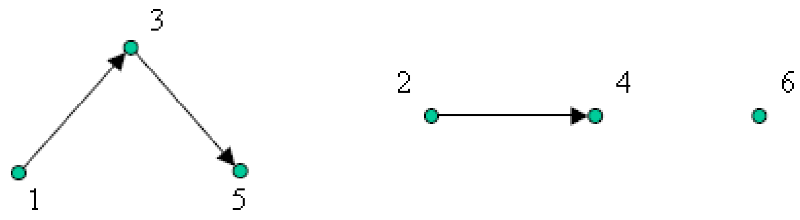
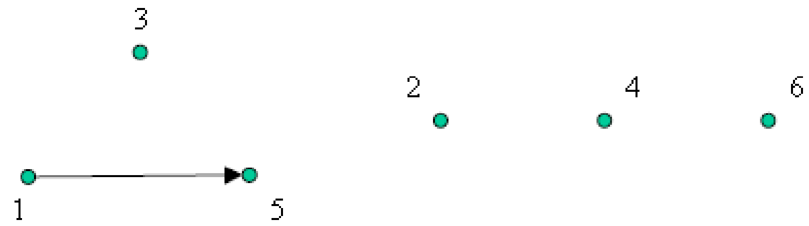
Relations

Soit R la relation sur $\{1,2,3,4,5,6\}$ qui consiste des paires (1,3), (2,4) et (3,5). Dessinez le graphe de chacune des relations suivantes.

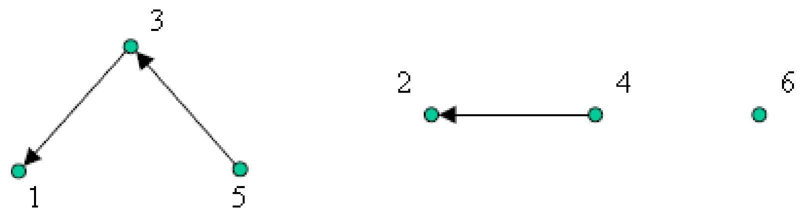
Partie a (1 point): R



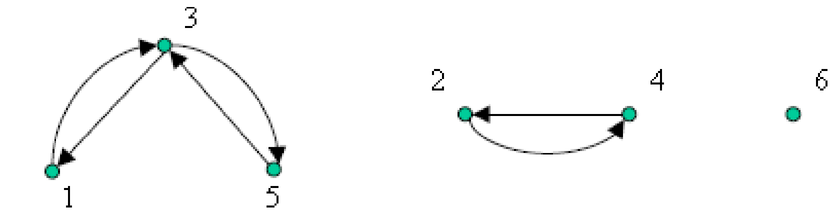
Partie b (3 points): $R \circ R$



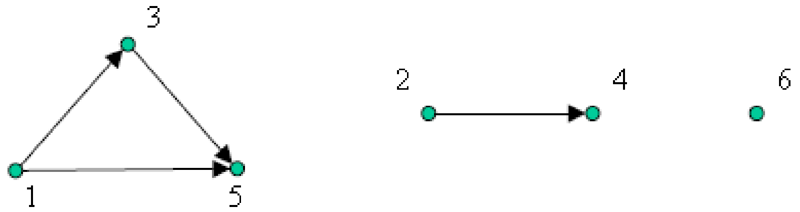
Partie c (3 points): R^{-1}.



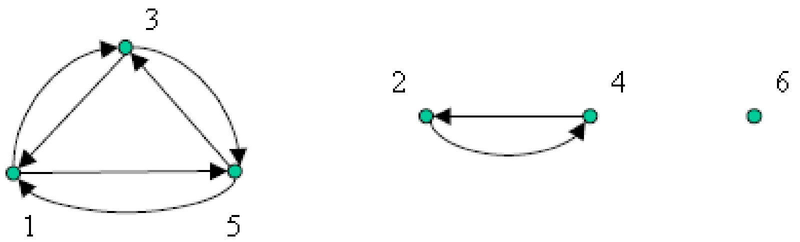
Question 2 (suite). R est la relation sur $\{1,2,3,4,5,6\}$ qui consiste des paires (1,3), (2,4) et (3,5).
Partie d (4 points): la fermeture symétrique de R.



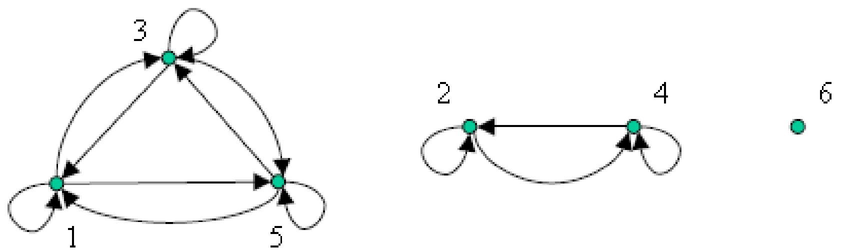
Partie e (4 points): la fermeture transitive de R.



Partie f (4 points): la fermeture symétrique de la fermeture transitive de R



Partie g (6 points): la fermeture transitive de la fermeture symétrique de R.



Soit R la relation de **Z** vers **Z** définie par xRy si $x=y+2$.

Partie a (5 points). Donnez la fermeture symétrique S de R.

Réponse : S est la relation de **Z** vers **Z** définie par xRy si $x=y+2$ ou $y=x+2$. La relation S relie un nombre entier relatif x aux nombres entiers relatifs $x+2$ et $x-2$.

Partie b (5 points). Donnez la fermeture transitive U de la relation S que vous avez obtenue dans la partie **a**. Est-ce la relation U est une relation d'équivalence? Si oui, alors donnez ses classes d'équivalence.

Réponse : U est la relation qui relie un entier x à x, $x+2$, $x-2$, $x+4$, $x-4$, …., $x+2n$, $x-2n$, … pour tout entier n.
En effet, on peut le montrer par récurrence sur n par exemple. La démonstration n'était pas demandée, mais la voici pour information.
Étape de base : Montrons que (x,x) est dans U. $(x, x-2)$ est dans S donc dans U, et $(x-2, x)$ est aussi dans S par symétrie, donc dans U. Par transitivité, le couple (x,x) est dans U.
Étape inductive : On suppose que $(x, x+2n)$ et $(x, x-2n)$ sont dans U. Comme $(x-2n, x-2n-2)$ est dans R donc dans S et dans U, on a par transitivité de U que le couple $(x, x-2n-2)$ est dans U.
De même, le couple $(x+2n, x+2n+2)$ est dans S (par symétrie par rapport au couple $(x+2n+2, x+2n)$ qui est dans R), donc dans U, et par transitivité de U on a $(x, x+2n+2)$. On vient ainsi de montrer que les couples $(x, x+2(n+1))$ et $(x, x-2(n+1))$ sont dans U.
En conclusion, les couples $(x, x+2n)$ et $(x, x-2n)$ sont dans U pour tout entier n.

Soit $E = \{n \in N \mid 0 \leq n \leq 23\}$ et les huit ensembles suivants :

$S_1 = \{0\}$,
$S_2 = \{0, 12\}$,
$S_3 = \{0, 1, -1\}$,
$S_4 = \{0, 8, 16\}$,
$S_5 = \{0, 1, 2\}$,
$S_6 = \{0, 6, 12, 18\}$,
$S_7 = \{0, 6, 12, 18, 24\}$,
$S_8 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Donnez, pour chacune des relations d'équivalence suivantes sur E, la classe de l'élément 0.
Note : Vous n'avez qu'à donner le nom de l'ensemble parmi S_1, ... , S_8.

Partie a. $R_1 = \{(a,b) \mid a \equiv b \pmod 6\}$

Solution: S_6.

Explication: La classe de 0 est $\{b \in E \mid b \equiv 0 \pmod 6\}$. Or 0, 6, 12, 18 et 24 sont tous congrus à 0 (mod 6) mais $24 \notin E$, donc c'est S_6 et non pas S_7.

Partie b. $R_2 = \{(a,b) \mid (3a \bmod 24) = (3b \bmod 24)\}$

Solution: S_4.

Explication: La classe de 0 est $\{b \in E \mid (3b \bmod 24) = 0\}$. Or $3b \bmod 24 = 0$ si et seulement si b est un multiple de 8 et les seuls multiples de 8 dans E sont 0, 8, 16.

Partie c. $R_3 = \{(a,b) \mid a^2 = b^2\}$

Solution: S_1.

Explication: La classe de 0 est $\{b \in E \mid b^2 = 0\}$. Or 0 est le seul tel nombre.

Partie d. $R_4 = \{(a,b) \mid \lfloor a/8 \rfloor = \lfloor b/8 \rfloor\}$
Note: Pour tout nombre réel x, $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier n tel que $n \leq x$.

Solution: S_8. Explication: La classe de 0 est $\{b \in E \mid \lfloor b/8 \rfloor = 0\} = \{b \in E \mid 0 \leq b < 8\}$.

Soit **N+** l'ensemble des entiers positifs et soit d: **N+**→ **N+** la fonction définie par $d(n)$ est le nombre de diviseurs positifs de n.

Partie a (10 points). Remplir le tableau suivant.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$d(n)$	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4

Partie b (15 points).
Soit R la relation sur {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} définie par xRy si $d(x) \equiv d(y) \pmod 2$.

i (10 points). Démontrer que R est une relation d'équivalence.

Solution par travail de cheval.

Réflexivité. Pour tout x, 2 divise $d(x) - d(x) = 0$, donc $d(x) \equiv d(x) \pmod 2$, d'où xRx.

Symétrie. Pour tout x et y, si xRy, alors $d(x) \equiv d(y) \pmod 2$, d'où 2 divise $d(x)-d(y)$, d'où 2 divise $d(y)-d(x) = -(d(x)-d(y))$, d'où $d(y) \equiv d(x) \pmod 2$, d'où yRx.

Transitivité. Pour tout x, y et z, si xRy et yRz, alors $d(x) \equiv d(y) \pmod 2$ et $d(y) \equiv d(z) \pmod 2$, d'où 2 divise $d(x)-d(y)$ et 2 divise $d(y)-d(z)$, d'où d divise $d(x)-d(z) = [d(x)-d(y)] + [d(x)-d(y)]$, d'où $d(x) \equiv d(y) \pmod 2$, d'où xRz.

Solution par travail de cerveau. Congruence modulo un entier positif est une relation d'équivalence. Donc:

Réflexivité: Pour tout x, $d(x) \equiv d(x) \pmod 2$, d'où xRx.
Symétrie: Pour tout x et y, si xRy, alors $d(x) \equiv d(y) \pmod 2$, d'où $d(y) \equiv d(x) \pmod 2$, d'où yRx.
Transitivité: Pour tout x, y et z, si xRy et yRz, alors $d(x) \equiv d(y) \pmod 2$ et $d(y) \equiv d(z) \pmod 2$, d'où $d(x) \equiv d(y) \pmod 2$, d'où xRz.

Solution même plus courte. xRy si et seulement si $d(x) \bmod 2 = d(y) \bmod 2$ et il y un théorème dans les notes du cours qui dit que s'il y a une fonction f du domaine de définition d'une relation vers un codomaine quelconque telle que xRy si et seulement si $f(x)=f(y)$, alors la relation est une relation d'équivalence. La fonction $f(x) = d(x) \bmod 2$ fait l'affaire.

ii (5 points). Écrire les classes d'équivalence de R.

Solution. {1,4,9} et {2,3,5,6,7,8,10}.