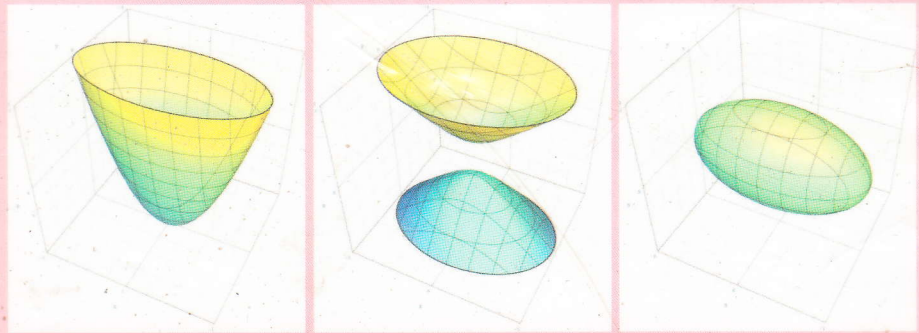
Appunti di

Algebra lineare
Geometria analitica
Tensori

Teoria, Esempi, Esercizi svolti, Esercizi proposti

Giuliano Mazzanti – Valter Roselli



Pitagora Editrice Bologna

I FERRARA
ECA
ECNOLOGICA
ICA

UBO 4042580

ST. Nonato

Appunti di

Algebra lineare
Geometria analitica
Tensori

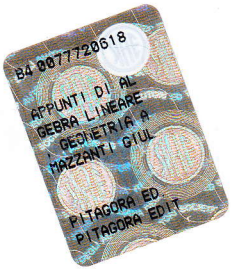
Teoria, Esempi, Esercizi svolti, Esercizi proposti

UNIVERSITA' DI FERRARA
BIBLIOTECA
SCIENTIFICO-TECNOLOGICA
DIDATTICA
AF
MAZ
19
SBA 588

Giuliano Mazzanti – Valter Roselli

Università degli Studi di Ferrara
Sistema Bibliotecario di Ateneo
Serie SBA N. 588

Pitagora Editrice Bologna



ISBN 88-371-1504-0

© Copyright 2013 by Pitagora Editrice S.r.l., Via del Legatore 3, Bologna, Italy.

Tutti i diritti sono riservati, nessuna parte di questa pubblicazione può essere riprodotta, memorizzata o trasmessa per mezzo elettronico, elettrostatico, fotocopia, ciclostile, senza il permesso dell'Editore.

Stampa: Tecnoprint s.a.s., Via del Legatore 3, Bologna.
Codice: 48/98

http://www.pitagoragroup.it
e-mail: pited@pitagoragroup.it

INDICE

PREFAZIONE 1

CAPITOLO 1. SPAZI VETTORIALI

1. Sistema di riferimento nello spazio S 4
2. Spazi vettoriali 7
3. Sottospazi vettoriali 12
4. Sottospazio generato da un insieme di vettori 15
5. Vettori linearmente dipendenti e vettori linearmente indipendenti 21
6. Base di uno spazio vettoriale 26
7. Dimensione di uno spazio vettoriale 27
8. Costruzione di una base di un sottospazio vettoriale a partire da un suo sottoinsieme finito di generatori 29
9. Coordinate di un vettore 32
10. Altre operazioni con i vettori geometrici 35

ESERCIZI 41

CAPITOLO 2. MATRICI, DETERMINANTI E SISTEMI LINEARI

1. Matrici 45
2. Operazioni tra matrici 50
3. Matrici invertibili 60
4. Determinante di una matrice quadrata 61
5. Applicazioni del concetto di determinante 70
6. Generalità sui sistemi lineari 83
7. Sistemi di Cramer 86
8. Caso generale 89
9. Matrici a scala o a gradini 101
10. Applicazione delle matrici a scala alla risoluzione dei sistemi lineari 104
11. Applicazione delle matrici a scala al calcolo della matrice inversa 106

ESERCIZI 108

CAPITOLO 3. GEOMETRIA ANALITICA NELLO SPAZIO

1. Equazione del piano 115
2. Parallelismo e perpendicolarità tra piani 117
3. Equazioni della retta 120
4. Parallelismo e perpendicolarità tra rette 127
5. Parallelismo e perpendicolarità tra retta e piano 130
6. Fascio di piani 134
7. Distanza tra due punti. Punto medio di un segmento. Distanza di un punto da un piano 137
8. Distanza di un punto da una retta 138
9. Rette sghembe e rette complanari 141
10. Minima distanza tra due rette r ed s dello spazio 143
11. Sfera e circonferenza 145
12. Coni e cilindri 148
13. Cenni sulle quadriche 155
14. Alcuni complementi di geometria analitica nel piano e nello spazio 161
ESERCIZI 171

CAPITOLO 4. SPAZI EUCLIDEI. MATRICI ORTOGONALI

1. Generalità sugli spazi euclidei 177
2. Coordinate di un vettore rispetto ad una base ortonormale 183
3. Costruzione di una base ortogonale (procedimento di Gram-Schmidt) 185
4. Matrice di passaggio tra due basi ortonormali 187
5. Matrici ortogonali 192
6. Applicazioni del prodotto scalare alla geometria analitica nello spazio 196
ESERCIZI 200

CAPITOLO 5. DIAGONALIZZAZIONE DI UNA MATRICE
1. Matrici simili e diagonalizzazione 205
2. Autovalori. Autovettori. Diagonalizzazione 207
3. Diagonalizzazione delle matrici simmetriche 224
ESERCIZI 232

CAPITOLO 6. CONICHE. FORME QUADRATICHE
1. Generalità sulle coniche 235
2. Riduzione a forma canonica di una conica irriducibile 241
3. Forma quadratica e riduzione a forma diagonale 249
4. Forme quadratiche definite positive 263
5. Radice quadrata di una matrice 265
ESERCIZI 271

CAPITOLO 7. FUNZIONI LINEARI. TENSORI
1. Funzioni lineari 275
2. Tensori 293
3. Determinante, rango, traccia e polinomio caratteristico di un tensore 296
4. Tensori notevoli 299
5. Autovalori e autovettori di un tensore 304
6. Diadi. Decomposizione spettrale 307
7. Tensori emisimmetrici (antisimmetrici) in R^3 e vettore assiale 310
8. Prodotto di tensori 313
9. Prodotto scalare di matrici e prodotto scalare di tensori 314
ESERCIZI 325

PREFAZIONE

Il presente volume si rivolge in modo particolare agli studenti di Ingegneria che debbano affrontare argomenti di Algebra Lineare e Geometria Analitica.

Si è cercato di contenere la materia trattata entro limiti ragionevoli per un corso semestrale. Per fare ciò si è ritenuto opportuno puntare sui concetti e sulle proprietà utili alle applicazioni, rinunciando a varie dimostrazioni, ma proponendo quelle che riteniamo più significative. In particolare l'ultimo capitolo, riguardante i tensori, è propedeutico alle materie applicative dei corsi di laurea in Ingegneria.

Per meglio chiarire i contenuti si è deciso di proporre, per ogni argomento, una vasta gamma di esempi svolti in dettaglio e di esercizi proposti. Proprio per questo motivo riteniamo che questo volume sia particolarmente indicato anche per studenti che non siano in grado di seguire costantemente le lezioni, come ad esempio gli studenti lavoratori.

Gli autori desiderano ringraziare il Prof. Luigi Tomasi per la fattiva collaborazione prestata, soprattutto nella realizzazione delle figure.

Giuliano Mazzanti

Valter Roselli

CAPITOLO 1

SPAZI VETTORIALI

Premessa. Indichiamo con $\mathbf{Q}$ il campo dei numeri razionali, ossia l'insieme dei numeri razionali dotato delle note operazioni di addizione e moltiplicazione, con le relative proprietà.

Analogamente con $\mathbf{R}$ indichiamo il campo dei numeri reali e con $\mathbf{C}$ quello dei numeri complessi.

Tenendo presente il concetto di prodotto cartesiano di insiemi, in particolare si ha che

- $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^2$ è l'insieme delle *coppie ordinate* di numeri reali, ossia

$$\mathbf{R}^2 \overset{def.}{=} \{(x, y) \ : \ x, y \in \mathbf{R}\}.$$

N.B. $(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \iff x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$ e quindi, in particolare, $(x, y) = (y, x) \iff x = y$.

- $\mathbf{R}^3$ è l'insieme delle *terne ordinate* di numeri reali, ossia

$$\mathbf{R}^3 \overset{def.}{=} \{(x, y, z) \ : \ x, y, z \in \mathbf{R}\}.$$

Più in generale

- $\mathbf{R}^n$ (n intero ≥ 1) è l'insieme delle *ennuple (n-uple) ordinate* di numeri reali, ossia

$$\mathbf{R}^n \overset{def.}{=} \{(x_1, x_2, ..., x_n) \ : \ x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbf{R}\}.$$

Come è noto, fissato un sistema di riferimento cartesiano su una retta r (cioè fissati in r un punto origine O, un verso positivo ed una unità di misura per le lunghezze dei segmenti), ogni punto della retta r è rappresentato da un elemento di $\mathbf{R}$ (numero reale) e viceversa. Analogamente, fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale in un piano π, ogni punto del piano π è rappresentato da un elemento di $\mathbf{R}^2$ (coppia ordinata di numeri reali) e viceversa.

Vediamo ora la rappresentazione dei punti dello spazio (che indicheremo con S).

§1. Sistema di riferimento nello spazio S

Fissiamo in S:

- un punto O, detto **origine**,
- tre rette orientate X, Y, Z incidenti in O e non complanari (detti **assi cartesiani**),
- **tre unità di misura** per i segmenti u_X, u_Y, u_Z rispettivamente su X, Y, Z.

Abbiamo così un **sistema di riferimento cartesiano** in S.

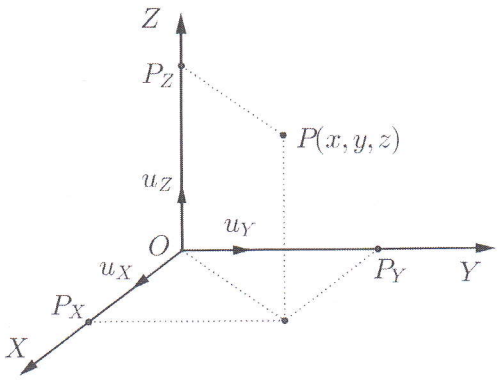


Figura 1: Sistema di riferimento cartesiano in S

Ad ogni punto P di S associamo la terna ordinata di numeri reali (x, y, z) dove x, y, z sono le ascisse rispettivamente di P_X, P_Y, P_Z nei relativi riferimenti su X, Y, Z (vedi figura 1).
- (x, y, z) si dice **terna delle coordinate** di P e si scrive $P \equiv (x, y, z)$ o $P(x, y, z)$;
- x, y, z si dicono, rispettivamente **ascissa, ordinata** e **quota** di P.

La corrispondenza $S \to \mathbf{R}^3$ definita da $P \to (x, y, z)$ è una corrispondenza biunivoca da S a $\mathbf{R}^3$ (ossia ogni punto dello spazio individua univocamente una terna ordinata di numeri reali e viceversa).

Osservazione. In seguito considereremo (per "comodità") solo sistemi di riferimento nei quali X, Y, Z sono rette a due a due ortogonali e $u_X = u_Y = u_Z$. Tali sistemi di riferimento si dicono **ortonormali**.

Rappresentazione dei vettori nello spazio S

Fissiamo un sistema di riferimento ortonormale $OXYZ$ in S. Indichiamo con V_3 (o V_O^S) l'insieme dei "vettori applicati"[1] in O (O è il primo estremo) ed aventi il secondo estremo in S (i vettori vengono indicati con $\mathbf{v}$ o $\vec{v}$).

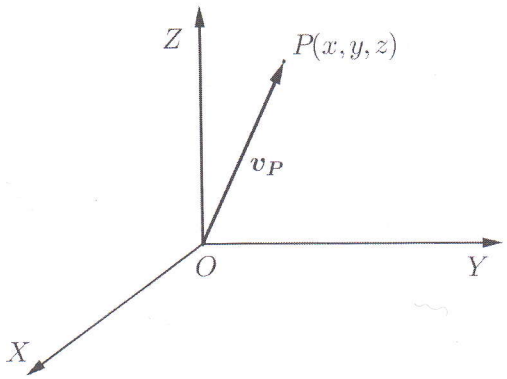


Figura 2: Vettore OP

Il vettore $\mathbf{v}_P$ si indica anche con $\vec{OP}$ o con $P - O$ e viene detto *vettore posizione* di P.
La corrispondenza $S \to V_3$ definita da $P \to \mathbf{v}_P$ (vedi figura 2) è biunivoca da S a V_3.
D'altra parte abbiamo visto che anche la corrispondenza $S \to \mathbf{R}^3$ definita da
$P \to (x, y, z)$ è biunivoca.
La figura 3 riassume quanto detto.

[1] I concetti di vettore applicato o segmento orientato e di vettore (libero) vengono usualmente introdotti nelle scuole secondarie di secondo grado e per questo motivo vengono ritenuti già noti. Ricordiamo solo che un vettore applicato è individuato dal punto di applicazione, dal modulo, dalla direzione e dal verso, mentre un vettore (libero) non ha punto di applicazione.

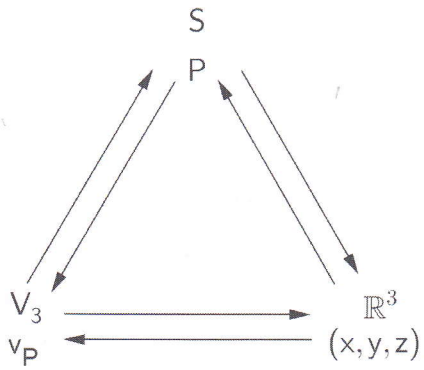


Figura 3: Punti, vettori e terne ordinate

Le corrispondenze biunivoche indicate permettono di "identificare" $P \equiv (x, y, z) \equiv \mathbf{v}_P$ e quindi $S \equiv \mathbf{R}^3 \equiv V_3$.

Esempio. $\mathbf{i} = (1, 0, 0), \mathbf{j} = (0, 1, 0), \mathbf{k} = (0, 0, 1)$ sono i vettori applicati in O e che hanno come secondo estremo i punti di coordinate $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ rispettivamente.

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ si dicono **versori degli assi**.

Osservazione. Fissato in un piano π un sistema di riferimento cartesiano ortogonale OXY e indicato con V_2 (oppure con V_O^π) l'insieme dei "vettori applicati" in O e aventi il secondo estremo in π, analogamente a quanto visto per lo spazio, la corrispondenza $\pi \to V_2$ definita da $P \to \mathbf{v}_P$ è biunivoca da π a V_2 ($\mathbf{v}_P$ è il vettore "applicato" in O e avente secondo estremo in P). Pertanto, indicata con (x, y) la coppia delle coordinate di P, possiamo "identificare" $P \equiv (x, y) \equiv \mathbf{v}_P$ e quindi $\pi \equiv \mathbf{R}^2 \equiv V_2$.

Analogamente fissato su una retta r un sistema di riferimento OX ed indicato con V_1 l'insieme dei "vettori applicati" in O ed aventi il secondo estremo su r, possiamo "identificare" $P \equiv (x) \equiv \mathbf{v}_P$ e quindi $r \equiv \mathbf{R} \equiv V_1$.

§2. Spazi vettoriali

Vediamo prima alcuni esempi.

• Consideriamo V_2.

- La **somma di vettori** è definita mediante la "regola del parallelogramma" (vedi figura 4).

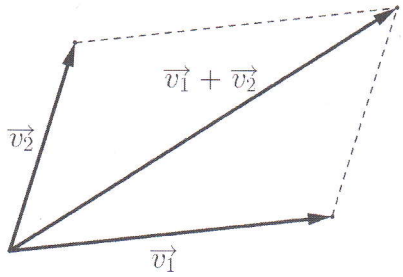


Figura 4: Regola del parallelogramma

N.B. Per ogni $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V_2$ si ha $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in V_2$ e per questo motivo si dice che l'operazione di addizione $+$ è un'"operazione interna" a V_2.

- Il **prodotto di un numero reale α per un vettore $\mathbf{v} \in V_2$** è il vettore $\alpha\mathbf{v}$ definito come segue (vedi figura 5).

Se $\alpha = 0$ oppure $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ allora $\alpha\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Se $\alpha \neq 0$ e $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ allora $\alpha\mathbf{v}$ è il vettore avente

- direzione uguale a quella di $\mathbf{v}$
- verso uguale a quello di $\mathbf{v}$ se $\alpha > 0$, verso opposto se $\alpha < 0$
- modulo uguale al prodotto tra il valore assoluto di α e il modulo di $\mathbf{v}$.

N.B. Per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$ e per ogni $\mathbf{v} \in V_2$ si ha $\alpha\mathbf{v} \in V_2$ e per questo motivo si dice che l'operazione di moltiplicazione $\cdot$ è un'"operazione esterna" o "legge di composizione esterna" a V_2, in quanto si utilizzano anche elementi non appartenenti a V_2, cioè numeri reali.

Figura 5: Prodotto di uno scalare per un vettore

Si può dimostrare che le operazioni introdotte in V_2 hanno le seguenti proprietà:

1) $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) \quad \forall\, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in V_2$

2) Il vettore $\mathbf{0} \in V_2$ è tale che $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v} \quad \forall\, \mathbf{v} \in V_2$

3) Per ogni $\mathbf{v} \in V_2$ il vettore $-\mathbf{v} \in V_2$ è tale che $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = (-\mathbf{v}) + \mathbf{v} = \mathbf{0}$

4) $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \quad \forall\, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V_2$

5) $(rs)\mathbf{v} = r(s\mathbf{v}) \quad \forall r, s \in \mathbf{R}$ e $\forall\, \mathbf{v} \in V_2$

6) $(r + s)\mathbf{v} = r\mathbf{v} + s\mathbf{v} \quad \forall r, s \in \mathbf{R}$ e $\forall\, \mathbf{v} \in V_2$

7) $r(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = r\mathbf{v}_1 + r\mathbf{v}_2 \quad \forall r \in \mathbf{R}$ e $\forall\, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V_2$

8) $1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in V_2$.

<u>Osservazione</u>. Il vettore $\mathbf{0}$ di 2) è il "vettore nullo", $-\mathbf{v}$ di 3) è il "vettore opposto" di $\mathbf{v}$, ossia $(-1)\mathbf{v}$ e 1 di 8) è l'unità in $\mathbf{R}$.

Poichè valgono 1),2),...,8) si dice che V_2, con le operazioni di $+$ e $\cdot$ introdotte è un esempio di **spazio vettoriale** sul "campo" $\mathbf{R}$.

<u>Osservazione</u>. Per "campo" $\mathbf{R}$ intendiamo l'insieme dei numeri reali con le operazioni di addizione e moltiplicazione in $\mathbf{R}$ e le relative proprietà.

• Consideriamo $\mathbf{R}^2 = \{(x, y) \ : \ x, y \in \mathbf{R}\}$.

Definiamo la **somma di elementi di $\mathbf{R}^2$** ed il **prodotto di un numero reale per un elemento di $\mathbf{R}^2$** come segue:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \overset{def.}{=} (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad \forall\, (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbf{R}^2$$
$$r(x, y) \overset{def.}{=} (rx, ry) \;\; \forall\, r \in \mathbf{R}, \quad \forall\, (x, y) \in \mathbf{R}^2$$

Esempio. $(2, 3) + (5, -7) = (2 + 5, 3 + (-7)) = (7, -4)$.

$-3(5, -7) = (-3 \cdot 5, (-3)(-7)) = (-15, 21)$.

N.B.: $+$ è una "operazione interna" ad $\mathbf{R}^2$.

$\cdot$ è una "operazione esterna" ad $\mathbf{R}^2$.

Osservazione. Le operazioni $+$ e $\cdot$ ora definite "corrispondono" a quelle definite in V_2 (vedi figure 6 e 7).

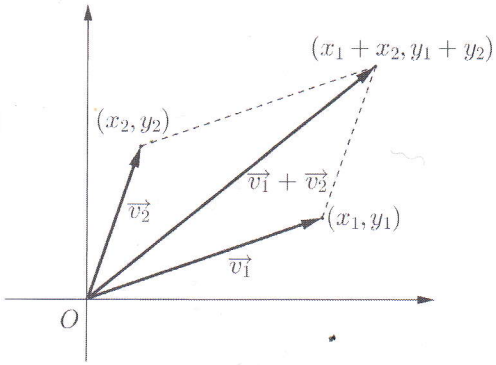


Figura 6

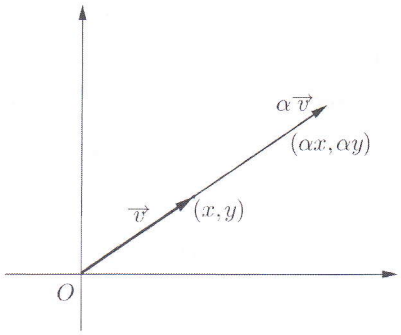


Figura 7

Si dimostra che valgono le proprietà 1),...,8) con $\mathbf{R}^2$ al posto di V_2, $(0, 0)$ al posto di 0, $(-x, -y)$ al posto di $-\mathbf{v}$ (se $\mathbf{v} = (x, y)$), quindi anche $\mathbf{R}^2$ è un esempio di **spazio vettoriale** sul campo $\mathbf{R}$.

• Analogamente $V_1, V_3, \mathbf{R}, \mathbf{R}^3, ..., \mathbf{R}^n$ $(n \geq 1)$ sono esempi di **spazi vettoriali** sul campo $\mathbf{R}$.

In $\mathbf{R}^n$ la somma di due n-uple ed il prodotto di un numero reale per una n-upla vengono definiti come segue (in modo analogo a quanto fatto in $\mathbf{R}^2$):

$$(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) \overset{def.}{=} (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$
$$r(x_1, x_2, ..., x_n) \overset{def.}{=} (rx_1, rx_2, ..., rx_n)$$

$\forall\ (x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbf{R}^n$ e $\forall r \in \mathbf{R}$.

Diamo ora in modo rigoroso la

Definizione di spazio vettoriale. Sia V un insieme non vuoto e sia $\mathbf{R}$ il campo dei numeri reali. Supponiamo che in V siano definite:

- un'operazione interna $+$ $(\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ risulta $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in V)$
- un'operazione esterna $\cdot$ $(\forall \alpha \in \mathbf{R}, \forall \mathbf{v} \in V$ risulta $\alpha \mathbf{v} \in V)$.

Se valgono le seguenti proprietà:

1) $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3)\ \ \forall\ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in V$

2) Esiste $\mathbf{0} \in V$ tale che $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v}\ \ \forall\ \mathbf{v} \in V$

3) Per ogni $\mathbf{v} \in V$ esiste $-\mathbf{v} \in V$ tale che $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = (-\mathbf{v}) + \mathbf{v} = \mathbf{0}$

4) $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1\ \ \forall\ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$

5) $(rs)\mathbf{v} = r(s\mathbf{v})\ \ \forall r, s \in \mathbf{R}$ e $\forall\ \mathbf{v} \in V$

6) $(r + s)\mathbf{v} = r\mathbf{v} + s\mathbf{v}\ \ \forall r, s \in \mathbf{R}$ e $\forall\ \mathbf{v} \in V$

7) $r(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = r\mathbf{v}_1 + r\mathbf{v}_2\ \ \forall r \in \mathbf{R}$ e $\forall\ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$

8) $1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}\ \ \forall\ \mathbf{v} \in V$

si dice che V è uno **spazio vettoriale** sul campo $\mathbf{R}$, $\mathbf{0}$ si dice **vettore nullo** di V e $-\mathbf{v}$ si dice **vettore opposto** di $\mathbf{v}$.

Se V è uno spazio vettoriale su $\mathbf{R}$ allora gli elementi di V si dicono **vettori**, quelli di $\mathbf{R}$ si dicono **scalari**.

Osservazione. Al posto di $\mathbf{R}$ si può sostituire un qualunque "campo" K (ad esempio $\mathbf{Q}$ o $\mathbf{C}$).

Esempi.

- V_1, V_2, V_3 sono spazi vettoriali su $\mathbf{R}$.
- $\mathbf{R}, \mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3, ..., \mathbf{R}^n$ sono spazi vettoriali su $\mathbf{R}$ $(n \geq 1)$.
- Indichiamo con $P(x)$ l'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali, cioè

$$P(x) \stackrel{def.}{=} \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n \ : \ n \text{ intero } \geq 0, a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbf{R}\}$$

(x è una indeterminata).

$P(x)$, con le consuete operazioni di addizione di polinomi e di moltiplicazione di un numero reale per un polinomio, è un esempio di spazio vettoriale su $\mathbf{R}$.

- Indichiamo con $P_k(x)$ l'insieme dei polinomi in x a coefficienti reali e di grado minore o uguale a k (k intero fissato maggiore o uguale a 0), cioè

$$P_k(x) \stackrel{def.}{=} \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_kx^k \ : \ a_0, a_1, ..., a_k \in \mathbf{R}\}$$

$P_k(x)$, con le consuete operazioni di addizione di polinomi e di moltiplicazione di un numero reale per un polinomio, è un ulteriore esempio di spazio vettoriale su $\mathbf{R}$.

Vediamo ora alcune proprietà degli spazi vettoriali.

Proposizione 1.1.

Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbf{R}$.

a) Se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in V$ e $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$ allora $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$.

b) Se $r \in \mathbf{R}$ e $\mathbf{v} \in V$ allora $r\mathbf{v} = \mathbf{0} \iff r = 0$ oppure $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

c) Se $r \in \mathbf{R}$ e $\mathbf{v} \in V$ allora $(-r)\mathbf{v} = -(r\mathbf{v}) = r(-\mathbf{v})$.

d) Se $a_1, ..., a_n \in \mathbf{R}$ e $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n \in V$ $(n \geq 1)$ allora $a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + ... + a_n\mathbf{v}_n$ è un elemento di V (vettore).

A titolo di esempio dimostriamo il punto a)[2].

(Ipotesi): $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 \rightarrow$ (vedi proprietà 3 della definizione di spazio vettoriale)

$(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3) + (-\mathbf{v}_3) = (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) + (-\mathbf{v}_3) \rightarrow$ (vedi proprietà 1 della definizione di spazio

[2]Nelle dimostrazioni, con il simbolo "$\rightarrow$" si intende "segue" o "implica".

vettoriale) $\mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_3 + (-\mathbf{v}_3)) = \mathbf{v}_2 + (\mathbf{v}_3 + (-\mathbf{v}_3)) \rightarrow$ (vedi proprietà 3 della definizione di spazio vettoriale) $\mathbf{v}_1 + \mathbf{0} = \mathbf{v}_2 + \mathbf{0} \rightarrow$(vedi proprietà 2 della definizione di spazio vettoriale) $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$ (tesi).

Definizione. Se $a_1, ..., a_n \in \mathbf{R}$ e $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n \in V$ $(n \geq 1)$, allora (vedi proprietà d)) il vettore $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + ... + a_n\mathbf{v}_n \in V$ si dice **combinazione lineare** dei vettori $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ con scalari $a_1, ..., a_n$.

Esempio. Siano $a_1 = 2, a_2 = -1, a_3 = 4$ e $\mathbf{v}_1 = (1,0), \mathbf{v}_2 = (0,1), \mathbf{v}_3 = (1,1)$ in $\mathbf{R}^2$. Allora

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3 = 2(1,0) - 1(0,1) + 4(1,1) =$$

$$= (2,0) + (0,-1) + (4,4) = (2+0+4, 0-1+4) = (6,3)\ ,$$

quindi $(6,3)$ è la combinazione lineare di $\mathbf{v}_1 = (1,0), \mathbf{v}_2 = (0,1), \mathbf{v}_3 = (1,1)$ con scalari $a_1 = 2, a_2 = -1, a_3 = 4$.

§3. Sottospazi vettoriali

Premessa. Se si considerano gli spazi vettoriali $P(x)$ e $P_k(x)$, si può notare che $P_k(x)$ è un sottoinsieme di $P(x)$ e che $P_k(x)$, con le stesse operazioni definite in $P(x)$, è uno spazio vettoriale e per questo motivo si dice che $P_k(x)$ è un "sottospazio vettoriale" di $P(x)$.
Più precisamente si ha la seguente

Definizione. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbf{R}$ e sia $W \subseteq V$. Si dice che W è un **sottospazio vettoriale** di V (e si scrive $W \sqsubseteq V$) se:

i) $\mathbf{0} \in W$ ($\mathbf{0}$ è il vettore nullo di V).

ii) Per ogni $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W$ si ha $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in W$ (W è "chiuso" rispetto alla $+$).

iii) Per ogni $r \in \mathbf{R}$ e per ogni $\mathbf{w} \in W$ si ha $r\mathbf{w} \in W$ (W è "chiuso" rispetto alla $\cdot$).

Si dimostra la seguente

Proposizione 1.2.

a) $W \sqsubseteq V \iff W$ è un sottoinsieme di V e W è uno spazio vettoriale su $\mathbf{R}$ con le stesse operazioni definite in V (vedi esempio riportato nella premessa).

b) Se V è uno spazio vettoriale su $\mathbf{R}$ allora $\{\mathbf{0}\}$ e V sono sottospazi di V, detti **sottospazi banali** *(non è detto però che siano gli unici sottospazi di V).*

c) I sottospazi di V_2 sono soltanto quelli banali e ogni "retta" passante per O.

d) I sottospazi di V_3 sono soltanto quelli banali, ogni "retta" passante per O e ogni "piano" passante per O.

Esempio. Provare che $W = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x - 3y = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^2$.

Sol.: geometricamente ($\mathbf{R}^2 \equiv V_2$) W è una "retta" passante per O, quindi $W \sqsubseteq \mathbf{R}^2$ (Proposizione 1.2 c)).

Verifica diretta (vedi definizione di sottospazio): si ha

$$W = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x - 3y = 0\} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x = 3y\}$$

e quindi

$$W = \{(3y, y) \ : \ y \in \mathbf{R}\} \quad \text{(descrizione esplicita di } W\text{)}.$$

Ovviamente $W \subseteq \mathbf{R}^2$ e precisamente W è l'insieme delle coppie di $\mathbf{R}^2$ la cui prima componente è tripla della seconda.

i) $(0, 0) \in W$ perchè $0 = 3 \cdot 0$.

ii) Se $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W$ allora esistono $y_1, y_2 \in \mathbf{R}$ tali che $\mathbf{w}_1 = (3y_1, y_1), \mathbf{w}_2 = (3y_2, y_2)$. Quindi

$$\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = (3y_1, y_1) + (3y_2, y_2) = (3y_1 + 3y_2, y_1 + y_2) = (3(y_1 + y_2), y_1 + y_2) \ ,$$

e perciò $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in W$.

iii) Se $\mathbf{w} \in W$ allora esiste $y \in \mathbf{R}$ tale che $\mathbf{w} = (3y, y)$. Quindi se $\alpha \in \mathbf{R}$

$$\alpha\mathbf{w} = \alpha(3y, y) = (3\alpha y, \alpha y) = (3(\alpha y), \alpha y) \ ,$$

e perciò $\alpha \mathbf{w} \in W$.

In conclusione $W \sqsubseteq \mathbf{R}^2$.

<u>Osservazione</u>. Se le condizioni (proprietà) che caratterizzano gli elementi $(x_1, ..., x_n)$ di un sottoinsieme W di $\mathbf{R}^n$ sono *esprimibili* mediante un'equazione o un sistema di equazioni di "primo grado" (in $x_1, ..., x_n$) prive del termine noto, allora W è un sottospazio di $\mathbf{R}^n$. In particolare:

- un'equazione di primo grado in x, y e priva del termine noto, rappresenta, in $\mathbf{R}^2$ (o V_2), una "retta" passante per l'origine,
- un'equazione di primo grado in x, y, z e priva del termine noto, rappresenta, in $\mathbf{R}^3$ (o V_3), un "piano" passante per l'origine,
- un sistema di due equazioni (non equivalenti) di primo grado in x, y, z e prive del termine noto rappresenta in $\mathbf{R}^3$ (o V_3) una "retta" passante per l'origine.

<u>Esempio</u>. Dire se i seguenti sottoinsiemi sono sottospazi.

1) $W = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ 2x - 3y + 1 = 0\}$

2) $W = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 - 4x = 0\}$

3) $W = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ 2x - 7y = 0\}$

4) $W = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ x - y + 3z = 0\}$

5) $W = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 2x - 4y + 5z + 1 = 0 \end{cases}\right\}$

6) $W = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ \begin{cases} 2x - y + 4z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}\right\}$

<u>Sol.</u>: utilizzando l'osservazione precedente si può subito affermare che 3),4),6) sono sottospazi. 1),2),5) non sono invece sottospazi. Perchè ?

N.B. Se $W = \{(x, y.z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ (2x - y + 4z)^2 + (x + 2y - z)^2 = 0\}$ allora $W = \{(x, y.z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ \begin{cases} 2x - y + 4z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}\}$ e perciò $W \sqsubseteq \mathbf{R}^3$ nonostante la condizione iniziale non sia di

primo grado. Essa è però *esprimibile* con un sistema di equazioni di primo grado in x, y, z privo del termine noto.

§4. Sottospazio generato da un insieme di vettori

Consideriamo prima il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ dato da $W = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ x - 2y + 3z = 0\}$. Si ha

$$W = \{(x, y, z) \ : \ x = 2y - 3z\} = \{(2y - 3z, y, z) \ : \ y, z \in \mathbf{R}\} =$$

$$= \{(2y, y, 0) + (-3z, 0, z) \ : \ y, z \in \mathbf{R}\} = \{y(2, 1, 0) + z(-3, 0, 1) \ : \ y, z \in \mathbf{R}\} \ .$$

Quindi W è l'insieme di tutte le combinazioni lineari degli elementi di

$$S = \{\mathbf{v}_1 = (2, 1, 0), \mathbf{v}_2 = (-3, 0, 1)\} \ .$$

Si esprime questo fatto dicendo che "S genera W" e si scrive $[S] = W$ ($[S]$ si legge "S generato").

Più in generale sia V uno spazio vettoriale su $\mathbf{R}$ e sia $S = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\} \subseteq V$ $(n \geq 1)$. Poniamo

$$[S] \stackrel{def.}{=} \{a_1\mathbf{v}_1 + ... + a_n\mathbf{v}_n \ : \ a_1, ..., a_n \in \mathbf{R}\} \ .$$

In altri termini $[S]$ è l'*insieme di tutte le combinazioni lineari degli elementi di S.*
In termini più precisi $[S] \stackrel{def.}{=} \{\mathbf{v} \in V \ : \ \text{esistono } a_1, ..., a_n \in \mathbf{R} \text{ tali che } a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + ... + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{v}\}$.
Scriviamo anche $[\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n]$ in luogo di $[S]$.

Teorema 1.3.
Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbf{R}$ e sia $S = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ un sottoinsieme di V $(n \geq 1)$. Allora

a) $[S]$ è un sottospazio di V.

b) $[S]$ *contiene* S.

c) Se W *è un sottospazio di* V *e* $W \supseteq S$ *allora* $W \supseteq [S]$.

Dimostrazione.

a) Ovviamente $[S]$ è un sottoinsieme di V. Dimostriamo ora che valgono le proprietà i),ii),iii) della definizione di sottospazio vettoriale.

i) $0 \in [S]$ in quanto basta porre $a_1 = ... = a_n = 0$ e si ottiene $0\mathbf{v}_1 + ... + 0\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$.

ii) Se $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in [S] \rightarrow$ esistono $a_1, ..., a_n \in \mathbf{R}$ ed esistono $b_1, ..., b_n \in \mathbf{R}$ tali che $\mathbf{w}_1 = a_1\mathbf{v}_1 + ... + a_n\mathbf{v}_n$ e $\mathbf{w}_2 = b_1\mathbf{v}_1 + ... + b_n\mathbf{v}_n \rightarrow \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = (a_1+b_1)\mathbf{v}_1 + ... + (a_n+b_n)\mathbf{v}_n \rightarrow \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in [S]$.

iii) Se $\alpha \in \mathbf{R}$ e $\mathbf{w} \in [S] \rightarrow \alpha \in \mathbf{R}$ ed esistono $a_1, ..., a_n \in \mathbf{R}$ tali che $\mathbf{w} = a_1\mathbf{v}_1 + ... + a_n\mathbf{v}_n \rightarrow \alpha\mathbf{w} = (\alpha a_1)\mathbf{v}_1 + ... + (\alpha a_n)\mathbf{v}_n \rightarrow \alpha\mathbf{w} \in [S]$.

Conclusione: $[S] \sqsubseteq V$.

b) Si ha $\mathbf{v}_1 \in S \rightarrow \mathbf{v}_1 = 1\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + ... + 0\mathbf{v}_n \rightarrow \mathbf{v}_1 \in [S]$.

$\mathbf{v}_2 \in S \rightarrow \mathbf{v}_2 = 0\mathbf{v}_1 + 1\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3 + ... + 0\mathbf{v}_n \rightarrow \mathbf{v}_2 \in [S]$.

$\vdots$

$\mathbf{v}_n \in S \rightarrow \mathbf{v}_n = 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + ... + 0\mathbf{v}_{n-1} + 1\mathbf{v}_n \rightarrow \mathbf{v}_n \in [S]$.

Conclusione: $S \subseteq [S]$.

c) Se $W \sqsubseteq V$ e $W \supseteq S = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ allora W, essendo un sottospazio, contiene tutti i vettori del tipo $a_1\mathbf{v}_1 + ... + a_n\mathbf{v}_n$ con $a_1, ..., a_n \in \mathbf{R}$ e perciò W contiene tutti gli elementi di $[S]$. In conclusione $W \supseteq [S]$.

La dimostrazione del Teorema 1.3 è adesso completa.

Definizione. $[S]$ si dice **sottospazio di** V **generato da** S.

In particolare se $[S] = V$ allora si dice che S **genera** V.

Osservazione. Dal Teorema 1.3 segue che $[S]$ è il "più piccolo" sottospazio di V tra quelli che contengono S.

N.B. Dalle precedenti definizioni si ha:

• $\mathbf{v} \in [S] \iff \exists\, a_1, ..., a_n \in \mathbf{R}$ tali che $a_1\mathbf{v}_1 + ... + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{v}$ (ossia $\mathbf{v}$ è combinazione lineare degli elementi di S).

In particolare:

• S genera $V \iff$ per ogni $\mathbf{v} \in V$ esistono $a_1, ..., a_n \in \mathbf{R}$ tali che $a_1\mathbf{v}_1 + ... + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{v}$ (ossia ogni elemento di V è combinazione lineare degli elementi di S).

Esempio.

1) Se $S = \{\mathbf{v}_1\}$, con $\mathbf{v}_1 \in V_2$ e $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$, allora $[S] = \{\alpha_1\mathbf{v}_1 \ : \ \alpha_1 \in \mathbf{R}\}$ e quindi $[S]$ è la "retta" contenente $\mathbf{v}_1$. In questo caso $[S] \neq V_2$ e perciò S *non genera* V_2.

2) Sia $S = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\} \subseteq V_2$. Poichè ogni vettore $\mathbf{v}$ di V_2 si può scrivere nella forma $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ con $a, b \in \mathbf{R}$, possiamo concludere che $[S] = V_2$, ossia S *genera* V_2.

3) Se $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, con $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V_3$ e $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ non nulli e non paralleli, allora $[S] = \{\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 \ : \ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}\}$ e quindi $[S]$ è il "piano" contenente $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$. In questo caso S *non genera* V_3.

Esempio. (**Importante**) Verificare che:

1) $S = \{(1,0), (0,1)\}$ **genera** $\mathbf{R}^2$.

2) $S = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ **genera** $\mathbf{R}^3$.

3) $S = \{(1,0,...,0), (0,1,0,...,0), ..., (0,...,0,1)\}$ **genera** $\mathbf{R}^n$ $(n \geq 1)$.

4) $S = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ **genera** V_2.

5) $S = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ **genera** V_3.

6) $S = \{1, x, x^2, ..., x^k\}$ **genera** $P_k(x)$.

Sol.: 1) Dobbiamo dimostrare che ogni elemento di $\mathbf{R}^2$ è combinazione lineare degli elementi di S, ossia che per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ esistono $a, b \in \mathbf{R}$ tali che $a(1,0) + b(0,1) = (x, y)$.

Da $a(1,0) + b(0,1) = (x, y)$ si ha $(a, 0) + (0, b) = (x, y)$ e quindi $(a, b) = (x, y)$. Pertanto

$$\begin{cases} a = x \\ b = y \end{cases}$$ (il sistema nelle incognite a, b ha soluzione per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$).

Ad esempio $(2, 3) = 2(1, 0) + 3(0, 1)$.

Quindi ogni coppia (x, y) si può scrivere come combinazione lineare dei vettori $(1, 0), (0, 1)$ (in questo caso con scalari x, y) e perciò S genera $\mathbf{R}^2$.

2),3),4),5),6) sono lasciati per esercizio.

Osservazione. Con S abbiamo indicato un insieme finito, ma con opportune modifiche i concetti introdotti si possono estendere anche a sottoinsiemi infiniti.

Osservazione. Si può dimostrare che nessun sottoinsieme finito di $P(x)$ può generare $P(x)$, cioè $P(x)$ non è *finitamente generato.*

Noi considereremo solo spazi vettoriali finitamente generati.

Nel seguito si richiede la conoscenza delle tecniche elementari di risoluzione dei sistemi lineari (cioè dei sistemi di primo grado), già acquisita nelle scuole secondarie di secondo grado. La teoria generale di tali sistemi verrà affrontata nel prossimo capitolo.

Esempio 1. Dire se:

1) $\mathbf{v} = (5, -3, 2) \in [\mathbf{v}_1 = (1, -1, 0), \mathbf{v}_2 = (1, 0, 1)]$,

2) $\mathbf{v} = (1, 2, 0) \in [\mathbf{v}_1 = (-1, 1, 0), \mathbf{v}_2 = (-1, 0, 1)]$

e darne una interpretazione geometrica.

Sol.: 1) Dobbiamo stabilire se esistono $a, b \in \mathbf{R}$ tali che

$$a(1, -1, 0) + b(1, 0, 1) = (5, -3, 2) \ .$$

Da questa uguaglianza segue:

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ -a = -3 \\ b = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} 5 = 5 \\ a = 3 \\ b = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$$

e quindi il sistema ha soluzione e pertanto $(5, -3, 2) \in [(1, -1, 0), (1, 0, 1)]$.

Si noti che effettivamente $3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}$.

2) Ragionando come in 1), da $a(-1, 1, 0) + b(-1, 0, 1) = (1, 2, 0)$ si ottiene il sistema

$$\begin{cases} -a-b=1 \\ a=2 \\ b=0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2=1 \\ a=2 \\ b=0 \end{cases}$$

Il sistema è quindi impossibile e pertanto $(1,2,0) \notin [(-1,1,0),(-1,0,1)]$.

Interpretazione geometrica. In entrambi i casi i sottospazi generati da $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono "piani" dello spazio. Nel primo caso il vettore $\mathbf{v}$ appartiene a tale piano, mentre nel secondo caso non vi appartiene.

Esempio 2. Dire se:

1) $S = \{(1,2),(-1,3)\}$ genera $\mathbf{R}^2$.

2) $S = \{(1,2),(2,4)\}$ genera $\mathbf{R}^2$.

3) $S = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ genera $\mathbf{R}^3$.

4) $S = \{(1,2,1),(1,1,1),(0,1,0)\}$ genera $\mathbf{R}^3$.

Sol.: 3) Dobbiamo stabilire se, per ogni $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$, esistono $a,b,c \in \mathbf{R}$ tali che $a(1,0,0)+b(1,1,0)+c(1,1,1)=(x,y,z)$. Si ha

$$a(1,0,0)+b(1,1,0)+c(1,1,1)=(x,y,z) \iff \begin{cases} a+b+c &= x \\ b+c &= y \\ c &= z \end{cases} \iff \begin{cases} a &= x-y \\ b &= y-z \\ c &= z \end{cases}$$

Il sistema nelle incognite a,b,c ha soluzione per ogni $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$, quindi S genera $\mathbf{R}^3$.

4) Ragionando come in 3), da $a(1,2,1)+b(1,1,1)+c(0,1,0)=(x,y,z)$ segue che

$$\begin{cases} a+b &= x \\ 2a+b+c &= y \\ a+b &= z \end{cases} \iff \begin{cases} b &= x-a \\ 2a+x-a+c &= y \\ a+x-a &= z \end{cases} \iff \begin{cases} b &= x-a \\ c &= -a-x+y \\ x &= z \end{cases}.$$

Il sistema ha soluzione solo se $x=z$ e non per ogni $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$, quindi S *non genera* $\mathbf{R}^3$ (S genera il sottospazio $W = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ x-z=0\}$.

1) e 2) sono lasciati per esercizio.

Esempio 3. Trovare il sottospazio generato da $S = \{(1,3),(-4,5)\}$.

Sol.: per definizione di sottospazio generato si ha

$$[S] = \{x(1,3) + y(-4,5) \ : \ x,y \in \mathbf{R}\} = \{(x,3x) + (-4y,5y) \ : \ x,y \in \mathbf{R}\} =$$

$$= \{(x-4y, 3x+5y) \ : \ x,y \in \mathbf{R}\} \ .$$

Si noti che le componenti del generico elemento di $[S]$ sono "polinomi di primo grado" in x e y privi del termine noto.

Più in generale se $W \subseteq \mathbf{R}^n$ e le componenti dei suoi elementi sono o nulle o polinomi di primo grado in $x_1, ..., x_n$, privi del termine noto, allora W è un sottospazio di $\mathbf{R}^n$.

Ad esempio l'insieme $W = \{(x - 3y + \sqrt{2}z, 0, \pi x - 3y)$, al variare di $x,y,z \in \mathbf{R}\}$, è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$.

Esempio 4. Trovare un insieme di generatori per

a) $W = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ 2x - y = 0\} \sqsubseteq \mathbf{R}^2$.

b) $W = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ x - 2y + 5z = 0\} \sqsubseteq \mathbf{R}^3$.

c) $W = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ x - y + 2z = 0 \text{ e } x + y + 6z = 0\} \sqsubseteq \mathbf{R}^3$.

d) $W = \{(x+y, 2x-y+z, x+z) \ : \ x,y,z \in \mathbf{R}\} \sqsubseteq \mathbf{R}^3$.

Sol.: si procede come nell'esempio che introduce il concetto di sottospazio generato, descrivendo quindi gli elementi di W in modo esplicito.

a) Si ha:

$$W = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ y = 2x\} = \{(x,2x) \ : \ x \in \mathbf{R}\} = \{x(1,2) \ : \ x \in \mathbf{R}\} = [(1,2)]$$

e quindi $S = \{(1,2)\}$ genera W, ossia S è un insieme di generatori di W.

b) Si ha:

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ x = 2y - 5z\} = \{(2y-5z, y, z) \ : \ y,z \in \mathbf{R}\} =$$

$$= \{(2y,y,0) + (-5z,0,z) \ : \ y,z \in \mathbf{R}\} = \{y(2,1,0) + z(-5,0,1) \ : \ y,z \in \mathbf{R}\} =$$

$$= [(2,1,0),(-5,0,1)]$$

e quindi $S = \{(2,1,0),(-5,0,1)\}$ genera W, ossia S è un insieme di generatori di W.

c) Risolvendo il sistema si ha

$$\begin{cases} x = y - 2z \\ y - 2z + y + 6z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -4z \\ y = -2z \end{cases}$$

Quindi

$$W = \{(-4z,-2z,z) \ : \ z \in \mathbf{R}\} = \{z(-4,-2,1) \ : \ z \in \mathbf{R}\} = [(-4,-2,1)]$$

e pertanto $S = \{(-4,-2,1)\}$ genera W.

d) Notiamo che W è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$ in quanto le componenti dei suoi elementi sono "polinomi di primo grado" in x, y, z privi del termine noto. È poi

$$W = \{(x,2x,x) + (y,-y,0) + (0,z,z) \ : \ x,y,z \in \mathbf{R}\} =$$

$$= \{x(1,2,1) + y(1,-1,0) + z(0,1,1) \ : \ x,y,z \in \mathbf{R}\} =$$

$$= [(1,2,1),(1,-1,0),(0,1,1)]$$

e perciò $S = \{(1,2,1),(1,-1,0),(0,1,1)\}$ genera W.

Il procedimento descritto negli esempi permette di determinare *un particolare* insieme di generatori.

§5. Vettori linearmente indipendenti e vettori linearmente dipendenti

Per introdurre l'argomento consideriamo prima il seguente

Esempio. Determinare gli eventuali scalari $a, b \in \mathbf{R}$ in modo che si abbia

1) $a(1,2) + b(-1,3) = (0,0)$

2) $a(1,2) + b(2,4) = (0,0)$

Sol.: 1) L'uguaglianza sussiste se e soltanto se

$$(a-b, 2a+3b) = (0,0) \iff \begin{cases} a-b=0 \\ 2a+3b=0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} a=b \\ 5b=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$$

2) Procedendo come in 1) si ha

$$(a+2b, 2a+4b) = (0,0) \iff \begin{cases} a+2b=0 \\ 2a+4b=0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} a=-2b \\ 0=0 \end{cases} .$$

N.B. 1) vale *solo* se $a=b=0$, mentre 2) vale se $a=b=0$ ma vale *anche per altri valori* di a, b (anche non entrambi nulli).

Quanto visto si esprime dicendo che

l'insieme $\{(1,2),(-1,3)\}$ è *linearmente indipendente*, mentre

l'insieme $\{(1,2),(2,4)\}$ è *linearmente dipendente*.

Più in generale si dà la seguente

Definizione. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbf{R}$ e sia $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\} \subseteq V,\ n \geq 1$.

• Si dice che S è un insieme **linearmente dipendente** o che i vettori $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ sono linearmente dipendenti, se *esistono* degli scalari *non tutti nulli* $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbf{R}$ tali che

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + ... + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

ossia se è possibile ottenere il vettore nullo come combinazione lineare di $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ *anche* con scalari *non tutti nulli*.

• Si dice che S è un insieme **linearmente indipendente** o che i vettori $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ sono linearmente indipendenti, se S non è linearmente dipendente, ossia se è possibile ottenere

il vettore nullo come combinazione lineare di $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ *solo* con scalari *tutti nulli*, cioè da

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + ... + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \quad \textit{segue} \quad a_1 = a_2 = ... = a_n = 0 \ .$$

Osservazione. Questi concetti si possono estendere (con opportune modifiche) anche a sottoinsiemi infiniti.

Esempio. Dire se S è linearmente dipendente, con

1) $S = \{\mathbf{v}_1 = (3,3,4), \mathbf{v}_2 = (1,1,0), \mathbf{v}_3 = (0,0,1)\} \subseteq \mathbf{R}^3$,

2) $S = \{\mathbf{v}_1 = (1,1,2), \mathbf{v}_2 = (2,1,0), \mathbf{v}_3 = (0,1,3)\} \subseteq \mathbf{R}^3$.

Sol.: 1) Da $a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 + c\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ segue

$$a(3,3,4) + b(1,1,0) + c(0,0,1) = (0,0,0) \iff$$

$$\iff (3a+b, 3a+b, 4a+c) = (0,0,0) \iff$$

$$\iff \begin{cases} 3a+b=0 \\ 3a+b=0 \\ 4a+c=0 \end{cases} \iff \begin{cases} b=-3a \\ 0=0 \\ c=-4a \end{cases} .$$

Quindi il sistema ha infinite soluzioni e *non solo* quella nulla, perciò S è linearmente dipendente. Si noti che $1\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2 - 4\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ e quindi $\mathbf{v}_1 = 3\mathbf{v}_2 + 4\mathbf{v}_3$, ossia un vettore di S è combinazione lineare dei rimanenti.

2) Da $a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 + c\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ segue

$$a(1,1,2) + b(2,1,0) + c(0,1,3) = (0,0,0) \iff$$

$$\iff (a+2b, a+b+c, 2a+3c) = (0,0,0) \iff$$

$$\iff \begin{cases} a+2b=0 \\ a+b+c=0 \\ 2a+3c=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=-2b \\ -b+c=0 \\ -4b+3c=0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} a = -2b \\ b = c \\ -c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}.$$

Quindi il sistema ha *solo* la soluzione nulla, perciò S è linearmente indipendente.

Esempio. (**Importante**) Verificare che i seguenti sottoinsiemi sono linearmente **indipendenti**.

1) $S = \{(1,0),(0,1)\} \subseteq \mathbf{R}^2$.

2) $S = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} \subseteq \mathbf{R}^3$.

3) $S = \{(1,0,...,0),(0,1,..,0),...,(0,0,...,0,1)\} \subseteq \mathbf{R}^n$ $(n \geq 1)$.

4) $S = \{\mathbf{i},\mathbf{j}\} \subseteq V_2$.

5) $S = \{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\} \subseteq V_3$.

6) $S = \{1, x, x^2, ..., x^k\} \subseteq P_k(x)$.

Sol.: 1) Da $a(1,0) + b(0,1) = (0,0)$ segue $(a,b) = (0,0)$ e quindi $a = b = 0$. Perciò S è linearmente indipendente.

2),3),4),5),6) sono lasciati per esercizio.

Il seguente teorema permette, in alcuni casi, di stabilire in modo "rapido" se un insieme è linearmente dipendente.

Teorema 1.4.

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbf{R}$ e sia $S = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\} \subseteq V$ con $n \geq 1$.

1) Se $S = \{\mathbf{v}_1\}$ allora S è linearmente dipendente $\iff$ $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$.

2) Se $n \geq 2$, allora S è linearmente dipendente $\iff$ esiste un vettore di S che è combinazione lineare degli altri elementi di S.

In particolare:

2') Se $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ allora S è linearmente dipendente $\iff$ $\exists \alpha \in \mathbf{R}$ tale che $\mathbf{v}_1 = \alpha \mathbf{v}_2$ oppure $\mathbf{v}_2 = \alpha \mathbf{v}_1$ (cioè $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono "proporzionali"). Se poi $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} \subseteq V_2$ (o V_3) allora S è linearmente dipendente $\iff$ $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono "paralleli".

2') Se $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} \subseteq V_3$ allora S è linearmente dipendente $\iff$ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono "complanari".

3) Se $\mathbf{0} \in S$ allora S è linearmente dipendente (non vale il viceversa!).

4) Se S è linearmente dipendente e $S \subseteq S' \subseteq V$ allora S' è linearmente dipendente.

5) Se S è linearmente indipendente e $S' \subseteq S$ allora S' è linearmente indipendente.

Dimostriamo 1),2), mentre per 3),4),5) rimandiamo agli esercizi.

1) $\Rightarrow$ Se $S = \{\mathbf{v}_1\}$ è linearmente dipendente $\rightarrow$ (vedi definizione di linearmente dipendenti) esiste $a_1 \neq 0$ tale che $a_1\mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$.

$\Leftarrow$ Se $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \rightarrow 1\mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \rightarrow$ (per definizione di linearmente dipendenti) $S = \{\mathbf{v}_1\}$ è linearmente dipendente.

2) $\Rightarrow$ Se $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}, n \geq 2$ è linearmente dipendente $\rightarrow$ esistono $a_1, ..., a_n \in \mathbf{R}$ non tutti nulli, tali che $a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + ... + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \rightarrow$ (supponendo ad esempio $a_1 \neq 0$) $a_1\mathbf{v}_1 = (-a_2)\mathbf{v}_2 + ... + (-a_n)\mathbf{v}_n \rightarrow$ (essendo $a_1 \neq 0$) $\mathbf{v}_1 = -(\frac{a_2}{a_1})\mathbf{v}_2 + ... + (-\frac{a_n}{a_1})\mathbf{v}_n \rightarrow \mathbf{v}_1$ è combinazione lineare di $\mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$.

$\Leftarrow$ Se, ad esempio, $\mathbf{v}_1$ è combinazione lineare di $\mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n \rightarrow$ esistono $b_2, ..., b_n \in \mathbf{R}$ tali che $\mathbf{v}_1 = b_2\mathbf{v}_2 + ... + b_n\mathbf{v}_n \rightarrow 1\mathbf{v}_1 + (-b_2)\mathbf{v}_2 + ... + (-b_n)\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \rightarrow S = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ è linearmente dipendente (vedi la combinazione lineare precedente che è nulla con coefficienti non tutti nulli).

<u>Esempio</u>. Stabilire se i seguenti insiemi sono linearmente indipendenti.

a) $S = \{(0,0)\} \subseteq \mathbf{R}^2$.

b) $S = \{(0,2)\} \subseteq \mathbf{R}^2$.

c) $S = \{(0,0), (1,3)\} \subseteq \mathbf{R}^2$.

d) $S = \{(1,2,3), (2,4,6)\} \subseteq \mathbf{R}^3$.

e) $S = \{(1,2,3), (2,4,5)\} \subseteq \mathbf{R}^3$.

f) $S = \{(1,0,0), (0,1,1), (3,4,4)\} \subseteq \mathbf{R}^3$.

g) $S = \{(1,2,4), (2,4,8), (1,2,3)\} \subseteq \mathbf{R}^3$.

h) $S = \{(1,2,-1), (2,-3,5), (7,9,26)\} \subseteq \mathbf{R}^3$.

i) $S = \{2 + 3x + 5x^2\ ,\ 4 + 6x + 10x^2\} \subseteq P_2(x)$.

ℓ) $S = \{2 + 3x + 5x^2\ ,\ 2x + 3x^2 + 5x^3\} \subseteq P_3(x)$.

Sol.: d) Poichè S ha due elementi e questi sono "proporzionali" ($(2, 4, 6) = 2(1, 2, 3)$), in base al Teorema 1.4 2'), possiamo concludere che S è linearmente dipendente.

a),b)c),e),f),g),h),i),ℓ) vengono lasciati per esercizio, tenendo presente che tutti (a parte h)) possono essere trattati applicando i vari punti del Teorema 1.4.

§6. Base di uno spazio vettoriale

Per introdurre l'argomento consideriamo prima il seguente:

Esempio. Verificare che

1) $S = \{(1, 2), (2, 4)\}$ è *linearmente dipendente* e *non genera* $\mathbf{R}^2$.

2) $S = \{(1, 2)\}$ è *linearmente indipendente* e *non genera* $\mathbf{R}^2$.

3) $S = \{(1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ è *linearmente dipendente* e *genera* $\mathbf{R}^2$.

4) $S = \{(1, 1), (2, 5)\}$ è *linearmente indipendente* e *genera* $\mathbf{R}^2$.

Sol.: segue immediatamente dai concetti introdotti nel paragrafo precedente.

L'insieme S del caso 4), essendo linearmente indipendente e generando $\mathbf{R}^2$, si dice *base* di $\mathbf{R}^2$.

Più in generale si dà la seguente

Definizione. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbf{R}$ e sia $S \subseteq V$.

Si dice che S è una **base** di V se S *genera* V ed S è *linearmente indipendente*.

Osservazione. $S = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\} \subseteq V$ è una *base* di V $\iff$ S *genera* V (ossia per ogni $\mathbf{v} \in V$ esistono $a_1, ..., a_n \in \mathbf{R}$ tali che $a_1\mathbf{v}_1 + ... + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{v}$) e S è *linearmente indipendente* (ossia se $a_1\mathbf{v}_1 + ... + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ allora $a_1 = ... = a_n = 0$).

Osservazione. Il concetto di base si può estendere (con opportune modifiche) anche a sottoinsiemi infiniti.

Esempio. (**Importante**)

Tenendo presente quanto visto in precedenza, si ha:

1) $S = \{(1,0),(0,1)\}$ è una **base** di $\mathbf{R}^2$.

2) $S = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ è una **base** di $\mathbf{R}^3$.

3) $S = \{(1,0,...,0),(0,1,...,0),...,(0,0,...,1)\}$ è una **base** di $\mathbf{R}^n$ $(n \geq 1)$.

4) $S = \{\mathbf{i},\mathbf{j}\}$ è una **base** di V_2.

5) $S = \{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ è una **base** di V_3.

6) $S = \{1, x, x^2, ..., x^k\}$ è una **base** di $P_k(x)$.

7) Per convenzione $\emptyset$ è una **base** di $V = \{\mathbf{0}\}$.

Osservazione. $P(x)$ non ha una base finita.

§7. Dimensione di uno spazio vettoriale

Per introdurre l'argomento consideriamo prima il seguente:

Esempio. Verificare che i seguenti sottoinsiemi sono basi di $\mathbf{R}^2$.

1) $S = \{(1,0),(2,1)\}$

2) $S = \{(1,2),(1,3)\}$

3) $S = \{(1,1),(1,-1)\}$

Sol.: è una immediata applicazione dei concetti visti nel paragrafo precedente.

Si può notare che le basi di $\mathbf{R}^2$ dell'esempio precedente, pur essendo diverse tra loro, hanno lo *stesso numero di elementi* (in questo caso 2).

Più in generale si dimostra il seguente:

Teorema 1.5.

Se uno spazio vettoriale V ha una base di n elementi $(n \geq 1)$ allora tutte le basi di V hanno n elementi.

In breve: *tutte le basi di uno stesso spazio vettoriale hanno un ugual numero di elementi.*

Il precedente teorema giustifica la seguente:

Definizione. Si dice **dimensione** di uno spazio vettoriale V (e si indica con dim V) il numero degli elementi di una (qualunque) sua base.

Esempio. (**Importante**)

Da quanto visto si ha:

1) dim $\mathbf{R}^2 = 2$ perchè $S = \{(1,0),(0,1)\}$ è una base di $\mathbf{R}^2$ e S ha *due* elementi.

2) dim $\mathbf{R}^3 = 3$.

3) dim $\mathbf{R}^n = n, (n \geq 1)$.

4) dim $V_2 = 2$.

5) dim $V_3 = 3$.

6) dim $P_k(x) = k + 1$.

7) dim $\{\mathbf{0}\} = 0$.

Il seguente teorema evidenzia l'importanza della conoscenza della dimensione di uno spazio vettoriale.

Teorema 1.6.

Se V è uno spazio vettoriale su $\mathbf{R}$ e dim $V = n$, allora

1) Ogni sottoinsieme di V che abbia più di n elementi è linearmente dipendente (quindi dim V è il massimo numero di vettori linearmente indipendenti di V).

2) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di V che abbia n elementi è una base di V.

3) Ogni sottoinsieme di generatori di V che abbia n elementi è una base di V.

4) Se $W \sqsubseteq V$ e dim W = dim V, allora $W = V$.

In particolare; da 1) segue che:

- tre o più vettori in $\mathbf{R}^2$ sono (sempre) linearmente dipendenti;
- quattro o più vettori in $\mathbf{R}^3$ sono (sempre) linearmente dipendenti.

Da 2) segue che:

- due vettori linearmente indipendenti in $\mathbf{R}^2$ formano una base di $\mathbf{R}^2$;

• tre vettori linearmente indipendenti in $\mathbf{R}^3$ formano una base di $\mathbf{R}^3$.

Da 3) segue che:

• due vettori che generano $\mathbf{R}^2$ formano una base di $\mathbf{R}^2$;

• tre vettori che generano $\mathbf{R}^3$ formano una base di $\mathbf{R}^3$.

Da 4) segue che:

• se $W \sqsubseteq \mathbf{R}^2$ e dim $W = 2$, allora $W = \mathbf{R}^2$;

• se $W \sqsubseteq \mathbf{R}^3$ e dim $W = 3$, allora $W = \mathbf{R}^3$.

Esempio. Verificare che $S = \{(1,2), (-1,7)\}$ è una base di $\mathbf{R}^2$.

Sol.: S è un sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$, S ha due elementi e dim $\mathbf{R}^2 = 2$. Poichè gli elementi di S non sono proporzionali, S è anche linearmente indipendente, quindi S è una base di $\mathbf{R}^2$ (vedi 2) del Teorema 1.6).

Abbiamo visto che una base di uno spazio vettoriale V è un insieme che genera V ed è linearmente indipendente. Vediamo ora la

§8. Costruzione di una base di un sottospazio vettoriale a partire da un suo sottoinsieme finito di generatori

Descriviamo brevemente tale procedimento.

Sia $W \sqsubseteq V$ e sia $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_m\}$ un insieme di generatori di W (cioè S genera W).

• Se S è **linearmente indipendente** allora S è una base di W.

• Se S è **linearmente dipendente**, allora S non è una base di W. Consideriamo i sottoinsiemi di S che hanno $m-1$ elementi; se uno di questi, ad esempio $S' = \{\mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_m\}$, è linearmente indipendente, allora si dimostra che S' è una base di W, altrimenti si considerano i sottoinsiemi di S che hanno $m-2$ elementi, se uno di questi, ad esempio S'', è linearmente indipendente, allora S'' è una base di W, altrimenti si ripete il procedimento.

Esempio. Determinare una base e la dimensione dei seguenti sottospazi di $\mathbf{R}^3$:

1) $W = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ 3x - y + 5z = 0\}$

2) $W = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ x - y + 2z = 0 \ , \ x + y - 6z = 0\}$

3) $W = \{(x + y, x - y + 2z, x + z) \ : \ x, y, z \in \mathbf{R}\}$. Dire inoltre se $W = \mathbf{R}^3$.

4) $W = \{(x, x + y, x + y + z) \ : \ x, y, z \in \mathbf{R}\}$. Dire inoltre se $W = \mathbf{R}^3$.

Sol.: troviamo prima un insieme di generatori per W.

1) Si ha successivamente:

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ 3x - y + 5z = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ y = 3x + 5z\} =$$

$$= \{(x, 3x + 5z, z) \ : \ x, z \in \mathbf{R}\} = \{(x, 3x, 0) + (0, 5z, z) \ : \ x, z \in \mathbf{R}\} =$$

$$= \{x(1, 3, 0) + z(0, 5, 1) \ : \ x, z \in \mathbf{R}\} \ .$$

Quindi $S = \{\mathbf{v}_1 = (1, 3, 0), \mathbf{v}_2 = (0, 5, 1)\}$ genera W.

D'altra parte $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ non sono proporzionali, quindi S è anche linearmente indipendente.

Pertanto S è una base di W e $\dim W = 2$ (numero degli elementi di S).

Geometricamente W è un "piano" passante per O.

2) Risolviamo prima il sistema. Si ha:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ x + y - 6z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2z \\ y = 4z \end{cases}$$

quindi

$$W = \{(2z, 4z, z) \ : \ z \in \mathbf{R}\} = \{z(2, 4, 1) \ : \ z \in \mathbf{R}\} \ .$$

Perciò $S = \{\mathbf{v}_1 = (2, 4, 1)\}$ genera W, inoltre S è linearmente indipendente (ha un solo elemento e questo è diverso da $\mathbf{0}$) e pertanto S è una base di W. Si ha quindi $\dim W = 1$.

Geometricamente W è una "retta" passante per O.

3) Si ha

$$(x + y, x - y + 2z, x + z) = (x, x, x) + (y, -y, 0) + (0, 2z, z) =$$

$$= x(1, 1, 1) + y(1, -1, 0) + z(0, 2, 1)$$

e quindi $S = \{\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1), \mathbf{v}_2 = (1, -1, 0), \mathbf{v}_3 = (0, 2, 1)\}$ genera W.

Dobbiamo stabilire se S è anche linearmente indipendente. Risulta

$$a(1,1,1)+b(1,-1,0)+c(0,2,1)=(0,0,0) \iff (a+b,a-b+2c,a+c)=(0,0,0) \iff$$

$$\iff \begin{cases} a+b=0 \\ a-b+2c=0 \\ a+c=0 \end{cases} \iff \begin{cases} b=-a \\ 2a+2c=0 \\ a+c=0 \end{cases} \iff \begin{cases} b=-a \\ c=-a \end{cases}$$

Il sistema ha perciò infinite soluzioni, S è linearmente dipendente e quindi S non è una base di W (la lineare dipendenza di S può essere subito vista osservando che $\mathbf{v}_1=\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3$). Per determinare una base di W consideriamo ad esempio $S'=\{\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$. Si vede facilmente che S' è linearmente indipendente ($\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ non sono "proporzionali") e perciò S' è una base di W. Ne consegue che $\dim W=2$ e in particolare $W\neq\mathbf{R}^3$. Geometricamente W è il "piano" passante per O e contenente i due vettori di S'.

4) Si ha

$$(x,x+y,x+y+z)=(x,x,x)+(0,y,y)+(0,0,z)=x(1,1,1)+y(0,1,1)+z(0,0,1)$$

e quindi $S=\{\mathbf{v}_1=(1,1,1),\mathbf{v}_2=(0,1,1),\mathbf{v}_3=(0,0,1)\}$ genera W.

Dobbiamo stabilire se S è anche linearmente indipendente. Risulta

$$a(1,1,1)+b(0,1,1)+c(0,0,1)=(0,0,0) \iff (a,a+b,a+b+c)=(0,0,0) \iff$$

$$\begin{cases} a=0 \\ a+b=0 \\ a+b+c=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}$$

Il sistema ha pertanto l'unica soluzione $a=0,b=0,c=0$ e quindi S è anche linearmente indipendente. Perciò S è una base di W e in particolare $\dim W=3$. Ne consegue che $W=\mathbf{R}^3$ (vedi Teorema 1.6 4)).

<u>Osservazione</u>. Se $W\sqsubseteq\mathbf{R}^2$ (V_2) allora

$$\begin{cases} W = \{(0,0)\} \to \dim W = 0, \\ W = \text{“retta” passante per } O \to \dim W = 1, \\ W = \mathbf{R}^2 \to \dim W = 2 \end{cases}$$

Se $W \sqsubseteq \mathbf{R}^3$ (V_3) allora

$$\begin{cases} W = \{(0,0,0)\} \to \dim W = 0, \\ W = \text{“retta” passante per } O \to \dim W = 1, \\ W = \text{“piano” passante per } O \to \dim W = 2, \\ W = \mathbf{R}^3 \to \dim W = 3 \end{cases}$$

§9. Coordinate di un vettore

Diamo prima la seguente

Definizione. Se $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ è una base dello spazio vettoriale V allora si dice che la n-upla ordinata $(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n)$ è una **base ordinata** di V.

N.B. $((1,0),(0,1)) \neq ((0,1),(1,0))$ mentre $\{(1,0),(0,1)\} = \{(0,1),(1,0)\}$.

L'importanza del concetto di base ordinata di uno spazio vettoriale è evidenziata dal seguente teorema.

Teorema 1.7.

Sia $\beta = (\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n)$ una base ordinata dello spazio vettoriale V. Ogni elemento di V si può rappresentare in un unico modo come combinazione lineare degli elementi di β.

Dimostrazione.

Sia $\beta = (\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n)$ una base ordinata di V e sia $\mathbf{v} \in V$.

β è una base di $V \to \beta$ *genera* $V \to$ esistono $a_1, ..., a_n \in \mathbf{R}$ tali che

$$a_1\mathbf{v}_1 + ... + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{v} \ . \tag{1}$$

Perciò $\mathbf{v}$ si può rappresentare in almeno un modo come combinazione lineare di $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$.

Dimostriamo l'unicità.

Supponiamo che esistano anche $b_1, ..., b_n \in \mathbf{R}$ tali che

$$b_1\mathbf{v}_1 + ... + b_n\mathbf{v}_n = \mathbf{v} \ . \tag{2}$$

Sottraendo membro a membro le uguaglianze (1) e (2) si ottiene $(a_1 - b_1)\mathbf{v}_1 + ... + (a_n - b_n)\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \rightarrow$ (essendo β una base, β è anche *linearmente indipendente*) $a_1 - b_1 = 0, ..., a_n - b_n = 0 \rightarrow \ a_1 = b_1, ..., a_n = b_n \rightarrow$ l'unicità di tale rappresentazione.

Il teorema 1.7 giustifica la seguente

Definizione. Sia $\beta = (\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n)$ una base (ordinata) dello spazio vettoriale V. Se $\mathbf{v} \in V$ e $a_1\mathbf{v}_1 + ... + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{v}$ allora si dice che $(a_1, ..., a_n)$ è la n-upla delle **coordinate di v rispetto a** β e si scrive $M_\beta(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ o anche $M_\beta(\mathbf{v}) = (a_1, ..., a_n)$.

Osservazione. Dal teorema 1.7 segue che se V è uno spazio vettoriale su $\mathbf{R}$ di dimensione n e β è una base ordinata di V, allora la corrispondenza che ad ogni vettore $\mathbf{v}$ di V associa la n-upla delle coordinate di $\mathbf{v}$ rispetto a β (cioè $M_\beta(\mathbf{v})$) è biunivoca e perciò ogni vettore di V è univocamente determinato dalla n-upla delle sue coordinate rispetto a β.

Esempio. Trovare le coordinate dei vettori $\mathbf{v}_1 = (2, 3)$ e $\mathbf{v}_2 = (x, y)$ di $\mathbf{R}^2$ rispetto alla base (ordinata) $\beta = ((1, 0), (1, 1))$.

Sol.: nel primo caso dobbiamo determinare $a, b \in \mathbf{R}$ in modo che $a(1, 0) + b(1, 1) = (2, 3)$. Si ha $(a + b, b) = (2, 3)$, da cui

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ b = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \end{cases}$$

Quindi $-1(1, 0) + 3(1, 1) = (2, 3)$ e $M_\beta((2, 3)) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Nel secondo caso, più in generale, dobbiamo determinare $a, b \in \mathbf{R}$ in modo che $a(1, 0) + b(1, 1) = (x, y)$. Si ha $(a + b, b) = (x, y)$, da cui

$$\begin{cases} a+b=x \\ b=y \end{cases} \iff \begin{cases} a=x-y \\ b=y \end{cases}$$

Quindi $(x-y)(1,0)+y(1,1)=(x,y)$ e $M_\beta((x,y))=\begin{pmatrix} x-y \\ y \end{pmatrix}$.

<u>Osservazione</u>. Se $\beta=((1,0),(0,1))$ è la base canonica di $\mathbf{R}^2$ allora si ha $x(1,0)+y(0,1)=(x,y)$ e quindi $M_\beta((x,y))=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Perciò (x,y) coincide con la coppia delle sue coordinate rispetto alla base canonica.

Una proprietà analoga vale in $\mathbf{R}^3,...,\mathbf{R}^n$ $(n\geq 1)$.

Ad esempio in $\mathbf{R}^3$ se consideriamo $\beta=((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ allora

$$M_\beta((x,y,z))=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

N.B. Se $\beta'=((1,0,0),(0,0,1),(0,1,0))$ allora

$$M_{\beta'}((x,y,z))=\begin{pmatrix} x \\ z \\ y \end{pmatrix}.$$

In questo caso β' *non* è la base canonica.

<u>Osservazione</u>. I sistemi lineari che permettono di calcolare le coordinate di un vettore rispetto ad una base (ordinata) hanno sempre *una ed una sola soluzione* (vedi Teorema 1.7).

§10. Altre operazioni con i vettori geometrici

Introduciamo ora, brevemente, altre operazioni che riguardano soltanto i vettori geometrici e che vengono utilizzate in varie applicazioni (indichiamo i vettori con le notazioni che solitamente si usano nelle scienze applicate).

Prodotto scalare di vettori

Una "operazione" importante nelle scienze applicate (vedi ad esempio il calcolo del lavoro di una forza), è quella di **prodotto scalare**.

Definizione. Per *prodotto scalare* di due vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ (del piano o dello spazio) si intende il numero reale (scalare), indicato con $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$ o con $< \vec{v}_1, \vec{v}_2 >$, e che viene definito come segue:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \|\vec{v}_1\| \|\vec{v}_2\| \cos \widehat{\vec{v}_1 \vec{v}_2}$$

dove con $\|\vec{v}\|$ si intende la norma o modulo di $\vec{v}$ (la "lunghezza" di $\vec{v}$).

- Per definire il prodotto scalare di due vettori geometrici $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ bisogna fissare una unità di misura u per le "lunghezze" ed una unità di misura per gli angoli (il radiante).
- Con $\widehat{\vec{v}_1 \vec{v}_2}$ si intende l'angolo convesso formato da $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.
- Se $\widehat{\vec{v}_1 \vec{v}_2} = \pi/2$ si dice che i vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ sono ortogonali.
- Se $\widehat{\vec{v}_1 \vec{v}_2} = 0$ (oppure π) si dice che i vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ sono paralleli concordi (oppure paralleli discordi).
- Se $\|\vec{v}\| = 1$ si dice che $\vec{v}$ è un versore.
- Se $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ sono versori, allora $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \cos \widehat{\vec{v}_1 \vec{v}_2}$.
- Si ha anche $\vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{v}\|^2$.
- $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2 \iff \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0 \quad (\vec{v}_1, \vec{v}_2 \neq \vec{0})$.

Osservazione. Se $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sono i versori degli assi cartesiani ortogonali dello spazio, allora $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$ mentre $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$.

Osservazione. Se indichiamo con $(\vec{v}_2)_1$ il vettore proiezione di $\vec{v}_2$ su $\vec{v}_1$, possiamo affermare che il valore assoluto di $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$ è il prodotto del modulo del primo vettore per il modulo del vettore proiezione di $\vec{v}_2$ su $\vec{v}_1$ (vedi figura 8).

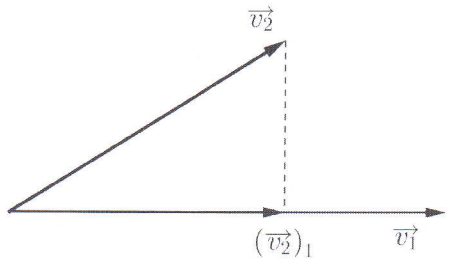


Figura 8: Vettore proiezione di $\vec{v}_2$ su $\vec{v}_1$

Infatti se si considera il versore di $\vec{v}_1$, cioè $\frac{1}{\|\vec{v}_1\|}\vec{v}_1$, allora $(\vec{v}_2)_1 = \|\vec{v}_2\| \cos \widehat{\vec{v}_1\vec{v}_2} \frac{1}{\|\vec{v}_1\|}\vec{v}_1$, il cui modulo è proprio $\|\vec{v}_2\||\cos \widehat{\vec{v}_1\vec{v}_2}|$ e perciò $|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2| = \|\vec{v}_1\|\|\vec{v}_2\||\cos \widehat{\vec{v}_1\vec{v}_2}| = \|\vec{v}_1\||(\vec{v}_2)_1|$.

Si può dimostrare che valgono le seguenti proprietà (per ogni $r \in \mathbf{R}, \vec{v}, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ vettori)

a) $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1$

b) $(r\vec{v}_1) \cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_1 \cdot (r\vec{v}_2) = r(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)$

c) $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 + \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3$

$\vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 + \vec{v}_3) = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3$

d) Se $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \ \forall$ vettore $\vec{w}$ allora $\vec{v} = \vec{0}$.

e) $\vec{v} \cdot \vec{v} > 0$ per ogni vettore $\vec{v} \neq \vec{0}$.

Osservazione. Se $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$ sono due punti dello spazio e $\vec{v}_1 = \vec{OP}_1, \vec{v}_2 = \vec{OP}_2$ sono i corrispondenti vettori, si ha $\vec{v}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ e $\vec{v}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, e quindi, applicando le proprietà citate, si ottiene

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \ .$$

Questa è una proprietà molto importante, in quanto permette di calcolare il prodotto scalare di due vettori in funzione soltanto delle coordinate di essi (senza quindi "conoscere" l'angolo da essi formato).

Un'importante applicazione in Fisica del prodotto scalare consiste nel calcolo del lavoro W compiuto da una forza $\vec{F}$ per uno spostamento $\vec{s}$ mediante la nota formula $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$.

Osservazione. Abbiamo visto che, se $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \neq \vec{0}$, $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ sono paralleli se e soltanto se esiste $\alpha \in \mathbf{R}$ tale che $\vec{v}_1 = \alpha \vec{v}_2$, mentre $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ sono perpendicolari se e soltanto se $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$.

Prodotto vettoriale di vettori

Una ulteriore "operazione", molto usata nelle scienze applicate (vedi ad esempio il calcolo del momento di una forza rispetto ad un punto) è quella di **prodotto vettoriale**. Per introdurre tale concetto è necessaria la seguente

Definizione. Una terna $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ di vettori non nulli dello spazio si dice **destrorsa** (**sinistrorsa**) quando applicati in uno stesso punto O i tre vettori, un osservatore posto come $\vec{v}_3$ vede ruotare $\vec{v}_1$ per sovrapporsi a $\vec{v}_2$ descrivendo l'angolo convesso $\widehat{\vec{v}_1\vec{v}_2}$ in senso antiorario (orario)(vedi figure 9 e 10).

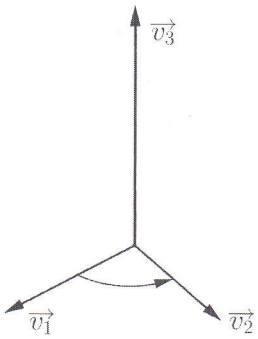


Figura 9: Terna destrorsa

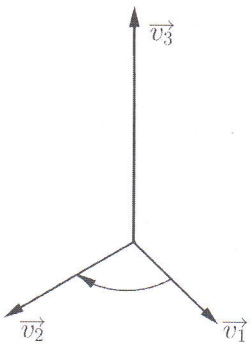


Figura 10: Terna sinistrorsa

Diamo ora la definizione di **prodotto vettoriale**.

Definizione. Siano $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ due vettori dello *spazio* applicati in O, non nulli e non paralleli. Per **prodotto vettoriale** di $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ si intende il vettore, indicato con $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$, il cui modulo è dato da $\|\vec{v}_1\|\|\vec{v}_2\| \sin \widehat{\vec{v}_1\vec{v}_2}$, la direzione è quella della retta (passante per O) perpendicolare al piano individuato dai due vettori ed il verso è tale che la terna $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ sia destrorsa. Se $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ sono paralleli (in particolare se uno è nullo) si pone $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \vec{0}$.

Osservazione. Dalla definizione segue che se $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ sono vettori non nulli, allora $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \vec{0}$ se e soltanto se $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ sono paralleli.

Osservazione. Si noti che il modulo di $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ è l'area del parallelogramma $OA_1A_3A_2$ avente come lati consecutivi i vettori $\vec{OA_1} = \vec{v}_1$ e $\vec{OA_2} = \vec{v}_2$ (vedi figura 11).

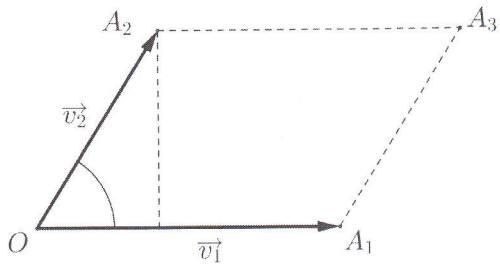


Figura 11: Modulo del prodotto vettoriale

Si può dimostrare che il prodotto vettoriale ha le seguenti proprietà (per ogni $r \in \mathbf{R}$ e per ogni $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}$ vettori dello spazio):

a) $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = -(\vec{v}_2 \times \vec{v}_1)$

b) $(r\vec{v}_1) \times \vec{v}_2 = r(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) = \vec{v}_1 \times (r\vec{v}_2)$

c) $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \times \vec{v} = \vec{v}_1 \times \vec{v} + \vec{v}_2 \times \vec{v}$

$\vec{v} \times (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \vec{v} \times \vec{v}_1 + \vec{v} \times \vec{v}_2$

Osservazione. Di solito si considera la terna $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ destrorsa e quindi anche il riferimento $Oxyz$ è destrorso e perciò $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$.

Il prodotto vettoriale di $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ (come il prodotto scalare) si può calcolare in funzione delle coordinate dei due vettori. Precisamente, se $\vec{v}_1 = \vec{OP}_1 = (x_1, y_1, z_1) = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ e $\vec{v}_2 = \vec{OP}_2 = (x_2, y_2, z_2) = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ allora $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ (svolgendo i calcoli e tenendo presente le proprietà del prodotto vettoriale) si può calcolare mediante il determinante formale (o simbolico)

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (y_1z_2 - y_2z_1)\vec{i} + (x_2z_1 - x_1z_2)\vec{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{k}$$

Il concetto di determinante, in termini più generali, verrà introdotto nel prossimo capitolo. *È importante notare che il prodotto scalare si può definire sia per vettori di un piano che dello spazio, mentre il prodotto vettoriale richiede di considerare solo vettori dello spazio. Inoltre il prodotto scalare di due vettori è un numero reale (uno scalare), mentre il prodotto vettoriale di due vettori è un vettore (perpendicolare al piano individuato da quelli dati).*

Prodotto misto di tre vettori

Applicando il prodotto vettoriale e il prodotto scalare, si può introdurre una ulteriore "operazione" che agisce su tre vettori. Precisamente

Definizione. Il **prodotto misto** di tre vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ dello spazio (nell'ordine) è lo scalare (numero reale) dato da $\vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3)$[3] e tenendo presente le rappresentazioni del prodotto scalare e del prodotto vettoriale in termini delle coordinate dei vettori, si ha che, se $\vec{v}_1 = (x_1, y_1, z_1), \vec{v}_2 = (x_2, y_2, z_2), \vec{v}_3 = (x_3, y_3, z_3)$, allora

$$\vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

[3]Si noti che la scrittura $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \times \vec{v}_3$ ha senso solo se si legge come $\vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3)$.

Osservazione. Se $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \neq \vec{0}$ e $\vec{v}_2 \times \vec{v}_3 \neq \vec{0}$ (cioè $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ non sono paralleli), risulta $\vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3) = 0$ se $\vec{v}_1$ è ortogonale a $\vec{v}_2 \times \vec{v}_3$, cioè se $\vec{v}_1$ è parallelo al piano individuato da $\vec{v}_2, \vec{v}_3$.

Osservazione. Il modulo di $\vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3)$ è uguale al volume del parallelepipedo costruito sui vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ (vedi figura 12).

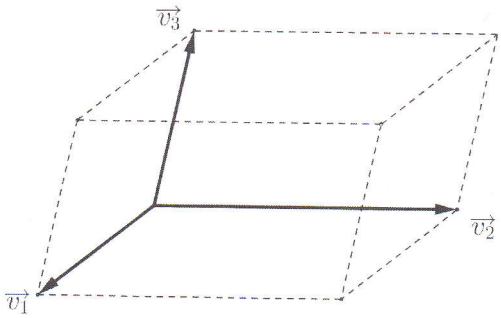


Figura 12: Modulo del prodotto misto

ESERCIZI

1) Siano $\mathbf{u} = (1, 2, -3), \mathbf{v} = (2, -1, 4)$ in $\mathbf{R}^3$. Trovare $\mathbf{u} + \mathbf{v}, -5\mathbf{u}, 4\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$.

2) Determinare $x, y, z \in \mathbf{R}$ sapendo che

a) $(x, x + y) = (y - 2, -4)$

b) $x(-1, 2) + y(1, 1) = (1, 7)$

c) $x(1, 1, 1) + y(1, -1, 0) + z(1, 0, 0) = (3, -1, 2)$

d) $x(1, 1, 0) + y(1, 1, 1) + z(0, 0, -1) = (2, 5, 0)$

e) $x(1, 2, 0) + y(2, 3, 0) + z(3, 2, 0) = (1, 2, 3)$

f) $x(1, 2, 1) + y(2, -2, -1) + z(3, 0, 0) = (1, 2, 1)$

3) Dire se è vero o no che:

a) $\mathbf{R}^2 \sqsubseteq \mathbf{R}^3$

b) $W = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ xy \geq 0\} \sqsubseteq \mathbf{R}^2$

c) $W = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\} \sqsubseteq \mathbf{R}^2$

d) $W = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x^2 + 4y^2 = 0\} \sqsubseteq \mathbf{R}^2$

e) $W = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ (x - y + 3z)^2 + (2x - y + z)^2 = 0\} \sqsubseteq \mathbf{R}^3$

f) $W = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ (x - y)(x + y) = 0\} \sqsubseteq \mathbf{R}^2$

g) $W = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 - 4x = 0\} \sqsubseteq \mathbf{R}^2$

h) $W = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ z \geq 0\} \sqsubseteq \mathbf{R}^3$

i) $W = \{a + bx + cx^2 \ : \ a - b = 0\} \sqsubseteq P_2(x)$.

4) Verificare che i seguenti insiemi sono sottospazi di $\mathbf{R}^3$ e per ognuno di essi trovare un insieme di generatori.

a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ 2x - y + 5z = 0\} \subseteq \mathbf{R}^3$

b) $W = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ \begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ x - y + 5z = 0 \end{cases}\right\} \subseteq \mathbf{R}^3$

c) $W = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ x - 3z = 0\} \subseteq \mathbf{R}^3$

d) $W = \left\{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ x - 2y + 3z = 0 \\ 2x - 3y + 5z = 0 \end{cases} \right\} \subseteq \mathbf{R}^3$

5) Trovare un insieme di generatori per i seguenti sottospazi di $P_2(x)$:

$$W_1 = \{a + bx + cx^2 \ : \ a - 2b + 3c = 0\} \quad , \quad W_2 = \{a + bx + cx^2 \ : \ \begin{cases} a - b + 3c = 0 \\ a - b + 5c = 0 \end{cases} \}$$

6) Stabilire se:

a) $S = \{(1,0,0),(1,2,0),(1,2,3)\}$ genera $\mathbf{R}^3$

b) $S = \{(1,1,1),(2,-1,1),(3,0,2)\}$ genera $\mathbf{R}^3$

7) Dire se, in $\mathbf{R}^3$:

a) $(3,2,1) \in [(3,0,1),(0,1,0),(1,0,0)]$

b) $(3,2,1) \in [(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)]$

c) $(3,2,1) \in [(3,0,1),(1,-2,1)]$

8) Dire se i seguenti insiemi sono basi di $\mathbf{R}^3$.

a) $S = \{(1,0,0),(1,2,0),(1,2,3)\}$

b) $S = \{(1,0,0),(1,2,1),(5,4,2)\}$

c) $S = \{(1,1,0),(1,-1,0),(1,1,1)\}$

d) $S = \{(1,2,3),(5,4,2)\}$

e) $S = \{(1,2,3),(-3,4,5),(4,3,-2),(1,1,1)\}$

9) Trovare un insieme (finito) di generatori, una base e la dimensione di:

a) $W = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ 2x - 3z = 0\} \sqsubseteq \mathbf{R}^3$

b) $W = \left\{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x - 3y + 5z = 0 \\ x - 2y + 3z = 0 \end{cases} \right\} \sqsubseteq \mathbf{R}^3$

c) $W = \left\{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ \begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ x - 5y = 0 \\ 2x - 3y + 5z = 0 \end{cases} \right\} \sqsubseteq \mathbf{R}^3$

d) $W = \{a + bx + cx^2 \ : \ a - b + 3c = 0\} \sqsubseteq P_2(x)$.

10) Sia $W = \{(x - y + z, 2x + y - 4z, x - z) \ : \ x, y, z \in \mathbf{R}\} \sqsubseteq \mathbf{R}^3$.

a) Trovare una base β e la dimensione di W.

b) Verificare che $\mathbf{v} = (2, -5, -1) \in W$ e trovare $M_\beta(\mathbf{v})$.

11) Dire se:

a) $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ x - y + 3z = 0\} = [(1,4,1), (2,-1,-1)]$

b) $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ x + 2y - 3z = 0\} = [(1,1,1)]$

12) Dimostrare che se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ è linearmente indipendente, allora $\{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, 2\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2\}$ è linearmente indipendente.

13) Dimostrare che:

a) $S = \{\mathbf{0}, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ è linearmente dipendente.

b) $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ è linearmente dipendente $\iff$ esiste $\alpha \in \mathbf{R}$ tale che $\mathbf{v}_1 = \alpha \mathbf{v}_2$ oppure $\mathbf{v}_2 = \alpha \mathbf{v}_1$.

14) Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbf{R}$ e siano S, S' sottoinsiemi di V. Dimostrare che:

a) Se S è linearmente dipendente e $S' \supseteq S$, allora S' è linearmente dipendente.

b) Se S è linearmente indipendente e $S' \subseteq S$, allora S' è linearmente indipendente.

15) Dimostrare che se V è uno spazio vettoriale su $\mathbf{R}$ e $W \sqsubseteq V$, allora W è uno spazio vettoriale su $\mathbf{R}$.

16) Dimostrare che se $S = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ è un sottoinsieme di V e $\mathbf{v} \in [S]$ allora

$$[\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n] = [\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n].$$

17) Dimostrare che se $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ è un sottoinsieme di V linearmente dipendente e S genera V e se $S' = \{\mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ è linearmente indipendente, allora S' è una base di V.

18) Siano W_1 e W_2 sottospazi di V. Dimostrare che:

a) $W_1 \cap W_2$ è un sottospazio di V.

b) $W_1 \cup W_2$ è un sottospazio di $V \iff W_1 \subseteq W_2$ oppure $W_2 \subseteq W_1$.

c) Posto $W_1 + W_2 \overset{def.}{=} \{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \ : \ \mathbf{v}_1 \in W_1, \mathbf{v}_2 \in W_2\}$, si ha

i) $W_1 + W_2$ è un sottospazio di V,

ii) $W_1 + W_2 \supseteq W_1 \cup W_2$,

iii) se $W \sqsubseteq V$ e $W \supseteq W_1 \cup W_2$, allora $W \supseteq W_1 + W_2$.

N.B. Si potrebbe dimostrare inoltre che se W_1 e W_2 sono sottospazi vettoriali di dimensione finita di uno stesso spazio vettoriale V, allora vale la relazione

$$\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2)$$

detta relazione di Grassmann.

19) Verificare la relazione di Grassmann nel caso in cui

$$W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ 2x - y - z = 0\} \ \text{ e } \ W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ 3x - y - 2z = 0\}.$$

20) Dimostrare che lo spazio vettoriale $P(x)$ non è finitamente generato, cioè che se S è un qualunque sottoinsieme finito di $P(x)$, allora S non genera $P(x)$.

21) Siano $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ i versori degli assi assi ortogonali dello spazio e siano

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{3} u_i \vec{e}_i \quad , \quad \vec{w} = \sum_{i=1}^{3} w_i \vec{e}_i \ .$$

Dimostrare che

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = \sum_{i=1}^{3} u_i w_i \ .$$

CAPITOLO 2

MATRICI, DETERMINANTI E SISTEMI LINEARI

§1. Matrici

Da un punto di vista intuitivo possiamo dire che una *matrice di numeri reali* è una "tabella" di numeri (reali).

Esempio. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & \sqrt{5} \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ è una "matrice" che ha due "righe" e tre "colonne".

Definizione. Siano m ed n due numeri naturali ≥ 1. Si dice **matrice** (reale) di tipo m, n o matrice $m \times n$ o matrice di m righe ed n colonne, un insieme di $m \cdot n$ numeri reali disposti come segue:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Si scrive anche

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

oppure

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Gli elementi a_{ij} appartengono ad $\mathbf{R}$ $(i = 1, ..., m; j = 1, ..., n)$ e l'elemento a_{ij} si dice **elemento di posto** ij.

Notiamo che:

- il primo indice individua la riga, il secondo la colonna a cui appartiene l'elemento,
- ogni riga è una n-upla e ogni colonna è una m-upla.

La matrice A si indica anche con $(a_{ij})_{\substack{i=1,...,m \\ j=1,...,n}}$ o semplicemente (a_{ij}).

Esempio. La matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 7 \\ 0 & -2 & \sqrt{3} & 6 \\ -2 & 4 & 5 & -12 \end{pmatrix}$$

è una matrice 3×4 o di tipo $3, 4$ e, ad esempio, $a_{23} = \sqrt{3}$ (elemento della seconda riga e terza colonna).

Definizioni.

1) Due matrici si dicono **uguali** se sono dello stesso tipo ed hanno gli elementi "ordinatamente" uguali.

Esempio.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Si dice che una matrice $m \times n$ è **quadrata** se $m = n$ ed n si dice **ordine** della matrice (quando si parla di ordine di una matrice, si sottintende che essa sia quadrata).

Esempio.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{è una matrice (quadrata) di ordine 2}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{è una matrice (quadrata) di ordine } n$$

3) Si dice **diagonale principale** (o semplicemente **diagonale**) della matrice $A = (a_{ij})$ di ordine n la n-upla

$(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn})$.

Esempio. La diagonale principale della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 6 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

è la terna $(1, 0, 4)$.

4) Si dice **matrice diagonale** ogni matrice quadrata che ha tutti gli elementi che *non appartengono* alla diagonale principale uguali a 0.

Esempio.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sono matrici diagonali.

In generale

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{è una matrice diagonale di ordine } n \ (\lambda_i \in \mathbf{R}, i = 1, ..., n)$$

5) Si dice **matrice unità** di ordine n (e si indica con I_n o I) la matrice diagonale di ordine n che ha tutti gli elementi della diagonale principale uguali ad 1.

Esempio.

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

6) Si dice **matrice triangolare superiore** (risp. **inferiore**) ogni matrice quadrata che ha tutti gli elementi posti al di sotto (risp. al di sopra) della diagonale principale uguali a 0.

Esempio.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \text{sono matrici triangolari superiori}$$

7) Si dice **matrice nulla** $m \times n$ (e si indica con 0_{mn} o $\mathbf{0}$) la matrice $m \times n$ che ha tutti gli elementi uguali a 0.

Esempio.

$$0_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad 0_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

8) Si dice **opposta** della matrice $A = (a_{ij})$ la matrice $-A \overset{def.}{=} (-a_{ij})$.

Esempio.

$$\text{Se} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & -6 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{allora} \quad -A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -5 & 6 & -4 \end{pmatrix} .$$

9) Si dice **trasposta** della matrice A (e si indica con A_{-1} o A^T o A_T o ancora A^t) la matrice che si ottiene da A scambiando (nell'ordine) le righe con le colonne. Quindi se $A = (a_{ij})$ è una matrice $m \times n$ allora A_{-1} è una matrice $n \times m$ e $A_{-1} = (b_{ij})$ con $b_{ij} = a_{ji}$.

Esempio.

$$\text{Se } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{allora} \quad A_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

10) Si dice che una matrice A è **simmetrica** se $A = A_{-1}$. Quindi $A = (a_{ij})$ è simmetrica se e soltanto se A è quadrata e $a_{ij} = a_{ji}$, ossia A è "simmetrica" rispetto alla diagonale principale.

Esempio.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -4 & 3 \\ 5 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

è una matrice simmetrica.

11) Si dice che una matrice A è **emisimmetrica** (o **antisimmetrica**) se $A = -A_{-1}$ o anche $A + A_{-1} = \mathbf{0}$. Quindi $A = (a_{ij})$ è emisimmetrica se e soltanto se A è quadrata e $a_{ij} = -a_{ji}$ ossia $a_{ij} + a_{ji} = 0$. In particolare $a_{ii} = -a_{ii}$ ossia $a_{ii} = 0$. Quindi una matrice emisimmetrica ha tutti gli elementi della diagonale principale uguali a zero, mentre gli elementi posti simmetricamente rispetto alla diagonale principale sono uno l'opposto dell'altro.

Esempio.

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 7 \\ -5 & 0 & -8 \\ -7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

è una matrice emisimmetrica.

§2. Operazioni tra matrici

Nel seguito indicheremo con $M_{mn}(\mathbf{R})$ (risp. $M_n(\mathbf{R})$) l'insieme delle matrici reali $m \times n$ (risp. di ordine n). Ad esempio

$$M_2(\mathbf{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ : \ a, b, c, d \in \mathbf{R} \right\} .$$

Definizione. Siano $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ due matrici di $M_{mn}(\mathbf{R})$ e sia $\alpha \in \mathbf{R}$. Poniamo:

$$A + B \overset{def.}{=} (a_{ij} + b_{ij})$$

$$\alpha A \overset{def.}{=} (\alpha a_{ij}) .$$

- $A + B$ si dice **somma** delle matrici A e B,
- αA si dice **prodotto dello scalare α per la matrice** A.

Esempio.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & -3-1 & 5+0 \\ 4+0 & 1+3 & 7+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 4 & 4 & 12 \end{pmatrix}$$

$$-3 \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3(-1) & -3 \cdot 2 & -3 \cdot 3 \\ -3 \cdot 0 & -3 \cdot 4 & -3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -9 \\ 0 & -12 & -3 \end{pmatrix} .$$

Osservazione. $+$ è una "operazione interna" ad $M_{mn}(\mathbf{R})$, mentre $\cdot$ è una "operazione esterna" ad $M_{mn}(\mathbf{R})$.

Si può dimostrare che valgono anche gli assiomi 1),2),...,8) della definizione di spazio vettoriale (vedi pag. 8), pertanto:

$$M_{mn}(\mathbf{R}) \textit{ è uno spazio vettoriale sul campo } \mathbf{R} .$$

Inoltre l'insieme

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base di $M_{mn}(\mathbf{R})$; perciò

$$\dim M_{mn}(\mathbf{R}) = m \cdot n \ .$$

Esempio.

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base di $M_2(\mathbf{R})$ e quindi $\dim M_2(\mathbf{R}) = 4$ $(= 2 \times 2)$.

Definizione. Le matrici di $M_{1n}(\mathbf{R})$ e di $M_{n1}(\mathbf{R})$ si dicono rispettivamente **matrici o vettori riga** e **matrici o vettori colonna**.

Esempio.

$$(1\ 2\ 3) \in M_{1,3}(\mathbf{R}) \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbf{R}) \ .$$

Introduciamo ora una ulteriore operazione tra matrici.

Definizione. Siano $A = (a_{ij})$ una matrice $m \times n$ e $B = (b_{ij})$ una matrice $n \times p$ (il numero delle colonne di A deve essere uguale al numero delle righe di B)[1]. Per **prodotto righe per colonne di** A **e** B si intende la matrice $A \cdot B = (c_{rs})$ di tipo $m \times p$ definita come segue:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mp} \end{pmatrix}$$

[1] Le condizioni richieste implicano che il numero degli elementi di ciascuna riga di A sia uguale al numero degli elementi di ciascuna colonna di B

dove

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \ldots + a_{1n}b_{n1} = \sum_{h=1}^{n} a_{1h}b_{h1}$$

("prodotto" della prima riga di A con la prima colonna di B)

$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \ldots + a_{1n}b_{n2} = \sum_{h=1}^{n} a_{1h}b_{h2}$$

("prodotto" della prima riga di A con la seconda colonna di B)

e in generale

$$c_{rs} = a_{r1}b_{1s} + a_{r2}b_{2s} + \ldots + a_{rn}b_{ns} = \sum_{h=1}^{n} a_{rh}b_{hs}$$

("prodotto" della r-esima riga di A con la s-esima colonna di B)

Precisamente c_{rs} è *la somma dei prodotti degli elementi della r-esima riga di A per i corrispondenti elementi della s-esima colonna di B.*

Esempio. Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Calcolare, se possibile, AB.

Sol.: osserviamo che A è una matrice 2×3 e B è una matrice 3×3, quindi il numero di colonne di A è uguale al numero di righe di B. Pertanto il prodotto AB è possibile e risulta

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} .$$

Si osservi che, invece, il prodotto BA non è possibile in quanto il numero di colonne di B non è uguale al numero di righe di A.

Osservazione. Se $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ allora possiamo calcolare AB e BA e queste appartengono ancora a $M_n(\mathbf{R})$.

Si dimostra la seguente:

Proposizione 2.1.

a) $A(BC) = (AB)C$

b) $A(B + C) = AB + AC$

b') $(A + B)C = AC + BC$

c) $AI_n = I_nA = A$

per ogni $A, B, C \in M_n(\mathbf{R})$ *(ma anche solo quando le operazioni indicate hanno significato).*

Esempio 1. Siano

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} .$$

Verificare che $AB \neq BA$.

Sol.: si ha

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

e quindi $AB \neq BA$.

Esempio 2. Siano

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} .$$

Verificare che $AB = \mathbf{0}$ pur essendo $A \neq \mathbf{0}$ e $B \neq \mathbf{0}$.

Sol.: si ha

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+2 & 6-6 \\ 4-4 & -12+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esempio 3. Siano

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Verificare che $AB = AC$ pur essendo $A \neq \mathbf{0}$ e $B \neq C$.

Sol.: si ha

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = AC .$$

Osservazione. Il *prodotto di matrici non è commutativo* (vedi esempio 1) ed *esistono divisori dello* 0 *non nulli* (vedi esempio 2), *inoltre non vale la legge di cancellazione per il prodotto di matrici* (vedi esempio 3).

Per le operazioni tra matrici vale anche la seguente:

Proposizione 2.2.

d) $(A + B)_{-1} = A_{-1} + B_{-1}$ *e* $(A - B)_{-1} = A_{-1} - B_{-1}$

e) $(AB)_{-1} = B_{-1}A_{-1}$ *(si noti lo scambio nell'ordine delle matrici !)*

f) $A\mathbf{0} = \mathbf{0}A = \mathbf{0}$

g) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

h) $(A_{-1})_{-1} = A$

per ogni $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ *e* $\alpha \in \mathbf{R}$ *(ma anche solo quando le operazioni indicate hanno significato).*

Osservazione. Si noti che $A + A_{-1}$ si può calcolare se e soltanto se A è quadrata, mentre AA_{-1} è sempre calcolabile.

Inoltre vale la seguente

Proposizione 2.3.

a) Se $A \in M_n(\mathbf{R})$ *allora* $A + A_{-1}$ *è simmetrica.*

b) Se $A \in M_n(\mathbf{R})$ *allora* $A - A_{-1}$ *è emisimmetrica.*

c) Se $A \in M_{mn}(\mathbf{R})$ *allora* AA_{-1} *è simmetrica.*

Dimostrazione.

a) Dalle proprietà d),h) della Proposizione 2.2 e per la commutatività della somma di matrici segue che

$$(A + A_{-1})_{-1} = A_{-1} + (A_{-1})_{-1} = A_{-1} + A = A + A_{-1} \ .$$

Pertanto

$$(A + A_{-1})_{-1} = A + A_{-1}$$

e quindi, per definizione di matrice simmetrica, $A + A_{-1}$ è una matrice simmetrica.

b) Dalle proprietà d),h) della Proposizione 2.2 e per la commutatività della somma di matrici segue che

$$(A - A_{-1})_{-1} = A_{-1} - (A_{-1})_{-1} = A_{-1} - A = -(A - A_{-1}) \ .$$

Pertanto

$$(A - A_{-1})_{-1} = -(A - A_{-1})$$

e quindi, per definizione di matrice emisimmetrica, $A - A_{-1}$ è una matrice emisimmetrica.

c) Dalle proprietà e),h) della Proposizione 2.2 segue che:

$$(AA_{-1})_{-1} = (A_{-1})_{-1}A_{-1} = AA_{-1} \ .$$

Pertanto

$$(AA_{-1})_{-1} = AA_{-1}$$

e quindi AA_{-1} è una matrice simmetrica.

Osservazione. Se $k \in \mathbf{R}$ e A è simmetrica (emisimmetrica) allora anche kA è simmetrica (emisimmetrica).

Esempio 1. Se

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \ , \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

calcolare $A+B$, $2A-3B$, $A_{-1}+B_{-1}$.

Sol.:

$$A+B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & -1 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$2A-3B=\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 10 & -8 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -6 & -9 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 4 & -17 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A_{-1}+B_{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 7 & -3 \\ 3 & -1 & 9 \end{pmatrix}=(A+B)_{-1}$$

Esempio 2. Dire per quali $x, y \in \mathbf{R}$ la matrice

$$M=x\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

è a) diagonale, b) simmetrica.

Sol.: eseguendo i calcoli si ottiene la matrice

$$M=\begin{pmatrix} 2y & x+3y+1 \\ x+3y+2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) M è diagonale se $x+3y+1=0$ e $x+3y+2=0$, cioè per nessun valore di x ed y.

b) M è simmetrica se $x+3y+1=x+3y+2$, che è ancora una volta impossibile.

Esempio 3. Data la matrice

$$M=\begin{pmatrix} x+2y & x+2y \\ x+2y & 2x+5y+3 \end{pmatrix}$$

dire per quali $x, y \in \mathbf{R}$ M è a) diagonale, b) simmetrica.

Sol.: a) M è diagonale se $x = -2y$, b) M è simmetrica per ogni $x, y \in \mathbf{R}$.

L'importanza delle matrici simmetriche e di quelle emisimmetriche deriva anche dal seguente importante:

Teorema 2.4.

Ogni matrice quadrata A si può decomporre, in un unico modo, come somma di una matrice simmetrica S e di una emisimmetrica E.

Dimostrazione.

Esistenza. Poniamo $S = \frac{1}{2}(A + A_{-1})$ ed $E = \frac{1}{2}(A - A_{-1})$.

Dalla Proposizione 2.3 e dalla successiva osservazione segue che S è simmetrica e che E è emisimmetrica. Inoltre si verifica facilmente che $S + E = A$.

Unicità. Supponiamo che si abbia anche

$$A = S' + E' \tag{1}$$

con S' simmetrica ed E' emisimmetrica. Da (1) segue che $A_{-1} = (S' + E')_{-1}$ e perciò

$$A_{-1} = S' - E' \ . \tag{2}$$

Sommando membro a membro le due uguaglianze (1) e (2) si ottiene $A + A_{-1} = 2S'$ e pertanto $S' = \frac{1}{2}(A + A_{-1})$, ossia $S' = S$.

Analogamente, sottraendo membro a membro le due uguaglianze si ottiene $E' = E$.

In conclusione la decomposizione esiste ed è unica.

Esempio 4. Scomporre la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ nella somma di una matrice simmetrica S e di una emisimmetrica E.

Sol.: eseguendo i calcoli si ha:

$$S = \frac{1}{2}(A + A_{-1}) = \frac{1}{2}[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}]$$

e perciò

$$S = \begin{pmatrix} a & \frac{b+c}{2} \\ \frac{b+c}{2} & d \end{pmatrix},$$

e

$$E = \frac{1}{2}(A - A_{-1}) = \frac{1}{2}[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}]$$

e perciò

$$E = \begin{pmatrix} 0 & \frac{b-c}{2} \\ \frac{c-b}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

<u>Esempio 5</u>. Calcolare, se possibile,

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{c)} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\text{d)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \text{e)} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -6 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$$

<u>Sol</u>.:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \text{b)} \ (4-4-3) = (-3), \quad \text{c)} \begin{pmatrix} 4 & 8 & -2 \\ -2 & -4 & 1 \\ 6 & 12 & -3 \end{pmatrix},$$

$$\text{d)} \begin{pmatrix} -6 \\ -11 \end{pmatrix}, \quad \text{e)} \ \text{non è possibile}$$

Definizione. Se $A \in M_n(\mathbf{R})$ allora si pone per definizione $A^0 = I_n$ (se $A \neq \mathbf{0}$), $A^1 = A$ e $A^k = A \cdot A \cdot \ldots \cdot A$ (k volte A) se $k > 1$.

Inoltre se $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_r x^r$ è un polinomio a coefficienti reali, si pone per definizione

$$f(A) = a_o I_n + a_1 A + a_2 A^2 + ... + a_r A^r \quad (r \geq 0) \ .$$

Esempio 6. Siano

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

e $f(x) = 2 + 3x^2 - x^3$.

Calcolare $f(A)$.

Sol.: calcoliamo prima A^2 e A^3. Si ha:

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} .$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -11 \\ 11 & 2 \end{pmatrix} .$$

Pertanto

$$f(A) = 2I_2 + 3A^2 - A^3 = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -11 \\ 11 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$$

Esempio 7. Svolgere e semplificare

$$A(A - 4B)^2 - 4B^2 A \ .$$

Sol.:

$$A(A - 4B)^2 - 4B^2 A = A(A - 4B)(A - 4B) - 4B^2 A =$$

$$= A[A^2 + A(-4B) + (-4B)A + (-4B)(-4B)] - 4B^2 A =$$

$$= A(A^2 - 4AB - 4BA + 16B^2) - 4B^2 A = A^3 - 4A^2 B - 4ABA + 16AB^2 - 4B^2 A \ .$$

Poichè non vale la proprietà commutativa del prodotto di matrici, l'espressione ottenuta non si può ulteriormente ridurre.

§3. Matrici invertibili

Definizione. Si dice che una matrice quadrata $A \in M_n(\mathbf{R})$ è **invertibile** (o **non singolare**) se esiste una matrice $A^{-1} \in M_n(\mathbf{R})$ (detta **inversa** di A) tale che $A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$.

Si dimostra la seguente

Proposizione 2.5.

Se A è invertibile allora:

a) esiste una sola inversa (cioè A^{-1} è unica),

b) $(A^{-1})^{-1} = A$.

Dimostrazione.

a) Supponiamo che B e C siano entrambe inverse di A, ossia $AB = BA = I$ e $AC = CA = I$ e dimostriamo che $B = C$.

Si ha

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C\ .$$

Segue $B = C$.

b) È conseguenza immediata della definizione di matrice inversa.

Esempio. Dire se $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ è invertibile.

Sol.: vediamo se esiste $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tale che $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Si ha

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi

$$AA^{-1} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \forall\, a, b, c, d \in \mathbf{R}$$

e pertanto A non è invertibile.

Osservazione. *Esistono matrici non nulle che non sono invertibili* (vedi esempio precedente).

Si ha inoltre la seguente

Proposizione 2.6.

Se $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ sono invertibili, allora AB è invertibile e

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \quad (\textit{si noti lo scambio nell'ordine delle matrici}) \ .$$

Dimostrazione.

Si ha

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I \ .$$

Analogamente

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = I \ .$$

Segue che $B^{-1}A^{-1}$ è l'inversa di AB ossia $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Osservazione. Vedremo più avanti un metodo per stabilire se una matrice è invertibile e, in caso affermativo, per calcolarne l'inversa.

§4. Determinante di una matrice quadrata

Diamo prima la seguente

Definizione. Per **minore** o **sottomatrice** di una matrice $A \in M_{mn}(\mathbf{R})$, si intende una matrice ottenuta da A "eliminando" m_1 righe ed n_1 colonne, con $0 \leq m_1 < m$ e $0 \leq n_1 < n$.

Esempio. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -5 \\ 4 & -5 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Allora $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ è un minore 2×3 di A ed è ottenuto da A "eliminando" la seconda riga e la terza colonna, $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ è un minore di ordine 2 di A ed è ottenuto da A eliminando la seconda riga e la seconda e terza colonna, A stessa è un minore di A perchè ottenuto senza alcuna eliminazione ($m_1 = n_1 = 0$).

Definizione. Per **determinante** di una matrice quadrata

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

si intende il numero reale, indicato con $\det(A)$ o $|A|$ o ancora $\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$, che viene definito come segue.

• Se $n = 1$ allora $\det(a_{11}) \stackrel{def.}{=} a_{11}$. Ad esempio $\det(+5) = 5$, $\det(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$. Per le matrici di ordine 1 è opportuno usare il simbolo det per evitare confusione con il simbolo di valore assoluto.

• Se $n = 2$ allora

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \stackrel{def.}{=} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} .$$

Ad esempio

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 - (-5)3 = 7 + 15 = 22 \ ; \quad \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 10 \ ; \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \ .$$

• Sia $n = 3$. Si dice **complemento algebrico** dell'elemento a_{ij} di A (e si indica con A_{ij}) il prodotto di $(-1)^{i+j}$ per il determinante del minore di A che si ottiene "eliminando" la riga e la colonna di A che si incrociano in a_{ij}, ossia la i-esima riga e la j-esima colonna di A.

Esempio. Se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

allora

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = (-1)(0 \cdot 6 - 3 \cdot 4) = 12 \ ;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 1(1 \cdot 6 - 3 \cdot (-5)) = 21 \ .$$

Se $i + j$ è pari (risp. dispari) allora si dice che a_{ij} è un elemento di **posto pari** (risp. di **posto dispari**), quindi se a_{ij} è di posto pari $(-1)^{i+j} = 1$ mentre se a_{ij} è di posto dispari $(-1)^{i+j} = -1$ e perciò

$$A_{ij} = \begin{cases} +|\ \ | & \text{se } a_{ij} \text{ è di posto pari} \\ \\ -|\ \ | & \text{se } a_{ij} \text{ è di posto dispari.} \end{cases}$$

Poniamo ora, sempre nel caso $n = 3$,

$$|A| \stackrel{def.}{=} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \ .$$

$|A|$ è quindi uguale alla *somma dei prodotti degli elementi della prima riga di A per i rispettivi complementi algebrici.*

Esempio.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 1(-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} + 2(-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} - 5(-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 - 2(-12) - 5(+3) = 11 \ .$$

• Per $n = 4, 5, ...$ si può definire il concetto di complemento algebrico di un elemento di A in modo analogo a quanto fatto per $n = 3$, dopodichè se

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

definiamo

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + ... + a_{1n}A_{1n} \ .$$

Osservazione. La definizione rigorosa richiede l'uso dell'induzione matematica, inoltre la definizione proposta è "poco pratica" per il calcolo effettivo del determinante di matrici di ordine elevato.

Prima di fornire altri esempi di calcolo di determinanti, diamo la seguente proposizione, che fornisce le principali proprietà dei determinanti, le quali permetteranno poi di semplificarne il calcolo.

Proposizione 2.7.

1) $$\begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ ka_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ ka_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (k \in \mathbf{R})$$

Esempio.

$$\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3\cdot 2 & 1 \\ 3\cdot 1 & 7 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 100 & 3 \\ 200 & 4 \end{vmatrix} = 100\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}.$$

La proprietà enunciata vale per una qualunque colonna e non solo per la prima.

2)
$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ b_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Esempio.

$$\begin{vmatrix} 2+3 & -2 \\ 1-4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}.$$

La proprietà enunciata vale per una qualunque colonna e non solo per la prima.

3) Scambiando due colonne di A il determinante cambia di segno.

Esempio.

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 7 & -9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -9 & 7 \end{vmatrix}.$$

4) Se una colonna di A è combinazione lineare di altre colonne di A allora $|A| = 0$.

Esempio.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 1 & -5 \\ 4 & 5 & 13 \end{vmatrix} = 0$$

perchè la terza colonna è somma del doppio della prima con la seconda.

In particolare:

4a) se una colonna di A è nulla allora $|A| = 0$,

4b) se due colonne di A sono proporzionali (eventualmente uguali) allora $|A| = 0$.

5) Sommando ad una colonna di A una combinazione lineare di altre colonne di A il determinante non cambia.

Esempio.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

Alla terza colonna abbiamo sostituito la somma di essa con la seconda colonna. In questo modo si semplifica il calcolo del determinante, in quanto il secondo determinante ha due zeri nella prima riga.

6) $|A| = |A_{-1}|$.

Quindi le proprietà del determinante viste per le colonne valgono anche per le righe e viceversa (vedi 1),2),3),4),5)).

7) $|AB| = |A||B|$.

Quindi se $|AB| = 0$ *allora* $|A| = 0$ *oppure* $|B| = 0$ *(pur non essendo necessariamente nè* $A = \mathbf{0}$ *nè* $B = \mathbf{0}$*). Inoltre* $|AB| = |BA|$ *(pur non essendo necessariamente* $AB = BA$*).*

8) **Regola di Laplace**. *Il determinante di A è uguale alla somma dei prodotti degli elementi di una sua* **qualunque** *riga o colonna per i rispettivi complementi algebrici.*

Esempio. Supponiamo di voler calcolare il determinante della seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 5 \\ 4 & 3 & -2 \\ 6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Dalla definizione si ha

$$|A| = 7 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}$$

mentre applicando la regola di Laplace relativamente alla seconda colonna si ha più semplicemente

$$|A| = 3 \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$$

9) Il determinante di una matrice triangolare (superiore o inferiore) è uguale al prodotto degli elementi della sua diagonale principale.

Esempio.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ -8 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 2 = 10 \ .$$

In particolare:

9a) $$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n \ ,$$

9b) $|I_n| = 1$.

Diamo adesso alcuni esempi di calcolo di determinanti.

Esempio 1.

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 2(-2) - 4 \cdot 5 = -24 \ .$$

Esempio 2.

$$\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 1/2 \end{vmatrix} = 0$$

perchè la prima riga è il doppio della seconda.

Esempio 3.

$$\begin{vmatrix} t-2 & 2 \\ 5 & t-1 \end{vmatrix} = (t-2)(t-1) - 10 = t^2 - 3t - 8$$

Esempio 4. Calcolare in vari modi il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Primo metodo. Lasciamo allo studente il calcolo di $|A|$ in base alla definizione.

Secondo metodo. Usando la regola di Laplace relativamente alla prima colonna, si ha

$$|A| = 1 \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 7 - 0 + 2(6-20) = -21 .$$

Terzo metodo. Usando le proprietà dei determinanti (nel caso in esame alla terza riga sommiamo la prima moltiplicata per -2), otteniamo

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 7 & -7 \end{vmatrix}$$

e applicando la regola di Laplace relativamente alla prima colonna, otteniamo

$$|A| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 7 & -7 \end{vmatrix} = -35 + 14 = -21 .$$

Quarto metodo. Per i determinanti di ordine 3 (e *solo per essi*) si può applicare il seguente procedimento, noto come **regola di Sarrus**. Dopo aver riportato a destra del determinante, nell'ordine, le prime due colonne, si procede come nell'esempio seguente:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -3 & 4 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right. = [1{\cdot}5{\cdot}1 + (-3){\cdot}(-2){\cdot}2 + 4{\cdot}0{\cdot}1] - [2{\cdot}5{\cdot}4 + 1{\cdot}(-2){\cdot}1 + 1{\cdot}0{\cdot}(-3)] = -21 .$$

Esempio 5. Calcolare i seguenti determinanti applicandone le varie proprietà.

$$5a) \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 7 & -2 \\ 4 & -3 & 8 & 2 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 7 & -2 \\ -3 & 8 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \begin{vmatrix} 0 & 18 & -1 \\ -1 & 7 & -2 \\ 0 & -13 & 8 \end{vmatrix} = (-1)(-1)(-1) \begin{vmatrix} 18 & -1 \\ -13 & 8 \end{vmatrix} = -131 \ .$$

$$5b) \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 7 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & -7 \end{vmatrix} = (-3)(-21) = 63 \ .$$

$$5c) \qquad \begin{vmatrix} 102 & 101 \\ 202 & 201 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 101 \\ 1 & 201 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 100 \\ 1 & 200 \end{vmatrix} = 100 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 100 \ .$$

Esempio 6.

$$6a) \qquad \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

perchè la terza riga è somma delle altre due.

$$6b) \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 9 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

perchè la terza colonna è somma della prima e della seconda colonna.

$$6c) \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 7 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

perchè la terza riga è somma di quattro volte la prima riga con la seconda riga.

Osservazione. Naturalmente i determinanti dell'esempio 6) possono essere calcolati anche con gli usuali metodi introdotti.

§5. Applicazioni del concetto di determinante

1) Matrici invertibili e calcolo della matrice inversa

Sia $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{R})$. Diamo prima la seguente:

Definizione. Si dice **matrice aggiunta** di A la matrice

$$Agg(A) \overset{def.}{=} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

dove A_{ij} è il complemento algebrico di a_{ij}.

Si dimostra allora il seguente

Teorema 2.8.

a) A è invertibile $\iff |A| \neq 0$.

b) Se A è invertibile allora

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\big(Agg(A)\big)_{-1}$$

ossia

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

(Si osservi che *le righe di A^{-1} sono i rapporti tra i complementi algebrici degli elementi delle colonne di A e il determinante di A*).

Dimostrazione. (Parziale)

a) $\Rightarrow$ Essendo per ipotesi A invertibile, esiste $A^{-1} \in M_n(\mathbf{R})$ tale che $AA^{-1} = I_n$ e quindi $|AA^{-1}| = |I_n|$. Poichè $|AB| = |A||B|$ e $|I_n| = 1$, si ha $|A||A^{-1}| = 1$ e perciò $|A| \neq 0$.

N.B. *Se A è invertibile, da $|A||A^{-1}| = 1$ segue anche che*

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

e questo permette di calcolare il determinante di A^{-1} senza calcolare esplicitamente A^{-1}.

Vale inoltre la seguente

Proposizione 2.9.

Siano $A, B, C \in M_n(\mathbf{R})$.

a) Se $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ e $AB = I$ allora A e B sono invertibili e inoltre $A = B^{-1}$ e $B = A^{-1}$.

b) Se $|A| \neq 0$ e $AB = 0$ allora $B = 0$.

c) Se $|A| \neq 0$ e $AB = AC$ allora $B = C$.

d) Se A è invertibile allora $(A_{-1})^{-1} = (A^{-1})_{-1}$.

Dimostrazione.

a) Da $AB = I \to |AB| = |I| \to |A||B| = 1 \to |A| \neq 0$ e $|B| \neq 0 \to A$ e B sono invertibili $\to \exists A^{-1}, B^{-1}$.

Sempre da $AB = I \to (AB)B^{-1} = IB^{-1} \to A = B^{-1}$. Analogamente $B = A^{-1}$.

b) Se $|A| \neq 0$ allora A è invertibile. Da $AB = 0 \to A^{-1}(AB) = A^{-1}0 \to IB = 0 \to B = 0$.

c) Se $|A| \neq 0$ allora A è invertibile. Da $AB = AC \to A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC) \to IB = IC \to B = C$.

d) Per esercizio.

<u>Esempio</u>. Calcolare, se possibile, A^{-1} nei seguenti casi:

$$\text{a)}\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{b)}\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{c)}\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

<u>Sol.</u>: a) $|A| = 6 + 8 = 14 \neq 0$, quindi A è invertibile.

Calcoliamo i complementi algebrici: $A_{11} = 3$, $A_{12} = -(-8) = 8$, $A_{21} = -1$, $A_{22} = 2$.

Perciò $Agg(A) = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ e quindi

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Agg(A))_{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/14 & -1/14 \\ 8/14 & 2/14 \end{pmatrix}.$$

b) $|A| = 1 \neq 0$, quindi A è invertibile.

Calcoliamo i complementi algebrici:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Quindi

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) $|A| = 0$ e quindi A non è invertibile.

2) **Vettori linearmente indipendenti**

Si dimostra il seguente

Teorema 2.10.

• *n vettori di $\mathbf{R}^n$ (n n-uple) sono linearmente indipendenti $\iff$ il determinante della matrice, le cui righe o colonne sono le n n-uple date, è diverso da* 0.

Questa affermazione è anche equivalente alla seguente:

• *n vettori di $\mathbf{R}^n$ (n n-uple) sono linearmente dipendenti $\iff$ il determinante della matrice, le cui righe o colonne sono le n n-uple date, è uguale a* 0.

Esempio. Dire se S è una base di $\mathbf{R}^3$, dove

a) $S = \{(1,1,1),(1,2,3),(1,5,-4)\}$

b) $S = \{(2,-1,5),(1,0,0),(7,-2,10)\}$

Sol.: in entrambi i casi $S \subseteq \mathbf{R}^3$, S ha tre elementi e, come noto, dim $\mathbf{R}^3 = 3$. Vediamo ora se S è anche linearmente indipendente, usando il teorema precedente.

Si ha:

a) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -5 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -13 \neq 0$$

quindi S è anche linearmente indipendente e perciò S è una base di $\mathbf{R}^3$.

b) $$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 7 & -2 & 10 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 10 \end{vmatrix} = 0$$

quindi S è linearmente dipendente e perciò S non è una base di $\mathbf{R}^3$.

3) **Rango di una matrice**

Sia A una matrice $m \times n$. Indichiamo con $A_1, A_2, ..., A_m$ le righe di A e con $B_1, B_2, ..., B_n$ le colonne di A. Possiamo quindi scrivere

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} = (B_1 \; B_2 \ldots B_n) \; .$$

Se indichiamo con $\mathcal{R}$ e $\mathcal{C}$ rispettivamente l'insieme delle righe di A e delle colonne di A, risulta $\mathcal{R} \subseteq \mathbf{R}^n$ e $\mathcal{C} \subseteq \mathbf{R}^m$.

Definizione.

Si dice **rango per righe** di A la dimensione del sottospazio di $\mathbf{R}^n$ generato da $\mathcal{R}$ e si dice **rango per colonne** di A la dimensione del sottospazio di $\mathbf{R}^m$ generato da $\mathcal{C}$.

Osservazione. (Vedi concetto di dimensione) Il rango per righe (colonne) di A è il numero massimo di righe (colonne) di A che risultano linearmente indipendenti.

Teorema 2.11.

Il rango per righe di A è uguale al rango per colonne di A, ossia se $dim[\mathcal{R}] = r$ e $dim[\mathcal{C}] = c$, allora $r = c$.

Le proprietà precedenti giustificano la seguente

Definizione.

Si dice **caratteristica** o **rango** di una matrice A il rango per righe o per colonne di A. Il rango di A si indica con $\mathrm{r}(A)$ oppure con $\mathrm{car}(A)$.

Il seguente teorema fornisce un metodo per il calcolo del rango di una matrice A.

Si dimostra

Teorema 2.12.

Sia A una matrice $m \times n$. Il rango di A è il numero naturale k se:

a) esiste un minore C di ordine k (in A) tale che det $(C) \neq 0$;

b) tutti i minori di ordine $k+1$ (in A, se esistono) che "contengono" C hanno determinante nullo.

Osservazione. Si può dimostrare che se $\mathrm{r}(A) = k$ allora esiste un minore C di ordine k in A che ha determinante diverso da 0 e *tutti* i minori di ordine $k+1$ in A (e non solo quelli che contengono C) hanno determinante uguale a 0. Naturalmente, in tal caso, anche tutti gli eventuali minori di ordine maggiore di $k+1$ in A hanno determinante uguale a 0.

Esempio. Trovare $r(A)$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ 7 & 6 & -7 & 11 \end{pmatrix}.$$

Sol.: i minori quadrati di A possono avere al massimo ordine 3, perciò $r(A) \leq 3$.

Cerchiamo un minore di ordine 2 che abbia determinante non nullo. Posto

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

si ha $|C| = -4 \neq 0$, quindi $r(A) \geq 2$ (se $r(A)$ fosse 1 tutti i minori di ordine 2 avrebbero determinante nullo). Calcoliamo ora i determinanti dei minori di ordine 3 che "contengono" C:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 7 & 6 & -7 \end{vmatrix} = 0 \ , \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & -2 \\ 7 & 6 & 11 \end{vmatrix} = 0$$

perchè in entrambi i casi la terza riga è combinazione delle altre due, più precisamente la terza riga è somma della prima riga moltiplicata per 3 con la seconda riga moltiplicata per 2.

Perciò $r(A) = 2$ perchè

a) esiste un minore C di ordine $k = 2$ (in A) tale che $\det(C) \neq 0$,

b) tutti i minori di ordine $k+1=3$ che "contengono" C hanno determinante nullo.

N.B. Sia $A \in M_{mn}(\mathbf{R})$. Allora

$$\mathrm{r}(A)=k \iff \begin{cases} \bullet \text{ esiste un minore } C \text{ di ordine } k \text{ in } A \text{ che ha determinante non nullo} \\ \bullet \text{ tutti i minori di ordine } k+1 \text{ che contengono } C \text{ (se esistono in } A) \\ \quad \text{hanno determinante nullo} \end{cases}$$

La seguente proposizione riassume le principali proprietà del rango di una matrice.

Proposizione 2.13.

1) $r(A)$ è l'ordine massimo dei minori di A che hanno determinante non nullo.

Esempio. Se $r(A)=2$, allora esiste un minore C di A di ordine 2 che ha determinante non nullo e *tutti* i minori di ordine $3,4,\ldots$ (se esistono in A) hanno determinante nullo.

2) Se $A \in M_{mn}(\mathbf{R})$ allora $r(A) \leq \min\{m,n\}$.

Esempio. Se A è una matrice 3×5 allora $r(A) \leq \min\{3,5\}=3$.

3) Se $A \in M_n(\mathbf{R})$ allora $r(A)=n \iff |A| \neq 0$.

4) $r(A)=r(A_{-1})$.

5) $r(A)=0 \iff A=\mathbf{0}$.

6) Sia $A \in M_{mn}(\mathbf{R})$. Allora $r(A)$ è la dimensione del sottospazio di $\mathbf{R}^n$ generato dalle righe di A oppure è la dimensione del sottospazio di $\mathbf{R}^m$ generato dalle colonne di A. Pertanto $r(A)$ è il numero massimo di righe o colonne linearmente indipendenti di A.

Esempio 1. Determinare $r(A)$ nei seguenti casi.

$$a)\ A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -3 & -6 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & -4 & -5 \end{pmatrix}, \quad b)\ A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -3 & -6 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c)\ A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \\ -5 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad d)\ A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$e)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}\ ,\quad f)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}\ ,\quad g)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Sol.: a) A è una matrice 3×4, quindi $r(A) \leq 3$. Cerchiamo un minore di ordine 2 che abbia determinante non nullo. Ad esempio

$$|C| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 5 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Rightarrow \mathrm{r}(A) \geq 2\ .$$

Calcoliamo i determinanti dei minori di ordine 3 in A che "contengono" C.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & -6 & 5 \\ 2 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

perchè la seconda colonna è il doppio della prima,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -6 & 5 & 3 \\ 4 & -4 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

perchè la prima riga è l'opposto della somma delle altre due.

Pertanto $r(A) = 2$.

b) A è una matrice 3×4, quindi $r(A) \leq 3$. Cerchiamo un minore di ordine 2 che abbia determinante non nullo. Ad esempio

$$|C| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 5 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Rightarrow \mathrm{r}(A) \geq 2\ .$$

Calcoliamo i determinanti dei minori di ordine 3 in A che contengono C.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -6 & 5 & 3 \\ 4 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 20 \neq 0\ .$$

In base alla definizione è quindi $r(A) = 3$ (in questo caso il minore "C" della definizione di rango è la matrice dell'ultimo determinante !!).

c) A è una matrice 4×3, quindi $r(A) \leq 3$. In questo caso le prime tre righe individuano un minore C di A il cui determinante è $1 \cdot 1 \cdot 3 = 3 \neq 0$ (matrice triangolare). Possiamo quindi concludere che $r(A) = 3$.

d) A è una matrice 3×4, quindi $r(A) \leq 3$. Cerchiamo un minore di ordine 2 che abbia determinante non nullo. Ad esempio

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow \mathrm{r}(A) \geq 2 \ .$$

I determinanti dei minori di ordine 3 in A che "contengono" C hanno chiaramente determinante nullo e quindi $r(A) = 2$.

e) A è una matrice di ordine 3 ed essendo $|A| = 1 \cdot 3(-5) = -15 \neq 0$, si ha $r(A) = 3$.

f) A è una matrice di ordine 3 il cui determinante è 0 (la terza riga è somma delle altre due). Perciò $r(A) < 3$. Poichè inoltre $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$ si ha $r(A) = 2$.

g) A è una matrice 2×4, quindi $r(A) \leq 2$. Inoltre $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$ perciò $r(A) = 2$.

Importante applicazione del concetto di rango. Abbiamo visto che $r(A)$ è la dimensione del sottospazio generato dalle righe di A.

- *Se $S = \{A_1, ..., A_m\} \subseteq \mathbf{R}^n$ e se A è la matrice $m \times n$ che ha per righe gli elementi di S, allora la dimensione del sottospazio generato da S è uguale al rango di A, cioè $dim[S] = r(A)$.*

- *Se inoltre $r(A) = k$ e se C è un minore di ordine k di A che ha determinante diverso da 0, allora le k righe di A che contengono C formano una base di $[S]$ (perchè esse sono linearmente indipendenti).*

- *Se poi si vuole stabilire se una n-upla A_{m+1} appartiene a $[S]$, cioè se A_{m+1} è combinazione lineare degli elementi della base di $[S]$, basta considerare la matrice B che ha*

per righe le k n-uple della base di $[S]$ e come ulteriore riga A_{m+1}. È infatti evidente che $A_{m+1} \in [S] \iff r(B) = k$ ossia $r(B) = dim[S]$.

Il procedimento descritto si applica a un qualsiasi $W \sqsubseteq \mathbf{R}^n$, dopo averne trovato un insieme finito di generatori.

Illustriamo quanto detto nei seguenti esempi.

Esempio 2. Sia $S = \{(1, 2, -1, 3), (2, 1, 4, 7), (1, -1, 5, 4)\}$.

a) Trovare una base e la dimensione di $[S]$,

b) dire se $(3, 3, 3, 10) \in [S]$.

Sol.: a) Consideriamo la matrice A che ha come righe gli elementi di S e troviamone il rango (in quanto $r(A) = \dim[S]$).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 7 \\ 1 & -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

A è una matrice 3×4, quindi $r(A) \leq 3$. Inoltre $|C| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow r(A) \geq 2$.

Calcoliamo i determinanti dei minori di ordine 3 in A che "contengono" C. Si ha

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \ , \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

perchè la seconda riga è somma delle altre due. Quindi $r(A) = 2$ e perciò $\dim[S] = 2$.

Inoltre $S' = \{(1, 2, -1, 3), (2, 1, 4, 7)\}$ è una base di $[S]$ (gli elementi di S' corrispondono alle due righe di A che "contengono" C).

b) Si ha:

$(3, 3, 3, 10) \in [S] \iff (3, 3, 3, 10)$ è combinazione lineare degli elementi di $S' \iff$ la matrice B che ha come righe gli elementi della base S' di $[S]$ e l'ulteriore quadrupla $(3, 3, 3, 10)$ ha rango uguale alla dimensione di $[S]$, ossia $\iff r(B) = 2$.

Calcoliamo quindi il rango della matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 7 \\ 3 & 3 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

Si ha $|C| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ e quindi $r(B) \geq 2$. Poichè tutti i minori di ordine 3 in B che "contengono" C hanno determinante nullo (la terza riga è somma delle prime due), risulta $r(B) = 2$ e perciò $(3, 3, 3, 10) \in [S]$.

<u>Esempio 3</u>. Sia $S = \{(1, 2, 3), (-1, 0, 2), (k, 0, 4)\} \subseteq \mathbf{R}^3$ $(k \in \mathbf{R})$.

a) Determinare i valori di k per i quali S è una base di $\mathbf{R}^3$.

b) Trovare una base e la dimensione di $[S]$.

c) Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$, la terna $(\alpha, 2, 1) \in [S]$.

<u>Sol</u>.: a) $S \subseteq \mathbf{R}^3$, S ha tre elementi e dim $\mathbf{R}^3 = 3$, quindi S è una base di $\mathbf{R}^3$ se e soltanto se S è linearmente indipendente. Sappiamo però che S è linearmente indipendente se e soltanto se la matrice che ha come righe gli elementi di S ha determinante non nullo. Si ha:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ k & 0 & 4 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ k & 4 \end{vmatrix} = -2(-4 - 2k) = 0 \iff k = -2 \ .$$

Quindi S è una base di $\mathbf{R}^3$ se e soltanto se $k \neq -2$ e per tali valori di k si ha $[S] = \mathbf{R}^3$.

b) • Se $k \neq -2$ S è linearmente indipendente (vedi a)) e perciò S è una base di $[S]$. Inoltre dim$[S]$ =dim$\mathbf{R}^3 = 3$.

• Se $k = -2$ allora S è linearmente dipendente. dim$[S]$ è il rango della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ e poichè $|A| = 0$ e $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, si ha $r(A) = 2$ =dim$[S]$. Inoltre $S' = \{(1, 2, 3), (-1, 0, 2)\}$ è una base di $[S]$.

c) • Se $k \neq -2$ sappiamo che $[S] = \mathbf{R}^3$ e quindi ogni terna di $\mathbf{R}^3$ (in particolare $(\alpha, 2, 1)$ per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$) appartiene ad $[S]$.

• Se $k = -2$, $(\alpha, 2, 1) \in [S]$ se e soltanto se il rango della matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ \alpha & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

è uguale alla dimensione di $[S]$, cioè 2.

Si ha $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ e $|B| = 4\alpha - 8$ e quindi $|B| = 0 \iff \alpha = 2$.

Pertanto (con $k = -2$)

se $\alpha \neq 2$, $r(B) = 3 \neq \dim[S]$ e quindi $(\alpha, 2, 1) \notin [S]$,

se $\alpha = 2$, $r(B) = 2 = \dim[S]$ e quindi $(2, 2, 1) \in [S]$.

Esempio 4. Calcolare, al variare di $\lambda \in \mathbf{R}, r(A)$ nei seguenti casi:

$$\text{a)}\ A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & \lambda & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \text{b)}\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & \lambda \end{pmatrix} .$$

Sol.: a) Essendo A una matrice quadrata, calcoliamone il determinante (usando la regola di Sarrus).

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & \lambda & 2 \end{vmatrix} = -2 + 3\lambda + \lambda^2 - 2 = \lambda^2 + 3\lambda - 4 .$$

Quindi $|A| = 0 \iff \lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0 \iff \lambda = -4$ oppure $\lambda = 1$.

Pertanto:

- se $\lambda \neq 1$ e $\lambda \neq -4$ allora $|A| \neq 0$ e $r(A) = 3$;
- se $\lambda = 1$ oppure $\lambda = -4$ allora $|A| = 0$ ed essendo $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, in entrambi

i casi si ha $r(A) = 2$.

b) A è una matrice 3×4, quindi $r(A) \leq 3$. Essendo $|C| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ si ha $r(A) \geq 2$.

Calcoliamo i determinanti dei minori di ordine 3 in A che contengono C.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

perchè la terza riga è somma delle altre due;

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda - 1$$

e questo determinante è uguale a 0 se e soltanto se $\lambda = 1$.

In conclusione:

- se $\lambda \neq 1$ allora $r(A) = 3$;
- se $\lambda = 1$ allora $r(A) = 2$.

Esempio 5. Dire per quali λ si ha $r(A) = r(A : B)$, dove

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad A : B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Sol.: A è una matrice di ordine 3 e $A : B$ è una matrice 3×4, perciò il rango di entrambe è ≤ 3.

Poichè $|C| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ si ha $r(A) \geq 2$ e $r(A : B) \geq 2$.

Calcoliamo $r(A)$. Essendo

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 3 - 3\lambda$$

è $|A| = 0 \iff \lambda = 1$ e quindi:

- se $\lambda \neq 1$ allora $r(A) = 3$ (e poichè A è, in particolare, un minore di $A : B$, anche $r(A : B) = 3$).
- se $\lambda = 1$ allora $r(A) = 2$.

Resta da calcolare $r(A : B)$ con $\lambda = 1$. Dei due minori di ordine 3 che contengono C in $A : B$, il primo è A e sappiamo che $|A| = 0$, il secondo è

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che ha anch'esso determinante uguale a 0 perchè la terza riga è somma delle altre due. Perciò anche $r(A : B) = 2$.

In conclusione $r(A) = r(A : B)$ per ogni λ.

§6. Generalità sui sistemi lineari

Ricordiamo anzitutto che per **grado di un sistema di equazioni algebriche** si intende il *prodotto* dei gradi delle singole equazioni.

Definizione. Per **sistema lineare** si intende un sistema di primo grado (cioè tutte le equazioni che lo compongono sono algebriche e hanno grado uno).

Osservazione. Un sistema lineare può essere:

- **determinato**, cioè avere una sola soluzione (ad esempio il sistema $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$ ha come unica soluzione la coppia $(1, 1)$.
- **indeterminato**, cioè avere infinite soluzioni (ad esempio il sistema $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$, ha infinite soluzioni del tipo $(x, 1 - x)$.

• **impossibile**, cioè non avere soluzioni (ad esempio il sistema $\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=3 \end{cases}$ non ha soluzioni).

In conclusione, un sistema lineare ha: una ed una sola soluzione oppure non ha soluzioni oppure se ha più di una soluzione ne ha necessariamente infinite (e non si possono presentare altri casi).

Un sistema lineare di m equazioni in n incognite si può rappresentare nella forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{3}$$

dove $a_{ij}, b_i \in \mathbf{R}$, per $i = 1, ..., m,\ j = 1, ..., n$, con gli a_{ij} non tutti nulli e $x_1, ..., x_n$ sono le incognite.

A partire da (3) costruiamo le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ detta **matrice incompleta o dei coefficienti** del sistema

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ detta **matrice colonna delle incognite** del sistema

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$ detta **matrice colonna dei termini noti** del sistema

$$A : B = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$ detta **matrice completa** del sistema

Se indichiamo con $A_1, A_2, ..., A_m$ le matrici riga di A e con $B_1, B_2, ..., B_n$ le matrici colonna di A, il sistema (3) si puó scrivere in uno dei seguenti modi:

- $$\begin{cases} A_1X & = & b_1 \\ A_2X & = & b_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ A_mX & = & b_m \end{cases}$$ (**usando le righe di** A)

- $B_1x_1 + B_2x_2 + ... + B_nx_n = B$ (**usando le colonne di** A)

- $AX = B$ (**forma matriciale**) .

Se $B = \mathbf{0}$ (tutti i termini noti sono nulli) il sistema lineare si dice **omogeneo**; quindi

un sistema lineare omogeneo è del tipo $AX = \mathbf{0}$.

Esempio. Consideriamo il sistema lineare di due equazioni in tre incognite

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}.$$

In questo caso

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A : B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -2 & 5 & 1 \end{pmatrix} .$$

Usando le colonne di A il sistema si può scrivere nella forma

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} x_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Osserviamo che le (eventuali) soluzioni del sistema sono quelle terne di scalari, ad esempio $x_1 = x_2 = 1$ e $x_3 = 0$, che permettono di ottenere la coppia $(3, 1)$ come combinazione lineare delle coppie $(2, 3), (1, -2), (-4, 5)$.

In forma matriciale il sistema si scrive

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Osservazione. Le incognite si indicano anche con $x, y, z, t, \ldots$ o con altri simboli.

§7. Sistemi di Cramer

Vediamo ora di stabilire delle condizioni affinchè un sistema lineare abbia soluzioni e in caso affermativo diamo un metodo per determinarle. Vediamo prima un caso particolare.

Definizione. Si dice che il sistema lineare $AX = B$ di m equazioni in n incognite è un **sistema di Cramer** se:

i) $m = n$ (cioè il numero delle equazioni è uguale al numero delle incognite)

ii) $|A| \neq 0$ (cioè il determinante della matrice dei coefficienti delle incognite è *diverso* da zero).

Per questi sistemi si ha:

Teorema 2.14. (Teorema di Cramer)

Tutti i sistemi di Cramer hanno una ed una sola soluzione.

Dimostrazione.

Sia $AX = B$ un sistema di Cramer ($m = n, |A| \neq 0$). Scriviamo il sistema utilizzando le colonne $B_1, B_2, ..., B_n$ di A, cioè $B_1x_1 + B_2x_2 + ... + B_nx_n = B$.

Poichè, per ipotesi, $|A| \neq 0$, l'insieme $\{B_1, B_2, ..., B_n\} \subseteq \mathbf{R}^n$ (n n-uple) è linearmente indipendente, e perciò $(B_1, B_2, ..., B_n)$ è una base ordinata di $\mathbf{R}^n$, quindi ogni elemento di $\mathbf{R}^n$ si può scrivere in un unico modo come combinazione lineare di $(B_1, B_2, ..., B_n)$.

Dato che $B \in \mathbf{R}^n$, esiste *un'unica* n-upla $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n) \in \mathbf{R}^n$ tale che $B_1\overline{x}_1 + B_2\overline{x}_2 + ... + B_n\overline{x}_n = B$. Ne segue che $\overline{X} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)$ è soluzione (ed è l'unica) del sistema $AX = B$.

Per il calcolo della soluzione di un sistema di Cramer si può usare la seguente:

Proposizione 2.15. (Regola di Cramer)

Sia $AX = B$ un sistema di Cramer di n equazioni in n incognite e sia $\overline{x} = (\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n)$ la sua soluzione.

Se indichiamo con $B_1, B_2, B_3, ..., B_n$ le colonne di A, allora si ha:

$$\overline{x}_1 = \frac{|B\ B_2\ B_3 ...\ B_n|}{|A|}\ ,\ \overline{x}_2 = \frac{|B_1\ B\ B_3\ ...\ B_n|}{|A|}\ ,\ ...\ ,\ \overline{x}_n = \frac{|B_1\ B_2\ B_3\ ...\ B|}{|A|}\ .$$

dove $|B\ B_2\ B_3\ ...\ B_n|$ indica il determinante della matrice che ha per colonne $B, B_2, B_3, ...,$ B_n e analogamente per $|B_1\ B\ B_3\ ...\ B_n|$, ... , $|B_1\ B_2\ B_3\ ...\ B|$.

Dimostrazione. (Cenno)

Se $\overline{X}$ è la soluzione del sistema di Cramer $AX = B$, allora $A\overline{X} = B$. Essendo $|A| \neq 0$, la matrice A è invertibile e moltiplicando a sinistra per A^{-1} primo e secondo membro

di $A\overline{X} = B$, si ha $A^{-1}(A\overline{X}) = A^{-1}B$ ossia $\overline{X} = A^{-1}B$. Tenendo presente che $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\mathrm{Agg}(A))_{-1}$ e, "svolgendo i calcoli", si ottiene la regola di Cramer.

Osservazione. La relazione

$$\overline{X} = A^{-1}B$$

permette di calcolare, in modo diverso dalla regola di Cramer, la soluzione del sistema di Cramer $AX = B$ ed è detta **metodo della matrice inversa**.

Esempio. Verificare che il seguente sistema è di Cramer e determinarne la soluzione:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ x + y + 2z = 4 \end{cases}$$

Sol.: si ha $m = n = 3$ e

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

e quindi $|A| \neq 0$. Perciò il sistema dato è una sistema di Cramer e ha una ed una sola soluzione. Utilizzando la regola di Cramer otteniamo:

$$x = \frac{|B\ B_2\ B_3|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{1} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$y = \frac{|B_1\ B\ B_3|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$z = \frac{|B_1\ B_2\ B|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{1} = \frac{2}{1} = 2$$

Quindi l'insieme delle soluzioni è $S = \{(-1, 1, 2)\}$.

Per esercizio risolvere lo stesso sistema con il metodo della matrice inversa.

N.B. Il sistema lineare

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$$

pur avendo l'unica soluzione $x = 1, y = 1$, non è un sistema di Cramer (perchè $m \neq n$).

Esistono quindi sistemi lineari che, pur avendo un'unica soluzione, non sono di Cramer.

§8. Caso generale

Teorema 2.16. (Teorema di Rouchè-Capelli).

Un sistema lineare $AX = B$ di m equazioni in n incognite ha (almeno una) soluzione se e soltanto se la matrice incompleta A e quella completa $A : B$ hanno lo stesso rango; ossia

$$AX = B \ \ \textit{ha soluzione} \iff r(A) = r(A : B)\ .$$

Dimostrazione.

Scriviamo il sistema $AX = B$ utilizzando le colonne $B_1, B_2, ..., B_n$ di A, ossia nella forma $B_1x_1 + B_2x_2 + ... + B_nx_n = B$.

Il sistema $AX = B$ ha soluzione $\iff$ esiste $\overline{X} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n) \in \mathbf{R}^n$ tale che $B_1\overline{x}_1 + B_2\overline{x}_2 + ... + B_n\overline{x}_n = B \iff B$ è combinazione lineare di $B_1, B_2, ..., B_n \iff$

il numero massimo di vettori linearmente indipendenti in $\{B_1, B_2, ..., B_n\}$ è uguale al numero massimo di vettori linearmente indipendenti in $\{B_1, B_2, ..., B_n, B\}$ $\iff$ il numero massimo di colonne linearmente indipendenti in A è uguale al numero massimo di colonne linearmente indipendenti in $A : B$ $\iff$ in conclusione $r(A) = r(A : B)$.

Osservazione. Si tenga presente che, in generale, $r(A : B) \geq r(A)$ e, più precisamente, $r(A : B) = r(A)$ *oppure* $r(A : B) = r(A) + 1$.

Metodo di risoluzione

Il teorema di Rouchè-Capelli fornisce una condizione necessaria e sufficiente affinchè un sistema lineare abbia soluzioni, ma non dà un metodo per calcolarle. Vediamo ora, con un esempio, un metodo per determinare le eventuali soluzioni.

Sia dato il sistema lineare

$$\begin{cases} x + y + 3z + 2t = 1 \\ 2x + 2y + z - t = 2 \\ 3x + 3y + 4z + t = 3 \end{cases} \tag{4}$$

Essendo $m = 3$ e $n = 4$, il sistema non è un sistema di Cramer.

Calcoliamo $r(A)$ e $r(A : B)$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad A : B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} .$$

Poichè $|C| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$ è $r(A) \geq 2$ e $r(A : B) \geq 2$.

Si vede facilmente che i determinanti dei minori di ordine tre che contengono C in A e in $A : B$ sono tutti nulli e quindi possiamo concludere che $r(A) = r(A : B) = 2$. Quindi, per il teorema di Rouchè-Capelli, il sistema (4) ha soluzione.

Si dimostra che (4) è equivalente al sistema ottenuto da esso eliminando le equazioni i cui coefficienti delle incognite non "compaiono" in C, ossia (4) è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x + y + 3z + 2t = 1 \\ 2x + 2y + z - t = 2 \end{cases}$$

Trasformiamo ora quest'ultimo sistema in un "sistema di Cramer" portando al secondo membro e pensando come costanti i termini che contengono le incognite i cui coefficienti non "appartengono" a C, ottenendo:

$$\begin{cases} y + 3z = 1 - x - 2t \\ 2y + z = 2 - 2x + t \end{cases}$$

Tale sistema ha i coefficienti delle "incognite" y, z che sono gli elementi di C e poichè $|C| \neq 0$, lo possiamo risolvere usando la regola di Cramer, precisamente:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 - x - 2t & 3 \\ 2 - 2x + t & 1 \end{vmatrix}}{|C|} = \frac{1 - x - 2t - 6 + 6x - 3t}{-5} = \frac{-5 + 5x - 5t}{-5} = 1 - x + t$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 - x - 2t \\ 2 & 2 - 2x + t \end{vmatrix}}{|C|} = \frac{2 - 2x + t - 2 + 2x + 4t}{-5} = -t$$

Quindi l'insieme S delle soluzioni del sistema (4) è

$$S = \{(x, 1 - x + t, -t, t) \ : \ x, t \in \mathbf{R}\} \ .$$

Le soluzioni dipendono da due parametri e questo fatto si esprime dicendo che il *sistema ha* ∞^2 *soluzioni.*

In generale *se il sistema in* n *incognite* $AX = B$ *ha soluzioni, e precisamente* $r(A) = r(A : B) = k$, si dice che **il sistema ha** ∞^{n-k} **soluzioni**.

N.B. Se $k = n$ allora il sistema ha una sola soluzione, quindi conveniamo che sia, in questo contesto, $\infty^0 = 1$.

Osservazioni sui sistemi lineari omogenei

Diamo alcune proprietà relative al caso particolare dei sistemi lineari omogenei.

1) Tutti i sistemi omogenei (cioè del tipo $AX = \mathbf{0}$) hanno (almeno) la soluzione nulla $(0, 0, ..., 0)$ (perchè $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$) detta **soluzione banale**.

2) Se $AX = \mathbf{0}$ ha n equazioni ed n incognite allora

$$AX = \mathbf{0} \text{ ha la sola soluzione banale} \iff |A| \neq 0$$

ossia

$$AX = \mathbf{0} \text{ ha infinite soluzioni} \iff |A| = 0 \ .$$

3) Per un sistema lineare omogeneo $AX = \mathbf{0}$ si ha (sempre) $r(A) = r(A : B)$ (perchè $B = \mathbf{0}$), quindi è sufficiente, ai fini pratici, trovare solo $r(A)$.

4) L'insieme S delle soluzioni di $AX = \mathbf{0}$ ($X = (x_1, ..., x_n)$) è un *sottospazio* di $\mathbf{R}^n$ e si dimostra che dim $S = n - k$, dove $k = r(A)$.

Esempio 1. Risolvere i seguenti sistemi lineari:

a) $\begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ x + y + z = 2 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ a') $\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$

Sol.: a) $m = n = 3$ e

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \ .$$

Il sistema è di Cramer e ha quindi una sola soluzione, che possiamo trovare con la regola di Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-4}{-4} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{0}{-4} = 0$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-4}{-4} = 1$$

Quindi l'insieme delle soluzioni è $S = \{(1, 0, 1)\}$.

a') Il sistema è omogeneo con $m = n = 3$ e $|A| \neq 0$, quindi ha soltanto la soluzione banale: $S = \{(0, 0, 0)\}$.

N.B. Tutti i sistemi lineari omogenei di Cramer hanno la sola soluzione banale.

Esempio 2. Risolvere i seguenti sistemi lineari:

b) $\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ x - 3y + 2z = 2 \\ 5x + 13y - 10z = 6 \end{cases}$ b') $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - 3y + 2z = 0 \\ 5x + 13y - 10z = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - 3y + 4z = 3 \\ 3x - 4y + 5z = 0 \end{cases}$

Sol.: b) È $m = n = 3$ e

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 5 & 13 & -10 \end{vmatrix} = 0 \,,$$

pertanto il sistema non è di Cramer. Vediamo quindi se $r(A) = r(A : B)$.

$$A : B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & 2 \\ 5 & 13 & -10 & 6 \end{pmatrix} .$$

Abbiamo $|C| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$ e dei due minori di ordine 3 in $A : B$ che contengono C uno è A (che sappiamo ha determinante nullo e quindi $r(A) = 2$) e l'altro è

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 5 & 13 & 6 \end{pmatrix}$$

il cui determinante, come si calcola facilmente, è ancora uguale a 0. Quindi $r(A) = r(A : B) = 2$ e il sistema ha $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni (3 è il numero delle incognite e $2 = r(A) = r(A : B)$). Per trovarle basta risolvere il sistema "corrispondente alla matrice" C e precisamente:

$$\begin{cases} 2x + y = z + 3 \\ x - 3y = 2 - 2z \end{cases}$$

Usando la regola di Cramer si ottiene $S = \left\{ \left(\frac{z+11}{7}, \frac{5z-1}{7}, z \right) \ : \ z \in \mathbf{R} \right\}$.

b') Il sistema è omogeneo ed essendo $m = n = 3$ e $|A| = 0$, il sistema ha infinite soluzioni (vedi Osservazione pag... punto 2). Per quanto visto in b) $|C| \neq 0$ e quindi $r(A) = 2$. Perciò il sistema ha ∞^{3-2} soluzioni. Per trovarle basta risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = z \\ x - 3y = -2z \end{cases}$$

e si ottiene $S = \left\{ \left(\frac{z}{7}, \frac{5z}{7}, z \right) \ : \ z \in \mathbf{R} \right\}$.

L'insieme S è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$ la cui dimensione è $n - k = 3 - 2 = 1$ e una sua base è $\{(1, 5, 7)\}$.

c) È $m = n = 3$ e

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(perchè la terza riga è somma delle altre due)},$$

pertanto il sistema non è di Cramer. Vediamo quindi se $r(A) = r(A : B)$.

$$A : B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 5 & 0 \end{pmatrix} .$$

Abbiamo $|C| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ e quindi $r(A) = 2$.

Dei due minori di ordine 3 in $A : B$ che contengono C uno è A (che sappiamo ha determinante nullo) e l'altro è

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

il cui determinante, come si calcola facilmente, è 4; quindi $r(A : B) = 3$. Pertanto $r(A) \neq r(A : B)$ e, per il teorema di Rouchè-Capelli, il sistema non ha soluzioni.

Nel seguito con la frase **discutere un sistema lineare** (con parametri) intenderemo stabilire per quali valori dei parametri esso ha soluzione oppure no e nel caso abbia soluzione indicarne il "numero", senza risolverlo.

Esempio 3. Discutere i seguenti sistemi lineari:

a) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 2x - 3y + 5z = 4 \\ kx + 7y - 11z = -4 \end{cases}$, a') $\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 2x - 3y + 5z = 0 \\ kx + 7y - 11z = 0 \end{cases}$ $(k \in \mathbf{R})$

Sol.: a) Si ha $m = n = 3$ e

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 5 \\ k & 7 & -11 \end{vmatrix} = k .$$

Perciò se $k \neq 0$ il sistema è di Cramer e ha quindi una ed una sola soluzione.

Se $k = 0$ il sistema non è di Cramer. Per stabilire se il sistema ha soluzione, in base al teorema di Rouchè-Capelli, dobbiamo determinare e confrontare $r(A)$ e $r(A : B)$.
Si ha (con $k = 0$)

$$A : B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & 4 \\ 0 & 7 & -11 & -4 \end{pmatrix}.$$

Poichè $|A| = 0$ e $|C| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -7$ è $|C| \neq 0$ e quindi $r(A) = 2$. Dei due minori di ordine 3 in $A : B$ che contengono C uno è A (che sappiamo ha determinante nullo) e l'altro è

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & 7 & -4 \end{pmatrix}$$

il cui determinante, come si calcola facilmente, è uguale a 0. Quindi $r(A : B) = 2$. Pertanto $r(A) = 2 = r(A : B)$ e, per il teorema di Rouchè-Capelli, il sistema ha $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni.

Conclusione:

- se $k \neq 0$ il sistema ha una sola soluzione,
- se $k = 0$ il sistema ha ∞^1 soluzioni.

a') dai risultati precedenti si ha che:

- se $k \neq 0$ il sistema è di Cramer ed essendo anche omogeneo ha solo la soluzione banale;
- se $k = 0$ allora $r(A) = 2$ e il sistema ha ∞^1 soluzioni.

<u>Esempio 4</u>. Discutere i seguenti sistemi lineari:

b) $\begin{cases} 2x - 2y + kz = 0 \\ 5x - 3y + z = 0 \\ 5x - 4y - 2z = 0 \\ 2x + y + 7z = k \end{cases}$, b') $\begin{cases} 2x - 2y + kz = 0 \\ 5x - 3y + z = 0 \\ 5x - 4y - 2z = 0 \\ 2x + y + 7z = 0 \end{cases}$ $(k \in \mathbf{R})$

Sol.: b) Si ha $m = 4$ e $n = 3$ e perciò il sistema non è di Cramer. Per stabilire se il sistema ha soluzione, in base al teorema di Rouchè-Capelli, dobbiamo determinare e confrontare $r(A)$ e $r(A : B)$ (osservando che $r(A) \leq 3$ mentre $r(A : B) \leq 4$).

Essendo $A : B$ una matrice quadrata ne calcoliamo il determinante:

$$|A : B| = \begin{vmatrix} 2 & -2 & k & 0 \\ 5 & -3 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 7 & k \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 2 & -2 & k \\ 5 & -3 & 1 \\ 5 & -4 & -2 \end{vmatrix} = k(-5k - 10) \ .$$

Quindi $|A : B| = 0 \iff k = 0$ oppure $k = -2$.

Perciò se $k \neq 0$ e $k \neq -2$ è $r(A : B) = 4$ e poichè $r(A) \leq 3$ è sicuramente $r(A) \neq r(A : B)$ e quindi il sistema non ha soluzioni.

Se $k = 0$ il sistema è omogeneo e pertanto $r(A) = r(A : B) \leq 3$.

Si ha

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \\ 5 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Poichè $|C| = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 4$ è $|C| \neq 0$ e quindi $r(A) \geq 2$. Il minore di ordine 3 in A che contiene C

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \\ 5 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

ha determinante non nullo ($= -10$); ne segue che $r(A) = 3$. Quindi il sistema ha $\infty^{3-3} = \infty^0 = 1$ soluzione (che è quella banale poichè il sistema è omogeneo).

Se $k = -2$ il sistema non è omogeneo e $r(A : B) \leq 3$. Si ha

$$A : B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 & 0 \\ 5 & -3 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 7 & -2 \end{pmatrix}$$

Poichè $|C| = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 4$ è $|C| \neq 0$ e perciò $r(A) \geq 2$ e $r(A : B) \geq 2$. I minori di ordine 3 in A che contengono C sono

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \\ 5 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

e hanno entrambi (come si calcola facilmente) determinante nullo. Se ne deduce che $r(A) = 2$.

Invece il minore di ordine 3 in $A : B$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 5 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

ha determinante non nullo ($= -8$), quindi $r(A : B) = 3$. Pertanto $r(A) \neq r(A : B)$ e, per il teorema di Rouchè-Capelli, il sistema non ha soluzioni.

Conclusione:

- se $k = 0$ il sistema ha una sola soluzione,
- se $k \neq 0$ il sistema non ha soluzioni.

b') il sistema è omogeneo e quindi calcoliamo soltanto $r(A)$.

$|C| = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 4$, quindi $|C| \neq 0$ e perciò $r(A) \geq 2$. I minori di ordine 3 in A che contengono C sono

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & k \\ 5 & -3 & 1 \\ 5 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -2 & k \\ 5 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

i cui determinanti valgono rispettivamente $-10 - 5k$ e $11k + 22$. Poichè tali determinanti si annullano per lo stesso valore di k ($k = -2$), se ne deduce che:

- se $k \neq -2$ si ha $r(A) = 3$ e il sistema ha $\infty^{3-3} = \infty^0 = 1$ soluzione (quella banale),
- se $k = -2$ si ha $r(A) = 2$ e il sistema ha $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni.

Esempio 5. Discutere i seguenti sistemi lineari:

$$\text{c)} \begin{cases} -8x + 2y + kz + 5t = \alpha \\ 2x - z - t = \beta \\ -3x + y + 2t = \alpha \end{cases}, \quad \text{c')} \begin{cases} -8x + 2y + kz + 5t = 0 \\ 2x - z - t = 0 \\ -3x + y + 2t = 0 \end{cases} \quad (k, \alpha, \beta \in \mathbf{R})$$

Sol.: c) Si ha $m = 3$ e $n = 4$ e perciò il sistema non è di Cramer. Per stabilire se il sistema ha soluzione, in base al teorema di Rouchè-Capelli, dobbiamo determinare e confrontare $r(A)$ e $r(A : B)$.

La matrice $A : B$ è

$$A : B = \begin{pmatrix} -8 & 2 & k & 5 & \alpha \\ 2 & 0 & -1 & -1 & \beta \\ -3 & 1 & 0 & 2 & \alpha \end{pmatrix}$$

Osserviamo che $r(A) \leq 3$ e $r(A : B) \leq 3$, quindi se $r(A) = 3$ è anche $r(A : B) = 3$. Esaminiamo allora A:

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 2 & k & 5 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$|C| = \begin{vmatrix} -8 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4$ e quindi $|C| \neq 0$, perciò $r(A) \geq 2$. I minori di ordine 3 in A che contengono C sono

$$\begin{pmatrix} -8 & 2 & k \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -8 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

i cui determinanti sono rispettivamente $2k - 2$ e 0. Se ne deduce che:

per $k \neq 1$ si ha $r(A) = 3 = r(A : B)$ e il sistema ha $\infty^{4-3} = \infty^1$ soluzioni.

Se invece $k = 1$ allora $r(A) = 2$ e bisogna quindi determinare anche $r(A : B)$. Il minore di ordine 3 in $A : B$, che contiene C,

$$\begin{pmatrix} -8 & 2 & \alpha \\ 2 & 0 & \beta \\ -3 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

ha determinante $-2\alpha + 2\beta$. Perciò se $\alpha = \beta$ anche $r(A : B) = 2$ e il sistema ha $\infty^{4-2} = \infty^2$ soluzioni, mentre se $\alpha \neq \beta$ allora $r(A : B) = 3$ e il sistema non ha soluzioni.

Conclusione:

- se $k \neq 1$ il sistema ha ∞^1 soluzioni per ogni $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$,
- se $k = 1$ e $\alpha = \beta$ il sistema ha ∞^2 soluzioni,
- se $k = 1$ e $\alpha \neq \beta$ il sistema non ha soluzioni.

c') Il sistema è omogeneo e per la precedente discussione sappiamo che se $k \neq 1$ è $r(A) = 3$, mentre se $k = 1$ risulta $r(A) = 2$.

Quindi:

- se $k \neq 1$ il sistema ha ∞^1 soluzioni,
- se $k = 1$ il sistema ha ∞^2 soluzioni.

§9. Matrici a scala o a gradini

Introduciamo adesso un nuovo concetto che permetterà di calcolare in modo (in generale) più rapido il rango di una matrice e che quindi avrà applicazione anche alla risoluzione dei sistemi lineari. Vedremo inoltre una sua applicazione al calcolo dell'inversa di una matrice.

Definizione. Si dice che $G \in M_{mn}(\mathbf{R})$ è una **matrice a scala** o **a gradini** se esiste un intero k con $0 \leq k \leq m$ tale che

- tutti gli elementi di G situati al di sotto della k-esima riga sono nulli (se $G = 0$ allora poniamo per convenzione $k = 0$),
- se $k > 0$, esistono k interi $n_1, n_2, ..., n_k$ con $1 \leq n_1 < n_2 < ... < n_k \leq n$ tali che la i-esima riga di G, con $1 \leq i \leq k$, ha i primi $n_i - 1$ elementi nulli e l'n_i-esimo elemento non nullo.

Esempio. Sia

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

G è una matrice a scala, con $m = 4, n = 5, k = 3, n_1 = 1, n_2 = 3, n_3 = 4$ e $1 < 3 < 4$, ossia $n_1 < n_2 < n_3$.

La matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

non è una matrice a scala, perchè "$n_2 = n_3 = 2$".

In modo intuitivo possiamo dire che G è una matrice a scala se ogni riga, a partire dalla seconda, presenta una *sequenza iniziale* di zeri con almeno uno zero in più rispetto alla riga che la precede, se però una riga è nulla anche quelle che la seguono sono nulle.

Si dimostra la seguente

Proposizione 2.17.

Il rango di una matrice a scala G è uguale a k, dove k è il numero di righe non nulle in G, ciò equivale a dire che le righe non nulle di una matrice a scala sono linearmente indipendenti.

Nell'esempio proposto $r(G) = 3$ ed è evidente che le righe non nulle di G sono linearmente indipendenti.

Vediamo adesso come si possa "trasformare" una qualunque matrice A in una matrice a scala G senza modificarne il rango. È chiaro allora che questo permetterà di calcolare il rango di A.

Definizione. Per **trasformazione elementare sulle righe** di una matrice $A \in M_{mn}(\mathbf{R})$ si intende una delle seguenti "operazioni":

1) scambiare la riga ℓ_i con la riga ℓ_j (indicata con $\ell_i\ell_j$)

2) moltiplicare la riga ℓ_i per una costante $c \neq 0$ (indicata con $c\ell_i$)

3) sommare alla riga ℓ_i la riga ℓ_j moltiplicata per una costante c (indicata con $\ell_i + c\ell_j$).

Si dimostra la seguente importante

Proposizione 2.18.

a) È possibile trasformare ogni matrice A in una matrice a scala G mediante un numero finito di trasformazioni elementari sulle righe.

b) Le trasformazioni elementari sulle righe di una matrice A non modificano il suo rango e nemmeno il sottospazio generato dalle sue righe.

<u>Osservazione</u>. Dalla Proposizione 2.18 segue che: *trasformando una matrice A in una*

matrice a scala G possiamo determinare $r(A)$, poichè $r(A) = r(G)$ e $r(G) = k =$ numero di righe non nulle in G.

Esempio 1. Trovare il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & -4 \\ 7 & 14 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Sol.: operiamo su A con le trasformazioni elementari sulle righe. Otteniamo successivamente

$$A \xrightarrow{\ell_1 \ell_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ 7 & 14 & 3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\ell_3 - 7\ell_1]{\ell_2 - 2\ell_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & 13 \\ 0 & 0 & 10 & 26 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_3 - 2\ell_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = G$$

G è una matrice a scala con due righe non nulle. Pertanto $r(G) = 2$ e quindi, essendo $r(A) = r(G)$, si ha $r(A) = 2$.

Esempio 2. Determinare una base e la dimensione di

$$W = [\mathbf{v}_1 = (1, -2, 0, 3), \mathbf{v}_2 = (1, -1, -1, 4), \mathbf{v}_3 = (1, 0, -2, 5)] \ .$$

Sol.: W è generato da $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ e quindi dim $W = r(A)$, dove A è la matrice che ha come righe $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.

Si ha poi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_2 - \ell_1, \ell_3 - \ell_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_3 - 2\ell_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = G$$

G è una matrice a scala con due righe non nulle. Pertanto $r(G) = 2$ e quindi, essendo $r(A) = r(G)$, si ha $r(A) = 2$. Ne segue che $\dim(W) = 2$. Inoltre le righe non nulle di G formano una base di W, pertanto $S' = \{(1, -2, 0, 3), (0, 1, -1, 1)\}$ è una base di W (vedi Proposizione 2.18 b)).

Università di Ferrara
BIBLIOTECA
Biblioteca Scientifico-Tecnologica

§10. Applicazione delle matrici a scala alla risoluzione dei sistemi lineari

Le trasformazioni elementari sulle righe, interpretate come "trasformazioni" sulle equazioni di un sistema lineare $AX = B$, lo trasformano in un sistema ad esso equivalente. Trasformando $A : B$ (e quindi anche A) in una matrice a scala, possiamo stabilire se $r(A) = r(A : B)$, cioè se il sistema ha soluzioni e, in caso affermativo, siamo in grado di determinarle "facilmente".

Esempio 1. Risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 8 \\ -x + 2y + 4z = 7 \\ -x + z = 0 \end{cases}$$

Sol.: si ha

$$A : B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 8 \\ -1 & 2 & 4 & 7 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_2+\ell_1, \ell_3+\ell_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & 4 & 7 & 15 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_2 \ell_3}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 4 & 7 & 15 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_3 - 2\ell_2, \frac{1}{2}\ell_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Quindi $r(A) = r(A : B) = 3$ e il sistema ha $\infty^{3-3} = 1$ soluzione.

Il sistema di partenza è poi equivalente al sistema ottenuto considerando la matrice finale della precedente riduzione a scala, ossia

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 8 \\ y + 2z = 4 \\ -z = -1 \end{cases}$$

che porta immediatamente, per sostituzione "dal basso verso l'alto", alla soluzione

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

Esempio 2. Risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} x + y + 3z = 1 \\ 2x + 2y + z = 2 \\ x + y + 8z = 5 \end{cases}$$

Sol.: si ha

$$A : B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 8 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_2 - 2\ell_1, \ell_3 - \ell_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_3 + \ell_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Quindi $r(A) = 2$ e $r(A : B) = 3$. Poichè i due ranghi sono diversi il sistema non ha soluzioni.

Esempio 3. Risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} x + y - 3z = -3 \\ x - y + z = -1 \\ y - 2z = -1 \end{cases}$$

Sol.: si ha

$$A : B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_2 - \ell_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}\ell_2}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_3 - \ell_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi $r(A) = r(A : B) = 2$ e il sistema ha $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni.

Il sistema di partenza è poi equivalente al sistema ottenuto considerando la matrice finale della precedente riduzione a scala, ossia

$$\begin{cases} x + y - 3z = -3 \\ y - 2z = -1 \end{cases}$$

e quindi, per sostituzione "dal basso verso l'alto", si ottiene

$$\begin{cases} x = z - 2 \\ y = 2z - 1 \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni è quindi $S = \{(z-2, 2z-1, z) \ : \ z \in \mathbf{R}\}$.

§11. Applicazione delle matrici a scala al calcolo della matrice inversa

Proposizione 2.19.

Sia A una matrice invertibile di ordine n. È possibile trasformare A in I_n mediante un numero finito di trasformazioni elementari sulle righe. Inoltre

$$(A : I_n) \to (I_n : A^{-1}) \ ,$$

cioè se applichiamo ad I_n, nell'ordine, le stesse trasformazioni elementari che permettono di trasformare A in I_n, queste trasformano I_n in A^{-1}.

Questo procedimento per il calcolo di A^{-1} è noto come **metodo di Gauss-Jordan**.

Esempio. Calcolare l'inversa della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sol.: si verifica facilmente che $|A| = 1$ e perciò A è invertibile. Risulta poi

$$(A : I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\ell_1 \ell_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\ell_2 - 2\ell_1, \ell_3 - \ell_1}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\ell_2 + \ell_3, \ell_1 - \ell_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\ell_1 + \ell_2, -\ell_2}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) = (I_3 : A^{-1}) \, .$$

Quindi

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Osservazione. Le trasformazioni elementari sulle righe, applicate ad una matrice quadrata A, la trasformano in una matrice $\overline{A}$ tale che (in generale) $|\overline{A}| \neq |A|$, ma $|\overline{A}| = 0 \iff |A| = 0$. Pertanto se A non è invertibile (e quindi $|A| = 0$), il metodo precedente non permette di trasformare A in I_n, perchè ad un certo passo si otterrà "in $\overline{A}$" una riga nulla. Per chiarire quanto detto vediamo un esempio.

Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Si ha

$$(A : I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\ell_2 - 3\ell_1, \ell_3 - 4\ell_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\ell_3 - \ell_2}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Si conclude quindi che A non è invertibile poichè $|A| = 0$.

ESERCIZI

1) Date le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ calcolare, se è possibile,

$$a)\ 3A - 4B \ , \ b)\ AB_{-1} \ , \ c)\ BA_{-1} \ , \ d)\ AB \ .$$

2) Verificare che i seguenti insiemi W_1, W_2 e W_3 sono sottospazi di $M_2(\mathbf{R})$ e trovare una base e la dimensione:

a) $W_1 = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbf{R} \}$

b) $W_2 = \{ \begin{pmatrix} 0 & d \\ -d & 0 \end{pmatrix} : d \in \mathbf{R} \}$

c) $W_3 = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \begin{cases} a - b + 2c = 0 \\ a + b + 4c = 0 \\ y + kz = 0 \end{cases} \}$ $b + kc = 0$

d) Verificare inoltre che l'unione delle basi trovate per W_1 e W_2 è una base di $M_2(\mathbf{R})$.

3) a) Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ e sia $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$. Calcolare $f(A)$.

b) Sia $A = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ e sia $f(x) = x^2 - 5x - 3$. Calcolare $f(A)$.

4) Scomporre la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 4 & 5 & 4 \\ 2 & 10 & 2 \end{pmatrix}$ nella somma di una matrice simmetrica A_S e di una emisimmetrica A_E.

5) Calcolare i seguenti determinanti:

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -5 \end{vmatrix}, \quad b) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 5 \end{vmatrix}$$

$$c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}, \quad d) \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & -1 & 8 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

6) Sia $A \in M_n(\mathbf{R})$ e sia $k \in \mathbf{R}$. Trovare la relazione che intercorre tra $|A|$ e $|kA|$.

7) Stabilire se S è una base di $\mathbf{R}^3$ nei seguenti casi:

a) $S = \{(1, 2, -1), (1, -1, 2), (1, 8, -7)\}$

b) $S = \{(1, 2, -1), (1, -1, 2), (0, 1, 1)\}$.

8) Stabilire se le seguenti matrici sono invertibili ed in caso affermativo determinare la matrice inversa:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -10 \end{pmatrix}, \quad b) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad d) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad e) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & -14 & -4 \end{pmatrix}$$

9) Determinare gli eventuali valori di $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ per i quali la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

risulta invertibile e calcolare in tal caso A^{-1}.

10) Determinare il rango delle seguenti matrici:

$$a) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 8 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad b) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 8 \\ 3 & 4 & -7 \end{pmatrix}, \quad c) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$d) \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \\ 4 & 5 & -9 & 0 \end{pmatrix}, \quad e) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & -6 & 3 \end{pmatrix}, \quad g) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

11) Determinare il rango delle seguenti matrici:

$$a) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 8 & 3 & k & 1 \end{pmatrix} \quad (k \in \mathbf{R})$$

$$b) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbf{R})$$

12) Determinare gli eventuali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali le matrici A e $A : B$ hanno lo stesso rango:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -9 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad A : B = \begin{pmatrix} 5 & -9 & -3 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$$

13) Sia $W = \{(x + 2y + z, 3y + 2z, 7x - y - 3z, 5x + 4y + z) \ : \ x, y, z \in \mathbf{R}\} \sqsubseteq \mathbf{R}^4$.

a) Trovare una base e la dimensione di W.

b) Determinare gli eventuali valori di $k \in \mathbf{R}$ per i quali $\mathbf{v} = (k, 0, 0, 1) \in W$.

c) Gli eventuali valori di $k \in \mathbf{R}$ per i quali $\mathbf{v} = (0, 0, 0, k) \in W$.

14) Sia $W = \{(kx + 2y + 3z, x + 3y + 4z, 4x + z) \ : \ x, y, z \in \mathbf{R}\} \sqsubseteq \mathbf{R}^3$ $(k \in \mathbf{R})$.

a) Trovare, al variare di $k \in \mathbf{R}$, una base e la dimensione di W.

b) Determinare gli eventuali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali $\mathbf{v} = (2, 3, \alpha) \in W$.

15) Risolvere i seguenti sistemi lineari:

$$a) \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 5y - 3z = -1 \\ x - y + 2z = 3 \end{cases} , \quad b) \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + z = 3 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases} , \quad c) \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - 3y = 5 \\ -x + 9y - 3z = -7 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x - y + 2z = -3 \\ 2x - y + z = 0 \\ x + y + z = -1 \end{cases} , \quad e) \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x - y + 2z = 4 \\ x - 3y + 3z = 1 \end{cases} , \quad f) \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x - y + 2z = 4 \\ x - 3y + 3z = 0 \end{cases}$$

16) Discutere i seguenti sistemi lineari:

$$a) \begin{cases} x - y + 3z = 2 \\ 2x - 3y + z = \alpha \\ kx + 8z = k \end{cases} , \quad a') \begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \\ kx + 8z = 0 \end{cases} \quad (k, \alpha \in \mathbf{R})$$

$$b) \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - y = 1 \\ kx + y = 6 \end{cases} \quad (k \in \mathbf{R}) \ , \quad c) \begin{cases} 2x + y - z + 2t = 1 \\ 5x + 2y - z + 4t = k \\ kx + y - 2z + 2t = \alpha \end{cases} \quad (k, \alpha \in \mathbf{R})$$

$$d)\ \begin{cases} 5x - 9y - 3z + 2t = 5 \\ x - y + z - 2t = 1 \\ 2x - 3y - t = \alpha \end{cases} \quad (\alpha \in \mathbf{R}), \quad e)\ \begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x - y + z = 0 \\ kx - 4y + 7z = \alpha \end{cases} \quad (k, \alpha \in \mathbf{R})$$

17) Sia

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & \alpha \\ -1 & 1 & k & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (k, \alpha \in \mathbf{R})$$

a) Determinare $r(A)$ al variare di $k, \alpha \in \mathbf{R}$.

b) Discutere il sistema lineare

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

18) Sia $S = \{(1, -2, 0, 3), (-4, 1, 2, -3), (-5, -4, 4, 3)\} \subseteq \mathbf{R}^4$.

Con il metodo della riduzione a gradini

a) Trovare una base e la dimensione di $[S]$.

b) Stabilire se $(0, 0, 0, 1) \in [S]$.

19) Con il metodo della riduzione a gradini stabilire se i seguenti sistemi lineari hanno soluzione, indicandone (eventualmente) il "numero":

$$a)\ \begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ -4y + 2z = -1 \\ 3x + 2y - z = 8 \end{cases}, \quad b)\ \begin{cases} x - 2y + z + 2t = 0 \\ -4y + 2z - t = 0 \\ 3x + 2y - z + 8t = 0 \end{cases}$$

20) Risolvere, con il metodo della riduzione a gradini, i seguenti sistemi lineari:

$$a)\ \begin{cases} 2x+y+z=1 \\ x+z=3 \\ x+2y-z=0 \end{cases},\quad b)\ \begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x-3y=5 \\ -x+9y-3z=-7 \end{cases},\quad c)\ \begin{cases} x-y+2z=-3 \\ 2x-y+z=0 \\ x+y+z=-1 \end{cases}$$

21) Calcolare (se possibile) la matrice inversa di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con il metodo di Gauss-Jordan.

22) Siano $A, B \in M_n(\mathbf{R})$. Dimostrare che la matrice $C = A_{-1}B - B_{-1}A$ è emisimmetrica.

23) Dimostrare che se $A, B \in M_n(\mathbf{R})$, allora $|AB| = |BA|$.

24) Dimostrare che se $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ e $|AB| = 0$, allora $|A| = 0$ oppure $|B| = 0$.

25) Dimostrare che se $A \in M_n(\mathbf{R})$ è invertibile, allora $(A^{-1})_{-1} = (A_{-1})^{-1}$.

26) Dimostrare che se $A \in M_n(\mathbf{R})$, allora l'insieme S delle soluzioni del sistema lineare omogeneo in n incognite $AX = 0$ è un sottospazio di $\mathbf{R}^n$.

27) Sia $AX = B$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite e sia $X_0 \in \mathbf{R}^n$ una sua soluzione.

Dimostrare che $\overline{X} \in \mathbf{R}^n$ è soluzione di $AX = B$ se e solo se esiste un $X_1 \in \mathbf{R}^n$ soluzione di $AX = 0$ tale che $\overline{X} = X_0 + X_1$.

CAPITOLO 3

GEOMETRIA ANALITICA NELLO SPAZIO

In questo capitolo affrontiamo, dal punto di vista della geometria analitica, alcuni concetti di geometria dello spazio, che sono già stati affrontati nell'ambito della geometria sintetica nella scuola secondaria.

Nel seguito consideriamo sempre un sistema di riferimento cartesiano ortonormale $Oxyz$ nello spazio. Abbiamo visto nel capitolo 1 che ogni punto P dello spazio viene rappresentato da una terna di numeri reali (x, y, z) (e viceversa) e si scrive $P(x, y, z)$.

§1. Equazione del piano

Si dimostra che un piano, che indicheremo con π, è rappresentato da una equazione di primo grado in x, y, z (e viceversa), cioè da una equazione del tipo:

$$ax + by + cz + d = 0 \quad (a, b, c, d \in \mathbf{R} \text{ e } a, b, c \text{ non tutti nulli})^1$$

detta **equazione affine del piano**, cioè un punto $P(x_0, y_0, z_0) \in \pi \iff (x_0, y_0, z_0)$ è una soluzione dell'equazione $ax + by + cz + d = 0$.

Osservazione. Se il piano π ha equazione $ax + by + cz + d = 0$ (e si scrive $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$), allora π ha anche equazione $(\alpha a)x + (\alpha b)y + (\alpha c)z + \alpha d = 0$ con $\alpha \in \mathbf{R}, \alpha \neq 0$, ossia i coefficienti a, b, c, d sono individuati a meno di un fattore di proporzionalità non nullo.

Esempio. Le equazioni $2x - 3y + 5z + 7 = 0$, $4x - 6y + 10z + 14 = 0$, $x - \frac{3}{2}y + \frac{5}{2}z + \frac{7}{2} = 0, \ldots$ rappresentano lo stesso piano.

---

[1] Ponendo $A = (a\ b\ c), X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, l'equazione del piano si può scrivere nella forma $AX + d = 0$.

Esempio. Trovare l'equazione del piano π passante per $P_1(1,0,0), P_2(0,1,0), P_3(0,0,1)$.

Sol.: sia $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$ e imponiamo il passaggio per P_1, P_2, P_3. Si ha:

$$\begin{cases} a + d = 0 & \text{(condizione di passaggio per } P_1) \\ b + d = 0 & \text{(condizione di passaggio per } P_2) \\ c + d = 0 & \text{(condizione di passaggio per } P_3) \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} a = -d \\ b = -d \\ c = -d \end{cases} \tag{1}$$

e quindi $\pi \equiv -dx - dy - dz + d = 0$ con $d \neq 0$, ossia $\pi \equiv -d(x + y + z - 1) = 0$ e infine $\pi \equiv x + y + z - 1 = 0$.

Si osservi che alla stessa equazione si giunge più rapidamente ponendo in (1) $d = -1$ e ottenendo quindi $a = b = c = 1$.

Esempio. Determinare le equazioni dei piani passanti per $P_0(x_0, y_0, z_0)$ (tale insieme di piani è detto **stella di piani di centro** P_0).

Sol.: sia $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$. Imponendo il passaggio per P_0 si ha:

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0 \quad \text{e quindi} \quad d = -ax_0 - by_0 - cz_0 \ .$$

Sostituendo tale espressione al posto di d nell'equazione iniziale di π, si ottiene

$$\pi \equiv a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

che è l'equazione della *stella di piani* di centro $P_0(x_0, y_0, z_0)$.

Se, ad esempio, $P_0(1, 2, -3)$ si ottiene $\pi \equiv a(x - 1) + b(y - 2) + c(z + 3) = 0$. Al variare di a, b, c in $\mathbf{R}$ (purchè non tutti nulli), si ottengono le equazioni di tutti e soli i piani che passano per P_0.

Si dimostra la seguente

Proposizione 3.1.

Se $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$ *allora:*

i) $d = 0 \iff \pi$ *passa per* $O(0,0,0)$,

ii) il coefficiente di una incognita è uguale a $0 \iff$ *il piano* π *è parallelo all'asse che porta il nome di quell'incognita.*

Esempio.

- $\pi \equiv 2x + y - 5 = 0$ è parallelo all'asse z perché $c = 0$.
- $\pi \equiv 2x - 5 = 0$ è parallelo all'asse y perché $b = 0$ ed è anche parallelo all'asse z perché $c = 0$; quindi π è parallelo al piano yz.
- $\pi \equiv 3x - z = 0$ è parallelo all'asse y perché $b = 0$ e passa per O perché $d = 0$; quindi π contiene l'asse y.
- $\pi \equiv z = 0$ è parallelo agli assi x e y (perché $a = b = 0$) e passa per l'origine (perché $d = 0$); quindi π è il piano xy.

Analogamente

- $\pi \equiv y = 0$ è il piano xz.
- $\pi \equiv x = 0$ è il piano yz.

Osservazione. Se $\pi \equiv ax+by+cz+d = 0$ e $c \neq 0$ (ossia π **non** è parallelo all'asse z), allora l'equazione di π si può scrivere nella forma $z = -\frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y - \frac{d}{c}$ e posto $-\frac{a}{c} = p, -\frac{b}{c} = q$, $-\frac{d}{c} = r$ si ottiene per π l'equazione $z = px + qy + r$, detta **equazione esplicita** del piano π. π interseca l'asse z nel punto $P(0,0,r)$.

§2. Parallelismo e perpendicolarità tra piani

Si dimostra la seguente

Proposizione 3.2.

Dati i piani $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$ *e* $\pi_1 \equiv a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ *allora*

$$\begin{aligned} \pi \ \ \textit{è parallelo a} \ \ \pi_1 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} \\ \pi \ \ \textit{è perpendicolare a} \ \ \pi_1 \quad &\Longleftrightarrow \quad aa_1 + bb_1 + cc_1 = 0 \ . \end{aligned} \tag{2}$$

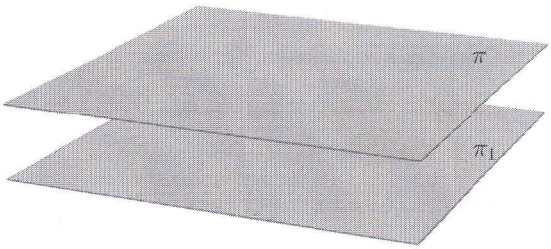


Figura 1: Piani paralleli

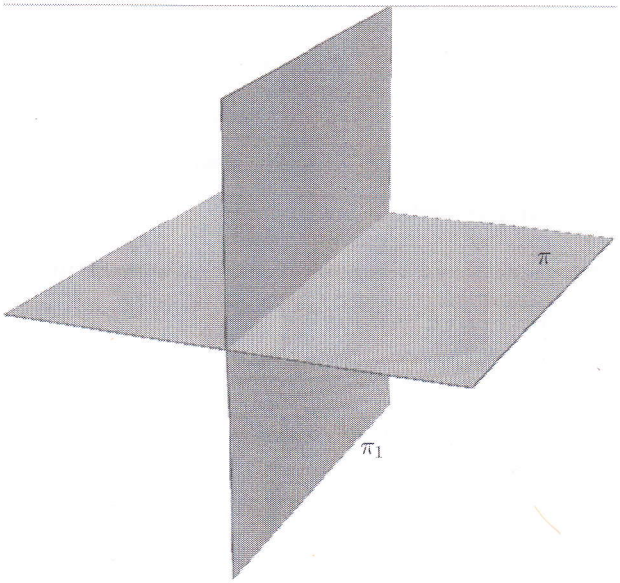


Figura 2: Piani perpendicolari

Osservazione. Nella condizione analitica di parallelismo di π e π_1, se $a_1 = 0$ allora anche $a = 0$, ecc. (più precisamente $\pi \parallel \pi_1 \iff \exists k \neq 0$ tale che $a = ka_1, b = kb_1, c = kc_1$).

N.B. Per indicare che due "enti geometrici" α e β (dove α e β sono rette o piani) sono paralleli scriveremo $\alpha \parallel \beta$, mentre per indicare che sono perpendicolari scriveremo $\alpha \perp \beta$.

Dalla proposizione 3.2 segue che:

il piano passante per $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e parallelo a $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$ ha equazione

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \quad . \tag{3}$$

Esistono invece *infiniti piani passanti per P_0 e perpendicolari a π.*

Esempio.

a) I piani $\pi \equiv x - 3y + 5z + 1 = 0$ e $\pi_1 \equiv 2x - 6y + 10z - 3 = 0$ sono paralleli perché $\frac{1}{2} = \frac{-3}{-6} = \frac{5}{10}$.

b) I piani $\pi \equiv x - 3z + 5 = 0$ e $\pi_1 \equiv 2x - 6z + 7 = 0$ sono paralleli perché $b = b_1 = 0$ e $\frac{a}{a_1} = \frac{c}{c_1} = \frac{1}{2}$.

c) I piani $\pi \equiv x - 2y + 3z + 5 = 0$ e $\pi_1 \equiv x - y - z + 8 = 0$ sono perpendicolari perché $1 \cdot 1 + (-2)(-1) + 3(-1) = 0$

d) I piani $\pi \equiv x - z = 0$ e $\pi_1 \equiv x + z = 0$ sono perpendicolari.

e) I piani $\pi \equiv x - 5 = 0$ e $\pi_1 \equiv z + 3 = 0$ sono perpendicolari.

f) I piani $\pi \equiv x + 3y - z = 0$ e $\pi_1 \equiv 3x + y + 4 = 0$ non sono nè paralleli nè perpendicolari.

Esempio. Determinare l'equazione del piano (o dei piani) π passante per $P_0(1, 2, -1)$ e

a) parallelo a $\pi_1 \equiv 3x - 5y + z - 8 = 0$;

b) perpendicolare a $\pi_2 \equiv x - y + 3z + 7 = 0$;

c) perpendicolare a $\pi_3 \equiv x - y + 4z + 1 = 0$ e $\pi_4 \equiv 2x + y - z + 8 = 0$;

d) parallelo al piano xy;

e) parallelo al piano xz;

f) parallelo al piano yz.

Sol.: il piano π passa per $P_0(1,2,-1)$, quindi $\pi \equiv a(x-1)+b(y-2)+c(z+1)=0$ (stella di piani di centro P_0).

a) $\pi \parallel \pi_1 \iff \dfrac{a}{3}=\dfrac{b}{-5}=\dfrac{c}{1}$, quindi possiamo prendere in particolare $a=3, b=-5, c=1$ e perciò $\pi \equiv 3(x-1)-5(y-2)+1(z+1)=0$ ossia $\pi \equiv 3x-5y+z+8=0$.

Più semplicemente possiamo ottenere il risultato applicando la formula (3).

b) $\pi \perp \pi_2 \iff a\cdot 1+b(-1)+c\cdot 3=0 \iff a=b-3c$, quindi

$$\pi \equiv (b-3c)(x-1)+b(y-2)+c(z+1)=0 \quad \text{o anche} \quad \pi \equiv b(x+y-3)+c(-3x+z+4)=0\,.$$

In questo caso si ottengono infiniti piani.

c) $\pi \perp \pi_3 \iff a-b+4c=0$ e $\pi \perp \pi_4 \iff 2a+b-c=0$. Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} a-b+4c=0 \\ 2a+b-c=0 \end{cases} \quad \text{otteniamo} \quad \begin{cases} a=-c \\ b=3c \end{cases} \quad \text{da cui, in particolare, } a=1, b=-3, c=-1.$$

Perciò $\pi \equiv (x-1)-3(y-2)-1(z+1)=0$ ossia $\pi \equiv x-3y-z+4=0$.

d) π è parallelo al piano xy (che ha equazione $z=0$) $\iff a=0$ e $b=0$, quindi $\pi \equiv z+1=0$.

Analogamente

e) $\pi \equiv y-2=0$.

f) $\pi \equiv x-1=0$.

§3. Equazioni della retta

• Siano $\pi \equiv ax+by+cz+d=0$ e $\pi_1 \equiv a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$, dove π e π_1 sono piani tra loro non paralleli. Se con r indichiamo la retta $\pi \cap \pi_1$ allora si scrive:

$$r \equiv \begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \end{cases} \qquad \textbf{(equazioni della retta } r\textbf{)}\,.$$

N.B. Una retta (nello spazio) viene rappresentata dall'intersezione di due (qualunque) piani distinti che la contengono (vedi figura 3).

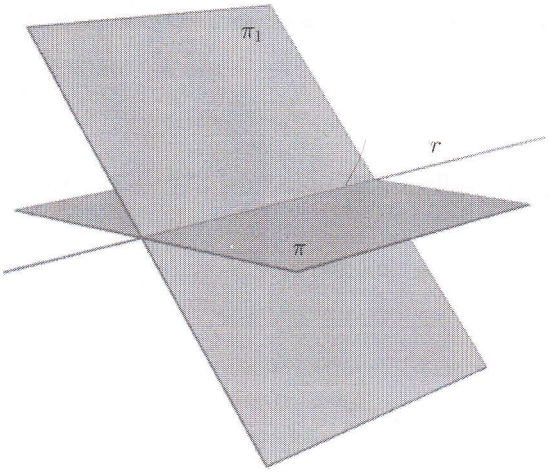


Figura 3: Retta intersezione di due piani

Esempio. L'asse z è rappresentato da $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ ma anche, ad esempio, da $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ 2x - 5y = 0 \end{cases}$.
($x - 3y = 0$ e $2x - 5y = 0$ sono le equazioni di due piani che contengono l'asse z in quanto $c = d = 0$).

L'asse y è rappresentato da $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ ma anche, ad esempio, da $\begin{cases} x - 3z = 0 \\ 2x + 6z = 0 \end{cases}$.
($x - 3z = 0$ e $2x + 6z = 0$ sono le equazioni di due piani che contengono l'asse y in quanto $b = d = 0$).

L'asse x è rappresentato da $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ ma anche, ad esempio, da $\begin{cases} 2y + z = 0 \\ y - 5z = 0 \end{cases}$. ($2y+z = 0$ e $y - 5z = 0$ sono le equazioni di due piani che contengono l'asse x in quanto $a = d = 0$).

• La retta passante per $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$ e non parallela ad alcun piano coordinato (quindi $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$, $z_1 \neq z_2$) ha equazioni:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \tag{4}$$

(**equazioni frazionarie della retta** P_1P_2.)

• La retta passante per $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e parallela al vettore $\mathbf{v} = (\ell, m, n)$ (con $\ell \neq 0,\ m \neq 0,\ n \neq 0$) ha equazione

$$\frac{x - x_1}{\ell} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n} \quad . \tag{5}$$

(**equazioni frazionarie della retta passante per P_1 e $\parallel \mathbf{v}$**).

Esempio. Determinare le equazioni della retta r passante per:

a) $P_1(1, 2, 3)$ e $P_2(2, 3, 4)$;

b) $P_1(1, 2, 3)$ e $P_2(1, 3, 4)$;

c) $P_1(1, 2, 3)$ e $P_2(1, 2, 4)$;

d) $P_1(1, 2, -1)$ e $\parallel \mathbf{v} = (2, -1, 1)$;

e) $P_1(1, 2, 3)$ e $\parallel \mathbf{v} = (1, 2, 0)$;

f) $P_1(1, 2, -4)$ e $\parallel \mathbf{v} = (0, 3, 0)$;

g) $P_0(x_0, y_0, z_0)$.

Sol.: a) In questo caso $x_2 - x_1 \neq 0,\ y_2 - y_1 \neq 0,\ z_2 - z_1 \neq 0$ e quindi applicando la (4) si ottiene

$$r \equiv \frac{x - 1}{2 - 1} = \frac{y - 2}{3 - 2} = \frac{z - 3}{4 - 3}$$

ossia

$$r \equiv x - 1 = y - 2 = z - 3 \ \text{ e ancora } \ r \equiv \begin{cases} x - 1 = z - 3 \\ y - 2 = z - 3 \end{cases} \ \text{ ed infine } \ r \equiv \begin{cases} x = z - 2 \\ y = z - 1 \end{cases} .$$

Queste ultime sono dette le *equazioni ridotte* di r, cioè equazioni nelle quali due incognite sono espresse in funzione della terza e queste rappresentano due particolari piani contenenti r, uno parallelo all'asse y e l'altro parallelo all'asse x.

• In generale, le **equazioni ridotte di una retta** sono di una delle seguenti forme:

$$\begin{cases} x = gz + p \\ y = hz + q \end{cases} , \quad \begin{cases} x = g'y + p' \\ z = h'y + q' \end{cases} , \quad \begin{cases} y = g''x + p'' \\ z = h''x + q'' \end{cases} .$$

b) Essendo $x_1 = x_2 = 1$, un piano che contiene r è quello di equazione $x = 1$. Un altro piano contenente r si ottiene da $\dfrac{y-2}{3-2} = \dfrac{z-3}{4-3}$ ossia $y = z - 1$. Quindi

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = z - 1 \end{cases}$$

(equazioni ridotte di r, che in questo caso risulta parallela al piano yz, in quanto contenuta nel piano di equazione $x - 1 = 0$ che è parallelo al piano yz).

Osservazione. Impropriamente "applicando la formula" (4) si ottiene

$$\frac{x-1}{1-1} = \frac{y-2}{3-2} = \frac{z-3}{4-3}$$

e convenendo di annullare il numeratore di una frazione qualora sia nullo il relativo denominatore, si ottiene $\begin{cases} x - 1 = 0 \\ y - 2 = z - 3 \end{cases}$, ossia il sistema trovato in precedenza.

c) Essendo $x_1 = x_2 = 1$ e $y_1 = y_2 = 2$, due piani contenenti r hanno equazione rispettivamente $x = 1$ e $y = 2$. Quindi

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

(equazioni ridotte di r, che in questo caso risulta parallela all'asse z, in quanto i suoi punti hanno coordinate del tipo $(1, 2, \alpha), \alpha \in \mathbf{R}$).

d) In questo caso $\ell \neq 0, m \neq 0, n \neq 0$ e quindi applicando la (5) si ottiene $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z+1}{1}$ ossia

$$r \equiv \begin{cases} x = 2z + 3 \\ y = -z + 1 \end{cases}.$$

e) Essendo $n = 0$ il vettore $\mathbf{v}$ è parallelo al piano xy e quindi lo è anche la retta r. Pertanto tutti i punti di r hanno z costante e poiché $P \in r$ (e P ha quota 3), tutti i punti di r appartengono al piano di equazione $z = 3$.

Un altro piano contenente r si ottiene da $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{2}$, ossia $y = 2x$. Quindi

$$r \equiv \begin{cases} y = 2x \\ z = 3 \end{cases} .$$

<u>Osservazione</u>. Impropriamente "applicando la formula" (5) si ottiene

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{0}$$

e utilizzando la convenzione dell'osservazione precedente, si ottiene $\begin{cases} \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{2} \\ z-3=0 \end{cases}$,

ossia il sistema trovato in precedenza.

f) Vedi e). Impropriamente: $r \equiv \dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z+4}{0}$ e quindi

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ z = -4 \end{cases} .$$

g) $r \equiv \dfrac{x-x_0}{\ell} = \dfrac{y-y_0}{m} = \dfrac{z-z_0}{n}$ (stella di rette di centro P_0). Al variare di ℓ, m, n si ottengono le equazioni di "tutte" le rette passanti per P_0. Se ad esempio è $P_0(2,-3,4)$ allora

$$r \equiv \frac{x-2}{\ell} = \frac{y+3}{m} = \frac{z-4}{n} .$$

Si noti che grazie alle convenzioni introdotte negli esempi e), f) è sufficiente che sia $\mathbf{v} = (\ell, m, n) \neq (0,0,0)$.

• Se $r \equiv \begin{cases} x = gz + p \\ y = hz + q \end{cases}$, allora possiamo scrivere in modo equivalente

$$r \equiv \begin{cases} x = gt + p \\ y = ht + q \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R}) .$$

Queste ultime si dicono **equazioni parametriche** della retta r.

Ad esempio se

$$r \equiv \begin{cases} x = 3z + 5 \\ y = 7z - 4 \end{cases}$$

allora

$$r \equiv \begin{cases} x = 3t + 5 \\ y = 7t - 4 \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R}) .$$

Al variare di $t \in \mathbf{R}$ si ottengono le coordinate di tutti e soli i punti di r; pertanto il "generico" punto di r è $P_r(3t + 5, 7t - 4, t)$.

Vediamo ora come trovare le equazioni parametriche delle retta r passante per due punti distinti $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$. Le equazioni frazionarie di r sono

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

e uguagliando tali rapporti ad un parametro $t \in \mathbf{R}$ si ottiene:

$$\begin{cases} x = (x_2 - x_1)t + x_1 \\ y = (y_2 - y_1)t + y_1 \\ z = (z_2 - z_1)t + z_1 \end{cases} \quad \textbf{(equazioni parametriche della retta } P_1P_2\textbf{)}$$

Introduciamo ora un nuovo concetto relativo alle rette, che permetterà di tradurre in termini analitici i concetti geometrici di perpendicolarità e di parallelismo tra rette e tra rette e piani.

Definizione. Si dicono **parametri direttori** (p.d. in breve) di una retta r le coordinate di un vettore non nullo $\mathbf{v} = (\ell, m, n)$ parallelo ad r.

Osservazione. I parametri direttori di una retta sono definiti a meno di un fattore di proporzionalità non nullo, perché se $\mathbf{v} = (\ell, m, n)$ è parallelo a r, allora anche $\mathbf{v}' = (\alpha\ell, \alpha m, \alpha n)$ (con $\alpha \neq 0$) è parallelo a r.

• Se la retta r passa per i due punti distinti $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$, allora r è parallela al vettore $\mathbf{v} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ e quindi i suoi parametri direttori sono $x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$.

Esempio. La retta passante per i punti $P_1(2, 3, -2)$ e $P_2(7, 10, -4)$ ha p.d. $\ell = 7 - 2 = 5, m = 10 - 3 = 7, n = -4 + 2 = -2$, cioè $5, 7, -2$.

• Poiché nelle equazioni frazionarie di una retta i denominatori sono le differenze delle coordinate di due punti di tale retta, è immediato che i p.d. della retta

$$\frac{x - x_1}{\ell} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$$

sono ℓ, m, n.

Esempio. La retta $r \equiv \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{4}$ ha p.d. $3, 2, 4$.

• Se la retta r è rappresentata da equazioni ridotte, ad esempio, $r \equiv \begin{cases} x = 2z - 3 \\ y = 4z - 1 \end{cases}$, allora si può scrivere, ricavando z dalle due equazioni,

$$r \equiv \frac{x+3}{2} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-0}{1}$$

e quindi r ha parametri direttori $2, 4, 1$.

Ragionando come nell'esempio precedente, si ha che la retta:

$$r \equiv \begin{cases} x = gz + p \\ y = hz + q \end{cases} \quad \text{ha p.d. } g, h, 1$$

$$r \equiv \begin{cases} x = g'y + p' \\ z = h'y + q' \end{cases} \quad \text{ha p.d. } g', 1, h'$$

$$r \equiv \begin{cases} y = g''x + p'' \\ z = h''x + q'' \end{cases} \quad \text{ha p.d. } 1, g'', h''$$

• In generale si dimostra che i parametri direttori della retta

$$r \equiv \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \end{cases}$$

sono:

$$\ell = \begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} \quad ; \quad m = -\begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} \quad ; \quad n = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} .$$

N.B. ℓ, m, n sono ordinatamente i determinanti dei minori di ordine due della matrice $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$, presi a segno alterno.

Esempio. Trovare i parametri direttori della retta $r \equiv \begin{cases} 2x - 3y + z - 1 = 0 \\ x - 4y + 7z - 8 = 0 \end{cases}$

Sol.: da $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -4 & 7 \end{pmatrix}$ si ottiene:

$$\ell = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} = -17 \quad ; \quad m = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = -13 \quad ; \quad n = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -5 .$$

Quindi i p.d. di r sono $-17, -13, -5$ oppure più semplicemente $17, 13, 5$.

§4. Parallelismo e perpendicolarità tra rette

Si dimostra la seguente

Proposizione 3.3.

Se ℓ, m, n ed ℓ_1, m_1, n_1 sono i p.d. rispettivamente delle rette r ed r_1, allora:

$$r \parallel r_1 \iff \frac{\ell}{\ell_1} = \frac{m}{m_1} = \frac{n}{n_1}$$

$$r \perp r_1 \iff \ell\ell_1 + mm_1 + nn_1 = 0 .$$

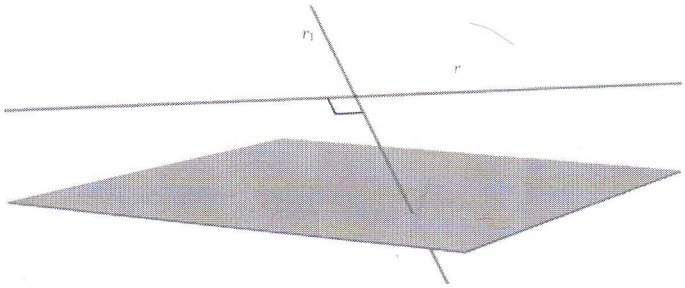


Figura 4: Rette perpendicolari incidenti

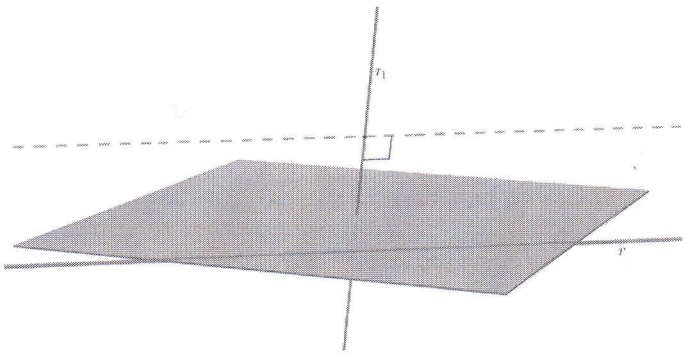


Figura 5: Rette perpendicolari non incidenti

Dalla proposizione segue che:

la retta passante per $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e parallela alla retta r di p.d. ℓ, m, n ha equazioni

$$\frac{x - x_0}{\ell} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \,. \tag{6}$$

Esistono invece *infinite rette passanti per P_0 e perpendicolari alla retta r.*

<u>Esempio</u>. Trovare le equazioni della retta (o delle rette) r:

a) passante per $P(1, -1, 4)$ e parallela alla retta $r_1 \equiv \begin{cases} x = 2z - 1 \\ y = 3z - 4 \end{cases}$,

b) passante per $P(1, 4, -5)$ e parallela alla retta $r_2 \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-1}{5} = \dfrac{z+4}{-2}$,

c) passante per $P(1,2,3)$ e parallela alla retta $r_3 \equiv \begin{cases} x-y+2z-1=0 \\ 2x-y+3z+2=0 \end{cases}$,

d) passante per $P(1,2,-4)$ e perpendicolare alla retta $r_4 \equiv \begin{cases} x=-3z+5 \\ y=2z+1 \end{cases}$,

e) passante per $P(1,2,-4)$ e perpendicolare alle rette $r_5 \equiv \begin{cases} x=-3z+5 \\ y=2z+1 \end{cases}$ e

$r_6 \equiv \begin{cases} x=z+2 \\ y=4z+7 \end{cases}$.

Sol.: a) I parametri direttori di r_1 sono $\ell=2, m=3, n=1$ e quindi, applicando la (6),

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-4}{1},$$

ossia in forma ridotta

$$r \equiv \begin{cases} x=2z-7 \\ y=3z-13 \end{cases}$$

b) I parametri direttori di r_2 sono $\ell=3, m=5, n=-2$ e quindi

$$r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y-4}{5} = \frac{z+5}{-2}.$$

c) I parametri direttori di r_3 sono i determinanti, presi a segno alterno, dei minori di ordine due della matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ e sono quindi

$$\ell = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -1, \quad m = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1, \quad n = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

e perciò

$$r \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1}$$

ossia

$$r \equiv \begin{cases} x=-z+4 \\ y=z-1 \end{cases}$$

d) r passa per P, quindi $r \equiv \dfrac{x-1}{\ell} = \dfrac{y-2}{m} = \dfrac{z+4}{n}$ (stella di rette di centro P), dove ℓ, m, n sono i p.d. di r.

I parametri direttori di r_4 sono $-3, 2, 1$, quindi risulta

$$r \perp r_4 \iff -3\ell + 2m + n = 0 \iff n = 3\ell - 2m$$

e perciò

$$r \equiv \frac{x-1}{\ell} = \frac{y-2}{m} = \frac{z+4}{3\ell - 2m}\,.$$

Si ottengono pertanto infinite rette.

e) r passa per P, quindi $r \equiv \dfrac{x-1}{\ell} = \dfrac{y-2}{m} = \dfrac{z+4}{n}$ (stella di rette di centro P), dove ℓ, m, n sono i p.d. di r.

I p.d. di r_5 sono $-3, 2, 1$ e quelli di r_6 sono $1, 4, 1$; perciò, imponendo le condizioni di perpendicolarità, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} -3\ell + 2m + n = 0 & (r \perp r_5) \\ \ell + 4m + n = 0 & (r \perp r_6) \end{cases}$$

che porta a

$$\begin{cases} m = -2\ell \\ n = 7\ell \end{cases}$$

e per $\ell = 1$ si ha $m = -2, n = 7$. Quindi

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+4}{7}$$

ossia

$$r \equiv \begin{cases} y = -2x + 4 \\ z = 7x - 11 \end{cases}$$

§5. Parallelismo e perpendicolarità tra retta e piano

Si dimostra la seguente

Proposizione 3.4.

Se ℓ, m, n sono i p.d. della retta r e π è il piano di equazione $ax + by + cz + d = 0$, allora

$$r \parallel \pi \iff a\ell + bm + cn = 0 \quad e \quad r \perp \pi \iff \frac{a}{\ell} = \frac{b}{m} = \frac{c}{n} \ .$$

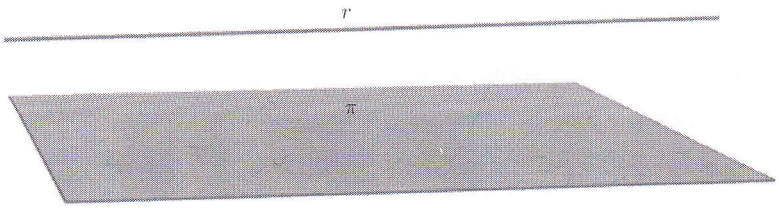


Figura 6: Retta parallela a un piano

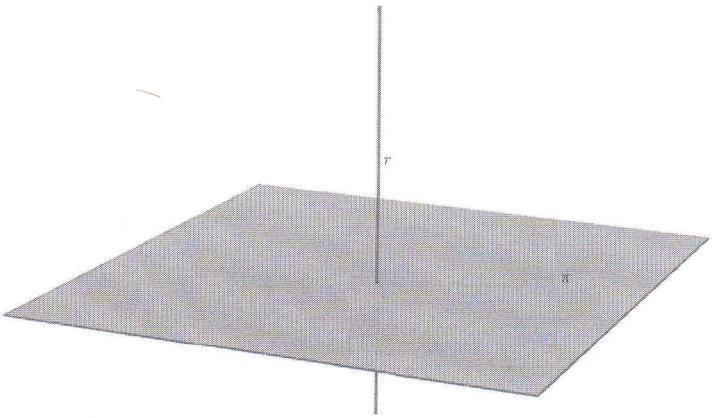


Figura 7: Retta perpendicolare a un piano

Dalla proposizione segue che:

• *la retta passante per* $P_0(x_0, y_0, z_0)$ *e perpendicolare al piano* $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$ *ha equazioni*

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \tag{7}$$

• *il piano passante per* $P_0(x_0, y_0, z_0)$ *e perpendicolare alla retta* r *di p.d.* ℓ, m, n *ha equazione*

$$\ell(x - x_0) + m(y - y_0) + n(z - z_0) = 0 \ . \tag{8}$$

Esistono invece:

infinite rette passanti per P_0 *e parallele a* π;

infiniti piani passanti per P_0 *e paralleli a* r.

Esempio. Trovare:

a) le equazioni della retta r passante per $P(1, 2, 3)$ e perpendicolare al piano $\pi \equiv 2x - 3y + z + 1 = 0$,

b) l'equazione del piano π passante per $P(2, -1, 4)$ e perpendicolare alla retta $r \equiv \begin{cases} x = 3z - 1 \\ y = 2z + 4 \end{cases}$,

c) l'equazione del piano π passante per $P(1, -3, 2)$, parallelo a $r \equiv \begin{cases} x = -2y + 3 \\ z = 3y - 7 \end{cases}$ e perpendicolare a $\pi_1 \equiv x - y + 2z + 3 = 0$,

d) l'equazione della retta r_1 passante per $P(1, -3, 2)$, perpendicolare alla retta $r \equiv \begin{cases} x = -2y + 3 \\ z = 3y - 7 \end{cases}$ e parallela a $\pi_1 \equiv x - y + 2z + 3 = 0$.

Sol.: a) Applicando la (7) si ha $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z-3}{1}$ e quindi

$$r \equiv \begin{cases} x = 2z - 5 \\ y = -3z + 11 \end{cases} .$$

b) I p.d. di r sono $3, 2, 1$. Applicando la (8) si ha $\pi \equiv 3(x - 2) + 2(y + 1) + 1(z - 4) = 0$ ossia

$$\pi \equiv 3x + 2y + z - 8 = 0 \ .$$

c) $P \in \pi$ e quindi $\pi \equiv a(x-1)+b(y+3)+c(z-2)=0$ (stella di piani di centro P). I p.d. di r sono $-2,1,3$. Applicando le relative formule si ottiene il sistema

$$\begin{cases} -2a+b+3c=0 & (\pi \parallel r) \\ a-b+2c=0 & (\pi \perp \pi_1) \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} a=5c \\ b=7c \end{cases}$$

e per $c=1$ si ha $a=5, b=7$. Quindi sostituendo nell'equazione della stella di piani si ha

$$\pi \equiv 5(x-1)+7(y+3)+1(z-2)=0$$

ossia

$$\pi \equiv 5x+7y+z+14=0\ .$$

d) $P \in r_1$ e quindi $r_1 \equiv \dfrac{x-1}{\ell}=\dfrac{y+3}{m}=\dfrac{z-2}{n}$ (stella di rette di centro P).
I p.d. di r sono $-2,1,3$. Applicando le relative formule si ottiene il sistema

$$\begin{cases} -2\ell+m+3n=0 & (r_1 \perp r) \\ \ell-m+2n=0 & (r_1 \parallel \pi_1) \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} \ell=5n \\ m=7n \end{cases}$$

e per $n=1$ si ha $\ell=5, m=7$. Quindi sostituendo nell'equazione della stella di rette si ha

$$r_1 \equiv \frac{x-1}{5}=\frac{y+3}{7}=\frac{z-2}{1}$$

ossia

$$r_1 \equiv \begin{cases} x=5z-9 \\ y=7z-17 \end{cases}$$

§6. Fascio di piani

Si dimostra la seguente

Proposizione 3.5.

Il fascio proprio di piani di asse la retta $r \equiv \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \ (\pi) \\ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \ (\pi') \end{cases}$ *ha equazione*

$$\alpha(ax + by + cz + d) + \beta(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) = 0 \qquad (9)$$

dove $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ *non sono entrambi nulli, ossia* $\alpha^2 + \beta^2 > 0$.

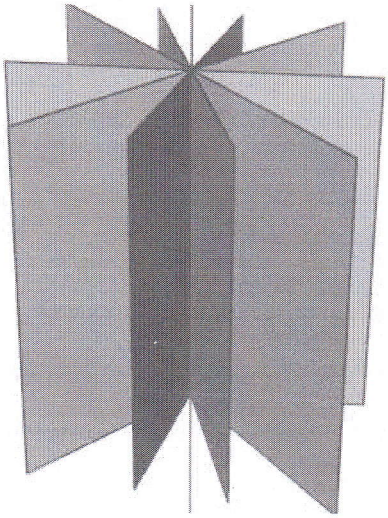


Figura 8: Fascio proprio di piani

Osservazione. Al variare di $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, con α, β non entrambi nulli, si ottengono le equazioni di tutti e soli i piani che contengono la retta r. In particolare, con $\alpha = 0$ e $\beta \neq 0$ si ottiene una (la) equazione del piano π', mentre con $\alpha \neq 0$ e $\beta = 0$ si ottiene una (la) equazione del piano π.

Osservazione. Se $\alpha \neq 0$, ponendo $\dfrac{\beta}{\alpha} = \lambda$, l'equazione (9) si puoò scrivere nella forma $(ax + by + cz + d) + \lambda(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) = 0$.

Quest'ultima equazione, al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$, rappresenta tutti i piani contenenti la retta r *escluso* il piano π' e anche tale equazione, anche se impropriamente, viene detta equazione del fascio di asse r.

Esempio. Determinare l'equazione del piano π_1 contenente la retta

$$r \equiv \begin{cases} x = z + 1 \ (\pi) \\ y = 2z + 1 \ (\pi') \end{cases}$$

e

a) passante per $O(0,0,0)$

b) parallelo alla retta $r_1 \equiv \begin{cases} x = 2z + 3 \\ y = z + 5 \end{cases}$

c) parallelo alla retta $r_2 \equiv \begin{cases} x = 3z - 5 \\ y = 2z + 7 \end{cases}$

d) parallelo alla retta $r_3 \equiv \begin{cases} x = z + 3 \\ y = 3z - 5 \end{cases}$

e) parallelo alla retta $r_4 \equiv \begin{cases} x = z + 4 \\ y = 2z + 7 \end{cases}$

Sol.: il fascio di piani di asse r ha equazione:

$$\pi_1 \equiv x - z - 1 + \lambda(y - 2z - 1) = 0 \quad \text{ossia} \quad \pi_1 \equiv x + \lambda y - (1 + 2\lambda)z - 1 - \lambda = 0 \ . \quad (10)$$

a) Il passaggio per $O(0,0,0)$ porta a $-1 - \lambda = 0$ ossia $\lambda = -1$ e quindi, sostituendo in (10), si ottiene $\pi_1 \equiv x - y + z = 0$.

b) I p.d. di r_1 sono $2, 1, 1$ e quindi imponendo la condizione di parallelismo tra r_1 e π_1 otteniamo $2 \cdot 1 + 1 \cdot \lambda - 1 - 2\lambda = 0$ da cui $\lambda = 1$ e, sostituendo in (10), si ottiene $\pi_1 \equiv x + y - 3z - 2 = 0$.

c) I p.d. di r_2 sono $3, 2, 1$ e quindi imponendo la condizione di parallelismo tra r_2 e π_1 otteniamo $3 + 2\lambda - 1 - 2\lambda = 0$ da cui $2 = 0$: impossibile. Il piano richiesto è quindi $\pi_1 \equiv y - 2z - 1 = 0$ (cioè il piano che non corrisponde ad alcun valore di λ, ossia π'), come si verifica direttamente.

d) I p.d. di r_3 sono $1, 3, 1$ e quindi imponendo la condizione di parallelismo tra r_3 e π_1 otteniamo $1+3\lambda-1-2\lambda = 0$ da cui $\lambda = 0$ e, sostituendo in (10), si ottiene $\pi_1 \equiv x-z-1 = 0$ (ossia $\pi_1 \equiv \pi$).

e) I p.d. di r_4 sono $1, 2, 1$ e quindi imponendo la condizione di parallelismo tra r_4 e π_1 otteniamo $1 + 2\lambda - 1 - 2\lambda = 0$ da cui $0 \cdot \lambda = 0$: identità (cioè vera per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$), ossia tutti i piani del fascio sono paralleli a r_4 (questo perché la retta r, asse del fascio, e r_4 sono rette tra loro parallele).

Osservazione. A titolo di esempio risolviamo i punti a),c) utilizzando l'equazione del fascio con i due parametri α, β.

Il fascio di piani di asse r ha allora equazione $\alpha(x - z - 1) + \beta(y - 2z - 1) = 0$,ossia, svolgendo e ordinando, $\alpha x + \beta y - (\alpha + 2\beta)z - \alpha - \beta = 0$.

a) Procedendo come nel punto a) dell'esempio precedente, si ottiene l'equazione $-\alpha - \beta = 0$, ossia $\alpha = -\beta$. Una soluzione (con α, β non entrambi nulli) di tale equazione è $\alpha = 1, \beta = -1$, cui corrisponde il piano di equazione $x - y + z = 0$.

c) Ragionando come nel punto c) dell'esempio precedente, si ottiene l'equazione $3\alpha+2\beta-\alpha - 2\beta = 0$, ossia $2\alpha = 0$. Una soluzione (con α, β non entrambi nulli) di tale equazione è $\alpha = 0, \beta = 1$, cui corrisponde il piano di equazione $y - 2z - 1 = 0$.

Osservazione. Il *fascio improprio di piani* paralleli al piano $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$ ha equazione $ax + by + cz + k = 0$ ($k \in \mathbf{R}$). Al variare di $k \in \mathbf{R}$ si ottengono le equazioni di tutti e soli i piani paralleli a π.

Se, ad esempio, $\pi \equiv 2x + 3y + 5z + 7 = 0$, allora l'equazione $2x + 3y + 5z + k = 0$, al variare di $k \in \mathbf{R}$, rappresenta tutti e soli i piani paralleli a π.

Osservazione. Come è noto, se due rette sono parallele si dice che hanno la stessa **direzione**. In analogia, se due piani sono paralleli si dice che hanno la stessa **giacitura**.

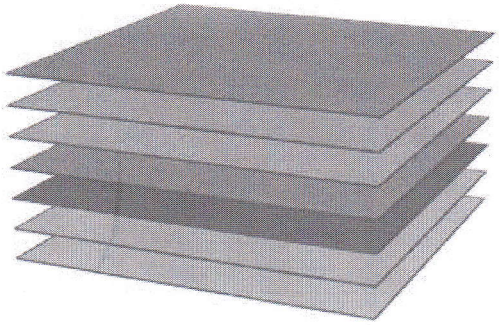


Figura 9: Fascio improprio di piani

§7. Distanza tra due punti. Punto medio di un segmento. Distanza di un punto da un piano

Si dimostra la seguente

Proposizione 3.6.

Dati i punti $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$ *e il piano* $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$ *allora:*

a) la distanza fra i due punti P_1 *e* P_2 *è data da*

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

b) il punto medio M *del segmento* P_1P_2 *è*

$$M\Big(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\Big)$$

c) la distanza del punto P_1 *dal piano* π *è data da*

$$d(P_1, \pi) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} .$$

Esempio 1. Siano dati i punti $P_1(3, -1, 2), P_2(1, 2, -4)$ e il piano $\pi \equiv x - 2y + 3z - 25 = 0$. Trovare:

Università di Ferrara
BIBLIOTECA
Biblioteca Scientifico-Tecnologica

a) la distanza tra P_1 e P_2,

b) il punto medio M di P_1P_2,

c) la distanza di P_1 dal piano π.

Sol.: usando le relative formule si ha:

a) $d(P_1, P_2) = \sqrt{(3-1)^2 + (-1-2)^2 + (2+4)^2} = \sqrt{4+9+36} = \sqrt{49}$ e quindi $d(P_1, P_2) = 7$.

b) $M\left(\frac{3+1}{2}, \frac{-1+2}{2}, \frac{2-4}{2}\right)$ e quindi $M(2, 1/2, -1)$.

c) $d(P_1, \pi) = \frac{|3+2+6-25|}{\sqrt{1+4+9}} = \frac{|-14|}{\sqrt{14}} = \frac{14}{\sqrt{14}}$ e quindi $d(P_1, \pi) = \sqrt{14}$.

Esempio 2. Data la retta

$$r \equiv \begin{cases} x = -2z + 1 \\ y = -z + 3 \end{cases}$$

determinare gli eventuali punti di r che distano $\sqrt{10}$ dal punto $Q(1, 2, 3)$.

Sol.: il generico punto di r è $P_r(-2t+1, -t+3, t)$ (vedi equazioni parametriche della retta). Quindi

$$d(P_r, Q) = \sqrt{(-2t+1-1)^2 + (-t+3-2)^2 + (t-3)^2} = \sqrt{6t^2 - 8t + 10}$$

e quindi

$$d(P_r, Q) = \sqrt{10} \iff \sqrt{6t^2 - 8t + 10} = \sqrt{10} \iff 6t^2 - 8t = 0 \iff t_1 = 0, t_2 = 4/3 \ .$$

I punti richiesti sono quindi due e precisamente

$$P_1(1, 3, 0) \ , \quad P_2(-5/3, 5/3, 4/3) \ .$$

§8. Distanza di un punto da una retta

Descriviamo ora, con un esempio, un procedimento per determinare la *distanza fra un punto P e una retta r* e le equazioni della *retta passante per P, perpendicolare e incidente r*.

Esempio. Siano dati il punto $P(0,-1,0)$ e la retta $r \equiv \begin{cases} x = 2z - 1 \\ y = z + 1 \end{cases}$. Trovare:

a) $d(P,r)$ (distanza di P dalla retta r),

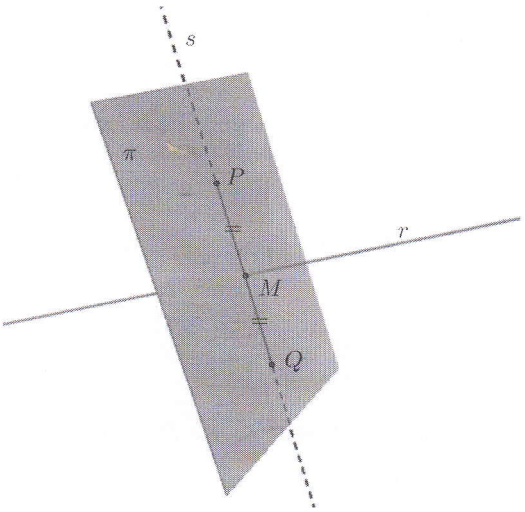


Figura 10: Distanza del punto P dalla retta r

b) le equazioni della retta s passante per P, perpendicolare e incidente r,

c) il punto Q simmetrico di P rispetto ad r.

Sol.: a) Il procedimento consiste nel trovare prima il piano π passante per P e perpendicolare a r. Indicato poi con M il punto di intersezione tra π e r, la distanza richiesta $d(P,r)$ è uguale a $d(P,M)$.

Risolviamo ora l'esercizio.

I p.d. di r sono $2,1,1$, quindi

$$\pi \equiv 2(x-0) + 1(y+1) + 1(z-0) = 0 \quad \text{ossia} \quad \pi \equiv 2x + y + z + 1 = 0\,.$$

Il punto M si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 2x + y + z + 1 = 0 \\ x = 2z - 1 \\ y = z + 1 \end{cases} \quad \text{che ha soluzione} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Pertanto

$$M(-1, 1, 0) \ .$$

Si ha quindi

$$d(P, r) = d(P, M) = \sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2}$$

e perciò

$$d(P, r) = \sqrt{5} \ .$$

b) La retta s non è altro che la retta passante per P ed M (vedi a)). Quindi

$$s \equiv \frac{x+1}{0+1} = \frac{y-1}{-1-1} = \frac{z-0}{0-0}$$

e quindi

$$s \equiv \begin{cases} y = -2x - 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

c) Il punto $Q(\alpha, \beta, \gamma)$ è da determinare in modo che $M(-1, 1, 0)$ sia il punto medio del segmento PQ (vedi a)). Ricordando che $P(0, -1, 0)$, si ha

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha + 0}{2} = -1 \\ \\ \dfrac{\beta - 1}{2} = 1 \\ \\ \dfrac{\gamma + 0}{2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = 3 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Perciò $Q(-2, 3, 0)$.

Osservazione. Il simmetrico Q di un punto P rispetto ad un piano π si può determinare con un procedimento analogo a quello descritto nel punto c) dell'esempio precedente. Precisamente si determina *la retta* r passante per P e perpendicolare a π e la sua intersezione M con il piano π. Il punto Q è da determinare, allora, in modo che M sia il punto medio del segmento PQ.

§9. Rette sghembe e rette complanari

Ricordiamo che due rette (dello spazio) si dicono **complanari** se esiste un piano che le contiene entrambe (in caso contrario le rette si dicono **sghembe**).

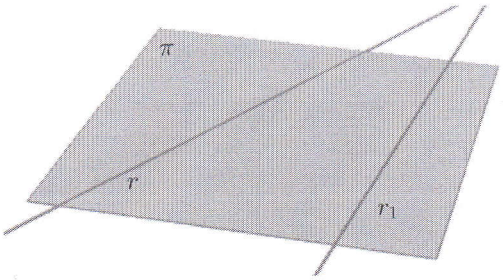


Figura 11: Rette complanari

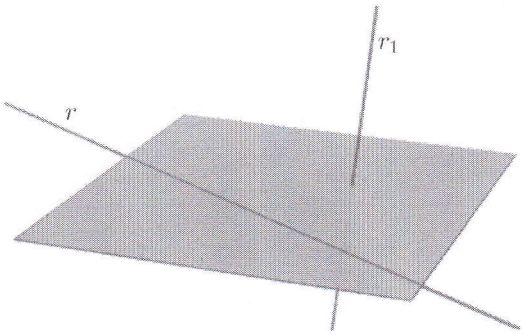


Figura 12: Rette sghembe

Vediamo ora la condizione analitica che esprime la complanarità di due rette. Precisamente si ha la seguente

Proposizione 3.7.

Siano

$$r \equiv \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \end{cases} \quad e \quad r_1 \equiv \begin{cases} a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 \end{cases}.$$

r e r_1 sono complanari $\Longleftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = 0$$

<u>Esempio</u>. Siano date le rette

$$r \equiv \begin{cases} x = 2z - 3 \\ y = z - 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad s \equiv \begin{cases} x = 4y - 1 \\ z = 3y + 1 \end{cases}.$$

a) Verificare che r ed s sono complanari.

b) Trovare l'equazione del piano π che le contiene.

<u>Sol</u>.: si ha

$$r \equiv \begin{cases} x - 2z + 3 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad s \equiv \begin{cases} x - 4y + 1 = 0 \\ 3y - z + 1 = 0 \end{cases}.$$

e

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

perché la prima riga è la somma delle altre tre. Quindi r e s sono complanari.

b) Poiché π contiene r, π appartiene al fascio di piani che ha per asse r, quindi la sua equazione è del tipo

$$\pi \equiv (x - 2z + 3) + \lambda(y - z + 1) = 0 \ .$$

Troviamo adesso un punto P tale che $P \in s$ e $P \notin r$. Ad esempio il punto $P(3, 1, 4) \in s$ (vedi equazione iniziale di s con $y = 1$) e $P \notin r$ (come si verifica immediatamente). Imponendo poi che P appartenga a π otteniamo

$$(3 - 8 + 3) + \lambda(1 - 4 + 1) = 0$$

da cui $-2 - 2\lambda = 0$ e quindi $\lambda = -1$.

In definitiva si ottiene

$$\pi \equiv x - y - z + 2 = 0 \ .$$

§10. Minima distanza tra due rette r ed s dello spazio

Descriviamo un metodo per calcolare la *distanza tra due rette* distinguendo due casi:

- *r ed s sono parallele.*

In questo caso, detto P un (qualunque) punto di r, si ha $d(r, s) = d(P, s)$ (figura 13).

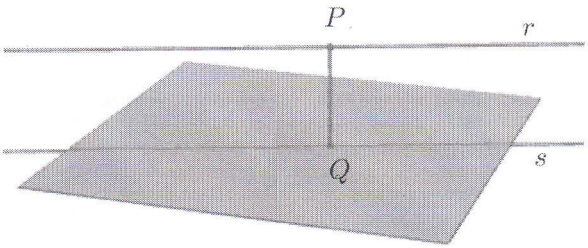


Figura 13: Distanza tra due rette parallele

- *r ed s non sono parallele.*

In questo caso si considera il piano π contenente r e parallelo ad s ed un (qualunque) punto P di s. Allora $d(r,s) = d(P,\pi)$ (figura 14).

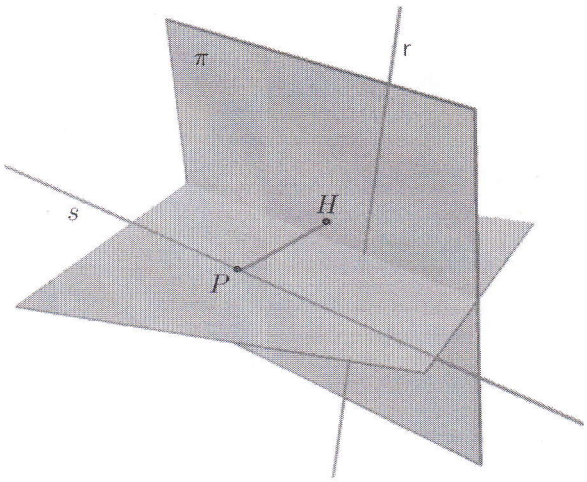


Figura 14: Distanza tra due rette sghembe

Vediamo adesso alcuni esempi che illustrano i procedimenti descritti.

Esempio 1. Trovare la minima distanza tra le rette

$$r \equiv \begin{cases} x = 2z - 5 \\ y = z - 5 \end{cases} \quad \text{e} \quad s \equiv \begin{cases} x = 2z - 3 \\ y = z - 3 \end{cases} .$$

Sol.: i p.d. di r, come pure quelli di s, sono $2, 1, 1$, quindi r, s sono parallele. Prendiamo adesso un punto di r, ad esempio $P(-5, -5, 0)$ e troviamo il piano π passante per P perpendicolare a s (vedi distanza punto-retta):

$$\pi \equiv 2(x+5) + 1(y+5) + 1(z-0) = 0 \quad \text{ossia} \quad \pi \equiv 2x + y + z + 15 = 0 .$$

Determiniamo adesso $\pi \cap s$:

$$\begin{cases} x = 2z - 3 \\ y = z - 3 \\ 2x + y + z + 15 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2z - 3 \\ y = z - 3 \\ 4z - 6 + z - 3 + z + 15 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -5 \\ y = -4 \\ z = -1 \end{cases}$$

Quindi $\pi \cap s = Q(-5,-4,-1)$. Allora

$$d(r,s) = d(P,Q) = \sqrt{0+1+1}$$

e perciò $d(r,s) = \sqrt{2}$.

Esempio 2. Trovare la minima distanza tra le rette

$$r \equiv \begin{cases} x = -3z + 11 \\ y = -z + 4 \end{cases} \quad \text{e} \quad s \equiv \begin{cases} x = z - 2 \\ y = -z + 6 \end{cases} .$$

Sol.: i p.d. di r sono $-3,-1,1$ e quelli di s sono $1,-1,1$, quindi r,s non sono parallele. Troviamo il piano π contenente r e parallelo a s. π ha equazione del tipo

$$(x+3z-11) + \lambda(y+z-4) = 0 \quad \text{ossia} \quad x + \lambda y + (3+\lambda)z - 11 - 4\lambda = 0 .$$

Il parallelismo con s porta alla condizione $1 - \lambda + 3 + \lambda = 0$ che è impossibile e quindi il piano richiesto è $\pi \equiv y + z - 4 = 0$.

Prendiamo adesso un punto di s, ad esempio $P(-2,6,0)$, e calcoliamo $d(P,\pi)$:

$$d(P,\pi) = \frac{|6-4|}{\sqrt{1+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} .$$

In conclusione, essendo $d(r,s) = d(P,\pi)$, si ha $d(r,s) = \sqrt{2}$.

Osservazione. Se r ed s non sono parallele ma sono complanari, allora $d(r,s) = 0$ (in questo caso il piano contenente r e parallelo a s è il piano delle due rette).

§11. Sfera e circonferenza

Si dimostra che:

la *sfera* (*superficie sferica*) S di centro $C(x_0,y_0,z_0)$ e raggio $r \geq 0$ ha equazione

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = r^2 . \tag{11}$$

Svolgendo i calcoli si ottiene un'equazione del tipo:

$$x^2 + y^2 + z^2 + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0 .$$

Quindi una sfera è rappresentata da un'equazione algebrica (da confrontare con quella della circonferenza nel piano):

- di secondo grado in x, y, z,
- avente i coefficienti di x^2, y^2, z^2 uguali fra loro e non nulli,
- priva dei termini in xy, xz, yz.

Si ha adesso, successivamente

$$x^2+y^2+z^2+\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0 \iff (x^2+\alpha x)+(y^2+\beta y)+(z^2+\gamma z)=-\delta \iff$$

$$(x^2+\alpha x+\frac{\alpha^2}{4})+(y^2+\beta y+\frac{\beta^2}{4})+(z^2+\gamma z+\frac{\gamma^2}{4})=\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\beta^2}{4}+\frac{\gamma^2}{4}-\delta \iff$$

$$\iff (x+\frac{\alpha}{2})^2+(y+\frac{\beta}{2})^2+(z+\frac{\gamma}{2})^2=\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-4\delta}{4}$$

e confrontando con (11) risulta che ogni equazione del tipo $x^2+y^2+z^2+\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$ rappresenta, *nell'ipotesi che* $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-4\delta \geq 0$, una sfera di centro $C\left(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2}, -\frac{\gamma}{2}\right)$ e raggio $r=\frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-4\delta}$

Esempio 1. Trovare l'equazione della sfera S che ha centro $C(1,-2,4)$ e raggio $r=3$.

Sol.: si ha

$$S \equiv (x-1)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=3^2$$

ossia

$$S \equiv x^2+y^2+z^2-2x+4y-8z+12=0\ .$$

Esempio 2. Trovare centro C_S e raggio r_S della sfera

$$S \equiv 4x^2+4y^2+4z^2-16x+24y-8z+7=0\ .$$

Sol.: poiché i coefficienti dei termini di secondo grado non sono unitari, riscriviamo prima l'equazione di S nella forma $x^2+y^2+z^2-4x+6y-2z+\frac{7}{4}=0$. Applicando le relative formule si ottiene:

$$C_S(2,-3,1) \quad \text{e} \quad r_S=\frac{1}{2}\sqrt{16+36+4-7}=\frac{1}{2}\sqrt{49} \quad \text{ossia} \quad r_S=\frac{7}{2}\ .$$

N.B. A rigore avremmo dovuto prima controllare se la quantità $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 4\delta$ fosse non negativa.

Una *circonferenza* C (nello spazio) viene (di solito) rappresentata mediante l'intersezione di una sfera S e di un piano π. Quindi:

$$C \equiv \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0 \quad (S) \\ ax + by + cz + d = 0 \quad (\pi) \end{cases} .$$

Per determinare il centro C_C ed il raggio r_C della circonferenza C, determiniamo prima il centro C_S ed il raggio r_S della sfera S. Dopodiché (figura 15)

$$C_C \equiv (\text{retta per } C_S \text{ e } \perp \pi) \cap \pi \quad , \quad r_C = \sqrt{r_S^2 - \overline{C_S C_C}^2} \ .$$

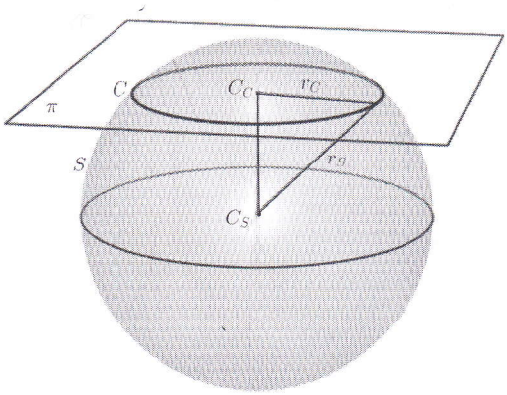


Figura 15: Circonferenza intersezione tra sfera e piano

Esempio. Trovare il centro C_C e il raggio r_C della circonferenza

$$C \equiv \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 4z - 20 = 0 \quad (S) \\ 2x - y - 2z - 4 = 0 \quad (\pi) \end{cases} .$$

Sol.: troviamo prima il centro C_S e il raggio r_S della sfera S applicando le relative formule. Si ha:

$$C_S(0, 1, 2) \ \text{ e } \ r_S = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 16 + 80} = \frac{1}{2}\sqrt{100} \ \text{ , ossia } \ r_S = 5 \ .$$

Il centro C_C della circonferenza è l'intersezione del piano π con la retta t passante per C_S e perpendicolare a π stesso.

L'equazione di t è data da $\dfrac{x-0}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-2}{-2}$ ossia

$$t \equiv \begin{cases} x = -2y + 2 \\ z = 2y \end{cases}$$

Quindi C_C si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x = -2y + 2 \\ z = 2y \\ 2x - y - 2z - 4 = 0 \end{cases}$$

e si ottiene $C_C(2, 0, 0)$. Infine, poiché $\overline{C_S C_C} = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3$, applicando la relativa formula si ricava

$$r_C = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16}$$

e quindi $r_C = 4$.

§12. Coni e cilindri

Per introdurre l'argomento, consideriamo alcuni esempi.

Dire "cosa" rappresentano nello spazio $Oxyz$ le seguenti equazioni o sistemi di equazioni.

$$a) \qquad \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \tag{12}$$

Sol.: (12) rappresenta la retta parallela all'asse z, passante per il punto "$(3, 2)$" del piano xy.

$$b) \qquad 2x - y + 3 = 0 \tag{13}$$

Sol.: (13) rappresenta il piano "luogo" delle rette parallele all'asse z e che passano per i punti della retta del piano xy di equazione "$2x - y + 3 = 0$".

Vediamo ora alcune superfici (dello spazio) che sono rappresentate da equazioni algebriche di *secondo grado in* x, y, z (tali superfici si dicono **quadriche**).

$$c) \qquad x^2 + y^2 - 4 = 0 \tag{14}$$

Sol.: (14) rappresenta la superficie "luogo" delle rette parallele all'asse z e che passano per i punti della circonferenza del piano xy di equazione "$x^2 + y^2 - 4 = 0$" (**cilindro circolare**).

$$d) \qquad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \tag{15}$$

Sol.: (15) rappresenta la superficie "luogo" delle rette parallele all'asse z e che passano per i punti dell'ellisse del piano xy di equazione "$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$" (**cilindro ellittico**).

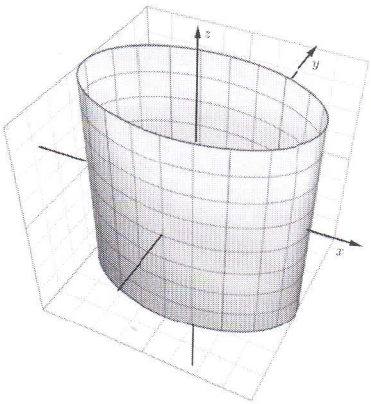


Figura 16: Cilindro ellittico

$$e) \qquad \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1 \tag{16}$$

Sol.: (16) rappresenta la superficie "luogo" delle rette parallele all'asse z e che passano per i punti dell'iperbole del piano xy di equazione "$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$" (**cilindro iperbolico**).

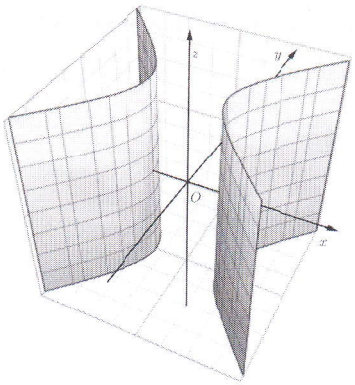


Figura 17: Cilindro iperbolico

$$f) \qquad y = 3x^2 \tag{17}$$

Sol.: (17) rappresenta la superficie "luogo" delle rette parallele all'asse z e che passano per i punti della parabola del piano xy di equazione "$y = 3x^2$" (**cilindro parabolico**).

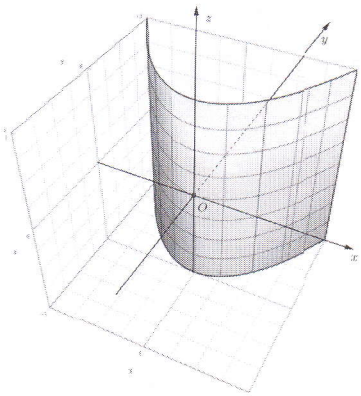


Figura 18: Cilindro parabolico

Definizione. Una superficie che sia un luogo di rette si dice **rigata** (vedi c),d),e),f)).

Osservazione. Un esempio di superficie (quadrica) che non è una rigata è la superficie sferica.

Più in generale:

Definizione. Si dice **cilindro** ogni superficie luogo di rette (**generatrici**) parallele ad una retta data e passanti per i punti di una curva assegnata (**direttrice**) (figura 19).

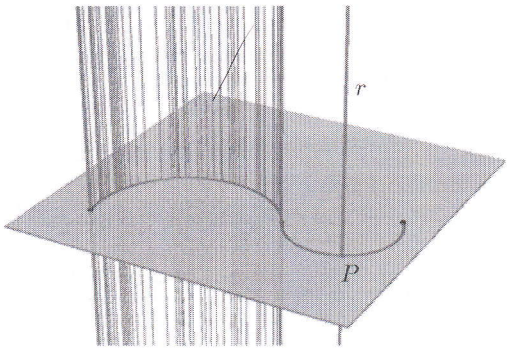


Figura 19: Cilindro

Definizione. Si dice **cono** ogni superficie luogo di rette (**generatrici**) passanti per un punto dato (**vertice**) e per i punti di una curva assegnata (**direttrice**) (figura 20).

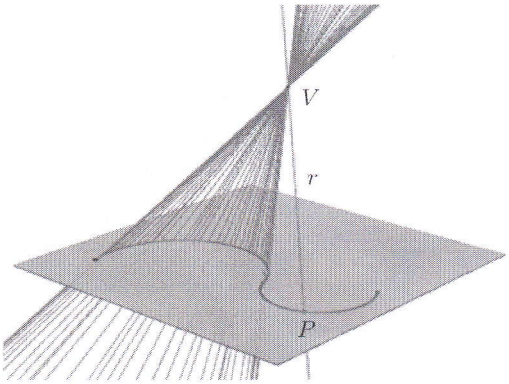


Figura 20: Cono

Esempio 1. Trovare l'equazione del cilindro che proietta ortogonalmente la circonferenza

$$C \equiv \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0 \quad (S) \\ x + y + z - 1 = 0 \quad (\pi) \end{cases}$$

sul piano xy.

Sol.: vediamo due metodi di soluzione.

I) Il cilindro è la superficie luogo delle rette che passano per i punti di C e che sono perpendicolari al piano xy (cioè parallele all'asse z).

$$P_0(x_0, y_0, z_0) \in C \rightarrow \begin{cases} x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 4 = 0 \\ x_0 + y_0 + z_0 - 1 = 0 \end{cases} \tag{18}$$

Retta t passante per P_0 e parallela all'asse $z \rightarrow t \equiv \begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}$.

Il cilindro è l'insieme delle rette $t \equiv \begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}$ dove (x_0, y_0, z_0) soddisfa (18)

Quindi

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \\ x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 4 = 0 \\ x_0 + y_0 + z_0 - 1 = 0 \end{cases}$$

sono le equazioni parametriche del cilindro, dove x_0, y_0, z_0 sono i parametri.

Per ottenere l'equazione cartesiana del cilindro dobbiamo "eliminare" i parametri x_0, y_0, z_0.

Sfruttando le prime due equazioni del sistema, eliminiamo intanto x_0, y_0, ottenendo il sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z_0^2 - 4 = 0 \\ x + y + z_0 - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z_0^2 - 4 = 0 \\ z_0 = 1 - x - y \end{cases}$$

e sostituendo nella prima equazione l'espressione per z_0 ricavata dalla seconda, si ottiene

$$x^2 + y^2 + (1 - x - y)^2 - 4 = 0 \rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2xy - 2x - 2y - 3 = 0$$

e quest'ultima è l'equazione cartesiana del cilindro.

II) Il cilindro è la superficie luogo delle rette parallele all'asse z e che passano per i punti della circonferenza C.

Retta (generica) t parallela all'asse z ha equazioni

$$t \equiv \begin{cases} x = h \\ y = k \end{cases} \to t \cap \pi = P \equiv \begin{cases} x = h \\ y = k \\ h + k + z - 1 = 0 \end{cases} \to P \equiv \begin{cases} x = h \\ \cancel{y = k} \\ z = 1 - h - k \end{cases}$$

$\to P \equiv (h, k, 1 - h - k)$.

Imponiamo, adesso, che P appartenga anche alla sfera S. Si ha quindi

$$P \in S \to h^2 + k^2 + (1 - h - k)^2 - 4 = 0 \tag{19}$$

Il cilindro è l'insieme delle rette $t \equiv \begin{cases} x = h \\ y = k \end{cases}$ dove h, k soddisfano (19). Quindi

$$\begin{cases} x = h \\ y = k \\ h^2 + k^2 + (1 - h - k)^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

sono le equazioni parametriche del cilindro (h, k sono i parametri).

Eliminando i parametri e svolgendo i calcoli si ottiene l'equazione

$$x^2 + 2y^2 + 2xy - 2x - 2y - 3 = 0 \ .$$

<u>Esempio 2</u>. Trovare l'equazione del cono che proietta la circonferenza $C \equiv x^2 + y^2 - x = 0$ del piano xy dal punto $V(0, 0, 1)$.

<u>Sol</u>.: le equazioni di C sono $C \equiv \begin{cases} x^2 + y^2 - x = 0 \ \text{(cilindro)} \\ z = 0 \ \text{(piano } xy) \end{cases}$

Il cono è la superficie luogo delle rette passanti per V e per i punti di C.

Le equazioni della retta generica t passante per $V(0, 0, 1)$ sono

$$t \equiv \begin{cases} x - 0 = g(z - 1) \\ y - 0 = h(z - 1) \end{cases} \to t \equiv \begin{cases} x = g(z - 1) \\ y = h(z - 1) \end{cases}$$

$$\to t \cap \text{piano } xy \equiv P \equiv \begin{cases} x = g(z-1) \\ y = h(z-1) \\ z = 0 \end{cases} \to P(-g,-h,0) \to P \text{ appartiene al cilindro} \to$$

$$g^2 + h^2 + g = 0\ . \tag{20}$$

Il cono è l'insieme delle rette $t \equiv \begin{cases} x = g(z-1) \\ y = h(z-1) \end{cases}$ dove g, h soddisfano (20). Quindi

$$\begin{cases} x = g(z-1) \\ y = h(z-1) \\ g^2 + h^2 + g = 0 \end{cases}$$

sono le equazioni parametriche del cono (g, h sono i parametri).

Eliminando i parametri e svolgendo i calcoli, si ottiene successivamente

$$\begin{cases} g = \dfrac{x}{z-1} \\ h = \dfrac{y}{z-1} \\ g^2 + h^2 + g = 0 \end{cases} \to \frac{x^2}{(z-1)^2} + \frac{y^2}{(z-1)^2} + \frac{x}{z-1} = 0 \to x^2 + y^2 + x(z-1) = 0 \text{ che è}$$

l'equazione cartesiana del cono.

<u>Esempio 3</u>. Determinare l'equazione del cono con vertice $V(0,0,0)$ e circoscritto alla sfera S di centro $C(0,0,2)$ e raggio 1.

<u>Sol.</u>: l'equazione di S è $(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-2)^2 = 1 \to S \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 4z + 3 = 0$.

Il cono richiesto è la superficie luogo delle rette passanti per V e tangenti la sfera S.

La generica retta t passante per V ha equazione

$$t \equiv \begin{cases} x = gz \\ y = hz \end{cases} \to t \cap S \equiv \begin{cases} x = gz \\ y = hz \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4z + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} x = gz \\ y = hz \\ g^2z^2 + h^2z^2 + z^2 - 4z + 3 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x = gz \\ y = hz \\ (g^2 + h^2 + 1)z^2 - 4z + 3 = 0 \end{cases}.$$

t deve essere tangente a S, quindi i punti di intersezione di t con S devono coincidere e pertanto l'equazione in z di secondo grado ottenuta deve avere le soluzioni coincidenti e perciò il suo discriminante Δ deve essere zero. Si ottiene quindi

$$3g^2 + 3h^2 - 1 = 0 \ . \tag{21}$$

Il cono è l'insieme delle rette $t \equiv \begin{cases} x = gz \\ y = hz \end{cases}$ dove g, h soddisfano (21). Quindi

$$\begin{cases} x = gz \\ y = hz \\ 3g^2 + 3h^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

sono le equazioni parametriche del cono (g, h sono parametri).

Eliminando i parametri si ottiene:

$$\begin{cases} g = x/z \\ h = y/z \\ 3\dfrac{x^2}{z^2} + 3\dfrac{y^2}{z^2} - 1 = 0 \end{cases} \quad \to 3x^2 + 3y^2 - z^2 = 0 \text{ che è l'equazione del cono.}$$

§13. Cenni sulle quadriche

Abbiamo visto che per *quadrica* si intende una qualunque superficie dello spazio che, in un sistema di riferimento $Oxyz$ è rappresentata da una equazione algebrica di secondo grado in x, y, z.

Vediamo ora brevemente le equazioni canoniche di alcune di esse, cioè le loro equazioni in particolari sistemi di riferimento cartesiani, riportando per ognuna qualche semplice proprietà e la relativa rappresentazione grafica.

1) *Ellissoide.* La sua equazione canonica è

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

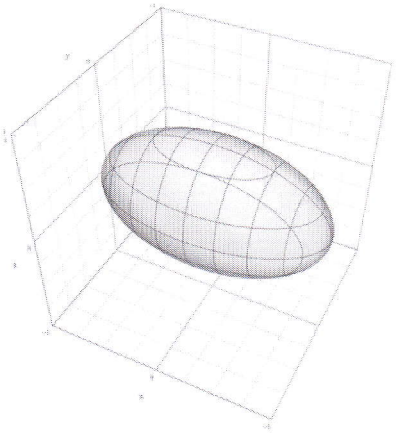


Figura 21: Ellissoide

Intersezione col piano $xy \to z = 0 \to \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$
(ellisse sul piano xy di semiassi a, b).
Intersezione col piano $xz \to y = 0 \to \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ (ellisse sul piano xz di semiassi a, c).
Intersezione col piano $yz \to x = 0 \to \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ (ellisse sul piano yz di semiassi b, c).
Intersezione con l'asse $x \to y = z = 0 \to A(a, 0, 0)$ e $A'(-a, 0, 0)$ (vertici sull'asse x).
Intersezione con l'asse $y \to x = z = 0 \to B(0, b, 0)$ e $B'(0, -b, 0)$ (vertici sull'asse y).
Intersezione con l'asse $z \to x = y = 0 \to C(0, 0, c)$ e $C'(0, 0, -c)$ (vertici sull'asse z).
Come caso particolare, se $a = b = c$ $(= r)$ si ottiene $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, cioè l'equazione della sfera di centro O e raggio r (superficie sferica !!).

2) *Iperboloide a una falda* (di asse z). La sua equazione canonica è

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

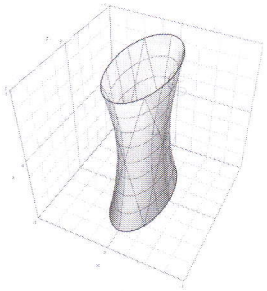


Figura 22: Iperboloide a una falda

Intersezione col piano $xy \to z = 0 \to \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (ellisse sul piano xy di semiassi a, b).

Intersezione col piano $xz \to y = 0 \to \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ (iperbole sul piano xz).

Intersezione col piano $yz \to x = 0 \to \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ (iperbole sul piano yz).

Lasciamo al lettore la determinazione degli eventuali punti di intersezione dell'iperboloide con gli assi cartesiani.

3) *Iperboloide a due falde* (di asse z). La sua equazione canonica è

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

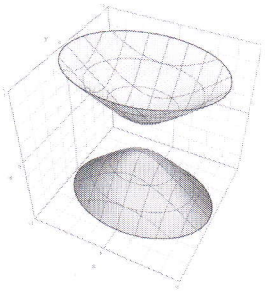


Figura 23: Iperboloide a due falde

Intersezione col generico piano parallelo al piano $xy \to z = z_0 \to \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1 + \dfrac{z_0^2}{c^2}$.
Questa equazione ha soluzioni solo se $z_0^2 - c^2 \geq 0$, ossia $z_0 \geq c$ o $z_0 \leq -c$. In conclusione, se $|z_0| > c$ si ottiene una ellisse.
Intersezione col piano $xz \to y = 0 \to \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1 \to \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$ (iperbole sul piano xz).
Intersezione col piano $yz \to x = 0 \to \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1 \to \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (iperbole sul piano yz.)
Lasciamo al lettore la determinazione degli eventuali punti di intersezione dell'iperboloide con gli assi cartesiani.
4) *Paraboloide ellittico.* La sua equazione canonica è

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$$

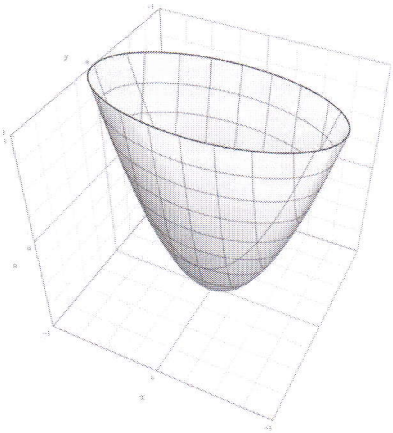


Figura 24: Paraboloide ellittico

Intersezione col generico piano parallelo al piano $xy \to z = k \to \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = k$. Se $k < 0$ si ottiene l'insieme vuoto, se $k = 0$ si ottiene l'unico punto $(0, 0, 0)$, se $k > 0$ si ottiene una ellisse sul piano $z = k$.

Intersezione col piano $xz \to y = 0 \to \dfrac{x^2}{a^2} = z$ (parabola sul piano xz).

Intersezione col piano $yz \to x = 0 \to \dfrac{y^2}{b^2} = z$ (parabola sul piano yz).

Lasciamo al lettore la determinazione degli eventuali punti di intersezione del paraboloide con gli assi cartesiani.

5) *Paraboloide iperbolico.* La sua equazione canonica è

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$$

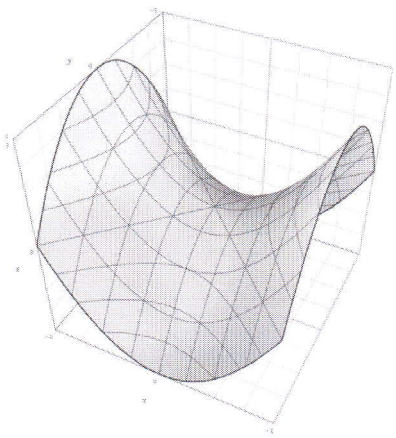


Figura 25: Paraboloide iperbolico

Intersezione col generico piano parallelo al piano $xy \to z = z_0 \to \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = z_0$. Se $z_0 = 0$ si ottiene l'unione di due rette, se invece $z_0 \neq 0$ si ottiene una iperbole sul piano $z = z_0$ parallelo al piano xy.

Intersezione col generico piano parallelo al piano $xz \to y = y_0 \to \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y_0^2}{b^2} = z$ (parabola sul piano $y = y_0$ parallelo al piano xz).

Intersezione col generico piano parallelo al piano $yz \to x = x_0 \to \dfrac{x_0^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = z$ (parabola sul piano $x = x_0$ parallelo al piano yz).

Lasciamo al lettore la determinazione degli eventuali punti di intersezione del paraboloide con gli assi cartesiani.

6) *Cono quadrico ellittico.* La sua equazione canonica è

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2$$

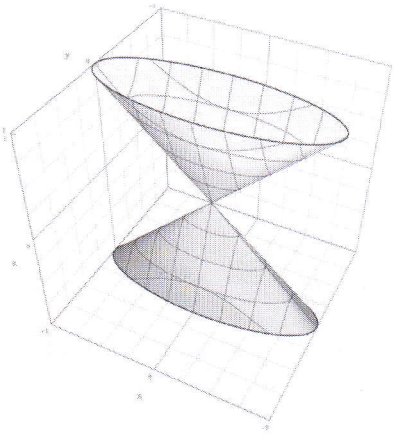


Figura 26: Cono quadrico ellittico

Intersezione col generico piano parallelo al piano $xy \to z = z_0 \to \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = z_0^2$. Se $z_0 = 0$ si ottiene l'unico punto $(0, 0, 0)$. Se $z_0 \neq 0$ si ottiene una ellisse sul piano $z = z_0$ parallelo al piano xy.

Intersezione col piano $xz \to y = 0 \to \dfrac{x^2}{a^2} = z^2 \to x = \pm az$ (unione di due rette sul piano xz).

Intersezione col piano $yz \to x = 0 \to \dfrac{y^2}{b^2} = z^2 \to y = \pm bz$ (unione di due rette sul piano yz).

Lasciamo al lettore la determinazione degli eventuali punti di intersezione del cono quadrico ellittico con gli assi cartesiani.

§14. Alcuni complementi di geometria analitica nel piano e nello spazio

Rappresentazione parametrica di una curva piana

Premessa. Consideriamo, nel piano Oxy, ad esempio, la retta r di equazione $y = 3x + 5$. I punti $P(x, y)$ di r sono tutti e soli quelli tali che

$$\begin{cases} x = t \\ y = 3t + 5 \end{cases} \qquad (t \in \mathbf{R}) \ .$$

Queste ultime vengono dette *equazioni parametriche della retta* r.

Più in generale, a volte, è conveniente rappresentare una curva del piano facendo dipendere la determinazione delle coordinate dei suoi punti dai valori di un parametro, che varia in un intervallo dell'asse reale.

Si parla di *equazioni parametriche* di una curva piana $\mathcal{C}$ quando le coordinate (x, y) dei punti di $\mathcal{C}$ sono espresse mediante funzioni di un parametro t, ad esempio

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad (t \in [t_0, t_1]) \ \ (\text{anche tutto } \mathbf{R}) \ .$$

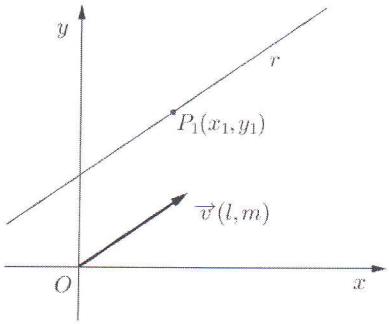


Figura 27: Retta parallela a un vettore

Esempio 1. La retta r del piano passante per $P_1(x_1, y_1)$ e parallela al vettore $\vec{v} = (\ell, m)$ (vedi figura 27) ha equazione:

$$\frac{x - x_1}{\ell} = \frac{y - y_1}{m} \ .$$

Ponendo questi rapporti uguali a t si ha:

$$\begin{cases} x = x_1 + \ell t \\ y = y_1 + mt \end{cases} \qquad (t \in \mathbf{R})$$

e queste sono le equazioni parametriche della retta r.

Se ad esempio $P(1,2)$ e $(\ell, m) \equiv (3,4)$, si ha:

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \quad (x = x(t)) \\ y = 2 + 4t \quad (y = y(t)) \end{cases} \qquad (t \in \mathbf{R}) \ .$$

Al variare di t in $\mathbf{R}$ si ottengono le coordinate di tutti e soli i punti della retta.

Osservazione. Se r passa per $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ allora il vettore $\vec{v} \equiv (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ è parallelo a r quindi

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \end{cases} \qquad (t \in \mathbf{R})$$

sono le equazioni parametriche della retta r.

Esempio 2. Le equazioni parametriche della circonferenza C di centro (a, b) e raggio r sono (vedi figura 28)

$$\begin{cases} x = a + r\cos\omega \\ y = b + r\sin\omega \end{cases} \qquad (0 \le \omega < 2\pi) \ . \tag{22}$$

In questo caso ω è il parametro.

Da (22) segue

$$x - a = r\cos\omega \ , \quad y - b = r\sin\omega$$

da cui

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

e quest'ultima è l'equazione cartesiana della circonferenza C, ottenuta da (22) eliminando il parametro ω. Al variare di ω in (22) si ottengono le coordinate di tutti e soli i punti della circonferenza C.

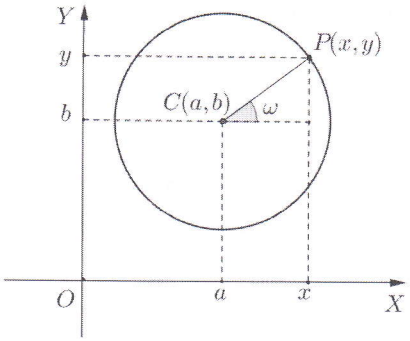


Figura 28: Equazioni parametriche di una circonferenza

Esempio 3. L'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

può essere rappresentata mediante le seguenti equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = a\cos\omega \\ y = b\sin\omega \end{cases} \quad (0 \leq \omega < 2\pi) \tag{23}$$

Eliminando il parametro ω, da (23) si ottiene

$$\frac{x}{a} = \cos\omega \quad , \quad \frac{y}{b} = \sin\omega$$

da cui

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

che è l'equazione cartesiana dell'ellisse. Al variare di ω in (23) si ottengono le coordinate di tutti e soli i punti dell'ellisse.

Esempio 4. L'iperbole di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

può essere rappresentata mediante le seguenti equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{\cos\omega} \\ y = b\tan\omega \end{cases} \quad (0 \leq \omega < 2\pi, \omega \neq \pi/2, 3\pi/2)\ . \tag{24}$$

Eliminando il parametro ω da (24) si ottiene

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{\cos\omega} \quad , \quad \frac{y}{b} = \tan\omega$$

da cui

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{\cos^2\omega} - \frac{\sin^2\omega}{\cos^2\omega} = \frac{1-\sin^2\omega}{\cos^2\omega} = \frac{\cos^2\omega}{\cos^2\omega} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

che è l'equazione cartesiana dell'iperbole. Al variare di ω in (24) si ottengono le coordinate di tutti e soli i punti dell'iperbole.

Esempio 5. La parabola $\mathcal{C}$ di equazione

$$y = ax^2 \quad (a \neq 0)$$

può essere rappresentata mediante le seguenti equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = t \\ y = at^2 \end{cases} \quad (-\infty < t < +\infty) \ . \tag{25}$$

Al variare di t in (25) si ottengono le coordinate di tutti e soli i punti della parabola.

Coordinate polari nel piano

Oltre al ben noto sistema di riferimento cartesiano ortogonale nel piano, un altro importante sistema di coordinate (nel piano) è quello delle *coordinate polari*.

Fissiamo nel piano:

- un punto O (*polo*)
- una semiretta orientata x "uscente" da O (*asse polare*)
- il verso "positivo" delle rotazioni di centro O (generalmente quello antiorario)
- un segmento unitario u.

In questo modo è dato un *sistema di riferimento polare nel piano* (vedi figura 29).

Ad ogni punto $P \neq O$ del piano si associa la coppia ordinata (ϱ, ω) dove

- ϱ (*raggio vettore di* P) è la misura del segmento OP rispetto ad u.

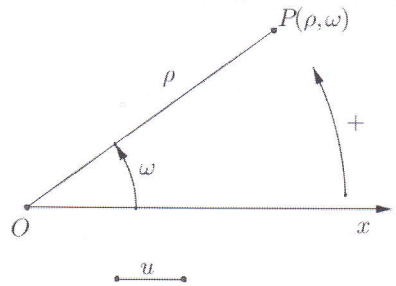


Figura 29: Riferimento polare nel piano

- ω (*anomalia di* P) è la misura in radianti ($0 \leq \omega < 2\pi$) dell'angolo che l'asse polare forma con la semiretta OP, orientata da O verso P.

• La coppia (ϱ, ω) si dice coppia delle *coordinate polari* di P.

Inversamente, data la coppia (ϱ, ω) con $\varrho > 0$ e $(0 \leq \omega < 2\pi)$, si individua il punto P come intersezione della circonferenza di centro O e raggio ϱ con la semiretta uscente da O e che forma con l'asse polare l'angolo ω (vedi figura 30).

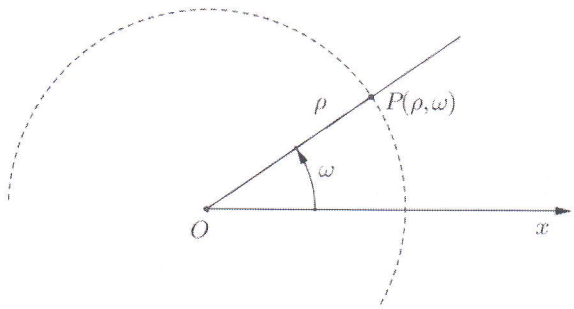


Figura 30: Costruzione del punto $P(\rho, \omega)$

N.B. Il polo O è un punto che fa eccezione perché per esso $\varrho = 0$ e ω non è determinato.

Osservazione. La corrispondenza tra l'insieme dei punti del piano distinti da O e l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali (ϱ, ω), con $\varrho > 0$ e $(0 \leq \omega < 2\pi)$, è biunivoca.

• Dalle coordinate cartesiane alle coordinate polari e viceversa

Supponiamo che il polo e l'asse polare coincidano con l'origine e con il semiasse positivo delle x di un sistema cartesiano ortogonale Oxy (vedi figura 31).

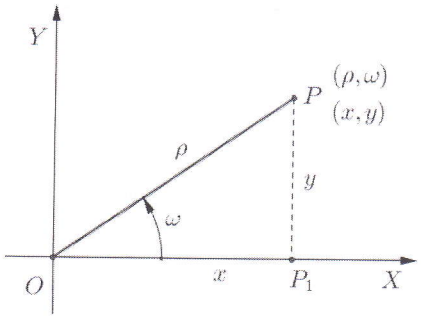


Figura 31: Coordinate polari e coordinate cartesiane

Dal triangolo rettangolo OPP_1 si ha:

$$\begin{cases} x = \varrho \cos \omega \\ y = \varrho \sin \omega \end{cases} \quad \text{(da polari a cartesiane)}$$

$$\begin{cases} \varrho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos \omega = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \sin \omega = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases} \quad \text{(da cartesiane a polari)}$$

Se ad esempio $P = (1, 1)$ in coordinate cartesiane, allora $P = (\sqrt{2}, \pi/4)$ in coordinate polari.

Esempio 1. Determinare l'equazione polare della:

a) circonferenza $\mathcal{C}$ passante per il polo O ed avente il centro nel punto $C(a/2, 0)$.

b) retta r perpendicolare all'asse polare e posta a distanza a da O.

Sol.: a) Dalla figura 32

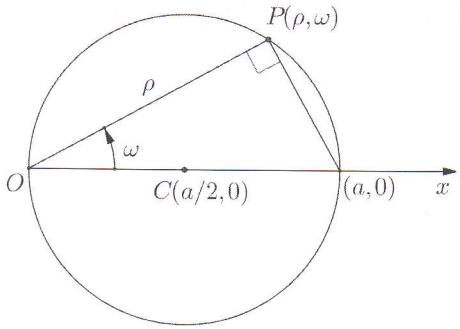


Figura 32: Equazione polare della circonferenza

$$P(\varrho,\omega) \in \mathcal{C} \iff \varrho = a\cos\omega \quad \text{(equazione polare di } \mathcal{C}\text{)}$$

b) Dalla figura 33

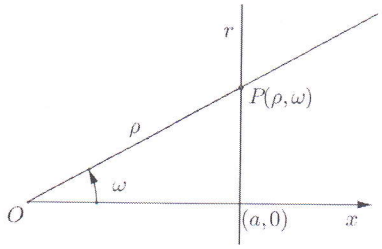


Figura 33: Equazione polare della retta r

$$P(\varrho,\omega) \in r \iff \varrho\cos\omega = a \iff \varrho = \frac{a}{\cos\omega} \quad \text{(equazione polare di } r\text{)}$$

Esempio 2. Trovare (in coordinate polari) la distanza tra due punti $P_1(\varrho_1,\omega_1)$ e $P_2(\varrho_2,\omega_2)$.

Sol.: dalla figura 34 e usando il teorema di Carnot sui triangoli, si ottiene:

$$\overline{P_1P_2}^2 = \varrho_1^2 + \varrho_2^2 - 2\varrho_1\varrho_2\cos(\omega_1-\omega_2)\ .$$

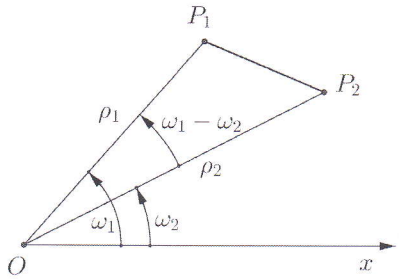


Figura 34: Distanza tra due punti in coordinate polari

Coordinate cilindriche (o semipolari) nello spazio

Le coordinate cilindriche (nello spazio) si limitano ad operare un cambiamento di coordinate nel piano xy, nel quale vengono introdotte le usuali coordinate polari, lasciando inalterata la terza coordinata z.

Dette x, y, z le coordinate cartesiane di P e indicate con ϱ, ω le coordinate polari del punto P_0 proiezione di P sul piano xy, allora (ϱ, ω, z) si dicono *coordinate cilindriche* di P (vedi figura 35).

Se $P \neq O$, il passaggio da coordinate cilindriche a cartesiane (e viceversa) è dato da (vedi passaggio da coordinate polari a coordinate cartesiane nel piano)

$$\begin{cases} x = \varrho \cos \omega \\ y = \varrho \sin \omega \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} \varrho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos \omega = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \sin \omega = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ z = z \end{cases}$$

<u>Osservazione</u>. I punti dello spazio per cui $\varrho =$ cost. (> 0) formano un cilindro di rotazione avente per asse l'asse z.

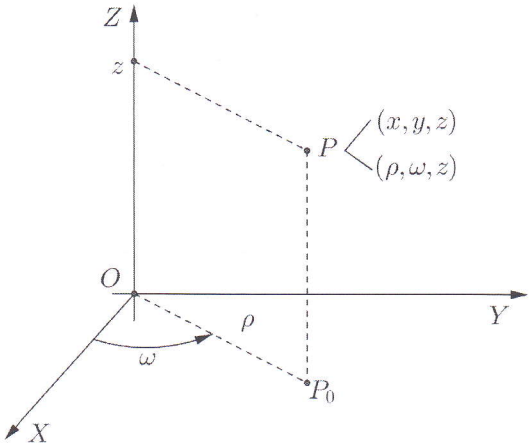


Figura 35: Coordinate cilindriche nello spazio

Esempio. Trovare l'equazione in coordinate cilindriche della sfera S di centro O e raggio r.

Sol.: in coordinate cartesiane $S \equiv x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. In coordinate cilindriche (essendo $x^2 + y^2 = \varrho^2$) si ottiene $S \equiv \varrho^2 + z^2 = r^2$.

Coordinate polari (o sferiche) nello spazio

Sia P il punto di coordinate (x, y, z) $(P \neq O)$.

Indichiamo con:

- ϱ la distanza di P da O
- ω l'angolo che il segmento OP, orientato da O verso P, forma col semiasse positivo di z $(0 \leq \omega \leq \pi)$
- φ l'angolo che il semiasse positivo delle x forma con il segmento OP_0, orientato da O verso P_0, dove P_0 è la proiezione di P sul piano xy $(0 \leq \varphi < 2\pi)$.

$(\omega, \varphi$ sono le misure in radianti di tali angoli).

$(\varrho, \omega, \varphi)$ si dice terna delle *coordinate polari* di P.

ϱ si dice *raggio vettore di* P

ω si dice *colatitudine di* P

φ si dice *longitudine di* P.

Osservazione. I punti per cui ϱ=costante (> 0) formano una sfera di centro O.

I punti per cui ω=costante formano un cono di rotazione di vertice O e asse z.

I punti per cui φ=costante formano un semipiano di origine l'asse z.

Il passaggio dalle coordinate polari $(\varrho, \omega, \varphi)$ a quelle cartesiane (x, y, z) (e viceversa) di uno stesso punto $P \neq O$, è dato da (vedi figura 36, tenendo presente che $OP_0 = \varrho \sin \omega$ e $x^2 + y^2 + z^2 = \varrho^2$):

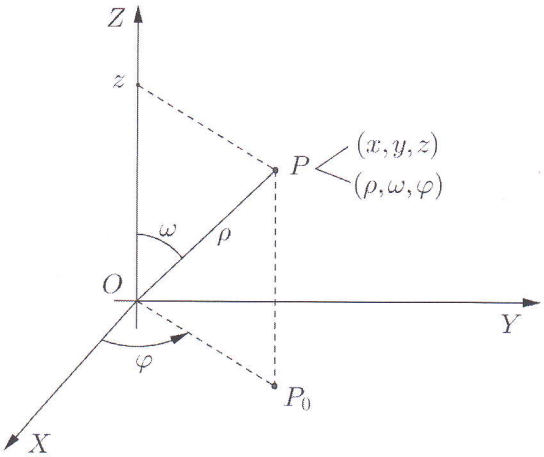


Figura 36: Coordinate sferiche nello spazio

$$\begin{cases} x = \varrho \sin \omega \cos \varphi \\ y = \varrho \sin \omega \sin \varphi \\ z = \varrho \cos \omega \end{cases}$$

Osservazione. Queste sono anche le equazioni parametriche della sfera di centro O e raggio ϱ (i parametri sono ω e φ).

$$\begin{cases} \varrho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \cos\omega = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

ESERCIZI

1) Determinare l'equazione del piano π_1:

a) passante per $P_1(1,2,-3), P_2(1,-1,0), P_3(0,-1,1)$

b) passante per $P_1(1,2,-1)$ e parallelo al piano $\pi \equiv 2x-3y+5z+7=0$

c) contenente la retta $r \equiv \begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$ e passante per $P_1(1,1,0)$

d) contenente la retta $r \equiv \begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$ e passante per $P_1(1,0,-2)$

2) Trovare le equazioni ridotte della retta r passante per:

a) $P_1(1,2,3), P_2(2,4,5)$

b) $P_1(1,2,3), P_2(1,4,5)$

c) $P_1(1,2,3), P_2(1,2,5)$

d) $P_1(1,2,3)$ e di parametri direttori $2,1,0$.

3) Determinare le equazioni ridotte della retta s passante per $P_0(1,2,3)$ e

a) parallela alla retta $r \equiv \begin{cases} x+2y-z+3=0 \\ 2x+3y-2z+5=0 \end{cases}$

b) perpendicolare alla retta $r \equiv \begin{cases} x=z+4 \\ y=z-7 \end{cases}$ e parallela a $\pi \equiv 3x+4y+5z-10=0$

4) Determinare l'equazione del piano π passante per $P_1(1,2,-3)$ e

a) perpendicolare alla retta $r \equiv \begin{cases} y = 3x - 5 \\ z = 2x + 3 \end{cases}$

b) perpendicolare al piano $\pi_1 \equiv x+y+z-7 = 0$ e parallelo alla retta $r \equiv \begin{cases} x = -2z + 5 \\ y = -5z + 7 \end{cases}$

c) contenente la retta $r \equiv \begin{cases} x = z/2 \\ y = z \end{cases}$

5) Siano dati i punti $P_1(1,2,-3)$, $P_2(3,4,-5)$ e il piano $\pi \equiv 2x+3y-6z-4 = 0$. Trovare:

a) il punto medio M di P_1P_2

b) $d(M,\pi)$

c) $d(P_1,P_2)$

6) Siano dati il punto $P(-4,-2,1)$, la retta $r \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = z - 1 \end{cases}$ e il piano $\pi \equiv x + 2y + z + 5 = 0$. Trovare:

a) $d(P,r)$

b) le equazioni della retta r_1 passante per P e perpendicolare ed incidente r

c) le equazioni della retta r_2 passante per P, incidente l'asse z e parallela a π

d) le equazioni della circonferenza di centro P e tangente la retta r

e) il punto P_1 simmetrico di P rispetto ad r.

7) Determinare il punto P_1

a) simmetrico di $P(4,1,-1)$ rispetto al piano $\pi \equiv x + y - 2z - 1 = 0$

b) simmetrico di $P(-1,-2,3)$ rispetto alla retta $r \equiv \begin{cases} x = 2z - 3 \\ y = z - 1 \end{cases}$

8) Sia $\mathcal{C} \equiv \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y = 0 \\ x + y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$. Trovare centro C_C e raggio r_C di $\mathcal{C}$.

9) Trovare l'equazione della circonferenza che ha centro in $C_C(1,0,2), r_C = 1$ ed è contenuta nel piano $\pi \equiv x + y - z + 1 = 0$.

10) Trovare l'equazione della circonferenza passante per i punti $P_1(1,0,0), P_2(0,1,0)$,

$P_3(0,0,1)$.

11) Siano dati il punto $P(1,0,2)$, la retta $r \equiv \begin{cases} x = -y+4 \\ z = 1 \end{cases}$ e il piano $\pi \equiv 2x+3y+z+8=0$. Determinare:

a) l'equazione del piano passante per P, perpendicolare a π e parallelo ad r

b) le coordinate degli eventuali punti di r che distano $\sqrt{6}$ da P.

12) Siano dati il punto $P(-1,1,1)$, la retta $r \equiv \begin{cases} x = -z \\ y = -2z-6 \end{cases}$ e il piano $\pi \equiv x-y-z+7=0$. Trovare:

a) le equazioni della circonferenza avente centro in P e tangente ad r

b) le equazioni delle eventuali rette passanti per P, incidenti r e parallele a π.

13) Siano dati il punto $P(-1,-1,2)$ e la retta $r \equiv \begin{cases} x = 2z-3 \\ y = z-1 \end{cases}$. Determinare:

a) le coordinate del punto P' simmetrico di P rispetto ad r

b) l'equazione del piano contenente P ed r

c) le equazioni della retta passante per P, perpendicolare ed incidente r.

14) Siano dati la retta $r \equiv \begin{cases} x = -2z-1 \\ y = z \end{cases}$ e il piano $\pi \equiv x+y+z-3=0$. Trovare:

a) le equazioni della retta proiezione ortogonale di r su π

b) le equazioni della retta contenuta in π e perpendicolare ed incidente r

c) l'equazione del piano contenente r ed s dove s è la retta passante per $P(-1,3,1)$ e parallela ad r.

15) Siano date le rette $r \equiv \begin{cases} x = -2z+3 \\ y = 3z-1 \end{cases}$, $s \equiv \begin{cases} x = z+2 \\ y = 5 \end{cases}$. Determinare:

a) la minima distanza tra r e s

b) le equazioni ridotte della retta passante per $P(1,2,3)$ e perpendicolare r e s

c) gli eventuali punti della retta s che distano $\sqrt{35}$ da $O(0,0,0)$.

16) Siano date le rette $r \equiv \begin{cases} x = 2z-1 \\ y = 3z-5 \end{cases}$, $s \equiv \begin{cases} x = 2z-5 \\ y = 3z-7 \end{cases}$. Determinare:

a) la minima distanza tra r e s

b) le equazioni ridotte della retta passante per $P(1,2,3)$, perpendicolare r e parallela al piano $\pi \equiv 2x - 3y + z - 5 = 0$

c) le equazioni delle eventuali sfere di raggio $R = \sqrt{14}$ aventi il centro su s e passanti per $P(1,2,3)$.

17) Siano date le rette $r \equiv \begin{cases} x = z - 2 \\ y = 2z - 2 \end{cases}$, $s \equiv \begin{cases} x = 4z - 3 \\ y = 2z - 1 \end{cases}$.

a) Stabilire se r e s sono sghembe oppure complanari,

b) se sono sghembe trovare $d(r,s)$, se sono complanari trovare l'equazione del piano che le contiene,

c) determinare le eventuali rette t parallele alla retta s e tali che $d(t,r) > \sqrt{5}$.

18) Siano date le rette $r \equiv \begin{cases} x = z - 3 \\ y = 2z + 1 \end{cases}$, $s \equiv \begin{cases} x = 4z - 4 \\ y = -z + 2 \end{cases}$.

Verificare che r e s sono complanari e trovare il piano che le contiene.

19) Siano $r \equiv \begin{cases} x = -2z + 6 \\ y = z \end{cases}$, $s \equiv \begin{cases} y = x \\ z = -2x + 3 \end{cases}$. Determinare:

a) la retta t perpendicolare e incidente r ed s

b) la minima distanza tra r ed s.

20) Determinare centro e raggio della circonferenza

$$\mathcal{C} \equiv \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 24 = 0 \\ y - 4 = 0 \end{cases}$$

21) Determinare le equazioni delle eventuali sfere di raggio $\sqrt{3}$ tangenti al piano $\pi \equiv x + y + z - 2 = 0$ ed aventi il centro sulla retta $r \equiv \begin{cases} x = z + 1 \\ y = -z - 3 \end{cases}$.

22) Data la sfera $S \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2 = 0$ e la retta $r \equiv \begin{cases} x = 2z + 50 \\ y = z + 25 \end{cases}$, determinare:

a) l'equazione del cilindro C circoscritto ad S ed avente le generatrici parallele ad r

b) l'equazione del piano π passante per $P(1,4,0)$ e perpendicolare a r

c) il centro e il raggio della circonferenza $C \cap \pi$

d) l'equazione del piano che contiene r e l'asse del cilindro C.

23) Trovare:

a) l'equazione del cilindro che proietta la sfera $S \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$ parallelamente alla retta $r \equiv \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$

b) il centro C ed il raggio R della circonferenza L intersezione del cilindro con il piano π perpendicolare a r e passante per $P(2, 0, 1)$

c) le equazioni della circonferenza L del punto b).

24) Trovare l'equazione del cono che proietta la circonferenza $C \equiv x^2 + y^2 - 4 = 0$ del piano xy dal punto $V = (0, 0, 3)$.

Determinare poi il centro ed il raggio della circonferenza intersezione del cono con il piano di equazione $z = -12$.

25) Trovare l'equazione polare di

$$\text{a)} \quad y = |x| \quad , \quad \text{b)} \quad y = x.$$

26) Dimostrare la condizione di parallelismo tra due piani discutendo il sistema lineare formato dalle loro equazioni.

27) Discutere, da un punto di vista analitico, il problema dell'intersezione di tre piani.

28) Dimostrare che se $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$ allora

a) $d = 0 \iff \pi$ passa per $O(0, 0, 0)$,

b) il coefficiente di una incognita è uguale a zero $\iff$ il piano π è parallelo all'asse che porta il nome di quell'incognita (vedi Proposizione 3.1).

29) Verificare che il generico punto $P(x_P, y_P, z_P)$ appartiene alla retta passante per il punto $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$ e parallela al vettore $R(R_x, R_y, R_z)$ se e soltanto se esiste $\lambda \in \mathbf{R}$ tale che

$$\begin{cases} x_P - x_Q = \lambda R_x \\ y_P - y_Q = \lambda R_y \\ z_P - z_Q = \lambda R_z \end{cases}$$

ossia $P - Q = \lambda R$.

CAPITOLO 4

SPAZI EUCLIDEI. MATRICI ORTOGONALI

§1. Generalità sugli spazi euclidei

Abbiamo visto, nel capitolo 1, il prodotto scalare di vettori geometrici del piano e dello spazio. Più precisamente, dati due vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V_2$ (V_3), abbiamo indicato con $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$ o $< \vec{v}_1, \vec{v}_2 >$ il prodotto scalare di $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ e abbiamo posto

$$< \vec{v}_1, \vec{v}_2 > \stackrel{def}{=} \|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\| \cos \widehat{\vec{v}_1 \vec{v}_2} \ ,$$

dove $\|\vec{v}\|$ è il modulo o norma (lunghezza) di $\vec{v}$. Il modulo di $\vec{v}$ si indica anche con $|\vec{v}|$.

Vediamo ora come si possa estendere il concetto di prodotto scalare agli spazi vettoriali, riprendendo le proprietà del prodotto scalare di vettori geometrici.

Definizione. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbf{R}$. Se in V è definita "un'operazione" $< \ , \ >$ che ad ogni *coppia di vettori di* V $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ associa un *numero reale*, indicato con $< \mathbf{v}, \mathbf{w} >$, e tale che valgano le seguenti proprietà ($\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ e $\alpha \in \mathbf{R}$):

a) $< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 > = < \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 >$

b) $< \mathbf{v}, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 > = < \mathbf{v}, \mathbf{v}_1 > + < \mathbf{v}, \mathbf{v}_2 >$; $< \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v} > = < \mathbf{v}_1, \mathbf{v} > + < \mathbf{v}_2, \mathbf{v} >$

c) $< \mathbf{v}_1, \alpha \mathbf{v}_2 > = \alpha < \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 >$; $< \alpha \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 > = \alpha < \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 >$

d) Se $< \mathbf{v}, \mathbf{w} > = 0$ per ogni $\mathbf{w} \in V$, allora $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

e) $< \mathbf{v}, \mathbf{v} >$ è positivo per ogni $\mathbf{v} \neq 0$

allora si dice che in V è definito un **prodotto scalare** (definito positivo) e V si dice **spazio euclideo reale** (in breve s.e.r). Il numero reale $< \mathbf{v}, \mathbf{w} >$ si dice **prodotto scalare** di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ e si indica anche con $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$.

<u>Esempio</u>. Se in $\mathbf{R}^n$ definiamo

$$< (x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) > = x_1 y_1 + ... + x_n y_n \quad (= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i)$$

allora è facile verificare che valgono a),b),c),d),e) e quindi lo spazio vettoriale $\mathbf{R}^n$ *(con tale operazione) è uno s.e.r.*

In particolare:

- $\mathbf{R}^2$ *è uno s.e.r.* e $< (x_1, y_1), (x_2, y_2) >= x_1x_2 + y_1y_2$.

Ad esempio $< (2, -3), (1, 5) >= 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 5 = 2 - 15 = -13$.

- $\mathbf{R}^3$ *è uno s.e.r.* e $< (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) >= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

Ad esempio $< (2, -1, 4), (1, 2, 3) >= 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 2 - 2 + 12 = 12$.

Dalla definizione segue la seguente

Proposizione 4.1.

Se V è uno s.e.r. allora:

i) $< \mathbf{v}, \mathbf{0} >=< \mathbf{0}, \mathbf{v} >= 0$ *per ogni* $\mathbf{v} \in V$,

ii) $< \mathbf{v}, a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + ... + a_n\mathbf{v}_n >= a_1 < \mathbf{v}, \mathbf{v}_1 > + a_2 < \mathbf{v}, \mathbf{v}_2 > + ... + a_n < \mathbf{v}, \mathbf{v}_n >=$
$< a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + ... + a_n\mathbf{v}_n, \mathbf{v} >$ $\forall a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbf{R}$ *e* $\forall \mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n \in V, (n \geq 1)$.

<u>Dimostrazione</u>.

i) Si ha

$$< \mathbf{0}, \mathbf{v} >=< \mathbf{0} + \mathbf{0}, \mathbf{v} >=< \mathbf{0}, \mathbf{v} > + < \mathbf{0}, \mathbf{v} > \quad \text{da cui} \quad < \mathbf{0}, \mathbf{v} >= 0 \ .$$

Abbiamo applicato la proprietà degli spazi vettoriali $\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$, la proprietà b) della definizione di s.e.r. e la proprietà in $\mathbf{R}$ per cui se $x \in \mathbf{R}$ e $x + x = x$ allora $x = 0$.

ii) (Per $n = 2$) Sfruttando la definizione di s.e.r. (proprietà b),c)) si ha:

$$< \mathbf{v}, a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 >=< \mathbf{v}, a_1\mathbf{v}_1 > + < \mathbf{v}, a_2\mathbf{v}_2 >= a_1 < \mathbf{v}, \mathbf{v}_1 > + a_2 < \mathbf{v}, \mathbf{v}_2 > \ .$$

<u>Esempio</u>. Vale l'uguaglianza

$$< \mathbf{v}, \sqrt{2}\mathbf{v}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{v}_2 >= \sqrt{2} < \mathbf{v}, \mathbf{v}_1 > - \frac{1}{2} < \mathbf{v}, \mathbf{v}_2 > \ .$$

Introduciamo ora alcuni nuovi concetti collegati all'operazione di prodotto scalare.

Definizioni. Sia V uno s.e.r. e siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

- Si dice che $\mathbf{v}$ è **ortogonale** a $\mathbf{w}$ (e si scrive $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$) se $< \mathbf{v}, \mathbf{w} >= 0$.
- Si dice **norma o modulo di v** lo scalare, indicato con $\|\mathbf{v}\|$, definito da

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{< \mathbf{v}, \mathbf{v} >}\ .$$

- Si dice che $\mathbf{v}$ è un **versore** o **vettore unità** se $\|\mathbf{v}\| = 1$.
- Si dice **coefficiente di Fourier** di $\mathbf{v}$ rispetto a $\mathbf{w}$, con $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$, lo scalare $c = \dfrac{< \mathbf{v}, \mathbf{w} >}{< \mathbf{w}, \mathbf{w} >}$.
- Si dice **proiezione** di $\mathbf{v}$ su $\mathbf{w}$, con $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$, il vettore $c\mathbf{w} = \dfrac{< \mathbf{v}, \mathbf{w} >}{< \mathbf{w}, \mathbf{w} >}\mathbf{w}$.
  (Si dimostra che, dati $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ in V_3, con $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}, c\mathbf{w}$ è proprio la proiezione ortogonale, in senso geometrico, di $\mathbf{v}$ su $\mathbf{w}$.)
- Si dice che $\beta = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n)$ è una **base ortogonale** di V se β è una *base* di V formata da vettori *a due a due ortogonali*.
- Si dice che $\beta = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n)$ è una **base ortonormale** di V se β è una *base ortogonale* di V formata da *vettori unità*.

N.B. Sia V uno s.e.r. e sia $\beta = (\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n)$ con $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n \in V$.

1) Se β è linearmente indipendente e genera V allora β è una *base* di V.

2) Se β è linearmente indipendente, genera V e $< \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j >= 0$ per ogni $i, j = 1, ..., n$ e $i \neq j$, allora β è una *base ortogonale* di V.

3) Se β è linearmente indipendente, genera $V, < \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j >= 0$ per ogni $i, j = 1, ..., n$ e $i \neq j$, e $\|\mathbf{v}_i\| = 1$ per ogni $i = 1, ..., n$, allora β è una *base ortonormale* di V.[1]

Esempio. La base canonica $\beta = (\mathbf{v}_1 = (1, 0), \mathbf{v}_2 = (0, 1))$ è una base ortonormale di $\mathbf{R}^2$ (come si verifica facilmente).

Più in generale la base canonica di $\mathbf{R}^n$ è una base ortonormale di $\mathbf{R}^n$.

---

[1] Utilizzando il **simbolo di Kronecker** δ_{ij}, definito da $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = j \\ 0 & \text{se} \quad i \neq j \end{cases}$, $i, j \in \mathbf{N}$, si può dire che $\beta = (\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n)$ è una base ortonormale di V se β è una base di V e $< \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j >= \delta_{ij}$, $i, j = 1, ..., n$.

Si ha la seguente

Proposizione 4.2.

iii) $\|\alpha\mathbf{v}\| = |\alpha|\|\mathbf{v}\| \quad \forall\alpha \in \mathbf{R}$ *e* $\forall\mathbf{v} \in \mathbf{V}$.

iv) Se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ *allora* $\dfrac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\left(= \dfrac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}\right)$ *è un vettore unità.*

v) $\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\| \leq \|\mathbf{v}_1\| + \|\mathbf{v}_2\| \quad \forall\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ *(disuguaglianza triangolare).*

vi) Se $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ *e* $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$, *allora* $\mathbf{v} - c\mathbf{w} \perp \mathbf{w}$ *(dove* $c = \dfrac{<\mathbf{v},\mathbf{w}>}{<\mathbf{w},\mathbf{w}>}$*).*

(Si dimostra che se $V = V_3$, allora $\mathbf{v} - c\mathbf{w}$ risulta effettivamente perpendicolare, in senso geometrico, a $\mathbf{w}$.)

<u>Dimostrazione di iii),iv),vi)</u>.

iii) Si ha successivamente

$$\|\alpha\mathbf{v}\| = \sqrt{<\alpha\mathbf{v}, \alpha\mathbf{v}>} = \sqrt{\alpha^2 <\mathbf{v},\mathbf{v}>} = |\alpha|\sqrt{<\mathbf{v},\mathbf{v}>} = |\alpha|\|\mathbf{v}\| \ .$$

iv) Calcoliamo la norma di $\dfrac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$. Si ha

$$\left\|\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\right\| = \left\|\frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}\right\| = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\|\mathbf{v}\| = 1 \ .$$

vi) Si ha:

$$<\mathbf{v} - c\mathbf{w}, \mathbf{w}> = <\mathbf{v},\mathbf{w}> - c<\mathbf{w},\mathbf{w}> = <\mathbf{v},\mathbf{w}> - \frac{<\mathbf{v},\mathbf{w}>}{<\mathbf{w},\mathbf{w}>}<\mathbf{w},\mathbf{w}> = 0$$

e pertanto $\mathbf{v} - c\mathbf{w} \perp \mathbf{w}$.

Vediamo ora alcuni esempi che chiariscono i vari concetti ora introdotti.

<u>Esempio 1</u>. Calcolare:

a) $<(1,2,-5),(3,-7,-1)>$

b) $<(2,3),(-7,5)>$

c) $<(2,-1,4,-3),(2,1,-1,1)>$

d) $<(1,-6,7),(1,-1,1)>$

<u>Sol.</u>: a) $<(1,2,-5),(3,-7,-1)> = 1\cdot 3 + 2(-7) + (-5)(-1) = 3 - 14 + 5 = -6$.

b) $<(2,3),(-7,5)> = -14 + 15 = 1$.

c) $< (2,-1,4,-3),(2,1,-1,1) >= 2\cdot 2+(-1)\cdot 1+4(-1)+(-3)\cdot 1 = 4-1-4-3=-4.$

d) $< (1,-6,7),(1,-1,1) >= 1\cdot 1+(-6)\cdot(-1)+7\cdot 1 = 1+6+7=14.$

Esempio 2. Dire se i vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono perpendicolari.

a) $\mathbf{v}_1 = (1,2,3), \mathbf{v}_2 = (1,1,-1)$

b) $\mathbf{v}_1 = (1,2), \mathbf{v}_2 = (6,-3)$

c) $\mathbf{v}_1 = (1,2,3,-5), \mathbf{v}_2 = (1,1,1,1)$

d) $\mathbf{v}_1 = (1,2,3,6), \mathbf{v}_2 = (1,1,1,-1)$

Sol.: i vettori di a),b),d) sono perpendicolari in quanto $< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 >= 0$ mentre i vettori di c) non lo sono perché $< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 >= 1$ e perciò $< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 > \neq 0$.

Esempio 3. Sia $\mathbf{v} = (2,-5)$. Trovare $\|\mathbf{v}\|$ e verificare che $\dfrac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$ è un vettore unità.

Sol.: $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{< \mathbf{v},\mathbf{v} >} = \sqrt{< (2,-5),(2,-5) >} = \sqrt{4+25}$, quindi $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{29}$.

Si ha poi

$$\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{29}}(2,-5)$$

quindi

$$\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \left(\frac{2}{\sqrt{29}}, -\frac{5}{\sqrt{29}}\right).$$

Inoltre:

$$\left\|\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\right\| = \left\|\left(\frac{2}{\sqrt{29}}, -\frac{5}{\sqrt{29}}\right)\right\| = \sqrt{< (\frac{2}{\sqrt{29}}, -\frac{5}{\sqrt{29}}), (\frac{2}{\sqrt{29}}, -\frac{5}{\sqrt{29}}) >} =$$

$$= \sqrt{\frac{4}{29}+\frac{25}{29}} = 1$$

e perciò $\dfrac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$ è un vettore unità.

Osservazione. Se $\mathbf{v} = (x_1, ..., x_n)$ è un vettore dello s.e.r. $\mathbf{R}^n$ allora

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{< \mathbf{v},\mathbf{v} >} = \sqrt{< (x_1,...,x_n),(x_1,...,x_n) >}$$

e pertanto

$$\|(x_1,...,x_n)\| = \sqrt{x_1^2+...+x_n^2}.$$

Esempio 4. Siano $\mathbf{v} = (1,3), \mathbf{w} = (4,2)$.

a) Trovare il coefficiente di Fourier di $\mathbf{v}$ rispetto a $\mathbf{w}$.

b) Determinare il vettore, che indicheremo con $(\mathbf{v})_{\mathbf{w}}$, proiezione di $\mathbf{v}$ su $\mathbf{w}$.

c) Verificare che $\mathbf{v} - (\mathbf{v})_{\mathbf{w}}$ è perpendicolare a $\mathbf{w}$.

Sol.: a) Si ha:

$$c = \frac{<\mathbf{v},\mathbf{w}>}{<\mathbf{w},\mathbf{w}>} = \frac{<(1,3),(4,2)>}{<(4,2),(4,2)>} = \frac{4+6}{16+4}$$

quindi $c = \frac{1}{2}$.

b) $(\mathbf{v})_{\mathbf{w}} = c\mathbf{w} = \frac{1}{2}(4,2)$, ossia $(\mathbf{v})_{\mathbf{w}} = (2,1)$.

c) $\mathbf{v} - (\mathbf{v})_{\mathbf{w}} = (1,3) - (2,1) = (-1,2)$ e

$$<\mathbf{v} - (\mathbf{v})_{\mathbf{w}}, \mathbf{w}> = <(-1,2),(4,2)> = -4+4 = 0$$

e quindi $\mathbf{v} - (\mathbf{v})_{\mathbf{w}} \perp \mathbf{w}$.

Esempio 5. Verificare che:

a) $\beta = (\mathbf{v}_1 = (1,1), \mathbf{v}_2 = (2,-2))$ è una base ortogonale di $\mathbf{R}^2$.

b) $\beta = \left(\mathbf{v}_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), \mathbf{v}_2 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0), \mathbf{v}_3 = (0,0,1)\right)$ è una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$.

Sol.: a) Osservato che:

- β è un sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$,
- β è linearmente indipendente (come si verifica facilmente),
- il numero degli elementi di β coincide con la dimensione di $\mathbf{R}^2$,

possiamo concludere (vedi Teorema 1.6. 2)) che β è una base di $\mathbf{R}^2$.

Inoltre $<\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2> = <(1,1),(2,-2)> = 2-2 = 0$ e quindi β è una base ortogonale di $\mathbf{R}^2$. Si osservi poi che $\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ (oppure $\|\mathbf{v}_2\| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$) e quindi β non è una base ortonormale.

b) Osservato che:

- β è un sottoinsieme di $\mathbf{R}^3$,
- β è linearmente indipendente (come si verifica facilmente),

• il numero degli elementi di β coincide con la dimensione di $\mathbf{R}^3$,

possiamo concludere (vedi Teorema 1.6. 2)) che β è una base di $\mathbf{R}^3$.

È poi $< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 >= 1/2 - 1/2 = 0, < \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 >= 0, < \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 >= 0$ e quindi β è una base ortogonale di $\mathbf{R}^3$. Essendo inoltre $\|\mathbf{v}_1\| = \|\mathbf{v}_2\| = \sqrt{1/2 + 1/2} = 1$ e $\|\mathbf{v}_3\| = \sqrt{1} = 1$, si conclude che β è una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$.

§2. Coordinate di un vettore rispetto ad una base ortonormale

Premessa. Sia $\beta = ((1,0),(0,1))$ la base canonica di $\mathbf{R}^2$. Come visto in precedenza β è una base ortonormale e $M_\beta((x,y)) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Osservato poi che $< (x,y),(1,0) >= x$ e $< (x,y),(0,1) >= y$ si ha anche

$$M_\beta((x,y)) = \begin{pmatrix} < (x,y),(1,0) > \\ < (x,y),(0,1) > \end{pmatrix}.$$

Questa proprietà si può generalizzare ad una qualunque base ortonormale di uno s.e.r., come precisato dal seguente

Teorema 4.3.

Se $\beta = (\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n)$ è una base ortonormale dello s.e.r. V e $\mathbf{v} \in V$, allora:

$$M_\beta(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} < \mathbf{v}, \mathbf{v}_1 > \\ < \mathbf{v}, \mathbf{v}_2 > \\ \vdots \\ < \mathbf{v}, \mathbf{v}_n > \end{pmatrix}.$$

($M_\beta(\mathbf{v})$ sono le coordinate di $\mathbf{v}$ rispetto a β).

Dimostrazione.

Scriviamo $\mathbf{v}$ come combinazione lineare degli elementi di β, $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + ... + a_n\mathbf{v}_n$.

Allora, per definizione di coordinate di $\mathbf{v}$ rispetto a β, si ha $M_\beta(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

Tenendo presente che la base β è ortonormale, ossia $< \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j >= \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = j \\ 0 & \text{se} \quad i \neq j \end{cases}$

per $i, j = 1, ..., n$, si ha:

$$< \mathbf{v}, \mathbf{v}_1 >= a_1 < \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 > + a_2 < \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 > + ... + a_n < \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_1 >= a_1$$

e analogamente $< \mathbf{v}, \mathbf{v}_2 >= a_2, \quad ... \quad , < \mathbf{v}, \mathbf{v}_n >= a_n$. Quindi

$$M_\beta(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} < \mathbf{v}, \mathbf{v}_1 > \\ < \mathbf{v}, \mathbf{v}_2 > \\ \vdots \\ < \mathbf{v}, \mathbf{v}_n > \end{pmatrix}.$$

Esempio. Sia $\beta = \Big(\mathbf{v}_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), \mathbf{v}_2 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0), \mathbf{v}_3 = (0, 0, 1)\Big)$.

a) Verificare che β è una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$.

b) Calcolare $M_\beta((x, y, z))$.

Sol.: a) Vedi esempio 5 b) di pag.182.

b) Usando il precedente teorema si ha

$$M_\beta((x, y, z)) = \begin{pmatrix} < (x, y, z), \mathbf{v}_1 > \\ < (x, y, z), \mathbf{v}_2 > \\ < (x, y, z), \mathbf{v}_3 > \end{pmatrix}$$

ossia

$$M_\beta((x,y,z)) = \begin{pmatrix} \dfrac{x+y}{\sqrt{2}} \\ \\ \dfrac{x-y}{\sqrt{2}} \\ \\ z \end{pmatrix}.$$

Lasciamo al lettore verificare che lo stesso risultato si ottiene applicando la definizione di coordinate di un vettore rispetto ad una base.

§3. Costruzione di una base ortogonale (procedimento di Gram-Schmidt)

Vediamo ora come si possa costruire una base ortogonale di uno spazio euclideo reale a partire da una sua qualunque base.

Sia $\beta = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n)$ una base dello s.e.r. V. Poniamo:

$$\mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}_1$$

$$\mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{< \mathbf{v}_2, \mathbf{v}'_1 >}{< \mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_1 >}\mathbf{v}'_1$$

$$\mathbf{v}'_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{< \mathbf{v}_3, \mathbf{v}'_1 >}{< \mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_1 >}\mathbf{v}'_1 - \frac{< \mathbf{v}_3, \mathbf{v}'_2 >}{< \mathbf{v}'_2, \mathbf{v}'_2 >}\mathbf{v}'_2$$

e così via fino a $\mathbf{v}'_n$.

Si dimostra che $\beta' = (\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, ..., \mathbf{v}'_n)$ è una base ortogonale di V,detta **base ortogonale ottenuta da β attraverso il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt**. Inoltre se "normalizziamo" gli elementi di β' (ossia dividiamo ciascun elemento di β' per la propria norma) otteniamo una base ortonormale di V, cioè

$$\beta'' = (\mathbf{v}''_1 = \frac{\mathbf{v}'_1}{\|\mathbf{v}'_1\|}, ..., \mathbf{v}''_n = \frac{\mathbf{v}'_n}{\|\mathbf{v}'_n\|})$$

Università di Ferrara
BIBLIOTECA
Biblioteca Scientifico-Tecnologica

è la **base ortonormale di V ottenuta normalizzando gli elementi della base ortogonale** β'.

Verifichiamo soltanto che $\mathbf{v}_1' \perp \mathbf{v}_2'$, ossia che $< \mathbf{v}_1', \mathbf{v}_2' >= 0$. Si ha

$$< \mathbf{v}_1', \mathbf{v}_2' >=< \mathbf{v}_1', \mathbf{v}_2 - \frac{< \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1' >}{< \mathbf{v}_1', \mathbf{v}_1' >}\mathbf{v}_1' >=< \mathbf{v}_1', \mathbf{v}_2 > - \frac{< \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1' >}{< \mathbf{v}_1', \mathbf{v}_1' >} < \mathbf{v}_1', \mathbf{v}_1' >= 0$$

quindi $\mathbf{v}_1' \perp \mathbf{v}_2'$.

Esempio. Sia $\beta = (\mathbf{v}_1 = (1,1), \mathbf{v}_2 = (2,-1))$ una base di $\mathbf{R}^2$.

a) Costruire la base ortogonale $\beta' = (\mathbf{v}_1', \mathbf{v}_2')$ ottenuta da β attraverso il procedimento di Gram-Schmidt.

b) Determinare la base ortonormale β'' ottenuta normalizzando gli elementi di β'.

c) Trovare le coordinate del generico elemento (x, y) di $\mathbf{R}^2$ rispetto a β''.

Sol.: a) $\beta' = (\mathbf{v}_1', \mathbf{v}_2')$ dove

$$\mathbf{v}_1' = \mathbf{v}_1 \quad \text{e quindi} \quad \mathbf{v}_1' = (1,1)$$

$$\mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_2 - \frac{< \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1' >}{< \mathbf{v}_1', \mathbf{v}_1' >}\mathbf{v}_1' = (2,-1) - \frac{< (2,-1),(1,1) >}{< (1,1),(1,1) >}(1,1) = (2,-1) - \frac{1}{2}(1,1)$$

$$\text{e perciò} \quad \mathbf{v}_2' = \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

Quindi

$$\beta' = \left(\mathbf{v}_1' = (1,1)\ ,\ \mathbf{v}_2' = \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)\right)$$

è la base ortogonale di $\mathbf{R}^2$ ottenuta da β attraverso il procedimento di Gram-Schmidt.

b) Si ha

$$\beta'' = \left(\mathbf{v}_1'' = \frac{\mathbf{v}_1'}{\|\mathbf{v}_1'\|}, \mathbf{v}_2'' = \frac{\mathbf{v}_2'}{\|\mathbf{v}_2'\|}\right)$$

ed essendo $\|\mathbf{v}_1'\| = \sqrt{2}$ e $\|\mathbf{v}_2'\| = 3\sqrt{2}/2$ si ha

$$\beta'' = \left(\mathbf{v}_1'' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \mathbf{v}_2'' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right),$$

che è la base ortonormale di $\mathbf{R}^2$ ottenuta normalizzando gli elementi di β'.

c) Risulta

$$M_{\beta''}((x,y)) = \begin{pmatrix} < (x,y), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) > \\ \\ < (x,y), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) > \end{pmatrix}$$

e perciò

$$M_{\beta''}((x,y)) = \begin{pmatrix} \frac{x+y}{\sqrt{2}} \\ \\ \frac{x-y}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

§4. Matrice di passaggio tra due basi ortonormali

Vediamo ora la relazione che intercorre tra le coordinate di uno stesso vettore rispetto a due basi ortonormali. Diamo prima la seguente

Definizione. Siano $\beta = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n)$ e $\beta' = (\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, ..., \mathbf{v}'_n)$ due basi ortonormali di uno s.e.r. V. Poniamo

$$M^{\beta}_{\beta'} = \begin{pmatrix} < \mathbf{v}_1, \mathbf{v}'_1 > & < \mathbf{v}_2, \mathbf{v}'_1 > & \dots & < \mathbf{v}_n, \mathbf{v}'_1 > \\ \\ < \mathbf{v}_1, \mathbf{v}'_2 > & < \mathbf{v}_2, \mathbf{v}'_2 > & \dots & < \mathbf{v}_n, \mathbf{v}'_2 > \\ \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \\ < \mathbf{v}_1, \mathbf{v}'_n > & < \mathbf{v}_2, \mathbf{v}'_n > & \dots & < \mathbf{v}_n, \mathbf{v}'_n > \end{pmatrix}.$$

(la j-esima colonna di $M^{\beta}_{\beta'}$ è la n-upla delle coordinate di $\mathbf{v}_j$ rispetto a β' e la i-esima riga è la n-upla delle coordinate di $\mathbf{v}'_i$ rispetto a β).

La matrice $M^{\beta}_{\beta'}$ si dice **matrice di passaggio dalla base ortonormale β alla base ortonormale β'**.

Osservazione. Dato che $< \mathbf{v}_i, \mathbf{v}'_j >=< \mathbf{v}'_j, \mathbf{v}_i >$ si ha che $M_\beta^{\beta'} = (M_{\beta'}^\beta)_{-1}$ e $M_{\beta'}^\beta = (< \mathbf{v}'_i, \mathbf{v}_j >)$.

Osservazione. In V_2 o V_3, essendo $\vec{v}_i$ e $\vec{v}'_j$ versori, si ha

$$< \vec{v}_i, \vec{v}'_j >= \cos \widehat{\vec{v}_i \vec{v}'_j}.$$

Si dimostra la seguente

Proposizione 4.4.

Siano β e β' due basi ortonormali dello s.e.r. V e sia $\mathbf{v} \in V$. Allora

$$\underbrace{M_{\beta'}(\mathbf{v})}_{\substack{\textit{coordinate di } \mathbf{v} \\ \textit{rispetto a } \beta'}} = M_{\beta'}^\beta \cdot \underbrace{M_\beta(\mathbf{v})}_{\substack{\textit{coordinate di } \mathbf{v} \\ \textit{rispetto a } \beta}} .$$

Osservazione. $M_{\beta'}^\beta$ "permette di passare" dalle coordinate di $\mathbf{v}$ rispetto a β a quelle di $\mathbf{v}$ rispetto a β'.

Esempio. Siano $\beta = (\mathbf{v}_1 = (-1, 0), \mathbf{v}_2 = (0, 1))$ e $\beta' = \left(\mathbf{v}'_1 = \left(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}\right), \mathbf{v}'_2 = \left(2/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5}\right)\right)$ due basi ortonormali di $\mathbf{R}^2$. Trovare:

a) $M_\beta((x, y))$;

b) $M_{\beta'}((x, y))$;

c) $M_{\beta'}^\beta$ e verificare che

i) $M_{\beta'}(\mathbf{v}) = M_{\beta'}^\beta M_\beta(\mathbf{v})$, per $\mathbf{v} = (x, y)$

ii) $\left(M_{\beta'}^\beta\right)^{-1} = (M_{\beta'}^\beta)_{-1}$.

Sol.: a) Risulta

$$M_\beta((x, y)) = \begin{pmatrix} < (x, y), \mathbf{v}_1 > \\ < (x, y), \mathbf{v}_2 > \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} < (x, y), (-1, 0) > \\ < (x, y), (0, 1) > \end{pmatrix}$$

e quindi

$$M_\beta((x, y)) = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} .$$

b) Procedendo in modo analogo si ottiene

$$M_{\beta'}((x,y)) = \begin{pmatrix} \dfrac{x+2y}{\sqrt{5}} \\ \\ \dfrac{2x-y}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} .$$

c) Si ha

$$M^{\beta}_{\beta'} = \begin{pmatrix} < \mathbf{v}_1, \mathbf{v}'_1 > & < \mathbf{v}_2, \mathbf{v}'_1 > \\ \\ < \mathbf{v}_1, \mathbf{v}'_2 > & < \mathbf{v}_2, \mathbf{v}'_2 > \end{pmatrix}$$

e quindi

$$M^{\beta}_{\beta'} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \\ -\dfrac{2}{\sqrt{5}} & -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} .$$

i) Risulta

$$M^{\beta}_{\beta'} M_{\beta}((x,y)) = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \\ -\dfrac{2}{\sqrt{5}} & -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x+2y}{\sqrt{5}} \\ \\ \dfrac{2x-y}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = M_{\beta'}((x,y)) .$$

e quindi $M^{\beta}_{\beta'} M_{\beta}((x,y)) = M_{\beta'}((x,y))$.

ii) Poiché

$$|M^{\beta}_{\beta'}| = \begin{vmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \\ -\dfrac{2}{\sqrt{5}} & -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{vmatrix} = 1$$

e quindi $|M^{\beta}_{\beta'}| \neq 0$, $M^{\beta}_{\beta'}$ è invertibile e risulta

$$\left(M^{\beta}_{\beta'}\right)^{-1} = \frac{1}{|M^{\beta}_{\beta'}|}\left(\mathrm{Agg}M^{\beta}_{\beta'}\right)_{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \left(M^{\beta}_{\beta'}\right)_{-1}$$

e quindi

$$\left(M^{\beta}_{\beta'}\right)^{-1} = (M^{\beta}_{\beta'})_{-1}\,.$$

Esempio. Siano $\beta = (\vec{i}, \vec{j})$ e $\beta' = (\vec{i}', \vec{j}')$ due basi ortonormali di V_2 come in figura 1.

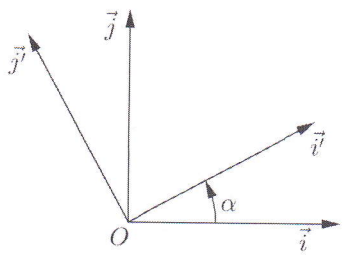


Figura 1: Rotazione di una base ortonormale

Trovare $M^{\beta}_{\beta'}$.

Sol.:

$$M^{\beta}_{\beta'} = \begin{pmatrix} <\vec{i}, \vec{i}'> & <\vec{j}, \vec{i}'> \\ <\vec{i}, \vec{j}'> & <\vec{j}, \vec{j}'> \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \cos(\pi/2 - \alpha) \\ \cos(\pi/2 + \alpha) & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

In questo caso la base β' è ottenuta da β attraverso una *rotazione* di angolo α in verso antiorario. In particolare per $\alpha = \pi/4$ si ottiene

$$M^{\beta}_{\beta'} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

Esempio. Siano $\beta = (\vec{i}, \vec{j})$ e $\beta' = (\vec{i}', \vec{j}')$ due basi ortonormali di V_2 come in figura 2.

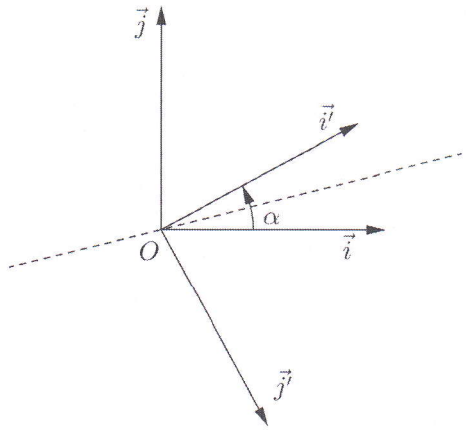


Figura 2: Simmetria assiale di una base ortonormale

Trovare $M^{\beta}_{\beta'}$.

Sol.: ragionando come nell'esempio precedente si ottiene

$$M^{\beta}_{\beta'} = \begin{pmatrix} <\vec{i},\vec{i'}> & <\vec{j},\vec{i'}> \\ <\vec{i},\vec{j'}> & <\vec{j},\vec{j'}> \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

In questo caso la base β' è ottenuta da β attraverso una *simmetria assiale* di asse la retta passante per l'origine e che forma un angolo di $\alpha/2$ con $\vec{i}$. In particolare per $\alpha = \pi/2$ si ottiene

$$M^{\beta}_{\beta'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Osservazione. Nel caso della *rotazione* si ha $|M^{\beta}_{\beta'}| = 1$ mentre nella *simmetria assiale* risulta $|M^{\beta}_{\beta'}| = -1$.

§5. Matrici ortogonali

Nel penultimo esempio abbiamo incontrato una matrice $(M^{\beta}_{\beta'})$ avente la proprietà che la sua inversa coincide con la sua trasposta. Questa proprietà caratterizza un importante insieme di matrici. Precisamente

Definizione. Sia $A \in M_n(\mathbf{R})$. Si dice che A è una **matrice ortogonale** o **unitaria reale** se A è invertibile e $A^{-1} = A_{-1}$ (l'inversa di A è uguale alla trasposta di A).

Proposizione 4.5.

A è ortogonale $\iff AA_{-1} = I$.

Dimostrazione.

$\Rightarrow$ (Ipotesi) A è ortogonale $\to A^{-1} = A_{-1} \to AA_{-1} = AA^{-1} = I \to AA_{-1} = I$ (tesi).

$\Leftarrow$ (Ipotesi) $AA_{-1} = I \to$ (sappiamo che se $AB = I$ allora $B = A^{-1}$) $A_{-1} = A^{-1} \to A$ è ortogonale (tesi).

N.B. Analogamente A è ortogonale $\iff A_{-1}A = I$.

Osservazione. A è ortogonale $\iff AA_{-1} = I \iff (A_{-1})_{-1}A_{-1} = I \iff A_{-1}$ è ortogonale.

Osservazione. Per verificare se una matrice A è ortogonale, conviene usare la Proposizione 4.5 e non la definizione.

Esempio. Verificare che

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \\ -\frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$$

è una matrice ortogonale.

Sol.: si ha

$$AA_{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \\ -\frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & -\frac{3}{\sqrt{13}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi $AA_{-1} = I$ e perciò A è ortogonale (vedi Proposizione 4.5).

Si ha la seguente

Proposizione 4.6.

Sia $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{R})$.

a) A è ortogonale $\iff$ le righe (o le colonne) di A formano una base ortonormale di $\mathbf{R}^n$.

b) A è ortogonale $\iff$ A è una matrice di passaggio tra due basi ortonormali di $\mathbf{R}^n$.

c) Se A è ortogonale allora $|A| = 1$ oppure $|A| = -1$ (non vale l'implicazione inversa).

d) Se A è ortogonale, allora $A_{ij} = a_{ij}$ oppure $A_{ij} = -a_{ij}$ (non vale l'implicazione inversa).

Dimostrazione di a),c),d).

a) $(n = 2)$ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è ortogonale $\iff$ $AA_{-1} = I$ $\iff$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} a^2+b^2 = 1 \\ ac+bd = 0 \\ c^2+d^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \|(a,b)\| = 1 \\ <(a,b),(c,d)> = 0 \\ \|(c,d)\| = 1 \end{cases} \iff$$

$\iff$ $\beta = (\mathbf{v}_1 = (a,b), \mathbf{v}_2 = (c,d))$ è una base ortonormale di $\mathbf{R}^2$ $\iff$ le righe di A formano una base ortonormale di $\mathbf{R}^2$.

Per le colonne basta considerare $A_{-1}A = I$.

c) (Ipotesi) A è una matrice ortogonale. Quindi $AA_{-1} = I$ e pertanto $|AA_{-1}| = |I|$. Poiché $|AB| = |A||B|$, $|A_{-1}| = |A|$ e $|I| = 1$ si ha $|AA_{-1}| = |A||A_{-1}| = |A|^2$ e quindi $|A|^2 = 1$, da cui $|A| = \pm 1$ (tesi).

d) (Ipotesi) A è una matrice ortogonale. Quindi $A^{-1} = A_{-1}$, cioè

$$\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Poiché $|A| = \pm 1$ (vedi c)), si ha:

se $|A| = 1$ allora $A_{ij} = a_{ij}$,

se $|A| = -1$ allora $A_{ij} = -a_{ij}$

e perciò $A_{ij} = a_{ij}$ oppure $A_{ij} = -a_{ij}$ (tesi).

Non vale il viceversa di c). Ad esempio la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ è tale che $|A| = 1$, ma A non è ortogonale, infatti

$$AA_{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \neq I\ .$$

Non vale il viceversa di d). Ad esempio la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ è tale che $A_{ij} = a_{ij}$ per $i, j = 1, 2$, ma A non è ortogonale, infatti

$$AA_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \neq I\ .$$

Proposizione 4.7.

Se $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ sono ortogonali, allora anche AB è ortogonale.

Dimostrazione.

(Ipotesi) A e B ortogonali $\rightarrow$ $AA_{-1} = I$ e $BB_{-1} = I$. Segue che $(AB)(AB)_{-1} = ABB_{-1}A_{-1} = AIA_{-1} = AA_{-1} = I \rightarrow (AB)(AB)_{-1} = I$. In conclusione AB è ortogonale (tesi).

Notiamo che non vale l'implicazione inversa. Ad esempio Se $|A| = \alpha$ (con $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq \pm 1$), allora $AA^{-1} = I$ e I è ortogonale, ma nè A, nè A^{-1} sono ortogonali, perché i loro determinanti sono diversi da ± 1.

Esempio. Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Verificare che A è ortogonale.

b) "Descrivere geometricamente" la funzione $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ definita da $f((x,y)) = \left[A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right]_{-1}$.

Sol.: a) Si ha:

$$AA_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

e quindi A è ortogonale.

b) Essendo

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

si ha $f((x,y)) = (y,x)$ e quindi, interpretando (x,y) come coordinate di un punto in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, f rappresenta la simmetria assiale rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

§6. Applicazioni del prodotto scalare alla geometria analitica nello spazio

Premessa. Le dimostrazioni seguenti richiedono che il sistema di riferimento sia ortonormale, in modo che il prodotto scalare di due vettori di $\mathbf{R}^3$ sia proprio la somma dei prodotti delle loro coordinate (cioè i versori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ degli assi cartesiani devono formare una base ortonormale di V_3).

Abbiamo visto che, per definizione, i parametri direttori (p.d.) di una retta r sono le componenti ℓ, m, n di un vettore $\mathbf{v}_r$ parallelo ad r, quindi la **direzione** di r è individuata da un **vettore parallelo a** r.

Utilizzando il concetto di prodotto scalare si dimostra la seguente

Proposizione 4.8.

Se il piano π ha equazione $ax + by + cz + d = 0$ allora

$$\pi \perp v_\pi = (a, b, c) \ .$$

Osservazione. La **giacitura** di un piano π è individuata da un **vettore perpendicolare a** π.

Possiamo ora dimostrare alcune proprietà di geometria analitica già enunciate nel capitolo 3. Precisamente si ha il seguente

Teorema 4.9.

Siano ℓ, m, n i p.d. della retta r e siano ℓ_1, m_1, n_1 i p.d. della retta r_1. Siano inoltre $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$ e $\pi_1 \equiv a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ due piani. Allora:

i) $r \parallel r_1 \iff \dfrac{\ell}{\ell_1} = \dfrac{m}{m_1} = \dfrac{n}{n_1}$,

ii) $\pi \parallel \pi_1 \iff \dfrac{a}{a_1} = \dfrac{b}{b_1} = \dfrac{c}{c_1}$,

iii) $\pi \perp r \iff \dfrac{a}{\ell} = \dfrac{b}{m} = \dfrac{c}{n}$.

Dimostrazione.

i) Poiché $\mathbf{v}_r = (\ell, m, n) \parallel r$ e $\mathbf{v}_{r_1} = (\ell_1, m_1, n_1) \parallel r_1$ si ha:

$$r \parallel r_1 \iff \mathbf{v}_r \parallel \mathbf{v}_{r_1} \iff \exists \alpha \in \mathbf{R}\backslash\{0\} \ : \begin{cases} \ell = \alpha\ell_1 \\ m = \alpha m_1 \\ n = \alpha n_1 \end{cases} \iff$$

$$\iff \text{(impropriamente)} \ \frac{\ell}{\ell_1} = \frac{m}{m_1} = \frac{n}{n_1} \ .$$

ii) Poiché $\mathbf{v}_\pi = (a, b, c) \perp \pi$ e $\mathbf{v}_{\pi_1} = (a_1, b_1, c_1) \perp \pi_1$ si ha:

$$\pi \parallel \pi_1 \iff \mathbf{v}_\pi \parallel \mathbf{v}_{\pi_1} \iff \text{(ragionando come in i))} \ \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} \ .$$

iii) Poiché $\mathbf{v}_\pi = (a, b, c) \perp \pi$ e $\mathbf{v}_r = (\ell, m, n) \parallel r$ si ha:

$$\pi \perp r \iff \mathbf{v}_\pi \parallel \mathbf{v}_r \iff \text{(ragionando come in i))} \ \frac{a}{\ell} = \frac{b}{m} = \frac{c}{n} \ .$$

Utilizzando il concetto di vettori ortogonali possiamo completare la dimostrazione di altre proprietà di geometria analitica dello spazio già enunciate. Precisamente si ha il seguente

Teorema 4.10.

Siano ℓ, m, n i p.d. della retta r e siano ℓ_1, m_1, n_1 i p.d. della retta r_1. Siano inoltre $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$ e $\pi_1 \equiv a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ due piani. Allora:

i) $r \perp r_1 \iff \ell\ell_1 + mm_1 + nn_1 = 0,$

ii) $\pi \perp \pi_1 \iff aa_1 + bb_1 + cc_1 = 0,$

iii) $\pi \parallel r \iff a\ell + bm + cn = 0.$

Dimostrazione.

i) Poiché $\mathbf{v}_r = (\ell, m, n) \parallel r$ e $\mathbf{v}_{r_1} = (\ell_1, m_1, n_1) \parallel r_1$ si ha:

$$r \perp r_1 \iff \mathbf{v}_r \perp \mathbf{v}_{r_1} \iff < \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_{r_1} >= 0 \iff < (\ell, m, n), (\ell_1, m_1, n_1) >= 0 \iff$$

$$\iff \ell\ell_1 + mm_1 + nn_1 = 0 \ .$$

ii) Poiché $\mathbf{v}_\pi = (a, b, c) \perp \pi$ e $\mathbf{v}_{\pi_1} = (a_1, b_1, c_1) \perp \pi_1$ si ha:

$$\pi \perp \pi_1 \iff \mathbf{v}_\pi \perp \mathbf{v}_{\pi_1} \iff < \mathbf{v}_\pi, \mathbf{v}_{\pi_1} >= 0 \iff < (a, b, c), (a_1, b_1, c_1) >= 0 \iff$$

$$\iff aa_1 + bb_1 + cc_1 = 0 \ .$$

iii) Poiché $\mathbf{v}_r = (\ell, m, n) \parallel r$ e $\mathbf{v}_\pi = (a, b, c) \perp \pi$ si ha:

$$\pi \parallel r \iff \mathbf{v}_\pi \perp \mathbf{v}_r \iff < (a, b, c), (\ell, m, n) >= 0 \iff a\ell + bm + cn = 0 \ .$$

Osservazione. Abbiamo visto che, dati due vettori di V_3, $\vec{v}_1(x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v}_2(x_2, y_2, z_2)$, il prodotto scalare $< \vec{v}_1, \vec{v}_2 >$ è uguale a $\|\vec{v}_1\|\|\vec{v}_2\| \cos \widehat{\vec{v}_1\vec{v}_2}$ ed è anche uguale a $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$. Pertanto, conoscendo i due vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2$, si può ricavare il coseno di $\widehat{\vec{v}_1\vec{v}_2}$ in quanto

$$\cos \widehat{\vec{v}_1\vec{v}_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\|\vec{v}_1\|\|\vec{v}_2\|} \ .$$

Applichiamo adesso tale formula per ricavare l'angolo formato da due rette delle quali siano noti i parametri direttori.

Più precisamente se r ha parametri direttori ℓ, m, n e r_1 ha parametri direttori ℓ_1, m_1, n_1, allora $r \parallel \vec{v}(\ell, m, n)$ e $r_1 \parallel \vec{v}_1(\ell_1, m_1, n_1)$. Pertanto il coseno dell'angolo formato dalle due rette è dato da

$$\cos \widehat{rr_1} = \pm \cos \widehat{\vec{v}\vec{v}_1} = \pm \frac{\ell\ell_1 + mm_1 + nn_1}{\sqrt{\ell^2 + m^2 + n^2}\sqrt{\ell_1^2 + m_1^2 + n_1^2}} \ .$$

Abbiamo visto che dati i piani $\pi_1 \equiv a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ e $\pi_2 \equiv a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$, allora $\pi_1 \perp \vec{v}_1(a_1, b_1, c_1)$, mentre $\pi_2 \perp \vec{v}_2(a_2, b_2, c_2)$. Pertanto il coseno dell'angolo formato dai due piani è dato da

$$\cos \widehat{\pi_1\pi_2} = \pm \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} \ .$$

Osservazione. Vediamo ora una dimostrazione della condizione di parallelismo retta-piano che non ricorre al concetto di prodotto scalare.

Siano dati il piano $\pi \equiv ax+by+cz+d=0$ e la retta $r \equiv \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 & (\pi_1) \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 & (\pi_2) \end{cases}$.

Discutiamo il problema di determinare gli eventuali punti di intersezione di π con r, ossia discutiamo il sistema

$$\begin{cases} ax+by+cz=-d \\ a_1x+b_1y+c_1z=-d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=-d_2 \end{cases}.$$

Si ha quindi

$$(A:B)=\begin{pmatrix} a & b & c & | & -d \\ a_1 & b_1 & c_1 & | & -d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & | & -d_2 \end{pmatrix}.$$

Notiamo che i piani che individuano r non possono essere paralleli, quindi le terne $(a_1,b_1,c_1),(a_2,b_2,c_2)$ non sono proporzionali e perciò $r(A)\geq 2$.

- Se $|A|\neq 0$ allora il sistema è di Cramer e ha una sola soluzione, perciò $\pi\cap r=\{P\}$ dove P indica il punto di intersezione di π e r.
- Se $|A|=0$ allora $r(A)=2$. Se $r(A:B)=3\neq r(A)$ il sistema non ha soluzioni e $r\cap\pi=\emptyset$. Se $r(A:B)=2=r(A)$ il sistema ha ∞^1 soluzioni, quindi $r\cap\pi=r$ e quindi r è contenuta in π.

Ricordando che $r \parallel \pi \iff r\cap\pi=\emptyset$ oppure $r\subseteq\pi$, si ha

$$r\parallel\pi \iff |A|=0 \iff \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}=0 \iff \text{(regola di Laplace sulla prima riga)}$$

$$\iff a\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}+b\left(-\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}\right)+c\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0 \iff$$

$$\text{(vedi calcolo dei parametri direttori di una retta)} \iff a\ell+bm+cn=0\ .$$

Conclusione:

$$r\parallel\pi \iff a\ell+bm+cn=0\ .$$

Osservazione. Si noti che $\mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right)$ è il prodotto vettoriale di $\mathbf{v}_{\pi_1} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\mathbf{v}_{\pi_2} = (a_2, b_2, c_2)$ e $\mathbf{v}_{\pi_1} \perp \pi_1, \mathbf{v}_{\pi_2} \perp \pi_2$, perciò $\mathbf{v}$ (essendo perpendicolare sia a $\mathbf{v}_{\pi_1}$ che a $\mathbf{v}_{\pi_2}$) risulta parallelo alla retta r e quindi le componenti di $\mathbf{v}$ sono proprio i parametri direttori della retta r.

ESERCIZI

1) Sia $\mathbf{v} = (1, -3, 2)$. Trovare $\|\mathbf{v}\|$ e verificare che $\dfrac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$ è un vettore unità.

2) Siano $\mathbf{v} = (1, 3, 1), \mathbf{w} = (4, 2, 0)$.

a) Trovare il coefficiente di Fourier di $\mathbf{v}$ rispetto a $\mathbf{w}$.

b) Determinare il vettore proiezione di $\mathbf{v}$ su $\mathbf{w}$.

c) Verificare che $\mathbf{v} - (\mathbf{v})_{\mathbf{w}}$ è perpendicolare a $\mathbf{w}$.

3) Verificare che:

a) $\beta = (\mathbf{v}_1 = (2, -1, 0), \mathbf{v}_2 = (3, 6, 0), \mathbf{v}_3 = (0, 0, 2))$ è una base ortogonale di $\mathbf{R}^3$.

b) $\beta = \left(\mathbf{v}_1 = (\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}), \mathbf{v}_2 = (\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}})\right)$ è una base ortonormale di $\mathbf{R}^2$.

4) Calcolare $\|(-10, 20, -30)\|$.

5) Trovare i vettori unità $\mathbf{v} = (x, y, z)$ di $\mathbf{R}^3$ tali che:

a) $\mathbf{v} \perp (1, 1, -2)$ e $\mathbf{v} \perp (2, -3, 1)$.

b) $\mathbf{v} \perp (1, 1, -2)$.

6) Trovare una base e la dimensione dei seguenti sottospazi di $\mathbf{R}^3$.

a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ (x, y, z) \perp (1, 1, -2)\}$.

b) $W = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ (x, y, z) \perp (1, 1, -2) \text{ e } (x, y, z) \perp (2, -3, 1)\}$.

7) Sia $\beta = \left(\mathbf{v}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), \mathbf{v}_2 = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), \mathbf{v}_3 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}})\right)$.

a) Verificare che β è una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$.

b) Calcolare $M_\beta((x, y, z))$.

8) Sia $\beta = (\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{v}_2 = (2, 3, 0), \mathbf{v}_3 = (3, 4, -2))$ una base di $\mathbf{R}^3$.

a) Costruire la base ortogonale $\beta' = (\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \mathbf{v}'_3)$ ottenuta da β attraverso il procedimento di Gram-Schmidt.

b) Determinare la base ortonormale β'' ottenuta normalizzando gli elementi di β'.

c) Trovare le coordinate del generico elemento (x, y, z) di $\mathbf{R}^3$ rispetto a β''.

9) Trovare una base ortonormale β'' di $W = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ x - y + 2z = 0\}$ e determinare $M_{\beta''}((3, 1, -1))$.

10) Siano $\beta = (\mathbf{v}_1 = (1, 0), \mathbf{v}_2 = (0, -1))$ e $\beta' = \left(\mathbf{v}'_1 = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right), \mathbf{v}'_2 = \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)\right)$ due basi ortonormali di $\mathbf{R}^2$. Trovare:

a) $M_\beta((x, y))$;

b) $M_{\beta'}((x, y))$;

c) $M^\beta_{\beta'}$ e verificare che

i) $M_{\beta'}(\mathbf{v}) = M^\beta_{\beta'} M_\beta(\mathbf{v})$

ii) $\left(M^\beta_{\beta'}\right)^{-1} = (M^\beta_{\beta'})_{-1}$.

11) Verificare se le seguenti matrici sono ortogonali:

$$a) \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} , \quad b) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad c) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

12) Determinare gli eventuali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \alpha \end{pmatrix}$$

risulta ortogonale.

13) Siano

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Verificare che A e B sono matrici ortogonali.

b) "Descrivere geometricamente" la funzione $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ definita da

$$f((x,y)) = \left[A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right]_{-1}$$

e la funzione $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ definita da

$$g((x,y)) = \left[B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right]_{-1} .$$

14) Siano

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Verificare che A e B sono matrici ortogonali.

b) "Descrivere geometricamente" la funzione $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita da $f((x,y,z)) = \left[A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right]_{-1}$ e la funzione $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita da $f((x,y,z)) = \left[B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right]_{-1}$.

15) Sia $\beta = (\mathbf{v}_1 = (2,6,0), \mathbf{v}_2 = (4,2,0), \mathbf{v}_3 = (0,0,1))$ una base di $\mathbf{R}^3$. Trovare:

a) la base ortogonale $\beta' = (\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \mathbf{v}'_3)$ ottenuta da β attraverso il procedimento di Gram-Schmidt,

b) la base ortonormale $\beta'' = (\mathbf{v}''_1, \mathbf{v}''_2, \mathbf{v}''_3)$ ottenuta normalizzando gli elementi di β',

c) le coordinate di $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ rispetto a β'',

d) le proiezioni di $\mathbf{v} = (x,y,z)$ su $\mathbf{v}_2$, di $\mathbf{v}$ su $\mathbf{v}'_2$ e di $\mathbf{v}$ su $\mathbf{v}''_2$.

16) Sia $\beta = (\mathbf{v}_1 = (-1,-2), \mathbf{v}_2 = (2,-6))$ una base di $\mathbf{R}^2$. Trovare:

a) la base ortogonale $\beta' = (\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2)$ ottenuta da β attraverso il procedimento di Gram-Schmidt,

b) indicata con β'' la base ortonormale ottenuta normalizzando gli elementi di β', verificare che la matrice A, che ha per righe gli elementi di β'', è ortogonale.

17) Se $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ sono matrici ortogonali che rappresentano rispettivamente una rotazione e una simmetria assiale, dire allora "cosa" rappresentano le seguenti matrici ortogonali:

$$a)\ AA \quad , \quad b)\ BB \quad , \quad c)\ AB$$

e darne una interpretazione geometrica.

18) Dimostrare che se $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ e AB è ortogonale e una delle due matrici (A o B) è ortogonale, allora anche l'altra è ortogonale.

19) Sia V uno s.e.r. e sia $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$. Dimostrare che se i vettori di S sono non nulli e a due a due ortogonali, allora S è linearmente indipendente.

20) Sia $\beta = (\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n)$ una base ortonormale dello s.e.r. V e siano $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + ... + a_n\mathbf{v}_n$ e $\mathbf{w} = b_1\mathbf{v}_1 + ... + b_n\mathbf{v}_n$ due vettori di V.

Dimostrare che:

a) $< \mathbf{v}, \mathbf{w} > = < (a_1, ..., a_n), (b_1, ..., b_n) >$,

b) $\|\mathbf{v}\| = \|(a_1, ..., a_n)\|$.

21) Dimostrare che $P(x, y, z)$ appartiene al piano π passante per l'origine e perpendicolare al vettore $\mathbf{v}_\pi(a, b, c) \iff ax + by + cz = 0$.

22) Sia $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$ e sia $P_0(x_0, y_0, z_0)$. Dimostrare che

$$d(P_0, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \ .$$

(Sugg.: trovare un versore $\mathbf{v}'_\pi \perp \pi$ e tenere presente che $d(P_0, \pi)$ è uguale al modulo del vettore proiezione di $\vec{P_1P_0}$ su $\mathbf{v}'_\pi$ dove P_1 è un punto (qualunque) di π).

In q
appl

§1.

Pren
com
$M_n($
ugua
che

Def
esist
N.B
A è
è la

Si h
Pro
Se ~
a) ~
b) ~
c) ~
Qui
Dim
a) (

CAPITOLO 5

DIAGONALIZZAZIONE DI UNA MATRICE

In questo capitolo si affronta un problema di fondamentale importanza per le successive applicazioni in vari settori delle Scienze applicate.

§1. Matrici simili e diagonalizzazione

Premessa. Sappiamo che il prodotto righe per colonne di matrici non gode della proprietà commutativa (cioè **esistono** matrici $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ tali che $AB \neq BA$), quindi se $P, B \in M_n(\mathbf{R})$ e P è invertibile, il risultato di $P^{-1}BP$ è una matrice A che (in generale) non è uguale a B. Ci proponiamo di studiare le proprietà della relazione (detta di similitudine) che intercorre tra A e B. Più precisamente

Definizione. Siano $A, B \in M_n(\mathbf{R})$. Si dice che A **è simile** a B (e si scrive $A \sim B$) se esiste una matrice invertibile $P \in M_n(\mathbf{R})$ tale che $A = P^{-1}BP$ (ossia $PA = BP$).

N.B. Poiché, come detto, il prodotto righe per colonne di matrici non è commutativo, se A è simile a B non è detto che A coincida con B e perciò la relazione di similitudine **non** è la relazione di uguaglianza.

Si ha la seguente

Proposizione 5.1.

Se $\sim$ è la relazione di similitudine in $M_n(\mathbf{R})$, allora:

a) $\sim$ è riflessiva, cioè $A \sim A$ per ogni $A \in M_n(\mathbf{R})$,

b) $\sim$ è simmetrica, cioè se $A \sim B$ allora $B \sim A$,

c) $\sim$ è transitiva, cioè se $A \sim B$ e $B \sim C$ allora $A \sim C$.

Quindi $\sim$ è una *relazione di equivalenza* in $M_n(\mathbf{R})$.

Dimostrazione.

a) (Ipotesi) $A \in M_n(\mathbf{R})$. Poiché I è invertibile e $I^{-1}AI = A$, risulta $A \sim A$ (Tesi).

b) (Ipotesi) $A \sim B \to \exists P$ invertibile tale che $A = P^{-1}BP \to PAP^{-1} = P(P^{-1}BP)P^{-1} \to PAP^{-1} = B \to B = (P^{-1})^{-1}AP^{-1} \to B \sim A$ (Tesi).

c) (Ipotesi) $A \sim B$ e $B \sim C \to \exists P, Q$ invertibili tali che $A = P^{-1}BP$ e $B = Q^{-1}CQ \to A = P^{-1}(Q^{-1}CQ)P \to A = (P^{-1}Q^{-1})C(QP) \to A = (QP)^{-1}C(QP) \to A \sim C$ (Tesi).

Proposizione 5.2.

Se $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ e $A \sim B$, allora:

i) $|A| = |B|$

ii) $r(A) = r(B)$.

Quindi *matrici simili hanno lo stesso determinante e lo stesso rango.* Il viceversa, come vedremo, non è vero.

Dimostrazione di i).

i) Ipotesi: $A \sim B$. Questo implica che esiste P invertibile tale che $A = P^{-1}BP$. Passando ai determinanti e tenendo presente le relative proprietà, si ha:

$$|A| = |P^{-1}BP| = |P^{-1}||B||P| = |P^{-1}||P||B| = |P^{-1}P||B| = |I||B| = |B| \ .$$

Quindi $|A| = |B|$ (Tesi).

Definizione. Si dice che una matrice $A \in M_n(\mathbf{R})$ è **diagonalizzabile** se esiste una matrice invertibile $P \in M_n(\mathbf{R})$ tale che $P^{-1}AP = D$, dove D è una matrice diagonale. In questo caso si dice che P è una **matrice che diagonalizza** A.

Osservazione. Dalle definizioni di matrici simili e matrici diagonalizzabili si ha che

$$A \text{ è diagonalizzabile} \iff \text{esiste una matrice diagonale } D \text{ tale che } A \sim D \ ,$$

ossia

$$A \text{ è diagonalizzabile} \iff A \text{ è simile a una matrice diagonale } D \ .$$

Osservazione. Data la matrice quadrata A di ordine n, consideriamo l'insieme di tutte le matrici quadrate invertibili di ordine n , $\{P_\alpha \ , \ \alpha \in \mathbf{R}\}$, e consideriamo l'insieme

$\{P_\alpha^{-1}AP_\alpha \quad , \alpha \in \mathbf{R}\}$. Quest'ultimo è l'insieme di tutte e sole le matrici simili ad A; quindi A è diagonalizzabile se e soltanto se a tale insieme appartiene almeno una matrice diagonale.

Ci poniamo ora il *problema della diagonalizzazione* di una matrice $A \in M_n(\mathbf{R})$, ossia:

- stabilire se A è diagonalizzabile,
- se A è diagonalizzabile, trovare una matrice invertibile P tale che $P^{-1}AP = D$ con D diagonale, cioè trovare una matrice P che diagonalizzi A e trovare D (senza calcolare esplicitamente il prodotto $P^{-1}AP$).

Esempio 1. Trovare tutte le matrici simili ad $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Sol.: le matrici simili ad I sono tutte e sole quelle del tipo $P^{-1}IP$, dove P è una matrice invertibile. Ma $P^{-1}IP = P^{-1}P = I$ (per ogni P invertibile). Quindi I *è simile solo a se stessa.*

Esempio 2. Siano $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Verificare che $|A| = |I|$, $r(A) = r(I)$, ma A non è simile a I (vedi Proposizione 5.2).

Sol.: A e I hanno lo stesso determinante (uguale a 1) e lo stesso rango (uguale a 2), ma A non è simile ad I perché, come visto nell'esempio 1, I è simile solo a se stessa, mentre $A \neq I$.

§2. Autovalori. Autovettori. Diagonalizzazione

I seguenti concetti permetteranno di risolvere il problema della diagonalizzazione di una matrice $A \in M_n(\mathbf{R})$.

Definizione. Sia $A \in M_n(\mathbf{R})$. Si dice che lo scalare $\lambda \in \mathbf{R}$ è un **autovalore** di A se *esiste* una n-upla *non nulla* $X \in \mathbf{R}^n$ (esiste $X \in \mathbf{R}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$) tale che $AX = \lambda X$. In tal caso X si dice **autovettore** di A associato all'autovalore λ.

N.B. Nella definizione X viene considerato sia come elemento di $\mathbf{R}^n$ ($X = (x_1, ..., x_n)$) in "$X \in \mathbf{R}^n$", sia come matrice $n \times 1$ ($X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$), in "$AX = \lambda X$".

N.B. Nella definizione di autovalore si richiede che esista $X \neq 0$ tale che $AX = \lambda X$, altrimenti ogni $\lambda \in \mathbf{R}$ sarebbe autovalore, in quanto $A0 = \lambda 0$ per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$.

Esempio 1. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Si ha:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 24 \end{pmatrix}$$

ossia

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

e quindi $\lambda = 4$ è un autovalore di A e $X = (4, 6)$ è un autovettore di A associato all'autovalore 4.

Esempio 2. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Si ha:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ossia

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

e quindi $\lambda = 0$ è un autovalore di A e $X = (2, -1)$ è un autovettore di A associato all'autovalore 0. Pertanto *lo scalare* 0 *può essere un autovalore per una data matrice.*

Ci chiediamo ora quale relazione intercorra tra il concetto di matrice diagonalizzabile e quello di autovettore. Si dimostra il seguente

Teorema 5.3.

Una matrice $A \in M_n(\mathbf{R})$ è diagonalizzabile se e soltanto se esiste una base di $\mathbf{R}^n$ formata da autovettori di A.

Introduciamo ora alcuni concetti che permetteranno di trovare gli autovalori e gli autovettori di una matrice $A \in M_n(\mathbf{R})$.

Sia $\lambda \in \mathbf{R}$ un autovalore di $A \in M_n(\mathbf{R})$. Poniamo

$$V_\lambda \stackrel{def}{=} \{X \in \mathbf{R}^n \ : \ AX = \lambda X\} \ .$$

Osservazione. V_λ contiene tutti gli autovettori di A associati all'autovalore λ e contiene anche la n-upla $(0, 0, ..., 0)$ (che per definizione non è un autovettore, ma soddisfa comunque la relazione che caratterizza gli elementi di V_λ, in quanto $A0 = \lambda 0$).

Si ha la seguente

Proposizione 5.4.

Se $A \in M_n(\mathbf{R})$ e λ è un autovalore di A, allora V_λ è un sottospazio di $\mathbf{R}^n$.

Dimostrazione.

Ovviamente $V_\lambda \subseteq \mathbf{R}^n$.

i) $\mathbf{0} \in V_\lambda$ perché $A\mathbf{0} = \lambda\mathbf{0}$.

ii) Se $X_1, X_2 \in V_\lambda \to AX_1 = \lambda X_1$ e $AX_2 = \lambda X_2 \to A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = \lambda X_1 + \lambda X_2 = \lambda(X_1 + X_2) \to A(X_1 + X_2) = \lambda(X_1 + X_2) \to X_1 + X_2 \in V_\lambda$.

iii) Se $\alpha \in \mathbf{R}$ e $X \in V_\lambda \to \alpha \in \mathbf{R}$ e $AX = \lambda X \to A(\alpha X) = \alpha(AX) = \alpha(\lambda X) \to A(\alpha X) = \lambda(\alpha X) \to \alpha X \in V_\lambda$.

Conclusione $V_\lambda \sqsubseteq \mathbf{R}^n$.

Definizione. V_λ viene detto **autospazio** di A associato all'autovalore λ e la dimensione di V_λ (dim V_λ) viene detta **molteplicità geometrica** dell'autovalore λ (in breve m.g. di λ).

Osservazione. Se λ è un autovalore di A, allora $V_\lambda \neq \{\mathbf{0}\}$ e perciò m.g. di $\lambda \geq 1$.

Se invece λ non è un autovalore di A, allora l'insieme $V_\lambda = \{X \in \mathbf{R}^n \ : \ AX = \lambda X\}$ coincide con $\{\mathbf{0}\}$.

Definizione. Sia $A \in M_n(\mathbf{R})$. Si dice:

- **matrice caratteristica di** A la matrice $\lambda I_n - A$,
- **polinomio caratteristico di** A il polinomio $|\lambda I_n - A|$, che si indica con $\Delta_A(\lambda)$, ossia $\Delta_A(\lambda) \stackrel{def}{=} |\lambda I_n - A|$,
- **equazione caratteristica di** A l'equazione $\Delta_A(\lambda) = 0$,

(in questo contesto λ è una indeterminata).

Esempio. Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ allora:

- la matrice caratteristica di A è:

$$\lambda I - A = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

ossia

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ 3 & \lambda - 4 \end{pmatrix} ,$$

- il polinomio caratteristico di A è:

$$\Delta_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ 3 & \lambda - 4 \end{vmatrix} ,$$

ossia, sviluppando i calcoli,

$$\Delta_A(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 10 ,$$

- l'equazione caratteristica di A è

$$\Delta_A(\lambda) = 0 \quad \text{ossia} \quad \lambda^2 - 5\lambda + 10 = 0 .$$

Osservazione. Se

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

allora

$$\Delta_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

Definizione. Si dice **traccia** di una matrice quadrata A (e si indica con $\mathrm{tr}(A)$) la somma degli elementi della diagonale principale di A.

Esempio. La traccia della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$ è

$$\mathrm{tr}(A) = 1 + (-7) = -6 \ .$$

Osservazione. Se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ allora $\Delta_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{vmatrix} = (\lambda - a)(\lambda - d) - bc \rightarrow$ $\Delta_A(\lambda) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc \rightarrow$

$$\Delta_A(\lambda) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + |A| \ .$$

Si ha la seguente

Proposizione 5.5.

Se $A \sim B$ allora

- $tr(A) = tr(B)$,
- $\Delta_A(\lambda) = \Delta_B(\lambda)$.

Dimostrazione della seconda proprietà.

(Ipotesi) $A \sim B \to \exists P$ invertibile tale che $A = P^{-1}BP \to \Delta_A(\lambda) = |\lambda I - A| = |\lambda I - P^{-1}BP| = |P^{-1}(\lambda I)P - P^{-1}BP| = |P^{-1}(\lambda I - B)P| = |P^{-1}||\lambda I - B||P| = |\lambda I - B| = \Delta_B(\lambda) \to \Delta_A(\lambda) = \Delta_B(\lambda)$ (Tesi).

Osservazione. Riassumendo (vedi anche Proposizione 5.2):

se $A \sim B$ allora:

- $|A| = |B|$,
- $r(A) = r(B)$,
- $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$,
- $\Delta_A(\lambda) = \Delta_B(\lambda)$

(non vale il viceversa di nessuna di queste affermazioni).

Ad esempio le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hanno, come si verifica facilmente, stesso determinante, stesso rango, stessa traccia e stesso polinomio caratteristico, ma non sono simili, in quanto $B = I$ è simile solo a se stessa e $A \neq B$.

Vediamo ora alcune importanti applicazioni del polinomio caratteristico.

Si dimostra il seguente

Teorema 5.6. (Teorema di Hamilton-Cayley)

Se $A \in M_n(\mathbf{R})$, allora A è uno zero del suo polinomio caratteristico, cioè $\Delta_A(A) = \mathbf{0}$.

Esempio. Verificare l'uguaglianza del teorema di Hamilton-Cayley per la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} .$$

Sol.: risulta

$$\Delta_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ 1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 5 .$$

Quindi

$$\Delta_A(A) = A^2 - 4A + 5I = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 4 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi $\Delta_A(A) = \mathbf{0}$.

Osservazione. Dalla relazione $A^2 - 4A + 5I = \mathbf{0}$ ricaviamo $A^2 = 4A - 5I$ e quindi

$$A^3 = A^2A = (4A - 5I)A = 4A^2 - 5A = 4(4A - 5I) - 5A = 11A - 20I$$

$$A^4 = A^3A = (11A - 20I)A = 11A^2 - 20A = 11(4A - 5I) - 20A = 24A - 55I$$

e così via, A^k è una combinazione lineare di A ed I (per ogni intero $k \geq 1$).

Più in generale, se $A \in M_n(\mathbf{R})$ allora *ogni potenza di A (A^k con $k \geq 1$) è combinazione lineare di $A^{n-1}, A^{n-2}, ..., A$ ed I.*

Diamo ora il seguente

Teorema 5.7.(Fondamentale per il calcolo degli autovalori e degli autospazi di una matrice $A \in M_n(\mathbf{R})$)

a) Uno scalare $\lambda \in \mathbf{R}$ è un autovalore di $A \iff \lambda$ è soluzione dell'equazione caratteristica di A, cioè $\Delta_A(\lambda) = 0$.

b) Se λ è un autovalore di A allora

$$V_\lambda = \{X \in \mathbf{R}^n \ : \ (\lambda I - A)X = \mathbf{0}\}.$$

($(\lambda I - A)X = \mathbf{0}$ è il sistema lineare omogeneo la cui matrice dei coefficienti si ottiene sostituendo l'autovalore λ al posto dell'indeterminata λ nella matrice caratteristica di A).

Dimostrazione.

a) $\lambda \in \mathbf{R}$ è un autovalore di $A \iff \exists \overline{X} \in \mathbf{R}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$ tale che $A\overline{X} = \lambda\overline{X} \iff \exists \overline{X} \neq \mathbf{0}$ tale che $A\overline{X} = (\lambda I_n)\overline{X} \iff \exists \overline{X} \neq \mathbf{0}$ tale che $(\lambda I_n - A)\overline{X} = \mathbf{0} \iff$ il sistema lineare

omogeneo di n equazioni in n incognite $(\lambda I - A)X = \mathbf{0}$ ha anche soluzioni non banali (perché $\overline{X} \neq \mathbf{0}$ è soluzione) $\iff |\lambda I_n - A| = 0 \iff \Delta_A(\lambda) = 0 \iff \lambda$ è soluzione dell'equazione caratteristica di A.

b) V_λ è per definizione $\{X \in \mathbf{R}^n \ : \ AX = \lambda X\}$, quindi (vedi dimostrazione precedente) $V_\lambda = \{X \in \mathbf{R}^n \ : \ (\lambda I - A)X = \mathbf{0}\}$.

Osservazione. V_λ è perciò l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo la cui matrice dei coefficienti $\lambda I - A$ si ottiene dalla matrice caratteristica di A sostituendo all'indeterminata λ l'autovalore che si sta considerando.

Osservazione. Sappiamo che la dimensione del sottospazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in n incognite $AX = \mathbf{0}$ è uguale a $n - k$ dove k =rango(A). Quindi dim$V_\lambda = n - k$ dove n è l'ordine di A e k =rango$(\lambda I - A)$ e perciò risulta m.g. di $\lambda = n - k$, dove n è l'ordine di A e k =rango$(\lambda I - A)$ (λ deve essere un autovalore di A).

Esempio. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Trovare:

a) gli autovalori di A,

b) gli autospazi di A e le relative molteplicità geometriche.

Sol.: a) Dobbiamo risolvere l'equazione caratteristica $\Delta_A(\lambda) = 0$. Si ha

$$\Delta_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -4 \\ -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 5 \ ,$$

quindi $\Delta_A(\lambda) = 0 \iff \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$ e risolvendo si ottengono i valori $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = -1$, che sono gli autovalori di A.

b) Determiniamo gli autospazi V_5 e V_{-1}.

$$\bullet V_5 = \{X \in \mathbf{R}^2 \ : \ (5I - A)X = \mathbf{0}\} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ \left\{ \begin{array}{l} (5-1)x - 4y = 0 \\ -2x + (5-3)y = 0 \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ \left\{ \begin{array}{l} 4x - 4y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{array} \right\} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ y = x\} = \right.$$

$$= \{(x,x) \ : \ x \in \mathbf{R}\} = [(1,1)] \ .$$

$\{(1,1)\}$ è una base per V_5 che ha quindi dimensione 1 e perciò m.g. di $5 = 1$.

$$\bullet V_{-1} = \{X \in \mathbf{R}^2 \ : \ (-I - A)X = \mathbf{0}\} = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ \begin{cases} (-1-1)x - 4y = 0 \\ -2x + (-1-3)y = 0 \end{cases}\right\} =$$

$$= \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ \begin{cases} -2x - 4y = 0 \\ -2x - 4y = 0 \end{cases}\right\} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x = -2y\} =$$

$$= \{(-2y, y) \ : \ y \in \mathbf{R}\} = [(-2,1)] \ .$$

$\{(-2,1)\}$ è una base per V_{-1} che ha quindi dimensione 1 e perciò m.g. di $-1 = 1$.

<u>Osservazione</u>. Come detto, dalla definizione di autovalore (esiste $X \neq \mathbf{0}$ tale che $AX = \lambda X$) segue che per ogni autovalore λ si ha dim $V_\lambda \geq 1$ (cioè $V_\lambda \neq \{\mathbf{0}\}$) e quindi m.g. di $\lambda \geq 1$.

Pertanto i sistemi lineari omogenei che intervengono nella determinazione di un autospazio V_λ relativo all'autovalore λ (vedi Teorema 5.7) *non possono avere solo la soluzione nulla.*

Definizione. Sia $A \in M_n(\mathbf{R})$ e sia λ un autovalore di A.

Si dice **molteplicità algebrica** di λ (in breve m.a. di λ) la molteplicità di λ in quanto soluzione dell'equazione caratteristica di A.

Se ad esempio $\Delta_A(\lambda) = (\lambda-5)^2(\lambda+3)^6(\lambda-9) = 0$ allora gli autovalori sono $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -3$ e $\lambda_3 = 9$ con molteplicità algebriche $2, 6, 1$ rispettivamente.

Si dimostra la seguente

Proposizione 5.8.

Se λ è un autovalore di A allora:

a) m.a. di $\lambda \geq$ m.g. di λ (e quest'ultima è ≥ 1 per l'osservazione precedente).

In particolare:

b) Se m.a. di $\lambda = 1$ allora anche m.g. di $\lambda = 1$ (in questo caso è m.a. di λ = m.g. di λ).

Si dimostra inoltre il seguente

Teorema 5.9. (Fondamentale per la diagonalizzazione di una matrice $A \in M_n(\mathbf{R})$)

a) A è diagonalizzabile in $\mathbf{R}$ $\iff$ tutte le soluzioni di $\Delta_A(\lambda) = 0$ (equazione caratteristica di A) sono numeri reali e per ogni autovalore λ di A si ha m.a. di λ = m.g. di λ.

b) Se A è diagonalizzabile (vedi a)) allora unendo le basi dei singoli autospazi di A si ottiene una base β di $\mathbf{R}^n$ formata da autovettori di A (vedi anche Teorema 5.3).

c) Se β è una base di $\mathbf{R}^n$ formata da autovettori di A (vedi b)), allora la matrice P, le cui colonne sono gli elementi di β, diagonalizza A (cioè $P^{-1}AP = D$ dove D è una matrice diagonale, e perciò $A \sim D$).

d) Gli elementi della diagonale principale di D (vedi c)) sono gli autovalori di A nell'ordine dei corrispondenti autovettori in β o nelle colonne di P.

Osservazione 1. Se $A \in M_n(\mathbf{R})$ e $\Delta_A(\lambda) = 0$ non ha tutte le soluzioni reali o per qualche autovalore λ si ha m.a. di $\lambda \neq$ m.g. di λ, allora A non è diagonalizzabile in $\mathbf{R}$ (vedi Teorema 5.9 a)).

Osservazione 2. Se $A \in M_n(\mathbf{R})$ e $\Delta_A(\lambda) = 0$ ha n soluzioni reali e distinte, allora m.a. di $\lambda = 1 =$ m.g. di λ per ogni autovalore λ (vedi Proposizione 5.8), quindi A è diagonalizzabile (caso particolare del Teorema 5.9 a)).

Osservazione 3. Se A è una matrice diagonale, allora A è diagonalizzabile (perché $A \sim A$ e A è diagonale) e, come si verifica facilmente, i suoi autovalori sono gli elementi della diagonale.

Esempio 1. Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Trovare gli autovalori e gli autospazi di A.

b) Dire se A è diagonalizzabile ed in caso affermativo diagonalizzarla.

Sol.: a) Calcoliamo gli autovalori di A.

$$\Delta_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -3 \\ -1 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = (\lambda - 5)(\lambda - 1) \ .$$

Quindi gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = 1$, entrambi con m.a. $= 1$. Ne consegue che anche la m.g. di entrambi è 1 e quindi A è diagonalizzabile (vedi osservazione 2).

Determiniamo ora gli autospazi di A.

$$V_5 = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ \begin{cases} 3x - 3y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \right\} = \{(x, x) \ : \ x \in \mathbf{R}\} = [(1, 1)]$$

e $\{(1, 1)\}$ è una base di V_5 (dim $V_5 = 1$ e quindi m.g. di $5 = 1 =$ m.a. di 5, come già osservato).

$$V_1 = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ \begin{cases} -x - 3y = 0 \\ -x - 3y = 0 \end{cases} \right\} = \{(-3y, y) \ : \ y \in \mathbf{R}\} = [(-3, 1)]$$

e $\{(-3, 1)\}$ è una base di V_1 (dim $V_1 = 1$ e quindi m.g. di $1 = 1 =$ m.a. di 1, come già osservato).

b) Abbiamo già notato che A è diagonalizzabile (perché tutte le soluzioni di $\Delta_A(\lambda) = 0$ sono numeri reali e per ogni autovalore risulta m.a. $=$ m.g., vedi Teorema 5.9 a)).

Inoltre $\beta = ((1, 1), (-3, 1))$ è una base di $\mathbf{R}^2$ formata da autovettori di A (β è l'unione delle basi degli autospazi, vedi Teorema 5.9 b)).

Allora la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

diagonalizza A (le colonne di P sono gli elementi di β, vedi Teorema 5.9 c)).

Quindi

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(gli elementi della diagonale di D sono gli autovalori di A nell'ordine dei corrispondenti autovettori in β, vedi Teorema 5.9 d)).

In conclusione $A \sim D$.

Notiamo che $|A| = 5 = |D|$, $r(A) = 2 = r(D)$, $\mathrm{tr}(A) = 6 = \mathrm{tr}(D)$, $\Delta_A(\lambda) = (\lambda-5)(\lambda-1) = \Delta_D(\lambda)$ (vedi l'osservazione che segue la Proposizione 5.5).

Esempio 2. Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

a) Trovare gli autovalori e gli autospazi di A.

b) Dire se A è diagonalizzabile ed in caso affermativo diagonalizzarla.

Sol.: a) Calcoliamo gli autovalori di A.

$$\Delta_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 .$$

Quindi l'unico autovalore di A è $\lambda = 1$ con m.a. di $1 = 2$.

$$V_1 = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ \begin{cases} x + y = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases} \right\} = \{(x, -x) \ : \ x \in \mathbf{R}\} = [(1, -1)]$$

e $\{(1, -1)\}$ è una base di V_1. Quindi m.g. di $1 = 1$.

b) A non è diagonalizzabile in quanto m.a. di $1 \neq$ m.g. di 1.

Esempio 3. Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} .$$

a) Trovare gli autovalori e gli autospazi di A.

b) Dire se A è diagonalizzabile ed in caso affermativo diagonalizzarla.

Sol.: a) Calcoliamo gli autovalori di A.

$$\Delta_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ -2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4 .$$

Poiché $\Delta_A(\lambda) = 0$ non ha soluzioni reali, A non ha autovalori (in $\mathbf{R}$).

b) A non è diagonalizzabile in $\mathbf{R}$ in quanto non vi sono autovalori (in $\mathbf{R}$).

Esempio 4. Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

a) Trovare gli autovalori e gli autospazi di A.

b) Dire se A è diagonalizzabile ed in caso affermativo diagonalizzarla.

Sol.: a) Calcoliamo gli autovalori di A.

$$\Delta_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 2 & \lambda - 3 & 0 \\ 2 & -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda - 1) .$$

Quindi gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 1$ con m.a. di $\lambda_1 = 1 =$ m.g. di λ_1 e $\lambda_2 = 2$ con m.a. di $\lambda_2 = 2$.

Determiniamo ora gli autospazi di A.

$$V_2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2x - y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \right\} = \{(x, 2x, z) \ : \ x, z \in \mathbf{R}\} = [(1, 2, 0), (0, 0, 1)]$$

e $\{(1, 2, 0), (0, 0, 1)\}$ è una base di V_2.

$$V_1 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases} \right\} = \{(y, y, y) \ : \ y \in \mathbf{R}\} = [(1, 1, 1)]$$

e $\{(1, 1, 1)\}$ è una base di V_1.

b) Poiché la dimensione di V_2 è 2, la m.g. di 2 è 2, quindi anche m.g. di $\lambda_2 =$ m.a. di λ_2. Allora A è diagonalizzabile e $\beta = ((1, 2, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1))$ è una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di A.

Pertanto la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(le colonne di P sono gli elementi di B) diagonalizza A, ossia $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

e perciò $A \sim D$.

Gli elementi della diagonale di D sono gli autovalori di A nell'ordine dei corrispondenti autovettori in β o nelle colonne di P.

Esempio 5. Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Dire se A è diagonalizzabile ed in caso affermativo diagonalizzarla.

Sol.: calcoliamo gli autovalori di A.

$$\Delta_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda - 2 & 0 \\ -1 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda - 1) .$$

Quindi gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 2$ con m.a. $= 2$ e $\lambda_2 = 1$, con m.a. $= 1 =$ m.g.

Per stabilire se A è diagonalizzabile, determiniamo m.g. di 2, ossia dim V_2. Si ha:

$$V_2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ \begin{cases} 0 = 0 \\ -x = 0 \\ -x - y + z = 0 \end{cases} \right\} = \{(0, y, y) \ : \ y \in \mathbf{R}\} = [(0, 1, 1)]$$

e $\{(0, 1, 1)\}$ è una base di V_2. Poiché la dimensione di V_2 è 1, la m.g. di 2 è 1 e quindi A non è diagonalizzabile (m.a. di $2 \neq$ m.g. di 2).

Osservazione. Le matrici degli esempi 4 e 5 hanno lo stesso determinante, lo stesso rango, la stessa traccia e lo stesso polinomio caratteristico, ma non sono simili. Infatti la prima è diagonalizzabile e quindi è simile ad una matrice diagonale. La seconda, se fosse simile alla prima, sarebbe anch'essa simile alla stessa matrice diagonale, ma allora sarebbe diagonalizzabile, mentre, come visto, non lo è.

Esempio 6. Determinare gli eventuali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile.

Sol.: calcoliamo gli autovalori di A.

$$\Delta_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - \alpha & 1 & -2 \\ 0 & \lambda + 1 & -8 \\ 0 & 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - \alpha)(\lambda + 1)(\lambda - 3) \ .$$

Quindi gli autovalori di A sono $\lambda_1 = \alpha$, $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = 3$.

- Se $\alpha \neq -1$ e $\alpha \neq 3$, allora i tre autovalori sono tutti distinti (m.a. di $\lambda = 1$=m.g. di λ per ogni autovalore λ) e perciò A è diagonalizzabile.
- Se $\alpha = -1$, gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 3$ con m.a. $= 1 =$ m.g. e $\lambda_2 = -1$, con m.a. $= 2$.

Per stabilire se A è diagonalizzabile, determiniamo m.g. di -1, ossia dim V_{-1}. Si ha:

$$V_{-1} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ \begin{cases} y - 2z = 0 \\ -8z = 0 \\ -4z = 0 \end{cases} \right\} = \{(x, 0, 0) \ : \ x \in \mathbf{R}\} = [(1, 0, 0)]$$

e $\{(1, 0, 0)\}$ è una base di V_{-1}. Poiché la dimensione di $V_{-1} = 1$, m.g. di -1 è 1, e quindi A non è diagonalizzabile (m.a. di $-1 \neq$ m.g. di -1).

- Se $\alpha = 3$, gli autovalori di A sono $\lambda_1 = -1$ con m.a. $= 1 =$ m.g. e $\lambda_2 = 3$, con m.a. $= 2$.

Per stabilire se A è diagonalizzabile, determiniamo m.g. di 3, ossia dim V_3. Si ha:

$$V_3 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ \begin{cases} y - 2z = 0 \\ 4y - 8z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \right\} = \{(x, 2z, z) \ : \ x, z \in \mathbf{R}\} = [(1,0,0),(0,2,1)]$$

e $\{(1,0,0),(0,2,1)\}$ è una base di V_3. Poiché la dimensione di $V_3 = 2$, m.g. di 3 è 2, e quindi A è diagonalizzabile (m.a. di λ = m.g. di λ sia per $\lambda = -1$, sia per $\lambda = 3$).

Osservazione. Poiché l'esercizio precedente chiedeva soltanto di stabilire per quali valori di α la matrice A fosse diagonalizzabile e non ne chiedeva la diagonalizzazione, quello che interessa è soltanto la dimensione dei V_λ e non la loro descrizione esplicita. Come detto $\dim V_\lambda = n - \text{rango}(\lambda I - A)$ e pertanto se $\alpha = -1$ è $\dim V_{-1} = 3 - \text{rango}(-1 \cdot I - A)$ dove in questo caso $-1 \cdot I - A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ il cui rango è chiaramente 2. Pertanto risulta $\dim V_{-1} = 3 - 2 = 1$, ossia m.g. di $-1 = 1$.

Analogamente per $\alpha = 3$ si ha la matrice $3 \cdot I - A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ il cui rango è chiaramente 1. Pertanto $\dim V_3 = 3 - 1 = 2$, ossia m.g. di $3 = 2$.

Si conclude quindi come nell'esempio precedente attraverso un procedimento diverso e più breve.

Esempio 7. Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dire se A è diagonalizzabile ed in caso affermativo diagonalizzarla.

Sol.: calcoliamo gli autovalori di A.

$$\Delta_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 2)^2 .$$

Quindi gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 0$ con m.a. $= 1 =$ m.g. e $\lambda_2 = 2$ con m.a. $= 2$.

Per stabilire se A è diagonalizzabile determiniamo m.g. di 2, ossia dim V_2. Si ha:

$$V_2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ \begin{cases} x - y = 0 \\ -x + y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \right\} = \{(x, x, z) \ : \ x, z \in \mathbf{R}\} = [(1, 1, 0), (0, 0, 1)]$$

e $\{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ è una base di V_2.

Poiché la dimensione di V_2 è 2, la m.g. di 2 è 2 e quindi A è diagonalizzabile (m.a. $=$ m.g. per ogni autovalore).

Per diagonalizzare A dobbiamo determinare anche una base di V_0. Si ha:

$$V_0 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ \begin{cases} -x - y = 0 \\ -x - y = 0 \\ -2z = 0 \end{cases} \right\} = \{(-y, y, 0) \ : \ y \in \mathbf{R}\} = [(-1, 1, 0)]$$

e $\{(-1, 1, 0)\}$ è una base di V_0.

$\beta = ((1, 1, 0), (0, 0, 1), (-1, 1, 0))$ è una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di A. Pertanto la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

diagonalizza A, ossia $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e perciò $A \sim D$.

Osservazione. La matrice A dell'Esempio 7 è simmetrica e, come visto, è diagonalizzabile; inoltre gli autospazi sono "perpendicolari" tra loro (V_2 è un "piano",V_0 è una "retta" e $V_2 \perp V_0$). Vedremo che queste sono proprietà generali delle matrici simmetriche.

§3. Diagonalizzazione delle matrici simmetriche

Premessa. Vediamo il seguente esempio.

Determinare $a, b, c \in \mathbf{R}$ in modo che la matrice (simmetrica) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ sia diagonalizzabile.

Sol.: si ha $\Delta_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - a & -b \\ -b & \lambda - c \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2$. Poiché il discriminante di tale polinomio è $(a+c)^2 - 4ac + 4b^2 = (a-c)^2 + 4b^2$, si può notare che esso è sempre ≥ 0 e perciò le soluzioni dell'equazione $\Delta_A(\lambda) = 0$ sono numeri reali, per ogni $a, b, c \in \mathbf{R}$.

- Se $(a-c)^2 + 4b^2 = 0$ allora $\Delta_A(\lambda) = 0$ ha "due" soluzioni reali e coincidenti e perciò la matrice A ha un solo autovalore con m.a. $=2$. In questo caso, essendo $(a-c)^2 + 4b^2 = 0$, deve essere $a = c$ e $b = 0$. Risulta pertanto $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ che è una matrice diagonale e quindi in particolare diagonalizzabile.
- Se $(a-c)^2 + 4b^2 > 0$ allora $\Delta_A(\lambda) = 0$ ha due soluzioni reali e distinte e quindi A è diagonalizzabile.

In conclusione tutte le matrici reali simmetriche di ordine due sono diagonalizzabili (in $\mathbf{R}$).

Più in generale si dimostra il seguente

Teorema 5.10. (Fondamentale per la diagonalizzazione di una matrice simmetrica $A \in M_n(\mathbf{R})$)

Se $A \in M_n(\mathbf{R})$ è una matrice simmetrica ($A = A_{-1}$) allora esiste una matrice ortogonale U ($U_{-1} = U^{-1}$) che la diagonalizza, cioè $U^{-1}AU = D$, ossia $U_{-1}AU = D$, dove D è una

matrice diagonale.

N.B.. Tutte le matrici simmetriche reali sono diagonalizzabili (mediante matrici ortogonali). Pertanto se $A \in M_n(\mathbf{R})$ è simmetrica, allora (vedi Teorema 5.9):

a) tutte le soluzioni di $\Delta_A(\lambda) = 0$ sono numeri reali,

b) per ogni autovalore λ di A si ha: m.a. di λ = m.g. di λ.

"Costruzione" della matrice ortogonale U del teorema 5.10.

Sia $A \in M_n(\mathbf{R})$ una matrice simmetrica.

i) Si trovano gli autovalori e gli autospazi di A e si determina una base *ortonormale* di ciascun autospazio (applicando eventualmente il procedimento di Gram-Schmidt e normalizzando i vettori ottenuti).

ii) Si uniscono le basi ortonormali dei singoli autospazi di A (vedi i)) e si ottiene una base *ortonormale* β di $\mathbf{R}^n$ formata da autovettori di A.

iii) La matrice U che ha per colonne gli elementi di β (vedi ii)) è:

- una matrice *ortogonale* (perché le sue colonne formano una base ortonormale di $\mathbf{R}^n$), e perciò $U^{-1} = U_{-1}$,
- *diagonalizza* A (perché le sue colonne formano una base di $\mathbf{R}^n$ costituita da autovettori di A) e perciò $U^{-1}AU = D$ dove D è una matrice diagonale.

Quindi :

$$U_{-1}AU = D$$

dove D è una matrice diagonale i cui elementi situati sulla diagonale principale sono gli autovalori di A nell'ordine dei corrispondenti autovettori in β (o nelle colonne di U).

Esempio 1. Data la matrice simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

determinare

a) autovalori e autospazi di A,

b) una base ortonormale di $\mathbf{R}^2$ formata da autovettori di A,

c) una matrice ortogonale U che diagonalizza A.

Sol.: a) Si ha

$$\Delta_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 5 & 1 \\ 1 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda - 6) \ .$$

Quindi gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 4$ con m.a. $= 1$ e $\lambda_2 = 6$, con m.a. $= 1$.

In questo esempio si ha m.a. $= 1$ per ogni autovalore e quindi m.a. $=$ m.g. per ogni autovalore (anche se A non fosse simmetrica).

Determiniamo ora gli autospazi di A.

$$V_4 = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ \begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \right\} = \{(x, x) \ : \ x \in \mathbf{R}\} = [(1, 1)]$$

e $\{(1, 1)\}$ è una base (ortogonale) di V_4. Poiché $\|(1, 1)\| = \sqrt{2}$ abbiamo che $\{(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})\}$ è una base ortonormale di V_4 (vedi i)).

$$V_6 = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ \begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \right\} = \{(-y, y) \ : \ y \in \mathbf{R}\} = [(-1, 1)]$$

e $\{(-1, 1)\}$ è una base (ortogonale) di V_6. $\|(-1, 1)\| = \sqrt{2}$ e quindi $\{(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})\}$ è una base ortonormale di V_6 (vedi i)).

b) Unendo le basi ortonormali dei singoli autospazi di A, si ottiene

$$\beta = ((1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}))$$

che è una base ortonormale di $\mathbf{R}^2$ formata da autovettori di A (vedi ii)).

c) La matrice le cui colonne sono gli elementi di β è

$$U = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

che è una matrice ortogonale e diagonalizza A, ossia $U_{-1}AU = D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ e quindi $A \sim D$ (vedi iii)).

Si noti che V_4 e V_6 sono due "rette" e che $V_4 \perp V_6$.

Osservazione. Si dimostra che se λ_1, λ_2 sono autovalori distinti ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) di una matrice simmetrica $A \in M_n(\mathbf{R})$, allora "$V_{\lambda_1} \perp V_{\lambda_2}$" (cioè, se $\mathbf{v}_1 \in V_{\lambda_1}$ e $\mathbf{v}_2 \in V_{\lambda_2}$ allora risulta $< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 >= 0$) ed è proprio per questo motivo che unendo le basi ortonormali dei singoli autospazi di A, si ottiene una base ortonormale di $\mathbf{R}^n$.

Esempio 2. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

determinare:

a) autovalori e autospazi di A,

b) una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di A,

c) una matrice ortogonale U che diagonalizza A.

Sol.: a) Si ha

$$\Delta_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 1 & -5 \\ 0 & -5 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)^2(\lambda + 6) \ .$$

Quindi gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 4$ con m.a. $= 2$ e $\lambda_2 = -6$, con m.a. $= 1$. Inoltre m.a. di $\lambda =$ m.g. di λ per ogni autovalore λ in quanto A è simmetrica.

Determiniamo ora gli autospazi di A.

$$V_4 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ \begin{cases} 0 = 0 \\ 5y - 5z = 0 \\ -5y + 5z = 0 \end{cases} \right\} = \{(x, y, y) \ : \ x, y \in \mathbf{R}\} = [(1, 0, 0), (0, 1, 1)]$$

e $\{(1,0,0),(0,1,1)\}$ è una base ortogonale di V_4. Poiché $\|(1,0,0)\| = 1$ e $\|(0,1,1)\| = \sqrt{2}$ abbiamo che $\{(1,0,0),(0,1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})\}$ è una base ortonormale di V_4.

$$V_{-6} = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ \begin{cases} -10x = 0 \\ -5y - 5z = 0 \\ -5y - 5z = 0 \end{cases} \right\} = \{(0,y,-y) \ : \ y \in \mathbf{R}\} = [(0,1,-1)]$$

e $\{(0,1,-1)\}$ è una base (ortogonale) di V_{-6}. Poiché $\|(0,1,-1)\| = \sqrt{2}$ abbiamo che $\{(0,1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})\}$ è una base ortonormale di V_{-6}.

b) Unendo le basi ortonormali dei singoli autospazi di A, si ottiene

$$\beta = ((1,0,0),(0,1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}),(0,1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2}))$$

che è una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di A.

c) La matrice, le cui colonne sono gli elementi di β è

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

che è una matrice ortogonale e diagonalizza A, ossia $U_{-1}AU = D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ e perciò $A \sim D$.

Si noti che V_4 è il "piano" $\pi \equiv y - z = 0$, V_{-6} è la "retta" $r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$ e $\pi \perp r$.

<u>Esempio 3</u>. Determinare una matrice simmetrica $A \in M_2(\mathbf{R})$ sapendo che i suoi autovalori sono $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 7$ e che $V_2 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x + 2y = 0\}$.

<u>Sol.</u>: ricordando che autospazi di matrici simmetriche associati ad autovalori distinti sono ortogonali, si ha che $V_7 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ 2x - y = 0\}$.

Troviamo una base ortonormale di V_2 e V_7.

Poiché,

$$V_2 = \{(-2y, y) \ : \ y \in \mathbf{R}\} = [(-2, 1)] \quad \text{e} \quad V_7 = \{(x, 2x) \ : \ x \in \mathbf{R}\} = [(1, 2)] \ ,$$

risulta che $\{(-2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})\}$ è una base ortonormale di V_2 e $\{(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})\}$ è una base ortonormale di V_7.

Perciò $\beta = ((-2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}), (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}))$ è una base ortonormale di $\mathbf{R}^2$ formata da autovettori di A.

La matrice

$$U = \begin{pmatrix} -\dfrac{2}{\sqrt{5}} & \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \\ \dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

è quindi ortogonale e diagonalizza A. Perciò

$$U_{-1}AU = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = D \ .$$

Da $U_{-1}AU = D$ segue (moltiplicando primo e secondo membro a sinistra per U e a destra per U_{-1} e tenendo presente che $UU_{-1} = I$)

$$U(U_{-1}AU)U_{-1} = UDU_{-1}$$

e perciò

$$A = UDU_{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 2 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 15 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix} \ .$$

In conclusione

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \ .$$

Vediamo ora un'ulteriore proprietà delle matrici simmetriche che permetterà anche di risolvere il precedente esempio con un metodo diverso. Si dimostra la seguente

Proposizione 5.11. (Decomposizione spettrale di una matrice simmetrica A) *Se $A \in M_n(\mathbf{R})$ è una matrice simmetrica e $\beta = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n)$ è una base ortonormale di $\mathbf{R}^n$ formata da autovettori di A associati agli autovalori $\lambda_1, ..., \lambda_n$ rispettivamente allora*

$$A = \lambda_1(\mathbf{v}_1)_{-1}\mathbf{v}_1 + \lambda_2(\mathbf{v}_2)_{-1}\mathbf{v}_2 + ... + \lambda_n(\mathbf{v}_n)_{-1}\mathbf{v}_n \ .$$

Esempio. Verifichiamo tale proprietà con $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Sol.: si ha

$$\Delta_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 0 \\ -2 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^2(\lambda - 3) \ .$$

Quindi gli autovalori di A sono $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 3$.

$$V_{-1} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ \begin{cases} -2x - 2y = 0 \\ -2x - 2y = 0 \end{cases} \right\} = \{(-y, y, z) \ : \ y, z \in \mathbf{R}\} = [(-1, 1, 0), (0, 0, 1)]$$

e $\{(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (0, 0, 1)\}$ è una base ortonormale di V_{-1}.

$$V_3 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \\ 4z = 0 \end{cases} \right\} = \{(x, x, 0) \ : \ x \in \mathbf{R}\} = [(1, 1, 0)]$$

e $\{(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)\}$ è una base ortonormale di V_3.

Quindi $\beta = (\mathbf{v}_1 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), \mathbf{v}_2 = (0, 0, 1), \mathbf{v}_3 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0))$ è una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di A associati rispettivamente agli autovalori $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = 3$.

Verifichiamo ora quanto richiesto. Si ha:

$$\lambda_1(\mathbf{v}_1)_{-1}\mathbf{v}_1 + \lambda_2(\mathbf{v}_2)_{-1}\mathbf{v}_2 + \lambda_3(\mathbf{v}_3)_{-1}\mathbf{v}_3 =$$

$$-1\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0) - 1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}(0,0,1) + 3\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0) =$$

$$-1\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = A\,.$$

<u>Svolgimento alternativo dell'esempio 3</u>. Nel corso dell'esempio abbiamo visto che $\beta = (\mathbf{v}_1 = (-2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}), \mathbf{v}_2 = (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}))$ è una base ortonormale di $\mathbf{R}^2$ formata da autovettori di A associati agli autovalori $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 7$ rispettivamente.

Pertanto

$$A = \lambda_1(\mathbf{v}_1)_{-1}\mathbf{v}_1 + \lambda_2(\mathbf{v}_2)_{-1}\mathbf{v}_2 = 2\begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}(-2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}) +$$

$$+7\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}) = 2\begin{pmatrix} 4/5 & -2/5 \\ -2/5 & 1/5 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 4/5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

ESERCIZI

1) Trovare autovalori e autospazi della matrice (diagonale) $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ $(a, b \in \mathbf{R})$.

2) Stabilire se le seguenti matrici sono diagonalizzabili e, in caso affermativo, diagonalizzarle:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b) \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & -3 \end{pmatrix}, \quad d) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3) Determinare gli eventuali valori di $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ per i quali la matrice A è diagonalizzabile:

$$a) \ A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & -3 \end{pmatrix}, \quad b) \ A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & \alpha & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$c) \ A = \begin{pmatrix} \alpha & -4 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad d) \ A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4) Siano

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Dire se A è diagonalizzabile.

b) Dire se B è diagonalizzabile.

c) Stabilire se $A \sim B$.

5) Diagonalizzare con una matrice ortogonale le seguenti matrici simmetriche:

$$a) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad b) \begin{pmatrix} 8 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad c) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

6) Trovare la matrice simmetrica $A \in M_2(\mathbf{R})$ sapendo che i suoi autovalori sono $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 6$ e che $V_4 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x - y = 0\}$.

7) Determinare l'insieme delle matrici simili alla matrice $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

8) Sia $A \in M_n(\mathbf{R})$.

Dimostrare che se λ è un autovalore di A allora λ^2 è un autovalore di A^2, mentre se X è un autovettore di A allora X è anche un autovettore di A^2.

9) Siano X_1 e X_2 autovettori di una matrice $A \in M_n(\mathbf{R})$ relativi agli autovalori distinti λ_1 e λ_2. Dimostrare che X_1 e X_2 sono linearmente indipendenti.

10) Dimostrare che se $A \in M_n(\mathbf{R})$ allora lo scalare $\lambda = 0$ è un autovalore di $A \iff |A| = 0$.

11) Studiare la relazione di similitudine in $M_1(\mathbf{R})$.

12) Dimostrare che ogni matrice $A \in M_3(\mathbf{R})$ si può scomporre nella somma di una matrice B che ha traccia nulla ($\mathrm{tr}(B) = 0$) e di una matrice C del tipo kI_3, con $k \in \mathbf{R}$.
(Suggerimento: Porre $C = \frac{1}{3}\mathrm{tr}(A)I_3$ e quindi $B = ...$).

13) Verificare la proprietà dell'esercizio 12 per la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -1 \\ -2 & 6 & 5 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

§

A
le
p
si

P

D
o
s

L

d

q

u
è
D
(n
ric

CAPITOLO 6

CONICHE. FORME QUADRATICHE

§1. Generalità sulle coniche

Affrontiamo adesso, da un punto di vista più generale, un argomento già noto dalle scuole secondarie di secondo grado, utilizzando anche vari concetti introdotti nei capitoli precedenti: matrici, autovalori, autovettori, diagonalizzazione (in particolare di matrici simmetriche).

Partiamo dalla seguente

Definizione. Si dice **conica** ogni *curva piana* che, in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy, è luogo geometrico dei punti del piano le cui coordinate (x, y) sono soluzione di un'equazione algebrica di secondo grado in x, y a coefficienti reali.

L'**equazione generale di una conica** $\mathcal{C}$ è *quindi del tipo:*

$$\mathcal{C} \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \tag{1}$$

dove $a_{ij} \in \mathbf{R}$ *e* a_{11}, a_{12}, a_{22} *non sono tutti nulli.*

• Ellisse (in particolare circonferenza), iperbole e parabola sono esempi di coniche in quanto le loro equazioni canoniche sono algebriche di secondo grado in x, y.

• L'equazione $(2x-3y+5)(x+2y-3) = 0$ è di secondo grado in x, y, quindi rappresenta una conica $\mathcal{C}$. Si ha che $\mathcal{C} = r \cup s$ dove $r \equiv 2x - 3y + 5 = 0$ e $s \equiv x + 2y - 3 = 0$, ossia $\mathcal{C}$ è *unione di due rette.*

Definizione. Si dice che una conica $\mathcal{C}$ è **riducibile** o **degenere** se è l'unione di due rette (non necessariamente distinte), dette **componenti** della conica $\mathcal{C}$. Una conica che non sia riducibile si dice **irriducibile**.

Definizione. Sia $\mathcal{C}$ la conica di equazione (1). A partire da (1) costruiamo la matrice simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

La matrice simmetrica A è detta **matrice della conica** $\mathcal{C}$.

Vale il seguente

Teorema 6.1.

La conica $\mathcal{C}$ è riducibile se e soltanto se il determinante della sua matrice è nullo (in breve $\mathcal{C}$ è riducibile $\iff |A| = 0$).

Esempio. Verificare che $\mathcal{C} \equiv 2x^2 - xy - 6y^2 - 2x + 11y - 4 = 0$ è una conica riducibile e trovarne le rette componenti r, s.

Sol.: la matrice della conica $\mathcal{C}$ è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & -6 & \frac{11}{2} \\ -1 & \frac{11}{2} & -4 \end{pmatrix}$$

e il suo determinante, calcolato con la regola di Sarrus, è $|A| = 48 + 11/4 + 11/4 + 6 - 121/2 + 1 = 0$. Quindi $|A| = 0$ e perciò $\mathcal{C}$ è una conica riducibile.

Per trovare le componenti di $\mathcal{C}$ dobbiamo, in generale, scomporre un polinomio di secondo grado in x, y nel prodotto di polinomi di primo grado. In questo caso conviene ricavare una incognita in funzione dell'altra, ad esempio x in funzione di y, e per fare questo "ordiniamo" l'equazione di $\mathcal{C}$ rispetto all'incognita x.

Si ottiene:

$$2x^2 - (y + 2)x - 6y^2 + 11y - 4 = 0$$

da cui

$$x = \frac{y+2 \pm \sqrt{y^2+4y+4+48y^2-88y+32}}{4} = \frac{y+2 \pm \sqrt{49y^2-84y+36}}{4} =$$

$$= \frac{y+2 \pm (7y-6)}{4} .$$

Si ha allora

$$x = \frac{8y-4}{4} = 2y-1 \quad \text{e quindi} \quad r \equiv x-2y+1=0$$

oppure

$$x = \frac{-6y+8}{4} = \frac{-3y+4}{2} \quad \text{e quindi} \quad s \equiv 2x+3y-4=0 .$$

Perciò $\mathcal{C} \equiv (x-2y+1)(2x+3y-4)=0$, quindi $\mathcal{C} = r \cup s$ e le rette r, s sono le componenti di $\mathcal{C}$.

Si dimostra il seguente

Teorema 6.2.

Sia A la matrice di una conica irriducibile $\mathcal{C}$ (ossia $|A| \neq 0$) avente infiniti punti reali. Allora:

a) $\mathcal{C}$ o è un'ellisse, o è un'iperbole, o è una parabola,

b) se indichiamo con A_{33} il complemento algebrico di a_{33} in A, si ha che

$$\mathcal{C} \quad \text{è una} \quad \begin{cases} \textit{iperbole} & \Longleftrightarrow \quad A_{33} < 0 \\ \textit{parabola} & \Longleftrightarrow \quad A_{33} = 0 \\ \textit{ellisse} & \Longleftrightarrow \quad A_{33} > 0 \end{cases}$$

Esempio. Classificare le seguenti coniche:

a) $\mathcal{C} \equiv x^2 - 3xy + 2y^2 + 3x - 5y + 7 = 0.$

b) $\mathcal{C} \equiv x^2 - 4xy + 4y^2 + 3x - 8y + 1 = 0.$

c) $\mathcal{C} \equiv x^2 + xy + 4y^2 - 4x + 2 = 0.$

d) $\mathcal{C} \equiv x^2 - 2xy + y^2 - 1 = 0.$

Sol.: a) La matrice di $\mathcal{C}$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 2 & -\frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & 7 \end{pmatrix}.$$

Si verifica che $|A| \neq 0$, quindi $\mathcal{C}$ è irriducibile ed essendo $A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -3/2 \\ -3/2 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} < 0$ ne segue che $\mathcal{C}$ è un'iperbole.

b) La matrice di $\mathcal{C}$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{3}{2} \\ -2 & 4 & -4 \\ \frac{3}{2} & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si verifica che $|A| \neq 0$, quindi $\mathcal{C}$ è irriducibile ed essendo $A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$ ne segue che $\mathcal{C}$ è una parabola.

c) La matrice di $\mathcal{C}$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -2 \\ \frac{1}{2} & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si verifica che $|A| \neq 0$, quindi $\mathcal{C}$ è irriducibile ed essendo $A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 4 \end{vmatrix} = 15/4 > 0$ ne segue che $\mathcal{C}$ è un'ellisse.

d) La matrice di $\mathcal{C}$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Si verifica che $|A| = 0$, quindi $\mathcal{C}$ è riducibile. L'equazione di $\mathcal{C}$ si può scrivere nella forma $(x-y)^2 - 1 = 0$ ossia $(x-y+1)(x-y-1) = 0$ che evidenzia come le componenti di $\mathcal{C}$ siano le rette $r \equiv x - y + 1 = 0$ e $s \equiv x - y - 1 = 0$.

Richiamiamo brevemente le *equazioni canoniche* delle coniche.

• L'equazione canonica della *parabola* è: $y = ax^2 \quad (a \neq 0)$.

Gli elementi utili per tracciarne il grafico sono:

il *vertice* $V(0,0)$, l'*asse* (di simmetria) di equazione $x = 0$ e la *concavità* della parabola, rivolta verso l'alto se $a > 0$ e verso il basso se $a < 0$.

<u>Esempio</u>. Tracciare il grafico della parabola di equazione $y = 2x^2$.

<u>Sol</u>.: si ha

vertice $V(0,0)$, asse di equazione $x = 0$, concavità verso l'alto perché $a = 2 > 0$. Inoltre, se $x = \pm 1$ allora $y = 2$, quindi i punti $P_1(1,2)$, $P_2(-1,2)$ appartengono alla parabola.

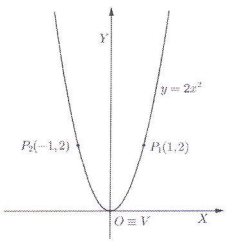


Figura 1: Parabola $y = 2x^2$

• L'equazione canonica dell'*ellisse* è: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a, b > 0)$.

Gli elementi utili per tracciarne il grafico sono:

il *centro* (di simmetria) $C(0,0)$, gli *assi* (di simmetria) di equazione $x = 0, y = 0$, i *vertici* $V_1(a,0), V_2(-a,0), V_3(0,b), V_4(0,-b)$.

Esempio. Tracciare il grafico dell'ellisse di equazione $16x^2 + 9y^2 = 144$.

Sol.: l'equazione dell'ellisse si può scrivere nella forma

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad \text{ossia} \quad \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$$

e quindi $a = 3, b = 4$.

Il centro è $C(0,0)$, gli assi hanno equazione $x = 0$ e $y = 0$ e i vertici sono $V_1(3,0), V_2(-3,0)$, $V_3(0,4), V_4(0,-4)$.

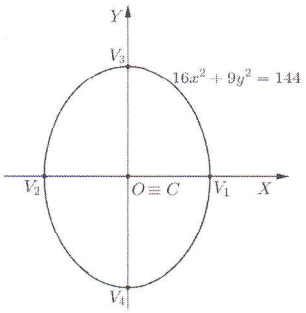


Figura 2: Ellisse di equazione $16x^2 + 9y^2 = 144$

• L'equazione canonica dell'*iperbole* è: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a, b > 0)$.

Gli elementi utili per tracciarne il grafico sono:

il *centro* (di simmetria) $C(0,0)$, gli *assi* (di simmetria) di equazione $x = 0, y = 0$, i *vertici* $V_1(a,0), V_2(-a,0)$, gli *asintoti* di equazione $\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = 0$ e $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 0$.

Se i due asintoti sono perpendicolari fra loro, l'iperbole è una *iperbole equilatera*.

Esempio. Tracciare il grafico dell'iperbole di equazione $4x^2 - 9y^2 = 1$.

Sol.: l'equazione dell'iperbole si può scrivere nella forma

$$\frac{x^2}{1/4} - \frac{y^2}{1/9} = 1 \quad \text{ossia} \quad \frac{x^2}{(1/2)^2} - \frac{y^2}{(1/3)^2} = 1$$

e quindi $a = 1/2, b = 1/3$.

Il centro è $C(0,0)$, gli assi hanno equazione $x = 0$ e $y = 0$, i vertici sono dati dai punti $V_1(1/2, 0), V_2(-1/2, 0)$ e gli asintoti sono le rette di equazione $2x - 3y = 0$ e $2x + 3y = 0$ (tali rette non sono perpendicolari tra loro e quindi l'iperbole non è equilatera).

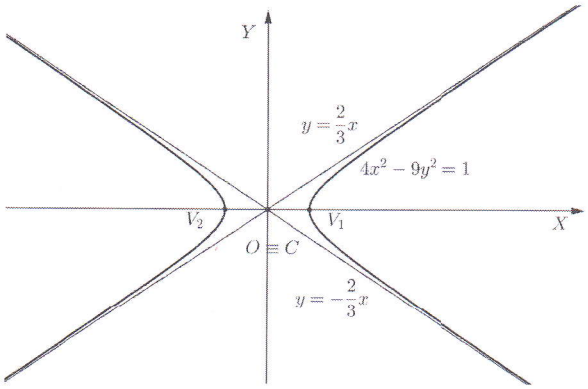


Figura 3: Iperbole di equazione $4x^2 - 9y^2 = 1$

Osservazione. Si può dimostrare che tutte le coniche irriducibili si possono rappresentare con equazioni canoniche ("scegliendo opportunamente" il sistema di riferimento).

§2. Riduzione a forma canonica di una conica irriducibile

Vediamo prima come si rappresentano analiticamente le *traslazioni* nel piano.

Sia OXY un sistema di riferimento cartesiano ortonormale. Consideriamo il sistema di riferimento cartesiano ortonormale $\overline{O}\ \overline{X}\ \overline{Y}$ ottenuto "traslando" OXY del vettore $\mathbf{v} = (\alpha, \beta)$ (vedi figura 4):

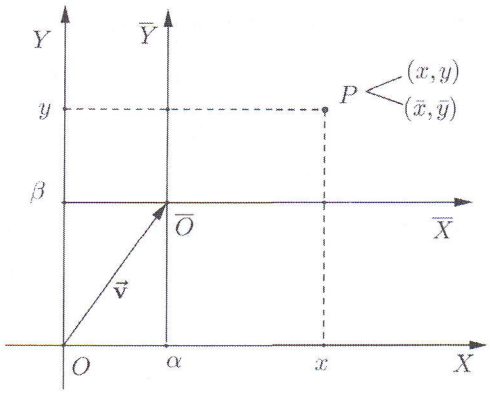


Figura 4: Traslazione degli assi

Se indichiamo con (x, y) ed $(\overline{x}, \overline{y})$ le coordinate di uno stesso punto P nei due riferimenti, si ha:

$$\text{(i)} \begin{cases} \overline{x} = x - \alpha \\ \overline{y} = y - \beta \end{cases} \quad \text{o anche} \quad \text{(ii)} \begin{cases} x = \overline{x} + \alpha \\ y = \overline{y} + \beta \end{cases} \tag{2}$$

che sono le *equazioni della traslazione.*

Le relazioni (2) permettono di passare dalle coordinate di un punto in un sistema di riferimento alle coordinate dello stesso punto nell'altro sistema di riferimento.

<u>Esempio</u>. Consideriamo le seguenti relazioni:

$$(i) \begin{cases} \overline{x} = x + 3 \\ \overline{y} = y - 2 \end{cases} \quad \text{o anche} \quad (ii) \begin{cases} x = \overline{x} - 3 \\ y = \overline{y} + 2 \end{cases} .$$

Per trovare $\overline{O}\ \overline{X}\ \overline{Y}$ basta trovare le coordinate di $\overline{O}$ rispetto ad OXY. Precisamente, essendo $(0, 0)$ le coordinate di $\overline{O}$ nel riferimento $\overline{O}\ \overline{X}\ \overline{Y}$, usando le formule (ii) otteniamo che le coordinate di $\overline{O}$ nel riferimento OXY sono $(-3, 2)$.

Se poi supponiamo di avere nel riferimento OXY, ad esempio, il punto $P(2, 5)$, le sue coordinate nel riferimento $\overline{O}\ \overline{X}\ \overline{Y}$ sono date, usando le formule (i), da $P(5, 3)$.

Se $r \equiv x - y = 0$ è l'equazione di una retta nel riferimento OXY, l'equazione di r nel riferimento $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$ è data, usando le formule (ii), da $\overline{x}-3-(\overline{y}+2)=0$, ossia $\overline{x}-\overline{y}-5=0$.

Vediamo ora come si effettua la riduzione a forma canonica dell'equazione di una conica irriducibile nel *caso in cui tale equazione sia priva del termine misto* (in xy) usando il *metodo del completamento dei quadrati.*
Illustriamo tale metodo con alcuni esempi.

Esempio 1. Ridurre a forma canonica e studiare la conica $\mathcal{C} \equiv x^2+9y^2+6x-18y+9=0$.
Sol.: classifichiamo $\mathcal{C}$. La sua matrice è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 9 & -9 \\ 3 & -9 & 9 \end{pmatrix}$$

il cui determinante è $|A| = -81$; quindi $\mathcal{C}$ è irriducibile. Essendo poi $A_{33} = 9 > 0$, $\mathcal{C}$ è un'ellisse (si noti che $|A|\mathrm{tr}(A_{33}) < 0$ e questa è la condizione che assicura che l'equazione ha infinite soluzioni reali).
Possiamo scrivere successivamente

$$x^2+9y^2+6x-18y+9=0 \to (x^2+6x)+(9y^2-18y)=-9 \to 1(x^2+6x)+9(y^2-2y)=-9 \to$$

$$\to 1(x^2+6x+9)+9(y^2-2y+1)=-9+9+9 \Rightarrow (x+3)^2+9(y-1)^2=9\ .$$

A questo punto consideriamo le seguenti formule (traslazione):

$$\text{(i)} \quad \begin{cases} \overline{x} = x+3 \\ \overline{y} = y-1 \end{cases} \quad \text{o anche} \quad \text{(ii)} \quad \begin{cases} x = \overline{x}-3 \\ y = \overline{y}+1 \end{cases} .$$

Utilizzando (i) l'equazione di $\mathcal{C}$ diventa $\overline{x}^2+9\overline{y}^2=9$ ossia

$$\frac{\overline{x}^2}{3^2}+\frac{\overline{y}^2}{1^2}=1$$

che è l'equazione canonica dell'ellisse $\mathcal{C}$ nel riferimento $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$.

Utilizzando le formule della traslazione possiamo trovare gli elementi principali dell'ellisse nei due sistemi di riferimento.

	riferimento $\overline{O}\ \overline{X}\ \overline{Y}$	riferimento OXY
centro	$\overline{O}(0,0)$	$\overline{O}(-3,1)$
vertici	$V_1(3,0)$	$V_1(0,1)$
	$V_2(-3,0)$	$V_2(-6,1)$
	$V_3(0,1)$	$V_3(-3,2)$
	$V_4(0,-1)$	$V_4(-3,0)$
assi	$\overline{x}=0$	$x+3=0$
	$\overline{y}=0$	$y-1=0$

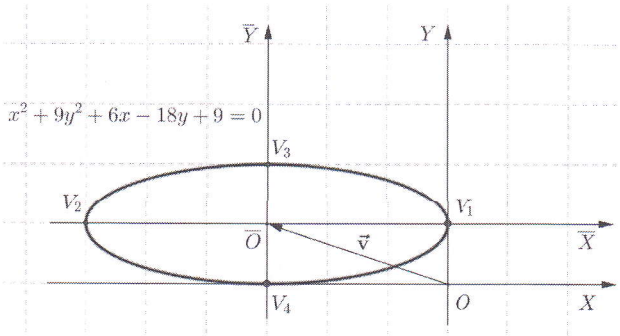


Figura 5: Ellisse di equazione $x^2+9y^2+6x-18y+9=0$

Osservazione. Per tracciare il grafico è necessario ricavare le coordinate di $\overline{O}$ nei due sistemi di riferimento (questo per individuare $\overline{O}\ \overline{X}\ \overline{Y}$), mentre per gli altri elementi della conica è sufficiente rappresentarli nel riferimento $\overline{O}\ \overline{X}\ \overline{Y}$.

Esempio 2. Ridurre a forma conica e studiare la conica $\mathcal{C} \equiv 2x^2-8x+y+5=0$.
Sol.: classifichiamo $\mathcal{C}$. La sua matrice è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -4 & \frac{1}{2} & 5 \end{pmatrix}$$

il cui determinante è $|A| = -1/2$, quindi $\mathcal{C}$ è irriducibile. Essendo poi $A_{33} = 0$, $\mathcal{C}$ è una parabola.

Possiamo scrivere successivamente

$$2x^2 - 8x + y + 5 = 0 \to y + 5 = -2x^2 + 8x \to y + 5 = -2(x^2 - 4x) \to$$

$$\to y + 5 - 8 = -2(x^2 - 4x + 4) \Rightarrow y - 3 = -2(x - 2)^2 \ .$$

A questo punto consideriamo le seguenti formule (traslazione)

$$\text{(i)} \quad \begin{cases} \overline{x} = x - 2 \\ \overline{y} = y - 3 \end{cases} \quad \text{o anche} \quad \text{(ii)} \quad \begin{cases} x = \overline{x} + 2 \\ y = \overline{y} + 3 \end{cases} \ .$$

Utilizzando (i) l'equazione di $\mathcal{C}$ diventa

$$\overline{y} = -2\overline{x}^2$$

che è l'equazione canonica della parabola $\mathcal{C}$ nel riferimento $\overline{O}\ \overline{X}\ \overline{Y}$. Utilizzando le formule della traslazione possiamo trovare gli elementi principali della parabola nei due sistemi di riferimento.

	riferimento $\overline{O}\ \overline{X}\ \overline{Y}$	riferimento OXY
vertice	$\overline{O}(0,0)$	$\overline{O}(2,3)$
asse	$\overline{x} = 0$	$x - 2 = 0$

inoltre essendo $a = -2$ la concavità è rivolta verso il basso (più precisamente $\mathcal{C}$ è situata nel semipiano $\overline{y} \leq 0$). Per rappresentare meglio il grafico di $\mathcal{C}$ troviamo le coordinate di

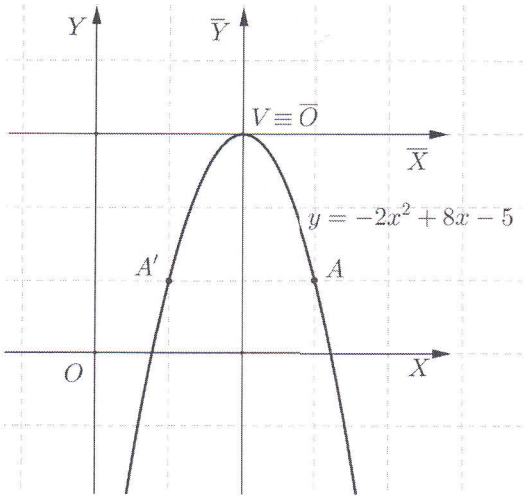


Figura 6: Parabola di equazione $y = -2x^2 + 8x - 5$

qualche suo ulteriore punto. Se $\overline{x} = \pm 1, \overline{y} = -2$ e perciò in $\overline{O}\ \overline{X}\ \overline{Y}$ i punti $A(1, -2)$ e $A'(-1, -2)$ appartengono a $\mathcal{C}$.

Osservazione. Ricordiamo che, se è noto il grafico della funzione $y = f(x)$, allora il grafico di $y = f(x) + c$ si ottiene traslando quello di $y = f(x)$ di c unità, verso l'alto se $c > 0$ oppure verso il basso se $c < 0$; mentre il grafico di $y = f(x + c)$ si ottiene traslando quello di $y = f(x)$ di c unità, verso sinistra se $c > 0$ oppure verso destra se $c < 0$.

Risolviamo ora l'esercizio precedente con un altro metodo, cioè sfruttando le proprietà citate.

Da $y = -2x^2 + 8x - 5 \to y = -2(x^2 - 4x) - 5 \to y = -2(x^2 - 4x + 4) - 5 + 8 \to y = -2(x - 2)^2 + 3$.

Quindi il grafico della parabola data si può ottenere a partire dal grafico di $y = -2x^2$, traslandolo a destra di 2 unità e poi, traslando quello ottenuto, di tre unità verso l'alto (vedi figura 7).

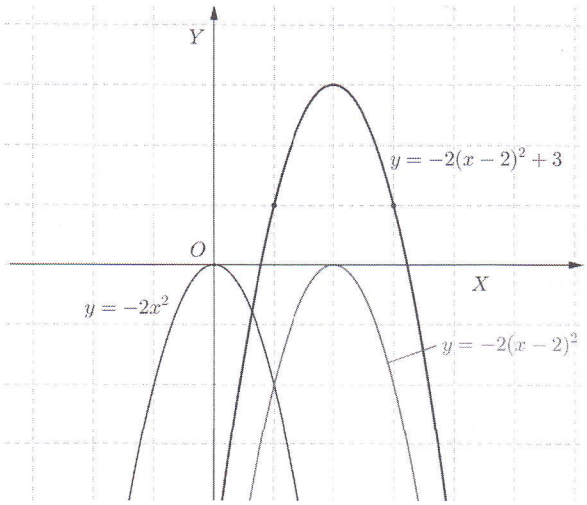


Figura 7: Parabola traslata

Esempio 3. Ridurre a forma canonica e studiare la conica $\mathcal{C} \equiv 4x^2 - y^2 - 16x - 6y + 3 = 0$.

Sol.: classifichiamo $\mathcal{C}$. La sua matrice è

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -8 \\ 0 & -1 & -3 \\ -8 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

il cui determinante è $|A| = 16$, quindi $\mathcal{C}$ è irriducibile. Essendo poi $A_{33} = -4 < 0$, $\mathcal{C}$ è un'iperbole.

Possiamo scrivere successivamente

$$4x^2 - y^2 - 16x - 6y + 3 = 0 \to 4x^2 - 16x - (y^2 + 6y) = -3 \to 4(x^2 - 4x) - 1(y^2 + 6y) = -3 \to$$

$$\to 4(x^2 - 4x + 4) - 1(y^2 + 6y + 9) = -3 + 16 - 9 \to 4(x-2)^2 - 1(y+3)^2 = 4 \ .$$

A questo punto consideriamo le seguenti formule (traslazione)

$$\text{(i)} \quad \begin{cases} \overline{x} = x - 2 \\ \overline{y} = y + 3 \end{cases} \quad \text{o anche} \quad \text{(ii)} \quad \begin{cases} x = \overline{x} + 2 \\ y = \overline{y} - 3 \end{cases} \ .$$

Utilizzando (i) l'equazione di $\mathcal{C}$ diventa $4\overline{x}^2 - \overline{y}^2 = 4$ ossia

$$\frac{\overline{x}^2}{1^2} - \frac{\overline{y}^2}{2^2} = 1$$

che è l'equazione canonica dell'iperbole $\mathcal{C}$ nel riferimento $\overline{O}\ \overline{X}\ \overline{Y}$.

Utilizzando le formule della traslazione possiamo trovare gli elementi principali dell'iperbole nei due sistemi di riferimento.

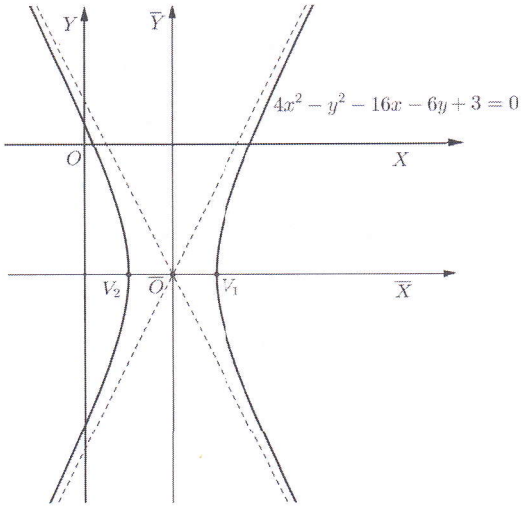


Figura 8: Iperbole di equazione $4x^2 - y^2 - 16x - 6y + 3 = 0$

	riferimento $\overline{O}\ \overline{X}\ \overline{Y}$	riferimento OXY
centro	$\overline{O}(0,0)$	$\overline{O}(2,-3)$
vertici	$V_1(1,0)$	$V_1(3,-3)$
	$V_2(-1,0)$	$V_2(1,-3)$
assi	$\overline{x} = 0$	$x - 2 = 0$
	$\overline{y} = 0$	$y + 3 = 0$
asintoti	$2\overline{x} + \overline{y} = 0$	$2x + y - 1 = 0$
	$2\overline{x} - \overline{y} = 0$	$2x - y - 7 = 0$

Si noti che gli asintoti non sono fra loro perpendicolari e quindi $\mathcal{C}$ non è un'iperbole equilatera.

Osservazione. Nel metodo descritto è necessario "raccogliere" i coefficienti dei termini in x^2 e y^2 in quanto le traslazioni sono rappresentate da equazioni del tipo $\begin{cases} \overline{x} = x + \alpha \\ \overline{y} = y + \beta \end{cases}$, con $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, in particolare i coefficienti di x e y *devono* essere uguali a 1.

§3. Forma quadratica e riduzione a forma diagonale

Per affrontare lo studio di una conica nel caso generale, introduciamo il concetto di forma quadratica.

Definizione. Si dice **forma quadratica associata alla matrice simmetrica** $A \in M_n(\mathbf{R})$ la funzione $Q : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ definita da

$$Q(X) = XAX_{-1} \qquad \forall\, X \in \mathbf{R}^n, X = (x_1 \ldots x_n) \ \text{(vettore riga)}\ .$$

Esempio 1. Se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ allora

$$Q((x,y)) = (x\ y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x\ y)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

$$= (ax + by \quad bx + cy)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax^2 + bxy + bxy + cy^2 = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

e quindi

$$Q((x,y)) = ax^2 + 2bxy + cy^2 \ \ (\textit{polinomio omogeneo di secondo grado in } x, y)\ .$$

Esempio 2. Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ allora $Q((x,y)) = x^2 + 4xy + 5y^2$.

Esempio 3. Se $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ allora $Q((x,y)) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2$.

Esempio 4. Se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$, lasciamo al lettore verificare che risulta

$$Q(x,y,z) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 \ .$$

Riduzione a forma diagonale di una forma quadratica (in $\mathbf{R}^2$)

Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ e sia $Q((x,y)) = (x\ y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, ossia $Q((x,y)) = ax^2 + 2bxy + cy^2$.
Poiché A è simmetrica, esiste una matrice ortogonale U che la diagonalizza, cioè tale che $U_{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \Lambda$ dove λ_1 e λ_2 sono gli autovalori di A.
Da $U_{-1}AU = \Lambda$, moltiplicando ambo i membri a sinistra per U e a destra per U_{-1}, segue

$$UU_{-1}AUU_{-1} = U\Lambda U_{-1}$$

e quindi, ricordando che $UU_{-1} = I$, risulta

$$A = U\Lambda U_{-1} \ .$$

Pertanto

$$\begin{aligned} Q((x,y)) &= (x\ y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x\ y)(U\Lambda U_{-1})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \\ &= \big((x\ y)U\big)\Lambda\Big(U_{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\Big) = \big((x\ y)U\big)\Lambda\big((x\ y)U\big)_{-1} \end{aligned} \tag{3}$$

(si tenga presente che $(AB)_{-1} = B_{-1}A_{-1}$).

Poniamo ora

$$(x\ y)U = (x_1\ y_1)\ .$$

Quindi da (3) si ha

$$Q((x,y)) = (x_1\ y_1)\Lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = (x_1\ y_1)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2\ .$$

Pertanto $ax^2 + 2bxy + cy^2 = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2$ se $(x_1\ y_1) = (x\ y)U$.

Poniamo $Q_1((x_1, y_1)) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2$ e quest'ultima si dice **forma canonica** o **forma diagonale** di $Q((x,y))$.

In conclusione risulta $Q((x,y)) = Q_1((x_1,y_1))$, cioè $ax^2 + 2bxy + cy^2 = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2$ se la relazione tra $(x_1\ y_1)$ e $(x\ y)$ è data da $(x_1\ y_1) = (x\ y)U$.

<u>Osservazione</u>. Poiché U è una matrice ortogonale (e quindi U è una matrice di passaggio tra due basi ortonormali, vedi Proposizione 4.6 b)) $(x_1\ y_1) = (x\ y)U$ è la relazione che intercorre tra le coordinate di uno stesso punto in due riferimenti ortonormali diversi, OXY e OX_1Y_1.

Si dimostra che i versori di OX_1Y_1 sono le colonne di U (che indicheremo con $\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2$), ossia gli elementi della base ortonormale β di $\mathbf{R}^2$ formata da autovettori di A (vedi figura 9).

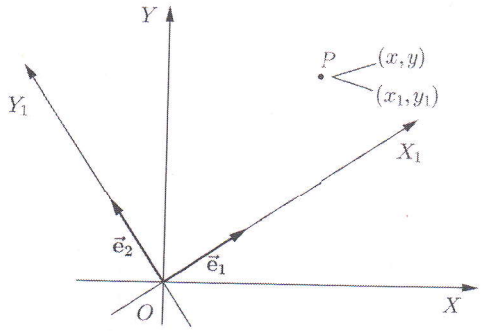


Figura 9: Sistema di riferimento ruotato

Pertanto $Q((x,y))$ e $Q_1((x_1,y_1))$ sono due funzioni (polinomi) che assumono gli stessi valori ma su argomenti diversi, rispettivamente (x,y) e (x_1,y_1) (per i quali vale la relazione

$(x_1\ y_1) = (x\ y)U)$ e queste possono essere interpretate come le coordinate di uno stesso punto nei due sistemi di riferimento ortonormali OXY e OX_1Y_1 (vedi figura 9).

Esempio. Trovare la forma diagonale della forma quadratica associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Sol.: in questo caso $Q((x,y)) = x^2 + 4xy + y^2$.

Troviamo la matrice ortogonale U che diagonalizza A.

$$\Delta_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda + 1) .$$

Quindi gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$ entrambi con m.a. $= 1$.

$$V_3 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ 2x - 2y = 0\} = \{(x,x) \ : \ x \in \mathbf{R}\} = [(1,1)]$$

e $\{(1,1)\}$ è una base di V_3. Poiché $\|(1,1)\| = \sqrt{2}$, $\{(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})\}$ è una base ortonormale di V_3.

$$V_{-1} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ -2x - 2y = 0\} = \{(-y,y) \ : \ y \in \mathbf{R}\} = [(-1,1)]$$

e $\{(-1,1)\}$ è una base di V_{-1}. Poiché $\|(-1,1)\| = \sqrt{2}$, $\{(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})\}$ è una base ortonormale di V_{-1}. Pertanto

$$\beta = (\vec{\mathbf{e}}_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), \vec{\mathbf{e}}_2 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}))$$

è una base ortonormale di $\mathbf{R}^2$ formata da autovettori di A e

$$U = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

è una matrice ortogonale che diagonalizza A. Perciò

$$U_{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$Q_1((x_1, y_1)) = 3x_1^2 - y_1^2$$

dove

$$(x_1\ y_1) = (x\ y)U \quad \text{ossia} \quad (x_1\ y_1) = (x\ y)\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

da cui $(x\ y) = (x_1\ y_1)U_{-1}$ e quindi

$$(x\ y) = (x_1\ y_1)\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

e per esteso (passando alle componenti)

$$\text{(i)} \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{x+y}{\sqrt{2}} \\ y_1 = \dfrac{-x+y}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\text{(ii)} \quad \begin{cases} x = \dfrac{x_1 - y_1}{\sqrt{2}} \\ y = \dfrac{x_1 + y_1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

(i) e (ii) sono le relazioni che permettono di passare dalle coordinate di un punto P nel sistema di riferimento OXY a quelle dello stesso punto nel sistema di riferimento OX_1Y_1 e viceversa.

<u>Osservazione</u>. Come detto in precedenza i versori del sistema di riferimento OX_1Y_1 sono gli elementi di β (o le colonne di U). *Conviene* scegliere il segno e l'ordine degli elementi di β come nell'esempio, ossia "$\beta = ((+,+),(-,+))$", per fare in modo che OX_1Y_1 sia

ottenuto da OXY attraverso una rotazione (in verso antiorario e di angolo minore di $\pi/2$). Nell'esempio precedente (i) e (ii) rappresentano la rotazione di angolo $\pi/4$.

Ritornando all'esempio,
se $(x, y) = (1, 0)$ allora $Q((x, y)) = Q((1, 0)) = 1$;
se $(x, y) = (1, 0)$ allora per (i) si ha $(x_1, y_1) = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ e perciò

$$Q_1((x_1, y_1)) = Q_1((1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})) = 3 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 1 \ .$$

In conclusione $Q((1, 0)) = Q_1((1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}))$ e $(1, 0), (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ sono le coordinate di uno stesso punto nei due riferimenti (vedi figura 10).
Lasciamo al lettore verificare, nel caso generale, l'uguaglianza $Q((x, y)) = Q_1((x_1, y_1))$ con $(x_1 \ y_1) = (x \ y)U$.

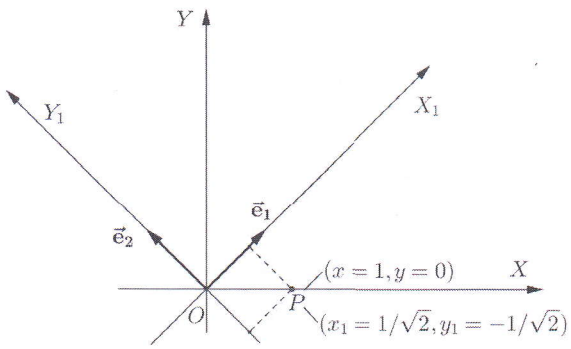


Figura 10: Coordinate del punto P nei due sistemi di riferimento

Abbiamo visto in precedenza come ridurre a forma canonica l'equazione di una conica irriducibile nel caso in cui tale equazione non contenga il termine misto (in xy). Vediamo ora, attraverso alcuni esempi, come si possa ridurre a forma canonica l'equazione di una conica irriducibile anche in presenza del termine misto (in xy), usando quanto visto sulle forme quadratiche.

Esempio 1. Ridurre a forma canonica e studiare la conica

$$\mathcal{C} \equiv 5x^2 - 4xy + 2y^2 - 6 = 0 \ .$$

Sol.: classifichiamo $\mathcal{C}$ indicando con $\overline{A}$ la sua matrice:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \ .$$

Si ha $|\overline{A}| = -36 \neq 0$, quindi $\mathcal{C}$ è irriducibile ed essendo $\overline{A}_{33} = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 6 > 0$, $\mathcal{C}$ è un'ellisse (si noti che $|\overline{A}|\mathrm{tr}(\overline{A}_{33}) < 0$ e questo assicura che l'equazione ha infinite soluzioni reali).

L'equazione di $\mathcal{C}$ "contiene" il termine in xy, quindi consideriamo la forma quadratica $Q((x,y))$ formata dal gruppo dei termini di secondo grado dell'equazione di $\mathcal{C}$, cioè:

$$Q((x,y)) = 5x^2 - 4xy + 2y^2$$

e troviamo la sua forma diagonale.

La matrice di Q è

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

e

$$\Delta_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 5 & 2 \\ 2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 6)(\lambda - 1) \ .$$

Quindi gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 6$ e $\lambda_2 = 1$ entrambi con m.a. $= 1$.

$$V_6 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x + 2y = 0\} = \{(-2y, y) \ : \ y \in \mathbf{R}\} = [(-2,1)]$$

Università di Ferrara - Biblioteca Scientifico-Tecnologica - BIBLIOTECA

e $\{(-2,1)\}$ è una base ortogonale di V_6. Poiché $\|(-2,1)\| = \sqrt{5}$, $\{(-2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})\}$ è una base ortonormale di V_6.

$$V_1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ 2x - y = 0\} = \{(x, 2x) \ : \ x \in \mathbf{R}\} = [(1,2)]$$

e $\{(1,2)\}$ è una base ortogonale di V_1. Poiché $\|(1,2)\| = \sqrt{5}$, $\{(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})\}$ è una base ortonormale di V_1.

Conviene scegliere "$\beta = ((+,+),(-,+))$", ossia in questo caso $\beta = (\vec{\mathbf{e}}_1 = (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$, $\vec{\mathbf{e}}_2 = (-2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}))$ come base ortonormale di $\mathbf{R}^2$ formata da autovettori di A. Pertanto

$$U = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{5}} & -\dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \\ \dfrac{2}{\sqrt{5}} & \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

è una matrice ortogonale e diagonalizza A.

Perciò

$$U_{-1}AU = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$Q((x,y)) = 5x^2 - 4xy + 2y^2 = x_1^2 + 6y_1^2 = Q_1((x_1, y_1))$$

dove

$$(x_1 \ y_1) = (x \ y) \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{5}} & -\dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \\ \dfrac{2}{\sqrt{5}} & \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

ossia per esteso

$$\text{(i)} \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{x + 2y}{\sqrt{5}} \\ \\ y_1 = \dfrac{-2x + y}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

e

$$(x\ y) = (x_1\ y_1)\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \\ -\dfrac{2}{\sqrt{5}} & \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

ossia per esteso

$$\text{(ii)} \quad \begin{cases} x = \dfrac{x_1 - 2y_1}{\sqrt{5}} \\ \\ y = \dfrac{2x_1 + y_1}{\sqrt{5}} \end{cases}.$$

Sostituendo (ii) nell'equazione di $\mathcal{C}$ e tenendo presente che, con tale sostituzione, risulta $5x^2 - 4xy + 2y^2 = x_1^2 + 6y_1^2$, si ottiene:

$$x_1^2 + 6y_1^2 - 6 = 0$$

e questa è l'equazione della conica $\mathcal{C}$ nel riferimento OX_1Y_1.

L'equazione precedente si può scrivere nella forma

$$\frac{x_1^2}{(\sqrt{6})^2} + \frac{y_1^2}{1^2} = 1$$

che è già l'equazione canonica dell'ellisse.

Troviamo ora gli elementi principali dell'ellisse nel sistema di riferimento OX_1Y_1.

	riferimento OX_1Y_1
centro	$O(0,0)$
vertici	$V_1(\sqrt{6},0)$
	$V_2(-\sqrt{6},0)$
	$V_3(0,1)$
	$V_4(0,-1)$
assi	$x_1 = 0$
	$y_1 = 0$

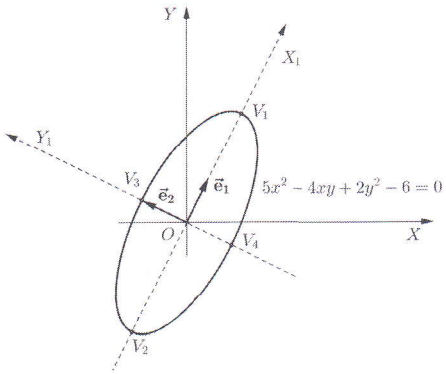


Figura 11: Ellisse nel sistema ruotato

Tracciamo ora il grafico di $\mathcal{C}$ tenendo presente che i versori di OX_1Y_1 sono gli elementi di β, ossia $\vec{e}_1 = (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}), \vec{e}_2 = (-2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$ (vedi figura 11).

Osservazione. Se si richiedono le coordinate di centro e vertici e l'equazione degli assi rispetto al riferimento Oxy, è sufficiente applicare le formule (i) e (ii) agli stessi elementi trovati rispetto al riferimento Ox_1y_1.

Osservazione. In generale, applicando all'equazione di una conica il metodo descritto nell'esempio precedente, si ottiene un'equazione priva del termine misto (in xy), ma contenente ancora termini di primo grado in x, y. A questo punto per ottenere l'equazione della conica in forma canonica sarà anche necessario "eseguire una traslazione" e quindi applicare anche il metodo del completamento dei quadrati.

Esempio 2. Ridurre a forma canonica e studiare la conica

$$\mathcal{C} \equiv x^2 - 6xy + 9y^2 - 30x - 10y = 0 \ .$$

Sol.: classifichiamo $\mathcal{C}$ indicando con $\overline{A}$ la sua matrice:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -15 \\ -3 & 9 & -5 \\ -15 & -5 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Si ha $|\overline{A}| \neq 0$, quindi $\mathcal{C}$ è irriducibile ed essendo $\overline{A}_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} = 0$, $\mathcal{C}$ è una parabola.
L'equazione di $\mathcal{C}$ "contiene" il termine in xy, quindi consideriamo la forma quadratica formata dal gruppo dei termini di secondo grado dell'equazione di $\mathcal{C}$:

$$Q((x,y)) = x^2 - 6xy + 9y^2$$

e troviamo la sua forma diagonale.
La matrice di Q è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$$

e

$$\Delta_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 3 \\ 3 & \lambda - 9 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 10) \ .$$

Quindi gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 10$ e $\lambda_2 = 0$ entrambi con m.a. $= 1$.

$$V_{10} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ 3x + y = 0\} = \{(x, -3x) \ : \ x \in \mathbf{R}\} = [(1,-3)]$$

e $\{(1,-3)\}$ è una base ortogonale di V_{10}. Poiché $\|(1,-3)\| = \sqrt{10}$, $\{(1/\sqrt{10}, -3/\sqrt{10})\}$ è una base ortonormale di V_{10}.

$$V_0 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ -x + 3y = 0\} = \{(3y, y) \ : \ y \in \mathbf{R}\} = [(3,1)]$$

e $\{(3,1)\}$ è una base ortogonale di V_0. Poiché $\|(3,1)\| = \sqrt{10}$, $\{(3/\sqrt{10}, 1/\sqrt{10})\}$ è una base ortonormale di V_0.
Conviene scegliere "$\beta = ((+,+),(-,+))$" e quindi $\beta = (\vec{\mathbf{e}}_1 = (3/\sqrt{10}, 1/\sqrt{10}), \vec{\mathbf{e}}_2 = (-1/\sqrt{10}, 3/\sqrt{10}))$ come base ortonormale di $\mathbf{R}^2$ formata da autovettori di A. Pertanto

$$U = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{\sqrt{10}} & -\dfrac{1}{\sqrt{10}} \\ \\ \dfrac{1}{\sqrt{10}} & \dfrac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

è una matrice ortogonale e diagonalizza A.

Perciò

$$U_{-1}AU = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$Q((x,y)) = x^2 - 6xy + 9y^2 = 0x_1^2 + 10y_1^2 = Q_1((x_1, y_1))$$

dove

$$(x_1 \ y_1) = (x \ y) \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

ossia per esteso

$$\text{(i)} \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{3x+y}{\sqrt{10}} \\ y_1 = \dfrac{-x+3y}{\sqrt{10}} \end{cases}$$

e

$$(x \ y) = (x_1 \ y_1) \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

ossia per esteso

$$\text{(ii)} \quad \begin{cases} x = \dfrac{3x_1 - y_1}{\sqrt{10}} \\ y = \dfrac{x_1 + 3y_1}{\sqrt{10}} \end{cases}$$

Sostituendo (ii) nell'equazione di $\mathcal{C}$ e tenendo presente che con tale sostituzione risulta $x^2 - 6xy + 9y^2 = 0x_1^2 + 10y_1^2$, si ha successivamente

$$10y_1^2 - 30\Big(\frac{3x_1 - y_1}{\sqrt{10}}\Big) - 10\Big(\frac{x_1 + 3y_1}{\sqrt{10}}\Big) = 0$$

$$10y_1^2 - \frac{100}{\sqrt{10}}x_1 = 0$$

$$x_1 = \frac{\sqrt{10}}{10}y_1^2$$

che è già l'equazione canonica della parabola (anche in questo caso non serve applicare poi una "traslazione").

Troviamo ora gli elementi principali della parabola nel sistema di riferimento OX_1Y_1.

	riferimento OX_1Y_1
vertice	$O(0,0)$
asse	$y_1 = 0$

Concavità rivolta verso l'"alto" ($x_1 \geq 0$) perché $a = \dfrac{\sqrt{10}}{10} > 0$.

Se $y_1 = \pm\sqrt{10}$ allora $x_1 = \sqrt{10}$ e quindi i punti $A(\sqrt{10}, \sqrt{10}), A'(\sqrt{10}, -\sqrt{10})$ appartengono alla parabola.

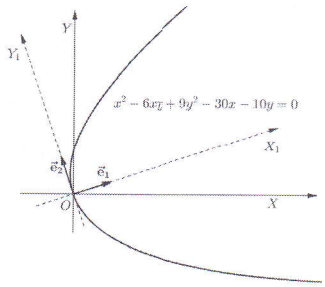


Figura 12: Parabola nel sistema ruotato

Tracciamo ora il grafico di $\mathcal{C}$ tenendo presente che i versori di OX_1Y_1 sono gli elementi di β, ossia $\vec{\mathbf{e}}_1 = (3/\sqrt{10}, 1/\sqrt{10}), \vec{\mathbf{e}}_2 = (-1/\sqrt{10}, 3/\sqrt{10})$ (vedi figura 12).

<u>Caso generale</u>. Caso di una conica $\mathcal{C}$ irriducibile (con infiniti punti reali) la cui equazione "contenga il termine in xy".

i) Si riduce a forma diagonale la forma quadratica costituita dai termini di secondo grado dell'equazione di $\mathcal{C}$ (rotazione) e si ottiene l'equazione di $\mathcal{C}$ in x_1, y_1 (gli assi X_1, Y_1 del

nuovo sistema di riferimento sono paralleli agli assi della conica, eventualmente uno solo di essi nel caso della parabola) e l'equazione di $\mathcal{C}$ in x_1, y_1 è "priva" del termine in $x_1 y_1$ (vedi Figura 13).

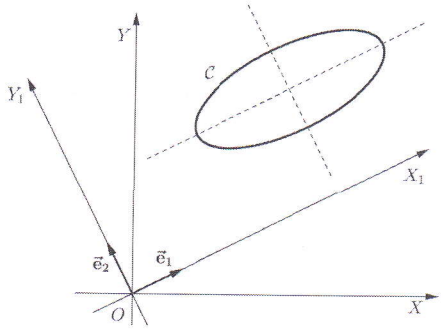


Figura 13: Rotazione del sistema di riferimento

ii) Si applica poi, all'equazione ottenuta, il procedimento del completamento dei quadrati (traslazione) e si ottiene l'equazione di $\mathcal{C}$ in $\overline{x}, \overline{y}$, e questa è l'equazione canonica di $\mathcal{C}$. Gli assi $\overline{X}, \overline{Y}$ del nuovo sistema di riferimento sono gli assi della conica, eventualmente uno solo di essi nel caso della parabola, e l'origine $\overline{O}$ coincide con il centro della conica nel caso di ellisse o iperbole e con il vertice nel caso della parabola (vedi Figura 14).

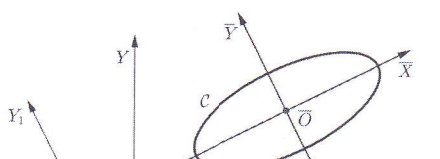


Figura 14: Rotazione e traslazione del sistema di riferimento

§4. Forme quadratiche definite positive

Vediamo adesso altre proprietà relative alle forme quadratiche e alle matrici simmetriche che verranno utilizzate in varie applicazioni.

Definizione. Sia $A \in M_n(\mathbf{R})$ una matrice *simmetrica* e sia $Q(X) = XAX_{-1}$ la forma quadratica ad essa associata. Si dice che la forma quadratica $Q(X)$ (o la matrice A)

a) **è definita positiva** se $Q(X) > 0$ per ogni $X \in \mathbf{R}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$,

b) **è semidefinita positiva** se $Q(X) \geq 0$ per ogni $X \in \mathbf{R}^n$ ed esiste $\overline{X} \in \mathbf{R}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$ tale che $Q(\overline{X}) = 0$.

Osservazione. In modo analogo si introducono i concetti di forma quadratica definita negativa e semidefinita negativa. Inoltre si dice che una forma quadratica $Q(X)$ (o la matrice A) è indefinita se esistono X_1 e X_2 in $\mathbf{R}^n$, tali che $Q(X_1) > 0$ e $Q(X_2) < 0$.

Esempio 1. Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, allora $Q((x,y)) = x^2 + 4y^2$. Quindi $Q((x,y)) > 0$ per ogni $(x,y) \in \mathbf{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ e perciò Q (oppure A) è definita positiva.

Esempio 2. Se $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, allora $Q((x,y)) = x^2 - 4xy + 4y^2 = (x-2y)^2$. Quindi $Q((x,y)) \geq 0$ per ogni $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, ma posto, ad esempio, $\overline{X} = (2,1)$, si ha $\overline{X} \neq (0,0)$ e $Q(\overline{X}) = 0$. Possiamo perciò concludere che Q (oppure A) è semidefinita positiva.

Osservazione. Ovviamente la matrice $-A$ (dove A è la matrice dell'esempio 1) è definita negativa, mentre la matrice $-A$ (dove A è la matrice dell'esempio 2) è semidefinita negativa.

Esempio 3. Se $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, allora $Q((x,y)) = x^2 - 4xy + y^2$. Risulta, ad esempio, $Q((1,1)) = -2$ e $Q((1,0)) = 1$ e perciò Q (oppure A) è indefinita.

Il seguente teorema permette di caratterizzare in modo semplice le suddette forme quadratiche.

Teorema 6.3.

Se $A \in M_n(\mathbf{R})$ è una matrice simmetrica, allora la forma quadratica $Q(X) = XAX_{-1}$ (oppure la matrice A), è

a) definita positiva $\iff$ tutti gli autovalori di A sono positivi (> 0),

b) semidefinita positiva $\iff$ gli autovalori di A sono non negativi (≥ 0) e almeno uno di essi è zero.

Dimostrazione.

(Caso $n = 2$). Riducendo a forma diagonale la forma quadratica $Q((x, y))$ associata ad $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, si ha

$$Q((x, y)) = ax^2 + 2bxy + cy^2 = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 = Q_1((x_1, y_1)) \ ,$$

dove λ_1, λ_2 sono gli autovalori di A.

a) $\Rightarrow$ Per ipotesi Q è definita positiva e perciò da $Q((x, y)) > 0$ per ogni $(x, y) \neq (0, 0)$ e dall'uguaglianza precedente segue $Q_1((x_1, y_1)) > 0$ per ogni $(x_1, y_1) \in \mathbf{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$, e in particolare $Q_1((1, 0)) > 0$, ossia $\lambda_1 > 0$, e $Q_1((0, 1)) > 0$, ossia anche $\lambda_2 > 0$.

$\Leftarrow$ Se λ_1, λ_2 sono entrambi positivi, allora chiaramente $Q_1((x_1, y_1)) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 > 0$ per ogni $(x_1, y_1) \in \mathbf{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$ e perciò $Q((x, y)) > 0$ per ogni $(x, y) \neq (0, 0)$, ossia $Q((x, y))$ è definita positiva.

b) $\Rightarrow$ Ragionando per assurdo si hanno le due seguenti possibilità:

i) almeno uno dei due autovalori λ_1, λ_2 è negativo, oppure

ii) i due autovalori sono entrambi positivi.

Nel caso i), supposto, ad esempio, che sia $\lambda_1 < 0$, si ha $Q_1((1, 0)) = \lambda_1 < 0$, contro l'ipotesi.

Nel caso ii) la forma quadratica risulta definitiva positiva (vedi a)), contro l'ipotesi.

$\Leftarrow$ Se, ad esempio, $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 > 0$, risulta $Q_1((x_1, y_1)) = \lambda_2 y_1^2 \geq 0$ per ogni $(x_1, y_1) \in \mathbf{R}^2$ e posto, ad esempio, $\overline{X} = (1, 0)$, si ha $\overline{X} \neq (0, 0)$ e $Q_1(\overline{X}) = 0$ e perciò Q è semidefinita positiva.

Osservazione. Lasciamo al lettore determinare le condizioni relative agli autovalori della matrice A in modo che essa sia definita negativa, semidefinita negativa o indefinita.

Esempio. Dire se la forma quadratica Q associata ad A è definita (o semidefinita) positiva:

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad , \quad b)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} .$$

Sol.: a) Si ha

$$\Delta_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda - 6)$$

e quindi gli autovalori di A sono 1 e 6. Poiché tutti gli autovalori di A sono positivi, Q è definita positiva, cioè $Q((x, y, z)) = 2x^2 + 4xz + y^2 + 5z^2 > 0$ per ogni $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.
b) Si ha

$$\Delta_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -3 \\ -3 & \lambda - 9 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 10)$$

e quindi gli autovalori di A sono 0 e 10. Poiché essi sono entrambi non negativi e uno è nullo, $Q((x, y)) = x^2 + 6xy + 9y^2$ è semidefinita positiva, come si può anche facilmente dedurre dal fatto che $Q((x, y)) = (x + 3y)^2$.

§5. Radice quadrata di una matrice

Premettiamo la seguente proposizione che verrà utilizzata in seguito.
Abbiamo visto che ogni matrice simmetrica reale è diagonalizzabile mediante una matrice ortogonale. La seguente proposizione dimostra che vale anche l'inverso, cioè

Proposizione 6.4.

Se $A \in M_n(\mathbf{R})$ è diagonalizzabile mediante una matrice ortogonale U allora A è simmetrica.

Dimostrazione.

Se A è diagonalizzabile mediante una matrice ortogonale U allora $U_{-1}AU = \Lambda$ dove Λ è una matrice diagonale (in particolare simmetrica).

Da $U_{-1}AU = \Lambda$ segue $U(U_{-1}AU)U_{-1} = U\Lambda U_{-1}$ e perciò $A = U\Lambda U_{-1}$.

Quindi

$$A_{-1} = (U\Lambda U_{-1})_{-1} = (U_{-1})_{-1}\Lambda_{-1}U_{-1} = U\Lambda U_{-1} = A\ .$$

In conclusione $A_{-1} = A$, ossia A è simmetrica.

La suddetta proprietà ci permette di dimostrare il seguente

Teorema 6.5.

Se $A \in M_n(\mathbf{R})$ è una matrice simmetrica definita (semidefinita) positiva, allora esiste ed è unica una matrice B simmetrica definita (semidefinita) positiva tale che $B^2 = A$.

B si dice **radice quadrata** di A e si scrive $B = \sqrt{A}$.

Dimostrazione. (Parziale)

Se A è simmetrica esiste una matrice ortogonale U che diagonalizza A, cioè tale che $U_{-1}AU = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, ossia $A = U\Lambda U_{-1}$, dove $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sono gli autovalori di A. Poiché A è inoltre definita positiva, tali autovalori sono positivi. Posto

$$B = U \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} U_{-1}$$

si ha

$$U_{-1}BU = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} \tag{4}$$

Quindi B è diagonalizzabile mediante la matrice ortogonale U e perciò $\bullet B$ *è simmetrica* (Proposizione 6.4). Inoltre da (4) segue immediatamente che gli autovalori di B sono $\sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_n}$ e quindi $\bullet B$ *è definita positiva* (Teorema 6.3).

Verifichiamo che $\bullet B^2 = A$. Si ha

$$B^2 = BB = U \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} U_{-1} U \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} U_{-1} =$$

$$= U \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} U_{-1} =$$

$$= U \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} U_{-1} = A \ .$$

In conclusione $B = \sqrt{A}$.

Non dimostriamo invece l'unicità di B. Notiamo che se A è semidefinita positiva, anche B è semidefinita positiva.

<u>Esempio</u>. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 13 & -12 \\ -12 & 13 \end{pmatrix}$ trovare, se esiste, $\sqrt{A}$.

<u>Sol</u>.: si ha

$$\Delta_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 13 & 12 \\ 12 & \lambda - 13 \end{vmatrix} = (\lambda - 25)(\lambda - 1) \ .$$

Quindi gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 25$ e $\lambda_2 = 1$ e perciò A è definita positiva. Possiamo quindi calcolare $\sqrt{A}$ e per fare ciò diagonalizziamo A con una matrice ortogonale U.

$$V_{25} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ 12x + 12y = 0\} = \{(-y, y) \ : \ y \in \mathbf{R}\} = [(-1, 1)]$$

e $\{(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})\}$ è una base ortonormale di V_{25}.

$$V_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ -12x + 12y = 0\} = \{(x, x) \ : \ x \in \mathbf{R}\} = [(1, 1)]$$

e $\{(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})\}$ è una base ortonormale di V_1.

$U = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ è ortogonale e diagonalizza sia A che $\sqrt{A}$, ossia

$$U_{-1}AU = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$U_{-1}\sqrt{A}U = \begin{pmatrix} \sqrt{25} & 0 \\ 0 & \sqrt{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Perciò

$$\sqrt{A} = U \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} U_{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} .$$

Quindi

$$\sqrt{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} .$$

Come controllo, verifichiamo che $(\sqrt{A})^2 = A$. Si ha

$$(\sqrt{A})^2 = \sqrt{A}\sqrt{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -12 \\ -12 & 13 \end{pmatrix} = A .$$

Notare che questa verifica non è sufficiente per affermare che la risposta è esatta, perchè anche $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ soddisfa $B^2 = A$, ma B non è definita positiva.

Completiamo questo capitolo con il "teorema di decomposizione polare", molto utile nelle scienze applicate.

Dimostriamo prima la seguente

Proposizione 6.6.

Se $A \in M_n(\mathbf{R})$ è una matrice invertibile, allora AA_{-1} è simmetrica e definita positiva.

Dimostrazione.

Per ogni matrice A sappiamo che la matrice AA_{-1} è simmetrica (vedi Proposizione 2.3 c)).

Se $A \in M_n(\mathbf{R})$ è invertibile e $X \in \mathbf{R}^n$ si ha $X(AA_{-1})X_{-1} = (XA)(A_{-1}X_{-1}) = (XA)(XA)_{-1}$ e quest'ultimo valore (somma di quadrati) è non negativo. Se inoltre $X \neq 0$ allora (essendo A invertibile) anche $XA \neq 0$ e quindi $(XA)(XA)_{-1} > 0$, cioè $X(AA_{-1})X_{-1} > 0$ e perciò AA_{-1} è definita positiva.

Da questa proprietà segue il seguente

Teorema 6.7. (Teorema di decomposizione polare)

Sia $A \in M_n(\mathbf{R})$ una matrice invertibile.

a) Esistono e sono uniche due matrici $R, U \in M_n(\mathbf{R})$, con R ortogonale e U simmetrica definita positiva, tali che

$$A = UR\ .$$

b) Esistono e sono uniche due matrici $S, V \in M_n(\mathbf{R})$, con S ortogonale e V simmetrica definita positiva, tali che

$$A = SV\ .$$

Dimostrazione.

Dimostriamo soltanto l'esistenza di tale decomposizione e non l'unicità.

a) Per la Proposizione 6.6 la matrice AA_{-1} è simmetrica definita positiva e quindi, per la Proposizione 6.5, esiste ed è unica una matrice $U \in M_n(\mathbf{R})$ simmetrica definita positiva

tale che $U^2 = AA_{-1}$ $(U = \sqrt{AA_{-1}})$. Posto $R = U^{-1}A$, proviamo che R è una matrice ortogonale. Infatti

$$(U^{-1}A)(U^{-1}A)_{-1} = U^{-1}AA_{-1}U^{-1} = U^{-1}U^2U^{-1} = I$$

pertanto R è ortogonale. Dall'uguaglianza $R = U^{-1}A$ segue $A = UR$ dove

$$U = \sqrt{AA_{-1}} \quad , \quad R = U^{-1}A \ .$$

hanno le proprietà richieste.

b) Si ragiona come nel caso precedente ponendo $V = \sqrt{A_{-1}A}$ e $S = AV^{-1}$.

<u>Esempio</u>. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$. Determinare

a) una matrice ortogonale R e una matrice simmetrica definita positiva U tali che

$$A = UR \ ;$$

b) una matrice ortogonale S e una matrice simmetrica definita positiva V tali che

$$A = SV \ .$$

<u>Sol</u>.: notiamo che $|A| = 8 \neq 0$ perciò A è invertibile. Pertanto possiamo applicare il teorema di decomposizione polare.

a) Determiniamo $U = \sqrt{AA_{-1}}$. Risulta

$$AA_{-1} = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}$$

e si trova

$$U = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} .$$

Segue che

$$R = U^{-1}A$$

e quindi, eseguendo i calcoli, $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

In conclusione $A = UR$ ossia

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Determiniamo $V = \sqrt{A_{-1}A}$. Risulta

$$A_{-1}A = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$$

e si trova

$$V = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Segue che

$$S = AV^{-1}$$

e quindi, eseguendo i calcoli, $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

In conclusione $A = SV$ ossia

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

ESERCIZI

1) Verificare che le seguenti coniche sono riducibili e determinarne le componenti.

a) $x^2 + 3xy + 3x - 3y - 4 = 0$

b) $2xy - 3x - 2y + 3 = 0$

2) Classificare le seguenti coniche:

a) $x^2 - 5xy + 6y^2 - 8 = 0$

b) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 2x + 6y = 0$

c) $x^2 + xy + y^2 - 4x + 2y = 0$

d) $x^2 - 6xy + 9y^2 + 2x - 6y = 0$

3) Ridurre a forma canonica e studiare le seguenti coniche:

a) $\mathcal{C} \equiv 16x^2 + 3y^2 + 32x - 24y = 0$

b) $\mathcal{C} \equiv x^2 + 9y^2 - 4x + 18y + 4 = 0$

c) $\mathcal{C} \equiv 50x^2 - 20xy + 2y^2 - \sqrt{26}x - 5\sqrt{26}y = 0$

d) $\mathcal{C} \equiv 32x^2 - 16xy + 2y^2 - \sqrt{17}x - 4\sqrt{17}y = 0$

e) $\mathcal{C} \equiv 3x^2 - 10xy + 3y^2 + 2 = 0$

f) $\mathcal{C} \equiv 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 2 = 0$

g) $\mathcal{C} \equiv 2y^2 + x + 4y = 0$

h) $\mathcal{C} \equiv 5x^2 - 20x + y + 19 = 0$

i) $\mathcal{C} \equiv 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 8 = 0$

l) $\mathcal{C} \equiv 8x^2 - 4xy + 5y^2 - 36 = 0$

m) $\mathcal{C} \equiv 9x^2 - y^2 - 18x + 6y - 9 = 0$

4) Ridurre a forma canonica e studiare la conica $\mathcal{C}$ di equazione

$$x^2 - 2xy + y^2 - 11x - 7y + 28 = 0 \ .$$

(In questo esercizio è necessario applicare sia una "rotazione" che una "traslazione").

5) Date le matrici

$$\text{i)} \ A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \ , \ \text{ii)} \ A = \begin{pmatrix} 17 & 8 \\ 8 & 17 \end{pmatrix}$$

a) verificare che A è definita positiva,

b) calcolare $\sqrt{A}$.

6. Sia $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ (A è simmetrica).

a) Diagonalizzare A con una matrice ortogonale U.

b) (Vedi forme quadratiche) Verificare l'uguaglianza $Q((x, y)) = Q_1((x_1, y_1))$ con $(x, y) = (3, 1)$ e con (x, y) generico.

c) Determinare il "segno" del polinomio $Q((x,y))$.

7) Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ (A è simmetrica).

Trovare la forma quadratica $Q((x,y,z))$ associata ad A e stabilire se Q (o A) è definita (semidefinita) positiva o indefinita.

8) Sia $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Determinare

a) una matrice ortogonale R e una matrice simmetrica definita positiva U, tali che

$$A = UR\ ;$$

b) una matrice ortogonale S e una matrice simmetrica definita positiva V, tali che

$$A = SV\ .$$

9) Dimostrare che se $\mathcal{C} \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ è una conica irriducibile (avente infiniti punti reali) e se λ_1, λ_2 sono gli autovalori della matrice $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$, allora $\mathcal{C}$ è:

a) un'ellisse $\iff \lambda_1\lambda_2 > 0$,

b) una parabola $\iff \lambda_1\lambda_2 = 0$,

c) un'iperbole $\iff \lambda_1\lambda_2 < 0$.

10) Dimostrare che se $(x_1\ y_1) = (x\ y)U$ e U è una matrice ortogonale, allora

$$(x_1\ y_1) = (0\ 0) \iff (x\ y) = (0\ 0)\ .$$

11) Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.

Dimostrare che la forma quadratica $Q((x,y))$ associata ad A (o la matrice A) è definita positiva $\iff |A| > 0$ e $a > 0$.

CAPITOLO 7

FUNZIONI LINEARI. TENSORI

L'argomento che viene affrontato in questo capitolo è di fondamentale importanza nello studio dell'algebra lineare e delle sue applicazioni.

§1. Funzioni lineari

Diamo la seguente importante

Definizione. Siano V e W due *spazi vettoriali* su $\mathbf{R}$. Si dice che una funzione $f : V \to W$ è una **funzione lineare** (oppure **un'applicazione lineare** o anche **un omomorfismo**) se

1) $f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = f(\mathbf{v}_1) + f(\mathbf{v}_2) \quad \forall\, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$

2) $f(\alpha\mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{v}) \qquad \forall\, \alpha \in \mathbf{R}$ e $\forall\, \mathbf{v} \in V$

<u>Osservazione</u>. Nella definizione di funzione lineare compaiono al primo membro delle due uguaglianze le operazioni $+$ e $\cdot$ definite in V e al secondo membro le operazioni $+$ e $\cdot$ definite in W. Per non appesantire la scrittura si è scelto di indicarle nello stesso modo e così sarà fatto nel seguito.

<u>Esempi</u>. Siano V, W spazi vettoriali su $\mathbf{R}$.

a) La funzione $\mathbf{0} : V \to W$ tale che $\mathbf{0}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ per ogni $\mathbf{v}$ è una funzione lineare e viene detta **funzione nulla**.

b) La funzione $i : V \to V$ definita da $i(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ per ogni $\mathbf{v} \in V$ è una funzione lineare e viene detta **funzione identità**.

<u>Esempi</u>.

a) La funzione $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ definita da $f((x, y)) = (x, y, x + 2y)$ è lineare.

Infatti, posto $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1)$, $\mathbf{v}_2 = (x_2, y_2)$, $\mathbf{v} = (x, y)$ e $\alpha \in \mathbf{R}$ risulta:

1) $f((x_1,y_1)+(x_2,y_2)) = f((x_1+x_2,y_1+y_2)) = (x_1+x_2,y_1+y_2,(x_1+x_2)+2(y_1+y_2)) =$
$= (x_1+x_2,y_1+y_2,x_1+2y_1+x_2+2y_2) = (x_1,y_1,x_1+2y_1)+(x_2,y_2,x_2+2y_2) = f((x_1,y_1))+$
$f((x_2,y_2))$, quindi $f(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2) = f(\mathbf{v}_1)+f(\mathbf{v}_2)$,
2) $f(\alpha(x,y)) = f((\alpha x,\alpha y)) = (\alpha x,\alpha y,\alpha x+2(\alpha y)) = (\alpha x,\alpha y,\alpha(x+2y)) =$
$= \alpha(x,y,x+2y) = \alpha f((x,y))$, quindi $f(\alpha\mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{v})$.
In conclusione per f valgono 1) e 2) della definizione e perciò f è una funzione lineare.
b) Le funzioni $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ definite da $f(x)=kx$, $k\in\mathbf{R}$, sono lineari.

Teorema 7.1.
Siano V,W spazi vettoriali su $\mathbf{R}$ e $f:V\to W$ una funzione. Allora

$$f \text{ è lineare} \iff f(\alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2) = \alpha_1 f(\mathbf{v}_1)+\alpha_2 f(\mathbf{v}_2)$$

per ogni $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbf{R}$ e per ogni $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\in V$.

Dimostrazione.
$\Rightarrow$ Usando la definizione di funzione lineare abbiamo che

$$f(\alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2) = f(\alpha_1\mathbf{v}_1)+f(\alpha_2\mathbf{v}_2) = \alpha_1 f(\mathbf{v}_1)+\alpha_2 f(\mathbf{v}_2)\ .$$

$\Leftarrow$ Risulta

$$1)\quad f(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2) = f(1\mathbf{v}_1+1\mathbf{v}_2) = 1f(\mathbf{v}_1)+1f(\mathbf{v}_2) = f(\mathbf{v}_1)+f(\mathbf{v}_2)$$

$$2)\quad f(\alpha\mathbf{v}) = f(\alpha\mathbf{v}+0\mathbf{0}) = \alpha f(\mathbf{v})+0f(\mathbf{0}) = \alpha f(\mathbf{v})$$

Osservazione. E' facile provare (ragionando per induzione) che se $f:V\to W$ è una funzione lineare, allora, comunque presi $\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_n\in V$ e $\alpha_1,...,\alpha_n\in\mathbf{R}$ $(n>0)$, risulta

$$f(\alpha_1\mathbf{v}_1+...+\alpha_n\mathbf{v}_n) = \alpha_1 f(\mathbf{v}_1)+...+\alpha_n f(\mathbf{v}_n)\ .$$

Teorema 7.2. (Proprietà delle funzioni lineari)
Sia $f:V\to W$ una funzione lineare. Allora :

1) $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

2) $f(-\mathbf{v}) = -f(\mathbf{v}) \quad \forall\, \mathbf{v} \in V$.

3) $f(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = f(\mathbf{v}_1) - f(\mathbf{v}_2) \quad \forall\, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$.

4) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ *è un sottoinsieme di* V *linearmente dipendente, allora l'insieme* $\{f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), ..., f(\mathbf{v}_n)\}$ *è un sottoinsieme di* W *linearmente dipendente (cioè le funzioni lineari conservano la dipendenza lineare).*

5) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ *è un sottoinsieme di* V *tale che* $\{f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), ..., f(\mathbf{v}_n)\}$ *è linearmente indipendente, allora anche* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ *è linearmente indipendente.*

6) Se $V' \sqsubseteq V$ *allora* $f(V') \sqsubseteq W$.

7) Se $W' \sqsubseteq W$ *allora* $f^{-1}(W') \sqsubseteq V$.

<u>Dimostrazione</u>.

1) $f(\mathbf{0}) = f(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = f(\mathbf{0}) + f(\mathbf{0})$ e quindi $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

2) $f(-\mathbf{v}) = f((-1)\mathbf{v}) = (-1)f(\mathbf{v}) = -f(\mathbf{v})$.

3) $f(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = f(\mathbf{v}_1 + (-\mathbf{v}_2)) = f(\mathbf{v}_1) + f(-\mathbf{v}_2) = f(\mathbf{v}_1) + (-f(\mathbf{v}_2)) = f(\mathbf{v}_1) - f(\mathbf{v}_2)$.

4) Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ è linearmente dipendente esistono degli scalari $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbf{R}$ non tutti nulli tali che $a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + ... + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$. Applicando f ai due membri di questa uguaglianza otteniamo

$$f(a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + ... + a_n\mathbf{v}_n) = a_1 f(\mathbf{v}_1) + a_2 f(\mathbf{v}_2) + ... + a_n f(\mathbf{v}_n) = f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

da cui $a_1 f(\mathbf{v}_1) + a_2 f(\mathbf{v}_2) + ... + a_n f(\mathbf{v}_n) = \mathbf{0}$, con $a_1, a_2, ..., a_n$ non tutti nulli e quindi $\{f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), ..., f(\mathbf{v}_n)\}$ è linearmente dipendente.

5) Ragioniamo per assurdo. Se $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ fosse linearmente dipendente allora per 4) $\{f(\mathbf{v}_1), ..., f(\mathbf{v}_n)\}$ sarebbe anch'esso linearmente dipendente, contro l'ipotesi.

6) $f(V') \overset{\text{def.}}{=} \{\mathbf{w} \in W \ : \ \exists\, \mathbf{v}' \in V' \ : \ f(\mathbf{v}') = \mathbf{w}\}$ e, impropriamente, $f(V') = \{f(\mathbf{v}') \ : \ \mathbf{v}' \in V'\}$.

Proviamo che $f(V') \sqsubseteq W$ nell'ipotesi che sia $V' \sqsubseteq V$ e f lineare.

- $\mathbf{0} \in f(V')$ poiché $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ e $\mathbf{0} \in V'$.

• Siano $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in f(V')$. Esistono $\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2 \in V'$ tali che $f(\mathbf{v}'_1) = \mathbf{w}_1$ e $f(\mathbf{v}'_2) = \mathbf{w}_2$. Allora $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = f(\mathbf{v}'_1) + f(\mathbf{v}'_2) = f(\mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}'_2) \in f(V')$ poiché $\mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}'_2 \in V'$, essendo $V' \sqsubseteq V$.

• Siano $\alpha \in \mathbf{R}$ e $\mathbf{w} \in f(V')$. Esiste $\mathbf{v}' \in V'$ tale che $f(\mathbf{v}') = \mathbf{w}$. Allora $\alpha\mathbf{w} = \alpha f(\mathbf{v}') = f(\alpha\mathbf{v}') \in f(V')$ poiché $\alpha\mathbf{v}' \in V'$, essendo $V' \sqsubseteq V$.

In conclusione $f(V') \sqsubseteq W$.

7) $f^{-1}(W') \overset{\text{def.}}{=} \{\mathbf{v} \in V \ : \ f(\mathbf{v}) \in W'\}$.

Proviamo che $f^{-1}(W') \sqsubseteq V$ nell'ipotesi che sia $W' \sqsubseteq W$ e f lineare.

• $\mathbf{0} \in f^{-1}(W')$ poiché $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \in W'$.

• Siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in f^{-1}(W')$. Allora $f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2) \in W'$. Poiché $W' \sqsubseteq W$ e f è lineare risulta $f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = f(\mathbf{v}_1) + f(\mathbf{v}_2) \in W'$ e quindi $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in f^{-1}(W')$.

• Siano $\alpha \in \mathbf{R}$ e $\mathbf{v} \in f^{-1}(W')$. Allora $f(\mathbf{v}) \in W'$. Poiché $W' \sqsubseteq W$ e f è lineare risulta $f(\alpha\mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{v}) \in W'$ e quindi $\alpha\mathbf{v} \in f^{-1}(W')$.

In conclusione $f^{-1}(W') \sqsubseteq V$.

N.B. In questo contesto il simbolo f^{-1} non indica la funzione inversa di f, ma la controimmagine di sottoinsiemi di W.

Osservazione. Le funzioni lineari non conservano necessariamente l'indipendenza lineare, ad esempio la funzione $\mathbf{0}$ in V è lineare e trasforma qualunque sottoinsieme di V in un insieme linearmente dipendente.

Corollario 7.3.

Sia $f : V \to W$ una funzione lineare. Allora :

a) $f(V) \sqsubseteq W$.

b) $f^{-1}(\{\mathbf{0}\}) \sqsubseteq V$.

Dimostrazione.

a) segue da 6) del Teorema 7.2 con $V' = V$ e b) da 7) del Teorema 7.2 con $W' = \{\mathbf{0}\}$.

Definizione. Sia $f : V \to W$ una funzione lineare.

Il sottospazio $f(V)$ di W si chiama **immagine** di f e si indica con I_f.

Il sottospazio $f^{-1}(\{\mathbf{0}\})$ di V si chiama **nucleo** di f e si indica con N_f oppure Ker f. Quindi

- $I_f = \{\mathbf{w} \in W \ : \ \exists\, \mathbf{v} \in V \ : \ f(\mathbf{v}) = \mathbf{w}\} \sqsubseteq W$

(impropriamente $I_f = \{f(\mathbf{v}) \ : \ \mathbf{v} \in V\}$).

- $N_f = \{\mathbf{v} \in V \ : \ f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\} \sqsubseteq V$.

Teorema 7.4.

Sia $f : V \to W$ una funzione lineare iniettiva. Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di V allora $\{f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), ..., f(\mathbf{v}_n)\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di W (cioè le funzioni lineari iniettive conservano anche l'indipendenza lineare).

<u>Dimostrazione</u>.

Sia $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ un insieme linearmente indipendente e sia f una funzione lineare iniettiva. Supponiamo inoltre che $a_1 f(\mathbf{v}_1) + a_2 f(\mathbf{v}_2) + ... + a_n f(\mathbf{v}_n) = \mathbf{0}$, con $a_1, ..., a_n \in \mathbf{R}$. Dobbiamo provare che necessariamente $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$.

Per la linearità di f, possiamo scrivere

$$f(\mathbf{0}) = \mathbf{0} = a_1 f(\mathbf{v}_1) + a_2 f(\mathbf{v}_2) + ... + a_n f(\mathbf{v}_n) = f(a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + ... + a_n\mathbf{v}_n) \ .$$

Per l'iniettività di f risulta allora $a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + ... + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$. Per ipotesi $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ è linearmente indipendente, quindi necessariamente $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$.

Teorema 7.5. (Caratterizzazione delle funzioni lineari iniettive)

Sia $f : V \to W$ una funzione lineare. Allora

$$f \ \text{ è iniettiva} \iff N_f = \{\mathbf{0}\} \ .$$

Dimostrazione.

$\Rightarrow$ Sia $\mathbf{v} \in N_f$. Allora $f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$. Ma f è lineare, quindi anche $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ e perciò $f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{0})$. Poiché f è iniettiva, se ne deduce che $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ e pertanto $N_f \subseteq \{\mathbf{0}\}$. L'inclusione opposta è ovvia, in quanto, per il Corollario 7.3, N_f è un sottospazio di V e perciò $\mathbf{0} \in N_f$.

$\Leftarrow$ Siano $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1 \in V$ tali che $f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{v}_1)$. Per la linearità di f è $f(\mathbf{v}-\mathbf{v}_1) = f(\mathbf{v})-f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{0}$ e quindi $\mathbf{v} - \mathbf{v}_1 \in N_f$. Per ipotesi $N_f = \{\mathbf{0}\}$, quindi $\mathbf{v} - \mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ e perciò $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1$. In conclusione f è iniettiva.

Teorema 7.6.

Sia $f : V \to W$ una funzione lineare.

Se $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ genera V allora $\{f(\mathbf{v}_1)\ ,\ ...\ , f(\mathbf{v}_n)\}$ genera I_f.

Dimostrazione.

Dobbiamo provare che $[f(\mathbf{v}_1), ..., f(\mathbf{v}_n)] = I_f$.

Sicuramente $[f(\mathbf{v}_1), ..., f(\mathbf{v}_n)] \subseteq I_f$, poiché $f(\mathbf{v}_1), ..., f(\mathbf{v}_n) \in I_f$ e I_f è un sottospazio di W.

Dimostriamo l'inclusione inversa. Sia $\mathbf{w} \in I_f$. Esiste $\mathbf{v} \in V$ tale che $f(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. Poiché $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ genera V, esistono $a_1, ..., a_n \in \mathbf{R}$ tali che $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + ... + a_n\mathbf{v}_n$. Allora

$$\mathbf{w} = f(\mathbf{v}) = f(a_1\mathbf{v}_1 + ... + a_n\mathbf{v}_n) = a_1 f(\mathbf{v}_1) + ... + a_n f(\mathbf{v}_n)$$

e perciò $\mathbf{w} \in [f(\mathbf{v}_1), ..., f(\mathbf{v}_n)]$, quindi vale anche $I_f \subseteq [f(\mathbf{v}_1), ..., f(\mathbf{v}_n)]$.

Osservazione. In particolare il Teorema 7.6 vale se $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ è una base di V.

Corollario 7.7.

Sia $f : V \to W$ una funzione lineare iniettiva. Se $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ è una base di V allora $\{f(\mathbf{v}_1), ..., f(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di I_f.

Dimostrazione.

Per il teorema precedente $\{f(\mathbf{v}_1), ..., f(\mathbf{v}_n)\}$ genera I_f e, per il Teorema 7.4, è linearmente indipendente, quindi tale insieme è una base di I_f.

Corollario 7.8.

Sia $f : V \to W$ una funzione lineare iniettiva e suriettiva. Se $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ è una base di V allora $\{f(\mathbf{v}_1), ..., f(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di W.

Dimostrazione.

Per il precedente corollario $\{f(\mathbf{v}_1), ..., f(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di I_f. Ma f è suriettiva, quindi $I_f = W$.

Teorema 7.9.

Siano V e W spazi vettoriali su $\mathbf{R}$. Se $(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n)$ è una base ordinata di V e $(\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_n)$ è una n-upla ordinata di W allora esiste una ed una sola funzione lineare $f : V \to W$ tale che $f(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w_i}$ per $i = 1, ..., n$.

Dimostrazione.

Sia $\mathbf{v} \in V$. Esistono $a_1, ..., a_n \in \mathbf{R}$ tali che $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + ... + a_n\mathbf{v}_n$. Definiamo $f : V \to W$ ponendo

$$f(\mathbf{v}) \overset{\text{def.}}{=} a_1\mathbf{w}_1 + ... + a_n\mathbf{w}_n \ .$$

- f è una funzione. Infatti ogni elemento di V si può esprimere in un unico modo come combinazione lineare della base ordinata $(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n)$ e pertanto f associa ad ogni $\mathbf{v} \in V$ uno ed un solo elemento di W.
- f è lineare. Siano $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + ... + a_n\mathbf{v}_n$ e $\overline{\mathbf{v}} = \overline{a}_1\mathbf{v}_1 + ... + \overline{a}_n\mathbf{v}_n \in V$. Allora

$$f(\mathbf{v} + \overline{\mathbf{v}}) = f((a_1 + \overline{a}_1)\mathbf{v}_1 + ... + (a_n + \overline{a}_n)\mathbf{v}_n) = (a_1 + \overline{a}_1)\mathbf{w}_1 + ... + (a_n + \overline{a}_n)\mathbf{w}_n =$$

$$= a_1\mathbf{w}_1 + ... + a_n\mathbf{w}_n + \overline{a}_1\mathbf{w}_1 + ... + \overline{a}_n\mathbf{w}_n = f(\mathbf{v}) + f(\overline{\mathbf{v}}) \ .$$

Analogamente si prova che $f(\alpha\mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{v})$ per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$ e $\mathbf{v} \in V$.

• Sia $1 \leq i \leq n$. Allora $\mathbf{v}_i = 0\mathbf{v}_1 + ... + 1\mathbf{v}_i + ... + 0\mathbf{v}_n$ e quindi

$$f(\mathbf{v}_i) = f(0\mathbf{v}_1 + ... + 1\mathbf{v}_i + ... + 0\mathbf{v}_n) = 0\mathbf{w}_1 + ... + 1\mathbf{w}_i + ... + 0\mathbf{w}_n = \mathbf{w}_i \ .$$

• Proviamo adesso che f è unica. Sia $g : V \to W$ una funzione lineare tale che $g(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$ per $i = 1, ..., n$. Allora

$$g(\mathbf{v}) = g(a_1\mathbf{v}_1 + ... + a_n\mathbf{v}_n) = a_1 g(\mathbf{v}_1) + .. + a_n g(\mathbf{v}_n) = a_1\mathbf{w}_1 + ... + a_n\mathbf{w}_n = f(\mathbf{v})$$

perciò $f \equiv g$.

Osservazione. Dal Teorema 7.9 segue che una funzione lineare è univocamente determinata dalla conoscenza di una base del dominio e dei trasformati dei vettori di tale base, quindi due funzioni lineari $f, g : V \to W$ sono diverse se e soltanto se comunque sia data una base ordinata $(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n)$ di V esiste $k \in \{1, ..., n\}$ tale che $f(\mathbf{v}_k) \neq g(\mathbf{v}_k)$.

Definizioni. Siano V e W spazi vettoriali su $\mathbf{R}$.

• Una funzione lineare $f : V \to V$ si dice anche **endomorfismo** (o **operatore lineare**) di V.

• Una funzione lineare biiettiva da V a W si dice anche **isomorfismo** da V a W.

Si dice che V è **isomorfo** a W (e si scrive $V \sim W$) se esiste un isomorfismo da V a W.

• Una funzione lineare $f : V \to \mathbf{R}$ ($\mathbf{R}$ spazio vettoriale su $\mathbf{R}$) si dice anche **funzionale lineare** in V.

Teorema 7.10. (Teorema dell'isomorfismo)

Siano V, W spazi vettoriali su $\mathbf{R}$ di dimensioni finite. Allora

$$V \sim W \iff \dim V = \dim W \ .$$

Dimostrazione.

$\Rightarrow$ Sia $f : V \to W$ un isomorfismo e sia $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ una base di V. Allora, per il Corollario 7.8, $\{f(\mathbf{v}_1), ..., f(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di W, quindi $\dim V = \dim W = n$.

$\Leftarrow$ Sia $\dim V = \dim W = n$ e siano $\beta = (\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n)$, $\beta' = (\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_n)$ basi ordinate di V e W rispettivamente. Per il Teorema 7.9, esiste un'unica funzione lineare $f : V \to W$ tale che $f(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$ per ogni $i = 1, ..., n$. Ricordiamo che se $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + ... + a_n\mathbf{v}_n \in V$ allora $f(\mathbf{v}) = a_1\mathbf{w}_1 + ... + a_n\mathbf{w}_n$. Proviamo che f è un isomorfismo.

- f è iniettiva. Sia $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + ... + a_n\mathbf{v}_n \in N_f$. Allora

$$f(\mathbf{v}) = f(a_1\mathbf{v}_1 + ... + a_n\mathbf{v}_n) = a_1\mathbf{w}_1 + ... + a_n\mathbf{w}_n = \mathbf{0} \ .$$

Poiché $\{\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_n\}$ è linearmente indipendente, risulta $a_1 = ... = a_n = 0$ e quindi $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Pertanto $N_f = \{\mathbf{0}\}$ e perciò f è iniettiva.

- f è suriettiva. Sia $\mathbf{w} = b_1\mathbf{w}_1 + ... + b_n\mathbf{w}_n \in W$. Posto $\mathbf{v} = b_1\mathbf{v}_1 + ... + b_n\mathbf{v}_n$ risulta $f(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ e perciò $I_f = W$ e quindi f è suriettiva.

In conclusione f è un isomorfismo.

<u>Osservazione</u>. Siano V, W spazi vettoriali sul campo $\mathbf{R}$ con $\dim V$ finita e sia $f : V \to W$ una funzione lineare. Abbiamo visto (Teorema 7.6) che se $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ è una base di V allora $\{f(\mathbf{v}_1), ..., f(\mathbf{v}_n)\}$ genera I_f. Pertanto $\dim I_f \leq n = \dim V$. Enunciamo ora il teorema che precisa la relazione che intercorre tra $\dim V$ e $\dim I_f$.

Teorema 7.11. (Teorema dimensionale)

Siano V e W spazi vettoriali su $\mathbf{R}$ e sia $\dim V$ finita. Se $f : V \to W$ è una funzione lineare allora :

$$\dim V = \dim N_f + \dim I_f \ .$$

Il seguente esempio illustra alcuni dei concetti e delle proprietà precedentemente introdotti.

<u>Esempio</u>. Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ la funzione lineare definita da

$$f(x, y, z) = (x + 3z, x + y + z, x + 2y - z, y + kz) \quad (k \in \mathbf{R}) \ .$$

a) Al variare di $k \in \mathbf{R}$, trovare una base e la dimensione di N_f (nucleo di f) e I_f (immagine di f) e stabilire se f è iniettiva o suriettiva.

b) Per i valori di k per i quali $\dim I_f = 2$, discutere l'appartenenza di $\mathbf{w} = (1, 2, 3, \alpha)$ a I_f, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$.

<u>Sol.</u>: a) Per definizione $N_f = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ f(x, y, z) = (0, 0, 0, 0)\}$, quindi

$$N_f = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ (x + 3z, x + y + z, x + 2y - z, y + kz) = (0, 0, 0, 0)\}$$

e pertanto dobbiamo risolvere, al variare di k, il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x + 3z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ y + kz = 0 \end{cases}$$

Procedendo per sostituzione si ha

$$\begin{cases} x = -3z \\ y - 2z = 0 \\ 2y - 4z = 0 \\ y + kz = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} x = -3z \\ y = 2z \\ (2 + k)z = 0 \end{cases}$$

• Se $k \neq -2$ il sistema ha l'unica soluzione $(0, 0, 0)$ e perciò $N_f = \{(0, 0, 0)\}$. Quindi $\dim N_f = 0$ e $\emptyset$ è una sua base. Inoltre f è iniettiva e, dal teorema dimensionale, segue che $\dim I_f = 3$ e pertanto f non è suriettiva.

• Se $k = -2$ il sistema si riduce a $\begin{cases} x = -3z \\ y = 2z \end{cases}$ da cui $N_f = \{(-3z, 2z, z) \ : \ z \in \mathbf{R}\}$, perciò $\{(-3, 2, 1)\}$ è una sua base. Pertanto $\dim N_f = 1$, f non è iniettiva e, dal teorema dimensionale, segue che $\dim I_f = 2$ e pertanto f non è suriettiva.

Rimane adesso da ricavare una base per I_f nei due casi considerati. Troviamo prima un insieme di generatori per I_f.

Per definizione $I_f = \{f((x,y,z)) \ : \ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3\}$ e perciò

$$I_f = \{(x+3z, x+y+z, x+2y-z, y+kz) \ : \ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3\} \ .$$

Da

$$(x+3z, x+y+z, x+2y-z, y+kz) = (x,x,x,0) + (0,y,2y,y) + (3z,z,-z,kz) =$$

$$= x(1,1,1,0) + y(0,1,2,1) + z(3,1,-1,k)$$

segue che l'insieme $\{(1,1,1,0),(0,1,2,1),(3,1,-1,k)\}$ genera I_f.

- Se $k \neq -2$, sapendo già che $\dim I_f = 3$ segue che tale insieme è anche una base per I_f.
- Se $k = -2$, sapendo già che $\dim I_f = 2$ segue che tale insieme non è una base per I_f. Da tale insieme possiamo però estrarre una base per I_f scegliendo in esso due vettori linearmente indipendenti, ad esempio i primi due. In conclusione $\{(1,1,1,0),(0,1,2,1)\}$ è una base per I_f.

Si osservi che, per il teorema dimensionale, nessuna funzione lineare da $\mathbf{R}^3$ in $\mathbf{R}^4$ può risultare suriettiva.

b) Abbiamo visto che $\dim I_f = 2$ solo per $k = -2$ e che in tale caso si ha che l'insieme $\{(1,1,1,0),(0,1,2,1)\}$ è una base per I_f. Quindi $\mathbf{w} = (1,2,3,\alpha) \in I_f \iff$ il rango della matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \alpha \end{pmatrix}$$

è uguale a $\dim I_f$ ossia 2.

Ricavando il rango di tale matrice, con uno dei metodi già acquisiti, si trova che

- se $\alpha = 1$ allora $r(B) = 2$ e perciò $\mathbf{w} \in I_f$,
- se $\alpha \neq 1$ allora $r(B) = 3$ e perciò $\mathbf{w} \notin I_f$.

Vediamo ora una importante **relazione tra funzioni lineari e matrici**.

Cominciamo con il **passaggio da funzioni lineari a matrici**.

Definizione. Siano V e W spazi vettoriali su $\mathbf{R}$ di dimensione finita, precisamente $\dim V = n$ e $\dim W = m$. Siano inoltre $\beta = (\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n)$ una base di V e $\beta' = (\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_m)$ una base di W.

Data una funzione lineare $f : V \to W$, consideriamo i trasformati tramite f degli elementi di β e li scriviamo come combinazioni lineari degli elementi di β' :

$$\begin{cases} f(\mathbf{v}_1) = a_{11}\mathbf{w}_1 + a_{21}\mathbf{w}_2 + ... + a_{m1}\mathbf{w}_m \\ \\ f(\mathbf{v}_2) = a_{12}\mathbf{w}_1 + a_{22}\mathbf{w}_2 + ... + a_{m2}\mathbf{w}_m \\ \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \\ f(\mathbf{v}_n) = a_{1n}\mathbf{w}_1 + a_{2n}\mathbf{w}_2 + ... + a_{mn}\mathbf{w}_m \end{cases}$$

Poniamo :

$$A_f \overset{\text{def.}}{=} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

$A_f \in M_{mn}(\mathbf{R})$ viene detta **matrice associata ad f rispetto alle basi β e β'** e viene anche indicata con $M^{\beta}_{\beta'}(f)$.

(Si noti che la i-esima colonna di A_f è la m-upla delle coordinate di $f(\mathbf{v}_i)$ rispetto a β'.)

Esempio 1. Data la funzione lineare $f : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^2}$ definita da

$$f((x, y, z)) = (x + 2y - z, x + y + z)$$

determinare $M^{\beta}_{\beta'}(f)$ dove $\beta = ((1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0))$ e $\beta' = ((1, 1), (0, 1))$.

Sol.: dobbiamo calcolare le coordinate dei corrispondenti dei vettori della base β rispetto alla base β'.

I corrispondenti dei vettori della base β sono:

$$f((1, 0, 1)) = (0, 2) \quad , \quad f((0, 1, 1)) = (1, 2) \quad , \quad f((1, 1, 0)) = (3, 2)$$

e di questi vettori dobbiamo ora calcolare le coordinate rispetto alla base β'.

Determiniamo prima le coordinate del generico vettore (x, y) di $\mathbf{R^2}$ rispetto alla base β', cioè gli scalari $a, b \in \mathbf{R}$ per i quali risulta

$$(x, y) = a(1, 1) + b(0, 1) \ .$$

Dalla precedente relazione si ricava il sistema (nel quale le incognite sono a, b)

$$\begin{cases} a = x \\ a + b = y \end{cases} \quad \text{che ha come unica soluzione} \quad \begin{cases} a = x \\ b = y - x \end{cases}$$

Quindi $(x, y) = x(1, 1) + (y - x)(0, 1)$. In particolare:

$$f((1, 0, 1)) = (0, 2) = 0(1, 1) + 2(0, 1)$$

$$f((0, 1, 1)) = (1, 2) = 1(1, 1) + 1(0, 1)$$

$$f((1, 1, 0)) = (3, 2) = 3(1, 1) - 1(0, 1) \ .$$

Pertanto

$$M^{\beta}_{\beta'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \ .$$

Esempio 2. Data la funzione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ definita da

$$f((x, y, z)) = (x + 2y - 3z, x + y - z)$$

determinare la matrice A_f associata ad f rispetto alle basi canoniche $\beta = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ di $\mathbf{R}^3$ e $\beta' = ((1, 0), (0, 1))$ di $\mathbf{R}^2$.

Sol.: procedendo come nell'esempio precedente si ha

$$f((1, 0, 0)) = (1, 1) \quad , \quad f((0, 1, 0)) = (2, 1) \quad , \quad f((0, 0, 1)) = (-3, -1) \ .$$

Tenendo presente che le coordinate di un vettore di $\mathbf{R}^n$ rispetto alla sua base canonica sono le componenti del vettore stesso, risulta

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

Si noti che in questo caso (basi canoniche) il passaggio dalla funzione lineare f alla matrice A_f è immediato, nel senso che le righe di A_f sono, nell'ordine, i coefficienti delle componenti di $f((x, y, z))$.

Vediamo ora il **passaggio da matrici a funzioni lineari**.

Siano V e W spazi vettoriali su $\mathbf{R}$ di dimensione finita, precisamente sia $\dim V = n$ e $\dim W = m$. Siano inoltre $\beta = (\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n)$ una base di V e $\beta' = (\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_m)$ una base di W.

Sia $A = (a_{ij}) \in M_{mn}(\mathbf{R})$. Preso $\mathbf{v} \in V$ possiamo scrivere $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + ... + x_n\mathbf{v}_n$. Indichiamo con $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ la colonna delle coordinate di $\mathbf{v}$ rispetto a β, ossia $X = M_\beta(\mathbf{v})$.

Calcoliamo AX e sia $AX = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$. Definiamo $f_A : V \to W$ ponendo :

$$f_A(\mathbf{v}) = y_1\mathbf{w}_1 + ... + y_m\mathbf{w}_m \ ,$$

e quindi $AX = M_{\beta'}(f_A(\mathbf{v}))$.

Si verifica facilmente che f_A è lineare.

f_A si chiama **funzione lineare associata ad A rispetto alle basi β e β'.**

Osservazione. Si può dimostrare che la matrice associata alla funzione lineare f_A così costruita, rispetto alle stesse basi, coincide con la matrice A di partenza.

Esempio 3. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

determinare la funzione lineare $f_A : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R^3}$ ad essa associata rispetto alle basi $\beta = ((1,1),(0,1))$ di $\mathbf{R^2}$ e $\beta' = ((1,2,3),(0,1,2),(2,-1,0))$ di $\mathbf{R^3}$.

N.B. A è una matrice 3×2 e $f_A : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$.

Sol.: dobbiamo calcolare le coordinate del generico vettore (x,y) di $\mathbf{R^2}$ rispetto alla base β. Per quanto visto nell'esempio precedente, $M_\beta((x,y)) = \begin{pmatrix} x \\ y-x \end{pmatrix}$. Moltiplicando A per $M_\beta((x,y))$ otteniamo $M_{\beta'}(f_A((x,y)))$.

$$AM_\beta((x,y)) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+2y \\ -3x \\ 6x-2y \end{pmatrix} = M_{\beta'}(f_A((x,y)))$$

quindi

$$f_A((x,y)) = (-x+2y)(1,2,3) + (-3x)(0,1,2) + (6x-2y)(2,-1,0) =$$

$$= (11x-2y, -11x+6y, -9x+6y)\ .$$

Esempio 4. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

determinare la funzione lineare $f_A : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ ad essa associata rispetto alle basi canoniche $\beta = ((1,0),(0,1))$ di $\mathbf{R}^2$ e $\beta' = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ di $\mathbf{R}^3$.

Sol.: procedendo come nell'esempio precedente e tenendo presente che, essendo β la base canonica di $\mathbf{R}^2$, si ha $M_\beta((x,y)) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e perciò

$$AM_\beta((x,y)) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ -3x \\ 4x-2y \end{pmatrix}$$

e queste sono le coordinate di $f_A((x,y))$ rispetto alla base canonica β' di $\mathbf{R}^3$ e perciò $f_A((x,y)) = (x+2y, -3x, 4x-2y)$.

Si noti che in questo caso (basi canoniche) il passaggio dalla matrice A alla funzione lineare f_A è immediato, nel senso che i coefficienti delle incognite nelle componenti di $f_A((x,y))$ sono le righe di A.

Tenendo presente quanto detto relativamente al passaggio da funzioni lineari a matrici e viceversa nel caso in cui $V = \mathbf{R}^n$ e $W = \mathbf{R}^m$ e le basi β e β' siano quelle canoniche, possiamo dire impropriamente che una matrice $A \in M_{mn}(\mathbf{R})$ può essere "interpretata" come una funzione $f_A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ nel seguente modo:

se $(x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n$, poniamo $X = (x_1, ..., x_n)_{-1}$ e calcoliamo $AX \in M_{m1}(\mathbf{R})$; definiamo allora

$$f_A((x_1, ..., x_n)) = (AX)_{-1} \ .$$

Impropriamente scriveremo anche $f_A(X) = AX$ per ogni $X \in \mathbf{R}^n$.

Ad esempio se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ allora

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y - 3z \\ 4x - y + 5z \end{pmatrix}$$

e quindi

$$f_A((x, y, z)) = (x + 2y - 3z, 4x - y + 5z) \ .$$

In questo esempio A è una matrice 2×3 e $f_A : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$.

Ricordando le proprietà del prodotto righe per colonne di matrici, è facile verificare che *tutte le funzioni del tipo* $f_A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ *sono lineari* (del resto questo è un caso particolare del passaggio da matrice a funzione lineare). Infatti:

1) $A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2$ ossia $f_A(X_1 + X_2) = f_A(X_1) + f_A(X_2)$

2) $A(\alpha X) = \alpha(AX)$ ossia $f_A(\alpha X) = \alpha f_A(X)$

$\forall X, X_1, X_2 \in \mathbf{R}^n, \forall \alpha \in \mathbf{R}$.

f_A si dice **funzione lineare associata ad** A (senza l'indicazione delle basi, sottintendendo che esse siano quelle canoniche).

Inoltre si può dimostrare che tutte le funzioni lineari da $\mathbf{R}^n$ ad $\mathbf{R}^m$ sono di tale tipo.

In particolare:

- una funzione lineare $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ è del tipo $f_A((x, y))$ dove $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e quindi

$$f_A((x, y)) = (ax + by, cx + dy) \quad (a, b, c, d \in \mathbf{R})$$

(*generico operatore lineare in* $\mathbf{R}^2$),

- una funzione lineare $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ è del tipo $f_A((x, y))$ dove $A = (a \ \ b)$ e quindi

$$f_A((x, y)) = ax + by \quad (a, b \in \mathbf{R})$$

(*generico funzionale lineare in* $\mathbf{R}^2$).

Esempio 1. Se $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ allora $f_A((x,y)) = (2x - y, 3y)$.

Esempio 2. Se $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ allora $f_A((x,y)) = (-4x + y, x - y)$.

Esempio 3. Se $A = (2 \quad -3)$ allora $f_A((x,y)) = 2x - 3y$.

Esempio 4. Dire quali delle seguenti funzioni sono lineari e, per queste ultime, trovare la relativa matrice.

a) $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ definita da $f((x,y)) = (x^2 + y, 2x - 3y)$

b) $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ definita da $f((x,y)) = (2x - 3y + 5, x + 2y)$

c) $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ definita da $f((x,y)) = (3x - 5y, 4x - \sqrt{2}y)$

d) $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ definita da $f((x,y)) = (3x - 2y, 0)$

e) $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da $f((x,y)) = 3x - 4y$

Sol.: a) e b) non sono lineari perché non sono del "tipo f_A".

c) è lineare perché è del tipo f_A con $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 4 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

d) è lineare perché è del tipo f_A con $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

e) è lineare perché è del tipo f_A con $A = (3 \quad -4)$.

Esempio 5. Descrivere "geometricamente" le funzioni lineari associate alle seguenti matrici:

$$a) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad c) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad d) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad f) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad g) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sol.: a) $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ e $f((x,y)) = (y,x)$. f è la simmetria assiale rispetto alla retta di equazione $y = x$.

b) $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ e $f((x,y)) = (x,-y)$. f è la simmetria assiale rispetto all'asse x.

c) $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ e $f((x,y)) = (-x,-y)$. f è la simmetria centrale di centro O.

d) $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ e $f((x,y)) = (-y,x)$. f è la rotazione di $\pi/2$ di centro O in verso antiorario.

e) $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ e $f((x,y,z)) = (x,y,-z)$. f è la simmetria rispetto al piano xy.

f) $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ e $f((x,y,z)) = (-x,-y,-z)$. f è la simmetria di centro O.

g) $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ e $f((x,y,z)) = (-x,-y,z)$. f è la simmetria rispetto all'asse z.

§2. Tensori

Studiamo ora una particolare famiglia di funzioni lineari, precisamente quelle definite da uno spazio euclideo reale V di dimensione finita in sè. Tali funzioni lineari vengono dette "operatori lineari" o "tensori" in V. Diamo esplicitamente la definizione di tensore e quella di matrice ad esso associata rispetto ad *una base ortonormale*, come caso particolare della definizione di funzione lineare e di matrice ad essa associata rispetto ad una fissata base di V.

Definizione. Sia V uno spazio euclideo reale e sia $\beta = (\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n)$ una base ortonormale di V.

a) Si dice che una funzione $T : V \to V$ è un **tensore** in V se

$$T(a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) = aT(\mathbf{v}) + bT(\mathbf{w}) \quad \forall\, a, b \in \mathbf{R},\ \forall\, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V \qquad \text{(linearità di } T\text{)}\ .$$

b) Si dice **matrice associata** a T rispetto alla base ortonormale β la matrice $(T_{ij}) \overset{\text{def.}}{=} (< \mathbf{v}_i, T(\mathbf{v}_j) >)$ ossia esplicitamente

$$(T_{ij}) \overset{\text{def.}}{=} \begin{pmatrix} < \mathbf{v}_1, T(\mathbf{v}_1) > & \dots & < \mathbf{v}_1, T(\mathbf{v}_n) > \\ < \mathbf{v}_2, T(\mathbf{v}_1) > & \dots & < \mathbf{v}_2, T(\mathbf{v}_n) > \\ \vdots & & \vdots \\ < \mathbf{v}_n, T(\mathbf{v}_1) > & \dots & < \mathbf{v}_n, T(\mathbf{v}_n) > \end{pmatrix}\ .$$

Gli n^2 scalari T_{ij} si dicono **componenti del tensore** T (rispetto alla base β).

Osservazione 1. La k-esima colonna della matrice (T_{ij}) è la n-upla delle coordinate di $T(\mathbf{v}_k)$ rispetto a β.

Osservazione 2. Come per le funzioni lineari, T è un tensore $\iff$ $T(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = T(\mathbf{w}_1) + T(\mathbf{w}_2)$ e $T(\alpha\mathbf{w}) = \alpha T(\mathbf{w})$ ($\alpha \in \mathbf{R}, \mathbf{w}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in V$).

Osservazione 3. Come per le funzioni lineari, se T è un tensore in V, allora si ha anche che $T(a_1\mathbf{w}_1 + a_2\mathbf{w}_2 + ... + a_m\mathbf{w}_m) = a_1T(\mathbf{w}_1) + a_2T(\mathbf{w}_2) + ... + a_mT(\mathbf{w}_m)$ per ogni $a_1, a_2, ..., a_m \in \mathbf{R}$ e $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_m \in V$ e per ogni $m > 1$.

Esempio 1. Sia T il tensore in $\mathbf{R}^3$ definito da $T((x, y, z)) = (x + 2z, 4y + z, x + 3y)$. Verificare che la matrice associata a T rispetto alla base canonica $\beta = (\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{v}_2 = (0, 1, 0), \mathbf{v}_3 = (0, 0, 1))$ di $\mathbf{R}^3$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

ossia $(T_{ij}) = A$.

Sol.: si ha

$$(T_{ij}) = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} < \mathbf{v}_1, T(\mathbf{v}_1) > & < \mathbf{v}_1, T(\mathbf{v}_2) > & < \mathbf{v}_1, T(\mathbf{v}_3) > \\ < \mathbf{v}_2, T(\mathbf{v}_1) > & < \mathbf{v}_2, T(\mathbf{v}_2) > & < \mathbf{v}_2, T(\mathbf{v}_3) > \\ < \mathbf{v}_3, T(\mathbf{v}_1) > & < \mathbf{v}_3, T(\mathbf{v}_2) > & < \mathbf{v}_3, T(\mathbf{v}_3) > \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} < (1,0,0),(1,0,1) > & < (1,0,0),(0,4,3) > & < (1,0,0),(2,1,0) > \\ < (0,1,0),(1,0,1) > & < (0,1,0),(0,4,3) > & < (0,1,0),(2,1,0) > \\ < (0,0,1),(1,0,1) > & < (0,0,1),(0,4,3) > & < (0,0,1),(2,1,0) > \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi $(T_{ij}) = A$ come richiesto.

Si osservi che, nel caso della base canonica, il passaggio da tensore a matrice è immediato, in quanto le righe della matrice sono i coefficienti delle incognite nelle componenti di $T((x, y, z))$.

Ad esempio, se $T((x,y,z)) = (3x+y, x-z, x+y+z)$, allora

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Viceversa, se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & 6 \\ 3 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

allora $T((x,y,z)) = (x+2y-3z, 4x-y+6z, 3x-2y-4z)$.

<u>Esempio 2</u>. Trovare il tensore T in $\mathbf{R}^3$ sapendo che $T((1,2,0)) = (4,-3,0), T((1,3,0)) = (2,-1,0), T((0,0,1)) = (1,0,1)$.

<u>Sol</u>.: è facile verificare che $\beta = ((1,2,0),(1,3,0),(0,0,1))$ è una base di $\mathbf{R}^3$. Determiniamo allora le coordinate rispetto a β del generico vettore (x,y,z) di $\mathbf{R}^3$, cioè troviamo gli scalari a, b, c per i quali

$$(x,y,z) = a(1,2,0) + b(1,3,0) + c(0,0,1) .$$

Eseguendo le operazioni si ottiene

$$(x,y,z) = (a+b, 2a+3b, c)$$

da cui il sistema

$$\begin{cases} a+b = x \\ 2a+3b = y \\ c = z \end{cases} \iff \begin{cases} a = x-b \\ 2x-2b+3b = y \\ c = z \end{cases} \iff \begin{cases} a = 3x-y \\ b = y-2x \\ c = z \end{cases} .$$

Si ha quindi

$$(x,y,z) = (3x-y)(1,2,0) + (y-2x)(1,3,0) + z(0,0,1) .$$

A questo punto, per le proprietà del tensore (cioè $T(a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + ... + a_n\mathbf{v}_n) = a_1T(\mathbf{v}_1) + a_2T(\mathbf{v}_2) + ... + a_nT(\mathbf{v}_n)$ $\forall\ a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbf{R}$ e $\forall\ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n \in \mathbf{R}^3$) risulta

$$T((x,y,z)) = (3x-y)T((1,2,0)) + (y-2x)T((1,3,0)) + zT((0,0,1)) =$$

$$= (3x-y)(4,-3,0) + (y-2x)(2,-1,0) + z(1,0,1) = (8x-2y+z, -7x+2y, z)\ .$$

In definitiva

$$T((x,y,z)) = (8x-2y+z, -7x+2y, z)\ .$$

Esempio 3.

a) Se $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ allora $T((x,y,z)) = (0,0,0)$ per ogni $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$.

Il tensore T così definito si dice **tensore nullo** in $\mathbf{R}^3$ e si indica anche con $\mathbf{O}$.

b) Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ allora $T((x,y,z)) = (x,y,z)$ per ogni $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$.

Il tensore T così definito si dice **tensore unità** (o **identità**) in $\mathbf{R}^3$ e si indica anche con $\mathbf{I}$ o i.

§3. Determinante, rango, traccia e polinomio caratteristico di un tensore

Abbiamo visto il concetto di matrice associata ad un tensore T rispetto ad una base ortonormale. A tale proposito si dimostra il seguente

Teorema 7.12.

Le matrici associate ad uno stesso tensore T in uno spazio euclideo reale V, al variare della base ortonormale β di V, sono tra loro simili.

Questo risultato, tenendo presente le proprietà delle matrici simili (vedi Proposizioni 5.2 e 5.5), permette di dare la seguente

Definizione. Si dicono **determinante**, **traccia**, **rango** e **polinomio caratteristico** di un tensore T, il determinante, la traccia, il rango ed il polinomio caratteristico di una *qualunque* matrice associata a T.

Esempio. Calcolare il determinante, la traccia, il rango ed il polinomio caratteristico del tensore T in $\mathbf{R}^3$ definito da

$$T((x,y,z)) = (x+y, x-y+z, -3z) \ .$$

Sol.: troviamo la matrice di T rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$. Essa è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \ .$$

Quindi

$\det(T) = |A| = 6$,

$\mathrm{tr}(T) = \mathrm{tr}(A) = -3$,

$\mathrm{r}(T) = \mathrm{r}(A) = 3$,

$\Delta_T(\lambda) = \Delta_A(\lambda) = (\lambda+3)(\lambda^2-2)$.

Proposizione 7.13.

Se $A \in M_3(\mathbf{R})$, *allora*

$$\Delta_A(\lambda) = \lambda^3 - i_1(A)\lambda^2 + i_2(A)\lambda - i_3(A)$$

dove

$$i_1(A) = tr(A) \quad , \quad i_2(A) = tr(Agg(A)) \quad , \quad i_3(A) = det(A) \ .$$

Esempio. Verificare la Proposizione 7.13 per

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} \ .$$

Sol.: si ha

$$\Delta_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 8 & 0 & -4 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ -5 & 0 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 7\lambda - 28) = \lambda^3 - 9\lambda^2 - 14\lambda + 56 \ .$$

Si ha quindi

$$i_1(A) = 9 \ , \quad i_2(A) = -14 \ , \quad i_3(A) = -56 \ .$$

È poi

$$\mathrm{tr}(A) = 8 + 2 - 1 = 9 \ \text{ quindi } \ \mathrm{tr}(A) = i_1(A)$$

$$\mathrm{tr}(\mathrm{Agg}(A)) = A_{11} + A_{22} + A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 - 28 + 16 = -14 \ \text{ quindi } \ \mathrm{tr}(\mathrm{Agg}(A)) = i_2(A)$$

$$\det(A) = 2 \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 2(-28) = -56 \ \text{ quindi } \ \det(A) = i_3(A) \ .$$

Osservazione. Sappiamo che le matrici associate ad uno stesso tensore T in $\mathbf{R}^3$ (al variare della base di $\mathbf{R}^3$) sono simili tra loro, quindi hanno lo stesso polinomio caratteristico. Se A è una qualunque matrice associata a T, allora i numeri $i_1(A), i_2(A), i_3(A)$ della Proposizione 7.13 si dicono, rispettivamente:

invariante di T del primo ordine

invariante di T del secondo ordine

invariante di T del terzo ordine

e si indicano anche con $i_1(T), i_2(T), i_3(T)$.

§4. Tensori notevoli

Vediamo ora come si "traducono", in termini di tensori, alcuni concetti relativi alle matrici quadrate. In questa parte del capitolo consideriamo soprattutto lo spazio euclideo reale $\mathbf{R}^3$, in quanto è il caso più frequente nelle applicazioni.

Tensore trasposto

Se il tensore T è associato ad A, allora per *tensore trasposto* di T si intende il tensore T^t associato ad A_{-1} (rispetto ad una stessa base ortonormale). Si dimostra che:

$$T^t \text{ è il tensore trasposto di } T \iff < T(\mathbf{v}_1), \mathbf{v}_2 > = < \mathbf{v}_1, T^t(\mathbf{v}_2) > \quad \forall\, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{R}^3 \,. \quad (1)$$

Quindi dalla (1) si deduce che la definizione di tensore trasposto non dipende dalla base ortonormale scelta.

Esempio. Sia T il tensore in $\mathbf{R}^3$ definito da $T((x, y, z)) = (x + y, x - z, 2x + y - z)$.
a) Trovare il tensore T^t trasposto di T.
b) Verificare che $< T((1, 1, 2)), (-1, 0, -1) > = < (1, 1, 2), T^t((-1, 0, -1)) >$.
Sol.: a) La matrice di T rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$A_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} .$$

Pertanto

$$T^t((x, y, z)) = (x + y + 2z, x + z, -y - z) \,.$$

b) Si ha

$$< T((1, 1, 2)), (-1, 0, -1) > = < (2, -1, 1), (-1, 0, -1) > = -3$$

$$< (1,1,2), T^t((-1,0-1)) >=< (1,1,2), (-3,-2,1) >= -3$$

e pertanto è verificata l'uguaglianza del testo.

Tensore simmetrico

Se la matrice A è simmetrica allora $A = A_{-1}$ e quindi $T = T^t$.

Si dice che T è un *tensore simmetrico* se $T = T^t$ e perciò, in generale, $(T_{ij}) = (T_{ji})$.

Dalla (1) segue immediatamente che

$$T \text{ è simmetrico} \iff < T(\mathbf{v}_1), \mathbf{v}_2 >=< \mathbf{v}_1, T(\mathbf{v}_2) > \quad \forall\, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{R}^3 \,.$$

L'insieme dei tensori simmetrici in $\mathbf{R}^3$ si indica con Sym.

<u>Esempio</u>. Sia T il tensore in $\mathbf{R}^3$ definito da $T((x,y,z)) = (x+2y, 2x+y, -3z)$.

Verificare che:

a) il tensore T è simmetrico.

b) $< T((1,-1,1)), (1,2,3) >=< (1,-1,1), T((1,2,3)) >$.

<u>Sol</u>.: a) La matrice di T rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} .$$

Poiché $A = A_{-1}$, A è simmetrica e perciò T è un tensore simmetrico.

b) Si ha

$$< T((1,-1,1)), (1,2,3) >=< (-1,1,-3), (1,2,3) >= -8$$

$$< (1,-1,1), T((1,2,3)) >=< (1,-1,1), (5,4,-9) >= -8$$

e pertanto è verificata l'uguaglianza del testo.

Tensore emisimmetrico o antisimmetrico

Se la matrice A è emisimmetrica allora $A = -A_{-1}$ e quindi $T = -T^t$.

Si dice che T è un *tensore emisimmetrico* o *antisimmetrico* se $T = -T^t$ (o anche $T^t = -T$) e perciò, in generale, $(T_{ij}) = (-T_{ji})$ ossia $(T_{ij} + T_{ji}) = \mathbf{O}$.

Dalla (1) segue immediatamente che

$$T \text{ è emisimmetrico} \iff < T(\mathbf{v}_1), \mathbf{v}_2 > = < \mathbf{v}_1, -T(\mathbf{v}_2) > \quad \forall\, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{R}^3 .$$

L'insieme dei tensori emisimmetrici (antisimmetrici) in $\mathbf{R}^3$ si indica con Skw.

Esempio. Sia T il tensore in $\mathbf{R}^3$ definito da $T((x, y, z)) = (y - 2z, -x + 3z, 2x - 3y)$.

Verificare che:

a) il tensore T è emisimmetrico,

b) $< T((1, -1, 1)), (1, 2, 3) > = < (1, -1, 1), -T((1, 2, 3)) >$.

Sol.: a) La matrice di T rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$ è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Poiché $A = -A_{-1}$, A è emisimmetrica e perciò T è un tensore emisimmetrico.

b) Si ha

$$< T((1, -1, 1)), (1, 2, 3) > = < (-3, 2, 5), (1, 2, 3) > = 16$$

$$< (1, -1, 1), -T((1, 2, 3)) > = < (1, -1, 1), (4, -8, 4) > = 16$$

e pertanto è verificata l'uguaglianza del testo.

Tensore ortogonale

Se la matrice A è ortogonale allora $A_{-1} = A^{-1}$ e quindi $T^t = T^{-1}$ (dove T^{-1} è la funzione inversa di T).

Si dice che T è un *tensore ortogonale* se $T^t = T^{-1}$.

Si dimostra che

$$T \text{ è ortogonale} \iff < \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 > = < T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2) > \quad \forall\, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{R}^3$$

(ossia T conserva il prodotto scalare).

Esempio. Sia T il tensore in $\mathbf{R}^3$ definito da $T((x, y, z)) = (y, -x, z)$.

Verificare che:

a) il tensore T è ortogonale,

b) $< (1,2,3),(-1,4,-2) >=< T((1,2,3)), T((-1,4,-2)) >$.

Sol.: a) La matrice di T rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$ è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Poiché $AA_{-1} = I$ si ha che $A_{-1} = A^{-1}$ e quindi A è ortogonale, perciò T è un tensore ortogonale.

b) Si ha

$$< (1,2,3),(-1,4,-2) >= 1$$

$$< T((1,2,3)), T((-1,4,-2)) >=< (2,-1,3),(4,1,-2) >= 1$$

e pertanto è verificata l'uguaglianza del testo.

Diamo ora le definizioni di altri tensori, importanti nelle applicazioni.

Definizione. Si dice **deviatore** ogni tensore in $\mathbf{R}^3$ che abbia traccia uguale a 0. L'insieme dei deviatori in $\mathbf{R}^3$ si indica con Dev.

Definizione. Si dice **sferico** ogni tensore in $\mathbf{R}^3$ che sia multiplo dell'identità, cioè del tipo ki dove i è il tensore identità (unità) in $\mathbf{R}^3$. L'insieme dei tensori sferici in $\mathbf{R}^3$ si indica con Sph.

Decomposizione di un tensore nella somma di tensori

Come noto, ogni matrice quadrata A si può scomporre, in un unico modo, come somma di una matrice simmetrica A_S e di una emisimmetrica A_E, dove $A_S = \frac{1}{2}(A + A_{-1})$ e $A_E = \frac{1}{2}(A - A_{-1})$. Inoltre, per ogni matrice quadrata $A \in M_3(\mathbf{R})$, si ha anche la decomposizione nella somma di una matrice B che ha traccia nulla ($\mathrm{tr}(B) = 0$) e di una matrice C del tipo kI_3, con $k \in \mathbf{R}$ (vedi esercizio 12 del Capitolo 5).

Questi risultati si estendono ai tensori nel seguente

Teorema 7.14.

a) Primo teorema di decomposizione in somma.

Ogni tensore T è somma di un tensore simmetrico T_S ($T_S \in Sym$) e di uno emisimmetrico T_E($T_E \in Skw$); precisamente

$$T = T_S + T_E \quad dove \quad T_S = \frac{1}{2}(T + T^t) \ , \ T_E = \frac{1}{2}(T - T^t) \ ,$$

e tale decomposizione è unica. (T_S e T_E si dicono rispettivamente **parte simmetrica** e **parte emisimmetrica** o **antisimmetrica** di T).

b) Secondo teorema di decomposizione in somma.

Ogni tensore T in $\mathbf{R}^3$ è somma di un deviatore T_D ($T_D \in Dev$) e di un tensore sferico T_O ($T_O \in Sph$), precisamente $T = T_D + T_O$ dove $T_D = T - \frac{1}{3}tr(T)i$ e $T_O = \frac{1}{3}tr(T)i$ (i è il tensore unità in $\mathbf{R}^3$) e tale decomposizione è unica. (T_D e T_O si dicono rispettivamente il **deviatore** e la **parte sferica** (o **idrostatica**) di T).

<u>Esempio</u>. Sia T il tensore in $\mathbf{R}^3$ definito da

$$T((x, y, z)) = (x + y + z, 3x + y + z, -x - y + 3z) \ .$$

Decomporre T:

a) come somma di un tensore simmetrico T_S e di uno emisimmetrico T_E,

b) come somma di un deviatore T_D e di un tensore sferico T_O.

<u>Sol.</u>: la matrice di T rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) In termini di matrici si ha:

$$A_S = \frac{1}{2}(A + A_{-1}) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \ .$$

$$A_E = \frac{1}{2}(A - A_{-1}) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Di conseguenza

$$T_S((x,y,z)) = (x + 2y, 2x + y, 3z) \quad \text{e} \quad T_E((x,y,z)) = (-y + z, x + z, -x - y)\ .$$

In conclusione $T = T_S + T_E$, dove $T_S \in Sym$ e $T_E \in Skw$.

b) In termini di matrici si ha:

$$A_O = \frac{1}{3}\mathrm{tr}(A)I = \frac{5}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 & 0 & 0 \\ 0 & 5/3 & 0 \\ 0 & 0 & 5/3 \end{pmatrix}$$

e

$$A_D = A - A_O = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5/3 & 0 & 0 \\ 0 & 5/3 & 0 \\ 0 & 0 & 5/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 & 1 & 1 \\ 3 & -2/3 & 1 \\ -1 & -1 & 4/3 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$T_D((x,y,z)) = \left(-\frac{2}{3}x + y + z, 3x - \frac{2}{3}y + z, -x - y + \frac{4}{3}z\right)$$

e

$$T_O((x,y,z)) = \left(\frac{5}{3}x, \frac{5}{3}y, \frac{5}{3}z\right)\ .$$

In conclusione $T = T_D + T_O$ dove $T_D \in Dev$ e $T_O \in Sph$.

§5. Autovalori e autovettori di un tensore

Abbiamo visto che $\lambda \in \mathbf{R}$ è un autovalore di $A \in M_n(\mathbf{R})$ se esiste $X \in \mathbf{R}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$ tale che $AX = \lambda X$ e X è un autovettore di A associato all'autovalore λ. Teniamo inoltre presente che, nel caso di base canonica, il tensore T in $\mathbf{R}^n$ associato ad A è definito da $T(X) = AX$. Passando ai tensori si ha la seguente

Definizione. Sia T un tensore in $\mathbf{R}^3$. Si dice che lo scalare $\lambda \in \mathbf{R}$ è un **autovalore** di T se esiste $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^3 \backslash \{\mathbf{0}\}$ tale che $T(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$ e si dice che $\mathbf{v}$ è un **autovettore** di T associato all'autovalore λ (analoga definizione viene data per un tensore T in uno s.e.r. V).

Osservazione. Dalla definizione segue che se $\mathbf{v}$ è un autovettore di T, allora $\mathbf{v}$ e $T(\mathbf{v})$ sono vettori "paralleli".

Teorema 7.15.

Se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ sono autovettori di un tensore simmetrico T associati agli autovalori distinti λ_1 e λ_2, allora $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2$ (ossia $< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 >= 0$).

Dimostrazione.

Per ipotesi $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ sono autovettori di T associati a λ_1 e λ_2, con $\lambda_1 \neq \lambda_2$, quindi (per definizione di autovettore)

$$T(\mathbf{v}_1) = \lambda_1 \mathbf{v}_1 \quad \text{e} \quad T(\mathbf{v}_2) = \lambda_2 \mathbf{v}_2 \quad . \tag{2}$$

- T è simmetrico quindi, per la proprietà caratteristica, $< T(\mathbf{v}_1), \mathbf{v}_2 >=< \mathbf{v}_1, T(\mathbf{v}_2) >$, da cui, per (2) $< \lambda_1 \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 >=< \mathbf{v}_1, \lambda_2 \mathbf{v}_2 > \rightarrow \lambda_1 < \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 >= \lambda_2 < \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 > \rightarrow$ $\lambda_1 < \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 > - \lambda_2 < \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 >= 0 \rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) < \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 >= 0 \rightarrow$ (essendo per ipotesi $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ossia $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$) $< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 >= 0 \rightarrow \mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2$.

Teorema 7.16.

Se $\lambda \in \mathbf{R}$ è un autovalore di un tensore ortogonale T allora $\lambda = \pm 1$.

Dimostrazione.

Per ipotesi λ è un autovalore di T quindi (per definizione di autovalore) esiste $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ tale che

$$T(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v} \quad . \tag{3}$$

- T è ortogonale quindi, per la proprietà caratteristica, $< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 >=< T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2) >$ per ogni $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{R}^3$.

Ponendo allora $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}$ si ottiene $< \mathbf{v}, \mathbf{v} >=< T(\mathbf{v}), T(\mathbf{v}) >$ e per (3) risulta

$< \mathbf{v}, \mathbf{v} >=< \lambda\mathbf{v}, \lambda\mathbf{v} > \rightarrow < \mathbf{v}, \mathbf{v} >= \lambda^2 < \mathbf{v}, \mathbf{v} > \rightarrow (1-\lambda^2) < \mathbf{v}, \mathbf{v} >= 0 \rightarrow$ (essendo $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ anche $< \mathbf{v}, \mathbf{v} > \neq 0$) $\quad 1-\lambda^2 = 0 \rightarrow \lambda^2 = 1 \rightarrow \lambda = \pm 1$.

Osservazione. Se T è un tensore ortogonale in $\mathbf{R}^3$, allora $\det(T) = \pm 1$ (vedi l'analoga proprietà per le matrici ortogonali).

Se

$$\begin{cases} \det(T) = 1 & \text{allora } T \text{ si dice } \textbf{rotazione} \\ \det(T) = -1 & \text{allora } T \text{ si dice } \textbf{riflessione} \end{cases}$$

Si dimostra il seguente

Teorema 7.17.

Se T è un tensore in $\mathbf{R}^3$ e A è la matrice ad esso associata rispetto alla base canonica, allora gli autovalori e gli autovettori di T sono gli autovalori e gli autovettori di A.

Inoltre (in analogia a quanto visto per le matrici simmetriche) si ha il seguente

Teorema 7.18.

Se T è un tensore simmetrico in $\mathbf{R}^3$, allora

a) esiste una base ortonormale β di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di T,

b) la matrice (T_{ij}) associata a T rispetto a β è diagonale e precisamente

$$(T_{ij}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

dove $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sono gli autovalori di T (**rappresentazione diagonale di un tensore simmetrico**).

Dimostrazione di b).

Sia $\beta = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di T, associati agli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ rispettivamente. Si ha

$$T_{ij} =< \mathbf{v}_i, T(\mathbf{v}_j) >=< \mathbf{v}_i, \lambda_j \mathbf{v}_j >= \lambda_j < \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j >= \lambda_j \delta_{ij} \quad = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ \lambda_i & \text{se } i = j \end{cases}$$

e quindi

$$(T_{ij}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} .$$

Ad esempio $T_{11} =< \mathbf{v}_1, T(\mathbf{v}_1) >=< \mathbf{v}_1, \lambda_1 \mathbf{v}_1 >= \lambda_1 < \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 >= \lambda_1 \cdot 1 = \lambda_1$.

$T_{12} =< \mathbf{v}_1, T(\mathbf{v}_2) >=< \mathbf{v}_1, \lambda_2 \mathbf{v}_2 >= \lambda_2 < \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 >= \lambda_2 \cdot 0 = 0$.

E così via.

§6. Diadi. Decomposizione spettrale

Utilizzando il prodotto scalare di vettori si possono "costruire" dei particolari tensori.

Definizione. Siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{R}^3$ ($\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ fissati).

Definiamo la funzione $\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ ponendo

$$(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2)(\mathbf{v}) \overset{\text{def.}}{=} < \mathbf{v}_2, \mathbf{v} > \mathbf{v}_1 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{R}^3 .$$

$\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2$ si legge "$\mathbf{v}_1$ diade $\mathbf{v}_2$" e si dice **prodotto tensoriale o prodotto diadico** di $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.

L'insieme delle diadi in $\mathbf{R}^3$ si indica con Dya.

Si ha il seguente

Teorema 7.19.

a) Tutte le diadi sono tensori.

b) Esistono tensori che non sono diadi.

Dimostrazione di a).

Siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{R}^3$. Per la definizione di diade e per le proprietà del prodotto scalare si ha, per ogni $a, b \in \mathbf{R}$ e per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbf{R}^3$,

$$\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2(a\mathbf{u} + b\mathbf{w}) =< \mathbf{v}_2, a\mathbf{u} + b\mathbf{w} > \mathbf{v}_1 =$$

$$= (a < \mathbf{v}_2, \mathbf{u} > + b < \mathbf{v}_2, \mathbf{w} >)\mathbf{v}_1 = a < \mathbf{v}_2, \mathbf{u} > \mathbf{v}_1 + b < \mathbf{v}_2, \mathbf{w} > \mathbf{v}_1 =$$

$$= a\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2(\mathbf{u}) + b\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2(\mathbf{w}) \ .$$

In conclusione $\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2$ è un tensore.

Esempio. Se $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3), \mathbf{v}_2 = (-2, -1, 4)$ allora

$$(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2)((x, y, z)) = ((1, 2, 3) \otimes (-2, -1, 4))(x, y, z) =< (-2, -1, 4), (x, y, z) > (1, 2, 3) =$$

$$= (-2x - y + 4z)(1, 2, 3) = (-2x - y + 4z, -4x - 2y + 8z, -6x - 3y + 12z) \ .$$

Osservazione. Notiamo che, nell'esempio precedente, la matrice di $\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2$ è

$$A_{\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ -4 & -2 & 8 \\ -6 & -3 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (-2 \ -1 \ 4) \quad \text{ossia} \quad A_{\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2} = (\mathbf{v}_1)_{-1}\mathbf{v}_2$$

e che $\mathrm{tr}(A_{\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2}) = 8 =< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 >$.

Più in generale si dimostra la seguente

Proposizione 7.20.

Siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{R}^3$ e sia $A_{\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2}$ la matrice associata alla diade $\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2$ (rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$). Allora:

a) $A_{\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2} = (\mathbf{v}_1)_{-1}\mathbf{v}_2$ *(prodotto di matrici),*

b) $tr(A_{\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2}) =< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 >$.

Osservazione. Da a) segue che $\det(A_{\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2}) = 0$ per ogni $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{R}^3$, in quanto le righe di $A_{\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2}$ sono "proporzionali", quindi esistono tensori (ad esempio quelli che hanno determinante non nullo) che non possono essere rappresentati come diadi (vedi Teorema 7.19 b)).

Una importante applicazione del concetto di diade si ha nel seguente teorema (vedi Proposizione 5.11 relativa alle matrici).

Teorema 7.21. (Decomposizione spettrale di un tensore simmetrico)
Se T è un tensore simmetrico in $\mathbf{R}^3$ e $\beta = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di T associati agli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ allora

$$T((x,y,z)) = \lambda_1(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_1)((x,y,z)) + \lambda_2(\mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_2)((x,y,z)) + \lambda_3(\mathbf{v}_3 \otimes \mathbf{v}_3)((x,y,z)) \ .$$

(Decomposizione spettrale del tensore simmetrico T)

Esempio. Determinare la decomposizione spettrale del tensore simmetrico

$$T((x,y,z)) = (x+3z, -2y, 3x+z) \ .$$

Sol.: la matrice di T è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

Gli autovalori e gli autovettori di T sono, come noto, quelli di A.
Si ha

$$\Delta_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -3 \\ 0 & \lambda+2 & 0 \\ -3 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+2)^2(\lambda-4) \ .$$

Quindi gli autovalori di A sono $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ e $\lambda_3 = 4$.

$$V_{-2} = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ -3x-3z=0\} = \{(-z,y,z) \ : \ y,z \in \mathbf{R}\} = [(-1,0,1),(0,1,0)]$$

e $\{(-1,0,1),(0,1,0)\}$ è una base ortogonale di V_{-2}.
Poiché $\|(-1,0,1)\| = \sqrt{2}$, $\{(-1/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2}),(0,1,0)\}$ è una base ortonormale di V_{-2}.

$$V_4 = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ \begin{cases} 3x-3z=0 \\ 6y=0 \end{cases}\right\} = \{(x,0,x) \ : \ x \in \mathbf{R}\} = [(1,0,1)]$$

e $\{(1,0,1)\}$ è una base ortogonale di V_4. Poiché $\|(1,0,1)\| = \sqrt{2}$, $\{(1/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2})\}$ è una base ortonormale di V_4 (notare che gli autospazi V_{-2} e V_4 sono ortogonali tra loro e questo è conseguenza del Teorema 7.15).

Pertanto $\beta = (\mathbf{v}_1 = (-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}), \mathbf{v}_2 = (0,1,0), \mathbf{v}_3 = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}))$ è una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di T, associati rispettivamente agli autovalori $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ e $\lambda_3 = 4$.

La decomposizione spettrale di T è

$$T = \lambda_1(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_1) + \lambda_2(\mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_2) + \lambda_3(\mathbf{v}_3 \otimes \mathbf{v}_3)$$

dove

$$(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_1)((x,y,z)) = < \mathbf{v}_1, (x,y,z) > \mathbf{v}_1 = \frac{-x+z}{\sqrt{2}}\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\Big) = \Big(\frac{x-z}{2}, 0, \frac{-x+z}{2}\Big)$$

$$(\mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_2)((x,y,z)) = < \mathbf{v}_2, (x,y,z) > \mathbf{v}_2 = y(0,1,0) = (0,y,0)$$

$$(\mathbf{v}_3 \otimes \mathbf{v}_3)((x,y,z)) = < \mathbf{v}_3, (x,y,z) > \mathbf{v}_3 = \frac{x+z}{\sqrt{2}}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\Big) = \Big(\frac{x+z}{2}, 0, \frac{x+z}{2}\Big)$$

e perciò

$$T((x,y,z)) = -2\Big(\frac{x-z}{2}, 0, \frac{-x+z}{2}\Big) - 2(0,y,0) + 4\Big(\frac{x+z}{2}, 0, \frac{x+z}{2}\Big)$$

che è la rappresentazione spettrale di T.

<u>Osservazione</u>. Se $\mathbf{v}$ è un versore, allora $\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}(\mathbf{w})$ è la proiezione di $\mathbf{w}$ su $\mathbf{v}$. Infatti la proiezione di $\mathbf{w}$ su $\mathbf{v}$ (vedi Cap. 4) è data da $\dfrac{< \mathbf{w}, \mathbf{v} >}{< \mathbf{v}, \mathbf{v} >}\mathbf{v} = < \mathbf{v}, \mathbf{w} > \mathbf{v} = \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}(\mathbf{w})$.

§7. Tensori emisimmetrici (antisimmetrici) in $\mathbf{R}^3$ e vettore assiale

Usando il prodotto vettoriale di vettori di $\mathbf{R}^3$ si possono "costruire" dei tensori.

Sia $\mathbf{v}_1 \in \mathbf{R}^3$ ($\mathbf{v}_1$ fissato). Definiamo la funzione $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ ponendo

$$T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{R}^3 \ . \tag{4}$$

($\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}$ indica l'usuale prodotto vettoriale di $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}$ in $\mathbf{R}^3$).

Si dimostra il seguente

Teorema 7.22.

a) La funzione T definita in (4) è un tensore emisimmetrico in $\mathbf{R}^3$ e $\mathbf{v}_1$ si dice **vettore assiale** *di T.*

b) Per ogni tensore emisimmetrico T (in $\mathbf{R}^3$) esiste $\mathbf{v}_1 \in \mathbf{R}^3$ tale che $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}$, $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$.

Osservazione. La dimostrazione di a) deriva dalle proprietà del prodotto vettoriale riportate nel primo capitolo.

Esempio. Trovare il tensore emisimmetrico T di vettore assiale $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3)$.

Sol.: per definizione è $T((x, y, z)) = (1, 2, 3) \times (x, y, z)$. Poiché il prodotto vettoriale è dato dallo sviluppo del determinante simbolico

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} \quad \text{ossia} \quad (2z - 3y)\vec{\imath} - (z - 3x)\vec{\jmath} + (y - 2x)\vec{k}$$

è quindi

$$T((x, y, z)) = (-3y + 2z, 3x - z, -2x + y) \ .$$

La matrice di T è

$$A_{\mathbf{v}_1} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

$A_{\mathbf{v}_1}$ è emisimmetrica e quindi T è effettivamente un tensore emisimmetrico.

Procedendo come nell'esempio con $\mathbf{v}_1 = (x_1, x_2, x_3)$ si dimostra la seguente

Proposizione 7.23.

La matrice del tensore emisimmetrico di vettore assiale $\mathbf{v}_1 = (x_1, x_2, x_3)$ è

$$A_{\mathbf{v}_1} = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Esempio. Verificare che $T((x,y,z)) = (-y-6z, x-5z, 6x+5y)$ è un tensore emisimmetrico e trovare il suo vettore assiale $\mathbf{v}_1$.

Sol.: la matrice di T è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -6 \\ 1 & 0 & -5 \\ 6 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi, poiché A è emisimmetrica, T è un tensore emisimmetrico.

Confrontando A e $A_{\mathbf{v}_1}$ della Proposizione 7.23, possiamo concludere che il vettore assiale di T è $\mathbf{v}_1 = (5, -6, 1)$. Quindi è anche

$$T((x,y,z)) = (5,-6,1) \times (x,y,z) \quad \forall\, (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 .$$

Osservazione. Per trovare il tensore emisimmetrico di vettore assiale $\mathbf{v}_1 = (x_1, x_2, x_3)$ si può determinare prima la matrice $A_{\mathbf{v}_1}$ (vedi Proposizione 7.23) e poi il relativo tensore associato (senza calcolare esplicitamente il prodotto vettoriale).

Osservazione. L'importanza dei tensori simmetrici e di quelli emisimmetrici deriva anche dal fatto (vedi Teorema 7.14) che ogni tensore T è somma di un tensore simmetrico T_S (e questo è "descritto" dalla sua decomposizione spettrale in cui si usa il prodotto scalare di vettori) e di uno emisimmetrico T_E (e questo, in $\mathbf{R}^3$, è "descritto" dal suo vettore assiale, in cui si usa il prodotto vettoriale di vettori).

§8. Prodotto di tensori

Si dimostra che se S e T sono tensori in $\mathbf{R}^3$ allora la funzione composta $S \circ T$ definita da $(S \circ T)(\mathbf{v}) = S(T(\mathbf{v}))$ per ogni $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$, è un tensore in $\mathbf{R}^3$, detto **tensore prodotto** di S e T e indicato con ST o anche $S \cdot T$.

Inoltre, se S e T sono associati alle matrici A e B rispettivamente , allora ST è associato ad AB, quindi il prodotto di tensori ha le "stesse" proprietà del prodotto righe per colonne di matrici, ad esempio $(ST)^t = T^t S^t$.

Esempio. Siano $S((x, y, z)) = (x - y, x + y, z)$ e $T((x, y, z)) = (x + 2y, 3x + 4y, 2z)$ due tensori in $\mathbf{R}^3$.

Trovare:

a) le matrici A e B associate ad S e T rispettivamente,

b) la matrice C associata a ST e verificare che $C = AB$.

Sol.: a) La matrice A associata ad S è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mentre la matrice B associata a T è

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

b) Per determinare C dobbiamo prima trovare come opera ST. Si ha

$$(ST)((x, y, z)) = S(T((x, y, z))) = S((x + 2y, 3x + 4y, 2z)) =$$

$$= ((x + 2y) - (3x + 4y), (x + 2y) + (3x + 4y), 2z) = (-2x - 2y, 4x + 6y, 2z) .$$

Quindi la matrice C associata a ST è

$$C = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Verifichiamo adesso che $AB = C$. Risulta infatti

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = C \ .$$

§9. Prodotto scalare di matrici e prodotto scalare di tensori

Ricordiamo che il prodotto scalare di n-uple è definito da

$$< (x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) >= x_1 y_1 + ... + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i .$$

Risulta quindi "naturale" definire il **prodotto scalare di due matrici** $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in M_n(\mathbf{R})$ come:

$$< A, B >= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} b_{ij} \ .$$

<u>Esempio</u>. Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ allora

$$< A, B >= 1(-1) + 2 \cdot 6 + (-3)2 + 4(-3) = -7 \ .$$

In generale se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ allora

$$< A, B >= a_{11} b_{11} + a_{12} b_{12} + a_{21} b_{21} + a_{22} b_{22} \ .$$

Si noti che

$$A_{-1} B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{21}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{21}b_{22} \\ a_{12}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{12}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

e quindi

$$< A, B >= \mathrm{tr}(A_{-1}B) \ . \tag{5}$$

valida anche per $A, B \in M_n(\mathbf{R})$.

Per **prodotto scalare di due tensori** S **e** T (indicato con $< S, T >$) si intende il prodotto scalare delle matrici ad essi associate rispetto ad una stessa base ortonormale (la definizione non dipende dalla base scelta).

Da (5) segue

$$< S, T >= \mathrm{tr}(S^t T) \ .$$

Abbiamo visto che $M_3(\mathbf{R})$ è uno spazio vettoriale su $\mathbf{R}$ di dimensione 9, quindi l'insieme dei tensori in $\mathbf{R}^3$ (che si indica con $\mathrm{Lin}(\mathbf{R}^3)$) è uno spazio vettoriale su $\mathbf{R}$ e la sua dimensione è 9 (la somma di tensori è l'usuale somma di funzioni e il prodotto di uno scalare per un tensore è l'usuale prodotto di uno scalare per una funzione).

Inoltre si dimostra che $< \ , \ >$, *definito in Lin*$(\mathbf{R}^3)$ *(e in* $M_3(\mathbf{R})$*) ha le proprietà del prodotto scalare, quindi Lin*$(\mathbf{R}^3)$ *e* $M_3(\mathbf{R})$ *sono spazi euclidei reali (vedi definizione di spazio euclideo reale).*

Pertanto si potrà parlare di norma di un tensore (matrice), di tensori (matrici) perpendicolari, ecc.

<u>Esempio 1</u>. Siano S e T tensori in $\mathbf{R}^3$ definiti rispettivamente da

$$S((x, y, z)) = (x + y, x - z, y + 2z) \quad \text{e} \quad T((x, y, z)) = (x - y + z, 2x, y + z) \ .$$

Calcolare $< S, T >$.

Sol.: troviamo le matrici A e B, rispettivamente di S e T, rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$. Si ha

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Quindi

$$< S, T > = < A, B > = 1 \cdot 1 + 1(-1) + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 =$$

$$= 1 - 1 + 2 + 1 + 2 = 5 .$$

Esempio 2. a) Siano

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

(A è simmetrica e B è emisimmetrica).

Calcolare $< A, B >$.

b) Siano

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 5 & 6 & -2 \\ 1 & 5 & -8 \end{pmatrix}$$

(A è una matrice del tipo kI e B è una matrice che ha traccia nulla).

Calcolare $< A, B >$.

Sol.: in entrambi i casi si verifica facilmente che $< A, B >= 0$ (tale proprietà vale qualunque siano le matrici A e B con le proprietà indicate).

Per i tensori si ha il seguente

Teorema 7.24.

a) Se T_S è un tensore simmetrico in $\mathbf{R}^3$ ($T_S \in Sym$) e T_E è un tensore emisimmetrico in $\mathbf{R}^3$ ($T_E \in Skw$), allora $< T_S, T_E >= 0$, ossia $T_S \perp T_E$.

b) Se T_D è un deviatore in $\mathbf{R}^3$ ($T_D \in Dev$) e T_O è un tensore sferico in $\mathbf{R}^3$ ($T_O \in Sph$), allora $< T_D, T_O >= 0$ ossia $T_D \perp T_O$.

Esempio 3. Sia T il tensore in $\mathbf{R}^3$ definito da $T((x,y,z)) = (x+y-z, x+z, y-3z)$. Siano inoltre $\mathbf{v} = (1,2,-1), \mathbf{w} = (0,4,-2)$ due vettori di $\mathbf{R}^3$.

Verificare che

a) $< T, i >= \mathrm{tr}(T)$

b) $< T, \mathbf{v} \otimes \mathbf{w} >=< \mathbf{v}, T(\mathbf{w}) >$

dove i indica il tensore unità in $\mathbf{R}^3$, cioè $i((x,y,z)) = (x,y,z)$ per ogni $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$.

Sol.: a) Le matrici A_T e A_i, rispettivamente di T e i, rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$ sono

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad , \quad A_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$< T, i >=< A_T, A_i >= 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + (-3) \cdot 1 = 1 - 3 = -2 \ .$$

D'altra parte $\mathrm{tr}(T) = \mathrm{tr}(A_T) = 1 + 0 - 3 = -2$ e quindi è verificata l'uguaglianza del testo.

b) Si ha

$$(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w})((x,y,z)) =< \mathbf{w}, (x,y,z) > \mathbf{v} =$$

$$=< (0,4,-2), (x,y,z) > (1,2,-1) = (4y - 2z)(1,2,-1) = (4y - 2z, 8y - 4z, -4y + 2z)$$

La matrice $A_{\mathbf{v}\otimes\mathbf{w}}$ di $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$ rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$ è allora

$$A_{\mathbf{v}\otimes\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 0 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Risulta quindi

$$< T, \mathbf{v} \otimes \mathbf{w} >=< A_T, A_{\mathbf{v}\otimes\mathbf{w}} >= 0 + 4 + 2 + 0 + 0 - 4 + 0 - 4 - 6 = -8 \ .$$

D'altra parte $T(\mathbf{w}) = T((0,4,-2)) = (6,-2,10)$ e quindi

$$< \mathbf{v}, T(\mathbf{w}) >=< (1,2,-1),(6,-2,10) >= 6-4-10 = -8$$

e quindi è verificata l'uguaglianza del testo.

Le proprietà evidenziate nell'esempio precedente hanno validità generale. Precisamente si ha la seguente

Proposizione 7.25.

Sia T un tensore in $\mathbf{R}^3$ e siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{R}^3$. Allora

a) $< T, i >= tr(T)$ *dove i è il tensore unità in $\mathbf{R}^3$,*

b) $< T, \mathbf{v} \otimes \mathbf{w} >=< \mathbf{v}, T(\mathbf{w}) >$

Concludiamo questa parte con il seguente

Teorema 7.26. (Teorema fondamentale su diadi e tensori)

Se $\beta = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$, allora

a) l'insieme

$$D = \{\mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_j \ : \ i,j = 1,2,3\}$$

è una base ortonormale di $Lin(\mathbf{R}^3)$,

b) per ogni tensore T (in $\mathbf{R}^3$) si ha

$$T = \sum_{i,j=1}^{3} T_{ij} \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_j$$

dove $T_{ij} =< \mathbf{v}_i, T(\mathbf{v}_j) >$.

Dimostriamo prima la seguente

Proposizione 7.27.

Se $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{R}^3$, allora:

$$\|\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| \ .$$

Dimostrazione.

Sappiamo che (Proposizione 7.25 b)), per un tensore T e $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{R}^3$ si ha $< T, \mathbf{v} \otimes \mathbf{w} >=< \mathbf{v}, T(\mathbf{w}) >$. Quindi risulta

$$\|\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}\| = \sqrt{< \mathbf{v} \otimes \mathbf{w}, \mathbf{v} \otimes \mathbf{w} >} = \sqrt{< \mathbf{v}, \mathbf{v} \otimes \mathbf{w}(\mathbf{w}) >} =$$

$$= \sqrt{< \mathbf{v}, < \mathbf{w}, \mathbf{w} > \mathbf{v} >} = \sqrt{< \mathbf{w}, \mathbf{w} >< \mathbf{v}, \mathbf{v} >} = \sqrt{< \mathbf{w}, \mathbf{w} >}\sqrt{< \mathbf{v}, \mathbf{v} >} = \|\mathbf{w}\|\|\mathbf{v}\| \ .$$

In definitiva

$$\|\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\| \ .$$

Dimostrazione parziale del Teorema 7.26 a).

Proviamo che gli elementi di D

i) hanno norma uno,

ii) sono a due a due perpendicolari.

i) Dalla Proposizione 7.27 si ha:

$$\|\mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_j\| = \|\mathbf{v}_i\|\|\mathbf{v}_j\| = 1 \cdot 1 = 1$$

e quindi

$$\|\mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_j\| = 1 \ .$$

ii) Si ha:

$$< \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_h \otimes \mathbf{v}_k >=< \mathbf{v}_h, \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_j(\mathbf{v}_k) >=$$

$$=< \mathbf{v}_h, < \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k > \mathbf{v}_i >=< \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k >< \mathbf{v}_h, \mathbf{v}_i >= \delta_{jk}\delta_{hi} = \begin{cases} \text{se } j \neq k & 0\delta_{hi} = 0 \\ \text{se } i \neq h & \delta_{jk}0 = 0 \end{cases}$$

e quindi

$$\text{se } i \neq h \text{ oppure } j \neq k \text{ si ha } \quad < \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_h \otimes \mathbf{v}_k >= 0.$$

Osservazione. Dal Teorema 7.26 b) segue la **dimostrazione della parte finale del teorema di decomposizione spettrale**, già enunciato in precedenza. Infatti se $\beta =$

$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è una base ortonormale formata da autovettori di un tensore simmetrico T associati agli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ rispettivamente, si ha

$$T_{ij} =< \mathbf{v}_i, T(\mathbf{v}_j) >=< \mathbf{v}_i, \lambda_j \mathbf{v}_j >= \lambda_j < \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j >= \lambda_j \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ \lambda_i & \text{se } i = j \end{cases}$$

e quindi l'uguaglianza $T = \sum_{i,j=1}^{3} T_{ij} \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_j$ si riduce a

$$T = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i (\mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_i)$$

e quest'ultima è la *decomposizione spettrale di* T.

Osservazione. Dal Teorema 7.26 b), segue che gli scalari T_{ij} sono le coordinate del tensore T rispetto alla base ortonormale $D = (\mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_j \ : \ i, j = 1, 2, 3)$ e, come per i vettori, si ha $T_{ij} =< T, \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_j >$; infatti, per la Proposizione 7.25 b), $< T, \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_j >=< \mathbf{v}_i, T(\mathbf{v}_j) >= T_{ij}$.

Osservazione importante. Ricaviamo la relazione che intercorre tra le matrici associate allo stesso tensore T in $\mathbf{R}^3$ rispetto a due basi ortonormali $\beta = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ e $\beta' = (\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \mathbf{v}'_3)$.

Detta (T_{ij}) la matrice di T rispetto a β e (T'_{hk}) quella di T rispetto a β', si ha (per il Teorema 7.26 b))

$$T = \sum_{i,j=1}^{3} T_{ij} \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_j = \sum_{h,k=1}^{3} T'_{hk} \mathbf{v}'_h \otimes \mathbf{v}'_k$$

quindi

$$T'_{hk} =< \mathbf{v}'_h, T(\mathbf{v}'_k) >=< \mathbf{v}'_h, \Big(\sum_{i,j=1}^{3} T_{ij} \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_j \Big)(\mathbf{v}'_k) >=$$

$$< \mathbf{v}'_h, \sum_{i,j=1}^{3} T_{ij} < \mathbf{v}_j, \mathbf{v}'_k > \mathbf{v}_i >= \sum_{i,j=1}^{3} T_{ij} < \mathbf{v}_j, \mathbf{v}'_k >< \mathbf{v}'_h, \mathbf{v}_i > \ .$$

In conclusione:

- $T'_{hk} = \sum_{i,j=1}^{3} T_{ij} < \mathbf{v}_j, \mathbf{v}'_k >< \mathbf{v}_i, \mathbf{v}'_h > \ .$

(Tale proprietà vale in generale).

Esempio 1. Sia T il tensore in $\mathbf{R}^2$ definito da $T((x,y)) = (x+2y, 2x-y)$ e siano $\beta = (\mathbf{v}_1 = (1,0), \mathbf{v}_2 = (0,1))$ e $\beta' = (\mathbf{v}'_1 = 3/5, 4/5), \mathbf{v}'_2 = (4/5, -3/5))$.

Trovare (T_{ij}) e (T'_{hk}) e verificare la relazione trovata nella precedente osservazione per T'_{12}.

Sol.: si verifica facilmente che

$$(T_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} .$$

Si ha:

$$T'_{12} =< \mathbf{v}'_1, T(\mathbf{v}'_2) >=< (3/5, 4/5), (-2/5, 11/5) >= \frac{38}{25} .$$

Verifichiamo ora (vedi osservazione) che

$$T'_{12} = \sum_{i,j=1}^{2} T_{ij} < \mathbf{v}_j, \mathbf{v}'_2 >< \mathbf{v}_i, \mathbf{v}'_1 > .$$

Per esteso

$$\sum_{i,j=1}^{2} T_{ij} < \mathbf{v}_j, \mathbf{v}'_2 >< \mathbf{v}_i, \mathbf{v}'_1 >= T_{11} < \mathbf{v}_1, \mathbf{v}'_2 >< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}'_1 > +$$

$$+T_{12} < \mathbf{v}_2, \mathbf{v}'_2 >< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}'_1 > +T_{21} < \mathbf{v}_1, \mathbf{v}'_2 >< \mathbf{v}_2, \mathbf{v}'_1 > +T_{22} < \mathbf{v}_2, \mathbf{v}'_2 >< \mathbf{v}_2, \mathbf{v}'_1 >=$$

$$= 1 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} + 2(-\frac{3}{5})\frac{3}{5} + 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} - 1(-\frac{3}{5})\frac{4}{5} = \frac{12}{25} - \frac{18}{25} + \frac{32}{25} + \frac{12}{25} = \frac{38}{25} = T'_{12} .$$

Esempio 2. Sia T il tensore in $\mathbf{R}^3$ definito da $T((x,y,z)) = (x+2y+z, 3x+4y, x+z)$ e sia data la base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ $\beta = (\mathbf{v}_1 = (0,1,0), \mathbf{v}_2 = (-1,0,0), \mathbf{v}_3 = (0,0,-1))$.

Verificare l'uguaglianza

$$T = \sum_{i,j=1}^{3} T_{ij} \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_j .$$

Sol.: determiniamo anzitutto la matrice (T_{ij}). Risulta

$$
\begin{aligned}
T_{11} &=< \mathbf{v}_1, T(\mathbf{v}_1) >=< (0,1,0),(2,4,0) >= 4 \\
T_{12} &=< \mathbf{v}_1, T(\mathbf{v}_2) >=< (0,1,0),(-1,-3,-1) >= -3 \\
T_{13} &=< \mathbf{v}_1, T(\mathbf{v}_3) >=< (0,1,0),(-1,0,-1) >= 0 \\
T_{21} &=< \mathbf{v}_2, T(\mathbf{v}_1) >=< (-1,0,0),(2,4,0) >= -2 \\
T_{22} &=< \mathbf{v}_2, T(\mathbf{v}_2) >=< (-1,0,0),(-1,-3,-1) >= 1 \\
T_{23} &=< \mathbf{v}_2, T(\mathbf{v}_3) >=< (-1,0,0),(-1,0,-1) >= 1 \\
T_{31} &=< \mathbf{v}_3, T(\mathbf{v}_1) >=< (0,0,-1),(2,4,0) >= 0 \\
T_{32} &=< \mathbf{v}_3, T(\mathbf{v}_2) >=< (0,0,-1),(-1,-3,-1) >= 1 \\
T_{33} &=< \mathbf{v}_3, T(\mathbf{v}_3) >=< (0,0,-1),(-1,0,-1) >= 1
\end{aligned}
$$

e quindi

$$
(T_{ij}) = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}
$$

È poi

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_1)((x,y,z)) &=< (0,1,0),(x,y,z) > (0,1,0) = y(0,1,0) = (0,y,0) \\
(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2)((x,y,z)) &=< (-1,0,0),(x,y,z) > (0,1,0) = -x(0,1,0) = (0,-x,0) \\
(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_3)((x,y,z)) &=< (0,0,-1),(x,y,z) > (0,1,0) = -z(0,1,0) = (0,-z,0) \\
(\mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_1)((x,y,z)) &=< (0,1,0),(x,y,z) > (-1,0,0) = y(-1,0,0) = (-y,0,0)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_2)((x,y,z)) &=< (-1,0,0),(x,y,z) > (-1,0,0) = -x(-1,0,0) = (x,0,0) \\
(\mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_3)((x,y,z)) &=< (0,0,-1),(x,y,z) > (-1,0,0) = -z(-1,0,0) = (z,0,0) \\
(\mathbf{v}_3 \otimes \mathbf{v}_1)((x,y,z)) &=< (0,1,0),(x,y,z) > (0,0,-1) = y(0,0,-1) = (0,0,-y) \\
(\mathbf{v}_3 \otimes \mathbf{v}_2)((x,y,z)) &=< (-1,0,0),(x,y,z) > (0,0,-1) = -x(0,0,-1) = (0,0,x) \\
(\mathbf{v}_3 \otimes \mathbf{v}_3)((x,y,z)) &=< (0,0,-1),(x,y,z) > (0,0,-1) = -z(0,0,-1) = (0,0,z)
\end{aligned}
$$

e quindi

$$\sum_{i,j=1}^{3} T_{ij}(\mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_j)((x,y,z)) = 4(0,y,0) - 3(0,-x,0) + 0(0,-z,0) - 2(-y,0,0) +$$

$$+1(x,0,0) + 1(z,0,0) + 0(0,0,-y) + 1(0,0,x) + 1(0,0,z) = (x+2y+z, 3x+4y, x+z) =$$

$$= T((x,y,z)) \ .$$

Pertanto è verificato che

$$T = \sum_{i,j=1}^{3} T_{ij}\mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_j \ .$$

Esempio 3. Trovare il tensore T in $\mathbf{R}^3$ sapendo che la sua matrice rispetto alla base ortonormale $\beta = (\mathbf{v}_1 = (0,1,0), \mathbf{v}_2 = (-1,0,0), \mathbf{v}_3 = (0,0,-1))$ è

$$A_T = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Sol.: utilizziamo l'esempio precedente. In esso abbiamo determinato $\mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_j$ per $i,j = 1,2,3$.

Si ha allora

$$T((x,y,z)) = \sum_{i,j=1}^{3} T_{ij}(\mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_j)((x,y,z)) = 2(0,y,0) - 5(0,-x,0) + 3(0,-z,0) + 0(-y,0,0) +$$

$$+1(x,0,0) + 2(z,0,0) + 1(0,0,-y) + 2(0,0,x) + 0(0,0,z) = (x+2z, 5x+2y-3z, 2x-y) \ .$$

Quindi in definitiva

$$T((x,y,z)) = (x+2z, 5x+2y-3z, 2x-y) \ .$$

Concludiamo questo capitolo mettendo in evidenza alcune **"analogie" tra vettori e tensori.**

- Sia $\beta = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$.

a) Dato un vettore $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$ possiamo determinare le coordinate di $\mathbf{v}$ rispetto a β, cioè $M_\beta(\mathbf{v})$. Infatti

$$M_\beta(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} < \mathbf{v}, \mathbf{v}_1 > \\ < \mathbf{v}, \mathbf{v}_2 > \\ < \mathbf{v}, \mathbf{v}_3 > \end{pmatrix} \quad \text{(matrice } 3 \times 1)$$

a') Date le coordinate di $\mathbf{v}$ rispetto a β, cioè $M_\beta(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, possiamo trovare il vettore $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$. Infatti:

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3 = \sum_{i=1}^{3} a_i\mathbf{v}_i \ .$$

b) Dato il tensore T in $\mathbf{R}^3$ ($T \in Lin(\mathbf{R}^3)$) possiamo trovare la matrice di T rispetto a β, cioè (T_{ij}). Infatti

$$(T_{ij}) = (< \mathbf{v}_i, T(\mathbf{v}_j) >) \quad \text{(matrice } 3 \times 3) \ .$$

b') Data la matrice di T rispetto a β, cioè (T_{ij}), possiamo trovare il tensore $T \in Lin(\mathbf{R}^3)$. Infatti

$$T = \sum_{i,j=1}^{3} T_{ij}\mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_j \quad \text{(Teorema generale su diadi e tensori b))}$$

b") In particolare se T è simmetrico e $\beta = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di T associati agli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, allora

$$T_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ \lambda_i & \text{se } i = j \end{cases}$$

e perciò

$$T = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i\mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_i \quad \text{(Teorema di decomposizione spettrale)} \ .$$

c) Ogni vettore $\mathbf{v}$ del piano si può scomporre in un unico modo secondo due direzioni ortogonali assegnate.

d) Dato il tensore T in $\mathbf{R}^3$ si ha:

d') $T = T_S + T_E$ e $T_S \perp T_E$, dove $T_S \in Sym$ e $T_E \in Skw$ (T_E e T_S sono unici).

d") $T = T_D + T_O$ e $T_D \perp T_O$, dove $T_D \in Dev$ e $T_O \in Sph$ (T_D e T_O sono unici).

Ultime osservazioni.

• Un tensore simmetrico è descritto dalla sua decomposizione spettrale (in cui si usa anche il prodotto scalare di vettori); un tensore emisimmetrico in $\mathbf{R}^3$ è descritto dal suo vettore assiale (in cui si usa anche il prodotto vettoriale di vettori).

• Se $\mathbf{v}$ è il vettore assiale di un tensore emisimmetrico T_E, allora

$$T_E(\mathbf{w}) = \mathbf{v} \times \mathbf{w} \quad \text{per ogni } \mathbf{w} \in \mathbf{R}^3$$

e perciò $T_E(\mathbf{w}) \perp \mathbf{v}$ per ogni $\mathbf{w} \in \mathbf{R}^3$.

• Se $\mathbf{v}$ è un versore (cioè $\|\mathbf{v}\| = 1$) allora $\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}(\mathbf{w})$ è la proiezione ortogonale di $\mathbf{w}$ su $\mathbf{v}$ (vedi Teorema di decomposizione spettrale).

ESERCIZI

1) Trovare la funzione lineare $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ sapendo che $f((1,3)) = (-13, 22, -2)$, $f((1,2)) = (-8, 16, -1)$ e trovare la matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche di $\mathbf{R}^2$ e $\mathbf{R}^3$.

2) Trovare la funzione lineare $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ sapendo che $f((2,5)) = -11, f((1,3)) = -7$ e trovare la matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche di $\mathbf{R}^2$ e $\mathbf{R}$.

3) Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

Trovare

a) la funzione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ associata ad A,

b) la funzione lineare $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ associata ad A_{-1}.

4) Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la funzione lineare definita da

$$f((x,y,z)) = (-y + 2z, 3x - 4y - z, \alpha x - 3y) \quad (\alpha \in \mathbf{R}) .$$

a) Al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, trovare una base e la dimensione di N_f (nucleo di f) e I_f (immagine di f) e stabilire se f è iniettiva o suriettiva.

b) Discutere l'appartenenza di $\mathbf{w} = (-1, \beta, 1)$ a I_f, al variare di $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

5) Sia $f : \mathbf{R}^3 \to S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \ : \ a, b, c \in \mathbf{R} \right\}$ la funzione lineare così definita

$$f((x, y, z)) = \begin{pmatrix} x + 2y + 3z & x + y + z \\ x + y + z & x + 3y + kz \end{pmatrix} \quad (k \in \mathbf{R}) \ .$$

a) Trovare una base e la dimensione di N_f (nucleo di f) ed I_f (immagine di f).

b) Discutere iniettività e suriettività di f.

c) Determinare k in modo che il rango di $f((1, 1, 1))$ sia 2.

6) Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ la funzione lineare definita da:

$$f((x, y, z)) = (3y + z, 3x + 2z, -2x + 7y + z, x + y + kz) \quad k \in \mathbf{R} \ .$$

a) Al variare di $k \in \mathbf{R}$, trovare una base e la dimensione di N_f (nucleo di f) e I_f (immagine di f) e stabilire se f è iniettiva o suriettiva.

b) Per i valori di k per i quali la dimensione di I_f è uguale a 2, discutere l'appartenenza di $\mathbf{v} = (\alpha, 1, 4, 1)$ ad I_f ($\alpha \in \mathbf{R}$).

7) Trovare il tensore T in $\mathbf{R}^3$ sapendo che $T((1, 0, 0)) = (1, 2, 1), T((1, 1, 0)) = (3, 1, 2)$ e $T((1, 1, 1)) = (2, 2, -2)$.

8) Dire se esiste, ed eventualmente trovarlo, un tensore T in $\mathbf{R}^2$ tale che:

a) $T((2, 1)) = (3, 7)$, $T((1, 2)) = (0, 5)$, $T((3, 3)) = (3, 12)$

b) $T((2, 1)) = (3, 7)$, $T((1, 2)) = (0, 5)$, $T((3, 3)) = (1, 4)$

9) Trovare il tensore T in $\mathbf{R}^3$ sapendo che $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 0), \mathbf{v}_2 = (1, 3, 0), \mathbf{v}_3 = (0, 0, 1)$ sono autovettori di T associati rispettivamente agli autovalori $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 4$.

10) Determinare la matrice associata al tensore $T((x, y, z)) = (x - y, x + 2z, y - 3z)$ rispetto

a) alla base canonica di $\mathbf{R}^3$,

b) alla base ortonormale $\beta = (\mathbf{v}_1 = (0,-1,0), \mathbf{v}_2 = (0,0,1), \mathbf{v}_3 = (-1,0,0))$,

c) trovare il tensore trasposto di T.

11) Dire se il tensore $T((x,y,z)) = \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}, \frac{x-y}{\sqrt{2}}, z\right)$ è un tensore ortogonale.

12) Sia $T((x,y,z)) = (x-2z, 4y+3z, -2x+3y+5z)$.

a) Stabilire se T è simmetrico.

b) Calcolare $\det(T), r(T), \mathrm{tr}(T)$.

13) Sia $T((x,y,z)) = (x-3y, 5x+7y, z)$. Verificare che

$$T = \sum T_{ij}\mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_j$$

con $\beta = (\mathbf{v}_1 = (0,-1,0), \mathbf{v}_2 = (-1,0,0), \mathbf{v}_3 = (0,0,1))$.

14) Siano $\mathbf{v} = (2,-4,0), \mathbf{w} = (1,5,0)$ e $T((x,y,z)) = (x+4y, 6x+3y, z)$.

a) Scrivere T come somma di un tensore simmetrico T_S e di un tensore emisimmetrico T_E.

b) Calcolare $(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w})((x,y,z))$ e la relativa matrice.

c) Trovare la traccia, il determinante, il rango di $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$.

d) Calcolare $< T, \mathbf{v} \otimes \mathbf{w} >$ e verificare che $< T, \mathbf{v} \otimes \mathbf{w} > = < \mathbf{v}, T(\mathbf{w}) >$.

15) Sia $T((x,y,z)) = (4y-2z, -4x+6z, 2x-6y)$.

a) Verificare che T è un tensore emisimmetrico.

b) Trovare il vettore assiale di T.

16) Trovare il tensore emisimmetrico di vettore assiale $\mathbf{v} = (-2,4,-5)$.

17) Sia

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

e sia T il tensore ad essa associato rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$.

a) Trovare una matrice ortogonale U che diagonalizzi A.

b) Determinare la decomposizione spettrale di T.

c) Calcolare $< T, \mathbf{v} \otimes \mathbf{w} >$ con $\mathbf{v} = (-1,2,3), \mathbf{w} = (1,1,-1)$.

18) Data la matrice simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

trovare:

a) gli autovalori e gli autospazi di A,

b) una base ortonormale β di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di A,

c) una matrice ortogonale U che diagonalizzi A,

d) $U_{-1}AU$,

e) le coordinate di (x, y, z) rispetto a β,

f) la rappresentazione spettrale del tensore T associato ad A.

19) Trovare il tensore T in $\mathbf{R}^3$ sapendo che la matrice delle sue componenti rispetto alla base ortonormale $\beta = (\mathbf{v}_1 = (0, -1, 0), \mathbf{v}_2 = (1, 0, 0), \mathbf{v}_3 = (0, 0, -1))$ è

$$(T_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

20) Sia data la matrice simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & -6 \\ 0 & 4 & 0 \\ -6 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

e sia T il tensore in $\mathbf{R}^3$ associato ad A rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$.

a) Diagonalizzare A con una matrice ortogonale U.

b) Determinare la decomposizione spettrale del tensore T.

c) Verificare che A è definita positiva e trovare $\sqrt{A}$.

d) Verificare l'uguaglianza $Q((x, y, z)) = Q_1((x_1, y_1, z_1))$ con $(x, y, z) = (2, 1, 1)$, dove Q è la forma quadratica associata ad A e Q_1 è la relativa forma diagonale.

e) Trovare gli eventuali $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -3 & 16 & 0 \\ -2 & \alpha & 4 \end{pmatrix}$$

risulta simile ad A.

f) Determinare $\alpha \in \mathbf{R}$ in modo che T sia perpendicolare a $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$ con $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$ e $\mathbf{w} = (1, 1, \alpha)$.

g) Verificare la proprietà caratteristica del tensore simmetrico T con $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$ e $\mathbf{w} = (2, -3, 1)$.

h) Trovare il tensore emisimmetrico E in $\mathbf{R}^3$ di vettore assiale $\mathbf{v}_1 = T((1, 2, 1))$ e verificare che $E((x, y, z)) \perp \mathbf{v}_1$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$.

21) Sia T il tensore in $\mathbf{R}^3$ definito da

$$T((x, y, z)) = (3x + 3y - 3z, -3x - y + 2z, 7x - 2y) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 .$$

a) Scomporre T nella somma di un tensore simmetrico T_S e di uno emisimmetrico T_E.

b) Trovare la decomposizione spettrale di T_S.

c) Determinare il vettore assiale di T_E.

22) Sia

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e sia T il tensore (simmetrico) associato ad A rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^4$.

a) Diagonalizzare A con una matrice ortogonale U.

b) Trovare la decomposizione spettrale di T.

23) Dimostrare che se T è un tensore ortogonale allora T conserva la norma dei vettori e la perpendicolarità.

24) Dimostrare che se S e T sono tensori in $\mathbf{R}^3$, allora ST è un tensore in $\mathbf{R}^3$.

25) Dimostrare (passando alle matrici) che

a) Se $T_S \in Sym$ e $T_E \in Skw$, allora $< T_S, T_E >= 0$, ossia $T_S \perp T_E$,

b) Se $T_D \in Dev$ e $T_O \in Sph$, allora $< T_D, T_O >= 0$, ossia $T_D \perp T_O$.

26) Dimostrare che se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{R}^3$, allora $\mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2$ è un tensore emisimmetrico in $\mathbf{R}^3$ ed il suo vettore assiale è $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$.

Università di Ferrara - Biblioteca Scientifico-Tecnologica
BIBLIOTECA

INDICE ANALITICO

Angolo tra due piani 198
Angolo tra due rette 198
Applicazione lineare 275
Autospazio 209
Autovalore 207-305
Autovettore 207-305

Base canonica 27
Base di uno spazio vettoriale 26
Base ordinata 32
Base ortogonale 179
Base ortonormale 179

Calcolo dell'inversa di una matrice 70-106
Cilindro 151
Cilindro circolare 149
Cilindro ellittico 149
Cilindro iperbolico 149
Cilindro parabolico 150
Circonferenza 235
Circonferenza nello spazio 147
Coefficiente di Fourier 179
Combinazione lineare 12
Complemento algebrico 63
Conica 235
Conica riducibile 235
Cono 151
Cono quadrico ellittico 160

Coordinate cilindriche 168
Coordinate di un vettore 33
Coordinate polari 164
Coordinate sferiche 169

Decomposizione di un tensore in somma di due tensori 302
Decomposizione di una matrice in somma di due matrici 57
Determinante 62-297
Deviatore 302
Diade 307
Diagonale principale 47
Diagonalizzazione di una matrice 207
Dimensione di uno spazio vettoriale 28
Distanza punto-piano 137
Distanza punto-retta 138
Distanza tra due punti 137
Disuguaglianza triangolare 180

Ellisse 235-237-240
Ellissoide 155
Equazione del piano 115
Equazione esplicita di un piano 117
Equazioni della retta 120
Equazioni frazionarie della retta 121
Equazioni parametriche della retta 124
Equazioni ridotte della retta 122

Fascio di piani 134
Forma diagonale o canonica di una forma quadratica 250-251
Forma quadratica 249

Forma quadratica definita positiva (negativa) 263
Forma quadratica indefinita 263
Forma quadratica semidefinita positiva (negativa) 263
Funzionale lineare 282
Funzione lineare 275
Funzione lineare associata ad una matrice 289

Immagine di una funzione lineare 278
Insieme linearmente dipendente 22
Insieme linearmente indipendente 22
Iperbole 235-237-240
Iperbole equilatera 240
Iperboloide a due falde 157
Iperboloide a una falda 156

Matrice 45
Matrice a scala o a gradini 101
Matrice aggiunta 70
Matrice colonna 51
Matrice di passaggio tra due basi ortonormali 187
Matrice di una funzione lineare 286
Matrice diagonale 47
Matrice diagonalizzabile 206
Matrice emisimmetrica (antisimmetrica) 49
Matrice invertibile 60
Matrice nulla 48
Matrice opposta 48
Matrice ortogonale 192
Matrice quadrata 46
Matrice riga 51
Matrice simmetrica 49

Matrice trasposta 48
Matrice triangolare inferiore 48
Matrice triangolare superiore 48
Matrice unità 48
Matrice unitaria 192
Matrici simili 205
Minore di una matrice 61
Molteplicità algebrica 215
Molteplicità geometrica 209

Norma di un vettore 179
Nucleo di una funzione lineare 279

Operazione esterna 7
Operazione interna 7

Parabola 235-237-239
Paraboloide ellittico 158
Paraboloide iperbolico 159
Parallelismo di piani 118
Parallelismo di rette 127
Parallelismo retta-piano 131
Parametri direttori di una retta 125
Perpendicolarità di piani 118
Perpendicolarità di rette 127
Perpendicolarità retta-piano 131
Polinomio caratteristico 210-297
Procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt 185
Prodotto diadico 307
Prodotto misto di vettori 39

Prodotto righe per colonne di matrici 51
Prodotto scalare di matrici 314
Prodotto scalare di tensori 315
Prodotto scalare di vettori 35-177
Prodotto vettoriale di vettori 38
Proiezione ortogonale 179-310
Punto medio di un segmento 137

Quadriche 149

Radice quadrata di una matrice 266
Rango 74-297
Rango per colonne 74
Rango per righe 74
Regola di Cramer 87
Regola di Laplace 66
Regola di Sarrus 68
Rette complanari 141
Rette sghembe 141
Riduzione a scala o a gradini 102

Segmento orientato 5
Sfera 145
Simbolo di Kronecker 179
Sistema di Cramer 86
Sistema di riferimento cartesiano 4
Sistema lineare 83
Sistema lineare omogeneo 85
Sottomatrice 61
Sottospazio generato 16

Sottospazio vettoriale 12
Spazio euclideo 177
Spazio vettoriale 10
Stella di piani 116
Stella di rette 124
Superfici rigate 150

Tensore 293
Tensore emisimmetrico (antisimmetrico) 300
Tensore nullo 296
Tensore ortogonale 301
Tensore sferico 302
Tensore simmetrico 300
Tensore trasposto 299
Tensore unità (identità) 296
Teorema dell'isomorfismo 282
Teorema di Cramer 87
Teorema di decomposizione polare 269
Teorema di decomposizione spettrale 230-309
Teorema di Grassmann 44
Teorema di Hamilton-Cayley 212
Teorema di Rouchè-Capelli 89
Teorema dimensionale 283
Teorema fondamentale per il calcolo degli autovalori e autospazi 213
Teorema fondamentale su diadi e tensori 318
Teorema fondamentale sulla diagonalizzazione di una matrice 216
Teorema fondamentale sulla diagonalizzazione di una matrice simmetrica 224
Traccia 211-297
Trasformazioni elementari sulle righe 102

Versore 35-179

Vettore 5-10
Vettore assiale 311
Vettore colonna 51
Vettore geometrico 35
Vettore libero 5
Vettore riga 51
Vettori ortogonali 35
Vettori paralleli 35

11-13 STD

www.colibrisystem.com

Il presente volume si rivolge a studenti universitari che debbano affrontare argomenti di Algebra Lineare e Geometria Analitica, in particolare a studenti di corsi di studi di Ingegneria. Si è cercato di contenere la materia trattata entro limiti ragionevoli per un corso semestrale. Per fare ciò si è ritenuto opportuno puntare sui concetti e sulle proprietà utili alle applicazioni, rinunciando ad alcune dimostrazioni, ma proponendo quelle che riteniamo più significative. In particolare l'ultimo capitolo, riguardante i tensori, è propedeutico alle materie applicative dei corsi di laurea in Ingegneria.

Per meglio chiarire i contenuti si è deciso di proporre, per ogni argomento, una vasta gamma di esempi svolti in dettaglio e di esercizi proposti. Proprio per questo motivo riteniamo che questo volume sia particolarmente indicato anche per studenti che non siano in grado di seguire costantemente le lezioni, come ad esempio, gli studenti lavoratori.

Prof. **Giuliano Mazzanti,** professore associato di Geometria presso l'Università di Ferrara (Dipartimento di Matematica).

Dott. **Valter Roselli**, ricercatore di Algebra presso l'Università di Ferrara (Dipartimento di Matematica).

UNIVERSITA' DI FERRARA
BIBLIOTECA SCIENTIFICO-TECNOLOGICA
SBA 588

€ 26,00

ISBN 88-371-1504-0
9 788837 115043