Fonctions définies récursivement

Soit c la fonction des naturels aux naturels définie récursivement par
$c(0)=1$, $c(n) = \dfrac{(4n-2)*c(n-1)}{n+1}$ si $n\geq 1$.

Partie a (10 points). Démontrez par induction sur n que $c(n) = \dfrac{(2n)!}{n!(n+1)!}$ pour tout entier $n\geq 0$.

(**Remarque:** par convention $0!=1$.)

Solution.

Étape de base: $n=0$. Côté gauche = $c(0) = 1$. Côté droit = $0!/(0!1!) = 1/(1*1) = 1$.

Étape inductive. Supposons que $n>0$ et que $c(n-1) = \dfrac{(2n-2)!}{(n-1)!n!}$.
À démontrer: $c(n) = \dfrac{(2n)!}{n!(n+1)!}$

Selon la récurrence, côté gauche = $c(n) = \dfrac{(4n-2)*c(n-1)}{n+1}$ = (selon l'hypothèse inductive)

$$\frac{(4n-2)*\dfrac{(2n-2)!}{(n-1)!n!}}{n+1} = \frac{2(2n-1)(2n-2)!}{(n-1)!n!(n+1)} = \frac{2(2n-1)!}{(n-1)!(n+1)!}.$$

Côté droit = $\dfrac{(2n)!}{n!(n+1)!} = \dfrac{2n*(2n-1)!}{n*(n-1)!(n+1)!} = \dfrac{2(2n-1)!}{(n-1)!(n+1)!}$ = côté gauche.

Partie b (6 points). Évaluez $c(5)$. Vous pouvez utiliser soit la définition récursive, soit la définition non-récursive, mais vous devez indiquer quelle définition vous avez utilisée et la raison de votre choix.

Solution. L'utilisation de la formule non-récursive exige le calcul de $10! = 3\ 628\ 800$. La solution à l'aide de la formule récursive ne traite pas des nombres si grands.

$c(1) = 2*c(0)/2 = 2*1/2 = 1$. $c(2) = 6*c(1)/3 = 6*1/3 = 2$. $c(3) = 10*c(2)/4 = 10*2/4 = 5$.
$c(4) = 14*c(3)/5 = 14*5/5 = 14$. $c(5) = 18*c(4)/6 = 18*14/6 = 3*14 = 42$.

Même si on multiplie 18 par 14 et puis divise par 6, le plus grand nombre qu'il faut traiter est 252, ce qui est beaucoup plus petit que 3 628 800.

Soit f la fonction avec domaine et codomaine **N**, l'ensemble des entiers naturels, définie par

$f(0) = 1$, $f(n) = 1 + f(0) + f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1)$ si $n \geq 1$.

Partie a (5 points). Remplir le tableau suivant.

Solution

n	0	1	2	3	4	5
$f(n)$	1	2	4	8	16	32

Partie b (5 points). Trouver une forme close (une expression algébrique explicite) pour $f(n)$.

Solution: 2^n.

Partie c (10 points). Démontrer par induction généralisée sur n que la forme close que vous avez obtenue en la partie **b** est valide pour tout entier $n \geq 0$.

Solution. Il faut démontrer que $f(n) = 2^n$ pour tout entier $n \geq 0$.

Étape de base: $n=0$. $f(0) = 1$ et $2^0 = 1$.

Étape d'induction. Supposons que $n \geq 1$ et que $f(m) = 2^m$ pour tout entier naturel $m<n$.
À démontrer: $f(n) = 2^n$.

Selon la définition récursive de $f(n)$,
$f(n) = 1 + f(0) + f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1) = 1 + 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1}$.
Or $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1}$ est une série géométrique dont la somme est $2^n - 1$,
d'où $f(n) = 1 + (2^n - 1) = 2^n$.

Autre solution (pour 8 points puisqu'elle utilise l'induction simple):

$f(n) = 1 + f(0) + f(1) + f(2) + \ldots + f(n-2) + f(n-1)$ si $n \geq 1$. En substituant $n-1$ pour n on obtient
$f(n-1) = 1 + f(0) + f(1) + f(2) + \ldots + f(n-2)$ si $n \geq 2$. En soustrayant on obtient
$f(n) - f(n-1) = f(n-1)$, d'où $f(n) = 2f(n-1)$ si $n \geq 2$.

Étape de base: $n=0$ et $n=1$. $f(0) = 1$ et $2^0 = 1$; $f(1) = 1$ et $2^1 = 2$.

Étape d'induction: Supposons que $n \geq 2$ et que $f(n-1) = 2^{n-1}$. À démontrer: $f(n) = 2^n$.

Depuis la nouvelle récurrence, $f(n) = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$.

Soit f la fonction avec domaine et codomaine **N**, l'ensemble des nombres naturels, définie récursivement ainsi:

$f(0)=1$; $f(1)=2$; $f(n)=2f(n-1) - f(n-2) + 1$ si $n>1$.

Partie a (5 points). Calculez $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$ et $f(6)$ et remplissez le tableau suivant.

Solution.

n	0	1	2	3	4	5	6
$f(n)$	1	2	4	7	11	16	22

Partie b (15 points). Démontrez par induction généralisée sur n que $f(n) = \frac{n(n+1)}{2}+1$ pour tout entier $n\geq 0$.

Solution.

Étape de base: $n=0$ et $n=1$. Pour $n=0$, $f(n)=1$ et $\frac{n(n+1)}{2}+1 = (0\times 1)/2 + 1 = 1$. Pour $n=1$, $f(n)=2$ et $\frac{n(n+1)}{2}+1 = (1\times 2)/2 + 1 = 2$.

Étape inductive. Supposons que $n\geq 2$ et que $f(m) = \frac{m(m+1)}{2}+1$ pour tout entier m tel que $0\leq m<n$. À démontrer: $f(n) = \frac{n(n+1)}{2}+1$.

Puisque $n\geq 2$, $0\leq n-1<n$ et $0\leq n-2<n$, d'où $f(n-1) = \frac{(n-1)n}{2}+1$ et $f(n-2) = \frac{(n-2)(n-1)}{2}+1$. Selon la récurrence, $f(n) = 2\times\left(\frac{(n-1)n}{2}+1\right) - \left(\frac{(n-2)(n-1)}{2}+1\right) + 1 = \left(\frac{n-1}{2}\right)\times\left(2n-(n-2)\right)+2-1+1 = \left(\frac{n-1}{2}\right)\times(n+2)+2 = \left(\frac{n^2+n-2}{2}\right)+2 = \left(\frac{n^2+n}{2}\right)+1 = \frac{n(n+1)}{2}+1$.

Une fonction $f: N \rightarrow N$ est définie récursivement par :

$f(0) = 0$,
$f(n+1) = f(n) + 2n + 4$ pour tout entier $n \geq 0$.

Partie a (4 points). Donnez les valeurs de $f(n)$ pour n = 1, 2, 3 et 4.

Solution.

n	1	2	3	4
$f(n)$	4	10	18	28

Partie b (16 points). Démontrez par induction standard sur n que $\forall n \in N, f(n) = n^2 + 3n$.

Solution.

Étape de base : n=0. Côté gauche = $f(0)$=0. Côté droit = $0^2 + 3 \times 0 = 0$.

Étape inductive. Supposons que $n \geq 0$ et que $f(n) = n^2 + 3n$.
À démontrer: $f(n+1) = (n+1)^2 + 3(n+1)$.
Côté gauche = $f(n) + 2n + 4 = (n^2 + 3n) + (2n + 4) = n^2 + 5n + 4$.
Côté droit = $(n+1)^2 + 3(n+1) = n^2 + 2n + 1 + 3n + 3 = n^2 + 5n + 4$.