PERIODIČNE FJE

Kažemo da je $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodična fja, ako postoji $T>0$ takav da za svaki x iz domene f vrijedi

$f(x) = f(x+T)$ Broj T naziva se period. Najmanji period (ako postoji) nazivamo temeljni period

ORTOGONALNOST TRIGONOMETRIJSKIH FJA

Za funkcije $f, g: [a,b]$ kažemo da su ortogonalne na intervalu $[a,b]$ ako vrijedi

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = 0$$

DIRICHLETOVI UVJETI

Kažemo da f zadovoljava Dirichletove uvjete na intervalu $[a,b]$ ako vrijedi:

1) f je po dijelovima neprekinuta i njezini su prekidi prve vrste
2) f je monotona ili ima najviše konačan broj strogih ekstrema

KONVERGENCIJA FOURIEROVOG REDA

Neka je f po dijelovima glatka periodična fja s periodom 2π koja zadovoljava Dirichletove uvjete. Tada njezin Fourierov red konvergira u svakoj točki $x \in [-\pi, \pi]$ i za sumu $S(x)$ vrijedi

1) $S(x) = f(x)$ ako je f neprekinuta u točki x
2) $S(x) = \frac{1}{2}\left(f(x+0) + f(x-0)\right)$, ako je x točka prekida za f

DISKRETNI SPEKTAR PERIODIČNE FJE

Trigonometrijski Fourierov red može se napisati u obliku

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_0 x + b_n \sin n\omega_0 x) = \pm\frac{1}{2}c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\omega_0 x + \varphi_n)$$

$$c_0 = |a_0|$$

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\operatorname{tg}\varphi_n = \frac{a_n}{b_n}$$

c_n je amplituda n-tog harmonika, a φ_n fazni pomak n-tog harmonika.
Niz (c_n) naziva se (diskretni) amplitudni spektar a (φ_n) fazni spektar funkcije f.
Nizove $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ zovemo (diskretni) sinusni, odnosno kosinusni spektar fje f.

FOURIEROV INTEGRAL

Ako je $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ po dijelovima glatka na svakom konačnom intervalu i apsolutno integrabilna, tada postoji njen Fourierov integral i vrijedi

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\lambda\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)\,d\xi=\begin{cases} f(x) & \text{, ako je } f \text{ neprekinuta u } x\\ \frac{1}{2}\left[f(x-0)+f(x+0)\right] & \text{, ako je } x \text{ točka prekida za } f\end{cases}$$

$$am(\lambda)=\sqrt{A(\lambda)^2+B(\lambda)^2}$$

LAPLACEOV TRANSFORMAT

Neka je f funkcija realnog argumenta t, definirana za $t>0$ i s vrijednostima u skupu realnih ili kompleksnih brojeva. Neka je s realni ili kompleksni parametar. Laplaceov transformat funkcije f je funkcija F definirana s

$$F(s):=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$$

za svaki s za koji taj nepravi integral konvergira

LINEARNOST LAPLACEOVE TRANSFORMACIJE

Ako je $f(t)\circ\!-\!\bullet F(s)$, $g(t)\circ\!-\!\bullet G(s)$, tada vrijedi

$$\alpha f(t)+\beta g(t)\circ\!-\!\bullet\ \alpha F(s)+\beta G(s)$$

Dokaz $\mathcal{L}(\alpha f(t)+\beta g(t))=\int_0^\infty(\alpha e^{-st}f(t)+\beta e^{-st}g(t))\,dt=\alpha\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt+\beta\int_0^\infty e^{-st}g(t)\,dt=$

$=\alpha F(s)+\beta G(s)$

SLIKA EKSPONENCIJALNE FJE

Za svaki realni ili kompleksni broj α vrijedi

$$e^{\alpha t}\circ\!-\!\bullet\ \frac{1}{s-\alpha}$$

Dokaz $f(t)=e^{\alpha t}$ $F(s)=\int_0^\infty e^{-st}e^{\alpha t}\,dt=\int e^{(\alpha-s)t}\,dt=-\left.\frac{e^{(\alpha-s)t}}{\alpha-s}\right|_0^\infty=\frac{1}{s-\alpha}$, $s>\alpha$

ORIGINAL

Za funkciju ćemo reći da je original, ako ona zadovoljava uvjete

1) $f(t)=0$, za $t<0$
2) f je na svakom konačnom intervalu po dijelovima neprekidna
3) f je eksponencijalnog rasta, tj. postoje konstante $M>0$ i $a>0$ takve da

$$|f(t)|\leq Me^{at}$$

$\Rightarrow$ Infimum svih konstanti a za koje vrijedi nejednakost zove se eksponent rasta funkcije f i označava se s a_0

MNOŽENJE VARIJABLE KONSTANTOM

$$f(at) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

$$F(bs) \bullet\!\!-\!\!\circ \frac{1}{b} f\left(\frac{t}{b}\right)$$

Dokaz

$$\mathcal{L}(f(at)) = \int_0^\infty e^{-st} f(at)\,dt = \left| \begin{matrix} u = at \\ t = u/a \\ du = a\,dt \end{matrix} \right| = \int_0^\infty e^{-s\,u/a} f(u) \frac{1}{a} du$$

$$= \frac{1}{a} \int_0^\infty e^{-\frac{s}{a}u} f(u)\,du$$

TEOREM O PRIGUŠENJU ORIGINALA

Prigušenju u gornjem području odgovara pomak ulijevo u donjem području

$$e^{-at} f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s+a)$$

Dokaz

$$\mathcal{L}(e^{-at} f(t)) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot e^{-at} f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-(s+a)t} f(t)\,dt = $$
$$= F(s+a)$$

TEOREM O POMAKU ORIGINALA

Neka je $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s)$ i $a > 0$. Pomaku originala udesno odgovara prigušenje u donjem području

$$f(t-a)\,u(t-a) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s) e^{-as}$$

Dokaz

$$\mathcal{L}[f(t-a)\,u(t-a)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t-a)\,u(t-a)\,dt = \int_a^\infty e^{-st} f(t-a)\,dt = \left| \begin{matrix} u = t-a \\ t = u+a \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_0^\infty e^{-s(u+a)} f(u)\,du = e^{-as} \int_0^\infty e^{-su} f(u)\,du = e^{-as} F(s)$$

TEOREM O DERIVIRANJU ORIGINALA

Neka je funkcija f n-puta diferencijabilna i original. Tada vrijedi:

$$f^{(n)}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$$

Dokaz

$$\mathcal{L}(f'(t)) = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\,dt = \left| \begin{matrix} u = e^{-st} & dv = f'(t)dt \\ du = -se^{-st} & v = f(t) \end{matrix} \right| =$$

$$= e^{-st} f(t) \Big|_0^\infty + s \underbrace{\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt}_{F(s)} = \cancel{\lim_{t\to\infty} e^{-st} f(t)}^{0} - f(0) + sF(s) = sF(s) - f(0)$$

TEOREM O KONVOLUCIJI

Konvolucija originala definirana je integralom

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,d\tau$$

Konvoluciji u gornjem području odgovara umnožak slika u donjem području

$$(f_1 * f_2)(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F_1(s) F_2(s)$$

Dokaz

$$f_1(t) * f_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \int_{-\infty}^\infty e^{-st} (f_1 * f_2)(t)\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^\infty e^{-st} dt \int_{-\infty}^\infty f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^\infty e^{-st} f_1(\tau)\,d\tau \int_{-\infty}^\infty e^{-s(t-\tau)} f_2(t-\tau)\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^\infty e^{-s\tau} f_1(\tau)\,d\tau \int_{-\infty}^\infty e^{-su} f_2(u)\,du =$$

$$= F_1(s) F_2(s)$$

DERIVIRANJE SLIKE

Deriviranju u donjem području odgovara množenje s $(-t)$ u gornjem području

$$(-t)^n f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F^{(n)}(s)$$

$$t^n f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet (-1)^n F^n(s)$$

Dokaz $F'(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-st}\cdot(-t)f(t)\,dt \bullet\!\!-\!\!\circ (-t)f(t)$

slika funkcije t^n $\quad u(t) = \frac{1}{s}$

$$(-t)^n u(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{d^n}{ds^n}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{(-1)(-2)(-3)\cdots(-n)}{s^{n+1}} = \frac{(-1)^n n!}{s^{n+1}}$$

$$t^n \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{n!}{s^{n+1}}$$

TEOREM O INTEGRIRANJU SLIKE

Neka je $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s)$, ako je $\frac{f(t)}{t}$ original, onda vrijedi:

$$\frac{f(t)}{t} \circ\!\!-\!\!\bullet \int_s^\infty F(s)\,ds$$

TEOREM O INTEGRIRANJU ORIGINALA

Ako je $f(t)$ original tada je,

$$\varphi(t) := \int_0^t f(\tau)\,d\tau$$

također original i vrijedi

$$\int_0^t f(\tau)\,d\tau \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{F(s)}{s}$$

Dokaz ima neki u knjizi, ali mislim da se to može dokazati i preko konvolucije

SLIKA PERIODIČNE FJE

Slika periodične fje s periodom duljine T računa se formulom

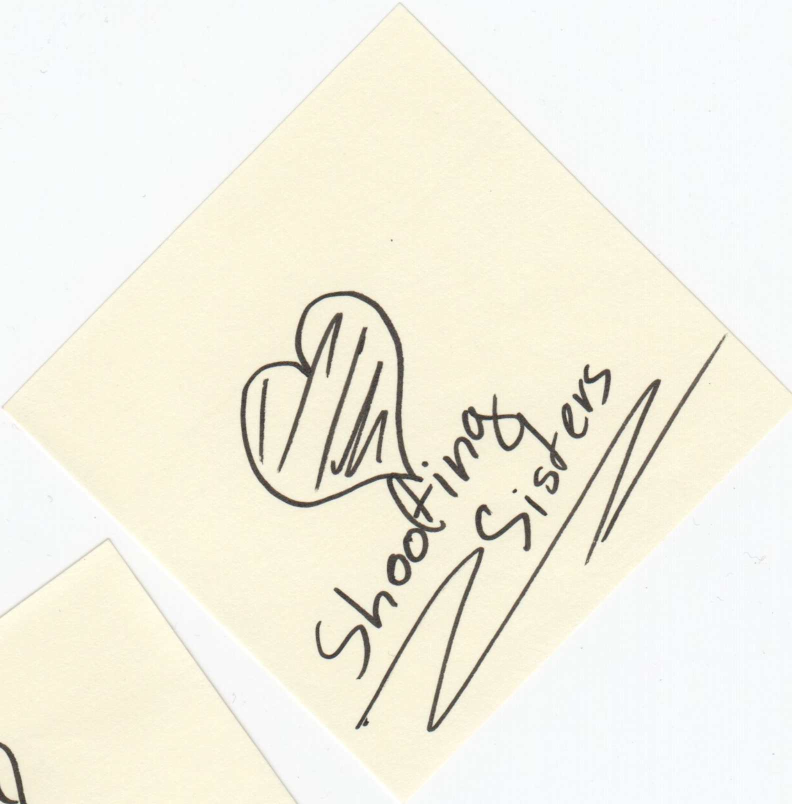
$$F(s) = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st} f(t)\,dt$$

Dokaz $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \sum_{n=0}^\infty \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-st} f(t)\,dt =: \sum_{n=0}^\infty I_n$

$$I_n = \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^T e^{-s(\tau+nT)} f(\tau+nT)\,d\tau = e^{-nsT}\int_0^T e^{-s\tau} f(\tau+nT)\,d\tau =$$

$$= e^{-nsT}\int_0^T e^{-s\tau} f(\tau)\,d\tau = e^{-nsT} I_0$$

$$F(s) = \sum_{n=0}^\infty e^{-nsT} I_0 = \frac{1}{1-e^{-sT}} I_0$$


Shooting Sisters