Signali i sustavi - Zadaci za vježbu

II. tjedan

Periodičnost signala

1. Koji su od sljedećih kontinuiranih signala periodički? Za one koji jesu, izračunajte temeljni (osnovni) period.
   a. $\cos^2(t)$,
   b. $\cos(2\pi t)\mu(t)$,
   c. $e^{j\pi t}$,
   d. $\cos(t^2)$,
   e. $e^{j\omega_0 t}$.

2. Jesu li sljedeći diskretni signali periodički? Ako jesu, izračunajte osnovni period.
   a. $\cos\left(\pi n + \frac{\pi}{4}\right)$,
   b. $\cos\left(\frac{\pi n^2}{8}\right)$,
   c. $\cos\left(\frac{n}{3} + 1\right)$.

Energija signala

3. Izračunajte totalnu energiju sljedećih kontinuiranih signala:
   a. $x(t) = e^{-at}\mu(t),\ a > 0$,
   b. $x(t) = t\mu(t)$.

4. Nađite totalnu energiju sljedećih diskretnih signala:
   a. $x(n) = (-0.5)^n \mu(n)$,
   b. $x(n) = n\big(\mu(n) - \mu(n-5)\big)$.

Snaga signala

5. Izračunajte totalnu snagu kontinuiranog signala
$$x(t) = e^{j2\pi t} \sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right).$$

6. Nađite totalnu snagu diskretnih signala:
   a. $x(n) = \mu(n)$,
   b. $x(n) = 2e^{j3n}$.

Produkt signala

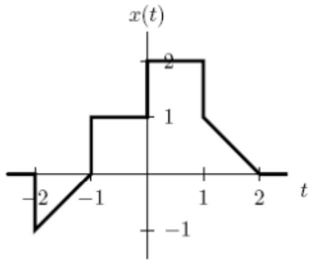
7. Dani su signali *x(t)* i *y(t)*. Skicirajte produkt ova dva signala na intervalu $t \in [-2,2]$.

$$x(t) = \begin{cases} 1, & \text{u slučaju ako je } \sin(4\pi t) \geq 0, \\ -1, & \text{u slučaju ako je } \sin(4\pi t) < 0, \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} t, & \text{u slučaju ako je } \sin(\pi t) \geq 0, \\ -t, & \text{u slučaju ako je } \sin(\pi t) < 0. \end{cases}$$

Pomak, inverzija, ekspanzija signala, kauzalnost

8. Zadan je kontinuirani signal prikazan slikom.



Odredite:

a. $2x(3-\frac{t}{2})+1$,

b. $x(t-1)\left[\delta\left(t-\frac{4}{3}\right)-2\delta\left(t+\frac{1}{2}\right)-\mu(1-t)\right]$.

c. Da li je zadani signal *x(t)* kauzalan, antikauzalan ili nekauzalan?

Parnost signala

9. Nađite parni i neparni dio sljedećih kontinuiranih signala:

a. $x(t) = 2t^2 - 3t + 6$,

b. $x(t) = \dfrac{2-t}{1+t}$.

10. Nađite parni i neparni dio diskretnog signala $x(n) = \delta(n)$.

11. Dokažite da je produkt dva parna (dva neparna) signala paran signal, a produkt parnog i neparnog signala neparan signal.

Napomena:

Vremenski diskretan jedinični skok μ definiran je kao

$$\forall n \in Cjelobrojni, \quad \mu(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

Vremenski kontinuiran jedinični skok μ definiran je kao

$$\forall t \in Realni, \quad \mu(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Vremenski diskretan jedinični impuls δ definiran je kao

$$\forall n \in Cjelobrojni, \quad \delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

Vremenski kontinuiran jedinični impuls δ definiran je kao

$$\forall t \in Realni, \quad \begin{cases} \delta(t) = 0 \ \text{ za } t \neq 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1. \end{cases}$$

1. Koji su od sljedećih kontinuiranih signala periodički? Za one koji jesu, izračunajte temeljni period.
    a. $\cos^2(t)$,
    b. $\cos(2\pi t)\mu(t)$,
    c. $e^{j\pi t}$,
    d. $\cos(t^2)$,
    e. $e^{j\omega_0 t}$.

Rješenje:

Kontinuirani signal je periodičan ako za njega vrijedi $x(t) = x(t+T)$, gdje je T period, uz $\forall t \in \mathbb{R}, T \in \mathbb{R}_+$.

a. Za $\cos^2(t)$ vrijedi trigonometrijska relacija
$$x(t) = \cos^2(t) = \frac{1+\cos(2t)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{2} = x_1(t) + x_2(t).$$
Prvi dio signala $x_1(t) = \frac{1}{2}$ je konstanta koja se kontinuirano ponavlja.
Za drugi dio signala tražimo period prema definiciji
$$x(t+T) = \cos\big(2(t+T)\big) = \cos(2t+2T) = \cos 2t \cos 2T - \sin 2t \sin 2T,$$
što mora biti jednako $x(t) = \cos 2t$. Prema tome mora biti $\cos 2T = 1, \sin 2T = 0$. Rješenja ovih jednadžbi su $2T = 2k\pi, k\epsilon\mathbb{N}$, pa je period ovog dijela zadanog signala $T = k\pi$. Osnovni period se dobije za minimalni *k*, tj. *k=1*, pa je $T = \pi$.
Ukupno period zadanog signala je $T = \pi$.

b. $x(t) = \cos(2\pi t)\,\mu(t)$. Kako je $\mu(t)$ funkcija koja je definirana kao nula za $t < 0$ i jedan za $t \geq 0$, umnožak stepa i kosinusa će biti nula prije nule i kosinus poslije nule. Da bi funkcija bila periodična mora se ponavljati u obje strane vremena. Kako to ovdje nije slučaj, zadani signal nije periodičan.

c. $x(t) = e^{j\pi t}$. Period ćemo tražiti prema definiciji.
$$x(t+T) = e^{j\pi(t+T)} = e^{j\pi t}e^{j\pi T},$$
što mora biti jednako $x(t) = e^{j\pi t}$. Iz toga izlazi da $e^{j\pi T} = 1$.
U trigonometrijskom obliku ovo je $\cos \pi T + j \sin \pi T = 1$. Rješenje ove jednadžbe daje $\pi T = 2k\pi, T = 2k$.
Osnovni period je zato *T=2*.

d. $x(t) = \cos(t^2)$. Ponovno krećemo prema definiciji:
$$x(t+T) = \cos((t+T)^2) = \cos(t^2 + 2tT + T^2) = x(t) = \cos(t^2)$$
Rješavanjem ove jednadžbe izlazi $2tT + T^2 = 2k\pi$, tj. $\frac{2tT+T^2}{2\pi} = k, k\epsilon\mathbb{N}$. Kako period mora biti konstantan realan broj, nije moguće takvoga naći da zadovoljava ovu jednadžbu. Ova funkcija nije periodična.

e. $x(t) = e^{j\omega_0 t}$. Krećemo slično kao u c. dijelu zadatka
$$x(t+T) = e^{j\omega_0(t+T)} = e^{j\omega_0 t}e^{j\omega_0 T} = e^{j\omega_0 t} = x(t),$$
odnosno $e^{j\omega_0 T} = 1$. Ovo je zadovoljeno za:
➔ $\omega_0 = 0$ (tada će biti $x(t) = 1$, pa je funkcija periodična za svaki $T \in \mathbb{R}_+$),
➔ $\omega_0 \neq 0$, kada je $\omega_0 T = 2k\pi$, pa je period $T = \frac{2k\pi}{\omega_0}$. Temeljni period je tada $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

2. Jesu li sljedeći diskretni signali periodički? Ako jesu, izračunajte temeljni period.
   a. $\cos\left(\pi n + \frac{\pi}{4}\right)$,
   b. $\cos\left(\frac{\pi n^2}{8}\right)$,
   c. $\cos\left(\frac{n}{3} + 1\right)$.

Rješenje:

Diskretan signal je periodičan ako za njega vrijedi $x(n) = x(n+N)$, gdje je N period, uz $\forall n \in \mathbb{Z}, N \in \mathbb{N}$.

a. $x(n) = \cos\left(\pi n + \frac{\pi}{4}\right)$. Traženje perioda krenut ćemo prema definiciji:

$$x(n+N) = \cos\left(\pi(n+N) + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi n + \frac{\pi}{4} + \pi N\right)$$
$$= \cos\left(\pi n + \frac{\pi}{4}\right)\cos(\pi N) - \sin\left(\pi n + \frac{\pi}{4}\right)\sin(\pi N)$$

što mora biti jednako $x(n) = \cos\left(\pi n + \frac{\pi}{4}\right)$. Da bi to bilo jednako mora vrijediti $\cos(\pi N) = 1$ i $\sin(\pi N) = 0$. Rješenje ovih jednadžbi je $\pi N = 2k\pi \rightarrow N = 2k$. Temeljni period je *N=2*.

b. $x(n) = \cos\left(\frac{\pi n^2}{8}\right)$. Prema definiciji umjesto *n* pišemo *n*+*N*:

$$x(n+N) = \cos\left(\frac{\pi(n+N)^2}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi n^2}{8} + \frac{2\pi n N}{8} + \frac{\pi N^2}{8}\right)$$

Kako bi ovo bilo periodično mora biti $\frac{2\pi n N + \pi N^2}{8} = 2k\pi$, odnosno $\frac{N}{8}\left(n + \frac{N}{2}\right) = k$. Kako *k* mora biti prirodan broj, a isto tako i *n* i *N*, sa lijeve strane ne smije biti razlomaka. Najmanji *N* za koji ćemo pokratiti razlomke je *N=8*, te je to i osnovni period zadanog signala.

c. $x(n) = \cos\left(\frac{n}{3} + 1\right)$. Traženje perioda krenut ćemo prema definiciji:

$$x(n+N) = \cos\left(\frac{1}{3}(n+N) + 1\right) = \cos\left(\frac{n}{3} + 1 + \frac{N}{3}\right)$$
$$= \cos\left(\frac{n}{3} + 1\right)\cos\left(\frac{N}{3}\right) - \sin\left(\frac{n}{3} + 1\right)\sin\left(\frac{N}{3}\right)$$

što mora biti jednako $x(n) = \cos\left(\frac{n}{3} + 1\right)$. Da bi to bilo jednako mora vrijediti $\cos\left(\frac{N}{3}\right) = 1$ i $\sin\left(\frac{N}{3}\right) = 0$. Rješenje ovih jednadžbi je $\frac{N}{3} = 2k\pi \rightarrow N = 6k\pi$. Kako je *k* prirodni broj, *N* će uvijek biti realan. Kod diskretnih signala period ne smije biti realan (već samo prirodan broj), ova funkcija NIJE periodička.

NAPOMENA: U zadatku naravno ne mora uvijek biti zadan kosinus, mogu biti i druge funkcije, postupak je analogan.

3. Izračunajte energiju sljedećih kontinuiranih signala:
   a. $x(t) = e^{-at}\mu(t),\ a > 0$,
   b. $x(t) = t\mu(t)$.

Rješenje:

Totalna energija kontinuiranih signala računa se prema formuli $E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$.

a. Uvrštavanjem u formulu imamo $E = \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-at}\mu(t)|^2 dt$, $a>0$. Kada neki signal množimo sa stepom, signal se mijenja tako da prije nule ima vrijednost nula, dok od nule na dalje ima svoju pravu vrijednost. Integral za signal koji je nula je isto tako nula, pa se integral za energiju može pojednostaviti:

$$E = \int_0^{\infty} |e^{-at}|^2 dt = \int_0^{\infty} e^{-2at} dt = \left.\frac{e^{-2at}}{-2a}\right|_0^{\infty} = \frac{1}{2a}$$

b. I u ovom primjeru je slično kao i u a. zadatku. Prema definiciji

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |t\mu(t)|^2 dt = \int_0^{\infty} t^2 dt = \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^{\infty} = \infty$$

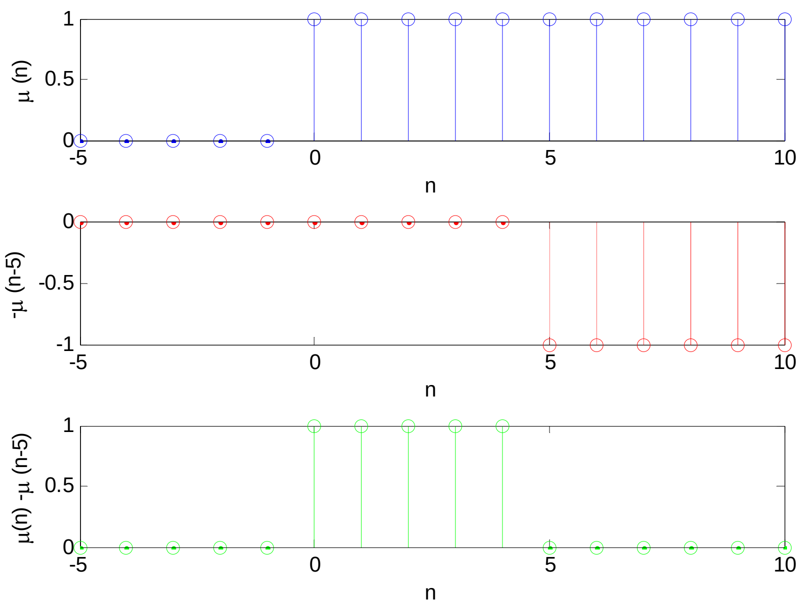
4. Nađite energiju sljedećih diskretnih signala:
   a. $x(n) = (-0.5)^n \mu(n)$,
   b. $x(n) = n\big(\mu(n) - \mu(n-5)\big)$.

Rješenje:

Totalna energija diskretnih signala računa se prema formuli $E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$, $n \epsilon \mathbb{Z}$.

a. Uvrštavanjem u formulu imamo $E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |(-0.5)^n \mu(n)|^2$. Kada neki signal množimo sa stepom signal se mijenja tako da prije nule ima vrijednost nula, dok od nule na dalje ima svoju pravu vrijednost. Suma za signal koji je nula je isto tako nula, pa se suma za energiju može pojednostaviti:
$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |(-0.5)^n \mu(n)|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (-0.5)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} 0.25^n$$
Ovako dobiveni red je geometrijski sa beskonačno članova. Njegova suma računa se prema $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$. Tražena energija je $E = \sum_{n=0}^{\infty} 0.25^n = \frac{1}{1-0.25} = \frac{4}{3}$.

b. Prije računanja energije promotrimo kako izgleda razlika jediničnih stepenica. Iz slike je vidljivo da je razlika ove dvije stepenice uvijek nula osim za *n=0*, *1*, *2*, *3* i *4*. Pa se energija traži prema
$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n(\mu(n) - \mu(n-5))|^2 = \sum_{n=0}^{4} n^2 = 0 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$$



5. Izračunajte snagu kontinuiranog signala

$$x(t) = e^{j2\pi t} \sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right).$$

Rješenje:

Totalna snaga kontinuiranih signala računa se prema formuli

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$$

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left| e^{j2\pi t} \sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right) \right|^2 dt = \qquad \left|e^{j2\pi t}\right| = \left|\cos 2\pi t + j \sin 2\pi t\right| =$$

$$= \sqrt{\cos^2 2\pi t + \sin^2 2\pi t} = 1$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin^2\left(t + \frac{\pi}{3}\right) dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{1 - \cos 2\left(t + \frac{\pi}{3}\right)}{2} dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left[\int_{-T/2}^{T/2} \frac{1}{2} dt - \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} \cos 2\left(t + \frac{\pi}{3}\right) dt \right] =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left[\frac{T}{2} + \frac{1}{4} \sin T \right] = \frac{1}{2}$$

6. Nađite snage diskretnih signala:
   a. $x(n) = \mu(n)$,
   b. $x(n) = 2e^{j3n}$.

Rješenje:

Totalna snaga diskretnih signala računa se prema formuli

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2, n \epsilon \mathbb{Z}$$

a. Uvrštavanjem u formulu imamo

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |\mu(n)|^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^{N} 1 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} (N+1) = \frac{1}{2}$$

b. Zadani signal je kompleksni pa na njega utječe apsolutna vrijednost

$$|x(n)| = \left|2e^{j3n}\right| = 2|\cos 3n + j \sin 3n| = 2\sqrt{\cos^2 3n + \sin^2 3n} = 2$$

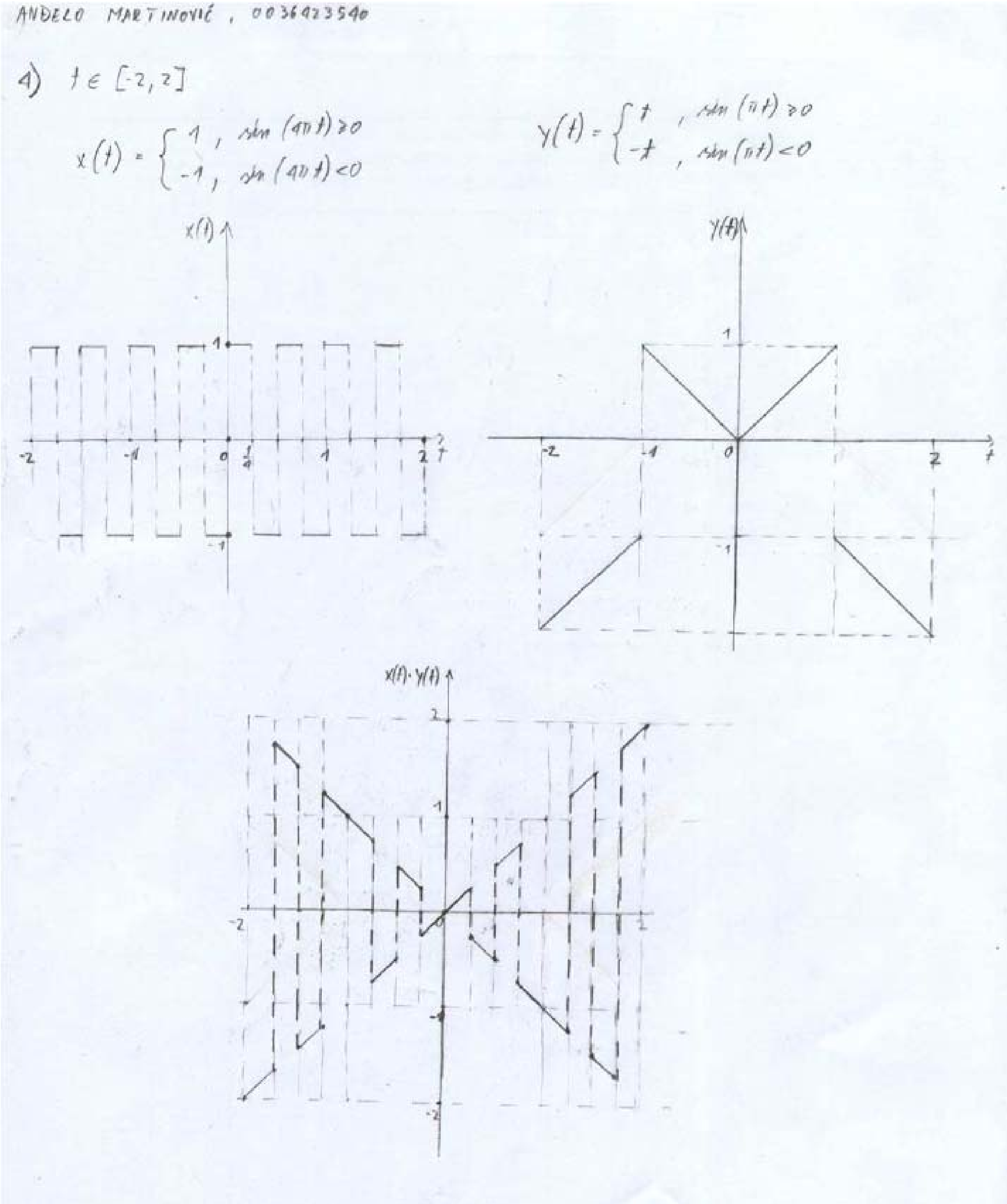
Snaga je sada

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} 2^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} (2N+1) \cdot 2^2 = 4$$

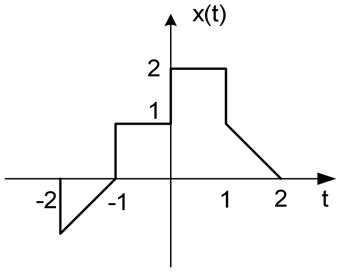
7. Dani su signali *x(t)* i *y(t)*. Skicirajte produkt ova dva signala na intervalu $t \in [-2,2]$.

$$x(t) = \begin{cases} 1, & \sin(4\pi t) \geq 0, \\ -1, & \sin(4\pi t) < 0. \end{cases} \qquad y(t) = \begin{cases} t, & \sin(\pi t) \geq 0, \\ -t, & \sin(\pi t) < 0. \end{cases}$$

<u>Rješenje:</u>



8. Zadan je kontinuirani signal prikazan slikom.



Odredite:

c. $2x(3-\frac{t}{2})+1$,

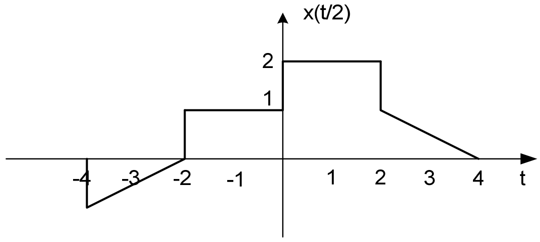
d. $x(t-1)\left[\delta\left(t-\frac{4}{3}\right)-2\delta\left(t+\frac{1}{2}\right)-\mu(1-t)\right]$.

e. Da li je zadani signal *x(t)* kauzalan, antikauzalan ili nekauzalan?

Rješenje:

a) Kako bi našli rješenje, zadani signal je potrebno vremenski ekspandirati, invertirati i vremenski pomaknuti, te zatim promijeniti amplitudu i pomaknuti po ordinati.

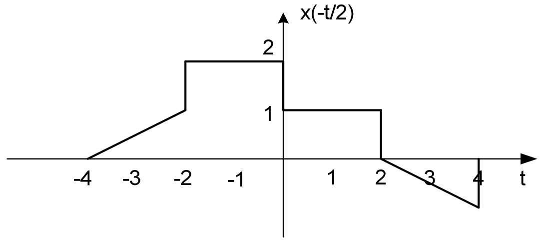
1. Ekspanzija signala $x\left(\frac{t}{2}\right)$:



signal se proširuje dva puta

Ovaj signal je nekauzalan.

2. Vremenska inverzija $x\left(-\frac{t}{2}\right)$:

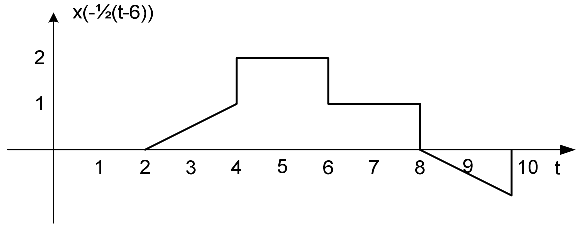


signal se zrcali oko ordinate

Ovaj signal je nekauzalan.

3. Vremenski pomak

$$x\left(3-\frac{t}{2}\right)=x\left(-\frac{1}{2}(t-6)\right)$$

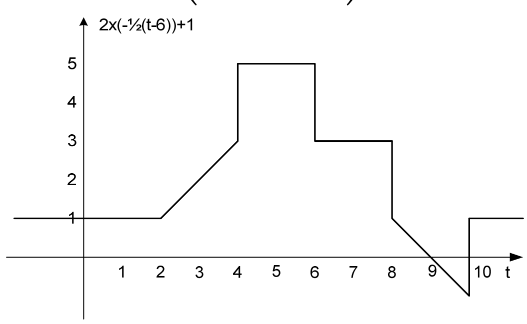


signal se pomiče za šest koraka u desno

Ovaj signal je kauzalan.

4. Množenje amplitude s 2 i dodavanje 1:

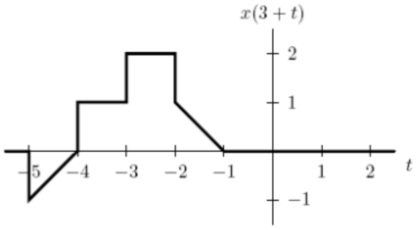
$$2x\left(-\frac{1}{2}(t-6)\right)+1$$



Ovaj signal je svevremenski.

Ili drugom metodom:

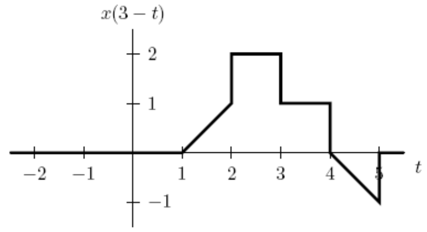
1. Vremenski pomak *x(3+t)*:



signal se pomiče za 3 koraka ulijevo

Ovaj signal je antikauzalan.

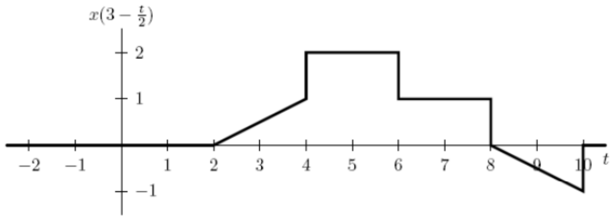
2. Vremenska inverzija *x(3-t)*:



signal se zrcali oko ordinate

Ovaj signal je kauzalan.

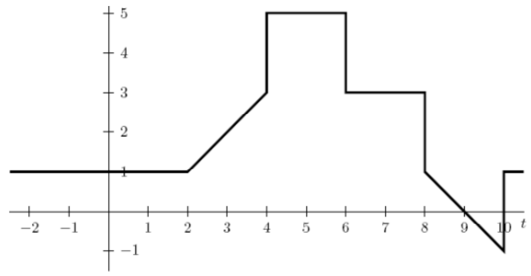
3. Ekspanzija *x(3-t/2)*:



signal se proširuje dva puta

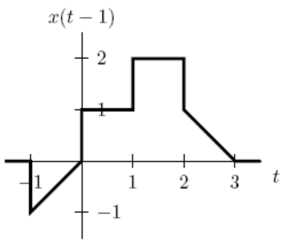
Ovaj signal je kauzalan.

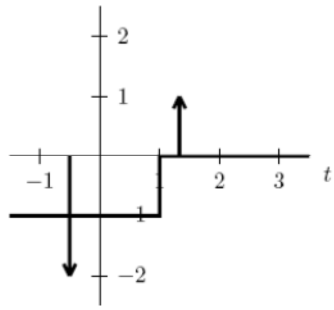
4. Množenje amplitude s 2 i dodavanje 1: $2x(3-\frac{t}{2})+1$



Ovaj signal je svevremenski.

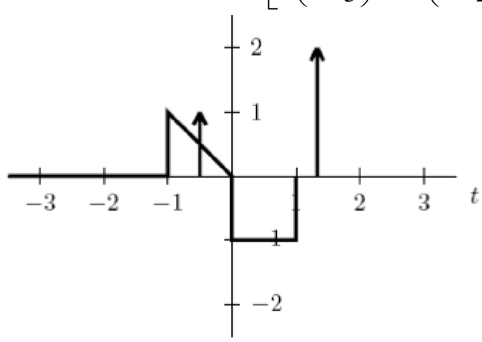
b) Traženi signal je umnožak 2 signala. Prvi signal je *x(t-1)* dobiven vremenskim pomakom zadanog *x(t)*. Ovakav signal je nekauzalan.





Drugi signal je zbroj 2 vremenski pomaknuta impulsa i vremenski pomaknute inverzne step funkcije $\delta\left(t-\frac{4}{3}\right)-2\delta\left(t+\frac{1}{2}\right)-\mu(1-t)$.

Ako se pomnože ova dva signala dobije se $x(t-1)\left[\delta\left(t-\frac{4}{3}\right)-2\delta\left(t+\frac{1}{2}\right)-\mu(1-t)\right]$:



Svi prikazani signali u b) dijelu zadatka su nekauzalni.

c) Početno zadani signal *x(t)* je nekauzalan signal.

9. Nađite parni i neparni dio sljedećih kontinuiranih signala:
   a. $x(t) = 2t^2 - 3t + 6$,
   b. $x(t) = \frac{2-t}{1+t}$.

Rješenje:

Svaki signal se može napisati kao zbroj parne i neparne komponente $x(t) = x_p(t) + x_n(t)$.
Za parni signal vrijedi $x_p(-t) = x_p(t)$.
Za neparni signal vrijedi $x_n(-t) = -x_n(t)$.
Parna komponenta se može izračunati prema $x_p(t) = \frac{1}{2}\big(x(t) + x(-t)\big)$.
Neparna komponenta se može izračunati prema $x_n(t) = \frac{1}{2}\big(x(t) - x(-t)\big)$.

a. Za zadani signal vrijedi $x(-t) = 2t^2 + 3t + 6$. Slijedi da je parna komponenta $x_p(t) = 2t^2 + 6$, a neparna $x_n(t) = -3t$.

b. Zadan je signal $x(t) = \frac{2-t}{1+t}$. Njegov vremenski inverz je $x(-t) = \frac{2+t}{1-t}$. I za ovaj signal parnu i neparnu komponentu tražimo preko formula:

$$x_p(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{2-t}{1+t} + \frac{2+t}{1-t}\right) = \frac{2t^2+4}{2(1-t^2)} = \frac{t^2+2}{1-t^2}$$

$$x_{pn}(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{2-t}{1+t} - \frac{2+t}{1-t}\right) = \frac{-6t}{2(1-t^2)} = \frac{-3t}{1-t^2}$$

10. Nađite parni i neparni dio sljedećeg diskretnog signala $x(n) = \delta(n)$.

Rješenje:

Svaki signal se može napisati kao zbroj parne i neparne komponente $x(n) = x_p(n) + x_n(n)$.
Za parni signal vrijedi $x_p(-n) = x_p(n)$.
Za neparni signal vrijedi $x_n(-n) = -x_n(n)$.
Parna komponenta se može izračunati prema $x_p(n) = \frac{1}{2}\big(x(n) + x(-n)\big)$.
Neparna komponenta se može izračunati prema $x_n(n) = \frac{1}{2}\big(x(n) - x(-n)\big)$.

Diskretna $\delta(n)$ funkcija je svugdje nula, osim u *t=0* kada ima vrijednost 1.
$\delta(-n)$ će također svugdje biti nula, osim u *t=0* kada će biti *1*, tj. $\delta(-n)= \delta(n)$.
Prema tome ovaj signal je paran.

11. Dokažite da je produkt dva parna (dva neparna) signala paran signal, a produkt parnog i neparnog signala neparan signal.

Rješenje:

Svaki signal se može napisati kao zbroj parne i neparne komponente $x(t) = x_p(t) + x_n(t)$.
Za parni signal vrijedi $x_p(-t) = x_p(t)$.
Za neparni signal vrijedi $x_n(-t) = -x_n(t)$.
Parna komponenta se može izračunati prema $x_p(t) = \frac{1}{2}\big(x(t) + x(-t)\big)$.
Neparna komponenta se može izračunati prema $x_n(t) = \frac{1}{2}\big(x(t) - x(-t)\big)$.

Neka je $x(t) = x_1(t)x_2(t)$.

a. Ako su $x_1(t)$ i $x_2(t)$ parni signali vrijedit će
$$x(-t) = x_1(-t)x_2(-t) = x_1(t)x_2(t) = x(t)$$

b. Ako su $x_1(t)$ i $x_2(t)$ neparni signali vrijedit će
$$x(-t) = x_1(-t)x_2(-t) = (-x_1(t))\big(-x_2(t)\big) = x_1(t)x_2(t) = x(t)$$

c. Ako je $x_1(t)$ paran i $x_2(t)$ neparan signal vrijedit će
$$x(-t) = x_1(-t)x_2(-t) = x_1(t)(-x_2(t)) = -x_1(t)x_2(t) = -x(t)$$

Signali i sustavi - Zadaci za vježbu

III. tjedan

1. Neka je $x(t) = e^{j\omega_0 t}$ kontinuirani kompleksni eksponencijalni signal. Neka je $x(n)$ diskretni eksponencijalni signal dobiven iz kontinuiranog signala $x(t)$ uniformnim očitavanjem s periodom T_s. Je li dobiveni diskretni signal uvijek periodičan? Ako nije, pod kojim uvjetima je?

Rješenje:

Očitavanjem kontinuiranog signala dobivamo:

$$x(n) = x(nT_s) = e^{j\omega_0 nT_s}$$

Ako je *x(n)* periodičan s temeljnim periodom *N* tada vrijedi

$$x(n) = x(n + N)$$

U ovom slučaju je to:

$$x(n + N) = e^{j\omega_0(n+N)T_s} = e^{j\omega_0 nT_s} \cdot e^{j\omega_0 N\cdot T_s} = e^{j\omega_0 nT_s} = x(n)$$

Slijedi da je $e^{j\omega_0 NT_s} = 1$.

Ovo se najlakše riješi rastavljanjem na sinuse i kosinuse

$$e^{j\omega_0 NT_s} = \cos(\omega_0 NT_s) + j \cdot \sin(\omega_0 NT_s) = 1$$

Pa mora biti $\cos(\omega_0 NT_s) = 1$ i $\sin(\omega_0 NT_s) = 0$, a to će biti za

$$\omega_0 NT_s = 2k\pi \rightarrow N = \frac{2k\pi}{\omega_0 T_s}.$$

Kako *N* mora biti prirodan broj, treba promotriti u kojim će se to uvjetima dogoditi. Temeljni period signala je $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$. Kada se to uvrsti u izraz za period:

$$N = \frac{2k\pi}{\frac{2\pi}{T_0} T_s} = \frac{kT_0}{T_s}.$$

Kako *k* može biti bilo koji cijeli broj, omjer $\frac{T_0}{T_s}$ mora biti racionalan, da bi period *N* bio cijeli broj.

x(n) je periodičan, ako je omjer $\frac{T_0}{T_s}$ (period otipkavanja i temeljnog perioda signala *x(t)*)racionalan broj.

2. Zadan je diskretan signal $x(n) = \cos(an + 1)$. Kakav mora biti a da bi signal bio periodičan?

Rješenje:

Da bi signal bio periodičan mora vrijediti:

$$\cos(an + 1) = \cos(a(n + N) + 1) = \cos(an + 1 + aN)\text{, uz } N, k, n \in \mathbb{Z}$$

Dakle mora biti $aN = 2k\pi$.

Odnosno izraz $N = \frac{2k\pi}{a}$ mora biti prirodan.

Iz gornjeg, evidentno slijedi da a mora biti racionalni višekratnik broja π, tj.

$$a = \frac{m}{l}\pi\text{, gdje su } m, l \in \mathbb{Z}$$

U tom slučaju

$$N = \frac{2k\pi}{\frac{m}{l}\pi} = \frac{2kl}{m}.$$

Očito za svaki izbor *m* i *l*, postoji takav *k* da je gornji izraz prirodan broj!

3. Zadan je diskretan signal $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$. Definiramo novi signal $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ na sljedeći način: $\forall n \in \mathbb{Z}, f(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(n-kp)$, pri čemu je $p \in \mathbb{N}$. Dokažite da je signal f periodičan za svaki diskretan signal g za koji zadana suma konvergira.

Rješenje:

Zadani signali $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ i $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ su diskretni signali. Da bi diskretan signal *f* bio periodičan mora vrijediti

$$f(n+N) = f(n),$$

$$f(n+N) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(n+N-kp).$$

Možemo izabrati takav $N \in \mathbb{N}$, kojeg možemo napisati kao umnožak $N = m \cdot p$, gdje su $m, p \in \mathbb{N}$. Zadani signal tada glasi:

$$f(n+N) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(n+mp-kp)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} g\big(n-p(k-m)\big)$$

$$= \left| \begin{array}{c} t = k-m \\ k = +\infty \to t = +\infty \\ k = -\infty \to t = -\infty \end{array} \right|$$

$$= \sum_{t=-\infty}^{\infty} g(n-pt) = f(n)$$

Pa je zadani signal *f(n)* periodičan.

4. Zadan je diskretan signal $x(n) = n\left(\mu(n) - \mu(n-2008)\right)$. Izračunajte energiju signala.

<u>Rješenje:</u>

Energija diskretnog signala definirana je na sljedeći način:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \, , n \epsilon \mathbb{Z}$$

U našem slučaju

$$E = \sum_{n=0}^{2007} n^2 = 2696779140$$

Pri tome smo koristili sljedeću relaciju

$$\sum_{n=0}^{k} n^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Napomena: još neke česte formule za konačne sume možete naći u službenom šalabahteru.

5. Izračunajte sljedeće integrale

   a. $\int_0^\infty \delta(t-2)t^2 dt$
   b. $\int_{-\infty}^\infty \mu(t-1)\delta(t)\cos t \cdot dt$

Rješenje:

Diracova delta funkcija definirana je $\forall t \in \mathbb{R}$ i iznosi $\delta(t) = 0$ za $t \neq 0$. Površina ispod impulsa iznosi $\int_{-\infty}^\infty \delta(t)dt = 1$. Množenjem sa nekom funkcijom dobiva se

$$f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0).$$

Za ovu funkciju se može reći da „vadi“ vrijednost podintegralne funkcije na mjestu na kojem je impuls definiran:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt = f(t_0).$$

a. Traži se $\int_0^\infty \delta(t-2)t^2 dt$. Usporedbom sa prethodnom formulom izlazi da je $t_0 = 2$, a $f(t) = t^2$. Zato ovaj integral iznosi

$$\int_0^\infty \delta(t-2)t^2 dt = t_0^2 = 4.$$

b. Postupak je sličan:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mu(t-1)\delta(t)\cos t \cdot dt = \mu(t_0-1)\cos t_0 \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt = |\text{uz } t_0 = 0| = \mu(0-1)\cos 0 = 0.$$

6. Pronađite i skicirajte generaliziranu derivaciju signala

$$g(t) = \operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1, t \geq 0, \\ -1, t < 0. \end{cases}$$

Rješenje:

Zadani signal se može napisati i u obliku sa step funkcijom: $g(t) = \operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ -1, & t < 0 \end{cases} = -1 + 2\mu(t)$.

Ovako zapisani signal se jednostavno može derivirati uzme li se u obzir da je derivacija step funkcije impuls $\left(\frac{d\mu(t)}{dt} = \delta(t)\right)$:

$$g'(t) = \left(-1 + 2\mu(t)\right)' = 2\mu'(t) = 2\delta(t).$$

7. Izračunajte generaliziranu derivaciju signala:

   a. $g(t) = t\big(\mu(t) - \mu(t-1)\big) + (3-t)\big(\mu(t-2) - \mu(t-3)\big)$

   b. $g(t) = \big(3-t\big)\big(\mu(t) - \mu(t-1)\big) + (3-t)\big(\mu(t-2) - \mu(t-3)\big)$

<u>Rješenje:</u>

a. $\mu(t) - \mu(t-1) - \delta(t-1) - \big[\mu(t-2) - \mu(t-3)\big] + \delta(t-2)$

b. $-\big[\mu(t) - \mu(t-1)\big] + 3\delta(t) - 2\delta(t-1) - \big[\mu(t-2) - \mu(t-3)\big] + \delta(t-2)$

Za vježbu, zgodno je nacrtati signale i iz slike pokušati skicirati oblik derivacije signala. Nakon toga računom provjeriti dobiveni rezultat!

8. Neka su funkcije $u \in L^2(I)$ i $g \in L^2(I)$ (kvadratno integrabilne) takve da je $\int_I u(x)\varphi'(x)dx = -\int_I g(x)\varphi(x)dx$ za svaku funkciju $\varphi \in C_0^\infty(I)$. Tada kažemo da je *u* slabo derivabilna i da je *g* njena slaba derivacija, pri čemu je $C_0^\infty(I)$ skup svih beskonačno derivabilnih funkcija na intervalu *I*, čija je vrijednost na krajevima intervala jednaka nuli. Koristeći spomenutu činjenicu dokažite da je $u(x) = \frac{1}{2}(|x| + x)$ za $-1 \leq x \leq 1$ slabo derivabilna te da je njena slaba derivacija Heavisideova step funkcija $\mu(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$.

Rješenje:

Izračunat ćemo oba integrala te ih usporediti.

Na lijevoj strani imamo (koristi se formula za parcijalnu integraciju):

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\left(|x| + x\right)\varphi'(x)dx = \int_0^1 x\varphi'(x)dx = x\varphi(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \varphi(x)dx = -\int_0^1 \varphi(x)dx$$

Pri tome smo koristili činjenicu navedenu u zadatku $\varphi(-1) = \varphi(1) = 0$.

Na desno strani imamo

$$-\int_{-1}^{1} \mu(x)\varphi(x)dx = -\int_0^1 \varphi(x)dx$$

S obzirom da su integrali jednaki za $\forall \varphi \in C_0^\infty(I)$, zaključujemo da je step funkcija generalizirana derivacija polazne funkcije!

9. Pretpostavite da želite uživo, preko Interneta slušati prijenos nekog koncerta. Pri tome Internet ne koristite za nikakav drugi prijenos podataka. Neka je za predstavljanje svakog audio uzorka potrebno 16 bita.

   a. Nalazite se kod kuće i spojeni ste s modemom, 56 kbps (kilobita u sekundi), na Internet. Kojom maksimalnom frekvencijom uzorkovanja može biti diskretiziran audio signal koji slušate?

   b. Koja je frekvencija u pitanju ako se nalazite na 100 Mbps LAN-u?

Rješenje:

a. Brzina modema je $v_1 = 56\ kbps = 56\ 000\ bps = 56\ 000\ bit/s$

   Za jedan uzorak treba 16 bitova → $N = 16\ bit$.

   Maksimalnu frekvenciju ćemo dobiti tako da podijelimo brzinu prijenosa sa količinom podataka po jednom uzorku:

$$f = \frac{v_1}{N} = \frac{56\ 000\,\frac{bit}{s}}{16\ bit} = 3\ 500\ Hz = 3.5\ kHz.$$

b. Ako se nalazimo na LAN-u, postupak računanja je analogan. Brzina prijenosa je $v_2 = 100\ Mbps = 100\ 000\ 000\ bps = 100\ 000\ 000\ bit/s$.

   Za jedan uzorak treba 16 bitova → $N = 16\ bit$.

   Maksimalnu frekvenciju ćemo dobiti tako da podijelimo brzinu prijenosa sa količinom podataka po jednom uzorku:

$$f = \frac{v_2}{N} = \frac{100\ 000\ 000\,\frac{bit}{s}}{16\ bit} = 6.25\ MHz.$$

10. Zadan je diskretan signal $x(n)=\cos\left(\frac{n\pi}{8}\right)$. Nađite dva različita kontinuirana signala koja otipkavanjem daju ovaj diskretan signal. Frekvencija otipkavanja neka je $f_s = 10kHz$.

Rješenje:

Zadan je diskretan signal $x(n)=\cos\left(\frac{n\pi}{8}\right)$.

Njega smo mogli dobiti iz nekog kontinuiranog signala $x(t) = \cos(\omega t)$ otipkavanjem

$$x(nT_s) = \cos(\omega n T_s).$$

Period otipkavanja je $T_s = \frac{1}{f_s} = 10000^{-1} s$.

Da bi otipkani signal i zadani diskretni signal bili jednaki mora vrijediti:

$$\cos\left(\frac{n\pi}{8}\right) = \cos(\omega n T_s),$$

$$\cos\left(\frac{n\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{2\pi f}{f_s} n\right).$$

$$\frac{n\pi}{8} = 2\pi n \frac{f}{f_s}$$

$$f = \frac{f_s}{16} = \frac{10000}{16} = 625Hz.$$

Početni kontinuirani signal je prema tome bio $x(t) = \cos(2\pi \cdot 625t) = \cos(1250\pi t)$.

Primijetite da za neki cijeli broj *k* vrijedi i (zbog periodičnosti cos):

$$\cos\left(2\pi \frac{f}{f_s} n\right) = \cos\left(2\pi \frac{f + kf_s}{f_s} n\right).$$

Tako možemo izabrati i frekvenciju $f = 625 + 10000 = 10625Hz$ kontinuiranog signala koji će nakon otipkavanja imati jednak diskretan signal.

Drugi kontinuirani signal koji otipkavanjem daje početni diskretni je i npr.

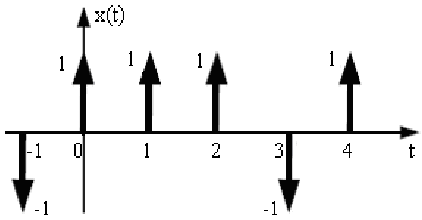
$$x(t) = \cos(2\pi \cdot 10625t) = \cos(21250\pi t).$$

Ovo nisu jedini signali koji su rješenje zadatka. Nađite još neki.

Signali i sustavi - Zadaci za vježbu

IV. tjedan

1. Kontinuirani signal *x(t)* (Slika 1.) periodičan je s periodom *T=4 s*. Prikažite ovaj signal Fourierovim redom, te odredite koeficijente tog reda.



Slika 1.

<u>Rješenje:</u>

Koeficijenti Fourierovog reda se računaju prema formuli

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Za zadani slučaj, uvrštavamo u formulu:

$$X_k = \frac{1}{4} \int_{-0.5}^{3.5} x(t) e^{-jk\frac{\pi}{2}t} dt$$

$$= \frac{1}{4}\left(\int_{-0.5}^{0.5} \delta(t) e^{-jk\frac{\pi}{2}t} dt + \int_{0.5}^{1.5} \delta(t-1) e^{-jk\frac{\pi}{2}t} dt + \int_{1.5}^{2.5} \delta(t-2) e^{-jk\frac{\pi}{2}t} dt - \int_{2.5}^{3.5} \delta(t-3) e^{-jk\frac{\pi}{2}t} dt \right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{-jk\frac{\pi}{2}\cdot 0} + e^{-jk\frac{\pi}{2}\cdot 1} + e^{-jk\frac{\pi}{2}\cdot 2} - e^{-jk\frac{\pi}{2}\cdot 3} \right)$$

Pojednostavimo:

$$e^{-jk\frac{\pi}{2}\cdot 0} = 1$$

$$e^{-jk\frac{\pi}{2}} = \left(e^{-j\frac{\pi}{2}}\right)^k = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - j\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^k = (-j)^k$$

$$e^{-jk\frac{\pi}{2}\cdot 2} = \left(e^{-j\frac{\pi}{2}\cdot 2}\right)^k = (\cos(\pi) - j\cdot\sin(\pi))^k = (-1)^k$$

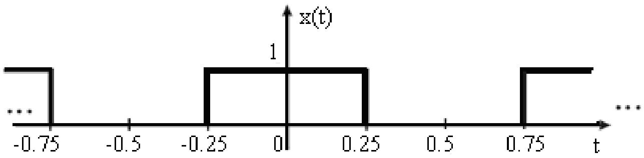
$$e^{-jk\frac{\pi}{2}\cdot 3} = \left(e^{-j\frac{\pi}{2}\cdot 3}\right)^k = \left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) - j\cdot\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)^k = j^k$$

Pa je traženi Fourierov red:

$$X_k = \frac{1}{4}\left(1 + (-j)^k + (-1)^k - j^k\right).$$

Dodatak: Skicirajte amplitudni i fazni spektar.

2. Slikom 2. dan je periodičan kontinuirani signal *x(t)*. Odredite srednju snagu ovog signala (u vremenskoj i u frekvencijskoj domeni), te aproksimirajte signal Fourierovim redom.



Slika 2.

Rješenje:

Koeficijenti Fourierovog reda računaju se prema formuli

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt.$$

Period zadanog signala je $T_0 = 1$, pa je $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi$. Koeficijente možemo računati na intervalu *(-0.5,0.5)*. Uvrštavamo u formulu:

$$X_k = \int_{-0.5}^{0.5} x(t)e^{-jk2\pi t}dt$$

Gledajući sliku, vidljivo je da signal na intervalu *(-0.5, -0.25)* i *(0.25, 0.5)* ima vrijednost nulu, dok mu je između tih intervala vrijednost jedan. Integral se sada može napisati u obliku:

$$X_k = \int_{-0.25}^{0.25} e^{-jk2\pi t}dt = \frac{e^{-jk2\pi t}}{-jk2\pi}\bigg|_{-0.25}^{0.25} = \frac{1}{-jk2\pi}\left(e^{-\frac{jk\pi}{2}} - e^{+\frac{jk\pi}{2}}\right) = \frac{1}{2}\frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{\frac{k\pi}{2}}.$$

Poseban slučaj je za $k = 0$, za koji Fourierov koeficijent iznosi $X_0 = \int_{-0.25}^{0.25} dt = \frac{1}{2}$.

Kako je zadani signal bio parna funkcija, dobiveni Fourierovi koeficijenti su realni.

Zadani signal je kontinuirana funkcija, pa će njegov spektar biti aperiodičan. Signal je i periodičan, pa je njegov spektar diskretan (vidljivo po X_k).

Srednja ukupna snaga u vremenskoj domeni iznosi:

$$P_x = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \int_{-0.25}^{0.25} dt = \frac{1}{2}.$$

Srednja ukupna snaga u frekvencijskoj domeni iznosi:

$$P_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|^2 = X_0^2 + \sum_{k=-\infty}^{-1} |X_k|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |X_k|^2 = X_0^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} |X_k|^2$$

$$= \frac{1}{4} + 2\left(\left(\frac{1}{\pi}\right)^2 + 0 + \left(\frac{-1}{3\pi}\right)^2 + 0 + \left(\frac{1}{5\pi}\right)^2 + \cdots\right) = \frac{1}{4} + 2\left(\frac{1}{\pi}\right)^2 \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2k+1}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Vidljivo je da su snaga dobivena u vremenskoj domeni i ona dobivena u frekvencijskoj jednake.

3. Odredite rastav u Fourierov red signala

$$x(t) = 10\cos(50\pi t) + 5\sin(100\pi t) + \sin\left(150\pi t + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(200\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

te skicirajte dobiveni amplitudni i fazni spektar. Ako signal otipkamo s periodom otipkavanja $T_s = 0.02$ je li došlo do preklapanja spektra?

Rješenje:

Zadani signal je periodičan. Njegov period je najmanji zajednički višekratnik perioda svakog pojedinog dijela signala. Ti periodi su:

$$10\cos(50\pi t) \to 50\pi = \frac{2\pi}{T_1} \to T_1 = \frac{1}{25}s$$

$$5\sin(100\pi t) \to 100\pi = \frac{2\pi}{T_2} \to T_2 = \frac{1}{50}s$$

$$\sin\left(150\pi t + \frac{2\pi}{3}\right) \to 150\pi = \frac{2\pi}{T_3} \to T_3 = \frac{1}{75}s$$

$$\cos\left(200\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \to 200\pi = \frac{2\pi}{T_1} \to T_4 = \frac{1}{100}s$$

Ukupni period je $T_0 = \frac{1}{25}s$. Ostali periodi tada iznose $T_2 = \frac{T_0}{2}$, $T_3 = \frac{T_0}{3}$, $T_4 = \frac{T_0}{4}$.

Osnovna kružna frekvencija pri razvoju ovog signala u red je prema tome $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 50\pi$ rad/s. Frekvencijske komponente signala su onda $\omega_1 = \omega_0$, $\omega_2 = 2\omega_0$, $\omega_3 = 3\omega_0$ i $\omega_4 = 4\omega_0$.

Koristeći poznate veze sinusoida i kompleksne eksponencijale

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \cdot \sin(\omega t)$$

$$e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - j \cdot \sin(\omega t)$$

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$$

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

možemo rastaviti zadane sinuse i kosinuse:

$$10\cos(50\pi t) = 10\cos(1 \cdot \omega_0 t) = \frac{10}{2}\left(e^{j \cdot 1 \cdot \omega_0 t} + e^{-j \cdot 1 \cdot \omega_0 t}\right) = 5e^{j \cdot 1 \cdot \omega_0 t} + 5e^{-j \cdot 1 \cdot \omega_0 t}$$

$$5\sin(100\pi t) = 5\sin(2 \cdot \omega_0 t) = \frac{5}{2j}\left(e^{j \cdot 2 \cdot \omega_0 t} - e^{-j \cdot 2 \cdot \omega_0 t}\right) = \frac{5}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{j \cdot 2 \cdot \omega_0 t} + \frac{5}{2}e^{j\frac{\pi}{2}}e^{-j \cdot 2 \cdot \omega_0 t}$$

$$\sin\left(150\pi t + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(3 \cdot \omega_0 t + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2j}\left(e^{j\cdot\left(3 \cdot \omega_0 t + \frac{2\pi}{3}\right)} - e^{-j\cdot\left(3 \cdot \omega_0 t + \frac{2\pi}{3}\right)}\right)$$
$$= \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{j\frac{2\pi}{3}}e^{j \cdot 3 \cdot \omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}}e^{-j\frac{2\pi}{3}}e^{-j \cdot 3 \cdot \omega_0 t} = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{6}}e^{j \cdot 3 \cdot \omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{6}}e^{-j \cdot 3 \cdot \omega_0 t}$$

$$\cos\left(200\pi t + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(4 \cdot \omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{j\cdot\left(4 \cdot \omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right)} + e^{-j\cdot\left(4 \cdot \omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right)}\right)$$
$$= \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}e^{j \cdot 4 \cdot \omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{-j \cdot 4 \cdot \omega_0 t}$$

Zadani signal je zbroj:

$$x(t) = 5e^{j\cdot 1\cdot \omega_0 t} + 5e^{-j\cdot 1\cdot \omega_0 t} + \frac{5}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{j\cdot 2\cdot \omega_0 t} + \frac{5}{2}e^{j\frac{\pi}{2}}e^{-j\cdot 2\cdot \omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{6}}e^{j\cdot 3\cdot \omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{6}}e^{-j\cdot 3\cdot \omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}e^{j\cdot 4\cdot \omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{-j\cdot 4\cdot \omega_0 t}$$

Usporedbom sa formulom za Fourierov red

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j\omega_0 kt}$$

direktno možemo očitati vrijednosti Fourierovih koeficijenata:

$$k = -1 \rightarrow X_{-1} = 5 \qquad k = 1 \rightarrow X_1 = 5$$

$$k = -2 \rightarrow X_{-2} = \frac{5}{2}e^{j\frac{\pi}{2}} \qquad k = 2 \rightarrow X_2 = \frac{5}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$k = -3 \rightarrow X_{-3} = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{6}} \qquad k = 3 \rightarrow X_3 = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{6}}$$

$$k = -4 \rightarrow X_{-4} = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}} \qquad k = 4 \rightarrow X_4 = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$$

Za sve ostale *k* koeficijenti su nula.

Zadani signal je bio kontinuiran i periodičan. Dobiveni spektar je aperiodičan i diskretan.

Dodatak: pokušajte ove koeficijente izračunati uvrštavanjem u formulu $X_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$. Nacrtajte amplitudni i fazni spektar.

Period očitavanja je $T_p = 0.02s$. Frekvencija očitavanja je $f_s = \frac{1}{0.02} = 50Hz$. Da ne bi došlo do preklapanja spektra, frekvencija očitavanja mora biti barem dvostruko veća od najveće frekvencije signala. Zadani signal se sastoji od frekvencija $25Hz, 50Hz, 75Hz, 100Hz$. Najveća od njih je *100Hz*. Da ne bi bilo preklapanja spektra, frekvencija očitavanja bi morala biti barem *200Hz*. Kako je zadana frekvencija očitavanja *50Hz* dolazi do preklapanja spektra.

4. Izračunajte Fourierove koeficijente vremenski kontinuiranog signala

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-4k).$$

Rješenje:

Zadani signal je kontinuirani signal koji je za sve *t* jednak nuli, osim za *t=4k* kada je jednak beskonačno. Pri tome je *k* cijeli broj. Iz toga slijedi da je ovaj signal periodičan, te da mu je period $T_0 = 4$. Jedan period možemo promatrati npr. na intervalu *(-1,3)*.

Da bi izračunali njegov Fourierov red moramo uvrstiti u formulu:

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt.$$

$$X_k = \frac{1}{4} \int_{-1}^{3} \delta(t) e^{-jk\frac{\pi}{2}t} dt = \frac{1}{4} e^{-jk\frac{\pi}{2}0} = \frac{1}{4}.$$

Pa je spektar jednak $\frac{1}{4}$ za svaki *k*. Dobiveni spektar je diskretan.

5. Nađite Fourierove transformacije, te amplitudne, fazne, realne i imaginarne spektre sljedećih signala:
   a. $x(t) = e^{-t}\mu(t)$,
   b. $x(t) = e^{t}\mu(-t)$,
   c. $x(t) = e^{-|t|}$.

   Odredite energiju zadanih signala u vremenskoj i u frekvencijskoj domeni. U kakvom su odnosu ove dvije energije?

Rješenje:

Fourierova transformacija dana je izrazima

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}dt.$$

a. Signal $x(t) = e^{-t}\mu(t)$ je kauzalan, što znači da je prije *t=0* nula. Njegova CTFT iznosi:

$$X(j\omega) = \int_{0}^{\infty} e^{-t}e^{-j\omega t}dt = \left.\frac{e^{-(j\omega+1)t}}{-(1+j\omega)}\right|_{0}^{\infty} = \frac{1}{1+j\omega} = \frac{1-j\omega}{1+\omega^2}.$$

Zadani signal je kontinuirana funkcija, pa će njegov spektar biti aperiodičan. Signal je i aperiodičan, pa je njegov spektar kontinuiran (vidljivo po ω).

Amplitudni spektar je $|X(j\omega)| = \sqrt{\frac{1+\omega^2}{(1+\omega^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}$

Fazni spektar je $\measuredangle X(j\omega) = \operatorname{arctg}\frac{\frac{-\omega}{1+\omega^2}}{\frac{1}{1+\omega^2}} = \operatorname{arctg}(-\omega) = -\operatorname{arctg}(\omega)$

Realni spektar $\operatorname{Re}\{X(j\omega)\} = \frac{1}{1+\omega^2}$

Imaginarni spektar $\operatorname{Im}\{X(j\omega)\} = -\frac{\omega}{1+\omega^2}$

Energija iz vremenske domene

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-t}\mu(t)|^2 dt = \int_{0}^{\infty} e^{-2t}dt = \left.\frac{e^{-2t}}{-2}\right|_{0}^{\infty} = \frac{1}{2}$$

Energija iz frekvencijske domene

$$E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{1-j\omega}{1+\omega^2}\right|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}\right)^2 d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\omega^2}d\omega = \frac{1}{2\pi}\operatorname{arctg}(\omega)|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{2\pi}\cdot\pi = \frac{1}{2}.$$

b. Signal $x(t) = e^{t}\mu(-t)$ je antikauzalan, što znači da je poslije *t=0* nula. Njegova CTFT iznosi:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{0} e^{t}e^{-j\omega t}dt = \left.\frac{e^{(-j\omega+1)t}}{1-j\omega}\right|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{1-j\omega} = \frac{1+j\omega}{1+\omega^2}.$$

Zadani signal je kontinuirana funkcija, pa će njegov spektar biti aperiodičan. Signal je i aperiodičan, pa je njegov spektar kontinuiran (vidljivo po ω).

Amplitudni spektar je $|X(j\omega)| = \sqrt{\frac{1+\omega^2}{(1+\omega^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}$

Fazni spektar je $\measuredangle X(j\omega) = \text{arctg}\frac{\frac{\omega}{1+\omega^2}}{\frac{1}{1+\omega^2}} = \text{arctg}(\omega)$

Realni spektar $\text{Re}\{X(j\omega)\} = \frac{1}{1+\omega^2}$

Imaginarni spektar $\text{Im}\{X(j\omega)\} = \frac{\omega}{1+\omega^2}$

Energija iz vremenske domene

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |e^t \mu(-t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{0} e^{2t} dt = \frac{e^{2t}}{2}\bigg|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{2}$$

Energija iz frekvencijske domene

$$E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{1+j\omega}{1+\omega^2}\right|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}\right)^2 d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\omega^2} d\omega = \frac{1}{2\pi}\text{arctg}(\omega)|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{2\pi}\cdot\pi = \frac{1}{2}.$$

c. Signal $x(t) = e^{-|t|}$ je nekauzalan, realan i paran. Njegova CTFT iznosi:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{0} e^t e^{-j\omega t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-t}e^{-j\omega t} dt =$$

$$= \frac{e^{(-j\omega+1)t}}{1-j\omega}\bigg|_{-\infty}^{0} + \frac{e^{-(j\omega+1)t}}{-(1+j\omega)}\bigg|_{0}^{\infty} = \frac{1}{1-j\omega} + \frac{1}{1+j\omega} = \frac{2}{1+\omega^2}.$$

Zadani signal je kontinuirana funkcija, pa će njegov spektar biti aperiodičan. Signal je i aperiodičan, pa je njegov spektar kontinuiran (vidljivo po ω).

Amplitudni spektar je $|X(j\omega)| = \frac{2}{1+\omega^2}$

Fazni spektar je $\measuredangle X(j\omega) = \text{arctg}\frac{0}{\frac{2}{1+\omega^2}} = 0$

Realni spektar $\text{Re}\{X(j\omega)\} = \frac{2}{1+\omega^2}$

Imaginarni spektar $\text{Im}\{X(j\omega)\} = 0$

Energija iz vremenske domene

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left|e^{-|t|}\right|^2 dt = \int_{-\infty}^{0} e^{2t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-2t} dt = \frac{e^{2t}}{2}\bigg|_{-\infty}^{0} + \frac{e^{-2t}}{-2}\bigg|_{-\infty}^{0} = 1$$

Energija iz frekvencijske domene

$$E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{2}{1+\omega^2}\right|^2 d\omega = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+\omega^2)^2} d\omega$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\omega}{2(1+\omega^2)} + \frac{1}{2}\text{arctg}(\omega)\right)\bigg|_{-\infty}^{\infty} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = 1.$$

Energija ovog signala je zbroj energija signala iz a. i b. dijela zadatka. Isto vrijedi i za signale.

Napomena: formule za česte integrale nalaze se u službenom šalabahteru.

Dodatak: skicirajte amplitudne, fazne, realne i imaginarne spektre.

6. Zadan je signal $x(t) = e^{2t}\mu(-t)$.
   a. Nađite Fourierovu transformaciju zadanog signala.
   b. Nacrtajte amplitudni i fazni spektar.
   c. Odredite energiju signala u vremenskoj domeni.
   d. Odredite energiju signala u frekvencijskoj domeni korištenjem Parsevalove jednakosti.

Rješenje:

a. Signal $x(t) = e^{2t}\mu(-t)$ je antikauzalan, što znači da je poslije *t=0* nula. Njegova CTFT iznosi:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{0} e^{2t}e^{-j\omega t}dt = \frac{e^{(-j\omega+2)t}}{2-j\omega}\Bigg|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{2-j\omega} = \frac{2+j\omega}{4+\omega^2}.$$

b. Amplitudni spektar je $|X(j\omega)| = \sqrt{\frac{2^2+\omega^2}{(4+\omega^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{4+\omega^2}}$

Fazni spektar je $\measuredangle X(j\omega) = \operatorname{arctg}\frac{\frac{\omega}{4+\omega^2}}{\frac{2}{4+\omega^2}} = \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{2}\right)$

c. Energija iz vremenske domene

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |e^{2t}\mu(-t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{0} e^{4t}dt = \frac{e^{4t}}{4}\Bigg|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{4}$$

d. Energija iz frekvencijske domene

$$E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{2+j\omega}{4+\omega^2}\right|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{4+\omega^2}}\right)^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4+\omega^2} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{2}\right)\Bigg|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{4\pi}\cdot\pi = \frac{1}{4}.$$

7. Nađite Fourierovu transformaciju sgn funkcije $\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$.

Rješenje:

Zadani signal možemo napisati u obliku $\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases} = -1 + 2\mu(t)$.

Fourierovu transformaciju je najlakše odrediti očitavanjem iz tablica Fourierovih transformacija (službeni šalabahter):

$$1 \to 2\pi\delta(\omega)$$

$$\mu(t) \to \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

Kako vrijedi svojstvo linearnosti, CTFT zadanog signala je:

$$X(j\omega) = -2\pi\delta(\omega) + 2\left(\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right) = \frac{2}{j\omega} = -\frac{2j}{\omega}.$$

Druga metoda: koristite pravilo deriviranja CTFT.

8. Nađite Fourierovu transformaciju signala $x(t) = \begin{cases} 1, & -\frac{3}{2} < t < \frac{5}{2} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$.

Rješenje:

Fourierova transformacija se računa iz izraza

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Direktnim uvrštavanjem slijedi:

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} e^{-j\omega t} dt = \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\Bigg|_{-\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \\ &= \frac{1}{-j\omega}\left(e^{-\frac{j\omega 5}{2}} - e^{\frac{j\omega 3}{2}}\right) \\ &= \frac{e^{-\frac{j\omega}{2}}}{-j\omega}\left(e^{-\frac{j\omega 4}{2}} - e^{\frac{j\omega 4}{2}}\right) \\ &= e^{-\frac{j\omega}{2}} \frac{2\sin(2\omega)}{\omega} \end{aligned}$$

9. Objasnite koju Fourierovu transformaciju smijete koristiti za analizu signala $\mathrm{x(t)} = 220\sin\left(50\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$. Izračunajte amplitudni i fazni spektar signala $\mathrm{x(t)}$ korištenjem odabrane transformacije. Odredite snagu ovog signala.

<u>Rješenje:</u>

Zadan je kontinuirani periodičan signal. Spektar će mu biti diskretan aperiodičan. Zato moramo koristiti vremenski kontinuiran Fourierov red – CTFS.

Period zadanog signala je $50\pi T_p = 2k\pi \rightarrow T_p = \frac{1}{25}s$.

Signal se može napisati u obliku:

$$\begin{aligned}\mathrm{x(t)} &= 220\sin\left(50\pi t + \frac{\pi}{3}\right)\\ &= \frac{220}{2j}\left(e^{j\left(50\pi t+\frac{\pi}{3}\right)} - e^{-j\left(50\pi t+\frac{\pi}{3}\right)}\right)\\ &= 110e^{-j\frac{\pi}{2}}\left(e^{j\frac{\pi}{3}}e^{j\frac{2\pi}{1/25}t} - e^{-j\frac{\pi}{3}}e^{-j\frac{2\pi}{1/25}t}\right).\end{aligned}$$

Traženi koeficijenti su

$$X_1 = 110e^{-j\frac{\pi}{6}}, \qquad X_{-1} = 110e^{j\frac{\pi}{6}}$$

Amplitudni spektar je svugdje nula osim u uzorcima:

$$|X_1| = 110, \qquad |X_{-1}| = 110$$

Fazni spektar je svugdje nula osim u uzorcima:

$$\angle X_1 = -\frac{\pi}{6}, \qquad \angle X_{-1} = \frac{\pi}{6}$$

Snaga signala se računa prema:

$$P_x = \frac{1}{T_p}\int_{T_p}|x(t)|^2dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty}|X_k|^2 = 110^2 + 110^2 = 24200.$$

Signali i sustavi - Zadaci za vježbu

V. tjedan

1. Izračunajte Fourierov red vremenski diskretnog signala
$$x(n) = \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right).$$
Odredite snagu signala.

Rješenje:

Osnovni period signala je $N_0 = 24$, prema tome $\Omega_0 = \frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12}$.

Primjenom Eulerove formule

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{2}\left(e^{\frac{j\pi}{3}n} + e^{-\frac{j\pi}{3}n}\right) + \frac{1}{2j}\left(e^{\frac{j\pi}{4}n} - e^{-\frac{j\pi}{4}n}\right) = \\ &= \frac{1}{2}e^{-j4\Omega_0 n} + j\frac{1}{2}e^{-j3\Omega_0 n} - j\frac{1}{2}e^{j3\Omega_0 n} + \frac{1}{2}e^{j4\Omega_0 n} \\ &= \frac{1}{2}e^{j\cdot 20\cdot\Omega_0 n} + \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}}e^{j\cdot 21\cdot\Omega_0 n} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{j\cdot 3\cdot\Omega_0 n} + \frac{1}{2}e^{j\cdot 4\cdot\Omega_0 n} \end{aligned}$$

Prema tome $X_3 = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}, X_4 = \frac{1}{2}, X_{20} = \frac{1}{2}, X_{21} = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}}$.

Dobiveni spektar je diskretan i periodičan. Skicirajte amplitudnu i faznu karakteristiku.

Snaga signala je

$$P = \sum_{n=0}^{N-1} |X_k|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1.$$

2. Izračunajte vremenski diskretan Fourierov red periodičnog diskretnog signala, čija je jedna perioda definirana na sljedeći način:

$$x(n) = \begin{cases} n, & |n| \leq 3 \\ 0, & n \in \{4,5\} \end{cases}.$$

Izračunajte snagu signala.

<u>Rješenje:</u>

Period zadanog signala je *N=9*.

Vremenski diskretan Fourierov red se računa prema formuli

$$X_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}.$$

Za ovaj slučaj raspisujemo:

$$\begin{aligned} X_k &= \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{8} x(n) e^{-jk\frac{2\pi}{9}n} \\ &= \frac{1}{9}(0 + 1 \cdot e^{-jk\frac{2\pi}{9}\cdot 1} + 2 \cdot e^{-jk\frac{2\pi}{9}\cdot 2} + 3 \cdot e^{-jk\frac{2\pi}{9}\cdot 3} + 0 \cdot e^{-jk\frac{2\pi}{9}\cdot 4} \\ &+0 \cdot e^{-jk\frac{2\pi}{9}\cdot 5} - 3 \cdot e^{-jk\frac{2\pi}{9}\cdot 6} - 2 \cdot e^{-jk\frac{2\pi}{9}\cdot 7} - 1 \cdot e^{-jk\frac{2\pi}{9}\cdot 8}) \end{aligned}$$

Raspisujući sinuse i kosinuse, te koristeći svojstva:

$$\cos\left(k\frac{2\pi}{9}\right) = \cos\left(k\frac{16\pi}{9}\right), \cos\left(k\frac{4\pi}{9}\right) = \cos\left(k\frac{14\pi}{9}\right), \cos\left(k\frac{6\pi}{9}\right) = \cos\left(k\frac{12\pi}{9}\right),$$

$$\sin\left(k\frac{2\pi}{9}\right) = -\sin\left(k\frac{16\pi}{9}\right), \sin\left(k\frac{4\pi}{9}\right) = -\sin\left(k\frac{14\pi}{9}\right) \text{ i } \sin\left(k\frac{6\pi}{9}\right) = -\sin\left(k\frac{12\pi}{9}\right),$$

dolazi se do rješenja:

$$X_k = -\frac{2j}{9}\left(\sin\left(\frac{2\pi k}{9}\right) + 2\sin\left(\frac{4\pi k}{9}\right) + 3\sin\left(\frac{6\pi k}{9}\right)\right).$$

Dobiveni spektar je diskretan i periodičan.

Njegovu snagu možemo naći u vremenskoj ili frekvencijskoj domeni koristeći Parsevalovu jednakost:

$$P = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |X_k|^2.$$

U ovom slučaju lakše je računati u vremenskoj domeni:

$$P = \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{8} |x(n)|^2 = \frac{1}{9}(0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 0^2 + 0^2 + (-3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2) = \frac{28}{9}.$$

3. Zadan je periodički vremenski kontinuiran signal

$$x(t) = 2\cos(200\pi t) + 3\cos(500\pi t).$$

Ako se dani signal očita s frekvencijom očitavanja $F_s = 1kHz$, nađite koeficijente Fourierovog reda dobivenog diskretnog signala. Odredite mu snagu.

<u>Rješenje:</u>

Ako je frekvencija očitavanja $F_s = 1kHz$, vrijeme očitavanja je onda $T_s = \frac{1}{F_s} = 10^{-3}s$.

Očitani signal tada glasi:

$$x(nT_s) = 2\cos(200\pi n T_s) + 3\cos(500\pi n T_s) = 2\cos\left(\frac{\pi}{5}n\right) + 3\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) = x(n).$$

Ovako dobiveni signal je diskretan i periodičan. Period prvog dijela je $\frac{\pi}{5}N_1 = 2k\pi \rightarrow N_1 = 10$, a drugog dijela $\frac{\pi}{2}N_2 = 2k\pi \rightarrow N_2 = 4$. Najmanji zajednički višekratnik i ukupni period zadanog signala je $N = 20$. Zato se signal može napisati u obliku

$$x(n) = 2\cos\left(\frac{2\pi}{20}\cdot 2n\right) + 3\cos\left(\frac{2\pi}{20}\cdot 5n\right) = \frac{2}{2}\left(e^{j\frac{2\pi}{20}\cdot 2n} + e^{-j\frac{2\pi}{20}\cdot 2n}\right) + \frac{3}{2}\left(e^{j\frac{2\pi}{20}\cdot 5n} + e^{-j\frac{2\pi}{20}\cdot 5n}\right).$$

Koristeći svojstvo $e^{-j\frac{2\pi}{20}\cdot 2n} = e^{j\frac{2\pi}{20}\cdot 18n}$ i $e^{-j\frac{2\pi}{20}\cdot 5n} = e^{j\frac{2\pi}{20}\cdot 15n}$ (podsjetnik: pogledajte kutove u kompleksnoj ravnini), signal možemo raspisati:

$$x(n) = e^{j\frac{2\pi}{20}\cdot 2n} + e^{j\frac{2\pi}{20}\cdot 18n} + \frac{3}{2}e^{j\frac{2\pi}{20}\cdot 5n} + \frac{3}{2}e^{j\frac{2\pi}{20}\cdot 15n}.$$

Formule za vremenski diskretan Fourierov red glase:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j\frac{2\pi}{N}\cdot kn}$$

$$X_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot kn}.$$

Gledajući gornji signal i formule, vidimo da je potrebno samo očitati koeficijente iz signala:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{19} X_k e^{j\frac{2\pi}{20}\cdot kn}$$

Tako dobivamo:

$$k = 2 \rightarrow X_2 = 1 \qquad k = 5 \rightarrow X_5 = \frac{3}{2}$$

$$k = 18 \rightarrow X_{18} = 1 \qquad k = 15 \rightarrow X_{15} = \frac{3}{2}$$

Za sve ostale *k* vrijednost Vremenski diskretnog Fourierovog reda je nula.

Dobiveni spektar je diskretan periodičan.

Snaga signala je $P = \sum_{n=0}^{N-1} |X_k|^2 = (1)^2 + (1)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{13}{2}.$

4. Nađite vremenski diskretnu Fourierovu transformaciju diskretnog signala

$$x(n) = \begin{cases} n, & |n| \leq 3 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

Izračunajte energiju signala.

Rješenje:

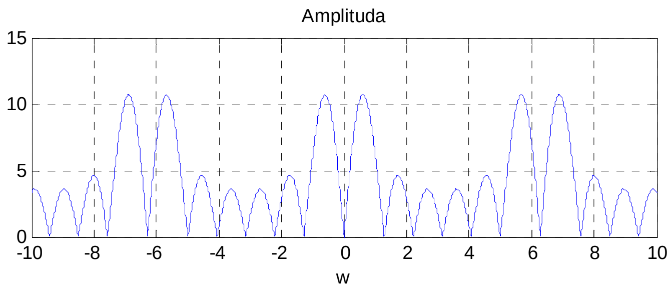
Zadani signal je diskretan aperiodičan. Njegov spektar će biti periodičan kontinuiran, a računa se prema formulama za vremenski diskretnu Fourierovu transformaciju:

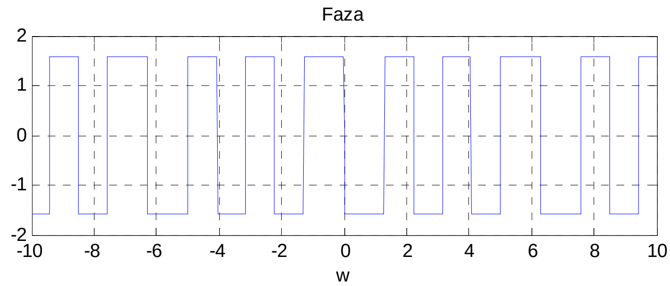
$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n} d\Omega$$

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega \mathrm{n}}.$$

Spektar zadanog signala dobivamo uvrštavanjem u formulu:

$$\begin{aligned} X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega \mathrm{n}} &= -3e^{j\Omega \cdot 3} - 2e^{j\Omega \cdot 2} - e^{j\Omega \cdot 1} + 0 \cdot e^{j\Omega \cdot 0} + e^{-j\Omega \cdot 1} + 2e^{-j\Omega \cdot 2} + 3e^{-j\Omega \cdot 3} \\ &= 3\big(-\cos(3\Omega) - \mathrm{j}\sin(3\Omega) + \cos(3\Omega) - \mathrm{j}\sin(3\Omega)\big) \\ &\quad + 2\big(-\cos(2\Omega) - \mathrm{j}\sin(2\Omega) + \cos(2\Omega) - \mathrm{j}\sin(2\Omega)\big) \\ &\quad + 1\big(-\cos(\Omega) - \mathrm{j}\sin(\Omega) + \cos(\Omega) - \mathrm{j}\sin(\Omega)\big) \\ &= -2\mathrm{j}(3\sin 3\Omega + 2\sin 2\Omega + \sin\Omega) \end{aligned}$$





Totalna energija je dana preko Parsevalove relacije:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|X(e^{j\Omega})\right|^2 d\Omega.$$

U vremenskoj domeni ona iznosi

$$E = \cdots |0|^2 + |-3|^2 + |-2|^2 + |-1|^2 + 0^2 + |1|^2 + |2|^2 + |3|^2 + 0 + \cdots = 28.$$

U frekvencijskoj domeni totalna energija iznosi

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|X(e^{j\Omega})\right|^2 d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |-2\mathrm{j}(3\sin 3\Omega + 2\sin 2\Omega + \sin\Omega)|^2 d\Omega$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (3\sin 3\Omega + 2\sin 2\Omega + \sin\Omega)^2 d\Omega = 28$$

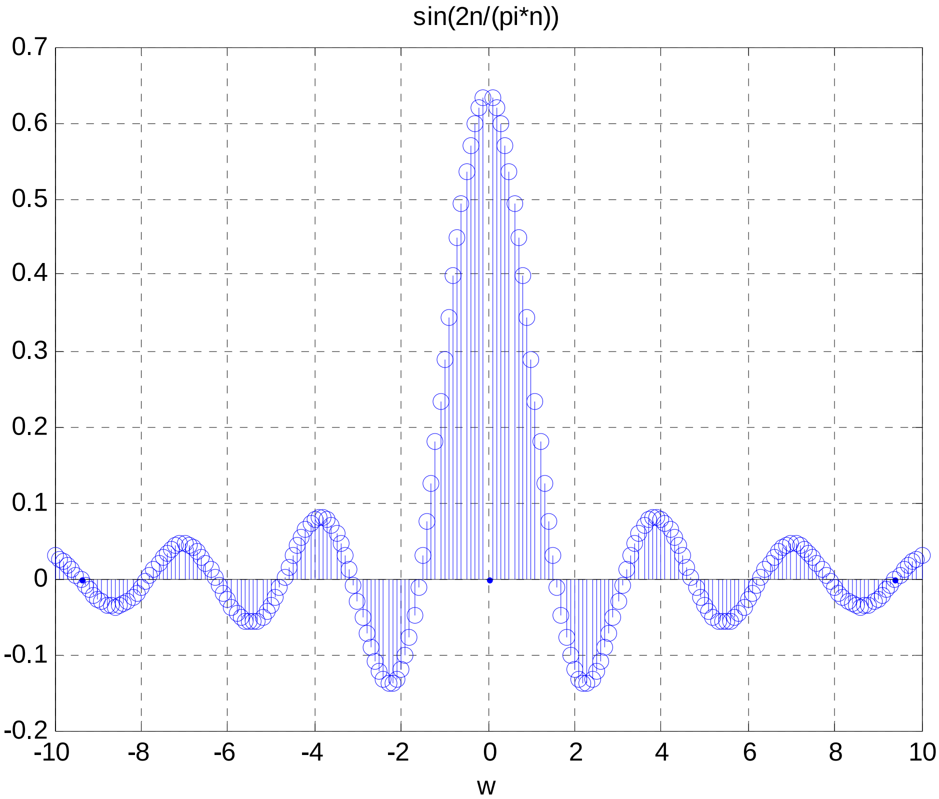
5. Zadan je spektar signala $X(e^{j\Omega})$. Nađite signal $x(n)$, te odredite energiju ovog signala.

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < \mathrm{w} \\ 0, w < |\Omega| < \pi. \end{cases}$$

Rješenje:

S obzirom da je zadan Fourierov spektar, za izračun signala u vremenskoj domeni, koristimo inverznu Fourierovu transformaciju:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-w}^{w} 1\cdot e^{j\Omega n}d\Omega = \frac{1}{2\pi}\frac{e^{j\Omega n}}{jn}\Big|_{-w}^{w} = \frac{1}{2\pi}\frac{e^{jwn}-e^{-jwn}}{jn} = \frac{\sin wn}{\pi n}.$$



Energija ovog signala se lakše nalazi u frekvencijskoj domeni:

$$E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|X(e^{j\Omega})\right|^2 d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-w}^{w} 1^2 d\Omega = \frac{w}{\pi}.$$

Signali i sustavi - Zadaci za vježbu

VIII. tjedan

1. Signal $x(t) = \sin(8000\pi t) + 2\cos\left(24000\pi t + \frac{\pi}{3}\right) + \sin(16000\pi t)$ otipkan je frekvencijom otipkavanja $f_s = 10kHz$. Odredite vremenski oblik signala nakon rekonstrukcije idealnim interpolatorom.

Rješenje:

Zadani signal je zapravo linearna kombinacija sinusoida, pa možemo svaku od njih promatrati posebno.

Prvi dio ima frekvenciju $f_1 = 4000Hz$, pa bi ga trebalo očitati s barem $2 \cdot f_1 = 8kHz$ da ne dođe do preklapanja spektra. Kako je zadana frekvencija očitavanja $f_s = 10kHz$ veća od *8kHz*, neće doći do preklapanja spektra. Nakon očitanja signala i rekonstrukcije dobiva se isti početni signal.

Drugi dio signala ima frekvenciju $f_2 = 12000Hz$. Trebali bi ga očitati sa barem $24kHz$, te će u promatranom slučaju doći do preklapanja spektra. Nakon očitavanja dobivamo:

$$x(n) = 2\cos\left(24000\pi n \cdot T_s + \frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\left(24000\pi n \cdot \frac{1}{10000} + \frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\left(2.4\pi n + \frac{\pi}{3}\right).$$

Dobiveni signal možemo pomaknuti za $2\pi n$ bilo koji broj puta da se ne promijeni

$$x(n) = 2\cos\left(2.4\pi n + \frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\left(2.4\pi n + \frac{\pi}{3} + 2\pi nk\right).$$

Prilikom rekonstrukcije gledamo samo osnovni pojas za kojega je koeficijent uz *n* iz intervala $[-\pi, \pi]$:

$$-\pi < 2.4\pi + 2\pi k < \pi$$

$$-1 < 2.4 + 2k < 1$$

$$k > -1.7 \text{ i } k < -0.7$$

Kako je $k \in \mathbb{Z}$, jedini mogući izbor je $k = -1$. Signal je sada:

$$x(n) = 2\cos\left(0.4\pi n + \frac{\pi}{3}\right).$$

Rekonstruirani signal je

$$x(t) = 2\cos\left(0.4\pi \cdot \frac{t}{T_s} + \frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\left(0.4\pi t f_s + \frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\left(4000\pi t + \frac{\pi}{3}\right).$$

Analogan postupak provodimo i za treći dio signala. Njegova frekvencija je $f_3 = 8000kHz$, te će i kod njega doći do preklapanja spektra. Očitavanjem izlazi:

$$x(n) = \sin(16000\pi n \cdot T_s) = \sin(1.6\pi n).$$

Dobiveni signal možemo pomaknuti za $2\pi n$ bilo koji broj puta:

$$x(n) = \sin(1.6\pi n) = \sin(1.6\pi n + 2\pi kn).$$

Prilikom rekonstrukcije gledamo samo osnovni pojas za kojega je koeficijent uz *n* iz intervala $[-\pi, \pi]$:

$$-\pi < 1.6\pi + 2\pi k < \pi$$

$$-1 < 1.6 + 2k < 1$$

$$k > -1.3 \text{ i } k < -0.3$$

Kako je $k \in \mathbb{Z}$, jedini mogući izbor je $k = -1$. Signal je sada:

$$x(n) = \sin(-0.4\pi n).$$

Rekonstruirani signal je

$$x(t) = \sin\left(-0.4\pi \cdot \frac{t}{T_s}\right) = \sin(-4000\pi t) = -\sin(4000\pi t).$$

Ukupni rekonstruirani signal je:

$$x(t) = \sin(8000\pi t) + 2\cos\left(4000\pi t + \frac{\pi}{3}\right) - \sin(4000\pi t).$$

2. Odredite Diskretnu Fourierovu transformaciju u N-točaka sljedećih sekvenci signala:
   a. $x(n) = \delta(n);$
   b. $x(n) = \delta(n - n_0), \ \ uz \ \ 0 < n_0 < N.$

<u>Rješenje:</u>

DFT diskretnog signala računa se prema formuli:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

a. Za jedinični impuls vrijedi:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \delta(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = e^{-j\frac{2\pi}{N}k0} = 1, \quad k = 0,1, \dots, N-1$$

b. Za pomaknuti jedinični impuls dobiva se:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \delta(n - n_0) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = e^{-j\frac{2\pi}{N}kn_0}, \qquad k = 0,1, \dots, N-1$$

3. Odredite Diskretnu Fourierovu transformaciju u N-točaka signala
   a. $x(n) = \mu(n) - \mu(n-N)$;
   b. $x(n) = \mu(n) - \mu(n-n_0),\ \ 0 < n_0 < N$.

Rješenje:

DFT diskretnog signala računa se prema formuli:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Podsjetnik: $\sum_{n=0}^{N-1} q^n = \frac{1-q^N}{1-q}$

a. Zadani signal ima amplitudu 1 na intervalu 0 do N-1:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}kN}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}k}} = \frac{1-e^{-j2\pi k}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}k}} =$$

$$= \frac{1-(\cos 2\pi k - j\sin 2\pi k)}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}k}} = \frac{1-1}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}k}} = 0, \qquad k \neq 0$$

Za k=0 vrijedi:

$$X(0) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}0n} = \sum_{n=0}^{N-1} 1 = N$$

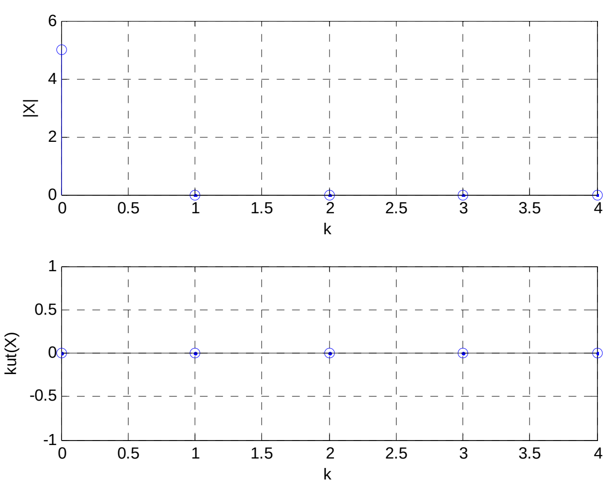
b. Ovaj signal ima amplitudu 1 na intervalu *0* do *n_0-1*, dok je od *n_0* do *N* jednak nula. DFT se računa:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{n_0-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}kn_0}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}k}} = \frac{e^{-j\frac{2\pi}{N}kn_0/2}\left(e^{j\frac{2\pi}{N}kn_0/2} - e^{-j\frac{2\pi}{N}kn_0/2}\right)}{e^{-j\frac{2\pi}{N}k/2}\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k/2} - e^{-j\frac{2\pi}{N}k/2}\right)}$$

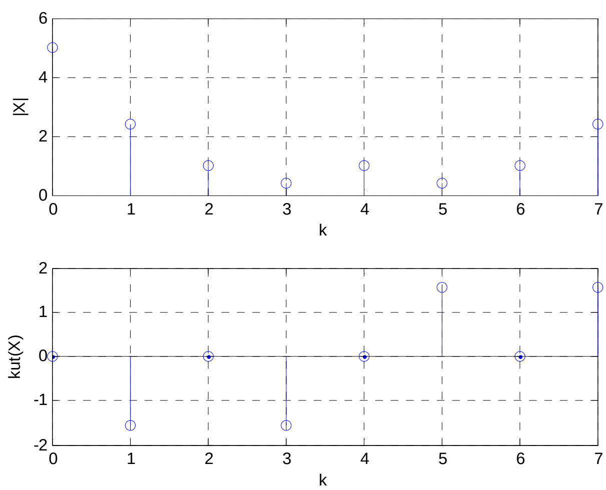
$$= e^{-j\frac{2\pi}{N}k\frac{(n_0-1)}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{N}kn_0\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{N}k\right)}, \quad k = 0,1,\dots,N-1$$

Za k=0 vrijedi:

$$X(0) = \sum_{n=0}^{n_0-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}0n} = \sum_{n=0}^{n_0-1} 1 = n_0$$



a. zadatak



b. zadatak

4. Odredite Diskretnu Fourierovu transformaciju sljedećih signala duljine 4:
   a. $x(n) = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right),\ n = 0, 1, 2, 3;$
   b. $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n},\quad n = 0, 1, 2, 3.$

<u>Rješenje:</u>

DFT diskretnog signala računa se prema formuli:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

a. Duljina signala je *N=4*, pa je traženi spektar:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{3} \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) e^{-j\frac{2\pi}{4}kn} = 1 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}k\cdot 0} + 0 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}k\cdot 1} - 1 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}k\cdot 2} + 0 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}k\cdot 3}$$

$$= 1 - 1 \cdot e^{-j\pi k} = 1 - (-1)^{k},\quad k = 0,1,2,3.$$

Odnosno, koeficijenti spektra iznose:

$$x(0) = 0,\qquad x(1) = 2,\qquad x(2) = 0,\qquad x(3) = 2.$$

b. Duljina signala je *N=4*, pa je traženi spektar:

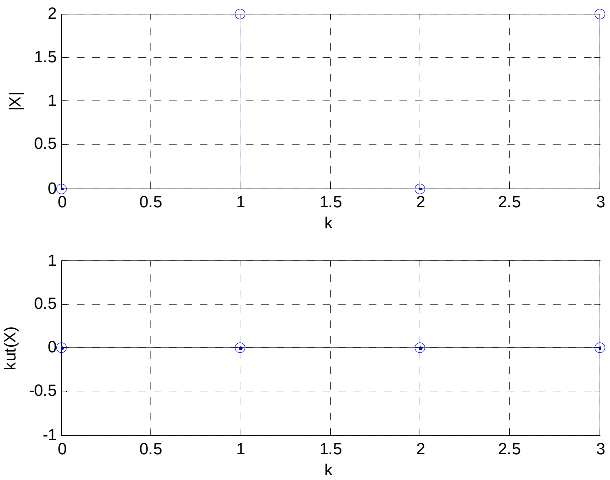
$$X(k) = \sum_{n=0}^{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} e^{-j\frac{2\pi}{4}kn} =$$

$$= 1 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}k\cdot 0} + \frac{1}{2} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}k\cdot 1} + \frac{1}{4} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}k\cdot 2} + \frac{1}{8} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}k\cdot 3},\quad k = 0,1,2,3.$$

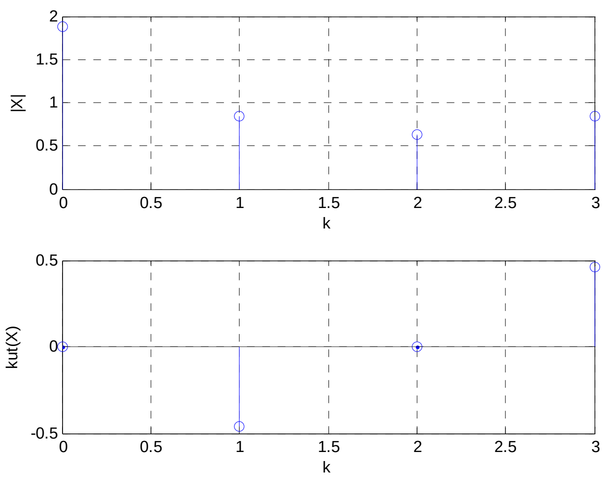
Uvrštavanjem mogućih *k*-va, koeficijenti spektra su:

$$X(0) = \frac{15}{8},\qquad X(1) = \frac{3}{4} - \frac{3}{8}j,\qquad X(2) = \frac{5}{8},\qquad X(3) = \frac{3}{4} + \frac{3}{8}j$$

Napomena: u zadatku može biti zadan i niz impulsa (npr. $\{\underline{1}, 2, 3, -2\}$). U takvom slučaju podcrtani broj predstavlja uzorak u trenutku *n=0*. Postupak računanja DFT-a je analogan – uvrsti se u formulu i računa.



a. zadatak



b. zadatak

5. Odredite inverznu Diskretnu Fourierovu transformaciju spektra

$$X(k) = \frac{3}{4} + \frac{3}{8}e^{-j\frac{\pi}{2}k} - \frac{3}{4}e^{-j\pi k} - \frac{3}{8}e^{-j\frac{3\pi}{2}k}, \;\; k = 0, 1, 2, 3.$$

<u>Rješenje:</u>

DFT diskretnog signala računa se prema formuli:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Inverznu DFT diskretnog spektra računamo prema formuli:

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Duljina niza zadanog spektra je *N=4*.

Zadani spektar prema tome možemo napisati kao:

$$X(k) = \frac{3}{4}e^{-j\frac{2\pi}{4}k\cdot 0} + \frac{3}{8}e^{-j\frac{2\pi}{4}k\cdot 1} - \frac{3}{4}e^{-j\frac{2\pi}{4}k\cdot 2} - \frac{3}{8}e^{-j\frac{2\pi}{4}k\cdot 3}, \;\; k = 0, 1, 2, 3.$$

Usporedbom s formulom za DFT možemo direktno očitati amplitude zadanog diskretnog niza (gdje je podcrtana amplituda impulsa u trenutku *n=0*):

$$x(n) = \{\underline{\frac{3}{4}}, \frac{3}{8}, -\frac{3}{4}, -\frac{3}{8}\}$$

Drugi način rješavanja je uvrštavanje zadanog spektra u formulu za inverznu DFT i računanje sume.

6. Promotrite konačno dugu kompleksnu eksponencijalu

$$x(n) = \begin{cases} e^{j\Omega_0 n}, & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

   a. Odredite vremenski diskretnu Fourierovu transformaciju $X(e^{j\Omega})$ ovog signala *x(n)*.
   b. Odredite diskretnu Fourierovu transformaciju *X(k)* u *N* točaka ovog signala *x(n)*.

Rješenje:

a. Vremenski diskretna Fourierova transformacija se računa prema:

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n}$$

Uvrštavanjem zadanog signala imamo:

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\Omega_0 n} e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(\Omega_0-\Omega)n} = \frac{1 - e^{j(\Omega_0-\Omega)N}}{1 - e^{j(\Omega_0-\Omega)}} =$$

$$= \frac{e^{j(\Omega_0-\Omega)N/2} \left(e^{-j(\Omega_0-\Omega)N/2} - e^{j(\Omega_0-\Omega)N/2}\right)}{e^{j(\Omega_0-\Omega)/2} \left(e^{-j(\Omega_0-\Omega)/2} - e^{j(\Omega_0-\Omega)/2}\right)} = e^{j(\Omega_0-\Omega)\frac{(N-1)}{2}} \frac{\sin\left((\Omega_0-\Omega)\frac{N}{2}\right)}{\sin\frac{\Omega_0-\Omega}{2}}$$

b. DFT diskretnog signala računa se prema formuli:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\Omega_0 n} e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(\Omega_0-\frac{2\pi}{N}k)\,n} = \frac{1 - e^{j(\Omega_0-\frac{2\pi}{N}k)\,N}}{1 - e^{j(\Omega_0-\frac{2\pi}{N}k)}}$$

$$= \frac{e^{j(\Omega_0-\frac{2\pi}{N}k)\,N/2} \left(e^{-j(\Omega_0-\frac{2\pi}{N}k)\,N/2} - e^{j(\Omega_0-\frac{2\pi}{N}k)\,N/2}\right)}{e^{j(\Omega_0-\frac{2\pi}{N}k)\,/2} \left(e^{-j(\Omega_0-\frac{2\pi}{N}k)\,/2} - e^{j(\Omega_0-\frac{2\pi}{N}k)\,/2}\right)}$$

$$= e^{j\left(\Omega_0-\frac{2\pi}{N}k\right)\frac{(N-1)}{2}} \frac{\sin\left(\left(\Omega_0 - \frac{2\pi}{N}k\right)\frac{N}{2}\right)}{\sin(\Omega_0 - \frac{2\pi}{N}k)\cdot\frac{1}{2}}$$

Primijetite vezu DTFT-a i DFT-a:

$$X(k) = X(e^{j\Omega})\Big|_{\Omega=\frac{2\pi k}{N}} = X\left(e^{j\frac{2\pi k}{N}}\right)$$

7. Signal $x_a(t)$ koji je ograničen na 10 kHz, otipkan je frekvencijom otipkavanja 20 kHz. Koliki je razmak između uzoraka spektra, ukoliko je napravljena diskretna Fourierova transformacija sa *N=1000* uzoraka?

Rješenje:

Signal $x_a(t)$ je otipkan s frekvencijom $F_s=20\ kHz$. Njegov spektar će se ponavljati svakih $F_s=20\ kHz$.

DFT je napravljena na *N=1000* uzoraka. Spektar ima također *N=1000* uzoraka.

Razmak između uzoraka je $\Delta f = \frac{F_S}{N} = \frac{20000}{1000} = 20Hz.$

Signali i sustavi - Zadaci za vježbu

X. tjedan

1. Odredite je li zadani diskretan sustav vremenski stalan, linearan, memorijski, kauzalan i BIBO stabilan. Možete li mu naći inverzni sustav?

$$y(n) = 2^{u(n)}.$$

Rješenje:

Kako $y(n)$ ovisi samo o $u(n)$ sustav nije **memorijski**. Iz istog razloga je i **kauzalan**.

Vremensku promjenjivost provjeravamo tako da prvo zakasnimo ulazni signal za neki M

$$u_1(n) = u(n - M),$$

te taj signal propustimo kroz sustav. Na izlazu iz sustava će biti

$$y_1(n) = 2^{u_1(n)} = 2^{u(n-M)}.$$

S druge strane, kada bi ulazni signal propustili kroz sustav dobili bi

$$y(n) = 2^{u(n)}.$$

Ako sada taj izlaz zakasnimo za onaj isti M, dobit ćemo

$$y(n - M) = 2^{u(n-M)}.$$

Kako su $y_1(n) = y(n - M)$ ovaj sustav je vremenski stalan.

Linearnost se provjerava tako da se na ulaz sustava dovedu dva različita ulazna signala $u_1(n)$ i $u_2(n)$ pomnožena sa različitim konstantama (homogenost), te zbrojena (aditivnost)

$$u(n) = \alpha u_1(n) + \beta u_2(n).$$

Na izlazu iz sustava će biti $y(n) = 2^{\alpha u_1(n)+\beta u_2(n)}$.

S druge strane ako je na ulazu u sustav $u_1(n)$ na izlazu će biti $y_1(n) = 2^{u_1(n)}$, a ako je na ulazu $u_2(n)$ na izlazu će biti $y_2(n) = 2^{u_2(n)}$. Ovi izlazi pomnoženi sa konstantama i zbrojeni daju $y(n) = \alpha y_1(n) + \beta y_2(n) = \alpha \cdot 2^{u_1(n)} + \beta \cdot 2^{u_2(n)}$.

Kako ova dva izlaza nisu jednaka, sustav nije linearan.

Sustav je **BIBO stabilan** ako na ograničenu pobudu daje ograničeni odziv. Zadani sustav je BIBO stabilan.

Inverz sustava: $y(n) = \log_2 u(n)$.

2. Odredite je li zadani kontinuirani sustav vremenski stalan, linearan, memorijski i kauzalan.

$$y(t) = u(t^2).$$

Rješenje:

Memorija: sustav u nekom trenutku t ovisi o onome što je na ulazu u trenutku t^2, pa je prema tome sustav memorijski.

Kauzalnost: Kako sustav ovisi i o onome što će se dogoditi u budućnosti, sustav nije kauzalan.

Vremensku promjenjivost provjeravamo tako da prvo zakasnimo ulazni signal za neki M

$$u_1(t) = u(t - M),$$

te taj signal propustimo kroz sustav. Na izlazu iz sustava će biti

$$y_1(t) = u_1(t^2) = u(t^2 - M).$$

S druge strane, kada bi ulazni signal propustili kroz sustav dobili bi

$$y(t) = u(t^2).$$

Ako sada taj izlaz zakasnimo za onaj isti M, dobit ćemo

$$y(t - M) = u((t - M)^2) = u(t^2 - 2tM + M^2).$$

Kako je $y_1(t) \neq y(t - M)$ ovaj sustav je vremenski promjenjiv.

Linearnost se provjerava tako da se na ulaz sustava dovedu dva različita ulazna signala $u_1(t)$ i $u_2(t)$ pomnožena sa različitim konstantama (homogenost), te zbrojena (aditivnost)

$$u(t) = \alpha u_1(t) + \beta u_2(t).$$

Na izlazu iz sustava će biti $y(t) = \alpha u_1(t^2) + \beta u_2(t^2)$.

S druge strane ako je na ulazu u sustav $u_1(t)$ na izlazu će biti $y_1(t) = u_1(t^2)$, a ako je na ulazu $u_2(t)$ na izlazu će biti $y_2(t) = u_2(t^2)$. Ovi izlazi pomnoženi sa konstantama i zbrojeni daju $y(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t) = \alpha u_1(t^2) + \beta u_2(t^2)$.

Kako su ova dva izlaza jednaka, sustav je linearan.

3. Odredite je li zadani diskretan sustav vremenski stalan, linearan, memorijski i kauzalan.

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} \frac{u(k)}{n-k} \ .$$

Rješenje:

Raspišimo zadani sustav

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} \frac{u(k)}{n-k} = \cdots + \frac{u(-1)}{n+1} + \frac{u(0)}{n} + \frac{u(1)}{n-1} + \cdots + \frac{u(n-1)}{1} + \frac{u(n)}{0}.$$

Memorija: sustav u nekom trenutku *n* ovisi o onome što je na ulazu u svim trenutcima prije toga, pa je prema tome sustav memorijski.

Kauzalnost: Kako sustav ovisi samo o onome što se dogodilo u prošlosti (i sadašnjosti), sustav je kauzalan.

Vremensku promjenjivost provjeravamo tako da prvo zakasnimo ulazni signal za neki *M*

$$u_1(n) = u(n-M),$$

te taj signal propustimo kroz sustav. Na izlazu iz sustava će biti

$$y_1(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} \frac{u(k-M)}{n-k} = \left| \begin{matrix} k - M = a \\ \text{za } k = -\infty \to a = -\infty \\ \text{za } k = n \to a = n - M \end{matrix} \right| = \sum_{a=-\infty}^{n-M} \frac{u(a)}{n-a-M}.$$

S druge strane, kada bi ulazni signal propustili kroz sustav dobili bi

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} \frac{u(k)}{n-k}.$$

Ako sada taj izlaz zakasnimo za onaj isti *M*, dobit ćemo

$$y(n-M) = \sum_{k=-\infty}^{n-M} \frac{u(k)}{n-M-k}.$$

Kako je $y_1(n) = y(n-M)$ (razlika samo po imenu varijable po kojoj sumiramo) ovaj sustav je vremenski stalan.

Linearnost se provjerava tako da se na ulaz sustava dovedu dva različita ulazna signala $u_1(n)$ i $u_2(n)$ pomnožena sa različitim konstantama (homogenost), te zbrojena (aditivnost)

$$u(n) = \alpha u_1(n) + \beta u_2(n).$$

Na izlazu iz sustava će biti

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{n} \frac{\alpha u_1(k) + \beta u_2(k)}{n-k} = \sum_{k=-\infty}^{n} \frac{\alpha u_1(k)}{n-k} + \sum_{k=-\infty}^{n} \frac{\beta u_2(k)}{n-k} \\ &= \alpha \sum_{k=-\infty}^{n} \frac{u_1(k)}{n-k} + \beta \sum_{k=-\infty}^{n} \frac{u_2(k)}{n-k} \end{aligned}$$

S druge strane ako je na ulazu u sustav $u_1(n)$ na izlazu će biti $y_1(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} \frac{u_1(k)}{n-k}$, a ako je na ulazu $u_2(n)$ na izlazu će biti $y_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} \frac{u_2(k)}{n-k}$. Ovi izlazi pomnoženi sa konstantama i zbrojeni daju

$$y(n) = \alpha y_1(n) + \beta y_2(n) = \alpha \sum_{k=-\infty}^{n} \frac{u_1(k)}{n-k} + \beta \sum_{k=-\infty}^{n} \frac{u_2(k)}{n-k}.$$

Kako su ova dva izlaza jednaka, sustav je linearan.

4. Odredite je li zadani kontinuirani sustav vremenski stalan, linearan, memorijski i kauzalan.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}\mu(-\tau)u(t-\tau)d\tau\ .$$

Rješenje:

Memorija: zadani sustav možemo napisati u obliku

$$y(t) = \int_{-\infty}^{0} e^{\tau}u(t-\tau)d\tau.$$

Vidi se da sustav u nekom trenutku *t* ovisi o onome što je na ulazu u budućim trenucima, pa je prema tome sustav memorijski.

Kauzalnost: Kako sustav ovisi o onome što će se dogoditi u budućnosti, sustav nije kauzalan.

Vremensku promjenjivost provjeravamo tako da prvo zakasnimo ulazni signal za neki *M*

$$u_1(t) = u(t-M),$$

te taj signal propustimo kroz sustav. Na izlazu iz sustava će biti

$$y_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}\mu(-\tau)u_1(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}\mu(-\tau)u(t-\tau-M)d\tau\ .$$

S druge strane, kada bi ulazni signal propustili kroz sustav dobili bi

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}\mu(-\tau)u(t-\tau)d\tau\ .$$

Ako sada taj izlaz zakasnimo za onaj isti *M*, dobit ćemo

$$y(t-M) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}\mu(-\tau)u(t-M-\tau)d\tau\ .$$

Kako je $y_1(t) = y(t-M)$ ovaj sustav je vremenski stalan.

Linearnost se provjerava tako da se na ulaz sustava dovedu dva različita ulazna signala $u_1(t)$ i $u_2(t)$ pomnožena sa različitim konstantama (homogenost), te zbrojena (aditivnost)

$$u(t) = \alpha u_1(t) + \beta u_2(t).$$

Na izlazu iz sustava će biti

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}\mu(-\tau)\big(\alpha u_1(t-\tau) + \beta u_2(t-\tau)\big)d\tau \\ &= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}\mu(-\tau)u_1(t-\tau)d\tau \ + \beta \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}\mu(-\tau)u_2(t-\tau)d\tau\ . \end{aligned}$$

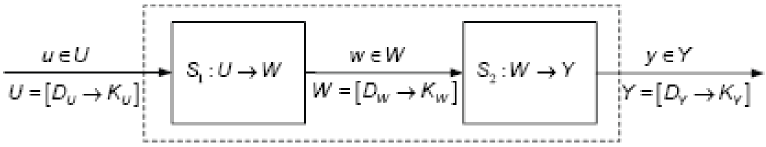
S druge strane ako je na ulazu u sustav $u_1(t)$ na izlazu će biti $y_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}\mu(-\tau)u_1(t-\tau)d\tau$, a ako je na ulazu $u_2(t)$ na izlazu će biti $y_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}\mu(-\tau)u_2(t-\tau)d\tau$. Ovi izlazi pomnoženi sa konstantama i zbrojeni daju

$$y(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t) = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}\mu(-\tau)u_1(t-\tau)d\tau \ + \beta \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}\mu(-\tau)u_2(t-\tau)d\tau\ .$$

Kako su ova dva izlaza jednaka, sustav je linearan.

5. Promatraju se dva diskretna sustava S_1 i S_2 spojena u kaskadni spoj. Odredite jesu li sljedeće tvrdnje istinite. Ukoliko nisu istinite navedite primjer koji to potvrđuje.
   a. Ako su oba sustava S_1 i S_2 linearna, vremenski stalna, hoće li i njihov kaskadni spoj biti linearan i vremenski stalan?
   b. Ako su oba sustava S_1 i S_2 nelinearna, je li i njihov kaskadni spoj nužno nelinearan?
   c. Ako su oba sustava S_1 i S_2 vremenski promjenjiva, je li i njihov kaskadni spoj nužno vremenski promjenjiv?

Rješenje:



a. **Linearnost:** Ako je ulaz u prvi sustav S_1: $u(n) = \alpha u_1(n) + \beta u_2(n)$, izlaz iz njega je $w(n) = \alpha w_1(n) + \beta w_2(n)$, uzevši u obzir svojstvo linearnosti. Ovaj izlaz je automatski ulaz u sljedeći sustav S_2. Uzevši u obzir da je i taj sustav linearan, izlaz je: $y(n) = \alpha y_1(n) + \beta y_2(n)$. Znači, ako je svaki podsustav linearan, i njihov kaskadni spoj je linearan.

   Vremenska stalnost: Ako je $u(n-M)$ ulaz u vremenski nepromjenjiv sustav S_1, izlaz će biti $w(n-M)$. Odziv vremenski nepromjenjivog sustava S_2 na ovaj ulaz će biti $y(n-M)$. Znači, ako je svaki podsustav vremenski nepromjenjiv, i njihov kaskadni spoj će biti vremenski nepromjenjiv.

b. Ako su S_1 i S_2 nelinearni sustavi nije nužno da će i njihov kaskadni spoj biti nelinearan, nelinearnost drugog sustava može poništiti nelinearnost prvog. Dovoljno je pokazati primjer:

$$w(n) = e^{u(n)}$$

$$y(n) = \ln\big(w(n)\big)$$

   Svaki od sustava je nelinearan, ali njihova kaskada je linearna:

$$y(n) = \ln\big(e^{u(n)}\big) = u(n).$$

c. Ako su S_1 i S_2 vremenski promjenjivi sustavi nije nužno da će i njihov kaskadni spoj biti vremenski promjenjiv. Dovoljno je pokazati primjer koji to potvrđuje:

$$w(n) = u(n)e^{jn\omega_0}$$

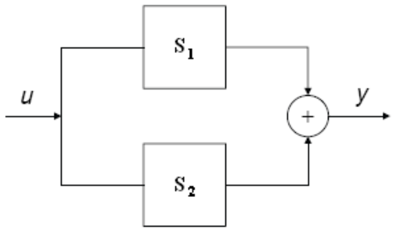
$$y(n) = w(n)e^{-jn\omega_0}$$

   Oba sustava su vremenski promjenjiva, ali njihov kaskadni spoj nije:

$$y(n) = u(n)e^{jn\omega_0} \cdot e^{-jn\omega_0} = u(n)$$

6. Promatraju se dva kontinuirana sustava S_1 i S_2 spojena u paralelu. Odredite jesu li sljedeće tvrdnje istinite, te obrazložite svoj odgovor. Ukoliko nisu istinite navedite primjer koji to potvrđuje.
   a. Ako su oba sustava S_1 i S_2 linearna i vremenski stalna, hoće li i njihov paralelan spoj biti linearan i vremenski stalan?
   b. Ako su oba sustava S_1 i S_2 nelinearna, je li i njihov paralelni spoj nužno nelinearan?
   c. Ako su oba sustava S_1 i S_2 vremenski promjenjiva, je li i njihov paralelni spoj nužno vremenski promjenjiv?

<u>Rješenje:</u>



a. **<u>Linearnost</u>**: Ako je ulaz u paralelu sustava $u(t) = \alpha u_1(t) + \beta u_2(t)$, taj isti ulaz ulazi u svaki od podsustava. Na njihovim izlazima su $w_1(t) = \alpha w_{11}(t) + \beta w_{12}(t)$ i $w_2(t) = \alpha w_{21}(t) + \beta w_{22}(t)$. Izlaz iz cijelog sustava je zbroj

$$\begin{aligned} y(t) = w_1(t) + w_2(t) &= \alpha w_{11}(t) + \beta w_{12}(t) + \alpha w_{21}(t) + \beta w_{22}(t) \\ &= \alpha\big(w_{11}(t) + w_{21}(t)\big) + \beta\big(w_{12}(t) + w_{22}(t)\big). \end{aligned}$$

S druge strane, ako u svaki od sustava uđe $u_1(t)$ ($w_{11}(t)$ izlaz prvoga, $w_{21}(t)$ izlaz drugoga) i $u_2(t)$ ($w_{12}(t)$ izlaz prvoga, $w_{22}(t)$ izlaz drugoga), te se izlazi pomnože s konstantama i zbroje dobit ćemo:

$$\begin{aligned} y(t) &= \alpha w_{11}(t)+\beta w_{12}(t) + \alpha w_{21}(t)+\beta w_{22}(t) \\ &= \alpha\big(w_{11}(t) + w_{21}(t)\big) + \beta\big(w_{12}(t) + w_{22}(t)\big). \end{aligned}$$

Kako su ova dva izraza jednaka, paralela linearnih sustava je linearan sustav.

Vremenska nepromjenjivost: Ako je $u(t-M)$ ulaz u vremenski stalan sustav S_1, izlaz će biti $w_1(t-M)$, a ako je to ulaz u vremenski stalan sustav S_2, izlaz će biti $w_2(t-M)$. Izlaz iz paralele je $y_1(t) = w_1(t-M) + w_2(t-M)$. U drugom slučaju imamo na ulazu $u(t)$, a na izlazu iz svakog podsustava $w_1(t)$ i $w_2(t)$. Zakašnjeli izlazi su $w_1(t-M)$ i $w_2(t-M)$. Ukupni izlaz iz sustava je $w_1(t-M) + w_2(t-M)$. Kako su ova dva izlaza jednaka, sustav je vremenski stalan.

Znači, ako je svaki podsustav vremenski nepromjenjiv, i njihov kaskadni spoj će biti vremenski nepromjenjiv.

b. Ako su S_1 i S_2 nelinearni sustavi nije nužno da će i njihov paralelni spoj biti nelinearan, nelinearnost drugog sustava može poništiti nelinearnost prvog. Dovoljno je pokazati primjer:

$$w_1(t) = u(t) + 2^t$$

$$w_2(t) = u(t) - 2^t$$

Svaki od sustava je nelinearan, ali njihova paralela je linearna:

$$y(t) = w_1(t) + w_2(t) = 2u(t).$$

c. Ako su S_1 i S_2 vremenski promjenjivi sustavi nije nužno da će i njihov paralelni spoj biti vremenski promjenjiv. Dovoljno je pokazati primjer koji to potvrđuje:

$$w_1(t) = tu(t)$$

$$w_2(t) = (1 - t)u(t)$$

Oba sustava su vremenski promjenjiva, ali njihov paralelni spoj nije:

$$y(t) = w_1(t) + w_2(t) = u(t).$$

7. Zadan je diskretan sustav *A* s jednim ulazom i jednim izlazom (SISO). Ukoliko na ulaz ovog sustava dođe signal $u_1(n)$, pripadajući izlaz poprima vrijednost $y_1(n)$, a ako je na ulazu $u_2(n)$, izlaz je $y_2(n)$:

$$u_1(n) = (-1)^n \rightarrow y_1(n) = 1, \text{za svaki } n,$$

$$u_2(n) = (-1)^{n+1} \rightarrow y_2(n) = 1, \text{za svaki } n.$$

Zadan je i diskretan SISO sustav *B*. Ukoliko na taj sustav dođu signali na ulaz $u_3(n)$ i $u_4(n)$, pripadajući izlazi $y_3(n)$ i $y_4(n)$ dani su s:

$$u_3(n) = (-1)^n \rightarrow y_3(n) = 1, \text{za svaki } n,$$

$$u_4(n) = (-1)^{n+1} \rightarrow y_4(n) = -1, \text{za svaki } n.$$

Odredite mogu li sustavi *A* i *B* biti linearni i vremenski stalni.

<u>**Rješenje:**</u>

Linearnost diskretnog sustava A: iz zadanih ulaza je vidljivo da vrijedi $u_2(n) = -u_1(n)$. Ako je sustav linearan, isto mora vrijediti i za izlaze. No ovdje je $y_1(n) = y_2(n) = 1$, pa je sustav nelinearan. (svojstvo homogenosti)

Vremenska stalnost diskretnog sustava A: sustav A može biti vremenski stalan jer vrijedi $u_2(n) = -u_1(n) = u_1(n - n_0)$, za svaki neparan n_0. Tada je $y_2(n) = y_1(n - n_0) = 1$.

Linearnost diskretnog sustava B: iz zadanih ulaza je vidljivo da vrijedi $u_4(n) = -u_3(n)$. Ako je sustav linearan, isto mora vrijediti i za izlaze. Ovdje je $y_4(n) = -y_3(n) = -1$, pa je sustav linearan. (svojstvo homogenosti)

Vremenska stalnost diskretnog sustava B: sustav B ne može biti vremenski stalan jer vrijedi $u_4(n) = u_3(n - n_0)$ i $y_4(n) \neq y_3(n - n_0)$.

8. Odziv na jedinični skok, $u(t)=\mu(t)$, linearnog vremenski stalnog sustava glasi $y(t)=\left(1-e^{-2t}\right)\mu(t)$. Nađite odziv ovog sustava na ulaz $u(t)=4\mu(t)-4\mu(t-1)$.

Rješenje:

Zadani sustav je vremenski stalan, pa ako pomaknemo ulaz za neki *M* (ovdje je to za *1*: $\mu(t-1)$), pomaknut će se i izlaz $\left(1-e^{-2(t-1)}\right)\mu(t-1)$.

Kako je zadani sustav linearan, vrijedi homogenost, pa odziv na $4\mu(t)$ iznosi $4(1-e^{-2t})\mu(t)$, a odziv na $4\mu(t-1)$ iznosi $4\left(1-e^{-2(t-1)}\right)\mu(t-1)$.

Zbog linearnosti (aditivnosti) vrijedi da je za ulaz $u(t)=4\mu(t)-4\mu(t-1)$ izlaz

$$y(t)=4(1-e^{-2t})\mu(t)-4\left(1-e^{-2(t-1)}\right)\mu(t-1).$$

DODATNI ZADACI

Provjerite jesu li zadani sustavi linearni, vremenski stalni, memorijski i kauzalni.

1. $y(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)d\tau$
2. $y(t) = \int_{0}^{t} u(\tau)d\tau$
3. $y(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(3n+2)$
4. $y(t) = \frac{u(t)}{1+u(t-1)}$

Provjerite jesu li zadani sustavi linearni, vremenski stalni, memorijski i kauzalni. Ukoliko im možete naći inverzni sustav, nađite ga.

5. $y(t) = u^2(t)$
6. $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} u(k)$
7. $y(n) = n \cdot u(n)$

Rješenja:

1. linearno, vremenski stalno, ima memoriju, kauzalno
2. linearno, vremenski promjenjivo, ima memoriju, kauzalno
3. linearno, vremenski promjenjivo, ima memoriju, nekauzalno
4. nelinearno, vremenski stalno, ima memoriju, kauzalno
5. nelinearno, vremenski stalno, bez memorije, kauzalno, nema inverz
6. linearno, vremenski stalno, ima memoriju, kauzalno, inverz: $u(n) = y(n) - y(n-1)$
7. linearno, vremenski promjenjivo, bez memorije, kauzalno, nema inverz

Signali i sustavi - Zadaci za vježbu

XI. tjedan

Konvolucija

1. Odziv diskretnog LTI sustava na jediničnu stepenicu je $y(n)=(n+1)\mu(n)$. Odredite impulsni odziv ovog sustava. Kolika je vrijednost impulsnog odziva u $n=5$?

Rješenje:

Impuls se može prikazati kao razlika dvije jedinične stepenice $\delta(n) = \mu(n) - \mu(n-1)$.

Ako je $u(n) = \mu(n)$, odziv je $y(n) = (n+1)\mu(n)$.

Kako je sustav LTI (linearan vremenski nepromjenjiv), a pobuda je impuls, a samim time i razlika dvije jedinične stepenice, odziv će biti:

$$h(n) = y(n) - y(n-1)$$

$$h(n) = (n+1)\mu(n) - \big((n-1)+1\big)\mu(n-1) = (n+1)\mu(n) - n\mu(n-1).$$

Odziv u trenutku $n = 5$ iznosi $h(5) = 6\mu(5) - 5\mu(4) = 1$

2. Zadan je vremenski diskretan LTI sustav impulsnim odzivom:

$$h(n) = \begin{cases} 1, n = 0,1, \\ 0, \quad \text{inače.} \end{cases}$$

Nađite ulazno – izlaznu relaciju (jednadžbu diferencija) za ovaj sustav.

<u>Rješenje:</u>

Poznat je impulsni odziv vremenski diskretnog LTI sustava $h(n) = \begin{cases} 1, n = 0,1, \\ 0, \quad \text{inače.} \end{cases}$ Odziv sustava $y(n)$ na proizvodnu pobudu $u(n)$ može se dobiti konvolucijom $y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)u(n-m)$. Kada se ova suma raspiše:

$$\begin{aligned} y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)u(n-m) \\ &= \cdots + h(-1)u(n+1) + h(0)u(n) + h(1)u(n-1) + h(2)u(n-2) + \cdots \end{aligned}$$

Kako je impulsni odziv različit od nule jedino za *n=0, 1*, odziv iznosi

$$y(n) = h(0)u(n) + h(1)u(n-1) = 1 \cdot u(n) + 1 \cdot u(n-1)$$

$$y(n) = u(n) + u(n-1),$$

a to je jednadžba diferencija za zadani sustav.

3. Nađite odziv diskretnog sustava na pobudu $u(n)=\alpha^{n}\mu(n)$, ako je poznat impulsni odziv sustava $h(n)=\beta^{n}\mu(n)$.

Rješenje:

Odziv na proizvoljnu pobudu *u(n)* iz poznatog impulsnog odziva *h(n)* može se dobiti korištenjem konvolucijske sumacije:

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)u(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n-m)u(m)$$

Uvrštavanjem zadane pobude i impulsnog odziva dobivamo:

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \beta^{n-m}\mu(n-m)\alpha^{m}\mu(m) = \sum_{m=0}^{n} \beta^{n-m}\alpha^{m} = \beta^{n}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{m} = \beta^{n}\frac{1-\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n+1}}{1-\frac{\alpha}{\beta}}$$
$$= \frac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha}.$$

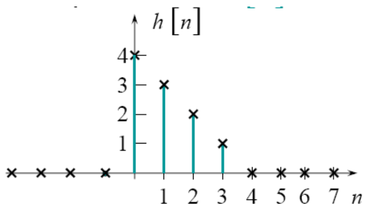
U slučaju da je $\alpha = \beta$ imamo

$$y(n) = \beta^{n}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{\beta}{\beta}\right)^{m} = \beta^{n}\sum_{m=0}^{n} 1 = (n+1)\beta^{n}.$$

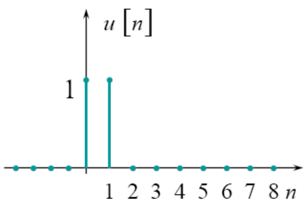
4. Korištenjem konvolucijske sumacije odredite odziv diskretnog sustava zadanog impulsnim odzivom $h(n) = 4\delta(n) + 3\delta(n-1) + 2\delta(n-2) + \delta(n-3)$. Sustav je pobuđen s $u(n) = \delta(n) + \delta(n-1)$.

Rješenje:

Zadani impulsni odziv i pobudu sustava možemo prikazati grafički:



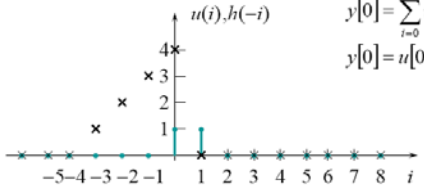
impulsni odziv



pobuda

Traženu konvoluciju ćemo isto tako interpretirati grafički iz: $y(n) = \sum_{i=0}^{n} u(i)h(n-i)$.

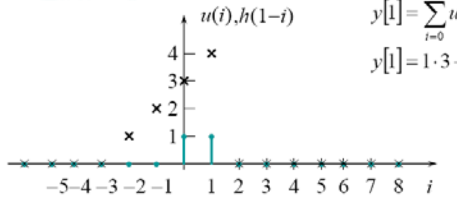
Za $n = 0$



$y[0] = \sum_{i=0}^{0} u(i)h(-i),$

$y[0] = u[0]h[0] = 1 \cdot 4 = 4.$

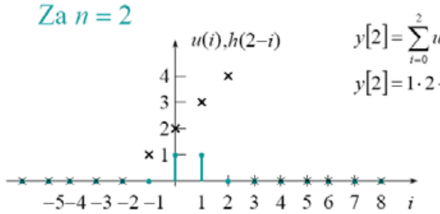
Za $n = 1$



$y[1] = \sum_{i=0}^{1} u(i)h(1-i),$

$y[1] = 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 7.$

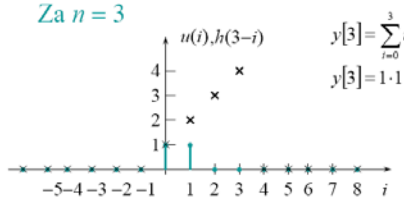
Za $n = 2$



$y[2] = \sum_{i=0}^{2} u(i)h(2-i),$

$y[2] = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 4 = 5.$

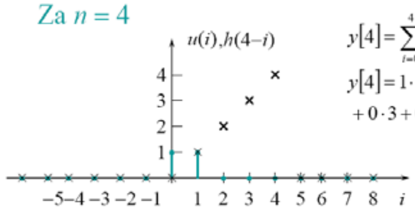
Za $n = 3$



$y[3] = \sum_{i=0}^{3} u(i)h(3-i),$

$y[3] = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 4 = 3.$

Za $n = 4$

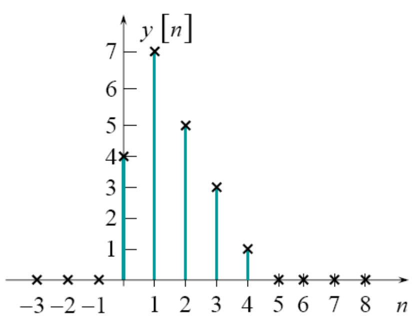


$y[4] = \sum_{i=0}^{4} u(i)h(4-i),$

$y[4] = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 4 = 1.$

Dalje je *y(5)=y(6)=...=0.*

Pa je odziv:



5. Zadan je diskretni signal $f: Z \to R$ kao $f(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, 1, 2 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$. Promatramo signal *q(n)* koji je definiran kao konvolucija *q(n)=f(n)*f(n)*. Koliko iznosi *q(3)*?

Rješenje:

Zadan je signal $f(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, 1, 2 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$. Konvolucija njega sa samim sobom je

$$q(n) = f(n) * f(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m) f(n-m).$$

U trenutku *n=3* iznosi

$$\begin{aligned} q(3) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} & f(m) f(3-m) \\ & = \cdots + f(-1)f(4) + f(0)f(3) + f(1)f(2) + f(2)f(1) + f(3)f(0) \\ & + f(4)f(-1) + \cdots = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 2. \end{aligned}$$

6. Dokažite svojstva konvolucije vremenski kontinuiranog sustava:
   a. $u(t) * \delta(t) = u(t)$
   b. $u(t) * \delta(t - t_0) = u(t - t_0)$
   c. $u(t) * \mu(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau) d\tau$
   d. $u(t) * \mu(t - t_0) = \int_{-\infty}^{t-t_0} u(\tau) d\tau$

Rješenje:

a. Uvrštavanjem u konvolucijski integral slijedi

$$u(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\delta(t-\tau) d\tau = u(t) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau) d\tau = u(t) \cdot 1 = u(t)$$

b. Uvrštavanjem u konvolucijski integral slijedi

$$\begin{aligned} u(t) * \delta(t - t_0) = & \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\delta(t - t_0 - \tau) d\tau = u(t - t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0 - \tau) d\tau \\ & = u(t - t_0) \cdot 1 = u(t - t_0) \end{aligned}$$

c. Uvrštavanjem u konvolucijski integral slijedi

$$u(t) * \mu(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\mu(t-\tau) d\tau = \left| \mu(t-\tau) = \begin{cases} 0, \tau > t \\ 1, \tau \leq t \end{cases} \right| = \int_{-\infty}^{t} u(\tau) d\tau$$

d. Uvrštavanjem u konvolucijski integral slijedi

$$\begin{aligned} u(t) * \mu(t - t_0) = & \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\mu(t - t_0 - \tau) d\tau = \left| \mu(t - t_0 - \tau) = \begin{cases} 0, \tau > t - t_0 \\ 1, \tau \leq t - t_0 \end{cases} \right| \\ & = \int_{-\infty}^{t-t_0} u(\tau) d\tau \end{aligned}$$

7. Nađite odziv kontinuiranog sustava na pobudu $u(t) = \begin{cases} 1, 0 < t \le 3, \\ 0, \quad \text{inače} \end{cases}$, ako je impulsni odziv $h(t) = \begin{cases} 1, 0 < t \le 2, \\ 0, \quad \text{inače} \end{cases}$.

Rješenje:

Zadani ulazni signal možemo prikazati kao razliku jediničnih stepenica $u(t) = \mu(t) - \mu(t-3)$. Isto vrijedi i za impulsni odziv $h(t) = \mu(t) - \mu(t-2)$.
Uvrštavanjem u konvolucijski integral

$$
\begin{aligned}
y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t-\tau)d\tau &= \int_{-\infty}^{\infty} \big(\mu(\tau) - \mu(\tau-3)\big)\big(\mu(t-\tau) - \mu(t-2-\tau)\big)d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\tau)\mu(t-\tau)d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\tau-3)\mu(t-\tau)d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\tau)\mu(t-2-\tau)d\tau \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\tau-3)\mu(t-2-\tau)d\tau
\end{aligned}
$$

Pogledajmo svaki od integrala umnoška pomaknutih jediničnih stepenica:

$$\mu(\tau)\mu(t-\tau) = \begin{cases} 1, 0 \le \tau \le t \\ 0, \quad \text{inače} \end{cases}, \text{uz } t > 0 \to \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\tau)\mu(t-\tau)d\tau = \mu(t)\int_{0}^{t} d\tau$$

$$\mu(\tau-3)\mu(t-\tau) = \begin{cases} 1, 3 \le \tau \le t \\ 0, \quad \text{inače} \end{cases}, \text{uz } t > 3 \to \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\tau-3)\mu(t-\tau)d\tau = \mu(t-3)\int_{3}^{t} d\tau$$

$$\mu(\tau)\mu(t-2-\tau) = \begin{cases} 1, 0 \le \tau \le t-2 \\ 0, \quad \text{inače} \end{cases}, \text{uz } t > 2 \to \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\tau)\mu(t-2-\tau)d\tau = \mu(t-2)\int_{0}^{t-2} d\tau$$

$$
\begin{aligned}
\mu(\tau-3)\mu(t-2-\tau) = \begin{cases} 1, 3 \le \tau \le t-2 \\ 0, \quad \text{inače} \end{cases}, \text{uz } t > 5 \to &\int_{-\infty}^{\infty} \mu(\tau-3)\mu(t-2-\tau)d\tau \\
&= \mu(t-5)\int_{3}^{t-2} d\tau
\end{aligned}
$$

Zbrajanjem i oduzimanjem ovih integrala dobiva se odziv sustava:

$$
\begin{aligned}
y(t) = \mu(t)\int_{0}^{t} d\tau - \mu(t-3)\int_{3}^{t} d\tau - \mu(t-2)\int_{0}^{t-2} d\tau + \mu(t-5)\int_{3}^{t-2} d\tau \\
= \mu(t)(t-0) - \mu(t-3)(t-3) - \mu(t-2)(t-2-0) + \mu(t-5)(t-2-3) \\
= t\mu(t) - (t-2)\mu(t-2) - (t-3)\mu(t-3) + (t-5)\mu(t-5).
\end{aligned}
$$

Komentar: nađite odziv ovog sustava koristeći grafičku metodu objašnjenu na predavanjima.

8. Izračunajte izlaz *y(t)* za dani vremenski kontinuirani LTI sustav čiji su impulsni odziv *h(t)* i ulaz *u(t)* dani s

$$h(t) = e^{-at}\mu(t)$$

$$u(t) = e^{at}\mu(-t),\ \ a > 0\,.$$

<u>Rješenje:</u>

Kako bi se pronašao odziv sustava, mora se upotrijebiti konvolucija:

$$y(t) = u(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t-\tau)d\tau\,.$$

Zadani ulaz *u(τ)* dan je na slici, kao i *h(t- τ)* za dva slučaja *t<0* i *t>0*. Sa slika je vidljivo da se za *t<0*, *u(τ)* i *h(t- τ)* preklapaju u području $\tau = -\infty$ do $\tau = t$:

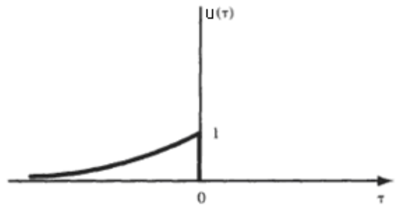
$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{a\tau}e^{-a(t-\tau)}d\tau = e^{-at}\int_{-\infty}^{t} e^{2a\tau}d\tau = \frac{1}{2a}e^{at}\,.$$

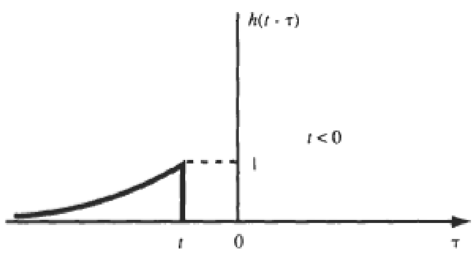
Za *t>0* slike se preklapaju u području $\tau = -\infty$ do $\tau = 0$:

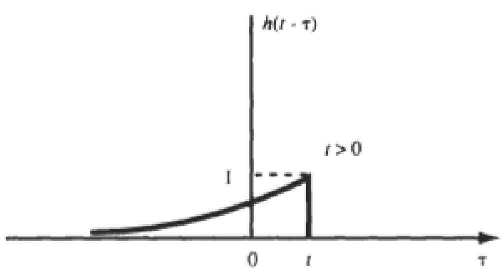
$$y(t) = \int_{-\infty}^{0} e^{a\tau}e^{-a(t-\tau)}d\tau = e^{-.at}\int_{-\infty}^{0} e^{2a\tau}d\tau = \frac{1}{2a}e^{-at}\,.$$

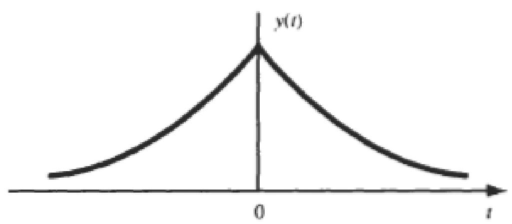
Kombinirajući ova dva odziva, ukupni odziv može biti zapisan:

$$y(t) = \frac{1}{2a}e^{-a|t|},\ \ a > 0\,.$$









Signali i sustavi - Zadaci za vježbu

XII. tjedan

Jednadžbe diferencija

1. Zadan je sustav $y(n+1)+2y(n)=u(n)$, pri čemu je $y(0)=2$, $n\in N_0$. Je li sustav linearan? Obrazložite odgovor.

Rješenje:

Kako je u zadanom sustavu zadan početni uvjet – sustav nije linearan.

Demonstrirajmo to.

Ako su početni uvjeti jednaki nuli.

1. slučaj:

Ako je na ulazu $u_1(n)$, na izlazu iz sustava u koraku *n+1* će biti $y_1(1)=u_1(0)-2y_1(0)$.
Ako je na ulazu $u_2(n)$, na izlazu iz sustava u koraku *n+1* će biti $y_2(1)=u_2(0)-2y_2(0)$.
Nakon množenja sa konstantama $\alpha\ i\ \beta$ te zbrajanja, odziv je

$$y(1)=\alpha\big(u_1(0)-2y_1(0)\big)+\beta\big(u_2(0)-2y_2(0)\big)=\alpha u_1(0)+\beta u_2(0)-2\big(\alpha y_1(0)+\beta y_2(0)\big)$$
$$=\alpha u_1(0)+\beta u_2(0)$$

2. slučaj:

Sada je na ulazu $u(n)=\alpha u_1(n)+\beta u_2(n)$. Na izlazu će biti

$$y(1)=\ \alpha u_1(0)+\beta u_2(0)-2y(0)=\alpha u_1(0)+\beta u_2(0).$$

Usporedbom ova dva odziva vidljivo je da su jednaki, pa sustav može biti linearan.

Ako postoje početni uvjeti.

1. slučaj:

Ako je na ulazu $u_1(n)$, na izlazu iz sustava u koraku *n+1* će biti $y_1(1)=u_1(0)-2y_1(0)$.
Ako je na ulazu $u_2(n)$, na izlazu iz sustava u koraku *n+1* će biti $y_2(1)=u_2(0)-2y_2(0)$.
Nakon množenja sa konstantama $\alpha\ i\ \beta$ te zbrajanja, odziv je

$$y(1)=\alpha\big(u_1(0)-2y_1(0)\big)+\beta\big(u_2(0)-2y_2(0)\big)=\alpha u_1(0)+\beta u_2(0)-2\big(\alpha y_1(0)+\beta y_2(0)\big)$$
$$=\alpha u_1(0)+\beta u_2(0)-4(\alpha+\beta).$$

2. slučaj:

Sada je na ulazu $u(n)=\alpha u_1(n)+\beta u_2(n)$. Na izlazu će biti

$$y(1)=\ \alpha u_1(0)+\beta u_2(0)-2y(0)=\alpha u_1(0)+\beta u_2(0)-4.$$

Usporedbom ova dva odziva vidljivo je da su različiti, pa je sustav nelinearan.

Za ovakve sustave kod kojih je cjelokupni odziv superpozicija odziva linearnog sustava i odziva nepobuđenog sustava (početno stanje) kažemo da su inkrementalno linearni sustavi.

2. Zadan je sustav

$$y(n+2) - y(n+1) - y(n) = 0,$$

s početnim uvjetima $y(0) = 0, y(1) = 1$. Pronađite odziv sustava! Napišite prvih pet članova dobivenog niza! Prepoznajete li dobiveni niz?

Rješenje:

Prve članove niza najlakše je odrediti Iterativnom metodom. Jednadžba se zapiše u obliku

$$y(n+2) = y(n+1) + y(n)$$

te se uvrštavaju vrijednosti iz koraka u korak.

Početne vrijednosti su:

$$y(0) = 0, \qquad y(1) = 1.$$

Uvrštavanjem slijedi:

$$y(2) = y(1) + y(0) = 1 + 0 = 1$$

$$y(3) = y(2) + y(1) = 1 + 1 = 2$$

$$y(4) = y(3) + y(2) = 2 + 1 = 3$$

$$y(5) = y(4) + y(3) = 3 + 2 = 5 \ldots$$

Dobili smo niz: 0,1,1,2,3,5,8,... Ovo je dobro poznati Fibonaccijev niz.

Kako naći npr. 1000-ti član ovog niza? Iterativnim postupkom dugotrajno. Bolja ideja je rješavanjem homogene jednadžbe.

Pretpostavljeno homogeno rješenje je $y_h(n) = Cq^n$.

Uvršavanjem u zadanu jednadžbu proizlazi:

$$Cq^{n+2} - Cq^{n+1} - Cq^n = 0$$

$$q^2 - q - 1 = 0$$

$$q_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Homogeno rješenje: $y_h(n) = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

Konstante se nalaze iz početnih uvjeta.

$$y(0) = C_1 + C_2 = 0, y(1) = C_1\frac{1+\sqrt{5}}{2} + C_2\frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1,$$

$$C_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}, C_2 = -\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Rješenje sustava: $y(n) = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)\mu(n)$.

3. Zadan je sustav $y(n+3) - y(n) = 0$, uz početne uvjete $y(0) = y(1) = 0, y(2) = 1$. Pronađite odziv sustava! Jesu li svi članovi dobivenog niza cijeli brojevi?

Rješenje:

Odziv nepobuđenog sustava traži se rješavanjem homogene jednadžbe, uz pretpostavljeno homogeno rješenje $y_h(n) = Cq^n$.

Uvrštavanjem u zadanu jednadžbu proizlazi:

$$Cq^{n+3} - Cq^n = 0$$

$$q^3 - 1 = 0$$

$$q_1 = 1, q_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Homogeno rješenje: $y_h(n) = C_1 + C_2 \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n + C_3 \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n$.

Konstante se nalaze iz početnih uvjeta.

$$y(0) = C_1 + C_2 + C_3 = 0,$$

$$y(1) = C_1 + C_2 \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} + C_3 \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = 0,$$

$$y(2) = C_1 + C_2 \left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right)^2 + C_3 \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1.$$

Rješavanjem tri jednadžbe sa tri nepoznanice dobiva se: $C_1 = \frac{1}{3}, C_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{6}, C_3 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{6}$.

Traženi odziv sustava $y_h(n) = \frac{1}{3} + \frac{-1-i\sqrt{3}}{6}\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n + \frac{-1+i\sqrt{3}}{6}\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n$.

Sređivanjem ovog kompleksnog izraza, te korištenjem $-1 - i\sqrt{3} = 2e^{-j\frac{2\pi}{3}}, -1 + i\sqrt{3} = 2e^{j\frac{2\pi}{3}}$, dobiva se odziv bez kompleksnih dijelova $y(n) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cos\left(\frac{2\pi}{3}(n+1)\right)$.

Jesu li svi elementi dobivenog niza cijeli brojevi? Ovo se može zaključiti iz zadane jednadžbe iterativnim postupkom: $y(n+3) = y(n)$. Kako su prva tri elementa cijeli brojevi *0, 0, 1* i svi sljedeći elementi niza će biti cijeli brojevi.

4. Naći odziv mirnog sustava opisanog jednadžbom diferencija:

$$3y(n+2)+6y(n+1)+3y(n)=2u(n+1)-5u(n)$$

Sustav je pobuđen nizom impulsa $u(n)=\{\dots,\underline{0},0,1,2,1,0,0,\dots\}$, gdje je podvučena vrijednost amplituda impulsa u koraku $n=0$.

<u>Rješenje:</u>

Mirni sustav je sustav u kojem je poznata pobuda, ali su mu početni uvjeti jednaki nuli:

$$y(0)=0, y(1)=0.$$

Kako je pobuda zadana u obliku niza impulsa, odziv je najlakše naći iterativnom metodom.

Izlaz $y(n+2)=-2y(n+1)-y(n)+\frac{2}{3}u(n+1)-\frac{5}{3}u(n)$,

u trenucima *n* iznosi:

$$n=0\rightarrow y(2)=-2y(1)-y(0)+\frac{2}{3}u(1)-\frac{5}{3}u(0)=0,$$

$$n=1\rightarrow y(3)=-2y(2)-y(1)+\frac{2}{3}u(2)-\frac{5}{3}u(1)=\frac{2}{3},$$

$$n=2\rightarrow y(4)=-2y(3)-y(2)+\frac{2}{3}u(3)-\frac{5}{3}u(2)=-\frac{5}{3},$$

$$n=3\rightarrow y(5)=-2y(4)-y(3)+\frac{2}{3}u(4)-\frac{5}{3}u(3)=0,$$

$$n=4\rightarrow y(6)=-2y(5)-y(4)+\frac{2}{3}u(5)-\frac{5}{3}u(4)=0,$$

$$n=5\rightarrow y(7)=-2y(6)-y(5)+\frac{2}{3}u(6)-\frac{5}{3}u(5)=0,\dots$$

Za sve veće *n* pobuda je nula, a kako su i prethodni odzivi nula i za svaki sljedeći korak odziv će biti nula.

$$y_m=\left\{\dots,\underline{0},0,0,\frac{2}{3},-\frac{5}{3},0,0,\dots\right\}.$$

5. Pronađite barem jedan sustav čiji je nepobuđeni odziv:
   a. $y(0) = 0, y(1) = 1, y(2) = 2, y(3) = 1.$
   b. $y(n) = 3^n + 5^n + 7.$

Rješenje:

a. Pretpostavimo da je dani nepobuđeni odziv sustava drugog reda. Jednadžba diferencija drugog reda u općem obliku glasi (za nepobuđeni sustav): $y(n+2) + a_1 y(n+1) + a_2 y(n) = 0.$

   Koeficijente ćemo naći iterativnom metodom:

$$y(n+2) = -a_1 y(n+1) - a_2 y(n)$$

   Uvrštavanjem zadanih impulsa:

$$n = 0 \rightarrow y(2) = -a_1 y(1) - a_2 y(0) = -a_1 \cdot 1 - a_2 \cdot 0 = 2 \rightarrow a_1 = -2.$$

$$n = 1 \rightarrow y(3) = -a_1 y(2) - a_2 y(1) = -a_1 \cdot 2 - a_2 \cdot 1 = 1 \rightarrow \ a_2 = 3.$$

   Jedna moguća jednadžba diferencija glasi:

$$y(n+2) - 2y(n+1) + 3y(n) = 0 \text{ uz } y(0) = 0, y(1) = 1.$$

b. Jednadžbu je moguće naći analognim algoritmom kako se traži homogeno rješenje, samo obratnim redoslijedom.

$$y_h(n) = 3^n + 5^n + 7 \cdot 1^n.$$

   Iz homogenog rješenja mogu se očitati karakteristične frekvencije $q_1 = 3, q_2 = 5, q_3 = 1$ i koeficijenti ispred njih $C_1 = 1, C_2 = 1, C_3 = 7$. Tri karakteristične frekvencije vode do toga da bi jednadžba mogla biti trećeg reda.

   Ako su poznata rješenja kubne jednadžbe ona se mogu napisati u obliku

$$(q-3)(q-5)(q-1) = 0,$$

   Odnosno

$$q^3 - 9q^2 + 23q - 15 = 0.$$

   Ili u proširenom obliku

$$Cq^{n+3} - 9Cq^{n+2} + 23Cq^{n+1} - 15Cq^n = 0.$$

   Ako je pretpostavljeno homogeno rješenje oblika $y_p(n) = Cq^n$, onda je homogena jednadžba:

$$y(n+3) - 9y(n+2) + 23y(n+1) - 15y(n) = 0.$$

   Da bi jednadžba bila dobro zadana moramo poznavati i početne uvjete koje nađemo iz zadanog homogenog rješenja:

$$y(0) = 3^0 + 5^0 + 7 = 9,$$
$$y(1) = 3^1 + 5^1 + 7 = 15,$$
$$y(2) = 3^2 + 5^2 + 7 = 41.$$

6. Na ulazu diskretnog sustava narinut je signal $u(n)$. Korištenjem konvolucijske sumacije naći impulsni odziv ako je poznat odziv mirnog sustava $y(n)$. Zadani su ulazni signal $u(n) = \{\dots,0,\underline{1},2,3,4,5,6,\dots\}$ i izlazni signal $y(n) = \{\dots,0,0,\underline{0},-1,1,2,3,4,5,\dots\}$, gdje je podvučena vrijednost amplituda impulsa u koraku $n = 0$.

Rješenje:

Konvolucijska sumacija kauzalnih nizova računa se prema

$$y(n) = \sum_{m=0}^{n} h(m)u(n-m).$$

U koraku $n = 0$ izlaz iz sustava se računa iz $y(0) = \sum_{m=0}^{0} h(m)u(0-m) = h(0)u(0)$.
Kako su $y(0) = 0, u(0) = 1$impulsni odziv u nultom koraku je $h(0) = 0$.

U sljedećim koracima slijedi:

$$y(1) = \sum_{m=0}^{1} h(m)u(1-m) = h(0)u(1) + h(1)u(0) = 0 \cdot 2 + h(1) \cdot 1 = -1 \to h(1) = -1,$$

$$y(2) = \sum_{m=0}^{2} h(m)u(2-m) = h(0)u(2) + h(1)u(1) + h(2)u(0) = 0 \cdot 3 - 1 \cdot 2 + h(2) \cdot 1 = 1 \to h(2) = 3,$$

$$y(3) = \sum_{m=0}^{3} h(m)u(3-m) = h(0)u(3) + h(1)u(2) + h(2)u(2) + h(3)u(0) = 0 \cdot 4 - 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + h(3) \cdot 1 = 2 \to h(3) = -1,$$

$$y(4) = \sum_{m=0}^{4} h(m)u(4-m) = h(0)u(4) + h(1)u(3) + h(2)u(2) + h(3)u(1) + h(4)u(0) = 0 \cdot 5 - 1 \cdot 4 + 3 \cdot 3 - 1 \cdot 2 + h(4) \cdot 1 = 3 \to h(4) = 0,$$

$$y(5) = \sum_{m=0}^{5} h(m)u(5-m) = h(0)u(5) + h(1)u(4) + h(2)u(3) + h(3)u(2) + h(4)u(1) + h(5)u(0) = 0 \cdot 6 - 1 \cdot 5 + 3 \cdot 4 - 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + h(5) \cdot 1 = 4 \to h(5) = 0, \dots$$

Slutnja: sve ostale vrijednosti impulsnog odziva su također nule. Provjerimo to.

Ulazni signal u općem obliku možemo zapisati: $u(n) = (n+1)\mu(n)$.
Izlazni signal možemo zapisati u obliku: $y(n) = -\delta(n-1) + (n-1)\mu(n-2)$.

Pretpostavimo da su za $n \geq 4$ vrijednosti impulsnog odziva nula:

$$y(n) = n - 1 = \sum_{m=0}^{n} h(m)(n-m+1)\mu(n-m) = \sum_{m=0}^{n} h(m)(n-m+1) = h(0)(n+1) + h(1)(n-1+1) + h(2)(n-2+1) + h(3)(n-3+1) + h(4)(n-4+1) + h(5)(n-5+1) + \cdots = -n + 3(n-1) - (n-2) + 0 + 0 + 0 + \cdots = n - 1$$

Kako je na taj način odziv jednak općem obliku odziva, traženi impulsni odziv je:

$$h(n) = \{\dots,\underline{0},-1,3,-1,0,0,\dots\}.$$

7. Diskretan sustav opisan je jednadžbom diferencija $y(n) - 6y(n-1) + 8y(n-2) = 4u(n)$. Ako je ulaz u sustav $u(n) = 2\mu(n) - 3n\mu(n)$, nađite:
   a. Prirodni, prisilni te totalni odziv sustava uz početne uvjete $y(-1) = 2, y(-2) = 1$.
   b. Mirni, nepobuđeni te totalni odziv uz početne uvjete $y(-1) = 2, y(-2) = 1$.

Rješenje:

Homogena jednadžba:

$$y(n) - 6y(n-1) + 8y(n-2) = 0$$

Pretpostavljeno homogeno rješenje: $y_h(n) = Cq^n$.

Karakteristična jednadžba: $q^2 - 6q + 8 = 0, (q-4)(q-2) = 0$.

Karakteristične frekvencije: $q_1 = 4, q_2 = 2$.

Homogeno rješenje: $y_h(n) = C_1 4^n + C_2 2^n$.

Partikularno rješenje: Ako je pobuda $u(n) = 2\mu(n) - 3n\mu(n)$, s desne strane zadane jednadžbe je $(8 - 12n)\mu(n)$. Kako je pobuda polinom i partikularno rješenje je oblika polinoma.

$$y_p(n) = K_0 + K_1 n, n \geq 0$$

Pomaknuta partikularna rješenja: $y_p(n-1) = K_0 + K_1(n-1), y_p(n-2) = K_0 + K_1(n-2)$.

Uvrštavanjem u zadanu jednadžbu:

$$K_0 + K_1 n - 6\big(K_0 + K_1(n-1)\big) + 8\big(K_0 + K_1(n-2)\big) = 8 - 12n.$$

Izjednačavanjem onoga uz *n* i onoga uz slobodni član izlaze konstante.

$$3K_0 - 10K_1 = 8$$

$$3K_1 = -12$$

Konstante su: $K_0 = -\frac{32}{3}, K_1 = -4$.

Partikularno rješenje je $y_p(n) = -\frac{32}{3} - 4n$, za $n \geq 0$.

Totalni odziv dobiva se zbrajanjem homogenog i partikularnog rješenja:

$$y(n) = C_1 4^n + C_2 2^n - \frac{32}{3} - 4n.$$

Konstante C_1 i C_2 određuju se iz početnih uvjeta u $n = 0$ i $n = 1$, koji se dobiju iterativnom metodom:

$$y(n) = 4(2 - 3n) + 6y(n-1) - 8y(n-2),$$

$$y(0) = 4(2 - 3 \cdot 0) + 6y(-1) - 8y(-2) = 8 + 12 - 8 = 12,$$

$$y(1) = 4(2 - 3) + 6y(0) - 8y(-1) = 8 - 12 + 72 - 16 = 52.$$

Totalni odziv u tim koracima je

$$y(0) = C_1 4^0 + C_2 2^0 - \frac{32}{3} - 4 \cdot 0 = y(0) = C_1 + C_2 - \frac{32}{3},$$
$$y(1) = C_1 4^1 + C_2 2^1 - \frac{32}{3} - 4 \cdot 1 = 4C_1 + 2C_2 - \frac{44}{3}.$$

Izjednačavanjem izlaze konstante $C_1 = \frac{32}{3}, C_2 = 12$.

Totalni odziv je sada

$$y(n) = \left(\frac{32}{3} \cdot 4^n + 12 \cdot 2^n - \frac{32}{3} - 4n\right) \mu(n).$$

Prisilni odziv je čisto partikularno rješenje: $y_{prisilni}(n) = \left(-\frac{32}{3} - 4n\right) \mu(n)$.

Prirodni odziv je homogeno rješenje čije su se konstante našle iz totalnog odziva

$$y(n) = \left(\frac{32}{3} \cdot 4^n + 12 \cdot 2^n\right) \mu(n).$$

Mirni odziv je odziv sustava kome su početni uvjeti jednaki nuli: $y(-1) = 0,\ y(-2) = 0$. Preračunavamo početne uvjete: $y(0) = 4u(0) + 6y(-1) - 8y(-2) = 8$, $y(1) = 4u(1) + 6y(0) - 8y(-1) = 44$.

Odziv mirnog sustava ima oblik $y_{mirni}(n) = C_1 4^n + C_2 2^n - \frac{32}{3} - 4n$. Uz uvrštavanje $n = 0{,}1$ izlazi:

$$y_{mirni}(0) = C_1 4^0 + C_2 2^0 - \frac{32}{3} - 4 \cdot 0 = C_1 + C_2 - \frac{32}{3}$$
$$y_{mirni}(1) = C_1 4^1 + C_2 2^1 - \frac{32}{3} - 4 \cdot 1$$

Izjednačavanjem sa početnim uvjetima dobivamo konstante $C_1 = \frac{32}{3}$ i $C_2 = 8$. Odziv mirnog sustava je

$$y_{mirni}(n) = \left(\frac{32}{3} 4^n + 8 \cdot 2^n - \frac{32}{3} - 4n\right) \mu(n)$$

Nepobuđeni odziv ima pobudu jednaku nuli, ali uz postojanje početnih uvjeta. Oblik nepobuđenog odziva dobivamo iz homogenog rješenja. Konstante tražimo direktnim uvrštavanjem početnih uvjeta:

$$y_{nepobuđeni}(n) = C_1 4^n + C_2 2^n$$

Početni uvjeti su zadani $y(-1) = 2, y(-2) = 1$. Pa je $y_{nepobuđeni}(-1) = \frac{1}{4} C_1 + \frac{1}{2} C_2 = 2$ i $y_{nepobuđeni}(-2) = \frac{1}{16} C_1 + \frac{1}{4} C_2 = 1$. Rješavanjem dvije jednadžbe sa dvije nepoznanice dobivaju se konstante $C_1 = 0$ i $C_2 = 4$.

Nepobuđeni odziv je $y_{nepobuđeni}(n) = 4 \cdot 2^n$.

Totalni odziv je zbroj nepobuđenog i mirnog

$y(n) = \left(\frac{32}{3} \cdot 4^n + 12 \cdot 2^n - \frac{32}{3} - 4n\right) \mu(n)$ i jednak je totalnom odzivu dobivenom u a. dijelu zadatka.

8. Diskretni LTI sustav opisan je jednadžbom $y(n)-\frac{1}{2}y(n-1)=u(n)$. Odredite vrijednost odziva u koraku $n=2000$ za pobudu $u(n)=\mu(n)-\mu(n-1001)$ uz početni uvjet $y(-1)=6$.

Rješenje:

Homogeno rješenje zadane jednadžbe je:

$$q-\frac{1}{2}=0\rightarrow q=\frac{1}{2}\rightarrow y_h(n)=C\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Zadana pobuda se može promatrati kao $u(n)=\begin{cases}1, 0\le n\le 1000\\ 0, \quad\text{inače}\end{cases}$. Prvi dio pobude je $u(n)=\mu(n)$. Partikularno rješenje tada iznosi:

$$y_p(n)=K, y_p(n-1)=K$$
$$K-\frac{1}{2}K=1\rightarrow K=2$$
$$y_p(n)=2\mu(n).$$

Totalno rješenje u tom dijelu vremena je $y_{tot1}(n)=C\left(\frac{1}{2}\right)^n+2$.

Konstantu nalazimo iz početnog uvjeta $y(-1)=6$.

$$y(0)=u(0)+\frac{1}{2}y(-1)=4$$
$$y_{tot1}(0)=C+2\rightarrow\quad C+2=4\rightarrow C=2$$
$$y_{tot1}(n)=\left(2\left(\frac{1}{2}\right)^n+2\right)\mu(n).$$

Ova pobuda prestaje djelovati u $n=1000$ i to će biti početni uvjet za drugi dio pobude:

$$y_{tot1}(1000)=\left(2\left(\frac{1}{2}\right)^{1000}+2\right)\mu(1000)=2^{-999}+2.$$

Od 1001 uzorka nema više pobude, pa postoji samo homogeno rješenje uz upravo izračunati početni uvjet.

$$y_{tot2}(n)=C\left(\frac{1}{2}\right)^n$$
$$y_{tot2}(1000)=C\left(\frac{1}{2}\right)^{1000}=2^{-999}+2\rightarrow\quad C=2+2^{1001}$$
$$y_{tot2}(n)=(2+2^{1001})\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Ukupno totalno rješenje je $y_{tot}(n)=\begin{cases}\left(2\left(\frac{1}{2}\right)^n+2\right), 0\le n\le 1000\\ (2+2^{1001})\left(\frac{1}{2}\right)^n, n>1000\end{cases}.$

Vrijednost odziva u koraku $n=2000$ je $y(2000)=(2+2^{1001})\left(\frac{1}{2}\right)^{2000}=2^{-1999}+2^{-999}$.

9. Zadan je sustav $y(n) - \frac{1}{4}y(n-1) = u(n)$.
   a. Odredite impulsni odziv sustava.
   b. Odredite mirni odziv sustava ako je pobuda $u(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n \mu(n)$.
   c. Komentirajte stabilnost sustava.

<u>Rješenje:</u>

Homogeno rješenje je:

$$q - \frac{1}{4} = 0 \rightarrow q = \frac{1}{4}.$$

$$y_h(n) = C\left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

a. Impulsni odziv je odziv kada je $u(n) = \delta(n)$. Početni uvjeti su nula. Da bi dobili konstantu iz homogenog rješenja koja odgovara impulsnom odzivu, računamo odziv sustava u trenutku $n = 0$:

$$y(n) = \delta(n) + \frac{1}{4}y(n-1)$$

$$y(0) = \delta(0) + \frac{1}{4}y(-1) = 1$$

$$y_h(0) = C\left(\frac{1}{4}\right)^0 = C$$

$$y(0) = y_h(0) = C = 1.$$

Impulsni odziv je $h(n) = 1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n \mu(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n \mu(n)$.

b. Kako bi dobili mirni odziv sustava moramo naći partikularno rješenje. Kako je karakteristična frekvencija sustava jednaka frekvenciji pobude, pretpostavljeno partikularno rješenje je $y_p(n) = K\left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot n$. Uvrštavanjem u jednadžbu

$$K\left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot n - \frac{1}{4}K\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \cdot (n-1) = \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$K = 1$$

$$y_p(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot n.$$

Mirni odziv je $y_{mirni}(n) = C\left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot n$ uz početne uvjete jednake nuli: $y(-1) = 0 \rightarrow y(0) = u(0) + \frac{1}{4}y(-1) = 1$.

$$y_{mirni}(0) = C\left(\frac{1}{4}\right)^0 + \left(\frac{1}{4}\right)^0 \cdot 0 = C = 1$$

$$y_{mirni}(n) = \left(\left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot n\right)\mu(n).$$

c. Kako je karakteristična frekvencija sustava $\frac{1}{4}$ po apsolutnoj vrijednosti manja od jedan, sustav je stabilan.

10. Zadan je sustav $y(n) + 4y(n-1) + 4y(n-2) = u(n)$.
    a. Odredite impulsni odziv sustava.
    b. Odredite prisilni i mirni odziv sustava ako je pobuda $u(n) = 4\mu(n)$.
    c. Odredite prisilni i mirni odziv sustava ako je pobuda $u(n) = (-2)^n\mu(n)$.
    d. Komentirajte stabilnost sustava.

Rješenje:

Impulsni odziv zadanog sustava je $h(n) = (-2)^n(1+n)\mu(n)$.

Prisilni odziv sustava na pobudu $u(n) = 4\mu(n)$ je $y_p(n) = \frac{4}{9}\mu(n)$.

Prisilni odziv sustava na pobudu $u(n) = (-2)^n\mu(n)$ je $y_p(n) = \frac{1}{2}n^2(-2)^n\mu(n)$.

Sustav je nestabilan.

11. Zadan je kauzalan, linearan i vremenski nepromjenjiv sustav $y(n) - \frac{1}{3}y(n-1) = u(n)$. Ukoliko je sustav pobuđen sa $u(n) = 2^{-n}\mu(n)$, uz početni uvjet $y(-1) = 9$, odredite:
    a. Odredite prisilni i prirodni odziv sustava.
    b. Odredite odziv nepobuđenog sustava, te odziv mirnog sustava.
    c. Odredite totalni odziv sustava.

Rješenje:

Prisilni odziv je $y_p(n) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n\mu(n)$.

Prirodni odziv sustava je $y_{prirodni}(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n\mu(n)$

Odziv mirnog sustava je $y_m(n) = \left(-2\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\mu(n)$.

Odziv nepobuđenog sustava je $y_n(n) = 3\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Totalni odziv sustava je $y_t(n) = \left(\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\mu(n)$.

Signali i sustavi - Zadaci za vježbu

XIII. tjedan

Diferencijalne jednadžbe

1. Zadan je sustav $\frac{dy}{dt}+5y+2=u(t)$, $y(0)=0$. Je li sustav linearan? Ako je obrazložite zašto je, a ako nije objasnite zašto nije! Zašto nam je važno je li sustav linearan, tj. što nam to znači u traženju odziva sustava na neku pobudu?

2. Zadan je kontinuirani sustav
$$y'''(t) - y''(t) + y'(t) + 39y(t) = u''(t) + 2u(t).$$
Ispitajte da li je ovaj sustav stabilan.

3. Kontinuirani sustav prvog reda zadan je diferencijalnom jednadžbom $y'(t) + y(t) = u'(t) + 2u(t)$. Na ulaz sustava dovedena je pobuda $u(t) = 3\mu(t)$. Nađite odziv sustava ukoliko su početni uvjeti:
   a. $y(0^-) = 9$,
   b. $y(0^+) = 9$.

4. Kontinuirani sustav opisan je diferencijalnom jednadžbom čije je homogeno rješenje
$$y_h(t) = \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{5}{3}e^{2t}.$$
Sustav nema nula (u diferencijalnoj jednadžbi ne postoje derivacije ulaza). Odredite tu diferencijalnu jednadžbu. Odredite ukupan i odziv mirnog sustava ako se sustav pobudi s $u(t) = \frac{5}{2}e^{2t}, t \geq 0$. Odredite početna stanja. Ispitajte stabilnost sustava.

5. Riješite diferencijalnu jednadžbu
$$y'(t) + 2y(t) = u(t),$$
ako je ulaz $u(t) = A\cos(\omega_0 t)\,\mu(t)$, pri čemu je A realna konstanta i uzimajući da su početni uvjeti jednaki nula. Bez dodatnog računanja odredite rješenje ove jednadžbe ako je ulaz
$$u(t) = B\cos\big(\omega_0(t-1)\big)\,\mu(t-1).$$

6. Na ulaz sustava $-\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t)$ dovedemo signal $u(t) = \mu(-t)$. Kako će izgledati izlaz iz sustava u slučaju:
   a. $y(0^+) = 0$,
   b. $y(0^+) = 1$.

7. Kontinuirani sustav zadan je diferencijalnom jednadžbom
$$y'(t) + 2y(t) = u'(t) + u(t).$$
Provjerite, bez rješavanja zadane diferencijalne jednadžbe, je li impulsni odziv ovog sustava $h(t) = -e^{-2t}\mu(t) + \delta(t)$.

8. Zadan je kontinuiran sustav $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = u(t)$, $y(0^+) = 0$, $y'(0^+) = 0$. Nađite odziv sustava na sljedeće pobude:
   a. $u(t) = t\mu(t)$,
   b. $u(t) = \mu(t)$,
   c. $u(t) = \delta(t)$,
   d. $u(t) = t\mu(t) + \mu(t) + \delta(t)$.

9. Zadan je vremenski kontinuirani sustav
$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = u(t)$$
gdje je *u(t)* ulaz, *y(t)* izlaz, a *a* konstanta. Početni uvjet je $y(0^-) = 0$.
   a. Naći impulsni odziv zadanog sustava.
   b. Naći odziv na jedinični skok, bez korištenja poznatog impulsnog odziva.
   c. Naći odziv na jedinični skok, uz poznati impulsni odziv iz a. dijela zadatka.
   d. Naći odziv na impuls, uz poznati odziv na jedinični skok iz b. dijela zadatka.

10. Naći impulsni odziv vremenski kontinuiranog sustava:
$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = u(t) + \frac{du(t)}{dt}.$$

11. Kauzalni LTI kontinuirani sustav zadan je diferencijalnom jednadžbom:
$$y''(t) + 6y'(t) + 13y(t) = u'(t) + 4u(t).$$
Nađite impulsni odziv ovog sustava.

12. Zadan je odziv na step LTI sustava $y(t) = \cos(\omega_0 t)\,\mu(t)$. Nađite impulsni odziv sustava. Kakve početne uvjete pri tome podrazumijevate? Možete li generalizirati rezultat?

13. Zadan je integrator. Ulaz i izlaz integratora vezani su relacijom
$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)d\tau.$$
   a. Nađite impulsni odziv sustava,
   b. Ispitajte stabilnost sustava.

14. Veza između ulaza i izlaza sustava dana je izrazom:
$$y(t) = \int_{0}^{1} u(t-h)dh\,, \forall t \in \mathbb{R}$$
Odredite:
   a. Impulsni odziv sustava
   b. Odziv sustava na pobudu $u(t) = \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right), \forall t \in \mathbb{R}$.

15. Zadan je kontinuirani sustav $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = u(t)$. Odredite odziv sustava u vremenskoj domeni ako je sustav pobuđen signalom $u(t) = (12t + 16)\mu(t)$ te ako su početni uvjeti $y(0^-) = 3, y'(0^-) = -8$. Odredite prirodni i prisilni odziv, te odziv mirnog i nepobuđenog sustava. Odredite impulsni odziv sustava. Komentirajte stabilnost sustava.

16. Zadan je kontinuirani sustav $y''(t) + 5y'(t) + 4y(t) = u(t)$. Odredite odziv mirnog sustava u vremenskoj domeni ako je sustav pobuđen signalom $u(t) = (4 + \cos(4t))\mu(t)$. Nađite impulsni odziv sustava. Komentirajte stabilnost sustava.

Dodatni zadaci:

T. Petković, B. Jeren i ostali: Zbirka riješenih zadataka iz signala i sustava, 5. poglavlje. Linearne diferencijalne jednadžbe, str. 42. -55.

Primjeri 5.1. – 5.6, Zadaci 5.1. – 5.10.

MARKO GULIN
0036428227

1. $y'(t) + 5y(t) + 2 = u(t) \rightarrow y'(t) = u(t) - 5y(t) - 2$

$u(t) = \mathcal{L}u_1(t) + \mathcal{B}u_2(t)$

$y_1'(0) = u_1(0) - 2$

$y_2'(0) = u_2(0) - 2$

$y'(0) = u(0) - 2$

$y'(0) = \mathcal{L}u_1(0) + \mathcal{B}u_2(0) - 2$

$y'(0) = \mathcal{L}y_1'(0) + \mathcal{B}y_2'(0) + 2 \rightarrow$ SUSTAV NIJE LINEARAN.

U SLUČAJU DA JE SUSTAV LINEARAN, I JOŠ K TOMU I VREMENSKI NEPROMJENJIV (LTI), MOGLI BISMO PRONAĆI ODZIV NA BILO KOJU POBUDU u_2 KOJA SE MOŽE PRIKAZATI KAO LINEARNA KOMBINACIJA IZ PRVOG SIGNALA u_1 (MORAMO ZNATI ODZIV NA POBUDU u_1)

2. $y'''(t) - y''(t) + y'(t) + 39y(t) = u''(t) + 2u(t)$

- TRAŽENJE VLASTITIH FREKVENCIJA

$$y_h(t) = Ce^{st}$$

$$Ce^{st}(s^3 - s^2 + s + 39) = 0, \quad Ce^{st} \neq 0$$

$$s^3 - s^2 + s + 39 = 0$$

JEDNO RJEŠENJE MORAMO POGODITI, A DRUGA DVA ĆEMO DOBITI RJEŠAVANJEM KVADRATNE JEDNADŽBE KOJU DOBIJEMO SLJEDEĆIM POSTUPKOM

$$(s^3 - s^2 + s + 39) : (s - s_0) = a_0 s^2 + a_1 s + a_2$$

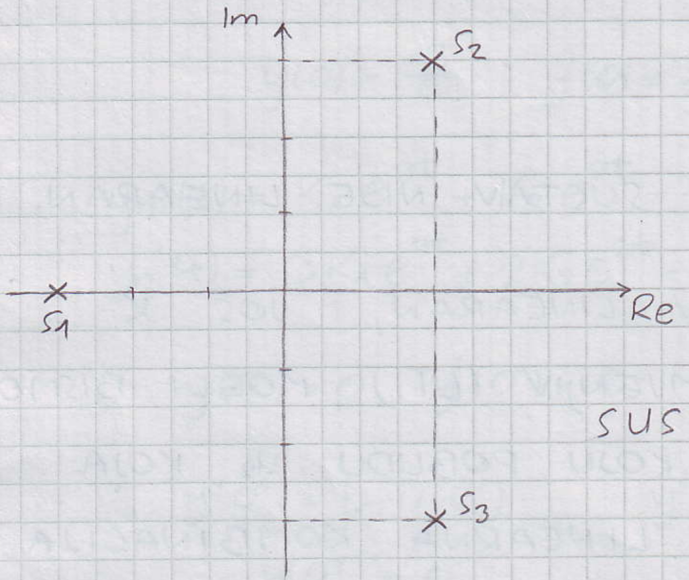
POGOĐENO RJEŠENJE: $s_1 = -3$

$$(s^3 - s^2 + s + 39) : (s+3) = s^2 - 4s + 13$$
$$\underline{-s^3 \pm 3s^2}$$
$$-4s^2 + s$$
$$\underline{\mp 4s^2 \mp 12s}$$
$$13s + 39$$
$$\underline{-13s \pm 39}$$
$$0$$

$$s^2 - 4s + 13 = 0 \qquad s_{2,3} = \frac{4 \pm \sqrt{16-52}}{2}$$

$$s_{2,3} = \frac{4 \pm j6}{2}$$

$$s_2 = 2 + j3, \quad s_3 = 2 - j3$$



SUSTAV JE NESTABILAN.

3. $y'(t) + y(t) = u'(t) + 2u$

$u(t) = 3\mu(t)$

- OPĆA HOMOGENA JEDNADŽBA

$$y_h(t) = Ce^{st}$$

$$Ce^{st}(s+1) = 0, \quad Ce^{st} \neq 0$$

$$s + 1 = 0 \rightarrow s = -1$$

$$y_h(t) = C_1 e^{-t}$$

- PARTIKULARNA JEDNADŽBA

$$u(t) = 3\mu(t) \rightarrow y_p(t) = K$$

$$K = 6, \ t > 0 \rightarrow y_p(t) = 6, \ t > 0$$

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

$$y(t) = C_1 e^{-t} + 6, \; t > 0$$

(a) $y(0^-) = 9$

$y(0^+) = b_0 u(0^+) + y(0^-)$

$y(0^+) = 12$

$y(0) = C_1 + 6 = 12$

$C_1 = 6$

$y(t) = (6e^{-t} + 6)\mu(t)$

(b) $y(0^+) = 9$

$y(0) = C_1 + 6 = 9$

$C_1 = 3$

$y(t) = (3e^{-t} + 6)\mu(t)$

4. $y_h(t) = \frac{1}{2} e^{3t} + \frac{5}{3} e^{2t}$

$u(t) = \frac{5}{2} e^{2t}, \; t \geq 0$

$s_1 = 3, \; C_1 = \frac{1}{2}$

$s_2 = 2, \; C_2 = \frac{5}{3}$

$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_2 u(t)$

$(s-3)(s-2) = 0$

$s^2 - 5s + 6 = 0 \rightarrow a_1 = -5$

$a_0 = 6$

$y''(t) - 5y'(t) + 6y(t) = u(t)$

$u(t) = \frac{5}{2} e^{2t} \rightarrow y_p(t) = Ate^{2t}$

$y_p'(t) = Ae^{2t}(1 + 2t)$

$y_p''(t) = Ae^{2t}(4 + 4t)$

$$Ae^{2t}(4+4t-5-10t+6t)=\frac{5}{2}e^{2t}$$

$$A=-\frac{5}{2} \rightarrow \quad y_p(t)=-\frac{5}{2}te^{2t}$$

$$y(t)=\frac{1}{2}e^{3t}+\frac{5}{3}e^{2t}-\frac{5}{2}te^{2t} \quad - \text{ TOTALNI ODZIV}$$

$$y'(t)=\frac{3}{2}e^{3t}+\frac{10}{3}e^{2t}-\frac{5}{2}e^{2t}(1+2t)$$

$$y(0)=\frac{1}{2}+\frac{5}{3}=\frac{13}{6}$$

$$y'(0)=\frac{3}{2}+\frac{10}{3}-\frac{5}{2}=\frac{7}{3}$$

$$y(0)=\frac{13}{6}, \quad y'(0)=\frac{7}{3}$$

$$y_m(t)=K_1e^{3t}+K_2e^{2t}-\frac{5}{2}te^{2t}$$

$$y_m'(t)=3K_1e^{3t}+2K_2e^{2t}-\frac{5}{2}e^{2t}(1+2t)$$

$$y(0^-)=0, \quad y'(0^-)=0$$

$$y(0^+)=b_0u(0^+) \qquad y'(0^+)=b_0u'(0^+)+b_1u(0^+)$$

$$y(0^+)=0 \qquad y'(0^+)=0$$

$$\left.\begin{aligned} y_m(0)&=K_1+K_2=0 \\ y_m'(0)&=3K_1+2K_2-\frac{5}{2}=0 \end{aligned}\right\} K_1=\frac{5}{2}, \; K_2=-\frac{5}{2}$$

$$y_m(t)=\frac{5}{2}e^{3t}-\frac{5}{2}e^{2t}-\frac{5}{2}te^{2t}, \quad t\geq 0$$

$$y(t)=\frac{1}{2}e^{3t}+\frac{5}{3}e^{2t}-\frac{5}{2}te^{2t}, \quad t\geq 0$$

MARKO GULIN
0036428227

5. $y'(t) + 2y(t) = u(t)$

$u(t) = A\cos(w_0 t) \cdot \mu(t)$

$y(0^-) = 0$, $b_0 = 0$ $b_1 = 1$

$y(0^+) = b_0 u(0^+) + y(0^-)$

$y(0^+) = 0$

- OPĆA HOMOGENA JEDNADŽBA

$y_h(t) = Ce^{st}$

$Ce^{st}(s+2) = 0$, $Ce^{st} \neq 0$

$s + 2 = 0 \rightarrow s = -2$

$y_h(t) = C_1 e^{-2t}$

- PARTIKULARNA JEDNADŽBA

$u(t) = A\cos(w_0 t) \rightarrow y_p(t) = K_1 \cos(w_0 t) + K_2 \sin(w_0 t)$

$y_p'(t) = -w_0 K_1 \sin(w_0 t) + w_0 K_2 \cos(w_0 t)$

$-w_0 K_1 \sin(w_0 t) + w_0 K_2 \cos(w_0 t) + 2K_1 \cos(w_0 t) + 2K_2 \sin(w_0 t) = A\cos(w_0 t)$

$\cos(w_0 t)(w_0 K_2 + 2K_1) + \sin(w_0 t)(-w_0 K_1 + 2K_2) = A\cos(w_0 t)$

$$\left.\begin{aligned} w_0 K_2 + 2K_1 &= A \\ -w_0 K_1 + 2K_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad K_1 = \frac{2}{4+w_0^2} A, \quad K_2 = \frac{w_0}{4+w_0^2} A$$

$$y_p(t) = \frac{2}{4+w_0^2} A\cos(w_0 t) + \frac{w_0}{4+w_0^2} A\sin(w_0 t)$$

- TOTALNI ODZIV

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

$$y(t) = C_1 e^{-2t} + \frac{2}{4+w_0^2} A\cos(w_0 t) + \frac{w_0}{4+w_0^2} A\sin(w_0 t)$$

$$y(0) = C_1 + \frac{2}{4+w_0^2} A = 0$$

$$C_1 = -\frac{2}{4+w_0^2} A$$

$$y(t) = \frac{-2}{4+w_0^2} A e^{-2t} + \frac{2}{4+w_0^2} A\cos(w_0 t) + \frac{w_0}{4+w_0^2} A\sin(w_0 t)$$

- ODZIV NA POBUDU $u_1(t) = B\cos(w_0(t-1))\,\mu(t-1)$

KORISTIMO ČINJENICU DA JE SUSTAV LTI.

$$y_1(t) = y(t-1)$$

$$y_1(t) = \frac{-2}{4+w_0^2} B e^{-2(t-1)} + \frac{2}{4+w_0^2} B\cos(w_0(t-1)) + \frac{w_0}{4+w_0^2} A\sin(w_0(t-1))$$

6. $y'(t) - y(t) = -u(t)$

$u(t) = \mu(-t) \rightarrow u(t) = 1,\ t \leq 0$

- OPĆA HOMOGENA JEDNADŽBA

$$y_h(t) = Ce^{st}$$

$$Ce^{st}(s-1) = 0,\quad Ce^{st} \neq 0$$

$$s-1 = 0 \rightarrow s = 1$$

$$y_h(t) = C_1 e^{t}$$

- PARTIKULARNA JEDNADŽBA

$u(t) = \mu(-t) \rightarrow y_p(t) = K$

$K = 1,\ t<0 \rightarrow y_p(t) = 1,\ t<0$

$y(t) = y_n(t) + y_p(t)$ $\qquad$ $y(t) = y_n(t)$

$y(t) = C_1 e^t + 1, \quad t < 0$ $\qquad$ $y(t) = C_1 e^t, \quad t > 0$

(a) $y(0^+) = 0 \rightarrow y(0^-) = y(0^+) = 0$

$y(0^-) = C_1 + 1 = 0$

$C_1 = -1$

$y(t) = -e^t + 1, \quad t < 0$

KONAČNO:

$y(0^+) = C_1 = 0$

$y(t) = (1 - e^t)\mu(-t)$

$C_1 = 0$

$y(t) = 0, \quad t > 0$

(b) $y(0^+) = 1 \rightarrow y(0^-) = y(0^+) = 1$

$y(0^-) = C_1 + 1 = 1$

$C_1 = 0$

$y(t) = 1, \quad t < 0$

KONAČNO:

$y(0^+) = C_1 = 1$

$y(t) = e^t + (1 - e^t)\mu(-t)$

$C_1 = 1$

$y(t) = e^t, \quad t > 0$

7. $y'(t) + 2y(t) = u'(t) + u(t)$

$h(t) = -e^{-2t}\mu(t) + \delta(t)$

$h'(t) = e^{-2t}(-\delta(t) + 2\mu(t)) + \delta'(t)$

$-e^{-2t}\delta(t) + 2e^{-2t}\mu(t) + \delta'(t) - 2e^{-2t}\mu(t) + 2\delta(t) = \delta'(t) + \delta(t)$

$\delta(t)(2 - e^{-2t}) + \delta'(t) = \delta(t) + \delta'(t)$

u $t = 0 \rightarrow \delta(t) + \delta'(t) = \delta(t) + \delta'(t)$

8. $y''(t)+2y'(t)+y(t)=u(t)$

$y(0^-)=y'(0^-)=0$

$y(0^+)=y(0^-)=0$

$y'(0^+)=y'(0^-)=0$

$y''(t)=u(t)-2y'(t)-y(t)$

$y''(0)=u(0)-2y'(0)-y(0)$

$y''(0)=u(0)$

$u(t)=\alpha u_1(t)+\beta u_2(t)$

$y_1''(0)=\alpha u_1(0)$, $y_2''(0)=\beta u_2(0)$

$y''(0)=\alpha u_1(0)+\beta u_2(0)$

$y''(0)=\alpha y_1''(0)+\beta y_2''(0)$ → SUSTAV JE LINEARAN

- OPĆA HOMOGENA JEDNADŽBA

$y_h(t)=Ce^{st}$

$Ce^{st}(s^2+2s+1)=0$, $Ce^{st}\neq 0$

$s^2+2s+1=0$ → $s_{1,2}=-1$

$y_h(t)=(C_1+C_2t)e^{-t}$

(a) $u(t)=t\mu(t)$ → $u(t)=t$, $t\geq 0$

$y_p(t)=K_0+K_1t$, $y_p'(t)=K_1$, $y_p''(t)=0$

$2K_1+K_0+K_1t=t$

$$\left.\begin{aligned}2K_1+K_0&=0\\K_1&=1\end{aligned}\right\}\quad K_1=1,\ K_0=-2$$

$y_p(t)=-2+t$, $t\geq 0$

$$y(t) = y_n(t) + y_p(t)$$
$$y(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-t} - 2 + t$$
$$y'(t) = (-C_1 + C_2 - C_2 t)e^{-t} + 1$$

$$y(0) = C_1 - 2 = 0$$
$$C_1 = 2$$
$$y'(0) = -C_1 + C_2 + 1 = 0$$
$$C_2 = 1$$

$$y(t) = (2+t)e^{-t} - 2 + t, \quad t \geq 0$$

(b) $u_b(t) = \mu(t)$

$$u_a(t) = t\mu(t) \rightarrow u_a'(t) = \mu(t) + t\delta(t)$$
$$t\delta(t) = 0, \ \forall t$$
$$u_a'(t) = \mu(t) = u_b(t)$$

ZBOG LINEARNOSTI SUSTAVA MOŽEMO PISATI

$$y_b(t) = y_a'(t)$$
$$y(t) = (-1-t)e^{-t} + 1, \quad t \geq 0$$

(c) $u_c(t) = \delta(t)$

$$u_b(t) = \mu(t) \rightarrow u_b'(t) = \delta(t) = u_c(t)$$

$$y_c(t) = y_b'(t)$$
$$y(t) = te^{-t}, \quad t \geq 0$$

(d) $u_d(t) = t\mu(t) + \mu(t) + \delta(t)$

$$u_d(t) = u_a(t) + u_b(t) + u_c(t) \rightarrow y_d(t) = y_a(t) + y_b(t) + y_c(t)$$
$$y(t) = (1+t)e^{-t} - 1 + t, \quad t \geq 0$$

9. $y'(t) + a y(t) = u(t)$

$y(0^-) = 0 \rightarrow y(0^+) = 0$

- OPĆA HOMOGENA JEDNADŽBA

$$y_h(t) = Ce^{st}$$

$$Ce^{st}(s+a) = 0, \quad Ce^{st} \neq 0$$

$$s + a = 0 \rightarrow s = -a$$

$$y_h(t) = C_1 e^{-at}$$

(a) $u(t) = \delta(t)$

$$y'(t) + a_1 y(t) = b_0 u'(t) + b_1 u(t)$$

$$a_1 = a, \quad b_1 = 1$$

$$b_0 = 0$$

$$h_A'(t) + a h_A(t) = \delta(t)$$

$$h_A(0^+) = 1$$

$$h_A'(t) + a h_A(t) = 0$$

$$Ce^{st}(s+a) = 0, \quad Ce^{st} \neq 0$$

$$s + a = 0 \rightarrow s = -a$$

$$h_A(t) = C_1 e^{-at}$$

$$h_A(0^+) = C_1 = 1$$

$$C_1 = 1$$

$$h_A(t) = e^{-at}$$

$$h(t) = \sum_{m=0}^{M} (b_{N-m} D^m) h_A(t) \qquad M = 0, \; N = 1$$

$$h(t) = e^{-at}, \quad t \geq 0$$

(b) $u(t) = \mu(t) \rightarrow y_p(t) = A$

$$y_p'(t) = 0$$

$$aA = 1$$

$$A = \frac{1}{a}, \; t \geq 0 \rightarrow y_p(t) = \frac{1}{a}, \; t \geq 0$$

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

$$y(t) = C_1 e^{-at} + \frac{1}{a}$$

$$y(0^+) = C_1 + \frac{1}{a} = 0$$

$$C_1 = -\frac{1}{a}$$

$$y(t) = \frac{1}{a}(1 - e^{-at}), \; t \geq 0$$

(c) $u(t) = \mu(t)$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tau} \mu(\tau) \cdot \mu(t-\tau)\, d\tau$$

$$y(t) = \left\{ \int_{0}^{t} e^{-a\tau} d\tau \right\} \mu(t)$$

$$y(t) = \frac{1}{a}(1 - e^{-at})\, \mu(t)$$

(d) $u_a(t) = \delta(t)$

$u_b(t) = \mu(t) \rightarrow u_a(t) = u_b'(t)$

SUSTAV JE LINEARAN TE STOGA MOŽEMO PISATI

$$y_a(t) = y_b'(t)$$

$$y(t) = e^{-at} \mu(t)$$

10. $y'(t) + 2y(t) = u'(t) + u(t)$

$N = M = 1$

$a_1 = 2, \; b_0 = b_1 = 1$

$u(t) = \delta(t)$

$h_A'(t) + 2h_A(t) = \delta'(t) + \delta(t)$

$h_A'(t) + 2h_A(t) = 0$

$Ce^{st}(s+2) = 0, \quad Ce^{st} \neq 0$

$s + 2 = 0 \rightarrow s = -2$

$h_A(t) = C_1 e^{-2t}, \quad h_A(0^+) = 1$

$h_A(0^+) = C_1 = 1$

$C_1 = 1$

$h_A(t) = e^{-2t}, \; t \geq 0$

$h(t) = \sum_{m=0}^{M} (b_{N-m} D^m) h_A(t) + \delta(t)$

$h(t) = b_1 D^0 h_A(t) + b_0 D^1 h_A(t) + \delta(t)$

$h(t) = h_A'(t) + h_A(t) + \delta(t)$

$h(t) = -e^{-2t} + \delta(t), \; t \geq 0$

MARKO GULIN
0036428227

11. $y''(t) + 6y'(t) + 13y(t) = u'(t) + 4u(t)$

$N=2, \; M=1$

$a_1 = 6, \; a_2 = 13$

$b_0 = 0, \; b_1 = 1, \; b_2 = 4$

$h_A''(t) + 6h_A'(t) + 13h_A(t) = \delta'(t) + 4\delta(t)$

$h_A(0^+) = 0 \; , \; h_A'(0^+) = 1$

$h_A''(t) + 6h_A'(t) + 13h_A(t) = 0$

$Ce^{st}(s^2 + 6s + 13) = 0, \; Ce^{st} \neq 0$

$s^2 + 6s + 13 = 0 \rightarrow s_{1,2} = -3 \pm j2$

$s_1 = -3 + j2 \; , \; s_2 = -3 - j2$

$h_A(t) = Ae^{-3t}e^{+j2t} + Be^{-3t}e^{-j2t}$

$h_A(t) = e^{-3t}(Ae^{+j2t} + Be^{-j2t})$

$h_A(t) = e^{-3t}(C_1\cos(2t) + C_2\sin(2t))$

$h_A'(t) = e^{-3t}(C_1(-3\cos(2t) - 2\sin(2t)) + C_2(-3\sin(2t) + 2\cos(2t)))$

$$\left.\begin{aligned} h_A(0) &= C_1 = 0 \\ h_A'(0) &= 2C_2 = 1 \end{aligned}\right\} \; C_1 = 0, \; C_2 = \frac{1}{2}$$

$h_A(t) = \frac{1}{2}e^{-3t}\sin(2t)$

$h_A'(t) = e^{-3t}(\cos(2t) - \frac{3}{2}\sin(2t))$

$h(t) = b_2 h_A(t) + b_1 h_A'(t)$

$h(t) = e^{-3t}(\cos(2t) + \frac{1}{2}\sin(2t)) \; , \; t \geq 0$

12. $u_1(t) = \mu(t)$

$y_1(t) = \cos(\omega_0 t)\mu(t)$

$u_2(t) = \delta(t)$

$$u_2(t) = u_1'(t) \xrightarrow{LTI} y_2(t) = y_1'(t)$$

$$y_2(t) = -\omega_0 \sin(\omega_0 t)\mu(t) + \delta(t)$$

$$h(t) = -\omega_0 \sin(\omega_0 t)\mu(t) + \delta(t)$$

13. $y(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)\,\delta(\tau)$

(a) $u(t) = \delta(t)$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau$$

$$h(t) = \mu(t)$$

(b) $y'(t) = u(t)$

$s = 0 \rightarrow$ RUBNO STABILAN

15. $y(t) = \int_{0}^{1} u(t-h)\,dh, \ \forall t \in \mathbb{R}$

SUPSTITUCIJA:

$t - h = \tau \rightarrow h = t - \tau$

$dh = -d\tau$

GRANICE:

$h = 1 \rightarrow t - \tau = 1$ $\qquad$ $h = 0 \rightarrow t - \tau = 0$

$\tau = t - 1$ $\qquad$ $\tau = t$

$$y(t) = \int_{t}^{t-1} -u(\tau)\,d\tau$$

$$y(t) = \int_{t-1}^{t} u(\tau)\,d\tau$$

(a) $u(t) = \delta(t)$

$$h(t) = \int_{t-1}^{t} \delta(\tau)\,d\tau = \int_{0}^{t} \delta(\tau)\,d\tau + \int_{t-1}^{0} \delta(\tau)\,d\tau$$

$$h(t) = \int_{0}^{t} \delta(\tau)\,d\tau - \int_{0}^{t-1} \delta(\tau)\,d\tau$$

$$h(t) = \mu(t) - \mu(t-1)$$

(b) $u(t) = \sin(\frac{\pi}{2}t), \ \forall t \in \mathbb{R}$

$$y(t) = \int_{t-1}^{t} \sin(\tfrac{\pi}{2}\tau)\,d\tau$$

$$y(t) = \frac{2}{\pi}\cos(\tfrac{\pi}{2}\tau)\Big|_{t}^{t-1}$$

$$y(t) = \frac{2}{\pi}\left(\cos(\tfrac{\pi}{2}t - \tfrac{\pi}{2}) - \cos(\tfrac{\pi}{2}t)\right)$$

$$y(t) = \frac{2}{\pi}\left(\sin(\tfrac{\pi}{2}t) - \cos(\tfrac{\pi}{2}t)\right)$$

15. Zadan je kontinuirani sustav $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = u(t)$. Odredite odziv sustava u vremenskoj domeni ako je sustav pobuđen signalom $u(t) = (12t + 16)\mu(t)$ te ako su početni uvjeti $y(0^-) = 3, y'(0^-) = -8$. Odredite prirodni i prisilni odziv, te odziv mirnog i nepobuđenog sustava. Odredite impulsni odziv sustava. Komentirajte stabilnost sustava.

Rješenje:

Homogeno rješenje je: $y_h(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t}$

Partikularno rješenje je: $y_p(t) = 1 + 2t$

Prisilni odziv je: $y_{prisilni}(t) = (1 + 2t)\mu(t)$

Prirodni odziv je: $y_{tot}(t) = (-4e^{-2t} + 6e^{-3t})\mu(t)$

Totalni odziv je: $y_{tot}(t) = (-4e^{-2t} + 6e^{-3t} + 1 + 2t)\mu(t)$

Impulsni odziv sustava: $h(t) = (e^{-2t} - e^{-3t})\mu(t)$

Sustav je stabilan.

16. Zadan je kontinuirani sustav $y''(t) + 5y'(t) + 4y(t) = u(t)$. Odredite odziv mirnog sustava u vremenskoj domeni ako je sustav pobuđen signalom $u(t) = (4 + \cos(4t))\mu(t)$. Nađite impulsni odziv sustava. Komentirajte stabilnost sustava.

Rješenje:

Impulsni odziv:

$$h(t) = \left(-\frac{1}{3}e^{-4t} + \frac{1}{3}e^{-t}\right)\mu(t)$$

Kada $t \to \infty$ impulsni odziv $h(t) \to 0$, pa je sustav stabilan.

Ili na temelju karakteristične jednadžbe: rješenja karakteristične jednadžbe su -4 i -1. Kako su oba rješenja negativna – sustav je stabilan.

Odziv mirnog sustava:

$$y_{mirni}(t) = \left(\frac{7}{30}e^{-4t} - \frac{11}{15}e^{-t} + \frac{1}{2} + \frac{1}{10}\sin(2t)\right)\mu(t)$$

Signali i sustavi - Zadaci za vježbu

XIV. tjedan

1. Kontinuirani sustav zadan je diferencijalnom jednadžbom:

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = u(t).$$

Naći amplitudno-frekvencijsku i fazno-frekvencijsku karakteristiku sustava, te odziv na pobudu $u(t) = 5\cos(t)$. Početni uvjeti su $y(0^-) = 0$ i $y'(0^-) = 1$. Komentirajte izgled odziva za $t \gg 0$.

Rješenje:

Zadana je diferencijalna jednadžba $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = u(t)$.
Njezina prijenosna funkcija

$$s^2Y(s) + 5sY(s) + 6Y(s) = U(s)$$
$$(s^2 + 5s + 6)Y(s) = U(s)$$
$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + 5s + 6} = \frac{1}{(s+2)(s+3)}$$

Polovi $s_1 = -2$, $s_2 = -3$. Kako su realni dijelovi oba pola negativni, sustav je stabilan, pa možemo tražiti frekvencijsku karakteristiku. Tražimo ju tako da uvrstimo $s = j\omega$:

$$H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2 + 5j\omega + 6} = \frac{1}{6 - \omega^2 + 5\omega j}.$$

Amplitudno – frekvencijska karakteristika

$$|H(j\omega)| = \left|\frac{1}{6 - \omega^2 + 5\omega j}\right| = \frac{1}{\sqrt{(6-\omega^2)^2 + 25\omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{\omega^4 + 13\omega^2 + 36}}.$$

Fazno – frekvencijska karakteristika

$$\measuredangle H(j\omega) = -\text{arctg}\left(\frac{5\omega}{6 - \omega^2}\right).$$

Kada tražimo odziv na pobudu, prvo moramo riješiti homogeni sustav. Homogeno rješenje je

$$y_h(t) = C_1e^{-2t} + C_2e^{-3t}.$$

Zadana pobuda je $u(t) = 5\cos t$. Njezina frekvencija je $\omega = 1$. Amplituda signala na toj frekvenciji je

$$|H(j)| = \frac{1}{\sqrt{1 + 13 + 36}} = \frac{1}{\sqrt{50}} = \frac{1}{5\sqrt{2}}.$$

Faza je $\measuredangle H(j) = -\text{arctg}\left(\frac{5}{6-1}\right) = -\text{arctg}(1) = -\frac{\pi}{4}$.

Prisilni odziv

$$y_p(t) = 5 \cdot \frac{1}{5\sqrt{2}}\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right).$$

Totalni odziv:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = C_1e^{-2t} + C_2e^{-3t} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right).$$

Konstante nalazimo iz početnih uvjeta: $y(0^-) = y(0^+) = 0$, $y'(0^-) = y'(0^+) = 1$.

Totalni odziv u 0^+: $y(0^+) = C_1 + C_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = C_1 + C_2 + \frac{1}{2} = 0.$

Derivacija totalnog odziva $y'(t) = -2C_1e^{-2t} - 3C_2e^{-3t} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$

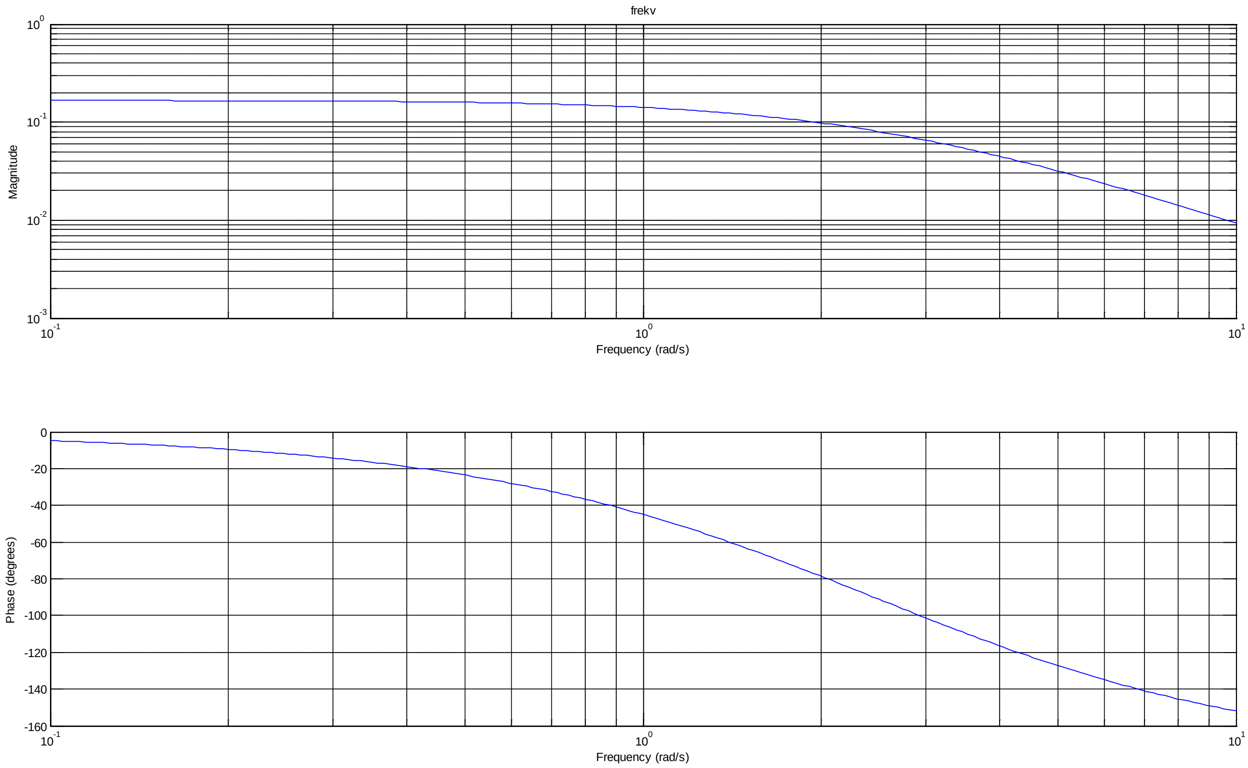
Derivacija totalnog odziva u 0^+: $y'(0^+) = -2C_1 - 3C_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -2C_1 - 3C_2 + \frac{1}{2} = 1.$

Iz ove dvije jednadžbe sa dvije nepoznanice nađemo tražene konstante $C_1 = -1$, $C_2 = \frac{1}{2}$.

Pa je totalno rješenje

$$y(t) = -e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right).$$

Za $t \gg 0$ se istitraju vlastite frekvencije sustava i ostane samo prisilno rješenje $y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$.



2. Diskretan sustav zadan je jednadžbom diferencija:

$$y(n) - 2y(n-1) + y(n-2) = u(n).$$

Naći amplitudno-frekvencijsku i fazno-frekvencijsku karakteristiku sustava, te odziv na pobudu $u(n) = 5$. Početni uvjeti su $y(-2) = 0$, $y(-1) = 1$. Komentirajte izgled odziva za $n \gg 0$.

Rješenje:

Zadana je jednadžba diferencija $y(n) - 2y(n-1) + y(n-2) = u(n)$.
Njezina prijenosna funkcija

$$Y(z) - 2z^{-1}Y(z) + z^{-2}Y(z) = U(z)$$
$$(1 - 2z^{-1} + z^{-2})Y(z) = U(z)$$
$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(s)} = \frac{1}{1 - 2z^{-1} + z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - 2z + 1} = \frac{z^2}{(z-1)^2}.$$

Polovi $p_{1,2} = 1$, nule $z_{1,2} = 0$. Kako je amplituda polova jednaka 1, a oba pola su jednaka, sustav je nestabilan, te nema frekvencijske karakteristike.

Kada tražimo odziv na pobudu, prvo moramo riješiti homogeni sustav. Homogeno rješenje je

$$y_h(n) = (C_1 + C_2 n) \cdot 1^n.$$

Zadana pobuda je $u(n) = 5 = 5 \cdot 1^n$ i jednake je frekvencije kao i homogeno rješenje, pa je pretpostavljeno partikularno rješenje: $y_p(n) = Kn^2 1^n$.
Pomaknuta partikularna rješenja:

$$y_p(n-1) = K(n-1)^2 1^{n-1},$$
$$y_p(n-2) = K(n-2)^2 1^{n-2}.$$

Uvrštavanjem u zadanu jednadžbu:

$$Kn^2 1^n - 2K(n-1)^2 1^{n-1} + K(n-2)^2 1^{n-2} = 5 \cdot 1^n,$$

nalazimo konstantu $K = \frac{5}{2}$.
Partikularno rješenje je $y_p(n) = \frac{5}{2} n^2 1^n$.

Totalni odziv: $y(n) = y_h(n) + y_p(n) = (C_1 + C_2 n) \cdot 1^n + \frac{5}{2} n^2 1^n$.

Konstante nalazimo iz početnih uvjeta: $y(-2) = 0$, $y(-1) = 1 \rightarrow y(0) = 7$, $y(1) = 18$.

$$y(0) = C_1 = 7,$$
$$y(1) = C_1 + C_2 + \frac{5}{2} = 18,$$
$$C_1 = 7, C_2 = 8.5.$$

Pa je totalno rješenje

$$y(n) = (7 + 8.5n + 2.5n^2)1^n.$$

Za $n \gg 0$ amplituda teži u beskonačno.

3. Kontinuirani sustav zadan je diferencijalnom jednadžbom:

$$y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = u(t).$$

Pronađite odziv sustava, ako je sustav pobuđen s $u(t) = \sin t$, za $t < 0$, te s $u(t) = 2\sin 2t$, za $t \geq 0$. Komentirajte odziv sustava za $t \gg 0$.

<u>**Rješenje:**</u>

Zadana je diferencijalna jednadžba $y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = u(t)$.

Njezina prijenosna funkcija

$$s^2Y(s) + 2sY(s) + 5Y(s) = U(s)$$

$$(s^2 + 2s + 5)Y(s) = U(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + 2s + 5} = \frac{1}{(s + 1 + 2j)(s + 1 - 2j)}$$

Polovi $s_1 = -1 - 2j$, $s_2 = -1 + 2j$. Kako su realni dijelovi oba pola negativni, sustav je stabilan, pa možemo tražiti frekvencijsku karakteristiku. Nju tražimo tako da uvrstimo $s = j\omega$:

$$H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2 + 2j\omega + 5} = \frac{1}{5 - \omega^2 + j2\omega}.$$

Amplitudno – frekvencijska karakteristika

$$|H(j\omega)| = \left|\frac{1}{5 - \omega^2 + j2\omega}\right| = \frac{1}{\sqrt{(5 - \omega^2)^2 + 4\omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{\omega^4 - 6\omega^2 + 25}}.$$

Fazno – frekvencijska karakteristika

$$\measuredangle H(j\omega) = -\mathrm{arctg}\left(\frac{2\omega}{5 - \omega^2}\right).$$

Kada tražimo odziv na pobudu, prvo moramo riješiti homogeni sustav. Homogeno rješenje je

$$y_h(t) = C_1 e^{(-1-2j)t} + C_2 e^{(-1+2j)t}.$$

Zadana pobuda je $u(t) = \sin t$ za $t < 0$. Frekvencija pobude je $\omega = 1$. Amplituda signala na toj frekvenciji:

$$|H(j)| = \frac{1}{\sqrt{1 - 6 + 25}} = \frac{1}{\sqrt{20}} = \frac{1}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{10}.$$

Faza je $\measuredangle H(j) = -\mathrm{arctg}\left(\frac{2}{5-1}\right) = -\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) = -26.56°$.

Prisilni odziv

$$y_{p1}(t) = \frac{\sqrt{5}}{10}\sin(t - 26.56°)\,, t < 0.$$

Za $t \geq 0$ pobuda je $u(t) = 2\sin 2t$. Njezina frekvencija je $\omega = 2$. Amplituda signala na toj frekvenciji je:

$$|H(j2)| = \frac{1}{\sqrt{2^4 - 6 \cdot 2^2 + 25}} = \frac{1}{\sqrt{17}}.$$

Faza je $\measuredangle H(j2) = -\mathrm{arctg}\left(\frac{2 \cdot 2}{5-2^2}\right) = -\mathrm{arctg}(4) = -75.96°$.

Prisilni odziv

$$y_{p2}(t) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{17}}\sin(2t - 75.96°)\,, t \geq 0.$$

S obzirom da je sustav stabilan, a pobuda $u(t) = \sin t$ počela u $t = -\infty$, do trenutka $t = 0$ istitrao se prirodni odziv, te je ostalo samo partikularno rješenje, tj. prisilni odziv. Ovu činjenicu ćemo iskoristiti kako bismo našli početne uvjete u 0^-:

$$y_{p1}(0^-) = \frac{\sqrt{5}}{10}\sin(0^- - 26.56°) = -0.1$$
$$y'_{p1}(t) = \frac{\sqrt{5}}{10}\cos(t - 26.56°)\,, t < 0.$$
$$y'_{p1}(0^-) = \frac{\sqrt{5}}{10}\cos(0^- - 26.56°) = 0.2.$$

Preračunavamo početne uvjete u 0^+:

$$y(0^+) = y(0^-) = -0.1,$$
$$y'(0^+) = y'(0^-) = 0.2.$$

Za $t \geq 0$ postoji i homogeno i partikularno rješenje, pa je totalno odziv:

$$y(t) = y_h(t) + y_{p2}(t) = C_1 e^{(-1-2j)t} + C_2 e^{(-1+2j)t} + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{17}}\sin(2t - 75.96°).$$

Konstante nalazimo iz upravo izračunatih početnih uvjeta.
Totalni odziv u 0^+: $y(0^+) = C_1 + C_2 + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{17}}\sin(-75.96°) = -0.1.$

Derivacija totalnog odziva $y'(t) = (-1-2j)C_1 e^{(-1-2j)t} + (-1+2j)C_2 e^{(-1+2j)t} + \frac{4}{\sqrt{17}}\cos(2t - 75.96°).$
Derivacija totalnog odziva u 0^+: $y'(0^+) = (-1-2j)C_1 + (-1+2j)C_2 + \frac{4}{\sqrt{17}}\cos(-75.96°) = 0.2.$
Iz ove dvije jednadžbe sa dvije nepoznanice nađemo tražene konstante

$$C_1 = 0.185 + 0.084j,\ C_2 = 0.185 - 0.084j.$$

Pa je totalno rješenje za $t \geq 0$ nakon kratkog sređivanja

$$y(t) = \left(e^{-t}(0.37\cos 2t + 0.17\sin 2t) + \frac{2}{\sqrt{17}}\sin(2t - 75.96°)\right)\mu(t).$$

Totalno rješenje je:

$$y(t) = \begin{cases} \frac{\sqrt{5}}{10}\sin(t - 26.56°)\,, t < 0 \\ e^{-t}(0.37\cos 2t + 0.17\sin 2t) + \frac{2}{\sqrt{17}}\sin(2t - 75.96°)\,, t \geq 0 \end{cases}.$$

Za $t \gg 0$ se istitraju vlastite frekvencije sustava i ostane samo prisilno rješenje

$$y(t) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{17}}\sin(2t - 75.96°).$$

4. Kontinuirani sustav zadan je diferencijalnom jednadžbom:

$$y'(t) + 3y(t) = u(t).$$

Ako je izlaz iz sustava u trenutku nula jednak nuli, $y(0^-) = 0$, naći odziv sustava na pobudu

$$u(t) = (\sin t + 2\sin 2t + 3\sin 3t + 4\sin 4t)\mu(t).$$

Komentirajte izgled odziva za $t \gg 0$.
UPUTA: Koristite frekvencijsku karakteristiku sustava.

<u>Rješenje:</u>

Zadana je diferencijalna jednadžba $y'(t) + 3y(t) = u(t)$.
Njezina prijenosna funkcija

$$sY(s) + 3Y(s) = U(s)$$
$$(s+3)Y(s) = U(s)$$
$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+3}.$$

Realni dio pola $s_1 = -3$ je negativan, pa je sustave stabilan, te možemo tražiti frekvencijsku karakteristiku. Nju tražimo tako da uvrstimo $s = j\omega$:

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 3}.$$

Amplitudno – frekvencijska karakteristika

$$|H(j\omega)| = \left|\frac{1}{j\omega + 3}\right| = \frac{1}{\sqrt{3^2 + \omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{9 + \omega^2}}.$$

Fazno – frekvencijska karakteristika

$$\measuredangle H(j\omega) = -\mathrm{arctg}\left(\frac{\omega}{3}\right).$$

Kada tražimo odziv na pobudu, prvo moramo riješiti homogeni sustav. Homogeno rješenje je

$$y_h(t) = Ce^{-3t}.$$

Kako je sustav linearan vremenski stalan, pobudu možemo rastaviti na četiri pobude, te gledati odziv na svaki dio posebno.

Prvi dio pobude je $u(t) = \sin t\,\mu(t)$. Njegova frekvencija je $\omega = 1$. Amplituda signala na toj frekvenciji je $|H(j)| = \frac{1}{\sqrt{10}}$, a faza je $\measuredangle H(j) = -\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) = -0.322$. Prisilni odziv $y_{p1}(t) = \frac{1}{\sqrt{10}}\sin(t - 0.322)$.

Drugi dio pobude je $u(t) = 2\sin 2t\,\mu(t)$. Njegova frekvencija je $\omega = 2$. Amplituda signala na toj frekvenciji je $|H(j)| = \frac{1}{\sqrt{13}}$, a faza je $\measuredangle H(j) = -\mathrm{arctg}\left(\frac{2}{3}\right) = -0.588$. Prisilni odziv $y_{p2}(t) = \frac{2}{\sqrt{13}}\sin(2t - 0.588)$.

Treći dio pobude je $u(t) = 3\sin 3t\,\mu(t)$. Njegova frekvencija je $\omega = 3$. Amplituda signala na toj frekvenciji je $|H(j)| = \frac{1}{\sqrt{18}}$, a faza je $\measuredangle H(j) = -\mathrm{arctg}(1) = -0.785$. Prisilni odziv $y_{p3}(t) = \frac{3}{\sqrt{18}}\sin(3t - 0.785)$.

Četvrti dio pobude je $u(t) = 4\sin 4t\,\mu(t)$. Njegova frekvencija je $\omega = 4$. Amplituda signala na toj frekvenciji je $|H(j)| = \frac{1}{5}$, a faza je $\measuredangle H(j) = -\mathrm{arctg}\left(\frac{4}{3}\right) = -0.927$. Prisilni odziv $y_{p4}(t) = \frac{4}{5}\sin(4t - 0.927)$.

Totalni odziv:

$$y(t) = y_h(t) + y_{p1}(t) + y_{p2}(t) + y_{p3}(t) + y_{p4}(t)$$
$$= Ce^{-3t} + \frac{1}{\sqrt{10}}\sin(t - 0.322) + \frac{2}{\sqrt{13}}\sin(2t - 0.588) + \frac{3}{\sqrt{18}}\sin(3t - 0.785)$$
$$+ \frac{4}{5}\sin(4t - 0.927).$$

Konstantu nalazimo iz početnog uvjeta: $y(0^-) = y(0^+) = 0$.
Totalni odziv u 0^+:

$$y(0^+) = C + \frac{1}{\sqrt{10}}\sin(-0.322) + \frac{2}{\sqrt{13}}\sin(-0.588) + \frac{3}{\sqrt{18}}\sin(-0.785) + \frac{4}{5}\sin(-0.927) = 0.$$

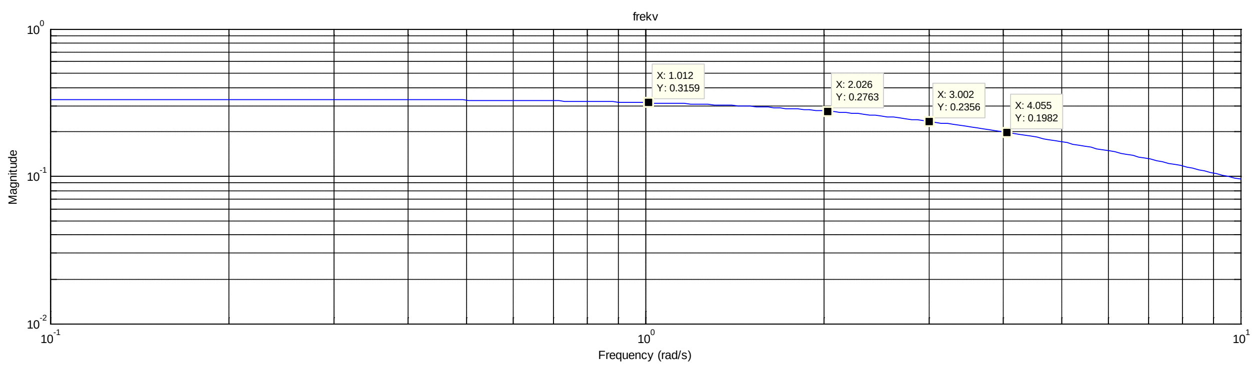
Tražena konstanta iznosi $C = 1.55$.

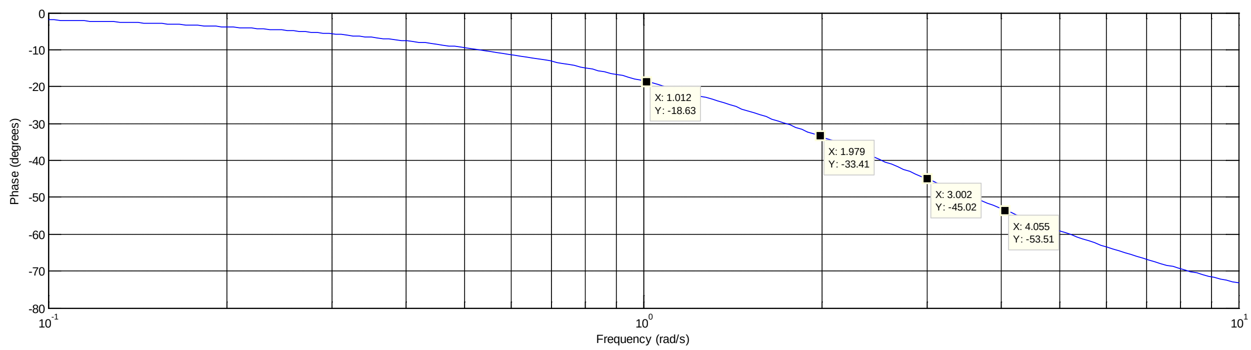
Pa je totalno rješenje

$$y(t) = \left(1.55e^{-3t} + \frac{1}{\sqrt{10}}\sin(t - 0.322) + \frac{2}{\sqrt{13}}\sin(2t - 0.588) + \frac{3}{\sqrt{18}}\sin(3t - 0.785) + \frac{4}{5}\sin(4t - 0.927)\right)\mu(t).$$

Za $t \gg 0$ se istitraju vlastite frekvencije sustava i ostane samo prisilno rješenje

$$y(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\sin(t - 0.322) + \frac{2}{\sqrt{13}}\sin(2t - 0.588) + \frac{3}{\sqrt{18}}\sin(3t - 0.785) + \frac{4}{5}\sin(4t - 0.927)\right)\mu(t).$$





5. Diskretan sustav zadan je jednadžbom diferencija:

$$y(n) + 0.5y(n-1) = u(n).$$

Ako je početni uvjet $y(-1) = 1$, naći odziv sustava na pobudu

$$u(n) = \left(\cos\left(\frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{5}\right) + 2\cos \pi n + 3\cos(1.5\pi n) + 4\cos(2\pi n)\right)\mu(n).$$

Komentirajte izgled odziva za $n \gg 0$.

Rješenje:

Zadana je jednadžba diferencija $y(n) + 0.5y(n-1) = u(n)$.
Njezina prijenosna funkcija

$$Y(z) + 0.5z^{-1}Y(z) = U(z)$$
$$(1 + 0.5z^{-1})Y(z) = U(z)$$
$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(s)} = \frac{1}{1 + 0.5z^{-1}} = \frac{z}{z + 0.5}.$$

Pol $p_1 = -0.5$, kako je apsolutna vrijednost pola manja od 1 sustav je stabilan.

Kada tražimo odziv na pobudu, prvo moramo riješiti homogeni sustav. Homogeno rješenje je

$$y_h(n) = C\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Frekvencijsku karakteristiku dobijemo uvrštavanjem $z = e^{j\Omega}$ u prijenosnu funkciju

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1 + 0.5e^{-j\Omega}} = \frac{1}{1 + 0.5(\cos\Omega - j\sin\Omega)}.$$

Amplitudno – frekvencijska karakteristika

$$|H(e^{j\Omega})| = \left|\frac{1}{1 + 0.5e^{-j\Omega}}\right| = \left|\frac{1}{1 + 0.5(\cos\Omega - j\sin\Omega)}\right| = \frac{1}{\sqrt{(1 + 0.5\cos\Omega)^2 + (0.5\sin\Omega)^2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1.25 + \cos\Omega}}.$$

Fazno – frekvencijska karakteristika

$$\measuredangle H(j\Omega) = -\mathrm{arctg}\left(\frac{-0.5\sin\Omega}{1 + 0.5\cos\Omega}\right) = \mathrm{arctg}\left(\frac{\sin\Omega}{2 + \cos\Omega}\right).$$

Kako je sustav linearan vremenski stalan, pobudu možemo rastaviti na četiri pobude, te gledati odziv na svaki dio posebno.

Prvi dio pobude je $u_1(n) = \cos\left(\frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{5}\right)\mu(n)$. Njegova frekvencija je $\Omega = \frac{\pi}{2}$. Amplituda signala na toj frekvenciji je $\left|H\left(e^{\frac{j\pi}{2}}\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{1.25 + \cos\frac{\pi}{2}}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, a faza je $\measuredangle H\left(e^{\frac{j\pi}{2}}\right) = \mathrm{arctg}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2 + \cos\frac{\pi}{2}}\right) = 0.46$. Prisilni odziv $y_{p1}(n) = \frac{2\sqrt{5}}{5}\cos\left(\frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{5} + 0.46\right)\mu(n) = \frac{2\sqrt{5}}{5}\cos\left(\frac{\pi n}{2} + 1.09\right)\mu(n).$

Drugi dio pobude je $u_2(n) = 2\cos\pi n\,\mu(n)$. Njegova frekvencija je $\Omega = \pi$. Amplituda signala na toj frekvenciji je $\left|H\left(e^{j\pi}\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{1.25+\cos\pi}} = 2$, a faza je $\measuredangle H\left(e^{j\pi}\right) = \mathrm{arctg}\left(\frac{\sin\pi}{2+\cos\pi}\right) = 0$. Prisilni odziv $y_{p2}(n) = 2\cdot 2\cos(\pi n)\,\mu(n) = 4\cos(\pi n)\,\mu(n)$.

Treći dio pobude je $u_3(n) = 3\cos(1.5\pi n)\,\mu(n)$. Njegova frekvencija je $\Omega = 1.5\pi$. Amplituda signala na toj frekvenciji je $\left|H\left(e^{j1.5\pi}\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{1.25+\cos 1.5\pi}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, a faza je $\measuredangle H\left(e^{j1.5\pi}\right) = \mathrm{arctg}\left(\frac{\sin 1.5\pi}{2+\cos 1.5\pi}\right) = -0.46$. Prisilni odziv $y_{p3}(n) = 3\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}\cos(1.5\pi n - 0.46)\,\mu(n) = \frac{6\sqrt{5}}{5}\cos(1.5\pi n - 0.46)\,\mu(n)$.

Četvrti dio pobude je $u_3(n) = 4\cos(2\pi n)\,\mu(n)$. Njegova frekvencija je $\Omega = 2\pi$. Amplituda signala na toj frekvenciji je $\left|H\left(e^{j2\pi}\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{1.25+\cos 2\pi}} = \frac{2}{3}$, a faza je $\measuredangle H\left(e^{j2\pi}\right) = \mathrm{arctg}\left(\frac{\sin 2\pi}{2+\cos 2\pi}\right) = 0$. Prisilni odziv $y_{p4}(n) = 4\cdot\frac{2}{3}\cos(2\pi n)\,\mu(n) = \frac{8}{3}\cos(2\pi n)\,\mu(n)$.

Totalni odziv:

$$\begin{aligned} y(n) &= y_h(n) + y_{p1}(n) + y_{p2}(n) + y_{p3}(n) + y_{p4}(n) \\ &= \left(C\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2\sqrt{5}}{5}\cos\left(\frac{\pi n}{2} + 1.09\right) + 4\cos(\pi n) + \frac{6\sqrt{5}}{5}\cos(1.5\pi n - 0.46) \right. \\ &\quad \left. + \frac{8}{3}\cos(2\pi n)\right)\mu(n). \end{aligned}$$

Konstante nalazimo iz početnog uvjeta: $y(-1) = 1$.

$$y(0) = u(0) - 0.5y(-1) = 9.3,$$

$$\begin{aligned} y(0) &= \left(C + \frac{2\sqrt{5}}{5}\cos(1.09) + 4\cos(0) + \frac{6\sqrt{5}}{5}\cos(-0.46) + \frac{8}{3}\cos(0)\right)\mu(0) \\ &= \mathrm{C} + 0.414 + 4 + 2.4 + 2.66 \\ C &= -0.18. \end{aligned}$$

Pa je totalno rješenje

$$\begin{aligned} y(n) = &\left(-0.18\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2\sqrt{5}}{5}\cos\left(\frac{\pi n}{2} + 1.09\right) + 4\cos(\pi n) + \frac{6\sqrt{5}}{5}\cos(1.5\pi n - 0.46) \right. \\ &\left. + \frac{8}{3}\cos(2\pi n)\right)\mu(n). \end{aligned}$$

Za $n \gg 0$ homogeno rješenje se istitira i ostaje samo partikularno rješenje.

Signali i sustavi - Zadaci za vježbu

XV. tjedan

Z-transformacija

1. Znate da je prijenosna funkcija nekog LTI diskretnog sustava
$$H(z) = \frac{(e^{-2} - e^{-1})z}{(z - e^{-2})(z - e^{-1})},$$
no ne znate koje je područje konvergencije. Postoje tri moguća područja konvergencije:
   a. $|z| > e^{-1}$,
   b. $e^{-2} < |z| < e^{-1}$,
   c. $|z| < e^{-2}$.

   Za svako od navedenih područja konvergencije odredite impulsni odziv sustava. Za koji od navedenih slučajeva možemo tvrditi da je impulsni odziv kauzalan?

<u>Rješenje:</u>

Zadana prijenosna funkcija se može napisati u obliku:
$$H(z) = \frac{(e^{-2} - e^{-1})z}{(z - e^{-2})(z - e^{-1})} = \frac{z}{z - e^{-2}} - \frac{z}{z - e^{-1}}$$
Iz predavanja je poznato:
$$\alpha^n \mu(n) \mapsto \frac{z}{z - \alpha}, \text{za } |z| > |\alpha|$$
$$-\alpha^n \mu(-n-1) \mapsto \frac{z}{z - \alpha}, \text{za } |z| < |\alpha|$$
Pa slijedi:

a. Ako je $|z| > e^{-1}$ vrijedi i $|z| > e^{-2}$, pa se oba dijela $H(z)$ pretvaraju pomoću prve relacije:
$$h(n) = (e^{-2n} - e^{-n})\mu(n).$$
Ovakav signal je kauzalan.

b. Ako je $|z| < e^{-1}$ i $|z| > e^{-2}$, onda se dio $H(z)$ pretvara pomoću prve, a dio pomoću druge relacije:
$$h(n) = e^{-2n}\mu(n) + e^{-n}\mu(-n-1).$$
Ovaj signal je svevremenski.

c. Ako je $|z| < e^{-2}$ vrijedi i $|z| < e^{-1}$, pa se oba dijela $H(z)$ pretvaraju pomoću druge relacije:
$$h(n) = (-e^{-2n} + e^{-n})\mu(-n-1).$$
Ovaj signal je antikauzalan.

2. Poznat je impulsni odziv LTI sustava u vremenskoj domeni $\{\dots,0,\underline{2},1,0,-1,0,0,0,\dots\}$. Nađite odziv sustava na pobudu $\{\dots,0,\underline{0},1,2,1,0,0,\dots\}$ koristeći:
   a. konvolucijsku sumaciju,
   b. *z* – transformaciju.

   (Podvučena vrijednost je amplituda impulsa u trenutku *n=0*.)

Rješenje:

a. Formula za konvolucijsku sumaciju glasi:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{n} u(m)h(n-m).$$

Uvrštavajući u formulu možemo izračunati odziv na zadanu pobudu $\{\dots,0,\underline{0},1,2,1,0,0,\dots\}$ poznavajući impulsni odziv $\{\dots,0,\underline{2},1,0,-1,0,0,0,\dots\}$:

$$y(0) = \sum_{m=0}^{0} u(m)h(0-m) = u(0)h(0) = 0$$

$$y(1) = \sum_{m=0}^{1} u(m)h(1-m) = u(0)h(1) + u(1)h(0) = 0 + 2 = 2$$

$$y(2) = \sum_{m=0}^{2} u(m)h(2-m) = u(0)h(2) + u(1)h(1) + u(2)h(0) = 1 + 4 = 5$$

$$y(3) = \sum_{m=0}^{3} u(m)h(3-m) = 2 + 2 = 4$$

$$y(4) = \sum_{m=0}^{4} u(m)h(4-m) = -1 + 1 = 0$$

$$y(5) = \sum_{m=0}^{5} u(m)h(5-m) = -2$$

$$y(6) = \sum_{m=0}^{6} u(m)h(6-m) = -1$$

$$y(5) = \sum_{m=0}^{7} u(m)h(7-m) = 0 \dots$$

Traženi odziv je $y(n) = \{\dots,0,\underline{0},2,5,4,0,-2,-1,0\dots\}$.

b. Zadana je pobuda $u(n) = \{\dots,0,\underline{0},1,2,1,0,0,\dots\}$.
   Koristeći $\delta(n) \longmapsto 1$ i $\delta(n-m) \longmapsto z^{-m}$, njezina Z-transformacija je

$$U(z) = z^{-1} + 2z^{-2} + z^{-3}.$$

Impulsni odziv je $h(n) = \{\dots,0,\underline{2},1,0,-1,0,0,\dots\}$. Njegova Z-transformacija je

$$H(z) = 2 + z^{-1} - z^{-3}.$$

Kako je Z-transformacija impulsnog odziva zapravo prijenosna funkcija vrijedi:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)},$$

pa je zato odziv sustava

$$Y(z) = H(z)U(z).$$

Za zadane signale je

$$Y(z) = (2 + z^{-1} - z^{-3})(z^{-1} + 2z^{-2} + z^{-3}) =$$

$$= 2z^{-1} + 5z^{-2} + 4z^{-3} - 2z^{-5} - z^{-6},$$

odnosno u vremenskoj domeni

$$y(n) = \{\dots, 0, \underline{0}, 2, 5, 4, 0, -2, -1, 0 \dots\}.$$

Kako je vidljivo, rješenja bilo kojom od ovih metoda su jednaka.
Poopćeno: konvolucija u vremenskoj domeni odgovara množenju u Z-domeni

$$h(n) * u(n) \longmapsto H(z)U(z).$$

3. Sustav je zadan prijenosnom funkcijom:

$$H(z) = \frac{2z(3z-23)}{(25-6z+z^2)(z-1)^2}$$

Odredite:

a. razvojem u red (dijeljenje razlomaka) amplitudu trećeg elementa niza uz impulsnu pobudu;
b. impulsni odziv sustava u vremenskoj domeni koristeći parcijalne razlomke.

<u>Rješenje:</u>

a. Dijeljenje polinoma s polinomom

$$\begin{array}{l}
(6z^2-46z):(z^4-8z^3+38z^2-56z+25) = 6z^{-2}+2z^{-3}-212z^{-4}+\cdots \\
\underline{-6z^2+48z-228+336z^{-1}-150z^{-2}} \\
\qquad 2z-228+336z^{-1}-150z^{-2} \\
\qquad \underline{-2z+\ \ 16-\ \ 76z^{-1}+112z^{-2}-50z^{-3}} \\
\qquad\quad -212+260z^{-1}-38z^{-2}-50z^{-3}
\end{array}$$

Kako je potencija od *z* zapravo kašnjenje impulsa, $\delta(n-m) \longmapsto z^{-m}$, traženi impulsni odziv se očita:

$$h(n) = 6\delta(n-2) + 2\delta(n-3) - 212\delta(n-4) + \cdots$$

Ili drugačiji zapis:

$$h(n) = \{\ldots,0,\underline{0},0,6,2,-212,\ldots\}$$

U koraku $n = 3$ odziv sustava ima vrijednost 2.

b. Drugi način vraćanja u vremensku domenu je korištenjem rastava na parcijalne razlomke.

$$H(z) = \frac{2z(3z-23)}{(25-6z+z^2)(z-1)^2}$$

$$H(z) = \frac{Az}{z-1} + \frac{Bz}{(z-1)^2} + \frac{Cz}{z-3+4j} + \frac{Dz}{z-3-4j}$$

Nepoznate koeficijente nalazimo tako da sve svedemo na zajednički nazivnik, te izjednačimo lijevu i desnu stranu (odnosno ovdje gornji i donji redak):

$$\begin{gathered} Az(z-1)(z^2-6z+25) + Bz(z^2-6z+25) + Cz(z-1)^2(z-3-4j) \\ + Dz(z-1)^2(z-3+4j) = 2z(3z-23) \end{gathered}$$

Rješavanjem četiri jednadžbe sa četiri nepoznanice pronalazimo konstante:

$$A = -\frac{1}{10}, B = -2, C = \frac{2+9j}{40}, D = \frac{2-9j}{40}.$$

Prijenosna funkcija se sada može napisati u obliku

$$H(z) = -\frac{1}{10}\frac{z}{z-1} - 2\frac{z}{(z-1)^2} + \frac{2+9j}{40}\frac{z}{z-3+4j} + \frac{2-9j}{40}\frac{z}{z-3-4j}.$$

Vraćanjem u vremensku domenu:

$$h(n) = \frac{1}{40}(-4 - 80n + (2+9j)(3-4j)^n + (2-9j)(3+4j)^n)\mu(n).$$

Kako zadani sustav posjeduje realne koeficijente i rješenje bi bilo trebalo napisati sa istima:

$$\frac{1}{20}+\frac{9}{40}j = 0.23e^{1.35j} \qquad 3+4j = 5e^{0.927j}$$

$$\frac{1}{20}-\frac{9}{40}j = 0.23e^{-1.35j} \qquad 3-4j = 5e^{-0.927j}$$

Pa je impulsni odziv:

$$h(n) = \left[-\frac{1}{10} - 2n + 0.23e^{1.35j}5^n e^{-0.927nj} + 0.23e^{-1.35j}5^n e^{0.927nj}\right]\mu(n) =$$

$$= \left[-\frac{1}{10} - 2n + 0.23\cdot 5^n\left[e^{(1.35-0.927n)j} + e^{-(-0.927n+1.35)j}\right]\right]\mu(n) =$$

$$= \left[-\frac{1}{10} - 2n + 0.46\cdot 5^n \cos(0.927n - 1.35)\right]\mu(n)$$

4. LTI sustav je zadan jednadžbom diferencija:

$$y(n+2) - y(n+1) = 4u(n+2) - 3u(n+1) + u(n)$$

Neka je pobuda $u(n) = \mu(n) + \mu(n-1)$, a početni uvjeti $y(-1) = 1, y(-2) = 1$.

   a. Nađite prijenosnu funkciju sustava.
   b. Nađite odziv mirnog sustava.
   c. Nađite odziv nepobuđenog sustava.

Rješenje:

a. Prijenosna funkcija dobiva se korištenjem Z-transformacije uz početne uvjete jednake nuli.

$$z^2Y(z) - zY(z) = 4z^2U(z) - 3zU(z) + U(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{4z^2 - 3z + 1}{z^2 - z}$$

b. Računanje početnih uvjeta pobude:

$$u(0) = \mu(0) + \mu(-1) = 1$$
$$u(1) = \mu(1) + \mu(0) = 2$$

I početnih uvjeta odziva:

$$y(n+2) = 4u(n+2) - 3u(n+1) + u(n) + y(n+1)$$

$$y(0) = 4u(0) - 3u(-1) + u(-2) + y(-1) = 5$$

$$y(1) = 4u(1) - 3u(0) + u(-1) + y(0) = 10$$

Koristeći svojstva Z-transformacije:

$$y(n+1) \mapsto zY(z) - zy(0)$$

$$y(n+2) \mapsto z^2Y(z) - z^2y(0) - zy(1)$$

Pretvaramo:

$$\begin{aligned} z^2Y(z) - z^2y(0) - zy(1) - \big(zY(z) - zy(0)\big) \\ = 4\big(z^2U(z) - z^2u(0) - zu(1)\big) - 3\big(zU(z) - zu(0)\big) + U(z) \end{aligned}$$

Uvrštavanje početnih uvjeta:

$$z^2Y(z) - 5z^2 - 10z - zY(z) + 5z = 4(z^2U(z) - z^2 - 2z) - 3(zU(z) - z) + U(z)$$

$$Y(z) = \frac{4z^2 - 3z + 1}{z^2 - z}U(z) + \frac{z^2}{z^2 - z}$$

Z-transformacija pobude je:

$$U(z) = \frac{z}{z-1} + z^{-1}\left(\frac{z}{z-1}\right) = \frac{1+z}{z-1}.$$

Odziv mirnog sustava je:

$$Y(z) = \frac{4z^2 - 3z + 1}{z^2 - z} U(z) = \frac{4z^2 - 3z + 1}{z^2 - z} \cdot \frac{1 + z}{z - 1}$$

Vraćanjem u vremensku domenu:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z - 1} + \frac{D}{(z - 1)^2} = \frac{4z^3 + z^2 - 2z + 1}{z^2(z - 1)^2}$$

Svođenjem na zajednički nazivnik:

$$Az^3 - 2Az^2 + Az + Bz^2 - 2Bz + B + Cz^3 - Cz^2 + Dz^2 = 4z^3 + z^2 - 2z + 1$$

Uspoređivanjem koeficijenata uz jednake potencije *z*, dobiva se:

$$A = 0, B = 1, C = 4, D = 4.$$

$$Y_m(z) = \frac{1}{z} + \frac{4z}{z - 1} + \frac{4z}{(z - 1)^2},$$

odnosno u vremenskoj domeni:

$$y_m(n) = \delta(n - 1) + 4\mu(n) + 4n\mu(n).$$

c. Nepobuđeni sustav

$$Y_n(z) = \frac{z^2}{z^2 - z} = \frac{z}{z - 1}$$

$$y_n(n) = \mu(n).$$

5. LTI sustav je zadan jednadžbom diferencija:

$$y(n) - y(n-2) = u(n).$$

   a. Nađite prijenosnu funkciju sustava.
   b. Odredite početnu i konačnu vrijednost odziva na jediničnu stepenicu iz z-domene. Je li zadani sustav stabilan?
   c. Nađite odziv na jediničnu stepenicu $\mu(n)$.

Rješenje:

a. Prijenosna funkcija zadanog sustava je

$$H(z) = \frac{1}{1 - z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - 1}.$$

b. Pobuda je jedinična stepenica $u(n) = \mu(n)$. Njena Z-transformacija je $U(z) = \frac{z}{z-1}$. Odziv sustava je

$$Y(z) = H(z)U(z) = \frac{z^2}{z^2 - 1}\frac{z}{z - 1} = \frac{z^3}{(z+1)(z-1)^2}.$$

Početna vrijednost odziva može se izračunati iz Z-domene:

$$y(0) = \lim_{z \to \infty} Y(z) = \lim_{z \to \infty} \frac{z^3}{(z+1)(z-1)^2} = 1.$$

Konačna vrijednost niza također se može naći iz Z-domene (ukoliko ona postoji):

$$\lim_{n \to \infty} y(n) = \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1}) Y(z) =$$
$$= \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1}) \frac{z^3}{(z+1)(z-1)^2} =$$
$$= \lim_{z \to 1} \frac{z^2}{z^2 - 1} = \infty.$$

Kako odziv na konačnu pobudu nije konačan, sustav nije stabilan. Promatrajući na drugačiji način – polove sustava, postoje dva pola koji su na rubu stabilnosti. Kako je frekvencija ulaznog signala jednaka vlastitoj frekvenciji sustava, sustav postaje nestabilan.

c. Odziv na jediničnu stepenicu:

$$Y(z) = H(z)U(z) = \frac{z^2}{z^2 - 1}\frac{z}{z - 1} = \frac{z^3}{z^3 - z^2 - z + 1}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{(z-1)^2}$$

Nakon svođenja na zajednički nazivnik:

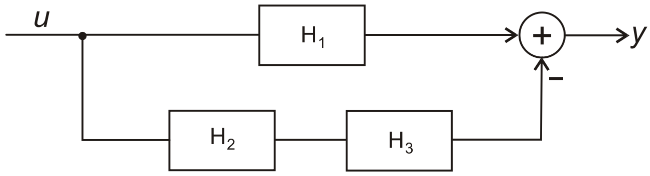
$$Az^2 - 2Az + A + Bz^2 - B + Cz + C = z^2$$

$$A = \frac{1}{4}, B = \frac{3}{4}, C = \frac{1}{2}$$

$$Y(z) = \frac{\frac{1}{4}z}{z+1} + \frac{\frac{3}{4}z}{z-1} + \frac{\frac{1}{2}z}{(z-1)^2}$$

Odnosno u vremenskoj domeni: $y(n) = \left(\frac{1}{4}(-1)^n + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}n\right)\mu(n)$.

6. Složeni mirni diskretni sustav zadan je slikom:



Koliki je impulsni odziv drugog podsustava $h_2(n)$ ako je impulsni odziv prvog podsustava $h_1(n) = \{\underline{0}, 0, 1, 3, 3, 3, 3, \ldots\}$, impulsni odziv trećeg podsustava $h_3(n) = \{\underline{0}, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, \ldots\}$, te prijenosna funkcija sustava $H(z) = 0$?

Rješenje:

Impulsni odziv prvog podsustava je $h(n) = \{\underline{0}, 0,1,3,3, \ldots\}$. Njegova prijenosna funkcija glasi:

$$H_1(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{3}{z^3} + \frac{3}{z^4} + \cdots = \frac{1}{z^2} + \frac{3}{z^3}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{z^i} = \frac{1}{z^2} + \frac{3}{z^3}\sum_{i=0}^{\infty} z^{-i} = \frac{1}{z^2} + \frac{3}{z^3}\cdot\frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z+2}{z^2(z-1)}.$$

Impulsni odziv trećeg podsustava je $h(n) = \{\underline{0}, 0,1,2,0,1,2,0, \ldots\}$. Njegova prijenosna funkcija glasi:

$$\begin{aligned} H_3(z) &= \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z^3} + \frac{1}{z^5} + \frac{2}{z^6} + \cdots = \frac{1}{z^2}\left(1 + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^6} + \cdots\right) + \frac{2}{z^3}\left(1 + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^6} + \cdots\right) \\ &= \left(\frac{1}{z^2} + \frac{2}{z^3}\right)\left(1 + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^6} + \cdots\right) = \frac{z+2}{z^3}\cdot\sum_{i=0}^{\infty} z^{-3i} = \frac{z+2}{z^3}\cdot\frac{1}{1-z^{-3}} = \frac{z+2}{z^3}\cdot\frac{z^3}{z^3-1} \\ &= \frac{z+2}{(z-1)(z^2+z+1)}. \end{aligned}$$

Prijenosna funkcija cijelog sustava može se dobiti iz slike: $H_1(z)$ je paralelan kaskadi $H_2(z)\cdot H_3(z)$. Taj ukupni sustav mora imati prijenosnu funkciju jednaku nuli:

$$H_1(z) - H_2(z)H_3(z) = 0.$$

Prijenosna funkcija drugog sustava je onda $H_2(z) = \frac{H_1(z)}{H_3(z)}$

$$H_2(z) = \frac{z+2}{z^2(z-1)} : \frac{z+2}{(z-1)(z^2+z+1)} = \frac{z^2+z+1}{z^2}.$$

Impulsni odziv se dobije vraćajući ovu prijenosnu funkciju u vremensku domenu:

$$h_2(n) = \{\underline{1}, 1,1,0,0, \ldots\}.$$

Laplaceova transformacija

1. Zadan je kontinuiran sustav

$$y''(t) - 5y'(t) + 6y(t) = u(t) + 3u'(t),$$

$y(0^-) = 3, y'(0^-) = 0$. Pronađite odziv sustava na pobudu $u(t)=2\mu(t)$.

   a. U vremenskoj domeni (homogeno + partikularno).
   b. Pomoću Laplaceove transformacije.

<u>Rješenje:</u>

a. Karakteristična jednadžba

$$s^2 - 5s + 6 = 0$$

$$s_1 = 2, s_2 = 3.$$

Pa je homogeno rješenje $y_h(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}$.

Kako se pobuda sastoji od dva dijela: $u(t) + 3u'(t)$, a sustav je LTI, možemo tražiti odziv na svaku pobudu posebno. Tako imamo jednadžbu

$$y''(t) - 5y'(t) + 6y(t) = 2\mu(t),$$

Čije je partikularno rješenje $y_p(t) = K \rightarrow\ 6K = 2 \rightarrow K = \frac{1}{3}$:

$$y_{p1}(t) = \frac{1}{3}.$$

Druga jednadžba je

$$y''(t) - 5y'(t) + 6y(t) = 6\delta(t).$$

Ovdje moramo naći impulsni odziv:

$$h_A(t) = y_h(t)$$

$$h_A(0) = C_1 + C_2 = 0,$$

$$h_A'(t) = 2C_1 e^{2t} + 3C_2 e^{3t},$$

$$h_A'(0) = 2C_1 + 3C_2 = 1,$$

$$C_1 = -1, C_2 = 1.$$

Pa je $h_A(t) = -e^{2t} + e^{3t}$.

Impulsni odziv je $h(t) = 6h_A(t) = -6e^{2t} + 6e^{3t}$.

Totalno rješenje je $y(t) = y_h(t) + y_{p1}(t) + h(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + \frac{1}{3} - 6e^{2t} + 6e^{3t}$.

Konstante C_1 i C_2 tražimo iz početnih uvjeta. Njih prvo moramo pretvoriti:

$$y\,(0^+) - y(0^-) = 0 \rightarrow y(0^+) = 3,$$

$$y'(0^+) - y'(0^-) = u(0^+) + 5 \cdot \big(y(0^+) - y(0^-)\big) = 3 \cdot 2 \rightarrow y'(0^+) = 6.$$

Tako imamo:

$$y(0^+) = C_1 + C_2 + \frac{1}{3} - 6 + 6 = 3$$

$$y'(0^+) = 2C_1 + 3C_2 - 12 + 18 = 6$$

Pa su tražene konstante $C_1 = 8, C_2 = -\frac{16}{3}$.

Totalni odziv je

$$y(t) = \left(8e^{2t} - \frac{16}{3}e^{3t} + \frac{1}{3} - 6e^{2t} + 6e^{3t}\right)\mu(t) = \left(2e^{2t} + \frac{2}{3}e^{3t} + \frac{1}{3}\right)\mu(t).$$

b. Jednadžbu možemo riješiti i koristeći Laplaceovu transformaciju. U tu svrhu koristimo svojstvo deriviranja originala:

$$y'(t) \to sY(s) - y(0^-)$$

$$y''(t) \to s^2Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-)$$

Pa zadani sustav u Laplaceovoj domeni glasi:

$$s^2Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-) - 5 \cdot \big(sY(s) - y(0^-)\big) + 6Y(s) = U(s) + 3\big(sU(s) - u(0^-)\big).$$

Uvrštavanjem brojeva:

$$(s^2 - 5s + 6)Y(s) = (1 + 3s)U(s) + 3s - 15$$

Zadana pobuda kada se pretvori u Laplaceovu domenu: $u(t) = 2\mu(t) \to U(s) = \frac{2}{s}$.

Odziv sustava je

$$Y(s) = \frac{1 + 3s}{s^2 - 5s + 6} \cdot \frac{2}{s} + \frac{3s - 15}{s^2 - 5s + 6}.$$

Kako bi dobili odziv u vremenskoj domeni, *Y(s)* moramo rastaviti na parcijalne razlomke:

$$Y(s) = \frac{3s^2 - 9s + 1}{s(s^2 - 5s + 6)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s - 2} + \frac{C}{s - 3}$$

$$A(s^2 - 5s + 6) + Bs(s - 3) + Cs(s - 2) = 3s^2 - 9s + 1$$

Tražene konstante su: $A = \frac{1}{3}, B = 2, C = \frac{2}{3}$.

$$Y(s) = \frac{1}{3}\frac{1}{s} + \frac{2}{s - 2} + \frac{2}{3}\frac{1}{s - 3}$$

Korištenjem tablica Laplaceove transformacije:

$$y(t) = \left(\frac{1}{3} + 2e^{2t} + \frac{2}{3}e^{3t}\right)\mu(t).$$

Dobiveno rješenje jednako je onome dobivenom računajući u vremenskoj domeni.

2. Zadan je kontinuirani sustav

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = u(t).$$

   a. Nađite impulsni odziv sustava koristeći Laplaceovu transformaciju.
   b. Nađite odziv sustava u vremenskoj domeni ako je sustav pobuđen signalom $u(t) = (12t + 16)\mu(t)$ te ako su početni uvjeti $y(0^-) = 3, y'(0^-) = -8$. Riješite sa i bez korištenja Laplaceove transformacije.

Rješenje:

   a. Ako je pobuda $u(t) = \delta(t)$, onda je $U(s) = 1$. Pa je $Y(s) = H(s) = \frac{1}{s^2+5s+6} = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3}$. U vremenskoj domeni je to $y(t) = (e^{-2t} - e^{-3t})\mu(t)$.
   b. $y(t) = (-4e^{-2t} + 6e^{-3t} + 1 + 2t)\mu(t)$.

3. Zadan je impulsni odziv kontinuiranog LTI sustava $h(t) = 2te^{-t}\mu(t)$. Pronađite:
   a. prijenosnu funkciju sustava,
   b. odziv sustava, ako je sustav pobuđen signalom $u(t) = 2\mu(t)$ te ako su početni uvjeti $y(0^-) = 2, y'(0^-) = 0$.

Rješenje:

   a. Direktnim korištenjem Laplaceove transformacije izlazi prijenosna funkcija $H(s) = \frac{2}{(s+1)^2}$. Impulsni odziv u vremenu je prijenosna funkcija u Laplaceovoj domeni.
   b. Iz prijenosne funkcije slijedi diferencijalna jednadžba

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 2u(t).$$

   Rješavanjem ove jednadžbe izlazi rješenje $y(t) = \big((-2 - 2t)e^{-t} + 4\big)\mu(t)$.

4. Kontinuirani kauzalni LTI sustav opisan diferencijalnom jednadžbom

$$y'(t) + 4y(t) = u(t) + 2u'(t)$$

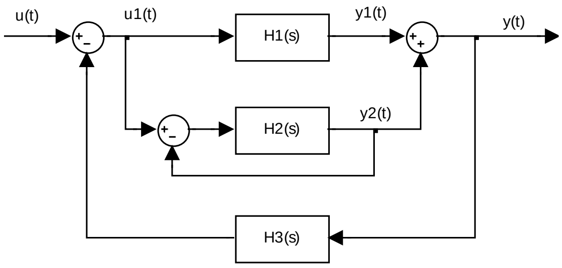
pobuđen je signalom $u(t) = \mu(t)$. Početni uvjet je $y(0^-) = 2$.

a. Izračunajte početni uvjet u $y(0^+)$.
b. Odredite odziv sustava na zadanu pobudu rješavanjem jednadžbe u vremenskoj domeni.
c. Odredite odziv sustava na zadanu pobudu korištenjem Laplaceove transformacije.
d. Odredite prijenosnu funkciju sustava. Je li sustav stabilan?

Rješenje:

a. Početni uvjet izlazi iz $y(0^+) - y(0^-) = 2u(0^+)$, $y(0^+) = 4$.
b. Homogeno rješenje $y_h(t) = Ce^{-4t}$.
   Partikularno rješenje $y_p(t) = K = \frac{1}{4}$.
   Ukupno rješenje $y(t) = \left(\frac{15}{4}e^{-4t} + \frac{1}{4}\right)\mu(t)$.
c. Korištenjem Laplacea i pretvaranjem zadane diferencijalne jednadžbe uzevši u obzir početne uvjete $Y(s) = U(s)\left(2 - \frac{7}{s+4}\right) + \frac{2}{s+4}$.
   Laplaceova transformacija od zadane pobude je $U(s) = \frac{1}{s}$.
   Odziv u L-domeni $Y(s) = \frac{1}{4}s + \frac{\frac{15}{4}}{s+4}$, dok u vremenskoj iznosi $y(t) = \left(\frac{1}{4} + \frac{15}{4}e^{-4t}\right)\mu(t)$.
d. Prijenosna funkcija sustava $H(s) = \frac{2s+1}{s+4}$. Pol sustava je $s = -4$, što je manje od nula, pa je sustav stabilan.

5. Kontinuirani sustav prikazan je pomoću blokovskog dijagrama. Odredite ekvivalentnu prijenosnu funkciju cijelog sustava. Ako su dani podsustavi kauzalni, s prijenosnim funkcijama: $H_1(s) = \frac{1}{s+2}$, $H_2(s) = \frac{1}{s+1}, H_3(s) = \frac{1}{s+4}$, ispitati stabilnost cijelog sustava. Naći odziv sustava na jedinični skok (početni uvjeti su nula).



Rješenje:

Podsustav $H_2(s)$ ima povratnu vezu, pa je prijenosna funkcija tog dijela sustava

$$(U_1 - Y_2)H_2 = Y_2 \rightarrow U_1 H_2 = Y_2(1 + H_2) \rightarrow \frac{Y_2}{U_1} = \frac{H_2}{1 + H_2}.$$

Ovakav sustav je u paraleli sa $H_1(s)$: $H' = H_1 + \frac{H_2}{1+H_2}$. Ta prijenosna funkcija ima povratnu vezu sa $H_3(s)$ → $(U - YH_3)H' = Y$. Ukupna prijenosna funkcija je:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{H'}{1 + H'^{H_3}} = \frac{H_1 + \frac{H_2}{1 + H_2}}{1 + H_3\left(H_1 + \frac{H_2}{1 + H_2}\right)} = \frac{H_1 + H_1 H_2 + H_2}{1 + H_2 + H_1 H_3 + H_1 H_2 H_3 + H_2 H_3}.$$

Ako su prijenosne funkcije podsustava $H_1(s) = \frac{1}{s+2}$, $H_2(s) = \frac{1}{s+1}$ i $H_3(s) = \frac{1}{s+4}$, prijenosna funkcija cijelog sustava je:

$$H(s) = \frac{\frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+2}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+1}}{1 + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2}\frac{1}{s+4} + \frac{1}{s+2}\frac{1}{s+1}\frac{1}{s+4} + \frac{1}{s+1}\frac{1}{s+4}} = \frac{2s+4}{s^2 + 6s + 10}.$$

Polovi ovakvog sustava su $s_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36-40}}{2} = -3 \pm i$.

Kako se radi o kontinuiranim sustavima, realni dijelovi svih polova moraju biti manji od nule da bi sustav bio stabilan. Kako je to ovdje slučaj, sustav je stabilan.

Odziv sustava na jedinični skok $u(t) = \mu(t) \rightarrow U(s) = \frac{1}{s}$ iznosi:

$$Y(s) = H(s)U(s) = \frac{2s+4}{s^2+6s+10}\frac{1}{s} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2+6s+10} = \frac{2}{5}\frac{1}{s} + \frac{-\frac{2}{5}s - \frac{2}{5}}{s^2+6s+10}$$
$$= \frac{2}{5}\frac{1}{s} - \frac{2}{5}\frac{s+3}{(s+3)^2+1} + \frac{4}{5}\frac{1}{(s+3)^2+1}$$

Odnosno u vremenskoj domeni $y(t) = \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{5}\cos t\, e^{-3t} + \frac{4}{5}\sin t\, e^{-3t}\right)\mu(t)$.