Exemple Induction

Pour $n \geq 1$, le nombre harmonique H_n est défini comme

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.$$

La suite des nombres harmoniques peut aussi être définie de manière inductive comme suit.

1. H_1, le premier nombre harmonique, est égal à 1.
2. Si n est plus grand que 1, H_n est égal à $H_{n-1} + \frac{1}{n}$.

Prouvez par induction les deux identités suivantes (pour $n \geq 1$).

$$\sum_{i=1}^{n} H_i = (n+1)H_n - n$$

$$\sum_{i=1}^{n} (i \cdot H_i) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right) H_{n+1} - \frac{n(n+1)}{4}$$

Preuve de l'identité $\sum_{i=1}^{n} H_i = (n+1)H_n - n$

1. Cas de base ($n = 1$)

Comme $\sum_{i=1}^{1} H_i = H_1 = 1$ et que $(1+1)H_1 - 1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$, l'identité est vraie pour $n = 1$.

2. Preuve que $\sum_{i=1}^{\ell} H_i = (\ell+1)H_\ell - \ell$ implique $\sum_{i=1}^{\ell+1} H_i = (\ell+2)H_{\ell+1} - (\ell+1)$

Hypothèse d'induction : $\sum_{i=1}^{\ell} H_i = (\ell+1)H_\ell - \ell$

Nous avons

$$\sum_{i=1}^{\ell+1} H_i = \sum_{i=1}^{\ell} H_i + H_{\ell+1} = (\ell+1)H_\ell - \ell + H_{\ell+1}$$

$$= (\ell+1)\left(H_{\ell+1} - \frac{1}{\ell+1}\right) - \ell + H_{\ell+1} = (\ell+2)H_{\ell+1} - \frac{\ell+1}{\ell+1} - \ell$$

$$= (\ell+2)H_{\ell+1} - (\ell+1).$$

La troisième égalité découle de la définition de $H_{\ell+1}$ ($H_{\ell+1} = H_\ell + 1/(\ell+1)$).

Preuve de l'identité $\sum_{i=1}^{n}(i \cdot H_i) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right) H_{n+1} - \frac{n(n+1)}{4}$

1. Cas de base ($n = 1$)

Comme $\sum_{i=1}^{1}(i \cdot H_i) = 1 \cdot H_1 = 1$ et que $\left(\frac{1(1+1)}{2}\right) H_{1+1} - \frac{1(1+1)}{4} = 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) - \frac{2}{4} = 1$, l'identité est vraie pour $n = 1$.

2. Preuve que $\sum_{i=1}^{\ell}(i \cdot H_i) = \left(\frac{\ell(\ell+1)}{2}\right) H_{\ell+1} - \frac{\ell(\ell+1)}{4}$ implique $\sum_{i=1}^{\ell+1}(i \cdot H_i) = \left(\frac{(\ell+1)(\ell+2)}{2}\right) H_{\ell+2} - \frac{(\ell+1)(\ell+2)}{4}$

Hypothèse d'induction : $\sum_{i=1}^{\ell}(i \cdot H_i) = \left(\frac{\ell(\ell+1)}{2}\right) H_{\ell+1} - \frac{\ell(\ell+1)}{4}$

Nous avons

$$\sum_{i=1}^{\ell+1}(i \cdot H_i) = \sum_{i=1}^{\ell}(i \cdot H_i) + (\ell+1) \cdot H_{\ell+1}$$

$$= \left(\frac{\ell(\ell+1)}{2}\right) H_{\ell+1} - \frac{\ell(\ell+1)}{4} + (\ell+1) \cdot H_{\ell+1}$$

$$= \left(\frac{\ell(\ell+1)}{2} + (\ell+1)\right) H_{\ell+1} - \frac{\ell(\ell+1)}{4}$$

$$= \left(\frac{(\ell+1)(\ell+2)}{2}\right) H_{\ell+1} - \frac{\ell(\ell+1)}{4}$$

$$= \left(\frac{(\ell+1)(\ell+2)}{2}\right) \left(H_{\ell+2} - \frac{1}{\ell+2}\right) - \frac{\ell(\ell+1)}{4}$$

$$= \left(\frac{(\ell+1)(\ell+2)}{2}\right) H_{\ell+2} - \frac{\ell+1}{2} - \frac{\ell(\ell+1)}{4}$$

$$= \left(\frac{(\ell+1)(\ell+2)}{2}\right) H_{\ell+2} - \frac{(\ell+1)(\ell+2)}{4}.$$

La cinquième égalité découle de la définition de $H_{\ell+2}$ ($H_{\ell+2} = H_{\ell+1} + 1/(\ell+2)$).