信号与系统

第十章

10.1 (a) (b)

10.1 试对下列和式，为保证收敛确定在 $r=|z|$ 上的限制：

(a) $\sum_{n=-1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}z^{-n}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{-n+1}z^{n}$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1+(-1)^n}{2}\right\}z^{-n}$ (d) $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)z^{-n}$

(a)

$$|z| > \frac{1}{2}$$

(b)

$$|z| < \frac{1}{2}$$

10.3

10.3 设信号 $x[n]$ 为

$$x[n] = (-1)^n u[n] + \alpha^n u[-n-n_0]$$

已知它的 z 变换 ROC 是

$$1 < |z| < 2$$

试确定在复数 α 和整数 n_0 上的限制。

$$n_0 \text{为任意实数}$$
$$|\alpha| = 2$$

10.6

10.6 设 $x[n]$ 是一个绝对可和的信号，其有理 z 变换为 $X(z)$。若已知 $X(z)$ 在 $z=1/2$ 有一个极点，$x[n]$ 能够是

(a) 有限长信号吗？ (b) 左边信号吗？ (c) 右边信号吗？ (d) 双边信号吗？

(a) 不是

(b) 不是

(c) 不是

(d) 是

10.11

10.11 求下面 $X(z)$ 的反变换：

$$X(z) = \frac{1}{1\,024}\left[\frac{1\,024 - z^{-10}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}\right], \quad |z| > 0$$

$$x[n] = \begin{cases} (\frac{1}{2})^n, & 0 \le n \le 9 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

10.14

10.14 考虑三角形序列 $g[n]$

$$g[n]=\begin{cases}n-1, & 2\le n\le 7\\ 13-n, & 8\le n\le 12\\ 0, & \text{其余 } n\end{cases}$$

(a) 求 n_0 的值，使之有

$$g[n]=x[n]*x[n-n_0]$$

这里 $x[n]$是习题 10.13 中考虑的矩形序列。

(b) 利用卷积和时移性质，再结合在习题 10.13 中求得的 $X(z)$，求 $G(z)$。证实所得结果满足初值定理。

(a)

$$n_0=2$$

(b)

$$G(z)=(\frac{1-z^{-6}}{z-1})^2$$

10.20

10.20 有一系统，其输入 $x[n]$和输出 $y[n]$由下列差分方程表示：

$$y[n-1]+2y[n]=x[n]$$

(a) 若 $y[-1]=2$，求系统的零输入响应。

(b) 若 $x[n]=(1/4)^n u[n]$，求系统的零状态响应。

(c) 当 $x[n]=(1/4)^n u[n]$和 $y[-1]=2$ 时，求 $n\geqslant 0$ 时的系统的输出。

(a)

$$-(-\frac{1}{2})^n\ u[n]$$

(b)

$$\frac{1}{3}\{(-\frac{1}{2})^n\ u[n]+(\frac{1}{2})^{2n+1}\ u[n]\}$$

(c)

$$\frac{1}{3}\{-(\frac{1}{2})^{n-1}\ u[n]+(\frac{1}{2})^{2n+1}\ u[n]\}$$

10.33

10.33 (a) 求由差分方程

$$y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]+\frac{1}{4}y[n-2]=x[n]$$

表示的因果 LTI 系统的系统函数

(b) 若 $x[n]$为

$$x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

用 z 变换求 $y[n]$。

(a)

$$H(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}}$$

(b)

$$X(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}},|z|>\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}Y(z)&=H(z)\cdot X(z)\\&=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}}\\&=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{\frac{1}{2}z-1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}}\\y[n]&=(\frac{1}{2})^{n}\ \mathrm{u}[n]+\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot(\frac{1}{2})^{n}\sin(\frac{\pi n}{3})\ \mathrm{u}[n]\end{aligned}$$

10.42

10.42 对下面给出的各差分方程，输入 $x[n]$ 和初始条件，利用单边 z 变换求零输入响应和零状态响应。

(a) $y[n]+3y[n-1]=x[n]$

$$x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]$$

$$y[-1]=1$$

(b) $y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]=x[n]-\frac{1}{2}x[n-1]$

$$x[n]=u[n]$$

$$y[-1]=0$$

(c) $y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]=x[n]-\frac{1}{2}x[n-1]$

$$x[n]=u[n]$$

$$y[-1]=1$$

(a)

$$y(z)+3z^{-1}\ y(z)=X(z)\Rightarrow y(z)=-\frac{3}{1+3z^{-1}},\ X(z)=0$$

零输入响应： $y_{0z}[n]=(-3)^{n+1}\ \mathrm{u}[n]$

$$\begin{aligned}X(z)&=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\\y(z)+3z^{-1}\ y(z)&=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\\y[z]&=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\cdot\frac{1}{1+3z^{-1}}\\&=\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{1+3z^{-1}}\\y_{0z}[n]&=\frac{1}{7}\cdot(\frac{1}{2})^{n}\ \mathrm{u}[n]+\frac{6}{7}\cdot(-3)^{n}\ \mathrm{u}[n]\end{aligned}$$

(b)

$$y(z)-\frac{1}{2}z^{-1}\ y(z)-\frac{1}{2}y[-1]=x(z)-\frac{1}{2}z^{-1}\ x(z)$$

$$\Downarrow$$

$$y_{oz}[z]=0,\quad y_{oz}[n]=0$$

$$\begin{aligned}x(z)&=\frac{1}{1-z^{-1}}\\y(z)-\frac{1}{2}\ y(z)&=\frac{1}{1-z^{-1}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}\\y(z)&=\frac{1}{1-z^{-1}}\\y_{0z}&=\mathrm{u}[n]\end{aligned}$$

(c)

$$y(z) = \frac{1}{2}z^{-1}\ y(z) - \frac{1}{2}y[-1] = x(z) - \frac{1}{2}z^{-1}\ x(z)$$

$$\Downarrow$$

$$y_{0z}(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{[} - 1]}, \quad y_{0z}[n] = (\frac{1}{2})^{n+1}\ \mathrm{u}[n]$$

同上，得到 $y_{0z}[n] = \mathrm{u}[n]$