机器人学导论

第九讲 轨迹规划

黄之峰
广东工业大学
自动化学院

主要内容：

1. 机器人的路径及轨迹规划问题
2. 关节空间描述与直角坐标描述
3. 关节空间的轨迹规划
4. 直角坐标空间的轨迹规划

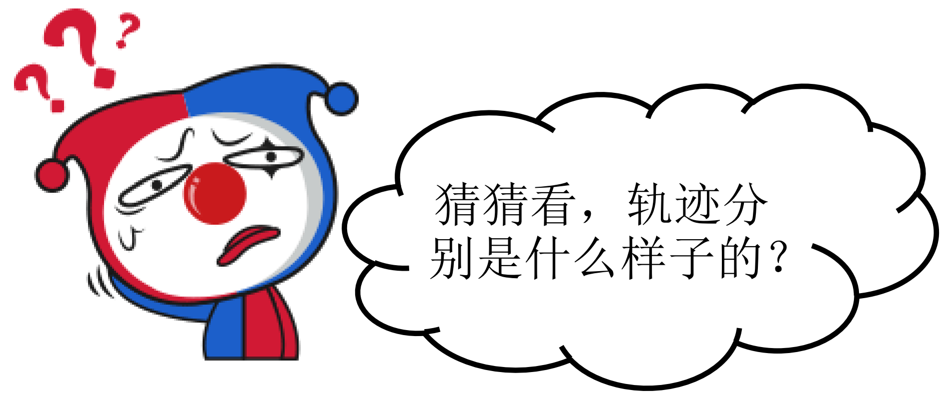
第九讲 1-机器人轨迹规划的基本问题

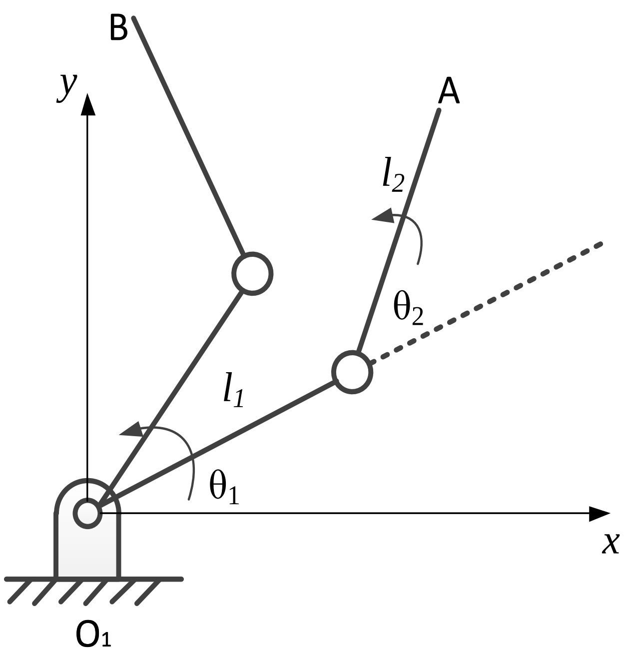
路径（Path）：空间位移序列，机器人位形的一个特定序列，不考虑机器人位形的时间因素。

轨迹(Trajectory)：带时间约束的位移序列，与何时到达路径中的每个部分有关，强调时间性，依赖于速度和加速度。

第九讲 3-轨迹规划的基本原理

平面两关节机器人的简单例子：





策略 1

θ_1	θ_2
20	30
30	40
40	50
40	60
40	70
40	80

1s

策略 2

θ_1	θ_2
20	30
24	40
28	50
32	60
36	70
40	80

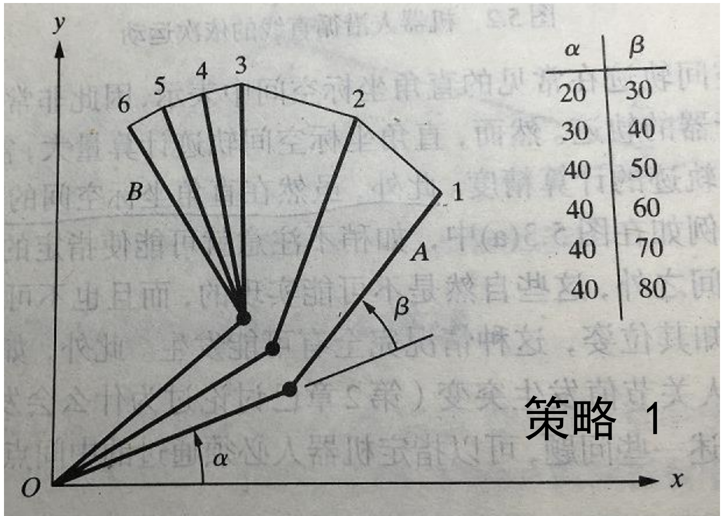
策略 3

θ_1	θ_2
20	30
14	55
16	69
21	77
29	81
40	80

时间

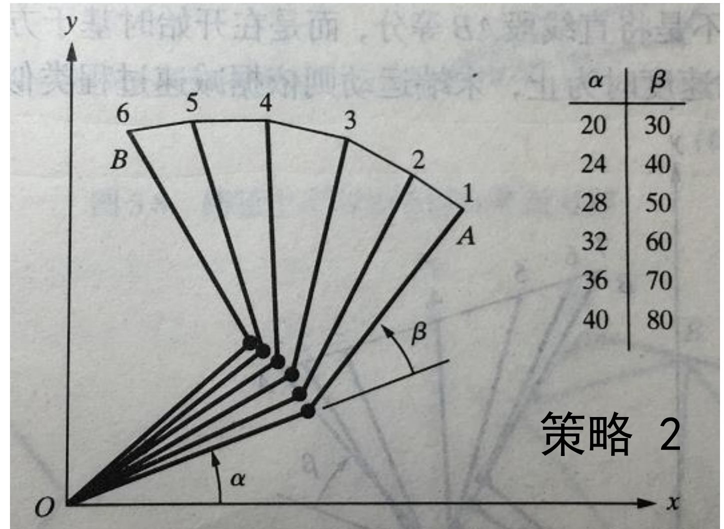
第九讲 3-轨迹规划的基本原理

平面两关节机器人的简单例子：



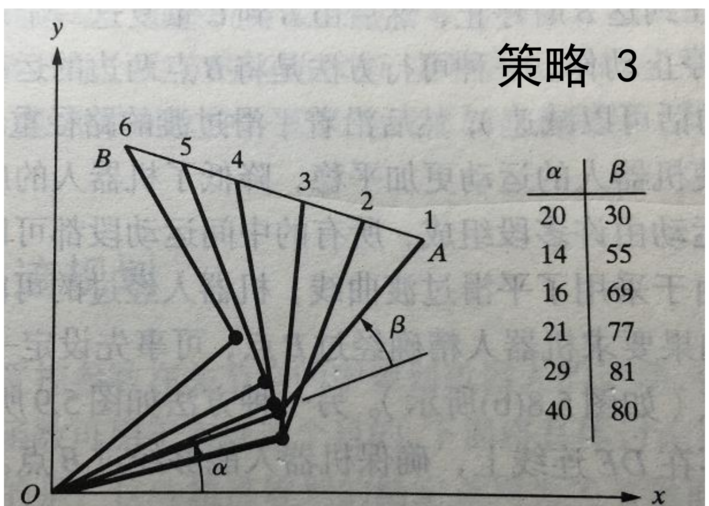
α	β
20	30
30	40
40	50
40	60
40	70
40	80

图 5.4　两自由度机器人关节空间的非归一化运动



α	β
20	30
24	40
28	50
32	60
36	70
40	80

图 5.5　两自由度机器人关节空间的归一化运动



α	β
20	30
14	55
16	69
21	77
29	81
40	80

图 5.6　两自由度机器人的直角坐标空间运动

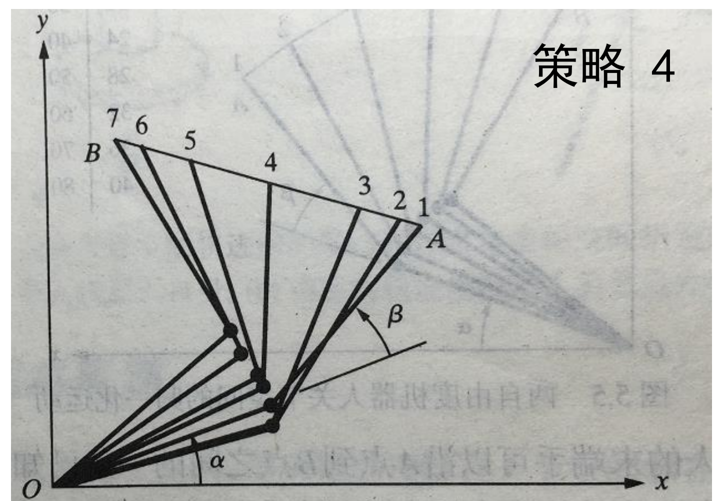
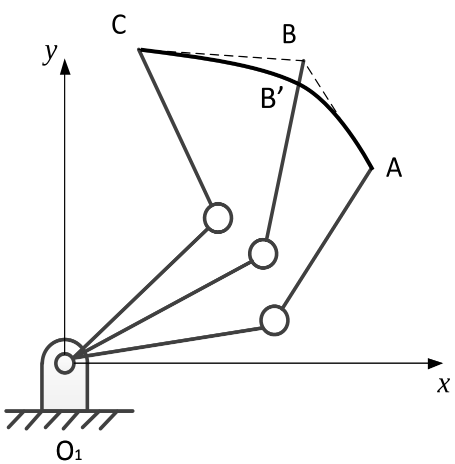


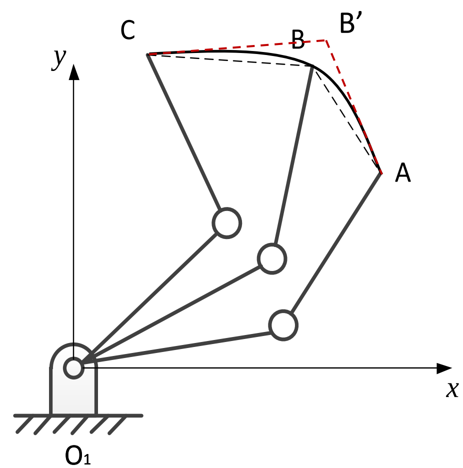
图 5.7　具有加速和减速段的轨迹规划

第九讲 3-轨迹规划的基本原理

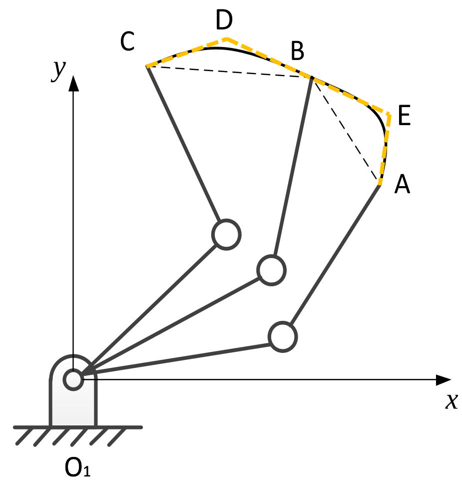
平面两关节机器人的简单例子，**要求经过中间点的情况：**

可以使用三次样条曲线插值





直接走折线会有冲击，或者造成机器人运动产生停顿。



注意：这里讨论的是**末端的轨迹规划**

第九讲 4-关节空间的轨迹规划

➢ <u>三次多项式规划</u>

以某一关节角为例

初始位姿 θ_i $\Rightarrow$ 期望末端位姿 θ_f

三次多项式：$\theta(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3$

代入

边界条件：

$t_i = 0$

$$\theta(t_i) = \theta_i$$
$$\theta(t_f) = \theta_f$$
$$\dot{\theta}(t_i) = 0$$
$$\dot{\theta}(t_f) = 0$$

$$\theta(t_i) = c_0 = \theta_i$$
$$\theta(t_f) = c_0 + c_1 t_f + c_2 t_f^{\,2} + c_3 t_f^{\,3}$$
$$\dot{\theta}(t_i) = c_1 = 0$$
$$\dot{\theta}(t_f) = c_1 + 2c_2 t_f + 3c_3 t_f^{\,2} = 0$$

第九讲 4-关节空间的轨迹规划

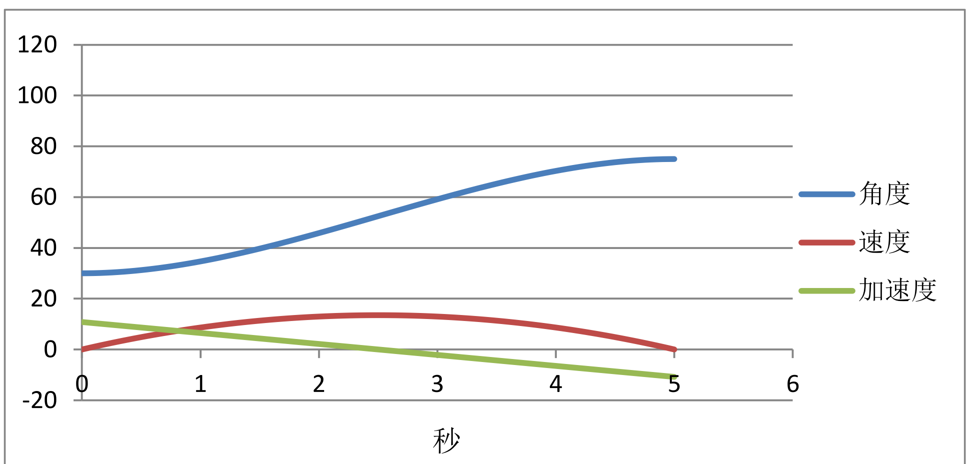
➤ <u>三次多项式规划</u>

例7.1　要求一个六轴机器人的第一个关节在5秒内从初始角30°运动到终端角75°，用三次多项式计算在第1、2、3秒和第4秒时关节的角度

$$\theta(t_i)=\theta_i=30$$
$$\theta(t_f)=\theta_f=75$$
$$\dot\theta(t_i)=0=0$$
$$\dot\theta(t_f)=0=0$$
$$t_f=5$$

$$\theta(t_i)=c_0=\theta_i$$
$$\theta(t_f)=c_0+c_1t_f+c_2t_f^{\ 2}+c_3t_f^{\ 3}$$
$$\dot\theta(t_i)=c_1=0$$
$$\dot\theta(t_f)=c_1+2c_2t_f+3c_3t_f^{\ 2}=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}c0=30\\ c1=0\\ c2=5.4\\ c3=-0.72\end{cases}$$



第九讲 4-关节空间的轨迹规划

讨论1：
三次多项式规划里能否指定起始点和终点的加速度？

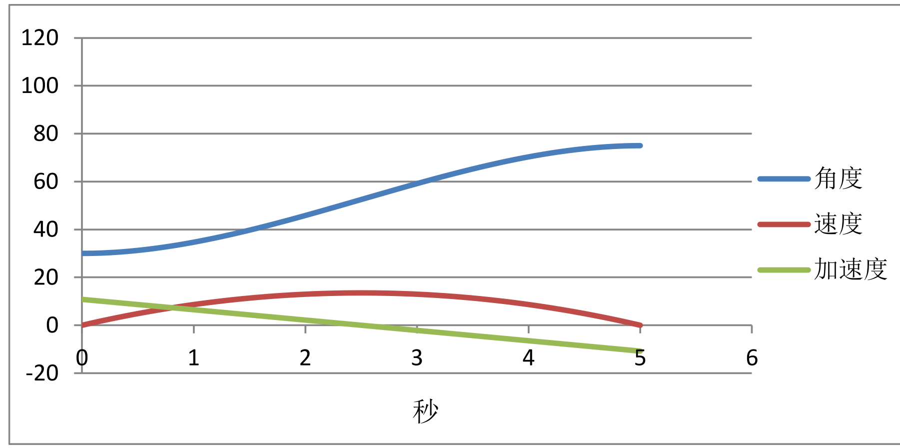
例7.1

$$\theta(t_i)=30 \qquad \theta(t_i)=c_0=\theta_i$$

$$\theta(t_f)=75 \qquad \theta(t_f)=c_0+c_1t_f+c_2t_f{}^2+c_3t_f{}^3$$

$$\dot\theta(t_i)=0 \qquad \dot\theta(t_i)=c_1=0$$

$$\dot\theta(t_f)=0 \qquad \dot\theta(t_f)=c_1+2c_2t_f+3c_3t_f{}^2=0$$



例7.2

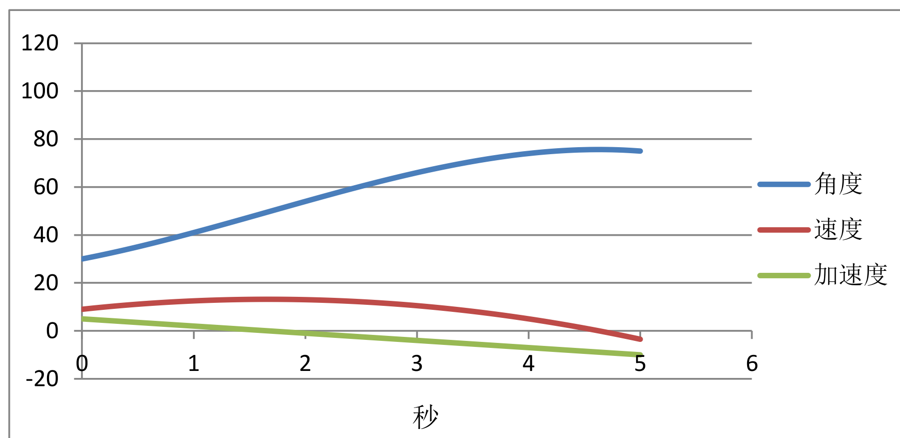
$$\theta(t_i)=30 \qquad \theta(t_i)=c_0=\theta_i$$

$$\theta(t_f)=75 \qquad \theta(t_f)=c_0+c_1t_f+c_2t_f{}^2+c_3t_f{}^3$$

$$\ddot\theta(t_i)=5 \qquad \ddot\theta(t_i)=2c_2+6c_3t_f=5$$

$$\ddot\theta(t_f)=-5 \qquad \ddot\theta(t_f)=2c_2+6c_3t_f=-5$$

$$t_f=5$$



第九讲 4-关节空间的轨迹规划

➢ 三次多项式规划

三次多项式规划的局限性：无法**同时**指定起始点和终点的速度和加速度。

$$\theta(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3$$

四个未知数只需要四个边界条件

第九讲 4-关节空间的轨迹规划

➢ 五次多项式规划

在指定运动段起点和终点的位置和速度的基础上，增加指定运动段的起点和终点的加速度。这样，边界条件增加到6个，相应地需要用5次多项式来规划轨迹。

$$\theta(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + c_4 t^4 + c_5 t^5$$

$$\dot{\theta}(t) = c_1 t + 2c_2 t + 3c_3 t^2 + 4c_4 t^3 + 5c_5 t^4$$

$$\ddot{\theta}(t) = 2c_2 + 6c_3 t + 12c_4 t^2 + 20c_5 t^3$$

第九讲 4-关节空间的轨迹规划

➢ 五次多项式规划

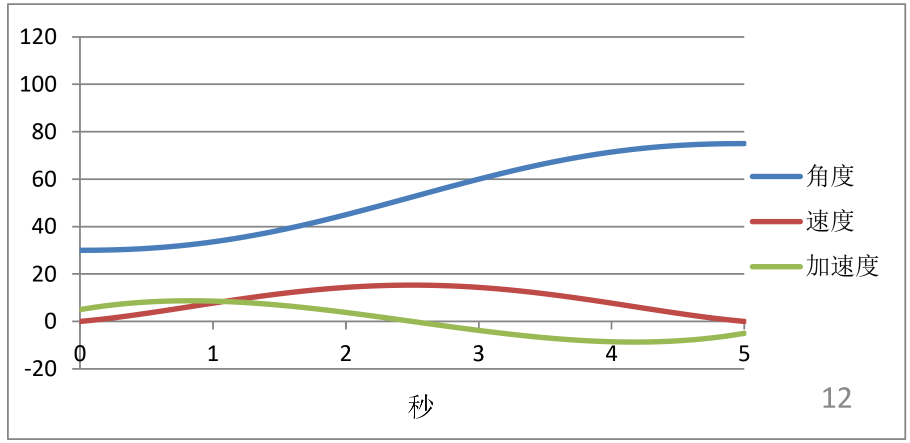
例7.2（同例7.1） 要求一个六轴机器人的第一个关节在5秒内从初始角30°运动到终端角75°，已知初始加速度和末端减速度均为5°/秒²

$$t_f = 5$$

$$\theta(t_i) = \theta_i = 30$$
$$\theta(t_f) = \theta_f = 75$$
$$\dot{\theta}(t_i) = 0 = 0$$
$$\dot{\theta}(t_f) = 0 = 0$$
$$\ddot{\theta}(t_i) = 5$$
$$\ddot{\theta}(t_f) = -5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c0 = 30 \\ c1 = 0 \\ c2 = 2.5 \\ c3 = 1.6 \\ c4 = -0.58 \\ c5 = 0.0464 \end{cases}$$

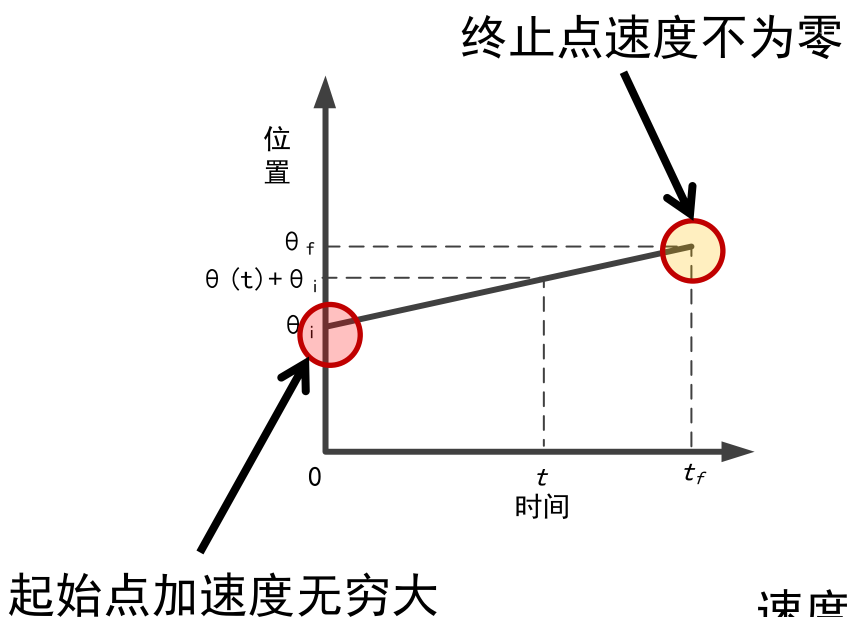
$$\theta(t) = 30 + 2.5t^2 + 1.6t^3 - 0.58t^4 + 0.0464t^5$$
$$\dot{\theta}(t) = 5t + 4.8t^2 - 2.32t^3 + 0.232t^4$$
$$\ddot{\theta}(t) = 5 + 9.6t - 6.96t^2 + 0.928t^3$$



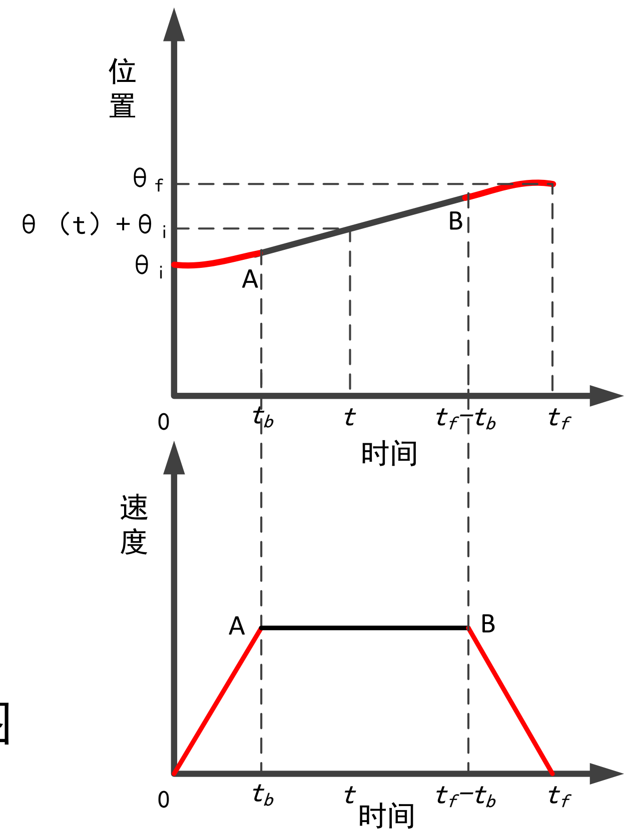
第九讲 4-关节空间的轨迹规划

➢ 抛物线过渡的线性运动轨迹-速度梯形图

基本思想，在关节运动的起始段和终止段设计抛物线轨迹进行过渡实现，机器人关节以接近**恒定速度**从初始位置运动到终点位置



速度梯形图



第九讲 4-关节空间的轨迹规划

➢ 抛物线过渡的线性运动轨迹-速度梯形图

输入：起始位置 $\theta(t_i)=\theta_i$

终止位置 $\theta(t_f)=\theta_f$

起始速度 $\dot{\theta}(t_i)=0$

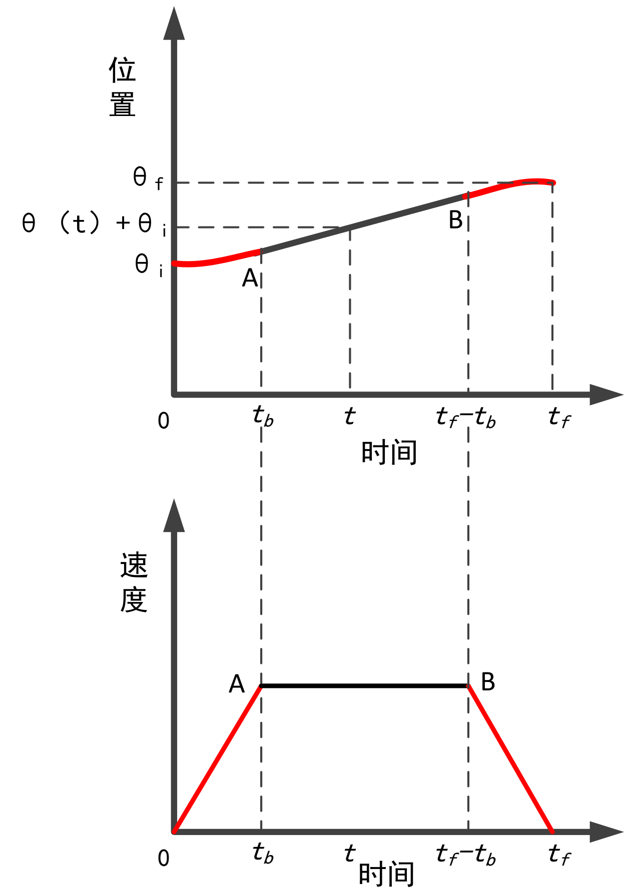
终止速度 $\dot{\theta}(t_f)=0$

隐含条件，

起始段和终止段采用抛物线过渡，且时间对称相等。

中间段匀速运动

求取 $\theta(t)$



速度梯形图

第九讲 4-关节空间的轨迹规划

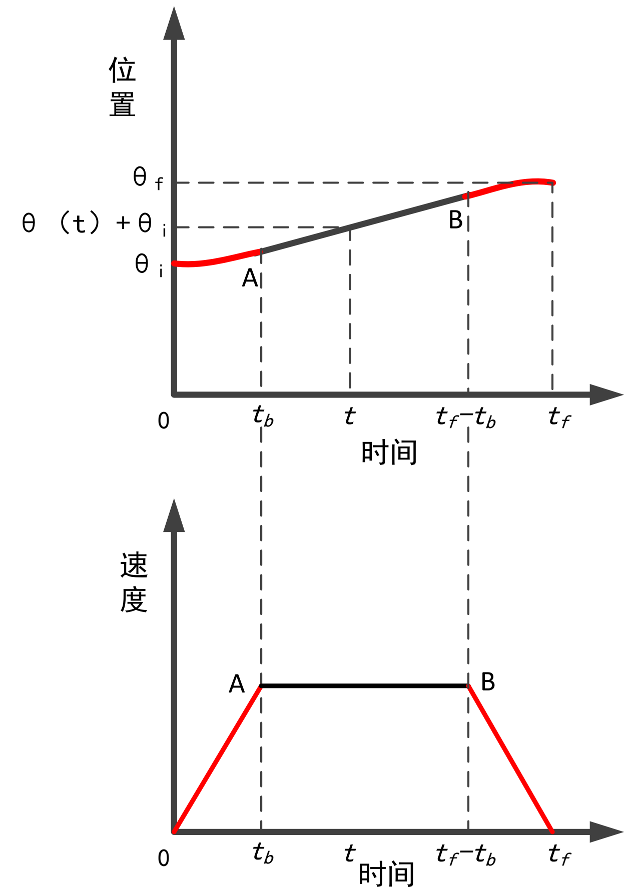
➢ 抛物线过渡的线性运动轨迹-速度梯形图

未知数

$$
\begin{cases}
\theta(t) = \theta_i + \dfrac{1}{2}at^2 & t < t_b \\
\theta(t) = \theta_i + \dfrac{1}{2}at_b{}^2 + at_b(t - t_b) & t_b \le t < t_f - t_b \\
\theta(t) = \theta_f - \dfrac{1}{2}a\left(t_f - t\right)^2 & t_f - t_b \le t < t_f
\end{cases}
$$

$$\theta_f - \theta_i = at_b{}^2 + at_b\left(t_f - 2t_b\right)$$

$$a = \frac{\theta_f - \theta_i}{t_b\left(t_f - t_b\right)}$$



速度梯形图

第九讲 4-关节空间的轨迹规划

➢ 抛物线过渡的线性运动轨迹

讨论：加速度a的取值范围

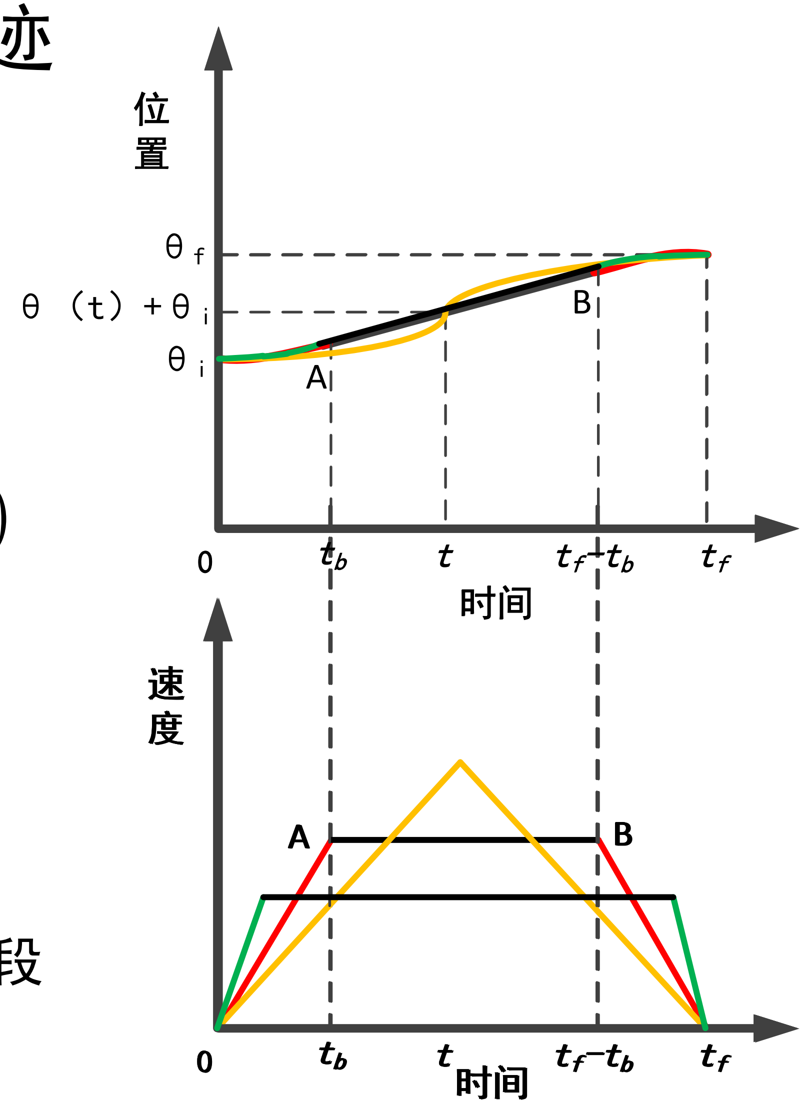
$$a = \frac{\theta_f - \theta_i}{t_b\left(t_f - t_b\right)}$$

$$\frac{4\left(\theta_f - \theta_i\right)}{t_f^{\ 2}} \le |a| \le \left(\text{关节电机的最大输出}\right)$$

$$0 < \mathrm{t_b} \le \frac{1}{2}\mathrm{t_f}$$

加速度无穷大

完全失去匀速运动段



速度梯形图

第九讲 4-关节空间的轨迹规划

➢ 抛物线过渡的线性运动轨迹

讨论：加速度a的取值范围

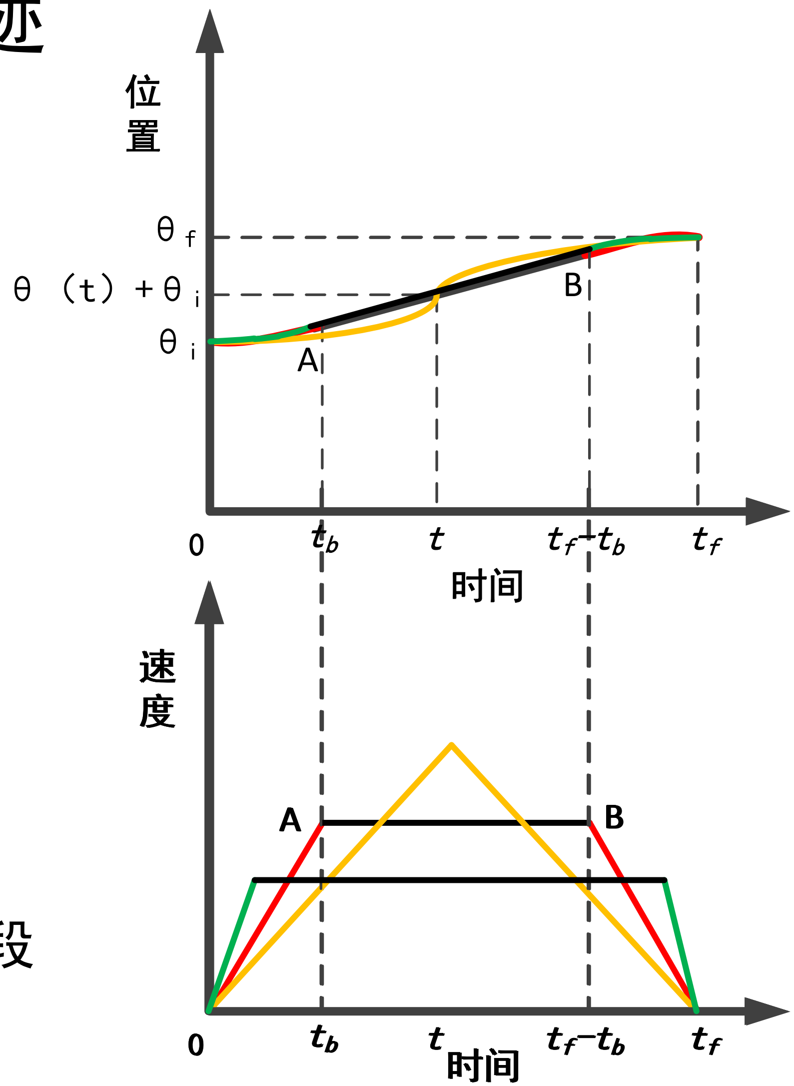
$$a=\frac{\theta_f-\theta_i}{t_b\left(t_f-t_b\right)}$$

$$\frac{4\left(\theta_f-\theta_i\right)}{t_f^{\ 2}}\leq|a|\leq(\text{关节电机的最大输出})$$

$$0<\mathrm{t_b}\leq\frac{1}{2}\mathrm{t_f}$$

加速度无穷大

完全失去匀速运动段



速度梯形图

第九讲 4-关节空间的轨迹规划

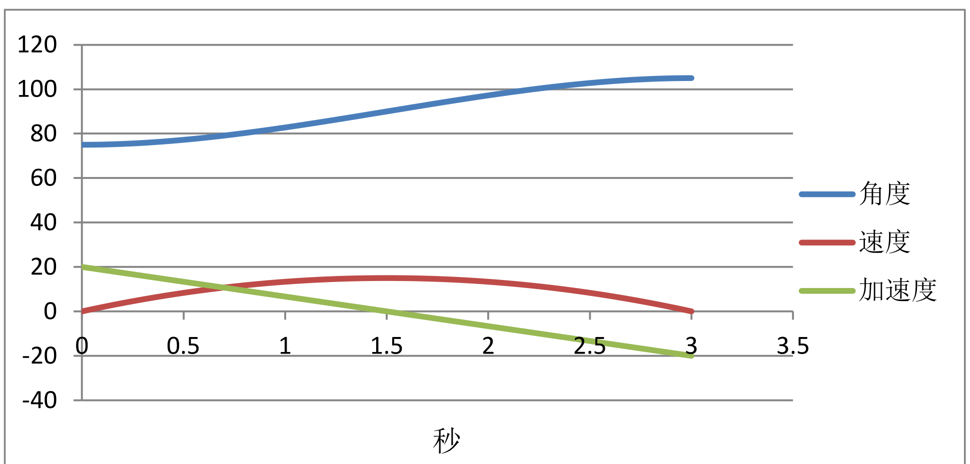
讨论-存在中间点的问题：

例7.3　要求该六轴机器人的第一个关节在上一例运动的基础上继续运动，要求在其后3秒内关节角达105°，

$$\theta(t_i)=\theta_i \quad =75$$
$$\theta(t_f)=\theta_f=105$$
$$\dot{\theta}(t_i)=0 \quad =0$$
$$\dot{\theta}(t_f)=0 \quad =0$$
$$t_f=3$$

$$\theta(t_i)=c_0=\theta_i$$
$$\theta(t_f)=c_0+c_1t_f+c_2t_f^{\ 2}+c_3t_f^{\ 3}$$
$$\dot{\theta}(t_i)=c_1=0$$
$$\dot{\theta}(t_f)=c_1+2c_2t_f+3c_3t_f^{\ 2}=0$$

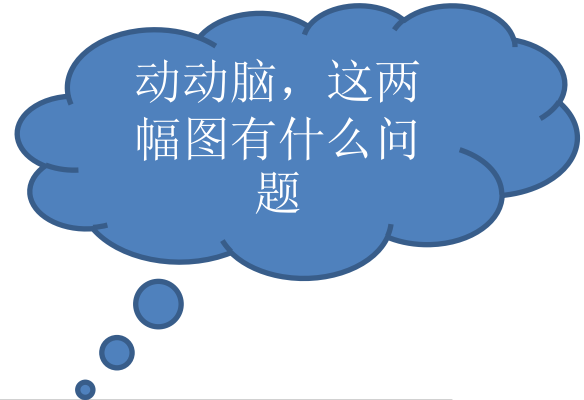
$$\Rightarrow \begin{cases} c0=30 \\ c1=0 \\ c2=5.4 \\ c3=-0.72 \end{cases}$$



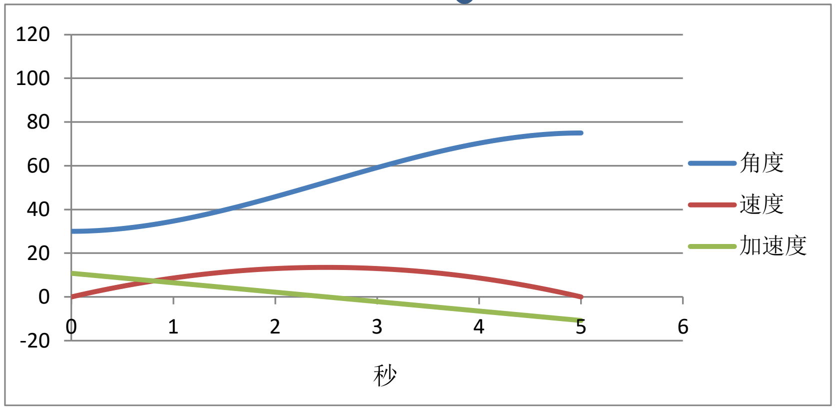
<u>三次多项式规划结果</u>

第九讲 4-关节空间的轨迹规划

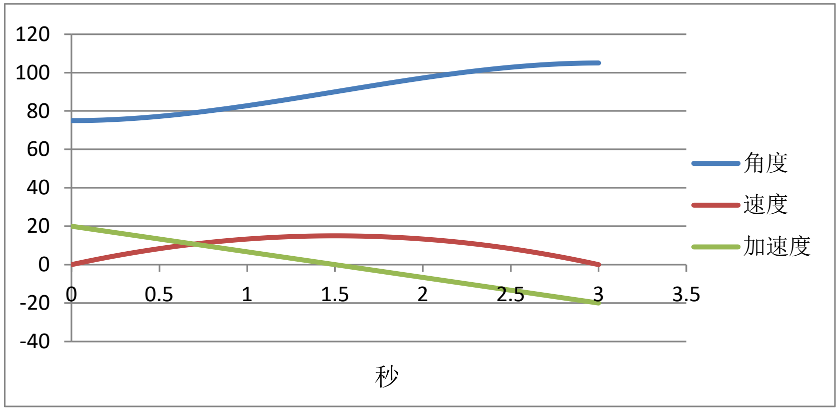
讨论-存在中间点的问题：



例7.1 要求一个六轴机器人的第一个关节在5秒内从初始角30° 运动到终端角75° ，用三次多项式计算在第1、2、3秒和第4秒时关节的角度

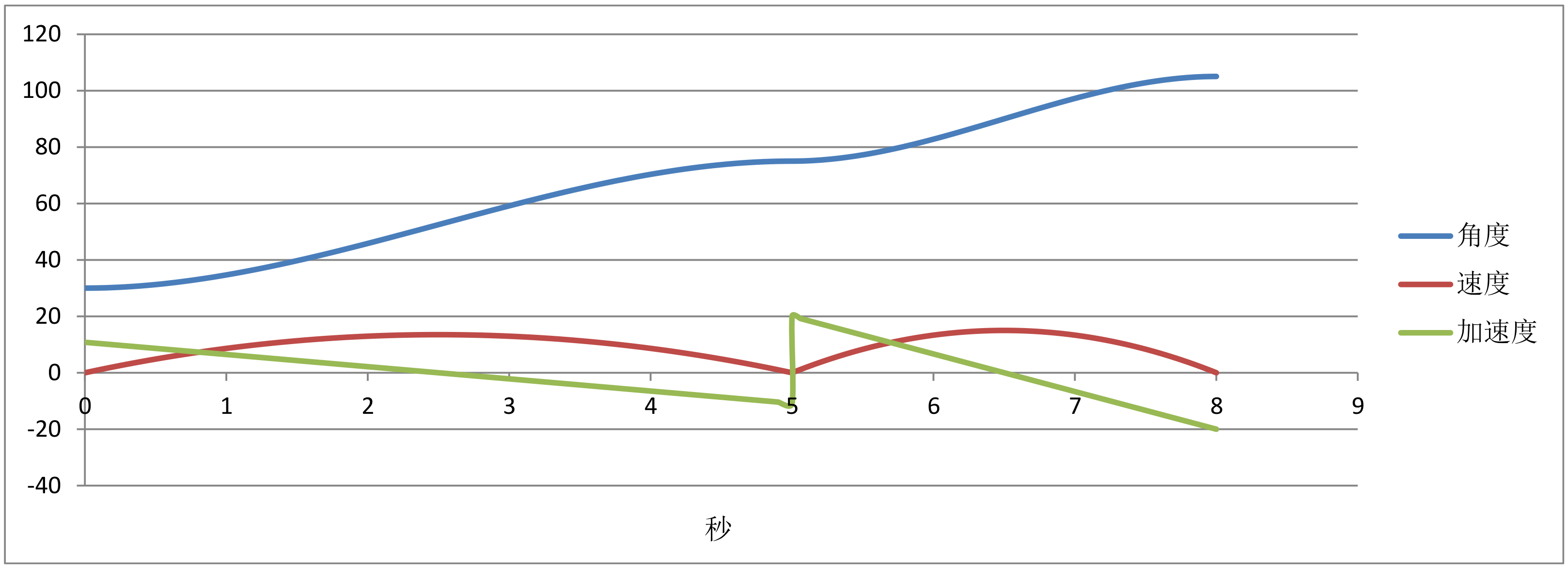


例7.3 要求该六轴机器人的第一个关节在上一例运动的基础上继续运动，要求在其后3秒内关节角达105°



第九讲 4-关节空间的轨迹规划

加速度曲线无法平滑，会出现突变，能否实现该轨迹取决于机器人的功率和性能。



第九讲 4-关节空间的轨迹规划

存在中间点的关节空间轨迹规划

方案1：用抛物线过渡的线性运动轨迹

基本思路：利用逆运动学算出中间点对应的关节角，然后进行分段，以上一段的末端点的位置和速度作为当前点的边界条件进行计算，实现位置平滑过渡。

方案2：高次多项式运动轨迹

将中间点的信息与起始点和终点一并作为边界条件，求解高次多项式。

第九讲 4-关节空间的轨迹规划

存在中间点的关节空间轨迹规划

高次多项式运动轨迹

$$\theta(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t_2 + \cdots c_{n-1} t_{n-1} + c_n t_n$$

事实上，求解高次多项式需要大量的计算

其中一个替代法是采用不同的低次多项式，然后将它们平滑地连在一起满足各个点的边界条件。

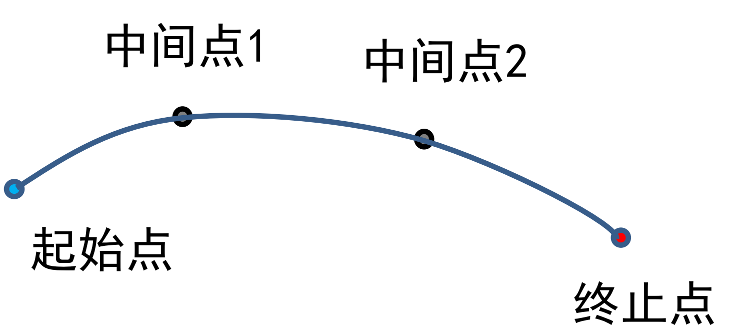
常见的有

4-3-4轨迹，

3-5-3轨迹，

5段3次多项式

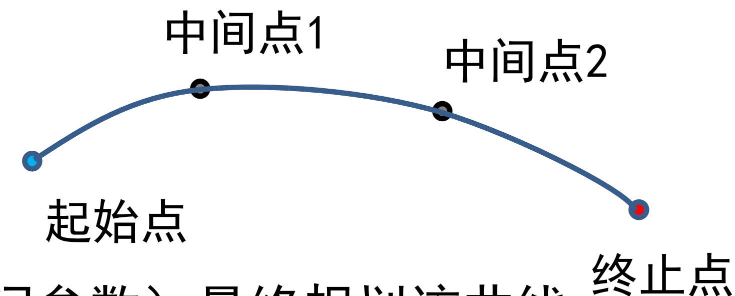
等来代替7次多项式轨迹。



第九讲 4-关节空间的轨迹规划

4-3-4轨迹

$$\theta(t)_1 = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4$$
$$\theta(t)_2 = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3$$
$$\theta(t)_3 = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + c_4 t^4$$



通过如下14个边界和过渡条件（还需要三个时间参数）最终规划该曲线：

1，已知初始位置；　　2，给定初始速度；　　3，给定初始加速度；

4，已知第一个中间点的位置，它也是第一运动段4次多项式轨迹的末端位置；

5，第一中间点位置必须和3次多项式轨迹的初始位置相同，确保运动的连续性；

6，中间点的速度保持连续；　　7，中间点的加速度保持连续；

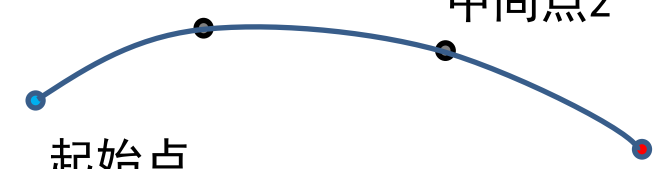
8，已知第二中间点的位置，它与3次多项式轨迹的末端位置相同；

9，下一条4次多项式轨迹的初始位置必须和第二中间点位置相同；

10，下一个中间点的速度保持连续；　　11，下一个中间点的加速度保持连续

12，已知终点位置；　　13，给定终点速度；　　14，给定终点加速度；

第九讲 4-关节空间的轨迹规划



4-3-4轨迹

$$\theta(t)_1 = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4$$
$$\theta(t)_2 = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3$$
$$\theta(t)_3 = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + c_4 t^4$$

假设：

全局时间变量为 t

第j个运动段的本地时间变量为 τ_j

每一个运动段的初始时间为 $\tau_{ji} = 0$

且给定每一运动段的终端本地时间 τ_{jf}

（1）在本地时间 τ_0 处，第一条4次多项式运动段产生的初值即为已知位置 θ_1

$$\theta_1 = a_0$$

（2）在本地时间 τ_0 处，已经给定第一运动段的初始速度，因此得出：

$$\dot{\theta}_1 = a_1$$

第九讲 4-关节空间的轨迹规划

4-3-4轨迹

$$\theta(t)_1 = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4$$
$$\theta(t)_2 = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3$$
$$\theta(t)_3 = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + c_4 t^4$$

（3）在本地时间 τ_0 处，已经给定第一运动段的初始加速度，因此得出：

$$\ddot{\theta}_1 = 2a_2$$

（4）在第一中间点位置 θ_2 与第一运动段在本地时间 τ_{1f} 时的末端位置相同，于是

$$\theta_2 = a_0 + a_1(\tau_{1f}) + a_2(\tau_{1f})^2 + a_3(\tau_{1f})^3 + a_4(\tau_{1f})^4$$

（5）在第一中间点的位置与3次多项式在本地时间 $\tau_2 = 0$ 时的初始位置相同，有

$$\theta_2 = b_0$$

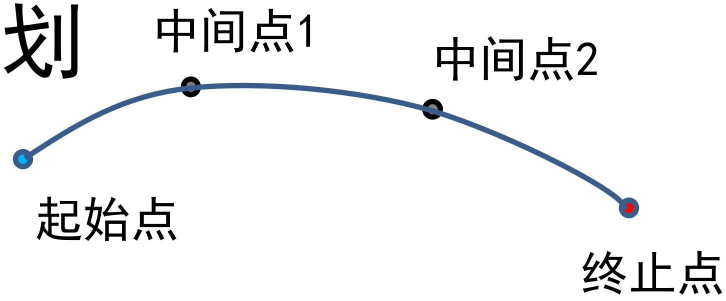
（6）第一中间点速度连续

$$a_1 + 2a_2(\tau_{1f}) + 3a_3(\tau_{1f}) + 4a_4(\tau_{1f})^3 = b_1$$

（7）第一中间点加速度连续

$$2a_2 + 6a_3(\tau_{1f}) + 12a_4(\tau_{1f})^2 = 2b_2$$

第九讲 4-关节空间的轨迹规划



4-3-4轨迹

$$\theta(t)_1 = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4$$

$$\theta(t)_2 = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3$$

$$\theta(t)_3 = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + c_4 t^4$$

（8）在第二中间点位置与第二段3次多项式在本地时间 $\tau_{2f}=0$ 时的末端位置相同，

有

$$\theta_3 = b_0 + b_1\left(\tau_{2f}\right) + b_2\left(\tau_{2f}\right)^2 + b_3\left(\tau_{2f}\right)^3$$

（9）在第二中间点位置与第三段4次多项式在本地时间 $\tau_3=0$ 时的初始位置相同，

有

$$\theta_3 = c_0$$

（10）在第二中间点速度连续

$$b_1 + 2b_2\left(\tau_{2f}\right) + 3b_3\left(\tau_{2f}\right)^2 = c_1$$

（11）第二中间点加速度连续

$$2b_2 + 6b_3\left(\tau_{2f}\right) = 3c_2$$

第九讲 4-关节空间的轨迹规划

4-3-4轨迹

$$\theta(t)_1 = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4$$

$$\theta(t)_2 = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3$$

$$\theta(t)_3 = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + c_4 t^4$$

（12）已知最后运动段在本地时间 τ_{3f} 时的位置 θ_f

$$\theta_f = c_0 + c_1(\tau_{3f}) + c_2(\tau_{3f})^2 + c_3(\tau_{3f})^3 + c_4(\tau_{3f})^4$$

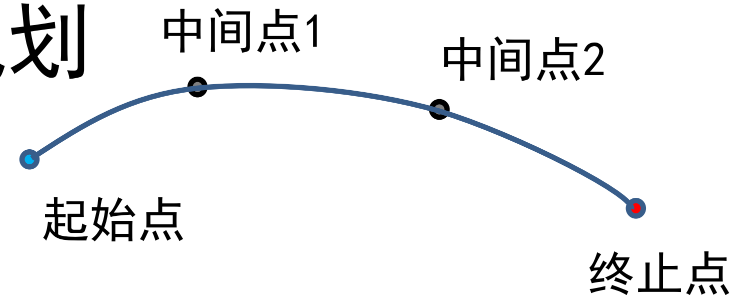
（13）已知最后运动段在本地时间 τ_{3f} 时的速度 $\dot{\theta}_f$

$$\dot{\theta}_f = c_1 + 2c_2(\tau_{3f}) + 3c_3(\tau_{3f})^2 + 4c_4(\tau_{3f})^3$$

（14）已知最后运动段在本地时间 τ_{3f} 时的速度 $\ddot{\theta}_f$

$$\ddot{\theta}_f = 2c_2 + 6c_3(\tau_{3f}) + 12c_4(\tau_{3f})^2$$

第九讲 4-关节空间的轨迹规划



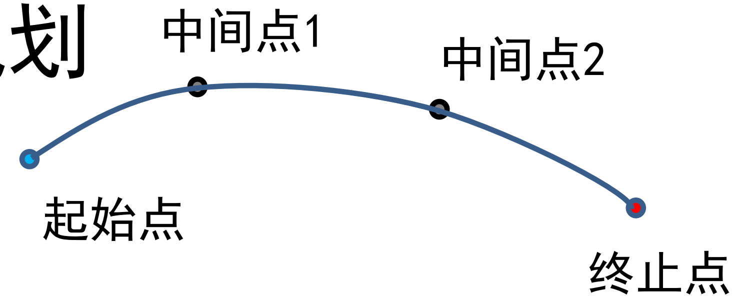
4-3-4轨迹

$$[\theta]=[M][C] \Rightarrow [C]=[M]^{-1}[\theta]$$

具体为：

$$\begin{bmatrix}\theta_1\\ \dot{\theta}_1\\ \ddot{\theta}_1\\ \theta_2\\ \theta_2\\ 0\\ 0\\ \theta_3\\ \theta_3\\ 0\\ 0\\ \theta_4\\ \dot{\theta}_4\\ \ddot{\theta}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&2&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&\tau_{1f}{}^{1}&\tau_{1f}{}^{2}&\tau_{1f}{}^{3}&\tau_{1f}{}^{4}&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&2\tau_{1f}&3\tau_{1f}{}^{2}&4\tau_{1f}{}^{3}&0&-1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&2&6\tau_{1f}&12\tau_{1f}{}^{2}&0&0&-2&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&\tau_{2f}&\tau_{2f}{}^{2}&\tau_{2f}{}^{3}&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&2\tau_{2f}&3\tau_{2f}{}^{2}&0&-1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&2&6\tau_{2f}&0&0&-2&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&\tau_{3f}&\tau_{3f}{}^{2}&\tau_{3f}{}^{3}&\tau_{3f}{}^{4}\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&2\tau_{3f}&3\tau_{3f}{}^{2}&4\tau_{3f}{}^{3}\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&2&6\tau_{3f}&12\tau_{3f}{}^{2}
\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\\ a_3\\ a_4\\ b_0\\ b_1\\ b_2\\ b_3\\ c_0\\ c_1\\ c_2\\ c_3\\ c_4\end{bmatrix}$$

第九讲 4-关节空间的轨迹规划



4-3-4轨迹

例7.4，设该机器人采用4-3-4轨迹从起点经过2个中间点到达终点。给定该机器人的一个关节在三个运动段的位置、速度和运动时间，要求确定其轨迹方程，并绘制出该关节的位置速度和加速度曲线。假设已知：

$$\theta_1 = 30^\circ \quad \dot{\theta}_1 = 0 \quad \ddot{\theta}_1 = 0 \quad \tau_{1i} = 0 \quad \tau_{1f} = 2$$

$$\theta_2 = 50^\circ \quad \tau_{2i} = 0 \quad \tau_{2f} = 4$$

$$\theta_3 = 90^\circ \quad \tau_{3i} = 0 \quad \tau_{3f} = 2$$

$$\theta_4 = 70^\circ \quad \dot{\theta}_4 = 0 \quad \ddot{\theta}_4 = 0$$

代入方程

$$a_0 = 30 \quad b_0 = 50 \quad c_0 = 90$$

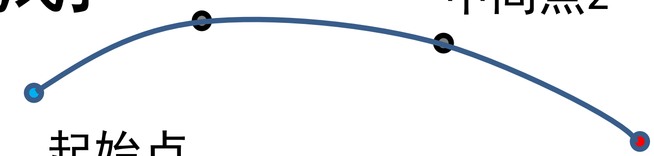
$$a_1 = 0 \quad b_1 = 20.477 \quad c_1 = -13.81$$

$$a_2 = 0 \quad b_2 = 0.714 \quad c_2 = -9.286$$

$$a_3 = 4.881 \quad b_3 = -0.833 \quad c_3 = 9.643$$

$$a_4 = -1.191 \quad c_4 = -2.024$$

第九讲 4-关节空间的轨迹规划



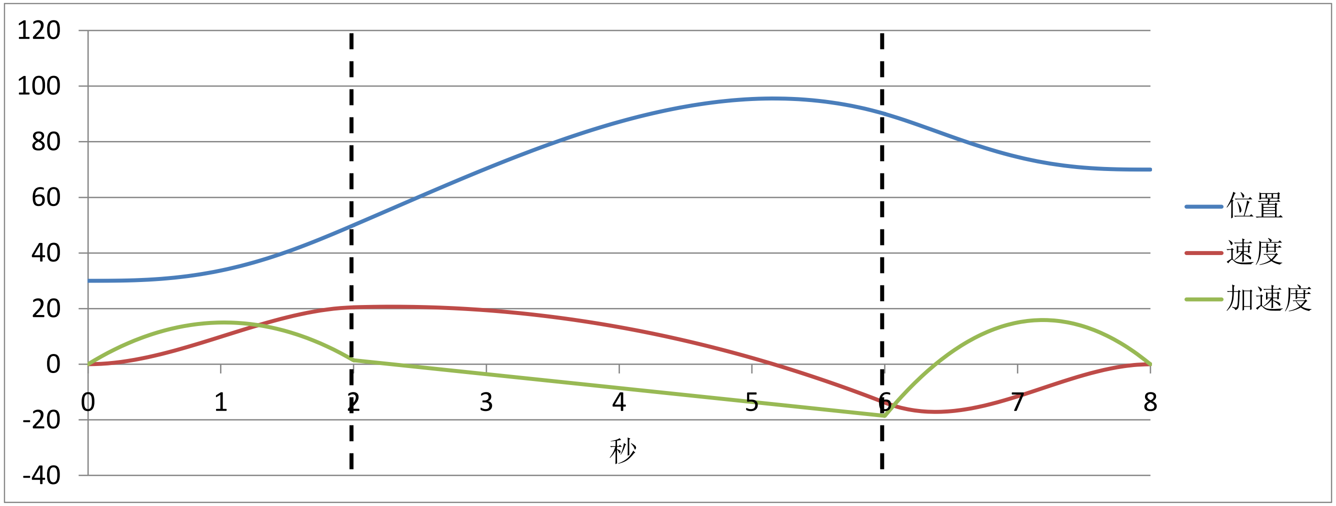
4-3-4轨迹

例7.4，设该机器人采用4-3-4轨迹从起点经过2个中间点到达终点。给定该机器人的一个关节在三个运动段的位置、速度和运动时间，要求确定其轨迹方程，并绘制出该关节的位置速度和加速度曲线。假设已知：

$$\theta(t)_1 = 30 + 4.881t^3 - 1.191t^4 \qquad 0 < t \le 2$$

$$\theta(t)_2 = 50 + 20.477t + 0.714t^2 - 0.833t^3 \qquad 0 < t \le 4$$

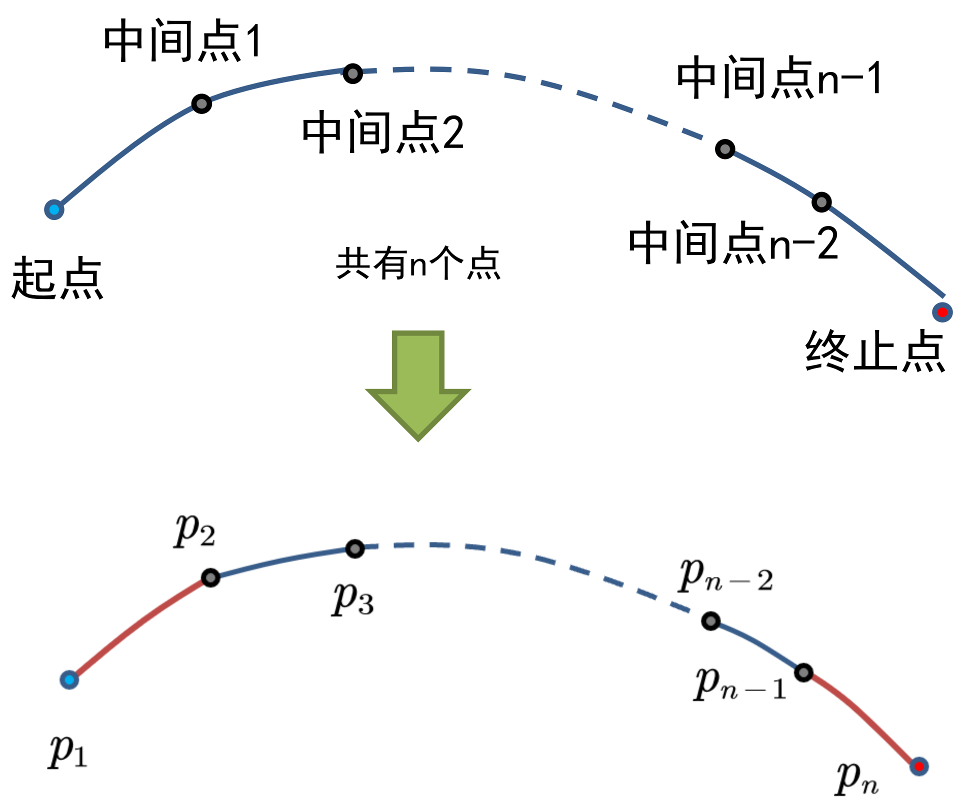
$$\theta(t)_3 = 90 - 13.81t - 9.286t^2 + 9.643t^3 - 2.024t^4 \qquad 0 < t \le 2$$



第九讲 4-关节空间的轨迹规划

4-3…3-4轨迹

当输入的关节角序列 n>3 时，需要**<u>将整段轨迹拆分</u>**后进行434轨迹规划



1. 按照关节角序列的组数n，拆分为2段四次多项式轨迹（红色）以及 n-3 段三次多项式轨迹（蓝色）
2. 其中 p_1~p_2 的轨迹以及 p_{n-1}~p_n 均为四次多项式，表达式如下：

$$\theta(t)_1 = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4$$

$$\theta(t)_{n-1} = h_0 + h_1 t + h_2 t^2 + h_3 t^3 + h_4 t^4$$

3. 从 p_2~p_{n-1} 的轨迹则拆分为n-3段三次多项式轨迹，表达式如下

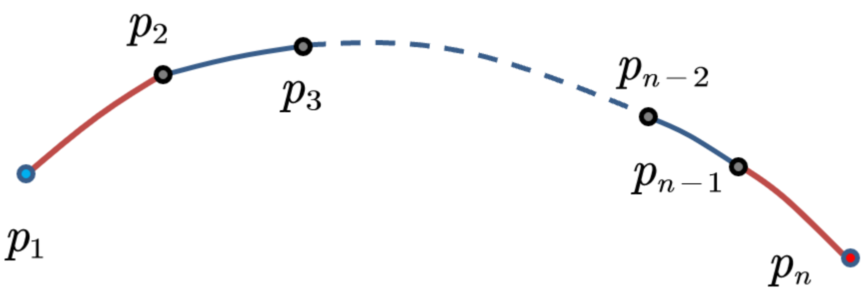
$$\theta(t)_2 = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3$$

$$\theta(t)_{n-2} = m_0 + m_1 t + m_2 t^2 + m_3 t^3$$

其中，$a_0 \sim a_4$，$b_0 \sim b_4 \cdots$，$m_0 \sim m_3$，$h_0 \sim h_4$ 为待定系数，t为本地时间。

第九讲 4-关节空间的轨迹规划

4-3···3-4轨迹



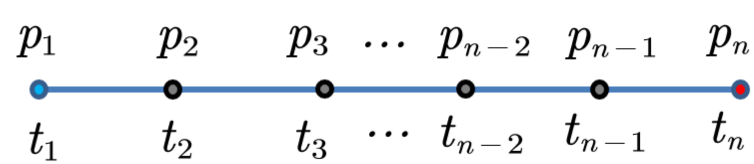
$$\theta(t)_1 = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4$$

$$\left.\begin{aligned} \theta(t)_2 &= b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 \\ &\cdots \\ \theta(t)_{n-2} &= m_0 + m_1 t + m_2 t^2 + m_3 t^3 \end{aligned}\right\} \text{n−3}$$

$$\theta(t)_{n-1} = h_0 + h_1 t + h_2 t^2 + h_3 t^3 + h_4 t^4$$

4. 因此轨迹中一共有5+4x(n-3)+5=4n-2个待定系数，需要4n-2个方程进行求解
5. 对轨迹中的各个点到达的时间t_1，进行如下定义：

$$\Delta t_k = t_{k+1} - t_k = \frac{\theta_{k+1} - \theta_k}{\theta_n - \theta_1} \cdot T$$



Δt_k ——第k段轨迹所用的时间；

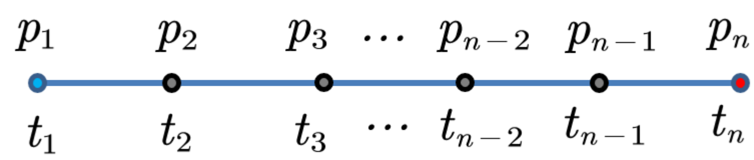
t_k ——抵达pk对应的时间；

θ_k——抵达 p_k 对应的关节角

T ——该段轨迹的总时间；

第九讲 4-关节空间的轨迹规划

4-3⋯3-4轨迹

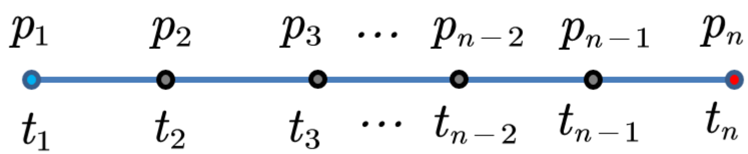


命名规则

路点	路点对应时刻	路径	起始时间（本地）	终止时间（本地）	本地时间段
p_1	t_1 (0)	s_1	$\tau_{s1}=0$	$\tau_{f1}=\Delta t_1$	$\Delta t_1=t_2-t_1$
p_2	t_2	s_2	$\tau_{s2}=0$	$\tau_{f2}=\Delta t_2$	$\Delta t_2=t_3-t_2$
p_3	t_3	s_3	$\tau_{s3}=0$	$\tau_{f3}=\Delta t_3$	$\Delta t_3=t_4-t_3$
p_4	t_4	s_4	$\tau_{s4}=0$	$\tau_{f4}=\Delta t_4$	$\Delta t_4=t_5-t_4$
…	…	…	…	…	…
p_{n-1}	t_{n-1}	s_{n-1}	$\tau_{s\_n-1}=0$	$\tau_{f\_n-1}=\Delta t_{n-1}$	$\Delta t_{n-1}=t_n-t_{n-1}$
p_n	t_n (T)				

第九讲 4-关节空间的轨迹规划

4-3···3-4轨迹



6. 对于起点p_1（$t=t_1=0$），有3个边界条件：

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta(\tau s_{s1})_1 = \theta(0)_1 = a_0 \\ \dot{\theta}_1 = \dot{\theta}(\tau s_{s1})_1 = \dot{\theta}(0)_1 = a_1 \\ \ddot{\theta}_1 = \ddot{\theta}(\tau s_{s1})_1 = \ddot{\theta}(0)_1 = 2a_2 \end{cases}$$

对于p_2（$t=t_2$），有4个边界条件：

$$\begin{cases} \theta_2 = \theta(\tau_{f1})_1 = a_0 + a_1\tau_{f1} + a_2\tau_{f1}^{\ 2} + a_3\tau_{f1}^{\ 3} + a_4\tau_{f1}^{\ 4} \\ \theta_2 = \theta(\tau_{f1})_1 = \theta(\tau_{s2})_2 = b_0 & \text{（角度连续）} \\ \dot{\theta}(\tau_{f1})_1 = \dot{\theta}(\tau_{s2})_2 = b_1 & \text{（角速度连续）} \\ \ddot{\theta}(\tau_{f1})_1 = \ddot{\theta}(\tau_{s2})_2 = 2b_2 & \text{（角加速度连续）} \end{cases}$$

对于p_3到p_{n-1}，各有4个边界条件：

$$\begin{cases} \theta_n = \theta(\tau_{sn})_n \\ \theta(\tau_{sn})_n = \theta(\tau_{fn})_{n\text{-}1} \\ \dot{\theta}(\tau_{sn})_n = \dot{\theta}(\tau_{fn})_{n\text{-}1} \\ \ddot{\theta}(\tau_{sn})_n = \ddot{\theta}(\tau_{fn})_{n\text{-}1} \end{cases}$$

对于终点p_n，有3个边界条件：

$$\begin{cases} \theta_{\mathrm{n}} = \theta(\tau_{fn})_{n\text{-}1} \\ \dot{\theta}_{\mathrm{n}} = \dot{\theta}(\tau_{fn})_{n\text{-}1} \\ \ddot{\theta}_{\mathrm{n}} = \ddot{\theta}(\tau_{fn})_{n\text{-}1} \end{cases}$$

对于路径中的n个路径点，共有：

<u>3+4x（n-2）+3=4n-2</u>条方程，与未知数的个数一致。

τ_{sn} ——第n段轨迹的本地起始时间，=0

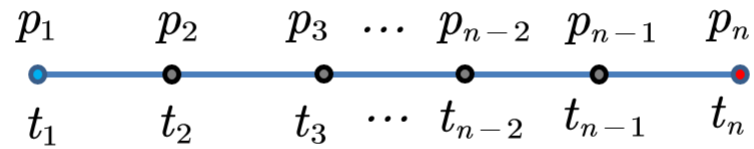
τ_{fn} ——第n段轨迹的本地终止时间，$=\Delta t_k$

$\theta(t)_n$，$\dot{\theta}(t)_n$，$\ddot{\theta}(t)_n$ ——第n段轨迹函数

θ_n ——第n个点对应的角度

第九讲 4-关节空间的轨迹规划

4-3···3-4轨迹



6. 对于起点p_1（$t=t_1=0$），有3个初始条件：

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta(0)_1 = a_0 \\ \dot{\theta}_1 = \dot{\theta}(0)_1 = a_1 \\ \ddot{\theta}_1 = \ddot{\theta}(0)_1 = 2a_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \mathbf{C}_1^{4\text{x}5} A$$

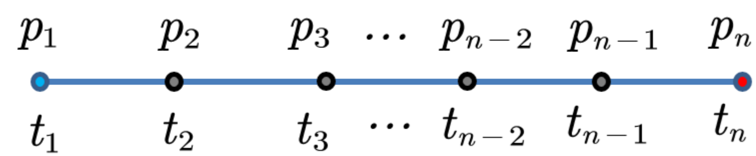
对于p_2（$t=t_2$），有4个初始条件：

$$\begin{cases} \theta_2 = \theta(\tau_{f1})_1 = a_0 + a_1\tau_{f1} + a_2\tau_{f1}^{\ 2} + a_3\tau_{f1}^{\ 3} + a_4\tau_{f1}^{\ 4} \\ \theta_2 = \theta(\tau_{f1})_1 = \theta(0)_2 = b_0 \\ \dot{\theta}(\tau_{f1})_1 = \dot{\theta}(0)_2 = b_1 \rightarrow 0 = \dot{\theta}(\tau_{f1})_1 - b_1 \\ \ddot{\theta}(\tau_{f1})_1 = \ddot{\theta}(0)_2 = 2b_2 \rightarrow 0 = \ddot{\theta}(\tau_{f1})_1 - 2b_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tau_{f1} & \tau_{f1}^{\ 2} & \tau_{f1}^{\ 3} & \tau_{f1}^{\ 4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\tau_{f1} & 3\tau_{f1}^{\ 2} & 4\tau_{f1}^{\ 3} & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6\tau_{f1} & 12\tau_{f1}^{\ 2} & 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1(\tau_{f1})^{4\text{x}5} & \mathbf{C}_2^{\ 4\text{x}4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

第九讲 4-关节空间的轨迹规划

4-3⋯3-4轨迹



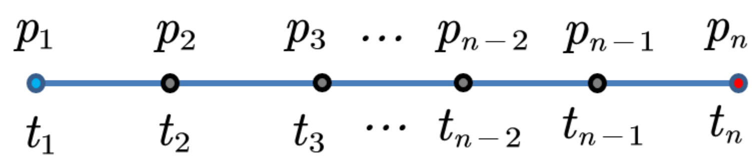
对于中间点p_3（$t=t_3$），有4个初始条件：

$$
\begin{cases}
\theta_3=\theta(\tau_{f2})_2=b_0+b_1\tau_{f2}+b_2\tau_{f2}{}^2+b_3\tau_{f2}{}^3 \\
\theta_3=\theta(0)_3=c_0 \\
\dot{\theta}(\tau_{f2})_2=\dot{\theta}(0)_3=c_1\rightarrow 0=2\dot{\theta}(\tau_{f2})_2-c_1 \\
\ddot{\theta}(\tau_{f2})_2=\ddot{\theta}(0)_3=2c_2\rightarrow 0=2\ddot{\theta}(\tau_{f2})_2-2c_2
\end{cases}
$$

$$
\begin{bmatrix}\theta_3\\ \theta_3\\ 0\\ 0\end{bmatrix}=
\begin{bmatrix}
1 & \tau_{f2} & \tau_{f2}{}^2 & \tau_{f2}{}^3 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 2\tau_{f2} & 3\tau_{f2}{}^2 & 0 & -1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 2 & 6\tau_{f2} & 0 & 0 & -2 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}b_0\\ b_1\\ b_2\\ b_3\\ c_0\\ c_1\\ c_2\\ c_3\end{bmatrix}
=\begin{bmatrix}\mathbf{V}_2(\tau_{f2})^{4\text{x}4} & \mathbf{C}_2{}^{4\text{x}4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B\\ C\end{bmatrix}
$$

第九讲 4-关节空间的轨迹规划

4-3…3-4轨迹



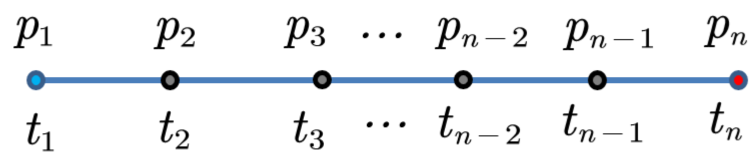
对于中间点p_i（2<i<=n-1，同p3），有4个初始条件：

$$\begin{cases} \theta_i = \theta(\tau_{f\_i-1})_{i-1} = m_0 + m_1\tau_{f\_i-1} + m_2\tau_{f\_i-1}{}^2 + m_3\tau_{f\_i-1}{}^3 \\ \theta_i = \theta(0)_i = n_0 \\ \dot{\theta}(\tau_{f\_i-1})_{i-1} = \dot{\theta}(0)_i = n_1 \rightarrow 0 = 2\dot{\theta}(\tau_{f\_i-1})_{i-1} - n_1 \\ \ddot{\theta}(\tau_{f\_i-1})_{i-1} = \ddot{\theta}(0)_i = 2n_2 \rightarrow 0 = 2\ddot{\theta}(\tau_{f\_i-1})_{i-1} - 2n_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \theta_i \\ \theta_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tau_{f\_i-1} & \tau_{f\_i-1}{}^2 & \tau_{f\_i-1}{}^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\tau_{f\_i-1} & 3\tau_{f\_i-1}{}^2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6\tau_{f\_i-1} & 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ n_0 \\ n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_2(\tau_{f\_i-1})^{4\text{x}4} & \mathbf{C}_2{}^{4\text{x}4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix}$$

第九讲 4-关节空间的轨迹规划

4-3···3-4轨迹



对于最后一个路径点p_n, 有如下3个边界条件：

$$\begin{cases} \theta_n = \theta(\tau_{f\_n-1})_{n-1} \\ \dot{\theta}_n = \dot{\theta}(\tau_{f\_n-1})_{n-1} \\ \ddot{\theta}_n = \ddot{\theta}(\tau_{f\_n-1})_{n-1} \end{cases}$$

τ_{f_n-1} ——第$n-1$段轨迹的终止时间，即$t_n - t_{n-1}$

$$\begin{bmatrix} \theta_n \\ \dot{\theta}_n \\ \ddot{\theta}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tau_{f\_n-1} & \tau_{f\_n-1}^{\;2} & \tau_{f\_n-1}^{\;3} & \tau_{f\_n-1}^{\;4} \\ 0 & 1 & 2\tau_{f\_n-1} & 3\tau_{f\_n-1}^{\;2} & 4\tau_{f\_n-1}^{\;3} \\ 0 & 0 & 2 & 6\tau_{f\_n-1} & 12\tau_{f\_n-1}^{\;2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{bmatrix} = \mathbf{V}_3(\tau_{f\_n-1})^{3x5} H$$

第九讲 4-关节空间的轨迹规划

4-3…3-4轨迹

$$\begin{bmatrix}\theta_1\\ \dot{\theta}_1\\ \ddot{\theta}_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&2&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{bmatrix}=\mathbf{C}_1^{4\mathrm{x}5}A$$

$$\begin{bmatrix}\theta_2\\ \theta_2\\ 0\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&\tau_{f1}&\tau_{f1}^2&\tau_{f1}^3&\tau_{f1}^4&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&2\tau_{f1}&3\tau_{f1}^2&4\tau_{f1}^3&0&-1&0&0\\0&0&2&6\tau_{f1}&12\tau_{f1}^2&0&0&-2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\\a_3\\a_4\\b_0\\b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{V}_1(\tau_{f1})^{4\mathrm{x}5} & \mathbf{C}_2^{4\mathrm{x}4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\theta_3\\ \theta_3\\ 0\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&\tau_{f2}&\tau_{f2}^2&\tau_{f2}^3&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&2\tau_{f2}&3\tau_{f2}^2&0&-1&0&0\\0&0&2&6\tau_{f2}&0&0&-2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_0\\b_1\\b_2\\b_3\\c_0\\c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{V}_2(\tau_{f2})^{4\mathrm{x}4} & \mathbf{C}_2^{4\mathrm{x}4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B\\C\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\theta_n\\ \dot{\theta}_n\\ \ddot{\theta}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&\tau_{f\_n-1}&\tau_{f\_n-1}^2&\tau_{f\_n-1}^3&\tau_{f\_n-1}^4\\0&1&2\tau_{f\_n-1}&3\tau_{f\_n-1}^2&4\tau_{f\_n-1}^3\\0&0&2&6\tau_{f\_n-1}&12\tau_{f\_n-1}^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_0\\h_1\\h_2\\h_3\\h_4\end{bmatrix}=\mathbf{V}_3(\tau_{f\_n-1})^{3\mathrm{x}5}H$$

第九讲 4-关节空间的轨迹规划

4-3⋯3-4轨迹

对于整段轨迹，可以表示为 $[\Theta]=[M][C]$ n≥4

$$\begin{bmatrix}\Theta_1\\\Theta_2\\\Theta_3\\\vdots\\\Theta_{n-1}\\\Theta_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{C}_1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \mathbf{V}_1(\tau_{f1}) & \mathbf{C}_2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \mathbf{V}_2(\tau_{f2}) & \mathbf{C}_2 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \mathbf{V}_2(\tau_{f3}) & \ddots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{V}_3(\tau_{f\_n-1})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A\\B\\C\\\vdots\\N\\H\end{bmatrix}$$

其中：

$$\Theta_1=\begin{bmatrix}\theta_1\\\dot{\theta}_1\\\ddot{\theta}_1\end{bmatrix}\qquad \Theta_{\mathrm{i}}=\begin{bmatrix}\theta_i\\\theta_i\\0\\0\end{bmatrix},(1<i<n)\qquad \Theta_{\mathrm{n}}=\begin{bmatrix}\theta_n\\\dot{\theta}_n\\\ddot{\theta}_n\end{bmatrix}$$