Exemples

Exemple 1

Considérer les six fonctions suivantes f_i :$\mathbf{N} \to \mathbf{R}$, i=1,2,3,4,5,6.

$$f_1(n) = 3^{2n+4} \qquad f_2(n) = \log_2\left(n^5 + 6n + 10\right) \qquad f_3(n) = \sqrt{5+9n} + \frac{n^2+4n}{n+9\sqrt{n}}$$

$$f_4(n) = \log_{10}\left(\sqrt{n^7+2n}\right) \qquad f_5(n) = 3^{n-50} \qquad f_6(n) = \frac{n^4+5n+1}{\sqrt{n^7+4n^3+1}}$$

Partie a (18 points). Trouver pour chaque fonction une fonction *aussi simple que possible* qui reflète son comportement asymptotique (grand-O).

Solution.

$f_1(n) \in O(9^n)$. **Explication**: $3^{2n+4} = 3^{2n}*3^4 = 81*9^n \in O(9^n)$ avec seuil k=0 et facteur c=81.

$f_2(n) \in O(\log n)$.

Explication: Pour tout $n \geq 1$, $n^5 + 6n + 10 \leq 17n^5$, d'où $\log_2\left(n^5 + 6n + 10\right) \leq \log_2(17n^5)$ = $\log_2 17 + 5\log_2 n \leq 6\log_2 n$ si $n \geq 17$. Cela satisfait la définition de O avec seuil k=17 et facteur c=6. Si on change la base on multiplie par une constante, ce qui change le facteur c mais continue à satisfaire la définition, donc on n'a pas à spécifier la base dans l'expression $O(\log n)$.

$f_3(n) \in O(n)$.

Explication: $\sqrt{5+9n}$ croît à la même vitesse que $\sqrt{n}$. Quant à $\frac{n^2+4n}{n+9\sqrt{n}}$, n^2+4n croît à la même vitesse que n^2 (le terme qui croît le plus rapidement) et $n+9\sqrt{n}$ croît à la même vitesse que n, d'où $\frac{n^2+4n}{n+9\sqrt{n}}$ croît à la même vitesse que $\frac{n^2}{n} = n$, ce qui est plus rapidement que $\sqrt{n}$. Parmi les deux termes de $f_3(n)$, celui qui croît le plus rapidement croît à la même vitesse que n, d'où la réponse.

$f_4(n) \in O(\log n)$.

Explication. $\log_{10}\left(\sqrt{n^7+2n}\right) = \frac{1}{2}\log_{10}(n^7+2n)$. On peut démontrer de la même façon que pour $f_2(n)$ que $\log(p(n)) \in O(\log n)$ pour tout polynôme $p(n)$.

$f_5(n) \in O(3^n)$. **Explication**: La même que pour $f_1(n)$.

$f_6(n) \in O(\sqrt{n})$.

Explication: Le numérateur croît à la même vitesse que n^4 et le dénominateur croît à la même vitesse que $\sqrt{n^7} = n^{7/2}$, d'où la fraction croît à la même vitesse que $n^4 / n^{7/2} = n^{1/2} = \sqrt{n}$.

Partie b (12 points). Pour tout couple (f_i, f_j) de fonctions, où i,j = 1,2,3,4,5,6, déterminer si $f_i \in O(f_j)$. Dans le tableau ci-bas écrire 1 à l'intersection de la ligne i et de la colonne j pour indiquer oui et 0 pour indiquer non.

Solution. On fait un résumé de la solution de la partie **a:**
$f_1(n) \in O(9^n), f_2(n) \in O(\log n),\ f_3(n) \in O(n), f_4(n) \in O(\log n),\ f_5(n) \in O(3^n),\ f_6(n) \in O(\sqrt{n})$.
Puis on trie les fonctions selon leur taux de croissance: f_2 et f_4 croissent à la même vitesse et plus lentement que les autres, puis f_6, puis f_3, puis f_5 et enfin f_1 croît le plus rapidement. Ces observations permettent de remplir le tableau ainsi:

	j=1	j=2	j=3	j=4	j=5	j=6
i=1	1	0	0	0	0	0
i=2	1	1	1	1	1	1
i=3	1	0	1	0	1	0
i=4	1	1	1	1	1	1
i=5	1	0	0	0	1	0
i=6	1	0	1	0	1	1

Exemple 2

Considérer les six fonctions suivantes $f_i : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, i=1,2,3,4,5,6.

$$f_1(n) = 5^{3n+4} \qquad f_2(n) = \log_3\left(n^4 + 2n + 10^4\right) \qquad f_3(n) = \sqrt{2 + 3n^3} + \frac{n^2 + 10n^{1,5}}{7 + 9\sqrt{n}}$$

$$f_4(n) = \log\left(\sqrt{n^3 + 2n^2}\right) \qquad f_5(n) = 3^{n-100} \qquad f_6(n) = \frac{n^3 + 3n^2 + n}{\sqrt{n^5 + 4n^4 + 6}}$$

Partie a (18 points). Trouver pour chaque fonction une fonction *aussi simple que possible* qui reflète son comportement asymptotique (grand O).

Solution. Selon les théorèmes dans le livre et les notes du cours, on obtient les bons estimés suivants:

$$f_1(n) \in O(125^n),\ f_2(n) \in O(\log n),\ f_3(n) \in O(n^{1,5}),\ f_4(n) \in O(\log n),\ f_5(n) \in O(3^n),\ f_6(n) \in O(n^{0,5})$$

Partie b (12 points). Pour tout couple (f_i, f_j) de fonctions, où i,j = 1,2,3,4,5,6, déterminer si $f_i \in O(f_j)$. Dans le tableau ci-bas, écrire 1 à l'intersection de la ligne i et de la colonne j pour indiquer oui et 0 pour indiquer non.

Solution. On trie les estimés selon leur taux de croissance. Or log n croît le plus lentement, puis $n^{0,5}$, puis $n^{1,5}$, puis 3^n et enfin 125^n croit le plus vite. Si f croit plus lentement que g, alors f est dans $O(g)$ et g n'est pas dans $O(f)$. Si f et g croissent à la même vitesse, alors f est dans $O(g)$ et g est dans $O(f)$. Puis on remplit le tableau selon ces observations.

	j=1	j=2	j=3	j=4	j=5	j=6
i=1	1	0	0	0	0	0
i=2	1	1	1	1	1	1
i=3	1	0	1	0	1	0
i=4	1	1	1	1	1	1
i=5	1	0	0	0	1	0
i=6	1	0	1	0	1	1