporo obično, onda su brzi procesi također adijabatski.

15.4. Jednadžba adijabate

Adijabata je krivulja kojom prikazujemo adijabatsku promjenu (adijabatsku ekspanziju ili kompresiju) idealnog plina u p-V dijagramu.

Molarni toplinski kapaciteti se definiraju kao:

$$C_V = \frac{1}{n}\frac{dU}{dT} \qquad V = \text{konst}, \qquad C_p = \frac{1}{n}\frac{đQ}{dT} \qquad p = \text{konst}$$

Adijabatski koeficijent je omjer dan s: $\kappa = \dfrac{C_p}{C_V} = \dfrac{c_p}{c_V}$ (*)

Prvi zakon termodinamike i plinske jednadžbe za idealni plin nam daju:

$$đQ = dU + đW$$
$$nC_p dT = nC_V dT + pdV$$
$$n(C_p - C_V)dT = nRdT$$
$$C_p - C_V = R$$

To je Mayerova relacija za molarne toplinske kapacitete idealnog plina. Za specifične toplnske kapacitete idealnog plina pišemo isto Mayerovu relaciju u obliku:

$$c_p - c_V = \frac{R}{M}$$

Iz definicije adijabatskog koeficijenta (*) slijedi: $C_p = \kappa C_V$

To uvrstimo u Mayerovu relaciju: $\kappa C_V - C_V = R$

Slijedi: $C_V = \dfrac{R}{\kappa - 1}$ $\qquad C_p = \dfrac{\kappa R}{\kappa - 1}$

Jednadžbu adijabate izvodimo iz 1. zakona termodinamike.

Za adijabatski proces s idealnim plinom on glasi: $dU = -đW = -pdV$

Uvrštavanjem dobijemo: $n\dfrac{R}{\kappa - 1}dT = -pdV = -nRT\dfrac{dV}{V}$

Odnosno: $\displaystyle\int_{T_1}^{T_2}\frac{dT}{T} = -(\kappa - 1)\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V}$

Nakon integriranja dobijemo: $\ln\frac{T_2}{T_1} = -(\kappa-1)\ln\frac{V_2}{V_1}$

Odnosno: $\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa-1}$

Ili: $TV^{\kappa-1} = konst$ (1)

Primjenom plinske jednadžbe za idealni plin $pV = nRT$ dobijemo vezu između tlaka i volumena pri adijabatskom procesu:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa}$$

Ili: $pV^{\kappa} = konst$ (2)

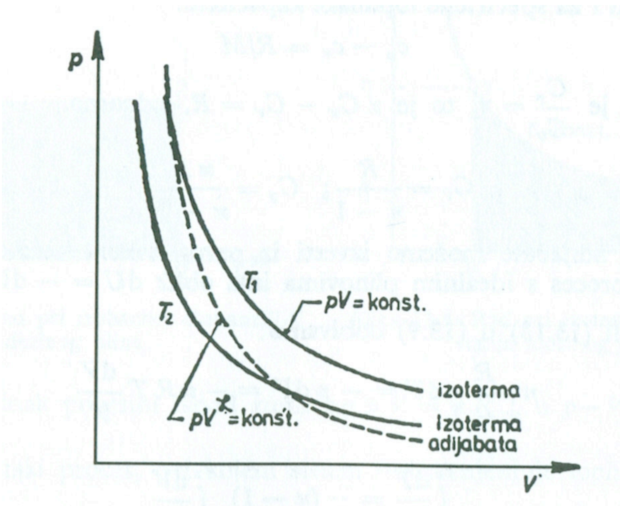
Veza između temperature i tlaka: $\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$

Ili: $T^{\kappa}p^{1-\kappa} = konst$ (3)

Relacije (1), (2), (3) su Poissonove jednadžbe.

Adijabatski koeficijent ovisi o vrsti plina. Za 1-atomne plinove ne ovisi o temperaturi i iznosi 1,67. Za višeatomne plinove ovisi o temperaturi i nešto je manji. Za 2-atomne plinove oko sobne temperature je 1,4.

Usporedba izoterme $pV = konst$ i adijabate $pV^{\kappa} = konst$ i s obzirom da je κ veći od 1, daje da je adijabata strmija od izoterme (za istu promjenu tlaka promjena volumena je kod adijabatske promjene veća).



Slika 13.6. Izoterma i adijabata

SLIKA: IZOTERMA I ADIJABATA – KULIŠIĆ – slika 13.6. str. 214

Rad koji idealni plin izvrši pri adijabatskoj ekspanziji je:

$$W_a = \int_1^2 p dV = nR\int_1^2 T\frac{dV}{V} = \frac{nR}{1-\kappa}\int_{T_1}^{T_2} dT = \frac{nR}{\kappa-1}(T_1 - T_2)$$

15.5. Drugi zakon termodinamike

Prvi zakon termodinamike je zakon očuvanja energije primijenjen na termodinamiku: pri pretvaranja rada u toplinu i topline u rad energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već se samo pretvara iz jednog oblika u drugi.

Drugi zakon termodinamike govori o uvjetima u kojima se iz topline može dobiti mehanički rad.

Razni oblici energije lako prelaze u toplinu bez nekih posebnih ograničenja. Mehanički rad se može potpuno pretvoriti u toplinu, no obrnuto je moguće samo ako su ispunjeni određeni uvjeti.

Zbog temperaturne razlike toplina spontano prelazi s toplijeg na hladnije tijelo, ali ne i obratno. Iskustveno možemo tvrditi da je nemoguće napraviti toplinski stroj koji bi u periodičnom kružnom procesu neprekidno prenosio toplinu iz hladnijeg u topliji spremnik bez uloženog vanjskog rada ili topline. To bi bio perpetuum mobile druge vrste → prema 2. zakonu termodinamike to je nemoguće.

Formulacije zakona:

* **Nemoguće je napraviti toplinski stroj koji bi, ponavljajući kružni proces, svu toplinu uzetu iz jednog spremnika pretvorio u rad jer uvijek dio te topline prelazi u hladniji spremnik (okolinu).**

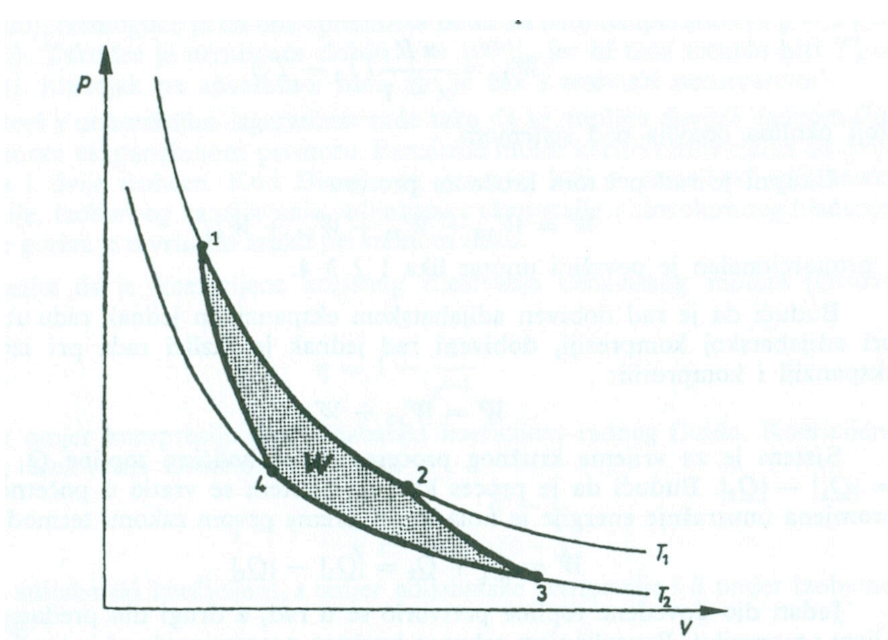
* **Nemoguće je napraviti proces u kojem bi toplina spontano prelazila iz spremnika niže temperature u spremnik više temperature.**

15.6. Kružni procesi. Carnotov kružni proces

Za dobivanje rada iz topline u nekom toplinskom stroju radni fluid (npr. idealni plin) nakon izvršenog rada treba vratiti u početno stanje obavivši kružni proces. Promatrat ćemo reverzibilne kružne procese koji se obavljaju gotovo ravnotežno i bez gubitaka. Pri tome daju maksimalni koeficijent iskorištenja.

Carnotov kružni proces je najpoznatiji kružni proces u kojem se sustav s idealnim plinom nakon 2 izotermna i 2 adijabatska procesa vraća u početno stanje i tako dovedenu toplinu djelomično pretvara u mehanički rad. Za rad toplinskog stroja trebamo 2 spremnika:
- jedan više temperature T_1 – grijač – iz kojeg uzimamo toplinu Q_1
- drugi niže temperature T_2 – hladnjak – kojem se predaje količina topline Q_2 (to je obično okolina – atmosfera)

Dobiveni rad jednak je razlici između dovedene i predane količine topline:



Slika 13.7. Carnotov kružni proces

SLIKA: CARNOTOV KRUŽNI PROCES U *p-V* DIJAGRAMU – Kulišić – slika 13.7. str. 219

Početno stanje 1: p_1, V_1, T_1
Dovođenjem količine topline Q_1 iz grijača stalne temperature T_1 plin se izotermno širi od 1 do 2 (p_2, V_2, T_1). Pri izotermnoj ekspanziji plin obavi rad:

$W_{12} = nRT_1 \ln \frac{V_1}{V_1}$ (proporcionalan površini ispod krivulje 1 - 2)

Taj rad je jednak apsorbiranoj količini topline: $Q_1 = nRT_1 \ln\frac{V_2}{V_1}$

W_{12} – pozitivan jer sustav obavlja rad
Q_1 – pozitivna jer toplina ulazi u sustav

Za vrijeme procesa 2 - 3 sustav je dobro izoliran od okoline i nema razmjene topline s okolinom Q = 0. Plin se adijabatski širi od volumena V_2 do volumena V_3 i hladi od temperature T_1 na temperaturu T_2. Obavlja se rad na računu unutrašnje energije plina (dU = -dW)

$$W_{23} = \frac{nR}{\kappa - 1}(T_1 - T_2)$$

Izotermna kompresija plina na temperaturi T_2 ide od 3 do 4 i smanjuje volumen plina od V_3 na V_4. Vanjski rad potreban za taj izotermni proces je:

$$W_{34} = nRT_2 \ln\frac{V_4}{V_3}$$

- to sustav prima od okoline i zato je W_{34} negativan

Količina topline Q_2 se odvodi iz sustava u hladnjak:

$$Q_2 = nRT_2 \ln\frac{V_4}{V_3}$$ - negativna veličina

U 4 se sustav ponovo toplinski izolira i počinje adijabatski proces (Q = 0) – kompresija kojom se sustav vraća u početno stanje 1. Potreban rad za taj proces je:

$$W_{41} = \frac{nR}{\kappa - 1}(T_2 - T_1)$$ - rad koji okolina obavlja nad sustavom

Ukupni rad pri kružnom procesu je:

$W = W_{12} + W_{23} + W_{34} + W_{41}$ (proporcionalan površini unutar 1 – 2 – 3 - 4)

Rad dobiven adijabatskom ekspanzijom je jednak radu utrošenom pri adijabatskoj kompresiji: $W_{23} = W_{41}$

Dobiveni rad W jedna je razlici rada pri izotermnoj ekspanziji i kompresiji (zbog predzaka): $W = W_{12}$-W_{34}

Sustav je za vrijeme kružnog procesa primio količinu topline $Q_1 + Q_2 = |Q_1| - |Q_2|$.

Sustav se vratio u početno stanje jer imamo kružni proces pa je $\Delta U = 0$.

Prema 1. zakonu termodinamike ($Q = \Delta U + W$) je: $W = Q_1 + Q_2 = |Q_1| - |Q_2|$

Jedan dio dovedene topline se pretvorio u rad (Q_1), a drugi je predan hladnijem spremniku (Q_2). Ponavljanjem ovakvog kružnog procesa može se iz topline dobiti rad $\rightarrow$ princip rada toplinskih strojeva.

Koeficijent korisnog djelovanja η - omjer izvršenog rada i utrošene topline:

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{|Q_1|}{|Q_1|} - \frac{|Q_2|}{|Q_1|} = 1 - \frac{|Q_2|}{|Q_1|}$$

Q_2 nikad ne može biti = 0 i η je uvijek manji od 1.

Carnontov proces daje gornju granicu iskorištenja toplinskog stroja (u stvarnosti η je još manji).

Poissonove jednadžbe za adijabatske procese daju:

$$\left.\begin{aligned} T_1 V_2^{\kappa-1} &= T_2 V_3^{\kappa-1} \\ T_1 V_1^{\kappa-1} &= T_2 V_1^{\kappa-1} \end{aligned}\right\}: \Rightarrow \frac{T_1 V_2^{\kappa-1}}{T_1 V_1^{\kappa-1}} = \frac{T_2 V_3^{\kappa-1}}{T_2 V_4^{\kappa-1}} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$$

$$Q_1 = nRT_1 \ln\frac{V_2}{V_1} \qquad\qquad Q_2 = nRT_2 \ln\frac{V_4}{V_3}$$

$$\eta = 1 - \frac{|Q_1|}{|Q_2|} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Efikasnost toplinskog stroja ovisi o temperaturi spremnika, a ne o vrsti plina. Temperatura mora biti veća kad plin obavlja rad (grijač na što višoj temperaturi), a što manja za vrijeme kompresije (hladnjak na što nižoj temperaturi).

Nemoguće je $T_1 = T_2$ jer bi onda $\eta = 0$.
Nemoguće je i $\eta = 1$ jer bi trebalo biti $T_2 = 0K$.

Primjeri:

- koeficijent korisnog djelovanja benzinskog motora (Ottov ciklus):

  $$\eta = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{\kappa-1}}$$

  ε - omjer kompresije

κ - adijabatski koeficijent radnog fluida

- koeficijent korisnog djelovanja Dieselovog procesa:

$$\eta = 1 - \frac{1}{\kappa} \frac{1}{\varepsilon^{\kappa-1} - 1} \frac{\delta^{\kappa} - 1}{\kappa(\delta - 1)}$$

ε - omjer adijabatske kompresije
κ - adijabatski koeficijent radnog fluida
δ - omjer izobarne ekspanzije

15.7. Entropija. Treći zakon termodinamike

Količina topline, koja se izmijeni pri prijelazu iz jednog stanja u drugo, je funkcija proces kojim je sustav došao iz početnog u konačno stanje. Q nije funkcija stanja pa $đQ$ nije totalni diferencijal. Pri reverzibilnom procesu tzv. reducirana toplina $\frac{Q}{T}$ ne ovisi o procesu, već samo o početnom i konačnom stanju.

$\frac{đQ}{T}$ je totalni diferencijal entropije.

Entropija S je funkcija stanja čiji je totalni diferencijal $dS = \frac{đQ}{T}$.

Promjena entropije pri prijelazu između 2 stanja je:

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{đQ}{T} \qquad \text{(prijelaz iz 1 u 2 mora biti reverzibilan)}$$

Referentna vrijednost enetropije utvrđuje se dogovorom. Entropija = 0 za vodu od 0^oC pri normiranom tlaku. No pokazuje se da je entropija sustava = 0 tek na apsolutnoj nuli (-273,15^{o}C). Računamo samo razlike entropije, a ne njenu apsolutnu vrijednost, pa dogovor o S = 0 ima samo teorij. vrijednost.

Entropija je funkcija stanja $\Rightarrow$ promjena entropije pri svakom reverzibilnom kružnom procesu mora biti = 0

U Cartonovom kružnom procesu vrijedi:

$$1 - \frac{|Q_2|}{|Q_1|} = 1 - \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow \frac{|Q_2|}{|Q_1|} = \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow \frac{|Q_1|}{T_1} = \frac{|Q_2|}{T_2}$$

Q_1 je pozitivno, a Q_2 negativno $\Rightarrow \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0$

Ukupna promjena entropije u Carnotovom kružnom procesu je

$$\Delta S = \oint \frac{đQ}{T} = \int_1^2 \frac{đQ}{T_1} + \int_3^4 \frac{đQ_2}{T_2} = \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$$

Svaki reverzibilni kružni proces se može predstaviti zbrojem Carnotovih procesa, pa je:

$$\oint_{rev} \frac{đQ}{T} = 0$$

Za ireverzibilne procese $dS \neq \frac{đQ}{T}$ jer je $\eta_{irev} < \eta_{rev}$:

$$1 - \frac{|Q_{2irev}|}{|Q_{1irev}|} < 1 - \frac{T_2}{T_1} \qquad \text{jer je } Q_{2irev} > Q_{2rev}$$

$$\frac{Q_{2irev}}{Q_{1irev}} < -\frac{T_2}{T_1} \qquad \Rightarrow \frac{Q_{1irev}}{T_1} + \frac{Q_{2irev}}{T_2} < 0$$

Za ireverzibilni proces općenito vrijedi Clausiusova nejednakost: $\oint \frac{đQ_{irev}}{T} < 0$

Neka se taj ireverzibilni kružni proces sastoji od ireverzibilnog procesa od poč. stanja A do nekog međustanja B i reverzibilnog procesa koji sustav vraća iz B u A. Za drugi dio procesa BA promjena entropije je:

$$S_A - S_B = \int_A^B \frac{đQ_{rev}}{T} \qquad \text{jer je proces reverzibilan.}$$

No ako uzmemo da je sustav zatvoren i nema razmjene topline, tada je $\int_A^B \frac{đQ}{T_B} = 0$

Slijedi: $\oint_{irev} \frac{đQ}{T} = \int_A^B \frac{đQ_{irev}}{T} + \int_B^A \frac{đQ_{rev}}{T} < 0$

$$S_A - S_B < 0$$
$$S_B > S_A$$
$$\Delta S_{sustav} > 0$$

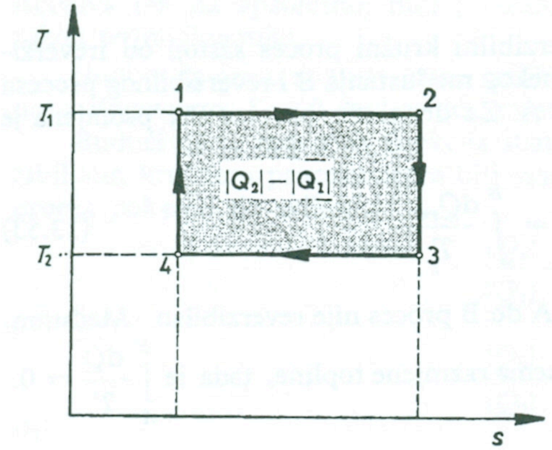
U zatvorenom sustavu ireverzibilni procesi povećavaju entropiju. Ako je proces reverzibilan, entropija ostaje ista. Entropija zatvorenog (adijabatskog) sustava ne može se smanjivati.

S obzirom da su u prirodi svi procesi manje – više ireverzibilni, entropija se stalno povećava.

Ako sustav nije zatvoren, mora se promatrati ukupna promjena entropije sustava i okoline: $\Delta S_{ukupno} = \Delta S_{sustav} + \Delta S_{okolina} \Rightarrow \Delta S_{ukupno} \geq 0$

Npr. prijelaz topline s toplije na hladnije tijelo ide spontano i promjena entropije je pozitivna. Obrnuti prijelaz topline s hladnijeg na toplije tijelo ne događa se spontano u prirodi jer bi se tada entropija smanjivala.

Često se umjesto *p-V* dijagrama koristi *T-S* dijagram:



Slika 13.8. T—S dijagram za Carnotov kružni proces

SLIKA: *T-S* DIJAGRAM ZA CARNOTOV KRUŽNI PROCES – Kulišić – slika13.8. str. 224

1 – 2, 3 – 4 izoterme
2 – 3, 4 – 1 adijabate

Količina topline izmijenjena pri reverzibilnom procesu je $Q = \int_1^2 TdS$ (površina ispod krivulje u *T-S* dijagramu).

Površina ispod 1 -2 krivulje – proporcionalna dovedenoj toplini Q_1.
Površina ispod 3 - 4 krivulje – proporcionalna dovedenoj toplini Q_2.
Površina pravokutnika – proporcionalna toplini $|Q_2| - |Q_1|$, odn. radu.

PROMJENA ENTROPIJE IDEALNOG PLINA

1. zakon termodinamike: $đQ = dU + pdV$
Entropija: $đQ = TdS$

$TdS = dU + pdV$

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dU}{T} + \int_1^2 \frac{pdV}{T} = n\int_1^2 \frac{C_V dT}{T} + n\int_1^2 R\frac{dV}{V}$$

Za manje ΔT je C_V = konst. $\Rightarrow \Delta S = nC_V \ln\frac{T_2}{T_1} + nR\ln\frac{V_2}{V_1}$

Za izotermnu ekspanziju idealnog plina je:

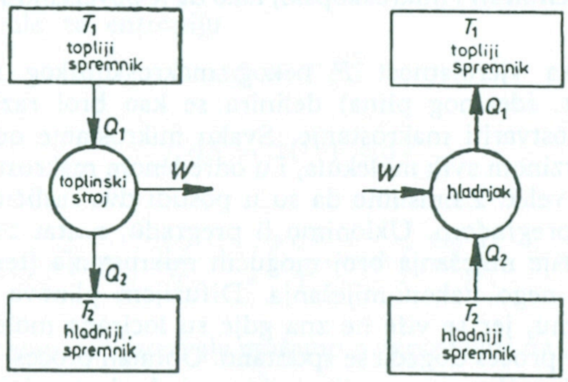
$$S_2 - S_1 = nR\ln\frac{V_2}{V_1}$$

Promjena entropije sustava je pozitivna.

Ako se uzme i okolina i sustav u obzir, entropija okoline se smanjuje (iz okoline se uzima toplina $Q = nRT\ln\frac{V_2}{V_1}$), pa je ukupna promjena entropije = 0.

15.8. Rashladni stroj i toplinska pumpa

Rashladni stroj radi na obrnutom principu od toplinskog stroja



Slika 13.9. Toplinski stroj i rashladni stroj

SLIKA: TOPLINSKI STROJ I RASHLADNI STROJ – Kulišić, slika 13.9. str. 226:

- toplina se iz spremnika niže temperature prenosi u spremnik više temperature
- proces ne ide spontano
- mora se uložiti određeni mehanički rad (u kompresijskim hladnjacima) ili dovesti određena količina topline iz nekog toplinskog izvora (apsorpcijski hladnjaci)

Prevođenje topline iz spremnika niže temperature u spremnik više temperature može ići samo uz ulaganje mehaničkog rada ili uz dovođenje topline iz trećeg spremnika još više temperature (inverzni Carnotov proces).

KRAJ

THE END

VIDIMO SE SLJEDEĆE GODINE NA FIZICI 2! MOŽDA! ☺

14. Vođenje topline. Molekularno-kinetička teorija. Realni plinovi

14.1. Prijenos topline vođenjem, strujanjem i zračenjem. Toplinski otpori

Toplina je energija koja zbog temperaturne razlike prelazi iz područja više temperature u područje niže temperature. 3. su načina prijenosa topline:
- vođenje (kondukcija)
- strujanje (konvekcija)
- zračenje (radijacija)

14.1.1. Vođenje topline

Ako se između različitih dijelova nekog sredstva javi razlika u temperaturi, nastat će vođenje topline, u kojem će energija prelaziti iz područja više temperature u područje niže temperature. Energija se prenosi od molekule do molekule, toplina prelazi s jednog na drugi kraj sredstva, a samo sredstvo miruje.

Primjer: metalni štap – jedan kraj držimo, a drugi zagrijavamo $\rightarrow$ kroz štap se širi toplina.

Vođenje topline u plinovima ide preko sudara molekula, koje se kaotično gibaju. U sudarima brže molekule (s većom srednjom kin. energijom, pa i višom temperaturom) predaju dio svoje kin. energije susjednim sporijim molekulama (s manjom kin. energijom, pa i nižom temperaturom), a one svojim susjednim itd.

U tekućinama se toplinska energija prenosi elastičnim titranjima molekula.

Vođenje topline u metalima ide preko slobodnih elektrona.

Vođenje topline kroz homogeni materijal računamo pomoću Fourierova zakona.

Promatramo štap poprečnog presjeka S i pretpostavimo da temperatura u štapu linearno pada od jednog do drugog kraja. Temperatura je u svakoj točki određenog presjeka ista. Razmatrat ćemo stacionarni prijenos topline što znači da temperatura bilo koje točke sredstva ne ovisi o vremenu već samo o položaju u sredstvu. Pretpostavimo da su na 2 presjeka, međusobno udaljena Δx, temperature T_1 i T_2. Toplina koja u određenom vremenu t prođe kroz taj dio sredstva je:

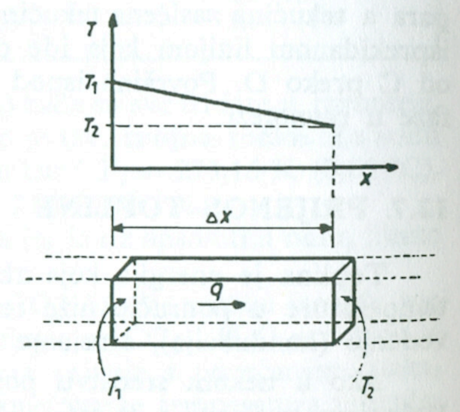
$$Q = -\lambda \frac{\Delta T}{\Delta x} S t$$

λ - koeficijent toplinske vodljivosti materijala [W/Km].
$\Delta T = T_2 - T_1$ - temperaturna razlika na krajevima sloja

S - površina kroz koju prolazi toplina

$\frac{\Delta T}{\Delta x}$ - temperaturni gradijent (vektor u smjeru normale na plohu kroz koju prolazi toplina)

Predznak minus – toplina prelazi iz područja više u područje niže temperature:
Q je pozitivno za negativni $\frac{\Delta T}{\Delta x}$.



Slika 12.12. Uz objašnjenje Fourierova zakona vođenja topline

SLIKA: UZ IZVOD FOURIEROVA ZAKONA – Kulišić – slika 12.12. str.198

Fourierov zakon se može pisati i u drugom obliku:

$$q = -\lambda \frac{\Delta T}{\Delta x} \qquad \text{ili} \qquad q = -\lambda \, \mathrm{grad}\, T$$

q – gustoća toplinskog toka – omjer toplinskog toka i površine

$$q = \frac{\Phi}{S} \qquad [\mathrm{W/m^2}]$$

Φ - toplinski tok – omjer topline i vremena

$$\Phi = \frac{Q}{t} \qquad [\mathrm{W = J/s}]$$

Koeficijent toplinske vodljivosti λ je toplinska karakteristika određenog materijala, a ovisi o temperaturi i tlaku. Može se zanemariti ta ovisnost i koristiti srednju vrijednost u promatranom temperaturnom intervalu. Dobri toplinski vodiči – metali – velik λ (srebro, bakar, aluminij ...). Dobar toplinski izolator – mali λ (porozni materijal zbog zraka, poliuretanska pjena, staklena vuna...)

Tablica 12.7. Koeficijenti toplinske vodljivosti nekih vrsta materijala na sobnoj temperaturi

Materijal	$\frac{\lambda}{W/(m\,K)}$	Materijal	$\frac{\lambda}{W/(m\,K)}$
srebro	420	voda	0,6
bakar	385	azbestni cement	0,5
aluminij	205	drvo	0,13
željezo	60	guma	0,15
beton	1,3	papir	0,13
staklo	0,8	polistiren	0,01
žbuka	0,8	staklena vuna	0,035
cigla	0,7	poliuretanska pjena	0,03
zemlja	0,5	zrak	0,025

Toplinski tok: $\Phi = qS = \lambda \frac{\Delta T}{\Delta x} S = \frac{\Delta T}{\frac{\Delta x}{\lambda S}} = \frac{\Delta T}{R}$

Toplinski otpor: $R = \frac{\Delta T}{\Phi} = \frac{\Delta x}{\lambda S}$ [K/W]

analogan električnom otporu $R = \frac{U}{I}$

Φ - analogno el. struji I, ΔT - analogno razlici potencijala U

14.1.2. Strujanje topline

U tekućinama i plinovima toplina se prenosi uglavnom strujanjem fluida s jednog mjesta na drugo. Vođenje topline u fluidima je slabo i zanemarivo kad je moguće strujanje. Primjer: strujanjem se toplina s radijatora prenosi po cijeloj prostoriji jer se zagrijani zrak iznad radijatora diže uvis, a hladni zrak dolazi do radijatora odozdo. To je **prirodna ili slobodna konvekcija.**

Prisilna konvekcija je kad se strujanje fluida postiže pomoću pumpi, ventilatora..., gdje je prijenos topline veći, ali nam je potrebna energija za pogon tih uređaja.

Prijenos topline strujanjem računamo pomoću Newtonova zakona:

$$q = h_c (T_p - T_f)$$

T_p - temperatura čvrste plohe uz koju struji fluid
T_f - temperatura fluida dalje od granične plohe
h_c - koeficijent konvekcije [W/m^{2}K] - ovisi o:

- temperaturnoj razlici
- geometrijskoj konfiguraciji
- obliku i položaju plohe
- brzini i načinu strujanja (laminarno ili turbulentno)
- vrsti fluida
-svojstvima fluida

14.1.3. Zračenje topline

Toplinsko zračenje nastaje kad atomi ili molekule tijela, pobuđeni termičkim gibanjem, emitiraju elektromagnetske valove. Usijana tijela zrače EM valove uglavnom u infracrvenom području. Intenzitet i spektralni sastav izračene toplinske energije nekog tijela uglavnom ovise o njegovoj temperaturi. Ovisno o temperaturama, tijela će zračiti infracrvenu, vidljivu i ultraljubičastu svjetlost.

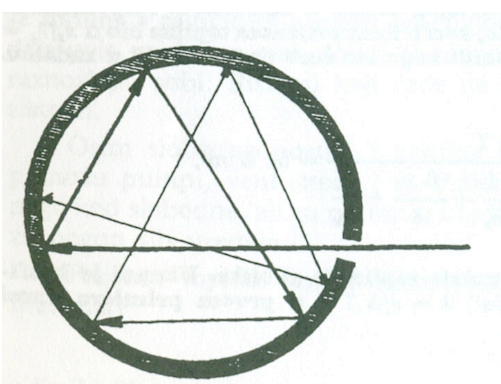
Vidljiva svjetlost	Infracrveno zračenje	Mikroradiovalovi
0,4 μm < λ < 0,75 μm	0,75 μm < λ < 1000 μm	λ > 1000 μm

Veći dio spektra zračenja tijela na T < 3000 K je u infracrvenom području. Za T ~ 300 K čitav spektar zračenja je u IR području od 2-25 μm s maksimumom na oko 10 μm.

Kad zračenje upada na površinu nekog neprozirnog tijela, dio upadnog toka se reflektira (faktor refleksije $\rho = \Phi_r / \Phi_u$), a dio apsorbira (faktor apsorpcije $\alpha = \Phi_a / \Phi_u$):

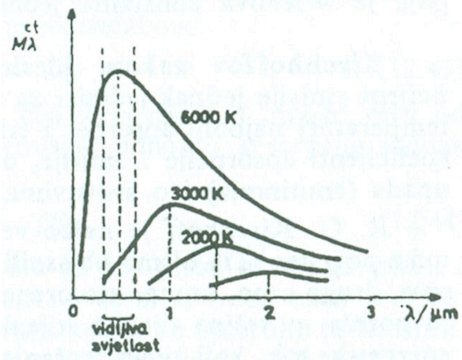
$$\alpha + \rho = 1$$

Idealno crno tijelo potpuno apsorbira sve upadno zračenje ($\alpha = 1, \rho = 0$) $\rightarrow$ dobra aproksimacija i šupljina s malim otvorom.



Slika 12.13. Idealno crno tijelo

Sivo tijelo – djelomično, ali podjednako reflektira sve valne duljine ($\rho = konst, 0 < \rho < 1$)



Slika 12.14. Spektar crnog tijela

SLIKA: SPEKTRA CRNOG TIJELA – Kulišić – slika 12.14. str.203

Planckov zakon zračenja: $M_{\lambda}^{ct} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda hT} - 1}$

To je spektralna egzitancija ili spektralna gustoća toka zračenja ili emisijska moć tijela

Ovisnost o temperaturi dana je Stefan-Boltzmannovim zakonom: $M^{ct} = \sigma T^4$

Stefan-Boltzmannova konstanta $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ W/m^{2}K^4

Wienov zakon pomaka: $\lambda_m T = 2{,}898 \cdot 10^{-3}$ Km

λ_m - valna duljina kod koje je $M_{\lambda}^{ct}(T)$ maksimalna

Prijenos topline zračenjem računa se kao i prijenos topline strujanjem ili vođenjem:

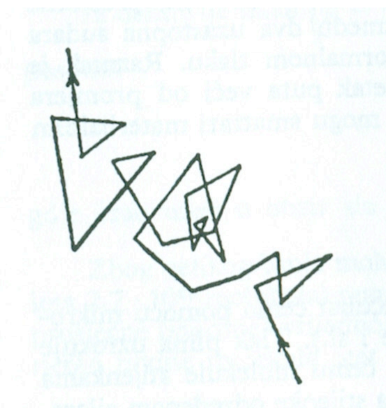
$\Phi = h_r S(T_1 - T_2)$

h_r - koeficijent prijenosa topline zračenjem od jedne plohe temperature T_1 prema drugoj plohi temperature T_2

14.2. Brownovo gibanje

Molekulsko-kinetička teorija topline objašnjava makroskopska svojstva tijela pomoću gibanja molekula. Znamo da su tvari sastavljene od atoma i molekula no sve ćemo razmatrati na molekulskom nivou. Smatrat ćemo da molekula nema strukture i da je poput kuglice koja privlači ili odbija susjedne molekule. Sile koje molekule drže zajedno u tekućinama i čvrstim tijelima su uglavnom električne prirode. Gravitacijske sile zanemarujemo jer su malene. U idealnim plinovima nema međumolekulskih sila. Molekule se neprestano gibaju u tekućinama i plinovima.

Ta hipoteza je potvrđena pojavom Brownovog gibanja. Promatrajući zrnca peluda promjera 1 mikrometra koja su suspendirana u tekućini, Brown (1773-1858) je opazio da se zrnca peluda neprestano gibaju mijenjajući smjer svog gibanja zbog sudaranja s molekulama. Putanja nije pravocrtna nego cik-cak.



Slika 14.1. Kaotično gibanje molekula

SLIKA: KAOTIČNO GIBANJE MOLEKULA – Kulišić – slika 14.1. str. 231

Nemoguće je pratiti gibanje svake molekule jer ih ima mnogo pa se promatra prosječno ponašanje mnoštva molekula.

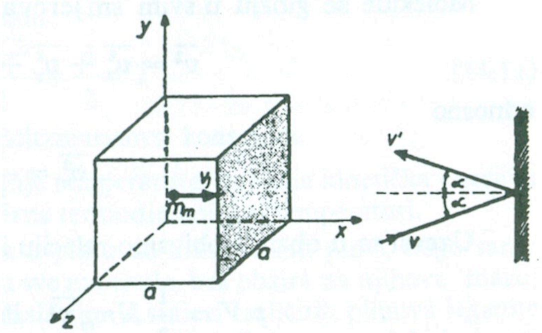
Osnovne pretpostavke molekulsko-kinetičke teorije plinova:

1. Plin se sastoji od velikog broja molekula koje se neprekidno kaotično gibaju u svim smjerovima, međusobno se sudaraju i udaraju u stijenke posude u kojoj se nalazi plin. Pri sudaru molekule mijenjaju brzinu po smjeru i iznosu, a zbog kaotičnog gibanja srednja brzina je 0 i CM plina ostaje mirovati.
2. Srednje udaljenosti među molekulama su mnogo veće negopromjeri molekula pa se međudjelovanje (osim za vrijeme sudara) može zanemariti. U idealnom plinu volumen svih molekula je zanemariv prema volumenu posude u kojoj se nalazi plin.
3. Međusobni sudari molekula te sudari molekula sa stiejnkama posude su savršeno elastični i nema gubitaka energije za vrijeme sudara.

14.3. Tlak idealnog plina

Tlak plina uzrokuje neprekidno udaranje molekula u stijenke posude. Pri tome molekule predaju određenu količinu gibanja stijenkama posude, to jest djeluju na stijenke određenom silom. Tlak plina je omjer te sile i površine stijenke. Zamislimo da je plin u posudi oblika kocke.

U posudi ima N molekula, a i-ta molekula mase m_m ima brzinu $\vec{v}_i = \vec{v}_{ix} + \vec{v}_{iy} + \vec{v}_{iz}$.



Slika 14.2. Uz mikroskopsko objašnjenje tlaka plina

SLIKA: MIKROSKOPSKO OBJAŠNJENJE TLAKA PLINA – KULIŠIĆ – slika 14.2. str.233

Prilikom sudaranja sa stijenkom posude (iscrtkano na slici) koja je okomita na x-os, x komponenta količine gibanja molekule se promijeni za iznos:

$$\Delta p_{ix} = m_m v_{ix} - (-m_m v_{ix}) = 2 m_m v_{ix}$$

Ta promjena jednaka je impulsu sile koji je primila stijenka.

Svakoj molekuli treba a / v_{ix} vremena da stigne od jednog kraja posude do drugog. Za oba smjera je potrebno $2a / v_{ix}$ pa će toliko iznositi vrijeme između 2 sudara promatrane molekule s istom stijenkom posude. Broj sudara u jedinici vremena za promatranu molekulu i stijenku posude je $v_{ix} / 2a$. Ukupni impuls sile koji promatrana molekula prenese na stijenku posude u vremenu Δt je:

$$(v_{ix} / 2a)(2 m_m v_{ix}) \Delta t$$

Srednja sila kojom molekula djeluje na stijenku posude je:

$$\Delta p_{ix} / \Delta t = (v_{ix} / 2a)(2 m_m v_{ix}) = m_m v_{ix}^2 / a$$

U posudi se nalazi N molekula pa je ukupna sila:

$$F = \Delta p_x / \Delta t = \sum_{i=1}^{N} (m_m v_{ix}{}^2 / a = (m_m / a) \sum_{i=1}^{N} v_{ix}{}^2$$

Tlak je $p = F / S = F / a^2$, pa je:

$$F = (1/a^2)(m_m / a) \sum_{i=1}^{N} v_{ix}{}^2 = (m_m / a^3) \sum_{i=1}^{N} v_{ix}{}^2 = (m_m / V) \sum_{i=1}^{N} v_{ix}{}^2$$

$V = a^3$ je volumen posude. Nemoguće je znati brzinu svake molekule jer ih je mnogo. Zato uzimamo srednje vrijednosti brzine i kvadrata brzine:

$$\overline{v_x^2} = (1 / N) \sum_{i=1}^{N} v_{ix}{}^2$$

Tlak je:

$$p = N m_m \overline{v_x^2} / V$$

Molekule se gibaju u svim smjerovima: $\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} = 3\overline{v_x^2}$

$$pV = N m_m \overline{v^2} / 3$$

Uz $\overline{E_k} = m_m \overline{v^2} / 2$ slijedi $\overline{v^2} = 2\overline{E_k} / m_m$ i $pV = 2N\overline{E_k} / 3$.

Srednja kvadratična (efektivna) brzina: $v_{ef} = \sqrt{\overline{v^2}}$

Slijedi: $pV = N m_m v_{ef}^2 / 3 = m v_{ef}^2 / 3$

To je osnovna jednadžba molekulsko-kinetičke teorije plinova. Masa plina je: $m = N m_m$

14.4. Unutrašnja energija. Termodinamička temperatura

Osnovna jednadžba molekulsko-kinetičke teorije plinova: $pV = 2N\overline{E_k}/3$ i plinska jednadžba: $pV = NkT$ daju: $\overline{E_k} = 3kT/2$, gdje je k Boltzmannova konstanta.

Srednja kinetička energija translacije po molekuli proporcionalna je termodinamičkoj temperaturi. Vidi se da $\overline{E_k}$ ne ovisi o vrsti plina već samo o T. Za određenu temperaturu sve molekule imaju istu $\overline{E_k}$ - u smjesi različitih plinova lakše molekule se gibaju brže, a teže se gibaju sporije.

Unutrašnja energija idealnog plina je zbroj kinetičkih energija svih molekula (nema potencijalne energije jer u idealnom plinu među molekulama nema privlačnih sila):

$$U = \sum_i E_{ki} = N\overline{E_k} = 3NkT/2 = 3nRT/2$$

U za idealni plin ne ovisi o tlaku i volumenu već samo o T.

Do sada smo razmatrali samo translatorno gibanje molekule čiji položaj je određen s 3 stupnja slobode (koordinate x, y, z). Kinetička energija je ravnopravno raspoređena između sva 3 stupnja slobode pa na svaki otpada $kT/2$ kinetičke energije. To je **princip ekviparticije** (jednake raspodjele) energije na svaki stupanj slobode.

Ako se molekula osim translatorno giba i drugačije (rotira ili vibrira), onda ima i više stupnjeva slobode. Unutrašnja energija idealnog plina je općenito:

$$U = inRT/2$$

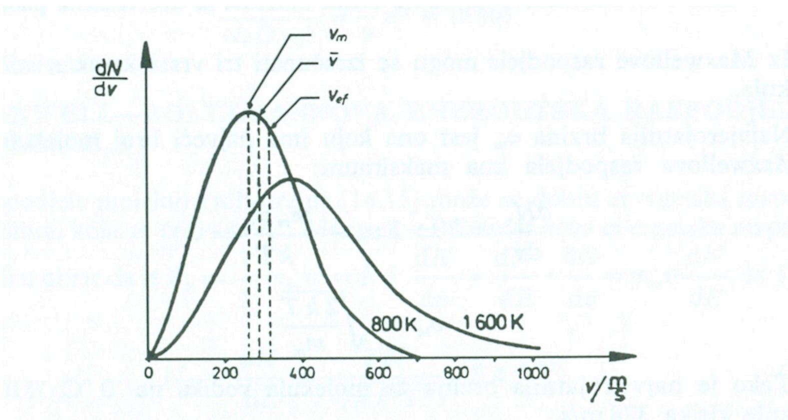
Ovdje je i broj stupnjeva slobode.

Npr. 2-atomna molekula:
- translatorno gibanje (3 osi) – 3 stupnja slobode
- rotacija (oko 3 međusobno okomite osi) – 2 stupnja slobode
- titranje uzduž spojnice atoma – 2 stupnja slobode

Rotacija oko osi na kojoj leže atomi ne pridonosi ukupnoj energiji jer je moment tromosti za tu os mali pa rotaciju možemo zanemariti.

14.5. Raspodjele molekula

Maxwellova raspodjela molekula po brzinama

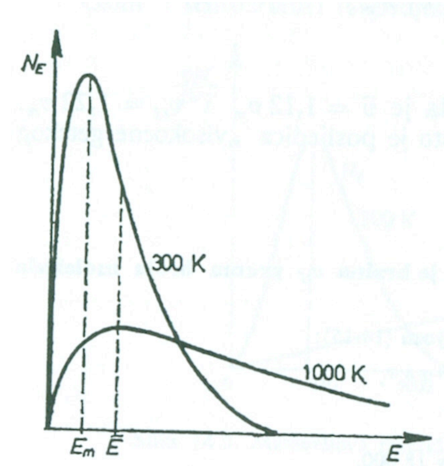


Slika 14.4. Maxwellova raspodjela molekula živinih para po brzinama

SLIKA: MAXWELLOVA RASPODJELA MOLEKULA ŽIVIH PARA PO BRZINAMA – Kulišić: slika 14.4.,str.237

$$N_v = \frac{dN}{dv} = \frac{4N}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m_m}{2kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-m_m v^2/2kT}$$

Maxwell-Boltzmannova energetska raspodjela molekula



Slika 14.6. Energetska raspodjela molekula

SLIKA: ENERGETSKA RASPODJELA MOLEKULA- Kulišić: slika 14.6.,str. 240

$$N_E = \frac{dN}{dE} = \frac{2N}{\sqrt{\pi k^3 T^3}}\sqrt{E}e^{E/kT}$$

13. Toplina

13.1. Temperatura. Termometri

13.1.1. Temperatura

Dodirom možemo odrediti da li je neko tijelo hladno, toplo ili vruće, ili da li je neko tijelo toplije ili hladnije od nekog drugog. No takvo određivanje je subjektivno i netočno pa koristimo objektivne načine mjerenja temperature koji su neovisni o našim osjetilima.

U svim tijelima se čestice neprestano gibaju i to gibanje nazivamo **toplinskim gibanjem**.

Zahvaljujući toplinskom gibanju čestice imaju **toplinsku energiju**.

Ljudski osjećaj toplijeg i hladnijeg ovisi o kinetičkoj energiji čestica tvari s kojom dolazimo u kontakt.

Temperatura je proporcionalna **srednjoj kinetičkoj energiji** molekula.

Za temperaturu kažemo da je fizikalna veličina koja karakterizira **stupanj zagrijanosti nekog tijela** i predstavlja jednu od 7 osnovnih fizikalnih veličina.

Ako dovedemo hladnije i toplije tijelo u međusobni kontakt, čestice s većom kinetičkom energijom će u sudarima predavati energiju česticama s manjom kinetičkom energijom sve dok se ne uspostavi **termička ravnoteža**. Znači da energija u obliku topline prelazi s jednog tijela na drugo i ono tijelo koje gubi energiju je toplije, a ono na koje energija prelazi je hladnije. U termičkoj ravnoteži je srednja kinetička energija istovrsnog gibanja molekula obaju tijela jednaka. Budući je temperatura proporcionalna srednjoj kinetičkoj energiji molekula, tijela koja se nalaze u termičkoj ravnoteži imaju istu temperaturu.

Mnoge fizikalne veličine su funkcije temperature i zovemo ih **termometrijskim svojstvima**:

- dimenzije čvrstih tijela
- volumen tekućina
- električni otpor metala
- tlak plina pri stalnom volumenu
- elektromotorna sila termočlanka
- ovisnost zračenja o temperaturi

Da bismo mjerili temperaturu, potrebno je odabrati određeno termometrijsko svojstvo čiju ovisnost o temperaturi znamo i mjerenje temperature svesti na mjerenje tog svojstva. Potrebno je definirati temperaturnu skalu i jedinicu temperature. Za kalibraciju (umjeravanje) termometra moramo odabrati takozvane fiksne točke, tj. sustave koji u danim uvjetima uvijek imaju istu temperaturu, koja se može lako dobiti i reproducirati.

Kao jedna fiksna točka obično se uzima temperatura smjese destilirane vode i leda u termičkoj ravnoteži, a to je ledište vode pri normiranom atmosferskom tlaku od 101325 Pa. Druga fiksna točka je temperatura vrelišta destilirane vode pri normalnom tlaku.

U Celsiusovoj temperaturnoj skali se temperatura ledišta vode označava kao 0ºC, a temperatura vrelišta kao 100ºC.

Anders Celsius (1701-1744) je bio švedski znanstvenik, tvorac centigradne termometrijske skale, koja je kasnije nazvana Celsiusovom.

Razmak između dvije fiksne točke, koje smo uzeli, podijeli se na 100 dijelova, od kojih svaki odgovara promjeni temperature za 1 ºC. Temperaturna skala se može ekstrapolacijom proširiti i ispod prve, odnosno iznad druge fiksne točke. Tako se termometri mogu kalibrirati u odgovarajućem temperaturnom intervalu. Za kalibraciju se mogu upotrebljavati i druge fiksne točke, npr:

- vrelište kisika -182,96 ºC
- trojna točka vode 0,01 ºC
- vrelište sumpora 444,67 ºC
- talište platine 1772 ºC

U anglosaksonskim zemljama koristi se **Fahrenheitova temperaturna skala**, u kojoj je ledište vode na 32 ºF, a vrelište vode na 212 ºF, pa je osnovni razmak od ledišta do vrelišta podijeljen na 180 dijelova.

U fizici najčešće upotrebljavamo **termodinamičku temperaturnu skalu**. Temperatura se u apsolutnoj skali izražava jedinicom **kelvin** (K). Ime je dobila po lordu Kelvinu (William Thomson, 1824-1907), britanskom matematičaru i fizičaru, jednom od osnovača termodinamike. Temperatura 0 K odgovara Celsiusovoj temperaturi -273,15 ºC i naziva se **apsolutnom nulom**. Veza između termodinamičke temperature T i Celsiusove temperature t je:

$$\frac{T}{K} = 273{,}15 + \frac{t}{^\circ C}$$

Temperaturni interval izražen u kelvinima je jednak temperaturnom intervalu izraženom u ºC: $\Delta T = \Delta t$

Kelvin je SI jedinica temperature, a dopuštena je i uporaba ºC. Za definiciju kelvina služi temperatura trojnog stanja vode 273,16 K:

Kelvin je $\frac{1}{273{,}16}$ dio termodinamičke temperature trojnog stanja vode.

Trojna točka je stanje pri određenoj temperaturi i tlaku u kojem su sve tri faze ili sva tri agregatna stanja u ravnoteži (za vodu je temperatura trojnog stanja 0,01ºC, a tlak 6,1 mbar).

13.1.2. Termometri

ŽIVIN TERMOMETAR

Za mjerenje temperature obično služi živin termometar. On se sastoji od staklene kapilare na čijem je donjem kraju staklena posudica napunjena živom, dok je gornji kraj kapilare zataljen. U kapilari je vakuum. Dužina stupca žive u kapilari ovisi o temperaturi i mjerenjem visine stupca žive može se mjeriti temperatura.

Mjerno područje takvog termometra je od -38 ºC (točke očvršćivanja, odnosno tališta žive) do 300 ºC.

Ako se kapilara iznad žive napuni dušikom pod tlakom od nekoliko bara, takvim termometrom možemo mjeriti i temperaturu iznad vrelišta žive (357 ºC) do oko 650 ºC.

OTPORNI TERMOMETRI

Otporni termometri su konstruirani na principu pravilne promjene električne otpornosti s temperaturom. Koriste se za precizno mjerenje temperature u širokom intervalu.

Platinski termometri se mogu upotrebljavati od -200 ºC do oko 1000 ºC.

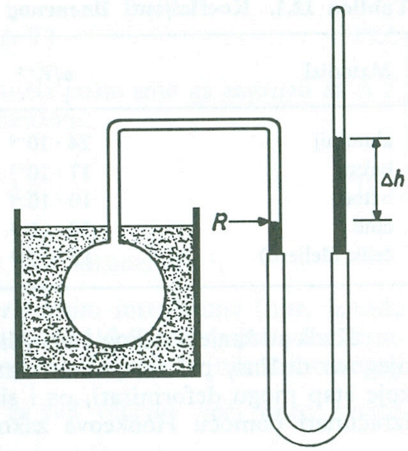
Osim metalnih termometara mogu se upotrebljavati termometri s termistorima čiji otpor brzo pada s porastom temperature. Tako se mogu precizno mjeriti vrlo male temperaturne razlike.

TERMOČLANAK

Termočlanak se također može uspješno iskoristiti kao osjetljiv termometar. Kad se dvije žice od različitih metala spoje na oba kraja, i ti spojevi drže na različitoj temperaturi, među njima nastaje elektromotorna sila (Seebeckov pojav). Obično se jedan kraj termočlanka drži na nekoj referentnoj temperaturi (npr. ledištu vode), a drugi spoj na mjestu gdje želimo odrediti temperaturu. Poznavajući vezu između elektromotorne sile i razlike temperature, moguće je, mjereći elektromotornu silu, precizno mjeriti temperaturu (laboratorijska vježba – baždarenje termočlanka).

PLINSKI TERMOMETAR

Plinski termometar je najprecizniji i najosjetljiviji instrument za mjerenje temperature no nije baš praktičan za korištenje. Termometrijsko svojstvo koje koristimo je promjena tlaka idealnog plina s temperaturom, uz stalni volumen.



Slika 12.1. Plinski termometar

SLIKA: PLINSKI TERMOMETAR – Kulišić – slika 12.1. str. 181

Plin, obično helij ili vodik, nalazi se u posudi stalnog volumena, dok se tlak, koji se mijenja s temperaturom, mjeri pomoću otvorenog živina manometra. Manometar se uvijek, budući je postignuta toplinska ravnoteža, a prije mjerenja temperature, namjesti tako da je volumen plina konstantan. To se postiže podizanjem ili spuštanjem cijevi manometra tako da se razina žive dovede do referentne linije R. Za idealne je plinove promjena tlaka s temperaturom linearna: temperatura plina u posudi je proporcionalna tlaku p, odnosno visini živina stupca Δh. Plinski termometar možemo koristiti u vrlo širokom temperaturnom području i s obzirom da se radi o vrlo točnim mjerenjima, možemo ga koristiti za baždarenje drugih termometara.

PIROMETRI

Spektralni sastav i energija zračenja usijanog tijela ovise o temperaturi. Pomoću radijacijskih pirometara mjerimo visoke temperature koristeći to svojstvo. Bez kontakta s usijanim tijelom mogu se mjeriti visoke temperature na daljinu. Interval mjerenja pirometra je od 500 ºC do 3000 ºC.

13.2. Toplinsko širenje krutih tvari i tekućina

Zagrijavanjem se skoro sva tijela rastežu, to jest povećava im se volumen. Izuzetak je voda kojoj se zagrijavanjem u intervalu od 0 ºC do 4 ºC obujam smanjuje. Općenito je zagrijavanje svakog tijela uvijek trodimenzionalno, ali se kod tijela čije su 2 dimenzije znatno manje od treće (štapovi, šipke, cijevi i slično) razmatra samo linearno širenje. Isto tako za tijela čija je debljina zanemariva poput ploča, gledamo površinsko širenje.

13.2.1. Linearno rastezanje

Ako neko tijelo zagrijavamo od početne temperature T_0 do konačne temperature T, dužina mu se pravilno mijenja :

$$l = l_0(1+\alpha\Delta T)$$

l_0 je početna dužina tijela na temperaturi T_0 (obično 0ºC)

l je dužina tijela na temperaturi T, tj. nakon porasta temperature za $\Delta T = T - T_0$

α je koeficijent linearnog rastezanja (Jedinica za koeficijent linearnog rastezanja je K^{-1}.)

$$\alpha = \frac{1}{l_0}\frac{l-l_0}{T-T_0} = \frac{1}{l_0}\frac{\Delta l}{\Delta T}$$

Koeficijenti linearnog rastezanja za različite materijale su dani u tablici, vrlo su mali i praktički konstantni za manje temperaturne intervale:

Tablica 12.1. Koeficijenti linearnog rastezanja za nekoliko materijala

Materijal	α/K^{-1}	Materijal	α/K^{-1}
aluminij	$24 \cdot 10^{-6}$	platina	$9 \cdot 10^{-6}$
bakar	$17 \cdot 10^{-6}$	srebro	$19 \cdot 10^{-6}$
beton	$10 \cdot 10^{-6}$	staklo	oko $9 \cdot 10^{-6}$
cink	$30 \cdot 10^{-6}$	staklo (Pyrex)	$3 \cdot 10^{-6}$
čelik (željezo)	$12 \cdot 10^{-6}$	volfram	$4{,}5 \cdot 10^{-6}$

TABLICA: KOEFICIJENTI LINEARNOG RASTEZANJA ZA NEKOLIKO MATERIJALA – Kulišić – tablica 12.1. str. 182

Kad su krajevi nekog štapa učvršćeni tako da se ne može mijenjati njegova dužina, pri temperaturnim promjenama dolazi do mehaničkih napetosti. Te napetosti štap mogu deformirati pa i slomiti. Možemo ih izračunati pomoću Hookeova zakona:

$p = \frac{\Delta F}{S} = E\frac{\Delta l}{l} = E\alpha\Delta T$ gdje je E Youngov modul elastičnosti materijala.

13.2.2. Volumno rastezanje

Zakon za volumno rastezanje izvodimo iz zakona za linearno rastezanje:

$$V = l_0(1+\alpha\Delta T)l_0(1+\alpha\Delta T)l_0(1+\alpha\Delta T) =$$
$$l_0^3(1+\alpha\Delta T)^3 =$$
$$l_0^3(1+3\alpha\Delta T+3(\alpha\Delta T)^2+(\alpha\Delta T)^3) =$$
$$V_0(1+3\alpha\Delta T) =$$
$$V_0(1+\gamma\Delta T)$$

Radi jednostavnosti smo pretpostavili da je tijelo u obliku kocke. Također smo zanemarili članove višeg reda $(\alpha\Delta T)^2$ i $(\alpha\Delta T)^3$ koji su vrlo maleni u usporedbi s ostalim članovima. Dakle:
V_0 je početni volumen tijela,
V je volumen tijela nakon što smo ga zagrijali za ΔT,
γ je koeficijent toplinskog širenja definiran kao:

$$\gamma = \frac{1}{V_0}\frac{V-V_0}{T-T_0} = \frac{1}{V_0}\frac{\Delta V}{\Delta T} = 3\alpha$$

Jedinica koeficijenta toplinskog širenja γ je K^{-1}.

Širenje većine tekućina u manjim temperaturnim intervalima (0-100ºC) možemo računati zadnjim izrazom za V smatrajući γ konstantnim. To posebice vrijedi za živu što je pogodno za izradu živinih termometara.

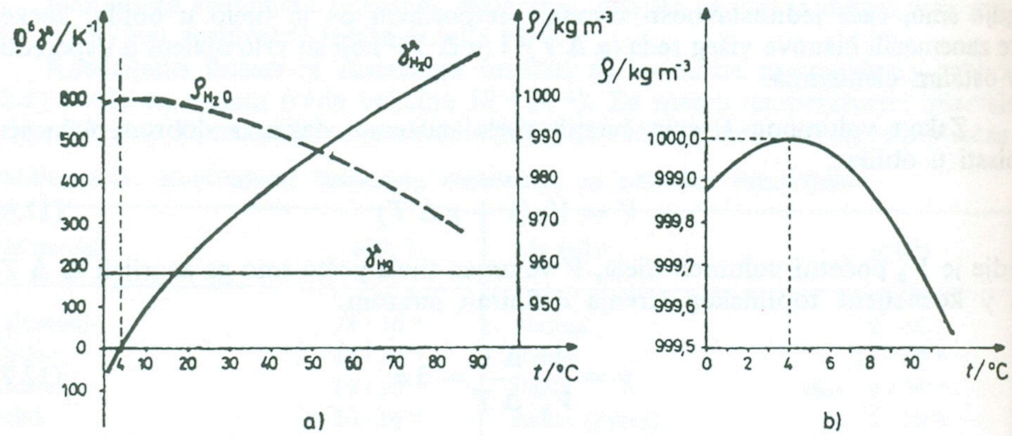
Koeficijent toplinskog širenja tekućina je za red veličine veći nego za čvrsta tijela.

Tablica 12.2. Koeficijent toplinskog širenja za neke tekućine pri sobnoj temperaturi

Tekućina	γ/K^{-1}	Tekućina	γ/K^{-1}
alkohol (etanol)	$1{,}1 \cdot 10^{-3}$	voda	$0{,}2 \cdot 10^{-3}$
benzin	$0{,}95 \cdot 10^{-3}$	živa	$0{,}18 \cdot 10^{-3}$

TABLICA: KOEFICIJENT TOPLINSKOG ŠIRENJA ZA NEKE TEKUĆINE PRI SOBNOJ TEMPERATURI – Kulišić – tablica 12.2. str. 183

Često trebamo uzeti u obzir temperaturnu ovisnost toplinskog širenja tekućina što znači da moramo pri primjeni formule $V = V_0(1+\gamma\Delta T)$ moramo uzeti male promjene temperature ΔT. Voda pokazuje nepravilnost pri toplinskom širenju jer se obujam vode kod povećanja temperature u intervalu od 0 ºC do 4 ºC smanjuje. Koeficijent toplinskog širenja je negativan. Daljnjim zagrijavanjem iznad 4 ºC volumen se povećava i koeficijent toplinskog širenja je pozitivan. Koeficijent toplinskog širenja se mijenja s temperaturom vode značajno (slika).



Slika 12.2. Anomalno rastezanje vode

SLIKA: ANOMALNO RASTEZANJE VODE – Kulišić – slika 12.2. str. 184

Također se mijenja i gustoća vode s temperaturom. Voda ima maksimalnu gustoću na +4 ºC. Počevši od te temperature, gustoća se smanjuje bez obzira da li vodu grijemo ili hladimo. To je poznata anomalija vode. Voda hladnija od 4 ºC je rjeđa i lakša pa se diže prema površini. Ili, dok je površina vode smrznuta, u dubini joj je temperatura oko 4 ºC.

13.3. Plinski zakoni. Jednadžba stanja idealnog plina

13.3.1. Plinski zakoni

Za uzvođenje plinskih zakona ćemo se koristiti **modelom idealnog plina:**

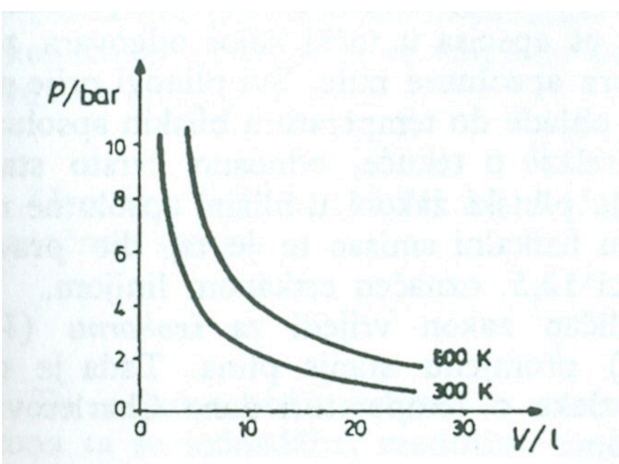
- međumolekulske sile su zanemarive
- volumen molekula je zanemariv u odnosu na volumen posude u kojoj se nalazi plin
- molekule možemo smatrati materijalnim točkama koje ne djeluju jedna na drugu osim za vrijeme sudara

Većina realnih plinova može se dobro aproksimirati tim modelom pri običnim tlakovima i temperaturama. Realni plinovi se aproksimiraju modelom idealnog plina što im je tlak manji (a time i gustoća), a temperatura veća.

1) **Boyle-Mariotteov zakon**

Boyle (1627-1691, engleski fizičar i kemičar) i Mariotte (1620-1684, francuski fizičar i kemičar) su neovisno jedan od drugoga proučavali ovisnost volumena plina o tlaku i našla i da su obrnuto proporcionalni. Ako imamo izotermnu (stalna temperatura) promjenu tlaka, odnosno volumena plina, onda za idealni plin vrijedi Boyle-Mariotteov zakon:

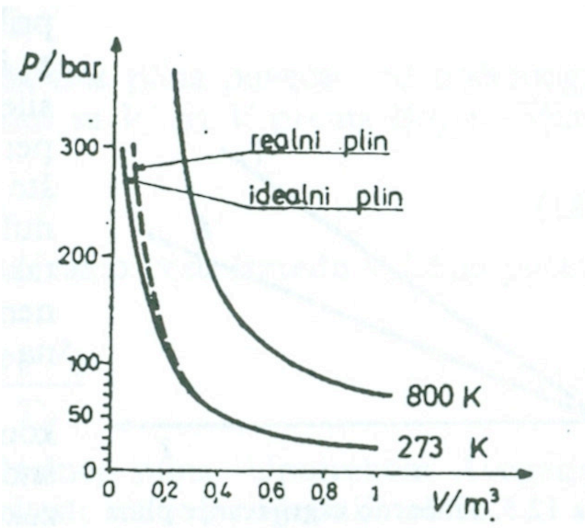
$pV = konst \qquad\qquad T = konst$



Slika 12.3. Ovisnost volumena plina o tlaku pri izotermnom procesu

SLIKA: OVISNOST VOLUMENA PLINA O TLAKU PRI IZOTERMNOM PROCESU (2 izoterme za idealni plin na različitim temperaturama) – Kulišić – slika 12.3. str. 185

U p-V dijagramu ovisnost tlaka idealnog plina o volumenu prikazana je istostranom hiperbolom koju nazivamo **izotermom** jer se ovisnost tlaka o volumenu razmatra pri stalnoj temperaturi. Za realne plinove pri visokim tlakovima nastaju određena odstupanja jer se tada volumen pri kompresiji polaganije smanjuje nego što je prikazano zakonom za idealni plin (slika).



Slika 12.4. Izoterma za idealni i realni plin

SLIKA: IZOTERMA ZA REALNI I IDEALNI PLIN (izotermna kompresija idealnog plina i vodika kao realnog plina) – Kulišić – slika 12.4. str. 185

2) Gay-Lussacov zakon

Širenje plinova pri zagrijavanju je veće nego širenje tekućina i čvrstih tijela. Zagrijavamo li plin uz stalni tlak, tj. izobarno, volumen mu se linearno povećava s temperaturom po Gay-Lussacovom (1778-1850, francuski kemičar) zakonu:

$$V = V_0(1+\alpha t)$$

V_0 - volumen plina na 0 C,
V - volumen plina na temperaturi t
α - toplinski koeficijent širenja plina – ne razlikuje se mnogo za razne vrste plinova

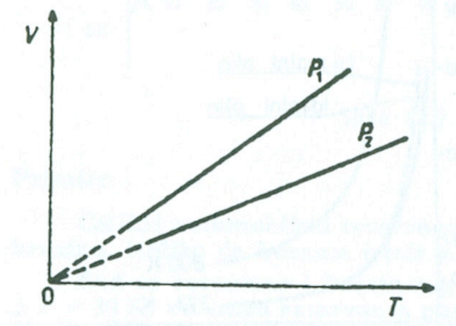
$$\alpha = \frac{1}{273} K^{-1} = 3{,}66 \cdot 10^{-3} K^{-1}$$

Gay-Lussacov zakon možemo pisati i u obliku:

$$V = V_0 (1 + \frac{t}{273K}) = V_0 \frac{t + 273K}{273K} = V_0 \frac{T}{T_0}$$

Ili: $\frac{V}{V_0} = \frac{T}{T_0}$ Ili: $\frac{V}{T} = konst$

Volumen plina pri stalnom tlaku je proporcionalan termodinamičkoj temperaturi.



Slika 12.5. Izobarno zagrijavanje plina

SLIKA: IZOBARNO ZAGRIJAVANJE PLINA (2 izobare za 2 različita tlaka p_1 i p_2, $p_1 < p_2$) - Kulišić – slika 12.5. str. 186

Krivulja ovisnosti volumena o temperaturi pri stalnom tlaku za idealni plin je pravac u *V-T* dijagramu i zove se **izobara.** Produžeci pravaca sijeku os *T* u točki koja odgovara temperaturi apsolutne nule. Svi plinovi prije nego što se ohlade do temperature apsolutne nule prelaze u tekuće, odnosno čvrsto stanje pa plinski zakoni u blizini apsolutne nule nemaju fizikalni smisao.

3) Charlesov zakon

Kod izohorne promjene ($V = konst$) stanja plina ovisnost tlaka o temperaturi je dana Charlesovim (1746-1823, francuski fizičar) zakonom:

$$p = p_0 (1 + \beta t)$$

p_0 - tlak plina na 0º C

p - tlak na temperaturi t

β - toplinski koeficijent promjene tlaka – za idealni plin je jednak toplinskom koeficijentu širenja plina

$$\alpha = \beta = \frac{1}{273} K^{-1} = 3{,}66 \cdot 10^{-3} K^{-1}$$

Zakon možemo pisati i u obliku: $p = p_0 \frac{T}{T_0}$ $V = konst$

p_0 - tlak plina na T_0
p - tlak plina na temperaturi T

13.3.2. Jednadžba stanja idealnog plina

Stanje idealnog plina potpuno je određeno tlakom, volumenom i temperaturom. Relacija, koja povezuje tlak, temperaturu i volumen neke tvari, zove se **jednadžba stanja** i može se pisati kao funkcija: $f(p,V,T) = 0$

Za izvođenje jednadžbe stanja idealnog plina iz plinskih zakona prevest ćemo određenu količinu plina iz početnog stanja određenog volumenom V_0 na temperaturi $T_0 = 273{,}15K$ i normiranom atmosferskom tlaku $p_0 = 101325Pa$, u konačno stanje određeno tlakom p, volumenom V i temperaturom T. Plin ćemo iz početnog stanja dovesti u konačno stanje izobarnim zagrijavanjem do konačne temperature, a onda izotermnom kompresijom do konačnog tlaka i volumena. Izobarnim zagrijavanjem plina na temperaturu T volumen plina po Gay-Lussacovom zakonu je:

$$V' = V_0 \frac{T}{T_0}$$

Izotermnom kompresijom tlak plina povećavamo od početnog p_0 do konačnog p pri čemu se volumen smanji s V' na V prema Boyle-Mariotteovu zakonu:

$$pV = p_0 V'$$

Uvrštavanjem V' iz prethodne relacije dobijemo vezu između veličina početnog i konačnog stanja:

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_0 V_0}{T_0}$$

To je jedan oblik jednadžbe stanja idealnog plina. Pomoću Avogadrova zakona jednadžbu stanja ćemo svesti na pogodniji oblik.

AVOGADROV ZAKON

1811. godine je Avogadro (1776-1856, talijanski fizičar) je našao da za plinove vrijedi ovaj zakon: **Jednaki volumeni svih plinova na istoj temperaturi i tlaku imaju jednaki broj čestica.**

Broj čestica (atoma, molekula...) N koji sadrži neki sustav povezan je s količinom ili množinom tvari relacijom: $N = nN_A$

$N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ mol^{-1} je Avogadrova konstanta – broj čestica u količini tvari 1 mol.

Jedinica količine tvari n je mol: **Mol je količina tvari koja sadrži isto toliko jednakih čestica (molekula, atoma, elektrona, iona i sl.) koliko ima atoma u 0,012 kg izotopa ugljika 12.**

Iz Avogardova zakona slijedi da količina tvari 1 mol bilo kojeg plina u istim uvjetima ima jednaki volumen koji zovemo **molarni volumen plina** i označavamo V_m. U normiranim uvjetima ($T_0 = 273{,}15 K$, $p_0 = 101325 Pa$) molarni volumen V_{m0} iznosi:

$V_{m0} = 22{,}4 \cdot 10^{-3}$ m^3/mol

Definirajmo univerzalnu plinsku konstantu izrazom:

$$R = \frac{p_0 V_{m0}}{T_0} = \frac{101325 Pa \cdot 0{,}0224 m^3 / mol}{273{,}15 K} = 8{,}314 J / molK$$

Jednadžba stanja prelazi u:

$$pV = nRT$$

$$n = \frac{V_0}{V_{m0}}$$ je množina plina.

Množina plina n je omjer mase plina m i molarne mase plina M:

$$n = \frac{m}{M}$$

Jednadžba stanja idealnog plina poprima oblik:

$$pV = \frac{m}{M} RT$$

Uz $n = \frac{N}{N_A}$ i Boltzmanovu konstantu $k = \frac{R}{N_A} = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K, jednadžbu stanja plina možemo pisati i kao:

$$pV = NkT$$

13.4. Kalorimetrija. Toplinski kapaciteti

13.4.1. Toplinski kapaciteti

Toplina je energija koja prelazi s jednog tijela na drugo zbog njihove temperaturne razlike. Prije se kao jedinica za toplinu koristila kalorija (cal) - toplina koja je potrebna da se 1g vode ugrije od 14,5^o do 15,5^{o}C. Danas se kao jedinica za toplinu koristi J (isto kao za rad i energiju). Veza cal i J: 1 cal = 4,1868 J

Toplinski kapacitet nekog tijela je omjer topline Q, koju je potrebno dovesti tijelu da bi mu se povisila temperatura ta ΔT, i temperaturne razlike ΔT:

$$C_t = \frac{Q}{\Delta T}$$

Topl. kapacitet često ovisi o materijalu od kojeg je načinjeno tijelo, o masi tijela i o temperaturi tijela. Da bismo izbjegli ovisnost o masi, uvodimo specifični topl. kapacitet c:

$$c = \frac{C_t}{m} \Rightarrow c = \frac{1}{m}\frac{Q}{\Delta T} \quad \text{[J/kgK]}$$

Toplina koju dovodimo nekom tijelu, ili je odvodimo od tijela je: $Q = mc\Delta T$

m - masa tijela
c - spec. topl. kapacitet materijala od kojeg je napravljeno tijelo
ΔT - razlika između poč. i kon. temperature tijela

Pretpostavili smo da je u promatranom temp. intervalu spec. topl. kapacitet konstanta (što obično ne vrijedi za veće ΔT).

S obzirom da je spec. topl. kapacitet funkcija temperature, obično pišemo:

$$C = \frac{C_t}{n} = \frac{1}{n}\frac{dQ}{dT} \cdot \frac{m}{m} = Mc$$

M - molarna masa
c - spec. topl. kapacitet.

Količina topline Q potrebna da se tijelu povisi temperatura za ΔT ovisi o načinu kako tijelo zagrijavamo:

- zagrijemo li tijelo izobarno (p = konst.), tada mu se osim unutrašnje energije (temperature) povećava i volumen
- pri izohornom zagrijavanju (V = konst.) sva dovedena toplina se troši na povećanje unutrašnje energije jer V ostaje konst.

Topline u ta dva različita procesa su različite premda je ΔT ista. To nas navodi na to da spec. topl. kapacitet nije jednoznačno definiran i da moramo označiti kojim smo procesom tijelo doveli iz poč. u kon. stanje. Definiramo spec. topl. kapacitete pri stalnom tlaku c_p i stalnom volumenu c_V:

$$c_p = \frac{1}{m}\left(\frac{dQ}{dT}\right)_{p=konst.} \qquad c_V = \frac{1}{m}\left(\frac{dQ}{dT}\right)_{V=konst.}$$

Tablica 12.3. Specifični toplinski kapaciteti za neka čvrsta tijela i tekućine

Tvar	c/(kJ/kg K)	Tvar	c/(kJ/kg K)
alkohol	2,4	platina	0,12
aluminij	0,9	srebro	0,23
bakar	0,39	staklo	0,8
cink	0,39	voda	4,19
led	2,1	željezo	0,45
olovo	0,13	živa	0,14

Tablica 12.4. Specifični toplinski kapaciteti nekih plinova

Plin	c_p/(kJ/kg K)	c_V/(kJ/kg K)
dušik N_2	1,04	0,74
helij He	5,23	3,15
kisik O_2	0,92	0,650
vodena para H_2O	1,9	1,4
vodik H_2	14,2	10,1
zrak $N_2 + O_2$	1	0,71

2 tablice sa spec. topl. kapacitetima za neka čvrsta tijela, tekućine i plinove (srednje vrijednosti na sobnim temperaturama) – TABLICA 12.3. I TABLICA 12.4. – KULIŠIĆ – str.190

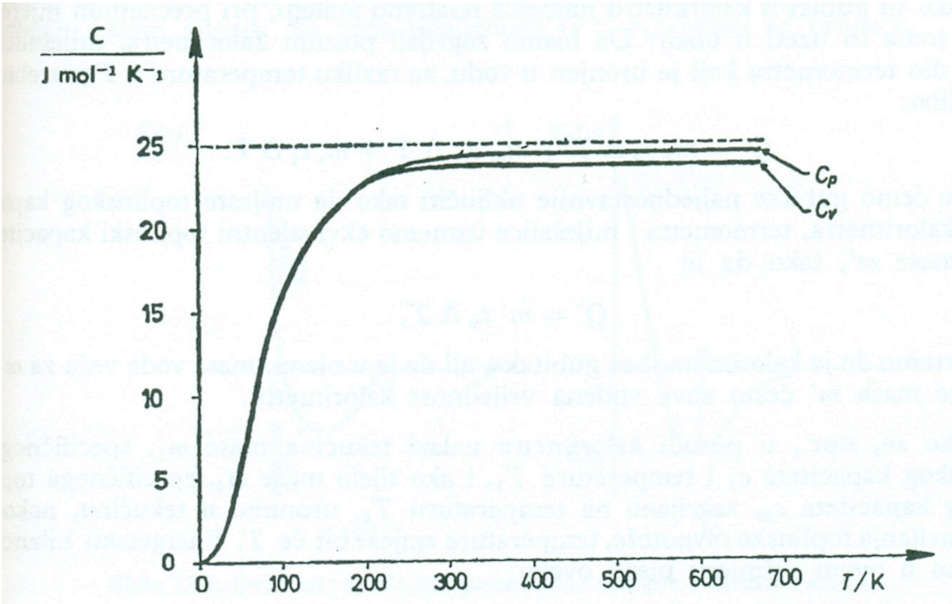
Veliki spec. topl. kapacitet vode (4190 J/kgK) čini je dobrim sredstvom za prijenos topline i za uskladištenje toplinske energije.

Eksperimentalno se spec. topl. kapacitet čvrstih tijela i tekućina određuje zagrijavanjem uzoraka pri stalnom tlaku dobijemo c_p. c_V za čvrsta tijela i tekućine je nemoguće mjeriti zbog velikih napetosti koje nastaju u materijalu. No iz poznatog c_p se može izračunati c_v preko Nernst-Lindemannove relacije:

$$c_v = c_p\left(1 - 0{,}0051\frac{molK}{J}Mc_p\frac{T}{T_m}\right) \quad (*)$$

T - temperatura čvrstog tijela
T_m - temperatura taljenja

Pomoću (*) i eksperimentalnih vrijednosti za c_p dobivena je ovisnost molarnog topl. kapaciteta bakra o temperaturi



Slika 12.6. Ovisnost molarnoga toplinskog kapaciteta bakra o temperaturi

SLIKA: OVISNOST MOLARNOG TOPL. KAPACITETA BAKRA O TEMPERATURI – KULIŠIĆ – slika 12.6. str. 191

U početku (počevši od apsolutne nule) mol. topl. kapaciteti naglo rastu s T ($C \sim T^3$) da bi na višim T poprimili konst. vrijednost ($C \sim 3R = 3{\cdot}8{,}3$ J/molK = 25 J/molK). Spec. topl. kapaciteti za razne metale se dosta razlikuju dok su mol. topl. kapaciteti približno isti (~25 J/molK). Ta pravilnost je izražena Dulong - Petitovim zakonom: toplina potrebna da se neki metal zagrije ovisi samo o broju molekula, a ne o njihovoj veličini i masi. Taj empirijski zakon pokazuje vezu između makroskopskog svojstva tvari i njezine atomske strukture.

13.4.2. Kalorimetrija

Kalorimetrija je grana fizike, odn. fizikalne kemije koja se bavi mjerenjem topline, spec. i mol. kapaciteta, i drugih toplinskih svojstva materijala. Metoda smjese je najjednostavnija metoda mjerenja srednjih spec. topl. kapaciteta u području temperatura od 0°C do 100°C. Mjerenje se vrši u kalorimetru koji se sastoji od 2 posude. Postavljene su jedna u drugoj, a između njih je toplinski izolator (zrak, vakuum...).

Dva sustava:

- jedan mase m_1 i temperature T_1

drugi mase m_2 i temperature T_2

se pomiješaju u kalorimetru i toplina prelazi iz toplijeg sustava u hladniji dok se ne uspostavi toplinska ravnoteža, tj. izjednači temperatura.

Pretpostavlja se da nema topl. gubitaka i da je toplina Q_1 koju preda topliji spremnik, jednaka toplini Q_2 koju primi hladniji spremnik. Za precizna mjerenja uračunamo gubitke:

$$Q' = m_k c_k \Delta T + m_m c_m \Delta T + m_t c_t \Delta T$$

$m_k c_k \Delta T$ - zagrijavanje kalorimetra
$m_m c_m \Delta T$ - zagrijavanje miješalice
$m_t c_t \Delta T$ - zagrijavanje dijela termometra uronjenog u vodu

Uključivanje gubitaka tako da uzmemo ekvivalentni toplinski kapacitet vode mase m':

$$Q' = m' c_v \Delta T$$

Smatramo da je kalorimetar bez gubitaka, a u njemu i masa vode veća za m'. m' je vodena vrijednost kalorimetra.

Primjer:

u posudi kalorimetra je tekućina mase m_1, spec. topl. kapaciteta c_1 i temperature T_1
tijelo mase m_2, spec. topl. kapaciteta c_2 zagrijano na temperaturu T_2 uronimo u tekućinu
nakon uspostavljanja toplinske ravnoteže temperatura smjese bit će T

$$m_2 c_2 (T_2 - T) = m_1 c_1 (T - T_1) + m' c_v (T - T_1)$$

To je tzv. Richmannovo pravilo za određivanje spec. topl. kapaciteta.

13.5. Agregatna stanja

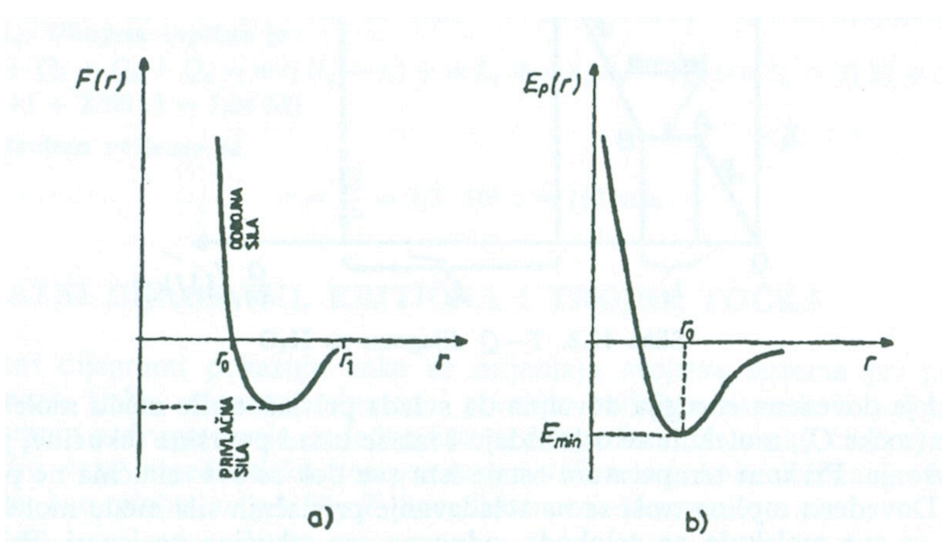
Tvar se može nalaziti u tri agregatna stanja:

- čvrstom
- tekućem
- plinovitom

Primjer: čvrsto - led
tekuće - voda
plinovito - para

Umjesto agregatnog stanja u fizici se koristi izraz faza no to nije u potpunosti isto jer u jednom agregatnom stanju može biti i više faza. Faza je homogeni dio nekog sustava koji u svim svojim dijelovima ima ista svojstva i koji je određenom granicom odvojen od ostalih dijelova sustava. Za prijelaz tvari iz jednog agregatnog sustava u drugo moramo se svesti na molekulsku strukturu tvari. Atomi su unutar molekula vezani silama električne prirode. Za opis molekulske i atomske strukture potrebna nam je kvantna fizika no sad se time nećemo baviti.

Ako promatramo 2-atomnu molekulu, onda vidimo da sila ovisi o udaljenosti dvaju atoma u molekuli.



Slika 12.7. Ovisnost: a) sile i b) potencijalne energije o razmaku atoma

SLIKA: OVISNOST SILE I POTENCIJALNE ENERGIJE O RAZMAKU ATOMA – KULIŠIĆ – slika 12.7. str. 193

Kad su atomi na međusobnoj udaljenosti $r = r_0$, molekula je u ravnotežnom stanju → potencijalna energija je minimalna. Kad je $r < r_0$, atomi se odbijaju jakim silama. Kad je $r > r_0$, atomi se privlače.

Molekule također djeluju jedna na drugu molekulskim silama - Van der Waalsove sile (slične atomskim silama, ali slabijeg intenziteta).

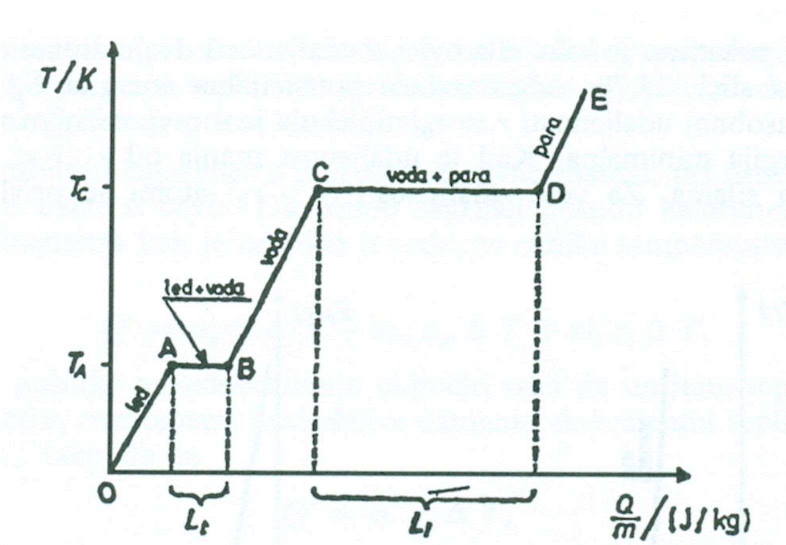
U idealnom plinu su molekule daleko jedna od druge ($r > r_0$) pa su molekulske sile zanemarive.

Molekule se stalno gibaju:

- kod čvrstih tijela molekule (ili atomi) titraju ako određenih položaja koji su pravilano raspoređeni i tvore kristalnu rešetku
- u tekućina su su međumolekulske udaljenosti veće, pa su privlačne sile slabije i molekule mobilnije
- u plinovima su molekule daleko jedna od druge, međumolekulske sile su slabe, molekule se slobodno gibaju i ne djeluju jedna na drugu

Ako je materija u čvrstom stanju u obliku kristala molekule su poredane u kristalnoj rešetki i titraju oko položaja, koji su određeni minimalnom potencijalnom energijom. Titranje svake molekule je zbroj velikog broja harmoničnih titranja s frekvencijama ovisnim o molekulskim silama. Dovođenjem topline titranje se povećava → povećava se srednja kinetička energija, a time i temperatura tvari.

Promotrimo *T*-*Q* dijagram za H_2O



Slika 12.8. $T-Q$ dijagram za H_2O

SLIKA: *T-Q* DIJAGRAM ZA VODU – KULIŠIĆ – slika 12.8. str. 194

Područje OA predstavlja zagrijavanje čvrste faze tog materijala dok temperatura ne dosegne temperaturu tališta T_A. Pobuda molekula dovoljno je velika da molekule napuste svoja mjesta u rešetki → rešetka se raspada → tvar se tali i čvrsta faza prelazi u tekuću fazu. Sve dok se tvar potpuno ne rastali, sva dovedena energija u obliku topline se troši na gibanje i sudare molekula → povećava se pot. energija molekula, a srednja kin.

energija (i temperatura) ostaje konstantna (dio AB). Daljnjim dovođenjem topline ponovo se povećava temperatura tekućine (BC dio). U točki C je dovedena energija dovoljno velika da savlada privlačne međumolekulske sile u tekućinu molekule se oslobađaju i izlaze iznad površine tekućine (dio CD) → počinje vrenje. Temperatura ostaje ista dok se sva tekućina ne pretvori u paru → dovedena energija troši se na savladavanje međumolekulskih sila dok se molekule ne oslobode. Privlačne sile među molekulama su velike u tekućinama. U dijelu DE dalje se povećava kinetička energija molekula, a time i temperatura pare.

Latentna toplina transformacije je toplina koja se apsorbira ili oslobađa pri prijelazu jedne faze u drugu.

Za taljenje: $Q = mL_t$

L_t- specifična toplina taljenja ili latentna toplina taljenja

Za isparavanje: $Q = mLi$

L_i- specifična toplina isparavanja ili latentna toplina isparavanja

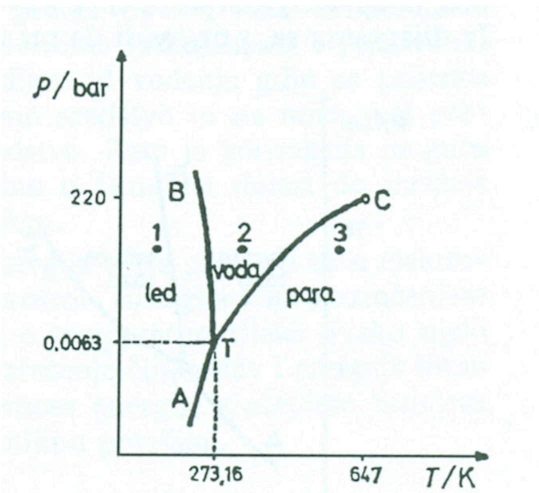
Tablica 12.5. Latentne topline transformacije

Materijal	Talište °C	L_t kJ/kg	Vrelište °C	L_i kJ/kg
alkohol (etanol)	—114	105	78	850
aluminij	660	390	2 056	8 375
bakar	1 083	180	2 300	7 327
dušik	—210	26	—196	200
kisik	—219	14	—183	213
olovo	327	25		
platina	1 774	114	4 300	2 680
voda	0	333	100	2 260
željezo	1 535	23	3 000	6 780
živa	—39	12	357	280

TABLICA:LATENTNE TOPLINE TRANSFORMACIJE – KULIŠIĆ – TAB.12.5. STR. 194

13.6. Fazni dijagrami

Fazni dijagram je prikaz promjena svojstava sustava pri promjeni temperature, tlaka i volumena, te prikaz prijelaza sustava iz jednog agregatnog stanja u drugo (iz jedne faze u drugu). Vezu između tlaka, temperature i volumena za svaku čistu tvar grafički prikazujemo kao plohu u *p-V-T* koordinatnom sustavu. U praksi umjesto volumena uzimamo ili specifični volumen v $(v = V/m)$, ili molarni volumen V_m $(V_m = V/n)$, pa crtamo *p-v-T* dijagram ili p-V_m-T dijagram. S obzirom da su 3D *p-V-T* dijagrami nepregledni, obično razmatramo njihove projekcije: 2D *p-T* i *p-V* dijagrame.



Slika 12.9. Fazni $p-T$ dijagram za H_2O

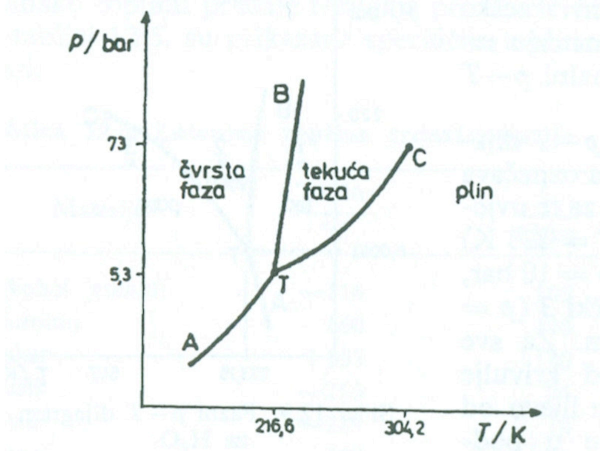
SLIKA: FAZNI *p-T* DIJAGRAM ZA H_2O – Kulišić – slika 12.9. str. 195

Točka 1 - led: p=10 bar, T=223K
Točka 2 - voda: p=10 bar, T=323K
Točka 3 - para: p=10 bar, T=573K
Sve točke ispod krivulje ATC - para.
Sve točke ispod krivulje ATC - para.
Sve točke između od krivulje TB i TC - voda.

Krivulja AT- skup točaka ravnotežnog stanja čvrstog stanja i pare → KRIVULJA SUBLIMACIJE (led i para)
Krivulja TB- ravnotežna stanja leda i vode (nema završetka)
Krivulja TC - ravnotežna stanja vode i pare (KRIVULJA ISPARAVANJA - KONDENZACIJE) završava u točki C.
Točka C - kritična točka određena kritičnom temperaturom T_c, kritičnim tlakom p_c i kritičnim volumenom v_c odnosno V_{mc}. Na $T > T_c$ izotermnom kompresijom plina nije moguće plin ukapljiti, tj. opaziti likvefakciju i stvaranje kapi tekućine, odn. formiranje granice između tekuće i plinovite faze. Povećanjem tlaka u području $p > p_c$ i $T > T_c$ može se postići kontinuirani prijelaz iz rijetkih u vrlo zgusnute plinove (koji se po svojim

svojstvima ne razlikuju od tekućih). U kritičnoj točki volumeni tvari tvari u plinskoj i tekućoj fazi su jednaki.

Na *p-T* dijagram postoji jedna točka (p_t, T_t) kad su sve 3 faze u ravnoteži → tvar je istovremeno u sve 3 faze → TROJNA TOČKA. Za vodu: (p_t, T_t) = (6,3mbar, 273,16K→0,01^{o}C) Temperatura trojnog stanja vode je uz apsolutnu nulu fiksna točka termodinamičke temperaturne skale.



Slika 12.10. Fazni $p-T$ dijagram za CO_2

SLIKA:FAZNI *p-T* DIJAGRAM ZA CO_2 - Kulišić – slika 12.10. STR. 196

Razlika CO_2 i H_2O u dijelu krivulje TB

- za H_2O se temperatura tališta smanjuje s povećanjem tlaka
- za CO_2 se temperatura tališta povećava s povećanjem tlaka

12. Dinamika tekućina

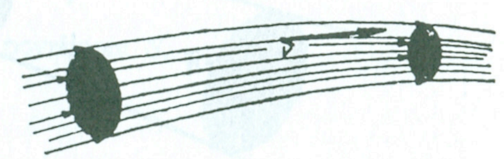
12.1. Svojstva idealne tekućine. Strujanje tekućina

1. Kad se fluid giba, odnosno struji, među njegovim česticama i slojevima se javlja unutrašnje trenje (viskozno trenje) uzrokovano međumolekulskim kohezionim silama.
   Kad se tijelo giba kroz viskozni fluid, također nastaje sila trenja baš zbog viskoznosti fluida i ona se zove otpor sredstva.
   Ako je to **unutrašnje trenje zanemarivo**, kažemo da je fluid idealan.
   No zakoni izvedeni za strujanje idealnog fluida mogu se u mnogo slučajeva neposredno ili posredno uz određene promjene primijeniti i na realne fluide.
2. Pretpostavit ćemo da je **fluid nestlačiv**, to jest da mu je gustoća konstantna.
   Ta je pretpostavka dobra za tekućine, a vrijedi i za plinove kada brzine strujanja nisu prevelike.
   Pri manjim brzinama su promjene tlaka (a time i volumena) zanemarivo male pa je gustoća približno konstantna.
3. **Temperatura je stalna**.
4. **Tok fluida je jednolik** pa brzina i tlak ne ovise o vremenu.
5. **Tok je slojevit**, odnosno laminaran, a ne turbulentan.

Gibanje tekućine ili plina zovemo **strujanjem**. Strujanje nastaje zbog vlastite težine fluida ili zbog razlike u tlakovima. Strujanje fluida možemo opisati tako da brzinu u svakoj točki prostora odredimo kao funkciju vremena.

Strujnica je zamišljena linija u fluidu čija tangenta u svakoj točki pokazuje smjer brzine. Gustoća strujnica proporcionalna je iznosu brzine: gdje su strujnice gušće, brzina fluida je veća, i obrnuto.

Dio fluida omeđen strujnicama nazivamo **strujnom cijevi**.

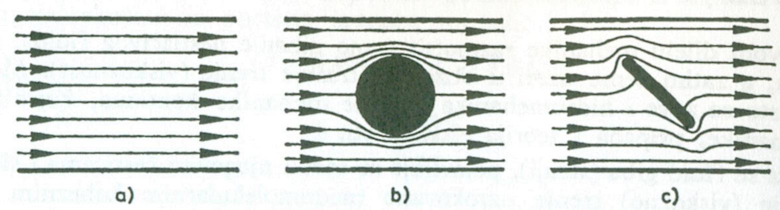


Slika 11.1. Strujna cijev

SLIKA: STRUJNA CIJEV – Kulišić - Slika 11.1 str. 161

Strujanje je **stacionarno** ako se slika strujanja u prostoru ne mijenja s vremenom. Pri stacionarnom strujanju su brzina čestice i tlak samo funkcije položaja, a ne i vremena. Pri nestacionarnom strujanju brzina i tlak u pojedinoj točki ovise i o vremenu. Pri stacionarnom strujanju putanja (to jest niz uzastopnih položaja koje čestica fluida zauzima pri gibanju) poklapa se sa strujnicom. Strujnice pri takvom stacionarnom strujanju ne ulaze niti izlaze iz strujne cijevi.

Gibanje tijela kroz fluid možemo proučavati tako da promatramo strujanje fluida oko nepomičnog tijela.



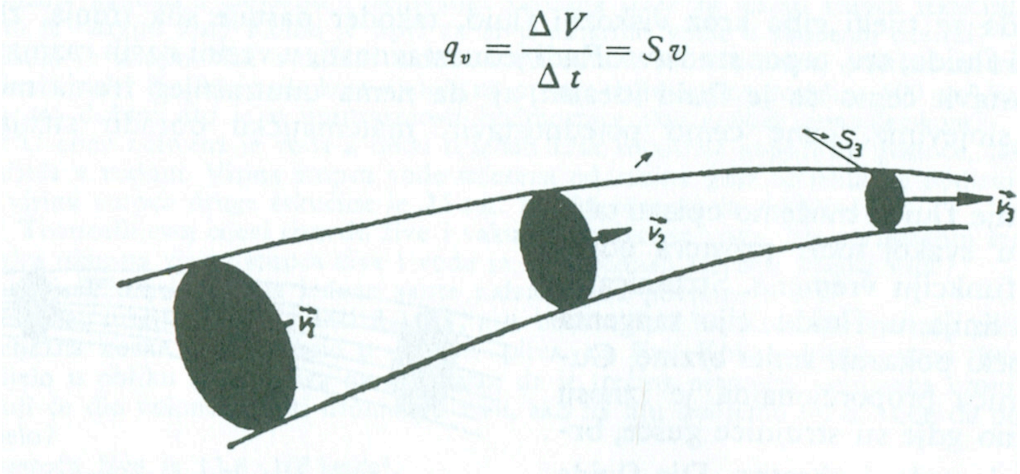
Slika 11.2. Strujanje idealnog fluida

SLIKA: STRUJANJE IDEALNOG FLUIDA – Kulišić – slika 11.2. str. 162

Na slici imamo strujanje idealnog fluida kroz cijev (a), oko kružnog valjka (b) i ravne ploče (c). Npr. iz slike (b) vidimo da su iza i ispred valjka u simetričnim točkama brzine jednake, tlakovi također, tako da je rezultantna sila pritiska nula i valjak se giba kroz fluid bez otpora.

12.2. Jednadžba kontinuiteta

Promatrat ćemo strujanje fluida kroz strujnu cijev različitog presjeka.



Slika 11.3. Uz izvod jednadžbe kontinuiteta

SLIKA: UZ IZVOD JEDNADŽBE KONTINUITETA – Kulišić – slika 11.3. str. 162

Ako promatramo idealni fluid, to znači da je unutrašnje trenje zanemarivo i da je brzina u svim točkama određenog presjeka jednaka. Za vrijeme Δt kroz promatrani presjek S prođe volumen fluida $V = Sv\Delta t$.

Volumni protok definiramo kao omjer volumena tvari koja protekne za vrijeme Δt i tog vremena:

$$q_v = \frac{\Delta V}{\Delta t} = Sv$$

Ako je fluid nestlačiv, to jest gustoća fluida je u svim točkama konstantna, te unutar strujne cijevi nema ni izvora ni ponora, masa fluida, koja u vremenu Δt protekne kroz bilo koji presjek je konstantna:

$$\rho S_1 v_1 \Delta t = \rho S_2 v_2 \Delta t = konst$$

Slijedi da je konstantan i protok: $Sv = konst$

To je **jednadžba kontinuiteta** ili **zakon o neuništivosti tvari**. Iz jednadžbe kontinuiteta slijedi da je tamo gdje je cijev uža (S manji), brzina fluida veća (strujnice su gušće), i obrnuto. Fluid se ubrzava tamo gdje se cijev sužava pa na čestice fluida djeluje sila usmjerena od šireg dijela cijevi prema užem. Ta sila nastaje zbog razlike tlakova: tlak u širem dijelu cijevi veći je nego tlak u užem dijelu cijevi. Ako brzina nije jednaka u svim točkama presjeka S, protok se računa tako da se presjek podijeli na dovoljno malene elemente površine ΔS na kojima je brzina konstantna. Protok kroz presjek S je tada jednak zbroju, odnosno u graničnom slučaju integralu:

$$q_v = \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

Vektor $d\vec{S}$ ima smjer normale na element površine.

Ako tekućina izlazi iz površine, $\vec{v} \cdot d\vec{S}$ je pozitivan, a ako ulazi, onda je negativan.

Ukupan protok kroz dio strujne cijevi omeđen presjecima S_1 i S_2 je:

$$q_v = \iint_{S_1} \vec{v} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{v} \cdot d\vec{S} = 0$$

Na plaštu cijevi je $\vec{v} \cdot d\vec{S} = 0$ jer tekućina ne prolazi kroz plašt cijevi i tamo je $\vec{v} \perp d\vec{S}$. Zadnju jednadžbu možemo pisati i u obliku:

$$\oiint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = 0$$

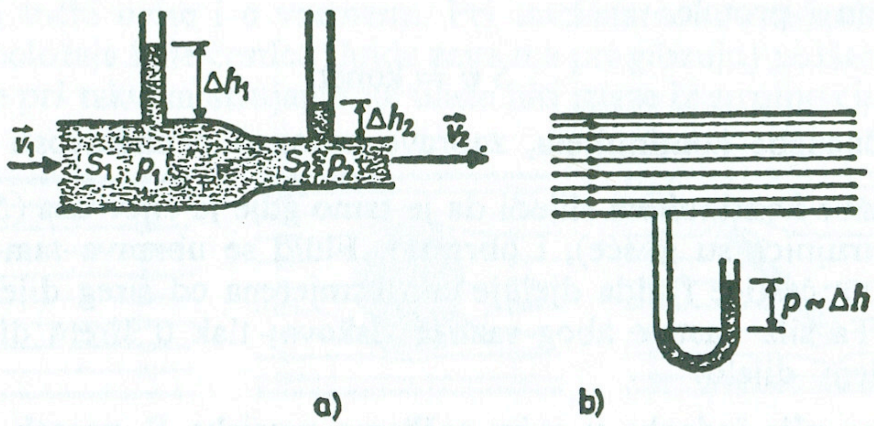
S je zatvorena površina sastavljena od presjeka S_1 i S_2, te plašta cijevi. Vektor $d\vec{S}$ ima smjer vanjske normale na zatvorenu površinu. Ovo je općeniti oblik jednadžbe kontinuiteta ako je gustoća konstantna. Ako gustoća nije konstantna, može se pokazati da jednadžba kontinuiteta glasi:

$$\oiint_S \rho\vec{v} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV$$

V je volumen omeđen zatvorenom površinom S.

12.3. Bernoullijeva jednadžba i njezine primjene

1738. godine Bernoulli je postavio **zakon o raspodjeli tlakova unutar strujne cijevi** koji je danas poznat kao **Bernoullijeva jednadžba**.

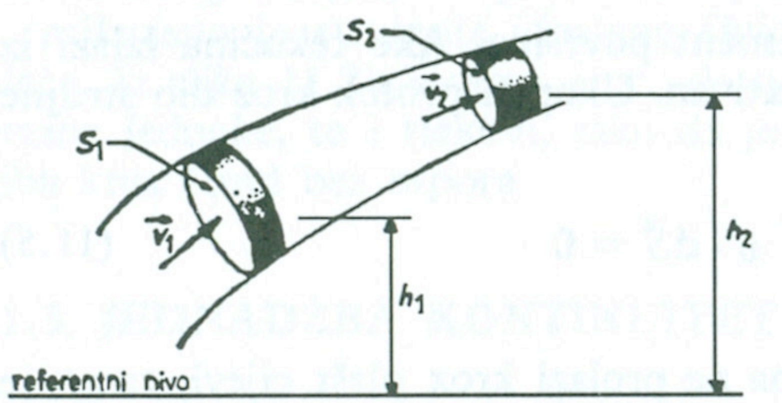


Slika 11.4. Mjerenje statičkog tlaka: a) u tekućini i b) u plinu

SLIKA: MJERENJE STATIČKOG TLAKA: a) U TEKUĆINI, b) U PLINU – Kulišić – slika 11.4. str. 164

Pokus je pokazao da je tlak manji na mjestu gdje je brzina veća, i obrnuto (slika a). Tlak na pojedinom mjestu u strujnoj cijevi možemo mjeriti pomoću vertikalne staklene cjevčice ili vertikalnog otvorenog manometra (slika b). Taj takozvani **statički tlak** proporcionalan je visini stupca tekućine u cjevčici.

Promatrat ćemo stacionarno strujanje idealnog fluida kroz strujnu cijev promjenjivog presjeka.



Slika 11.5. Uz izvod Bernoullijeve jednadžbe

SLIKA: UZ IZVOD BERNOULLIJEVE JEDNADŽBE – Kulišić – slika 11.5. str. 164

Pretpostavili smo da je fluid idealan, to jest zanemarili smo unutrašnje trenje (viskoznost). S obzirom da smo pretpostavili da je strujanje fluida stacionarno, na određenom mjestu u cijevi čestice uvijek imaju istu brzinu.

Na mjestu gdje je presjek cijevi S_1, brzina je v_1 i tlak p_1, a na mjestu presjeka cijevi S_2 brzina je v_2 i tlak p_2. Neka za vrijeme Δt kroz presjek S_1 protekne masa fluida:

$$\Delta m = \rho S_1 v_1 \Delta t$$

Jednaka masa, odnosno volumen mora u tom vremenu proći i kroz presjek S_2, pa će iscrtkani volumeni na slici biti jednaki:

$$\Delta V = S_1 v_1 \Delta t = S_2 v_2 \Delta t = \frac{\Delta m}{\rho}$$

Ovo je jednadžba kontinuiteta primijenjena na ovaj slučaj.

Dok fluid mase Δm prolazi kroz presjek S_1, rad tlačne sile je:

$$\Delta W_1 = F_1 \Delta s_1 = p_1 S_1 v_1 \Delta t = p_1 \frac{\Delta m}{\rho}$$

Rad koji izvrši fluid mase Δm pri izlasku kroz presjek S_2 iz promatranog dijela strujne cijevi je:

$$\Delta W_2 = -p_2 S_2 v_2 \Delta t = -p_2 \frac{\Delta m}{\rho}$$

Predznak minus je u slučaju kad su smjerovi sile i pomaka suprotni. Na presjeku S_1 je rad ΔW_1 izvršen nad sustavom, a na presjeku S_2 sustav vrši rad protiv sila vanjskog tlaka p_2. Zato je ukupni rad izvršen nad sustavom:

$$\Delta W = \Delta W_1 - \Delta W_2 = (p_1 - p_2) \frac{\Delta m}{\rho}$$

S obzirom da nema trenja, rad vanjskih sila pritiska jednak je promjeni energije čitavog razmatranog volumena fluida ograničenog stijenkama strujne cijevi i presjecima S_1 i S_2. Međutim, promjena energije čitavog tog volumena jednaka je razlici kinetičke energije i potencijalne energije iscrtkanih malih volumena $\Delta V_1 = S_1 \Delta s_1$ i $\Delta V_2 = S_2 \Delta s_2$:

$$\Delta E = E_{k2} - E_{k1} + E_{p2} - E_{p1} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 + mgh_2 - mgh_1$$

Kad izjednačimo rad ΔW i promjenu energije ΔE:

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho} = \frac{1}{2}v_2^2 - \frac{1}{2}v_1^2 + gh_2 - gh_1 \,/\cdot \rho$$

Dobijemo: $p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 - \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_2 - \rho g h_1$

Odnosno: $p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$

Ovo je **Bernoullijeva jednadžba za stacionarno strujanje nestlačivog idealnog fluida**.

Često se piše u obliku: $p + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v^2 = konst$

U svakoj točki neke strujnice zbroj

- statičkog tlaka p,
- tlaka uzrokovanog visinskom razlikom pojedinih dijelova fluida $\rho g h$ i
- dinamičkog ili brzinskog tlaka $\frac{1}{2}\rho v^2$

uvijek je konstantan.

Ako je cijev horizontalna, ili ako je gustoća fluida malena (kao kod plinova), tlak $\rho g(h_2 - h_1)$ je zanemariv i Bernoullijeva jednadžba poprima oblik:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Iz jednadžbe se vidi da je na mjestima gdje je veća brzina fluida, tlak je manji, i obrnuto.

Kad fluid miruje, tj. $v_1 = v_2 = 0$, Bernoullijeva jednadžba prelazi u oblik:

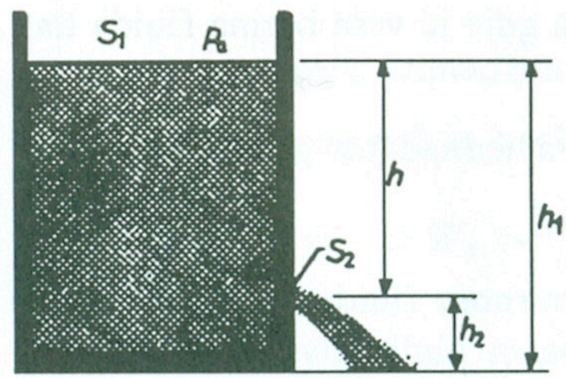
$$p_1 - p_2 = \rho g (h_2 - h_1)$$

To je poznati izraz za razliku tlakova u mirnom fluidu.

Primjene Bernoullijeve jednadžbe

1. Istjecanje tekućine kroz mali otvor

Neka se na stijenci otvorene široke posude nalazi mali otvor na dubini *h* tekućine.



Slika 11.6. Istjecanje tekućine kroz mali otvor

SLIKA: ISTJECANJE TEKUĆINE KROZ MALI OTVOR – Kulišić – Slika 11.6. str. 166

Tražimo brzinu i protok tekućine kroz taj otvor. Primijenit ćemo Bernoullijevu jednadžbu za dva presjeka: za otvorenu površinu tekućine S_1 i za presjek S_2 mlaza tekućine na otvoru. Na presjeku S_1 tlak p_1 jednak je atmosferskom p_a , a brzina vrlo malena, praktički zanemariva. Na presjeku S_2 tlak je također atmosferski p_a, a brzina v_2 te je:

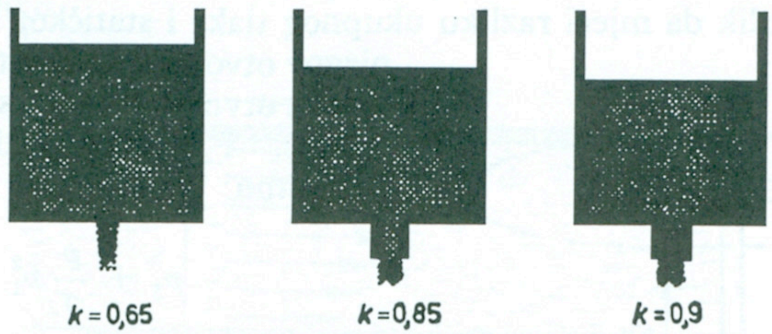
$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Odnosno: $p_a + \rho g h_1 = p_a + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$

Odatle slijedi: $v_2 = \sqrt{2g(h_1 - h_2)} = \sqrt{2gh}$

To je **Torricellijev zakon istjecanja tekućine kroz mali otvor**. Vidimo da je brzina tekućine ista kao kad tekućina slobodno pada s iste visine. Ovaj zakon vrijedi samo za idealne tekućine dok je za realne tekućine zbog unutrašnjeg trenja, brzina istjecanja manja.

Pri istjecanju tekućina kroz otvor javlja se i kontrakcija mlaza: efektivni presjek mlaza obično je manji od presjeka otvora.



Slika 11.7. Kontrakcija mlaza

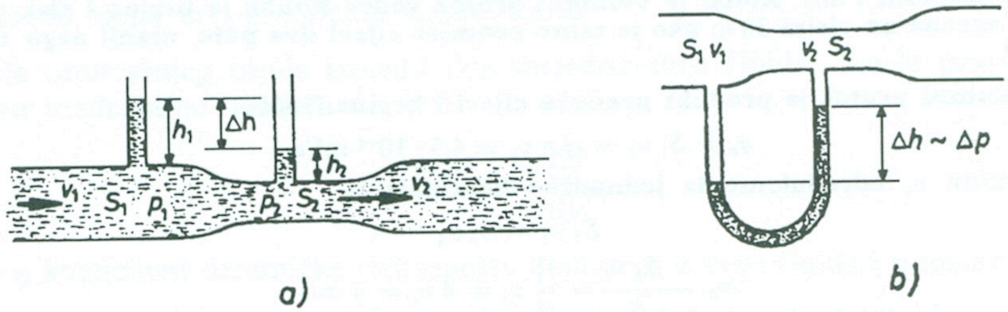
SLIKA: KONTRAKCIJA MLAZA – Kulišić – slika 11.7. str. 167

Koeficijent kontrakcije *k*, koji obično ovisi o tekućini i o obliku otvora, najčešće iznosi od 0,6 do 0,9. Protok je u tom slučaju:

$$q_v = kSv = kS\sqrt{2gh}$$

2. Venturijeva cijev

Venturijeva cijev (Venturi (1746-1822), talijanski fizičar) je cijev sa suženjem u sredini i služi za mjerenje brzine i protoka fluida.



Slika 11.8. Venturijeva cijev

SLIKA: VENTURIJEVA CIJEV – Kulišić – slika 11.8. str. 167

Primjenom Bernoullijeve jednadžbe i jednadžbe kontinuiteta može se iz razlike tlakova izračunati brzina i protok fluida pa ćemo napisati obje jednadžbe za širi i uži presjek cijevi:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$v_1 S_1 = v_2 S_2$$

Slijedi da je brzina fluida: $v_1 = \sqrt{\dfrac{2\Delta p}{\rho\left[\left(\dfrac{S_1}{S_2}\right)^2 - 1\right]}}$

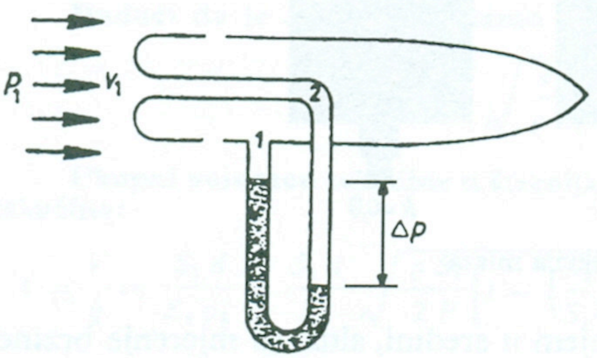
Protok je: $q_v = v_1 S_1 = S_1 S_2 \sqrt{\dfrac{2\Delta p}{\rho(S_1^2 - S_2^2)}}$

Ovako iz poznatih presjeka S_1 i S_2, te očitavanjem razlike tlakova na manometru Venturijeve cijevi, možemo izračunati brzinu i protok fluida kroz cijev.

3. Pitot-Prandtlova cijev

Pitot (1695-1771), francuski fizičar, Prandtl (1875-1953), njemački fizičar.

U toj cijevi mjerenjem dinamičkog tlaka možemo odrediti brzinu strujanja plina.



Slika 11.9. Pitot-Prandtlova cijev

SLIKA: PITOT-PRANDTLOVA CIJEV – Kulišić – slika 11.9. str. 168

Manometar Pitot-Prandtlove cijevi ima takav oblik da mjeri razliku ukupnog tlaka i statičkog tlaka jer je jedan njegov otvor u smjeru strujanja fluida. U tom se otvoru fluid zaustavlja pa je brzina $v_2 = 0$ i iz Bernoullijeve jednadžbe dobijemo:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2$$

Odnosno: $\frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 - p_1 = \Delta p$

Slijedi: $v_1 = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}$

Pitot-Prandtlova cijev može poslužiti za mjerenje brzine aviona i općenito je pogodnija za mjerenje većih brzina dok se Venturijeva cijev koristi za mjerenje manjih brzina.

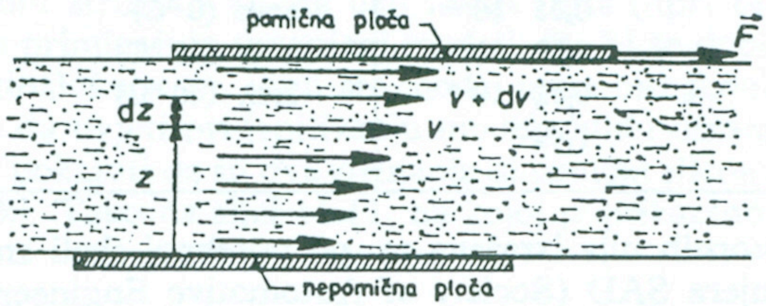
12.4. Viskoznost. Laminarno i turbulentno strujanje

12.4.1. Viskoznost

Kod proučavanja idealnih fluida zanemarili smo trenje između slojeva fluida. Međutim, to ne možemo učiniti kod realnih fluida jer pri njihovom protjecanju međumolekulekulske sile uzrokuju **unutrašnje trenje** ili **viskoznost**.

Ako se tijelo giba kroz realni fluid, također se javlja **sila viskoznosti** koja **djeluje suprotno gibanju**. Usporedbom s običnim trenjem u mehanici vidimo da sila trenja postoji i kad tijelo miruje dok se viskoznost javlja samo kod gibanja.

Zamislimo sloj fluida između dviju ploča od kojih je jedna, npr. donja, nepomična, a na gornju, pomičnu, djelujemo tangencijalnom silom F tako da se ploča giba jednoliko.



Slika 11.10. Trenje u fluidu

SLIKA: TRENJE U FLUIDU – Kulišić – slika 11.10. str. 169

Kako se ploča giba, tako povlači za sobom sloj fluida, a taj sloj silama djeluje na susjedni sloj i tako redom. Najbrže će se gibati sloj uz gornju (pomičnu) ploču, dok će sljedeći slojevi imaju sve manju i manju brzinu. Gibanje fluida u slojevima nazivamo **laminarno** ili **slojevito strujanje** (latinski *lamina* = sloj). Pri takvom strujanju slojevi fluida se ne miješaju.

Ako je brzina fluida veća od kritične brzine, više nemamo laminarno strujanje već **turbulentno strujanje** kod kojeg se slojevi miješaju i nastaju vrtlozi.

Kad se ploča na koju djelujemo stalnom silom F giba jednoliko, sila unutrašnjeg trenja uravnotežuje vanjsku silu F. Još je Newton utvrdio da sila unutrašnjeg trenja ovisi o:

- površini dodirnih slojeva S,
- vrsti fluida,
- promjeni brzine od sloja do sloja, tzv. gradijentu brzine dv/dz.

Sila unutrašnjeg trenja između dva susjedna sloja fluida, čija je površina S i koji su međusobno udaljeni dz, je:

$$F_{tr} = \eta S \frac{dv}{dz}$$

Ovdje je η koeficijent dinamičke viskoznosti, koja ovisi o vrsti fluida i o temperaturi. Jedinica koeficijenta dinamičke viskoznosti je paskal sekunda:

$$[\eta] = \frac{Ns}{m^2} = Pas$$

Kinematička viskoznost je omjer dinamičke viskoznosti i gustoće fluida:

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}$$

Jedinica kinematičke viskoznosti je:

$$[\nu] = \frac{m^2}{s}$$

Ako pogledamo ovisnost viskoznosti o temperaturi, onda možemo vidjeti da s porastom temperature viskoznost tekućina pada, a plinova raste.

Tablica 11.1. Dinamičke viskoznosti nekih fluida pri različitim temperaturama

Fluid	η/(Pa s)	Fluid	η/(Pa s)
voda (20 °C)	10^{-3}	živa (20 °C)	$1,6 \cdot 10^{-3}$
voda (50 °C)	$0,55 \cdot 10^{-3}$	zrak (0 °C)	$1,7 \cdot 10^{-3}$
voda (100 °C)	$0,28 \cdot 10^{-3}$	zrak (20 °C)	$1,8 \cdot 10^{-3}$
alkohol (20 °C)	$0,12 \cdot 10^{-3}$	zrak (40 °C)	$1,9 \cdot 10^{-3}$
glicerin (20 °C)	1,49		

TABLICA – Kulišić – tablica 11.1. str. 170

12.4.2. Laminarno i turbulentno strujanje

Pri manjim brzinama realni fluid struji laminarno, tj. u slojevima. Svaki sloj tekućine ima svoju brzinu koje s eobično razlikuju. Ako brzina fluida postane veća od neke kritične brzine v_k, strujanje postaje turbulentno. Slojevi fluida se miješaju, čestice prelaze iz jednog sloja u drugi i nastaju vrtlozi.

Kritična brzina pri kojoj laminarno strujanje prelazi u turbulentno ovisi o:
- viskoznosti fluida,
- gustoći fluida,
- obliku cijevi kroz koji fluid struji, odnosno o obliku tijela koje se giba kroz fluid

Reynoldsov broj je bezdimenzionalni parametar koji određuje da li će strujanje biti laminarno ili turbulentno:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho v l}{\eta}$$

Ovdje su:
ρ - gustoća fluida
η - koeficijent dinamičke viskoznosti
v – brzina strujanja fluida, odnosno brzina tijela koje se giba kroz fluid

Reynoldsov broj ovisi o obliku cijevi, odnosno obliku tijela i ta se ovisnost određuje karakterističnom dužinom l, koja je:

- za cijev kružnog presjeka jednaka promjeru $d = 2r$
- za cijev kvadratnog presjeka jednaka stranici kvadrata a
- za kuglu jednaka promjeru $d = 2r$

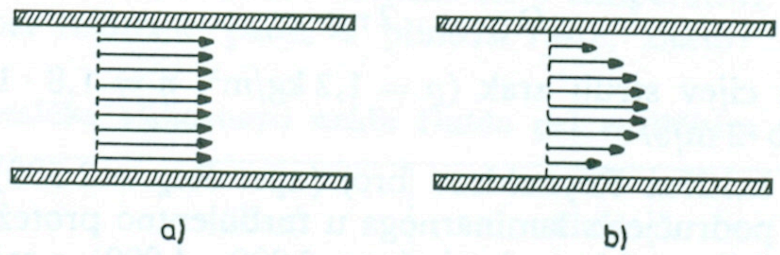
Kritični Reynoldsov broj označavamo Re_k i njegove vrijednosti su utabličene. Ako je $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_k$, protjecanje fluida je laminarno. Ako je $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_k$, protjecanje fluida je turbulentno.

Pri proučavanju gibanja nekih tijela kao što su brodovi, avioni i slično, koriste se umanjeni modeli. Da bi se rezultati dobiveni modeliranjem mogli primijeniti na izvorni sustav, prvo je potrebno da model bude geometrijski sličan predmetu, a onda i da uvjeti pri ispitivanju modela budu dinamički slični stvarnim uvjetima.

Dva strujanja su dinamički slična ako su im Reynoldsovi brojevi jednaki. Reynoldsov broj će ostati isti ako model, koji je n puta manji od originala, ispitujemo u fluidu kojem je brzina n puta veća uz istu gustoću ρ i dinamičku viskoznost η.

12.5. Realni fluidi. Poisseuilleov zakon protjecanja

Kad idealni fluid struji kroz cijev (slika a),



Slika 11.12. Protjecanje fluida kroz cijev

SLIKA: PROTJECANJE FLUIDA KROZ CIJEV – Kulišić – slika 11.12. str. 172

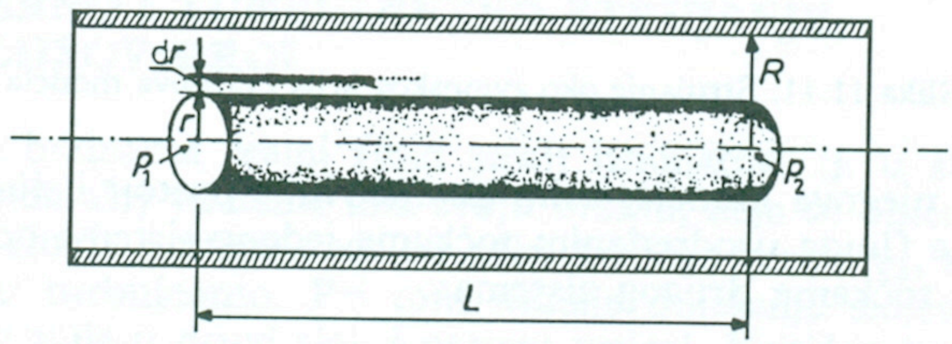
u svim točkama presjeka brzina je jednaka i protok je dan relacijom:

$$q_v = Sv$$

Kad realni fluid struji kroz usku cijev (slika b), najveća brzina je u sredini cijevi i prema krajevima se smanjuje, te je uz samu stijenku cijevi jednaka nuli. Kada realni fluid struji uz neku zapreku, ili se neko tijelo giba u fluidu, uz samu zapreku se stvara tzv. **granični sloj fluida**, čija brzina se razlikuje od brzine fluida daleko od zapreke. Neposredno uz zapreku čestice fluida se jedva miču, malo dalje njihova brzina se povećava da bi uskoro imale brzinu koju bi imale kad ne bi postojala zapreka.

Slična stvar je s tijelom koje se giba u fluidu jer se oko njega formira granični sloj u kojem zbog trenja čestice gube na brzini, i to više što su bliže tijelu. Određeni sloj fluida prianja uz tijelo i giba se zajedno s njim povlačeći za sobom susjedne slojeve. Slojevi fluida, koji su dalje od tijela, gibaju se sve sporije, a na određenoj udaljenosti od tijela (izvan graničnog sloja) fluid miruje.

Za izvod Poiseuilleovog zakona (Poiseuille (1799-1869), francuski fizičar i fiziolog) promatrat ćemo usku cijev (kapilaru) polumjera R (koji je mnogo manji nego debljina graničnog sloja), kroz koju laminarno struji realna tekućina dinamičke viskoznosti η.



Slika 11.13. Uz izvod Poiseuilleova zakona

SLIKA: UZ IZVOD POISEUILLEOVOG ZAKONA – Kulišić – slika 11.13. str. 172

Sila koja djeluje na sloj fluida u obliku valjka polumjera *r* i dužine *L* nastaje zbog razlike tlakova:

$$F = r^2\pi(p_1 - p_2)$$

Sila trenja kojom taj sloj tekućine djeluje na susjedni sloj iznosi:

$$F_{tr} = \eta S\frac{dv}{dr} = \eta 2r\pi L\frac{dv}{dr}$$

Zbroj tih dviju sila je jednak 0: $F + F_{tr} = 0$

Odatle slijedi: $r^2\pi(p_1 - p_2) = -\eta 2r\pi L\dfrac{dv}{dr}$

Odnosno: $(p_1 - p_2)rdr = -2\eta Ldv$

To integriramo: $\int\limits_r^R (p_1 - p_2)rdr = -\int\limits_v^0 2\eta Ldv$

Rezultat je: $v = \dfrac{p_1 - p_2}{4\eta L}(R^2 - r^2)$

Vidimo da se brzina mijenja po zakonu parabole (kao na slici za protjecanje realnog fluida kroz cijev –slika b).

Volumen tekućine koja u vremenu t protekne kroz određeni presjek cijevi je:

$$V = \int\limits_V dV = \int\limits_0^R 2r\pi drvt = \frac{\pi(p_1 - p_2)t}{2\eta L}\int\limits_0^R (R^2 - r^2)rdr$$

Protok je: $q_v = \frac{V}{t} = \frac{\pi}{8\eta}\frac{p_1 - p_2}{L}R^4$

Ovo je **Poiseuilleov zakon laminarnog protjecanja realne tekućine kroz uske cijevi** i kaže da protok ovisi o dinamičkoj viskoznosti η, gradijentu tlaka (odnosno razlici tlaka po jedinici dužine cijevi) i o četvrtoj potenciji polumjera cijevi.

Englerov viskozimetar nam omogućuje određivanje dinamičke viskoznosti preko zadnje relacije mjerenjem protoka.

Također, koristeći se zadnjom relacijom, možemo odrediti izraz za otpor pri laminarnom strujanju viskozne tekućine. Sila trenja je jednaka je ukupnoj sili zbog razlike tlakova:

$$F_{tr} = R^2\pi(p_1 - p_2)$$

Korištenjem zadnje relacije za protok, sila trenja postaje:

$$F_{tr} = \frac{8\eta L}{R^2}q_v$$

Ako je $\overline{v}$ srednja brzina laminarnog strujanja fluida kroz cijev, tada je protok:

$$q_v = S\overline{v} = R^2\pi\overline{v}$$

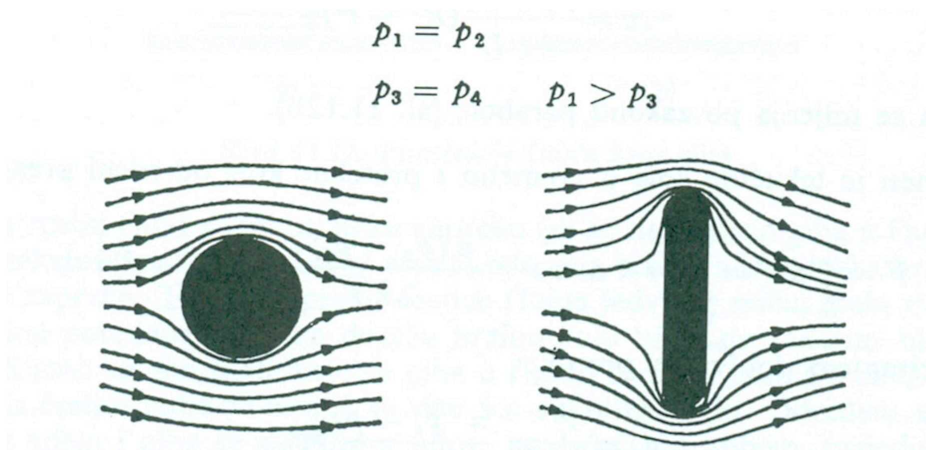
Sila trenja je dana s: $F_{tr} = 8\pi\eta L\overline{v}$

To je **Poiseuilleova formula za otpor pri laminarnom protjecanju viskozne tekućine kroz horizontalnu cijev.**

12.6. Otpor sredstva. Sile na avionsko krilo

12.6.1. Otpor sredstva

Kad se tijelo giba kroz idealni fluid, nema otpora sredstva. Isto vrijedi kad idealni fluid struji oko nepomičnog tijela.



Slika 11.14. Strujanje idealnog fluida oko tijela: nema otpora sredstva

SLIKA: STRUJANJE IDEALNOG FLUIDA OKO TIJELA: NEMA OTPORA SREDSTVA – Kulišić – slika 11.14. str. 174

Na slici vidimo strujnice idealnog fluida oko valjka i ploče koje su simetrično raspoređene s obje strane.

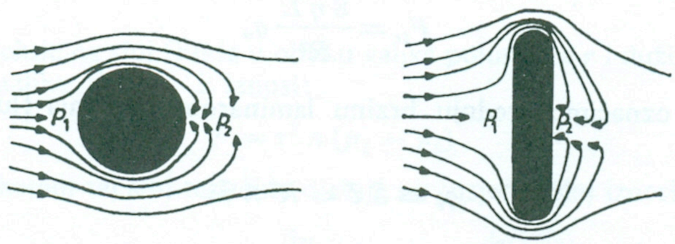
Tlakovi s prednje (p_1) i stražnje (p_2) strane su jednaki i veći nego tlakovi s gornje (p_3) odnosno donje (p_4) strane:

$p_1 = p_2$ $\qquad$ $p_3 = p_4$ $\qquad$ $p_1 > p_3$

Kad realni fluid struji oko tijela ili se tijelo giba kroz realni (viskozni) fluid, javlja se **otpor sredstva**, koji ovisi o:

- veličini (obliku) tijela
- vrsti fluida
- brzini gibanja tijela

Ako je strujanje laminarno, taj otpor nastaje zbog sila unutrašnjeg trenja u fluidu. Ako je strujanje turbulentno, otpor se povećava zbog stvaranja vrtloga.



Slika 11.15. Turbulentno strujanje oko ploče i valjka: pojavljuje se otpor zbog razlike tlakova

SLIKA: TURBULENTNO STRUJANJE OKO VALJKA I PLOČE: JAVLJA SE OTPOR ZBOG RAZLIKE TLAKOVA – Kulišić – slika 11.15. str. 174

Vidimo da u prostoru iza tijela nastaju vrtlozi. Dio fluida u graničnom sloju bliže tijelu ima manju brzinu, a čestice fluida dalje od tijela gibaju se brže i zbog toga nastaje rotacija čestica fluida. Sad više nisu jednaki tlakovi na prednjoj i stražnjoj strani već je prednji tlak veći od stražnjeg:

$p_1 > p_2$

Ta razlika tlakova (p_1 - p_2) uzrokuje silu koja se suprotstavlja gibanju i tako povećava otpor sredstva.

MALE BRZINE:

Pri malim brzinama (znači da su mali Reynoldsovi brojevi) otpor sredstva je proporcionalan brzini i dinamičkoj viskoznosti. Otpor sredstva ovisi i o obliku tijela. Na primjeru kuglice polumjera *r* možemo pogledati koje sile djeluju kad se ona giba kroz viskozni fluid stalnom brzinom *v*.

Stokes je našao da na nju djeluje sila trenja: $F_{tr} = 6\pi\eta rv$

Ovaj zakon vrijedi samo za male brzine, npr. za Reynoldsov broj $\mathrm{Re} = \dfrac{2r\rho v}{\eta} < 0{,}1$.

Tako će kuglica u viskoznom fluidu padati jednoliko jer će se uravnotežiti:

- sila teža
- uzgon
- sila trenja

$$F_{tr} = mg - U = \frac{4}{3}r^3\pi\rho g - \frac{4}{3}r^3\pi\rho_f g$$

Ako je ispunjen uvjet za primjenu Stokesova zakona, tada je $F_{tr} = 6\pi\eta rv$.

To uvrstimo u relaciju za uvjet ravnoteže i možemo izračunati ili brzinu padanja, ili dinamičku viskoznost. Znači, pomoću Stokesovog zakona možemo izračunati koeficijent dinamičke viskoznosti fluida.

VELIKE BRZINE:

Kad su brzine veće od kritične (odnosno Reynoldsov broj je veći od kritičnog), otpor sredstva uglavnom nastaje zbog razlike tlakova jer je sila zbog razlike tlakova bitno veća od sile viskoznog trenja.

Silu otpora sredstva pišemo u sljedećem obliku: $F_{ot} = \frac{1}{2} c_{ot} \rho v^2 S$

c_{ot} – otporni broj (aerodinamički faktor)
S – čeona površina tijela izložena struji fluida
ρ - gustoća fluida
v – brzina fluida

Otpor sredstva jako ovisi o obliku tijela i ta se ovisnost izražava aerodinamičkim faktorom c_{ot}.

Tablica 11.2. Aerodinamički faktori

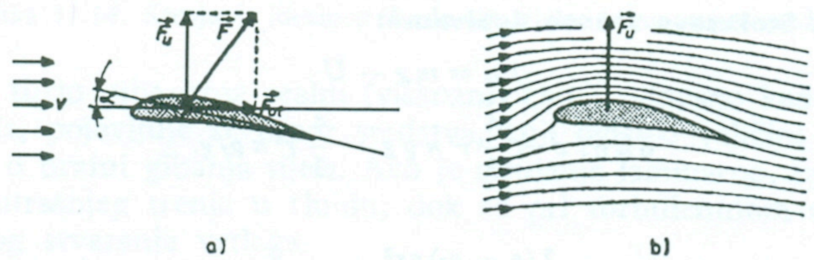
Profil	c_{ot}
aerodinamički oblik	0,05
avionsko krilo	0,05
automobil	0,35
kugla	0,35
polukugla (otvorena prema struji fluida)	1,3
polukugla (zatvorena prema struji fluida)	0,4
padobran	1,35

TABLICA: AERODINAMIČKI FAKTORI (tipične vrijednosti aerodinamičkih faktora za razne profile) – Kulišić – tablica 11.2. str. 176

12.6.2. Sile na avionsko krilo

Promatrajmo avionsko krilo kao tijelo koje se nalazi u struji fluida, a to je u našem slučaju zrak.

Pretpostavljamo da je strujanje laminarno.



Slika 11.16. Aerodinamički uzgon i otpor sredstva na avionsko krilo

SLIKA: AERODINAMIČKI UZGON I OTPOR SREDSTVA NA AVIONSKO KRILO – Kulišić – slika 11.6. str. 176

Javlja se:

- sila otpora sredstva $\vec{F}_{ot}$ u smjeru strujanja fluida
- aerodinamički uzgon $\vec{F}_{au}$ okomito na smjer strujanja fluida

Aerodinamički uzgon nastaje zbog cirkulacije zraka oko tijela, a ovisi o:

- obliku tijela
- nagibu profila prema struji zraka

Rezultantna sila na avionsko krilo je: $\vec{F} = \vec{F}_{au} + \vec{F}_{ot}$

Strujnice iznad krila su gušće i brzina je veća, a tlak manji nego ispod krila gdje su strujnice rjeđe (Bernoullijeva jednadžba). Tlak s donje strane krila je gotovo atmosferski. Na slici imamo samo laminarno strujanje no u stvarnosti se javlja i turbulentno strujanje što, naravno, bitno komplicira stvar, ali to sad nećemo razmatrati. Razliku tlakova između donje i gornje površine krila možemo odrediti aproksimativno pomoću Bernoullijeve jednadžbe ako znamo odrediti razliku brzina strujanja zraka na gornjoj odnosno donjoj površini. Zbog te razlike tlakova nastaje aerodinamički uzgon koji omogućuje let aviona. Avionsko krilo ima upravo takav aerodinamički oblik da otpor, odnosno aerodinamički faktor c_{ot} bude što manji, a aerodinamički uzgon $\vec{F}_{au}$ što veći. Analogno otporu aerodinamički uzgon $\vec{F}_{au}$ možemo prikazati formulom:

$$F_{au} = \frac{1}{2} c_{au} \rho v^2 S$$

Iznos ukupne sile koja djeluje pri jednolikom gibanju tijela kroz fluid je:

$$F = \sqrt{F_{ot}^2 + F_{au}^2} = \frac{1}{2} c \rho v^2 S$$

Ovdje je: $c = \sqrt{c_{ot}^2 + c_{au}^2}$

Vrijednosti c_{ot} i c_{au} se mogu odrediti mjerenjem sila na profil avionskog krila u zračnom tunelu.

Faktori ovise o:

- obliku krila
- kutu α pod kojim je profil naklonjen prema brzini strujanja

AUTOMOBILI ZA TRKE:

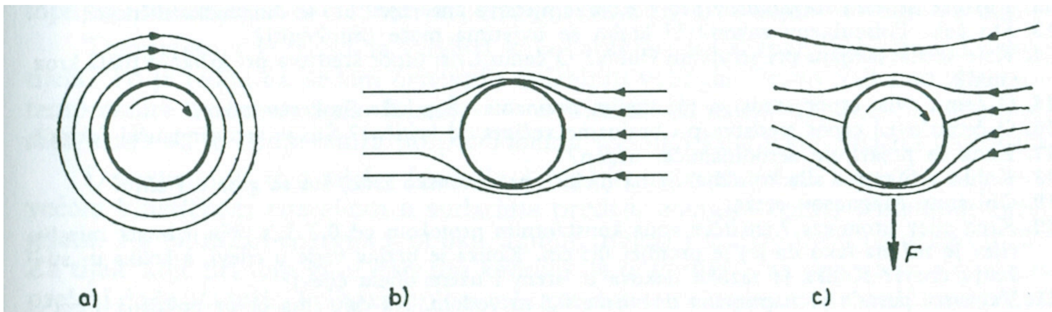
Sila aerodinamičkog uzgona djeluje i na trkače automobile koji su konstruirani tako da bi se što lakše gibali kroz zrak. Govorimo da imaju aerodinamički oblik. Međutim, sila aerodinamičkog uzgona može u jednom trenutku uzrokovati premalo trenja o cestu pa se na automobile stavljaju „spojleri“ (engleski *spoil* – pokvariti), koji kvare laminarno strujanje i izazivaju turbulencije i na taj način smanjuju aerodinamički uzgon. Rezultat je bolje „ležanje“ automobila na cesti.

SIMETRIČNA TIJELA:

Kod simetričnih tijela kao što su valjak, kugla i slično, strujnice iznad i ispod tijela su simetrično raspoređene te je aerodinamički uzgon jednak nuli, pa je ukupna sila jednaka otporu sredstva.

12.7. Magnusov efekt

Ako tijelo rotira u struji fluida, na njega djeluje sila okomito na smjer strujanja. To je **Magnusov efekt** (Magnus (1802-1870), njemački fizičar). Promatrat ćemo kako struji fluid (npr. zrak) oko rotirajućeg valjka koji se giba u fluidu.



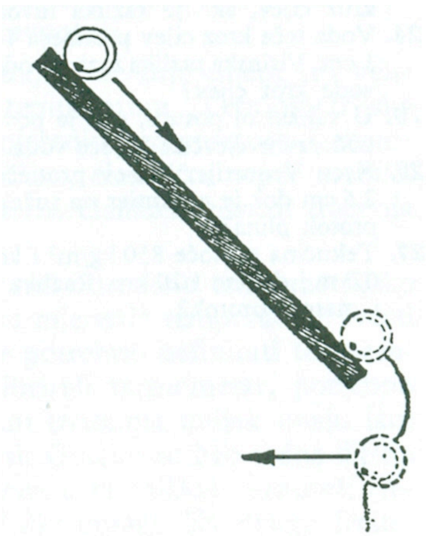
Slika 11.17. Uz objašnjenje Magnusova efekta: a) valjak rotira u mirnom fluidu, b) fluid struji oko nepomičnog valjka i c) fluid struji oko rotirajućeg valjka

SLIKA: MAGNUSOV EFEKT: a) VALJAK ROTIRA U MIRNOM FLUIDU, b) FLUID STRUJI OKO NEPOMIČNOG VALJKA, c) FLUID STRUJI OKO ROTIRAJUĆEG VALJKA – Kulišić – slika 11.17. str. 177

1. Ako valjak rotira u mirnom fluidu, strujnice su koncentrirane kružnice oko valjka (slika a).
   Zbog viskoznosti će čestice fluida oko valjka također rotirati brže što su bliže valjku, a sloj fluida uz valjak će imati istu obodnu brzinu kao i valjak.
2. Ako valjak miruje, a fluid struji, onda su strujnice oblika kao na slici b.
   Pretpostavili smo da je strujanje laminarno, tj. da se ne pojavljuju vrtlozi.
3. Ako valjak rotira, a fluid struji, tada strujnice izgledaju kao na slici c.
   Brzina strujanja je veća ispod valjka jer se smjerovi oba gibanja podudaraju, a manja iznad valjka gdje su smjerovi gibanja suprotni.
   Zbog veće brzine strujanja ispod valjka tlak je manji nego iznad valjka gdje je i manja brzina, pa se javlja sila prema dolje.

MAGNUSOV EFEKT U POKUSU S PAPIRNATIM VALJKOM

Tanak papirnati valjak se kotrlja niz kosinu i pada ispod daske jer ga nastala sila gura u tom smjeru.



Slika 11.18. Magnusov efekt u pokusu s papirnim valjkom

SLIKA: MAGNUSOV EFEKT U POKUSU S PAPIRNATIM VALJKOM – Kulišić – slika 11.18. str. 177

PRIMJER:
Po Bernoullijevom principu javlja se razlika tlakova kad imamo npr. rotirajuću loptu u zraku i sila koja je posljedica razlike tlakova uzrokuje često neobičnu i neočekivanu putanju takve lopte u zraku. Takve rotirajuće lopte zovemo „rezane“ ili „felš“ lopte u stolnom tenisu, baseballu ili tenisu.

11. Mehanika tekućina: statika

11.1. Tlak. Pascalov zakon. Hidrostatski tlak

Tvar može postojati u 3 agregatna stanja: čvrstom, tekućem i plinovitom. Čvrsta tijela zadržavaju određeni volumen i oblik zbog relativno jakih kohezionih sila među atomima. Tekućine poprimaju oblik posude u kojoj se nalaze, ali teško mijenjaju svoj volumen. U plinovima su molekule relativno daleko mjedna od druge pa je plinove lako stlačiti i oni lako mijenjaju svoj volumen i poprimaju oblik posude u kojoj se nalaze.

Tekućine i plinove nazivamo fluidima. To su tvari koje lako mijenjaju oblik, odnosno mogu teći.

Mehanika fluida ili hidromehanika se dijeli na:
- hidrostatiku – opisuje fluide u mirovanju
- hidrodinamiku – opisuje fluide u gibanju

11.1.1. Tlak

Čestice u fluidu djeluju jedna na drugu i djeluju na stijenke posude u kojoj se nalazi fluid. U fluidima u mirovanju sile su uvijek okomite na površinu s kojom je fluid u kontaktu.

Sile koje djeluju okomito na površinu zovemo **pritisnim silama**.

Tlak se definira kao omjer sile i površine na koju ta sila djeluje okomito: $p = \frac{F}{S}$

Ako sila nije jednaka u svim točkama površine S, tada nam gornji omjer daje srednju vrijednost tlaka, a tlak u određenoj točki se definira kao:

$$p = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}S}$$

Tlak je **skalarna veličina**. Možemo pisati i: $\mathrm{d}\vec{F} = p\mathrm{d}\vec{S}$, gdje je $\mathrm{d}\vec{S}$ vektor u smjeru normale na element površine dS.

U svakoj točki mirnog fluida tlak je isti u svim smjerovima.

Jedinica tlaka je **pascal**: $[p] = \frac{[F]}{[S]} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = \mathrm{Pa}$

Može se upotrebljavati i jedinica bar: 1 bar = 10^5 Pa

Fluidi lako mijenjaju oblik i poprimaju oblik posude u kojoj se nalaze. Međutim, da bismo im promijenili volumen, potrebno je djelovati silom. Pri tom je plinove lako stlačiti. Stlačivost tekućina je vrlo malena i potrebne su velike sile da bi se opazila promjena volumena tekućine, pa tekućine smatramo nestlačivim.

Stlačivost fluida pri izotermnoj kompresiji definira se kao:

$$\kappa = -\frac{1}{V}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}p}\right)_T$$

Budući je promjena volumena uvijek suprotnog predznaka od promjene tlaka, predznak minus čini stlačivost pozitivnom. Jedinica stlačivosti je Pa^{-1}.

No obično je promjena volumena tekućina s tlakom malena pa ćemo je većinom zanemariti.

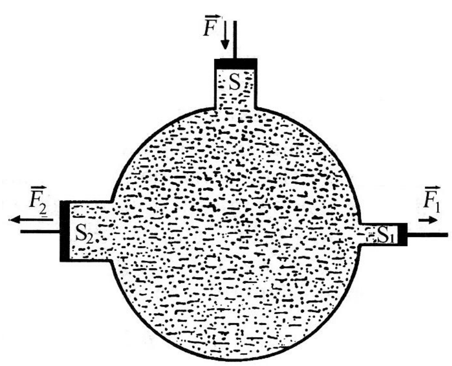
Za razliku od tekućina, plinovi lakše mijenjaju obujam. Pri izotermnoj kompresiji je umnožak volumena i tlaka konstantan (Boyle-Mariotteov zakon) i stlačivost plinova je

$$\kappa = -\frac{1}{V}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}p}\right) = \frac{1}{p}$$

Često se zove i **koeficijent izotermne kompresibilnosti**.

11.1.2. Pascalov zakon

Djelujemo li na tekućinu u ravnoteži izvana nekom silom *F*, tada se taj vanjski tlak širi u tekućini jednako na sve strane.



Slika 10.1. Hidraulički tlak

SLIKA: HIDRAULIČKI TLAK – Kulišić – slika 10.1. str. 147

Npr. ako na posudu napunjenu vodom preko klipa površine *S* djelujemo vanjskom silom *F*, sila se fluidom prenosi u svim smjerovima tako da se tlak *p,* koji stvara vanjska sila, pojavljuje u svim točkama fluida pa vrijedi:

$$\frac{F}{S} = \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} = p$$

To je **Pascalov zakon za vanjski (ili hidraulički) tlak**: **U svakoj točki nestlačivog, mirnog fluida je tlak jednak.**

U razmatranjima nismo uzeli u obzir djelovanje sile teže na čestice fluida.

Primjer: hidraulički tijesak

Na tom principu se temelje hidraulički uređaji: tijesak (preša), kočnice, dizalice...

Slika 10.2. Hidraulička preša

SLIKA: HIDRAULIČKI TIJESAK – Kulišić – slika 10.2. str. 148

Ako na klip manje površine S_1 djelujemo silom F_1, tlak F_1/S_1, prenosit će se jednako u svim smjerovima pa i na klip veće površine S_2 na drugom kraju tijeska (preše) pa je:

$$p = \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}, \qquad \text{odnosno:} \qquad F_2 = \frac{F_1 S_2}{S_1}$$

Budući je $S_2 > S_1$, bit će veća i sila F_2.
Rad koji izvrše te sile jednak je: $dW = F_1 \Delta s_1 = F_2 \Delta s_2 = p \Delta V$

Tako se hidrauličkim tijeskom (prešom) pomoću manjih sila dobivaju veće sile te je tijesak primjer mehaničkog stroja kojim se korisni rad, koji bi se bez stroja morao izvršiti velikom silom, može izvršiti manjom silom.

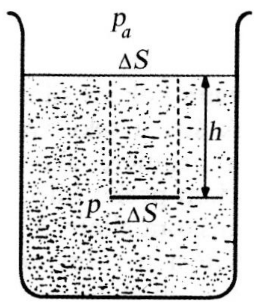
Sličan primjer je kod hidrauličke kočnice gdje se djelovanjem sile na papučicu hidrauličke kočnice preko klipa u glavnom cilindru automobila tlak prenosi na sve dijelove nestlačive tekućine pa tako i na klip cilindra u kotačima. Tako je kod kočnica Δs_1 reda veličine centimetra, a mala sila F_1 odgovara sili vozačeve noge. Pomak Δs_2 je reda veličine milimetra, a velika sila F_2 djeluje na kočione ploče i lako zaustavlja automobil.

11.1.3. Hidrostatski tlak

Na fluid djeluje i sila teža. To je volumna sila koja, za razliku od površinskih sila, djeluje na sve čestice fluida.

Tlak uzrokovan težinom samog fluida nazivamo **hidrostatskim tlakom**.

Na primjer, tlak na dno posude napunjene vodom uzrokuje težina stupca vode iznad dna. Zamislimo tekućinu u posudi kao na slici i izračunajmo koliki tlak djeluje na površinu ΔS na dubini h.



Slika 10.3. Hidrostatski tlak

SLIKA: HIDROSTATSKI TLAK – Kulišić – slika 10.3. str.148

Neka je ta površina baza zamisljenog valjka unutar tekućine. Pretpostavimo da je gustoća konstantna, a tekućina nestlačiva. Na gornju bazu djeluje sila:

$$F_1 = p_a \Delta S$$

gdje je p_a **atmosferski tlak**.

Na donju bazu djeluje sila:

$$F_2 = p\Delta S$$

gdje je p tlak na mjestu gdje se nalazi površina ΔS na dubini *h*,

te težina stupca tekućine nad tom površinom:

$$G = \Delta mg = \rho g \Delta V = \rho gh \Delta S$$

Budući je zamišljeni volumen u ravnoteži, te se sile poništavaju:

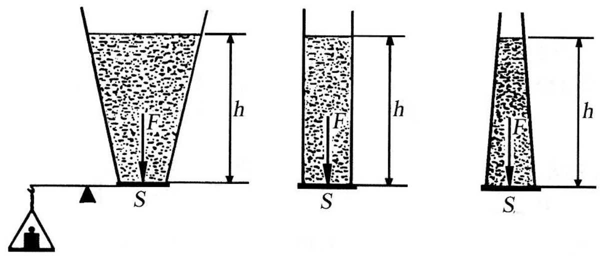
$$p\Delta S - p_a \Delta S - \rho gh \Delta S = 0$$

Odatle je ukupni tlak koji djeluje u svim točkama tekućine na dubini *h*:

$$p = p_a + \rho gh$$

Dio ρgh uzrokuje težina tekućine i zove se **hidrostatski tlak**.

Na slici je prikazan pokus kojim možemo pokazati da sila hidrostatskog tlaka na dno ovisi o površini dna ΔS i visini stupca vode *h*, a ne i o obliku posude.



Slika 10.4. Hidrostatski paradoks: tlak na dno posude ne ovisi o obliku posude

SLIKA: HIDROSTATSKI PARADOKS: TLAK NA DNO POSUDE NE OVISI O OBLIKU POSUDE – Kulišić – slika 10.4. str. 149

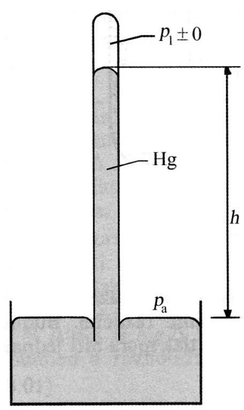
To je poznati **hidrostatski paradoks** koji zapravo i nije paradoks već posljedica zakona za hidrostatski tlak.

11.2. Atmosferski tlak. Torricelijev pokus.

Zemlja svojom privlačnom silom drži oko sebe zračni omotač, Zemljinu atmosferu. **Atmosferski tlak** nastaje zbog vlastite težine zračnog stupca iznad Zemljine površine.

Tlak zraka možemo izmjeriti pomoću Torricellijeva pokusa:

- staklenu cijev (epruvetu) duljine oko 1 m, zatvorenu na jednom kraju, ispunimo živom
- vrh joj zatvorimo, preokrenemo je i uronimo u posudu sa živom, te odčepimo
- živa će se u cijevi spustiti do određene visine *h* ovisne o vanjskom tlaku
- iznad žive u gornjem dijelu cijevi nema zraka, već imamo samo nešto živinih para i tlak je $p_1 \approx 0$
- na vanjsku površinu žive u posudi djeluje atmosferski tlak p_a



Slika 10.7. Živin barometar

SLIKA: TORRICELLIJEV POKUS (ŽIVIN BAROMETAR) – Kulišić – slika 10.7. str.150

Hidrostatski tlak za točke u horizontalnoj ravnini koja prolazi površinom žive u posudi:

$$p_a = \rho g h + p_1 = \rho g h$$

ρ je gustoća žive, a *h* visina živina stupca.

Pri normiranom atmosferskom tlaku, koji iznosi 101325 Pa, visina stupca žive u živinu barometru je 0,76 m.

Budući je gustoća žive pri 0ºC jednaka $13{,}595 \cdot 10^3$ kg/m^3, iz zadnje relacije dobijemo:

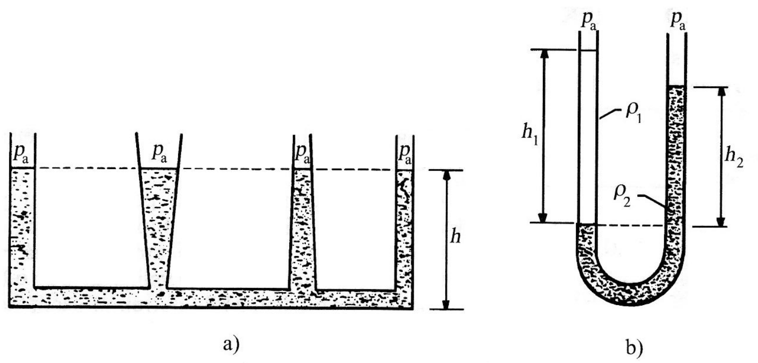
$$p_a = \rho g h = 13{,}595 \cdot 10^3 \cdot 9{,}80665 \cdot 0{,}76 \frac{N}{m^2} = 101325 Pa$$

Kao rezultat Torricellijevog pokusa je napravljen mjerni instrument – **barometar**, koji mjeri tlak. Zbog toga se dugo koristila jedinica **„milimetri žive“** koja je danas zamijenjena pascalima. Osim jedinice bar koji se također i danas koristi, u uporabi je ostala i jedinica **atmosfera**, to jest:
1 atm = 101325 Pa

11.3. Pokusi s U-cijevima. Manometar. Barometarska formula

11.3.1. Pokusi s U-cijevima

U međusobno spojenim posudama razina tekućine u svim posudama nalazi se na istoj visini bez obzira na oblik posuda.



Slika 10.5. Spojene posude

SLIKA: SPOJENE POSUDE – Kulišić – slika 10.5. str. 149

To izlazi iz činjenice da je hidrostatski tlak jednak u svim točkama na jednakoj dubini (pretpostavljamo da nema kapilarnih pojava).

Ako se u spojenim posudama nalaze dvije različite tekućine, gustoća ρ_1 i ρ_2, tada je razina tekućina različita. Budući da u svim točkama određenog horizontalnog presjeka ukupni tlak mora biti jednak, slijedi:

$$p_a + \rho_1 g h_1 = p_a + \rho_2 g h_2$$

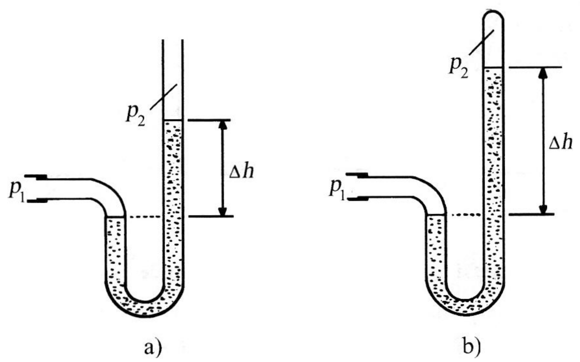
Ovdje su h_1 i h_2 visine stupca jedne i druge tekućine, mjerene od granice između njih.

Mjereći te dvije visine, ako znamo ρ_1, možemo odrediti nepoznatu gustoću:

$$\rho_2 = \rho_1 h_1 / h_2$$

11.3.2. Manometar

Na principu spojenih posuda rade uređaji za mjerenje tlaka, hidraulički manometri (tlakomjeri). Ako su vanjski tlakovi p_1 i p_2 različiti, razlika tekućine u obje posude je različita.



Slika 10.6. Manometri

SLIKA: MANOMETRI – Kulišić – slika 10.6. str. 150

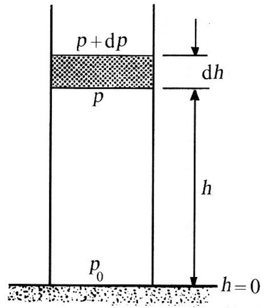
Primjenom zakon za hidrostatski tlak dobijemo:

$$p_1 - p_2 = \Delta p = \rho g \Delta h$$

Mjerenjem razlike razina tekućine Δh može se mjeriti razlika tlaka Δp.

11.3.3. Barometarska formula

Atmosferski tlak se mijenja s nadmorskom visinom i pada po takozvanoj **barometarskoj formuli**.



Slika 10.8. Uz izvod barometarske formule

SLIKA: UZ IZVOD BAROMETARSKE FORMULE – Kulišić – slika 10.8. str. 151

Neka je na visini h atmosferski tlak jednak p, a na visini h+dh tlak p+dp. Ako je dh pozitivan, tada je dp negativan jer tlak pada s visinom. Razlika u tlaku dp između ta dva sloja nastaje zbog težine stupca zraka presjeka 1 m^2 i visine dh, a iznosi:

$$dp = -\rho g dh$$

gdje je ρ gustoća zraka na toj visini.
Da bismo iz te jednadžbe odredili p kao funkciju h, moramo znati promjenu gustoće zraka s tlakom. Gustoća zraka funkcija je tlaka i temperature.

Pretpostavimo li da je atmosfera izotermna (T = konst), tada iz Boyle-Mariotteova zakona slijedi:

$$\rho(h) = \frac{\rho_0}{p_0} p(h)$$

Ovdje su p_0 i ρ_0 tlak i gustoća zraka na nadmorskoj visini $h = 0$.

$$dp = -\rho(h) g dh = -\frac{\rho_0}{p_0} p(h) g dh$$

Slijedi: $dh = -\frac{p_0 dp}{\rho_0 g p}$

Odnosno: $\int_0^h dh = -\frac{p_0}{\rho_0 g} \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p}$

Rješenje je: $p = p_0 \exp(-\rho_0 g h / p_0)$

Pri normiranoj temperaturi i tlaku (0ºC i 101325 Pa) gustoća zraka ρ_0 je 1,293 kg/m^3 pa zadnju formulu možemo pisati i u obliku:

$$p = p_0 \exp(-h / 7990)$$

Ovdje h izražavamo u metrima i formula nam govori da približno svakih 8000 m tlak pada za faktor e (2,718).

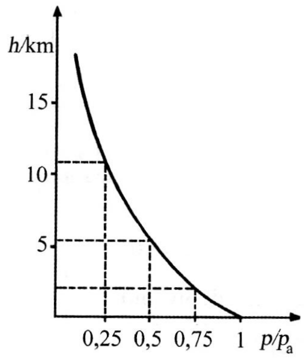
To **je barometarska formula** izvedena uz pretpostavku da je g = konst i da je veza tlaka i gustoće dana s $\rho(h) = \frac{\rho_0}{p_0} p(h)$.

Točniju formulu bismo dobili uzevši u obzir padanje temperature s visinom:

$$p = p_0 (1 - \frac{0,0065h}{288})^{5,255}$$

Ovdje je h nadmorska visina u metrima, a 288 K (15ºC) temperatura na nadmorskoj visini h = 0.

Ovisnost tlaka o visini za izotermnu atmosferu prikazana je na slici:



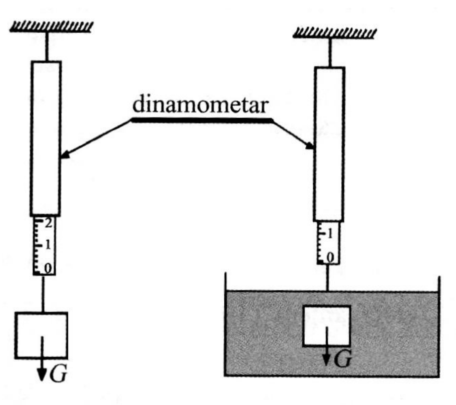
Slika 10.9. Promjena tlaka s nadmorskom visinom u izotermnoj atmosferi (barometarska formula)

SLIKA: PROMJENA TLAKA S NADMORSKOM VISINOM U IZOTERMNOJ ATMOSFERI (BAROMETARSKA FORMULA) – Kulišić – slika 10.9. str. 152

11.4. Arhimedov zakon. Uzgon.

Kad je tijelo uronjeno u fluid (tekućinu ili plin), javlja se rezultantna sila prema gore kao posljedica hidrostatskog tlaka. Tu silu nazivamo **uzgonom**.

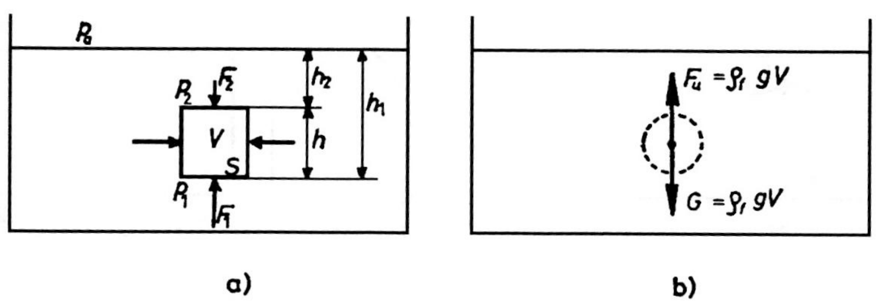
Ilustracija uzgona: kada tijelo koje visi na dinamometru uronimo u vodu, dinamometar pokazuje manje jer uzgon prividno smanjuje težinu tijela.



Slika 10.10. Uzgon

SLIKA: UZGON – Kulišić – slika 10.10. str. 152

Zamislimo tijelo volumena *V* uronjeno u fluid gustoće ρ_f kao na slici a).



Slika 10.11. Uz izvod formule za uzgon

SLIKA: UZ IZVOD FORMULE ZA UZGON – Kulišić – slika 10.11. str. 153

Radi jednostavnosti ćemo pretpostaviti da je tijelo oblika valjka ili kocke no svako tijelo, bilo kojeg oblika, možemo podijeliti na valjke ili kocke s dovoljno malim bazama tako da će dobiveni rezultat vrijediti općenito.

Sile pritiska, koje djeluju na bočne strane kocke, poništavaju se jer su na istoj horizontalnoj ravnini jednake po iznosu, a suprotnog smjera.

Na mjestu gdje je gornja baza tlak je: $p_2 = p_a + \rho g h_2$

Na donjoj bazi je tlak: $p_1 = p_a + \rho g h_1$

Sila na donju bazu je: $F_1 = p_1 S$

Sila na gornju bazu je: $F_2 = p_2 S$

S je površina baze.

Sila F_1 ima smjer prema gore, a sila F_2 ima smjer prema dolje.

Budući je hidrostatski tlak na nivou h_1 veći nego na nivou h_2, sila F_1 bit će veća nego sila F_2. Kao rezultat će se pojaviti sila prema gore zvana **uzgon**:

$$F_u = F_1 - F_2 = \rho_f g h_1 S - \rho_f g h_2 S = \rho_f V g = m_f g$$

Masa istisnutog fluida je m_f.

Isti rezultat možemo dobiti i na drugi način. Zamislimo dio fluida volumena V kao na slici b). Težina tog dijela tekućine djeluje prema dolje i iznosi:

$$G_f = \rho_f g V$$

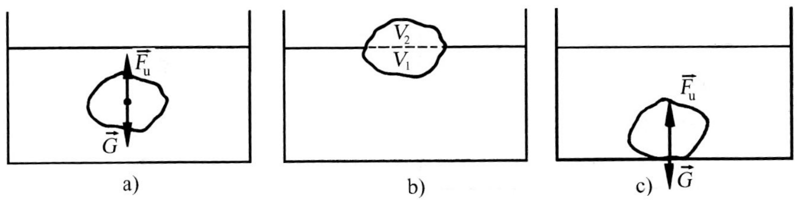
Budući da tekućina miruje, tu težinu uravnotežuje druga sila, koja je jednaka po iznosu, ali je suprotnog smjera i ta sila je uzgon.

Uzgon na taj volumen tekućine je: $F_u = \rho_f g V$
Ako je umjesto tekućine na tom mjestu neko drugo tijelo istog oblika ili volumena, hidrostatski tlakovi i njihove sile se neće promijeniti pa će uzgon biti isti kao i prije:

$$F_u = \rho_f g V$$

Uzgon je sila koja djeluje vertikalno prema gore i po iznosu je jednak težini istisnutog fluida.

To je poznati **Arhimedov princip** (Arhimed, grčki matematičar, fizičar i izumitelj): **Težina tijela uronjenog u fluid smanjuje se za iznos težine istisnutog fluida.**



Slika 10.12. Uvjet plivanja

SLIKA: UVJET PLIVANJA – Kulišić – slika 10.12. str. 154

1) Tijelo lebdi u fluidu ako je težina tijela uravnotežena uzgonom (slika a). Ako je tijelo homogeno, tada uvjet lebdenja možemo pisati u obliku:

$\rho_f gV = \rho_{tijelo} gV$ Ili: $\rho_f = \rho_{tijelo}$

2) Ako je uzgon veći od težine, tijelo se ubrzano diže (Primjer toga je dizanje balona u zraku.) pa će tijelo uronjeno u tekućinu djelomično izroniti iz tekućine i plivati (slika b). Tijelo, koje pliva, bit će toliko uronjeno da će uzgon na uronjeni dio (volumen V_1) biti jednak ukupnoj težini tijela:

$G = \rho_f gV_1$

Za homogena tijela vrijedi: $\rho_{tijelo} gV = \rho_f gV_1$ Odnosno: $V_1 = \rho_{tijelo} V / \rho_f$

3) Ako je težine tijela veća od uzgona, tijelo se ubrzano giba prema dolje i tone (slika c).

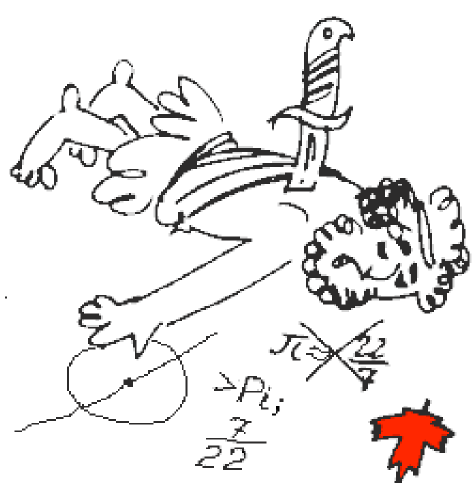
AREOMETAR:

To je uređaj za mjerenje gustoće i osniva se na pojavi uzgona. To je staklena cijev otežana na donjem kraju, na kojoj se nalazi baždarena skala. Što je gustoća tekućine veća, to će areometar manje uroniti u tekućinu, te se uranjanjem areometra vertikalno u tekućinu može direktno očitati njezina gustoća.

Slika 10.13. Areometar

SLIKA: AREOMETAR – Kulišić – slika 10.13. str. 154

- **Arhimed** iz Sirakuze (grč. *Arhimedes*, oko 287.-212. p. n. e.) je najveći fizičar i jedan od najvećih matematičara Starog vijeka.
- Hijeron – kruna od zlata
- odredio približnu vrijednost broja π
- pronašao zakone poluge, položio osnove hidrostatici



11.5. Površinska napetost.

11.5.1. Sile površinske napetosti. Koeficijent površinske napetosti

U čvrstom tijelu atomi su poredani u kristalnoj rešetki i ne mogu se slobodno translacijski gibati već samo titrati oko položaja ravnoteže. U plinovima atomi (ili molekule) nisu vezani jedan za drugog i gibaju se kaotično u posudi u kojoj se nalazi plin. U tekućini su molekule relativno blizu jedna drugoj što znači da nisu vezane jedna za drugu kao u čvrstom stanju i nisu slobodne kao u plinovima. Privlačne međumolekulske sile su dosta jake do određene udaljenosti, koju zovemo **radijus molekulskog djelovanja**, a onda naglo padnu na nulu.

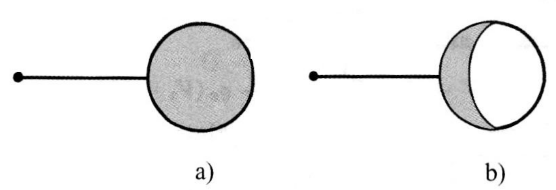
Možemo smatrati da svaka molekula djeluje na sve ostale koje se nalaze unutar kugle koja ima radijus molekulskog djelovanja. Polumjer takve kugle je desetak puta veći od razmaka molekula u tekućinama.

Međumolekulske sile među istovrsnim molekulama zovu se **kohezione sile**, a sile među molekulama različitih tvari zovu se **adhezione sile**.

Pojavu napetosti površine tekućina možemo objasniti navedenim svojstvima međumolekulskih sila.

Površina tekućina se ponaša kao rastegnuta ili napeta opna.

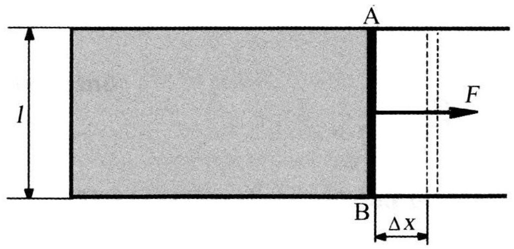
Primjeri:
1. Vidjeli smo da aluminijsku pločicu možemo položiti na površinu vode tako da na njoj pliva.
2. Kukci mogu trčati po površini vode.
3. Ako na kolut od žice, u kojem se nalazi končić, uhvatimo opnu od sapunice (slika) i probušimo je s jedne strane konca, preostali dio opne slegne se na najmanju površinu i konac dobije oblik kružnog luka.



Slika 10.14. Napetost površine opne od sapunice

SLIKA: NAPETOST POVRŠINE OPNE OD SAPUNICE – Kulišić – slika 10.14. str. 156

Da bismo odredili napetost površine, zamislimo pokus s pravokutnim okvirom od žice na kojem je opna od sapunice.



Slika 10.15. Uz definiciju koeficijenta površinske napetosti

SLIKA: UZ DEFINICIJU KOEFICIJENTA POVRŠINSKE NAPETOSTI – Kulišić – slika 10.15. str. 156

Jedna stranica pravokutnika je pomična i nju će opna u svom nastojanju da smanji površinu povući. Kažemo da na stranicu AB djeluje **sila površinske napetosti**. Tu silu možemo uravnotežiti vanjskom silom *F* koja je po iznosu jednaka sili napetosti površine.

Da bismo povećali površinu opne, pomični dio AB djelovanjem sile *F* polako pomaknemo za Δx. Pri tom se izvrši rad:

$$\Delta W = F\Delta x$$

Budući da se opna sastoji od dvije površine između kojih je tanak sloj tekućine, povećanje površine je:

$$\Delta S = 2l\Delta x$$

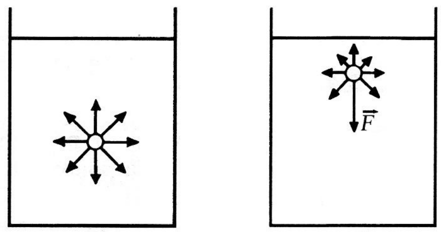
Koeficijent površinske napetosti σ se definira kao: $\sigma = \dfrac{\Delta W}{\Delta S}$

ΔW je rad potreban za povećanje površine ΔS.

$$\sigma = \frac{\Delta W}{\Delta S} = \frac{F\Delta x}{2l\Delta x} = \frac{F}{2l}$$

Koeficijent površinske napetosti se definira pomoću rada potrebnog za povećanje površine ili pomoću sile površinske napetosti. Jedinica koeficijenta površinske napetosti je J/m^2 ili N/m.

U unutrašnjosti tekućine molekula je sa svih strana okružena drugim, susjednim molekulama s kojima međudjeluje tako da je rezultantna sila jednaka nula (slika a).



a) b)

Slika 10.16. Rezultantna sila na molekulu: a) u unutrašnjosti, b) na površini tekućine

SLIKA: REZULTANTNA SILA NA MOLEKULU U UNUTRAŠNJOSTI (a) I NA POVRŠINI TEKUĆINE (b) – Kulišić – slika 10.16. str. 157

U površinskom sloju molekula nije sa svih strana okružena jednakim brojem molekula jer je unutar kugle polumjera R s donje strane veći broj molekula nego s gornje strane. Površinski sloj je debljine manje od radijusa međumolekulskog djelovanja R. Zato će na molekule na površini djelovati rezultantna sila F usmjerena prema unutrašnjosti tekućine (slika b).

Da bi se molekule iz unutrašnjosti dovele na površinu, potreban je određeni rad pa molekule na površini imaju veću potencijalnu energiju nego one u unutrašnjosti tekućine. Da bi bio ispunjen uvjet ravnoteže, a to je minimum potencijalne energije, tekućina nastoji smanjiti slobodnu površinu i zato se javlja površinska napetost.

Povećanjem površine molekule se iz unutrašnjosti prenose na površinu i povećava im se potencijalna energija na račun izvršenog rada.

Koeficijent površinske napetosti ovisi o vrsti tekućine, temperaturi tekućine i sredstvu s kojim tekućina graniči.

Tablica 10.3. Koeficijent površinske napetosti nekih tekućina kad je iznad površine zrak

Tekućina	Voda (20 °C)	Voda (100 °C)	Živa (20 °C)	Alkohol (20 °C)	Petrolej (20 °C)
σ/(N/m)	0,073	0,06	0,48	0,022	0,03

TABLICA KOEFICIJENT POVRŠINSKE NAPETOSTI NEKIH TEKUĆINA KAD JE IZNAD POVRŠINE ZRAK – Kulišić – tablica 10.3. str. 157

11.5.2. Eksperimentalno određivanje koeficijenta površinske napetosti

(SLIKA: EKSPERIMENTALNO ODREĐIVANJE KOEFICIJENTA POVRŠINSKE NAPETOSTI – Horvat – slika 8.19. str. 8-22)

Izmjerimo težinu prstena očitavanjem dinamometra. Podižemo podlogu dok prsten ne „uhvati“ površinu vode. Zatim postupno spuštamo postolje dok se prsten ne odvoji od površine tekućine i tada očitamo silu na dinamometru. Mjerenjem opsega prstena i sile dobijemo koeficijent površinske napetosti.

11.5.3. Nadtlak zbog zakrivljenosti slobodnih i graničnih površina

U mjehuriću sapunice (ili mjehuriću zraka u vodi) tlak je veći od vanjskog tlaka za neki dodatni „nadtlak“ Δp. Laplaceova formula za razliku tlakova koja nastaje zbog zakrivljene površine:

$$p_{unutarnji} - p_{vanjski} = \Delta p = \sigma(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2})$$

Ako je zakrivljena površina kuglasta, onda je $r_1 = r_2$ pa je Laplaceova formula:

$$p_{unutarnji} - p_{vanjski} = \Delta p = \sigma(\frac{1}{r} + \frac{1}{r}) = \frac{2\sigma}{r}$$

Površinska napetost u mjehuriću nastoji stegnuti mjehurić sve dok se ne uspostavi ravnoteža zbog tlaka unutar mjehurića.

Da bi se povećao mjehurić s polumjera r na polumjer (r + dr), mora se izvršiti rad:

$$dW = 2\sigma dS = 2\sigma 8r\pi dr$$

Uzima se faktor 2 jer mjehurić ima 2 površine, a površina je dana s: $S = 4r^2\pi$. Slijedi: $dS = 8r\pi dr$

Unutar mjehurića je nadtlak Δp i sila koja zbog toga djeluje na unutrašnju površinu mjehurića je ΔpS.

Pri povećanju mjehurića rad te sile je: $dW = \Delta pSdr = \Delta p4r^2\pi dr$

Izjednačavanjem $dW = 2\sigma dS = 2\sigma 8r\pi dr$ i $dW = \Delta pSdr = \Delta p4r^2\pi dr$ dobijemo nadtlak u mjehuriću sapunice: $2\sigma 8r\pi dr = \Delta p4r^2\pi dr$

$$\Delta p = 4\sigma / r$$

Nadtlak u mjehuriću sapunice proporcionalan je površinskoj napetosti, a obrnuto proporcionalan polumjeru mjehurića. To je poseban oblik Laplaceove formule za tlak ispod zakrivljene površine tekućine.

Ako dva mjehurića sapunice međusobno spojimo staklenom cijevi, tada će zrak iz manjeg mjehurića prelaziti u veći tako da će se manji mjehurić još više smanjivati, a veći će rasti dok manji ne nestane. Zadnja formula je izvedena za mjehurić s dvije površine.

U slučaju mjehurića zraka u tekućini ili kapljice tekućine dodatni je tlak unutar takve jednostruke sferne površine:

$$\Delta p = 2\sigma / r$$

11.6. Kapilarne pojave

Promatrat ćemo pojave na granici tekućine i čvrstog tijela (npr. stijenke posude).

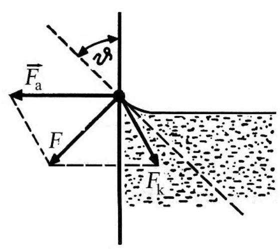
Između molekula tekućine i molekula materijala stijenke posude djeluju međumolekulske sile pa ponašanje tekućine uz stijenku posude ovisi o odnosu kohezionih i adhezionih sila, F_K i F_A.

Kohezija je sila koja se javlja između istovrsnih molekula i koja tekućinu onemogućava da se slobodno proširi po prostoru (kao plin). Kohezija djeluje „prema fluidu“ i ne da stijenki da privuče fluid.

Adhezija je sila koja se javlja između različitih molekula i ima horizontalni smjer. Rezultanta sila okomita je na zakrivljenu površinu, odnosno s vertikalnom stijenkom zatvara kut (θ + 90°).

Površina tekućine postavlja se okomito na rezultantu svih tih međumolekulskih sila.

Ako su adhezione sile veće od kohezionih sila (kao na primjer na granici voda-staklo), površina tekućine poprima konkavni oblik i kažemo da tekućina kvasi stijenke posude.

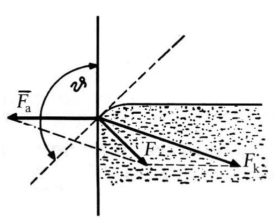


Slika 10.17. Tekućina kvasi stijenku posude: okrajni kut manji od 90°

SLIKA: TEKUĆINA KVASI STIJENKU POSUDE – Kulišić – slika 10.17. str. 158

$F_K < F_A$

Ako su kohezione sile veće od adhezionih sila (kao na primjer na granici živa-staklo), površina tekućine poprima konveksni oblik i ne kvasi stijenku posude.



Slika 10.18. Tekućina ne kvasi stijenku posude: okrajni kut veći od 90°

SLIKA: TEKUĆINA NE KVASI STIJENKU POSUDE – Kulišić – slika 10.18. str. 158

$F_K > F_A$

Kut što ga zatvara stijenka posude i tangenta na površinu tekućine zove se **okrajnji kut**.

Ako je $\theta < 90^o$, tekućina kvasi stijenku posude.

Ako je $90^o < \theta < 180^o$, tekućina ne kvasi stijenku posude.

Tablica 10.4. Vrijednosti za okrajni kut između stijenke posude i nekih tekućina

Sistem	Okrajni kut
Alkohol—staklo	0°
Voda—staklo	0°
Živa—staklo	140°
Voda—parafin	109°

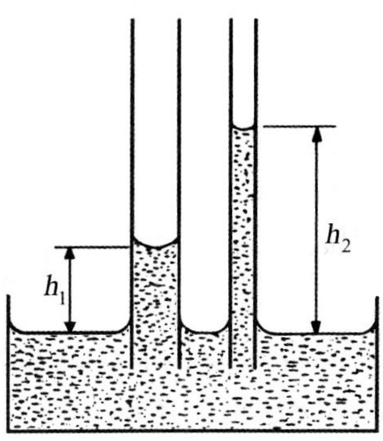
TABLICA: VRIJEDNOST ZA OKRAJNJI KUT IZMEĐU STIJENKE POSUDE I NEKIH TEKUĆINA – Kulišić – tablica 10.4. str. 158

Ako na čistu podlogu (metalnu ili staklenu pločicu) kapnemo kap neke tekućine, oblik kapi ovisit će o površinskoj napetosti za granicu čvrsto tijelo-tekućina, tekućina-plin i čvrsto tijelo-plin, odnosno o okrajnjem kutu koji je funkcija tih površinskih napetosti.

Primjer:

- kapljica žive bit će gotovo sferna
- petrolej će teći preko površine ne formirajući kapljice

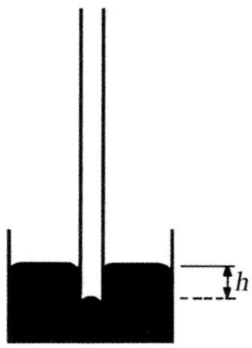
Ako usku cjevčicu (kapilaru) uronimo u posudu s vodom (slika), opazit ćemo da će se voda u njoj podići do neke visine *h* (koja ovisi o polumjeru kapilare i o vrsti tekućine) i da će meniskus vode u kapilari biti konkavan. Slično vrijedi i za ostale tekućine koje kvase stijenku kapilare. To je **kapilarna elevacija**.



Slika 10.19. Kapilarna elevacija

SLIKA: KAPILARNA ELEVACIJA – Kulišić – slika 10.19. str. 159

Razina žive u staklenoj kapilari niža je od razine žive u širokoj posudi i meniskus žive je konveksan. To je **kapilarna depresija**.

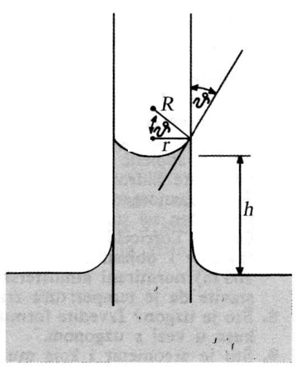


Slika 10.20. Kapilarna depresija

SLIKA: KAPILARNA DEPRESIJA – Kulišić – slika 10.20. str. 159

Kapilarna elevacija i depresija posljedica su napetosti površine.

Izračunat ćemo visinu tekućine u kapilari u slučaju kapilarne elevacije. Slično razmatranje za kapilarnu depresiju bi dovelo do istog rezultata.



Slika 10.21. Visina stupca tekućine u kapilari

SLIKA: VISINA STUPCA TEKUĆINE U KAPILARI – Kulišić – slika 10.21. str. 159

Zbog konkavnog meniskusa tekućine u kapilari tlak ispod meniskusa manji je nego atmosferski tlak iznad.

Tekućina se podiže sve dok se ta razlika tlaka Δp ne izjednači s hidrostatskim tlakom, koji je uzrokovan težinom stupca tekućine u kapilari:

$$\Delta p = \rho g h$$

Budući je $\Delta p = 2\sigma / R$ uz R kao polumjer meniskusa,

$\Delta p = 2\sigma \cos\theta / r$,

uz $r = R\cos\theta$ kao polumjer kapilare, θ okrajnji kut, σ površinska napetost,

slijedi: $\Delta p = 2\sigma \cos\theta / r = \rho g h$

Odnosno: $h = \dfrac{2\sigma\cos\theta}{\rho g r}$

Isti rezultat dobijemo ako vertikalnu komponentu površinske napetosti, koja podiže tekućinu u kapilari, izjednačimo s težinom stupca tekućine.

Sila zbog površinske napetosti na graničnoj liniji (kružnici) između površine tekućine i posude je: $\sigma l = \sigma 2r\pi$

$2r\pi$ je opseg te kružnice. $\sigma 2r\pi\cos\theta$ je njena vertikalna komponenta (vertikalna komponenta sile). Težina stupca tekućine je: $r^2\pi h\rho g$. Vertikalna komponenta sile površinske napetosti podiže tekućinu u kapilari sve dok težina stupca tekućine ne postane jednaka toj sili:

$$2r\pi\sigma\cos\theta = r^2\pi h\rho g$$

Slijedi: $h = \dfrac{2\sigma\cos\theta}{\rho g r}$

Specijalna teorija relativnosti

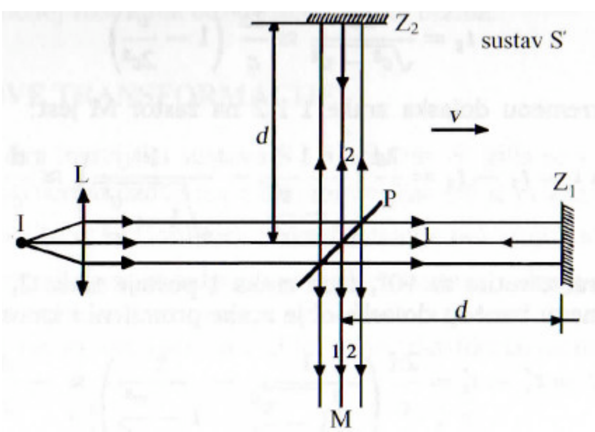
Michelson-Morleyev pokus. Einsteinovi postulati

Do početka ovog stoljeća se vjerovalo da je svemir ispunjen nevidljivom mehaničkom tvari zvanom eter, koja apsolutno miruje i u kojoj se gibaju svemirska tijela.

Eter je bio sredstvo čudnih svojstava:
- gustoća je bila 0
- nevidljivo je bilo
- imalo je elastična svojstva što je značilo da titra kad prolazi val

Budući se Zemlja gibala kroz svemir, očekivalo se da postoji «eterski vjetar» koji puše oko Zemlje. Ako eter apsolutno miruje, tada bi se mjerenjem brzine «eterskog vjetra» mogla izmjeriti brzina Zemlje kroz eter, tj. apsolutna brzina Zemlje. Svjetlost bi u odnosu prema eteru trebala imati konstantnu brzinu ($c = 3 \cdot 10^8$ m/s) dok bi promatrači, koji se gibaju relativno u odnosu na eter, trebali mjeriti različite brzine svjetlosti ovisno o svojoj brzini.

1881. god. američki fizičar Michelson je pokušao izmjeriti gibanje Zemlje u odnosu prema eteru i tako dokazati njegovo postojanje. 1887. god. pokus je ponovio u suradnji s Morleyem.

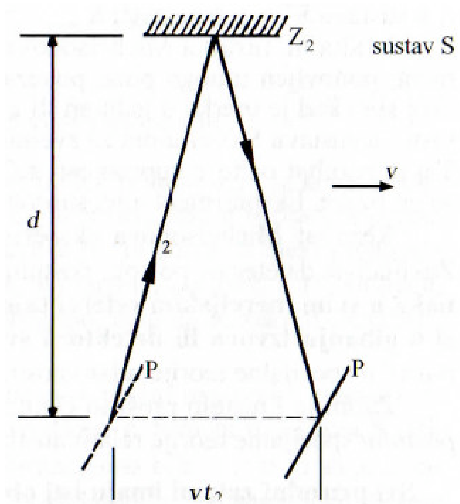


SLIKA: Michelsonov interferometar – Kulišić – slika 9.1. str. 133

Paralelni snop zraka dobiven pomoću leće L iz izvora I dijeli se na polupropusnoj staklenoj pločici PP u 2 dijela:
- reflektirani
- transmitirani

Ti se snopovi nakon refleksije na zrcalima Z_1, odn. Z_2 reflektiraju na PP, odn. kroz nju prolaze i nastavljaju zajedno put prema zastoru. Na zastoru se pojavljuje interferencijska slika koja ovisi o faznoj razlici obaju snopova, odn. vremenskoj razlici dolaska snopa 1 i

2 do zastora. Kad bi uređaj prema eteru mirovao, brzina svjetlosti bi bila u svim smjerovima c. Međutim, uređaj se giba zajedno sa Zemljom u smjeru okomitom na zrcalo Z_1.



SLIKA: Uz izračunavanje vremena potrebnog da zraka prevali put PZ_2P – Kulišić – slika 9.2. str. 133

Vremenska razlika hoda za 2 kraka je:

$$t_1 - t_2 \approx \frac{d}{c}\frac{v^2}{c^2}$$

Ukupna vremenska razlika nastala rotacijom uređaja je $\approx \dfrac{2d}{c}\dfrac{v^2}{c^2}$

Interferencijska slika morala bi se promijeniti kad se uređaj zarotira u novi položaj zbog promjene fazne razlike između 2 snopa. Međutim, rezultat eksperimenta je bio da nema razlike u interferencijskoj slici bez obzira na promjenu položaja uređaja. Brzina svjetlosti u sustavu vezanom za svemir (S) i sustavu vezanom na Zemlju (S') je bila ista, tj. c. Eksperiment nije potvrdio postojanje etera.

Albert Einstein je 1905. protumačio rezultat Michelsonovog eksperimenta. Zaključio je da eter ne postoji. Dao je sljedeće postulate:

1. postulat specijalne teorije relativnosti – princip konstantnosti brzine svjetlosti:

Brzina svjetlosti u vakuumu (c = 2,998·10^8 m/s) jednaka je u svim inercijskim referentnim sustavima i ne ovisi o gibanju izvora ili detektora svjetlosti.

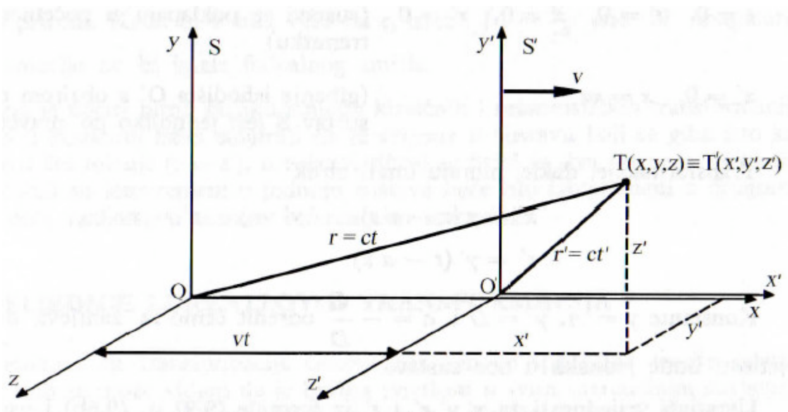
2. postulat specijalne teorije relativnosti (proširenje Galileijevog principa relativnosti):

Svi prirodni zakoni imaju isti oblik u svim inercijskim sustavima, tj. u sustavima koji se relativno jedan prema drugom gibanju jednoliko po pravcu.

Apsolutna istovremenost, svojstvena za klasičnu fiziku, ne postoji u teoriji relativnosti. Dva događaja, koja su istovremena u jednom sustavu, nisu istovremena u drugom sustavu. Svaki sustav ima vlastito vrijeme, odn. vrijeme u različitim sustavima teče različito. Brzina svjetlosti je najveća moguća brzina u prirodi i nikakav signal se ne može širiti brže od te brzine. Samo je brzina svjetlosti jednaka u svim referentnim sustavima.

Lorentzove transformacije

Promatramo 2 inercijska sustava S i S'. Sustav S' se giba u odnosu na sustav S jednoliko pravocrtno duž osi x brzinom v.



SLIKA: Uz izvod Lorentzovih transormacija – Kulišić – slika 9.3. str. 135

Neka se u početnom trenutku $t = t' = 0$ (tj. kad se oba sustava poklapaju) iz ishodišta pošalje svjetlosti signal. Nakon vremena t taj signal dođe u neku točku T. Udaljenost $\overline{OT}$ je $r = ct$. Promatrač u sustavu S' opazit će da je svjetlost došla u istu točku u trenutku t'. Udaljenost koju je signal prešao s obzirom na sustav S' je: $\overline{O'T} = r'$. Budući da je brzina svjetlosti jednaka u oba sustava, vrijedi:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2$$

Transformacija, koja će sustav S prevesti u S', a da pri tom budu ispunjeni navedeni uvjeti, mora biti linearna zbog homogenosti i izotropnosti prostora.

$$x' = Ax + Bt \qquad t' = Cx + Dt$$

Mora udovoljiti i ovim uvjetima:

$t = 0,\ t' = 0,\ x = 0,\ x' = 0$ (sustavi se poklapaju u početnom trenutku)

$x' = 0,\ x = vt$ (gibanje ishodišta O' s obzirom na sustav S je jednoliko po pravcu)

Transformacije moraju biti oblika:

$$x' = \gamma(x - vt)$$
$$y' = y \qquad (*)$$
$$z' = z$$

$t' = \gamma'(t - ax)$

Konstante $\gamma = A$, $\gamma' = D$ i $a = -\dfrac{C}{D}$ se odrede iz zahtjeva da brzina svjetlosti c mora biti jednaka u oba sustava:

$$\gamma^2 (x - vt)^2 + y^2 + z^2 = c^2 \gamma'^2 (t - ax)^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$$

Ova dva izraza usporedimo i dobijemo:

$$\gamma = \gamma' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad a = \frac{v}{c^2} \qquad \Rightarrow \qquad \text{To uvrstimo u (*)}$$

i dobijemo Lorentzove transformacije za prijelaz iz sustava S u S':

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\beta = \frac{v}{c}$$

Za klasične brzine, tj. $v << c$ i $\beta << 1$ Lorentzove transformacije prelaze u Galileijeve. Zato Galileijeve transformacije vrijede za brzine koje su male u usporedbi s brzinom svjetlosti, tj. za klasičnu mehaniku. Iz Lorentzovih transformacija se vidi da je c najveća moguća brzina u prirodi, jer kad bi v bio veći od c, $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ bi bio imaginaran i transformacija ne bi imale fizikalnog smisla.

Zbrajanje brzina

Ako materijalna točka u sustavu S ima komponente brzine:

$$u_x = \frac{dx}{dt} \qquad u_y = \frac{dy}{dt} \qquad u_z = \frac{dz}{dt}$$

U sustavu S' će biti zadane 1. derivacijama koordinata *x*', *y*', *z*' po vremenu *t*':

$$u_x' = \frac{dx'}{dt'} \qquad u_y' = \frac{dy'}{dt'} \qquad u_z' = \frac{dz'}{dt'}$$

Veza između brzine čestice u sustavu S i S' nalazi se pomoću Lorentzovih transformacija:

$$dx' = \frac{dx - vdt}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad dy' = dy \qquad dz' = dz \qquad dt' = \frac{dt - \frac{vd_x}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$u_x' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\frac{dx - vdt}{\sqrt{1-\beta^2}}}{\frac{dt - \frac{vdx}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}} = \frac{dx - vdt \,/:dt}{dt - \frac{vdx}{c^2}\,/:dt} \Rightarrow \quad u_x' = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}$$

$$u_y' = \frac{u_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}$$

$$u_z' = \frac{u_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}$$

To su izrazi za relativističku transformaciju brzina. Ako je $v << c$, izrazi prelaze u Galileijeve transformacije za brzinu:

$$u_x' = u_x - v \qquad u_y' = u_y \qquad u_z' = u_z$$

Također, brzina svjetlosti je ista za promatrače u sustavu S i S'. Ako je $u_x = c$, tada je:

$$u_x' = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} = \frac{c - v}{1 - \frac{vc}{c^2}} = \frac{c - v}{1 - \frac{v}{c}} = c$$

Ako se bilo koja brzina doda brzini c, rezultat je ponovo c. Brzina svjetlosti u relativističkoj fizici ima istu ulogu kao beskonačna brzina u klasičnoj fizici. Ako su $u < c$ i $v < c$, tada je i $u' < c$. Slijedi da u' nikad ne može biti veća od c.

Kontrakcija dužine

Zamislimo neki štap čvrsto vezan na sustav S'. Za promatrača u tom sustavu štap ima duljinu d_0. Dužina, mjerena s obzirom na sustav u kojem štap miruje, je vlastita dužina.

Odredimo koliku će duljinu d izmjeriti promatrač u sustavu S pokraj kojeg taj štap i promatrač u sustavu S' prođu brzinom v u smjeru x-osi.

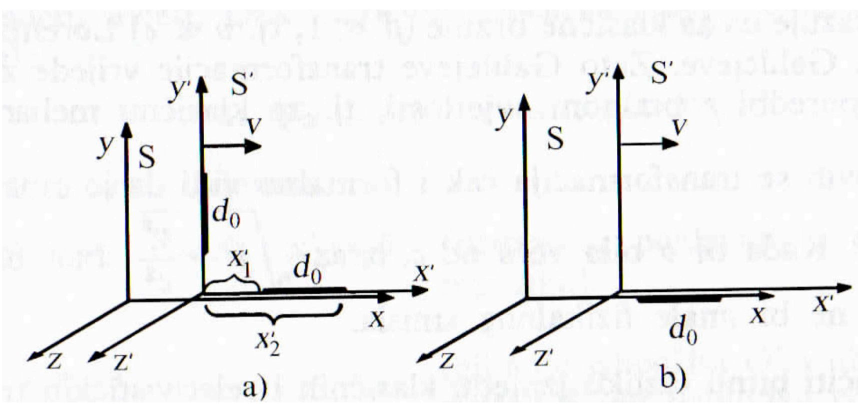
Ako je štap orijentiran u smjeru y ili z-osi, duljina će u sustavu S biti jednaka duljini štapa u sustavu S':

$$d_0 = y_2' - y_1' = y_2 - y_1 = d$$

ili $d_o = z_2' - z_1' = z_2 - z_1 = d$

Ako je štap duljine d_0 u smjeru osi x' čvrsto vezan za sustav S', promatrač u S' izmjeri duljinu tog štapa

$$d_o = x_2' - x_1'$$



SLIKA: Kontrakcija dužine – Kulišić – slika 9.4. str. 138

Promatrač u sustavu S, pokraj kojeg taj štap prođe brzinom v u smjeru osi x, izmjerit će duljinu $d = x_2 - x_1$. Primjenom Lorentzovih transformacija dobijemo:

$$d = x_2 - x_1 = x_2'\sqrt{1-\beta^2} + vt - x_1'\sqrt{1-\beta^2} - vt = (x_2' - x_1')\sqrt{1-\beta^2}$$

$$d = d_o\sqrt{1-\beta^2}$$

Štap, koji se relativno prema promatraču giba brzinom v, izgleda promatraču skraćen za faktor $\sqrt{1-\beta^2}$. To je **Lorentzova kontrakcija**.

Bitno je da je promatrač u sustavu S istovremeno (u istom trenutku *t*) bilježio početak i kraj štapa premda što takvo mjerenje nije istovremeno u vlastitom sustavu štapa S'.

Za promatrača u sustavu S' promatrač iz sustava S prednju točku štapa obilježio u ranijem trenutku nego kraj štap i zato dobio manju duljinu.

Slično, ako promatrač u sustavu S', koji se giba jednoliko po pravcu brzinom *v* izmjeri neku duljinu u smjeru osi *x* sustava S, rezultat je:

$$d' = x_2' - x_1' = \gamma(x_2 - vt_2) - \gamma(x_1 - vt_1) = \gamma(x_2 - x_1) - \gamma v(t_2 - t_1)$$

Obje koordinate x_1' i x_2' treba mjeriti istovremeno u sustavu S', pa je vrijeme $t_2 \neq t_1$, a vremena t_2' i t_1' su ista.

Iz transformacije za vrijeme slijedi:

$$t_2' = t_1' \Rightarrow \gamma\left(t_2 - \frac{vx_2}{c^2}\right) = \gamma\left(t_1 - \frac{vx_1}{c^2}\right) \Rightarrow t_2 - t_1 = \frac{v(x_2 - x_1)}{c^2}$$

$$d' = \gamma(x_2 - x_1) - \gamma\frac{v^2}{c^2}(x_2 - x_1) = \gamma(1 - \frac{v^2}{c^2})(x_2 - x_1) = \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}(x_2 - x_1) =$$

$$= (x_2 - x_1)\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = d_0\sqrt{1 - \beta^2}$$

U oba primjera se mjeri za faktor $\sqrt{1-\beta^2}$ kraća duljina nego kad predmet miruje $\Rightarrow$ relativistička kontrakcija dužine. Promatrač prema kojem se tijelo giba brzinom *v* opaža kontrakciju duljine tijela u smjeru gibanja za faktor $\sqrt{1-\beta^2}$. Dimenzije okomito na smjer gibanja promatraču izgledaju nepromijenjene.

Dilatacija vremena

Pokazat ćemo da je promatraču u sustavu S' proces, koji se događa u S, duži nego promatraču koji se giba zajedno sa sustavom u kojem se događa taj proces.

Neka se u sustavu S' na mjestu *x*' odvija određeni proces u vremenu $\Delta t' = t_2' - t_1'$. Promatrač u sustavu S izmjeri da je proces trajao $\Delta t = t_2 - t_1$. Prema transformacijama vrijedi:

$$t_2 - t_1 = \frac{t_2' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{t_1' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Bitno je da je promatrač u sustavu S obilježio početak i kraj događaja na istom mjestu *x*' sustava S'.

Promatraču u sustavu S proces koji se dešava u sustavu S' izgleda duži nego promatraču koji miruje s obzirom na mjesto događaja.

Sat ide najbrže u onom sustavu u kojem miruje prema promatraču $\rightarrow$ čim se giba relativno prema promatraču, opaža se **dilatacija vremena**.

Sustav u kojem tijelo miruje zove se VLASTITI SUSTAV. Duljina tijela u tom sustavu zove se VLASTITA DULJINA. VLASTITI VREMENSKI INTERVAL je vrijeme zabilježeno satom vezanim za promatrano tijelo.

Ako je vlastito vrijeme $\Delta\tau$, onda za dilataciju vremena možemo pisati:

$$\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Primjer: dilatacija vremena može se opaziti pri raspadanju -mezona kozmičkih zraka.
Na visini 10-20 km u atmosferi nastaju -mezonu čije je prosječno trajanje 2,2 10^{-6} s. Kad ne bi postojala dilatacija vremena, svi bi se mezoni raspali prije nego što stignu na Zemljinu površinu. To se ne događa jer velik dio nastalih mezona dođe do Zemljine površine što je eksperimentalni dokaz dilatacije vremena.

Relativistička dinamika

2. Newtonov zakon ($\vec{F} = m\vec{a}$) vrijedi samo u inercijskim referentnim sustavima koji su povezani Galileijevim transformacijama. U svim tim sustavima je jednadžba gibanja za odabrano gibanje ista $\rightarrow$ kažemo da je jednadžba gibanja invarijantna s obzirom na Galileijeve transformcije.

U relativističkoj mehanici inercijski referentni sustavi povezani su s Lorentzovim transformacijama $\rightarrow$ jednadžba gibanja mora biti invarijantna s obzirom na Lorentzove transformacije.

U klasičnoj mehanici ukupna količina gibanja izoliranog sustava je očuvana.

Koristimo li klasični izraz za količinu gibanja, tada zakon očuvanja količine gibanja nije invarijantan s obzirom na Lorentzove transformacije.

Možemo pokazati da je zakon očuvanja količine gibanja u skladu s teorijom relativnosti ako količinu gibanja definiramo izrazom:

$\vec{p} = m\gamma\vec{v}$ $\rightarrow$ RELATIVISTIČKA KOLIČINA GIBANJA

m - masa tijela,
$m\gamma$ - ponekad zovemo relativističkom masom
$\vec{v}$ - brzina
$\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$ - faktor ovisan o brzini

Ako je $v << c$, relativistički izraz za $\vec{p}$ prelazi u klasični $m\vec{v}$.

Relativistička količina gibanja je difinirana tako da je očuvana u izoliranim sustavima, tj. u sustavima na koje ne djeluje vanjska sila.

Ako postoji vanjska sila F, onda je ona jednaka prvoj vremenskoj derivaciji relativističke količine gibanja:

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(m\gamma v)$$

To je **relativistička jednadžba gibanja** (relativistički oblik 2. Newtonovog zakona) $\rightarrow$ ona je invarijantna prema Lorentzovim transformacijama.

Za izvod relativističkog izraza za kinetičku energiju, služimo se definicijom kinetičke energije.

Rad izvršen silom F na putu ds javlja se u obliku povećanja kinetičke energije čestice na koju djeluje sila:

$$dE_k = Fds = Fvdt = \frac{d}{dt}(m\gamma v)vdt = m(\gamma dv + vd\gamma)v$$

Vraćamo se na izraz:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} /^2 \Rightarrow \gamma^2 = \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow \gamma^2(1-\frac{v^2}{c^2}) = 1 \Rightarrow$$

$$\gamma^2 - \gamma^2\frac{v^2}{c^2} = 1 / \cdot c^2 \Rightarrow \gamma^2 c^2 - \gamma^2 v^2 = c^2 \ / \ diferenciramo$$

$$2\gamma d\gamma c^2 - 2\gamma d\gamma v^2 - \gamma^2 2vdv = 0 / : 2\gamma$$

$$c^2 d\gamma = v\gamma dv + v^2 d\gamma$$

$$c^2 d\gamma = v(\gamma dv + vd\gamma) / \cdot m$$

$$mc^2 d\gamma = mv(\gamma dv + vd\gamma)$$

$$d(m\gamma c^2) = mv(\gamma dv + vd\gamma) = dE_k \ / \int$$

Granice integracije: od $v = 0$ gdje je $E_k = 0$ do konačne brzine v gdje je

$$E_k = m\gamma c^2 - mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - mc^2$$

To je RELATIVISTIČKI IZRAZ ZA KINETIČKU ENERGIJU.

Ako je $v << c$, relativistički izraz prelazi u klasični:

$$E_k = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - mc^2 = mc^2(1 + \frac{v^2}{2c^2} + ... - 1) = mc^2\frac{v^2}{2c^2} = \frac{mv^2}{2}$$

Kinetička energija u relativistici se može shvatiti kao razlika ukupne energije, koju ima slobodna čestica kad se giba brzinom v, i energije, koju čestica ima kad miruje:

$$E_k = E - E_0 = m\gamma c^2 - mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - mc^2$$

Ukupna energija tijela u relativističkoj mehanici je zbroj njegove kinetičke energije mirovanja:

$$E = E_k + E_0 = m\gamma c^2$$

Iz $E = m\gamma c^2$ se vidi da su ukupna energija i relativistička masa tijela proporcionalne $\rightarrow$ **zakon proporcionalnosti («ekvivalentnosti») mase i energije**.

Primjer: Gubitak mase koji se javlja pri različitim nuklearnim reakcijama pretvara se u energiju i obrnuto, promjena u energiji prelazi u promjenu u relativističkoj masi:

$$\Delta E = \Delta mc^2$$

Kad bi se 1 gram mase potpuno pretvorio u energiju, dobili bismo 10^{14} J energije.
Pri fisiji ^{235}U, raspadom samo 1 jezgre, oslobađa se energija oko 5 10^{-11}J $\rightarrow$ iz relativno malo goriva u nuklearnim elektranama se dobiju veliki iznosi energije.

VEZA ENERGIJE I KOLIČINE GIBANJA

U klasičnoj mehanici veza između kinetičke energije i količine gibanja je: $E_k = \frac{p^2}{2m}$ (za nerelativističke brzine).

Za relativističke brzine je kinetička energija $E_k = E - mc^2$, a količina gibanja

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m\gamma v$$

$$E = m\gamma c^2 \; /^2 \Rightarrow E^2 = (m\gamma v)^2 c^2 (\frac{c^2}{v^2} + 1 - 1) = (m\gamma v)^2 c^2 (1 - (1 - \frac{c^2}{v^2}))$$

$$E^2 = (m\gamma v)^2 c^2 (1 + \frac{c^2}{v^2}(1 - \frac{v^2}{c^2})) = (m\gamma v)^2 c^2 (1 + \frac{c^2}{v^2\gamma^2})$$

$$E^2 = (m\gamma v)^2 c^2 + m^2 c^4 = p^2 c^2 + E_0^{\ 2}$$

$E^2 = p^2c^2 + E_0{}^2 \; / \sqrt{}$

$E = \sqrt{p^2c^2 + E_0{}^2} = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$ veza ukupne energije i količine gibanja

$\dfrac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2c^2$ invarijantno na Lorentzove transformacije

Za fotone, čestice koje se gibaju uvijek brzinom svjetlosti, relacije su sljedeće:

$$E = pc \Rightarrow p = \frac{E}{c}$$