1.5 Utilisation des matrices dans l'étude des *graphes*

Les *graphes* dont on parle ici désignent un type de structures mathématiques qui permet de modéliser plusieurs situations. La théorie des graphes trouvent de multiples applications : circulation automobile, traffic aérien, etc.

Définition 1.5.1 Un **graphe orienté** est formé d'un ensemble fini non vide X, appelé ensemble des **sommets**, et d'un ensemble U de couples ordonnés de sommets, $U \subseteq X \times X$, appelé ensemble des **flèches**.

▶ **NOTATION.** On utilise la notation $G = (X, U)$ pour désigner un graphe orienté.

On représente habituellement un graphe par un dessin.

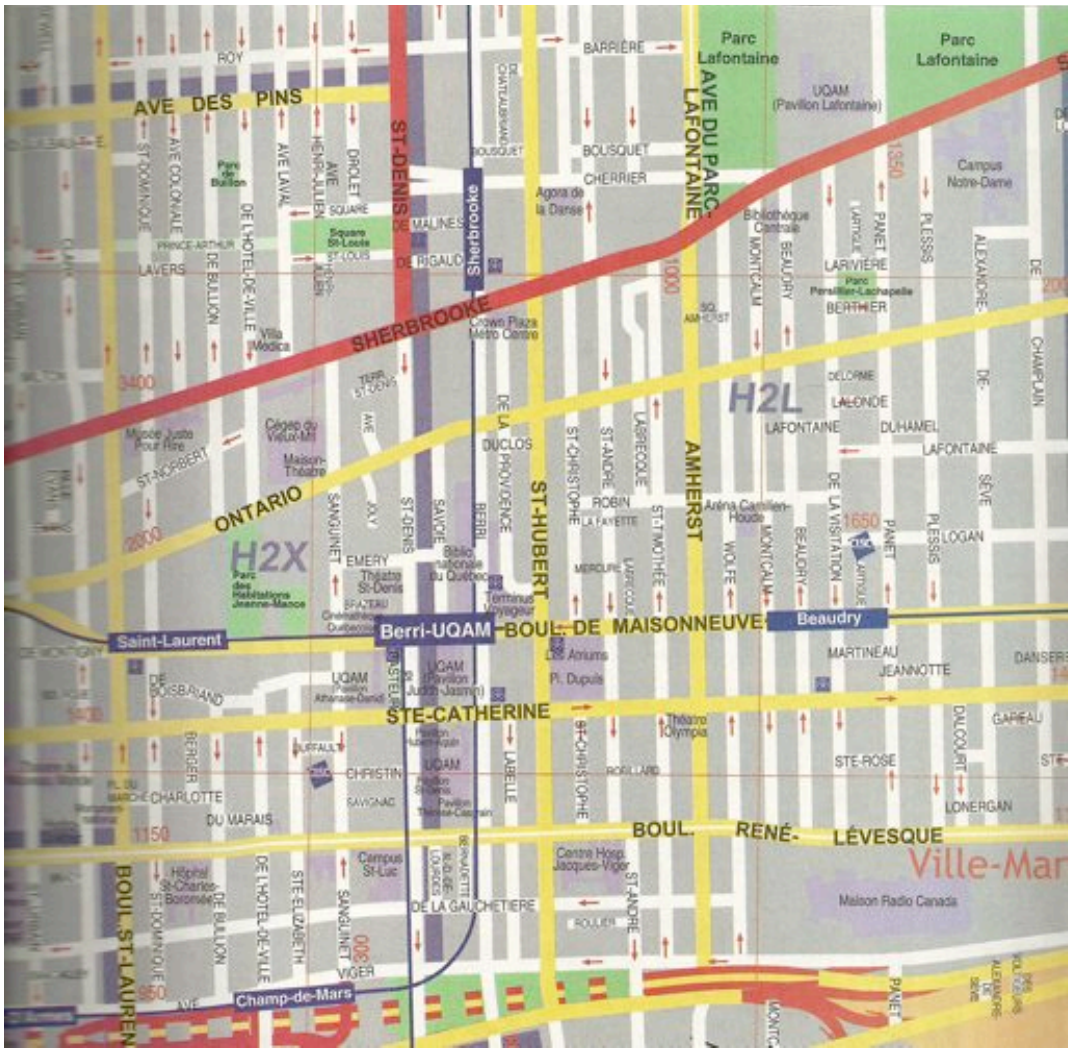
Exemple 1.5.2

$$X = \{x, y, z, r, s, t\}$$

$$U = \{(x, y), (y, x), (x, z), (x, y), (s, s), (s, t)\}$$

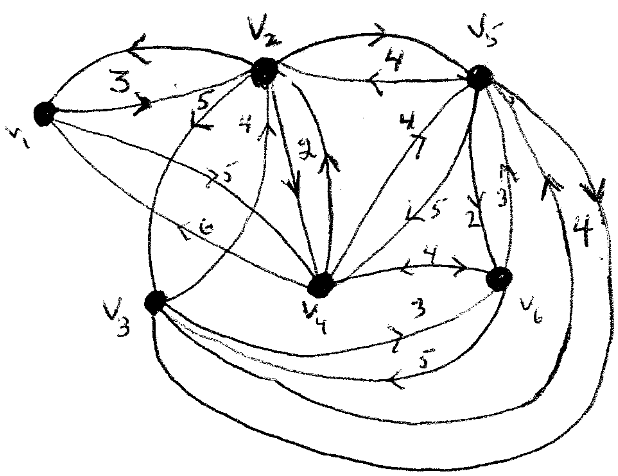
$**********DESSIN************$

Exemple 1.5.3 Un réseau de rues avec les sens uniques fournit un exemple de graphe.



Exemple 1.5.4 Un réseau de vols aériens fournit un exemple de graphe.

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6
V_1	0	3	–	5	–	–
V_2	3	0	5	2	4	–
V_3	–	4	0	–	4	3
V_4	6	2	–	0	4	4
V_5	–	4	4	5	0	2
V_6	–	–	5	4	3	0



Exemple 1.5.5 Les résultats d'un tournoi fournit un exemple de graphe : X = tous les participants, U : $(x, y) \in U$ exactement quand x a battu y.

Exemple 1.5.6 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $U : (x, y) \in U$ exactement quand x divise y.

Exemple 1.5.7 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $U : (x, y) \in U$ exactement quand $x \leq y$.

Définition 1.5.8 Soit $G = (X, U)$ un graphe orienté.

- ▶ Un **chemin** de G de longueur n ($n \geq 0$) est une suite finie, $c = (x_0, \ldots, x_n)$, de sommets de X telle que pour tout $i, 0 \leq i \leq n$, on ait toujours $(x_{i-1}, x_i) \in U$. On dit que le chemin va de x_0 à x_n.
- ▶ Un chemin de G, $c = (x_0, \ldots, x_n)$, est appelé un **circuit** si $x_n = x_0$.
- ▶ On dit que G est **fortement connexe** si pour tous sommets $x, y \in X$, il y a toujours au moins un chemin qui va de x à y.

Exemple 1.5.9

- Dans un réseau de rues avec les sens uniques, un trajet d'une intersection à une autre et qui respecte les sens uniques fournit un exemple de chemin dans le graphe correspondant.
- Dans un réseau de vols aériens, un trajet de vols d'une ville à une autre fournit un exemple de chemin dans le graphe correspondant.

Définition 1.5.10 Soit $G = (X, U)$ un graphe orienté, avec $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. La **matrice d'adjacence** de G est la matrice carrée $n \times n$, notée $M(G)$, et définie par $M(G) = [m_{ij}]$, où $m_{ij} = 1$, si $(x_i, x_j) \in U$, et $m_{ij} = 0$, si $(x_i, x_j) \notin U$.

N.B. La matrice $M(G)$ dépend de la numérotation des sommets.

Théorème 1.5.11 Soit $G = (X, U)$ un graphe orienté, avec $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, et soit $M = M(G)$, $M^k = [m_{ij}(k)]$, où k est un entier, $k \geq 0$. Alors $m_{ij}(k)$ est égal au nombre de chemins de longueur k dans G allant du sommet x_i au sommet x_j.

N.B. Pour $k = 0$, on a $M^0 = I_n$: OK. Pour $k = 1$, on a $M^1 = M$: OK.

Exemple 1.5.12 Soit $G = (X, U)$, $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$,
$U = \{(x_1, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_1), (x_1, x_3), (x_3, x_2), (x_4, x_3)\}$, $M = M(G)$.
On obtient

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, M^2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, M^3 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Définition 1.5.13 Soit $G = (X, U)$ un graphe orienté.

- ▶ Pour chaque sommet, $x \in X$, on définit le **demi-degré extérieur** de x, noté $d^+(x)$, et le **demi-degré inférieur** de x, noté $d^-(x)$, ainsi :

$$d^+(x) = |\{y \in X : (x, y) \in U\}|$$

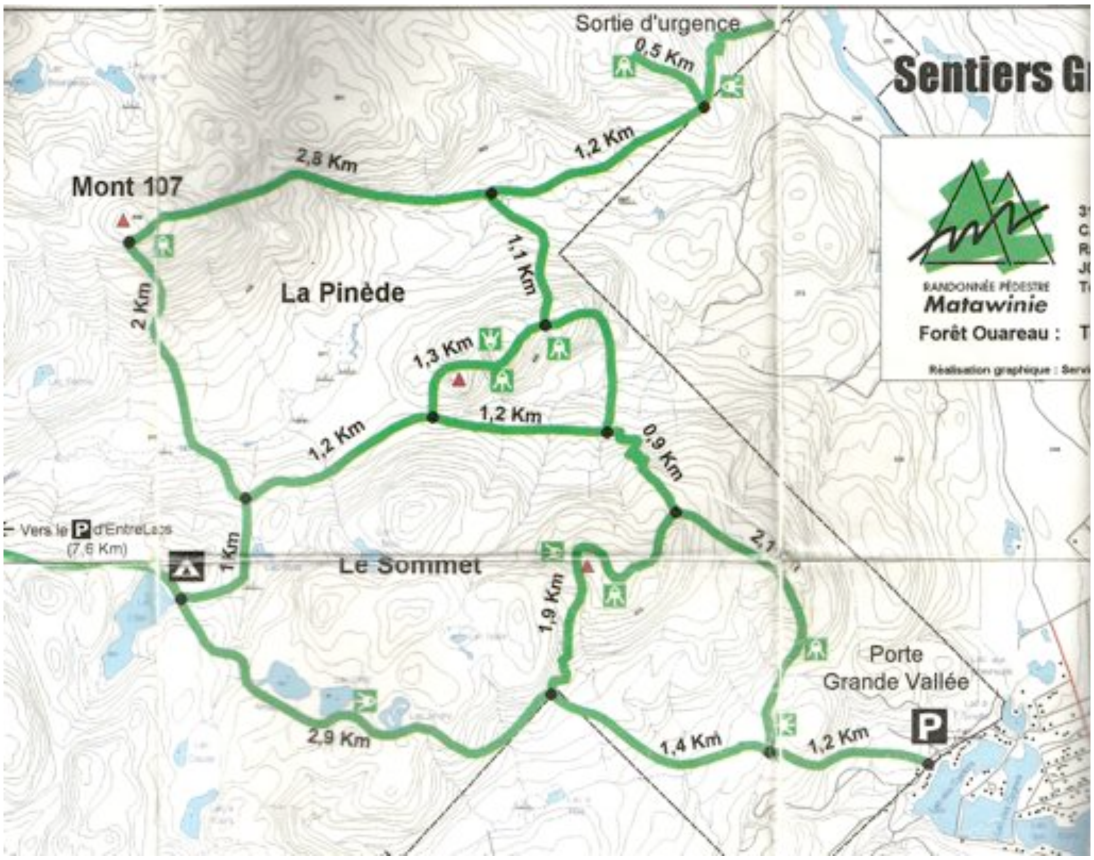
$$d^-(x) = |\{y \in X : (y, x) \in U\}|$$

- ▶ On dit que G est un **graphe simple**, si G est symétrique et sans boucle, c.-à-d. chaque fois que $(x, y) \in U$ on a toujours aussi $(y, x) \in U$, et on a toujours $(x, x) \notin U$.

N.B. Quand on a un graphe simple, on peut ne retenir comme information que l'ensemble A des paires[2] $\{x, y\}$ pour lesquelles $(x, y) \in U$ et $(y, x) \in U$; on appelle alors ces paires les **arêtes** du graphe. On utiise aussi une représentation d'un graphe simple par un dessin où on représente les arêtes (seulement) par des traits non fléchés. On peut remarquer que la matrice d'incidence d'un graphe simple sera une matrice symétrique.

2. Une paire n'est pas orientée.

Exemple 1.5.14 La carte d'un sentier pédestre fournit un exemple de graphe simple.



Proposition 1.5.15 Soit $G = (X, U)$ un graphe orienté, avec $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, et soit $M = M(G)$, la matrice d'adjacence. On a

1)

$$d^+(x_i) = \sum_{j=1}^{n} m_{ij} = \text{ la somme de la } i\text{-e ligne de } M$$

$$d^-(x_i) = \sum_{i=1}^{n} m_{ji} = \text{ la somme de la } i\text{-e colonne de } M$$

2)

$$\sum_{i,j} m_{ij} = \sum_{i=1}^{n} d^+(x_i) = \sum_{i=1}^{n} d^-(x_i) = |U|$$

3) G est symétrique si et seulement si M est symétrique.

4) Le nombre de boucles de G est égal à la trace de M, $tr(M)$, c.-à-d. la somme de la diagonale de M.

5) Soit G^{-1} le graphe opposé de G, c.-à-d. ayant les mêmes sommets mais où on a renversé les flèches [3], alors on a $M(G^{-1}) = M^T$.

3. Précisément, $G^{-1} = (X, U^{-1})$, où $U^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in U\}$.