Теоретический минимум по дисциплине «МАТЕМАТИКА»

(I семестр, специальности ПОИБМС, ДЭВИ)

1. Введение в математический анализ.

1. Основные элементарные функции.
2. Что называется элементарной функцией?
3. Примеры рациональных функций.
4. Примеры иррациональных функций.
5. Примеры трансцендентных функций.
6. Определение предела функции.
7. Что называется ε-окрестностью точки? Что называется проколотой ε-окрестностью точки?
8. Основные свойства пределов.
9. Связь предела функции в точке и односторонних пределов.
10. Определение и примеры бесконечно малых функций.
11. Определение и примеры бесконечно больших функций.
12. Связь между бесконечно большими и бесконечно малыми функциями.
13. Определение и примеры эквивалентных бесконечно малых функций.
14. Первый замечательный предел.
15. Второй замечательный предел.
16. 7 видов неопределенностей.
17. Определение непрерывности функции в точке.
18. Свойство непрерывности элементарных функций внутри их области определения.
19. Три условия непрерывности функции в точке.
20. Классификация точек разрыва.
21. Определение точки устранимого разрыва, графическая иллюстрация.
22. Определение точки неустранимого разрыва, графическая иллюстрация.
23. Определение точки разрыва 2-го рода, графическая иллюстрация.
24. Теорема Вейерштрасса.

2. Дифференциальное исчисление функции одной переменной.

25. Что называется приращением функции $y = f(x)$ в точке x_0, отвечающим приращению аргумента Δx?
26. Определение производной.
27. Геометрический смысл производной.
28. Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0.
29. Механический (физический) смысл производной.

30. Основные правила дифференцирования.
31. Производная сложной функции.
32. Таблица производных.
33. Понятие дифференцируемости функции в точке и на промежутке.
34. Связь дифференцируемости функции в точке и существования конечной производной.
35. Связь дифференцируемости и непрерывности функции в точке.
36. Верно ли, что если функция имеет производную в точке, то она дифференцируема в этой точке? Верно ли обратное утверждение?
37. Верно ли, что если функция имеет производную в точке, то она непрерывна в этой точке? Верно ли обратное утверждение?
38. Связь дифференциала и производной.
39. Правило Лопиталя.
40. Определение функции, возрастающей на промежутке. Определение функции, убывающей на промежутке.
41. Достаточное условие монотонности дифференцируемой функции на интервале.
42. Определение точки локального максимума (минимума) функции.
43. Необходимое условие локального экстремума.
44. Достаточное условие локального экстремума.
45. Алгоритм нахождения точек локального экстремума.
46. Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на отрезке.
47. Как найти наклонные асимптоты графика функции?
48. Как найти вертикальные асимптоты графика функции?

3. Матрицы. Определители. Системы линейных алгебраических уравнений.

49. Что называется матрицей размера $m \times n$?
50. Что называется диагональной матрицей?
51. Что называется единичной матрицей?
52. Что называется нулевой матрицей?
53. Определение транспонированной матрицы.
54. В каком случае матрицу $A_{m\times n}$ можно умножить на матрицу B?
55. Формула для вычисления определителя 3-го порядка разложением по 1-й строке.
56. Определение обратной матрицы.
57. Необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы.
58. Формула для нахождения обратной матрицы.

59. Что называется системой линейных алгебраических уравнений?
60. Что называется совместной системой линейных алгебраических уравнений?
61. Что называется решением системы линейных алгебраических уравнений?
62. Сколько решений может иметь система линейных алгебраических уравнений?
63. Формулы Крамера решения систем линейных алгебраических уравнений. Какие системы линейных алгебраических уравнений можно решать методом Крамера?
64. Матричная запись системы линейных алгебраических уравнений. Какие системы линейных алгебраических уравнений можно решать матричным методом?
65. Какие системы линейных алгебраических уравнений можно решать методом Гаусса?
66. Что называется рангом матрицы?
67. Теорема Кронекера-Капелли.

4. Элементы векторной алгебры.

68. Какой вектор называется единичным?
69. Примеры единичных векторов.
70. Какой вектор называется нулевым?
71. Что называется линейной комбинацией векторов?
72. Что называется линейно независимой системой векторов?
73. Что называется векторным базисом на плоскости?
74. В каком случае два вектора образуют базис на плоскости?
75. Что называется векторным базисом в пространстве?
76. В каком случае три вектора образуют базис в пространстве?
77. Как вычисляется длина вектора, если известны его координаты $\vec{a} = \{x_a; y_a; z_a\}$ в ортонормированном базисе?
78. Что называется направляющими косинусами вектора?
79. Основное свойство направляющих косинусов.
80. Как вычисляются направляющие косинусы вектора, если известны его координаты $\vec{a} = \{x_a; y_a; z_a\}$ в ортонормированном базисе?
81. Определение скалярного произведения.
82. Основные свойства скалярного произведения.
83. Геометрические и физические приложения скалярного произведения.
84. Как вычисляется скалярное произведение векторов, если известны их координаты в ортонормированном базисе?
85. Что называется правой тройкой векторов?
86. Определение векторного произведения.

87. Геометрические приложения векторного произведения.
88. Основные свойства векторного произведения.
89. Как вычисляется векторное произведение векторов, если известны их координаты в ортонормированном базисе?
90. Определение смешанного произведения.
91. Основные свойства смешанного произведения.
92. Геометрические приложения смешанного произведения.
93. Как вычисляется смешанное произведение векторов, если известны их координаты в ортонормированном базисе?
94. Какие векторы называются коллинеарными?
95. Условие коллинеарности двух векторов.
96. Какие векторы называются ортогональными?
97. Условие ортогональности двух векторов.
98. Какие векторы называются компланарными?
99. Условие компланарности трех векторов.

5. Элементы аналитической геометрии.

100. Общее уравнение прямой на плоскости.
101. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.
102. Уравнение прямой, имеющей угловой коэффициент k и проходящей через точку $(x_0; y_0)$.
103. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых на плоскости.
104. Угол между двумя прямыми на плоскости.
105. Расстояние от точки до прямой на плоскости.
106. Какие линии относятся к кривым 2-го порядка на плоскости?
107. Определение эллипса.
108. Каноническое уравнение эллипса, рисунок.
109. Определение гиперболы.
110. Каноническое уравнение гиперболы, рисунок.
111. Определение параболы.
112. Каноническое уравнение параболы, рисунок.
113. Общее уравнение плоскости.
114. Уравнение плоскости, проходящей через точку $(x_0; y_0; z_0)$ и имеющей вектор нормали $\vec{n} = \{A; B; C\}$.
115. Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки.
116. Расстояние от точки до плоскости.
117. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.
118. Уравнения прямой, проходящей в пространстве через две заданные точки.
119. Канонические уравнения прямой в пространстве.
120. Общие уравнения прямой в пространстве.

121. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых в пространстве.
122. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.

6. Функции нескольких переменных.

123. Что называется линиями уровня функции двух переменных? Что называется поверхностями уровня функции трех переменных?
124. Полное приращение функции $z = f(x;y)$. Частные приращения функции $z = f(x;y)$.
125. Определение частной производной.
126. Геометрический смысл частных производных функции $z = f(x;y)$.
127. Определение дифференцируемости функции $z = f(x;y)$ в точке $(x_0;y_0)$.
128. Необходимые условия дифференцируемости функции $z = f(x;y)$ в точке $(x_0;y_0)$.
129. Достаточное условие дифференцируемости функции $z = f(x;y)$ в точке $(x_0;y_0)$.
130. Теорема о независимости смешанной производной от порядка дифференцирования по различным переменным.
131. Формулы для вычисления частных производных функции двух переменных, заданной неявно.
132. Как вычислить производную функции $z = f(x;y)$ по направлению вектора $\vec{l}$?
133. Что такое градиент функции $z = f(x;y)$?
134. Основные свойства градиента.
135. Определение точки локального максимума (минимума) функции $z = f(x;y)$.
136. Необходимое условие локального экстремума функции двух переменных.
137. Достаточное условие локального экстремума дифференцируемой функции двух переменных.
138. Алгоритм нахождения точек локального экстремума функции двух переменных.

Типовые задания по дисциплине «МАТЕМАТИКА»

(I семестр, специальности ПОИБМС, ДЭВИ)

Вариант 1.

В заданиях 1-6 вычислить предел.

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-6x+9}{3x-x^2}$. **2.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{x^2+4}}{3x^2}$. **3.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3-2x}{3x^2-1}-\dfrac{x^2+4}{3x-1}\right)$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{\operatorname{tg}5x\sin 7x}$. **5.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+8}\right)^{-3x}$. **6.** $\lim\limits_{x\to 1\pm 0}\dfrac{1}{(x-1)(x-5)}$.

7. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x^2-6x)}{3x-x^2}$, используя эквивалентные бесконечно малые.

8. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x)=\begin{cases}4-x^2, \text{если } |x|\le 1,\\ x+2, \text{если } |x|>1;\end{cases}$$

в случае существования точек разрыва установить их характер; построить схематически график функции.

9. Найти производную и дифференциал функции:

а) $y=\dfrac{1}{\cos^2(5x+3)}$; **б)** $s=\operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg}t}{\sqrt{2}}+\operatorname{tg}\alpha \quad (\alpha=\text{const})$; **в)** $r=\mathrm{e}^{\sqrt[3]{\sin\varphi}}$.

10. Найти производную указанного порядка для функции:

а) $y=\sqrt{5x+3} \quad y'''(x)=?$; **б)** $y=\dfrac{\sin 4x+2^{3x}}{5} \quad y^{(4)}(x)=?$.

11. Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ в точке $x=0$, если $y=\arcsin^2 3x$.

12. Составить уравнение касательной к графику функции $y=\dfrac{1}{3}(x^3+1)$ в точке его пересечения с осью абсцисс; сделать рисунок.

13. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{1-2\sin x}{\cos 3x}$, используя правило Лопиталя.

14. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=\sqrt[3]{(x^2-2x)^2}$ на отрезке $[0;3]$.

15. Найти точки экстремума функции $y=\dfrac{2(x+1)^2}{x-2}$.

16. Исследовать на непрерывность функцию $f(x)=2^{\frac{1}{x}}$; в случае существования точек разрыва установить их характер; найти

асимптоты и точки экстремума; построить схематически график функции.

17. Исследовать функцию $y = x\ln^2 x$ и построить ее график.

18. Найти $A^{-1}B^T$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

19. Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 4, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 6, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 6, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 14. \end{cases}$$

20. Проверить, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами в точках $A(1;\,3;\,2)$, $B(0;\,2;\,4)$, $C(1;\,1;\,4)$, $D(2;\,2;\,2)$ является параллелограммом.

21. Определить угол между векторами $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$ и $\vec{b} = 4\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$.

22. В параллелограмме $ABCD$ с вершинами в точках $A(1;\,3;\,2)$, $B(0;\,2;\,4)$, $C(1;\,1;\,4)$, $D(2;\,2;\,2)$ найти длину высоты, опущенной на сторону AD.

23. Найти объем треугольной пирамиды с вершинами $A(2;\,0;\,0)$, $B(0;\,3;\,0)$, $C(0;\,0;\,6)$, $D(2;\,3;\,8)$.

24. Даны точки $A(3;-4)$, $B(-1;-2)$, $C(8;-9)$. Найти:

а) точку пересечения прямой AB и прямой, проходящей через точку C перпендикулярно прямой AB;

б) точку, симметричную точке C относительно прямой AB.

25. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если известны расстояние между фокусами $2c = 10$ и ось $2b = 8$.

26. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2;-4;-4)$, $B(3;-1;5)$, $C(0;2;9)$, и указать вектор нормали к этой плоскости.

27. Найти $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$, если $z = 2x^3 + 3xy^2 - 4x^2y^3 - 5y^7 + 67y + 10$.

28. Исследовать на экстремум функцию $z = (3x+6)y^2 - x^3 + 3x$.

Вариант 2.

В заданиях 1-6 вычислить предел.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7+3x+5x^2+5x^3}{3x^3+2x^2-1}$. **2.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{2x^2-7x+3}$. **3.** $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8}\right)$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{3x\sin 5x}$. **5.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+4}\right)^{2x+1}$. **6.** $\lim\limits_{x\to\pm\infty}3^x$.

7. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{\operatorname{tg}(3x-x^2)}$, используя эквивалентные бесконечно малые.

8. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, \text{ если } x<0,\\ \sin x, \text{ если } 0\le x<\dfrac{\pi}{2},\\ 0, \text{ если } x\ge\dfrac{\pi}{2};\end{cases}$$

в случае существования точек разрыва установить их характер; построить схематически график функции.

9. Найти производную и дифференциал функции:

а) $y=e^{3x^2}\sin^2 x$; **б)** $s=2^{\arcsin\frac{3}{t}}+\sqrt{2}$; **в)** $w=\dfrac{\sqrt{\lg z^4}}{6z}$.

10. Найти производную указанного порядка для функции:

а) $y=2^{3+x^2}$ $y''(x)=?$; **б)** $y=\dfrac{\sin 4x+2^{3x}}{5}$ $y''(x)=?$.

11. Найти $\dfrac{d^3r}{d\varphi^3}$ в точке $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$, если $r=e^{\sin\varphi}$.

12. Составить уравнения касательных к графику функции $y=2x^3-2x^2+x-1$, имеющие угловой коэффициент 3.

13. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\pi}(\pi-x)\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, используя правило Лопиталя.

14. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=8x+\dfrac{1}{x^2}-15$ на отрезке $\left[\dfrac{1}{2}; 2\right]$.

15. Найти точки экстремума функции $y=x\ln^2 x$.

16. Исследовать на непрерывность функцию $y=\dfrac{x^2-4x-4}{x+1}$; в случае существования точек разрыва установить их характер; найти

асимптоты и точки экстремума; построить схематически график функции.

17. Исследовать функцию $y = \mathrm{e}^{-\frac{(x+3)^2}{2}}$ и построить ее график.

18. Решить матричное уравнение $X\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 5 & 4 & -11 \\ 4 & 2 & -8 \end{pmatrix}.$

19. Решить систему методом Гаусса: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -2, \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 5. \end{cases}$

20. Найти координаты единичного вектора $\vec{e}$, направленного противоположно вектору $\vec{c} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.

21. Даны векторы с координатами $\vec{a} = \{1; -3; 5\}$, $\vec{b} = \{2; 0; -1\}$, $\vec{c} = \{-3; 6; -2\}$. Найти проекцию вектора $2\vec{a} - 3\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$.

22. Даны точки $A(-1; 3; 1)$, $B(2; -1; 1)$, $C(2; -6; 5)$. Найти площадь треугольника ABC и высоту, опущенную на сторону AB.

23. Найти смешанное произведение векторов $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$ и $\vec{c} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.

24. Найти расстояние между параллельными прямыми $6x - 8y + 7 = 0$ и $-3x + 4y + 9 = 0$.

25. Найти ось симметрии и координаты вершины параболы $x^2 + 4x - 5y + 3 = 0$; сделать рисунок.

26. Найти угол между прямыми $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-6}{3}$ и $\frac{x+2}{3} = \frac{y}{0} = \frac{z-2}{-4}$.

27. Найти все частные производные 2-го порядка для функции $z = 5x^3y^2 + 3x^2y^5 - 4x^5 - 6y^7 + 123$.

28. Исследовать на экстремум функцию $z = 15 - (x-3)^2 - 4(y+7)^2$.

Вариант 3.

В заданиях 1-6 вычислить предел.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-6x+9}{3x-x^2}$. **2.** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{2x+1}-3}$. **3.** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{4}{3x^2-2x-1}-\dfrac{1}{x^2-x}\right)$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x\,\mathrm{tg}\,5x}$. **5.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+3}{5x-3}\right)^{x-1}$. **6.** $\lim\limits_{x\to\pm 0}\dfrac{2^x+1}{x}$.

7. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x^2}{\mathrm{tg}^2\,2x}$, используя эквивалентные бесконечно малые.

8. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, \text{ если } x\le 0,\\ x^2+1, \text{ если } 0<x\le 1,\\ x, \text{ если } x>1;\end{cases}$$

в случае существования точек разрыва установить их характер; построить схематически график функции.

9. Найти производную и дифференциал функции:

а) $y=(3x-x^3)^5\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\cos x}$; **б)** $r=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{\varphi}}+\cos\alpha \quad (\alpha=\mathrm{const})$;

в) $w=\mathrm{tg}^2(1-z^3)$.

10. Найти производную указанного порядка для функции:

а) $y=\dfrac{e^{3+x^2}}{\mathrm{e}^{2x}} \quad y''(x)=?$; **б)** $y=\sqrt[4]{5x+1} \quad y^{(4)}(x)=?$.

11. Найти $\dfrac{d^2s(-3)}{dt^2}$, если $s=(3t-2)5^{-\frac{t}{3}}$.

12. В каких точках линии $y=x^3+x-9$ касательная к ней параллельна прямой $y=4x-1$?

13. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{2x}-\dfrac{1}{\sin 2x}\right)$, используя правило Лопиталя.

14. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=\dfrac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$ на отрезке $[0;1]$.

15. Исследовать выпуклость графика функции $y=x+\ln(x^2-4)$.

16. Исследовать на непрерывность функцию $y = 1 + 5^{\frac{1}{x}}$; в случае существования точек разрыва установить их характер; найти асимптоты и точки экстремума; построить схематически график функции.

17. Исследовать функцию $y = x(x+1)^2$ и построить ее график.

18. Найти $A^{-1}B^T$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & -5 & 8 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

19. Решить систему методом Гаусса: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ 5x_1 + 8x_2 + 3x_3 = 11, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$

20. Найти длину и направляющие косинусы вектора $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$.

21. Даны векторы $\vec{a} = \{1; 2; -2\}$, $\vec{b} = \{-5; 0; 1\}$, $\vec{b} = \{-5; 0; 1\}$, $\vec{c} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$. Найти $\text{пр}_{\vec{c}}(2\vec{a} - \vec{b})$.

22. Даны векторы $\vec{a} = \{4; -5; 3\}$ и $\vec{b} = \{-4; 0; 2\}$. Проверить, что $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.

23. Выяснить, лежат ли точки $A(1; 2; 0)$, $B(4; 3; 4)$, $C(2; -3; -2)$, $D(3; 0; 1)$ в одной плоскости.

24. Даны вершины треугольника ABC: $A(6; -1)$, $B(0; -2)$, $C(12; 3)$. Найти уравнения:

а) стороны BC; **б)** медианы AM; **в)** высоты AD; **г)** определить длину высоты AD.

25. Составить каноническое уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси Ox, если заданы полуось $b = 2$ и точка на эллипсе $M(2; \sqrt{3})$.

26. Написать уравнения прямой, проходящей через точку $M(3; 0; -9)$ перпендикулярно плоскости $5x - 2y - z = 0$.

27. Найти все частные производные 2-го порядка для функции $z = y\sin(5x - 8y)$.

28. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y - 12$.

Вариант 4.

В заданиях 1-6 вычислить предел.

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-27}{x^3-27}$. **2.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-5x-2}{\sqrt{2+x}-x}$. **3.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x^4-2x}{5x^2-3x+7}-x^2\right)$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^x\operatorname{tg}3x}{\sin 4x}$. **5.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3-2x^2}{1-2x^2}\right)^{x^2}$. **6.** $\lim\limits_{x\to 2\pm 0}2^{\frac{1}{x-2}}$.

7. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{3x-x^2}$, используя эквивалентные бесконечно малые.

8. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x)=\begin{cases}4-x^2, \text{ если } x\le -1,\\ \dfrac{3}{x}, \text{ если } x>-1;\end{cases}$$

в случае существования точек разрыва установить их характер; построить схематически график функции.

9. Найти производную и дифференциал функции:

а) $y=\mathrm{e}^{-x^2}\cos^3(2x+3)$; **б)** $s=\operatorname{tg}\dfrac{\operatorname{arctg}3t}{\sqrt{3}}+\dfrac{t}{\cos\frac{\pi}{8}}$; **в)** $w=\ln\sqrt{\operatorname{ctg}z^{20}}$.

10. Найти производную указанного порядка для функции:

а) $y=\sqrt{5-3x}$ $\quad y'''(x)=?$; **б)** $y=\lg\dfrac{7}{x}$ $\quad y^{(4)}(x)=?$.

11. Найти $\dfrac{d^2\rho}{d\varphi^2}$ в точке $\varphi=2$, если $\rho=\ln\left(\varphi+\sqrt{5+\varphi^2}\right)$.

12. Составить уравнения тех касательных к графику функции $y=x(x-4)^3$, которые параллельны оси абсцисс; сделать рисунок.

13. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$, используя правило Лопиталя.

14. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=\sqrt{9-x^2}$ на отрезке $[-3;3]$.

15. Исследовать выпуклость графика функции $y=\ln(4-x^2)$.

16. Исследовать на непрерывность функцию $y=\dfrac{x^2-3x-9}{x+3}$; в случае существования точек разрыва установить их характер; найти

асимптоты и точки экстремума; построить схематически график функции.

17. Исследовать функцию $y = -2\mathrm{e}^{-8x^2-4x}$ и построить ее график.

18. Решить систему матричным методом: $\begin{cases} x+3y-z=4, \\ 2x+y+3z=3, \\ 3x-2y+5z=10. \end{cases}$

19. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 & -1 \\ -1 & -5 & 8 & 0 & 6 \\ 2 & 7 & -12 & 3 & -7 \end{pmatrix}$.

20. Найти координаты вектора $\vec{c}, \left|\vec{c}\right| = 5,$ сонаправленного с вектором $\overrightarrow{AB}$, если $A(1; 5; 6),\ B(2; 4; 7).$

21. Найти значение λ, при котором $\vec{a} \perp \vec{b}$, если $\vec{a} = \{3; -4; 5\}$, $\vec{b} = \{\lambda; 1; -4\}$.

22. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \{4; -5; 3\}$ и $\vec{b} = \{-4; 0; 2\}$.

23. Найти объем пирамиды с вершинами $A(2; 4; 6),\ B(2; 4; 7),$ $C(1; -2; 0),\ D(5; 1; 4).$

24. Даны вершины треугольника ABC: $A(2; -1),\ B(0; -2),\ C(12; 3).$ Написать уравнение высоты $AD.$

25. Составить каноническое уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси Ox, если заданы полуось $a = 13$ и фокус $F(12; 0).$

26. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3; 0; -9)$ перпендикулярно прямой $\dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z-2}{-4}$.

27. Проверить, удовлетворяет ли функция $z = \ln(x + \mathrm{e}^{-y})$ уравнению $\dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0.$

28. Найти градиент и производную по направлению вектора $\vec{l} = \vec{j} - \vec{k}$ для функции $u = \sqrt{x^2 - yx + 2yz}$ в точке $M(3; -2; 1).$

Вариант 5.

В заданиях 1-6 вычислить предел.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x^2-1}{10-25x^4}$. **2.** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{5-4x}-x}{x-1}$. **3.** $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x^2-5x+6}\right)$.

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin 4x\sin 4x}{1-\cos 4x}$. **5.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+4}{2x+8}\right)^{-x}$. **6.** $\lim\limits_{x\to2\pm0}\dfrac{x}{(x-2)^2}$.

7. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\,\mathrm{arctg}\,6x}{3x^4-x^2}$, используя эквивалентные бесконечно малые.

8. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x)=\begin{cases}3^{-x}, \text{ если } x\le-1,\\ 2, \text{ если } -1<x\le0,\\ \lg x, \text{ если } x>0;\end{cases}$$

в случае существования точек разрыва установить их характер; построить схематически график функции.

9. Найти производную и дифференциал функции:

а) $y=\ln^5\mathrm{arctg}(2^x+1)$; **б)** $r=\sqrt[4]{(1+\varphi e^{\sqrt{\varphi}})^3}$; **в)** $s=\sqrt[3]{\dfrac{8}{\sin 4t}}$.

10. Найти производную указанного порядка для функции:

а) $y=e^{2\cos x}$ $y''(x)=?$; **б)** $y=\dfrac{2}{5x-3}$ $y^{(4)}(x)=?$.

11. Проверить, удовлетворяет ли функция $y=e^{x^2}$ уравнению $y''-2xy'-2y=0$.

12. Доказать, что касательные, проведенные к графику функции $y=\dfrac{x-4}{x-2}$ в точках его пересечения с осями координат, параллельны; сделать рисунок.

13. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to+0}\sin x\ln x$, используя правило Лопиталя.

14. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=\sqrt[3]{2(x-1)^2(x-7)}$ на отрезке $[-1;5]$.

15. Найти точки экстремума функции $y=\dfrac{4e^{x^2}-1}{e^{x^2}}$.

16. Исследовать на непрерывность функцию $f(x)=\dfrac{e^{-x^2}}{x}$; в случае существования точек разрыва установить их характер; найти асимптоты и точки экстремума; построить схематически график функции.

17. Исследовать функцию $y = x^2 - 2\ln x$ и построить ее график.

18. Решить систему матричным методом: $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 6x_1 - 2x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$

19. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ -1 & -2 & 4 & -3 \\ 2 & 4 & -8 & 6 \end{pmatrix}$.

20. Найти единичные векторы $\vec{e_1}$ и $\vec{e_2}$, если $\vec{e_1}$ имеет то же направление, что $\overrightarrow{AB}$, а $\vec{e_2}$ имеет направление, противоположное направлению $\overrightarrow{AB}$ и $A(5; -3; 4)$, $B(-7; 1; 1)$.

21. Даны вершины четырехугольника $A(1; 4; 0)$, $B(-4; 1; 1)$, $C(-5; -5; 3)$, $D(1; -2; 2)$. Доказать, что его диагонали AC и BD перпендикулярны.

22. Найти площадь треугольника ABC, если $A(1; -1; 2)$, $B(5; -6; 2)$, $C(1; 3; -1)$.

23. Проверить компланарность векторов $\vec{a} = \{3; -4; 7\}$, $\vec{b} = \{1; 2; -3\}$, $\vec{c} = \{2; -1; 2\}$.

24. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $x + y - 10 = 0$, $2x + y - 15 = 0$ и точку $A(1; 1)$.

25. Привести к каноническому виду уравнение кривой 2-го порядка, сделать рисунок: $5x^2 + 4y^2 + 60x - 40y - 100 = 0$.

26. Написать канонические уравнения прямой, проходящей через точки $A(2; -4; -4)$ и $B(3; -7; -4)$.

27. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, если $x^3 + 2y^3 + z^3 = 3xyz + 2y$.

28. Найти градиент и производную по направлению вектора $\vec{l} = 5\vec{i} - 12\vec{j}$ для функции $z = \arcsin \frac{x^2}{y}$ в точке $A(1; 2)$.

Вариант 6.

В заданиях 1-6 вычислить предел.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^2-2x-1}{8x^2+3x-3}$. **2.** $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{2x-14}-2}$. **3.** $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x^2-4}-\dfrac{3}{x^3-8}\right)$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{2^x\sin 3x}$. **5.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+2}{2x-3}\right)^{x-1}$. **6.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x+1)2^{\frac{x}{2}}$.

7. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+6x-x^2)}{\mathrm{e}^{3x-x^2}-1}$, используя эквивалентные бесконечно малые.

8. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x)=\begin{cases}x^2-2x, \text{ если } x\le 1,\\ 2-x, \text{ если } 1<x\le 2,\\ 4-x^2, \text{ если } x>2;\end{cases}$$

в случае существования точек разрыва установить их характер; построить схематически график функции.

9. Найти производную и дифференциал функции:

а) $y=\ln\operatorname{tg}\dfrac{2x+1}{4}+\operatorname{tg}\dfrac{1}{4}$; **б)** $r=\sqrt[4]{\arcsin\sqrt{\theta}}$; **в)** $s=\sqrt{1+t^2}\,2^{\operatorname{arctg} t}+\sin^3\dfrac{1}{t}$.

10. Найти производную указанного порядка для функции:

а) $y=5^{\frac{1}{t}}$ $\quad y''(x)=?$; **б)** $y=\dfrac{2}{\sqrt{4x-1}}$ $\quad y^{(4)}(x)=?$.

11. Проверить, удовлетворяет ли функция $y=3\,\mathrm{e}^x\cos x+x^2$ уравнению $y''-2y'+2y=2x^2-4x+2$.

12. Составить уравнения тех касательных к графику функции $y=\dfrac{1}{3}x^3-x^2-x+1$, которые перпендикулярны прямой $x+2y-1=0$.

13. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1-0}\ln x\ln(1-x)$, используя правило Лопиталя.

14. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=2x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{8}{x-2}+5$ на отрезке $[-2;1]$.

15. Найти точки экстремума функции $y=x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

16. Исследовать на непрерывность функцию $y=\dfrac{x^2+5x+5}{x+1}$; в случае существования точек разрыва установить их характер; найти

асимптоты и точки экстремума; построить схематически график функции.

17. Исследовать функцию $y = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2}$ и построить ее график.

18. Решить матричное уравнение $XA - 2B = C$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

19. Решить систему методом Гаусса: $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 - 4x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 3, \\ 4x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 5. \end{cases}$

20. Даны векторы $\vec{a} = \{2; 0; 1\}$, и $\vec{b} = \{-1; 2; 2\}$. Найти координаты вектора $\vec{c}$, сонаправленного с вектором $3\vec{a} - 2\vec{b}$ и имеющего длину 7.

21. Даны векторы $\vec{a} = \{4; -2; -4\}$, $\vec{b} = \{6; -3; -2\}$. Найти скалярное произведение $(2\vec{a} - 3\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b})$.

22. Найти векторное произведение $\vec{a} \times \vec{b}$, если $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{k}$; $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$. Чему равны векторные произведения $\vec{b} \times \vec{a}$, $(3\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{b}$?

23. Даны вершины тетраэдра $A(2; 3; 1)$, $B(4; 1; -2)$, $C(6; 3; 7)$, $D(-5; -4; 8)$. Найти длину его высоты, опущенной из вершины D.

24. Найти проекцию точки $P(-8; 12)$ на прямую $2x - 7y + 17 = 0$.

25. Составить уравнение окружности, если точки $A(3; 2)$ и $B(-1; 6)$ являются концами одного из диаметров окружности.

26. Найти острый угол между плоскостями $12x + 5y = 0$ и $3x + 6y - 2z - 1 = 0$.

27. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $xyz = \mathrm{e}^z$.

28. Найти градиент и производную по направлению вектора $\vec{l} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$ для функции $u = \dfrac{xy^2z^3}{6} - \dfrac{x}{\sqrt{z}}$ в точке $M(-2; 3; 1)$.

Вариант 7.

В заданиях 1-6 вычислить предел.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+4x^2-5x^3}{2x^3+3x^2-5}$. **2.** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$. **3.** $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right)$.

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 7x}{x^2+\pi x}$. **5.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-7}{2x}\right)^{-8x}$. **6.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2-4})$.

7. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\ln(x^2-6x+10)}{3x-x^2}$, используя эквивалентные бесконечно малые.

8. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x)=\begin{cases}2^x, \text{ если } x\le 0,\\ x^2+1, \text{ если } 0<x\le 2,\\ 2x, \text{ если } x>2;\end{cases}$$

в случае существования точек разрыва установить их характер; построить схематически график функции.

9. Найти производную и дифференциал функции:

а) $y=\mathrm{e}^{\mathrm{arctg}\,x^2}+\mathrm{arctg}3$; **б)** $s=\arccos 3^t+\sqrt{\dfrac{t}{\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{8}}}$; **в)** $r=\dfrac{\varphi}{2+3\ln\cos\varphi}$.

10. Найти производную указанного порядка для функции:

а) $y=\dfrac{9+\sin^2 3x}{7}$ $\quad y^{(4)}(x)=?$; **б)** $y=\lg 2x^3$ $\quad y^{(4)}(x)=?$.

11. Проверить, удовлетворяет ли функция $y=\dfrac{1}{2}x^2\,\mathrm{e}^x$ уравнению $y''-2y'+y=\mathrm{e}^x$.

12. Составить уравнения тех касательных к графику функции $y=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{5}{2}x^2+7x-4$, которые образуют с осью Ox угол $45°$.

13. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\ln\dfrac{x}{2}}{8-x^3}$, используя правило Лопиталя.

14. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=x^2-2x+\dfrac{16}{x-1}-13$ на отрезке [2; 5].

15. Найти экстремумы функции $y=x^2\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

16. Исследовать на непрерывность функцию $f(x)=2+\dfrac{1}{\ln x}$; в случае существования точек разрыва установить их характер; найти асимптоты и точки экстремума; построить схематически график функции.

17. Исследовать функцию $y=(x-1)x^2$ и построить ее график.

19. Найти обратные матрицы, если они существуют: $A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 4 & 1\\ 1 & 11 & 3\\ -4 & -9 & -2\end{pmatrix}$.

20. Решить систему: $\begin{cases}x_1+x_2+3x_3-2x_4+3x_5=4,\\ x_1-2x_2+3x_3+x_4+3x_5=7,\\ 3x_1+3x_2+5x_3-3x_5=6,\\ 2x_1+2x_2+8x_3-9x_5=4.\end{cases}$

21. Вектор $\overline{x}$ коллинеарный вектору $\vec{a}=\{6;-8;-7{,}5\}$, образует острый угол с осью Oz. Зная, что $|\vec{x}|=50$, найти его координаты.

22. Даны вершины четырехугольника: $A(1;-2;2)$, $B(1;4;0)$, $C(-4;1;1)$, $D(-5;-5;3)$. Проверить, являются ли его диагонали перпендикулярными.

23. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}-\vec{b}$ и $\vec{c}$, если $\vec{a}=\{3;-2;1\}$, $\vec{b}=\{2;1;2\}$, $\vec{c}=\{3;-1;2\}$.

24. Объем тетраэдра $V=5$, три его вершины находятся в точках $A(2;1;-1)$, $B(3;0;1)$, $C(2;-1;3)$. Найти координаты четвертой вершины D, если известно, что она лежит на оси Oy.

25. Найти точки пересечения линий $x=8y-y^2$ и $3x+11y=6$. Сделать рисунок.

26. Найти острый угол между плоскостями $12x+5y=0$ и $3x+6y-2z-1=0$.

27. Найти все частные производные 2-го порядка для функции $z=\mathrm{tg}(xy^2)$.

28. Исследовать на экстремум функцию $z=2(x+y)-x^2-y^2-12$.

Вариант 8.

В заданиях 1-6 вычислить предел.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5-22x^2}{8x^6+3x+5}$. **2.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{x+2}-2}$. **3.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x\sin x}{1-\cos 2x}$.

4. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{2x^2-3x+1}-\dfrac{1}{x^2-x}\right)$. **5.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3-2x}{1-2x}\right)^x$. **6.** $\lim\limits_{x\to\pm 0}(x+2)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

7. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\mathrm{e}^{x^2-6x+9}-1}{3x-x^2}$, используя эквивалентные бесконечно малые.

8. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x)=\begin{cases}x^2+2, \text{ если } x\le 0,\\ 2, \text{ если } 0<x<2,\\ 4-x, \text{ если } x>2;\end{cases}$$

в случае существования точек разрыва установить их характер; построить схематически график функции.

9. Найти производную и дифференциал функции:

а) $y=\mathrm{ctg}\,x\cdot\mathrm{tg}\,\ln(x^3+x)$; **б)** $r=\dfrac{\arcsin\dfrac{4}{\sqrt{\varphi}}}{2+\cos\alpha}$ $(\alpha=\mathrm{const})$;

в) $s=\ln\left(t-\arcsin\dfrac{1}{t}\right)$.

10. Найти производную указанного порядка для функции:

а) $y=\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{\mathrm{e}^{1+3x}}$ $y''(x)=?$; **б)** $y=\sqrt[4]{2-5x}$ $y^{(4)}(x)=?$.

11. Найти $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ в точке $x=\dfrac{\pi}{8}$, если $y=\ln\sin 2x$.

12. Найти точку, в которой касательной к графику функции $y=0,5x^4-x$ является прямая $y=-\dfrac{3}{4}x-\dfrac{3}{32}$.

13. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5-5\mathrm{e}^{x-1}}{\sin(x^2-1)}$, используя правило Лопиталя.

14. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=\sin 2x-x$ на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

15. Найти точки экстремума функции $y=\dfrac{(1-x)^3}{(x-2)^2}$.

16. Исследовать на непрерывность функцию $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x+2}$; в случае существования точек разрыва установить их характер; найти асимптоты и точки экстремума; построить схематически график функции.

17. Исследовать функцию $y=(x+2)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ и построить ее график.

18. Решить систему матричным методом: $\begin{cases} 2x_1+3x_2+5x_3=10, \\ 3x_1+7x_2+4x_3=3, \\ x_1+2x_2+2x_3=3. \end{cases}$

19. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 6 & -1 & -5 & 0 & 5 \\ 2 & 7 & -2 & -4 & 9 & 4 \\ 3 & 8 & -3 & -3 & 8 & 3 \\ 4 & 9 & -4 & -2 & 7 & 2 \\ 5 & 0 & -5 & -1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$.

20. Определить модули суммы и разности векторов $\vec{a}=\{3;-5;8\}$ и $\vec{b}=\{-1;1;-4\}$.

21. Найти вектор $\vec{x}$, зная, что он перпендикулярен к $\vec{a}=\{2;3;-1\}$, $\vec{b}=\{1;-2;3\}$ и удовлетворяет условию $\vec{x}(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})=-6$.

22. Вычислить синус угла, образованного векторами $\vec{a}=\{2;-2;1\}$ и $\vec{b}=\{2;3;6\}$.

23. Проверить, образуют ли векторы $\overrightarrow{a_1}=\{3;-2;1\}$, $\overrightarrow{a_2}=\{2;1;2\}$, $\overrightarrow{a_3}=\{3;-1;-2\}$ базис.

24. Даны две вершины $A(3;-1)$, $B(5;7)$ треугольника ABC и точка $N(4;-1)$ пересечения его высот. Составить уравнения сторон этого треугольника.

25. Привести к каноническому виду уравнение кривой 2-го порядка, сделать рисунок: $3x^2+24x-16y^2+96y=0$.

26. Написать уравнение плоскости, содержащей точки $A(2;-4;-4)$, $B(3;-7;5)$, $C(0;2;7)$.

27. Проверить, удовлетворяет ли функция $z=\arcsin(x-y)$ уравнению $\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$.

28. Найти градиент и производную по направлению вектора $\vec{l}=-\vec{i}-2\vec{k}$ для функции $u=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+z^2}}$ в точке $M(-1;1;0)$.

Вариант 9.

В заданиях 1-6 вычислить предел.

1. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-4x-5}{3x^2-75}$. **2.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4-3x}-2}{5x-7x^2}$. **3.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{8x-3}-\dfrac{2x^4}{16x^3+5}\right)$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}3x\sin 2x}{1-\cos 3x}$. **5.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x+4}{6x+1}\right)^{-2x}$. **6.** $\lim\limits_{x\to 3\pm 0}\dfrac{2x+5}{3-x}$.

7. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2-6x+1}-1}{3x-x^2}$, используя эквивалентные бесконечно малые.

8. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x)=\begin{cases}-x, \text{ если } x\le -2,\\ \dfrac{2}{x}, \text{ если } x>-2;\end{cases}$$

в случае существования точек разрыва установить их характер; построить схематически график функции.

9. Найти производную и дифференциал функции:

а) $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)-\dfrac{x}{\sqrt{x^3-1}}$; **б)** $w=\cos\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{z}}{6z^3}$;

в) $\rho=\sqrt[3]{\dfrac{\sin 5\varphi}{4}}+\sin\dfrac{\pi}{12}$.

10. Найти производную указанного порядка для функции:

а) $y=\dfrac{2^{3x}+3^{2x}}{4^x}$ $y''(x)=?$; **б)** $y=\operatorname{tg}\varphi^5$ $y''(x)=?$.

11. Проверить, удовлетворяет ли функция $y=\dfrac{x-3}{x+4}$ уравнению $2\left(y'\right)^2=(y'-1)y''$.

12. Составить уравнения касательных к кривым $y=2x^2+5$ и $y=-x^2-3x+5$ в точках пересечения этих линий; сделать рисунок.

13. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\sin^2 3x}$, используя правило Лопиталя.

14. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{1+x}$ на отрезке $[0;1]$.

15. Найти интервалы возрастания и убывания функции $y=\dfrac{2+x}{(x+1)^2}$.

16. Исследовать на непрерывность функцию $f(x)=3^{-\frac{2}{x}}$; в случае существования точек разрыва установить их характер; найти асимптоты и точки экстремума; построить схематически график функции.

17. Исследовать функцию $y=\sqrt[3]{6x^2-x^3}$ и построить ее график.

18. Найти алгебраические дополнения к элементам первой строки матрицы $A^T(2A-3B)$, если $A=\begin{pmatrix}3 & -7 & 0\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 0\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix}$.

19. Решить систему: $\begin{cases}3x_1+7x_2-x_3+2x_4=1,\\ 2x_1+4x_2+x_4=0,\\ 4x_1+12x_2-5x_3+x_4=-1.\end{cases}$

20. Даны векторы $\vec{a}=\{3;-2;1\}$, $\vec{b}=\{-1;1;-2\}$, $\vec{c}=\{2;1;-3\}$. Найти координаты вектора $\vec{d}=\{11;-6;5\}$ в базисе $\{\vec{a};\vec{b};\vec{c}\}$.

21. Даны точки: $A(1;-1;2)$, $B(5;-6;2)$, $C(1;3;-1)$, $D(1;4;7)$. Найти скалярные произведения $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$, $(3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{CD})\cdot\overrightarrow{CD}$.

22. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{p}=\vec{a}+3\vec{b}$ и $\vec{q}=3\vec{a}-\vec{b}$, если $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $(\widehat{\vec{a};\vec{b}})=\frac{2\pi}{3}$.

23. Найти смешанные произведения $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, $\vec{b}\vec{c}\vec{a}$, $\vec{b}\vec{a}\vec{c}$, $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{k}$; $\vec{b}=-\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$; $\vec{c}=3\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}$.

24. Найти проекцию точки $P(-8;12)$ на прямую, проходящую через точки $A(2;-3)$, $B(-5;1)$.

25. Привести к каноническому виду уравнение кривой 2-го порядка, сделать рисунок: $9x^2+36x+y^2-6y=0$.

26. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2;4;-4)$ перпендикулярно прямой $\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+6}{-3}$.

27. Найти все частные производные 2-го порядка для функции $z=\mathrm{e}^{2x^3+3y^2}$.

28. Исследовать на экстремум функцию $z=4(x-y)-x^2-y^2$.

Вариант 10.

В заданиях 1-6 вычислить предел.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x-1}{x^3+4}$. **2.** $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-25}{\sqrt{x-1}-2}$. **3.** $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{5}{x^2-x-6}\right)$.

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x\cos 2x}{\operatorname{tg} x}$. **5.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3-2x}{4-2x}\right)^{x-5}$. **6.** $\lim\limits_{x\to+\infty} 3^{-2x^2+x}$.

7. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1-6x^2}-1}{\sin^2 3x}$, используя эквивалентные бесконечно малые.

8. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x)=\begin{cases}-x, \text{ если } x\le -2,\\ 2, \text{ если } -2<x\le 0,\\ 2\cos x, \text{ если } x>0;\end{cases}$$

в случае существования точек разрыва установить их характер; построить схематически график функции.

9. Найти производную и дифференциал функции:

а) $y=\dfrac{e^{-x^2}}{\operatorname{ctg} x}+\sqrt[3]{\dfrac{\operatorname{tg}\frac{x}{3}}{\ln 2}}$; **б)** $w=\arcsin^3\dfrac{2}{z}$; **в)** $s=3^{\sqrt{t}}\sin^2 t+3^{\sqrt{2}}$.

10. Найти производную указанного порядка для функции:

а) $y=\cos(1-3x)$ $y^{(8)}(x)=?$; **б)** $y=4arcctgx^2$ $y''(x)=?$.

11. Проверить, удовлетворяет ли функция $y=\cos e^x+\sin e^x$ уравнению $y''-y'+ye^{2x}=0$.

12. Составить уравнения тех касательных к графику функции $y=\dfrac{x+2}{x-2}$, которые образуют с осью Ox угол $135°$; сделать рисунок.

13. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{e^{\cos x}-\sqrt{e}}{\sin 3x}$, используя правило Лопиталя.

14. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ на отрезке $[-1; 2]$.

15. Найти точки перегиба графика функции $y=x^2 e^{-2x}$.

16. Исследовать на непрерывность функцию $y=\dfrac{\ln x^2}{x-2}$; в случае существования точек разрыва установить их характер; найти асимптоты и точки экстремума; построить схематически график функции.

17. Исследовать функцию $y = \dfrac{3x^2 + x + 1}{x + 1}$ и построить ее график.

18. Решить систему матричным методом: $\begin{cases} 2x - 3y + z = -7, \\ x + 4y + 2z = -1, \\ \quad x - 4y = -5. \end{cases}$

19. Найти $\mathrm{rang}(A^T A)$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$

20. Даны векторы $\vec{a} = \{2; 0; 1\}$, и $\vec{b} = \{-1; 2; 2\}$. Найти координаты вектора $\vec{c}$, сонаправленного с вектором $3\vec{a} - 2\vec{b}$ и имеющего длину 7.

21. Найти угол между векторами $\vec{p} = \vec{a} + 2\vec{b}$ и $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$, если $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 2$, $(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}) = \dfrac{\pi}{6}.$

22. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} - 2\vec{b}$ и $\vec{a} + 2\vec{b}$, если $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{k}$; $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}.$

23. Определить значения параметров α и β так, чтобы векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ были ортогональны, а векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны, если $\vec{a} = \alpha\vec{i} + 3\vec{k}$; $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} + \beta\vec{k}$; $\vec{c} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}.$

24. Даны уравнения двух сторон прямоугольника $2x - 3y + 5 = 0$, $3x + 2y - 7 = 0$ и одна из его вершин $A(2; -3)$. Составить уравнения двух других сторон этого прямоугольника.

25. Привести к каноническому виду уравнение кривой 2-го порядка, сделать рисунок: $3x^2 - 12x - 8y^2 - 16y = 0.$

26. Написать параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M(3; 0; -9)$ перпендикулярно плоскости $3x + 6y - 2z - 1 = 0.$

27. Проверить, удовлетворяет ли функция $z = \cos(xy^2)$ уравнению $y\dfrac{\partial z}{\partial y} - xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$

28. Найти градиент и производную по направлению вектора $\vec{l} = 3\vec{j} - 4\vec{k}$ для функции $u = \ln\sin\left(x - 2y + \dfrac{z}{4}\right)$ в точке $M(1; 0{,}5; \pi).$

Вариант 11.

В заданиях 1-6 вычислить предел.

1. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-10x+25}{10+3x-x^2}$. **2.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4-\sqrt{x^2+12}}{3x^2-5x-2}$. **3.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^3-x^2}{6x^2+1}-\dfrac{3x^2-2}{6x+1}\right)$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\arcsin 2x}{\sin 3x}$. **5.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3-2x}{3+4x}\right)^{\frac{1}{x}}$. **6.** $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(3+\dfrac{1}{x}\right)^{x}$.

7. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{2x^2}$, используя эквивалентные бесконечно малые.

8. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x)=\begin{cases}4-x, \text{ если } x\le -1,\\ 5, \text{ если } -1<x\le 0,\\ x^2+5, \text{ если } x>0;\end{cases}$$

в случае существования точек разрыва установить их характер; построить схематически график функции.

9. Найти производную и дифференциал функции:

а) $y=2^{\arccos\sqrt{x}}+\ln\sin\dfrac{x}{2}$; **б)** $w=\sin^4\dfrac{2}{z^3}$; **в)** $s=\operatorname{arcctg}\dfrac{\operatorname{tg}t}{\sqrt{2}}+\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{10}$.

10. Найти производную указанного порядка для функции:

а) $y=\dfrac{x^{10}+\cos(1+2x)}{4}$ $\quad y^{(6)}(x)=?$; **б)** $y=\dfrac{7x+\sqrt[3]{x}}{x^2}$ $\quad y'''(x)=?$.

11. Найти $\dfrac{d^2\rho(-1)}{d\varphi^2}$, если $\rho=\varphi e^{-\varphi^3}$.

12. Составить уравнения тех касательных к графику функции $y=\dfrac{1}{2}(x^3-5x^2+6x-3)$, которые параллельны прямой $3x-y-5=0$.

13. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to +0}x^2\ln x$, используя правило Лопиталя.

14. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=\sqrt[3]{2x^2+1}$ на отрезке $[-2;1]$.

15. Исследовать выпуклость графика функции $y=x^2\,e^{\frac{1}{x}}$.

16. Исследовать на непрерывность функцию $f(x)=3+\dfrac{3}{\ln x-2}$; в случае существования точек разрыва установить их характер; найти асимптоты и точки экстремума; построить схематически график функции.

17. Исследовать функцию $y=(x-2)(x+1)^2$ и построить ее график.

18. Найти $A^{-1}B^T$, если $A=\begin{pmatrix}1&6&1\\2&0&1\\3&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}8&-1&0\\0&-2&3\end{pmatrix}$.

19. Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases}x_1-2x_4+3x_5=4,\\2x_3-x_4+3x_5=6,\\3x_1+4x_2+5x_5=4,\\2x_1+2x_2+4x_3-3x_4+6x_5=0.\end{cases}$$

20. Даны векторы $\vec{a}=\{2;0;1\}$, и $\vec{b}=\{-1;2;2\}$. Найти координаты вектора $\vec{c}$, сонаправленного с вектором $3\vec{a}+2\vec{b}$ и имеющего длину 5.

21. Найти скалярные произведения $\vec{a}\cdot\vec{b}$ и $\left(3\vec{a}-2\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi=\frac{5\pi}{6}$, $\left|\vec{a}\right|=4$, $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{3}$.

22. Найти направляющие косинусы векторного произведения векторов $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{k}$ и $\vec{b}=-\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$.

23. Найти смешанные произведения $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ и $\vec{a}\vec{c}\vec{b}$, если $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{k}$; $\vec{b}=-\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$; $\vec{c}=3\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}$.

24. Найти координаты точки, симметричной точке $B(-3;2)$ относительно прямой $5x+2y=10$.

25. Составить каноническое уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси Ox симметрично относительно начала координат, если уравнения ее асимптот $y=\pm\frac{12}{5}x$, а мнимая ось $2b=12$.

26. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2;-4;-4)$ перпендикулярно прямой $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-6}{3}$.

27. Найти $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$, если $z=\mathrm{e}^{2x^3+3xy^2}$.

28. Исследовать на экстремум функцию $z=x^2+xy+y^2-6x-9y$.

Вариант 12.

В заданиях 1-6 вычислить предел.

1. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-15x}{(x-5)^2}$. **2.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2}{2-\sqrt{x^3-x^2+4}}$. **3.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x^4-2x}{5x^2-3x+7}-x^2\right)$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{5x\sin 2x}$. **5.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4-2x}{8-2x}\right)^{-3x}$. **6.** $\lim\limits_{x\to 1\pm 0}\dfrac{\ln x-2}{1-x}$.

7. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{4x^2}$, используя эквивалентные бесконечно малые.

8. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x)=\begin{cases}6-x, \text{ если } |x|\le 3,\\ x^2, \text{ если } |x|>3;\end{cases}$$

в случае существования точек разрыва установить их характер; построить схематически график функции.

9. Найти производную и дифференциал функции:

а) $y=\ln^3\operatorname{arctg}\sqrt{5z}$; **б)** $s=\sqrt[3]{\sin x^5}+\dfrac{3-x}{\cos x}$; **в)** $r=3^{\arccos\frac{1}{\psi}}+\psi\cos\dfrac{\pi}{8}$.

10. Найти производную указанного порядка для функции:

а) $y=x^2\arcsin\dfrac{2}{x}$ $\quad y''(x)=?$; **б)** $y=\dfrac{7}{ctg4x}$ $\quad y''(x)=?$.

11. Найти $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ в точке $x=\pi/6$, если $y=\mathrm{e}^{\sin 2x}$.

12. Составить уравнения тех касательных к графику функции $y=x^3-11x-15$, которые перпендикулярны прямой $2x+2y-7=0$.

13. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)$, используя правило Лопиталя.

14. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=\sqrt{x(10-x)}$ на отрезке $[0;10]$.

15. Найти точки экстремума функции $y=x^3\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

16. Исследовать на непрерывность функцию $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$; в случае существования точек разрыва установить их характер; найти

асимптоты и точки экстремума; построить схематически график функции.

17. Исследовать функцию $y = -3\mathrm{e}^{-2x^2-4x}$ и построить ее график.

18. Решить матричное уравнение $X\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 4 \\ 6 & 6 & -8 \end{pmatrix}.$

19. Решить систему методом Гаусса: $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_4 + 3x_5 = 12, \\ x_1 - x_2 + 3x_5 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_3 - 2x_4 = 7. \end{cases}$

20. Найти координаты и модуль вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A(2; 4; -3), B(5; 0; 9)..$

21. Вычислить $\text{пр}_{\vec{a}}\left(2\vec{b} - \vec{c}\right)$, если $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{k}$; $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$; $\vec{c} = 3\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}.$

22. Найти координаты вектора $\vec{c}$, направленного противоположно вектору $\vec{a} \times \vec{b}$ и имеющего длину 7.

23. Найти смешанные произведения $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, $\vec{b}\vec{c}\vec{a}$, $\vec{b}\vec{a}\vec{c}$, $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{k}$; $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$; $\vec{c} = 3\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}.$

24. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(2; -4)$ параллельно прямой $5x + 2y = 10$; найти расстояние между этими прямыми.

25. Привести к каноническому виду уравнение кривой 2-го порядка, сделать рисунок: $x^2 + y^2 - 3x + 7y - 25 = 0.$

26. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2; -4; -4)$ перпендикулярно прямой $\dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z-2}{-4}.$

27. Найти все частные производные 2-го порядка для функции $z = \operatorname{ctg}\dfrac{y}{x}.$

28. Исследовать на экстремум функцию $z = 15 - (x-2)^2 - 3(y+7)^2.$

Вариант 13.

В заданиях 1-6 вычислить предел.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x-21}{x(x+6)}$. **2.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-2x-21}{\sqrt{x+6}-3}$. **3.** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3x^2}{x-1}-\dfrac{3x^3}{x^2-1}\right)$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x\sin 2x}{1-\cos 4x}$. **5.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3-2x}{1-2x}\right)^x$. **6.** $\lim\limits_{x\to -1\pm 0}\dfrac{x}{(x+1)(x+3)}$.

7. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 3x^2}{\ln(1+2x^2)}$, используя эквивалентные бесконечно малые.

8. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2x}, \text{ если } x\le -2,\\[2mm] \dfrac{1}{x-2}, \text{ если } x>-2;\end{cases}$$

в случае существования точек разрыва установить их характер; построить схематически график функции.

9. Найти производную и дифференциал функции:

а) $y=\mathrm{e}^{3x}\sqrt{4-x^2}+\dfrac{10}{\operatorname{arctg}(\sin x)}$; **б)** $s=\sqrt[3]{t}\arccos\dfrac{1}{t}+\sqrt{\pi}$;

в) $w=\dfrac{\lg\sqrt{1-z^4}}{z^3}$.

10. Найти производную указанного порядка для функции:

а) $y=\dfrac{\sqrt[10]{x}-\sin^2 3x}{2}$ $\quad y^{(4)}(x)=?$; **б)** $y=\dfrac{1}{\sin 3\varphi}$ $\quad y''(x)=?$.

11. Найти $\dfrac{d^3r}{d\varphi^3}$ в точке $\varphi=\pi$, если $r==\ln\cos\dfrac{\varphi}{3}$.

12. Составить уравнения тех касательных к графику функции $y=x^2(x-2)^2$, которые параллельны оси абсцисс; сделать рисунок.

13. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\cos 3x}{1-2\sin x}$, используя правило Лопиталя.

14. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=\sqrt[3]{2(x-1)^2}$ на отрезке $[0; 3]$.

15. Найти точки перегиба графика функции $y=(x+2)\mathrm{e}^{\frac{1-x}{3}}$.

16. Исследовать на непрерывность функцию $y = 4^{-x^2+\frac{1}{x}}$; в случае существования точек разрыва установить их характер; найти асимптоты и точки экстремума; построить схематически график функции.

17. Исследовать функцию $y = x\sqrt[3]{(x+1)^2}$ и построить ее график.

18. Найти для матриц $A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 0 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ произведения $(AB)^{-1}$ и $(BA)^{-1}$, если они существуют.

19. Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 4, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 4x_5 = 6, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 8, \\ 2x_1 + 8x_3 - 3x_4 + 8x_5 = 10. \end{cases}$$

20. Найти длину и направляющие косинусы вектора $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$.

21. Найти угол между векторами $\vec{p} = \vec{a} + 2\vec{b}$ и $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$, если $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 2$, $(\widehat{\vec{a};\vec{b}}) = \dfrac{\pi}{6}$.

22. Даны точки: $A(1;-1;2)$, $B(5;-6;2)$, $C(1;3;-1)$, $D(1;4;7)$. Найти векторные произведения $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}$, $(3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CD}) \times \overrightarrow{CD}$.

23. Вычислить объем пирамиды $SABC$ и длину высоты SH, если $A(1;-1;2)$, $B(5;-6;2)$, $C(1;3;-1)$, $S(2;1;0)$.

24. Найти уравнения высоты CH, медианы CM и угол между ними, если даны вершины треугольника $A(2;-4)$, $B(2;1)$, $C(-3;2)$.

25. Привести к каноническому виду уравнение кривой 2-го порядка, сделать рисунок: $4x^2 + 9y^2 - 24x - 18y + 9 = 0$;

26. Написать уравнения плоскости, проходящей через точку $M(3;0;-9)$ параллельно плоскости $5x - 2y - z = 0$.

27. Найти все частные производные 2-го порядка для функции $z = y\,\mathrm{tg}(5xy)$.

28. Найти градиент и производную по направлению вектора $\vec{l} = -2\vec{j} - 3\vec{k}$ для функции $u = z\ln(x + y^2)$ в точке $A(5;2;3)$.

Вариант 14.

В заданиях 1-6 вычислить предел.

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x-x^2}{x^2-6x+9}$. **2.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4-2x}-2}{3x+5x^2}$. **3.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x^2}{x+6}-\dfrac{4x^4}{x^3-x+6}\right)$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x\,\mathrm{tg}\,3x}{3x^2}$. **5.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+6}\right)^{-2x}$. **6.** $\lim\limits_{x\to\pm 0}\dfrac{3^x+5}{x(x-1)}$.

7. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{2\sin x}-1}{3x-x^2}$, используя эквивалентные бесконечно малые.

8. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x)=\begin{cases} x, \text{ если } x\le -\pi,\\ \cos x, \text{ если } -\pi<x\le 0,\\ \dfrac{1}{x}, \text{ если } x>0; \end{cases}$$

в случае существования точек разрыва установить их характер; построить схематически график функции.

9. Найти производную и дифференциал функции:

а) $y=\sqrt{x-3}\log_2(1-\sqrt{x-3})$; **б)** $w=\dfrac{z^5-\sin^2(2+3z)+\cos^2\pi}{4z}$;

в) $s=\sqrt[5]{3^{\mathrm{tg}\,t}+3t^3}$.

10. Найти производную указанного порядка для функции:

а) $y=2^{\sqrt[3]{x}}$ $\quad y''(x)=?$; **б)** $y=\mathrm{arctg}\,4x$ $\quad y''(x)=?$.

11. Найти $\dfrac{d^2\rho(\sqrt{3})}{d\varphi^2}$, если $\rho=\varphi\arcsin\dfrac{\varphi}{2}$.

12. Составить уравнения касательных к графику функции $y=x-\dfrac{1}{x}$ в точках пересечения его с осью абсцисс.

13. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{3x}-3x-1}{\sin^2 5x}$, используя правило Лопиталя.

14. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=3-x-\dfrac{4}{(x+2)^2}$ на отрезке $[-1; 2]$.

15. Найти интервалы возрастания и убывания функции $y=\dfrac{\ln x}{x}$.

16. Исследовать на непрерывность функцию $y=\dfrac{4x^2+2x+2}{x+1}$; в случае существования точек разрыва установить их характер; найти

асимптоты и точки экстремума; построить схематически график функции.

17. Исследовать функцию $y = -e^{-\frac{(x+4)^2}{2}}$ и построить ее график.

18. Решить систему матричным методом: $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 8, \\ -2x_1 - x_2 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$

19. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 & -1 \\ -3 & -9 & 16 & -6 & 8 \\ 2 & 7 & -12 & 3 & -7 \end{pmatrix}$.

20. Найти длины суммы и разности векторов $\vec{a} = \{2; 0; 1\}$, и $\vec{b} = \{-1; 2; 2\}$.

21. Даны точки: $A(1; -1; 2)$, $B(5; -6; 1)$, $C(1; 3; -1)$, $D(1; 0; 2)$. Найти скалярные произведения $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$, $(3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CD}) \cdot \overrightarrow{CD}$.

22. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} - 2\vec{b}$ и $\vec{a} + 2\vec{b}$, если $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{k}$; $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

23. Определить значения параметров α и β так, чтобы векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ были ортогональны, а векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны, если $\vec{a} = \alpha\vec{i} + 3\vec{k}$; $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$; $\vec{c} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \beta\vec{k}$.

24. Даны вершины треугольника: $A(2; -4)$, $B(2; 1)$, $C(-3; 2)$. Пусть BH – высота треугольника. Написать уравнение прямой BH и найти длину высоты BH.

25. Составить каноническое уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси Ox симметрично относительно начала координат, малая полуось $b = 2$, а точка $M(-2; \sqrt{3})$ принадлежит эллипсу.

26. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(3; 0; -9)$ параллельно прямой $\frac{x+2}{3} = \frac{y}{0} = \frac{z-2}{-4}$.

27. Проверить, удовлетворяет ли функция $z = \cos(x^2 y^2 - 5)$ уравнению $\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$.

28. Найти градиент и производную по направлению вектора $\vec{l} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ для функции $u = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ в точке $M(\sqrt{2}; \sqrt{2}; \sqrt{2})$.

Вариант 15.

В заданиях 1-6 вычислить предел.

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3-3x+1}{x^2-x}$. **2.** $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3-\sqrt{x^2-16}}{3x^2-10x-25}$. **3.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2}{x-1}-\dfrac{3x^3}{x^2-1}\right)$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{3x\sin 2x}$. **5.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4-3x}{2-3x}\right)^{4-3x}$. **6.** $\lim\limits_{x\to 1\pm 0}\dfrac{x+2}{(x-1)(x-5)}$.

7. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{5x}-1}{\sin 2x}$, используя эквивалентные бесконечно малые.

8. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x)=\begin{cases} 2^x, \text{ если } x<1, \\ 1, \text{ если } x=1, \\ \dfrac{1}{x-1}, \text{ если } x>1; \end{cases}$$

в случае существования точек разрыва установить их характер; построить схематически график функции.

9. Найти производную и дифференциал функции:

а) $\rho=\log_3(\mathrm{e}^{2\varphi}+1)-\dfrac{1}{\varphi\,\mathrm{arctg}\,3}$; **б)** $w=\arccos^2\dfrac{2}{\sqrt{z}}$;

в) $y=\mathrm{tg}\sqrt{\cos x^3}+\dfrac{1}{5x}$.

10. Найти производную указанного порядка для функции:

а) $y=\dfrac{x^6-x\cos 3x}{4}$ $\quad y^{(5)}(x)=?$; **б)** $y=4\arcsin\sqrt{x}$ $\quad y''(x)=?$.

11. Проверить, удовлетворяет ли функция $y=\mathrm{e}^{\sqrt{x}}+\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$ уравнению $4xy''+2y'-y=0$.

12. Составить уравнение той касательной к графику функции $y=x^3+3x^2-5$, которая перпендикулярна прямой $2x-6y+1=0$.

13. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}$, используя правило Лопиталя.

14. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=\dfrac{4x}{4+x^2}$ на отрезке [–4; 2].

15. Найти точки перегиба графика функции $y=\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^2$.

16. Исследовать на непрерывность функцию $f(x)=\dfrac{x^2+3}{2x^2+x}$; в случае существования точек разрыва установить их характер; найти асимптоты и точки экстремума; построить схематически график функции.

17. Исследовать функцию $y=(2-x)\ln^2(2-x)$ и построить ее график.

18. Решить систему матричным методом: $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=1, \\ 3x_1-x_2-x_3=6, \\ x_1+x_2+x_3=6. \end{cases}$

19. Найти ранг матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ -2 & -4 & 8 & -6 \\ 3 & 6 & -12 & 9 \end{pmatrix}.$

20. Найти единичные векторы $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$, если $\overrightarrow{e_1}$ имеет то же направление, что $\overrightarrow{AB}$, а $\overrightarrow{e_2}$ имеет направление, противоположное направлению $\overrightarrow{AB}$ и $A(2;1;0)$, $B(0;1;2)$.

21. Найти угол между векторами $\vec{a}=3\vec{i}-4\vec{k}$ и $\vec{b}=6\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$.

22. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{p}=\vec{a}+3\vec{b}$ и $\vec{q}=3\vec{a}-\vec{b}$, если $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $(\widehat{\vec{a};\vec{b}})=\dfrac{2\pi}{3}$.

23. Проверить компланарность векторов $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{k}$; $\vec{b}=-\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$; $\vec{c}=\{2;-1;2\}$.

24. Даны координаты двух вершин треугольника $A(2;-4)$, $B(2;1)$ и точки $D(-3;2)$ пересечения его высот. Найти координаты третьей вершины треугольника.

25. Привести к каноническому виду уравнение кривой 2-го порядка, сделать рисунок: $x^2+4x-5y+3=0$.

26. Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z-6}{3}$ и плоскости $3x+6y-2z-42=0$.

27. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $x^3y+2y^3z+xz^3=3xyz$.

28. Найти градиент и производную по направлению вектора $\vec{l}=2\vec{i}-3\vec{j}+3\vec{k}$ для функции $u=\ln(x^3+\sqrt[3]{y}-z)$ в точке $A(2;1;8)$.

Вариант 16.

В заданиях 1-6 вычислить предел.

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2}$. **2.** $\lim\limits_{u\to 5}\dfrac{2-\sqrt{u-1}}{u^2-25}$. **3.** $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{2x}{x^2-9}\right)$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{tg}x\operatorname{ctg}3x$. **5.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3-x}{3+x}\right)^{\frac{2}{x}}$. **6.** $\lim\limits_{x\to 2\pm 0}\dfrac{1}{(x-2)(x+3)}$.

7. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\operatorname{tg}(x+2)}{x^2-4}$, используя эквивалентные бесконечно малые.

8. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x\le 0,\\ \operatorname{tg}x, \text{ если } 0<x<\pi,\\ 0, \text{ если } x>\pi;\end{cases}$$

в случае существования точек разрыва установить их характер; построить схематически график функции.

9. Найти производную и дифференциал функции:

а) $y=\log_2\sin 2\pi x+\dfrac{\sqrt{2}}{x}$; **б)** $\rho=\mathrm{e}^{\frac{2}{\varphi-1}}\cos\dfrac{\varphi}{2}+\cos\dfrac{\pi}{5}$;

в) $s=\arcsin\sqrt{1+\cos 4t}$.

10. Найти производную указанного порядка для функции:

а) $y=x^{10}\ln 3x \quad y^{(8)}(x)=?$; **б)** $y=\dfrac{3^{3x}+4^x}{9^x} \quad y''(x)=?$.

11. Проверить, удовлетворяет ли функция $y=\cos\mathrm{e}^x+\sin\mathrm{e}^x$ уравнению $y''-y'+y\mathrm{e}^{2x}=0$.

12. Составить уравнение той касательной к графику функции $y=x^2-2x+5$, которая параллельна прямой $6x-2y+1=0$; сделать рисунок.

13. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}\right)$, используя правило Лопиталя.

14. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=x^2\ln x$ на отрезке $[1;3]$.

15. Найти интервалы возрастания и убывания функции $y=\ln(x^2+1)$.

16. Исследовать на непрерывность функцию $f(x)=\dfrac{1}{2+2^{\frac{1}{x+2}}}$; в случае существования точек разрыва установить их характер; найти асимптоты и точки экстремума; построить схематически график функции.

17. Исследовать функцию $y=(x-3)(x+1)^2$ и построить ее график.

18. Найти $A^{-1}B^T$, если $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 2 & 4 & -5\\ 3 & 7 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 2 & 4 & -5\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

19. Решить систему методом Гаусса: $\begin{cases} x_1+x_2+3x_3=4,\\ x_1+4x_3-x_4=4,\\ x_2-2x_3+3x_4=4,\\ x_1+9x_4=4.\end{cases}$

20. Даны точки $A(-1;5;-10)$, $B(5;-7;8)$, $C(2;2;-7)$, $D(5;-4;2)$. Проверить, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны; установить, какой из них длиннее другого и во сколько раз, как они направлены: в одну или в противоположные стороны.

21. Определить угол между векторами $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}+5\vec{k}$ и $\vec{b}=4\vec{i}-5\vec{j}-3\vec{k}$.

22. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный векторам $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$ и $\vec{b}=18\vec{i}-22\vec{j}-5\vec{k}$, образует с осью Oy тупой угол. Найти его координаты, зная, что $|\vec{x}|=14$.

23. Доказать, что точки $A(1;2;-1)$, $B(0;1;5)$, $C(-1;2;1)$, $D(2;1;3)$ лежат в одной плоскости.

24. Найти проекцию точки $P(-8;12)$ на прямую, проходящую через точки $A(2;3)$ и $B(-5;1)$.

25. Найти координаты вершин, полуоси, фокусы, эксцентриситет и уравнения асимптот для гиперболы $9x^2-4y^2-144=0$. Сделать рисунок.

26. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;-3;3)$ параллельно плоскости $3x+y-3z=0$.

27. Найти $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$, если $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1+xy}$.

28. Исследовать на экстремум функцию $z=x\sqrt{y}-x^2-y+6x+3$.

Вариант 17.

В заданиях 1-6 вычислить предел.

1. $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t^4+3t^2+4}{t^3-2t^2+1}$. **2.** $\lim\limits_{u\to 2}\dfrac{2u-4}{1-\sqrt{3-u}}$. **3.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^3-x+1}{x^2+1}-\dfrac{2x^2+3}{x-1}\right)$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x\sin 5x}{\operatorname{tg} 11x}$. **5.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+5}{3x}\right)^{-4x}$. **6.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)$.

7. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sin(x+2)}{x^3+8}$, используя эквивалентные бесконечно малые.

8. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, \text{ если } x\le 0,\\ \lg x, \text{ если } 0<x<10,\\ 1, \text{ если } x>10;\end{cases}$$

в случае существования точек разрыва установить их характер; построить схематически график функции.

9. Найти производную и дифференциал функции:

а) $y=\sqrt[7]{\dfrac{2-x^3}{3^x}}+\sqrt[7]{3}$; **б)** $w=\sqrt{\arcsin^3 z}-\operatorname{ctg}^2\dfrac{1}{z}$; **в)** $r=\dfrac{\arccos\varphi}{\sqrt{1-\varphi^2}}+\ln\dfrac{1}{2}$.

10. Найти производную указанного порядка для функции:

а) $y=\dfrac{9x+2\sin(1-5x)}{40}$ $\quad y^{(7)}(x)=?$; **б)** $y=\log_2(3x+5)$ $\quad y'''(x)=?$.

11. Проверить, удовлетворяет ли функция $y=\mathrm{e}^{2x}\sin 5x$ уравнению $y''-4y'+29y=0$.

12. Составить уравнение касательной к графику функции $y=2-\sqrt{x}$ в точке пересечения его с биссектрисой первого координатного угла; сделать рисунок.

13. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x-\dfrac{1}{x}\right)$, используя правило Лопиталя.

14. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=x^2\ln x$ на отрезке $[1; 3]$.

15. Найти точки перегиба графика функции $y=x\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$.

16. Исследовать на непрерывность функцию $f(x)=5^{-\frac{2}{x}}+3$; в случае существования точек разрыва установить их характер; найти асимптоты и точки экстремума; построить схематически график функции.

17. Исследовать функцию $y=\dfrac{2x^2-6x+6}{x-1}$ и построить ее график.

18. Решить матричное уравнение $X\begin{pmatrix}-5 & 7 & 3\\ 1 & 4 & 0\\ 6 & 1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15 & 18 & -6\\ 9 & 52 & 0\\ -7 & 30 & 6\end{pmatrix}$.

19. Решить систему методом Гаусса: $\begin{cases}2x_1+x_2+x_3=2,\\ x_1+x_2+3x_3=2,\\ -2x_1-x_2+2x_3=1.\end{cases}$

20. Найти координаты единичного вектора $\vec{e}$, направленного противоположно вектору $\vec{b}=5\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$.

21. Даны вершины четырехугольника $A(1;-2;2)$, $B(1;4;0)$, $C(-4;1;1)$, $D(-5;-5;3)$. Доказать, что его диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны.

22. Вектор $\overline{x}$, коллинеарный вектору $\overline{a}=\{6;-8;-7,5\}$, образует острый угол с осью Oz. Зная, что $|\overline{x}|=50$, найти его координаты.

23. Объем тетраэдра $V=5$, три его вершины находятся в точках $A(2;1;-1)$, $B(3;0;1)$, $C(2;-1;3)$. Найти координаты четвертой вершины D, если известно, что она лежит на оси Oy.

24. Даны уравнения сторон AB, BC и AC треугольника ABC: $x+3y-7=0$, $4x-y-2=0$ и $6x+8y-35=0$ соответственно. Найти длину высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.

25. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если известны: расстояние между фокусами $2c=10$ и ось $2b=8$.

26. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1;-1;2)$ перпендикулярно к отрезку M_1M_2, если $M_1(2;3;-4)$, $M_2(-1;2;-3)$.

27. Найти все частные производные 2-го порядка для функции $z=\ln(x^2+y^2+2x+1)$.

28. Исследовать на экстремум функцию $z=2xy-5x^2-3y^2+2$.

Вариант 18.

В заданиях 1-6 вычислить предел.

1. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{3x^2+10x+3}{2x^2+5x-3}$. **2.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3-\sqrt{4x+1}}{8-x^3}$. **3.** $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{12x}{x^2+2x-8}-\dfrac{4}{x-2}\right)$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\operatorname{tg}^2\frac{2}{3}x\cos 2x}{1-\cos 4x}$. **5.** $\lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{4-2t}{4+3t}\right)^{\frac{3}{t}}$. **6.** $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\mathrm{e}^{-3x^2+x}$.

7. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{\operatorname{tg} 4x}$, используя эквивалентные бесконечно малые.

8. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, \text{ если } x\le 0,\\ 1-x, \text{ если } 0<x<1,\\ \dfrac{1}{x-1}, \text{ если } x>1;\end{cases}$$

в случае существования точек разрыва установить их характер; построить схематически график функции.

9. Найти производную и дифференциал функции:

а) $y=\arcsin \mathrm{e}^{-x}$; **б)** $s=2^{\frac{t^3}{7}}\operatorname{tg}^2 t+\operatorname{arctg}\dfrac{t^2-1}{t}$;

в) $w=\lg(z^2-\sqrt{z})+\dfrac{\sqrt{3}}{6z^2-4}$.

10. Найти производную указанного порядка для функции:

а) $y=\dfrac{1}{7x+2}$ $\quad y^{(4)}(x)=?$; **б)** $y=\cos^2\dfrac{x}{4}$ $\quad y^{(4)}(x)=?$.

11. Найти $\dfrac{d^3y(0)}{dx^3}$, если $y=(x^2-1)\mathrm{e}^{-2x}$.

12. Составить уравнения той касательной к графику функции $y=x^2+7x-7$, которая образуют с осью Ox угол 135°; сделать рисунок.

13. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\operatorname{ctg} x$, используя правило Лопиталя.

14. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=\sqrt[3]{2x^2(x-6)}$ на отрезке $[-2; 4]$.

15. Найти точки перегиба графика функции $y=\dfrac{4x}{4+x^2}$.

16. Исследовать на непрерывность функцию $y = \dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}}$; в случае существования точек разрыва установить их характер; найти асимптоты и точки экстремума; построить схематически график функции.

17. Исследовать функцию $f(x) = 3^{\frac{1}{1+x}}$ и построить ее график.

18. Найти $A^{-1}B^T$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ -6 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

19. Решить систему методом Гаусса: $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -3, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 9, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$

20. Найти длину и направляющие косинусы вектора $\vec{a} = 6\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$.

21. Найти вектор $\vec{x}$, зная, что он перпендикулярен к $\vec{a} = \{2; 3; -1\}$, $\vec{b} = \{1; -2; 3\}$ и удовлетворяет условию $\vec{x}(2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = -6$.

22. Даны векторы $\vec{a} = \{-2; -1; 3\}$ и $\vec{b} = \{5; -7; 0\}$. Проверить, что $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.

23. Даны векторы $\vec{a} = \{1; -1; 3\}$, $\vec{b} = \{-2; 2; 1\}$, $\vec{c} = \{3; -2; 5\}$. Вычислить $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

24. Даны две вершины $A(3; -1)$, $B(5; 7)$ треугольника ABC и точка $N(4; -1)$ пересечения его высот. Составить уравнения сторон этого треугольника.

25. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что его малая полуось равна 24, а расстояние между фокусами $2c = 10$.

26. Показать, что прямая $\dfrac{x}{6} = \dfrac{y-3}{-8} = \dfrac{z-1}{-9}$ параллельна плоскости $x + 3y - 2z + 1 = 0$, а прямая $x = t + 7, y = t - 2, z = 2t + 1$ лежит в этой плоскости.

27. Найти все частные производные 2-го порядка для функции $z = \dfrac{2x + 3y}{x^2 + y^2}$.

28. Исследовать на экстремум функцию $z = xy(12 - x - y)$.

Вариант 19.

В заданиях 1-6 вычислить предел.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^2+3x-4}{2x^2-5x+1}$. **2.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2+x}{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}$. **3.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^3+3x}{3x^2+2}-\dfrac{2x^2}{3x+1}\right)$.

4. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\cos 6\alpha-\cos 10\alpha}{5\alpha^2}$. **5.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x}{3x+4}\right)^{5x-2}$. **6.** $\lim\limits_{x\to 7\pm 0}\dfrac{1}{x^2-49}$.

7. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3-64}{\operatorname{tg}(x-4)}$, используя эквивалентные бесконечно малые.

8. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x)=\begin{cases}2^{-x}, \text{ если } x\le 0,\\ \lg x, \text{ если } x>0;\end{cases}$$

в случае существования точек разрыва установить их характер; построить схематически график функции.

9. Найти производную и дифференциал функции:

а) $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\operatorname{tg}x}\sqrt{2-x^3}+\dfrac{12}{2-x^3}$; **б)** $s=\arccos\sqrt{1-t+t^2}$;

в) $\rho=\dfrac{2\cos^2 3\varphi}{\sin\dfrac{\varphi}{3}}$.

10. Найти производную указанного порядка для функции:

а) $y=\operatorname{arcctg}\sqrt{x}\quad y''(x)=?$; **б)** $y=\sqrt[4]{2x-11}\quad y^{(4)}(x)=?$.

11. Найти $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ в точке $x={}^{\pi}\!/_{3}$, если $y=(10x+11)\cdot\sin\dfrac{x}{2}$.

12. Составить уравнение той касательной к графику функции $y=x^2-6x+7$, которая образуют с осью Ox угол $45°$; сделать рисунок.

13. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x+3)}{x^3}$, используя правило Лопиталя.

14. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{1+x}$ на отрезке $[0;1]$.

15. Найти точки перегиба графика функции $y=1-\ln^3 x$.

16. Исследовать на непрерывность функцию $f(x)=\dfrac{1}{2+3^{\frac{1}{x}}}$; в случае существования точек разрыва установить их характер; найти

асимптоты и точки экстремума; построить схематически график функции.

17. Исследовать функцию $y = 3\mathrm{e}^{-2x^2-6x}$ и построить ее график.

18. Решить систему матричным методом: $\begin{cases} 6x + 2y + 2z = 5, \\ 2x + y + z = -3, \\ x + 2y + 2z = 3. \end{cases}$

19. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -3 & 5 & 2 \\ -2 & 3 & 5 & 2 & 4 \\ 7 & -2 & -18 & -1 & -10 \end{pmatrix}$.

20. Для векторов $\vec{a} = \{1; 2; -2\}$, $\vec{b} = \{-5; 0; 1\}$, $\vec{c} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ найти $\text{пр}_{\vec{c}}(2\vec{a} - \vec{b})$ и направляющие косинусы вектора $\vec{a}$.

21. Даны векторы $\vec{a} = \{-4; 2; 4\}$ и $\vec{b} = \{0; -3; 4\}$. Найти $\vec{a} \cdot \vec{b}$ и косинус угла между заданными векторами.

22. Даны вершины треугольника ABC: $A(-1; 3; 1)$, $B(2; -1; 1)$, $C(2; -6; 5)$. Найти его площадь и высоту, опущенную на сторону AB.

23. Выяснить, лежат ли точки $A(1; 2; 0)$, $B(4; 3; 4)$, $C(2; -3; -2)$, $D(3; 0; 1)$ в одной плоскости.

24. Даны вершины треугольника ABC: $A(6; -1)$, $B(0; -2)$, $C(12; 3)$. Написать уравнения стороны BC и медианы AM.

25. Составить каноническое уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси Ox, если заданы малая полуось $b = 2$ и точка на эллипсе $M(2; \sqrt{3})$.

26. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2; 3; -1)$ и прямую $x = t - 3$, $y = 2t + 5$, $z = -3t + 1$.

27. Проверить, удовлетворяет ли функция $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ уравнению $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = 0.$

28. Найти градиент и производную по направлению вектора $\vec{l} = \vec{j} - \vec{k}$ для функции $u = x^3 + 2y^2 - z^4$ в точке $M(3; -2; 1)$.

Вариант 20.

В заданиях 1-6 вычислить предел.

1. $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{3x^2-20x+12}{2x^2-11x-6}$. **2.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{8+x}-3}{3x^2-3}$. **3.** $\lim\limits_{x\to 5}\left(\dfrac{x}{x^2-25}-\dfrac{1}{2x^2-9x-5}\right)$.

4. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{1-\cos 6\alpha}{\operatorname{tg}^2 5\alpha}$. **5.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4x-3}{5x-3}\right)^{-\frac{2}{x}}$. **6.** $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\left(5+\dfrac{2}{x}\right)^{x}$.

7. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 4x}{3x^2}$, используя эквивалентные бесконечно малые.

8. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x)=\begin{cases}2-x^2, \text{ если } x\le -1,\\ \dfrac{1}{x}, \text{ если } x>-1;\end{cases}$$

в случае существования точек разрыва установить их характер; построить схематически график функции.

9. Найти производную и дифференциал функции:

а) $y=2^{\sqrt[3]{x+1}}\cdot\arcsin\dfrac{1}{x^2}$; **б)** $r=\mathrm{e}^{-\frac{\varphi^3}{3}}\cdot\cos^3\varphi+\sin\sqrt{3}$; **в)** $s=\mathrm{e}^{\frac{1}{t+2}}+\ln 3^{\sqrt{2}}$.

10. Найти производную указанного порядка для функции:

а) $y=7\cos^2 3x \quad y^{(6)}(x)=?$; **б)** $y=\sqrt[5]{5x^2-3} \quad y''(x)=?$.

11. Найти $\dfrac{d^2s}{dt^2}$ в точке $t=\dfrac{\pi}{4}$, если $s=(4t^2+1)\operatorname{arctg} 2t$.

12. Составить уравнение касательной к графику функции $y=\dfrac{x-1}{x^2+1}$ в точке его пересечения с осью абсцисс.

13. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[5]{x}}$, используя правило Лопиталя.

14. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=\dfrac{4}{x^2}-8x-15$ на отрезке $\left[-2;-\dfrac{1}{2}\right]$.

15. Найти точки экстремума функции $y=\ln(x^2-2x+6)$.

16. Исследовать на непрерывность функцию $f(x)=\dfrac{4x^2-1}{x^2-2x}$; в случае существования точек разрыва установить их характер; найти

асимптоты и точки экстремума; построить схематически график функции.

17. Исследовать функцию $y = x - \operatorname{arctg} 2x$ и построить ее график.

18. Решить систему матричным методом: $\begin{cases} -2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 7, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$

19. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -4 & 7 \\ -5 & 3 & 4 & -7 \\ 10 & -6 & -8 & 14 \end{pmatrix}$.

20. Найти единичные векторы $\vec{e_1}$ и $\vec{e_2}$, если $\vec{e_1}$ имеет то же направление, что $\overrightarrow{AB}$, а $\vec{e_2}$ имеет направление, противоположное направлению $\overrightarrow{AB}$ и $A(-1; 4; -7)$, $B(-3; -3; 5)$.

21. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны, вектор $\vec{c}$ образует с ними углы, равные $\frac{\pi}{3}$. Зная, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, $|\vec{c}| = 8$, вычислить: $(3\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{b} + 3\vec{c})$.

22. Найти площадь треугольника ABC, если $A(0; -7; 9)$, $B(-1; -2; 4)$, $C(3; -1; 2)$.

23. Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках $A(2; -1; 1)$, $B(5; 5; 4)$, $C(3; 2; -1)$, $D(4; 1; 3)$.

24. Составить уравнения прямых, проходящих через вершины треугольника $A(5; -4)$, $B(-1; 3)$, $C(-3; -2)$ параллельно противоположным сторонам.

25. Найти координаты вершин и фокуса, составить уравнение директрисы для параболы $4x^2 + 4x - 8y - 19 = 0$. Сделать рисунок.

26. Найти проекцию точки $M(4; -3; 1)$ на плоскость $x - 2y - z - 15 = 0$.

27. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, если $x^2 - 2xy - 3y^2 + 6x - 2y + z^2 - 8z + 20 = 0$

28. Найти градиент и производную по направлению вектора $\vec{l} = 5\vec{i} - 12\vec{j}$ для функции $z = (x^2 + y^2)\operatorname{tg}\frac{x}{y}$ в точке $A(1; 2)$.

Вариант 21.

В заданиях 1-6 вычислить предел.

1. $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{2+3t+5t^2+4t^3}{3t^5+2t^3+4}$. **2.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+2x-15}{4-\sqrt{5x+1}}$. **3.** $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{12}{x^3+8}\right)$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x\operatorname{tg}5x}{1-\cos 3x}$. **5.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x-3}\right)^{2x+1}$. **6.** $\lim\limits_{x\to 4\pm 0}\dfrac{1}{(x-4)(x-5)}$.

7. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+4x^3)}{2x^3}$, используя эквивалентные бесконечно малые.

8. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x)=\begin{cases} x^3, \text{ если } x\le 0,\\ 2x, \text{ если } 0<x\le 3,\\ x^2+2, \text{ если } x>3; \end{cases}$$

в случае существования точек разрыва установить их характер; построить схематически график функции.

9. Найти производную и дифференциал функции:

а) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$; **б)** $s=\cos(\ln\sqrt{3\operatorname{tg}e^t})+\dfrac{t}{\cos\frac{\pi}{8}}$;

в) $\rho=\sqrt[3]{1+\theta\sqrt{\theta+4}}+\sqrt{3}$.

10. Найти производную указанного порядка для функции:

а) $y=\dfrac{\mathrm{e}^{x^3}+4}{\mathrm{e}^{2x}}$ $y'''(x)=?$; **б)** $y=\sqrt[4]{2x+10}$ $y^{(5)}(x)=?$.

11. Проверить, удовлетворяет ли функция $y=(4+14x)\mathrm{e}^{-2x}$ уравнению $y''+4y'+4y=0$.

12. Составить уравнение касательной к графику функции $y=\ln x$, которая параллельна прямой $y=2x-3$; сделать рисунок.

13. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{x^3}$, используя правило Лопиталя.

14. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=\sin 2x-x$ на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

15. Найти интервалы возрастания и убывания функции $y=x\ln^2 x$.

16. Исследовать на непрерывность функцию $y=\dfrac{x^2-4x-8}{x+2}$; в случае существования точек разрыва установить их характер; найти

асимптоты и точки экстремума; построить схематически график функции.

17. Исследовать функцию $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ и построить ее график.

18. Решить матричное уравнение $XA + 3B = C$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 10 & 4 & -6 \\ -3 & 7 & 9 \end{pmatrix}$.

19. Решить систему методом Гаусса: $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -4, \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 14. \end{cases}$

20. Даны векторы $\vec{a} = \{-3; 1; -1\}$, и $\vec{b} = \{0; 4; -4\}$. Найти координаты вектора $\vec{c}$, сонаправленного с вектором $3\vec{b} - \vec{a}$ и имеющего длину 9.

21. Определить угол между векторами: $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$ и $\vec{b} = 4\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$.

22. Проверить, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами в точках $A(1;3;2)$, $B(0;2;4)$, $C(1;1;4)$, $D(2;2;2)$ является параллелограммом.

23. При каком значении λ векторы $\vec{a} = \vec{i} + 2\lambda\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \lambda\vec{j}$, $\vec{c} = 2\lambda\vec{i} + \vec{k}$ компланарны?

24. Найти точку $M_1(-8;12)$, симметричную точке $M_2(8;-9)$ относительно прямой, проходящей через точки $A(3;-4)$ и $B(-1;-2)$.

25. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если расстояние между фокусами $2c = 6$, а эксцентриситет $\varepsilon = 1{,}5$.

26. Определить, при каком значении B плоскости $x - 4y + z - 1 = 0$ и $2x + By + 10z - 3 = 0$ будут перпендикулярны.

27. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, если $xyz = e^x$.

28. Найти градиент и производную по направлению вектора $\vec{l} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$ для функции $u = \frac{y\sqrt{z}}{4} + \frac{x^2}{z}$ в точке $M(-2; 3; 1)$.

Вариант 22.

В заданиях 1-6 вычислить предел.

1. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{3x^2+x-10}$. **2.** $\lim\limits_{v\to -4}\dfrac{\sqrt{v+20}-4}{v^3+64}$. **3.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2+3}-x\right)$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 4x\operatorname{ctg}5x}{3x}$. **5.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-x}{2-x}\right)^{-3x}$. **6.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(5x-1)5^x$.

7. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}5x}{\operatorname{tg}2x}$, используя эквивалентные бесконечно малые.

8. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, \text{ если } x\le 0,\\ x^2+2, \text{ если } 0<x\le 3,\\ 11, \text{ если } x>3;\end{cases}$$

в случае существования точек разрыва установить их характер; построить схематически график функции.

9. Найти производную и дифференциал функции:

а) $y=(3^{\sin 2x}-\cos^3 x)^4$; **б)** $w=\arcsin \mathrm{e}^{\sqrt{\cos z}}$; **в)** $s=\ln\operatorname{arctg}\sqrt{1+t^2}$.

10. Найти производную указанного порядка для функции:

а) $y=\dfrac{1}{\sin x}$ $y''(x)=?$; **б)** $y=\dfrac{x\ln x^5+5}{x^2}$ $y^{(4)}(x)=?$.

11. Найти $\dfrac{d^2\rho(2)}{d\varphi^2}$, если $\rho=\log_4\sqrt[5]{\varphi^2+6\varphi}$.

12. Составить уравнение касательной к графику функции $y=x^2+2x-1$ в точке его пересечения с параболой $y=2x^2$; сделать рисунок.

13. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)$, используя правило Лопиталя.

14. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=\dfrac{x}{1+x^2}$ на отрезке $[-2; 0]$.

15. Найти интервалы возрастания и убывания функции $y=x^3\mathrm{e}^{x+1}$.

16. Исследовать на непрерывность функцию $f(x)=2^{\frac{1}{(x+2)^2}}$; в случае существования точек разрыва установить их характер; найти асимптоты и точки экстремума; построить схематически график функции.

17. Исследовать функцию $y=\dfrac{\ln(2-x)}{\sqrt{2-x}}$ и построить ее график.

18. Найти обратные матрицы, если они существуют: $A=\begin{pmatrix}7 & -4\\ 5 & 3\end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix}2 & 5 & 4\\ 4 & 2 & 5\\ 5 & 4 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3 & 7 & 5\\ 1 & 4 & 2\\ 0 & 5 & 1\end{pmatrix}$.

19. Решить систему: $\begin{cases}3x_1-5x_2+2x_3-x_4=9,\\ 2x_1-x_2+x_3+x_4+x_5=4,\\ x_1+x_2+3x_3+3x_5=2,\\ x_1-2x_2+x_3-2x_4+x_5=-5.\end{cases}$

20. Вектор $\overline{x}$ коллинеарный вектору $\vec{a}=\{-4;1;-8\}$, образует острый угол с осью Oz. Зная, что $|\vec{x}|=27,$ найти его координаты.

21. Даны координаты вершин треугольника $A(1;2;4)$, $B(-3;2;1)$, $C(4;2;0)$. Найти внутренний угол α при вершине A и внешний угол γ при вершине C.

22. Даны вершины треугольника ABC: $A(-1;3;1)$, $B(2;-1;1)$, $C(2;-6;5)$. Найти его площадь и высоту, опущенную на сторону AB.

23. Проверить компланарность векторов: $\vec{a}=\{3;-4;7\}$, $\vec{b}=\{1;2;-3\}$, $\vec{c}=\{2;-1;2\}$.

24. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(5;-10)$: **а)** перпендикулярно прямой $y=\dfrac{2}{3}x-1$; **б)** параллельно прямой $4x+5y+7=0$.

25. Эллипс задан каноническим уравнением $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$. Найти его полуоси, фокусы, вершины, эксцентриситет. Сделать рисунок.

26. При каких значениях n и A прямая $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y-5}{n}=\dfrac{z+5}{6}$ перпендикулярна к плоскости $Ax+2y-2z-7=0$?

27. Найти все частные производные 2-го порядка для функции $z=x\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}$.

28. Исследовать на экстремум функцию $z=y\sqrt{x}-y^2-x+6y$.

Вариант 23.

В заданиях 1-6 вычислить предел.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-3x^2}{2x^2+7x-2}$. **2.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+25}-5}{x^2+2x}$. **3.** $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{5}{x-2}-\dfrac{3}{x^3-8}\right)$.

4. $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{ctg}3x$. **5.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+8}{x+5}\right)^{3x+2}$. **6.** $\lim\limits_{x\to 5\pm 0}\dfrac{1}{(x-5)(x-2)}$.

7. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\ln(1+2x)}$, используя эквивалентные бесконечно малые.

8. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x)=\begin{cases}2^{-x}, \text{если } x\le 0,\\ x, \text{если } 0<x<1,\\ x^2, \text{если } x>1;\end{cases}$$

в случае существования точек разрыва установить их характер; построить схематически график функции.

9. Найти производную и дифференциал функции:

а) $y=(1+\ln\sin 2x)^2+\dfrac{\sqrt{4-3x}}{x+5}$; **б)** $r=\dfrac{\sin^2\dfrac{\varphi}{4}}{1+\cos^2\dfrac{\varphi}{4}}$; **в)** $s=3^{\operatorname{ctg}\sqrt[4]{5t}}+3^{\sqrt{2}}$.

10. Найти производную указанного порядка для функции:

а) $y=\sin^2(1+2x)$ $\quad y^{(5)}(x)=?$; **б)** $y=\lg(2x^2+3)$ $\quad y''(x)=?$.

11. Проверить, удовлетворяет ли функция $y=\dfrac{3}{2}x^2\,e^{2x}$ уравнению $y''-4y'+4y=3e^{2x}$.

12. Составить уравнения касательных к графику функции $y=x^2(x-3)$ в точках его пересечения с осью абсцисс.

13. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to +0} x\ln x$, используя правило Лопиталя.

14. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=2\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^2 x$ на отрезке $\left[0;\dfrac{\pi}{3}\right]$.

15. Найти интервалы возрастания и убывания функции $y=x+2\operatorname{arcctg}x$.

16. Исследовать на непрерывность функцию $y=\dfrac{\ln x^4}{x+2}$; в случае существования точек разрыва установить их характер; найти асимптоты и точки экстремума; построить схематически график функции.

17. Исследовать функцию $y=-\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$ и построить ее график.

18. Найти алгебраические дополнения к элементам первой строки матрицы $A^T(2A-3B)$, если $A=\begin{pmatrix}1 & 5 & -1\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix}$,

19. Решить систему: $\begin{cases}2x_1+x_2+x_3=4,\\ 2x_1-5x_2+x_3+3x_4=-2,\\ 4x_2-x_3+3x_4=5.\end{cases}$

20. Даны векторы $\vec{a}=\{0;-7;-1\}$, $\vec{b}=\{3;1;-5\}$, $\vec{c}=\{-2;-3;4\}$. Найти координаты вектора $\vec{d}=\{-7;1;-3\}$ в базисе $\left\{\vec{a};\vec{b};\vec{c}\right\}$.

21. Даны точки: $A(-3;2;-5)$, $B(-6;1;7)$, $C(-1;-8;-3)$, $D(4;5;-9)$. Найти скалярные произведения $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{DC}$, $(2\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CD})\cdot\overrightarrow{CD}$.

22. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{p}=2\vec{a}-\vec{b}$ и $\vec{q}=-\vec{a}+2\vec{b}$, если $\left|\vec{a}\right|=3$, $\left|\vec{b}\right|=1$, $(\widehat{\vec{a};\vec{b}})=\dfrac{\pi}{3}$.

23. Найти смешанные произведения $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, $\vec{b}\vec{c}\vec{a}$, $\vec{b}\vec{a}\vec{c}$, $\vec{a}=-\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$; $\vec{b}=\vec{j}-3\vec{k}$; $\vec{c}=-4\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$.

24. Найти расстояние между прямыми $3x+4y-24=0$ и $3x+4y+6=0$.

25. Найти координаты центра и радиус окружности $x^2+y^2+10x-2y=23$. Сделать рисунок.

26. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат, перпендикулярно к плоскостям $x+5y-z+7=0$ и $3x-y+2z-3=0$.

27. Проверить, удовлетворяет ли функция $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ уравнению $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

28. Найти градиент и производную по направлению вектора $\vec{l}=-\vec{i}-2\vec{k}$ для функции $u=\dfrac{\mathrm{e}^{x+y}}{z^2+x}$ в точке $M(-1;1;0)$.

Вариант 24.

В заданиях 1-6 вычислить предел.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+8}{3+4x-21x^3}$. **2.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{\sqrt{x^2+6x}-4}$. **3.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2+4}-\dfrac{2x^2+x}{2x-1}\right)$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x \arcsin 2x}{\sin 3x}$. **5.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6+x}{8+x}\right)^{3x-1}$. **6.** $\lim\limits_{x\to\pm 0}\left(\dfrac{6+x}{8+x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

7. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 8x}{\operatorname{tg} 4x}$, используя эквивалентные бесконечно малые.

8. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x)=\begin{cases} x^3+1, \text{ если } x\le 0, \\ 1-x, \text{ если } 0<x<1, \\ x^2-1, \text{ если } x>1; \end{cases}$$

в случае существования точек разрыва установить их характер; построить схематически график функции.

9. Найти производную и дифференциал функции:

а) $y=\lg^3 \operatorname{tg}\dfrac{x}{7}+4^{-\frac{1}{\sqrt{\arcsin x}}}$; **б)** $w=\cos^5\dfrac{3}{z^2}$; **в)** $s=\operatorname{arctg}\dfrac{t}{1+\sqrt{1-t^2}}$.

10. Найти производную указанного порядка для функции:

а) $y=x^2\arccos\dfrac{5}{x}$ $y''(x)=?$; **б)** $y=\dfrac{2}{tg 4x}$ $y''(x)=?$.

11. Найти $\dfrac{d^3y(3)}{dx^3}$, если $y=(x^2-5x+7)\mathrm{e}^{-x}$.

12. Составить уравнение касательной к графику функции $y=\dfrac{x+2}{x-2}$ в точке его пересечения с осью абсцисс; сделать рисунок.

13. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}-\cos x}{x^2}$, используя правило Лопиталя.

14. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=x-2\ln x$ на отрезке [1; e].

15. Найти интервалы возрастания и убывания функции $y=\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{x^2}\,(x-5)$.

16. Исследовать на непрерывность функцию $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}-4$; в случае существования точек разрыва установить их характер; найти асимптоты и точки экстремума; построить схематически график функции.

17. Исследовать функцию $y=(3x^2-x+1)\mathrm{e}^{-x}$ и построить ее график.

18. Решить систему матричным методом: $\begin{cases} 3x_1+2x_2+3x_3=15, \\ 2x_1+x_2+x_3=7, \\ -x_1+2x_3=3. \end{cases}$

19. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & 10 & 7 & -7 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 5 & -16 & 6 & 6 \\ 2 & 2 & 2 & -3 & -3 & 2 \\ -1 & -2 & -2 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

20. Определить модули суммы и разности векторов $\vec{a}=\{-2;7;1\}$ и $\vec{b}=\{5;-3;8\}$.

21. Найти значение λ, при котором $\vec{a}\perp\vec{b}$, если $\vec{a}=\{3;-4;5\}$, $\vec{b}=\{\lambda,1;-4\}$.

22. Даны векторы $\vec{a}=\{4;-5;3\}$ и $\vec{b}=\{-4;0;2\}$. Проверить, что $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$ и найти площадь параллелограмма, построенного на этих векторах.

23. Проверить, лежат ли точки $A(1;2;0)$, $B(4;3;4)$, $C(2;-3;-2)$, $D(3;0;1)$ в одной плоскости.

24. Даны вершины треугольника ABC: $A(2;-1)$, $B(0;-2)$, $C(12;3)$. Найти уравнения медианы AM и высоты AD.

25. Привести к каноническому виду уравнение кривой 2-го порядка, сделать рисунок: $3x^2+24x-16y^2+96y=0$.

26. Определить, при каком значении C плоскости $3x-5y+Cz-3=0$ и $x-3y+2z+5=0$ будут перпендикулярны.

27. Найти все частные производные 2-го порядка для функции $z=3y\mathrm{e}^{2x+y}$.

28. Исследовать на экстремум функцию $z=xy(6-x-y)$.

Вариант 25.

В заданиях 1-6 вычислить предел.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+5x^2-x^3}{2x^3-x^2+7x}$. **2.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x^2}-2}{x}$. **3.** $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{2}{x-3}-\dfrac{3}{x^3-27}\right)$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}5x\sin 3x}{5x^2}$. **5.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5-x}{6-x}\right)^{3x-2}$. **6.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+4}-10x)$.

7. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{\operatorname{tg}2x}$, используя эквивалентные бесконечно малые.

8. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x)=\begin{cases}2x+1, \text{ если } x\le 0,\\ \lg x, \text{ если } 0<x<1,\\ x^2-1, \text{ если } x>1;\end{cases}$$

в случае существования точек разрыва установить их характер; построить схематически график функции.

9. Найти производную и дифференциал функции:

а) $y=\sqrt[15x^2]{9}+\operatorname{ctg}^3(3-8x)$; **б)** $s=\sin^2\dfrac{\sqrt[5]{t}}{3}+\dfrac{12t}{\pi}$; **в)** $\rho=\lg\operatorname{arctg}\dfrac{2\varphi-1}{\sqrt{3}}$.

10. Найти производную указанного порядка для функции:

а) $y=\dfrac{2^{5x}-8^{2x}}{4^x}$ $y'''(x)=?$; $y=\dfrac{1}{2x+3}$ $y^{(4)}(x)=?$.

11. Найти $\dfrac{d^2s}{dt^2}$ в точке $t=3$, если $s=\ln(t^2+\sqrt{t^4+19})$.

12. Составить уравнения касательных к графику функции $y=e^{1-x^2}$ в точках его пересечения с прямой $y=1$.

13. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\operatorname{tg}x}-\dfrac{\cos^2 x}{\sin x}\right)$, используя правило Лопиталя.

14. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}$ на отрезке $[0;1]$.

15. Найти точки экстремума функции $y=\dfrac{\ln x}{x}$.

16. Исследовать на непрерывность функцию $y=1+\dfrac{e^{-x^2}}{x+1}$; в случае существования точек разрыва установить их характер; найти асимптоты и точки экстремума; построить схематически график функции.

17. Исследовать функцию $y=\dfrac{(x+1)^2}{x-2}$ и построить ее график.

18. Решить систему матричным методом: $\begin{cases} y+z-2x=0, \\ 2x-y+4z=15, \\ 3x-y+z=8. \end{cases}$

19. Найти $\mathrm{rang}(A^T A)$, если $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 5 \\ 7 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

20. Найти единичные векторы $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$, если $\overrightarrow{e_1}$ имеет то же направление, что и $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{e_2}$ имеет направление, противоположное направлению $\overrightarrow{AB}$, и $A(5;-3;4)$, $B(-7;1;1)$.

21. Даны вершины четырехугольника $A(1;4;0)$, $B(-4;1;1)$, $C(-5;-5;3)$, $D(1;-2;2)$. Показать, что его диагонали AC и BD перпендикулярны.

22. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}-2\vec{b}$ и $\vec{a}+2\vec{b}$, если $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k}$; $\vec{b}=3\vec{i}-\vec{k}$.

23. Проверить компланарность векторов $\vec{a}=\{3;-4;7\}$; $\vec{b}=\{1;2;-3\}$; $\vec{c}=\{2;-1;2\}$.

24. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $2y+10=0$ и $x+y-14=0$ и через начало координат.

25. Гипербола задана каноническим уравнением $\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{64}=1$. Найти ее полуоси, фокусы, вершины, асимптоты, эксцентриситет. Сделать рисунок.

26. При каких значениях A и B плоскость $Ax+By+6z-7=0$ перпендикулярна прямой $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+5}{-4}=\dfrac{z+1}{3}$?

27. Проверить, удовлетворяет ли функция $z=\ln(x+\mathrm{e}^{-y})$ уравнению $\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0.$

28. Найти градиент и производную по направлению вектора $\vec{l}=3\vec{j}-4\vec{k}$ для функции $u=\ln\sin\left(x-2y+\dfrac{z}{4}\right)$ в точке $M(1;0{,}5;\pi)$.

Вариант 26.

В заданиях 1-6 вычислить предел.

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$. **2.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-3}{2x-2}$. **3.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{3x^2+2}-\dfrac{x^2}{3x-5}\right)$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 7x}{x\,\mathrm{tg}(x/3)}$. **5.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+5}{3x-2}\right)^{1-2x}$. **6.** $\lim\limits_{x\to 3\pm 0}\dfrac{1}{(x-4)(x-3)}$.

7. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+4x)}{\sin 2x}$, используя эквивалентные бесконечно малые.

8. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x)=\begin{cases}1, \text{ если } x\le 0,\\ \lg x, \text{ если } 0<x<1,\\ (x-1)^2, \text{ если } x>1;\end{cases}$$

в случае существования точек разрыва установить их характер; построить схематически график функции.

9. Найти производную и дифференциал функции:

а) $y=2^{\sin^3 x}+\sqrt{1+x^2}\arccos x$; **б)** $\rho=\dfrac{1}{\log_3(2-3\varphi^3)}$;

в) $w=\cos\sqrt{\mathrm{ctg}\dfrac{1}{z^{20}}}$.

10. Найти производную указанного порядка для функции:

а) $y=\dfrac{2}{1-3x}$ $y^{(4)}(x)=?$; **б)** $y=\sin 5x^3$ $y'''(x)=?$.

11. Найти $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ в точке $x=\dfrac{\pi}{9}$, если $y=\ln\cos 3x$.

12. Составить уравнение той касательной к графику функции $y=x^2+7x-4$, которая образует с осью Ox угол $45°$; сделать рисунок.

13. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}x^2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}$, используя правило Лопиталя.

14. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=\sqrt{100-x^2}$ на отрезке $[-6; 8]$.

15. Найти точки перегиба графика функции $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$.

16. Исследовать на непрерывность функцию $f(x)=\dfrac{1}{1-3^x}$; в случае существования точек разрыва установить их характер; найти

асимптоты и точки экстремума; построить схематически график функции.

17. Исследовать функцию $y=(x^2-x+1)\mathrm{e}^{-x}$ и построить ее график.

18. Найти $A^{-1}B^T$, если $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 3 & 6 & 2\\ 5 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}8 & -1 & 0\\ 0 & -2 & 3\end{pmatrix}$.

19. Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases}x_1-3x_2+5x_3+4x_4+6x_5=5,\\ 3x_1-x_2-x_3=1,\\ 2x_1+2x_2+2x_3+2x_4+3x_5=3,\\ 4x_1-4x_2-2x_3-3x_5=-1.\end{cases}$$

20. Вычислить длину и направляющие косинусы вектора $\vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}-7\vec{k}$.

21. Даны векторы $\vec{a}=\{-4;-2;-4\}$ и $\vec{b}=\{6;-3;2\}$. Вычислить скалярные произведения $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $(2\vec{a}-3\vec{b})(\vec{a}+2\vec{b})$.

22. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=\{2;0;1\}$ и $\vec{b}=\{-1;2;2\}$.

23. Найти смешанные произведения $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ и $\vec{a}\vec{c}\vec{b}$, если $\vec{a}=\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$; $\vec{b}=-\vec{i}-2\vec{j}$; $\vec{c}=2\vec{i}-3\vec{j}-\vec{k}$.

24. Найти проекцию точки $P(-8;12)$ на прямую, проходящую через точки $A(2;3)$ и $B(-5;1)$.

25. Привести к каноническому виду уравнение эллипса и построить его: $4x^2+36y^2+72y-16x-92=0$.

26. Показать, что прямые $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{3}$ и $\begin{cases}3x+y-5z+1=0,\\ 2x+3y-8z+3=0\end{cases}$ перпендикулярны.

27. Найти $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$, если $z=\arcsin\dfrac{x}{x+y}$.

28. Исследовать на экстремум функцию $z=x^2+xy+y^2-2x-y$.

Вариант 27.

В заданиях 1-6 вычислить предел.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4-3x^3+8}{5-3x^2-4x^4}$. **2.** $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{x+6}-2}{8+x^3}$. **3.** $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$.

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x\sin 6x}{1-\cos 4x}$. **5.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-4}{x^2}\right)^{-3x+6}$. **6.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+5}\right)$.

7. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sin(x-3)}{x^3-27}$, используя эквивалентные бесконечно малые.

8. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x)=\begin{cases}x^2-1, \text{если } x\le 0,\\ \dfrac{1}{x-1}, \text{если } x>0;\end{cases}$$

в случае существования точек разрыва установить их характер; построить схематически график функции.

9. Найти производную и дифференциал функции:

а) $y=\sqrt[x^3]{5}+\sqrt{\ln\sin\dfrac{x}{3}}$; **б)** $\rho=\sqrt[7]{\dfrac{2}{3+\varphi}}+\dfrac{\sin\frac{\pi}{8}}{\operatorname{ctg}^3 8\varphi}$;

в) $s=\operatorname{arctg}\dfrac{1-t}{2}+\cos^2\dfrac{\sqrt{3}}{t}$.

10. Найти производную указанного порядка для функции:

а) $y=7^{\sqrt[3]{x}}$ $y''(x)=?$; **б)** $y=\log_2(3x^2-5)$ $y'''(x)=?$.

11. Проверить, удовлетворяет ли функция $y=\dfrac{5}{6}(\mathrm{e}^{4x}-\mathrm{e}^{-2x})$ уравнению $y''-2y'-8y=0$.

12. Составить уравнения касательных к графику функции $y=(x-1)(x-2)(x-3)$ в точках его пересечения с осью абсцисс.

13. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to0}\arcsin 3x\operatorname{ctg}2x$, используя правило Лопиталя.

14. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=x^3-3x^2+6x-2$ на отрезке $[-1;2]$.

15. Найти точки перегиба графика функции $y=\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{x^2}(x-5)$.

16. Исследовать на непрерывность функцию $y=\dfrac{(x-3)^2}{x+3}$; в случае существования точек разрыва установить их характер; найти

асимптоты и точки экстремума; построить схематически график функции.

17. Исследовать функцию $y = 2\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{8}+x}$ и построить ее график.

18. Решить матричное уравнение $X\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 12 & -16 \\ 30 & 3 & -13 \end{pmatrix}.$

19. Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 4, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 6, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 6, \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 + 9x_5 = 10. \end{cases}$$

20. Вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a} = \{6; -8; -7{,}5\}$, образует острый угол с осью Oz. Зная, что $|\vec{x}| = 50$, найти его координаты.

21. Даны вершины четырехугольника $A(1; -2; 2)$, $B(1; 4; 0)$, $C(-4; 1; 1)$, $D(-5; -5; 3)$. Доказать, что его диагонали AC и BD перпендикулярны.

22. Найти координаты вектора $\vec{c}$, направленного противоположно вектору $\vec{a} \times \vec{b}$ и имеющего длину 7.

23. Вычислить смешанное произведение векторов $3\vec{a} - \vec{b}$, $\frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{a}$, если $\vec{a} = \{1; -1; 2\}$, $\vec{b} = \{4; 2; 2\}$, $\vec{c} = \{0; 6; -5\}$.

24. Дана прямая $2x + 3y + 4 = 0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2; 1)$: **а)** параллельно данной прямой; **б)** перпендикулярно данной прямой.

25. Найти координаты центра и радиус окружности и построить ее: $x^2 + y^2 + 16x - 20y - 5 = 0$.

26. При каком значении D прямая $\begin{cases} 3x - y + 2z - 6 = 0, \\ x + 4y - z + D = 0 \end{cases}$ пересекает ось Oz?

27. Найти все частные производные 2-го порядка для функции $z = \dfrac{y}{(x^2 - y^2)^5}$.

28. Исследовать на экстремум функцию $z = (x-1)^2 + 2y^2$.

Вариант 28.

В заданиях 1-6 вычислить предел.

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}$. **2.** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{x^2-16}$. **3.** $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right)$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x\arcsin 3x}{\sin 6x}$. **5.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{3x-2}$. **6.** $\lim\limits_{x\to\pm\infty} 7^x$.

7. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{\mathrm{tg}(x+5)}{x^2-25}$, используя эквивалентные бесконечно малые.

8. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, \text{ если } x\le 1,\\ x^2, \text{ если } x>1;\end{cases}$$

в случае существования точек разрыва установить их характер; построить схематически график функции.

9. Найти производную и дифференциал функции:

а) $y=\dfrac{1}{\sqrt[5]{(x-7x^2)}}+\dfrac{1}{\sqrt[x]{6}}$; **б)** $w=\mathrm{arctg}^3\dfrac{5}{z^2}$; **в)** $r=\mathrm{tg}\,\mathrm{e}^{-\varphi^5}-\log_2\dfrac{16\varphi^2}{\sin\varphi}$.

10. Найти производную указанного порядка для функции:

а) $y=y=\dfrac{2^{3x}+\sin(1+4x)}{8}$ $y^{(5)}(x)=?$; **б)** $y=4\arcsin\sqrt{x}$ $y''(x)=?$.

11. Найти $\dfrac{d^2s(0)}{dt^2}$, если $s=3^{\frac{1+t}{1-t}}+3^{\frac{1}{4}}$.

12. Составить уравнения касательных к графику функции $y=x^2-3x-5$ в точках пересечения его с биссектрисой первого координатного угла; сделать рисунок.

13. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x-4}{x^2-11x+18}$, используя правило Лопиталя.

14. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=\dfrac{x^2}{x-1}$ на отрезке $[-2; 0{,}5]$.

15. Найти точки перегиба графика функции $y=(x-1)\mathrm{e}^{4x+2}$.

16. Исследовать на непрерывность функцию $f(x)=4^{\frac{1}{(x-3)^2}}$; в случае существования точек разрыва установить их характер; найти асимптоты и точки экстремума; построить схематически график функции.

17. Исследовать функцию $y=(x+2)(x-1)^2$ и построить ее график.

18. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}-2 & 5 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -5\\ -1 & 3\end{pmatrix}$. Найти матрицы $(AB)^{-1}$ и $(BA)^{-1}$, если они существуют.

19. Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases}8x_1-4x_2+3x_3+6x_4+8x_5=5,\\ 10x_1-5x_2+5x_3+9x_4+15x_5=9,\\ 4x_1-2x_2+x_3+2x_4+2x_5=1,\\ 2x_1-x_2+3x_3+7x_4+x_5=8.\end{cases}$$

20. Найти длину и направляющие косинусы вектора $\vec{a}=-2\vec{i}-\frac{1}{2}\vec{j}-7\vec{k}.$

21. Определить, при каком значении α векторы $\vec{a}=\alpha\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-\alpha\vec{k}$ взаимно перпендикулярны.

22. Даны точки: $A(1;-1;-1)$, $B(-1;-3;-2)$, $C(0;-2;3)$, $D(4;6;7)$. Найти векторные произведения $\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BD}$, $(2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{CD})\times\overrightarrow{CD}$.

23. Даны векторы $\vec{a}=\{1;-1;3\}$, $\vec{b}=\{-2;2;1\}$, $\mathrm{c}=\{3;-2;5\}$. Вычислить $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

24. Записать общее уравнение прямой, проходящей через точки $A(-1;2)$ и $B(0;-3)$; найти угловой коэффициент прямой.

25. Дана гипербола $16x^2-9y^2=144$. Найти полуоси a и b, фокусы, эксцентриситет, уравнения асимптот, уравнения директрис. Сделать рисунок.

26. При каком значении p прямые

$$\begin{cases}x=2t+5,\\ y=-t+2,\\ z=pt-7\end{cases} \text{ и } \begin{cases}x+3y+z+2=0,\\ x-y-3z-2=0\end{cases}$$

параллельны?

27. Найти все частные производные 2-го порядка для функции $z=x\cos^2(x+y)$.

28. Найти градиент и производную по направлению вектора $\vec{l}=-2\vec{j}-3\vec{k}$ для функции $u=z+\dfrac{x}{y}-\ln(x+z^2)$ в точке $A(5;2;3)$.

Вариант 29.

В заданиях 1-6 вычислить предел.

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{x^2-1}$. **2.** $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{x+8}$. **3.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{5x^2+1}-\dfrac{x^2}{5x-3}\right)$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8x\sin 6x}{1-\cos 5x}$. **5.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-5}{x+2}\right)^{3x-4}$. **6.** $\lim\limits_{x\to 2\pm 0}\dfrac{1}{(x-2)(x+3)}$.

7. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{2x^2}$, используя эквивалентные бесконечно малые.

8. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x)=\begin{cases}-2x, \text{ если } x\le 0,\\ x^2, \text{ если } 0<x\le 1,\\ 2, \text{ если } x>1;\end{cases}$$

в случае существования точек разрыва установить их характер; построить схематически график функции.

9. Найти производную и дифференциал функции:

а) $y=\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^3+3}}+\dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{x^3}$; **б)** $\rho=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{2\varphi}{\sqrt{1-3\varphi^2}}$;

в) $s=\sqrt[3]{\cos^2\dfrac{t}{4}}+\dfrac{\sqrt{2}}{\sin t}$.

10. Найти производную указанного порядка для функции:

а) $y=\dfrac{2^{3x}+3^{2x}}{27^x}$ $y'''(x)=?$; **б)** $y=\dfrac{10}{3x-3}$ $y^{(4)}(x)=?$.

11. Проверить, удовлетворяет ли функция $y=3\mathrm{e}^{-2x}\sin 5x$ уравнению $y''+4y'+29y=0$.

12. Составить уравнения тех касательных к графику функции $y=x^3-3x+5$, которые перпендикулярны прямой $x+9y=0$.

13. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\left(\dfrac{x}{2x-1}-\dfrac{1}{\ln 2x}\right)$, используя правило Лопиталя.

14. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=x^4-2x^2+5$ на отрезке $[-2;2]$.

15. Исследовать выпуклость графика функции $y=x^2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

16. Исследовать на непрерывность функцию $f(x)=2+4^{-\frac{1}{x}}$; в случае существования точек разрыва установить их характер; найти

асимптоты и точки экстремума; построить схематически график функции.

17. Исследовать функцию $y=\dfrac{4x^2+2x-4}{x-2}$ и построить ее график.

18. Решить систему матричным методом: $\begin{cases} 3x_1+2x_2+3x_3=15, \\ 2x_1+x_2+x_3=7, \\ -x_1+2x_3=3. \end{cases}$

19. Найти ранг матрицы $A=\begin{pmatrix} -3 & 5 & -5 & 27 & 9 \\ -3 & -2 & 5 & 3 & 9 \\ 1 & 3 & -5 & 7 & -3 \end{pmatrix}$.

20. Найти длины суммы и разности векторов $\vec{a}=\{7;3;1\}$ и $\vec{b}=\{0;5;-3\}$.

21. Даны векторы $\vec{a}=-2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+5\vec{j}$, $\vec{c}=4\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}$. Вычислить $\text{пр}_{\vec{c}}(3\vec{a}-2\vec{b})$.

22. Даны векторы $\vec{a}=\{3;-1;-2\}$, $\vec{b}=\{1;2;-1\}$. Найти координаты векторного произведения $\vec{a}\times\vec{b}$.

23. Установить, компланарны ли векторы $\vec{a}=\{2;3;-1\}$, $\vec{b}=\{1;-1;3\}$, $\vec{c}=\{1;9;-11\}$.

24. Даны уравнения двух сторон прямоугольника $2x-3y+5=0$, $3x+2y-7=0$ и одна из его вершин $A(2;-3)$. Составить уравнения двух других сторон этого прямоугольника.

25. Установить, что следующее уравнение определяет параболу, найти координаты ее вершины A и величину параметра p: $y=4x^2-8x+7$. Сделать рисунок.

26. Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x-7}{5}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-5}{4}$ и плоскости $3x-y+2z-8=0$.

27. Проверить, удовлетворяет ли функция $z=\sqrt{2xy+y^2}$ уравнению $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2y}{z}$.

28. Найти градиент и производную по направлению вектора $\vec{l}=2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$ для функции $u=\dfrac{3(z+x)^3}{\sqrt{y}}$ в точке $M(\sqrt{2};\sqrt{2};\sqrt{2})$.

Вариант 30.

В заданиях 1-6 вычислить предел.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-8x-3}{8x^2+3x}$. **2.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-3x+2}$. **3.** $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{2}{x^2-9}-\dfrac{9}{x^3-27}\right)$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}3x\sin 2x}{1-\cos x}$. **5.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+8}{x+4}\right)^{-3x}$. **6.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

7. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+5x)}{\sin 3x}$, используя эквивалентные бесконечно малые.

8. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x)=\begin{cases}-x, \text{ если } x\le -1,\\ (x-1)^2, \text{ если } -1<x\le 1,\\ 0, \text{ если } x>1;\end{cases}$$

в случае существования точек разрыва установить их характер; построить схематически график функции.

9. Найти производную и дифференциал функции:

а) $y=\dfrac{1}{2^{-\operatorname{tg}^3 x}}-\dfrac{1}{\sqrt[4]{(x^2-3x)^3}}$; **б)** $w=\dfrac{2z-1}{z^4}+\lg^3\dfrac{2}{z}$;

в) $s=\sqrt[3]{\dfrac{\sin\frac{t}{3}}{\ln 2}+9^{\sqrt{t}}}$.

10. Найти производную указанного порядка для функции:

а) $y=\dfrac{e^{3+x^4}}{e^{2-x}}$ $y'''(x)=?$; **б)** $y=\sqrt{2x^3+1}$ $y''(x)=?$.

11. Проверить, удовлетворяет ли функция $y=-\dfrac{1}{8}\sin 2x-3x^2+7x$ уравнению $y'''-\cos 2x=0$.

12. Составить уравнения касательных к графику функции $y=x^4+3x^2-16$ в точках его пересечения с параболой $y=3x^2$.

13. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln\frac{x}{2}}{8-x^3}$, используя правило Лопиталя.

14. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=\sqrt{16-x^2}$ на отрезке $[-4; 4]$.

15. Найти интервалы возрастания и убывания функции $y=\dfrac{x^2}{(x+2)^2}$.

16. Исследовать на непрерывность функцию $f(x)=\dfrac{2-x^2}{x^2-4x}$; в случае существования точек разрыва установить их характер; найти асимптоты и точки экстремума; построить схематически график функции.

17. Исследовать функцию $y=x+\sqrt{x^2+1}$ и построить ее график.

18. Решить систему матричным методом: $\begin{cases}-2x_1-2x_2+x_3=1,\\ 10x_1+4x_2-3x_3=7,\\ 2x_1-4x_2+x_3=3.\end{cases}$

19. Найти ранг матрицы $A=\begin{pmatrix}5 & -1 & -2 & 4\\ -15 & 3 & 6 & -12\\ 10 & -2 & -4 & 8\end{pmatrix}$.

20. Найти единичные векторы $\vec{e_1}$ и $\vec{e_2}$, если $\vec{e_1}$ имеет то же направление, что $\overrightarrow{AB}$, а $\vec{e_2}$ имеет направление, противоположное направлению $\overrightarrow{AB}$ и $A(0;3;-3)$, $B(-5;-2;7)$.

21. Даны векторы $\vec{a}=3\vec{i}-6\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+4\vec{j}-5\vec{k}$, $\vec{c}=3\vec{i}-4\vec{j}+12\vec{k}$. Вычислить $\text{пр}_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b})$.

22. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{p}=-\vec{a}-\vec{b}$ и $\vec{q}=-2\vec{a}+5\vec{b}$, если $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=3$, $(\widehat{\vec{a};\vec{b}})=\dfrac{\pi}{2}$.

23. Проверить компланарность векторов $\vec{a}(2;-1;2)$, $\vec{b}(1;2;-3)$, $\vec{c}(3;-4;7)$.

24. Даны две вершины $A(3;-1)$ и $B(5;7)$ треугольника ABC и точка $N(4;-1)$ пересечения его высот. Составить уравнения сторон этого треугольника.

25. Найти координаты вершины и фокуса, составить уравнение директрисы параболы $4x^2+4x-8y-19=0$. Сделать рисунок.

26. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $E(3;4;5)$ параллельно оси Ox.

27. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $3x^2y^2+2xyz^2-2x^3z+4y^3z=4$.

28. Найти градиент и производную по направлению вектора $\vec{l}=2\vec{i}-3\vec{j}+3\vec{k}$ для функции $u=\ln(x^2-y^2)$ в точке $A(2;1;8)$.