

“El Método Simplex”

¿Qué es la Programación Lineal?

La Programación Lineal es un campo concerniente a la optimización matemática dedicado a maximizar o minimizar una función lineal, denominada función objetivo y generalmente denotada por Z .

Las variables de dicha función Z están sujetas a una serie de restricciones, las cuales estarán expresadas mediante un sistema de desigualdades también lineales.

¿Qué es la Programación Lineal?

El proceso para resolver un problema de esta naturaleza se divide en las siguientes etapas:

1. Planteamiento del problema y desarrollo del modelo.
2. Solución del problema.
3. Interpretación de los resultados de la solución.

¿Cómo resolver un problema de Programación Lineal?

En la mayoría de los casos, el camino para identificar una solución óptima será: 1) Plantear el problema; 2) Traducirlo a un modo algebraico; 3) Definir las restricciones y; 4) Buscar el óptimo dependiendo del método que se quiera aplicar. Este óptimo se puede encontrar a través de diferentes métodos.

EL MÉTODO SIMPLEX.

El **Método Simplex** es un algoritmo analítico que bien puede solucionar problemas de Programación Lineal. Además, este método es capaz de abordar planteamientos más complejos que aquellos resueltos mediante el Método Gráfico, ya que no toma en cuenta restricción alguna para el número de variables.

El **Método Simplex** es un algoritmo iterativo que permite mejorar la solución a cada paso. La explicación matemática de esta mejora radica, principalmente, en que el algoritmo permite “trasladarse” de un vértice a otro del poliedro formado por las restricciones (conocido como el área posible de resultados) de tal manera que el valor encontrado aumente o disminuya.

Por supuesto, este último procedimiento dependerá si la función objetivo se maximiza o minimiza. En todo caso, como el número de vértices que tiene un poliedro es finito entonces siempre se hallará una solución con el **Método Simplex**.

APLICACIÓN DEL MÉTODO SIMPLEX.

Un agricultor tiene una parcela de 1280 m^2 para dedicarla al cultivo de árboles frutales: naranjos, perales, manzanos y limoneros. Se pregunta de qué manera debería repartir la superficie de su parcela, entre las variedades antes mencionadas, para conseguir el máximo beneficio sabiendo que cada naranjo necesita un mínimo de 32 m^2 , cada peral 8 m^2 , cada manzano 8 m^2 y cada limonero 24 m^2 .

Dispones de 1800 horas de trabajo al año, de las cuales cada naranjo necesita 30 horas al año, cada peral 5 horas, cada manzano 10 horas y, finalmente, cada limonero necesita 20 horas.

A causa de la sequía, el agricultor tiene restricciones para el riego, ya que le han asignado 400 m³ de agua anuales. Las necesidades anuales son de 4 m³ por cada naranjo, 2 m³ por cada peral, 2 m³ por cada manzano y 4 m³ por cada limonero.

Finalmente, los beneficios unitarios para el agricultor son de \$1000 por cada naranjo, \$500 por cada peral, \$400 por cada manzano y \$600 por cada limonero.

Si bien el planteamiento del problema es un poco extenso, los cálculos realizados empíricamente serían aún más. Por ello, a continuación le daremos solución utilizando el **Método Simplex**.

SOLUCIÓN.

Lo primero que debe hacerse es determinar las denominadas “variables de decisión” y representarlas algebraicamente. En este caso:

X_1 : Número de naranjos.

X_2 : Número de perales.

X_3 : Número de manzanos.

X_4 : Número de limoneros.

Posteriormente se determinan las restricciones y se expresan como inecuaciones de las ya conocidas variables de decisión.

Estas restricciones se deducen de todas las necesidades que requiere cada árbol: terreno, horas de trabajo anuales y riego. Para ello, se debe identificar lo siguiente:

- Necesidades de terreno:

$$32X_1 + 8X_2 + 8X_3 + 24X_4 \leq 1280$$

- Necesidades de horas anuales:

$$30X_1 + 5X_2 + 10X_3 + 20X_4 \leq 1800$$

- Necesidades de riego:

$$4X_1 + 2X_2 + 2X_3 + 4X_4 \leq 400$$

Una vez establecidas las restricciones, entonces se expresan todas las condiciones implícitamente establecidas por la naturaleza de las variables: que no sean negativas, que sean enteras, que sólo puedan tomar determinados valores.

En nuestro caso las restricciones son: a) El número de árboles no puede ser negativo y; b) El total de árboles debe ser un número entero. Es decir:

$X_i \geq 0$ y todo X_i es entero con $i=1,2,3,\dots,n$.

Finalmente, se plantea la función objetivo:

Maximizar $Z(X_1, X_2, X_3, X_4) = 1000X_1 + 500X_2 + 400X_3 + 600X_4$

Por lo tanto, nuestro problema se reduce a resolver el siguiente planteamiento:

$$\text{Max } Z = 1000X_1 + 500X_2 + 400X_3 + 600X_4$$

Sujeto a:

$$32X_1 + 8X_2 + 8X_3 + 24X_4 \leq 1280$$

$$30X_1 + 5X_2 + 10X_3 + 20X_4 \leq 1800$$

$$4X_1 + 2X_2 + 2X_3 + 4X_4 \leq 400$$

con $X_i \geq 0$ y todo X_i entero.

La solución de nuestro problema puede seguir una serie de pasos.

PASO I) Igualar la función objetivo a cero.

$$Z-1000X_1-500X_2-400X_3-600X_4=0$$

PASO II) Convertir todas las desigualdades en igualdades.

$$32X_1 + 8X_2 + 8X_3 + 24X_4=1280$$

$$30X_1 + 5X_2 + 10X_3 + 20X_4=1800$$

$$4X_1 + 2X_2 + 2X_3 + 4X_4=400$$

PASO III) Para cada nueva igualdad crear una variable ficticia llamada, generalmente, holgura.

$$32X_1 + 8X_2 + 8X_3 + 24X_4 + H_1 = 1280$$

$$30X_1 + 5X_2 + 10X_3 + 20X_4 + H_2 = 1800$$

$$4X_1 + 2X_2 + 2X_3 + 4X_4 + H_3 = 400$$

PASO IV) Construir la tabla inicial del Simplex y comenzar su solución. ¿Cómo se construye?

La tabla inicial del Simplex concentra toda la información de las igualdades así como también el punto de partida para la función objetivo Z.

Tabla inicial del Simplex.

BASE	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	H ₁	H ₂	H ₃	SOL.
H ₁	32	8	8	24	1	0	0	1280
H ₂	30	5	10	20	0	1	0	1800
H ₃	4	2	2	4	0	0	1	400
Z	-1000	-500	-400	-600	0	0	0	0

Toda vez que la tabla inicial del Simplex se ha creado, podemos observar que en dicha tabla se aprecian dos matrices. La formada por las variables de decisión (roja) y la matriz formada por las holguras (azul). Esta última se conoce como la matriz identidad. La idea, grosso modo, es “llevar” a la matriz en rojo a una matriz como la azul.

Para ello es necesario lo siguiente:

- 1) Identificar la columna pivote.
- 2) Identificar la fila pivote.
- 3) Hacer unitario el **elemento pivote**, que no es otra cosa más que el número donde se cruzan la columna pivote y la fila pivote.

¿Cómo identificar la columna pivote?

Esta columna se define al seleccionar el número más negativo en la función Z . En nuestro caso es el -1000.

¿Cómo identificar la fila pivote?

Una vez identificada la columna pivote entonces la solución de cada fila, sin tomar en cuenta la fila de la función objetivo Z , se divide entre su correspondiente coeficiente de la columna pivote.

El número positivo más pequeño de estas divisiones determinará a la fila pivote. Es importante mencionar que no se toman aquellas divisiones con un resultado negativo y tampoco aquellas divisiones entre cero.

Elemento pivote

Fila pivote

BASE	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	H ₁	H ₂	H ₃	SOL.	Div.
H ₁	32	8	8	24	1	0	0	1280	1280/32=40
H ₂	30	5	10	20	0	1	0	1800	1800/30=60
H ₃	4	2	2	4	0	0	1	400	400/4=100
Z	-1000	-500	-400	-600	0	0	0	0	

Columna pivote

Como el número positivo más pequeño de las tres divisiones es 40 entonces éste define a la fila pivote. Si existen resultado negativos o bien divisiones entre 0 entonces no se toman dichas divisiones. Por su parte, si existen dos divisiones con el mismo resultado entonces se toma cualquiera de ellos.

A la intersección de la “*columna pivote*” y la “*fila pivote*” se le conoce como “*elemento pivote*”. En nuestro caso es 32. Si continuamos con el **Método Simplex** entonces este último elemento ahora debe hacerse unitario.

Es decir, se debe buscar un número que al multiplicarlo por 32 nos de como resultado 1.

Es claro que el número es $1/32$. Ello quiere decir que debemos multiplicar toda la fila pivote por $1/32$. El resultado de ello es la siguiente tabla:

BASE	X_1	X_2	X_3	X_4	H_1	H_2	H_3	SOL.
H_1	1	$1/4$	$1/4$	$3/4$	$1/32$	0	0	40
H_2	30	5	10	20	0	1	0	1800
H_3	4	2	2	4	0	0	1	400
Z	-1000	-500	-400	-600	0	0	0	0

Al definir el elemento pivote entonces la variable de decisión X_1 toma el lugar de la variable holgura H_1 en la base. Se dice que X_1 entra en la solución y H_1 sale.

Ya que hemos hecho el elemento pivote unitario entonces el objetivo es hacer “ceros” tanto arriba como abajo de dicho elemento pivote, según sea el caso.

BASE	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	H ₁	H ₂	H ₃	SOL.
X ₁	1	1/4	1/4	3/4	1/32	0	0	40
H ₂	30	5	10	20	0	1	0	1800
H ₃	4	2	2	4	0	0	1	400
Z	-1000	-500	-400	-600	0	0	0	0

Es decir, multiplicamos la fila pivote por -30 y se la sumamos (entrada por entrada) a la fila de H_2 , posteriormente multiplicamos la fila pivote por -4 y se la sumamos a la fila de H_3 . Finalmente, multiplicamos la fila pivote por 1000 y se la sumamos a la fila de Z. Los resultados se pueden apreciar en la siguiente tabla.

Nuevo elemento pivote

Nueva fila pivote

BASE	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	H ₁	H ₂	H ₃	SOL.	Div.
X ₁	1	1/4	1/4	3/4	1/32	0	0	40	160
H ₂	0	-5/2	5/2	-5/2	-15/16	1	0	600	-240
H ₃	0	1	1	1	-1/8	0	1	240	240
Z	0	-250	-150	150	125/4	0	0	40000	

Nueva columna pivote

Toda vez que hemos realizado correctamente las operaciones anteriores entonces el procedimiento se repite desde el paso en que se identifica a la columna pivote.

Nuevamente al hacer el elemento pivote unitario entonces multiplicamos la nueva fila pivote por $5/2$ y se la sumamos a la fila de H2. Posteriormente multiplicamos la nueva fila pivote por -1 y se la sumamos a la fila de H3.

Por último, multiplicamos la nueva fila pivote por 250 y se la sumamos a la fila de la función objetivo Z.

Los resultados que se presentan en la siguiente tabla implican que el algoritmo se ha terminado.

¿Por qué?

El Método del Simplex concluye cuando en toda la fila de la función objetivo Z ya no tenemos ningún número negativo.

Como puede apreciarse en la tabla, ya no tenemos números negativos en la fila de Z. Es decir hemos encontrado una solución que optimiza (maximiza) nuestro problema.

BASE	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	H ₁	H ₂	H ₃	SOL.
X ₂	4	1	1	3	1/8	0	0	160
H ₂	10	0	5	5	-5/8	1	0	1000
H ₃	-4	0	0	-2	-1/4	0	1	80
Z	1000	0	100	900	125/2	0	0	80000

Ya no hay números negativos !!!

La interpretación de los resultados, en la última tabla, es la siguiente:

Como la variable X_2 entró en la solución eso quiere decir que tomará un valor y éste será de 160. Por su parte, como las variables X_3 y X_4 no entraron en la solución eso quiere decir que serán 0.

Además, también la variable X_1 salió de la solución, lo cual implica que $X_1=0$. Asimismo, como la variable de holgura H_1 salió de la solución entonces ello implica que dicha variable será 0. Por último, en la última tabla se aprecia que la variable de holgura $H_2=1000$ y $H_3=80$.

Sustituyendo los valores encontrados en las restricciones, se obtiene lo siguiente:

$$32(0) + 8(160) + 8(0) + 24(0) + H_1 = 1280$$

$$30(0) + 5(160) + 10(0) + 20(0) + H_2 = 1800$$

$$4(0) + 2(160) + 2(0) + 4(0) + H_3 = 400$$

Donde:

$$1280 = 1280 \text{ entonces } H_1 = 0$$

$$800 + H_2 = 1800 \text{ entonces } H_2 = 1000$$

$$320 + H_3 = 400 \text{ entonces } H_3 = 80$$

Por lo tanto, estos son los valores para la **mejor estrategia** del agricultor quien, a su vez, obtendrá un beneficio máximo de $Z=500(160)=80000$.