Soit $A = \{a, b, c\}$. On considère les trois relations suivantes sur A:

$R_1 = \emptyset$, $R_2 = \{(a,b),(b,c),(a,c)\}$, $R_3 = \{(a,a),(b,c),(c,b)\}$, $R_4 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,c)\}$

Pour chacune de ces relations, déterminer s'il s'agit d'une relation réflexive, symétrique, anti-symétrique ou transitive. Justifier votre réponse.

$A = \{a, b, c\}$.

1) $R_1 = \emptyset$

<u>R_1 n'est pas réflexive</u> $(a,a) \notin R_1$

<u>R_1 est symétrique</u> si $(x,y) \in R_1$, alors $(y,x) \in R_1$ (ceci est vrai comme c'est une implication avec une hypothèse fausse)

<u>R_1 est transitive</u> si $(x,y) \in R_1$ et $(y,z) \in R_1$, alors $(x,z) \in R_1$ (aussi l'hypothèse est fausse, donc l'implication est vraie)

<u>R_1 est antisymétrique</u> si $(x,y) \in R_1$ et $(y,x) \in R_1 \Rightarrow x = y$

2) $R_2 = \{(a,b),(b,c),(a,c)\}$

<u>R_2 n'est pas réflexive</u> $(a,a) \notin R_2$

<u>R_2 n'est pas symétrique</u> $(a,b) \in R_2$ mais $(b,a) \notin R_2$

<u>R_2 est transitive</u> $(x,y) \in R_2$ et $(y,z) \in R_2 \Rightarrow (x,z) \in R_2$

<u>R_2 est antisymétrique</u> $(x,y) \in R_2$ et $(y,x) \in R_2 \Rightarrow x = y$.

3) $R_3 = \{(a,a),(b,c),(c,b)\}$

<u>R_3 n'est pas réflexive</u> $(b,b) \notin R_3$

<u>R_3 est symétrique</u> $(x,y) \in R_3 \Rightarrow (y,x) \in R_3$

<u>R_3 n'est pas transitive</u> $(b,c) \in R_3$ et $(c,b) \in R_3$ mais $(b,b) \notin R_3$

<u>R_3 n'est pas antisymétrique</u> $(b,c) \in R_3$ et $(c,b) \in R_3$ mais $b \neq c$

4) $R_4 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,c)\}$

<u>R_4 est réflexive</u> $(x,x) \in R_4 \quad \forall x \in A$.

<u>R_4 n'est pas symétrique</u> $(a,c) \in R_4$ mais $(c,a) \notin R_4$.

<u>R_4 est transitive</u> $(x,y) \in R_4$ et $(y,z) \in R_4 \Rightarrow (x,z) \in R_4$

<u>R_4 est antisymétrique</u> $(x,y) \in R_4$ et $(y,x) \in R_4 \Rightarrow x = y$ [il n'y a pas un cas où $(x,y) \in R_4$ et $(y,x) \in R_4$ avec $x \neq y$]

Pour chacune des relations suivantes sur $\mathbb{Z}$, déterminer s'il s'agit d'une relation réflexive, symétrique, antisymétrique ou transitive. Justifier votre réponse.

$$R_1 = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ a < b\}, \quad R_2 = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ 2b - a < 3\}$$

(1) $R_1 = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} ;\ a < b\}$

<u>R_1 n'est pas réflexive</u> si $a \in \mathbb{Z}$, alors $a \not< a$ car $a = a$.

<u>R_1 n'est pas symétrique</u> si $a < b \not\Rightarrow b < a$: $1 < 2$, mais $2 \not< 1$

<u>R_1 est transitive</u> si $a < b$ et $b < c \Rightarrow a < c$

<u>R_1 est antisymétrique</u> si $a < b$ et $b < a$, alors $a = b$ [noter que $a < b$ et $b < a$ est déjà faux]

2) $R_2 = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} ;\ 2b - a < 3\}$

<u>R_2 n'est pas réflexive</u> $4 \not R_2 4$ car $2(4) - 4 = 4 \not< 3$

<u>R_2 n'est pas symétrique</u> $6 R_2 4$ car $2(4) - 6 = 2 < 3$, mais

$4 \not R_2 6$ car $2(6) - 4 = 8 \not< 3$.

<u>R_2 n'est pas transitive</u> $(-3) R_2 (-2)$ car $2(-2) - (-3) = -1 < 3$

$(-2) R_2\, 0$ car $2(0) - (-2) = 2 < 3$

Mais $(-3) \not R_2\, 0$ car $2(0) - (-3) = 3 \not< 3$.

<u>R_2 n'est pas antisymétrique</u> $1 R_2\, 0$ car $2(0) - 1 = -1 < 3$

$0 R_2\, 1$ car $2(1) - 0 = 2 < 3$

Mais $1 \neq 0$.