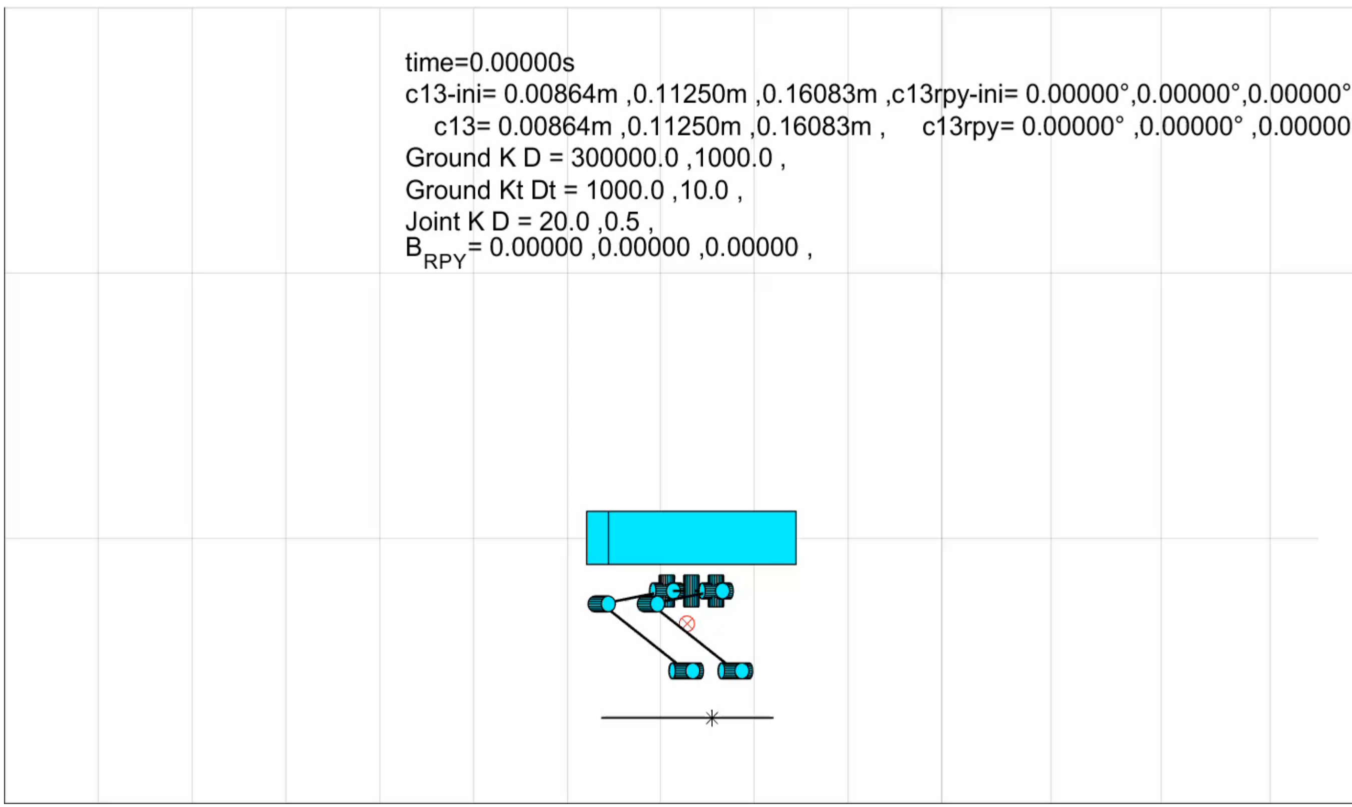
机器人学

第十讲　动力学及仿真实践



黄之峰 副教授

广东工业大学

2018-07-03

主要内容：

1，正逆动力学的意义

2，逆动力学分析

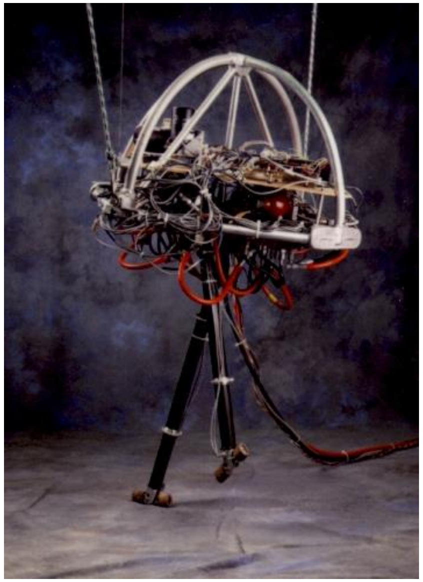
- 拉格朗日法
- 牛顿欧拉法

3，正动力学仿真

- 单位矢量法

10.1 正逆动力学的意义

机器人动力学是研究机器人的运动和作用力之间的关系。



http://www.ai.mit.edu/projects/leglab/robots/robots.html

机器人动力学的用途：

机器人的最优控制：优化性能指标和动态性能，调整伺服增益；

设计机器人：算出实现预定运动所需的力/力矩；

机器人的仿真：根据连杆质量、负载、传动特征的动态性能仿真

机器人是一个具有多输入和多输出的复杂动力学系统，存在严重的**非线性**，需要非常系统的方法来处理。

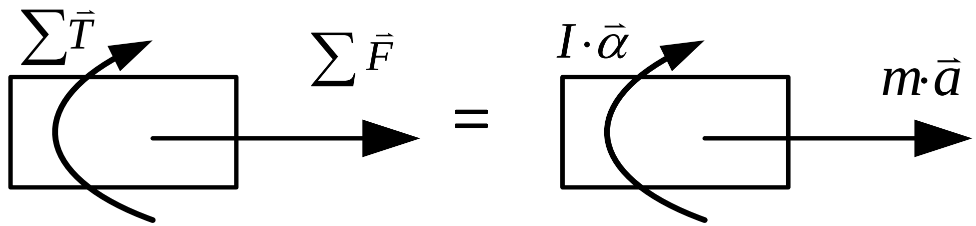
10.1 正逆动力学的意义

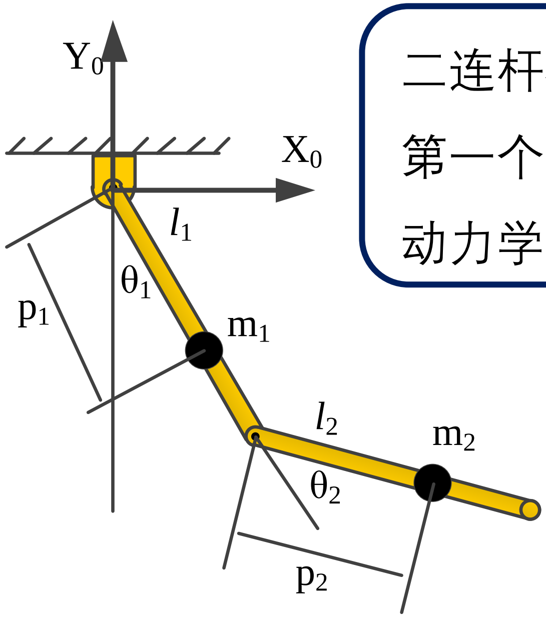
动力学的正问题：给定力/力矩，求解机器人的运动（位移，速度及加速度）；

动力学的逆问题：已知机器人的运动，计算相应的力/力矩，即实现预定运动所需施加的力矩/力；

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$\sum \vec{T} = I \cdot \vec{\alpha}$$





二连杆机器人第一个关节的动力学表达式

逆动力学

$$\tau_1 = D_{11}\ddot{\theta}_1 + D_{12}\ddot{\theta}_2 + D_{112}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + D_{122}\dot{\theta}_2^{\;2} + D_1$$

正动力学

$$\begin{cases} D_{11} = m_1 p_1^{\;2} + m_2 l_1^{\;2} + m_2 p_2^{\;2} + 2 m_2 l_1 p_2 c_2 \\ D_{12} = m_2 p_2^{\;2} + m_2 l_1 p_2 c_2 \\ D_{112} = -2 m_2 l_1 p_2 s_2 \\ D_{122} = -m_2 l_1 p_2 s_2 \\ D_1 = \left(m_1 p_1 + m_2 l_1\right) g s_1 + m_2 g p_2 s_{12} \end{cases}$$

10.1 正逆动力学的意义

- 逆动力学：
  - **机器人设计**关节动力源选型。
  - **前馈控制**实现更好的轨迹跟踪。
  - **正动力学**数值计算

- 正动力学
  - 动力学**仿真**，评价及优化控制增益

10.2 逆动力学分析方法——拉格朗日法

研究机器人动力学的主要方法有：拉格朗日（Langrange）、牛顿-欧拉(Newton-Euler)、高斯(Gauss)、凯恩(Kane)法以及罗伯逊-魏登堡(Robson-Wittenburg)等。

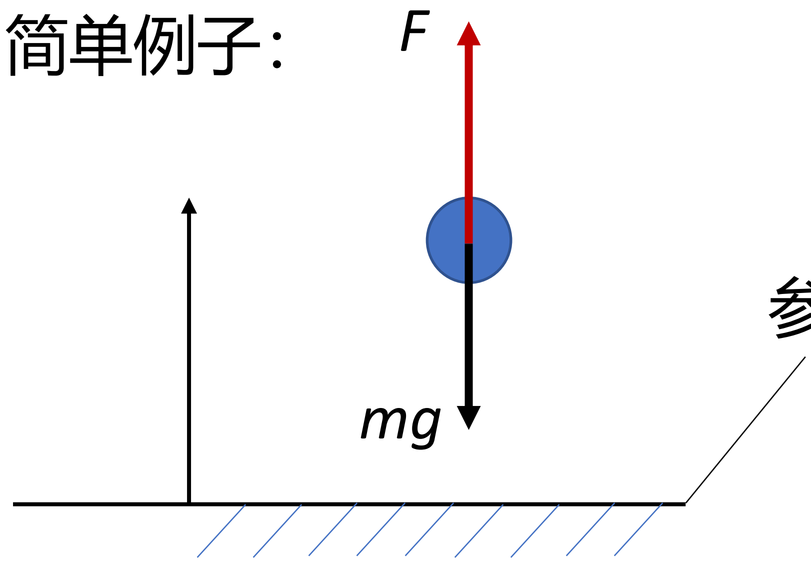
拉格朗日(Langrange)法：能以最简单的形式求得非常复杂的系统动力学方程，而且具有显式结构。

拉格朗日方程： $F_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}$ 拉格朗日算子： $L = E_k - E_p$

令 $q_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是系统具有完全确定位置的广义关节变量, $\dot{q}_i$ 是相应的广义关节速度。由于系统动能 E_k 是 q_i 和 $\dot{q}_i$ 的函数，系统势能 E_p 是 q_i 的函数，因此拉格朗日函数也是 q_i 和 $\dot{q}_i$ 的函数。

10.2 逆动力学分析方法——拉格朗日法

简单例子：



定义向上为正方向则有：

$$m\ddot{y} = F - mg$$

$$m\ddot{y} = \frac{d}{dt}(m\dot{y}) = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{y}}(\frac{1}{2}m\dot{y}^2) = \frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{y}}$$

$$mgy = \frac{\partial}{\partial y}(mgy) = \frac{\partial E_p}{\partial y}$$

$$F = m\ddot{y} + mg = \frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{y}} + \frac{\partial E_p}{\partial y}$$

令：$L = E_k - E_p$

$$\Rightarrow \quad F = \frac{d}{dt}\frac{\partial (L)}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial (L)}{\partial y}$$

10.2 逆动力学分析方法——拉格朗日法

拉格朗日方程

$$\left.\begin{array}{l} q_i\ \text{为位移变量时，}F_i\ \text{为驱动力} \\ q_i\ \text{为角度变量时，}F_i\ \text{为驱动力矩} \end{array}\right\}\ \text{广义驱动力}\quad F_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

$L = E_k - E_p$ 代入拉格朗日方程中有：

$$F_i = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial E_k}{\partial q_i}\right) - \left(\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial E_p}{\partial \dot{q}_i}} - \frac{\partial E_p}{\partial q_i}\right)$$

由于势能不包含 $\dot{q}_i$ 项，故该项为0

$$F_i = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial E_k}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial E_p}{\partial q_i}$$

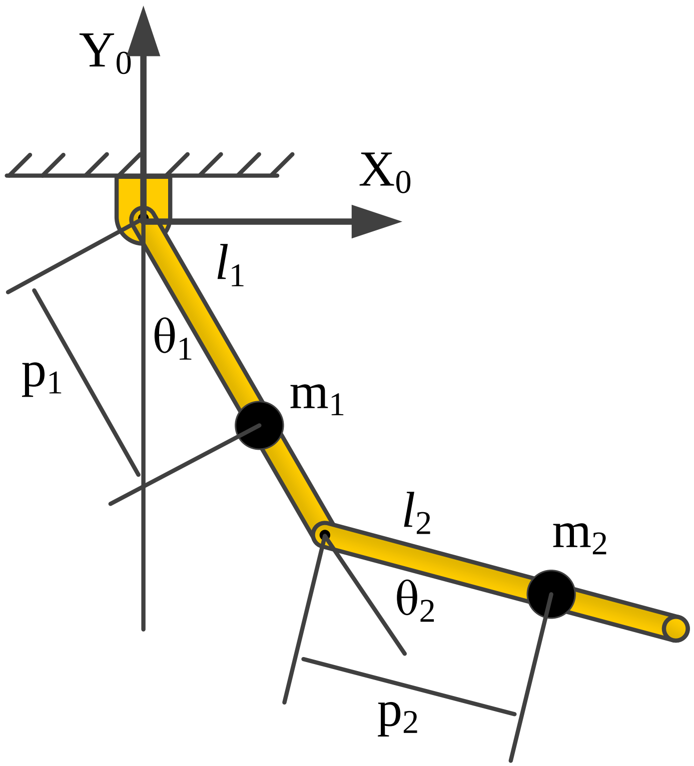
10.2 逆动力学分析方法——拉格朗日法

用拉格朗日法建立机器人动力学方程的步骤

1. 选取坐标系，选定完全独立的广义关节变量 $q_i(i=1,2,\cdots,n)$
2. 选定相应关节上的广义力： 当 q_i 为位移变量时， 则 F_i 为力； 当 q_i 是角度变量时，则 F_i 为力矩。
3. 求出机器人各个构件的动能和势能，构造拉格朗日函数。
4. 代入拉格朗日方程求得机器人系统的动力学方程

10.2 逆动力学分析方法——拉格朗日法

二自由度平面关节机器人的动力学方程



1 广义关节变量及广义力的选定

杆1质心的位置：

$$x_1 = p_1 s_1$$

$$y_1 = -p_1 c_1$$

杆1质心的速度平方为

$$\dot{x}_1{}^2 + \dot{y}_1{}^2 = (p_1 \dot{\theta}_1)^2$$

杆2质心的位置为：

$$x_2 = l_1 s_1 + p_2 s_{12}$$

$$y_2 = -l_1 c_1 - p_2 c_{12}$$

杆2质心的速度平方为：

$$\dot{x}_2 = l_1 c_1 \dot{\theta}_1 + p_2 c_{12} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)$$

$$\dot{y}_2 = l_1 s_1 \dot{\theta}_1 + p_2 s_{12} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)$$

$$\dot{x}_2{}^2 + \dot{y}_2{}^2 = l_1{}^2 \dot{\theta}_1{}^2 + p_2{}^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + 2 l_1 p_2 (\dot{\theta}_1{}^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) c_2$$

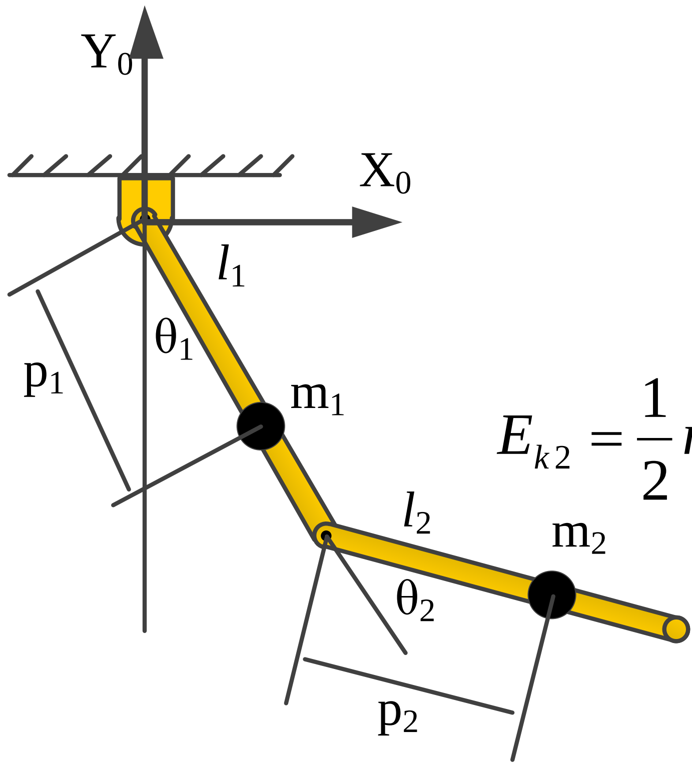
10.2 逆动力学分析方法——拉格朗日法

二自由度平面关节机器人的动力学方程

2 系统动能

$$\dot{x}_1^{\ 2} + \dot{y}_1^{\ 2} = (p_1\dot{\theta}_1)^2$$

$$\dot{x}_2^{\ 2} + \dot{y}_2^{\ 2} = l_1^{\ 2}\dot{\theta}_1^{\ 2} + p_2^{\ 2}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + 2l_1 p_2(\dot{\theta}_1^{\ 2} + \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2)c_2$$



$$E_{k1} = \frac{1}{2}m_1 p_1^{\ 2}\dot{\theta}_1^{\ 2}$$

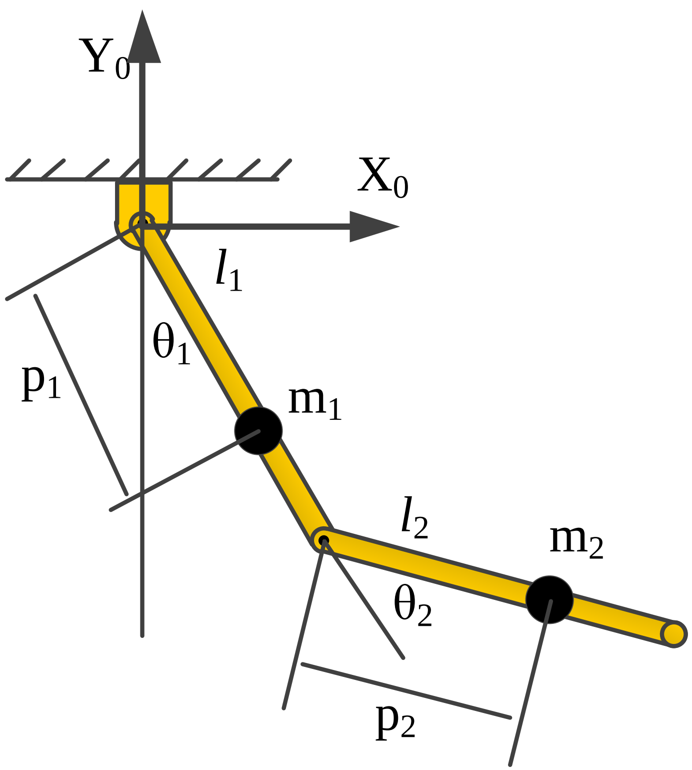
$$E_{k2} = \frac{1}{2}m_2 l_1^{\ 2}\dot{\theta}_1^{\ 2} + \frac{1}{2}m_2 p_2^{\ 2}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + m_2 l_1 p_2(\dot{\theta}_1^{\ 2} + \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2)c_2$$

$$E_k = \sum E_{ki}, i = 1,2$$

10.2 逆动力学分析方法——拉格朗日法

二自由度平面关节机器人的动力学方程

3 系统势能



$$x_1 = p_1 s_1 \qquad x_2 = l_1 s_1 + p_2 s_{12}$$

$$y_1 = -p_1 c_1 \qquad y_2 = -l_1 c_1 - p_2 c_{12}$$

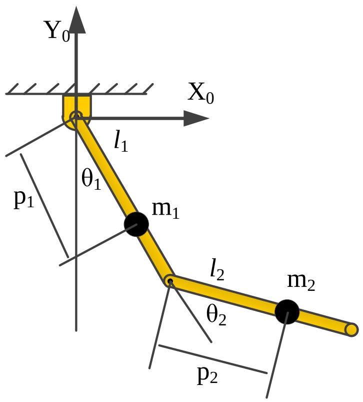
$$E_{p1} = -m_1 g p_1 c_1 - (-m_1 g p_1) = m_1 g p_1 (1 - c_1)$$

$$E_{p2} = m_2 g(-l_1 c_1 - p_2 c_{12}) - m_2 g(-l_1 - p_2)$$
$$= m_2 g l_1 (1 - c_1) + m_2 g p_2 (1 - c_{12})$$

$$E_p = \sum E_{pi}, i = 1,2$$

10.2 逆动力学分析方法——拉格朗日法

二自由度平面关节机器人的动力学方程



5 系统动力学方程

$$F_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

$$L = E_k - E_p =$$

$$\frac{1}{2}\left(m_1 p_1^{\,2} + m_2 l_1^{\,2}\right)\dot{\theta}_1^{\,2} + \frac{1}{2} m_2 p_2^{\,2}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + m_2 l_1 p_2 (\dot{\theta}_1^{\,2} + \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2) c_2$$

$$-(m_1 p_1 + m_2 l_1) g (1 - c_1) - m_2 g p_2 (1 - c_{12})$$

关节1 有： $\tau_1 = \boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right)} - \boxed{\frac{\partial L}{\partial \theta_1}}$

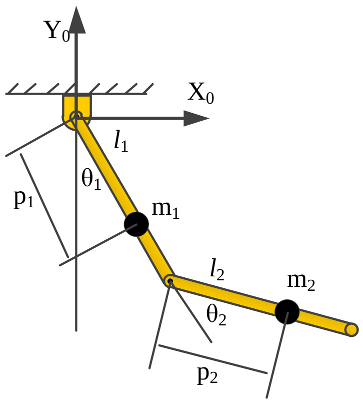
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = \left(m_1 p_1^{\,2} + m_2 l_1^{\,2}\right)\dot{\theta}_1 + m_2 p_2^{\,2}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + m_2 l_1 p_2 (2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) c_2$$

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} &= \left(m_1 p_1^{\,2} + m_2 l_1^{\,2} + m_2 p_2^{\,2} + 2 m_2 l_1 p_2 c_2\right)\ddot{\theta}_1 + \left(m_2 p_2^{\,2} + m_2 l_1 p_2 c_2\right)\ddot{\theta}_2 \\ &+ \left(-2 m_2 l_1 p_2 s_2\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \left(-m_2 l_1 p_2 s_2\right)\dot{\theta}_2^{\,2}\end{aligned}}$$

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -(m_1 p_1 + m_2 l_1) g s_1 - m_2 g p_2 s_{12}}$$

10.2 逆动力学分析方法——拉格朗日法

二自由度平面关节机器人的动力学方程



5 系统动力学方程

$$F_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

$$L = E_k - E_p =$$

$$\frac{1}{2}\left(m_1 p_1^{\ 2} + m_2 l_1^{\ 2}\right)\dot{\theta}_1^{\ 2} + \frac{1}{2} m_2 p_2^{\ 2}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + m_2 l_1 p_2(\dot{\theta}_1^{\ 2} + \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2)c_2$$

$$-\left(m_1 p_1 + m_2 l_1\right) g(1 - c_1) - m_2 g p_2 (1 - c_{12})$$

关节2 有： $\tau_2 = \boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right)} - \boxed{\frac{\partial L}{\partial \theta_2}}$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 p_2^{\ 2}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + m_2 l_1 p_2 \dot{\theta}_1 c_2$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = \left(m_2 p_2^{\ 2} + m_2 l_1 p_2 c_2\right)\ddot{\theta}_1 + m_2 p_2^{\ 2}\ddot{\theta}_2 - m_2 l_1 p_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 s_2}$$

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -m_2 l_1 p_2(\dot{\theta}_1^{\ 2} + \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2)s_2 - m_2 g p_2 s_{12}}$$

10.2 逆动力学分析方法——拉格朗日法

二自由度平面关节机器人的动力学方程

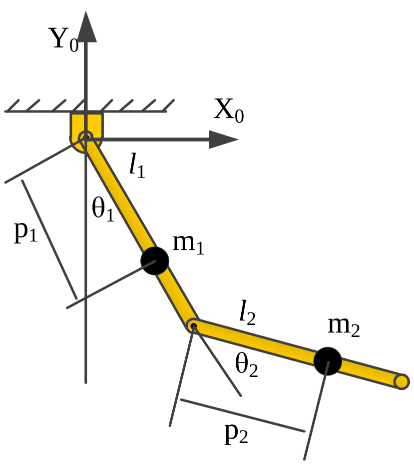
整理：

$$\tau_1 = D_{11}\ddot{\theta}_1 + D_{12}\ddot{\theta}_2 + D_{112}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + D_{122}\dot{\theta}_2^{\,2} + D_1$$

$$\tau_2 = D_{21}\ddot{\theta}_1 + D_{22}\ddot{\theta}_2 + D_{212}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + D_{211}\dot{\theta}_1^{\,2} + D_2$$

$$\boxed{\begin{cases} D_{11} = m_1 p_1^{\,2} + m_2 l_1^{\,2} + m_2 p_2^{\,2} + 2m_2 l_1 p_2 c_2 \\ D_{12} = m_2 p_2^{\,2} + m_2 l_1 p_2 c_2 \\ D_{112} = -2m_2 l_1 p_2 s_2 \\ D_{122} = -m_2 l_1 p_2 s_2 \\ D_1 = (m_1 p_1 + m_2 l_1) g s_1 + m_2 g p_2 s_{12} \end{cases}}$$

$$\boxed{\begin{cases} D_{21} = m_2 p_2^{\,2} + m_2 l_1 p_2 c_2 \\ D_{22} = m_2 p_2^{\,2} \\ D_{212} = -m_2 l_1 p_2 s_2 + m_2 l_1 p_2 s_2 \\ D_{211} = m_2 l_1 p_2 s_2 \\ D_2 = m_2 g p_2 s_{12} \end{cases}}$$



对于含有 $\ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2$ 项

其中，D11和D22分别表示由于关节1加速度和关节2加速度引起的惯性力矩项

D12表示关节2的加速度对关节1的耦合惯性力矩项；

D21表示关节1的加速度对关节2的耦合惯性力矩项；

10.2 逆动力学分析方法——拉格朗日法

二自由度平面关节机器人的动力学方程

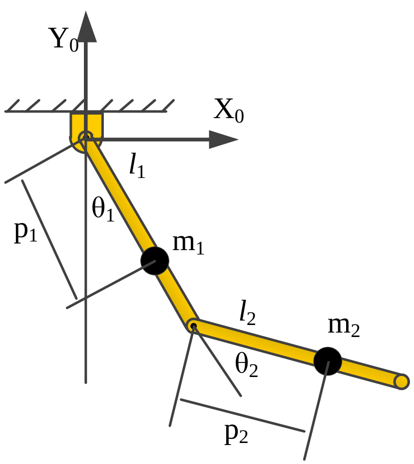
整理：

$$\tau_1 = D_{11}\ddot{\theta}_1 + D_{12}\ddot{\theta}_2 + D_{112}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + D_{122}\dot{\theta}_2^{\ 2} + D_1$$

$$\tau_2 = D_{21}\ddot{\theta}_1 + D_{22}\ddot{\theta}_2 + D_{212}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + D_{211}\dot{\theta}_1^{\ 2} + D_2$$

$$\boxed{\begin{cases} D_{11} = m_1 p_1^{\ 2} + m_2 l_1^{\ 2} + m_2 p_2^{\ 2} + 2m_2 l_1 p_2 c_2 \\ D_{12} = m_2 p_2^{\ 2} + m_2 l_1 p_2 c_2 \\ D_{112} = -2m_2 l_1 p_2 s_2 \\ D_{122} = -m_2 l_1 p_2 s_2 \\ D_1 = (m_1 p_1 + m_2 l_1) g s_1 + m_2 g p_2 s_{12} \end{cases}}$$

$$\boxed{\begin{cases} D_{21} = m_2 p_2^{\ 2} + m_2 l_1 p_2 c_2 \\ D_{22} = m_2 p_2^{\ 2} \\ D_{212} = -m_2 l_1 p_2 s_2 + m_2 l_1 p_2 s_2 \\ D_{211} = m_2 l_1 p_2 s_2 \\ D_2 = m_2 g p_2 s_{12} \end{cases}}$$



对于含有 $\dot{\theta}_1^{\ 2}, \dot{\theta}_2^{\ 2}$ 项，表示由于向心力引起的关节力矩项

其中， $\boxed{F_{向心力} = \mathrm{m}r\omega^2}$

D_{122}项表示关节2速度引起的向心力对关节1的耦合力矩项。

D_{211}项表示关节1速度引起的向心力对关节2的耦合力矩项。

10.2 逆动力学分析方法——拉格朗日法

二自由度平面关节机器人的动力学方程

整理：

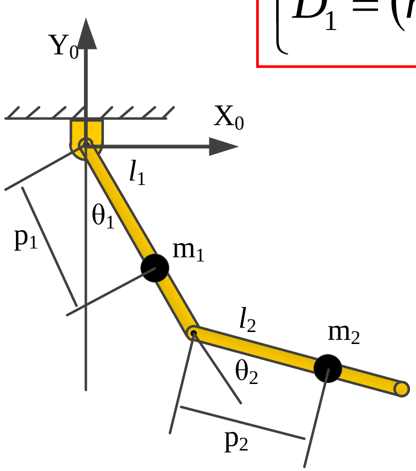
$$\tau_1 = D_{11}\ddot{\theta}_1 + D_{12}\ddot{\theta}_2 + D_{112}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + D_{122}\dot{\theta}_2^{\,2} + D_1$$

$$\tau_2 = D_{21}\ddot{\theta}_1 + D_{22}\ddot{\theta}_2 + D_{212}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + D_{211}\dot{\theta}_1^{\,2} + D_2$$

$$\begin{bmatrix}\tau_1\\ \tau_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}D_{11} & D_{12}\\ D_{21} & D_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{\theta}_1\\ \ddot{\theta}_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}D_{111} & D_{122}\\ D_{212} & D_{222}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1^{\,2}\\ \dot{\theta}_2^{\,2}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}D_{112} & D_{121}\\ D_{212} & D_{221}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\\ \dot{\theta}_2\dot{\theta}_1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}D_1\\ D_2\end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{cases} D_{11} = m_1 p_1^{\,2} + m_2 l_1^{\,2} + m_2 p_2^{\,2} + 2m_2 l_1 p_2 c_2 \\ D_{12} = m_2 p_2^{\,2} + m_2 l_1 p_2 c_2 \\ D_{112} = -2m_2 l_1 p_2 s_2 \\ D_{122} = -m_2 l_1 p_2 s_2 \\ D_1 = (m_1 p_1 + m_2 l_1) g s_1 + m_2 g p_2 s_{12} \end{cases}}$$

$$\boxed{\begin{cases} D_{21} = m_2 p_2^{\,2} + m_2 l_1 p_2 c_2 \\ D_{22} = m_2 p_2^{\,2} \\ D_{212} = -m_2 l_1 p_2 s_2 + m_2 l_1 p_2 s_2 \\ D_{211} = m_2 l_1 p_2 s_2 \\ D_2 = m_2 g p_2 s_{12} \end{cases}}$$



对于含有 $\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2$ 项，表示由于哥式力引起的关节力矩项，其中

D_{112}项表示哥式力对关节1的耦合力矩项，D_{221}，D_{121}=0。

D_{212}项表示哥式力对关节2的耦合力矩项，此处为0。

10.2 逆动力学分析方法——拉格朗日法

二自由度平面关节机器人的动力学方程

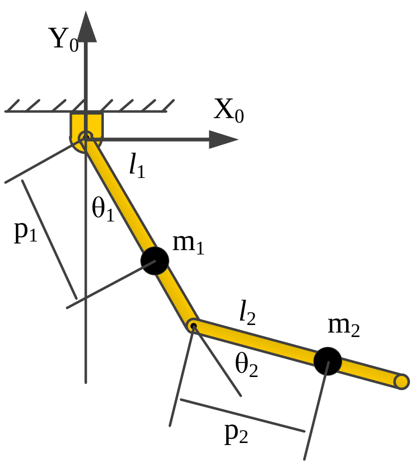
整理：

$$\tau_1 = D_{11}\ddot{\theta}_1 + D_{12}\ddot{\theta}_2 + D_{112}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + D_{122}\dot{\theta}_2^{\,2} + D_1$$

$$\tau_2 = D_{21}\ddot{\theta}_1 + D_{22}\ddot{\theta}_2 + D_{212}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + D_{211}\dot{\theta}_1^{\,2} + D_2$$

$$\boxed{\begin{cases} D_{11} = m_1 p_1^{\,2} + m_2 l_1^{\,2} + m_2 p_2^{\,2} + 2m_2 l_1 p_2 c_2 \\ D_{12} = m_2 p_2^{\,2} + m_2 l_1 p_2 c_2 \\ D_{112} = -2m_2 l_1 p_2 s_2 \\ D_{122} = -m_2 l_1 p_2 s_2 \\ D_1 = (m_1 p_1 + m_2 l_1) g s_1 + m_2 g p_2 s_{12} \end{cases}}$$

$$\boxed{\begin{cases} D_{21} = m_2 p_2^{\,2} + m_2 l_1 p_2 c_2 \\ D_{22} = m_2 p_2^{\,2} \\ D_{212} = -m_2 l_1 p_2 s_2 + m_2 l_1 p_2 s_2 \\ D_{211} = m_2 l_1 p_2 s_2 \\ D_2 = m_2 g p_2 s_{12} \end{cases}}$$



对于只含有 θ_1, θ_2 项，表示重力引起的关节力矩项，其中

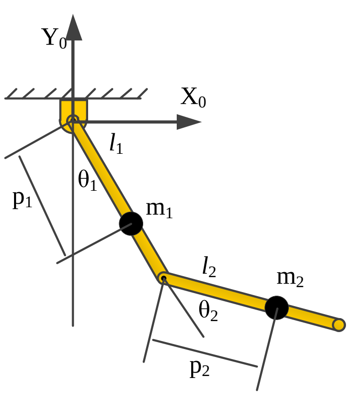
D_1项表示连杆1、2的质量对关节1引起的重力矩项。

D_2表示连杆2的质量对关节2引起的重力矩项。

10.2 逆动力学分析方法——拉格朗日法

总结：

- 即使是简单的二自由度平面关节机器人，其动力学方程已经很复杂了，包含很多因素，这些因素都会影响机器人的动力学特性。
- 对于复杂一些的多自由度机器人，动力学方程更加庞杂。
- 复杂的动力学方程会对机器人的**实时控制**带来巨大的挑战。



10.2 逆动力学分析方法——拉格朗日法

常用的简化策略：

1. 当杆件质量不很大，重量很轻时，动力学方程中的重力项可以忽略。
2. 当关节速度不很大，机器人不是高速机器人时，含向心力项，哥式力项等可以省略。
3. 当关节加速度不很大，也就是关节电机的加减速不是很突然时，含有 $\ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2$ 的项有可能给予省略，但是会影响机器人的循环作业时间。

10.2 逆动力学分析方法——拉格朗日法

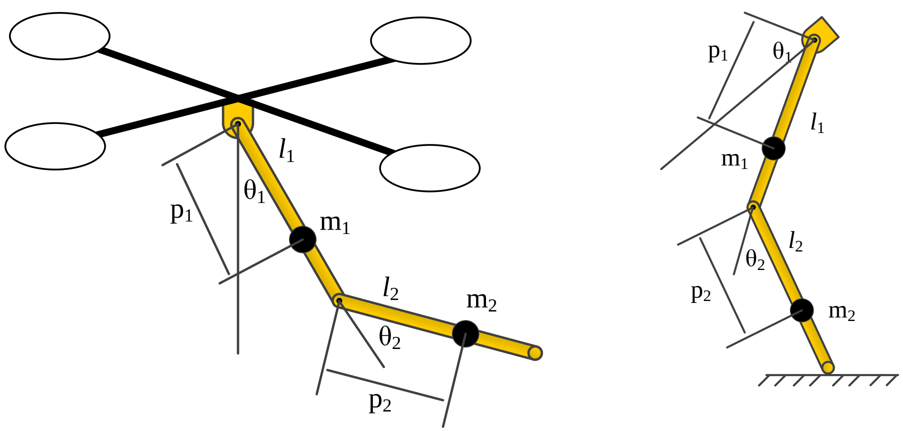
拉格朗日法的局限?

在Lagrange法中，系统的动力学性能利用广义坐标以功和能来表达，故不做功的力和约束力将自动取消，因而方程推导简单，系统性强，可以给出紧凑形式的表达。

魏禹, 古青波, & 彭浩宸. (2012). 跳跃机器人各关节的动力学仿真分析. 应用科技, 000(003), 1-4.

前面的推导都是针对固定基座的条件下，对于非固定基座情况将变得更加复杂

例如，单纯利用拉格朗日法无法描述浮动基座在受力下运动，如果是无人机悬挂的情况下需要考虑这个影响，同样，也无法分析弹跳时对地面的作用力。



10.2 逆动力学分析方法——牛顿欧拉法

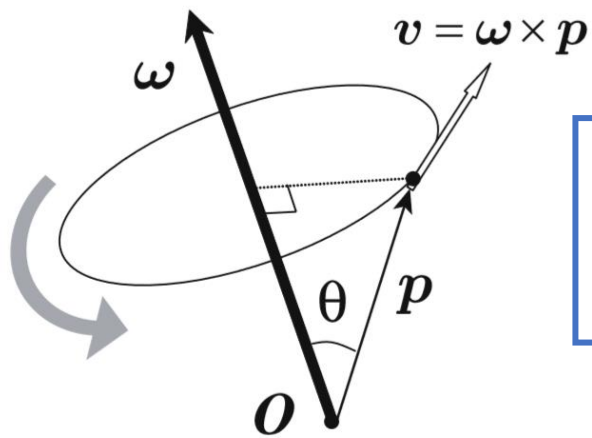
转动刚体的动力学

角速度与姿态矩阵

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

$$\hat{\omega} = \omega\times = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix}$$



$$\left\{\begin{aligned} p &= R\overline{p} \\ \dot{p} &= \omega\times p \\ \dot{p} &= \underbrace{\dot{R}\overline{p}}_{R^{-1}p} + \underbrace{R\dot{\overline{p}}}_{0} \end{aligned}\right.$$

$$\boxed{\hat{\omega} = \dot{R}R^T}$$

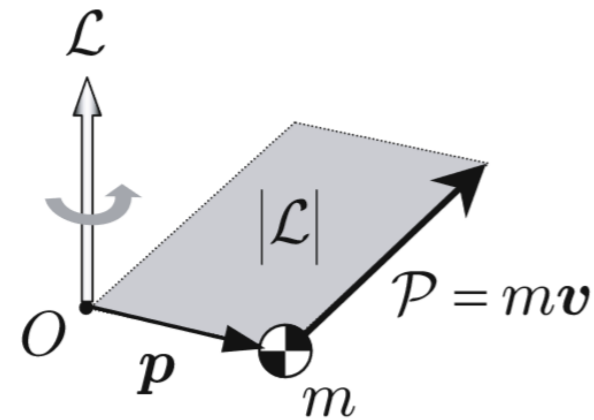
思考：酉矩阵的性质?

$$\hat{\omega}^T = -\hat{\omega}$$

10.2 逆动力学分析方法——牛顿欧拉法

转动刚体的动力学

动量与角动量



动量(momentum)——描述物体**线性运动**的量。

$P = m\dot{p}$　　　多质点情况：$P = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{p}_i$

角动量(angular momentum)——描述物体**绕原点转动**的量。

$L = p \times m\dot{p} = p \times P$

<u>思考1：匀速运动物体的角动量是否恒定？</u>

动力学的基本定律：

$\dot{P} = f_{外all}$

$\dot{L} = \tau_{外all}$

机器人的动量不依赖于内力只取决于外力，同样机器人的角动量只取决于外力矩

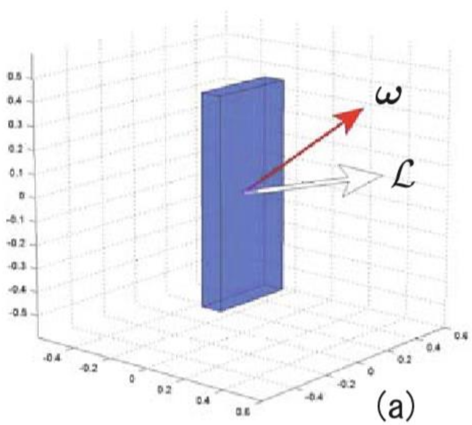
10.2 逆动力学分析方法——牛顿欧拉法

转动刚体的动力学

思考：多质点的角动量计算？

角动量与惯性张量

刚体(rigid body)——是一种带质量、无限硬、不变形的理想物体。对机器人进行分析时常常假设机器人有若干个通过关节一次连接起来的刚体组成



(a)

假设空间中一刚体绕原点转动，则有：

$$
\begin{aligned}
L &= \sum p_i \times m_i \dot{p}_i = \sum m_i p_i \times \omega \times p_i \\
&= \sum m_i p_i \times \omega \times p_i = \sum m_i (p_i \times)(-p_i \times)\omega \\
&= \sum m_i \hat{p}_i \hat{p}_i^{T} \omega
\end{aligned}
$$

惯性张量：描述物体质量在空间中的分布

10.2 逆动力学分析方法——牛顿欧拉法

转动刚体的动力学

角动量与惯性张量

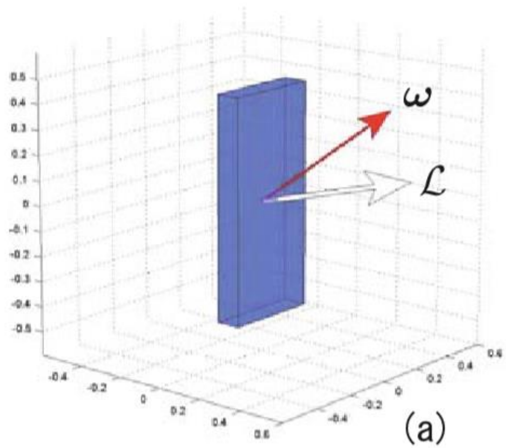
惯性张量：描述物体质量在空间中的分布

$$I = \sum m_i \hat{p}_i \hat{p}_i^T \quad \Rightarrow \quad L = I\omega$$

对于连续刚体则有：

$$I = \int_V v(p) \hat{p}_i \hat{p}_i^T dV$$

$v(p)$ ——密度



(a)

通常，规则且**标准姿态**的物体的惯性张量可以通过查表获得，例如长方体：

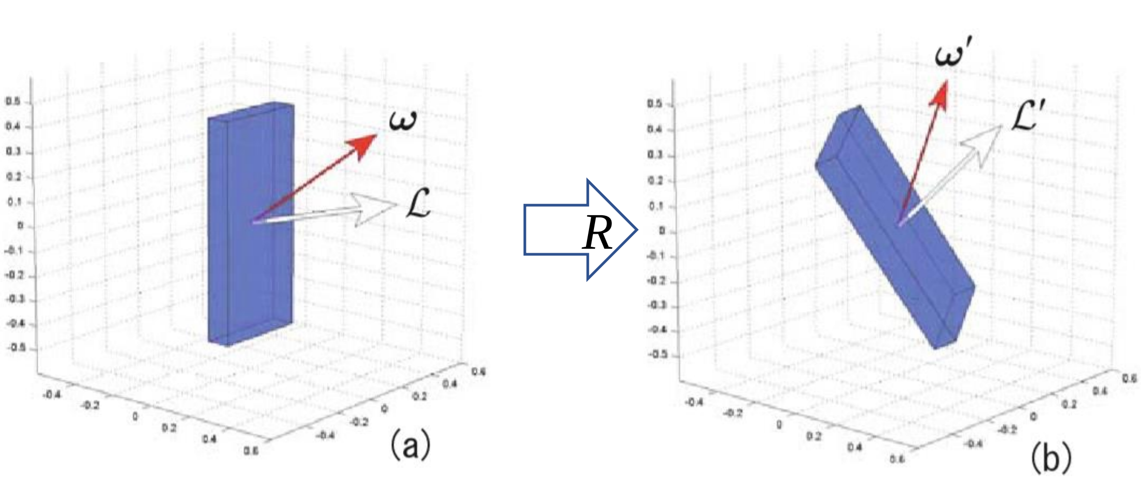
$$\bar{I} = \begin{bmatrix} \frac{m}{12}(l_y^2 + l_z^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}(l_x^2 + l_z^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}(l_x^2 + l_y^2) \end{bmatrix}$$

10.2 逆动力学分析方法——牛顿欧拉法

转动刚体的动力学

姿态变化下的物体的惯性张量

思考：查表通常只能获取标准姿态下的惯性张量，当姿态发生变化了如何处理？



$\omega' = R\omega$

$L' = RL$

$L = \bar{I}\omega$

$L' = I'\omega'$

$RL = I'R\omega$

$\boxed{I' = RIR^T}$

刚体的运动分为相对于自身质心的转动以及质心的平动，这里指的标准姿态下的转动惯量是指相对于质心来计算的。

10.2 逆动力学分析方法——牛顿欧拉法

转动刚体的动力学

小结:

1，外力及外力矩是改变刚体运动状态（动量，角动量）的唯一原因;

2，角速度与姿态矩阵以及姿态矩阵的微分存在对应关系。

3，惯性张量是描述物体空间质量分布的物理量。

4，姿态变换后的惯性张量可以有原来的标准姿态惯性张量变换得到。

5，**空间中刚体的运动可以分解为质心的平动以及绕着质心的转动。**

注意，关于第4点的小结针对的是相对质心转动的纯转动

10.2 逆动力学分析方法——牛顿欧拉法

牛顿-欧拉公式

对于牛顿公式，力是影响刚体速度和加速度的唯一原因；***但是***对于欧拉运动方程，除了刚体空间**质量分布的变化同样影响角速度及角加速度**

情况A，合外力通过质心

牛顿方程：

$$f = \dot{P} = \frac{d}{dt}P \Rightarrow f = m\ddot{p}$$

欧拉运动方程：

$$\tau = \dot{L} = \frac{d}{dt}L$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{d}{dt}(I\omega) = \frac{d}{dt}(R\bar{I}R^T\omega) = \dot{R}\bar{I}R^T\omega + R\bar{I}\dot{R}^T\omega + R\bar{I}R^T\dot{\omega} = \boxed{\omega \times I\omega + I\dot{\omega}}$$

$$(\hat{\omega}R)\bar{I}R^T\omega = \omega \times I\omega$$

$$R\bar{I}(\hat{\omega}R)^T\omega = R\bar{I}R^T(-\hat{\omega})\omega = -R\bar{I}R^T\omega\times\omega = 0$$

$$R\bar{I}R^T\dot{\omega} = I\dot{\omega}$$

$$\begin{cases} f = m\ddot{c} \\ \tau = \omega \times I\omega + I\dot{\omega} \end{cases}$$

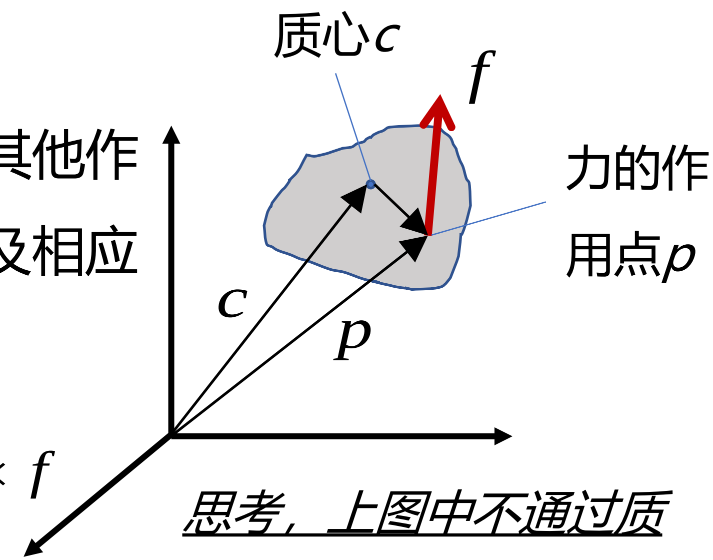
合外力矩

10.2 逆动力学分析方法——牛顿欧拉法

牛顿-欧拉公式

情况B，合外力不通过质心

1. 力的作用点影响力的效果，通常可以将其他作用点上的力转换为作用在质心上的力以及相应的力矩。



作用在p处的力f等效于 $\Leftrightarrow \begin{cases} f_c = f \\ \tau'_c = (p-c)\times f \end{cases}$

<u>思考，上图中不通过质心的力会使物体产生怎样的运动？</u>

$$\begin{cases} f = m\ddot{c} \\ \tau_{合} = \omega\times I\omega + I\dot{\omega} \end{cases}$$

注意：这里的欧拉方程中的力矩包括了外力矩以及作用点不在质心的合外力的等效力矩，即：

$$\tau_{合} = \underbrace{\tau}_{\text{合外力矩}} + \underbrace{(p-c)\times f}_{\text{等效到质心的力矩}}$$

10.2 逆动力学分析方法——牛顿欧拉法

牛顿-欧拉公式

[1]例程参见rigidbody_rotate.m

[2]参加仿人机器人第三章第2.2.6节

单个刚体转动的动力学仿真思路[1]：

0，输入初始位姿及速度

$p, R, \dot{c}, \omega$

1，计算转动惯量

$I = R\bar{I}R^T$

2，计算角加速度及加速度

$$\begin{cases} \ddot{c} = f/m \\ \dot{\omega} = I^{-1}(\tau - \omega \times I\omega) \end{cases}$$

3，计算角速度及速度

$$\begin{cases} \dot{c} = \dot{c} + \Delta t * \ddot{c} \\ \omega = \omega + \Delta t * \dot{\omega} \end{cases}$$

4，累加方式更新质心位置及刚体姿态[2]

$$\begin{cases} p = c + \Delta t * \dot{c} \\ R = (E + \hat{a}\sin(\omega\Delta t) + \hat{a}^2(1 - \cos(\omega\Delta t)))R \end{cases}$$

$$\hat{a} = \hat{\omega} / norm(\omega)$$

10.2 逆动力学分析方法——牛顿欧拉法

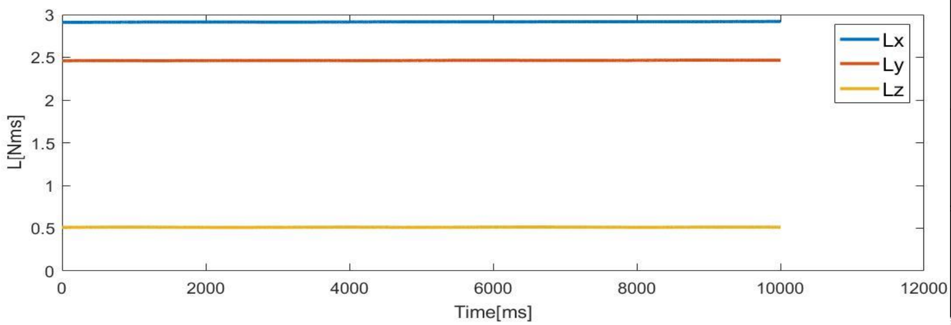
牛顿-欧拉公式

仿真时间：10s，采样间隔0.001s

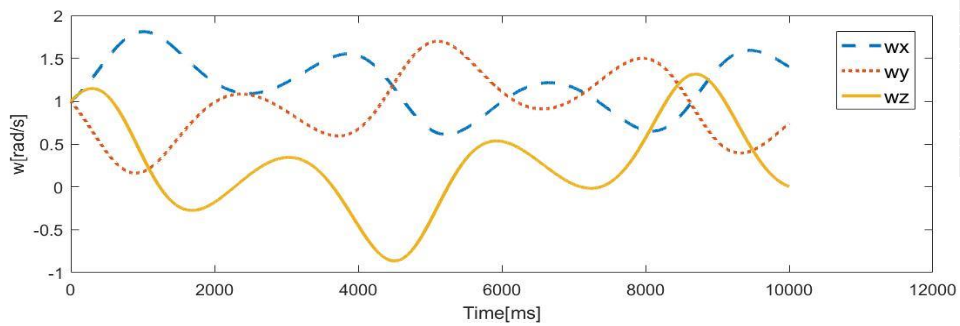
仿真实验1：刚体在无重力空间中自由转动

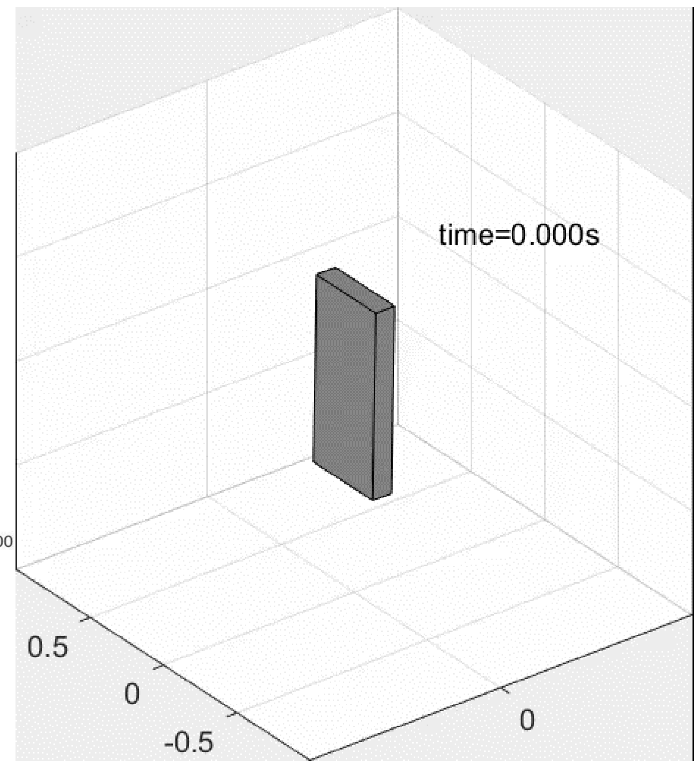
仿真条件：$\begin{cases} f_{外} = 0 \\ \tau_{外} = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \omega_{ini} = [1 \quad 1 \quad 1]' \\ v_{ini} = [0 \quad 0 \quad 0]' \end{cases}$

角动量



角速度





10.2 逆动力学分析方法——牛顿欧拉法

牛顿-欧拉公式

仿真实验2：刚体在无重力被外力拽动

仿真条件：

1，刚体质量 36kg

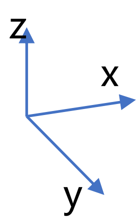
2，刚体尺寸0.1x0.4x0.8m

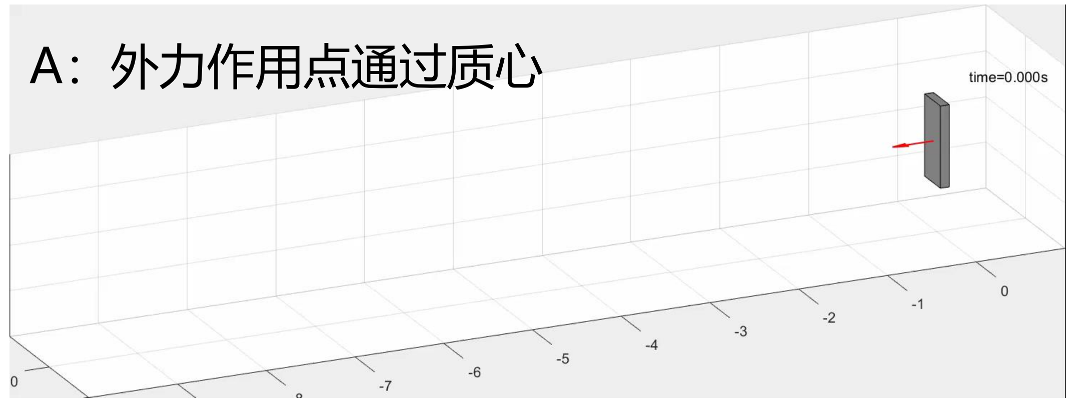
3，作用力[50,0,0]’

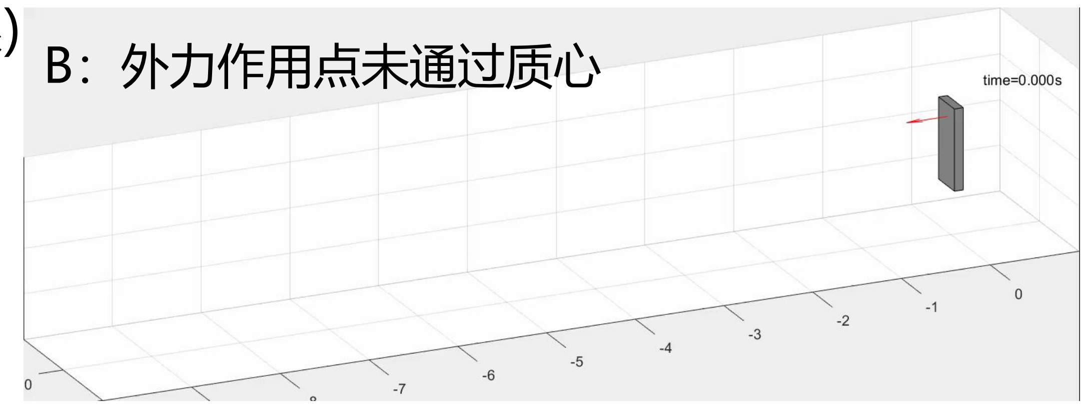
4， 力的作用点(相对质心坐标系)

A，[0,0,0]

B，[0,0,0.3]







10.2 逆动力学分析方法——牛顿欧拉法

牛顿-欧拉公式

小结

欧拉公式:

1，合外力矩不仅会使刚体转动，还将引起刚体空间质量分布改变；

2，合外力矩阵不变的情况下，角动量守恒；

3，空间质量分布改变或者合外力矩都能造成刚体角速度变化；

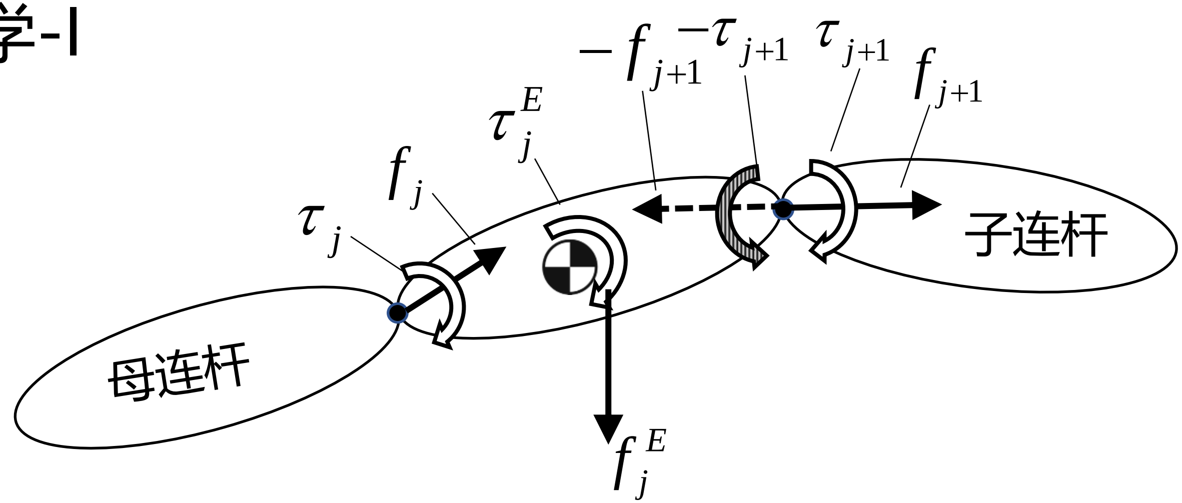
力与力矩

1，作用在刚体**<u>某一点</u>**的外力可以等效成**<u>其他作用点上</u>**的外力及合外力矩；

2，合外力过质心则不引起刚体转动仅造成质心运动，反之造成质心运动及刚体转动。

10.2 逆动力学分析方法——牛顿欧拉法

刚体连杆系统的逆动力学-I



连杆j所受到的外力：

1，母连杆的作用力：$\tau_j \quad f_j$

2，子连杆的作用力： $-\tau_{j+1} \quad -f_{j+1}$

3，环境作用力（重力）：$\tau_j^E \quad f_j^E$

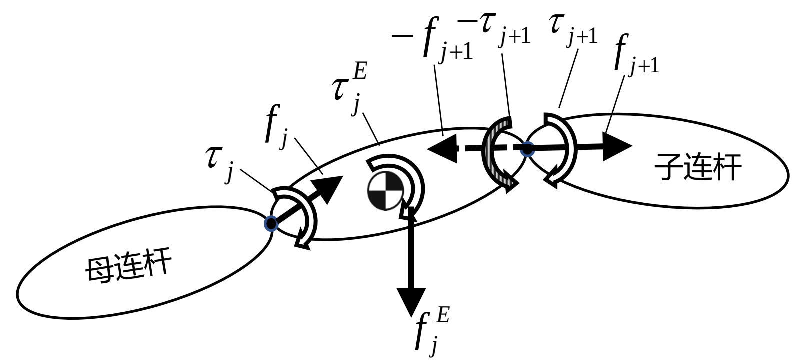
$$\begin{bmatrix} f_j \\ \tau_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f^E{}_j \\ \tau^E{}_j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_{j+1} \\ \tau_{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_j \ddot{c}_j \\ I_j \dot{\omega}_j + \omega_j \times I_j \omega_j \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f_j \\ \tau_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_j \ddot{c}_j \\ I_j \dot{\omega}_j + \omega_j \times I_j \omega_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{j+1} \\ \tau_{j+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f^E{}_j \\ \tau^E{}_j \end{bmatrix}$$

通过迭代的方式：可以从末端子连杆逐级计算连杆间的作用力和力矩直到母连杆

10.2 逆动力学分析方法——牛顿欧拉法

刚体连杆系统的逆动力学-I



$$\begin{bmatrix} f_j \\ \tau_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_j \ddot{c}_j \\ I_j \dot{\omega}_j + \omega_j \times I_j \omega_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{j+1} \\ \tau_{j+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f^E{}_j \\ \tau^E{}_j \end{bmatrix}$$

内推过程: $\begin{bmatrix} f_{j+1} \\ \tau_{j+1} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} f_j \\ \tau_j \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} f_{j-1} \\ \tau_{j-1} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} f_0 \\ \tau_0 \end{bmatrix}$

外推过程计算速度及加速度:

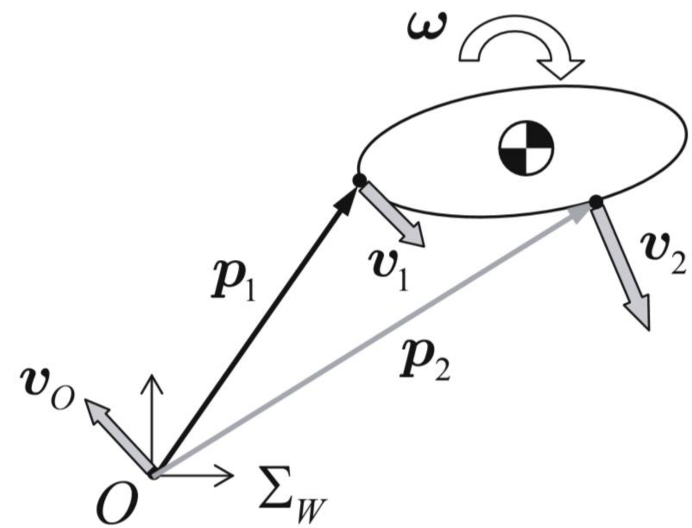
$$\begin{bmatrix} \dot{c}_0 \\ \ddot{c}_0 \\ \omega_0 \\ \dot{\omega}_0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{c}_1 \\ \ddot{c}_1 \\ \omega_1 \\ \dot{\omega}_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{c}_2 \\ \ddot{c}_2 \\ \omega_2 \\ \dot{\omega}_2 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} \dot{c}_{j+1} \\ \ddot{c}_{j+1} \\ \omega_{j+1} \\ \dot{\omega}_{j+1} \end{bmatrix}$$

通过迭代的方式：可以从末端子连杆逐级计算连杆间的作用力和力矩直到母连杆

10.2 逆动力学分析方法——牛顿欧拉法

空间速度

有利于简化多连杆系统的加速度迭代



对于刚体上的任意一点的速度，可以表示为

$$v(p) = v_1 + \omega \times (p - p_1)$$

假定刚体足够大，则总有一个点与世界坐标系原点重合，该点的速度表示为：

$$v_0 = v_1 + \omega \times (0 - p_1) = v_1 - \omega \times p_1$$

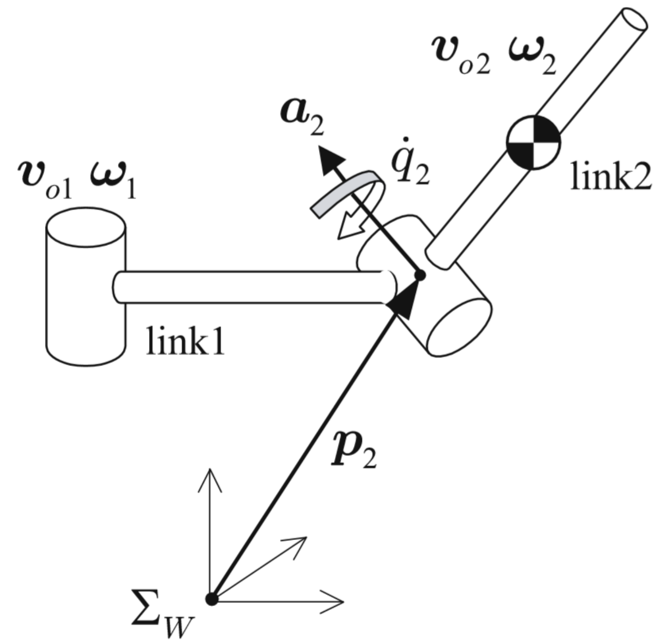
此时，刚体上任一点的速度可以使用如下表示形式

$$v(p) = v_0 + \omega \times p$$

刚体的空间速度定义为：$\begin{bmatrix} v_0 \\ \omega \end{bmatrix}$ （六维矢量）

10.2 逆动力学分析方法——牛顿欧拉法

考虑加速度的正运动学



连杆1静止的条件下，连杆2的空间速度：

$$\omega_2 = a_2\dot{q}_2$$

$$v_{02} = \dot{p}_2 - \omega_2 \times p_2 = p_2 \times a_2\dot{q}_2$$

连杆1空间速度（v_{01}, ω_1）的条件下

连杆2的空间速度：

$$\omega_2 = \omega_1 + a_2\dot{q}_2$$

$$v_{02} = v_{01} + p_2 \times a_2\dot{q}_2$$

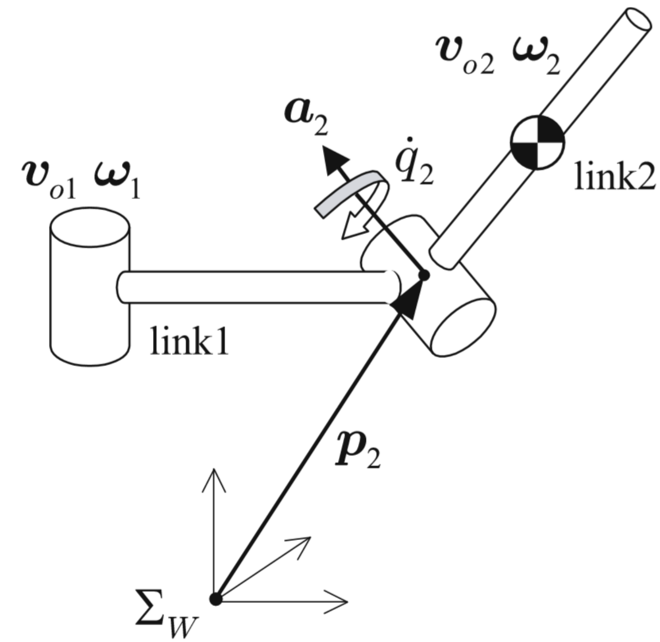
$$\begin{bmatrix} v_{02} \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{01} \\ \omega_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_2 \times a_2 \\ a_2 \end{bmatrix}\dot{q}_2$$

$$\xi_2 = \xi_1 + s_2\dot{q}_2$$

其中：$\xi_j \equiv \begin{bmatrix} v_{oj} \\ \omega_j \end{bmatrix}, s_j = \begin{bmatrix} p_j \times a_j \\ a_j \end{bmatrix}$

10.2 逆动力学分析方法——牛顿欧拉法

考虑加速度的正运动学



$$\xi_2 = \xi_1 + s_2 \dot{q}_2$$

其中：$\xi_j \equiv \begin{bmatrix} v_{oj} \\ \omega_j \end{bmatrix}, s_j = \begin{bmatrix} p_j \times a_j \\ a_j \end{bmatrix}$

求导：$\dot{\xi}_2 = \dot{\xi}_1 + \dot{s}_2 \dot{q}_2 + s_2 \ddot{q}_2$

$$\dot{s}_2 = \begin{bmatrix} \hat{\omega}_1 & \hat{v}_{o1} \\ 0 & \hat{\omega}_1 \end{bmatrix} s_2$$

假定基座母连杆位置、姿态，空间速度以及空间加速度已知，如果给出所有关节的角度、角速度、角加速度就可以求出从基座母连杆到末端之间所有连杆的空间速度和空间加速度。

10.2 逆动力学分析方法——牛顿欧拉法

基于空间速度的动力学

$$\begin{cases} f = m\ddot{c} \\ \tau_{(c)} = \omega \times I\omega + I\dot{\omega} \end{cases}$$

$$v_0 = \dot{c} - \omega \times c$$

对时间求导 $\dot{v}_0 = \ddot{c} - \dot{\omega} \times c - \omega \times \dot{c}$

$$\ddot{c} = \dot{v}_0 + \dot{\omega} \times c + \omega \times (v_0 + \omega \times c)$$

$$f = m\ddot{c} = m(\dot{v}_0 + \dot{\omega} \times c + \omega \times (v_0 + \omega \times c))$$

$$\tau = \tau_{(c)} + (c - 0) \times f = \omega \times I\omega + I\dot{\omega} + c \times f$$

$$= \omega \times I\omega + I\dot{\omega} + mc \times (\dot{v}_0 + \dot{\omega} \times c + \omega \times (v_0 + \omega \times c))$$

注意！ 这里相当于把以质心为中心的动力学方程变换到以原点为中心的动力学方程

$$\begin{bmatrix} f \\ \tau \end{bmatrix} = I^S \begin{bmatrix} \dot{v}_0 \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\omega} & 0 \\ \hat{v}_0 & \hat{\omega} \end{bmatrix} I^S \begin{bmatrix} v_0 \\ \omega \end{bmatrix}$$

$$I^S = \begin{bmatrix} mE & m\hat{c}^T \\ m\hat{c} & m\hat{c}\hat{c}^T + I \end{bmatrix}$$

空间惯性矩阵

10.2 逆动力学分析方法——牛顿欧拉法

连杆系统的逆动力学II

$$\begin{bmatrix} f \\ \tau \end{bmatrix} = I^S \begin{bmatrix} \dot{v}_0 \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\omega} & 0 \\ \hat{v}_0 & \hat{\omega} \end{bmatrix} I^S \begin{bmatrix} v_0 \\ \omega \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f \\ \tau \end{bmatrix} = I^S \dot{\xi} + \xi \times I^S \xi \qquad I^S = \begin{bmatrix} mE & m\hat{c}^T \\ m\hat{c} & m\hat{c}\hat{c}^T + I \end{bmatrix} \qquad \xi \times = \begin{bmatrix} v_0 \\ \omega \end{bmatrix} \times \equiv \begin{bmatrix} \hat{\omega} & 0 \\ \hat{v}_0 & \hat{\omega} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f_j \\ \tau_j \end{bmatrix} = I_j^S \dot{\xi}_j + \xi_j \times I_j^S \xi_j + \begin{bmatrix} f_{j+1} \\ \tau_{j+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_j^E \\ \tau_j^E \end{bmatrix}$$

线性运动的方向向量

关节扭矩/力： $u_j = s_j^T \begin{bmatrix} f_j \\ \tau_j \end{bmatrix}$ $\qquad s_j = \begin{bmatrix} p_j \times a_j \\ a_j \end{bmatrix}$

旋转运动的方向向量

相当于求出作用力在运动方向上的投影，运动方向垂直方向的作用力相当于没有做功，这部分的力由铰链（如轴承的径向支撑提供）

10.2 逆动力学分析方法——牛顿欧拉法

牛顿欧拉法小节

$$\xi_j \equiv \begin{bmatrix} v_{oj} \\ \omega_j \end{bmatrix}, s_j = \begin{bmatrix} p_j \times a_j \\ a_j \end{bmatrix}$$

1，正运动学递推，由1到n依次求解各个连杆的空间速度及空间加速度

$$\xi_j = \xi_{j-1} + s_j \dot{q}_j$$

$$\dot{\xi}_j = \dot{\xi}_{j-1} + \dot{s}_j \dot{q}_j + s_j \ddot{q}_j$$

$$\dot{s}_j = \begin{bmatrix} \hat{\omega}_{j-1} & \hat{v}_{oj-1} \\ 0 & \hat{\omega}_{j-1} \end{bmatrix} s_j$$

2，正运动学递推，由1到j依次计算空间惯性矩阵

$$I_j^S = \begin{bmatrix} m_j E & m_j \hat{c}_j^T \\ m_j \hat{c}_j & m_j \hat{c}_j \hat{c}_j^T + I_j \end{bmatrix}$$

3，由n到1依次反推关节处的广义力

$$\begin{bmatrix} f_j \\ \tau_j \end{bmatrix} = I_j^S \dot{\xi}_j + \xi_j \times I_j^S \xi_j + \begin{bmatrix} f_{j+1} \\ \tau_{j+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_j^E \\ \tau_j^E \end{bmatrix}$$

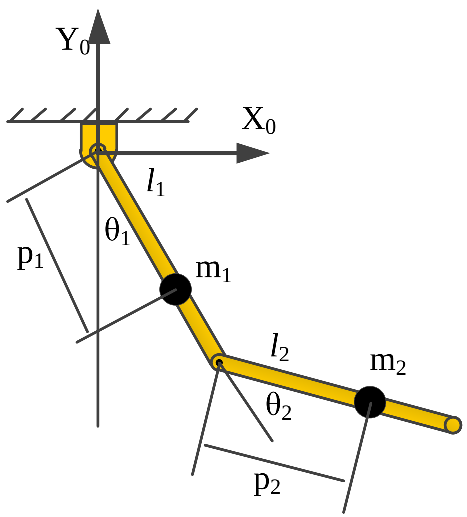
$$\xi_j \times = \begin{bmatrix} v_{0j} \\ \omega_j \end{bmatrix} \times \equiv \begin{bmatrix} \hat{\omega}_j & 0 \\ \hat{v}_{0j} & \hat{\omega}_j \end{bmatrix}$$

4，计算关节扭矩/力：

$$u_j = s_j^T \begin{bmatrix} f_j \\ \tau_j \end{bmatrix}$$

10.3 正运动学仿真

单位矢量法



二连杆机器人第一个关节的动力学表达式

$$\tau_1 = \underline{D_{11}\ddot{\theta}_1 + D_{12}\ddot{\theta}_2} + \underline{D_{112}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + D_{122}\dot{\theta}_2^{\ 2} + D_1}$$

$$u_G = A_G\ddot{x}_G + b_G$$

其中：

$$A_G \in R^{(n+6)\times(n+6)}$$

—惯性矩阵（与质量分布及位姿有关）

$$b_G \in R^{(n+6)}$$

—代表哥氏力、离心力和重力以及其他外力

$$u_G = \begin{bmatrix} f_B \\ \tau_B \\ u \end{bmatrix} \qquad \ddot{x}_G = \begin{bmatrix} \dot{v}_{oB} \\ \dot{\omega}_B \\ \ddot{q} \end{bmatrix}$$

(f_B, τ_B)： 躯体上的力以及力矩（重力除外）

$(\dot{v}_{oB}, \dot{\omega}_B)$： 躯体的空间加速度

$u(u \in R^n)$：所有关节的扭矩矢量

$\ddot{q}(\ddot{q} \in R^n)$：所有关节的加速度矢量

10.3 正运动学仿真

$$u_G = InvDyn(\ddot{x}_G) \quad (1)$$

$$u_G = A_G \ddot{x}_G + b_G \quad (2)$$

单位矢量法

For *i*=0: 1: *n*+6

If *i*==0

$$\ddot{x}_G = 0$$

$$u_G = InvDyn(0) \xrightarrow{\text{代入}} u_G = A_G \ddot{x}_G + b_G \xrightarrow{\text{计算}} b_G$$

else

令 $\ddot{x}_G$ 第*i*行为1，其余为0，代入(1)式，求解u_G，再代入(2)式　求解A_G的第i列

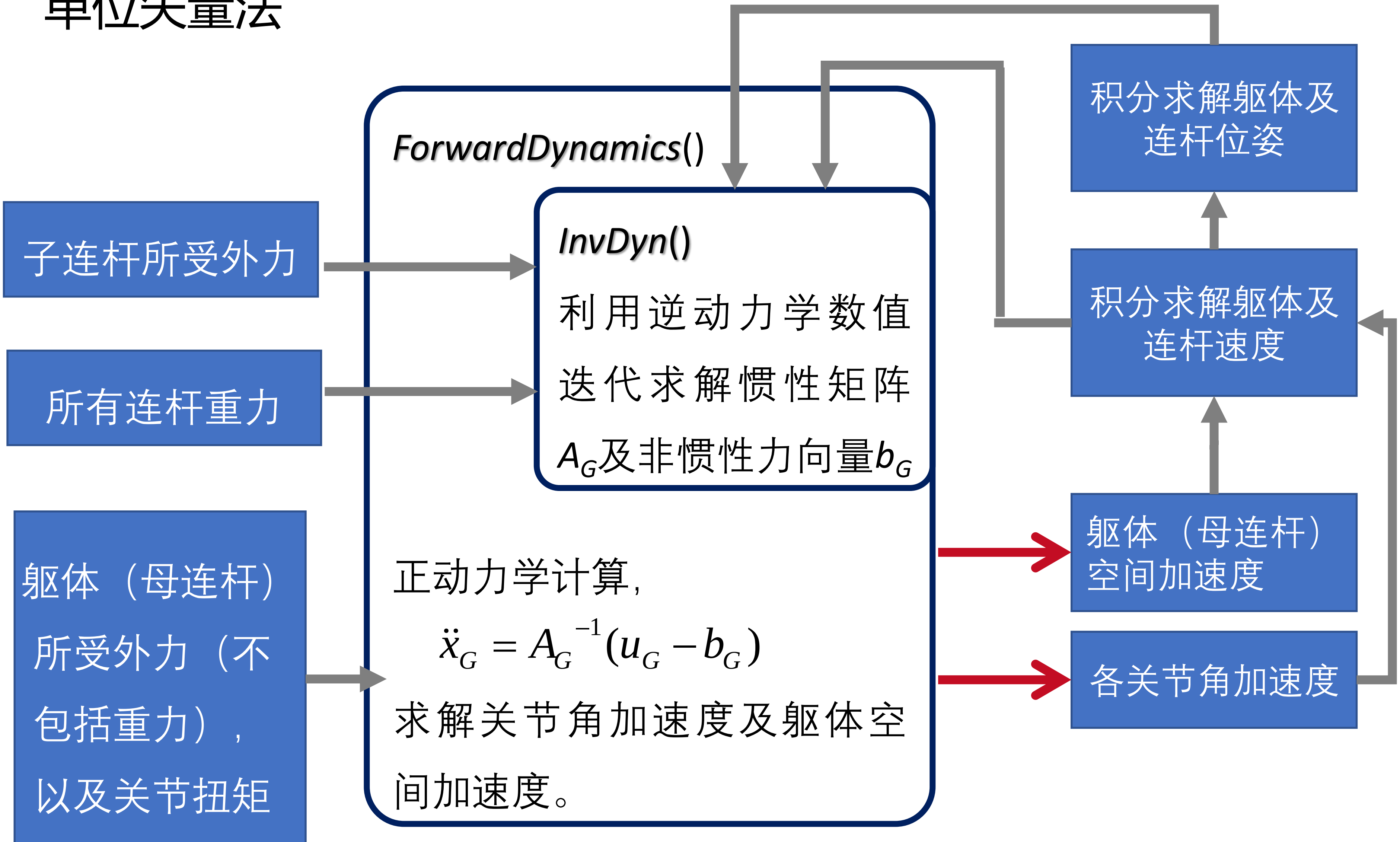
End

End

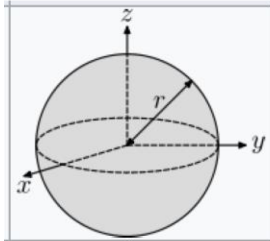
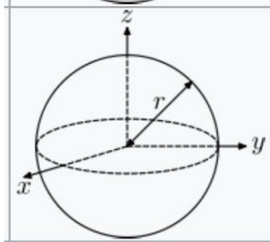
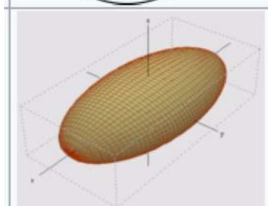
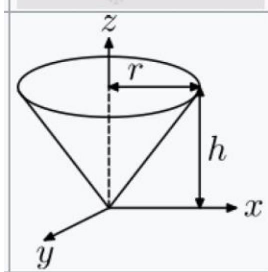
输出A_G及b_G

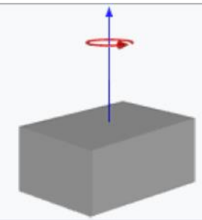
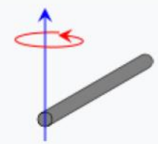
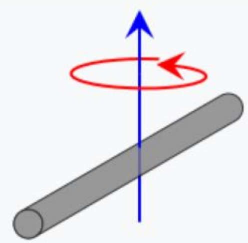
10.3 正运动学仿真

单位矢量法



10 附录-常见集合体惯性张量矩阵

	$I=\begin{bmatrix}\frac{2}{5}mr^2 & 0 & 0\\ 0 & \frac{2}{5}mr^2 & 0\\ 0 & 0 & \frac{2}{5}mr^2\end{bmatrix}$
	$I=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}mr^2 & 0 & 0\\ 0 & \frac{2}{3}mr^2 & 0\\ 0 & 0 & \frac{2}{3}mr^2\end{bmatrix}$
	$I=\begin{bmatrix}\frac{1}{5}m(b^2+c^2) & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{5}m(a^2+c^2) & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{5}m(a^2+b^2)\end{bmatrix}$
	$I=\begin{bmatrix}\frac{3}{5}mh^2+\frac{3}{20}mr^2 & 0 & 0\\ 0 & \frac{3}{5}mh^2+\frac{3}{20}mr^2 & 0\\ 0 & 0 & \frac{3}{10}mr^2\end{bmatrix}$

	$I=\begin{bmatrix}\frac{1}{12}m(h^2+d^2) & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{12}m(w^2+d^2) & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{12}m(w^2+h^2)\end{bmatrix}$
	$I=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}ml^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}ml^2\end{bmatrix}$
	截图(Alt + A) $I=\begin{bmatrix}\frac{1}{12}ml^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{12}ml^2\end{bmatrix}$