报告2：1920.3和1945.81的外插值

米家龙 18342075

题目要求

对递增的2个数据`1920.0300`和`1945.8100`尝试用各种不同函数、公式或方法进行插值建模，进行外插值/外推计算，以求出该递增2数据的下一个数据（也即第3个数据）是多少

> 已知第3个数据理论上大于2019.7900

思路

1. 使用多种公式/方法进行插值建模（曲线拟合）
2. 通过建立的模型获得目标插值（第3个数据）
3. 进行数值对比

正式建模

1. $y = Ax + B$

拉格朗日插值多项式

由于已知的只有两个数据，并且对于（线性）两点（并且`等步长`）的拉格朗日多项式，横坐标的取值并不会对插值造成影响，因此假设该两点为 $(0, 1920.3)$ 和 $(1, 1945.81)$，因此由拉格朗日插值多项式（线性）：

$$P(x) = y_0 + (y_1 - y_0) \cdot \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \tag{1}$$

可以得到结果为：

$$\begin{aligned} P(x) &= 1920.03 + (1945.81 - 1920.03) \cdot \frac{x-0}{1-0} \\ &= 25.78x + 1920.03 \end{aligned} \tag{2}$$

- 假设第三个数据与前两个数据的`步长相同`，则对于下一个数据，即$x = 2$时，结果为1971.6000。
- 而对于步长不同的情况，如果要获得期望的结果，则需要 $x = \frac{2019.79 - 1920.03}{25.78} > 3.8696$。

牛顿倍数差分多项式

已知对于两点，牛顿倍数差分多项式

$$f(x) = b_0 + b_1(x - x_0), \begin{cases} b_0 = y_0 \\ b_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \end{cases} \tag{3}$$

由于已知两点状况下的牛顿差分倍数多项式依然是线性的，经过变量替换后和拉格朗日插值多项式的结果等价，因此该方法的结论和拉格朗日一样，因此后面不再区分两种方法，只使用拉格朗日。

2. $y = \frac{A}{x} + B$

线性化后获得结果为

$$Y = AX + B, \begin{cases} X = \frac{1}{x} \\ Y = y \end{cases} \tag{4}$$

假设两点都在y轴右边

由于该公式下 $x \neq 0$ ，因此假设两点为$(1, 1920.03)$和$(2, 1945.81)$。

由拉格朗日多项式可以得到结果为

$$\begin{aligned} P(X) &= 1920.03 + (1945.81 - 1920.03) \cdot \frac{X-1}{\frac{1}{2}-1} \\ &= -51.56X + 1971.59 \\ &= -\frac{51.56}{x} + 1971.59 \end{aligned} \tag{5}$$

- 对于等步长情况，下一个数据是$x = 3$时，得到结果为$y_2 \approx 1954.4033$。
- 对于非等步长的情况，如果想要结果满足预期，则需要$x = \frac{51.56}{1971.59 - 2019.79} < -1.0697$，这个结果不太符合预期。

假设两点都在y轴左边

假设两点为$(-3, 1920.03)$和$(-2, 1945.81)$。

由拉格朗日公式可以得到结果为

$$\begin{aligned} P(X) &= 1920.03 + (1945.81 - 1920.03) \cdot \frac{X - (-\frac{1}{3})}{(-\frac{1}{2}) - (-\frac{1}{3})} \\ &= -154.68X + 1868.47 \\ &= -\frac{154.68}{x} + 1868.47 \end{aligned} \tag{6}$$

- 对于等步长的情况，下一个数据是$x = -1$时，得到结果为2023.1500，符合预期。
- 对于非等步长的情况，若使得结果满足预期，则需要$0 > x = -\frac{154.68}{1868.47 - 2019.79} > -1.0222$。

3. $y = \frac{D}{x+C}$

线性化后得到

$$Y = -\frac{1}{C} \cdot X + \frac{D}{C}, \begin{cases} X = x \cdot y \\ Y = y \end{cases} \tag{7}$$

假设两点为$(1, 1920.03)$和$(2, 1945.81)$，在线性化后的公式中，两个点变为$(1920.03, 1920.03)$和$(3891.62, 1945.81)$。

由拉格朗日公式得到

$$\begin{aligned} P(X) &= (1945.81 - 1920.03) \cdot \frac{X - 1920.03}{3891.62 - 1920.03} + 1920.03 \\ &= 0.013075740899477X - 1894.924185200777 \end{aligned} \tag{8}$$

解方程可以得到

$$y = \frac{-1.449190680488753 \times 10^5}{x - 76.477501939488064} \tag{9}$$

- 等步长的情况下，即$x = 3$时，结果为1972.291711389732，不能够符合预期。
- 在非等步长的情况下，若能够取得预期的值，则需要 $x = \frac{-1.449190680488753 \times 10^5}{2019.79} + 76.477501939488064 > 4.7279$。

4. $y = \frac{1}{Ax+B}$

线性化后得到

$$Y = AX + B, \begin{cases} X = x \\ Y = \frac{1}{y} \end{cases} \tag{10}$$

假设两点为$(0, 1920.03)$和$(1, 1945.81)$，在线性化后的公式中，两个点变为$(0, \frac{1}{1920.03})$和$(1, \frac{1}{1945.81})$。

由拉格朗日多项式得到

$$P(X) = -6.900403193751828 \times 10^{-6} X + 5.208251954396546 \times 10^{-4} \tag{11}$$

结果为

$$y = \frac{1}{-6.900403193751828 \times 10^{-6} x + 5.208251954396546 \times 10^{-4}} \tag{12}$$

- 等步长情况下，带入$x = 2$得到结果为1972.291711389732
- 非等步长的情况下，如果要满足期望，则需要$x \geq 3.727929930083506$

5. $y = \frac{x}{Ax+B}$

线性化后得到

$$Y = BX + A, \begin{cases} X = \frac{1}{x} \\ Y = \frac{1}{y} \end{cases}$$

假设两点为$(1, 1920.03)$和$(2, 1945.81)$，在线性化后的公式中，两个点变为$(1, \frac{1}{1920.03})$和$(\frac{1}{2}, \frac{1}{1945.81})$。

由拉格朗日多项式可以得到

$$\begin{aligned} P(X) &= (\frac{1}{1945.81} - \frac{1}{1920.03}) \cdot \frac{X - 1}{\frac{1}{2} - 1} + \frac{1}{1920.03} \\ &= 1.380080638750366 \times 10^{-5} X + 5.070243890521510 \times 10^{-4} \end{aligned} \tag{13}$$

因此得到结果

$$y=\frac{x}{5.070243890521510\times 10^{-4}x+1.380080638750366\times 10^{-5}} \tag{14}$$

- 对于等步长情况，$x=3$时，结果为1954.557867101709。
- 对于非等步长情况，若能得到期望，则需要$x=-1.157454341857106$，说明该函数无法达到预期。

6. $y=A\ln x+B$

线性化得到

$$Y=AX+B,\begin{cases}X=\ln x\\Y=y\end{cases} \tag{15}$$

假设两点为$(1,1920.03)$和$(2,1945.81)$，在线性化后的公式中，两个点变为$(0,1920.03)$和$(\ln 2,1945.81)$。

由拉格朗日多项式可以得到

$$\begin{aligned}P(X)&=(1945.81-1920.03)\cdot\frac{X-0}{\ln 2-0}+1945.81\\&=\frac{25.78}{\ln 2}X+1945.81\end{aligned} \tag{16}$$

结果为

$$y=\frac{25.78}{\ln 2}\cdot\ln x+1945.81 \tag{17}$$

- 对于等步长情况，带入$x=3$得到$y=\frac{25.78\times\ln 3}{\ln 2}+1945.81=1986.670333268591$，与预期有差距
- 对于非等步长的情况，如能够得到期望值，则需要$x=e^{\frac{(2019.79-1945.81)\times\ln 2}{25.78}}=7.308961367665237$

7. $y=C\cdot x^A$

线性化得到

$$Y=A\cdot X+B,\begin{cases}X=\ln x\\Y=\ln y\\B=\ln C\end{cases} \tag{18}$$

假设两点为$(1,1920.03)$和$(2,1945.81)$，在线性化后的公式中，两个点变为$(0,\ln 1920.03)$和$(\ln 2,\ln 1945.81)$。

由拉格朗日多项式得

$$P(X)=\ln\frac{1945.81}{1920.03}\cdot\frac{X-0}{\ln 2-0}+\ln 1920.03 \tag{19}$$

结果为

$$y=1920.03\cdot x^{\ln\frac{1945.81}{1920.03}\cdot\ln\frac{1}{2}} \tag{20}$$

- 等步长情况，令$x=3$，得$y=1961.050499579706$。
- 非等步长情况下，若要符合预期，则需要 $x=\sqrt[t]{\frac{2019.79}{1920.03}}=13.907191669783790,t=\ln\frac{1945.81}{1920.03}\cdot\ln\frac{1}{2}$

8. $y=(Ax+B)^{-2}$

线性化后得到

$$Y = A \cdot X + B, \begin{cases} X = x \\ Y = y^{-\frac{1}{2}} \end{cases} \tag{21}$$

假设两点为$(0, 1920.03)$和$(1, 1945.81)$，在线性化后的公式中，两个点变为$(0, \frac{1}{\sqrt{1920.03}})$和$(1, \frac{1}{\sqrt{1945.81}})$。

代入拉格朗日多项式得

$$P(X) = (\frac{1}{\sqrt{1945.81}} - \frac{1}{\sqrt{1920.03}}) \cdot X + \frac{1}{\sqrt{1920.03}} \tag{22}$$

得到结果

$$y = [(\frac{1}{\sqrt{1945.81}} - \frac{1}{\sqrt{1920.03}})x + \frac{1}{\sqrt{1920.03}}]^{-2} \tag{23}$$

- 等步长情况下，代入$x = 2$得到$y = 1972.112724501197$
- 非等步长情况下，若要达到期望，则需要$x = 2.762589002118608$

9. $y = C \cdot x \cdot e^{-Dx}$

线性化得到

$$Y = -DX + B, \begin{cases} X = x \\ Y = \ln \frac{y}{x} \\ B = \ln C \end{cases} \tag{24}$$

假设两点为$(1, 1920.03)$和$(2, 1945.81)$，在线性化后的公式中，两个点变为$(1, \ln 1920.03)$和$(2, \ln \frac{1945.81}{2})$。

代入拉格朗日多项式得到

$$\begin{aligned} P(X) &= \ln \frac{1945.81}{2 \times 1920.03} \cdot \frac{X-1}{2-1} + \ln 1920.03 \\ &= \ln \frac{1945.81}{3840.06} \cdot X + \ln 1920.03 \end{aligned} \tag{25}$$

结果为

$$y = e^{[\ln \frac{1945.81}{2 \times 1920.03} \cdot x + \ln 1920.03 + \ln x]} = 1920.03 \cdot x \cdot e^{[\ln 1945.81 - \ln 3840.06]} \tag{26}$$

- 等步长情况下，代入$x = 3$得到$y = 2918.7150$