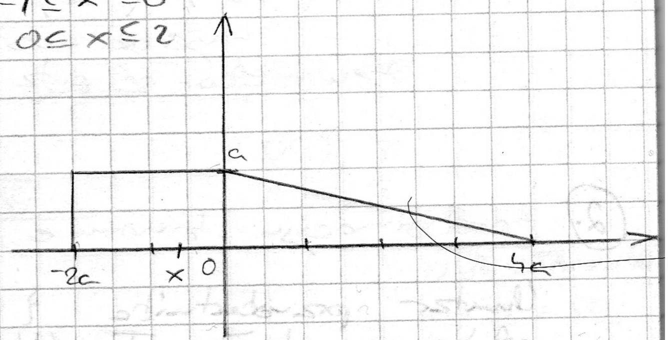
8.5.2010.

*** BURIĆ MASS ***

Zadana je gustoća slučajne varijable slikom. Odredi konstantu a i $E(x)$

a.)

$$f(x)=\begin{cases} a, & -2a<x<0 \\ -\frac{1}{4}x+a, & 0<x<4a \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -1\le x\le 0 \\ -\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}, & 0\le x\le 2 \end{cases}$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

$$\int_{-2a}^{0} a\,dx + \int_{0}^{4a}\left(a-\frac{1}{4}x\right)dx =$$

$$= ax\Big|_{-2a}^{0} + ax\Big|_{0}^{4a} - \frac{1}{4}\frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{4a} = 2a^2 + 4a^2 - \frac{1}{4}\frac{16a^2}{2} = 4a^2 = 1 \Rightarrow \underline{\underline{a=\frac{1}{2}}}$$

A možemo i preko površine i ona nam je jednaka tom integralu $2a^2 + \frac{1}{2}4a^2 = 4a^2$ ...

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx = \int_{-1}^{0}\frac{1}{2}x\,dx + \int_{0}^{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x\right)x\,dx = \underline{\underline{\frac{1}{12}}}$$

granice dobijemo tako da uvrstimo dobivenu vrijednost od a!

b.)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$; Dijelimo na intervale!

$\underline{x<-1:}$ $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dx = 0$

$\underline{x\in(-1,0):}$ $\quad F(x) = \int_{-1}^{x}\frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}x\Big|_{-1}^{x} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

$\underline{x\in(0,2):}$ $\quad F(x) = \cancel{\int\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x\right)dx} = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-1}^{0}\frac{1}{2}dx + \int_{0}^{x}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x\right)dx$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x\Big|_{0}^{x} - \frac{1}{4}\frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x - \frac{x^2}{8}$$

$\underline{x>2:}$ $\quad F(x) = \underline{1}$ - prošli smo cijelu funkciju razdiobe!

c.) - u 14 nezavisnih pokusa varijabla x točno 3 puta poprimi vrijednost u intervalu $\langle -a, a\rangle$

- Prvo računamo vjerojatnost da jednom poprimi vrijednost tu

$$P\left(-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{1}{2}\right) - F\left(-\frac{1}{2}\right) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)dx = \frac{15}{32}$$

- Ali moramo paziti gdje uvrštavamo! Treba u one intervale gdje su u b.) dijelu definirani ili uvrštavat u taj integral

-daljnje računanje → radi se o binomnoj razdiobi!

$n = 14 \quad ; \quad k = 3$

$P = \binom{14}{3}\left(\frac{15}{32}\right)^3\left(\frac{17}{32}\right)^{11}$ – vjerojatnost da se ne ostvari

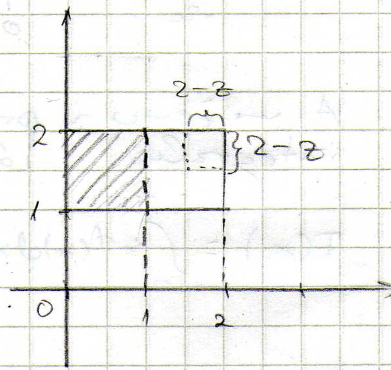
↳ vjerojatnost da se ostvari

↳ u koliko se puta treba pojaviti

2. Aproksimaciju binomne normalnom radimo za velike n-ove.

Unutar pravokutnika $\{0 \le x \le 2,\ 1 \le y \le 2\}$ na sreću je odabrana točka T. Neka je slučajna var Z manja od dviju koordinata točke T. Odredi gustoću varijable z.

$Z = \min(X, Y)$



$z \in [0, 2]$

$F(z) = 0 \quad ; \quad za\ z < 0$

$F(z) = 1 \quad ; \quad za\ z > 2$

$F(z) = P(Z < z)$

– za $z \in (0,1)$ – jer nam je y definiran tek od 1

$F(z) = P(Z < z) = \frac{z \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{z}{2}$

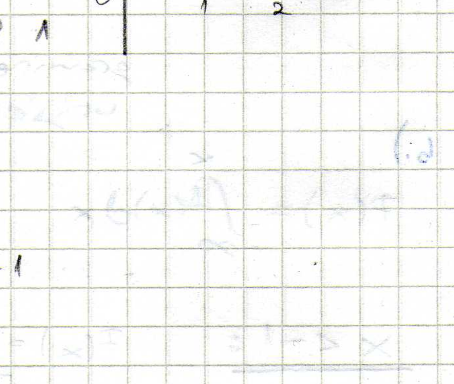
– za $z \in (1, 2)$

$F(z) = 1 - \frac{(2-z)^2}{2 \cdot 1} = 1 - \frac{4 - 4z + z^2}{2} = \frac{1}{2}z^2 - 2z - 1$

$$f(z) = F'(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} & ; \ z \in (0,1) \\ z - 2 & ; \ z \in (1,2) \\ 0 & ; \ inače \end{cases}$$

3. X ima eksponencijalnu razdiobu s parametrom 2 $X \sim E(2)$. Odredi funkciju gustoće i f-ju razdiobe varijable $Y = X^2 - 4X + 4$

$Y = (x-2)^2$



$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} = 2e^{-2x}, \quad x \in (0, \infty)$

$g(y) = f(x) \cdot \left|\frac{dx}{dy}\right|$ – SAMO AKO JE OVA F-JA INJEKCIJA!

↳ $x = \psi^{-1}(y) = 2 \pm \sqrt{y}$

↓

tj. ako različiti x-evi ne poprimaju iste vrijednosti y

$g(y) = (2 \pm \sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}}$

krećemo crtano od $X = 0$

jer je to EKSPONENCIJALNA

–OVA F-JA NIJE INJEKTIVNA!

- podijelimo na injektivne podintervale!

za $\underline{x \in (0,2)}$ $\Rightarrow$ $y(0,4)$

$y=(x-2)^2 \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{y}$

$\Rightarrow x = 2-\sqrt{y}$ - vrijedi za ovaj interval

$$\Rightarrow \underline{g_1(y) = 2e^{-2(2-\sqrt{y})} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}}$$!!!

za $\underline{x \in (2,\infty)}$ $\Rightarrow$ $y(0,\infty)$. UVRŠTAVAMO UMJESTO X-a

$y \Rightarrow$ ovdje vrijedi $x = 2+\sqrt{y}$

$$\Rightarrow \underline{g_2(y) = 2e^{-2(2+\sqrt{y})} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}}$$!!!

$$g(y) = \begin{cases} \overset{g_1+g_2}{4e^{-2(2-\sqrt{y})} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}}, & y \in (0,4) \\ \overset{g_2}{2e^{-2(2-\sqrt{2})} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}}, & y \in (4,\infty) \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} 2e^{-2(2-\sqrt{y})} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}}, & y \in (0,4) \\ e^{-2(2-\sqrt{y})} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}}, & y \in (4,\infty) \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

$G(y) = \int_{-\infty}^{y} g(y)\,dy$ - ZAJEBANO ZA OVAKVU $g(y)$

- AKO TRAŽE F-JU RAZDIOBE NE TRAŽITI F-JU GUSTOĆE PA INTEGR
- AKO TRAŽE OBOJE PRVO RAZD PA DERIVIRATI

$G(y) = \overset{\text{po def.}}{P(Y<y)}$

- na slici y_1 siječe graf na dva dijela, a y_2 koji je veći od 4 on siječe samo na 1 mjestu. Opet dijelimo na dva dijela!

tu more biti nešto u ovisnosti o y

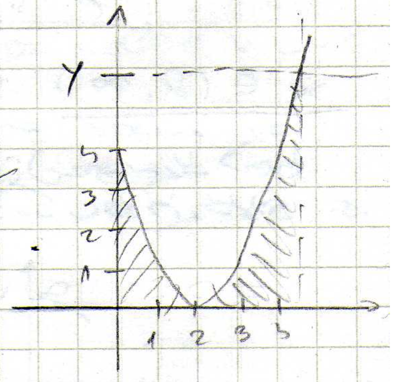
za $y \in (0,4)$

$G(y) = P(Y<y) = P(2-\sqrt{y} < x < 2+\sqrt{y})$

$F(x) = 1-e^{-\lambda x}$ - kod eksponencijalne

$G(y) = 1-e^{-2(2+\sqrt{y})} - (1-e^{-2(2-\sqrt{y})})$

$= e^{-2(2-\sqrt{y})} - e^{-2(2+\sqrt{y})}$



za $y \in (4,\infty)$

$G(y) = P(Y<y) = P(x<2+\sqrt{y}) = F(2+\sqrt{y})$

$= 1-e^{-2(2+\sqrt{y})}$

↳ kod f je razdiobe nema zbrajanja po intervalima!

5. Očekivano vrijeme čekanja u redu za bazenom iznosi pola sata $E(x)=30$ (za studente filozofskog). Kolika je vjerojatnost da će čekati više od 15 min.

a) $E(x)=30$, $P(x>15)$

↳ vrijeme dok ne dođe na red, x je vrijeme čekanja. → znamo da je ekspon.

$E(x) = \frac{1}{\lambda} = 30 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{30}$

$P(x>15) = 1-F(15) = 1-(1-e^{-\lambda x}) = e^{-\frac{15}{30}} = e^{-\frac{1}{2}}$

b.) Kolika je vjerojatnost da će čekati <45 min ako stoji u redu već pola sata

$$P(X<45 \mid x>30) = \frac{P(x<45, x>30)}{P(x>30)} = \frac{P(x<45)}{P(x>30)} = \frac{F(45)}{1-F(30)}$$

...

ALI TREBAMO UOČITI ODSUTSTVO PAMĆENJA, TO ŠTO JE ON ČEKAO VEĆ POLA SATA NE ZNAČI NIŠTA ZA DALJNJU VJEROJATNOST ČEKANJA:

$$= P(x<15) = F(15) = 1-e^{-\frac{1}{2}}$$

5.) a) Raspodjela studentica FER-a po grupama računa se po normalnoj razdiobi s očekivanjem a i $\sigma^2 = 24$; $X \sim \mathcal{N}(a, 24)$
Ako vrijedi $P(X>20) = 0.343$, odredi vjerojatnost da se u grupi nalazi $P(30<X<40)$ ferovki?

$$P(X>20) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\phi^*\left(\frac{20-a}{\sqrt{24}}\right) = 0.343 \quad / \cdot 2$$

$$1 - \phi^*\left(\frac{20-a}{\sqrt{24}}\right) = 0.686$$

$$\phi^*\left(\frac{20-a}{\sqrt{24}}\right) = 0.314$$

$$20 - a = \sqrt{24} \cdot 0.405$$

$$a = 20 - \sqrt{24} \cdot 0.405$$

$$\underline{\underline{a = 18}}$$

$$P(30<X<40) = P\left(\frac{30-18}{\sqrt{24}} < \frac{X-18}{\sqrt{24}} < \frac{40-18}{\sqrt{24}}\right)$$

$$= P(2.45 < \bar{X} < 4.49) = \frac{1}{2}\phi^*(4.49) - \frac{1}{2}\phi^*(2.45)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 0.98571 = \underline{\underline{0.007}}$$

(4.49 – nema u tablici => njegov ϕ^* je $\underline{1}$)

b.) Vjerojatnost da novoupisani student FER-a bude žensko je 23%, $p = 0.23$. Kolika je vjerojatnost da od 700 upisanih studenata barem njih 150 bude ljepšeg spola.

$$X \sim \mathcal{B}(n, p) = \mathcal{B}(700, 0.23) \quad \text{– aproksimacija}$$

$$X \sim \mathcal{N}(np, npq) = \mathcal{N}(161, 123.97)$$

$$P(X>50) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\phi^*\left(\frac{150-161}{\sqrt{123.97}}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\phi^*(0.988)$$

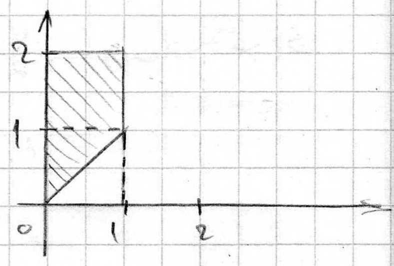
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 0.67685 = 0.838 = 83.8\%$$

-> mi ponoće s 0.5 nedemo trebati raditi ???

6.) Slučajni vektor zadan je f-jom gustoće $f(x,y)=C(y+x^2)$ na području $D=\{(x,y): 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2,\ x\le y\}$.

Odrediti C, marginalne i uvjetne gustoće, uvjetne vjerojatnosti?

a.) Odredi C?



$$\iint f(x,y)\,dx\,dy = 1$$

$$\int_0^1 dx \int_x^2 C(y+x^2)\,dy = C\int_0^1 \left(\frac{y^2}{2}+x^2y\right)\Big|_x^2 dx$$

$$= C\int_0^1 \left(\frac{4}{2}-\frac{x^2}{2}+2x^2-x^3\right)dx = C\int_0^1\left(2+\frac{3}{2}x^2-x^3\right)dx$$

$$= C\left(2x+\frac{3}{2}\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 = C\left(2+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=C\left(\frac{8}{4}+\frac{2}{4}-\frac{1}{4}\right)$$

$$= C\cdot\frac{9}{4}=1 \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{C=\frac{4}{9}}}$$

b.) marginalne gustoće? za granice stavimo funkcije koje omeđuju područje

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy \quad ; \quad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$$

$$f_X(x)=\int_x^2 \frac{4}{9}(y+x^2)\,dy = \frac{4}{9}\left(\frac{y^2}{2}+xy\right)\Big|_x^2$$

$$= \frac{4}{9}\left(\frac{4}{2}-\frac{x^2}{2}+2x-x^2\right)=\frac{4}{9}\left(2-\frac{3}{2}x^2+2x\right)$$

$\underline{\underline{x\in(0,1)}}$

Za $f_Y(y)$ imamo promjenu granice, u prvom slučaju je gornja granica $y=x$, a u drugom $x=1$

$$f_Y(y)=\int_0^y \frac{4}{9}(y+x^2)\,dx = \frac{4}{9}\left(y^2+\frac{1}{3}y^3\right) \qquad \underline{\underline{y\in(0,1)}}$$

$$f_Y(y)=\int_0^1 \frac{4}{9}(y+x^2)\,dx = \frac{4}{9}\left(y+\frac{1}{3}\right) \qquad \underline{\underline{y\in(1,2)}}$$

↳ ALI AKO DIJELIMO NA INTERVALE NE SMIJEMO IH ZBRAJATI JER SU TO 2 RAZL. F-JE DEFINIRANE NA 2. RAZL INT.

- Uvijet nas pita: izračunajte marginalne i ispitajte nezavisnost!

$$f_X(x) \cdot f_Y(y) \neq f(x,y) \Rightarrow X \text{ i } Y \text{ ZAVISNI!!}$$

- ali u ovom slučaju odmah vidimo da ne možemo nikako množiti jer imamo 2 raz f-je u ovisnost o intervalu, ali i na početku s $f(x,y) = C(y+x^2)$ - vidimo da se zbrajaju x i y PA NE MOGU BITI NEZAVISNI!

c.) $f_{Y|X=x}(y) = ?$ - imamo objašnjeno u materijalima na online konzultacijama.

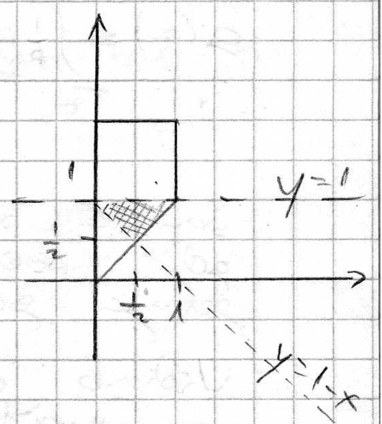
$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{4}{5}(y+x^2)}{\frac{4}{5}(2+\frac{3}{2}x^2-x^2)}$$

- da nam dođe obrnuto onda bi morali pisati za oba intervala i reći za koje je intervala definirano

d.) $P(X+Y>1 \mid Y<1) = \frac{P(Y>1-x,\ Y<1)}{P(Y<1)}$ - UVJETNA VJEROJATNOST

$\boxed{P(A) = \iint_A f(x,y)\,dx\,dy}$ - kod slučajnih vektora

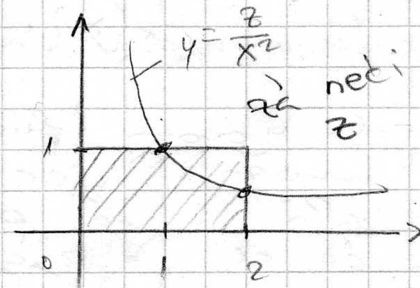
$\cancel{P = \frac{p(\text{trokuta})}{p(\Omega)}}$ - jer računamo po ovom



$$= \frac{\int_{1/2}^{1} dy \int_{1-y}^{y} \frac{4}{5}(y+x^2)\,dx}{\int_0^1 f_Y(y)\,dy} = \frac{\int_{1/2}^{1} \frac{4}{5}\left(yx+\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{1-y}^{y} dy}{} = \frac{27}{40}$$

→ i to onaj koji je definiran na ovom području!

(7.) Slučajni vektor (X, Y) ima jednoliku razdiobu na pravokutniku $D = \{ 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1 \}$. Odredi gustoću $Z = Y \cdot X^2$



JEDNOLIKA RAZDIOBA:

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

A ZA 2 DIMENZIJE // površina

$$f(x,y) = \frac{1}{m(D)} = \frac{1}{P_D} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \cdot \left|\frac{\partial y}{\partial z}\right| dx}$$

→ trebamo dobiti f-ju z-a

→ parcijalno

ALI NE SPOMINJATI NJEGOVO POSTOJANJE U ISPITU :)

BURIĆEV PRINCIP - za postavljanje granica

$$z = y \cdot x^2 \implies y = \frac{z}{x^2}$$

$$\left|\frac{\partial y}{\partial z}\right| = \frac{1}{x^2}$$ - i sad samo još granice

crtamo f-ju $y = \frac{z}{x^2}$

$$g(z) = \int_{\sqrt{z}}^{2} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2}\, dx = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2\sqrt{z}}$$

$z \in (0,4)$

ovdje iz slike vidimo da nema dijeljenja na intervale jer uvijek na isti način sijeće

$\underline{z \in (0,4)}$

- granice postavljamo po x-u pa gledamo x koordinatu gdje počinje sjeći i prestaje. vidimo da je gornja granica uvijek 2 ?
- Vidimo da je y koordinata ulaza uvijek 1 pa uvrštavamo

$$y = \frac{z}{x^2} \implies 1 = \frac{z}{x^2} \quad x^2 = z \implies x = \sqrt{z}$$

(8.) Neka su X i Y nezavisne slučajne varijable tako da: ; nezavisne su.

$X \sim E(3)$; $Y \sim U[1,4]$

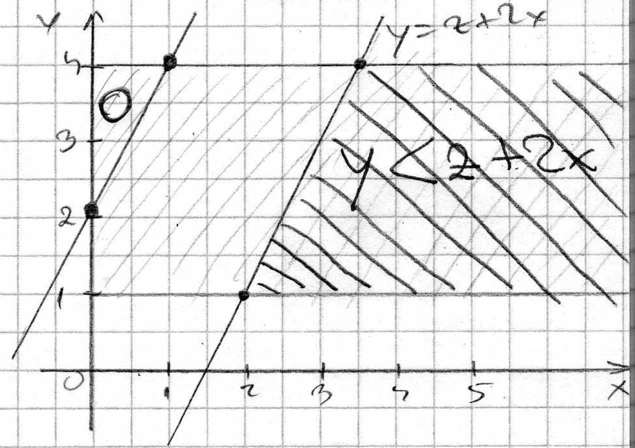
↳ eksponencijalna ↳ jednolika / uniformna razdioba

$Z = Y - 2X$, $G(z) = ?$; $g(z) = ?$

$X \sim E(3) \to f(x) = 3e^{-3x}$, $\underline{\underline{x > 0}}$

$Y \sim U[1,4] \to f(y) = \frac{1}{4-1} = \frac{1}{3}$

=> NEZAVISNE SU PA => $f(x,y) = f(x) \cdot f(y) = \underline{\underline{e^{-3x}}}$



$z = y - 2x$

$\underline{y = z + 2x}$ → $z \in (-\infty, 4)$

$\frac{\partial y}{\partial z} = 1$

1.) SLUČAJ

$z \in (1,4)$

$\int_0^{2-\frac{1}{2}z} e^{-3x} \cdot 1\, dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} e^{-6+\frac{3}{2}z}$

- u koji x uvijek ulazimo a u koji izlazimo
- gornja će y uvijek biti 4

$y = z + 2x$
$\Rightarrow 2x = y - z$
$x = \frac{4}{2} - \frac{1}{2}z = 2 - \frac{1}{2}z$

2.) SLUČAJ

$z \in (-\infty, 1)$

$\int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}z}^{2-\frac{1}{2}z} e^{-3x} \cdot 1\, dx = \frac{1}{3} e^{-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}z} - \frac{1}{3} e^{-6+\frac{3}{2}z}$

$G(z) = ?$

$G(z) = P(Z < z) = P(\underset{y < z + 2x}{Y - 2X < z})$

$= \int_1^4 dy \int_{\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z}^{\infty} \underbrace{e^{-3x}}_{f(x,y)} dx = -\frac{2}{9} e^{-6+\frac{3}{2}z} + \frac{2}{9} e^{-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}z}$, $z \in (-\infty, 1)$

2. SLUČAJ $G_z = 1 - \int_z^4 dy \int_0^{\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z} e^{-3x} dx$ - suprotno računa, 1 - mali trokut

0