Расчетно-графическая работа по математическому анализу Вариант 6

Егор Федоров Даниил Горляков

Университет ИТМО

Декабрь 2023

РГР по матанализу

Федоров, Горляков

Задание 1. Потенциал векторного поля

Поток векторного поля

Задание 3. Конформные этображения

Дано векторное поле $\mathbf{H} = (e^x; -e^y)$. План.

- 1. Убедитесь, что поле потенциально
- Найдите уравнения векторных линий
- 3. Изобразите векторные линии на рисунке
- Найдите потенциал поля при помощи криволинейного интеграла
- Изобразите линии уровня потенциала (эквипотенциальные линии). Проиллюстрируйте ортогональность линий уровня и векторных линий.
- 6. Зафиксируйте точки A и B на какой-либо векторной линии. Вычислите работу поля вдоль этой линии.

Необходимое условие потенциальности поля

Пусть H – векторное поле. Тогда, если в некотором шаре выполняется условие $\frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{\partial H_y}{\partial x}$, то поле H потенциально в этом шаре [2, ст. 270, 272].

$$\frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{\partial (e^x)}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial H_y}{\partial x} = \frac{\partial (-e^y)}{\partial x} = 0$$

Очевидно, что необходимое условие выполняется на \mathbb{R}^2 , а значит поле H потенциально на \mathbb{R}^2 .

Для нахождения уравнений векторных линий решим дифференциальное уравнение:

$$\frac{dx}{e^x} = \frac{dy}{-e^y}$$

Проинтегрируем полученное уравнение:

$$\int e^{-x} dx = \int -e^{-y} dy$$

Интегрируя, получаем:

$$-e^{-x} + C_1 = e^{-y} + C_2$$

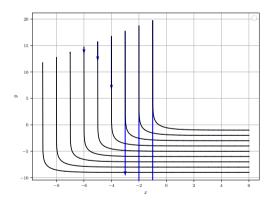
 $e^{-y} + e^{-x} = C$

Перенесем e^{-x} в правую часть и прологарифмируем:

$$y = -\ln(C - e^{-x}),$$
 $C - e^{-x} > 0 \iff x > -\ln(C), C > 0$ (1)

Векторные линии

На рис. 1 черным цветом нарисованы векторные линии (1) для $C \in \{e^1, e^2, \dots, e^9\}$, синим - векторное поле в данных точках.



 $\mathsf{Puc.}\ 1$: Векторные линии поля $oldsymbol{H}$

РГР по матанализу

Федоров, Горляков

Задание 1. Потенциал векторного поля

Поток векторного поля

Задание 3. Конформные отображения



$$U(R) = \int_{\widehat{AR}} \boldsymbol{H} \, d\boldsymbol{r}$$

Где A – точка поля, координаты которой удовлетворяют условиям существования полей H и rot H.

Возьмем в качестве A точку (0;0). Так как интеграл в уравнении (6) не зависит от пути, то разобьем его на две линии $(0;0)-(R_x:0)-(R_x;R_y)$

$$U(R) = \int_{(0;0)}^{(R_x;0)} (e^x dx + (-e^y dy)) + \int_{(R_x;0)}^{(R_x;R_y)} (e^x dx + (-e^y dy)) =$$

$$= \int_{0}^{R_x} e^x dx - \int_{0}^{R_y} e^y dy = e^{R_x} - e^{R_y}$$

РГР по матанализу

Федоров, Горляков

Задание 1. Потенциал векторного поля

Задание 2. Поток векторного поля

Задание 3. Конформные отображения



Задание 2. Поток векторного поля

Задание 3. Конформные отображения

Вывод

По определению потенциала векторного поля [2, ст. 269], grad $U={m H}$. Проверим это.

grad
$$U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}; \frac{\partial U}{\partial y}\right) = (e^x; -e^y) = H$$

Таким образом, $U(R)=e^{R_{\mathrm{x}}}-e^{R_{\mathrm{y}}}$ – потенциал векторного поля $oldsymbol{H}$.

Эквипотенциальная линия – совокупность точек поля, имеющих один и тот же потенциал.

Для нахождения уравнения линий уровня потенциала зафиксируем уровень потенциала C и выразим y через x

$$U(x, y) = e^x - e^y = C \iff e^y = e^x - C$$

Прологарифмируем уравнение с обеих сторон и получим

$$y = \ln(e^x - C)$$
 $e^x > C \Rightarrow x > \ln(C)$ (2)

На рис. 2 представлены графики функций (1) черным цветом и (2) разными цветами для $C=e^1,e^2,\ldots,e^9$

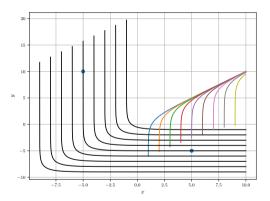


Рис. 2: Линии уровня потенциала поля $oldsymbol{H}$

РГР по матанализу

Федоров, Горляков

Задание 1. Потенциал векторного поля

Задание 2. Поток векторного поля

Задание 3. Конформные отображения

$$\int_{AB} \mathbf{H} \, ds = U(B) - U(A) = (e^{B_x} - e^{B_y}) - (e^{A_x} - e^{A_y}) =$$

$$= (e^5 - e^{-5}) - (e^{-5} - e^{10}) = e^5 - 2e^{-5} + e^{10} =$$

$$\approx 22174.86548$$

РГР по матанализу

Федоров, Горляков

Задание 1. Потенциал векторного поля

Задание 2. Поток векторного поля

Задание 3. Конформные отображения

Вывод по задаче

- ightharpoonup Установили, что H потенциально
- Нашли уравнения векторных линий
- Нашли потенциал поля
- Нашли уравнение линий уровня потенциала
- ▶ Изобразили векторные линии и линии уровня потенциала графически
- ▶ Нашли работу поля вдоль векторной линии

РГР по матанализу

Федоров, Горляков

Задание 1. Потенциал векторного поля

Бадание 2. Поток векторного поля

Задание 3. Конформные отображения

Вывол

Поток

Дано тело T, ограниченное следующими поверхностями:

$$z + \sqrt{4 - x^2 - y^2} = 0$$
 $x^2 + z^2 = 1$ $x^2 + y + z^2 = 2$

На рисунке предоставлено сечение тела T координатной плоскостью Oyz.

- ightharpoonup Изобразите тело T на графике в пространстве.
- Вычислите поток поля

$$a = (\sin zy^2)i + \sqrt{2}xj + (\sqrt{2+y} - 3k)k$$

через боковую поверхность тела T, образованную вращением дуги AFEDC вокруг оси Oy, в направлении внешней нормали поверхности тела T.

Вывод по задаче

РГР по матанализу

Федоров, Горляков

Задание 1. Потенциал векторного пол:

Задание 2. Поток векторного поля

Задание 3. Конформные отображения

Зывод

План выполнения работы:

- 1. Рассмотреть конформное отображение. Определить особые точки отображения (при наличии) и указать их вид.
- 2. Изобразить на комплексной плоскости отображение области виртуального пространства в область физического пространства с помощью заданного преобразования.
- 3. Выделить действительную и мнимую части отображения для построения искривленной координатной сетки в физическом пространстве.
- 4. Взять обратное преобразование к заданному и проанализировать его
- 5. Рассчитать профиль показателя преломления используя конформное отображение

РГР по матанализу

Федоров, Горляков

Задание 1. Потенциал векторного поля

Задание 2. Поток векторного поля

Задание 3. Конформные отображения



Проверим, является ли данное отображение конформным.

- ightharpoonup w(z) аналитична при $z \neq -1$.
- ▶ Для данного отображения существует обратное:

$$w^{-1}(z) = \frac{1 + w(z)}{1 - w(z)}$$

Таким образом, w(z) – биекция.

ightharpoonup Найдем w'(z):

$$w'(z) = \frac{2}{(z+1)^2} \neq 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$$

Таким образом, w(z) является конформным отображением на $\mathbb{C}\setminus\{1\}.$

Функция имеет две особые точки $z_1 = 1$ и $z_2 = -1$. Определим их вид. Для этого найдем производную w'(z).

$$w'(z) = \frac{2}{(z+1)^2}$$
 $w(z_1) = w(1) = 0$ $w'(z_1) = w'(1) \neq 0$

Значит точка $z_1 = 1$ является простым нулем. Определим вид точки $z_2 = -1$.

$$\lim_{z \to -1} \frac{z - 1}{z + 1} = \infty$$

Для функции $g(z) = 1/w(z) = \frac{z+1}{z-1}$ точка $z_2 = -1$ является простым нулем. Значит точка $z_2 = -1$ является для функции w(z) полюсом первого порядка.

Вывод по задаче

РГР по матанализу

Федоров, Горляков

Задание 1. Потенциал векторного поля

Задание 2. Поток векторного поля

Задание 3. Конформные отображения

Вывод

РГР по матанализу

Федоров, Горляков

Задание 1. Потенциал векторного пол:

Задание 2. Поток векторного пол:

Задание 3. Конформны отображения

Задание 2. Поток векторного поля

Задание 3. Конформные отображения

SLIBOR

- [1] G.A. Korn μ T.M. Korn. Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems, and Formulas for Reference and Review. 1968. ISBN: 9780486411477.
- [2] В. А. Зорич. *Математический анализ, часть II*. 9-е изд. МЦНМО, 2019. ISBN: 978-5-4439-1305-6.