INF1130 SESSION H13 DEVOIR 1

Remise : vendredi le 1 mars 2013 à 16h00.

Question 1 sur la logique propositionnelle (25 points)

a) Donnez la table de vérité de la proposition suivante : $((p \wedge \neg q) \vee r) \rightarrow (p \vee q)$.

b) Donnez la négation, en simplifiant le résultat au maximum, de la proposition suivante : $(\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \rightarrow q)$.

c) Trouvez une proposition logique dont la table de vérité est la suivante :

p	q	r	valeur
V	V	V	V
V	V	F	F
V	F	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F
F	F	F	F

Solution

a)

p	q	r	valeur
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	V
V	F	F	V
F	V	V	V
F	V	F	V
F	F	V	F
F	F	F	V

b)

$$\begin{aligned}
\neg((\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \rightarrow q)) &= \neg((\neg p \wedge \neg q) \vee (p \vee q)) \\
&= (\neg(\neg p \wedge \neg q) \wedge \neg(p \vee q)) \\
&= ((\neg\neg p \vee \neg\neg q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)) \\
&= ((p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q))
\end{aligned}$$

c)

$$(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$$

En effet, toute proposition peut être exprimée en utilisant seulement les trois opérateurs suivants la négation, la conjonction et la disjonction - à l'aide de la procédure suivante. D'abord on construit la table de vérité de la proposition. Puis pour chaque ligne de cette table où la proposition est vraie, on construit la conjonction de toutes les propositions atomiques, où chaque proposition atomique qui est fausse est précédée par le symbole de négation. Enfin on construit la disjonction de toutes ces conjonctions. Voici un exemple.

p	q	$p \bigoplus q$	conjonction	disjonction $= (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$
V	V	F		
V	F	V	$p \wedge \neg q$	
F	V	V	$\neg p \wedge q$	
F	F	F		

À l'aide de la procédure décrite au-dessus, on exprime la proposition :

p	q	r	valeur	conjonction	disjonction $= (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$
V	V	V	V	$p \wedge q \wedge r$	
V	V	F	F		
V	F	V	V	$p \wedge \neg q \wedge r$	
V	F	F	F		
F	V	V	V	$\neg p \wedge q \wedge r$	
F	V	F	F		
F	F	V	F		
F	F	F	F		

Donc, on obtient après simplification :

$$(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$$

Question 2 sur la logique des prédicats (25 **points)**

Soit T le tableau défini par

$i \backslash j$	0	1	2	3
0	1	3	5	3
1	-1	0	3	2
2	1	2	2	1
3	1	1	1	1

On note $T[i,j]$ l'élément situé à la ligne i et la colonne j et on définit l'univers du discours comme l'ensemble $E = \{0, 1, 2, 3\}$.

a) Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ? Justifiez.

(i) $\forall i, \exists j, T[i,j] = 1$
(ii) $\forall j, \exists i, T[i,j] = 1$
(iii) $\exists j, \forall i, T[i,j] = 1$
(iv) $\exists i, \forall j, T[i,j] = 1$

b) Donnez la négation des énoncés précédents sous forme d'énoncés quantifiés.

Solution

a)

(i) FAUX : pour $i = 1$, quel que soit $j \in E, T[i,j] \neq 1$

(ii) VRAI : il suffit de donner, pour chaque valeur j de E , un i pour lequel $T[i,j] = 1$:
$j = 0 \rightarrow i = 0$ convient : $T[0,0] = 1$
$j = 1 \rightarrow i = 3$ convient : $T[3,1] = 1$
$j = 2 \rightarrow i = 3$ convient : $T[3,2] = 1$
$j = 3 \rightarrow i = 3$ convient : $T[3,3] = 1$

(iii) FAUX : pour chaque j de E , on exhibe un i tel que $T[i,j] \neq 1$:
$j = 0 \rightarrow i = 1$ convient : $T[1,0] = -1 \neq 1$
$j = 1 \rightarrow i = 0$ convient : $T[0,1] = 3 \neq 1$
$j = 2 \rightarrow i = 2$ convient : $T[2,2] = 2 \neq 1$
$j = 3 \rightarrow i = 1$ convient : $T[1,3] = 2 \neq 1$

(iv) VRAI : $i = 3$ convient, en effet $T[3,0] = T[3,1] = T[3,2] = T[3,3] = 1$

b)

(i) $\exists i, \forall j, T[i,j] \neq 1$
(ii) $\exists j, \forall i, T[i,j] \neq 1$
(iii) $\forall j, \exists i, T[i,j] \neq 1$
(iv) $\forall i, \exists j, T[i,j] \neq 1$

Question 3 sur les ensembles (20 points)

Soit l'ensemble $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

a) Donnez trois sous-ensembles A, B et C de E tels que A, B, C, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$ et $A \cap B \cap C$ soient tous différents, et non-vides. Vous pouvez donner votre réponse sous forme de diagramme de Venn.

b) Refaire la question précédente, avec la conditions que les ensembles soient tous différents, sauf $A \cap B = A \cap C$, et non-vides.

c) Soit F un ensemble quelconque, et A, B et C des sous-ensembles quelconques de F. Montrez que si $A \cap B = A \cap C$ alors $A \cap \bar{B} = A \cap \bar{C}$.

Solution

a)

Une solution est illustrée par la Figure 1.

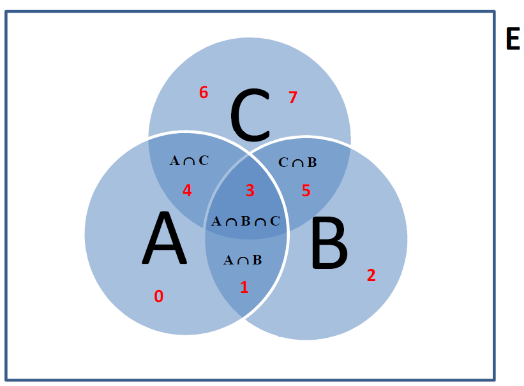

FIGURE 1 – Diagramme de Venn 1.

b)

Question annulée - Ce problème n'a pas de solution. En effet, si $A \cap B = A \cap C$ alors $A \cap B \cap C = A \cap C \cap C = A \cap C$, donc les ensembles $A \cap B \cap C$ et $A \cap C$ ne peuvent être différents.

c)

Nous démontrons que si $A \cap B = A \cap C$ alors $A \cap \bar{B} = A \cap \bar{C}$.

Montrons d'abord que $A \cap \bar{B} \subset A \cap \bar{C}$. Supposons $x \in A \cap \bar{B}$. Si $x \in C$, alors $x \in A \cap C$, donc $x \in A \cap B$ par hypothèse. Ce qui entraîne que $x \in B$, qui est une contradiction. On conclut que $x \in \bar{C}$ alors $x \in A \cap \bar{C}$ donc $A \cap \bar{B} \subset A \cap \bar{C}$.

Montrons que $A \cap \bar{C} \subset A \cap \bar{B}$. Supposons $x \in A \cap \bar{C}$. Si $x \in B$, alors $x \in A \cap B$, donc $x \in A \cap C$ par hypothèse. Ce qui entraîne que $x \in C$, qui est une contradiction. On conclut que $x \in \bar{B}$ alors $x \in A \cap \bar{B}$ donc $A \cap \bar{C} \subset A \cap \bar{B}$.

on a :
$A \cap \bar{B} \subset A \cap \bar{C}$.
$A \cap \bar{C} \subset A \cap \bar{B}$.

Alors :
$A \cap \bar{B} = A \cap \bar{C}$.

Donc :
$A \cap B = A \cap C \rightarrow A \cap \bar{B} = A \cap \bar{C}$.

Supplément

Nous pouvons même montrer que si $A \cap \bar{B} = A \cap \bar{C}$ alors $A \cap B = A \cap C$.
Si $A \cap \bar{B} = A \cap \bar{C}$ alors, par le résultat précédent, on a $A \cap \bar{\bar{B}} = A \cap \bar{\bar{C}}$, donc $A \cap B = A \cap C$.

Conclusion

On a :
$A \cap B = A \cap C \rightarrow A \cap \bar{B} = A \cap \bar{C}$.
$A \cap \bar{B} = A \cap \bar{C} \rightarrow A \cap B = A \cap C$.

Donc :
$A \cap B = A \cap C \iff A \cap \bar{B} = A \cap \bar{C}$.

Question 4 sur les fonctions et la modélisation (25 points)

Dans cet exercice, nous nous intéressons à modéliser la croissance de communautés de micro-organismes au moyen de fonctions mathématiques. Deux souches, appelées A et B, sont disponibles. Lorsque l'on place un individu de la souche A dans un milieu approprié, on observe les étapes de croissance illustrées dans la Figure 3 ; le comportement de la souche B est illustré dans la Figure 4.

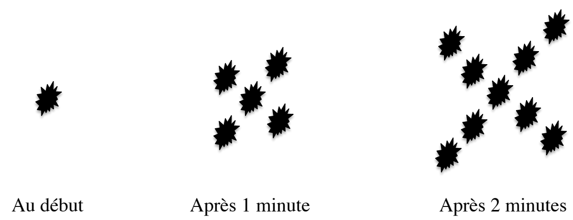

FIGURE 2 – Comportement de la souche A.

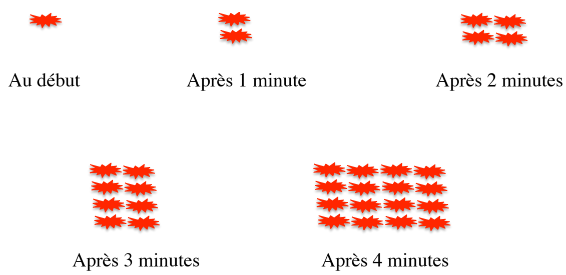

FIGURE 3 – Comportement de la souche B.

a) Décrivez, en une phrase, le modèle de croissance apparent de la souche A. En supposant que la croissance continue de la même manière, quelle sera la taille de la communauté après 3 minutes ? Donnez une formule pour la fonction qui calcule la taille de la communauté après t minutes.

b) Décrivez, en une phrase, le modèle de croissance apparent de la souche B. En supposant que la croissance continue de la même manière, quelle sera la taille de la communauté après 5 minutes ? Donnez une formule pour la fonction qui calcule la taille de la communauté après t minutes.

c) Pour une expérience scientifique, on introduit, à chaque minute, un individu de la souche A et 3 individus de la souche B dans un milieu de culture. Par exemple, après une minute, on aura 6 individus de souche A et 9 individus de souche B. Quelle sera la taille de cette communauté mixte après 5 minutes ?

Donnez une formule pour la fonction qui calcule la taille de la communauté après t minutes.

Solution
a)

À chaque minute, on ajoute un nombre constant d'individus, à savoir 4. C'est donc une suite arithmétique.

En supposant que la croissance continue de la même manière, la taille de la communauté après 3 minutes sera de 13 individus, comme illustré dans la Figure 5.

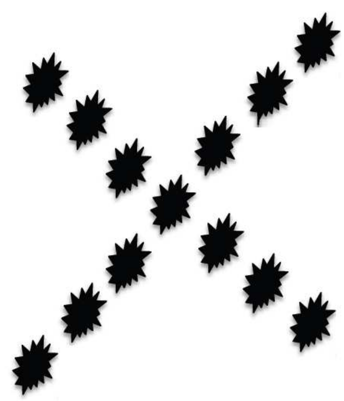

FIGURE 4 – Comportement de la souche A après 3 minutes.

En supposant que la croissance continue de la même manière, la taille de la communauté après t minutes sera de :
on a :
$d = 4$
$a_0 = 1$
Donc :
$a_t = a_0 + t * d = 4t + 1$

b)

À chaque minute, on multiplie le nombre d'individus par un coefficient constant, à savoir 2. C'est donc une suite géométrique.

En supposant que la croissance continue de la même manière, la taille de la communauté après 5 minutes sera de 32 individus, comme illustré dans la

Figure 6.

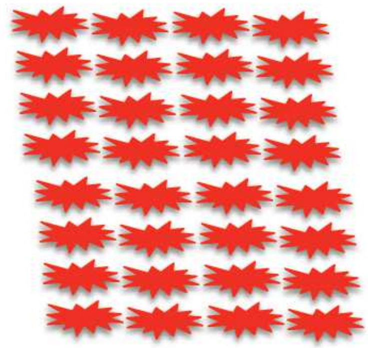

FIGURE 5 – Comportement de la souche B après 5 minutes.

En supposant que la croissance continue de la même manière, la taille de la communauté après t minutes sera de :
on a :
$r = 2$
$a_0 = 1$
Donc :
$a_t = a_0 * r^t = 2^t$

c)

C'est donc une somme d'une suite arithmétique et d'une suite géométrique.

En supposant que la croissance continue de la même manière, la taille de la communauté après 5 minutes sera de :
Somme d'une suite arithmétique :

on a :
$d = 4$
$a_0 = 1$
Donc :
$S_a = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 1 + 5 + 9 + 13 + 17 + 21 = 66$

Somme d'une suite géométrique :

on a :
$r = 2$
$a_0 = 3$
Donc :
$S_g = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 3 + 6 + 12 + 24 + 48 + 96 = 189$

Donc Somme totale = 66 + 189 = 255 individus.

En supposant que la croissance continue de la même manière, la taille de la communauté après t minutes sera de :

Somme d'une suite arithmétique :

on a :
$d = 4$
$a_0 = 1$
$a_t = a_0 + t * d = 4t + 1$
Donc :
$S_{at} = \sum_{i=0}^{t} a_i = \frac{t(a_0+a_t)}{2} = \frac{(t+1)(1+4t+1)}{2} = \frac{(t+1)(4t+2)}{2} = (t+1)(2t+1) = 2t^2 + 3t + 1$

Somme d'une suite géométrique :

on a :
$r = 2$
$a_0 = 3$
Donc :
$S_{gt} = \sum_{i=0}^{t} a_i = a_0 \frac{1-r^{t+1}}{1-r} = 3\frac{1-2^{t+1}}{-1} = 3 * (2^{t+1} - 1) = 3 * 2^{t+1} - 3$

Donc Somme Totale $= (2t^2+3t+1)+(3*2^{t+1}-3) = 3*2^{t+1}+2t^2+3t-2 = 6 * 2^t + 2t^2 + 3t - 2$

Question 5 sur les propriétés des fonctions (30 points)

Dites si les fonctions suivantes sont injectives ou non, surjectives ou non. Justifiez vos réponses.

a) Soit la fonction $f : \mathbb{N} \to \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ tel que $f(n) = (3n + 1) \bmod 6$.

b) Soit la fonction $g : \mathbb{N} \to \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ tel que $g(n) = (n + 1) \bmod 6$.

c) Soit la fonction $h : \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \to \mathbb{N}$ tel que $f(n) = (n + 1) \bmod 6$.

Solution

a)

- pas injective : $f(1) = 4 = f(3)$.
- pas surjective : impossible d'avoir 0 comme valeur car il faut que $3n + 1$ nous donne un multiple de 6 : $3n + 1 = 6k \mapsto \frac{n}{2} + \frac{1}{6} = k$ les valeurs de cette équation sont dans $\mathbb{R}$, et non dans $\mathbb{N}$.

b)

- pas injective : $g(1) = 2 = g(7)$.
- surjective : $g(5) = 0, g(6) = 1, g(1) = 2, g(2) = 3, g(3) = 4, g(4) = 5$

c)

- injective : $h(0) = 1, h(1) = 2, h(2) = 3, h(3) = 4, h(4) = 5, h(5) = 0$, aucun ne donne la même valeur.
- pas surjective : impossible d'obtenir un résultat de 6 ou plus.

Question 6 sur la croissance des fonctions (25 points)

Soit les fonctions suivantes avec domaine $\mathbb{N}$, l'ensemble des nombres naturels, et co-domaine $\mathbb{R}$, l'ensemble des nombres réels.

1. $f_1(n) = \sum_{i=1}^{n}(7i+5)$,
2. $f_2(n) = \frac{4^{\log_2 n}}{n^2}$,
3. $f_3(n) = n\log_2(4^n)$,
4. $f_4(n) = n^{1/2}3^{2n+3}$,
5. $f_5(n) = 5 + \sum_{i=0}^{n} 3^i$,
6. $f_6(n) = 25 + 2^{3n+1}$.

a) Trouvez pour chacune de ces fonctions f_i une fonction aussi simple que possible qui est l'estimé grand-$\mathcal{O}$ le plus précis possible pour la fonction f_i.

b) On dit que la fonction f croît moins rapidement que la fonction g si f est dans $\mathcal{O}(g)$ et g n'est pas dans $\mathcal{O}(f)$. On dit que les fonctions f et g croissent à la même vitesse si f est dans $\mathcal{O}(g)$ et g est dans $\mathcal{O}(f)$. Ordonnez les fonctions f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 de haut en bas selon leur taux de croissance (grand-$\mathcal{O}$). Si des fonctions croissent à la même vitesse, mettez leur numéro sur la même ligne.

Solution

a)

1. $f_1(n) \in \mathcal{O}(n^2)$,
2. $f_2(n) \in \mathcal{O}(1)$,
3. $f_3(n) \in \mathcal{O}(n^2)$,
4. $f_4(n) \in \mathcal{O}(n^{1/2}\ 9^n)$,
5. $f_5(n) \in \mathcal{O}(3^n)$,
6. $f_6(n) \in \mathcal{O}(8^n)$.

b)

1. $f_2(n)$,
2. $f_1(n)$ et $f_3(n)$,
3. $f_5(n)$,
4. $f_6(n)$,
5. $f_4(n)$.