Fizika
pregled teorijskih pitanja
19. 2. 2019.

1. Skicirajte putanju čestice u trodimenzionalnom prostoru, označite vektor položaja u trenutku t i u kasnijem trenutku $t + \Delta t$. Pomoću tih veličina definirajte pomak čestice, brzinu čestice, akceleraciju čestice.

2. Skicirajte dio zakrivljene putanje čestice, označite vektor akceleracije. Pomoću te skice definirajte centripetalnu akceleraciju $\vec{a}_{\mathbf{cp}}$ i tangencijalnu akceleraciju $\vec{a}_{\mathbf{tang}}$.

3. Krenuvši od izraza za akceleraciju čestice $\vec{a}(t)$, integracijom odredite vektor brzine čestice u bilo kojem trenutku. Krenuvši od izraza za brzinu čestice $\vec{v}(t)$, integracijom odredite vektor položaja čestice u bilo kojem trenutku. Primjenite ove izraze na gibanje sa stalnom akceleracijom $\vec{a}_0$.

4. Skicirajte kružnu putanju čestice, označite vektore položaja i brzine u trenutku t i u kasnijem trenutku $t + \Delta t$. Označite kut koji je za to vrijeme "prebrisao" vektor položaja. Pomoću tih veličina definirajte kutnu brzinu čestice i kutnu akceleraciju čestice.

5. Skicirajte kružnu putanju čestice, označite vektore položaja i brzine u trenutku t i u kasnijem trenutku $t + \Delta t$. Označite kut koji je za to vrijeme "prebrisao" vektor položaja. Pomoću tih veličina izvedite vezu između obodne i kutne brzine čestice. Napišite taj izraz u vektorskom obliku. Derivirajte izraza za obodnu brzinu i identificrajte tangencijalnu i centripetalnu akceleraciju.

6. Skicirajte dva referentna okvira koji se jedan u odnosu na drugi gibaju stalnom brzinom $\vec{V}$. Označite vektor položaja neke čestice u oba referentna okvira i izvedite Galileijeve transformacije za položaj, brzinu čestice i akceleraciju čestice.

7. Skicirajte dijagram sila za tijelo na kosini nagiba α s kojom tijelo ima koeficijent trenja μ u slučaju kad tijelo klizi uz kosinu te u slučaju kad tijelo klizi niz kosinu. Dodajte odgovarajući koordinatni sustav i napišite jednadžbu gibanja u vektorskom obliku te po komponentama u odabranom koordinatnom sustavu.

8. Skicirajte dijagram sila za projektil koji se giba pod djelovanjem gravitacijske sile bez prisutnosti sila otpora, uz zadanu početnu brzinu iznosa v_0 pod kutem α u odnosu na horizontalnu ravninu. Dodajte odgovarajući koordinatni sustav i napišite jednadžbu gibanja u vektorskom obliku te po komponentama u odabranom koordinatnom sustavu. Riješite jednadžbu gibanja.

? 9. Skicirajte kružnu putanju čestice, označite polumjer zakrivljenosti i vektor brzine u nekom trenutku. Označite silu koja djeluje na tijelo i napišite iznos i smjer koji sila mora imati da bi omogućila gibanje tijela prikazano na skici.

10. Napišite izraz za rad koji obavi sila $\vec{F}$ kada se pod njenim djelovanjem tijelo pomakne za vektor pomaka $d\vec{r}$. Napišite i dokažite teorem o radu i kinetičkoj energiji.

11. Skicirajte nekoliko mogućih putanja za putanja čestice između točaka A i B u polju sile $\vec{F}(\vec{r}, t)$. Pomoću skice definirajte konzervativnu silu. Primijenite tu definiciju na izvod izraza za potencijalnu energiju (a) pri sabijanju ili rastezanju opruge konstante elastičnosti k i (b) pri podizanju tijela mase m na visinu h u gravitacijskom polju.

12. Definirajte mehaničku energiju te objasnite u kojim okolnostima je ta veličina očuvana. Opišite primjer sustava u kojem je mehanička energija očuvana te primjer sustava u kojem ona nije očuvana.

13. Za zadanu potencijalnu energiju sustava $U(\vec{r})$ odredite silu koja djeluje na česticu u sustavu. Primijenite izraz na jednodimenzionalni sustav ($U(x)$) i pomoću toga objasnite pojmove stabilne i nestabilne ravnoteže.

14. Definirajte količinu gibanja $\vec{p}$ sustava čestica te je povežite sa zbrojem vanjskih sila koje djeluju na sustav. Pokažite da je količina gibanja očuvana ako je zbroj vanjskih sila koje djeluju na sustav jednak nuli.

15. Definirajte vektor položaja središta mase sustava čestica $\vec{r}_{\text{cm}}(t)$. Pokažite da je brzina središta mase sustava razmjerna ukupnoj količini gibanja čestica u sustavu. Pokažite da je ukupna vanjska sila na sustav čestica ($\vec{F}_{\text{ext}}$) povezana s akceleracijom središta mase ($\vec{a}_{\text{cm}}$).

16. Napišite jednadžbu gibanja za masu na opruzi i izvedite njezino opće rješenje. Napišite izraze za brzinu i akceleraciju mase.

17. Napišite jednadžbu gibanja oscilatora prigušenog silom razmjernom brzini te izvedite njena tri rješenja (ovisno o jakosti prigušenja).

18. Krenuvši od izraza za ukupnu energiju prigušenog oscilatora, pokažite da energija u vremenu opada s kvadratom brzine.

19. Krenuvši od njegove općenite definicije, izvedite izraz za Q-faktor prigušenog oscilatora.

20. Napišite jednadžbu gibanja prisilnog titranja, izvedite njeno rješenje i izraz za rezonantnu frekvenciju (najveća amplituda).

21. Napišite jednadžbu gibanja simetričnog vezanog oscilatora $|-k-m-K-m-k-|$, izvedite frekvencije (vlastitih modova) titranja te napišite opća rješenja $x_1(t)$ i $x_2(t)$.

22. Krenuvši od općeg rješenja za titranje simetričnog vezanog oscilatora $|-k-m-K-m-k-|$, $x_1(t) = A\cos(\omega_A t + \phi_A) - B\cos(\omega_B t + \phi_B)$, $x_2(t) = A\cos(\omega_A t + \phi_A) + B\cos(\omega_B t + \phi_B)$, izvedite osnovnu frekvenciju i frekvenciju udara za gibanje s početnim uvjetima $x_1(0) > 0$, $v_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$, $v_2(0) = 0$. (Moguće su varijacije zadanih početnih uvjeta.)

23. Izvedite jednadžbu gibanja (valnu jednadžbu) za transverzalno titranje niza masa povezanih napetim oprugama.

24. Izvedite jednadžbu gibanja (valnu jednadžbu) za longitudinalno titranje niza masa povezanih oprugama.

25. Napišite jednadžbu gibanja (valnu jednadžbu) vala, dokažite da su funkcije oblika $f(x - vt)$ i $g(x + vt)$ njezina opća rješenja. Pokažite u kojem se smjeru svako od tih rješenja giba.

26. Izvedite izraz za prosječnu kinetičku energiju harmoničkog progresivnog vala. Napišite izraze za potencijalnu i ukupnu energiju harmoničkog progresivnog vala, diskutirajte.

27. Za progresivni transverzalni harmonički val koji nailazi na granicu sredstava izvedite izraze za amplitude transmitiranog i reflektiranog vala.

28. Pokažite da superpozicijom dvaju progresivnih harmoničkih valova može nastati stojni val.

29. Izvedite izraze za frekvencije i valne duljine stojnih valova na užetu linijske gustoće μ, napetom silom T i duljine L, s učvršćenim krajevima.

30. Izvedite izraz promjenu frekvencije zvuka za (a) izvor koji se giba direktno prema ili od nepomičnog prijemnika, (b) prijemnik koji se giba direktno prema ili od nepomičnog izvora, (c) kada se i izvor i prijemnik gibaju direktno jedan prema drugome ili jedan od drugoga.

31. Skicirajte dva inercijalna referentna sustava koji se jedan u odnosu na drugi gibaju brzinom $\vec{v}$. Napišite izraze za Galileijeve i Lorentzove transformacije za tri prostorne i jednu vremensku koordinatu u tim sustavima, te za komponente brzine čestice. Detaljno objasnite razlike između tih transformacija.

32. Skicirajte dva inercijalna referentna sustava koji se jedan u odnosu na drugi gibaju brzinom $\vec{v}$ i česticu koja se giba brzinom $\vec{u}$ mjerenom u jednom od sustava. Izvedite Lorentzove transformacije za komponente brzine čestice.

33. Uvedite pojam vlastitog vremena i vlastite duljine. Pomoću uvedenih pojmova i Lorentzovih transformacija izvedite izraze za kontrakciju duljine i dilataciju vremena.

34. Napišite izraz za relativističku količinu gibanja i relativističku energiju. Primijenite teorem o radu i kinetičkoj energiji i izvedite izraz za relativističku kinetičku energiju.

35. Pokažite da se nabijena čestica u homogenom magnetskom polju može gibati po kružnici, odredite polumjer kružnice (za zadano: m, q, v i B).

36. Izvedite izraz za silu na element vodiča kojim teče struja I, a nalazi se u magnetskom polju $\vec{B}$.

37. Pomoću Gaussovog zakona izvedite: polje točkastog naboja, polje unutar i izvan jednoliko nabijene kugle, polje jednoliko nabijene ravne tanke žice, polje jednoliko nabijene plohe.

38. Izvedite izraz za elektromotornu silu pri gibanju vodiča u magnetskom polju.

39. Koristeći Ampère-Maxwellov zakon izračunajte magnetsko polje beskonačnog ravnog tankog vodiča, a zatim učinite isto primjenom Biot-Savartovog zakona.

40. Krenuvši od Maxwellovih jednadžbi u vakuumu izvedite valnu jednadžbu za $\vec{E}$ ili $\vec{B}$.

41. Napiši izraz za vektore $\vec{E}$ i $\vec{B}$ ravnog linearno polariziranog elektromagnetskog vala te pokažite da su oni rješenja odgovarajućih valnih jednadžbi. Skicirajte vektore $\vec{E}$ i $\vec{B}$ i smjer njihovog širenja.

42. Opišite polarizaciju elektromagnetskog vala (koje se polje koristite za opis, uloga polarizatora) i izvedite Malusov zakon.

43. Napišite Poyntingov vektor ravnog vala čije je električno polje dano izrazom $\vec{E}(x,t) = E_0\vec{j} \cdot \cos(\omega t - kx)$. Konačni izraz mora sadržavati smjer, iznos i jedinicu.

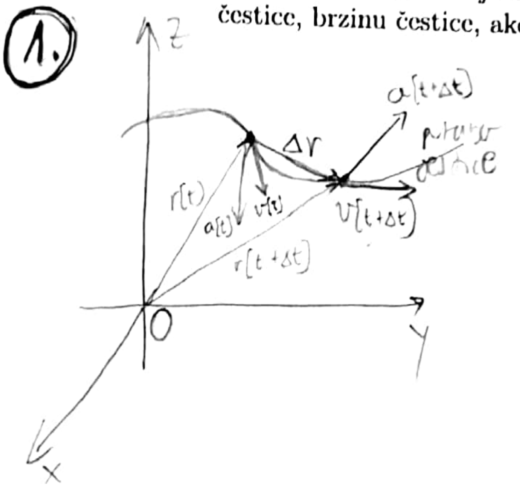
44. Izvedite izraz za položaje maksimuma intenziteta na zastoru u Youngovom pokusu.

45. Izvedite izraz za položaje minimuma intenziteta na zastoru u Youngovom pokusu.

46. Izvedite uvjete maksimuma za interferenciju pri refleksiji na tankom filmu u slučaju kada je $n_{\text{sloj}} > n_{\text{podloga}}$.

47. Izvedite uvjete maksimuma za interferenciju pri refleksiji na tankom filmu u slučaju kada je $n_{\text{sloj}} < n_{\text{podloga}}$.

1. Skicirajte putanju čestice u trodimenzionalnom prostoru, označite vektor položaja u trenutku t i u kasnijem trenutku $t + \Delta t$. Pomoću tih veličina definirajte pomak čestice, brzinu čestice, akceleraciju čestice.



• **pomak čestice** Δr – vektor koji opisuje promjenu položaja čestice koja nastupa u vremenskom intervalu od trenutka t do trenutka $t+\Delta t$

• **brzina čestice**:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt}\vec{r}(t)$$

– vektor v gleda u smjeru gibanja čestice
– tangenta!
– iznos brzine:

$$v = |\vec{v}| = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \frac{|dr|}{dt} = \frac{ds}{dt}$$

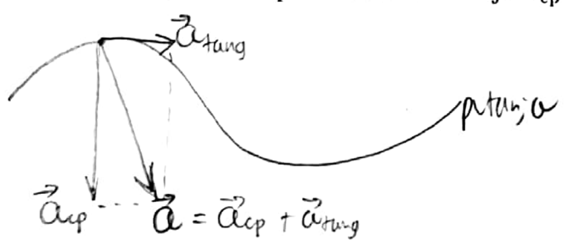
• **akceleracija čestice**:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt}\vec{v}(t)$$

ili

$$a(t) = \frac{d}{dt}\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\vec{r}(t)\right) = \frac{d^2}{dt^2}\vec{r}(t)$$

2. Skicirajte dio zakrivljene putanje čestice, označite vektor akceleracije. Pomoću te skice definirajte centripetalnu akceleraciju $\vec{a}_{cp}$ i tangencijalnu akceleraciju $\vec{a}_{tang}$.



– $\vec{a}_{cp}$ = prisutna kada je čestica giba duž zakrivljene putanje, okomita je na putanju i odražava promjenu smjera gibanja čestice

$$a_{cp} = v\frac{d\hat{v}}{dt}$$

v – iznos brzine; $\frac{d\hat{v}}{dt}$ – derivacija jediničnog vektora $\hat{v}$ po vremenu

* kad se čestica giba duž pravca, $\vec{a}_{cp} = \vec{0}$

– $\vec{a}_{tang}$ = leži na tangenti na putanji i govori o promjeni iznosa brzine čestice

$$\vec{a}_{tang} = \frac{dv}{dt}\hat{v}$$

$\frac{dv}{dt}$ – derivacija iznosa brzine po vremenu; $\hat{v}$ – jedinični vektor koji gleda u smjeru gibanja

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\hat{v}) = \frac{dv}{dt}\hat{v} + v\frac{d\hat{v}}{dt}}$$

* kad se čestica giba brzinom stalnog iznosa, neovisno o tome je li putanja zakrivljena ili nije,

$\vec{a}_{tang} = \vec{0}$

(iznos brzine se povećava) $\frac{dv}{dt} > 0$ – $\vec{a}_{tang}$ gleda u smjeru gibanja

$\frac{dv}{dt} < 0$ – gleda unazad

3.

$$dv[t'] = \vec{a}[t']dt' \longrightarrow \vec{a}[t'] = \frac{dv[t']}{dt'}$$

$$d\vec{r}[t'] = \vec{v}[t']dt' \longrightarrow \vec{v}[t'] = \frac{d\vec{r}[t']}{dt'}$$

$$\vec{v}[t] = \vec{v}[t_0] + \int_{t_0}^{t} \vec{a}[t']dt'$$ vrijedi stalnu akceleraciju

$$\vec{r}[t] = \vec{r}[t_0] + \int_{t_0}^{t} \vec{v}[t']dt'$$ vrijedi bez te brzine

$$\vec{v}[t] = \vec{v}[t_0] + a_0(t-t_0)$$

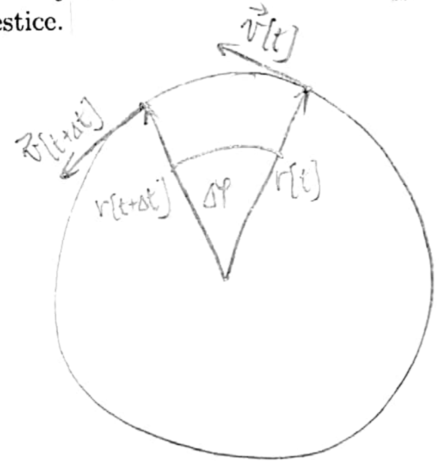
$$\vec{r}[t] = \vec{r}[t_0] + \vec{v}[t_0](t-t_0) + \frac{\vec{a}_0}{2}(t-t_0)^2$$

$$\boxed{\begin{aligned} a[t] &= a_0 \\ \vec{v}[t] &= \vec{v}[t_0] + \vec{a}_0(t-t_0) \\ \vec{r}[t] &= \vec{r}[t_0] + \vec{v}[t_0](t-t_0) + \frac{\vec{a}_0}{2}(t-t_0)^2 \end{aligned}}$$

gibanje stalnom akceleracijom $\vec{a}_0$

(jednoliko ubrzano gibanje, kosi hitac) ?

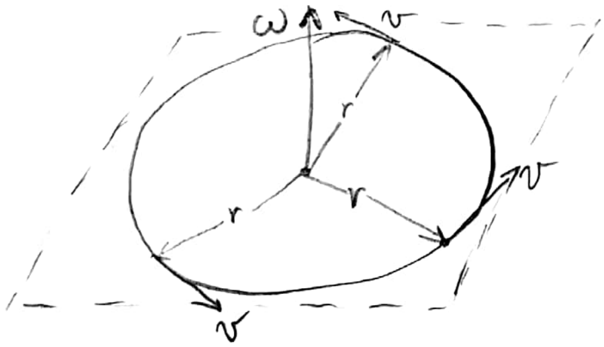
4. Skicirajte kružnu putanju čestice, označite vektore položaja i brzine u trenutku t i u kasnijem trenutku $t + \Delta t$. Označite kut koji je za to vrijeme "prebrisao" vektor položaja. Pomoću tih veličina definirajte kutnu brzinu čestice i kutnu akceleraciju čestice.



- **Kutna brzina čestice:**

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}$$

*smjer vektora kutne brzine je okomit na ravninu gibanja orijentiran u skladu s pravilom desnog vijka (onako kako bi napredovao desni vijak kad bismo ga okretali u smjeru u kojem se giba čestica)



- **Kutna akceleracija čestice** (radijalna, tangencijalna)

$$\vec{a}_{tang} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(r\omega) = r\frac{d\omega}{dt} \left[\frac{m}{s^2}\right] = r\alpha$$

$$\vec{a}_{tang} = \vec{\alpha} \times \vec{r}$$ TANGENCIJALNA AKCELERACIJA

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \rightarrow$$ kutna akceleracija

5. (ista slika)

a) obodna:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{R\Delta\varphi}{dt} = R\frac{d\varphi}{dt} = R\omega$$

$$\boxed{\Delta s = R\Delta\varphi}$$

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

kutna:

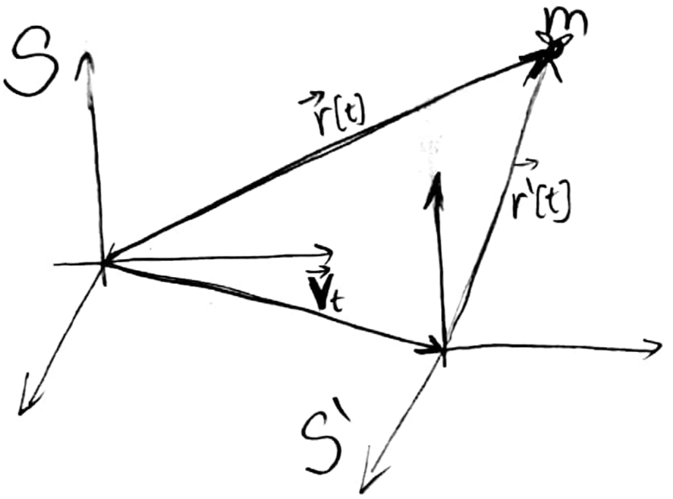
$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} \left[\frac{rad}{s}\right]$$

b)
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \underbrace{\frac{d\omega}{dt} \times r}_{\text{tangencijalna akceleracija}} + \underbrace{\omega \times \frac{dr}{dt}}_{\text{centripetalna akceleracija}}$$

dokaz:

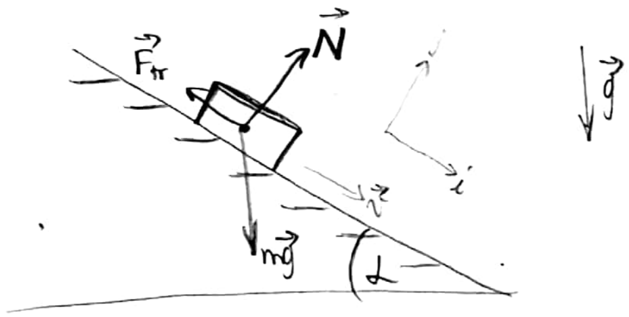
$$\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \underbrace{-\omega^2\vec{r}}_{(\vec{a}_{cp})}$$

(6.) Skicirajte dva referentna okvira koji se jedan u odnosu na drugi gibaju stalnom brzinom $\vec{V}$. Označite vektor položaja neke čestice u oba referentna okvira i izvedite Galileijeve transformacije za položaj, brzinu čestice i akceleraciju čestice.



$$\left.\begin{array}{l} \vec{r}[t] = \vec{V}t + \vec{r}'[t] \quad \Big/ \frac{d}{dt} \\ \vec{v}[t] = \vec{V} + \vec{v}'[t] \quad \Big/ \frac{d}{dt} \\ \vec{a}[t] = \vec{a}'[t] \end{array}\right\} \text{Galilejeve transformacije}$$

(7.) Skicirajte dijagram sila za tijelo na kosini nagiba α s kojom tijelo ima koeficijent trenja μ u slučaju kad tijelo klizi uz kosinu te u slučaju kad tijelo klizi niz kosinu. Dodajte odgovarajući koordinatni sustav i napišite jednadžbu gibanja u vektorskom obliku te po komponentama u odabranom koordinatnom sustavu.



Akceleracija tijela pri klizanju niz kosinu i uz nju ......

⟵

- na tijelo djeluju 3 stvarne sile : sila teža $m\vec{g}$
  sila podloge $\vec{N}$
  sila trenja $\vec{F}_{tr}$

- jednadžba gibanja :

$$m\vec{a} = \vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_{tr}$$

$$\underbrace{m a_x \vec{i}}_{\text{jer se giba isključivo duž x-osi}} = N\vec{j} + mg\underbrace{(\sin\alpha\,\vec{i} - \cos\alpha\,\vec{j})}_{\text{jedinični vektor smjera}} \underbrace{\mp \mu_d N \vec{i}}\qquad (v_x \gtrless 0)$$

iznosi

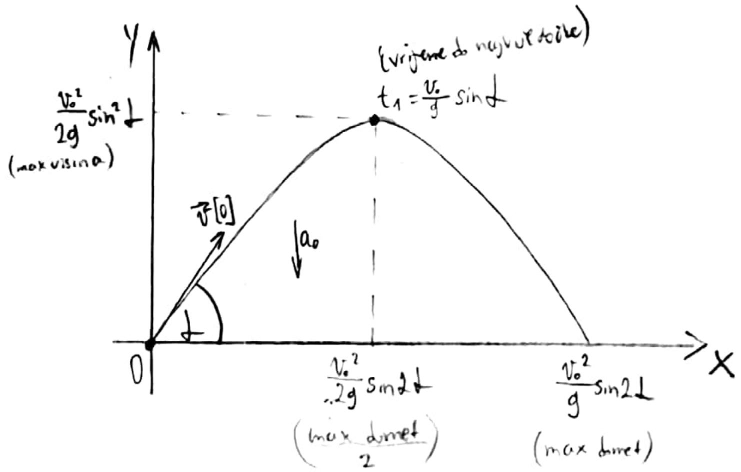
− = kada je $v_x > 0$, tj. kada tijelo klizi niz kosinu

+ = kada je $v_x < 0$, tj. kada tijelo klizi uz kosinu

8.

Skicirajte dijagram sila za projektil koji se giba pod djelovanjem gravitacijske sile bez prisutnosti sila otpora, uz zadanu početnu brzinu iznosa v_0 pod kutem α u odnosu na horizontalnu ravninu. Dodajte odgovarajući koordinatni sustav i napišite jednadžbu gibanja u vektorskom obliku te po komponentama u odabranom koordinatnom sustavu. Riješite jednadžbu gibanja.

-Kosi hitac = slobodni pad tijela koje je u trenutku $t=0$ bačeno brzinom početnog iznosa v_0 pod kutom α u odnosu na vodoravnu ravninu



$t=0$ vrijeme izbačaja

$t=t_1$ tijelo postiže najveću visinu

$t=t_2$ tijelo se nalazi na istoj visini s koje je bačeno

- akceleraciju, početnu brzinu i početni položaj tijela pišemo kao:

$$\vec{a}_0 = -g\vec{j} \qquad \vec{v}[0] = v_0(\cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j}) \qquad \vec{r}[0] = 0$$

- uvrštavanjem u izraz za brzinu dobijemo:

$$\vec{v}[t] = \vec{v}[0] + \vec{a}_0 t = v_0\cos\alpha\,\vec{i} + (v_0\sin\alpha - gt)\vec{j}$$

- na kraju uvrstimo u izraz za položaj tijela:

$$\vec{r}[t] = \vec{r}[0] + \vec{v}[0]t + \frac{\vec{a}_0 t^2}{2} = \underbrace{v_0 t\cos\alpha\,\vec{i}}_{x[t]} + \underbrace{\left(v_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}\right)}_{Y[t]}\vec{j}$$

- uočavamo koordinate položaja:

→ eliminacijom vremena iz njih dobivamo jednadžbu putanje koju možemo napisati u obliku

$$\boxed{Y[x] = x\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2}(1+\mathrm{tg}^2\alpha)}$$

- prepoznajemo da je putanja tijela parabola u x,y-ravnini

- trenutak t_1 u kojem se tijelo nalazi u najvišoj točki putanje dobivamo iz uvjeta da je y-komponenta brzine $=0$

$$v_Y[t_1] = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{v_0}{g}\sin\alpha$$

→ koordinate najviše točke putanje možemo dobiti uvrštavanjem trenutka t_1 u izraz za položaj čestice ili pronalaženjem tjemena parabole koja predstavlja putanju čestice

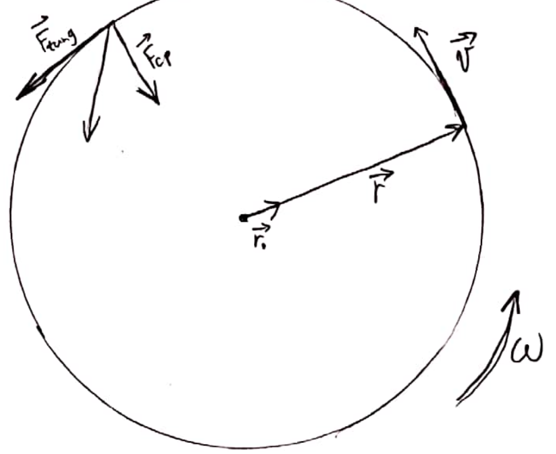
- trenutak t_2 u kojem se tijelo nalazi na visini s koje je bačeno dobivamo iz uvjeta da je Y-koordinata položaja jednaka nuli

$$Y[t_2] = 0 \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{2v_0}{g}\sin\alpha$$

→ udaljenost te točke od ishodišta koju još zovemo domet projektila dobivamo uvrštavanjem trenutka t_2 u izraz za x-koordinatu čestice ili pronalaženjem nultočke parabole koja predstavlja putanju čestice

9.

Skicirajte kružnu putanju čestice, označite polumjer zakrivljenosti i vektor brzine u nekom trenutku. Označite silu koja djeluje na tijelo i napišite iznos i smjer koji sila mora imati da bi omogućila gibanje tijela prikazano na skici.



$$F_{cp} = -m\frac{v^2}{r}\cdot\vec{r}_0$$
$$= -mr\omega^2\vec{r}_0$$

10.

Napišite izraz za rad koji obavi sila $\vec{F}$ kada se pod njenim djelovanjem tijelo pomakne za vektor pomaka $d\vec{r}$. Napišite i dokažite teorem o radu i kinetičkoj energiji.

$$\boxed{dW = \vec{F}\cdot d\vec{r}}$$

ili

$$dW = F\cdot ds\cdot\cos\vartheta$$

kut koji zatvaraju $\vec{F}$ i $d\vec{r}$

- ako je $\vartheta = \frac{\pi}{2} \rightarrow dW = \emptyset$
- $\vartheta < \frac{\pi}{2} \rightarrow dW > \emptyset$
- $\vartheta > \frac{\pi}{2} \rightarrow dW < \emptyset$

Teorem o radu i kinetičkoj energiji: Rad ΔW koji obavi rezultantna sila djelujući na česticu jednak je promjeni kinetičke energije čestice ΔK.

$$\boxed{\Delta W = \Delta K}$$

Dokaz: pokažemo jednakost diferencijala rada i diferencijala kin. energije

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r} = m\frac{d\vec{r}}{dt}d\vec{v} = m\vec{v}\cdot d\vec{v} = m\frac{dv^2}{2} = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dK$$

Integracijom $\int dW = \int dK$ od početnog do konačnog stanja slijedi

$$\Delta W = \Delta K$$

čime je teorem dokazan.

* Ako je F rezultantna (jedina) sila koja djeluje na tijelo možemo je prikazati kao $\vec{F} = \vec{F}_{cp} + \vec{F}_{tg}$
- $\vec{F}_{cp}$ je okomita na pomak → ne obavlja rad (rad obavlja isključivo $\vec{F}_{tg}$!)

* rad je ⊕ kada $\vec{F}_{tg}$ djeluje u smjeru gibanja i time povećava iznos brzine tijela $W = Fs\cos\varphi$
* rad je ⊖ kada $\vec{F}_{tg}$ djeluje u suprotnom smjeru gibanja te smanjuje iznos brzine tijela $W = -Fs\cos\varphi$

$W = Fs$ ako sila djeluje u smjeru gibanja $(\vartheta = \emptyset)$

10. (Kraća verzija)

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$W_{PQ} = \int_P^Q dW = \int_{\vec{r}P}^{\vec{r}Q} \vec{F} \cdot d\vec{r} = Fs\cos\varphi$$

česticu pod djelovanjem sile F s njene P točke P u točku Q

→ sila možda F djeluje u smjeru gibanja ($\varphi = 0$) te imamo pozitivan rad $W = Fs$

→ sila djeluje u smjeru suprotnom od smjera gibanja ($\varphi = \pi$) te imamo negativan rad $W = -Fs$

Poučak o radu i kinetičkoj energiji: Promjena kinetičke energije jednaka je izvršenom radu

$$\Delta W = \Delta E_k = E_{k2} - E_{k1}$$

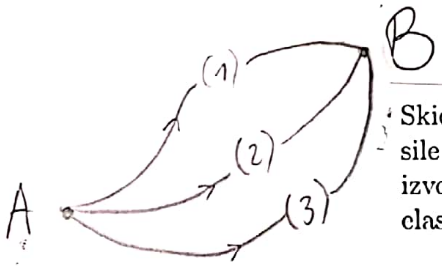
Dokaz:

$$\Delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = m\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot d\vec{v} = m\vec{v} \cdot d\vec{v}$$

$$= m\frac{dv^2}{2} = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dK = \Delta K$$

π

11.



Skicirajte nekoliko mogućih putanja za putanja čestice između točaka A i B u polju sile $\vec{F}(\vec{r}, t)$. Pomoću skice definirajte konzervativnu silu. Primijenite tu definiciju na izvod izraza za potencijalnu energiju (a) pri sabijanju ili rastezanju opruge konstante elastičnosti k i (b) pri podizanju tijela mase m na visinu h u gravitacijskom polju.

(↑ $W = -mgh$, ↓ $W = mgh$)

• **Konzervativna sila** = sila koja rad ne ovisi o putu, već samo o početnoj i konačnoj točki (npr. gravitacijska sila, Coulombova sila, elastična sila)

= one ovise samo o položaju tijela na koje djeluju

$$W_{AB} + W_{BA} = \emptyset$$

$$\oint dW = \emptyset$$

a) $\underbrace{F_x[x] = -kx}_{}$ → sila koja djeluje na česticu koja se giba duž x-osi i koja je oprugom povezana s čvrstim uporištem

Sila je ovdje opisana poljem elastične sile, a s obzirom da se radi o gibanju u 1D prostoru smatramo ga konzervativnim poljem

$$U[x] = -\int_0^x F_x[x']dx' = -\int_0^x(-kx')dx' = k\int_0^x x'dx' = \frac{1}{2}kx^2$$

- primjenom ♡ $\vec{F}[r] = -\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$ možemo dobiti izraz za polje sile

$$F_x[x] = -\frac{\partial}{\partial x}U[x] = -kx$$

* $\vec{F}[\vec{r}] = -\frac{d}{d\vec{r}}U[\vec{r}]$ polje konzervativne sile možemo izraziti kao negativnu derivaciju potencijalne energije po položaju

b) $\vec{F} = -mg\vec{k}$ → izraz za homogeno polje kojim opisujemo gravitacijsku silu pri Zemljinoj površini; konzervativno polje!

$$U[\vec{r}] = -\int_0^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}' = -\int_0^{\vec{r}}(-mg\vec{k}) \cdot (dx'\vec{i} + dy'\vec{j} + dz'\vec{k})$$

$$= mg\int_0^z dz' = \underline{mgz}$$

Napomena: parc. derivacije od U po x i y nismo pisali jer U ovisi samo o z koord.

- primjenom ♡ dobivamo pokazni izraz za polje grav. sile: $\vec{F}[\vec{r}] = -\frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} = -\frac{\partial}{\partial z}(mgz)\vec{k} = \underline{-mg\vec{k}}$

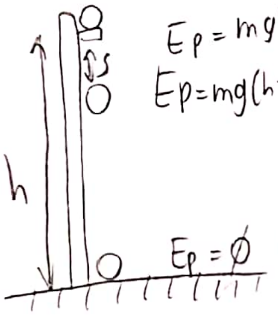
12. Definirajte mehaničku energiju te objasnite u kojim okolnostima je ta veličina očuvana. Opišite primjer sustava u kojem je mehanička energija očuvana te primjer sustava u kojem ona nije očuvana.

– **Mehanička energija** čestice koja se giba pod djelovanjem konzervativne sile je zbroj njene kinetičke i njene potencijalne energije $\boxed{E=K+U}$

– Zakon očuvanja mehaničke energije vrijedi onda kad su rad sile trenja (disipativne sile) i rad vanjskih sila (nekonzervativnih sila) jednaki Ø, tj. kada su sve sile koje djeluju na sustav konzervativne

– Općenito: kada na česticu djeluju samo konzervativne sile, ukupna mehanička energija čestice je očuvana $\boxed{\Delta E = \Delta K + \Delta U = \emptyset \quad \text{tj. } E = \text{konst.}}$

– Primjer očuvanja ukupne mehaničke energije: slobodni pad



$E_p = mgh \quad E_k = \emptyset \quad E = mgh$

$E_p = mg(h-s) \quad E_k = mgs \quad E = mgh$

$E_p = \emptyset \quad E_k = mgh \quad E = mgh$

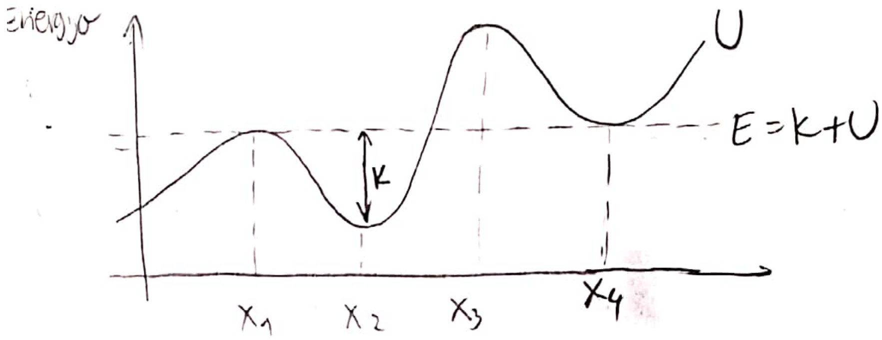
– primjer u kojem nije sačuvana: vučemo tijelo uz kosinu nekom vanjskom silom F'

$W' = \Delta E_k + \Delta E_p - W_{tr} = E_2 - E_1 - W_{tr}$

ukupna meh. energija u položaju 2; -||- položaju 1; rad sile trenja (uvijek –)

na sustav djeluju sile koje nisu konzervativne → ukupna mehanička energija nije očuvana (prelazi u druge oblike → unutr., toplinsku)

13. Za zadanu potencijalnu energiju sustava $U(\vec{r})$ odredite silu koja djeluje na česticu u sustavu. Primijenite izraz na jednodimenzionalni sustav ($U(x)$) i pomoću toga objasnite pojmove stabilne i nestabilne ravnoteže.



Stabilna i nestabilna ravnoteža

- u x_1 i x_3 potencijalna energija ima maksimume što znači da su to točke **nestabilne ravnoteže**. Udaljavanjem od njih raste E_k

- u x_2 i x_4 potencijalna energija ima minimume što znači da su to točke **stabilne ravnoteže**. Udaljavanjem od njih raste E_p, a E_k se smanjuje

- čestica s energijom E u naznačenom dijagramu može trajno mirovati u x_1 i u x_4, ali ne i u x_2 gdje ima kinetičku energiju veću od nule kao ni u x_3 koja se nalazi u zabranjenom području (zabranjeno područje $U>E$, a K ne može biti negativna)

14. Količina gibanja sustava čestica

Količina gibanja sustava čestica je zbroj količina gibanja svih čestica u sustavu

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \ldots + \vec{p}_N = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i$$

- vremenska derivacija količine gibanja jednaka je zbroju vanjskih sila koje djeluju na čestice sustava, dok unutarnje sile u sustavu nemaju nikakav utjecaj

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i \Big(\vec{F}_i^{(ext)} + \underbrace{\sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}}_{\text{PO 3. N.Z.} = \emptyset} \Big) = \sum_i \vec{F}_i^{(ext)} = \vec{F}^{(ext)} \quad (*_1)$$

- iz gornje jednadžbe slijedi da je količina gibanja sustava očuvana (stalna u vremenu) kada je zbroj vanjskih sila koje djeluju na čestice jednak nuli

$$\vec{F}^{(ext)} = 0 \iff \frac{d\vec{p}}{dt} = 0$$

15. Središte mase sustava čestica (CM)

- točka u prostoru čiji je položaj definiran izrazom:

$$\boxed{\vec{r}_{CM} = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{r}_i}$$

m = masa sustava čestica

$m_i \, \vec{r}_i$ = položaj i masa i-te čestice u sustavu

- **Brzina središta mase**: deriviranjem gornjeg izraza po vremenu pokazuje se da je brzina središta mase razmjerna količini gibanja sustava

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d}{dt} \vec{r}_{CM} = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{v}_i = \frac{1}{m} \sum_i \vec{p}_i = \frac{\vec{p}}{m}$$

$$\vec{p}_{CM} = \vec{p} = m \vec{v}_{CM} \quad (*_2)$$

zbog ovoga količinu gibanja sustava $\vec{p}$ nazivamo još i količinom gibanja središta mase

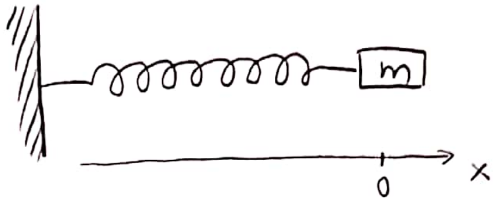
- **Jednadžba gibanja središta mase**: korištenjem $(*_1)$ i $(*_2)$ sastavljamo jednadžbu gibanja središta mase sustava

$$\vec{F}^{(ext)} = \frac{d}{dt} \vec{p} = m \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = m \vec{a}_{CM}$$

Uočavamo da se središte mase sustava čestica giba onako kako bi se gibala čestica mase m kada bi na nju djelovala sila $\vec{F}^{(ext)}$

16. Napišite jdžbu gibanja za masu na opruzi i izvedite njezino opće rješenje. Napišite izraz za brzinu i akceleraciju mase.

$$m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -k\vec{x}$$



(*) $m\ddot{x} = -kx \,/ :m$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad \boxed{\omega_0^2 = \frac{k}{m}}$$

$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ **jednadžba gibanja**

→ to je dif. jdžba 2. reda koja za potpuno rješenje zahtjeva dva (fizikalna) uvjeta koji opisuju npr. gdje se tijelo nalazilo u početnom trenutku i kolika mu je bila brzina u početnom trenutku → dakle, moramo specificirati <u>POČETNE UVJETE</u>:

(određuje ih način na koji smo pokrenuli tijelo na titranje)

$$x(0) = A \qquad \dot{x}(0) = 0$$

ili općenitije $x(0) = A \qquad \dot{x}(0) = v_0$

→ pretpostavimo rješenje oblika

$$\boxed{x(t) = X_0 e^{\alpha t}} \qquad (X_0, \alpha = \text{nepoznanice})$$

→ uvrstimo to u (*) i dobijemo

$$m X_0 \alpha^2 e^{\alpha t} + k X_0 e^{\alpha t} = 0 \,/ :mX_0$$

$$\alpha^2 e^{\alpha t} + \omega_0^2 e^{\alpha t} = 0 \,/ :e^{\alpha t}$$

$$\alpha^2 + \omega_0^2 = 0$$

$$\alpha^2 = -\frac{k}{m}$$

$$\alpha_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} = \underline{\pm i\omega_0}$$

→ rješenje glasi

$$x(t) = X_0 e^{\pm i\omega_0 t} \qquad \text{odnosno} \qquad x(t) = X_1 e^{-i\omega_0 t}$$

$$x(t) = X_2 e^{i\omega_0 t}$$

→ najopćenitije rješenje je linearna kombinacija (zbroj) gornjih rješenja

$$x(t) = X_1 e^{-i\omega_0 t} + X_2 e^{i\omega_0 t}$$

→ konstante odredimo iz početnih uvjeta

$x(0) = A = X_1 + X_2$

$\dot{x}(0) = 0 = -i\omega_0 X_1 + i\omega_0 X_2 \Rightarrow X_1 = X_2 = \frac{A}{2}$

→

→ pa je rješenje dano s

$$x(t) = \frac{A}{2}\left(e^{-i\omega_0 t} + e^{i\omega_0 t}\right)$$

$$\underline{|x(t) = A\cos\omega_0 t|}$$

gdje je $\cos y = \frac{(e^{iy} + e^{-iy})}{2}$

(!) općenito

$$\boxed{x[t] = A\cos[\underbrace{\omega_0 t + \Phi}_{\text{„faza titranja"}}]}$$

rješenje jednadžbe gibanja

- Izrazi za brzinu i akceleraciju tijela pri harm. titranju :

$$\dot{x}[t] = \frac{d}{dt}x(t) = -\omega_0 A\sin[\omega_0 t + \Phi]$$

$$\ddot{x}[t] = \frac{d^2}{dt^2}x[t] = -\omega_0^2 A\cos[\omega_0 t + \Phi] = -\omega_0^2 x[t]$$

17. Napišite jednadžbu gibanja oscilatora prigušenog silom razmjernom brzini te izvedite njena tri rješenja (ovisno o jakosti prigušenja).

$$m\ddot{x} = F_x = -kx \underbrace{- \beta \dot{x}}_{\text{sila otpora}} \quad /:m$$

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

jednadžba gibanja oscilatora s prigušenjem

$$\boxed{\omega_0^2 = \frac{k}{m}} \quad \boxed{2\delta = \frac{\beta}{m}}$$

koeficijent prigušenja

-> uvrštavamo probno rješenje $\boxed{x[t] = X_0 e^{\lambda t}}$

početni uvjeti:

$x[0] = A_0$

$\dot{x}[0] = 0$

$$X_0 \lambda^2 e^{\lambda t} + 2\delta X_0 \lambda e^{\lambda t} + \omega_0^2 X_0 e^{\lambda t} = 0 \quad /: X_0 e^{\lambda t}$$

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2\delta \pm \sqrt{4\delta^2 - 4\omega_0^2}}{2} = \frac{-\cancel{2}\delta \pm \cancel{2}\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}{\cancel{2}}$$

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

vidimo da će $\lambda_{1,2}$ ovisiti o relativnom odnosu sile koja prigušuje titranje ($\sim\delta$) i elastične sile slobodnog harmoničkog oscilatora ($\sim\omega_0$)

- 3 moguća slučaja:

1.) Malo (slabo) prigušenje (podkritično prigušenje)

$$\boxed{\delta^2 < \omega_0^2}$$

-> izraz pod korijenom je negativan

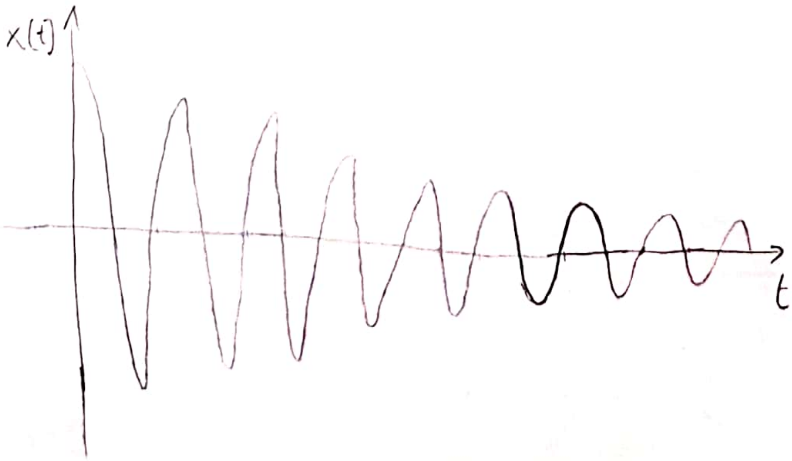
$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{(-1)(\omega_0^2 - \delta^2)} = -\delta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \equiv -\delta \pm i\omega \xrightarrow{\text{jer}} \boxed{\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2}$$

- pišemo probna rješenja:

$$\left.X_1[t] = X_1 \cdot e^{(-\delta + i\omega)t} \quad X_2[t] = X_2 \cdot e^{(-\delta - i\omega)t}\right\} \oplus \Rightarrow x[t] = X_1 e^{(-\delta + i\omega)t} + X_2 e^{(-\delta - i\omega)t}$$

(tj.)

$$\boxed{x[t] = A e^{-\delta t} \cos[\omega t + \Phi]}$$



- sada još možemo iz početnih uvjeta dobiti A i Φ pa konačno rj. glasi:

$$x[t] = A[t] \cos(\omega t + \Phi)$$

ali to (valjda) ne treba izvoditi...

-> ako nekog zanima -> Horvat (str. 2-57)

2.) aperiodičko prigušenje

→ Nadkritično prigušenje

$$\boxed{\delta^2 > \omega_0^2}$$

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \qquad \delta^2 - \omega_0^2 > 0$$

→ uvodimo oznake:

$$\mu_1 = \delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \qquad \mu_2 = \delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

$$\boxed{\mu_1 \cdot \mu_2 = \omega_0^2} \quad \boxed{\mu_1 > \delta > \omega_0} \quad \boxed{\mu_2 < \omega_0}$$

→ pa je rješenje

$$(*) \quad x[t] = C_1 e^{-\mu_1 t} + C_2 e^{-\mu_2 t} \qquad \text{tj. uz oznaku } \boxed{g = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}$$

$$x[t] = e^{-\delta t}\left(D_1 e^{gt} + D_2 e^{-gt}\right)$$

→ uvedemo nove konstante

$$\boxed{\begin{aligned} M &= D_1 + D_2 \\ N &= D_1 - D_2 \end{aligned}} \longrightarrow x[t] = e^{-\delta t}\left(\frac{M+N}{2} e^{gt} + \frac{M-N}{2} e^{-gt}\right)$$

$$= e^{-\delta t}\left[M \tfrac{1}{2}\left(e^{gt} + e^{-gt}\right) + N \tfrac{1}{2}\left(e^{gt} - e^{-gt}\right)\right]$$

$$= e^{-\delta t}\left(M \operatorname{ch}(gt) + N \operatorname{sh}(gt)\right)$$

→ iz početnih uvjeta slijedi (uvrstimo u (*))

$$\left.\begin{aligned} x[0] &= A_0 = C_1 + C_2 \\ \dot{x}[0] &= 0 = -C_1\mu_1 - C_2\mu_2 \end{aligned}\right\} \qquad C_1 = A_0 - C_2 = A_0 + \frac{C_1\mu_1}{\mu_2}$$

$$C_1\mu_1 = -C_2\mu_2$$

$$C_2 = \frac{-C_1\mu_1}{\mu_2}$$

$$\mu_2 C_1 - C_1\mu_1 = A_0\mu_2$$

$$C_1 = \frac{A_0\mu_2}{\mu_2 - \mu_1}$$

$$(*) \quad x[t] = \frac{A_0\mu_2}{\mu_2 - \mu_1} e^{-\mu_1 t} - \frac{A_0\mu_1}{\mu_2 - \mu_1} e^{-\mu_2 t} \qquad C_2 = \frac{-A_0\mu_1}{\mu_2 - \mu_1}$$

malo srežemo predznake

$$(\heartsuit) \quad x[t] = \frac{A_0}{\mu_1 - \mu_2}\left(\mu_1 e^{-\mu_2 t} - \mu_2 e^{-\mu_1 t}\right)$$

možemo ga zanemariti jer je $\mu_1 > \mu_2$

pa $e^{-\mu_2 t} > e^{-\mu_1 t}$

→ ostaje rješenje:

$$\boxed{x[t] \simeq \frac{A_0\mu_1}{\mu_1 - \mu_2} e^{-\mu_2 t}}$$

uz konstantu raspada $\mu_2 < \omega_0$

3.) kritično prigušenje $\boxed{\delta = \omega_0}$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\delta = -\mu_1 = -\mu_2 \equiv -\omega_0$$

→ ranije rješenje (♡) postaje neodređeno

$$(♡) \quad x[t] = \frac{A_0}{\mu_1 - \mu_2}\left(\mu_1 e^{-\mu_2 t} - \mu_2 e^{-\mu_1 t}\right)$$

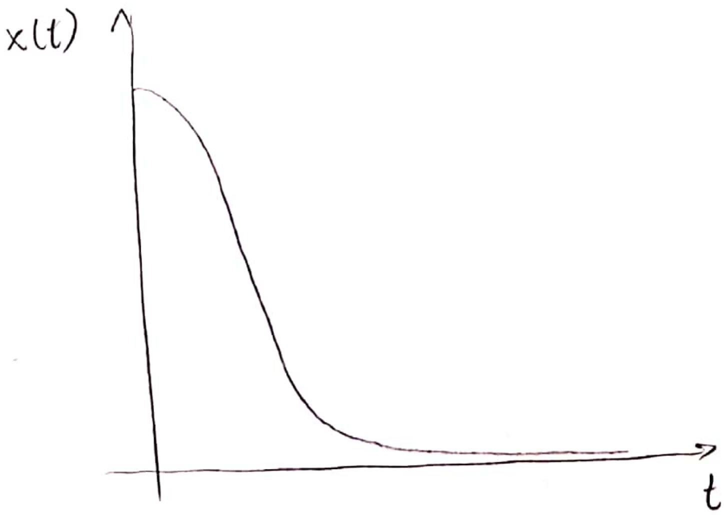
$$x[t] \xrightarrow[\mu_1 \to \mu_2]{} \frac{0}{0} \qquad \text{l'Hospital !!!}$$

uzmimo $\boxed{\mu_1 = \omega_0}$

$$\lim_{\mu_2 \to \omega_0} x[t] = \lim_{\mu_2 \to \omega_0} A_0 \frac{\omega_0 e^{-\mu_2 t} - \mu_2 e^{-\omega_0 t}}{\omega_0 - \mu_2} = \frac{0}{0} \overset{L'H}{=} \lim_{\mu_2 \to \omega_0} A_0 \frac{\omega_0(-t)e^{-\mu_2 t} - e^{-\omega_0 t}}{-1}$$

$$= \underbrace{A_0(1 + \omega_0 t)e^{-\omega_0 t}}$$

$$(\dagger) \quad \boxed{x[t] = A_0(1 + \omega_0 t)e^{-\omega_0 t}}$$



uoči : vrlo strma krivulja povratka u ravnotežni položaj u odnosu na krivulju aperiodičkog prigušenja (jer se sustav pri kritičnom prigušenju vraća u položaj ravnoteže u najkraćem vremenu)

18.

Krenuvši od izraza za ukupnu energiju prigušenog oscilatora, pokažite da energija u vremenu opada s kvadratom brzine.

Energija prigušenog titranja sastoji se od kinetičke energije $K = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$ i od potencijalne energije $U = \frac{1}{2}kx^2$. Mehanička energija

$$E = K + U$$

ovdje nije očuvana veličina, već se smanjuje zbog svladavanja sile otpora. Najlakše ju je procijeniti u trenucima u kojima se tijelo zaustavlja ($K=0,\ E=U>0$). U tim trenucima je njegov otklon od ravnotežnog položaja približno $x[t] \simeq Ae^{-\delta t}$ te je energija

$$\boxed{E = U \simeq \frac{1}{2}kA^2e^{-2\delta t}}$$

Važno je uočiti da je energija (promatramo li ju na vremenskoj skali znatno duljoj od perioda titranja) razmjerna faktoru $e^{-2\delta t}$

$$\left.\begin{aligned} E_k &= \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}A^2\omega^2\cos^2(\omega t+\varphi_0) \\ \omega^2 &= \frac{k}{m} \end{aligned}\right\} E_k = \frac{k}{2}A^2\cos^2(\omega t+\varphi_0)$$

$$= \frac{k}{2}A^2\left(1-\sin^2(\omega t+\varphi_0)\right) = \frac{k}{2}(A^2 - s^2)$$

$$U = -W = -\int_0^s(-ks)\,ds = \frac{ks^2}{2} = \frac{k}{2}A^2\sin^2(\omega t+\varphi_0)$$

$$E = E_k + U$$

$$\downarrow E = \frac{k}{2}\underbrace{A^2\cos^2(\omega t+\varphi_0)}_{v^2\ \downarrow} + \frac{k}{2}A^2\sin^2(\omega t+\varphi_0) = \frac{kA^2}{2}$$

19.

Krenuvši od njegove općenite definicije, izvedite izraz za Q-faktor prigušenog oscilatora.

- **Q-faktor (ili faktor kakvoće)** = još jedna veličina kojom iskazujemo jakost podkritičnog prigušenja oscilatora, a definiramo je kao recipročnu vrijednost prosječnog relativnog gubitka energije oscilatora u vremenskom intervalu koji odgovara promjeni faze oscilatora od jednog radijana.

$$Q^{-1} = \frac{1}{2\pi}\left|\frac{\Delta E}{E}\right|_{period} = \frac{1}{2\pi}\,\frac{E(t)-E(t+T)}{E(t)} = \frac{1}{2\pi}\left(1-e^{-2\delta T}\right) \simeq \frac{\delta T}{\pi}$$

U gornjem smo izvodu najprije koristili izraz za energiju prigušenog oscilatora (pogledaj pitanje 18.), a nakon toga razvoj u red $e^{-\epsilon} \simeq 1-\epsilon$. Q-faktor još možemo napisati i kao

$$Q = \frac{\pi}{\delta T} = \frac{\omega}{2\delta} \simeq \frac{\omega_0}{2\delta}$$

Što je prigušenje slabije, vrijednost Q-faktora je veća

20.

Napišite jednadžbu gibanja prisilnog titranja, izvedite njeno rješenje i izraz za rezonantnu frekvenciju (najveća amplituda).

Jednadžba gibanja oscilatora s vanjskom harmonijskom silom

Horvat, str. 2-68

$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x} + F_p\cos(\omega_p t) \quad /:m$$

sila opruge razmjerna otklonu

sila prigušenja razmjerna brzini $\dot{x}$

vanjska harmonijska sila amplitude F_p i frekvencije ω_p

supst. $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, $2\delta = \frac{\beta}{m}$, $f_p = \frac{F_p}{m}$

$$\underbrace{\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x}_{\text{jdžba gibanja harm. oscilatora s prigušenjem}} = f_p\cos(\omega_p t) \Rightarrow \text{LDJsKK}$$

(linearna nehomog. dif. jdžba 2. reda s konstantnim koef.)

→ tražimo partikularno rješenje nehomogene jdžbe. Očekujemo harm. titranje frekvencijom vanjske sile ω_p te prisilno rješenje pišemo kao

$$x(t) = A\cos(\omega_p t - \Phi)$$

↳ fazni kut koji opisuje kašnjenje oscilacije za vanjskom silom

- Zbog jednostavnijeg računanja koristimo kompleksni zapis titrajućih veličina

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_p e^{i\omega_p t}$$

uvrstimo

a probno rj. kao

$$x[t] = Ae^{i(\omega_p t - \Phi)}$$

- nakon uvrštavanja:

$$(-\omega_p^2 + i2\delta\omega_p + \omega_0^2) A e^{-i\Phi} = f_p$$

$$A = \frac{f_p e^{i\Phi}}{\omega_0^2 - \omega_p^2 + i2\delta\omega_p}$$

Budući da prema pretpostavci vrijedi $A > 0$, isto mora vrijediti i za desnu stranu gornje jdžbe, a to znači da brojnik i nazivnik razlomka imaju isti argument (kut u kompleksnoj ravnini). Iz toga slijedi:

$$\boxed{tg\,\Phi = \frac{2\delta\omega_p}{\omega_0^2 - \omega_p^2}} \qquad 0 < \Phi < \pi$$

- a samu amplitudu možemo jednostavnije izraziti kao:

$$\boxed{A(\omega_p) = \frac{f_p}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_p^2)^2 + (2\delta\omega_p)^2}}}$$

$$\sin\Phi = \frac{2\delta\omega_p}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_p^2) + 4\delta^2\omega_p^2}}$$

$$\cos\Phi = \frac{\omega_0^2 - \omega_p^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_p^2) + 4\delta^2\omega_p^2}}$$

- prema tome, opće je rješenje jednadžbe gibanja jednako:

$$\boxed{x(t) = A_0 e^{-\delta t}\cos(\omega t + \Phi_0) + A(\omega_p)\cos(\omega_p t - \Phi)}$$

21. Napišite jednadžbu gibanja simetričnog vezanog oscilatora $|-k-m-K-m-k-|$, izvedite frekvencije (vlastitih modova) titranja te napišite opća rješenja $x_1(t), x_2(t)$.

$m_1 = m_2 = m$

$k_1 = k_2 = k$

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 - K(x_1 - x_2) \,/ :m$$
$$m\ddot{x}_2 = -kx_2 - K(x_2 - x_1) \,/ :m$$

$\boxed{\omega_0^2 = \frac{k}{m}}$ $\boxed{\Omega^2 = \frac{K}{m}}$

$$\ddot{x}_1 = -\omega_0^2 x_1 - \Omega^2(x_1 - x_2)$$
$$\ddot{x}_2 = -\omega_0^2 x_2 - \Omega^2(x_2 - x_1)$$

* zbog simetrije oba će rješenja (x_1 i x_2) imati istu frekvenciju

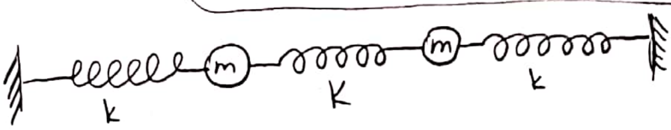
* x_1 i x_2 su ili u fazi ili u protufazi

- uzmimo da je rješenje $x_1(t)$ dano ovako:

$$x_1(t) = A\cos(\omega t + \Phi)$$

- pišemo i probno rješenje

$$x_2(t) = B\cos(\omega t + \Phi)$$



- uvrstimo:

$$-\omega^2 A\cos(\omega t + \Phi) = -\omega_0^2 A\cos(\omega t + \Phi) - \Omega^2(A\cos(\omega t + \Phi) - B\cos(\omega t + \Phi)) \,/ :\cos(\omega t + \Phi)$$
$$-\omega^2 B\cos(\omega t + \Phi) = -\omega_0^2 B\cos(\omega t + \Phi) - \Omega^2(B\cos(\omega t + \Phi) - A\cos(\omega t + \Phi)) \,/ :\cos(\omega t + \Phi)$$

$$-\omega^2 A = -\omega_0^2 A - \Omega^2(A - B)$$
$$-\omega^2 B = -\omega_0^2 B - \Omega^2(B - A)$$

$$-\omega^2 A + (\omega_0^2 + \Omega^2)A - \Omega^2 B = 0 \,/ :A$$
$$-\omega^2 B + (\omega_0^2 + \Omega^2)B - \Omega^2 A = 0 \,/ :B$$

$\boxed{r = \frac{B}{A}}$

$$\left.\begin{aligned} -\omega^2 + (\omega_0^2 + \Omega^2) - \Omega^2 r &= 0 \\ -\omega^2 + (\omega_0^2 + \Omega^2) - \frac{\Omega^2}{r} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{izjednačimo}$$

$$\cancel{-\Omega^2} r = \frac{\cancel{-\Omega^2}}{r}$$

$$r = \frac{1}{r} \,/ \cdot r$$

$$r^2 = 1$$

$$\underline{r = \pm 1} \Rightarrow \frac{B}{A} = \pm 1 \Rightarrow \underline{B = \pm A}$$

- imamo 2 skupa rješenja:

→ u fazi: $\boxed{A = B} = A_1$ $\quad x_1(t) = A_1\cos(\omega_1 t + \Phi_1)$

$\quad x_2(t) = +A_1\cos(\omega_1 t + \Phi_1)$

→ u protufazi $\boxed{A = -B} A_2$ $\quad x_1(t) = A_2\cos(\omega_2 t + \Phi_2)$

$\quad x_2(t) = -A_2\cos(\omega_2 t + \Phi_2)$

(* općenito rj. je na sljedećoj stranici)

→

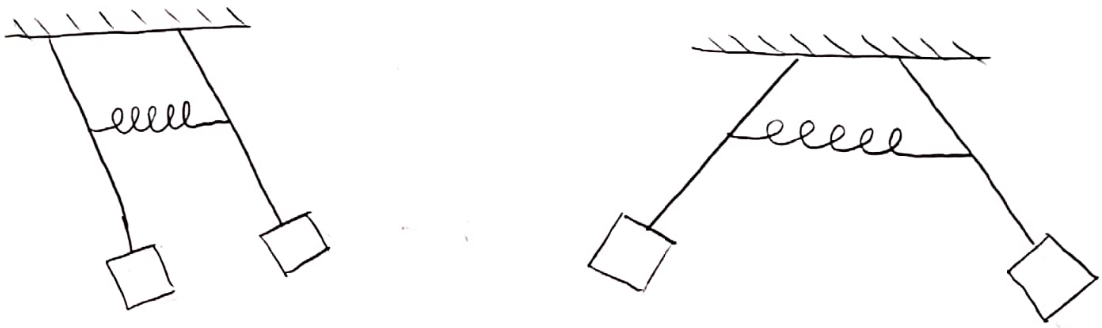
- izvodi frekvencija:

→ u fazi (uvrstimo A = B u ●)

$$-\omega^2 B + (\omega_0^2+\Omega^2)B - \Omega^2 B = 0 \,/ : B$$
$$-\omega^2 + \omega_0^2 + \cancel{\Omega^2} - \cancel{\Omega^2} = 0$$
$$\omega^2 = \omega_0^2$$
$$\omega_{uf} = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

→ u protufazi (uvrstimo A = -B)

$$\omega^2 B - (\omega_0^2+\Omega^2)B - \Omega^2 B = 0 \,/ : B$$
$$\omega^2 - \omega_0^2 - \Omega^2 - \Omega^2 = 0$$
$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\Omega^2$$
$$\omega_{pf} = \sqrt{\omega_0^2 + 2\frac{k}{m}} > \omega_{uf}$$



*treći način titranja = nonjenični (samo jednu masu pokrenemo na titranje)

*općenito rješenje dvaju osnovnih načina gibanja (nastavak s prošle str.)
(pretpostavljamo jednake amplitude)

$$X_1 = 2A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t + \frac{\Phi_1-\Phi_2}{2}\right)\sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2} + \frac{\Phi_1+\Phi_2}{2}\right)$$
$$X_2 = 2A\sin\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t + \frac{\Phi_1-\Phi_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t + \frac{\Phi_1+\Phi_2}{2}\right)$$

- amplituda se mijenja od max. 2A do 0 i varira u vremenu frekvencijom

$$f_a = \frac{f_1-f_2}{2} \Rightarrow \text{amplituda je MODULIRANA}$$

opće rj.:

$$X_1(t) = A\cos(\omega_A t + \Phi_A) - B\cos(\omega_B t + \Phi_B)$$
$$X_2(t) = A\cos(\omega_A t + \Phi_A) + B\cos(\omega_B t + \Phi_B)$$
} Ilijić

22 Krenuvši od općeg rješenja za titranje simetričnog vezanog oscilatora $|-k-m-K-m-k-|$, $x_1(t) = A\cos(\omega_A t + \Phi_A) - B\cos(\omega_B t + \Phi_B)$,
$x_2(t) = A\cos(\omega_A t + \Phi_A) + B\cos(\omega_B t + \Phi_B)$, izvedite osnovnu frekvenciju i frekvenciju udara za gibanje s početnim uvjetima (moguće su varijacije zadanih početnih uvjeta)

$$x_1(t) = A\cos(\omega_A t + \Phi_A) - B\cos(\omega_B t + \Phi_B)$$
$$x_2(t) = A\cos(\omega_A t + \Phi_A) + B\cos(\omega_B t + \Phi_B)$$

početni uvjeti:

$x_1(0) > 0 \overset{npr.}{=} a$ $\quad x_2(0) = 0$

$v_1(0) = 0$ $\quad v_2(0) = 0$

- ovi početni uvjeti vrijede za slučaj kada otklonimo jedno tijelo na udaljenost a od ravnotežnog položaja i pustimo ga u gibanje

→ ti uvjeti su zadovoljeni uz početne faze $\Phi_A = \Phi_B = 0$ i

amplitude $A = B = \frac{a}{2}$

$$x_1[t] = \frac{a}{2}\cos\omega_A t + \frac{a}{2}\cos\omega_B t$$
$$x_2[t] = \frac{a}{2}\cos\omega_A t - \frac{a}{2}\cos\omega_B t$$

- uočavamo da su ta titranja zbroj dvaju titranja jednakih amplituda i bliskih frekvencija, što dovodi do pojave udara

$$\bar{\omega} = \frac{(\omega_A + \omega_B)}{2} \overset{tj.}{=} \frac{\omega_{pf} + \omega_{uf}}{2}$$

$$\delta = \frac{(\omega_A - \omega_B)}{2} \overset{tj.}{=} \frac{\omega_{pf} - \omega_{uf}}{2}$$

kružne frekvencije

...trigonometrijske transformacije...

$$x_1[t] = a\cos(\delta t)\cos(\bar{\omega} t)$$
$$x_2[t] = a\sin(\delta t)\sin(\bar{\omega} t)$$

$$T_{udar} = \frac{\pi}{\delta} = \frac{2\pi}{\omega_{pf} - \omega_{uf}}$$

frekvencija udara

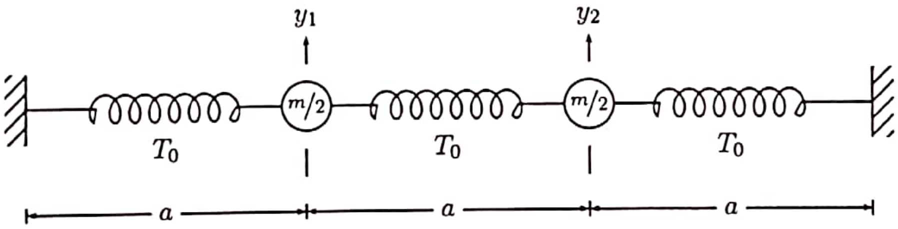
$(\nu_{udar} = \nu_{pf} - \nu_{uf})$

izvori:
Horvat str. 2-80, 2-81
Ilijić str. 108

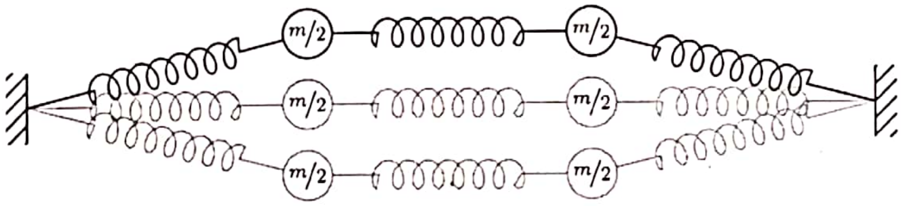
23) Izvedite jednadžbu gibanja (valnu jednadžbu) za transverzalno titranje niza masa povezanih napetim oprugama.

Primjer 6.8.2.: Transverzalno titranje dvije mase na trima napetim oprugama

Odredit ćemo frekvencije vlastitih modova pri transverzalnom titranju "lanca" koji se sastoji od dvaju jednakih sitnih tijela ukupne mase m i triju jednakih opruga zanemarive mase. Lanac je razapet među dvama čvrstim uporištima razmaknutim za $\ell = 3a$, a napetost lanca u ravnotežnom stanju je T_0. (Transverzalno titranje sustava s jednim tijelom i dvije napete opruge razmatrali smo u primjeru 6.4.2.) Transverzalne otklone tijela od njihovih ravnotežnih položaja opisujemo koordinatama y_1 i y_2, pri čemu $y_1 = y_2 = 0$ odgovara ravnotežnom stanju lanca.



Najprije razmatramo vlastiti mod u kojem tijela titraju jednakom amplitudom u fazi ($y_1 = y_2$).



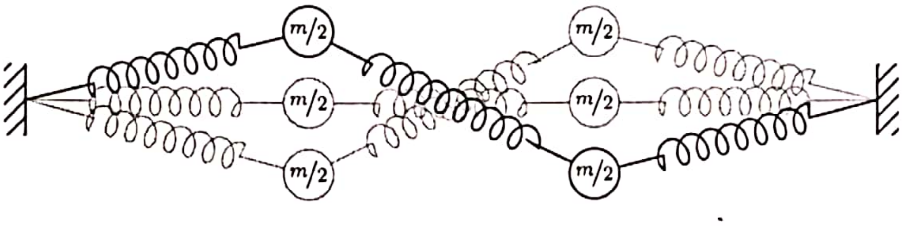
U ovom modu titranja središnja opruga je svo vrijeme okomita na smjer titranja tijela, a to znači da je y-komponenta sile kojom ona djeluje na tijela svo vrijeme jednaka nuli. Bočne opruge djeluju na tijela silama čije y-komponente možemo izraziti kao $-(y_{1,2}/a)T_0$, pri čemu smo pretpostavili da je kutni otklon opruga od njihovih ravnotežnih položaja dovoljno malen da sinus kuta možemo zamijeniti tangensom te da je povećanje napetosti bočnih opruga do kojeg dolazi zbog njihovog produljenja također zanemarivo. Jednadžbu gibanja tijela možemo napisati kao

$$\frac{m}{2}\,\ddot{y}_{1,2} = -\frac{y_{1,2}}{a}\,T_0,$$

a nakon dijeljenja jednadžbe s $m/2$ nalazimo kvadrat frekvencije titranja

$$\omega_A^2 = \frac{2T_0}{ma} = \frac{6T_0}{m\ell}.$$

Kad tijela titraju u protufazi ($y_1 = -y_2$), y-komponentama sila koje djeluju na tijela uz napetosti bočnih opruga doprinosi i središnja opruga.



Zanemarujući povećanje napetosti opruga izazvano njihovim produljenjem te zamijenjujući sinus kuta njegovim tangensom, jednadžba gibanja tijela glasi

$$\frac{m}{2}\,\ddot{y}_{1,2} = -\frac{y_{1,2}}{a}\,T_0 - \frac{y_{1,2}}{a/2}\,T_0,$$

a nakon dijeljenja s $m/2$ i sređivanja desne strane nalazimo kvadrat frekvencije titranja

$$\omega_B^2 = \frac{6T_0}{ma} = \frac{18T_0}{m\ell}.$$

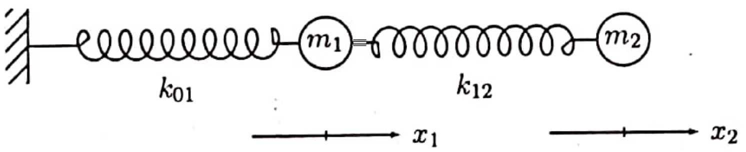
Kad bismo razmatrali transverzalno titranje lanca koji se sastoji od N tijela i $N+1$ napetih opruga, pronašli bismo N vlastitih modova. U limesu $N \to \infty$, ti modovi odgovarali bi stojnim harmonijskim valovima koji titraju na napetoj žici (vidi poglavlje 7.5).

24.

Izvedite jednadžbu gibanja (valnu jednadžbu) za longitudinalno titranje niza masa povezanih oprugama.

Primjer 6.8.3: *Vlastiti modovi titranja općenitog dvostrukog oscilatora*

Naći ćemo vlastite modove longitudinalnog titranja sustava s dva stupnja slobode prikazanog na slici.



Longitudinalne otklone tijela od njihovih ravnotežnih položaja opisujemo koordinatama x_1 i x_2. Jednadžbe gibanja tijela su

$$m_1\ddot{x}_1 = -k_{01}x_1 + k_{12}(x_2 - x_1) \qquad \text{i} \qquad m_2\ddot{x}_2 = -k_{12}(x_2 - x_1).$$

Uvrstimo li u jednadžbe gibanja probno rješenje oblika

$$x_1 = \hat{A}_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}, \qquad x_2 = \hat{A}_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},$$

nalazimo karakteristične jednadžbe

$$\begin{aligned} -m_1\omega^2\hat{A}_1 &= -k_{01}\hat{A}_1 + k_{12}(\hat{A}_2 - \hat{A}_1), \\ -m_2\omega^2\hat{A}_2 &= -k_{12}(\hat{A}_2 - \hat{A}_1), \end{aligned}$$

čija dva rješenja odgovaraju vlastitim modovima titranja. Označimo li vlastite modove s A i B te koristeći oznake

$$\kappa = \frac{k_{01}}{k_{12}}, \qquad \mu = \frac{m_1}{m_2}, \qquad \Delta = (1+\kappa-\mu)^2 + 4\mu,$$

kvadrate frekvencija titranja i omjere kompleksnih amplituda možemo izraziti kao

$$\omega^2_{A,B} = \frac{k_{12}}{2m_1}\left(1+\kappa+\mu \mp \sqrt{\Delta}\right), \qquad \left(\hat{A}_2/\hat{A}_1\right)_{A,B} = \frac{1}{2}\left(1+\kappa-\mu \pm \sqrt{\Delta}\right).$$

S obzirom da vrijedi $\Delta > 0$, može se pokazati da također vrijede odnosi

$$0 < \omega_A^2 < \omega_B^2 \qquad \text{i} \qquad \left(\hat{A}_2/\hat{A}_1\right)_B < 0 < \left(\hat{A}_2/\hat{A}_1\right)_A.$$

U vlastitom modu A imamo manju od dvije vlastite frekvencije te pozitivan omjer $\hat{A}_2/\hat{A}_1$, što znači da u tom modu tijela titraju u fazi. U vlastitom modu B sustav titra većom frekvencijom, a negativan omjer $\hat{A}_2/\hat{A}_1$ nam govori da tijela titraju u protufazi.

25.

Napišite jednadžbu gibanja (valnu jednadžbu) vala, dokažite da su funkcije oblika $f(x - vt)$ i $g(x + vt)$ njezina opća rješenja. Pokažite u kojem se smjeru svako od tih rješenja giba.

- Jednadžba gibanja transverzalnog vala na napetom užetu (valna jdžba):

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} y[x,t] - \frac{T\partial^2}{\mu \partial x^2} y[x,t] = 0$$

fja $y[x,t]$ opisuje transverzalni otklon elementa užeta od njegovog ravnotežnog položaja
x = koordinata položaja na užetu
t = trenutak u vremenu

ili kraće $\ddot{y} - v^2 y'' = 0$ $\boxed{v^2 = \frac{T}{\mu}}$

-Putujući val kao opće rješenje valne jdžbe:

Bilo koja fja koordinate položaja x i vremena t koju možemo napisati u obliku

$$y[x,t] = f[x \pm vt]$$

$\boxed{\mu = \frac{\Delta m}{\Delta x}}$ linijska gustoća mase užeta $= \mu$

$\ddot{}$ = parcijalno deriviranje po vremenu
$''$ = — // —— po x-koordinati
T = napetost

gdje je f fja jedne varijable, rješenje je valne jdže

Dokaz: uvrštavanjem. Odaberemo li pozitivan predznak u argumentu fje, $f[x+vt]$, valni poremećaj čiji je oblik određen odabirom fje f kreće se ulijevo brzinom iznosa v. Odaberemo li negativan predznak, $f[x-vt]$, isto se valni poremećaj kreće brzinom iznosa v udesno. Kako bi rješenje imalo fizikalnog smisla, funkcija f mora biti „razumnog oblika", tj. mora biti glatka i ograničena.

Valovi Horvat, str. 3-9

Rj. valne jdže je linearna kombinacija funkcija f i g, tj.
$y(t,x) = Af(x-vt) + Bg(x+vt)$, gdje su A i B proizvoljne konstante.

-prema pravilu deriviranja složene fje:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = f' \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \underline{f'} \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial u}(f')$$

$$= 1 \cdot f'' \cdot 1 = \underline{f''}$$

$$\left(u = x - vt,\ \frac{\partial u}{\partial x} = 1,\ \frac{\partial u}{\partial t} = -v\right)$$

→ dokaz za drugu fju analogan je ovom dokazu (kao i dokaz za njihovu lin. kombi)

Jednadžba gibanja longitudinalnog vala (valna jdžba) u tankom elastičnom štapu :

→ Youngov modul

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\xi[x,t] - \frac{E}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\xi[x,t] = 0$$

ili skraćeno $\ddot{\xi} - v^2\xi'' = 0$ $\qquad \boxed{v^2 = \frac{E}{\rho}}$

→ opće rješenje $\xi[x,t] = f[x \pm vt]$

Uočavamo da je valna jdžba longitudinalnog vala matematički istovjetna valnoj jednadžbi transv. vala

26.

Izvedite izraz za prosječnu kinetičku energiju harmoničkog progresivnog vala. Napišite izraze za potencijalnu i ukupnu energiju harmoničkog progresivnog vala, diskutirajte.

Ilijić, str. 126-128

Polazimo od vala u kojem je otklon čestica od ravnotežnog položaja dan s $f[x-vt]$ (putuje udesno) te čiju energiju E želimo odrediti.
Tom valu dodajemo val $-f[x+vt]$ koji se širi u suprotnom smjeru i očekujemo da superpoziciji valova odgovara energija 2E.
Takvu superpoziciju smo odabrali zato što je u trenutku $t=0$ otkloni čestica dvaju valova poništavaju, što se jasno vidi iz izraza

$$y[x,t] = f[x-vt] - f[x+vt]$$

→ za $t=0$ daje $y[x,0] = 0$

S obzirom da je u tom trenutku sredstvo (val) u ravnotežnom stanju, njegova je potencijalna energija jednaka nuli.
Slijedi da se ukupna energija superpozicije, 2E, u tom trenutku sastoji isključivo od kinetičke energije.

$$2E = \int \frac{1}{2}\left(\dot{y}[x,0]\right)^2 dm$$

→ $dm = \mu dx$ (linijska gustoća mase sredstva)

$$\dot{y}[x,t] = \frac{d}{dt}y[x,t] = -vf'[x-vt] - vf'[x+vt]$$

za $t=0$ daje $\dot{y}[x,0] = -2vf'[x]$

⇓

$$E = \mu v^2 \int \left(f'[x]\right)^2 dx \qquad \boxed{\mu = \rho S}$$

$$E = \rho S v^2 \int \left(f'[x]\right)^2 dx$$

↳ $f[x] = A\cos kx$

$f'[x] = -kA\sin kx$

(zbog jednostavnosti ne pišemo još i Φ)

$$E = \mu v^2 \int (-kA\sin kx)^2 dx = \mu v^2 k^2 A^2 \int \sin^2 kx\, dx$$

$$E = \mu\omega^2 A^2 \int \sin^2 kx\, dx \qquad \boxed{\omega = kv}$$

srednja linijska gustoća energije vala :

$$\left\langle \frac{dE_k}{dx} \right\rangle = \frac{1}{4}\mu\omega^2A^2 = \frac{1}{4}\rho S\omega^2A^2$$

→ nastavak

– Potencijalna energija vala:

$$u(x) = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A_0^2 \sin^2(\omega t - kx)$$

→ srednja vrijednost $\sin^2(\omega t - kx)$ = srednjoj vrijednosti $\cos^2(\omega t - kx) = \frac{1}{2}$

→ dobivamo

$$\langle u(x)\rangle = \frac{1}{4}\mu\omega^2 A^2 \quad \text{vocI} \quad = \frac{dE_k}{dx}$$

– Ukupna energija:

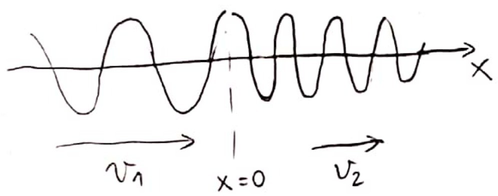
$$\frac{dE}{dx} = \frac{dE_k}{dx} + u(x) = 2\frac{dE_k}{dx} = \mu\omega^2 A_0^2 \sin^2(\omega t - kx)$$

$$\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A_0^2$$

– Ovdje vidimo da se energija širi na isti način kao i val, tj. ovisi o istoj kombinaciji $(\omega t - kx)$ kao i harmonički val.

27. Za progresivni transverzalni harmonički val koji nailazi na granicu sredstava izvedite izraze za amplitude transmitiranog i reflektiranog vala.

sredstvo 1: $x<0$ | sredstvo 2: $x>0$



upadni val → transmitirani val
← reflektirani val

} jednaka frekvencija ω, valni broj. $k_{1,2}$; valne duljine $\lambda_{1,2}$ → ovise o brzini širenja vala u sredstvu

$$k_{1,2} = \frac{\omega}{v_{1,2}} \overset{*}{=} \cancel{\omega}\cdot\frac{2\pi}{\lambda\cancel{\omega}} = \frac{2\pi}{\lambda_{1,2}}$$

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = kv}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{k}}$$

$$\boxed{\lambda\omega = 2\pi v} \; *$$

– upadni, reflektirani i transmitirani val možemo opisati izrazima:

$A_u \cos[k_1 x - \omega t]$ →

← $A_r \cos[-(k_1 x + \omega t + \Phi_r)]$

$A_t \cos[k_2 x - \omega t + \Phi_t]$ →

$x=0$

– zapis u kompleksnom obliku:

$$y_1[x,t] = A_u e^{i(k_1 x - \omega t)} + A_r e^{-i(k_1 x + \omega t + \Phi_r)}, \quad x \leq 0$$

$$y_2[x,t] = A_t e^{i(k_2 x - \omega t + \Phi_t)}, \quad x \geq 0$$

– Amplitude određujemo na temelju spojnih uvjeta (opisuju ponašanje f-ja y_1 i y_2 na samoj granici sredstva)

1. S.U.: Uže mora biti neprekinuto

→ tj. pri $x=0$ otklon superpozicije valova u sredstvu 1 jednak je otklonu valom u sredstvu 2

$$y_1[0,t] = y_2[0,t]$$

$$A_u + A_r e^{-i\Phi_r} = A_t e^{i\Phi_t}$$

2. S.U.: Ukupna sila koja djeluje na element sredstva mase Δm koji se nalazi na samom spoju teži u nulu kad $\Delta m \to 0$

→ napetost užeta je s obje strane jednaka → nagib užeta s lijeve i s desne strane spojišta mora biti jednak $y_1'[0,t] = y_2'[0,t]$

$$k_1 A_u - k_1 A_r e^{-i\Phi_r} = k_2 A_t e^{i\Phi_t}$$

nastavak na sljedeće str.

28.

Pokažite da superpozicijom dvaju progresivnih harmoničkih valova može nastati stojni val.

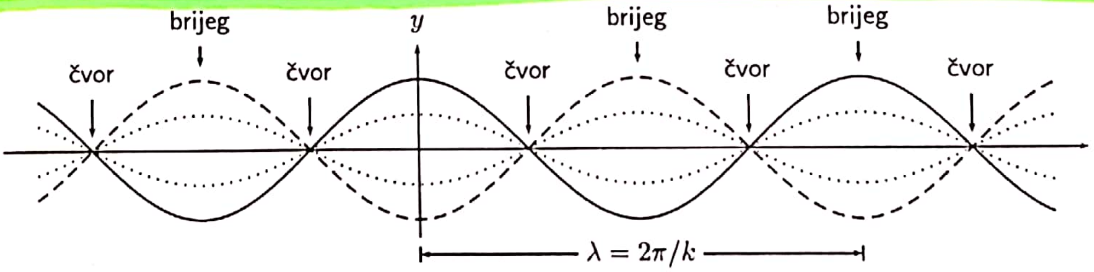
Stojni harmonijski val: Kad se dva putujuća transverzalna ili longitudinalna harmonijska vala jednake frekvencije i amplitude šire istim sredstvom u suprotnim smjerovima, njihovom superpozicijom nastaje gibanje u kojem više ne prepoznajemo gibanje vala u jednom ili u drugom smjeru, već isključivo transverzalno ili longitudinalno titranje čestica oko njihovog ravnotežnog položaja. Takvo gibanje zovemo stojnim valom.

Superpoziciju dvaju harmonijskih valova valne duljine $\lambda = 2\pi/k$, frekvencije ω i amplitude $A/2$, koji se šire u suprotnim smjerovima, možemo napisati kao

$$y[x,t] = \frac{A}{2}\cos[kx - \omega t] + \frac{A}{2}\cos[kx + \omega t] = \cdots = A\cos kx \cos\omega t. \qquad (7.26)$$

U konačnom izrazu, faktor $\cos\omega t$ govori o tome da čestice titraju frekvencijom ω, dok faktor $A\cos kx$ govori o tome da amplituda titranja ovisi o x-koordinati.

Valna duljina, čvorovi i brjegovi stojnog harmonijskog vala: Slika prikazuje otklon čestice od ravnotežnog položaja pri titranju transverzalnog stojnog vala opisanog izrazom (7.26). Puna crta prikazuje otklon čestica u trenutku $t = 0$, a isprekidane crte prikazuju otklon u nekim drugim trenucima vremena.



Uočavamo da je valna duljina stojnog vala, $\lambda = 2\pi/k$, jednaka valnoj duljini putujućih harmonijskih valova koji superpozicijom tvore stojni val. Zatim uočavamo da postoje položaji pri kojima čestice niti u kojem trenutku ne napuštaju svoj ravnotežni položaj. Takve točke zovemo čvorovima stojnog vala. Točke u kojima čestice titraju najvećom amplitudom zovemo brjegovima stojnog vala.

- nastavak zadatka (27)

- iz 2 spojna uvjeta slijedi:

$$\boxed{A_t e^{i\Phi_t} = \underbrace{\frac{2k_1}{k_1+k_2}}_{\text{pozitivan realan broj} \to \text{to znači } \Phi_t = 0} A_u} \qquad \boxed{A_r e^{-i\Phi_r} = \underbrace{\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}}_{\text{realan broj čiji predznak ovisi o } k_1 \text{ i } k_2} A_u}$$

(transmitirani val titra u fazi s upadnim valom)

$k_2 > k_1 \to \mu_2 > \mu_1 \to$ izraz je negativan $\to \Phi_r = \pi$

(reflektirani val titra u protufazi s upadnim valom)

- u protivnom, $\Phi_r = 0$, reflektirani val titra u fazi s upadnim valom

29.

Izvedite izraze za frekvencije i valne duljine stojnih valova na užetu linijske gustoće μ, napetom silom T i duljine L, s učvršćenim krajevima.

Stojni harmonijski val u sredstvu s čvrstim krajevima: Bilo koji čvor stojnog vala možemo shvatiti kao čvrst kraj sredstva u kojemu taj stojni val titra. Odaberemo li dva čvora stojnog vala i učvrstimo li sredstvo u tim točkama, stojni val može nastaviti titrati u području između tih točaka na nepromijenjen način, dok sredstvo izvan tog područja možemo ukloniti. Na taj smo način dobili stojni val koji titra u sredstvu konačne duljine L s čvrstim krajevima. Kad je riječ o transverzalnom valu, vjerojatno najpoznatiji primjer ovakvog gibanja je titranje gitarske žice.

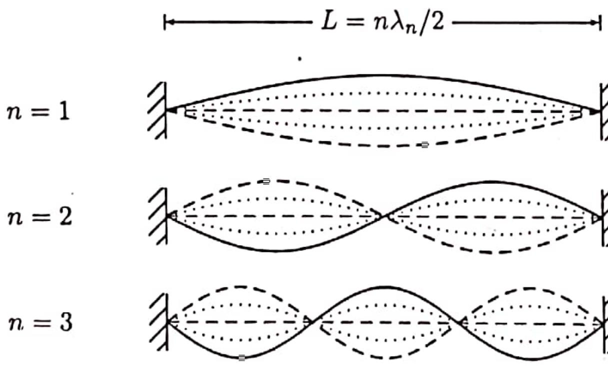
S obzirom na to da je udaljenost među čvorovima stojnog vala cjelobrojni umnožak polovice valne duljine (vidi gornju sliku), nameće se uvjet

$$L = n\frac{\lambda}{2}, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{7.27}$$

koji povezuje duljinu sredstva L i valnu duljinu stojnog vala λ. Na osnovu tog uvjeta možemo odrediti dopuštene valne duljine λ_n i frekvencije titranja ω_n stojnog vala u sredstvu zadane duljine L s čvrstim krajevima. Možemo pisati

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \qquad \omega_n = \frac{2\pi v}{\lambda_n} = n\frac{\pi v}{L}, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{7.28}$$

gdje smo koristili relaciju (7.25) koja povezuje valnu duljinu λ i frekvenciju ω harmonijskog vala s brzinom v širenja vala u danom sredstvu. Slika prikazuje titranje stojnog harmonijskog vala u sredstvu s čvrstim krajevima.



$$L = n\frac{\lambda}{2}, \quad n = 1, 2, \ldots \qquad \lambda\omega = 2\pi v$$

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad \omega_n = \frac{2\pi v}{\lambda_n} = n\frac{\pi v}{L}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$2\pi f = \omega_1 = \frac{\pi v}{L} = \frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} = \frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\rho S}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{T}{\rho r^2 \pi}}$$

$$f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho r^2 \pi}}$$

30. Izvedite izraz za promjenu frekvencije zvuka za
a) izvor koji se giba direktno prema ili od nepomičnog prijemnika
b) prijemnik koji se giba direktno prema ili od nepomičnog izvora
c) kada se i izvor i prijemnik gibaju direktno jedan prema drugome ili jedan od drugoga

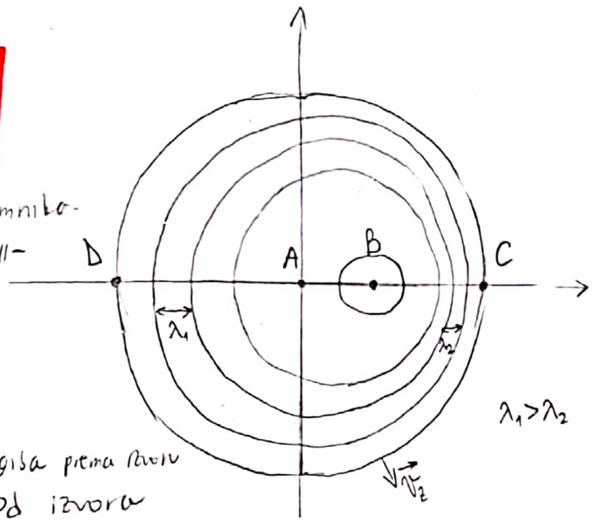
a) $\lambda' = \lambda \pm T v_i = \frac{v}{f_i} \pm \frac{v_i}{f_i} = \frac{v \pm v_i}{f_i}$

$f_p = \frac{v}{\lambda'} = \frac{f_i \cdot v}{v \pm v_i}$

$$\boxed{f_p = \frac{v}{v \mp v_i} f_i}$$

$+ \Rightarrow f_p < f_i$ izvor se giba od prijemnika

$- \Rightarrow f_p > f_i$ izvor −11− prema −11−



b) $v' = v \pm v_p$

$v' = \lambda \cdot T' = \frac{\lambda}{f_p}$

$f_p = \frac{v'}{\lambda} = \frac{v \pm v_p}{\lambda} \cdot \frac{v}{v} = \frac{v \pm v_p}{v} f_i$

$$\boxed{f_p = \frac{v \pm v_p}{v} f_i}$$

$+ \Rightarrow f_p > f_i$ prijemnik se giba prema izvoru

$- \Rightarrow f_p < f_i$ −11− od izvora

c) signal odaslan iz točke $r_i + v_i \Delta t_i$ u trenutku $t_i + \Delta t_i$ primljen je u točki $r_p + v_p \Delta t_p$ u trenutku $t_p + \Delta t_p$. Podrazumijeva se $\Delta t_{i,p} \ll t_p - t_i$

$$v_z (t_p - t_i) = |r_p - r_i|$$

$$v_z \big((t_p + \Delta t_p) - (t_i + \Delta t_i)\big) = \big|(r_p + v_p \Delta t_p) - (r_i + v_i \Delta t_i)\big|$$

$$\underbrace{v_z \big((t_p - t_i)} + (\Delta t_p - \Delta t_i)\big) = \big|(r_p - r_i) + (v_p \Delta t_p - v_i \Delta t_i)\big|$$

$$|r_p - r_i| + v_z (\Delta t_p - \Delta t_i) = \big|(r_p - r_i) + (v_p \Delta t_p - v_i \Delta t_i)\big| \quad /^2$$

$$\cancel{(r_p - r_i)^2} + \cancel{2}|r_p - r_i| v_z (\Delta t_p - \Delta t_i) + \cancel{v_z^2 (\Delta t_p - \Delta t_i)^2} = \cancel{(r_p - r_i)^2} + \cancel{2}(r_p - r_i)(v_p \Delta t_p - v_i \Delta t_i) + \cancel{(v_p \Delta t_p - v_i \Delta t_i)^2}$$

$$v_z |r_p - r_i| (\Delta t_p - \Delta t_i) = (r_p - r_i) \cdot (v_p \Delta t_p - v_i \Delta t_i)$$

$$\boxed{\hat{r}_{ip} = \frac{r_p - r_i}{|r_p - r_i|}}$$

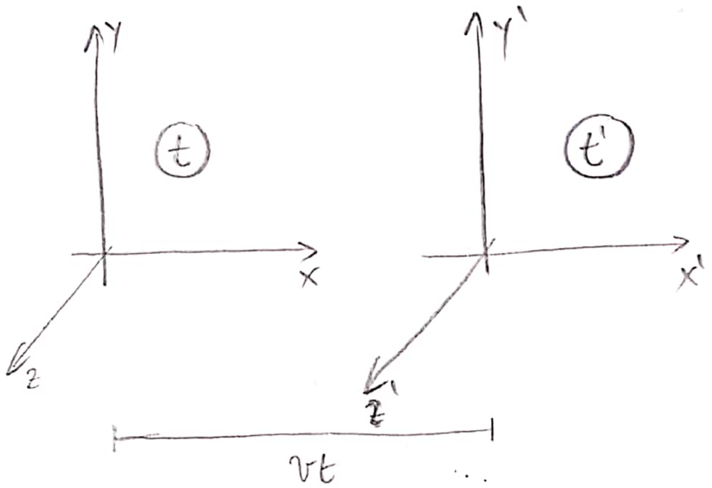
jedinični vektor usmjeren od točke r_i prema točki r_p

$$v_z \left(1 - \frac{\Delta t_i}{\Delta t_p}\right) = \hat{r}_{ip} \cdot \left(v_p - v_i \frac{\Delta t_i}{\Delta t_p}\right)$$

$$\frac{\Delta t_i}{\Delta t_p} = \frac{v_z - \hat{r}_{ip} \cdot v_p}{v_z - \hat{r}_{ip} \cdot v_i}$$

$$\boxed{\frac{f_p}{f_i} = \frac{v_z - \hat{r}_{ip} \cdot \vec{v}_p}{v_z - \hat{r}_{ip} \cdot \vec{v}_i}}$$

(3.1.) Neka je S inercijski referentni okvir, a referentni okvir S' neka se u odnosu na S gibu stalnom brzinom iznosa v. U tim referentnim okvirima možemo uvesti pravokutne koordinatne sustave tako da su im osi paralelne i da je gibanje referentnog okvira S' u odnosu na S odvija u smjeru x-osi.



- **Lorentzove transformacije** koordinata u tom slučaju glase:

$$\boxed{x' = \gamma(x - vt) \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}}$$

gdje je c brzina svjetlosti, a tzv. Lorentzov faktor γ i parametar potiska β dani su izrazima

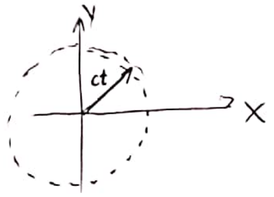
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c} < 1$$

- **Galilejeve transformacije**: $\boxed{x' = x - Vt \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = t}$

Razlike:

Pokažimo na primjer u kojem se svjetlost širi jednakom brzinom u svim referentnim okvirima. Postavimo li koordinatni sustav S' tako da se on u trenutku bljeska podudara s koordinatnim sustavom S, fizikalna situacija u S' nije ni po čemu različita od one u S, jer se i u referentnom okviru S' u trenutku $t=0$ u ishodištu koordinatnog sustava dogodio bljesak. Nadalje, ako se u referentnom okviru S' širenje svjetlosti pokorava istom zakonu fizike kao i u S, položaj svjetlosti u trenutku $t>0$ mora biti opisan jednadžbom koja je istovjetna jdž. i koja glasi

Shvatimo li tvrdnju da svjetlost u svim referentnim okvirima putuje brzinom c kao zakon fizike, lako je pokazati da on nije invarijantan na Galilejeve transformacije. Dovoljno je razmotriti širenje svjetlosti nastale vrlo kratkim bljeskom koji se u referentnom okviru S dogodio u trenutku $t=0$ u ishodištu pravokutnog koordinatnog sustava. Ako se ta svjetlost nesmetano širi brzinom iznosa c u svim smjerovima prostora, nakon što protekne ~~vrijeme~~ vrijeme t ona se nalazi na sferi polumjera $r=ct$.



Izrazimo li udaljenost svjetlosti od ishodišta r pomoću koordinata x, y i z, sferu na kojoj se svjetlost nalazi možemo opisati jednadžbom

$$r^2 = x^2+y^2+z^2=(ct)^2$$

želimo da se S' u odnosu na S giba brzinom iznosa V u pozitivnom smjeru x-osi

u S' glasi $r'^2 = x'^2+y'^2+z'^2=(ct')^2$

- Međutim, napišemo li Galilejevu transformaciju položaja u obliku: $x'=x-Vt$, $y'=y$, $z'=z$, $t'=t$

i primijenimo li ju na jdž. bljeska, umjesto očekivanog izraza, dobivamo:

$$(x'+Vt)^2+y'^2+z'^2=(ct')^2$$

što nije jdž. sfere sa središtem u ishodištu!

Time smo pokazali da fizikalni zakon prema kojem se svjetlost širi jednakom brzinom u svim referentnim okvirima nije invarijantan na Galilejeve transform.

Sada možemo pokazati da zakon širenja svjetlosti <u>jest</u> invarijantan na Lorentzove transformacije.

-Primjenom L. transform. dobivamo:

$$\gamma^2(x'+vt')^2+y'^2+z'^2=c^2\gamma^2(t'+vx'/c^2)^2$$

odnosno nakon sređivanja: $\vdots$

$$x'^2+y'^2+z'^2=(ct')^2$$

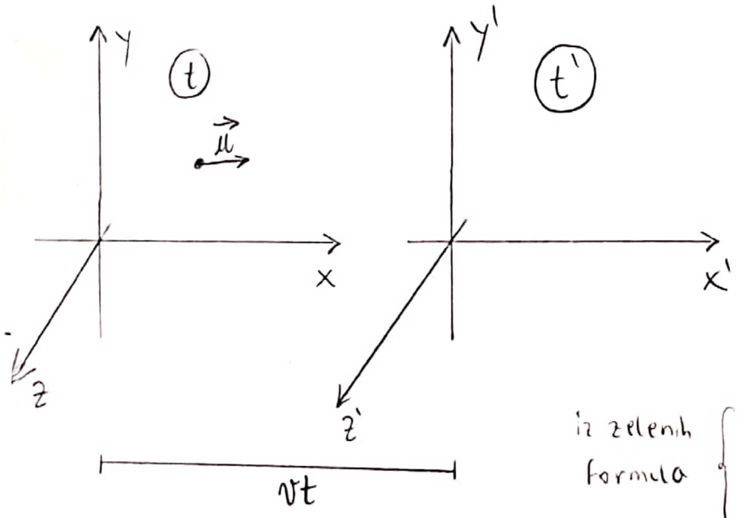
→ Izraz istovjetan polaznom izrazu!

Zaključujemo da je zakon širenja svjetlosti invarijantan na Lorentzove transformacije.

* pri malim brzinama ($v \ll c$), je opravdano koristiti Galilejeve transformacije umjesto Lorentzovih jer ćemo dobiti prihvatljive rezultate
(kad $v \to 0$ imamo $\beta \to 0$ i $\gamma \to 1$ te se L. trans. svode na G. tr.)

---

32. Skicirajte 2 inercijalna referentna sustava koji se jedan u odnosu na drugi gibaju brzinom $\vec{v}$ i česticu koja se giba brzinom $\vec{u}$ mjerenom u jednom od sustava. Izvedite Lorentzove transformacije za komponente brzine čestice.



$$\vec{u}: \quad u_x=\frac{dx}{dt}, \quad u_y=\frac{dy}{dt}, \quad u_z=\frac{dz}{dt}$$

$$\vec{u}': \quad u'_x=\frac{dx'}{dt'}, \quad u'_y=\frac{dy'}{dt'}, \quad u'_z=\frac{dz'}{dt'}$$

- na osnovi Lorentzovih transformacija slijedi da su komponente brzine čestice povezane relacijama:

iz zelenih formula

$$u'_x=\frac{u_x-v}{1-vu_x/c^2} \qquad u'_{y,z}=\frac{u_{y,z}\sqrt{1-\beta^2}}{1-vu_x/c^2}$$

$$u_x=\frac{u'_x+v}{1+u'_xv/c^2} \qquad u_{y,z}=\frac{u'_{y,z}}{\gamma(1+u'_xv/c^2)}$$

33. Vlastito vrijeme i dilatacija vremena:

Mirnom se opažaču čini da za nekoga tko se u odnosu na njega giba vrijeme teče sporije.

- **Vlastito vrijeme** = vrijeme koje proteče za opažača koji miruje u nekom inercijskom referentnom okviru
- Vlastiti sustav = sustav u kojem tijelo miruje
  - Ako mirni opažač u ref. okviru S' u nekom trenutku pokrene i ubrzo nakon toga zaustavi štopericu, vremenski razmak $\Delta t'$ među tim događajima koje on izmjeri odgovara njegovom vlastitom vremenu, a s obzirom na to da on miruje, prostorni razmak među tim događajima je $\Delta x'=0$. Sada pomoću transformacija (inverznih Lorentzovih) → za razmak među dvama događajima

$$\Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t') \quad \Delta Y = \Delta Y' \quad \Delta z = \Delta z' \quad \Delta t = \gamma(\Delta t' + v\Delta x'/c^2)$$

možemo izračunati vremenski razmak između ta dva događaja u referentnom okviru S. Dobivamo

$$\boxed{\Delta t = \frac{\Delta t_0'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}}$$ **DILATACIJA VREMENA**

što pokazuje da je vremenski razmak u ref. okviru S dulji od vremenskog razmaka u S'.

- Vlastita duljina i kontrakcija duljine:

- **Vlastita duljina** = duljina mjerena s obzirom na sustav u kojem objekt (npr. štap) miruje

- Ako je štap orijentiran u smjeru Y ili z-osi, duljina će u sustavu S biti jednaka duljini štapa u sustavu S'

$$d_0 = Y_2' - Y_1' = Y_2 - Y_1 = d$$
$$d_0 = z_2' - z_1' = z_2 - z_1 = d$$

- Ako je štap duljine d_0 u smjeru osi x' čvrsto vezan za sustav S', promatrač u S' izmjeri duljinu tog štapa $d_0 = x_2' - x_1'$
- promatrač u sustavu S pokraj kojeg taj štap prolazi brzinom v u smjeru osi x izmjerit će duljinu $d = x_2 - x_1$
- primjenimo L.t. $d = x_2 - x_1 = x_2'\sqrt{1-\beta^2} + \cancel{vt} - x_1'\sqrt{1-\beta^2} - \cancel{vt} = (x_2' - x_1')\sqrt{1-\beta^2} = \underbrace{d_0\sqrt{1-\beta^2}}_{\text{kontrakcija}}$

- Štap koji se relativno prema promatraču giba brzinom v, gledano promatraču ~~je~~ skraćen za faktor $\sqrt{1-\beta^2}$. To je Lorentzova kontrakcija.

- Zaključak: Promatrač prema kojem se tijelo giba brzinom v opaža kontrakciju duljine tijela u smjeru gibanja za faktor $\sqrt{1-\beta^2}$. Dimenzije okomito na smjer gibanja ~~za~~ promatrač gledajući nepromijenjene.

34. Napišite izraz za relativističku količinu gibanja i relativističku energiju. Primijenite teorem o radu i kinetičkoj energiji i izvedite izraz za relativističku kinetičku energiju.

a) Izraz za relativističku količinu gibanja (čestice mase m koja se giba brzinom u glasi):

$$\boxed{\vec{p} = \gamma m \vec{u}}$$

pri čemu je $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ → tzv. Lorentzov faktor

b) Relativistički izraz za kinetičku energiju možemo izvesti napišemo li element kinetičke energije dK kao element rada dW koji sila F obavlja pomičući česticu za dr.

$$dK = dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot d\vec{p} = \vec{u} \cdot d\vec{p}$$

definicija brzine

$$= u\, d\left(\frac{mu}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}\right) = \ldots = \frac{mu\, du}{\left(1-\left(\frac{u}{c}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

• učiti

$$K = \int dK = \int_0^u \frac{mu'\, du'}{\left(1-(u'/c)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \ldots = (\gamma - 1)mc^2$$

konačna brzina

početna brzina

u' smo uveli kako bismo ju razlikovali od gornje granice integracije

c) relativistička energija

$$\boxed{E = \gamma mc^2 = mc^2 + K}$$

Lorentzov faktor

energija mirovanja čestice

kinetička energija

35. Pokažite da se nabijena čestica u homogenom magnetskom polju može gibati po kružnici, odredite polumjer kružnice (za zadano: m, q, v i B).

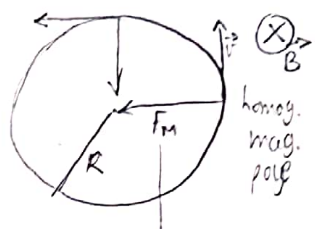
okomito na brzinu

– na nabijenu česticu djeluju 2 sile u različitim smjerovima ; Lorentzova i centripetalna

– budući da se čestica giba po kružnici stalnog polumjera (po pretpostavci), te dvije sile jednake su po iznosu :

$$\vec{F}_L = q(\underbrace{\vec{E}}_{\vec{E}=\emptyset} + \vec{v}\times\vec{B}) = q(\vec{v}\times\vec{B}) = q(v\cdot B\cdot 1) = \underline{qvB}$$

$\vec{v}$ okomit na B



$$F_{cp} = m\cdot a = m\cdot a_{cp} = \underline{\frac{mv^2}{R}}$$

$$\boxed{F_L = F_{cp}}$$

$$qvB = \frac{mv^2}{R}$$

$$R = \frac{mv^{\cancel{2}}}{q\cancel{v}B} = \underline{\frac{mv}{qB}}$$

magnetska sila

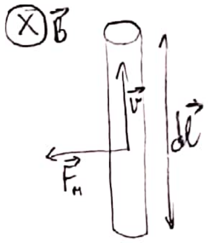
$F_M = q\cdot\vec{v}\times\vec{B}$

$dW = \vec{F}_M\cdot d\vec{l}$

$= q(\vec{v}\times\vec{B})\cdot\vec{v}dt$

$\vec{v}\perp\vec{v}\times\vec{B} \Rightarrow dW = 0$

36. Izvedite izraz za silu na element vodiča kojim teče struja I, a nalazi se u magnetskom polju $\vec{B}$.



I. jednostavnija verzija :

$$F = q\cdot(\underbrace{\vec{E}}_{=\emptyset} + \vec{v}\times\vec{B})$$

$$= q(\vec{v}\times\vec{B}) = q(v\cdot B\cdot \underbrace{\sin 90^\circ}_{\perp \Rightarrow 1}) = qvB = \underbrace{q\frac{L}{\Delta t}}_{=I}\cdot B$$

$$= \underline{BIL}$$

$$\boxed{v = \frac{L}{\Delta t}}$$

II. Iljić - Horvat verzija :

① $d\vec{F} = dq(\vec{v}\times\vec{B})$

dq = element naboja koji se giba u mag. polju

– ako se radi o el. struji I koja teče tankim vodičem, element naboja dq koji u elementu vremena dt proteče žicom i pomak dl koji on pritom napravi duž žice možemo izraziti kao

② $\boxed{dq = I\cdot dt}$ $\boxed{dl = \vec{v}\cdot dt}$

③ $d\vec{F} = I\cancel{dt}\left(\frac{dl}{\cancel{dt}}\times\vec{B}\right) = \underline{I\,dl\times\vec{B}}$

dl = element duljine vodiča

– ukupnu silu na tanki vodič (žicu) kojom teče struja u magnetskom polju dobivamo integracijom po čitavoj duljini vodiča

37.

Pomoću Gaussovog zakona izvedite: polje točkastog naboja, polje unutar i izvan jednoliko nabijene kugle, polje jednoliko nabijene ravne tanke žice, polje jednoliko nabijene plohe.

(izvodi prema Horvatu: Fiz 2)

$$\boxed{\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{unutra}}{\varepsilon_0}}$$

Gaussov zakon za el. polje

ili

prva Maxwellova jdžba u integralnom obliku za polje u vakuumu

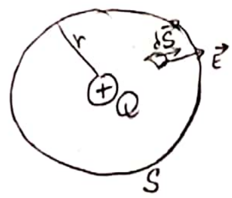
a) polje točkastog naboja

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{unutar\ S}}{\varepsilon_0}$$

↓

uzmamo površinu kugline plohe polumjera r, el. polje je svuda okomito na površinu

$$\int \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int E \cdot dS \cdot \cos 0^\circ = E\int dS = E 4r^2\pi \quad //\ \text{raspišemo lijevu stranu jdžbe}$$

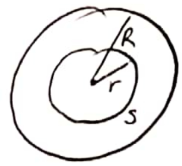


$$E\,4r^2\pi = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{1}{4\varepsilon_0\pi}\cdot\frac{Q}{r^2} = k\cdot\frac{Q}{r^2}}$$

* uoči ⟹ jednako el. polje iz Coulombovog zakona!

b) polje unutar jednoliko nabijene kugle $(r = r_< < R)$



$$\oint_{S_<} \vec{E}_<\cdot d\vec{S} = \frac{Q_<}{\varepsilon_0}$$

$Q_<$: naboj unutar kugle polumjera $r_<$

$\vec{E}_<$ = odgovarajuće el. polje

- budući da je gustoća naboja ρ jednolika (homogena), to znači da je

$$\rho = \frac{Q_{ukupno}}{V_{ukupno}} = \frac{Q}{4R^3\pi/3} = \frac{Q_<}{V_<} = \frac{Q_<}{4r_<^3\pi/3} \Rightarrow Q_<\cdot \cancel{4}R^3\frac{\cancel{\pi}}{\cancel{3}} = Q\,\cancel{4}r_<^3\frac{\cancel{\pi}}{\cancel{3}}$$

$$\boxed{Q_< = Q\,\frac{r_<^3}{R^3}}$$

pa Gauss daje:
$$E_<\oint_{S_<} dS = E_<\cdot 4r_<^2\pi = \frac{Q_<}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}Q\cdot\frac{r_<^3}{R^3}$$

$$\boxed{E_<(r) = k\cdot\frac{Q}{R^3}\cdot r} \quad (r<R)$$

* uoči da el. polje raste linearno s udaljenošću. Za r = R (površina kugle) dobijemo „obični" Coulombov zakon $E = k\frac{Q}{R^2}$

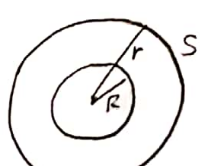
c) polje izvan kugle $(r = r_> > R)$

- sličan rezultat kao u prethodnom primjeru (postupak)

→ cijeli naboj Q obuhvaćen Gaussovom plohom!

$$E_>(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r_>^3}\cdot r$$

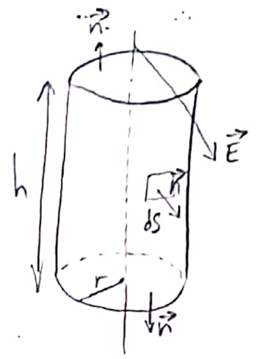
$$\boxed{E = \frac{1}{4\varepsilon_0\pi}\frac{Q}{r^2} = k\frac{Q}{r^2}} \quad r>R$$



→

d) polje jednoliko nabijene ravne tanke žice

- $\vec{E}$ je okomito na žicu i gleda radijalno prema van
- odabiremo Gaussovu površinu koja predstavlja plašt valjka visine h i njegove 2 baze polumjera r



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{unutar S}}{\varepsilon_0}$$

$$= \underbrace{\int_{baze} \vec{E} \cdot d\vec{S}}_{\emptyset} + \int_{plašt} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \int_{plašt} dS = E \cdot 2r\pi h$$

jer je jedinični vektor površine (gleda usmjeren žice) okomit na polje $\vec{E}$ pa je skalarni produkt ta dva vektora jednak nuli

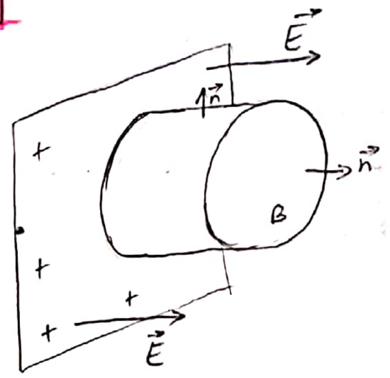
- unutar valjka visine h nalazi se naboj $Q_{unutra} = Q_u = \lambda \cdot h = \frac{Qh}{l}$

$$\rightarrow \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot \int_{plašt} dS = E \cdot 2r\pi h = \frac{Q_u}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda \cdot h}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2r\pi\varepsilon_0} = k \cdot \frac{2\lambda}{r}}$$ gdje je $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

e) polje jednoliko nabijene plohe

- za Gaussovu površinu uzimamo plašt valjka + njegove 2 baze



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{unutar S}}{\varepsilon_0}$$

$$= \int_{(2 baze)} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \underbrace{\int_{(plašt)} \vec{E} \cdot d\vec{S}}_{=\emptyset}$$

jer je jedinični vektor površine koji gleda okomito na plašt) okomit na polje $\vec{E}$ pa je skalarni produkt jednak nuli

$$\int_{2 baze} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \int_{2 baze} dS = E\int dS + E\int dS = \underline{E \cdot 2S}$$

- unutar valjka čija je površina baze S nalazi se naboj $Q_{unutra} = Q_u$ koji je jednak $Q_u = \sigma \cdot S$

pa dobivamo: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot \int_{(2 baze)} dS = E \cdot 2S = \frac{Q_u}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

38.

Izvedite izraz za elektromotornu silu pri gibanju vodiča u magnetskom polju.

$\vec{F}_e = q\vec{E}$

$\vec{F}_M = q(\vec{v} \times \vec{B})$

$\vec{F}_{električna} = \vec{F}_{magnetska}$ → do uravnoteženja dođe kada F_M više nije dovoljno jaka da i dalje premješta elektrone

$\cancel{q}\vec{E} = \cancel{q}(\vec{v} \times \vec{B})$

$E = vB$

(Horvat str. 189/190/191)

Odgovarajuća razlika potencijala koju je stvorila električno polje $\vec{E}$ jednaka je

$$U = El = Blv$$

- EMS $i = \mathcal{E}_i$ (inducirana elektromotorna sila) dobivena je gibanjem vodiča u (stalnom) magnetskom polju. Postavimo li ovaj vodič na „U vodič" (tračnice) omogućit ćemo struji da teče
- $\mathcal{E}_i$ možemo odrediti tako da nađemo rad izvršen pri premještanju naboja q duž vodiča duljine l:

$$W = Fl = qvBl$$

→ EMS je jednaka radu po naboju $\mathcal{E}_i = \frac{W}{q}$ tj $\boxed{\mathcal{E}_i = Blv}$ *!

- općenitiji izraz (za proizvoljne orijentacije vodiča, smjera njegovog gibanja i polja $\vec{B}$)

$$!* \quad \boxed{\mathcal{E}_i = \vec{l}(\vec{v} \times \vec{B})}$$

39.

Koristeći Ampère-Maxwellov zakon izračunajte magnetsko polje beskonačnog ravnog tankog vodiča, a zatim učinite isto primjenom Biot-Savartovog zakona.

a) izvan vodiča

$\boxed{\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I}$

$B \oint_l dl = \mu_0 I$

$B\, 2r\pi = \mu_0 I$

$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi \cdot r}}$

b) unutar vodiča

$\boxed{\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot I_{unutra}}$

$J = \frac{I}{R^2\pi} \times \frac{I_{unutra}}{r^2\pi}$

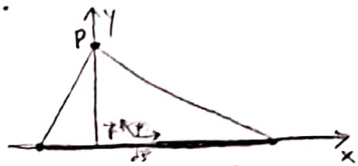
$I_{UN} = I \frac{r^2}{R^2}$

$B \cdot 2\pi \cancel{r} = \mu_0 \frac{r^{\cancel{2}}}{R^2} I$

$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r}$

c) Biot-Savartov zakon

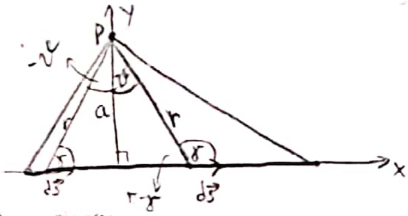
$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I\, d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}}$



smjer od $d\vec{s}$ do točke P

$d\vec{s} \times \hat{r} = |d\vec{s}||\hat{r}|\sin(\gamma)\hat{k}$
$= (ds)(1)\sin(\gamma)\hat{k}$
$= ds \cdot \sin(\gamma)\hat{k}$

$d\vec{s} \times \hat{r}$, je u smjeru jediničnog vektora duž $+\hat{k}$



desna strana:
$\sin\gamma = \sin(\pi - \gamma) = \frac{a}{r} = \cos\vartheta$

$\sin\gamma = \cos\vartheta$

lijeva strana:
$\sin\gamma = \frac{a}{r} = \cos(-\vartheta) = \cos(\vartheta)$

dakle $\sin\gamma = \cos\vartheta$

↓

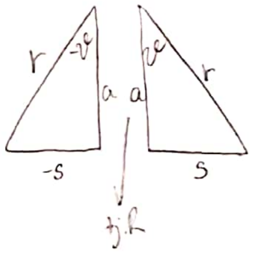
$d\vec{s} \times \hat{r} = ds \cdot \sin\gamma\, \hat{k}$
$= ds \cos\vartheta\, \hat{k}$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I\, d\vec{s}\times \hat{r}}{r^2}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I\cos\vartheta\, ds\, \hat{k}}{r^2}$$

sjeti se s prileshunice $\boxed{\cos\vartheta = \frac{a}{r}}$

$$r = \frac{a}{\cos\vartheta}$$



$$tg\vartheta = \frac{s}{a}$$

$$s = a\cdot tg\vartheta \,/'$$

$$ds = a\frac{1}{\cos^2\vartheta}\,d\vartheta$$

$a\sec^2\vartheta\, d\vartheta$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\frac{\cos\vartheta\, ds}{r^2}\,\hat{k}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{\cos\vartheta\, \cancel{a}\cdot\cos^2\vartheta}{\cancel{\cos^3\vartheta}\cdot a^2}\, d\vartheta\,\hat{k}$$

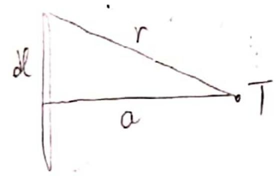
$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\frac{\cos\vartheta}{a}\,d\vartheta\,\hat{k}$$

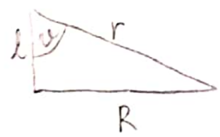
$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\vartheta\, d\vartheta\,\hat{k}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\cdot\cancel{2} = \underline{\frac{\mu_0 I}{2\pi R}}$$

$a = R$ zapravo

2. način





$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{I\,d\vec{r}'\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{I\,dl\times r}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{I\cdot dl\cdot \cancel{r}\cdot\sin\vartheta}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{I\,dl\cdot\sin\vartheta}{r^2}$$

(*)

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}I\int\frac{dl\sin\vartheta}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\left(-\frac{R}{\sin^2\vartheta}\right)\cdot\left(\frac{\sin^3\vartheta}{R^2}\right) = \frac{\mu_0}{4\pi}I\int_0^{2\pi}\frac{-\sin^2\pi}{R}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}I\cdot 2\cdot\left(\frac{\cos\vartheta}{R}\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi}\cdot\frac{I}{R}\cdot 1$$

$$= \underline{\frac{\mu_0 I}{2\pi R}}$$

$$tg\vartheta = \frac{R}{l}$$

$$l = \frac{R}{tg\vartheta} = R\,ctg\vartheta\,/'$$

$$dl = \frac{1}{\sin^2\vartheta}R$$

$$\sin\vartheta = \frac{R}{r}$$

$$r = \frac{R}{\sin\vartheta}$$

isto vrijedi i za unutar vodiča, samo je I unutarnja

(*)

$l \to 0 \Rightarrow \vartheta = 0$

$l \to \infty \Rightarrow \vartheta = \frac{\pi}{2}$

40. Krenuvši od Maxwellovih jednadžbi u vakuumu izvedite valnu jednadžbu za $\vec{E}$ ili $\vec{B}$.

- u okviru elektromagnetizma, vakuumom smatramo stanje u prostoru u kojem nije prisutna materija, ali je prisutno elektromagnetsko polje $\rightarrow$ $\rho = 0$ (volumna gustoća el. naboja), $J = 0$

- <u>Maxwellove jdžbe u vakuumu:</u>

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \leftarrow \text{HLDJ}$$

a po definiciji je $\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = c$ brzina svjetlosti u vakuumu

a) <u>izvod valne jednadžbe za $\vec{E}$</u>

(tzv. „opći identitet")
⊛ relacija iz formula:

$$\boxed{\nabla \times (\nabla \times a) = \nabla(\nabla \cdot a) - \nabla^2 a}$$

- polazimo od laplasijana električnog polja $\nabla^2 E$ i raspisujemo po relaciji ⊛

$$\nabla^2 \vec{E} = \nabla(\underbrace{\nabla \cdot \vec{E}}_{\text{divergenciju el. polja } = \emptyset}) - \nabla \times (\underbrace{\nabla \times \vec{E}}_{\text{rotaciju el. polja raspišemo}})$$

$$\nabla^2 \vec{E} = -\nabla \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = \nabla \times \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(\underbrace{\nabla \times \vec{B}}_{\text{rotacija magnetskog polja}}) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = c^{-2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

valna jednadžba električnog polja u vakuumu:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \vec{E} = 0}$$

b) <u>izvod valne jednadžbe za $\vec{B}$</u>

- polazimo od laplasijana magnetskog polja

$$\nabla^2 \vec{B} = \nabla(\underbrace{\nabla \cdot B}_{=\emptyset}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{B})$$

$$\nabla^2 \vec{B} = -\nabla \times \left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{E}) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = \overbrace{\mu_0 \varepsilon_0}^{c^{-2}} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

valna jednadžba magnetskog polja u vakuumu

$$\boxed{\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \vec{B} = 0}$$

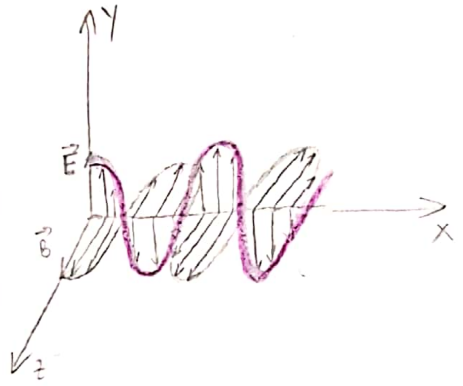
41.

Napiši izraz za vektore $\vec{E}$ i $\vec{B}$ ravnog linearno polariziranog elektromagnetskog vala, te pokažite da su oni rješenja odgovarajućih valnih jednadžbi. Skicirajte vektore $\vec{E}$ i $\vec{B}$ i smjer njihovog širenja.

rješenja valnih jdžbi:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad \vec{E}(x,t) = \vec{j}E_0\cos(kx-\omega t)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \qquad \Rightarrow \vec{B}(x,t) = \vec{k}B_0\cos(kx-\omega t)$$



$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$-k^2E_0\cancel{\cos(kx-\omega t)} + \frac{1}{c^2}\omega^2E_0\cancel{\cos(kx-\omega t)} = 0 \quad / : E_0\cos(kx-\omega t)$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \Rightarrow \frac{k^2}{\omega^2} = \frac{\omega^2}{c^2\omega^2} = \frac{1}{c^2} \checkmark\checkmark$$

$$\boxed{k = \frac{\omega}{c}} \quad \boxed{\omega = 2\pi f} \quad \boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}}$$

isto vrijedi za $\vec{B}$:

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

$$-k^2B_0\cancel{\cos(kx-\omega t)} + \frac{1}{c^2}\omega^2B_0\cancel{\cos(kx-\omega t)} = 0 \quad / : B_0\cos(kx-\omega t)$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

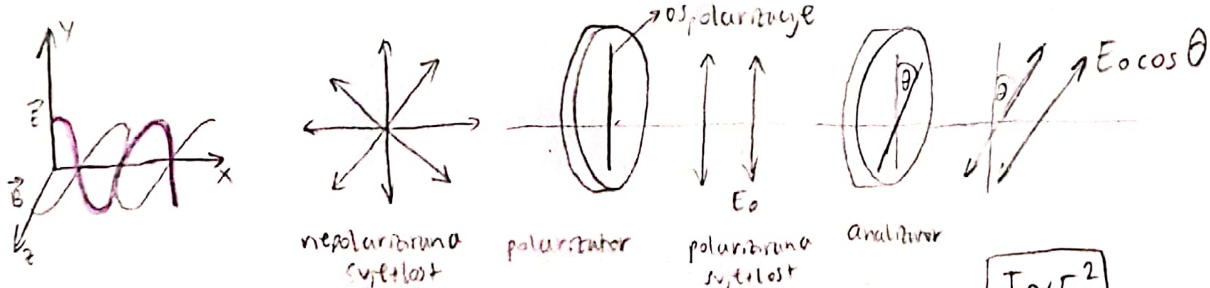
tj.

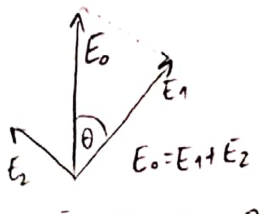
$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_0\cos(kx-\omega t) & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}\left(-kE_0\sin(kx-\omega t)\right) - 0 = -kE_0\sin(kx-\omega t) = -\omega B_0\sin(kx-\omega t)$$

$$\frac{E_0}{B_0} = \frac{\omega}{k} = c \checkmark\checkmark$$

42.

Opišite polarizaciju elektromagnetskog vala (koje se polje koristite za opis, uloga polarizatora) i izvedite Malusov zakon.





$E_0 = E_1 + E_2$

$$\boxed{I \sim E^2}$$

$$\cos\theta = \frac{E_1}{E_0} \quad E_1 = E_0\cos\theta$$

$$E_1^2 = E_0^2\cos^2\theta$$

$$\boxed{I_{trans} = I_0\cos^2\theta}$$

voći; I_0 = konst., dakle I je proporcionalan $\cos^2\theta$

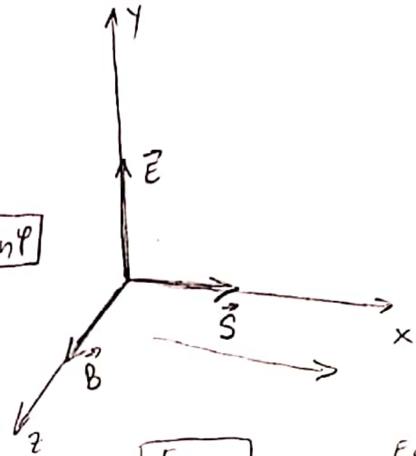
za nepolariziranu svjetlost: $\langle\cos^2\theta\rangle = \frac{1}{2}$ (usrednjeno) $\Rightarrow \boxed{I_{trans} = \frac{1}{2}I_0}$

43.

Napišite Poyntingov vektor ravnog vala čije je električno polje dano izrazom $\vec{E}(x,t) = E_0\vec{j}\cdot\cos(\omega t - kx)$. Konačni izraz mora sadržavati smjer, iznos i jedinicu.

- Poyntingov vektor = mjera intenziteta elektromagnetske radijacije

$$\boxed{\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}}$$



$$\vec{E}(x,t) = \hat{j}E_0\cos(kx-\omega t)$$

$$\vec{B}(x,t) = \hat{k}B_0\cos(kx-\omega t)$$

po formuli $\boxed{a\times b = ab\sin\varphi}$

$$\vec{S}(x,t) = \frac{1}{\mu_0}\left(\hat{j}E_0\cos(kx-\omega t)\right)\times\left(\hat{k}B_0\cos(kx-\omega t)\right)$$

$$= \frac{1}{\mu_0}\frac{E_0^2}{c}\cos^2(kx-\omega t)\cdot\underbrace{(\hat{j}\times\hat{k})}_{\vec{i}}\cdot\underbrace{\sin 90^\circ}_{1}$$

$$\boxed{\frac{E_0}{B_0} = c} \to B_0 = \frac{E_0}{c}$$

$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}}$$

$$= \vec{i}c^{\cancel{2}}\varepsilon_0\frac{E_0^2}{\cancel{c}}\cos^2(kx-\omega t) = \underline{\vec{i}c\varepsilon_0E_0^2\cos^2(kx-\omega t)\left[\frac{W}{m^2}\right]}$$

$$c^2 = \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}$$

$$\mu_0 = \frac{1}{c^2\varepsilon_0}$$

$$\frac{1}{\mu_0} = c^2\varepsilon_0$$

dodatak:

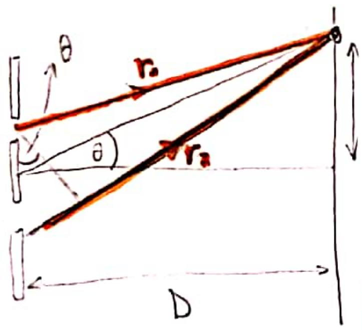
$$I = \frac{\text{snaga}}{\text{površina}} = \frac{P}{4\pi r^2} = \langle\vec{S}(x,t)\rangle = \underline{\frac{1}{2}c\varepsilon_0E_0^2\left[\frac{W}{m^2}\right]}$$

jer je $\langle\vec{S}\rangle = \hat{i}\frac{1}{2}c\varepsilon_0E_0^2$

44. 45.

44. Izvedite izraz za položaje maksimuma intenziteta na zastoru u Youngovom pokusu.

45. Izvedite izraz za položaje minimuma intenziteta na zastoru u Youngovom pokusu.



geometrijska razlika hoda: $\delta = r_2 - r_1 = d\sin\theta$

$\delta = d\sin\theta = m\lambda$ (maksimum će biti u točki P ako je optička (ovdje i geometrijska) razlika hoda jednaka $m\lambda$)

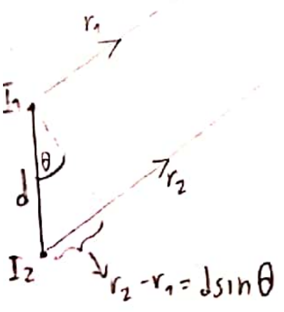
$\delta = d\sin\theta = (m+\frac{1}{2})\lambda$ (minimum će biti -II- jednaka $(m+\frac{1}{2})\lambda$)

za $m = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$

(Horvat str. 290)

* kut pod kojim se vidi točka na zastoru u kojoj promatramo interferenciju je malen jer je u stvarnom pokusu razmak pukotina jednak manje od desetine milimetra, a udaljenost do zastora je 2-3 m. Zato možemo s velikom točnošću primijeniti geometrijske odnose kao na slici,

$\boxed{\theta \simeq \sin\theta \simeq tg\theta \text{ jer je } \theta \text{ vrlo malen!}}$



Koji će uvjet biti ispunjen, ovisi o položaju (koordinati y) točke P. Gornje uvjete možemo napisati pomoću koordinate y i udaljenosti zastora od pukotina D, odnosno iz slike vidimo da je

$tg\theta = \frac{y}{D}$, a budući da je θ vrlo malen, vrijedi dakle

$$\frac{\Delta}{d} \approx \frac{y}{D}$$

- prema uvjetima za maksimume i minimume, iz gornje relacije možemo napisati y-položaje minimuma i maksimuma:

• položaji maksimuma

$$y_{maks} = 0,\ \pm 1\frac{\lambda D}{d},\ \pm 2\frac{\lambda D}{d},\ \pm 3\frac{\lambda D}{d}\dots = m\cdot\frac{\lambda D}{d} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

• položaji minimuma

$$y_{min} = 0,\ \pm 1\frac{\lambda D}{2d},\ \pm \frac{3}{2}\frac{\lambda D}{d},\ \pm \frac{5}{2}\frac{\lambda D}{d}, \dots = \left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda D}{d}$$

$(m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

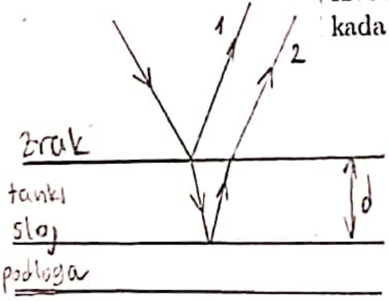
- iz gornjih se izraza vidi da su maksimumi jednoliko razmaknuti (ne ovise o kutu), odnosno razmak maksimuma Δy_{maks} jednak je

$$\boxed{\Delta y_{maks} = \frac{\lambda D}{d} = \Delta y_{min}}$$

46. 47.

Izvedite uvjete maksimuma za interferenciju pri refleksiji na tankom filmu u slučaju kada je $n_{sloj} > n_{podloga}$.

Izvedite uvjete maksimuma za interferenciju pri refleksiji na tankom filmu u slučaju kada je $n_{sloj} < n_{podloga}$.



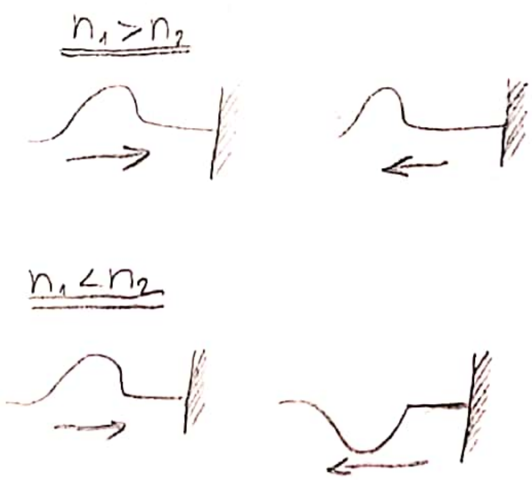
Razlika faza između valova 1 i 2:
- promjene faze vala 1 i 2 za π, razlika je 0
- geometrijska razlika puteva (za okomite valove) je $2d$

$n_{sloj} > n_{zraka}$

$n_{sloj} < n_{podloga}$

1. slučaj
1. → pomak u fazi za π
2. → nema pomaka u fazi

2. slučaj
1. → pomak u fazi za π
2. → pomak u fazi za π



uvjet za max: ($n_s > n_p$, $n_s > n_z$)

$$2d = \frac{\lambda_n}{2};\ \frac{3\lambda_n}{2}$$

$$2d = \left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda_n$$

$$\lambda_n = \frac{\lambda}{n} \quad \text{ubacimo}$$

$$\boxed{2nd = \left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda}$$

$(m = 0, 1, 2, \dots)$

uvjet za max: ($n_s < n_p$, $n_s > n_z$)

$$2d = \lambda_n$$

$$2d = m\cdot\lambda_n$$

$$\lambda_n = \frac{\lambda}{n} \quad \text{ubacimo}$$

$$\boxed{2nd = m\lambda}$$

$(m = 0, 1, 2, \dots)$