

Vertex Cover und Independent Set

Zeid Dzemaili, Matteo Deana, Peter Bickel-Hürlimann



Definition

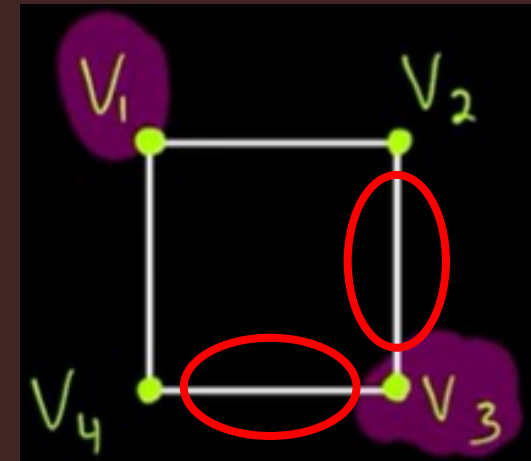
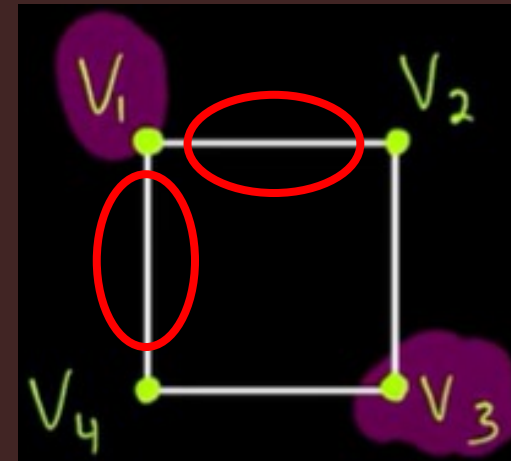
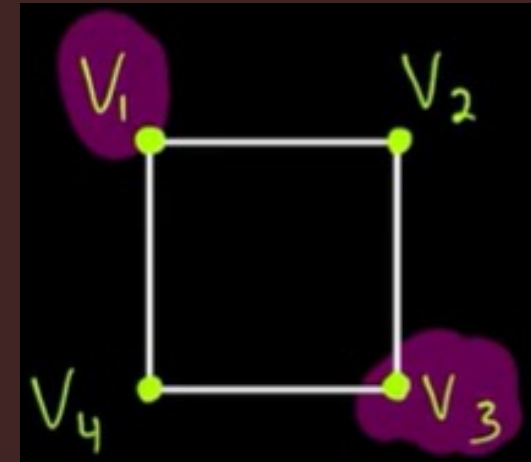
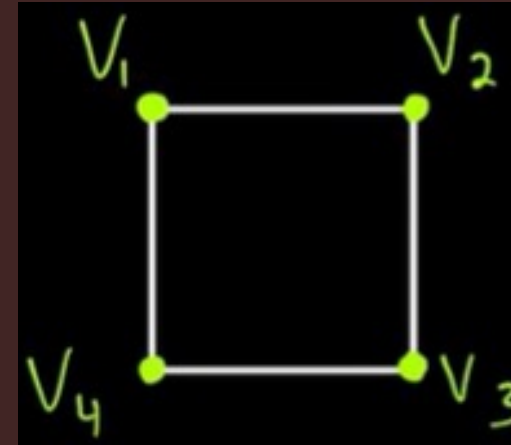
“Ein Vertex Cover [eine Knotenüberdeckung] bezeichnet in der Graphentheorie eine Teilmenge der Knotenmenge eines Graphen, die von jeder Kante mindestens einen Endknoten enthält.”

- Graph $G = \{V1, V2, V3, V4\}$
- Vertex Cover = $\{V1, V3\}$



Beispiele

- Graph $G = \{V_1, V_2, V_3, V_4\}$
- Vertex Cover = $\{V_1, V_3\}$



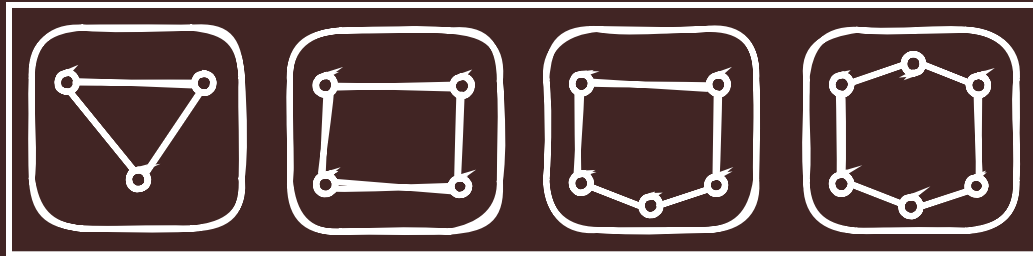
Formel Vertex Cover im Kreisgraph

Definition Kreisgraph:

“Ein Kreisgraph, kurz Kreis, ist in der Graphentheorie eine Klasse von Graphen einfacher Struktur. Ein Kreisgraph besitzt immer gleich viele Knoten wie Kanten, wobei alle Knoten im Kreis miteinander verbunden sind.”

Vertex Covering Number = Anzahl der Knoten im Vertex Cover

$$\beta(C_4) = 2$$



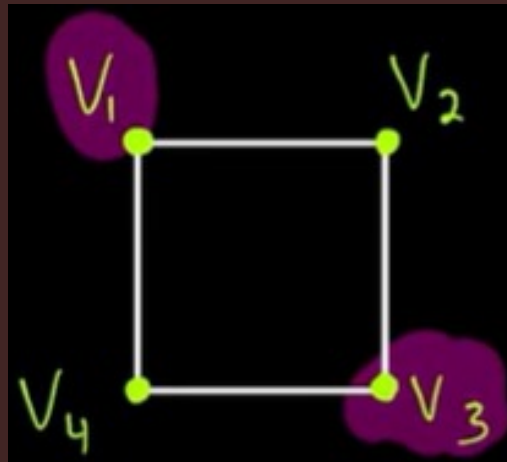
$$\beta(C_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$$

Zusammenhang Vertex Cover & Independent Set

Definition Independent Set:

«Eine stabile Menge, unabhängige Menge oder Co-Clique ist in der Graphentheorie eine Teilmenge von Knoten eines Graphen, die zueinander nicht adjazent (benachbart) sind.»

- Graph $G = \{V_1, V_2, V_3, V_4\}$
- Vertex Cover = $\{V_1, V_3\}$
- Independent Set = $\{V_2, V_4\}$



Kein IS



Kein VC

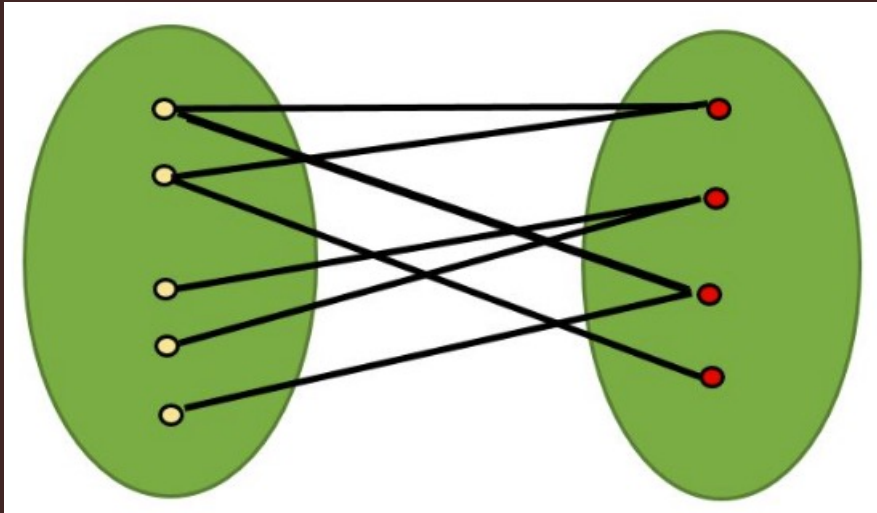


$$\beta(G) + \alpha(G) = n$$

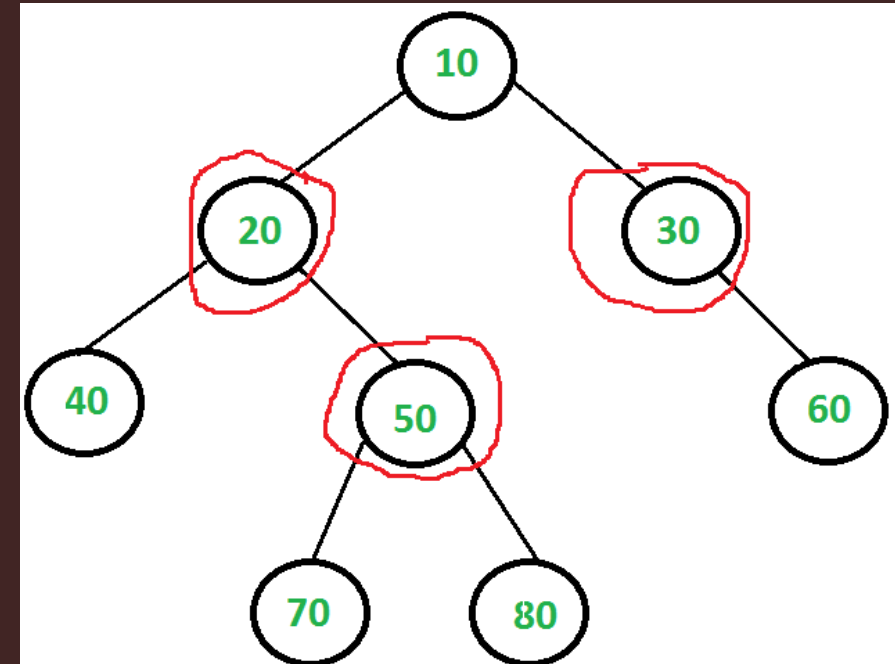


Vertex Cover Problem in spezifischen Graphen

Bipartiter Graph



Baum Graph



Komplexität von Vertex Cover und Independent Set

Beide:

- NP – vollständig
- NP – schwer
- Reduktion Vertex Cover auf Independent Set belegt NP-schwer Status.
Dies ist gegenseitig möglich.



Entscheidungsproblem (Vertex Cover)

- Ein Entscheidungsproblem setzt sich aus zulässigen Eingaben (G) und der Frage nach einer Eigenschaft (k) zusammen.
- Ist die Eigenschaft k in G vorhanden = "Ja"-Eingabe, sonst "Nein"-Eingabe
- Vertex Cover: Besitzt ein Graph G (n Knoten) eine Knotenüberdeckung der Grösse $k \leq n$?
- Algorithmus zur Beantwortung hat exponentielle Laufzeit.

Fragen



Quellen

- «Complement of Independent Set is Vertex Cover | Graph Theory», <https://www.youtube.com/watch?v=e0nls0SLwjE>, zuletzt abgerufen am 17.11.2023
- «Vertex Covers and Vertex Covering Numbers | Graph Theory», <https://www.youtube.com/watch?v=1KkT7y8nxH0>, zuletzt abgerufen am 17.11.2023
- «Komplexität #18 - VERTEX-COVER ist NP-vollständig», <https://www.youtube.com/watch?v=FhGS8tHrSEI>, zuletzt abgerufen am 17.11.2023
- «Knotenüberdeckung», <https://de.wikipedia.org/wiki/Knoten%C3%BCberdeckung>, zuletzt aufgerufen am 18.11.2023
- »Stabile Menge«, https://de.wikipedia.org/wiki/Stabile_Menge, zuletzt aufgerufen am 18.11.2023
- «Kreisgraph», <https://de.wikipedia.org/wiki/Kreisgraph>, zuletzt aufgerufen am 18.11.2023
- «Das Entscheidungsproblem der Knotenüberschneidung», <https://educ.ethz.ch/unterrichtsmaterialien/informatik/entscheidungsproblem.html>, zuletzt aufgerufen am 18.11.2023