ВЕКТОРЫ

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Векторы, линейные операции над ними. Координаты вектора

Пример 1. Даны точки $A(1;4;6)$ и $B(2;6;4)$. Найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, его длину, направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{AB}$.

Решение. Находим координаты: $\overrightarrow{AB}=\{2-1;\,6-4;\,4-6\}=\{1;\,2;\,-2\}$.

Модуль (длина) вектора $\overrightarrow{AB}$: $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}=3$. Направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$\cos\alpha=\frac{x}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\frac{1}{3},\ \cos\beta=\frac{y}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\frac{2}{3},\ \cos\gamma=\frac{z}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}=-\frac{2}{3}.$$

Пример 2. Даны векторы $\vec{a}=\{2;\,1;\,3\}$ и $\vec{b}=\{-1;\,0;\,2\}$. Найдите координаты и длину вектора $\vec{c}=2\vec{a}-\vec{b}$.

Решение. $2\vec{a}=\{4;\,2;\,6\}$, $\vec{c}=2\vec{a}-\vec{b}=\{4-(-1);\,2-0;\,6-2\}=\{5;\,2;\,4\}$.

Находим длину вектора $\vec{c}$: $\left|\vec{c}\right|=\sqrt{5^2+2^2+4^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$.

Пример 3. Параллелограмм построен на векторах $\vec{a}=\{-1;\,1;\,1\}$ и $\vec{b}=3\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$. Найдите длины диагоналей.

Решение. Выразим векторы, направленные по диагоналям параллелограмма, через его стороны и найдем координаты этих векторов:

$$\vec{d}_1=\vec{a}+\vec{b}=\{-1+3;1+(-2);\,1+1\}=\{2;\,-1;\,2\};$$

$$\vec{d}_2=\vec{a}-\vec{b}=\{-1-3;\,1-(-2);\,1-1\}=\{-4;3;0\}.$$

Находим длины векторов $\vec{d}_1,\vec{d}_2$:

$$\left|\vec{d}_1\right|=\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}=\sqrt{9}=3;\ \left|\vec{d}_2\right|=\sqrt{(-4)^2+3^2}=\sqrt{25}=5.$$

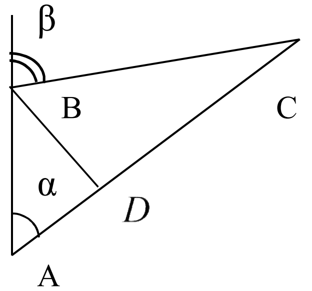
Пример 4. При каких α и β вектор $\vec{a}=\{3;\,\alpha;\,\beta\}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{AB}$, если $A(4;\,0;\,3)$, $B(-2;\,4;\,5)$?

Решение. Находим координаты вектора $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB}=\{-2-4;\,4-0;\,5-3\}=\{-6;\,4;\,2\}$.

Условие коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $\overrightarrow{AB}$ имеет вид:
$\frac{3}{-6}=\frac{\alpha}{4}=\frac{\beta}{2}$, следовательно, $-6\alpha=12$, $-6\beta=6$ и $\alpha=-2$, $\beta=-1$.

2. Скалярное произведение векторов

Пример 1. Даны координаты вершин треугольника ABC: $A(1;-2;-1), B(5;2;-3), C(4;-2;3)$.



Найти: а) длину стороны AB; б) проекцию стороны AB на AC, т. е. AD; в) внутренний угол при вершине A; г) внешний угол при вершине B.

Решение. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}=\{4;4;-2\}$,

$\overrightarrow{AC}=\{3;0;4\}$, $\overrightarrow{BC}=\{-1;-4;6\}$;

а) длина стороны AB равна

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{4^2+4^2+(-2)^2}=6;$$

б) находя длину вектора $\overrightarrow{AC}$:

$\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{3^2+0^2+4^2}=5$, получаем

$$np_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB}=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{4\cdot 3+4\cdot 0-2\cdot 4}{5}=\frac{12-8}{5}=0,8;$$

в) для угла $\alpha=\overrightarrow{AB}\,\hat{}\,\overrightarrow{AC}$ имеем:

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{4}{6\cdot 5}=\frac{2}{15},\ \alpha=\arccos\frac{2}{15};$$

г) для угла $\beta=\overrightarrow{AB}\,\hat{}\,\overrightarrow{BC}$ имеем:

$$\cos\beta=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\frac{4\cdot(-1)+4\cdot(-4)-2\cdot 6}{6\cdot\sqrt{(-1)^2+(-4)^2+6^2}}=\frac{-32}{6\cdot\sqrt{53}},\ \beta=\pi-\arccos\left(\frac{16}{3\sqrt{53}}\right).$$

Пример 2. Две силы $\vec{F_1}=\{4;1;3\}$ и $\vec{F_2}=\{3;-1;2\}$ приложены в точке $M(1;4;7)$. Вычислить работу их равнодействующей $\vec{R}$ по перемещению материальной точки из M в $N(3;8;5)$.

Решение. Найдем координаты равнодействующей сил $\vec{R}$ и вектора перемещения $\vec{s}=\overrightarrow{MN}$:

$$\vec{R}=\vec{F_1}+\vec{F_2}=\{4+3;\,1-1;\,3+2\}=\{7;\,0;\,5\}$$

$$\vec{s}=\overrightarrow{MN}=\{3-1;\,8-4;\,5-7\}=\{2;\,4;\,-2\}$$

Тогда работа равна

$$A=\vec{R}\cdot\vec{s}=7\cdot2+0\cdot4+5\cdot(-2)=14-10=4.$$

Пример 3. Найти проекцию вектора $\vec{a}=\{4;2;-6\}$ на ось l, образующую с осью Ox угол $\alpha=120°$, с осью Oy - угол $\beta=45°$ и тупой угол с осью Oz.

Решение. Введем вектор $\vec{e_l}=\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}$ – единичный вектор направления l.

Из условия $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ находим $\cos\gamma$:

$$\cos^2\gamma=1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta=1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{4},\text{ т. е. }\cos\gamma=\pm\frac{1}{2}.$$

Т. к. γ – тупой угол, нужно взять $\cos\gamma=-\dfrac{1}{2}$.

Следовательно, $\vec{e_l}=\left\{-\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2};-\dfrac{1}{2}\right\}$.

Находим проекцию:

$$np_l\vec{a}=np_{\vec{e}_l}\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{e}_l}{|\vec{e}_l|}=\vec{a}\cdot\vec{e}_l=4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=$$

$$=-2+\sqrt{2}+3=1+\sqrt{2}.$$

Пример 4. Найти проекцию вектора $\vec{a}=\{5;-4;1\}$ на ось l, образующую с координатными осями равные острые углы.

Решение. Введем вектор $\vec{e_l}=\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}$ – единичный вектор направления l.

Из условия равенства углов и $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ находим, что $3\cos^2\alpha=1\Rightarrow\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $(\textit{углы острые})$. Следовательно,

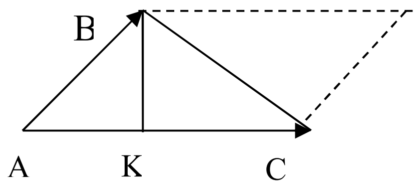
$\vec{e_l}=\left\{\dfrac{\sqrt{3}}{3};\dfrac{\sqrt{3}}{3};\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right\}$. Находим проекцию:

$$np_l\vec a = np_{\vec e_l}\vec a = \frac{\vec a\cdot\vec e_l}{|\vec e_l|} = \vec a\cdot\vec e_l = \left(5-4+1\right)\cdot\frac{\sqrt3}{3} = \frac{2\sqrt3}{3}.$$

3. Векторное произведение векторов

Пример 1. Даны вершины треугольника ABC: $A(1;-1;2)$, $B(5;-6;2)$, $C(1;3;-1)$. Найти его площадь и высоту BK.

Решение.



Площадь треугольника равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, т. е.

$$S_\vartriangle = \frac12 S_\square = \frac12\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$$

Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ и их векторное произведение:

$\overrightarrow{AB}=\{4;-5;0\}$, $\overrightarrow{AC}=\{0;4;-3\}$,

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ 4 & -5 & 0\\ 0 & 4 & -3\end{vmatrix} = \vec i\begin{vmatrix}-5 & 0\\ 4 & -3\end{vmatrix} - \vec j\begin{vmatrix}4 & 0\\ 0 & -3\end{vmatrix} + \vec k\begin{vmatrix}4 & -5\\ 0 & 4\end{vmatrix} =$$

$$=15\vec i+12\vec j+16\vec k.$$

Следовательно, $S_\vartriangle = \frac12\sqrt{225+144+256} = \frac12\sqrt{625} = \frac12\cdot 25 = 12{,}5$ (ед^2).

С другой стороны, $S_\vartriangle = \frac12 AC\cdot BK$, отсюда

$$BK = \frac{2\cdot S_\vartriangle}{AC} = \frac{12{,}5\cdot 2}{\sqrt{0+16+9}} = \frac{25}{5} = 5 \text{ (лин. ед.).}$$

Пример 2. Найти единичный вектор $\vec x$, перпендикулярный векторам $\vec a=\{4;1;3\}$ и $\vec b=\{4;0;2\}$.

Решение. Вектор $\vec c=\vec a\times\vec b$ будет перпендикулярен векторам $\vec a$ и $\vec b$. Найдем его:

$$\vec c = \begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ 4 & 1 & 3\\ 4 & 0 & 2\end{vmatrix} = \vec i\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{vmatrix} - \vec j\begin{vmatrix}4 & 3\\ 4 & 2\end{vmatrix} + \vec k\begin{vmatrix}4 & 1\\ 4 & 0\end{vmatrix} = \{2;4;-4\}.$$

Модуль вектора $\vec c$ равен $|\vec c| = \sqrt{2^2+4^2+(-4)^2} = 6$.

Следовательно, единичные векторы, перпендикулярные $\vec{a}$ и $\vec{b}$, будут иметь вид:

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{6}\vec{c} = \left\{ \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{2}{3} \right\}, \; \vec{e}_2 = -\frac{1}{6}\vec{c} = \left\{ -\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3} \right\}.$$

4. Смешанное произведение векторов

Пример 1. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = \{-5;\, 3;\, 2\}$, $\vec{b} = \{-6;\, 3;\, 4\}$, $\vec{c} = \{-8;\, 6;\, -5\}$.

Решение. Объем параллелепипеда равен $V = \left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|$. Найдем смешанное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} -5 & 3 & 2 \\ -6 & 3 & 4 \\ -8 & 6 & -5 \end{vmatrix} = -5 \cdot (-15 - 24) - 3 \cdot (30 + 32) + 2 \cdot (-36 + 24) = -15$$

Следовательно, $V = \left|-15\right| = 15$ (куб. ед.)

Пример 2. Доказать, что точки $A(1;\, 2;\, -1), B(0;\, 1;\, 5), C(-1;\, 2;\, 1),\; D(2;\, 1;\, 3)$ лежат в одной плоскости.

Решение. Точки A, B, C, D лежат в одной плоскости, если векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ компланарны, т. е. если смешанное произведение $\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}$=0. Найдем координаты этих векторов и их смешанное произведение:

$$\overrightarrow{AB} = \{-1;\, -1;\, 6\}, \quad \overrightarrow{AC} = \{-2;\, 0;\, 2\}, \quad \overrightarrow{AD} = \{1;\, -1;\, 4\},$$

$$\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD} == \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -1 \cdot (0 + 2) + 1 \cdot (-8 - 2) + 6 \cdot (2 - 0) = 0.$$

Следовательно, точки A, B, C, D лежат в одной плоскости.