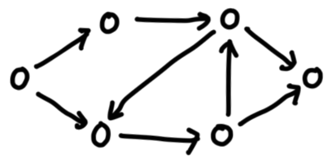


HANDOUT: FLÜSSE IN NETZWERKEN

Modul: DMathLS
Semester: HS 23/24

Vorbereitet von: Simone Glinz, Peter Bickel-Hürlimann

Dieses Handout ist ergänzend zur Präsentation «Flüsse in Netzwerken» zu verstehen und hat zum Ziel den MitstudentInnen einen kompakten Überblick über das Thema zu geben.

WAS IST EIN NETZWERK?

Unter einem Netzwerk versteht man einen zusammenhängenden, gerichteten und gewichteten Graphen. Dieser hat mit einer Quelle **q** und einer Senke **s**, zwei spezielle Knoten. Auf Englisch sind die Bezeichnungen «source» s, für Quelle, und «target» t, für Senke, üblich.

Die Kanten sind gewichtet bzw. mit im Kontext des Netzwerks: Kapazitäten c versehen.

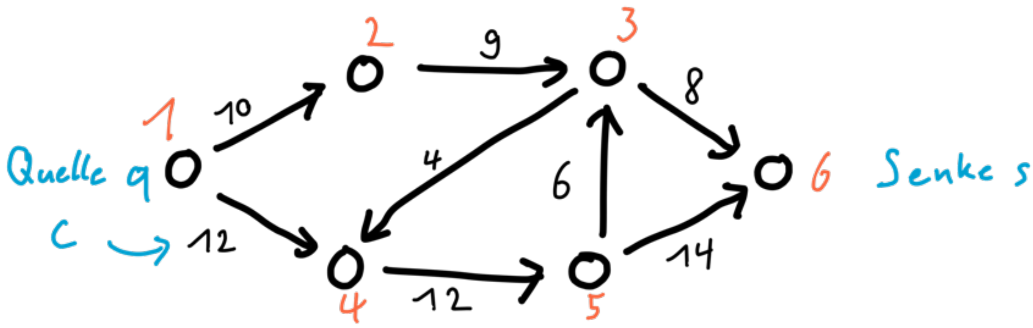


Abbildung 1 Netzwerk mit Kantengewichten

FÜR WAS BRAUCHT ES NETZWERKE?

Die hier behandelten Netzwerke haben viele praktische Anwendungsgebiete.

Unter anderem werden sie

- in der Planung von Verkehrsnetzen
- in der Konzeption von Kommunikationsnetzen
- für die Modellierung von Angebot-Nachfrage-Systemen,
- für die Modellierung des Transports von Wasser oder Öl in Leitungsnetzen

eingesetzt.

WAS SIND FLÜSSE?

Unter einem Fluss versteht man die Menge von etwas, was über das Netzwerk geleitet wird. Dies kann von Artikeln über Busse, bis hin zu Wasser verschiedene Ausprägungen haben, je nach Netzwerk.

Schlussendlich ist es für die graphentheoretische Betrachtung nebensächlich, um was es sich konkret handelt. Alle Operationen lassen sich auf das Netzwerk anwenden und alle Bedingungen gelten ungeachtet des konkreten Guts.

ZULÄSSIGE FLÜSSE

Ein zulässiger Fluss ist dann gegeben, wenn die Kantenkapazität **c** nicht überschritten wird und der Fluss nicht negativ ist. Wichtig ist, dass die Summe der Flusskapazitäten abzüglich des durchgeleiteten Flusses nicht negativ wird. Vergleiche dazu auch Abbildung 6.

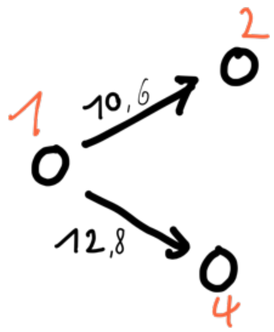


Abbildung 2 Teil eines Netzwerks mit Kantengewichten und Flüssen

In Abbildung 2 ist ein Teil eines Netzwerks abgebildet. Es sind die Knoten 1, 2 und 4 eines grösseren Netzwerks sichtbar. Knoten 1 ist zudem die Quelle **q** des Netzwerks.
Die Kante 1,2 hat eine Kapazität von 10 und einen Fluss von 6 und die Kante 1,4 hat eine Kapazität von 12 und einen Fluss von 8.

Beide Flüsse sind somit zulässige Flüsse, da Fluss, subtrahiert von Kapazität keinen negativen Wert ergeben

CHARAKTERISTIKA UND KOMPONENTEN VON NETZWERKEN

Folgend gehen wir näher auf die Charakteristika und wichtigsten Komponenten von Netzwerken ein.

INNERE KNOTEN

Innere Knoten umfassen alle Knoten, welche nicht die Quelle q oder Senke s repräsentieren bzw. alle Knoten mit mindestens einem Ein- und Ausgang.

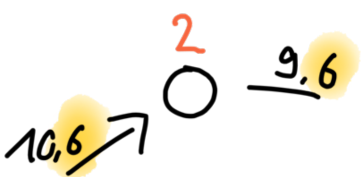
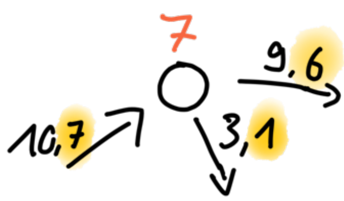


Abbildung 3 Knoten mit 1 Eingang und 1 Ausgang



KIRCHHOFF'SCHES GESETZ

Ursprünglich in Widerstandsnetzwerken nach dem Entdecker Gustav Robert Kirchhoff (1824 – 1887) benannt, findet das Kirchhoff'sche Gesetz auch in der Graphentheorie Anwendung.

Es besagt, dass für alle Knoten, welche nicht die Quelle q oder die Senke s sind, gilt:

Der Fluss <u>in</u> den Knoten entspricht dem Fluss <u>aus</u> dem Knoten.

Für zwei Beispiele siehe auch Abbildung 3.

VORWÄRTS- UND RÜCKWÄRTSKANTEN

Man spricht von einer Vorwärtskante, wenn eine Kante in deren Richtung durchlaufen wird.

Im Gegenteil dazu ist Rückwärtskante eine Kante, welche entgegen ihrer Richtung durchlaufen wird.

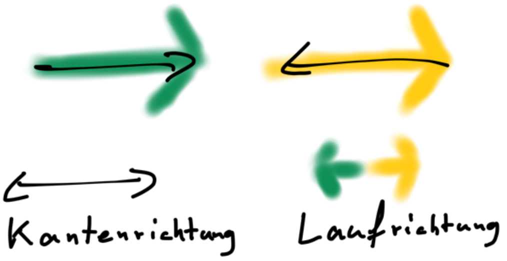


Abbildung 4 Visualisierungen zu Vorwärts- und Rückwärtskanten

UNGERICHTETER WEG

Ein ungerichteter Weg ist ein Weg in einem gerichteten Graphen, bei dem Kanten entweder in deren Richtung (grün) oder entgegen derer Richtung (gelb) durchlaufen werden.

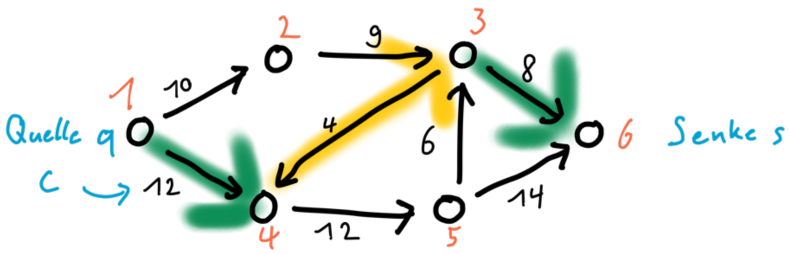


Abbildung 5 Ungerichteter Weg (als auch ein zunehmender Weg)

ZUNEHMENDER WEG

Bei einem zunehmenden Weg handelt es sich ebenfalls um einen ungerichteten Weg, jedoch hat dieser zwei Besonderheiten.

Es darf keine Vorwärtskante voll ausgelastet sein. Das heisst der Fluss muss grösser sein als die Kantenkapazität und *alle Rückwärtskanten müssen einen Fluss grösser als Null haben.*

Siehe auch Abbildung 5 Ungerichteter Weg

GESAMTFLUSS

Der Gesamtfluss bezeichnet die Menge, welche zwischen Quelle und Senke bewegt wird.

Dabei ist es wichtig, diesen nicht mit der maximalen Flusskapazität zu verwechseln.

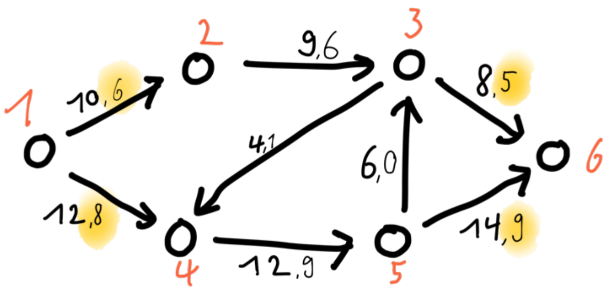


Abbildung 6 Gesamtfluss Kanten 1,2 und 1,4 (6+8=14) sowie 3,6 und 5,6 (5+9=14)

FORD-FULKERSON ALGORITHMUS

Der Ford-Fulkerson Algorithmus aus dem Teilgebiet Flussprobleme der Graphentheorie wird verwendet um den maximalen Fluss («max flow»), auch maximale Flusskapazität genannt, durch ein Netzwerk zu finden.

Der maximale Fluss ist erreicht, wenn es keinen zunehmenden Weg mehr von der Quelle zur Senke gibt.

Zur Veranschaulichung hier eine Umsetzung anhand des bereits bekannten Netzwerks aus Abbildung 6.

ERSTE ITERATION

Der Weg 1,2,3,6 wird von der Quelle (Knoten 1) ausgehend gewählt. Die kleinste Kapazität ist hier 8 (Kante 3,6). Daraus folgernd wird die genutzte Kapazität in einem Restnetzwerk eingezeichnet und die regulären Kapazitäten angepasst. Der Fluss 8 wird notiert.

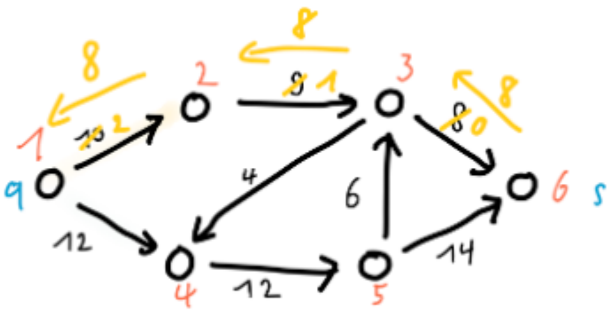
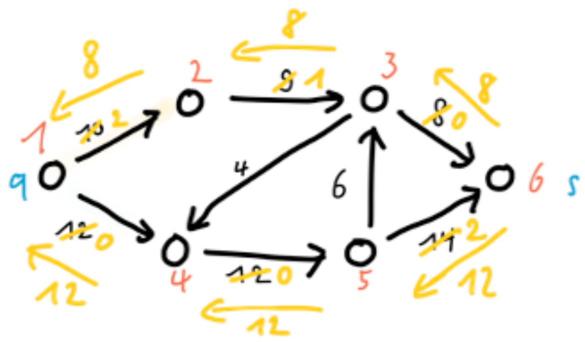
Zunehmender Weg / Fluss	Restnetzwerk
1, 2, 3, 6 Fluss 8	

Abbildung 7 Ford-Fulkerson Algorithmus Iteration 1

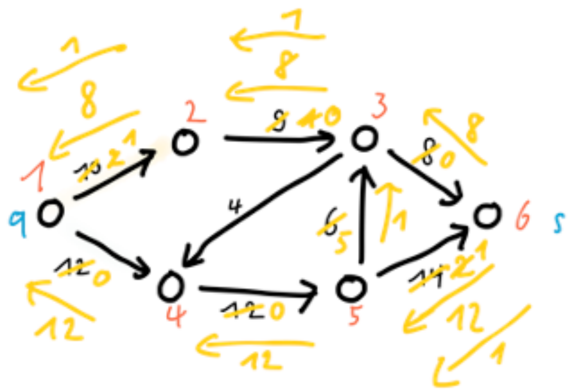
ZWEITE ITERATION

Der Weg 1,4,5,6 wird gewählt. Die kleinste, durchgehende Kapazität hier ist 12. Wiederum wird der Restgraph erweitert. Der Fluss 12 wird notiert.

Zunehmender Weg / Fluss	Restnetzwerk
1, 4, 5, 6 Fluss 12	

DRITTE ITERATION

Der letzte mögliche Weg ist 1,2,3,5,6. Dieser hat noch einen Fluss von 1.

Zunehmender Weg / Fluss	Restnetzwerk
1, 2, 3, 5, 6 Fluss 1	

MAXIMALER FLUSS DES NETZWERKS

Der maximale Fluss berechnet sich aus den Flüssen der einzelnen gefundenen Wege. Das Netzwerk hat somit einen maximalen Fluss von 21.

QUELLEN

Siehe Präsentation «Flüsse in Netzwerken».