INF1130 SESSION A14 DEVOIR 2

Remise : vendredi le 5 décembre 2014 à 16h00.
Professeurs : Anne Bergeron et Elmahdi Driouch

Question 1 (30 points) sur les entiers.

Dans cette question, il est utile de rappeler le résultat suivant :

$$\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(a, a + b).$$

a) Donnez, $\forall a \in \mathbb{N}$ la valeur de $\text{PGCD}(a, a + 2)$. Justifiez.

b) On définit la suite a_n de la façon suivante :

1. $a_0 = 2$
2. $a_1 = 4$
3. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ si $n \geq 2$.

Les premiers éléments de la suite sont donc $2, 4, 6, 10, 16, 26, \ldots$ Calculez le $\text{PGCD}(a_n, a_{n+1})$ pour chaque valeur de n. Démontrez votre résultat par induction simple.

c) Décrivez les suites suivantes au moyen de la fonction modulo. Par exemple, la suite $0, 1, 2, 0, 1, 2, 0$ peut être décrite comme $\{i \mod 3\}_{i=0}^{6}$.

i. $-2, -1, 0, 1, -2, -1, 0, 1, -2$

ii. $0, 1, 4, 9, 16, 0, 1, 4, 9, 16$

iii.. $8, 12, 4, 8, 12, 4, 8, 12, 4, 8, 12, 4$

Question 2 sur les ensembles définis récursivement (30 points)

Un ensemble de chaines $\mathcal{M}$ sur l'alphabet $\{0, 1\}$ est défini récursivement comme suit :

1. λ, la chaine vide, est dans $\mathcal{M}$.

2. Si x et y sont dans $\mathcal{M}$, alors la chaine $0xy1$ est dans $\mathcal{M}$.

a) Décrivez, d'une manière simple et facile à lire, toutes les chaines de longueur inférieure ou égale à 10. Le problème est double ici : votre réponse doit être correcte, **ET** le correcteur doit pouvoir juger en moins d'une minute si votre réponse est bonne. Il y a beaucoup de bonnes représentations différentes.

b) Montrez, par induction sur le nombre de fois où la règle 2 est appliquée, que, pour toute chaine de $\mathcal{M}$, le nombre de caractères 0 est égal au nombre de caractères 1.

c) (* Bonus 10 points *) Pourquoi avons-nous choisi l'identificateur $\mathcal{M}$ pour désigner cet ensemble ? Quelle est l'importance de ces chaines en informatique ? [Vous avez le droit de chercher sur Internet : citez vos sources !]

Question 3 sur les fonctions définies récursivement (30 points)

a) La fonction $f(n)$ de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ est définie récursivement par les règles suivantes :

1. $f(0) = 1$.

2. $f(n+1) = f(n) + 2n + 3$.

Donnez les valeurs de $f(n)$ pour $n \in [1..5]$. Démontrez, par induction simple, que $f(n) = n^2 + 2n + 1$, pour $n \geq 0$.

b) Démontrez, par induction simple sur n, que toute fonction $p : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ où $p(n) = an^2 + bn + c$ peut être définie de façon récursive, peu importe les entiers a, b et c. Remarque : vous devez dabord "deviner" l'expression récursive et ensuite démontrer sa validité par induction simple.

Question 4 sur les relations (30 points)

Un intervalle de nombres naturels est un ensemble noté $[a, b]$ où $a \leq b$ et tel que $[a, b] = \{n | a \leq n \leq b\}$. On définit les relations suivantes sur les couples intervalles :

(*Inclus*) Le couple $([a, b], [c, d]) \in R_1$
si $c \leq a \leq b \leq d$.

(*Disjoints*) Le couple $([a, b], [c, d]) \in R_2$
si $(b < c)$ ou $(a > d)$.

(*Chevauchants*) Le couple $([a, b], [c, d]) \in R_3$
si $[(a < c \leq b)$ et $(d > b)]$ ou $[(c < a \leq d)$ et $(b > d)]$.

a) Dites à quelle(s) relation(s) appartiennent chacun des couples suivants :

1. $([1, 2], [3, 4])$
2. $([1, 5], [3, 7])$
3. $([1, 2], [2, 4])$
4. $([1, 5], [2, 3])$
5. $([4, 8], [1, 10])$
6. $([3, 3], [1, 3])$

b) Pour chacune des relations R_1, R_2 et R_3, dites si la relation est symétrique ou non, réflexive ou non, transitive ou non. Dans chaque cas, c'est-à-dire 9 cas, démontrez vos affirmations à l'aide d'un preuve ou d'un contrexemple.

Question 5 sur les relations d'équivalence (30 points)

Le système de fichiers de la compagnie Unique est organisé en répertoires hiérarchiques, dont la *racine* est toujours nommée A. Chaque répertoire est identifié par une chaîne de caractères, et chaque répertoire, sauf la racine, est *enfant* d'un unique répertoire. Par exemple, le répertoire D de l'utillisateur Alpha (voir Figure 1) est enfant du répertoire C, et son répertoire P est enfant du répertoire A.

Pour accéder à un répertoire r à partir de la racine A, il faut utiliser une commande de la forme “Accès <argument>”, où “<argument>” est la liste des enfants successifs de la racine A qui mène à r. Par exemple, pour accéder au répertoire N de l'utillisateur Alpha, à partir de la racine, la commande d'accès a comme argument $A \to K \to L \to N$.

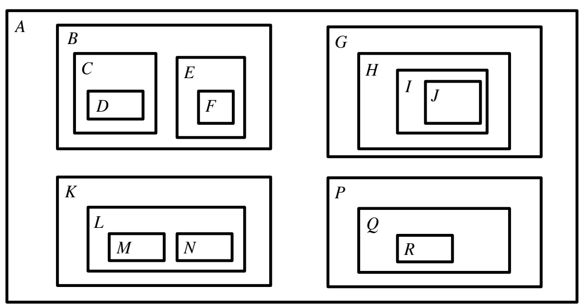

FIGURE 1 – Le bureau virtuel de l'utilisateur Alpha.

Le *niveau* d'un répertoire r est défini comme le nombre de symboles “$\to$” que contient l'argument de la commande pour accéder au répertoire r à partir de la racine A. Par exemple, le niveau du répertoire N est 3. Le niveau du répertoire A est 0.

On définit la relation R suivante sur l'ensemble des répertoires d'un utilisateur :

$$(r, s) \in R \text{ si } r \text{ et } s \text{ sont au même niveau.}$$

a) Démontrez que la relation R est une relation d'équivalence.

b) Donnez, pour l'utilisateur Alpha, la partition de ses répertoires engendrée par la relation R.