FIZIKA LASERA FORMULE

OMJER VJEROJATNOSTI STIMULIRANE I SPONTANE EMISIJE

$$Q = \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

$$\lambda \cdot \nu = c \Rightarrow Q = \frac{1}{e^{\frac{hc}{kT\lambda}} - 1}$$

BROJ STIM. PRIJELAZA JEDNAK BROJU SPONT. PRIJELAZA
$\hookrightarrow Q = 1$

BROJ REZONANTNIH MODOVA UNUTAR DOPPLEROVE ŠIRINE LINIJE

$$N = \frac{\Delta \nu_D}{\Delta \nu}$$

$$\Delta \nu_D = \frac{2c}{\lambda}\sqrt{\frac{\ln 2}{a}}$$

$$a = \frac{Mc^2}{2kT}$$

$$\nu_D = \frac{c}{2L}$$

$$M = m \cdot u$$

$\boxed{u = 1{,}67 \cdot 10^{-27}}$

$\boxed{h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}}$

$\boxed{k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}}$

FAKTOR DOBROTE LASERSKOG REZONATORA

$$Q = \frac{4\pi \nu L}{\gamma c}$$

$$\gamma = -\ln(R_1 R_2)$$

$\hookrightarrow$ koeficijent gubitaka

PRIRODNA ŠIRINA SPEKTRALNE LINIJE

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2\pi c \Delta t}$$

$\hookrightarrow$ vrijeme života

EINSTEINOVE VJEROJATNOSTI

$$A_{21} = \frac{1}{\Delta t}$$

$\hookrightarrow$ spontana emisija

$$A_{21} = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} B_{21}$$

$$B_{21} = B_{12}$$

$\hookrightarrow$ stimulirana emisija

$\hookrightarrow$ apsorpcija

NEODREĐENOST ENERGIJSKE RAZINE

$$\Delta E = h\Delta\nu = \frac{h}{2\pi\Delta t}$$

$$\Delta\nu = \frac{1}{2\pi\Delta t}$$

PRIRODNA ŠIRINA LORENTZOVE LINIJE

$$I(\omega-\omega_0)=\frac{I_0}{2}$$

$$\frac{I_0}{2}=I_0\frac{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}{(\omega-\omega_0)^2+\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} \Rightarrow (\omega-\omega_0)^2=\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2$$

$$\omega_{1,2}=\omega_0\pm\frac{\gamma}{2} \qquad \boxed{\Delta\omega=\omega_1-\omega_2=\gamma}$$

DOPPLEROVA ŠIRINA LINIJE

$$I(\omega)=I_0 e^{-a\frac{(\omega-\omega_0)^2}{\omega_0^2}}, \quad a=\frac{Mc^2}{2kT}$$

$$I(\omega)=\frac{I_0}{2}$$

$$\frac{\cancel{I_0}}{2}=\cancel{I_0} e^{-a\frac{(\omega-\omega_0)^2}{\omega_0^2}} \Rightarrow e^{-a\frac{(\omega-\omega_0)^2}{\omega_0^2}}=\frac{1}{2} \Rightarrow (\omega-\omega_0)^2=\frac{\omega_0^2}{a}\ln 2$$

$$\omega_{1,2}=\omega_0\pm\omega_0\sqrt{\frac{\ln 2}{a}} \qquad \boxed{\Delta\omega=2\omega_0\sqrt{\frac{\ln 2}{a}}}$$

$$\omega_0=2\pi\nu=\frac{2\pi c}{\lambda} \Rightarrow \boxed{\Delta\omega=\frac{4\pi c}{\lambda}\sqrt{\frac{\ln 2}{a}}}$$

OMJER DOPPLEROVE ŠIRINE LINIJE I PRIRODNE ŠIRINE LINIJE

$$\Delta\lambda_D=\frac{\lambda^2\Delta\nu}{c}$$ - DOPPLEROVA ŠIRINA LINIJE $\qquad \boxed{\Delta\nu=\frac{\Delta\omega_D}{2\pi}}$

$$\Delta\lambda=\frac{\lambda^2}{2\pi c\Delta t}$$ - PRIRODNA ŠIRINA LINIJE

INTENZITET SVJETLOSTI U REZONATORU NAKON JEDNOG ZATVORENOG KRUGA

$$I=R_1R_2I_0=I_0e^{-\gamma} \Rightarrow e^{-\gamma}=R_1R_2 \Rightarrow \gamma=-\ln(R_1R_2)$$

FAKTOR POJAČANJA

$$k=\frac{1}{2L}\left(\gamma+\ln\left(\frac{1}{R_1R_2}\right)\right) \qquad k=(N_2-N_1)\frac{nh\nu B_{21}}{c}$$

FIZIKA LASERA IZVODI

EINSTEINOVE VJEROJATNOSTI PRIJELAZA

$$\underbrace{N_2 A_{21} + N_2 B_{21} u(\nu)}_{\text{broj prijelaza dolje}} = \underbrace{N_1 B_{12} u(\nu)}_{\text{broj prijelaza gore}} \qquad N_2 = N_1 e^{\frac{-h\nu}{kT}}$$

$$B_{12} u(\nu) = e^{\frac{-h\nu}{kT}} \left(A_{21} + B_{21} u(\nu)\right) \Rightarrow B_{12} u(\nu) - B_{21} e^{\frac{-h\nu}{kT}} u(\nu) = A_{21} e^{\frac{-h\nu}{kT}}$$

$$u(\nu) = \frac{A_{21} e^{\frac{-h\nu}{kT}}}{B_{12} - B_{21} e^{\frac{-h\nu}{kT}}} = \frac{A_{21}}{B_{12} e^{\frac{h\nu}{kT}} - B_{21}} \quad , \cancel{A_{21} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} B_{21}}, \cancel{B_{21} B_{12}}$$

$$\cancel{u(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot B_{21} \frac{1}{B_{12} e^{\frac{h\nu}{kT}} - B_{21}} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}}$$

$$u(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \Rightarrow \text{PLANCK} \quad , \quad B_{12} = B_{21}$$

$$\frac{A_{21}}{B_{21}\cancel{(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1)}} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{\cancel{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}} \Rightarrow \boxed{\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}}$$

KOEFICIJENT APSORPCIJE EM ZRAČENJA

$B_{12} = B_{21} = B$, $h\nu N_1 B_{12} u(\nu)$ - apsorpcija energije

, $h\nu N_2 B_{21} u(\nu)$ - stimulirana

$$\frac{du(\nu)}{dt} = h\nu B u(\nu)(N_2 - N_1)$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{dx}\frac{dx}{dt} = c\frac{d}{dx} \quad , \quad \frac{c\,du(\nu)}{dx} = h\nu B u(\nu)(N_2 - N_1)$$

$$\frac{du(\nu)}{u(\nu)} = \frac{1}{c} h\nu B (N_2 - N_1) dx = -\alpha dx$$

$$u(\nu) = u_0 e^{-\alpha dx}$$

FAKTOR DOBROTE LASERA

I Međuispit iz Fizike lasera 21. 03. 2011 (trajanje - 60 minuta)

1.1 Izvedite vezu između Einsteinovih vjerojatnosti prijelaza. (3 boda)

1.2. Odredite vrijeme života pobuđene energijske razine atoma žive koji emitira zračenje valne duljine 185 nm. Prirodna širina spektralne linije je $1{,}5\cdot10^{-14}$ m. Koliko iznose Einsteinovi koeficijenti za spontanu i stimuliranu emisiju? (2 boda)

2.1 Izvedite izraz za koeficijent apsorpcije elektromagnetskog zračenja (3 boda)
2.2 Objasnite inverziju naseljenosti (1 bod)
2.3 Opišite načine dobivanja inverzije naseljenosti (1 bod)

3.1 Kratko objasnite zašto se kod izvoda oblika linije pri emisiji elektromagnetskog zračenja koristi model prigušenog harmoničkog oscilatora, a kod apsorpcije model prisilnog harmoničkog oscilatora. (2 boda)
3.2 Navedite osnovne dijelove od kojih se sastoji svaki laser (1 bod)

3.3 Zaokružite 2 točne tvrdnje: (1 bod)

a) Koeficijent apsorpcije ovisi o imaginarnom dijelu indeksa loma
b) Prirodna širina linije posljedica je relacija neodređenosti
c) Disperziju elektromagnetskog vala opisuje imaginarni dio indeksa loma
d) Bohrov model atoma može se primijeniti na sve atome u periodnom sustavu elemenata

3.4 Zaokružite netočnu tvrdnju: (1 bod)

a) Izborna pravila pri prijelazu elektrona u atomu posljedica su zakona sačuvanja energije
b) Inverzna naseljenost u sustavu atoma može se postići optičkim pumpanjem
c) dozvoljeni su samo oni prijelazi za koje je prijelazni dipolni moment jednak nuli
d) kod atoma s LS vezanjem dozvoljeni su samo oni prijelazi kod kojih je promjena spinskog kvantnog broja jednaka nuli

Konstanate:

c = 3·10^{8} m-s

k = 1,38·10^{-23} J/K

h = 6,626·10^{-34} Js

u = 1,66·10^{-27} kg

Formule:

λ·ν= c

Relacije neodređenosti: $\Delta E \cdot \Delta t \cong h/2\pi$

Planckov zakon $u_\nu = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$

Boltzmannova raspodjela $N_1 = N_0 \cdot e^{-\frac{h \cdot \nu}{k \cdot T}}$

Lorentzov oblik linije $I(\omega - \omega_0) = I_0 \frac{(\gamma/2)^2}{(\omega - \omega_0)^2 + (\gamma/2)^2}$

Dopplerov oblik linije $I(\omega) = I_0 \cdot e^{-a\frac{(\omega-\omega_0)^2}{\omega_0^2}}$ $a = \frac{Mc^2}{2kT}$

I MI 2011

1.1. $u(\nu)$ - gustoća energije

B_{12} - koef apsorpcije

B_{21} - koef stimulacije emisije

A_{21} - koef spontane emisije

$N_1 B_{12} u(\nu)$ - ukupan ~~o~~broj prijelaza gore

$N_2 A_{21} + N_2 B_{21} u(\nu) = N_1 B_{12} u(\nu)$ - ukupan broj prijelaza dolje

$N_2 = N_1 e^{-\frac{h\nu}{kT}}$

$$B_{12} u(\nu) = e^{\frac{-h\nu}{kT}} (A_{21} + B_{21} u(\nu))$$

$$u(\nu) = \frac{A_{21}}{B_{12} e^{\frac{h\nu}{kT}} - B_{21}} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \Rightarrow u(\nu) = \frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}$$

1.2. $\lambda = 185\,nm$

$\Delta\lambda = 1{,}6 \cdot 10^{-14}\,m$

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2\pi c \Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\lambda^2}{2\pi c \Delta\lambda} = 1{,}21 \cdot 10^{-9}\,s$$

$= 1{,}21\,ns$

$A_{21} = \frac{1}{\Delta t} = 8{,}26 \cdot 10^8$

$$A_{21} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} B_{21} = \frac{8\pi h \cancel{c^3}}{\lambda^3 \cancel{c^3}} B_{21}$$

$\lambda \cdot \nu = c$

$$B_{21} = A_{21} \frac{\lambda^3}{8\pi h} = 3{,}14 \cdot 10^{20}$$

$B_{21} = B_{12}$

2.1. Koeficijent apsorpcije EM zračenja

h - Planckova konst,

$B_{12} = B_{21} = B$

$h\nu N_1 B_{12} u(\nu)$ - apsorpcija energije

$h\nu N_2 B_{21} u(\nu)$ - energija dobivena stimul. emisijom

$\frac{du(\nu)}{dt} = h\nu B u(\nu)(N_2 - N_1)$ - promjena gustoće energije

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{dx}\frac{dx}{dt} = c\frac{d}{dx}$$

$$\frac{c\,du(\nu)}{dx} = h\nu B u(\nu)(N_2 - N_1)$$

$$\frac{du(\nu)}{u(\nu)} = \frac{1}{c} h\nu B (N_2 - N_1) dx = -\alpha dx \Rightarrow u(\nu) = u_0 e^{-\alpha d x}$$

$$\alpha = \frac{h\nu}{c} B (N_1 - N_2)$$

2.2 Što je inverzija naseljenosti?

U sustavu s dvije energetske razine pored apsorpcije istovremeno se vrše i inducirani (stimulirani) prijelazi na nižu energijsku razinu. Ako je uzbudno polje dovoljno jako nakon nekog vremena, pola atoma bit će u stanju energije E_2, a pola u stanju E_1.

Povećanje gustoće energije moguće je postići za $\alpha < 0$, tj. kada je $N_2 > N_1$, što se naziva inverzija naseljenosti

2.3. Postizanje inverzije naseljenosti

Inverzija naseljenosti postiže se ili povećanjem naseljenosti stanja više energije ili smanjenjem stanja niže energije

1. Optičko pumpanje - izvor zračenja djeluje izvana i inducira prijelaze u najviše energijsko stanje. Metoda je pogodna kod lasera čvrstog stanja.

2. Pobuda elektronima - sraz 1. vrste
   Pobuda atoma na najvišu energijsku razinu može se postići i neelastičnim srazom elektrona i atoma. Elektron pri tome predaje energiju atomu i atom prelazi u pobuđeno stanje. Koristi se kod Ar-ion

3. Pobuda srazom 2. vrste
   Koristi se u plinskim smjesama koje imaju dvije komponente tj. atome A i B (smjesa He i Ne u He-Ne laseru). Atomi A i B moraju imati približno jednake energijske razine
   Pobuda se odvija u 2 koraka:
   1) sudarom elektrona se pobuđuje atom A i prelazi u pobuđeno stanje A^* $(A + e \rightarrow A^*)$
   2) sudarom A^* s atomom B, B prelazi u pobuđeno stanje B^*, a A se vraća u osnovno stanje $(A^* + B \rightarrow A + B^*)$

3.1. Oblik linije izvodi se iz klasičnog modela PRIGUŠENOG harmoničkog oscilatora. Kružno gibanje elektrona oko jezgre može se matematički opisati jednadžbom prigušenog harmoničkog titranja

Kod apsorpcije zračenja pogodno je uzeti model PRISILNOG titranja pod utjecajem vanjske sile koja djeluje na naboj (Vanjskim poljem prisiljavamo atom da apsorbira zračenje)

3.2. Rezonator
Optičko pojačalo
Vanjska pobuda

3.3. a) b)

3.4. c)

II Međuispit iz Fizike lasera 2. 05. 2011 (trajanje - 60 minuta)

1.1 Izvedite izraz za faktor dobrote laserskog rezonatora. (3 boda)

1.2 Odredite koeficijent gubitaka u rezonatoru duljine 2 m, ako je faktor dobrote $2 \cdot 10^9$, a frekvencija elektromagnetskog vala $5 \cdot 10^{14}$ Hz. (1 bod)

1.3 Odredite relativnu promjenu frekvencije laserskog snopa $\Delta\nu/\nu$ ako se zbog porasta temperature duljina rezonatora poveća za 0,05 mm. Početna duljina rezonatora je 1 m. (1 bod)

2.1 Navedite i kratko objasnite načine eksperimentalne realizacije jednomodnih lasera. (3 boda)

2.2 Navedite i kratko objasnite 3 načina rada pulsnih lasera (kako dobiti puls?) (2 boda)

3.1 Opišite način rada CO_2 i N_2 lasera, navedite razlike. (3 boda)

3.2 Zaokružite 2 točne tvrdnje (1 bod)

a) U laserima se koriste otvoreni optički rezonatori.
b) U HeNe laseru laserski prijelazi se odvijaju u He, a Ne služi za pobudu.
c) Brusterovi prozori se u laseru postavlju radi podešavanja frekvencije izlaznog zračenja.
d) Vremensku koherenciju laserskog snopa možemo odrediti Michelsonovim interferometrom.

3.3 Zaokružite netočnu tvrdnju: (1 bod)

a) Raspodjela intenziteta TEM_{00} laserskog moda opisana je Gaussovom funkcijom.
b) Broj longitudinalnih modova u rezonatoru ovisi o duljini rezonatora.
c) U Fabry Perot rezonatoru polumjeri zakrivljenosti zrcala moraju biti različiti.
d) Poželjno je da optički elementi u laserima imaju veliku spektralnu moć razlučivanja.

Konstanate: $c = 3 \cdot 10^8$ m/s,

Formule: $\lambda \cdot \nu = c$; $m \lambda = 2L$

$$L = L_0 (1 + \alpha \cdot \Delta T)$$

2. MI 2011

1.1. Faktor dobrote lasera

$$Q = 2\pi\nu \frac{W}{\frac{dW}{dt}}$$

W – ukupna energija u rezonatoru

$\frac{dW}{dt}$ } gubitak energije u jednom krugu u rezonatoru na putu $2L$

$$W = W_0 e^{\frac{-2\pi\nu}{Q} t}$$

$$, \; t = \frac{2L}{c}$$

$$W = \cancel{W_0} e^{-\gamma} = W_0 e^{\frac{-2\pi\nu}{Q}\frac{2L}{c}} \Rightarrow \gamma = \frac{4\pi\nu L}{Qc} \Rightarrow Q = \frac{4\pi\nu L}{\gamma c}$$

1.2.

$L = 2m$

$Q = 2 \cdot 10^9$

$\nu = 5 \cdot 10^{14}$

$$\gamma = \frac{4\pi\nu L}{Qc} = 0{,}02094$$

1.3 $\frac{\Delta\nu}{\nu}$

$$\nu_0 = \frac{Q\gamma c}{4\pi L_0}$$

$L = 1m$

$$\nu_1 = \frac{Q\gamma c}{4\pi L_1}$$

$$\Delta\nu = \nu_1 - \nu_0 = \frac{Q\gamma c}{4\pi}\left(\frac{1}{L_1} - \frac{1}{L_0}\right)$$

L_1: 1,05 L_0: 1

$$\nu = \frac{Q\gamma c}{4\pi L}$$

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\frac{1}{L_1} - \frac{1}{L_0}}{\frac{1}{L}} = \frac{1}{1{,}05} - 1 = -0{,}0476$$

2.1. Načini eksperimentalne realizacije jednomodnih lasera

Izdvajanjem jedne linije ili korištenjem optičkog elementa laser može oscilirati istovremeno u više transverzalnih TEM_{pqr} i longitudinalnih modova

TEM_{00r} laseri nastoje raditi u najvišim mogućim modovima jer oni imaju veći promjer snopa, što im omogućava da iz sredstva izvuku što više energije

2.2.

1) Q-prekidanje (pomoću rotirajućeg zrcala ili elektro-optičkim prekidanjem)

2) Sprezanje modova

3) Prekidanje pojačanjem

3.1 Navedite osnovne dijelove od kojih se sastoji svaki laser te kratko objasnite princip rada lasera. (3 boda)

3.2 Izvedite izraz za koeficijent apsorpcije za sustav atoma s dva energijska nivoa pomoću Einsteinovih vjerojatnosti prijelaza. (3 boda)

3.3 Objasnite inverziju naseljenosti (kratko) (1 bod)

4.1 Navedite načine dobivanja inverzije naseljenosti. (načini pobude) (2 boda)

4.2 Kratko objasnite prednosti dobivanja inverzije naseljenosti u sustavu s 4 energijska nivoa. (1 bod)

4.3 Izvedite izraz za gustoću modova u šupljini. (4 boda)

5.1 Kratko objasnite zašto se kod izvoda oblika linije pri emisiji elektromagnetskog zračenja koristi model prigušenog harmoničkog oscilatora, a kod apsorpcije model prisilnog harmoničkog oscilatora. (2 boda)

5.2 Objasnite razliku između stabilnih i nestabilnih rezonatora (kratko) (1 bod).

5.3 Navedite načine eksperimentalne realizacije jednomodnih lasera (2 boda)

5.4 Navedite karakteristike laserske svjetlosti kod jednomodnog načina rada lasera. (2 boda)

Konstanate: $c = 3\cdot10^{8}$ m/s; $k = 1{,}38\cdot10^{-23}$ J/K; $h = 6{,}626\cdot10^{-34}$ Js; $u = 1{,}66\cdot10^{-27}$ kg

Formule: $\lambda\cdot\nu = c$; $m\,\lambda = 2\,L$

Relacije neodređenosti: $\Delta E\cdot\Delta t \cong h/2\pi$, Planckov zakon $u_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\cdot\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}$

Boltzmannova raspodjela $N_1 = N_0 \cdot e^{-\frac{h\nu}{kT}}$, Lorentzov oblik linije $I(\omega) = \frac{I_0\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}{(\omega-\omega_0)^2+\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}$

Dopplerov oblik linije $I(\omega) = I_0 \cdot e^{-a\frac{(\omega-\omega_0)^2}{\omega_0^2}}$ $a = \frac{Mc^2}{2kT}$

Rezonator: $2nl = m\lambda$; $\Delta\nu = \frac{c}{2L}$ $Q = \frac{4\pi\cdot\nu\cdot L}{\gamma\cdot c}$

I Međuispit iz Fizike lasera 29. 04. 2013 (trajanje - 90 minuta)

1.1 Pri prijelazu s više na nižu energijsku razinu sustav atoma u termičkoj ravnoteži emitira svjetlost valne duljine 515 nm. Koliko će se puta povećati omjer vjerojatnosti stimulirane i spontane emisije ako se temperatura sustava atoma poveća s 10^3 K na 10^4 K? (2 boda)

1.2 Koliko rezonantnih modova ima unutar Dopplerove širine linije u plinu Ne na temperaturi 700 K, ako je duljina rezonatora 1 m, frekvencija zračenja $4{,}74 \cdot 10^{14}\ s^{-1}$, atomska masa 20,187 (2 boda)

1.3 U spektru laserskog zračenja treba razlučiti dvije bliske linije koje se razlikuju za 0,003 nm (λ= 600 nm). Na raspolaganju je optička rešetka s 10^4 zareza i Fabry- Perot etalon s finesom 300 (razlika u hodu zraka svjetlosti koje interferiraju na FP etalonu je 1 cm). Koji uređaj treba upotrijebiti i zašto? (2 boda)

1.4 Za koliko će se promijeniti faktor dobrote laserskog rezonatora Ar^+-ion lasera duljine 1m ako se valna duljina emitiranog zračenja promijeni od 515 nm na 488 nm? Gubici u rezonatoru uzrokovani su nepoželjnim refleksijama na zrcalima s koeficijentima refleksije 0,99 i 0,98 (disperzija se zanemaruje). (1 bod)

2.1 Za prirodnu širinu linije emitirane prijelazom elektrona između dvije pobuđene energijske razine u atomu vrijedi: (zaokruži točnu tvrdnju): (1 bod)

a) Širini linije doprinose neodređenosti u energiji obje energijske razine
b) Širini linije doprinosi samo neodređenosti u energiji gornje energijske razine
c) Širina linije ne ovisi o tome da li je donja razina pobuđena ili osnovna (najniža)

2.2 Zaokruži točnu tvrdnju: (1 bod)

a) Prijelazi u atomu mogu se odvijati između svih energijskih razina.
b) Prijelazi u atomu mogu se odvijati samo ako je prijelazni dipolni moment jednak nuli.
c) Prijelazi u atomu mogu se odvijati samo ako je prijelazni dipolni moment različit od nule.

2.3 Zaokružite 2 točne tvrdnje: (2 boda)

a) Koeficijent apsorpcije ovisi o imaginarnom dijelu indeksa loma
b) Prirodna širina linije posljedica je relacija neodređenosti
c) Disperziju elektromagnetskog vala opisuje imaginarni dio indeksa loma
d) Bohrov model atoma može se primijeniti na sve atome u periodnom sustavu elemenata

2.4 Zaokružite netočnu tvrdnju (1 bod)

a) Viši transverzalni modovi u rezonatoru mogu se ugušiti odgovarajućom geometrijom rezonatora.
b) Razvoj lasera započeo je oko 1960. godine.
c) Mala vrijednost faktora dobrote laserskog rezonatora ima za posljedicu male gubitke snage.

2.5 Zaokružite netočnu tvrdnju (1 bod)

a) Raspodjela intenziteta TEM_{00} laserskog moda opisana je Gaussovom funkcijom.
b) Razlika u frekvenciji između longitudinalnih modova u rezonatoru ne ovisi o duljini rezonatora.
c) Umetanjem Fabry Perot etalona u rezonator laser može raditi u jednom modu.

2.6 Zaokružite netočnu tvrdnje (1 bod)

a) U laserima se koriste otvoreni optički rezonatori.
b) Brusterovi prozori se u laseru postavlju radi podešavanja frekvencije izlaznog zračenja.
c) Vremensku koherenciju laserskog snopa možemo odrediti Michelsonovim interferometrom

MI 2012./2013

1.1

$h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$

$\lambda = 515\ nm$

$T_1 = 10^3 K$

$T2 = 10^4 K$

$c = 3 \cdot 10^8 m/s$

$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23} J/K$

$$\frac{B_{21} \cdot \rho(\nu)}{A_{21}} = \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

$\rho(\nu) \to$ gustoća toplinskog zračenja

$\lambda \cdot \nu = c$ ($\nu \to$ frekvencija zračenja)

$\nu = \frac{c}{\lambda}$

$B_{12} = B_{21} \to$ einsteinovi koeficijenti

$B_{12} \rho(\nu) = A_{21}$

$$Q = \frac{w_{stim}}{w_{spon}} = \frac{B_{21} \rho(\nu)}{A_{21}} = \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

$$Q = \frac{1}{e^{\frac{hc}{kT\lambda}} - 1} \Rightarrow \frac{Q_2}{Q_1} = ?$$

$Q_1 = 7{,}1278 \cdot 10^{-13}$

$Q_2 = 0{,}06496$

$$\frac{Q_2}{Q_1} = 9{,}11322 \cdot 10^{10}$$

1.2.

Ne

$T = 700 K$

$l = 1 m$

$\nu = 4{,}74 \cdot 10^{14} s^{-1}$

$M = 20{,}187$

$$N = ? \Rightarrow N = \frac{\Delta\nu_D}{\Delta\nu}$$

$$\Delta\nu_D = \frac{2c}{\lambda}\sqrt{\frac{\ln 2}{a}}$$

$\frac{c}{\lambda} \to \nu$

$$\Delta\nu = \frac{c}{2L}$$

$$a = \frac{Mc^2}{2kT}$$

$$N = \frac{\frac{2c}{\lambda}\sqrt{\frac{\ln 2}{\frac{Mc^2}{2kT}}}}{\frac{c}{2L}} =$$

$$= \frac{2\nu\sqrt{\frac{\ln 2}{\frac{Mc^2}{2kT}}}}{\frac{c}{2L}} = ?$$

1.4. $L = 1m$

$\lambda_1 = 515nm = 515 \cdot 10^{-9}$ m

$\lambda_2 = 488 \cdot 10^{-9}$ m

$R_1 = 0,99$

$R_2 = 0,98$

$Q_2 - Q_1$ $\quad Q = \frac{4\pi\nu L}{\gamma c} = \frac{4\pi L}{-\lambda \ln(R_1 R_2)}$

$Q_1 = \frac{4\pi L}{-\lambda_1 \ln(R_1 R_2)} = 806554220,1$

$Q = 44624926,08 = 4,46 \cdot 10^7$

3.1. Dijelovi: Rezonator
Optičko pojačalo
Vanjska pobuda

Vanjskom pobudom atome unutar optičkog pojačala tjeramo u stanje više energije dok ne dobijemo inverznu naseljenost. Kada smo dobili inverznu naseljenost, vanjskom pobudom tjeramo atome na stimuliranu emisiju. Kod stimulirane emisije dobivamo dodatni foton. Fotoni titraju unutar otvorenog rezonatora koji je sastavljen od 2 zrcala. Jedno od zrcala rezonatora je polupropusno, zbog čega propušta svjetlost van lasera

3.2 KOEFICIJENT APSORPCIJE EM ZRAČENJA

Apsorpcija energije: $h\nu N_1 B_{12} u(\nu)$

Energija dobivena stimuliranom energijom: $h\nu N_2 B_{21} u(\nu)$

$$B_{12} = B_{21} = B \Rightarrow \frac{du(\nu)}{dt} = h\nu B u(\nu)(N_2 - N_1)$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{dx}\frac{dx}{dt} = c\frac{d}{dx}$$

$$c\frac{du(\nu)}{dx} = h\nu B u(\nu)(N_2 - N_1)$$

koeficijent apsorpcije

$$\frac{du(\nu)}{u(\nu)} = \frac{1}{c} h\nu B(N_2 - N_1)dx = -\alpha dx$$

$$\boxed{u(\nu) = u_0 e^{-\alpha dx}} \qquad \alpha = h\nu B(N_2 - N_1)$$

3.3. Inverzija naseljenosti nastaje kada je više atoma u stanju više energije nego u stanju niže energije

4.1
Optičko pumpanje
Sraz 1. vrste
Sraz 2. vrste
$\Big\}$ Načini dobivanja inverzije

4.2 S obzirom da imamo jednu dodatnu razinu, nemamo problem da nam ostaje određeni broj atoma u stanju niže energij te je manja snaga potrebna za postizanje inverene naseljenosti

4.3. $E = \sum_p A_p e^{i(\omega_p t - k_p r)}$ -električno polje EM vala unutar šupljine

Na zidu se stvara stojni val $E=0$

Duljina stranice šupljine mora biti višekratnik broja $\frac{\lambda}{2}$

$A = p\frac{\lambda}{2}$, $p = \frac{\pi}{k_i}$

Kugla volumena $V = \frac{4}{3}R^3\pi$ (mi gledamo 1/8)

$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \pi^2\left(\frac{p^2}{A^2} + \frac{q^2}{B^2} + \frac{r^2}{C^2}\right)$ $V=ABC$

Broj modova u volumenu $\frac{1}{ABC} \cdot N = \frac{2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3} R^3 \pi}{\frac{1}{ABC}}$

Broj modova u jedinici volumena $n = \frac{k^3}{3\pi^2} = \frac{\omega^3}{3\pi^2 c^3}$, $k = R\pi$

Broj modova u intervalu frekvencija $d\omega$

$n(\omega)d\omega = \frac{k^3}{3\pi^2} = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} d\omega$

$n(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} d\nu$

5.1. Kod izvoda oblika linije pri emisiji EM zračenja se koristi model prigušenog oscilatora jer je gibanje elektrona oko jezgre slično (može se opisati s modelom prigušenog titranja)

5.2 Stabilni rezonatori zadržavaju svu svjetlost u sebi dok kod nestabilnih svjetlost divergira

5.3. Izdvajanjem jedne linije ili korištenjem optičkog elementa

5.4. Svjetlost kod jednomodnog načina rada lasera ima sljedeće karakteristike: monokromatska
koherentna
usmjerena
velikog sjaja

6. Zadaci

1. Odredite prirodnu širinu spektralne linije valne duljine $\lambda = 632.8$ nm atoma helija koja nastaje prijelazom elektrona iz pobuđenog u osnovno stanje. Prosječno vrijeme života pobuđenog stanja je $\Delta t = 10^{-8}$ s.

Rješenje. Prirodnu širinu spektralne linije možemo odrediti pomoću relacija neodređenosti $\Delta E \cdot \Delta t \approx \hbar, \hbar = h/2\pi$, gdje je $h = 6.626 \cdot 10^{-34}$ Js Planckova konstanta. Energija fotona je $E = h \cdot \nu = h\frac{c}{\lambda}$, c je brzina svjetlosti $3 \cdot 10^8$ ms^{-1}

$$\lambda = \frac{hc}{E} \Longrightarrow d\lambda = -\frac{hc}{E^2}dE.$$

Uvede li se aproksimacija $d\lambda \approx \Delta\lambda$ i $dE \approx \Delta E$ vrijedi:

$$|\Delta\lambda| = \frac{hc}{\left(h\frac{c}{\lambda}\right)^2}\Delta E = \frac{\lambda^2}{hc} \cdot \frac{\hbar}{\Delta t} = \frac{\lambda^2}{2\pi c \Delta t}$$

$$|\Delta\lambda| = \frac{(632.8 \cdot 10^{-9}\ \text{m})^2}{2 \cdot 3.14 \cdot 3 \cdot 10^8\ \text{ms}^{-1} \cdot 10^{-8}\ \text{s}}$$

$$|\Delta\lambda| = 2.12 \cdot 10^{-14}\ \text{m}.$$

2. Odredite prirodnu širinu spektralnih linija emitiranih u:

a) vidljivom (400–700 nm);

b) infracrvenom (700–1000 nm);

c) ultraljubičastom (200–400 nm) području elektromagnetskog zračenja.

Rješenje. a) Valna duljina linije D_1 u natriju koja odgovara prijelazu $3P_{3/2} \rightarrow 3S_{1/2}$ je $\lambda = 589.1$ nm. Vrijeme života pobuđenog stanja $\Delta t = 16$ ns. Iz relacija neodređenosti $\Delta E = h\Delta\nu = \frac{\hbar}{\Delta t}$ prirodna širina linije je

$$\Delta\nu = \frac{1}{2\pi\Delta t} = \frac{1}{2\pi \cdot 16 \cdot 10^{-9}\ \text{s}} = 9.95 \cdot 10^6\ \text{s}^{-1}$$

$$|\Delta\lambda| = \frac{\lambda^2\Delta\nu}{c} = \frac{(589.1 \cdot 10^{-9})^2\ \text{m}^2 \cdot 9.95 \cdot 10^6\ \text{s}^{-1}}{3 \cdot 10^8\ \text{ms}^{-1}} = 1.15 \cdot 10^{-14}\ \text{m}.$$

b) Valna duljina linije koja odgovara prijelazu između dviju vibracijskih energijskih razina molekule u osnovnom elektronskom stanju nalazi se u *IR* području. Vrijeme života pobuđene vibracijske razine $\Delta t = 10^{-3}$ s. Prirodna širina linije je vrlo mala zbog dugačkog vremena poluživota

$$\Delta\nu = \frac{1}{2\pi\Delta t} = \frac{1}{2\pi \cdot 10^{-3}\ \text{s}} = 159.2\ \text{s}^{-1}.$$

c) U ultraljubičastom području postoji vrlo mala vjerojatnost elektronskih prijelaza u atomima i molekulama. Ovakovi prijelazi najčešće nisu dozvoljeni. Primjer je prijelaz elektrona iz $2s$ u $1s$ stanje. Moguć je dvofotonski prijelaz u $1s$ stanje. Vrijeme života pobuđenog stanja $\Delta t = 8.23$ s, odakle je prirodna širina linije $\Delta\nu = 0.02\ \text{s}^{-1}$.

3. Širina spektralne linije valne duljine $4 \cdot 10^{-7}$ m iznosi 10^{-14} m. Odredite vrijeme života pobuđene energijske razine sustava atoma koji emitira zračenje te valne duljine.

Rješenje.

$$\Delta E \cdot \Delta t \approx \hbar$$

$$\Delta E = h\frac{c|\Delta\lambda|}{\lambda^2}$$

$$\Delta t = \frac{\hbar}{\Delta E} = \frac{\lambda^2}{2\pi c|\Delta\lambda|}$$

$$\Delta t = \frac{(4 \cdot 10^{-7})^2\ \text{m}^2}{2 \cdot 3.14 \cdot 3 \cdot 10^8\ \text{ms}^{-1} \cdot 10^{-14}\ \text{m}} = 8.49 \cdot 10^{-9}\ \text{s}.$$

4. Odredite prirodnu širinu spektralne linije koja nastaje prijelazom između dviju pobuđenih energijskih razina s vremenima života Δt_1 i Δt_2.

Rješenje. Prirodnoj širini linije pridonose neodređenosti energijskih razina ΔE_1 i ΔE_2: $\Delta E = \Delta E_1 + \Delta E_2$. Širina linije je

$$\Delta\nu = \frac{1}{2\pi\Delta t_1} + \frac{1}{2\pi\Delta t_2}.$$

5. Atom emitira svjetlost valne duljine 532 nm kao rezultat elektronskog prijelaza između dviju energijskih razina s vremenima života $1.2 \cdot 10^{-8}$ s i $2 \cdot 10^{-8}$ s. Odredite prirodnu širinu linije $\Delta\lambda$.

Rješenje.

$$|\Delta\lambda| = \frac{\lambda^2\Delta\nu}{c} = \frac{\lambda^2}{2\pi c}\left(\frac{1}{\Delta t_1} + \frac{1}{\Delta t_2}\right)$$

$$|\Delta\lambda| = \frac{(532 \cdot 10^{-9}\ \text{m})^2}{2 \cdot 3.14 \cdot 3 \cdot 10^8\ \text{ms}^{-1}}\left(\frac{1}{1.2 \cdot 10^{-8}\ \text{s}} + \frac{1}{2 \cdot 10^{-8}\ \text{s}}\right)$$

$$|\Delta\lambda| = 2 \cdot 10^{-14}\ \text{m}.$$

6. Koliko će se spektralnih linija pojaviti u spektru atoma Li ako je pobuđeni elektron na energijskoj razini:

a) $4s$, b) $4p$.

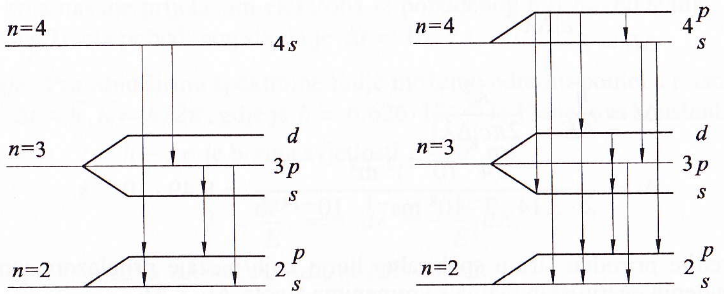
Rješenje. Proces emisije i apsorpcije svjetlosti ostvaruje se prijelazom atoma iz višeg u niže energijsko stanje i obrnuto. Izborna pravila određuju koji će prijelazi biti dozvoljeni, a koji ne. Postoje dvije mogućnosti:

1. U slučaju L-S vezanja (kod atoma lakih elemenata) kada su međusobna djelovanja orbitalnih momenata $\vec{L}$ i spinskih momenata $\vec{S}$ elektrona međusobno nezavisna ($\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$) vrijedi $\Delta L = \pm 1$ i $\Delta S = 0$.

2. U slučaju $j - j$ vezanja kada prevladava međusobno vezanje orbitalnog i spinskog momenta svakog elektrona ($\vec{j}_1 = \vec{l}_1 + \vec{s}_1$, $\vec{J} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2$) izborna pravila glase: $\Delta J = 0, \pm 1$ (no zabranjeno je da u oba energijska stanja bude $J = 0$) i $\Delta M = 0, \pm 1$. M je magnetski kvantni broj određen projekcijom ukupnog momenta količine gibanja na os kvantizacije.

Za atom litija vrijedi $L - S$ vezanje pa iz izbornih pravila slijedi da su dozvoljeni prijelazi $S \to P$ i $P \to D$. Zabranjeni su prijelazi: $S \to S$, $P \to P$ $(\Delta L = 0)$, te $S \to D$ $(\Delta L = \pm 2)$.

Atom Li je treći u periodnom sustavu elemenata. Energijska razina $n = 1$ popunjena je s dva elektrona. Odatle slijedi da u slučaju a) postoji 6 dozvoljenih prijelaza dok ih je u slučaju b) 12 (prema slici 6.1.).



Sl. 6.1.

7. Odredite oblik spektralne linije nastale prijelazom elektrona u atomu s višeg E_i u niže E_k energijsko stanje ($\hbar\omega_0 = E_i - E_k$) primjenom klasičnog modela prigušenog harmoničkog oscilatora.

Rješenje. Gibanje elektrona mase m u atomu može se opisati jednadžbom prigušenih harmoničkih titranja:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0,$$

b je konstanta sile otpora, k je konstanta elastične sile

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \tag{1}$$

$\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$, ω_0 je vlastita frekvencija neprigušenog titranja, $\gamma = \dfrac{b}{m}$.

Jednadžba (1) je homogena diferencijalna jednadžba s konstantnim koeficijentima čije rješenje treba tražiti u obliku $x(t) = e^{\lambda t}$. Uvrštavanjem u (1) slijedi:

$$(\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega_0^2)e^{\lambda t} = 0.$$

$$(\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega_0^2) = 0 \tag{2}$$

karakteristična je jednadžba s rješenjima

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}\right), \tag{3}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}\left(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}\right). \tag{4}$$

Opće rješenje jednadžbe (1) može se napisati u obliku

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}. \tag{5}$$

Ukoliko su λ_1 i λ_2 konjugirano kompleksni, izraz (5) opisuje prigušeno titranje. Vrijedi

$$\lambda_1 = \frac{-\gamma}{2} + i\omega,$$

$$\lambda_2 = \frac{-\gamma}{2} - i\omega, \quad \text{gdje je} \quad \gamma < 4\omega_0^2,$$

$$x(t) = C_1 e^{\frac{-\gamma t}{2}} e^{i\omega t} + C_2 e^{\frac{-\gamma t}{2}} e^{-i\omega t},$$

$$e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t,$$

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma t}{2}}[(C_1 + C_2)\cos\omega t + (C_1 - C_2)i\sin\omega t].$$

Iz početnih uvjeta mogu se odrediti konstante C_1 i C_2:

1. $x_{(t=0)} = X_0 = C_1 + C_2$,

2. $\dfrac{dx_{(t=0)}}{dt} = 0$.

Iz $\dfrac{dx_{(t=0)}}{dt} = -\dfrac{\gamma}{2}[C_1 + C_2] + [(C_1 - C_2)i\omega] = 0$, slijedi: $(C_1 - C_2)i = \dfrac{\gamma X_0}{2\omega}$.

Konačno rješenje je

$$x(t) = C_0 e^{-\frac{\gamma t}{2}}\left(\cos\omega t + \frac{\gamma}{2\omega}\sin\omega t\right). \tag{6}$$

Za malo prigušenje je $\gamma \ll \omega_0$ i $\omega \cong \omega_0$ pa se drugi član u izrazu (6) može zanemariti.

$$x(t) = X_0 e^{-\frac{\gamma t}{2}}\cos\omega t. \tag{7}$$

Zbog toga što $x(t)$ opada u vremenu frekvencija emitiranog zračenja nije ω_0 već se mijenja tj. nemamo monokromatsko zračenje što je u skladu s relacijama neodređenosti. $x(t)$ se može prikazati kao superpozicija monokromatskih titraja $e^{i\omega t}$ s amplitudama $A(\omega)$

$$x(t) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty A(\omega)e^{i\omega t}d\omega.$$

Amplitudu možemo izraziti pomoću Fourierove transformacije $A(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty x(t)e^{-i\omega t}dt$.

Uvrstimo li $x(t)$ (izraz 7) vrijedi

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty X_0(\cos\omega_0 t)e^{-\left(\frac{\gamma}{2} + i\omega\right)t}dt.$$

Korištenjem tabličnog integrala $\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin ax)$ slijedi:

$$A(\omega) = \frac{X_0}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\frac{\gamma}{2}+i\omega}{\frac{\gamma^2}{4}+i\gamma-\omega^2+\omega_0^2} = \frac{X_0}{2\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{i(\omega-\omega_0)+\frac{\gamma}{2}} + \frac{1}{i(\omega+\omega_0)+\frac{\gamma}{2}}\right).$$

Intezitet spektralne linije je $I(\omega) = A(\omega)A^*(\omega)$. U blizini frekvencije ω_0 je $(\omega-\omega_0)^2 \ll \omega_0^2$; članovi koji sadrže $(\omega+\omega_0)$ mogu se zanemariti pa je

$$I(\omega-\omega_0) = \frac{C}{(\omega-\omega_0)^2+\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}.$$

Konstanta C se može odrediti iz uvjeta normiranja $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{I(\omega-\omega_0)}{I_0}d(\omega-\omega_0) = 1$, gdje je $I_0 = I(\omega_0)$. Konstanta C je tada $C = \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2$. Dobiveni oblik spektralne linije je Lorentzov

$$I(\omega-\omega_0) = I_0\frac{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}{(\omega-\omega_0)^2+\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}.$$

8. Odredite prirodnu širinu Lorentzove linije.

Rješenje. Prirodna širina linije određuje se iz uvjeta:

$$I(\omega-\omega_0) = \frac{I_0}{2}$$

$$\frac{I_0}{2} = I_0\frac{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}{(\omega-\omega_0)^2+\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}$$

$$(\omega-\omega_0)^2 = \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2$$

$$\omega_{1,2} = \omega_0 \pm \frac{\gamma}{2}.$$

Širina linije je $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 = \gamma$.

9. Odredite ukupni intenzitet spektralne Lorentzove linije.

Rješenje.

$$I = I_0\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}{(\omega-\omega_0)^2+\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}d\omega = 2I_0\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}{(\omega-\omega_0)^2+\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}d\omega.$$

Korištenjem tabličnog integrala $\int\frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}$ lako se može pokazati da je ukupni intenzitet jednak $I = \frac{\pi}{2}I_0\gamma$.

10. Odredite Dopplerovu širinu linije.

Rješenje. Do Dopplerovog širenja spektralne linije dolazi u plinovima zbog temperaturnog gibanja atoma ili molekula. Oblik spektralne linije je Gaussov

$$I(\omega) = I_0 e^{-a\frac{(\omega-\omega_0)^2}{\omega_0^2}},$$

gdje je $a = \frac{Mc^2}{2kT}$, M je masa molekule, c je brzina svjetlosti, k Boltzmanova konstanta, T temperatura plina.

Širina Gaussove linije određuje se iz uvjeta:

$$I(\omega) = \frac{I_0}{2},$$

$$\frac{I_0}{2} = I_0 e^{-a\frac{(\omega-\omega_0)^2}{\omega_0^2}},$$

$$e^{-a\frac{(\omega-\omega_0)^2}{\omega_0^2}} = \frac{1}{2},$$

$$(\omega-\omega_0)^2 = \frac{\omega_0^2}{a}\ln 2,$$

$$\omega_{1,2} = \omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\frac{\ln 2}{a}},$$

$$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 = 2\omega_0\sqrt{\frac{\ln 2}{a}}.$$

11. Odredite Dopplerovu širinu linije valne duljine $\lambda = 488$ nm argonskog ionskog lasera na temperaturi $T = 6000$ K ako je relativna atomska masa atoma argona 38.95.

Rješenje.

$$\Delta\omega = 2\omega_0\sqrt{\frac{\ln 2}{a}},$$

$$a = \frac{Mc^2}{2kT} = \frac{38.95\cdot 1.67\cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}\cdot(3\cdot 10^8\,\mathrm{ms^{-1}})^2}{2\cdot 1.38\cdot 10^{-23}\,\mathrm{JK^{-1}}6000\,\mathrm{K}} = 3.535\cdot 10^{10},$$

$$\omega_0 = 2\pi\nu = \frac{2\pi c}{\lambda},$$

$$\Delta\omega = 2\frac{2\pi c}{\lambda}\sqrt{\frac{\ln 2}{a}} = 4\cdot 3.14\frac{3\cdot 10^8\,\mathrm{ms^{-1}}}{488\cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}}\sqrt{\frac{\ln 2}{3.535\cdot 10^{10}}},$$

$$\Delta\omega = 3.42\cdot 10^{10}\,\mathrm{s^{-1}}.$$

12. Vrijeme života pobuđenog stanja atoma žive je $1.5\cdot 10^{-7}$ s. Odredite omjer Dopplerove i prirodne širine linije $\left(\frac{\Delta\lambda_D}{\Delta\lambda}\right)$ valne duljine 253.65 nm na sobnoj temperaturi ($T = 300$ K). Relativna atomska masa žive je 200.59.

Rješenje.

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2\pi c\Delta t} \quad \text{je prirodna širina linije}$$

$$\Delta\lambda_D = \frac{\lambda^2 \Delta\nu}{c} \quad \text{je Dopplerova širina linije}$$

$$\frac{\Delta\lambda_D}{\Delta\lambda} = \frac{\dfrac{\lambda^2\Delta\omega_D}{2\pi c}}{\dfrac{\lambda^2}{2\pi c\Delta t}} = \Delta t\Delta\omega_D$$

$$\frac{\Delta\lambda_D}{\Delta\lambda} = \frac{4\pi c\Delta t}{\lambda}\sqrt{\frac{\ln 2}{a}} = \frac{4\pi\Delta t}{\lambda}\sqrt{\frac{2kT\ln 2}{M}}$$

$$\frac{\Delta\lambda_D}{\Delta\lambda} = \frac{4\pi\cdot 1.5\cdot 10^{-7}\ \mathrm{s}}{253.65\cdot 10^{-9}\ \mathrm{m}}\sqrt{\frac{2\cdot 1.38\cdot 10^{-23}\ \mathrm{JK^{-1}}\cdot 300\ \mathrm{K}\ln 2}{200.59\cdot 1.67\cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}}} = 973.$$

13. Sustav atoma na temperaturi T nalazi se u termodinamičkoj ravnoteži. Prijelazi između dviju nedegeneriranih energijskih razina atoma E_1 i E_2 određeni su frekvencijom ν. Zadani su Einsteinovi koeficijenti A_{21}, B_{21} i B_{12}. U ravnoteži je broj apsorpcijskih i emisijskih prijelaza jednak. Odredite gustoću toplinskog zračenja ako se uzme u obzir:
a) stimulirana i spontana emisija;
b) samo spontana emisija.

Rješenje. Zadane su vjerojatnosti prijelaza po atomu u jedinici vremena: B_{12} (apsorpcija), B_{21} (stimulirana emisija) i A_{21} (spontana emisija). Broj atoma s energijama E_1 i E_2 je N_1 odnosno N_2.

a) Broj prijelaza na nižu energijsku razinu u jedinici vremena je

$$Z_{21} = [A_{21} + B_{21}\rho(\nu)]N_2.$$

Broj pobuđenja u jedinici vremena apsorpcijom zračenja je

$$Z_{12} = B_{12}N_1\rho(\nu).$$

U ravnoteži je $Z_{12} = Z_{21}$,

$$B_{12}N_1\rho(\nu) = [A_{21} + B_{21}\rho(\nu)]N_2,$$

$$\rho(\nu) = \frac{A_{21}N_2}{B_{12}N_1 - B_{21}N_2}.$$

Prema Boltzmanovoj raspodjeli $\dfrac{N_2}{N_1} = e^{-\frac{h\nu}{kT}}$ pa je

$$\rho(\nu) = \frac{A_{21}}{B_{12}e^{\frac{h\nu}{kT}} - B_{21}}.$$

Usporedi li se dobiveni izraz s Planckovim zakonom zračenja

$$\rho(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1\right)^{-1}$$

slijedi da je $B_{12} = B_{21}$ i $A_{21} = \dfrac{8\pi h\nu^3}{c^3}B_{21}$.

b) Ako se zanemari stimulirana emisija,

$$B_{12}N_1\rho(\nu) = A_{21}N_2$$

$$B_{12}\rho(\nu) = A_{21}e^{-\frac{h\nu}{kT}} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}B_{21}e^{-\frac{h\nu}{kT}}.$$

14. Odredite Einsteinove vjerojatnosti prijelaza za stimuliranu i spontanu emisiju te apsorpciju u rubinskom laseru. Koliki je omjer broja stimuliranih i spontanih prijelaza? Zadana je rezonantna frekvencija $\nu = 4.32\cdot 10^{14}$ Hz, gustoća spektralnog zračenja $\rho = 0.5\ \mathrm{Jsm^{-3}}$ i vrijeme života pobuđenog stanja $\tau = 3$ ms.

Rješenje. Vjerojatnost spontane emisije po atomu u jedinici vremena je:

$$A_{21} = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{3\cdot 10^{-3}}\ \mathrm{s^{-1}} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}B_{21}$$

$$B_{21} = \frac{A_{21}c^3}{8\pi h\nu^3} = \frac{\dfrac{1}{3\cdot 10^{-3}}\ \mathrm{s^{-1}}(3\cdot 10^8\ \mathrm{ms^{-1}})^3}{8\cdot 3.14\cdot 6.626\cdot 10^{-34}\ \mathrm{Js}\cdot(4.32\cdot 10^{14}\ \mathrm{s^{-1}})^3}$$

$$B_{21} = 6.7\cdot 10^{15}\ \mathrm{J^{-1}s^{-2}m^3}$$

$$B_{12} = B_{21}.$$

Omjer broja stimuliranih i spontanih prijelaza je

$$Q = \frac{B_{21}\rho(\nu)}{A_{21}} = \frac{6.7\cdot 10^{15}\ \mathrm{J^{-1}s^{-2}m^3}\cdot 0.5\ \mathrm{Jsm^{-3}}}{\dfrac{1}{3\cdot 10^{-3}}\ \mathrm{s^{-1}}} = 10^{13}.$$

15. Za sustav atoma u termičkoj ravnoteži treba odrediti omjer vjerojatnosti stimulirane i spontane emisije pri prijelazu s više na nižu energijsku razinu na temperaturama:
a) $T = 3000$ K,
b) $T = 300$ K. Valna duljina prijelaza $\lambda = 550$ nm.

Rješenje. Omjer vjerojatnosti stimulirane i spontane emisije je

$$Q = \frac{W_{stim.}}{W_{spon.}} = \frac{B_{21}\rho(\nu)}{A_{21}} = \frac{B_{21}A_{21}}{A_{21}B_{21}\left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1\right)} = \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$

a) $T = 3000$ K, $\nu\cdot\lambda = c$, $Q = \dfrac{1}{e^{\frac{6.626\cdot 10^{-34}\ \mathrm{Js}\cdot 3\cdot 10^8\ \mathrm{ms^{-1}}}{1.38\cdot 10^{-23}\ \mathrm{JK^{-1}}\cdot 3000\ \mathrm{K}\cdot 550\cdot 10^{-9}\ \mathrm{m}}} - 1} = 1.6\cdot 10^{-4}$.

b) $T = 300$ K (sobna temperatura), $Q = 1.22\cdot 10^{-38}$.

16. Za sustav atoma u termičkoj ravnoteži odredite temperaturu na kojoj su vjerojatnosti stimulirane i spontane emisije jednake za valnu duljinu 448 nm.

Rješenje.

$$Q = 1 = \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1},$$
$$e^{\frac{h\nu}{kT}} = 2,$$
$$T = \frac{h\nu}{k\ln 2},$$
$$\nu\cdot\lambda = c,$$
$$T = \frac{6.626\cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}\cdot 3\cdot 10^{8}\,\mathrm{ms^{-1}}}{1.38\cdot 10^{-23}\,\mathrm{JK^{-1}}\cdot 488\cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}\ln 2} = 4.26\cdot 10^{4}\,\mathrm{K}.$$

17. Kod koje valne duljine je broj stimuliranih prijelaza jednak broju spontanih prijelaza ako je temperatura sustava atoma 2018 K.

Rješenje.

$$Q = 1,$$
$$\lambda = \frac{hc}{kT\ln 2} = \frac{6.626\cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}\cdot 3\cdot 10^{8}\,\mathrm{ms^{-1}}}{1.38\cdot 10^{-23}\,\mathrm{JK^{-1}}\cdot 2018\,\mathrm{K}\ln 2} = 10^{-5}\,\mathrm{m}.$$

18. Odredite koeficijent gubitaka u Fabry-Perotovoj šupljini zbog nepoželjnog odbijanja i djelomične propusnosti zrcala ako su koeficijenti odbijanja zrcala $R_1 = 0.97$ i $R_2 = 0.98$. (Apsorpcija se zanemaruje).

Rješenje. Intenzitet svjetlosti nakon jednog zatvorenog kruga u rezonatoru je:

$$I = R_1R_2I_0 = I_0e^{-\gamma},$$
$$e^{-\gamma} = R_1R_2,$$
$$\gamma = -\ln(R_1R_2) = -\ln(0.97\cdot 0.98) = 0.051.$$

19. Udaljenost zrcala u laserskom rezonatoru je 1 m. Koeficijenti odbijanja zrcala su $R_1 = R_2 = 0.99$. Odredite faktor dobrote (kvalitete) Q rezonatora ako je frekvencija elektromagnetskog vala $5\cdot 10^{14}\,\mathrm{s^{-1}}$.

Rješenje. Faktor dobrote se definira kao: $Q = -2\pi\nu\frac{W}{\frac{dW}{dt}}$, gdje je W ukupna energija u rezonatoru, $\frac{dW}{dt}$ je gubitak energije u jednom krugu u rezonatoru. Može se napisati

$$Q\frac{dW}{dt} = -2\pi\nu W,$$
$$\frac{dW}{W} = \frac{-2\pi\nu}{Q}dt,$$
$$\ln W = \frac{-2\pi\nu}{Q}t,$$
$$W = W_0e^{\frac{-2\pi\nu}{Q}t}.$$

Nakon jednog zatvorenog kruga u vremenu $t = \frac{2L}{c}$ energija se smanji: $W = W_0e^{-\gamma}$.

$$W = W_0e^{\frac{-2\pi\nu}{Q}\cdot\frac{2L}{c}} = W_0e^{-\gamma}$$
$$Q = \frac{4\pi\nu L}{\gamma c}.$$

Za $\gamma = -\ln(R_1R_2)$ je

$$Q = \frac{4\pi\nu L}{-\ln(R_1R_2)c} = \frac{4\cdot 3.14\cdot 5\cdot 10^{14}\,\mathrm{s^{-1}}\cdot 1\,\mathrm{m}}{-\ln 0.99^2\cdot 3\cdot 10^{8}\,\mathrm{ms^{-1}}} = 1.04\cdot 10^{9}.$$

20. Odredite širinu linije emitiranu u He-Ne laseru ako je duljina rezonatora 1 m, koeficijenti odbijanja zrcala su $R_1 = 0.99$ i $R_2 = 0.96$.

Rješenje. Faktor dobrote rezonatora može se definirati i kao omjer rezonantne frekvencije i širine linije: $Q = \frac{\nu}{\Delta\nu}$.

$$Q = \frac{4\pi\nu L}{\gamma c} = \frac{\nu}{\Delta\nu},$$
$$\Delta\nu = \frac{\gamma c}{4\pi L} = \frac{-\ln(R_1R_2)c}{4\pi L} = 1.2\cdot 10^{6}\,\mathrm{s^{-1}}.$$

21. Odredite faktor pojačanja elektromagnetskog vala pri prolazu kroz sredstvo duljine L potrebnog za stvaranje uvjeta laserske akcije.

Rješenje. Intenzitet elektromagnetskog vala frekvencije ν koji putuje kroz sredstvo (atomi ili molekule) duljine L je

$$I(\nu,L) = I(\nu,0)\cdot e^{-\alpha(\nu)L},$$

gdje je $\alpha(\nu)$ koeficijent apsorpcije. Postoji li u sredstvu inverzija naseljenosti ($N_k > N_i$) i ako je $E_k - E_i = h\nu$, koeficijent apsorpcije postaje negativan i val se pojačava umjesto da se prigušuje. Ako se aktivno sredstvo nalazi između zrcala (s koeficijentom odbijanja 1), krivulja pojačanja pri prolasku i jednoj refleksiji (jedan krug) vala je

$$G(\nu) = \frac{I(\nu,2L)}{I(\nu,0)} = e^{-2\alpha(\nu)L}.$$

Dio vala koji se izgubi (apsorpcija na prozorima, raspršenje na prašini i sl.) opisuje koeficijent gubitaka γ. Intenzitet je $I = I_0\cdot e^{-\gamma}$. Ukupni intenzitet je

$$I(\nu,2L) = I(\nu,0)\cdot e^{-2\alpha(\nu)\cdot L-\gamma},\quad G(\nu) = e^{-2\alpha(\nu)\cdot L-\gamma}.$$

Elektromagnetski val će biti pojačan ako je $G(\nu)\geqslant 1$. Granični slučaj $G(\nu) = 1$ je prag laserske akcije; $e^{-2\alpha(\nu)\cdot L-\gamma} = 1$, $-2\alpha(\nu)\cdot L = \gamma$. Faktor pojačanja

$$k(\nu) = -\alpha(\nu) = \frac{\gamma}{2L}.$$

22. U rubinskom laseru ($\lambda = 694.3$ nm) kristal rubina je dugačak 0.1 m. Koeficijenti odbijanja zrcala su $R_1 = 0.95$ i $R_2 = 0.9$. Odredite faktor pojačanja ako je koeficijent gubitaka u jednom krugu (nakon jednog prolaza i refleksije snopa kroz kristal) $\gamma = 0.1$.

Rješenje. Ako su koeficijenti refleksije zrcala R_1 i R_2, intenzitet elektromagnetskog vala nakon jednog kruga je

$$I(\nu, 2L) = R_1 \cdot R_2 I(\nu, 0) \cdot e^{2k(\nu)L-\gamma}.$$

Uvjet laserske akcije je: $G(\nu) = R_1 \cdot R_2 \cdot e^{-2\alpha(\nu)\cdot L-\gamma} = 1$.

$$e^{-2\alpha(\nu)\cdot L-\gamma} = \frac{1}{R_1R_2},$$

$$k = \frac{1}{2L}\left(\gamma + \ln\frac{1}{R_1R_2}\right) = 1.28\ \mathrm{m}^{-1}.$$

23. Vrijeme života pobuđenog energijskog stanja He-Ne lasera je 10^{-7} s. Odredite kolika je inverzija naseljenosti potrebna da faktor pojačanja bude $0.07\ \mathrm{m}^{-1}$. Valna duljina zračenja je 632,8 nm, a indeks loma plina $n = 1$.

Rješenje. $I(x) = I_0 \cdot e^{kx}$. Označimo li s N broj fotona u jedinici volumena vrijedi

$$-\frac{dN}{dt} = N_1\rho(\nu)B_{12} - N_2\rho(\nu)B_{21}.$$

Kako je $B_{12} = B_{21}$ vrijedi

$$-\frac{dN}{dt} = (N_1 - N_2)\rho(\nu)B_{21}. \tag{1}$$

Intenzitet elektromagnetskog vala jednak je energiji koja dolazi na jediničnu površinu u sekundi i može se napisati $I = \rho(\nu)\frac{c}{n} = Nh\nu\frac{c}{n}$, gdje je c brzina svjetlosti, n indeks loma sredstva. Promjena koncentracije fotona unutar intervala Δx je

$$-dN(x) = [I(x) - I(x+\Delta x)]\frac{n}{h\nu c}.$$

Za mali Δx može se napisati

$$-dN(x) = -\left[\frac{dI(x)}{dx}\Delta x\right]\frac{n}{h\nu c}.$$

U intervalu vremena $dt = \frac{\Delta x n}{c}$ promjena koncentracije fotona je

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dI(x)}{dx}\cdot\frac{1}{h\nu}.$$

Uvrstimo $\frac{dI(x)}{dx} = kI(x)$

$$\frac{dN}{dt} = kI(x)\frac{1}{h\nu} = k\rho(\nu)\frac{c}{n}\cdot\frac{1}{h\nu}. \tag{2}$$

Usporede li se izrazi (1) i (2) slijedi

$$k\rho(\nu)\frac{c}{n}\cdot\frac{1}{h\nu} = -(N_1 - N_2)\rho(\nu)B_{21}.$$

Faktor pojačanja je:

$$k = (N_2 - N_1)\frac{nh\nu B_{21}}{c}$$

$$B_{21} = \frac{1}{\tau}\cdot\frac{\lambda^3}{8\pi h} = \frac{(632.8\cdot 10^{-9}\ \mathrm{m})^3}{10^{-7}\ \mathrm{s}\cdot 8\cdot 3.14\cdot 6.626\cdot 10^{-34}\ \mathrm{Js}} = 1.52\cdot 10^{20}\ \mathrm{Js^{-2}m^3},$$

$$N_2 - N_1 = \frac{kc}{nh\nu B_{21}} = \frac{k\lambda}{nhB_{21}} = 4.4\cdot 10^5\ \mathrm{m^{-3}s^{-1}}.$$

24. Odredite broj modova u jedinici volumena u intervalu $d\nu$ u:
a) vidljivom djelu spektra;
b) mikrovalnom području;
c) području X-zračenja.

Rješenje. Broj modova u jedinici volumena u intervalu $d\nu$ je $n(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}d\nu$.

a) U vidljivom djelu spektra (za npr. $\lambda = 500$ nm, $\nu = 6\cdot 10^{14}$ Hz, unutar Dopplerove širine linije $d\nu = 10^9$ Hz) je $n(\nu)d\nu = 3.35\cdot 10^{14}\ \mathrm{m}^{-3}$.

b) U mikrovalnom području ($\lambda = 1$ cm, $\nu = 3\cdot 10^{10}$ Hz, $d\nu = 10^5$ Hz), $n(\nu)d\nu = 83.8\ \mathrm{m}^{-3}$.

c) U području X-zračenja ($\lambda = 1$ nm, $\nu = 3\cdot 10^{17}$ Hz, $d\nu = 10^{11}$ Hz), $n(\nu)d\nu = 8.4\cdot 10^{21}\ \mathrm{m}^{-3}$.

25. Koliko rezonantnih modova TEM_{00} ima unutar Dopplerove širine linije u plinu Ne na temperaturi 600 K? Duljina rezonatora je 1 m, valna duljina 632.8 nm, relativna atomska masa je 20.18.

Rješenje. Dopplerova širina linije je

$$\Delta\nu_D = \frac{2c}{\lambda}\sqrt{\frac{\ln 2}{a}} = 1.845\cdot 10^9\ \mathrm{s}^{-1},$$

$$a = \frac{Mc^2}{2kT} = 1.83\cdot 10^{11}.$$

Separacija modova je $\Delta\nu = \frac{c}{2L} = 1.5\cdot 10^8\ \mathrm{s}^{-1}$. Broj longitudinalnih modova unutar Dopplerove širine linije je $N = \frac{\Delta\nu_D}{\Delta\nu} = 12.3$.

26. Duljina laserskog rezonatora mijenja se s temperaturom. Na temperaturi $0°C$ duljina rezonatora je 1 m, a koeficijent linearnog širenja $1.2\cdot 10^{-6}\ \mathrm{K}^{-1}$. Koliko se promijeni rezonantna frekvencija ($\nu = 5\cdot 10^{14}\ \mathrm{s}^{-1}$) pri porastu temperature za 5 K?

Rješenje.

$$m\cdot\lambda = 2L, \qquad \nu = \frac{mc}{2L}.$$

Promjena frekvencije uzrokovana promjenom duljine L je $|d\nu| = \frac{mc}{2L^2}dL$. Označimo $|d\nu| = \Delta\nu$ i $dL = \Delta L$:

$$\frac{\Delta\nu}{\Delta L} = \frac{\nu}{L}, \qquad \frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Delta L}{L}.$$

Promjena duljine rezonatora s temperaturom:

$$L = L_0(1 + \alpha\Delta T) = L_0 + \Delta L,$$
$$\Delta L = L_0\alpha\Delta T,$$
$$\Delta\nu = \nu\frac{\Delta L}{L_0} = \nu\alpha\Delta T = 3 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}.$$

27. Odredite relativnu promjenu valne duljine svjetlosti koju emitira argonski ionski laser zbog povećanja temperature za 5 K, te povećanja tlaka koji uzrokuje promjenu indeksa loma plina za $3 \cdot 10^{-4}$ ($\alpha = 10^{-6}\,\text{K}^{-1}$, $n = 1.5$).

Rješenje.

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta n}{n} = \alpha\Delta T + \frac{\Delta n}{n},$$
$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 10^{-6}\,\text{K}^{-1} \cdot 5\,\text{K} + \frac{3 \cdot 10^{-4}}{1.5} = 2.05 \cdot 10^{-4}.$$

28. U argonskom ionskom laseru poluširina linije $G(\nu) = 8$ GHz. Separacija modova $\Delta\nu = 10$ GHz. Odredite duljinu rezonatora, te broj modova ako je indeks loma plina $n = 1.5$.

Rješenje.

$$L = \frac{c}{2n\Delta\nu} = 0.01 \text{ m},$$
$$\frac{G(\nu)}{\Delta\nu} = 0.8 \quad \text{što znači da postoji samo jedan mod.}$$

29. Izračunajte koherentnu duljinu lasera, te vrijeme koherencije za:
a) CO_2 laser s valnom duljinom 10.6 μm i poluširinom linije $G(\nu) = 50$ MHz.
b) He-Ne laser s valnom duljinom 632.8 nm koji u multimodnom radu ima $G(\nu) = 1500$ MHz, a u singlmodnom radu $G(\nu) = 1$ MHz.

Rješenje. Koherentna duljina lasera $L_c = t_c \cdot c$, gdje je t_c vrijeme koherencije.

a) Za CO_2 laser $t_c = \dfrac{1}{G(\nu)} = 2 \cdot 10^{-8}$ s, $L_c = 6$ m.

b) Za He-Ne laser $t_c = 6.67 \cdot 10^{-10}$ s, $L_c = 0.2$ m u multimodnom radu i $t_c = 10^{-6}$ s, $L_c = 300$ m u singlmodnom radu.

30. Odredite srednje vrijeme zadržavanja fotona u rezonatoru duljine 10 cm ako je koeficijent odbijanja zrcala 0.98.

Rješenje. Put fotona u jednom krugu unutar rezonatora je $2L = (1-R)T \cdot c$, $(1-R)$ je koeficijent propusnosti zrcala, c je brzina svjetlosti. Vrijeme zadržavanja fotona u rezonatoru je

$$T = \frac{2L}{(1-R)c} = 3.33 \cdot 10^{-8} \text{ s}.$$

31. Odredite koliko je snage sadržano u dijelu laserskog snopa promjera $2w = 2$ mm ako se radi o TEM_{00} modu. Intenzitet u središtu snopa je $I_0 = 100\ \text{Wcm}^{-2}$.

Rješenje. Raspodjela intenziteta u osnovnom TEM_{00} modu u presjeku okomitom na snop dana je Gaussovim oblikom: $I(r) = I_0 e^{\frac{-2r^2}{w^2}}$. I_0 je intenzitet u središtu snopa, r je radijalna udaljenost od središta snopa, w je udaljenost na kojoj je intenzitet I_0e^{-2}. Tražena snaga je

$$P = I(r)r^2\pi = I_0e^{-2}w^2\pi = 425.17 \text{ mW}.$$

32. Odredite trenutnu snagu rubinskog lasera ako je duljina kristala 0.1 m, promjer 5 mm (oblika valjka), a trajanje pulsa 5 μs. Gustoća aluminijevog oksida je $3.7 \cdot 10^3\ \text{kgm}^{-3}$. U kristalu ima 0.05% atoma kroma. Pobuđeni atom kroma zrači energiju od 1.8 eV.

Rješenje. Kristal rubina sastoji se od aluminijevog oksida Al_2O_3 u kojem je dio Al atoma (relativna atomska masa $A = 27$) zamijenjen atomima kroma. Volumen kristala je $V = \dfrac{\pi d^2 L}{4} = 2 \cdot 10^{-6}\ \text{m}^3$. Relativna molekulna masa molekule Al_2O_3 je $M = 2 \cdot 27 + 3 \cdot 16 = 102$. Broj atoma aluminija je $N = \dfrac{N_A\rho V}{M} = 4.3 \cdot 10^{22}$, gdje je Avogadrov broj $N_A = 6.022 \cdot 10^{23}\ \text{mol}^{-1}$. Broj atoma kroma je $5 \cdot 10^{-4} \cdot N = 2.15 \cdot 10^{19}$. Ukupna energija E koju daju atomi kroma:

$$E = 2.18 \cdot 10^{19} \cdot 1.8 \text{ eV} = 3.87 \cdot 10^{19} \text{ eV}.$$

Trenutna snaga je

$$P = \frac{E}{t} = \frac{3.87 \cdot 10^{19}\text{ eV} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}\text{C}}{5 \cdot 10^{-6}\text{ s}} = 1.23 \cdot 10^6 \text{ W}.$$

33. Odredite valnu duljinu zračenja koje emitira poluvodički GaAs laser ako je širina zabranjenog područja $E_g = 1.44$ eV.

Rješenje.

$$E_g = h\nu = \frac{hc}{\lambda},$$
$$\lambda = \frac{hc}{E_g} = \frac{6.626 \cdot 10^{-34}\text{ Js} \cdot 3 \cdot 10^8\text{ ms}^{-1}}{1.44\text{ eV} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}\text{ C}} = 0.863\ \mu\text{m}.$$

34. Laser sa slobodnim elektronima (FEL) emitira zračenje valne duljine 3.3 μm. Energija snopa elektrona je 43 MeV. Izračunajte prostorni period magneta λ_w, te poluširinu linije u laseru duljine 10 m.

Rješenje. Valna duljina zračenja je $\lambda = \dfrac{\lambda_w}{2\gamma^2}$, gdje je s γ označen omjer ukupne energije elektrona i energije mirovanja elektrona (0.511 MeV).

$$\lambda_w = 2\lambda\gamma^2 = 2 \cdot 3.3 \cdot 10^{-6}\text{ m}\left(\frac{43\text{ MeV}}{0.511\text{ MeV}}\right)^2 = 46.73 \text{ mm}.$$

Relativna promjena valne duljine ovisi o broju perioda magneta N:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{2N},$$

$$N = \frac{L}{\lambda_w},$$

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{2N} = \frac{\lambda \cdot \lambda_w}{2L} = \frac{3.3 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m} \cdot 46.73 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}}{2 \cdot 10\ \mathrm{m}} = 7.7\ \mathrm{nm}.$$

35. Odredite razmak pruga interferencije na refleksijskom hologramu ako je obasjan svjetlošću valne duljine 488 nm.

Rješenje. Braggov uvjet difrakcije $\lambda = 2d\sin\theta$, d je razmak pruga interferencije. Kod refleksijskog holograma kut između predmetnog i referentnog vala $2\theta = 180°$, $d = \dfrac{\lambda}{2} = 244\ \mathrm{nm}$. To znači da će se npr. u fotografskoj emulziji debljine 15 μm formirati 61 pruga interferencije.

36. Odredite odnos intenziteta dvaju ravnih valova (čija je interferencija zabilježena na hologramu) da vidljivost interferencijskih pruga bude najveća.

Rješenje. Vidljivost (ili kontrast) interferencijskih pruga definirana je

$$p = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}.$$

Intenziteti zabilježeni na hologramu su:

$$I_{max} = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2,$$

$$I_{min} = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2,$$

A_1 i A_2 su amplitude ravnih valova koji interferiraju. Vidljivost pruga je tada

$$p = \frac{2A_1A_2}{A_1^2 + A_2^2} = \frac{2\sqrt{I_1I_2}}{I_1 + I_2} = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha + 1},$$

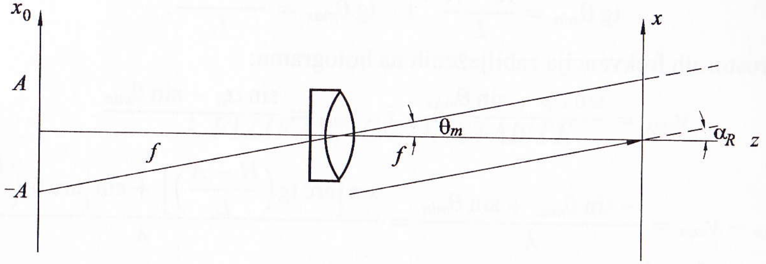
$\alpha = \dfrac{I_1}{I_2}$ je omjer intenziteta ravnih valova. Vidljivost će biti najveća ako je $\dfrac{dp}{d\alpha} = 0$

$$\frac{dp}{d\alpha} = \frac{\sqrt{\alpha}(\alpha + 1) - 2\sqrt{\alpha}}{(\alpha + 1)^2} = 0.$$

Vidljivost će biti najveća za $\alpha = 1$.

37. Predmet visine $2A = 2$ cm nalazi se u prvoj žarišnoj ravnini konvergentne leće žarišne daljine $f = 30$ cm. U drugoj žarišnoj ravnini leće smještena je fotografska ploča na kojoj će se zabilježiti Fourierova transformacija predmeta (slika 6.2). Ako se predmet obasja svjetlošću valne duljine $\lambda = 632.8$ nm, odredite interval prostornih frekvencija koje će biti zabilježene na hologramu.

Rješenje.



Sl. 6.2. Hologram Fourierove transformacije.

Svaka točka predmeta će u drugoj žarišnoj ravnini leće dati ravni val. Ti valovi će interferirati s referentnim ravnim valom. Prostorne frekvencije su definirane kao:

$$u = \frac{x}{\lambda f} \quad \text{i} \quad v = \frac{y}{\lambda f},$$

gdje su (x, y) točke u xy ravnini. Prostorna frekvencija koja odgovara točki u središtu predmeta $(0, 0, 0)$: $v_0 = \dfrac{\sin\alpha_R}{\lambda}$, α_R je kut između referentnog vala i z osi.

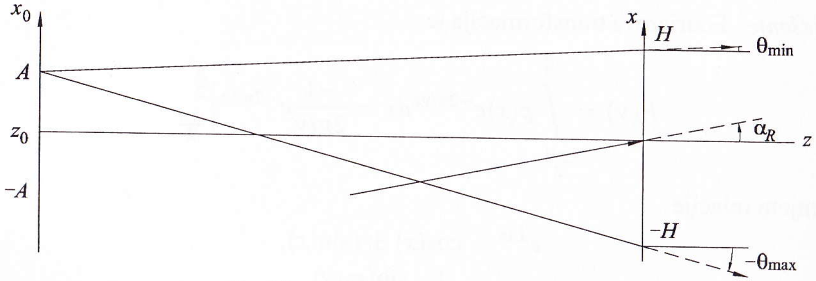
Točka predmeta $x = -A$ daje ravni val koji na holografsku ploču upada pod kutom $\theta_{min} = \mathrm{arc\,tg}\,\dfrac{A}{f}$, a točka $x = A$ — $\theta_{max} = -\,\mathrm{arc\,tg}\,\dfrac{A}{f}$. Interval zabilježenih prostornih frekvencija:

$$\Delta v = v_{max} - v_{min} = \frac{\sin\alpha_R - \sin\theta_{min}}{\lambda} - \frac{\sin\alpha_R - \sin\theta_{max}}{\lambda} = \frac{\sin\theta_{max} - \sin\theta_{min}}{\lambda}$$

$$\Delta v = \frac{2}{\lambda}\sin\left(\mathrm{arc\,tg}\,\frac{A}{f}\right) = \frac{2}{632.8 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{m}}\sin\left(\mathrm{arc\,tg}\,\frac{0.01\ \mathrm{m}}{0.3\ \mathrm{m}}\right) = 1.05 \cdot 10^5\ \mathrm{m}^{-1}.$$

Vidimo da interval prostornih frekvencija ovisi o veličini predmeta i naravno, holografska ploča mora biti dovoljno velika da zabilježi polje koje na nju dolazi.

38. Odredite interval prostornih frekvencija zabilježenih na Fresnellovom hologramu. Veličina predmeta $2A = 2$ cm (prema slici 6.3) zabilježena na hologramu na kojem ima dimenziju $2H = 3$ cm. Udaljenost predmeta od holograma $L = 30$ cm. Valna duljina svjetlosti $\lambda = 632.8$ nm.



Sl. 6.3. Zapis Fresnelova holograma

Rješenje. Na slici je vidljivo da je:

$$\text{tg}\,\theta_{min} = \frac{H-A}{L} \quad \text{i} \quad \text{tg}\,\theta_{max} = \frac{-H-A}{L}.$$

Interval prostornih frekvencija zabilježenih na hologramu:

$$\nu_{max} = \frac{\sin\alpha_R - \sin\theta_{max}}{\lambda} \quad \text{i} \quad \nu_{min} = \frac{\sin\alpha_R - \sin\theta_{min}}{\lambda}.$$

$$\Delta\nu = \nu_{max} - \nu_{min} = \frac{-\sin\theta_{max} + \sin\theta_{min}}{\lambda} = \frac{\sin\left[\text{arc tg}\left(\frac{H-A}{L}\right)\right] + \sin\left[\text{arc tg}\left(\frac{H+A}{L}\right)\right]}{\lambda},$$

$\Delta\nu = 1.56 \cdot 10^5\ \text{m}^{-1}$.

Interval prostornih frekvencija ovisi o veličini predmeta i veličini holografske ploče.

39. Koliko se tiskanih slova može zabilježiti na Vander Lugtovom filtru i prepoznati sustavom optičkog korelatora u idealnim uvjetima?

Rješenje. Prema istraživanjima [18] za vrijeme jedne ekspozicije može se zabilježiti N_{max} slova, $N_{max} = \dfrac{\pi D^4}{256 f^2 \lambda^2 \nu^2 a^2}$, dok je ukupan broj slova $N = \dfrac{\pi \nu_c^2 D^2}{32 a^2 \nu^2}$. Zadane su vrijednosti:

$D = 100$ mm	promjer leće,
$a = 3$ mm	veličina ulaznog slova,
$\nu = 10\ \text{mm}^{-1}$	najveća prostorna frekvencija u spektru ulaznog slova,
$f = 500$ mm	žarišna daljina leće,
$\lambda = 6.33 \cdot 10^{-4}\ \text{mm}^{-1}$	valna duljina svjetlosti,
$\nu_c = 1.6 \cdot 10^3\ \text{mm}^{-1}$	najveća zabilježena prostorna frekvencija.

Uvrštavanjem zadanih vrijednosti dobiva se: $N = 2.79 \cdot 10^6$ i $N_{max} = 1.36 \cdot 10^4$. Najveći mogući broj ekspozicija je $\dfrac{N}{N_{max}} = 205$.

40. Odredite Fourierovu transformaciju koju daje leća ako je ulazni signal jednodimenzionalan oblika:

$$p(x) = 1 \quad \text{za} \quad \frac{-a}{2} \leqslant x \leqslant \frac{a}{2}$$

$$p(x) = 0 \quad \text{za sve ostale vrijednosti } x.$$

Rješenje. Fourierova transformacija je

$$F(\nu) = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} p(x) e^{-2\pi i \nu x} dx = \frac{-1}{2\pi i \nu} e^{-2\pi i \nu x} \Big|_{\frac{-a}{2}}^{\frac{a}{2}}.$$

Korištenjem relacije

$$e^{\pm ix} = \cos(x) \pm i \sin(x),$$

$$F(\nu) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sin(\pi a \nu)}{\nu}.$$

FIZIKALNE KONSTANTE

Konstanta	Vrijednost
Plinska konstanta	$R = 8.314\ \text{JK}^{-1}\ \text{mol}^{-1}$
Avogadrova konstanta	$N_A = 6.022 \cdot 10^{23}\ \text{mol}^{-1}$
Boltzmannova konstanta	$k = 1.3807 \cdot 10^{-23}\ \text{JK}^{-1}$
Brzina svjetlosti u vakuumu	$c = 299\,792\,458\ \text{ms}^{-1}$
Planckova konstanta	$h = 6.626 \cdot 10^{-34}\ \text{Js}$
Naboj elektrona	$e = 1.602 \cdot 10^{-19}\ \text{C}$
Masa elektrona	$m_0 = 9.109 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}$
Atomska jedinica mase	$u = 1.66053 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}$
Energijski ekvivalent atomske masene jedinice	$E_u = 931.5\ \text{MeV}$ $1\ \text{eV} = 1.6 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$

Zadaci

1. $\lambda = 632{,}8\,nm$

$\Delta t = 10^{-8}$

$\Delta\lambda = ?$

$$|\Delta\lambda| = \frac{\lambda^2}{2\pi c \Delta t} = 2{,}12 \cdot 10^{-14}$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

$$\lambda = \frac{hc}{E} \Rightarrow d\lambda = -\frac{hc}{E^2}dE$$

$d\lambda \approx \Delta\lambda$

$dE \approx \Delta E$

$$|\Delta\lambda| = \frac{hc}{E^2}\Delta E = \frac{hc}{\left(\frac{hc}{\lambda}\right)^2}\Delta E = \frac{\lambda^2}{hc}\cdot\frac{\hbar}{\Delta t} = \frac{\lambda^2}{c 2\pi \Delta t}$$

2.

a) 400-700nm

$\lambda = 589{,}1\,nm$

$\Delta t = 16\,ns$

$$\Delta E = h\Delta\nu = \frac{\hbar}{\Delta t}$$

$$\Delta\nu = \frac{1}{2\pi\Delta t} = \frac{1}{2\pi \cdot 16 \cdot 10^{-9}} = 9{,}95 \cdot 10^{6}\,s^{-1}$$

$$|\Delta\lambda| = \frac{\lambda^2}{c}\Delta\nu = 1{,}15 \cdot 10^{-14}\,m$$

b) 700-1000 nm

$\Delta t = 10^{-3}\,s$

$$\Delta\nu = \frac{1}{2\pi\Delta t} = 159{,}2\,s^{-1}$$

c) 200-400nm

$\Delta t = 8{,}23\,s$

$\Delta\nu = 0{,}02\,s^{-1}$

(3.) $\lambda = 4 \cdot 10^{-7}$ $\quad \Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2\pi c \Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\lambda^2}{2\pi c \Delta\lambda} = 8{,}49 \cdot 10^{-9}\,s$

$\Delta\lambda = 10^{-14}\,m$

(4.) $\Delta E = \Delta E_1 + \Delta E_2 \quad \Rightarrow \Delta\nu = \frac{1}{2\pi\Delta t_1} + \frac{1}{2\pi\Delta t_2} =$

$\Delta E = h\Delta\nu = \frac{h}{2\pi\Delta t}$

$\Delta\nu = \frac{1}{2\pi\Delta t}$

(5.) $\lambda = 532\,nm$

$\Delta t_1 = 1{,}2 \cdot 10^{-8}\,s$

$\Delta t_2 = 2 \cdot 10^{-8}\,s$

$\Delta\lambda = ?$

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2\pi c \Delta t_1} + \frac{\lambda^2}{2\pi c \Delta t_2} = \frac{\lambda^2}{2\pi c}\left(\frac{1}{\Delta t_1} + \frac{1}{\Delta t_2}\right)$$

$$= 2 \cdot 10^{-14}$$

(7.) $\hbar\omega_0 = E_i - E_k$

konstanta sile otpora

konstanta elastične sile

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

$\gamma = \frac{b}{m}$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ – vlastita frekv. neprigušenog titranja

(8)

$$I(\omega-\omega_0) = \frac{I_0}{2}$$

$$\frac{I_0}{2} = I_0 \frac{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}{(\omega-\omega_0)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}$$

$$(\omega-\omega_0{}^2) = \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2$$

LORENTZOVA LINIJA

$$\omega_{1,2} = \omega_0 \pm \frac{\Gamma}{2} \quad \Rightarrow \text{ širina linije je } \Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 = \Gamma$$

(9)

$$I = I_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}{(\omega-\omega_0)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2} d\omega = 2I_0 \int_{0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}{(\omega-\omega_0)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2} d\omega \Rightarrow$$

$$\left| \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \right|$$

$$\Rightarrow I = 2I_0 \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{\Gamma}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\infty}{\Gamma}\right)$$

$$I = I_0 \frac{\pi}{2} \Gamma$$

(10)

$$I(\omega) = I_0 e^{-a\frac{(\omega-\omega_0)^2}{\omega_0{}^2}}$$

$$a = \frac{Mc^2}{2kT}$$

$M \rightarrow$ masa molekule

DOPPLEROVA ŠIRINA LINIJE

$$I(\omega) = \frac{I_0}{2}$$

$$\frac{I_0}{2} = I_0 e^{-a\frac{(\omega-\omega_0)^2}{\omega_0{}^2}} \Rightarrow e^{-a\frac{(\omega-\omega_0)^2}{\omega_0{}^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow (\omega-\omega_0)^2 = \frac{\omega_0{}^2}{a} \ln 2 \Rightarrow \omega_{1,2} = \omega_0 \pm \omega_0 \sqrt{\frac{\ln 2}{a}}$$

$$\Delta\omega = 2\omega_0 \sqrt{\frac{\ln 2}{a}}$$

(11.)

$\lambda = 488\,nm$ $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$

$T = 6000K$

$m = 38{,}95$

$\boxed{u = 1{,}6\cancel{7} \cdot 10^{-27}}$ } $M = m \cdot u$

$$\Delta\omega = 2\omega_0 \sqrt{\frac{\ln 2}{a}} \qquad \omega_0 = 2\pi\nu = \frac{2\pi c}{\lambda} \qquad \nu = \frac{c}{\lambda} \qquad a = \frac{Mc^2}{2kT}$$

$$\Delta\omega = \frac{4\pi c}{\lambda}\sqrt{\frac{\ln 2}{\frac{Mc^2}{2kT}}} = 3{,}419 \cdot 10^{10}\,s^{-1}$$

(12.)

$\Delta t = 1{,}5 \cdot 10^{-7}s$

$\frac{\Delta\lambda_D}{\Delta\lambda}$

$\lambda = 253{,}65\,nm$

$T = 300K$

$m = 200.59$

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2\pi c\Delta t}$$

$$\Delta\lambda_D = \frac{\lambda^2\Delta\nu}{c} = \frac{\lambda^2\Delta\omega_D}{2\pi c}$$

$$\frac{\Delta\lambda_D}{\Delta\lambda} = \frac{\frac{\cancel{\lambda^2}\Delta\omega_D}{\cancel{2\pi c}}}{\frac{\cancel{\lambda^2}}{\cancel{2\pi c}\Delta t}} = \Delta t\Delta\omega_D = \frac{4\pi c\Delta t}{\lambda}\sqrt{\frac{\ln 2}{\frac{Mc^2}{2kT}}} = 972{,}7$$

(14.)

$\nu = 4{,}32 \cdot 10^{14}$

$\rho = 0{,}5$

$\tau = 3ms$

$$A_{21} = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{3 \cdot 10^{-3}} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}B_{21} \qquad \boxed{A_{21} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}B_{21}}$$

$$B_{21} = \frac{A_{21}c^3}{8\pi h\nu^3} = 6{,}7 \cdot 10^{15}$$

$B_{21} = B_{12}$

$$Q = \frac{B_{21}\rho(\nu)}{A_{21}} = 10^{13}$$

15.

a) $T = 3000K$

b) $T = 300K$

$\lambda = 550 nm$

$\lambda \cdot \nu = c$

$$Q = \frac{W_{STIM}}{W_{SPON}} = \frac{B_{21} \rho(\nu)}{A_{21}} = \frac{B_{21} A_{21}}{A_{21} B_{21} (e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1)} = \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

$$Q_1 = \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k T_1}} - 1}$$

$$Q_2 = \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k T_2}} - 1}$$

16.

$\lambda = 448 nm$

$Q = 1$

$$\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} = 1$$

$$1 = e^{\frac{hc}{\lambda k T}} - 1 \Rightarrow \frac{hc}{\lambda k T} = \ln 2 \Rightarrow T = \frac{hc}{\lambda k \ln 2} = 4,6 \cdot 10^4$$

17.

$Q = 1$

$T = 2018$

$$\lambda = \frac{hc}{T k \ln 2} \Rightarrow \lambda = 10^{-5} m$$

18.

$R_1 = 0,97$

$R_2 = 0,98$

$$I = R_1 R_2 I_0 = I_0 e^{-\gamma}$$

$$R_1 R_2 = e^{-\gamma} \Rightarrow \ln(R_1 R_2) = -\gamma$$

$$\gamma = 0,051$$

19.

$L = 1m$

$R_1 = R_2 = 0,99$

$\nu = 5 \cdot 10^{14} s^{-1}$

$Q = ?$

$Q = -2\pi\nu \frac{W}{\frac{dW}{dt}}$ $W \rightarrow$ ukupna energija

$\frac{dW}{dt}$ } gubitak energije u jednom krugu u rezonatoru

$$Q \frac{dW}{dt} = -2\pi\nu W$$

$$\frac{dW}{W} = \frac{-2\pi\nu}{Q} dt$$

$$\ln W = \frac{-2\pi\nu}{Q} t$$

$$W = W_0 e^{\frac{-2\pi\nu}{Q} t}$$

$t = \frac{2L}{c}$ $\quad W = W_0 e^{-\gamma}$

$$W = W_0 e^{-\frac{2\pi\nu}{Q} \frac{2L}{c}} = W_0 e^{-\gamma}$$

$$\frac{2\pi\nu}{Q} \cdot \frac{2L}{c} = \gamma \Rightarrow Q = \frac{4\pi\nu L}{\gamma c}$$

$$\boxed{\gamma = -\ln(R_1 R_2)}$$

(20.)

He-Ne

$L = 1m$

$R_1 = 0{,}99$

$R_2 = 0{,}96$

$$Q = \frac{\nu}{\Delta\nu} = \frac{4\pi\nu L}{\gamma c}$$

$$\Delta\nu = \frac{\gamma c}{4\pi L} \quad , \gamma = -\ln(R_1 R_2)$$

$$\Delta\nu = \frac{-\ln(R_1 R_2) c}{4\pi L} = 1{,}2 \cdot 10^6 \, s^{-1}$$

(22.)

$\lambda = 694{,}3 nm$

$L = 0{,}1m$

$R_1 = 0{,}95$

$R_2 = 0{,}9$

$\gamma = 0{,}1$

$$I(\nu, 2L) = R_1 R_2 I(\nu, 0) \, e^{2k(\nu)L - \gamma}$$

$$G(\nu) = R_1 R_2 \, e^{-2\alpha(\nu)L - \gamma} = 1$$

$$e^{-2\alpha(\nu)L - \gamma} = \frac{1}{R_1 R_2}$$

$$k = \frac{1}{2L}\left(\gamma + \ln\left(\frac{1}{R_1 R_2}\right)\right) = 1{,}28 m^{-1}$$

(23.)

$\Delta t = 10^{-7} s$

$k = 0{,}07 m^{-1}$

$\lambda = 632{,}8 nm$

$n = 1$

$\nu\lambda = c$

$$k = (N_2 - N_1) \frac{nh\nu B_{21}}{c} = (N_2 - N_1) \frac{nh\cancel{c}B_{21}}{\cancel{c}\lambda}$$

$$B_{21} = \frac{1}{\Delta t} \frac{\lambda^3}{8\pi h}$$

$$N_2 - N_1 = \frac{k\cancel{\lambda}}{n\cancel{h}} \cdot \frac{\Delta t 8\pi \cancel{h}}{\lambda^{\cancel{3}}} = \frac{8\pi \Delta t k}{n\lambda^2} = 4{,}4 \cdot 10^5 m^{-3} s^{-1}$$

(25.)

TEM_{00}

$T = 600K$

$L = 1m$

$\lambda = 632{,}8 nm$

$m = 20{,}18$

$\boxed{u = 1{,}67 \cdot 10^{-27}}$

$$\Delta\nu_D = \frac{2c}{\lambda}\sqrt{\frac{\ln 2}{a}} = 1{,}845 \cdot 10^9 s^{-1}$$

$$\Delta\nu = \frac{c}{2L} = 1{,}5 \cdot 10^8$$

$$N = \frac{\Delta\nu_D}{\Delta\nu} = 12{,}3$$