INF1130 Mathématiques pour informaticien
Professeurs : Bruno Malenfant, Zied Zaier.
Examen 1, samedi le 9 mars 2013

NOM :	QUESTION 1 :		15 pts
	QUESTION 2 :		20 pts
CODE PERMANENT :	QUESTION 3 :		10 pts
	QUESTION 4 :		15 pts
	QUESTION 5 :		15 pts
	QUESTION 6 :		10 pts
	QUESTION 7 :		15 pts
GROUPE :			
	TOTAL		/100

Directives

1) Vérifiez que ce document comporte bien 8 pages.
2) Répondez sur le questionnaire, utilisez les versos des pages comme brouillons.
3) Toute documentation écrite et personnelle est permise.
4) Les règles concernant le plagiat seront strictement appliquées.

Question 1 sur la logique propositionnelle [15 **points**]**.**

Considérons la table de vérité suivante :

p	q	valeur
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

a) Trouvez une proposition logique non simplifiée dont la table de vérité est la table ci-dessus. Justifier.

Réponse (parmi plusieurs bonnes) :

p	q	valeur	conjonction
V	V	F	
V	F	V	$(p \wedge \neg q)$
F	V	V	$(\neg p \wedge q)$
F	F	V	$(\neg p \wedge \neg q)$

$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$. C'est la disjonction des trois conjonctions correspondantes aux lignes où la proposition est vraie.

b) Donnez une proposition, contenant le minimum de connecteurs logiques, dont la table de vérité est la table ci-dessus. Justifier.

Réponse : $\neg(p \wedge q)$. Il n'y a pas de proposition contenant un connecteur qui ait cette table de vérité. D'autre part, la table de vérité de la proposition $\neg(p \wedge q)$ est bien égale à la table de vérité donnée. [D'autres justifications sont possibles.]

Une autre solution - Si la table de vérité d'une expression E contient plus des V que des F, on peut construire une expression plus courte en appliquant la procédure et sa négation $\neg E$ puis en niant cette expression à l'aide des lois de

De Morgan. De cette faon, on peut trouver une expression courte sans utiliser d'opérateurs autres que la négation, la conjonction et la disjonction.

p	q	valeur	négation	conjonction
V	V	F	V	$(p \wedge q)$
V	F	V	F	
F	V	V	F	
F	F	V	F	

$\neg(p \wedge q)$. C'est la négation de la conjonction correspondante à la ligne où la proposition est vraie.

Question 2 sur les preuves et la logique des prédicats [20 **points**].

Pour chacun des énoncés suivants, dites s'il est vrai ou faux. Dans chaque cas, donnez tous les arguments nécessaires pour démontrer votre résultat.

a) $\exists n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{Z} \quad n * z = 0$ Réponse :

La proposition est est vrai car $\exists n = 0, \forall z \in \mathbb{Z} \quad n * z = 0$.

b) $\forall z \in \mathbb{Z}, \exists n \in \mathbb{N} \quad n^2 + z < 0$ Réponse :

La proposition est fausse car sa négation est vrai : $\exists z \in Z, \forall n \in N | n^2 + z \geqslant 0$. On peut donc en déduire un contre exemple pour a) : $\exists z = 1, \forall n \in N | n^2 + 1 \geqslant 0$. $z = 1$ est un contre exemple.

c) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists z \in \mathbb{Z} \quad n + z = 0$ Réponse :

La proposition est est vrai car $\forall n \in \mathbb{N}, \exists z = -n \quad | \quad n + z = 0$

d) $\exists n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{Z} \quad n^2 + z < 0$ Réponse :

La proposition est fausse car sa négation est vrai : $\forall n \in N, \exists z \in Z | n^2 + z \geqslant 0$. On peut donc en déduire un contre exemple pour d) : $\forall n \in N, \exists z = 1 | n^2 + 1 \geqslant 0$.

$z = 1$ est un contre exemple.

e) $\forall n \in \mathbb{N} \quad (n < 0) \longrightarrow (n^2 < 0)$ Réponse :
La proposition est est vrai car le faux implique n'importe quoi ! Par exemple, notons p la proposition logique je cours le 100m en 5 secondes et q la proposition les étudiants auront tous 100/100 au prochain examen. Et bien limplication $p \longrightarrow q$ est vraie quelle que soit la valeur de vérité de q, simplement car p est faux.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N} \quad (n < 0) \longrightarrow (n^2 < 0)$ est vraie quelle que soit la valeur de vérité de $(n^2 < 0)$, simplement car $\forall n \in \mathbb{N} \quad (n < 0)$ est faux.

Question 3 sur les ensembles [10 **points**]**.**

Soit l'ensemble universel $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, et les sous-ensembles suivants de A :

B est l'ensemble des éléments A multiples de 2.
C est l'ensemble des éléments A multiples de 3.
D est l'ensemble des éléments A multiples de 4.
E est l'ensemble des éléments A multiples de 5.
F est l'ensemble des éléments A multiples de 6.

Dites si les énoncés suivants sont vrais ou faux (Le symbole "\" représente la différence) :

a) $B \cap D = D$. Vrai

b) $|C| = 5$. Vrai

c) $A \cap B \cap C \cap D \cap E = \{0, 12\}$. Faux

d) $B \cap C = F \cap C$. 5Vrai

e) $B \cup \bar{E} = A$. Faux

f) $B \cup F \subseteq C$. Faux

g) $B \cap C \cap E \neq \emptyset$. Vrai

h) $B \cap C = F$. Vrai

i) $|A \setminus B| = 6$. Vrai

j) $C \setminus B = \emptyset$. Faux

Question 4 sur les propriétés des fonctions et les preuves [15 **points**].

Dites si les fonctions suivantes sont injectives ou non, surjectives ou non. Justifiez vos réponses.

a) Soit la fonction $f : \{0,1,2,3,4\} \to \{0,1,2,3,4\}$ tel que $f(n) = (2n+1) \bmod 5$.

Injective, oui, $f(0) = 1, f(1) = 3, f(2) = 0, f(3) = 2, f(4) = 4$.

Surjective, oui, pour la même raison.

b) Soit la fonction $g : \mathbb{N} \to \mathbb{P}$ tel que $g(n) = (n \bmod 5) * 2$ où $\mathbb{P} = \{2n | n \in \mathbb{N}\}$.

Injective, non, 0 et 5 donnent le même résultat.

Surjective, non, impossible d'obtenir 10 car il faudrait que $n \bmod 5 = 5$.

c) Soit la fonction $h : \mathbb{N} \to (\mathbb{N}, \{0,1,2,3,4\})$ tel que $h(n) = (n/5, n \bmod 5)$. [Note : ici nous utilisons la division entière].

Injectif, oui : selon l'algorithme de division les valeurs sont uniques pour tout n. Donc il est impossible d'avoir des valeurs différentes qui donnent la même chose.

Surjective, oui : Si nous avons le résultat (a, b) nous pouvons retrouver la valeur $n = a * 5 + b$.

Question 5 sur la croissance des fonctions [15 **points**].

Soit les fonctions suivantes avec domaine $\mathbb{N}$, l'ensemble des nombres naturels, et co-domaine $\mathbb{R}$, l'ensemble des nombres réels.

1. $f_1(n) = n5^{2n+5}$,
2. $f_2(n) = \sum_{i=0}^{n} n5^i$.
3. $f_3(n) = \frac{\log_2(7^n)}{n}$,
4. $f_4(n) = \sum_{i=1}^{n}(4i + 7)$,
5. $f_5(n) = \frac{9^{\log_3 n}}{n^{1/2}}$,

a) Trouvez pour chacune de ces fonctions f_i une fonction aussi simple que possible qui est l'estimé grand-$\mathcal{O}$ le plus précis possible pour la fonction f_i.

1. $f_1(n) \in \mathcal{O}\Big(\qquad \Big)$
2. $f_2(n) \in \mathcal{O}\Big(\qquad \Big)$
3. $f_3(n) \in \mathcal{O}\Big(\qquad \Big)$
4. $f_4(n) \in \mathcal{O}\Big(\qquad \Big)$
5. $f_5(n) \in \mathcal{O}\Big(\qquad \Big)$

Réponse :

1. $f_1(n) \in \mathcal{O}(n25^n)$,
2. $f_2(n) \in \mathcal{O}(n5^n)$,
3. $f_3(n) \in \mathcal{O}(1)$,
4. $f_4(n) \in \mathcal{O}(n^2)$,
5. $f_5(n) \in \mathcal{O}(n^{3/2})$.

b) On dit que la fonction f croît moins rapidement que la fonction g si f est dans $\mathcal{O}(g)$ et g n'est pas dans $\mathcal{O}(f)$. On dit que les fonctions f et g croissent à la même vitesse si f est dans $\mathcal{O}(g)$ et g est dans $\mathcal{O}(f)$. Ordonnez les fonctions f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 de haut en bas selon leur taux de croissance (grand-$\mathcal{O}$). Si des fonctions croissent à la même vitesse, mettez leur numéro sur la même ligne.

Réponse :

1. $f_3(n)$,
2. $f_5(n)$,
3. $f_4(n)$,
4. $f_2(n)$,
5. $f_1(n)$.

Question 6 sur les entiers et la division et les preuves [10 points].

Montrer en utilisant la preuve par cas que pour $n \in \mathbb{N}, n^3 - n$ est divisible par 3.

Indices
$n^3 - n = n(n-1)(n+1)$
$n = 3q + r, r = 0, 1, 2$ et $q \in \mathbb{N}$

Réponse :

Montrons que $n^3 - n$ est divisible par 3 pour tout $n \in N$
$n^3 - n = n(n-1)(n+1)$
Notons $n = 3q + r, r = 0, 1, 2$ et $q \in N$

1er cas - $r = 0$:
$n = 3q$ donc $n^3 - n = 3q(n-1)(n+1)$ donc $n^3 - n$ est divisible par 3

2ème cas - $r = 1$:
$n = 3q + 1$ donc $n^3 - n = n(3q + 1 - 1)(n + 1) = 3q(n + 1)n$ donc $n^3 - n$ est divisible par 3

3ème cas - $r = 2$:
$n = 3q + 2$ donc $n^3 - n = n(n-1)(3q + 2 + 1) = 3(q + 1)(n - 1)n$ donc $n^3 - n$ est divisible par 3

Question 7 sur les suites et les sommes [15 points].

a) Écrivez la somme suivante en utilisant le symbole de sommation, et donnez la valeur de la somme : $3 + 3 * 2 + 3 * 4 + 3 * 8 + 3 * 16 + 3 * 32 + 3 * 64 + 3 * 128$.

Réponse : $\sum_{i=0}^{7} 3 * 2^i$

b)Une suite arithmétique de 1er terme 5 et de nième terme 101 a pour somme des n premiers termes 477.

i. Calculer n le nombre de termes de la suites.

Réponse :

C'est donc une somme d'une suite arithmétique.

On a :

$a_0 = 5$

$a_n = 101$

$S_n = 477$

Donc :

$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i = \frac{n(a_0+a_{n-1})}{2} = \frac{n(5+101)}{2} = n * \frac{106}{2} = 53n = 477 \rightarrow n = \frac{477}{53} = 9$

ii. En déduire la différence entre deux termes successifs de cette suite (aussi appelée *raison* de la suite).

Réponse :
C'est donc une d'une suite arithmétique.
On a :

$a_0 = 5$

$a_n = 101$

$n = 9 - 1 = 8$ (Exclusion du a_0)

Donc :

$a_n = a_0 + n * r \rightarrow 101 = 5 + 8 * r \rightarrow r = \frac{101-5}{8} = \frac{96}{8} = 12$