Physique - Devoir Surveillé x

Le xx/xx/xxxx

1 Alimentation d'un train

Les trains fonctionnent maintenant quasiment tous avec des motrices équipées de moteurs électriques. On va étudier les problèmes causés par la longue distance des lignes SNCF.

Le courant est transmis à la motrice par la caténaire (ligne haute tension) via le pantographe, puis le retour du courant s'effectue par les rails.

1.1 Alimentation par une seule sous-station

On appelle sous-station le poste d'alimentation EDF délivrant une tension $E = 1500\,\mathrm{V}$. Si toute la ligne SNCF était alimentée par une seule sous-station, on pourrait représenter cela par le schéma suivant, avec R_c la résistance de la caténaire, R_r celle du rail, M la motrice et E la tension d'alimentation.

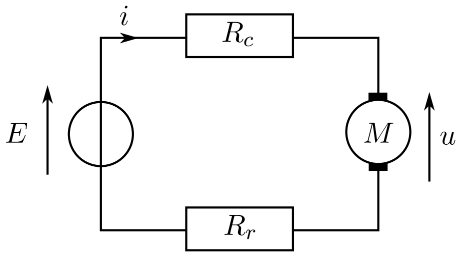


FIGURE 1 – Schéma électrique avec une sous-station

La résistance du rail et celle de la caténaire dépendent de la distance entre la motrice et le poste d'alimentation. On peut écrire

$$R_c = \rho_c x \quad ; \quad R_r = \rho_r x$$

avec x la distance entre la motrice et le poste d'alimentation, $\rho_c = 30\,\mu\Omega\,\mathrm{m}^{-1}$ la résistance linéique de la caténaire et $\rho_r = 20\,\mu\Omega\,\mathrm{m}^{-1}$ celle du rail.

La motrice peut être modélisée par un dipôle consommant une puissance constante $P = 1{,}5\,\mathrm{MW}$. On note u la tension aux bornes de la motrice et i le courant la traversant.

1. Exprimer u en fonction de i, ρ_c, ρ_r, E et x.

   Réponse :
   Par la loi des mailles et le loi d'Ohm : $\boxed{u = E - (\rho_r + \rho_c)xi}$

---

2. La motrice est un dipôle à caractère récepteur. Définir ce terme.

   Réponse :
   Pour un dipôle à caractère récepteur, la puissance reçue est positive.

---

3. Montrer que l'équation polynomiale de degré 2 vérifiée par u s'écrit

$$u^2 - Eu + (\rho_c + \rho_r)xP = 0 \tag{1}$$

   Réponse :
   La puissance reçue par la motrice est $P = ui$ (u et i en convention récepteur).

$$u = E - (\rho_r + \rho_c)xP/u \quad \Leftrightarrow \quad u^2 = Eu - (\rho_r + \rho_c)xP \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{u^2 - Eu + (\rho_c + \rho_r)xP = 0}$$

4. Donner les solutions réelles de cette équation. Donner un encadrement du discriminant Δ. En déduire un encadrement de u.

Réponse :
Les solutions sont réelles si le discriminant est positif ou nul.

$$\Delta = E^2 - 4(\rho_r + \rho_c)xP \geq 0 \quad ; \quad \boxed{u = \frac{E \pm \sqrt{\Delta}}{2}}$$

Physiquement, quand x augmente, u décroit. Comme Δ diminue quand x augmente (on rappelle que $P > 0$), alors la seule solution physiquement acceptable est $\boxed{u = \frac{E + \sqrt{\Delta}}{2}}$.

Comme $0 \leq \Delta \leq E^2$, on en déduit $\boxed{E/2 \leq u \leq E}$.

Pour $x \to 0$, $\Delta \to E^2$, physiquement u est maximale, donc $u_{max} = E$. La solution $u = (E - \sqrt{\Delta})/2 = 0$ n'est pas physiquement acceptable, car cela impliquerait $i \to +\infty$ pour avoir $P = ui = cste$.

5. Déterminer l'expression x_{max} de x telle que u soit minimale. Exprimer u_{min} la valeur minimale de u. Faire les applications numériques.

Réponse :
x_{max} vérifie $\Delta = 0$:

$$\boxed{x_{max} = \frac{E^2}{4(\rho_c + \rho_r)P} = 7{,}5\,\mathrm{km}} \quad \text{et} \quad \boxed{u_{min} = E/2 = 750\,\mathrm{V}}$$

1.2 Transformation Thévenin/Norton

On veut montrer qu'un générateur de Thévenin de f.e.m. e_{th} et de résistance r_{th} est équivalent à un générateur de Norton de c.e.m. η et de résistance r_N.

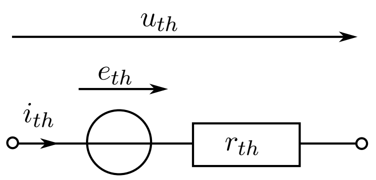


Figure 2 – Générateur de Thévenin

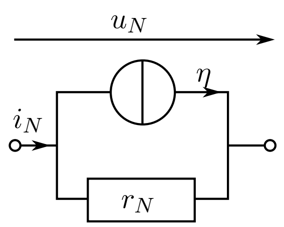
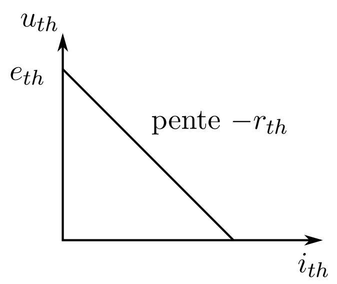


Figure 3 – Générateur de Norton

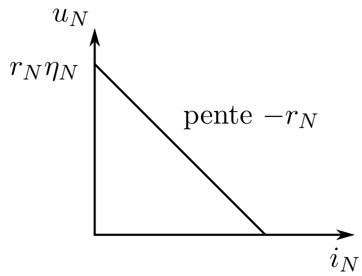
6. Pour le générateur de Thévenin, établir l'expression de u_{th} en fonction de i_{th}, e_{th} et r_{th}. Tracer la caractéristique tension/courant correspondante.

Réponse :
$\boxed{u_{th} = e_{th} - r_{th}i_{th}}$



7. Pour le générateur de Norton, établir l'expression de u_N en fonction de i_N, η et r_N. Tracer la caractéristique tension/courant correspondante.

   Réponse :
   $\boxed{u_N = r_N\eta - r_N i_N}$



8. Déterminer les expressions de η et r_N en fonction de e_{th} et r_{th} afin que les deux générateurs soient équivalents.

   Réponse :
   Il y a équivalence si les caractéristiques des deux dipôles sont les mêmes, donc $\boxed{r_N = r_{th} \quad \text{et} \quad \eta = e_{th}/r_{th}}$

1.3 Alimentation par plusieurs sous-stations

Afin d'alimenter la motrice sur de longues distances, on répartit des sous-stations tout le long de la ligne SNCF. Les sous-stations sont espacées entre elles d'une distance L. Le schéma équivalent est le suivant

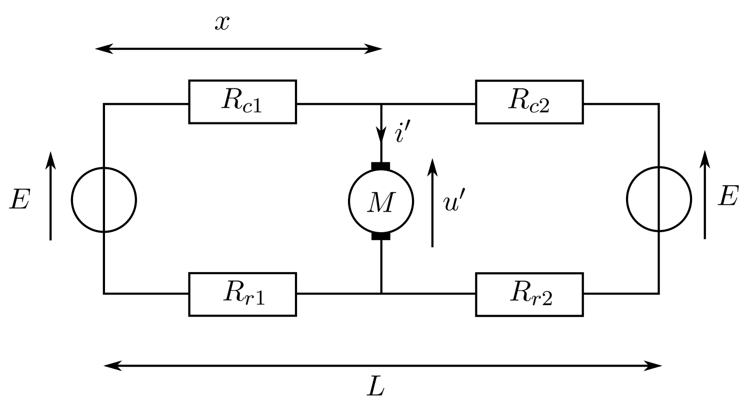


Figure 4 – Schéma électrique avec deux sous-stations

On note x la distance entre la sous-station de gauche et la motrice, R_{c1} la résistance de la caténaire et R_{r1} celle des rails entre la sous-station de gauche et la motrice, R_{c2} la résistance de la caténaire et R_{r2} celle des rails entre la sous-station de droite et la motrice.
On note u' la tension aux bornes de la motrice et i' le courant la traversant.

9. Exprimer les résistances R_{c1}, R_{c2}, R_{r1} et R_{r2} en fonction de ρ_c, ρ_r, L et x.

   Réponse :
   $R_{c1} = \rho_c x$, $R_{c2} = \rho_c(L - x)$, $R_{r1} = \rho_r x$, $R_{r2} = \rho_r(L - x)$

10. En utilisant les résultats de la question 8., exprimer les courants η_1 et η_2, ainsi que les résistances R_1 et R_2 en fonction de E, ρ_c, ρ_r, x et L pour que le schéma de la figure **??** soit équivalent à celui de la figure **??**.

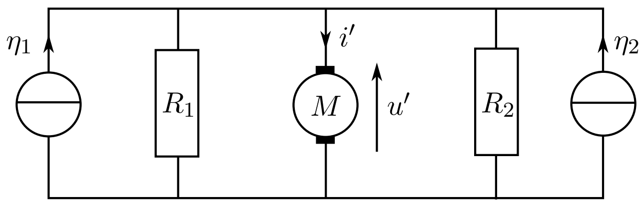


FIGURE 5 – Schéma équivalent n°1

Réponse :

$$\boxed{R_1 = R_{c1} + R_{r1} = (\rho_c + \rho_r)x} \quad \text{et} \quad \boxed{\eta_1 = E/R_1 = \frac{E}{(\rho_c + \rho_r)x}}$$

$$\boxed{R_2 = R_{c2} + R_{r2} = (\rho_c + \rho_r)(L - x)} \quad \text{et} \quad \boxed{\eta_2 = E/R_2 = \frac{E}{(\rho_c + \rho_r)(L - x)}}$$

---

11. Le schéma précédent est équivalent aux schémas ci-dessous. Donner alors les expressions de η_3 et R_3, puis E' et R_4 en fonction de E, ρ_c, ρ_r, x et L.

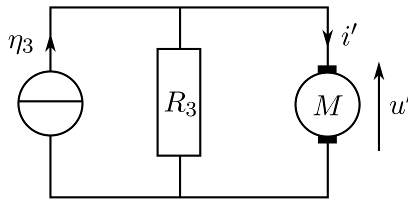


FIGURE 6 – Schémas équivalents n°2

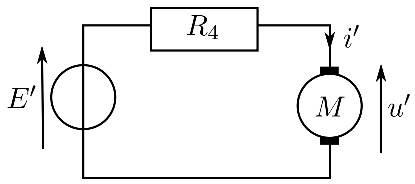


FIGURE 7 – Schémas équivalents n°3

Réponse :
Par association en parallèle de générateurs de Norton :

$$\eta_3 = \eta_1 + \eta_2 = \frac{E}{(\rho_c + \rho_r)}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{L - x}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\eta_3 = \frac{EL}{(\rho_c + \rho_r)x(L - x)}}$$

$$\boxed{R_3 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{(\rho_c + \rho_r)x(L - x)}{L}}$$

Transformation Thévenin/Norton : $\boxed{E' = R_3\eta_3 = E \quad ; \quad R_4 = R_3 = \frac{(\rho_c + \rho_r)x(L - x)}{L}}$

---

12. En utilisant l'équation (**??**), exprimer l'équation polynomiale de degré 2 vérifiée par u' en fonction de P, ρ_c, ρ_r, E, L et x.

Réponse :
On remplace E par E' et $(\rho_c + \rho_r)x$ par R_4 :
$\boxed{u'^2 - Eu' + P(\rho_c + \rho_r)x(1 - x/L) = 0}$

---

13. Quelle est l'équation polynomiale vérifiée par x pour que u' soit minimale ?

Réponse :
u' admet des solutions réelles si $\Delta = E^2 - 4P(\rho_c + \rho_r)x(L - x)/L \geq 0$. On a alors

$$u' = \frac{E \pm \sqrt{\Delta}}{2} \in [E/2, E]$$

Ainsi u' est minimale quand $\Delta = 0$, soit $\boxed{x^2 - xL + \frac{LE^2}{4P(\rho_c + \rho_r)} = 0}$

---

14. Déterminer l'expression de L telle que u' soit minimale en $x = L/2$. Faire l'application numérique.

Réponse :

On remplace $x_{max} = L/2$ dans l'équation précédente : $\boxed{L = \frac{E^2}{(\rho_c + \rho_r)P} = 30\,\text{km}}$
