Раздел 4. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

§ 1. Векторы на плоскости и в пространстве. Линейные операции над векторами. Проекция вектора на ось

Величины, которые полностью характеризуются своим числовым значением, называются ***скалярными величинами*** или ***скалярами***. Например, в физике рассматриваются такие скалярные величины, как масса, температура, объем, время, работа и т. д.. Такие же физические величины, как сила, скорость, ускорение, перемещение и др., характеризуются не только величиной, но и направлением. Они называются ***векторными величинами*** или ***векторами***.

Опр. 1. ***Вектор*** (***свободный вектор***) – это математический объект, характеризующийся величиной и направлением.

W W W В И К И С П Р А В К А W W W W W W W W W W W W W W W W W W W

Зачатки векторного исчисления появились вместе с геометрической моделью комплексных чисел в работах К. Гаусса (1777–1855). Термины «вектор» (от лат. *vector* – несущий), «скаляр» (от лат. *scalaris* – ступенчатый), «скалярное произведение», «векторное произведение» введены в 1845–1846 гг. У. Гамильтоном (1805–1865) в работах по построению числовых систем, обобщающих комплексные числа.

Одним из создателей векторного исчисления в его современной форме считается американский физик Дж. Гиббс (1839–1903), осознавший преимущества применения векторной алгебры для описания пространственных соотношений в физических процессах. В 1880-х гг. вышла его монография «Элементы векторного анализа».

Независимо от других математиков, в 1903 г. О. Хевисайд (1850–1925), английский учёный-самоучка, инженер, математик и физик, работавший над теорией электромагнетизма, также пришел к созданию векторного анализа.

W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W

Геометрической интерпретацией вектора служит направленный отрезок, который можно переносить параллельно самому себе (рис. 1). Вектор обозначается $\vec{a}$ либо $\overrightarrow{AB}$ (если задан началом в точке A и концом в точке B). Вектор, для которого указана начальная точка, называется ***связанным***. Для свободного вектора точка его приложения при геометрическом изображении может быть выбрана произвольно. Мы будем рассматривать свободные векторы, все основные понятия векторной алгебры определяются *для свободных векторов*.

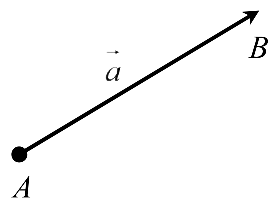


Рис. 1. Геометрическая интерпретация вектора

Опр. 2. ***Модулем*** (***длиной***) вектора называется длина отрезка, изображающего вектор. Длина вектора обозначается $|\vec{a}|, |\overrightarrow{AB}|$.

Опр. 3. ***Единичным*** называется вектор, длина которого равна единице. Единичный вектор обозначают обычно $\vec{e}, |\vec{e}| = 1.$

Опр. 4. ***Нулевой***, или ***нуль-вектор***, – вектор, длина которого равна нулю (обозначается $\vec{0},$ направление его произвольно).

Опр. 5. Два ненулевых вектора называются ***равными***, если их модули и направления совпадают.

Опр. 6. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b},$ лежащие на одной или параллельных прямых, называются ***коллинеарными*** и обозначаются $\vec{a} \| \vec{b}.$

Коллинеарные векторы могут быть ***одинаково направленными*** (***сонаправленными***): $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ или ***противоположно направленными***: $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ (см. рис. 2).

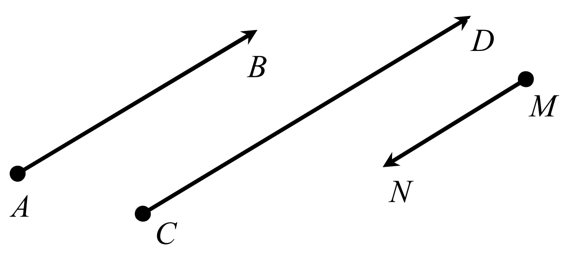


Рис. 2. Коллинеарные векторы: $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$ – сонаправленные;
$\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{MN}$ – противоположно направленные

Опр. 7. Два коллинеарных вектора называются ***противоположными***, если их модули равны, а направления противоположны. Вектор, противоположный вектору $\vec{a}$, обозначается $-\vec{a}$.

Опр. 8. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, лежащие на перпендикулярных прямых, называются ***ортогональными*** и обозначаются $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Опр. 9. Векторы, лежащие в одной или параллельных плоскостях, называются ***компланарными***.

Линейные операции над векторами

Линейными операциями над векторами называют их сложение, вычитание, умножение вектора на число.

Опр. 10. ***Суммой*** двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец – с концом вектора $\vec{b}$, если начало вектора $\vec{b}$ совпадает с концом вектора $\vec{a}$. Такой способ сложения векторов называется сложением по ***правилу треугольника*** (рис. 3).

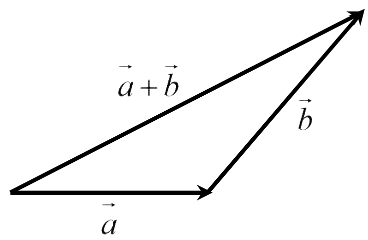


Рис. 3. Сложение векторов по правилу треугольника

Если два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ приложить к одной начальной точке, то вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ будет исходить из этой же точки и совпадать с диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Такой способ сложения векторов называется ***правилом параллелограмма*** (рис. 4).

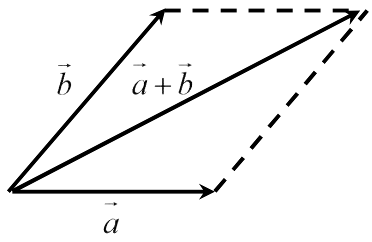


Рис. 4. Сложение векторов по правилу параллелограмма

Опр. 11. ***Разностью*** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$, равный сумме вектора $\vec{a}$ и вектора $-\vec{b}$, противоположного вектору $\vec{b}$.

Если два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ приложить к одной начальной точке, то вектор $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}$ будет совпадать с диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, имея началом конец вектора $\vec{b}$, а концом – конец вектора $\vec{a}$ (рис. 5).

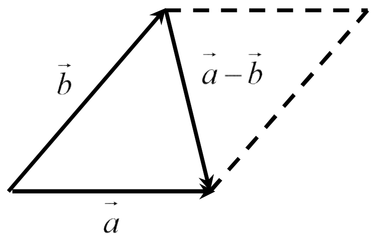


Рис. 5. Разность векторов

Опр. 12. ***Произведением вектора*** $\vec{a}$ ***на число*** α называется вектор $\vec{b}=\alpha\vec{a}$, длина которого равна $\left|\vec{b}\right|=|\alpha|\left|\vec{a}\right|$, а направление совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, если $\alpha>0$, и противоположно направлению вектора $\vec{a}$, если $\alpha<0$ (рис. 6).

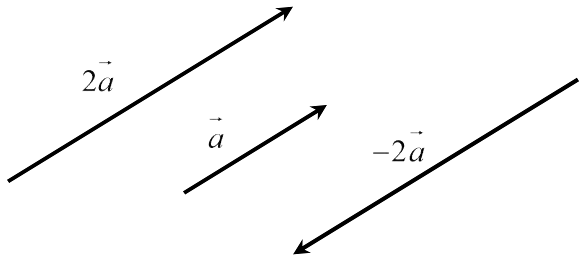


Рис. 6. Умножение вектора на число

Отсюда следует ***условие коллинеарности двух векторов***:

$$\boxed{\vec{a} \parallel \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{b} = \alpha \vec{a}.}$$

Основные свойства линейных операций над векторами.

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (*коммутативность сложения*).
2. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ (*ассоциативность сложения*).
3. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}.$
4. $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}.$
5. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}.$
6. $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$ (*ассоциативность умножения на число*).
7. $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$ (*дистрибутивность сложения векторов относительно умножения на число*).
8. $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ (*дистрибутивность сложения чисел относительно умножения на вектор*).

Эти свойства позволяют преобразовывать линейные выражения с векторами, как в обычной алгебре.

Проекция вектора на ось

Пусть в пространстве задана некоторая ось (т. е. направленная прямая) l и вектор $\overrightarrow{AB}$ (ось и вектор не обязательно лежат в одной плоскости).

Через точку A проведем плоскость, перпендикулярную оси l, при пересечении этой плоскости с осью l получим точку A_1, которая называется проекцией точки A на ось l. Аналогично получим точку B_1 – проекцию точки B на ось l (см. рис. 7).

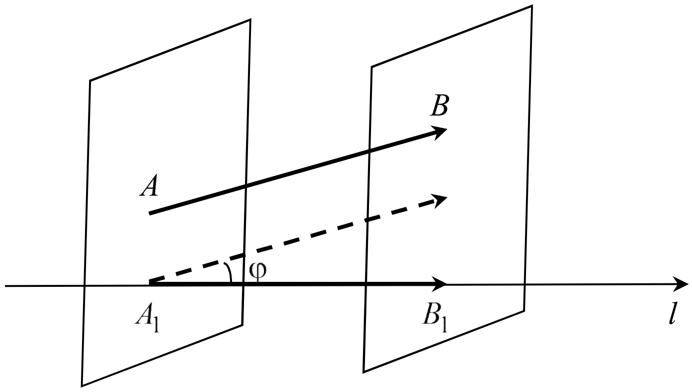


Рис. 7. Проекция вектора на ось

Опр. 13. ***Проекцией вектора*** $\overrightarrow{AB}$ на ось l называется число, равное $\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$, если вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ и ось l сонаправлены, и $-\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$, если противоположно направлены:

$$\text{пр}_l\,\overrightarrow{AB}=\begin{cases}\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|, \text{если } \overrightarrow{A_1B_1}\uparrow\uparrow l,\\ -\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|, \text{если } \overrightarrow{A_1B_1}\uparrow\downarrow l.\end{cases}$$

Свойства проекций.

1. $\text{пр}_l\,\vec{a}=\left|\vec{a}\right|\cos\varphi$, где φ – угол между вектором $\vec{a}$ и осью l.

2. $\text{пр}_l(\alpha\vec{a})=\alpha\,\text{пр}_l\,\vec{a}$ (α – число).

3. $\text{пр}_l(\vec{a}+\vec{b})=\text{пр}_l\,\vec{a}+\text{пр}_l\,\vec{b}$.

4. $\text{пр}_l\,\vec{a}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \vec{a}\perp l$ (либо $\vec{a}=\vec{0}$).

§ 2. Линейная зависимость и независимость векторов. Векторный базис

Опр. 1. ***Линейной комбинацией*** векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\ldots,\vec{d}$ называется любой вектор, равный сумме произведений данных векторов на некоторые скаляры (числа).

Пример 1. Каждый из векторов $\vec{r_1} = \vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}, \vec{r_2} = 2\vec{a} - 3\vec{b}, \vec{r_3} = 2\vec{c}$ является линейной комбинацией векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. •

Опр. 2. Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, ..., \vec{d}$ называются ***линейно зависимыми***, если существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, не все равные нулю, что $\alpha_1\vec{a} + \alpha_2\vec{b} + \alpha_3\vec{c} + ... + \alpha_n\vec{d} = \vec{0}$. Если же это равенство верно только при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, то векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, ..., \vec{d}$ называются ***линейно независимыми***.

Утв. 1. Векторы линейно зависимы тогда и только тогда, когда один из них является линейной комбинацией остальных.

Доказательство. По определению, если векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, ..., \vec{d}$ линейно зависимы, то существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, не все равные нулю, что $\alpha_1\vec{a} + \alpha_2\vec{b} + \alpha_3\vec{c} + ... + \alpha_n\vec{d} = \vec{0}$. Пусть $\alpha_1 \neq 0$. Тогда

$$\vec{a} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\vec{b} - \frac{\alpha_3}{\alpha_1}\vec{c} - ... - \frac{\alpha_n}{\alpha_1}\vec{d},$$

т. е. вектор $\vec{a}$ является линейной комбинацией векторов $\vec{b}, \vec{c}, ..., \vec{d}$.

Обратно, если вектор $\vec{a}$ является линейной комбинацией векторов $\vec{b}, \vec{c}, ..., \vec{d}$, т. е. $\vec{a} = \alpha_2\vec{b} + \alpha_3\vec{c} + ... + \alpha_n\vec{d}$. Тогда $\vec{a} - \alpha_2\vec{b} - \alpha_3\vec{c} - ... - \alpha_n\vec{d} = \vec{0}$, т. е. линейная комбинация векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, ..., \vec{d}$ равна $\vec{0}$, причем коэффициент при $\vec{a}$ не равен нулю, а значит, векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, ..., \vec{d}$ линейно зависимы. ◁

Критерии линейной зависимости двух и трех векторов

Т 1. Два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.

Доказательство. $\vec{a} \| \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{b} = \alpha\vec{a} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{b} - \alpha\vec{a} = \vec{0}$. ◁

Т 2. Три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.

Упражнение 1. Доказать, что если три вектора линейно зависимы, то они компланарны.

Понятие векторного базиса

Опр. 3. ***Базисом на плоскости*** называются два линейно независимых вектора этой плоскости, взятые в определенном порядке.

Опр. 4. ***Базисом в пространстве*** называются три линейно независимых вектора, взятые в определенном порядке.

Смысл понятия базис раскрывается в следующих теоремах.

Т 3. Если векторы $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$ образуют базис на плоскости, то любой вектор $\vec{c}$ этой плоскости может быть единственным образом представлен в виде линейной комбинации базисных векторов:

$$\vec{c} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2}.$$

Такое представление называется ***разложением вектора*** $\vec{c}$ ***по базису*** $\left\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}\right\}$, а коэффициенты x, y этого разложения называются ***координатами*** вектора $\vec{c}$ в базисе $\left\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}\right\}$.

Т 4. Если векторы $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ образуют базис в пространстве, то любой вектор $\vec{c}$ пространства может быть единственным образом разложен по этому базису:

$$\vec{c} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3};$$

тройка чисел x, y, z называется ***координатами*** вектора $\vec{c}$ в базисе $\left\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}\right\}$.

Доказательство (теоремы 3). Перенесем векторы $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \vec{c}$ в общее начало O. Пусть $\vec{c} = \overrightarrow{OM}$. Проведем прямую MM_1 параллельно вектору $\overrightarrow{e_2}$, обозначим M_1 точку пересечения этой прямой и прямой, содержащей вектор $\overrightarrow{e_1}$. Аналогично получим точку M_2 – точку пересечения прямой MM_2, параллельной вектору $\overrightarrow{e_1}$, и прямой, содержащей вектор $\overrightarrow{e_2}$ (см. рис. 8). Таким образом, OM_1MM_2 – параллелограмм и $\vec{c} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$.

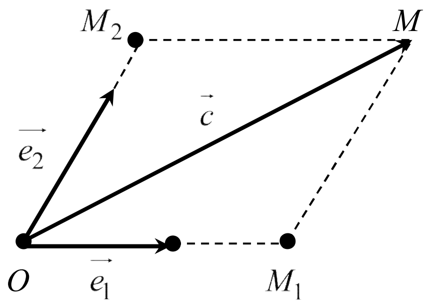


Рис. 8. Разложение вектора по базису

Поскольку $\overrightarrow{OM_1} \parallel \vec{e}_1, \overrightarrow{OM_2} \parallel \vec{e}_2$, то найдутся такие числа x, y, что $\overrightarrow{OM_1} = x\vec{e}_1, \overrightarrow{OM_2} = y\vec{e}_2$. Поэтому $\vec{c} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$. ◁

Упражнение 2. В доказательстве теоремы 3 выразить значения x, y через длины векторов $\overrightarrow{OM_1}, \vec{e}_1, \overrightarrow{OM_2}, \vec{e}_2$.

§ 3. Декартова прямоугольная система координат в пространстве. Направляющие косинусы вектора. Линейные операции над векторами в координатной форме

W W W В И К И С П Р А В К А W W W W W W W W W W W W W W W W W W

Рене́ Дека́рт

(фр. *René Descartes*, лат. *Renatus Cartesius*)

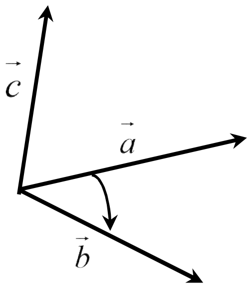
(1596–1650)

французский философ, математик, механик, физик, физиолог, создатель аналитической геометрии и современной алгебраической символики, автор метода радикального сомнения в философии, механицизма в физике, предтеча рефлексологии.

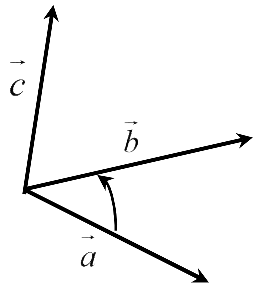
Символическую алгебру Декарт называл «всеобщей математикой», и писал, что она должна объяснить «всё относящееся к порядку и мере».

W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W

Опр. 1. Три некомпланарных упорядоченных вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, приведенных к общему началу, называются ***тройкой векторов***. Тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется ***правой***, если кратчайший поворот от первого вектора $\vec{a}$ ко второму вектору $\vec{b}$ виден из конца третьего вектора $\vec{c}$ *против часовой стрелки*; а если по часовой стрелке, то тройка называется ***левой*** (рис. 9).



а
Левая тройка векторов



б
Правая тройка векторов

Рис. 9

Опр. 2. Базис в пространстве называется ***ортонормированным***, если все образующие его векторы имеют единичную длину и попарно перпендикулярны (ортогональны).

Опр. 3. ***Правая декартова прямоугольная система координат*** в пространстве определяется точкой *O* – началом координат и ортонормированным базисом $\{\vec{i};\vec{j};\vec{k}\}$, векторы которого образуют правую тройку. Оси координат *Ox*, *Oy*, *Oz* сонаправлены соответственно с векторами $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$, которые называются ***ортами***.

Декартовы координаты вектора

Пусть в пространстве задана прямоугольная декартова система координат *Oxyz*. Так как орты $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ образуют базис, то любой вектор $\vec{a}$ единственным образом раскладывается по этому базису:

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Совместим начало вектора $\vec{a}$ с началом координат, получим вектор $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$. Вектор $\overrightarrow{OM}$ называется ***радиус-вектором*** точки *M*. Обозначим через M_1, M_2, M_3 проекции точки *M* на оси координат *Ox*, *Oy*, *Oz* соответственно (рис. 10). Тогда

$$\overrightarrow{OM_1} = \text{пр}_{\vec{i}}\,\overrightarrow{OM} \cdot \vec{i};\ \overrightarrow{OM_2} = \text{пр}_{\vec{j}}\,\overrightarrow{OM} \cdot \vec{j};\ \overrightarrow{OM_3} = \text{пр}_{\vec{k}}\,\overrightarrow{OM} \cdot \vec{k}$$

и

$$\vec{a} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3} = \text{пр}_{\vec{i}}\,\overrightarrow{OM} \cdot \vec{i} + \text{пр}_{\vec{j}}\,\overrightarrow{OM} \cdot \vec{j} + \text{пр}_{\vec{k}}\,\overrightarrow{OM} \cdot \vec{k}.$$

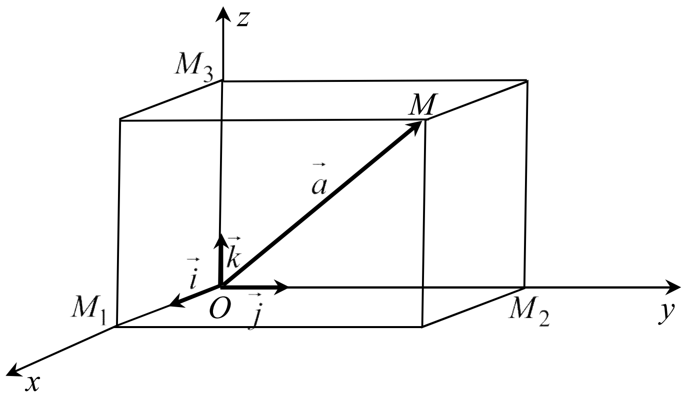


Рис. 10. Декартовы координаты вектора

Следовательно, *координаты вектора* $\vec{a}$ *в декартовой прямоугольной системе координат равны проекциям этого вектора на оси координат*:

$$\boxed{x = \text{пр}_{Ox}\,\vec{a};\ y = \text{пр}_{Oy}\,\vec{a};\ z = \text{пр}_{Oz}\,\vec{a}.}$$

Координаты радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ называются также координатами точки M, при этом координата x называется ***абсциссой***, y – ***ординатой***, z – ***аппликатой***.

По теореме о длине диагонали параллелепипеда получаем:

$$\left|\overrightarrow{OM}\right|^2 = \left|\overrightarrow{OM_1}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OM_2}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OM_3}\right|^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Следовательно, *длина вектора равна корню из суммы квадратов его декартовых координат*:

$$\boxed{\left|\vec{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.}$$

Направляющие косинусы вектора

Вектор (свободный вектор) полностью характеризуется своей длиной и направлением. Для того чтобы охарактеризовать направление вектора $\vec{a}$ в пространстве, введем углы $\alpha, \beta, \gamma,$ которые вектор образует с осями координат Ox, Oy, Oz соответственно (см. рис. 11). Косинусы этих углов $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ называются ***направляющими косинусами*** вектора $\vec{a}$.

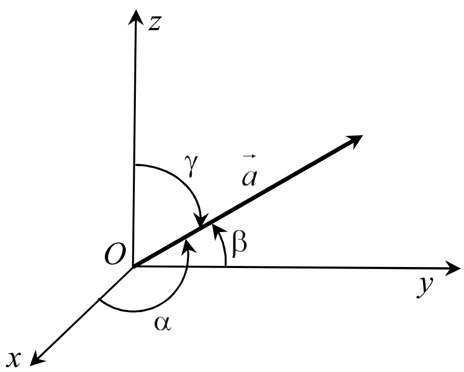


Рис. 11. Направляющие косинусы вектора

Пусть известны координаты вектора $\vec{a}$ в декартовой прямоугольной системе координат: $\vec{a} = \{x; y; z\}$, т. е. $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Так как координаты вектора равны его проекциям на оси координат, то по свойству проекций получаем

$$x = |\vec{a}|\cos\alpha;\ y = |\vec{a}|\cos\beta;\ z = |\vec{a}|\cos\gamma,$$

откуда

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{a}|};\ \cos\beta = \frac{y}{|\vec{a}|};\ \cos\gamma = \frac{z}{|\vec{a}|}.}$$

Основное свойство направляющих косинусов:

$$\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.}$$

Вектор $\overrightarrow{e_a} = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}$ называется ***ортом*** или ***единичным вектором направления*** вектора $\vec{a}$, поскольку он сонаправлен с вектором $\vec{a}$ и имеет длину, равную 1. Заметим, что

$$\overrightarrow{e_a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}.$$

Пример 1. Проверим, может ли вектор образовывать с координатными осями углы:

а) $\alpha = 45°; \beta = 135°; \gamma = 30°;$

б) $\alpha = 45°; \beta = 60°; \gamma = 120°.$

Решение. Проверим, выполняется ли основное свойство направляющих косинусов для указанных углов.

а) Поскольку

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \cos^2 45° + \cos^2 135° + \cos^2 30° = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \neq 1,$$

то вектор, образующий с координатными осями углы $\alpha = 45°; \beta = 135°; \gamma = 30°,$ не существует.

б) В данном случае основное свойство направляющих косинусов выполняется:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \cos^2 45° + \cos^2 60° + \cos^2 120° = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1,$$

поэтому вектор, образующий с координатными осями углы $\alpha = 45°; \beta = 60°; \gamma = 120°,$ существует.●

Линейные операции над векторами в координатной форме

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами в декартовой прямоугольной системе координат:

$$\vec{a} = \{x_a; y_a; z_a\};\ \vec{b} = \{x_b; y_b; z_b\},$$

т. е. $\vec{a} = x_a\vec{i} + y_a\vec{j} + z_a\vec{k};\ \ \vec{b} = x_b\vec{i} + y_b\vec{j} + z_b\vec{k}.$ Тогда в силу свойств операций сложения векторов и умножения вектора на число получаем:

$$\vec{a}+\vec{b}=(x_a\vec{i}+y_a\vec{j}+z_a\vec{k})+(x_b\vec{i}+y_b\vec{j}+z_b\vec{k})=$$
$$=(x_a+x_b)\vec{i}+(y_a+y_b)\vec{j}+(z_a+z_b)\vec{k};$$
$$\alpha\vec{a}=\alpha(x_a\vec{i}+y_a\vec{j}+z_a\vec{k})=\alpha x_a\vec{i}+\alpha y_a\vec{j}+\alpha z_a\vec{k},$$

т. е. *линейные операции над векторами сводятся к аналогичным операциям над их координатами*:

$$\boxed{\vec{a}+\vec{b}=\{x_a+x_b;\, y_a+y_b;\, z_a+z_b\};}$$
$$\boxed{\alpha\vec{a}=\{\alpha x_a;\, \alpha y_a;\, \alpha z_a\}.}$$

Условие коллинеарности двух векторов в координатной форме

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами в декартовой прямоугольной системе координат:

$$\vec{a}=\{x_a;\, y_a;\, z_a\};\ \vec{b}=\{x_b;\, y_b;\, z_b\},$$

Тогда

$$\boxed{\vec{a}\,||\,\vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}=\alpha\vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x_a}{x_b}=\frac{y_a}{y_b}=\frac{z_a}{z_b},}$$

т. е. *координаты коллинеарных векторов пропорциональны*.

Координаты вектора, заданного координатами начала и конца

Если известны координаты начала и конца вектора: $A(x_1;\, y_1;\, z_1)$, $B(x_2;\, y_2;\, z_2)$ (см. рис. 12), то

$$\boxed{\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\{x_2-x_1;\, y_2-y_1;\, z_2-z_1\},}$$

т. е. *для того чтобы найти координаты вектора, нужно от координат конца вектора отнять соответствующие координаты начала вектора*.

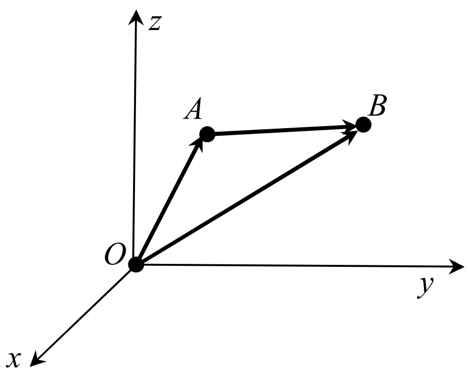


Рис. 12. Координаты вектора, заданного координатами начала и конца

Деление отрезка в данном соотношении

Рассмотрим задачу: зная координаты точек $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, определить координаты точки $C(x_C; y_C; z_C)$, которая делит отрезок AB в заданном отношении λ, считая от точки A, т. е. $\dfrac{\left|\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{CB}\right|} = \lambda$ (рис. 13).

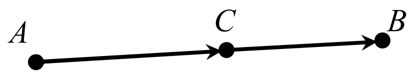


Рис. 13. Деление отрезка в данном соотношении

Поскольку точка C лежит на отрезке AB, то векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$ коллинеарны, при этом $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$. Найдем координаты векторов:

$$\overrightarrow{AC} = \left\{x_C - x_1; y_C - y_1; z_C - z_1\right\}; \ \overrightarrow{CB} = \left\{x_2 - x_C; y_2 - y_C; z_2 - z_C\right\}.$$

Приравнивая соответствующие координаты векторов, получим

$$\begin{cases} x_C - x_1 = \lambda(x_2 - x_C), \\ y_C - y_1 = \lambda(y_2 - y_C), \\ z_C - z_1 = \lambda(z_2 - z_C), \end{cases}$$

откуда выражаем искомые координаты точки C:

$$\boxed{x_C = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda};\; y_C = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda};\; z_C = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.}$$

В частности, координаты середины отрезка получим при $\lambda = 1$:

$$\boxed{x_C = \frac{x_1 + x_2}{2};\; y_C = \frac{y_1 + y_2}{2};\; z_C = \frac{z_1 + z_2}{2}.}$$

Пример 2. Даны координаты вершин треугольника $A(3;-2;6)$, $B(2;3;-1)$, $C(0;1;5)$. Найдем длину медианы AM.

Решение. Точка M – середина отрезка BC, ее координаты найдем как полусумму соответствующих координат концов отрезка:

$$M\left(\frac{2+0}{2}; \frac{3+1}{2}; \frac{-1+5}{2}\right), \text{ или } M(1;2;2).$$

Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AM}$, отняв от координат конца соответствующие координаты начала вектора:

$$\overrightarrow{AM} = \{1-3; 2-(-2); 2-6\} = \{-2; 4; -4\}.$$

Искомая длина медианы AM равна длине вектора $\overrightarrow{AM}$:

$$\left|\overrightarrow{AM}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + (-4)^2} = \sqrt{36} = 6. \bullet$$

Пример 3. Найдем длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \{-1;1;1\}$ и $\vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$.

Решение. Согласно правилу сложения векторов, векторы, направленные по диагоналям параллелограмма, могут быть выражены как сумма и разность векторов, совпадающих со сторонами параллелограмма: $\vec{d_1} = \vec{a} + \vec{b}, \vec{d_2} = \vec{a} - \vec{b}$ (рис. 14).

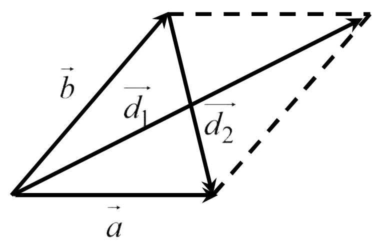


Рис. 14. Диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$

Зная ккординаты векторов $\vec{a}=\{-1;1;1\}$ и $\vec{b}=\{3;-2;1\}$, вычислим координаты их суммы и разности:

$$\overrightarrow{d_1}=\vec{a}+\vec{b}=\{-1+3;1+(-2);1+1\}=\{2;-1;2\};$$
$$\overrightarrow{d_2}=\vec{a}-\vec{b}=\{-1-3;1-(-2);1-1\}=\{-4;3;0\}.$$

Найдем длины диагоналей параллелограмма как длины векторов $\overrightarrow{d_1}$ и $\overrightarrow{d_2}$:

$$\left|\overrightarrow{d_1}\right|=\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}=\sqrt{9}=3;\ \left|\overrightarrow{d_2}\right|=\sqrt{(-4)^2+3^2+0^2}=\sqrt{25}=5.\bullet$$

Пример 4. Даны точки $A(2;-1;3)$, $B(-2;2;3)$, $C(-4;-1;1)$, $D(4;-7;1)$. Покажем, что четырехугольник $ABCD$ – трапеция.

Решение. Трапеция – это четырехугольник, у которого две противолежащие стороны параллельны, а две другие не параллельны. Рассмотрим векторы $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$, совпадающие со сторонами четырехугольника $ABCD$ (рис. 15). Найдем координаты этих векторов:

$$\overrightarrow{AD}=\{4-2;-7+1;1-3\}=\{2;-6;-2\};$$
$$\overrightarrow{BC}=\{-4+2;-1-2;1-3\}=\{-2;-3;-2\};$$
$$\overrightarrow{AB}=\{-2-2;2+1;3-3\}=\{-4;3;0\};$$
$$\overrightarrow{DC}=\{-4-4;-1+7;1-1\}=\{-8;6;0\}.$$

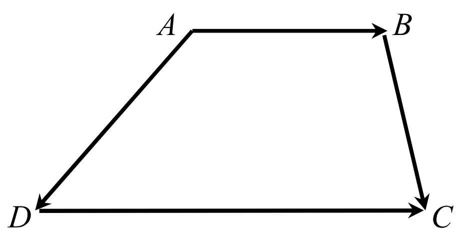


Рис. 15. Трапеция *ABCD*

Проверим коллинеарность векторов $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$. Поскольку

$$\frac{2}{-2} \neq \frac{-6}{-3} \neq \frac{-2}{-2},$$

координаты векторов не пропорциональны. Следовательно, стороны AD и BC не параллельны. Для векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ условие коллинеарности выполняется:

$$\frac{-4}{-8} = \frac{3}{6} = \frac{0}{0}.$$

Значит, стороны AB и DC параллельны, а четырехугольник $ABCD$ – трапеция.●

Пример 5. Найдем единичный вектор направления вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A(1;-2;3)$, $B(3;-4;4)$.

Решение. Найдем искомый вектор по формуле $\overrightarrow{e_{AB}} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}$. Вычислив координаты и длину вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = \{3-1;\,-4+2;\,4-3\} = \{2;\,-2;\,1\};$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3,$$

получим $\overrightarrow{e_{AB}} = \left\{\dfrac{2}{3};-\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3}\right\}$.●

§ 4. Скалярное, векторное, смешанное произведение векторов

Скалярное произведение

Опр. 1. ***Скалярным произведением*** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется *число* (скаляр), равное произведению длин этих векторов на косинус угла $(\widehat{\vec{a};\vec{b}})=\varphi$ между ними:

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi.}$$

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обычно обозначают $\vec{a}\cdot\vec{b}$ или $(\vec{a};\vec{b})$.

Свойства скалярного произведения.

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.

2. $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\,\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$.

3. $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$.

4. $(\alpha\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\alpha\vec{b})=\alpha(\vec{a}\cdot\vec{b})$ (α – число).

5. $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$.

6. $\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \vec{a}\perp\vec{b}$.

7. $\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1;\ \vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{j}\cdot\vec{k}=0$.

Пример 1. Найдем длину вектора $\vec{p}=3\vec{a}-4\vec{b}$, если $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=3,\ (\widehat{\vec{a};\vec{b}})=\dfrac{\pi}{3}$.

Решение. По свойству 5 имеем $|\vec{p}|=\sqrt{\vec{p}\cdot\vec{p}}$. Найдем скалярное произведение вектора $\vec{p}$ на себя, пользуясь свойствами и определением скалярного произведения:

$$\vec{p}\cdot\vec{p}=(3\vec{a}-4\vec{b})\cdot(3\vec{a}-4\vec{b})=9\vec{a}\cdot\vec{a}-12\vec{a}\cdot\vec{b}-12\vec{b}\cdot\vec{a}+16\vec{b}\cdot\vec{b}=$$

$$=9\vec{a}\cdot\vec{a}-24\vec{a}\cdot\vec{b}+16\vec{b}\cdot\vec{b}=9|\vec{a}|^2-24|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3}+16|\vec{b}|^2=$$

$$=9\cdot2^2-24\cdot2\cdot3\cdot\frac{1}{2}+16\cdot3^2=36-72+144=108.$$

Следовательно, $|\vec{p}|=\sqrt{108}=6\sqrt{3}$.•

Выражение скалярного произведения через координаты сомножителей

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами в декартовой прямоугольной системе координат:

$$\vec{a} = \{x_a; y_a; z_a\}; \ \vec{b} = \{x_b; y_b; z_b\},$$

т. е. $\vec{a} = x_a\vec{i} + y_a\vec{j} + z_a\vec{k}$; $\vec{b} = x_b\vec{i} + y_b\vec{j} + z_b\vec{k}$. Тогда в силу свойств скалярного произведения получаем:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (x_a\vec{i} + y_a\vec{j} + z_a\vec{k})\cdot(x_b\vec{i} + y_b\vec{j} + z_b\vec{k}) =$$
$$= x_a x_b\vec{i}\cdot\vec{i} + x_a y_b\vec{i}\cdot\vec{j} + x_a z_b\vec{i}\cdot\vec{k} + y_a x_b\vec{j}\cdot\vec{i} + y_a y_b\vec{j}\cdot\vec{j} + y_a z_b\vec{j}\cdot\vec{k} +$$
$$+ z_a x_b\vec{k}\cdot\vec{i} + z_a y_b\vec{k}\cdot\vec{j} + z_a z_b\vec{k}\cdot\vec{k} =$$
$$= x_a x_b\cdot 1 + x_a y_b\cdot 0 + x_a z_b\cdot 0 + y_a x_b\cdot 0 + y_a y_b\cdot 1 + y_a z_b\cdot 0 +$$
$$+ z_a x_b\cdot 0 + z_a y_b\cdot 0 + z_a z_b\cdot 1 = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b.$$

Итак, *скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений одноименных декартовых координат этих векторов*:

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b.}$$

Геометрические и физические приложения скалярного произведения

1. Косинус угла между векторами

$$\boxed{\cos(\widehat{\vec{a};\vec{b}}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}.}$$

2. Проекция вектора на вектор

$$\boxed{\text{пр}_{\vec{b}}\,\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}.}$$

3. Длина вектора

$$\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}.}$$

4. Условие ортогональности двух векторов:

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = 0.}$$

5. Работа постоянной по величине и направлению силы $\vec{F}$ при перемещении материальной точки на вектор $\vec{s}$ равна скалярному произведению силы и перемещения:

$$\boxed{A = \vec{F} \cdot \vec{s}}$$

(*физический смысл скалярного произведения*).

Пример 2. Даны координаты вершин треугольника $A(3; -2; 6)$, $B(2; 3; -1)$, $C(4; 6; -7)$. Найдем угол ABC.

Решение. Угол ABC – это угол между векторами $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$ (см. рис. 16), поэтому косинус этого угла может быть найден по формуле

$$\cos\angle ABC = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|}.$$

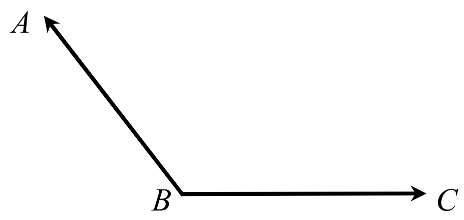


Рис. 16. Угол *ABC*

Найдем координаты и длины векторов $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{BA} = \{3-2; -2-3; 6+1\} = \{1; -5; 7\}; \ \left|\overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{1^2 + (-5)^2 + 7^2} = 5\sqrt{3};$$

$$\overrightarrow{BC} = \{4-2; 6-3; -7+1\} = \{2; 3; -6\}; \ \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-6)^2} = 7.$$

Скалярное произведение этих векторов равно

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 1 \cdot 2 + (-5) \cdot 3 + 7 \cdot (-6) = 2 - 15 - 42 = -55,$$

поэтому $\cos\angle ABC = -\frac{55}{5\sqrt{3}\cdot 7} = -\frac{11\sqrt{3}}{21}$; искомый угол $\angle ABC = \arccos\left(-\frac{11\sqrt{3}}{21}\right) = \pi - \arccos\frac{11\sqrt{3}}{21}$. •

Векторное произведение

Опр. 2. ***Векторным произведением*** вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется *вектор* $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$, обладающий свойствами:

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\widehat{\vec{a};\vec{b}})$ (длина вектора $\vec{c}$ равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$);

2) $\vec{c}\perp\vec{a}, \vec{c}\perp\vec{b}$;

3) векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ в указанном порядке образуют правую тройку.

Векторное произведение вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ обычно обозначают $\vec{a}\times\vec{b}$ или $[\vec{a};\vec{b}]$.

Свойства векторного произведения.

1. $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$.

2. $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$.

3. $(\alpha\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(\alpha\vec{b}) = \alpha(\vec{a}\times\vec{b})$ (α – число).

4. $\vec{a}\times\vec{a} = \vec{0}$.

5. $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0} \quad\Leftrightarrow\quad \vec{a}\parallel\vec{b}$.

6. $\vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} = \vec{0}$; $\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}; \vec{j}\times\vec{k} = \vec{i}; \vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}$.

Выражение векторного произведения через координаты сомножителей

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами в декартовой прямоугольной системе координат:

$$\vec{a} = \{x_a; y_a; z_a\};\ \vec{b} = \{x_b; y_b; z_b\},$$

т. е. $\vec{a} = x_a\vec{i} + y_a\vec{j} + z_a\vec{k}$; $\vec{b} = x_b\vec{i} + y_b\vec{j} + z_b\vec{k}$. Тогда в силу свойств векторного произведения получаем:

$$\vec{a}\times\vec{b} = (x_a\vec{i} + y_a\vec{j} + z_a\vec{k})\times(x_b\vec{i} + y_b\vec{j} + z_b\vec{k}) =$$
$$= x_a x_b\vec{i}\times\vec{i} + x_a y_b\vec{i}\times\vec{j} + x_a z_b\vec{i}\times\vec{k} + y_a x_b\vec{j}\times\vec{i} + y_a y_b\vec{j}\times\vec{j} + y_a z_b\vec{j}\times\vec{k} +$$
$$+ z_a x_b\vec{k}\times\vec{i} + z_a y_b\vec{k}\times\vec{j} + z_a z_b\vec{k}\times\vec{k} =$$
$$= x_a x_b\cdot\vec{0} + x_a y_b\vec{k} + x_a z_b(-\vec{j}) + y_a x_b(-\vec{k}) + y_a y_b\cdot\vec{0} + y_a z_b\vec{i} +$$
$$+ z_a x_b\vec{j} + z_a y_b(-\vec{i}) + z_a z_b\cdot\vec{0} =$$
$$= x_a y_b\vec{k} - x_a z_b\vec{j} - y_a x_b\vec{k} + y_a z_b\vec{i} + z_a x_b\vec{j} - z_a y_b\vec{i} =$$
$$= \vec{i}(y_a z_b - z_a y_b) - \vec{j}(x_a z_b - z_a x_b) + \vec{k}(x_a y_b - y_a x_b) =$$
$$= \vec{i}\begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}.$$

Итак, *векторное произведение двух векторов может быть вычислено как определитель, в первой строке которого стоят базисные векторы* $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, *а во второй и третьей – декартовы координаты соответственно первого и второго перемножаемых векторов*:

$$\boxed{\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}.}$$

Геометрические и физические приложения векторного произведения

1. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ **и** $\vec{b}$ (см. рис. 17), равна

$$\boxed{S_{\square} = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right|.}$$

2. Площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (см. рис. 17), равна

$$\boxed{S_{\triangle} = \frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|.}$$

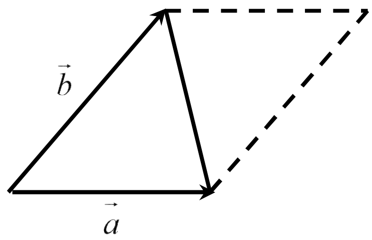


Рис. 17. Параллелограмм и треугольник, построенные на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$

3. Момент силы $\overrightarrow{F}$, приложенной в точке A, **относительно точки** O равен

$$\boxed{\overrightarrow{M} = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{F}.}$$

Пример 3. Найдем площадь треугольника ABC, если $A(0; -1; 3)$, $B(0; -2; 4)$, $C(1; 0; 4)$.

Решение. Площадь треугольника ABC найдем как площадь треугольника, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ по формуле

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|.$$

Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = \{0-0; -2+1; 4-3\} = \{0; -1; 1\};$$

$$\overrightarrow{AC} = \{1-0; 0+1; 4-3\} = \{1; 1; 1\}.$$

Векторное произведение этих векторов равно

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(-1-1) - \vec{j}(0-1) + \vec{k}(0+1) = -2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k};$$

модуль этого вектора $\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right| = \sqrt{(-2)^2+1^2+1^2} = \sqrt{6}.$ Следовательно, искомая площадь $S_{\vartriangle} = \dfrac{1}{2}\sqrt{6}.$ •

Упражнение. В примере 3 найти длину высоты *BD*.

Смешанное произведение трех векторов

Опр. 3. ***Смешанным произведением*** векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется *число*, равное скалярному произведению вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$:

$$\boxed{\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}.}$$

Замечание. В смешанном произведении $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ сначала первый вектор $\vec{a}$ умножается векторно на второй $\vec{b},$ а затем полученный результат скалярно умножается на третий вектор $\vec{c}.$

Смешанное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ обычно обозначают $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ или $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$.

Выражение смешанного произведения через координаты сомножителей

Пусть векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ заданы своими координатами в декартовой прямоугольной системе координат:

$$\vec{a} = \{x_a; y_a; z_a\};\ \vec{b} = \{x_b; y_b; z_b\};\ \vec{c} = \{x_c; y_c; z_c\}.$$

Тогда, выражая координаты вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ и находя скалярное произведение векторов как сумму произведений их соответствующих координат, имеем:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix} \cdot (x_c\vec{i} + y_c\vec{j} + z_c\vec{k}) =$$

$$= \left(\vec{i}\begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix}\right) \cdot (x_c\vec{i} + y_c\vec{j} + z_c\vec{k}) =$$

$$= x_c\begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix} - y_c\begin{vmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{vmatrix} + z_c\begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}.$$

(В последнем равенстве свернули разложение определителя по элементам третьей строки.)

Итак, *смешанное произведение трех векторов равно определителю, составленному из декартовых координат перемножаемых векторов*:

$$\boxed{\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}.}$$

Свойства смешанного произведения

1. Смешанное произведение не зависит от группировки множителей: $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$.

2. Смешанное произведение не меняется при циклической перестановке его множителей, и меняет знак при перемене мест любых двух его множителей:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c}.$$

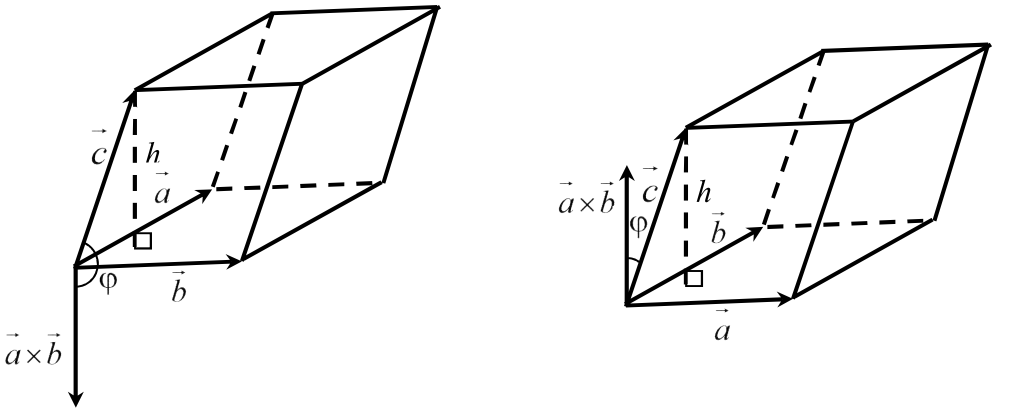
3. $(\vec{a_1} + \vec{a_2})\vec{b}\vec{c} = \vec{a_1}\vec{b}\vec{c} + \vec{a_2}\vec{b}\vec{c}$.

4. $(\alpha\vec{a})\vec{b}\vec{c} = \alpha(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$ (α – число).

Геометрический смысл смешанного произведения: модуль смешанного произведения векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах:

$$\boxed{V_{\text{парал}} = \left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|.}$$

Действительно, рассмотрим параллелепипед, построенный на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (рис. 18), его объем $V_{\text{парал}} = S_{\text{осн}}h,$ где $S_{\text{осн}} = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$ – площадь основания, т. е. параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b},$ h – длина высоты, опущенной на основание.



а $\quad$ б

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют левую тройку $\qquad$ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют правую тройку

Рис. 18. Параллелепипед, построенный на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

Обозначим $\varphi = (\widehat{\vec{a} \times \vec{b}; \vec{c}})$ – угол между векторами $\vec{a} \times \vec{b}$ и $\vec{c}.$

Пусть векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют левую тройку (рис. 18, а). В этом случае угол φ тупой и $h = \left|\vec{c}\right| \sin(\varphi - 90°) = -\left|\vec{c}\right| \cos\varphi.$ Поэтому

$$V_{\text{парал}} = S_{\text{осн}}h = -\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|\left|\vec{c}\right| \cos\varphi = -(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = -\vec{a}\vec{b}\vec{c}.$$

Если векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют правую тройку (рис. 18, б), то угол φ острый и $h = \left|\vec{c}\right| \sin(90° - \varphi) = \left|\vec{c}\right| \cos\varphi.$ Тогда

$$V_{\text{парал}} = S_{\text{осн}}h = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|\left|\vec{c}\right| \cos\varphi = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a}\vec{b}\vec{c}.$$

Таким образом, объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c},$ равен $V_{\text{парал}} = \left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|.$

Следовательно, объем пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (рис. 19), равен

$$\boxed{V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|.}$$

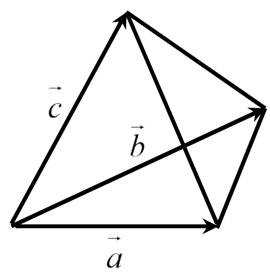


Рис. 19. Пирамида, построенная на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

5. $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны.

6. $\vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют правую тройку;

$\vec{a}\vec{b}\vec{c} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют левую тройку.

Пример 4. Проверим, лежат ли точки $A(0;1;0)$, $B(2;4;-1)$, $C(1;0;3)$, $D(1;10;-11)$ в одной плоскости.

Решение. Точки A, B, C, D лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ лежат в одной плоскости (рис. 20), т. е. компланарны. Условием компланарности трех векторов является равенство нулю смешанного произведения этих векторов.

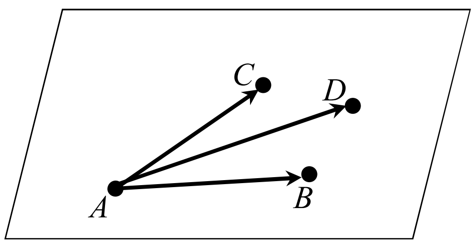


Рис. 20. Векторы $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$, лежащие в одной плоскости

Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{AB} = \{2-0; 4-1; -1-0\} = \{2; 3; -1\};$$
$$\overrightarrow{AC} = \{1-0; 0-1; 3-0\} = \{1; -1; 3\};$$
$$\overrightarrow{AD} = \{1-0; 10-1; -11-0\} = 1\{2; 9; -11\}.$$

Смешанное произведение этих векторов равно

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 9 & -11 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 9 & -11 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -11 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} =$$
$$= 2 \cdot (11-27) - 3 \cdot (-11-3) - 1 \cdot (9+1) = -32 + 42 - 10 = 0.$$

Значит, векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ компланарны, точки A, B, C, D лежат в одной плоскости.•

Пример 5. Докажем, что векторы $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}, \vec{b} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{c} = \vec{i} - 3\vec{j} - 8\vec{k}$ образуют базис в пространстве.

Решение. Векторы образуют базис в пространстве тогда и только тогда, когда они не компланарны, а значит их смешанное произведение не равно нулю. Вычислим смешанное произведение заданных векторов:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & -8 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -3 & -8 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -8 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -39 \end{vmatrix} =$$
$$= -1 \cdot (-32-0) - 3 \cdot (-16-0) + 2 \cdot (-78-4) = 32 + 48 - 164 = -84 \neq 0.$$

Следовательно, векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ не компланарны, а значит, образуют базис в пространстве.•