Расчетно-графическая работа по математическому анализу

Вариант 6

Егор Федоров Даниил Горляков

Университет ИТМО

Декабрь 2023

Задание 1. Потенциал векторного поля

Дано векторное поле $\boldsymbol{H} = (e^x; -e^y)$.
План:

1. Убедитесь, что поле потенциально
2. Найдите уравнения векторных линий
3. Изобразите векторные линии на рисунке
4. Найдите потенциал поля при помощи криволинейного интеграла
5. Изобразите линии уровня потенциала (эквипотенциальные линии). Проиллюстрируйте ортогональность линий уровня и векторных линий.
6. Зафиксируйте точки A и B на какой-либо векторной линии. Вычислите работу поля вдоль этой линии.

Потенциальность поля

Необходимое условие потенциальности поля

Пусть $\boldsymbol{H}$ – векторное поле. Тогда, если в некотором шаре выполняется условие $\dfrac{\partial H_x}{\partial y} = \dfrac{\partial H_y}{\partial x}$, то поле $\boldsymbol{H}$ потенциально в этом шаре [2, ст. 270, 272].

$$\frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{\partial(e^x)}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial H_y}{\partial x} = \frac{\partial(-e^y)}{\partial x} = 0$$

Очевидно, что необходимое условие выполняется на $\mathbb{R}^2$, а значит поле $\boldsymbol{H}$ потенциально на $\mathbb{R}^2$.

Уравнения векторных линий

Для нахождения уравнений векторных линий решим дифференциальное уравнение:

$$\frac{dx}{e^x} = \frac{dy}{-e^y}$$

Проинтегрируем полученное уравнение:

$$\int e^{-x}\,dx = \int -e^{-y}\,dy$$

Интегрируя, получаем:

$$-e^{-x} + C_1 = e^{-y} + C_2$$
$$e^{-y} + e^{-x} = C$$

Перенесем e^{-x} в правую часть и прологарифмируем:

$$y = -\ln(C - e^{-x}), \qquad C - e^{-x} > 0 \Longleftrightarrow x > -\ln(C), C > 0 \qquad (1)$$

Векторные линии

На рис. ?? черным цветом нарисованы векторные линии (??) для $C \in \{e^1, e^2, \dots, e^9\}$, синим - векторное поле в данных точках.

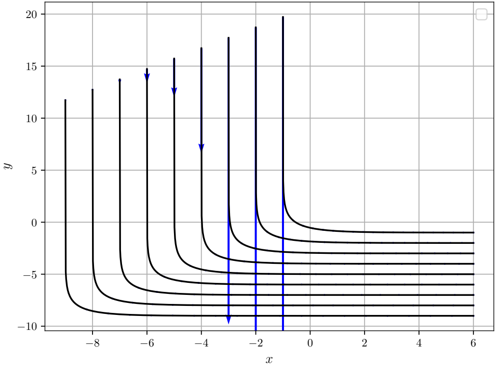


Рис. 1: Векторные линии поля $\boldsymbol{H}$

Потенциал векторного поля

Пусть $U(R)$ – потенциал поля $\boldsymbol{H}$.

$$U(R) = \int\limits_{\overset{\frown}{AR}} \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{r}$$

Где A – точка поля, координаты которой удовлетворяют условиям существования полей $\boldsymbol{H}$ и $\operatorname{rot} \boldsymbol{H}$.

Возьмем в качестве A точку $(0; 0)$. Так как интеграл в уравнении (??) не зависит от пути, то разобьем его на две линии $(0; 0) - (x : 0) - (x; y)$

$$U(x,y) = \int\limits_{(0;0)}^{(x;0)} (e^x dx + (-e^y dy)) + \int\limits_{(x;0)}^{(x;y)} (e^x dx + (-e^y dy)) =$$

$$= \int\limits_0^x e^x\, dx - \int\limits_0^y e^y\, dy = e^x - e^y$$

Потенциал векторного поля: проверка

По определению потенциала векторного поля [2, ст. 269], $\operatorname{grad} U = \boldsymbol{H}$. Проверим это.

$$\operatorname{grad} U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}; \frac{\partial U}{\partial y}\right) = (e^x; -e^y) = \boldsymbol{H}$$

Таким образом, $U(x, y) = e^x - e^y$ – потенциал векторного поля $\boldsymbol{H}$.

Линии уровня потенциала

Определение

Эквипотенциальная линия – совокупность точек поля, имеющих один и тот же потенциал.

Для нахождения уравнения линий уровня потенциала зафиксируем уровень потенциала C и выразим y через x

$$U(x, y) = e^x - e^y = C \iff e^y = e^x - C$$

Прологарифмируем уравнение с обеих сторон и получим

$$y = \ln(e^x - C) \qquad e^x > C \Rightarrow x > \ln(C) \tag{2}$$

Линии уровня потенциала

На рис. ?? представлены графики функций (??) черным цветом и (??) разными цветами для $C = e^1, e^2 \dots, e^9$

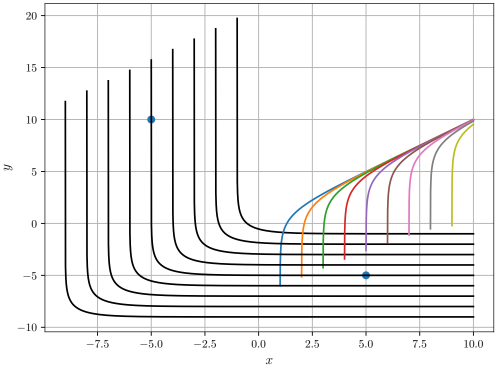


Рис. 2: Линии уровня потенциала поля $\boldsymbol{H}$

Работа поля вдоль линии

Зафиксируем точки $A = (-5; 10)$ и $B = (5; -5)$. Найдем работу поля $\boldsymbol{H}$ вдоль векторной линии, проходящей через эти точки.
Тогда работа поля вдоль линии будет равна:

$$\int\limits_{AB} \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{s} = U(B) - U(A) = (e^{B_x} - e^{B_y}) - (e^{A_x} - e^{A_y}) =$$
$$= (e^5 - e^{-5}) - (e^{-5} - e^{10}) = e^5 - 2e^{-5} + e^{10} =$$
$$\approx 22174.86548$$

Вывод по задаче

- Установили, что $\boldsymbol{H}$ — потенциально
- Нашли уравнения векторных линий
- Нашли потенциал поля
- Нашли уравнение линий уровня потенциала
- Изобразили векторные линии и линии уровня потенциала графически
- Нашли работу поля вдоль векторной линии

Задание 2. Поток векторного поля

Дано тело T, ограниченное следующими поверхностями:

$$y + \sqrt{x^2 + z^2} = 0 \qquad x^2 + z^2 = 1 \qquad x^2 + y + z^2 = 2$$

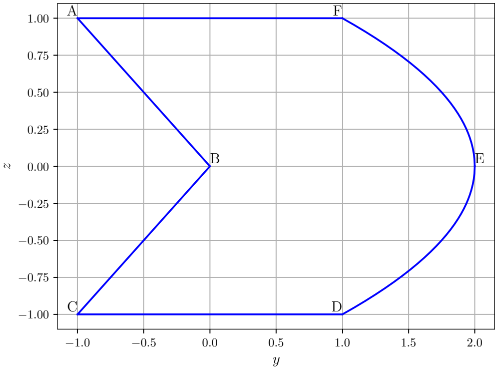


Рис. 3: Сечение тела T координатной плоскостью Oyz

Задание 2. Поток векторного поля

Дано тело T, ограниченное следующими поверхностями:

$$y + \sqrt{x^2 + z^2} = 0 \qquad x^2 + z^2 = 1 \qquad x^2 + y + z^2 = 2$$

- Изобразите тело T на графике в пространстве.
- Вычислите поток поля

$$\boldsymbol{a} = (\sin zy^2)\boldsymbol{i} + \sqrt{2}x\boldsymbol{j} + (\sqrt{2+y} - 3z)\boldsymbol{k}$$

через боковую поверхность тела T, образованную вращением дуги $AFEDC$ вокруг оси Oy, в направлении внешней нормали поверхности тела T.

Тело T на графике в пространстве

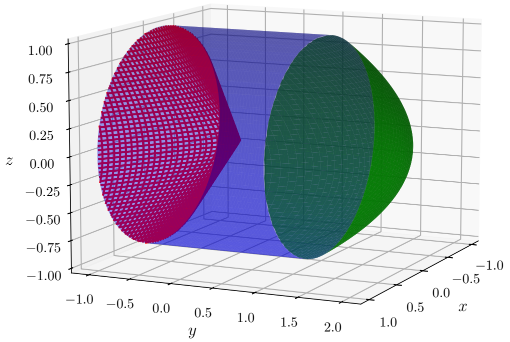


Рис. 4: Тело T в пространстве

Вычисление потока поля

Для нахождения потока поля

$$\boldsymbol{a} = (\sin zy^2)\boldsymbol{i} + \sqrt{2}x\boldsymbol{j} + (\sqrt{2+y} - 3z)\boldsymbol{k}$$

через боковую поверхность тела T, образованную вращением дуги $AFEDC$ вокруг оси Oy, в направлении внешней нормали поверхности тела T Воспользуемся теоремой *Остроградского – Гаусса*:

$$\oiint\limits_{\Sigma} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})\ d\sigma = \iiint\limits_{V} \operatorname{div} \boldsymbol{a}\, dxdydz$$

Вычисление потока поля

Найдем дивергенцию:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = 0 + 0 - 3 = -3$$

Поскольку $x^2 + z^2 = 1$ — это цилиндр, а $x^2 + y + z^2 = 2$ — параболоид, нам удобно перейти к цилиндрическим координатам:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\theta \\ y = y \\ z = r \cdot \sin\theta \end{cases}$$

Расставим пределы интегрирования:

$$r \in [0, 1], \;\; \theta \in [0, 2\pi], \;\; y = 2 - x^2 - y^2 = 2 - r^2$$

Вычисление потока поля

Тогда

$$\Phi_{\text{вращения}} = \oiint_{\Sigma} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})\, d\sigma = \iiint_{V} -3dV$$

$$= -3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r\, dr \int_0^{2-r^2} dy = -3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (2 - r^2) r\, dr$$

$$= -3 \cdot 2\pi \cdot (1 - \frac{1}{4}) = -\frac{9}{2}\pi$$

$$\Phi_{\text{дна}} = \iint_D (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})\, d\sigma = \iint_D (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})\, d\sigma = 0 \text{ т.к. } \widehat{(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})} = \frac{\pi}{2}$$

$$\Phi = \Phi_{\text{вращения}} - \Phi_{\text{дна}} = -\frac{9}{2}\pi$$

Вывод по задаче

- Изобразили тело T на графике в трехмерном пространстве.
- Нашли дивергенцию векторного поля $\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \text{-}3$.
- Вычислили поток векторного поля через боковую поверхность тела $\varPhi = -\dfrac{9}{2}\pi$

Задание 3. Конформные отображения

$$w(z) = \frac{z-1}{z+1} = 1 - \frac{2}{z+1}$$

План выполнения работы:

1. Рассмотреть конформное отображение. Определить особые точки отображения (при наличии) и указать их вид.
2. Изобразить на комплексной плоскости отображение области виртуального пространства в область физического пространства с помощью заданного преобразования.
3. Выделить действительную и мнимую части отображения для построения искривленной координатной сетки в физическом пространстве.
4. Взять обратное преобразование к заданному и проанализировать его
5. Рассчитать профиль показателя преломления используя конформное отображение

Особые точки

Отображение имеет две особые точки $z_1 = 1$ и $z_2 = -1$. Определим их вид. Для этого найдем производную $w'(z)$.

$$w'(z) = \frac{2}{(z+1)^2} \qquad w(z_1) = w(1) = 0 \quad w'(z_1) = w'(1) \neq 0$$

Значит точка $z_1 = 1$ является простым нулем. Определим вид точки $z_2 = -1$.

$$\lim_{z \to -1} \frac{z-1}{z+1} = \infty$$

Для функции $g(z) = 1/w(z) = \dfrac{z+1}{z-1}$ точка $z_2 = -1$ является простым нулем. Значит точка $z_2 = -1$ является для функции $w(z)$ полюсом первого порядка.
Таким образом, отображение является конформным за исключением точки $z = -1$

$\operatorname{Im} w(z)$ и $\operatorname{Re} w(z)$

Для дальнейшего изучения отображения найдем $\operatorname{Im}(w(z))$ и $\operatorname{Re}(w(z))$. Пусть $z = u + iv$. Тогда:

$$w(z) = w(u+iv) = 1 - \frac{2}{(u+1)+iv} = 1 - \frac{2((u+1)-iv)}{((u+1)+iv)((u+1)-iv)} =$$
$$= 1 - \frac{2(u+1-iv)}{(u+1)^2+v^2} = 1 - \frac{2u+2-2iv}{u^2+2u+v^2+1} =$$
$$= 1 - \frac{2u+2}{u^2+2u+v^2+1} - i\frac{2v}{u^2+2u+v^2+1} =$$
$$= \frac{u^2+v^2-1}{u^2+2u+v^2+1} - i\frac{2v}{u^2+2u+v^2+1}$$

Значит $\operatorname{Re}(w(z)) = \dfrac{u^2+v^2-1}{u^2+2u+v^2+1}$, $\operatorname{Im}(w(z)) = -\dfrac{2v}{u^2+2u+v^2+1}$

Прямая $v = u$

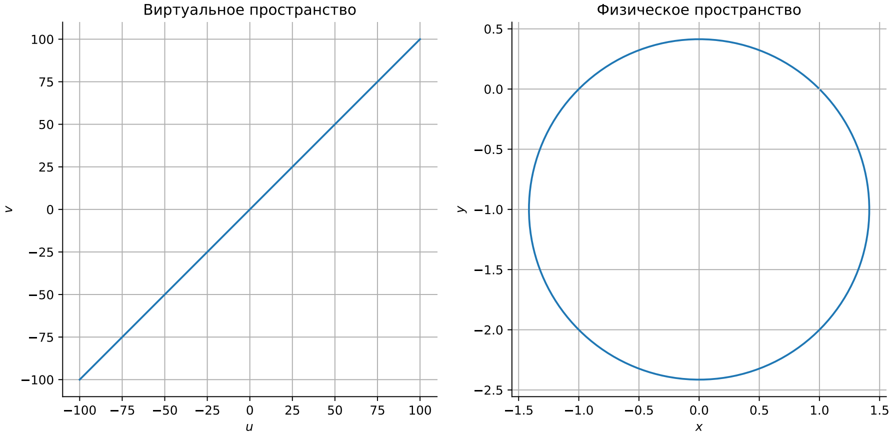
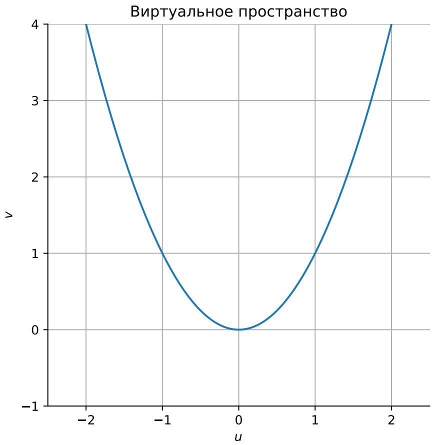


Рис. 5: Прямая $v = u$

Парабола $v = u^2$



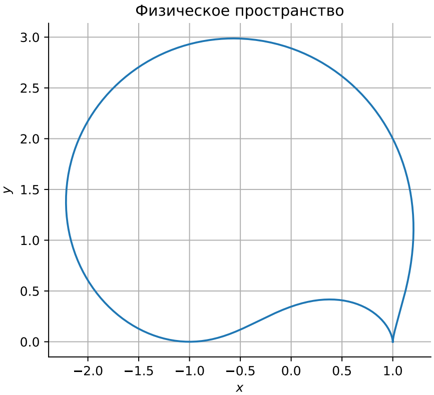


Рис. 6: Парабола $v = u^2$

Окружность $(v-1)^2+u^2=2$

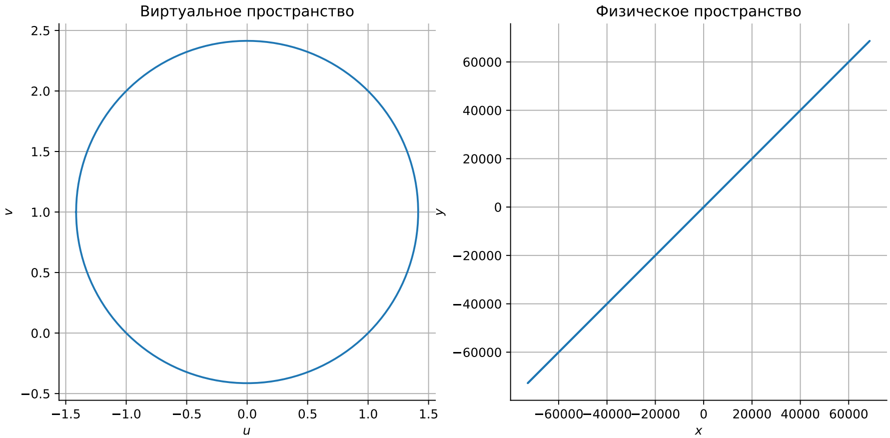


Рис. 7: Окружность $(v-1)^2+u^2=2$

Координатная сетка (горизонтальные прямые)

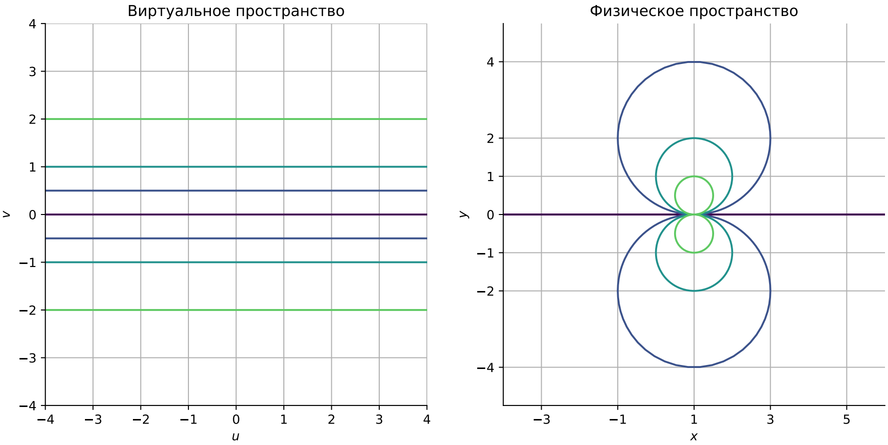


Рис. 8: Координатная сетка (горизонтальные прямые)

Координатная сетка (вертикальные прямые)

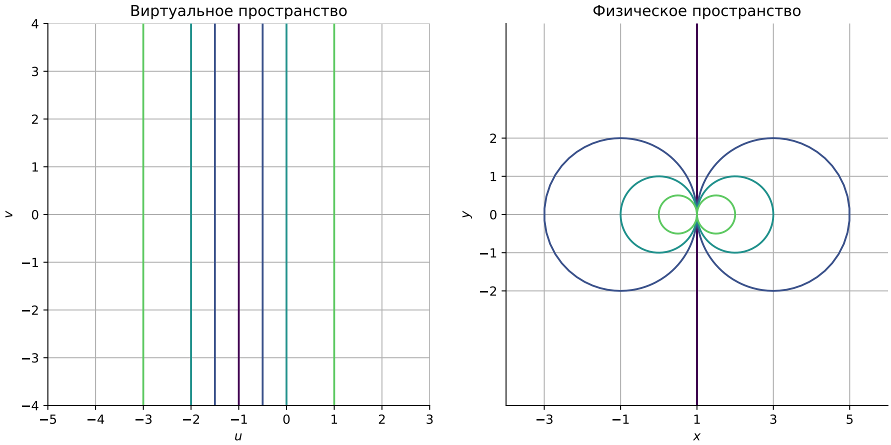


Рис. 9: Координатная сетка (вертикальные прямые)

Координатная сетка

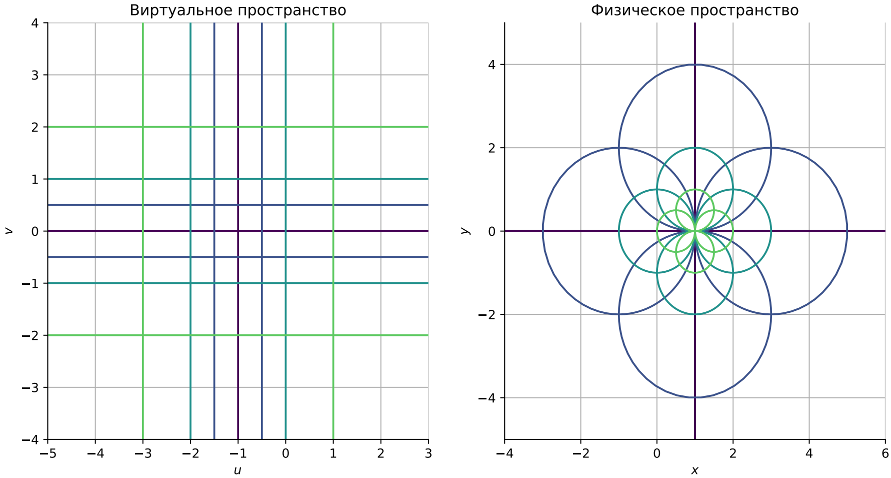


Рис. 10: Координатная сетка

Обратное преобразование

Найдем для данного преобразования обратное. Для этого выразим $z(w)$

$$w(z) = \frac{z-1}{z+1}$$
$$z(w) = \frac{1+w}{1-w} = 1 + \frac{2w}{1-w}$$

Видно, что обратное преобразование конформно за исключением простого полюса $w = 1$. Простым нулем обратного преобразования является точка $w = -1$.

Профиль показателя преломления

Для расчета профиля показателя в физическом пространстве воспользуемся формулой:

$$n_z = \left| \frac{dw}{dz} \right| n_w = \frac{2}{(x+1)^2 + y^2} \tag{3}$$

Профиль показателя преломления

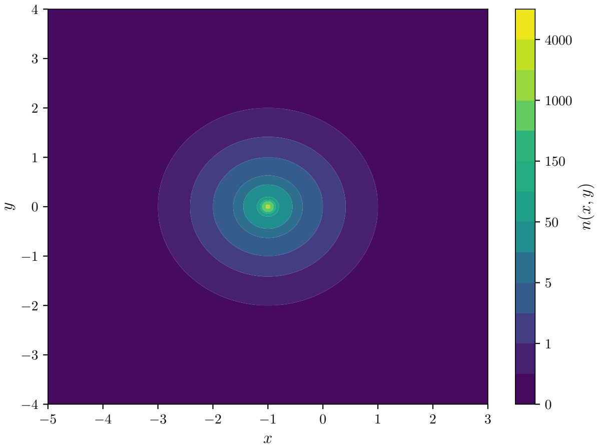


Рис. 11: Профиль показателя преломления

Вывод по задаче

- Определили особые точки отображения
- Изобразили действие отображения на разные кривые
- Проанализировали обратное преобразование
- Рассчитали профиль показателя преобразования, построили его график

Вывод

- Изучили понятие потенциала векторного поля, способ его нахождения и применение
- Изучили понятие потока векторного поля через боковую поверхность тела, теорему Остроградского-Гаусса и ее применение
- Изучили применение ТФКП для конформных отображений, изучили, во что переходят разные фигуры, научились рассчитывать профиль показателя преобразования.

Список литературы

[1] G.A. Korn и T.M. Korn. *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems, and Formulas for Reference and Review.* 1968. ISBN: 9780486411477.

[2] В. А. Зорич. *Математический анализ, часть II.* 9-е изд. МЦНМО, 2019. ISBN: 978-5-4439-1305-6.