INF1130 SESSION H13 : SOLUTIONS du DEVOIR 2

Question 1 sur l'induction (30 points)

a) Utilisez le principe d'induction pour montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$
$(2n+1)^2 - 1$ est divisible par 8.

Cas de base : si $n = 0$, alors $(2n+1)^2 - 1 = 0$, et est divisible par 8 puisque 0 est divisible par 8.

Hypothèse d'induction : supposons que $(2n+1)^2 - 1$ est divisible par 8. Il faut montrer que l'hypothèse d'induction entraîne que $(2(n+1)+1)^2 - 1$ est divisible par 8.

On développe d'abord l'expression :

$$\begin{aligned}
(2(n+1)+1)^2 - 1 &= (2n+3)^2 - 1 \\
&= 4n^2 + 12n + 9 - 1 \\
&= ((4n^2 + 4n + 1) - 1) + 8n + 8 \\
&= ((2n+1)^2 - 1) + 8(n+1).
\end{aligned}$$

La dernière expression est divisibe par 8, puisque $((2n+1)^2 - 1)$ est divisible par 8, par hypothèse d'induction, et $8(n+1)$ est un multiple de 8.

b) Utilisez le principe d'induction pour montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$
$1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Cas de base : si $n = 1$, on a bien $1^3 = 1^2(1+1)^2/4$.

Hypothèse d'induction : supposons que $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = n^2(n+1)^2/4$. Il faut montrer que l'hypothèse d'induction entraîne que $1^3+2^3+...+n^3+(n+1)^3 = (n+1)^2(n+2)^2/4$.

On applique l'hypothèse d'induction à la partie gauche de l'égalité à montrer :

$$\begin{aligned}
1^3 + 2^3 + ... + n^3 + (n+1)^3 &= n^2(n+1)^2/4 + (n+1)^3 \\
&= (n+1)^2(n^2/4 + n + 1) \\
&= (n+1)^2(n^2 + 4n + 4)/4 \\
&= (n+1)^2(n+2)^2/4.
\end{aligned}$$

c) Utilisez le principe d'induction pour montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$
$1.1! + 2.2! + ... + n.n! = (n+1)! - 1$.

Cas de base : si $n = 1$, on a bien $1.1! = (1+1)! - 1$.

Hypothèse d'induction : supposons que $1.1! + 2.2! + ... + n.n! = (n+1)! - 1$. Il faut montrer que l'hypothèse d'induction entraîne que $1.1! + 2.2! + ... + n.n! + (n+1)(n+1)! = (n+2)! - 1$.

On applique l'hypothèse d'induction à la partie gauche de l'égalité à montrer :

$$\begin{aligned}1.1! + 2.2! + ... + n.n! + (n+1)(n+1)! &= (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! \\ &= (n+1)!(n+2) - 1 \\ &= (n+2)! - 1.\end{aligned}$$

Question 2 sur les codes correcteurs d'erreurs (20 points)

On s'intéresse aux chaînes de bits de longueur $n \geq 1$. Pour une taille n donnée, on divise les chaînes en deux sous-ensembles : B_n, les *bonnes* chaînes, contiennent un nombre pair de bits à '1' ; et M_n, les *mauvaises*, contiennent un nombre impair de bits à '1'. par exemple, $00010100 \in B_8$ et $011100 \in M_6$.

a) Donnez une définition récursive des ensembles B_n et M_n, sachant que $B_1 = \{0\}$ et $M_1 = \{1\}$.

Pour $n \geq 2$, on a les 4 règles suivantes :

Si $x \in M_{n-1}$ alors $x1 \in B_n$.
Si $x \in B_{n-1}$ alors $x0 \in B_n$.
Si $x \in M_{n-1}$ alors $x0 \in M_n$.
Si $x \in B_{n-1}$ alors $x1 \in M_n$.

b) La *distance de Hamming* $d(x, y)$ entre deux chaînes de bits x et y de longueur n est le nombre de positions où les chaînes sont différentes. Par exemple $d(0101, 1100) = 2$ et $d(0111, 1100) = 3$. L'énoncé suivant est-il vrai ou faux ? Justifiez.

$$\text{Si } x, y \in B_4 \text{ et } x \neq y, \text{ alors } d(x, y) = 2.$$

Les éléments de B_4 sont les suivants :

$$B_4 = \{0000, 0011, 0101, 0110, 1001, 1010, 1100, 1111\}.$$

Il est vrai que pour $d(x, y) = 2$ pour presque chaque paire x, y, sauf pour $x = 0000$ et $y = 1111$. Donc l'énoncé est faux.

Question 3 sur la suite de *Fibonacci* (25 points)

On s'intéresse à la suite de *Fibonacci* définie récursivement comme suit :

$$f_0 = 1; \qquad f_1 = 1; \qquad f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \forall n \geqslant 2.$$

a) Donnez les 10 premiers termes de cette suite.

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55$$

b) Montrez que le nombre $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ satisfait l'équation $x^2 = x + 1$.

$$\begin{aligned}[(1+\sqrt{5})/2]^2 &= (1+2\sqrt{5}+5)/4 \\ &= (2+2\sqrt{5})/4 + 4/4 \\ &= (1+\sqrt{5})/2 + 1\end{aligned}$$

c) Utilisez le principe d'induction pour montrer que $f_n > (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-2}, \forall n \geqslant 3$.

Cas de base : si $n = 3$, on a l'inéquation $3 > (\frac{1+\sqrt{5}}{2})$ qui est certainement vraie car $\sqrt{5} < 5$. Si $n = 4$, comme $(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 = (1+\sqrt{5})/2 + 1 > 3 + 1$, on a bien $5 > (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2$.

Hypothèse d'induction généralisée : supposons que $f_i > (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{i-2}$ pour tous les entiers $3 \leq i \leq n$. Il faut montrer que l'hypothèse d'induction entraîne que $f_{n+1} > (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-1}$.

Les calculs suivants seront plus clairs si on remplace l'expression $(\frac{1+\sqrt{5}}{2})$ par un symbole, a par exemple. On a alors :

$$\begin{aligned}f_{n+1} &= f_n + f_{n-1} \\ &> a^{n-2} + a^{n-3} \text{ par hypothèse d'induction,} \\ &= a^{n-3}(a+1) \\ &= a^{n-3}(a^2) \text{ par la partie b),} \\ &= a^{n-1}.\end{aligned}$$

d) Ordonnez, selon leur taux de croissance, les fonctions : f_n, n^2, 2^n et $(3/2)^n$. Justifiez.

$$n^2, (3/2)^n, f_n, 2^n$$

Ceci provient du fait que $\frac{3}{2} < \frac{1+\sqrt{5}}{2} < 2$ et que $f_n < a^n$, qui se démontre de faon analogue à la preuve donnée dans la partie c).

Question 4 sur les suites définies récursivement (20 points)

Considérons la suite numérique définie récursivement, comme suit :

$$f_n = \begin{cases} 2, & \text{si } n \text{ est impair} \\ (f_{(\frac{n}{2})})^2, & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

a) Donnez les 10 premiers termes de cette suite.

$$2, 4, 2, 16, 2, 4, 2, 64, 2, 4$$

b)Utilisez le principe d'induction pour montrer que $f_n \leqslant 2^n, \forall n \geqslant 1$.

Cas de base : si $n = 1$, on a $f_n = 2$ et $2^n = 2$, donc $f_1 \leq 2^1$ est vérifié .

Hypothèse d'induction généralisée : supposons que $f_i \leq 2^i$ pour tous les entiers $1 \leq i \leq n$. Il faut montrer que l'hypothèse d'induction entraîne que $f_{n+1} \leq 2^{n+1}$.

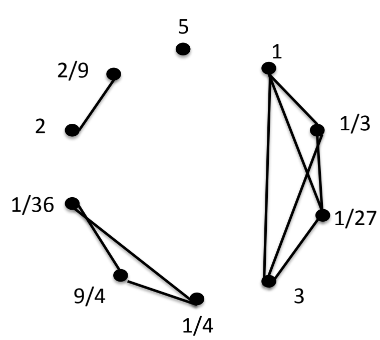
Si $n+1$ est impair, alors $f_{n+1} = 2$ et puisque $n \geq 1$, on a bien $f_{n+1} = 2 \leq 2^{n+1}$. Si $n+1$ est pair, alors $(f_{(\frac{n+1}{2})})^2 \leq (2^{(n+1)/2})^2 = 2^{n+1}$, par hypothèse d'induction.

Question 5 sur les relations d'équivalence (25 **points**)

Sur l'ensemble $A = \{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{27}, \frac{1}{4}, 3, \frac{1}{36}, 2, \frac{2}{9}, \frac{9}{4}, 5\}$, on considère la relation binaire suivante :

$$\forall x, y \in A : xRy \iff \exists z \in Z; \frac{x}{y} = 3^z$$

a) Tracez le graphe de la relation R. [Aide pour la correction : disposez vos points autour d'un cercle imaginaire.]



b) Montrez que R est une relation d'équivalence sur A.

Réflexivité : xRx est toujours vrai car $x/x = 1 = 3^0$.

Symétrie : Supposons xRy, alors il existe z tel que $x/y = 3^z$, donc $y/x = 3^{-z}$. Comme z est entier, $-z$ est aussi un entier, ce qui entraîne que yRx.

Transitivité : Supposons xRy et yRz. On a donc $x/y = 3^z$ et $y/z = 3^{z'}$ où z et z' sont des entiers. Calculons x/z :

$$x/z = (x/y)(y/z) = (3^z)(3^{z'}) = 3^{z+z'}.$$

Comme z et z' sont des entiers, leur somme est aussi un entier, donc xRz.

c) Donnez les classes d'équivalence de A définies par R.

$$\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{27}, 3\}$$

$$\{\frac{1}{4}, \frac{1}{36}, \frac{9}{4}\}$$

$$\{2, \frac{2}{9}\}$$

$$\{5\}$$

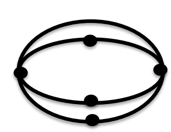
Question 6 sur les graphes (30 points)

a) Pour chacune des listes suivantes, déterminez s'il existe un graphe simple ayant cette liste comme liste de degrés. Donnez la réponse pour chaque liste avec oui ou non.

1. $(2, 3, 3, 3, 4, 4)$, Non. Le nombre de sommets de degré impair doit être pair.
2. $(1, 2, 3, 4)$, Non. Le degré d'un sommet ne peut pas être supérieur ou égal au nombre de sommets.
3. $(1, 1, 1, 3)$, Oui.
4. $(1, 3, 3, 3)$, Non. Chacun des sommets de degré 3 devrait être adjacent à tout autre sommet y compris le sommet de degré 1.
5. $(1, 2, 2, 3, 4, 4)$, Oui.
6. $(1, 3, 3, 4, 5, 5)$, Non. Chacun des sommets de degré 5 devrait être relié à tout autre sommet y compris le sommet de degré 1.
7. $(2, 2, 2)$, Oui.
8. $(2, 2, 4, 4)$. Non. Le degré d'un sommet ne peut pas être supérieur ou égal au nombre de sommets.

b) Combien d'arêtes un graphe contient-il si sa liste de degrés est $(2, 2, 2, 4, 4)$? Tracez un tel graphe.

Le graphe contient 7 arêtes. Voici un exemple d'un tel graphe :



c) Utilisez le principe d'induction pour montrer que le nombre d'arêtes dans K_n (le graphe complet d'ordre n) est égal à $\frac{n(n-1)}{2}$ pour tout $n \geqslant 1$.

Cas de base : si $n = 1$, alors le graphe n'a pas d'arête et $n(n-1)/2 = 0$.

Hypothèse d'induction : supposons que le nombre d'arêtes dans K_n est $n(n-1)/2$. Il faut montrer que le nombre d'arêtes dans K_{n+1} est $(n+1)(n)/2$.

Considérons le graphe K_{n+1}. Comme $n \geq 1$, le graphe a au moins 2 sommets, et le degré de chaque sommet est n. Effaçons un sommet, ainsi que les n arêtes qui lui sont rattachées. Le graphe résultant est K_n qui comporte, par hypothèse d'induction, $n(n-1)/2$ arêtes. Donc le nombre d'arêtes de K_{n+1} est :

$$n(n-1)/2 + n = (n^2 - n + 2n)/2 = (n^2 + n)/2 = (n+1)(n)/2.$$