信号与系统

第四章习题

4.3 (b)

4.3 求下列各周期信号的傅里叶变换：

(a) $\sin\left(2\pi t+\frac{\pi}{4}\right)$ (b) $1+\cos\left(6\pi t+\frac{\pi}{8}\right)$

$$X(j\omega)=2\pi\delta(\omega)+\pi[e^{j\pi/8}\delta(\omega-6\pi)+e^{-j\pi/8}\delta(\omega+6\pi)]$$

4.4 (b)

4.4 利用傅里叶变换综合式(4.8)式，求下列反变换：

(a) $X_1(j\omega)=2\pi\delta(\omega)+\pi\delta(\omega-4\pi)+\pi\delta(\omega+4\pi)$

(b) $X_2(j\omega)=\begin{cases}2, & 0\leqslant\omega\leqslant 2\\ -2, & -2\leqslant\omega<0\\ 0, & |\omega|>2\end{cases}$

$$\begin{aligned}x(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi}[\int_0^2 2e^{j\omega t}+\int_{-2}^{0}-2e^{j\omega t}]\,\mathrm{d}\omega\\&=\frac{e^{j\omega t}|_0^2-e^{j\omega t}|_{-2}^{0}}{\pi jt}\\&=\frac{2\,\cos 2t-2}{\pi jt}\end{aligned}$$

4.8

4.8 考虑信号

$$x(t)=\begin{cases}0, & t<-\frac{1}{2}\\ t+\frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}\\ 1, & t>\frac{1}{2}\end{cases}$$

(a) 利用表 4.1 的微分和积分性质，及表 4.2 中的矩形脉冲傅里叶变换对，求 $X(j\omega)$ 的闭式表示式。

(b) $g(t)=x(t)-\frac{1}{2}$ 的傅里叶变换是什么？

(a)

通过微分，得到

$$
y(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x(t)=\begin{cases}0,|t|>\frac{1}{2}\\ 1,|t|\leq\frac{1}{2}\end{cases}
$$

$$
Y(j\omega)=j\omega X(j\omega)=\frac{2sin(\omega/2)}{\omega}
$$

再通过积分，可以得到

$$
\begin{aligned}
X(j\omega)&=\frac{1}{j\omega}\cdot Y(j\omega)+\pi Y(0)\delta(\omega)\\
&=\frac{1}{j\omega}\cdot[j\omega X(j\omega)]+\pi\delta(\omega)
\end{aligned}
$$

得到

$$
X(j\omega)=\frac{2\sin(\omega/2)}{j\omega^2}+\pi\delta(\omega)
$$

(b)

$$
X(j\omega)=\frac{2\sin(\omega/2)}{j\omega^2}
$$

4.10

4.10 (a) 借助于表 4.1 和表 4.2，求下列信号的傅里叶变换：

$$
x(t)=t\left(\frac{\sin t}{\pi t}\right)^2
$$

(b) 利用帕斯瓦尔定理和上面结果，求

$$
A=\int_{-\infty}^{+\infty}t^2\left(\frac{\sin t}{\pi t}\right)^4\mathrm{d}t
$$

值为多少？

已知，对于 $y(t)=\frac{(\sin)\mathrm{t}}{\pi}$，傅里叶变换为 $Y(j\omega)=\frac{\pi}{j}[\delta(\omega-1)-\delta(\omega+1)]$

对于 $h(t)=\frac{\mathrm{sint}}{\pi t}$，傅里叶变换为

$$
H(j\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|<1\\ 0, & |\omega|>1\end{cases}
$$

可得

$$
\begin{aligned}
X(j\omega)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}Y(j\theta)H(j(\omega-\theta))\mathrm{d}\theta\\
&=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\pi}{j}\int_{-\infty}^{+\infty}[\delta(\theta-1)-\delta(\theta+1)]\mathrm{d}\theta|_{|\omega-\theta|<1}\\
&=\begin{cases}j/2\pi, & -2\leq\omega<0\\ -j/2\pi, & 0\leq\omega<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}
\end{aligned}
$$

4.14

4.14 考虑一信号 $x(t)$，其傅里叶变换为 $X(j\omega)$，假设给出下列条件：

1. $x(t)$是实值且非负的。

2. $\mathscr{F}^{-1}\{(1+j\omega)X(j\omega)\}=Ae^{-2t}u(t)$，$A$ 与 t 无关。

3. $\int_{-\infty}^{\infty}|X(j\omega)|^2 d\omega = 2\pi$

求 $x(t)$的闭式表达式。

通过帕斯瓦尔定理可以得到$\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2 \mathrm{d}t = 1$

通过2可得

$$(1+j\omega)X(j\omega) = \frac{A}{2+j\omega}$$

$$X(j\omega) = A\,(\frac{1}{1+j\omega} - \frac{1}{2+j\omega})$$

$$x(t) = A(e^{-t} - e^{-2t})\,u(t)$$

因此求得 $A = \sqrt{12}$

$$x(t) = \sqrt{12}(e^{-t} - e^{-2t})\,u(t)$$

4.21 (b), (g)

4.21 求下列每一信号的傅里叶变换：

(a) $[e^{-\alpha t}\cos\omega_0 t]u(t)$，$\alpha>0$

(b) $e^{-3|t|}\sin 2t$

(c) $x(t)=\begin{cases}1+\cos\pi t, & |t|\leqslant 1\\ 0, & |t|>1\end{cases}$

(d) $\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k\delta(t-kT)$，$|\alpha|<1$

(e) $[te^{-2t}\sin 4t]\,u(t)$

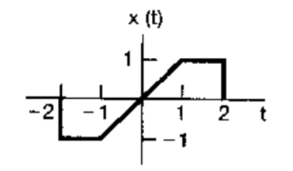
(f) $\left[\frac{\sin\pi t}{\pi t}\right]\left[\frac{\sin 2\pi(t-1)}{\pi(t-1)}\right]$

(g) $x(t)$如图 P4.21(a)所示

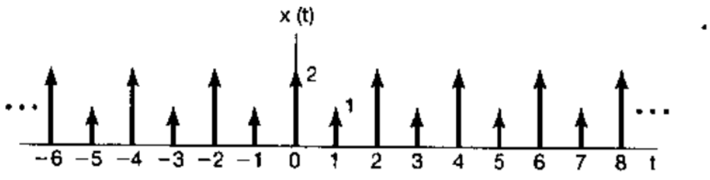
(h) $x(t)$如图 P4.21(b)所示

(i) $x(t)=\begin{cases}1-t^2, & 0<t<1\\ 0, & \text{其余 } t\end{cases}$

(j) $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{-|t-2n|}$



(a)



(b)

(b)

$$
\begin{aligned}
x(j\omega) &= e^{-3t}\ \text{sin}2t\ u(t) + e^{3t}\ \text{sin}2t\ u(-t) \\
&= y(t) - y(-t)|_{y(t)=e^{-3t}\ \text{sin}2t\ u(t)} \\
Y(j\omega) &= \mathscr{F}[\frac{1}{2j}\ e^{-3t}\ (e^{2jt} - e^{-2jt})\ u(t)] \\
&= \frac{1}{2j}\ (\frac{1}{3-2j+j\omega} - \frac{1}{3+2j+j\omega})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X(j\omega) &= Y(j\omega) - Y(-j\omega) \\
&= \frac{1}{2j}\ [(\frac{1}{3-2j+j\omega} - \frac{1}{3+2j+j\omega}) - ((\frac{1}{3+2j-j\omega} - \frac{1}{3-2j-j\omega})]
\end{aligned}
$$

(g)

看图得到

$$
x(t) = \begin{cases} 0, & |x| > 2 \\ 1, & 1 < |x| \le 2 \\ x, & |x| \le 1 \end{cases}
$$

先微分，得到

$$
\begin{aligned}
y(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} &= \begin{cases} 0, & |x| > 1 \\ 1, & |x| < 1 \end{cases} \\
Y(j\omega) = j\omega X(j\omega) &= \frac{2\text{sin}\omega}{\omega}
\end{aligned}
$$

再积分，得到

$$
\begin{aligned}
X(j\omega) &= \frac{1}{j\omega} Y(j\omega) + \pi Y(0)\delta(\omega) \\
&= \frac{2\text{sin}\omega}{\omega} + 2\pi\delta(\omega)
\end{aligned}
$$

4.24

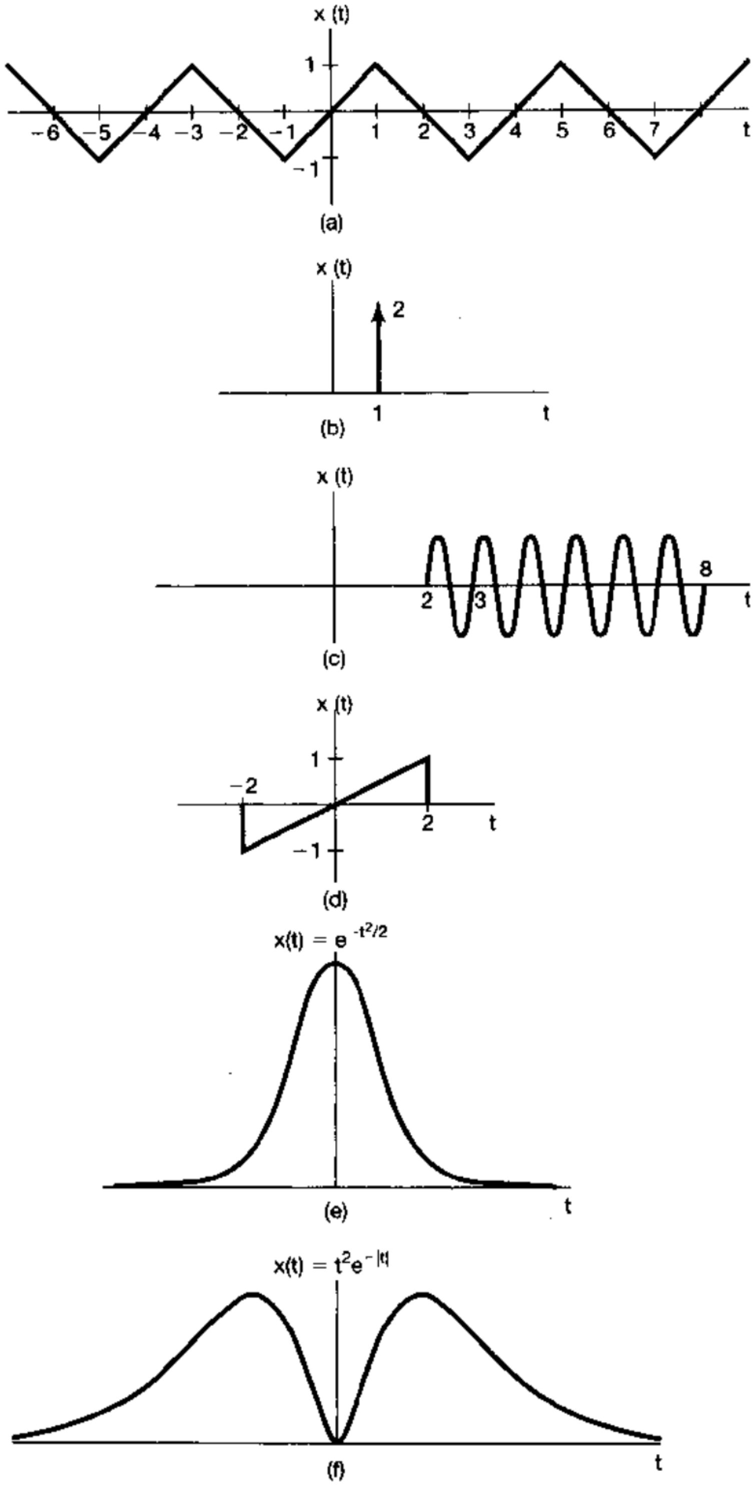


图 P4.24

哪些(如果有)，其傅里叶变换满足下列所有条件：

(1) $\mathcal{R}e\{X(\mathrm{j}\omega)\}=0$

(2) $\mathcal{I}m\{X(\mathrm{j}\omega)\}=0$

(3) 存在一个实数 a，使 $e^{ja\omega}X(j\omega)$ 为实函数

(4) $\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)d\omega = 0$

(5) $\int_{-\infty}^{\infty} \omega X(j\omega)d\omega = 0$

(6) $X(j\omega)$ 是周期的。

(b) 构造一个信号，它具有上述性质(1)，(4)和(5)，但没有其余性质。

(a) 不存在

4.25

4.25 设 $X(j\omega)$ 为图 P4.25 信号 $x(t)$ 的傅里叶变换：

(a) 求 $\angle X(j\omega)$

(b) 求 $X(j0)$

(c) 求 $\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)d\omega$

(d) 计算 $\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\frac{2\sin\omega}{\omega}e^{j2\omega}d\omega$

(e) 计算 $\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$

(f) 画出 $\mathcal{Re}\{X(j\omega)\}$ 的反变换

注意：不必具体算出 $X(j\omega)$ 而能完成以上全部计算。

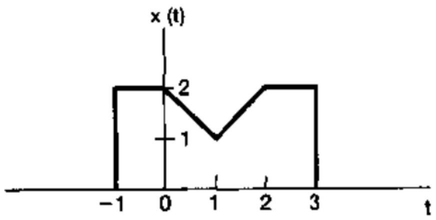


图 P4.25

由图得到

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < -1 \quad or \quad x > 3 \\ 2, & -1 < t < 0 \quad or \quad 2 < x < 3 \\ 2 - t, & 0 < t < 1 \\ t, & 1 < t < 2 \end{cases}$$

令 $y(t) = x(t+1)$，可得 $Y(j\omega) = e^{-j\omega}X(j\omega)$，即 $X(j\omega) = e^{j\omega}Y(j\omega)$，并且时移之后获得

$$y(t) = \begin{cases} 0, & |t| > 2 \\ 2, & 1 < |t| < 2 \\ |t|, & |t| < 1 \end{cases}$$

4.33 (a), (b)

4.33 一因果 LTI 系统的输入和输出，由下列微分方程表征：

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 8y(t) = 2x(t)$$

(a) 求该系统的单位冲激响应。

(b) 若 $x(t) = te^{-2t}u(t)$，该系统的响应是什么？

(c) 对于由下列方程描述的因果 LTI 系统，重做(a)

(a)

由题可知

$$
\begin{aligned}
H(j\omega) &= \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \\
&= \frac{2}{(j\omega)^2+6j\omega+8} \\
&= \frac{1}{j\omega+2}-\frac{1}{j\omega+4}
\end{aligned}
$$

通过傅里叶反变换变换对可以得到 $h(t)=e^{-2t}\ u(t)-e^{-4t}\ u(t)$

(b)

由题目可得 $X(j\omega)=j\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\ (\frac{1}{j\omega+2})=(\frac{1}{j\omega+2})^2$

由上可知 $y(t)=x(t)*h(t)$，则可以得到

$$
\begin{aligned}
Y(j\omega) &= X(j\omega)\cdot H(j\omega) \\
&= \frac{2}{(j\omega+2)^3\cdot(j\omega+4)} \\
&= \frac{A}{j\omega+2}+\frac{B}{(\omega+2)^2}+\frac{C}{(j\omega+2)^3}+\frac{D}{j\omega+4} \\
&= \frac{1}{4(j\omega+2)}-\frac{1}{2(j\omega+2)^2}-\frac{1}{4(j\omega+2)^3}+\frac{1}{j\omega+4}
\end{aligned}
$$

解得

4.34

4.34 一个因果稳定的 LTI 系统 S，有频率响应为

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{\mathrm{j}\omega+4}{6-\omega^2+5\mathrm{j}\omega}$$

(a) 写出关联系统 S 输入和输出的微分方程。

(b) 求该系统 S 的单位冲激响应 $h(t)$。

(c) 若输入 $x(t)$ 为

$$x(t)=\mathrm{e}^{-4t}u(t)-t\mathrm{e}^{-4t}u(t)$$

求系统的输出。

(a)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)+4x(t)=6y(t)+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)+5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)$$

(b)

已知 $H(j\omega)=\frac{2}{j\omega+2}-\frac{1}{j\omega+3}$，得到 $h(t)=2e^{-2t}\ u(t)-e^{-3t}\ u(t)$

(c)

由题得到$X(j\omega)=\frac{1}{j\omega+4}-\frac{1}{(j\omega+4)^2}$，因此可以求出 $H(j\omega)$

$$
\begin{aligned}
Y(j\omega) &= X(j\omega)\cdot H(j\omega)\\
&= \frac{j\omega+3}{(j\omega+4)^2}\cdot\frac{j\omega+4}{(j\omega+2)\ (k\omega+3)}\\
&= \frac{1}{(j\omega+4)\ (j\omega+2)}\\
&= \frac{1}{2}\ (\frac{1}{j\omega+2}-\frac{1}{j\omega+4})
\end{aligned}
$$

可以得到 $h(t)=\frac{1}{2}[e^{-2t}\ u(t)-e^{-3t}\ u(t)]$

4.36

4.36 考虑一 LTI 系统，对输入 $x(t)$ 为

$$x(t)=[e^{-t}+e^{-3t}]u(t)$$

响应 $y(t)$ 是

$$y(t)=[2e^{-t}-2e^{-4t}]u(t)$$

(a) 求系统频率响应。

(b) 确定该系统的单位冲激响应。

(c) 求关联该系统输入和输出的微分方程。

(a)

由题可得 $X(j\omega)=\frac{1}{j\omega+1}+\frac{1}{j\omega+3}$ 和 $Y(j\omega)=\frac{2}{j\omega+1}-\frac{2}{j\omega+4}$，可以得到

$$
\begin{aligned}
H(j\omega) &= \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}\\
&= \frac{(j\omega+1)\ (j\omega+3)}{2j\omega+4}\cdot\frac{6}{(j\omega+4)\ (j\omega+1)}\\
&= \frac{3(j\omega+3)}{(j\omega+4)(j\omega+2)}\\
&= \frac{3}{2}\ [\frac{1}{j\omega+2}+\frac{1}{j\omega+4}]
\end{aligned}
$$

(b)

由(a)可得 $h(t)=\frac{3}{2}[e^{-2t}+e^{-4t}]$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)+6\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+8y(t)=3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}}x(t)+9x(t)$$