计算机控制系统

第十讲 控制器差分法离散

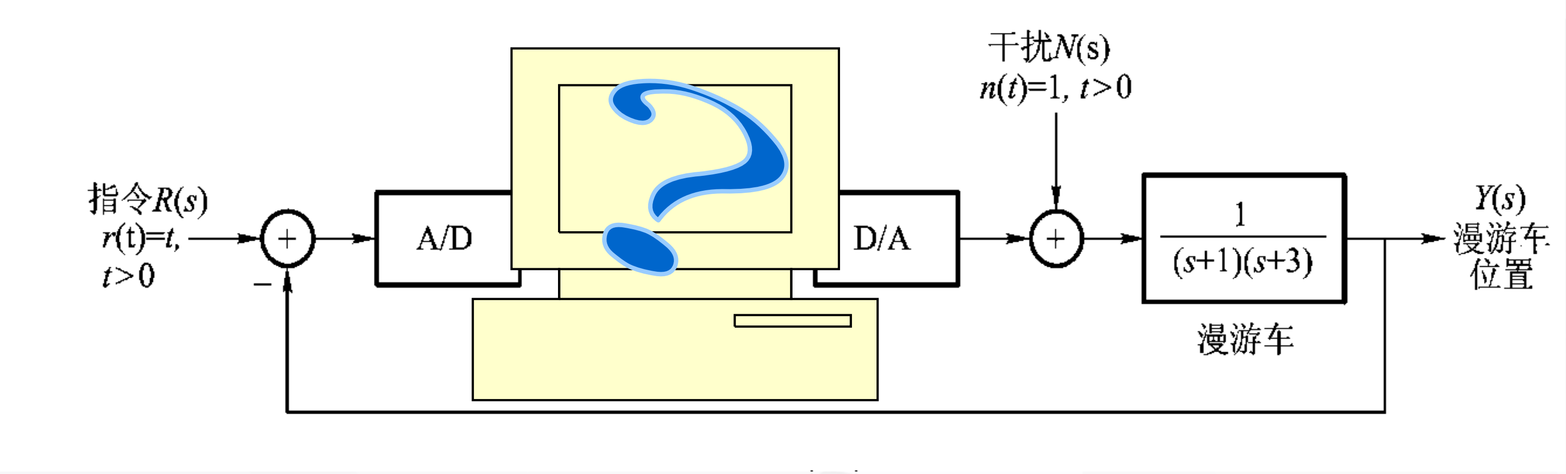
通信工程学院 唐志国

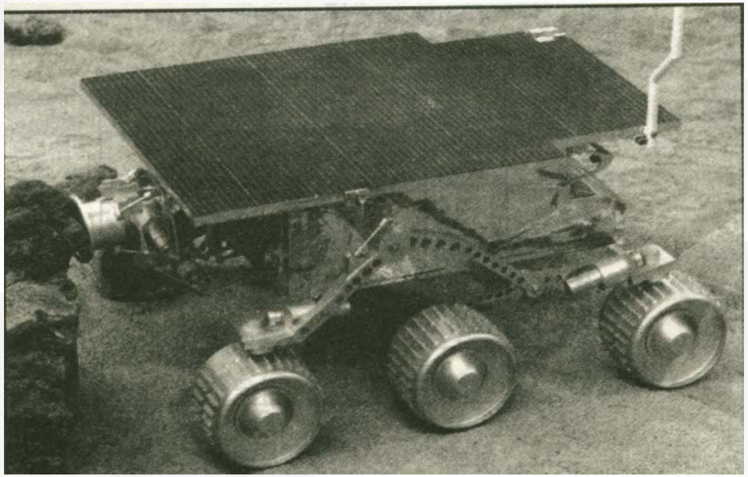
火星漫游车控制问题

火星漫游车，是指在火星登陆用于火星探测的可移动探测器，是人类发射的在火星表面行驶并进行考察的一种车辆

2020年左右，我国将发射首个火星探测器，一步实现“绕、落、巡”探测任务。

火星漫游车控制问题





以太阳能作动力的“逗留者号”火星漫游车如左图所示，由地球上发出的路径控制信号能对该装置实施遥控操作，控制系统结构如上图所示，控制器设计为

$$G_c(s)=\frac{9}{2}(1+\frac{1}{s})$$

控制器差分法离散

1.数字控制器间接设计思想

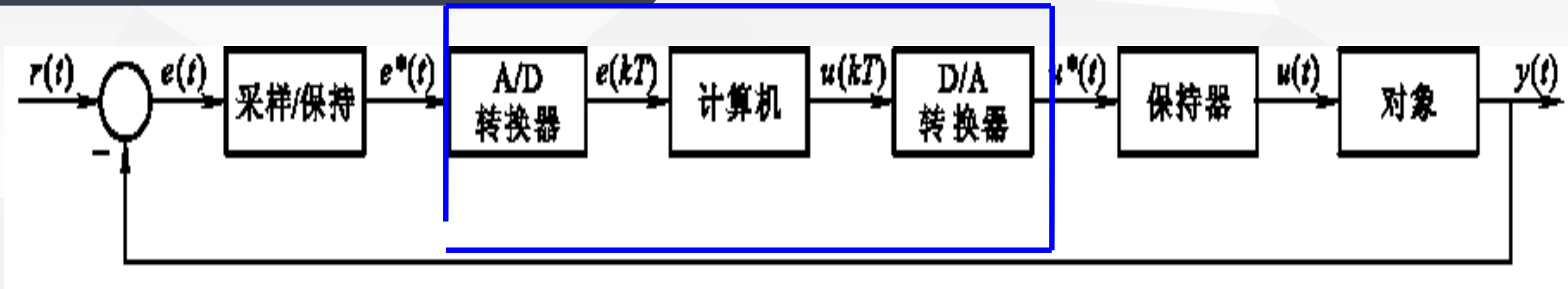
2.差分法离散化

3.Z变换法离散化

4.小结与思考

01 数字控制器间接设计思想

计算机控制系统



数字控制器间接设计法是先根据给定的性能指标及各项参数，应用连续系统理论的设计方法设计模拟控制器，再将其离散化为数字控制器。

$G_P(s) \xrightarrow{\Phi(s)} G_c(s) \longrightarrow D(z)$

差分法 √

Z变换法

02

差分法离散化

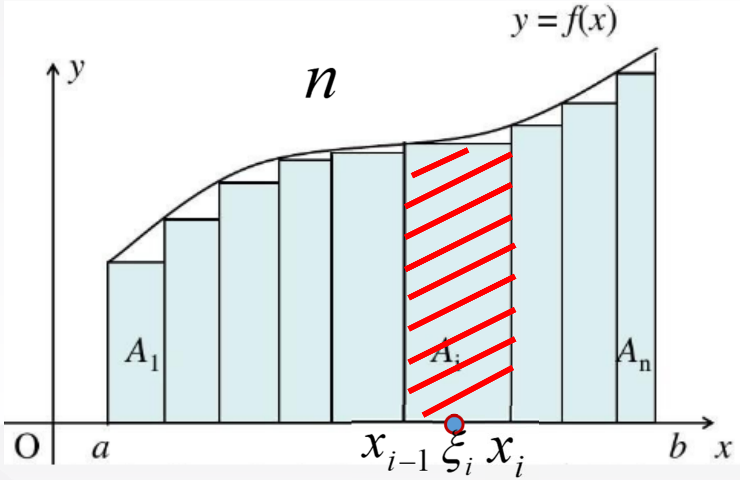
计算机控制系统

> ➢ 定积分是怎么计算的?

分划、近似代替、求和、取极限。

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$\lambda = \max\{\Delta x_i\}$$



$$f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{1}{s+a}$$

$$u(kT) - u[(k-1)T] = -a\int_{(k-1)T}^{kT} u(t)\mathrm{d}t + \int_{(k-1)T}^{kT} e(t)\mathrm{d}t$$

计算机控制系统

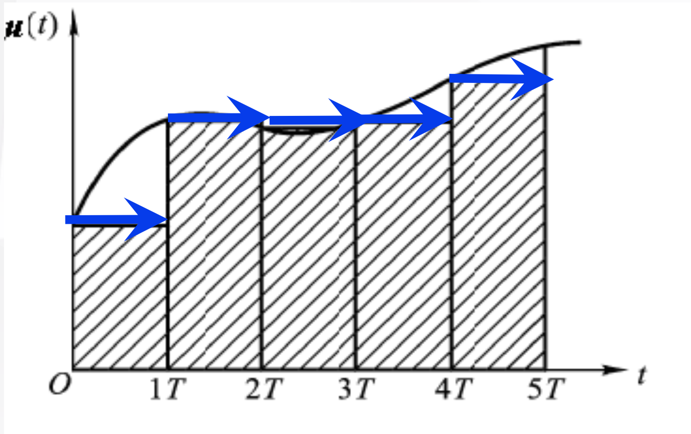
$$u(kT)-u[(k-1)T]=-a\int_{(k-1)T}^{kT}u(t)\mathrm{d}t+\int_{(k-1)T}^{kT}e(t)\mathrm{d}t$$

前向差分法

前向差分法是用**(k-1)T**时刻的值所形成的**矩形面积**近似积分

$$u(kT)=u[(k-1)T]-a\underline{u[(k-1)T]T}+e\underline{[(k-1)T]T}$$

$$=(1-aT)u[(k-1)T]+e[(k-1)T]T$$



$$G_c(s)=\frac{U(s)}{E(s)}=\frac{1}{s+a}$$

$$\boxed{s=\frac{z-1}{T}=\frac{1-z^{-1}}{Tz^{-1}}}$$

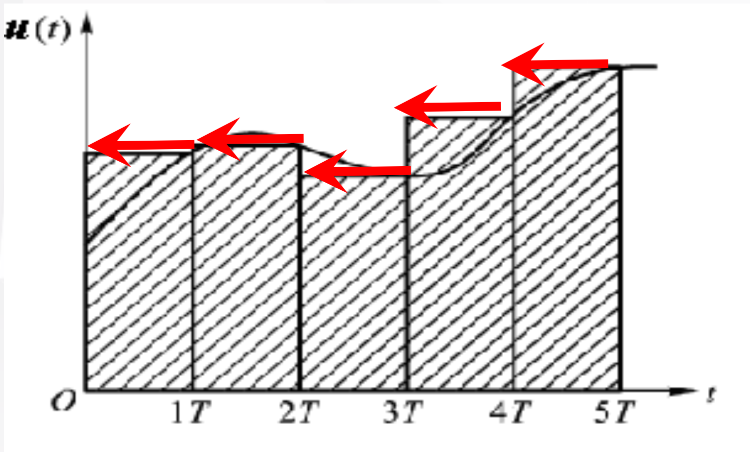
计算机控制系统

$$u(kT)-u[(k-1)T]=-a\underline{\int_{(k-1)T}^{kT}u(t)\mathrm{d}t}+\underline{\int_{(k-1)T}^{kT}e(t)\mathrm{d}t}$$

后向差分法

后向差分法是用**kT**时刻的值所形成的**矩形面积**近似积分

$$u(kT)=u(kT-T)\underline{-aTu(kT)}+\underline{Te(kT)}$$



$$G_c(s)=\frac{U(s)}{E(s)}=\frac{1}{s+a}$$

$$s=\frac{1-z^{-1}}{T}$$

$$u(kT)-u[(k-1)T]=-a\int_{(k-1)T}^{kT}u(t)\mathrm{d}t+\int_{(k-1)T}^{kT}e(t)\mathrm{d}t$$

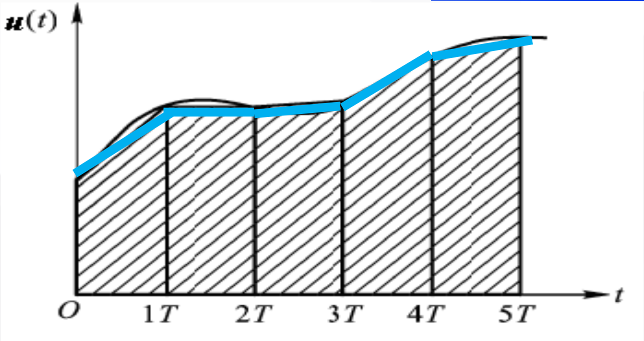
双线性变换

双线性变换又叫梯形法，是用**(k-1)T和kT构成的梯形面积**近似积分

$$\int_{(k-1)T}^{kT}u(t)\mathrm{d}t\approx\frac{1}{2}\{u(kT)+u[(k-1)T]\}T$$

$$\int_{(k-1)T}^{kT}e(t)\mathrm{d}t\approx\frac{1}{2}\{e(kT)+e[(k-1)T]\}T$$

$$G_c(s)=\frac{U(s)}{E(s)}=\frac{1}{s+a}$$



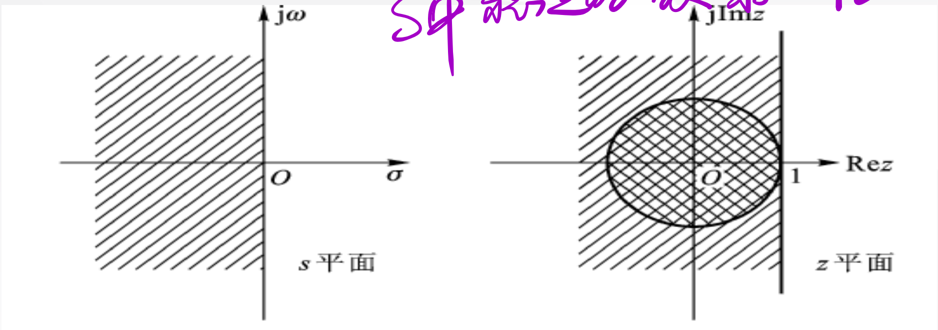
$$s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

计算机控制系统

前向差分法

$$s=\frac{z-1}{T}$$

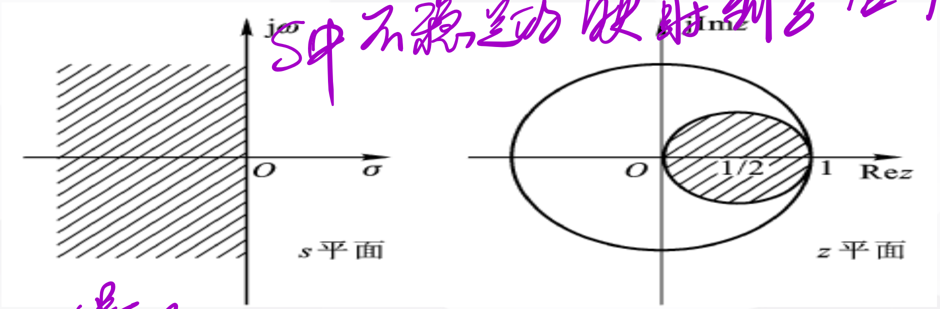
S中稳定的映射到z后一定稳定



后向差分法

$$s=\frac{1-z^{-1}}{T}$$

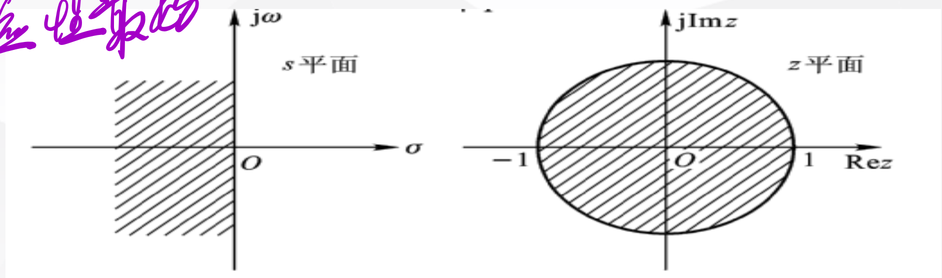
S中不稳定的映射到z后可能稳定



双线性变换

☆稳定对应性最好

$$s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$



计算机控制系统

试用前向差分、后向差分和双线性变换离散下述连续控制器，采样周期为 T=1s

$$D(s)=\frac{1}{s^2+0.8s+1}$$

前向差分法

$$D(z)=\frac{1}{s^2+0.8s+1}\bigg|_{s=(z-1)/T}=\frac{T^2}{z^2-(2-0.8T)z+(1-0.8T+T^2)}$$

$$=\frac{1}{z^2-1.2z+1.2}$$

特征根： $z=0.6\pm j0.917$

离散后的控制器不再稳定。

计算机控制系统

后向差分法

$$D(z)=\left.\frac{1}{(s^2+0.8s+1)}\right|_{s=(1-z^{-1})/T}=\frac{1}{[(1-z^{-1})^2/T^2+0.8(1-z^{-1})/T+1]}$$

$$=\frac{z^2}{1-2.8z+2.8z^2}$$

双线性变换

$$D(z)=\left.\frac{1}{s^2+0.8s+1}\right|_{s=\frac{2}{T}\frac{(z-1)}{(z+1)}}=\frac{1}{\left[\frac{2}{T}\frac{(z-1)}{(z+1)}\right]^2+0.8\left[\frac{2}{T}\frac{(z-1)}{(z+1)}\right]+1}$$

$$=\frac{0.1515(z+1)^2}{z^2-0.9091z+0.5152}$$

采用后向差分法和双线性变换，前后增益不变。

03 z变换法离散化

非重点

脉冲响应不变

✓ 基本思想:离散近似后的数字控制器的脉冲响应$g_D(kT)$是模拟控制器的脉冲响应采样值$g(kT)$的T倍。

✓设模拟控制器为Gc(s)，其单位脉冲响应的采样值为

$$g(kT)=g(t)\big|_{t=kT}=L^{-1}[G_c(s)]\big|_{t=kT}$$

✓待求的数字控制器D(z),其单位脉冲响应为$g_D(kT)$。设计原则是使$g_D(kT)=Tg(kT)$，则有

$$D(z)=Z[g_D(kT)]=TZ[g(t)\big|_{t=kT}]=TZ[G_c(s)]$$

计算机控制系统

$$D(z)=TZ[G_c(s)]$$

✓特点:模拟控制器稳定，则离散近似后的数字控制器也可保证稳定。由于z变换的多值映射特性，容易出现频率“混叠”现象。

✓ 应用范围 ： 模拟控制器应具有部分分式结构或能较容易地分解为并联结构。模拟控制器具有陡衰减特性，且适宜应用在有限带宽信号的场合。

计算机控制系统

阶跃响应不变

✓ 基本思想：离散近似后的数字控制器的阶跃响应序列与模拟控制器的阶跃响应的采样值一致。

✓设连续系统的控制器为*Gc*(*s*)，输入信号为单位阶跃函数E(s)=1/s,输出为U(s)，则连续系统的阶跃响应

$$u(t)=L^{-1}[G_c(s)E(s)]=L^{-1}[G_c(s)\frac{1}{s}]$$

✓构造如下新的控制器(在*Gc*(*s*)前增加一个零阶保持器) 具有低通特性

$$G_0(s)=\frac{1-e^{-Ts}}{s}G_c(s)=(1-e^{-Ts})[G_c(s)\frac{1}{s}]$$

✓z变换得相应数字控制器

$$D(z)=Z[G_0(s)]=(1-z^{-1})Z[G_c(s)\frac{1}{s}]$$

计算机控制系统

$$D(z)=(1-z^{-1})Z[\frac{1}{s}G_c(s)]$$

✓ 特点：模拟控制器稳定，离散近似后的数字控制器亦稳定。由于零阶保持器的低通滤波特性，可减少“混叠”现象，可保持稳态增益不变。

✓ 模拟控制器应具有并联结构形式或容易分解成部分分式形式。由于数字控制器内含有零阶保持器，该方法只能用于低通网络，且要求保持阶跃响应不变的系统。

零极点匹配

✓ 基本思想：根据s域与z域的转换关系$z=e^{Ts}$，可将s平面的零极点直接一一对应地映射到z平面上，使数字控制器的零极点与模拟控制器的零极点完全相匹配。

无穷远处的零点匹配有三种方案：

- 配置在z平面原点，这些零点是$(z-0)^{n-m}=z^{n-m}$。
- 配置在z平面的$z=-1$处，这些零点是$(z+1)^{n-m}$。
- 配置在z平面的(0，-1)之间的某一点δ处，这些零点是$(z+\delta)^{n-m}$。

计算机控制系统

✓ 首先，将$G_c(s)$因式分解，然后，按$z=e^{Ts}$关系把$G_c(s)$的极点映射到z平面中去。例如，$G_c(s)$的极点$s=-a$映射为$D(z)$的极点$z=e^{-aT}$。

✓根据关系式$z=e^{Ts}$，把$G_c(s)$的有限零点映射为z平面上的零点。例如，$G_c(s)$的一个有限零点$s=-b$映射为$D(z)$的零点$z=e^{-bT}$。

✓根据相位要求选择映射到无穷远处的零点匹配方案。

✓调整离散控制器的增益与连续控制器相匹配。根据终值定理按稳态响应相等

$$\lim_{s\to 0} sG_c(s)E(s)=\lim_{z\to 1}(z-1)D(z)E(z)$$

间接设计法结论

- ✓ 采样周期 T 必须取得足够小，才能使 $D(z)$ 接近 $G_c(s)$ 的性能；
- ✓ 双线性变换法是最好的离散化方法，它在低采样频率下仍然保持良好的性能；
- ✓ 如果以增益作为唯一的准则，零极点匹配法性能最好；
- ✓ 对连续传递函数 $G_c(s)=G_{c1}(s)G_{c2}(s)\ldots G_{cn}(s)$ 可分别对 $G_{c1}(s)$，$G_{c2}(s)$，…，$G_{cn}(s)$ 等效离散得到 $D_1(z)$，$D_2(z)$，…，$D_n(z)$，则 $D_1(z)$，$D_2(z)$，…，$D_n(z)$ 的乘积即为离散近似后的数字控制器 $D(z)$。

04

小结与思考

计算机控制系统

1.理解数字控制器间接设计思想。

2.掌握数字控制器间接设计法。

- 数字控制器间接设计法
  - 差分法
    - 前向差分
    - 后向差分
    - 双线性变换
  - Z变换法
    - 脉冲响应不变
    - 阶跃响应不变
    - 零极点匹配

计算机控制系统

参考书籍

李元春《计算机控制系统》高等教育出版社

高金源《计算机控制系统》高等教育出版社

相关资料

☆ 火星漫游车百度百科，及新浪新闻；

☆ 高等数学之定积分相关内容。

谢谢！