INF1130

Mathématiques pour l'informatique

Zied Zaier, PhD
Département d'informatique
Université du Québec à Montréal

Cours 2

LES ENSEMBLES

CE DOCUMENT EST INSPIRÉ DES TRAVAUX DES PROFESSEURS KENNETH H. ROSEN ET TIMOTHY WALSH.

Contenu du présent document

- Notions d’ensemble.
- Relations entres les ensembles.
- Diagrammes de Venn.
- Puissance des ensembles.
- Produit cartésien.
- Opérateurs.

Introduction à la théorie des ensembles

- Un ensemble est une structure discrète, représentant une collection non ordonnée de 0 ou plusieurs objets distincts.
- La théorie des ensembles comprend aussi des opérations, des relations, et des énoncés sur des ensembles.
- Les ensembles sont omni présents dans les systèmes logiciels.
- Les énoncés mathématiques peuvent être définis en termes d’ensembles par l’utilisation de la logique des prédicats.

Notations de bases des ensembles

- Les ensembles sont identifiés par des variables *S*, *T*, *U*, …
- Un ensemble *S* est décrit par la liste de tous ces éléments entre parenthèses:
  - {a, b, c} est un ensemble de trois objets dénoté par a, b, c.
- Notation de construction d'ensembles: Pour une proposition $P(x)$ sur un ud donné $\{x|P(x)\}$ est l'*ensemble* de tous les x tel que $P(x)$.

$\{x \mid P(x) : 9 < x < 16\}$

Notations de bases des ensembles

- Les ensembles sont *non ordonnés*:
  - Pour n'importent quels objets a, b, et c,
    {a, b, c} = {a, c, b} = {b, a, c} =
    {b, c, a} = {c, a, b} = {c, b, a}.
- Tous les éléments sont *distincts*;
  l'ordre des éléments n'a pas d'importance.
  - Si a=b, Alors {a, b, c} = {a, c} = {b, c} =
    {a, a, b, a, b, c, c, c, c}.
  - Cet ensemble contient au plus 2 éléments.

Définition: Egalité des ensembles

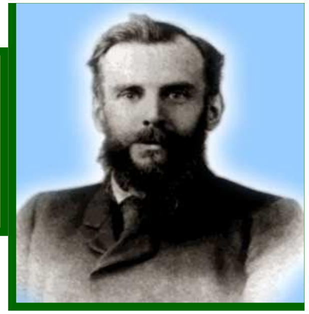
- Deux ensembles sont égaux SSI ils contiennent les <u>mêmes éléments</u>.
- La manière avec laquelle est définie n'a pas d'importance.
- **Par exemple:** L'ensemble {1, 2, 3, 4} =
  {x | x est un entier avec x>0 et x<5 } =
  {x | x est un entier positif dont le carré est >0 et <25}

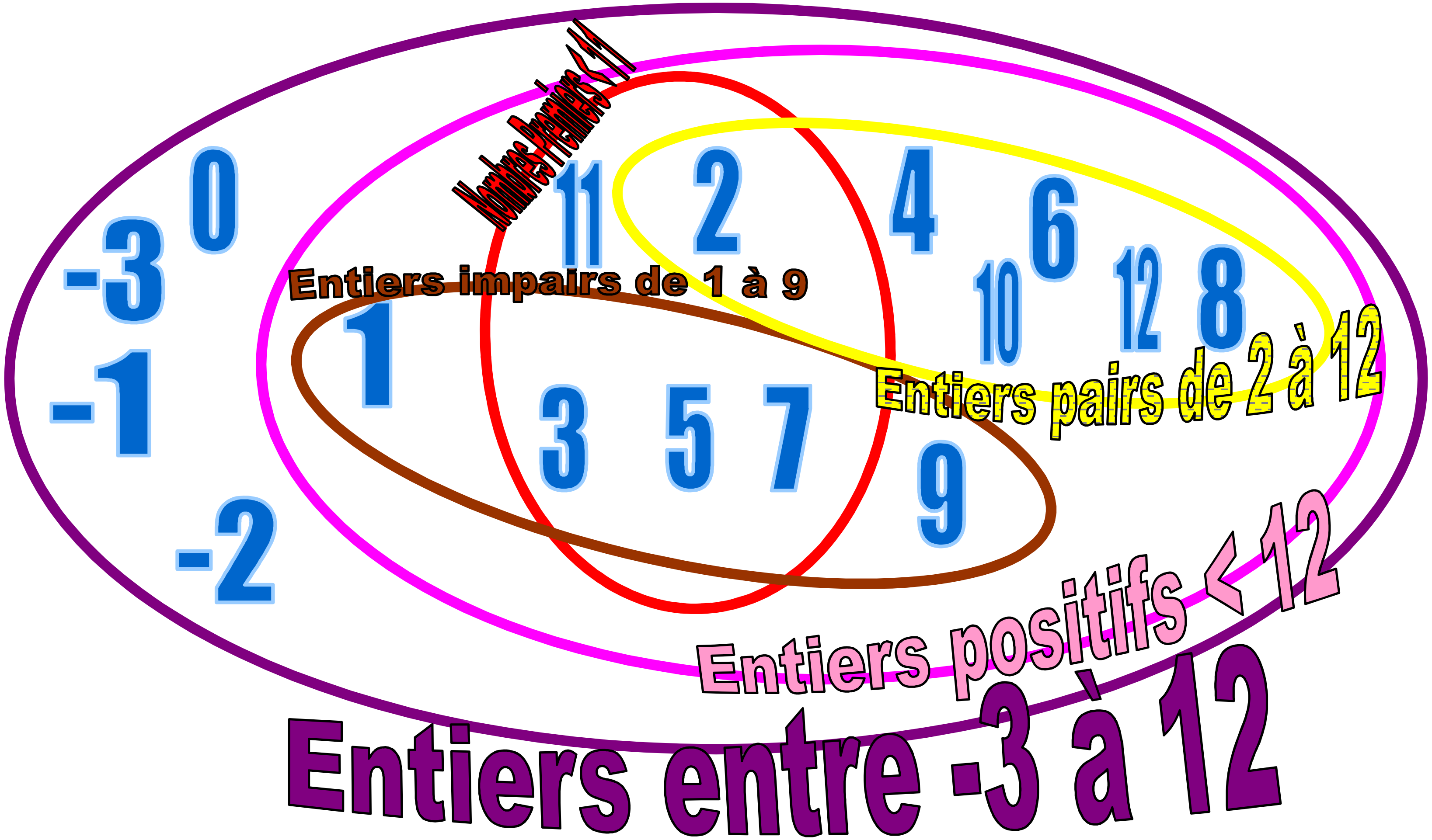
Ensembles infinis

- Les ensembles peuvent être *infinis* (*i.e.,* non fini, sans fin).
- Symboles associés à certains ensembles infinis:
  N = {0, 1, 2, …}   Nombres **N**aturels.
  Z = {…, -2, -1, 0, 1, 2, …} Nombres Entiers.
  R = Nombres Réels,
  374.1828471929498181917281943125…
- Autres symboliques ($\mathbb{N}$,$\mathbb{Z}$,$\mathbb{R}$).

Diagrammes de V

John Venn
1834-1923





Relations: Membre de

- $x \in S$ ("x est dans S") est la proposition stipulant que l'objet x est un $\in$*lément* ou *membre* de l'ensemble S.
  - *Ex:* $3 \in \mathbf{N}$, "a"$\in \{x \mid x$ est une lettre de l'alphabet$\}$
  - Peu définir l'égalité en termes de la relation $\in$:
    $\forall S,T: S=T \leftrightarrow (\forall x: x \in S \leftrightarrow x \in T)$
    "2 ensembles sont égaux SSI ils ont les mêmes membres."
- $x \notin S :\equiv \neg(x \in S)$ "x n'est pas dans S"

Ensemble vide

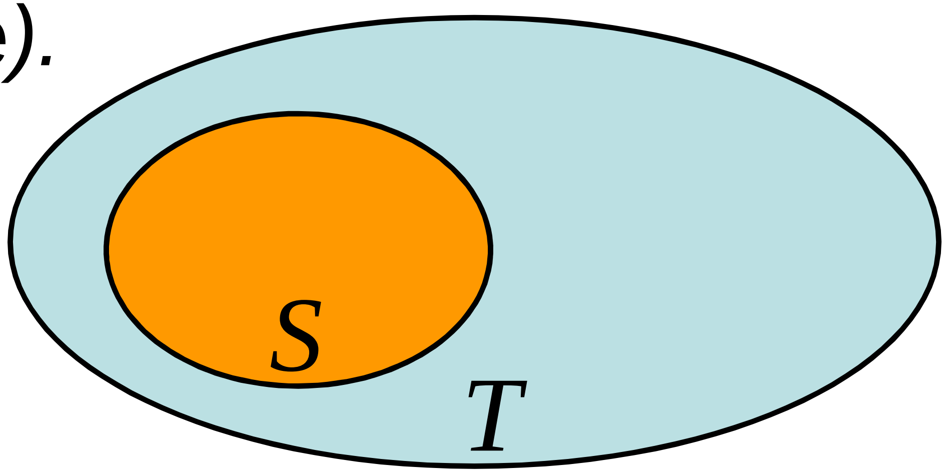
- $\emptyset$ ("null", "l'ensemble vide") un ensemble avec aucun élément.
- $\emptyset = \{\} = \{x|\mathbf{FAUX}\}$
- Pour n'importe quel ud, nous avons l'axiome $\neg\exists x$: $x \in \emptyset$.

Relations sur les sous-ensembles et les sur-ensembles

- $S \subseteq T$ ("S est un sous-ensemble de T") chaque élément de S est aussi un élément de T.
- $S \subseteq T \Leftrightarrow \forall x\, (x \in S \rightarrow x \in T)$
- $\emptyset \subseteq S$, $S \subseteq S$.
- $S \supseteq T$ ("S est un sur-ensemble de T") alors $T \subseteq S$.
- Note $S = T \Leftrightarrow S \subseteq T \wedge S \supseteq T$.
- $S \not\subseteq T$ signifie $\neg(S \subseteq T)$, *i.e.* $\exists x (x \in S \wedge x \notin T)$

Sous-ensemble strict et sur-ensemble propre

- $S \subset T$ ("*S* est un sous-ensemble strict de *T*") signifie que $S \subseteq T$ mais $T \not\subseteq S$. De façon similaire $S \supset T$ (sur-ensemble stricte).



Exemple:
$\{1,2\} \subset \{1,2,3\}$

Diagramme de Venn équivalent à $S \subset T$

Les ensembles sont aussi des objets

- Les objets éléments d'un ensemble peuvent eux-mêmes être des ensembles.
- Posons $S=\{x \mid x \subseteq \{1,2,3\}\}$
  Alors $S=\{\emptyset,$
  $\{1\}, \{2\}, \{3\},$
  $\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\},$
  $\{1,2,3\}\}$
- Sachez que $1 \neq \{1\} \neq \{\{1\}\}$

Cardinalité et finitude

- $|S|$ (*cardinalité* de S) est le nombre d'éléments de l'ensemble S.
- *Ex:* $|\varnothing|=0$, $|\{1,2,3\}| = 3$, $|\{a,b\}| = 2$,
  $|\{\{1,2,3\},\{4,5\},\{6\}, \{7,8\}\}| =$ 4
- Si $|S|\in$ **N**, alors S est *fini*.
  Autrement, S est *infini*.
- Quels ensembles infinis avons nous vus?

N Z R

Opération *puissance*

- La puissance de l'ensemble S, P(S) est l'ensemble des sous-ensembles de S. $P(S) :\equiv \{x \mid x \subseteq S\}$.
- *Ex:* $P(\{a,b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$.
- P(S) est aussi écrite $\mathbf{2}^S$.
  Pour S fini, $|P(S)| = 2^{|S|}$.
- Alors $\forall S: |P(S)| > |S|$, *e.g.* $|P(\mathbf{N})| > |\mathbf{N}|$.

Revue: Notations sur les ensembles

- Objets *x*, *y*, *z*; ensembles *S*, *T*, *U*.
- Ensemble {a, b, c} et constructeur $\{x|P(x)\}$.
- $\in$ membre de, $\emptyset$ ensemble vide.
- Relations =, $\subseteq$, $\supseteq$, $\subset$, $\supset$, $\not\subset$, ….
- Diagrammes de Venn.
- Cardinalité $|S|$ et ensembles infinis **N**, **Z**, **R**.
- Puissance d'un ensemble P(*S*).

n-tuplets ordonnés

- Sont des ensembles, sauf que l'ordonnancement des éléments est importants.
- Pour $n \in \mathbf{N}$, un *n-tuplet* ordonné ou une *séquence* ou une *liste de longeur n* est écrite $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Le *premier* élément est a_1, *etc.*
- Notez que $(1, 2) \neq (2, 1) \neq (2, 1, 1)$.
- Séquence vide, singlets, paires, triplets, quadruplets, quin<u>tuplets</u>, …, *n*-tuplets.

Contraste avec les ensembles {}

Produits Cartésien sur les ensembles

- Pour les ensembles A, B, le produit *Cartésien* $A \times B :\equiv \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$.
- *Ex:* $\{a,b\} \times \{1,2\} = \{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2)\}$
- Pour A, B fini, $|A \times B| = |A||B|$.
- Le produit Cartésien n'est pas commutatif: *i.e.*, $\neg\forall AB: A \times B = B \times A$.
- Généralisé à: $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \ldots$

René Descartes
(1596-1650)

Revue: Notions d'ensembles

- Objets x, y, z; ensembles S, T, U.
- Ensemble {a, b, c} et constructeur $\{x|P(x)\}$.
- $\in$ membre de, $\emptyset$ ensemble vide.
- Relations $=, \subseteq, \supseteq, \subset, \supset, \not\subset, \ldots$.
- Diagrammes de Venn.
- Cardinalité $|S|$.
- Ensembles infinis **N**, **Z**, **R**.
- Puissance d'un ensemble P(S).

Revue: Notions d'ensembles

- Ensembles Finis vs. infinis.
- Opérations sur les ensembles $|S|$, P(S), $S \times T$.
- Autres opérations: $\cup$, $\cap$, $-$. (section 5 suivante)

Opérateur d'Union

- Pour les ensembles A, B, leur *union* $A \cup B$ est l'ensemble de tous les éléments qui sont soient dans A, **ou** ("$\vee$") dans B (ou dans les deux ensembles).
- Formellement , $\forall A,B$: $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$.
- $A \cup B$ est un **sur-ensemble** de A et B (en fait, le plus petit sur-ensemble):

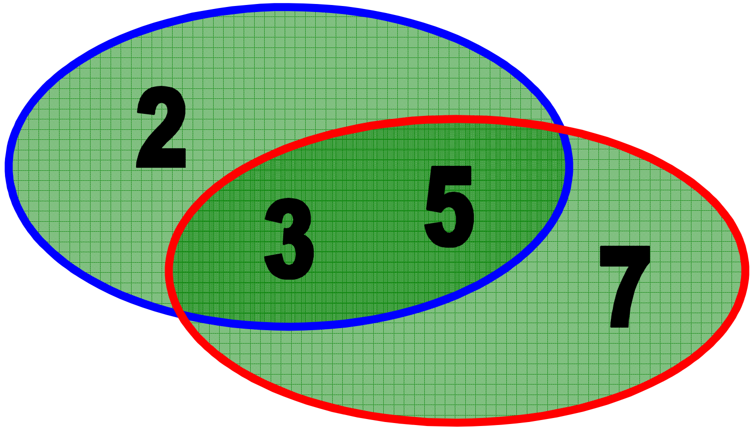
$$\forall A, B: (A \cup B \supseteq A) \wedge (A \cup B \supseteq B)$$

Exemples d’Union

- $\{a,b,c\} \cup \{2,3\} = \{a,b,c,2,3\}$

Forme Requise

- $\{2,3,5\} \cup \{3,5,7\} = \{2,3,5,3,5,7\} = \{2,3,5,7\}$



Exemple d’**U**nion:
“Les **Uni**ted **S**tates of **A**merica sont habités par des personnes travaillant dans un ou plusieurs états.”

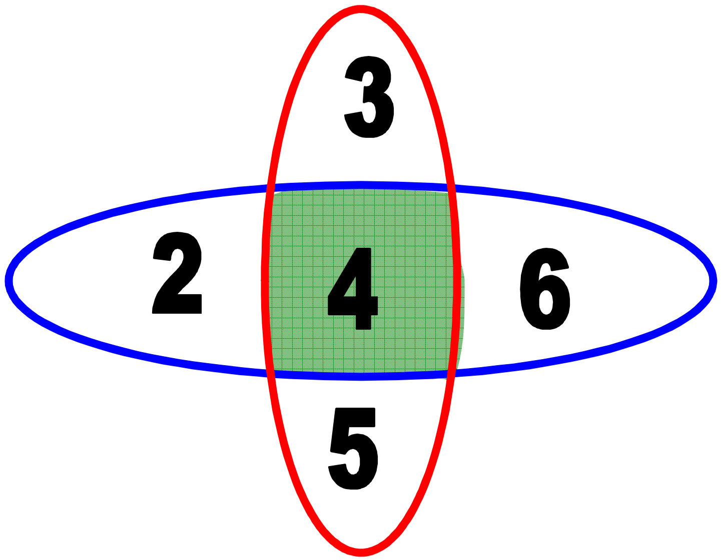
L'Opérateur d'intersection

- Pour A, B, leur *intersection* $A \cap B$ est l'ensemble contenant les éléments étant simultanément dans A et ("$\wedge$") B.
- Formellement, $\forall A,B$: $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$.
- Notez que $A \cap B$ est un **sur-ensemble** de A et B (le plus large):

$$\forall A, B: (A \cap B \subseteq A) \wedge (A \cap B \subseteq B)$$

Exemples d'Intersection

- $\{a,b,c\} \cap \{2,3\} = \underline{\ \varnothing\ }$
- $\{2,4,6\} \cap \{3,4,5\} = \underline{\ \{4\}\ }$



"L'**<u>intersection</u>** des boulevards Des Forges et Des Récolets est juste la surface appartenant aux deux boulevards."

Ensembles disjoints

- Deux ensembles *A*, *B* sont dits *disjoints* SSI si leur intersection est vide. ($A \cap B = \emptyset$)
- Exemple: l'ensemble des nombres entiers pairs est disjoint avec l'ensemble des nombres entiers impairs.

Principe d'Inclusion-Exclusion

- Combien d'éléments sont dans $A \cup B$?

  $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

- Exemple: Combien d'étudiants ont des cours le jour ou le soir? $C = J \cup S$,

  $J = \{e \mid e$ prend des cours le jour$\}$

  $S = \{e \mid e$ *prend des cours le soir*$\}$

- Quelques étudiants font les deux !

  $|C| = |J \cup S| = |J| + |S| - |J \cap S|$

Différence d'ensembles

- Pour les ensembles *A*, *B*, la *différence de A et B*, *A*–*B*, est l'ensemble des éléments qui sont dans *A* mais pas dans *B*.
- Formellement:

$$A - B :\equiv \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$
$$= \{x \mid \neg(x \in A \rightarrow x \in B)\}$$

- Autre forme:

  Le *complément de B* par rapport à *A*.

Exemples de différence (ensemble)

- $\{1,\cancel{2},\cancel{3},4,\cancel{5},6\} - \{2,3,5,7,9,11\} =$

  $\{1,4,6\}$

- $\mathbf{Z} - \mathbf{N} = \{\ldots ,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ \} - \{0,\ 1,\ \ldots\ \}$

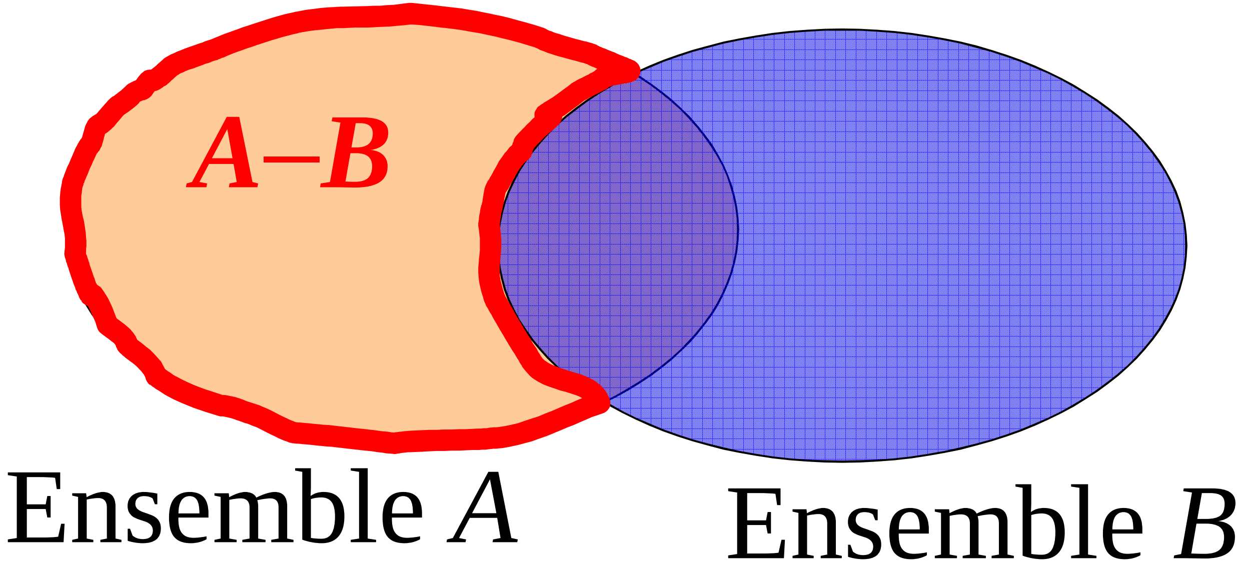
  $= \{x \mid x$ est un entier mais pas un nombre naturel$\}$

  $= \{x \mid x$ est un entier négatif$\}$

- Résultat $= \{\ldots ,\ -3,\ -2,\ -1\}$

Différence – Diagramme de Venn

- $A-B$ ce qui reste après que B soit enlevé.



Compléments d'un ensemble

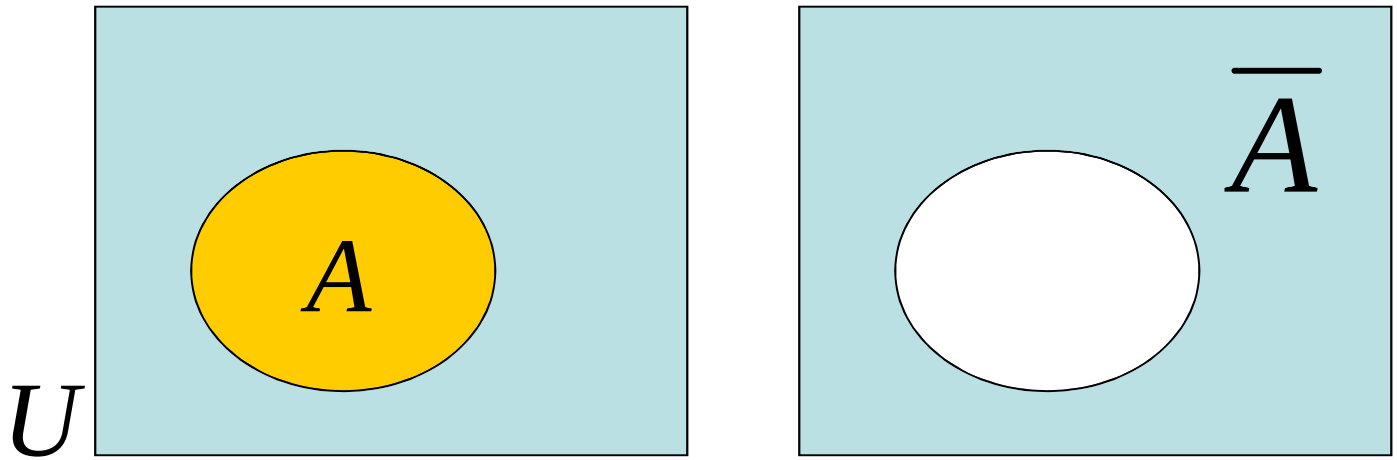
- Le ud (*univers du discours)* peut être lui-même considéré comme un ensemble, disons *U*.
- Quand le contexte definis clairement *U*, pour tout ensemble $A \subseteq U$, le *complément* de *A*, $\overline{A}$, est donné par *U*–*A.*
- *Ex:,* Si *U*=**N**,

$$\overline{\{3,5,7,9\}} = \{0,1,2,4,6,8,10,11,...\}$$

Compléments des ensembles

- Définition équivalente, quand *U* est défini:

$$\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$$



Identités des ensembles

- Identité: $A \cup \emptyset = A = A \cap U$
- Domination: $A \cup U = U$, $A \cap \emptyset = \emptyset$
- Idempotence: $A \cup A = A = A \cap A$
- Double complément: $\overline{(\overline{A})} = A$
- Commutativité: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$
- Associativité: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,
  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- Distributivité: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Règles de De Morgan (ensembles)

- Analogues aux lois de De Morgan pour les propositions.

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Preuves des Identités (ensembles)

- La preuve des énoncés sur les ensembles de la forme $E_1 = E_2$ (où Es des expressions sur les ensembles), peut être faite de 3 façons:

1. Prouver $E_1 \subseteq E_2$ et $E_2 \subseteq E_1$ séparément.
2. Utiliser la notation de construction des ensembles & les équivalences logiques.
3. Utiliser les tables d'*appartenance*.

Méthode 1: Sous-ensembles mutuels

Exemple: Prouver $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

- Partie 1: $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
  - Supposons $x \in A \cap (B \cup C)$, & Prouver $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
  - Sachant que $x \in A$, et soit $x \in B$ ou $x \in C$.
    - Cas 1: $x \in B$. Alors $x \in A \cap B$, donc $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
    - Cas 2: $x \in C$. Alors $x \in A \cap C$, donc $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
  - Par conséquent, $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
  - Par conséquent, $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- Partie 2: $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$. …

Méthode 2: Construction des ensembles et équivalences logiques

Exemple: Prouver $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

- $(A \cap B)' = \{x \mid x \notin A \cap B\}$.
- $(A \cap B)' = \{x \mid \neg (x \in A \cap B)\}$.
- $(A \cap B)' = \{x \mid \neg (x \in A \wedge x \in B)\}$.
- $(A \cap B)' = \{x \mid (x \notin A \vee x \notin B)\}$.
- $(A \cap B)' = \{x \mid (x \in A' \vee x \in B')\}$.
- $(A \cap B)' = \{x \mid (x \in A' \cup B')\}$.

Méthode 2: Construction des ensembles et équivalences logiques

Exemple: LEMME: Associativité de l'Union

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

Preuve : $(A \cup B) \cup C = \{x \mid x \in A \cup B \lor x \in C\}$

$= \{x \mid (x \in A \lor x \in B) \lor x \in C\}$

$= \{x \mid x \in A \lor (x \in B \lor x \in C)\}$

$= \{x \mid x \in A \lor (x \in B \cup C)\}$

$= A \cup (B \cup C)$

Méthode 3: Tables d’appartenance

- Comme les tables de vérité de la logique propositionnelle.
- Colonnes: différentes expressions.
- Rangés pour toutes les combinaisons d’appartenance dans les ensembles.
- Utilisé “1” pour indiquer l’appartenance dans l’ensemble dérivé, “0” pour la non-appartenance.
- Équivalence quand des colonnes sont identiques.

Exemple de Table d'Appartenance

Prouver $(A \cup B) - B = A - B$.

A	B	$A \cup B$	$(A \cup B) - B$	$A - B$
0	0	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	1	0	0

Exemple de Table d'Appartenance

Prouver $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$.

A B C	$A \cup B$	$(A \cup B) - C$	$A - C$	$B - C$	$(A - C) \cup (B - C)$
0 0 0					
0 0 1					
0 1 0					
0 1 1					
1 0 0					
1 0 1					
1 1 0					
1 1 1					

Revue (Section 5)

- Ensembles *S*, *T*, *U*… Ensembles spéciaux **N**, **Z**, **R**.
- Notations des ensembles {a,b,...}, $\{x|P(x)\}$…
- Relations $x \in S$, $S \subseteq T$, $S \supseteq T$, $S = T$, $S \subset T$, $S \supset T$.
- Opérations $|S|$, P(S), $\times$, $\cup$, $\cap$, $-$, $\overline{S}$
- Techniques de preuve de l’égalité des ensembles:
  - Sous-ensembles mutuels.
  - Tables d’appartenance.
  - Derivation à partir des équivalences logiques.

Généralisation Unions & Intersections

- Sachant que l'union & l'intersection sont commutatives et associatives, nous pouvons donc généraliser leur application sur des séquences d'ensembles ($A_1,\dots,A_n$), ou même sur des ensembles non ordonnés d'ensembles, $X=\{A \mid P(A)\}$.

Généralisation: Union

- Opération d'union binaire: $A \cup B$
- Union n-aire:
  $A \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n :\equiv ((\ldots((A_1 \cup A_2) \cup \ldots) \cup A_n)$
  (groupement & ordonnancement sont sans importance)
- Notation "Big U": $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$
- Ou pour des ensembles infinis d'ensembles: $\bigcup_{A \in X} A$

Généralisation: Intersection

- Opération d'intersection binaire : $A \cap B$
- Intersection *n*-aire:
  $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \equiv ((\ldots((A_1 \cap A_2) \cap \ldots) \cap A_n)$
  (groupement & ordonnancement sont sans importance)
- Notation "Big Arch": $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$
- Ou pour des ensembles infinis d'ensembles: : $\bigcap_{A \in X} A$

Représentations

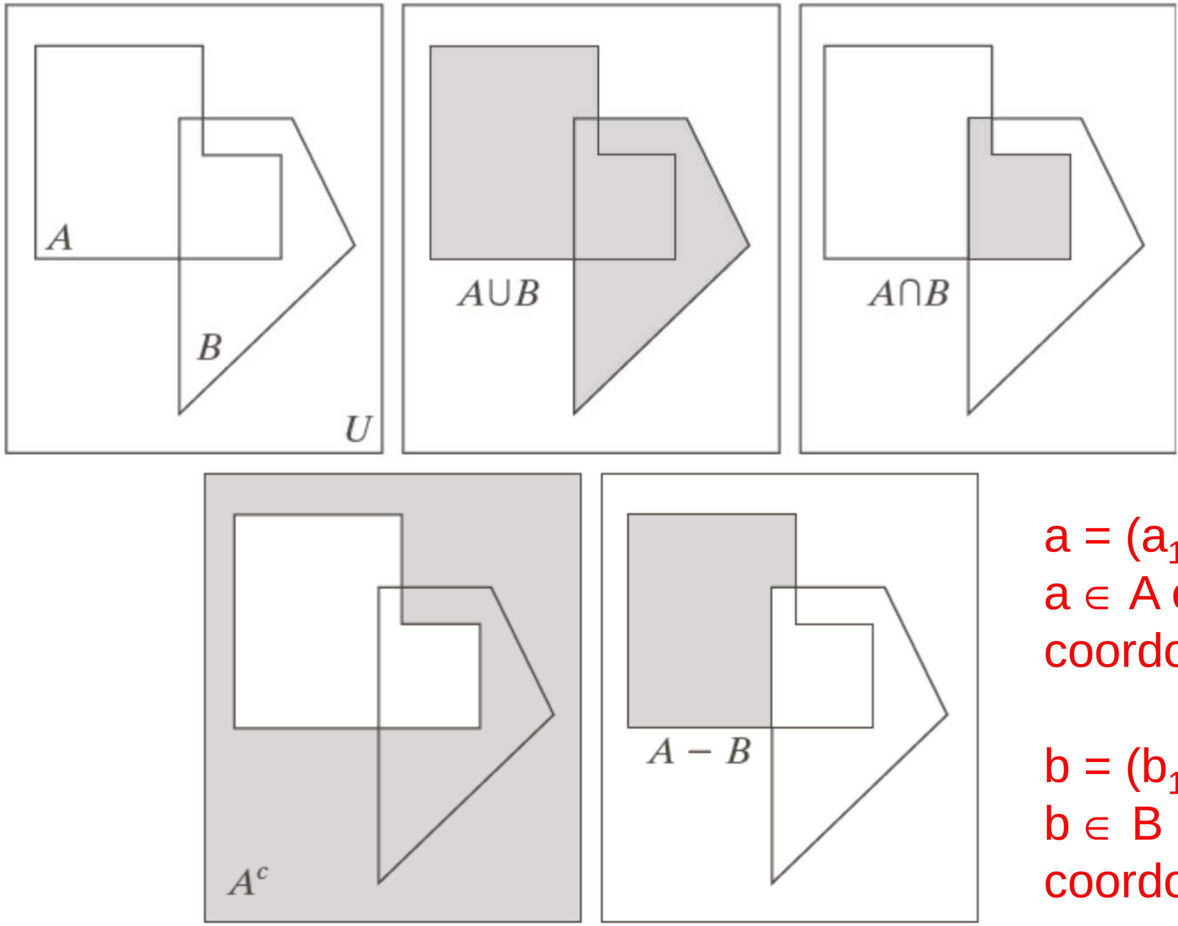
- Il est possible d'utiliser diverses méthodes pour *représenter* chaque structure discrète à partir d'autres structures discrètes.
- *Ex:* représentation des N
  - Ensembles: **0**:≡∅, **1**:≡{**0**}, **2**:≡{**0**,**1**}, **3**:≡{**0**,**1**,**2**}, …
  - Chaînes de bits:
    0:≡`0`, **1**:≡`1`, **2**:≡`10`, **3**:≡`11`, **4**:≡`100`, …

Représenter des ensembles avec des chaînes de bits

- Pour un ud énumérable *U* ordonné $x_1, x_2, \ldots$, représentant un ensemble fini $S \subseteq U$ comme une chaîne de bits finie $B = b_1 b_2 \ldots b_n$ où $\forall i\colon x_i \in S \leftrightarrow (i < n \wedge b_i = 1)$.

  ex: $U = \mathbf{N}$, $S = \{2,3,5,7,11\}$,
  B=001101010001.
- Avec cette représentation, les opérateurs "$\cup$", "$\cap$", "$\bar{\ }$" correspondent à OU, ET, NON bit à bit.

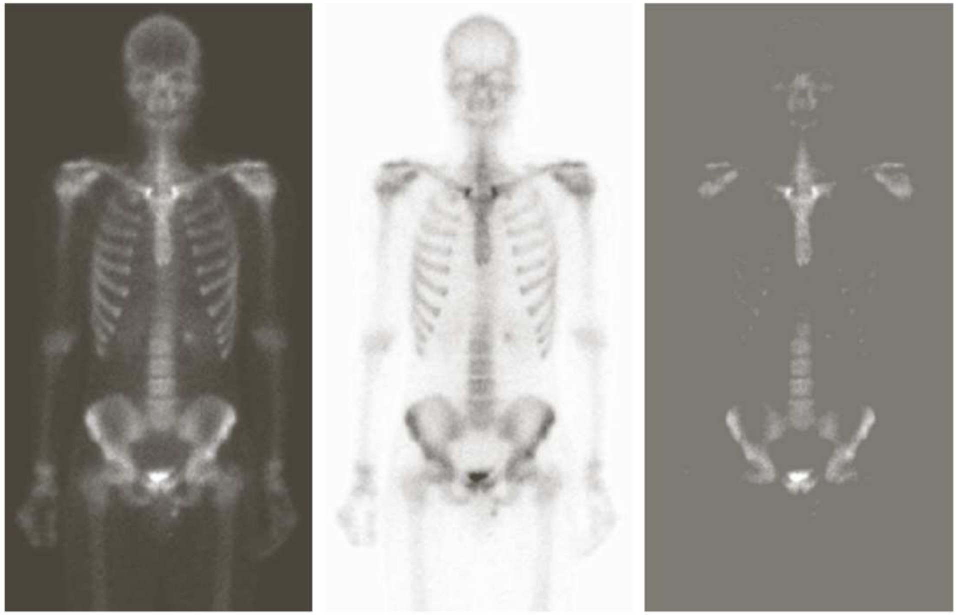
Exemples d'applications des ensembles



$a = (a_1, a_2)$
$a \in A$ ensemble de coordonnées 2D

$b = (b_1, b_2)$
$b \in B$ ensemble de coordonnées 2D

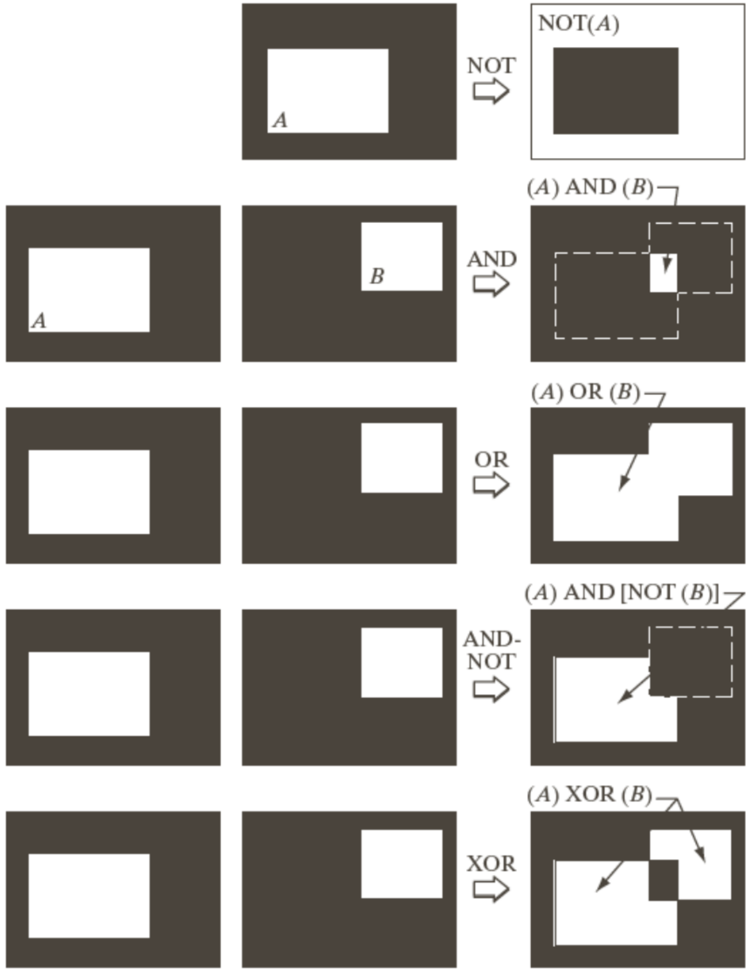
Exemples d'applications des ensembles (complément, union)



$A \cup B = \{max_z(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$

$A^c = \{(x,y, K- z) \mid (x,y,z) \in A \}$
z couleur à la position x,y
$Z = \{z \mid z \in [0..255] \}$-> K = 255

Exemples d'applications des ensembles (complément, union)



Arrière plan: noir (0)
Avant plan: blanc (1)