VIS 2. CIKLUS

SLUČAJNE VARIJABLE I FUNKCIJA RAZDIOBE

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor. Preslikavanje $X: \Omega \to \mathbb{R}$ nazivamo slučajna varijabla ako je za $\forall x \in \mathbb{R}$ skup $A_x = \{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\}$ događaj, dakle element algebre $\mathcal{F}$.

Skup $\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\}$ označavat ćemo kraće sa $\{X < x\}$.

Funkcija razdiobe slučajne varijable X je funkcija $F: \mathbb{R} \to [0,1]$ definirana formulom: $F(x) := P(\{X < x\})$

FUNKCIJA RAZDIOBE

Neka je F funkcija razdiobe slučajne varijable X. Ona posjeduje svojstva:

1° $P(\{x_1 \leq X < x_2\}) = F(x_2) - F(x_1)$

2° F je neopadajuća: $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$

3° $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$

4° F je neprekinuta slijeva:

$$F(x-0) := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} F(x-\varepsilon) = F(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

DOKAZ: 1° Neka je $x_1 < x_2$. Onda vrijedi

$$F(x_2) = P(\{X < x_2\}) = P(\{X < x_1\} \cup \{x_1 \leq X < x_2\})$$

$$= P(\{X < x_1\}) + P(\{x_1 \leq X < x_2\})$$

$$= F(x_1) + P(\{x_1 \leq X < x_2\})$$

2° $x_1 < x_2$

$\{X < x_1\} \subset \{X < x_2\}$ - vrijedi tvrdnja zbog monotonosti vjerojatnosti

3° Neka je (x_n) po volji odabran padajući niz realnih brojeva, $\lim_{n \to \infty} x_n = -\infty$. Označimo $A_n = \{X < x_n\}$. Onda su A_n padajući skupovi: $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ i vrijedi $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$. Zato je zbog svojstva neprekinutosti vjerojatnosti,

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = \lim_{x \to \infty} F(x_n) = \lim_{n \to \infty} P(A_n) = 0$$

Druga tvrdnja na isti način.

4° Ako je (ε_n) niz pozitivnih brojeva koji opada prema 0, onda je s $A_n = \{X < x - \varepsilon_n\}$ definiran rastući niz skupova za koji vrijedi $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{X < x\}$ pa tvrdnja slijedi iz neprekinutosti vjerojatnosti:

$$F(x-0) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} F(x-\varepsilon) = \lim_{n \to \infty} F(x - \varepsilon_n)$$

$$= \lim_{n \to \infty} P(A_n) = P(A) = F(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

NEPREKINUTE SLUČAJNE VARIJABLE. GUSTOĆA RAZDIOBE

Za slučajnu varijablu X kažemo da je neprekinuta, ako postoji nenegativna funkcija $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da vrijedi:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

Funkcija f naziva se gustoća razdiobe vjerojatnosti slučajne varijable X. Ona nije nužno neprekinuta, no u točkama neprekinutosti od f vrijedi:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

Vrijedi još: $P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

NA SREĆU ODABRANI BROJ. JEDNOLIKA RAZDIOBA

Kažemo da biramo na sreću broj unutar intervala [a, b] ako je vjerojatnost da će on biti izabran unutar nekog intervala jednaka duljini tog podintervala.

Za slučajnu varijablu koja prima vrijednost ovako izabranog broja kažemo da ima jednoliku (uniformnu) razdiobu na intervalu [a, b].

F-JA RAZ:

$$F(x) - F(a) = P(a \le X < x) = K(x - a) \qquad X \in [a, b].$$

$$P\{X < a\} = 0 = F(a)$$

$$1 = P\{a \le X < b\} = F(b) - F(a) = K(b-a) \Rightarrow K = \frac{1}{b-a}$$

JEDNOLIKA RAZDIOBA, ALTERNATIVNA DEF, RAZDIOBA i GUSTOĆA

Za slučajnu varijablu X kažemo da je jednoliko distribuirana na intervalu $[a, b]$, ako je zadana funkcijom razdiobe odnosno funkcijom gustoće:

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a}, \quad a \leq x \leq b$$

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a \leq x \leq b$$

Pišemo $X \sim U(a, b)$

DEFINICIJA NEZAVISNOSTI

Kažemo da su slučajne varijable X i Y nezavisne, ukoliko za sve intervale A, B iz skupa $\mathbb{R}$ vrijedi:

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) P(X \in B)$$

OČEKIVANJE I DISPERZIJA

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$, ako ne konvergira očekivanje ne postoji.

$$D(x) = E\left[(x - E(x))^2\right] = E(x^2) - E^2(x)$$

$$D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - E^2(x)$$

ISTA svojstva kao i za diskretne varijable

RIEMANN-STIELTJESOV INTEGRAL

DEF. Kažemo da je g Riemman-Stieltjesov integrabilna u odnosu na F, ako postoji limes integralnih suma, neovisno o izboru particije i točaka $\tilde{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Taj limes nazivamo Riemann-Stieltjesov integral, a označavamo ga na sljedeći način:

$$\int_a^b g(x)\,dF(x) := \lim_{\Delta \to 0} S(P, g, F)$$

RAČUNANJE. Ako F ima skokove iznosa p_i u točkama c_i, za njezin Riemann-Stieltjesov integral vrijedi:

$$\int_a^b g(x)\,dF(x) = \sum_{i=1}^{m} g(c_i) \cdot p_i$$

Ako je F neprekinuto diferencijabilna funkcija, onda vrijedi

$$\int_a^b g(x)\,dF(x) = \int_a^b g(x) F'(x)\,dx$$

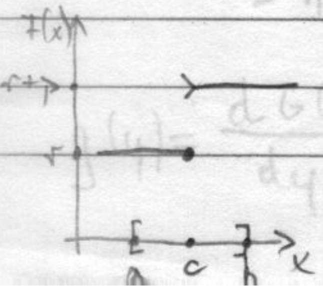
IZVOD

1° DISKRETNE

Neka je F po dijelovima konstantna na intervalu $[a, b]$, sa skokom iznosa p u točki c:

$$F(x) = \begin{cases} r, & x \le c \\ r+p, & x > c \end{cases}$$

Za bilo koju particiju $F(x_i) - F(x_{i-1}) = 0, \forall i$ osim za onu za koju je $x_{i-1} \le c < x_i$, jer je funkcija F konstantna lijevo i desno od točke c.



Zato u integralnoj sumi ostaje samo jedan član:

$$S(P, g, F) = g(\tilde{x}_i)\left[F(x_i) - F(x_{i-1})\right] = g(\tilde{x}_i) \cdot p$$

U limesu, kad $\Delta \to 0$, točka $\tilde{x}_i$ teži ka c. Zato je

$\Delta = \max |x_i - x_{i-1}|$

$$\int_a^b g(x)\,dF(x) = g(c)\,p$$

Općenito, ako F ima skokove iznosa p_i u točkama c_i, za njezin Riemann Stieltjesov integral vrijedi:

$$\int_a^b g(x)\,dF(x) = \sum_{i=1}^{m} g(c_i) \cdot p_i$$

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,dF(x) \qquad D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\,dF(x) - E^2(x)$$

KARAKTERISTIČNA FUNKCIJA

$$\vartheta(t) = E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,dF(x)$$

SVOJSTVA: 1° jednoznačno određuje razdiobu

2° ako su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne vrijedi:

$$\vartheta_{X_1 + \cdots + X_n}(t) = \vartheta_{X_1}(t) \cdot \ldots \cdot \vartheta_{X_n}(t)$$

3° Vrijedi: $E(X^r) = \dfrac{\vartheta^{(r)}(0)}{i^r}$, $r = 1, 2, \ldots$

Specijalno: $E(X) = -i\,\vartheta'(0)$

$$D(X) = -\vartheta''(0) + \vartheta'(0)^2$$

Ako je ϑ_X karakteristična funkcija varijable X, tada varijabla $Y = a + bX$ ima karakterističnu funkciju $e^{ita}\vartheta_X(bt)$

$\vartheta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)\,dx$ je Fourierova transformacija funkcije.

Ukoliko $\int_{-\infty}^{\infty} |\vartheta(t)|\,dt < \infty$, vrijedi inverzna formula inverzije

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vartheta(t) e^{-itx}\,dt$$

FUNKCIJE NEPREKINUTIM SLUČAJNIM VARIJABLI

IZVOD: X je neprekinuta slučajna varijabla s gustoćom f

I. $Y = \varphi(X)$, φ je strogo rastuća

$$G(y) = P(Y < y) = P(\varphi(X) < y) = P(X < \varphi^{-1}(y)) = F(\varphi^{-1}(y))$$

$$g(y) = \frac{dG(y)}{dy} = F'(\varphi^{-1}(y)) \cdot \frac{d(\varphi^{-1}(y))}{dy} = f(\varphi^{-1}(y)) \frac{d(\varphi^{-1}(y))}{dy}$$

II. $Y = \varphi(X)$, φ je strogo padajuća

$$G(y) = P(Y < y) = P(\varphi(X) < y) = P(X > \varphi^{-1}(y))$$

$$= 1 - P(X \leq \varphi^{-1}(y)) = 1 - F(\varphi^{-1}(y))$$

$$g(y) = \frac{dG(y)}{dy} = -F'(\varphi^{-1}(y)) \cdot \frac{d(\varphi^{-1}(y))}{dy} = f(\varphi^{-1}(y)) \cdot \frac{d(\varphi^{-1}(y))}{dy}$$

TRANSFORMACIJA FUNKCIJE GUSTOĆE

Neka je $Y=\varphi(X)$. Ako je funkcija φ rastuća ili padajuća funkcija, onda vrijedi:

$$g(y)=f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|, \quad y=\varphi(x)$$

tj.

$$g(y)=f(\varphi^{-1}(y))\left|\frac{d\varphi^{-1}(y)}{dy}\right|$$

Vrijedi za svaku injektivnu funkciju φ.

$$E(Y^k)=E(\varphi(X)^k)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)^k f(x)\,dx$$

IZVOD:

$$E(y)=\int_a^b y\,g(y)\,dy=\int_a^b \underset{\varphi(x)}{\underset{\shortparallel}{y}}\, f(\overbrace{\varphi^{-1}(x)}^{x})\overbrace{\left|\frac{d\varphi^{-1}(y)}{dy}\right| dy}^{dx}$$

$$E(\varphi(x))=\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)f(x)\,dx$$

EKSPONENCIJALNA RAZDIOBA

DEFINICIJA

Slučajna varijabla X ima eksponencijalnu razdiobu s parametrom $\lambda > 0$ ako ona poprima pozitivne vrijednosti s gustoćom $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \ x > 0$.

Pišemo $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$. Njezina je funkcija razdiobe

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \ x > 0$$

IZVOD IZ MODELA PONAVLJANJA

Pretpostavimo da je uvjetna vjerojatnost pojavljivanja događaja u nekom vrlo kratkom intervalu $(x, x+\Delta x)$, ako je poznato da se događaj nije pojavio do trenutka x, proporcionalna duljini tog podintervala i ne ovisi o vrijednosti x:

$$P(X < x + \Delta x \mid X > x) = \lambda \Delta x + r \qquad \frac{r}{\Delta x} \to 0 \text{ kad } \Delta x \to 0$$

Tada je X slučajna varijabla distribuirana po eksponencijalnom zakonu $\mathcal{E}(\lambda)$.

DOKAZ:

$$\begin{cases} P(X > x + \Delta x) = P(X > x) \cdot P(X > x + \Delta x \mid X > x) \\ P(X > x + \Delta x \mid X > x) = 1 - P(X < x + \Delta x \mid X > x) = 1 - \lambda \Delta x - r \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(X > x + \Delta x) = P(X > x)(1 - \lambda \Delta x - r)$$

$$Q(x) := P(X > x) = 1 - F(x)$$

$$Q(x + \Delta x) - Q(x) = Q(x)[-\lambda \Delta x - r]$$

$$\frac{dQ(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{Q(x+\Delta x) - Q(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} Q(x)\left[-\lambda - \frac{r}{\Delta x}\right] = -\lambda Q(x)$$

$$Q(x) = Ce^{-\lambda x}$$

$$Q(0) = P\{X > 0\} = 1 \Rightarrow C = 1$$

$$\underline{\underline{F(x) = 1 - Q(x) = 1 - e^{-\lambda x}}}$$

Poissom $E(Z_x) = \lambda x$

VEZA S POISSONOM

varijabla Z_x mjeri broj realizacija događaja u intervalu $[0, x]$

X vrijeme do prvog pojavljivanja događaja, X eksp. pokazati

x fiksno vrijeme nakon početnog trenutka, X će poprimiti vrijednost manju od x ako se događaj ostvari u intervalu $[0, x]$, tj. ako Z_x poprimi vrijednost veću od 0:

$$P(X < x) = P(Z_x > 0) = 1 - P(Z_x = 0) = 1 - e^{-\lambda x} \text{ - eksp. razdioba}$$

OČEKIVANJE I DISPERZIJA

$$E(x) = \lambda \int_0^\infty x e^{-\lambda x} dx = \lambda \left(x\left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right)\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} dx \right)$$

$$= -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty = \underline{\underline{\frac{1}{\lambda}}}$$

$$D(x) = E(x^2) - E^2(x) = \lambda \int_0^\infty x^2 e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \underline{\underline{\frac{1}{\lambda^2}}}$$

Može i: LAPLACE $f^*(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx = \ldots = \frac{\lambda}{s + \lambda}$

$$\vartheta(t) = f^*(-it) = \frac{\lambda}{\lambda - it} \qquad E(x) = -f^{*\prime}(0) \qquad E(x^n) = (-1)^n f^{*(n)}(0)$$

ODSUSTVO PAMĆENJA

KARAKTERIZACIJA EKSPONENCIJALNE RAZDIOBE

TEM. Neka za slučajnu varijablu X koja uzima samo pozitivne vrijednosti za sve pozitivne x i t vrijedi

$$P(X < x+t \mid X > t) = P(X < x) \quad (*)$$

Tada X ima eksponencijalnu raspodjelu.

DOKAZ: $Q(x) := P(X > x) = 1 - F(x)$

$Q(0) = P(X > 0) = 1$

$Q'(x) = -f(x) < 0 \;, \; x > 0$

$Q'(0) := -\lambda$

$$(*) \quad 1 - P(X > x+t \mid X > t) = 1 - P(X > x)$$

$$\frac{P(X > x+t, X > t)}{P(X > t)} = P(X > x)$$

$$P(X > x+t, X > t) = P(X > t)P(X > x)$$

$$Q(x+t) = Q(t)Q(x) \;, \; \forall x, t > 0 \;\Big/ \frac{d}{dt}$$

$$Q'(x+t) = Q'(t)\,Q(x)$$

$$t = 0, \quad Q'(x) = -\lambda Q(x)$$

$$Q(x) = Ce^{-\lambda x}, \quad Q(0) = 1 \Rightarrow C = 1$$

$$\underline{F(x) = 1 - Q(x) = 1 - e^{-\lambda x}}$$

NORMALNA RAZDIOBA - Gaussova

DEFINICIJA

Slučajna varijabla X ima normalnu razdiobu s parametrima $a \in \mathbb{R}$ i $\sigma^2 > 0$ ako je X neprekinuta slučajna varijabla s gustoćom

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Pišemo $X \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$

JEDINIČNA NORMALNA RAZDIOBA

$\mathcal{N}(0,1)$

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)$$

$$\phi(u) = \int_{-\infty}^{u} \varphi(u)\,du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{1}{2}u^2}\,du$$ → ne može pomoću el. f-ija

φ je parna pa vrijedi:

$$\int_{-\infty}^{0} \varphi(u)\,du = \frac{1}{2} \overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u)\,du}^{1} = \frac{1}{2}$$

$$\int_{0}^{u} \varphi(u)\,du = \frac{1}{2} \int_{-u}^{u} \varphi(u)\,du$$

$$\phi(u) = \int_{-\infty}^{u} \varphi(u)\,du = \int_{-\infty}^{0} \varphi(u)\,du + \int_{0}^{u} \varphi(u)\,du = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_{-u}^{u} \varphi(u)\,du$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \phi^*(u)\right] \; ; \; \phi^*(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-u}^{u} \varphi(u)\,du$$ → samo dio s e

VEZA JEDINIČNE i OPĆE NORMALNE RAZDIOBE

Jedinična i opća normalna razdioba mogu se dobiti jedna iz druge linearnom transformacijom:

$$X \sim \mathcal{N}(0,1) \Rightarrow a + \sigma X \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$$
$$X \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2) \Rightarrow \frac{X-a}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

IZVOD: $Y = a + \sigma X$

$$y = a + \sigma x \Rightarrow x = \frac{y-a}{\sigma}$$

$$g(y) = \varphi(x) \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{y-a}{\sigma}\right)$$

$$\Rightarrow g(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-a)^2}{2\sigma^2}}$$ isto tako i za drugi slučaj

KARAKTERISTIČNA FUNKCIJA

JEDINIČNE:

$$\vartheta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} e^{itx}\, dx \quad \Big/ \frac{d}{dt}$$

$$\vartheta'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} ix e^{-\frac{1}{2}x^2} e^{itx}\, dx$$

$$= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left(-e^{itx} e^{-\frac{1}{2}x^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} ite^{itx} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx \right)$$

$$= -t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx = -t\vartheta(t)$$

$$\frac{d\vartheta(t)}{dt} = -t\vartheta(t), \quad \vartheta(0) = 1$$

$$\frac{d\vartheta(t)}{\vartheta(t)} = -t\,dt \Rightarrow \vartheta(t) = \vartheta(0) e^{-\frac{1}{2}t^2} = \underline{\underline{e^{-\frac{1}{2}t^2}}}$$

OPĆA: $\vartheta_{a+\sigma X}(t) = e^{ita}\vartheta_X(\sigma t) = e^{ita}e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2} = e^{ita-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$

OČEKIVANJE I DISPERZIJA

$X \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$

$$\vartheta(t) = e^{ita-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

$$\vartheta'(t) = (ia - \sigma^2 t^2)e^{ita-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \qquad \vartheta'(0) = ia$$

$$\vartheta''(t) = \left[-\sigma^2 + (ia - \sigma^2 t^2)^2\right]e^{ita-\frac{1}{2}\sigma t^2} \qquad \vartheta''(0) = -\sigma^2 - a^2$$

$$E(x) = -i\,\vartheta'(0) = a$$

$$D(x) = -\vartheta''(0) + \vartheta'(0)^2 = \sigma^2$$

RAČUNANJE VJEROJATNOSTI

JEDINIČNA

Za jediničnu normalnu razdiobu X vrijedi:

$$P(u_1 < X < u_2) = \phi(u_2) - \phi(u_1) = \frac{1}{2}\left[\phi^*(u_2) - \phi^*(u_1)\right]$$

Simetričan interval:

$$P(|x| < u) = \frac{1}{2}\left[\phi^*(u) - \phi^*(-u)\right] = \underbrace{\phi^*(u)}_{\text{neparna}}$$

OPĆENITA

$$F(x) = \phi(u) = \frac{1}{2}\left[1 + \phi^*(u)\right], \quad u = \frac{x-a}{\sigma}$$

$$P(x_1 < X < x_2) = P\left(\frac{x_1 - a}{\sigma} < \frac{X-a}{\sigma} < \frac{x_2 - a}{\sigma}\right)$$

$$= \phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right) = \frac{1}{2}\left[\phi^*\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \phi^*\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right)\right]$$

PRAVILO 3σ

$$X \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$$

$$P(|X-a| < k\sigma), \quad k = 1, 2, 3$$

$$P(|X-a| < k\sigma) = P(-k\sigma < X - a < k\sigma) = P(-k < \tilde{X} < k) = \phi^*(k)$$

$$\phi^*(1) = 0{,}6827, \quad \phi^*(2) = 0{,}9545, \quad \phi^*(3) = 0{,}9973$$

STABILNOST NORMALNE RAZDIOBE – karakterizira normalnu razdiobu

TRM. Neka su X_1 i X_2 nezavisne slučajne varijable s normalnim razdiobama

$$X_1 \sim \mathcal{N}(a_1, \sigma_1^2), \; X_2 \sim \mathcal{N}(a_2, \sigma_2^2) \; i \; s_1, s_2 \in \mathbb{R}.$$

Tada vrijedi:

$$s_1 X_1 + s_2 X_2 \sim \mathcal{N}(s_1 a_1 + s_2 a_2, s_1^2 \sigma_1^2 + s_2^2 \sigma_2^2)$$

DOKAZ: Karakteristične funkcije su:

$$\vartheta_{X_k}(t) = \exp(a_k t i - \tfrac{1}{2}\sigma_k^2 t^2), \quad k = 1, 2$$

$$\vartheta_{s_k X_k}(t) = \exp(s_k a_k t i - \tfrac{1}{2} s_k^2 \sigma_k^2 t^2), \quad k = 1, 2$$

$$\vartheta_{s_1 X_1 + s_2 X_2} = \exp((s_1 a_1 + s_2 a_2) - \tfrac{1}{2}(s_1^2 \sigma_1^2 + s_2^2 \sigma_2^2) t^2)$$

$$\underline{\mathcal{N}(s_1 a_1 + s_2 a_2, s_1^2 \sigma_1^2 + s_2^2 \sigma_2^2)}$$

Jedina stabilna razdioba za uzimanje linearnih kombinacija nezavisnih pribrojnika.

APROKSIMACIJA BINOMNE RAZDIOBE NORMALNOM

LOKALNI TEOREM MOIVRE-LAPLACEA

TRM. Vjerojatnosti realizacije binomne slučajne varijable $B(n,p)$ mogu se aproksimirati pomoću funkcije gustoće normalne varijable $N(np, npq)$:

$$P(X=m) \approx P\left(m-\frac{1}{2} < Y < m+\frac{1}{2}\right) \approx f(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{(m-np)^2}{2npq}}$$

TEOREM MOIVRE-LAPLACEA — CENTRALNI GRANIČNI TEOREM

TRM. Neka je $X \sim B(n,p)$. Za veliki n razdioba slučajne varijable $\frac{X-np}{\sqrt{npq}}$ može se aproksimirati jediničnom normalnom razdiobom:

$$P\left(x_1 < \frac{B(n,p)-np}{\sqrt{npq}} < x_2\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{1}{2}u^2} du$$

Pišemo $B(n,p) \approx N(np, npq)$, za dovoljno veliki n.

SLUČAJNI VEKTORI, RAZDIOBE I GUSTOĆE

Za slučajan vektor $(X_1, \dots, X_n)$ kažemo da je neprekinut ako postoji funkcija $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty\rangle$ takva da sve $x_1, x_2, \dots, x_n$ vrijedi

$$F(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(u_1, \dots u_n)\, du_1 \dots du_n .$$

Funkciju f nazivamo gustoćom razdiobe slučajnog vektora. Tamo gdje je F diferencijabilna, vrijedi

$$f(x_1, \dots, x_n) := \frac{\partial^n F(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n}$$

RAČUNANJE VJEROJATNOSTI SLUČAJNOG VEKTORA

Za svaki izmjerivi skup $G \subset \mathbb{R}^n$ vrijedi

$$P\big((X_1, \dots, X_n) \in G\big) = \int \underset{G}{\dots} \int f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n$$

MARGINALNE RAZDIOBE

$$P(X_i < x_i) = P(X_1 < \infty, \dots, X_i < x_i, \dots, X_n < \infty$$
$$F_i(x_i) = F(\infty, \dots, x_i, \dots, \infty)$$

$$f_i(x_i) := \frac{\partial F_i(x_i)}{\partial x_i} = \int \underset{\mathbb{R}^{n-1}}{\dots} \int f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_{i-1}\, dx_{i+1} \dots dx_n$$

DVODEMZIONALNI VEKTOR

GUSTOĆA: $$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \, \partial y}$$

MARGINALNE RAZDIOBE: $$F_X(x) = F(x,\infty) = \int_{-\infty}^{x} dx \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx$$

$$F_Y(y) = F(\infty, y) = \int_{-\infty}^{y} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \int_{-\infty}^{y} f_Y(y)\,dy$$

MARGINALNE GUSTOĆE: $$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$$

NEZAVISNOST

TRM. Komponente $X_1, \ldots, X_n$ neprekinutog slučajnog vektora $(X_1, \ldots, X_n)$ su nezavisne onda i samo onda ako vrijedi:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1) \cdot \ldots \cdot f_n(x_n), \quad \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

DOKAZ: Ako su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne onda vrijedi:

$$F(x_1, \ldots, x_n) = F_1(x_1) \cdot \ldots \cdot F_n(x_n) \,\Big|\, \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1) \cdot \ldots \cdot f_n(x_n)$$

OBRAT: $A, B \in \mathbb{R}$

$G = A \times B$ pravokutnik

$$P(X \in A, Y \in B) = P((X,Y) \in G) = \iint_G f(x,y)\,dx\,dy$$

$$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$

$$\iint_G f_X(x) f_Y(y)\,dx\,dy = \int_A f_X(x)\,dx \cdot \int_B f_Y(y)\,dy = P(X \in A) \cdot P(Y \in B)$$

OČEKIVANJE

TRM. Za svake dvije slučajne varijable $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ vrijedi:

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y).$$

Ako su X i Y nezavisne:

$$E(XY) = E(X)\,E(Y)$$

DOKAZ: $f(x,y)$ gustoća slučajnog vektora (X,Y)

$$E(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x+y) f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x\,dx \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy + \int_{-\infty}^{\infty} y\,dy \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\,dy = E(X) + E(Y)$$

X i Y su nezavisne pa vrijedi $f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\,dy$$

$$= E(X)\,E(Y)$$

KARAKTERISTIČNA FUNKCIJA

TRM. Ako su X i Y nezavisne slučajne varijable, za karakterist. funkciju zbroja vrijedi:

$$\vartheta_{X+Y}(t) = \vartheta_X(t) \cdot \vartheta_Y(t)$$

KOVARIJACIJSKA I KORELACIJSKA MATRICA

Za slučajni vektor $(X_1, \ldots, X_n)$ definiramo kovarijacijsku i korelacijsku matricu

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ k_{n1} & \cdots & k_{nn} \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & & \\ r_{n1} & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix}$$

$$k_{ij} = \mathrm{cov}(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j)$$

$$r_{ij} = \frac{\mathrm{cov}(X_i X_j)}{\sqrt{D(X_i)D(X_j)}}$$

Ukoliko su komponente slučajnog vektora nekorelirane, kovarijacijska matrica je dijagonalna.

DISPERZIJA ZBROJA

TEM. Ako su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nekorelirane slučajne varijable, tada vrijedi:

$$D(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_n)$$

DOKAZ: $D\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2 = E\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} X_j X_k\right)$

$E(X_k) = 0$ $\qquad = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_j X_k) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k)^2 + \sum_{j \neq k} E(X_j X_k)$

$$= \sum_{k=1}^{n} E(X_k^2) + \sum_{j \neq k} E(X_j)E(X_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} E(X_k^2) = \sum_{k=1}^{n} D(X_k).$$

UVJETNE RAZDIOBE. UVJETNO OČEKIVANJE

UVJETNA GUSTOĆA

Neka je $f(x,y)$ gustoća razdiobe slučajnog vektora (X,Y). Ako je poznata realizacija $Y=y$ varijable Y, tada se uvjetna gustoća varijable X uz uvjet $Y=y$ definira formulom

$$f_{X|Y=y}(x) := \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx}.$$

MARGINALNE GUSTOĆE

Marginalne gustoće možemo računati formulama

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x|y) f_Y(y)\,dx$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x|y) f_X(x)\,dx$$

UVJETNA OČEKIVANJA i VJEROJATNOSTI

Očekivanje varijable X koje ovisi o realizacijama varijable Y:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \overbrace{E(X|Y=y)}^{\int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y=y}(x)\,dx} f_Y(y)\,dy.$$

Vjerojatnost događaja koje ovisi o realizacijama slučajne varijable X:

$$P(A) = \int_{-\infty}^{\infty} P(A|X=x) f_X(x)\,dx$$

FUNKCIJE NEPREKINUTIH SLUČAJNIH VEKTORA

$X = (X_1, X_2)$

$Y = \Psi(X) = (Y_1, Y_2)$ $\quad \Psi$ bijekcija

$y_1 = \Psi_1(x_1, x_2) \qquad\qquad x_1 = \chi_1(y_1, y_2)$

inverzija

$y_2 = \Psi_2(x_1, x_2) \qquad\qquad x_2 = \chi_2(y_1, y_2)$

$$P((x_1, x_2) \in G) = P((y_1, y_2) \in G_1)$$

$$= \iint_G f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 = \iint_{G_1} g(y_1, y_2)\, dy_1 dy_2$$

$$= \iint_{G_1} f(x_1(y_1, y_2), x_2(y_1, y_2))\, dy_1 dy_2$$

$$g(y_1, y_2) = f(x_1(y_1, y_2), x_2(y_1, y_2)) \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}$$

$Z = \Psi(X, Y)$

$x = x$

$z = \Psi(x, y)$

$y = \chi(x, z)$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(x, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial z} \end{vmatrix} = \frac{\partial y}{\partial z}$$

$$g(x, z) = f(x, y) \left| \frac{\partial y}{\partial z} \right|$$

GUSTOĆA FUNKCIJE SLUČAJNOG VEKTORA

Gustoća slučajne varijable $Z = \psi(X, Y)$ dobiva se formulom

$$g_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \left| \frac{\partial y}{\partial z} \right| dx$$ gdje je f gustoća vektora (X, Y).

GUSTOĆA ZBROJA NEZAVISNIH VARIJABLI

TRM. Ako su slučajne varijable $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nezavisne, onda je gustoća njihovog zbroja $Z = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ dana konvolucijom:

$$g_Z(z) = f_{X_1} * f_{X_2} * \ldots * f_{X_n}.$$

IZVOD: X i Y su nezavisne i $f(x, y)$ je gustoća:

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

$Z = X + Y$

$$g_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\, dx.$$