



香农采样定理

吉林大学 唐志国

白夜追凶：飙车



诡异的车轮

车轮效应

当车**越走越快**，其车轮似乎越走越慢，变成**静止**，甚至朝**相反方向运转**。
在直升飞机的翼片和螺旋桨上，亦然。



香农采样定理

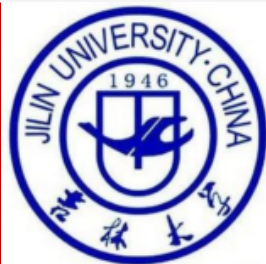


采样定理

信号重构

量化与数字滤波

01



采样定理



1889-1976

Nyquist, Harry. "Certain factors affecting telegraph speed".
Bell System Technical Journal, 3, 324-346, 1924

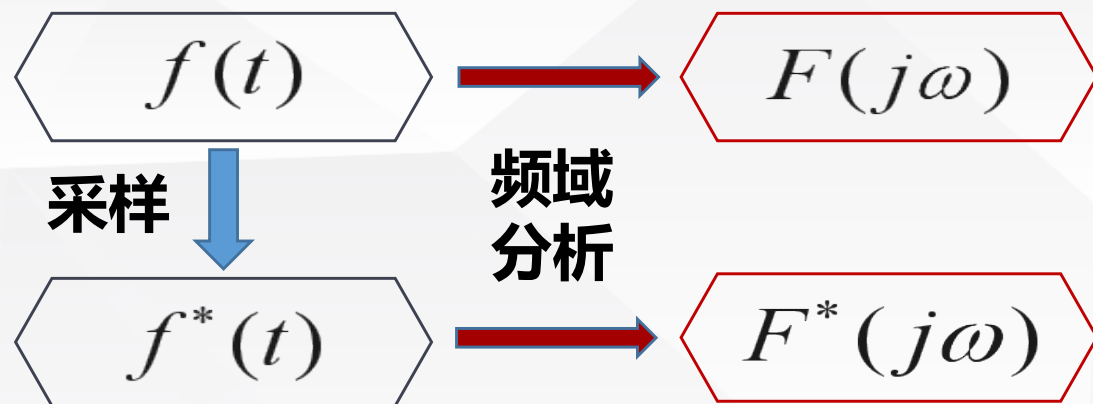
Certain Factors Affecting Telegraph Speed¹

By H. NYQUIST

SYNOPSIS: This paper considers two fundamental factors entering into the maximum speed of transmission of intelligence by telegraph. These factors are signal shaping and choice of codes. The first is concerned with the best wave shape to be impressed on the transmitting medium so as to permit of greater speed without undue interference either in the circuit under consideration or in those adjacent, while the latter deals with the choice of codes which will permit of transmitting a maximum amount of intelligence with a given number of signal elements.

It is shown that the wave shape depends somewhat on the type of circuit over which intelligence is to be transmitted and that for most

计算机控制系统



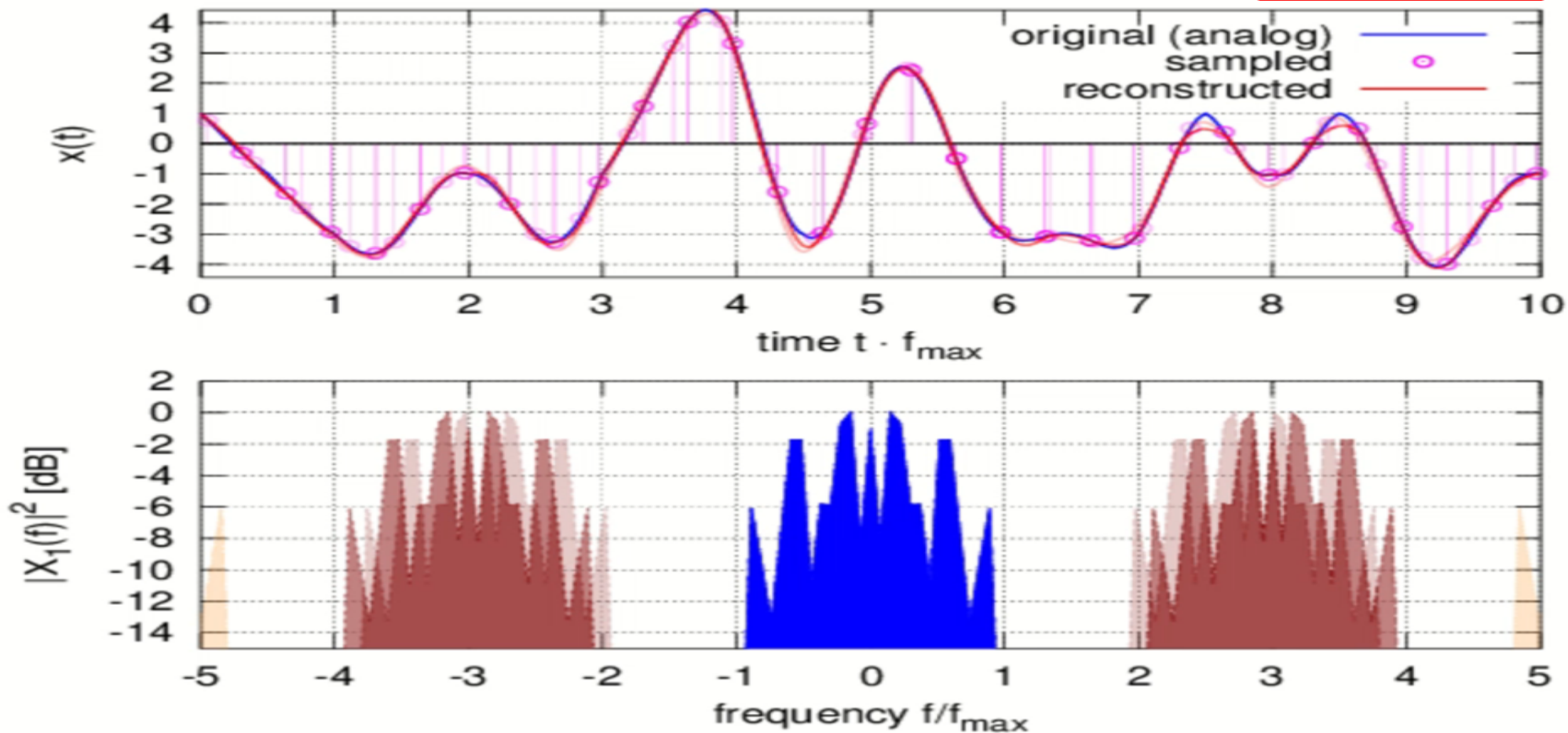
$$F^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(j\omega - jk\omega_s)$$

当 $k = 0$ 时, $F^*(j\omega) = \frac{1}{T} F(j\omega)$ --- 采样信号的基本频谱正比于原连续信号 $f(t)$ 的频谱, 仅幅值相差 $1/T$ 。

当 $k \neq 0$ 时, 派生出以 ω_s 为周期的高频谐波分量 --- 每隔1个 ω_s , 重复原连续频谱 $F^*(j\omega)$ 次。

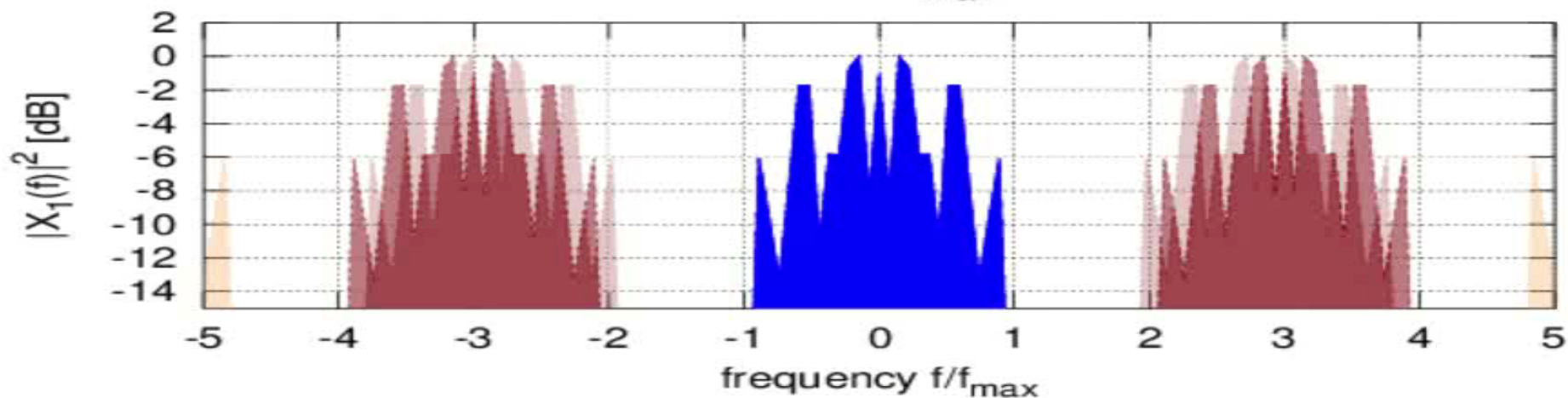
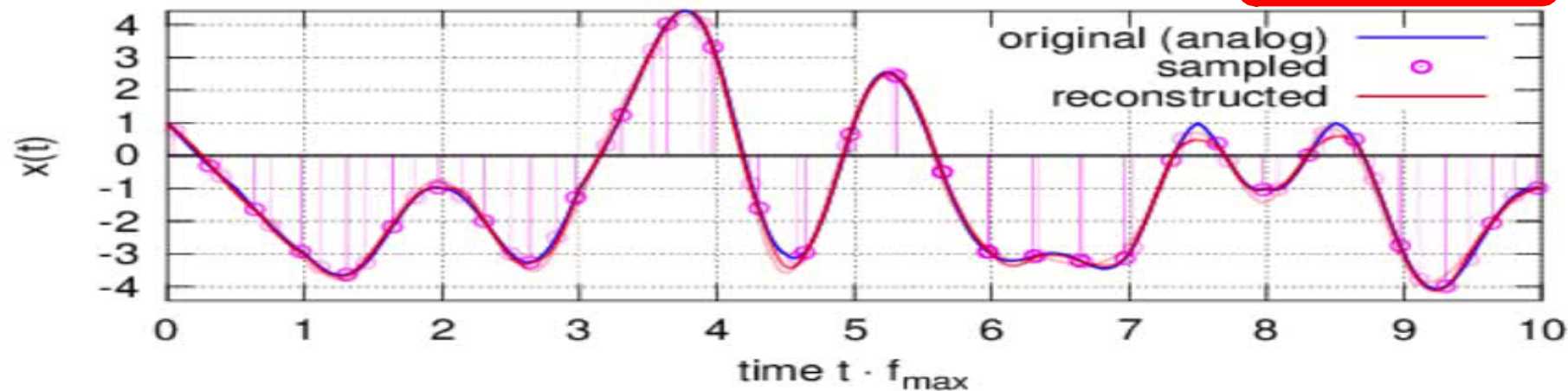
计算机控制系统

Time domain sampling and corresponding spectrum, ($f_s/f_{\max} = 3.00$)





计算机控制系统

Time domain sampling and corresponding spectrum, ($f_s/f_{\max} = 3.00$)

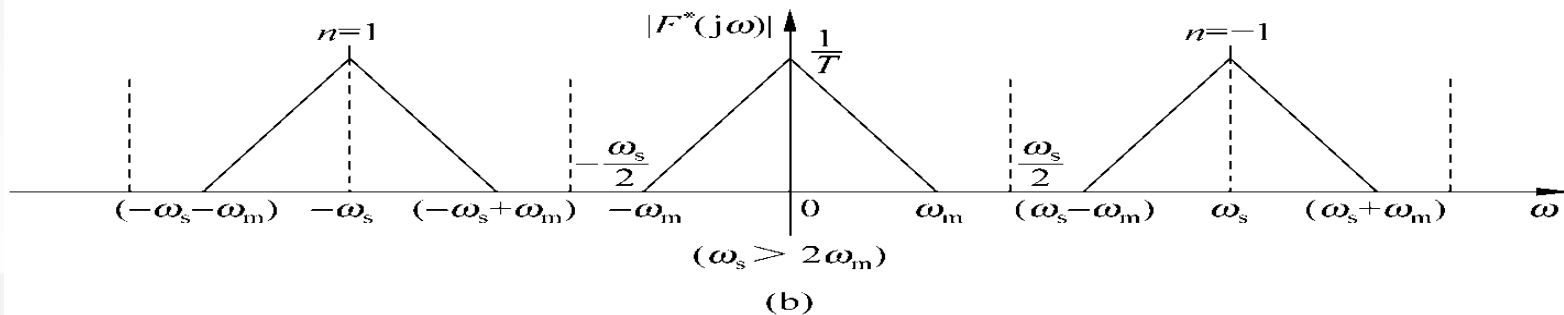
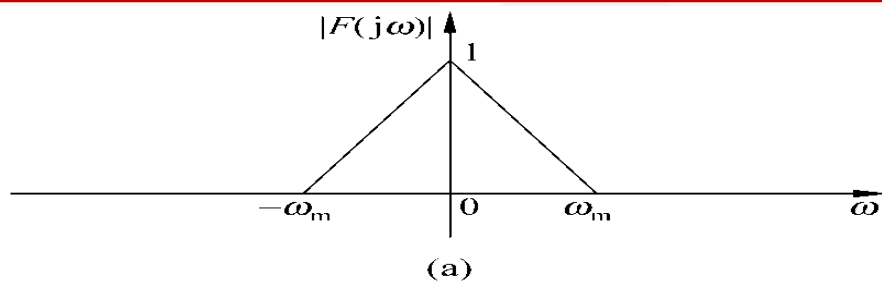


香农采样定理

-  如果连续信号 $f(t)$ 具有有限频谱，其最高频率为 ω_{\max} ，则对 $f(t)$ 进行周期采样且采样角频率 $\omega_s \geq 2\omega_{\max}$ 时，连续信号可以由采样信号唯一确定，亦即可以从 $f^*(t)$ 无失真地恢复 $f(t)$ 。
-  其中， $\omega_s/2$ 称为奈奎斯特频率。

📍 若连续信号的频谱带宽有限，最高频率为 ω_{\max}

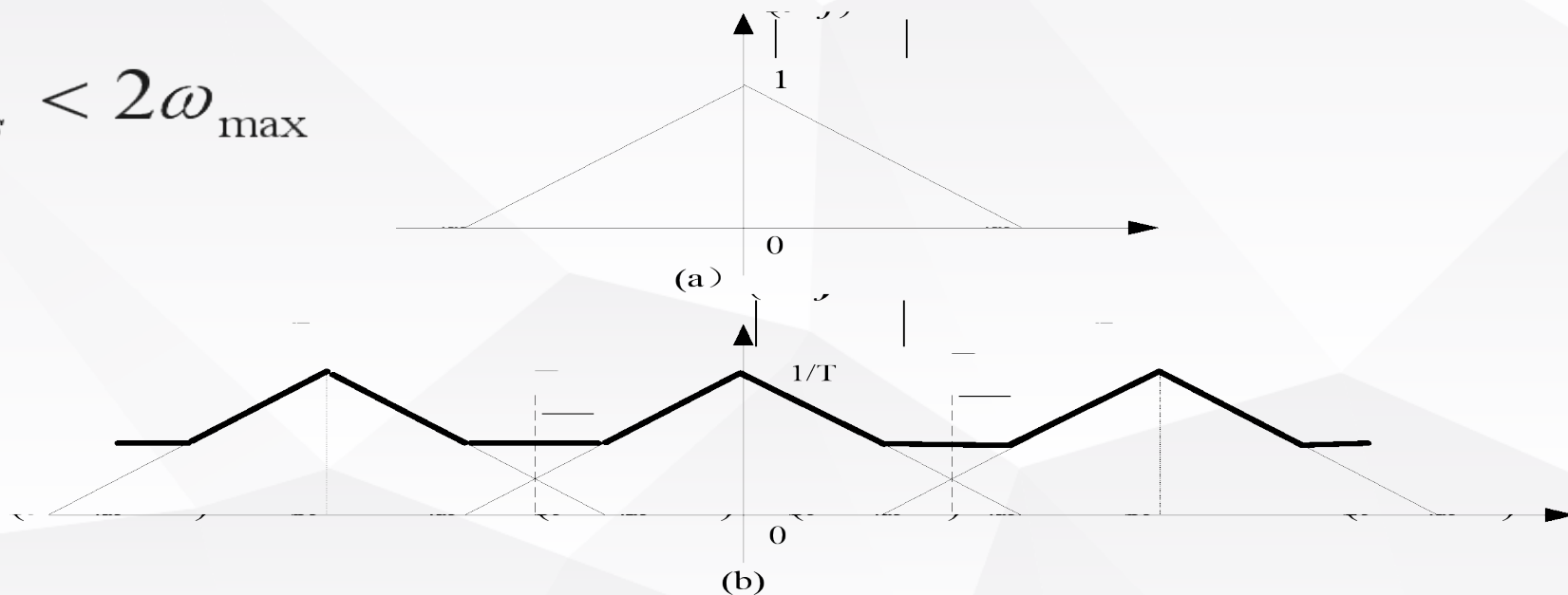
$$\omega_s \geq 2\omega_{\max}$$



采样后衍生出的高频频谱和基本频谱不会重叠。

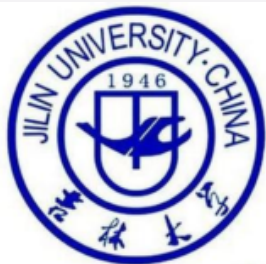
📍 若连续信号的频谱带宽有限，最高频率为 ω_{\max}

$$\omega_s < 2\omega_{\max}$$



采样信号各频谱分量互相交叠，产生严重**频率混叠**现象。

02



信号重构

计算机控制系统



信号重构：是指把离散信号变为连续信号的过程，它是采样的逆过程，也称为信号保持、信号恢复或数据保持。

条件

有限频谱

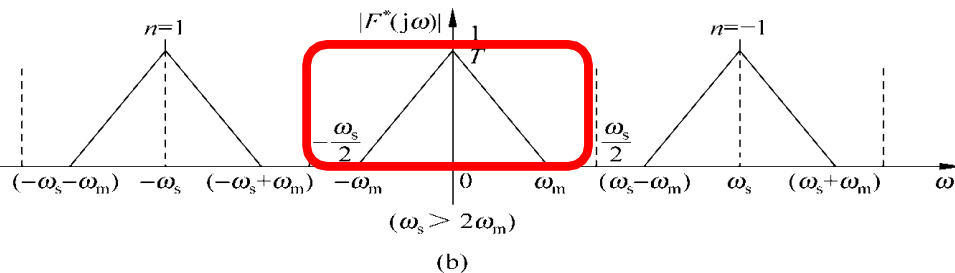
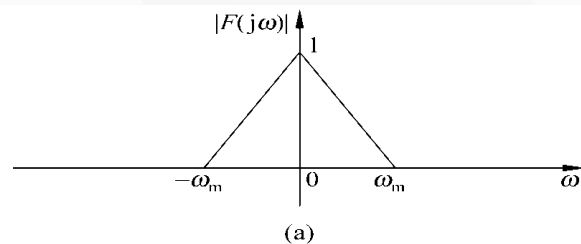
采样定理

低通滤波

$f(t)$

T

$f^*(t)$



计算机控制系统

非理想恢复过程

- 物理上可实现的恢复只能以现在时刻及过去时刻的采样值为基础，通过外推插值来实现----保持器
- m阶保持器数学形式：

$$f_{hm}(t) = \sum_{i=0}^m a_i (t-kT)^i \quad kT \leq t < (k+1)T$$
$$f_{hm}(kT-iT) = f(kT-iT) \quad i=0,1,\dots,m$$

- 零阶保持器

$$f_{h0}(t) = f(kT) \quad kT \leq t < (k+1)T$$

- 一阶保持器

$$f_{h1}(t) = f(kT) + \frac{f(kT) - f(kT-T)}{T} (t-kT) \quad kT \leq t < (k+1)T$$

计算机控制系统

- **零阶保持器**

$$f_{h0}(t) = f(kT) \quad kT \leq t < (k+1)T$$

$$H_0(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

- **一阶保持器**

$$f_{h1}(t) = f(kT) + \frac{f(kT) - f(kT - T)}{T}(t - kT) \quad kT \leq t < (k+1)T$$

$$H_1(s) = T(1 + Ts)\left(\frac{1 - e^{-Ts}}{s}\right)^2$$

在计算机控制系统中，采样频率或采样周期的选择非常重要，它直接影响控制效果，而且还影响着系统的稳定性。

- ✓ 按系统闭环频带选取
- ✓ 按系统的开环传递函数选取
- ✓ 按系统开环阶跃响应的上升时间选取
- ✓ 根据生产过程控制的经验选取

03



量化与数字滤波

数字滤波，是把A/D转换得到的数据通过软件按照一定的算法进行平滑加工等处理，再送给控制程序运算，以增强其有效信号、消除或减小各种干扰和噪声，从而提高控制精度和系统的可靠性与稳定性。

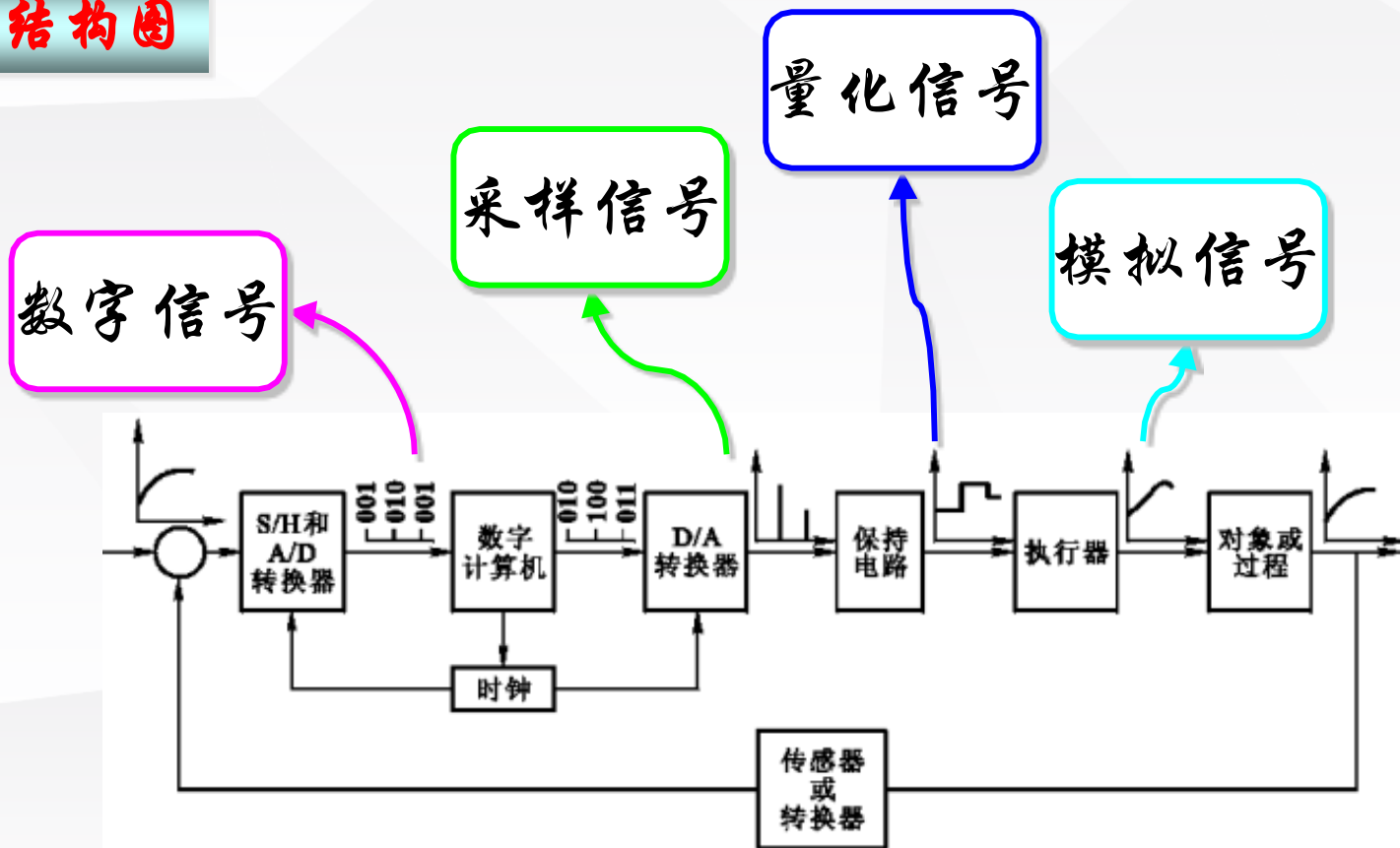
- ✓ 限幅滤波方法
- ✓ 中值滤波方法
- ✓ 算术平均滤波方法
- ✓ 一阶滞后滤波方法
- ✓ 复合滤波方法

信号的量化处理对信息的大小会产生影响，会造成量化误差，由于计算机技术的发展，数字二进制的位数较多，在系统中引起的量化误差较小，常常可以忽略。可引起系统量化误差的原因有：

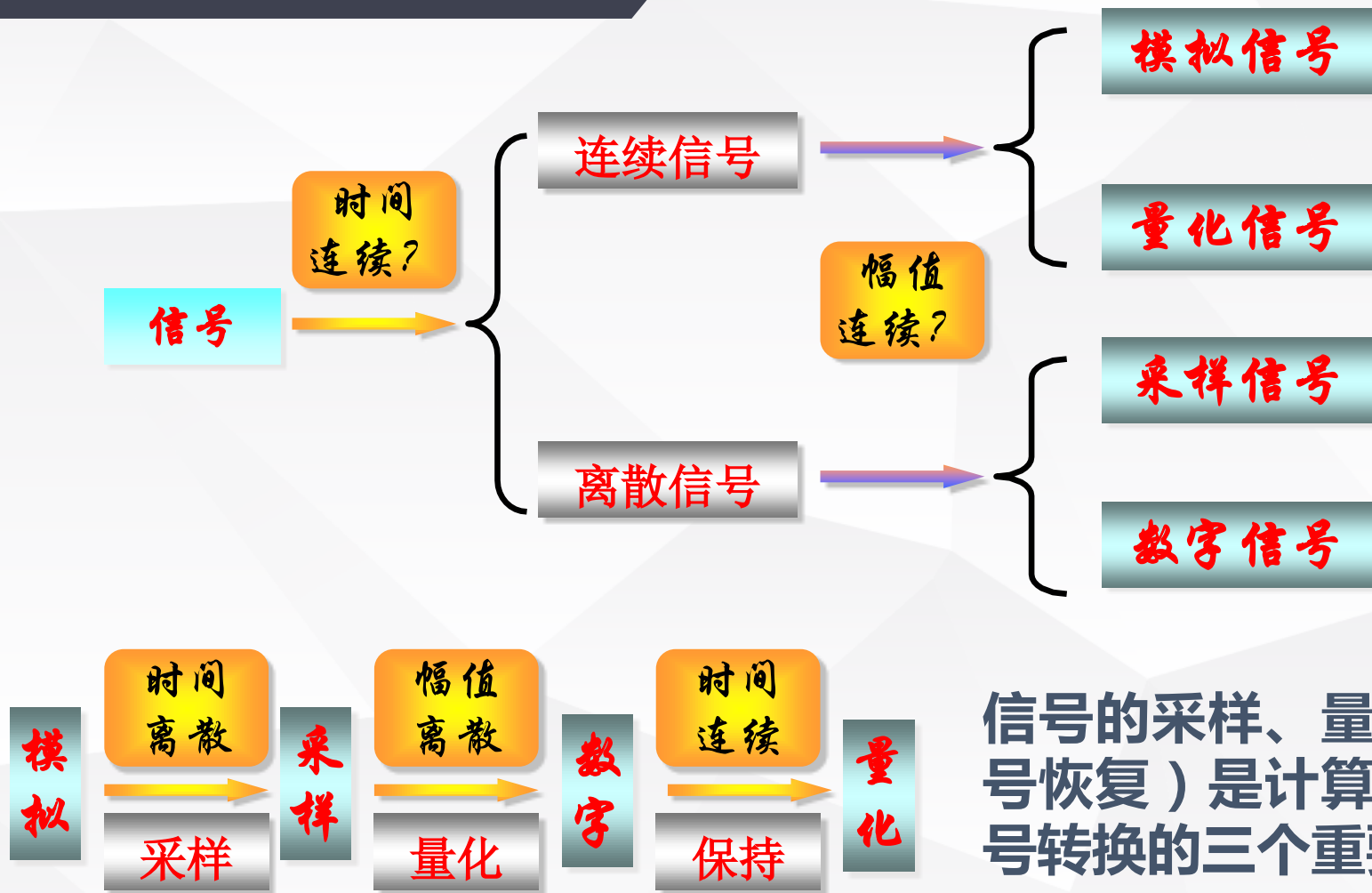
- ✓ A/D量化效应
- ✓ D/A量化效应
- ✓ 控制器参数的量化效应
- ✓ 控制规律计算中的量化效应

计算机控制系统

系统结构图



计算机控制系统



信号的采样、量化与保持（信号恢复）是计算机控制系统信号转换的三个重要过程。

小结

一个定理

香农采样定理

$$\omega_s \geq 2\omega_{\max}$$

两种结果

$$F^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(j\omega - jk\omega_s)$$

k=0

k≠0

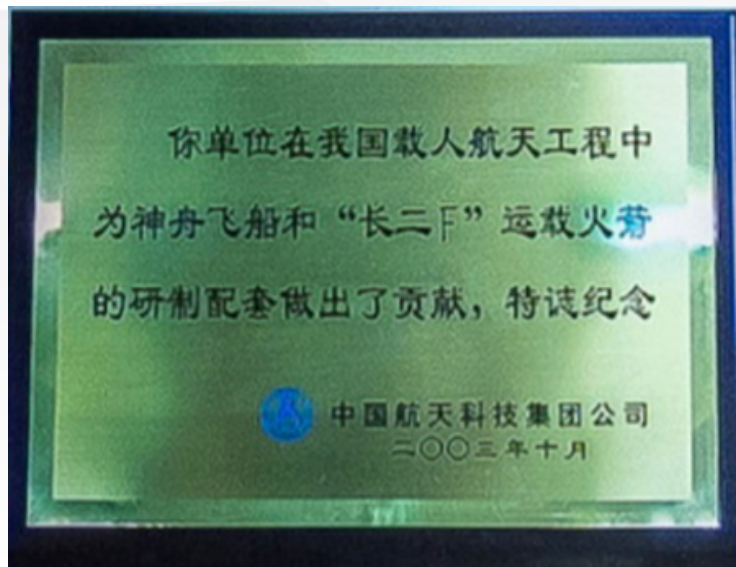
三个条件

有限频谱

采样定理

低通滤波

第二讲总结



吉林大学通信工程学院连续十年间，负责我国载人航天飞船工程的部分电子器件可靠性筛选工作，无一差错，保证了“神舟一号”到“神州六号”一次次发射成功！

“神舟五号”载人航天工程成功后受到航天集团的表彰。

作 业

请**小组查阅资料并讨论**，除了香农采样定理可以确定采样周期的上限值，工程上还有哪些确定采样周期的方法与设备。

请**小组查阅资料并讨论**，利用香农采样定理解释车轮效应。

请**小组合作**，设计一个实验，并用MATLAB仿真实现。实验内容：不同采样周期对电机响应曲线的影响（选做）。

计算机控制系统

参考书籍

李元春等. 计算机控制系统，第二版，高等教育出版社，2009

高金源等. 计算机控制系统，高等教育出版社，2010

S.K. Mitra. 数字信号处理，第四版，清华大学出版社，2012

相关资料

车轮效应的优酷视频和相应资料；电视剧《白夜追凶》；

http://webdemo.inue.unituttgart.de/webdemos/02_lectures/uebertragungstechnik_1/sampling_theorem/



谢谢！