Ime i prezime: ______________________________

JMBAG: ____________________

Jesenski ispitni rok iz Linearne algebre

FER, 30. kolovoza 2021.

1. (**10 bodova**)

(a) Dokažite da je determinanta donje trokutaste matrice jednaka umnošku elemenata na njenoj glavnoj dijagonali.

(b) Neka su zadane dvije regularne matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Njihove determinante označimo sa $a = \det \mathbf{A}$ i $b = \det \mathbf{B}$.

(i) Koliko je $\dfrac{\det(-\mathbf{A})}{b}$?

(ii) Koliko je $\dfrac{\det(\mathbf{A}+\mathbf{B})}{ab}$?

2. (**10 bodova**) Zadane su matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Pokažite da su matrice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ i $\mathbf{C}$ regularne.

(b) Riješite matričnu jednadžbu $\mathbf{X}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^{-1}$.

3. (**10 bodova**) Odredite $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tako da sustav

$$\begin{aligned} x + 5y - 3z &= 1 \\ -3x - 16y + \beta z &= 2\gamma \\ 2x + 12y + 8z &= 2 \end{aligned}$$

(a) ima jedinstveno rješenje,

(b) ima beskonačno mnogo rješenja,

(c) nema rješenja.

OKRENITE STRANICU!

4. (**10 bodova**) Ako je $A(2,4,5)$ jedan vrh kvadrata čija dijagonala $\overline{BD}$ leži na pravcu

$$p \ldots \frac{x-4}{-1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z-3}{4},$$

odredite preostale vrhove kvadrata.

5. (**10 bodova**) Zadano je preslikavanje $A\colon \mathcal{P}_3 \to \mathbb{R}^3$ formulom $A(p) = (p(0), p(1), p(2))$.

(a) Pokažite da je A linearni operator.

(b) Odredite matricu operatora u paru kanonskih baza $\{1, t, t^2, t^3\}$ i $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$.

(c) Odredite rang i defekt operatora A, te po jednu bazu za sliku i jezgru tog operatora.

(d) Pronađite sve $p \in \mathcal{P}_3$ za koje vrijedi $A(p) = (1,2,3)$.

6. (**10 bodova**) Na vektorskom prostoru $\mathcal{M}_{22}$ kvadratnih matrica reda 2 definiran je skalarni produkt formulom

$$\text{za } A, B \in \mathcal{M}_{22}, \quad \langle A|B\rangle = tr(AB^T).$$

Neka je

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Izračunajte $\|C\|$.

(b) Nađite bazu i dimenziju potprostora W, definiranog sa

$$W = \{X \in \mathcal{M}_{22} \mid X = X^T, \langle C|X\rangle = 0\}.$$

Je li W ortogonalni komplement vektorskog prostora $L(C)$?

Ispit se piše 150 minuta. *Dozvoljeno je isključivo korištenje pribora za pisanje. Nije dopuštena upotreba kalkulatora, ni podsjetnika!*