

MEĐUISPIT
23.11.2022.

Ime i prezime: _____

Kôd (šifra): JMBAG:

Dvorana: _____

Tijekom ove provjere znanja neću od drugoga primiti niti drugome pružiti pomoć te se neću koristiti nedopuštenim sredstvima. Ove su radnje povreda Kodeksa ponašanja te mogu uzrokovati trajno isključenje s Fakulteta.

Zdravstveno stanje dozvoljava mi pisanje ovog ispita.

Vlastoručni potpis studenta: _____

1. (10 bodova)

Neka su

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda \\ 0 & \lambda & \lambda - 1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Odredite vrijednosti parametra $\lambda \in \mathbb{R}$ za koje matrice A i B komutiraju. Za utvrđene vrijednosti $\lambda \in \mathbb{R}$, dokažite da je B inverzna matrica matrice A .

2. (10 bodova) Koristeći Binet-Cauchyjevi teorem, dokažite da vrijedi:

(a) $\det(A^k B^k) = \det((AB)^k)$, za sve $A, B \in \mathcal{M}_n$ i sve $k \in \mathbb{N}$.

(b) $\det((AB)^{-1}) = \det(A^{-1}B^{-1})$, za sve regularne $A, B \in \mathcal{M}_n$.

(c) $\det(B^{-1}AB + \lambda I) = \det(A + \lambda I)$, za sve $A \in \mathcal{M}_n$, sve regularne $B \in \mathcal{M}_n$ i za sve $\lambda \in \mathbb{R}$.

S \mathcal{M}_n označavamo skup svih realnih kvadratnih matrica n -tog reda.

3. (10 bodova) Zadana je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Dokažite da se svaka regularna matrica može zapisati kao produkt elementarnih matrica.

(b) Je li matrica A regularna? Obrazložite.(c) Zapišite matricu A kao produkt elementarnih matrica.4. (10 bodova) U ovisnosti o parametru $\lambda \in \mathbb{R}$ riješite sljedeći sustav:

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 3 \end{cases}.$$

OKRENITE STRANICU!

5. (10 bodova) Zadan je četverokut $ABCD$, gdje su $A(7, 3, -1)$, $B(7, 5, -4)$, $C(9, 5, -3)$ i $D(10, 4, -3)$. Neka su $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ i $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$. Izračunajte

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} + (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{b}$$

Napomena: Ispit se piše **120 minuta**. Nije dopuštena upotreba kalkulatora ni podsjetnika.