Ime i prezime: ____

JMBAG: _________________________

Zimski ispitni rok iz Linearne algebre

FER, 10. veljače 2021.

Tijekom ove provjere znanja neću od drugoga primiti niti drugome pružiti pomoć te se neću koristiti nedopuštenim sredstvima. Ove su radnje povreda Kodeksa ponašanja te mogu uzrokovati trajno isključenje s Fakulteta.
Zdravstveno stanje dozvoljava mi pisanje ovog ispita.

Vlastoručni potpis studenta: _________________________

1. (**10 bodova**)

(a) Riješite matričnu jednadžbu

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Bez rješavanja matrične jednadžbe obrazložite ima li donja matrična jednadžba rješenje?

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. (**10 bodova**)

(a) Napišite elementarne matrice 3×3 koje odgovaraju sljedećim elementarnim transformacijama nad redcima matrica $3 \times n$:

(i) zamjena prvog i drugog retka,

(ii) množenje drugog retka s 3,

(iii) dodavanje trećeg retka pomnoženog s 2, prvom.

(b) Odredite inverz svake od njih. Kojim elementarnim transformacijama odgovaraju ti inverzi?

(c) Pretpostavimo da smo na nekoj matrici $\mathbf{X}$, redom, napravili elementarne transformacije (i), (ii) i (iii); i dobili jediničnu matricu $\mathbf{I}$. Odredite $\mathbf{X}$.

3. (**10 bodova**)

(a) Iskažite nužan i dovoljan uvjet da bi sustav $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ imao rješenje.

(b) Za koje vrijednosti vektora $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ donji sustav ima rješenje?

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

OKRENITE STRANICU!

4. (**10 bodova**)

(a) Definirajte bazu vektorskog prostora.

(b) Neka je B baza vektorskog prostora V i $\mathbf{v} \in V$. Dokažite da je prikaz vektora $\mathbf{v}$ kao linearne kombinacije vektora baze B jedinstven.

(c) Neka je $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ jedna baza za V. Ispitajte je li tada i $\{\mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{v}+\mathbf{w}, \mathbf{w}+\mathbf{u}\}$ baza za V. Obrazložite odgovor!

5. (**10 bodova**) Neka je $A\colon \mathcal{M}_{22} \to \mathcal{M}_{22}$ linearni operator na prostoru kvadratnih matrica reda 2 zadan formulom:

$$A\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_{11}+a_{12} & a_{12}+a_{22} \\ a_{21}+a_{11} & a_{22}+a_{21} \end{bmatrix}.$$

(a) Odredite matricu operatora A u kanonskoj bazi.

(b) Odredite rang i defekt operatora A.

(c) Pronađite sve matrice $\mathbf{M} \in \mathcal{M}_{22}$ za koje vrijedi $A(\mathbf{M}) = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}$.

(d) Odredite matricu operatora A u bazi $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right\}$.

6. (**10 bodova**) Na vektorskom prostoru polinoma $\mathcal{P}_2$ stupnja ne većeg od 2 definirana je operacija $\langle \ | \ \rangle : \mathcal{P}_2 \times \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}$ formulom:

$$\langle p_1(t) | p_2(t) \rangle = \int_{-1}^{1} t^2 p_1(t) p_2(t) dt\,.$$

(a) Dokažite da je $\mathcal{P}_2$ uz ovu operaciju unitarni prostor.

(b) Neka je L potprostor od $\mathcal{P}_2$ koji sadrži polinome $p_1(t) = t+1$ i $p_2(t) = 2t+3$. Odredite ortogonalni komplement $L^{\perp}$ potprostora L.

Ispit se piše 150 minuta. *Dozvoljeno je isključivo korištenje pribora za pisanje. Nije dopuštena upotreba kalkulatora, ni podsjetnika!*