Signali i sustavi
Signali kao funkcije

Profesor
Branko Jeren

6. ožujka 2013.

U cjelini 2 razmatramo

- signali kao funkcije
- klasifikacija signala
  - realni i kompleksni signali
  - vremenski diskretni i vremenski kontinuirani signali
  - kauzalni, antikauzalni i nekauzalni signali
  - signali s konačnim značajkama
    - apsolutno zbrojivi i apsolutno integrabilni signali
    - kvadratno zbrojivi i kvadratno integrabilni signali
    - signali konačne energije i konačne snage
- neke operacije nad signalima
  - diferencija i akumulacija vremenski diskretnih signala
  - vremenska ekspanzija i kompresija signala
  - konvolucija signala
- parni i neparni signali
- konjugirano simetrični signali

Signali kao funkcije

- funkcija

$$f : W \to Y,$$

  definira pravilo pridruživanja, po kojem se svakom elementu w u skupu W pridružuje vrijednost (element) $y = f(w)$, u skupu Y
- skup W se naziva područje definicije, ili domena, funkcije f, i označava kao $\mathcal{D}(f)$
- područje vrijednosti, označimo ga $\mathcal{K}(f) \subseteq Y$, je skup svih vrijednosti $f(w)$ odnosno

$$\mathcal{K}(f) = \{f(w) \in Y | w \in W\}.$$

- treba naglasiti kako, za razliku od f, $f(w)$ predstavlja konkretnu vrijednost funkcije f za neki $w \in \mathcal{D}(f)$.

Signali kao funkcije

- na primjeru signala glazbe u trajanju 7.7 sekundi ilustrirano je da ovaj signal možemo predstaviti funkcijom

$$\mathit{BamBam} : \mathit{Vrijeme} \to \mathit{Tlak} \qquad \mathit{Vrijeme} = [0, 7.7] \subset \mathbb{R}$$

- signal *BamBam* definiran je
  - područjem definicije, označenom kao skup *Vrijeme*, koji predstavlja vremenski interval $[0, 7.7] \subset \mathbb{R}$
  - područjem vrijednosti, ovdje označenom kao *Tlak*, skupom koji se sastoji od mogućih vrijednosti tlaka i
  - zbog karaktera signala funkciju *BamBam* ne možemo prikazati deklarativnim matematičkim izrazom, pa se koristimo grafom ili tablicom
- ovdje su korištena "duga" imena za funkciju i varijable jer u ovom konkretnom slučaju imaju konkretne interpretacije
- korištenje "dugih" imena korisno je jer, kao i u programiranju, donosi bolju preglednost i garantira nedvosmislenost

Signali kao funkcije

- općenito signal je definiran funkcijom

$$
\begin{aligned}
&f : W \to Y \\
&\forall w \in \mathcal{D}(f),\ f(w) \in \mathcal{K}(f) \\
&f(w) = \text{izraz po } w.
\end{aligned}
$$

- iskaz "izraz po w" može biti dan matematičkim izrazom, grafom funkcije f, tablicom, ili procedurom koja definira način pridruživanja.
- pod grafom funkcije f podrazumijevamo skup $Graf(f) \subseteq W \times Y$ definiran kao

$$
Graf(f) = \{(w, y) | w \in W \text{ i } y = f(w)\}
$$

Realni i kompleksni signali

- ovisno o svojstvima skupova $\mathcal{D}$ i $\mathcal{K}$ klasificiramo signale na
  - realne [1] signale za koje su

$$\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$$
$$\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}$$

  - kompleksne signale realne nezavisne varijable za koje su

$$\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$$
$$\mathcal{K} \subseteq \mathbb{C}$$

  - kompleksne signale kompleksne nezavisne varijable za koje su

$$\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}$$
$$\mathcal{K} \subseteq \mathbb{C}$$

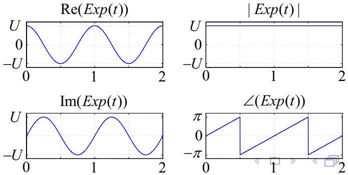
[1] Da bi signal bio realan $\mathcal{D}$ i $\mathcal{K}$ mogu biti i podskupovi skupa $\mathbb{Z}$.

Realni i kompleksni signali

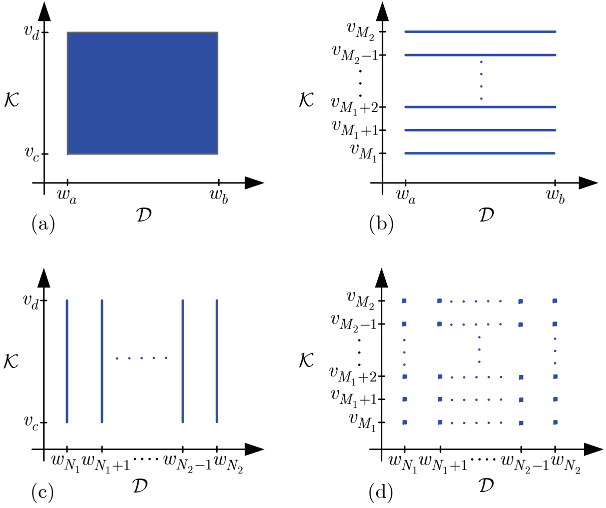
- signal definiran kao kompleksna eksponencijala realne varijable $Exp(t) = Ue^{j2\pi t}$, zadana u intervalu $t \in [0,2] \subset \mathbb{R}$, i uz $U \in \mathbb{R}$, je

$$
\begin{aligned}
&Exp : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\
&\forall t \in [0,2] \subset \mathbb{R}, \quad U \in \mathbb{R} \\
&Exp(t) = Ue^{j2\pi t} = U\cos(2\pi t) + jU\sin(2\pi t).
\end{aligned}
$$

- područje vrijednosti kompleksne eksponencijale je iz skupa $\mathbb{C}$ pa je pri grafičkom prikazu potrebno crtati dva grafa, za realni i imaginarni dio funkcije *Exp*, ili modul i argument (prikazujemo glavnu vrijednost)



Klasifikacija signala prema svojstvima područja definicije i područja vrijednosti



Slika 1: Kartezijevi produkti skupova $\mathcal{D} \times \mathcal{K}$

Klasifikacija signala prema svojstvima područja definicije i područja vrijednosti

- signali za koje je

$$\mathcal{D} = [w_a, w_b] \subset \mathbb{R}$$

  nazivamo po nezavisnoj varijabli kontinuirani signali Sl.1a i Sl.1b

- najčešće je nezavisna varijabla vrijeme, pa zato uobičajeni naziv – vremenski kontinuirani signali
- signali za koje je

$$\mathcal{D} = \{w_n \,|\, N_1 \leq n \leq N_2;\ n, N_1, N_2 \in \mathbb{Z};\}$$

  su po nezavisnoj varijabli diskretni signali (Sl.1c i Sl.1d)

- za nezavisnu varijablu vrijeme, govorimo o vremenski diskretnim signalima

Klasifikacija signala prema svojstvima područja definicije i područja vrijednosti

- signale za koje je $\mathcal{D} = [w_a, w_b] \subset \mathbb{R}$ i $\mathcal{K} = [y_c, y_d] \subset \mathbb{R}$ nazivamo analogni signali Sl.1a
- signale za koje je

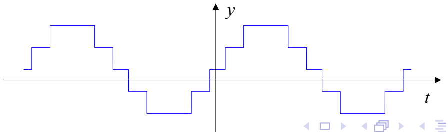
$$\mathcal{K} = \{y_q \,|\, M_1 \leq q \leq M_2;\ q, M_1, M_2 \in \mathbb{Z};\},$$

  nazivamo amplitudno kvantizirani signali (Sl.1b i Sl.1d)
- vremenski diskretne signale koji su i amplitudno kvantizirani nazivamo digitalni signali[2] (Sl.1d)

[2] da bi signal nazvali digitalnim potrebno je još vrijednosti signala kodirati kao binarne brojeve

Klasifikacija signala prema svojstvima područja definicije i područja vrijednosti

- za vremenski kontinuirani signal y kažemo da je prekinut – diskontinuiran – u nekoj točki t_1 ako vrijedi $y(t_1^-) \neq y(t_1^+)$, pri čemu su $t_1 - t_1^-$ i $t_1^+ - t_1$ neizmjerno mali pozitivni brojevi
- signal y je neprekinut u nekoj točki t_1 ako vrijedi $y(t_1^-) = y(t_1^+)$
- ako je signal neprekinut za sve vrijednosti područja definicije, osim za prebrojivi skup točaka prekida, nazivamo ga po odsječcima neprekinutim
- treba naglasiti kako po odsječcima neprekinute signale klasificiramo kao vremenski kontinuirane signale



Diskretizacija po nezavisnoj varijabli i kvantizacija vrijednosti signala

- analogni signal digitaliziramo postupkom kvantizacije vrijednosti signala te diskretizacijom po nezavisnoj varijabli
- kvantizaciju definiramo kao preslikavanje iz neprebrojivog skupa vrijednosti u prebrojivi skup vrijednosti signala
- na slici 3 je prikazana jednolika raspodjela mogućih vrijednosti[3], gdje je Q korak kvantizacije. Područje vrijednosti kvantiziranih signala je konačni skup diskretnih vrijednosti

$$\{nQ \mid n \in \mathbb{Z},\ Q \in \mathbb{R} \text{ i } nQ \in [y_c, y_d] \subset \mathbb{R}\}$$

- kvantizacijom se fiksira konačan broj jednoliko razmaknutih vrijednosti i svaka vrijednost iz područja vrijednosti se pridruži najbližoj od njih (zaokruživanje)

[3] nejednoliku kvantizaciju signala po amplitudi ovdje ne razmatramo

Diskretizacija po nezavisnoj varijabli i kvantizacija vrijednosti signala

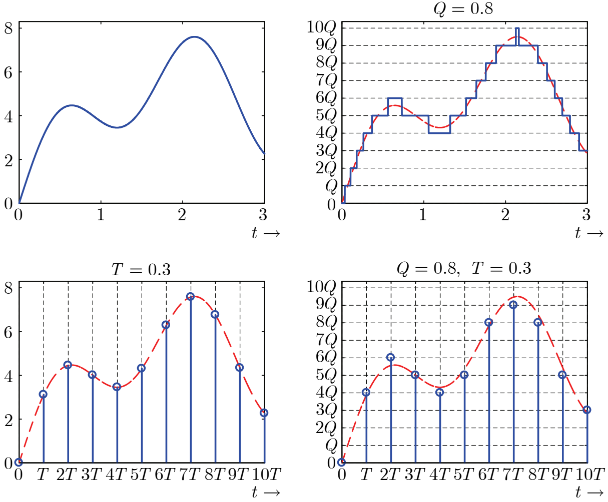
- diskretizaciju signala po nezavisnoj varijabli provodimo postupkom očitavanja[4]
- na Sl.3 je prikazana jednolika diskretizacija po nezavisnoj varijabli [5], gdje je T korak diskretizacije
- vremenski diskretan signal y_s nastaje očitavanjem kontinuiranog signala $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$y_s : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$$
$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad y_s(n) = y(nT)$$

- vrijednosti $y_s(n)$ nazivaju se očitci (uzorci) vremenski kontinuiranog signala y

[4] U uporabi su još i termini uzorkovanje (izravni prijevod engl. termina – sampling), te otipkavanje (izravni prijevod njemačkog termina – Abtastung).
[5] nejednoliku kvantizaciju signala po nezavisnoj varijabli ovdje ne razmatramo

Diskretizacija po nezavisnoj varijabli i kvantizacija vrijednosti signala



Slika 3: Diskretizacija po nezavisnoj varijabli i kvantizacija amplitude

Klasifikacija signala
Signali kao funkcije
Klasifikacija prema svojstvima područja definicije
Energija i snaga signala
Neke operacije nad signalima
Klasifikacija sig. - dodatak
Oper. nad sig. - dodatak

Vremenski kontinuirani i vremenski diskretni signali

- u najvećem broju primjena susrećemo se sa signalima koji su vremenske funkcije
- zato u ovom predmetu pod terminom signal podrazumijevamo (gotovo isključivo) vremenski signal
- jednaku pozornost dajemo vremenski diskretnim i vremenski kontinuiranim signalima[6], pa ih studiramo paralelno (ili neposredno jedne iza drugih)
- isto tako, pod terminima diskretni signal, ili kontinuirani signal, podrazumijeva se da govorimo o signalima čija je nezavisna varijabla diskretna, odnosno, kontinuirana
- efekte kvantizacije zavisne varijable (amplitude) ne razmatramo u ovom predmetu
- vremenski diskretan signal predstavlja niz brojeva, pa se vremenski diskretni signali često nazivaju nizovi

[6] Isto vrijedi i za sustave

Klasifikacija signala – notacija

- klasifikaciju prema svojstvima nezavisne varijable zaokružujemo definicijom četiri skupa signala
  1. $KontSignali = [\mathbb{R} \to \mathbb{C}]$.
     Ovaj skup signala uključuje vremenski kontinuirane signale ali njihovo područje definicije može biti interpretirano i kao prostor, ili frekvencija, ili nešto treće. Očigledno je kako su u ovaj skup signala uključeni i signali čije je područje vrijednosti iz skupa $\mathbb{R}$.
  2. $DisktSignali = [\mathbb{Z} \to \mathbb{C}]$.
     Ovaj skup signala uključuje vremenski diskretne signale, ali i one čije područje definicije nije nužno interpretirano kao vrijeme.
  3. $KontPeriod_{T_0} \subset KontSignali$.
     Ovaj skup signala čine svi kontinuirani signali periodični s periodom $T_0 \in \mathbb{R}$
  4. $DisktPeriod_N \subset DisktSignali$.
     Ovaj skup signala čine svi diskretni signali periodični s periodom $N \in \mathbb{Z}$

Svevremenski i kauzalni signali

- zadani su signali u_{1s}, u_{2s}, u_{1k}, u_{2k},u_{1a}, u_{2a},u_{1n}, i u_{2n} definirani kao:

$$\begin{array}{llll} u_{1s} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & u_{1k} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & u_{1a} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & u_{1n} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \\ u_{2s} : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}, & u_{2k} : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}, & u_{2a} : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}, & u_{2n} : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}. \end{array}$$

- signale nazivamo *svevremenskim*[7] signalima kada je u_{1s} definiran za $-\infty < t < \infty$, a u_{2s} definiran za $-\infty < n < \infty$
- signali u_{1k}, odnosno u_{2k}, su *kauzalni* ako vrijedi, za $t \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{Z}$,

$$u_{1k}(t) = 0, \text{ za } t < 0; \qquad u_{2k}(n) = 0, \text{ za } n < 0.$$

[7] svevremenske signale nije moguće generirati u praksi ali zbog svojih svojstava imaju važnu ulogu u studiju signala i sustava

Antikauzalni i nekauzalni signali[8]

- za *antikauzalne* signale vrijedi

$$u_{1a}(t) = 0,\ \text{za}\ t \geq 0; \qquad u_{2a}(n) = 0,\ \text{za}\ n \geq 0,$$

- *nekauzalni* signali u_{1n} i u_{2n}, započinju prije $t = 0$, odnosno $n = 0$, definirani su za

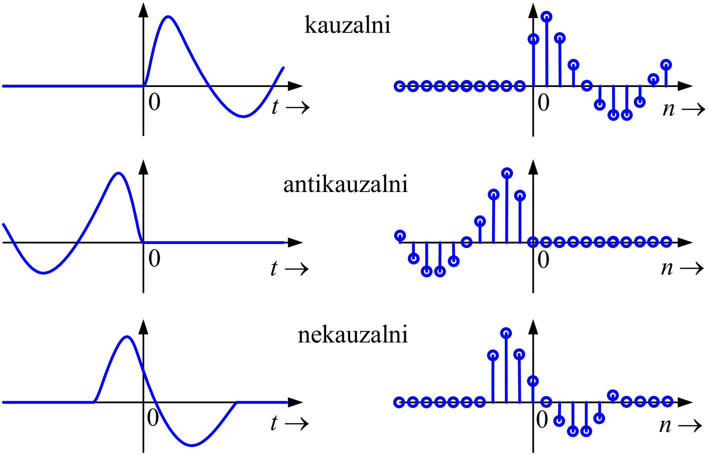
$$t_1 \leq t \leq t_2,\ \text{uz}\ -\infty < t_1 < 0 \text{ i } 0 < t_2 < \infty,$$

odnosno

$$N_1 \leq n \leq N_2,\ \text{uz}\ -\infty < N_1 < 0 \text{ i } 0 < N_2 < \infty.$$

[8] kauzalnost signala vezana je uz pojam kauzalnosti sustava što će biti razmatrano kasnije

Kauzalni, antikauzalni i nekauzalni signal



Slika 4: Primjeri kauzalnih, antikauzalnih, i nekauzalnih signala

Signali s konačnim značajkama

- U realnom fizikalnom svijetu fizikalne veličine odlikuju se realnim i konačnim značajkama. Zato ih se obično opisuje jednim, konačnim, realnim brojem (duljina, volumen, težina, energija, ...) ili vektorom (brzina, sila, ...). To je razlog za razmatranje konačnih značajki signala.
- želimo li npr. biti precizniji u izričaju kako je neki čovjek krupan potrebno je definirati i odgovarajuću mjeru
  - samo visina ili samo opseg pojasa nisu dostatni
  - mjera koja odgovara volumenu sigurno je prihvatljivija
  - u pojednostavljenom modelu izračuna volumena čovjeka, visine H, modeliramo ga s valjkom promjenljiva radijusa pa volumen računamo kao

$$V = \pi \int_0^H r^2(h)\, dh$$

- cilj je naći odgovarajuću mjeru, izraženu s jednim brojem, i za signale

Signali s konačnim značajkama

- kažemo da je signal f omeđen ako, za $M < \infty$, vrijedi

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |f(t)| < M < \infty, \quad \text{ili} \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad |f(n)| < M < \infty$$

- signali konačnog trajanja, su signali za koje vrijedi

$$\forall t \in \mathbb{R},\ t < t_1,\ t > t_2,\ t_2 > t_1 \qquad f(t) = 0,$$

odnosno,

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ n < n_1,\ n > n_2,\ n_2 > n_1 \qquad f(n) = 0$$

Signali s konačnim značajkama

- vremenski kontinuiran signal f je, $\forall t \in \mathbb{R}$, apsolutno integrabilan, a vremenski diskretan signal je, $\forall n \in \mathbb{Z}$, apsolutno zbrojiv ako vrijedi

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \, dt < \infty, \quad \text{odnosno} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)| < \infty.$$

- vremenski kontinuiran signal f je, $\forall t \in \mathbb{R}$, kvadratno integrabilan, a vremenski diskretan signal je, $\forall n \in \mathbb{Z}$, kvadratno zbrojiv ako vrijedi

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt < \infty, \quad \text{odnosno} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)|^2 < \infty.$$

- za kvadratno integrabilne, odnosno kvadratno zbrojive, signale kažemo da imaju konačnu energiju.

Energija i snaga signala

- prva ideja za mjeru signala, npr. površina ispod funkcije koja opisuje signal, uzima u obzir interval u kojem je definirana nezavisna varijabla, kao i sve vrijednosti zavisne varijable, no nedostatak ove mjere je u mogućem poništavanju pozitivnih i negativnih područja ispod funkcije, te može dati krivu informaciji o veličini signala
- jedan od načina uklanjanja ovog nedostatka je definiranje mjere kao površine signala ispod kvadrata funkcije signala
- razmotrimo signal struje i koji prolazi kroz otpor R i koji ima jasno fizikalno značenje
- energija koja se u vremenskom intervalu $[t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$ disipira kao toplina na otporu R kroz koji teče struja i dana je s

$$E_{[t_1,t_2]} = R \int_{t_1}^{t_2} i^2(t)\, dt$$

Energija signala i srednja snaga vremenski kontinuiranog signala

- analogno kazanom, za signal f, definiran u vremenskom intervalu $[t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$, dakle signal trajanja $L = t_2 - t_1$, označujemo **energiju vremenski kontinuiranog signala** kao[9]

$$E_{[t_1,t_2]} = \int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 \, dt$$

- srednja snaga vremenski kontinuiranog signala f, definiranog u vremenskom intervalu $[t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$, je

$$P_{[t_1,t_2]} = \frac{1}{L} \int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 \, dt$$

[9] ova definicija vrijedi i za kompleksne signale pa se stoga uzima modul (apsolutna vrijednost) signala

Totalna energija signala i srednja snaga vremenski kontinuiranog signala

- totalna energija i totalna srednja snaga vremenski kontinuiranog signala su

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad E_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad P_\infty = \lim_{L \to \infty} \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} |f(t)|^2 \, dt$$

Srednja snaga periodičnog vremenski kontinuiranog signala

- srednja vrijednost bilo koje periodične funkcije je jednaka srednjoj vrijednosti za bilo koji period
- kako je kvadrat periodične funkcije također periodična funkcija, tada je srednja snaga periodičnog[10] vremenski kontinuiranog signala $\widetilde{y}$, perioda T_0,

$$\forall t \in \mathbb{R},$$

$$P_{\widetilde{y}} = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} |\widetilde{y}(t)|^2 \, dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |\widetilde{y}(t)|^2 \, dt$$

- studentima se sugerira pogledati, u DODATKU ovoj cjelini, odgovarajuće prikaznice koje se odnose na periodične signale.

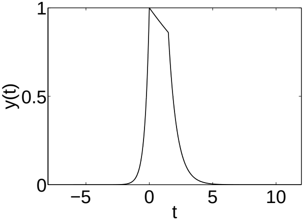
[10] $\sim$ je grafički znak tilda. Riječ dolazi iz španjolskog i označuje ponavljanje. Zato, kad god želimo naglasiti periodičnost signala y, pišemo $\widetilde{y}$

Primjer izračuna energije signala

- zadan je signal

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

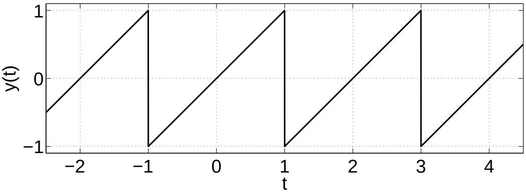
$$y(t) = \begin{cases} e^{3t} & -6 \leq t < 0 \\ e^{-0.1t} & 0 \leq t < 1.5 \\ 0.86e^{-1.5(t-1.5)} & 1.5 \leq t < 10 \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$



- totalna energija E_∞ ovog signala je

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} y^2(t)\, dt =$$
$$= \int_{-6}^{0} e^{6t} dt + \int_{0}^{1.5} e^{-0.2t} dt + \int_{1.5}^{10} 0.86^2 e^{-3(t-1.5)}\, dt$$
$$= 0.1667 + 1.2959 + 0.247 = 1.7091$$

Primjer izračuna totalne srednje snage signala



- periodični signal nije vremenski omeđen i njegova totalna energija je beskonačna i odgovarajuća je mjera signala njegova snaga
- postupak izračuna se može pojednostaviti jer se radi o periodičnom signalu pa je dovoljno računati srednju snagu jednog perioda

$$P_y = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} y^2(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t^2\,dt = \frac{1}{3}$$

Energija i srednja snaga vremenski diskretnog signala

- energija vremenski diskretnog signala (niza) y, definiranog u intervalu $[n_1, n_2] \subset \mathbb{Z}$, je

$$E_{[n_1,n_2]} = \sum_{n=n_1}^{n_2} |y(n)|^2$$

- srednja snaga vremenski diskretnog signala y, definiranog u intervalu $[n_1, n_2] \subset \mathbb{Z}$, je

$$P_{[n_1,n_2]} = \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{n=n_1}^{n_2} |y(n)|^2$$

Totalna energija i srednja snaga vremenski diskretnog signala

- totalna energija E_∞ niza y, definira se kao:

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad E_\infty = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |y(n)|^2$$

- niz beskonačna trajanja, s konačnim vrijednostima očitaka, može imati konačnu ili beskonačnu totalnu energiju
- niz konačnog trajanja, s konačnim vrijednostima očitaka, ima konačnu energiju
- totalna srednja snaga P_∞ neperiodičnog niza definira se kao:

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad P_\infty = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^{M} |y(n)|^2$$

- srednja snaga niza beskonačne duljine može biti konačna ili beskonačna

Srednja snaga periodičnog vremenski diskretnog signala

- srednja snaga periodičnog niza perioda N je:

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ P_{\widetilde{y}} = \frac{1}{N}\sum_{n=b}^{b+N-1} |\widetilde{y}(n)|^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} |\widetilde{y}(n)|^2$$

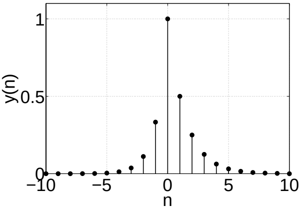
  gdje je $b \in \mathbb{Z}$ a oznaka $\sum_{n=<N>}$ predstavlja zbroj preko bilo kojeg područja zbrajanja duljine N gdje je N temeljna perioda

- studentima se sugerira pogledati, u DODATKU ovoj cjelini, odgovarajuće prikaznice koje se odnose na periodične signale.

Primjer izračuna energije vremenski diskretnog signala

- razmotrimo vremenski diskretan signal

$$u : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$$
$$y(n) = \begin{cases} (\frac{1}{2})^n, & n \geq 0 \\ 3^n, & n < 0 \end{cases}$$



- energija signala je

$$E_\infty = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |y(n)|^2$$

$$E_\infty = \sum_{n=-\infty}^{-1} 3^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{3})^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^{2n}$$
$$= \frac{1}{1-\frac{1}{9}} - 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{35}{24}$$

Uzlazna i silazna diferencija vremenski diskretnih signala

- definiraju se uzlazna diferencija[11]

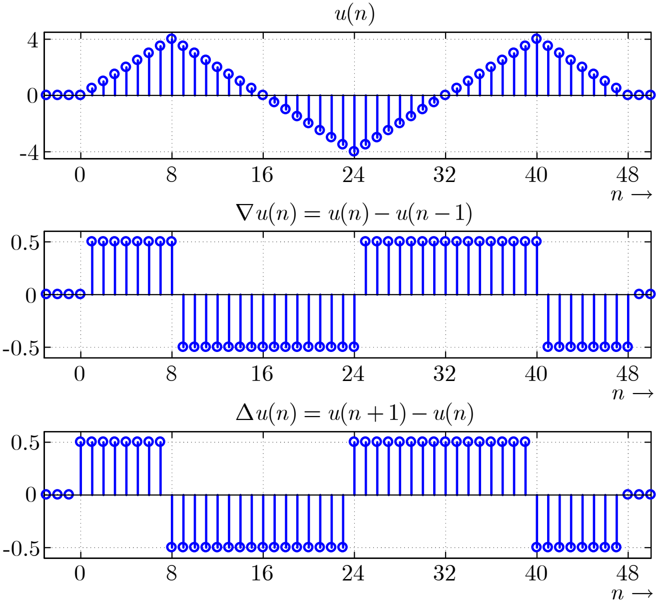
$$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad \Delta u(n) = u(n+1) - u(n)$$

- i silazna diferencija

$$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad \nabla u(n) = u(n) - u(n-1)$$

[11] Pogledati dodatne primjere u DODATKU

Primjer uzlazne i silazne diferencije



Veza derivacije vremenski kontinuiranog signala i diferencije vremenski diskretnog signala

- ako pretpostavimo da je vremenski diskretan signal ekvivalentan diskretnim vrijednostima vremenski kontinuiranog signala (očitavanje) možemo ustanoviti da diferencija daje vrijednosti koje aproksimiraju očitke derivacije vremenski kontinuiranog signala
- promatramo vremenski diskretan signal čije su vrijednosti

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad u(n) = u_a(t)|_{t=nT}$$

- označimo s y_a derivaciju signala u_a

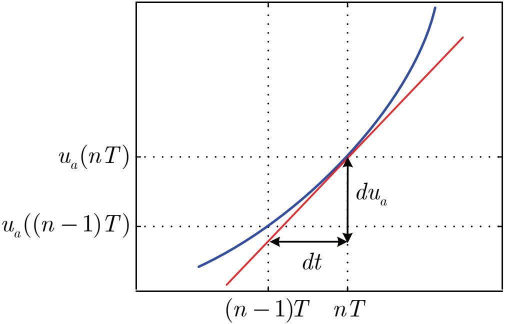
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y_a(t) = \frac{d}{dt} u_a(t)$$

za $t = nT$ vrijedi

$$y_a(t)|_{t=nT} = \frac{d}{dt} u_a(t)|_{t=nT}$$

Veza derivacije vremenski kontinuiranog signala i diferencije vremenski diskretnog signala

- sa slike za izvod derivacije zaključujemo



Slika 6: Definicija derivacije

$$y_a(t)|_{t=nT} = \frac{d}{dt}u_a(t)|_{t=nT} = \lim_{T\to 0}\frac{1}{T}\{u_a(nT)-u_a((n-1)T)\}$$

Veza derivacije vremenski kontinuiranog signala i diferencije vremenski diskretnog signala

- dakle iz

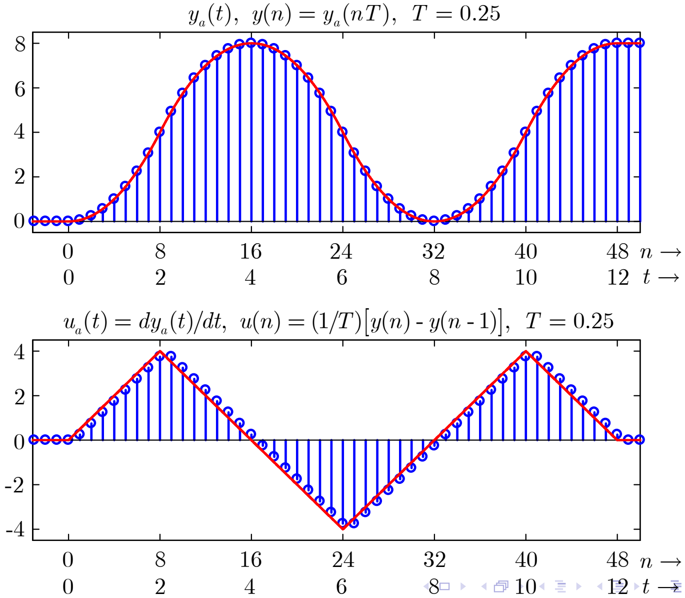
$$y_a(t)|_{t=nT} = \frac{d}{dt}u_a(t)|_{t=nT} = \lim_{T\to 0}\frac{1}{T}\{u_a(nT)-u_a((n-1)T)\},$$

uz $y(n) = y_a(nT)$, zaključujemo

$$y(n) = \frac{1}{T}\{u(n) - u(n-1)\} = \frac{1}{T}\nabla(u(n))$$

- dobiveni izraz se naziva jednadžba diferencija koja opisuje vremenski diskretni sustav koji nazivamo digitalni diferencijator
- dobivenim algoritmom numerički aproksimiramo derivaciju vremenski kontinuiranog signala
- postupak je aproksimativan i točnost izračuna ovisi o T, te o kontinuiranom signalu u

Numerička aproksimacija derivacije vremenski kontinuiranog signala



Diferencija i akumulacija vremenski diskretnih signala

- poznato je[12] je kako derivaciji vremenski kontinuiranog signala odgovara diferencija vremenski diskretnog signala
- integraciji za vremenski kontinuirane signale odgovara operacija akumulacije za vremenski diskretne signale
- kako su derivacija i integracija signala suprotne operacije tako su i operacije diferencije i akumulacije suprotne operacije

[12] Pogledati odgovarajuće prikaznice u DODATKU

Diferencija i akumulacija vremenski diskretnih signala

- Akumulacija signala $u : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ je novi signal $y : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ definiran kao:

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{n} u(m) \tag{1}$$

- signale obično razmatramo u konačnim intervalima pa jednadžbu (1) možemo pisati kao

$$y(n) = \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{n_0-1} u(m)}_{y(n_0-1)} + \sum_{m=n_0}^{n} u(m) = y(n_0 - 1) + \sum_{m=n_0}^{n} u(m) \tag{2}$$

- očigledno je kako akumulaciju vremenski diskretnog signala, zadanog u intervalu $[n_0, n]$, možemo jednoznačno odrediti tek ako znamo $y(n_0 - 1)$, što znači da moramo uzeti u obzir "povijest" signala prije $n = n_0$.

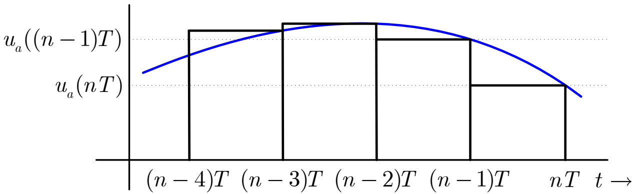
Diferencija i akumulacija vremenski diskretnih signala

- operacija akumulacije je obratna operaciji diferencije pa je rezultat diferencije signala y, nastalog akumulacijom signala u, ponovo isti signal u:

$$
\begin{aligned}
\nabla y(n) &= y(n) - y(n-1) \\
&= \sum_{m=-\infty}^{n} u(m) - \sum_{m=-\infty}^{n-1} u(m) \\
&= \sum_{m=-\infty}^{n-1} u(m) + u(n) - \sum_{m=-\infty}^{n-1} u(m) \\
&= u(n)
\end{aligned}
$$

Numerička integracija – veza integracije i akumulacije

- uz pretpostavku da su studenti samostalno ponovili operacije integracije i derivacije, kroz odgovarajuće prikaznice u DODATKU, ovdje razmatramo numeričku integraciju, odnosno vezu integracije i akumulacije
- određeni integral signala, u_a, geometrijski interpretiramo kao površinu ispod funkcije signala



Slika 8: Geometrijska interpretacija integracije

Numerička integracija – veza integracije i akumulacije

- operaciju integracije vremenski kontinuiranog signala

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y_a(t) = \int_{-\infty}^{t} u_a(\tau) d\tau$$

možemo, za $t = nT$, sukladno prethodnoj slici, izraziti kao:

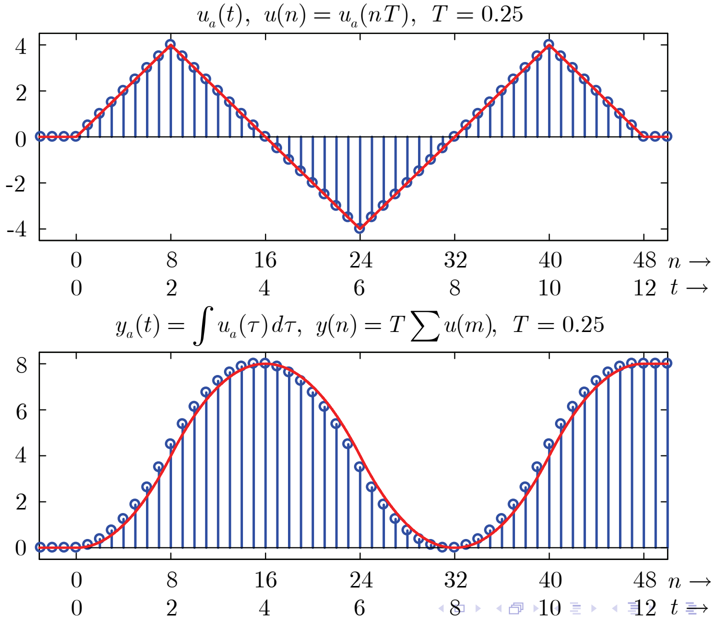
$$y_a(nT) = \lim_{T \to 0} \sum_{m=-\infty}^{n} T u_a(mT)$$

- uz uobičajene oznake $u_a(mT) = u(m)$ i $y_a(nT) = y(n)$, i dovoljno mali T, $y(n)$ aproksimira integral $y_a(t)$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad y(n) = T \sum_{m=-\infty}^{n} u(m)$$

- zaključujemo, postupku integracije vremenski kontinuiranog signala odgovara postupak akumulacije vremenski diskretnog signala

Integracija i akumulacija signala – primjer



Vremenska ekspanzija i kompresija vremenski kontinuiranog signala

- ekspanzija i kompresija signala po nezavisnoj varijabli naziva se vremensko skaliranje signala
  - za vremenski kontinuirani signal definirana je vremenska kompresija kao

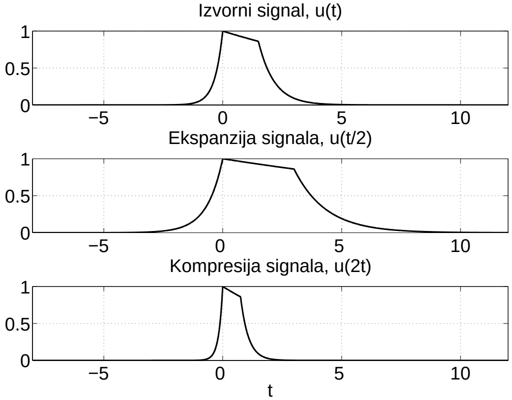
$$\begin{aligned} &u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ &\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = u(bt) \quad \text{za} \quad b > 1 \end{aligned}$$

  - a vremenska ekspanzija kao

$$\begin{aligned} &u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ &\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = u(\tfrac{t}{b}) \quad \text{za} \quad b > 1 \end{aligned}$$

Primjer ekspanzije i kompresije vremenski kontinuiranog signala

- primjer ekspanzije i kompresije vremenski kontinuiranog signala za faktor $b = 2$ (Sl.10)



Slika 10: Vremenska ekspanzija i kompresija vremenski kontinuiranog signala za faktor 2

Vremenska kompresija vremenski diskretnog signala

- vremenskom kompresijom vremenski kontinuiranih signala oni se "ubrzavaju" bez gubitka informacije, a pokazuje se kako kod vremenski diskretnih signala to nije uvijek slučaj
- za diskretni signal definirana je vremenska kompresija kao

$$
\begin{aligned}
& u : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}, \quad y : \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \\
& \forall n \in \mathbb{Z}, M \in \mathbb{Z}, M > 1 \\
& y(n) = u(Mn)
\end{aligned}
$$

- vrijednosti $u(Mn)$ za $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ su $u(0), u(M), u(2M), u(3M), \ldots$ što znači da $u(Mn)$ izdvaja svaki M-ti očitak od $u(n)$, a ostale očitke briše, pa se ovaj postupak naziva decimacija u vremenu
- ako je vremenski diskretni signal nastao očitavanjem vremenski kontinuiranog signala postupak kompresije ima za rezultat redukciju takta očitavanja za faktor M pa se postupak tada naziva i *podočitavanje*

Klasifikacija signala

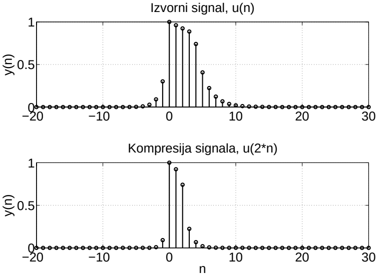
Neke operacije nad signalima
Diferencijacija vremenski diskretnog signala
Akumulacija vremenski diskretnog signala
Vremenska ekspanzija i kompresija
Konvolucija signala
Parni i neparni signali

Klasifikacija sig. - dodatak

Oper. nad sig. - dodatak

Primjer kompresije vremenski diskretnog signala

- primjer kompresije – decimacije – vremenski diskretnog signala za faktor $M = 2$ (Sl.11)



Slika 11: Vremenska kompresija vremenski diskretnog signala za faktor 2

- vidljiv je gubitak očitaka što znači gubitak informacije
- ako je signal $u(n)$ bio rezultat nadočitavanja nekog vremenski kontinuiranog signala, postupkom decimacije se nužno ne gubi informacija o izvornom $u(t)$

Vremenska ekspanzija vremenski diskretnog signala 1

- vremenska ekspanzija vremenski diskretnog signala vezana je uz postupak interpolacije i provodi su u dva koraka
- prvo se $u(n)$ ekspandira za cjelobrojni faktor L kako bi se dobio ekspandirani $u_e(n)$

$$\forall n \in \mathbb{Z},$$

$$y(n) = u_e(n) = \begin{cases} u(\frac{n}{L}) & n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0 & \text{za ostale } n \end{cases}$$

- postupak ilustriramo na primjeru ekspanzije u za faktor 2 $(L = 2)$ i ekspandirani signal je tada u_e
- za n neparan, $n/2$ nije cijeli broj i $u(\frac{n}{2})$ nije definiran za neparne vrijednosti
- zato, za neparne n, definiramo $u_e(n) = 0$, dakle, $u_e(1) = u_e(3) = u_e(5) = \dots = 0$

Klasifikacija signala

Neke operacije nad signalima
Diferencija vremenski diskretnog signala
Akumulacija vremenski diskretnog signala
Vremenska ekspanzija i kompresija
Konvolucija signala
Parni i neparni signali

Klasifikacija sig. - dodatak

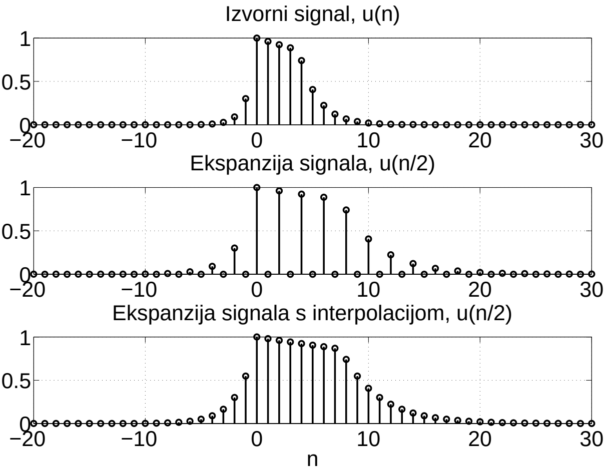
Oper. nad sig. - dodatak

Vremenska ekspanzija vremenski diskretnog signala 2

- ekspandirani signal u_e čuva sve očitke u
- odgovarajućim postupkom interpolacije, zamjenom očitaka vrijednosti nula s očitcima čija je vrijednost slična vrijednosti susjednih očitaka, moguće je postići interpolirani ekspandirani vremenski diskretni signal kao na slici
- u postupku interpolacije koriste se interpolacijski filtri, no oni se kasnije razmatraju
- interpolirane su vrijednosti izračunate iz postojećih podataka pa postupak interpolacije ne donosi nove informacije o signalu

Primjer ekspanzije vremenski diskretnog signala

- primjer ekspanzije–interpolacije–vremenski diskretnog signala za faktor $L = 2$



Slika 12: Vremenska ekspanzija vremenski diskretnog signala

Klasifikacija signala

Neke operacije nad signalima
Diferencija vremenski diskretnog signala
Akumulacija vremenski diskretnog signala
Vremenska ekspanzija i kompresija
Konvolucija signala
Parni i neparni signali

Klasifikacija sig. - dodatak

Oper. nad sig. - dodatak

Konvolucija vremenski kontinuiranih signala

- neka su $x, y \in [\mathbb{R} \to \mathbb{R}]$ dva vremenski kontinuirana signala,
- konvolucija, označimo je funkcijom *Konvolucija*, pridružuje im novi vremenski kontinuirani signal z, dakle,

$$
\begin{aligned}
&\mathit{Konvolucija} : [\mathbb{R} \to \mathbb{R}] \times [\mathbb{R} \to \mathbb{R}] \to [\mathbb{R} \to \mathbb{R}] \\
&z = \mathit{Konvolucija}(x, y) = x * y
\end{aligned}
$$

- konvoluciju definiramo s konvolucijskim integralom

$$
\forall t \in \mathbb{R}, \quad z(t) = (x * y)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t - \tau)\, d\tau
$$

Konvolucija vremenski kontinuiranih signala – komutativnost

- vrijedi svojstvo komutativnosti konvolucije

$$(x * y)(t) = (y * x)(t)$$

što proizlazi iz konvolucijskog integrala, zamjenom varijabli $t - \vartheta = \tau$

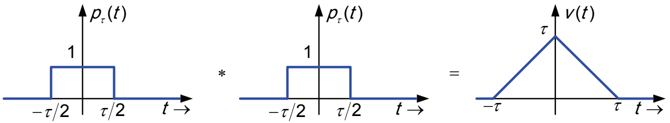
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (x * y)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t-\tau)\, d\tau = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\vartheta) y(\vartheta)\, d\vartheta = (y * x)(t)$$

- vrijedi i svojstvo linearnosti konvolucije, dakle, uz $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

$$x * (a_1 y_1 + a_2 y_2) = a_1 (x * y_1) + a_2 (x * y_2)$$

Konvolucija vremenski kontinuiranih signala – primjer

- određuje se konvolucija signala p_τ i p_τ zadanih slikom
- na istoj slici dan je i rezultat konvolucije[13] $v = p_\tau * p_\tau$



[13] Studente se upućuje da samostalno pokušaju odrediti konvoluciju korištenjem konvolucijskog integrala. Detaljna diskusija biti će provedena kasnije, tijekom semestra.

Konvolucija vremenski diskretnih signala

- neka su $x, y \in [\mathbb{Z} \to \mathbb{R}]$ dva vremenski diskretna signala,
- konvolucija diskretnih signala x i y je diskretni signal, označen kao $x * y$, definiran konvolucijskim zbrojem

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad (x * y)(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) y(n-m)$$

Konvolucija vremenski diskretnih signala – komutativnost

- vrijedi svojstvo komutativnosti konvolucije

$$(x * y)(n) = (y * x)(n)$$

što proizlazi iz konvolucijskog zbroja, zamjenom varijabli $n - m = j$

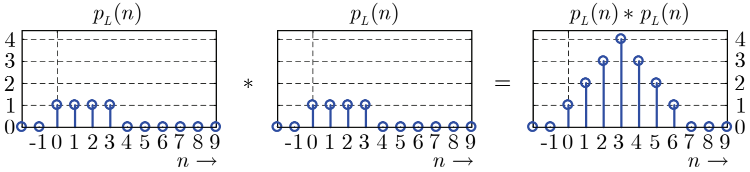
$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad (x * y)(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)y(n-m) = \\ = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x(n-j)y(j) = (y * x)(n)$$

- vrijedi i svojstvo linearnosti konvolucije, dakle, uz $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

$$x * (a_1 y_1 + a_2 y_2) = a_1(x * y_1) + a_2(x * y_2)$$

Konvolucija vremenski diskretnih signala – primjer

- određuje se konvolucija signala zadanih slikom
- na istoj slici dan je i rezultat konvolucije[14]



[14] Studente se upućuje da samostalno pokušaju odrediti konvoluciju korištenjem konvolucijskog zbroja. Detaljna diskusija biti će provedena kasnije, tijekom semestra.

Klasifikacija signala
Neke operacije nad signalima
Diferencija vremenski diskretnog signala
Akumulacija vremenski diskretnog signala
Vremenska ekspanzija i kompresija
Konvolucija signala
Parni i neparni signali
Klasifikacija sig. - dodatak
Oper. nad sig. - dodatak

Parne i neparne funkcije

- realne funkcije u, odnosno v, su parne funkcije ako vrijedi

$$
\begin{aligned}
& u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \\
& \forall t \in \mathbb{R}, \quad u(t) = u(-t) \\
& \text{ili} \\
& v : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}, \\
& \forall n \in \mathbb{Z}, \quad v(n) = v(-n)
\end{aligned}
$$

- realne funkcije u, odnosno v, su neparne funkcije ako vrijedi

$$
\begin{aligned}
& u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \\
& \forall t \in \mathbb{R}, \quad u(t) = -u(-t) \\
& \text{ili} \\
& v : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}, \\
& \forall n \in \mathbb{Z}, \quad v(n) = -v(-n)
\end{aligned}
$$

Parna i neparna komponenta signala

- svaki realni signal u može biti prikazan kao zbroj njegove parne i neparne komponente

$$
\begin{aligned}
&u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \\
&\forall t \in \mathbb{R}, \quad u(t) = u_p(t) + u_n(t)
\end{aligned}
$$

budući da vrijedi

$$
u(-t) = u_p(-t) + u_n(-t) = u_p(t) - u_n(t)
$$

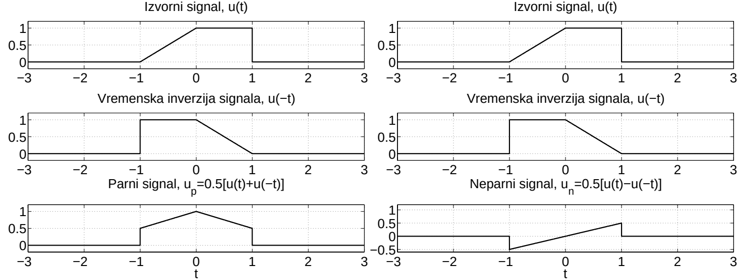
slijede, zbrajanjem i oduzimanjem gornjih jednadžbi, njegove parna i neparna komponenta

$$
u_p(t) = \frac{1}{2}[u(t) + u(-t)]
$$

i

$$
u_n(t) = \frac{1}{2}[u(t) - u(-t)]
$$

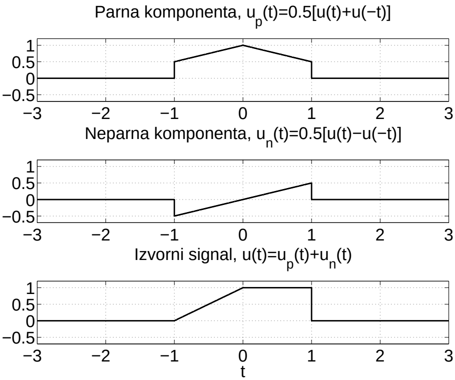
Parna i neparna komponenta signala



Slika 13: Parna i neparna komponenta signala

Signal kao zbroj parne i neparne komponente

- signal može biti prikazan zbrojem parne i neparne komponente[15] $u = u_p + u_n$



Slika 14: Signal kao zbroj parne i neparne komponente

[15] isto vrijedi i za vremenski diskretne signale

Konjugirana simetričnost kompleksnih signala

- kompleksni signali u, odnosno v, su konjugirano simetrični signali ako vrijedi

$$u : \mathbb{R} \to \mathbb{C},$$
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad u(t) = u^*(-t)$$
odnosno
$$v : \mathbb{Z} \to \mathbb{C},$$
$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad v(n) = v^*(-n)$$

- kompleksni signali u, odnosno v, su konjugirano antisimetrični signali ako vrijedi

$$u : \mathbb{R} \to \mathbb{C},$$
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad u(t) = -u^*(-t)$$
odnosno
$$v : \mathbb{Z} \to \mathbb{C},$$
$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad v(n) = -v^*(-n)$$

Konjugirana simetričnost kompleksnih signala

- kompleksni signal u možemo prikazati kao zbroj njegove konjugirano simetrične u_{ks} i njegove konjugirano antisimetrične komponente u_{ka}
- za vremenski kontinuiran kompleksni signal vrijedi

$$
\begin{aligned}
& u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \\
& \forall t \in \mathbb{R}, \\
& u(t) = u_{ks}(t) + u_{ka}(t) \\
& u_{ks}(t) = \frac{1}{2}[u(t) + u^*(-t)] \\
& u_{ka}(t) = \frac{1}{2}[u(t) - u^*(-t)]
\end{aligned}
$$

odnosno, za vremenski diskretni kompleksni signal,

$$
\begin{aligned}
& u : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}, \\
& \forall n \in \mathbb{Z}, \\
& u(n) = u_{ks}(n) + u_{ka}(n) \\
& u_{ks}(n) = \frac{1}{2}[u(n) + u^*(-n)] \\
& u_{ka}(n) = \frac{1}{2}[u(n) - u^*(-n)]
\end{aligned}
$$

Konjugirana simetričnost kompleksnih signala

- za konjugirano simetrični kompleksni signal u, vrijedi $u(t) = u^*(-t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, pa iz

$$\left.\begin{array}{l} u(t) = Re\{u(t)\} + jIm\{u(t)\} \\ u^*(-t) = Re\{u(-t)\} - jIm\{u(-t)\} \end{array}\right\} =$$

slijedi

$$\begin{array}{l} Re\{u(t)\} = Re\{u(-t)\} \\ Im\{u(t)\} = -Im\{u(-t)\} \end{array}$$

dakle, realni dio konjugirano simetričnog kompleksnog signala je parna funkcija a imaginarni dio je neparna funkcija

Konjugirana simetričnost kompleksnih signala – primjer1

Za kompleksni signal realne varijable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$,

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad f(\omega) = \frac{1}{b + j\omega},$$

ispitujemo svojstvo konjugirane simetričnosti. Iz

$$f(\omega) = \frac{1}{b + j\omega} \cdot \frac{b - j\omega}{b - j\omega} = \frac{b - j\omega}{b^2 + \omega^2} = \frac{b}{b^2 + \omega^2} - j\frac{\omega}{b^2 + \omega^2}$$

nalazimo

$$\mathrm{Re}[f(\omega)] = \frac{b}{b^2 + \omega^2} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Re}[f(\omega)] = \mathrm{Re}[f(-\omega)],$$

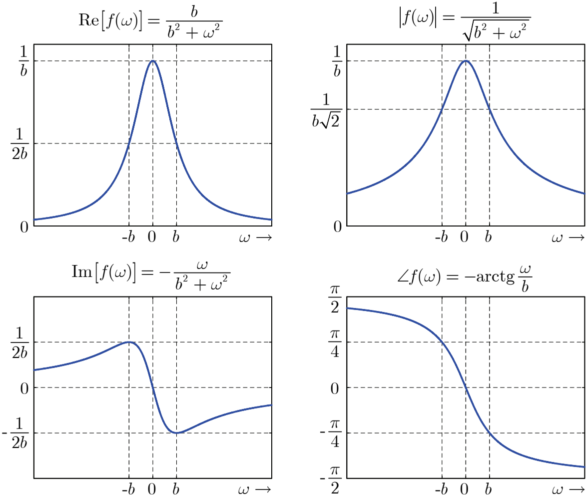
$$\mathrm{Im}[f(\omega)] = -\frac{\omega}{b^2 + \omega^2} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Im}[f(\omega)] = -\mathrm{Im}[f(-\omega)],$$

$$|f(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{b^2 + \omega^2}} \quad \Rightarrow \quad |f(\omega)| = |f(-\omega)|,$$

$$\angle f(\omega) = -\mathrm{arc\,tg}\frac{\omega}{b} \quad \Rightarrow \quad \angle f(\omega) = -\angle f(-\omega),$$

Konjugirana simetričnost kompleksnih signala – primjer1

zaključujemo da je f konjugirano simetričan signal



Slika 15: Konjugirano simetričan, po nezavisnoj varijabli kontinuiran, signal.

Konjugirana simetričnost kompleksnih signala – primjer2

Za vremenski kontinuirani kompleksni signal, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = e^{j(t+\frac{\pi}{3})},$$

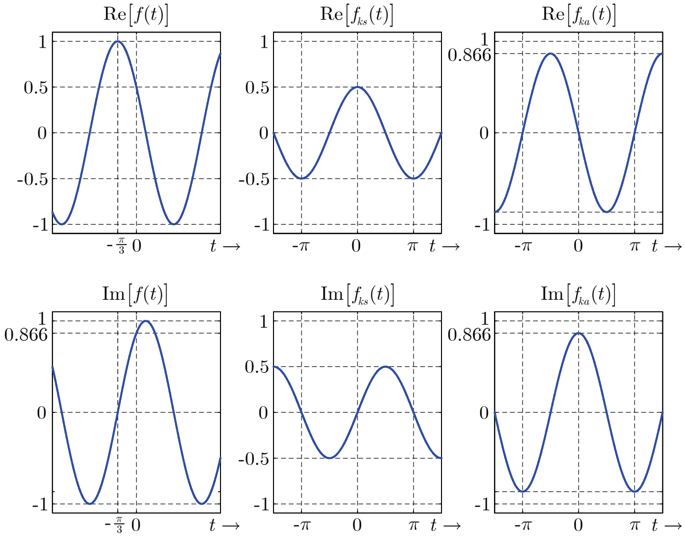
određujemo konjugirano simetričnu komponentu f_{ks}, i konjugirano antisimetričnu komponentu f_{ka}.
Iz $f(t)$ određujemo $f^*(t)$ i $f^*(-t)$,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f^*(t) = e^{-j(t+\frac{\pi}{3})} \Rightarrow f^*(-t) = e^{j(t-\frac{\pi}{3})},$$

pa su

$$\begin{aligned}
f_{ks}(t) &= \frac{1}{2}\left[f(t) + f^*(-t)\right] = \frac{1}{2}\left[e^{j(t+\frac{\pi}{3})} + e^{j(t-\frac{\pi}{3})}\right] \\
&= \frac{1}{2}e^{jt}\left[e^{j\frac{\pi}{3}} + e^{-j\frac{\pi}{3}}\right] = e^{jt}\cos\frac{\pi}{3} = 0.5e^{jt} \\
f_{ka}(t) &= \frac{1}{2}\left[f(t) - f^*(-t)\right] = \frac{1}{2}\left[e^{j(t+\frac{\pi}{3})} - e^{j(t-\frac{\pi}{3})}\right] \\
&= \frac{1}{2}e^{jt}\left[e^{j\frac{\pi}{3}} - e^{-j\frac{\pi}{3}}\right] = je^{jt}\sin\frac{\pi}{3} = e^{j\frac{\pi}{2}}e^{jt}\sin\frac{\pi}{3} = 0.866e^{j(t+\frac{\pi}{2})}.
\end{aligned}$$

Konjugirana simetričnost kompleksnih signala – primjer2



Slika 17: Konjugirano simetričan, po nezavisnoj varijabli kontinuiran, signal.

DODATAK Cjelini 02

Višedimenzionalni signali

- višedimenzionalni signali definirani funkcijama s više nezavisnih varijabli

$$f : W_1 \times W_2 \times \ldots \times W_N \to Y$$
$$\forall (w_1, w_2, \ldots, w_N) \in W_1 \times W_2 \times \ldots \times W_N$$
$$y = f(w_1, w_2, \ldots, w_N) \in Y.$$

Višedimenzionalni signali

Primjer:

- primjer dvodimenzionalnog signala je crnobijela fotografija

  $$FotoCrnobijela : VertikalnaOs \times HorizontalnaOs \to Intenzitet,$$

  gdje je $Intenzitet = [crno, bijelo]$ mjeren u odgovarajućoj skali i predstavlja svjetlinu (razinu sivila)
- dakle, dvije nezavisne varijable su dvije prostorne varijable, a vrijednost funkcije predstavlja razinu svjetline u pojedinoj točki fotografije

Višedimenzionalni signali

- Crnobijela fotografija na slici, dimenzija je 55 mm po vertikalnoj osi i 60 mm po horizontalnoj osi, i definiramo je kao dvodimenzionalni signal *Leica*

$$
\begin{aligned}
&Leica : [0, 55] \times [0, 60] \to [0, I_{max}] \\
&\forall (y, x) \in [0, 55] \times [0, 60], \quad I = Leica(y, x) \in [0, I_{max}],
\end{aligned}
$$

gdje je I_{max} maksimalna vrijednost svjetline (0 je crno, a I_{max} je bijelo).

Višekanalni signali

- signal koji generira jedan izvor naziva se skalarni signal i do sada smo razmatrali upravo takve signale
- na ovom mjestu uvode se u razmatranje i signali koji sadrže više komponenti i koje generira više izvora ili senzora. Takvi signali nazivaju se vektorski ili višekanalni signali. Višekanalni signali mogu biti jedno i višedimenzionalni, pa tako K–kanalni N–dimenzionalni signal zapisujemo kao

$$
\begin{aligned}
& f: W_1 \times W_2 \times \ldots \times W_N \rightarrow V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_K, \\
& \forall (w_1, w_2, \ldots, w_N) \in W_1 \times W_2 \times \ldots \times W_N, \\
& \forall (v_1, v_2, \ldots, v_K) \in V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_K, \\
& (v_1, v_2, \ldots, v_K) = f(w_1, w_2, \ldots, w_N).
\end{aligned} \tag{3}
$$

Slika u boji

- sliku u boji razmatramo kao višekanalni (višekomponentni) signal
- reflektirano svjetlo se definira preko RGB (*red*, *green*, *blue*) vrijednosti pa je:

$$Slika\_u\_Boji : VertikalnaOs \times HorizontalnaOs \rightarrow Intenzitet^3,$$

- bilo kojoj točki (y, x) domene odgovara trojka $(I_r, I_g, I_b) \in Intenzitet^3$ pa su RGB vrijednosti pridružene signalu *Slika_u_Boji*

$$(I_r, I_g, I_b) = Slika\_u\_Boji(y, x)$$

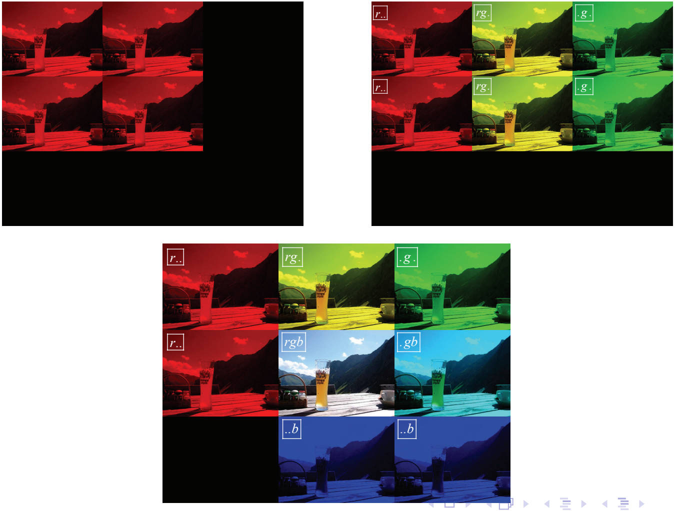
Slika u boji

- dakle, slika u boji je signal koji se sastoji od tri 2D signala koji predstavljaju tri osnovne boje: crveno (r), zeleno (g) i plavo (b)
- tri komponente slike u boji prikazane su ovim primjerom:



Slika u boji

- potpuna slika u boji dobiva se kombinacijom prethodne tri slike:



Slika u boji

- uvećana finalna kombinacija

Realni signal

Signal *Kosinus*, zadan u intervalu *Vrijeme* $\subset \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} &Kosinus\colon\ Vrijeme \to \mathbb{R}, \\ &\forall t \in Vrijeme \subset \mathbb{R}, \quad \omega_0 \in \mathbb{R}, \quad Kosinus(t) = \cos(\omega_0 t), \end{aligned} \tag{4}$$

primjer je realnog signala realne varijable.

Primjer kompleksnog signala realne nezavisne varijable

Iznimno važan kompleksan signal realne varijable je signal opisan s kompleksnom eksponencijalnom funkcijom. Neka je kompleksna funkcija, $KomplExp(t) = e^{j\omega_0 t}$, zadana u intervalu $t \in [0, 4\pi/\omega_0] \subset \mathbb{R}$, definirana kao

$$\begin{aligned} &KomplExp \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \\ &\forall t \in [0, 4\pi/\omega_0] \subset \mathbb{R}, \\ &KomplExp(t) = e^{j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + j\sin(\omega_0 t). \end{aligned} \tag{5}$$

Područje vrijednosti kompleksne eksponencijalne funkcije je iz skupa $\mathbb{C}$ pa je pri grafičkom prikazu potrebno crtati dva grafa.

Primjer kompleksnog signala realne nezavisne varijable

Za realni i imaginarni dio funkcije *KomplExp*,

$$
\begin{aligned}
Graf_1(KomplExp) &= \{\,(t, \mathrm{Re}[KomplExp(t)]) \mid t \in [0, 4\pi/\omega_0]\,\},\\
Graf_2(KomplExp) &= \{\,(t, \mathrm{Im}[KomplExp(t)]) \mid t \in [0, 4\pi/\omega_0]\,\},
\end{aligned}
\tag{6}
$$

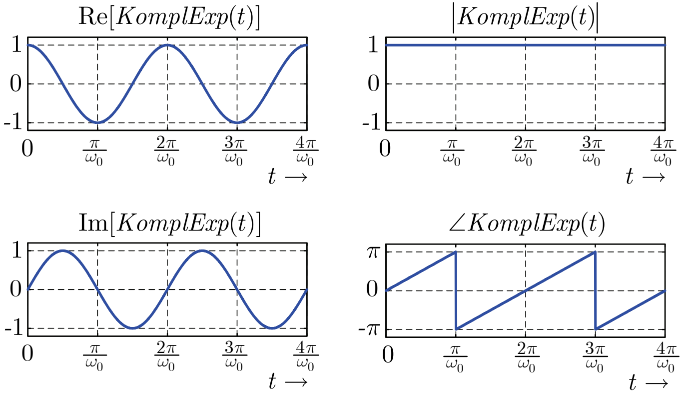
ili, dva grafa za modul i argument funkcije *KomplExp*,

$$
\begin{aligned}
Graf_3(KomplExp) &= \{\,(t, |KomplExp(t)|) \mid t \in [0, 4\pi/\omega_0]\,\},\\
Graf_4(KomplExp) &= \{\,(t, \angle(KomplExp(t))) \mid t \in [0, 4\pi/\omega_0]\,\},
\end{aligned}
\tag{7}
$$

kao na slici (18).

Primjer kompleksnog signala realne nezavisne varijable

na slici 18 je, kako je to uobičajeno, prikazana glavna vrijednost argumenta $-\pi < arg(KomplExp(t)) \leq \pi$



Slika 18: Grafovi signala $KomplExp(t) = e^{j\omega_0 t}$.

Primjer kompleksnog signala realne nezavisne varijable

U konkretnom slučaju su

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Re}[\mathit{KomplExp}(t)] &= \cos(\omega_0 t)\\
\mathrm{Im}[\mathit{KomplExp}(t)] &= \sin(\omega_0 t)\\
|\mathit{KomplExp}(t)| &= \sqrt{\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t)} = 1\\
\angle \mathit{KomplExp}(t) &= \mathrm{arc\,tg}\left[\frac{\mathrm{Im}[\mathit{KomplExp}(t)]}{\mathrm{Re}[\mathit{KomplExp}(t)]}\right]\\
&= \mathrm{arc\,tg}\left[\frac{\sin(\omega_0 t)}{\cos(\omega_0 t)}\right] = \omega_0 t.
\end{aligned}
$$

Podsjećamo kako su $|\mathit{KomplExp}(t)| = 1$ i $\angle \mathit{KomplExp}(t) = \omega_0 t$ mogli biti očitani izravno iz (5).

Primjer kompleksnog signala realne nezavisne varijable

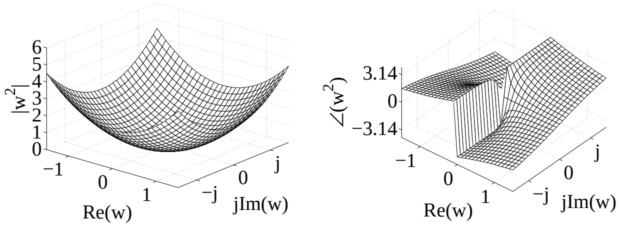
Očigledna je primjena kompleksne eksponencijalne funkcije u prikazu realnih sinusoidnih signala i ovdje se, primjenom Eulerovih formula, ilustrira njezina uporaba:

$$\forall t \in \mathbb{R},$$
$$\cos(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} \quad \text{i} \quad \sin(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}. \tag{8}$$

Primjer kompleksnog signala kompleksne nezavisne varijable

- Kompleksni signal je definiran kompleksnom kvadratnom funkcijom $Kvadrat(w) = w^2$, kompleksne varijable $w = Re(w) + jIm(w)$, zadanom kao

$$Kvadrat : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$\forall w = Re(w) + jIm(w) \in \mathbb{C},$$
$$\forall Re(w) \in [-1.5, 1.5] \subset \mathbb{R}, \ \forall Im(w) \in [-1.5, 1.5] \subset \mathbb{R},$$
$$Kvadrat(w) = w^2.$$



Slika 19: Grafovi kompleksne funkcije $Kvadrat(w) = w^2$

Klasifikacija signala prema svojstvima područja definicije i područja vrijednosti

Primjer: po nezavisnoj varijabli diskretan signal

- studenti rješavaju neki zadatak i svaki od njih treba neko vrijeme rješavanja
- signal (funkcija) *VrijemeRješavanjaZadatka*, pridružuje vrijeme rješavanja svakom od studenata

$$\begin{aligned}
&\mathit{VrijemeRješavanjaZadatka} : \mathit{Studenti} \to \mathit{Vrijeme},\\
&\mathit{Studenti} = \{\mathit{Alić}, \mathit{Barec}, \ldots, \mathit{Zorko}, \mathit{Zrno}\},\\
&\mathit{Vrijeme} \subset \mathbb{R}_+
\end{aligned}$$

Primjer: signal diskretan po nezavisnoj varijabli i kvantiziran po amplitudi

- signal *BrojStudenataPoRedovima*,
  $\mathit{BrojStudenataPoRedovima} : \mathit{Redovi} \to \mathit{BrojStudenata}$,
  $\mathit{Redovi} = \{1, 2, \ldots, 14\} \subset \mathbb{Z}$
  $\mathit{BrojStudenata} = \{0, 1, \ldots, 83\} \subset \mathbb{Z}$

Diskretizacija po nezavisnoj varijabli i kvantizacija vrijednosti signala

$$DiskretnaVertikalnaOs = \{1, 2, \ldots, 450\},$$
$$DiskretnaHorizontalnaOs = \{1, 2, \ldots, 500\},$$
$$\mathbb{Z}_8 = \{0, 1, 2, \ldots, 255\}$$

$$DiskretnaVertikalnaOs = \{1, 2, \ldots, 45\},$$
$$DiskretnaHorizontalnaOs = \{1, 2, \ldots, 50\},$$
$$\mathbb{Z}_8 = \{0, 1, 2, \ldots, 255\}$$

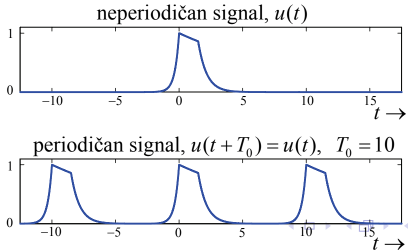
- slika se može zamisliti kao matrica čiji elementi predstavljaju svjetlinu slike u toj točki
- slikovni elementi (picture element, pixel, pel)

Periodični i neperiodični vremenski kontinuirani signali

- periodičan vremenski kontinuiran signal, periode T_0, definiran je kao

$$u : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$
$$\forall t \in \mathbb{R}, T_0 \in \mathbb{R}_+ \quad u(t) = u(t + T_0)$$

- signal u ponavlja se svakih T_0 ali i svakih $2T_0$, $3T_0$, ... pa vrijedi $u(t + rT_0) = u(t)$ za $r \in \mathbb{Z}$
- najmanji $T_0 < \infty$, koji zadovoljava periodičnost signala, naziva se osnovna perioda signala

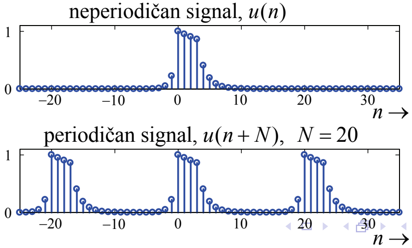


Periodični i neperiodični vremenski diskretni signali

- periodičan vremenski diskretan signal, periode N, definiran je kao

$$u : \mathbb{Z} \to \mathbb{R},$$
$$\forall n \in \mathbb{Z}, N \in \mathbb{Z}_+, \quad u(n) = u(n+N)$$

- signal u ponavlja se svakih N ali i svakih $2N$, $3N$, ... pa vrijedi $u(n+rN) = u(n)$ za $r \in \mathbb{Z}$
- najmanji $N < \infty$, koji zadovoljava periodičnost signala, naziva se osnovna perioda signala



Važna svojstva periodičnih signala

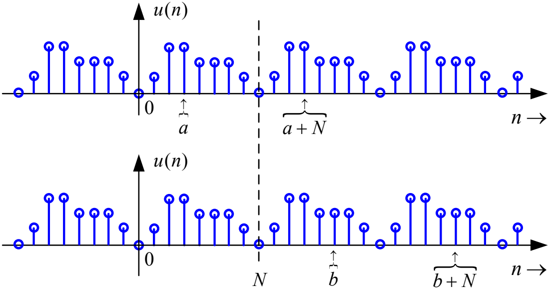
- iz definicije slijedi
  - periodični signali su svevremenski signali
  - vremenskim pomakom periodičnog signala za jednu periodu (ili njezine višekratnike) signal ostaje nepromijenjen
- periodični signal može nastati periodičnim produženjem neperiodičnog signala trajanja T_0 odnosno N

Važna svojstva periodičnih signala

- za periodične vremenski diskretne signale vrijedi

$$\sum_{n=a}^{a+N-1} u(n) = \sum_{n=b}^{b+N-1} u(n) = \sum_{n=<N>} u(n)$$

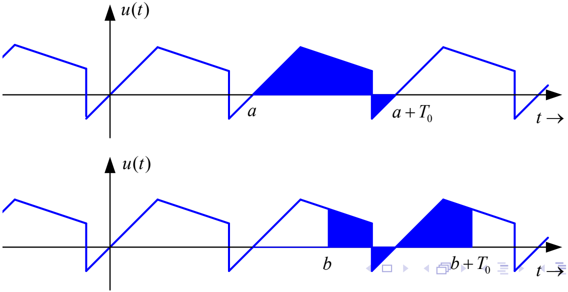
gdje su $a, b \in \mathbb{Z}$ a oznaka $\sum_{n=<N>}$ predstavlja zbroj preko bilo kojeg područja zbrajanja duljine N, gdje je N temeljna perioda



Važna svojstva periodičnih signala

- sličan zaključak vrijedi za periodične vremenski kontinuirane signale
- površina ispod funkcije u periodičnog signala, osnovnog perioda T_0, jednaka je za bilo koji interval trajanja T_0, dakle

$$\int_a^{a+T_0} u(t)\,dt = \int_b^{b+T_0} u(t)\,dt = \int_{T_0} u(t)\,dt$$



Zbrajanje signala

- neka su zadani signali

$$u_1 : \mathcal{D} \to \mathcal{K}$$
$$u_2 : \mathcal{D} \to \mathcal{K}$$

tada je njihov zbroj $y_z = u_1 + u_2$

$$y_z : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$$

definiran kao

$$\forall w \in \mathcal{D}, \qquad y_z(w) = u_1(w) + u_2(w)$$

- zbrajanje dvaju signala je bezmemorijska operacija jer zbroju dvaju signala za neki $w \in \mathcal{D}$ odgovara zbrajanje njihovih vrijednosti za taj isti w

Množenje signala

- neka su zadani signali

$$u_1 : \mathcal{D} \to \mathcal{K}$$
$$u_2 : \mathcal{D} \to \mathcal{K}$$

tada je njihov umnožak $y_p = u_1 \cdot u_2$

$$y_p : \mathcal{D} \to \mathcal{K}$$

definiran kao

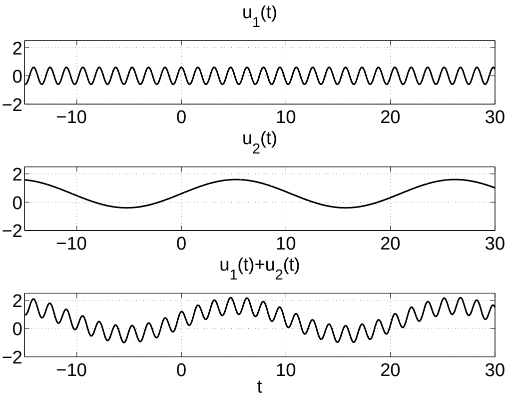
$$\forall w \in \mathcal{D}, \qquad y_p(w) = u_1(w) \cdot u_2(w)$$

- množenje dvaju signala je također bezmemorijska operacija

Primjer zbrajanja vremenski kontinuiranih signala

- zbroj zadanih signala prikazan je slikom 22

$$u_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \forall t \in [-15, 30], \quad u_1(t) = 0.6\cos(4t)$$
$$u_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \forall t \in [-15, 30], \quad u_2(t) = \sin(0.3t) + 0.6$$

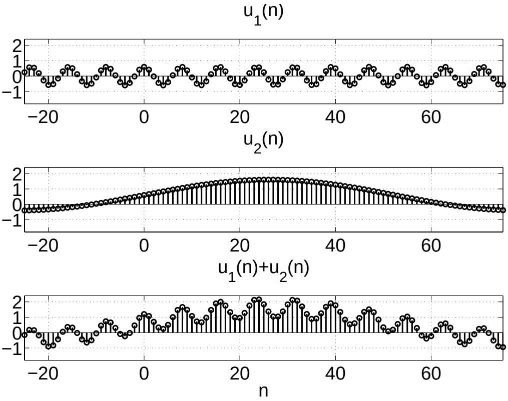


Slika 22: Zbroj vremenski kontinuiranih signala

Primjer zbrajanja vremenski diskretnih signala

- zbroj zadanih signala prikazan je slikom 23

$$u_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}, \quad \forall n \in [-25, 75], \quad u_1(n) = 0.6\sin(0.8n)$$
$$u_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}, \quad \forall n \in [-25, 75], \quad u_2(n) = \sin(0.06n) + 0.6$$

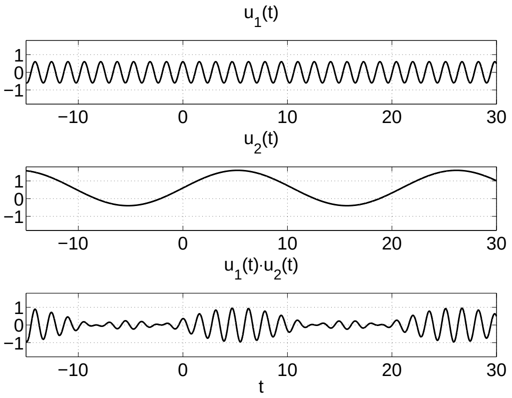


Slika 23: Zbroj vremenski diskretnih signala

Primjer množenja vremenski kontinuiranih signala

- umnožak zadanih signala prikazan je slikom 24

$$u_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \forall t \in [-15, 30], \quad u_1(t) = 0.6\cos(4t)$$
$$u_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \forall t \in [-15, 30], \quad u_2(t) = \sin(0.3t) + 0.6$$

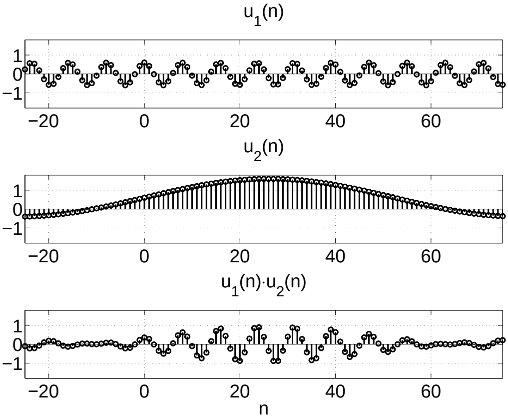


Slika 24: Umnožak vremenski kontinuiranih signala

Primjer množenja vremenski diskretnih signala

- umnožak zadanih signala prikazan je slikom 25

$$u_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}, \quad \forall n \in [-25, 75], \quad u_1(n) = 0.6 \sin(0.8n)$$
$$u_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}, \quad \forall n \in [-25, 75], \quad u_2(n) = \sin(0.06n) + 0.6$$



Slika 25: Umnožak vremenski diskretnih signala

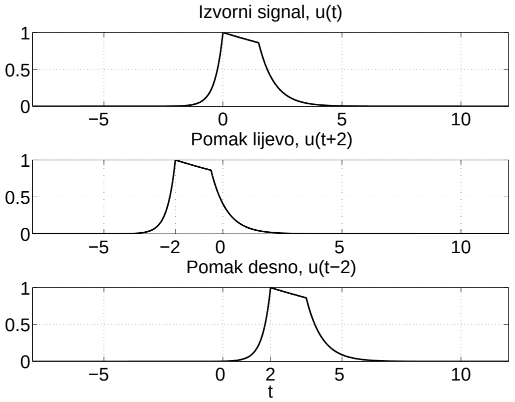
Vremenski pomak vremenski kontinuiranog signala

- pomak je po nezavisnoj varijabli, a ona je vrlo često vrijeme, pa koristimo uobičajeni termin *vremenski* pomak
  - za vremenski kontinuiran signal definiran je vremenski pomak

$$u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = u(t - \tau) \quad \text{za} \quad \tau \in \mathbb{R}$$

Primjer pomaka vremenski kontinuiranog signala

- primjer pomaka vremenski kontinuiranog signala za $\tau = 0$, $\tau = -2$, $\tau = 2$ (Sl.26)



Slika 26: Pomak vremenski kontinuiranog signala

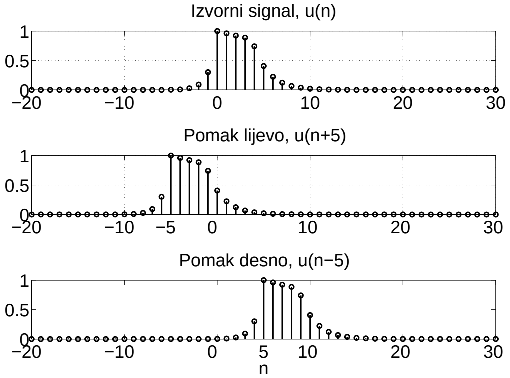
Vremenski pomak vremenski diskretnog signala

- slično prethodnom pokazujemo
  - za vremenski diskretni signal definiran je vremenski pomak

$$u : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}, \quad y : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$$
$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad y(n) = u(n - N) \quad \text{za} \quad N \in \mathbb{Z}$$

Primjer pomaka vremenski diskretnog signala

- primjer pomaka vremenski diskretnog signala za $N = 0$, $N = -5$, $N = 5$ (Sl.27)



Slika 27: Pomak vremenski diskretnog signala

Derivacija vremenski kontinuiranog signala

- derivacija vremenski kontinuiranog signala[16] definirana je kao derivacija funkcije koja opisuje signal
- derivacija funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je nova funkcija $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- oznake za derivaciju funkcije f su i $\dot{f}, Df, f'(t), Df(t), \frac{df(t)}{dt}$
- derivacija funkcije f definirana je kao:

$$f'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t) - f(t-\Delta t)}{\Delta t}$$

- derivacija predstavlja mjeru promjene i preko nje se određuju područja u kojima funkcija raste ili pada
- iz definicije derivacije vidljivo je da je ona memorijska operacija

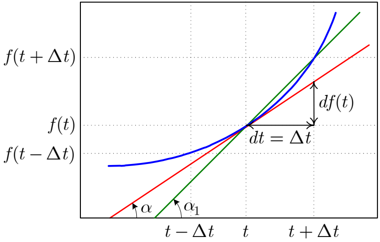
[16] Derivaciju, po odsječcima neprekinutih, vremenski kontinuiranih signala razmatramo nešto kasnije

Geometrijska interpretacija derivacije

- na slici 28 je geometrijska interpretacija definicije derivacije funkcije

$$f'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \text{ ili } f'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t) - f(t-\Delta t)}{\Delta t}$$

- derivacija u točki t odgovara koeficijentu smjera tangente u toj točki



Slika 28: Geometrijska interpretacija derivacije

Diferencijal

- diferencijal nezavisne varijable t je njezin prirast i on se definira kao $dt = \Delta t$
- diferencijal funkcije definiramo kao prirast koji dobiva tangenta u danoj točki t što je linearna aproksimacija prirasta funkcije u okolini točke t

$$df(t) = f'(t)dt$$

- dakle, za malo Δt, vrijedi

$$df(t) \approx f(t + \Delta t) - f(t)$$

Integral vremenski kontinuiranog signala

- integral vremenski kontinuiranog signala definiran je kao integral funkcije koja opisuje signal
- integral funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je nova funkcija $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana kao:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau) d\tau$$

- integracija je također memorijska operacija
- geometrijska interpretacija određenog integrala kazuje kako integral $\int_a^b f(\tau)d\tau$ predstavlja površinu ispod krivulje $f(t)$ za interval $t \in [a, b]$

Primjer derivacije i integracije signala

Operacije deriviranja i integriranja ilustriramo za vremenski kontinuiran signal

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad u_a(t) = \begin{cases} 0, & -\infty < t \leq 0 \\ 2t, & 0 \leq t \leq 2 \\ -2t+8, & 2 \leq t \leq 6 \\ 2t-16, & 6 \leq t \leq 10 \\ -2t+24, & 10 \leq t \leq 12 \\ 0, & t \geq 12. \end{cases} \tag{9}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad u_a'(t) = \begin{cases} 0, & -\infty < t < 0 \\ 2, & 0 \leq t < 2 \\ -2, & 2 \leq t < 6 \\ 2, & 6 \leq t < 10 \\ -2, & 10 \leq t < 12 \\ 0, & t \geq 12. \end{cases} \tag{10}$$

Klasifikacija signala
Neke operacije nad signalima
Klasifikacija sig. - dodatak
Oper. nad sig. - dodatak
Zbrajanje i množenje
Vremenski pomak
Derivacija
Integracija
Diferencija
Integracija i akumulacija
Vremenska inverzija

Primjer derivacije i integracije signala

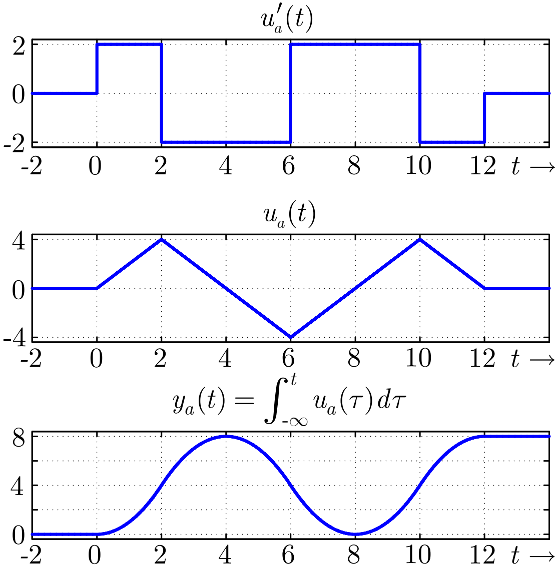
Integral signala $u_a(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, je

$$y_a(t) = \int_{-\infty}^{t} u_a(\tau)\,d\tau$$

$$= \begin{cases} \int_{-\infty}^{t} (0)\,d\tau = 0, & -\infty < t \leq 0 \\ y_a(0) + \int_0^t (2\tau)\,d\tau = t^2, & 0 \leq t \leq 2 \\ y_a(2) + \int_2^t (-2\tau + 8)\,d\tau = -t^2 + 8t - 8, & 2 \leq t \leq 6 \\ y_a(6) + \int_6^t (2\tau + 16)\,d\tau = t^2 - 16t + 64, & 6 \leq t \leq 10 \\ y_a(10) + \int_{10}^t (-2\tau + 24)\,d\tau = -t^2 + 24t - 136, & 10 \leq t \leq 12 \\ y_a(12) = 8, & t \geq 12, \end{cases} \quad (11)$$

gdje su $y_a(0)$, $y_a(2)$, $y_a(6)$, $y_a(10)$, i $y_a(12)$ sukcesivno izračunati iz izraza (11). Grafovi ovih signala prikazani su na slici 29.

Primjer derivacije i integracije signala



Slika 29: Derivacija i integracija vremenski kontinuiranog signala

Primjer derivacije i integracije signala

Treba se podsjetiti da su operacije deriviranja i integriranja obrnute operacije. Tako da grafove na slici 29 možemo interpretirati i kao niz njihovih integracija, gledano odozgo prema dolje, odnosno niz derivacija gledano odozdo prema gore. Zaista integracijom funkcije u_a' dobivamo u_a, a njezinom integracijom $y_a = \int u_a$. Taj niz integracija bi mogli nastaviti po volji, ili potrebi, daleko. Isto tako, uzastopno derivirajući signale, odozdo prema gore, iz $y_a = \int u_a$ dobivamo u_a, a narednom derivacijom u'. I ovdje bi mogli nastaviti s operacijom deriviranja međutim tada bi trebalo uporabiti generaliziranu derivaciju zbog činjenice da postoje diskontinuiteti signala koji deriviramo na mjestima $t = 0, 2, 6, 10,$ i 12. Generalizirana derivacija definira se nešto kasnije.

Primjer silazne i uzlazne diferencije

Za vremenski diskretni signal u, zadan kao

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad u(n) = \begin{cases} 0.5n, & 0 \leq n \leq 7 \\ -0.5n + 8, & 8 \leq n \leq 23 \\ 0.5n - 16, & 24 \leq n \leq 39 \\ -0.5n + 24, & 40 \leq n \leq 47 \\ 0, & \text{inače}, \end{cases} \tag{12}$$

izračunava se silazna diferencija, $\forall n \in \mathbb{Z}$,
$\nabla u(n) = u(n) - u(n-1)$ kao

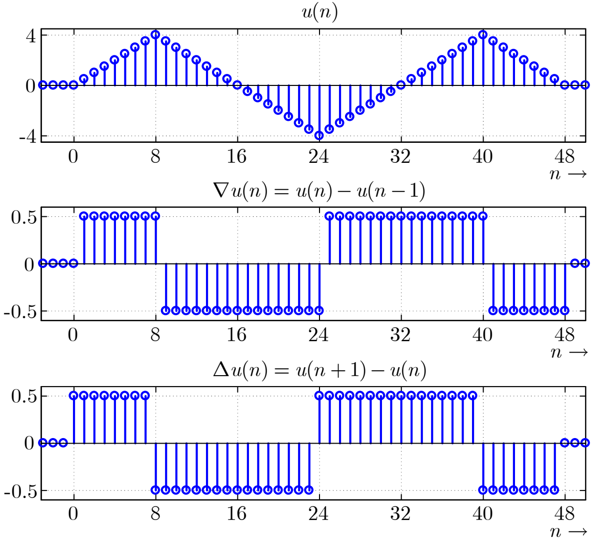
$$u(n) = \begin{cases} (0.5n) - 0.5(n-1) = 0.5, & 1 \leq n \leq 8 \\ [-0.5n + 8] - [-0.5(n-1) + 8] = -0.5, & 9 \leq n \leq 24 \\ [0.5n - 16] - [0.5(n-1) - 16] = 0.5, & 25 \leq n \leq 40 \\ [-0.5n + 24] - [-0.5(n-1) + 24] = -0.5, & 41 \leq n \leq 48 \\ 0, & \text{inače}, \end{cases} \tag{13}$$

Primjer silazne i uzlazne diferencije

i uzlazna diferencija, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\triangle u(n) = u(n+1) - u(n)$ kao

$$u(n) = \begin{cases} 0.5(n+1) - 0.5n = 0.5, & 0 \leq n \leq 7 \\ [-0.5(n+1)+8] - [-0.5n+8] = -0.5, & 8 \leq n \leq 23 \\ [0.5(n+1)-16] - [0.5n-16] = 0.5, & 24 \leq n \leq 39 \\ [-0.5(n+1)+24] - [-0.5n+24] = -0.5, & 40 \leq n \leq 47 \\ 0, & \text{inače}, \end{cases} \tag{14}$$

Primjer silazne i uzlazne diferencije



Slika 30: Silazna i uzlazna prva diferencija vremenski diskretnog signala.

Primjer veze derivacije vremenski kontinuiranog signala i diferencije vremenski diskretnog signala

Razmatra se vremenski kontinuiran signal y_a, definiran kao

$$y_a(t) = \begin{cases} 0, & -\infty < t \leq 0 \\ t^2, & 0 \leq t \leq 2 \\ -t^2 + 8t - 8, & 2 \leq t \leq 6 \\ t^2 - 16t + 64, & 6 \leq t \leq 10 \\ -t^2 + 24t - 136, & 10 \leq t \leq 12 \\ 8, & t \geq 12. \end{cases} \tag{15}$$

Derivacija ovog signala je

$$u_a(t) = \frac{d\, y_a}{dt} = \begin{cases} 0, & -\infty < t \leq 0 \\ 2t, & 0 \leq t \leq 2 \\ -2t + 8, & 2 \leq t \leq 6 \\ 2t - 16, & 6 \leq t \leq 10 \\ -2t + 24, & 10 \leq t \leq 12 \\ 0, & t \geq 12. \end{cases} \tag{16}$$

Klasifikacija signala

Neke operacije nad signalima

Klasifikacija sig. - dodatak

Oper. nad sig. - dodatak

Zbrajanje i množenje
Vremenski pomak
Derivacija
Integracija
Diferencija
Integracija i akumulacija
Vremenska inverzija

Primjer veze derivacije vremenski kontinuiranog signala i diferencije vremenski diskretnog signala

Očitavanjem vremenski kontinuiranog signala y_a, svakih $T = 0.25$, nastaje vremenski diskretan signal $y(n) = y_a(nT)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$,

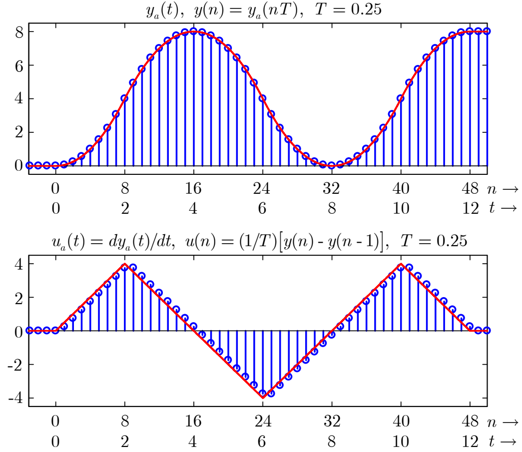
$$y(n) = \begin{cases} 0, & -\infty < n \leq 0 \\ 0.25^2 n^2, & 0 \leq n \leq 8 \\ -0.25^2 n^2 + 2n - 8, & 9 \leq n \leq 24 \\ 0.25^2 n^2 - 4n + 64, & 25 \leq n \leq 40 \\ -0.25^2 n^2 + 6n - 136, & 41 \leq n \leq 48 \\ 8, & n \geq 49, \end{cases} \tag{17}$$

a diferenciju signala određujemo iz $u(n) = \dfrac{1}{T}[y(n) - y(n-1)]$,

$$u(n) = \begin{cases} 0, & -\infty < n \leq 0 \\ 0.5n - 0.25, & 1 \leq n \leq 8 \\ -0.5n + 8.25, & 9 \leq n \leq 24 \\ 0.5n - 16.25, & 25 \leq n \leq 40 \\ -0.5n + 24.25, & 41 \leq n \leq 48 \\ 0, & n \geq 49, \end{cases} \tag{18}$$

Primjer veze derivacije vremenski kontinuiranog signala i diferencije vremenski diskretnog signala

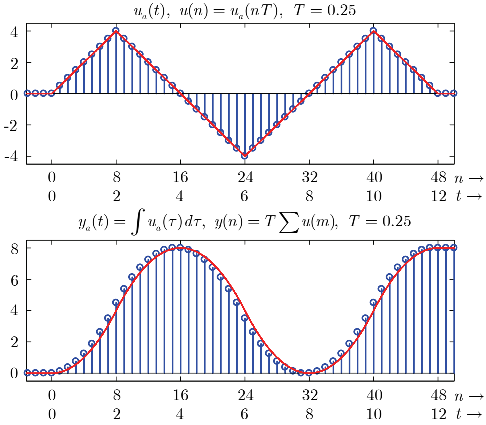
Kada bi očitali $u_a(t))$ svakih $t = nT = 0.25n$, lako bi uočili kako je $u(n) \approx u_a(nT)$ što je i razvidno na slici 31.



Slika 31: Veza derivacije i diferencije. Vremenski kontinuirani signal i njegova derivacija prikazani su crveno.

Primjer veze integracije vremenski kontinuiranog signala i akumulacije vremenski diskretnog signala

Vremenski kontinuiran signal isti kao signal, označen izrazom (9), i njegov integral, označen izrazom (11), prikazani su na slici 32 crvenom bojom i označeni kao u_a i y_a.



Slika 32: Veza integriranja i akumulacije.

Primjer veze integracije vremenski kontinuiranog signala i akumulacije vremenski diskretnog signala

Vremenski diskretan signal u, nastao očitavanjem signala u_a svakih $T = 0.25$ je

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad u(n) = \begin{cases} 0.5n, & 0 \leq n \leq 8 \\ -0.5n + 8, & 9 \leq n \leq 24 \\ 0.5n - 16, & 25 \leq n \leq 40 \\ -0.5n + 24, & 41 \leq n \leq 48 \\ 0, & \text{inače}, \end{cases} \tag{19}$$

Operacijom akumulacije, $y(n) = y(n_0 - 1) + T \sum_{m=n_0}^{n} u(m)$,

$$y(n) = \begin{cases} 0, & -\infty \leq n \leq -1 \\ 0.0625n^2 + 0.0625n, & 0 \leq n \leq 8 \\ -0.0625n^2 + 1.9375n - 7, & 9 \leq n \leq 24 \\ 0.0625n^2 - 3.9375n + 62, & 25 \leq n \leq 40 \\ -0.0625n^2 + 5.9375n - 133, & 41 \leq n \leq 48 \\ 8, & n \geq 49 \end{cases} \tag{20}$$

Primjer veze integracije vremenski kontinuiranog signala i akumulacije vremenski diskretnog signala

Prikažimo samo izračun $y(n)$ za $9 \leq n \leq 24$.

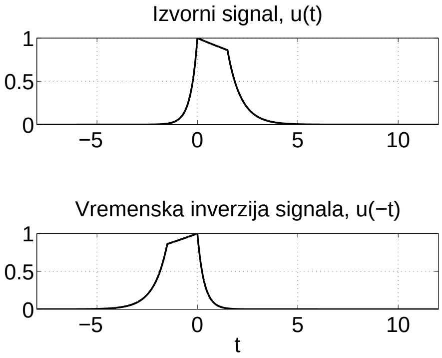
$$
\begin{aligned}
y(n) &= y(8) + T\sum_{m=9}^{n}(-0.5m+8) \\
&= \underbrace{y(8)}_{4.5} - 0.25 \cdot 0.5 \underbrace{\sum_{m=9}^{n} m}_{\frac{n(1+n)}{2} - \frac{8(1+8)}{2}} + 0.25 \underbrace{\sum_{m=9}^{n} 8}_{\frac{n(8+8)}{2} - \frac{8(8+8)}{2}} \\
&= 4.5 - 0.0625(n^2+n) + 4.5 + 2n - 16 \\
&= -0.0625n^2 + 1.9375n - 7,
\end{aligned}
$$

gdje je $y(8)$ prethodno dobiven izračunom akumulacije signala y za $0 \leq n \leq 8$. Za ostale odsječke signala u, akumulaciju izračunavamo na isti način. Slika 32 ilustrira operaciju akumulacije vremenski diskretnog signala, te prikazuje kako operacija akumulacije aproksimira operaciju integriranja.

Vremenska inverzija vremenski kontinuiranog signala

- za vremenski kontinuirani signal definirana je vremenska inverzija kao

$$
\begin{aligned}
&u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\
&\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = u(-t)
\end{aligned}
$$

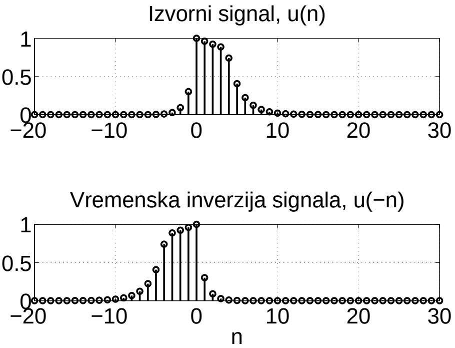


Slika 33: Vremenska inverzija vremenski kontinuiranog signala

Vremenska inverzija vremenski diskretnog signala

- za vremenski diskretni signal definirana je vremenska inverzija kao

$$u : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}, \quad y : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$$
$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad y(n) = u(-n)$$



Slika 34: Vremenska inverzija vremenski diskretnog signala