EXERCICES I

$\boxed{1}$ Pour quelles valeurs de a, b, c et d les matrices suivantes sont-elles égales ?

$$\begin{bmatrix} a & 1 \\ 2b-1 & c \\ -2 & cd \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2a & 1 \\ c & 3 \\ -2 & b+c \end{bmatrix}$$

$\boxed{2}$ Écrire explicitement les matrices de format 4×4 dont le terme général est donné par les formules suivantes :
a) $a_{ij} = \max\{i, j\}$
b) $a_{ij} = i^2 - j^2$
c) $a_{ij} = (1/4)(3i + j)$
d) $a_{ij} = ij$

$\boxed{3}$ Pour chacune des matrices suivantes, trouvez une formule permettant de décrire le terme général : a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$ et b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$.

$\boxed{4}$ Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 1 & 11 & 2,4 \\ -1 & 0 & 21 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} -4 & 2,3 & 0 \\ -11 & 6,7 & 1 \\ 1 & 0 & -16 \end{bmatrix}$, évaluez les expressions suivantes : a) $A + B$, b) $-\frac{1}{2}A$, c) $A - B$.

$\boxed{5}$ Soit $A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & -2 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$, déterminez la matrice X telle que $2B + X = 3A$.

$\boxed{6}$ Déterminez les matrices X, Y telles que $X + Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ et $X - Y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$.

$\boxed{7}$ La trace d'une matrice carrée A, notée $tr(A)$, est la somme des éléments de sa diagonale principale. Montrez que si A, B sont des matrices carrées de même format et si c est un scalaire, alors a) $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$ et b) $tr(cA) = ctr(A)$.

$\boxed{8}$ Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -11 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -6 & 31 \\ -4 & 10 \end{bmatrix}$.
a) Calculez $AC - CA$.

b) Trouvez la matrice X telle que $AB + X = CD$.

$\boxed{9}$ Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}$.

a) Trouvez une matrice X telle que $AX = B$.

b) Trouvez une matrice Y telle que $YA = B$.

$\boxed{10}$ Soit A, B, C des matrices carrées de même format. A-t-on toujours les égalités suivantes ? Si oui, faites-en une preuve, si non, donnez un exemple du contraire.

a) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

b) $(AC)^2 = A^2C^2$

$\boxed{11}$ Soit A une matrice carrée et m, n des nombres entiers naturels. Montrez qu'on a toujours $A^mA^n = A^{m+n}$ et $(A^m)^n = A^{mn}$.

$\boxed{12}$ Soit A une matrice de format $m \times n$ et B une matrice de format $n \times m$. Montrez qu'on a toujours $tr(AB) = tr(BA)$.

$\boxed{13}$ Soit $B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.
Exprimez, si possible, chacune des matrices suivantes comme une combinaison linéaire des matrices B_1, B_2, B_3, B_4. (a) $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\boxed{14}$ D'après la matrice des distances vue au cours (disponible dans le site internet du cours), déterminez :

a) Quelles sont les deux villes les plus éloignées l'une de l'autre ?

b) Quelle est la ville la plus centrale, c.-à-d. celle à partir de laquelle la somme des distances aux autres villes est la plus petite ?