

3. Системы случайных величин

1. Задан закон распределения двумерной случайной величины $(\xi; \eta)$:

$\xi \backslash \eta$	-1	0	1	2
-1	0,05	0,3	0	0,05
1	0	p	0,2	0

Требуется:

- а) определить значение параметра p ;
- б) найти $P(\xi \geq \eta)$;
- в) найти законы распределения случайных величин ξ и η ;
- г) вычислить математические ожидания $M\xi$ и $M\eta$;
- д) вычислить дисперсии $D\xi$ и $D\eta$;
- е) найти коэффициент корреляции между ξ и η ;
- ж) выяснить, зависимы ли случайные величины ξ и η .

2. Задан закон распределения двумерной случайной величины $(\xi; \eta)$:

$\xi \backslash \eta$	20	40	60
10	3λ	λ	0
20	2λ	4λ	2λ
30	λ	2λ	5λ

Требуется:

- а) определить значение параметра λ ;
- б) найти законы распределения компонент двумерной случайной величины;
- в) выяснить, зависимы ли компоненты двумерной случайной величины $(\xi; \eta)$;
- г) вычислить математические ожидания $M\xi$ и $M\eta$;
- д) вычислить дисперсии $D\xi$ и $D\eta$;
- е) найти коэффициент корреляции между ξ и η ;
- ж) найти $P(\xi \geq \eta)$.

3. Найти ковариацию между ξ и η , если задан закон распределения двумерной случайной величины $(\xi; \eta)$:

$\xi \backslash \eta$	3	10	12
4	0,17	0,13	0,25
5	0,1	0,3	0,05

4. Пусть

$$P(\xi = -1; \eta = 0) = P(\xi = 1; \eta = 0) = P(\xi = 0; \eta = -1) = P(\xi = 0; \eta = 1) = 0,25.$$

а) Записать закон распределения двумерной случайной величины $(\xi; \eta)$ в виде таблицы.

б) Являются ли случайные величины ξ и η независимыми?

в) Являются ли случайные величины ξ и η некоррелированными?

5. Задана плотность распределения двумерной случайной величины $(\xi; \eta)$:

$$p(x; y) = \begin{cases} a(x + y), & \text{если } 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Требуется найти:

а) коэффициент a ;

б) математические ожидания $M\xi$ и $M\eta$;

в) дисперсии $D\xi$ и $D\eta$;

г) коэффициент корреляции между ξ и η ;

д) выяснить, зависимы ли компоненты двумерной случайной величины $(\xi; \eta)$;

е) найти плотности распределения случайных величин ξ и η ;

ж) вероятность $P(\xi + \eta < 0,5)$.

6. Найти $P\left(0 < \xi < \frac{\pi}{2}; 0 < \eta < \frac{\pi}{4}\right)$, если двумерная случайная величина

$(\xi; \eta)$ задана плотностью распределения

$$p(x; y) = \begin{cases} a \sin(x + y), & \text{если } 0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ и } 0 < y < \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

7. Найти коэффициент корреляции между ξ и η , если двумерная случайная величина $(\xi; \eta)$ задана плотностью распределения

$$p(x; y) = \begin{cases} x + y, & \text{если } 0 < x < 1 \text{ и } 0 < y < 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

8. Задана функция распределения двумерной случайной величины $(\xi; \eta)$:

$$F(x; y) = \begin{cases} (1 - e^{-3x})(1 - e^{-5y}), & \text{если } x > 0, y > 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Требуется найти:

а) плотность распределения двумерной случайной величины $(\xi; \eta)$;

б) вероятность $P(0 < \xi < 1; 0 < \eta < 1)$.

9. Задана функция распределения двумерной случайной величины $(\xi; \eta)$:

$$F(x; y) = \begin{cases} (1 - x^{-7})(1 - y^{-5}), & \text{если } x > 1, y > 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Требуется:

а) найти плотность распределения двумерной случайной величины $(\xi; \eta)$;

б) найти вероятность $P(0 < \xi < 2; 2 < \eta < 4)$;

в) определить, зависимы ли случайные величины ξ и η .

10. Случайная величина $(\xi; \eta)$ распределена равномерно в треугольнике, ограниченном осью Ox и прямыми $y = 2x$, $x = 1$. Требуется найти:

а) плотность распределения двумерной случайной величины $(\xi; \eta)$;

б) вероятность $P(\xi + \eta < 1)$;

в) плотности распределения случайных величин ξ и η ;

г) математические ожидания $M\xi$ и $M\eta$;

д) дисперсии $D\xi$ и $D\eta$;

е) коэффициент корреляции между ξ и η ;

ж) выяснить, зависимы ли компоненты двумерной случайной величины $(\xi; \eta)$.

11. Найти коэффициент корреляции между ξ и η , если двумерная случайная величина $(\xi; \eta)$ задана функцией распределения

$$F(x; y) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \text{ или } y \leq 0, \\ \sin x \sin y & \text{при } 0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ и } 0 < y < \frac{\pi}{2}, \\ \sin x & \text{при } 0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ и } y \geq \frac{\pi}{2}, \\ \sin y & \text{при } x \geq \frac{\pi}{2} \text{ и } 0 < y < \frac{\pi}{2}; \\ 1 & \text{при } x \geq \frac{\pi}{2} \text{ и } y \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

12. Записать плотность распределения двумерной случайной величины $(\xi; \eta)$, если ее компоненты ξ и η независимы и распределены по следующим законам:

а) равномерно на отрезках $[-1; 1]$ и $[0; 2]$ соответственно;

б) нормально с параметрами $M\xi = 3$, $M\eta = -2$; $D\xi = 4$, $D\eta = 16$.

13. Найти коэффициент корреляции случайных величин ξ и $\eta = 1 - 2\xi$.

14. Чему равен коэффициент корреляции случайных величин $\eta = 2\xi + 3$ и $\zeta = 1 - 3\xi$?

15. Найти числовые характеристики и коэффициент корреляции случайных величин $\zeta_1 = 2 - \xi + 3\eta$ и $\zeta_2 = 3\xi + \eta$, если

$M\xi = -1$; $D\xi = 4$; $M\eta = 0$; $D\eta = 9$; $\text{cov}(\xi; \eta) = -2$.

16. Найти числовые характеристики и коэффициент корреляции случайных величин $\zeta_1 = 3\xi - 2\eta$ и $\zeta_2 = 2\xi + 4\eta$, если

$M\xi = 2$; $D\xi = 1$; $M\eta = -1$; $D\eta = 16$; $\text{cov}(\xi; \eta) = 3$.

17. Найти числовые характеристики и коэффициент корреляции случайных величин $\zeta_1 = 5\xi + \eta$ и $\zeta_2 = -\xi - 2\eta$, если $M\xi = 3; D\xi = 4; M\eta = -2; D\eta = 1; r_{\xi;\eta} = 0,5$.

18. Найти числовые характеристики и коэффициент корреляции случайных величин $\zeta_1 = 4 - 3\xi - 2\eta$ и $\zeta_2 = 2\xi + 3\eta$, если $M\xi = 0; D\xi = 16; M\eta = 3; D\eta = 4; r_{\xi;\eta} = -0,25$.

19. Производятся два независимых выстрела по мишени в неизменных условиях. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,7. Рассматривается двумерная случайная величина $(\xi; \eta)$, где ξ – число выстрелов до первого попадания ($\xi = 2$, если попаданий не было); η – число промахов. Требуется найти:

а) распределение двумерной случайной величины $(\xi; \eta)$;

б) $P(\xi = \eta)$;

в) выяснить, зависимы ли компоненты двумерной случайной величины $(\xi; \eta)$;

г) найти коэффициент корреляции между ξ и η .

20. Бросаются две игральные кости. Введем случайные величины: ξ – число выпавших шестерок; η – число выпавших нечетных цифр. Требуется:

а) найти распределение двумерной случайной величины $(\xi; \eta)$;

б) построить условный закон распределения случайной величины ξ при условии, что $\eta = 0$;

в) построить условный закон распределения случайной величины ξ при условии, что $\eta = 1$;

г) выяснить, зависимы ли компоненты двумерной случайной величины $(\xi; \eta)$.

Ответы. 1. а) $p = 0,4$; б) $0,65$;

в)

ξ	-1	1
P	0,4	0,6

η	-1	0	1	2
P	0,05	0,7	0,2	0,05

г) $M\xi = 0,2$; $M\eta = 0,25$; д) $D\xi = 0,96$; $D\eta = 0,3875$; е) $0,164$; ж) зависимы.

2. а) $\lambda = 0,05$;

б)

ξ	10	20	30
P	0,2	0,4	0,4

η	20	40	60
P	0,3	0,35	0,35

в) зависимы; г) $M\xi = 22$; $M\eta = 41$; д) $D\xi = 56$; $D\eta = 259$; е) $0,5646$; ж) $0,15$.

3. $-0,0195$.

4. а)

$\xi \setminus \eta$	-1	0	1
-1	0	0,25	0
0	0,25	0	0,25
1	0	0,25	0

б) нет; в) да.

5. а) $a = 2$; б) $M\xi = \frac{5}{12}$; $M\eta = \frac{3}{4}$; в) $D\xi = \frac{43}{720}$; $D\eta = \frac{3}{80}$; г) 0,4402;

д) зависимы; е) $p_\xi(x) = \begin{cases} 1 + 2x - 3x^2, & \text{если } x \in [0; 1], \\ 0, & \text{если } x \notin [0; 1]; \end{cases}$

$p_\eta(y) = \begin{cases} 3y^2, & \text{если } y \in [0; 1], \\ 0, & \text{если } y \notin [0; 1]; \end{cases}$ ж) $\frac{1}{24}$. б. 0,5. 7. $-\frac{1}{11}$.

8. а) $p(x; y) = \begin{cases} 15e^{-3x-5y}, & \text{если } x > 0, y > 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$ б) $(1 - e^{-3})(1 - e^{-5})$.

9. а) $p(x; y) = \begin{cases} 35x^{-8}y^{-6}, & \text{если } x > 1, y > 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$ б) $(1 - 2^{-7})(2^{-5} - 4^{-5}) \approx 0,03$;

в) независимы. 10. а) $p(x; y) = \begin{cases} 1, & \text{если } (x; y) \in D, \\ 0, & \text{если } (x; y) \notin D, \end{cases}$ где D – треугольник,

ограниченный осью Ox и прямыми $y = 2x$, $x = 1$; б) $\frac{1}{3}$;

в) $p_\xi(x) = \begin{cases} 2x, & \text{если } x \in [0; 1], \\ 0, & \text{если } x \notin [0; 1]; \end{cases}$ $p_\eta(y) = \begin{cases} 1 - \frac{y}{2}, & \text{если } y \in [0; 2], \\ 0, & \text{если } y \notin [0; 2]; \end{cases}$

г) $M\xi = \frac{2}{3}$; $M\eta = \frac{2}{3}$; д) $D\xi = \frac{1}{18}$; $D\eta = \frac{2}{9}$; е) 0,5; ж) зависимы. 11. 0.

12. а) $p(x; y) = \begin{cases} 0,25, & \text{если } -1 \leq x \leq 1 \text{ и } 0 \leq y \leq 2, \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$

б) $p(x; y) = \frac{1}{16\pi} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{16} \right) \right\}$. 13. -1. 14. -1.

15. $M\zeta_1 = 3$; $D\zeta_1 = 97$; $M\zeta_2 = -3$; $D\zeta_2 = 33$; $r_{\zeta_1; \zeta_2} = -\frac{1}{\sqrt{3201}} \approx -0,0177$.

16. $M\zeta_1 = 8$; $D\zeta_1 = 37$; $M\zeta_2 = 0$; $D\zeta_2 = 308$; $r_{\zeta_1; \zeta_2} = -\frac{7\sqrt{7}}{\sqrt{407}} \approx -0,918$.

17. $M\zeta_1 = 13$; $D\zeta_1 = 111$; $M\zeta_2 = 1$; $D\zeta_2 = 12$; $r_{\zeta_1; \zeta_2} = -\frac{11}{2\sqrt{37}} \approx -0,904$.

18. $M\zeta_1 = -2$; $D\zeta_1 = 136$; $M\zeta_2 = 9$; $D\zeta_2 = 76$; $r_{\zeta_1; \zeta_2} = -\frac{47}{2\sqrt{646}} \approx -0,925$.

19. а)

$\xi \backslash \eta$	0	1	2
1	0,49	0,21	0
2	0	0,21	0,09

 б) 0,3; в) зависимы; г) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

20.

а)

$\xi \backslash \eta$	0	1	2
0	1/9	1/3	1/4
1	1/9	1/6	0
2	1/36	0	0

б)

ξ	0	1	2
P	4/9	4/9	1/9

в)

ξ	0	1
P	2/3	1/3

г) зависимы.

Минимум для аудиторной работы

1, 5, 9, 12.