工程力学

第14章 压杆稳定

第14章 压杆稳定

§14. 1　稳定的概述

§14. 2　细长压杆的临界力

§14. 3　欧拉公式的适用范围 经验公式

§14. 4　压杆的稳定校核

§14. 5　提高压杆稳定的措施

14.1　稳定的概念

一. 问题的提出

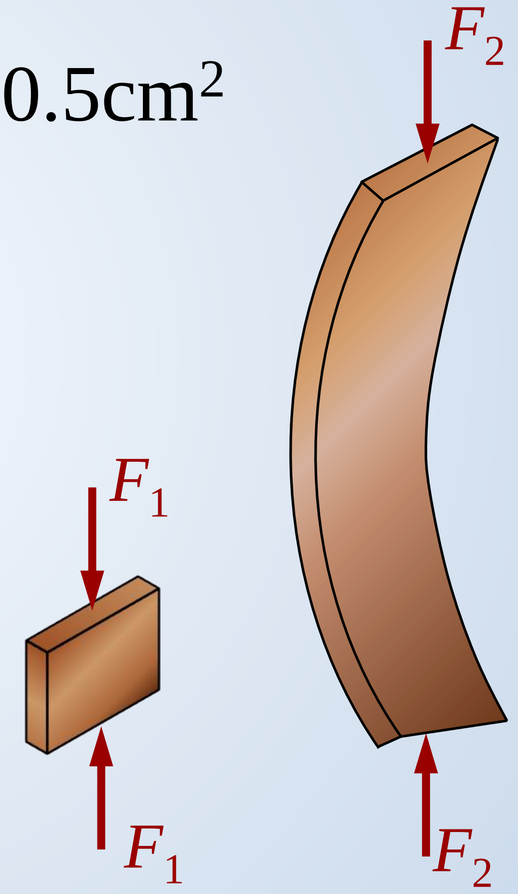
已知：木杆 σ_{cb}=40MPa　A=3×0.5cm^2

l_1=3cm　F_{1max}= 6kN

l_2=1m　F_{2max}= 27.8N

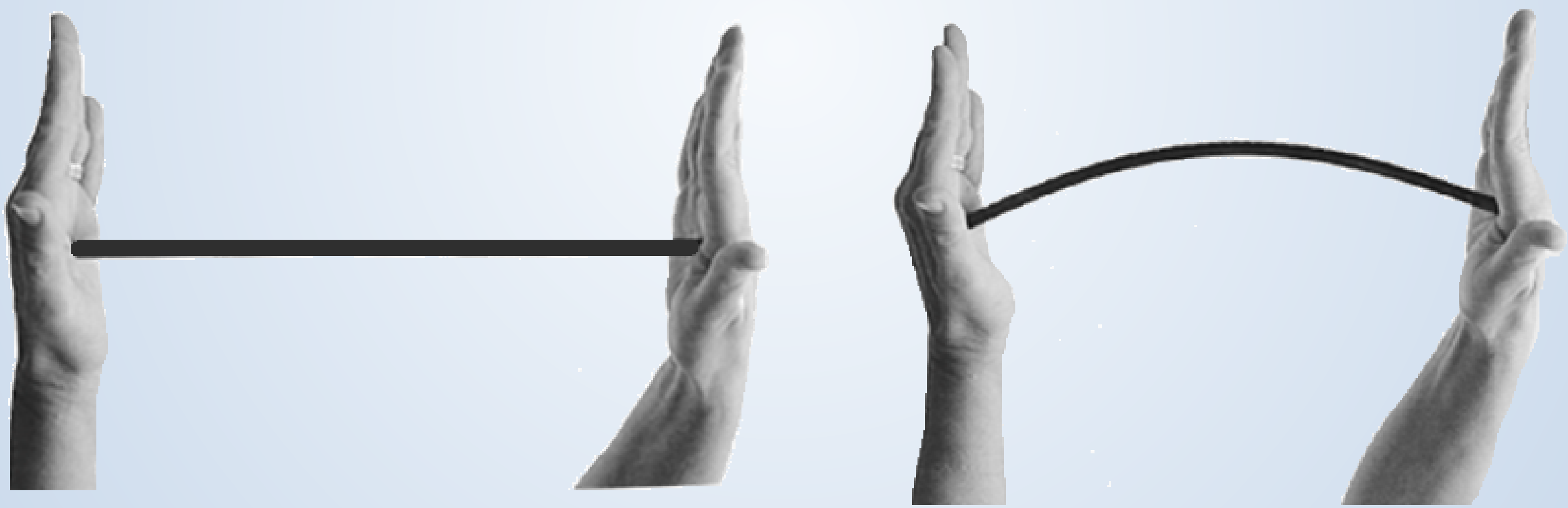
直线平衡形式 → 变弯

这种失效称 **失稳**



14.1 稳定的概念

稳定问题的实例



14.1 稳定的概念

稳定问题的实例

14.1　稳定的概念

稳定问题的实例

14.1 稳定的概念

二. 稳定与失稳

稳定—构件维持原有平衡状态的能力

失稳—构件失去原有的平衡状态

失稳破坏的特点:整体的, 突然的

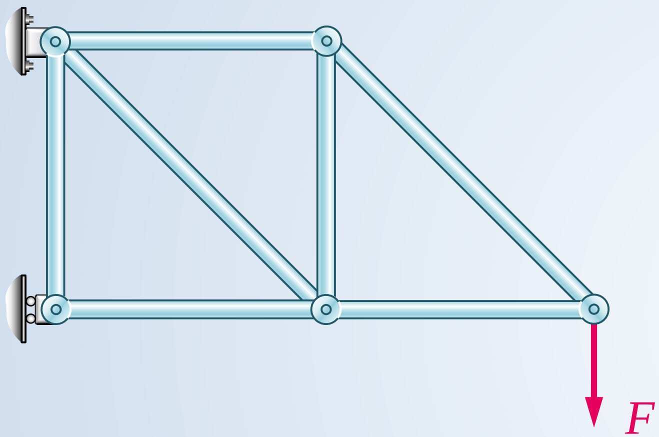
失稳破坏的危害:非常严重的

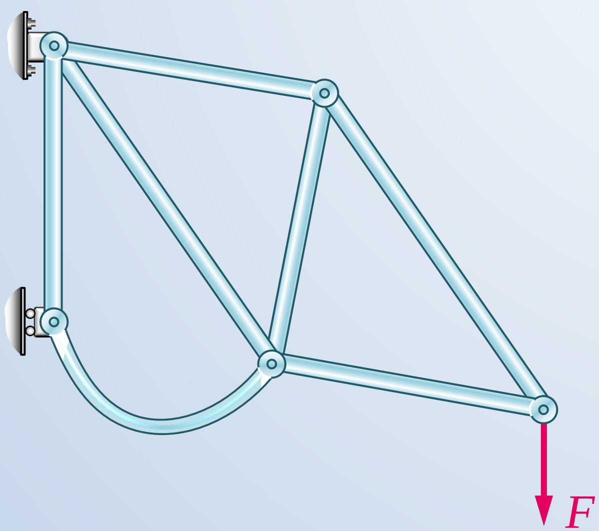
14.1　稳定的概念

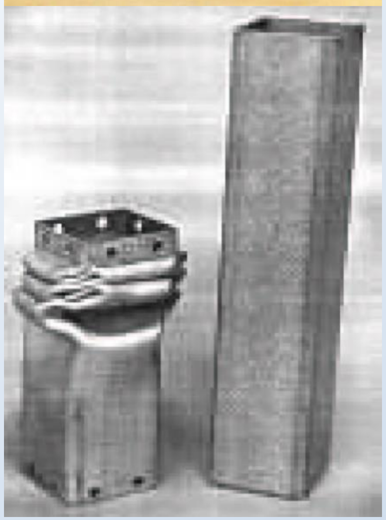
失稳的实例

14.1 稳定的概念

失稳的实例



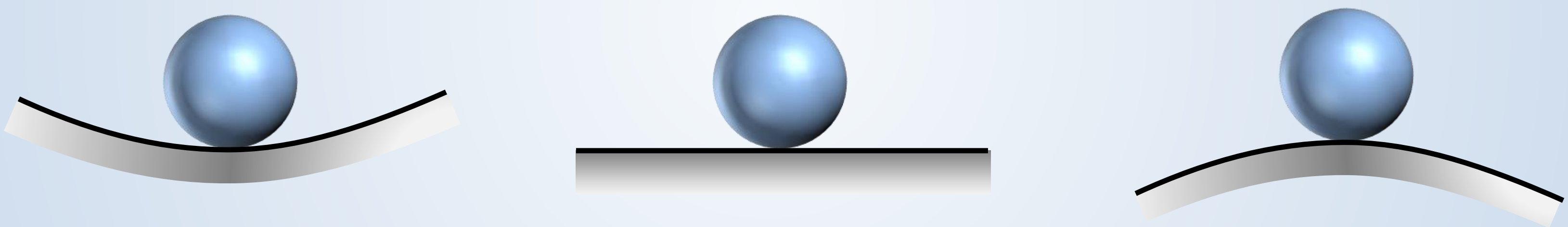




14.1　稳定的概念

三. 平衡形式的稳定性

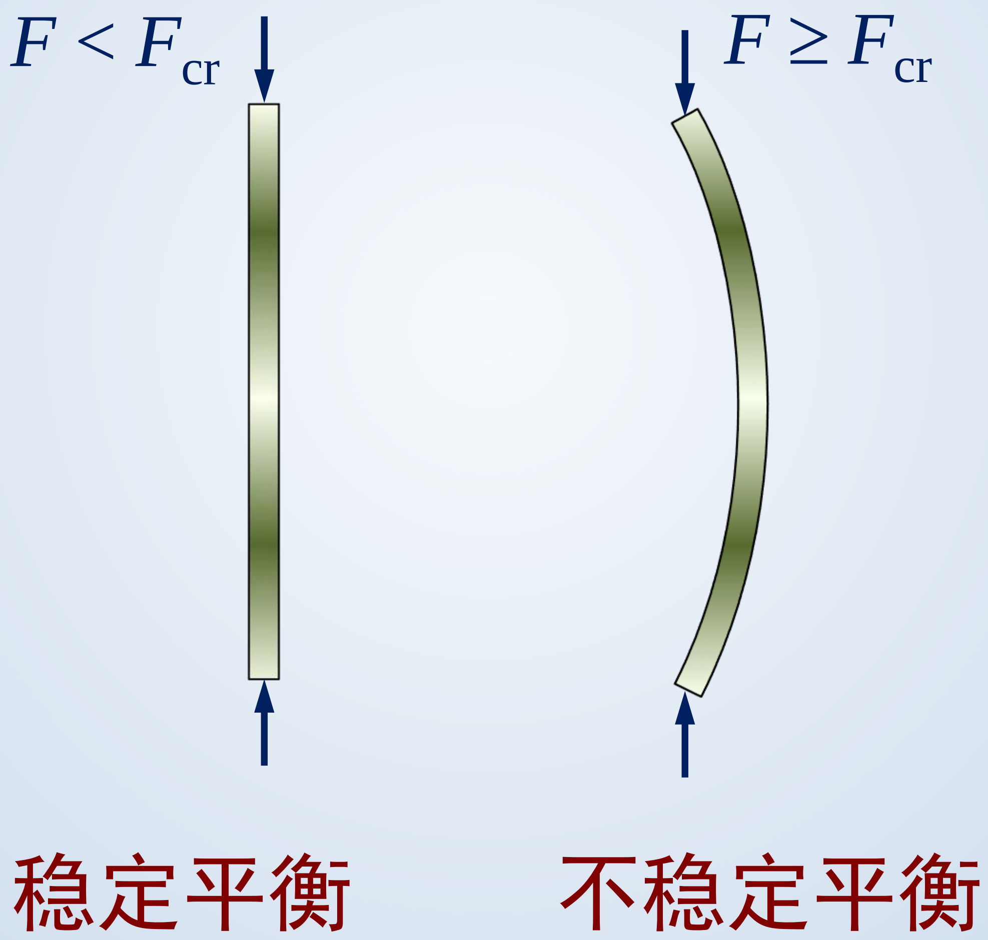
刚体平衡的稳定性



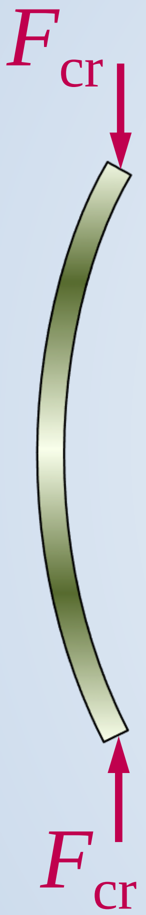
稳定平衡　　随遇平衡　　不稳定平衡

14.1　稳定的概念

四.　弹性压杆稳定平衡的临界力(F_{cr})



14.1 稳定的概念



临界力F_{cr}

它是维持直线平衡的最大压力

它是微弯状态下平衡的最小压力

它是由稳定平衡到不稳定的过渡值

14.2 细长压杆的临界力

理想压杆的条件：

1. 压力作用线与杆轴线重合
2. 材质均匀
3. 无初曲率

14.2　细长压杆的临界力

一．　依压杆在微弯状态下平衡的挠曲线微分方程 求F_{cr}

临界状态--微弯状态下平衡

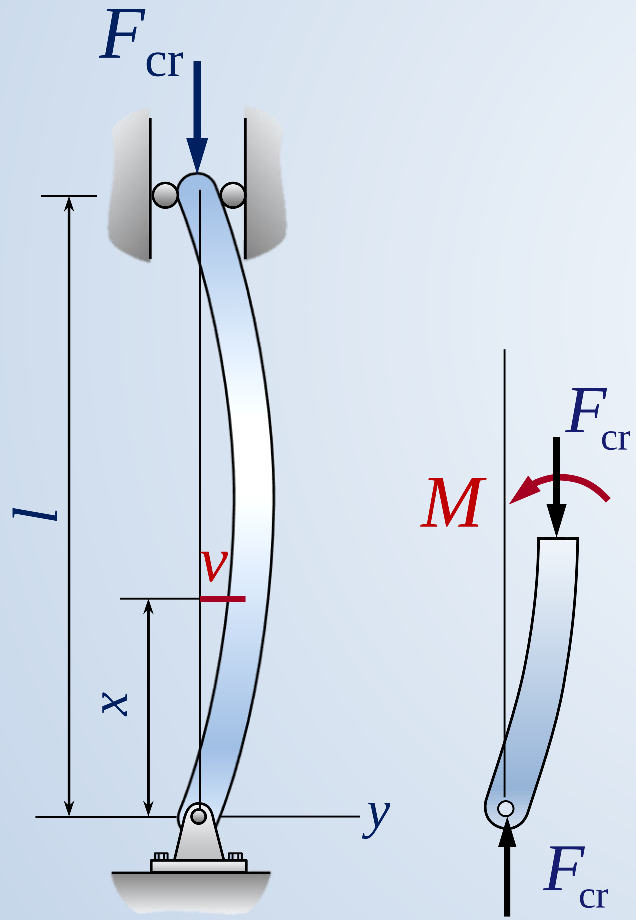
设压杆微弯状态下平衡的挠曲线

$$\boxed{EIv'' = M(x)} \longrightarrow F_{cr}$$

挠曲线满足 $\begin{cases} \text{边界条件} \\ \text{微小} \end{cases}$

14.2 细长压杆的临界力

两端铰支细长压杆的临界力



$$EIv'' = M(x) = -F_{\mathrm{cr}}v$$

$$EIv'' + F_{\mathrm{cr}}v = 0$$

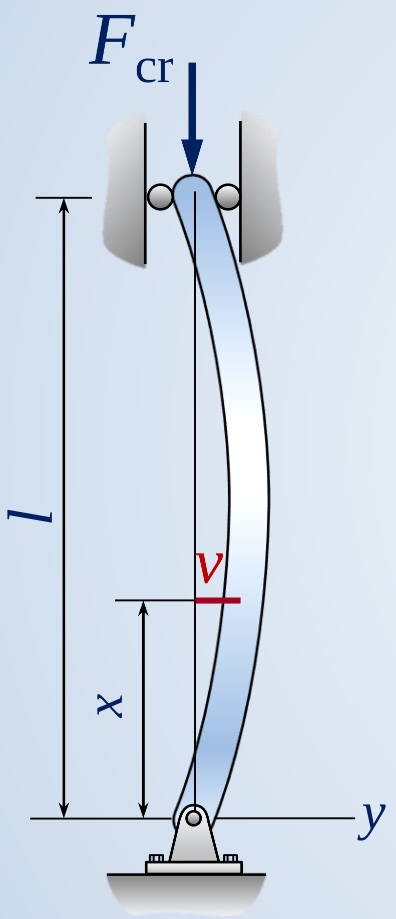
令 $$\frac{F_{\mathrm{cr}}}{EI} = K^2$$

$$v'' + K^2 v = 0$$

解得:

$$v = C_1 \sin(Kx) + C_2 \cos(Kx)$$

14.2　细长压杆的临界力



$$v = C_1 \sin(Kx) + C_2 \cos(Kx)$$

边界条件:

$$x = 0, v = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

$$x = l, v = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 \neq 0$$

故 $\quad \sin Kl = 0$

得 $\quad Kl = n\pi \qquad \dfrac{F_{cr}}{EI} = K^2$

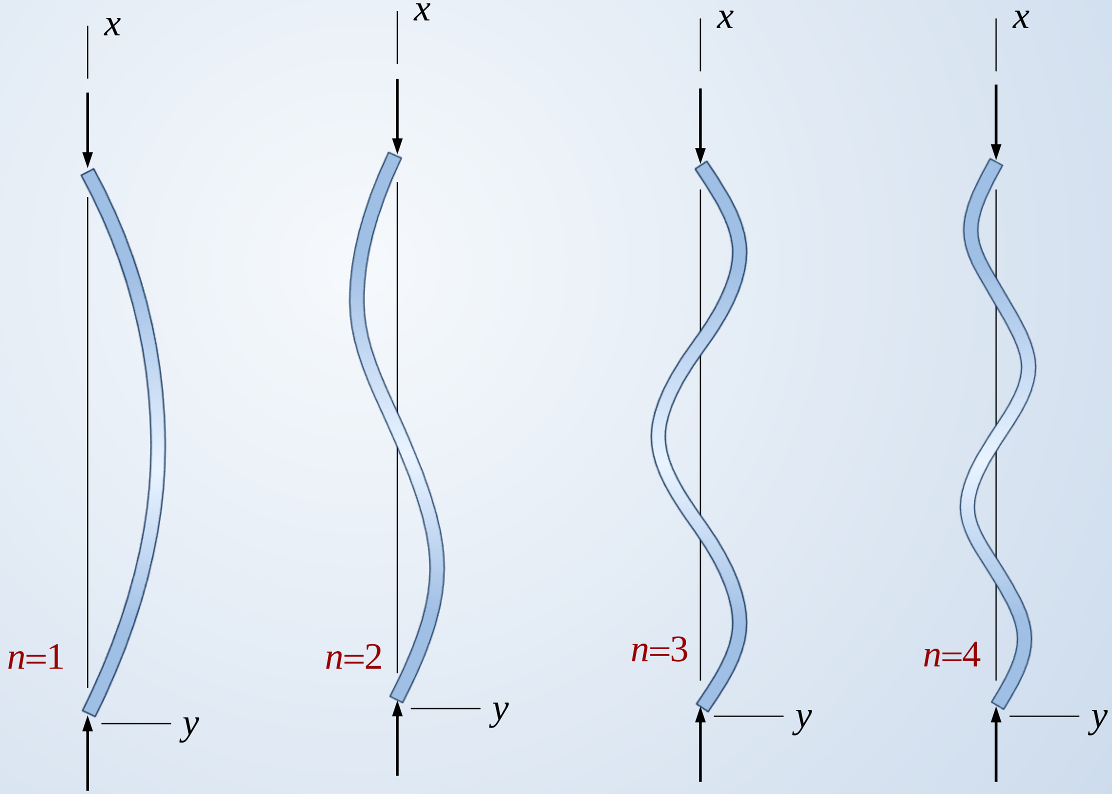
$$F_{cr} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2}$$

14.2 细长压杆的临界力

$$F_{cr}=\frac{n^2\pi^2EI}{l^2} \qquad v=C_1\sin\frac{n\pi}{l}x$$

n=?

半波正弦曲线



14.2 细长压杆的临界力

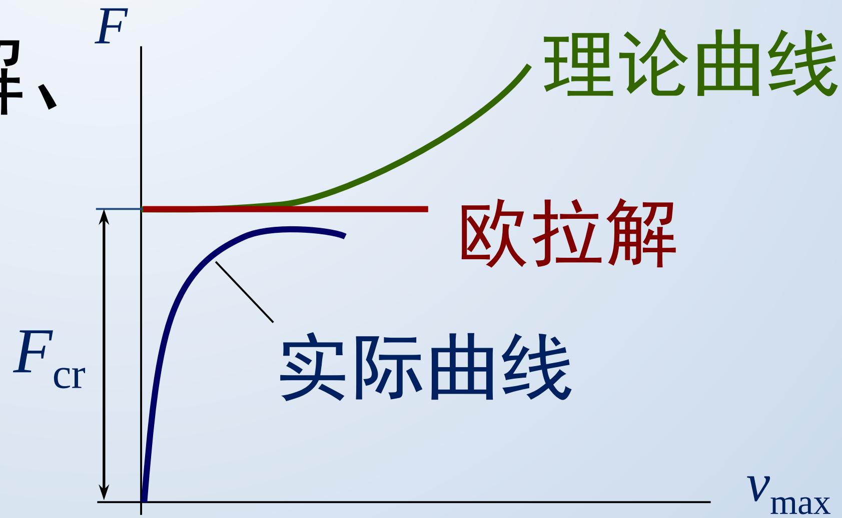
两端铰支细长压杆临界力的欧拉公式

$$F_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (L.Euler)$$

讨 论

(1)关于失稳侧向（支座形式、I_{min}）

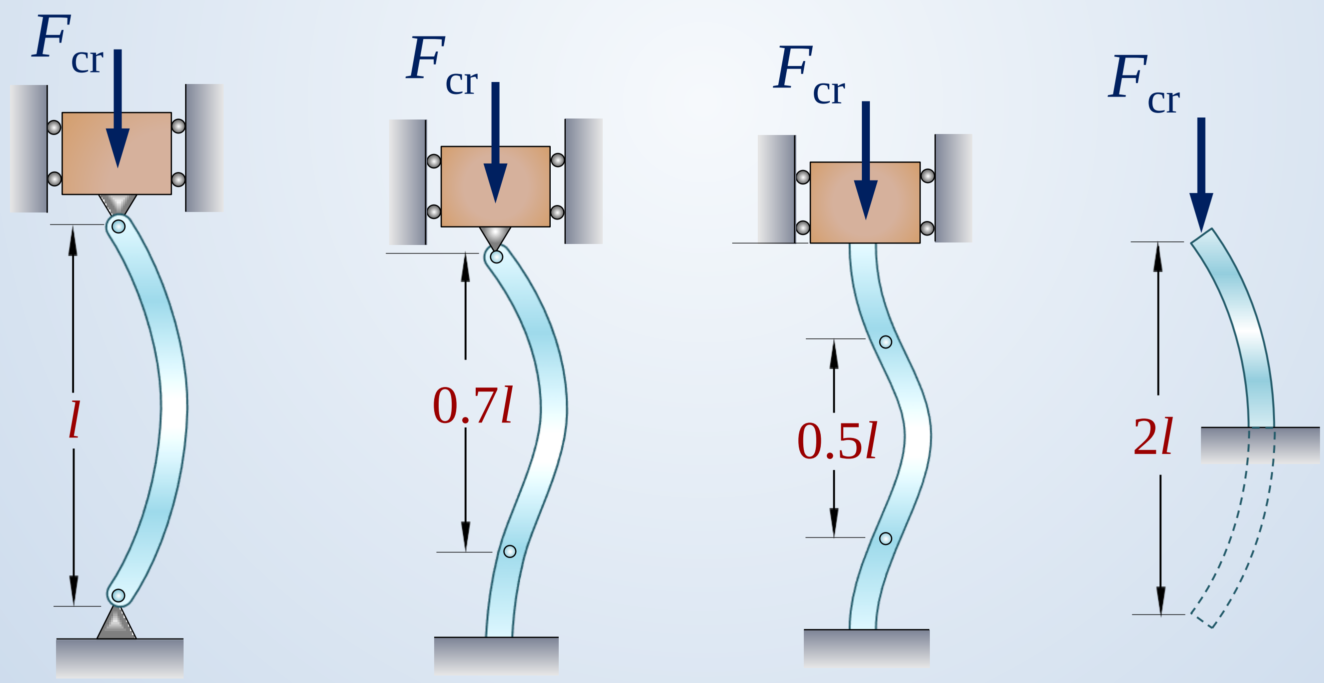
(2)欧拉解与理论解、实际值的关系



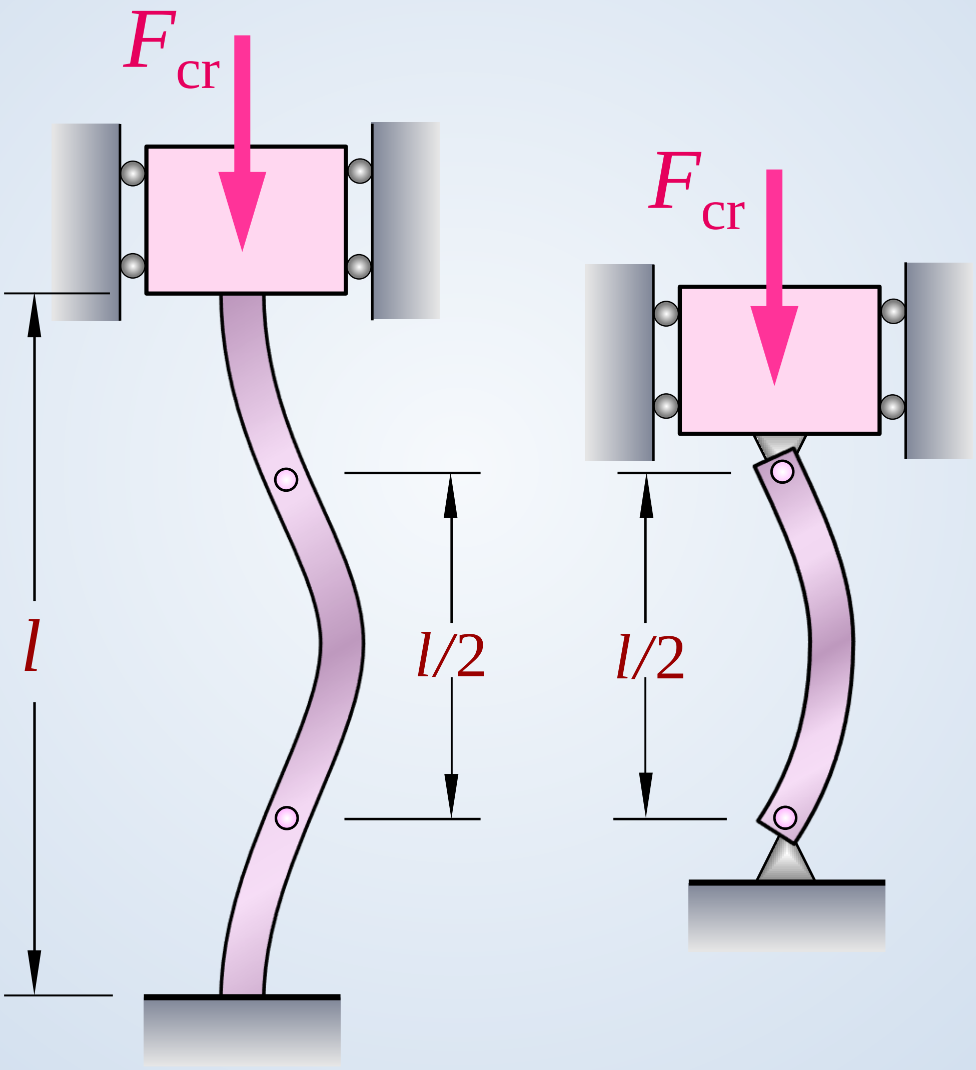
14.2 细长压杆的临界力

二. 类比法

根据挠曲线波形比较导出几种常见约束条件下的F_{cr}



14.2　细长压杆的临界力



14.2　细长压杆的临界力

三. 欧拉公式的普遍表达式

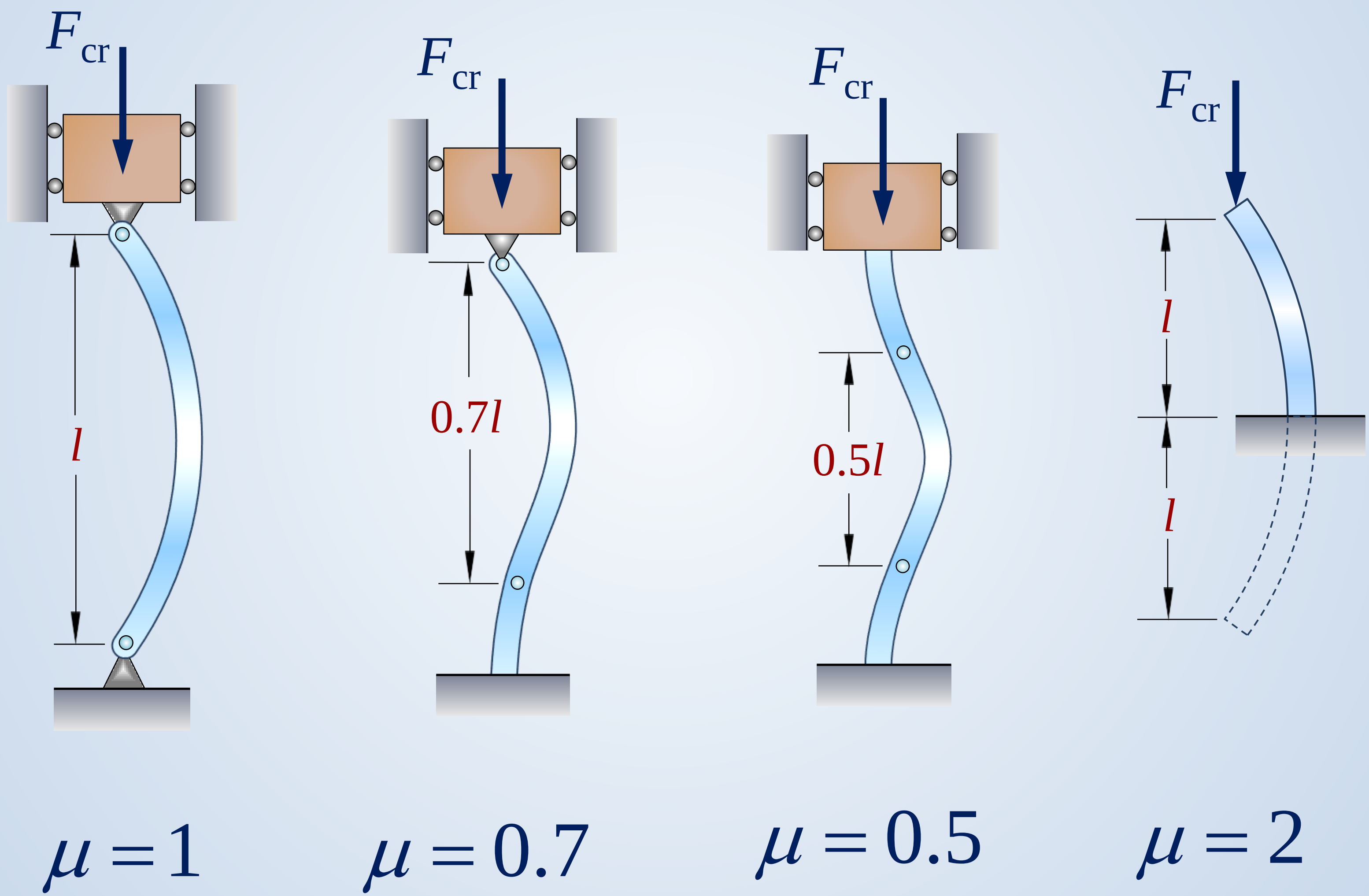
$$F_{\mathrm{cr}} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$$

μ — 长度系数（与支座有关）

μl —相当长度（半波长度）

理想细长压杆的临界力

14.2　细长压杆的临界力



14.3　欧拉公式的适用范围

一. 临界应力和压杆的柔度

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E}{(\mu l)^2}\frac{I}{A}$$

$$I = i^2 A \qquad \frac{I}{A} = i^2$$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\left(\dfrac{\mu l}{i}\right)^2}$$

$$\boxed{\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}}$$

令 $\boxed{\lambda = \dfrac{\mu l}{i}}$

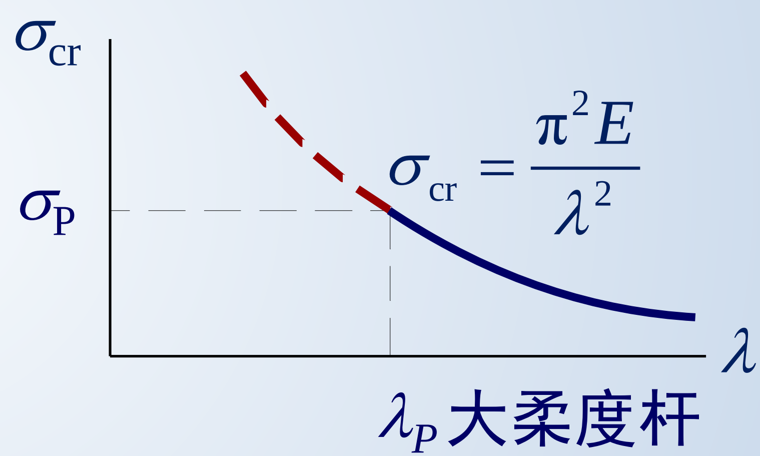
λ— 压杆的柔度

14.3 欧拉公式的适用范围

二. 欧拉公式的适用范围

$$\boxed{\sigma_{cr}=\frac{\pi^2 E}{\lambda^2}}\le\sigma_p \qquad \lambda^2\ge\frac{\pi^2 E}{\sigma_P}$$

$$\lambda\ge\pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_P}} \qquad \lambda_p=\pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}$$

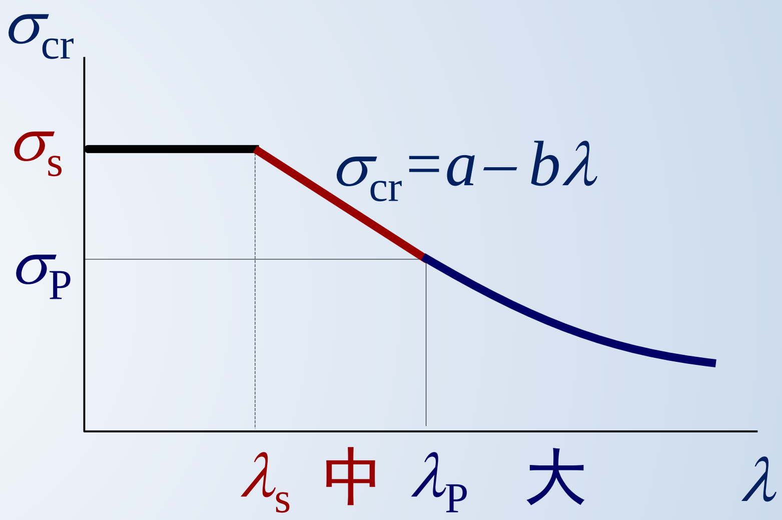


$\boxed{\lambda\ge\lambda_P}$ 大柔度杆（细长杆）

14.3 欧拉公式的适用范围

三. 中小柔度杆的临界力—经验公式

$\lambda \le \lambda_P$ $\sigma_p \le \sigma_{cr} \le \sigma_s$



直线公式 $\sigma_{cr}=a-b\lambda$

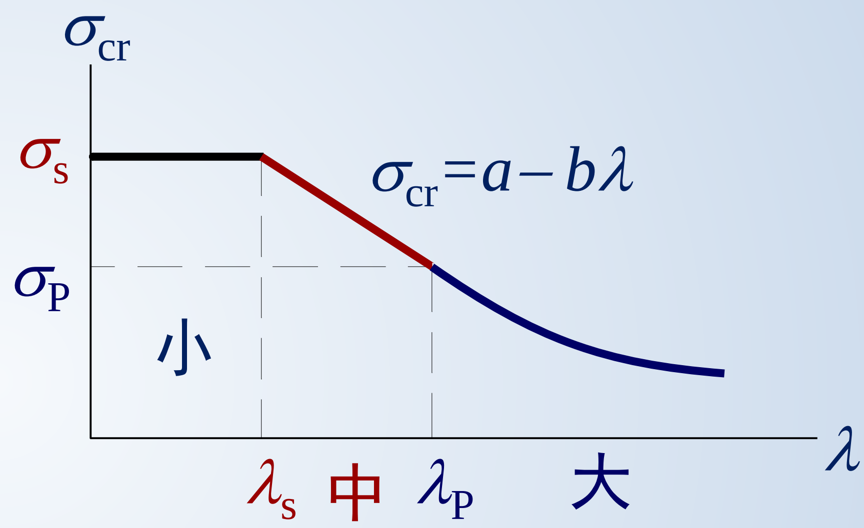
适用范围 $\sigma_{cr}=(a-b\lambda)\le\sigma_s$

$$\lambda \ge \frac{a-\sigma_s}{b} \qquad \lambda_s = \frac{a-\sigma_s}{b}$$

$\lambda_s \le \lambda \le \lambda_p$ 中柔度杆

14.3 欧拉公式的适用范围

$$\sigma_{cr}=a-b\lambda$$



a,b可查表 Q235钢

$$\sigma_{cr}=304-1.12\lambda(\mathrm{MPa})$$

$\lambda_p=100$ $\lambda_s=60$

$\lambda<\lambda_s$ 小柔度杆 $\sigma_{cr}=\sigma_s$

14.3　欧拉公式的适用范围

四. 求解临界力F_{cr}的步骤

1. 求 $\lambda = \dfrac{\mu l}{i}$

2. 由λ的范围选择求临界力的公式

$\lambda \ge \lambda_P$　　$\sigma_{cr} = \dfrac{\pi^2 E}{\lambda^2}$　　$F_{cr} = \dfrac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$

$\lambda_s \le \lambda \le \lambda_P$　　$\sigma_{cr} = a - b\lambda$

$\lambda < \lambda_s$　　$\sigma_{cr} = \sigma_s$

$\Rightarrow F_{cr} = \sigma_{cr} A$

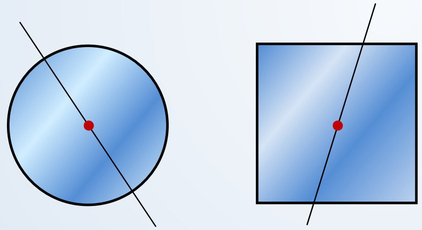
14.3　欧拉公式的适用范围

五. 关于失稳侧向的讨论

1. 各方向μ相同 $I_{max} = I_{min}$

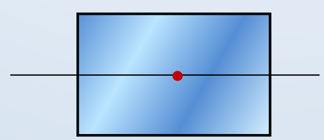
（球铰 固定端）

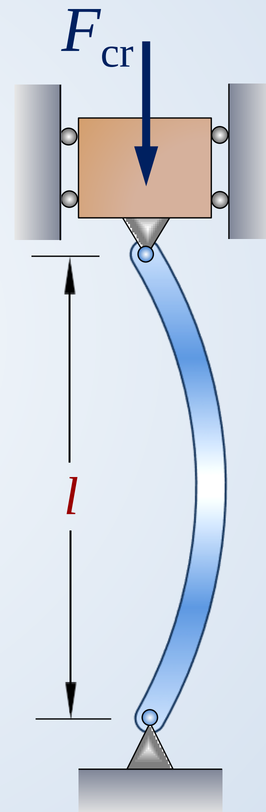
随机失稳

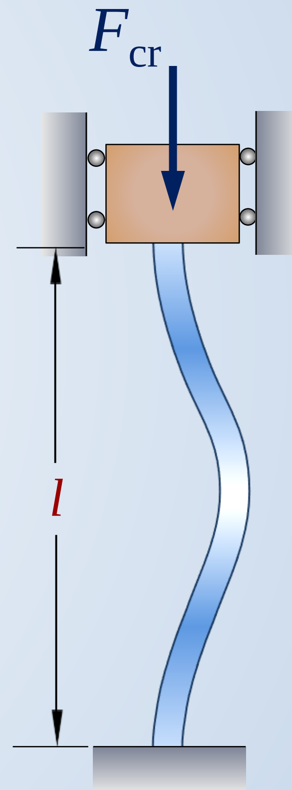


2.各方向μ相同 $I_{max} \neq I_{min}$

绕I_{min}轴失稳



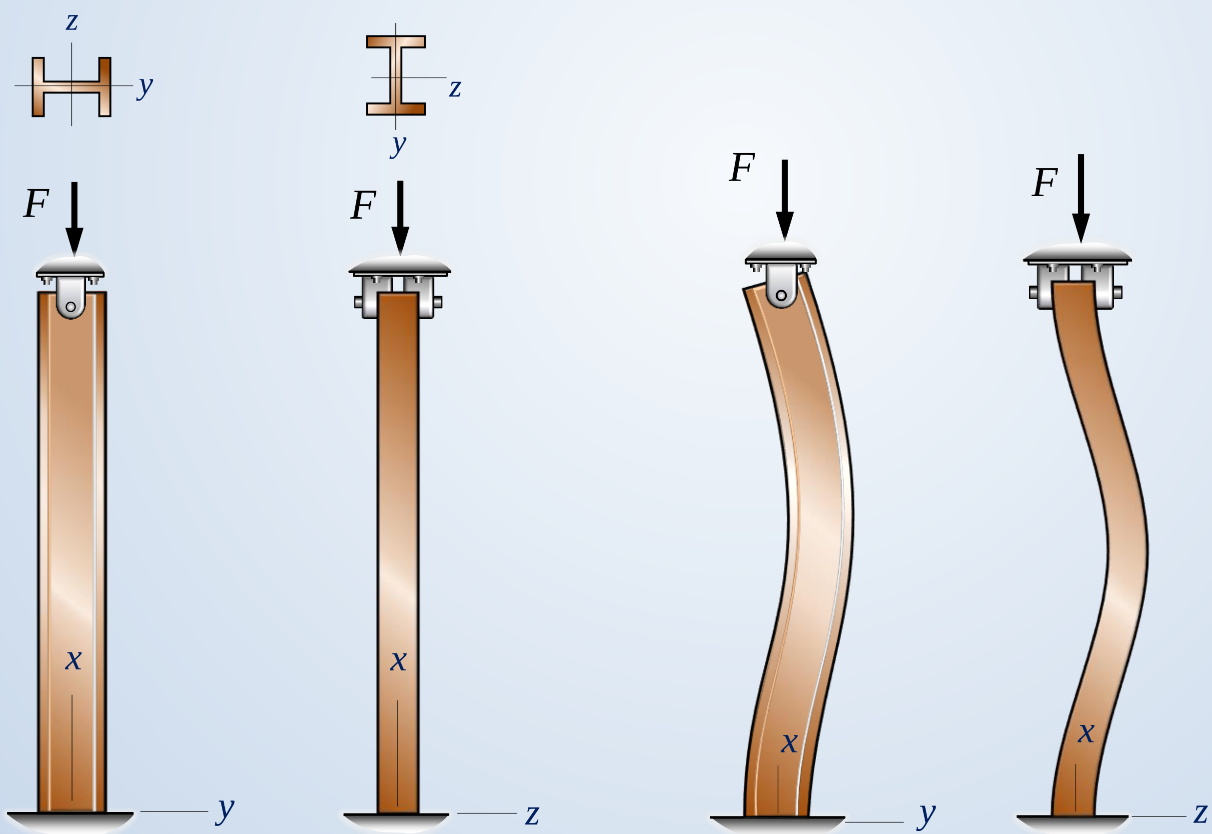




14.3 欧拉公式的适用范围

3. 各方向μ不同（柱铰） $I_{\max} \neq I_{\min}$

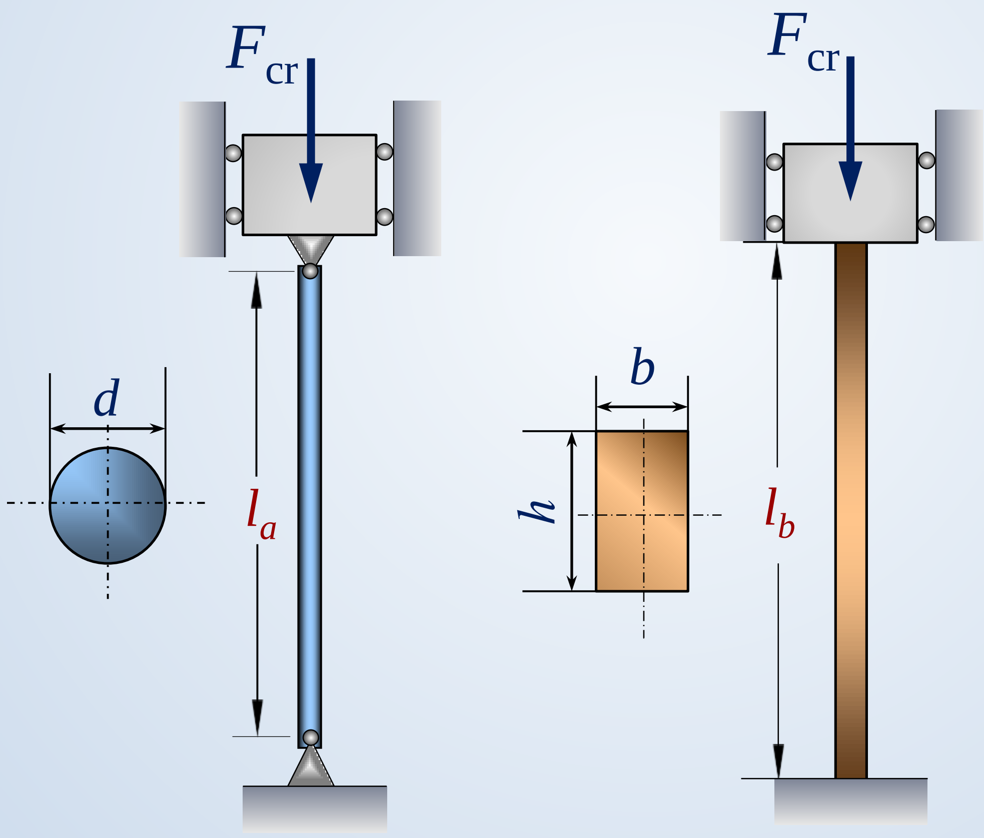
在$\lambda_{\max}$的平面内失稳



14.3 欧拉公式的适用范围

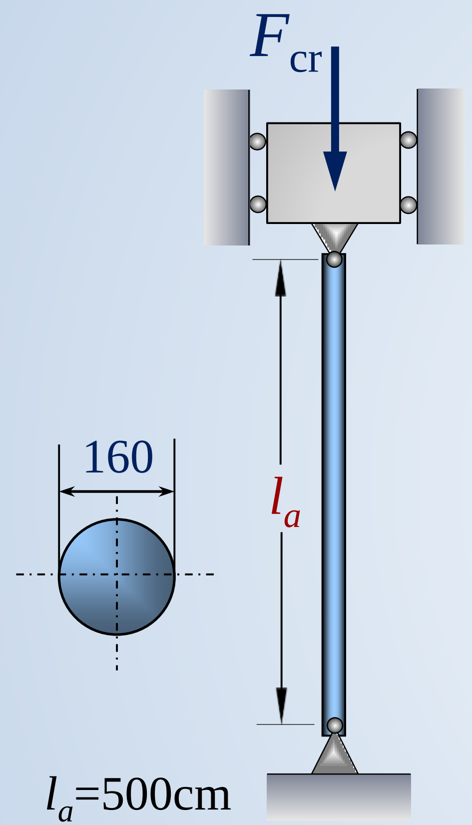
例1 已知 Q235钢 E=206GPa (a) d=16cm, l_a=500cm

(b) b=20cm, h=30cm l_b=900cm 求：σ_{cr} F_{cr}



(a) (b)

14.3 欧拉公式的适用范围



解：求a杆 σ_{cr}　F_{cr}

$$\mu_a=1 \qquad i_a=\frac{d}{4}=4\text{cm}$$

$$\lambda_a=\frac{\mu_a l_a}{i_a}=125$$

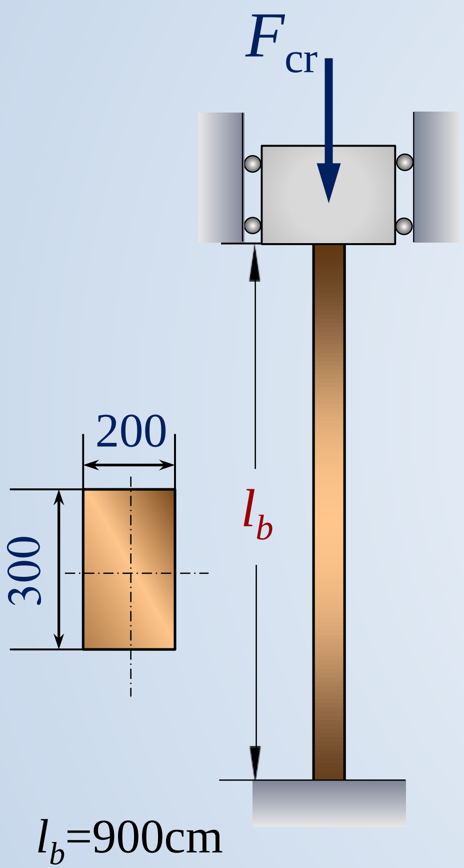
对Q235钢，$\lambda_p \approx 100$, $\lambda_a=125>\lambda_p$

故为大柔度杆。用欧拉公式

$$\sigma_{cr}=\frac{\pi^2 E}{\lambda_a^{\ 2}}=126.3\,\text{MPa}$$

$$F_{cr}=\sigma_{cr}A=\sigma_{cr}\frac{\pi d^2}{4}=2.54\times10^3\,\text{kN}$$

14.3　欧拉公式的适用范围



解：求b杆 σ_{cr} F_{cr}

$$\mu_b=0.5 \qquad i_{b\min}=\sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}=5.77\,\text{cm}$$

$$\lambda_b=\frac{\mu_b l_b}{i_b}=78$$

对Q235钢，$\lambda_s \approx 60$，$\lambda_s < \lambda_b < \lambda_p$

故为中柔杆。用经验公式

$$\sigma_{cr}=a-b\lambda_b=304-1.12\times 78=216.6\text{MPa}$$

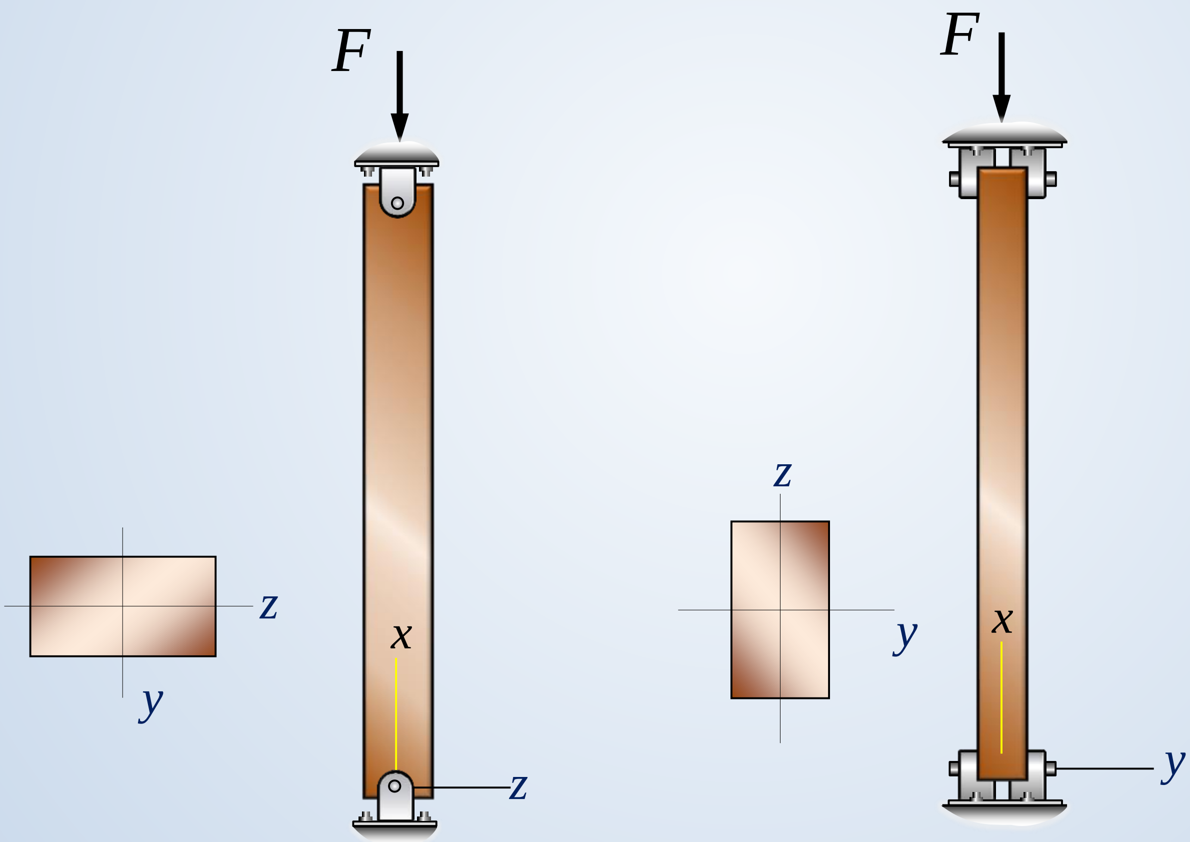
$$F_{cr}=\sigma_{cr}A=\sigma_{cr}bh\approx 13\times 10^3\text{kN}$$

$\boxed{\sigma_{cr}=216.6\text{MPa}}$　$\boxed{F_{cr}=13\times 10^3\text{kN}}$

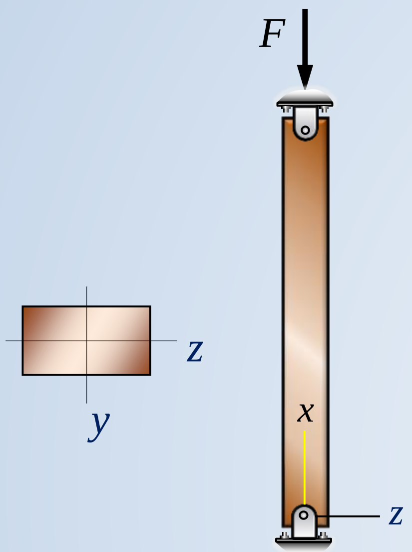
14.3 欧拉公式的适用范围

例2 已知：$A=12\times20\text{cm}^2$，$l=700\text{cm}$，$E=10\text{GPa}$ $\lambda_p=110$

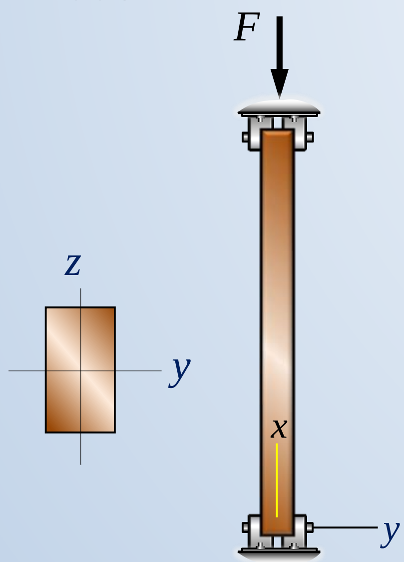
求：1.判别失稳方向 2.计算临界力



14.3 欧拉公式的适用范围



l=700cm



解：1.判别失稳 方向

在最大刚度平面 $\mu_y = 1$

$$I_y = \frac{12 \times 20^3}{12} \mathrm{cm}^4 \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = 5.77\mathrm{cm}$$

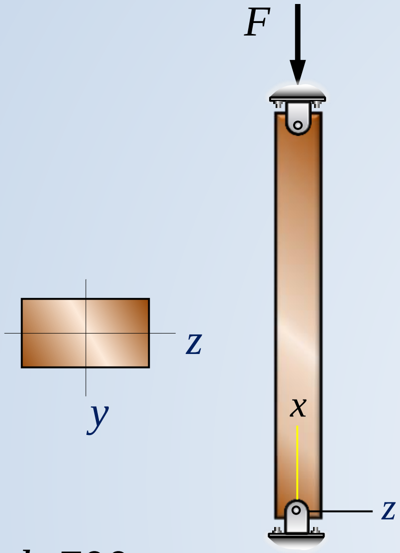
$$\lambda_y = \frac{\mu_y l}{i_y} = 121$$

在最小刚度平面 $\mu_z = 0.5$

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = 3.46\mathrm{cm} \quad \lambda_z = \frac{\mu_z l}{i_z} = 101$$

由于 $\lambda_y > \lambda_z$ 故在最大刚度平面内失稳

14.3　欧拉公式的适用范围



l=700cm

2.计算临界力

$$\because \lambda_y = 121 > \lambda_p \quad \lambda_p = 110$$

$$\therefore \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_y^{\ 2}} = 6.73\text{MPa}$$

$$\boxed{F_{cr} = \sigma_{cr} A = 161\text{kN}}$$

14.4　压杆的稳定校核

压杆的工作载荷F, 临界力F_{cr}

规定安全系数n_{st}

稳定条件式：

$$F \le \frac{F_{\mathrm{cr}}}{n_{\mathrm{st}}}$$

安全系数法：

$$\boxed{n = \frac{F_{\mathrm{cr}}}{F} \ge n_{\mathrm{st}}}$$

n为工作安全系数

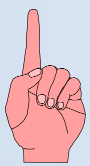
14.4　压杆的稳定校核

稳定条件可解三类问题：

（1）校核稳定性；

（2）确定许可载荷；

（3）设计截面尺寸（设计要试算）



步骤

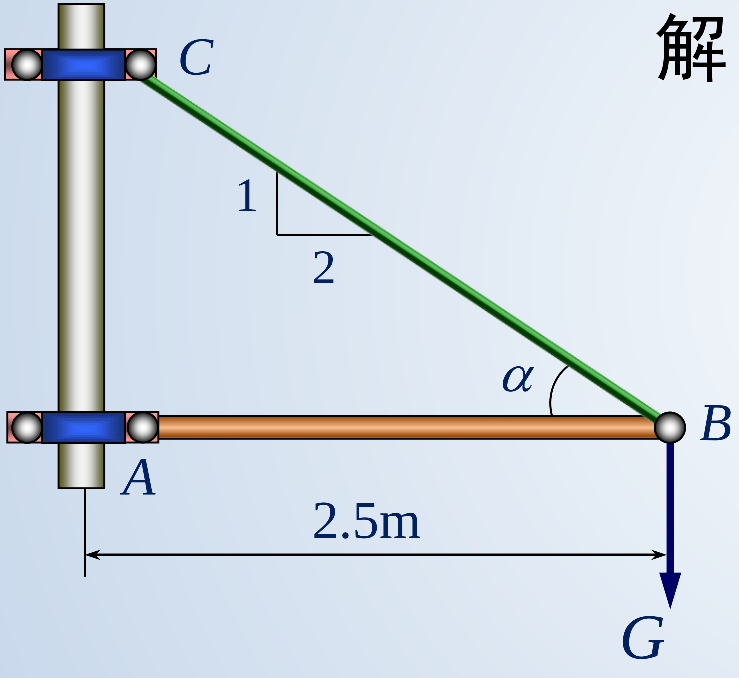
1.求临界力F_{cr}

2.求工作载荷F

3.求工作安全系数，作稳定计算 $n=\dfrac{F_{\mathrm{cr}}}{F}\geq n_{\mathrm{st}}$

14.4 压杆的稳定校核

例3 已知:AB空心: D=76mm, d=68mm BC实心: $D_1 = 20$mm, Q235钢,n=1.5, n_{st}=4, G=20kN 试校核此结构



解：(1) 校核AB杆的稳定

$$i=\sqrt{\frac{I}{A}}=\frac{D}{4}\sqrt{1+\left(\frac{d}{D}\right)^2}\quad=25.5\,\text{mm}$$

μ=1 l=2.5m $\lambda=\dfrac{\mu l}{i}=98$

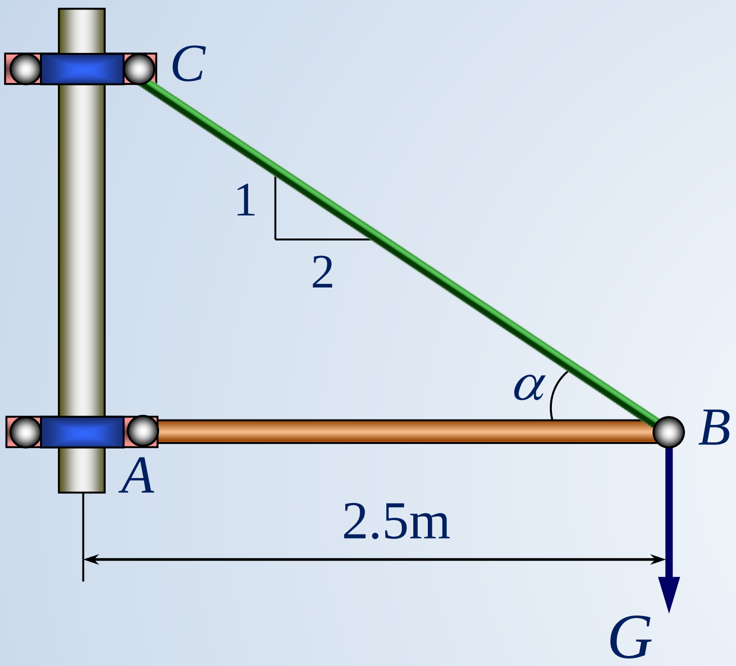
对Q235钢 λ_p=100, λ_s=60,

$\lambda_s < \lambda < \lambda_p$ 故AB为中柔度杆

由直线公式并查表 $\sigma_{cr} = a - b\lambda = 304 - 1.12\lambda$

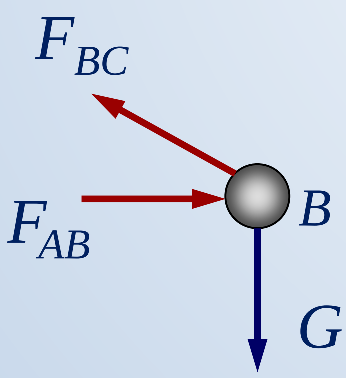
$F_{ABcr} = (a - b\lambda)\,A = 175.6$kN

14.4 压杆的稳定校核



$$\sum F_x = 0 \quad F_{AB} = F_{BC}\cos\alpha$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{BC}\sin\alpha = G$$



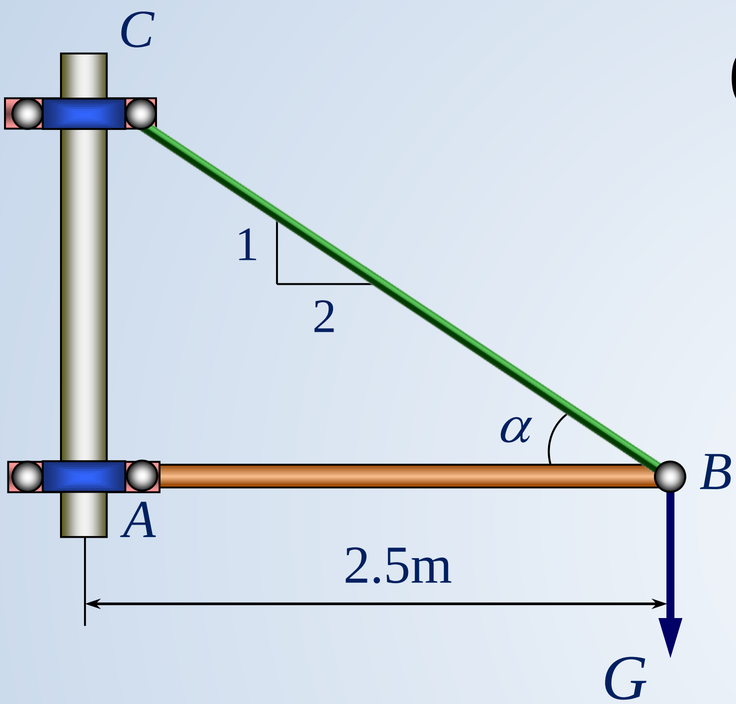
$$F_{AB} = \frac{G}{\tan\alpha} = 40\,\text{kN}$$

$$F_{BC} = \frac{G}{\sin\alpha} = 44.7\,\text{kN}$$

$$n = \frac{F_{AB\,\text{cr}}}{F_{AB}} = \frac{175.6}{40} = 4.39 > n_{\text{st}} = 4$$

$\boxed{AB\text{满足稳定条件}}$

14.4 压杆的稳定校核



(2) 校核BC杆的强度

$$\sigma_{BC}=\frac{F_{NBC}}{A_{BC}}=\frac{F_{BC}}{A_{BC}}=\frac{44.7\times10^{3}}{\frac{1}{4}\pi\cdot\left(20\times10^{-3}\right)^{2}}$$

$$=142.4\text{MPa}$$

$$\sigma_s=235\text{MPa}\quad[\sigma]=\frac{\sigma_s}{n}=156.6\text{MPa}$$

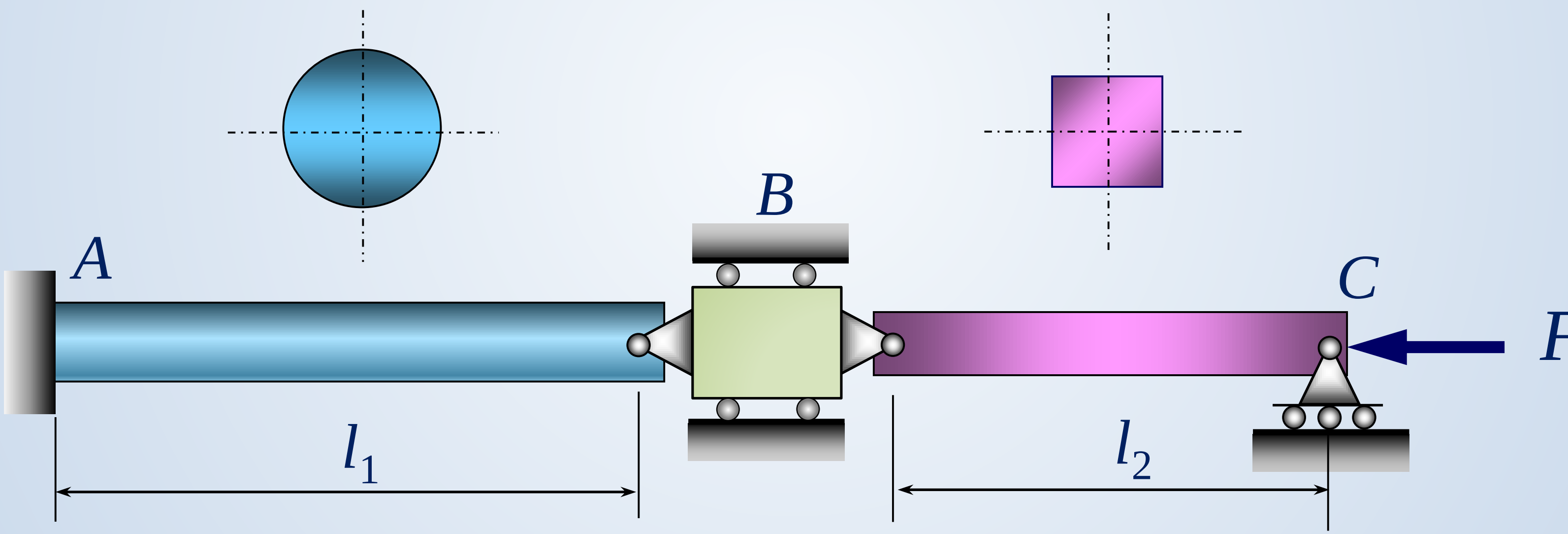
由于 $\sigma_{BC}<[\sigma]$

BC杆满足强度条件，故此结构安全

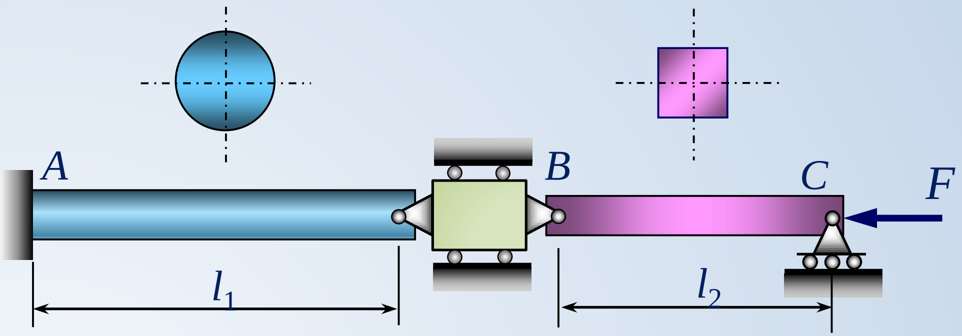
14.4 压杆的稳定校核

例4已知 d=80mm，a=70mm，l_1=4.5m

l_2=3m， E=210GPa，n_{st}=2.5 求[F]



14.4 压杆的稳定校核



解：1.计算AB的F_{cr}和$[F]_{AB}$

（1）计算AB杆的柔度

$$i_1 = \frac{d}{4} = 20\text{mm} \qquad \mu_1 = 0.7$$

$$\lambda_{AB} = \frac{\mu_1 \cdot l_1}{i_1} = 157.5$$ 对Q235钢 $\lambda_p \approx 100$ 故AB为大柔度杆

（2）计算AB杆的 F_{cr}

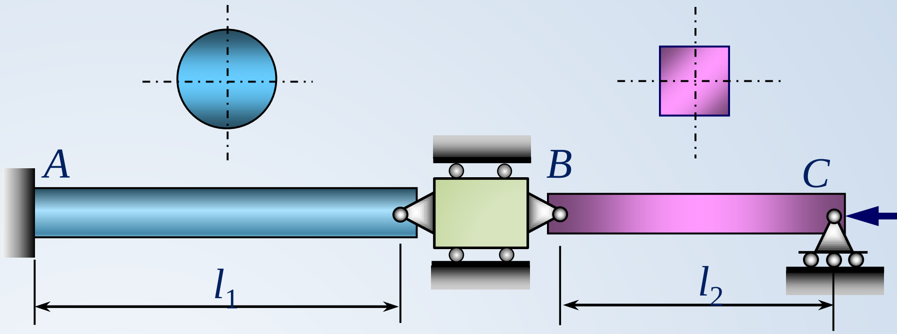
$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} = \sigma_{cr} A = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \frac{\pi d^2}{4} = 420\text{kN}$$

（3）计算AB杆的$[F]_{AB}$

$$n = \frac{F_{cr}}{F_{AB}} \geq n_{st} \qquad [F]_{AB} = \frac{F_{cr}}{n_{st}} = 164.8\text{kN}$$

14.4 压杆的稳定校核

2.计算BC的F_{cr}和$[F]_{AB}$



(1)计算λ_{BC}

$$i_2=\sqrt{\frac{I}{A}}=\frac{a}{2\sqrt{3}}=20.2\,\mathrm{mm}$$

$\mu_2=1$ $$\lambda_{BC}=\frac{\mu_2 l_2}{i_2}=148.5>\lambda_P$$ BC为大柔杆

(2)计算BC杆的F_{cr}

$$F_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}=\sigma_{cr}A=\frac{\pi^2 E}{\lambda^2}a^2=460\mathrm{kN}$$

(3)计算BC杆的$[F]_{BC}$

$$n=\frac{F_{cr}}{F_{BC}}\ge n_{st}\qquad [F]_{BC}=\frac{F_{cr}}{n_{st}}=184\mathrm{kN}$$

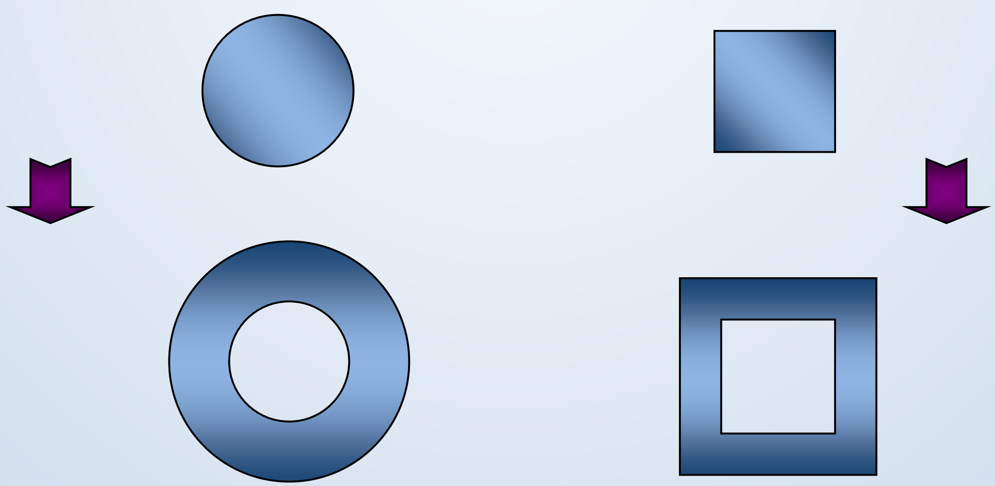
$$[F]_{AB}=\frac{F_{cr}}{n_{st}}=164.8\mathrm{kN}\qquad \boxed{[F]=164.8\,\mathrm{kN}}$$

14.5 提高压杆稳定性的措施

提高F_{cr} 降低 $\lambda = \dfrac{\mu l}{i}$

一.选择合理的压杆截面形状

1. $\mu_y = \mu_z \Rightarrow I_y = I_z \quad (i_y = i_z) \Rightarrow A = C$

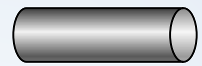


14.5 提高压杆稳定性的措施

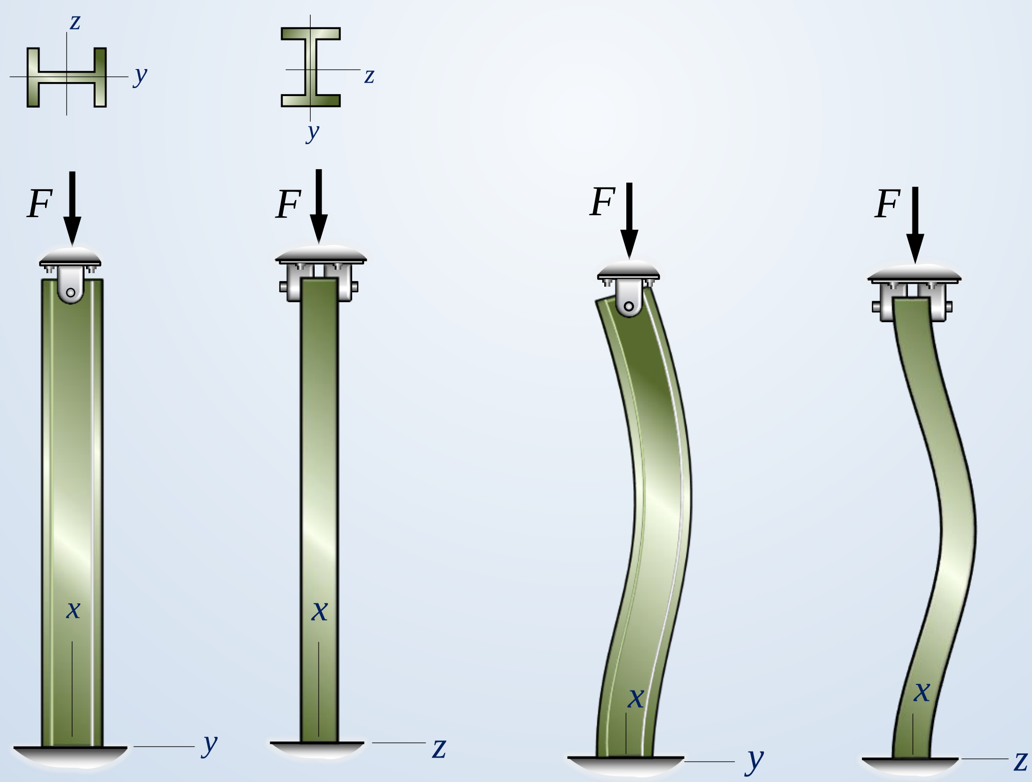
2. $\mu_y \neq \mu_z$ $\quad I_y \neq I_z$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \lambda_y \approx \lambda_z$

$\mu_y > \mu_z$ $\quad I_y > I_z$



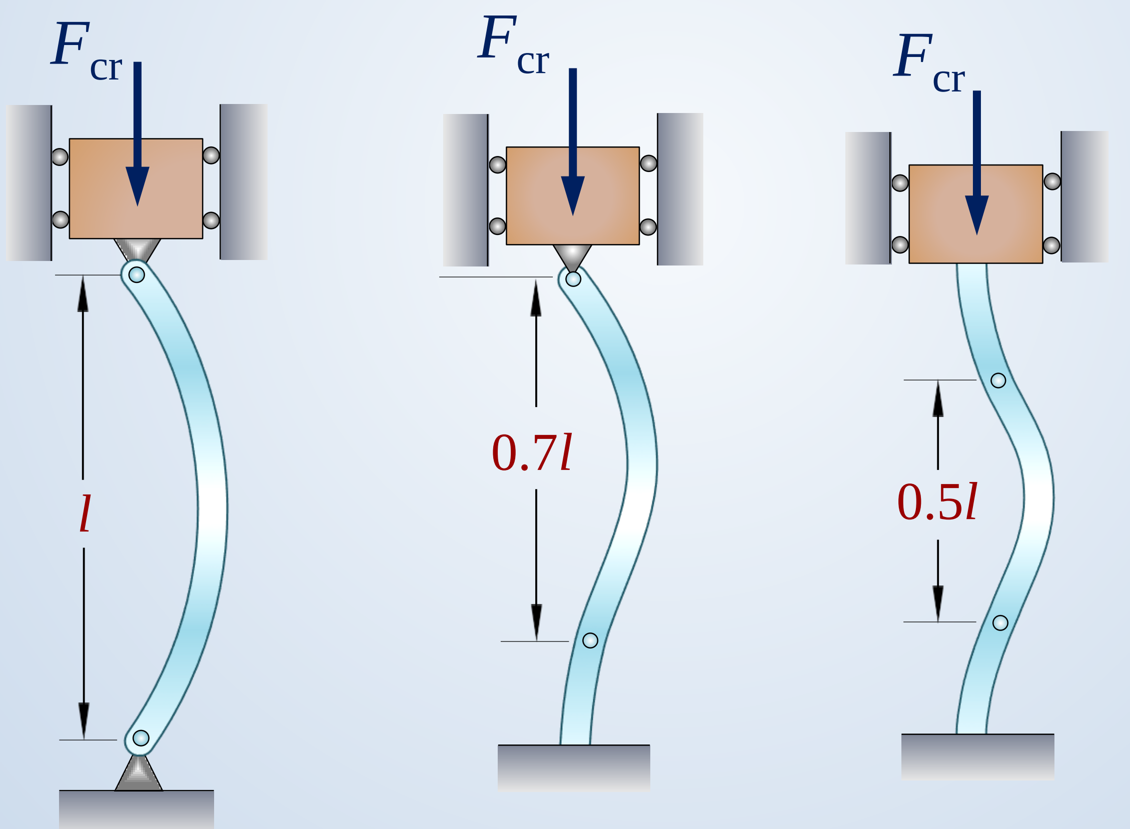
柱铰



14.5 提高压杆稳定性的措施

二. 改善约束条件

加强约束

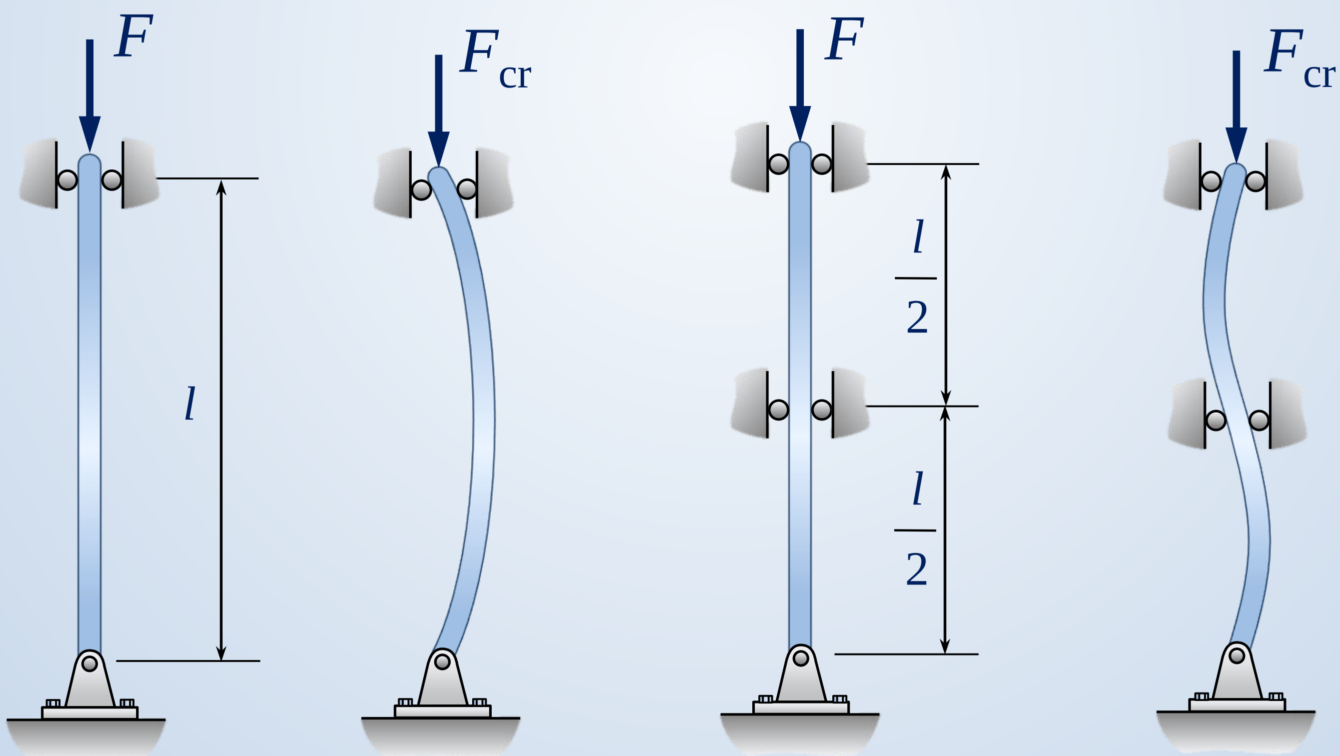


14.5　提高压杆稳定性的措施

三. 尽量减小压杆长度

$$F_{\mathrm{cr}}=\frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$$

增加支座



14.5　提高压杆稳定性的措施

四.合理选材

1.大柔度杆—各类钢材E接近

改用优质钢并不会提高压杆的稳定性

2.中柔度杆—经验公式中系数与σ_s, σ_b和有关

各类钢材σ_s, σ_b相差很大，σ_s, σ_b越高，临界力越高，稳定性越高。

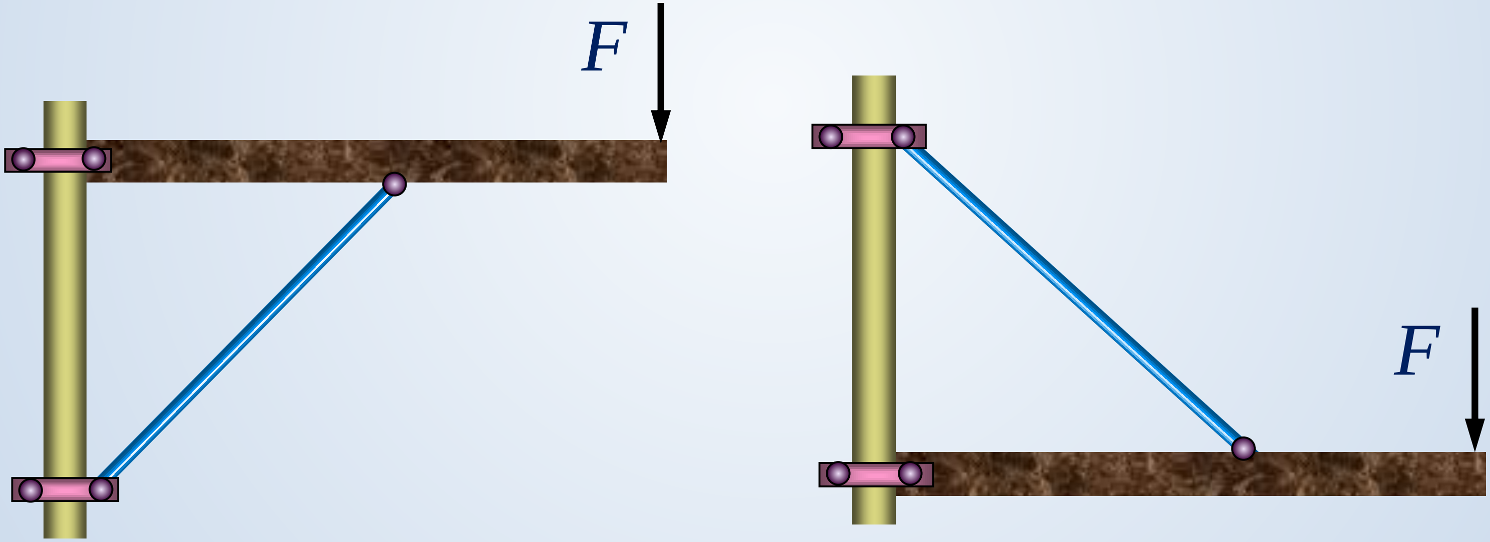
3.小柔度杆----各类钢材σ_s, σ_b不同

即强度杆，可选强度高的钢材。

14.5　提高压杆稳定性的措施

五.其他

改变受力状态　压 → 拉



Thank you!