吉林大学
JILIN UNIVERSITY

工程力学

第10章 弯曲变形

第10章　弯曲变形

§10. 1　概述

§10. 2　挠曲线的微分方程　刚度条件

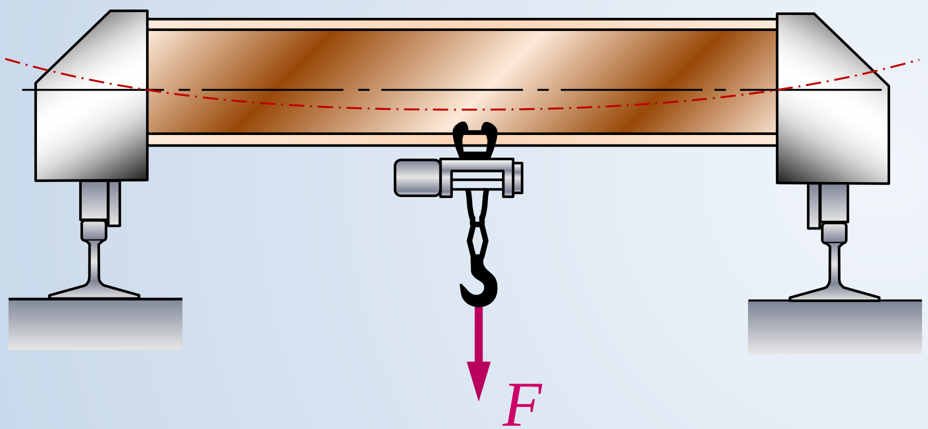
§10. 3　用积分法求弯曲变形

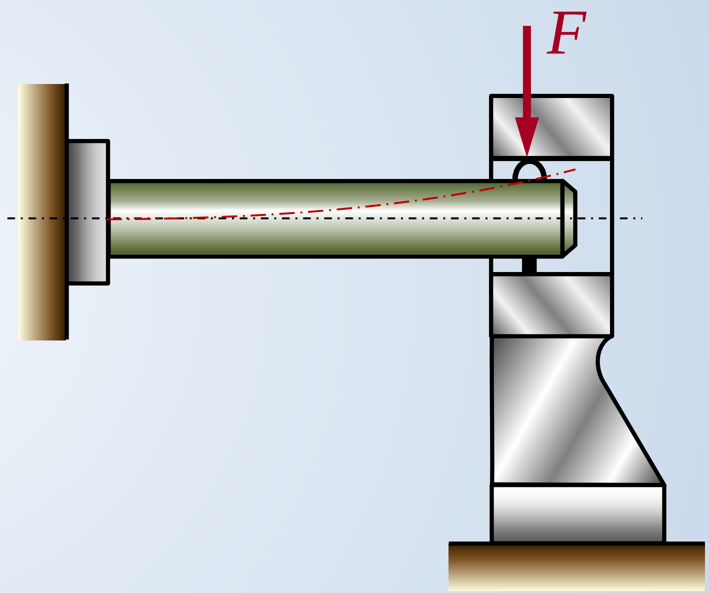
§10. 4　用叠加法求弯曲变形

§10. 5　提高弯曲刚度的一些措施

10.1 概 述

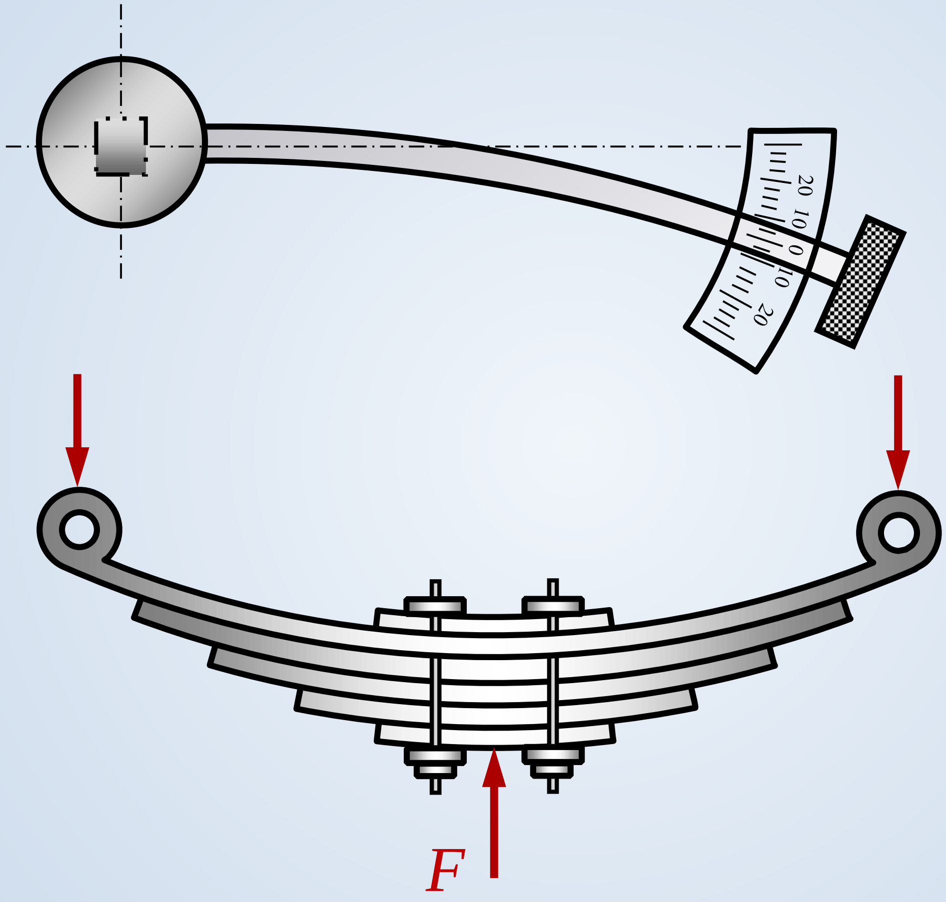
一. 工程中弯曲变形实例





限制变形

10.1 概 述



利用变形

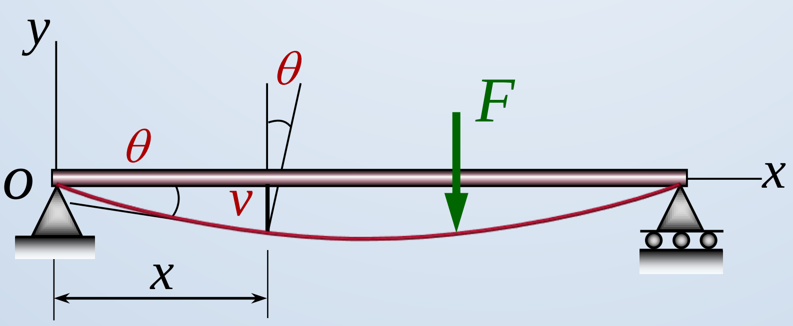
10.1 概 述

二. 定义弯曲变形的物理量

1.挠度v — 横截面形心(轴线上点)沿y方向的垂直位移。（符号：向上为正）

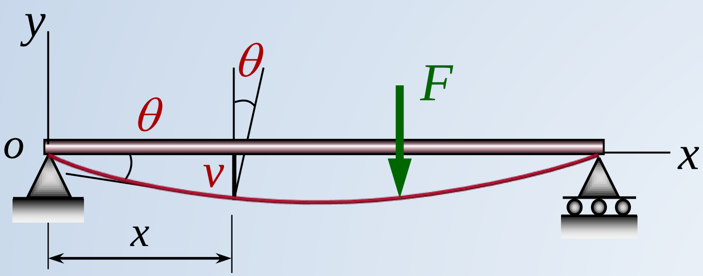
挠曲线方程 $v = f(x)$ 平坦曲线

2.转角θ — 横截面相对其原来位置转过的角度。（符号：逆时针为正）



10.1 概 述

3.挠度与转角的关系:



因挠曲线非常平坦 $\theta \approx 1^\circ \sim 2^\circ$

$$\theta \approx \tan\theta = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = f'(x)$$

v, θ关系 — 截面转角近似等于挠曲线上与该截面对应点切线的斜率.

只要求解出一个, 就可以根据v, θ关系求解出另一个.

10.2 挠曲线的微分方程 刚度条件

一. 挠曲线近似微分方程

从力学方面：

纯弯曲 $$\frac{1}{\rho}=\frac{M}{EI_z}$$

横力弯曲 $$\frac{1}{\rho(x)}=\frac{M(x)}{EI_z}$$

从数学方面： $$\frac{1}{\rho}=\frac{\pm v''}{(1+v'^2)^{3/2}}$$

略去v'^2，得： $$\frac{1}{\rho}=\pm v''$$

10.2 挠曲线的微分方程 刚度条件

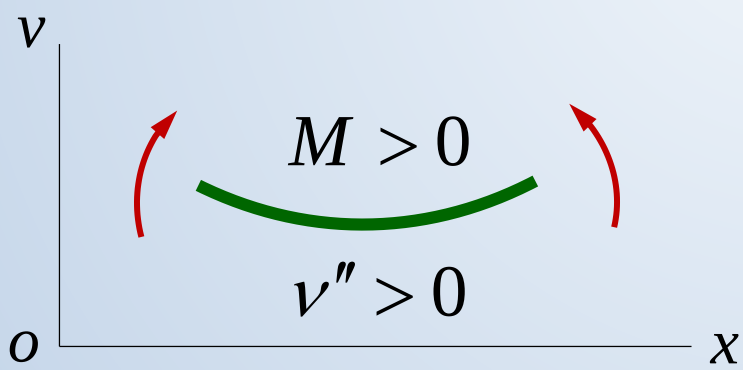
$$\frac{1}{\rho(x)}=\frac{M(x)}{EI_z}$$

综合力学、数学两方面

$$\frac{M(x)}{EI}=\pm v''$$

$$\frac{1}{\rho}=\pm v''$$

$$v''=\frac{M(x)}{EI}$$



$$\boxed{EIv''=M(x)}$$

二. 刚度条件

挠度 $\boxed{|f|_{\max} \le [f]}$

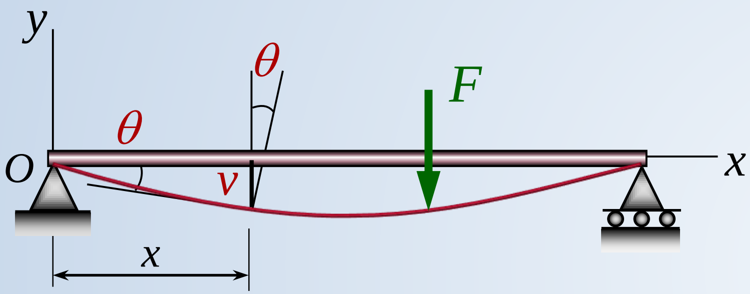
转角 $\boxed{|\theta|_{\max} \le [\theta]}$

$[f]$, $[\theta]$ 是工程中规定的许可挠度和转角

$$|f|_{\max} = ? \quad |\theta|_{\max} = ?$$

10.3 用积分法求弯曲变形

一.转角方程和挠度方程



根据 $\boxed{EIv'' = M(x)}$

当梁内 l 段 $EI = C$,

弯矩方程为 $M(x)$ 时

等式两边积分一次 $EI\theta(x) = EIv' = \int M(x)\mathrm{d}x + C$

等式两边积分二次 $EIv(x) = \int[\int M(x)\mathrm{d}x]\mathrm{d}x + Cx + D$

式中C，D为积分常数

10.3 用积分法求弯曲变形

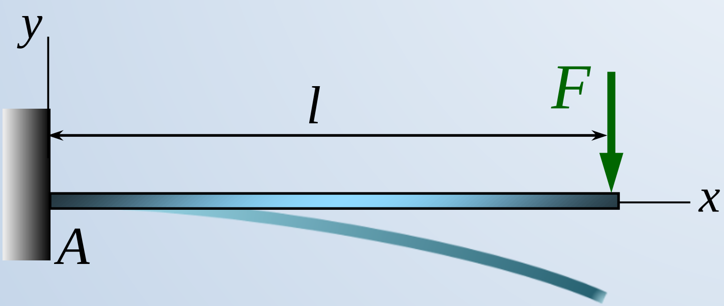
二. 确定积分常数

若梁需分n段方程，出现$2n$积分常数，根据**变形的边界条件**，确定积分常数。

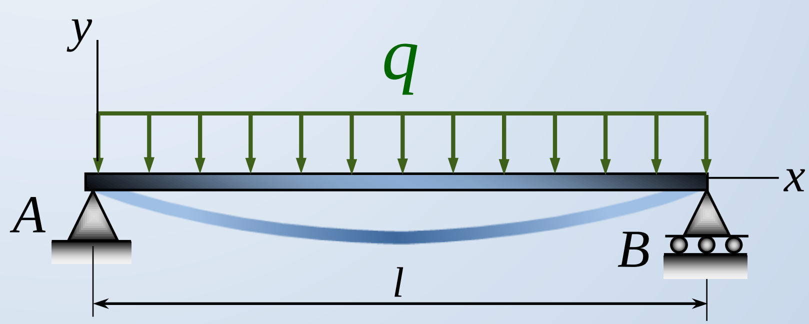
边界条件 = 支撑条件 + 连续条件

1. 支撑条件

刚性支撑



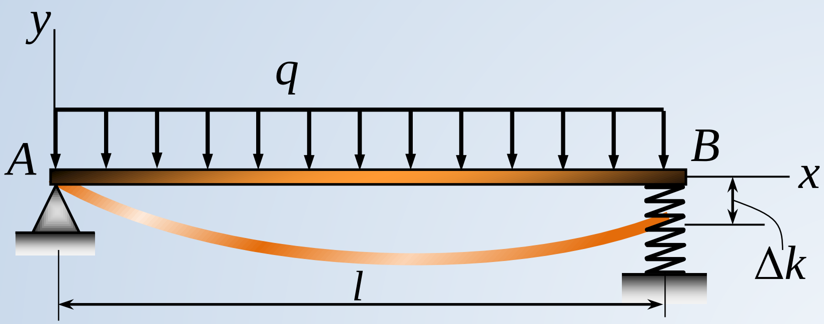
$$x=0,\quad v_A=0\ ,\quad \theta_A=0$$

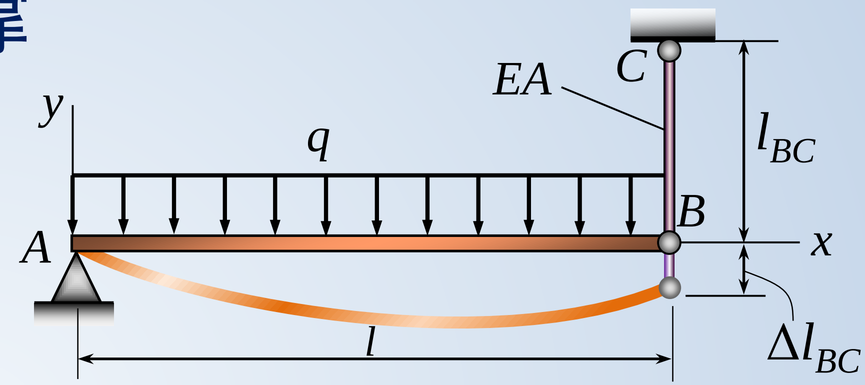


$$x=0,\quad v_A=0\ ;\quad x=l,\quad v_B=0$$

10.3 用积分法求弯曲变形

弹性支撑



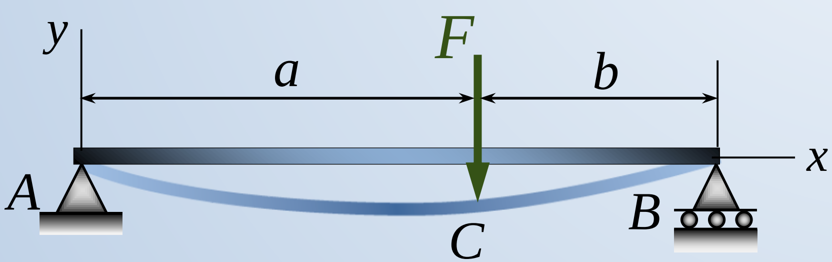


$$x=0,\ \ v_A=0;\ \ x=l,\ \ v_B=-\Delta k$$

$$x=0,\ \ v_A=0;\ \ x=l,\ \ v_B=-\Delta l_{BC}$$

2. 连续条件

$M(x)$, EI 分段C处梁光滑连续

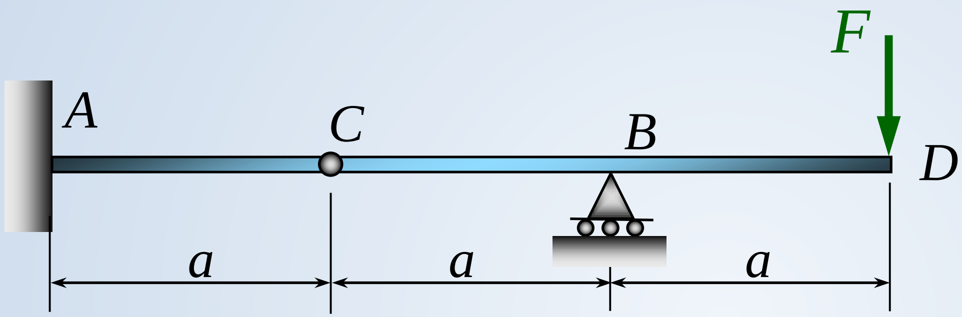


挠度连续 + 转角连续

$$x=a,\ \ v_C^-=v_C^+;\ \ x=a,\ \ \theta_C^-=\theta_C^+$$

10.3 用积分法求弯曲变形

写出梁确定变形方程积分常数的边界条件



$$x=0,\quad v=0,\quad \theta=0;$$

$$x=2a,\ v=0;$$

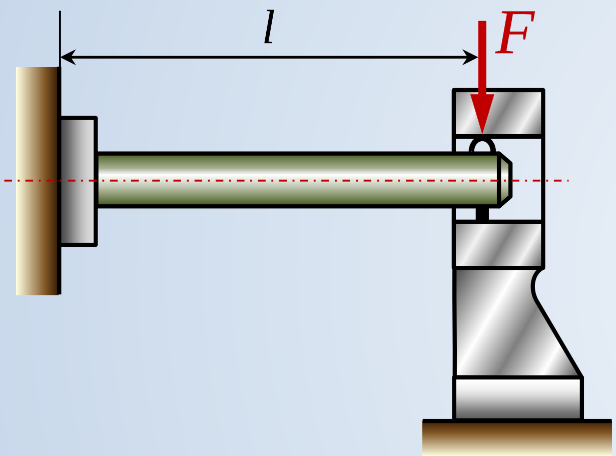
$$x=a,\quad v_C^-=v_C^+;$$

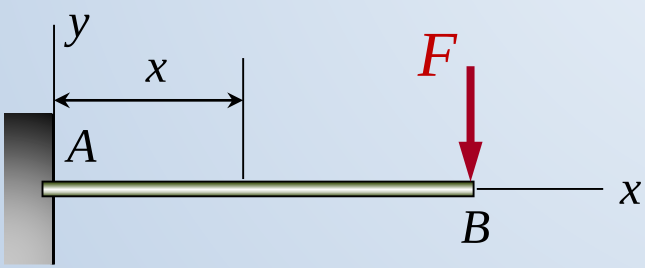
$$x=2a,\ v_B^-=v_B^+,\ \theta_B^-=\theta_B^+$$

10.3 用积分法求弯曲变形

例1 镗床镗孔，F=200N, d=10mm, l=50mm. E=210GPa

求：1. f_{max} 2. θ_{max}





解：1.列出挠曲线微分方程

$$M(x) = -F(l-x)$$

$$EIv'' = -F(l-x)$$

2.积分求转角方程挠曲线方程

$$EIv' = \frac{1}{2}Fx^2 - Flx + C$$

$$EIv = \frac{1}{6}Fx^3 - \frac{1}{2}Flx^2 + Cx + D$$

3. 利用边界条件确定积分常数

$$\theta_A = v'_{x=0} = 0 \qquad C = EI\theta_A = 0$$

$$f_A = v_{x=0} = 0 \qquad D = EIv_A = 0$$

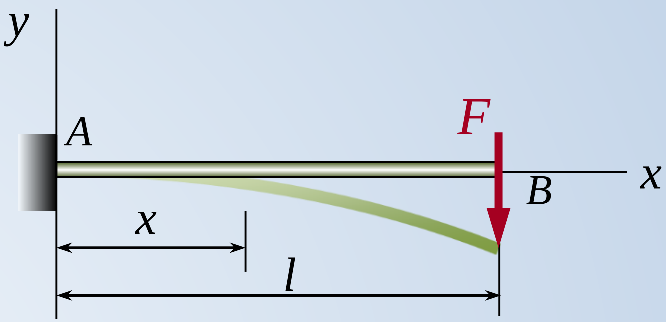
10.3 用积分法求弯曲变形

4. 求 $\theta_{\max}$

令 $EIv'' = -F(l-x) = 0$

得 $x = l$ 代入 $v' = \theta(x)$，得

$$\theta_{\max} = \theta_B = -\frac{Fl^2}{2EI}$$



$$EIv' = \frac{1}{2}Fx^2 - Flx$$

$$EIv = \frac{1}{6}Fx^3 - \frac{1}{2}Flx^3$$

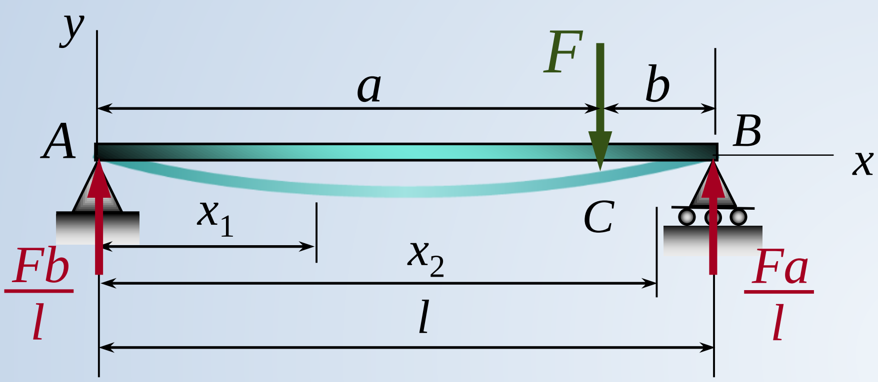
5.求 $f_{\max}$

令 $EIv' = \dfrac{1}{2}Fx^2 - Flx = 0$ 得 $x = 0$ 或 l

显然 $x = l$ 时 $f_{\max} = v_B = -\dfrac{Fl^3}{3EI}$

10.3 用积分法求弯曲变形

例2 讨论简支梁的弯曲变形.



解：1. 列出挠曲线微分方程

$$M_1=\frac{Fb}{l}x_1 \qquad (0\le x_1\le a)$$

$$M_2=\frac{Fb}{l}x_2-F(x_2-a) \qquad (a\le x_2\le l)$$

$$EIv_1''=\frac{Fb}{l}x_1$$

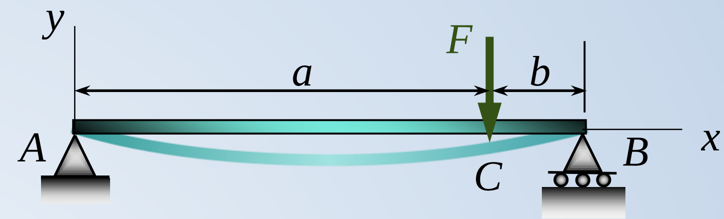
$$EIv_2''=\frac{Fb}{l}x_2-F(x_2-a)$$

2. 积分求转角方程挠曲线方程

AC段	CB段
$EIv_1'=\frac{Fb}{l}\cdot\frac{x_1^2}{2}+C_1$	$EIv_2'=\frac{Fb}{2l}x_2^2-\frac{F}{2}\left(x_2-a\right)^2+C_2$
$EIv_1=\frac{Fb}{l}\cdot\frac{x_1^3}{6}+C_1x_1+D_1$	$EIv_2=\frac{Fb}{6l}x_2^3-\frac{F}{6}\left(x_2-a\right)^3+C_2x_2+D_2$

10.3 用积分法求弯曲变形

3. 利用边界条件确定积分常数



连续条件

$$v'_{ACx_1=a} = v'_{CBx_2=a}, \quad v_{ACx_1=a} = v_{CBx_2=a}$$

代入转角方程, 挠度方程, 得:

$$C_1 = C_2, \quad D_1 = D_2$$

AC段
$EIv_1' = \dfrac{Fb}{l} \cdot \dfrac{x_1^2}{2} + C_1$
$EIv_1 = \dfrac{Fb}{l} \cdot \dfrac{x_1^3}{6} + C_1 x_1 + D_1$

CB段
$EIv_2' = \dfrac{Fb}{2l} x_2^2 - \dfrac{F}{2}\left(x_2 - a\right)^2 + C_2$
$EIv_2 = \dfrac{Fb}{6l} x_2^3 - \dfrac{F}{6}\left(x_2 - a\right)^3 + C_2 x_2 + D_2$

支撑条件

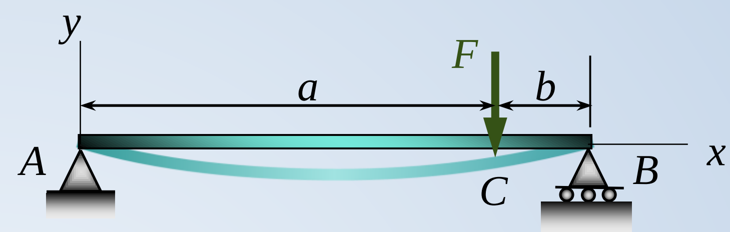
$$v_{AC\,x_1=0} = 0, \quad v_{CB\,x_2=l} = 0$$

代入挠度方程，得:

$$D_1 = D_2 = 0; \quad C_1 = C_2 = \frac{-Fb}{6l}(l^2 - b^2)$$

10.3 用积分法求弯曲变形

4. 得转角方程和挠度方程



AC段	CB段
$EIv_1' = \dfrac{-Fb}{6l}(l^2 - b^2 - 3x_1^2)$ (a)	$EIv_2' = \dfrac{-Fb}{6l}[(l^2 - b^2 - 3x_2^2) + \dfrac{3l}{b}(x_2 - a)^2]$ (c)
$EIv_1 = \dfrac{-Fbx_1}{6l}(l^2 - b^2 - x_1^2)$ (b)	$EIv_2 = \dfrac{-Fbx_2}{6l}[(l^2 - b^2 - x_2^2) + \dfrac{l}{b}(x_2 - a)^3]$ (d)

5. 求最大转角 $\theta_{\max}$

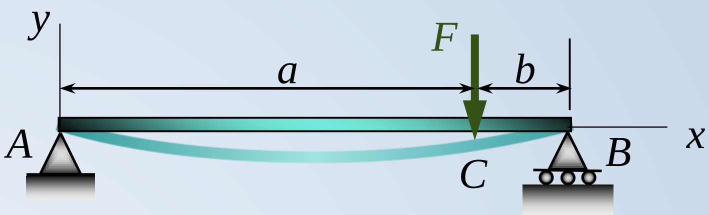
在(a)中令 x_1=0, 在(c)中, 令 $x_2 = l$, 得

$$\theta_A = -\frac{Fab\left(l+b\right)}{6EIl}, \quad \theta_B = \frac{Fab\left(l+a\right)}{6EIl}$$

当 $a>b$ 时 $\theta_{\max} = \theta_B$

10.3 用积分法求弯曲变形

6. 求最大挠度 $f_{\max}$



当 $\theta = \mathrm{d}v/\mathrm{d}x = 0$ 时，v 有极值

$$\theta_A = -\frac{Fab(l+b)}{6EIl} < 0$$

$$\theta_B = \frac{Fab(l+a)}{6EIl}$$

当 $a>b$ 时 $\theta_C = \dfrac{Fab(a-b)}{3EIl} > 0$

故 $f_{\max}$ ($\theta = 0$)在 AC 段上

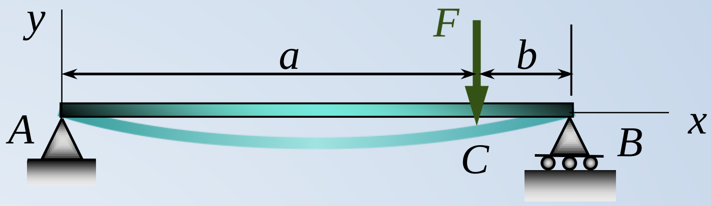
AC段
$EIv_1' = \dfrac{-Fb}{6l}(l^2 - b^2 - 3x_1^2)$ (a)
$EIv_1 = \dfrac{-Fbx_1}{6l}(l^2 - b^2 - x_1^2)$ (b)

令(a)式$=0$, 得

$$\frac{Fb}{6l}(l^2 - b^2 - 3x_1^2) = 0 \qquad x_0 = \sqrt{\frac{l^2 - b^2}{3}}$$

$$f_{\max} = \frac{-Fb}{9\sqrt{3}EIl}\sqrt{\left(l^2 - b^2\right)^3}$$

10.3 用积分法求弯曲变形



(1)当F作用在中点时

$$a=b=\frac{l}{2},\quad x_0=\frac{l}{2}\quad f_{\max}=\frac{Fl^3}{48EI}$$

最大挠度发生在中点

$$x_0=\sqrt{\frac{l^2-b^2}{3}}$$

$$f_{\max}=\frac{-Fb}{9\sqrt{3}EIl}\sqrt{\left(l^2-b^2\right)^3}$$

(2)当F 无限接近于B时 $b\rightarrow 0$

$$x_0=\frac{l}{\sqrt{3}}=0.557l\quad f_{\max}=-\frac{Fbl^2}{9\sqrt{3}EI};\qquad x=\frac{l}{2}\quad f_{l/2}=-\frac{Fbl^2}{16EI}$$

误差 $\Delta=\dfrac{f_{\max}-f_{l/2}}{f_{\max}}=2.65\%$ 最大挠度仍在跨度中点附近

在简支梁中，可用跨度中点的挠度代替最大挠度，且不会引起很大误差。

10.4 用叠加法求弯曲变形

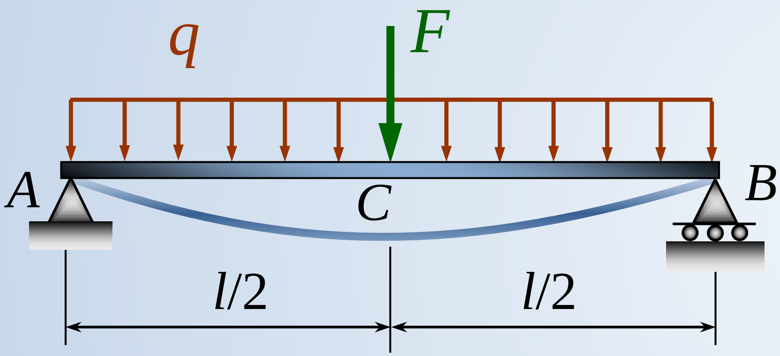
在小变形, $\sigma \leq \sigma_p$ 时, 弯曲变形与载荷成线性关系, 满足叠加原理。

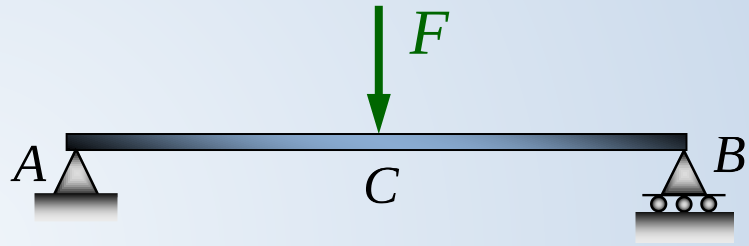
当梁上同时作用几个载荷时，可分别求出每个载荷单独作用时引起的变形，然后把所得的变形叠加。

书中给出常见梁在简单载荷作用下的变形（P162 表6-1）,可利用叠加法求几个载荷共同作用下的梁的弯曲变形。

10.4 用叠加法求弯曲变形

例3. 桥式起重机大梁在自重q及吊重F作用下，试求大梁跨度中点C的挠度和A截面的转角。

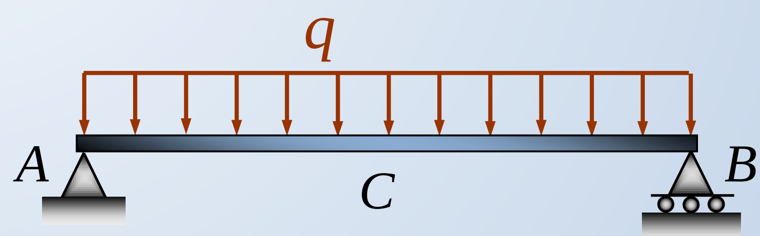




$$(f_C)_F = -\frac{Fl^3}{48EI} \quad (\theta_A)_F = -\frac{Fl^2}{16EI}$$

$$f_C = (f_C)_F + (f_C)_q = -\frac{Fl^3}{48EI} - \frac{5ql^4}{384EI}$$

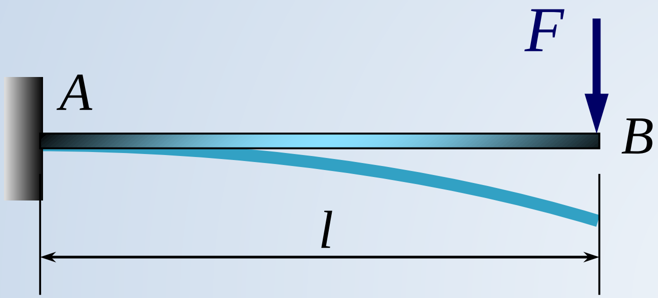
$$\theta_A = (\theta_A)_F + (\theta_A)_q = -\frac{Fl^2}{16EI} - \frac{ql^3}{24EI}$$

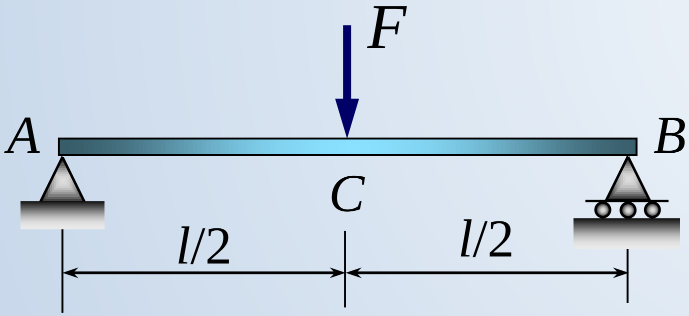


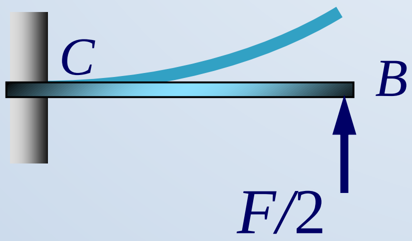
$$(f_C)_q = -\frac{5ql^4}{384EI} \quad (\theta_A)_q = -\frac{ql^3}{24EI}$$

10.4 用叠加法求弯曲变形

例4 已知：悬臂梁 $f_B = \dfrac{Fl^3}{3EI}$ 求:简支梁中点 $f_C = ?$



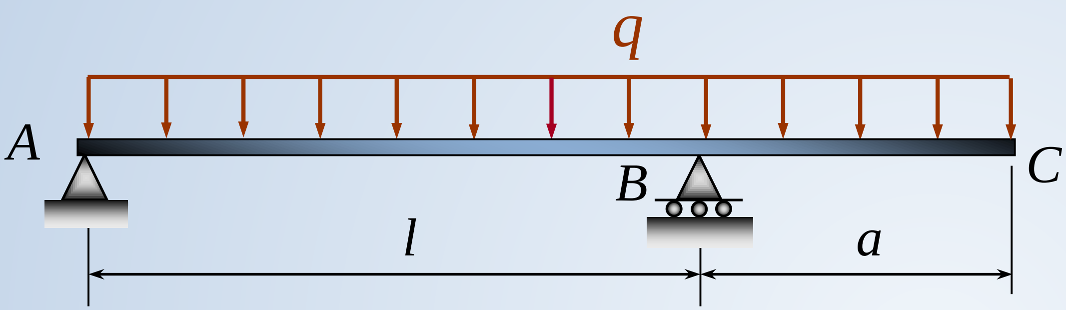


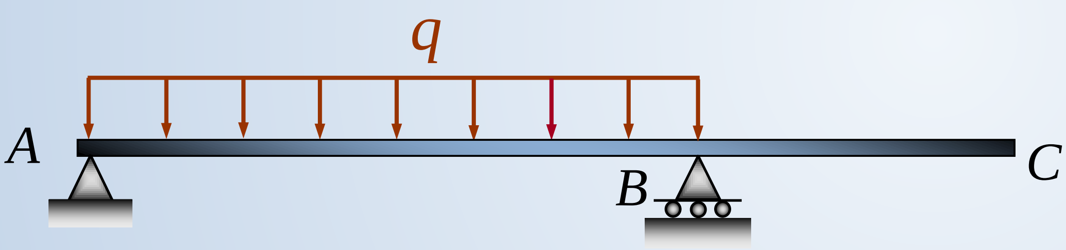


$$f_C = f_B = \frac{\frac{F}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^3}{3EI} = \frac{Fl^3}{48EI}$$

10.4 用叠加法求弯曲变形

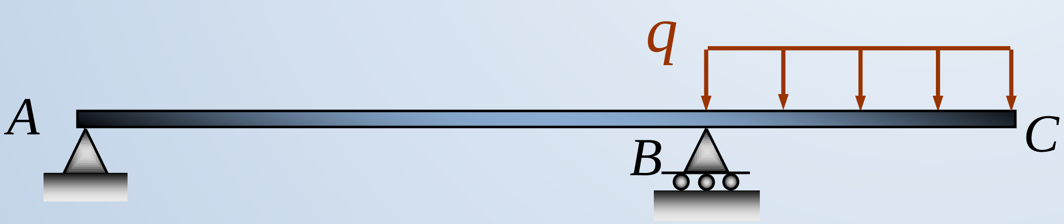
例5. 用叠加法求图示外伸梁C截面的挠度f_C转角θ_C。





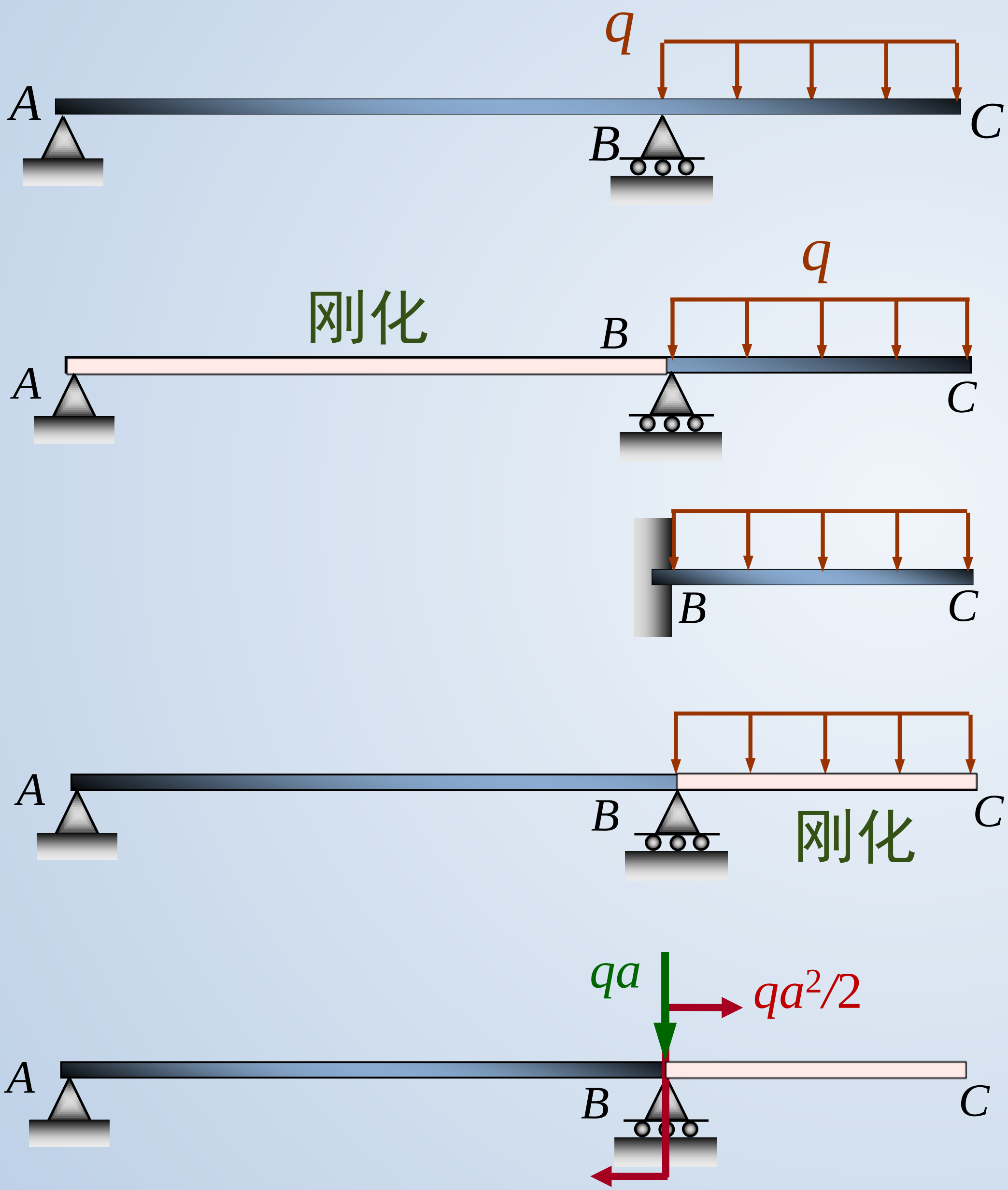
$$(\theta_C)_{AB} = (\theta_B)_{AB} = \frac{ql^3}{24EI}$$

$$(f_C)_{AB} = a \cdot (\theta_C)_{AB} = \frac{qal^3}{24EI}$$



?

10.4 用叠加法求弯曲变形



$$(\theta_C)_{BC}=(\theta_{C1})_{BC}+(\theta_{C2})_{BC}$$

$$(\theta_{C1})_{BC}=-\frac{qa^3}{6EI}$$

$$(\theta_{C2})_{BC}=-\frac{qa^2l}{6EI}$$

$$(\theta_C)_{BC}=-\frac{qa^2}{6EI}(a+l)$$

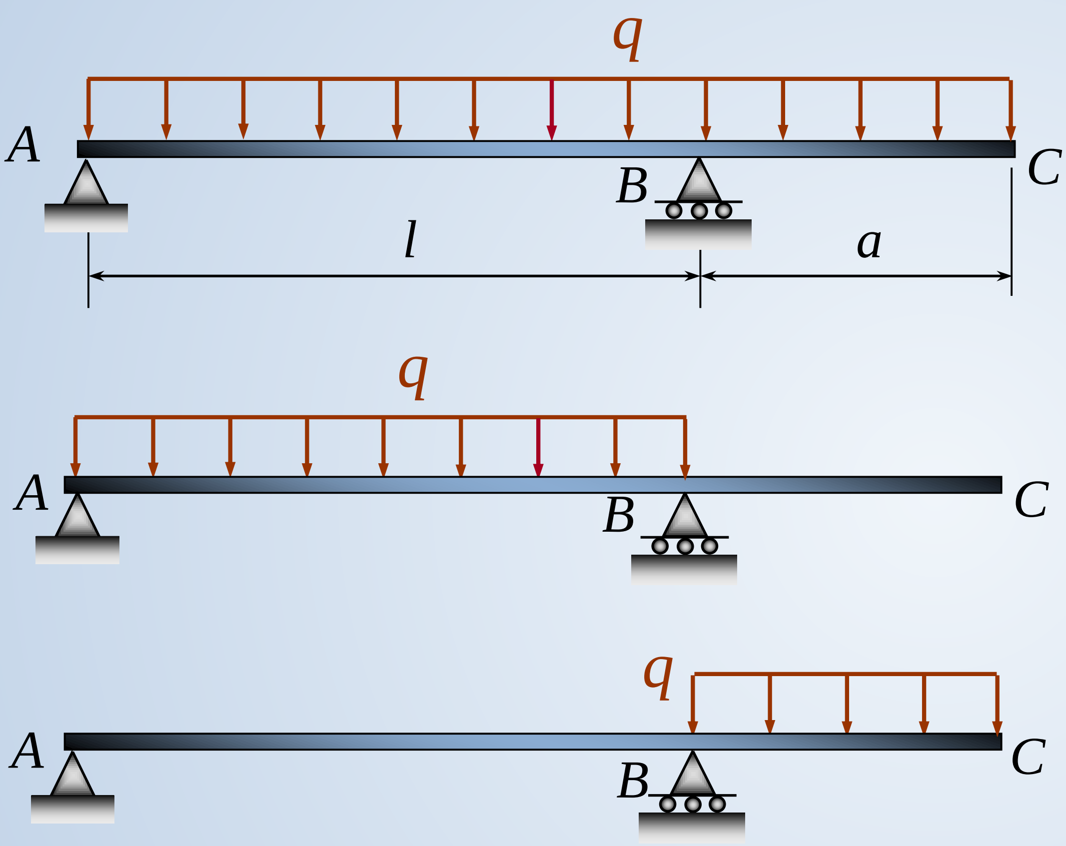
$$(f_C)_{BC}=(f_{C1})_{BC}+(f_{C2})_{BC}$$

$$(f_{C1})_{BC}=-\frac{qa^4}{8EI}$$

$$(f_{C2})_{BC}=-\frac{qa^3l}{6EI}$$

$$(f_C)_{BC}=-\frac{qa^3}{24EI}(3a+4l)$$

10.4 用叠加法求弯曲变形



$$\theta_C=(\theta_C)_{AB}+(\theta_C)_{BC}$$

$$\theta_C=\frac{q}{24EI}(l^3-4a^3-4a^2l)$$

$$f_C=(f_C)_{AB}+(f_C)_{BC}$$

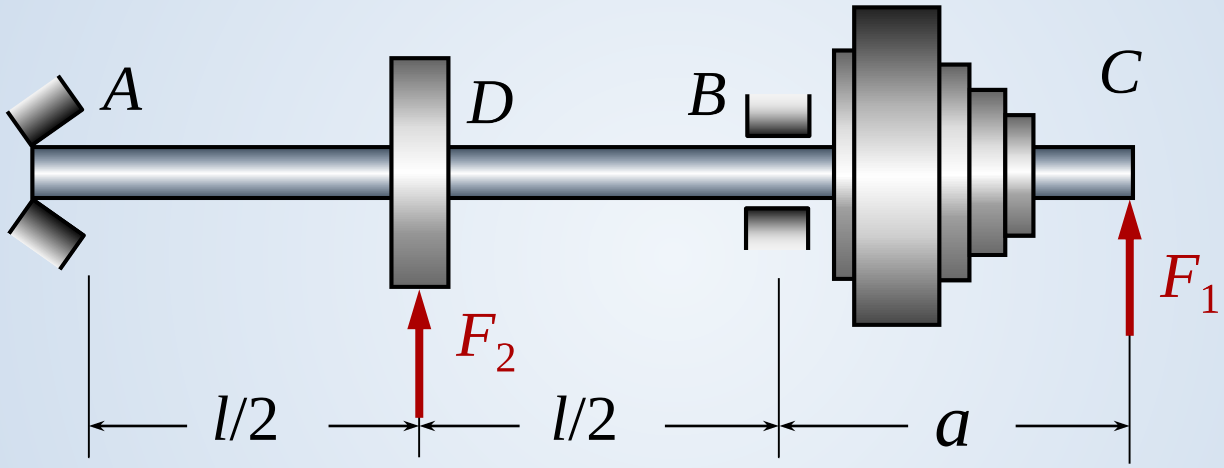
$$f_C=-\frac{qa}{24EI}(3a^3+4a^2l-l^3)$$

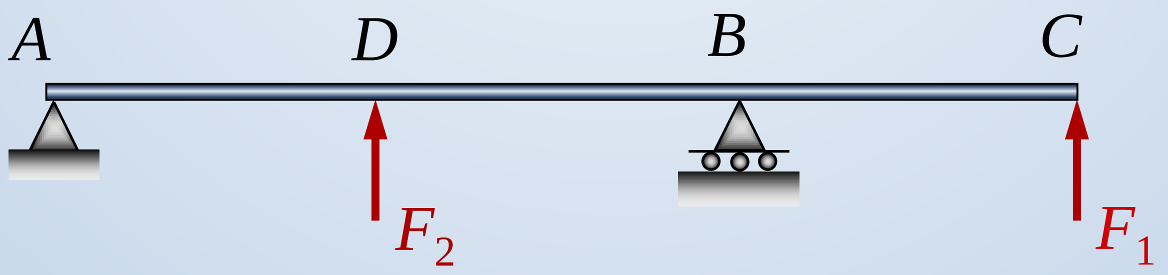
$$(\theta_C)_{AB}=\frac{ql^3}{24EI} \qquad (\theta_C)_{BC}=-\frac{qa^2}{6EI}(a+l)$$

$$(f_C)_{AB}=\frac{qal^3}{24EI} \qquad (f_C)_{BC}=-\frac{qa^3}{24EI}(3a+4l)$$

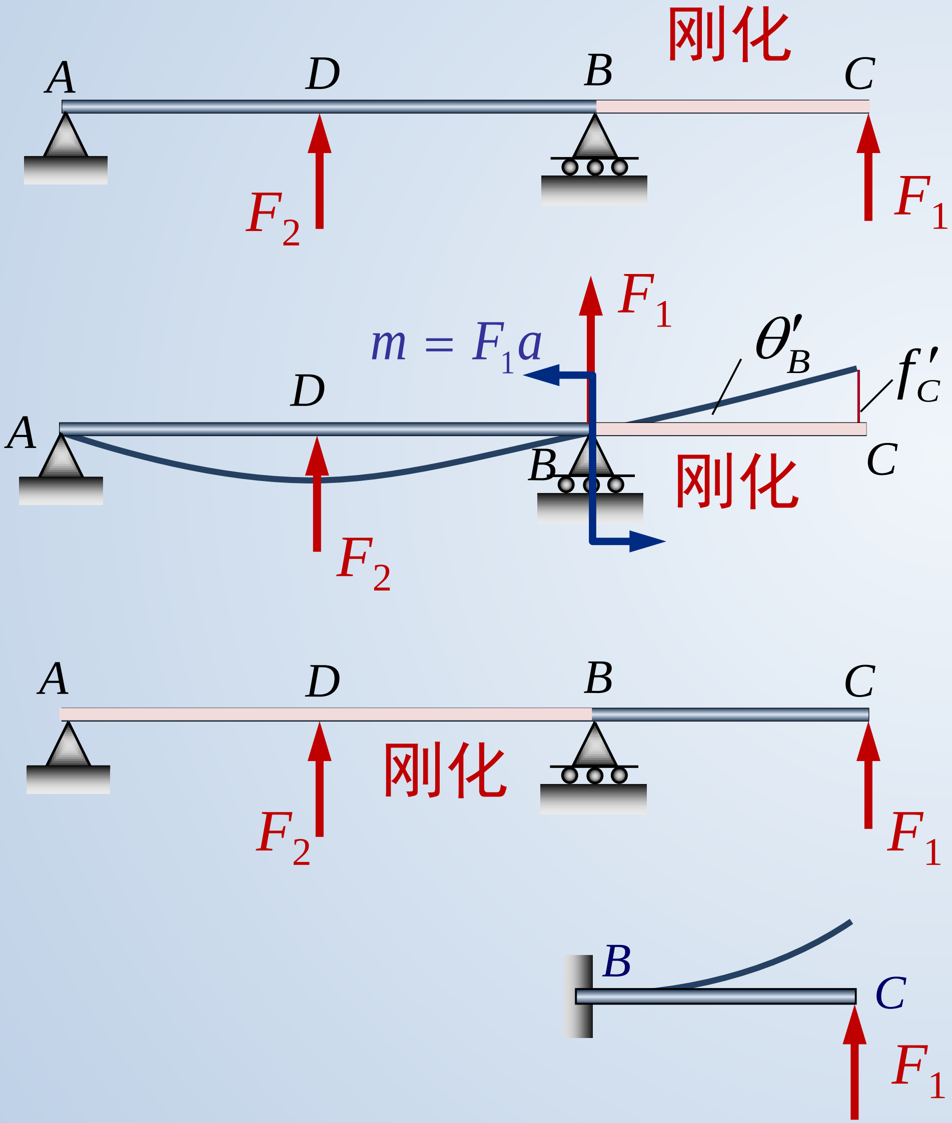
10.4 用叠加法求弯曲变形

例6 求车床主轴截面B的转角和端点C的挠度。





10.4用叠加法求弯曲变形



1.求B截面转角

$$(\theta_B)_m = \frac{ml}{3EI} = \frac{F_1 al}{3EI}$$

$$(\theta_B)_{F_2} = -\frac{F_2 l^2}{16EI}$$

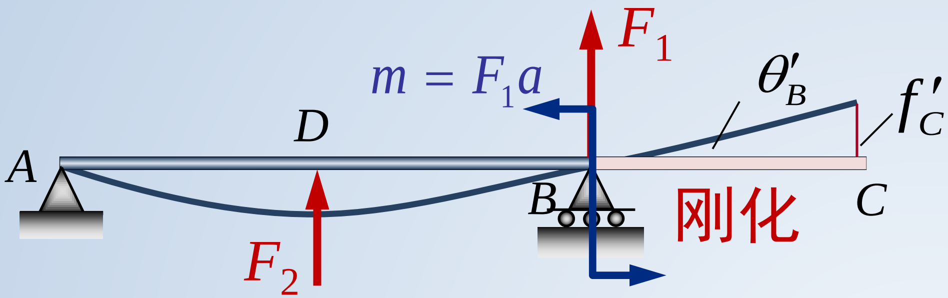
$$\theta_B' = (\theta_B)_m + (\theta_B)_{F_2}$$

$$= \frac{F_1 al}{3EI} - \frac{F_2 l^2}{16EI}$$

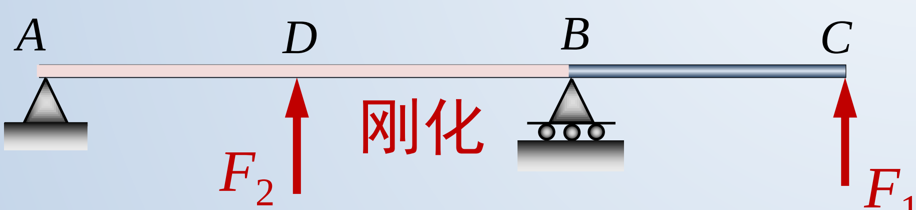
$$\theta_B'' = 0$$

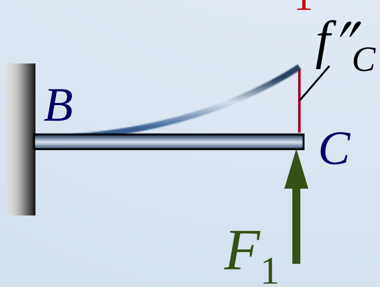
$$\theta_B = \theta_B' + \theta_B'' = \frac{F_1 al}{3EI} - \frac{F_2 l^2}{16EI}$$

10.4用叠加法求弯曲变形



$$\theta'_B = \frac{F_1 a l}{3EI} - \frac{F_2 l^2}{16EI}$$





2. 求C截面挠度

刚化BC段

$$f'_C = -\frac{F_1 a^2 l}{3EI} - \frac{F_2 l^2 a}{16EI} \uparrow$$

刚化AB段

$$f_C'' = \frac{F_1 a^3}{3EI} \uparrow$$

$$f_C = f'_C + f_C''$$

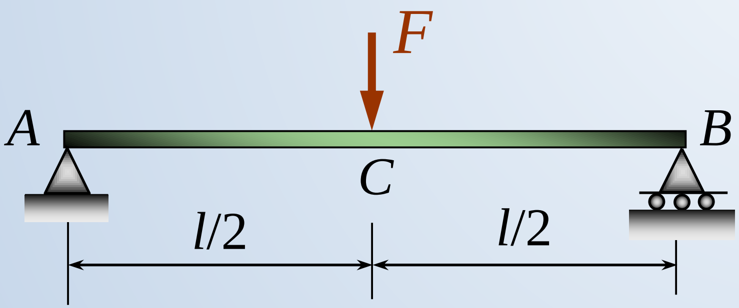
$$= -\frac{F_1 a^2 (a+l)}{3EI} - \frac{F_2 l^2 a}{16EI} \uparrow$$

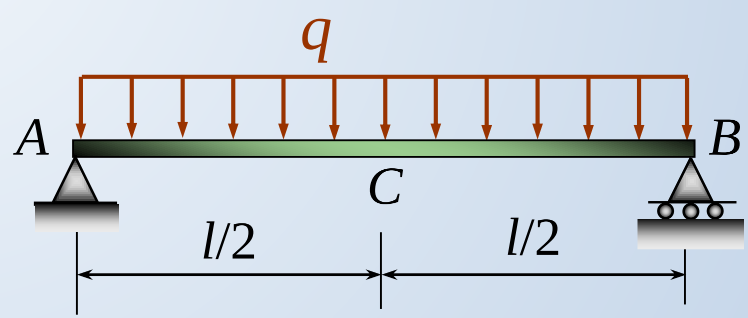
10.5 提高弯曲刚度的主要措施

$$\begin{matrix}\theta \\ v\end{matrix} = 系数\,\frac{载荷\cdot 长度^{n}}{刚度}$$

一. 改善结构形式，减小弯矩的数值.

1. 把集中力变为分布载荷



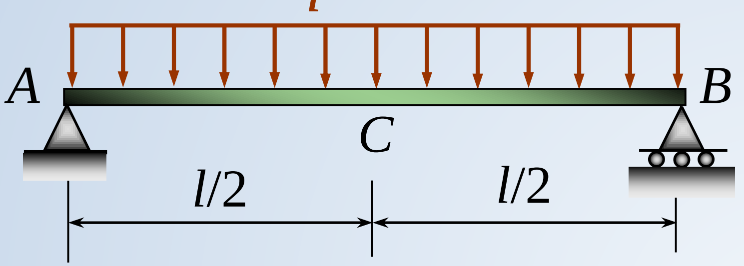


$$f_{\max} = \frac{Fl^{3}}{48EI}$$

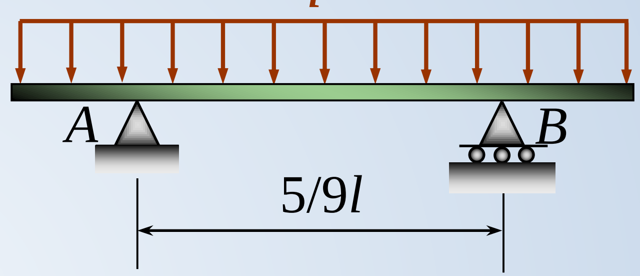
$$f_{\max} = \frac{5ql^{4}}{384EI}$$

10.5 提高弯曲刚度的主要措施

2. 合理分布支座位置

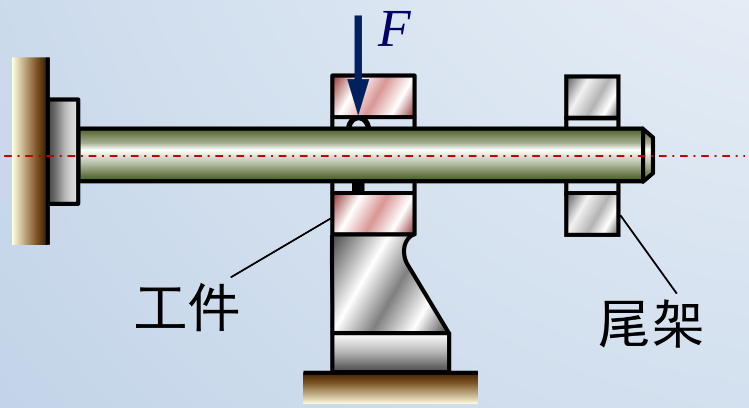


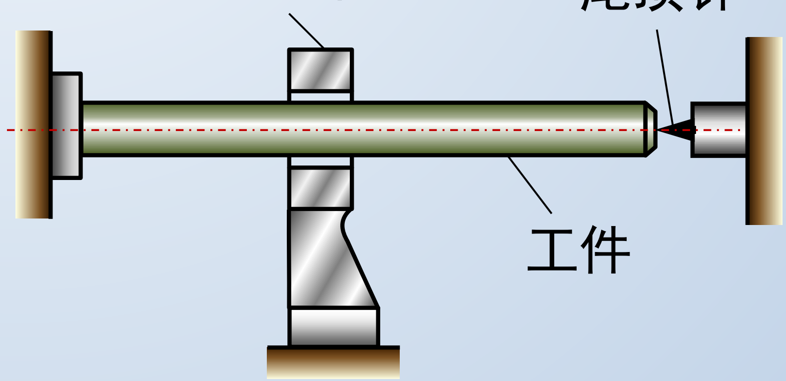
$$f_{\max} = \frac{5ql^4}{384EI}$$



$$f_{\max} = \frac{0.11ql^4}{384EI}$$

3. 尽量缩小跨度

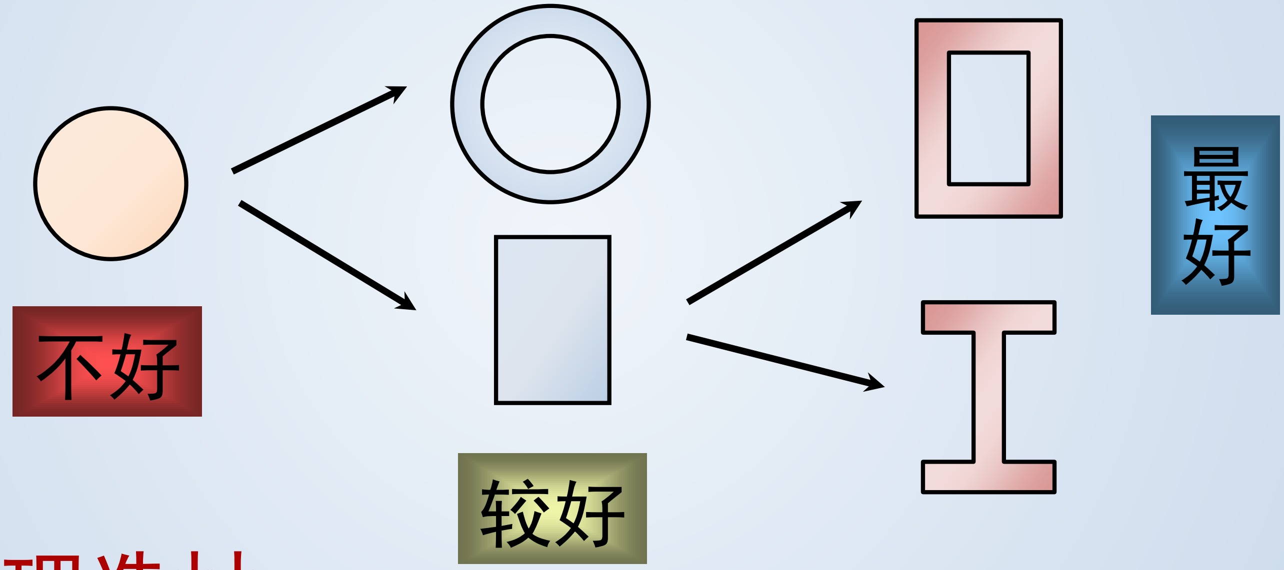




10.5 提高弯曲刚度的主要措施

二. 选择合理的截面形状

相同面积下，增大I，刚度提高，强度增大.



三. 合理选材

各类钢材E变化不大，所以为提高弯曲刚度而采用高强度钢材，并不会达到预期的效果。

Thank you !