1XXOEY2

A.Pavić-I.Felja

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE (07/08)

ZADACI ZA VJEŽBU (2. CIKLUS)

Sadržaj (po tjednima nastave)

V.tjedan
I.1 Elektromagnetizam.

VI.tjedan
II.1 Sinusno promjenjive veličine .
II.2 Načela rješavanja krugova izmjenične struje.

VII.tjedan
III.1 .RLC krugovi
III.2 Frekvencijske ovisnosti.

VIII.tjedan
IV.1 Topografski i mjesni dijagrami.

FOTOKOPIRANO
S DOZVOLOM
AUTORA

Predgovor

Rješavanje problema (zadataka) u okviru Osnova elektrotehnike djelotvoran je oblik učenja koji studentima pomaže da bolje shvate teorijsku podlogu nastavnog gradiva te da razviju inženjerski pristup neophodan za kasnije rješavanje složenijih problema.

Zadaća ove zbirke zadataka jest dati širi izbor zadataka, grupiranih po tjednima nastave (a unutar njih po temama novog nastavnog programa) koji će omogućiti pripremanje međuispita i završnog ispita, kao i kontinuirano samostalno vježbanje koje najdjelotvornije otkriva praznine i slabosti u razumijevanju nastavnog gradiva. Obrađeni problemi karakteristični su za pojedine nastavne cjeline, a ukupni broj problema nastojali smo održati u studentima prihvatljivim granicama.

Među problemima u svakoj temi ima i onih (označenih zvjezdicom), koji po zahtjevnosti prelaze granice obvezatnog nastavnog gradiva, a namijenjeni su kao izazov i prilika studentima željnim proširenja znanja.

Na početku svake teme navedeni su njome obuhvaćeni pojmovi, kao i jednadžbe (formule) potrebne za rješavanje u temi obrađenih problema. Uz to, da bi se studente uvelo u postupke rješavanja, svaka tema započinje s nekoliko karakterističnih primjera za koje su prikazani postupci rješavanja. Zadaci su predviđeni za samostalan rad studenata i provjeru vladanja gradivom pojedinih tema. Oni ne sugeriraju moguće oblike odgovora i traže da student samostalno dođe i do oblika i brojčanog iznosa rješenja, nakon čega je studenti lakše rješavaju ispitne zadatke s ponuđenim odgovorima.

Zagreb, 7. rujna 2007.

Autori

V. Tjedan predavanja

Tema V.1 Elektromagnetizam

OBUHVAĆENI POJMOVI:- magnetske sile (na naboj u gibanju, na vodič protjecan strujom), magnetsko polje
- magnetski tok Φ, gustoća magnetskog toka toka B
- permeabilnost μ, jakost magnetskog polja H
- elektromagnetska indukcija, inducirani napon
- Faradayev zakon elektromagnetske indukcije
- samoindukcija, međuindukcija
- Lenzovo pravilo, induktivitet L
- međuinduktivitet M, faktor magn.veze k
- energija induktiviteta

$U_m = N\omega BS$
AMPLITUDA NAPONA

POTREBNE JEDNADŽBE:

$\mu_0 = 4\pi \cong 10^{-7}$ Vs/Am	- permeabilnost vakuuma (magnetska konstanta)
$\boldsymbol{F} = Q\,(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$	- sila na naboj u gibanju
$\boldsymbol{F} = I\,(\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B})$	- sila na ravni segment vodiča $\boldsymbol{l}$ protjecanog strujom I
$B = \mu_0 I/(2\pi r)$	- magnetska indukcija na udaljenosti r od ravnog vodiča
$\Phi = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{S} = BS\cos\alpha$	- magnetski tok (jednolike gustoće B) kroz površinu S (okomica na koju zatvara kut α s vektorom $\boldsymbol{B}$)
$u_i = Blv$	- napon induciran u ravnom štapu duljine l, koji se giba brzinom v, okomito na silnice magn. polja indukcije B;
$u_i = -\,d\Phi/dt$	- napon induciran u zatvorenoj konturi kroz koju se magnetski tok promijeni za $d\Phi$ u vremenu dt;
$u_i = -\,N(d\Phi/dt)$	- napon inducirana u zavojnici zbog promjene toka ($d\Phi$ u vremenu dt) obuhvaćenog s N zavoja;
$L = N\Phi/I$	- induktivitet (koeficijent samoindukcije) zavojnice koja svakim od N zavoja obuhvaća tok Φ stvoren strujom zavojnice I;
$M_{(12)} = N_2\Phi_{12}/I_1$	- međuinduktivitet (koeficijent međuindukcije dviju zavojnica, gdje tok Φ_{12} stvoren strujom I_1 prve zavojnice prolazi kroz svaki od N_2 zavoja druge zavojnice;
$k = \Phi_{12}/\Phi_1$	- faktor magnetske veze (postotak zajedničkog toka dviju zavojnica);
$M = k\sqrt{L_1L_2}$	- sveza međuinduktiviteta M i induktiveteta L_1 i L_2 dvaju svitaka s faktorom magnrtske veze k;
$u_L = L(di/dt)$ $uL = L\cdot\Delta i/\Delta t$	- inducirani napon (samoindukcije) na zavojnici induktiviteta L, kroz koju se struja promijeni za di u vremenu dt;
$W = L\cdot I^2/2$	- energija na induktivitetu (energija magnetskog polja zavojnice induktiviteta L, protjecane strujom I).

Primjeri V.1

V.1-P1. Na ravni vodič (štap) duljine l_s=20 cm protjecan strujom 5A, postavljen okomito na silnice magnetskog polja gustoće toka B *(magnetska indukcija)* , djeluje magnetska sila iznosa 1N. Kolika je gustoća magnetskog toka ?
Zadano: $l_S = 0.2\text{m}$ $I = 5\text{A}$ $F = 1\text{N}$

Rješenje: Ustanovljeno je da na vodič protjecan strujom koji se nalazi u magnetskom polju djeluje sila. Sila je vektorska (usmjerena veličina). Iznos sile ovisi o položaju vodiča u

magnetskom polju. Iz toga proizlazi da je i magnetsko polje vektorsko.. Ako je vodič postavljen okomito na silnice sila se računa ovako $F = I\cdot l_S\cdot B$ pa je onda: $B = \dfrac{F}{I\cdot l_S}$ $B = 1\,\text{T}$

U općenitom slučaju silu izračunavamo vektorskim produktom :
$\boldsymbol{F} = I\cdot(\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B})$ vektor $\boldsymbol{l}$ ima iznos jednak duljini vodiča i smjer struje.
napomena : ako je vodič postavljen u smjer silnica tada je sila jednaka nuli. Pojava magnetske sile na vodič koristi se u elektromotorima I elektromehaničkim mjernim instrumentima.

V.1-P2. Kolika je magnetska sila na elektron koji se giba brzinom od 500 km/s, okomito na silnice magnetskog polja gustoće toka 2T?

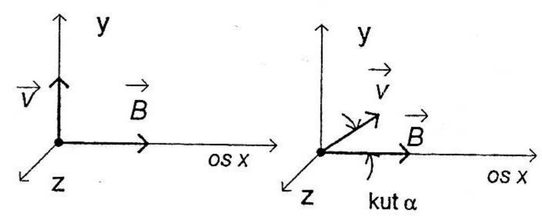
Zadano: $B = 2\text{T}$ $q = 1.6\cdot10^{-19}\text{C}$ $v = 500\cdot10^{3}\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

Rješenje: Na naboj u gibanju djeluje magnetska sila (struja je usmjereno gibanje naboja). Jakost sile ovisi o smjeru naboja prema silnici. Ako se naboj giba okomito na silnice sila je najveća, a kada se giba u smjeru silnice sila je nula. Iznos sile ovdje izračunamo po formuli

$F = q\cdot B\cdot v$ $F = 1.6\times10^{-13}\text{N}$

U općenitom slučaju silu izračunavamo vektorskim produktom:
$\boldsymbol{F} = q\cdot(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$ (q se uvrštava sa predznakom!) pa je iznos *sile* $F = q\cdot B\cdot v\cdot\sin\alpha$
Smjer sile određujemo npr. «pravilom desne» ruke za vektorski produkt. Pojava magnetske sile na naboje u gibanju koristi se kod katodne cijevi te u akceleratorima čestica.

V.1-P3. Silnice homogenog magnetskog polja imaju smjer +x osi. Iznos gustoće magnetskog toka B=1T. U prostor je ubačena čestica mase m nabijena nabojem Q u smjeru: a) osi +y b) pod kutem $\alpha = 30^0$ prema osi +x (slika b) . Kolika je magnetska sila na tu česticu i koji je smjer sile? U kojem bi smjeru trebalo ubaciti česticu pa da sila bude jednaka nuli? Kakva je putanja čestice koja se ubaci okomito na silnice polja?
Zadano: B= 1 T, $v = 10^5$ m/s, Q=1 μC, $\alpha = 30^0$.



slika a) slika b)

Rješenje: a)100 mN b) 50 mN; sila će biti nula ako je kut α=nuli (formula za silu je $F = Q\cdot v\cdot B\cdot\sin\alpha$). Smjer sile određujemo pravilom lijeve ruke ovako: ako prsti pokazuju smjer čestice, a vektor B «udara u dlan» tada palac pokazuje smjer sile. U oba slučaja je to smjer -z osi samo je u slučaju b) sila manja! Putanja čestice je kružnica polumjera $r = mv/QB$. Silnice magnetskog polja su za razliku od silnica elektrostatskog polja zatvorene linije tj. nemaju početak niti kraj. U prostoru gdje je polje homogeno silnice su jednoliko raspoređene (ekvidistantne su).

V.1-P4. Kolika je gustoća magnetskog toka na udaljenosti 50 cm od ravnog vodiča kroz koju prolazi struja od 125 A? Kolika je gustoća toka *B* na udaljenosti od 2 m?

Zadano $I = 125A$ $r_1 = 0.5m$ $r_2 = 2m$ $\mu_o = 4\cdot\pi\cdot10^{-7}\frac{(V\cdot s)}{A\cdot m}$

Rješenje: Gustoća magnetskog toka ovisi o magnetskim svojstvima sredstva koje okružuje vodič . Ako je to zrak kao u ovom zadatku tada je:

$B_1 = \mu_o\cdot\frac{I}{2\cdot\pi\cdot r_1}$ $B_2 = \mu_o\cdot\frac{I}{2\cdot\pi\cdot r_2}$ $B_2 = 1.25\times10^{-5}T$ $B_1 = 5\times10^{-5}T$

napomena: Osim ovog, koje je nastalo zbog struje od 125 A , postoji i magnetsko polje Zemlje koje ima različite iznose na raznim mjestima, ali možemo kao približan podatak uzeti da je to oko 50μT. U stvarnosti bi ovom izračunatom polju trebalo **vektorski** (dakle vodeći računa i o smjeru) pridodati polje Zemlje.

V.1-P5. Koliki je a) magnetski tok u zračnom kružnom svitku presjeka 2 cm^2,srednjeg polumjera 3,5 cm sastavljenom od 1000 zavoja protjecanih strujom od 5 mA. b) ulančani tok iste zavojnice

Zadano $N = 1000$ $S = 2\cdot10^{-4}m^2$ $I = 5mA$ $R_{sr} = 3.5\cdot10^{-2}m$

Rješenje: Magnetsko polje za ovaj oblik namota (koji se naziva još: prstenasti ili torusni) je "zarobljeno" u prostoru jezgre. Najprije izračunamo srednju duljinu silnice: $l_{sr} = 2\cdot\pi\cdot R_{sr}$

$l_{sr} = 0.22$ m Magnetski tok dobivamo ovako:

$\Phi = \frac{(I\cdot N)}{\left(\frac{1}{\mu_o}\cdot\frac{l_{sr}}{S}\right)}$ $\Phi = 5.714\times10^{-9}Wb$

$\phi = \left(\frac{I\cdot N\cdot\mu_0\cdot S}{l_{sr}}\right)$

napomena: magnetski krug kružnog svitka možemo usporediti sa strujnim krugom. Umnožak *NI* ima ulogu elektromotorne sile (napona) i naziva se magnetomotorna sila. $MMS = I\cdot N$

$R_m = \frac{1}{\mu_o}\cdot\frac{l_{sr}}{S}$ $R_m = 8.75\times10^8\frac{s^2A^2}{kg\,m^2}$ $\Phi = \frac{MMS}{R_m}$ $\Phi = 5.714\times10^{-9}Wb$

b) Ulančani tok je ukupan tok kroz sve zavoje. Ako kroz svaki zavoj prolazi tok Φ tada je je ulančani tok $\Psi = N\cdot\Phi = 5.714\times10^{-6}$ Vs

Ulančani tok je važan pri proračunu induciranog napona. Uvodi se pojam ulančanog toka po jedinici struje koji se naziva induktivitet $L = \Psi / I = 1.14\cdot10^{-3}$ Vs/A

Induktivitet je važno svojstvo zavojnice kao elementa strujnog kruga.

Napomena: Gustoća magnetskog toka B mjeri se posebnim instrumentom koji se naziva: mjerilo magnetske indukcije (popularno: teslametar). Takvo mjerilo ima malu sondu (površine 1-2mm^2) koju treba postaviti na mjesto gdje želimo izmjeriti veličinu *B*. Treba voditi računa da je veličina *B* usmjerena (vektor) pa sondu treba postaviti tako da silnice padaju okomito na površinu sonde.

V.1-P6. Odredite približno gustoću magnetskog toka u **ravnom** zračnom svitku duljine 10 cm s 360 zavoja žice protjecanih strujom od 100mA.

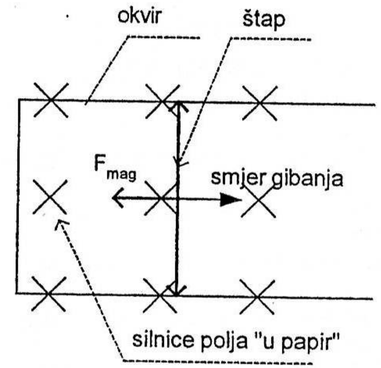
Zadano $N = 360$ $I = 0.1A$ $l_{sv} = 0.1m$ $\mu_o = 4\cdot\pi\cdot10^{-7}\frac{(V\cdot s)}{A\cdot m}$

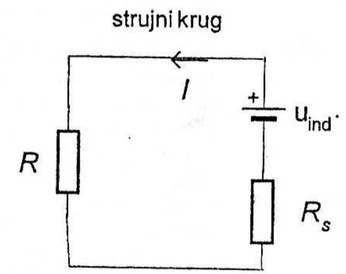
Rješenje: Polje ravnog svitka je nehomogeno. Unutar svitka postoji koncentracija silnica dok se izvan njega, rasipaju u okolni prostor. Slično je i magnetsko polje štapastog magneta Važno je da zapazite: silnice magnetskog polja su **neprekinute zatvorene linije** . Postoje (komplicirane) formule sa kojima možemo izračunati magnetsko polje u bilo kojoj točki prostora unutar i izvan ravnog svitka, ali se ovdje ograničavamo samo na <u>približan proračun</u> polja unutar svitka kojim dobivamo $B = 4.524\times10^{-4}T$

V.1-P7. Vodljivi štap duljine 10 cm klizi brzinom 9 m/s po vodljivom okviru u magnetskom polju gustoće toka 1T. Kolika je magnetska sila na štap?

Zadano: $l_š$=0,1 m v=9 m/s B=1 T R_{okvira}=0.1 Ω $R_š$=0.05 Ω

Rješenje: Ovo je primjer strujnog kruga u kojem je inducirani napon na krajevima štapa izvor napona, otpor štapa je unutarnji otpor izvora,a otpor okvira vanjski otpor *R*.Treba zapaziti da se vanjski otpor tj. otpor okvira povećava kako se štap pomiče. Najprije valja izračunati inducirani napon, a onda Ohmovim zakonom struju:





$u_{ind} = B\cdot l_S\cdot v$ $u_{ind} = 0.9V$ $i = u_{ind}/(R+R_š)$ $I = 6A$

Na štap protjecan strujom koji se giba u magnetskom polju djeluje magnetska sila

$F_{mag} = I\cdot l_S\cdot B$ $F_{mag} = 0.6N$

Ovu, magnetsku silu, moramo savladavati prilikom pomicanja štapa. Time trošimo mehaničku energiju koja se pretvara u električnu, a ta se onda troši na zagrijavanje otpora. U ovom zadatku je prikazan jednostavni uređaj za proizvodnju el.energije (generator). Umjesto pravocrtnog gibanja pogodnom konstrukcijom se postiže isti efekt, ali pri kružnom gibanju štapa (rotacioni strojevi)

V.1-P8. Svitak od 100 zavoja obuhvaća magnetski tok od 0,8 mVs . Ako se tijekom vremena od 4 ms tok linearno smanji na nulu koliki se napon pojavi (inducira) na stezaljkama svitka?

Zadano: $N = 100$ $\Phi = 0.8\,10^{-3}Wb$ $t = 4\cdot10^{-3}s$

Rješenje: Faraday je ustanovio da se u zavoju žice prilikom promjene magnetskog toka pojavi (inducira) napon koji je ovisan o brzini promjene toka. Ako imamo veći broj zavoja (svitak) kroz koji prolazi promjenjivi tok tada je ukupan inducirani napon jednak sumi induciranih napona u pojedinim zavojima. U našem zadatku promjena toka je razlika početnog (Φ) i konačnog toka (0):

$\Delta\Phi = \Phi - 0$ $\Delta t = 4\cdot10^{-3}s$

inducirani napon u jednom zavoju je $u_1 = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ $u_1 = 0.2\,V$

Ukupan inducirani napon je: $u_{ind} = N \cdot u_1$ $u_{ind} = 20\,V$

Napomena: magnetski tok može nastati i zbog vlastite struje svitka. Tada se inducirani napon naziva *napon samoindukcije*. Ovdje, u ovom zadatku, tok je nastao u nekom drugom izvoru toka. To može biti magnet ili elektromagnet postavljen u blizinu svitka.

V.1-P9. Svitak od 200 zavoja površine presjeka 20 cm^2 rotira oko osi okomite na silnice homogenog magnetskog polja gustoće toka 1,2T. Kojeg je oblika napon induciran u svitku. Ako svitak u svakoj sekundi učini 5 okretaja odredite najveću vrijednost (amplitudu) induciranog napona.

Zadano: $N = 200$ $S = 20 \cdot 10^{-4} m^2$ $B = 1.2T$

Rješenje: Rotaciono gibanje svitka u magnetskom polju ima veliki praktički značaj za proizvodnju električne energije. Prilikom okretanja svitka magnetski tok se mijenja po sinusnom zakonu. Dobiva se vremenski promjenjivi sinusoidni napon koji popularno nazivamo **izmjenični napon** (eng. kratica: AC od alternatig current). Taj napon vremenski gledano mijenja svoj iznos i polaritet pa uvodimo pojam trenutne vrijednosti. Grafički prikaz momentalnih vrijednosti naziva se valni oblik. Dakle, naš napon ima **sinusoidni valni oblik**. Ovisno o broju okretaja koje svitak učini u jedinici vremena mijenjaju se dvije značajke induciranog napona: **frekvencija i amplituda**. Kod kružnog gibanja pri jednom okretaju učini se kut od 2π radijana odnosno 360° i opisuje se jedna sinusoida. Ako se u jednoj sekundi načini 5 okretaja znači da se u sekundi učini kut od 10π radijana. Kutna brzina ω je onda $\omega=10\pi$ radijana/s ili kraće s^{-1} $\omega = 10 \cdot \pi \frac{1}{s}$

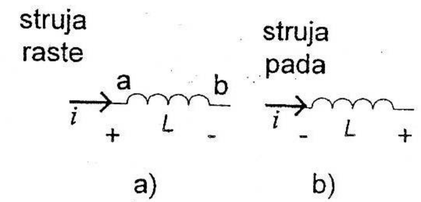
Ovaj napon u jednoj sekundi 5 puta opisuje sinusoidu tj. ponavlja se 5 puta pa mu je frekvencija f=5 Hz. Općenito je $\omega=2\pi f$

Amplituda napona je : $U_m = N \cdot \omega \cdot B \cdot S$ $U_m = 15.08\,V$

V.1-P10. Struja kroz svitak induktiviteta L=100 mH, počne (u trenutku t=0) rasti stalnom brzinom od 10 A/s. Odredite napon samoindukcije na svitku u trenutku t=1 s. Zadano:

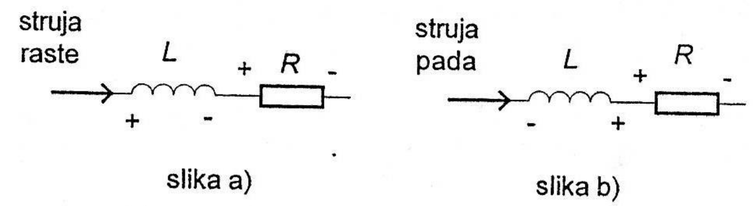
$promjena\,I = 10 \frac{A}{s}$ $L = 100 \cdot 10^{-3} H$

Rješenje: Struja koja prolazi kroz svitak stvara *vlastiti tok* svitka. Ukupan tok je suma tokova kroz pojedine zavoje.Struja iste jakosti kroz različite svitke stvara (proizvodi) različite tokove. Odnos ukupnog toka i struje svojstven nekom svitku, naziva se induktivitet L. Induktivitet je važan parametar svitka. Pomoću induktiviteta jednostavan je proračun napona samoindukcije to je umnožak induktiviteta i brzine promjene struje: $u_L=L \cdot di/dt$. Na grafu vremenske funkcije promjene struje derivacija (di/dt) je proporcionalna nagibu tangente ($\Delta i/\Delta t$). Ovu formulu treba povezati sa slikom. Struja ulazi u priključnicu **a**. Napon se odnosi na napon U_{ab} (b je referentna priključnica. Svitak u kojem se inducira napon od 1 V pri promjeni struje 1A/s ima induktivitet 1 H (henry).



na slici a) je prikazan polaritet napona pri porastu struje (svitak se «protivi» porastu). Iznos napona je u ovom slučaju 1 V. Pri porastu struje njezina promjena ($\Delta i/\Delta t$) je pozitivna

napomena: žica od koje je napravljen svitak ima i omski otpor R_s. Prema tome na realnom svitku osim napona samoindukcije imamo i napon koji proizlazi iz Ohmovog zakona. Za napon «samoindukcije» važna je promjena struje, a za «omski» napon, trenutna vrijednost struje. Realni svitak se stoga shematski može prikazati kao serijski spoj *idealnog induktiviteta* L i otpora R. Ukupan napon na stezaljkama takvog (realnog) svitka je algebarska suma napona na dva serijski spojena elementa (važan je polartitet pojedine "komponente" napona)



Pitanje: Kolika se magnetska energija nakupi u svitku nakon 1 sekunde.

Odgovor: nakon jedne sekunde struja ima iznos 10 A pa je energija W=0,5• L •10^2= 5 J

Zadaci V.1

1. Ravni vodič duljine l nalazi se u homogenom magnetskom polju u kojem je gustoća toka (indukcija) B. Kut između vodiča i magnetskih silnica je α, a struja kroz vodič I. Kolika je sila na taj vodič? Za koji kut α će sila biti najveća, a za koji nula?
Zadano: B = 0.5 T, I = 20 A, l = 0.1 m , $\alpha = 30^0$.

Rezultat: 0.5 N, sila je najveća kada je $\alpha = 90^0$, a najmanja za α=0.

2. Odredite magnetsku silu koja djeluje po 1 m duljine između dvaju dugih paralelnih ravnih vodiča udaljenih međusobno 1m, protjecanih strujama od 2 A suprotnog smjera. Da li se ti vodiči privlače ili se odbijaju? Kolika će biti ta sila ako se struja dvaput smanji?

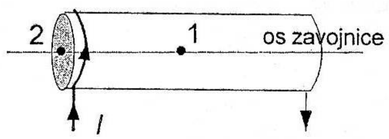
Rezultat:: 8 x 10^{-7} N.

3. Magnetska sila između dvaju paralelnih vodiča duljine 2 m razmaknutih za 1 cm i protjecanih nepoznatom strujom I iznosi 4 mN. Kolika je ta struja?

Zadano: $d = 0.01m$ $l_V = 2m$ $F = 4 \cdot 10^{-3} N$

Rezultat: I=10 A

4. Na okrugli drveni valjak gusto je namotano *N* zavoja bakrene lakom izolirane žice. Izračunajte gustoću magnetskog toka B u točki koja je: a) u sredini zavojnice (1) b) na krajevima zavojnice (2) c) odredite smjer polja (silnica) u točki 1. Napomena: Duljina valjka je *l* je puno veća od njegova polumjera *r*.



Zadano: l=12 cm, *N*=300, *r* =1 cm, *I* = 0.8 A.

Rezultat B_1=2.5 mT; za «duge zavojnice» vrijedi da je polje na krajevima dvaput manje nego u sredini. Smjer određujemo pravilom desne ruke (u lijevo).

5. Ravni vodič (štap) duljine 20 cm giba se brzinom 15 m/s okomito na silnice magnetskog polja gustoće toka 1,2 T. Koliki će se napon pojaviti (inducirati) na krajevima vodiča?

Zadano: $B = 1.2\text{T}$ $l_s = 0.2\text{m}$ $v = 15\frac{\text{m}}{\text{s}}$

Rezultat: Ako je zadovoljen uvjet međusobne okomitosti smjera gibanja štapa i magnetskih silnica inducirani napon na krajevima štapa je:

$u_{ind} = B \cdot l_s \cdot v$ $u_{ind} = 3.6\,\text{V}$

6. Zrakoplov (Airbus A380) ima raspon krila 80 m i leti brzinom od 900 km/h. Položaj zrakoplova je takav da vertikalna komponenta zemljinog magnetskog polja na površinu krila iznosi 20 μT. Koliki se napon inducira između krajeva krila? Da li bismo mjerenjem tog napona mogli odrediti brzinu zrakoplova?

Rezultat: 0.4 V; Ne, jer taj napon ne možemo izmjeriti (u priključnim vodovima bi se također inducirao napon istog iznosa pa je napon u konturi: krilo-vodovi jednak nuli).

7. Svitak induktiviteta *L* protjecan je strujom *I*. Koliki se napon inducira na krajevima svitka, ako se struja linearno smanji na nulu u vremenu Δt? Koliko napona «otpada» na pojedini zavoj ako zavojnica ima N zavoja?

Zadano: *L* = 1 H, *I* = 1 A, Δt = 100 ms, *N*=100.

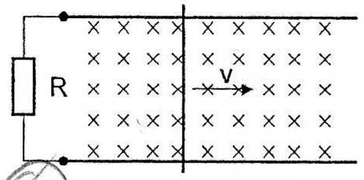
Rezultat: 10V, 0.1V.

8. Krajeve svitka iz prethodnog primjera označimo s **a** i **b**. Struja ulazi u stezaljku označenu s **a**. Koji je polaritet induciranog napona kojemu ste izračunali iznos? Koliki bi bio napon u_{ab} ako bi se struja smanjila na nulu brzinom 1000 A/s?

Rezultat: plus je na **b** (jer se struja smanjuje, kod porasta struje plus je na **a**), u_{ab} = -1000V.

9. U homogenom magnetskom polju koje ima smjer "u papir" nalazi se dva usporedna vodiča (tračnice) po kojima klizi ravni vodič (1) (vidi sliku). Polje ima gustoću silnica *B*. Razmak

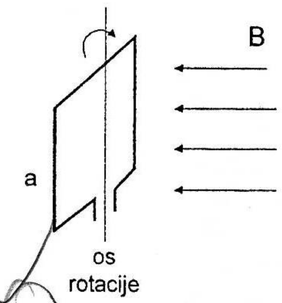
tračnica je *l*. Otpor tračnica je zanemarivo mali dok je otpor vodiča *R*v. Na jednom kraju tračnica spojen je otpornik *R*. Vodič se giba stalnom brzinom *v* u označenom smjeru. Izračunajte a) inducirani napon b) energiju koja se utroši u otporniku *R* kroz vrijeme Δt.



Zadano: *B* = 0.3 T, *R*v = 1 Ω, *R* = 2Ω
v= 10 m/s, *l* = 0.1 m, Δt = 0.1 s.

Rezultat: 0.3V, 2mJ.

10. Tanka kvadratna zavojnica stranice *a*=0.1 m, ima 500 zavoja i okreće se sa 1200 okretaja u minuti. Os rotacije okomita je na površinu Zemlje. Horizontalna komponenta Zemljinog magnetskog polja ima iznos od 40 μT. Na krajevima zavojnice se inducira sinusni napon. Izračunajte a) frekvenciju induciranog napona b) amplitudu tog napona.



Rezultat: *f* = 20 Hz, U_m = 25 mV.

$U_m = N \cdot \omega \cdot B \cdot S$
AMPLITUDA NAPONA

11. Zavojnica ima induktivitet *L* = 1 H dok je otpor namotaja zanemarivo mali. Zavojnicu priključimo na izvor *U*=10 V preko otpornika R_1= 2 Ω. Izračunajte a) kolika je stalna struja zavojnice b) kolika se energija prikupi u magnetskom polju zavojnice prilikom uspostavljanja struje ?

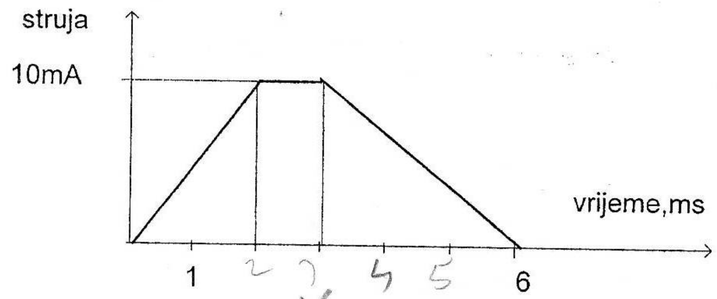
Rezultat: *I* = 5 A, $W = L \cdot I^2 / 2$ = 12,5 Ws (zavojnica je «skladište» energije)

12. Magnetski tok kroz neki zavoj (petlju) promijeni se u Δt=1 s za ΔΦ=1 Vs. Koliki naboj prođe kroz presjek vodiča od kojeg je napravljena petlja ako je otpor vodiča 1Ω?

Rezultat: inducirani napon je u=ΔΦ/Δt, a struja je i=ΔΦ/Δt•R. Naboj izračunamo ovako Δq=i•Δt=ΔΦ/R=1 As.

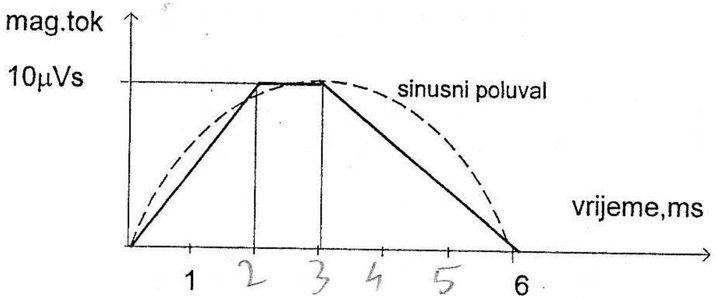
13. Svitak sa *N* zavoja postavljen je u blizinu magneta tako da kroz njegov poprečni presjek *S* prolazi magnetski tok gustoće *B*. Ako zavojnicu udaljimo od magneta tako da se tok linearno smanji na nulu kroz vrijeme Δ*t* izračunajte iznos induciranog napona na krajevima te zavojnice. Da li bi se isti efekt dobio u slučaju ako bismo udaljavali magnet?Zadano: *N* = 20, *S* = 4 cm², *B* = 1 mT, Δt = 2 ms.
Rezultat: 4 mV, da.

14. Struja kroz svitak *L*=100 mH mijenja se vremenski kako je prikazano slikom. Koliki je iznos induciranog napona u trenutku a) 1 ms b) 5 ms? U kojem odnosu su polariteti tih napona? U kojem vremenskom intervalu je inducirani napon jednak nuli?



Rezultat: a) 0,5 V b) 0,33 mV; naponi su suprotnog polariteta; napon je nula u vremenskom intervalu od 2 ms do 3 ms.

15. Magnetski tok ϕ kroz svitak sa N=1000 zavoja mijenja se vremenski kako je prikazano slikom. Koliki je iznos induciranog napona u trenutku a) 1,5 ms b) 4 ms? U kojem odnosu su polariteti tih napona? U kojem vremenskom intervalu je inducirani napon jednak nuli? Pretpostavljamo da je tok isti kroz svaki od zavoja. Kako bi odredili napon ako bi se tok mijenjao po funkciji sinusa (crtkano).



Rezultat: a) 5V b) 3,33V; naponi su suprotnog polariteta; napon je nula u vremenskom intervalu od 2 ms do 3 ms. Kod sinusne promjene najveći napon je u t=0 i t=6 ms (različita su polariteta).U trenutku t=3 ms napon bi bio nula. Vremenska funkcija promjene napona je kosinus.

16. Dva svitka L_1=5 mH i L_2=10 mH spojena su u seriju. Faktor magnetske veze je k=0.75. Magnetski tokovi samoindukcije i međusobne indukcije imaju jednaki smjer (potpomažu se). Struja koja prolazi kroz zavojnice linearno raste od iznosa 1A brzinom 10 A/s. Izračunajte a) iznos međuinduktiviteta b) iznos napona na stezaljkama zavojnice L_1 u trenutku t = 0.1 s.

Rezultat: M = 5.3 mH, u = 0.103V.

17. Dvije su zavojnice induktivno vezane tako da se promjenom jakosti struje u jednoj od nule do 10 A za vrijeme od 100 ms u drugoj inducira srednji napon od 30 V. Koliki je koeficijent međusobne indukcije ?

Rezultat: Napon međuindukcije je M•di/dt pa je $M=u_{ind}/\Delta i/\Delta t$, M=0,3 H.

18. Svitak ima L=1H i otpor 10 Ω. U nekom trenutku priključimo ga na istosmjerni naponski izvor od 10 V. Kolika je struja u trenutku uključenja? Kolika je konačna struja?Kolika se energija nakupi u svitku?
Rezultat: struja postepeno raste od nule do $U/R=1$ A. U trenutku uključenja struja je nula, a na kraju je 1 A. Na kraju tj. nakon uspostavljanja struje od 1 A u zavojnici je nagomilana (pohranjena) energija (magnetska) od $L \cdot I^2/2$=0,5 J. Prisjetimo se: prilikom nabijanja kondenzatora na napon U u njemu se je nagomilala energija $U^2C/2$.

VI. Tjedan predavanja

OBUHVAĆENI POJMOVI:

- -sinusoida, početni fazni kut
- -kružna frekvencija, frekvencija
- -međusobni fazni pomak
- -maksimalna, trenutna,efektivna,srednja vrijednost
- -prikaz sinusoide vektorom i kompleksnim brojem
- -fazori
- -radni i reaktivni otpori
- - izmjenični krugovi
- -označavanje i mjerenje kuteva
- -Kirchhoffovi zakoni u vektorskom i kompleksnom obliku

POTREBNE JEDNADŽBE:

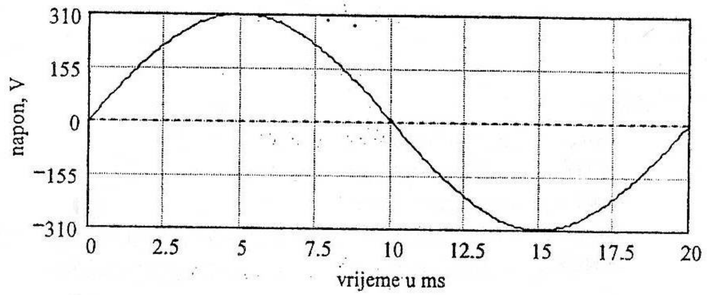
$I_{ef}=I_m/\sqrt{2}$; $U_{ef}=U_m/\sqrt{2}$	efektivne vrijednosti
$f=1/T$;	odnos periode i frekvencije
$\omega=2\pi f$	kružna frekvencija
$X_L=\omega L$; $X_C=1/\omega C$	induktivni i kapacitivni otporu
$\underline{X}_L=j\cdot\omega L$; $\underline{X}_C=1/j\cdot\omega C$	reaktivni otpori u kompl.obliku
$1/j=-j$, $j^2=-1$;	imaginarna jedinica
$P=U_{ef}^2/R=I_{ef}^2R$	snaga na otporniku
$\underline{Z}$=a+jb	kompleksni broj u algebarskom (pravokutnom) obliku
$\underline{Z}^*$=a-jb	konjugirano kompleksni broj od broja $\underline{Z}$

$\mathbf{u}=U_m e^{j(\omega t+\alpha)}$	-kompleksni izraz za *rotirajući vektor* sinusoidnog napona u(t)
$\mathbf{U}_m=U_m e^{j\alpha}$	-kompleksni izraz za *mirni vektor maksimalne vrijednosti* sinusoidnog napona u(t)
$\underline{\mathbf{U}}=Ue^{j\alpha}$	-kompleksni izraz za *mirni vektor efektivne vrijednosti (fazor)* sinusoidnog napona u(t)
u(t)=Im{**u**}	-sveza između vremenskog i kompleksnog prikaza.

Tema VI.1 Sinusno promjenjive veličine

VI.1-P1. Koliki su: kružna frekvencija, frekvencija, perioda, amplituda, efektivna vrijednost i početni fazni kut izmjeničnog napona čija je vremenska promjena opisana izrazom: $u(t)=310\cdot \sin(314\cdot t)$ V. Nacrtajte graf ovog napona za interval od t=0 do t=0,02 s.

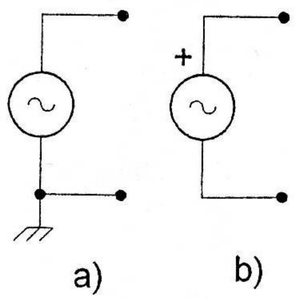
Rješenje: Na slici je prikazan graf ove periodičke funkcije. Perioda T je 20 ms. To znači da cijela sinusoida u ovom slučaju traje 20 ms nakon čega se ponavlja.



Sinusoidna funkcija u jednoj periodi ima jedan pozitivan i jedan negativan maksimum. Iznos tog maksimuma se naziva : *amplituda.* (U_m=310 V) Efektivna vrijednost periodički promjenjivog napona je ona vrijednost stalnog napona na koji bi trebalo priključiti neki otpornik pa da se stvori isti učinak (toplina) kao kad je otpornik priključen na taj promjenjivi napon. Pokazuje se da za sinusni napon vrijedi:

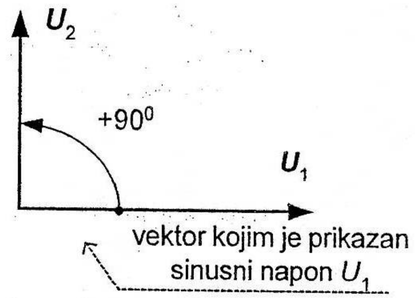
$U_{ef} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$. U ovom slučaju je U_{ef}=220 V

Napon u određenom trenutku naziva se *trenutna (momentalna vrijednost).* U odnosu na referentnu točku ta vrijednost može biti pozitivna ili negativna. Na slici a) i b) je prikazan sinusni izvor napona. Donja stezaljka je referentna (slika a). U trenutku t=0,005 s gornja stezaljka je pozitivna (+310V), a npr. u trenutku t=0,015 s gornja stezaljka će biti negativna (-310 V). Umjesto označavanja referentne stezaljke koristimo oznaku + (slika b) koja zapravo znači da je ona druga stezaljka referentna.



Trajanje periode označavamo slovom *T*. U našem slučaju *T*=20 ms. Broj perioda u jednoj sekundi naziva se frekvencija koju označavamo slovom *f*. Jedinica za frekvenciju je Herz (Hz). Dobivamo da je $f=1/T$=50 Hz. Osim frekvencije *f* uveden je pojam kružne frekvencije. Sinusna funkcija je na neki način povezana sa kružnim gibanjem. Jedan okret u sekundi znači da je opisan puni kut od 2π radijana. Kružna frekvencija bi bila 2π rad/s ili jednostavnije s^{-1}. Dakle, da bi dobili kružnu frekvenciju moramo pomnožiti frekvenciju sa 2π , U našem slučaju $\omega=2\cdot\pi\cdot f= 314\ s^{-1}$.
Zadana sinusoida ima u trenutku *t*=0 **vrijednost nula i tendenciju porasta**. Vodimo računa da je to samo jedan poseban oblik sinusoidne funkcije koji možemo nazvati "čista sinusoida". Početni fazni kut je nula. Neke sinusoidne funkcije imaju početni fazni kut. Početni fazni kut kao i fazni odnosi između pojedinih sinusoidnih funkcija lako se zapažaju, ako sinusoidne funkcije prikažemo vektorima ili kompleksnim brojevima.
napomena: kod izračunavanja u izmjeničnim krugovima se efektivne vrijednosti označavaju bez indeksa $_{ef}$, a za maksimalne vrijednosti se koristi indeks $_m$.
Npr. I=3 A znači da je efektivna vrijednost te sinusoidne struje 3 A.

V.1-P2. Odredite koji od napona U_1 i U_2 prikazanih vektorima prethodi u fazi onom drugom za 90^0. Koliki je vremenski razmak između maksimuma, ako je frekvencija 50 Hz?

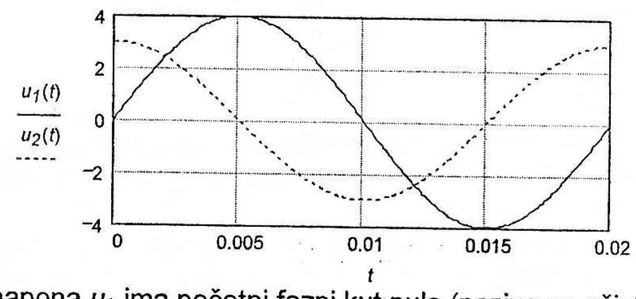


Sinusodne veličine (izmjenični napon i struju) možemo prikazivati vektorima. Time se znatno pojednostavljuje proračun struja i napona u strujnim krugovima izmjenične struje. Razvijene su tzv. simboličke metode u kojima se umjesto vremenskim funkcijama barata vektorima i vektorskim prikazima. Važan je pojam početnog faznog kuta sinusne veličine kao i međusobnog faznog kuta dviju sinusnih veličina. Uzimamo da vektor koji je nacrtan u smjeru pozitivne x-osi ima početni fazni kut nula. Pozitivne kutove mjerimo u smjeru obrnutom od kazaljke na satu, a negativne u smjeru te kazaljke.
Kuteve izražavamo u radijanima ili u stupnjevima. Puni kut ima 360 stupnjeva odnosno 2π radijana. Množenjem kuta u radijanima i polumjera dobivamo duljinu kružnog luka. Radijane pretvaramo u stupnjeve množenjem sa $360/2\pi$=57,3.

Napon U_1 ima početni fazni kut nula, a napon U_2 ima početni fazni kut 90^0 odnosno $\pi/2$ radijana. Napon U_2 fazno prethodi naponu U_1 za 90^0.
Pretpostavimo da su amplitude napona 4 odnosno 3 V i da je kružna frekvencija 314 s^{-1}. Vremenske funkcije ovih napona izgledaju ovako:

$$u_1(t) = 4\cdot sin(314\cdot t) \qquad u_2(t) = 3\cdot sin\left(314\cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Strogo (matematički) uzevši početni fazni kut bi se trebao u vremensku funkciju sinusoide uvrštavati u radijanima (umnožak ωt daje radijane). Ponekada, ako ne mislimo računati momentalne vrijednosti , taj kut napišemo u stupnjevima, jer lakše povezujemo tako napisan kut sa položajem vektora u ravnini. Npr. ako je kut 2,2 rad možemo napisati $310\cdot\sin(\omega t+2{,}2)$ ili $310\ \sin(\omega t+126^0)$. Očito u drugom slučaju kutomjerom lako pozicioniramo vektor tog napona.



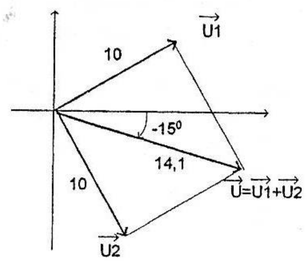
Sinusoida napona u_1 ima početni fazni kut nula (naziva se «čista sinusoida»), dok je početni fazni kut sinusoide napona u_2 jednak $\pi/2$ (90^0). Ovu sinusoidnu funkciju

nazivamo "čista" kosinusoida. Očito je da sinusoida napona u_2 ranije ima maksimum i to za 5 ms odnosno za $\pi/2$ što matematički možemo izračunati ovako (pretvaranje kuta u vrijeme)

$$\omega \cdot t = \frac{\pi}{2} \qquad t = 0.5 \cdot \frac{\pi}{\omega} \qquad t = 5 \times 10^{-3}\,\mathrm{s}$$

Koristeći funkciju *sinus* odnosno *kosinus* te početni fazni kut (pozitivan ili negativan) možemo isti sinusoidni napon izraziti na više načina!
Pitanje: kako bi napisali matematičku funkciju za vektor napona koji ima smjer –x osi. Odgovor: $-U_m \cdot \sin(\omega \cdot t)$ ili $U_m \cdot \sin(\omega \cdot t+\pi)$ ili $U_m \cdot \cos(\omega \cdot t+\pi/2)$ ili.....(dopišite još neke mogućnosti).

VI.1-P3. Dva sinusna izvora spojena su serijski. Odredite ukupan napon $u(t)=u_1(t)+u_2(t)$ pomoću vektorskog prikaza .
Zadano je: $u_1(t)=10 \sin(\omega t+\pi/6)$ $\quad u_2(t)=10 \sin(\omega t-\pi/3)$

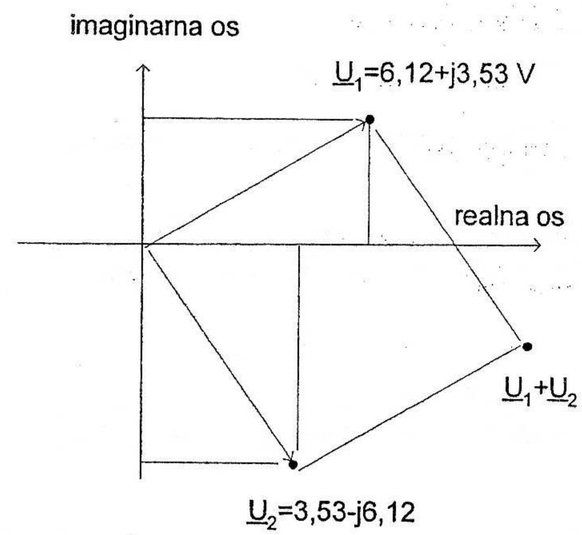


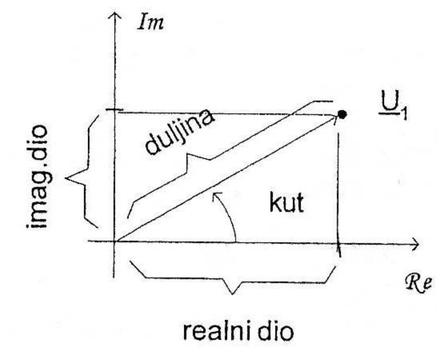
Rješenje: nacrtamo u mjerilu vektore napona koje zbrojimo po pravilu zbrajanja vektora. Odredimo duljinu rezultante i početni fazni kut. Nakon toga napišemo vremensku funkciju napona:
$u(t)= 14{,}1 \sin(\omega \cdot t - \pi/12)$

Prikazom napona pomoću vektora "zaobilazimo" komplicirana računanja pomoću trigonometrijskih formula (pogledati u matematičkom priručniku). Da bi se uvjerili u jednostavnost "vektorske" metode pokušajte zadane napone zbrojiti "matematičkim" postupkom.

VI.1-P4. Napone iz prethodnog zadatka prikažite u obliku kompleksnih brojeva (fazora) i zatim "fazorskom" metodom (u kompleksnom) području izračunajte ukupan napon.

Rješenje: Ako smo prihvatili mogućnost prikaza sinusoidnih napona pomoću vektora neće biti osobit problem prikazati te vektore u kompleksnoj ravnini. Položaj vrha vektora u kompleksnoj ravnini je zapravo kompleksni broj koji ima realni i imaginarni dio. Time su na neki način povezani: sinusoida, vektor i kompleksni broj. Prije prikazivanja kompleksnih brojeva koji "zamjenjuju" zadane napone treba kazati da se prikazuju efektivne ,a ne maksimalne vrijednosti. Razlog tome ja taj da su upravo efektivne vrijednosti one pomoću kojih izračunavamo snage i energije u našim izmjeničnim krugovima. To znači da najprije izračunamo efektivne vrijednosti napona u_1 i u_2 ,a zatim za njih odredimo realne i imaginarne dijelove kompleksnih brojeva koji ih "zamjenjuju". Efektivne vrijednosti su jednake za oba zadana napona: 7,07 V.





Na slici desno su prikazane dvije mogućnosti prikaza kompleksnog broja. Prva je tzv. pravokutni oblik u kojem je kompleksni broj zbroj realnog i imaginarnog dijela, a druga je tzv. polarni oblik u kojem se zadaje duljina (modul-apsolutna vrijednost) i kut (argument) prema realnoj osi npr. $\underline{U}_1=7{,}07\angle 30^0$, što čitamo:7,07 pod kutem 30^0 . Za rješavanje zadataka treba ravnopravno baratati sa oba oblika. Isto tako čitatelj koji želi, u kompleksnom području, rješavati zadatke iz izmjeničnih krugova treba dobro poznavati sve računske operacije sa kompleksnim brojevima.
Kompleksni brojevi kojima prikazujemo struje i napone nazivaju se fazori.

$\underline{U}_1= 6{,}12 + 3{,}54j \quad \underline{U}_2=3{,}54-6{,}12j$; $\underline{U}=\underline{U}_1+\underline{U}_2=9{,}66-2{,}59j=10\angle -15^0$

Iz duljine izračunatog fazora ustanovimo da je efektivna vrijednost 10V, a početni fazni kut -15^0. Efektivnu vrijednost pomnožimo sa 1,41, a kut pretvorimo u radijane. Nakon toga napišemo matematički izraz za sinusoidu napona: $u(t)=14{,}1 \sin(\omega t-\pi/12)$

Postupak dobivanja funkcije sinusoide iz kompleksnog broja je "vraćanje" u stvarnost, jer znamo da su u izmjeničnom strujnom krugu struje i naponi sinusoide, a ne kompleksni brojevi (ili vektori).

Važno: Fazor se odnosi na efektivnu vrijednost napona ili struje. To je kompleksni broj koji prema potrebi pišemo u algebarskom ili polarnom obliku. Za množenje I dijeljenje pogodniji je polarni oblik. Da bi istaknuli da se radi o kompleksnom broju fazore ćemo posebno označavati tako da ih potcrtamo. Napomena : osim ovakvog, često se koristi označavanje sa točkom iznad slova (npr. $\dot{U}$).

Napomena: instrumenti za mjerenje napona i struja u izmjeničnim krugovima su napravljeni tako da mjere (pokazuju) efektivne vrijednosti. O tome više na laboratorijskim vježbama.

Zadaci VI.1

VI.1-1. Koliki su efektivna vrijednost i početni fazni kut te frekvencija napona čija je vremenska promjena opisana izrazom $u(t)=155{,}5\sin(377\cdot t+\pi/6)$?

Rezultat : U=109,95 V, $\alpha_u=\pi/6$ rad = 30^0 ,kružna frekvencija $\omega=377\ s^{-1}$, f=60 Hz T=16,6 ms

VI.1-2. Izračunajte amplitude sinusne struje $I = I_m \sin(\omega t+\pi/4)$ ako je u trenutku t=0 momentalna vrijednost struje a)1A b) 1,41 A. Prikažite zadanu struju vektorom.

Rezultat: 1,41 A: 2A

VI.1-3. Sinusna struja ima amplitude 1,41 A i početni fazni kut α_i. Koliki je početni kut ako u trenutku t=0 struja ima iznos 1 A sa tendencijom a) poraste b) smanjivanja?

Rezultat: a) $\pi/4$ b) $3\pi/4$.

VI.1-4. U čvoru električnog kruga spojene su tri grane. U prvu i drugu ulaze struje $i_1=1\sin\omega t$ $i_2=1\cos\omega t$. Kolika je struja treće grane koja izlazi iz čvora? Zadatak riješite 1)analitički i2) vektorskog prikaza struja 3) u kompleksnom području (pomoću fazora)

Rezultat: $i_3=1{,}41\sin(\omega t+\pi/4)$

VI.1-5. Sinusna struja ima prvi negativni maksimum –5A u trenutku $t=7\pi/8$ ms. Napišite izraz za vremensku promjenu struje ako je $T=\pi$ ms.

Rezultat: $i(t)=5\cos(2000t-3\pi/4)$ ili $i(t)=5\sin(2000t-\pi/4)$ A ili.....

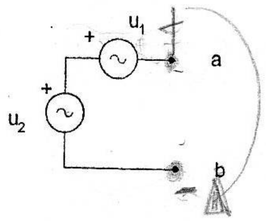
VI.1-6. Sinusni napon zadan je ovako: $u(t)=10\sin(\omega t+\pi/4)$. Prikažite ovaj napon kao sumu "čiste" sinusoide i kosinusoide.

Rezultat: $u(t)=7.07\sin\omega t+7.07\cos\omega t$.

VI.1-7. Sinusna struja je zadana ovim izrazom $i(t)= 5\cos(10t- 3\pi/4)$. Napišite ovu struju kao sinusnu funkciju u obliku $i(t)=I_m\sin(\omega t+\alpha_i)$. Kolika je momentalna vrijednost struje u trenutku t=0? Kolika je brzina promjene (derivacija) struje u trenutku t=0?

Rezultat: $5\sin(10t-3\pi/4)$; -3,5 A; -35,25 A/s

VI.1-8. Zadana su dva sinusna naponska izvora. Odredite napone $u_{ab}(t)$ i $u_{ba}(t)$. Zadano je : $u_1=5\sin(\omega t+\pi)$, $u_2=5\sin(\omega t)$



Rezultat:

$u_{ab}=+u_2 - u_1= 10\sin\omega t$

$u_{ba}= - u_{ab} = + u_1 - u_2= -10\sin\omega t= 10(\sin\omega t +\pi)$

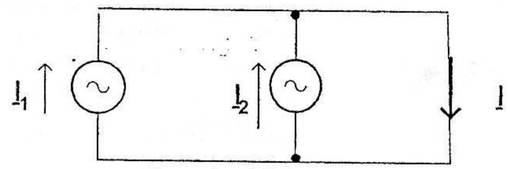
VI.1-9. Zadan je fazor struje $\underline{I}$=12+j12 A. a) napišite fazor u polarnom obliku b) odredite realni i imaginarni dio ovog kompleksnog broja c) odredite modul (iznos) i argument (kut) ovog fazora. d) Napišite vremensku funkciju struje koja odgovara zadanom fazoru.

Rezultat: a)$16{,}97\underline{|45^0}$ b) realni 12 imag. 12 c) 16,97; 45^0
d) $i(t)=24\sin(\omega t+\pi/4)$ (modul treba pomnožiti sa 1,41!)

VI.1-10. Napon na nekom elementu strujnog kruga sa sinusnom pobudom, izračunat je u obliku fazora a) $\underline{U}$=173+j100 V b) $\underline{U}$=173-j100 V. Odredite momentalnu vrijednost napona u trenutku t=0.

Rezultat: a) +141 V b) –141 V (momentalna vrijednost je projekcija na imag.os pomnožena sa 1,41)

VI.1-11. Dva strujna izvora jednake frekvencije zadana su u kompleksnom području fazorima $\underline{I}_1=5{,}2\underline{|37^0}$ $\underline{I}_2=6{,}6|108^0$ Odredite a) fazor struje $\underline{I}$ b) vremensku funkciju te struje.



Rezultat: a) $\underline{I}=9{,}64\underline{|77{,}3^0}$ b) 13,6 $\sin(\omega t+ 1{,}35$ rad); zbog preglednosti često kut upisujemo u stupnjevima: 13,6 $\sin(\omega t+ 77{,}3^0)$

Tema VI.2 Načela rješavanja krugova izmjenične struje

VI.2-P1. Otpornik od 10 Ω priključimo najprije na istosmjerni izvor (akumulator) od 12 V, a zatim na sinusoidan izvor (transformator) koji ima maksimalnu vrijednost napona 17 V i frekvenciju od 50 Hz. Koliko se topline razvije na otporniku kroz vrijeme od 1 minute u slučaju a) i u slučaju b)?

Rješenje: U prvom slučaju kroz otpornik prolazi istosmjerna struja od 1,2 A. Snaga je $I^2\cdot R$= 14,4W. Energija će biti 14,4• 60=864 Ws. Treba primjetiti da je snaga konstantna tj. pritjecanje energije u otpornik ima čitavo vrijeme jednaki intenzitet. U drugom slučaju kroz otpornik prolazi vremenski promjenjiva struja. Ta struja ima amplitudu $I_m=U_m/R$=1,7 A. Struja je u fazi s naponom tj. ako sinusoidu napona napišemo sa početnim faznim kutem nula, tada je i za sinusoidu struje početni fazni kut jednak nuli. Za izračunavanje snage i energije mjerodavna je efektivna vrijednost struje koja će biti 1,7/1,41=1,2 A. Prema tome je energija pretvorena u toplinu jednaka kao u slučaju a) tj.864 J. Ipak postoji važna razlika. U ovom slučaju snaga nije vremenski konstantna tj. intenzitet pretvorbe energije se mijenja. Snaga koju smo izračunali je zapravo neka srednja vrijednost snage. Primjer: pretpostavimo da je

otpornik zapravo žarna nit žarulje. Kod priključka na izmjenični napon vrlo niske frekvencije (npr. 10 Hz) moglo bi se vidjeti kako svijetlo žarulje treperi. Treba još kazati da se to neće primjećivati kada je frekvencija napona dovoljno velika (npr. 50 Hz). Zašto? .

VI.2-P2. Svitak induktiviteta *L* priključen je na napon *u*(t)=311sin(314•t), pri čemu je izmjerena efektivna vrijednost struje 8,8A. Koliki je induktivitet?

Zadano: $U = 220\,\mathrm{V}$ $\omega = 314\,s^{-1}$ $I = 8.8\,\mathrm{A}$

Rješenje; Odnos napona i struje i ovdje ima karakter "nekog" otpora. To nije omski nego induktivni otpor koji je ovisan o frekvenciji.

$$X_L = \frac{U}{I} \qquad X_L = 25\,\Omega \qquad X_L = \omega \cdot L \qquad L = \frac{X_L}{\omega} \qquad L = 0.08\,\mathrm{H}$$

Na temelju mjerenja struje i napona nekog nepoznatog elementa zatvorenog "u kutiji" ne bismo mogli ustanoviti karakter njegovog otpora. Tek kada ustanovimo da struja zaostaje za naponom za 90° stupnjeva znamo da se radi o induktivitetu. Postoji i druga mogućnost , a ta je da "snimimo" ovisnost struje o frekvenciji. Općenito otpor nekog dvopola «zatvorenog u kutiji» koji određujemo na temelju mjerenja struje i napona nazivamo "prividni" otpor (eng.: impedancija). Međutim dvopol u kutiji može biti i kombinacija "osnovnih" dvopola npr. serijski spoj otpornika i kondenzatora isl. Što se tiče odnosa napona i struje opet dobivamo neki "prividni" otpor, ali fazni kut..... može biti bilo koji od –90 do +90°. Općenito kod impedancije treba razlikovati iznos i kut.

VI.2-P3. Kondenzator koji ima kapacitet *C* je priključen na izmjenični napon koji ima amplitudu 311V i frekvenciju 50 Hz. Odredite kapacitivan otpor. Kolika je efektivna vrijednost struje kondenzatora? U kojem je faznom odnosu struja prema naponu izvora? Zadano: $C = 100 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{F}$ $U_m = 311\,\mathrm{V}$ $f = 50\,\mathrm{Hz}$

Rješenje: Kapacitivni otpor ovisi o frekvenciji. Što je frekvencija veća taj otpor je manji.

$$X_C = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C} \qquad X_C = 31.831\,\Omega \qquad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

Struju računamo (kao kod "običnih" otpornika) tako da podijelimo napon s kapacitivnim otporom $I = \frac{U}{X_C}$ $I = 6.909\,\mathrm{A}$ (efektivna vrijednost)

Zamislimo da smo kondenzator zatvorili u "kutiju" iz koje izlaze samo priključnice , tako da ne znamo što je unutra. Ampermetrom izmjerimo struju, a voltmetrom napon. Odnos napona i struje ima značenje otpora, ali kako ćemo znati da li je to "običan-omski otpor" ili je to kapacitivan otpor?? Potrebno je odrediti fazni pomak struje u odnosu na napon. Za tako što treba nam malo kompliciraniji instrumentarij (fazometar ili osciloskop). Ustanovili bismo da *struja prethodi naponu za 90°* odnosno za $\pi/2$ radijana.

Vremenska funkcija napona je: $u(t) = 220 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(314 \cdot t)$

vremenska funkcija struje je: $i(t) = I \cdot \sqrt{2} \cdot \sin\left(314 \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$

Zadaci VI.2

VI.2-1 Otpor *R* priključen je na izmjenični napon čija je vremenska promjena *u*(t)=311sin(314•t). Kolika je amplituda, a kolika efektivna vrijednost struje kroz otpor? U kakvom su faznom odnosu napon na otporniku i struja

Zadano $R = 100\,\Omega$, $u(t) = 310 \cdot \sin(314 \cdot t)\,\mathrm{V}$

Rezultat: napon i struja su u fazi, I_m= 3,1 A; I = 2.192A

VI.2-2. Svitak koji ima induktivitet *L* priključen je na izvor izmjeničnog napona stalne amplitude , a promjenjive frekvencije. Kako se promijeni efektivna vrijednost struje ako se frekvencija dvaput poveća?

Rezultat: Induktivni otpor raste s frekvencijom. Dva puta veća frekvencija znači dva puta veći otpor, a to povlači za sobom smanjenje struje dva puta. Matematički to izgleda ovako:

$$I(f) = \frac{U}{X_L} = \frac{U}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot L} = \frac{U}{2 \cdot \pi \cdot L} \cdot \frac{1}{f}$$

Iznos struje ovisi obrnuto proporcionalno o frekvenciji.

VI.2-3. Svitak ima induktivitet 0,1H i neznatan otpor. Koliku će struju pokazati ampermetar ako svitak priključimo na izmjenični izvor napona 220V i frekvencije 50 Hz? U kakvom su faznom odnosu napon i struja? Prikažite napon i struju vektorima. Uzmite da je napon izvora pod kutem nula (nalazi se u +x osi). Mjerilo odaberite sami , ali ga obavezno naznačite na slici. Napišite fazore (kompleksne brojeve) napona i struje s time da za početni fazni kut napona uzmete nula stupnjeva.

Rezultat: 7A; struja fazno zaostaje iza napona za $\pi/2$, odnosno napon fazno prethodi struji za $\pi/2$. Fazori su: $\underline{U}=220\underline{|0^0}$ $\underline{I}= 7\underline{|-90^0}$ Induktivni otpor u kompleksnom području je $\underline{U} / \underline{I} = j\,31.4 = j \cdot \omega L$

VI.2-4. Struja i napon nekog dvopola su zadani ovako: *u*(t) =100sin(ωt+0,5π) i(t)=1• cos (ωt+0,5π). Ustanovite o kakvom se dvopolu radi (otporu, svitku ili kondenzatoru) te iznos parametra kojim ga opisujemo ako je ω=1000 rad/s

Rezultat; dvopol je kondenzator koji ima kapacitivni otpor 100 Ω, a kapacitet mu je *C*=0,1 μF. (struja prethodi naponu za $\pi/2$)

VI.2-5. Napišite struju i napon iz prethodnog primjera u obliku fazora, a zatim odredite prividni otpor u kompleksnom obliku te na temelju njega zaključite o kakvom se elementu radi.

Rezultat: $\underline{U}=100\,\underline{|90^0}$ $\underline{I}=1\underline{|180^0}$ $\underline{Z}= \underline{U}=100\,\underline{|90^0} \;/\; \underline{I}=1\underline{|180^0} = 100\underline{|-90^0}$

Napomena: općenita oznaka za prividni otpor je slovo Z, ako se radi o elementu tipa *C* ili *L* oznaka je X_C odnosno X_L U ovom slučaju može se napisati $\underline{X_C}$=-j100 oma.

VI.2-6. Neki svitak ima neznatan omski otpor dok mu je induktivni X_L=314 oma. a) Koliki je induktivitet L b) Kolika je struja u krugu ako je napon u=220•√2•sin(314t)V . Nacrtajte vektorski prikaz napona i struje. Napišite induktivni otpor u obliku pogodnom za primjenu fazorske metode.
Rezultat: $L=X_L/\omega$=1 H ; $I=U/X_L$= 220/314= 0.7 A (efektivno) $i(t)=10\sin(314t-0{,}5\pi)$
Struja zaostaje fazno iza napona za 90^0; $\underline{X}_L$=j314

VI.2-7. Izračunajte struju kroz svitak iz prethodnog zadatka primjenom fazorske metode.
Rezultat: $\underline{I}$= 220 $\underline{/0^0}$ / j314= -j 0,7 = 0,7 $\underline{/-90^0}$
Dobili smo fazor struje koji treba "prebaciti u realnost" i dobiti onu struju kao u prethodnom zadatku.

VI.2-8. Što bi pokazivao ampermetar koji uključimo u strujni krug iz prethodnog zadatka?
Rezultat: Ampermetar pokazuje efektivnu vrijednost tj. 0,7 A. **Pažnja:** pogrešno je napisati da ampermetar pokazuje fazor (vektor) struje (kompleksni broj) ili još gore momentalnu vrijednost tj. sinusnu funkciju!! Isto vrijedi za pokazivanje volmetra!

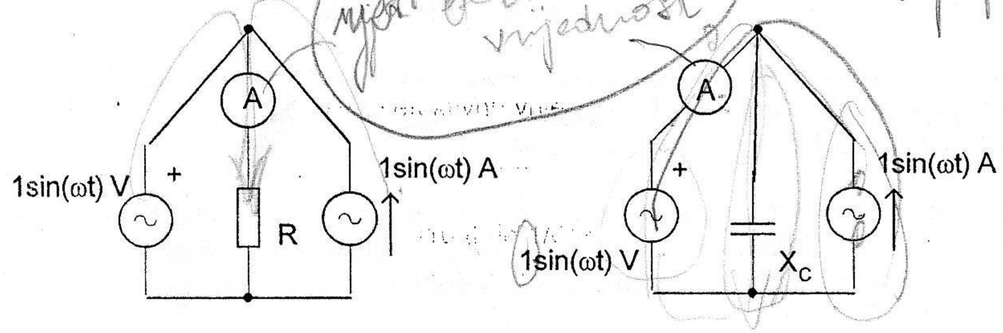
VI.2-9. Struja kroz kondenzator C=10μF je $1\underline{/0^0}$ Koliki je napon u trenutku t_1=5 ms i u t_2=10 ms. Frekvencija je 50 Hz. Kolika je energija kondenzatora u trenutku t=10 ms

Rezultat: 0V; 450V;1 J

VI.2-10.. Kolika je efektivna vrijednost struje kroz ampermetar u slučaju a) i b) ?
zadano: R=1Ω X_C=1 Ω

mjeri efektivnu vrijednost

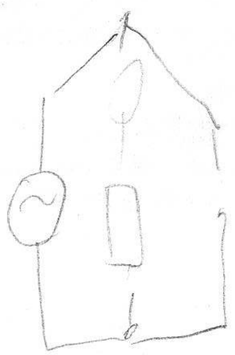
Superpozicija

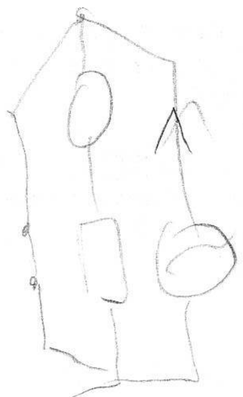


$I=\frac{U}{X_C}=0{,}7$ A

Rezultat: a) 0,7 A b) 1 A

$i=1\sin(\omega t)$ A





kratki spoj

$X=0$

VII. Tjedan predavanja

OBUHVAĆENI POJMOVI:

- -prividni otpor; trokut otpora
- -vektorski dijagram
- -induktivni i kapacitivni fazni pomak
- -serijski ,paralelni ,mješoviti spojevi impedancija
- -vodljivost; admitancija,susceptancija
- -ovisnost o frekvenciji
- -rezonantna frekvencija
- -granična frekvencija
- -faktor dobrote

POTREBNE JEDNADŽBE:

$Z=\sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2}$	prividni otpor serijskog RLC spoja
$\varphi = arctg\left[\frac{(X_L-X_C)}{R}\right]$	fazni kut
$\alpha_u-\alpha_i=\varphi$	fazni kut kao razlika pocetnih kuteva napona i struje
$\underline{Z}=R+jX_L+\frac{1}{jX_C}$	kompleksna impedancija serijskog RLC kruga
$f_r=\frac{1}{2\cdot\pi\sqrt{LC}}$	rezonantna frekvencija serijskog i paralelnog RLC kruga
$B_L=1/\omega L$, $B_C=\omega C$ $G=1/R$	induktivna kapacitivna i radna vodljivost
$\underline{Y}=G+jB=1/\underline{Z}$	kompleksna vodljivost

Serijski RLC-krug:

$Z(\omega)=\sqrt{R^2+(\omega L-1/\omega C)^2}$	- ovisnost iznosa impedancije o frekvenciji
$\varphi(\omega)=\arctan(\omega L-1/\omega C)/R$	- ovisnost kuta impedancije o frekvenciji
$Q=\omega_r L/R=1/\omega_r CR$	- faktor dobrote serijskog RLC-kruga

Paralelni RLC-krug:

$Y(\omega)=\sqrt{(1/R)^2+(\omega C-1/\omega L)^2}$	- ovisnost iznosa admitancije o frekvenciji
$\varphi(\omega)=\arctan(\omega C-1/\omega L)R$	- ovisnost kuta admitancije o frekvenciji
$Q=R/\omega_r L=\omega_r CR$	- faktor dobrote paralelnog RLC-kruga
$\omega_r=1/\sqrt{LC}$	- rezonantna kružna frekvencija za (serijski i paralelni) RLC-krug
$\omega_r=\sqrt{\omega_1\omega_2}$	- veza između rezonantne i *graničnih frekvencija*
$\omega_1=(-R+\sqrt{R^2+(4L/C)})/2L$	- donja granična frekvencija
$\omega_2=(R+\sqrt{R^2+(4L/C)})/2L$	- gornja granična frekvencija
$\Delta\omega=\omega_2-\omega_1(=B)$	- širina frekvencijskog pojasa

VII.1 RLC krugovi

VII.1-P1. Otpor R=75 Ω i induktivitet induktivnog otpora X_L=25 Ω spojeni su serijski i priključeni na izvor napona U=220 V. Odredite prividni otpor (impedanciju spoja) i napon na induktivitetu.

Rješenje:

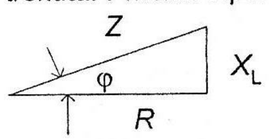
$R = 75\Omega$ $\quad X_L = 25\Omega$ $\quad U = 220V$

$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}$ $\quad Z = 79.057\,\Omega$

$I = \frac{U}{Z}$ $\quad I = 2.783\,A$ $\quad U_L = I \cdot X_L$ $\quad U_L = 69.57\,V$

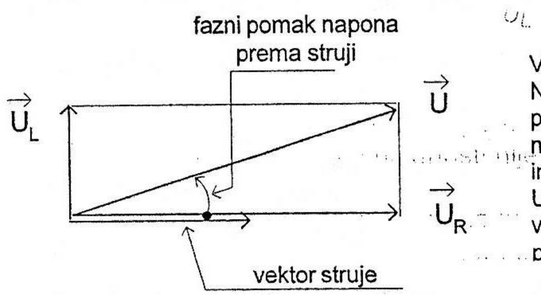
$U_R = I \cdot R$ $\quad U_R = 208.71\,V$

Izračunali smo efektivne vrijednosti napona na induktivitetu i napon na otporniku. Vidimo da suma tih efektivnih vrijednosti nije jednaka naponu izvora. Kirchhoffov zakon vrijedi za vektore kojima prikazujemo napone, a ne za efektivne vrijednosti napona. Otpore u ovom spoju možemo zorno prikazati pomoću pravokutnog trokuta. Prividni otpor je hipotenuza u tom trokutu.



Ova impedancija ima induktivni karakter. Kut φ je kut faznog pomaka napona u odnosu na struju. Induktivni fazni kut je pozitivan, a kapacitivan negativan.

Pretpostavimo li da je početni fazni kut struje nula dobivamo ovakav vektorski prikaz:



Vektor struje nacrtamo u smjeru +x osi. Napon na otporniku je u fazi sa strujom pa je vektor tog napona također nacrtan u tom smjeru. Napon na induktiviteti prethodi za 90^0 struji. Ukupan napon dobiven je zbrajanjem vektora. Taj vektor (napon) fazno prethodi struji

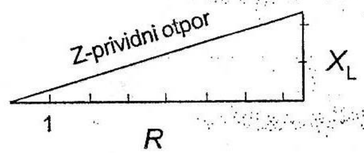
Vektori napona čine pravokutan trokut u kojem su stranice povezane Pitagorinim poučkom. Za određivanje odnosa stranice i kuteva koriste se i trigonometrijske jednadžbe. Npr. kut faznog pomaka je: $\mathrm{arctg}\,U_L/U_R$. (napomena: tko se upušta u rješavanje izmjeničnih krugova neka ima pri ruci tzv. «trigonometrijske formule»). Ako vektorski prikaz crtamo u mjerilu moguće je tražene veličine dobiti iz crteža. Pri tom je dakako potreban kutomjer.

VII.1-P2. Otpor R i induktivitet L serijski su spojeni i priključeni su na izvor izmjeničnog napona U frekvencije f. Nacrtajte "trokut otpora". Odredite prividni otpor spoja, napon na L i napon na R. Zadatak riješite i fazorskom metodom.

Zadano: $R = 75\Omega$ $\quad L = 79.6 \cdot 10^{-3}H$ $\quad U = 220V$ $\quad f = 50Hz$

Rješenje: Najprije izračunamo induktivni otpor: $X_L = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L$ $\quad X_L = 25.007\,\Omega$

Trokut otpora nacrtan u mjerilu



$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}$ $\quad Z = 79.059\,\Omega$

Struja u krugu bit će prema Ohmovom zakonu za izmjeničnu struju

$I = \frac{U}{Z}$ $\quad I = 2.783\,A$ (to je efektivna vrijednost struje)

Napon na induktivnom otpor je: $U_L = I \cdot X_L$ $\quad U_L = 69.588\,V$

a napon na radnom (omskom) otporu je $U_R = I \cdot R$ $\quad U_R = 208.704\,V$

Kod **fazorske metode** najprije odredimo induktivni otpor u kompleksnom području tako da običan induktivni otpor pomnožimo sa j (imaginarnu jedinicu u elektrotehnici označavamo s j. zašto?) $\underline{X}_L = j \cdot \omega L = j25$ oma, a nakon toga impedanciju serijskog RL spoja tako da zbrojimo radni i induktivni otpor $\underline{Z} = R + j\omega L = 75 + j25$. Treba primjetiti da je ovaj postupak formalno jednak kao zbrajanje dvaju otpora u istosmjernim krugovima. Fazor struje je $\underline{I} = \underline{U} / \underline{Z} = 220\underline{/0} \;/\; (75+j25)$. Treba podijeliti dva kompleksna broja i dobiti : $\underline{I} = 2{,}65 - j0{,}88\ A = 2{,}37\underline{/-18{,}4^0}$ Iz dobivenog fazora struje odmah vidimo kolika je efektivna vrijednost i fazni kut struje. Uočavamo veliku **prednost** "fazorske" metode ,jer formalno postupamo jednako kao kod otporničkih mreža sa istosmjernom pobudom. Jedina je razlika što računamo sa kompleksnim brojevima. Rezultat treba uvijek "interpretirati" u realnom području. Za vježbu izračunajte napone na R i na L. ovako: $\underline{U}_R = \underline{I} \cdot R$, $\underline{U}_L = \underline{I} \cdot \underline{X}_L$.

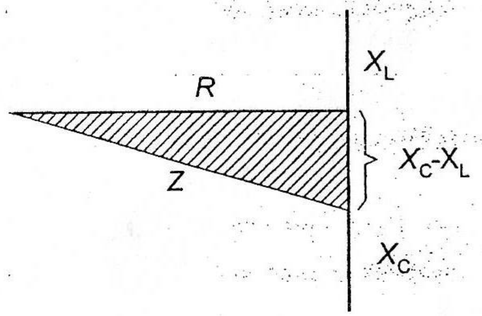
napomena: Pažljivi čitatelj će primijetiti važnu činjenicu: suma efektivnih vrijednosti padova napona *NIJE* jednaka naponu izvora. Isto tako će zaključiti da Kirchhoffove zakone kod izmjeničnih krugova treba primjenjivati u vektorskom ili fazorskom obliku .

VII.1-P3. Na izvor izmjeničnog napona frekvencije 50 Hz preko ampermetra je priključen serijski spoj otpora R, induktiviteta L i kondenzatora C. Ako ampermetar pokazuje 4,5A, odredite napon izvora U. Koji je fazni kut (karakter) spoja? Koliki bi trebao biti kapacitet kondenzatora da u krugu nastupi rezonancija? Koliku struju bi pokazao ampermetar kad bismo kratko spojili ploče kondenzatora ?

Zadano: $R = 47\Omega$ $\quad X_C = 27\Omega$ $\quad X_L = 13.5\Omega$ $\quad I = 4.5A$ $\quad f = 50Hz$

Rješenje: U ovom spoju prevladava kapacitivan otpor pa je cijeli krug kapacitivnog karaktera tj. struja prethodi naponu. Fazni kut je negativan. Na slici je prikazan način crtanja trokuta otpora. Radni otpor se nacrta kao horizontalna dužina. Induktivni kao dužina okrenuta "prema gore', a kapacitivni "prema dolje". Nakon odbijanja kapacitivnog i induktivnog otpora dobivamo trokut koji ima okomitu katetu okrenutu "prema dolje"

$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ $\quad Z = 48.9\,\Omega$ $\quad U = I \cdot Z$ $\quad U = 220.052\,V$



Ako bi kapacitivni otpor smanjili tako da postane jednak induktivnom tada bi njihova razlika bila nula pa bi umjesto trokuta preostao samo radni otpor. Tada nastupa tzv. rezonancija. U tom slučaju je ukupna struja i fazi s naponom izvora.To bi praktički postigli promjenjivim kondenzatorom kojemu bi povećavali kapacitet do iznosa:

$X_C = X_L \qquad C = \dfrac{1}{2\cdot\pi\cdot f\cdot X_C} \qquad C = 2.358\times10^{-4}\,\mathrm{F}$

Kada kratko spojimo elektrode kondenzatora preostaje nam serijski *R L* krug u kojem je prividni otpor:

$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} \qquad Z = 48.9\,\Omega \qquad I = \dfrac{U}{Z} \qquad I = 4.5\,\mathrm{A}$

Zanimljivo, struja je ostala jednaka. Naime, treba primijetiti da je u ovom zadatku X_L jednak $X_C/2$ pa je onda jasno zašto je tomu tako.
Zadatak riješite i fazorskom metodom. Ukupna impedancija spoja u kompleksnom području je $\underline{Z}=R+j\cdot X_L-j\cdot X_C$. Struja je $\underline{I}=\underline{U}/\underline{Z}$.

VII.1-P4. Radni otpor R=15Ω i svitak induktivnog otpora X_L=20 Ω spojeni su paralelno i priključeni su na izvor izmjeničnog napona. Ako snaga na otporniku 9,6 W odredite napon i struju izvora.
Zadano: $R = 15\Omega \qquad X_L = 20\Omega \qquad P = 9.6\,\mathrm{W}$

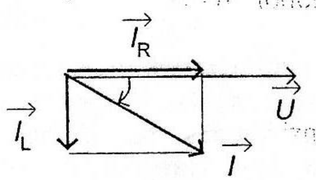
Rješenje: Napon na tom otporniku jednak je naponu izvora (paralelan spoj):

$P = \dfrac{U^2}{R} \qquad U = \sqrt{P\cdot R} \qquad U = 12\,\mathrm{V} \qquad I_R = \dfrac{U}{R} \qquad I_R = 0.8\,\mathrm{A}$

Taj napon vlada i na induktivitetu pa je induktivna struja:

$I_L = \dfrac{U}{X_L} \qquad I_L = 0.6\,\mathrm{A}$

Struje su fazno pomaknute za 90^0 pa je ukupna struja (pogledati vektorski prikaz):



$I = \sqrt{I_R^2 + I_L^2} \qquad I = 1\,\mathrm{A}$

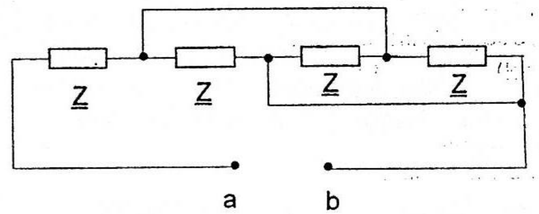
VII.1-P5. Paralelno su spojene dvije impedancije $\underline{Z}_1$=2-j4 i $\underline{Z}_2$=4+j2. Izračunajte ukupnu impedanciju spoja u kompleksnom području, a zatim njen iznos i kut. Nacrtajte trokut otpora.

Rješenje: Računamo sa formulama kao kod paralelnog spoja otpornika, ali je proračun složeniji zbog kompleksnih brojeva $\underline{Z}=\underline{Z}_1\underline{Z}_2/(\underline{Z}_1+\underline{Z}_2)$ =3-j1 Ω, iznos impedancije je Z=3,162 Ω a kut -18,4^0 (kapacitivna impedancija)

VII.1-P6. Spoj impedancija iz prethodnog primjera priključimo na a) strujni izvor I=2 A b) naponski izvor od 6,325 V. Kolike su : ukupna struja te struje grana za ta dva slučaja?
Rješenje:
a) $\underline{I}$=2 A $\quad \underline{I}_1=\underline{I}\cdot\underline{Z}_2/(\underline{Z}_1+\underline{Z}_2)$=1+j1 A $\quad I_1$=1,41A;
$\underline{I}_2=\underline{I}\cdot\underline{Z}_1/(\underline{Z}_1+\underline{Z}_2)$=1-j1 A $\quad I_2$=1,41A;

b) U=6,325 V I=2 A; I_1=1,41 A; I_2=1,41 A

VII.1-P7. Četiri jednake impedancije $\underline{Z}$ spojene su kako je prikazano slikom. Kolika je ekvivalentna impedancija $\underline{Z}$ab. Zadano je a) $\underline{Z}$=6+j0 b) $\underline{Z}$=6+j6 c) $\underline{Z}$=0-j6



Rezultat:
a) 8+j0 (otpor)

b) 8+j8 (serija R i L)

c) –j8 (kondenzator)

Rješenje: Kod «fazorske» metode složene spojeve formalno rješavamo jednako kao spojeve sa otpornicima (serija ,paralela, most, trokut/zvijezda itd) . Ovdje imamo nakon «redizajna» sheme: $\underline{Z}$ u seriji sa paralelnim spojem tri jednake impedancije pa je $\underline{Z}$ab=$\underline{Z}$+$\underline{Z}$/3. Kompleksna impedancija je širi pojam koji uključuje i «običan» otpor kao što je u slučaju a) odnosno «čisti» kapacitet u slučaju c). **Pažnja:** za primjenu «fazorske» metode treba ponoviti osnovne **računske operacije sa kompleksnim brojevima!**
Pitanje 1. Kolika je ukupna struja ako je spoj priključen na napon $\underline{U}$=8+j0=8$\underline{/0^0}$ V
napomena: u stvarnosti je napon: 11,28 sin(ωt).
Odgovor: *a)* 1$\underline{/0^0}$, b) 0,5-j0,5=0,7$\underline{/-45^0}$, c) j1=1$\underline{/90^0}$
efektivne vrijednosti struja su: 1; 0,7 ; 1 A, a maksimalne su 1,41 puta veće.
Pitanje 2. Umjesto naponskog izvora na spoj priključimo strujni, koji daje struju $\underline{I}$=1$\underline{/0^0}$. Koliki je napon na stezaljkama tog izvora u slučaju a), b) i c).

Odgovor: 8$\underline{/0^0}$, b) 8+j8 V c) 8$\underline{/-90^0}$=-j8 V efektivne vrijednosti napona (one koje bi pokazao voltmetar) su: 8; 11,28; 8 V.

Zadaci VII.1

VII.1-1. Otpor R=7,5 Ω i svitak zanemariva omskog otpora spojeni su serijski i priključen na izvor napona U=125 V i f=50 Hz. Ako voltmetar (koji mjeri efektivnu vrijednost) spojen paralelno svitku pokazuje 100 V odredite induktivitet svitka i struju u krugu.
Zadano: $R = 7.5\Omega \qquad U = 125\,\mathrm{V} \qquad U_L = 100\,\mathrm{V} \qquad f = 50\,\mathrm{Hz}$
Rezultat: L=0,032 H; I = 10 A

VII.1-2. Otpor R=100 Ω i kapacitet C=43 μF spojeni su serijski i priključeni su na napon U= 220 V f=50 Hz. Odredite impedanciju spoja i napon na kapacitetu. Skicirajte vektorski prikaz.
Zadano: R = 100Ω C = 43μF U = 220V f = 50Hz

Rezultat: Z=124,4 oma (kapacitivno); U_C=130,9 V

VII.1-3 Da bi se žarulja s podacima 160V/40W mogla priključiti na napon 220V/50Hz njoj se serijski spoji kondenzator. Koliki treba biti kapacitet kondenzatora da bi žarulja normalno svijetlila (dobila nazivni napon)?
Zadano: U_Z = 160V P_Z = 40W U = 220V f = 50Hz

Rezultat: C= 5,27 mikroF

Napomena: Na kondenzatoru ne troši energija pa je snižavanje napona na taj način prikladnije, nego ono sa otpornim djelilom napona. Nazivni napon kondenzatora mora biti veći od U_{Cm}.

VII.1-4. Serijski spojeni otpornik R=5 Ω i zavojnica L=0,03 H priključeni su na sinusoidan napon. Ako napon fazno prethodi struji za 60°, izračunajte frekvenciju.

Rezultat: 46 Hz

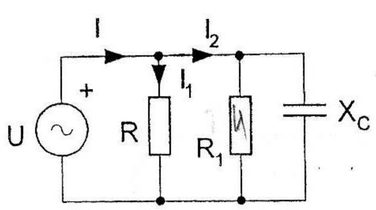
VII.1-5. Serijski su spojeni R=4 Ω X_L=3 Ω i X_C= 6 Ω. Spoj je priključen na izmjenični napon $\underline{U}$=100 V (efektivno). Izračunajte kompleksnu impedanciju, struju i fazni pomak struje u odnosu na napon izvora.

Rezultat: $\underline{Z}=4-j3=5\underline{/-36{,}9^0}$ $\underline{I}=20\underline{/36{,}9^0}$ Struja ima efektivnu vrijednost 20 A i fazno prethodi naponu za 36,9 stupnjeva; spoj je kapacitivnog karaktera.

VII.1-6 Paralelno su spojeni ovi elementi : R_1=1 Ω R_2= 2Ω X_L= 1 Ω X_{C1}=0,5 Ω i X_{C2}= 1 Ω . Spoj je priključen na naponski izvor od 2 V. Kolika je ukupna struja? Nacrtajte vektorski (fazorski) prikaz struja.

Rezultat: I= 5 A.

VII.1-7. Izračunajte snagu na otporniku R u spoju prema slici ako su izmjerene struje I=3 A, I_1=2 A I_2=2 A. Otpornik R_1=4 Ω.



Rezultat: 2W (snaga na otporniku je I_{ef}^2R)

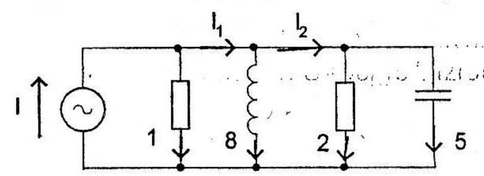
VII.1-8 Serijski su spojeni R=5 Ω induktivni otpor $\underline{X_L}$=j8 Ω i nepoznata impedancija $\underline{Z}$. Spoj je priključen na napon $\underline{U}=50\underline{/45^0}$. Izračunajte $\underline{Z}$ ako je fazor struje $2{,}5\underline{/-15^0}$.

Rezultat: $\underline{Z}$=5+j9,3 Ω

VII.1-9. Serijski su spojeni otpor R, induktivitet L=25 mH i kapacitet C=50 μF. Spoj je priključen na napon 100 V (efektivno). Ustanovljeno je da struja prethodi naponu za $63{,}4^0$. Izračunajte R, napone na elementima spoja i struju u krugu. Koristite fazorsku metodu. Nacrtajte fazorski dijagram napona.

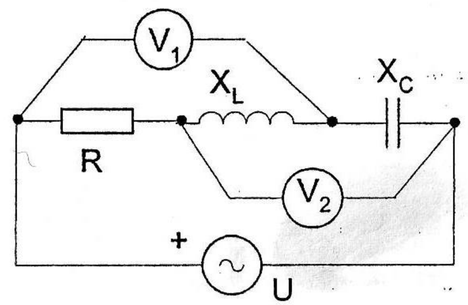
Rezultat: R=20 Ω U_R=53,6V U_L=26,8 V U_C=134 V I=2,68 A

VII.1-10. Zadane su efektivne vrijednosti struja pojedinih paralelnih grana. Kolike su efektivne struje: I, I_1, I_2 ?



Rezultat:
I=4,24 A
I_1=3,6 A
I_2=5,39 A

VII.1-11. U prikazanom spoju izračunajte pokazivanja voltmetra V1 i V2. Zadano je U=100 V (efektivno) R=20 Ω. X_L=20 Ω X_C=5 Ω. Nacrtajte fazorski (ili vektorski) dijagram.



Rezultat

U_1 = 113 V

U_2 = 60 V

VII.1-12. Na napon gradske mreže (220V/50Hz) priključen je serijski spoj otpornika, zavojnice i kondenzatora. Izmjereno je : I=11A, U_L=660 V U_C=500 V. Izračunajte koliki su parametri R L i C. Kolika je amplitude napona na kondenzatoru? Koliki je fazni kut φ?

Rezultat: R=13,7 Ω L=0,191H C= 70 μF U_{Cm}=705 V φ= + 46,7° (ind.)

VII.1-13. Na izvor napona U i frekvencije ω, paralelno su spojeni otpor R, kapacitet C i induktivitet L. Odredite struju izvora I.
ZADANO: U=25 V; ω=100 rad/s; R=12,5 Ω; C=200 μF; L=100 mH.

Rezultat: $\underline{I}$=2-j2 A; I=2,82 A

JEDNAKOSTRANIČNI TROKUT

VII.1-14. Na izvor izmjeničnog napona U serijski su spojeni kapacitet C i nepoznata impedancija Z. Uz struju I, iznosi napona na kapacitetu i impedanciji $\dot{Z}$ jednaki su iznosu napona izvora. Odredite iznos i kut impedancije Z.
ZADANO: $U_C=U_Z=U=100$ V; $I=10$A.

Rezultat: $\underline{Z}=8{,}66+j5\ \Omega$ $Z=10\ \Omega$ $\varphi_Z=30^0$

VII.1-15. Serijski su spojeni kondenzator (kapaciteta C) i svitak (otpora R i induktiviteta L) i priključeni na izvor napona U. Ako je na kondenzatoru izmjeren napon U_C, a struja je u fazi s naponom izvora, odredite napon na svitku ! Zadano: $U=120$ V; $U_C=160$ V.

Rezultat: $U_L=200$ V (nacrtati vektorski prikaz)

VII.1-16. Svitak, priključen na napon U frekvencije f, zadan je serijskim spojem radnog otpora R i reaktivnog otpora X. Odredite parametre (radnu vodljivost G i reaktivnu vodljivost B) nadomjesnog paralelnog spoja. Kolika je ukupna struja? Koliki su Lp I Rp u nadomjesnom paralelnom spoju? Zadano: $U=110$ V; f=50 Hz; $R=10\ \Omega$; $X=60\ \Omega$;

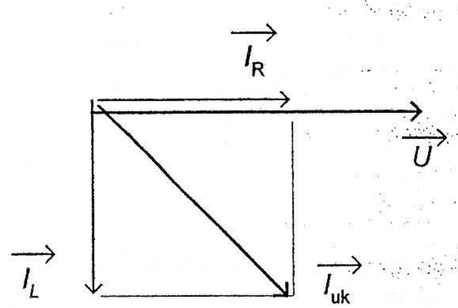
Rezultat: $\underline{Z}=10+j60$; $\underline{Y}=1/\underline{Z}=0{,}0027-j0{,}016$; G=0.0027 S B=-0,016 S (ind.)
I=1,644 A; $Rp=370\ \Omega$; $Lp=0{,}196$ H

VII.1-17. Serijski su spojeni $R=10\ \Omega$ i $C=50\ \mu$F i priključeni su na izvor frekvencije f_1 na kojoj struja prethodi naponu za 30^0. Izračunajte frekvenciju f_2 na kojoj će struja prethoditi naponu za 70^0.

Rezultat: $f_2=$ 112 Hz

VII.1-18. Svitak $L=0.015$ H koji ima neznatni otpor žice i otpornik $R=620\ \Omega$ spojeni su paralelno i priključeni su na sinusni izvor napona $U=10$ V i promjenjive frekvencije f. Na koji iznos treba podesiti frekvenciju pa da struja kroz otpornik i svitak budu jednake. Kolike su te struje i kolika je ukupna struja? U kakvom su faznom odnosu napon izvora i ukupna struja? Nacrtajte vektorski prikaz. Vektor koji prikazuje napon izvora postavite u +x os.

Rezultat: $f=6578$Hz; $I_L=I_C=16$ mA; $I_{uk}=22.56$mA; struja zaostaje za 45°

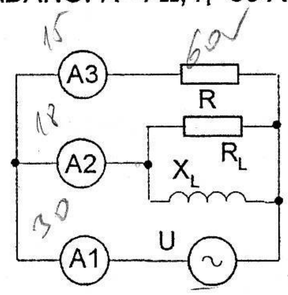


ukupna struja zaostaje za 45 °

VII.1-19. Serijski RLC-krug spojen je na izvor napona U frekvencije ω. Ako struja prethodi naponu izvora za kut φ, odredite napone na elementima R, L i C.
ZADANO: $U=12$ V; $\omega=400$ r/s; $L=25$ mH; $C=50\ \mu$F; $\varphi=63{,}4^0$.

Rezultat: $U_R=5{,}4$ $U_L=2{,}7$ $U_C=13{,}4$ V

VII.1-20. U krugu prema slici ampermetri mjere struje I_1, I_2 i I_3. Ako je poznat otpor R, odredite parametre R_L i X_L.
ZADANO: $R=4\ \Omega$; $I_1=30$ A; $I_2=18$ A; $I_3=15$ A.

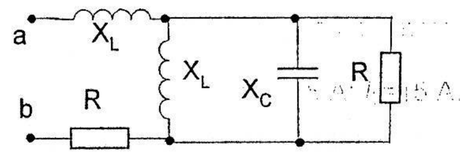


Rezultat:

$R_L=5{,}1\ \Omega$

$X_L=4{,}3\ \Omega$

VII.1-21. Odredite iznos i kut nadomjesne admitancije s točaka **a** i **b** nacrtanog kruga. Zadano: $R=X_L=X_C=50\ \Omega$.

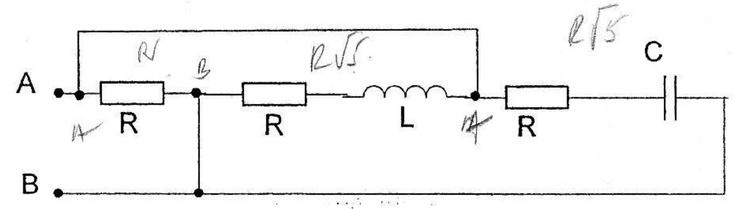


Rezultat:

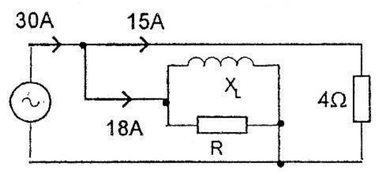
$Y_{ab}=9\underline{/-26{,}5^0}$ mS

Impedancija je: $\underline{Z}=1/\underline{Y}$

VII.1-22. Izračunajte impedanciju sa stezaljki **a** i **b** (ulazna impedancija ako je zadano $2R=X_L=X_C$. Rezultat: $5R/7$



VI.1-23. U prikazanom spoju su poznate efektivne vrijednosti struja i otpor R_1.Izračunajte R i X_L.
Rezultat: R=5,13Ω X_L=4,39



Tema VII.2 Frekvencijske ovisnosti

Primjeri VII.2

VII.2-P1.Serijski su spojeni R=20 Ω i L=0,02 H. Spoj je priključen na naponski sinusni izvor U=10 V promjenjive frekvencije. Napišite analitičke izraze za frekvencijski ovisne veličine kruga. Nacrtajte graf frekvencijske ovisnosti struje, impedancije i faznog kuta ako se frekvencija mijenja u intervalu od nula do 1000 Hz.

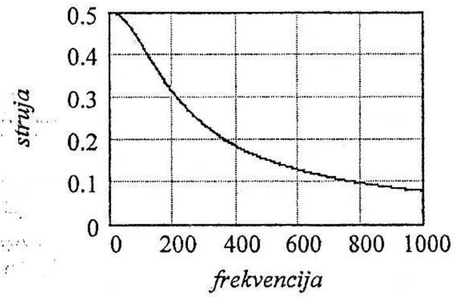
Rješenje: Ovisnost o frekvenciji u ovom slučaju proizlazi iz ovisnosti induktivnog otpora. Na niskim frekvencijama induktivni otpor je mali (nula) pa je impedancija jednaka otporu R. Vidimo iz grafa da je tako otprilike do 50 Hz. Povećanjem frekvencije raste induktivni otpor koji postaje dominantan nakon otprilike 400 Hz. Važna je frekvencija na kojoj je induktivni otpor jednak omskom, a fazni kut je 45^0. Poseban je naziv za tu frekvenciju: granična frekvencija. Na graničnoj frekvenciji se struja u krugu smanji za √2 puta. To je povezano sa smanjenjem snage na otporniku za dva puta.

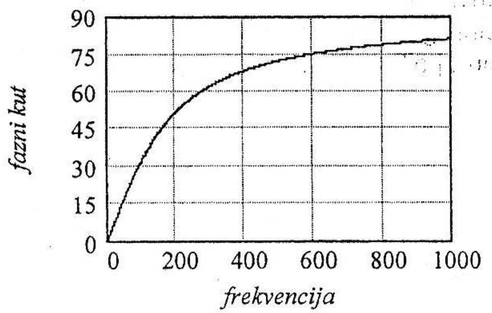
$$X_L(f) = 2\cdot\pi\cdot L\cdot f$$

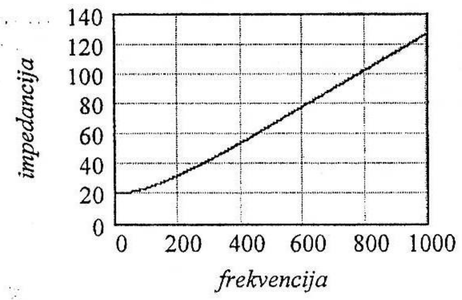
$$Z(f) = \sqrt{R^2 + (2\cdot\pi\cdot L\cdot f)^2}$$

$$I(f) = \frac{U}{2\cdot\pi\cdot L\cdot f}$$

$$\varphi(f) = arctg\left(\frac{X_L}{R}\right)$$

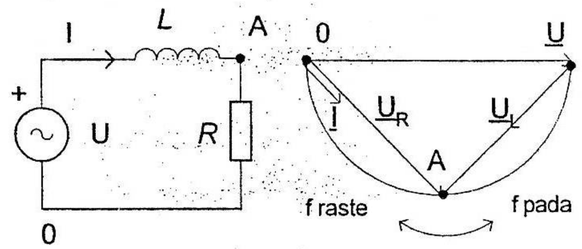






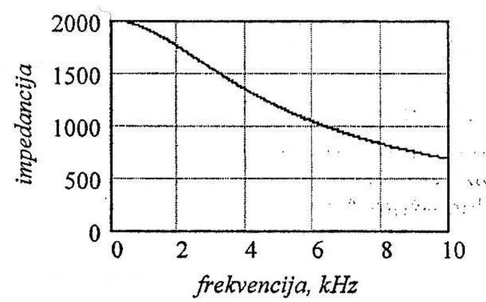
VII.2-P2. Izračunajte frekvenciju na kojoj fazni kut spoja iz prethodnog zadatka iznosi 45 stupnjeva. Kolika je struja na toj frekvenciji. Nacrtajte fazorski dijagram napona s time da napon izvora postavite u realnu os. Zaključite kako će se pri promjeni frekvencije pomicati točka A.

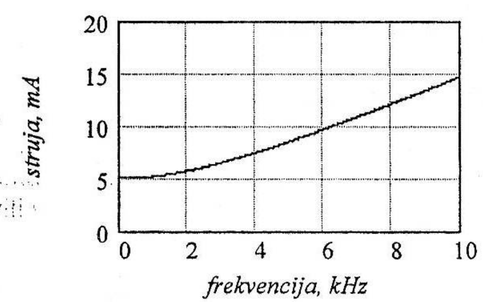
Rješenje: treba napisati jednakost $R = 2\pi fL$ $f = R/2\pi L$ = 160 Hz I=0,355 A



Struja je uvijek u fazi s naponom na otporniku. Točka A nacrtana je za frekvenciju od 160 Hz na kojoj je fazni kut 45^0. Naponi na otporniku i induktivitetu su uvijek međusobno okomiti. Nadalje suma (vektorska) ta dva napona uvijek je jednaka naponu izvora. Zato se točka A može nalaziti samo na nacrtanoj **polukružnici** . Na slici je označeno «kuda ide» točka A pri promjeni frekvencije. Pitanje: gdje bi se našla točka A za f=0 i za f=∞.

VII.2-P3. Paralelno su spojeni R=2 kΩ i kondenzator C=22 nF i priključeni su na naponski izvor U=10 V promjenjive frekvencije. Odredite analitičke funkcije ovisnosti impedancije i ukupne struje o frekvenciji. Na kojoj frekvenciji će struje kroz R i C biti jednake. Nacrtajte graf ovisnosti struje o frekvenciji.



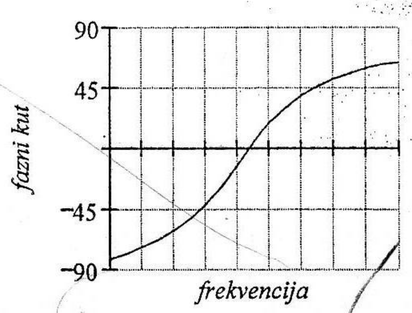


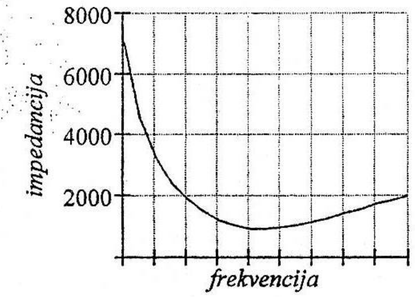
Na niskim frekvencijama kapacitivni otpor je ogroman pa je ukupna impedancija gotovo jednaka omskom otporu. Na visokim frekvencijama naprotiv kapacitivni otpor postaje sve manji imanji. Time se smanjuje impedancija ,a struja počinje rasti. Ta struja je kapacitivna tj. fazni kut se približava -90^0.

VII.2-P4. Serijski RLC krug je priključen na naponski izvor promjenjive frekvencije. Izračunajte a) frekvenciju na kojoj su induktivni i kapacitivni otpori jednaki (rezonancija). b) frekvencije na kojima je fazni kut +45 odnosno-45 stupnjeva (granične frekvencije) c) nacrtajte graf promjene struje i faznog kuta o frekvenciji (za frekvencije od 1 do 10 kHz),
Zadano je: R=900 oma, C=22 nF, L= 40 mH,

Rezultat: a) f_r= 5365 Hz b) f_1=3870 Hz f_2=7450 Hz
c) Funkcije promjene faznog kuta i impedancije su:

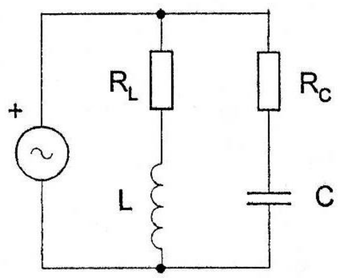
$$Z(\omega) = \sqrt{R^2 + \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2} \qquad \varphi = arctg\left[\frac{\left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}\right)}{R}\right]$$





Fazni kut je na rezonantnoj frekvenciji nula tj, krug se ponaša kao radni otpor. Vidimo da je na toj frekvenciji impedancija jednaka otporu *R*. Razlika graničnih frekvencija se ovdje naziva : *širina frekvencijskog pojasa.*

VII.2-P5. Za spoj prikazan slikom treba odrediti formulu za izračun rezonantne kružne frekvencije. Kolika je ta frekvencija ako je: L= 1mH, C=20 μF, R_L=6 Ω R_C=4 Ω



$$\omega r = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \cdot \sqrt{\frac{RL^2 - \frac{L}{C}}{RC^2 - \frac{L}{C}}} \qquad \omega r = 4.54 \times 10^3$$

Rješenje primjenimo formulu koja se sastoji od dva dijela. Prvi dio je «normalna» formula za paralelni krug kada su elementi *L* i *C* idealni tj. kada su otpori jednaki nuli. Drugi član mora svakako biti pozitivan, a to ovisi o odnosu elemenata spoja. Česti je slučaj kod praktičkih spojeva da je R_C= 0 dok R_L postoji (otpor namota zavojnice). U tom slučaju iz gornje formule treba samo izbaciti R_C.

Zadaci VII.2

VII.2-1. Koliki treba odabrati iznos otpora *R* da bi za serijski *RL* spoj granična frekvencija iznosila 1100 Hz? Zadano je *L*= 100 mH.

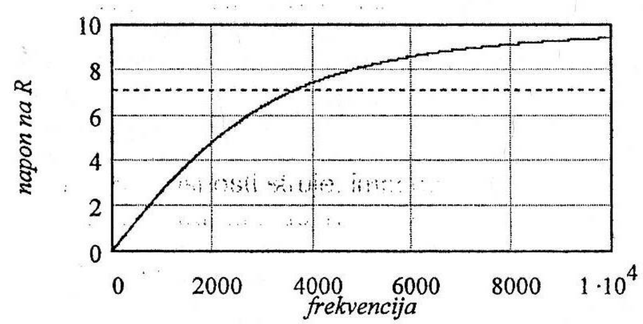
Rezultat: 690 Ω

VII.2-2. Serijski su spojeni *R*=2 kΩ i *C*=22 nF. Spoj je priključen na naponski sinusni izvor *U*=10 V promjenjive frekvencije. Izračunajte na koji iznos treba podesiti frekvenciju da bi naponi na otporniku I kondenzatoru bili jednaki. Koliki su ti naponi?

Nacrtajte graf frekvencijske ovisnosti struje, impedancije i faznog kuta ako se frekvencija mijenja u intervalu od nula do 10 kHz

Rezultat: *f*=3620 Hz ; 7,07 V

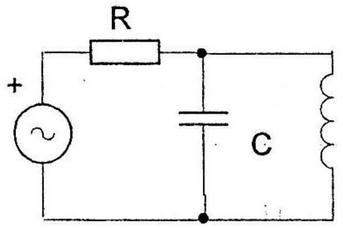
VII.2-3. Napon na otporniku iz prethodnog zadatka mjerimo (idealnim) voltmetrom. Odredite analitički izraz za izračun tog napona na raznim frekvencijama. Nacrtajte graf napona U_R za frekvencije od nula do 10 kHz. Spoj je priključen na naponski sinusni izvor *U*=10 V (promjenjive frekvencije).



VII.2-4. Elementi iz prethodnog zadatka ovaj puta su spojeni paralelno Potrebno je odredini rezonantnu kružnu frekvenciju i struju izvora na toj frekvenciji. Napon izvora je 3,5 V. Kolike su struje kroz *L* i *C* na rezonantnoj frekvenciji? U kojem su faznom odnosu te struje?

Rezultat: ω_r= 33700 rad/s I_r=3,89 mA ; struje su jednake u protufazi

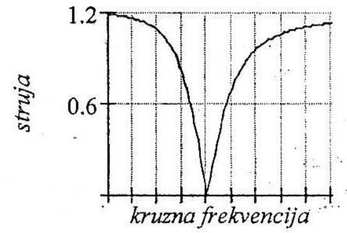
VII.2-5. Elementi *R L* i *C* spojeni su kako je prikazano slikom. Naponski izvor ima promjenjivu frekvenciju. a) Odredite rezonantnu frekvenciju b) odredite napon na otporniku i na paraleli *LC* u rezonanciji c) nacrtajte frekvencijsku ovisnost struje I faznog kuta.

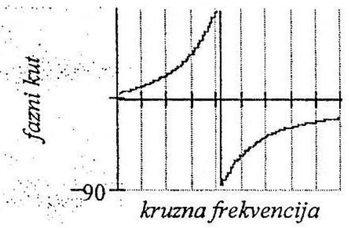


Zadano je:

U=120 V
R=100 Ω
L=0,1 H
C=40 μF

Rezultat: f_r=80 Hz U_R=0 $U_{paralele}$=120 V





VII.2-6. U serijskom *RLC* krugu kondenzator je promjenjiv. Na koji iznos ga treba podesiti pa da krug dođe u rezonanciju na frekvenciji 1000 Hz. Zadano je R=5 Ω L=20 mH.

Rezultat: C= 1,27 μF

VII.2-7. U serijskom *RLC* krugu poznate su momentalne vrijednosti napona izvora i struje. Ako je L=0,5 H izračunajte R i C. Zadano je u(t)=70,7 sin(500t+π/6); i(t)=2,83 sin (500t+π/6).

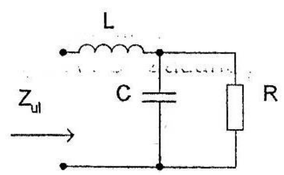
Rezultat: R=25 Ω C= 8 μF

VII.2-8. Paralelno je spojena zavojnica koja ima induktivitet 1 mH i otpor zavoja 7 oma sa kondenzatorom od 20 μF. Izračunajte rezonantnu frekvenciju.

Rezultat: 159 Hz

VII.2-9. Za spoj prema slici ulazna impedancija kod frekvencije ω=0 (istosmjerno) iznosi 5 Ω, dok je kod rezonantne frekvencije 2,5 Ω. Izračunajte X_C na rezonantnoj frekvenciji.

Rezultat: 5 oma



VII.2-10. Što se događa sa iznosom napona na stezaljkama strujnog izvora na koji je priključen paralelni *RLC* spoj ako frekvencija sinusne struje raste od $f_1 < f_r$ do $f_2 > f_r$?

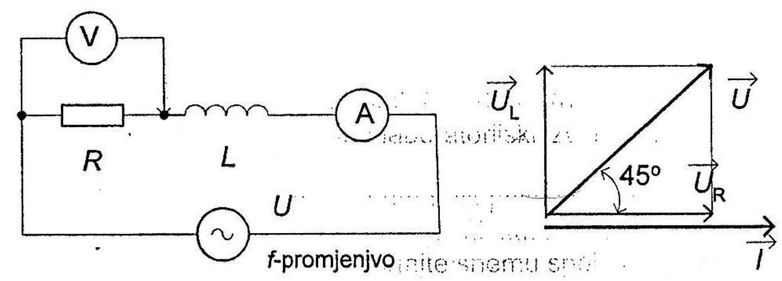
Rezultat: raste, a zatim pada

VII.2-11. Što se događa sa iznosom struje naponskog izvora na koji je priključen paralelni *RLC* spoj ako frekvencija napona raste od $f_1 < f_r$ do $f_2 > f_r$?

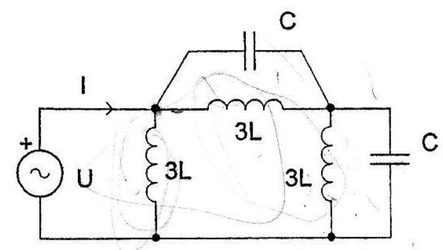
Rezultat: pada, a zatim raste

VII.2-12. Serijski su spojeni svitak L=0,015H (neznatnog radnog otpora) i otpornik R=620Ω . Spoj je priključen na laboratorijski izvor koji daje izmjenični napon U=10V promjenjive frekvencije. Na koju vrijednost trebate podesiti frekvenciju pa da voltmetar spojen na svitak i na otpornik pokažu jednaki iznos? Koji je to iznos pokazivanja? Koji je u tom slučaju fazni kut između napona i struje, a kolika je efektivna vrijednost struje? Nacrtajte shemu spoja i vektorski prikaz. Vektor struje postavite u smjer +x osi.

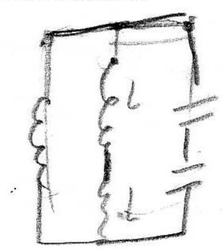
Rezultat: Moraju se izjednačiti radni otpor i induktivni otpor: $R=X_L=2\cdot\pi\cdot f$. Iz ove jednadžbe izračunamo f=6578 Hz; 7,07 V; π/4 radijana (45°); 11mA; shema i vektorski prikaz prikazani su na slici:



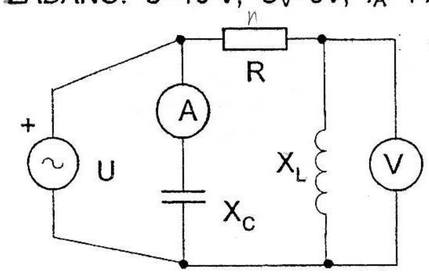
VII.2-13. Izračunajte frekvenciju kod koje će struja izvora postati jednaka nuli. Zadano je L=1,6 mH; C=100 μF. Zadatak riješite pomoću vektorskog dijagrama.



Rezultat: 2500 s^{-1}



VII.2-14. U spoju na slici voltmetar mjeri napon U_V, a ampermetar struju I_A. Ako su struja i napon izvora u fazi, odredite induktivni otpor X_L.
ZADANO: U=10 V; U_V=6V; I_A=1 A;



Rezultat:

X_L=3,6 Ω

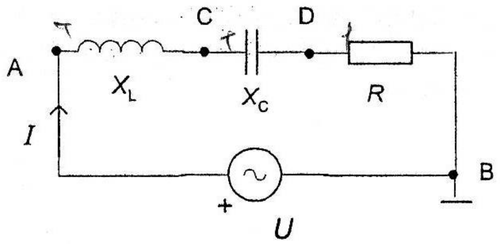
$Z_x = 5\Omega + j8\Omega$

VIII. Tjedan predavanja

$Z = 20\angle 60^\circ = 10\Omega + j17.28\Omega$

VIII.1. Topografski i mjesni dijagram

VIII.1-P1. U spoju prema slici izračunajte potencijale točaka A, C i D. Nacrtajte topografski dijagram. Odredite napone $\underline{U}_{DB}$, $\underline{U}_{CD}$ i $\underline{U}_{AC}$



Rješenje: Najprije izračunamo ukupnu impedenciju, a zatim struju. Potencijal točke B je nula (referentna točka) $\varphi_B=0$.

$R = 20\Omega$ $\quad X_L = 20\cdot j\cdot\Omega$ $\quad X_C = -40\cdot j\cdot\Omega$ $\quad \underline{U} = 20V$

$Z = R + X_L + X_C$ $\quad Z = 20 - 20j\,\Omega$

$\underline{I} = \dfrac{\underline{U}}{Z}$ $\quad \underline{I} = 0.5 + 0.5j\,A$ $\quad |\underline{I}| = 0.707\,A$

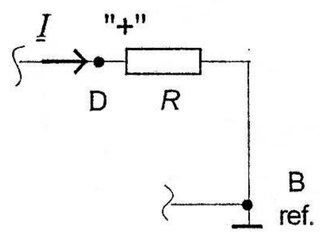
Struja je kapacitivna. Fazno prethodi naponu za 45^0.Slijedi proračun potencijala.

$\varphi_{\underline{D}} = \underline{I}\cdot R$ $\quad \varphi_{\underline{D}} = 10 + 10j\,V$

$\varphi_{\underline{C}} = \varphi_{\underline{D}} + \underline{I}\cdot X_C$ $\quad \varphi_{\underline{C}} = 30 - 10j\,V$

$\varphi_{\underline{A}} = \varphi_{\underline{C}} + \underline{I}\cdot X_L$ $\quad \varphi_{\underline{A}} = 20\,V$

Kod proračuna potencijala i napona stavljamo pomoćnu oznaku «+» na onu priključnicu elementa na koju ulazi struja.



$\varphi_D = \underline{U}_{DB} = \underline{U}_R = \underline{I}R$

Napone izračunamo kao razliku potencijala:

$\underline{U}_{DB} = \varphi_{\underline{D}} - \varphi_{\underline{B}}$ $\quad \underline{U}_{DB} = 10 + 10j\,V$

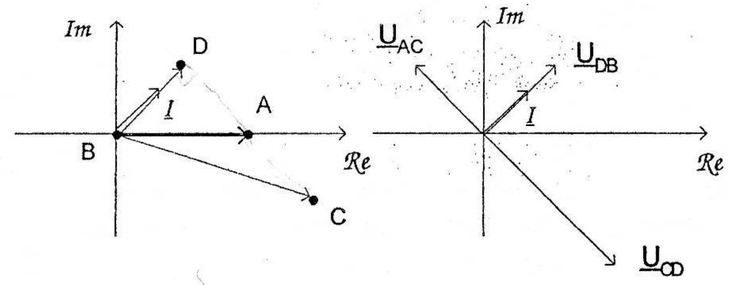
$\underline{U}_{CD} = \varphi_{\underline{C}} - \varphi_{\underline{D}}$ $\quad \underline{U}_{CD} = 20 - 20j\,V$

$\underline{U}_{AC} = \varphi_{\underline{A}} - \varphi_{\underline{C}}$ $\quad \underline{U}_{AC} = -10 + 10j\,V$

Pažnja: promjenom redoslijeda oznaka napona mijenja se predznak. Npr. $\underline{U}_{DC}$=-20+20j V $\underline{U}_{CA}$=10-10j V Efektivne vrijednosti su apsolutni iznosi (moduli) kompleksnih brojeva kojima prikazujemo napone.Npr. U_{DB}=14,1V

Topografski dijagram u kompleksnoj ravnini prikazan je slici a).
Na slici b) posebno su prikazabi su prikazani fazori (vektori) napona na pojedinim elementima. Napon U_{DB} je napon na otporniku, U_{CD} na kapacitetu, a U_{AC} na

induktivitetu . Iz kompleksnih brojeve koji prikazuju napone možemo odrediti vremenske (sinusoidne funkcije) tako da najprije odredimo apsolutni iznos tj.efektivnu vrijednost koju zatim pomnožimo sa 1,41.. Npr. napon na kapacitetu je $u_C(t)=40\sin(\omega t-\pi/4)$.



Napon na otporniku je u fazi sa strujom, napon na induktivitetu prethodi, a napon na kapacitetu zaostaje za 90^0 prema struji .

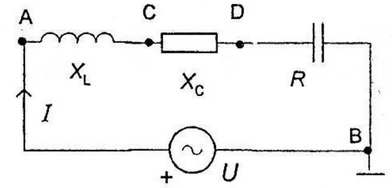
VIII.1.P2. Nacrtajte topogarfski dijagram za spoj iz prethodnog zadatka ako otpornik i kondenzator zamijene svoja mjesta.

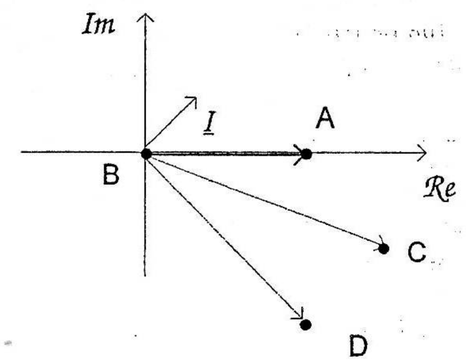
Rješenje: Za proračun ukupne impedancije i struje nije važan redoslijed elemenata u spoju. Potencijali točaka D i C se promijene.

$\varphi_{\underline{D}} = \underline{I}\cdot X_C$ $\quad \varphi_{\underline{D}} = 20 - 20j\,V$

$\varphi_{\underline{C}} = \varphi_{\underline{D}} + \underline{I}\cdot R$ $\quad \varphi_{\underline{C}} = 30 - 10j\,V$

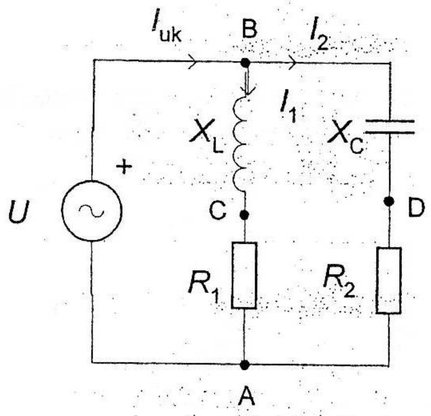
$\varphi_{\underline{A}} = \varphi_{\underline{C}} + \underline{I}\cdot X_L$ $\quad \varphi_{\underline{A}} = 20\,V$





VIII.1-P3.U spoju prema slici zadano je $R_1=R_2=X_C=X_L=24\,\Omega$, U=24V. Odredite ukupnu struju. Nacrtajte vektorski (topografski) dijagram . Označite mjesta na kojima će se nalaziti točka D prilikom promjene otpora ili kapaciteta.

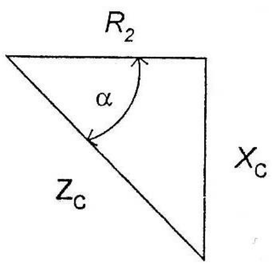
Rješenje: Na naponski izvor su paralelno spojena dva serijska spoja osnovnih elemenata. Najprije koristimo "vektorsku metodu". Za svaki serijski spoj izračunamo prividni otpor i struju.



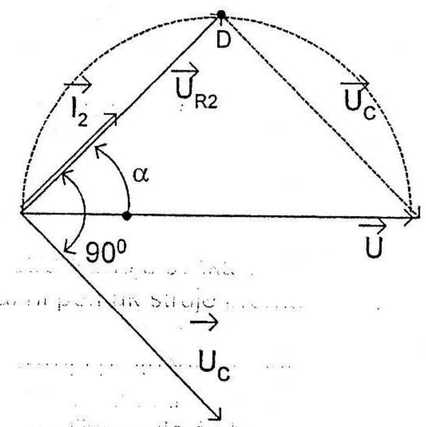
$Z_C = \sqrt{R_1^2 + X_C^2}$ $\quad Z_C = 33.941\ \Omega$ $\quad I_1 = \dfrac{U}{Z_C}$ $\quad I_1 = 0.707$ A

$Z_L = \sqrt{R_2^2 + X_L^2}$ $\quad Z_L = 33.941\ \Omega$ $\quad I_2 = \dfrac{U}{Z_L}$ $\quad I_2 = 0.707$ A

Treba voditi računa da ove struje imaju svaka svoj fazni pomak prema naponu kao i međusobni fazni pomak. Fazni pomak struje prema naponu u serijskom spoju možemo odrediti iz trokuta otpora. Na slici a) je prikazan postupak za kapacitivnu granu (serijski spoj R_2 i X_C). Struja prethodi naponu za kut α koji smo odredili iz trokuta otpora. U vektorskom dijagramu treba uočiti da je zbroj vektora napona U_{R2} i U_C jednak naponu izvora. Zanimljivo je da će bez obzira na iznose R_2 i X_C (pa I frekvencije) točka označena sa D nalaziti na crtkanoj polukružnici.

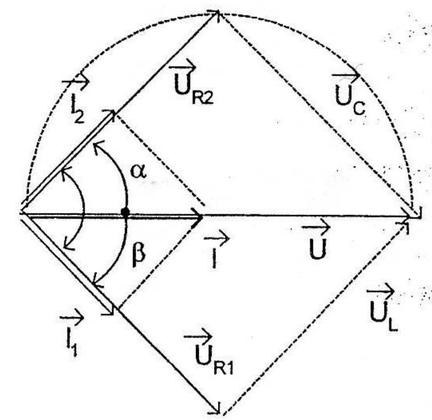


trokut otpora za kapacitivnu granu



Na jednak način postupamo kod induktivne grane. Tamo naravno struja I_1 zaostaje iza napona .

Crtanje trokuta otpora i odgovarajućeg dijagrama prepuštamo čitatelju. Sada crtamo kompletan vektorski dijagram u kojem zbrajamo vektore struja I_1 i I_2 i tako dobivamo ukupnu struju koja se u zadatku traži. Zanimljivo je da ta struja dolazi u fazu s naponom. Naravno za neke druge vrijednosti elemenata neće biti tako.



Ukupna struja je zbroj vektora struja I_1 i I_2 koji su međusobno pomaknuti za 90^0. Budući da su struje jednakog iznosa ta struja je $\sqrt{2} \cdot 0{,}707 = 1$ A (dijagonala kvadrata!)

Rješavanje složenijih spojeva elemenata općenito je jednostavnije u kompleksnom području. Za takvo što je potrebno prikazati sve otpore i napon kompleksnim brojevima a zatim formalno postupati kao da se radi o spoju otpornika koji je priključen na istosmjerni izvor. Crtanje trokuta otpora i vektorskog dijagrama je nepotrebno.Pogledajmo kako bi se to napravilo u ovom zadatku:

Najprije "prebacimo" u kompleksno područje induktivni i kapacitivni otpor kao i napon izvora:

$\underline{X}_C = -j\underline{X}_C\ \Omega \quad X_L = jX_L\ \Omega \quad \underline{U} = 24 + j0$ V

Slijedi izračunavanje impedancije serijskih spojeva:

$\underline{Z}_C = 24 - j24\ \Omega \quad \underline{Z}_L = 24 + j24\ \Omega$, a nakon toga ukupne impedancije:

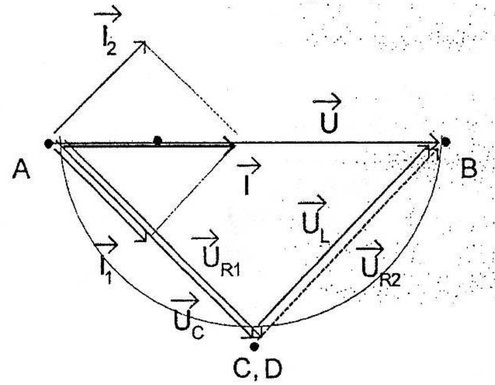
$\underline{Z}_{uk} = \underline{Z}_C \cdot \underline{Z}_L / (\underline{Z}_C + \underline{Z}_L) = 24 + j0\ \Omega$

Struja je $\underline{I} = \underline{U}/\underline{Z}_{uk} = 1 + j0$ A. Efektivna vrijednost struje je iznos (modul) kompleksnog broja koji predstavlja struju, a to je u ovom slučaju 1 A.

Čitatelju prepuštamo da nacrta topografski dijagram u kompleksnoj ravnini (pogledajte prije toga rješenje slijedećeg primjera).

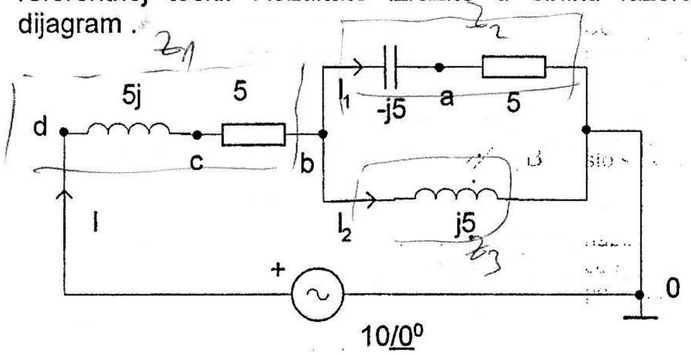
VIII.1-P4. Nacrtajte vektorski (fazorski) prikaz struja i napona za spoj iz prethodnog zadatka ako otpornik R_2 i kondenzator zamijene mjesta. Koliki bi u tom slučaju bio napon U_{CD}?

Rješenje: Iako za ukupnu struju zamjena položaja spomenutih elemenata nema utjecaja, za vektorski dijagram kao i za napone između nekih točaka itekako ima. Da bi to ustanovili treba prilikom crtanja vektorskog dijagrama ucrtavati i točke u kojima počinje odnosno završava pojedini vektor (fazor). Takav dijagram se naziva topografski dijagram.



Došlo je do promjene položaja položaja točke D. Naime vektor napona na kondenzatoru ima početak u točki A dok mu je kraj u točki D. Taj napon fazno zaostaje 90^0 u odnosu na struju I_2. Kao što se vidi zato je napon između točaka C i D jednak je nuli (prije zamjene položaja otpornika i kondenzatora bio je jednak naponu izvora. Treba još analizirati kako će se točke C i D pomicati po nacrtanoj polukružnici prilikom promjene vrijednosti elemenata.

VIII.1-P5. U prikazanom spoju treba odrediti struje i napone točaka **a b c** prema referentnoj točki. Rezultate izrazite u obliku fazora. Nacrtajte topografski (fazorski) dijagram .



Rješenje: Izračunamo impedancije struje i napone.

$R_1 = 5$ $\quad X_{L1} = 5j$ $\quad X_{L2} = 5j$ $\quad R_2 = 5$ $\quad X_C = -5$

$Z_1 = 5 + 5j$ $\quad Z_2 = 5 - 5j$ $\quad Z_3 = 5j$ $\quad U = 10 + 0j$

$$Z_{uk} = Z_1 + \frac{(Z_2 \cdot Z_3)}{Z_2 + Z_3} \qquad Z_{uk} = 10 + 10j \qquad I = \frac{U}{Z_{uk}} \qquad I = 0.5 - 0.5j$$

$$I_1 = I \cdot \frac{(X_{L2})}{X_{L2} + Z_2} \qquad I_1 = 0.5 + 0.5j \qquad I_2 = I - I_1 \qquad I_2 = -j$$

Sada možemo izračunavati potencijale (napone).

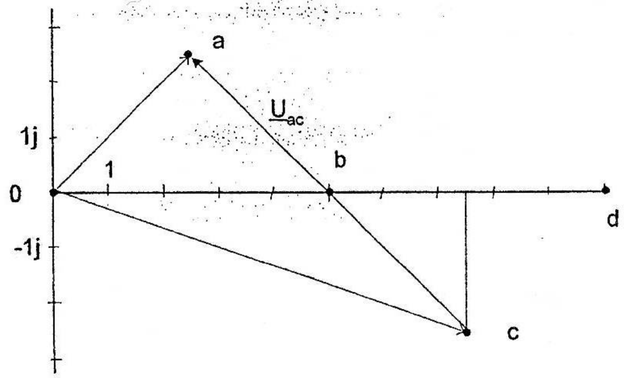
$\varphi_a = I_1 \cdot R_2$ $\qquad \varphi_a = 2.5 + 2.5j$

$\varphi_b = I_2 \cdot X_{L2}$ $\quad$ ili $\quad \varphi_b = \varphi_a + I_1 \cdot X_C$ $\qquad \varphi_b = 5$

$\varphi_c = \varphi_b + I \cdot R_1$ $\qquad \varphi_c = 7.5 - 2.5j$

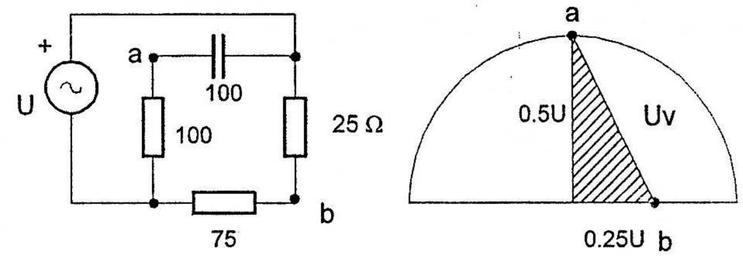
$\varphi_d = \varphi_c + I \cdot X_{L1}$ $\qquad \varphi_d = 10$

Topografski dijagram: u kompleksnu ravninu treba ucrtati sve izračunate fazore potencijala (**napon prema referentnoj točki je potencijal** oznaka φ npr. $\underline{U}_{ao}=\varphi_a$)



Iz topografskog dijagrama se mogu "očitati" ostali naponi koji su od interesa. Npr. napon $\underline{U}_{ac}$=-5+j5 V (efektivno je to 7 V). Pažnja: kod označavanja napona uzimamo da je drugi indeks referentna točka (u ovom slučaju **c**). Strelicu vektora koji povezuje te dvije točke treba usmjeriti u točku koju označava prvi indeks (u ovom slučaju **a**).

VIII.1-P6. Napon između točaka **a** i **b** iznosi 27,9 V. Kolika je struja izvora?



Rješenje: treba skicirati topografski dijagram u kojem se vidi položaj točaka a i b. Iz označenog trokuta odredi se napon izvora, a zatim struja izvora.

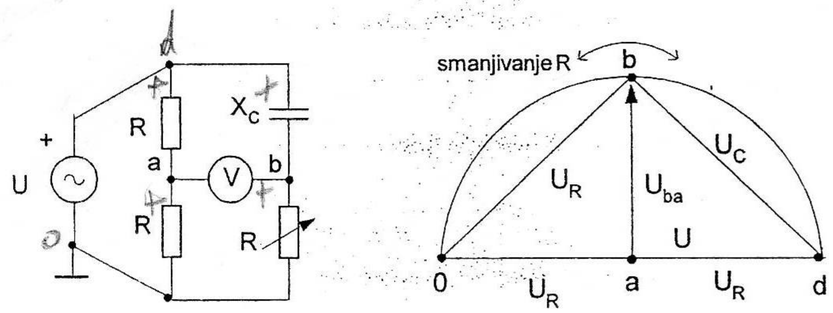
$$Uv = \sqrt{\left(0.5U^2 + 0.25U^2\right)} \qquad Uv = 27.9$$

$$U = \sqrt{\left[\frac{Uv^2}{\left(0.5^2 + 0.25^2\right)}\right]} \qquad U = 49.909$$

$$I = \left|\frac{U}{100} + \frac{U}{(100 - 100j)}\right| \qquad I = 0.789$$

Zadaci za vježbu

VIII.1-1. Odredite pokazivanje voltmetra u spoju na slici. Zadano: $R=X_L$; U=80 V; Kako se mijenja pokazivanje voltmetra ako se otpor R smanjuje. Zadatak riješite crtanjem topografskog dijagrama.



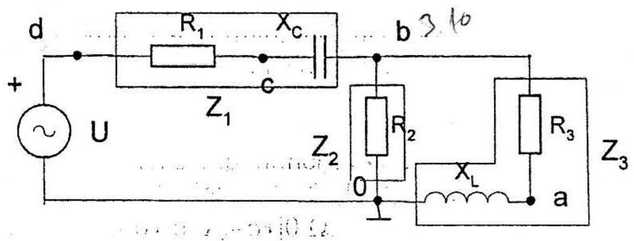
Rezultat: Na slici desno je nacrtan odgovarajući topografski dijagram.

Točka **a** se nalazi na polovici napona izvora (jer su lijevi otpori *R* u seriji jednaki). Točka **b** se nalazi na polukružnici (jer vektorska suma napona na desnom otporu i napona na *C* mora biti jednaka naponu izvora). Ucrtan je vektor napona U_{ab}, a taj napon (efektivnu vrijednost) pokazuje voltmetar. Dakle to je *U*/2=40 V. Promjenom otpora *R* mijenja se položaj točke **b** (točka **a** se ne miče) i to po polukružnici. Budući da točka **b** zauzima razna mjesta na toj polukružnici koristi se termin: *mjesni dijagram* . Razmotrite promjene top. dijagrama za: a) otpori u seriji nisu jednaki npr. donji je manji. b) kondenzator i promjenjivi otpornik zamijene mjesta.

VIII.1-2 Paralelno su spojene dvije impedancije zadane u kompleksnom obliku. Kolika je ukupna impedancija tog spoja ako je: a) $\underline{Z}_1$=5+j5 $\underline{Z}_2$=5+j5 b) $\underline{Z}_1$=5+j5 $\underline{Z}_2$=5-j5 c) $\underline{Z}_1$=5+j5 $\underline{Z}_2$=15+j15 d) $\underline{Z}_1$=5+j5 $\underline{Z}_2$=5+j0 Ω.

Rezultat: a) 2,5+j2,5 b) 5+j0 c) 3,75+j3,75 d) 3+j1 Ω

VIII.1-3. Zadan je spoj elemenata kako je prikazano slikom. Odredite impedancije $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$ $\underline{Z}_3$ u kompleksnom obliku, a zatim «fazorskom» metodom izračunajte efektivnu vrijednosti struja i nacrtajte topografski dijagram. Odredite napon na $R_1=U_{dc}$. Napon izvora je 8 V. Zadano je: R_1=5 ; X_C=1, R_2=5, R_3=5, X_L=5 Ω.

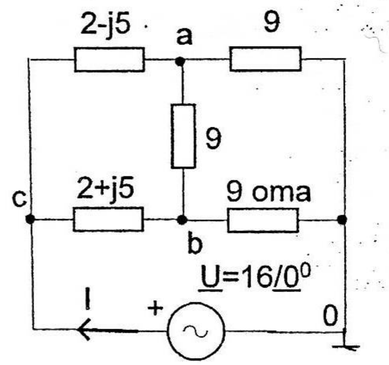


Rezultat: $\underline{Z}_1$=5-j1; $\underline{Z}_2$= 5+j0; $\underline{Z}_3$= 5+j5; U_1=5 V;

VIII.1-4 Umjesto na naponski izvor, spoj iz prethodnog primjera priključimo na strujni, koji daje (sinusnu) struju od 2 A (efektivno). Nacrtajte topografski dijagram i odredite napon na stezaljkama strujnog izvora i napon na R_1 .

Rezultat: 16 V; 10 V

VIII.1-5 U prikazanom spoju treba izračunati a) ukupnu struju b) fazni pomak te struje u odnosu na napon izvora d) nacrtajte topografski dijagram i odredite napon U_{ab} (efektivnu vrijednost)

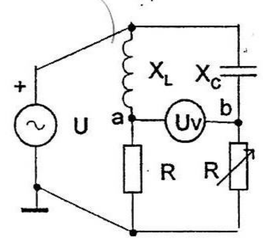


Rezultat:

a) I= 2 A
b) Struja je u fazi s naponom
c) U_{ab}=6 V

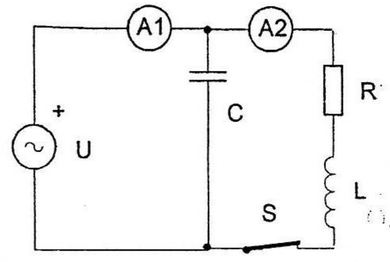
Uputa: «trokut» otpora 9,9,9 pretvorite u zvijezdu

VIII.1-6 Ako voltmetar u spoju na slici pokazuje napon U_V, odredite napon izvora *U*. Zadano: U_V=24 V; X_L=X_C=*R*.



Rezultat: *U*=24 V
Uputa: nacrtajte topografski dijagram. Objasnite pomicanje točke **b** prilikom povećavanja označenog otpora *R*. Koja mjesta zauzima pri tom točka **b**. Označite mjesto točke **b** za *R*=0 i za *R*= ∞

VIII.1-7 Ampermetri A_1 i A_2 u krugu na slici pokazuju jednake iznose I_A. Ako je pokazivanje ampermetra A_1 jednako i pri otvorenoj sklopki, odredite induktivitet *L* i otpor *R*. Zadano: *U*=110 V; *f*=60 Hz; I_A=0,5 A.

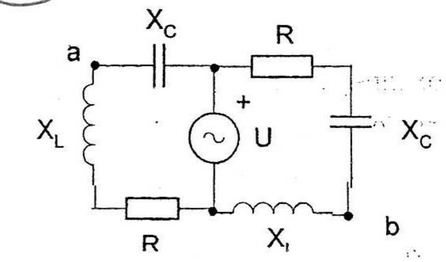


Rezultat:

L= 0,29 H

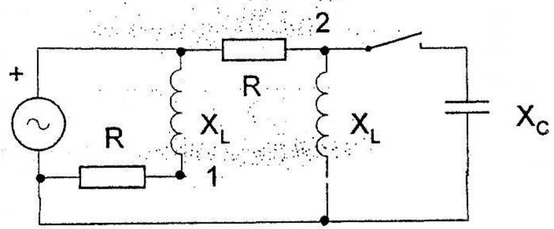
R= 190 oma

VIII.1-8 Koliki je napon U_{ab} ako je *U*=10 V, *R*=X_L=X_C=10 Ω?



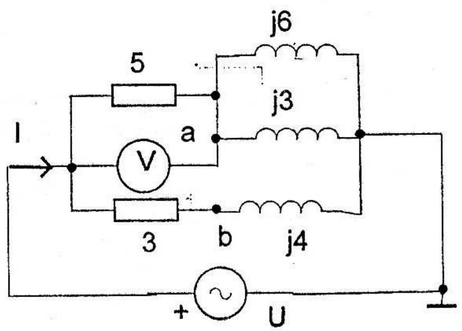
Rezultat: 10 V

VIII.1-9 U spoju prema slici napon $\underline{U}_{12}$ kod otvorene sklopke iznosi $100\underline{/0^0}$. Koliki je taj napon kada se sklopka zatvori ako je $R=X_L=X_C$? Nacrtajte topografski dijagram.



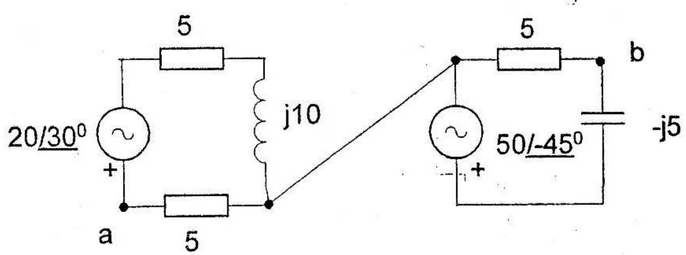
Rezultat: $70{,}7\underline{/-45^0}$

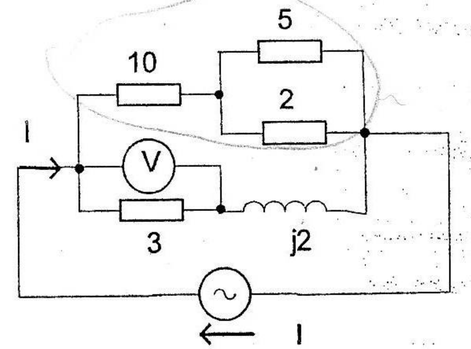
VIII.1-10. Voltmetar pokazuje 45 V. Izračunajte efektivnu vrijednost ukupne struje i napona između točaka **a** i **b**. *Rezultat:* I=18 A; U_{ab}=25,2 V



VIII.1-11. Koliki će napon pokazati (idealan) voltmeter priključen na točke **a** i **b** u prikazanom spoju elemenata?

Rezultat: 28,52 V.

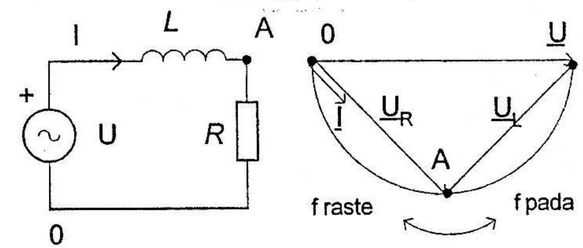




VIII.1-12. Ako voltmetar pokazuje 45 V kolika je ukupna struja? Rezultat: 19,4 A

VIII.1-13. Nacrtajte topografski dijagram napona s time da napon izvora postavite u realnu os. Zaključite kako će se pri promjeni frekvencije pomicati točka A. Na kojoj frekvenciji napon U_{A0} zaostaje iza napona U za 45^0?.

Rezultat: treba napisati jednakost $R= 2\pi fL$ $f= R/2\pi L$ = 160 Hz



Struja je uvijek u fazi s naponom na otporniku. Točka A nacrtana je za frekvenciju od 160 Hz na kojoj je fazni kut 45^0. Naponi na otporniku i induktivitetu su uvijek **međusobno okomiti**. Nadalje suma (**vektorska**) ta dva napona uvijek je jednaka naponu izvora. Zato se točka A može nalaziti samo na nacrtanoj **polukružnici .** Na slici je označeno «kuda ide» točka A pri promjeni frekvencije. Pitanje: gdje bi se našla točka A za f=0 i za f=∞.