Расчетно-графическая работа по математическому анализу

Вариант 6

Егор Федоров   Даниил Горляков

Университет ИТМО

Декабрь 2023

Задание 1. Потенциал векторного поля

Задание 2. Поток векторного поля

Задание 3. Конформные отображения

Вывод

Задание 1. Потенциал векторного поля

Дано векторное поле $\boldsymbol{H} = (e^x; -e^y)$.
План:

1. Убедитесь, что поле потенциально
2. Найдите уравнения векторных линий
3. Изобразите векторные линии на рисунке
4. Найдите потенциал поля при помощи криволинейного интеграла
5. Изобразите линии уровня потенциала (эквипотенциальные линии). Проиллюстрируйте ортогональность линий уровня и векторных линий.
6. Зафиксируйте точки A и B на какой-либо векторной линии. Вычислите работу поля вдоль этой линии.

Задание 1. Потенциал векторного поля

Задание 2. Поток векторного поля

Задание 3. Конформные отображения

Вывод

Потенциальность поля

Необходимое условие потенциальности поля

Пусть $\boldsymbol{H}$ – векторное поле. Тогда, если в некотором шаре выполняется условие $\dfrac{\partial H_x}{\partial y} = \dfrac{\partial H_y}{\partial x}$, то поле $\boldsymbol{H}$ потенциально в этом шаре [2, ст. 270, 272].

$$\frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{\partial (e^x)}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial H_y}{\partial x} = \frac{\partial (-e^y)}{\partial x} = 0$$

Очевидно, что необходимое условие выполняется на $\mathbb{R}^2$, а значит поле $\boldsymbol{H}$ потенциально на $\mathbb{R}^2$.

Уравнения векторных линий

Для нахождения уравнений векторных линий решим дифференциальное уравнение:

$$\frac{dx}{e^x} = \frac{dy}{-e^y}$$

Проинтегрируем полученное уравнение:

$$\int e^{-x}\,dx = \int -e^{-y}\,dy$$

Интегрируя, получаем:

$$-e^{-x} + C_1 = e^{-y} + C_2$$
$$e^{-y} + e^{-x} = C$$

Перенесем e^{-x} в правую часть и прологарифмируем:

$$y = -\ln(C - e^{-x}), \qquad C - e^{-x} > 0 \Longleftrightarrow x > -\ln(C), C > 0 \qquad (1)$$

Векторные линии

На рис. 1 черным цветом нарисованы векторные линии (1) для $C \in \{e^1, e^2, \ldots, e^9\}$, синим - векторное поле в данных точках.

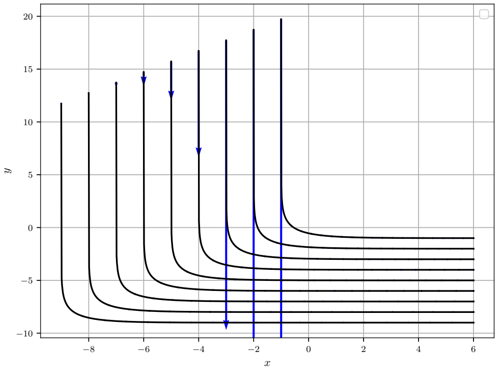

Рис. 1: Векторные линии поля $\boldsymbol{H}$

Потенциал векторного поля

Пусть $U(R)$ – потенциал поля $\boldsymbol{H}$.

$$U(R) = \int\limits_{\overset{\frown}{AR}} \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{r}$$

Где A – точка поля, координаты которой удовлетворяют условиям существования полей $\boldsymbol{H}$ и $\operatorname{rot}\boldsymbol{H}$.
Возьмем в качестве A точку $(0;0)$. Так как интеграл в уравнении (6) не зависит от пути, то разобьем его на две линии $(0;0) - (R_x : 0) - (R_x; R_y)$

$$U(R) = \int\limits_{(0;0)}^{(R_x;0)} (e^x dx + (-e^y dy)) + \int\limits_{(R_x;0)}^{(R_x;R_y)} (e^x dx + (-e^y dy)) =$$

$$= \int\limits_0^{R_x} e^x\, dx - \int\limits_0^{R_y} e^y\, dy = e^{R_x} - e^{R_y}$$

Потенциал векторного поля: проверка

По определению потенциала векторного поля [2, ст. 269], $\operatorname{grad} U = \boldsymbol{H}$. Проверим это.

$$\operatorname{grad} U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}; \frac{\partial U}{\partial y}\right) = (e^x; -e^y) = \boldsymbol{H}$$

Таким образом, $U(R) = e^{R_x} - e^{R_y}$ – потенциал векторного поля $\boldsymbol{H}$.

Линии уровня потенциала

Определение

Эквипотенциальная линия – совокупность точек поля, имеющих один и тот же потенциал.

Для нахождения уравнения линий уровня потенциала зафиксируем уровень потенциала C и выразим y через x

$$U(x, y) = e^x - e^y = C \Longleftrightarrow e^y = e^x - C$$

Прологарифмируем уравнение с обеих сторон и получим

$$y = \ln(e^x - C) \qquad e^x > C \Rightarrow x > \ln(C) \tag{2}$$

Линии уровня потенциала

На рис. 2 представлены графики функций (1) черным цветом и (2) разными цветами для $C = e^1, e^2 \ldots, e^9$

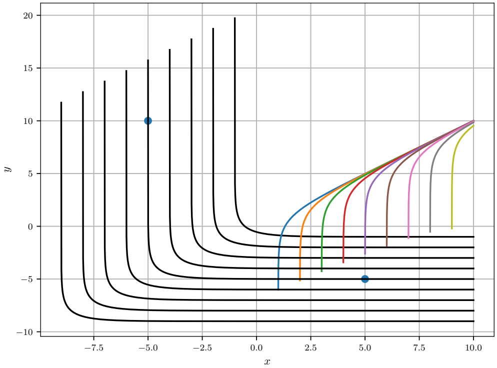

Рис. 2: Линии уровня потенциала поля $\boldsymbol{H}$

Работа поля вдоль линии

Зафиксируем точки $A = (-5; 10)$ и $B = (5; -5)$. Найдем работу поля $\boldsymbol{H}$ вдоль векторой линии, проходящей через эти точки.
Тогда работа поля вдоль линии будет равна:

$$\int\limits_{AB} \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{s} = U(B) - U(A) = (e^{B_x} - e^{B_y}) - (e^{A_x} - e^{A_y}) =$$
$$= (e^5 - e^{-5}) - (e^{-5} - e^{10}) = e^5 - 2e^{-5} + e^{10} =$$
$$\approx 22174.86548$$

Вывод по задаче

- Установили, что $\boldsymbol{H}$ — потенциально
- Нашли уравнения векторных линий
- Нашли потенциал поля
- Нашли уравнение линий уровня потенциала
- Изобразили векторные линии и линии уровня потенциала графическию
- Нашли работу поля вдоль векторной линии

Задание 2. Поток векторного поля

Дано тело T, ограниченное следующими поверхностями:

$$z + \sqrt{4 - x^2 - y^2} = 0 \qquad x^2 + z^2 = 1 \qquad x^2 + y + z^2 = 2$$

На рисунке предоставлено сечение тела T координатной плоскостью Oyz.

- Изобразите тело T на графике в пространстве.
- Вычислите поток поля

$$\boldsymbol{a} = (\sin zy^2)\boldsymbol{i} + \sqrt{2}x\boldsymbol{j} + (\sqrt{2 + y} - 3k)\boldsymbol{k}$$

через боковую поверхность тела T, образованную вращением дуги $AFEDC$ вокруг оси Oy, в направлении внешней нормали поверхности тела T.

Вывод по задаче

Задание 1. Потенциал векторного поля

Задание 2. Поток векторного поля

Задание 3. Конформные отображения

Вывод

Задание 3. Конформные отображения

$$w(z) = \frac{z-1}{z+1}$$

План выполнения работы:

1. Рассмотреть конформное отображение. Определить особые точки отображения (при наличии) и указать их вид.
2. Изобразить на комплексной плоскости отображение области виртуального пространства в область физического пространства с помощью заданного преобразования.
3. Выделить действительную и мнимую части отображения для построения искривленной координатной сетки в физическом пространстве.
4. Взять обратное преобразование к заданному и проанализировать его
5. Расчитать профиль показателя преломления используя конформное отображение

Задание 1. Потенциал векторного поля

Задание 2. Поток векторного поля

Задание 3. Конформные отображения

Вывод

Проверка

Проверим, является ли данное отображение конформным.

- $w(z)$ аналитична при $z \neq -1$.
- Для данного отображения существует обратное:

$$w^{-1}(z) = \frac{1 + w(z)}{1 - w(z)}$$

  Таким образом, $w(z)$ – биекция.
- Найдем $w'(z)$:

$$w'(z) = \frac{2}{(z+1)^2} \neq 0 \; \forall z \in \mathbb{C}$$

Таким образом, $w(z)$ является конформным отображением на $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

Особые точки

Функция имеет две особые точки $z_1 = 1$ и $z_2 = -1$. Определим их вид. Для этого найдем производную $w'(z)$.

$$w'(z) = \frac{2}{(z+1)^2} \qquad w(z_1) = w(1) = 0 \quad w'(z_1) = w'(1) \neq 0$$

Значит точка $z_1 = 1$ является простым нулем. Определим вид точки $z_2 = -1$.

$$\lim_{z \to -1} \frac{z-1}{z+1} = \infty$$

Для функции $g(z) = 1/w(z) = \dfrac{z+1}{z-1}$ точка $z_2 = -1$ является простым нулем. Значит точка $z_2 = -1$ является для функции $w(z)$ полюсом первого порядка.

Вывод по задаче

Вывод

Задание 1. Потенциал векторного поля

Задание 2. Поток векторного поля

Задание 3. Конформные отображения

Вывод

Список литературы

[1] G.A. Korn и T.M. Korn. *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems, and Formulas for Reference and Review.* 1968. ISBN: 9780486411477.

[2] В. А. Зорич. *Математический анализ, часть II.* 9-е изд. МЦНМО, 2019. ISBN: 978-5-4439-1305-6.

Задание 1. Потенциал векторного поля

Задание 2. Поток векторного поля

Задание 3. Конформные отображения

Вывод