《高等数学 BI》复习题 3 答案

一	二	三	四	总分

得 分

一、选择题（共 6 道小题，每小题 3 分，满分 18 分）.

1．函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续是 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积的（B　）.

(A) 必要非充分条件　　(B) 充分非必要条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既非充分也非必要条件

2．设周期函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导,周期为 3, 又 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2)-f(2-x)}{2x}=-2$,则曲线 $y=f(x)$ 在 $(5,f(5))$ 点处的切线斜率为(A　).

(A) -4　　(B) 0　　(C) 2　　(D) 4

3．函数 $f(x)=x\sin x+\cos x$，下列命题正确的是（　C　）.

(A) $f(0)$ 是极大值，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ 是极小值　　(B) $f(0)$ 是极大值，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ 也是极大值

(C) $f(0)$ 是极小值，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ 是极大值　　(D) $f(0)$ 是极小值，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ 也是极小值

4．下列哪一个不是 $\sin 2x$ 的原函数(　D　).

(A) $-\dfrac{1}{2}\cos 2x+c$　　(B) $\sin^2 x+c$

(C) $-\cos^2 x+c$　　(D) $\dfrac{1}{2}\sin^2 x+c$

5. 设 $f(x)=\int_0^{5x}\dfrac{\sin t}{t}dt,\quad \phi(x)=\int_0^{\sin x}(1+t)^{\frac{1}{t}}dt$，当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $\phi(x)$（C　）

(A) 高阶无穷小　　(B) 低阶无穷小

(C) 同阶但不等价无穷小　　(D) 等价无穷小

6. 直线$l_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-5}{-2}=\dfrac{z+8}{1}$与$l_2:\begin{cases}x-y=6\\2y+z=3\end{cases}$的夹角为（ D ）.

(A) $\dfrac{\pi}{6}$　　(B) $\dfrac{\pi}{4}$　　(C) $\dfrac{\pi}{2}$　　(D) $\dfrac{\pi}{3}$

得 分

二、填空题（共 6 小题，每小题 3 分，满分 18 分）.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)^n=$____ e^{-1} ________.

2 . 若 $f(x)=\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}$, 则 $f^{(27)}(\pi)=$__ $\dfrac{1}{2^{27}}$ ________________ .

3. 曲线 $y=\tan x$ 在点$(\dfrac{\pi}{4},1)$处的曲率为_____ $\dfrac{4\sqrt{5}}{25}$ ____.

4. $\int_{-\infty}^{0}xe^{-x^2}dx=$_ $-\dfrac{1}{2}$ ________.

5. $y=f(x)$由方程$x^3+y^3-\sin x+6y=0$确定，则$dy|_{x=0}=$_ $\dfrac{1}{6}dx$ ___________.

6．曲线 C:$\begin{cases}z=x^2+2y^2\\z=2-x^2\end{cases}$ 在 xoy 平面的投影柱面方程是 $\underline{x^2+y^2=1.}$

得 分

三、　解答题（共 4 道题，每小题 8 分，满分 32 分）.

1.　确定常数 a,b,c，使 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=c(c\neq 0)$.

解：

由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=c(c\neq 0)$ 可知，$b=0.\cdots\cdots 2$分.

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_0^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=\lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{\frac{\ln(1+x^3)}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{x^2}.\cdots\cdots 4\text{分}$$

由此可得 $\lim\limits_{x\to 0}(a-\cos x)=0$，从而 $a=1.\cdots\cdots 6$分

$$c=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\int_0^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{\ln(1+x^3)}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}.\cdots\cdots 8\text{分}$$

2．在摆线 $\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}(0\leq t\leq 2\pi)$ 上求一点,使该点的切线与直线 $y=1-x$ 平行，并写出切线方程.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=a(1-\cos t),\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=a\sin t.\cdots\cdots 2\text{分}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\cot\frac{t}{2}.\cdots\cdots 4\text{分}$$

切线与直线 $y=1-x$ 平行，可得

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\cot\dfrac{t}{2}=-1$, 得到 $t=\dfrac{3\pi}{2}$，从而切点为 $(a(1+\dfrac{3\pi}{2}),a)\cdots\cdots 6$分

切线方程为 $y-a=-(x-a(1+\dfrac{3\pi}{2}))$，即 $y=-x+a\left(2+\dfrac{3\pi}{2}\right)\cdots\cdots 8$分

3．计算不定积分 $\int x^2 \arctan x\mathrm{d}x$.

解

$$\int x^2 \arctan x\mathrm{d}x = \int \arctan x\mathrm{d}\frac{x^3}{3} \cdots\cdots 2\text{分}$$

$$= \arctan x.\frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3}\mathrm{d}\arctan x \cdots\cdots 4\text{分}$$

$$= \arctan x.\frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3}.\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \arctan x.\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}\int (x - \frac{x}{1+x^2})\mathrm{d}x \cdots\cdots 6\text{分}$$

$$= \arctan x.\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6}\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}(1+x^2)$$

$$= \arctan x.\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6}\ln(1+x^2) + \mathrm{C} \cdots\cdots 8\text{分}$$

4. 计算定积分 $\int_0^\pi \sqrt{\sin^2 x - \sin^4 x}\mathrm{d}x$.

解

$$\int_0^\pi \sqrt{\sin^2 x - \sin^4 x}\mathrm{d}x = \int_0^\pi \sqrt{\sin^2 x(1-\sin^2 x)}\mathrm{d}x \cdots\cdots 2\text{分}$$

$$= \int_0^\pi \left|\sin x.\cos x\right|\mathrm{d}x \cdots\cdots 4\text{分}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x.\cos x\mathrm{d}x - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x.\cos x\mathrm{d}x \cdots\cdots 6\text{分}$$

$$= \frac{1}{2}\sin^2 x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\sin^2 x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 1 \cdots\cdots 8\text{分}$$

得 分

四、 **解答题（共 4 道题，第 1, 2, 3 小题每小题 9 分，第 4 小题 5 分， 满分 32 分）**

1．设区域 D_1 是由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $x=a, x=2$ 以及 $y=0$ 所围成的平面区域，区域 D_2 是由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $y=0, x=a$ 所围成的平面区域，其中 $0<a<2$.

(1) 求 D_1 绕轴 x 旋转所得旋转体的体积 V_1； D_2 绕轴 y 旋转所得旋转体的体积 V_2.

(2) 当为 a 何值时，V_1+V_2 取得最大值？并求出此最大值.

解:

(1) $V_1=\pi\int_a^2(2x^2)^2\mathrm{d}x=\frac{4\pi}{5}(32-a^5)\cdots\cdots 2$分

$V_2=\pi a^2.2a^2-\pi\int_0^{2a^2}\frac{y}{2}\mathrm{d}y=2\pi a^4-\pi a^4=\pi a^4\cdots\cdots 4$分

(2) $V=V_1+V_2=\frac{4\pi}{5}(32-a^5)+\pi a^4$

由$V'=4\pi a^3(1-a)=0$得区间$(0,2)$内唯一的驻点$a=1.\cdots\cdots 6$分

$V''=12\pi a^2-16\pi a^3, V''(1)=-4\pi<0\cdots\cdots 7$分

$a=1$是极大值点,也是最大值点,最大值$V_{\max}=\frac{129}{5}\pi.\cdots\cdots 9$分

2. 求过点 $(-1,0,4)$ 且平行于平面 $3x-4y+z-10=0$,又与直线 $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$ 相交的直线方程.

解:过点 $(-1,0,4)$ 且与平面 $3x-4y+z-10=0$ 平行的平面 Π 为

$3(x+1)-4y+z-4=0$ 即 $3x-4y+z-1=0$ …………3 分

直线 $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$ 的参数方程为直线 $x=-1+t, y=3+t, z=2t$，

代入平面 $3x-4y+z-1=0$ 得 $t=16$ …………5 分

直线与平面 Π 的交点为 $(15,19,32)$ …………7 分

所求直线方程为$\dfrac{x+1}{16}=\dfrac{y}{19}=\dfrac{z-4}{28}$ …………9 分

3. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^2}(1-\cos x), & x<0,\\ 1, & x=0,\\ \dfrac{1}{x}\int_0^x \cos t^2 dt, & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性和可导性.

$$f(0^+)=\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\int_0^x \cos t^2 dt=\lim_{x\to0^+}\frac{\cos x^2}{1}=1.$$

解: $f(0^-)=\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{2(1-\cos x)}{x^2}=1$

$f(0^+)=f(0^-)=f(0)=1,$所以$f(x)$在$x=0$连续.……4分

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}\int_0^x \cos t^2 \mathrm{d}t-1}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x \cos t^2 \mathrm{d}t-x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\cos x^2-1}{2x}=\lim_{x\to0^+}\frac{-\frac{1}{2}x^4}{2x}=0\cdots\cdots6分$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{2(1-\cos x)}{x^2}-1}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{2(1-\cos x)-x^2}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{2\sin x-2x}{3x^2}=\lim_{x\to0^-}\frac{2\cos x-2}{6x}=0\cdots\cdots8分$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0,函数在x=0可导.\cdots\cdots9分$$

4. 设函数 $f(x)$ 在闭区间$[0,1]$上连续，在 $(0,1)$ 内可导， $f(0)=0, f(1)=-1$. 证明：

至少存在一点 $\xi\in(0,1)$, 使 $f'(\xi)=f(\xi)+\xi-1$.

证明:

$F(x)=\mathrm{e}^{-x}(f(x)+x),\cdots\cdots2分$

$F'(x)=\mathrm{e}^{-x}(f'(x)+1)-\mathrm{e}^{-x}(f(x)+x)=\mathrm{e}^{-x}[f'(x)+1-(f(x)+x)]$

$F(x)$在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,……3分

$F(0)=f(0)=0, F(1)=e^{-1}(f(1)+1)=0,\cdots\cdots4分$

由Rolle定理,至少存在一点

$\xi\in(0,1)$使$\mathrm{F}'(\xi)=0$,从而有$f'(\xi)=f(\xi)+\xi$-1.……5分