Međuispit iz MATEMATIKE 3E, 18.11.2013.

1. **(6 bodova)**

   (a) Razvijte u Fourierov red funkciju definiranu na intervalu $[-3, 3]$ formulom:
   $$f(x) = 2 \cdot \operatorname{sgn}(e^x - 1).$$

   (b) Skicirajte graf Fourierovog reda funkcije f.

   (c) Pomoću dobivenog razvoja, izračunajte sumu:
   $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

2. **(4 boda)**

   (a) Izvedite Fourierovu integralnu formulu za funkciju $f \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ koja je apsolutno integrabilna i zadovoljava Dirichleteove uvjete na svakom konačnom intervalu.

   (b) Skiciajte graf Fourierivog integrala funkcije
   $$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0] \\ -e^{-x}, & x \in (0, 2] \\ 1, & x \in (2, 3] \\ 0, & x \in (3, +\infty) \end{cases}$$
   i izračunajte njegovu vrijednost u točki 2.

3. **(5 bodova)**

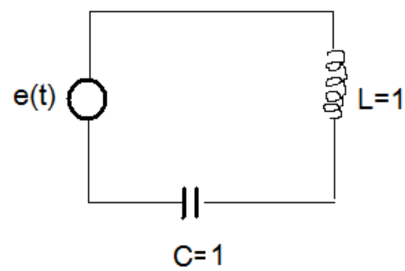
   (a) Definirajte Laplaceovu transformaciju funkcije f.

   (b) Koristeći definiciju, odredite Laplaceov transformat funkcije
   $$f(t) = (1 + t^n)^2$$
   pri čemu je $n \in \mathbf{N}$. Za koje $s \in \mathbf{R}$ Laplaceov integral te funkcije konvergira? Odgovor obrazložite!

4. **(5 bodova)** Odredite sliku funkcije:
   $$f(t) = \int_0^t \frac{\operatorname{sh} u \cos u}{u} \, \mathrm{d}u.$$

OKRENITE!

5. **(6 bodova)** Pomoću Laplaceove transformacije odredite struju $i(t)$ u strujnom krugu sa slike uz priključeni napon $e(t) = e^{-3t}u(t-1)$.



6. **(8 bodova)**

   (a) Za zadanu zamjenu varijabli $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ definirajte Jacobijan.

   (b) Izračunajte Jacobijan za promjenu Kartezijevih koordinata u ravnini u polarne.

   (c) Skicirajte područje D u ravnini zadano nejednakostima $x^2+y^2 \leq -2y$, $y \leq x$ i $y \leq -\sqrt{3}x$ i izračunajte integral

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

7. **(6 bodova)**

   Neka je

$$D = \left\{(x, y, z) : x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1,\ z = -1\right\}$$

   područje sadržano u ravnini $z = -1$. Izračunajte volumen dijela valjkastog tijela iznad područja D koji se nalazi ispod plohe $f(x, y) = e^{-(4x^2+y^2)}$.

Ispit se piše 120 minuta. Dozvoljeno je koristiti samo prazne papire, pribor za pisanje i službeni podsjetnik.

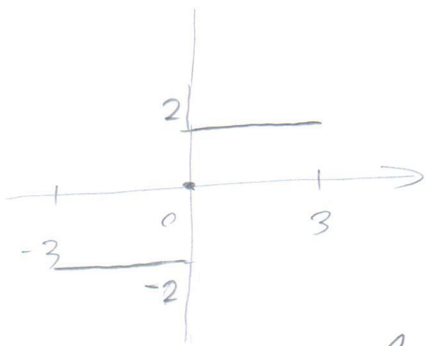
1.)

a) 3b RAZVIJTE U FOURIEROV RED FUNKCIJU DEFINIRANU NA INTERVALU $[-3, 3]$ FORMULOM

$f(x) = 2\,\mathrm{sgn}(e^x - 1)$. POMOĆU DOBIVENOG RAZVOJA

b) 1b skicirajte $f(x)$

c) 2b IZRAČUNAJ SUMU $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$



f JE NEPARNA $\Rightarrow a_n = 0 \ \forall n$

$L = 3$

$$b_n = \frac{2}{3}\int_0^3 2 \cdot \sin\frac{n\pi x}{3}\,dx =$$

$$= -\frac{4}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{n\pi} \cdot \cos\frac{n\pi x}{3}\Big|_0^3 = -\frac{4}{n\pi}\left(\cos n\pi - \cos 0\right) =$$

$$= -\frac{4}{n\pi}\left((-1)^n - 1\right) = \frac{4}{n\pi}\left(1 - (-1)^n\right), \quad n \geq 1$$

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1-(-1)^n\right)\sin\frac{n\pi x}{3}$$

$$b_{2k} = 0, \qquad b_{2k+1} = \frac{8}{(2k+1)\pi}$$

$$f(x) \sim \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{3}$$

OKRENI

ZA $x = \frac{3}{2} \Rightarrow$

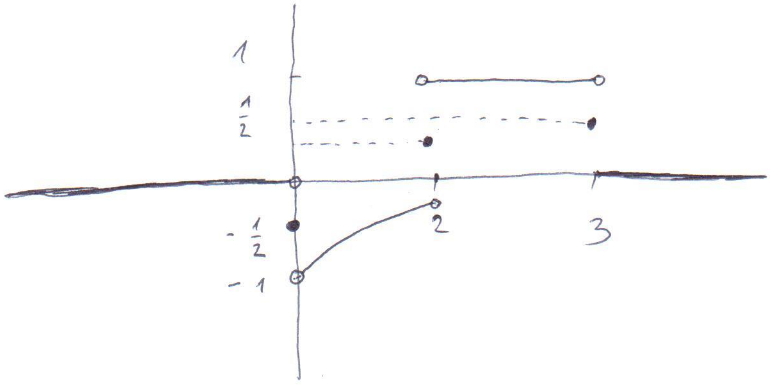
$$2 = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin \frac{(2k+1)\pi \cdot \frac{3}{2}}{3} =$$

$$= \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin (2k+1)\frac{\pi}{2} = \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

2. b)



$$\tilde{f}(2) = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2}\right)$$

3. b) $\mathcal{L}\left((1+t^n)^2\right) = \mathcal{L}\left(1 + 2t^n + t^{2n}\right)$

$= \mathcal{L}(1) + \mathcal{L}(2t^n) + \mathcal{L}(t^{2n})$

$= \int_0^\infty e^{-st}\,dt + 2\int_0^\infty e^{-st} t^n\,dt + \int_0^\infty e^{-st} t^{2n}\,dt$

$=$ PARC. INT. $= \dots = \frac{1}{s} + 2\cdot\frac{n!}{s^{n+1}} + \frac{(2n)!}{s^{2n+1}}$

EKSP. RASTA a_0 FUNKCIJE $(1+t^n)^2$ JEST 0

$\Rightarrow$ L. INT. KONV. $\forall s > 0$

S DRUGE STRANE, ZA $s \leq 0$ JE

$\int_0^\infty e^{-st}\,dt = +\infty \Rightarrow$ LAPLACEOV INT. NE KONVERGIRA ZA $s \leq 0$

4. ODREDITE SLIKU FUNKCIJE $\int_0^t \frac{\operatorname{sh} u \cos u}{u}\,du$

$$\operatorname{sh} t \cos t = \frac{1}{2}\left(e^{t}-e^{-t}\right)\cos t \;\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{s-1}{(s-1)^2+1}-\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right]$$

$$\frac{\operatorname{sh} t \cos t}{t} \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{2}\int_s^{\infty}\left[\frac{s-1}{(s-1)^2+1}-\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right]ds =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\ln\left((s-1)^2+1\right)-\ln\left((s+1)^2+1\right)\right]\Bigg|_s^{\infty} =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\frac{(s-1)^2+1}{(s+1)^2+1}\Bigg|_s^{\infty} = \frac{1}{4}\left(0-\ln\frac{(s-1)^2+1}{(s+1)^2+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\frac{(s+1)^2+1}{(s-1)^2+1}$$

$$\int_0^t \frac{\operatorname{sh} u \cos u}{u}\,du \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{4}\cdot\frac{\ln\frac{(s+1)^2+1}{(s-1)^2+1}}{s}$$

5.)

$$e(t) = e^{-3t}\mu(t-1) = e^{-3(t-1)} e^{-3}\mu(t-1)$$

$$\circ\!-\!\bullet \quad e^{-3}\frac{1}{s+3}e^{-s}$$

$$Z(s) = Ls + \frac{1}{Cs} = s + \frac{1}{s} = \frac{s^2+1}{s}$$

$$I(s) = \frac{E(s)}{Z(s)} = \frac{s}{s^2+1} e^{-3}\frac{1}{s+3} e^{-s}$$

$$= e^{-3}\frac{s}{(s+3)(s^2+1)} e^{-s}$$

$$\frac{s}{(s+3)(s^2+1)} = \frac{A}{s+3} + \frac{Bs+C}{s^2+1} = \dots = -\frac{3}{10}\frac{1}{s+3} + \frac{\frac{3}{10}s+\frac{1}{10}}{s^2+1}$$

$$\left\{\begin{array}{l} A = -\frac{3}{10} \\ B = \frac{3}{10} \\ C = \frac{1}{10} \end{array}\right\} = -\frac{3}{10}\frac{1}{s+3} + \frac{3}{10}\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{10}\frac{1}{s^2+1}$$

$$I(s) = e^{-3}\left[-\frac{3}{10}\frac{1}{s+3} + \frac{3}{10}\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{10}\frac{1}{s^2+1}\right]e^{-s}$$

$$\bullet\!-\!\circ \quad \frac{e^{-3}}{10}\Big[-3e^{-3(t-1)}\mu(t-1) + 3\cos(t-1)\mu(t-1)$$
$$+ \sin(t-1)\mu(t-1)\Big]$$

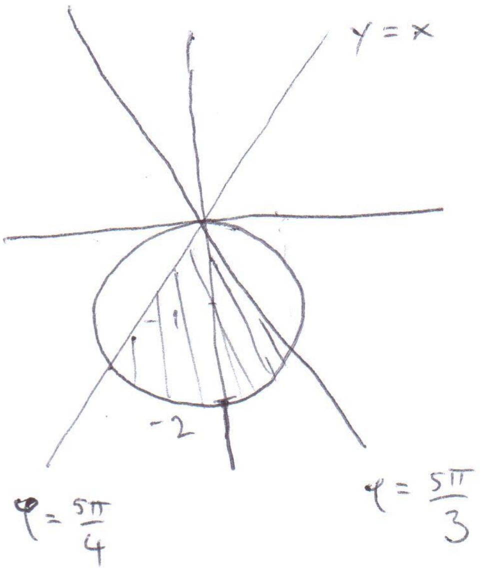
6.

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

$D \dots\quad x^2+y^2 \le -2y$

$y \le x\ ,\ y \le -\sqrt{3}x$

$$x^2+y^2 \le -2y \iff x^2+(y+1)^2 \le 1$$



$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ |J| = r \end{cases}$$

$$x^2+y^2 = -2y$$

$$\iff r^2 = -2r\sin\varphi$$

$$r = -2\sin\varphi$$

$$\iint_D = \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{3}} d\varphi \int_0^{-2\sin\varphi} r^2\,dr = \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{3}} \left(\frac{1}{3}r^3 \Big|_0^{-2\sin\varphi} \right) d\varphi$$

$$= -\frac{8}{3}\int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{3}} \sin^3\varphi\,d\varphi = \left| \begin{array}{l} u = \cos\varphi \\ du = -\sin\varphi\,d\varphi \end{array} \right|$$

$$= \frac{8}{3}\int_{\cos\frac{5\pi}{4}}^{\cos\frac{5\pi}{3}} (1-u^2)\,du = \frac{8}{3}\left(u - \frac{1}{3}u^3\right)\Bigg|_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{8}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3\cdot 8} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{3}\,\frac{\sqrt{8}}{8} \right)$$

$$= \frac{\cancel{8}}{3}\ \frac{12 - 1 + 12\sqrt{2} - 2\sqrt{2}}{\cancel{24}_{\,3}} = \frac{11+10\sqrt{2}}{9}$$

(7) Neka je $f(x,y) = e^{-(4x^2+y^2)}$ te neka je područje D zadano s $D = \{(x,y,z) \mid x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1,\ z = -1\}$. Odredite volumen V tijela ispod plohe $z = f(x,y)$ nad područjem D.

Rj:

$$V = \overbrace{\int_{D'} f(x,y)\,dx\,dy}^{\mathrm{I}} + \underbrace{\overbrace{\int_{D'} dx\,dy}^{\mathrm{II}}}_{\text{DIO ISPOD XY-RAVNINE}}$$

$$D' = \left\{(x,y,z) \mid x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1,\ z = 0\right\}.$$

$$\mathrm{I} = \int_{D'} e^{-(4x^2+y^2)}\,dx\,dy = \begin{bmatrix} \text{ELIPTIČKE KOORDINATE} \\ x = r\cos\varphi \\ y = 2r\sin\varphi \\ J = 2r \end{bmatrix}$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} e^{-(4r^2\cos^2\varphi + 4r^2\sin^2\varphi)} \cdot 2r\,d\varphi\,dr$$

$$= 2\pi \int_0^1 2r e^{-4r^2}\,dr = -\frac{\pi}{2}\int_0^1 (-8re^{-4r^2})\,dr = \begin{bmatrix} u = -4r^2 \\ du = -8r\,dr \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{\pi}{2}\int_0^{-4} e^u\,du = +\frac{\pi}{2}\int_{-4}^0 e^u\,du = +\frac{\pi}{2} e^u \Big|_{-4}^0 = \underline{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}e^{-4}}$$

$$\mathrm{II} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 2r\,d\varphi\,dr = 2\pi \int_0^1 2r\,dr = 2\pi r^2 \Big|_0^1 = \underline{2\pi}$$

$$V = \mathrm{I} + \mathrm{II} = \frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{2}e^{-4} = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}(5 - e^{-4})}}$$

Prvi međuispit iz Matematike 3E

19.11.2012.

1. (5 bodova)
a) Napišite Dirichletove uvjete.
b) Iskažite teorem o konvergenciji Fourierovog reda.
c) Da li funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 0\,, & x \in \mathbb{Z} \\ \frac{1}{1-x^2}\,, & \text{inače} \end{cases}$$

zadovoljava Dirichletove uvjete na intervalu $[0, \pi]$? Detaljno obrazložite.

2. (5 bodova)
Zadana je periodična funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana formulom

$$f(x) = |x - 2|, \quad \text{za } -1 \leq x < 1.$$

a) Skicirajte graf funkcije f na intervalu $(-3, 3)$.
b) Funkciju f razvijte u Fourierov red na intervalu $(-1, 1)$.
c) Skicirajte graf Fourierovog reda funkcije f na intervalu $(-3, 3)$.

3. (5 bodova)
a) Definirajte Fourierov integral funkcije f i njezin kosinusni spektar.
b) Pomoću prikaza funkcije

$$f(x) = \begin{cases} 1\,, & 0 < x < 1 \\ -1\,, & -1 < x < 0 \\ 0\,, & \text{inače} \end{cases}$$

u obliku Fourierovog integrala izračunajte

$$\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x}\, dx.$$

4. (5 bodova)
a) Napišite formulu za računanje Laplaceovog transformata periodične funkcije f s periodom duljine T.
b) Izvedite formulu iz a) dijela zadatka.

5. (5 bodova)
a) Za funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirajte pojam eksponencijalnog rasta.
b) Iskažite kriterij za eksponencijalni rast funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pomoću limesa.
c) Ispitajte za koje vrijednosti realnog broja α nepravi integral

$$\int_0^\infty e^{\alpha t} t \sin 3t \,\mathrm{d}t$$

konvergira.
d) Izračunajte integral iz c) dijela zadatka za sve vrijednosti α za koje integral konvergira.

6. (5 bodova)
Pomoću Laplaceove transformacije riješite jednadžbu

$$f'(t) - 4\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u + 6\int_0^t e^{t-u} f(u)\,\mathrm{d}u = 0, \quad f(0) = 1.$$

7. (5 bodova)
a) Zamijenite redoslijed integracije i skicirajte područje integracije u integralu

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\,dx.$$

b) Izračunajte površinu područja integracije iz a) dijela zadatka.

8. (5 bodova)
a) Izračunajte

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$$

gdje je područje D omeđeno krivuljom $x^2+y^2 = 2ay$, $a > 0$.
b) Skicirajte područje D.

Dozvoljena je upotreba samo pribora za pisanje, praznih papira za pisanje i službenog podsjetnika. Zabranjena je upotreba kalkulatora. Vrijeme pisanja je 120 minuta.

Prvi međuispit iz Matematike 3E
19.11.2012.

1. (5 bodova)

2B a) Napišite Dirichletove uvjete.

2B b) Iskažite teorem o konvergenciji Fourierovog reda.

1B c) Da li funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 0\,, & x \in \mathbb{Z} \\ \frac{1}{1-x^2}\,, & \text{inače} \end{cases}$$

zadovoljava Dirichletove uvjete na intervalu $[0, \pi]$? Detaljno obrazložite.

2. (5 bodova)

Zadana je periodična funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana formulom

$$f(x) = |x - 2|, \quad \text{za} \ -1 \leq x < 1.$$

1B a) Skicirajte graf funkcije f na intervalu $(-3, 3)$.

3B b) Funkciju f razvijte u Fourierov red na intervalu $(-1, 1)$.

1B c) Skicirajte graf Fourierovog reda funkcije f na intervalu $(-3, 3)$.

3. (5 bodova)

2B a) Definirajte Fourierov integral funkcije f i njezin kosinusni spektar.

3B b) Pomoću prikaza funkcije

$$f(x) = \begin{cases} 1\,, & 0 < x < 1 \\ -1\,, & -1 < x < 0 \\ 0\,, & \text{inače} \end{cases}$$

u obliku Fourierovog integrala izračunajte

$$\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x}\, dx.$$

4. (5 bodova)

2B a) Napišite formulu za računanje Laplaceovog transformata periodične funkcije f s periodom duljine T.

3B b) Izvedite formulu iz a) dijela zadatka.

5. (5 bodova)

1B a) Za funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirajte pojam eksponencijalnog rasta.

1B b) Iskažite kriterij za eksponencijalni rast funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pomoću limesa.

1B c) Ispitajte za koje vrijednosti realnog broja α nepravi integral

$$\int_0^\infty e^{\alpha t} t \sin 3t \, dt$$

konvergira.

2B d) Izračunajte integral iz c) dijela zadatka za sve vrijednosti α za koje integral konvergira.

6. (5 bodova)
Pomoću Laplaceove transformacije riješite jednadžbu

$$f'(t) - 4\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u + 6\int_0^t e^{t-u} f(u)\,\mathrm{d}u = 0, \quad f(0) = 1.$$

7. (5 bodova)
3B a) Zamijenite redoslijed integracije i skicirajte područje integracije u integralu

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\,dx.$$

2B b) Izračunajte površinu područja integracije iz a) dijela zadatka.

8. (5 bodova)
4B a) Izračunajte

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$$

gdje je područje D omeđeno krivuljom $x^2 + y^2 = 2ay$, $a > 0$.
1B b) Skicirajte područje D.

Dozvoljena je upotreba samo pribora za pisanje, praznih papira za pisanje i službenog podsjetnika. Zabranjena je upotreba kalkulatora. Vrijeme pisanja je 120 minuta.

Postojanje i konvergencija Fourierovog reda

Kad će trigonometrijski Fourierov red biti jednak funkciji f ? Dokazat ćemo da u (1.8) vrijedi jednakost za široku klasu funkcija važnih u primjenama. Opišimo tu klasu.

Kažemo da je funkcija $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ **po dijelovima neprekinuta** na intervalu $[a,b]$ ako je f neprekinuta na $[a,b]$, ili ima na tom intervalu samo konačno mnogo prekida. Tada postoje točke $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ takve da je f neprekinuta na intervalima (x_{i-1}, x_i), $i = 1, \ldots, n$. Ako u djelišnim točkama postoje i konačni su jednostrani limesi

$$f(a+0), \quad f(x_i \pm 0), \ i = 1, \ldots, n-1, \quad f(b-0)$$

tada prekide nazivamo **prekidima prve vrste**.

U točkama prekida x_i funkcija može imati bilo koju vrijednost.

Ukoliko su svi prekidi prekidi prve vrste, tada je po dijelovima neprekinuta funkcija $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ ograničena na $[a,b]$, jer se na svakom podintervalu $[x_{i-1}, x_i]$ može proširiti do neprekinute funkcije. Zato je f i **apsolutno integrabilna** na $[a,b]$, tj. postoji i konačan je $\int_a^b |f(x)|\,dx$.

Kažemo da je funkcija **po dijelovima glatka** ako postoji rastav intervala $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ takav da je f neprekinuto diferencijabilna na svim intervalima (x_{i-1}, x_i). U ovom slučaju jednostrani limesi $f'(x_i \pm 0)$ ne moraju biti konačni.

1) a)

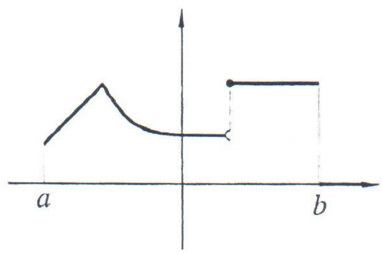
Dirichletovi uvjeti

Kažemo da f zadovoljava **Dirichletove uvjete** na intervalu $[a,b]$, ako vrijedi

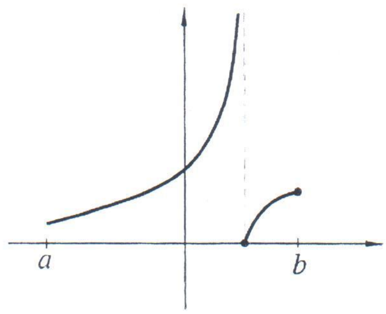
1) f je po dijelovima neprekinuta i njezini su prekidi prve vrste, 1B

2) f je monotona ili ima najviše konačan broj strogih ekstrema. 1B

Ako funkcija f zadovoljava Dirichletove uvjete, tada se interval $[a,b]$ može rastaviti na konačan broj podintervala na kojima je funkcija neprekinuta i monotona, a na rubovima podintervala ima konačne limese.



Sl. 1.8. Primjer funkcije koja zadovoljava Dirichletove uvjete



Sl. 1.9. Primjer funkcije koja ne zadovoljava Dirichletove uvjete

Odgovorimo sada na pitanje: kada postoji i čemu je jednaka suma Fourierovog reda periodične funkcije?

1) b)

Konvergencija Fourierovog reda

Teorem 2. *Neka je f po dijelovima glatka periodična funkcija s periodom 2π koja zadovoljava Dirichletove uvjete. Tada njezin Fourierov red konvergira u svakoj točki $x \in [-\pi, \pi]$ i za sumu $S(x)$ reda vrijedi:*

(i) $S(x) = f(x)$, *ako je f neprekinuta u točki x*

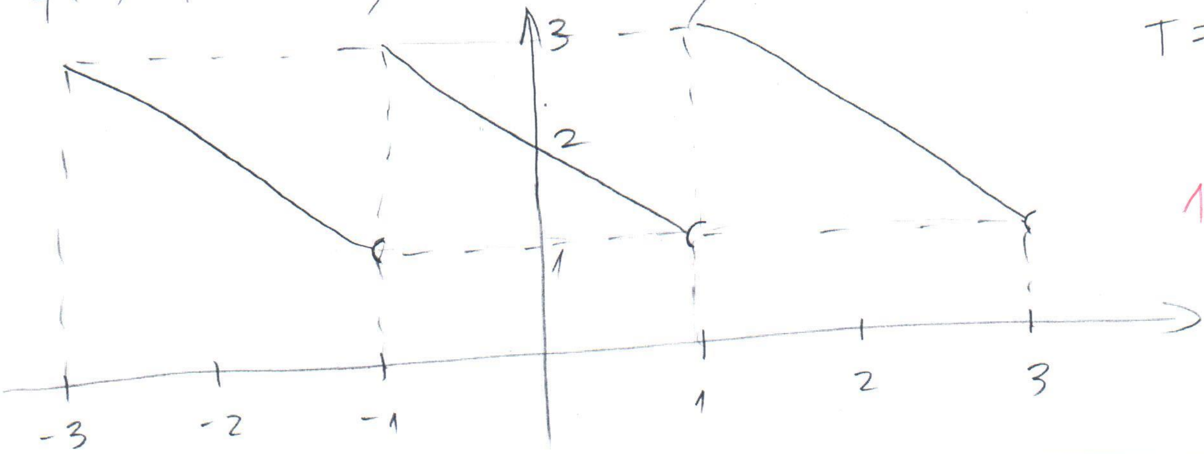
(ii) $S(x) = \frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)]$, *ako je x točka prekida za f.* 2B

1) c) 1B

2) $f(x) = |x-2|$, $-1 \leq x < 1$, PER.

$T = 2$

a)



1B

b) $a_0 = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1}(2-x)\,dx = \ldots = 4$

$a_n = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1}(2-x)\cos n\pi x\,dx = \ldots = \frac{4\sin(n\pi)}{n\pi} = 0, \quad n \geq 1$

$b_n = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1}(2-x)\sin n\pi x\,dx = \ldots = \frac{2n\pi\cos(n\pi) - 2\sin(n\pi)}{n^2\pi^2} =$

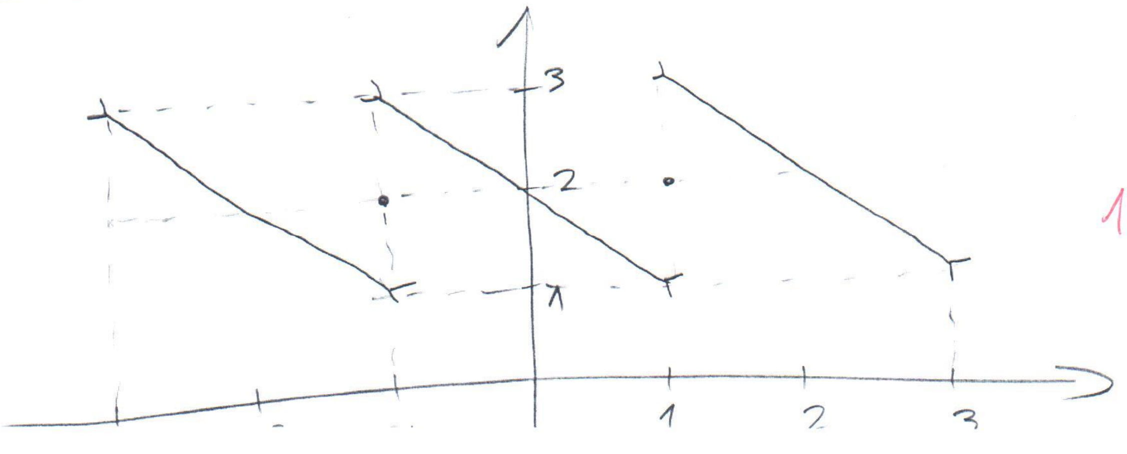
$= \frac{2n\pi(-1)^n}{n^2\pi^2} = \frac{2}{n\pi}(-1)^n, \quad n \geq 1$

2B

$f(x) \sim 2 + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin n\pi x$

1B

c)



1B

3) a)

Ova se formula naziva **Fourierova integralna formula**, a integral s desne strane **Fourierov integral**.

Fourierov integral

Teorem 1. *Ako je $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ po dijelovima glatka na svakom konačnom intervalu i apsolutno integrabilna, tada postoji njezin Fourierov integral i vrijedi*

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\lambda \int_{-\infty}^\infty f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)\,d\xi = \begin{cases} f(x), & \text{ako je } f \text{ neprekinuta u } x, \\ \frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)], & \text{ako je } x \text{ točka prekida za } f. \end{cases} \tag{2.2}$$

Fourierov integral i spektar

Integral

$$\tilde{f}(x) := \int_0^\infty \Big(A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\Big)d\lambda \quad 1B \tag{2.4}$$

naziva se **Fourierov integral** funkcije f. Funkcije $\lambda \mapsto A(\lambda)$, $\lambda \mapsto B(\lambda)$ nazivaju se **kosinusni**, odnosno **sinusni spektar** od f i računaju se formulama

$$\boxed{A(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(\xi)\cos\lambda\xi\,d\xi\,,} \quad 1B \tag{2.5}$$

$$B(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(\xi)\sin\lambda\xi\,d\xi\,. \tag{2.6}$$

3) b) $f(x)$ JE NEPARNA

$A(\lambda) = 0$ 1 B

$$B(\lambda) = \boxed{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t)\sin(\lambda t)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \sin(\lambda t)\,dt =$$

$$= \ldots = \boxed{\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1-\cos\lambda}{\lambda}}$$ 1 B

$$f(x) = \boxed{\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos\lambda}{\lambda}\sin\lambda x\,d\lambda} =$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin^2\frac{\lambda}{2}}{\lambda}\sin\lambda x\,d\lambda$$

ZA $x = \frac{1}{2} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 = \frac{4}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin^2\frac{\lambda}{2}}{\frac{\lambda}{2}}\sin\frac{\lambda}{2}\,d\left(\frac{\lambda}{2}\right) =$

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin^3\frac{\lambda}{2}}{\frac{\lambda}{2}}\,d\left(\frac{\lambda}{2}\right) = \frac{4}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin^3 u}{u}\,du$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x}\,dx = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$ 1 B

RAČUNSKI TOČNO!

8. Preslikavanje periodičnih funkcija

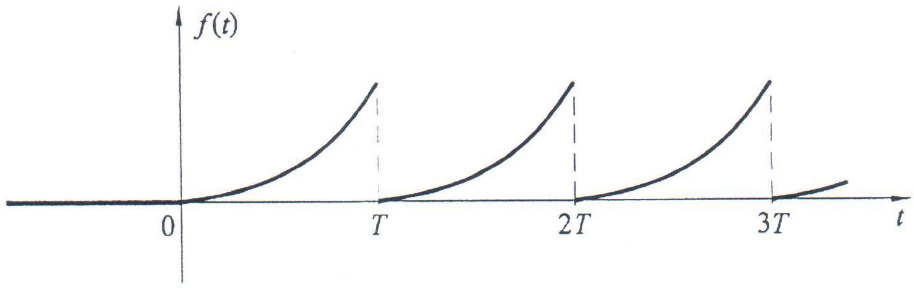
Za original f reći ćemo da je **periodična funkcija**, ako vrijedi $f(t) = 0$ za $t < 0$ i $f(t) = f(t+T)$ za neki $T > 0$ i sve $t > 0$.

Odredimo sliku funkcije f.

4b)

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-st} f(t) \mathrm{d}t =: \sum_{n=0}^{\infty} I_n.$$

3B



Sl. 3.8. Graf periodične funkcije.

Tu smo označili

$$I_n = \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-st} f(t) \mathrm{d}t = \int_0^T e^{-s(\tau+nT)} f(\tau + nT) d\tau$$

$$= e^{-nsT} \int_0^T e^{-s\tau} f(\tau + nT) d\tau$$

$$= e^{-nsT} \int_0^T e^{-s\tau} f(\tau) d\tau = e^{-nsT} I_0.$$

Dakle,

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nsT} I_0 = I_0 \frac{1}{1 - e^{-sT}}.$$

Slika periodične funkcije

4) a) **Teorem 11.** *Slika periodične funkcije f s periodom duljine T računa se formulom*

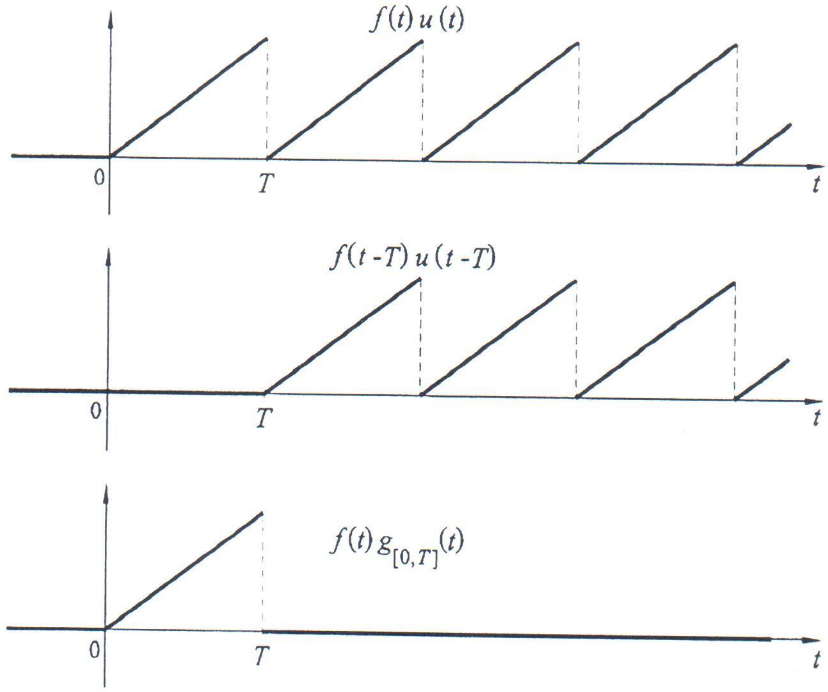
$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) \mathrm{d}t. \qquad 2B \qquad (3.18)$$

– ISKAZ KRIV ⇒ DOKAZ 0B

4) e) ALTERNATIVNO

★★★

Formulu za transformat periodične funkcije možemo izvesti na još jedan način. Pogledajmo sljedeće tri slike:



Sl. 3.9.

Na prvoj je nacrtan graf periodične funkcije $f(t)u(t)$. Na drugoj je taj graf pomaknut za period T udesno, pa on predstavlja funkciju $f(t-T)u(t-T)$. Razlika ovih dviju funkcija daje funkciju čiji je graf nacrtan na trećoj slici, a koja glasi

$$f(t)g_{[0,T]}(t) = f(t)u(t) - f(t-T)u(t-T).$$

Preslikajmo funkcije s obiju strana ove jednakosti u donje područje. Sliku funkcije s lijeve strane dobit ćemo računanjem prema definiciji, a sliku pomaknute funkcije primjenom teorema o pomaku:

$$\int_0^T e^{-st} f(t)\mathrm{d}t = F(s) - F(s) \cdot e^{-sT}.$$

Odavde slijedi tražena formula:

$$F(s) = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t)\mathrm{d}t.$$

3B

5)

a)

1B

3. f je eksponencijalnog rasta, tj. postoje konstante $M > 0$ i a takve da za sve $t > 0$ vrijedi

$$|f(t)| \leqslant Me^{at}. \tag{3.6}$$

Infimum svih konstanti a za koje vrijedi nejednakost (3.6) naziva se **eksponent rasta** funkcije f i označava s a_0.

5)

b) $\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(t)\,dt$ konvergira akko postoji konačan limes $\lim_{t\to\infty} e^{-\alpha t}|f(t)|$

1B

$$\lim_{t\to\infty} e^{\alpha t}|t\sin t| = \lim_{t\to\infty} e^{\alpha t}\, t\, \underbrace{|\sin t|}_{\in[0,1]}$$

c) za $\alpha \geq 0$ $\quad \lim_{t\to\infty} e^{\alpha t}\, t\,|\sin t| = +\infty$

1B

za $\alpha < 0$ $\quad \lim_{t\to\infty} e^{\alpha t}\, t\,|\sin t| = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^{-\alpha t}}|\sin t| = 0$

Dakle, integral konvergira za $\alpha < 0$.

d) ~~Izračunajmo~~

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, t \sin 3t\, dt$$

Tražimo $F(-\alpha)$

$$\sin 3t \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{3}{s^2+9}$$

$$t\sin 3t \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; -\left(\frac{3}{s^2+9}\right)' = \frac{6s}{(s^2+9)^2} \qquad 1B$$

Rješenje: $I = F(-\alpha) = \dfrac{-6\alpha}{(\alpha^2+9)^2}$ $\quad$ 1B

⑥ $f'(t) - 4\int_0^t f(u)\,du + 6\int_0^t e^{t-u} f(u)\,du = 0,\quad f(0)=1$

$$f'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ sF(s) - f(0) = sF(s) - 1$$

$$\int_0^t f(u)\,du \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{F(s)}{s}$$

$$\int_0^t e^{(t-u)} f(u)\,du \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{F(s)}{s-1}$$

U DONJEM PODRUČJU:

$$sF(s) - 1 - 4\frac{F(s)}{s} + 6\frac{F(s)}{s-1} = 0$$

$$F(s)\left(s - \frac{4}{s} + \frac{6}{s-1}\right) = 1$$

$$F(s)\,\frac{s^2(s-1) - 4(s-1) + 6s}{s(s-1)} = 1$$

$$F(s) = \frac{s(s-1)}{s^3 - s^2 + 2s + 4} = \frac{s(s-1)}{(s+1)(s^2-2s+4)} = \frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2-2s+4}$$

2B

RASTAV NA PARCIJALNE RAZLOMKE:

$$\left.\begin{aligned} 1 &= A + B \\ -1 &= -2A + B + C \\ 0 &= 4A + C \end{aligned}\right\} \Rightarrow A = \frac{2}{7},\ B = \frac{5}{7},\ C = \frac{-8}{7}$$

1B

$$F(s) = \frac{2}{7}\cdot\frac{1}{s+1} + \frac{5}{7}\cdot\frac{s-1}{(s-1)^2+(\sqrt{3})^2} - \frac{3}{7}\cdot\frac{1}{(s-1)^2+(\sqrt{3})^2}$$

$$\bullet\!\!-\!\!\circ \left(\frac{2}{7}\cdot e^{-t} + \frac{5}{7}\cdot e^{t}\cdot\cos\sqrt{3}t - \frac{\sqrt{3}}{7}\,e^{t}\cdot\sin\sqrt{3}t\right)u(t)$$

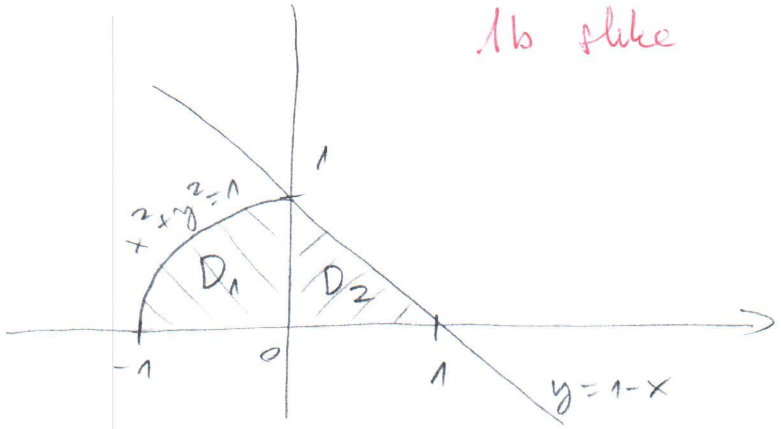
2B

7) a) $0 \le y \le 1$

$$-\sqrt{1-y^2} \le x \le 1-y \Rightarrow y \le 1-x$$

$$1-y^2 = x^2 \Rightarrow x^2+y^2=1$$

1b slike



$$\int_{-1}^{0} dx \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy \quad \text{1b} \quad + \int_{0}^{1} dx \int_{0}^{1-x} f(x,y)\,dx \quad \text{1b}$$

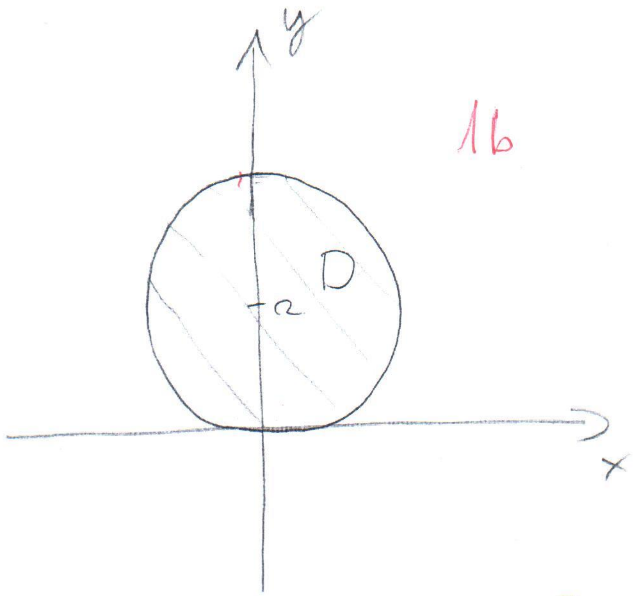
2b

b) $P = \frac{1}{4} \cdot 1^2 \pi + \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} = \frac{\pi + 2}{4}$

8) $x^2+y^2=2ay$, $a>0$

$x^2+y^2-2ay+a^2=a^2$

$x^2+(y-a)^2=a^2$



1b

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \begin{bmatrix} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \\ dx\,dy=r\,dr\,d\varphi \end{bmatrix} =$$

1b granice   1b podint. fj'a

$$\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{2a\sin\varphi} \sqrt{r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi}\cdot r\,dr =$$

$$=\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{2a\sin\varphi} r^2\,dr = \int_0^{\pi} \frac{2^3a^3\sin^3\varphi}{3}\,d\varphi = \frac{8}{3}a^3\int_0^{\pi}(1-\cos^2\varphi)\sin\varphi\,d$$

$$=\frac{8}{3}a^3\left[\int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi - \int_0^{\pi}\cos^2\varphi\sin\varphi\,d\varphi\right] = \begin{bmatrix} \cos\varphi=t \\ -\sin\varphi\,d\varphi=dt \end{bmatrix}$$

$= \ldots \frac{32}{9}a^3$

8) NASTAVAK

1b

$$= \frac{8}{3} a^3 \left[-\cos\pi + \cos 0 - \int_{1}^{-1} t^2(-dt) \right] =$$

$$= \frac{8}{3} a^3 \left[1 + 1 - \int_{-1}^{1} t^2 dt \right] = \frac{8}{3} a^3 \left[2 - \frac{t^3}{3} \Big|_{-1}^{1} \right] =$$

$$= \frac{8}{3} a^3 \left[2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right] = \frac{8}{3} \cdot a^3 \cdot \frac{4}{3} =$$

1b

$$\boxed{= \frac{32}{9} a^3}$$

Prvi međuispit iz Matematike 3E i 3R
21.10.2010.

1. (2 boda)
Odredite temeljni period funkcije

$$f(x) = A + \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \cos \frac{3n\pi x}{4} + D_n \sin \frac{3n\pi x}{4} \right)$$

2. (4 boda)
Razvojem funkcije $f(x) = |\sin x|$ u Fourierov red izračunajte sumu reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$.

3. (4 boda)
a) Prikažite funkciju $f(x) = g_{[-\pi,\pi]}(x)$ pomoću Fourierovog integrala.
b) Skicirajte graf dobivenog prikaza.
c) Izračunajte integral

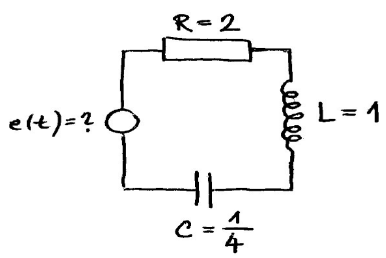
$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \pi\lambda}{\lambda} d\lambda.$$

4. (7 bodova)
Zadana je funkcija $f(t) = t^n \cdot u(t)$.
a) Dokažite da je $f(t)$ original.
b) Pomoću definicije Laplaceove transformacije izračunajte $\mathcal{L}(f(t))$.
c) Korištenjem Teorema o deriviranju slike nađite $\mathcal{L}(f(t))$.
U odgovorima pod b) i c) se pretpostavlja da je poznat Laplaceov transformat funkcije $u(t)$.

5. (4 boda)
Primjenom Laplaceove transformacije riješite diferencijalno - integralnu jednadžbu

$$y'(t) + \int_0^t y(\tau) d\tau = \sin t, \;\; y(0) = 2.$$

6. (4 boda)
Odredite i skicirajte napon na izvoru u strujnom krugu sa slike ako je jakost struje dana s $i(t) = e^{-t} \left(\cos \sqrt{3}t - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \sqrt{3}t \right)$.



Zabranjena je upotreba kalkulatora i šalabahtera. Ispit se piše 1h i 30 min.

Rješenja prvog međuispita iz Matematike 3E i 3R

21.10.2010.

1. (2 boda)
$T = \frac{8}{3}$

2. (4 boda)
$f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2-1}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$

3. (4 boda)
$f(x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\infty} \frac{\sin \lambda\pi \cos \lambda\pi}{\lambda} d\lambda$, $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin \lambda\pi}{\lambda} d\lambda = \frac{\pi}{2}$

4. (7 bodova)
a) Ispitati sva 3 svojstva iz definicije.
b) Knjiga
c) Knjiga

5. (4 boda)
$y(t) = \left(2\cos t + \frac{1}{2} t \sin t\right) u(t)$

6. (4 boda)
$y(t) = \sin(t)u(t) + t\sin(t)u(t) + (t-\pi)\sin(t-\pi)u(t-\pi)$

7. (4 boda) $E(t) = \delta(t)$

Drugi međuispit iz Matematike 3E
02.12.2010.

1. (3 boda) Napišite i dokažite teorem srednje vrijednosti integralnog računa za dvostruki integral.

2. (4 boda) Prelaskom na polarne koordinate izračunajte

$$\iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}},$$

gdje je $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le x,\ x^2+y^2 \le y\}$.

3. (4 boda) U dvostrukom integralu

$$\int_0^1 dx \int_0^{x^{2/3}} f(x,y)\,dy + \int_1^2 dx \int_0^{1+\sqrt{4x-x^2-3}} f(x,y)\,dy,$$

promijenite poredak integracije i skicirajte područje integracije.

4. (4 boda) Izračunajte

$$\iiint_V e^{x+y+z}\,dx\,dy\,dz,$$

gdje je V tetraedar određen vrhovima $A(0,0,0), B(0,0,2), C(1,0,2), D(0,1,2)$.

5. (3 boda) Izračunajte Jacobijan za koordinate zadane s

$$\begin{aligned} x &= r \cdot t \\ y &= \frac{1}{2}(t^2 - r^2) \\ z &= z \end{aligned}$$

Napišite izraz za računanje volumena tijela V u koordinatnom sustavu (x,y,z) i u koordinatnom sustavu (r,t,z).

6. (4 boda) Prelaskom na sferne koordinate izračunajte

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2\,dz.$$

Skicirajte područje integracije u pravokutnim koordinatama.

7. (3 boda)
a) Napišite jednadžbu tangente na krivulju C zadanu s

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t), \qquad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

u točki $T_0 \in C$ za koju je $t = t_0$.
b) Izračunajte vektor smjera tangente na krivulju Γ zadanu s

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{4-4t^2} \\ y &= t \\ z &= 1-t, \qquad t \in [-1,1] \end{aligned}$$

u točki $T_0 \in \Gamma$ za koju je $t = 0$.

RJEŠENJA DRUGOG MEĐUISPITA IZ MAT 3E

02.12.2010.

1) KNJIGA 3, STR 12.

---

2) $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\sin\varphi} \frac{r\,dr}{\sqrt{1-r^2}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\cos\varphi} \frac{r\,dr}{\sqrt{1-r^2}} = -\sqrt{2} + \frac{\pi}{2}$$

---

3) $$\int_0^1 dy \int_{y^{\frac{3}{2}}}^{2} f(x,y)\,dx + \int_1^2 dy \int_{2-\sqrt{2y-y^2}}^{2} f(x,y)\,dx$$

---

4) $$\int_0^1 e^x dx \int_0^{1-x} e^y dy \int_{2x+2y}^{2} e^z dz = -\frac{2}{9}e^3 + e^2 - \frac{1}{9}$$

---

5) $J = t^2 + r^2$, $V = \iiint_V dx\,dy\,dz = \iiint_{V'} (t^2+r^2)\,dr\,dt\,dz$

---

6) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r^2\cos^2\theta \cdot r^2 \sin\theta \, dr = \frac{\pi}{15}(2\sqrt{2}-1)$$

---

7) a) KNJIGA 3, STR 12. I 13. (1 BOD)

b) $\vec{n} = \vec{j} - \vec{k}$ (2 BODA)

Prvi međuispit iz Matematike 3E i 3R
21.10.2009.

1. (4 boda)
Dokažite da je sustav funkcija

$$1, \cos(\pi x), \sin(\pi x), \ldots, \cos(n\pi x), \sin(n\pi x), \ldots \quad n \in \mathbb{N}$$

ortogonalan na intervalu $[-1, 1]$.

2. (4 boda)
a) **(2b)** Razvijte u Fourierov red funkciju zadanu na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ formulom

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \ -\frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3} \\ -1 & , \ -\pi < x < -\frac{2\pi}{3}, \ \frac{2\pi}{3} < x < \pi \end{cases}$$

b) **(1b)** Nacrtajte graf dobivenog Fourierovog reda.
c) **(1b)** Izračunajte sumu reda

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \ldots.$$

3. (4 boda)
Funkciju $f(x) = e^{-|x|}$ prikažite pomoću Fourierovog integrala.

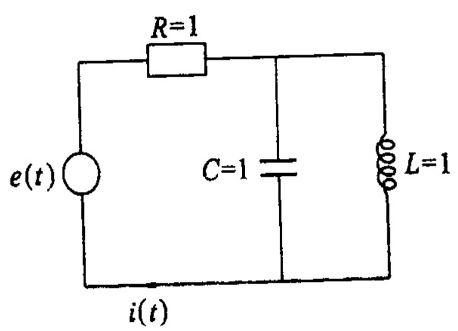
4. (1 bod)
Kada za funkciju $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ kažemo da je eksponencijalog rasta?

5. (4 boda)
a) (**2b**) Izvedite formulu za Laplaceovu transformaciju periodičke funkcije f temeljnog perioda T.
b) (**2b**) Izračunajte Laplaceovu transformaciju funkcije $f(x) = \mathrm{sgn}(\cos x)$.

6. (4 boda)
Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$y''(t) + y(t) = 2\cos t \cdot g_{[0,\pi]}(t)$$
$$y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

7. (4 boda)
Izračunajte struju $i(t)$ u strujnom krugu sa slike uz početni napon $e(t) = u(t-3)$.



Zabranjena je upotreba kalkulatora i šalabahtera. Ispit se piše 1h i 30 min.

Rješenja prvog međuispita iz Matematike 3E i 3R
21.10.2009.

1. (4 boda)
Potrebno je pokazati

- $\int\limits_{-1}^{1} 1 \cdot \sin(n\pi x) = 0$
- $\int\limits_{-1}^{1} 1 \cdot \cos(n\pi x) = 0$
- $\int\limits_{-1}^{1} \cos(n\pi x)\sin(m\pi x) = 0$
- $\int\limits_{-1}^{1} \cos(n\pi x)\cos(m\pi x) = 0, m \neq n$
- $\int\limits_{-1}^{1} \sin(n\pi x)\sin(m\pi x) = 0, m \neq n$

2. (4 boda)
a) (**2b**) $S(x) = \frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{\pi}\left(\cos x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos 4x - \frac{1}{5}\cos 5x + ...\right)$
c) (**1b**) Suma je jednaka $S(0) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

3. (4 boda)
$f(x) = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos(\lambda x)}{1+\lambda^2}$

4. (1 bod)
Knjiga str 67.

5. (4 boda)
a) (**2b**) Knjiga, str 81.
b) (**2b**) $F(s) = \frac{1}{s(1-e^{-2\pi s})}\left(1 - 2e^{-\frac{\pi}{2}s} + 2e^{-\frac{3\pi}{2}s} - e^{-2\pi s}\right)$

6. (4 boda)
$y(t) = \sin(t)u(t) + t\sin(t)u(t) + (t-\pi)\sin(t-\pi)u(t-\pi)$

7. (3 boda) $i(t) = u(t-3) - \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-3)\right)u(t-3)e^{-\frac{1}{2}(t-3)}$

Drugi međuispit iz Matematike 3E
02.12.2009.

1. (3 boda)
Skicirajte područje integracije te izračunajte integral

$$\iint_D (x^2 + y)\,dx\,dy,$$

gdje je D ograničeno područje omeđeno parabolama $y = x^2$ i $x = y^2$.

2. (4 boda)
a) (**1b**) Iskažite teorem srednje vrijednosti integralnog računa za dvostruki integral.
b) (**3b**) Neka je $f(x, y) = \sqrt{5 - x^2 - y^2}$, a područje D neka je krug $x^2+y^2 \leq 1$ u ravnini $z = 0$. Odredite visinu valjka baze D čiji je volumen V jednak volumenu tijela ispod plohe $z = f(x, y)$ nad područjem D. Koliko iznosi volumen V?

3. (3 boda)
Izračunajte

$$\iiint_V x\,dx\,dy\,dz,$$

gdje je V tetraedar određen vrhovima $A(1, 1, 0), B(0, 2, 0), C(0, 0, 1), D(0, 0, 0)$.

4. (5 bodova)
Izračunajte

$$\iiint_V \frac{y^2}{\sqrt{(x-2)^2 + y^2 + z^2}}\,dx\,dy\,dz,$$

pri čemu je V kugla $(x - 2)^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

5. (5 bodova)
Skicirajte tijelo omeđeno plohama $z = x^2+y^2$ i $z = x+y$ te izračunajte njegov volumen.

6. (5 bodova)
a) (**2b**) Dokažite formulu

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}$$

za deriviranje vektorske funkcije $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$.
b) (**3b**) Napišite jednadžbu tangente na krivulju koja je zadana kao presjek ploha $x^2 + y^2 = 1$ i $2y + z = 1$, u točki $T_0\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1 - \sqrt{3}\right)$.

Rješenja drugog međuispita iz Matematike 3E

02.12.2009.

1. (3 boda)

$$\iint_D (x^2 + y)\,dx\,dy = \frac{33}{140}.$$

2. (4 boda)

a) (**1b**) "Višestruki integrali", str. 12, Teorem 7.

b) (**3b**) Primjenom geometrijske interpretacije Teorema 7 dobijemo

$$h = \frac{V}{\mu(D)} = \frac{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy}{\pi} = \frac{2}{3}(5\sqrt{5} - 8).$$

$$V = \frac{2\pi}{3}(5\sqrt{5} - 8).$$

3. (3 boda)

$$\iiint_V x\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{12}.$$

4. (5 bodova)

$$\iiint_V \frac{y^2}{\sqrt{(x-2)^2 + y^2 + z^2}}\,dx\,dy\,dz = \frac{\pi}{3}.$$

5. (5 bodova)

$$V = \iiint_V dx\,dy\,dz = \frac{\pi}{8}.$$

6. (5 bodova)

a) (**2b**) "Vektorska analiza", str. 7, 1.3, dokaz na dnu stranice.

b) (**3b**)

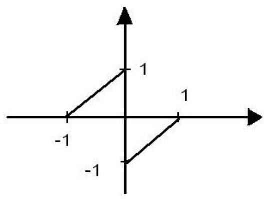
$$x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}u, \quad y = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}u, \quad z = 1 - \sqrt{3} - u, \qquad u \in \mathbb{R}.$$

Prvi međuispit iz Matematike 3E i 3R

16.10.2008.

1. (2 boda)

Periodičku funkciju perioda $T = 2$, zadanu slikom na temeljnom periodu, razvijte u Fourierov red.



2. (5 bodova)

Neka je $S(x) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(n\pi x)$ razvoj funkcije $f(x) = x^2, -1 < x < 1$, u Fourierov red.

a) (**2b**) Pomoću danog razvoja i Parsevalove jednakosti izračunajte $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

b) (**3b**) Pomoću danog razvoja nađite Fourierov red funkcije $f(x) = x^3, -1 < x < 1$. Skicirajte graf dobivenog Fourierovog reda.

3. (3 boda)

Funkciju $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi}{2} x\,, & |x| \le 3 \\ 0 & , \text{inače} \end{cases}$ prikažite pomoću Fourierovog integrala. Pomoću tog prikaza izračunajte integral $\int\limits_0^{\infty} \frac{\cos 3u}{4u^2 - \pi^2}\, du$.

4. (4 boda)

a) (**2b**) Definirajte original Laplaceove transformacije.

b) (**2b**) Primjenom Laplaceove transformacije izračunajte $\int\limits_0^{\infty} e^{-2t} \frac{\text{sh} t}{t}\, dt$.

5. (4 boda)

a) (**1b**) Definirajte konvoluciju originala i iskažite teorem o konvoluciji.

b) (**2b**) Odredite original za $F(s) = \frac{s}{(s^2+1)^2}$

c) (**1b**) Odredite original za $F(s) = \frac{s \cdot e^{-4s}}{(s^2+1)^2}$

6. (4 boda)

a) (**2b**) Dokažite teorem o derivaciji originala za prvu derivaciju.

b) (**2b**) Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$y'(t) - 5y(t) = e^{1-t}$$

$$y(0) = 3.$$

7. (3 boda)

Pomoću Laplaceove transformacije izračunajte i skicirajte struju $i(t)$ strujnog kruga zadanog slikom uz priključeni napon $e(t)$.

Rješenja prvog međuispita iz Matematike 3E i 3R
16.10.2008.

1. (2 boda)
$a_n = 0$
$b_n = 2\int\limits_0^1 (x-1)\sin(n\pi x)dx = ... = -\frac{2}{n\pi}$
$f(x) \sim -\frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(n\pi x)$

2. (5 bodova)
a) (**2b**) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$
b) (**3b**) $f(x) \sim \frac{2}{\pi^3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2\pi^2+6}{n^3}\sin n\pi x$

3. (3 boda)
$B(\lambda) = 0$
$A(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi d\xi = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^3 \cos\frac{\pi}{2}\xi\cos\lambda\xi d\xi = ... = \frac{4\cos 3\lambda}{4\lambda^2-\pi^2}$
$f(x) = \int\limits_0^{\infty}\frac{4\cos 3\lambda}{4\lambda^2-\pi^2}\cos\lambda x dx$
$f(0) = 1 = 4\int\limits_0^{\infty}\frac{4\cos 3\lambda}{4\lambda^2-\pi^2}d\lambda \Rightarrow I = \frac{1}{4}$

4. (4 boda)
a) (**2b**) str 67.
b) (**2b**) $\frac{sh\quad t}{t} \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad \int\limits_s^{\infty}\frac{dp}{p^2-1} = \frac{1}{2}ln|\frac{s+1}{s-1}|$
$I = \frac{1}{2}ln|\frac{s+1}{s-1}|$
$F(2) = \frac{1}{2}ln3$

5. (4 boda)
a) (**1b**) str 93.
b) (**2b**) $F(s) = \frac{1}{2}t\sin tu(t)$
c) (**1b**) $F(s) = \frac{1}{2}(t-4)\sin(t-4)u(t-4)$

6. (4 boda)
a) (**2b**) str 76.
b) (**2b**) $y(t) = (3e^{5t} + \frac{e}{6}e^{5t} - \frac{e}{6}e^{-t})u(t)$

7. (3 boda) $i(t) = \delta(t) - t[u(t) - u(t-1)]$

Drugi međuispit iz Matematike 3E
27.11.2008.

1. (3 boda)
Promijenite poredak integracije u integralu

$$\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x,y)\,dy,$$

i skicirajte područje integracije.

2. (3 boda)
Izračunajte integral

$$\iint_D \sqrt{4x^2+y^2-6y+17}\,dx\,dy,$$

gdje je D područje određeno nejednadžbama $x^2+\frac{(y-3)^2}{4}\leq 1$ i $x\geq 0$.

3. (5 bodova)
a) (**1b**) Definirajte Jacobijan za $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$.
b) (**1b**) Izračunajte Jacobijan za $x=u+v^2$, $y=uv-u^2$.
c) (**2b**) U integral

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

po području D omeđenom pravcima $x+y=1$, $x+y=3$, $x-y=-1$, $x-y=1$ uvedite promjenu koordinata $u=x+y$, $v=x-y$ i postavite granice integracije.
d) (**1b**) Nađite jednadžbu plohe $x^2+y^2+z^2=5$ u koordinatama

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta\sin\varphi \\ y &= r\cos\theta\cos\varphi \\ z &= r\sin\theta \end{aligned}$$

4. (4 boda)
Izračunajte

$$\iiint_V x\,dV,$$

ako je V tetraedar s vrhovima $A(0,0,0)$, $B(0,0,1)$, $C(1,0,0)$, $D(0,2,0)$.

5. (4 boda)
Izračunajte volumen tijela omeđenog plohama $z=\sqrt{x^2+y^2}$ i
$z=2-3(x^2+y^2)$.

6. (6 bodova)
a) (**2b**) Odredite vektor smjera tangente na krivulju zadanu s

$$\mathbf{r}(t)=\frac{\cos\pi t}{t}\mathbf{i}+\frac{\sin\pi t^2}{\pi}\mathbf{j}+t^3\mathbf{k}$$

u točki za koju je $t=1$.
b) (**2b**) Odredite kosinus kuta između vektora smjera tangente izračunatog u a) i osi x.
c) (**2b**) Parametrizirajte krivulju $(x-1)^2+y^2=1$ orijentiranu u smjeru suprotnom od gibanja kazaljke na satu.

Rješenja drugog međuispita iz Matematike 3E
27.11.2008.

1. (3 boda)

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\frac{y^2}{2}}^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx + \int\limits_0^1 dy \int\limits_{1+\sqrt{1-y^2}}^{2} f(x,y)\,dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_{\frac{y^2}{2}}^{2} f(x,y)\,dx$$

2. (3 boda)
Pomaknute eliptičke koordinate:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= 3+2r\sin\varphi \\ dxdy &= 2r \end{aligned}$$

$$\iint_D \sqrt{4x^2+y^2-6y+17}\,dx\,dy = \cdots = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^1 4r\sqrt{r^2+2}\,dr = \cdots = \frac{4\pi}{3}\left(3\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right)$$

3. (5 bodova)
a) (**1b**)

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

b) (**1b**)

$$J = \cdots = u + 4uv - 2v^2$$

c) (**2b**)

$$x = \frac{u+v}{2}, y = \frac{u-v}{2}, J = \cdots = -\frac{1}{2}$$

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D'} f\left(x(u,v),y(u,v)\right)|J|\,du\,dv = \frac{1}{2}\int\limits_0^3 du \int\limits_{-1}^1 f\left(\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2}\right)dv$$

d) (**1b**)

$$r = \sqrt{5}$$

4. (4 boda)
Normala na ravninu BCD je $\mathbf{n} = 2\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k}$.
Jednadzba ravnine je $z = 1-x-\frac{y}{2}$.

$$\iiint_V x\,dV = \int\limits_0^1 x\,dx \int\limits_0^{2-2x} dy \int\limits_0^{1-x-\frac{y}{2}} dz = \cdots = \frac{1}{12}$$

5. (4 boda)
Cilindrične koordinate:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ z &= z \\ dxdydz &= rd\varphi drdz \end{aligned}$$

Presjek stošca i paraboloida: $x^2 + y^2 = \frac{4}{9}$, $z = \frac{2}{3}$.
Stožac $z = r$ i paraboloid $z = 2 - 3r^2$.

$$\iiint_V dV = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{2}{3}} r\,dr \int\limits_r^{2-3r^2} dz = \cdots = \frac{32}{81}\pi$$

6. (6 bodova)

a) (**2b**)

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{-\pi t \sin \pi t - \cos \pi t}{t^2}\mathbf{i} + 2t \cos \pi t^2 \mathbf{j} + 3t^2 \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}'(1) = \cdots = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

b) (**2b**)

$$\cos \varphi = \frac{|(\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \cdot \mathbf{i}|}{|\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}| \cdot |\mathbf{i}|} = \cdots = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

c) (**2b**)

$$\begin{aligned} x &= 1 + \cos t \\ y &= \sin t \\ & \quad t \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

Prvi međuispit iz Matematike 3E i 3R
18.10.2007.

1. (3 boda)
a) (**1b**) Iskažite Dirichletove uvjete.
b) (**1b**) Da li funkcija $f(x) = \frac{1}{1-x}$ zadovoljava Dirichletove uvjete na segmentu $[0, 2]$? Obrazložite!
c) (**1b**) Iskažite teorem o konvergenciji Fourierovog reda.

2. (3 boda)
Zadana je funkcija $f(x) = \begin{cases} 1\,, & x \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle \\ -1\,, & x \in \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle \end{cases}$
a) (**2b**) Razvijte f po kosinus funkcijama u trigonometrijski Fourierov red.
b) (**1b**) Pomoću Parsevalove jednakosti izračunajte $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

3. (4 boda)
Funkciju $f(x) = \begin{cases} 1 - |x|\,, & x \in [-1, 1] \\ 0 & , \text{inače} \end{cases}$ prikažite pomoću Fourierovog integrala, te koristeći taj prikaz izračunajte integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx.$$

4. (3 boda)
Pomoću Laplaceove transformacije izračunajte integral

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} x^2 \cos x \, dx.$$

5. (4 boda)
Primjenom Laplaceove transformacije riješite diferencijalnu jednadžbu
$y'' + y = f(t)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, u kojoj je funkcija f zadana slikom 1.

6. (5 boda)
a) (**1b**) Definirajte konvoluciju dviju funkcija.
b) (**2b**) Neka su f i g originali. Dokažite da je $f * g$ eksponencijalnog rasta.
c) (**2b**) Riješite integralnu jednadžbu.

$$y(t) = 3 \sin t + 2 \int_0^t \cos(t - \tau) y(\tau)\, d\tau.$$

7. (3 boda)
Nađite struju $i(t)$ električnog kruga zadanog slikom 2 uz priključeni napon $e(t) = 1 + \cos 2t$.

Rješenja prvog međuispita iz Matematike 3E i 3R
18.10.2007.

1. (3 boda)
a) (**1b**) Funkcija $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ zadovoljava Dirichletove uvjete na intervalu $[a, b]$, ako vrijedi
1) f je po dijelovima neprekinuta i njezini su prekidi prve vrste,
2) f je monotona ili ima najviše konačan broj strogih ekstrema.

b) (**1b**) Funkcija $f(x) = \frac{1}{1-x}$ ne zadovoljava Dirichletove uvjete na segmentu $[0, 2]$ jer u točki 1 ima prekid koji nije prekid prve vrste.

c) (**1b**) **Teorem o konvergenciji Fourierovog reda.**
Neka je f po dijelovima glatka periodična funkcija s periodom 2π koja zadovoljava Dirichletove uvjete. Tada njezin Fourierov red konvergira u svakoj točki $x \in [-\pi, \pi]$ i za sumu $S(x)$ reda vrijedi:
(i) $S(x) = f(x)$, ako je f neprekinuta u točki x
(ii) $S(x) = \frac{1}{2}[f(x - 0) + f(x + 0)]$, ako je x točka prekida za f.

2. (3 boda)
a) (**2b**) Razvijamo u red parno proširenje funkcije f. $T = 2$, $L = 1$, $b_n = 0$.

$$a_0 = \frac{2}{1}\left[\int_0^{\frac{1}{2}} 1\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} (-1)\,dx\right] = 2\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right] = 0$$

$$a_n = \frac{2}{1}\left[\int_0^{\frac{1}{2}} \cos(n\pi x)\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} (-1)\cos(n\pi x)\,dx\right] = 2\left[\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\Big|_{x=0}^{\frac{1}{2}} - \frac{\sin n\pi x}{n\pi}\Big|_{x=\frac{1}{2}}^{1}\right] = \frac{4}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Uočavamo

$$\Rightarrow a_{2k} = 0, \quad a_{2k+1} = \frac{4}{(2k+1)\pi} \cdot (-1)^k$$

pa je traženi trigonometrijski Fourierov red

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi} \cdot \frac{(-1)^k}{2k+1} \cos[(2k+1)\pi x].$$

b) (**1b**) Parsevalova jednakost neposredno daje:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi(2k+1)}\right)^2 = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} 1^2\,dx \Rightarrow \frac{16}{\pi^2} \cdot s = 2 \Rightarrow s = \frac{\pi^2}{8},$$

gdje smo sa s označili traženu sumu.

3. (4 boda)
$f(x)$ je očito parna funkcija,

$$\Rightarrow B(\lambda) = 0, \quad f(x) = \int_0^\infty A(\lambda)\cos(\lambda x)\,d\lambda$$

$$\begin{aligned}
A(\lambda) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(\xi)\cos(\lambda\xi)\,d\xi \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^1 (1-\xi)\cos(\lambda\xi)\,d\xi \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^1 \cos(\lambda\xi)\,d\xi - \frac{2}{\pi}\int_0^1 \underbrace{\xi}_{u}\,\underbrace{\cos(\lambda\xi)\,d\xi}_{dv} \\
&= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sin(\lambda\xi)}{\lambda}\Big|_{\xi=0}^{1} - \frac{2}{\pi}\cdot\left[\xi\frac{\sin(\lambda\xi)}{\lambda}\Big|_{\xi=0}^{1} - \int_0^1 \frac{\sin(\lambda\xi)}{\lambda}\,d\xi\right] \\
&= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sin\lambda}{\lambda} - \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin\lambda}{\lambda} + \frac{\cos(\lambda\xi)}{\lambda^2}\Big|_{\xi=0}^{1}\right] \\
&= \frac{2}{\pi\lambda^2}(1-\cos\lambda)
\end{aligned}$$

Fourierov integral zadane funkcije f je:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos\lambda}{\lambda^2}\cos(\lambda x)\,d\lambda.$$

Ako uvrstimo točku $x=0$, iz

$$f(0)=1 \Rightarrow 1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos\lambda}{\lambda^2}\,d\lambda = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{2\sin^2\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{\lambda^2}\,d\lambda = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin^2\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2}\,d\left(\frac{\lambda}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\lambda}{2} = x\right| \Rightarrow 1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx \Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

4. (3 boda)

$$\cos t \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{s}{s^2+1}$$

$$f(t) := t^2 \cos t \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad (-1)^2 \left(\frac{s}{s^2+1}\right)'' = \left(\frac{1-s^2}{(s^2+1)^2}\right)' = \cdots = \frac{2s\cdot(s^2-3)}{(s^2+1)^3} =: F(s)$$

$$f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(s) \qquad \Rightarrow \qquad F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt,$$

pa

$$s = \frac{1}{2} \Rightarrow \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} x^2 \cos x\, dx = F(\frac{1}{2}) = \cdots = -\frac{176}{125}$$

5. (4 boda)

$$y'' + y = f(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

$$f(t) = (u(t) - u(t-1)) - u(t-1) = u(t) - 2u(t-1) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{s} - 2\frac{e^{-s}}{s} = F(s)$$

Preslikavanjem jednadžbe u donje područje dobivamo:

$$s^2 Y(s) - s\cdot y(0) - y'(0) + Y(s) = F(s)$$

$$s^2 Y(s) - s + Y(s) = \frac{1}{s}\left(1 - 2e^{-s}\right)$$

$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2+1)} \cdot \left(1 - 2e^{-s}\right) + \frac{s}{s^2+1}$$

$$Y(s) = \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}\right) \cdot \left(1 - 2e^{-s}\right) + \frac{s}{s^2+1}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s}e^{-s} + \frac{2s}{s^2+1}e^{-s} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad u(t) - 2u(t-1) + 2\cos(t-1)u(t-1) = y(t)$$

6. (5 boda)

a) (**1b**)

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau = [\text{alternativno}] = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau$$

b) (**2b**) f i g su originali $\Rightarrow$ f i g su eksponencijalnog rasta

$$\begin{aligned} |(f*g)(t)| &\leq \int_0^t |f(\tau)| \cdot |g(t-\tau)|\, d\tau \leq \begin{bmatrix} \exists M_1, M_2 \\ \exists a_1, a_2 \end{bmatrix} \\ &\leq M_1 M_2 \int_0^t e^{a_1\tau} e^{a_2(t-\tau)}\, d\tau \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= M_1 M_2 e^{a_2 t} \cdot \int\limits_0^t e^{(a_1-a_2)\tau}\, d\tau \\
&= M_1 M_2 e^{a_2 t} \cdot \frac{1}{a_1 - a_2} \left[e^{(a_1-a_2)t} - 1 \right] \\
&= \frac{M_1 M_2}{a_1 - a_2} \left(e^{a_1 t} - e^{a_2 t} \right) = [a = \max\{a_1, a_2\}] \\
&\leq \underbrace{\frac{2 M_1 M_2}{a_1 - a_2}}_{M} e^{at} = M e^{at}
\end{aligned}
$$

c) (**2b**)

$$y(t) = 3 \sin t + 2 \int\limits_0^t \cos(t-\tau) y(\tau)\, d\tau$$

Slika jednadžbe u donjem području je:

$$Y(s) = 3 \cdot \frac{1}{s^2+1} + 2 \cdot \frac{s}{s^2+1} \cdot Y(s)$$

$$Y(s) \left(1 - \frac{2s}{s^2+1} \right) = \frac{3}{s^2+1}$$

$$Y(s)(s^2 - 2s + 1) = 3$$

$$Y(s) = \frac{3}{(s-1)^2} \quad \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ \quad 3te^t = y(t)$$

7. (3 boda)

$$e(t) = 1 + \cos 2t \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+4} = E(s)$$

$$Z(s) = \frac{1}{\frac{1}{Ls} + \frac{1}{\frac{1}{Cs}}} = \begin{bmatrix} L = 1 \\ C = 1 \end{bmatrix} = \cdots = \frac{s}{s^2+1}$$

$$I(s) = \frac{E(s)}{Z(s)} = \frac{s^2+1}{s} \left(\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+4} \right) = \frac{s^2+1}{s^2} + \frac{s^2+1}{s^2+4} = 1 + \frac{1}{s^2} + 1 - \frac{3}{s^2+4}$$

$$I(s) = 2 + \frac{1}{s^2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{s^2+4} \quad \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ \quad 2\delta(t) + tu(t) - \frac{3}{2} \sin(2t) u(t) = i(t)$$

Drugi međuispit iz Matematike 3E

29.11.2007.

1. (4 boda)

Postavite granice integracije za oba poretka u integralu

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy,$$

gdje je $D = \left\{(x,y) : -1 \le y \le 1,\ 0 \le x \le y^2\right\}$.

2. (3 boda)

Izračunajte površinu lika omeđenog kardioidom $r = 1 + \sin\varphi$.

3. (3 boda)

Izračunajte

$$\iiint_V x\,dx\,dy\,dz,$$

gdje je V tetraedar s vrhovima $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,2,1)$.

4. (3 boda)

Prijelazom na cilindrične koordinate postavite granice integracije za integral

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x,y,z)\,dz.$$

5. (5 bodova)

a) (**1b**) Napišite vezu između pravokutnih Kartezijevih koordinata i sfernih koordinata.

b) (**1b**) Izračunajte Jacobijan za sferne koordinate.

c) (**3b**) Izračunajte integral

$$\iiint_V \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\,dx\,dy\,dz,$$

pri čemu je V tijelo omeđeno plohom $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 9$.

6. (7 bodova)

a) (**1b**) Napišite jednadžbu tangente na krivulju zadanu s

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

u točki za koju je $t = t_0$.

b) (**1b**) Izračunajte jednadžbu tangente na krivulju zadanu s

$$\mathbf{r}(t) = (2\cos t)\mathbf{i} + (3\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

u točki za koju je $t = \pi$.

c) (**3b**) Napišite parametrizaciju krivulje zadane kao presjek ploha $z = x^2 + y^2$ i $2x + z = 0$.

d) (**2b**) Izračunajte derivaciju $\mathbf{r}'(t)$ i odredite parametar t tako da je $|r'(t)| = \sqrt{5}$, ako je

$$\mathbf{r}(t) = (2\cos t)\mathbf{i} + (2\sin t)\mathbf{j} - t^2\mathbf{k}.$$

Rješenja drugog međuispita iz Matematike 3E
29.11.2007.

1. (4 boda)

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-1}^{-\sqrt{x}} f(x,y)\,dy + \int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt{x}}^{1} f(x,y)\,dy$$

$$\int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_0^{y^2} f(x,y)\,dx$$

2. (3 boda)

$$P = \iint_D dx\,dy = \iint_{D'} r\,dr\,d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{1+\sin\varphi} r\,dr = \cdots = \frac{3\pi}{2}$$

3. (3 boda)

$$\iiint_V x\,dx\,dy\,dz = \int\limits_0^1 x\,dx \int\limits_0^{2-2x} dy \int\limits_0^{\frac{y}{2}} dz = \cdots = \frac{1}{12}$$

4. (3 boda)

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^1 dr \int\limits_r^1 g(\varphi, r, z) r\,dz$$

5. (5 bodova)

a) (**1b**)

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}$$

b) (**1b**)

$$J = \cdots = r^2 \sin\theta$$

c) (**3b**)

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta + 3 \end{aligned}$$

$$\iiint_V \left(x^2+y^2+z^2\right)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} d\theta \int\limits_0^3 \left(r^2 + 6r\cos\theta + 9\right) r^2 \sin\theta\,dr = \cdots = \frac{2592\pi}{5}$$

6. (7 bodova)

a) (**1b**)

$$\mathbf{r}(u) = (x(t_0)\mathbf{i} + y(t_0)\mathbf{j} + z(t_0)\mathbf{k}) + \left(x'(t_0)\mathbf{i} + y'(t_0)\mathbf{j} + z'(t_0)\mathbf{k}\right)\cdot u, \quad u \in \mathbb{R}$$

b) (**1b**)

$$\mathbf{r}'(t) = (-2\sin t)\mathbf{i} + (3\cos t)\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}(\pi) = \cdots = -2\mathbf{i} + \pi\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}'(\pi) = \cdots = -3\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}(u) = (-2\mathbf{i} + \pi\mathbf{k}) + (-3\mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot u, \quad u \in \mathbb{R}$$

c) (**3b**)

$$z = x^2 + y^2, \quad 2x + z = 0 \quad \Rightarrow \quad z = -2x$$

$$x^2 + y^2 = -2x \quad \Rightarrow \quad x^2 + 2x + 1 + y^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad (x+1)^2 + y^2 = 1$$

$$x = -1 + \cos t, \quad y = \sin t \quad \Rightarrow \quad z = 2 - 2\cos t, \qquad t \in [0, 2\pi]$$

d) (**2b**)

$$\mathbf{r}'(t) = (-2\sin t)\mathbf{i} + (2\cos t)\mathbf{j} - 2t\mathbf{k}$$

$$\sqrt{5} = \left|r'(t)\right| = \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2 + (-2t)^2} \quad \Rightarrow \quad \cdots \quad \Rightarrow \quad t_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$$