Zadatak 1.

RJEŠENJE Matrice A i B komutiraju ako je $AB = BA$. Dakle, računamo:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda \\ 0 & \lambda & \lambda - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda^2 + \lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda^2 + \lambda - 1 & 1 \end{bmatrix},$$
$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda \\ 0 & \lambda & \lambda - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda^2 + \lambda & 2\lambda^2 + \lambda - 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Da bi ove matrice bile jednake, potrebno je samo provjeriti jednakost elemenata na koordinatama $(2, 3)$ i $(3, 2)$ ovih dviju matrica. To daje jedan uvjet: $2\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$. Dakle, matrice komutiraju za $\lambda_1 = 1/2$ i $\lambda_2 = -1$. Sada vidimo da za te vrijednosti λ vrijedi

$$AB = BA = I.$$

Iz ovoga odmah slijedi da je B inverzna matrica matrice A. $\square$

Zadatak 2.

<u>RJEŠENJE</u> **(a)** Prvo ćemo primjeniti Binet-Cauchyjev teorem na umnožak $2k$ matrica:

$$\det\left(A^k B^k\right) = (\det(A))^k (\det(B))^k = (\det(A)\det(B))^k.$$

Sada jednom primjenom B-C teorema na matrice A i B i potom primjenom teorema na umnožak k matrica, dobivamo

$$(\det(A)\det(B))^k = (\det(AB))^k = \det\left((AB)^k\right).$$

(b) Kako je $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, imamo

$$\det\left((AB)^{-1}\right) = \det\left(B^{-1}\right)\det\left(A^{-1}\right) = \det\left(A^{-1}\right)\det\left(B^{-1}\right) = \det\left(A^{-1}B^{-1}\right).$$

Primjenili smo B-C teorem u prvoj i posljednjoj jednakosti.

(c) Za $A, B \in \mathcal{M}_n$, gdje je B regularna, i za $\lambda \in \mathbb{R}$, imamo

$$\begin{aligned} B^{-1}AB + \lambda I &= B^{-1}AB + \lambda B^{-1}B = B^{-1}AB + B^{-1}(\lambda B) \\ &= B^{-1}(AB + \lambda B) = B^{-1}((A + \lambda I)B) \\ &= B^{-1}(A + \lambda I)B. \end{aligned}$$

Sada primjenom B-C teorema imamo

$$\det\left(B^{-1}AB - \lambda I\right) = \det\left(B^{-1}\right)\det(A + \lambda I)\det(B).$$

Konačno, budući da je $\det\left(B^{-1}\right) = (\det(B))^{-1}$ (što je, ponovno, posljedica B-C teorema), slijedi tvrdnja zadatka. $\square$

Zadatak 3.

RJEŠENJE **(a)** Skripta.

(b) Kako je matrica A gornje trokutasta, lako se vidi da je $\det(A) = 6 \neq 0$, pa je A regularna. Ista tvrdnja slijedi iz (c) podzadatka: matrica A je umnožak elementarnih matrica, koje su regularne, pa je i A regularna.

(c) Pomnožimo li matricu A *slijeva* s elementarnom matricom E, rezultat je matrica EA dobivena primjenom elementarne transformacije, koja odgovara toj elementarnoj matrici, na retcima matrice A . Napravimo li k elementarnih transformacija na retcima, koje odgovaraju matricama $E_1, \ldots, E_k$, rezultat je matrica $E_k \ldots E_1 A$. Ako je $E_k \ldots E_1 A = I$, slijedi da je $E_k \ldots E_1$ inverz od A te vrijedi

$$A = (E_k \ldots E_1)^{-1} = E_1^{-1} \ldots E_k^{-1}.$$

Kako je inverz elementarne matrice ponovno elementarna matrica, bit ćemo gotovi jednom kad pokažemo da je A ekvivalentna s jediničnom matricom.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Prvo smo pomnožili drugi red s $1/2$, što odgovara elementarnoj matrici $E_2(1/2)$. Potom smo pomnožili treći red s $1/3$, što odgovara matrici $E_3(1/3)$. Zatim smo drugi redak pomnožen s -1 dodali prvom, što odgovara elementarnoj matrici $E_{21}(-1)$. Konačno, dodali smo treći redak pomnožen s -1 drugom retku, što odgovara matrici $E_{32}(-1)$. Stoga se gornji niz ekvivalencija može zapisati kao

$$E_{32}(-1)E_{21}(-1)E_3(1/3)E_2(1/2)A = I \implies$$

$$A = E_2(1/2)^{-1}E_3(1/3)^{-1}E_{21}(-1)^{-1}E_{32}(-1)^{-1} = E_2(2)E_3(3)E_{21}(1)E_{32}(1).$$

$\square$

Zadatak 4.

<u>RJEŠENJE</u> Sustav rješavamo Gaussovom metodom: radimo elementarne transformacije na retcima proširene matrice sistema.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \lambda & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & \lambda & 3 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 & 3 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & \lambda & 3 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 3-3\lambda \end{array}\right].$$

Za $\lambda = 1$, gornja matrica glasi

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Rang gornje matrice je 1, pa je dimenzija prostora rješenja u ovom slučaju $d = 4 - 1 = 3$. Imamo tri slobodna parametra, i rješenja sustava u slučaju $\lambda = 1$ glasi

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-\alpha-\beta-\gamma \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}, \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Pretpostavimo u nastavku da je $\lambda \neq 1$. Sada možemo podijeliti drugi i treći red s $\lambda - 1$ i četvrti red s $1 - \lambda$.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & \lambda & 3 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 3-3\lambda \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & \lambda & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1+\lambda & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2+\lambda & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3+\lambda & 3 \end{array}\right].$$

U zadnjem koraku smo drugi i treći redak pomnožili s -1 i dodali prvom i četvrtom retku. Sada vidimo da za $\lambda = -3$ zadnja jednadžba glasi $0 = 3$, pa u ovom slučaju sustav nema rješenja.

Sada pretpostavljamo da je $\lambda \neq 1, -3$. Prvo dijelimo zadnji redak s $3 + \lambda$. Zatim, dodajemo zadnji redak drugom i trećem retku. Naposljetku, množimo zadnji redak s $-2 - \lambda$ i dodajemo ga prvom.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2+\lambda & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3+\lambda & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2+\lambda & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3/(\lambda+3) \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3/(\lambda+3) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3/(\lambda+3) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3/(\lambda+3) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3/(\lambda+3) \end{array}\right].$$

Dakle, za $\lambda \neq 1, -3$ imamo jedinstveno rješenje

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/(\lambda+3) \\ 3/(\lambda+3) \\ 3/(\lambda+3) \\ 3/(\lambda+3) \end{bmatrix}.$$

□

Zadatak 5.

<u>RJEŠENJE</u> Stavimo $I = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} + (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{b}$. Prije svega, vidimo da zadnji član iščezava, jer je $\vec{b} \times \vec{c}$ okomit na $\vec{b}$. Nadalje, drugi i treći član se poništavaju, jer je

$$\begin{aligned}
\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} &= (\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b} + (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} \\
&= (\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b} + (-(\vec{a} \times \vec{c})) \cdot \vec{b} \\
&= (\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b} = 0.
\end{aligned}$$

Ostaje nam $I = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$. Radi se o mješovitom umnošku, kojeg računamo uz pomoć determinante:

$$I = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & x_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Sada pronalazimo vektore $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$.

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= (7, 5, -4) - (7, 3, -1) = (0, 2, -3), \\
\vec{b} &= (9, 5 - 3) - (7, 5, -4) = (2, 0, 1), \\
\vec{c} &= (10, 4, -3) - (9, 5, -3) = (1, -1, 0).
\end{aligned}$$

Konačno, imamo

$$I = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 6 = 8.$$

□