INF1130 SESSION A14 DEVOIR 1

Remise : vendredi le 17 octobre 2014 à 16h00.
Professeurs : Anne Bergeron et Elmahdi Driouch

Question 1 sur la logique propositionnelle (26 points)

Considérons les propositions suivantes :
$A = (\neg p \to q) \wedge r$
$B = (q \wedge \neg r) \to (p \wedge \neg q)$
$C = (r \wedge (p \vee q)) \vee (\neg q \wedge (\neg q \vee p))$

a) Existe-t'il une assignation de valeur de vérité pour les propositions p, q et r de sorte que les propositions A, B et C soient toutes vraies ? Justifiez.

b) Existe-t'il une assignation de valeur de vérité pour les propositions p, q et r de sorte que les propositions A, B et C soient toutes fausses ? Justifiez.

c) Est-ce que $A \to B$ est toujours vraie ? Justifiez.

d) Est-ce que $B \to A$ est toujours vraie ? Justifiez.

Question 2 sur la logique des prédicats (24 points)

Le tableau T suivant décrits certaines caractéristiques d'insectes.

	Peut voler	A une trompe	Goute avec ses pieds	A des écailles sur les ailes
Poisson d'argent	0	0	0	0
Scarabée	1	0	0	0
Maringouin	1	1	1	0
Papillon	1	1	1	1
Abeille	1	1	0	0

On définit le prédicat $T(i, c)$, qui est vrai si, selon le tableau, l'insecte i possède la caractéristique c.

En supposant que la variable i et la variable j ont comme domaine {Poisson d'argent, Scarabée, Maringouin, Papillon, Abeille} et que la variable c a comme domaine {Peut voler, A une trompe, Goute avec ses pieds, A des écailles sur les ailes}, dites si les énoncés suivants sont vrais ou faux.

Justifiez vos réponses à l'aide d'une preuve ou d'un contre-exemple, selon le cas.

a) $\forall c, \exists i, T(i, c)$.

b) $\forall i, \exists c, T(i, c)$.

c) $\exists i, \forall c, T(i, c)$.

d) $\exists c, \forall i, T(i, c)$.

e) $\forall i, T(i, \text{‘Goute avec ses pieds’}) \rightarrow T(i, \text{‘A une trompe’})$.

f) $\forall i, T(i, \text{‘Peut voler’}) \vee T(i, \text{‘A des écailles sur les ailes’})$.

g) $T(\text{’Poisson d’argent’}, \text{‘Peut voler’}) \rightarrow (\forall i, \forall c, T(i, c))$

h) $\forall i, \forall j, \exists c, T(i, c) \leftrightarrow T(j, c)$

Question 3 sur les ensembles (25 points)

L’école de langue de l’université propose, entre autres, trois cours pour apprendre trois langues différentes, soit le français, l’anglais ou l’espagnol. Les étudiants peuvent être inscrits à zéro ou plusieurs cours. Nous possédons quelques informations sur les nombres des inscriptions et cherchons à répondre à quelques questions. Les informations disponibles sont :

— L’école a enregistré un total de 75 inscriptions dont 7 qui ne correspondent à aucun de ces trois cours.
— Un total de 33 étudiants sont inscrits au cours du français, parmi lesquels 5 sont aussi inscrits en espagnol.
— Un total de 30 étudiants sont inscrits au cours d’anglais, parmi lesquels 10 sont aussi inscrits en français.
— 6 étudiants sont inscrits à la fois au cours d’anglais et à celui d’espagnol.

a) Combien d’étudiants ne sont inscrits qu’au cours d’espagnol ? Justifiez. [Aide : Vous ne pourriez pas répondre à cette question pour le cours d’anglais ou de français.]

b) Après avoir résolu l’exercice précédent, vous surprenez dans la caféteria une conversation téléphonique où un administrateur de l’école se vante d’avoir plus d’une vingtaine d’étudiants inscrits dans au moins deux cours de langue. En supposant que l’administrateur dit vrai, combien d’étudiants sont inscrits à trois cours de langue ? Justifiez.

Question 4 sur les suites et les sommes (25 **points)**

Pour chacune des suites suivantes, exprimez la valeur de sa somme en utilisant la notation de sommation, et donnez la valeur de cette somme. [Toutes les bornes données sont incluses dans les intervalles décrits.]

a) La suite des nombres pairs entre 0 et $2n$.

b) La suite des multiples de 3 entre 9 et 999.

c) La suite des entiers entre -20 et 20.

d) La suite des puissances paires de 2 entre 0 et 18.

e) La suite constante égale à 1 entre n et m, où $n \leq m$.

Question 5 sur les propriétés des fonctions (25 **points)**

Considérons les règles suivantes :

$$f_1(a) = 4a + 1$$

$$f_2(a) = 2a - 5$$

$$f_3(a) = \frac{a^2 + 3a}{2}$$

$$f_4(a) = \begin{cases} a + 1 & \text{si } a \text{ est pair} \\ a - 1 & \text{si } a \text{ est impair} \end{cases}$$

a) Pour chacune des 4 règles, dites si la règle définit une fonction $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Lorsque c'est le cas, donnez les valeurs de la fonction dans l'intervalle $[0..5]$.

b) Déterminez si les fonctions trouvées en **a)** sont injectives, surjectives, et/ou bijectives. Si la fonction est bijective, donnez son inverse. Démontrez chacune de vos affirmations.

Question 6 sur la croissance des fonctions (25 points)

Soit les fonctions suivantes avec domaine $\mathbb{N}$, l'ensemble des nombres naturels, et co-domaine $\mathbb{R}$, l'ensemble des nombres réels.

1. $f_1(n) = 10^{2n+2}$,
2. $f_2(n) = \log_2(n^{10}) + \log_{10}(n^2)$,
3. $f_3(n) = n^{\frac{1}{2}} + n\log_2(2^n)$,
4. $f_4(n) = \sum_{i=0}^{n}(10^i + 2^i)$,
5. $f_5(n) = \frac{1000^{\log_{10}(n^2)}}{n^5}$,
6. $f_6(n) = 10n + \sum_{i=1}^{n}(10 + 2i)$,

a) Trouvez pour chacune de ces fonctions f_i une fonction aussi simple que possible qui est l'estimé grand-$\mathcal{O}$ le plus précis possible pour la fonction f_i.

b) On dit que la fonction f croît moins rapidement que la fonction g si f est dans $\mathcal{O}(g)$ et g n'est pas dans $\mathcal{O}(f)$. On dit que les fonctions f et g croissent à la même vitesse si f est dans $\mathcal{O}(g)$ et g est dans $\mathcal{O}(f)$. Ordonnez les fonctions f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 de haut en bas selon leur taux de croissance (grand-$\mathcal{O}$). Si des fonctions croissent à la même vitesse, mettez leur numéro sur la même ligne.