1) Construire la table de vérité des expressions suivantes, utilisez la table pour trouver une expression plus simple si c'est possible.

a) $(p \rightarrow r) \lor (\neg\, p \rightarrow q)$

b) $(p \rightarrow r) \land (\neg\, p \rightarrow q)$

Solution

a) $(p \rightarrow r) \lor (\neg\, p \rightarrow q)$.

p	q	r	
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	V
V	F	F	V
F	V	V	V
F	V	F	V
F	F	V	V
F	F	F	V

L'expression est toujours vraie : c'est une *tautologie*.

b) $(p \rightarrow r) \land (\neg\, p \rightarrow q)$.

p	q	r	
V	V	V	V
V	V	F	F
V	F	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	V	F	V
F	F	V	F
F	F	F	F

2) Montrer que $(\neg p \wedge (p \vee q)) \rightarrow q$ est une *tautologie* (expression toujours vraie) en utilisant les équivalences logiques.

$(\neg p \wedge (p \vee q)) \Leftrightarrow (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge q) \Leftrightarrow F \vee (\neg p \wedge q)$

$\Leftrightarrow \neg p \wedge q \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \wedge q \rightarrow q$

$\Leftrightarrow p \vee \neg q \vee q \Leftrightarrow p \vee V \Leftrightarrow V$.

3) Si l'univers du discours est l'ensemble des étudiants de la classe, $P(x)$ la proposition " x parle couramment anglais" et $Q(x)$ la proposition "x connaît le langage C++", exprimer

- Il y a un étudiant qui parle anglais et qui connaît le C++ : $\exists x : (P(x) \wedge Q(x))$
- Chaque étudiant parle l'anglais ou connaît le C++ : $\forall x : (P(x) \vee Q(x))$
- Aucun étudiant ne sait à la fois parler anglais et programmer en C++ : $\forall x : \neg (P(x) \wedge Q(x))$
- Aucun étudiant parlant anglais ne connaît le C++ : $\forall x : P(x) \rightarrow \neg Q(x)$
- Aucun étudiant connaissant le C++ ne parle anglais : $\forall x : Q(x) \rightarrow \neg P(x)$

Notons que ces deux dernières expressions sont équivalentes entre elles et à

$\forall x : [\neg P(x) \vee \neg Q(x)] \Leftrightarrow \forall x : [\neg [P(x) \wedge Q(x)]] \Leftrightarrow \neg \exists x : (P(x) \wedge Q(x))]$