INF1130 SESSION H13 DEVOIR 1

Remise : vendredi le 1 mars 2013 à 16h00.

Question 1 sur la logique propositionnelle (25 points)

a) Donnez la table de vérité de la proposition suivante : $((p \wedge \neg q) \vee r) \rightarrow (p \vee q)$.

b) Donnez la négation, en simplifiant le résultat au maximum, de la proposition suivante : $(\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \rightarrow q)$.

c) Trouvez une proposition logique dont la table de vérité est la suivante :

p	q	r	valeur
V	V	V	V
V	V	F	F
V	F	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F
F	F	F	F

Question 2 sur la logique des prédicats (25 points)

Soit T le tableau défini par

i \\ j	0	1	2	3
0	1	3	5	3
1	-1	0	3	2
2	1	2	2	1
3	1	1	1	1

On note $T[i, j]$ l'élément situé à la ligne i et la colonne j et on définit l'univers du discours comme l'ensemble $E = \{0, 1, 2, 3\}$.

a) Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ? Justifiez.

(i) $\forall i, \exists j, T[i, j] = 1$

(ii) $\forall j, \exists i, T[i, j] = 1$

(iii) $\exists j, \forall i, T[i, j] = 1$

(iv) $\exists i, \forall j, T[i, j] = 1$

b) Donnez la négation des énoncés précédents sous forme d'énoncés quantifiés.

Question 3 sur les ensembles (20 **points**)

Soit l'ensemble $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

a) Donnez trois sous-ensembles A, B et C de E tels que A, B, C, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$ et $A \cap B \cap C$ soient tous différents, et non-vides. Vous pouvez donner votre réponse sous forme de diagramme de Venn.

b) Refaire la question précédente, avec la conditions que les ensembles soient tous différents, sauf $A \cap B = A \cap C$, et non-vides.

c) Soit F un ensemble quelconque, et A, B et C des sous-ensembles quelconques de F. Montrez que si $A \cap B = A \cap C$ alors $A \cap \bar{B} = A \cap \bar{C}$.

Question 4 sur les fonctions et la modélisation (25 **points**)

Dans cet exercice, nous nous intéressons à modéliser la croissance de communautés de micro-organismes au moyen de fonctions mathématiques. Deux souches, appelées A et B, sont disponibles. Lorsque l'on place un individu de la souche A dans un milieu approprié, on observe les étapes de croissance illustrées dans la Figure 1 ; le comportement de la souche B est illustré dans la Figure 2.

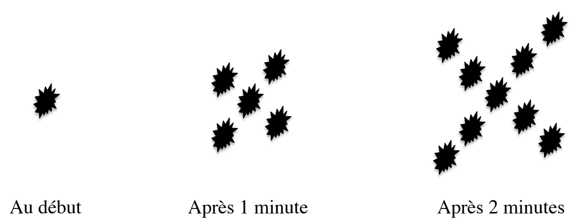

FIGURE 1 – Comportement de la souche A.

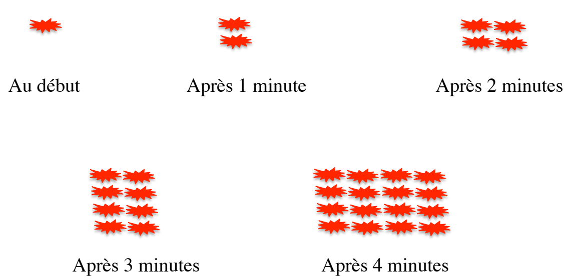

FIGURE 2 – Comportement de la souche B.

a) Décrivez, en une phrase, le modèle de croissance apparent de la souche A. En supposant que la croissance continue de la même manière, quelle sera la taille de la communauté après 3 minutes ? Donnez une formule pour la fonction qui calcule la taille de la communauté après t minutes.

b) Décrivez, en une phrase, le modèle de croissance apparent de la souche B. En supposant que la croissance continue de la même manière, quelle sera la taille de la communauté après 5 minutes ? Donnez une formule pour la fonction qui calcule la taille de la communauté après t minutes.

c) Pour une expérience scientifique, on introduit, à chaque minute, un individu de la souche A et 3 individus de la souche S dans un milieu de culture. Par exemple, après une minute, on aura 6 individus de souche A et 9 individus de souche B. Quelle sera la taille de cette communauté mixte après 5 minutes ? Donnez une formule pour la fonction qui calcule la taille de la communauté après t minutes.

Question 5 sur les propriétés des fonctions (30 points)

Dites si les fonctions suivantes sont injectives ou non, surjectives ou non. Justifiez vos réponses.

a) Soit la fonction $f : \mathbb{N} \to \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ tel que $f(n) = (3n + 1) \bmod 6$.

b) Soit la fonction $g : \mathbb{N} \to \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ tel que $g(n) = (n + 1) \bmod 6$.

c) Soit la fonction $h : \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \to \mathbb{N}$ tel que $f(n) = (n + 1) \bmod 6$.

Question 6 sur la croissance des fonctions (25 points)

Soit les fonctions suivantes avec domaine $\mathbb{N}$, l'ensemble des nombres naturels, et co-domaine $\mathbb{R}$, l'ensemble des nombres réels.

1. $f_1(n) = \sum_{i=1}^{n}(7i + 5)$,
2. $f_2(n) = \frac{4^{\log_2 n}}{n^2}$,
3. $f_3(n) = n \log_2(4^n)$,
4. $f_4(n) = n^{1/2} 3^{2n+3}$,
5. $f_5(n) = 5 + \sum_{i=0}^{n} 3^i$,
6. $f_6(n) = 25 + 2^{3n+1}$.

a) Trouvez pour chacune de ces fonctions f_i une fonction aussi simple que possible qui est l'estimé grand-$\mathcal{O}$ le plus précis possible pour la fonction f_i.

b) On dit que la fonction f croît moins rapidement que la fonction g si f est dans $\mathcal{O}(g)$ et g n'est pas dans $\mathcal{O}(f)$. On dit que les fonctions f et g croissent à la même vitesse si f est dans $\mathcal{O}(g)$ et g est dans $\mathcal{O}(f)$. Ordonnez les fonctions f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 de haut en bas selon leur taux de croissance (grand-$\mathcal{O}$). Si des fonctions croissent à la même vitesse, mettez leur numro sur la même ligne.