

第八章课后作业

8-1 设标准化变量 X_1, X_2, X_3 的协方差阵(即相关阵)为

$$R = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.63 & 0.45 \\ 0.63 & 1.00 & 0.35 \\ 0.45 & 0.35 & 1.00 \end{bmatrix},$$

8-2 已知题 8-1 中 R 的特征值和特征向量分别为

$$\lambda_1 = 1.9633, \quad l_1 = (0.6250, 0.5932, 0.5075)',$$

$$\lambda_2 = 0.6795, \quad l_2 = (-0.2186, -0.4911, 0.8432)',$$

$$\lambda_3 = 0.3672, \quad l_3 = (0.7494, -0.6379, -0.1772)'.$$

(1) 取公共因子个数 $m=1$ 时, 求因子模型的主成分分解, 并计算误差平方和 $Q(1)$;

(2) 取公共因子个数 $m=2$ 时, 求因子模型的主成分分解, 并计算误差平方和 $Q(2)$;

(3) 试求误差平方和 $Q(m) < 0.1$ 的主成分分解.

解: (1) $m=1$ 时, 因子模型的主成分分解为:

$$A = \sqrt{\lambda_1} l_1 = \begin{bmatrix} 0.8751 \\ 0.8312 \\ 0.7111 \end{bmatrix} \quad D = \text{diag}(\hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_2^2, \dots, \hat{\sigma}_s^2)$$

$$\hat{\sigma}_i^2 = s_{ii} - \sum_{j=1}^i a_{ij}^2$$

$$D = \text{diag}(0.2331, 0.3091, 0.4943)$$

$$\begin{cases} X_1 = 0.8751 F_1 + \varepsilon_1 \\ X_2 = 0.8312 F_1 + \varepsilon_2 \\ X_3 = 0.7111 F_1 + \varepsilon_3 \end{cases}$$

$$E = R - AA' - D$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0.63 & 0.45 \\ & 1 & 0.35 \\ & & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0.7279 & 0.6227 \\ & 1 & 0.5911 \\ & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.0979 & -0.1727 \\ & 0 & -0.2411 \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q(1) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ij}^2 = 2 \times [(-0.0979)^2 + (-0.1727)^2 + (-0.2411)^2] = 0.1951$$

第一公共因子的贡献度为1.9633

共同度分别为0.7669, 0.6909, 0.5057

2) $m=2$ 时, 因子模型的主成分解为:

$$A = [\sqrt{\lambda_1} l_1, \sqrt{\lambda_2} l_2] = \begin{bmatrix} 0.8757 & -0.1802 \\ 0.8312 & -0.4048 \\ 0.7111 & 0.6950 \end{bmatrix} \quad D = \text{diag}(\hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_2^2, \dots, \hat{\sigma}_s^2)$$

$$\hat{\sigma}_i^2 = s_{ii} - \sum_{j=1}^2 a_{ij}^2$$

$$D = \text{diag}(0.2007, 0.1452, 0.0113)$$

$$\text{故} \begin{cases} X_1 = 0.8757F_1 - 0.1802F_2 + \varepsilon_1 \\ X_2 = 0.8312F_1 - 0.4048F_2 + \varepsilon_2 \\ X_3 = 0.7111F_1 + 0.6950F_2 + \varepsilon_3 \end{cases}$$

$$E = R - AA' - D$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0.63 & 0.45 \\ & 1 & 0.35 \\ & & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0.8008 & 0.4975 \\ & 1 & 0.3097 \\ & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.1708 & -0.0475 \\ & 0 & 0.0403 \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q(2) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 \varepsilon_{ij}^2 = 2 \times [(-0.1708)^2 + (-0.0475)^2 + 0.0403^2] = 0.0661$$

第一公共因子的贡献率为1.9633, 第二公共因子的贡献率为

0.6795, 共同度分别为 0.7993, 0.8548, 0.9889

(3) 由 (2) 得 $Q(2) = 0.0661 < 0.1$, 故 $m=2$ 时主成分的解满足要求

$$\text{即} \begin{cases} X_1 = 0.8757F_1 - 0.1802F_2 + \varepsilon_1 \\ X_2 = 0.8312F_1 - 0.4048F_2 + \varepsilon_2 \\ X_3 = 0.7111F_1 + 0.6950F_2 + \varepsilon_3 \end{cases}$$