

Supposons que l'univers du discours soit  $N$ , l'ensemble des nombres naturels, et considérons les prédicats suivants :

$$\begin{aligned} P(x, y) &\text{ représente } "x < y" \\ Q(x, y) &\text{ représente } "x + 1 < y" \end{aligned}$$

Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux? Justifiez vos réponses dans chaque cas.

**a)**  $\forall x \forall y \ P(x, y) \rightarrow Q(x, y)$  L'énoncé est faux, par exemple lorsque  $x = 0$  et  $y = 1$ .

**b)**  $\forall x \exists y \ P(x, y)$  L'énoncé est vrai. Il suffit, par exemple, pour une valeur  $x$  quelconque, de poser  $y = x + 1$ .

**c)**  $\exists x \forall y \ P(x, y)$  L'énoncé est faux. Quelque soit la valeur de  $x \in N$  choisie, on aura toujours que  $P(x, x)$  est faux, puis que  $x < x$  est faux.

**d)**  $\exists x \exists y \ P(x, y) \wedge \neg Q(x, y)$  L'énoncé est vrai. Par exemple lorsque  $x = 0$  et  $y = 1$ .

**e)**  $\forall x \exists y \ P(x, y) \rightarrow Q(x, y)$  L'énoncé est vrai. Il suffit, par exemple, pour une valeur  $x$  quelconque, de poser  $y = x + 2$ .

**f)**  $\exists x \forall y \ Q(x, y) \rightarrow P(x, y)$  L'énoncé est vrai, il est même vrai pour chaque valeur de  $x$ , car si  $x + 1 < y$  est vrai alors  $x < y$  est également vrai.