Montrer que pour tout entier $n \geq 1$

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n \geq 1$$

Montrons ceci par induction sur n.

(1) <u>Étape de Base</u> <u>$n=1$</u> Côté gauche $= 1^2 = 1$

" Droite : $\frac{1(1+1)(2.1+1)}{6} = 1$.

La propriété est vraie dans ce cas

(2) <u>Étape inductive</u> Supposons que la propriété est vraie pour $n \geq 1$,

C'est-à-dire $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; C'est notre

hypothèse d'induction.

Montrons que la propriété reste vraie pour $n+1$:

C'est à dire, il faut montrer que

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

(par l'hypothèse d'induction) $= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}$

$$= \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Donc, la propriété est toujours vraie.

Soit $h > -1$ un nombre réel. Montrer l'inégalité de Bernoulli: $1 + nh \leq (1+h)^n$ pour tout entier $n \geq 0$.

$h > -1$, il faut montrer que $1+nh \leq (1+h)^n \; \forall n \geq 0$.
Procédons par induction sur n:

1) <u>Étape de Base</u> <u>$n=0$</u> $1+nh = 1$ et $(1+h)^n = (1+h)^0 = 1$

D'où $1+nh \leq (1+h)^n$ dans ce cas

2) <u>Étape inductive</u>

(i) <u>Hypothèse d'induction</u> on suppose que $(1+nh) \leq (1+h)^n$

(ii) <u>Conclusion</u> Montrons que $1+(n+1)h \leq (1+h)^{n+1}$

Mais $(1+h)^{n+1} = (1+h)^n(1+h) \geq (1+nh)(1+h)$ [par l'hypothèse d'induction] $= 1+h+nh+nh^2 = 1+nh^2+(n+1)h \geq 1+(n+1)h$ [car $1+nh^2 \geq 1$]. D'où $1+(n+1)h \leq (1+h)^{n+1}$.

Par le principe d'induction, la propriété est vraie pour tout $n \geq 0$

Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $4^{n+1} + 5^{2n-1}$ est divisible par 21.

$4^{n+1} + 5^{2n-1}$ divisible par 21 $\forall n \geq 1$

Procédons par induction :

(1) <u>Étape de Base</u> $n = 1$: $4^{n+1} + 5^{2n-1} = 4^2 + 5 = 21$; divisible par 21

(2) <u>Étape inductive</u>

(i) <u>Hypothèse d'induction</u> on suppose que $4^{n+1} + 5^{2n-1}$ est divisible par 21 pour $n \geq 1$, c'est-à-dire

$$4^{n+1} + 5^{2n-1} = 21\,k \; ; \quad k \in \mathbb{N}$$

(ii) <u>Conclusion</u> Il faut montrer que

$$4^{n+2} + 5^{2n+1} \text{ est divisible par } 21 :$$

$$4^{n+2} + 5^{2n+1} = 4.4^{n+1} + 5^2.5^{2n-1} = 4[21k - 5^{2n-1}] + 25.5^{2n-1}$$

$$= 4 \times 21 \times k - 4 \times 5^{2n-1} + 25 \times 5^{2n-1} = 4 \times 21 \times k + 21 \times 5^{2n-1}$$

$$= 21[4k + 5^{2n-1}] \text{ : divisible par } 21.$$

Par le principe d'induction, $4^{n+1} + 5^{2n-1}$ est divisible par 21 pour tout $n \geq 1$.

Pour quelles valeurs de l'entier naturel n a-t-on $2^n > n^3$? Justifier votre réponse.

Formons le tableau suivant :

n	2^n	n^3	$2^n > n^3$
0	1	0	Vrai
1	2	1	Vrai
2	4	8	Faux
3	8	27	Faux
4	16	64	Faux
5	32	125	Faux
6	64	216	Faux
7	128	343	Faux
8	256	512	Faux
9	512	729	Faux
10	1024	1000	Vrai
11	2048	1331	Vrai

On remarque d'après ce tableau que $2^n > n^3 \ \forall n \geq 10$. Montrons cette observation par induction :

(1) Étape de Base $n=10$ $2^{10} = 1024$, $n^3 = 1000$: $2^n > n^3$

(2) Étape inductive

(i) Hypothèse d'induction on suppose $2^n > n^3$ pour un $n \geq 10$.

(ii) Conclusion on doit montrer que $2^{n+1} > (n+1)^3$

$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \leq n^3 + 3n^2 + 3n^2 + 3n^2 = n^3 + 9n^2$$

$$\leq n^3 + n^3 = 2n^3 \quad [\text{car } 9n^2 \leq n^3 \text{ pour } n \geq 10]$$

$$< 2.2^n \quad (\text{par hypothèse d'induction on a } n^3 < 2^n)$$

$$= 2^{n+1}$$

D'où $2^{n+1} > (n+1)^3$.