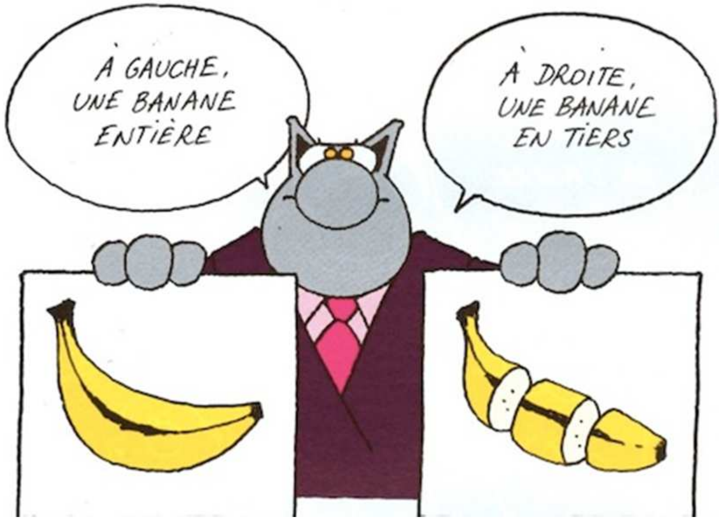
INF1130

Mathématiques pour l'informatique

Zied Zaier, PhD
Département d'informatique
Université du Québec à Montréal



Cours 7

INDUCTION MATHÉMATIQUE

CE DOCUMENT EST INSPIRÉ DES TRAVAUX DES PROFESSEURS KENNETH H. ROSEN ET TIMOTHY WALSH.

Induction Mathématique

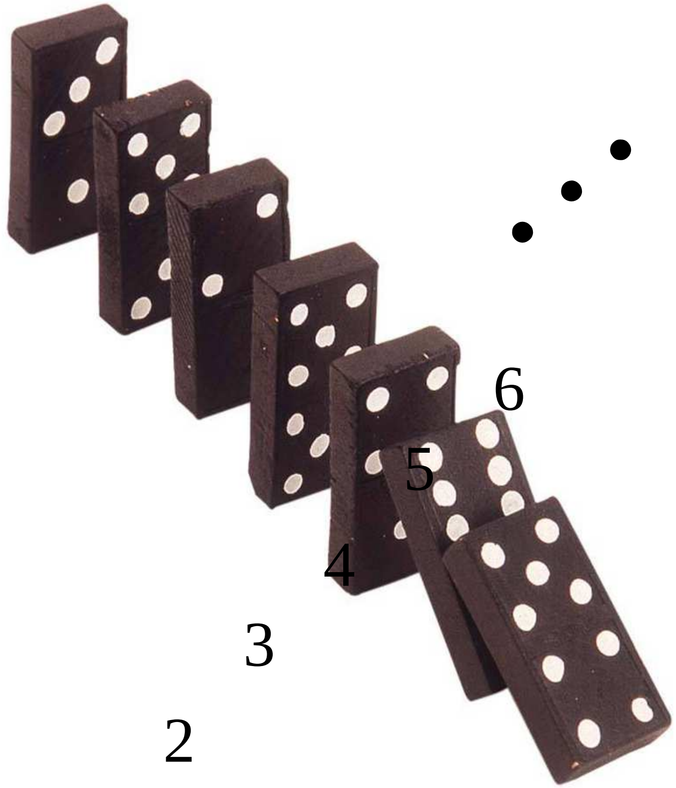
- L'induction est une technique rigoureuse permettant de prouver qu'un prédicat $P(n)$ est vrai pour chaque nombre naturel n.
- Découle du principe "domino effect".
- Basé sur une règle d'inférence de la logique des prédicats:

$$P(0)$$
$$\forall k \geq 0, k < n\ (P(k) \rightarrow P(k+1))$$
$$\therefore \forall n \geq 0\ P(n)$$

"Le premier principe de l'induction Mathématique"

Le “Domino Effect”

- **Prémise #1:** Domino #0 tombe.
- **Prémise #2:** Pour chaque $k \in \mathbf{N}$,
  si le domino #k tombe,
  alors le domino #k+1 aussi.
- **Conclusion: Tous les dominos tombent**



Note:
cette logique s’applique même si le nombre de dominos est infini.

Induction Mathématique

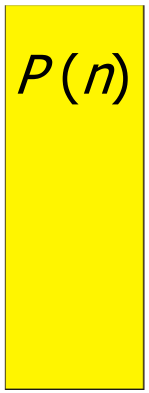
- Supposons une séquence de propositions que nous voulons prouver:

$P\,(0)$, $P\,(1)$, $P\,(2)$, $P\,(3)$, $P\,(4)$, … $P\,(n)$, …

Ex: $P\,(n)$ =

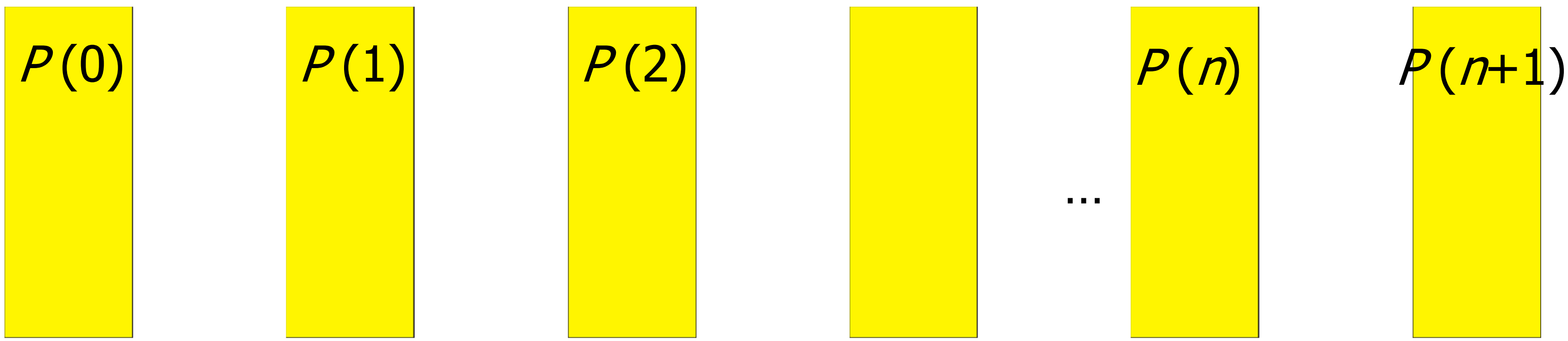
"La somme des n premiers nombres impairs positifs est le $n^{\text{ième}}$ carré parfait"

- Chaque proposition est associée à un domino:



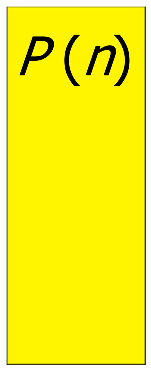
Induction Mathématique

- La séquence de propositions est donc une séquence de dominos.



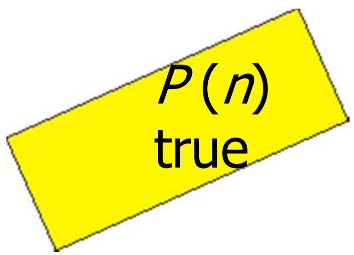
Induction Mathématique

- Quand un domino tombe, la proposition correspondante est donc vraie:



Induction Mathématique

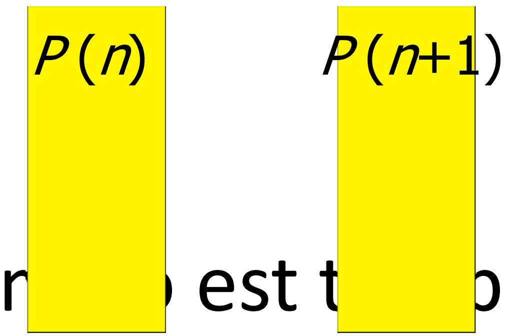
- Quand un domino tombe (à droite), la proposition correspondante est donc vraie :



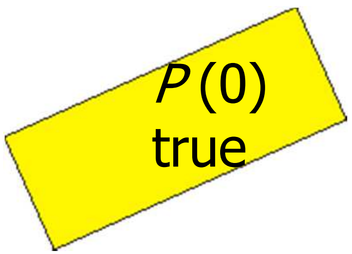
Induction Mathématique

- Supposons que les dominos satisfont deux contraintes.

1) Positionnement: Si un domino tombe, le prochain domino (à droite) doit aussi tomber.



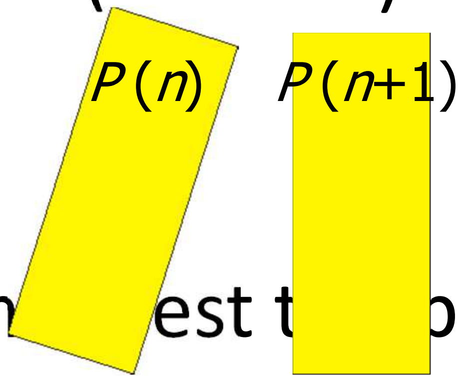
2) Le premier domino est tombé



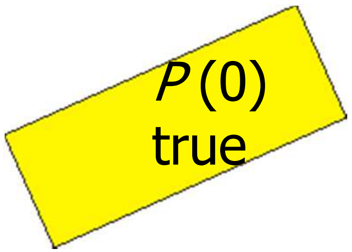
Induction Mathématique

- Supposons que les dominos satisfont deux constraintes.

1) Positionnement: Si un domino tombe, le prochain domino (à droite) doit aussi tomber.



2) Le premier dom est t bé



Induction Mathématique

- Supposons que les dominos satisfont deux constraintes.

1) Positionnement: Si un domino tombe, le prochain domino (à droite) doit aussi tomber.

$P(n)$ true

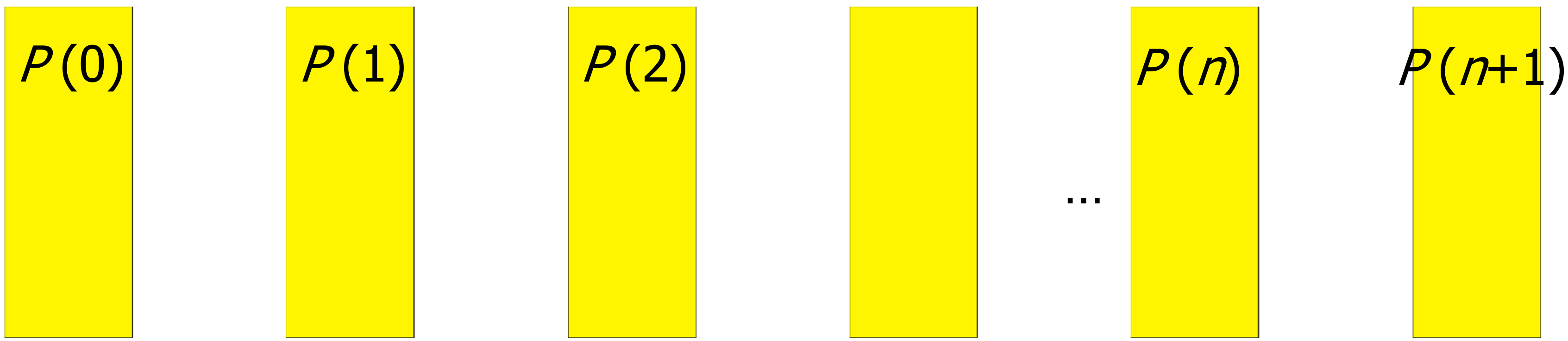
$P(n+1)$ true

2) Le premier domin… tom…

$P(0)$ true

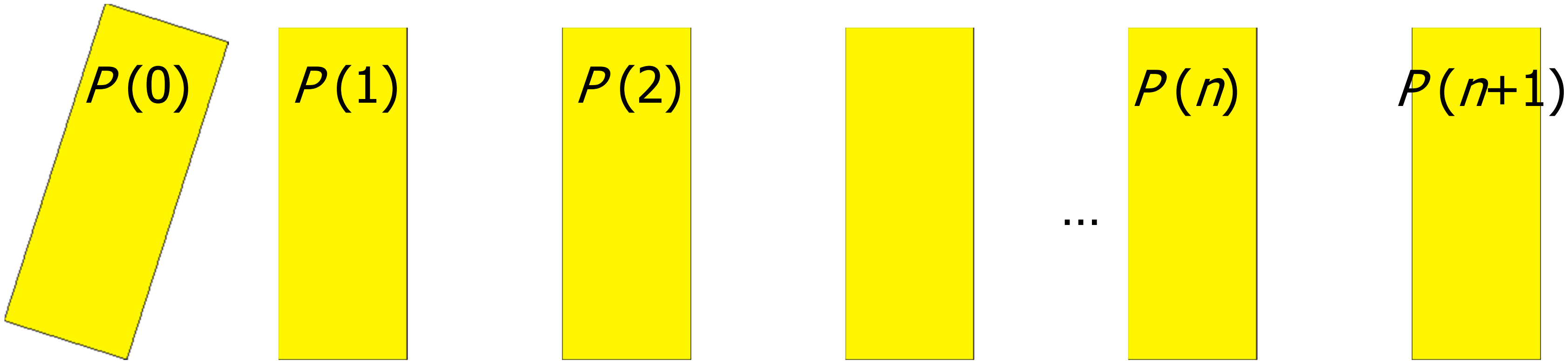
Induction Mathématique

- Nous pouvons alors conclure que tous les dominos tombent.



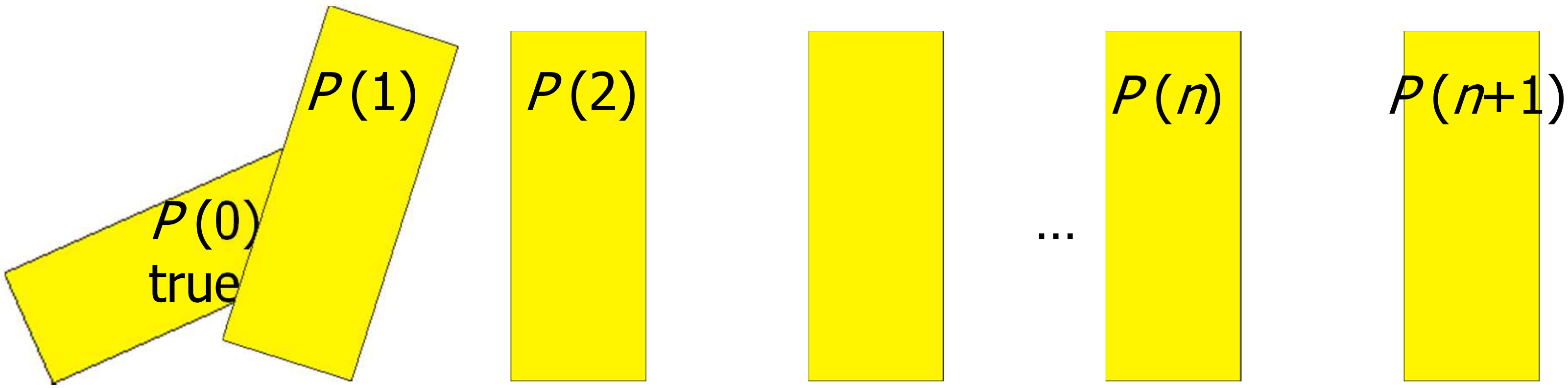
Induction Mathématique

- Nous pouvons alors conclure que tous les dominos tombent.



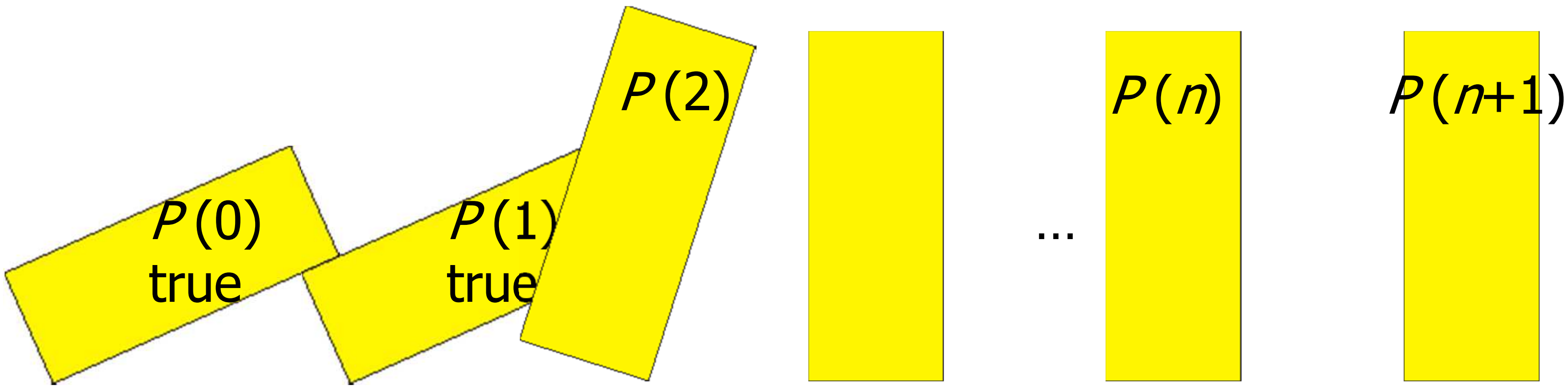
Induction Mathématique

- Nous pouvons alors conclure que tous les dominos tombent.



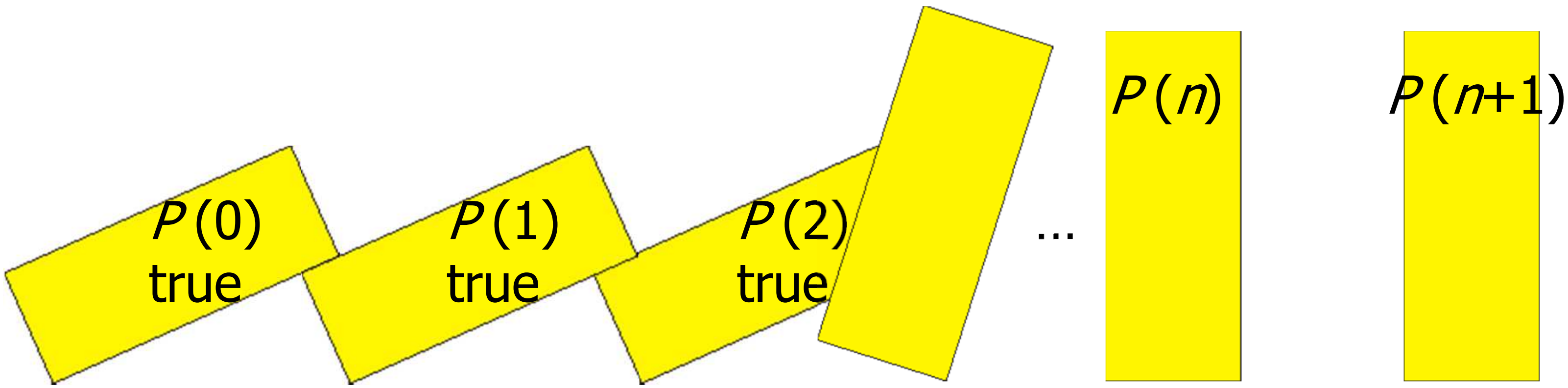
Induction Mathématique

- Nous pouvons alors conclure que tous les dominos tombent.



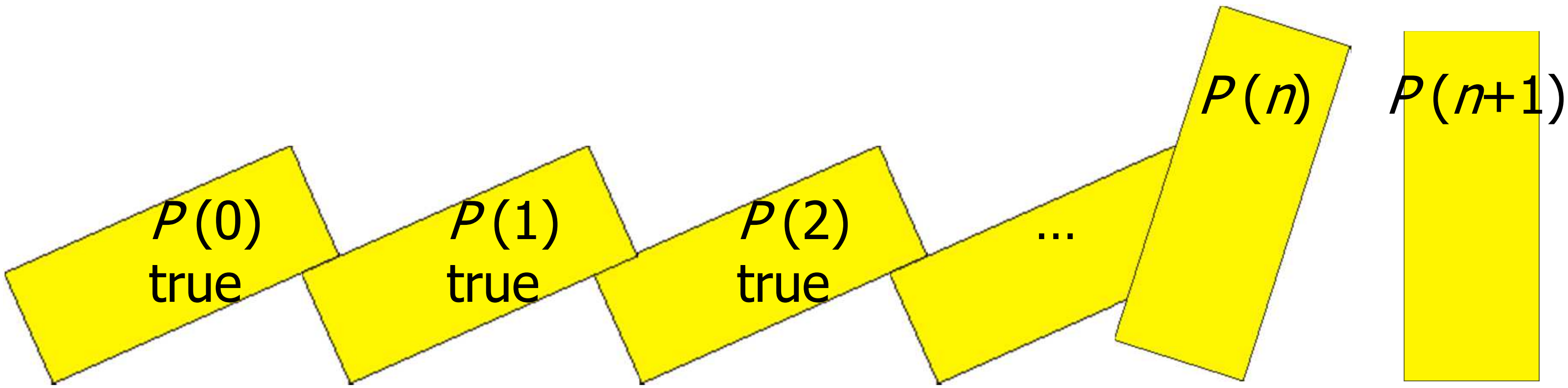
Induction Mathématique

- Nous pouvons alors conclure que tous les dominos tombent.



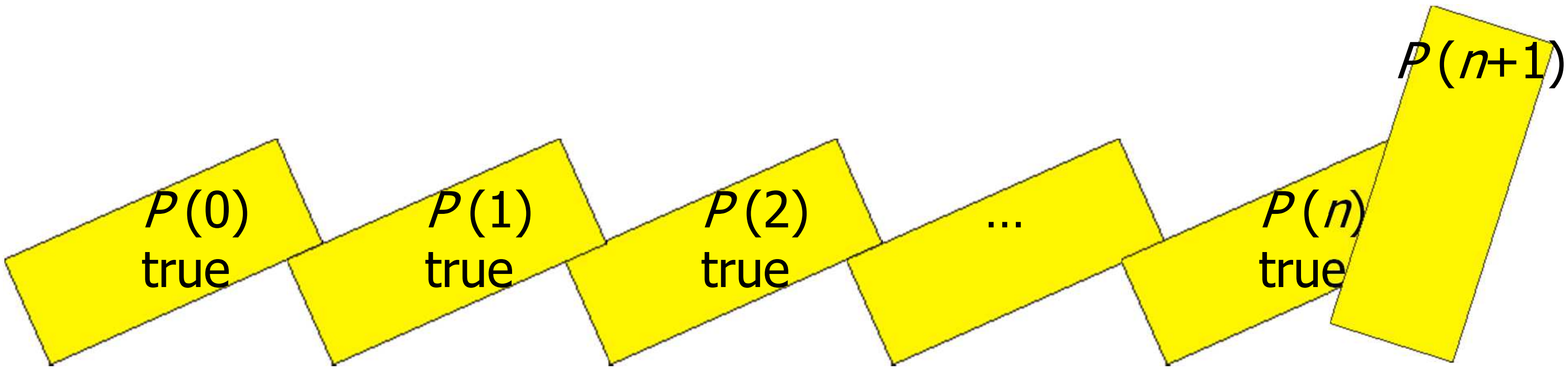
Induction Mathématique

- Nous pouvons alors conclure que tous les dominos tombent.



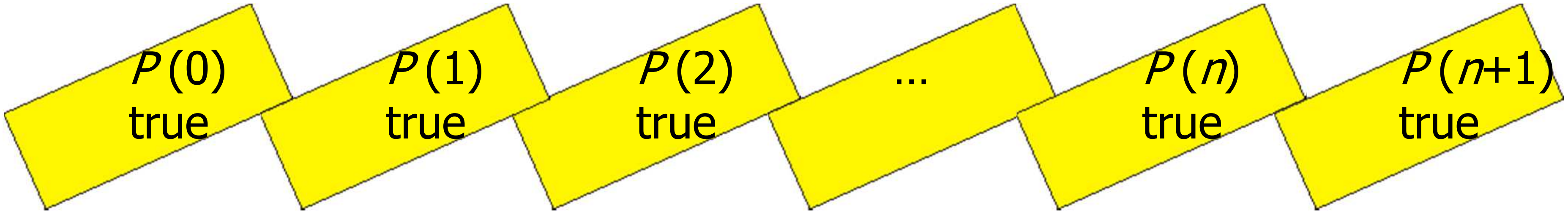
Induction Mathématique

- Nous pouvons alors conclure que tous les dominos tombent.



Induction Mathématique

- Nous pouvons alors conclure que tous les dominos tombent.

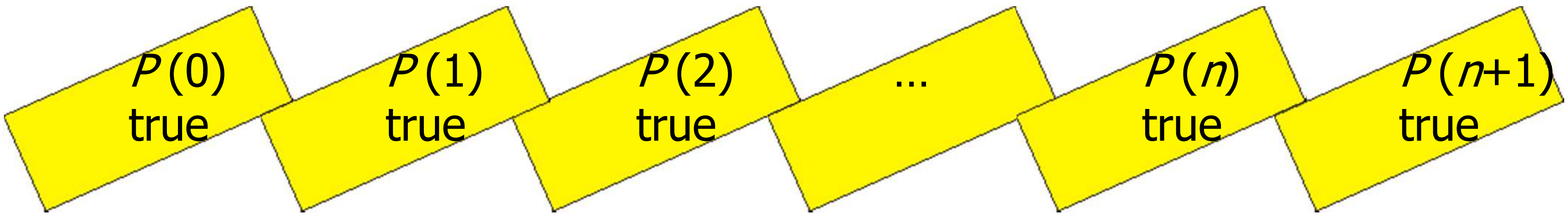


Induction Mathématique

- **Principe de l'Induction Mathématique:**

SI:

1) [***base***] P (0) est vraie
2) [***induction***] $\forall n \;\; P(n) \rightarrow P(n+1)$ est vraie



Alors:

$\forall n \; P(n)$ est vraie

Formalisation de l'effet domino.

Exemple: Induction Mathématique

- Prouvons que pour $\forall n \geq 0$ $P(n)$ où

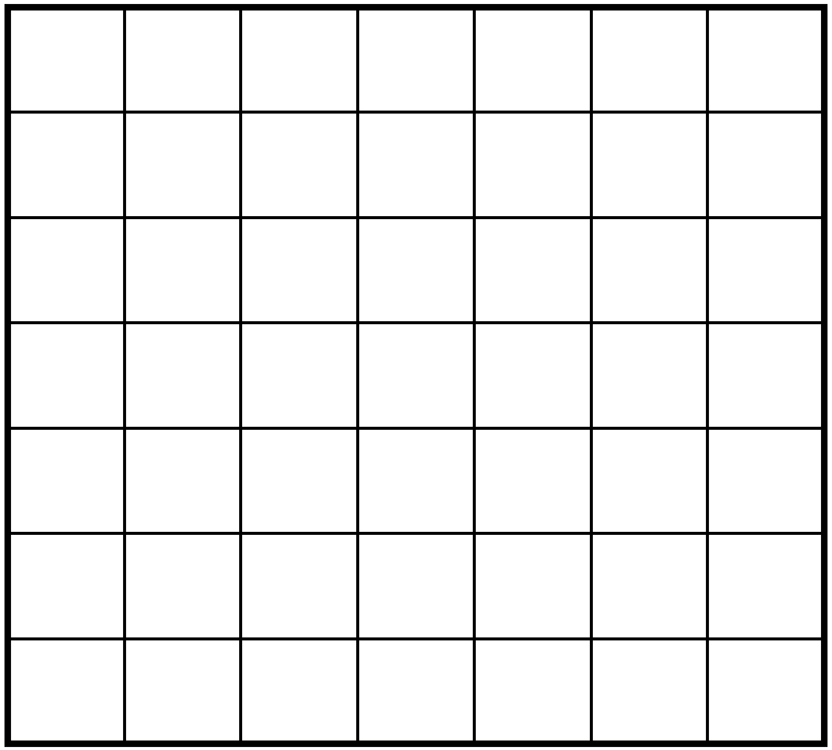
$P(n)$ = "La somme des n premiers nombres impairs positifs est le $n^{\text{ième}}$ carré parfait."

=

$$\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$$

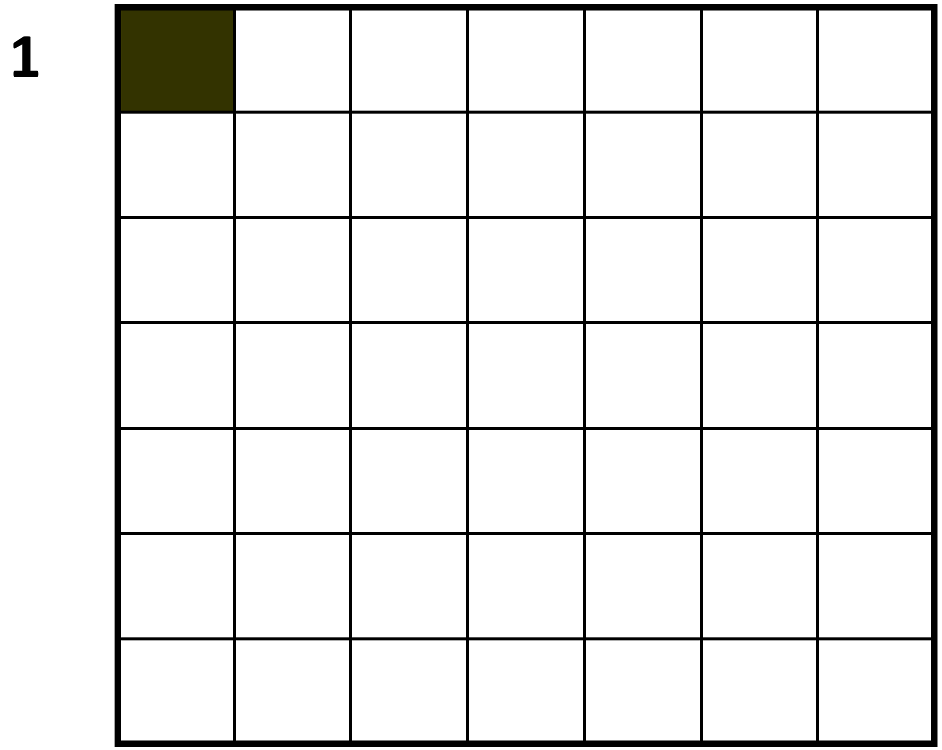
Exemple: Induction Mathématique

- Interprétation Géometrique. Pour avoir le prochain carré, ajout du prochain nombre impair:



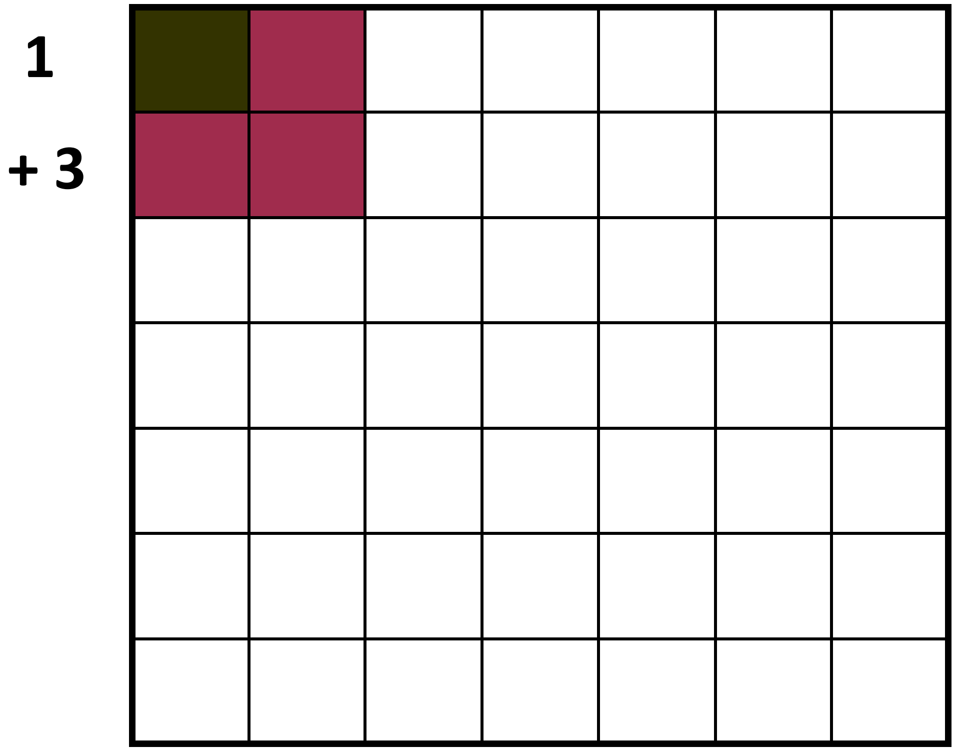
Exemple: Induction Mathématique

- Interprétation Géometrique. Pour avoir le prochain carré, ajout du prochain nombre impair:



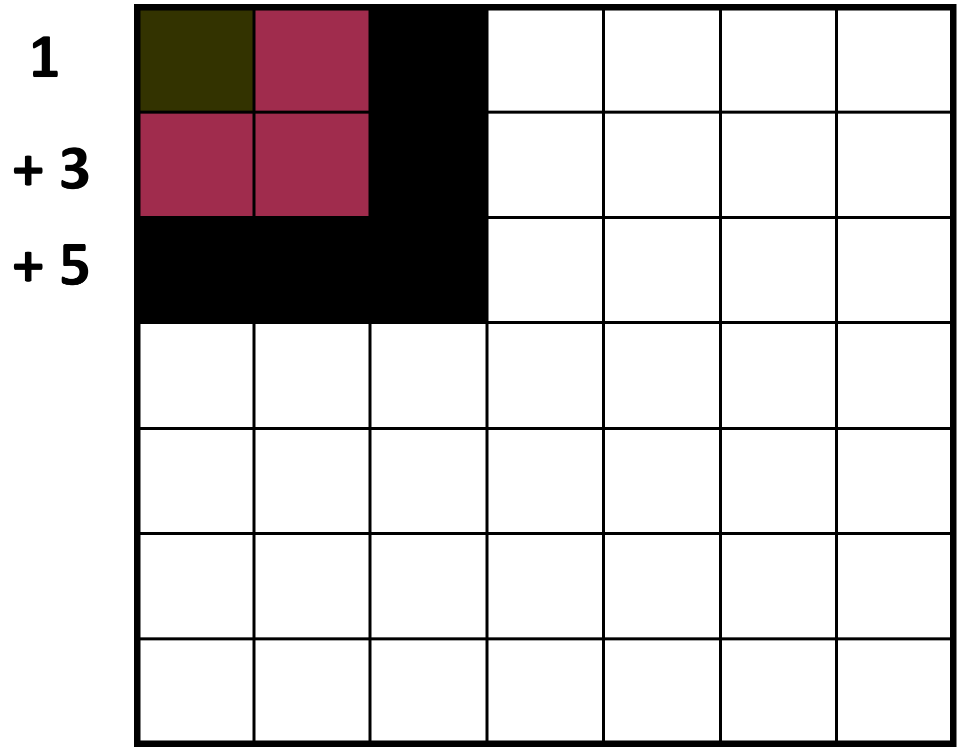
Exemple: Induction Mathématique

- Interprétation Géometrique. Pour avoir le prochain carré, ajout du prochain nombre impair:



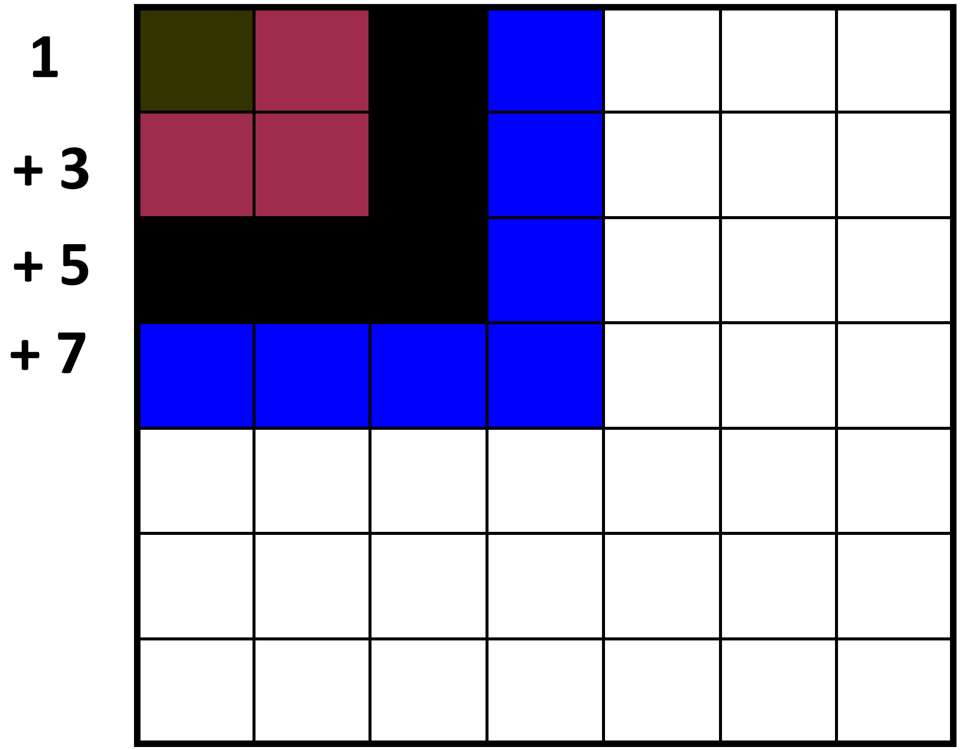
Exemple: Induction Mathématique

- Interprétation Géometrique. Pour avoir le prochain carré, ajout du prochain nombre impair:



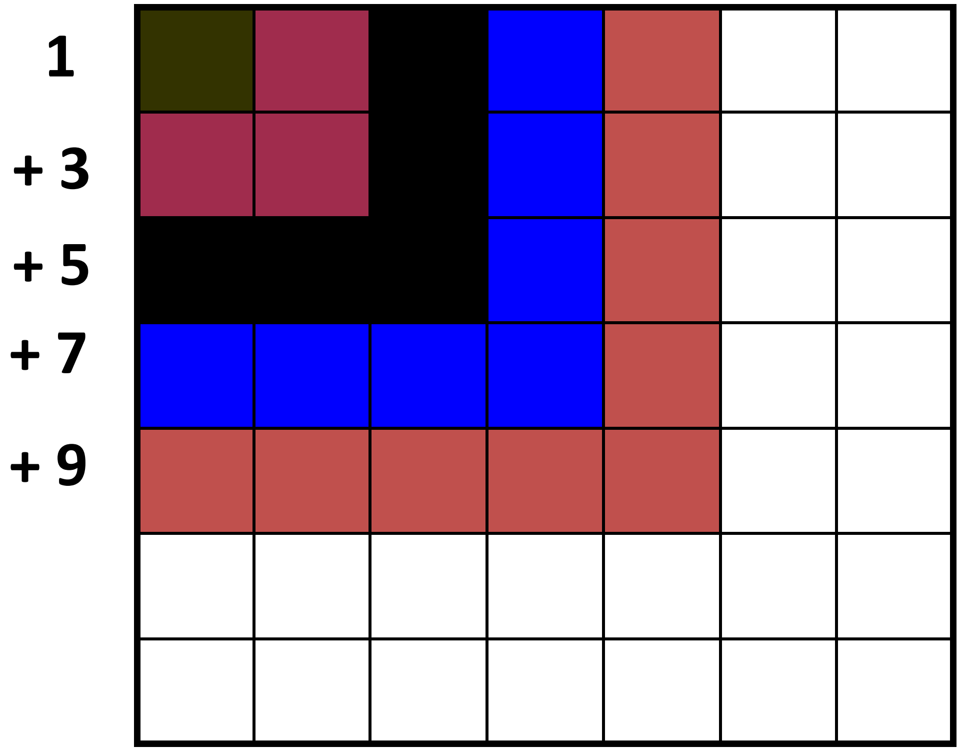
Exemple: Induction Mathématique

- Interprétation Géometrique. Pour avoir le prochain carré, ajout du prochain nombre impair:



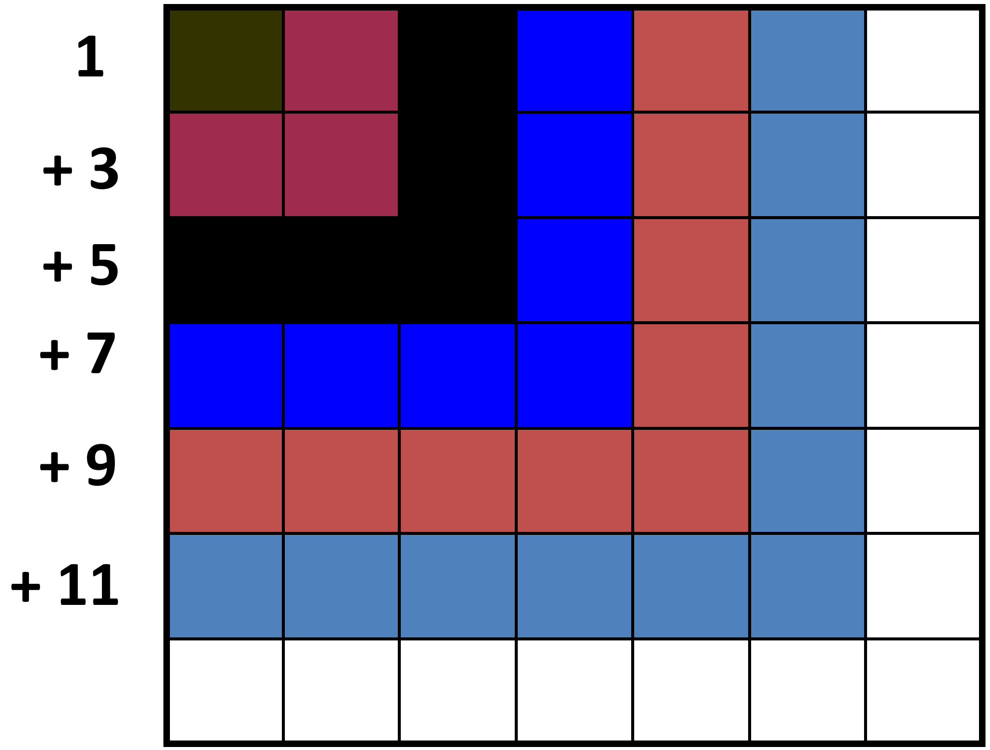
Exemple: Induction Mathématique

- Interprétation Géometrique. Pour avoir le prochain carré, ajout du prochain nombre impair:



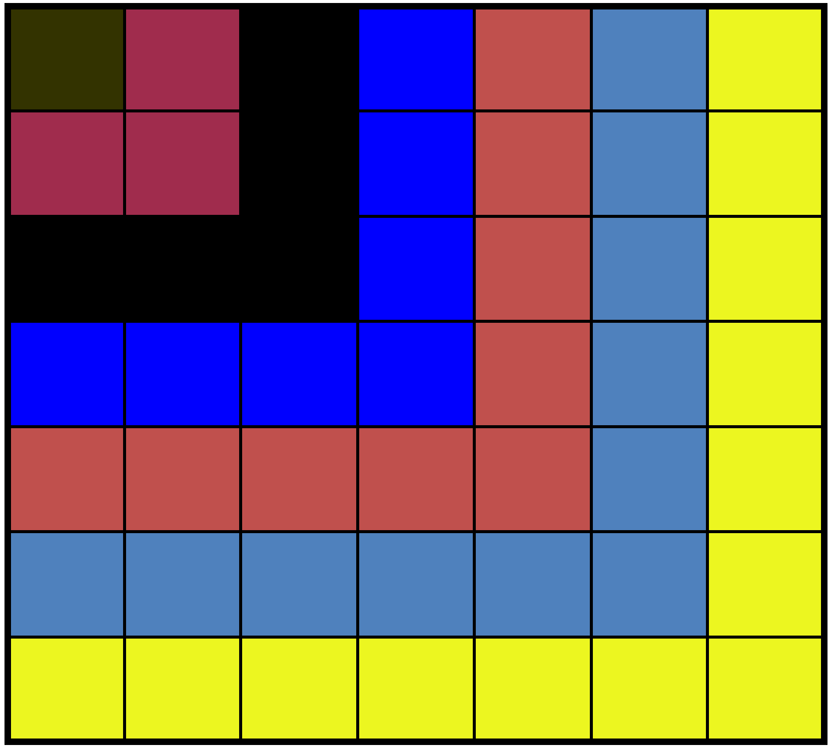
Exemple: Induction Mathématique

- Interprétation Géometrique. Pour avoir le prochain carré, ajout du prochain nombre impair:



Exemple: Induction Mathématique

- Interprétation Géométrique. Pour avoir le prochain carré, ajout du prochain nombre impair:



1

+ 3

+ 5

+ 7

+ 9

+ 11

+ 13

7^2

Exemple: Induction Mathématique

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=n^2$$

- Une preuve par induction a deux parties: la base et le pas d'induction.

1) Base: Démontrer que le prédicat est vrai pour *n* = 0 (ou le plus petit cas). Dans le présent exemple, n = 0, nous devons démontrer que:

$$\sum_{i=1}^{0}(2i-1)=0^2$$

- Un peu confus dans ce cas. RÈGLE: La somme de rien est 0. Donc 0=0. ✓

Exemple: Induction Mathématique

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=n^2$$

2) Induction: Démontrer que si le prédicat est vrai pour *n*, alors il est aussi vrai pour *n*+1. Il faut alors manipuler algébriquement les formules pour permettre de prouver que

p(n) -> p(n+1).

$$\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1)=\sum_{i=1}^{n}(2i-1)+[2(n+1)-1]$$

$$=n^2+[2n+1]$$

(hypothèse d'induction)

$$=(n+1)^2 \checkmark$$

Preuve complétée. ?

Validité de l'Induction

- **Preuve que** $\forall n \geq 0\ P(n)$ est un conséquent valide:
- Étant donné un $k \geq 0$, le 2ième antécédent : $\forall k \geq 0\ (P(k) \rightarrow P(k+1))$ implique trivialement que $\forall k \geq 0\ (k<n) \rightarrow (P(k) \rightarrow P(k+1))$, *i.e.*, que $(P(0) \rightarrow P(1)) \wedge (P(1) \rightarrow P(2)) \wedge \ldots \wedge (P(n-1) \rightarrow P(n))$. En appliquant à répétition k-1 fois la règle d'induction (hypothetical syllogism rule) à des implications adjacentes de cette liste, donne alors l'implication globale $P(0) \rightarrow P(n)$; laquelle avec $P(0)$ (antécédent #1) et les implications successives (*modus ponens)* donnent $P(n)$. Alors $\forall n \geq 0\ P(n)$. ■

Les étapes d'une preuve Inductive (1ier principe)

- Supposons que nous voulons prouver que $\forall n\ P(n)$…
  - *Cas de base* (étape de base): Prouver $P(0)$
  - Faire le *pas d'induction*: Prouver que $\forall$k, k<n $P(\mathrm{k}) \rightarrow P(\mathrm{k}+1)$.
  - Nous pouvons aussi prouver que $P(\mathrm{n}) \rightarrow P(\mathrm{n}+1)$.
    - Utilisons une preuve directe:
    - Posons $n \in$ **N**, **assumons** $\boldsymbol{P(n)}$**.** (hypothèse *inductive*)
    - À partir de cette hypothèse, **prouvons que** $\boldsymbol{P(n+1)}$**.**
  - La règle d'inférence inductive nous donne alors $\forall n\ P(n)$.

Induction Généralisée

- Une règle d'induction de la forme $\forall n \geq c\ P(n)$ pour une constante $c \in \mathbf{Z}$, où c peut être $c \neq 0$.
  - Dans ce cas, le cas de base revient à prouver que $P(c)$ plutôt que $P(0)$, et le pas d'induction est de prouver que $\forall n \geq c\ (P(n) \rightarrow P(n+1))$.
- L'Induction peut aussi être utiliser pour prouver que $\forall n \geq c\ P(a_n)$ pour des séries quelconques $\{a_n\}$.
- Peut réduire ces formes en des formes déjà utilisées.

Induction forte (2ième Principe)

- Caractérisée par une autre règle d'inférence:

$$
\begin{array}{l}
P(0) \\
\forall n \geq 0: (\underbrace{\forall 0 \leq k < n\ P(k)}^{P \text{ est vrai pour tous les cas précédents}}) \rightarrow P(k+1) \\
\hline
\therefore \forall n \geq 0: P(n)
\end{array}
$$

- La différence entre cette forme et le 1ier principe est:
  - Le pas d'induction utilse une plus solide hypothèse que $P(k)$ est vrai pour tout nombre plus petit $k<n$, pas juste pour une valeur k.

Exemple: Induction (1ier princ.)

- Prouver que la somme des n premiers nombres impairs est n^2. Prouvons que:

$$\forall n \geq 1 : \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2}_{P(n)}$$

- Preuve par induction.
  - Cas de base: Pour n=1. Trouvons P(1).
  - La somme du premier entier impair + est 1 qui correspond à 1^2.
    (suite…)

Exemple (suite ….)

- Pas d'Induction: Prouver que $\forall n \geq 1$: P(n)$\rightarrow P(n+1)$.
  - Avec $n \geq 1$, assumons $P(n)$, et prouvons $P(n+1)$.

P(n+1) ***P(n)*** ***(n+1)ième termes***

$$\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) = \left(\sum_{i=1}^{n}(2i-1)\right) + (2(n+1)-1)$$

$$= n^2 + 2n + 1$$

$$= (n+1)^2$$

Par l'hypothèse inductive P(n)

- *Si P(n)=n² → P(n+1) = (n+1)²*

Autre Exemple d'Induction

- Prouver que $\forall n>0, n<2^n$. Posons $P(n)=(n<2^n)$
  - Cas de base: $P(1)=(1<2^1)=(1<2)=\mathbf{T}$.
  - Pas d'Induction: Pour $n>0$, prouvons $P(n)\rightarrow P(n+1)$.
    - Assumons $n<2^n$, prouvons $n+1 < 2^{n+1}$.
    - Notez que $n + 1 < 2^n + 1$ (par l'hypothèse inductive)
      $< 2^n + 2^n$ (puisque $1<2=2\cdot 2^0\leq 2\cdot 2^{n-1}= 2^n$)
      $= 2^{n+1}$
    - Alors $n + 1 < 2^{n+1}$

Autres Exemples..

- Utiliser l'Induction pour démontrer que

  $1 + 2 + 2^2 + ... + 2^n \;\; = \;\; 2^{n+1} -1$ pour tout entier positif.

- Cas de base: $P(0) : 2^0 = 1 = 2^1 -1$
- Pas Inductif: Assumons que $P(n)$ est vrai.

  $P(n)$: $1 + 2 + 2^2 +.....+2^n = 2^{n+1} -1$

  $P(n+1)$ a la forme:

  $P(n+1)$:$1 + 2 + 2^2 +.....+ 2^n + 2^{n+1} = 2^{n+1+1}-1$

Suite ....

$$P(n + 1) = 1 + 2 + 2^2 + \ldots\ldots + 2^n + 2^{n+1}$$

$$P(n)$$

$$2^{n+1} - 1 \quad + \quad 2^{n+1}$$

$$\longrightarrow 2 . 2^{n+1} - 1$$

$$P(n + 1) \longrightarrow 2^{n+2} - 1$$

Exemple du $2^{\text{ième}}$ Principe

- Démontrer que pour chaque $n>1$ peut être écrit comme un produit:
  $\prod p_i = p_1 p_2 \ldots p_s$ de séries de s nombres premiers.
  - Posons $P(n)$="n a cette propriété"
- **Cas de base:** $n=2$, Avec $s=1$, $p_1=2$.
- **Pas d'Induction:** Avec $n \geq 2$. Assumons $\forall 2 \leq k \leq n: P(k)$.
  Considérons $n+1$. Si premier, avec $s=1$, $p_1=n+1$.
  Sinon $n+1=ab$, où $1<a\leq n$ et $1<b\leq n$.
  Alors $a=p_1p_2\ldots p_t$ et $b=q_1q_2\ldots q_u$. Alors nous avons que $n+1 = p_1p_2\ldots p_t\, q_1q_2\ldots q_u$, un produit de $s=t+u$ nombres premiers.

Autre exemple du $2^{\text{ième}}$ Principe

- Prouver que toutes combinaisons de timbres de 12 cents ou plus peuvent être obtenues de timbres de 4-cent et 5-cent.

  $P(n)$="n cents de timbres"

- **Cas de base:** $12=3(4)$, $13=2(4)+1(5)$, $14=1(4)+2(5)$, $15=3(5)$, donc $\forall 12 \leq n \leq 15,\ P(n)$.
- **Pas d'Induction:** Avec $n \geq 15$, assumons $\forall 12 \leq k \leq n\ P(k)$. Notez que $12 \leq n-3 \leq n$, donc $P(n-3)$, ajouter alors un timbre de 4-cent pour avoir un total de $n+1$.

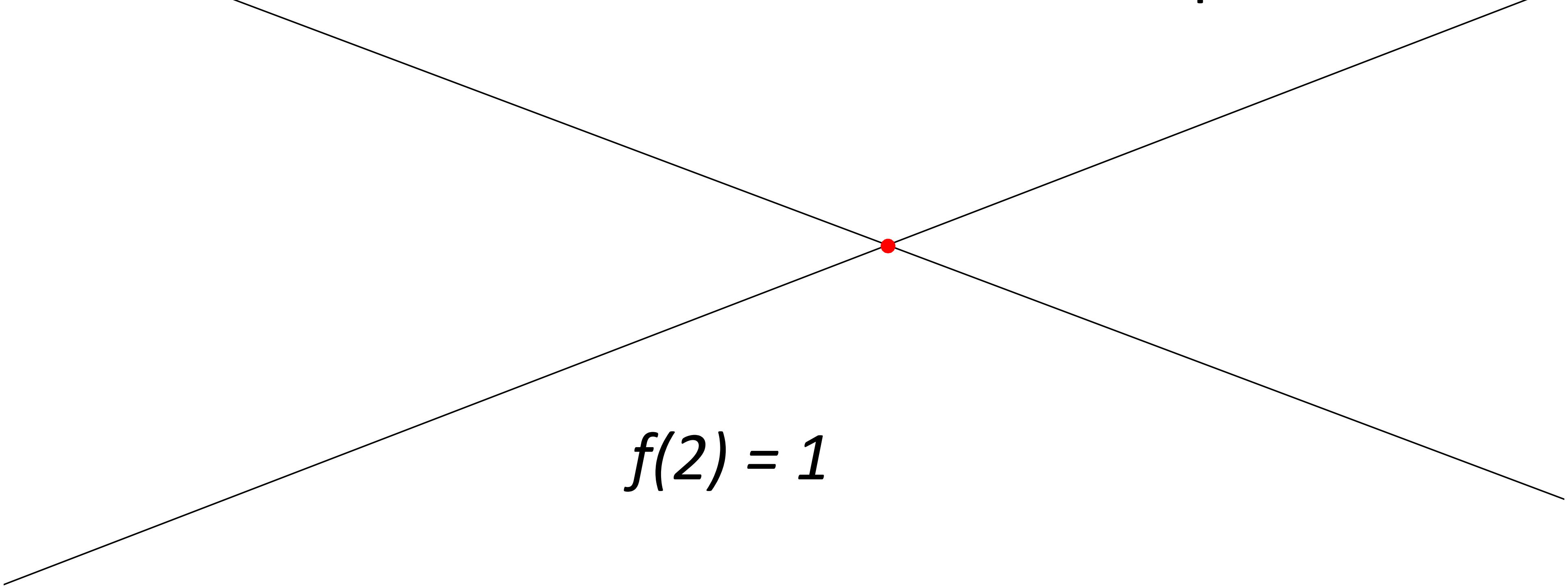
Induction
Exemple Géométrique

- Cherchons la formule du nombre maximum d'intersections de n droites dans un plan.

$f(1) = 0$

Induction
Exemple Géométrique

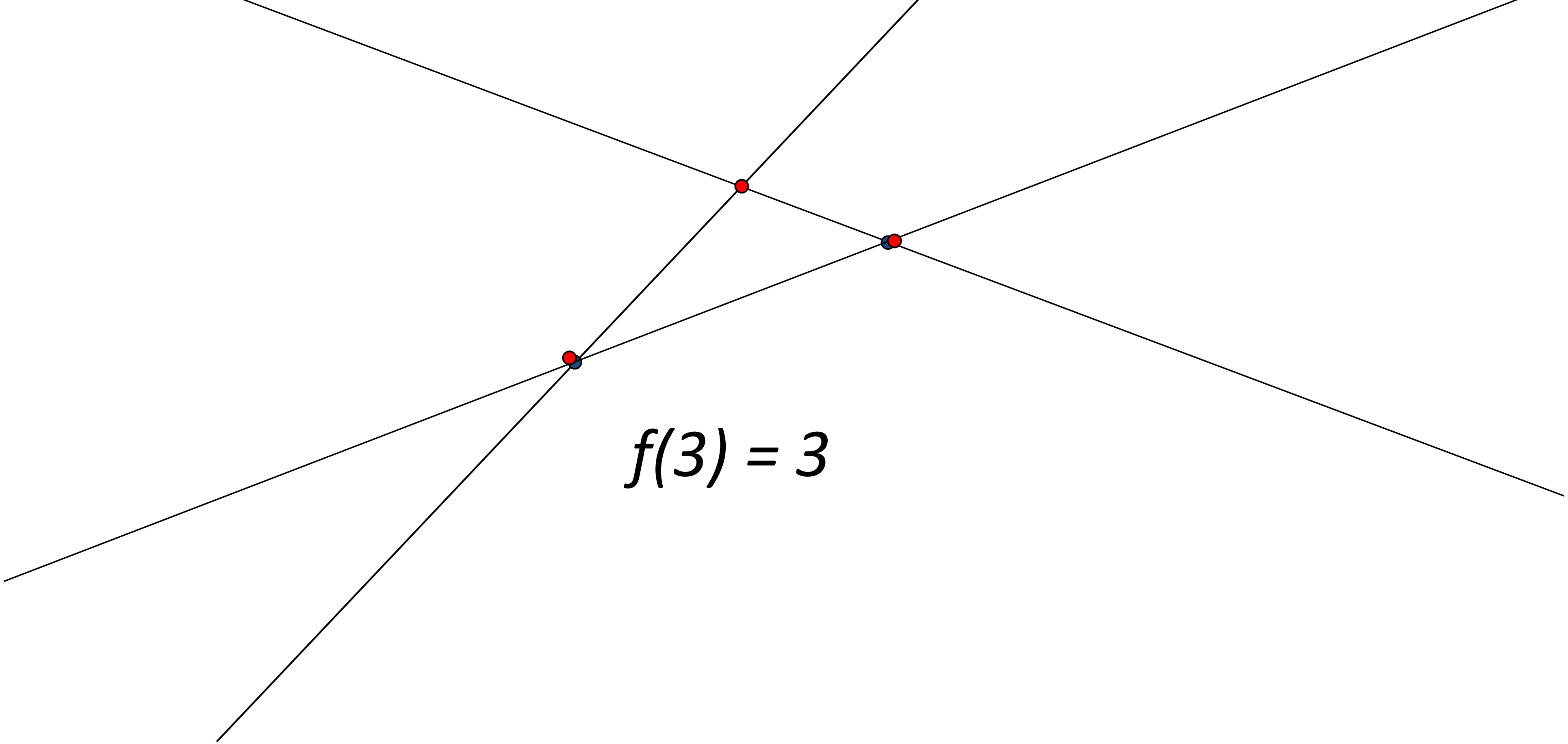
- Cherchons la formule du nombre maximum d'intersections de n droites dans un plan.



$f(2) = 1$

Induction
Exemple Géométrique

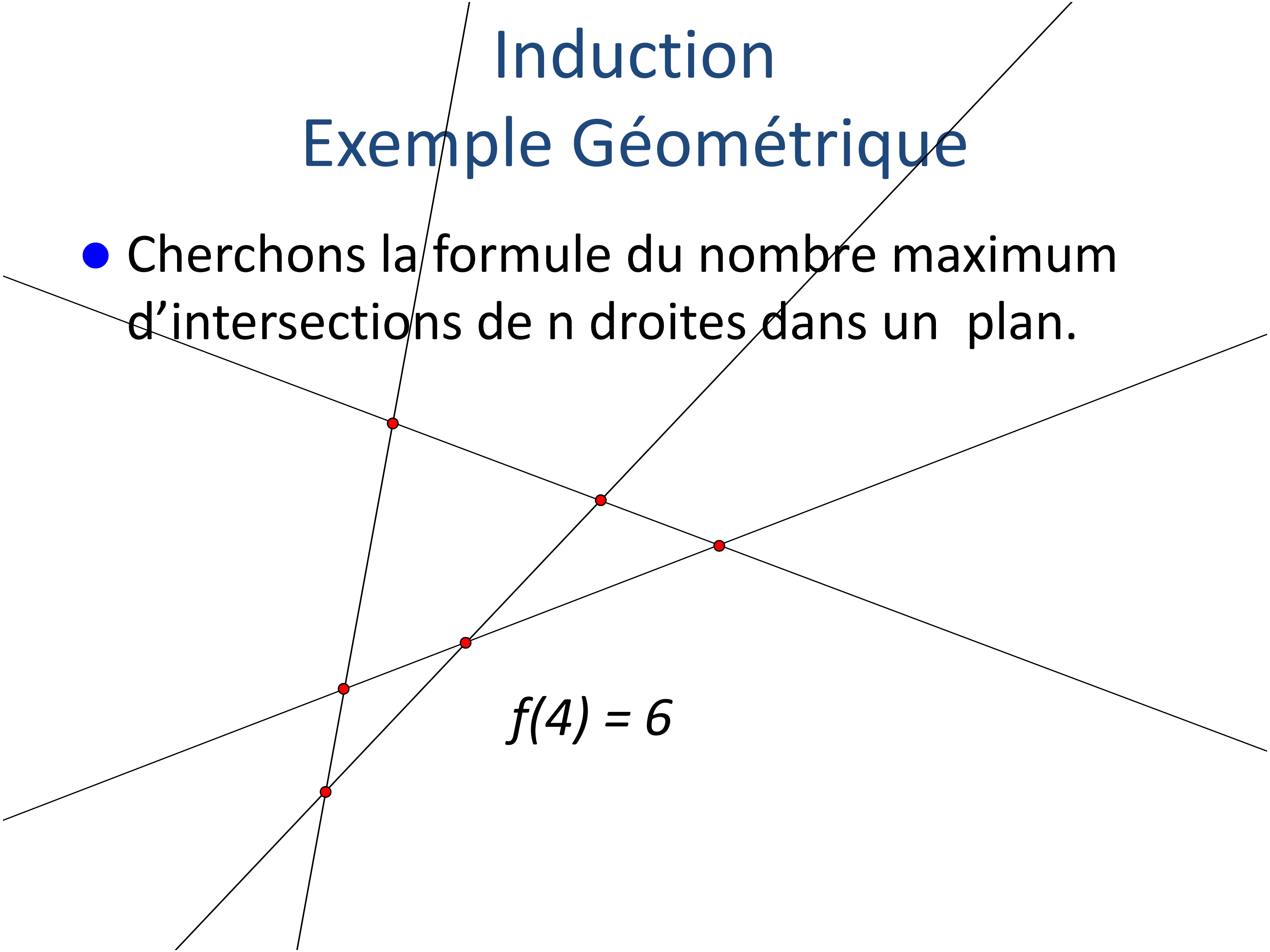
- Cherchons la formule du nombre maximum d’intersections de n droites dans un plan.



f(3) = 3

Induction
Exemple Géométrique

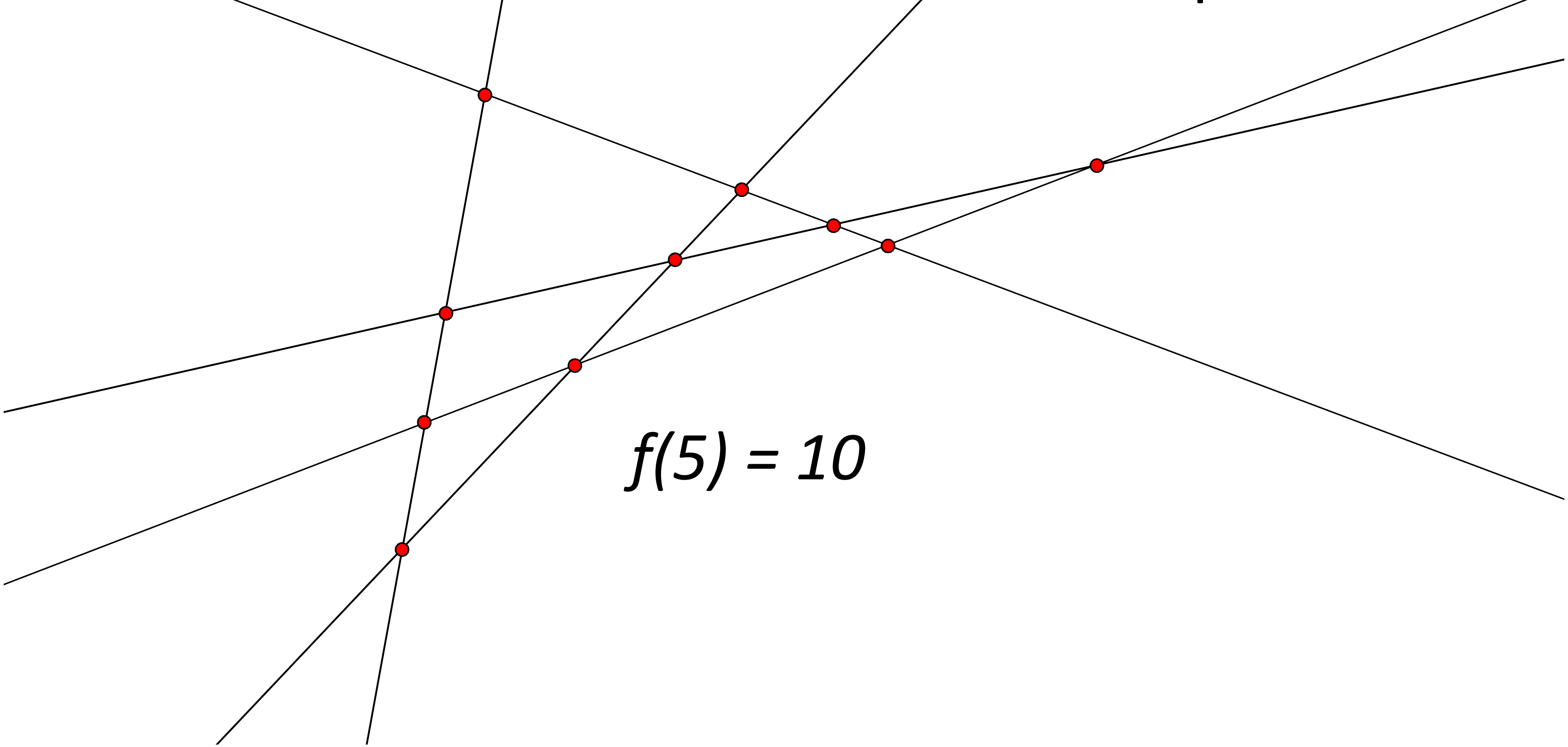
- Cherchons la formule du nombre maximum d'intersections de n droites dans un plan.



f(4) = 6

Induction
Exemple Géométrique

- Cherchons la formule du nombre maximum d'intersections de n droites dans un plan.



f(5) = 10

Induction
Exemple Géométrique

- Posons *f(n)* le nombre d'intersections de n droites dans le plan. Nous avons:

$n =$	1, 2, 3, 4, 5
$f(n) =$	0, 1, 3, 6, 10

- Pouvons-nous déduire une formulation pour $f(n)$.
- Cette formulation peut-elle être exprimée en termes de valeurs antérieures (notation récursive).

Induction
Exemple Géométrique

- La formule $f(n) = f(n-1) + n - 1$ permet d'exprimer cette relation de récurrence.
- La forme complète est déduite par:

1. Posons $f(n) = f(n-1) + n-1$
2. Alors, $f(n-1) = f(n-2) + n-2$
3. Insérons (2) dans (1) : $f(n) = f(n-2) + n-2 + n-1$
4. Répétons , pour le terme $f(n-2)$:

   $f(n) = f(n-3) + n-3 + n-2 + n-1$
5. Après la $i^{ième}$ itérations:

   $f(n) = f(n-i) + n-i + \ldots + n-3 + n-2 + n-1$
6. Pour avoir $n = 1$, posons $i = n - 1$:

   $f(n) = f(1) + 1 + 2 + \ldots + n-3 + n-2 + n-1 = 0 + \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{(n-1)n}{2}$

Induction
Exemple Géométrique

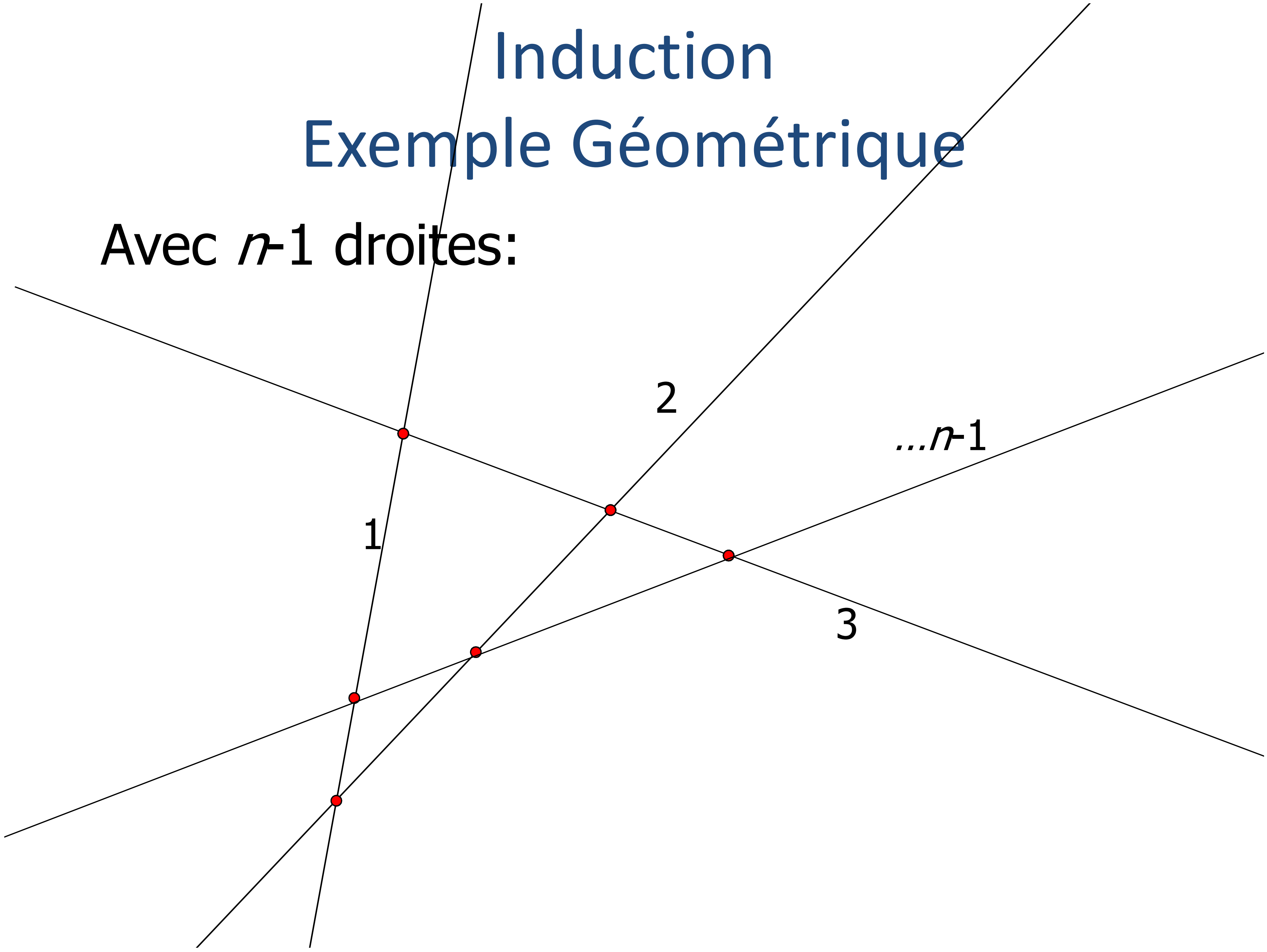
- LEMME: Le nombre maximum d'intersections de n droites dans le plan est $n(n-1)/2$.
- *Preuve par induction*.
  - Étape de base: Si $n = 1$, Alors une seule droite et aucune intersection.
  - En substituant n = 1 dans la formule $n(n-1)/2$ donne 0, donc le cas de base est vérifié.
  - Étape d'induction: Assumons $n > 1$. Quel le nombre maximum d'intersections de n droites? Si on enlève une droite. $n - 1$ droites restent.

Induction
Exemple Géométrique

- LEMME: Le nombre maximum d'intersections de n droites dans le plan est $n(n-1)/2$.
- *Preuve par induction*.
  - Étape d'induction: (suite …) Par induction, nous pouvons supposer que le nombre maximum d'intersections de ces n-1 droites est $(n-1)(n-2)/2$.
  - Si nous réajoutons la $n^{\text{ième}}$ droite. Cette droite peut couper au plus n-1 droites. Dans le cas maximal, cette $n^{\text{ième}}$ droite peut couper toutes les autres droites en lui assignant une pente différente des autres droites.

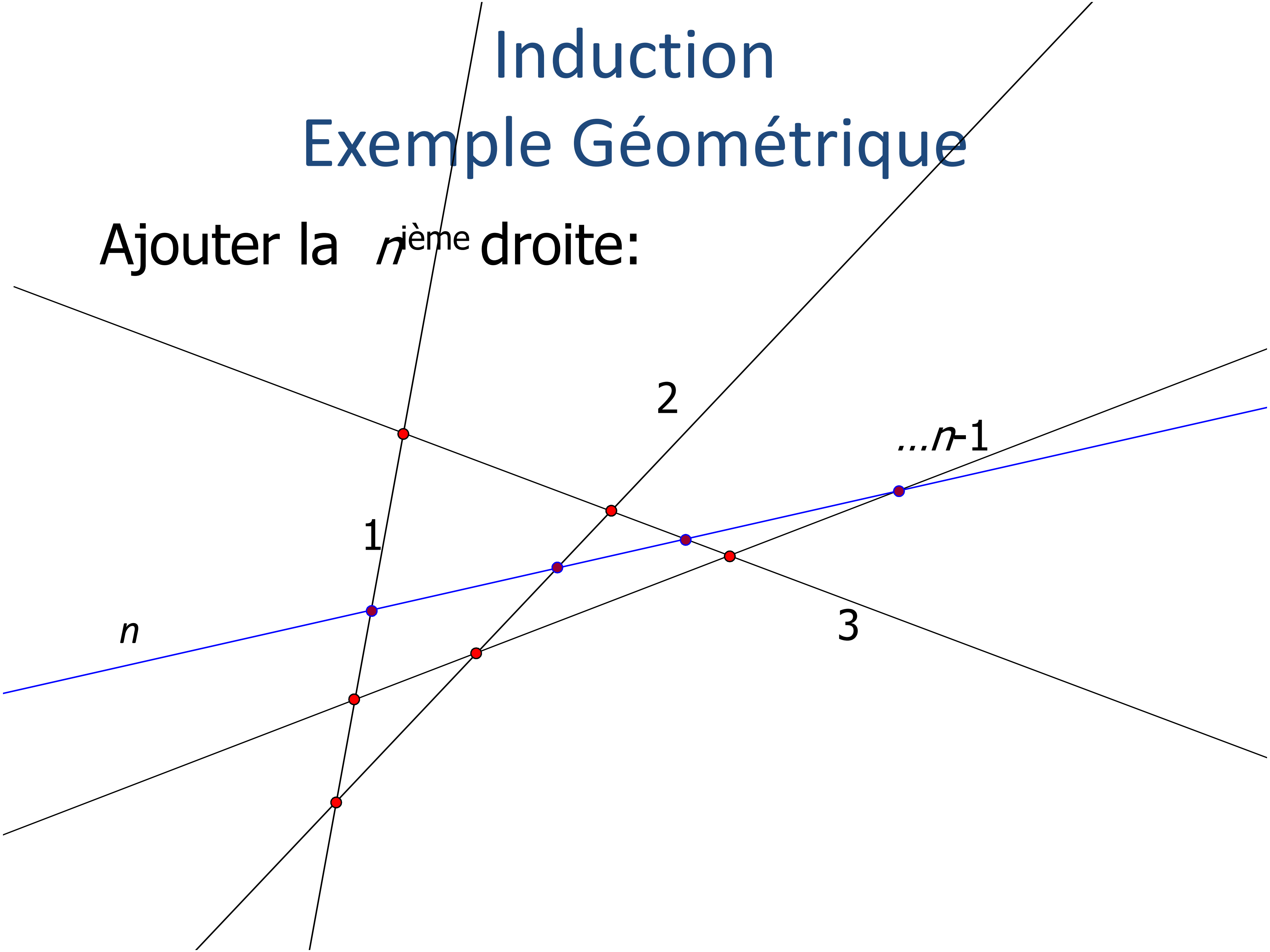
Induction
Exemple Géométrique

Avec *n*-1 droites:



Induction
Exemple Géométrique

Ajouter la $n^{\text{ième}}$ droite:



Induction
Exemple Géométrique

- Le nombre maximum d'intersections de n droites dans le plan est $f(n\text{-}1) + n\text{-}1$; ce nombre est:

  $$(n-1)(n-2)/2 + n-1$$
  $$= (n-1)((n-2)/2 + 1)$$
  $$= (n-1)(n-2+2)/2 = (n-1)n/2$$

- Cette formule est celle que nous voulons prouver pour n.

Validation de Programme
Exemple des nombres de Fibonacci

```
integer g (unsigned integer n){
   if (n == 0) return 0
   curr = 0,   next = 1
   for (i = 2 to n ) {
      next = next + curr
      curr = next - curr
   }
   return next
}
```

- $next_i$ représente la valeur de **`next`** à la fin de la boucle (itération **`i`**).
- Pour i = 0, 1 $next_0$=0 et $next_1$=1.
- Le programme calcule g (n) = $next_n$

Validation de Programme
Exemple des nombres de Fibonacci

```
integer g (unsigned integer n){
   if (n == 0) return 0
   curr = 0,   next = 1
   for (i = 2 to n ) {
      next = next + curr
      curr = next - curr
   }
   return next
}
```

- L'énoncé important: $P(i)$ = "$next_i = f_i$", i.e. $next_i$ est le iième nombre de Fibonacci.
- Prouvons que pour des i non-négatifs, $P(i)$ est vrai.

Validation de Programme
Exemple des nombres de Fibonacci

- Prouvons que pour des *i* non-négatifs, *P* (*i*) est vrai.

Preuve: Étape de base: $i = 0,1$ $next_0 = 0$ $next_1 = 1$

Étapes d'induction ($i \geq 2$):

Posons que $next_j = f_j$ pour tout $j < i$. Avec:

```
next = next + curr
curr = next - curr
```

Pour l'itération *j* donne

(1) $next_j = next_{j-1} + curr_{j-1}$

(2) $curr_j = next_j - curr_{j-1}$

$= next_{j-1} + curr_{j-1} - curr_{j-1}$

$= next_{j-1}$

Substituons (2) dans (1): $next_j = next_{j-1} + next_{j-2}$

Validation de Programme
Exemple des nombres de Fibonacci

- Prouvons que pour des i non-négatifs, $P(i)$ est vrai.

Preuve: Étape de base: i =0,1 $next_0 = 0$ $next_1 = 1$

Étapes d'induction ($i \geq 2$):

Si nous avons:

(3) $$next_j = next_{j-1} + next_{j-2}$$

- Sachant qu'avec l'hypothèse d'induction $P(i-1)$ et $P(i-2)$ sont vraies donc $next_{j-1} = f_{j-1}$ et $next_{j-2} = f_{j-2}$.
- Alors, substituons $P(i-1)$ et $P(i-2)$ dans (3) donne

$$next_i = f_{i-1} + f_{i-2} = f_i$$

Ce qui complète la preuve par induction. ?