Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de ciencias de la electrónica

Robótica I

Cinem

CINEMÁTICA DE POSICIÓN

La **cinemática** del robot estudia el **movimiento** del mismo con **respecto a un sistema de referencia fijo** sin considerar las fuerzas y momentos que originan dicho movimiento.

- Busca las relaciones entre la **localización** (posición y orientación) del extremo del robot y los valores de sus **coordenadas articulares.**
- Busca las relaciones entre las **velocidades** del movimiento de las articulaciones y el **extremo** (modelo diferencial – matriz Jacobiana).

CINEMÁTICA DE POSICIÓN

Cinemática DIRECTA

Determina la localización extremo del del robot, respecto a un sistema con coordenadas de referencia, de conocidos los valores de las articulaciones y los parámetros geométricos de los elementos del robot.

Cinemática INVERSA

Conocida la localización del robot, determina cual debe ser la configuración del robot (articulaciones y parámetros geométricos).

Desde el punto de vista de la robótica, el problema cinemático inverso es más complejo.

CINEMÁTICA DE POSICIÓN

$x=f_x(q_1, q_2, \ldots.q_n)$

$y=f_y(q_1, q_2, \ldots.q_n)$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\Upsilon=f_\Upsilon(q_1, q_2, \ldots.q_n)$

$q_1=f_1(x,y,z,\alpha,\beta,\Upsilon)$

$q_2=f_2(x,y,z,\alpha,\beta,\Upsilon)$

$q_n=f_n(x,y,z,\alpha,\beta,\Upsilon)$

CINEMÁTICA DE POSICIÓN DIRECTA

- Formas de abordar el problema cinemático directo:

Métodos geométricos

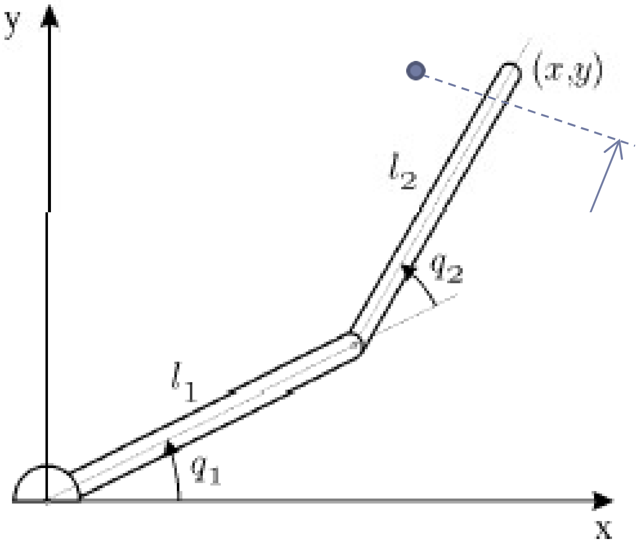
- Método no sistemático (aplicación limitada a robots con pocos grados de libertad).
- Utiliza relaciones geométricas para obtener directamente la posición del extremo del robot en función de las variables articulares.
- Requiere buena visión espacial

Métodos basados en cambios de sistemas de referencia

- Método sistemático (Adopta determinadas convenciones para resolver el modelo, independientemente de las características geométricas del robot).
- Utiliza las **matrices de transformación homogénea** => Método de Denavit Hartenberg (1955)

CINEMÁTICA DIRECTA: MÉTODO GEOMÉTRICO

- Es un método no sistemático que utiliza las relaciones geométricas para obtener la posición del extremo del robot.
- Normalmente se emplea para la obtención de la posición y no de la orientación
- Se usan en robots de pocos grados de libertad.



Para un brazo con dos GDL:

$$x = l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1+q_2)$$

$$y = l_1 \,\mathrm{sen}\, q_1 + l_2 \,\mathrm{sen}(q_1+q_2)$$

CINEMÁTICA DIRECTA: MTH

Un robot se puede considerar como una **cadena cinemática** formada por objetos rígidos (**eslabones**) unidos entre sí por **articulaciones**.

- Si se establece un sistema de referencia fijo en la base del robot y se describe la localización de cada eslabón con respecto a dicho sistema de referencia.

$$\Downarrow$$

- Se puede encontrar una matriz de transformación homogénea T que:
  - Será función de las coordenadas articulares.
  - Relacione la localización del extremo del robot respecto al sistema de referencia fijo.

CINEMÁTICA DIRECTA: MTH

- A cada eslabón se le asocia un sistema de referencia solidario.
- Es posible representar las traslaciones y rotaciones relativas entre los distintos eslabones.
- La matriz ${}^{i-1}_{i}A$ representa la posición y orientación relativa entre los stmas asociados a dos eslabones consecutivos del robot.
- La cadena cinemática del robot se puede representar parcial o totalmente, concatenando las matrices A:
  - $${}^{0}_{i}T = {}^{0}_{1}A \; {}^{1}_{2}A \; {}^{2}_{3}A \ldots\ldots {}^{i-1}_{i}A$$
- Existe un método sistemático para situar los sistemas de coordenadas asociados a cada eslabón y obtener la cadena cinemática del robot. Método de Denavit-Hatenberg (1955).

Algoritmo Denavit-Hartenberg:

Asignación de sistemas de referencia

- Seguir las reglas de D-H.

Identificación de los parámetros D-H

- Tabla: θ_i, d_i, a_i, α_i.

Obtención de las matrices

- Para cada fila de la tabla anterior.

$$
{}^{i-1}_{i}A = \begin{bmatrix} C\theta i & -C\alpha i\, S\theta i & S\alpha i\, S\theta i & ai\; C\theta i \\ S\quad i & C & iC \quad i & -S \quad i \\ 0 & iC \quad i & ai\; S\; S\alpha i & \\ 0 & & C\alpha i & di \end{bmatrix}
$$

Matrices de localización del….

- …extremo del robot respecto a la base.

$$
{}^{0}_{i}T = {}^{0}_{1}A\; {}^{1}_{2}A\; {}^{2}_{3}A\ldots\; {}^{i-1}_{i}A
$$

CINEMÁTICA DIRECTA: MTH

Algoritmo D-H:

Asignación de Sistemas de Referencia

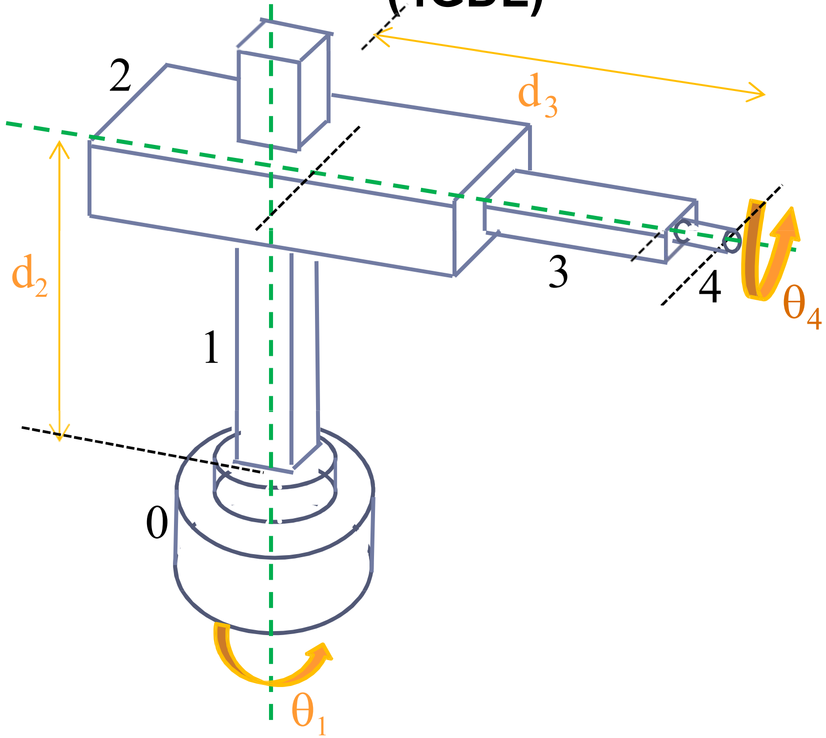
- D-H1: Numerar los eslabones desde 1 hasta n (n=GLD). Se numerará como elemento 0 la base del robot.

- D-H2: Numerar cada articulación desde 1 hasta n.

- D-H3: Localizar los ejes de las articulaciones. Si ésta es rotativa, el eje será el propio eje de giro. Si es prismática, será el eje a lo largo del cual se produce el desplazamiento.

Ejemplo:

Modelado cinematico directo robot cilindrico (4GDL)



CINEMÁTICA DIRECTA: MTH

Algoritmo D-H:

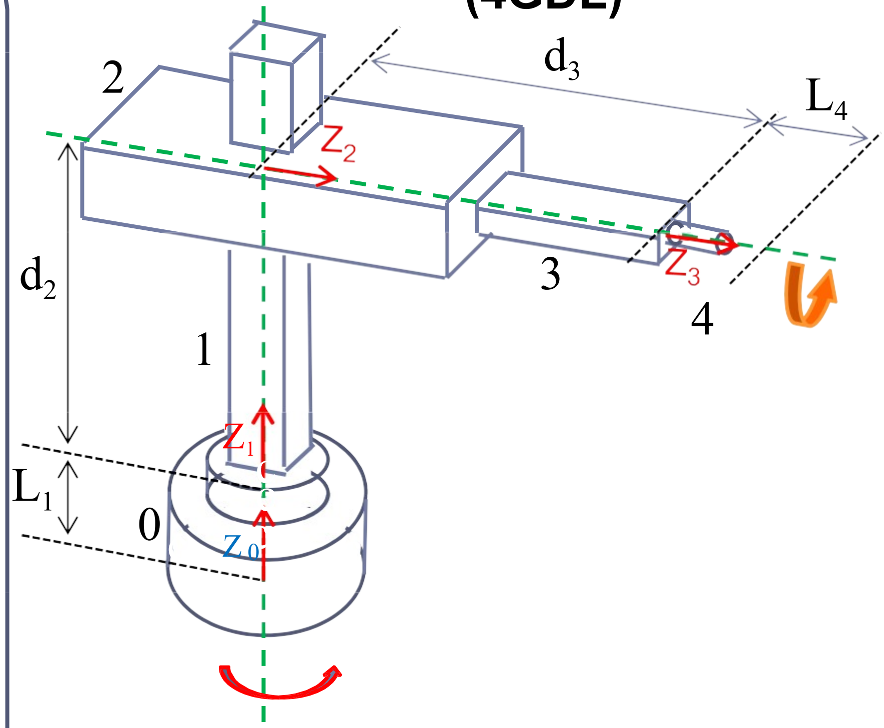
Asignación de Sistemas de Referencia

Establecer el sistema de referencia de cada elemento i

- D-H4: Para i de 0 a n-1, situar el eje Zi sobre el eje de la articulación i+1.

Ejemplo:

Modelado cinematico directo robot cilindrico (4GDL)



CINEMÁTICA DIRECTA: MTH

Algoritmo D-H:

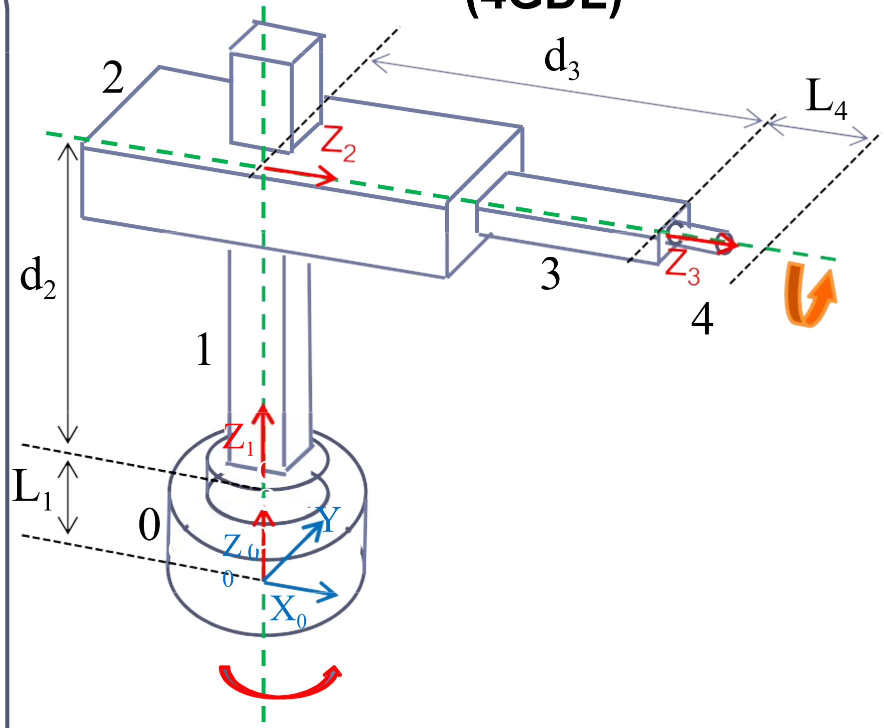
Asignación de Sistemas de Referencia

Establecer el sistema de referencia de cada elemento i

- D-H4: Para i de 0 a n-1, situar el eje Zi sobre el eje de la articulación i+1.
- D-H5: Situar el origen del sistema base So en cualquier punto del eje Z0 (eje de la articulacion 1). Los ejes X0 e Y0 se situarán de modo que formen un sistema dextrógiro con Z0.

Ejemplo:

Modelado cinematico directo robot cilindrico (4GDL)



Algoritmo D-H:

Asignación de Sistemas de Referencia

Establecer el sistema de referencia de cada elemento i

- D-H4: Para i de 0 a n-1, situar el eje Zi sobre el eje de la articulación i+1.
- D-H5: Situar el origen del sistema base So en cualquier punto del eje Z0 (eje de la articulacion 1). Los ejes X0 e Y0 se situarán de modo que formen un sistema dextrógiro con Z0.
- D-H6: Para i de 1 a n-1, situar el sistema Si (solidario al elemento i) en la intersección del eje Zi con la línea normal común a Zi-1 y Zi. Si ambos ejes se cortasen se situaría Si en el punto de corte. Si fuesen paralelos se situaría en la articulación i+1.
- D-H7: Situar Xi en la línea normal común al eje Zi-1y Zi. Si los ejes se cortan se sitúa perpendicular al plano

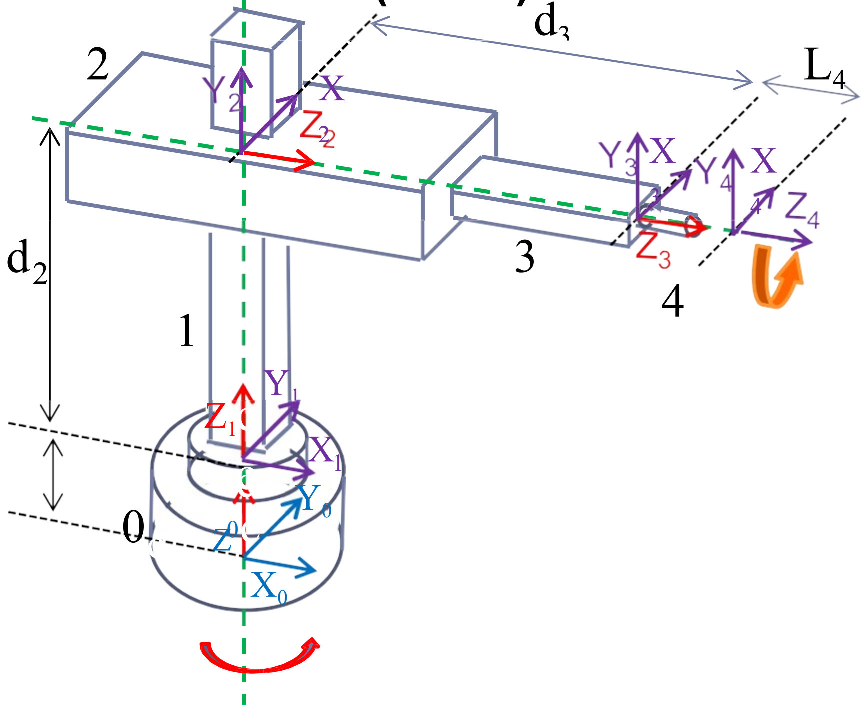
L_1

formado por Zi-1y Zi. Situar Xi en la línea normal al eje Zi-1, lo corta y apunta hacia afuera de él.

- D-H8: Situar Yi de modo que forme un sistema dextrógiro con Xi y Zi.
- D-H9: Situar el sistema {Sn} en el extremo del robot de modo que Zn coincida con la dirección de Zn-1 y Xn sea normal a Zn-1 y Zn.

Ejemplo:

Modelado cinematico directo robot cilindrico (4GDL)



Algoritmo D-H:

Identificación parámetros D-H

Crear una tabla con los parámetros de Denavit-Hartenberg:

- D-H10: Obtener θ**i** como el ángulo que hay que girar en torno a Zi-1 para que Xi-1 y Xi queden paralelos.
- D-H11: Obtener **di** como la distancia medida a lo largo de Zi-1, que habría que desplazar {Si-1} para que Xi y Xi-a quedasen en el mismo plano.
- D-H12:Obtener **ai** como la distancia medida a lo largo de Xi (que ahora coincidiría con Xi-1) que habría que desplazar el nuevo {Si-1} para que su origen coincidiese con {Si}.
- D-H13:Obtener αi como el ángulo que habría que girar entorno a Xi (que ahora coincidiría con Xi-1) para que el nuevo {Si-1} coincidiese totalmente con {Si}.

Ejemplo:

Modelado cinematico directo robot cilindrico (4GDL)

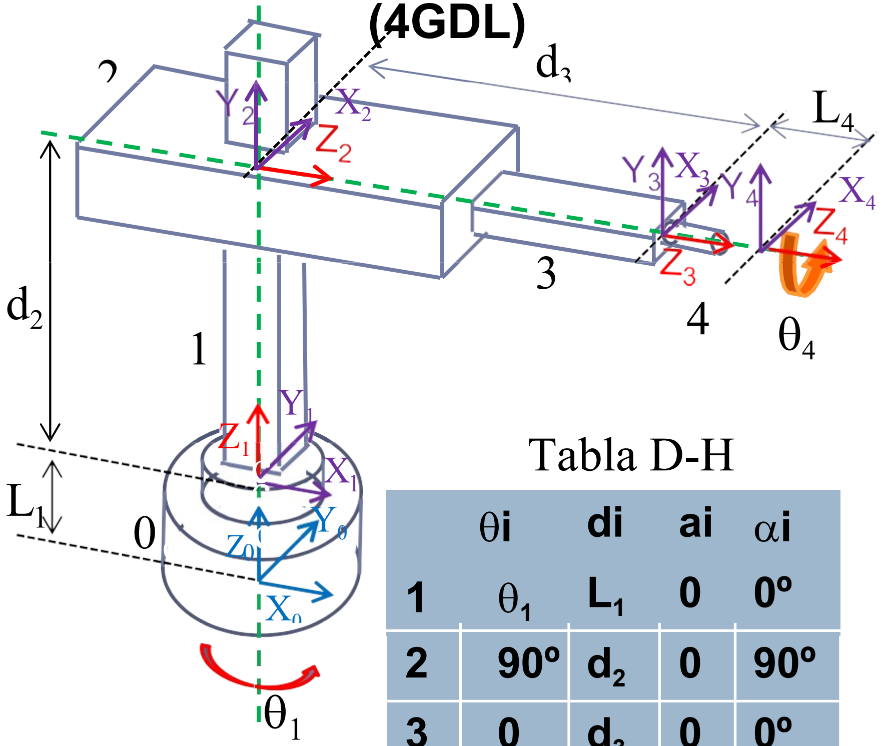


Tabla D-H

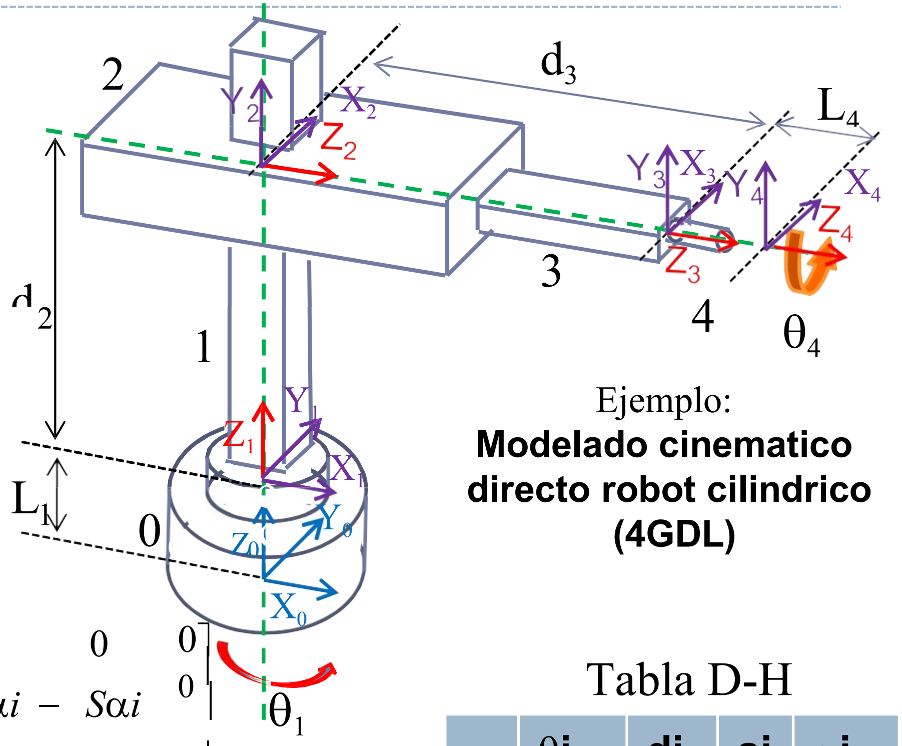
	θi	di	ai	αi
1	θ_1	L_1	0	0º
2	90º	d_2	0	90º
3	0	d_3	0	0º
4	θ_4	L_4	0	0º

Algoritmo D-H:

Formar las Matrices Homogéneas

- D-H14: Obtener las matrices de transformación $^{i-1}A_i$

  *Rotación θ**i** del Zi-1, seguida de translación **di** (a lo largo de Zi-1, posteriormente translación **ai** (a lo largo Xi y finalmente rotación α**i** respecto de Xi :*



Ejemplo:

Modelado cinematico directo robot cilindrico (4GDL)

$$^{i-1}_{i}A = T(Z_i,\theta_i)\,T(d_i)\,T(a_i)\,T(x_i,\alpha_i)$$

$$= \begin{bmatrix} C\theta i & -S\theta i & 0 & 0 \\ S\theta i & C\theta i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & di \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & ai \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha i & -S\alpha i & 0 \\ 0 & S\alpha i & C\alpha i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^{i-1}_{i}A = \begin{bmatrix} C\theta i & -C\alpha i\, S\theta i & S\alpha i\, S\theta i & ai\, C\theta i \\ S\theta i & C\alpha i C\theta i & -S\alpha i C\theta i & ai\, S\theta i \\ 0 & S\alpha i & C\alpha i & di \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tabla D-H

	θi	di	ai	αi
1	θ_1	L_1	0	0º
2	90º	d_2	0	90º
3	0	d_3	0	0º
4	θ_4	L_4	0	0º

CINEMÁTICA DIRECTA: MTH

Algoritmo D-H: **Formar las Matrices Homogéneas**

$$ {}^{i-1}_{\ \ i}A = \begin{bmatrix} C\theta i & -C\alpha i\, S\theta i & S\alpha i\, S\theta i & ai\, C\theta i \\ S\theta i & C\alpha i C\theta i & -S\alpha i C\theta i & ai\, S\theta i \\ 0 & S\alpha i & C\alpha i & di \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Tabla D-H

	θi	di	ai	αi
1	θ_1	L_1	0	0º
2	90º	d_2	0	90º
3	0	d_3	0	0º

$$ {}^0_1A = \begin{bmatrix} C\theta 1 & -S\theta 1 & 0 & 0 \\ S\theta 1 & C\theta 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1_2A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^2_3A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^3_4A = \begin{bmatrix} C\theta 4 & -S\theta 4 & 0 & 0 \\ S\theta 4 & C\theta 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

- D-H15: Obtener la matriz de transformación que relaciona el sistema de la base con el del extremo del robot ${}^0T_4 = {}^0A_1\,{}^1A_2\,{}^2A_3\,{}^3A_4$.

$$ {}^0_4T = {}^0_1A\,{}^1_2A\,{}^2_3A\,{}^3_4A = \begin{bmatrix} C\theta 1 C\theta 4 & -C\theta 1 S\theta 4 & & S\theta 1(d3+L4) \\ & & & \\ S\theta 4 & C\theta 4 & 0 & d2+L1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

La matriz T define la orientación y posición del extremo referido a la base en función de las n coordenadas articulares.

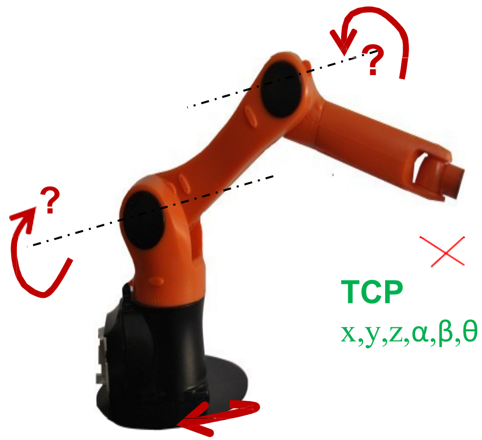
PROBLEMA CINEMATICO INVERSO

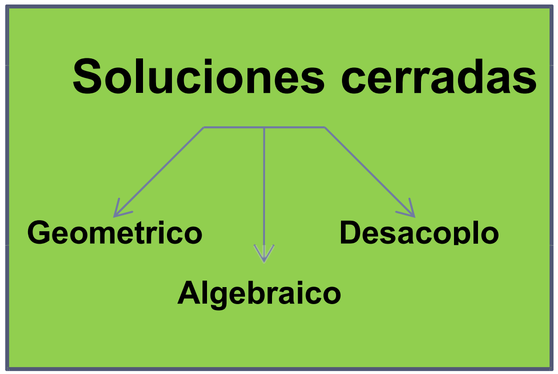
Conocida la localización del robot, determina cual debe ser la configuración del robot (articulaciones y parámetros geométricos).

1) La resolución del problema no es sistemático.
2) Depende fuertemente de la configuración del robot
3) Es encontrar la siguiente relación explicita (solución cerrada):

$$q_k = f(x, y, z, \alpha, \beta, \Upsilon) \qquad k = 1 \ldots n$$

4) No existe siempre solución cerrada. Condiciones para que exista solución cerrada:
   a) 3 ejes de articulación adyacentes interseccionan en un punto (robot PUMA y stanford).
   b) 3 ejes de articulación adyacentes son paralelos entre si (ASEA, etc.).



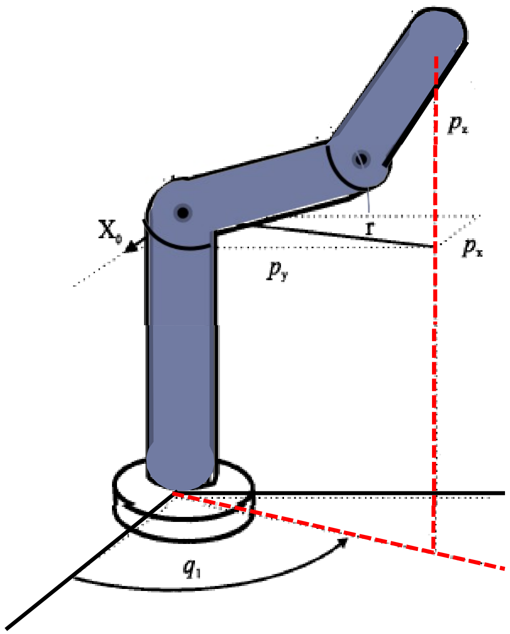


CINEMÁTICA INVERSA: MÉTODO GEOMÉTRICO

Se basan en descomponer la cadena cinemática en distintos planos geométricos y resolviendo por trigonometría cada plano. Se trata de encontrar el numero suficiente de relaciones geométricas para posicionar el extremo del robot. Se utiliza para las primeras articulaciones.

Ejemplo: **Robot esférico 3 GDL**

Datos: Px, Py, Pz donde se quiere situar el extremo del robot.



$$q_1 = \arctan\left(\frac{p_y}{p_x}\right)$$

$$\cos q_3 = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - l_2^2 - l_3^2}{2 l_2 l_3}$$

$$\sin q_3 = \pm\sqrt{1 - \cos^2 q_3}$$

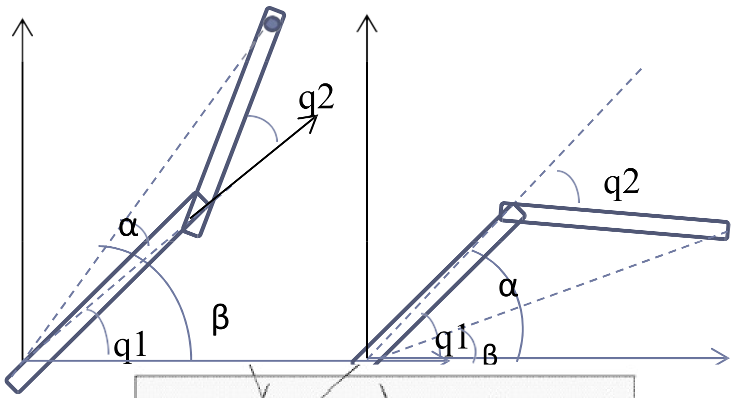
$$q_3 = \arctan\left(\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2 q_3}}{\cos q_3}\right)$$

a articulación q_2 tiene dos soluciones: (codo arriba y codo abajo):

$$q_2 = \beta - \alpha$$

$$\beta = \arctan\left(\frac{p_z}{r}\right) = \arctan\left(\frac{p_z}{\pm\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}\right)$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{l_3 \sin q_3}{l_2 + l_3 \cos q_3}\right)$$



$$q_2 = \arctan\left(\frac{p_z}{\pm\sqrt{p_x^2+p_y^2}}\right) - \arctan\left(\frac{l_3 \sin q_3}{l_2 + l_3\cos q_3}\right)$$

CINEMÁTICA INVERSA: MATRICES HOMOGÉNEAS

Se basan en manipular las ecuaciones resultantes obtenidas a partir del modelo Cinematico Directo:

Esto es, despejar las n variables $\mathbf{q_i}$ en función de los vectores **n, o, a, p:**

$$ {}^0_nT(q_1,\ldots,q_n) = \begin{bmatrix} n & o & a & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Utilizando las **Matrices de Transformación Homogénea**, operamos de la siguiente forma:

$$ {}^0_nT = {}^0_1A\,{}^1_2A\,{}^2_3A \cdots {}^{n-1}_{n}A $$

$$ \left({}^0_1A\right)^{-1}\,{}^0_nT = {}^1_2A\,{}^2_3A \cdots {}^{n-1}_{n}A \Rightarrow depejamos \quad q_1 $$

$$ \left({}^1_2A\right)^{-1}\left({}^0_1A\right)^{-1}\,{}^0_nT = {}^2_3A \cdots {}^{n-1}_{n}A \Rightarrow depejamos \quad q_2 $$

$$ \vdots $$

$$ \left({}^2_3A\right)^{-1}\left({}^0_1A\right)\,{}^0_nT = \cdots {}^{n-1}_{n}A \Rightarrow depejamos \quad q_{n-1} \ y \ q_n $$

Consideraciones:

Se trata de igualar elementos de ambos lados de cada ecuación, tomando los casos en los que solo aparezca una variable de articulación, empleando identidades trigonométricas y buscando divisiones en función de arco tangentes.

CINEMÁTICA INVERSA: MATRICES HOMOGÉNEAS

Ejemplo: **Robot esférico 3 GDL**

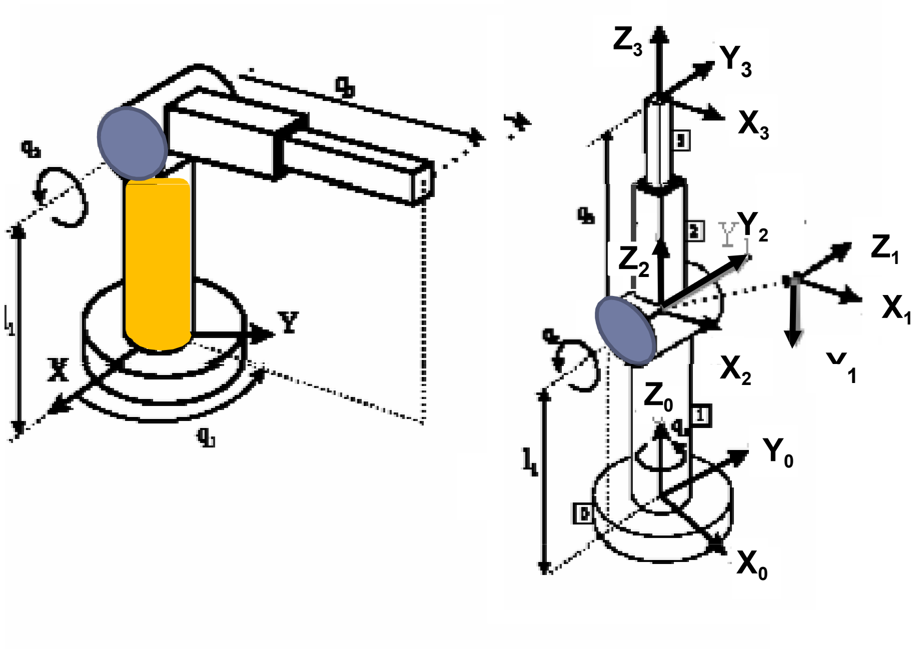


Tabla D-H

	θi	di	ai	αi
1	q1	L_1	0	-90º
2	q2	0	0	90º
3	0	q3	0	0º

MTH:

$$
{}^{0}_{1}A = \begin{bmatrix} Cq1 & 0 & Sq1 & 0 \\ Sq1 & 0 & -Cq1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\qquad
{}^{1}_{2}A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Cq}2 & 0 & -\boldsymbol{Sq}2 & 0 \\ \boldsymbol{Sq}2 & 0 & \boldsymbol{Cq}2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\qquad
{}^{2}_{3}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \boldsymbol{q}3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Ejemplo: **Robot esférico 3 GDL**

px py pz DATOS (Posición del terminal)

$$ {}^0_3T = {}^0_1A\,{}^1_2A\,{}^2_3A $$

$$ \left({}^0_1A\right)^{-1}\,{}^0_nT = {}^1_2A\,{}^2_3A \Rightarrow despejamos $$

$$ \left({}^0_1A\right)^{-1}\,{}^0_nT = \begin{bmatrix} Cq1 & 0 & -Sq1 & 0 \\ Sq1 & 0 & Cq1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & L1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cq2 & 0 & Sq2 & 0 \\ Sq2 & 0 & -Cq2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ \left({}^0_1A\right)^{-1}\,{}^0_nT = \begin{bmatrix} Cq1 & Sq1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & L1 \\ -Sq1 & Cq1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cq2 & 0 & Sq2 & Sq2\,q3 \\ Sq2 & 0 & -Cq2 & -Cq2\,q3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ -p_x\,Sq1 + p_y\,Cq1 = 0 \Rightarrow \frac{Sq1}{Cq1} = \frac{p_y}{p_x} \Rightarrow q1 = \arctan\left(\frac{p_y}{p_x}\right) $$

Ejemplo: **Robot esférico 3 GDL**

$$({}^{1}_{2}A)^{-1}({}^{0}_{1}A)^{-1}\,{}^{0}_{3}T = {}^{2}_{3}A \rightarrow q_2 \text{ y } q_3$$

$$({}^{1}_{2}A)^{-1}({}^{0}_{1}A)^{-1}\,{}^{0}_{n}T = \begin{bmatrix} Cq2 & Sq2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -Sq2 & Cq2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Cq1 & Sq1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -L1 \\ -Sq1 & Cq1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$({}^{1}_{2}A)^{-1}({}^{0}_{1}A)^{-1}\,{}^{0}_{n}T = \begin{bmatrix} Cq2Cq1 & Cq2Sq1 & Sq2 & -L1Sq2 \\ -Sq1 & Cq1 & 0 & 0 \\ -Sq2Cq1 & -Sq2Sq1 & Cq2 & -L1Cq2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Px\,Cq2\,Cq1 + PySq1Cq2 + PzSq2 - L1Sq2 = 0 \Rightarrow \frac{Sq2}{Cq2} = -\frac{PxCq1 + PySq1}{Pz - L1} \Rightarrow \boxed{q2 = \arctan\left(-\frac{PxCq1 + PySq1}{Pz - L1}\right)}$$

$$-Sq2Cq1Pz - Sq2\,Sq1Py + PzCq2 - L1Cq2 = q3 \Rightarrow \boxed{q3 = Cq2(Pz - L1) - Sq2(Cq1Pz + Sq1Py)}$$

CINEMÁTICA INVERSA: DESACOPLO CINEMÁTICO

Se basan en al resolución independiente de los grados de libertad que posicionan (3) y de los que orientan la muñeca (3).
Por lo que el problema cinemático inverso se divide en dos subproblemas:

1. Resolver las tres primeras articulaciones de posición.
2. Resolver las tres ultimas articulaciones que corresponden a la muñeca.

El método de resolución:

1)A partir de la posición y orientación que se busca [n,o,a,p], se obtiene el punto de corte de los 3 últimos grados de libertad (punto de muñeca Pm).
2)Se resuelve el problema cinemático inverso para el brazo de 3 GDL (q_1,q_2,q_3) que llega hasta la **Pm** (desde la base).
3)Se resuelve el problema cinemático inverso que va desde **Pm** hasta el punto final pf (calculando q_4,q_5,q_6).

CINEMÁTICA DE MOVIMIENTO: MODELO DIFERENCIAL

Hasta ahora se ha considerado únicamente las relaciones de las articulaciones de una manera **estática** en ausencia de movimiento del robot (problemas Cinemático Directo e Inverso).

Cuando el robot se desplaza, los elementos de la cadena cinemática **propagan** de una articulación a al siguiente tanto **velocidades lineales como angulares**.
La velocidad del elemento i+1 será la del elemento **i** mas las componentes que añade la articulación **i+1.**

Métodos de resolución
Modelo Diferencial

Propagación de velocidades

Ecuaciones de revolución

Ecuaciones de Translación

Cálculo Matriz Jacobiana

Velocidades de las articulaciones

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

Jacobiano DIRECTO →

← **Jacobiano INVERSO**

Velocidades del extremo del robot

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}$$

CINEMÁTICA DE MOVIMIENTO: MATRIZ JACOBIANA

La jacobiana es una matriz en derivadas. En general, para un conjunto de m funciones que dependen de n variables independientes:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ y_m &= f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$$

Si se considera que las n variables son dependientes del tiempo, se puede expresar de la siguiente manera:

$$\left.\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\cdot\dot{x}_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\cdot\dot{x}_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\cdot\dot{x}_n \\ \dot{y}_2 &= \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\cdot\dot{x}_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\cdot\dot{x}_2 + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n}\cdot\dot{x}_n \\ &\vdots \\ \dot{y}_m &= \frac{\partial f_m}{\partial x_1}\cdot\dot{x}_1 + \frac{\partial f_m}{\partial x_2}\cdot\dot{x}_2 + \dots + \frac{\partial f_m}{\partial x_n}\cdot\dot{x}_n \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{y}} = \boxed{\mathbf{J}(\mathbf{x})}\cdot\dot{\mathbf{x}}$$

Matriz Jacobiana

Se puede observar que al ser $\boldsymbol{x}$ función del tiempo, para cada instante de tiempo la Matriz Jacobiana es distinta.

CINEMÁTICA DE MOVIMIENTO: MATRIZ JACOBIANA

En robótica, la jacobiana se utiliza tomando como funciones las correspondientes a las posiciones del extremo del robot siendo las variables independientes de dichas funciones las articulaciones:

$$
\begin{aligned}
x &= f_x(q_1, q_2, \ldots, q_n)\\
y &= f_y(q_1, q_2, \ldots, q_n)\\
z &= f_z(q_1, q_2, \ldots, q_n)\\
\alpha &= f_\alpha(q_1, q_2, \ldots, q_n)\\
\beta &= f_\beta(q_1, q_2, \ldots, q_n)\\
\gamma &= f_\gamma(q_1, q_2, \ldots, q_n)
\end{aligned}
\quad \xrightarrow{\text{Jacobiana}}
$$

Velocidad lineal del extremo

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \frac{\partial f_x}{\partial q_1}\cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial f_x}{\partial q_2}\cdot \dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial f_x}{\partial q_n}\cdot \dot{q}_n\\
\dot{y} &= \frac{\partial f_y}{\partial q_1}\cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial f_y}{\partial q_2}\cdot \dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial f_y}{\partial q_n}\cdot \dot{q}_n\\
\dot{z} &= \frac{\partial f_z}{\partial q_1}\cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial f_z}{\partial q_2}\cdot \dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial f_z}{\partial q_n}\cdot \dot{q}_n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\alpha} &= \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_1}\cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_2}\cdot \dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_n}\cdot \dot{q}_n\\
\dot{\beta} &= \frac{\partial f_\beta}{\partial q_1}\cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial f_\beta}{\partial q_2}\cdot \dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial f_\beta}{\partial q_n}\cdot \dot{q}_n\\
\dot{\gamma} &= \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_1}\cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_2}\cdot \dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_n}\cdot \dot{q}_n
\end{aligned}
$$

Velocidad angular extremo

Representación matricial

Velocidades del extremo del robot

Velocidades de las articulaciones

$$
\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \mathbf{J}(q) \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_v(q) \\ J_\omega(q) \end{bmatrix} \cdot \dot{q}
$$

Ejemplo: **Robot esférico 3 GDL**

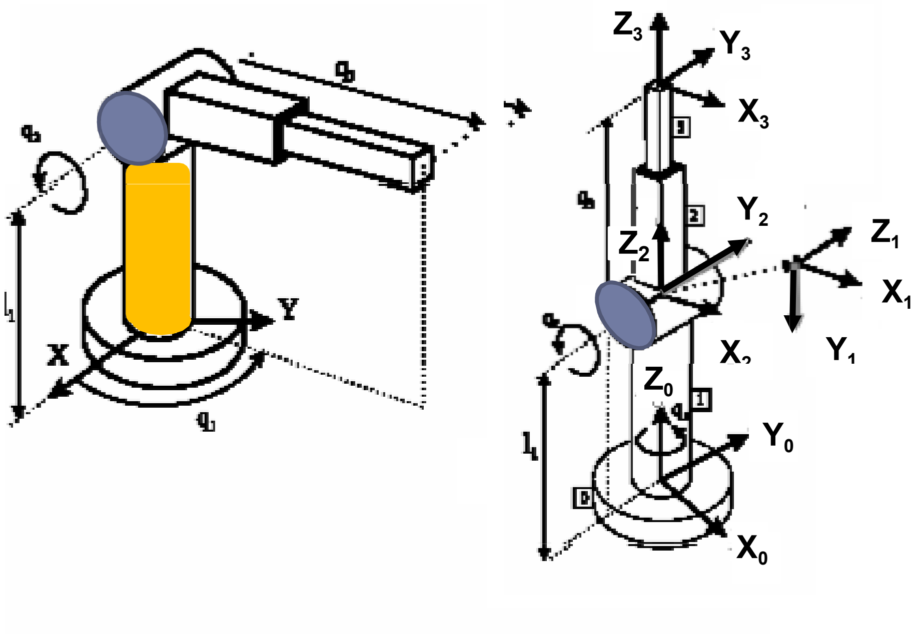


Tabla D-H

	θi	di	ai	αi
1	**q1**	**L_1**	**0**	**-90º**
2	**q2**	**0**	**0**	**90º**
3	**0**	**q3**	**0**	**0º**

MTH:

$$ {}^{0}_{1}A = \begin{bmatrix} Cq1 & 0 & Sq1 & 0 \\ Sq1 & 0 & -Cq1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^{1}_{2}\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Cq}2 & 0 & -\boldsymbol{Sq}2 & 0 \\ \boldsymbol{Sq}2 & 0 & \boldsymbol{Cq}2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^{2}_{3}\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \boldsymbol{q}3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

CINEMÁTICA DE MOVIMIENTO: MATRIZ JACOBIANA

Ejemplo: **Robot esférico 3 GDL**

$$
{}^0_3A = \begin{bmatrix} Cq1 & 0 & -Sq1 & 0 \\ Sq1 & 0 & Cq1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & L1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Cq2 & 0 & Sq2 & 0 \\ Sq2 & 0 & -Cq2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^0_3A = \begin{bmatrix} Cq1Cq2 & -Sq1 & Cq1Sq2 & \boxed{q3Cq1Sq2} \\ Sq1Cq2 & Cq1 & Sq1Sq2 & \boxed{q3Sq1Sq2} \\ -Sq2 & 0 & Cq2 & \boxed{q3Cq2 + L1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{matrix} \rightarrow x = f_x(q_1, q_2, \ldots, q_n) \\ \rightarrow y = f_y(q_1, q_2, \ldots, q_n) \\ \rightarrow z = f_z(q_1, q_2, \ldots, q_n) \\ \end{matrix}
$$

$$x = q3Cq1Sq2$$

$$y = q3Sq1Sq2$$

$$z = q3Cq2 + L1$$

Ahora se calcula el Jacobiano, a partir de las ecuaciones de posición del extremo

Ejemplo: **Robot esférico 3 GDL**

$$x = q3Cq1Sq2 \quad y$$

$$z = q3Cq2 + L1$$

Jacobiano $\Rightarrow$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial x}{\partial q_3} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_3} \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - & q3Cq1Cq2 & Cq1Sq2 \\ q3Cq1Sq2 & q3Sq1Cq2 & Sq1Sq2 \\ 0 & -q3Sq2 & Cq2 \end{bmatrix}$$

Las velocidades del extremo del robot, en función de las aceleraciones de las articulaciones y las posiciones de las mismas.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - & q3Cq1Cq2 & Cq1Sq2 \\ q3Cq1Sq2 & q3Sq1Cq2 & Sq1Sq2 \\ 0 & -q3Sq2 & Cq2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}$$

Ejemplo: **Robot esférico 3 GDL**

Supongamos que la posición del robot viene definida por las articulaciones: q_1=0, q_2=90, q_3=1m. El robot tiene una longitud L1=1 m y esta sometido a unas velocidades articulares de q_1'=90º/s, q_2'=0º/s y q_3'=0.5 m/s. Calcular la velocidad del extremo del robot utilizando el Jacobiano.

$$J = \begin{bmatrix} q3Sq1Sq2 & -q3Cq1Cq2 & -cq1Sq2 \\ -q3Cq1Sq2 & -q3Sq1Cq2 & -sq1Sq2 \\ 0 & -q3Sq2 & Cq2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Velocidad del extremo del robot será:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi/2 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ \pi/2 \\ 0 \end{bmatrix} m/s$$