

# Расчетно-графическая работа по математическому анализу

## Вариант 6

Егор Федоров    Даниил Горляков

Университет ИТМО

Декабрь 2023

# Задание 1. Потенциал векторного поля

Дано векторное поле  $\mathbf{H} = (e^x; -e^y)$ .

План:

1. Убедитесь, что поле потенциально
2. Найдите уравнения векторных линий
3. Изобразите векторные линии на рисунке
4. Найдите потенциал поля при помощи криволинейного интеграла
5. Изобразите линии уровня потенциала (эквипотенциальные линии).  
Проиллюстрируйте ортогональность линий уровня и векторных линий.
6. Зафиксируйте точки  $A$  и  $B$  на какой-либо векторной линии. Вычислите работу поля вдоль этой линии.

## Необходимое условие потенциальности поля

Пусть  $\mathbf{H}$  – векторное поле. Тогда, если в некотором шаре выполняется условие  $\frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{\partial H_y}{\partial x}$ , то поле  $\mathbf{H}$  потенциально в этом шаре [zorich].

$$\frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{\partial(e^x)}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} = \frac{\partial(-e^y)}{\partial x} = 0$$

Очевидно, что необходимое условие выполняется на  $\mathbb{R}^2$ , а значит поле  $\mathbf{H}$  потенциально на  $\mathbb{R}^2$ .

## Уравнения векторных линий

Для нахождения уравнений векторных линий решим дифференциальное уравнение:

$$\frac{dx}{e^x} = \frac{dy}{-e^y} \quad (1)$$

Проинтегрируем полученное уравнение:

$$\int e^{-x} dx = \int -e^{-y} dy \quad (2)$$

Интегрируя в уме, получаем:

$$\begin{aligned} -e^{-x} + C_1 &= e^{-y} + C_2 \\ e^{-y} + e^{-x} &= C \end{aligned}$$

Перенесем  $e^{-x}$  в правую часть и прологарифмируем:

$$y = -\ln(C - e^{-x}), \quad C - e^{-x} > 0 \iff x > -\ln(C), \quad C > 0 \quad (3)$$

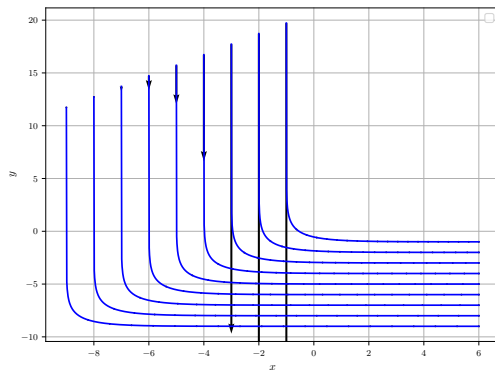


Рис.: Векторные линии поля  $H$

## Потенциал векторного поля

Пусть  $U(R)$  – потенциал поля  $\mathbf{H}$ .

$$U(R) = \int_{\widehat{AR}} \mathbf{H} d\mathbf{r} \quad (4)$$

Где  $A$  – точка поля, координаты которой удовлетворяют условиям существования полей  $\mathbf{H}$  и  $\text{rot } \mathbf{H}$ .

Возьмем в качестве  $A$  точку  $(0; 0)$ . Так как интеграл в уравнении (??) не зависит от пути, то разобьем его на две линии  $(0; 0) - (R_x; 0) - (R_x; R_y)$

$$U(R) = \int_{(0;0)}^{(R_x;0)} (e^x dx + (-e^y dy)) + \int_{(R_x;0)}^{(R_x;R_y)} (e^x dx + (-e^y dy)) = \quad (5)$$

$$= \int_0^{R_x} e^x dx - \int_0^{R_y} e^y dy = e^{R_x} - e^{R_y} \quad (6)$$

# Потенциал векторного поля: проверка

По определению потенциала векторного поля [zorich],  $\text{grad } U = \mathbf{H}$ .  
Проверим это.

$$\text{grad } U = \left( \frac{\partial U}{\partial x}; \frac{\partial U}{\partial y} \right) = (e^x; -e^y) = \mathbf{H} \quad (7)$$

Таким образом,  $U(R) = e^{R_x} - e^{R_y}$  – потенциал векторного поля  $\mathbf{H}$ .

# Линии уровня потенциала

РГР по  
матанализу

Федоров,  
Горляков



# Работа поля вдоль линии

РГР по  
матанализу

Федоров,  
Горляков

# Вывод по задаче

РГР по  
матанализу

Федоров,  
Горляков

## Задание 2. Поток векторного поля

Дано тело  $T$ , ограниченное следующими поверхностями:

$$z + \sqrt{4 - x^2 - y^2} = 0 \quad x^2 + z^2 = 1 \quad x^2 + y + z^2 = 2$$

На рисунке предоставлено сечение тела  $T$  координатной плоскостью  $Oyz$ .

- ▶ Изобразите тело  $T$  на графике в пространстве.
- ▶ Вычислите поток поля

$$\mathbf{a} = (\sin zy^2)\mathbf{i} + \sqrt{2}x\mathbf{j} + (\sqrt{2+y} - 3k)\mathbf{k}$$

через боковую поверхность тела  $T$ , образованную вращением дуги  $AFEDC$  вокруг оси  $Oy$ , в направлении внешней нормали поверхности тела  $T$ .

# Вывод по задаче

РГР по  
матанализу

Федоров,  
Горляков

# Задание 3. Конформные отображения

$$w(z) = \frac{z - 1}{z + 1}$$

План выполнения работы:

1. Рассмотреть конформное отображение. Определить особые точки отображения (при наличии) и указать их вид.
2. Изобразить на комплексной плоскости отображение области виртуального пространства в область физического пространства с помощью заданного преобразования.
3. Выделить действительную и мнимую части отображения для построения искривленной координатной сетки в физическом пространстве.
4. Взять обратное преобразование к заданному и проанализировать его
5. Расчитать профиль показателя преломления используя конформное отображение

# Вывод по задаче

РГР по  
матанализу

Федоров,  
Горляков

# Вывод

РГР по  
матанализу

Федоров,  
Горляков

# Список литературы

РГР по  
матанализу

Федоров,  
Горляков