Induction Solution

Démontrez par induction sur n que $1*1 + 2*2 + 3*4 + 4*8 + ... + n*2^{n-1} = (n-1)*2^n + 1$ pour tout entier $n\geq 1$.

Solution.

Étape de base: $n=1$.
Côté gauche = $1*1=1$. Côté droit = $0*2 + 1 = 1$.

Étape inductive.
Supposons que $n\geq 1$ et que $1*1 + 2*2 + 3*4 + 4*8 + ... + n*2^{n-1} = (n-1)*2^n + 1$.
À démontrer: $1*1 + 2*2 + 3*4 + 4*8 + ... + n*2^{n-1} + (n+1)*2^n = n*2^{n+1} + 1$.
Selon l'hypothèse inductive, côté gauche = $(n-1)*2^n + 1 + (n+1)*2^n = 2n*2^n + 1 = n*2^{n+1} + 1 =$ côté droit.

Démontrez par induction simple sur n que $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = [n(n+1)]^2/4$ pour tout entier $n\geq 1$.

Réponse :**Étape de base** : Pour $n=1$, on a $1^3 = [1(1+1)]^2/4$, donc la proposition est vraie pour $n=1$.
Étape inductive : on suppose que la proposition est vraie pour un certain entier $n\geq 1$, et on veut montrer que cela entraîne la proposition au rang $n+1$.

$$\begin{aligned}1^3 + 2^3 + ... + n^3 + (n+1)^3 &= [n(n+1)]^2/4 + (n+1)^3 \\ &= (n+1)^2[n^2/4 + n+1] = (n+1)^2\,[n^2 + 4n+4]/4 \\ &= (n+1)^2[n + 2]^2/4 = [(n+1)(n+2)]^2/4\end{aligned}$$

La proposition au rang n implique la proposition au rang $n+1$.
Donc la proposition est vraie pour tout $n\geq 1$.

Démontrer par induction sur n que $(x-1)\times(1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}) = x^n - 1$ pour tout entier $n\geq 1$. Utiliser le premier principe (ou principe simple) d'induction.

Solution.

Étape de base: $n=1$. Côté gauche = $x - 1$. Côté droit = $x - 1$.

Étape d'induction. Supposons que $n\geq 1$ et que $(x-1)\times(1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}) = x^n - 1$.
À démontrer: $(x-1)\times(1+x+x^2+\ldots+x^n) = x^{n+1} - 1$.

Côté gauche = $(x-1)\times(1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}) + (x-1)\times x^n = (x^n - 1) + (x^{n+1} - x^n) = x^{n+1} - 1$ = côté droit.

Démontrez par induction simple sur n que $(n-1)(n+2)$ est pair pour tout entier $n\geq 1$.

Solution.

Étape de base: $n=1$. Si $n=1$, alors $(n-1)(n+2)=0$, qui est pair.

Étape inductive. Supposons que $n\geq 1$ et que $(n-1)(n+2)$ est pair. À démontrer: $n(n+3)$ est pair. Or $n(n+3)-(n-1)(n+2) = (n^2+3n)-(n^2+n-2) = 2n+2$, qui est pair. Donc $n(n+3)$ est la somme de deux entiers pairs et donc est pair.

$$\sum_{i=0}^{n} 3^i = \frac{3^{n+1}-1}{2}$$ pour tout entier $n \geq 0$.

Étape de base : $n=0$.

Côté gauche = $\sum_{i=0}^{0} 3^i = 3^0 = 1$.

Côté droit = $\frac{3^{0+1}-1}{2} = \frac{3-1}{2} = 1$.

Étape inductive : Supposons que $n \geq 0$ et que $\sum_{i=0}^{n} 3^i = \frac{3^{n+1}-1}{2}$.

À démontrer : $\sum_{i=0}^{n+1} 3^i = \frac{3^{n+2}-1}{2}$.

Côté gauche = $\sum_{i=0}^{n+1} 3^i = \sum_{i=0}^{n} 3^i + 3^{n+1} = \frac{3^{n+1}-1}{2} + 3^{n+1} = \frac{3^{n+1}-1+2\cdot 3^{n+1}}{2} = \frac{3\cdot 3^{n+1}-1}{2} = \frac{3^{n+2}-1}{2}$ = Côté droit.

Démontrez par induction simple sur n que $1^2 + 2^2 + ... + n^2 \geq n^3/3$ pour tout entier $n \geq 1$.

Solution.

Étape de base: $n=1$. Côté gauche = 1, côté droit = 1/3 et $1 \geq 1/3$.

Étape inductive. Supposons que $n \geq 1$ et que $1^2 + 2^2 + ... + n^2 \geq n^3/3$.
À démontrer: $1^2 + 2^2 + ... + n^2 + (n+1)^2 \geq (n+1)^3/3$.

Côté gauche $\geq n^3/3 + (n+1)^2 = n^3/3 + n^2 + 2n + 1$.
Côté droit $= (n^3 + 3n^2 + 3n + 1)/3 = n^3/3 + n^2 + n + 1/3$. Puisque $n \geq 1$, $2n \geq n$. En plus $1 \geq 1/3$.
Donc, côté gauche $\geq n^3/3 + n^2 + 2n + 1 \geq$ côté droit, CQFT.

Démontrez par induction simple sur n que $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$ pour tout entier $n \geq 1$.

Solution. Étape de base: $n=1$. Côté gauche $= 1^2 = 1$ et côté droit $= 1(2)(3)/6 = 1$.

Étape inductive. Supposons que $n \geq 1$ et que $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$.
À démontrer: $1^2 + 2^2 + ... + n^2 + (n+1)^2 = (n+1)(n+2)(2n+3)/6$.
Côté gauche $= n(n+1)(2n+1)/6 + (n+1)^2 = [(n+1)/6][n(2n+1) + 6(n+1)] = [(n+1)/6][2n^2+7n+6]$.
Côté droit $= [(n+1)/6][(n+2)(2n+3)] = [(n+1)/6][2n^2+7n+6]$ = côté gauche.

Démontrez par induction simple sur n que $n! \leq n^n$ pour tout entier $n \geq 1$.

Solution.

Étape de base: $n = 1$. $1! = 1$ et $1^1 = 1$ et $1 \leq 1$.

Étape inductive. Supposons que $n \geq 1$ et que $n! \leq n^n$. À démontrer: $(n+1)! \leq (n+1)^{n+1}$.
$(n+1)! = (n+1)n! \leq (n+1)n^n$ (puisque $n! \leq n^n$ et $n+1>0$) $\leq (n+1)(n+1)^n = (n+1)^{n+1}$.