$e = \{v, w\}$

$\deg(v)$ = stupanj vrha v (br. bridova koji su incidentni s v)

Broj vrhova neparnog stupnja u svakom grafu je paran.

↳ Brid e spaja vrhove v i w.

↳ Vrhovi v i w su susjedni.

↳ Vrhovi v i w su incidentni s bridom e.

Izomorfizam grafova

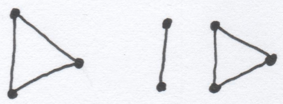
Dva grafa su izomorfna kada postoji bijektivna korespodencija (preslikavanje 1-1) između skupova $V(G_1)$ i $V(G_2)$, takva da je broj bridova koji spajaju 2 izabrana vrha u $V(G_1)$ jednak broju bridova koji spajaju dva korespodentna vrha u $V(G_2)$.

$$|V(G_1)| = |V(G_2)| \qquad |E(G_1)| = |E(G_2)|$$

↳ to je nužan uvjet izomorfnosti, no ne i dovoljan

Povezanost grafova

Graf je povezan ako se ne može prikazati kao unija neka dva grafa.



POVEZAN NEPOVEZAN

Lema o rukovanju

U svakom grafu G zbroj stupnjeva svih vrhova je paran: $\sum_{v \in G} \deg(v) = 0 \pmod 2$

DOKAZ: Dokazujemo konkretniju jednakost $\sum_{v \in G} \deg(v) = 2|E(G)|$

Prebrajamo sve „incidencije" grafa na 2 načina.

Ako krenemo od vrhova, incidencija ima koliko je i stupanj pojedinog vrha.

Ako krenemo od bridova, vidimo da svaki brid ima 2 kraja pa incidencija ima ukupno $2 \cdot |E(G)|$.

Vidimo da je desna strana jednakosti parna pa je tvrdnja leme dokazana.

Regularnost grafa

Graf G je regularan ako su svi njegovi vrhovi istog stupnja.

Za r-regularan graf vrijedi $\deg(v) = r, \ \forall v \in V(G)$ [r - stupanj regularnosti]

Bridni (linijski) graf

Bridni graf $L(G)$ definiran je kao graf čiji su vrhovi u bijektivnoj korespodenciji s bridovima grafa G, pri čemu su 2 vrha od $L(G)$ susjedna onda i samo onda ako su odgovarajući bridovi u G susjedni.

Bipartitni graf

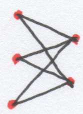
Graf je bipartitan ako skup vrhova grafa G možemo razdvojiti u 2 disjunktna skupa A i B, tako da svaki brid od G spaja neki vrh iz A s nekim iz B.

Potpuni bipartitni graf

Bipartitni graf kod kojeg je svaki vrh iz skupa A spojen sa svakim iz B.

Oznaka: $\underline{K_{r,s}}$, $r = |A|$, $s = |B|$

↳ ima $r+s$ vrhova i $r \cdot s$ bridova



$K_{3,2}$

k-kocka Q_k

Graf čiji vrhovi odgovaraju svim binarnim nizovima $(a_1, \dots, a_k)$, $a_i \in \{0,1\}$ duljine k i čiji bridovi spajaju vrhove čiji se binarni nizovi razlikuju na točno 1 mjestu.

$$|V(Q_k)| = 2^k$$

$$|E(Q_k)| = \frac{2^k \cdot k}{2} = k \cdot 2^{k-1}$$

Eulerovski graf

Graf je eulerovski ako postoji zatvorena staza koja sadrži svaki brid od G.

Eulerov teorem

Povezani graf G je eulerovski onda i samo onda ako je stupanj svakog vrha paran.

Skoro eulerovski graf

Povezani graf je skoro eulerovski onda i samo onda ako ima točno 2 vrha neparnog stupnja.

Hamiltonovski graf

Hamiltonovski graf je graf koji posjeduje hamiltonovski ciklus tj. ciklus koji prolazi svim vrhovima zadanog grafa.

Oreov teorem

Ako je G jednostavni graf s n vrhova, $n \geq 3$, te ako vrijedi

$$\deg(v) + \deg(w) \geq n$$

za svaki par nesusjednih vrhova v i w, onda je G hamiltonovski.