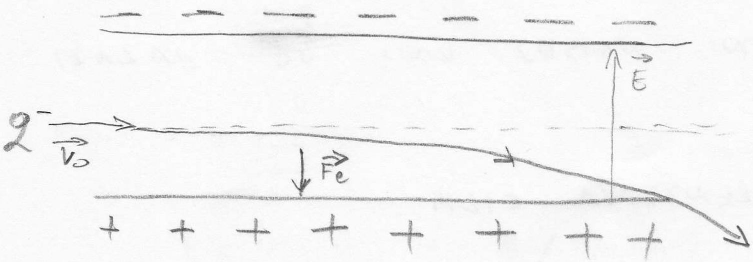
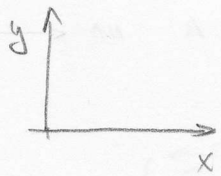
2. ODREDITI PUTANJU ČESTICE KOJA UPADA OKOMITO U HOMOGENO ELEKTRIČNO POLJE





$\vec{V_0} = V_{x0} \cdot \vec{a_x}$

$\vec{E} = E \cdot \vec{a_y}$

$\vec{V} = \frac{dx}{dt}\vec{a_x} + \frac{dy}{dt}\vec{a_y}$

$\vec{a} = \frac{dV_x}{dt}\vec{a_x} + \frac{dV_y}{dt}\vec{a_y}$

→ POSTOJI RAVNOTEŽA SILA:

$$m \cdot \vec{a} = -e \cdot \vec{E}$$

električna sila na negativan naboj $F = q \cdot E$

$$m \cdot \frac{dV_x}{dt}\vec{a_x} + m \cdot \frac{dV_y}{dt}\vec{a_y} = -e \cdot E \cdot \vec{a_y} + 0\,\vec{a_x}$$

PO X: HORIZONTALNA KOMP. SE NE MIJENJA

$$m \cdot \frac{dV_x}{dt} = 0 \Rightarrow V_x = V_{x0} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = V_{x0} \;\Big/ \int$$

$$x(t) = V_{x0} \cdot t + x_0$$

→ početni položaj koji ovisi o izboru koord. sustava

PO Y:

$$m \cdot \frac{dV_y}{dt} = -e \cdot E \;\Big/ :m$$

$$\frac{dV_y}{dt} = \frac{-e}{m} \cdot E \;\Big/ \int$$

$$V_y = -\frac{e}{m} \cdot E \cdot t + \cancel{V_{y0}} \;\Big/ \int$$

→ 0 jer je V_0 samo u x smjeru

$$y(t) = \frac{-e \cdot E}{m} \cdot \frac{t^2}{2} + y_0$$

→ početni položaj

POTANJA:

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= V_{x0} \cdot t \\ y(t) &= -\frac{eE}{m}\frac{t^2}{2} \end{aligned}}$$

③ GUSTOĆA NABOJA i STRUJE. DEF ρ, λ, σ i $\vec{J}$

λ, σ ← VOLUMNA, LINIJSKA i PLOŠNA GUSTOĆA NABOJA

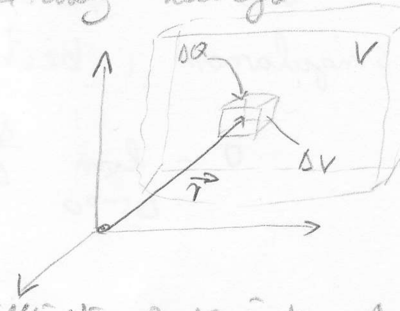
$\vec{J}$ → GUSTOĆA STRUJE

→ DEFINICIJE PROIZLAZE IZ MAKROSKOPSKE TEORIJE

GUSTOĆA NABOJA U NEKOJ TOČKI: $\rho(\vec{r}, t) = \lim\limits_{\Delta V \to 0} \dfrac{\Delta Q}{\Delta V} = \dfrac{dQ}{dV} \left[\dfrac{C}{m^3}\right]$

JAKOST STRUJE $I = \lim \dfrac{\Delta Q}{\Delta t} = \dfrac{dQ}{dt} [A]$

↳ pozitivan smjer: smjer gibanja pozitivnog naboja



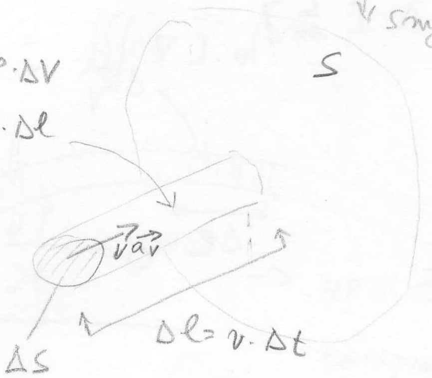
GUSTOĆA STRUJE KOJA TEČE OKOMITO KROZ ELEMENT POVRŠINE ΔS

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \vec{a}_v \left[\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta S}\right] = \vec{a}_v \cdot \frac{dI}{dS} \quad \left[\frac{A}{m^2}\right]$$

↓ smjer brzine gibanja naboja

$\Delta Q = \rho \cdot \Delta V$

$\Delta V = \Delta S \cdot \Delta l$



→ ZA KONDUKCIJSKE STRUJE (STRUJE U VODIČIMA, POLUVODIČIMA...) VRIJEDI:

$\vec{J} = K \cdot \vec{E}$ → OHMOV ZAKON

↳ električna provodnost $\left[\frac{S}{m}\right]$

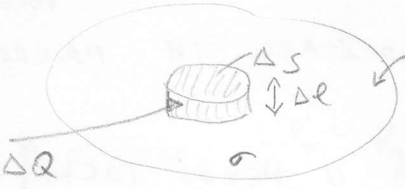
gustoća ne ovisi o ukupnoj gustoći naboja

VEZA GUSTOĆE i NABOJA / STRUJA

$$Q(t) = \iiint_V \rho(\vec{r}, t)\, dV \qquad I(t) = \iint_S \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n}\, dS$$

30. GUSTOĆA PLOŠNOG NABOJA: $\sigma \; [\frac{C}{m^2}]$

$$\sigma = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} = \frac{dQ}{dS}$$



→ u malom valjku volumena $\Delta V = \Delta S \cdot \Delta l$ imamo ΔQ naboja gustoće

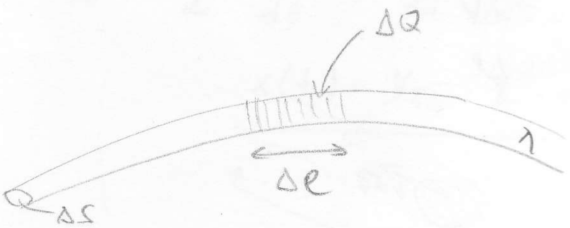
→ smanjenjem visine ($\Delta l \to 0$) valjak prelazi u plošni element singularnom i beskonačnom gustoćom:

$$\sigma = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\rho \cdot \cancel{\Delta S} \cdot \Delta l}{\cancel{\Delta S}} = \lim_{\substack{\rho \to \infty \\ \Delta l \to 0}} (\rho \cdot \Delta l)$$

→ Ukupni naboj: $Q = \iint_S \sigma \cdot dS$

GUSTOĆA LINIJSKOG NABOJA: $\lambda \; [\frac{C}{m}]$

$$\lambda = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta l} = \frac{dQ}{dl}$$



→ mali valjak volumena $\Delta V = \Delta S \cdot \Delta l$

→ ako $\Delta S \to 0$ valjak prijeđe u linijski element sa beskonačnom, singularnom gustoćom

$$\lambda = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\rho \cdot \Delta S \cdot \cancel{\Delta l}}{\cancel{\Delta l}} = \lim_{\substack{\rho \to \infty \\ \Delta S \to 0}} (\rho \cdot \Delta S)$$

– uk. naboj: $Q = \int_l \lambda \, dl$

→ LINIJSKA STRUJA

$$\vec{J} \, dV = i \, d\vec{l}$$

$$i = \lim (\vec{J} \cdot \vec{n} \cdot dS)$$

1) JEDNADŽBA KONTINUITETA - INTEGRALNI OBLIK I IZVOD DIFERENCIJALNOG

POSLJEDICA STAVKA O OČUVANJU NABOJA (tok električnog naboja (struja) I iz zatvorenog konačnog prostora volumena V kojeg obrubljuje ploha S jednak iznosu smanjenja naboja Q unutar tog prostora)

$$\oiint \vec{J}\,\vec{n}\,dS = -\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt}\iiint_V \rho\, dV = -\iiint \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV$$

$$\Downarrow$$

$$\oiint \vec{J}\,\vec{n}\,dS = -\iiint \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV \quad \leftarrow \text{INTEGRALNI}$$

/ GAUSOV TEOREM: $\oiint \vec{J}\,\vec{n}\,dS = \iiint_V \nabla \vec{J}\, dV$ /

$$\Downarrow$$

$$-\iiint \frac{\partial \rho}{\partial t} = \iiint_V \nabla \vec{J}\, dV$$

$$\Downarrow$$

$$\nabla \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$\rightarrow$ DIFERENCIJALNI OBLIK JEDNADŽBE KONTINUITETA

30. 5. COULUMBOV ZAKON – IZRAZ i DEFINICIJA $\vec{E}$

- Coulumb je utvrdio da je sila između dva vrlo mala nabijen tijela, na udaljenosti puno većoj od dimenzija tijela, proporcion naboju i obrnuto propor. kvadratu udaljenosti

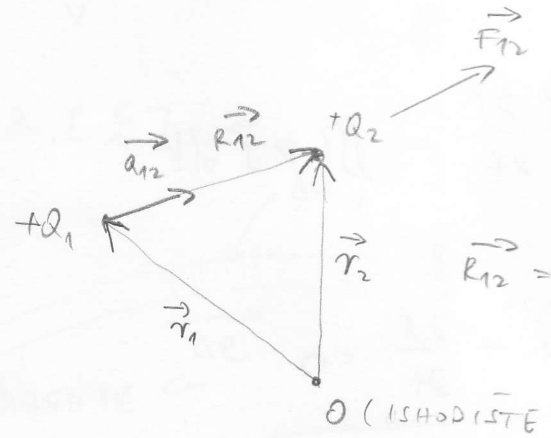
$$\vec{F} = k \cdot \frac{Q_1 Q_2}{R^2} \qquad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8.854 \cdot 10^{-1} \left[\frac{As}{Vm} ; \frac{F}{m}\right]$$

→ ta sila je duž spojnice i ovisi o predznacima naboja

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 Q_2}{R_{12}^2} \cdot \vec{a}_{12}$$

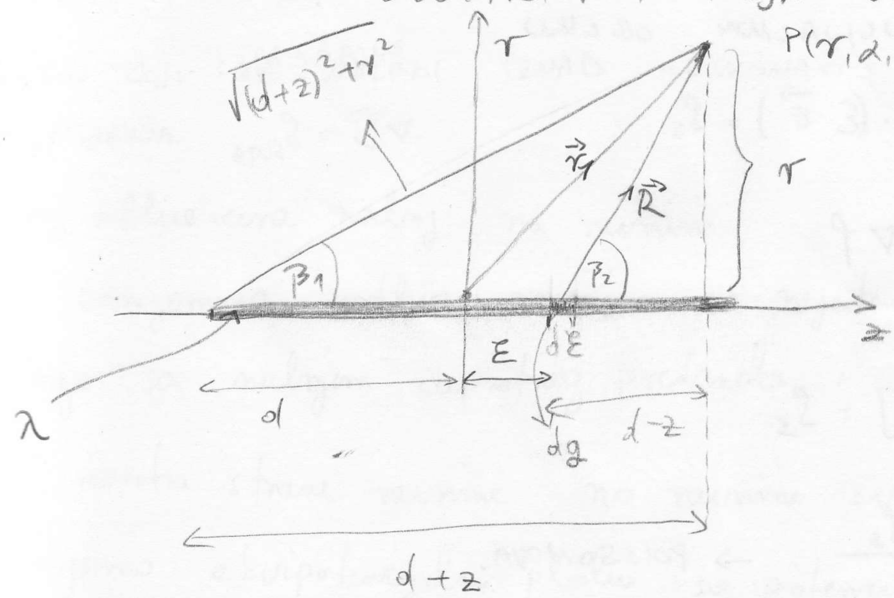
→ jedinični vektor spojnice $\vec{a}_{12} = \frac{\vec{R}_{12}}{|R_{12}|}$

$$\vec{F}_{12} = k \cdot \frac{Q_1 Q_2}{R_{12}^3} \cdot \vec{R}_{12}$$



$$\vec{R}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

② ODREDITI JAKOST ELEKTRIČNOG POLJA JEDNOLIKO NABIJENE DUŽINE



$P(r,\alpha,z)$ → CILINDRIČNI KOORD SUST

$\vec{r} = r\vec{a_r} + z\vec{a_z}$

član uz $\vec{a_\alpha}$ je 0 jer je na plošti cilindra oko nose dužine svugdje isto polje

$\vec{r}' = \xi\vec{a_z}$

$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' = r\vec{a_r} + (z-\xi)\vec{a_z}$

$dq = \lambda \cdot d\xi$

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec{R}}{|\vec{R}|^3}$$

$$\vec{E} = \int_{-d}^{d}\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{R}}{|R|^3} = \int_{-d}^{d}\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{r\vec{a_r}+(z-\xi)\vec{a_z}}{[r^2+(z-\xi)^2]^{1.5}}d\xi = E_r\vec{a_r}+E_z\vec{a_z}$$

$$\vec{E_r} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\int_{-d}^{d}\frac{r\,d\xi}{[r^2+(z-\xi)^2]^{1.5}} \quad \left| \begin{array}{l} z-\xi = t \\ d\xi = -dt \\ z-\xi = d \to t = z-d \\ t = z+d \end{array} \right| = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{z+d}^{z-d}\frac{r\,dt}{[r^2+t]^{1.5}}$$

$$\dots = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\frac{d+z}{\sqrt{r^2+(d+z)^2}}+\frac{d-z}{\sqrt{r^2+(d-z)^2}}\right] = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}(\cos\beta_1+\cos\beta_2)$$

$$\vec{E_z} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-d}^{d}\frac{(z-\xi)\,d\xi}{[r+(z-\xi)^2]^{1.5}} = \dots = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\frac{r}{\sqrt{(d-z)^2+r^2}}-\frac{r}{\sqrt{(d+z)^2+r^2}}\right]$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\cdot(\sin\beta_2 - \sin\beta_1)$$

30.

7. POISSONOVA I LAPLACOVA JEDNADBA

→ GAUSSOV ZAKON U DIFERENCIJALNOM OBLIKU

ZNAČENJE: $\nabla \vec{D} = \rho_{SLOB}$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_{SLOBODNI} \rightarrow \nabla \cdot (\varepsilon \cdot \vec{E}) = \rho_s$$

i uz: $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi = -\nabla \varphi$

$$\Downarrow$$

$$\nabla \cdot [\varepsilon \cdot (-\nabla \varphi)] = \rho_s$$

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho_s}{\varepsilon} \rightarrow \text{POISSONOVA}$$

→ AKO U PROSTORU NEMA SLOBODNIH NABOJA POISSONOVA PRELAZI U LAP

$$\Delta \varphi = 0 \rightarrow \text{LAPLACEOVA JEDNADBA}$$

JEDINSTVENOST RJEŠENJA: ? valjda ne treba...

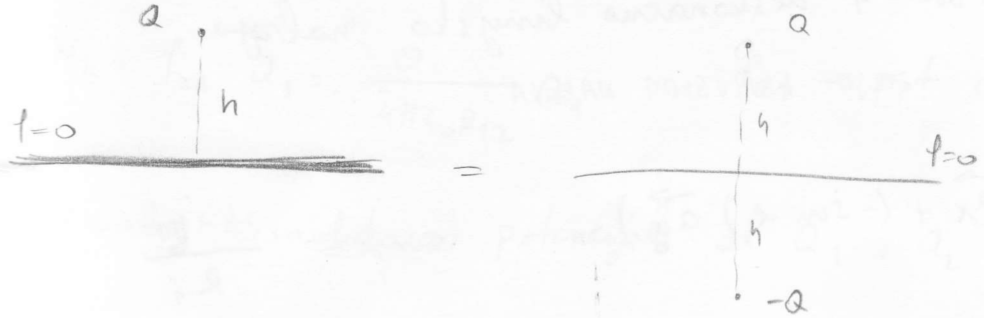
8. METODA ODSLIKAVANJA

→ NABOJ KOJI SE NALAZI IZNAD BESKONAČNE VODLJIVE RAVNINE KOJA J UZEMLJENA

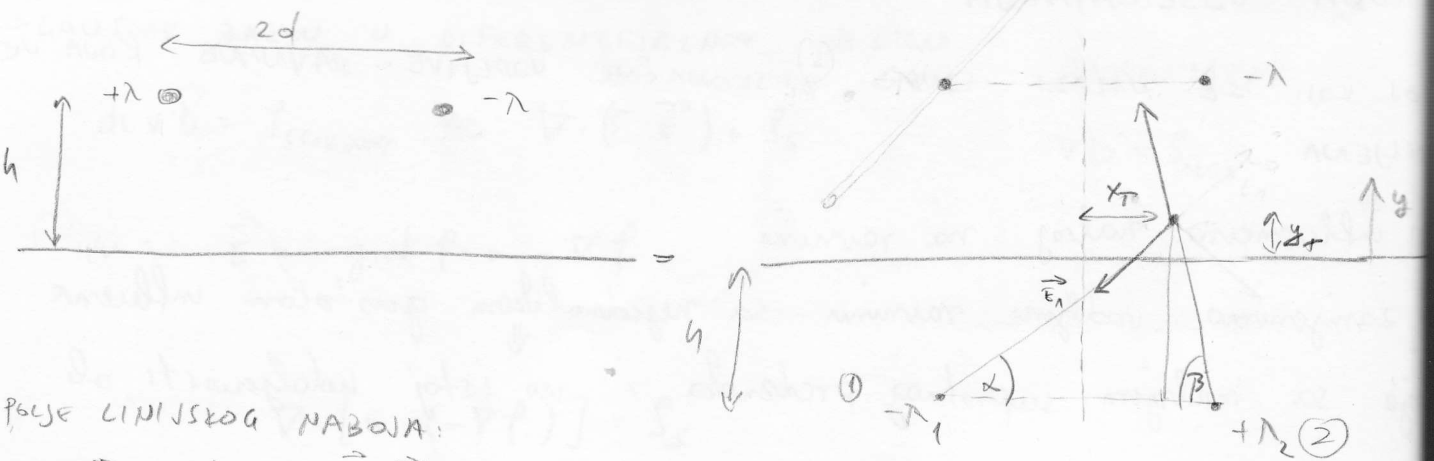
→ naboj influencira naboj na ravnini

→ ako zamijenimo vodljivu ravninu sa nejednolikom gustoćom influenc naboja sa nabojem suprotnog predznaka i na istoj udaljenosti ali sa suprotne strane ravnine, na ravnini sve se silnici poništ i dobijemo ekvipotencijalnu plohu sa potencijalom $\varphi=0$

→ rubni uvjeti su zadovoljeni u oba slučaja te možemo rješavati naš "odslikani problem"



(30) (9) POLJE VODA IZNAD POVRŠINE TLA.



ODSLIKANI PROBLEM U NEOGRANIČEN PROSTORU

POLJE LINIJSKOG NABOJA:

$$E(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_l \lambda \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\, dl$$

→ probni naboj u točki T $\quad \vec{r}_T = x\vec{a}_x + y\vec{a}_y \qquad \vec{r}' =$ POLOŽAJ TOČ NA VODU

→ vrijedi superpozicija ova 4 beskonačna linijska naboja

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{a}_r \quad \text{– POLJE LINIJSKOG NABOJA}$$

$$\vec{E}_1 = \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 R_1}\left(-\cos\alpha\, \vec{a}_x + (-\sin\alpha)\, \vec{a}_y\right) \qquad \sin\alpha = \frac{h+y_T}{R_1}$$

$$R_1 = \sqrt{(h+y_T)^2 + (d+x_T)^2}$$

$$E_2 = \frac{\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0 \cdot R_2}\left(+\cos\beta\, \vec{a}_x + \sin\beta\, \vec{a}_y\right)$$

$$\cos\beta = \frac{d-x_T}{R_2}$$

ne stavlja se + ili – jer je to već uzeto u obzir pri određivanju smjera sile

$$R_2 = \sqrt{(h+y_T)^2 + (d-x_T)^2}$$

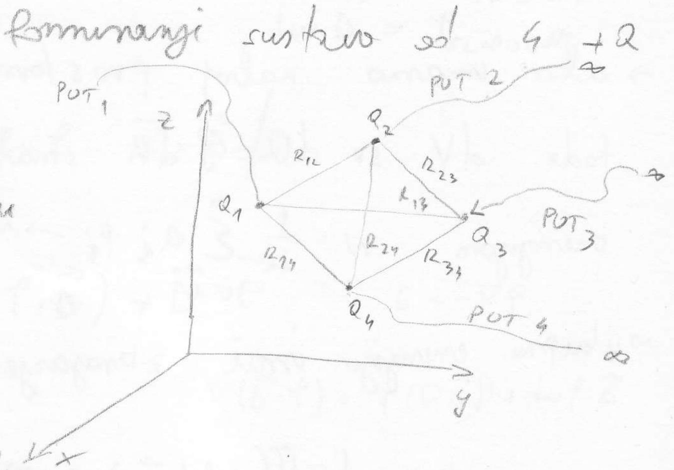
$E_3 =$ ⋮

10

ENERGIJA SUSTAVA TOČKASTIH NABOJA

→ koju je energiju potrebno utrošiti za formiranje sustava od 4 +Q

→ svi u ∞ na početku



→ za dovođenje prvog ne moramo nikakvu silu savladati

→ za dovođenje 2 iz ∞ u točku P_2 potrebno savladati polje stvoreno nabojem Q_1 u točki P_2

$$W_2 = \varphi_{12} \cdot Q_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_{12}} Q_2$$

φ_{12} → potencijal naboja Q_1 što ga stvara u točki P_2

→ isto bi bilo da smo prvo doveli Q_2 pa onda Q_1

$$W_2 = \varphi_{21} \cdot Q_1 = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_{12}} Q_1$$

φ_{21} → pot Q_2 na mjestu P_1

→ treći naboj → savladavamo potencijale od Q_1 i Q_2

$$W_3 = \varphi_{13} \cdot Q_3 + \varphi_{23} \cdot Q_3$$

→ isto bi bilo da smo Q_1 i Q_2 dovodili u polje naboja Q_1

$$W_3 = \varphi_{31} \cdot Q_1 + \varphi_{32} \cdot Q_2$$

→ identično vrijedi za 4 naboj

$$W_{uk} = \frac{1}{2}(W_2 + W_3 + W_4) = \frac{1}{2}\left[\varphi_{21} \cdot Q_1 + \varphi_{12} \cdot Q_2 + \varphi_{13} \cdot Q_3 + \varphi_{23} \cdot Q_3 + \varphi_{31} \cdot Q_1 + \varphi_{32} \cdot Q_2 + \ldots\right.$$

$$W_{uk} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \varphi_i Q_i$$

$\varphi_1 = \varphi_{21} + \varphi_{31} + \varphi_{41}$ = POTENCIJAL U TOČKI P_1

- KOJI NABOJI 2,3,4 STVARAJU NA MJESTU P_1

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{N} \varphi_{ki}$$

→ potencijal samog naboja na samog sebe je beskonačan pa ne gledamo članove $\varphi_{11} \cdot Q_1$, $\varphi_{22} \cdot Q_2 \ldots$

POTENCIJAL TOČKE U KOJU DOVODIMO NABOJ

11. ENERGIJA PROSTORNE RASPODJELE NABOJA I SUSTAVA VODLJIVIH TIJELA

→ ako imamo naboj prostorne gustoće ρ, raspodijeljen u volumenu tada dV sa $dQ = \rho \cdot dV$ smatramo točkastim nabojem sa energijom $W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} Q_i \varphi_i$ → nije uključena vlastita energija

→ ukupnu energiju izraž. zbrajanjem doprinosa

$$W = \frac{1}{2} \iiint_V \varphi(\vec{r}\,') \, \rho(\vec{r}\,') \, dV$$

→ UKLJUČENA JE I VLASTITA ENERGIJA NABOJA

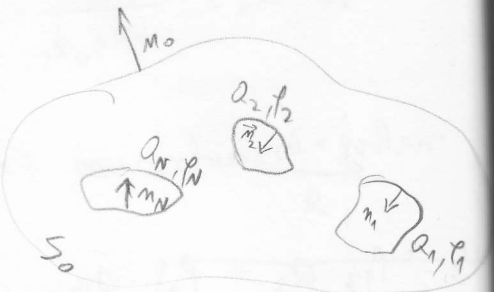
ukupni potencijal na mjestu diferencijalnog volumena

KONTINUIRANA RASPODJELA NABOJA

→ isti slučaj sa N vodljivih tijela

$$W = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} Q_k \varphi_k$$

imaju konstantan potencijal



ENERGIJA PRIKAZANA VEKTORIMA ELEKTRIČNOG POLJA

$$W = \frac{1}{2}\iiint_V \rho \cdot \varphi \, dV = \frac{1}{2}\iiint (\nabla \cdot \vec{D}) \cdot \varphi \, dV \qquad \operatorname{div} \vec{D} = \rho_{SLOBODNI}$$

identitet: $\nabla(f \cdot \vec{A}) = f \cdot (\nabla \vec{A}) + \vec{A} \cdot (\nabla f) \qquad f = \varphi \quad \vec{A} = \vec{D}$

$$\Downarrow$$

$$\varphi(\nabla \cdot \vec{D}) = \nabla(\varphi \vec{D}) - \vec{D}(\nabla \varphi) = \nabla(\varphi \cdot \vec{D}) + \vec{D} \cdot \vec{E} \qquad E = -\nabla \varphi$$

$\nabla(\vec{D} \cdot \varphi) = \varphi(\nabla \vec{D}) + \operatorname{div} \varphi \cdot \vec{D}$

$\varphi \cdot (\nabla \vec{D}) = -\nabla \varphi \vec{D} + \nabla(\varphi \vec{D})$

$\varphi \cdot (\nabla \vec{D}) = \nabla(\varphi \vec{D}) + \vec{E}\vec{D}$

$$\Downarrow$$

$$W = \frac{1}{2}\iiint_V \nabla \cdot (\varphi \cdot \vec{D}) \, dV + \frac{1}{2}\iiint_V \vec{D} \cdot \vec{E} \, dV$$

GAUSOV ZAKON $= \oiint \varphi \vec{D} \cdot n \, dS$

$$W = \frac{1}{2}\oiint \varphi \cdot \vec{D} \cdot \vec{n} \, dS + \frac{1}{2}\iiint_V \vec{D} \cdot \vec{E} \cdot dV$$

→ energija el polja u volumenu V

doprinos energiji van volumena

→ ako volumen uključuje cijeli prostor: $\varphi \cdot \vec{D} \cdot dS \to 0$ jer φ pada sa $\frac{1}{r}$, $\vec{D}$ sa $\frac{1}{r^2}$, a S raste sa r^2

$$\Downarrow$$

$$W = \frac{1}{2}\iiint_V \varepsilon \cdot E^2 \, dV \qquad \vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}$$

GUSTOĆA ENERGIJE: $w = \frac{1}{2} \varepsilon \cdot |E|^2$

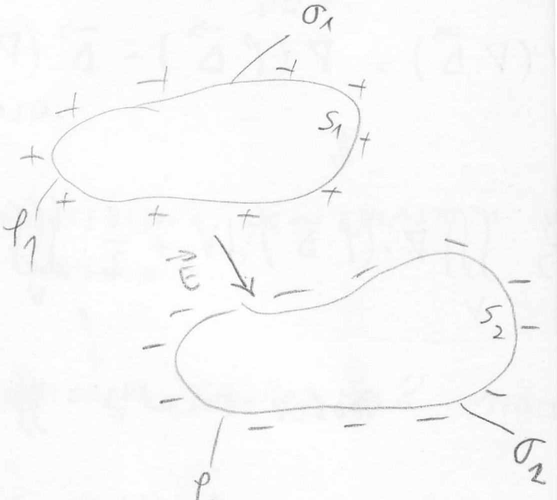
30.

(13) KAPACITET I ENERGIJA POHRANJENA U KONDENZATORU

→ ako izoliranom vodiču dovedemo naboj raste mu potencijal

$$Q = C \cdot \varphi \implies C = \frac{Q}{\varphi} \quad \left[F = \frac{C}{V}\right]$$

→ ako imamo dva blisko, međusobno izolirana vodljiva tijela, sa $+Q$ i $-Q$ → KONDENZATOR



$$\varphi_1 - \varphi_2 = -\int_2^1 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$Q = C(\varphi_1 - \varphi_2) = C \cdot U_{12}$$

$$C = \text{konst} = \frac{Q}{U}$$

→ ako je zadan Q : $\oint\!\!\oint \vec{E}\,\vec{n}\, dS = \frac{Q}{\varepsilon_0}$ → izračunati $\vec{E}$

GAUSSOV ZAKON

→ ako je zadan U : → izračunati jakost $\vec{E}$ iz diferenc. jednadžbe po

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho_S}{\varepsilon_0}$$

→ pa onda naboj na jednoj od elektroda iz Ga

$$Q = \oint\!\!\oint \vec{D} \cdot \vec{n}\, dS$$

→ ENERGIJA PLOŠNE RASPODJELE NABOJA : $W = \frac{1}{2} \iint_S \sigma \cdot \varphi\, dS$

$W = \frac{1}{2} \iiint_V \rho \cdot \varphi\, dV$

→ svaka od elektroda ima ima svoju energiju (φ je konst na ele

$$W_+ = \frac{1}{2} \iint_S \sigma\, \varphi_+\, dS = \frac{1}{2}\, \varphi_+ \iint_S \sigma \cdot dS$$

$$W_+ = \frac{1}{2}\, \varphi_+ \cdot Q$$

$$W_- = -\frac{1}{2}\, \varphi_- \cdot Q$$

$$W_{uk} = W_+ + W_- = \frac{1}{2} Q \,(\varphi_+ - \varphi_-) = \frac{1}{2} Q \cdot U = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C}$$

$$W_{uk} = \frac{1}{2} Q \cdot U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C \cdot U^2$$

C =

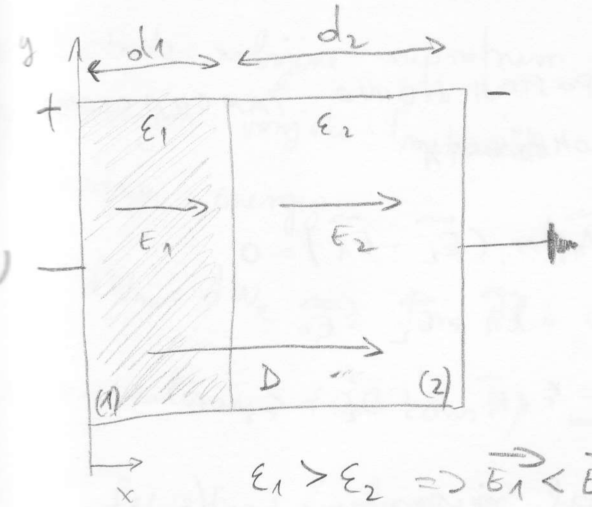
ukup

→

→ Ak

→ Ak

KAPACITET DVOSLOJNOG PLOČASTOG KONDENZATORA SA GRANICOM PARALELNOM PLOČAMA



→ ekvipotencijalne linije su paralelne između ploča

$C = \frac{Q}{U}$ → moramo dobiti

U → imamo

$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 \Rightarrow \vec{E_1} < \vec{E_2} \Rightarrow$ pot brže pada tamo di je veće polje $\vec{E} = -\text{grad}\,\varphi$

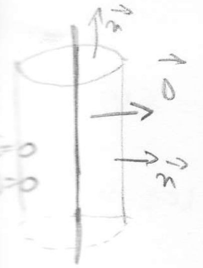
površina ploča = S

I uzeti na granici → okomito komp se ne mijenja $\vec{n} \cdot (\vec{D_2} - \vec{D_1}) = 0$

$$\varepsilon_2 \cdot \vec{E_2} = \varepsilon_1 \cdot \vec{E_1} \Rightarrow \vec{E_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \vec{E_1}$$

$$E_2 = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_2}$$

II Gauss na jednu elektrodu da dobijemo Q



$$\oint \vec{D} \cdot \vec{n}\, dS = Q \Rightarrow \vec{D} \cdot S = Q \Rightarrow \vec{D} = \frac{Q}{S} = \sigma$$

$$\frac{\vec{D}}{\varepsilon_1} = \sigma$$

III $$U_{12} = -\int_2^1 \vec{E}\, dl = -\int_{d_1+d_2}^{d_1} E_2\, dx - \int_{d_1}^{0} E_1\, dx = \vec{E_2}\, d_2 + \vec{E_1}\, d_1 = U_{12}$$

$$U_{12} = \frac{\sigma}{\varepsilon_1} \cdot d_2 + \frac{\sigma}{\varepsilon_1} d_1 = Q \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon_1} \cdot \frac{d_1}{S} + \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{d_2}{S} \right)$$

$\Downarrow$

$$Q = \frac{U_{12}}{\frac{1}{\varepsilon_1} \cdot \frac{d_1}{S} + \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{d_2}{S}}$$

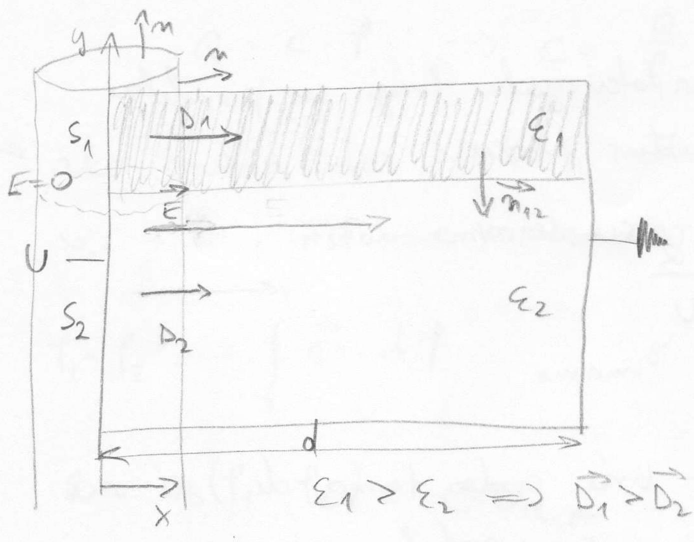
$$C = \frac{Q}{U} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} \cdot \frac{d_1}{S} + \frac{1}{\varepsilon_2} \cdot \frac{d_2}{S}} \Rightarrow$$

$\frac{1}{C_1}$ $\frac{1}{C_2}$

SERIJSKI SPOJ

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \cdot \frac{S}{d}$$

15. KAPACITET DVOSLOJNOG PLOČASTOG KOND SA GRANICOM OKOMIT NA PLOČU.



I POSTOJI JEDINO TANGENCIONALNA KOMPONENTA

$$\vec{n}_{12} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$$

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_2 = \vec{E}$$

$$\vec{D}_1 = \varepsilon_1 \vec{E} \qquad \vec{D}_2 = \varepsilon_2 \cdot \vec{E}$$

$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 \Rightarrow \vec{D}_1 > \vec{D}_2$ → potencijal ravnomjerno pada jer je polje isto $E = -\mathrm{grad}\, \varphi$

S = površina ploča $= S_1 + S_2$

II GAUS NA JEDNU STRANU

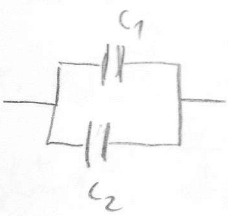
$$\oint\!\!\oint \vec{D}\, \vec{n}\, dS = Q$$

$$\vec{D}_1 \cdot S_1 + \vec{D}_2 \cdot S_2 = Q \quad \Rightarrow \quad \underline{\varepsilon_1 \cdot \vec{E} S_1 + \varepsilon_2 \cdot \vec{E} S_2 = Q}$$

III razlika potencijala poznata:

$$U_{12} = -\int_2^1 \vec{E}\, dl = \underline{E \cdot d = U_{12}}$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon_1 \cdot \cancel{\vec{E}} \cdot S_1 + \varepsilon_2 \cdot \cancel{\vec{E}} \cdot S_2}{\cancel{\vec{E}} \cdot d} = C_1 + C_2$$



PARALELNI SPOJ

SILE U EL. POLJU – KONSTANTNI NABOJI U SUSTAVU I KONSTANTNI POTENCIJALI U SUSTAVU

→ elektrode nabijene suprotnim nabojem, sila privlačna

→ djelovanjem vanjske $F_{mehaničko}$ pomaknemo ploču za dl → rad je jednak povećanju energije

$$dW_m = dW_e \Rightarrow F_m\, dl = w \cdot dV = \frac{1}{2}\varepsilon |E|^2 \cdot dV = \frac{1}{2}\varepsilon \cdot |E|^2 \cdot S \cdot dl$$

→ sustav izoliran $(Q = \text{konst}) \Rightarrow \vec{D} = \sigma = \text{konst}$

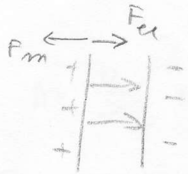
$$F_{el} = F_{meh} = \frac{1}{2}\varepsilon \cdot E^2 \cdot S = \frac{1}{2} D \cdot E$$

→ za jedinici površine $f = \frac{1}{2}\sigma \cdot E = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\varepsilon}$ $\qquad E = \frac{D}{\varepsilon}$

$$F = \oiint f\, dS = \oiint \frac{1}{2} E \sigma\, dS = E \frac{1}{2} \oiint \sigma \cdot dS = \frac{1}{2} Q \cdot E$$

↓

E je homogeno između ploča



SILE UZ POMOĆ ENERGIJE. $\delta A_{rbeter} = F_s \cdot \delta s$ (mali pomak → mali rad)

a) NABOJI U SUSTAVU VODIČA OSTAJU KONSTANTNI (IZOLIRANI SUSTAV)

→ svi pomaci na račun energije pohranjene u polju

$$\delta A_e = -\delta W_e \Rightarrow F_s = \frac{\delta A_e}{\delta s}$$

$$\underline{F_s = \frac{-\delta W_e}{\delta s}}$$

b) POTENCIJALI U SUSTAVU OSTAJU KONST (NEIZOLIRANI)

→ pomakom vodiča dovode se novi naboji iz izvora:

$$\delta A_{IZVORA} = \sum_{k=1}^{N} \varphi_k \cdot \delta Q_k$$

→ taj rad se troši na rad el. sile i na povećanje energije

$$\delta A_i = \delta A_e + \delta W_e$$

$$\delta W_e \rightarrow \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} \varphi_k \cdot \delta Q_k$$

$\Downarrow$

$$\delta A_e = \delta W_e = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} \varphi_k \delta Q_k \Rightarrow \underline{F_s = \frac{\delta W_e}{\delta s}}$$

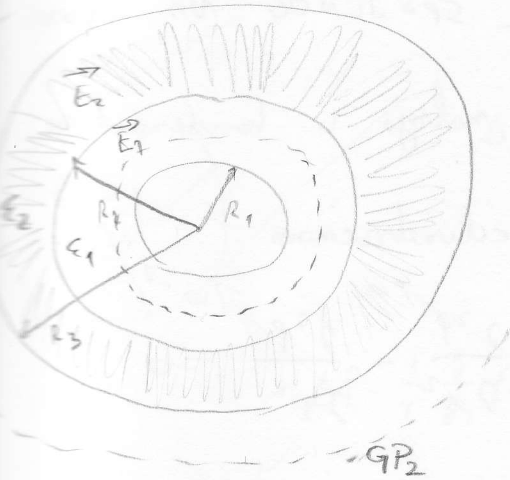
→ IZOLIRANI KONDENZATOR:

$$F_s = -\left\{\frac{\delta W_e}{\delta s}\right\}_{Q=konst} = -\frac{\partial}{\partial s}\left\{\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}\right\}_{Q=konst} = -\frac{1}{2}\cdot Q^2\cdot\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{C}\right)$$

→ NEIZOLIRANI KONDENZATOR

$$F_s = \left\{\frac{\delta W_e}{\delta s}\right\}_{U=konst} = \frac{\partial}{\partial s}\left\{\frac{1}{2}CU^2\right\}_{U=konst} = \frac{1}{2}U^2\cdot\frac{\partial C}{\partial s}$$

SILE NA ELEKTRODE IZOLIRANOG KUGLASTOG KONDENZATORA



→ na granicama imamo samo okomite komp

$$\vec{n_{12}}(\vec{D_2} - \vec{D_1}) = 0$$

$$\vec{D_1} = \vec{D_2} = \vec{D}$$

$$\vec{E_1} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_1} \quad \vec{E_2} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_2}$$

- naboj je konstantan → iz Gaussovog zakona ukupni obuhvaćeni naboj

$$\oiint_S \vec{D} \cdot \vec{n} \, dS = Q$$

$$\vec{D} \cdot 4 r_{GP_2}^2 \pi = Q \Rightarrow Q = D \cdot S \qquad D = \frac{Q}{S}$$

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = -\int_l \vec{E} \, d\vec{l} = -\int_{R_3}^{R_2} \vec{E_2} \cdot dr - \int_{R_2}^{R_1} \vec{E_1} \cdot dr$$

$$D = \frac{Q}{S} \quad E = \frac{Q}{S} \cdot \frac{1}{\varepsilon}$$

$$U = E_2 \cdot (R_3 - R_2) + E_1 \cdot (R_2 - R_1) = \frac{Q}{S}\left((R_3 \cdot R_2) \cdot \frac{1}{\varepsilon_1 S} + (R_2 - R_1)\frac{1}{\varepsilon_2 S}\right)$$

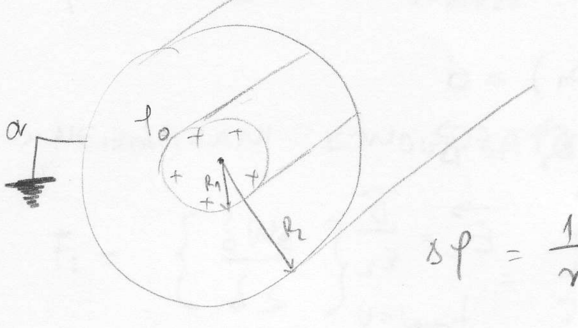
$$C = \frac{Q}{U} = \left[\underbrace{(R_3 - R_2)}_{d_1} \cdot \frac{1}{S\varepsilon_1} \cdot \frac{1}{\varepsilon_1} + \underbrace{(R_2 - R_1)}_{d_1} \cdot \frac{1}{S\varepsilon_2}\right]^{-1}$$

IZOLIRANI SUSTAV:
$$\vec{F} = -\vec{a}_{R_1} \cdot \frac{1}{2} Q^2 \cdot \frac{\partial}{\partial R_1}\left(\frac{1}{C}\right)$$
→ SILA NA UNUTARNJU ELEKTRODU

$$F = -\vec{a}_{R_1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{D^2}{S^2} \cdot S \cdot \varepsilon_2 \cdot \frac{\partial \left(\frac{1}{R_2 - R_1}\right)}{\partial R_1}$$

- sila nastoji povećati kapacitet i djeluje u smjeru $\vec{a}_{R_1}$

(18) SILE NA ELEKTRODE CILINDRIČNOG KOND. SPOJENOG NA IZVOR



→ nema slobodnog naboja u kondenzatoru

$\Delta \varphi = 0$ → u cilindričnom

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \cancel{\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2}}^{\to 0} + \cancel{\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}}^{\to 0} = 0$$

samo se po r mijenja — sve je simetrično → ekvipot. plohe su valjci — $z=0$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)=0 \;\Big/ r \Big/ \int_r \Rightarrow r\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial r} = C_1 \;\Big/ \int_r \Rightarrow \varphi = C_1 \ln r + C_2$$

konstante iz početnih uvjeta:

$\varphi(R_1) = \varphi_0 = C_1 \ln R_1 + C_2$

$\varphi(R_2) = 0 = C_1 \ln R_2 + C_2 \Rightarrow -C_2 = C_1 \ln R_2$

$C_2 = -C_1 \ln R_2$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{-\varphi_0}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$$

$$C_2 = \frac{\varphi_0}{\ln\frac{R_2}{R_1}}\cdot \ln R_2$$

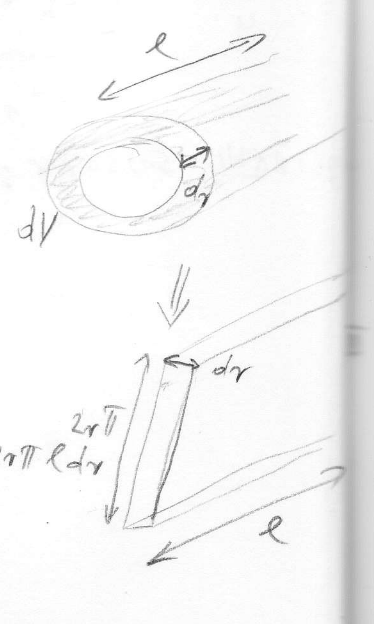
$$\varphi = \frac{-\varphi_0}{\ln\frac{R_2}{R_1}}\cdot\ln r + \frac{\varphi_0 \ln R_2}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{\varphi_0}{\ln\frac{R_2}{R_1}}\cdot\frac{1}{r}$$

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \iiint_V \vec{E}^2\, dV = \frac{1}{2}\varepsilon_0\int_{R_1}^{R_2}\vec{E}^2\cdot 2r\pi\, dr\cdot l$$

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{\varphi_0^2}{\ln^2\frac{R_2}{R_1}}\, 2\pi\int_{R_1}^{R_2}\frac{r}{r^2}\,dr = \varepsilon_0\frac{\varphi_0^2\pi}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$$

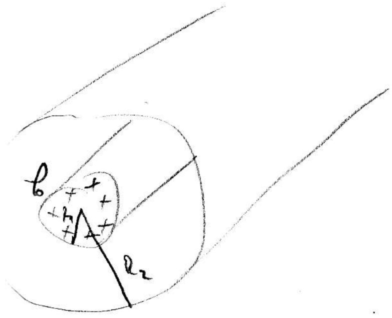
$\ln\frac{R_2}{R_1}$



$$W = \frac{1}{2}CU^2 \Longrightarrow C = \frac{2W}{U^2}$$

$$\vec{F} = \frac{1}{2}U^2\cdot\frac{\partial C}{\partial r}_{R_2} = \frac{1}{2}\cdot U_2\cdot\frac{1}{U^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(2\varepsilon_0\cdot\frac{\varphi_0^2\pi}{\ln\frac{R_2}{R_1}}\right)$$

Sile na elektrode cilindričnog kond. spojenog na izvor



→ nema naboja između vodiča (R_1 i R_2) pa imamo

$$\Delta\varphi = 0 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \cancel{\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2}\right)}^{\to 0} + \cancel{\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}}^{\to 0}$$

zbog simetrije

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) \Big/ \cdot r \Big/ \int \mid s \Rightarrow \varphi = \underbrace{C_1 \ln r + C_2}_{\text{iz početnih uvjeta}}$$

$$\varphi = \frac{-\varphi_0}{\ln\frac{R_2}{R_1}}\ln r + \frac{\varphi_0 \ln R_2}{\ln\frac{R_2}{R_1}} = \varphi_0\frac{\ln\left(\frac{R_2}{r}\right)}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = -\vec{a}_r\frac{\partial\varphi}{\partial r} - \vec{a}_\alpha\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} - \vec{a}_z\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\vec{a}_r\frac{\partial\varphi}{\partial r}$$

$$= \frac{\varphi_0}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)\cdot r}$$

$$\vec{F} = \frac{1}{2}\iint_S \varepsilon_0 \underset{r=R^2}{E^2}\,\vec{n}\,ds = \frac{1}{2}\varepsilon_0\cdot\iint_{S_2}\frac{\varphi_0^2}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2\cdot R_2^2}\cdot ds$$

S_2 = površina $= 2R_2\pi\cdot l$

⇒ sila po jedinici duljine na vanjsku elektrodu $= \dfrac{\frac{1}{\cancel{2}}\varepsilon_0\cdot\frac{\varphi_0^2}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2\cdot R_2^2}\cdot\cancel{2}R_2\pi\cancel{l}}{\cancel{l}}$

$$= \frac{\pi\varepsilon_0\cdot\varphi_0^2}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2\cdot R_2}$$

$$Q = \oiint\vec{D}\vec{n}\,ds = D\cdot\oiint ds = D\cdot 2R_2\pi\cdot l = \frac{2\pi\varepsilon_0\cdot\varphi_0\cdot l\cdot\cancel{R_2}}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)\cdot\cancel{R_2}}$$

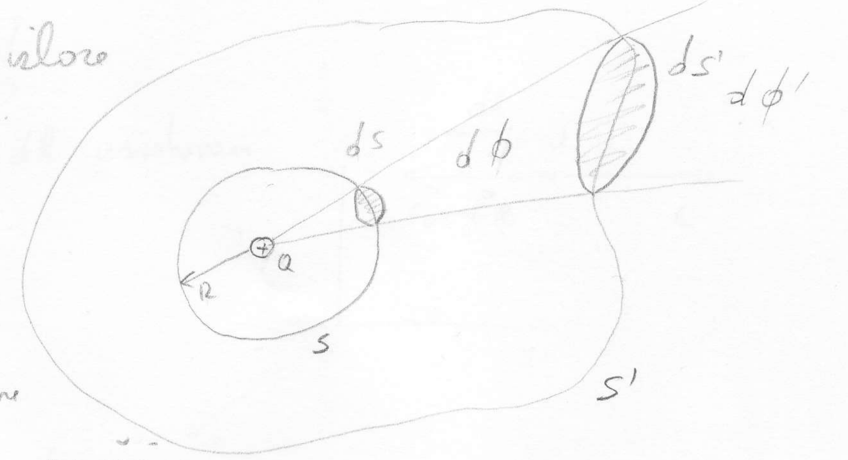
plašt valjka $\vec{n} = \vec{a_r}$ i $\vec{D}$ je stalno u istom smjeru tj. $D = D\cdot\vec{a_r} = \varepsilon_0 E\cdot\vec{a_r}$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \Rightarrow \text{po jedinici duljine } C' = \frac{C}{l} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

$$\vec{F} = \frac{\partial W}{\partial s}\vec{a}_{R_2} = \vec{a}_{R_2}\cdot\frac{1}{2}\overset{U^2}{\varphi_0^2}\cdot\frac{\partial C}{\partial R_2} = a_{R_2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\varphi_0^2\cdot\frac{\cancel{2}\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2}(-)\cdot\frac{\cancel{R_1}}{R_2}\cdot\frac{1}{\cancel{R_1}}$$

$$\vec{F} = -\vec{a}_{R_2}\cdot\frac{\varphi_0^2\cdot\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2\cdot R_2}$$ → sila hoće smanjiti polumjer i povećati kapacitet

GAUSSOV ZAKON ZA EL. POLJE – INTEGRALNI I DIFERENC. OBLIK



- iz točkastog naboja radijalno izlaze silnice el. polja i isti ih broj prolazi kroz dS i dS'

⇓

- tok je isti kroz obje površine i neovisan o obliku zatvorene površine
- jednak naboju obuhvaćenom tom površinom

$$\phi = \oint\!\!\oint \vec{D}\,\vec{n}\,dS = Q = \iiint_V \rho_{SLOBODNI}\,dV$$

→ ako na ovaj integralni oblik primjenimo Gausov zakon:

$$\oint\!\!\oint \vec{A}\,\vec{n}\,dS = \iiint_V \nabla\cdot\vec{A}\,dV$$

⇓

$$\oint\!\!\oint \vec{D}\,\vec{n}\,dS = \iiint_V \nabla\cdot\vec{D}\cdot dV = \iiint \rho_s \cdot dV$$

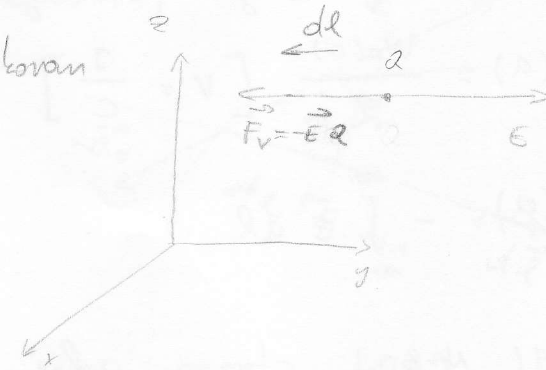
$$\operatorname{div}\vec{D} = \nabla\vec{D} = \rho_s \quad \rightarrow \text{DIFERENCIJALNI OBLIK}$$

↓

- divergencija vektora električne indukcije jednaka je prostornoj gustoći naboja

20. IZVOD GAUSSOVA ZAKONA IZ COULUMBOVA

SKALARNI ELEKTRIČNI POTENCIJAL – VEZA SKALARNOG ELEKTRIČNOG POTENCIJALA I RADA



- diferencijalno mali pomak dl uzrokovan silom F_v u polju E

$$\vec F_{VANJSKA} = -\vec F_{EL} = -q\cdot\vec E$$

⇓

...ma povećanja brzine naboja i E

$$dW = \vec F_V\cdot d\vec l = -q\cdot\vec E\cdot d\vec l$$

- ako dolazi i do promjene brzine

$$\vec F_V + \vec F_E = m\cdot\vec a = m\cdot\frac{d\vec v}{dt} = m\cdot\frac{d\vec v}{dl}\cdot\frac{d\vec l}{dt} = m\cdot\vec v\cdot\frac{d\vec v}{dl}$$

$$\vec F_V\cdot d\vec l + \vec F_E\cdot d\vec l = m\cdot\vec v\cdot d\vec v$$

$$\vec F_V\cdot d\vec l = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) - F_E\cdot d\vec l$$

→ PROMJENA POT. ENERGIJE NABOJA

RAD VANJSKE SILE — PROMJENA KIN. E

UKUPNI RAD POMICANJA IZ TOČKE a u b

$$A = \int_a^b F_v\cdot d\vec l = \int_{v_b}^{v_a} d\left(\frac{mv^2}{2}\right) - \int_b^a \vec F_E\cdot d\vec l$$

→ ako nema promjene brzine sav rad F_v utrošen na povećanje pot. E

$$A = -\int_b^a \vec F_e\cdot d\vec l = W_p(a) - W_p(b) = -\int_b^a q\cdot\vec E\cdot d\vec l$$

→ pri tome je $d\varphi = -\vec E\cdot d\vec l$; $\varphi(A) - \varphi(B) = -\int_B^A \vec E\, d\vec l = \int_B^A \nabla\varphi\, d\vec l$

$$W_p(a) = -\int_\infty^a \vec F_E\cdot d\vec l = -\int_\infty^a q\cdot\vec E\cdot d\vec l$$

↓ pot. E naboja q u nekoj točki el. polja jednako je radu koji je potrebno izvršiti da bi se naboj iz ∞ doveo u a suprotno djelovanju $\vec E$

(22.) POTENCIJAL TOČKASTOG NABOJA ; POT. JEDNOLIKO NABIJENE DUŽ

→ el. potencijal je omjer potencijalne energije i iznosa tog naboja

$$\varphi(a) = \frac{W_p(a)}{Q} \quad \left[V = \frac{J}{C} \right]$$

$$\varphi(a) = -\int_{\infty}^{a} \vec{E}\, d\vec{l}$$

→ TOČKASTI NABOJ stvara polje : $\vec{E} = \vec{a}_r \cdot \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}$

→ izračun potencijala neovisan o putu $d\vec{l} = \vec{a}_r\, dr$

$$\varphi(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}\, dl = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon} \int_{\infty}^{r} \vec{a}_r \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \vec{a}_r\, dr = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon} \cdot \left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_{\infty}^{r}$$

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r}$$

→ ako je naboj raspodijeljen po liniji sa gustoćom λ tada mali dio dl sa $dQ = \lambda \cdot dl$ smatramo točkastim nabojem

→ računamo u točki $P(\vec{r})$ potencijal stvoren diferencijalno malim dQ čiji je položaj određen vektorom $\vec{r}\,'$

→ udaljenost dQ i $P(\vec{r})$ je $R = |\vec{R}| = |\vec{r} - \vec{r}\,'|$

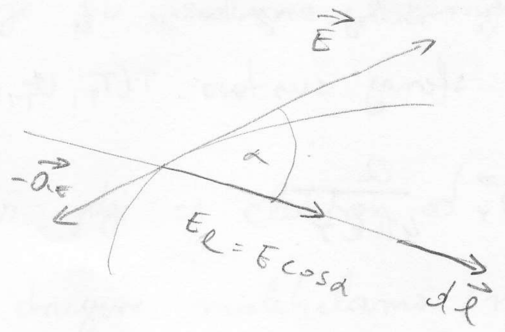
$$\varphi(r) = \int_{l} \frac{dQ}{4\pi\varepsilon R} = \int_{l} \frac{\lambda \cdot dl}{4\pi\varepsilon R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{l} \frac{\lambda \cdot dl}{R}.$$

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{l} \frac{\lambda \cdot dl}{|r - r'|}$$

3) IZVOD VEZE JAKOSTI EL. POLJA i SKALARNOG EL. POTENCIJALA

⇒ mala razlika potencijala:

$$d\varphi = -\vec{E}\, d\vec{l} = -|\vec{E}|\cdot|d\vec{l}|\cdot\cos\alpha$$



⇒ ako je $d\vec{l} = -a_E$

$$\left.\frac{d\varphi}{dl}\right|_{dl} = E$$

↳ usmjerena derivacija je max u smjeru najvećeg pada potencijala

$$\vec{E} = \vec{a}_x E_x + \vec{a}_y E_y + \vec{a}_z E_z \qquad d\vec{l} = \vec{a}_x dx + \vec{a}_y dy + \vec{a}_z dz$$

$$d\varphi = -\vec{E}\cdot d\vec{l} = -(\vec{a}_x E_x + \vec{a}_y E_y + \vec{a}_z E_z)(\vec{a}_x dx + \vec{a}_y dy + \vec{a}_z dz)$$

⇒ ako uzmemo da je $d\vec{l} = \vec{a}_x dx$ i $dy = dz = 0$

↳ put integracije je proizvoljan

$$d\varphi = -E\, dl = -(\vec{a}_x E_x + \vec{a}_y E_y + \vec{a}_z E_z)(\vec{a}_x dx) = -E_x dx$$

$$\left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{y,z=konst} = -E_x$$

⇒ za $dl = \vec{a}_y dy$ za $dl = \vec{a}_z dz$

$$\left.\frac{d\varphi}{dy}\right|_{x,z=konst} = -E_y \qquad \left.\frac{d\varphi}{dz}\right|_{x,y=konst} = -E_z$$

⇓

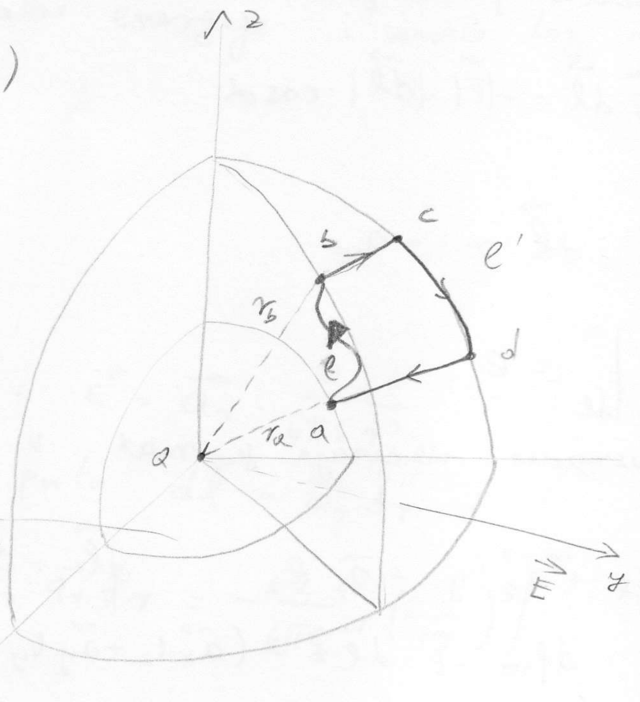
$$\vec{E} = \vec{a}_x E_x + \vec{a}_y E_y + \vec{a}_z E_z = -\left(\vec{a}_x \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{a}_y \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{a}_z \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$$

$$\boxed{\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi}$$

(24) DOKAZ NEOVISNOSTI RAZLIKE POTENCIJALA O PUTU INTEGRAC

→ točkasti naboj smješten je u središte sfernog sustava $T(r_T, \vartheta_T, \alpha_T)$

$$\vec{E} = \vec{a}_r \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}$$



I

→ pomak iz a u b pokusnog naboja q nekim putem l

$$d\vec{l} = \vec{a}_r\, dr + \vec{a}_\vartheta\, r\, d\vartheta + \vec{a}_\alpha\, r \sin\vartheta\, d\alpha$$

→ razlika potencijalnih energija

$$W_p(a) - W_p(b) = -\int_b^a q \cdot \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$= -\frac{Q \cdot q}{4\pi\varepsilon} \int_b^a \vec{a}_r \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \left(\vec{a}_r\, dr + \vec{a}_\vartheta\, r\, d\vartheta + \vec{a}_\alpha\, r \sin\vartheta\, d\alpha\right)$$

$$= -\frac{Q \cdot q}{4\pi\varepsilon} \int_{r_b}^{r_a} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q \cdot q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right)$$

II ako idemo putem l' (b → c pa od c → d, pa d → a)

od b do c $\quad dl_1' = \vec{a}_\alpha r_b \sin\vartheta_b\, d\alpha \qquad \alpha_b < \alpha < \alpha_a$

od c do d $\quad dl_2' = \vec{a}_\vartheta r_b\, d\vartheta \qquad \vartheta_b < \vartheta < \vartheta_a$

od d do a $\quad dl_3' = \vec{a}_r\, dr \qquad r_b < r < r_a$

$$W_p(a) - W_p(b) = -\frac{Q q}{4\pi\varepsilon}\left\{\int_b^c \vec{a}_r \frac{1}{r_b^2}\left(\vec{a}_\alpha r_b \sin\vartheta_b\, d\alpha\right) + \int_c^d \vec{a}_r \cdot \frac{1}{r_b^2}\left(\vec{a}_\vartheta r_b\, d\vartheta\right) + \int_d^a \vec{a}_r \frac{1}{r^2}\left(\vec{a}_r\, dr\right)\right\}$$

$$= -\frac{Q \cdot q}{4\pi\varepsilon}\left\{0 + 0 + \int_{r_b}^{r_a} \frac{dr}{r^2}\right\}$$

$$= \frac{Q \cdot q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right)$$

→ također ako zbrojimo ove dvije relacije dobije se

$\oint_l q \cdot \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ → promjena pot energije po zatvorenoj krivulji je 0

5

IZVOD OHMOVOG ZAKONA U ELEMENTARNOM OBLIKU

Razlikujemo KONVEKCIJSKE STRUJE koje su izravno srazmjerne gustoći naboja

$$\vec{J} = \rho \cdot v$$

primjer tih struja su struje u katodnoj cijevi gdje se elektron od katode do anode giba bez previše sudara sa drugim molekulama (rijedak medij) i njegovo je gibanje određeno Lorentzovom silom i Newtonovim zakonom (ubrzanje proporcionalno sa jačinom el. polja $\vec{E}$)

→ gibanje električnih naboja u tvari zove se PROVODNA ili KONDUKCIJSKA STRUJA (elektron se često sudara sa kristalnom rešetkom). Sada je $\vec{J}$ (gustoća struje) neovisna o uk. gustoći naboja (čak je kod istosmjernih struja utvrđeno da je $\rho = 0$)

→ brzina elektrona ovisi o $\vec{E}$

$$\vec{v} = \mu \cdot \vec{E}$$

μ → pokretljivost

→ gustoća naboja $\rho_{SLOBODNI} = -N \cdot q_{elektrona}$

$q_{elektrona}$ → naboj elektrona

N → koncentracija elektrona

⇓

$$\vec{J}_s = \rho_s \cdot \vec{v} = -N q_e \cdot \vec{v} = -N q_e \cdot \mu \cdot \vec{E}$$

$-N q_e \cdot \mu = K$ → električna provodnost materijala $\left[\frac{S}{m}\right]$

$$\boxed{\vec{J} = K \cdot \vec{E}}$$ → OHMOV ZAKON U EL OBLIKU

26 PONAŠANJE SLOBODNIH NABOJA U VODIČU U VANJSKOM EL. POLJU (RELAKSACIJA)

→ ZAKON OČUVANJA NABOJA U VODLJIVOM MATERIJALU :

$$\nabla \cdot \vec{J}_{slobodni} + \frac{\partial \rho_{slob}}{\partial t} = 0$$

→ gustoća slobodnih el. naboja

→ JEDNADŽBA KONTINUITETA $\nabla \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$

gustoća slobodnih struja $= \varkappa \cdot \vec{E}$

→ elektrostatika pretpostavlja da u unutrašnjosti vodiča ne može biti naboja

$$\nabla D = \rho_s \Rightarrow \nabla \vec{E} = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0}$$

OHM U ELEMENTARNOM OBLIKU

$$\rightarrow \nabla \vec{J}_s = \nabla(\varkappa \vec{E}) = \varkappa \cdot \nabla \vec{E} + E \cdot \nabla \varkappa = \varkappa \cdot \frac{\rho_s}{\varepsilon_0} + \cancel{E \cdot \nabla \varkappa}^{\,0} = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t}$$

za homogene vodiče vrijedi $\nabla \varkappa = 0$

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \frac{\varkappa}{\varepsilon_0}\rho_s = 0 \quad / \int$$

$$\Downarrow$$

$$\ln \rho_s = -\frac{\varkappa}{\varepsilon_0} t + \ln C$$

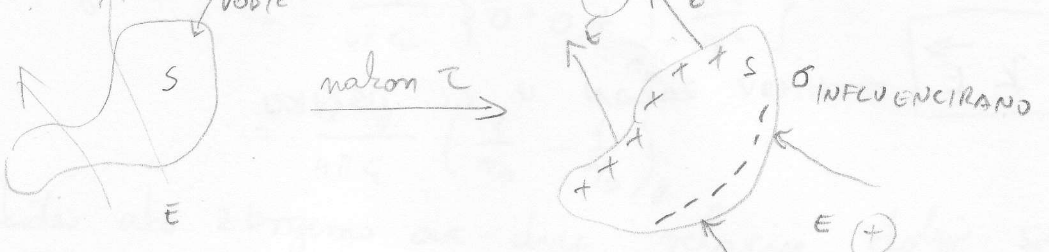
→ C se dobije za početni uvjet $\rho_s = \rho_{s_0}$

$$\Downarrow$$

$$\rho_s = \rho_{s_0} e^{-\frac{\varkappa}{\varepsilon_0} t}$$

$\frac{\varkappa}{\varepsilon_0} = \tau$ → KONST. RELAKSACIJE

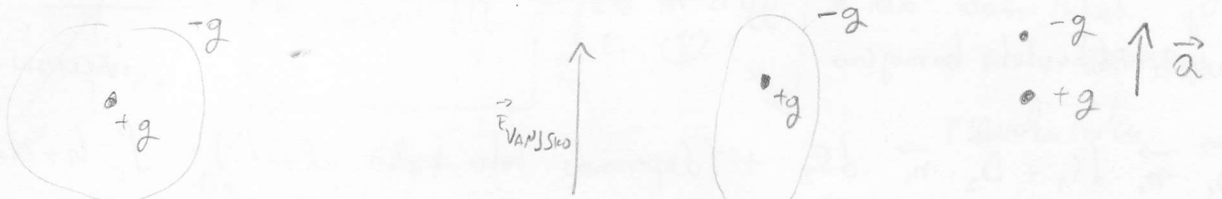
- τ pokazuje da se količina naboja u vodiču počev od ρ_{s_0} eksponenc. smanjuje (τ → trenutak kada $\rho_s = 0.37 \rho_{s_0}$).
- za vodiče je jako mala ≈ gotovo momentalno



- σ_{INF} se nalazi na površini i takav je da unutar nema polja
- σ_{INF} stvara svoje polje koje poništava vanjsko unutar vodiča

7) IZOLATORI U EL. POLJU - POLARIZACIJA ; GUSTOĆA ELEKTRIČNOG TOKA DEFINICIJA I VEZA S POLARIZACIJOM

→ Značajka dielektričnih materijala je da ne posjeduju slobodne e^-, već su elektroni vezani. Djelovanjem polja dolazi do poremećaja u raspodjeli pozitiv. i negativ. naboja (EL. POLARIZACIJA)



→ razmak naboja za promatrača izvana → dipolni moment $\vec{p} = q \cdot \vec{a}$

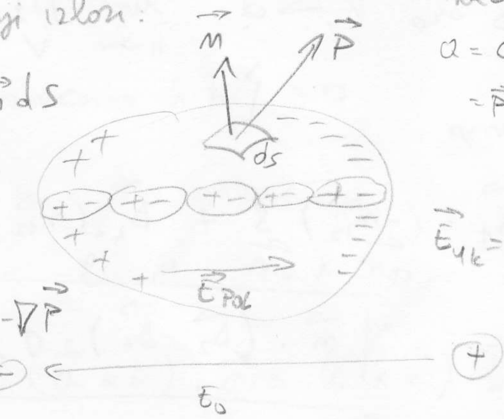
↓

formiraju se dipoli:

- poništavaju se u unutrašnjosti
- samo na površini postoji

naboj koji izlazi: $Q_{IZL} = \oint_S \vec{p} \cdot \vec{n} \, dS$

- naboj na dS: $Q = \sigma_p \cdot dS = \vec{p} \cdot \vec{n} \, dS$



$\vec{E}_{uk} = \vec{E}_{POL} + \vec{E}_0$

$\pm Q_{POLARIZACIJE} = \iiint_V \rho_{POL} \, dV = -Q_{IZL} \Rightarrow \rho_{POL} = -\nabla \vec{P}$

- izvana je materijal i dalje neutralan

makroskopski gledano $\vec{E}_{POL}$ je proporcionalno ukupnom polju $\vec{E}$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{POL} = E_0 - \chi_e \cdot E \quad / \cdot \varepsilon_0$$

↳ ELEKTRIČNA SUSCEPTIBILNOST

$$\varepsilon_0 \cdot \vec{E} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E}_0 - \varepsilon_0 \cdot \chi_e \cdot \vec{E}$$

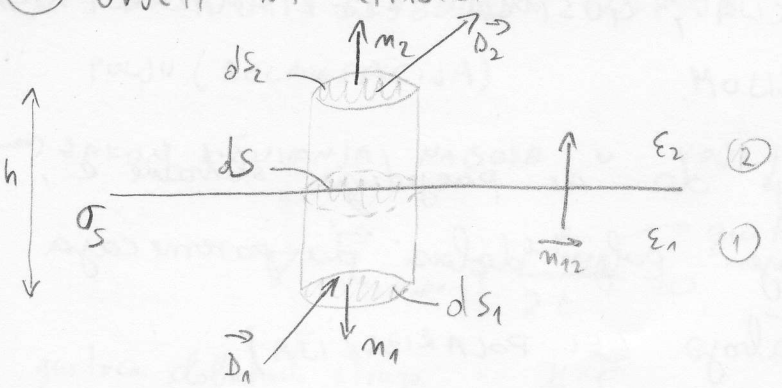
$\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E}_0$ - GUSTOĆA TOKA $\left[\frac{C}{m^2}\right]$ (VEKTOR EL INDUKCIJE)

$\vec{P} = -\varepsilon_0 \cdot \vec{E}_{POL}$ → VEKTOR POLARIZACIJE

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \cdot E \overbrace{(1 + \chi_e)}^{\varepsilon_r \,=\, \text{RELATIVNA DIELEKTRIČNA KONSTANTA}} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \vec{E}$$

$\vec{E} = \frac{\vec{D} - \vec{P}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$ ⇒ el. polje se smanjuje uslijed polarizacije ε_r puta u odnosu na vakuum

(28.) UVJETI NA GRANICI - IZVOD UVJETA ZA GUSTOĆU EL TOKA



→ ako primijenimo Gaussov zakon za mali cilindar

$\vec{n}_{12} = -\vec{n}_1 = \vec{n}_2$

baza $= dS = dS_1 = dS_2$

→ cilindar je tako mali da možemo uzeti da vlada homogeno polje

$$\oiint \vec{D}\,\vec{n}\,dS = \iiint_V \rho_{SLOBODNI}\,dV$$

VOLUMEN CILINDRA

$$\Downarrow$$

$$\oiint D n dS = \vec{D}_1 \cdot \vec{n}_1 \cdot dS_1 + \vec{D}_2 \cdot \vec{n}_2 \cdot dS_2 + (\text{doprinos toku kroz plašt}) = \rho_S\, h \cdot dS$$

→ ako $h \to 0$ onda i doprinos plašta $\to 0$

→ ako $h \to 0$ $\quad \lim_{h \to 0} \iiint_V \rho_S\, dV \longrightarrow \sigma_S \cdot S$

↳ plošni naboj

pa imamo:

$$\vec{D}_1 \cdot (-\vec{n}_{12})\,\cancel{S} + \vec{D}_2\,(\vec{n}_{12}) \cdot \cancel{S} = \sigma_S \cdot \cancel{S}$$

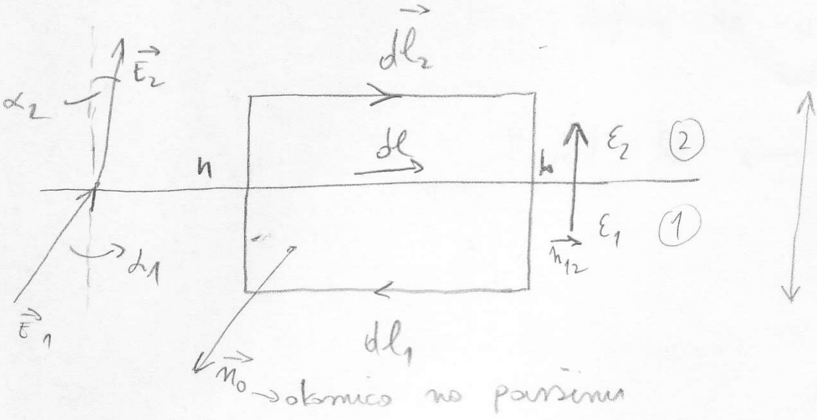
$$\boxed{\vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma_{SLOBODNO}}$$

→ NORMALNA KOMPONENTA VEKTORA EL. IND $\vec{D}$ NA GRANICI SE MIJENJA ZA IZNOS GUSTOĆE SLOBODNOG NABOJA σ_S

9. UVJETI NA GRANICI – IZVOD UVJETA ZA JAKOST EL. POLJA

- ako uvjet konzervativnosti stat. el polja ($\nabla \times \vec{E} = 0 \Rightarrow \oint_C \vec{E}\, d\vec{l} = 0$

primjenimo na malu pravokutnu petlju stranica dl i h



$$\vec{dl} = -\vec{dl_1} = \vec{dl_2}$$

→ polje je homogeno u promatranom pravokutniku

$$\oint_l \vec{E}\, d\vec{l} = 0 \quad \longrightarrow \quad E_1 \vec{dl_1} + E_2 \cdot \vec{dl_2} + (\text{doprinos na stranicama } h)$$

snaga pomaka i smjer polja isti

$$\lim_{h \to 0} \left\{ -E\, d\vec{l} + E_2 \cdot d\vec{l} + \cancel{(\text{doprinos na stranicama } h)} \right\} = 0$$

0

$$(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \cdot \vec{l} = 0$$

$\vec{l}$ je $\vec{n}_0 \times \vec{n}_{12}$

$$(\vec{n}_{12} \times \vec{n}_0) \cdot (\vec{E}_1 - \vec{E}_2)$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}$$

⇓

CIKLIČKO PRAVILO

$$\vec{n}_0 \cdot \left[(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \times \vec{n}_{12} \right] = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \times \vec{n}_{12} = 0$$

$$-(\vec{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2)) = 0$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

$$\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$$

→ TANGENCIJALNE KOMP VEKTORA JAKOSTI EL. POLJA $\vec{E}$ OSTAJU NEPROMJENJENE

$$E_{1t} = E_{2t} \Rightarrow \frac{D_{1t}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\varepsilon_2}$$

30. PLOČASTI KONDENZATOR NABIJEN I ODSPOJEN OD IZVORA — PROMJENA NAPONA, ENERGIJE I KAPACITETA S RAZMICANJEM PLOČA

$C = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \frac{S}{d}$ $C = \frac{Q}{U}$ $U = \frac{Q}{C}$

ukupna energija sadržana u el. polju kond $W = \frac{1}{2} Q \cdot U = \frac{1}{2} C \cdot U^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$

-> IZOLIRANI KONDENZATOR -> $Q = konst$

-> AKO SE d SMANJI

C se poveća

energija se smanji

U se smanji

-> AKO SE d POVEĆA

C se smanji

energija se poveća

U se poveća

I CIKLUS

1. ZAKON LORENTZOVE SILE - NAPISATI I REĆI DEF. $\vec{E}$ i $\vec{B}$

- ELEKTROMAGNETSKA SILA NA ISPITNI NABOJ KOJI SE NAZAZI U ZADANOJ TOČKI

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$ → LORENTZOVA SILA

jakost el. polja

magnetska indukcija

DEFINICIJA:

$$\vec{E} = \lim_{q \to 0} \frac{\vec{F}}{q} \quad \text{uz } v = 0 \quad \left[\frac{V}{m}\right]$$

→ nakon što se odredi iznos $\vec{E}$

$$\vec{v} \times \vec{B} = \frac{1}{q}(\vec{F} - q \cdot \vec{E}) \; [T]$$

$$\left[\frac{Wb}{m^2}\right]$$

→ OMJER SILE NA NABOJ U MIROVANJU

→ q da ima male dimenzije i da je iznos naboja jako mali kako unošenje ispitnog naboja ne bi promijenilo polje

→ imamo $\vec{v}$ i ukupnu silu i možemo dobiti $\vec{B}$ (definicijski)