INF1130 SESSION H13 DEVOIR 2

Remise : vendredi le 19 avril 2013 à 16h00.

Question 1 sur l'induction (30 points)

a) Utilisez le principe d'induction pour montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$
$(2n+1)^2 - 1$ est divisible par 8.

b) Utilisez le principe d'induction pour montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$
$1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

c) Utilisez le principe d'induction pour montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$
$1.1! + 2.2! + ... + n.n! = (n+1)! - 1$.

Question 2 sur les codes correcteurs d'erreurs (20 points)

On s'intéresse aux chaînes de bits de longueur $n \geq 1$. Pour une taille n donnée, on divise les chaînes en deux sous-ensembles : B_n, les *bonnes* chaînes, contiennent un nombre pair de bits à '1' ; et M_n, les *mauvaises*, contiennent un nombre impair de bits à '1'. par exemple, $00010100 \in B_8$ et $011100 \in B_6$.

a) Donnez une définition récursive des ensembles B_n et M_n, sachant que $B_1 = \{0\}$ et $M_1 = \{1\}$.

b) La *distance de Hamming* $d(x, y)$ entre deux chaînes de bits x et y de longueur n est le nombre de positions où les chaînes sont différentes. Par exemple $d(0101, 1100) = 2$ et $d(0111, 1100) = 3$. L'énoncé suivant est-il vrai ou faux ? Justifiez.

$$\text{Si } x, y \in B_4 \text{ et } x \neq y, \text{ alors } d(x, y) = 2.$$

Note : L'idée de diviser les chaînes de bits en bonnes et mauvaises permet de vérifier certaines erreurs dans la transmission d'information digitale. Si tout le monde s'entend pour ne transmettre que des éléments de B_8, par exemple, on peut détecter un bit erroné à chaque 8 bits (mais pas deux).

Question 3 sur la suite de *Fibonacci* (25 points)

On s'intéresse à la suite de *Fibonacci* définie récursivement comme suit :
$f_0 = 1;\qquad f_1 = 1;\qquad f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \forall n \geqslant 2.$

a) Donnez les 10 premiers termes de cette suite.

b) Montrez que le nombre $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ satisfait l'équation $x^2 = x + 1$.

c) Utilisez le principe d'induction pour montrer que $f_n > (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-2}, \forall n \geqslant 3$.

d) Ordonnez, selon leur taux de croissance, les fonctions : f_n, n^2, 2^n et $(3/2)^n$. Justifiez.

Question 4 sur les suites définies récursivement (20 **points)**

Considérons la suite numérique définie récursivement, comme suit :

$$f_n = \begin{cases} 2, & \text{si } n \text{ est impair} \\ (f_{(\frac{n}{2})})^2, & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

a) Donnez les 10 premiers termes de cette suite.

b)Utilisez le principe d'induction pour montrer que $f_n \leqslant 2^n, \forall n \geqslant 1$.

Question 5 sur les relations d'équivalence (25 **points)**

Sur l'ensemble $A = \{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{27}, \frac{1}{4}, 3, \frac{1}{36}, 2, \frac{2}{9}, \frac{9}{4}, 5\}$, on considère la relation binaire suivante :

$$\forall x, y \in A : xRy \iff \exists z \in Z; \frac{x}{y} = 3^z$$

a) Tracez le graphe de la relation R. [Aide pour la correction : disposez vos points autour d'un cercle imaginaire.]

b) Montrez que R est une relation d'équivalence sur A.

c) Donnez les classes d'équivalence de A définies par R.

Question 6 sur les graphes (30 **points)**

a) Pour chacune des listes suivantes, déterminez s'il existe un graphe simple ayant cette liste comme liste de degrés. Donnez la réponse pour chaque liste avec oui ou non.

1. $(2, 3, 3, 3, 4, 4)$,
2. $(1, 2, 3, 4)$,
3. $(1, 1, 1, 3)$,
4. $(1, 3, 3, 3)$,
5. $(1, 2, 2, 3, 4, 4)$,
6. $(1, 3, 3, 4, 5, 5)$,
7. $(2, 2, 2)$,
8. $(2, 2, 4, 4)$.

b) Combien d'arêtes un graphe contient-il si sa liste de degrés est $(2, 2, 2, 4, 4)$? Tracez un tel graphe.

c) Utilisez le principe d'induction pour montrer que le nombre d'arêtes dans K_n (le graphe complet d'ordre n) est égale à $\frac{n(n.1)}{2}$ pour tout $n \geqslant 1$.