保密★启用前

2018-2019 学年第一学期期末考试

《高等数学 BI》

考生注意事项

1. 答题前，考生须在试题册指定位置上填写考生**教学号**和考生姓名；**在答题卡指定位置上填写考试科目、考生姓名和考生教学号，并涂写考生教学号信息点。**
2. 选择题的答案必须涂写在答题卡相应题号的选项上，非选择题的答案必须书写在答题卡指定位置的边框区域内。超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题册上答题无效。
3. 填（书）写部分必须使用黑色字迹签字笔书写，字迹工整、笔迹清楚；涂写部分必须使用 2B 铅笔填涂。
4. 考试结束，将答题卡和试题册按规定交回。

(以下信息考生必须认真填写)

考生教学号								
考生姓名								

一、选择题：1～6 小题，每小题 3 分，共 18 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．请将答案写在答题卡上，写在试题册上无效．

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+n)^{\frac{1}{n}}=$（ B ）．

（A）0　（B）1　（C）e　（D）$\frac{1}{\mathrm{e}}$

2. 设 $f(x)$ 为可导函数，且满足条件 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线的斜率等于（ C ）．

（A）2　（B）-1　（C）-2　（D）$\frac{1}{2}$

3. 设 $F(x)=\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t$，$f(x)$ 为连续函数，且 $f(0)=0$，$f'(x)>0$，则 $y=F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内（ A ）．

（A）单调增加且为下凸　（B）单调增加且为上凸

（C）单调减少且为下凸　（D）单调减少且为上凸

4. 曲线 $y=\frac{1+\mathrm{e}^{-x^2}}{1-\mathrm{e}^{-x^2}}$（ D ）．

（A）没有渐近线　（B）仅有水平渐近线

（C）仅有铅直渐近线　（D）既有水平渐近线又有铅直渐近线

5. 若 $\ln f(t)=\sin t$，则 $\int\frac{tf'(t)}{f(t)}\mathrm{d}t=$（ A ）．

（A）$t\sin t+\cos t+C$　（B）$t\sin t-\cos t+C$

（C）$t\sin t+t\cos t+C$　（D）$t\sin t+C$

6. 使不等式 $\int_1^x\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t>\ln x$ 成立的 x 的范围是（ C ）．

（A）$(1,\frac{\pi}{2})$　（B）$(\frac{\pi}{2},\pi)$　（C）$(0,1)$　（D）$(\pi,+\infty)$

二、填空题：7～12 小题，每小题 3 分，共 18 分.

7. 设当 $x\to 0$ 时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $\sin x^n$ 高阶的无穷小，而 $\sin x^n$ 是比 $e^{x^2}-1$ 高阶的无穷小，则正整数 n 等于____3____.

8. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^{2x+y}-\cos(xy)=e-1$ 所确定，求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$____$-2$____ .

9. 函数 $y=\ln(1-2x)$ 在 $x=0$ 处的 $n(n>2)$ 阶导数 $f^{(n)}(0)=$_$-2^n\cdot(n-1)!$__.

10. $\int_{-1}^{2}\left|x^2-x\right|dx=$____$\frac{11}{6}$_____.

11. $\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\,dx=$_____1_____.

12. Oxy 平面上的椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 绕 x 轴旋转一周而形成的旋转曲面的方程是____$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2+z^2}{9}=1$____.

三、解答题：13～19 小题，共 64 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

13.（本题满分 10 分）

求函数 $f(x)=\frac{\sin\pi x}{x-x^3}$ 的间断点，并判断间断点的类型.

【解】因为 $f(x)=\frac{\sin\pi x}{x-x^3}=\frac{\sin\pi x}{x(1-x)(1+x)}$，显然 $x=0,-1,1$ 为间断点. 2 分

于是

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\pi x}{x(1-x)(1+x)}=\pi,\qquad 4\text{ 分}$$

$$\lim_{x\to -1}f(x)=-\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{\sin\pi x}{1+x}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{\pi\cos\pi x}{1}=\frac{\pi}{2}\qquad 6\text{ 分}$$

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{1-x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{\pi\cos\pi x}{-1}=\frac{\pi}{2},\qquad 8\text{ 分}$$

所以 $x=0,-1,1$ 是第一类中的可去间断点. 10 分

14.（本题满分 10 分）

设$\begin{cases} x=\cos t+t\sin t, \\ y=\sin t-t\cos t \end{cases}$，求$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}$.

【解】由题意，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{(\sin t-t\cos t)'}{(\cos t+t\sin t)'}=\frac{\cos t-\cos t+t\sin t}{-\sin t+\sin t+t\cos t}=\tan t,\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=1. \qquad 5\text{ 分}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\tan t}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{t\cos^3 t},\left.\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{8\sqrt{2}}{\pi}. \qquad 10\text{ 分}$$

15.（本题满分 10 分）

求$\displaystyle\int\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$.

【解】设$x=\tan t,-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2},$，则$\mathrm{d}x=\sec^2 t\mathrm{d}t$，于是　　3 分

$$\text{原式}=\int\frac{\sec^2 t\mathrm{d}t}{\tan^2 t\sqrt{1+\tan^2 t}} \qquad 5\text{ 分}$$

$$=\int\frac{\cos t}{\sin^2 t}\mathrm{d}t$$

$$=\int\sin^{-2}t\mathrm{d}\sin t=-\csc t+C \qquad 9\text{ 分}$$

$$=-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C. \qquad 10\text{ 分}$$

16.（本题满分 10 分）

求函数$y=2x^3-6x^2-18x-7$的极值.

【解】$y'=6x^2-12x-18=6(x-3)(x+1),$　　2 分

令$y'=0,$得驻点$x_1=3,x_2=-1.$　　5 分

又$y''=12x-12,y''(3)=24>0,y''(-1)=-24<0,$　　8 分

所以极大值 $y(-1)=3$，极小值 $y(3)=-61$.　　　10 分

17.（本题满分 10 分）

求由曲线 $y=\sqrt{x}$，直线 $x=1, x=4, y=0$ 所围成的平面图形的面积及该图形绕 y 轴旋转一周所形成的立体的体积.

【解】（1）　$S=\int_1^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}\,x$　　　2 分

$=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4=\frac{14}{3}$　　　5 分

（2）　解法 1：　$V_y=2\pi\int_1^4 x\sqrt{x}\,\mathrm{d}\,x$　　　7 分

$=\left[\frac{4\pi}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_1^4=\frac{124}{5}\pi$　　　10 分

解法 2：　$V_y=32\pi-\pi\int_1^2 y^4\,\mathrm{d}\,y-\pi$　　　7 分

$=\frac{124}{5}\pi$　　　10 分

18.（本题满分 8 分）

求过直线 $L:\begin{cases} x+5y+z=0, \\ x-z+4=0 \end{cases}$ 且与平面 $x-4y-8z+12=0$ 交成 $\frac{\pi}{4}$ 角的平面方程.

【解 1】过已知直线 L 的平面束方程为

$$(x-z+4)+\lambda(x+5y+z)=0,$$

即 $(1+\lambda)x+5\lambda y+(\lambda-1)z+4=0$.　　　2 分

已知平面的法向量为 $(1,-4,-8)$. 由题设条件，有

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\left|(1+\lambda)-4\times5\lambda-8(\lambda-1)\right|}{\sqrt{(1+\lambda)^2+(5\lambda)^2+(\lambda-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+(-4)^2+(-8)^2}},$$

即 $\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{|-3\lambda+1|}{\sqrt{27\lambda^2+2}}$，由此解得 $\lambda=0$ 或 $\lambda=-\frac{4}{3}$.　　　6 分

将$\lambda=0$或$\lambda=-\dfrac{4}{3}$分别代入平面束方程，得所求平面方程为

$$x-z+4=0,\quad x+20y+7z-12=0. \qquad 8\text{ 分}$$

【解 2】过已知直线L的平面束方程为

$$\lambda(x-z+4)+(x+5y+z)=0,$$

即$(1+\lambda)x+5y+(1-\lambda)z+4\lambda=0$. 2 分

已知平面的法向量为$(1,-4,-8)$. 由题设条件，有

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\left|(1+\lambda)-4\times5-8(1-\lambda)\right|}{\sqrt{(1+\lambda)^2+5^2+(1-\lambda)^2}\cdot\sqrt{1^2+(-4)^2+(-8)^2}},$$

即 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{|\lambda-3|}{\sqrt{27+2\lambda^2}}$，由此解得$\lambda=-\dfrac{3}{4}$. 6 分

将$\lambda=-\dfrac{3}{4}$分别代入平面束方程，得所求平面方程为

$$x+20y+7z-12=0. \qquad 7\text{ 分}$$

另外，$x-z+4=0$也是所求平面方程. 8 分

19.（本题满分 6 分）

设函数$f(x)$在$[0,2\pi]$上连续，在$(0,2\pi)$内可导，且$f(0)=1, f(\pi)=3, f(2\pi)=2$. 试证明在$(0,2\pi)$内至少存在一点$\xi$，使$f'(\xi)+f(\xi)\cos\xi=0$.

【证】 构造函数$F(x)=f(x)\mathrm{e}^{\sin x}$. 2 分

因为$F(x)$在$[0,2\pi]$上连续，在$(0,2\pi)$内可导，且

$$F(0)=1, F(\pi)=3, F(2\pi)=2. \qquad 3\text{ 分}$$

因为 2 是介于$F(0)=1$与$F(\pi)=3$之间的，故由闭区间上连续函数的介值定理知，在$(0,\pi)$内存在一点c使得$F(c)=2=F(2\pi)$. 5 分

于是在$[c,2\pi]$上函数$F(x)$满足罗尔定理的条件，所以

$$F'(\xi)=\left[f'(\xi)+f(\xi)\cos\xi\right]\mathrm{e}^{\sin\xi}=0, \xi\in(c,2\pi)\subset(0,2\pi).$$

则原结论成立. 6 分