(三)

常用z变换

$[t]$	$\sim [s]$	$\sim [z]$		
$\delta(t)$	1	1		
$\delta(t-kT)$	e^{-kTs}	z^{-k}		
$1(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\left(\frac{z}{z-1}\right)$	
t	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$\left(\frac{Tz}{(z-1)^2}\right)$	
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\frac{1}{1-e^{aT}z^{-1}}$	$\left(\frac{z}{z-e^{aT}}\right)$	F(s)的根!
令 $a=\frac{1}{T}\ln p$：$p^{t/T}$	$\frac{1}{s-\frac{1}{T}\ln p}$	$\frac{1}{1-pz^{-1}}$	$\left(\frac{z}{z-p}\right)$	(常用于z反变换)
$\frac{1}{2}t^2$	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{T^2z^{-1}(1+z^{-1})}{2(1-z^{-1})^3}$		

差分方程求解
1. 经典法(齐次解及通解)
2. 迭代法
3. z变换法

求解逆z变换
1. 部分分式展开法
2. 长除法
3. 留数法

(四) 判稳

稳定：对于连续系统和离散系统，在有界输入作用下，系统的输出也是有界的.

充要条件：系统稳定 ⇔ 闭环系统CE的所有根的模 $|z_i|<1$，即 $\Phi(z)$ 极点均位于[z]单位圆内

劳斯判据：[w]判别（间接）

1. z→w变换

   双线性变换I：$w=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}=\frac{z-1}{z+1}$

   双线性变换II：$w=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$

   $\left(z=\cancel{\frac{1-\frac{T}{2}w}{1+\frac{T}{2}w}}\right)$

   $\left(z=\frac{1+\frac{T}{2}w}{1-\frac{T}{2}w}\right)$

2. 建立劳斯表

   w的n次正幂

   CE: $W(w)=a_nw^n+a_{n-1}w^{n-1}+\cdots+a_1w+a_0=0$

w^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}
w^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}
w^{n-2}	b_{n-1}	b_{n-3}	
w^{n-3}	c_{n-1}	c_{n-3}	

$b_{n-1}=-\frac{1}{a_{n-1}}\begin{vmatrix}a_n & a_{n-2}\\ a_{n-1} & a_{n-3}\end{vmatrix}$

$b_{n-3}=-\frac{1}{a_{n-1}}\begin{vmatrix}a_n & a_{n-4}\\ a_{n-1} & a_{n-5}\end{vmatrix}$

判法：系数表第1列无符号变化⇒系统稳定

朱利判据：[z]判别（直接）

1. 二次项型判据（退化）

   ① 最高项只为2次正幂

   CE: $W(z)=1z^2+a_1z+a_0=0$

   ② 最高项系数为1

   判法：$W(0)<1$，$W(1)>0$，$W(-1)>0$ ⇒系统稳定

   注意：1. 区分劳斯与二次项型判据对CE的要求区别

2. 建立朱利稳定性表

   z的n次正幂

   CE: $W(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0=0$

	z^0	z^1	z^2	$\cdots$	z^n
1	a_0	a_1	a_2	$\cdots$	a_n
2	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_0
3	b_0	b_1	b_2	$\cdots$	b_{n-1}
4	b_{n-1}	b_{n-1}	$b_{n-2}\cdots$		b_0
5	c_0	c_1	$\cdots$	c_{n-2}	
6	c_{n-2}	c_{n-1}	$\cdots$	c_0	

$b_0=\begin{vmatrix}a_0 & a_n\\ a_n & a_0\end{vmatrix}$，$b_1=\cancel{\begin{vmatrix}a_0 & a_{n-1}\\ a_n & a_1\end{vmatrix}}$

同行对数填入

$c_0=\begin{vmatrix}b_0 & b_{n-1}\\ b_{n-1} & b_0\end{vmatrix}$，$c_1=\cancel{\begin{vmatrix}b_0 & b_{n-1}\\ b_{n-1} & b_1\end{vmatrix}}$

判法：
1. $|a_0|<|a_n|$　b之前，$|a_上|<|a_下|$
2. $W(z)|_{z=1}>0$
3. $(-1)^nW(z)|_{z=-1}>0$
4. $|b_{n-1}|<|b_0|$，$|c_{n-2}|<|c_0|$，⋮　b之后，$|b_上|>|b_下|$

(五)

二阶工程设计法

1、被控对象：$G_p(s)=\dfrac{K}{(T_{s1}s+1)(T_{s2}s+1)}$，$T_{s1}>T_{s2}$

（二阶惯性模型）

2、设计目标：$T_{开环}=\underbrace{\Phi_0(s)}_{=G_c(s)G_p(s)}=\dfrac{1}{\sqrt{2T}\cdot s\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{2T}\cdot s\right)}$

$T_{闭环}=\Phi(s)=\dfrac{\Phi_0(s)}{1+\Phi_0(s)}$

3. 设计步骤：

（总思路：选择$G_c(s)$使$G_c(s)G_p(s)$能得到$\Phi_0(s)$理想形式）

① 选择 $G_c(s)=\dfrac{as+1}{bs}$

② ~~观察~~ $G_c(s)\cdot G_p(s)$，选择 $a=T_{s1}$（消去$G_p(s)$中较大的时间常数），与$\Phi_0(s)$进行比较

③ 由待定系数得最终 $G_c(s)$

④ 离散化 $G_c(s)$，得到 $D(z)$

三)

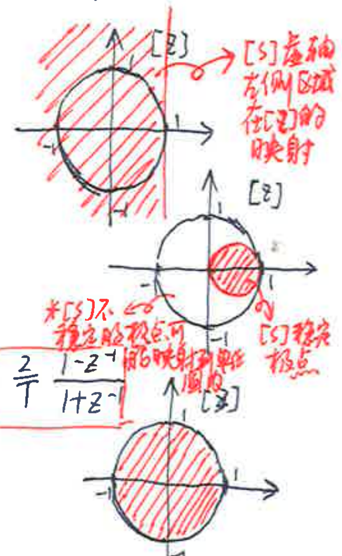
间接设计法

步骤：
1. 应用连续系统理论和设计方法设计模拟控制器 $G_c(s)$
2. 再按照离散化方法将 $G_c(s) \to D(z)$ 数字控制器

离散化方法 $G_c(s) \to D(z)$

差分法

1. 前向差分 $\boxed{s = \frac{z-1}{T}}$ （即 $D(z) = G_c(\frac{z-1}{T})$）
2. 后向差分 $\boxed{s = \frac{1-z^{-1}}{T}}$
3. 双线性变换法 $\boxed{s = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} = \frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$



*双线性变换映射结果与 $z=e^{Ts}$ 的映射结果一致

z变换设计法 $D(z) = \frac{U(z)}{E(z)}$

1. 脉冲响应不变法
   - 输入：$e(t) = \delta(t)$，$E(s)=1$，$E(z)=1$
   - 原理：$u(kT) = T u(t)|_{t=kT}$

   离散近似后 $D(z)$ 的脉冲响应是 $G_c(s)$ 的脉冲响应采样值的T倍 $\Rightarrow D(z) = T\,Z\{G_c(s)\}$
2. 阶跃响应不变法
   - 输入：$e(t) = 1(t)$，$E(s)=\frac{1}{s}$，$E(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}$
   - 原理：$u(kT) = u(t)|_{t=kT}$

   离散近似后 $D(z)$ 的阶跃响应序列与 $G_c(s)$ 的阶跃响应采样值一致 $\Rightarrow D(z) = (1-z^{-1})\,Z\{G_c(s)\frac{1}{s}\}$
3. 零极点匹配映射法 → 原理：由 $z=e^{sT}$，将[s]的零极点一一对应映射到[z]上，使 $D(z)$ 与 $G_c(s)$ 零极点全匹配

注意：

1. 前向差分法有可能将[s]左半平面的稳定极点映射到[z]单位圆外的不稳定极点，即将稳定的 $G_c(s)$ 离散化为不稳定的 $D(z)$，一般不用
2. 采样周期T必须取得足够小，才能使 $D(z)$ 接近 $G_c(s)$ 的性能
3. 双线性变换法是最好的离散方法，它在低采样频率下仍然保持良好的性能
4. 如果以增益作为唯一准则，零极点匹配法性能最好

(六)直接设计法

$$G(z)=\frac{z^{-m}(p_0+p_1z^{-1}+\cdots+p_bz^{-b})}{q_0+q_1z^{-1}+\cdots+q_az^{-a}}=\frac{\prod_{i=1}^{u}(1-b_iz^{-1})}{\prod_{j=1}^{v}(1-a_jz^{-1})}G'(z)$$

- b_i 为 $G(z)$ u 个不稳定零点
- a_i 为 $G(z)$ v 个不稳定极点
- $G'(z)$ 为 $G(z)$ 不含单位圆上或外零极点的部分
- z^{-m} 为纯滞后环节，当对象 $G_p(s)$ 不含延迟环节，$m=1$（也可由 $G(z)$ 中纯滞后幂次确定）
  （零阶保持器~~增加了零点~~）对分子产生了影响

最少拍设计：指系统在典型输入信号（如阶跃信号、速度信号、加速度信号等）作用下，经过最少拍（有限拍），使系统输出的稳态误差为零

$$R(z)=\frac{A(z^{-1})}{(1-z^{-1})^q}$$

$E(z)=\Phi_e(z)R(z)$，$E(z)$ 只有有限项

$\Rightarrow$
1. $e(\infty)=0$
2. 系统稳定 $\Rightarrow$ $\Phi(z)$ 无单位圆上或外极点

~~$\Phi(z)=D(z)G(z)\cdot\Phi_e(z)$~~

$$\Phi_e(z)=\frac{1}{1+D(z)G(z)}$$

$G(z)$：零极点均在单位圆内；不含纯滞后环节 $\Rightarrow$ 不需多考虑 $\Phi_e(z)$ 内部 $D(z)$ 与 $G(z)$ 的关系，将设计 $D(z)$ 的任务转化为设计 $\Phi_e(z)$

$\Phi_e(z)=(1-z^{-1})^pF(z^{-1})$

1. $p\geqslant q$，$(1-z^{-1})^p$ 目的是消去 $E(z)$ 中 $R(z)$ 的分母
2. $F(z^{-1})$ 一般取1，为使数字控制器形式最简单、阶数最低

$$\Rightarrow D(z)=\frac{\Phi(z)}{\Phi_e(z)}\frac{1}{G(z)}$$

$G(z)$：有单位圆上或外零极点；含有纯滞后环节 $\Rightarrow$ 考虑

~~1. $D(z)$ 不与 $G(z)$~~ $\Phi(z)\ne\boxed{D(z)G(z)\Phi_e(z)}$

1. 系统保持稳定，无不稳极点 $\Rightarrow$ $\boxed{\Phi(z)=D(z)G(z)\Phi_e(z)}$ $\Rightarrow$ ① $\Phi_e(z)$ 分子含有 $G(z)$ 所有不稳定极点。
2. 不简单使用 $D(z)$ 零点去消 $G(z)$ 不稳定极点，当系统参数漂移时，这种零极点对消不可能准确实现
3. $D(z)$ 物理可实现 $\Rightarrow$ $\boxed{\Phi(z)=\frac{D(z)G(z)}{1+D(z)G(z)}}$
4. $D(z)$ 不含有不稳定极点，本身稳定

$G(z)$ 的不稳定零点不被 $D(z)$ 極点消 $\Rightarrow$ ② $\Phi(z)$ 含有 $G(z)$ 所有不稳定零点

$D(z)$ 不含有 z 正次幂 $\Rightarrow$ $G(z)$ 的 z^{-m} 纯滞后不被 $D(z)$ 消 $\Rightarrow$ ③ $\Phi(z)$ 含有完整 z^{-m}（$G(z)$ 纯滞后环节）

$$\Phi_e(z)=(1-z^{-1})^p\overset{①}{\prod_{j=1}^{v}(1-a_jz^{-1})}F(z^{-1})$$

$$\Phi(z)=\overset{③}{z^{-m}}\overset{②}{\prod_{i=1}^{u}(1-b_iz^{-1})}\underbrace{(c_0+c_1z^{-1}+\cdots+c_{q+r-1}z^{-(q+r-1)})}_{q+r\text{个系数}}$$

1. ~~a_j 为~~ b_i 为 $G(z)$ 的 u 个不稳定零点，z^{-m} 为 $G(z)$ 的纯滞后环节
2. q 视输入 $R(z)$ 确定（step，$q=1$；ramp，$q=2$；acceleration，$q=3$），r 为 $G(z)$ 不含 $z=1$ 的不稳定极点个数
3. 由 $\Phi(z)=1-\Phi_e(z)$ 待定系数法求 $c_0\sim c_{q+r-1}$ 的 $q+r$ 个系数 个数由 $\Phi_e(z)$ 决定
4. 由 $\Phi_e(z)=1-\Phi(z)$ 计算 $\Phi_e(z)$