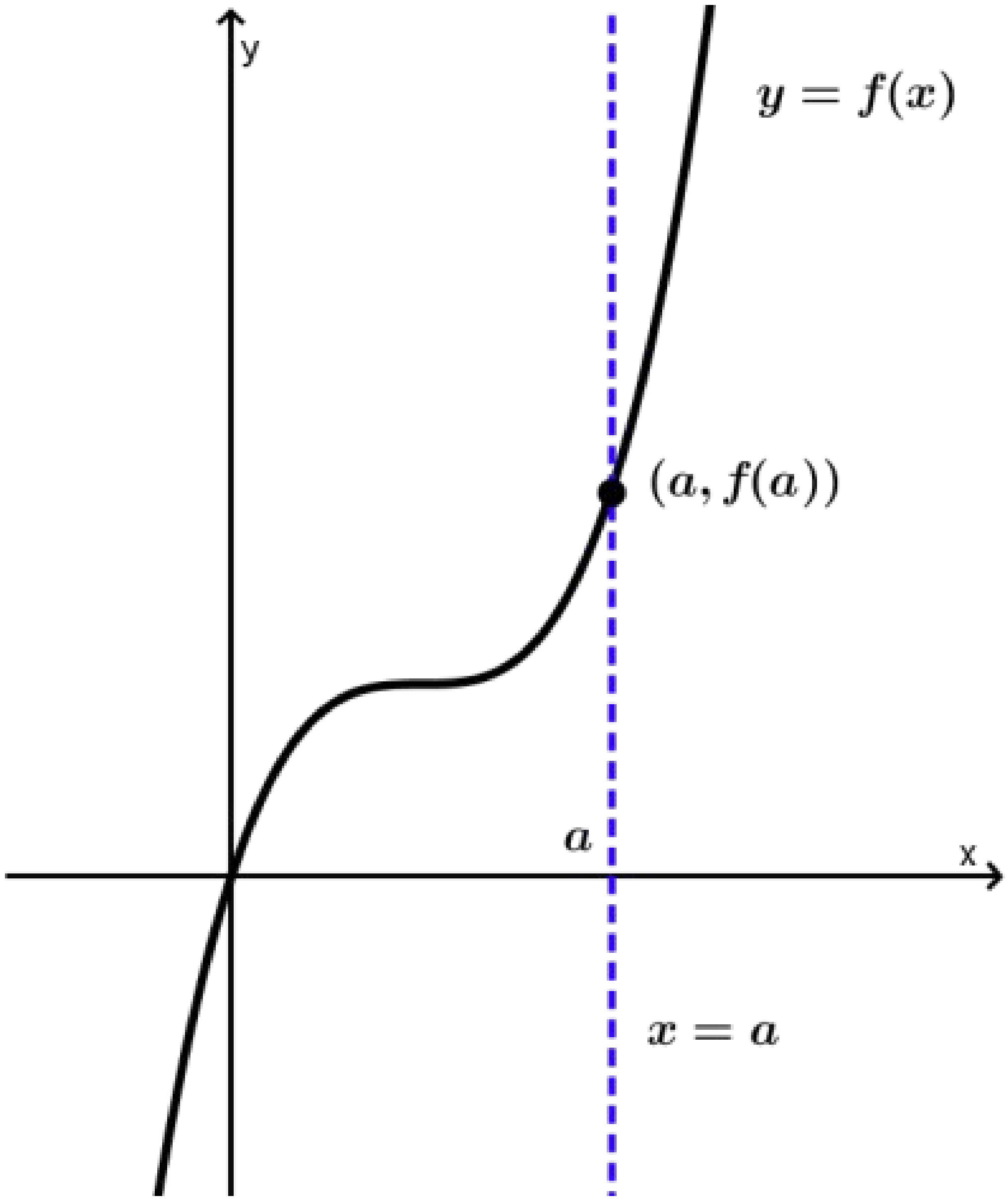
Gráfic
os

Análise de gráficos com funções
Função do 2º grau

PROFESSORA
ELENA BRENTANO

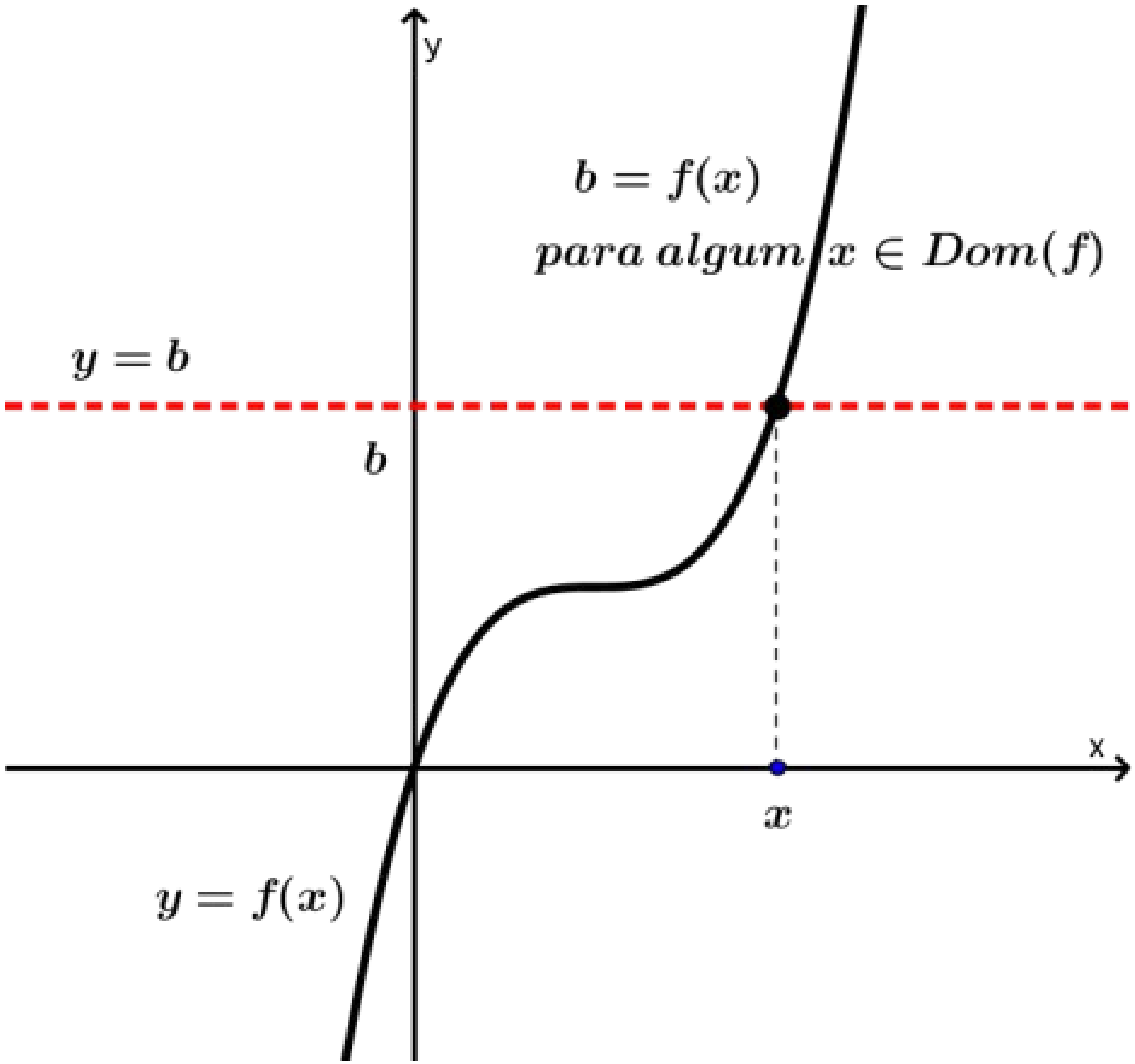
Como saber se **um número real a pertence ao domínio de uma função f ?**

O número real a pertence ao domínio de uma função f se a **reta vertical** $x = a$ corta o gráfico de f em um ponto (único).



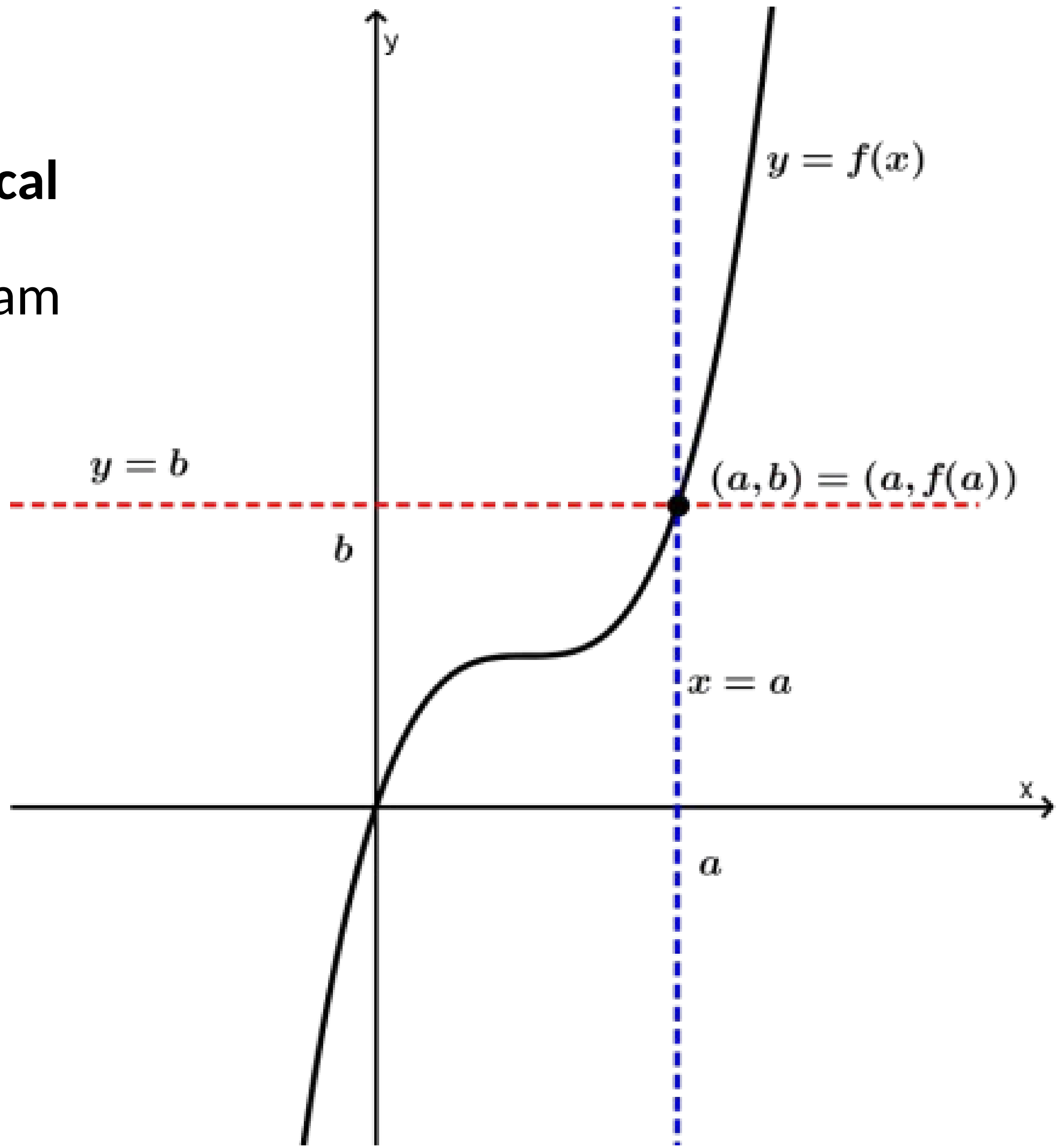
Como saber se **um número real pertence à imagem** de uma função f ?

O número real b pertence à **imagem** de uma função f se a **reta horizontal** $y = b$ corta o gráfico de f em pelo menos um ponto.

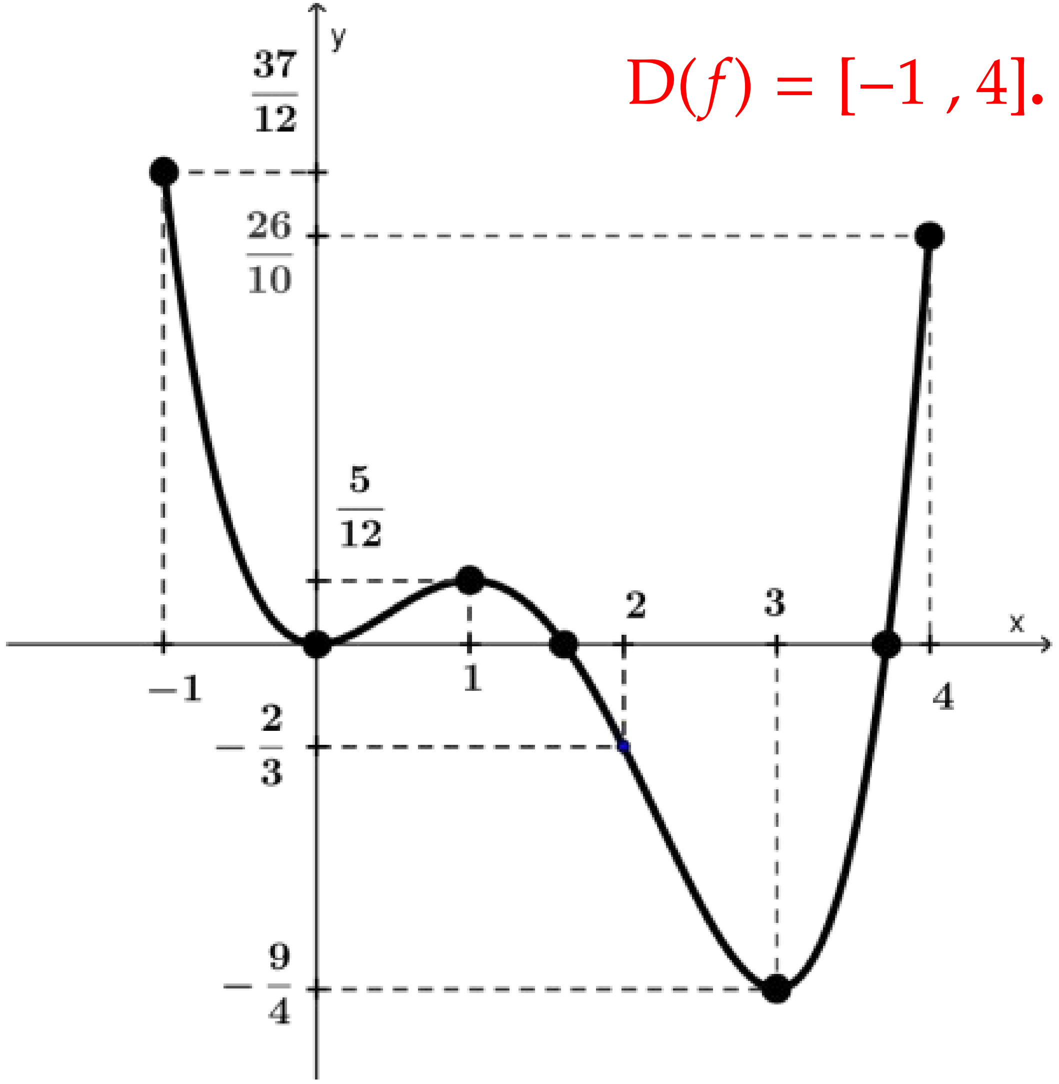


Assim, $(a, b) = (a, f(a))$ se a **reta vertical** $x = a$ e a **reta horizontal** $y = b$ se cruzam num ponto sobre o gráfico da função $y = f(x)$ e assim,

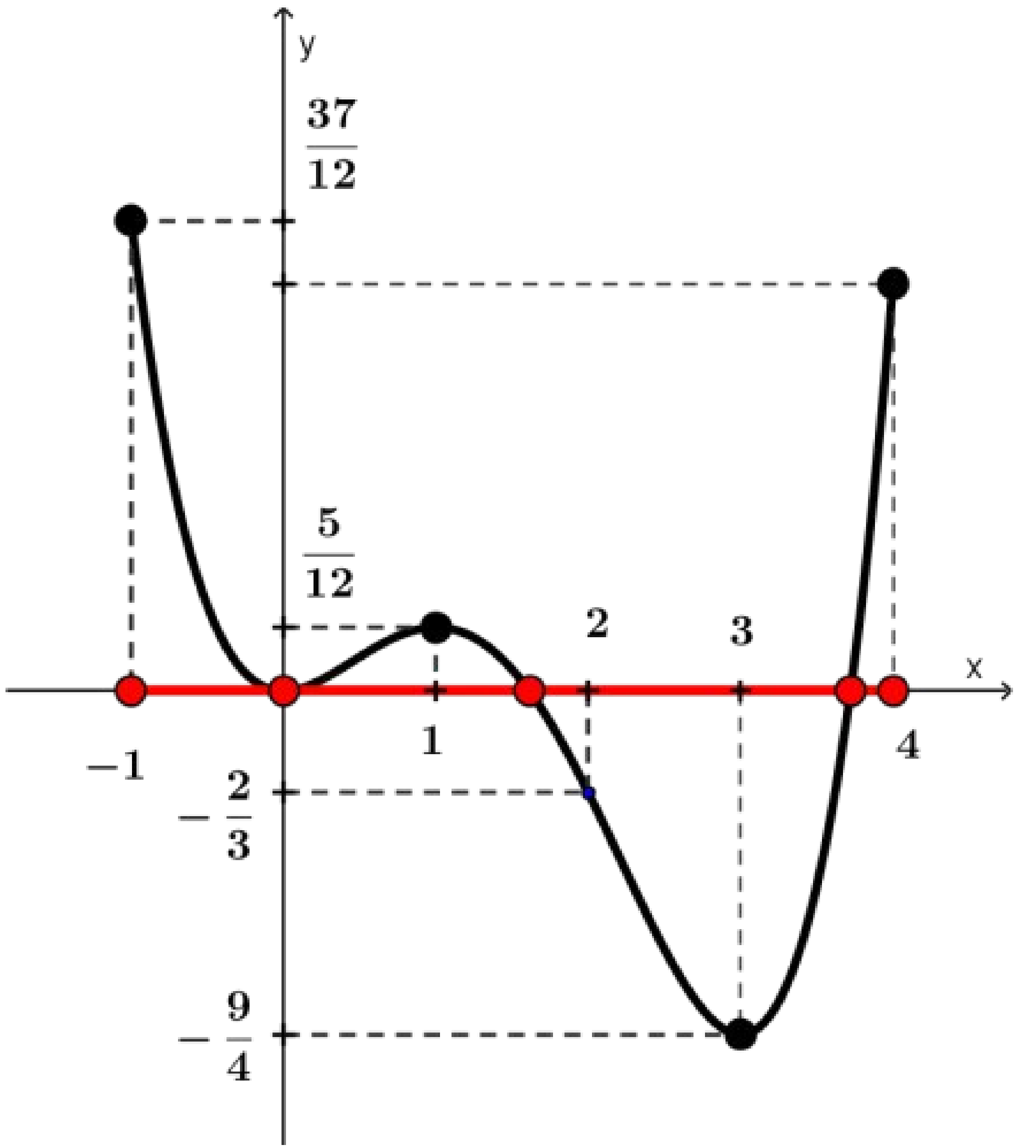
$a \in Dom(f)$ e $b \in Im(f)$



1. Qual o domínio da função f?

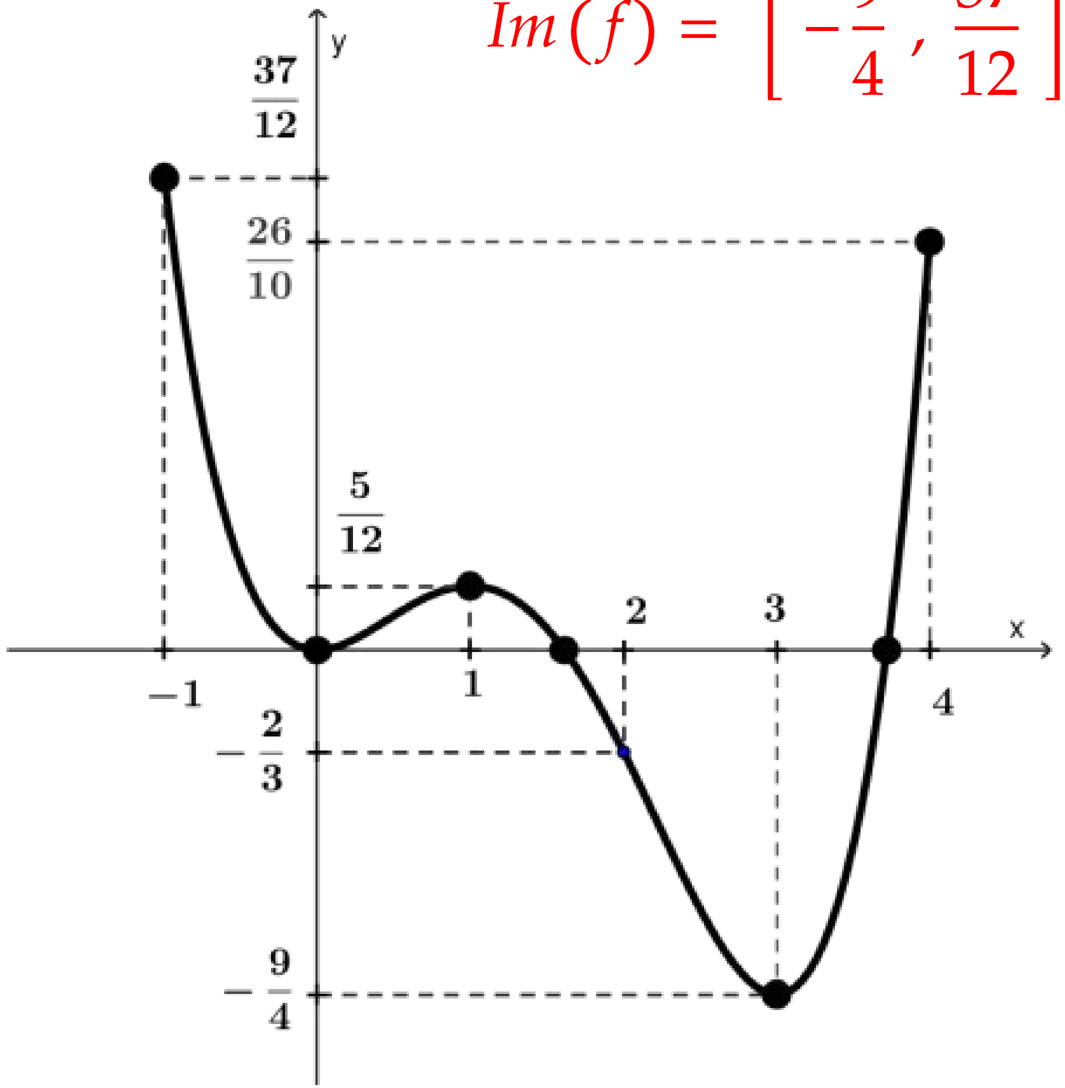


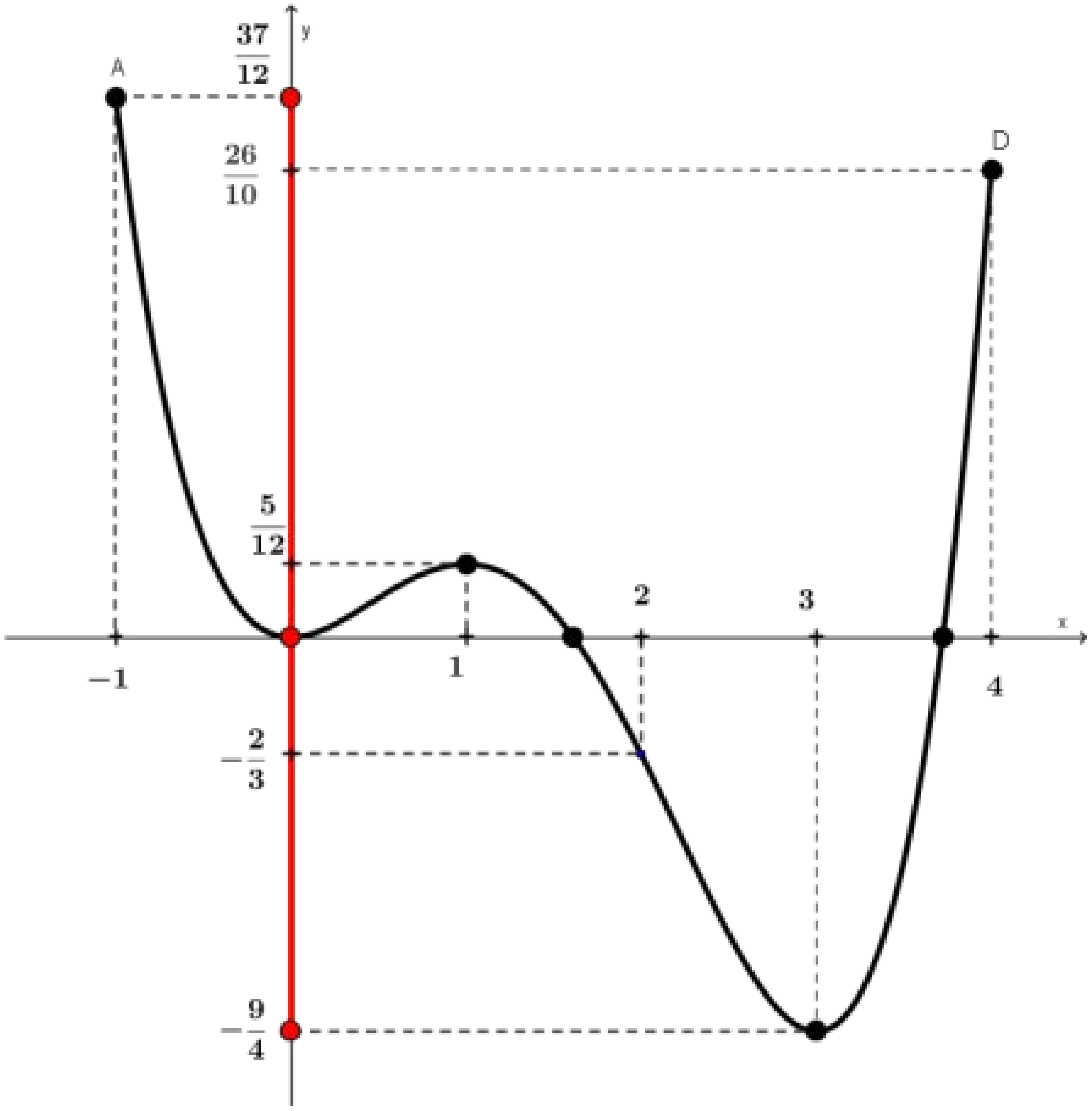
$D(f) = [-1\ ,4]$.



2. Qual a imagem da função f?

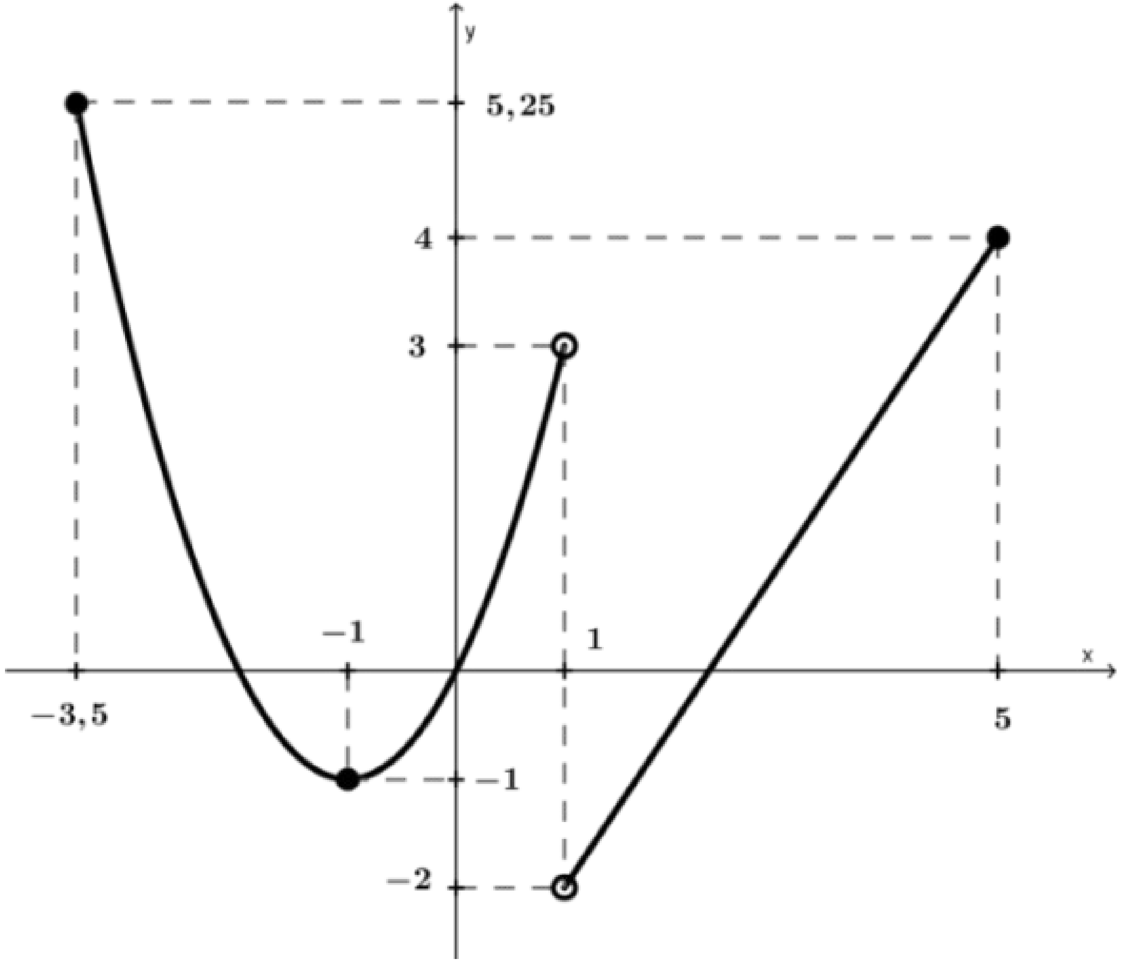
$$Im(f) = \left[-\frac{9}{4}, \frac{37}{12}\right]$$

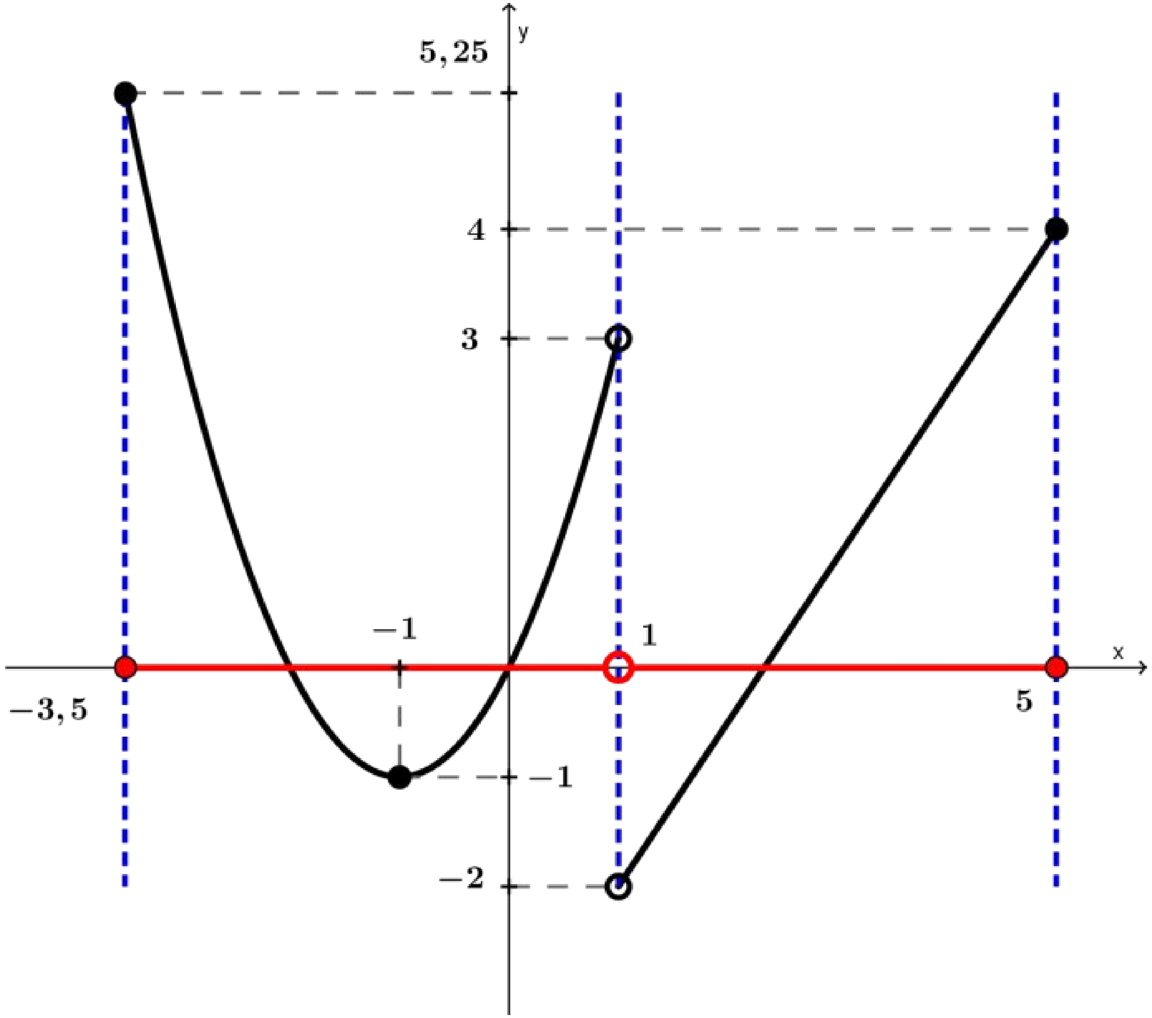




3. Qual o domínio da função g ?

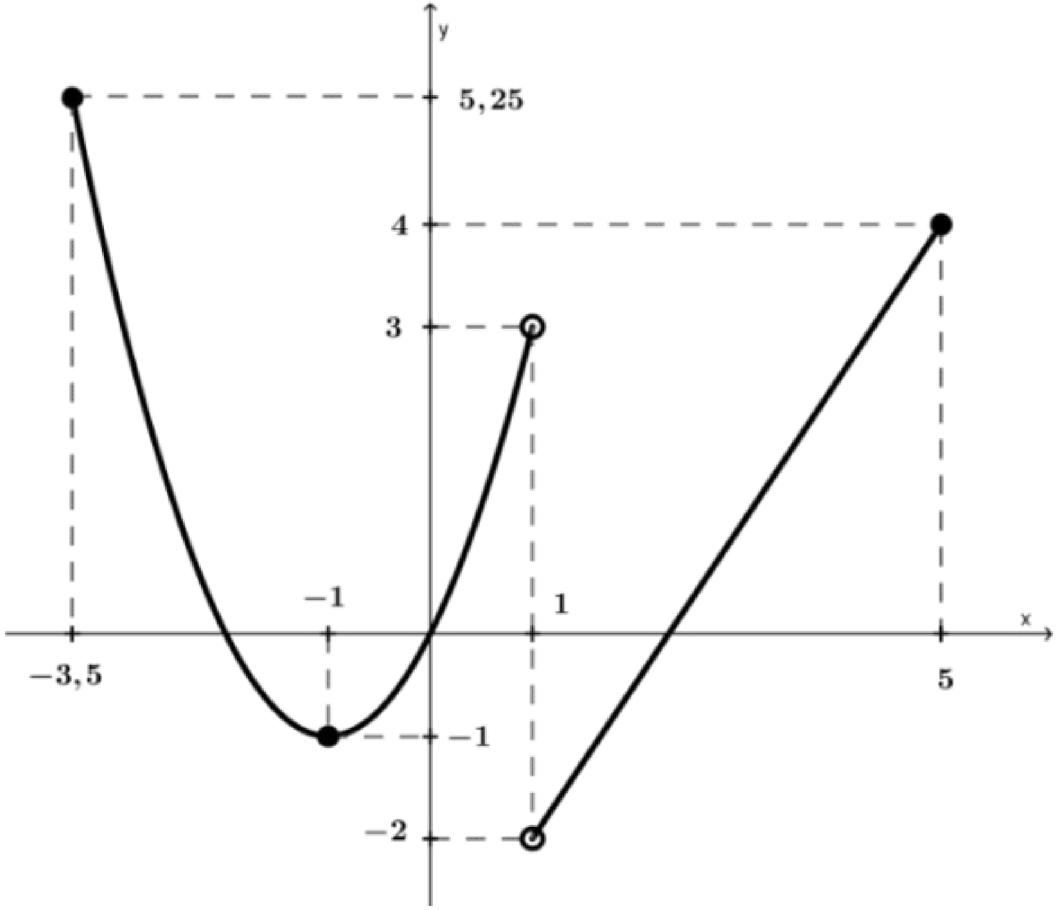
D(g) = [–3,5 ;1[U]1, 5]

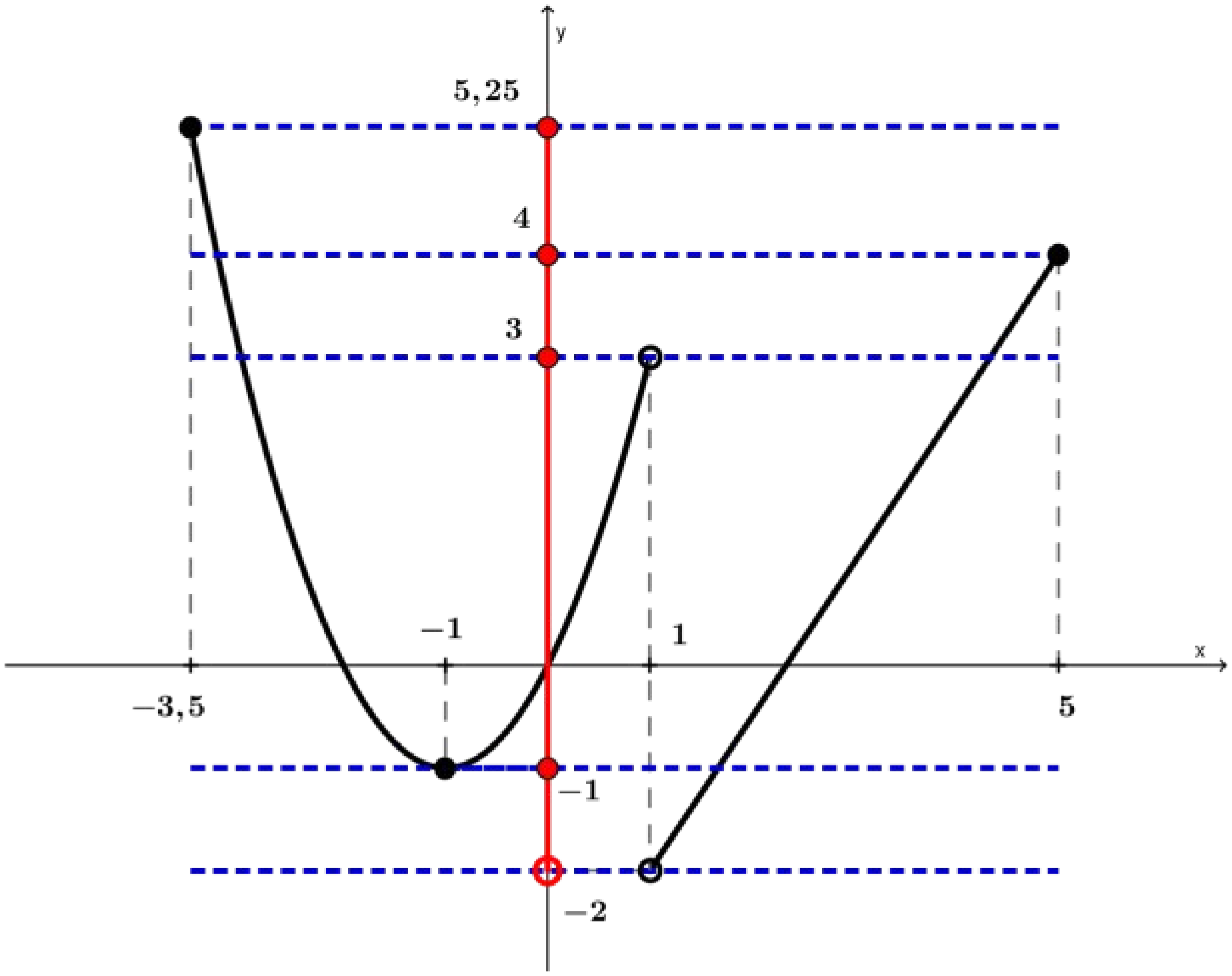




4. Qual a imagem da função g ?

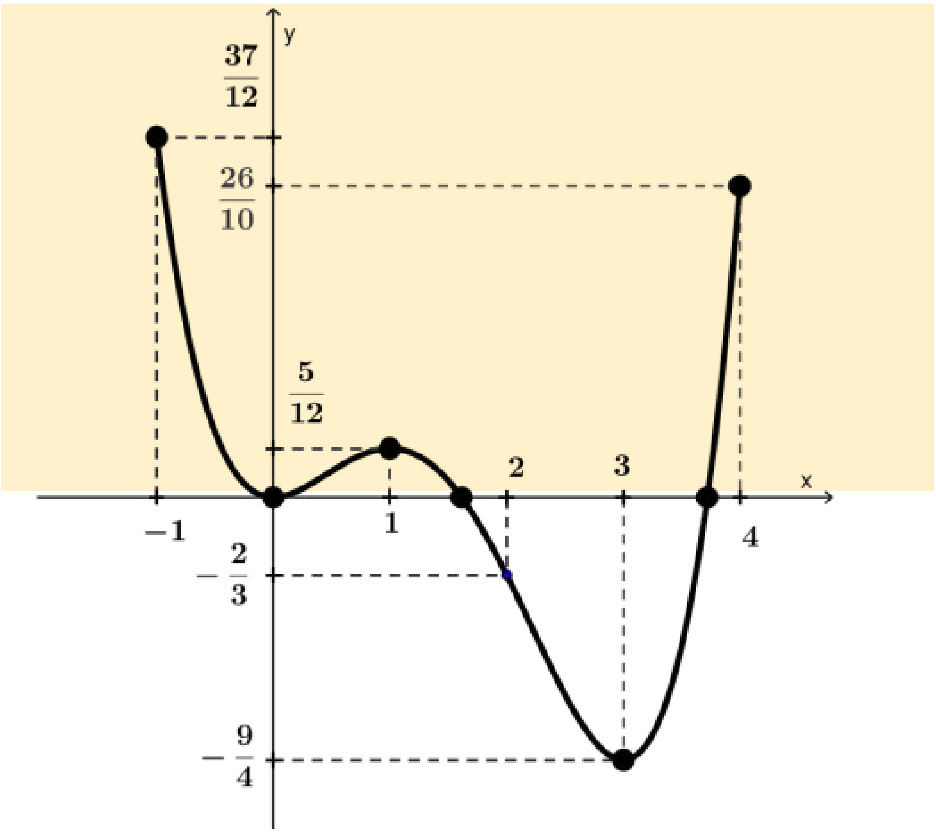
$Im(g) =]-2\ ;\ 5,25]$

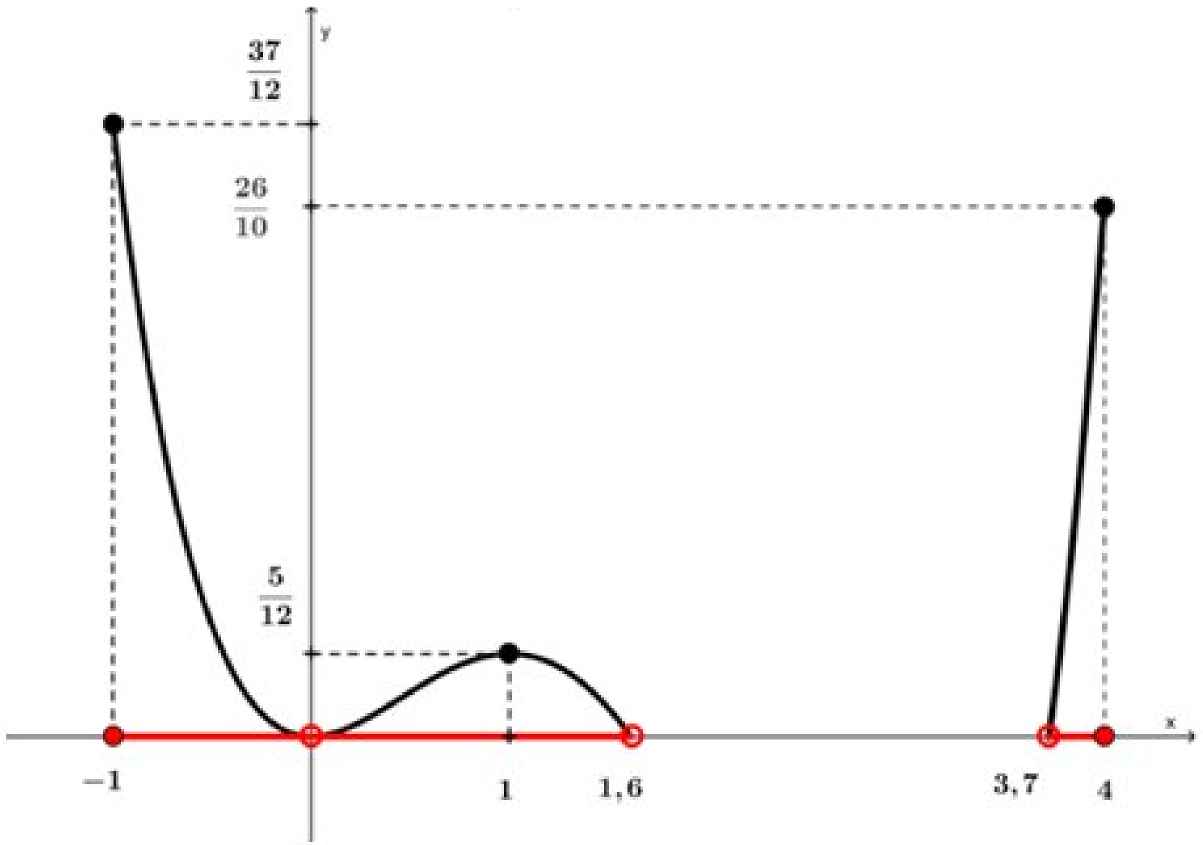




5. Encontre o conjunto $\{x \in D(f) \,/\, f(x) > 0\}$

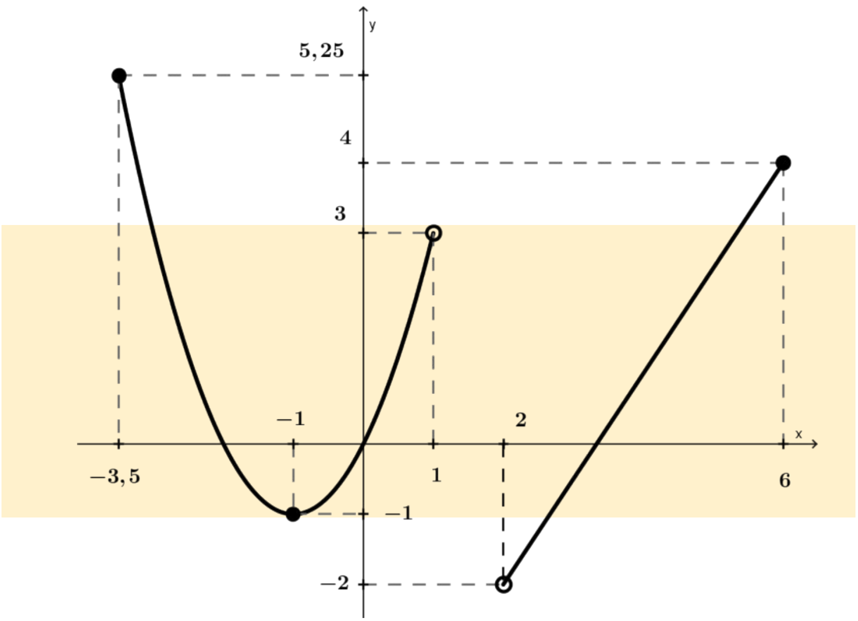
$\{x \in D(f) \,/\, f(x) > 0\} = [-1\,,0[\ \cup\ ]0\,,1{,}6[\ \cup\ ]3{,}7\,,4]$

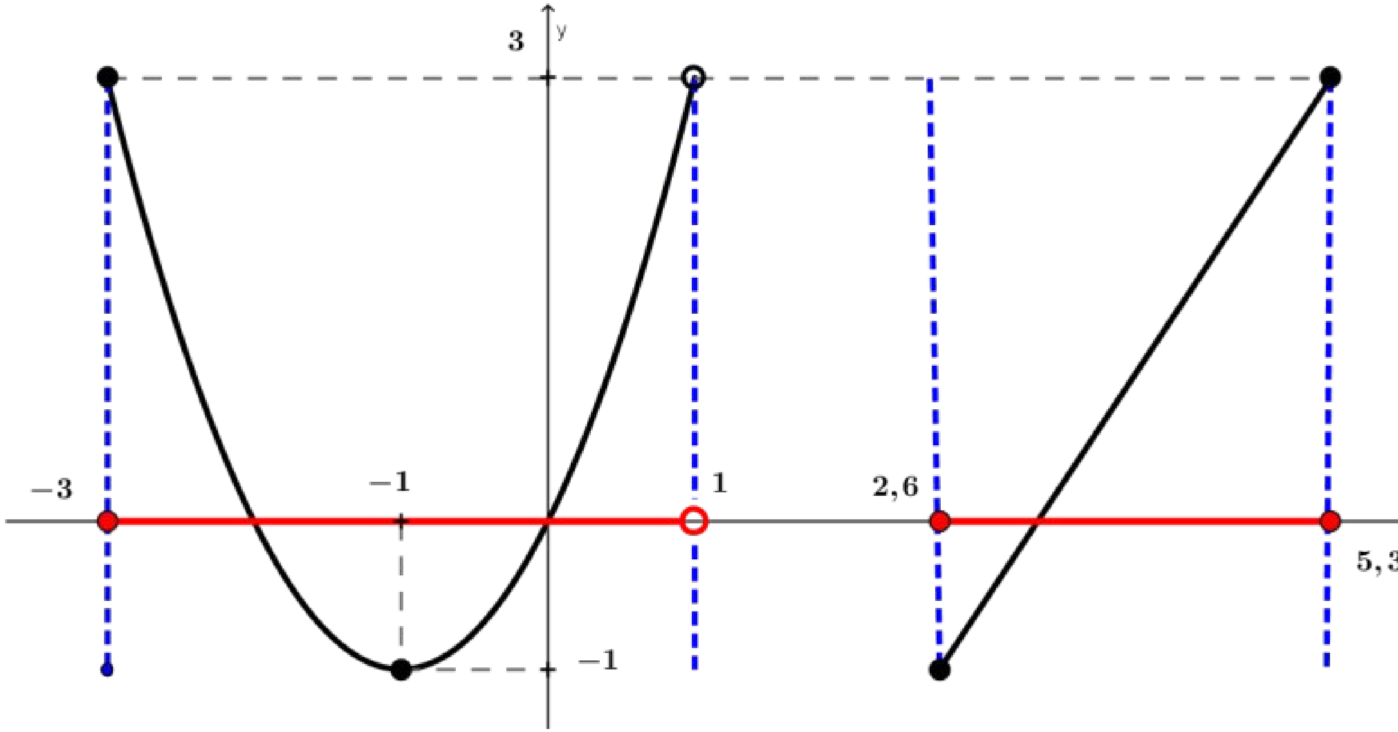




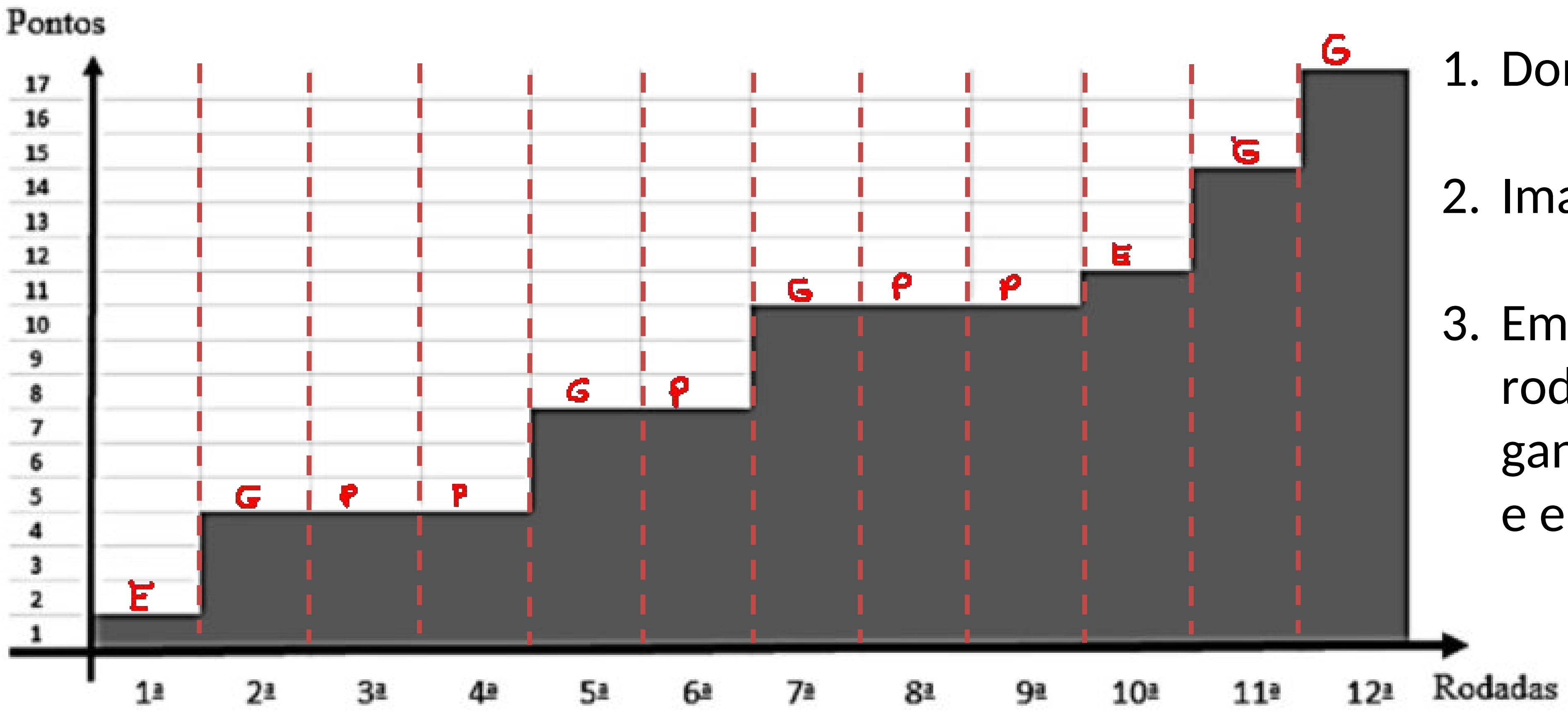
6. Encontre o conjunto $\{x \in D(f) \; / \; -1 \leq h(x) \leq 3\}$

$\{x \in D(h) \; / \; -1 \leq h(x) \leq 3\} = [-3\,,1[\;\cup\;[2{,}6\,,\,5{,}3]$





(UCB-DF) O gráfico mostra o número de pontos de uma equipe de futebol nas 12 primeiras rodadas de um campeonato. Sabendo que, nesse campeonato, em caso de vitória a equipe soma três pontos, em caso de empate soma um ponto e em caso de derrota não soma ponto.



1. Domínio?
2. Imagem?
3. Em quais rodadas o time ganhou, perdeu e empatou?

Assinale a alternativa correta.

a) A equipe perdeu os jogos da segunda, terceira e quarta rodadas.

b) Nas doze rodadas, o número de vitórias foi igual ao número de derrotas.

c) A média de pontos obtidos por rodada, nessas doze rodadas, é igual a 1,5 pontos.

d) A equipe conseguiu dois empates entre a sétima e a nona rodadas.

e) Nas doze rodadas, a equipe empatou três vezes.

Qual a imagem da função?

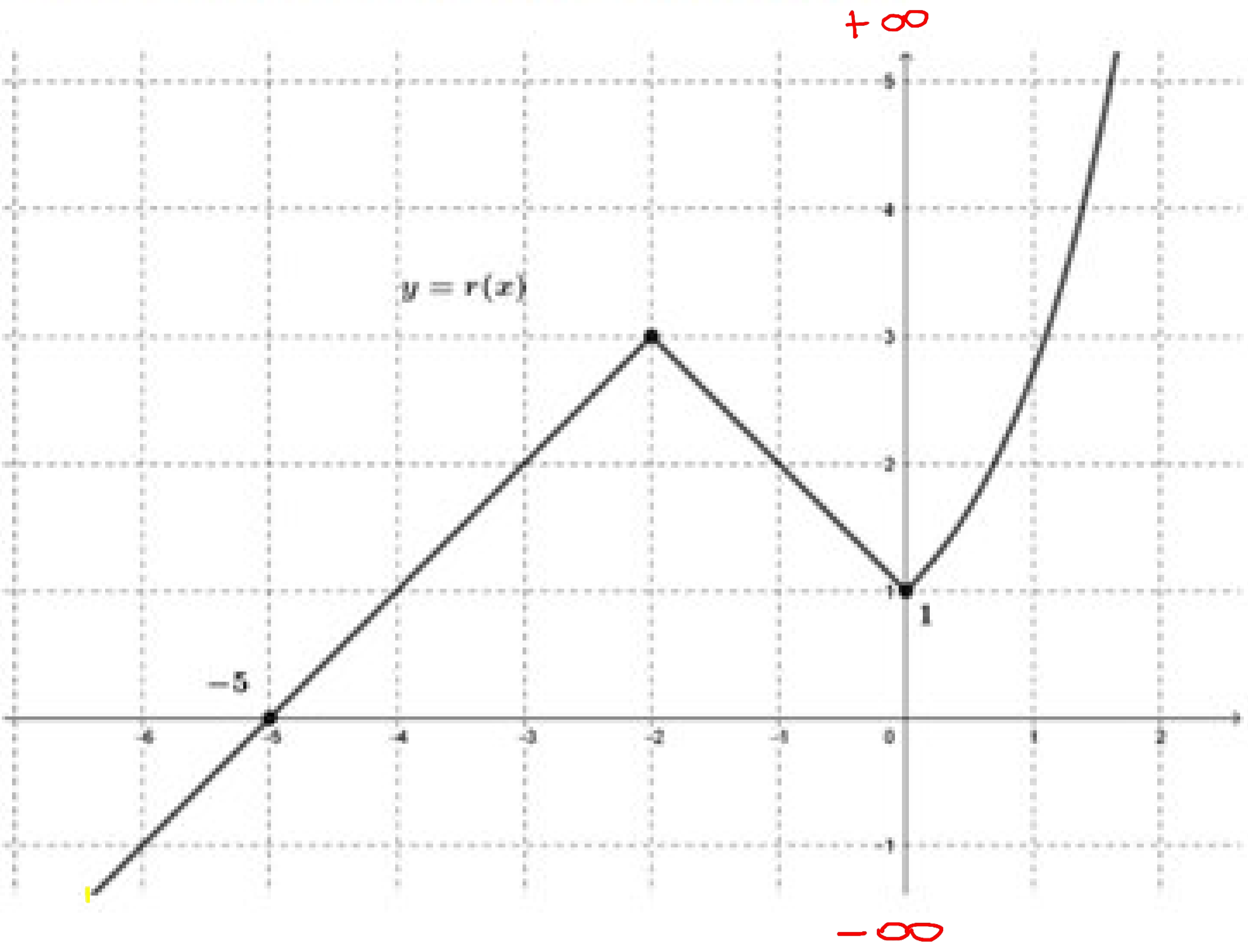
a) $(-5, \infty) \to \mathbb{R}$

b) $(-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$

c) $(-\infty, 2) \to \mathbb{R}$

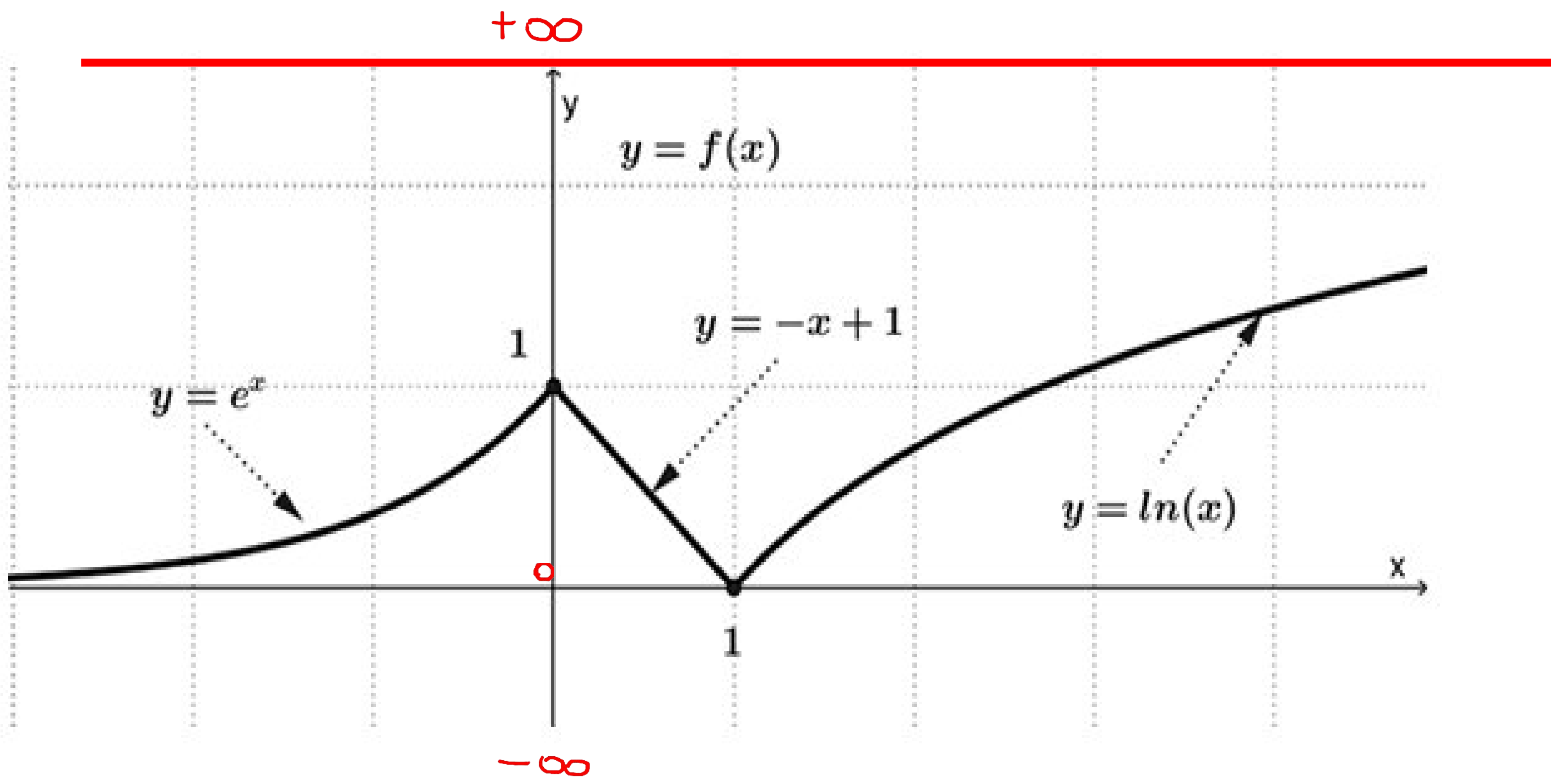
d) $(1, \infty) \to \mathbb{R}$

e) $(-5, 2) \to \mathbb{R}$



Qual a imagem da função?

a) (1 , ∞)
b) (0, ∞)
c) (– ∞ , 1)
d) (1 , ∞)
e) (– 5 , 2)



De acordo com o gráfico defina onde f(x) > 0

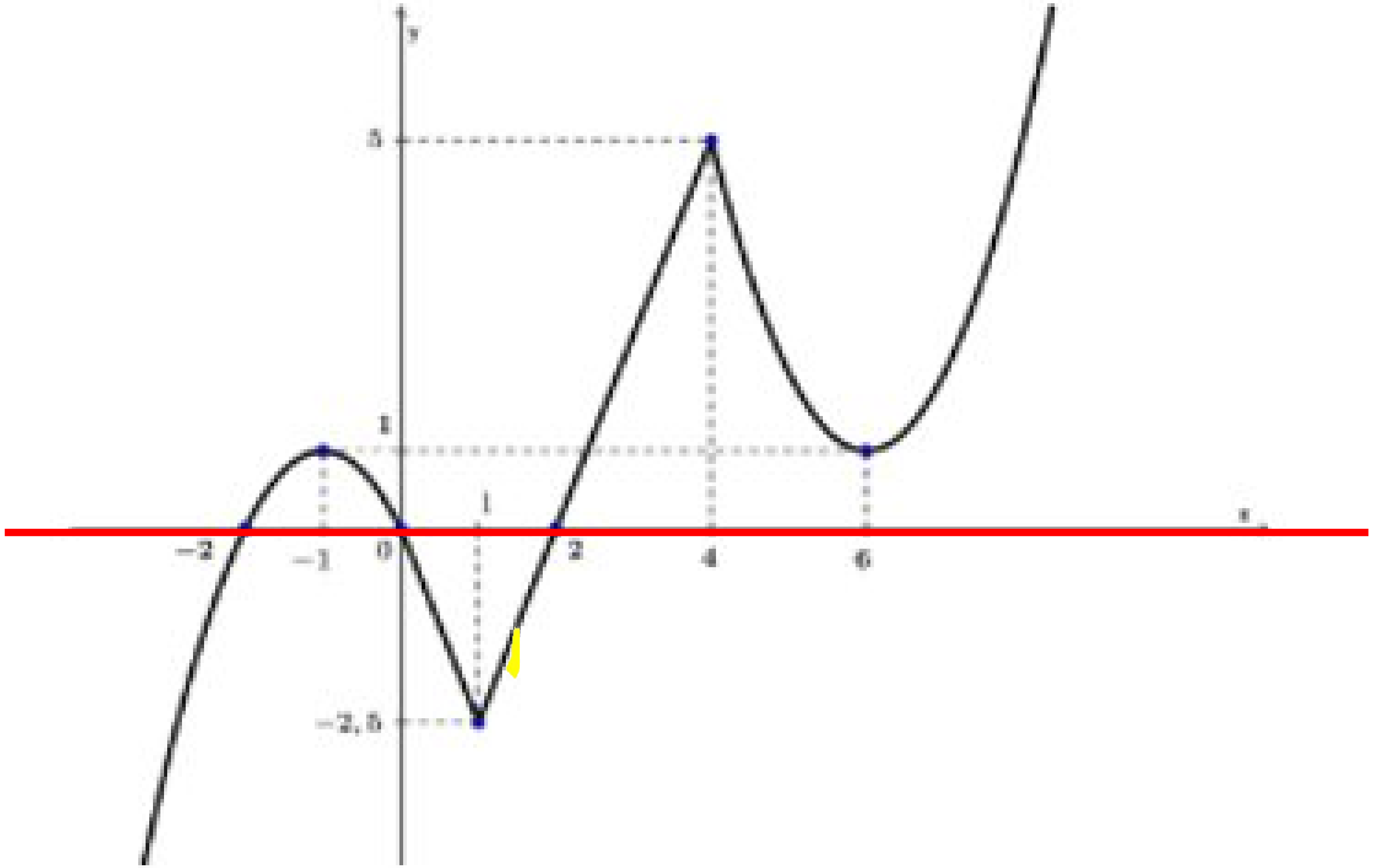
a) x = – 2, x = 0, x = 2

b) – 2 < x < 0 ou x > 2

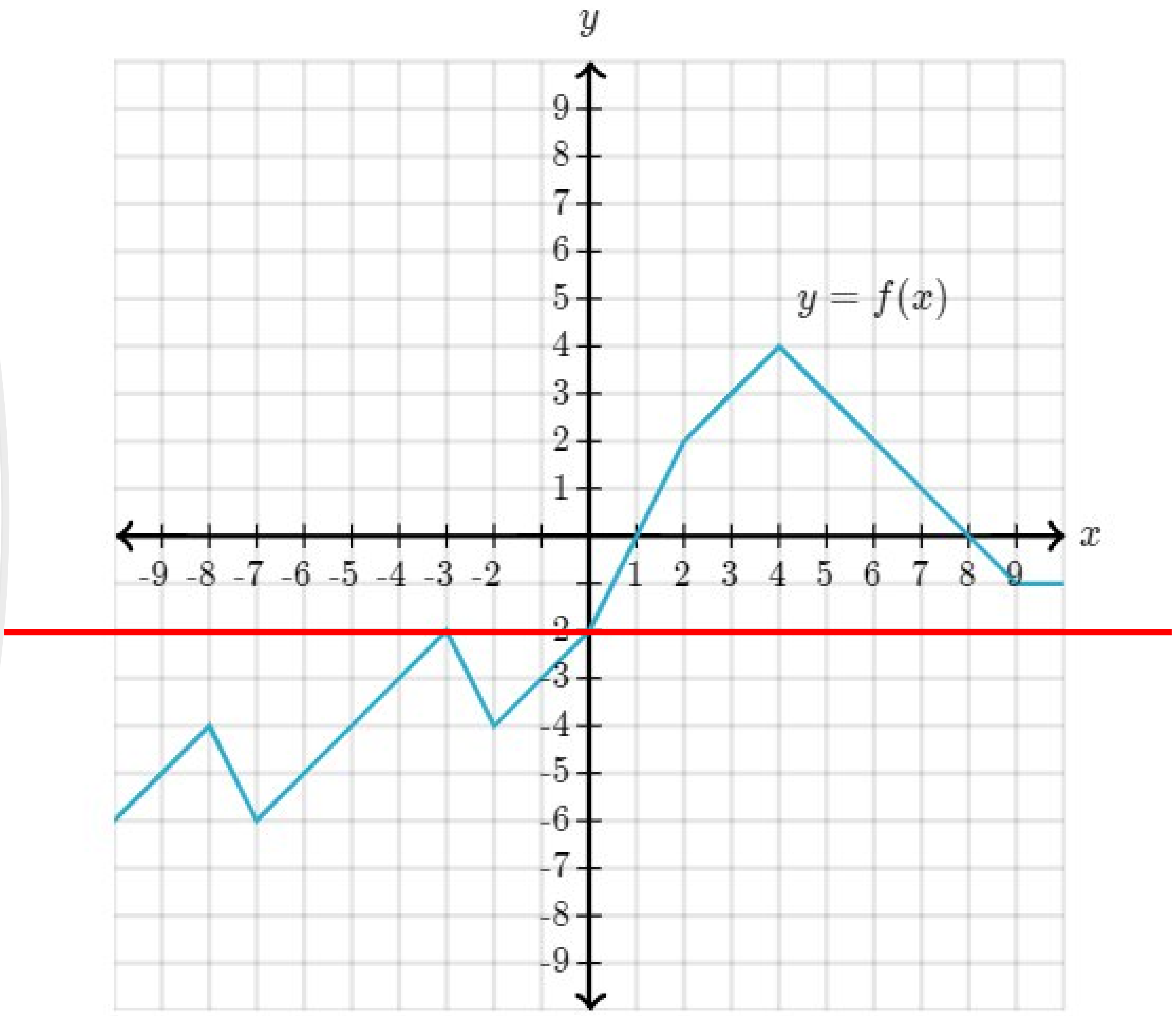
c) x < – 2 ou 0 < x < 2

d) 0 < x < 2

e) x < 2 ou x > 6

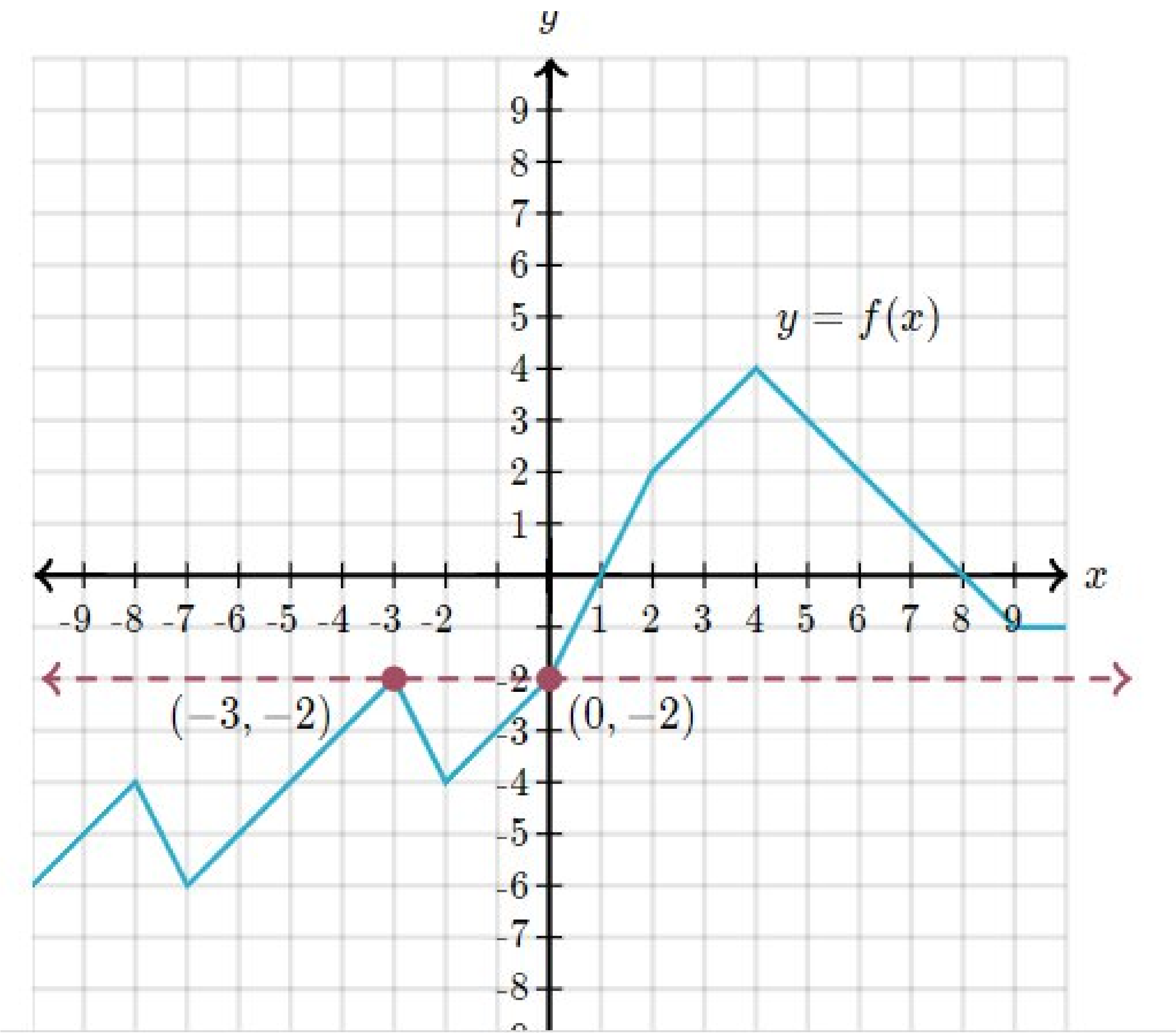


Qual o valor de x diferente de 0 para o qual f(x) = -2 ?



Qual o valor de x diferente de 0 para o qual f(x) = -2 ?

– 3



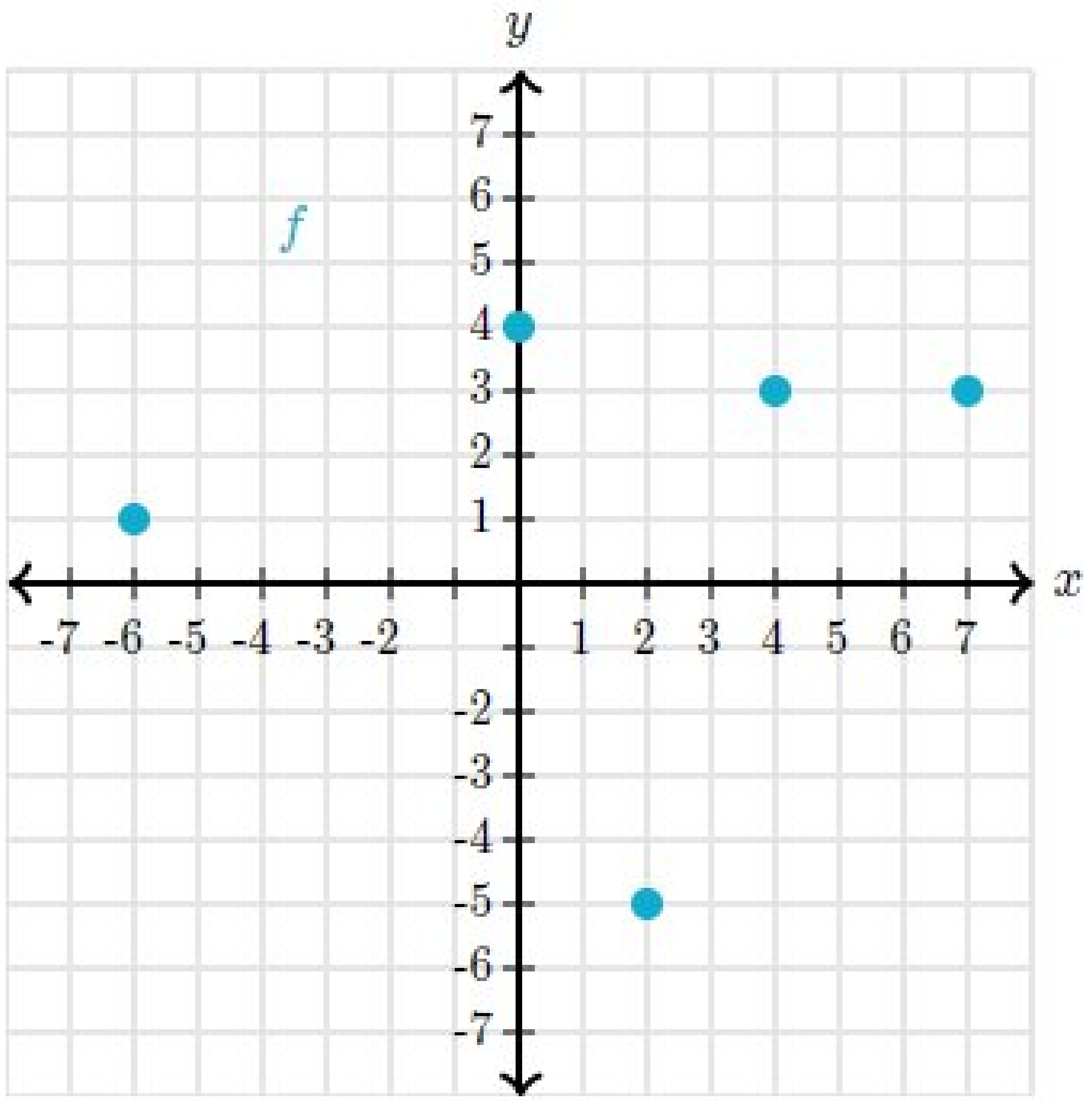
Qual o domínio de f?

A) $-5 \leq x \leq 4$

B) $-6 \leq x \leq 7$

C) os valores de x iguais a – 5, 1, 3 e 4.

D) os valores de x iguais a – 6, 0, 2, 4 e 7.



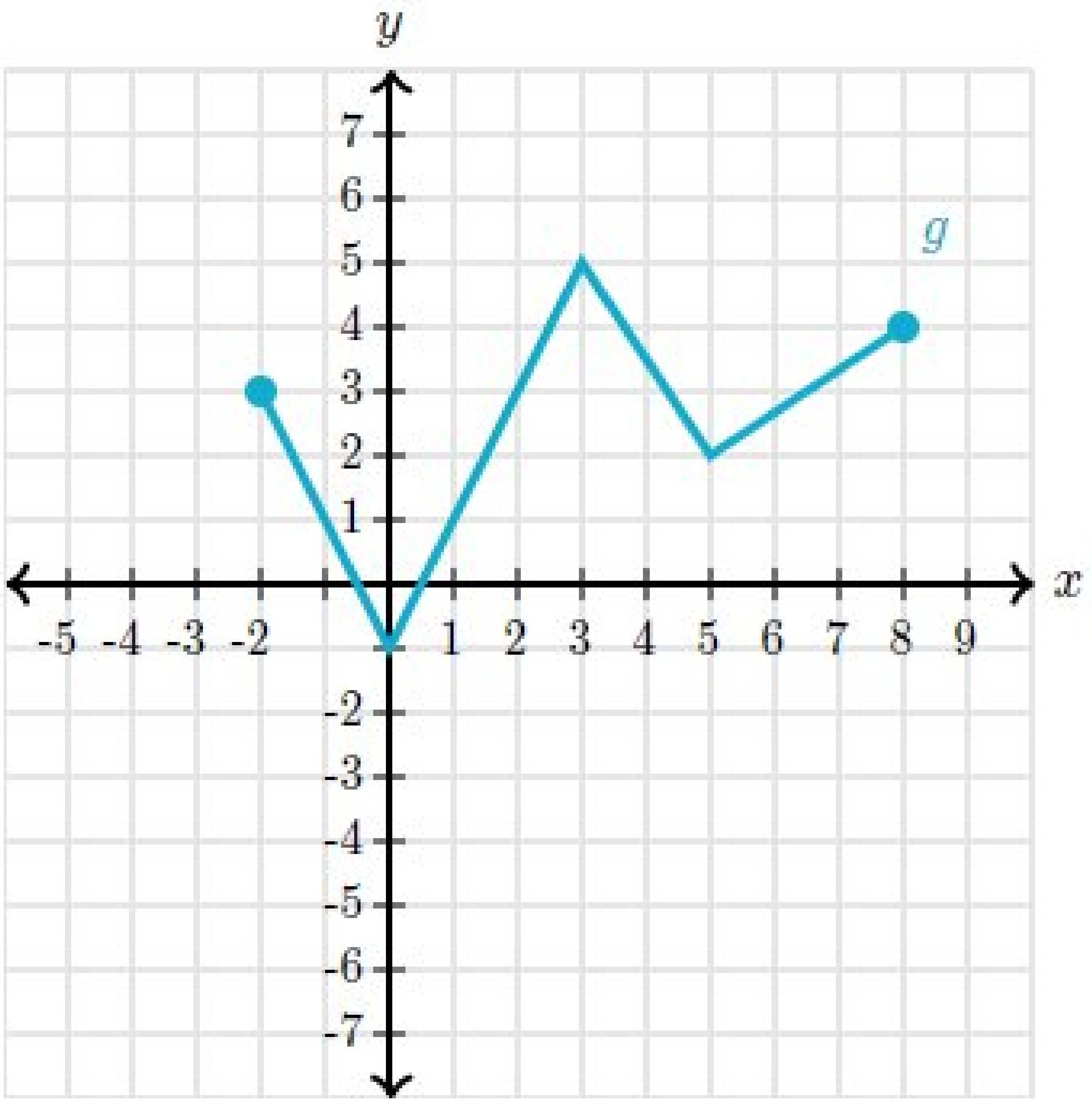
Qual o contradomínio de g?

A) $-2 \leq g(x) \leq 5$

B) $3 \leq g(x) \leq 4$

C) $-1 \leq g(x) \leq 5$

D) $-2 \leq g(x) \leq 8$



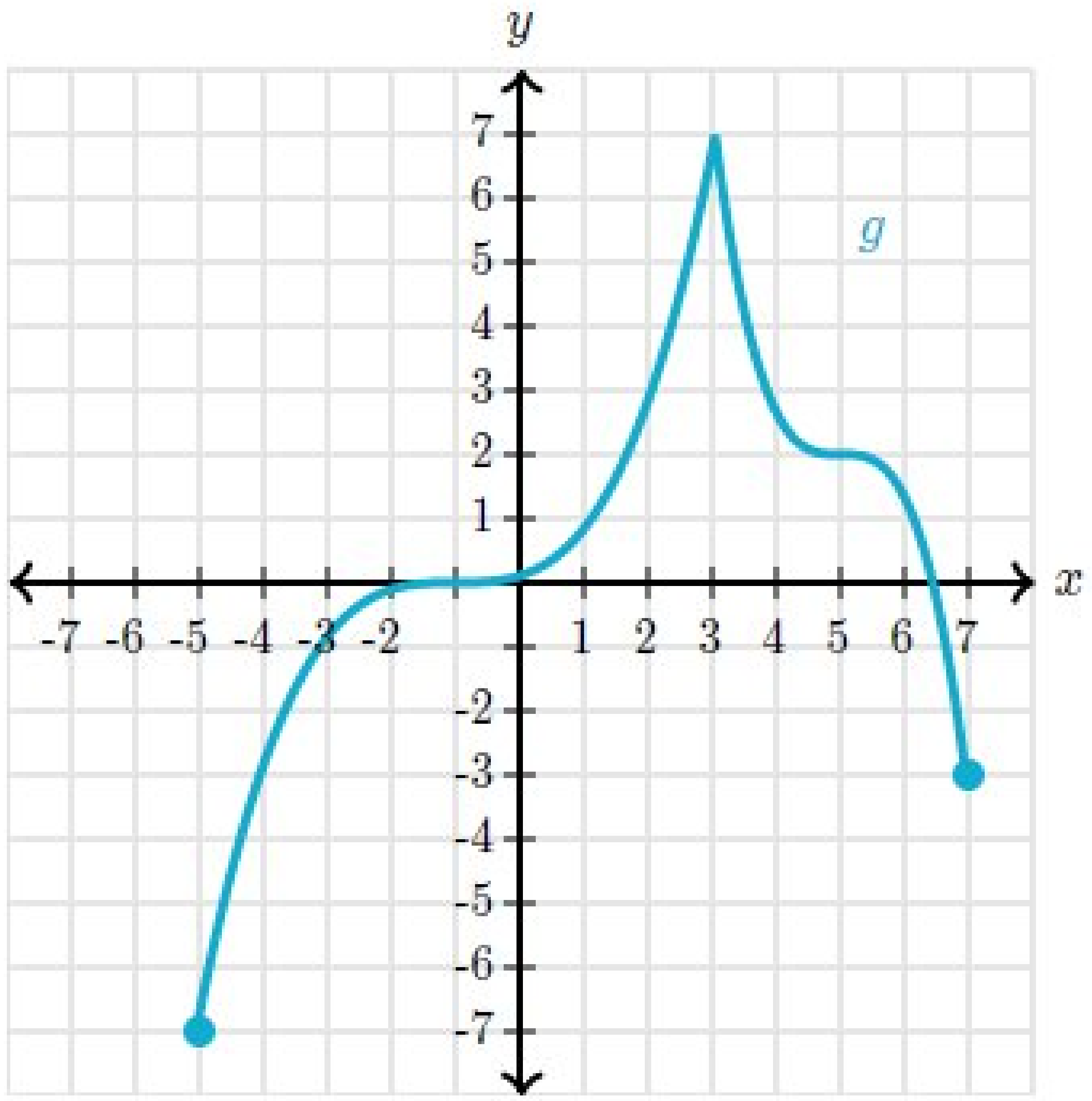
Qual o domínio de g?

A) $-7 \leq x \leq -3$

B) $-5 \leq x \leq -3$

C) $-5 \leq x \leq 7$

D) $-7 \leq x \leq 7$



Seja $y = f(x)$ uma função definida no intervalo [-3, 6]. Qual o valor de $f(\ f(2))$?

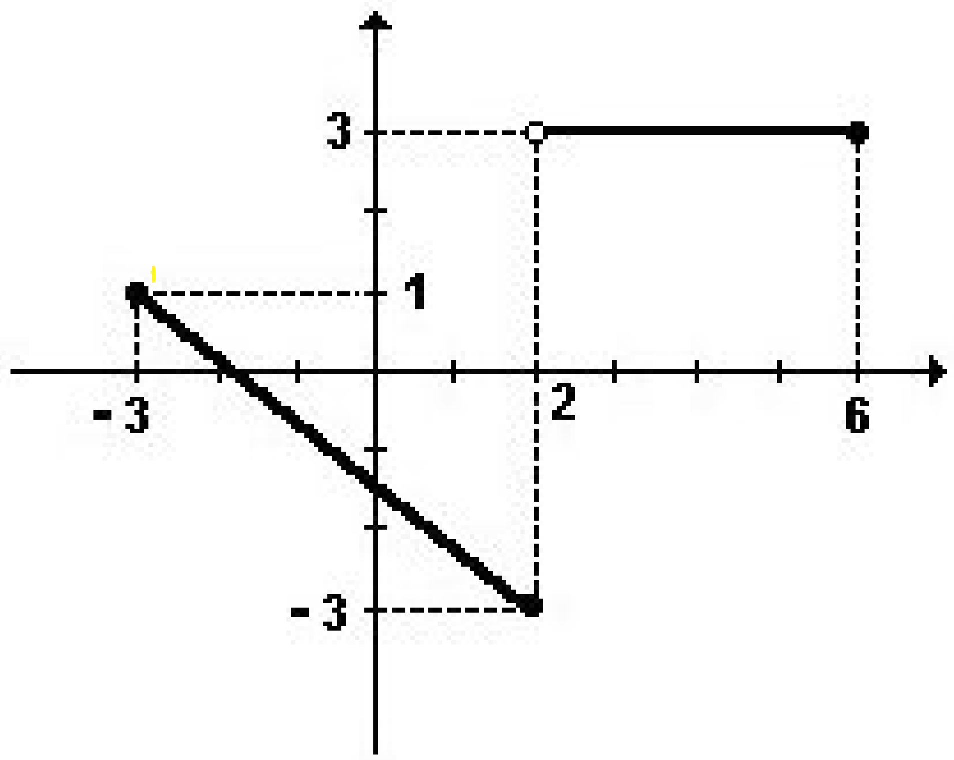
a) 3

b) 0

c) -3

d) -1/2

e) 1



Grupo Ser Educacional Gente criando o futuro

Função do 2°grau

Função do segundo grau

Definição: Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que $a \neq 0$.

A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ é

chamada de função do segundo grau ou função quadrática.

Exemplos

a) $f(x) = x^2$ $\quad$ $a = 1 \ , \ b = 0 \ , \ c = 0$

b) $f(x) = -x^2 + 1$ $\quad$ $a = -1 \ , \ b = 0 \ , \ c = 1$

c) $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ $\quad$ $a = 2 \ , \ b = 3 \ , \ c = -1$

Gráfico da função do segundo grau

Teorema: O gráfico de uma função do segundo grau é uma parábola.

A parábola pode ter concavidade voltada para cima ou concavidade voltada
para
baixo, de acordo com o sinal do coeficiente a.

Concavidade: $\boldsymbol{a > 0}$ $\boldsymbol{a < 0}$

Exemplos

Esboce o gráfico da função $f(x) = x^2$.

Solução:

$f(-3) = (-3)^2 = 9$

$f(-2) = (-2)^2 = 4$

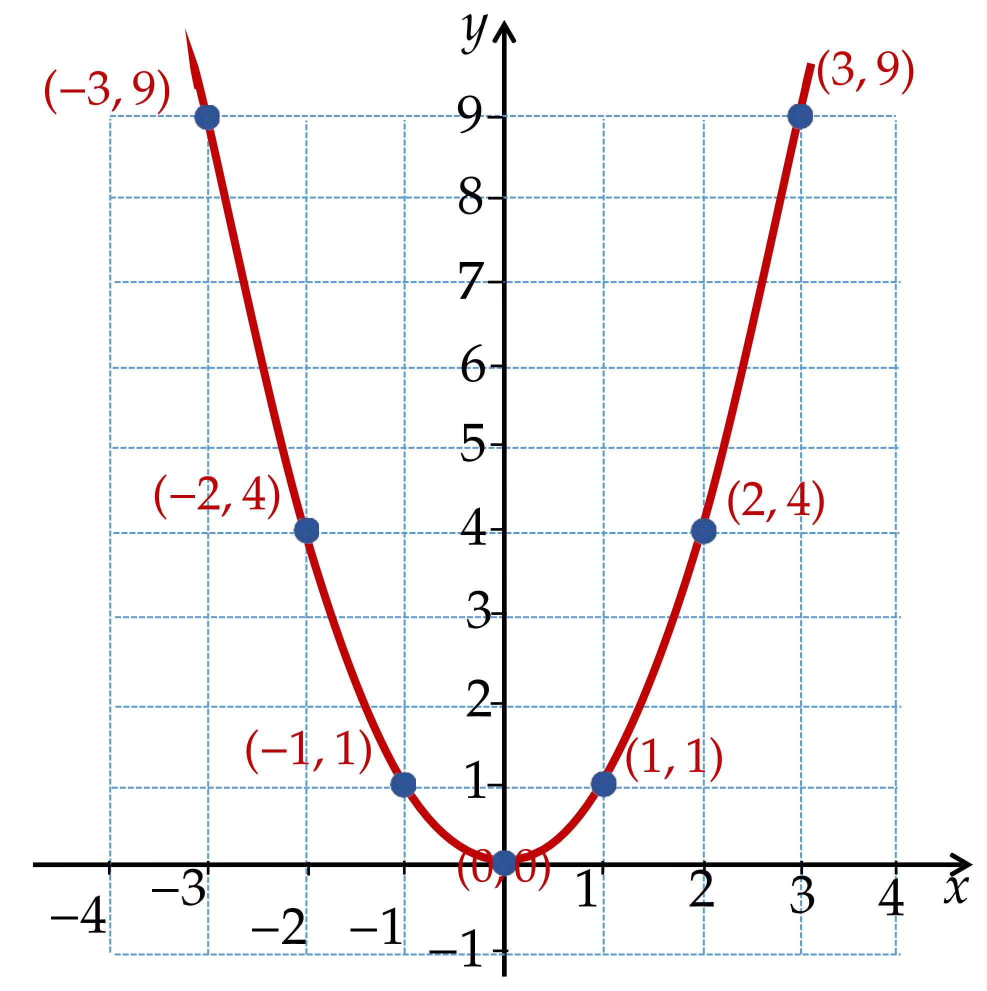
$f(-1) = (-1)^2 = 1$

$f(0) = 0^2 = 0$

$f(1) = (1)^2 = 1$

$f(2) = (2)^2 = 4$

$f(3) = (3)^2 = 9$



Zeros da função do segundo grau

Os zeros da função $y = ax^2 + bx + c$ podem ser obtidos resolvendo a equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ utilizando a fórmula de Bháskara.

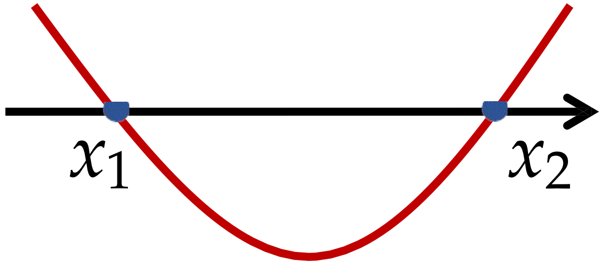
$$X = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

A quantidade de zeros reais obtidas para uma função quadrática depende do sinal de Δ.

$\Delta > 0$

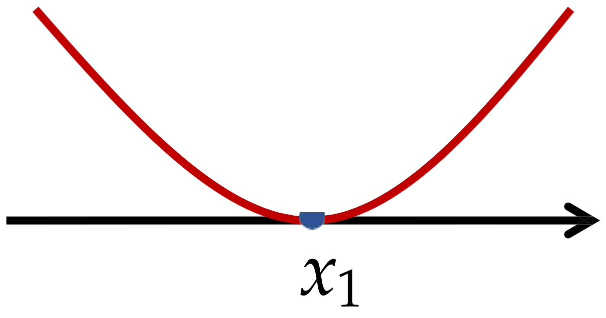
Dois zeros



Zeros da função do segundo grau

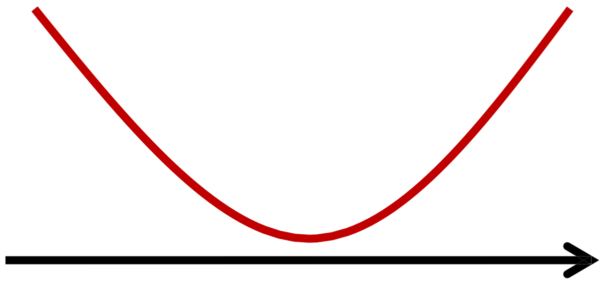
$\Delta = 0$

Um único zero



$\Delta < 0$

Nenhum zero

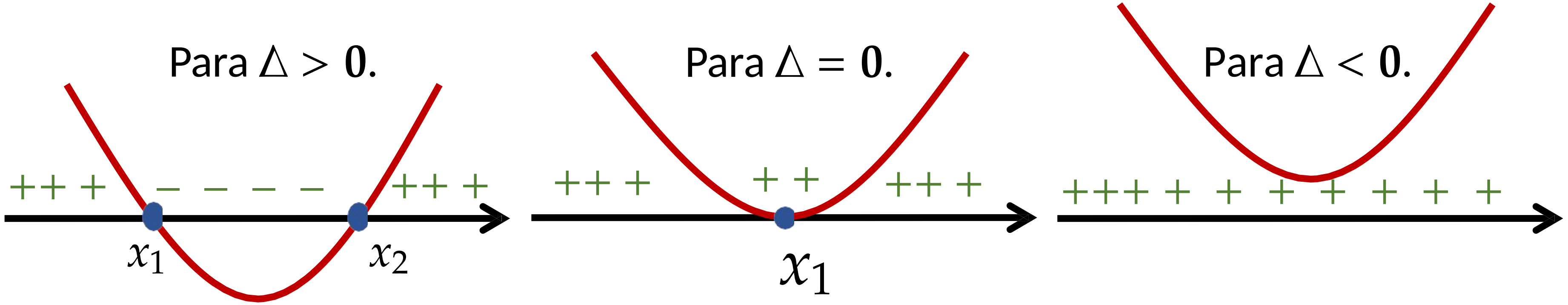


Sinal da função do segundo grau

O sinal da função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ depende dos sinais de a (determina a concavidade) e de Δ (determina a quantidade de zeros).

Concavidade voltada para cima

$(a > 0)$

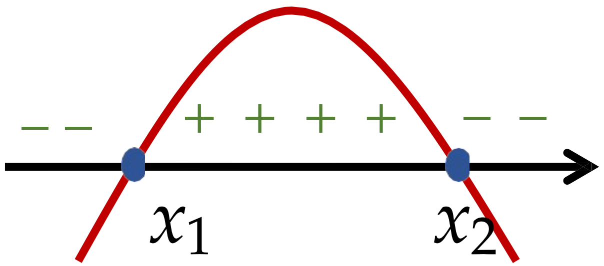


Sinal da função do segundo grau

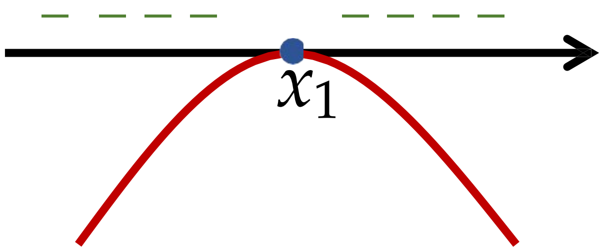
Concavidade voltada para baixo

$(a < 0)$

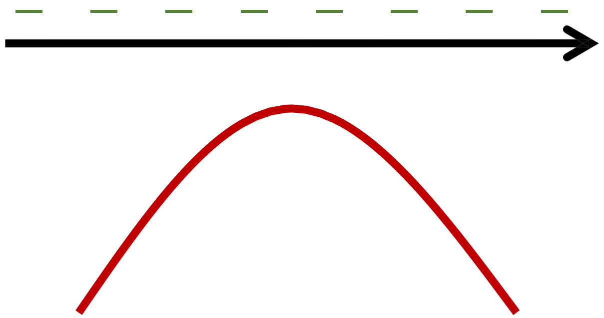
Para $\Delta > 0$.



Para $\Delta = 0$.



Para $\Delta < 0$.



Exemplos

Esboce o gráfico, determine os zeros e o sinal da função quadrática $y = x^2 - 4x + 3$.

Solução:

Neste caso, tem-se

$$a = 1, \quad b = -4 \text{ e } c = 3.$$

Exemplos

Esboce o gráfico, determine os zeros e o sinal da função quadrática $y = x^2 - 4x + 3$.

Solução:

Neste caso, tem-se

$$a = 1, \quad b = -4 \text{ e } c = 3.$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4.(1).(3) = 4$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2(1)} = \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1.$$

Portanto,

$$x_1 = 1 \text{ e } x_2 = 3 \qquad \text{(Zeros de } f\text{)}$$

Exemplos

Esboce o gráfico, determine os zeros e o sinal da função quadrática $y = x^2 - 4x + 3$.

Solução:

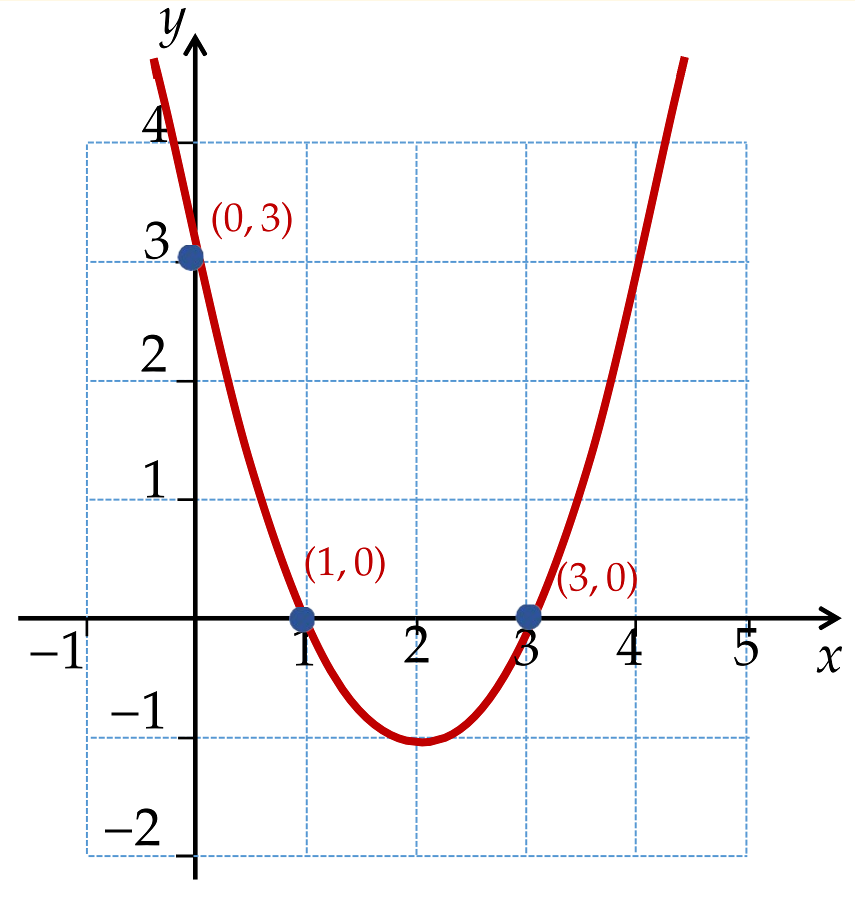
Como $c = 3$, tem-se que o gráfico intercepta o eixo y no ponto $(0, 3)$.

Como $a > 0$, a concavidade é voltada para cima.

Sinal

Positiva: $(-\infty, 1)$ U $(3, +\infty)$

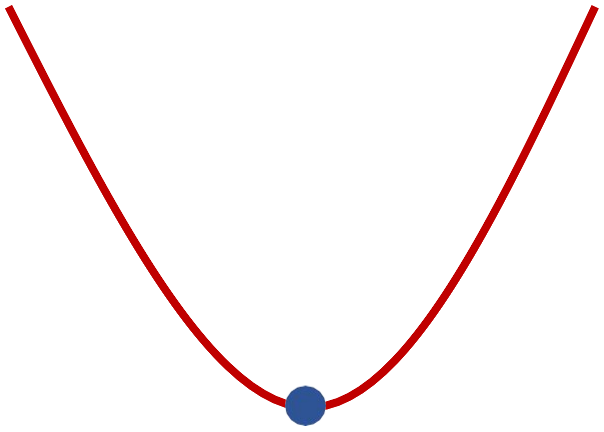
Negativa: $(1,3)$

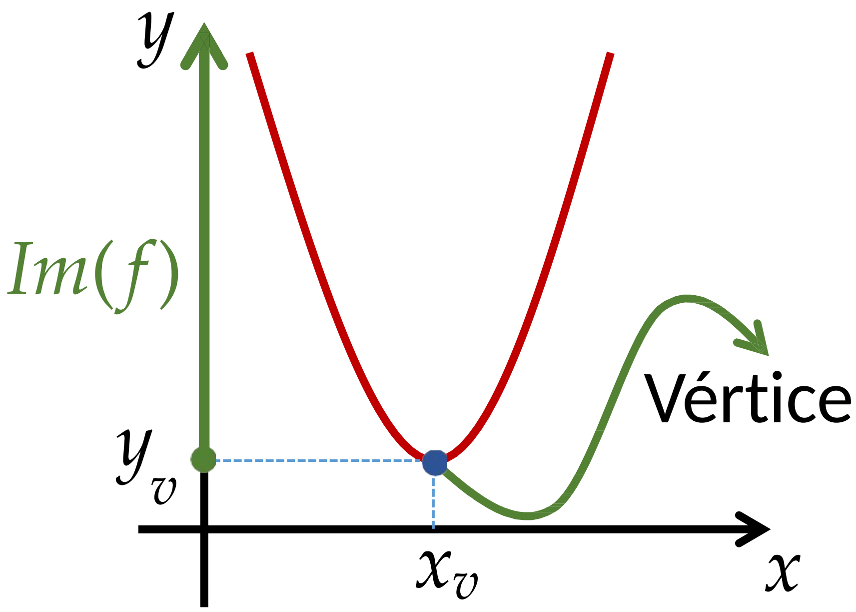


Coordenadas do vértice

No gráfico de uma função quadrática $y = ax^2 + bx + c$, o ponto mínimo (quando $a > 0$) ou ponto máximo (quando $a < 0$) é chamado de vértice da parábola.

Quando $a > 0$:

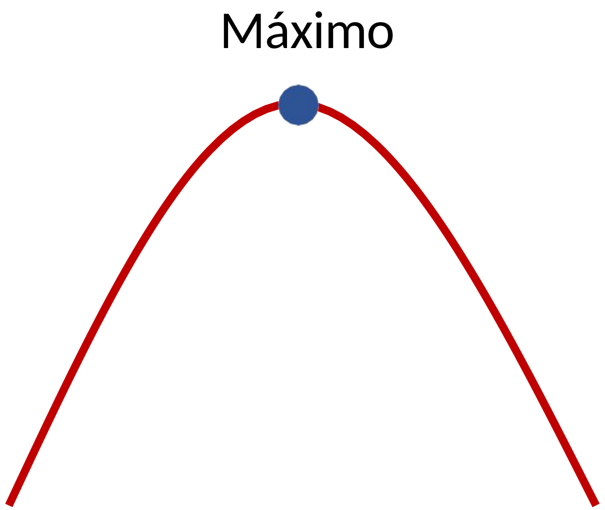


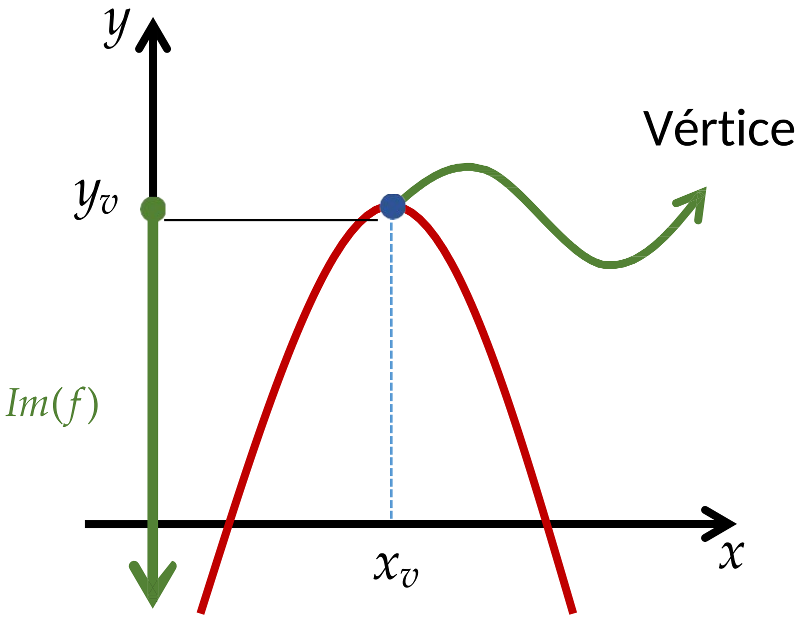


Se $a > 0$, então: $Im(f) = [y_v, +\infty)$.

Coordenadas do vértice

Quando $a < 0$:





Se $a < 0$, então: $Im(f) = (-\infty, y_v]$.

Coordenadas:

$$x_v = -\frac{b}{2a}$$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

Exemplos

Esboce o gráfico da função $y = x^2 - 4x + 5$.

Solução:

Neste caso, tem-se:

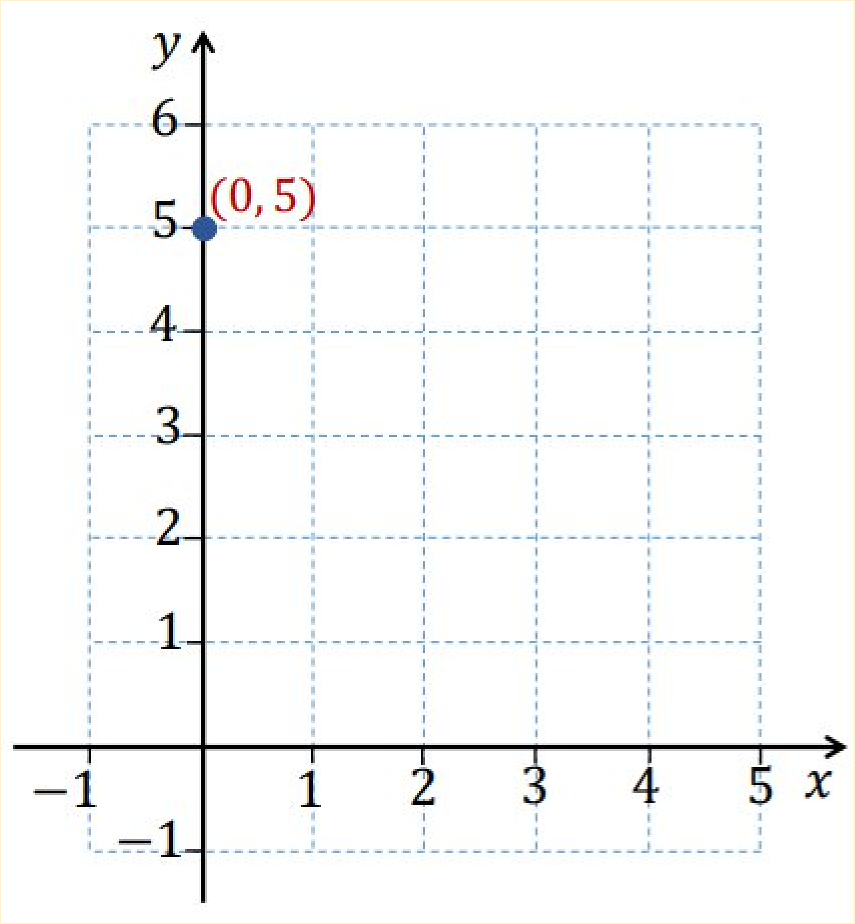
$$a = 1, \quad b = -4 \text{ e } c = 5.$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4.(1).(5) = -4$$

Portanto, f não possui zeros.

Como $c = 5$, tem-se que o gráfico intercepta o eixo y no ponto $(0, 5)$.



Exemplos

Esboce o gráfico da função $y = x^2 - 4x + 5$.

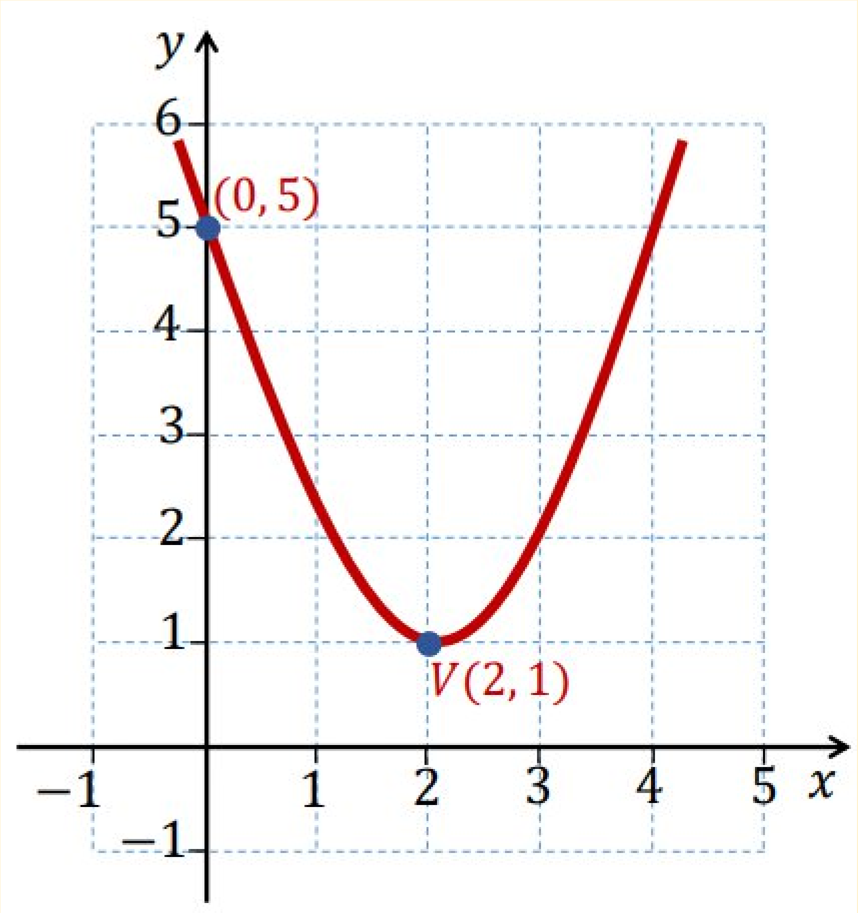
Solução:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-4)}{2.(1)} = 2$$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(-4)}{4.(1)} = 1$$

Portanto, o vértice da parábola é dado por $V(2,1)$.

Como $a > 0$, a concavidade é voltada para cima.



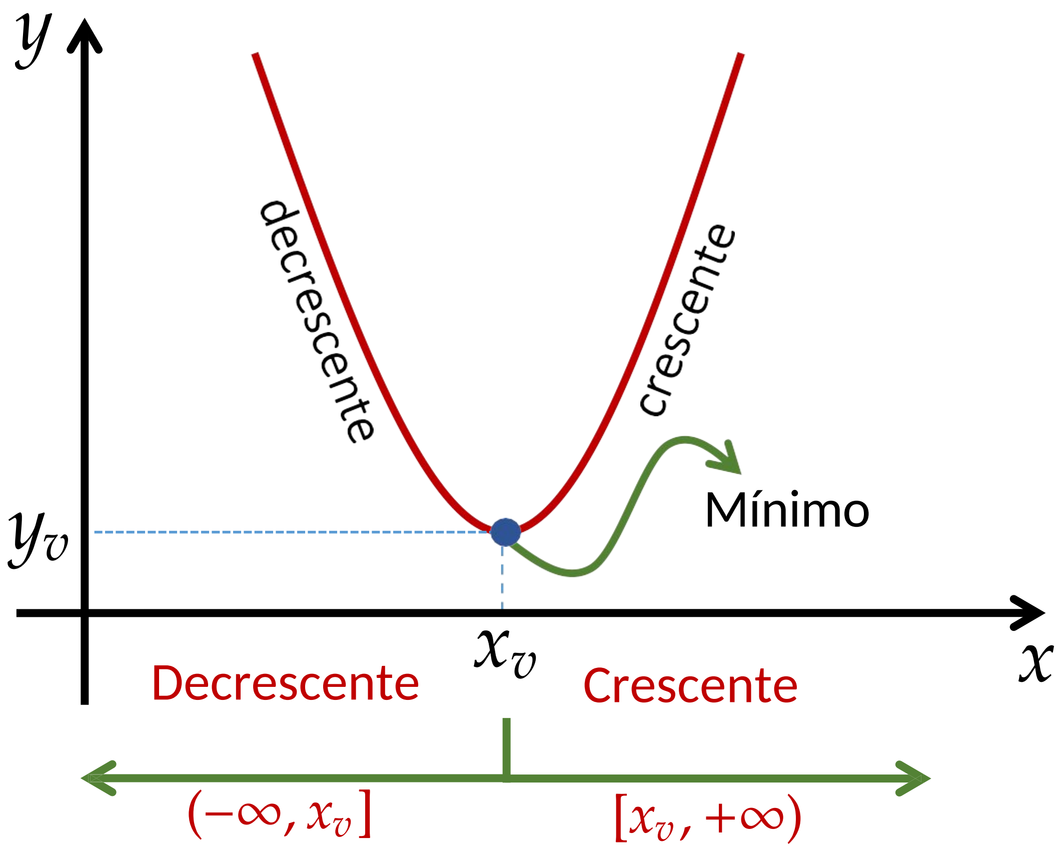
(crescimento/decrescimento)

A abscissa do vértice (x_v) na função quadrática $y = ax^2 + bx + c$, delimita onde ocorre uma mudança de comportamento no gráfico da função.

Mínimo

Muda de decrescente para crescente.

$(a > 0)$

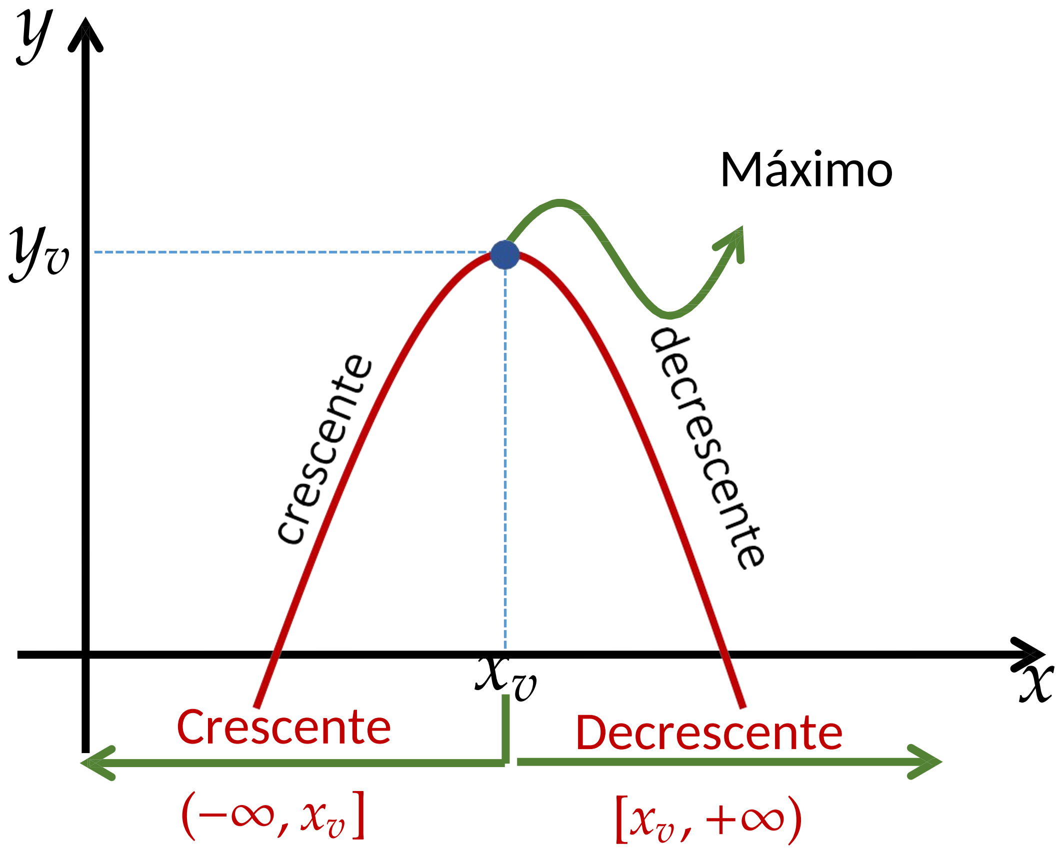


(crescimento/decrescimento)

Máximo

Muda de crescente para decrescente.

$(a < 0)$



Exemplos

Determine os intervalos de crescimento e decrescimento da função $y = x^2 - 4x + 5$.

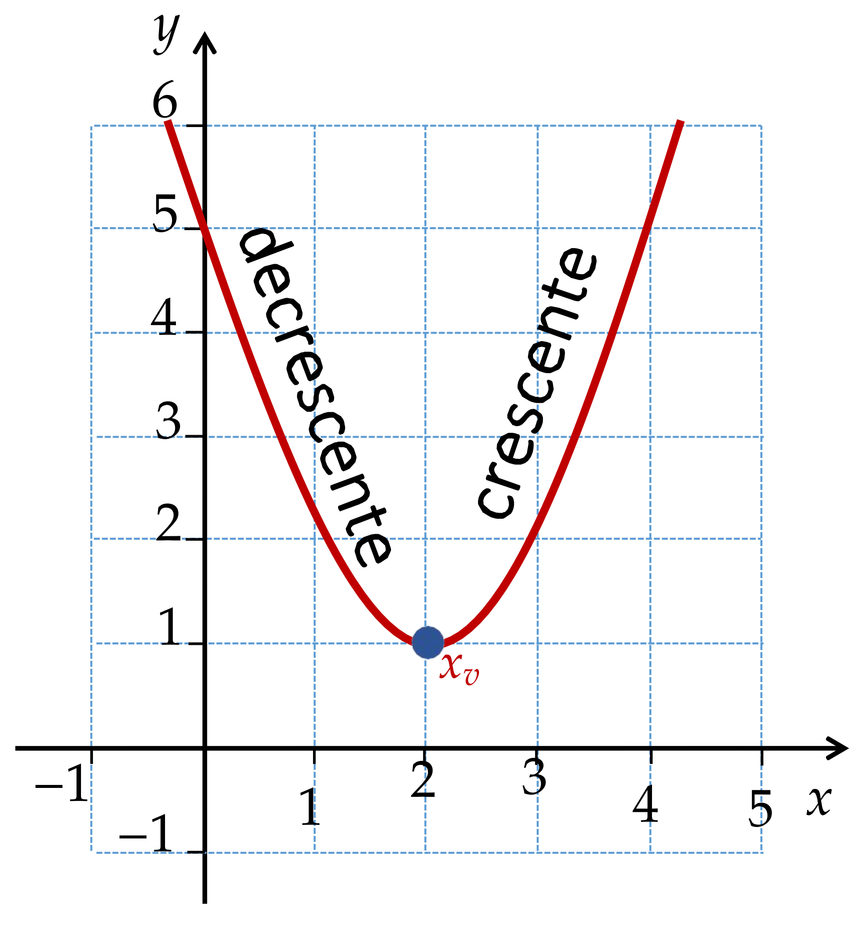
Solução:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-4)}{2.(1)} = 2$$

$(a > 0) \Rightarrow$ Função côncava para cima!

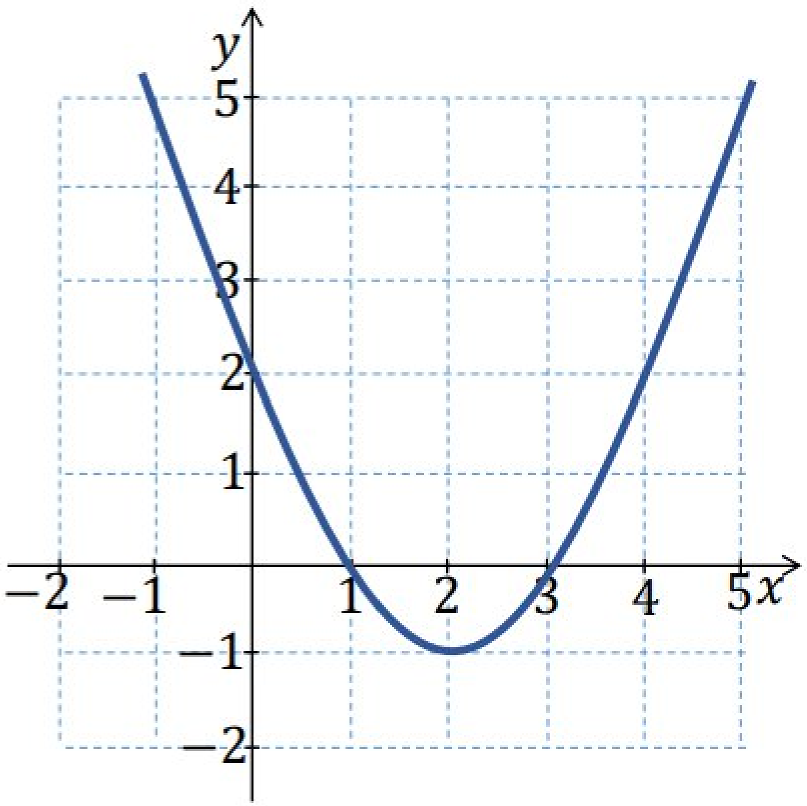
Decrescente: $(-\infty, 2]$

Crescente: $[2, +\infty)$



Exercícios

1. Considere o gráfico da função f ao lado.



(a) Qual o domínio e a imagem de f;

(b) Qual é a imagem de 2?

(c) Determine $f(0)$;

(d) Determine para quais valores de x se tem $f(x) = 2$?

(e) Quais valores de x possuem imagem igual a 0?

(f) Para quais valores de x as imagens são números positivos?

(g) Para quais valores de x as imagens são números negativos?

Respostas

1. Considere o gráfico da função f ao lado.

(a) Q $D(f) = \mathbb{R}$ $Im(f) = [-1, +\infty)$

(b) Qual é a imagem de 2? $f(2) = -1$

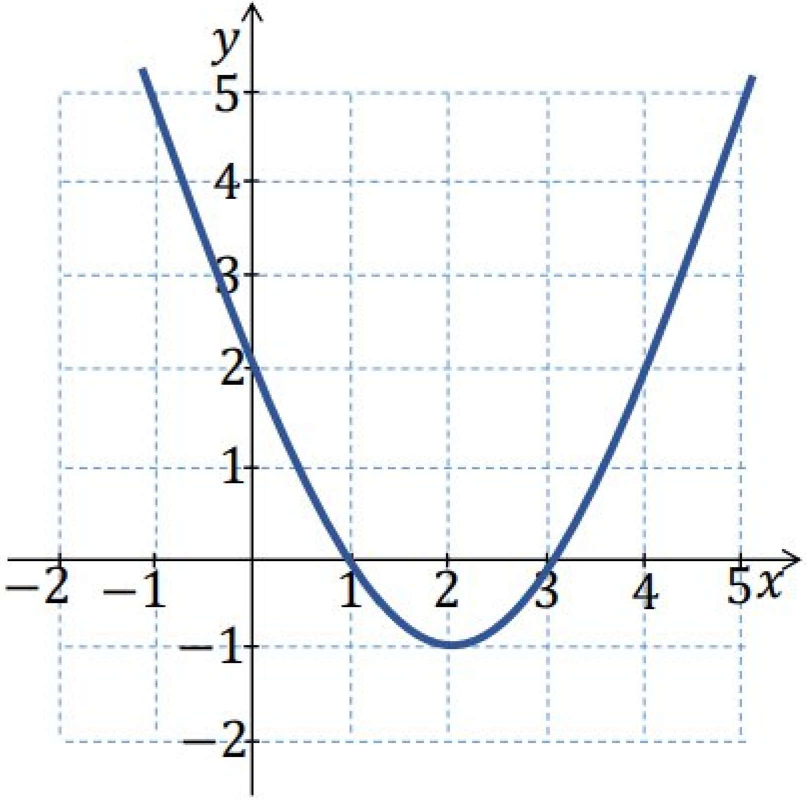
(c) Determine $f(0)$; $f(0) = 2$

(d) Determine para quais valores de x se tem $f(x) = 2$? $x = 0$ $x = 4$

(e) Quais valores de x possuem imagem $x = 1$ $x = 3$ igual a 0?

(f) Para quais valores de x as imagens são números positivos? $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

(g) Para quais valores de x as imagens são números negativos? $(1,3)$



Exercícios

2. Para cada uma das funções de 2º grau a seguir, determine os zeros (se existirem), as coordenadas do vértice, o conjunto imagem e esboce o gráfico.

(a) $y = x^2 - 2x$

(b) $y = -x^2 + 2x + 3$

(c) $y = -x^2 - 1$

(d) $y = x^2 - 4x + 4$

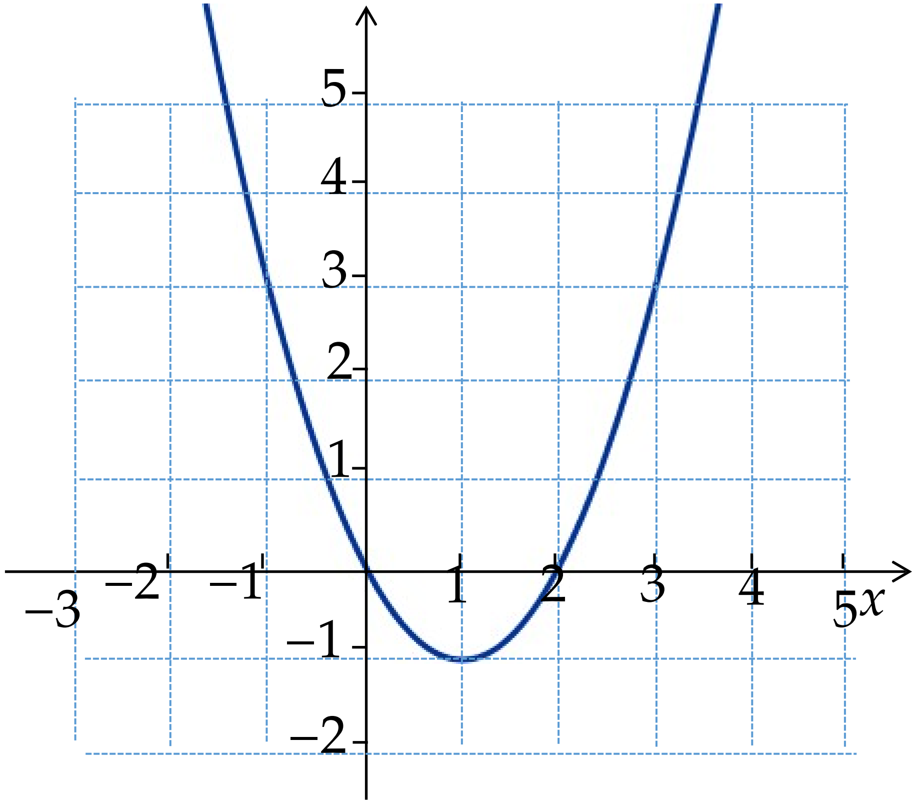
Respostas

(a) $y = x^2 - 2x$

Zeros: $x_1 = 0$ e $x_2 = 2$

Vértice: $V(1, -1)$

Imagem: $Im(f) = [-1, +\infty)$



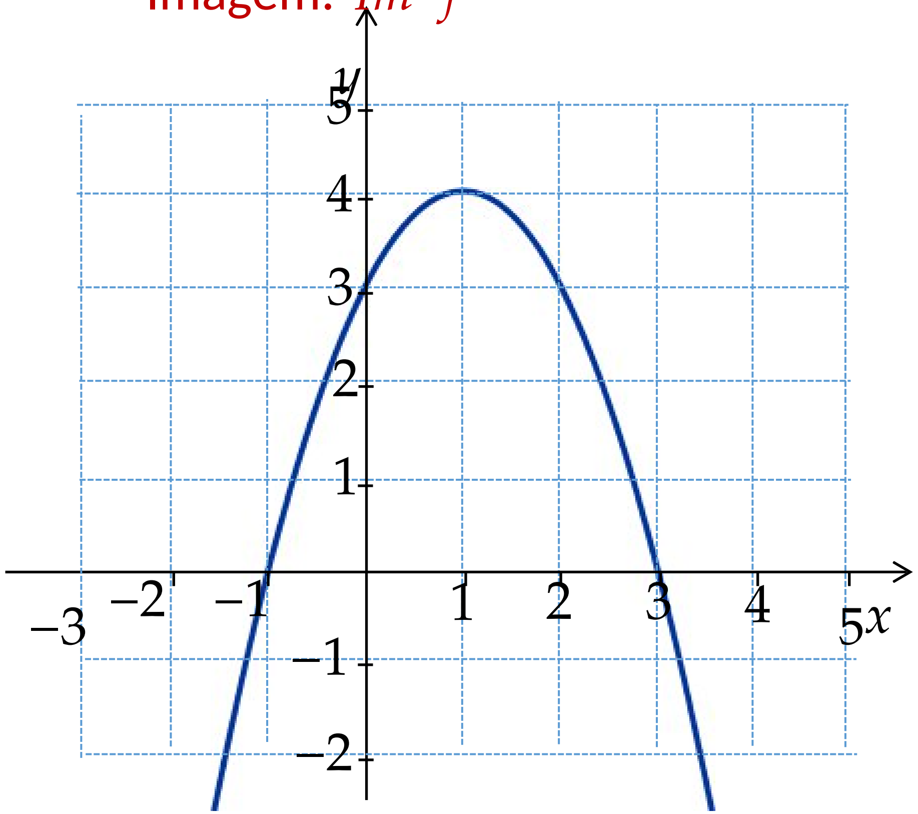
Respostas

(b) $y = -x^2 + 2x + 3$

Zeros: $x_1 = -1$ e $x_2 = 3$

Vértice: $V(1, 4)$

Imagem: $Im(f) = (-\infty, 4]$

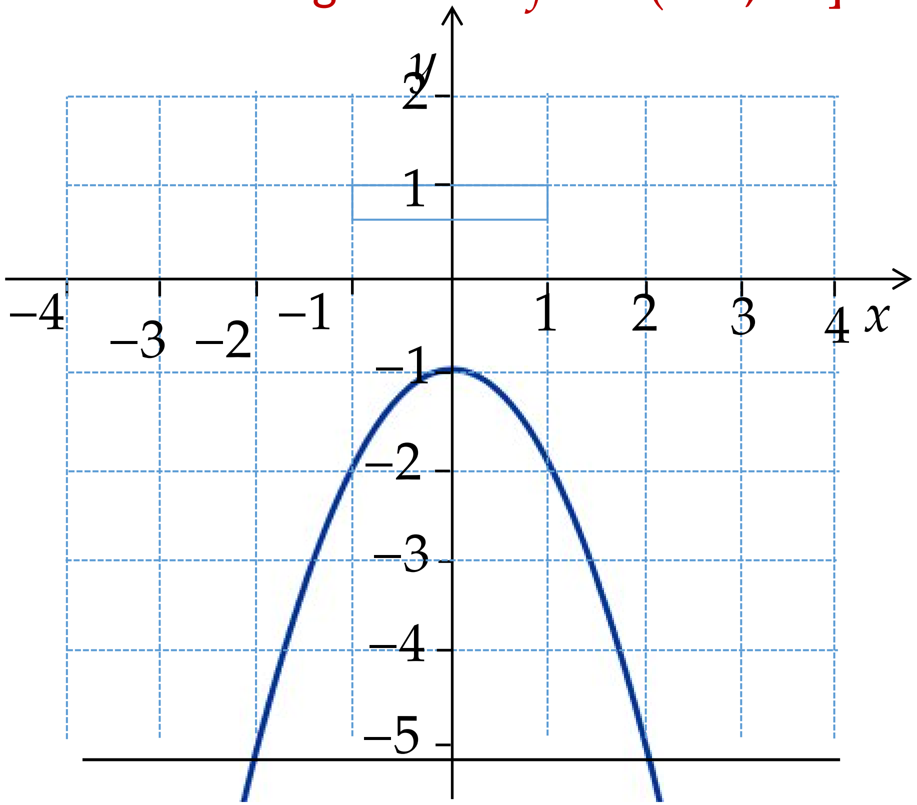


(c) $y = -x^2 - 1$

Zeros: Não existem.

Vértice: $V(0, -1)$

Imagem: $Im(f) = (-\infty, -1]$



Respostas

(d) $y = x^2 - 4x + 4$

Zeros: 2

Vértice: $V(2, 0)$

Imagem: $Im(f) = [0, +\infty)$