吉林大学
JILIN UNIVERSITY

工程力学

第11章

应力及应变分析 强度理论

第11章　应力及应变分析 强度理论

§11.1　应力状态的概念

§11.2　二向应力状态分析

§11.3　三向应力状态分析

§11.4　平面应力状态下的应变分析

§11.5　广义虎克定律

§11.6　复杂应力状态的变形比能

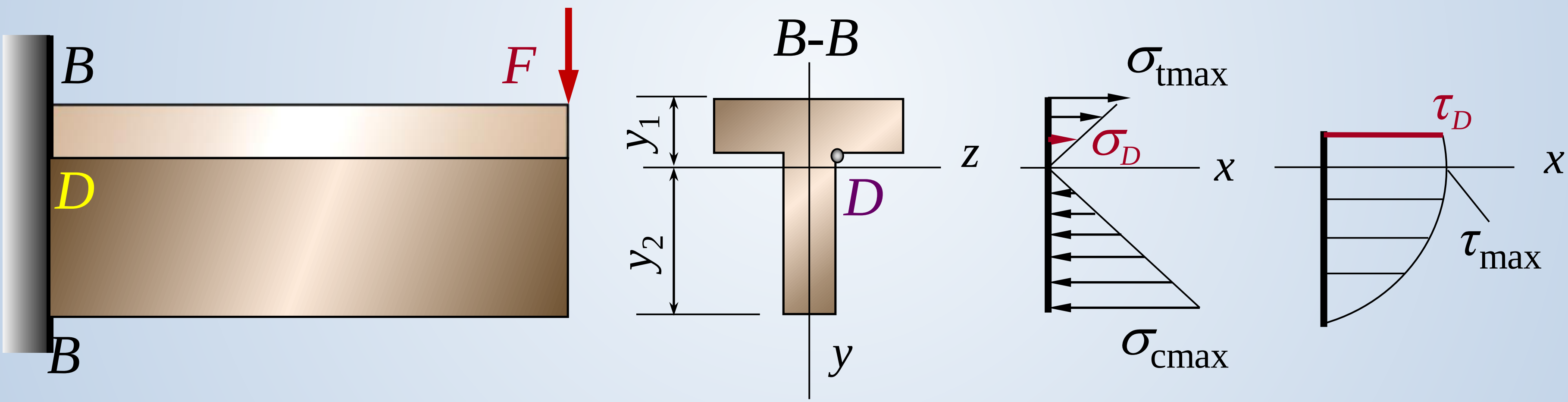
§11.7　强度理论概述

§11.8　四种常用强度理论

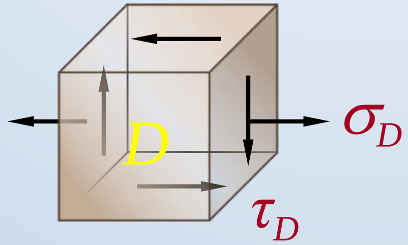
11.1 应力状态的概念

问题的提出：

先来看一个实例



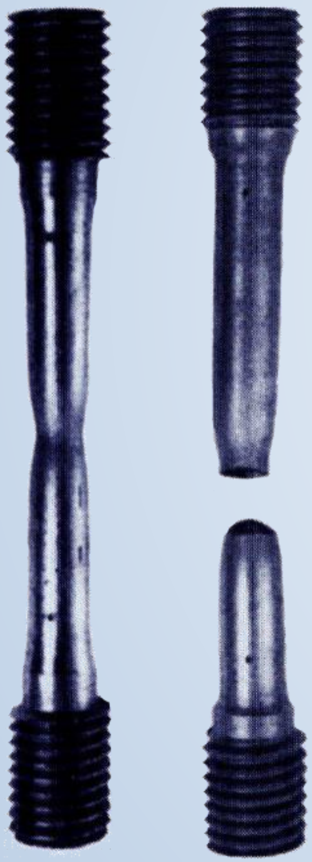
算出σ_D, τ_D



如何建立强度条件？

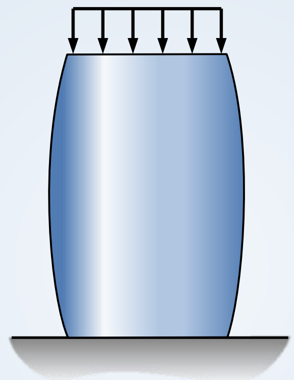
11.1 应力状态的概念

低碳钢实验

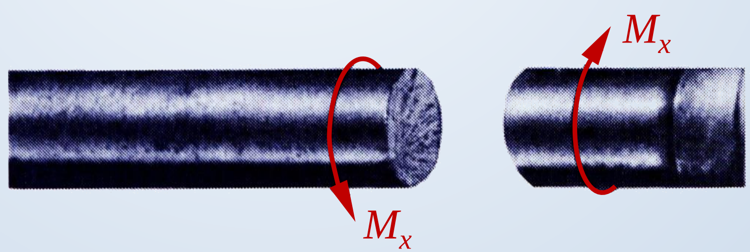


拉

伸



压 缩

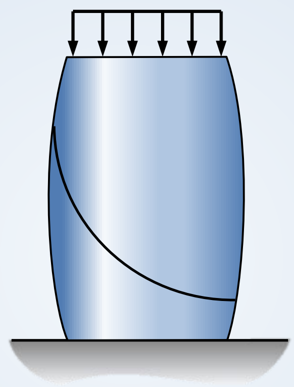


扭 转

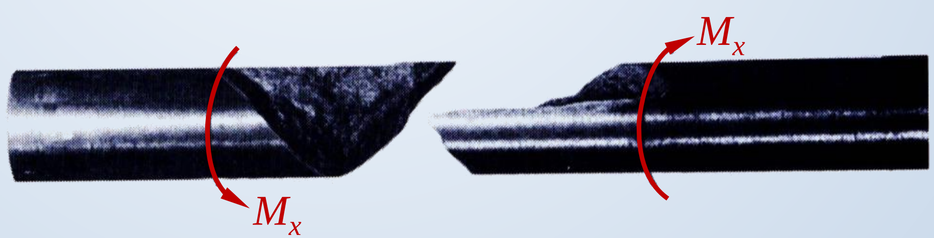
11.1 应力状态的概念

铸铁实验

拉伸



压缩



扭转

11.1 应力状态的概念

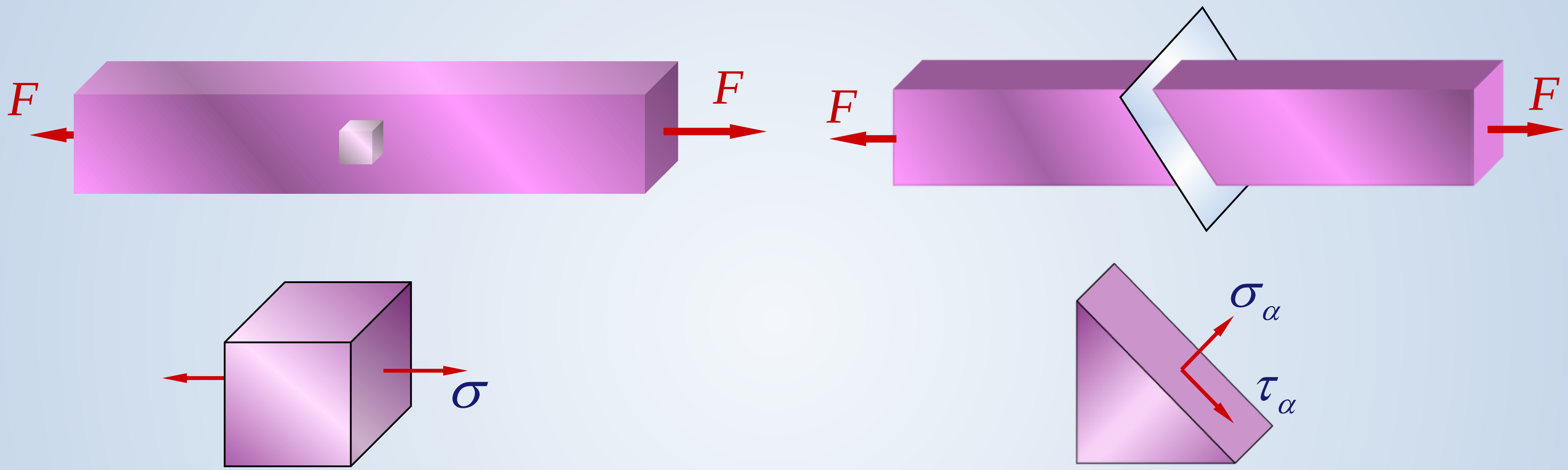
为什么要研究应力状态?

从实验结果看出，不同材料相同实验，破坏现象不同，相同材料不同实验，破坏现象也不同，怎样解释这些破坏现象和破坏原因呢？

要解决这些问题，就必须研究构件中破坏点不同截面上的应力情况。通过对破坏点处的应力分析，可以解释构件破坏的原因，从而建立复杂应力状态下的强度条件。

11.1 应力状态的概念

一. 一点处的应力状态



$$\sigma_{\alpha} = \sigma \cos^{2} \alpha \qquad \tau_{\alpha} = \frac{\sigma}{2} \sin \alpha$$

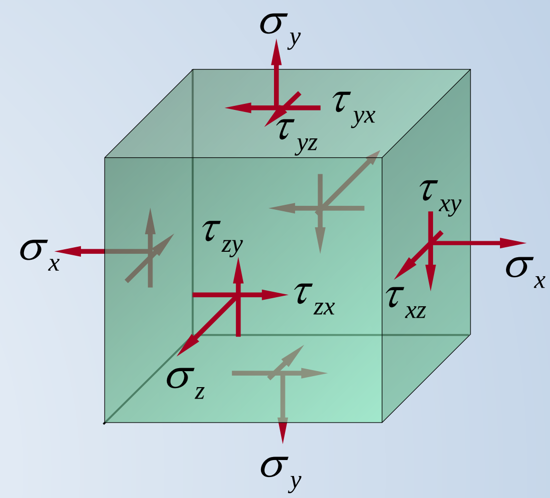
过一点不同方向上的应力的集合。

应力分析——对一点不同方向上的应力的分析。

11.1 应力状态的概念

二. 应力状态的研究方法

1. 单元体



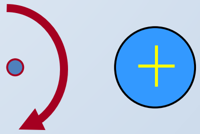
单元体—六面体（微体）

单元体面上的应力均布

相对面上的应力相等

2. 原始单元体—面上的应力皆已知

σ —拉为正，压为负

τ —对单元体内任意点取矩 

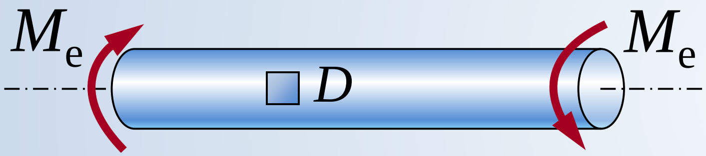
取原始单元体是作应力分析的前提。

11.1 应力状态的概念

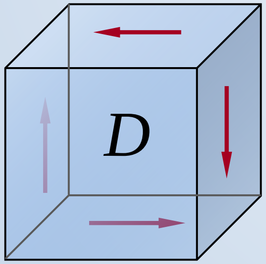
取原始单元体时要紧紧抓住横截面

例1 圆轴扭转时，其表面上的点D为危险点，

取出D点的原始单元体。



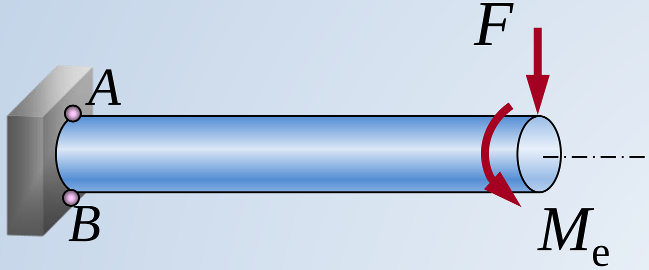
解：$\cdot D$为纯剪切应力状态

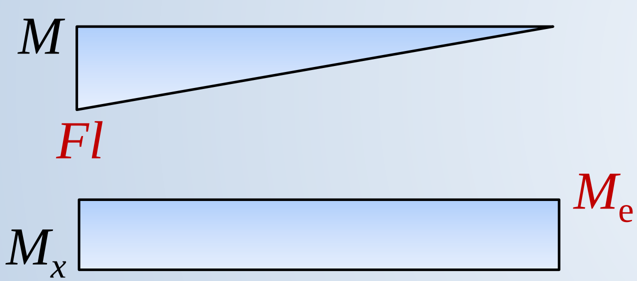


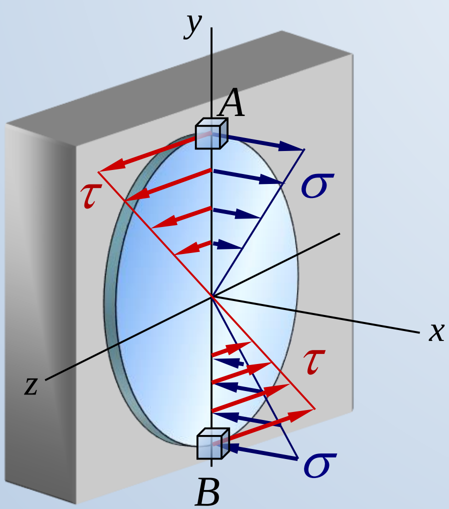
$$\tau_D = \tau_{\max} = \frac{M_{x\max}}{W_p}$$

11.1 应力状态的概念

例2 取出如图所示杆件危险点的原始单元体。





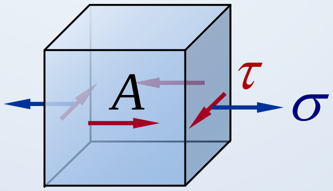


解：·由内力图判断危险截面：

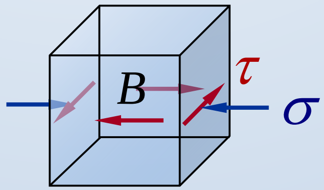
固定端

·由应力分布确定危险点：

A，B



$$\sigma = \sigma_{\max} = \frac{Fl}{W_z}$$



$$\tau = \tau_{\max} = \frac{M_e}{W_p}$$

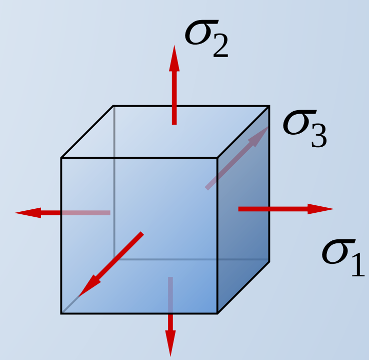
11.1 应力状态的概念

3. 截面法的应用

研究原始单元体其他面上的应力情况应用截面法，可求任意面上的应力情况。从而确定单元体的最大正应力和最大切力。

三. 应力状态分类

1. 定义



$\tau = 0$ 的面—主平面

主平面上的应力—主应力 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

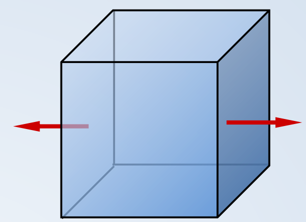
主单元体—三个主平面构成的单元体

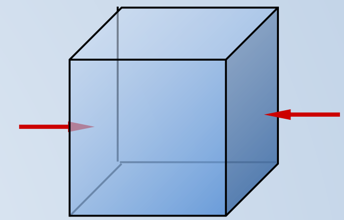
11.1 应力状态的概念

2. 分类

单向应力状态:

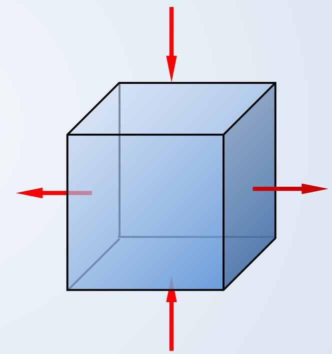
只有一个主应力不为零

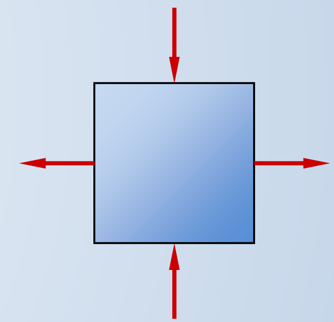




二向（平面）应力状态:

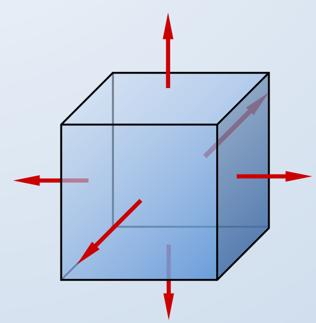
有二个主应力不为零





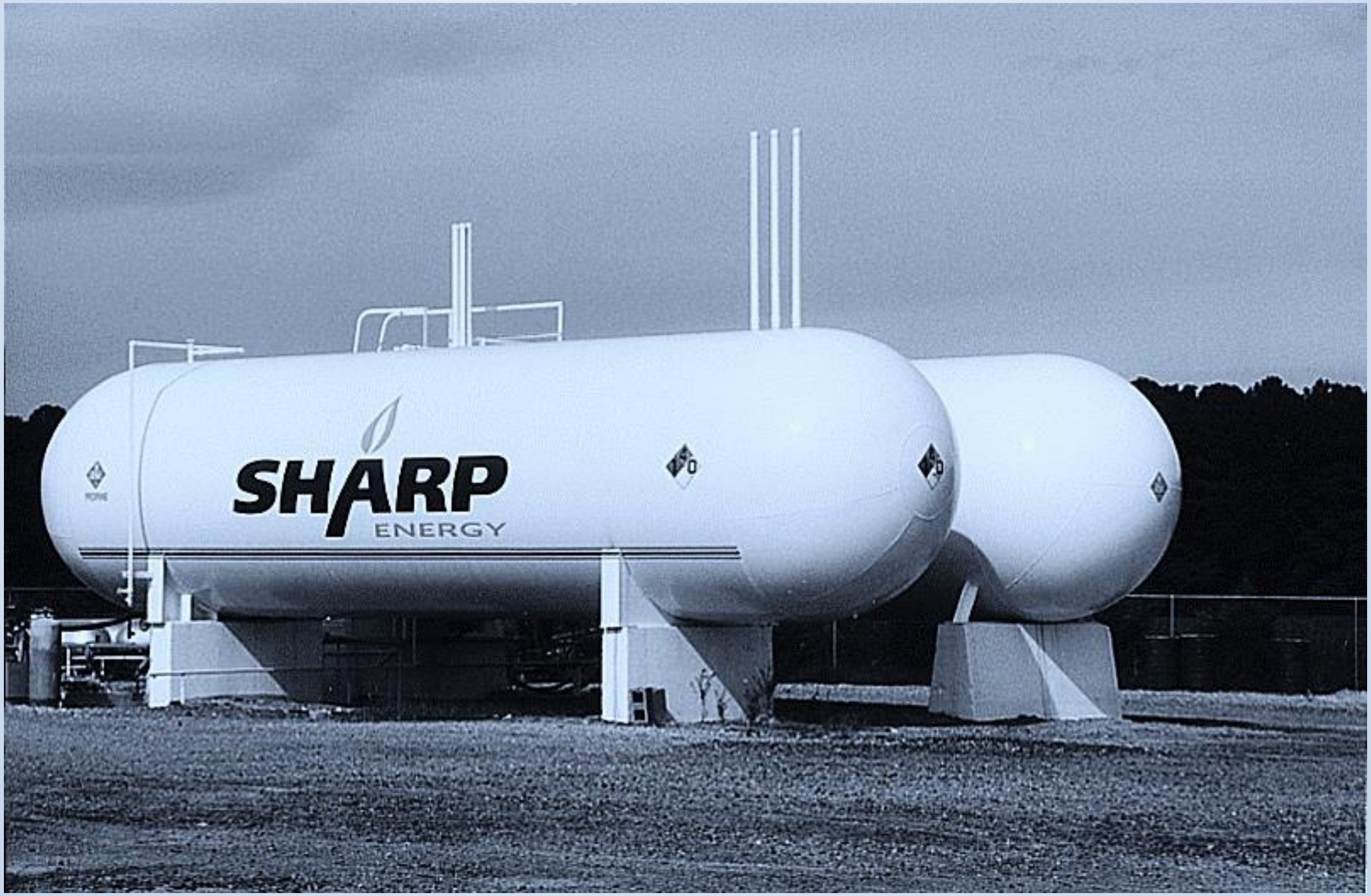
三向(空间）应力状态:

三个主应力不为零

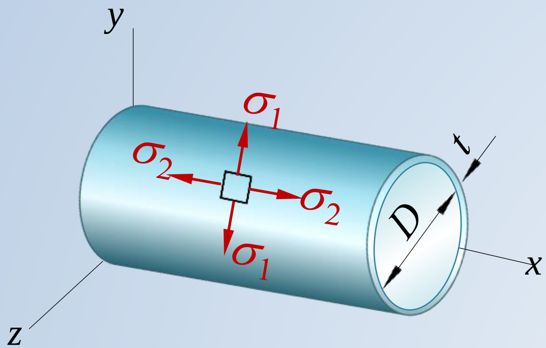


11.1 应力状态的概念

例3 已知油罐内径r，壁厚t，压力p。求罐壁内任意点处的应力。



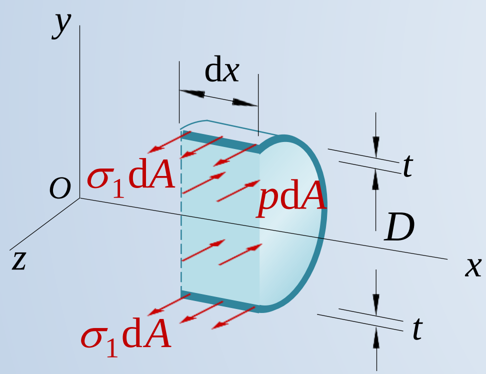
11.1 应力状态的概念



解：σ_1 环向应力　σ_2 轴向应力

·求环向应力

$$\sum F_z = 0 \quad \sigma_1 (2t\,\Delta x) - p(2r\,\Delta x) = 0 \quad \text{得} \quad \sigma_1 = \frac{pr}{t}$$

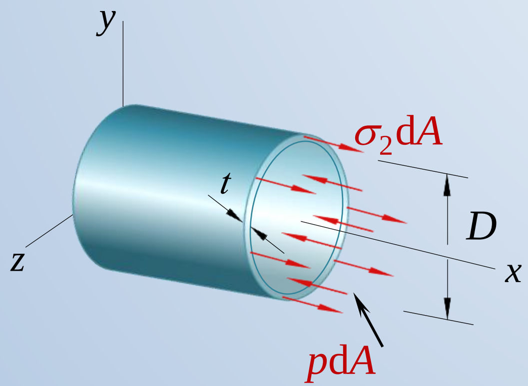


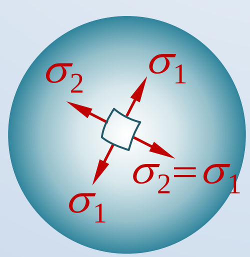
·求轴向应力

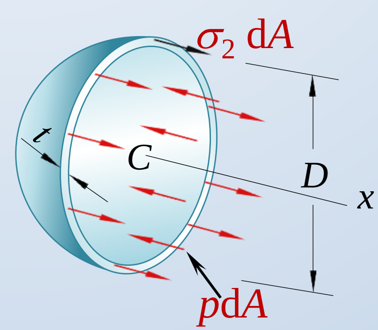
$$\sum F_x = 0 \quad \sigma_2 (2\pi r t) - p(\pi r^2) = 0 \quad \text{得} \quad \sigma_2 = \frac{pr}{2t}$$

$$\sigma_1 = 2\sigma_2$$

·求球形部分应力







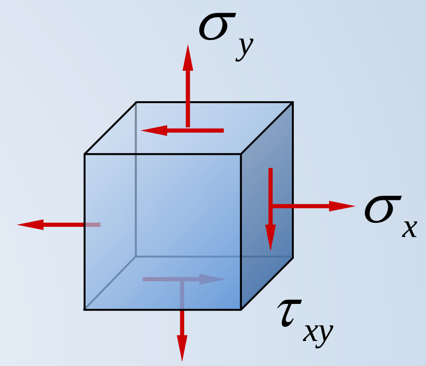
$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{pr}{2t}$$

11.2 二向应力状态分析

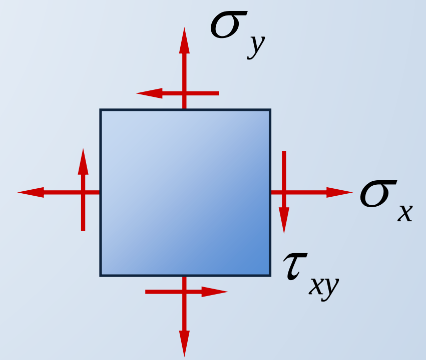
一. 二向应力状态分析的解析法

设在受力构件中取出二向应力状态的最一般情况的原始单元体，既已知面上的应力

σ_x, σ_y, τ_{xy}



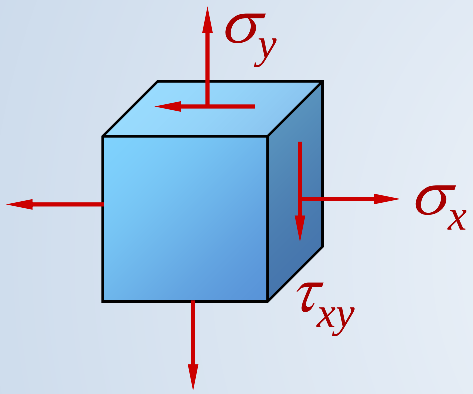
可将单元体用平面代替。

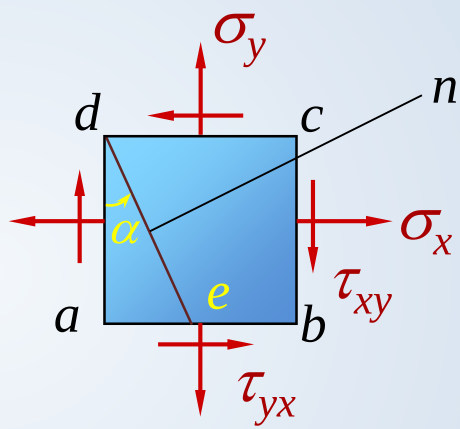


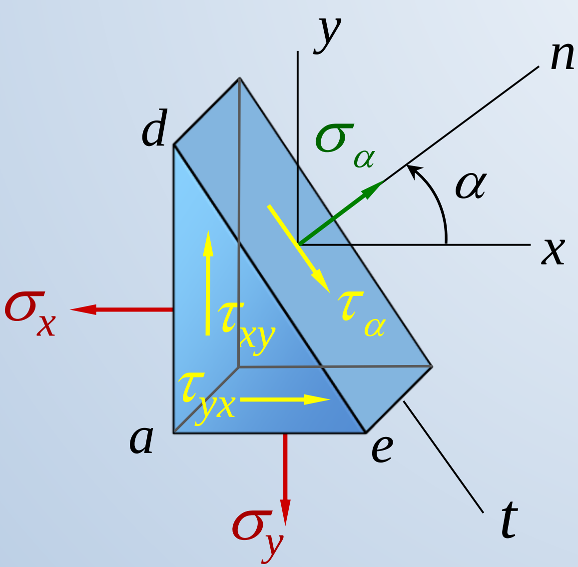
11.2 二向应力状态分析

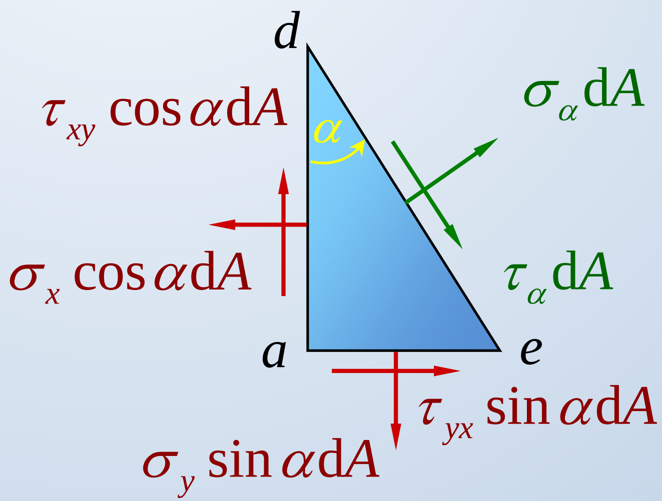
1. 确定平行于z轴的任意斜截面上的应力

用截面法：截、取、代、平。

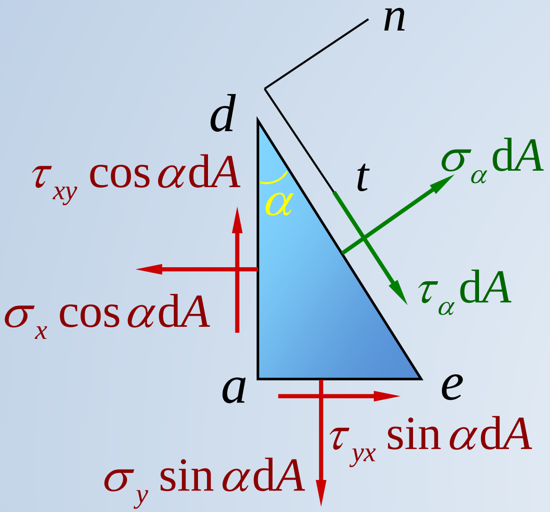








11.2 二向应力状态分析



将力在n和t方向上投影

$$\sum F_n=0\quad \sigma_\alpha \mathrm{d}A+(\tau_{xy}\mathrm{d}A\cos\alpha)\sin\alpha-(\sigma_x\mathrm{d}A\cos\alpha)\cdot\cos\alpha+(\tau_{yx}\mathrm{d}A\sin\alpha)\cos\alpha-(\sigma_y\mathrm{d}A\sin\alpha)\sin\alpha=0$$

$$\sum F_t=0\quad \tau_\alpha \mathrm{d}A-(\tau_{xy}\mathrm{d}A\cos\alpha)\cos\alpha-(\sigma_x\mathrm{d}A\cos\alpha)\cdot\sin\alpha+(\tau_{yx}\mathrm{d}A\sin\alpha)\sin\alpha-(\sigma_y\mathrm{d}A\sin\alpha)\cos\alpha=0$$

整理有：

$$\sigma_\alpha=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\alpha-\tau_{xy}\sin 2\alpha$$

$$\tau_\alpha=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\alpha+\tau_{xy}\cos 2\alpha$$

2. 求正应力极值及其作用面（确定主应力及主平面位置）

σ_α, τ_α 均为α的函数，必存在极值。

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_\alpha}{\mathrm{d}\alpha}=-2\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\alpha+\tau_{xy}\cos 2\alpha\right)$$

令 $\frac{\mathrm{d}\sigma_\alpha}{\mathrm{d}\alpha}=0$ 显然有 $\tau_{\alpha_0}=0$

正应力的极值为主应力

$$\tan 2\alpha_0=\frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}$$

可求出相差90^0的两个α_0, 确定两个互垂平面

11.2 二向应力状态分析

主应力方位角： $\tan 2\alpha_0 = \dfrac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$

主应力：

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{\max} \\ \sigma_{\min}\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

至于$\sigma_{\max}$,$\sigma_{\min}$是第几主应力，要求出具体数值与零排序而定 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

11.2 二向应力状态分析

3. 求平面内极值切应力

令：$\dfrac{\mathrm{d}\tau_\alpha}{\mathrm{d}\alpha}=0$ 得：$\tan 2\alpha_1=\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2\tau_{xy}}$

可求出相差90^0的两个α_0，确定两个互垂平面。

平面内极值切应力：

$$\left.\begin{matrix}\tau_{\max}\\ \tau_{\min}\end{matrix}\right\}=\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$$

注意 不是单元体的$\tau_{\max}$, $\tau_{\min}$

4. 讨论

(1) $\sigma_\alpha + \sigma_{\alpha+\frac{\pi}{2}} = \sigma_x + \sigma_y$ 单元体任意两个互相垂直面上正应力之和为常数。

(2) $\tau_{\alpha+\frac{\pi}{2}} = -\tau_\alpha$ 证明了切应力互等定理。

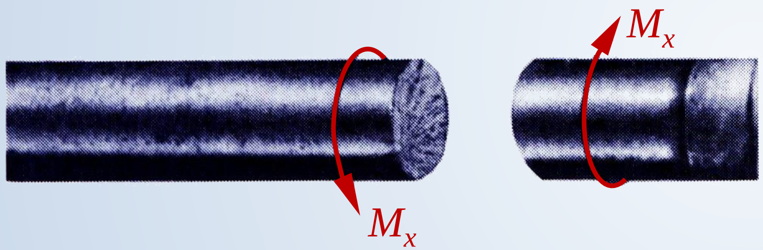
(3) $\tan 2\alpha_0 = -\dfrac{1}{\tan 2\alpha_1}$ 得 $\alpha_1 = \alpha_0 \pm \dfrac{\pi}{4}$

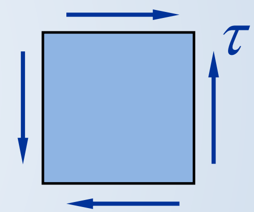
τ 极值作用面与主平面相差45°

11.2 二向应力状态分析

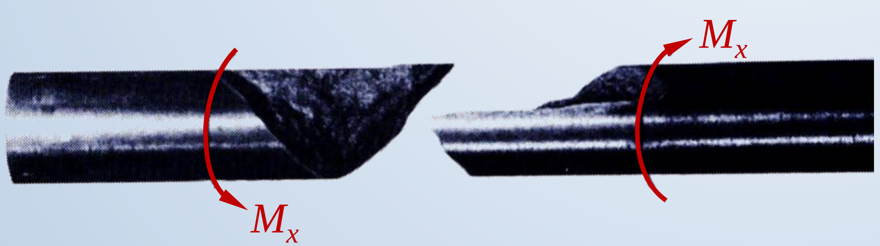
例4 利用应力状态分析低碳钢、铸铁扭转破坏原因。

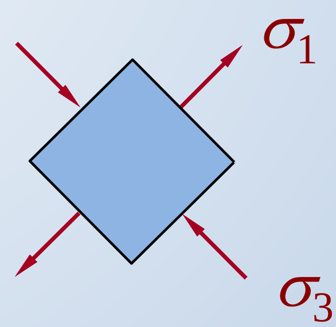
低碳钢：





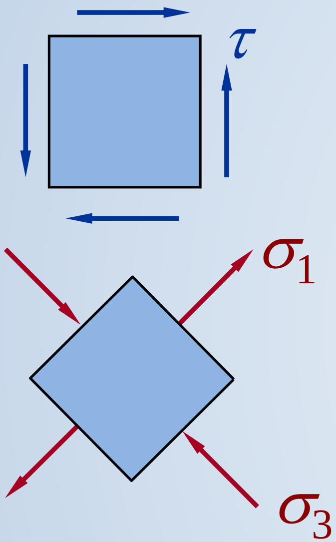
铸铁：





11.2 二向应力状态分析

将原始单元体中 $\sigma_x = 0, \sigma_y = 0, \tau_{xy} = \tau$ 代入



$$\left.\begin{matrix}\sigma_{\max}\\ \sigma_{\min}\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

得 $\sigma_{\max} = \tau \qquad \sigma_{\min} = -\tau$

$\tan 2\alpha_0 = -\infty \qquad \alpha_0 = -45^\circ$ 或 135°

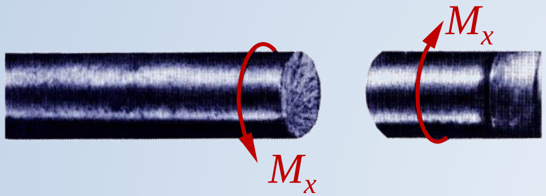
显然有： $\sigma_1 = \tau \quad \sigma_2 = 0 \quad \sigma_3 = -\tau$

纯剪应力状态特点： $\sigma_1 = \tau = -\sigma_3$

11.2 二向应力状态分析

分 析

低碳钢---- $\tau_{\max}$剪坏



抗剪能力 <抗拉能力

铸铁----$\sigma_{\max}$ 拉坏

抗拉能力<抗剪能力< 抗压能力

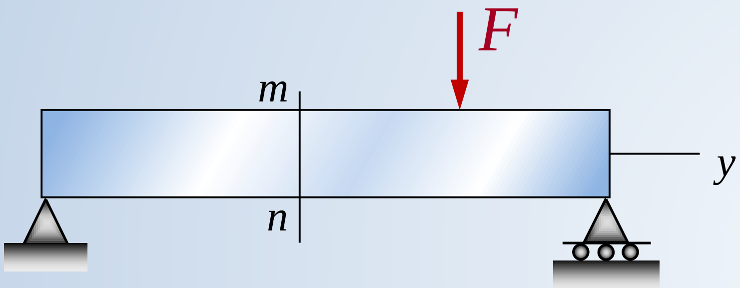
结 论

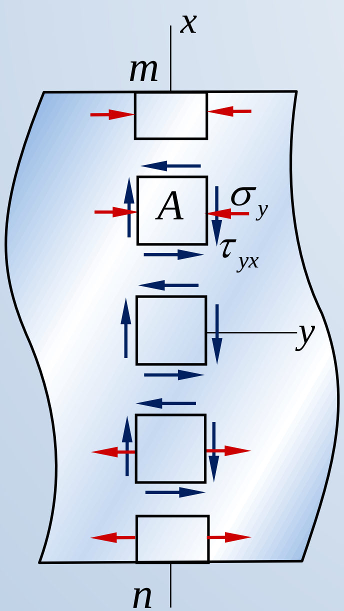
一点处的应力状态与材料无关。

材料的破坏与 $\left\langle \begin{matrix} \text{状态} \\ \text{材料} \end{matrix} \right\rangle$ 有关。

11.2 二向应力状态分析

例5. 已知A点的应力$\sigma=-70\text{MPa}$， $\tau=50\text{MPa}$, 试确定A点的主应力及主平面的方位。





解：选x轴向上，则

$$\sigma_x=0,\ \sigma_y=-70\text{MPa},\ \tau_{yx}=50\text{MPa}$$

主应力方位角：

$$\tan 2\alpha_0=\frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}=\frac{-2\times(-50)}{0-(-70)}$$

$$=1.429$$

11.2 二向应力状态分析

得： $\alpha_0=27.5^\circ$ 或 $\alpha_0=117.5^\circ$

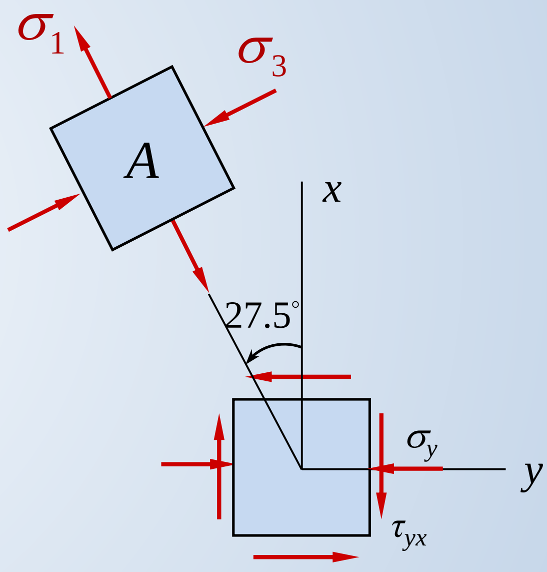
主应力：

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{\max}\\ \sigma_{\min}\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$$

$$= \frac{0+(-70)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0-(-70)}{2}\right)^2+(-50)^2}$$

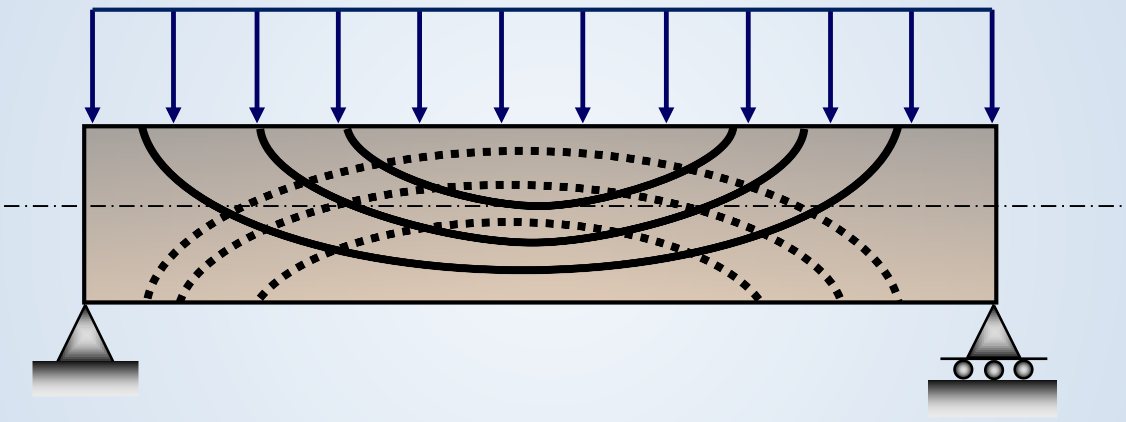
$$= \begin{cases} 26\text{MPa} \\ -96\text{MPa} \end{cases}$$

$$\sigma_1 = 26\text{MPa} \quad \sigma_2 = 0 \quad \sigma_3 = -96\text{MPa}$$



11.2 二向应力状态分析

主应力迹线



应用于钢筋混凝土的制做中

11.2 二向应力状态分析

二. 二向应力状态分析—图解法

1. 原理

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha$$

两式平方相加

$$\left(\sigma_\alpha - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2$$

$$(x - a)^2 + y^2 = R^2$$

11.2 二向应力状态分析

$$\left(\sigma_\alpha - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2$$

$$(x-a)^2 + y^2 = R^2$$

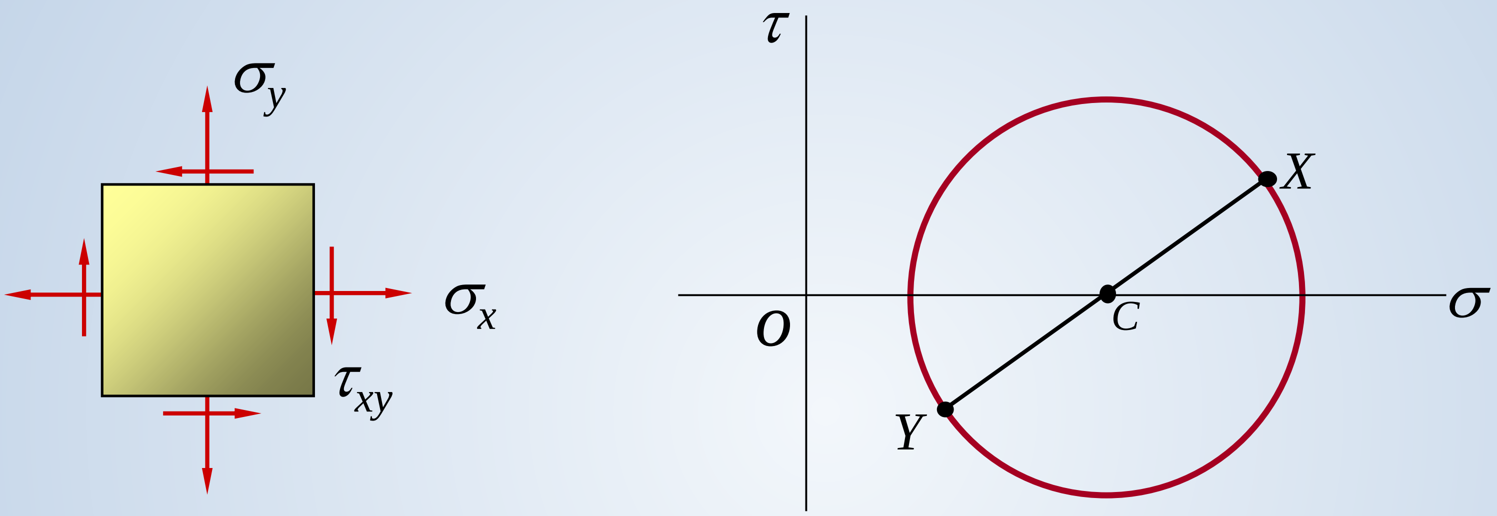
圆心坐标为 $\left(\dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0\right)$

半径 $R = \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$

此圆称为**应力圆**（莫尔圆） Mohr’s circle

11.2 二向应力状态分析

2. 应力圆的作法：



1. 取 σ–τ 坐标，选定比例尺；

2. 以 (σ_x, τ_{xy}) 定X点，(σ_y, $-\tau_{xy}$)定Y点；

3. 连结XY点定圆心C；

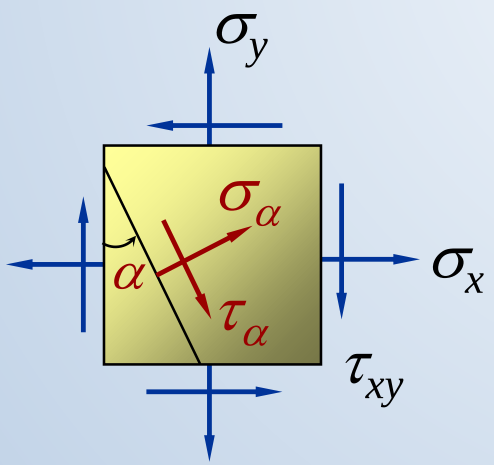
4. 以CX为半径作圆。

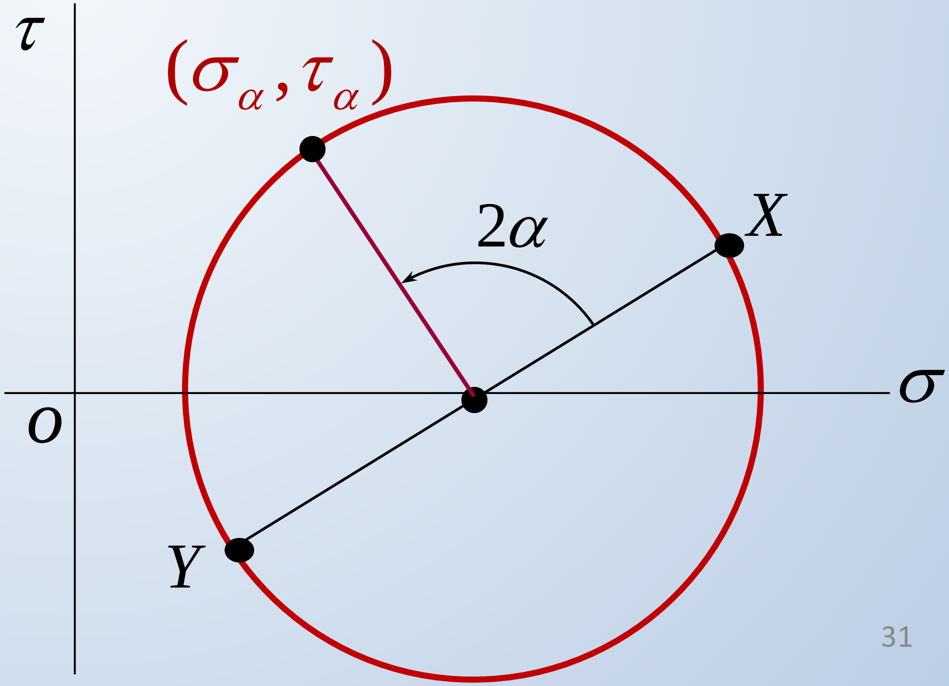
3. 应力圆与单元体点面对应关系

圆上点，体上面，直径两端两垂面；

点转动，面相随，转角两倍转向同。

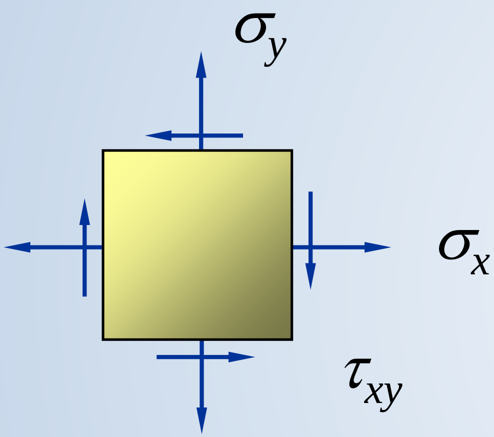
(1) 求任意斜截面的应力

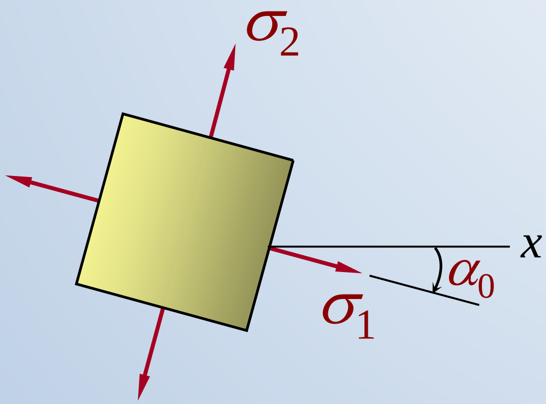


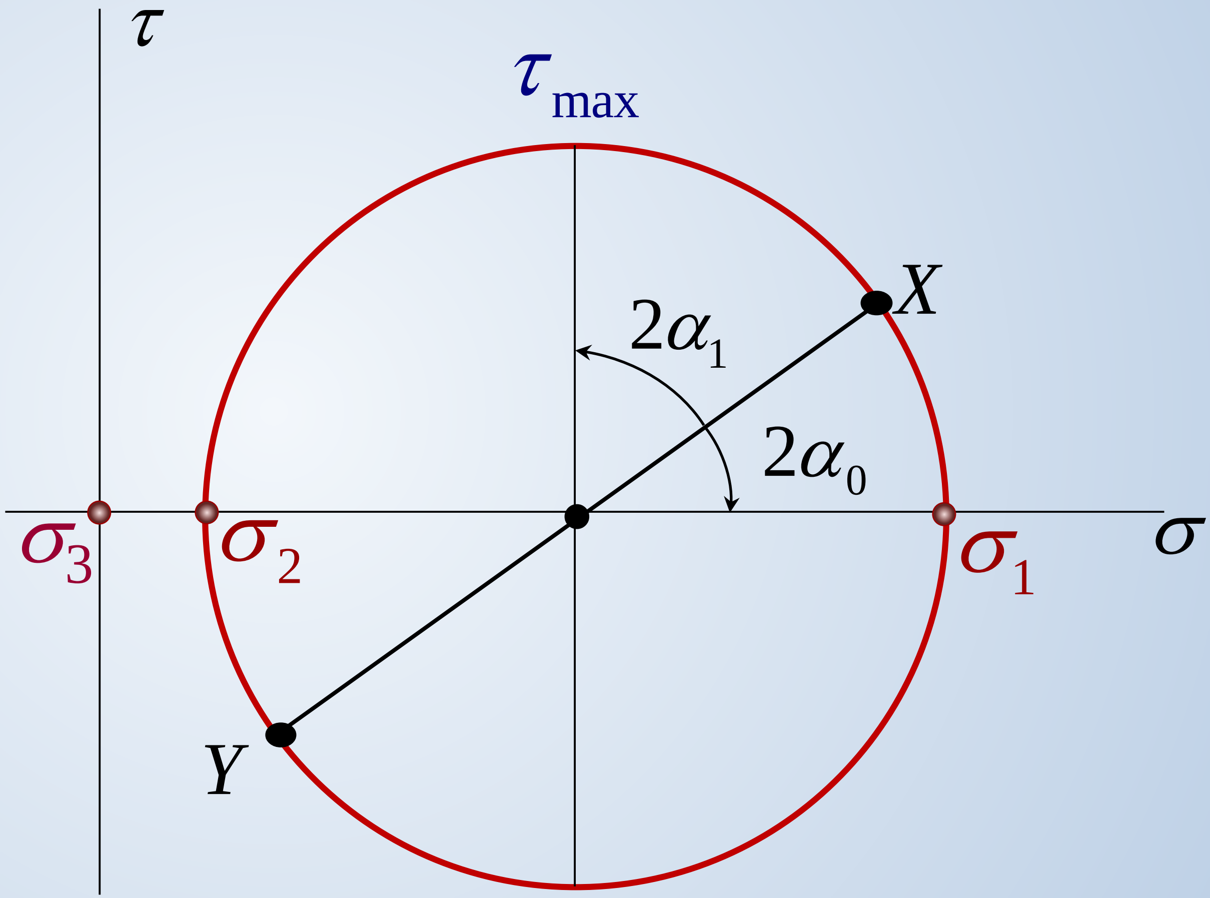


11.2 二向应力状态分析

(2) 求主应力







11.2 二向应力状态分析

4. 应力圆的应用

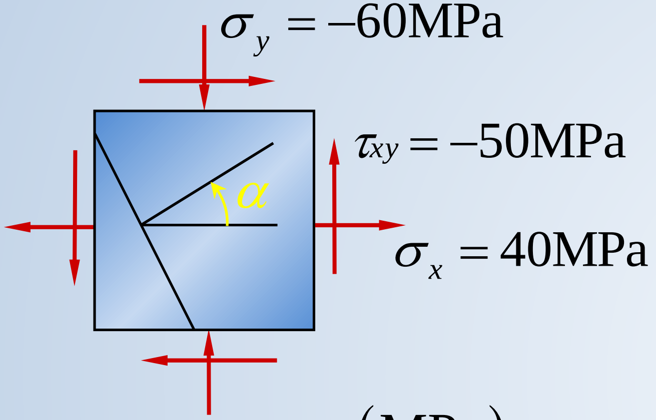
（1）确定二向应力状态下单元体斜截面上应力；

（2）确定二向应力状态下的主应力和主平面位置；

（3）确定二向应力状态下极值切应力及其方位。

11.2 二向应力状态分析

例6 用图解法求1. $\sigma_{30^0}, \tau_{30^0}$ 2.主应力 3.画出主单元体



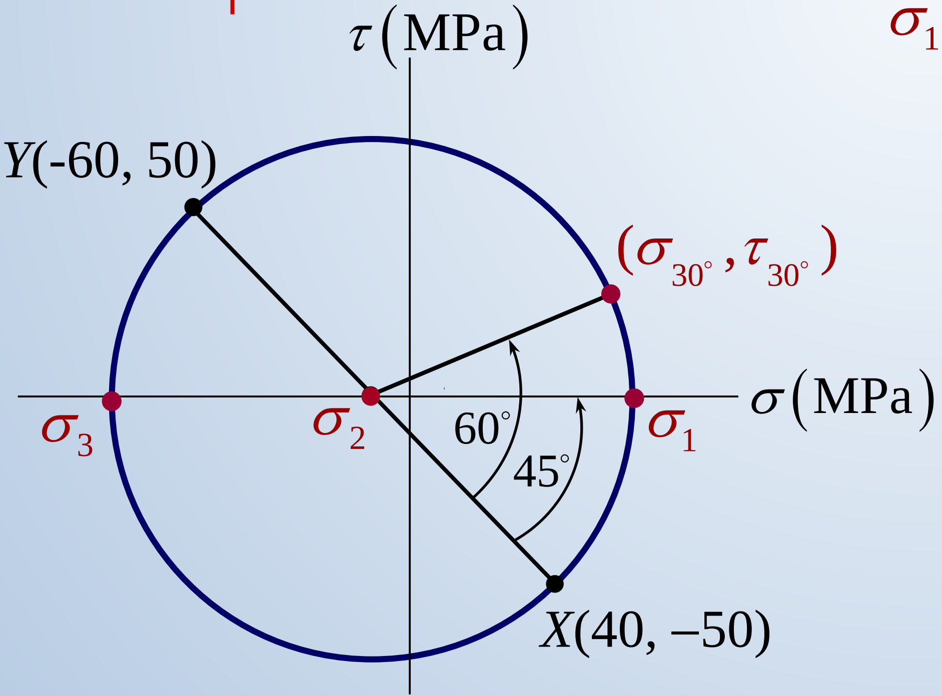
解：1. 画应力圆求 $\sigma_{30^0}, \tau_{30^0}$

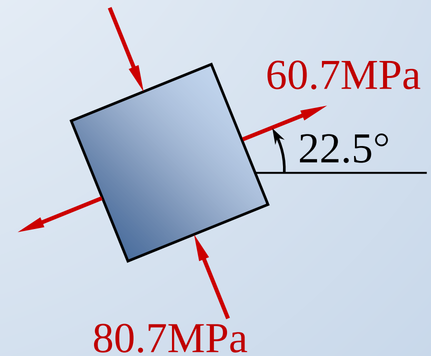
$\sigma_{30^o} = 58.3\text{MPa}$ $\tau_{30^o} = 18.3\text{MPa}$

2. 主应力

$\sigma_1 = 60.7\text{MPa}$ $\sigma_2 = 0$ $\sigma_3 = -80.7\text{MPa}$

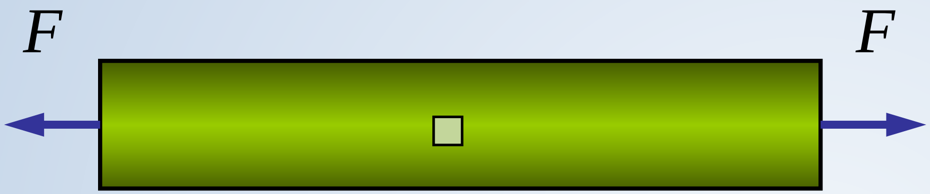
3. 画主单元体 $\alpha_0 = 22.5^\circ$

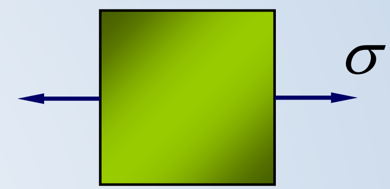


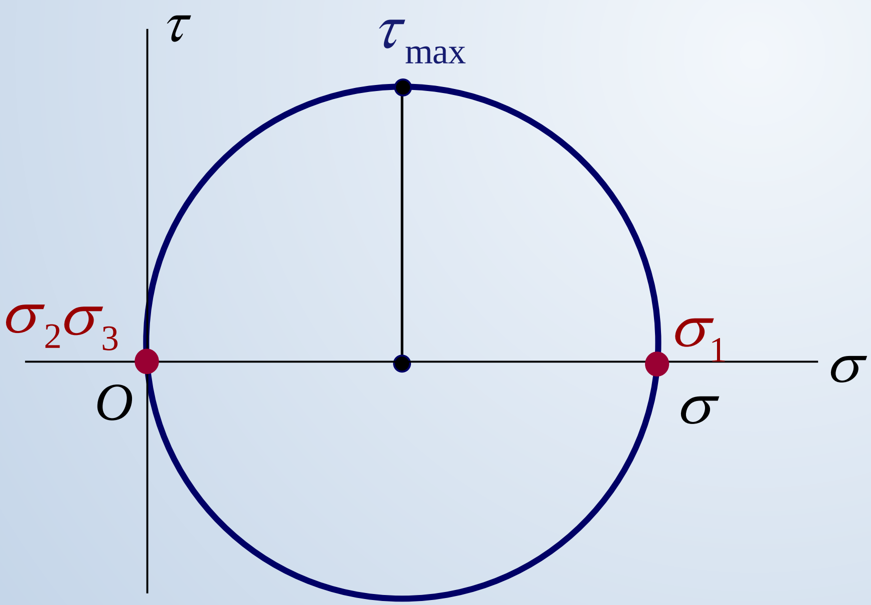


11.2 二向应力状态分析

5. 几种特殊应力状态的讨论





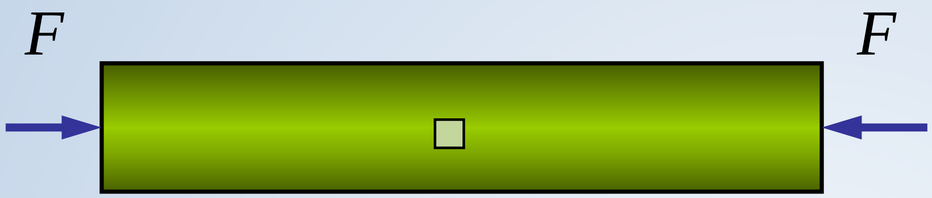


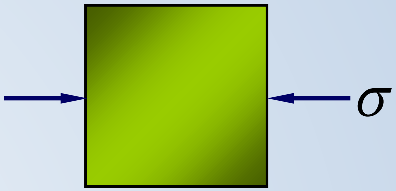
$$\sigma_1 = \sigma$$

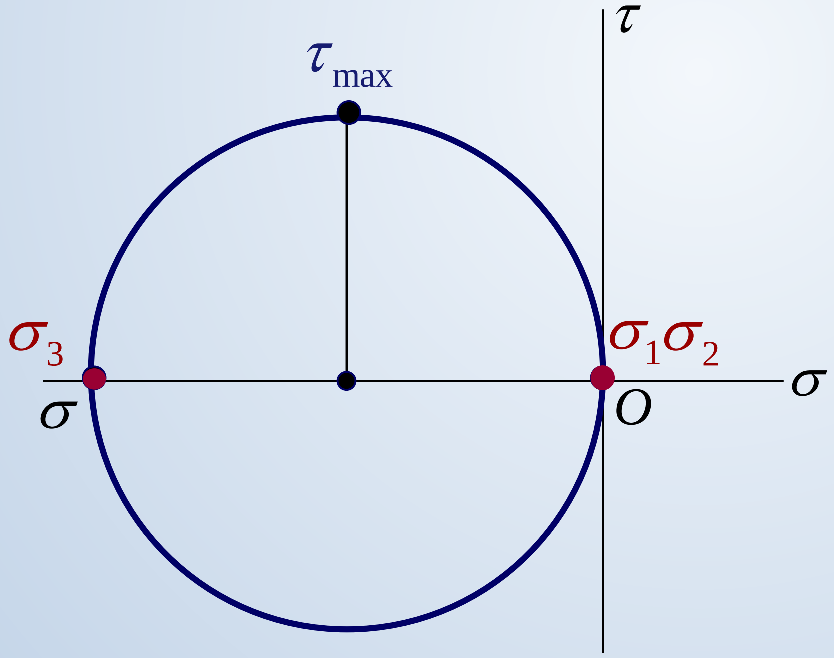
$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma}{2}$$

11.2 二向应力状态分析





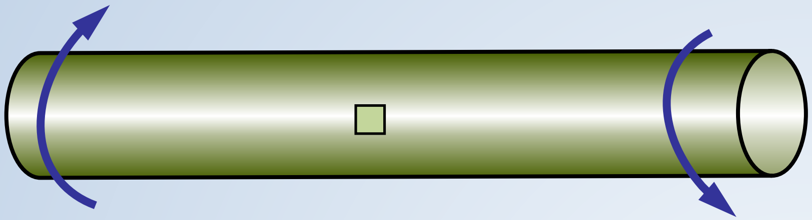


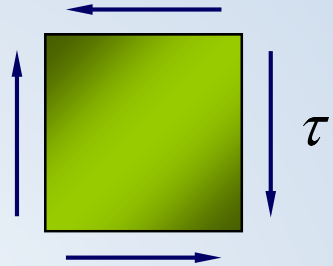
$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0$$

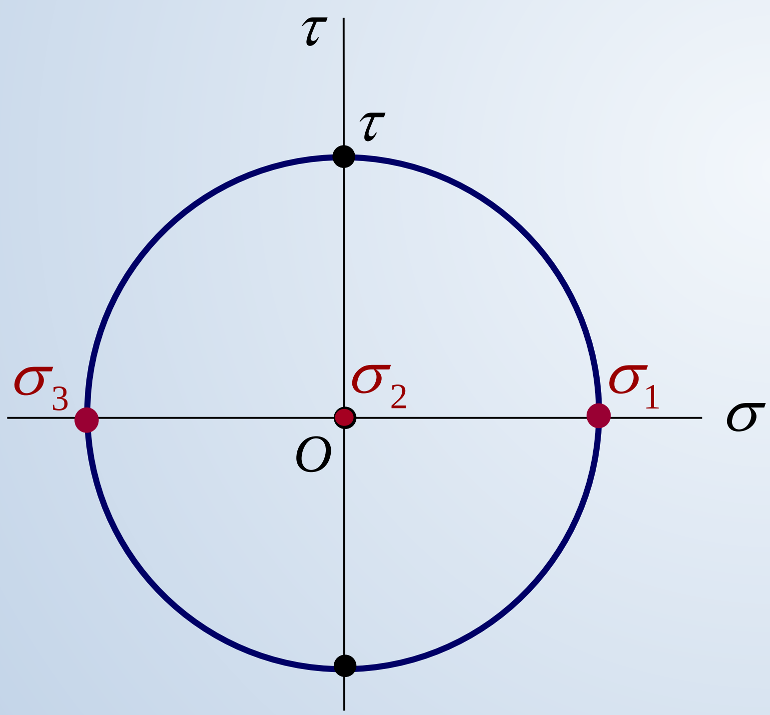
$$\sigma_3 = -\sigma$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma}{2}$$

11.2 二向应力状态分析





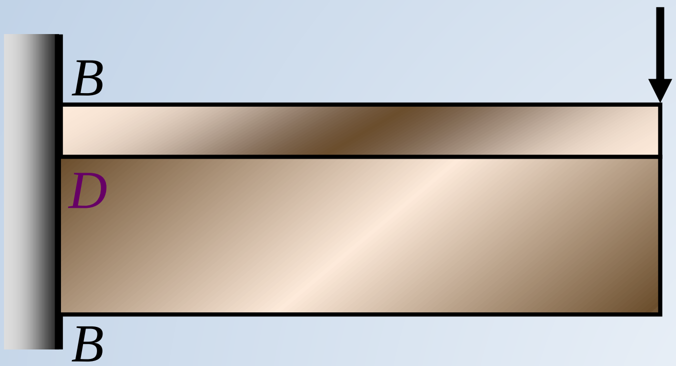


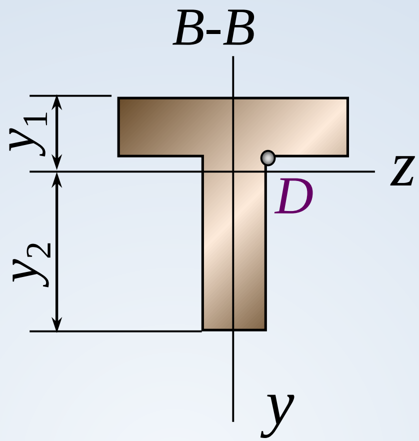
$\sigma_1 = \tau \qquad \sigma_2 = 0 \qquad \sigma_3 = -\tau$

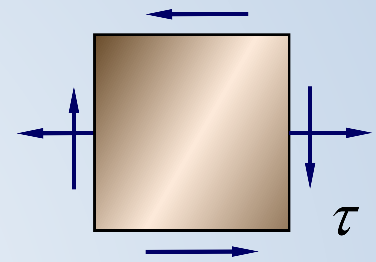
$\tau_{\max} = \tau$

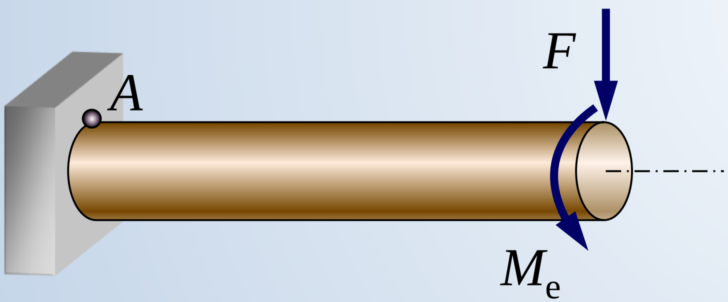
求45°面上的应力?

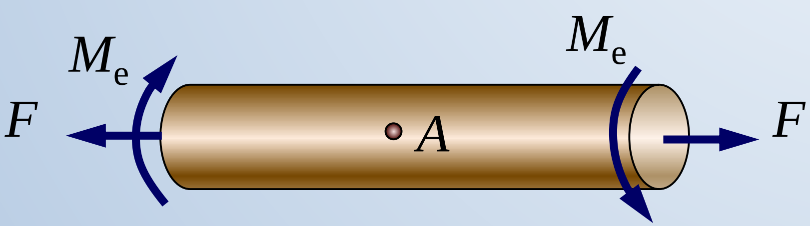
11.2 二向应力状态分析

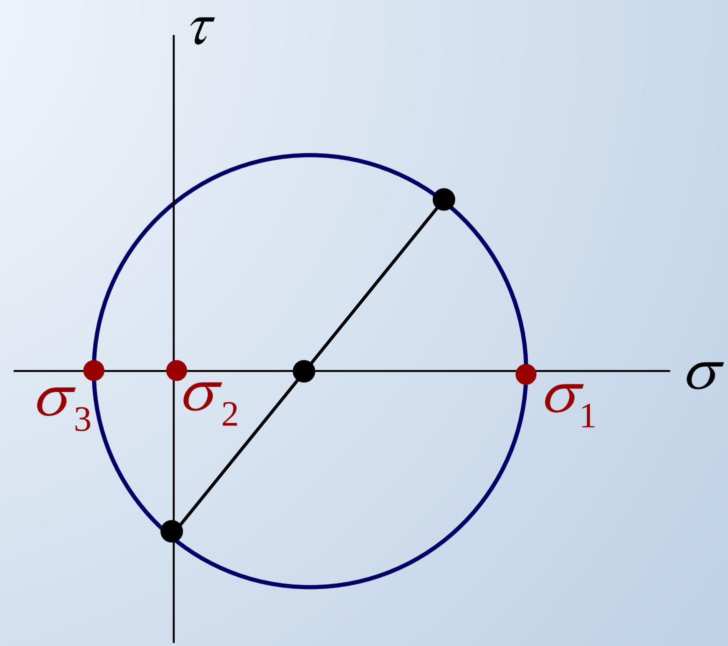








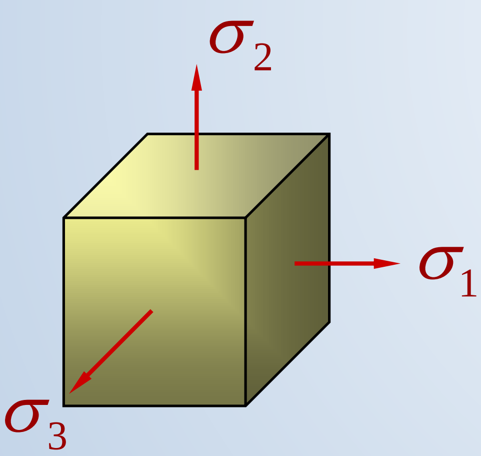




11.3 三向应力状态分析

一. 三向应力状态应力圆

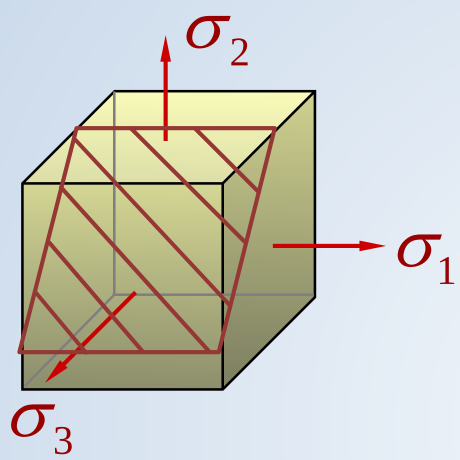
单向和二向应力状态也有三个主应力，只是其中有两个或一个主应力等于零。



现考察三个主平面已知且三个主应力均不为零的情况。

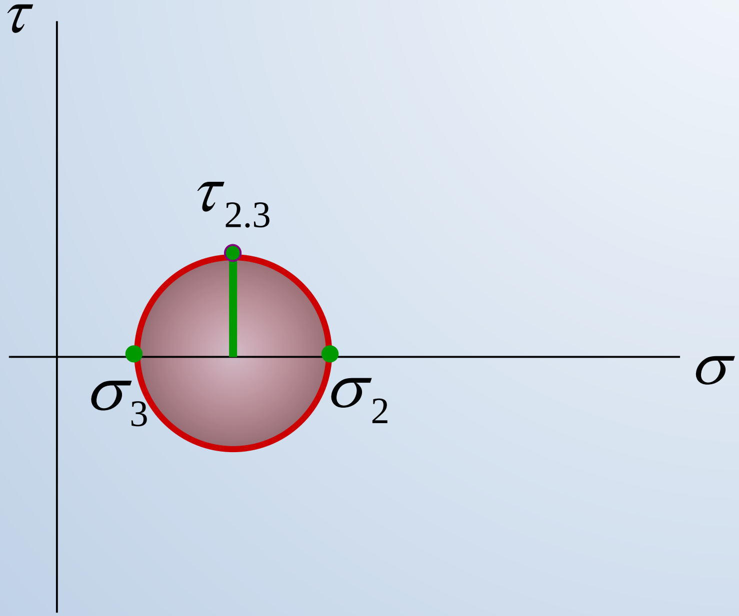
用三种特殊平面切割单元体。

11.3 三向应力状态分析



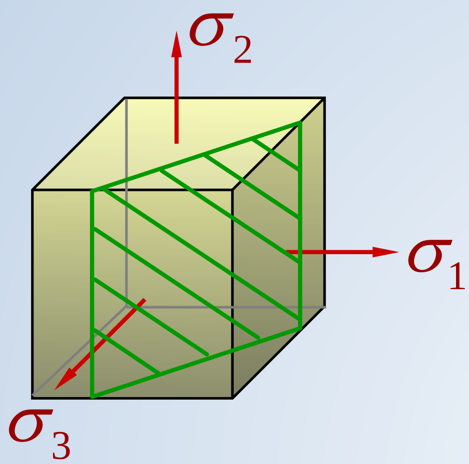
1. 用平行 σ_1 的平面切单元体，得 σ_2, σ_3 组成的应力圆

得极值切应力



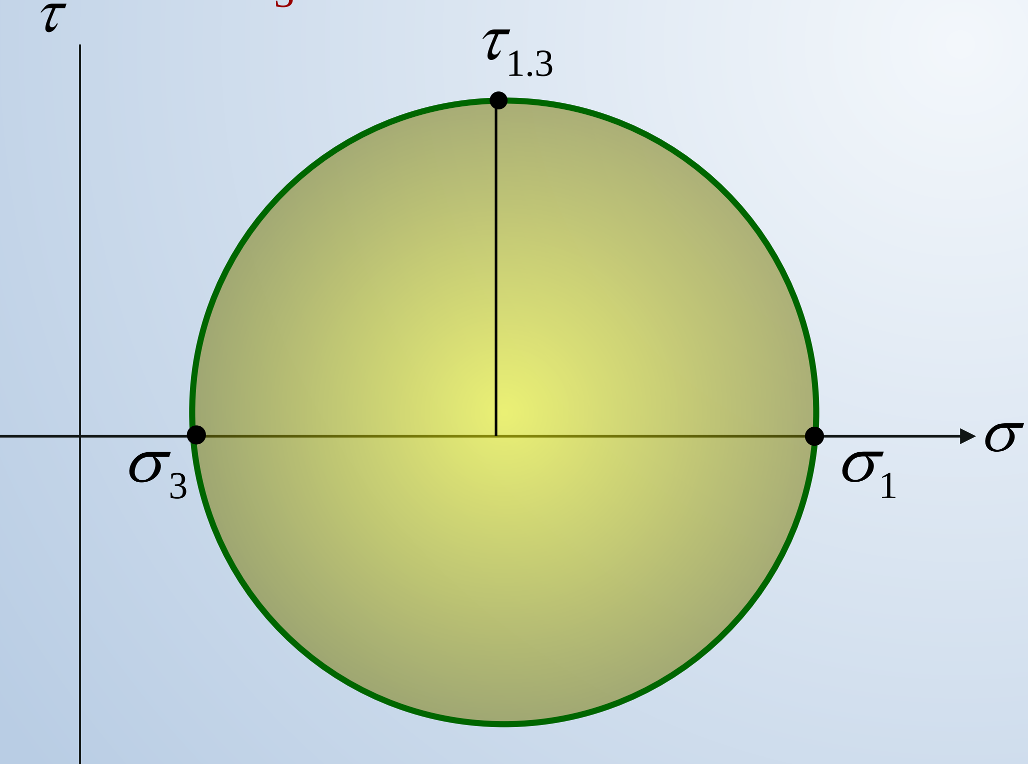
$$\tau_{2.3} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$$

11.3 三向应力状态分析



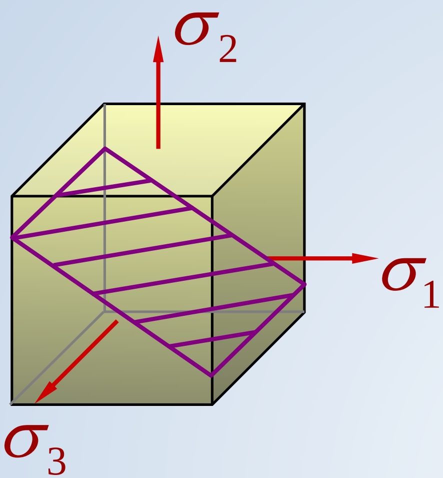
2. 用平行 σ_2 的平面切单元体，得σ_1，σ_3组成的应力圆

得极值切应力



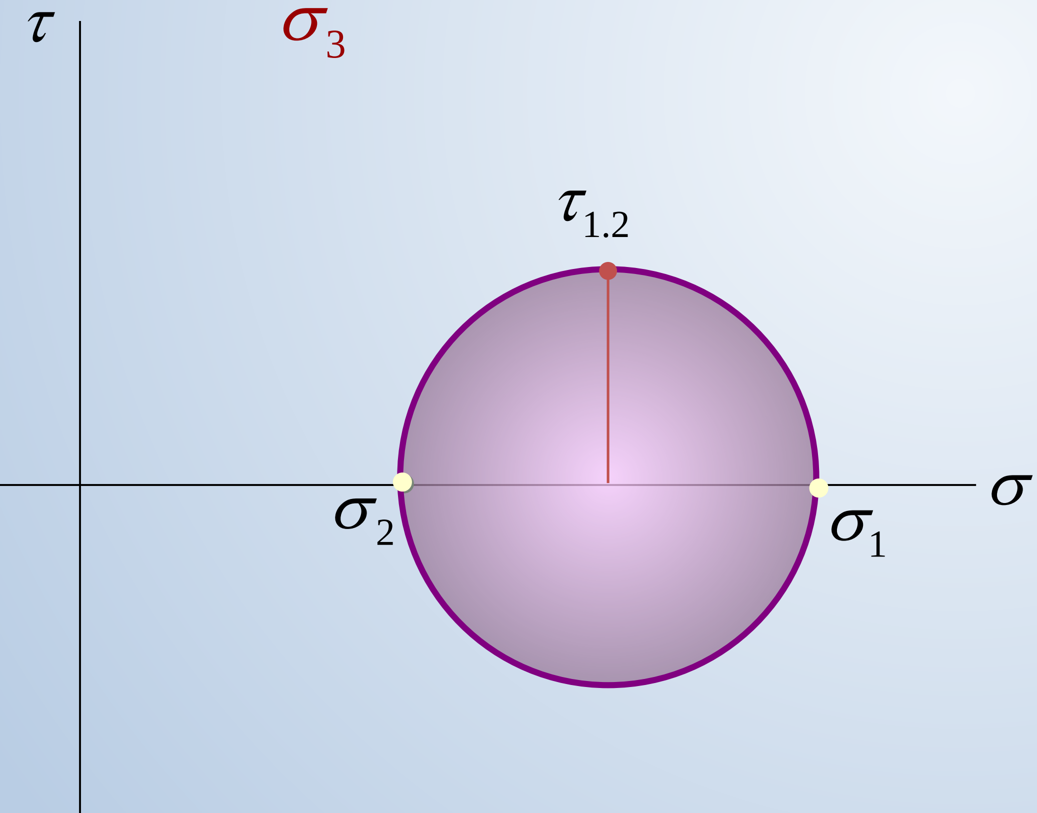
$$\tau_{1.3} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

11.3 三向应力状态分析



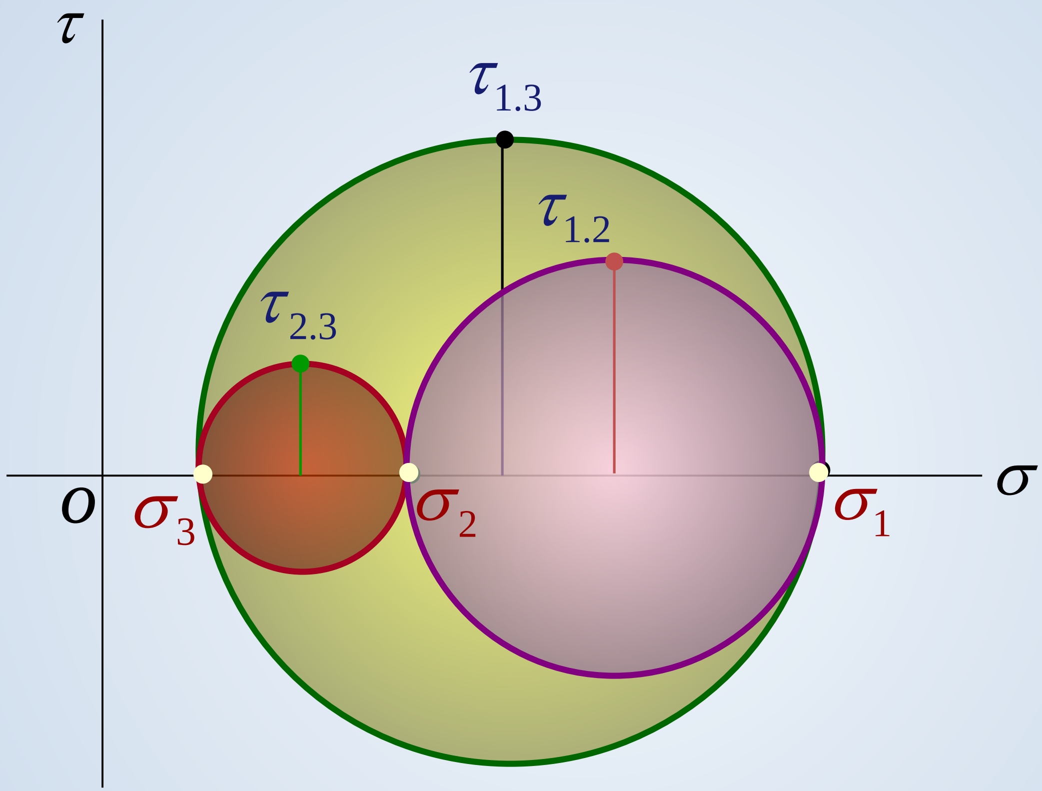
3. 用平行 σ_3 的平面切单元体，得σ_1, σ_2 组成的应力圆

得极值切应力



$$\tau_{1.2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

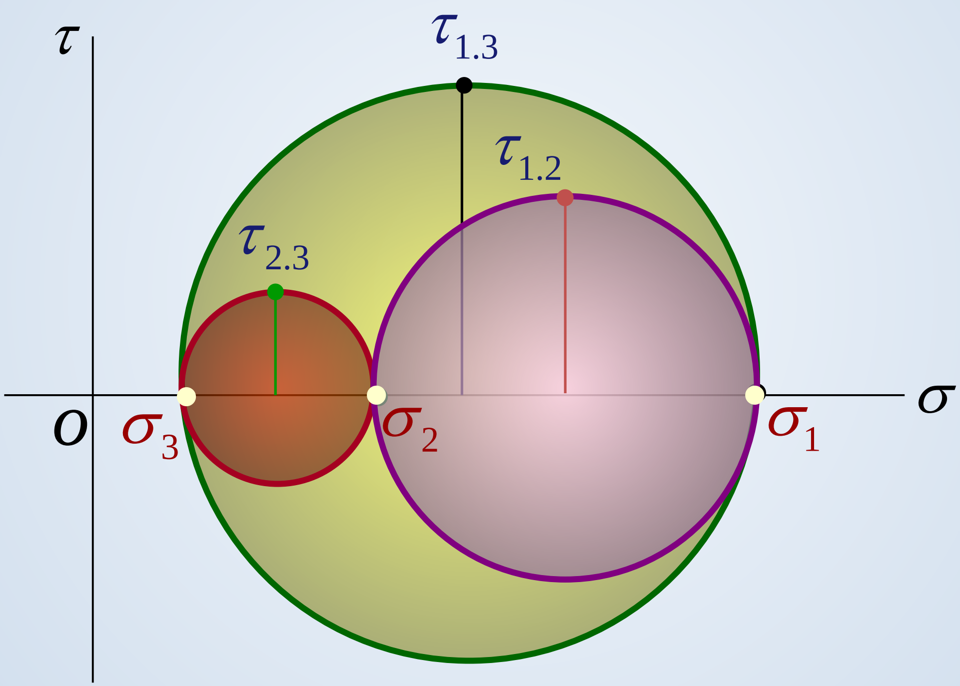
11.3 三向应力状态分析



任意面应力在三个圆组成的黄色区域内。

11.3 三向应力状态分析

二. 一点处的最大正应力和最小正应力 最大切应力



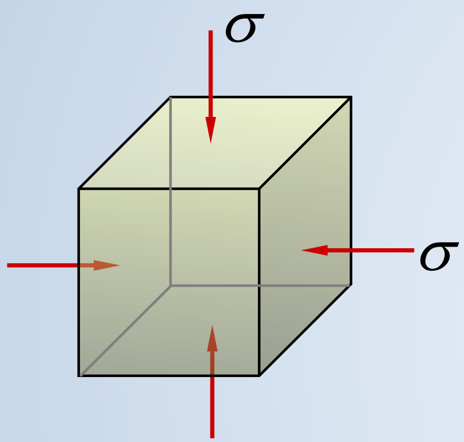
单元体

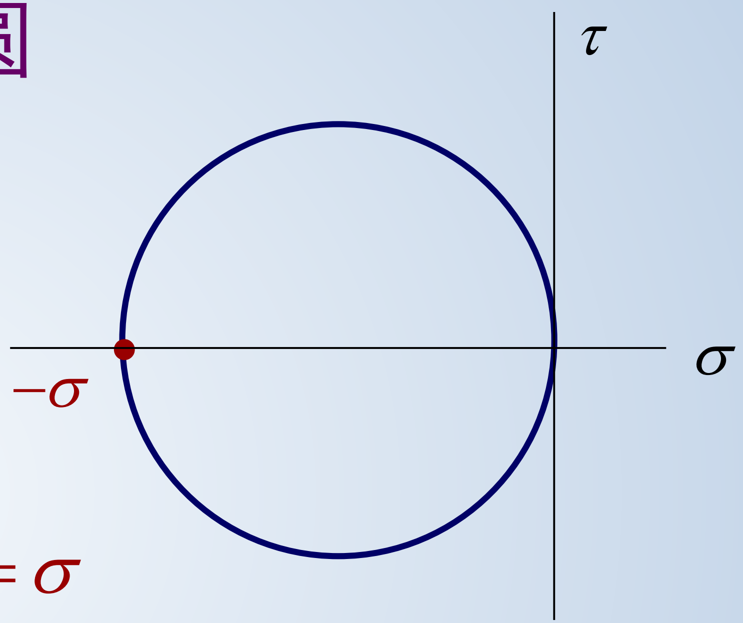
$$\sigma_{max} = \sigma_1 \quad \sigma_{min} = \sigma_3$$

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

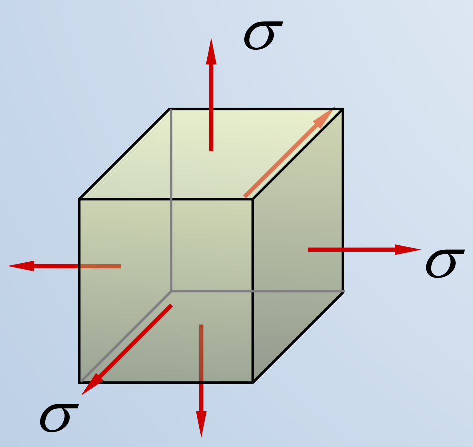
11.3 三向应力状态分析

三. 几种特殊情况的应力圆

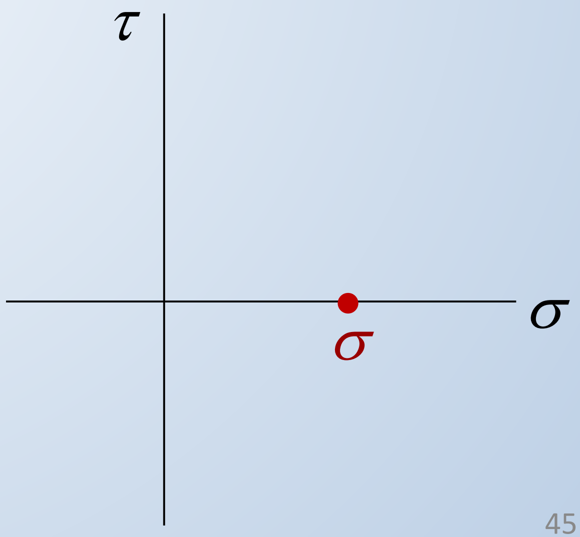




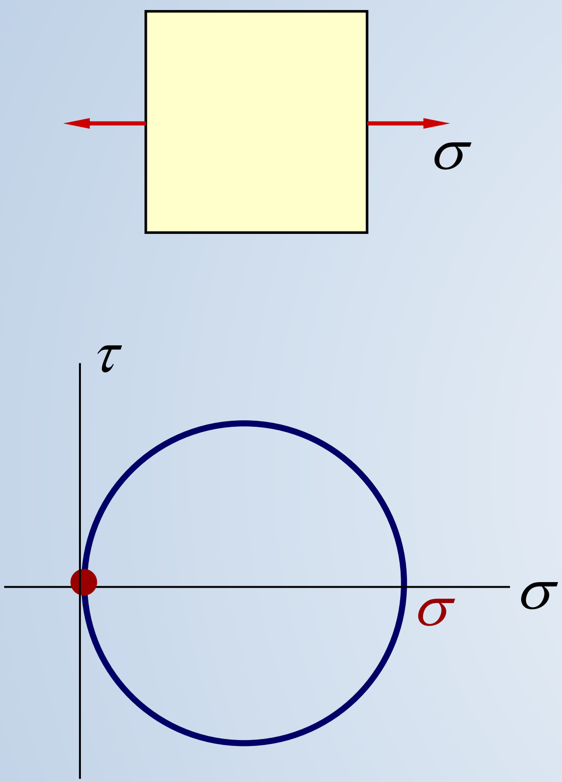
$$\sigma_1 = 0 \quad \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$$



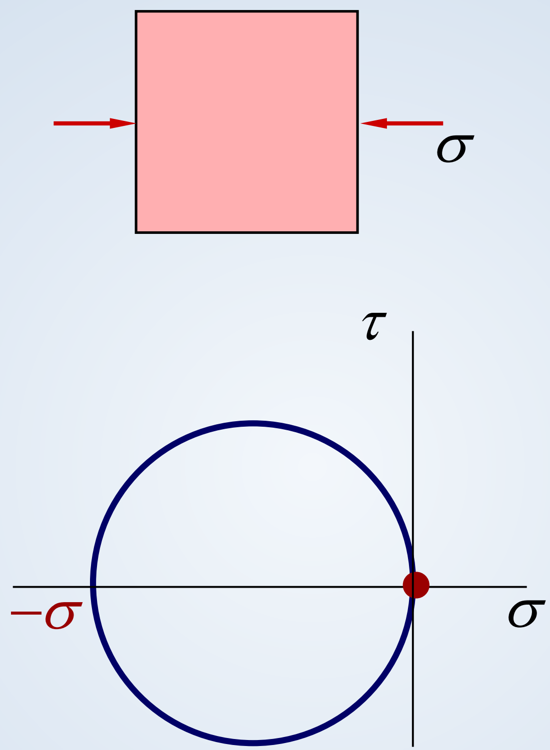
$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$$



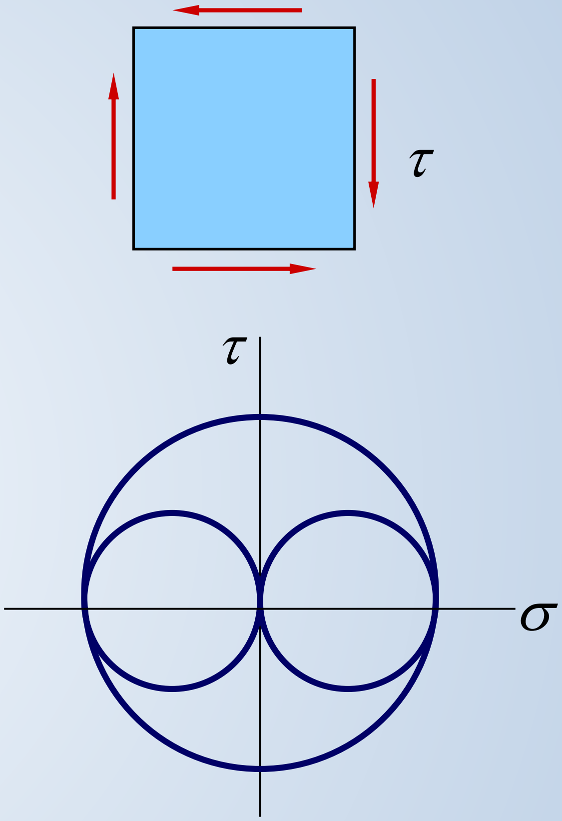
11.3 三向应力状态分析



$$\sigma_1 = \sigma$$
$$\sigma_2 = 0$$
$$\sigma_3 = 0$$



$$\sigma_1 = 0$$
$$\sigma_2 = 0$$
$$\sigma_3 = -\sigma$$



$$\sigma_1 = \tau$$
$$\sigma_2 = 0$$
$$\sigma_3 = -\tau$$

四. 三向应力状态的特殊情况

应用平面应力分析的结论，求解三向应力特殊问题的必要条件：已知一个主应力（主平面）

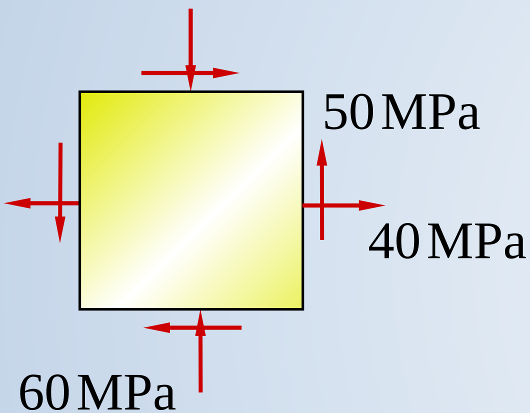
1.已知一个主应力为零，求出$\sigma_{max}, \sigma_{min}$后与0排序 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

2. 已知一个主应力不为零，设其为σ_z，那么，与σ_z平行的截面上的应力与σ_z无关，只取决于xOy面内的应力，求得该截面内的两个极值正应力，与 σ_z排序，$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

11.3 三向应力状态分析

例7 已知单元体(如图）求:1.主应力 2.$\tau_{\max}$

3. 画出三向应力状态应力圆



解：

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{\max}\\ \sigma_{\min}\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$$

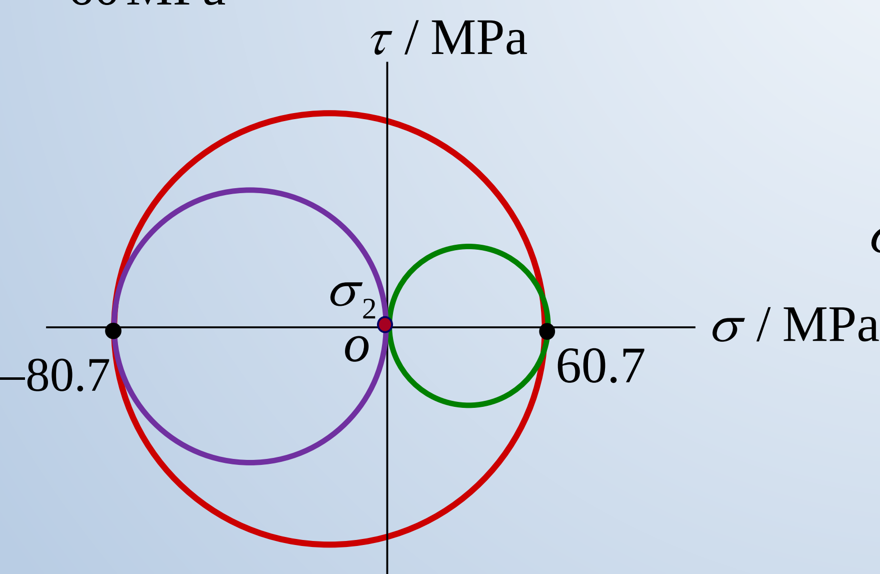
$$= \frac{40+(-60)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{40-(-60)}{2}\right)^2+(-50)^2}$$

$$= \begin{matrix}60.7\,\text{MPa}\\ -80.7\,\text{MPa}\end{matrix}$$

$$\sigma_1 = 60.7\,\text{MPa},\quad \sigma_2 = 0,\quad \sigma_3 = -80.7\,\text{MPa}$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1-\sigma_3}{2} = \frac{60.7-(-80.7)}{2}$$

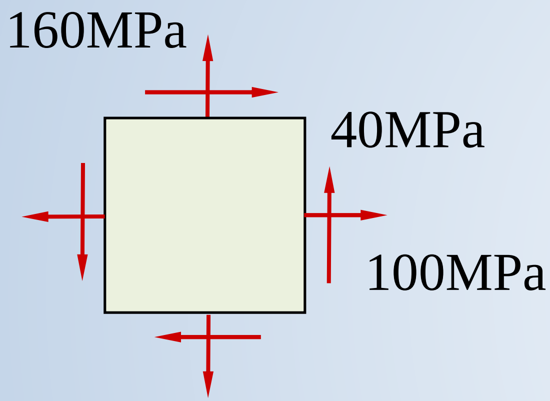
$$= 70.7\,\text{MPa}$$



11.3 三向应力状态分析

例8　已知一个单元体，求 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$,及$\tau_{max}$

画出三向应力状态应力圆



解：

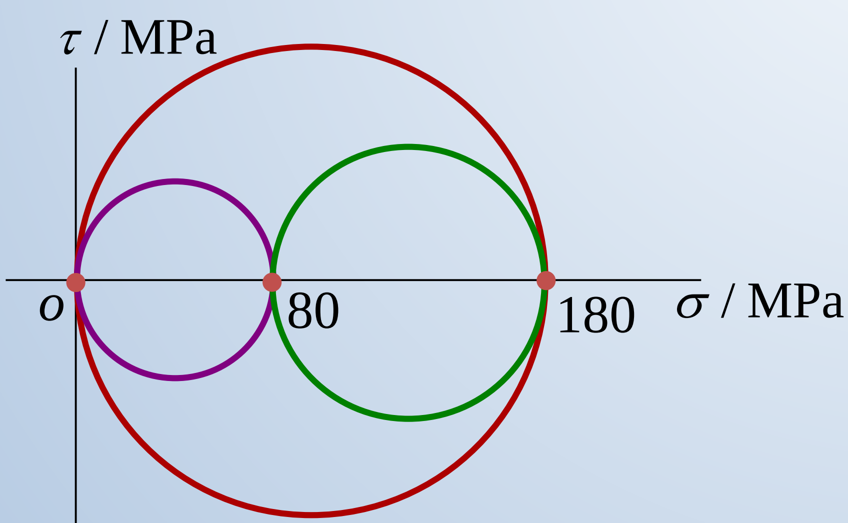
$$\left.\begin{matrix}\sigma_{max}\\ \sigma_{min}\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$$

$$= \frac{100+160}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{100-160}{2}\right)^2+(-40)^2}$$

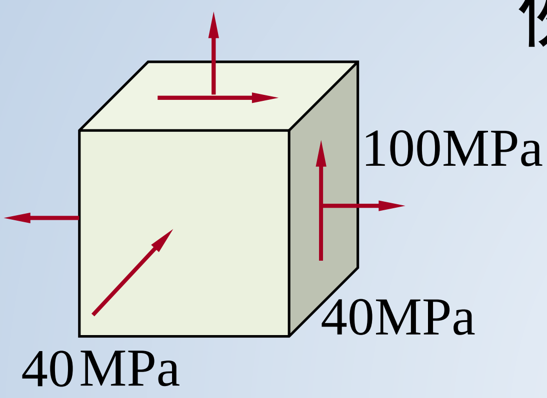
$$= \begin{matrix}180\,\text{MPa}\\ 80\,\text{MPa}\end{matrix}$$

$$\sigma_1 = 180\,\text{MPa},\ \sigma_2 = 80\,\text{MPa},\ \sigma_3 = 0$$

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1-\sigma_3}{2} = \frac{180-0}{2} = 90\,\text{MPa}$$



11.3 三向应力状态分析



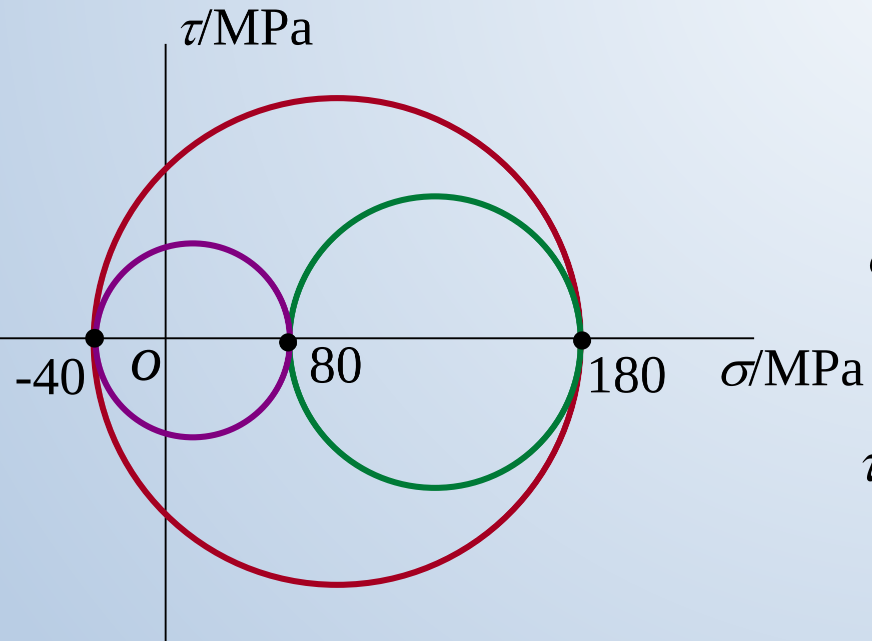
例9：已知一个单元体，求 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$，及 τ_{max}

画出三向应力状态应力圆

解：

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{max}\\ \sigma_{min}\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$= \begin{matrix}180\,\text{MPa}\\ 80\,\text{MPa}\end{matrix}$$



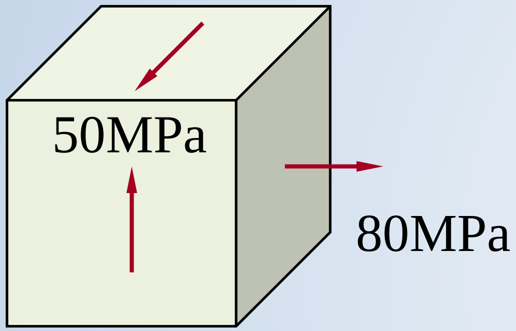
$$\sigma_1 = 180\,\text{MPa},\ \sigma_2 = 80\,\text{MPa},\ \sigma_3 = -40\,\text{MPa}$$

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{180 - (-40)}{2} = 110\,\text{MPa}$$

11.3 三向应力状态分析

例10 已知一个单元体，求 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, 及 τ_{max}

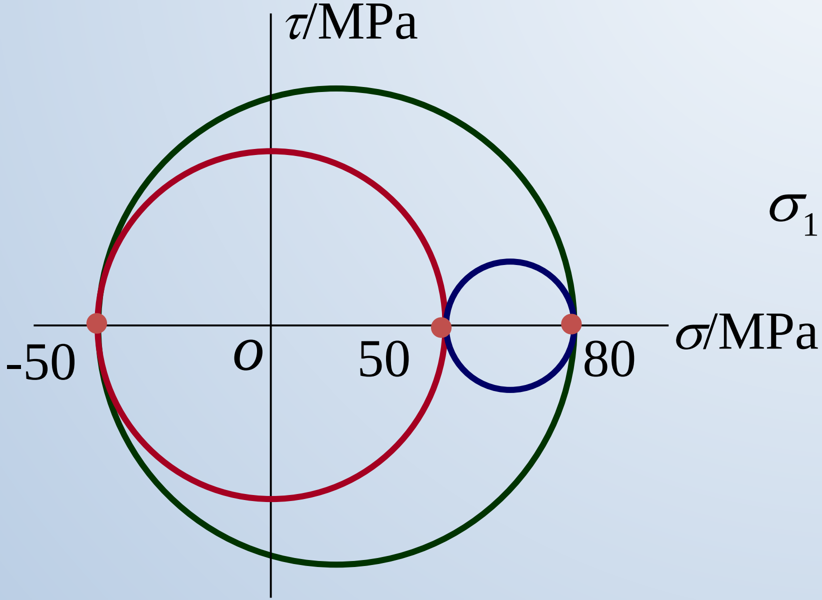
画出三向应力状态应力圆



解：
$$\left.\begin{matrix}\sigma_{max}\\ \sigma_{min}\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$= 0 \pm \sqrt{0 + 50^2} = \begin{matrix}50\text{MPa}\\ -50\text{MPa}\end{matrix}$$

$$\sigma_1 = 80\,\text{MPa}, \sigma_2 = 50\,\text{MPa}, \sigma_3 = -50\,\text{MPa}.$$



$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 65\text{MPa}$$

11.4 平面应力状态下的应变分析

一.　一点应变状态的概念

1.　定义:

一点处所有方向上的线应变及切应变统称该点处的应变状态.

一点处应变状态可用九个分量表示(六个独立):

$$\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_z,\gamma_{xy},\gamma_{yz},\gamma_{zx}$$

2.　平面应力状态下的应变状态:

有三个独立分量: $\varepsilon_x,\varepsilon_y,\gamma_{xy}$

11.4 平面应力状态下的应变分析

二. 平面应力状态下的应变分析

已知一点处$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ 求$\varepsilon_\alpha, \gamma_\alpha$

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\alpha - \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\alpha$$

$$\frac{\gamma_\alpha}{2} = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\sin 2\alpha + \frac{\gamma_{xy}}{2}\cos 2\alpha$$

11.4 平面应力状态下的应变分析

三.已知一点处$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$确定该点线应变的极值（主应变）及其方向

主应变：

$$\left.\begin{matrix}\varepsilon_{max}\\ \varepsilon_{min}\end{matrix}\right\} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

方位：

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}$$

$$\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3 \qquad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

11.4 平面应力状态下的应变分析

四. 应变圆

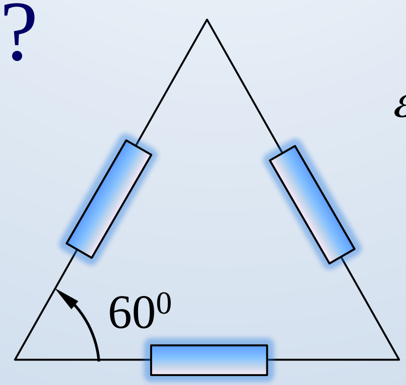
只要用 $\varepsilon_x,\ \varepsilon_y,\ \dfrac{\gamma_{xy}}{2}$ 代替应力分析中的 $\sigma_x,\ \sigma_y,\ \tau_{xy}$ 一切结论完全相同。

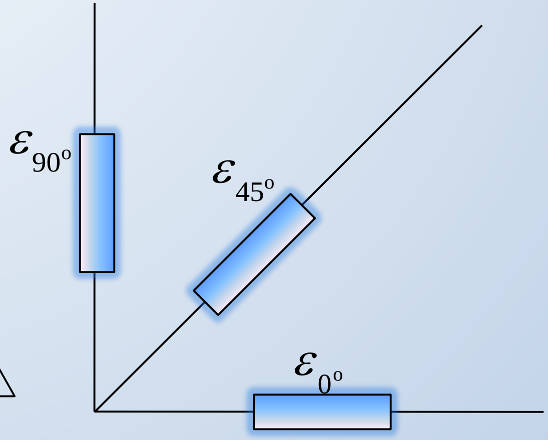
五. 应变分析的应用

通过测量, 得到一点处主应变 $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3 \rightarrow \sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3$

如何测出$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3$?

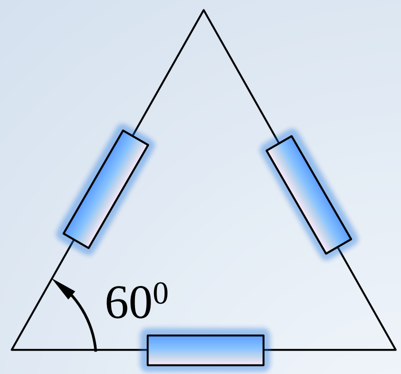
应变花

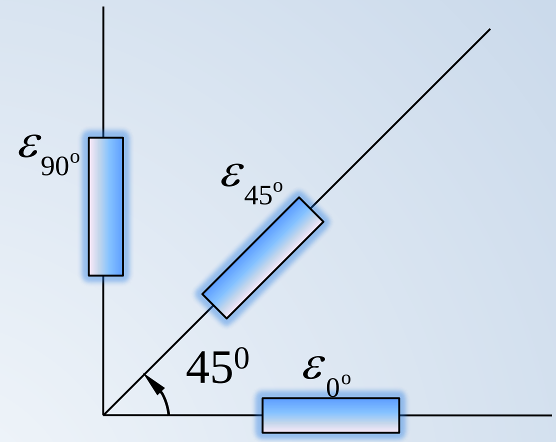




11.4 平面应力状态下的应变分析

应变花





测三个方向上的 $\varepsilon_{\alpha 1}, \varepsilon_{\alpha 2}, \varepsilon_{\alpha 3} \Rightarrow \varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy} \Rightarrow \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$

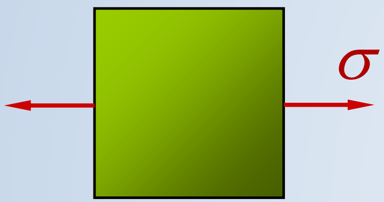
$$\varepsilon_\alpha = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\alpha - \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\alpha$$

$$\left.\begin{matrix}\varepsilon_{\max} \\ \varepsilon_{\min}\end{matrix}\right. = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

利用广义胡克定律，可得σ_1, σ_2, σ_3

11.5 广义胡克定律

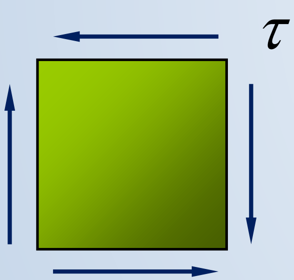
一. 广义胡克定律（应力应变关系）



$\sigma \leq \sigma_{\mathrm{p}}$

$\sigma = E\varepsilon$

$\varepsilon' = -\mu\varepsilon$



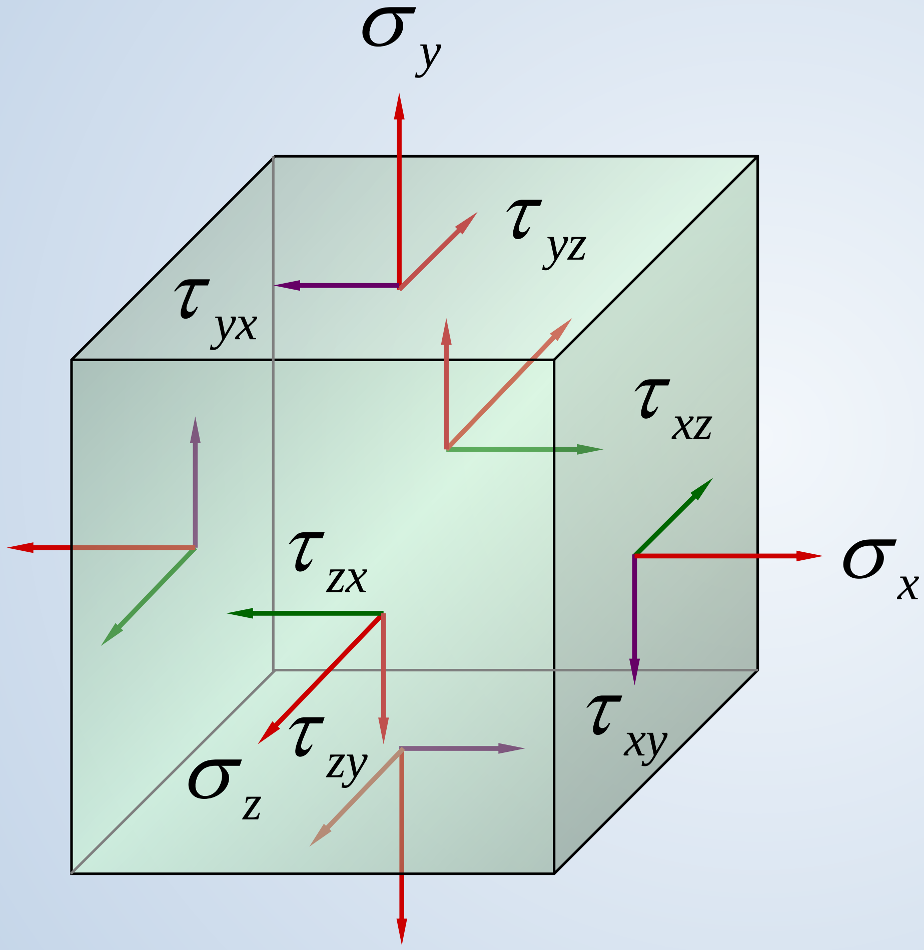
$\tau \leq \tau_{\mathrm{p}}$

$\tau = G\gamma$

各向同性材料

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

11.5 广义胡克定律



$\sigma \sim \varepsilon$

$\tau \sim \gamma$

?

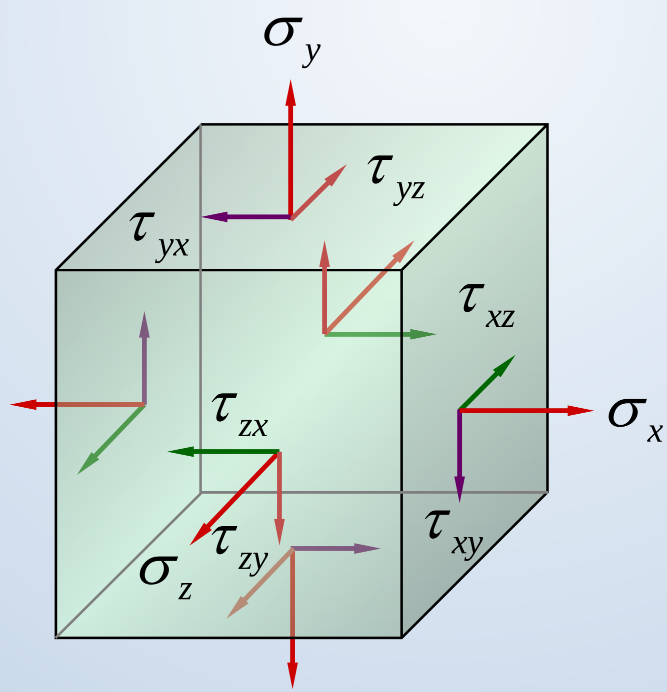
11.5 广义胡克定律

单元体具有6个独立的应力分量

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$$

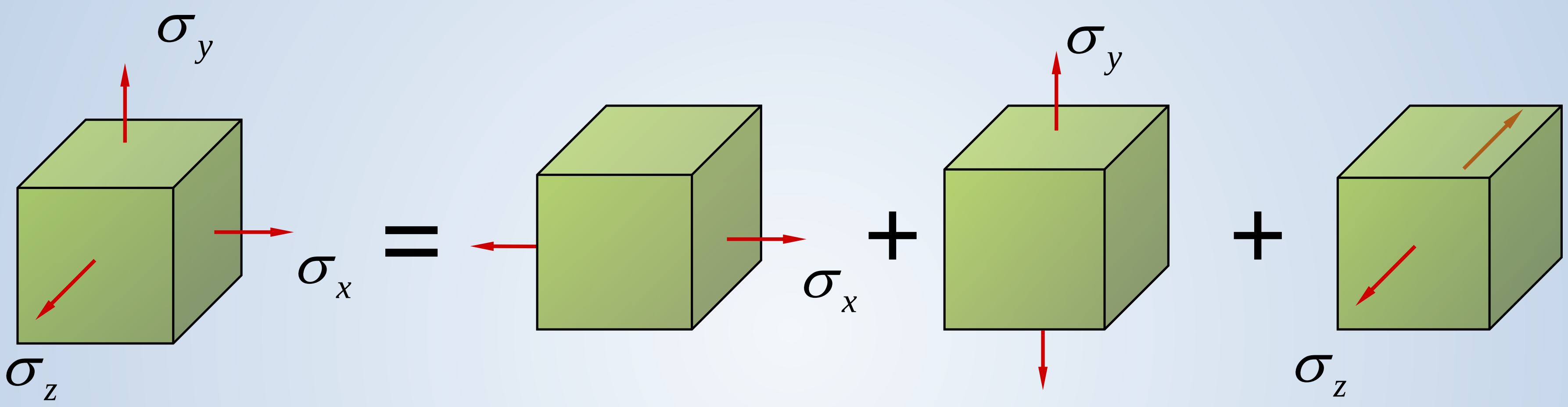
单元体具有6个独立的应变分量

$$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$$



11.5 广义胡克定律

应力—应变呈线性关系，满足叠加原理。



$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \qquad -\mu\frac{\sigma_y}{E} \qquad -\mu\frac{\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

11.5 广义胡克定律

同理可得ε_y, ε_z,　整理得：

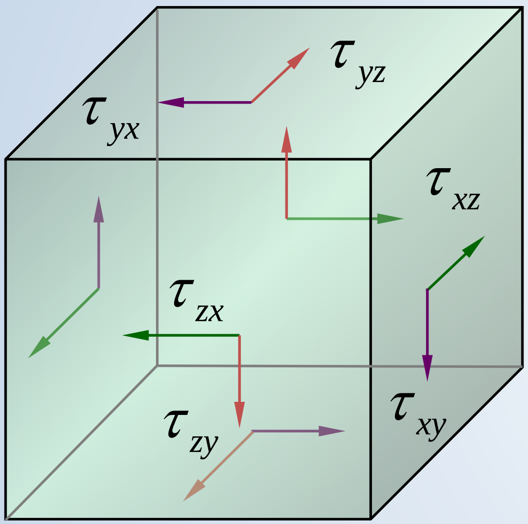
$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

11.5 广义胡克定律

γ_{xy} 只与 τ_{xy} 有关



$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

同理可得 γ_{yz} γ_{zx}

11.5 广义胡克定律

广义胡克定律

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

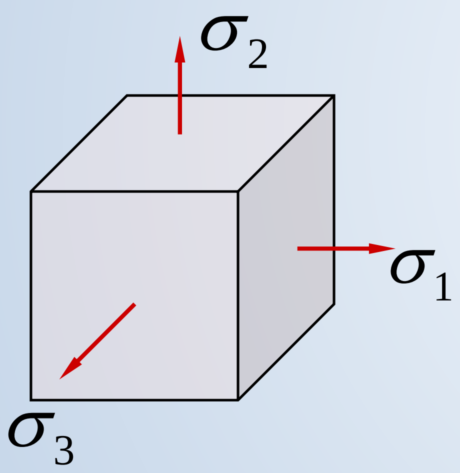
$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

11.5 广义胡克定律

对于主单元体有：（主应力—主应变）



$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

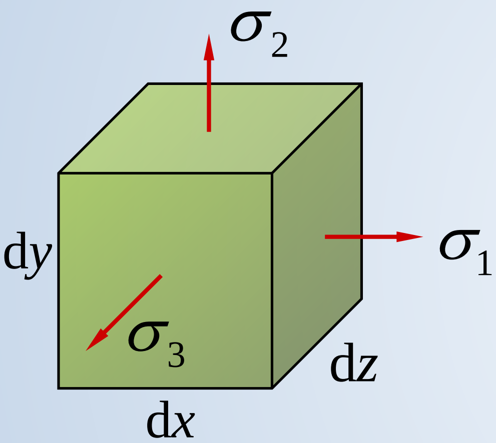
$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}[\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)]$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}[\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$

11.5 广义胡克定律

二. 体积应变与应力分量的关系



设:单元体变形前体积

$$V = \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z$$

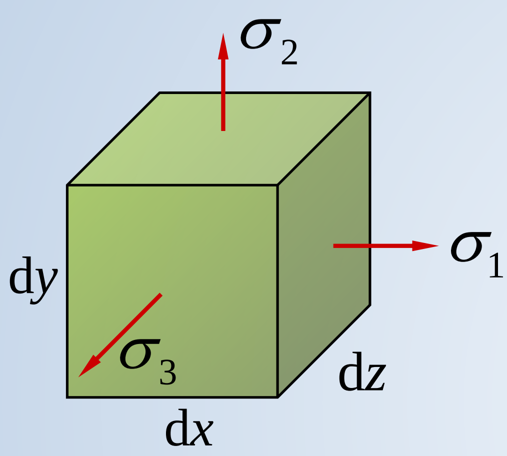
单元体变形后体积

$$V_1 = (1+\varepsilon_1)\mathrm{d}x(1+\varepsilon_2)\mathrm{d}y(1+\varepsilon_3)\mathrm{d}z$$

$$= (1+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

体积应变 $\theta = \dfrac{V_1 - V}{V} = \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$

11.5 广义胡克定律



由胡克定律，得

$$\theta = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

把上式写成 $\theta = \dfrac{\sigma_m}{K}$

$$\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)}$$ 体积弹性模量

$$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$$ 平均应力

11.5 广义胡克定律

说 明 体积胡克定律

1. 体积应变θ仅与σ_{m}成正比.

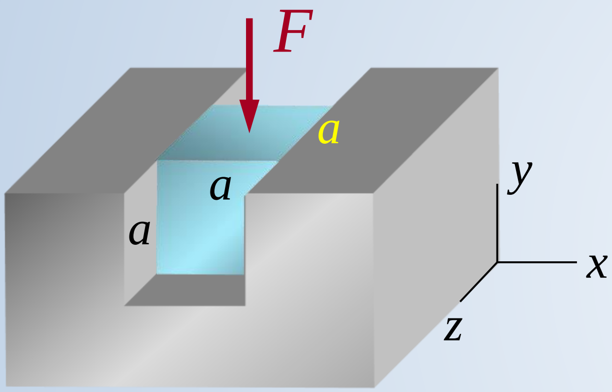
2. θ与τ无关

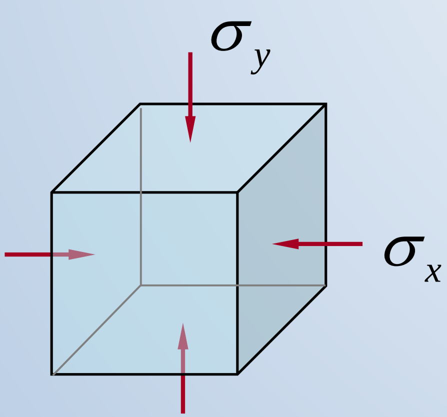
3. 仅与三个主应力（或三个正应力）之和有关，与三个正应力的比例无关.

三. 广义虎克定律应用

例11 已知: a=10mm，E=70GPa，μ=0.33， F=6kN

求主应力及主应变。





解：由题意可知:

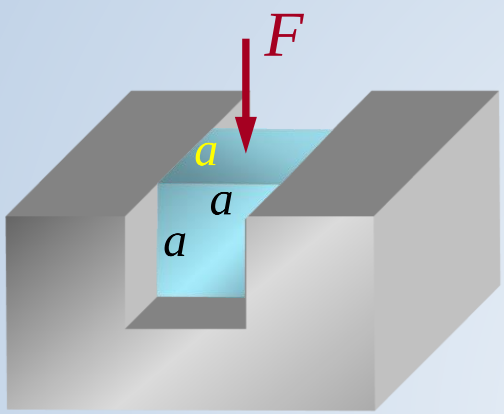
$$\varepsilon_x = 0,\quad \sigma_z = 0$$

$$\sigma_y = \frac{F}{A} = \frac{-6\times 10^3}{0.01\times 0.01} = -60\,\text{MPa}$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] = 0$$

得： $\sigma_x = \mu(\sigma_y + \sigma_z) = -19.8\text{MPa}$

11.5 广义胡克定律

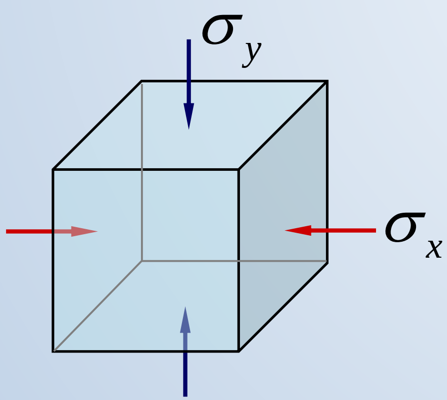


主应力为:

$$\sigma_1 = \sigma_z = 0$$

$$\sigma_2 = \sigma_x = -19.8\text{MPa}$$

$$\sigma_3 = \sigma_y = -60\text{MPa}$$



主应变为:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] = 3.76 \times 10^{-4}$$

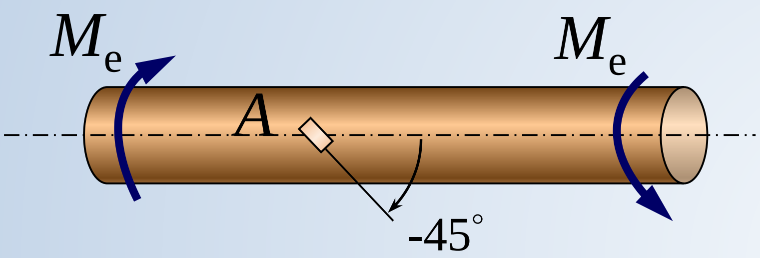
$$\varepsilon_2 = \varepsilon_x = 0$$

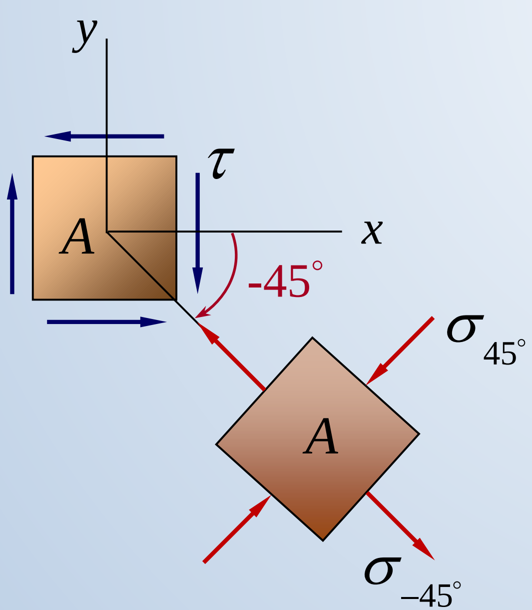
$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}[\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)] = -7.65 \times 10^{-4}$$

11.5 广义胡克定律

例12 已知: d=2cm, $\varepsilon_{-45^\circ}=500\times10^{-6}$, E=200GPa, μ=0.25

求外力偶矩的大小。





解：取A点单元体

A为纯剪应力状态

$$\sigma_{-45^\circ}=\sigma_1=\tau$$

$$\sigma_{45^\circ}=\sigma_3=-\tau$$

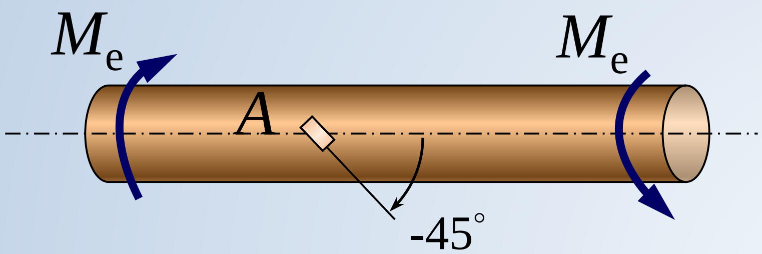
由广义胡克定律

$$\varepsilon_{-45^\circ}=\frac{1}{E}[\sigma_{-45^\circ}-\mu\sigma_{45^\circ}]=\frac{1+\mu}{E}\tau$$

$$\tau=\frac{E}{1+\mu}\varepsilon_{-45^\circ}$$

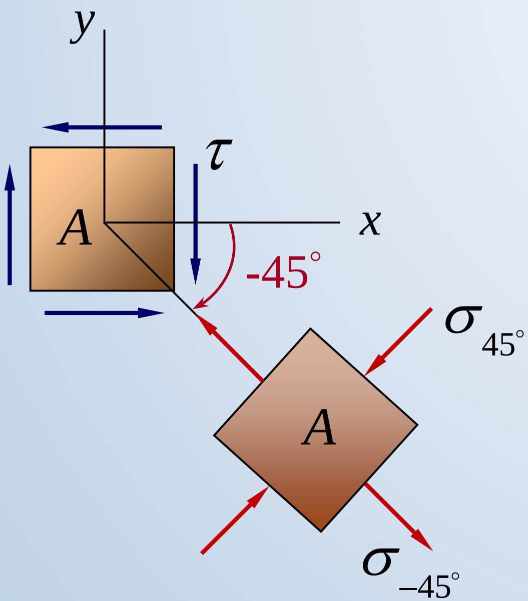
11.5 广义胡克定律

τ 为圆轴扭转时横截面上边缘处的最大切应力



$$\tau = \frac{M}{W_P} = \frac{M_e}{W_P}$$

与 $\tau = \frac{E}{1+\mu}\varepsilon_{-45^\circ}$ 联立求解，得



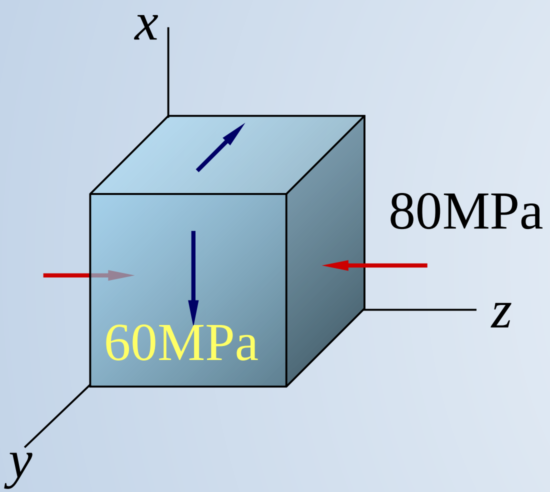
$$M_e = W_P \tau = \frac{\pi d^3}{16} \cdot \frac{E}{1+\mu}\varepsilon_{-45^\circ}$$

$$= \frac{\pi \cdot 2^3 \times 10^{-6} \times 200 \times 10^9 \times 500 \times 10^{-6}}{16 \times (1+0.25)}$$

$$= 125.6(\mathrm{N \cdot m})$$

11.5 广义胡克定律

例13 已知：E=200GPa，μ=0.25，求1.主应力 2.$\tau_{\max}$ 3.$\varepsilon_{\max}$
4.画三向应力状态应力圆



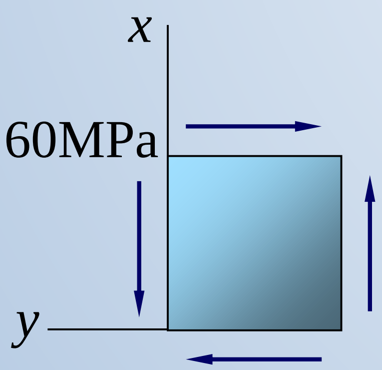
解：1. 求 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$

已知一个主应力 $\sigma_z=-80\text{MPa}$

xy面内为纯剪切应力状态，故

$$\sigma_{\max}=60\text{MPa},\quad \sigma_{\min}=-60\text{MPa}$$

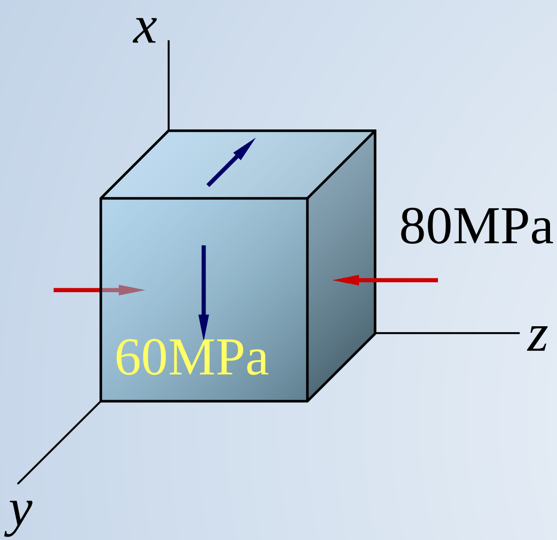
$$\sigma_1=60\text{MPa},\ \sigma_2=-60\text{MPa},\ \sigma_3=-80\text{MPa}$$



2.求$\tau_{\max}$

$$\tau_{\max}=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}=\frac{60-(-80)}{2}=70\text{MPa}$$

11.5 广义胡克定律



σ_1=60MPa,

$\sigma_2 = -60$MPa,

$\sigma_3 = -80$MPa

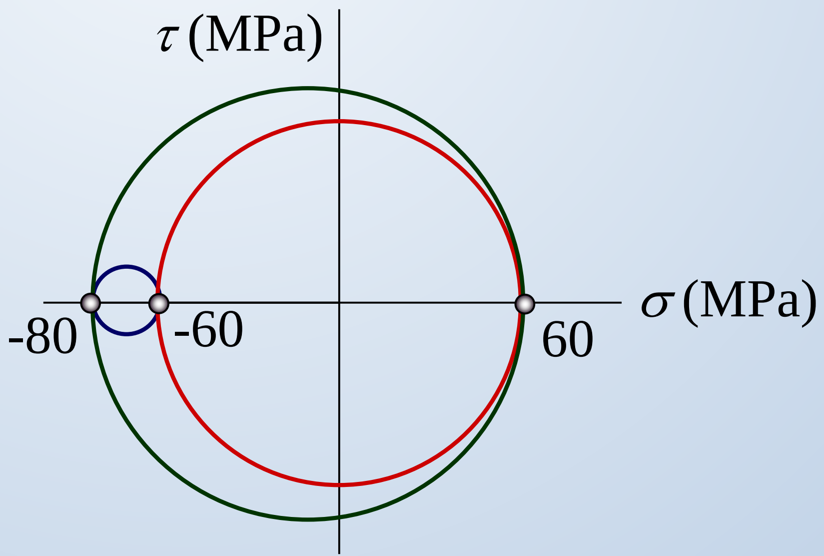
3. 代入广义胡克定律，得

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

$$= \frac{1}{200\times10^9}[60 - 0.25(-60 - 80)]\times10^6$$

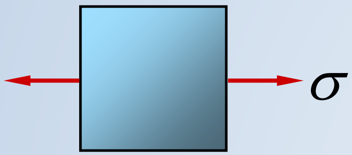
$$= 4.75\times10^{-4}$$

4. 画三向应力状态应力圆

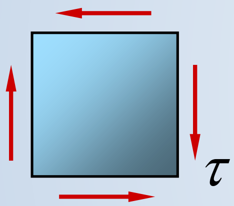


11.6 复杂应力状态的变形能

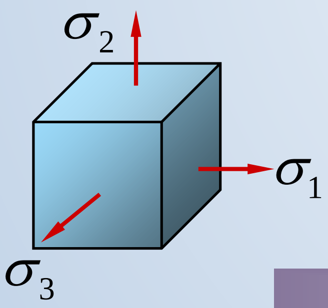
一. 三向应力状态的变形比能



$$u=\frac{1}{2}\sigma\varepsilon=\frac{\sigma^2}{2E}$$



$$u=\frac{1}{2}\tau\gamma=\frac{\tau^2}{2G}$$



$$u=\frac{1}{2}\sigma_1\varepsilon_1+\frac{1}{2}\sigma_2\varepsilon_2+\frac{1}{2}\sigma_3\varepsilon_3$$

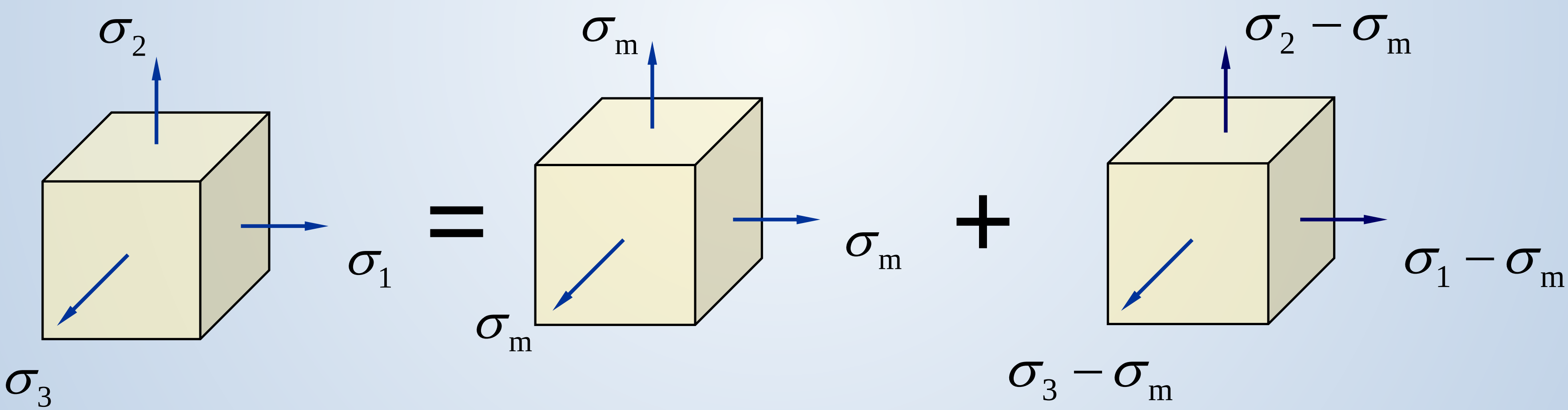
$$u=\frac{1}{2E}[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-2\mu(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)]$$

11.6 复杂应力状态的变形能

二. 体积改变比能与形状改变比能

任意单元体的变形总可分为体积改变和形状改变.

$$u = u_v + u_f$$

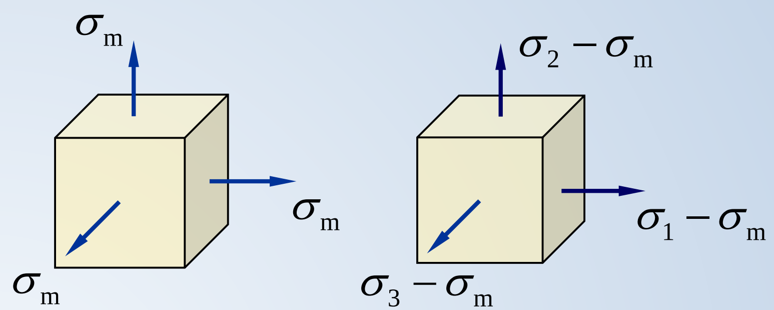


体积改变（无 τ ）

形状改变 $(\theta = 0)$

11.6 复杂应力状态的变形能

体积改变比能



$$u_v=\frac{1}{2E}[3\sigma_{\mathrm{m}}{}^2-2\mu(3\sigma_{\mathrm{m}}{}^2)]$$

$$=\frac{1-2\mu}{6E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2$$

$$u=\frac{1}{2E}[\sigma_1{}^2+\sigma_2{}^2+\sigma_3{}^2-2\mu\cdot(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)]$$

形状改变比能

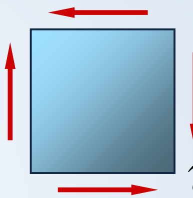
$$u_f=u-u_v=\frac{1+\mu}{6E}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]$$

11.6 复杂应力状态的变形能

例14 证明各向同性线弹性材料的三个弹性常数

E，G，μ 间的关系是 $G=\dfrac{E}{2(1+\mu)}$

证明：取纯剪切应力状态



$$u=\frac{1}{2}\tau\gamma=\frac{\tau^2}{2G}$$

按主应力计算u $\sigma_1=\tau$，$\sigma_2=0$，$\sigma_3=-\tau$

$$u=\frac{1}{2E}(2\tau^2+2\mu\tau^2)=\frac{1+\mu}{E}\tau^2$$

得 $\dfrac{\tau^2}{2G}=\dfrac{1+\mu}{E}\tau^2$ $\quad\therefore G=\dfrac{E}{2(1+\mu)}$

11.7 强度理论

一. 概 述

构件的应力状态复杂多样的，不能用实验的方法逐一建立强度条件，那么怎样建立这些复杂应力状态下构件的强度条件呢?

1. 强度理论的提出

材料的失效形式不仅与材料有关，与材料的应力状态也有关。相同材料不同应力状态下材料的失效形式不同，相同应力状态不同材料的失效形式也不一样。

11.7 强度理论

通过试验、实践和分析各种情况下的失效现象，提出一些假说：即无论何种材料，也无论何种应力状态，只要失效形式相同，便认为是相同的失效原因引起的。

2. 材料破坏的基本形式

（1）脆性断裂　（2）屈服(流动)破坏

分析断裂破坏屈服破坏原因，直接应用单向拉伸的实验结果，建立材料在各种应力状态下的断裂和屈服失效的判据，从而建立相应的强度条件。

11.7 强度理论

3. 引起材料失效的因素

力 → 材料 → 变形 → 破坏

一点处的量
- 应力 σ τ
- 应变 ε γ
- 比能 u_v u_f

11.7 强度理论

二. 四种常用强度理论

1. 第一类强度理论--- 断裂破坏理论

(1) 最大拉应力理论(第一强度理论)

认为最大拉应力是引起断裂的主要因素。

理论依据 $\sigma_{\mathrm{t\,max}} = \sigma_{\mathrm{u}} = \sigma_{\mathrm{b}}$

断裂准则 $\sigma_1 = \sigma_{\mathrm{b}}$

强度条件 $\sigma_1 \le [\sigma] = \dfrac{\sigma_{\mathrm{b}}}{n}$ $\quad \sigma_{\mathrm{r1}} = \sigma_1 \le [\sigma]$

相当应力 $\sigma_{\mathrm{r1}} = \sigma_1$

11.7 强度理论

（2）最大伸长线应变理论(第二强度理论)

认为最大伸长线应变是引起断裂的主要因素

理论依据 $$\varepsilon_{\mathrm{t\,max}} = \varepsilon_{\mathrm{u}} = \frac{\sigma_{\mathrm{b}}}{E}$$

断裂准则 $$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{\sigma_{\mathrm{b}}}{E}$$

强度条件 $$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \le [\sigma]$$

$$\boxed{\sigma_{\mathrm{r}2} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \le [\sigma]}$$

相当应力 $$\sigma_{\mathrm{r}2} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)$$

11.7 强度理论

2. 第二类强度理论---屈服破坏理论

(1) 最大切应力理论(第三强度理论)

认为最大切应力是引起材料屈服的主要因素。

理论依据 $$\tau_{\max} = \tau_{u} = \frac{\sigma_{s}}{2}$$

屈服准则 $$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{1} - \sigma_{3}}{2} = \frac{\sigma_{s}}{2}$$ 屈雷斯卡准则

强度条件 $$\sigma_{1} - \sigma_{3} \leq [\sigma]$$ $$\sigma_{r3} = \sigma_{1} - \sigma_{3} \leq [\sigma]$$

相当应力 $$\sigma_{r3} = \sigma_{1} - \sigma_{3}$$

11.7 强度理论

(2) 形状改变比能理论(第四强度理论)

认为形状改变比能是引起材料屈服的主要因素。

理论依据 $u_{f\max}=u_{fu}$

屈服准则 $u_{f\max}=u_{fu}=\dfrac{1+\mu}{6E}(2\sigma_s^2)$ 密赛斯准则

强度条件 $\sqrt{\dfrac{1}{2}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]}\le[\sigma]$

$$\sigma_{r4}=\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]}\le[\sigma]$$

相当应力 $\sigma_{r4}=\sqrt{\dfrac{1}{2}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]}$

11.7 强度理论

三. 强度理论的适用范围

1. 断裂破坏理论 （第一，二强度理论）

脆性材料

塑性材料-----三向接近等拉

2. 屈服破坏理论 （第三，四强度理论）

塑性材料-----除三向等拉

Thank you!