INF1130

Mathématiques pour l'informatique

Zied Zaier, PhD
Département d’informatique
Université du Québec à Montréal

Cours 4

SUITES ET SOMMATIONS

CE DOCUMENT EST INSPIRÉ DES TRAVAUX DES PROFESSEURS KENNETH H. ROSEN ET TIMOTHY WALSH.

Suite

- **Une suite est une fonction de l'ensemble des entiers (habituellement** Z**+**
- **ou** N**) dans l'ensemble S.**
- **Exemples**
- a) {an} an = 1/n 1, ½, 1/3, ¼, … Z**+** → **S**
- b) {bn} bn = (-1)n 1, -1, 1, -1, … N → **S**
- **Applications en info**
- Chaînes de caractères (STRING), … LENGTH, … chaîne vide (NULL)

Progression géométrique

- **Une suite de la forme : a, ar, ar2, ar3, …,arn où a, le terme initial, et r, la**
- **«raison», sont des réels.**
- **Exemples**
- a) {an} an = (-1)n a = 1, r = -1 1, -1, 1, -1, … N → **S**
- -1, 1, -1, 1 … Z**+** → **S**
- b) {bn} bn = 2(5)n a = 2, r = 5 2, 10, 50, 250, … N → **S**
- 10, 50, 250, 1250… Z**+** → **S**
- c) {cn} cn = 6(1/3)n a = 6, r = 1/3 6, 2, 2/3, 2/9, … N → **S**
- 2, 2/3, 2/9, 2/27… Z**+** → **S**

Progression arithmétique

- **Une suite de la forme : a, a+d, a+2d, …, a+nd où a, le terme initial, et**
- **d, la «différence», sont des réels.**
- **Exemples**
- a) {an} an = -1 + 4n a = -1, d = 4 -1, 3, 7, 11, … N → **S**
- b) {bn} bn = 7 - 3n a = 7, d = -3 7, 4, 1, -2, … N → **S**

Suites particulières

- Trouver la formule associée aux suites suivantes :
- a) 1, ½, ¼, 1/8, … an = 1/2n-1 Z**+** → **S** (géométrique)
- b) 1, 3, 5, 7, 9, … an = 2n+1 N → **S**
- an = 2n-1 Z**+** → **S** (arithmétique)
- c) 1, -1, 1, -1, … an = (-1)n+1 N → **S**
- an = (-1)n Z**+** → **S** (géométrique)
- Trouver le prochain groupe de termes dans la suite suivante :
- d) 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, … 5, 5, 5, 5, 5
- Trouver le an associé aux suites suivantes :
- e) 5, 11, 17, 23, 29, 35, 41, 47, 53, 59 an = 5 + 6(n-1)
- f) 1, 7, 25, 79, 241, 727, 2185, 6559, 19681, 59047 an = 3n - 2

Suites utiles

n-ième terme	10 premiers termes
n^2	1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100
n^3	1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000
n^4	1, 16, 81, 256, 625, 1296, 2401, 4096, 6561, 10000
2^n	2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024
3^n	3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561, 19683, 59049
$n!$	1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320, 362880, 3628800

Sommations

$$\sum_{j=m}^{n} a_j = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_{n-1} + a_n = \sum\nolimits_{j=m}^{n} a_j$$

Exemples

$$\sum_{j=1}^{5} j^2 = \qquad 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = + + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$$

$$\sum^{8} (-1)^k = \quad (-1)^4 + (-1)^5 + (-1)^6 + (-1)^7 + (-1)^8 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 = 1$$

Sommations multiples et sommations sur un ensemble

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} ij = 60$$

$$\sum_{x\in\{2,4,6\}} x = 12$$

Sommations utiles

Sommation	Formule close
$\sum_{k=0}^{n} ar^k \qquad (r \neq 0)$ **progression géométrique**	$\frac{ar^{n+1} - a}{r-1} \qquad (r \neq 1)$
$\sum_{k=1}^{n} k$ **progression arithmétique**	$\frac{n(n+1)}{2}$
$\sum_{k=1}^{n} k^2$	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \qquad \lvert x \rvert < 1$	$\frac{1}{1-x}$ **(preuve)**
$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} \qquad \lvert x \rvert < 1$	$\frac{1}{(1-x)^2}$ **(preuve)**

Manipulation des constantes et combinaisons linéaires

$$\sum_{i=a}^{b} c = (b - a + 1) \times c$$

$$\sum_{i} (ca_i + db_i) = c \sum_{i} a_i + d \sum_{i} b_i$$

Pour une suite arithmétique

La somme d'une suite arithmétique est égale au produit suivant:

(le nombre de termes) * (la moyenne entre le premier terme et le dernier terme)

Pour une suite géométrique

La somme d'une suite géométrique avec raison *r* ≠ 1 est égale au quotient suivant:

[(dernier terme * *r*) - premier terme]/(*r* - 1).

Pour une progression arithmétique

$$\sum_{i=a}^{b} i = \sum_{i=1}^{b} i - \sum_{i=1}^{a-1} i = \frac{b \times (b+1)}{2} - \frac{(a-1) \times a}{2}$$

Pour une progression géométrique

$$\sum_{i=c}^{d} ar^{i} = \sum_{i=0}^{d} ar^{i} - \sum_{i=0}^{c-1} ar^{i} = \frac{ar^{d+1} - a}{r-1} - \frac{ar^{c} - a}{r-1}$$