第四章 计算机控制系统特性分析

计算机控制系统要想正常工作，首先要满足稳定性条件，其次还要满足动态性能指标和稳态性能指标，这样才能在实际生产中应用。对计算机控制系统的稳定性、动态特性和稳态性能进行分析是研究计算机控制系统必不可少的过程。

4.1 计算机控制系统的稳定性

线性离散控制系统的稳定性条件

- s域到z域的映射
- 线性离散控制系统稳定的充要条件

线性离散系统的稳定性判据

- 修正劳斯-霍尔维茨稳定判据
- 二次项特征方程稳定性的z域直接判别法
- 朱利稳定性检验
- 修尔-科恩稳定判据

s域到z域的映射

我们将s平面映射到z平面，并找出离散系统稳定时其闭环脉冲传递函数零、极点在z平面的分布规律，从而获得离散系统的稳定判据。令

$$s=\sigma+\mathrm{j}\omega$$

则有

$$z=\mathrm{e}^{Ts}=\mathrm{e}^{T(\sigma+\mathrm{j}\omega)}=\mathrm{e}^{T\sigma}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}T\omega}=\mathrm{e}^{T\sigma}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}(T\omega+2k\pi)},\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

于是，s域到z域的基本映射关系式为

$$\boxed{|z|=\mathrm{e}^{T\sigma},\quad \theta=T\omega}$$

s域到z域的映射

- ✓ s平面左半平面的垂直线对应于z平面半径小于1的圆
- ✓ s平面右半平面的垂直线对应于z平面半径大于1的圆
- ✓ s平面水平直线对应于z平面具有相应角度的直线
- ✓ s平面的等阻尼线对应z平面的螺旋线
- ✓ s平面的虚轴在z平面的映射为一单位圆

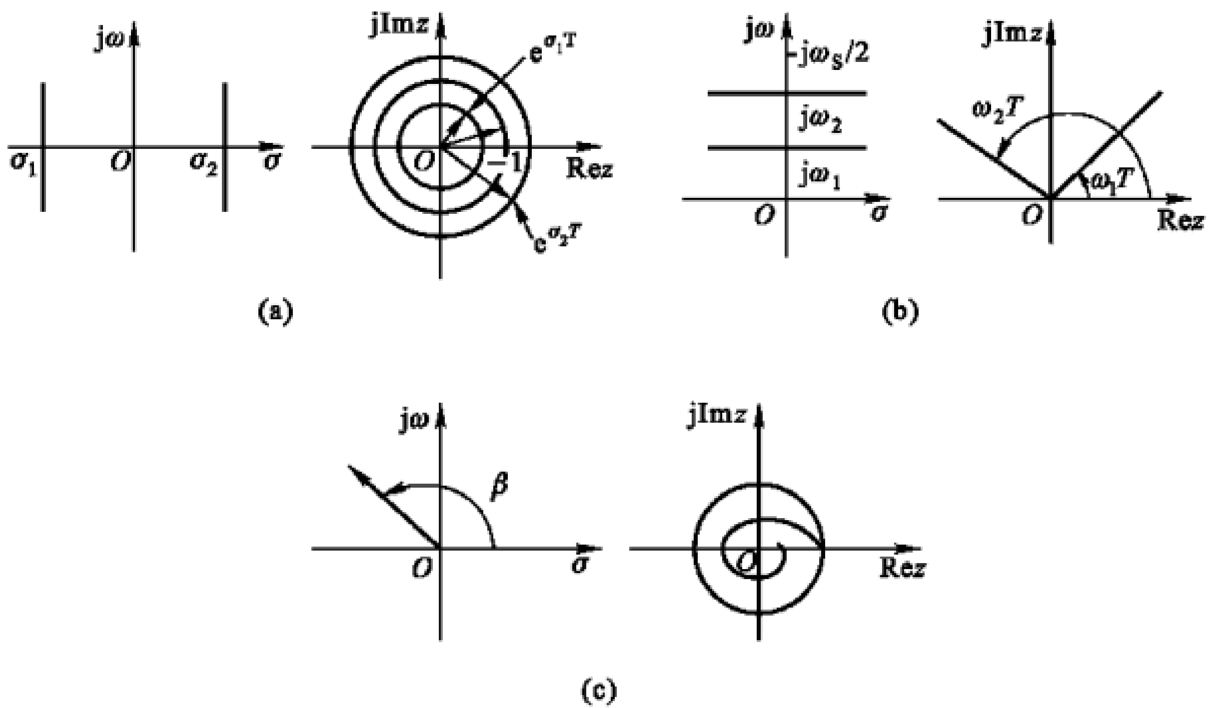


图4.1 s域与z域映射关系图

s域到z域的映射

由于左半平面的σ为负值，所以左半s平面对应于

$$|z| = e^{T\sigma} < 1$$

s平面的虚轴表示实部σ=0和虚部ω从-∞变到+∞，映射到z平面上，表示 $|z| = e^{T\sigma} = e^0 = 1$，即单位圆上，θ=Tω也从-∞变到+∞，即$z$在单位圆上逆时针旋转无限多圈。简单地说，就是$s$平面的虚轴在$z$平面的映射为一单位圆，如图4.2所示。

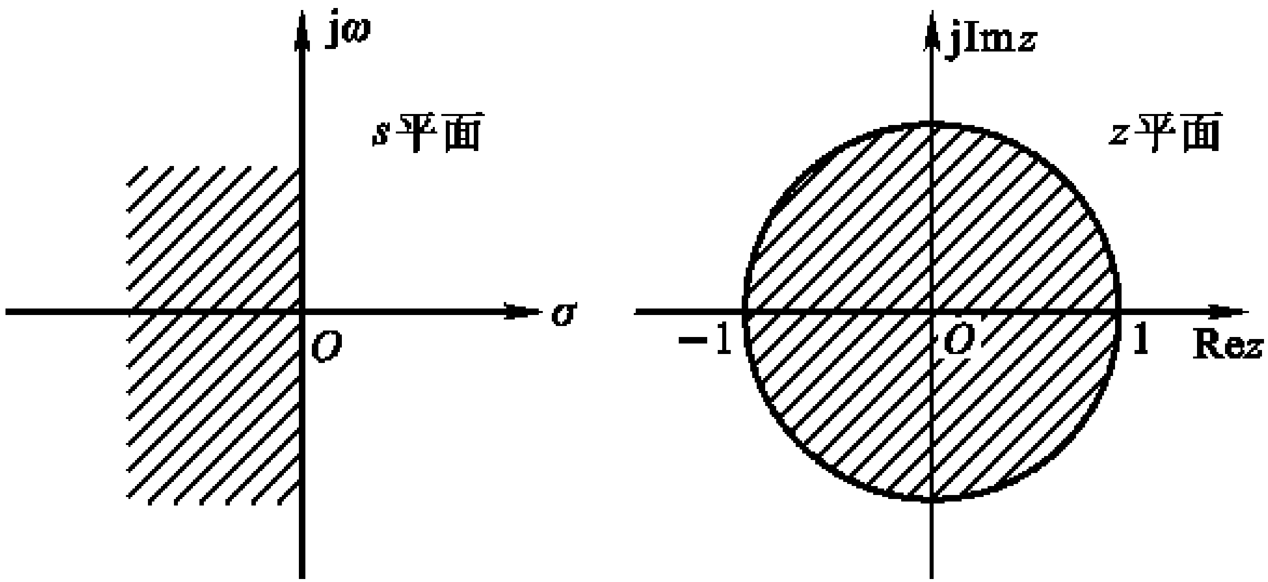


图4.2 s平面与z平面的映射关系

线性离散控制系统稳定的充要条件

图4.3所示线性离散控制系统的闭环脉冲传递函数 $\Phi(z)$为

$$\Phi(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=\frac{G(z)}{1+MG(z)}$$

特征方程为

$$1+MG(z)=0$$

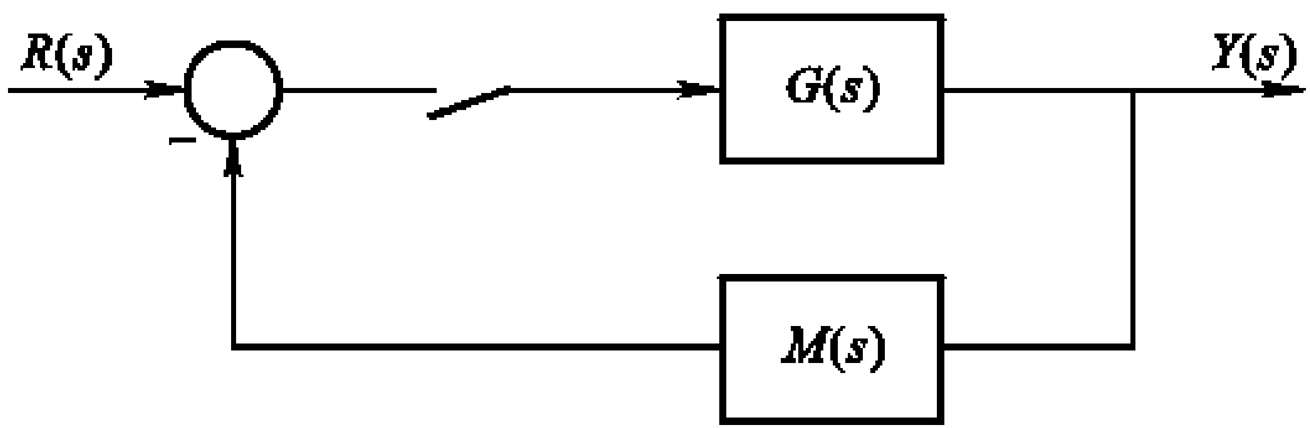


图4.3 线性离散控制系统

线性离散控制系统稳定的充要条件

设闭环离散系统的特征方程式的根为 $z_1, z_2, \ldots, z_n$（即是闭环脉冲传递函数的极点）。那么，线性离散控制系统稳定的充要条件是：

闭环系统特征方程的所有根的模 $|z_i|<1$，即闭环脉冲传递函数的极点均位于z平面的单位圆内。

修正劳斯–霍尔维茨稳定判据

连续系统的劳斯-霍尔维茨稳定判据，是通过系统特征方程的系数及其符号来判断系统的稳定性。这个方法实际上仍是判断特征方程的根是否都在s平面的左半部。将z平面单位圆内区域映射为另一平面上的左半部，就可以应用劳斯-霍尔维茨稳定判据来判断离散系统的稳定性。为此，可采用双线性变换方法进行判断。

- 双线性变换 I
- 双线性变换 II
- 劳斯-霍尔维茨稳定判据

双线性变换Ⅰ

双线性变换Ⅰ：

$$z=\frac{1+w}{1-w}$$

式中w是复变量，由上式解得

$$w=\frac{z-1}{z+1}$$

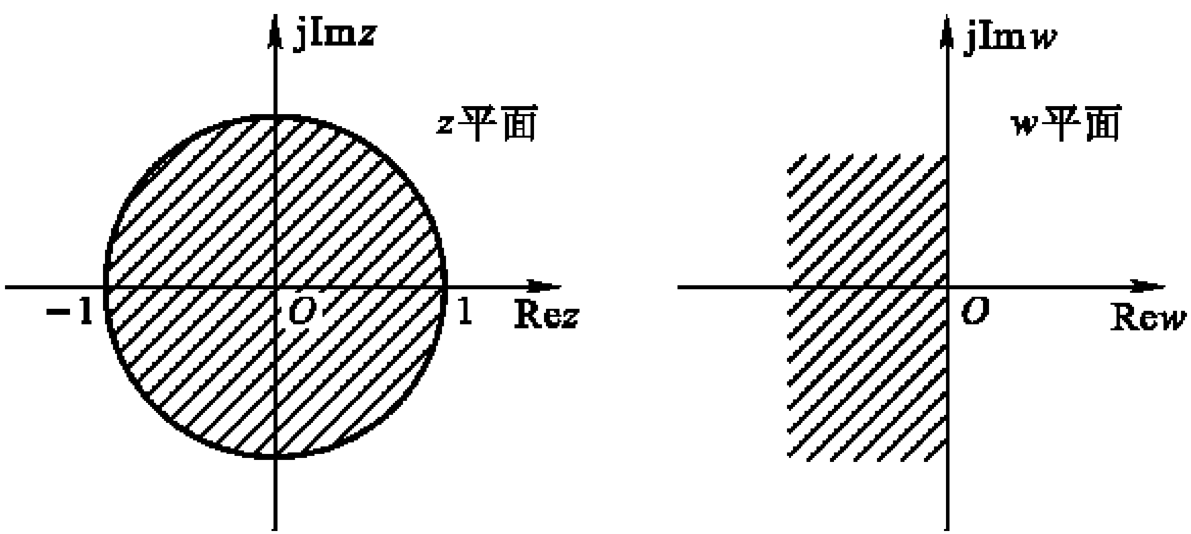


图4.4 z平面与w平面映射关系

双线性变换 II

双线性变换 II：

$$z=\frac{1+(T/2)w}{1-(T/2)w}$$

或写成

$$w=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

此时

$$w=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}\bigg|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T}}=\frac{2}{T}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T}-1}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T}+1}=\frac{2}{T}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T/2}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T/2}}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T/2}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T/2}}$$

$$=\mathrm{j}\frac{2}{T}\tan\frac{\omega T}{2}$$

双线性变换 II

当ωT较小时有

$$\omega_w = \frac{2}{T}\tan\frac{\omega T}{2} \approx \frac{2}{T}\frac{\omega T}{2} = \omega$$

即w平面的频率近似于s平面的频率。这是采用双线性变换 II 的优点之一。

通过z-w变换，就可以应用连续系统的劳斯-霍尔维茨判据分析线性离散系统的稳定性。

W^n a_n a_{n-2} $\cdots$
W^{n-1} a_{n-1} a_{n-3} $\cdots$
W^{n-2}
$\vdots$
W^1
W^0

劳斯-霍尔维茨稳定判据

劳斯判据的要点：

✓ 闭环系统特征方程$a_n w^n + a_{n-1} w^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$，若系数$a_0, \ldots, a_n$的符号不相同，则系统不稳定。若系数符号相同，建立劳斯行列表

CLICK HERE 劳斯列表

✓若劳斯行列表第一列各元素严格为正，则所有特征根均分布在左半平面，系统稳定。

✓若劳斯行列表第一列出现负数，系统不稳定。且第一列元素符号变化的次数，即右半平面上特征根个数。

例4.1

例4.2

〖例4.1〗 应用劳斯判据,讨论图4.6所示系统的稳定性，其中K=1，T=1s。

解：由上一章可知，系统开环脉冲传递函数为

$$G(z)=\mathcal{Z}[H_0(s)G_{\mathrm{p}}(s)]=(1-z^{-1})\mathcal{Z}[\frac{1}{s}G_{\mathrm{p}}(s)]=(1-z^{-1})\mathcal{Z}[\frac{1}{s^2(s+1)}]$$

$$=\frac{0.368z+0.264}{z^2-1.368z+0.368}$$

闭环脉冲传递函数为

$$\Phi(z)=\frac{0.368z+0.264}{z^2-z+0.632}$$

系统特征方程为

$$z^2-z+0.632=0$$

CLICK HERE 图4.6 系统结构图

✓ 如采用双线性变换 I，即 $z=\dfrac{1+w}{1-w}$，则可得w平面的特征方程为

$$2.632w^2+0.736w+0.632=0$$

建立劳斯表

$$\begin{array}{lll} w^2 & 2.632 & 0.632 \\ w^1 & 0.736 & \\ w^0 & 0.632 & \end{array}$$

由劳斯判据可知系统稳定。

✓ 如采用双线性变换Ⅱ，即 $z=\dfrac{1+0.5w}{1-0.5w}$, 则可得w平面的特征方程为

$$0.658w^2+0.368w+0.632=0$$

建立劳斯表

$$\begin{array}{lll} w^2 & 0.658 & 0.632 \\ w^1 & 0.368 & \\ w^0 & 0.632 & \end{array}$$

由劳斯判据可知系统稳定。

〖例4.2〗 在例4.1中，设T=1s，求使系统稳定的K的变化范围？并求s平面和w平面的临界频率。

解：采用双线性变换II，此时系统的特征方程为

$$1+KG(z)\Big|_{z=\frac{1+0.5w}{1-0.5w}}=1+\frac{K(0.368z+0.624)}{z^2-1.368z+0.368}\Bigg|_{z=\frac{1+0.5w}{1-0.5w}}$$

$$=\frac{(1-0.0381K)w^2+(0.924-0.386K)w+0.924K}{w(w+0.924)}$$

即特征方程为

$$(1-0.0381K)w^2+(0.924-0.386K)w+0.924K=0$$

此时，劳斯表为

$w2$	(1-0.0381K)	0.924K	$\rightarrow$ $K<26.2$
$w1$	0.924-0.386K		$\rightarrow$ $K<2.39$
$w0$	0.924K		$\rightarrow$ $K>0$

故K的变化范围为 $0< K < 2.39$。

当K=2.39时，系统临界稳定，此时特征方程的解为

$$w = \pm j1.549$$

故w平面的临界频率为

$$\omega_w = 1.549$$

s平面的临界频率为

$$\omega = \frac{2}{T}\tan^{-1}\frac{\omega_w T}{2} = 1.32$$

二次项特征方程稳定性的 z域直接判别法

当离散系统的特征方程最高为二次项时，则不必进行w变换，也不必求其根。而是直接在z域判别其稳定性。设系统的特征方程

$$W(z)=z^2+a_1z+a_0=0$$

式中，a_1，a_0均为实数。当满足下列三个条件时系统稳定

- ✓ $|W(0)|=|a_0|<1$
- ✓ $W(1)=1+a_1+a_0>0$
- ✓ $W(-1)=1-a_1+a_0>0$

例4.3

朱利稳定性检验

朱利稳定性检验是对给定的特征方程$W(z)=0$的系数建立一个表。设特征方程$W(z)$是z的下列多项式：

$$W(z)=a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

第一行元素由$W(z)$按z的升幂排列的系数组成。第二行元素由$W(z)$按z的降幂排列的系数组成。第三行至第$2n$-3行元素，则按下列各式确定：

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & z^0 & z^1 & z^2 & \cdots & z^{n-1} & z^n \\
\hline
1 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\
2 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\
3 & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & \\
4 & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_0 & \\
5 & c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-2} &
\end{array}$$

头重脚轻 n 不算

$$b_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_n & a_k \end{vmatrix}$$

2n-3 g_0 g_1 g_2

朱利稳定性检验

2n-2 g_2 g_1 g_0

$$b_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_n & a_k \end{vmatrix} \qquad k = 0,1,2,\cdots,n-1$$

$$c_k = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-1-k} \\ b_{n-1} & b_k \end{vmatrix} \qquad k = 0,1,2,\cdots,n-2$$

$$\cdots$$

$$q_k = \begin{vmatrix} p_0 & p_{3-k} \\ p_3 & p_k \end{vmatrix} \qquad k = 0,1,2$$

朱利稳定性检验

朱利检验的稳定性判据为：如果满足下列全部条件，则由特征方程$W(z)=0$表征的系统是稳定的

n=2时只需满足前3项

$$
\begin{cases}
|a_0| < |a_n| \\
W(z)\big|_{z=1} > 0 \\
(-1)^n W(z)\big|_{z=-1} > 0
\end{cases}
$$

$$|b_{n-1}| < |b_0|$$

$$|c_{n-2}| < |c_0|$$

L

$$|q_2| < |q_0|$$

〖例4.3〗 在例4.1中，设T=1s，试用z域直接判别法确定满足系统稳定的K值范围。

解：图4.6所示系统的特征方程为

$$W(z) = z^2 + (0.368K - 1.368)z + (0.264K + 0.368) = 0$$

利用z域直接判别法的三个条件，有

$$|W(0)| = |0.264K + 0.368| < 1$$

$$W(1) = 1 + (0.368K - 1.368) + (0.264K + 0.368) > 0$$

$$W(-1) = 1 - (0.368K - 1.368) + (0.264K + 0.368) > 0$$

第一个式子可解K<2.39，第二个式子可解K>0，第三个式子可解K<26.2。即满足系统稳定的K值范围为0<K<2.39
此结果与用劳斯判据给出的结果相同。

修尔-科恩稳定判据

该判据提供了一种用解析法判断离散系统稳定性的途径。设离散控制系统的特征方程为

$$1+G(z)=0$$

其中$G(z)$一般为两个多项式之比，用$W(z)$表示特征方程的分子，即

$$W(z)=a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1 z+a_0=0$$

把系数写成如下所示的行列式形式

修尔–科恩稳定判据

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & \mathrm{L} & 0 & a_n & a_{n-1} & \mathrm{L} & a_{n-k+1} \\ a_1 & a_0 & \mathrm{L} & 0 & 0 & a_n & \mathrm{L} & a_{n-k+2} \\ \mathrm{L} & \mathrm{L} & \mathrm{L} & \mathrm{L} & \mathrm{L} & \mathrm{L} & \mathrm{L} & \mathrm{L} \\ a_{k-1} & a_{k-2} & \mathrm{L} & a_0 & 0 & 0 & \mathrm{L} & a_n \\ \bar{a}_n & 0 & \mathrm{L} & 0 & \bar{a}_0 & \bar{a}_1 & \mathrm{L} & \bar{a}_{k-1} \\ \bar{a}_{n-1} & \bar{a}_n & \mathrm{L} & 0 & 0 & \bar{a}_0 & \mathrm{L} & \bar{a}_{k-2} \\ \mathrm{L} & \mathrm{L} & \mathrm{L} & \mathrm{L} & \mathrm{L} & \mathrm{L} & \mathrm{L} & \mathrm{L} \\ \bar{a}_{n-k+1} & \bar{a}_{n-k+2} & \mathrm{L} & \bar{a}_n & 0 & 0 & \mathrm{L} & \bar{a}_0 \end{vmatrix}$$

修尔-科恩稳定判据

修尔-科恩稳定判据指出，如果满足下面的条件，特征方程的根都在单位圆内，即系统稳定：

$$\begin{cases} \Delta_k < 0 & ,\text{如果}k\text{是奇数} \\ \Delta_k > 0 & ,\text{如果}k\text{是偶数} \end{cases}$$

4.2 计算机控制系统的动态特性

线性离散系统的动态特性是指系统在单位阶跃信号输入下的过渡过程特性(或者说系统的动态响应特性)。原因是单位阶跃输入信号容易产生，并且能够提供动态响应和稳态响应的有用信息。如果已知线性离散系统在阶跃输入下输出的z变换$Y(z)$，那么，对$Y(z)$进行逆z变换就可获得动态响应$y^*(t)$。将$y^*(t)$连成光滑曲线，就可得到系统的动态性能指标(即超调量$\sigma\%$与过渡过程时间t_s)。

离散系统的单位阶跃响应

闭环极点对系统动态性能的影响

例4.4

动态性能

延迟时间 t_d：响应曲线第一次到达终值一半所需的时间。

上升时间 t_r：响应从终值10%上升到终值90%所需的时间。

峰值时间 t_p：响应超过其终值到达第一个峰值所需的时间。

调节时间 t_s：响应到达并保持在终值的范围内所需的最短时间。

超调量 $\sigma\%$：响应的最大偏离量和终值的差与终值比的百分数。

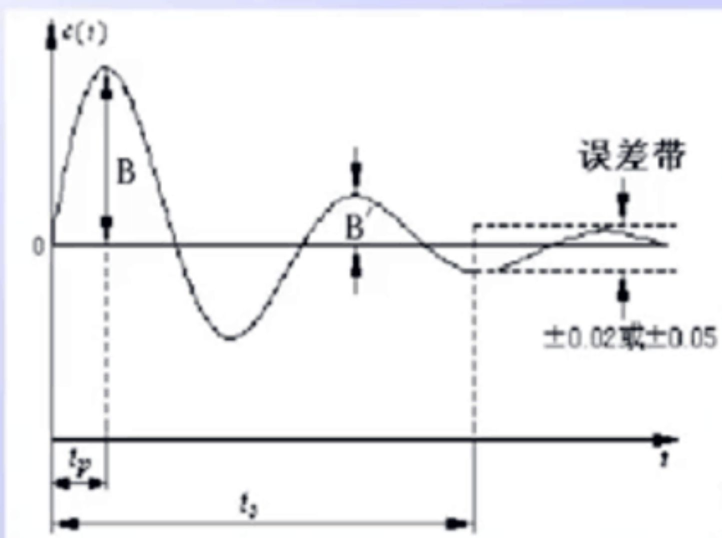
即

$$\sigma\% = \frac{h(t_p) - h(\infty)}{h(\infty)} \times 100\%$$

其它性能指标

振荡次数N：在$0 \leqslant t \leqslant t_s$时间内，过渡过程c(t)穿越其稳态值c(∞)次数的一半。

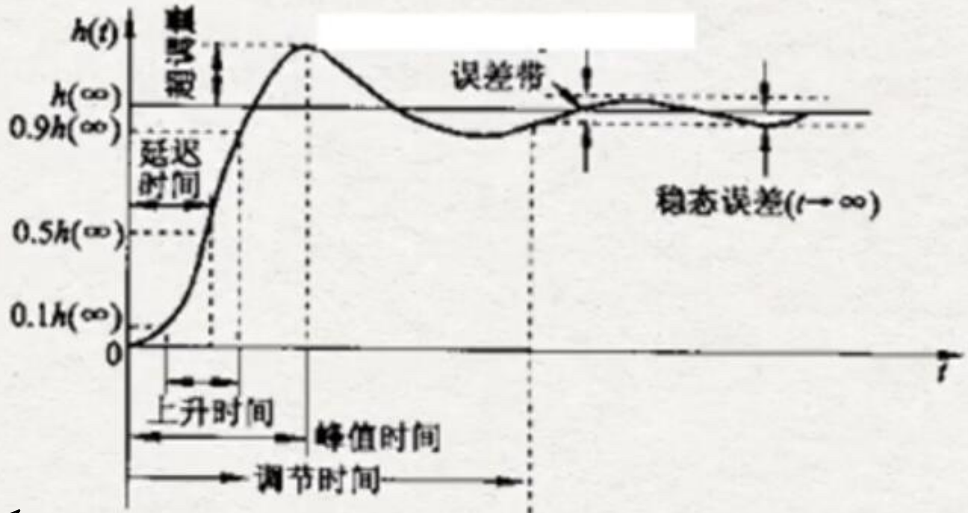
衰减比n：过渡过程曲线上同方向的相邻两个波峰之比，n =B/B’。



（1）上升时间t_r 是指响应曲线从零时刻起首次上升达到稳态值$c(\infty)$所需的时间。

上升时间tr

对于响应曲线**无超调**的系统，是指响应曲线从稳态值的**10%**上升到**90%**所需的时间。

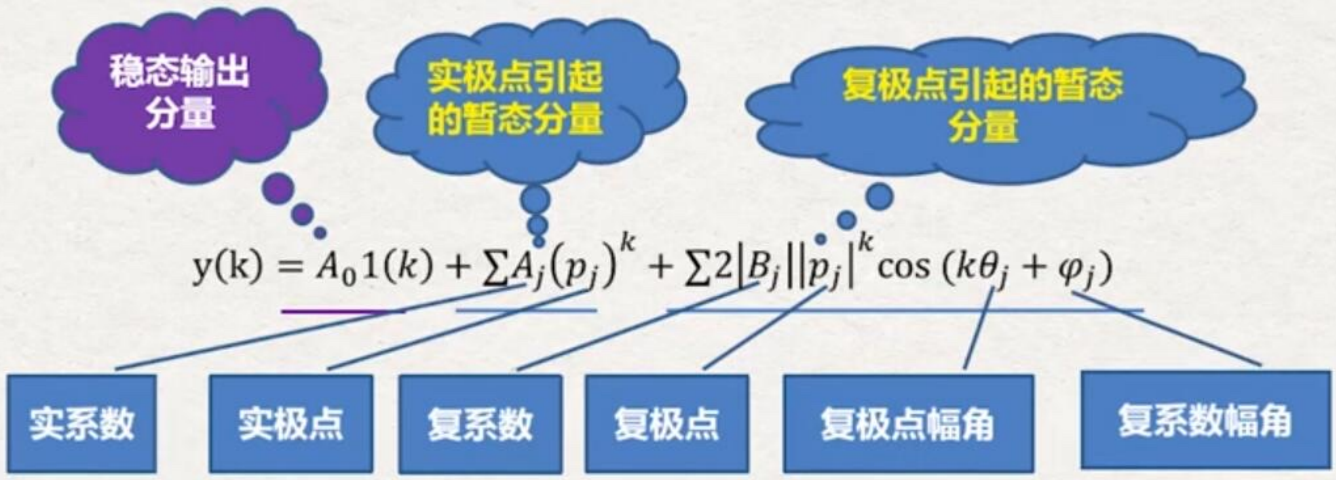


单位阶跃响应

$$\sigma\% = \frac{C(t_p) - C(\infty)}{C(\infty)} \times 100\%$$

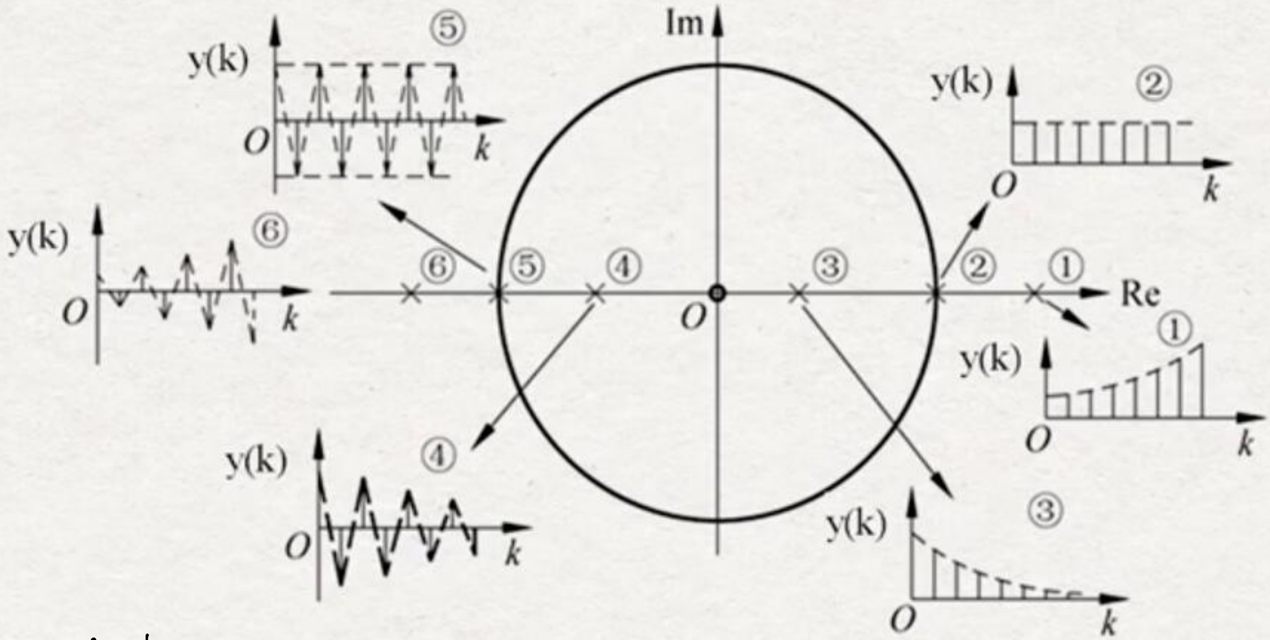
$$\Phi(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{K\prod_{i=1}^{m}(z - z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(z - p_j)}$$

$$Y(z) = \Phi(z)R(z) = \left(\frac{z}{z-1}\right)\frac{K\prod_{i=1}^{m}(z - z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(z - p_j)}$$



$$y(k) = A_0 1(k) + \sum A_j (p_j)^k + \sum 2|B_j||p_j|^k \cos(k\theta_j + \varphi_j)$$

实极点引起的暂态分量$A_j(p_j)^k$

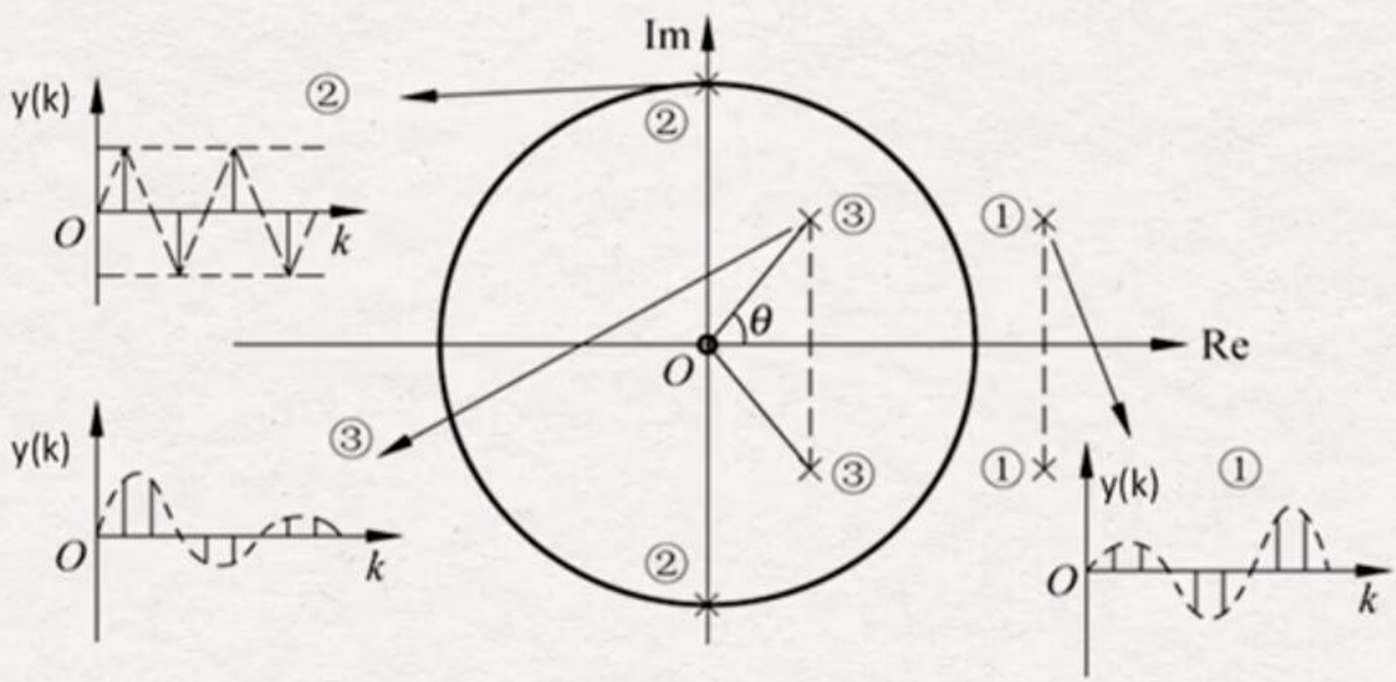


不稳定 ① ⑥

临界稳定：② ⑤

稳定：③ ④

复极点引起的暂态分量$2|B_j||p_j|^k\cos(k\theta_j+\varphi_j)$



- 闭环极点对系统动态性能的影响：
- 1.极点应分布在z平面单位圆内右半部，且越靠近原点越好。
- 2.系统响应由一对离原点最远的主导极点决定。

分布在左半部会引起振荡的暂态分量

4.3 计算机控制系统的稳态误差

设单位反馈误差采样系统如图4.12所示。系统误差脉冲传递函数为

$$\Phi_{\mathrm{e}}(z)=\frac{E(z)}{R(z)}=\frac{1}{1+G(z)}$$

若离散系统是稳定的，则可用z变换的终值定理求出采样瞬时的终值误差

$$e(\infty)=\lim_{t\to\infty}e^{*}(t)=\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})E(z)=\lim_{z\to 1}\frac{(1-z^{-1})R(z)}{[1+G(z)]}$$

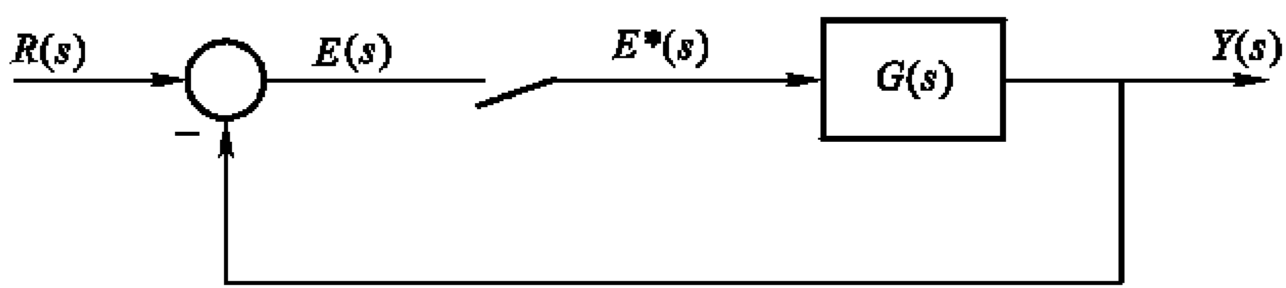


图4.12 单位反馈离散系统

计算机控制系统的稳态误差

在离散系统中，把开环脉冲传递函数$G(z)$具有$z=1$的极点数v作为划分离散系统型别的标准，与连续系统类似地把$G(z)$中$v=0,1,2,\ldots$的系统，称为0型，Ⅰ型和Ⅱ型离散系统等。下面讨论不同类别的离散系统在三种典型输入信号作用下的稳态误差，并建立离散系统静态误差系数的概念。

单位阶跃输入时的稳态误差

对于单位阶跃输入$r(t)=1(t)$，其z变换函数为

$$R(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}$$

得单位阶跃输入响应的稳态误差

$$e(\infty)=\lim_{z\to 1}\frac{1}{1+G(z)}=\frac{1}{K_{\mathrm{p}}}$$

上式代表离散系统在采样瞬时的终值位置误差。式中

$$K_{\mathrm{p}}=\lim_{z\to 1}[1+G(z)]$$

称为静态位置误差系数。

单位速度输入时的稳态误差

对于单位速度输入$r(t)=t$，其z变换函数为

$$R(z)=\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

得单位速度输入响应的稳态误差

$$e(\infty)=\lim_{z\to 1}\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})[1+G(z)]}=\lim_{z\to 1}\frac{T}{(1-z^{-1})G(z)}=\frac{T}{K_v}$$

上式代表离散系统在采样瞬时的终值速度误差。式中

$$K_v=\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})G(z)$$

称为静态速度误差系数。

单位加速度输入时

系统型别	位置误差	速度误差	加速度误差
	$r(t)=1(t)$	$r(t)=t$	$r(t)=t_2/2$
0型	$1/K_p$		
I型	0	T/K_v	
II型	0	0	T^2/K_a
III型	0	0	0

对于单位加速度输入$r(t)=t^2/2$，其

$$R(z)=\frac{T^2 z^{-1}(1+z^{-1})}{2(1-z^{-1})^3}$$

得单位速度输入响应的稳态误差

$$e(\infty)=\lim_{z\to 1}\frac{T^2 z^{-1}(1+z^{-1})}{2(1-z^{-1})^2[1+G(z)]}=\lim_{z\to 1}\frac{T^2}{(1-z^{-1})^2 G(z)}=\frac{T^2}{K_a}$$

上式代表离散系统在采样瞬时的终值加速度误差。式中

$$K_a=\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})^2 G(z)$$

称为静态加速度误差系数。

4.4 离散系统根轨迹和频率特性

- 离散系统根轨迹
- 离散系统频率特性

1. 离散系统根轨迹

线性定常离散系统的闭环脉冲传递函数为

$$\Phi(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=\frac{KG(z)}{1+KMG(z)}$$

该系统的特征方程为 $1+KMG(z)=0$

例4.5

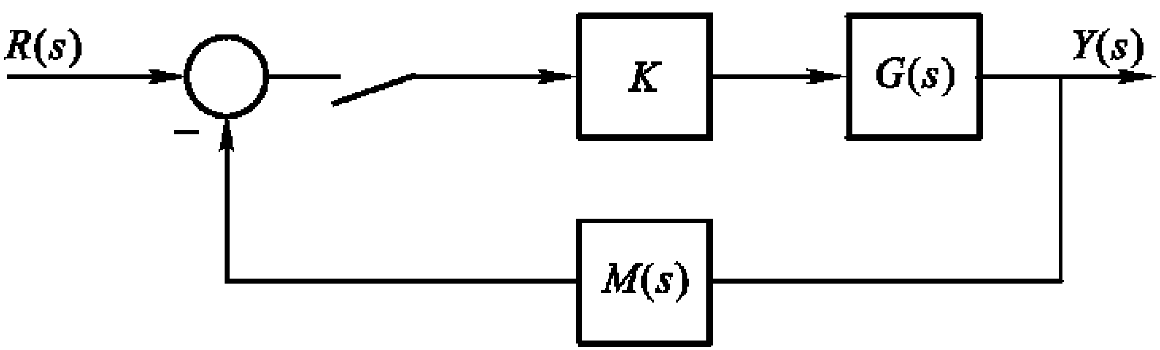


图4.13 线性定常离散系统

离散系统根轨迹就是画出闭环系统特征方程的根在z平面上随参数K变化的轨迹。由于离散根轨迹与连续根轨迹在形式上相同，所以其根轨迹的画法与连续根轨迹类似。

绘制离散系统根轨迹的基本原则

1.根轨迹起于开环脉冲传递函数$MG(z)$的极点，终止于开环脉冲传递函数$MG(z)$的零点

2.实轴上的某一区域，若其右侧开环实数零、极点个数之和为奇数，则该区域必是根轨迹

3.根轨迹对称于实轴

4.渐近线的个数等于开环脉冲传递函数$MG(z)$的极点n_{p}与零点n_{z}之差，且渐近线与实轴的交角和交点分别为

$$\varphi = \frac{(2k+1)\pi}{n_{\mathrm{p}} - n_{\mathrm{z}}} \qquad (k = 0,1,2,\mathrm{L}\ , n_{\mathrm{p}} - n_{\mathrm{z}} - 1)$$

$$\sigma = \frac{\sum \mathrm{poles}(MG(z)) - \sum \mathrm{zeros}(MG(z))}{n_{\mathrm{p}} - n_{\mathrm{z}}}$$

绘制离散系统根轨迹的基本原则

5.根轨迹的分离点由下式求解

$$\frac{\mathrm{d}[MG(z)]}{\mathrm{d}z}=0$$

$$\Rightarrow$$

$$D(z)\frac{\mathrm{d}N(z)}{\mathrm{d}z}-N(z)\frac{\mathrm{d}D(z)}{\mathrm{d}z}=0, \qquad MG(z)=\frac{N(z)}{D(z)}$$

绘制离散系统根轨迹

2. 离散系统频率特性

在连续系统中，频域分析法是应用频率特性研究线性系统的一种经典方法。只要将传递函数中的s以$j\omega$置换，就可以得到相应的频率特性。频率特性有幅频特性、相频特性及幅相频特性。

在连续系统中，某一个环节的频率特性为

$$G(\mathrm{j}\omega)=G(s)\big|_{s=\mathrm{j}\omega}$$

在离散系统中，某一环节的频率特性（奈氏曲线）为

$$G(z)\big|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T}}$$

离散系统频率特性

由于频率特性$G(e^{j\omega T})$不是ω的有理分式函数，所以不便于分析其频率特性，这给分析和设计系统带来不便。双线性变换可以将z平面的单位圆变换为w平面的虚轴，而且由于w平面与s平面有类似的对应关系，因此可以运用与连续系统相同的频域分析法来进行系统的分析和设计。

$$z=\frac{1+(T/2)w}{1-(T/2)w}$$

[绘制离散系统频率特性]

[例4.7]