Теория вероятностей
Домашнее задание №1

Федоров Егор, P3215, вариант 19

1 Рябушко 18.1

***Задача* 1.1:** Сколькими способами можно смоделировать флаг, состоящий из трех горизонтальных полос различных цветов, если имеется материал пяти различных цветов?

$$A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

***Задача* 1.2:** Из коробки, содержащей карточки с буквами «о», «н», «к», «ь», наугад вынимают одну карточку за другой и располагают в порядке извлечения. Какова вероятность того, что в результате получится слово конь.

$$\frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \approx 0.417$$

***Задача* 1.3:** Вероятность выигрыша по лотерейному билету первого выпуска равна 0,2, второго – 0,3. Имеется по два билета каждого выпуска. Найти вероятность того, что выиграют: а) три билета; б) не менее трех билетов; в) менее трех билетов.

a $P(a) = (2 \cdot 0.2 \cdot 0.2 \cdot 0.3 \cdot 0.7) + (2 \cdot 0.2 \cdot 0.3 \cdot 0.3 \cdot 0.8) = 0.0456$

b $P(b) = P(a) + 0.2 \cdot 0.2 \cdot 0.3 \cdot 0.3 = 0.0492$

c $P(c) = 1 - P(b) = 0.9508$

***Задача* 1.4:** Телеграфное сообщение состоит из сигналов «точка» и «тире», они встречаются в передаваемых сообщениях в отношении 5 : 3. Статические свойства помех таковы, что искажаются в среднем 2/5 сообщений «точка» и 1/3 сообщений «тире».

Найти вероятность того, что:

1. передаваемый сигнал принят;
2. принятый сигнал – «тире»

1. $\frac{5}{8} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3} = 0.625$
2. $\frac{5}{8} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3} = 0.5$

***Задача* 1.5:** Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,4. Произведено 8 выстрелов. Найти вероятность поражения цели:

1. три раза;
2. наивероятнейшее число раз;
3. хотя бы один раз

1. $C_8^3 \cdot (0.4)^3 \cdot (0.6)^5 \approx 0.2787$
2. Наивероятнейшее число раз: $\lfloor 0.4 \cdot 8 \rfloor = 3$, поэтому ответ совпадает с предыдущим пунктом. $P \approx 0.2787$
3. Найдем вероятность поражения цели 0 раз: $P' = C_8^0 \cdot (0.4)^0 \cdot (0.6)^8 \approx 0.01679$. Тогда искомая вероятность P равна $P = 1 - P' \approx 0.9832$

***Задача* 1.6:** Вероятность появления события в каждом из 21 независимого испытания равна 0,7. Найти вероятность того, что событие наступит не менее 11 раз.

$$P_{21}(11 \leq m \leq 21) = \Phi\left(\frac{21 - 21 \cdot 0.7}{\sqrt{21 \cdot 0.7 \cdot 0.3}}\right) - \Phi\left(\frac{11 - 21 \cdot 0.7}{\sqrt{21 \cdot 0.7 \cdot 0.3}}\right) = \Phi(3) - \Phi(1.76) = \Phi(3) + \Phi(1.76) = 0.93435$$

2 Рябушко 18.2

***Задача* 2.1:** Найти закон распределения указанной дискретной СВ X и ее функцию распределения $F(x)$. Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратичное отклонение $\sigma(X)$. Построить график распределения $F(x)$.

Рабочий обслуживает четыре станка. Вероятность выхода из строя в течение смены для первого станка равна 0,6, для второго – 0,5, для третьего – 0,4, для четвертого – 0,5; СВ X – число станков, вышедших из строя за смену.

$$P(0) = 0.4 \cdot 0.5 \cdot 0.6 \cdot 0.5 = 0.06$$

$$P(1) = 0.6 \cdot 0.5 \cdot 0.6 \cdot 0.5 + 0.4 \cdot 0.5 \cdot 0.6 \cdot 0.5 + 0.4 \cdot 0.5 \cdot 0.4 \cdot 0.5 + 0.4 \cdot 0.5 \cdot 0.6 \cdot 0.5 = 0.25$$

$$P(3) = 0.4 \cdot 0.5 \cdot 0.4 \cdot 0.5 + 0.6 \cdot 0.5 \cdot 0.4 \cdot 0.5 + 0.6 \cdot 0.5 \cdot 0.6 \cdot 0.5 + 0.6 \cdot 0.5 \cdot 0.4 \cdot 0.5 = 0.25$$

$$P(4) = 0.4 \cdot 0.5 \cdot 0.6 \cdot 0.5 = 0.06$$

$$P(2) = 1 - (P(0) + P(1) + P(3) + P(4)) = 0.38$$

X	$P(X)$	$F(X)$
0	0.06	0.06
1	0.25	0.31
2	0.38	0.69
3	0.25	0.94
4	0.06	1

$$\boldsymbol{MX = 0.25 \cdot 1 + 0.38 \cdot 2 + 0.25 \cdot 3 + 0.06 \cdot 4 = 2}$$

$$MX^2 = 0.25 \cdot 1 + 0.38 \cdot 4 + 0.25 \cdot 9 + 0.06 \cdot 16 = 4.98$$

$$\boldsymbol{DX = MX^2 - (MX)^2 = 0.98}$$

$$\boldsymbol{\sigma = \sqrt{DX} \approx 0.99}$$

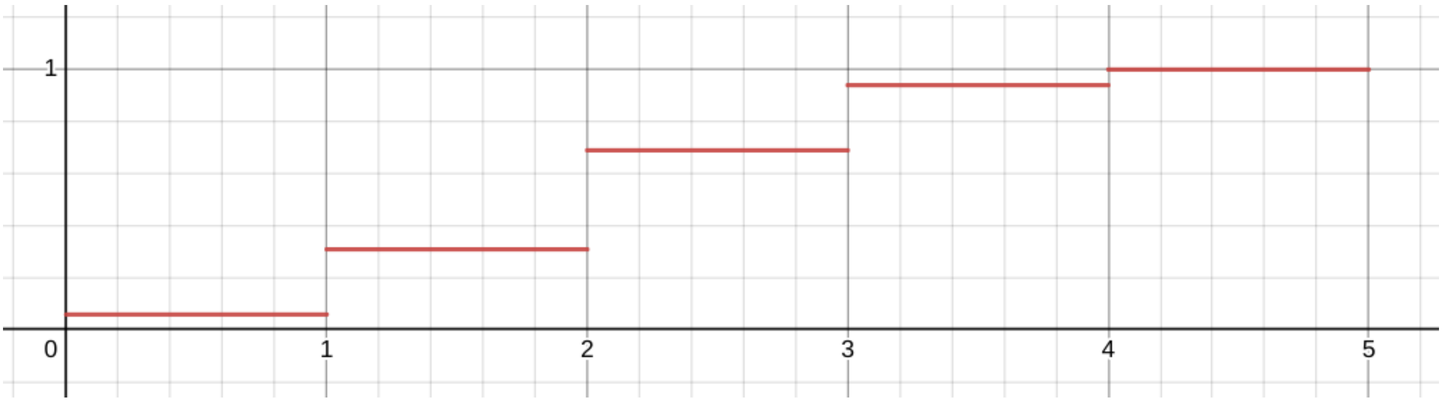

Рис. 1: График $y = F(x)$

***Задача* 2.2:** Дана функция распределения $F(x)$ СВ X. Найти плотность распределения вероятностей $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и вероятность попадания СВ X на отрезок $[a; b]$. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \dfrac{x^2 - x}{2}, & 1 \le x \le 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases} \qquad a = 1.5, b = 2$$

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ x - \dfrac{1}{2}, & 1 \le x \le 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = \int_1^2 (x^2 - \frac{1}{2}x)\, dx = \frac{19}{12} \approx 1.58$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(x - M(X))^2\, dx = \int_1^2 \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{19}{12}\right)^2 dx = \frac{11}{144} \approx 0.08$$

$$P(1.5 \le x \le 2) = F(2) - F(1.5) = 0.625$$

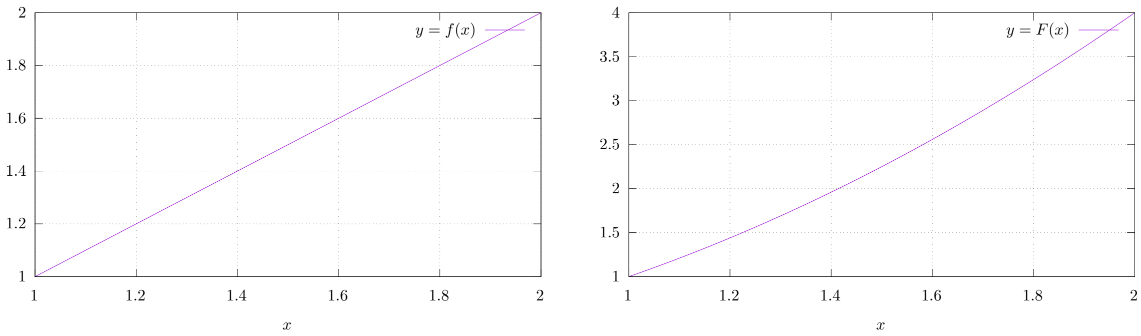

Рис. 2: График $y = f(x)$ и $y = F(x)$

***Задача* 2.3:** При заданном положении точки разрыва снаряда цель оказывается накрытой пуассоновским полем осколков с плотностью осколков $\lambda = 2.5$ осколков/м^2. Площадь проекции цели на плоскость, на которой наблюдается осколочное поле, равна 0,8 м^2. Каждый осколок, попавший в цель, поражает ее с полной достоверностью. Найти вероятность того, что цель будет поражена.

Пусть случайная величина X – количество осколков, попавших в цель. Тогда вероятность того, что цель будет поражена — $P(X \ge 1)$.

$$\begin{aligned} P(X \ge 1) &= 1 - P(X = 0) \\ &= 1 - \frac{a^m \cdot e^{-a}}{m!} \\ &= 1 - \frac{(2.5 \cdot 0.8)^0 \cdot e^{-2.5 \cdot 0.8}}{0!} \\ &= 1 - e^{-2} \\ &\approx 0.865 \end{aligned}$$

Ответ: 0.865

***Задача* 2.4:** Дисперсия каждой из 2500 независимых СВ не превышает 5. Оценить вероятность того, что отклонение среднего арифметического этих случайных величин от среднего арифметического их математических ожиданий не превысит 0,4.

Пусть событие $Y = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n} - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{n} \le \varepsilon$

$$P(Y) \ge 1 - \frac{D(X)}{n\varepsilon^2} = 1 - \frac{5}{2500 \cdot 0.16} = 0.9875$$

Ответ: $P \ge 0.9875$

3 Чистяков

3.1 Глава 2

***Задача* 3.1 (1):** Брошено две игральные кости. Предполагая, что элементарные события равновероятны, найти вероятность событий:

$$A = \text{на 1-й кости выпала } 1, \bar{A}$$

$$B = \text{выпала хотя бы одна } 6, A\bar{B}$$

$$P(A) = \frac{1}{6}, P(\bar{A}) = \frac{5}{6}$$

$$P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}, P(A\bar{B}) = P(\text{выпала 1 на первой кости, на второй не выпала 6}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$$

***Задача* 3.2** (2)**:** На полке в случайном порядке расставлено n книг, среди которых двухтомник Д. Лондона. Предполагая, что различные расположения книг равновероятны, найти вероятность того, что оба тома двухтомника расположены рядом.

$$P = \frac{(n-2)!2!}{n!} = \frac{2}{n(n-1)}$$

***Задача* 3.3** (5)**:** Выписана последовательность из n случайных чисел. Найти вероятности событий:

- 1-е число – четное:
$$P = \frac{1}{2}$$

- Среди n чисел ровно m делятся на 3:
$$P = C_n^m \left(\frac{1}{3}\right)^m \left(\frac{2}{3}\right)^{n-m}$$

- Среди n чисел ровно $m+2$ делятся на 3 и два из них расположены на концах последовательности

$$P = C_{n-2}^m \left(\frac{1}{3}\right)^m \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2-m} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = C_{n-2}^m \left(\frac{1}{3}\right)^{m+2} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2-m}$$

***Задача* 3.4** (12)**:** Найти вероятность того, что дни рождения 12 человек придутся на разные месяцы года.

$$P = \frac{12!}{12^{12}} = \frac{479001600}{8916100448256} \approx 5.3723 \cdot 10^{-5}$$

***Задача* 3.5** (11)**:** Из множества чисел $\{-n, -n+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n\}$ по схеме случайного выбора с возвращением выбирается два числа x и y. Пусть p_n – вероятность того, что $x^2 + y^2 \leq n^2$. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$.

Рассмотрим систему координат. Так как числа выбираются с возвращением, то при $n \to \infty$ все возможные варианты событий – квадрат со стороной $2n$ и центром в $(0;0)$, при этом исходы, удовлетворяющие условию $x^2 + y^2 \leq n^2$ — круг радиуса n^2 и центром в $(0;0)$.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = \frac{\pi n^2}{4n^2} = \frac{\pi}{4}$

3.2 Глава 3

***Задача* 3.6** (1)**:** Брошено две игральных кости. Какова вероятность того, что выпало две 3, если известно, что сумма выпавших очков делится на 3?

Подходящие исходы: $(1,2), (1,5), (2,1), (2,4), (3,3), (3,6), (4,2), (4,5), (5,1), (5,4), (6,3), (6,6)$.

Тогда $P = \frac{1}{12}$

***Задача* 3.7** (3)**:** Из множества чисел $1, 2, \ldots, N$ по схеме случайного выбора без возвращения выбираются три числа. Найти условную вероятность того, что третье число попадет в интервал, образованный первыми двумя, если известно, что первое число меньше второго.

Возможно три варианта:

- Третье число меньше первого
- Третье число лежит в интервале
- Третье число больше второго

Таким образом, $P = \frac{1}{3}$

***Задача* 3.8** (4)**:** Из урны, содержащей 3 белых и 5 черных шаров, последовательно без возвращения извлекают 8 шаров. Пусть A_0^i (A_1^i) — событие, состоящее в том, что i-й вытянутый шар был черный (белый). Найти условные вероятности:

- $P(A_1^5|A_1^1A_0^2A_0^3A_1^4)$. Осталось 1 белый шар и 3 черных шара. $P = \dfrac{1}{4}$
- $P(A_0^4|A_{\alpha_1}^1A_{\alpha_2}^2A_{\alpha_3}^3), (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0,0,1), (0,1,0), (1,0,0)$. Так как порядок извлечения не влияет на вероятность извлечения четвертого шара, то осталось 2 белых и 3 черных шара. Тогда $P = \dfrac{3}{5}$.

***Задача* 3.9** (5)**:** Доказать, что события A и $\bar{B}$ независимы, если независимы события A и B.

События B и $\bar{B}$ – полная группа событий. Тогда по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(AB) + P(A\bar{B})$$

$$P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\bar{B})$$

***Задача* 3.10** (15)**:** Предположим, что 5 % всех мужчин и 0.25 % всех женщин – дальтоники. Наугад выбранное лицо оказалось дальтоником. Какова вероятность, что это мужчина?

Пусть событие A — выбранное лицо – дальтоник, H_1 — выбранное лицо – мужчина, H_2 — выбранное лицо – женщина.

Тогда $P(H_1) = 0.5$, $P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) = 0.02625$

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1) \cdot P(H_1)}{P(A)} = \frac{0.5 \cdot 0.05}{0.02625} \approx 0.09523$$

3.3 Глава 4

***Задача* 3.11** (1)**:** Два игрока поочередно извлекают шары (без возвращения) из урны, содеражщей 2 белых и 4 черных шара. Выигрывает тот, кто первым достанет белый шар. Найти вероятность выигрыша участника, начавшего игру.

Участник, начавший игру, выиграет в следующих комбинациях: Б, ЧЧБ, ЧЧЧЧБ.

$$P_1 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P_2 = \frac{4}{6}\frac{3}{5}\frac{2}{4} = 0.2$$

$$P_3 = \frac{4}{6}\frac{3}{5}\frac{2}{4}\frac{1}{3}\frac{2}{2} = \frac{1}{15}$$

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = 0.6$$

***Задача* 3.12** (4)**:** Проведено 10 независимых испытаний, каждое из которых заключается в одновременном подбрасывании трех игральных костей. Найти вероятность того, что в четырех испытаниях появятся в точности по две «6».

$$P' = C_3^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \frac{5}{6} = \frac{15}{216}$$

$$P = C_4^{10} \left(\frac{15}{216}\right)^4 \left(\frac{201}{216}\right)^6 \approx 0.00317$$

***Задача* 3.13** (5)**:** При передаче сообщения вероятность искажения одного знака равна $1/100$. В предположении независимости искажения знаков найти вероятность того, что сообщение из 5 знаков:

- Не будет искажено:

$$P' = \left(\frac{99}{100}\right)^5 \approx 0.9509$$

- Содержит ровно одно искажение:

$$P'' = C_5^1 \left(\frac{1}{100}\right)^1 \left(\frac{99}{100}\right)^4 \approx 0.048$$

- Содержит хотя бы два искажения:

$$P = 1 - (P' + P'') \approx 0.001$$

***Задача* 3.14** (9)**:** Найти вероятность того, что в n испытаниях схемы Бернулли с вероятностью успеха p появится $m + l$ успехов, причем l успехов появятся в последних l испытаниях.

$$P = P(\text{m в первых n - l}) \cdot P(\text{l в последних l}) = C_{n-l}^{m} p^m (1-p)^{n-l-m} \cdot p^l = C_{n-l}^{m} p^{m+l} (1-p)^{n-l-m}$$

***Задача* 3.15** (12)**:** На отрезок $[0; 10]$ на удачу брошено 5 точек. Найти вероятность того, что две точки попадут в $[0; 2]$, одна – в $[2; 3]$, две – в $[3; 10]$.

$$P = \underbrace{\left[C_5^2 \left(\frac{2}{10}\right)^2\right]}_{\text{первые две попадут в [0;2]}} \cdot \underbrace{\left[C_3^1 \frac{1}{10}\right]}_{\text{третья попадет в [2;3]}} \cdot \underbrace{\left[\left(\frac{7}{10}\right)^2\right]}_{\text{последние две в [3;10]}} \approx 0.0588$$

3.4 Глава 5

***Задача* 3.16** (1)**:** Плотность распределения ζ задана формулами

$$p_\zeta(x) = \begin{cases} \dfrac{C}{x^4}, & x \geq 1 \\ 0, & x < 1 \end{cases}$$

Найти постоянную C, плотность распределения величины $\eta = \ln \zeta$, $P(0.5 < \eta < 0.75)$

$$1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)\, dx = C \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^4}\, dx = \frac{C}{3}$$

Значит $\dfrac{C}{3} = 1 \Rightarrow C = 3$.

$$\ln \zeta < x \Leftrightarrow \zeta < e^x$$

$$F_\eta(x) = P(\eta < x) = P(\ln \zeta < x) = P(\zeta < e^x) = \int\limits_{1}^{e^x} \frac{3}{t^4}\, dt$$

$$p_\eta(x) = F'_\eta(x) = \frac{3}{e^{3x}}, \quad x \geq 0$$

$$P(0.5 < \eta < 0.75) = \int\limits_{0.5}^{0.75} p_\eta(x)\, dx \int\limits_{0.5}^{0.75} \frac{3}{e^{3x}}\, dx \approx 0.1177$$

***Задача* 3.17** (8)**:** Случайные величины ζ_1 и ζ_2 независимы, одинаково распределены и имеют показательное распределение: $p_{\zeta_1}(x) = p_{\zeta_2}(x) = \alpha e^{-\alpha x}$, $x > 0$. Найти плотность распределения их суммы.

$$\begin{aligned} p_{\zeta_1+\zeta_2}(x) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_{\zeta_1}(t) p_{\zeta_2}(x-t)\, dt \\ &= \int\limits_{0}^{z} \alpha e^{-\alpha t} \alpha e^{-\alpha(x-t)}\, dt \\ &= \int\limits_{0}^{z} \alpha^2 e^{-ax}\, dt \\ &= \alpha^2 x e^{-ax} \end{aligned}$$

***Задача* 3.18** (13)**:** Найти закон распределения суммы двух независимых случайных величин ζ_1, ζ_2, каждая из которых имеет распределение Пуассона с параметром λ_1 и λ_2 соответственно.

$$p(\zeta_1 = k) = \frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1} \qquad p(\zeta_2 = k) = \frac{\lambda_2^k}{k!}e^{-\lambda_2}$$

$$\begin{aligned} p(\zeta_1 + \zeta_2 = k) &= \sum_{i=0}^{k} p(\zeta_1 = i)\cdot p(\zeta_2 = k-i) \\ &= \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda_1^i}{i!}e^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!}e^{-\lambda_2} \\ &= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}\sum_{i=0}^{k} C_k^i \lambda_1^i \lambda_2^{k-i} \\ &= \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \end{aligned}$$

Значит $\zeta_1 + \zeta_2$ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda_1 + \lambda_2$.

***Задача* 3.19** (14)**:** Обозначим τ число испытаний в схеме Бернулли до появления первого успеха включительно. Найти закон распределения τ.

Должно произойти $k-1$ провал и 1 успех, причем порядок важен и единственен. Значит вероятность того, что $\tau = k$:

$$p(\tau = k) = (1-p)^{k-1}\cdot p$$

***Задача* 3.20** (16)**:** Найти закон распределения величины $\tau^{(m)}$, равной числу испытаний в схеме Бернулли до появления m-го успеха.

Пусть было проведено k испытаний. Значит из них m из них – успех, $k-m$ – провал, причем порядок $m-1$ успеха и $k-m$ провалов не важен, а порядок последнего успеха важен.

$$P(\tau^{(m)} = k) = C_{k-1}^{m-1}p^{m-1}(1-p)^{k-m}p = C_{k-1}^{m-1}p^m(1-p)^{k-m}$$

3.5 Глава 6

***Задача* 3.21** (1)**:** Найти математическое ожидание величины τ, определенной в задаче 14 гл. 5.

$$p(\tau = k) = (1-p)^{k-1}\cdot p$$

$$M\tau = \sum_{k=0}^{\infty} k\cdot p(k) = \sum_{k=0}^{\infty} kp(1-p)^{k-1} = p\sum_{k=0}^{\infty} k(1-p)^{k-1} = p\cdot\frac{1}{(q-1)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

***Задача* 3.22** (4)**:** Найти $M\tau^{(m)}$ величины $\tau^{(m)}$, определенной в задаче 16 гл. 5.

$$p(\tau^{(m)} = k) = C_{k-1}^{m-1}p^m(1-p)^{k-m}$$

$$\begin{aligned} M\tau^{(m)} &= \sum_{k=m}^{\infty} kp(k) = \\ &= \sum_{k=m}^{\infty} kC_{k-1}^{m-1}p^m(1-p)^{k-m} \\ &= p^m\sum_{k=m}^{\infty} k\frac{(k-1)!}{(m-1)!(k-m)!}(1-p)^{k-m} = \\ &= p^m m\sum_{k=m}^{\infty} \frac{k!}{m!(k-m)!}\cdot(1-p)^{k-m} = \\ &= p^m m\sum_{k=m}^{\infty} C_k^m 1^k(1-p)^{k-m} = \\ &= p^m m p^{-m-1} = \frac{m}{p} \end{aligned}$$

***Задача* 3.23** (16)**:** По n конвертам случайно разложили n писем различным адресатам. Найти вероятность того, что хотя бы одно письмо попадет своему адресату. Найти предел этой вероятности при $n \to \infty$.

Найдем вероятность P' того, что ни одно число не попадет своему адресату. Всего есть $n!$ способов сопоставить письмо и конверт. Рассмотрим перестановку σ, при которой ни одно письмо не попало в соответсвующий конверт. Из этого следует, что у данной перестановки нет неподвижных точек, значит всего таких перестановок $D(n)$ (субфакториал n).

$$P'_n = \frac{D(n)}{n!} = \frac{n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Тогда вероятность того, что хотя бы одно письмо попадет в нужный конверт:

$$P_n = 1 - P'_n = 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

$$\lim_{n\to\infty} P_n = 1 - \lim_{n\to\infty} P'_n = 1 - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e}$$

***Задача* 3.24** (17)**:** В задаче 16 найти математическое ожидание и дисперсию числа ζ писем, попавших своему адресату.

Всего n писем. Вероятность того, что адресант получит письмо — $\dfrac{1}{n}$. Случайная величина $\zeta = \sum\limits_{k=0}^{n} A_k$, где $A_k = 1$ если k-й адресант получил свое письмо, $A_k = 0$ – иначе.

$$M\zeta = M\left(\sum_{k=0}^{n} A_k\right) = \sum_{k=0}^{n} M(A_k) = \sum_{k=0}^{n}\left(1 \cdot \frac{1}{n} + 0 \cdot \frac{n-1}{n}\right) = 1$$

Вычислим $M(\zeta^2)$.

$$M(\zeta^2) = M\left(\sum_{k=0}^{n} A_k\right)^2 = M\left(\sum_{k=0}^{n} A_k^2 + \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} A_i A_j\right) = M\left(\sum_{k=0}^{n} A_k^2\right) + M\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n} 2A_i A_j\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} M(A_k^2) + \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n} 2M(A_i A_j) = 1 + 1 = 2$$

Тогда $D\zeta = M\zeta^2 - (M\zeta)^2 = 1$

Ответ: $M\zeta = D\zeta = 1$.

***Задача* 3.25** (18)**:** В N ящиков случайно и независимо друг от друга бросают шары, пока не останется пустых ящиков. Обозначим ν число брошенных шаров. Найти $M\nu$.

Найдем $p(\nu = k)$, $k \geq n$. Так как серия бросков обязательно кончается попаданием, нужно учесть это в вероятности.

$$p(\nu = k) = C_{k-1}^{n-1} \left(\frac{1}{n}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-n}$$

$$
\begin{aligned}
M\nu = \sum_{k=n}^{\infty} kp(k) = \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} kC_{k-1}^{n-1} \left(\frac{1}{n}\right)^{n} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-n} \\
&= \left(\frac{1}{n}\right)^{n} \sum_{k=n}^{\infty} k\frac{(k-1)!}{(n-1)!(k-n)!} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-n} \\
&= \left(\frac{1}{n}\right)^{n} \cdot n \cdot \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{n!(k-n)!} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-n} \\
&= \left(\frac{1}{n}\right)^{n} \cdot n \cdot \sum_{k=n}^{\infty} C_{k}^{n} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-n} \\
&= \left(\frac{1}{n}\right)^{n} n \left(\frac{1}{n}\right)^{-n-1} \\
&= n^2
\end{aligned}
$$