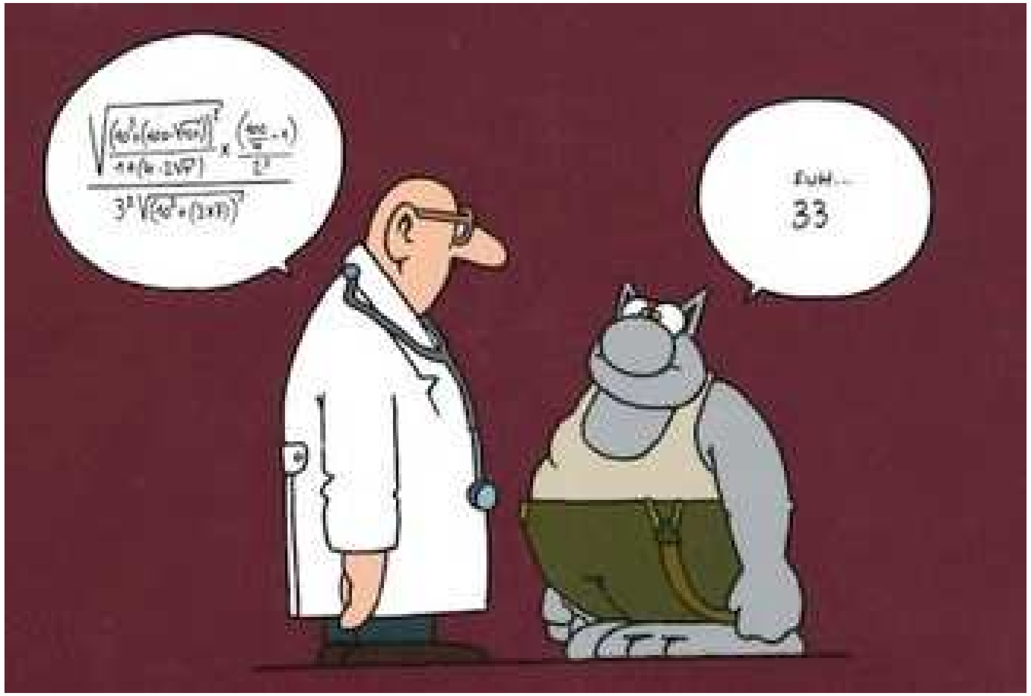
INF1130

Mathématiques pour l'informatique

Zied Zaier, PhD
Département d'informatique
Université du Québec à Montréal

Cours 3

LES FONCTIONS



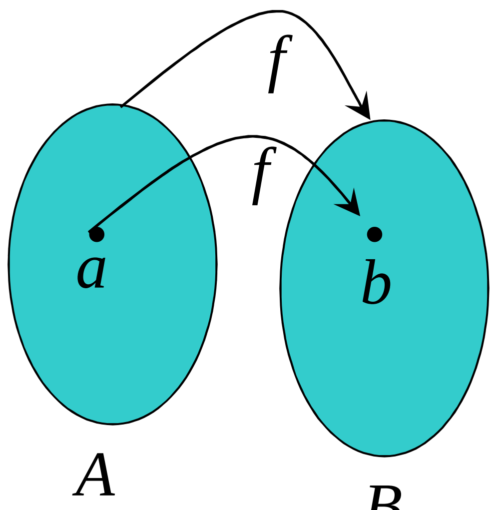
CE DOCUMENT EST INSPIRÉ DES TRAVAUX DES PROFESSEURS KENNETH H. ROSEN ET TIMOTHY WALSH.

Fonctions

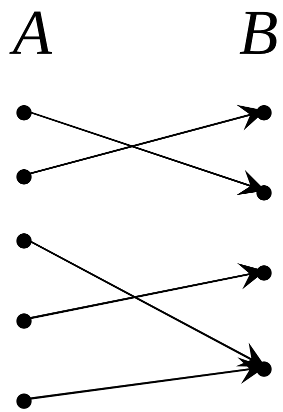
- *Définition: Avec A et B des ensembles.Une fonction f ($f : A \to B$) est une règle qui assigne à chaque élément $a \in A$ exactement un élément f(a) $\in B$, en fait la valeur de f à a.*
- *$f : A \to B$ est une projection du domaine A sur le codomaine B.*
- *f(a) est l'image de l'élément a, et l'élément a est la pré-image de f(a).*

Représentations Graphique

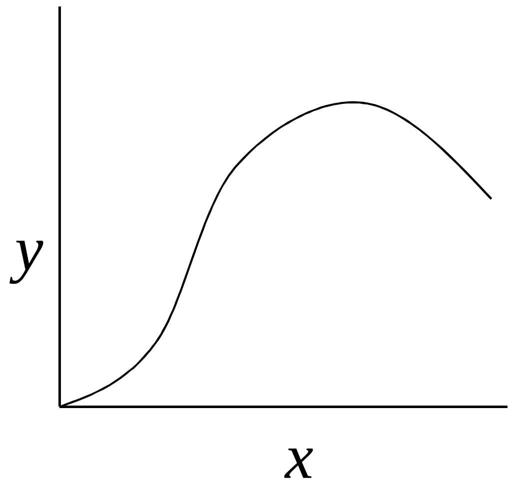
- Représentations graphiques possibles:



Comme des diagrammes de Venn



Graphe



Tracé

Terminologie sur les fonctions

- Sachant que $f:A \rightarrow B$, et $f(a)=b$ (où $a \in A$ & $b \in B$), alors:
  - A est le *domaine* de f.
  - B est le *codomaine* de f.
  - b est l'*image* de a selon f.
  - a est la *pré-image* de b selon f.
    - En général, b peut avoir plus de 1 pré-image.
  - La portée $R \subseteq B$ de f est $R = \{b \mid \exists a\ f(a)=b\}$.

Terminologie sur les fonctions

f : $\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}$ est donné par $f(x) = x^2$

- Domaine est **Z**, codomaine est **R**
- L'image de -3 = $f(-3) = 9$
- Les pré-images de 3: aucune puisque $\sqrt{3}$ n'est pas entier.
- Les pré-images de 4: -2 et 2
- Portée: $f(\mathbf{Z}) = \{0,1,4,9,16,25,\ldots\}$

Portée versus Codomaine

- La portée d'une fonction n'est pas nécessairement son codomaine complet.
- Le codomaine est l'ensemble découlant de la projection de toutes les valeurs du domaine par la fonction f.
- La portée est l'ensemble particulier de valeurs dans le codomaine découlant de la projection actuelle des éléments du domaine par la fonction f.

Portée vs. Codomaine - Exemple

- Supposons l'attribution de notes à des étudiants: "*f* une fonction associant les étudiants à un ensemble de notes {A,B,C,D,E}."
- Le codomaine de *f* est: {A,B,C,D,E}, et sa portée est inconnue.
- Si les notes sont que des As et des Bs.
- La portée de *f* est {A,B}, mais le codomaine est {A,B,C,D,E}.

Fonctions et Java

- Java: Les fonctions sont comme des méthodes retournant une valeur non-void. Le domaine est le *type du paramètre* et le codomaine le *type de la valeur de retour*. L'image est la *valeur de retour*.

Ex:
```
int f(double x){
        return x<0 ? -1 :
                ( x>0 ? 1 : 0 );
}
```

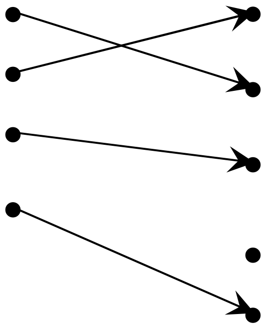
- Le domaine est **`double`** le codomaine est **`int`**.
- La fonction retourne le signe des nombres, la portée est: {-1,0,+1}.

Exemple d'opérateurs de Fonction

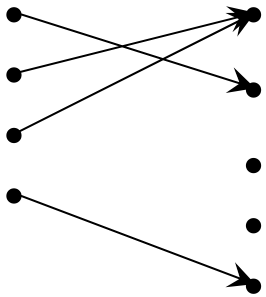
- $+, \times$ ("plus","fois") sont des opérateurs binaires sur **R**. (addition & multiplication normale.)
- Alors, nous pouvons aussi additionner et multiplier des *fonctions* f,g:$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$:
  - $(f+g)$:$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, où $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
  - $(f \times g)$:$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, où $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$

Fonctions Un-à-Un

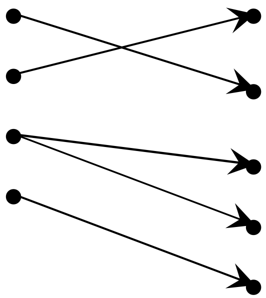
- Une fonction est *(1-1)*, ou *injective*, ou une *injection*, SSI chaque élément de sa portée a *seulement* 1 pré-image.
- Exemples de graphes Bipartites:



1-1



Pas 1-1



Pas une fonction

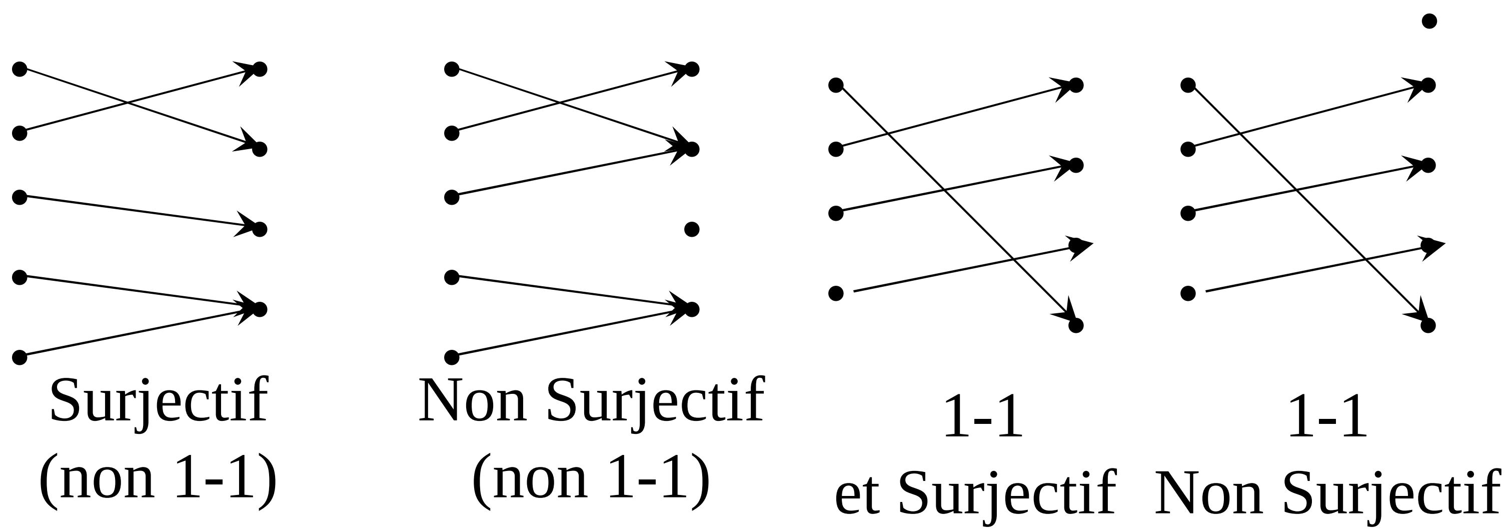
Fonctions Surjectives

- Une fonction $f{:}A \rightarrow B$ est *surjective* ou une *surjection* SSI sa portée est égale à son codomaine ($\forall b \in B, \exists a \in A: f(a)=b$).

- Une fonction surjective projette l'ensemble *A* de façon à couvrir complètement l'ensemble *B*.

Fonctions surjectives

- Fonctions qui couvrent ou non leurs codomaines:



Bijections

- Une fonction *f* est à correspondance 1-1, ou une *bijection*, ou *réversible*, ou *invertible*, SSI si elle est injective et surjective.
- Pour les bijections $f{:}A\to B$, il existe un *inverse de f*, $f^{-1}{:}B\to A$, qui une fonction unique
  - (ou I_A est la fonction identité de A)

$$f^{-1}\circ f = I_A$$

Exemples: 1 à 1, Surjection, Bijection

1. $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$: aucun
2. $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$, $f(x) = 2x$: 1-1
3. $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^3$: bijection, l'inverse f^{-1}, $f^{-1}(f(x)) = f(x)^{(1/3)}$
4. $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{N}$, $f(x) = |x|$: surjection
5. $f(x)$ = le père de x : aucun

Graphes de Fonctions

- Une fonction $f{:}A\rightarrow B$ peut être représentée par un ensemble de paires ordonnées $\{(a,f(a)) \mid a\in A\}$.
- Pour $\forall a$, il existe une seule paire (a,b).

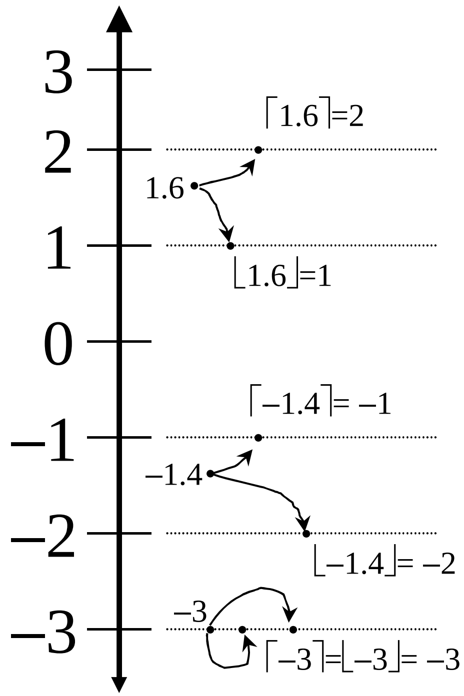
- Pour les fonctions sur les nombres, nous pouvons représenter une paire ordonnée (x,y) correspondant à une coordonnée dans le plan.
  - Une fonction peut être dessinée sous forme de courbes (points 2D), avec un y pour chaque x.

Fonctions importantes

- Deux fonctions utiles sur les nombres réels:
  - La fonction plancher $\lfloor\cdot\rfloor$:**R**→**Z**, où $\lfloor x\rfloor$ le plus grand entier $\leq x$. *I.e.*, $\lfloor x\rfloor :\equiv \max(\{i\in \mathbf{Z} \mid i\leq x\})$.
  - La fonction plafond $\lceil\cdot\rceil$:**R**→**Z**, où $\lceil x\rceil$ le plus petit entier $\geq x$. $\lfloor x\rfloor :\equiv \min(\{i\in \mathbf{Z} \mid i\geq x\})$

Visualisation des valeurs Plancher & Plafond

- Nombres réels: “Plancher: troncature” ou “Plafond: Arrondi.”
- Si $x \notin \mathbf{Z}$,
  $\lfloor -x \rfloor \neq -\lfloor x \rfloor$ &
  $\lceil -x \rceil \neq -\lceil x \rceil$
- Si $x \in \mathbf{Z}$,
  $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil = x.$

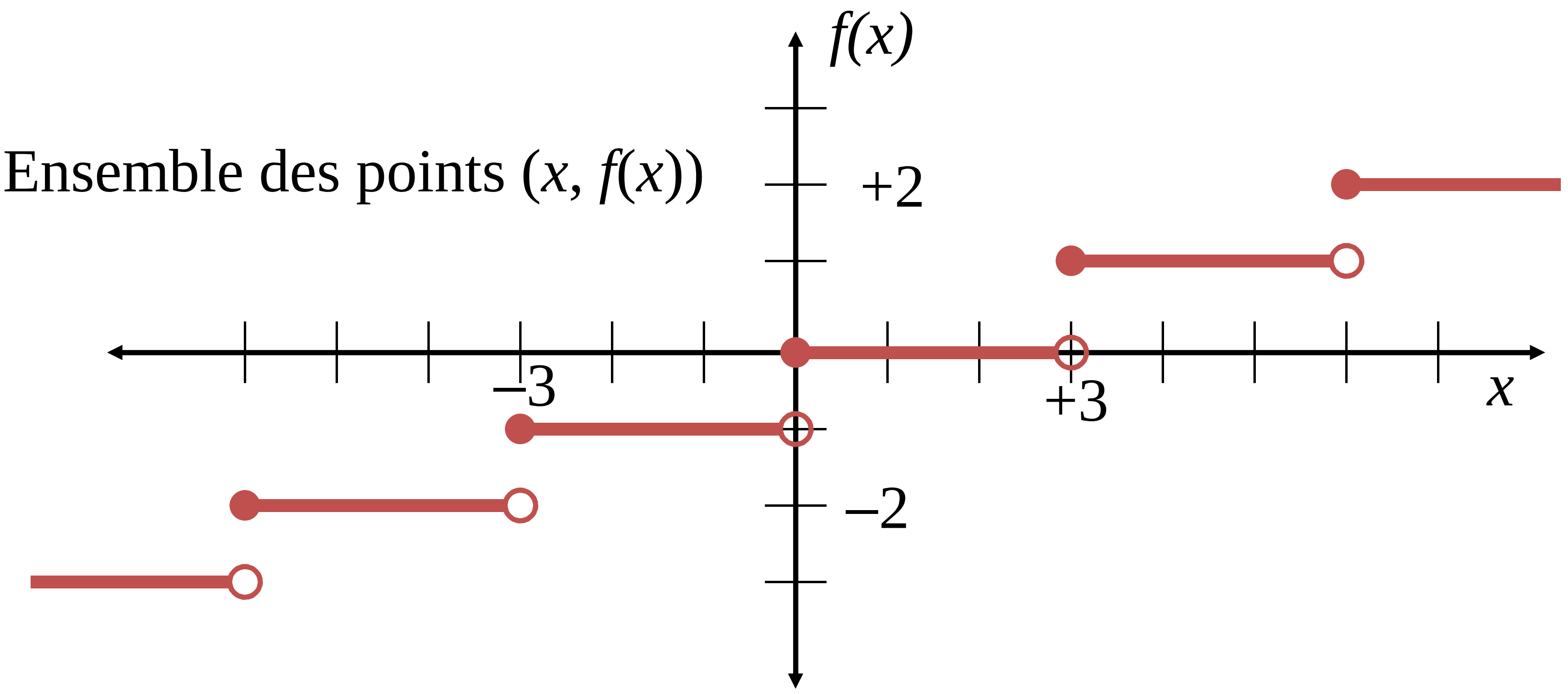


Tracée de courbes avec $\lfloor\ \rfloor$ et

- Pour $f(x)=\lfloor x \rfloor$, le graphique de f comprend le point (a, 0) pour toute les valeurs de a telle que $a \geq 0$ et $a<1$, mais pas pour $a=1$.
- L'ensemble des points (a,0) dans f ne comprend pas le point frontière (limite) (a,1).
  - Ces ensembles sont dit *ouverts*.
- Ces points limites sont dessinés avec un cercle ouvert, les points dans les intervalles (sur la courbe) sont dessinés avec un cercle plein.

Tracée de courbes avec $\lfloor\ \rfloor$ et : Exemple

- Tracée de la fonction $f(x) = \lfloor x/3 \rfloor$:



Revue (Fonctions)

- Variables f, g, h, …
- Notations: $f:A \to B$, $f(a)$, $f(A)$.
- Termes: image, préimage, domaine, codomaine, intervalle, un-à-un, projection, strictement croissant/décroissant, bijective, inverse, composition.
- Opérateur unaire f^{-1} (inverse), opérateurs binaires $+$, $-$, *etc.*, et $\circ$.
- Les fonctions de $\mathbf{R} \to \mathbf{Z}$ $\lfloor x \rfloor$ et $\lceil x \rceil$.