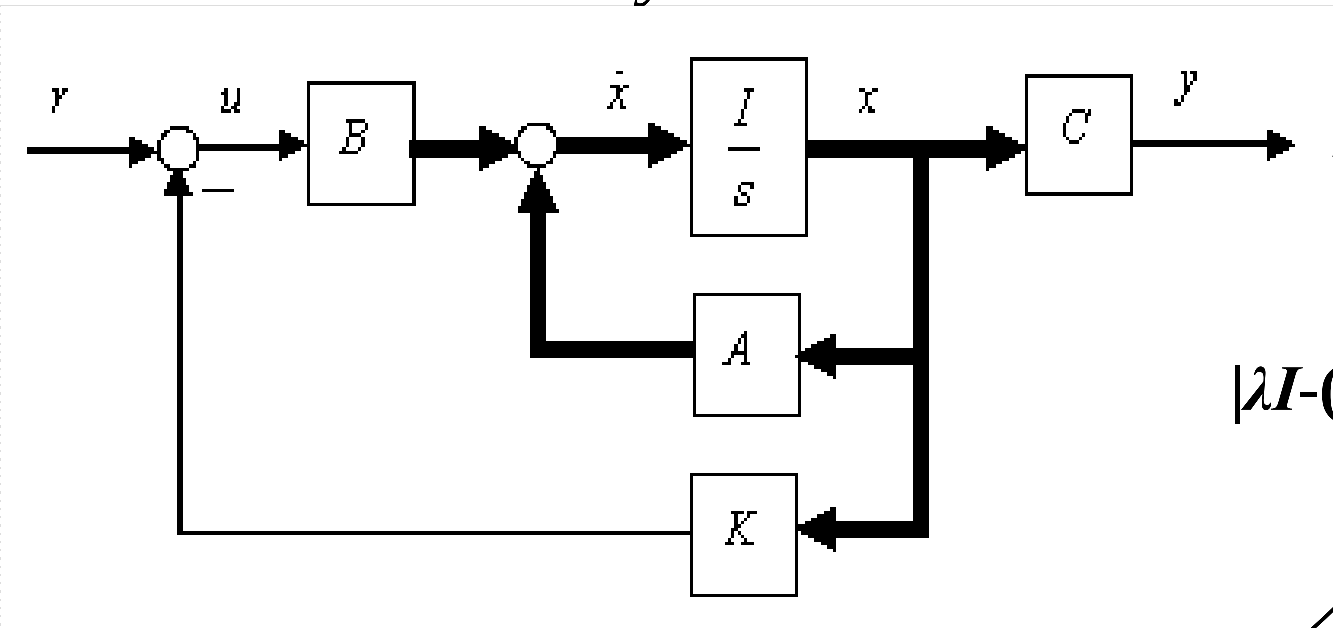
现代控制理论

第四章 状态反馈与状态观测器

4.1状态反馈及极点配置

1. 状态反馈的结构及基本性质

$\dot{x} = Ax + Bu \qquad y = Cx \qquad u = r - Kx$



|λI-(A-BK)|

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B(r - Kx) = (A - BK)x + Br \\ y = Cx \end{cases}$$

$$G(s) = C[sI - (A - BK)]^{-1}B$$

定理 一个可控、可观测的系统引入状态反馈后不改变系统的可控性，但可能改变系统的可观测性。

证明：受控系统可控，则可以通过非奇异线性变换***P*** ,化***A***，***B***为可控标准形，即

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx$$

$$\bar{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \bar{B} = P^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = CP = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \cdots & \beta_{n-1} \end{bmatrix}$$

引入 $u = r - \bar{K}\bar{x}, \quad \bar{K} = \begin{bmatrix} \bar{k}_0 & \bar{k}_1 & \cdots & \bar{k}_{n-1} \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \quad \dot{\bar{x}} = (\bar{A} - \bar{B}\bar{K})\bar{x} + \bar{B}r, \ y = \bar{C}\bar{x}$$

$$\bar{A} - \bar{B}\bar{K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 - \bar{k}_0 & -a_1 - \bar{k}_1 & -a_2 - \bar{k}_2 & \cdots & -a_{n-1} - \bar{k}_{n-1} \end{bmatrix} \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \beta_{n-2}s^{n-2} + \cdots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

$$\Phi(s) = \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \beta_{n-2}s^{n-2} + \cdots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n + (a_{n-1} + \bar{k}_{n-1})s^{n-1} + \cdots + (a_1 + \bar{k}_1)s + (a_0 + \bar{k}_0)}$$

2．基于状态反馈的极点配置问题

- **极点配置**

通过某些手段和方法，使闭环系统的极点达到期望的位置上

(1) 极点配置的条件

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx$$

定理：对上式所示系统，利用状态反馈使闭环极点配置在任意位置上的充要条件是开环系统可控。

充分性 $\dot{\bar{x}}=(\bar{A}-\bar{B}\bar{K})\bar{x}+\bar{B}r,\ y=\bar{C}\bar{x},\quad \bar{K}=\begin{bmatrix}\bar{k}_1 & \bar{k}_2 & \cdots & \bar{k}_n\end{bmatrix}$

$$\bar{A}-\bar{B}\bar{K}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ -a_0-\bar{k}_1 & -a_1-\bar{k}_2 & -a_2-\bar{k}_3 & \cdots & -a_{n-1}-\bar{k}_n\end{bmatrix}$$

其闭环特征方程为

$$\left|\lambda I-(\bar{A}-\bar{B}\bar{K})\right|=\lambda^n+(a_{n-1}+\bar{k}_n)\lambda^{n-1}+\cdots+(a_1+\bar{k}_2)\lambda_1+(a_0+\bar{k}_1)=0 \qquad (1)$$

希望极点 $\lambda_1^*,\lambda_2^*,\cdots,\lambda_n^*$ $\left(\lambda-\lambda_1^*\right)\left(\lambda-\lambda_2^*\right)\cdots\left(\lambda-\lambda_n^*\right)=0$

$$\lambda^n+\hat{a}_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+\hat{a}_1\lambda_1+\hat{a}_0=0 \qquad (2)$$

比较式(1) 和(2)，令其对应次幂项系数相等，得

$$\begin{cases} \hat{a}_0 = a_0 + \bar{k}_1 \\ \hat{a}_1 = a_1 + \bar{k}_2 \\ \quad\vdots \\ \hat{a}_{n-1} = a_{n-1} + \bar{k}_n \end{cases}$$

$$\lambda_1^*, \lambda_2^*, \cdots, \lambda_n^* \rightarrow \hat{a}_0, \hat{a}_1, \cdots, \hat{a}_{n-1} \rightarrow \bar{k}_1, \bar{k}_2, \cdots, \bar{k}_n$$

必要性

若受控系统不可控，一定有状态变量与u无关，就不可能实现全状态反馈。因为不可控子系统的特征值不可能重新配置，因此不能实现系统极点的任意配置。

(2) 极点配置的设计步骤

- 判定系统的可控性；
- 根据期望极点写出系统期望的特征方程

$$\left(\lambda-\lambda_1^*\right)\left(\lambda-\lambda_2^*\right)\cdots\left(\lambda-\lambda_n^*\right)=0$$

$$\lambda^n+\hat{a}_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+\hat{a}_1\lambda_1+\hat{a}_0=0 \quad (1)$$

- 设定状态反馈矩阵K，写出闭环系统的特征方程

$$\left|\lambda I-(A-BK)\right|=0 \quad (2)$$

- 令式(1)和(2)对应次幂项系数相等，可求出K;
- 画出闭环状态反馈系统的状态变量图。

例

一个能控的单输入－单输出系统，采用状态反馈后，闭环系统的特征方程可以写成

$$|sI-(A-bk)|=s^n+(a_n-k_{n-1})s^{n-1}+\cdots+(a_2-k_1)s+(a_1-k_0)=0$$

针对状态反馈，有以下结论：

a. 由于状态反馈系数阵***K***可以任意选择。因此，特征方程中的***n***个系数及对应的***n***个根都是任意的。

这就是说，通过状态反馈，闭环系统的极点可以在平面上任意配置。

但是，状态反馈并不影响系统的零点，也不改变系统的阶次。

b. 若系统的开环传递函数分子分母没有公因子，那么开环系统就是能控且能观测的。经状态反馈之后，系统的能控性不变，但是由于系统的零点不受影响，而其极点可以任意配置，因此闭环系统的传递函数有可能出现分子分母对消现象，从而使系统变成不能观测的。即状态反馈不一定能够保持系统的能观测性。

c. 如果不是全状态反馈，那么在反馈阵$\boldsymbol{K}$这相应的元素必为零。这样，闭环系统的极点在s平面上的配置就有局限了。

d. 状态反馈比一般的输出反馈对系统性能的综合更为方便。

例如，利用状态反馈能够任意配置闭环极点；而利用输出反馈、调节系统的开环放大倍数，只能使闭环极点沿着一定的根轨迹移动。

但是，从实现的角度来说，状态反馈要比输出反馈复杂。

另外，在前面讲过的经典控制理论中，如果在输出反馈中，在调节放大倍数的同时，再引入串联或并联校正装置，这实际上也是在进行极点配置。

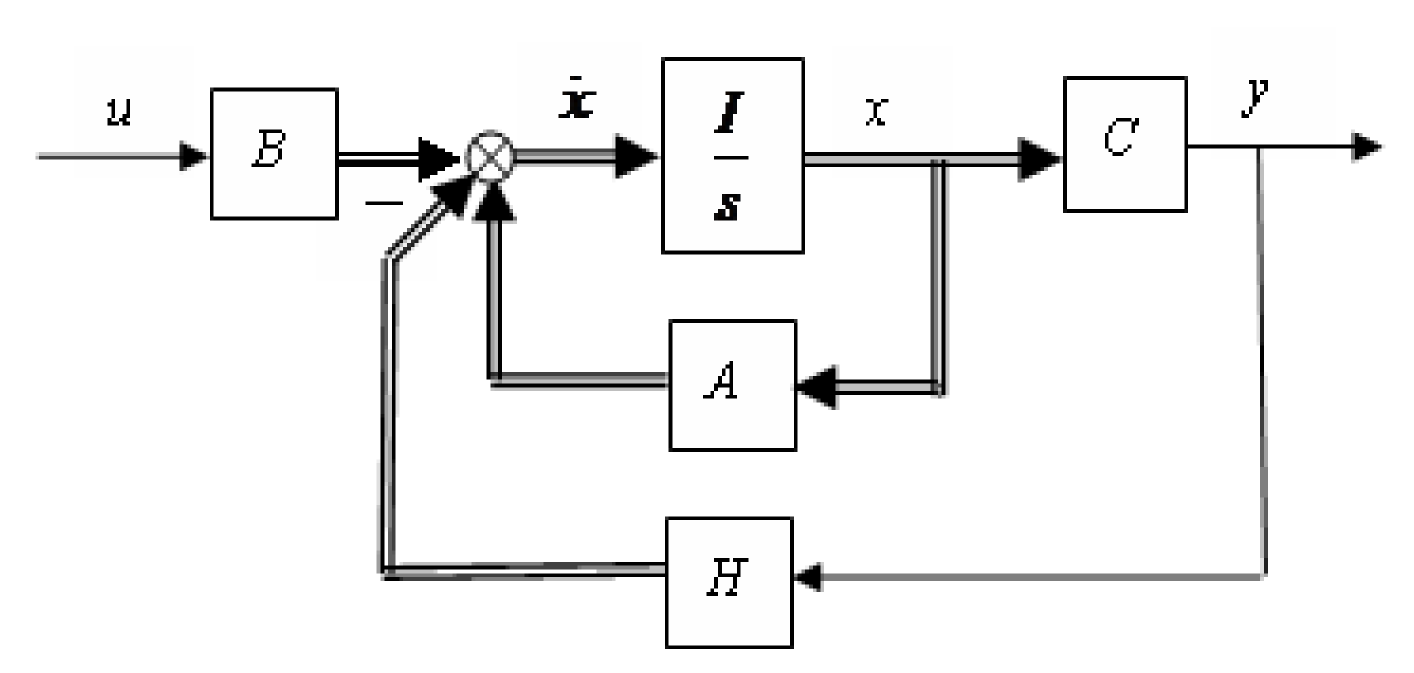
基于状态反馈的极点配置定理对多输入－多输出系统也适用，但应注意以下问题：

a. 如果系统可控，那么按照极点配置综合的状态反馈阵在单输入－单输出系统中有唯一的解，而在多输入－多输出系统中解不是唯一的。这是因为对于多输入－多输出系统可以导出多种可控标准形。这样，设计的自由度增加了。但是，确定哪一个解比较好是十分麻烦的。

b. 状态反馈不改变单输入－单输出系统的零点，但是，这个结论并不一定适用于多输入－多输出系统。零点对系统的动态性能的影响很大，因此，在多输入－多输出系统这，零点的多变性使按极点配置的综合问题变得复杂化。

4.2 输出反馈及极点配置

1、输出至状态微分的反馈



$$\dot{x} = Ax - Hy + Bu \qquad y = Cx$$

$$\Rightarrow \quad \dot{x} = (A - HC)x + Bu$$

定理 用输出至状态微分的反馈阵$\boldsymbol{H}$任意配置极点的充要条件是：受控系统可观测。

充分性

$$\bar{A}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & -\bar{a}_0\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\bar{a}_1\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -\bar{a}_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\bar{a}_{n-1}\end{bmatrix} \qquad \bar{B}=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}$$

$$\bar{C}=\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}$$

在变换后的状态空间内引入输出反馈阵***H***

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} \bar{h}_0 & \bar{h}_1 & \cdots & \bar{h}_{n-1} \end{bmatrix}^T$$

则反馈系统状态方程为 $\dot{\bar{x}} = (\bar{A} - \bar{H}\bar{C})\bar{x} + \bar{B}u$

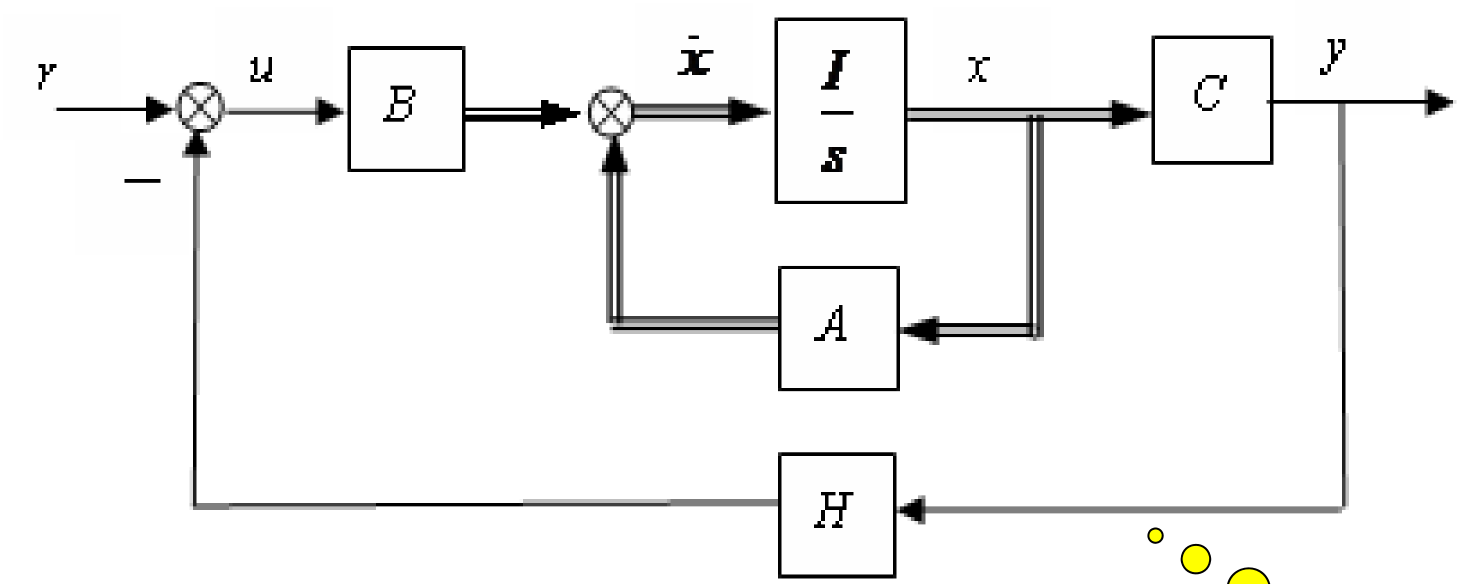
其中

$$\bar{A} - \bar{H}\bar{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\bar{a}_0 - \bar{h}_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\bar{a}_1 - \bar{h}_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -\bar{a}_2 - \bar{h}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\bar{a}_{n-1} - \bar{h}_{n-1} \end{bmatrix} \quad \bar{C} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则闭环系统特征方程为

$$\left| \lambda I - (\bar{A} - \bar{H}\bar{C}) \right| = \lambda^n + (\bar{a}_{n-1} + \bar{h}_{n-1})\lambda^{n-1} + \cdots + (\bar{a}_1 + \bar{h}_1)\lambda + (\bar{a}_0 + \bar{h}_0) = 0$$

2、输出至输入的反馈



$$\dot{x} = Ax + B(r - Hy),\quad y = Cx$$

$$\Rightarrow \quad \dot{x} = (A - BHC)x + Br$$

不改变受控对象的可控性和可观性

4.3 扰动的抑制及消除

- 实际系统中不可避免地存在着扰动作用，致使系统稳态时不能理想的跟踪参考输入而产生偏差。经典控制理论中用偏差的积分及复合控制来抑制与消除单输入—单输出系统的稳态误差。这里，将其推广到多输入—多输出系统的状态空间中。

$$\dot{x} = Ax + Bu + d, y = Cx$$

式中d为（nx**1**）维扰动输入

目标：$y(t)$ 跟踪参考输入$r(t)$

1. 引入偏差的积分值

设$d(t)=d_0\cdot 1(t)$，$r(t)= r_0\cdot 1(t)$，定义偏差向量$e(t)$为

$$e(t)=y(t)-r(t)$$

则引入偏差向量的积分$q(t)$

$q(t)$与$y(t)$ 均为（q x 1）维

$$q(t)=\int_0^t e(\tau)d\tau=\int_0^t [y(\tau)-r(\tau)]d\tau$$

$$\Rightarrow \quad \dot{q}(t)=e(t)=Cx(t)-r(t)$$

$n+q$维

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{q}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & 0\\ C & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ q\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B\\ 0\end{bmatrix}u+\begin{bmatrix}d\\ -r\end{bmatrix},y=\begin{bmatrix}C & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ q\end{bmatrix}$$

➢要求上述增广系统可控，以便能用状态反馈实现闭环极点的任意配置，以保证系统的稳定性，动态性能及消除稳态误差。

增广系统的可控性矩阵S为

[（n + q）x（n + q）p]维

$$S=\left[\begin{array}{c:c:c:c:c}B & AB & A^2B & \cdots & A^{n+q-1}B\\ 0 & CB & CAB & & CA^{n+q-2}B\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c:c}B & AS_1\\ 0 & CS_1\end{array}\right]=\begin{bmatrix}A & B\\ C & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & S_1\\ I & 0\end{bmatrix}$$

其中 $S_1=\begin{bmatrix}B & AB & \cdots & A^{n-1}B & \cdots & A^{n+q-2}B\end{bmatrix}$

[n x（n+q-1）p]维

增广系统的可控的充要条件是： $rankS=n+q$

若原受控对象可控，则其可控性矩阵满足：

$$rank\begin{bmatrix}B & AB & \cdots & A^{n-1}B\end{bmatrix}=n$$

满秩

$$\Longrightarrow \qquad rankS_1=n$$

于是增广系统的可控的充要条件是:

$$rankS=rank\begin{bmatrix}A & B\\ C & 0\end{bmatrix}_{(n+q)\times(n+p)}=n+q$$

至此，增广系统可控的充要条件又可表为

（1）受控对象可控;

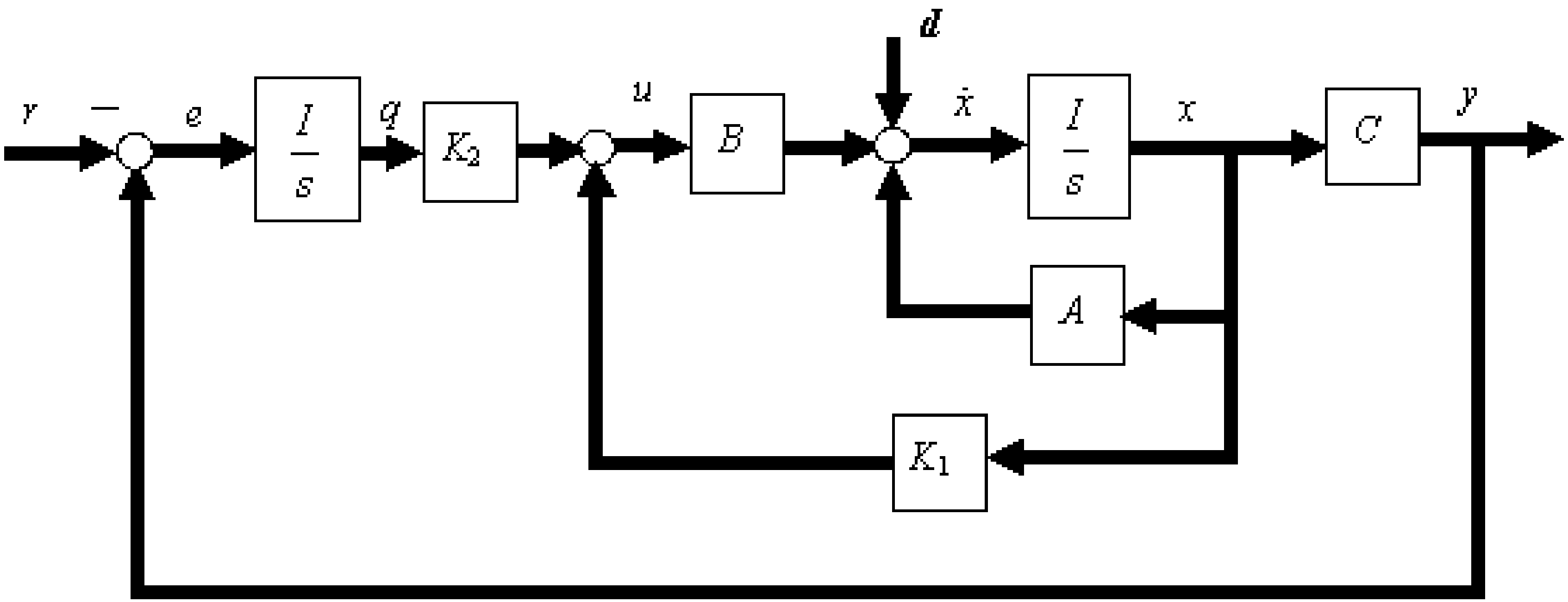
（2）$$rank\begin{bmatrix} A_{nxn} & B_{nxp} \\ C_{qxn} & 0_{qxp} \end{bmatrix} = n+q; p \geq q;\ rankB \geq rankC = q$$

选择下列状态反馈控制规律

$$u = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ q \end{bmatrix} = K_1 x + K_2 q$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+BK_1 & BK_2 \\ C & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d \\ -y_r \end{bmatrix} = A_1\begin{bmatrix} x \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d \\ -y_r \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ q \end{bmatrix} = C_1\begin{bmatrix} x \\ q \end{bmatrix}$$



$$f(\lambda) = \det\left\{ \lambda I - \begin{bmatrix} A + BK_1 & BK_2 \\ C & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

可求得输出向量的拉氏变换为

$$Y(s) = C_1(sI - A_1)^{-1}\begin{bmatrix} D(s) \\ -R(s) \end{bmatrix}$$

当**d=d_0·1(t)**及**r= r_0·1(t)**时，稳态输出向量为

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sy(s)$$

$$= \lim_{s\to 0} sC_1(sI - A_1)^{-1}\begin{bmatrix} d_0/s \\ -r_0/s \end{bmatrix} = -C_1A_1^{-1}\begin{bmatrix} d \\ -r_0 \end{bmatrix}$$

且存在

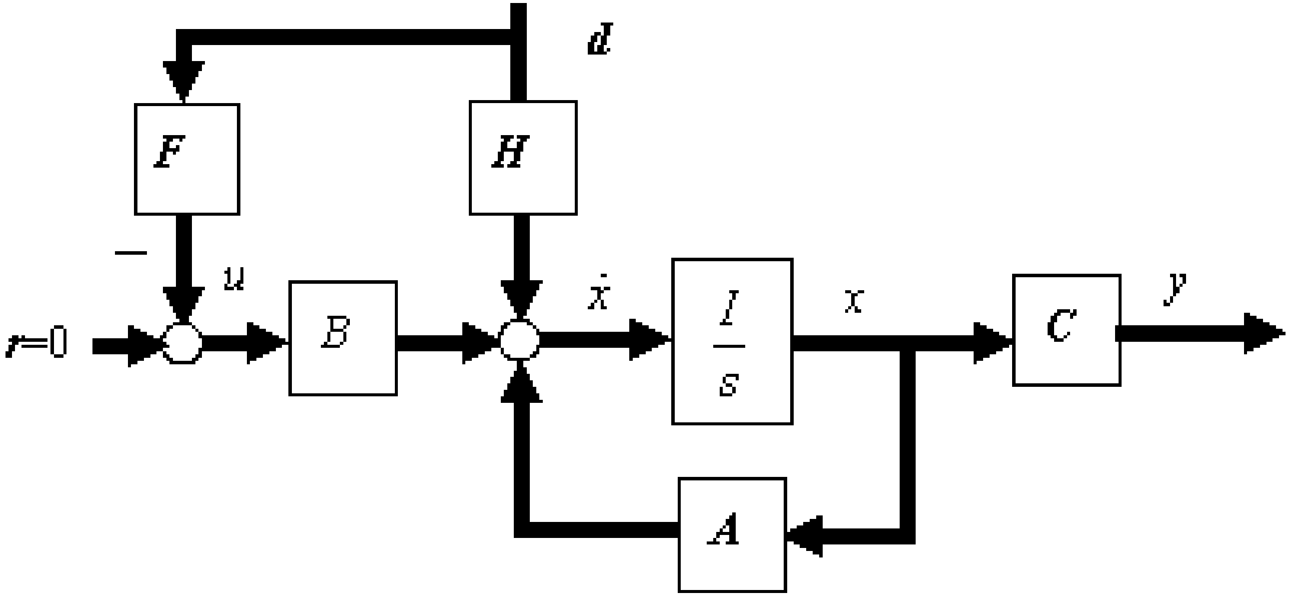
$$\lim_{t\to\infty}\left[y(t) - r(t)\right] = 0$$

当扰动和 **/** 或参考输入为斜坡信号时，需引入重积分器，这时增广系统动态方程随之改变。

例

2. 复合控制

$$\dot{x} = Ax + Bu + Hd, y = Cx$$



复合控制就是选择***F***阵，在参考输入***r*** **= 0**条件下使

$$u = -Fd$$

以实现y对d的不变性。

复合控制系统动态方程为

$$\dot{x} = Ax + (H - BF)d, y = Cx$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = C\Phi(t - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} C\Phi(t-\tau)(H - BF)d(\tau)d\tau$$

要求***y*(*t*)**不受***d*(*t*)**的影响，就是要求

$$\int_{t_0}^{t} C\Phi(t-\tau)(H - BF)d(\tau)d\tau = 0$$

$$\Rightarrow \quad C\Phi(t-\tau)(H - BF) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad Ce^{A(t-\tau)}(H-BF)=0$$

$$\xrightarrow{t-\tau=t',H-BF=B'} Ce^{At'}B'=0$$

$$B'=H-BF=0$$

$\Longrightarrow$ **F**

$$e^{At'}=\sum_{m=0}^{n-1}a_m(t')A^m \Longrightarrow \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} B'=0$$

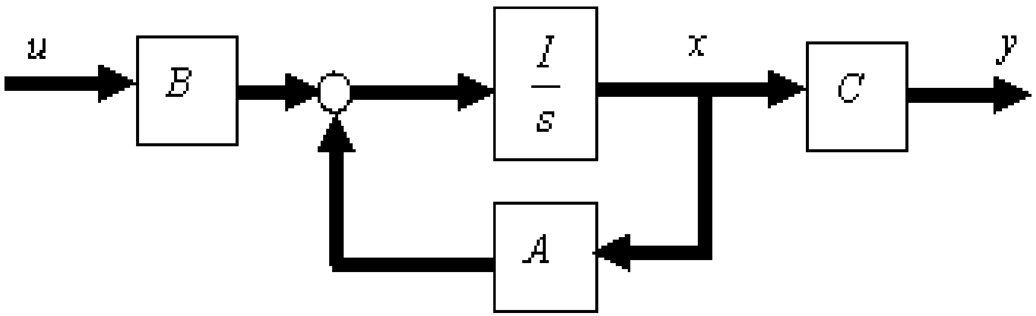
上式表明，该系统可观测而不可控。

4.4 全维状态观测器

- 实现状态重构的装置就称为状态观测器。按实现维数的不同，状态观测器一般可分为全维状态观测器和降维状态观测器两种形式。
- 与被观测系统具有相同维数的观测器，被称为全维状态观测器，也称为龙伯格观测器。
- 若观测器的维数低于被观测系统的维数，则被称为降维状态观测器。

1、全维状态观测器设计任务

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad y = Cx$$



设计任务:构建状态观测器，使观测器的状态满足如下跟踪特性

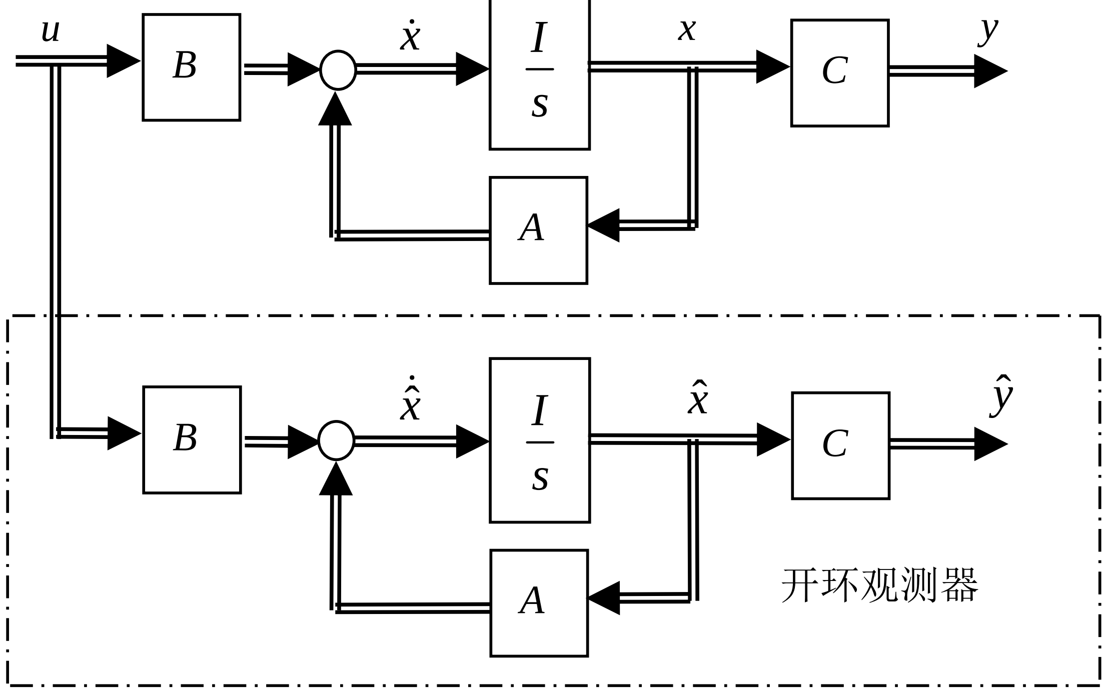
$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \vdots \\ \hat{x}_n \end{bmatrix} \xrightarrow{t\to\infty} x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\lim_{t\to\infty}\left(\underline{x_i(t) - \hat{x}_i(t)}\right) = 0, i = 1, 2, \cdots, n$$

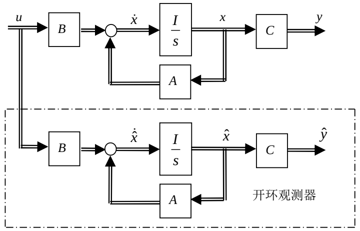
2、开环全维状态观测器

构建一个与受控对象动态方程相同的模拟系统

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu \qquad \hat{y} = C\hat{x}$$



开环状态观测器的跟踪特性分析



设状态偏差为 $\tilde{x} = x - \hat{x}$

$$\dot{\tilde{x}} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + Bu - \left(A\hat{x} + Bu\right) = A\left(x - \hat{x}\right) = A\tilde{x}$$

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x}$$

$$\tilde{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\tilde{x}(t_0) \longrightarrow \tilde{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\left[x(t_0) - \hat{x}(t_0)\right]$$

$x(t_0) = \hat{x}(t_0) \longrightarrow \tilde{x} \equiv 0$

受控对象的初始状态可能因其所处的实际环境、条件等因素不同而相异，模拟系统中积分器初始条件的设置只能预估，因而两个系统的初始状态总有差异，完全相等的机率极小。

$x(t_0) \neq \hat{x}(t_0)$

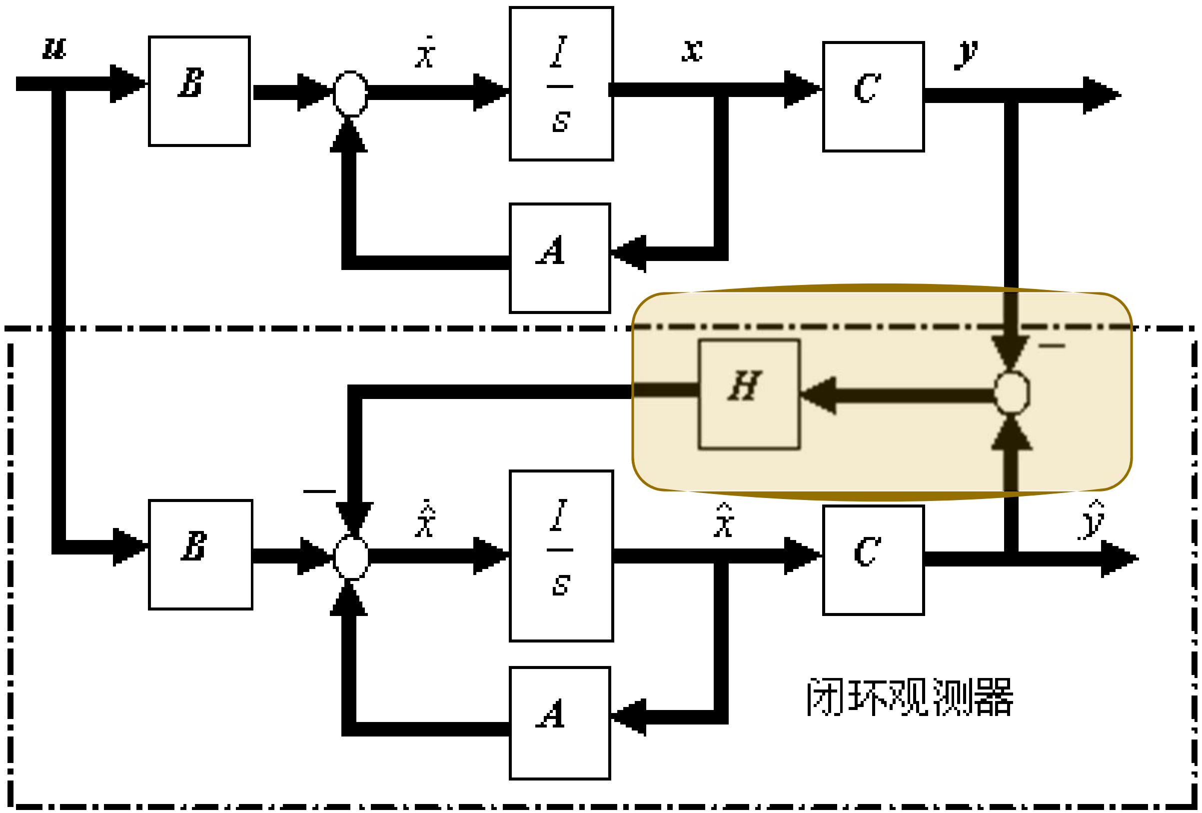
系统矩阵A具有正的特征值（或具有正实部）时 $\tilde{x} \to \infty$

当系统矩阵A的特征值都为负（或具有负实部）时 $\tilde{x} \to 0$

即 $x \to \hat{x}$

✓实际上这种开环观测器是不实用的，几乎不被应用。

3、闭环全维状态观测器



$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu - H(\hat{y} - y) = A\hat{x} + Bu - H(C\hat{x} - Cx)$$

$$= A\hat{x} + Bu - HC(\hat{x} - x)$$

$$\tilde{x} = x - \hat{x}$$

$$\Rightarrow \dot{x} - \dot{\hat{x}} = A(x-\hat{x}) + HC(\hat{x}-x) = (A-HC)(x-\hat{x})$$

其解为

$$x - \hat{x} = e^{(A-HC)(t-t_0)}[x(t_0) - \hat{x}(t_0)]$$

◆**只要（A-HC）的特征值具有负实部，不论初始向量误差如何，总会按指数规律衰减满足式**

$$\lim_{t\to\infty}(\hat{x} - x) = 0$$

衰减速度取决于（A-HC）的特征值配置 。故观测器能估计状态的充要条件是受控对象可观测。

4、闭环全维状态观测器的设计步骤

- 判定待观测系统的可观测性；
- 根据观测器响应速度的要求确定其期望极点

$$\hat{\lambda}_1^*, \hat{\lambda}_2^*, \cdots, \hat{\lambda}_n^*$$

写出期望的特征方程，即

$$\lambda^n + \hat{a}_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \hat{a}_1\lambda_1 + \hat{a}_0 = 0$$

- 设定输出反馈矩阵H_{qxn}(q为输出维数)，写出闭环观测系统的特征方程

$$\left|\lambda I - (A - HC)\right| = 0$$

- 令上面两式对应次幂项系数相等，便可求出H；
- 画出闭环观测器的状态变量图。

例

4.5 降维状态观测器

对于q维输出系统，有q个输出变量可直接由传感器测得。

若选取该q个输出作为状态变量，它们便无需由观测器作出估计，观测器只需估计（n-q）个状态变量，称为降维观测器。

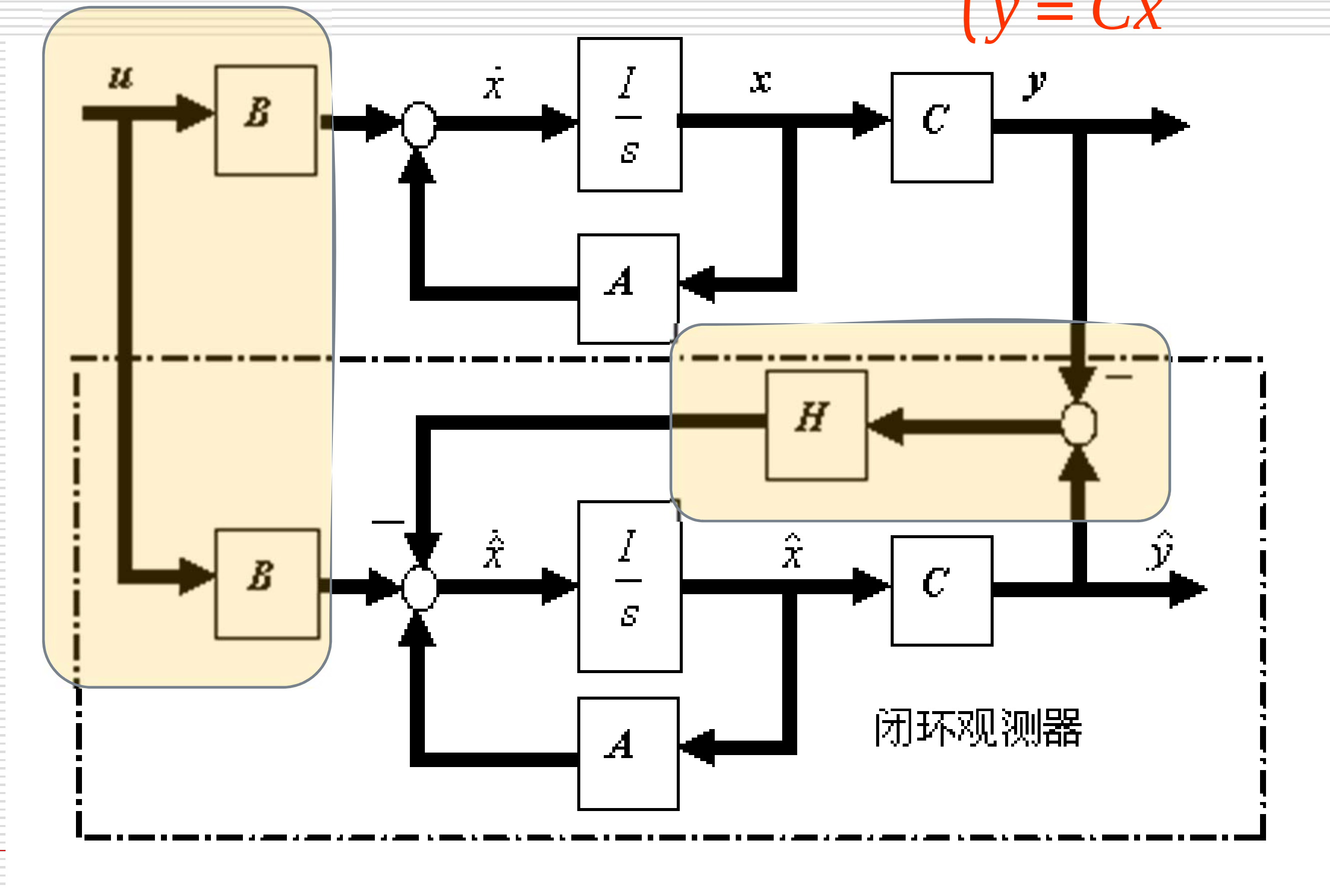
特点： 是（n-q）维子系统，结构简单，工程上易于实现。

为此，需要由受控对象动态方程导出（n-q）维子系统动态方程，建立降维观测器的观测模型。

回顾全维观测器

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu - HC(\hat{x} - x) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases}$$



$\bar{x}$

1、降维观测器的观测模型

设可观测受控对象动态方程为

$$\dot{x} = Ax + Bu,\ \ y = Cx$$

式中，*u*为（*p* x 1）维，*y*为（*q* x 1）维

(1) 引入非奇异线性变换

$$x = Q\bar{x} \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}$$

***n-q*维待观测状态变量**

***q*维由输出*y*测得的状态变量**

$$\Rightarrow \quad \dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u, y = \bar{y} = \bar{C}\bar{x}$$

$$Q = \begin{bmatrix} M \\ \cdots \\ C \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\bar{A} = Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \underbrace{\bar{A}_{21}}_{(n-q)} & \underbrace{\bar{A}_{22}}_{q} \end{bmatrix} \begin{matrix} \}(n-q)\text{行} \\ \}\quad q\text{行} \end{matrix}$$

$$\bar{B} = Q^{-1}B = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \cdots \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \}(n-q)\text{行} \\ \\ \}\quad q\text{行} \end{matrix}$$

$$\bar{C} = CQ = C\begin{bmatrix} M \\ \cdots \\ C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M \\ \cdots \\ C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M \\ \cdots \\ C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & I \end{bmatrix}$$

可验证

$$C = C\begin{bmatrix} M \\ \cdots \\ C \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} M \\ \cdots \\ C \end{bmatrix} = \bar{C}\begin{bmatrix} M \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M \\ \cdots \\ C \end{bmatrix} = C$$

$$\Rightarrow \bar{C} = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}$$

(2) 待观测子系统模型

$$\begin{bmatrix}\dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_1 \\ \bar{x}_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\bar{B}_1 \\ \bar{B}_2\end{bmatrix}u \qquad y = \bar{y} = \begin{bmatrix}0 & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_1 \\ \bar{x}_2\end{bmatrix} = \bar{x}_2$$

$$\begin{cases}\dot{\bar{x}}_1 = \bar{A}_{11}\bar{x}_1 + \bar{A}_{12}\bar{y} + \bar{B}_1 u \\ \dot{\bar{x}}_2 = \bar{A}_{21}\bar{x}_1 + \bar{A}_{22}\bar{y} + \bar{B}_2 u\end{cases}$$

令 $\begin{cases}v = \bar{A}_{12}\bar{y} + \bar{B}_1 u \\ z = \dot{\bar{y}} - \bar{A}_{22}\bar{y} - \bar{B}_2 u\end{cases}$

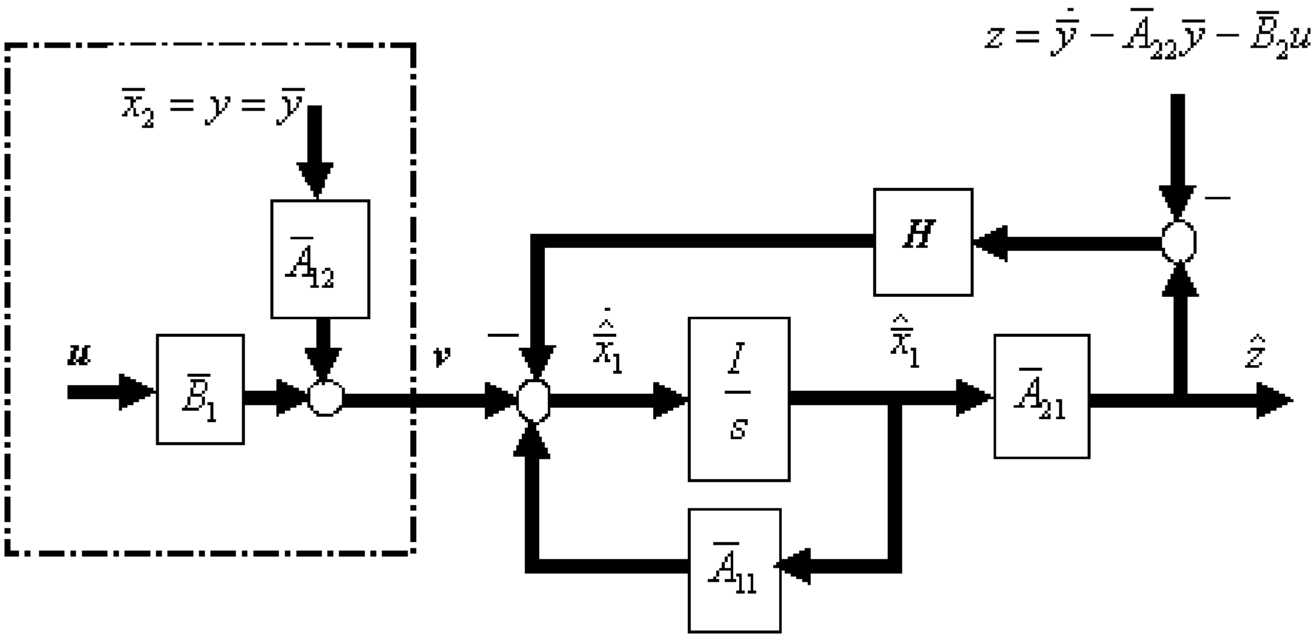
则得待观测子系统模型为

$$\begin{cases}\dot{\bar{x}}_1 = \bar{A}_{11}\bar{x}_1 + v \\ z = \bar{A}_{21}\bar{x}_1\end{cases}$$

可观测

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx\end{cases}$$

2、降维观测器的构成及分析



$$\dot{\hat{\bar{x}}}_1=\bar{A}_{11}\bar{x}_1+v-H(\hat{z}-z),\quad \hat{z}=\bar{A}_{21}\hat{\bar{x}}_1$$

$$\dot{\hat{\bar{x}}}_1=(\bar{A}_{11}-H\bar{A}_{21})\hat{\bar{x}}_1+v+Hz$$

$$=(\bar{A}_{11}-H\bar{A}_{21})\hat{\bar{x}}_1+(\bar{A}_{12}\bar{y}+\bar{B}_1u)+H(\dot{\bar{y}}-\bar{A}_{22}\bar{y}-\bar{B}_2u)$$

$$\dot{\bar{x}}_1 = \bar{A}_{11}\bar{x}_1 + \bar{A}_{12}\bar{y} + \bar{B}_1 u$$

$$\dot{\hat{\bar{x}}}_1 = (\bar{A}_{11} - H\bar{A}_{21})\hat{\bar{x}}_1 + (\bar{A}_{12}\bar{y} + \bar{B}_1 u) + H\overbrace{(\dot{\bar{y}} - \bar{A}_{22}\bar{y} - \bar{B}_2 u)}^{z = \bar{A}_{21}\bar{x}_1}$$

采用与全维状态观测器相同的思路

$$\dot{\bar{x}}_1 - \dot{\hat{\bar{x}}}_1 = \left(\bar{A}_{11} - H\bar{A}_{21}\right)\left(\bar{x}_1 - \hat{\bar{x}}_1\right)$$

$$\bar{x}_1 - \hat{\bar{x}}_1 = e^{\left(\bar{A}_{11} - H\bar{A}_{21}\right)}\left(\bar{x}_1(t_0) - \hat{\bar{x}}_1(t_0)\right)$$

通过选取观测器输出反馈矩阵*H*能使降维观测器按期望的衰减速率实现状态跟踪

$$\bar{x}_1 \to \hat{\bar{x}}_1$$

3、降维状态观测器的设计及实现

(1)设计步骤

①判定待观测系统的可观测性；

②通过非奇异线性变换把系统变为如下形式

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix} u$$

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \bar{x}_2$$

确定待观测子系统的动态方程

$$\dot{\bar{x}}_1 = \bar{A}_{11}\bar{x}_1 + \boxed{\bar{A}_{12}\bar{y} + \bar{B}_1 u}$$

$$z = \bar{A}_{21}\bar{x}_1$$

相当于Bu

③根据观测器的响应速度的要求确定观测器的期望极点：

$\hat{\lambda}_1^*, \hat{\lambda}_2^*, \cdots, \hat{\lambda}_{n-q}^*$ **，列写出期望的特征方程**

$$\left(\lambda-\hat{\lambda}_1^*\right)\left(\lambda-\hat{\lambda}_2^*\right)\cdots\left(\lambda-\hat{\lambda}_{n-q}^*\right)=0$$

即

$$\lambda^{n-q}+\hat{a}_{n-q-1}\lambda^{n-q-1}+\cdots+\hat{a}_1\lambda_1+\hat{a}_0=0 \qquad \textbf{(1)}$$

④设定输出反馈矩阵 $H_{(n-q)\times q}$ **(*q*为输出维数)，**

写出降维观测器的特征方程

$$\left|\lambda I-(\bar{A}_{11}-H\bar{A}_{21})\right|=0 \qquad \textbf{(2)}$$

⑤令式(1)和式(2)对应次幂项系数相等，便可求出*H*。

$$\dot{\hat{\bar{x}}}_1=(\bar{A}_{11}-H\bar{A}_{21})\hat{\bar{x}}_1+(\bar{A}_{12}\bar{y}+\bar{B}_1u)+H(\dot{\bar{y}}-\bar{A}_{22}\bar{y}-\bar{B}_2u)$$

(2) 降维观测器的实现

微分项

$$\dot{\hat{\bar{x}}}_1=(\bar{A}_{11}-H\bar{A}_{21})\hat{\bar{x}}_1+(\bar{A}_{12}\bar{y}+\bar{B}_1u)+H(\dot{\bar{y}}-\bar{A}_{22}\bar{y}-\bar{B}_2u)$$

- **变量变换法**

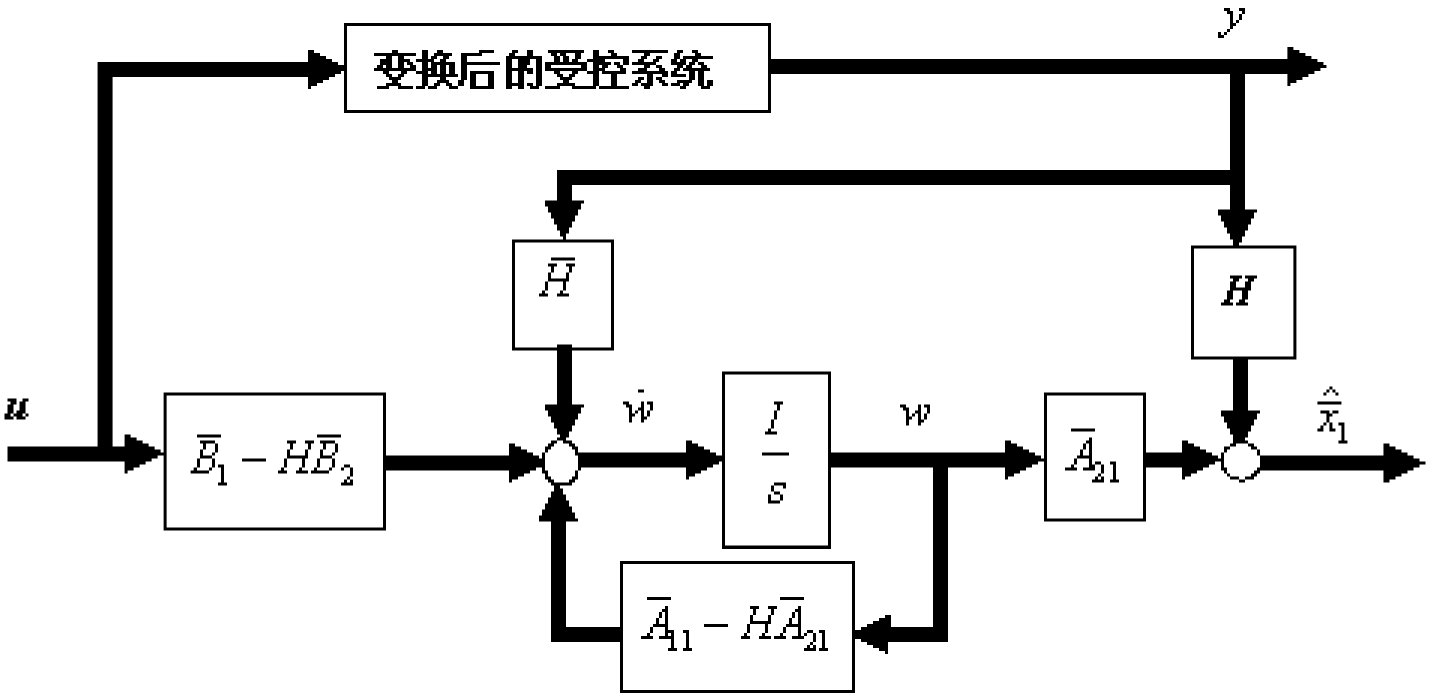
$$w=\hat{\bar{x}}_1-H\bar{y}$$

$$\dot{\hat{\bar{x}}}_1=\dot{w}+\cancel{H\dot{\bar{y}}}=(\bar{A}_{11}-H\bar{A}_{21})(w+H\bar{y})+(\bar{A}_{12}\bar{y}+\bar{B}_1u)+\cancel{H\dot{\bar{y}}}-H\bar{A}_{22}\bar{y}-H\bar{B}_2u$$

$$\dot{w}=(\bar{A}_{11}-H\bar{A}_{21})w+(\bar{b}_1-H\bar{b}_2)u+\bar{H}\bar{y}$$

$$\bar{H}=(\bar{A}_{11}-H\bar{A}_{21})H+\bar{A}_{12}-H\bar{A}_{22}$$

$$\hat{\bar{x}}_1=w+H\bar{y}$$

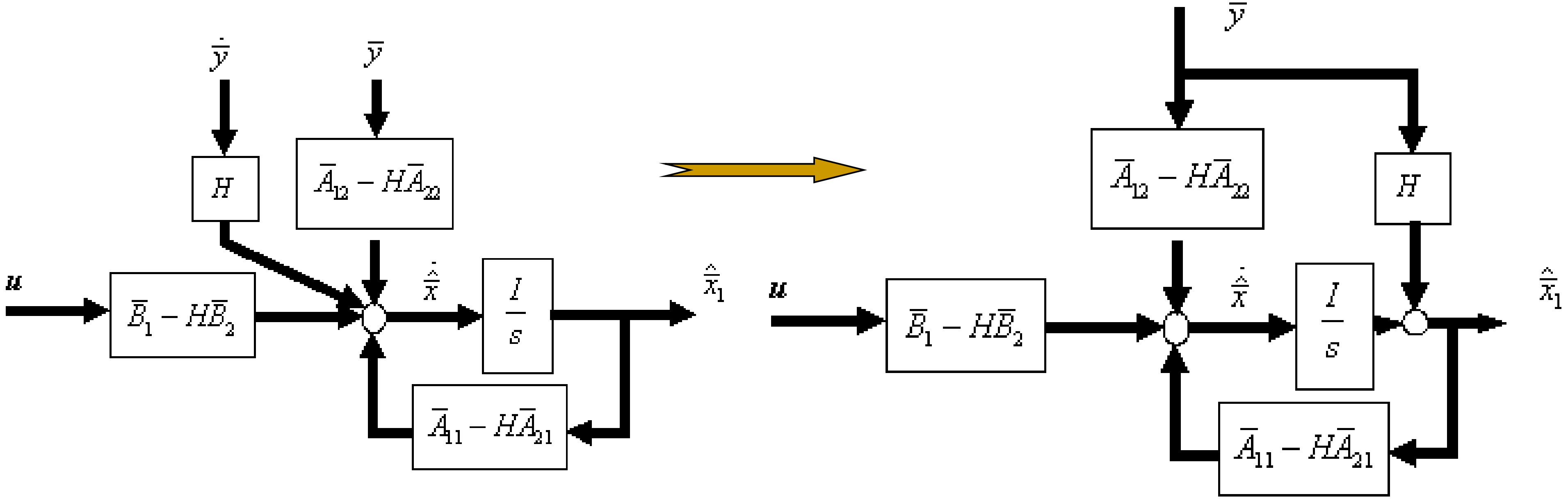


变换后的受控对象和龙伯格观测器结构图

结构变换法

$$\dot{\hat{\hat{x}}} = (\bar{A}_{11} - H\bar{A}_{21})\hat{\hat{x}}_1 + (\bar{A}_{12}\bar{y} + \bar{B}_1 u) + H(\dot{\bar{y}} - \bar{A}_{22}\bar{y} - \bar{B}_2 u)$$

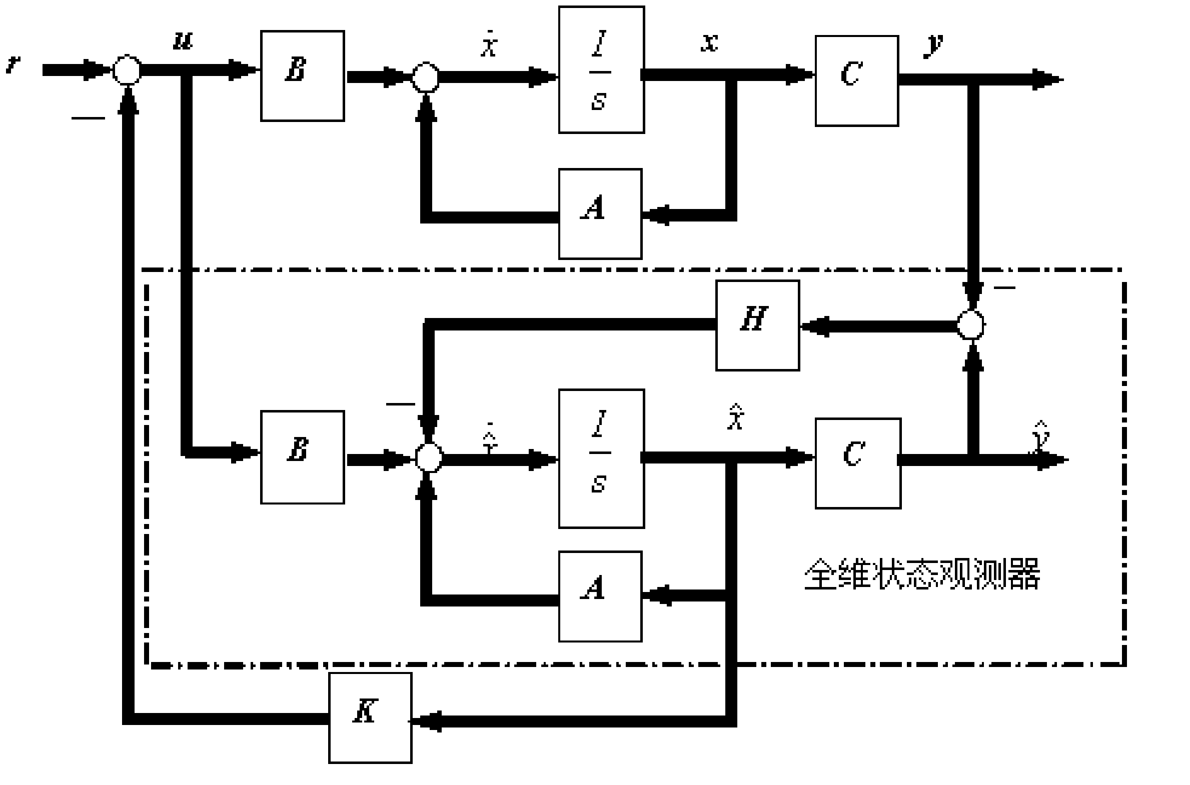
$$\dot{\hat{\hat{x}}} = (\bar{A}_{11} - H\bar{A}_{21})\hat{\hat{x}}_1 + H\dot{\bar{y}} + (\bar{A}_{12} - H\bar{A}_{22})\bar{y} + (\bar{B}_1 - H\bar{B}_2)u$$



降维观测器的结构变换法实现

示例

4.6带观测器的状态反馈系统

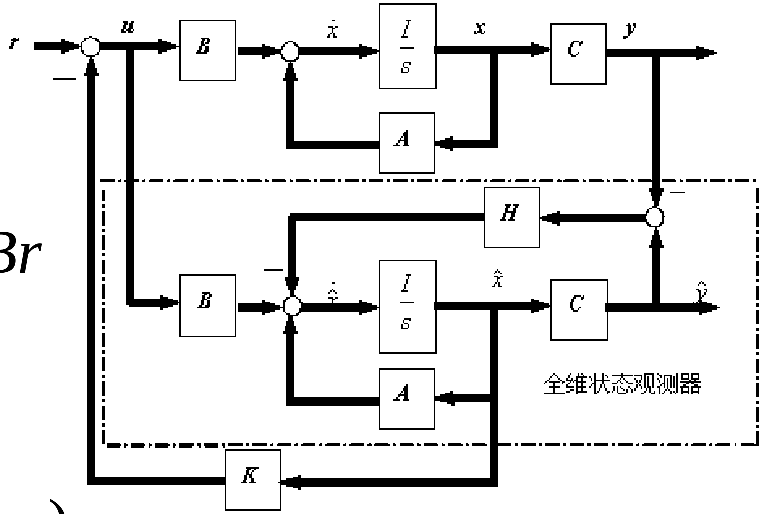


带观测器的状态反馈系统

闭环状态反馈部分状态方程为

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$= Ax + B(r - K\hat{x}) = Ax - BK\hat{x} + Br$$



观测器部分状态方程为

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu - H(\hat{y} - y)$$

$$= A\hat{x} + B(r - K\hat{x}) - HC(\hat{x} - x)$$

$$=(A - HC)\hat{x} + HCx - BK\hat{x} + Br$$

设全维状态观测器的估值偏差 $\tilde{x} = x - \hat{x}$

$$\dot{x} = (A - BK)x + BK\tilde{x} + Br$$

采用直接状态反馈的状态反馈闭环系统的状态方程为

$$\dot{x} = (A - BK)x + Br$$

◆与直接状态反馈相比，使用观测器进行状态反馈的闭环系统相当于加入了一个扰动项 $BK\tilde{x}$

$$\dot{x}-\dot{\hat{x}}=(A-HC)(x-\hat{x})$$

即

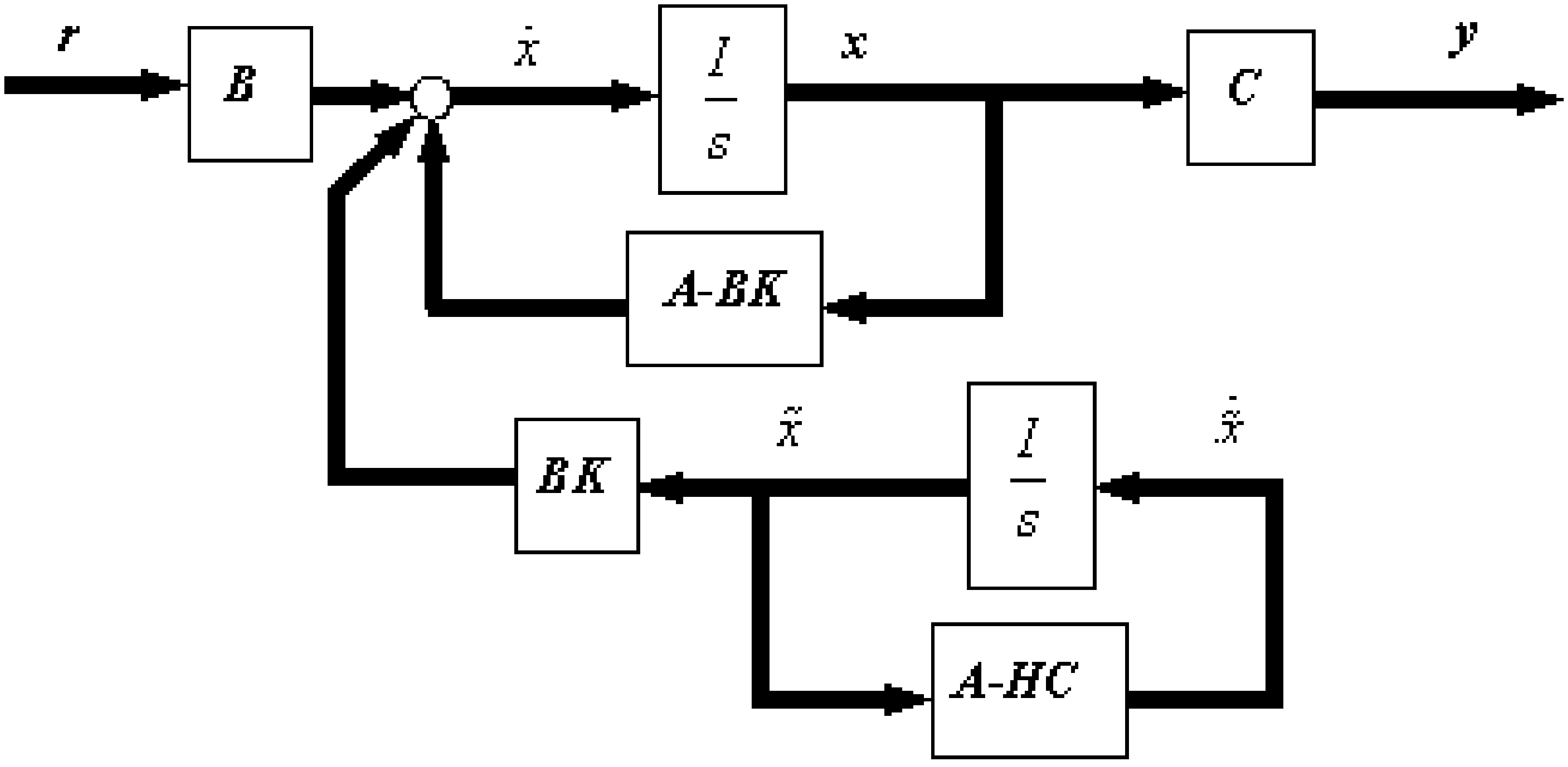
$$\dot{\tilde{x}}=(A-HC)\tilde{x}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{\tilde{x}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A-BK & BK\\ 0 & A-HC\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ \tilde{x}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B\\ 0\end{bmatrix}r \qquad y=Cx$$

上述增广系统的特征方程为

$$\begin{vmatrix}\lambda I-(A-BK) & -BK\\ 0 & \lambda I-(A-HC)\end{vmatrix}=\left|\lambda I-(A-BK)\right|\left|\lambda I-(A-HC)\right|=0$$

定理（分离特性） **若受控对象（*A*，*B*，*C*）可控可观测，其基于状态反馈的极点配置和观测器设计可分别独立进行，而互不影响。**



带观测器的状态反馈复合系统等价的结构图

□带观测器的状态反馈系统设计步骤

- 判定系统的可控性与可观测性；
- 根据系统希望特性写出状态反馈系统期望的特征方程

$$\left(\lambda-\lambda_1^*\right)\left(\lambda-\lambda_2^*\right)\cdots\left(\lambda-\lambda_n^*\right)=0$$

设定状态反馈矩阵K，写出闭环系统的特征方程

$$\left|\lambda I-(A-BK)\right|=0$$

令上面二式对应次幂项系数相等，可求出K；

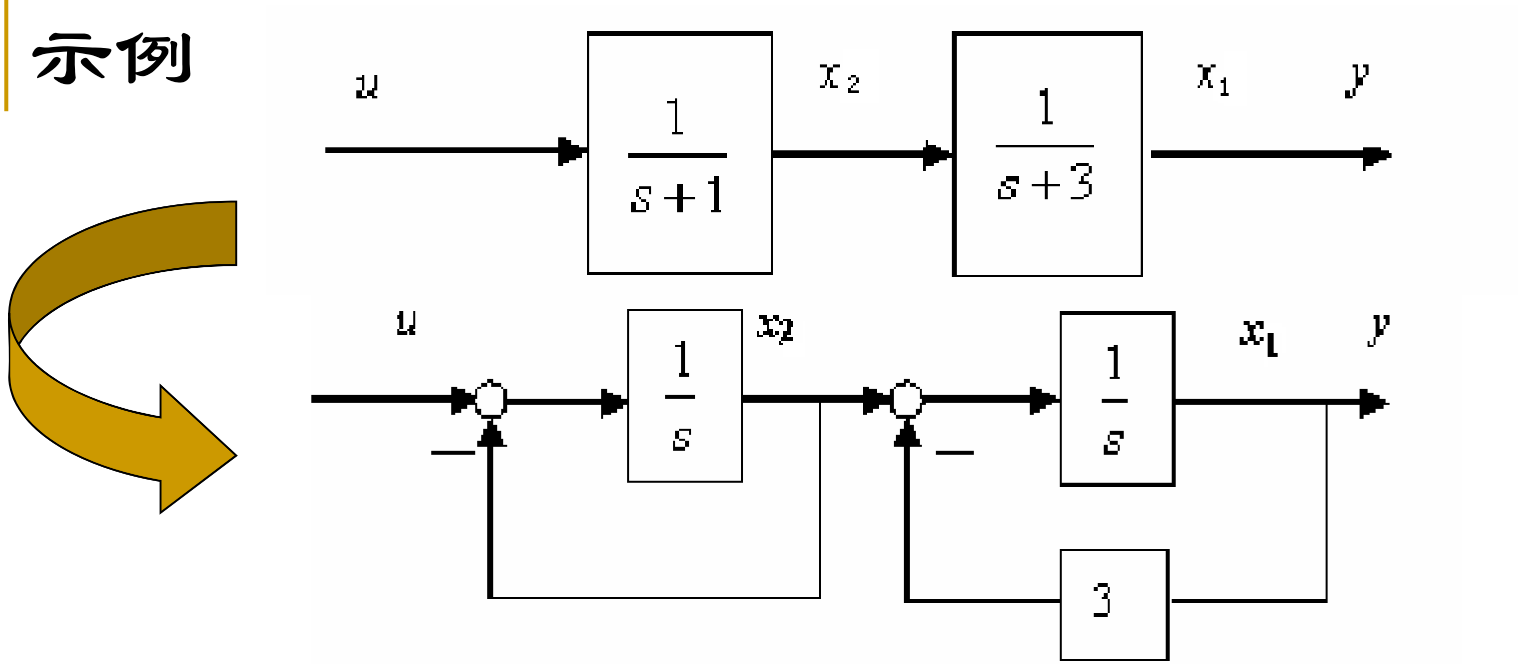
- 根据观测器希望特性写出其期望特征方程

$$\left.\begin{array}{l}\left(\lambda-\hat{\lambda}_1^*\right)\left(\lambda-\hat{\lambda}_2^*\right)\cdots\left(\lambda-\hat{\lambda}_n^*\right)=0 \\ \left|\lambda I-(A-HC)\right|=0\end{array}\right\}\longrightarrow H$$

设定H

- 画出带观测器的闭环状态反馈系统的状态变量图。

示例



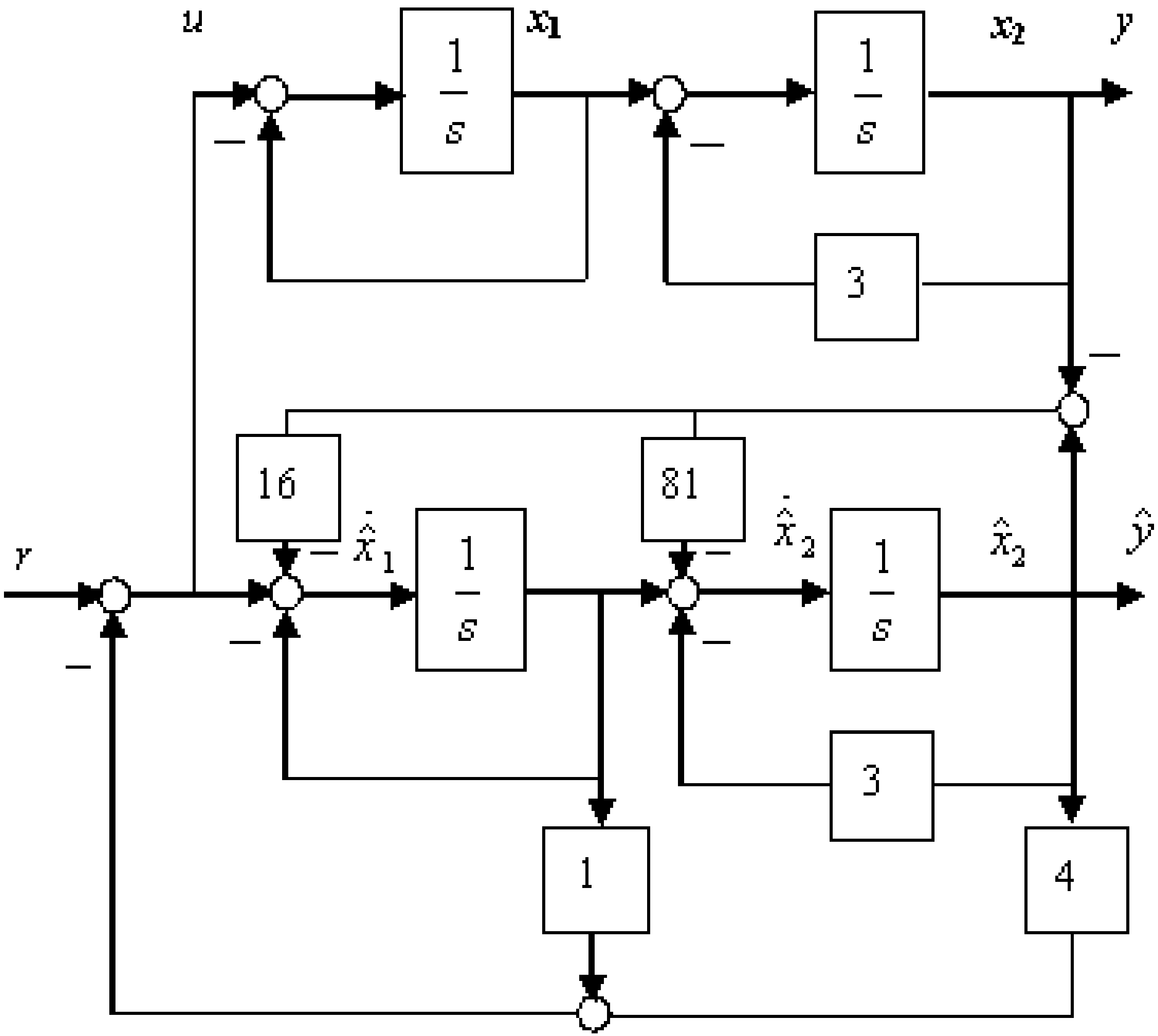
$$\lambda_{1,2}^* = -3 \pm j2$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

$$\hat{\lambda}_{1,2}^* = -3 \pm j2$$

$$\Longrightarrow K = \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow H = \begin{bmatrix} 16 \\ 81 \end{bmatrix}$$



u
x_1
$\frac{1}{s}$
x_2
y
3
16
81
$\dot{\hat{x}}_1$
$\dot{\hat{x}}_2$
$\hat{x}_2$
$\hat{y}$
r
1
4

End of Chapter 4