信号与系统

第二章习题

2.1

基本题(附答案)

2.1 设 $x[n]=\delta[n]+2\delta[n-1]-\delta[n-3]$和 $h[n]=2\delta[n+1]+2\delta[n-1]$计算并画出下列各卷积：

(a) $y_1[n]=x[n]*h[n]$ (b) $y_2[n]=x[n+2]*h[n]$

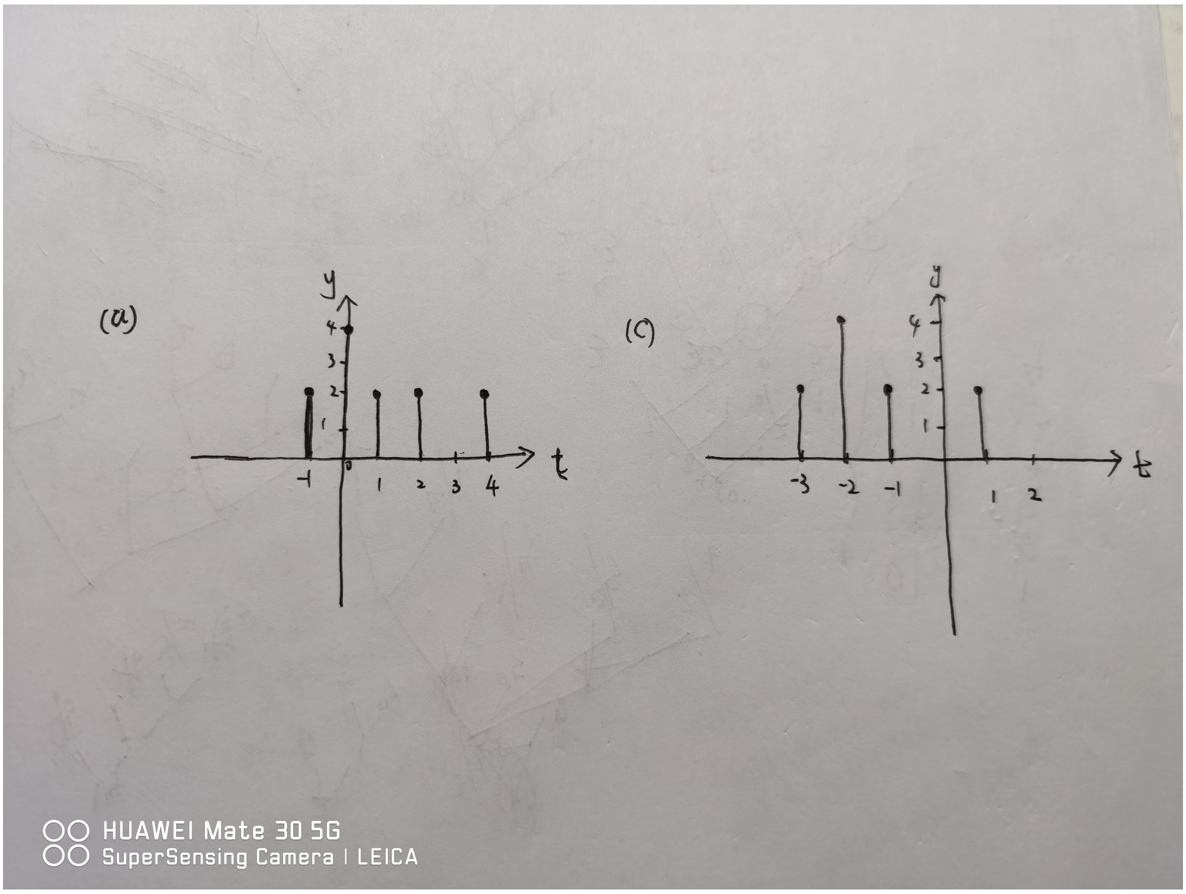
(c) $y_3[n]=x[n]*h[n+2]$

(a)

$$y_1[n]=2\delta[n+1]+4\delta[n]+2\delta[n-2]+2\delta[n-1]-2\delta[n-4]$$

(b)

$$\begin{aligned} y_3[n] &= y_1[n+2] \\ &= 2\delta[n+3]+4\delta[n+2]+2\delta[n]+2\delta[n+1]-2\delta[n-2] \end{aligned}$$



2.7

2.7 一个线性系统 S 有如下输入-输出关系

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]g[n-2k]$$

式中 $g[n]=u[n]-u[n-4]$。

(a)当 $x[n]=\delta[n-1]$时，求 $y[n]$ (b)当 $x[n]=\delta[n-2]$时，求 $y[n]$

(c)S 是 LTI 的吗？ (d)当 $x[n]=u[n]$时，求 $y[n]$。

(c)

由(a)，(b)可以得到

$$\text{当}\, x[n]=\delta[n-1]\text{时}$$

$$\begin{aligned} y_a[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k](u[n-2k]-u[n-2k-4]) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[k-1](u[n-2k]-u[n-4-2k]) \\ &= u[n-2]+u[n-4] \end{aligned}$$

$$\text{当}\, x[n]=\delta[n-2]\text{时}$$

$$\begin{aligned} y_b[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k](u[n-2k]-u[n-4-2k]) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[k-2](u[n-2k]-u[n-4-2k]) \\ &= u[n-4]+u[n-8] \end{aligned}$$

因此，该系统是线性时变系统

(d)

$$\text{当}\, x[n]=ui[n]\text{时}$$

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k](u[n-2k]+u[n-4-2k]) \\ &= 2\,u[n]-\delta[n]-\delta[n-1] \end{aligned}$$

2.8

2.8 求出并概略画出下列两个信号的卷积：

$$x(t)=\begin{cases} t+1, & 0\leqslant t\leqslant 1 \\ 2-t, & 1<t\leqslant 2 \\ 0, & \text{其余 } t \end{cases}$$

$$h(t)=\delta(t+2)+2\delta(t+1)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\delta(t+2-\tau)\mathrm{d}\tau + \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\delta(t+1-\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \begin{cases} t+3, & -2<t\leq -1 \\ t+4, & -1<t\leq 0 \\ 2-2t, & 0<t\leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \end{aligned}$$

2.9

2.9 令

$$h(t)=e^{2t}u(-t+4)+e^{-2t}u(t-5)$$

确定 A 和 B，使之有

$$h(t-\tau)=\begin{cases} e^{-2(t-\tau)}, & \tau<A \\ 0, & A<\tau<B \\ e^{2(t-\tau)}, & B<\tau \end{cases}$$

$$\begin{aligned} h(t-\tau) &= e^{2(t-\tau)}u(-t+\tau+4)+e^{-2(t-\tau)}u(t-\tau-5) \\ &= \begin{cases} e^{-2(t-\tau)}, & \tau<A \\ 0, & A<\tau<B \\ e^{2(t-\tau)}, & B<\tau \end{cases} \end{aligned}$$

可以得到

$$\tau<A\text{时}$$

$$\begin{cases} u(-t+\tau+4)=1 \\ u(t-\tau-5)=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \tau<t-5 \\ \tau<t-4 \end{cases} \rightarrow A=t-5$$

$$A<\tau<B\text{时}$$

$$\begin{cases} u(-t+\tau+4)=1 \\ u(t-\tau-5)=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \tau>t-5 \\ \tau<t-4 \end{cases} \rightarrow B=t-4$$

$$\text{计算第三种情况，可以验证}B=t-4$$

2.14

2.14 下面单位冲激响应中哪些对应于稳定 LTI 系统？

(a) $h_1(t)=e^{-(1-2j)t}u(t)$ **(b)** $h_2(t)=e^{-t}\cos(2t)U(t)$

(a)

$$\int_{\infty}^{\infty} h_1(t)\mathrm{d}t=\int_0^{\infty} e^{-(1-2j)t}\mathrm{d}t$$

上式有界，因此稳定

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} h_1(t-\tau)\mathrm{d}t &= \int_{\tau}^{\infty} e^{-(1-2j)(t-\tau)}\mathrm{d}t \\ &= \int_{x}^{\infty} e^{-(1-2j)x}\mathrm{d}x, \qquad x=t-\tau \end{aligned}$$

上式得到其时不变性

易得其线性

因此该单位冲击响应对应于稳定线性时不变系统

(b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_2(t)\mathrm{d}t=\int_0^{\infty} e^{-t}\cos(2t)\,\mathrm{d}t$$

上式有界，稳定

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(t-\tau)\mathrm{d}t &= \int_{\tau}^{\infty} e^{-(t-\tau)}\cos[2(t-\tau)]\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\infty} e^{-x}\cos[2x]\,\mathrm{d}x, \qquad x=t-\tau \end{aligned}$$

因此时不变，并且易得其线性，因此该单位冲击响应对应于稳定线性时不变系统

2.17

2.17 考虑一 LTI 系统，其输入 $x(t)$和输出 $y(t)$由下面微分方程描述：

$$\frac{d}{dt}y(t)+4y(t)=x(t) \qquad (P2.17-1)$$

系统并满足初始松弛的条件。

(a)若 $x(t)=e^{(-1+3j)t}u(t)$，求 $y(t)$?

(b)注意到(P2.17-1)式对 $\mathcal{Re}\{x(t)\}$与 $\mathcal{Re}\{y(t)\}$的关系也满足，若

$$x(t)=e^{-t}\cos(3t)u(t)$$

求该 LTI 系统的 $y(t)$。

(a)

假设特解 $y_p(t) = Y\ e^{(-1+3j)t}$

可以得到 $(4-1+3j)Y\ e^{(-1+3j)t} = e^{(-1+3j)t}$

得到特解 $y_p(t) = \frac{1}{3+3j}\ e^{(-1+3j)t}$

假设通解 $y_h(t) = A\ e^{st}$

可以得到 $(As+4A)\ e^{st} = 0$

并且因为系统初始松弛，$y(0) = A + \frac{1}{3+3j} = 0$

得到通解 $y_h(t) = -\frac{1}{3+3j}\ e^{-4t}$

所以得到结果为 $y_h(t) = \frac{1}{3+3j}[e^{(-1+3j)t} - e^{-4t}]u(t)$

(b)

同上，得到特解为 $y_p(t) = \frac{1}{6}e^{-t}(\cos(3t)+\sin(3t))$

通解为 $y_h(t) = \frac{1}{6}e^{-4t}$

得到$y(t) = \frac{1}{6}[e^{-t}(\cos 3t + \sin 3t) - e^{-4t}]u(t)$

2.18

2.18 考虑一因果 LTI 系统，其输入 $x[n]$和输出 $y[n]$由下面差分方程给出：

$$y[n]=\frac{1}{4}y[n-1]+x[n]$$

若 $x[n]=\delta[n-1]$，求 $y[n]$。

由于 $y[1] = \frac{1}{4}y[0] + 1$

并且 $y[-1] = \frac{1}{4}y[-1]$

假设初始松弛，则可以得到 $y[n] = (1/4)^{n-1}\ y[1] = (1/4)^{n-1}\ u[n-1]$

因此，结果为

$$y[n] = (1/4)^{n-1}\ u[n-1]$$