吉林大学
JILIN UNIVERSITY

工程力学

第12章 组合变形构件的强度计算

第12章 组合变形构件的强度计算

§12.1 组合变形和叠加原理

§12.2 斜弯曲（两向弯曲）

§12.3 拉伸（压缩）与弯曲的组合

偏心拉伸(压缩)

§12.4 扭转与其他变形的组合

12.1 组合变形和叠加原理

一. 什么叫组合变形?

构件同时发生两种以上基本变形的情况。

二. 对组合变形的研究方法

1. 前提条件

材料服从胡克定律和小变形条件

2. 在以上条件下，力的独立作用原理成立，即满足叠加原理

3. 采用叠加法

12.1 组合变形和叠加原理

三. 组合变形分类

1. 两个平面弯曲的组合（斜弯曲）

2. 拉伸（压缩）与弯曲的组合

   偏心拉伸或压缩

3. 弯曲和扭转

   拉伸（压缩）和扭转

   拉伸（压缩），弯曲和扭转

12.1 组合变形和叠加原理

四. 组合变形强度计算的一般 步骤

1. 外力分析　将外力向截面形心简化，或沿对称轴方向分解，从而把外力分组，使每组外力作用只产生一种基本变形。

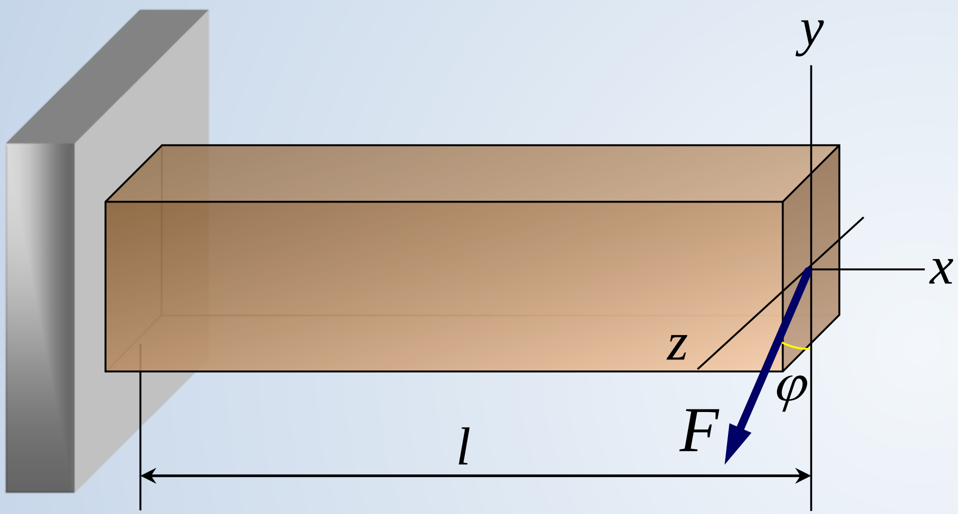
2. 内力分析　计算构件在每一种基本变形下的内力，画出内力图，从而确定危险截面位置。

3. 应力分析　画出每种基本变形下应力分图，从而确定危险截面上危险点的位置，并画出危险点的应力状态。

4. 强度计算　根据应力状态和构件的材料, 选择强度理论进行强度计算

12.2 斜弯曲（两向弯曲）

对图示矩形截面梁作强度和变形分析

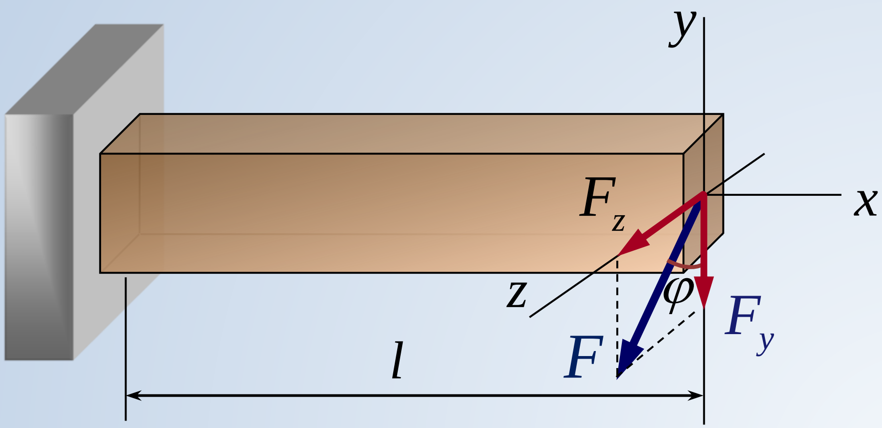


外力F过形心（无扭）

但不平行对称轴（斜弯）

思路：可分解成两个平面内的平面弯曲的组合

12.2 斜弯曲（两向弯曲）

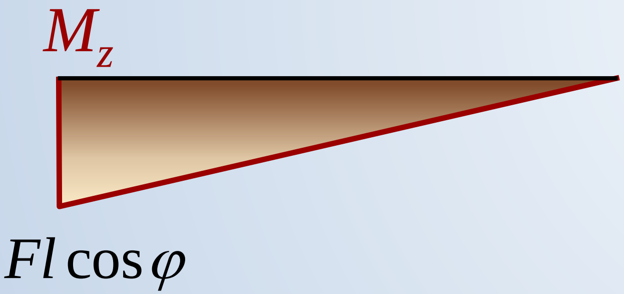


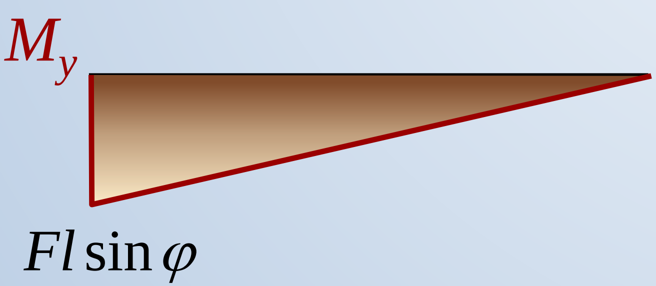
解： 1. 外力分析

$$F_y = F\cos\varphi \quad \rightarrow M_z$$

$$F_z = F\sin\varphi \quad \rightarrow M_y$$

2. 内力分析



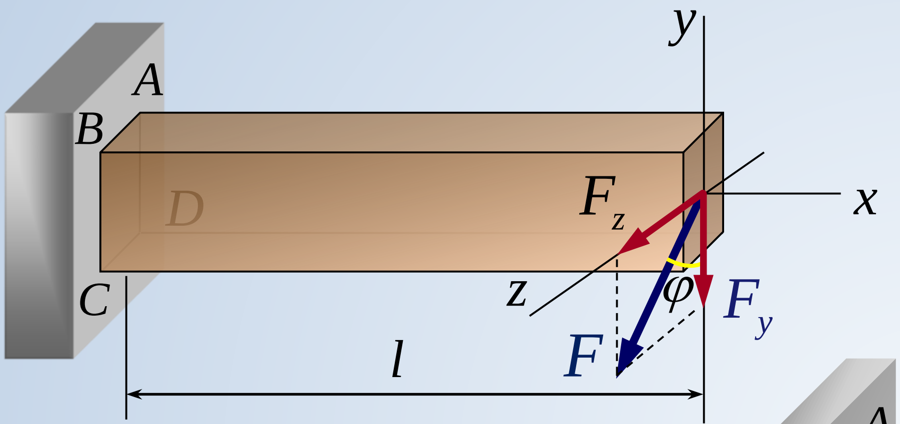


危险截面：固定端

$$M_{z\max} = Fl\cos\varphi$$

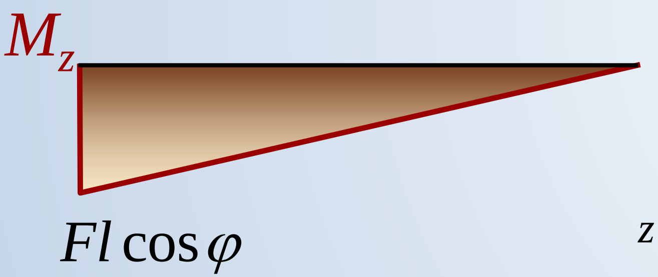
$$M_{y\max} = Fl\sin\varphi$$

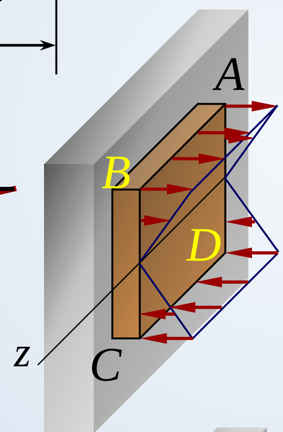
12.2 斜弯曲（两向弯曲）

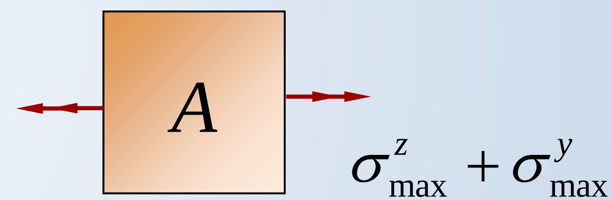


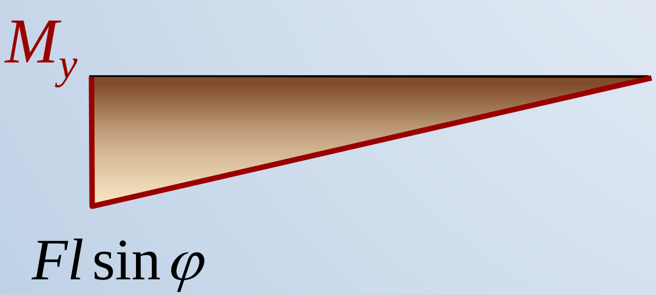
3. 应力分析

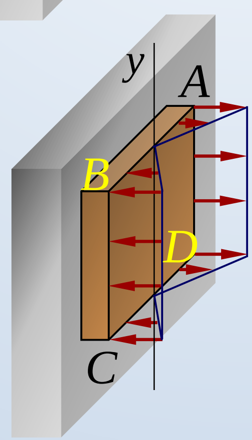
危险点：A、C

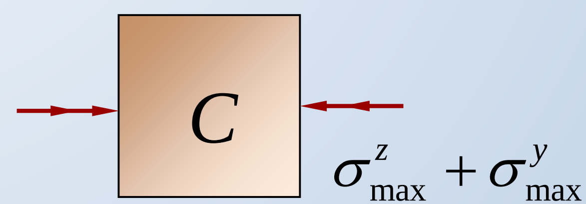




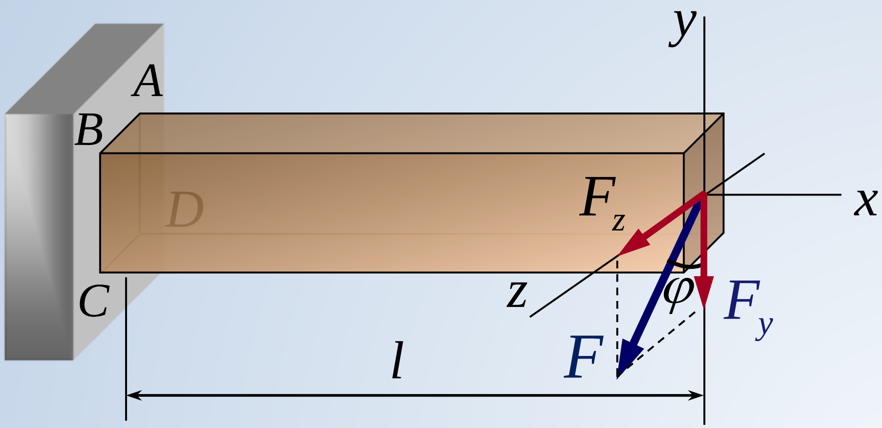






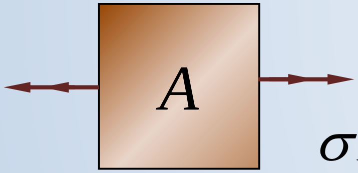


12.2 斜弯曲（两向弯曲）



4. 强度计算

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{z\max}}{W_z} + \frac{M_{y\max}}{W_y}$$



$\sigma^{z}_{\max} + \sigma^{y}_{\max}$

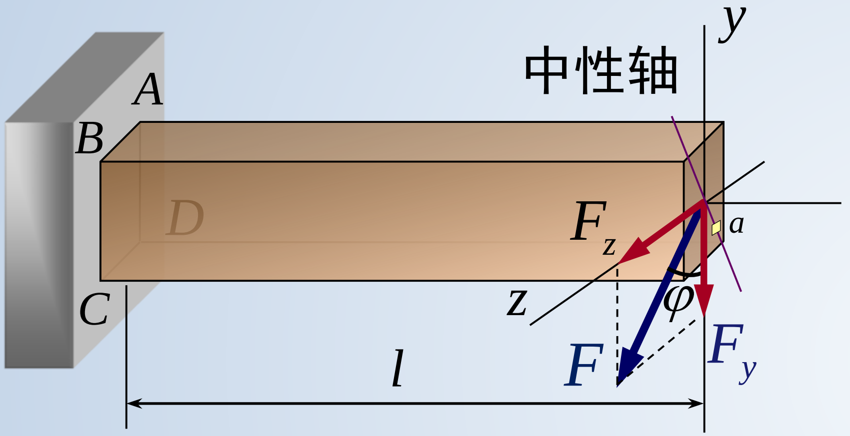
因危险点处于单向应力状态，又矩形截面对称

$$\sigma_{\mathrm{t}\max} = \sigma_{\mathrm{c}\max} \le [\sigma_{\mathrm{t}}]$$

对有棱角的截面，危险点一定发生在外棱角上

12.2 斜弯曲（两向弯曲）

5. 中性轴：横截面上正应力为零的各点连线

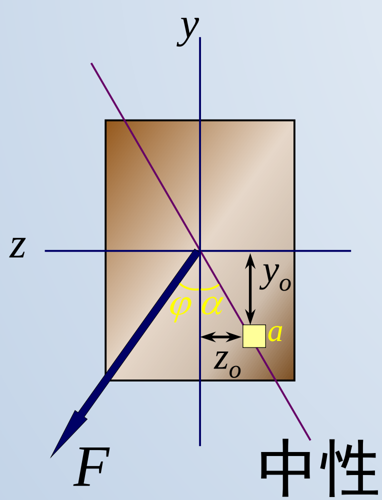


设a在中性轴上

$$\sigma = Fl\left(\frac{\cos\varphi}{I_z}y_o + \frac{\sin\varphi}{I_y}z_o\right) = 0$$

$$\frac{\cos\varphi}{I_z}y_o + \frac{\sin\varphi}{I_z}z_o = 0$$

$$\tan\alpha = \frac{z_o}{y_o} = -\frac{I_y}{I_z}\cot\varphi$$

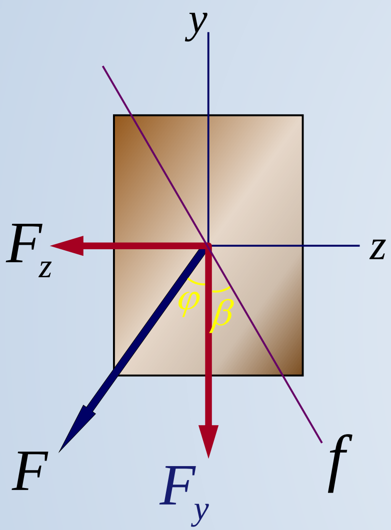


当 $I_y \neq I_z$ 时，$\tan\alpha \cdot \tan\varphi \neq -1$

即力F的方向与中性轴不垂直

12.2 斜弯曲（两向弯曲）

6.变形的计算



叠加法

$$f_y = \frac{F_y l^3}{3EI_z} = \frac{Fl^3 \cos\varphi}{3EI_z} \qquad f_z = \frac{Fl^3 \sin\varphi}{3EI_y}$$

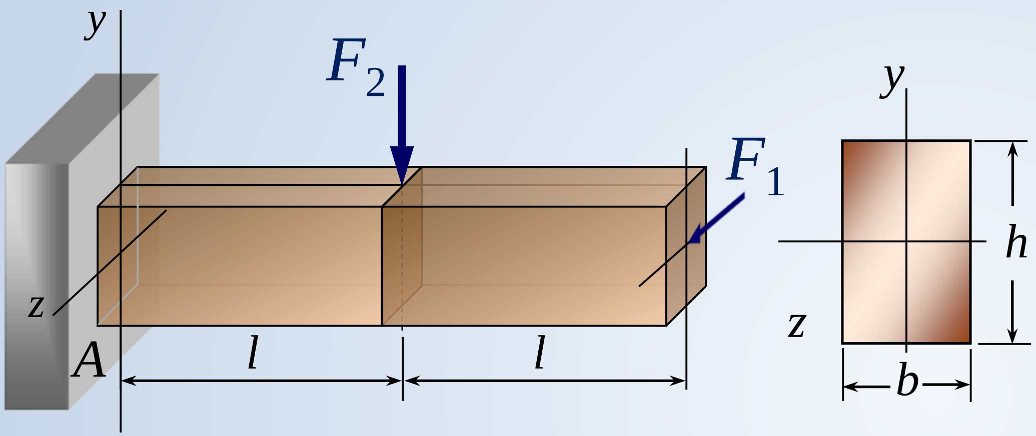
$$f = \sqrt{f_y^2 + f_z^2} \qquad \tan\beta = \frac{f_z}{f_y} = \frac{I_z}{I_y}\tan\varphi$$

$I_y \neq I_z$ 时， $\beta \neq \varphi$ 故称斜弯曲。

$I_y = I_z$时， $\beta = \varphi$， F 与挠曲线仍在同一纵向平面内，即为平面弯曲。

12.2 斜弯曲（两向弯曲）

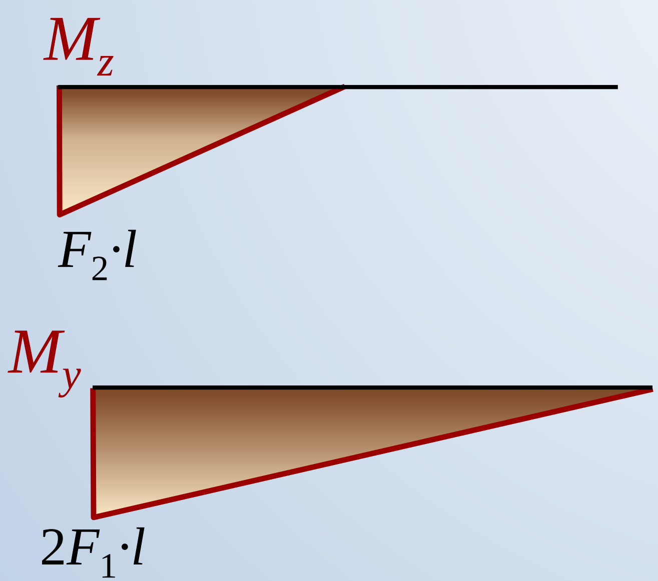
例1 已知F_1，F_2，l，$[\sigma]$ 试作强度校核



解：1.外力分析

M_y，M_z 两个平面弯曲的组合

2.内力分析

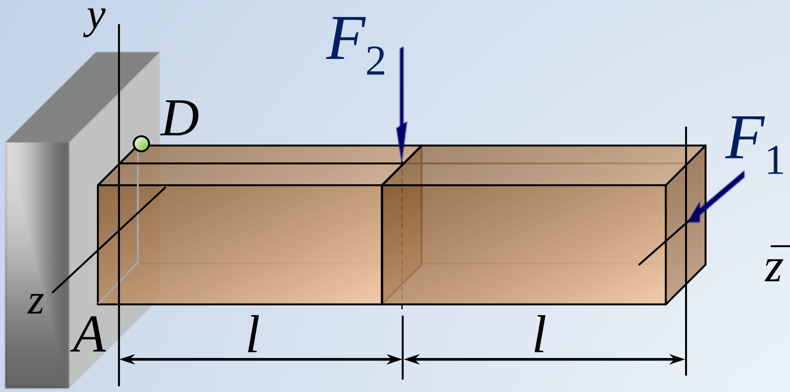


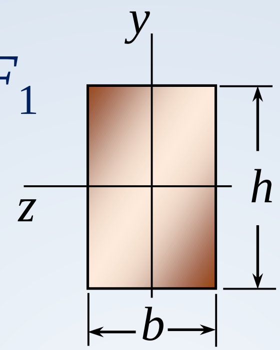
危险截面：固定端

$$M_{z\max} = F_2 \cdot l$$

$$M_{y\max} = 2F_1 \cdot l$$

12.2 斜弯曲（两向弯曲）

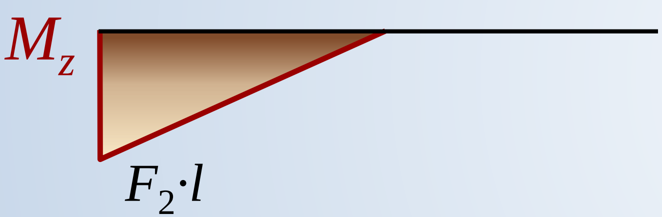


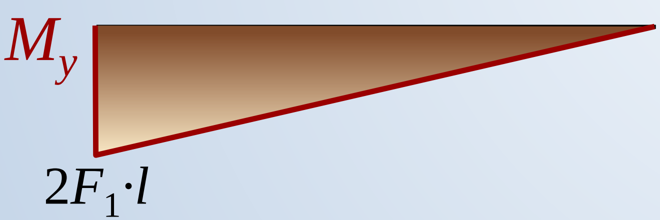


3. 应力分析

危险点：D

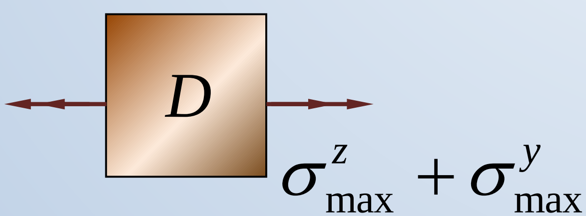
4. 强度校核





$$\sigma_{\max}=\frac{M_{y\max}}{W_y}+\frac{M_{z\max}}{W_z}=\frac{2F_1 l}{\frac{1}{6}hb^2}+\frac{F_2 l}{\frac{1}{6}bh^2}$$

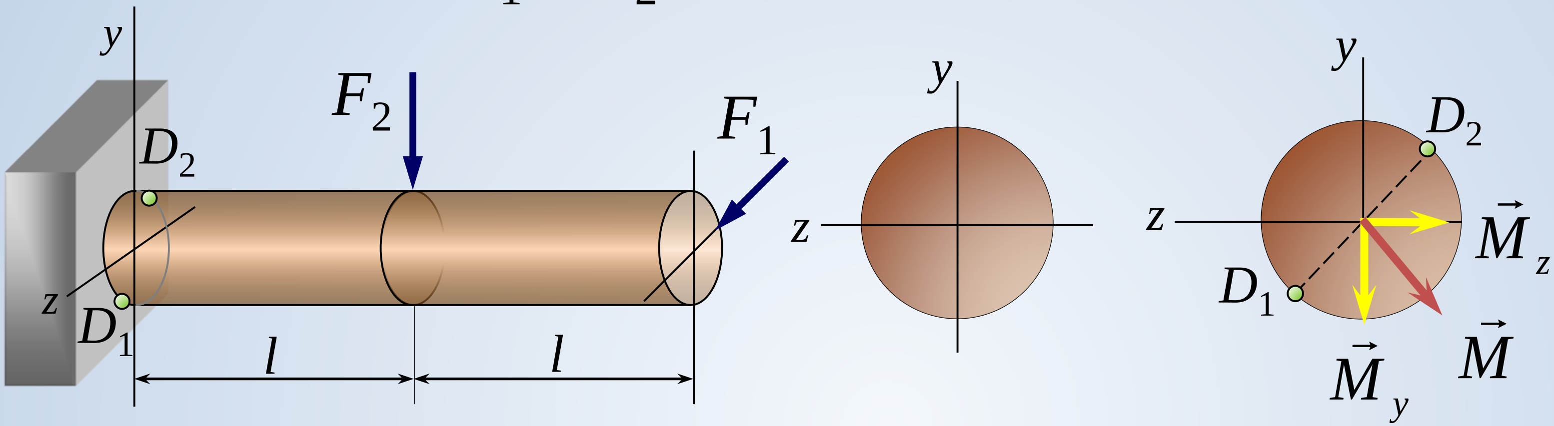
$$=\frac{6l}{bh}\left(\frac{2F_1}{b}+\frac{F_2}{h}\right)\leq[\sigma]$$



同一点的“量”才能相加

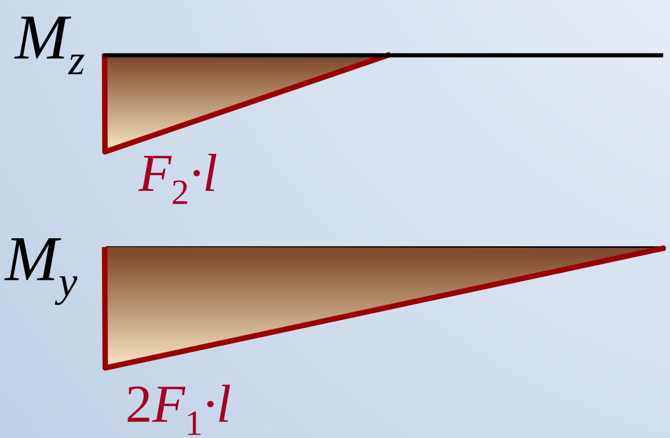
12.2 斜弯曲（两向弯曲）

例2 已知 F_1，F_2，l，d，$[\sigma]$ 试作强度校核



解：1.外力分析 M_y，M_z 两个平面弯曲的组合

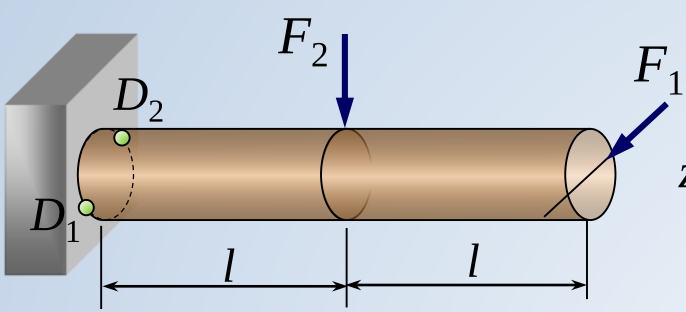
2. 内力分析 危险截面：固定端

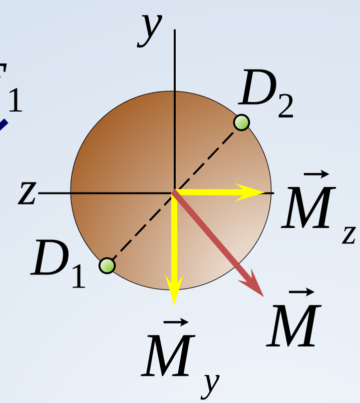


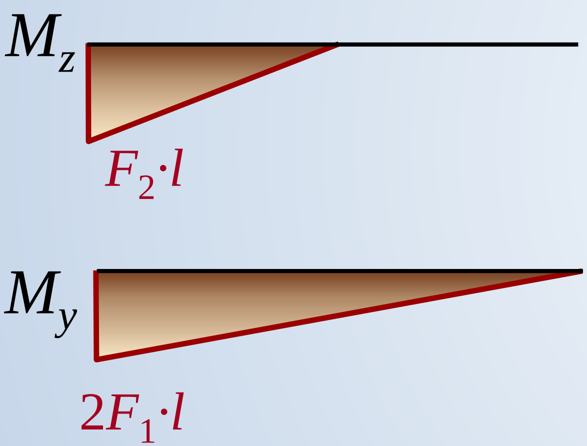
$$M_{z\max} = F_2 \cdot l \qquad M_{y\max} = 2F_1 \cdot l$$

$$M_{\max} = \sqrt{M_{z\max}^2 + M_{y\max}^2}$$

12.2 斜弯曲（两向弯曲）







3. 应力分析

D_1, D_2为危险点

4. 强度校核

$$\sigma_{\max}=\frac{M_{\max}}{W}=\frac{\sqrt{M_{y\max}^{2}+M_{z\max}^{2}}}{W}$$

$$=\frac{32}{\pi d^3}\sqrt{(2F_1 l)^2+(F_2 l)^2}$$

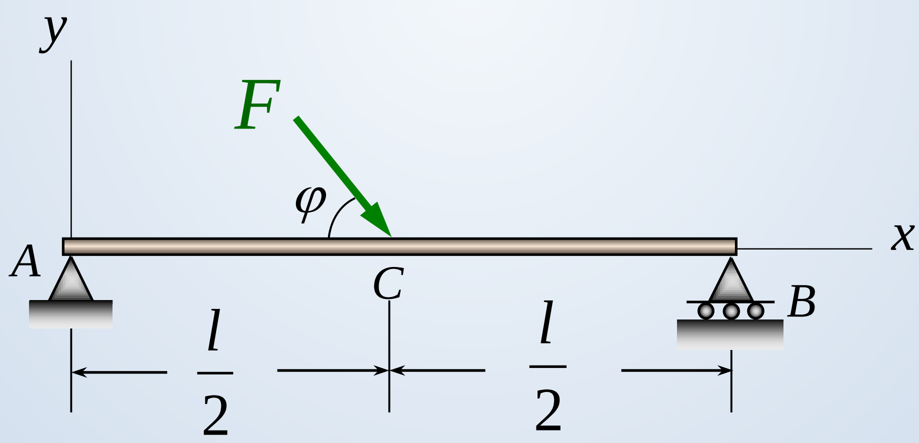
$$=\frac{32l}{\pi d^3}\sqrt{4F_1^2+F_2^2}\le[\sigma]$$

对圆截面必须先求合成

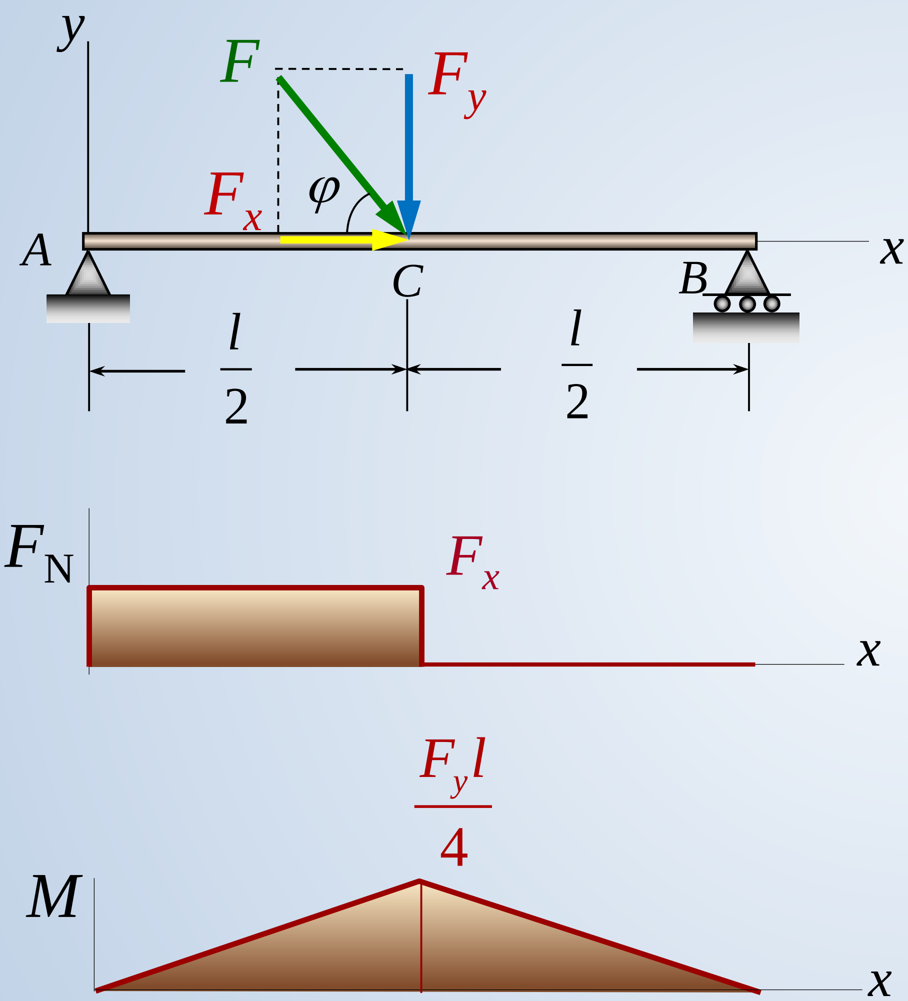
$M_{\max}$ 才能求$\sigma_{\max}$

一. 拉伸（压缩）与弯曲的组合

F 作用在xy平面内但与轴线有一夹角



12.3 拉伸(压缩)与弯曲的组合 偏心拉伸(压缩)



1.外力分析

$$F \Rightarrow \begin{cases} F_y \longrightarrow \text{弯曲} \\ F_x \longrightarrow \text{拉伸} \end{cases}$$

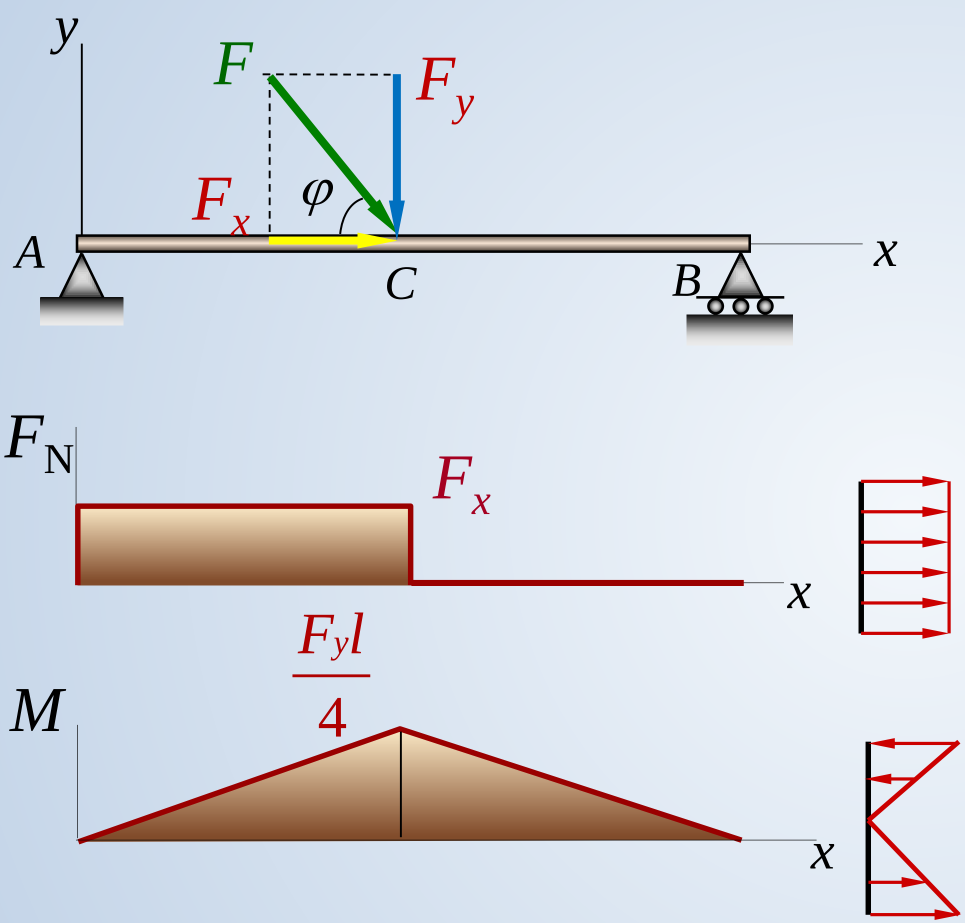
2.内力分析

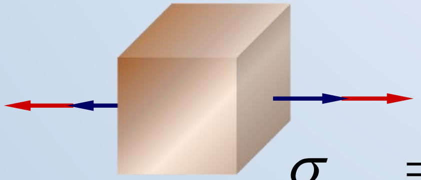
危险截面： C

$$F_{N_{\max}} = F_x = F\cos\varphi$$

$$M_{\max} = \frac{F_y l}{4}$$

12.3 拉伸(压缩)与弯曲的组合　偏心拉伸(压缩)





$$\sigma_{\max} = \sigma_{F_N} + \sigma_M$$

3.应力分析

危险点：C 下表面

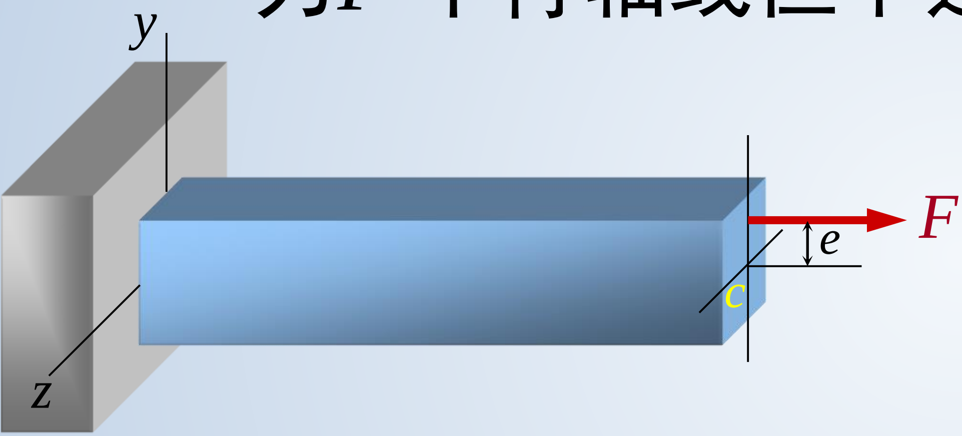
$$\sigma_{\max} = \frac{F_{N_{\max}}}{A} + \frac{M_{\max}}{W}$$

4. 强度计算

$$\sigma_{\max} \le [\sigma_t]$$

二.偏心拉伸（压缩）

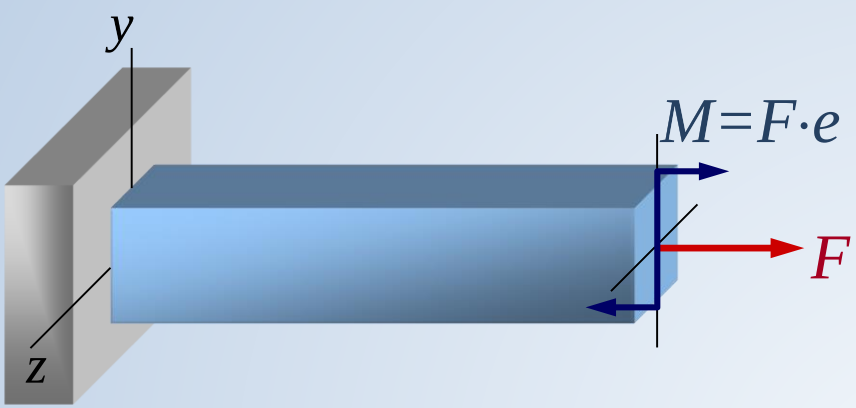
力F 平行轴线但不过形心 $\Rightarrow$偏心载荷

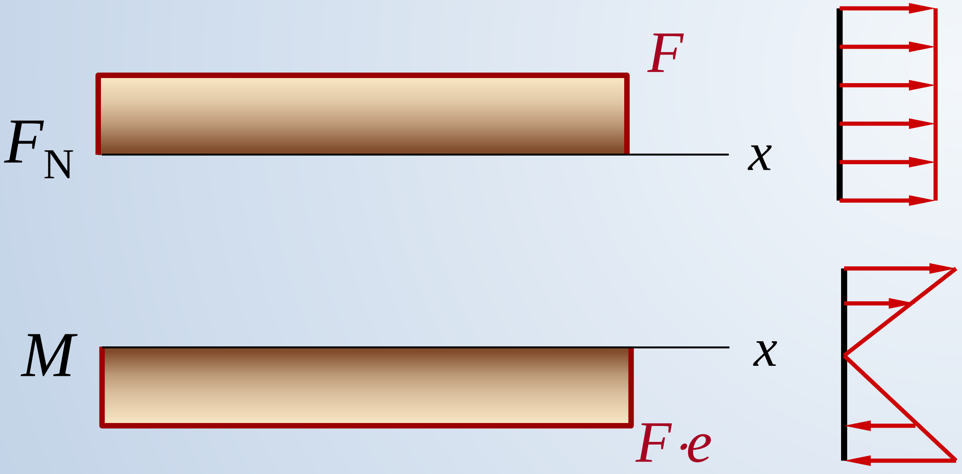


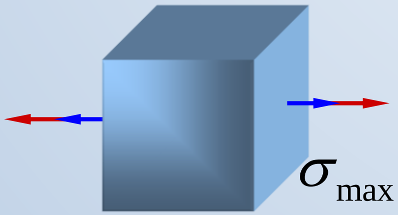
1.外力分析

$$F \Rightarrow \begin{cases} F \longrightarrow \text{拉伸} \\ M \longrightarrow \text{弯曲} \end{cases}$$

12.3 拉伸(压缩)与弯曲的组合 偏心拉伸(压缩)







$$\sigma_{\max} = \sigma_{F_N} + \sigma_M$$

2.内力分析

$$F_{N_{\max}} = F_N = F$$

$$M_{\max} = M = F \cdot e$$

3.应力分析

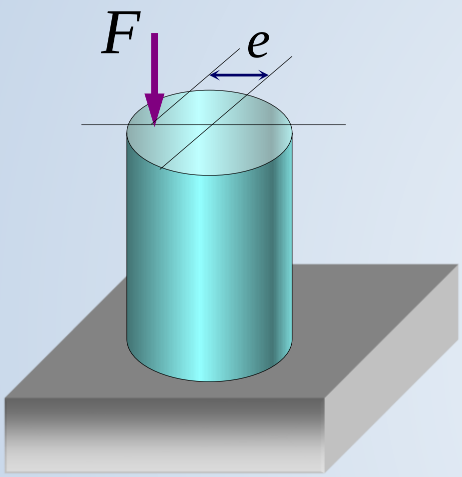
危险点：上表面

$$\sigma_{\max} = \frac{F_N}{A} + \frac{M}{W_z}$$

4.强度计算

$$\sigma_{t_{\max}} \le [\sigma_t] \quad \sigma_{\max} \le [\sigma]$$

三. 偏心压缩截面核心的概念

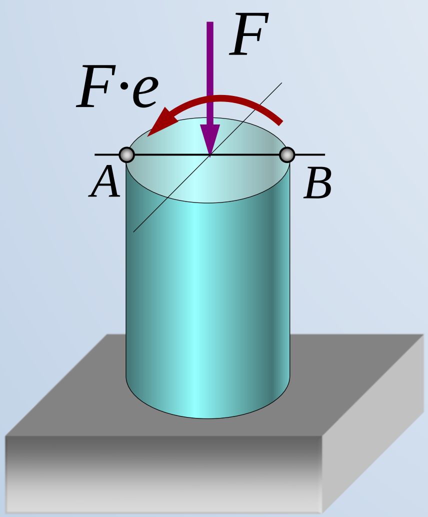


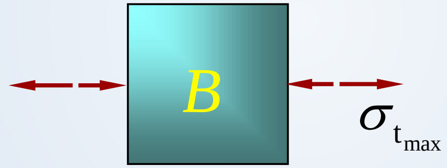
1. 外力分析

2. 内力分析

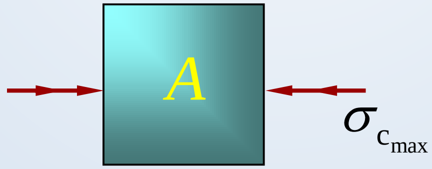
$$F_N = F,\quad M = F \cdot e$$

3. 应力分析





$$\sigma_{t_{max}} = \frac{M}{W} - \frac{F_N}{A}$$

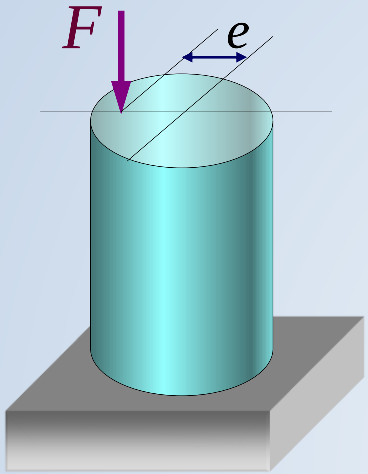


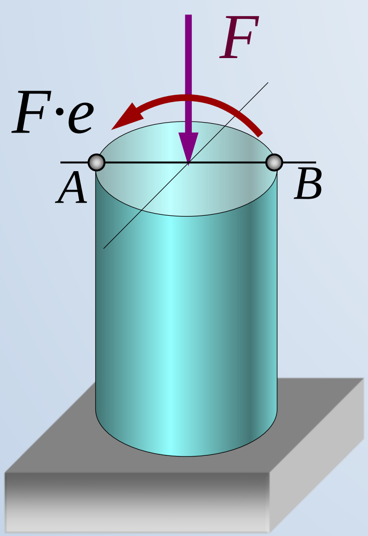
$$\sigma_{c\,max} = \frac{M}{W} + \frac{F_N}{A}$$

4. 强度计算

$$\sigma_{t_{max}} \le [\sigma_t] \qquad |\sigma_c|_{max} \le [\sigma_c]$$

12.3 拉伸(压缩)与弯曲的组合　偏心拉伸(压缩)



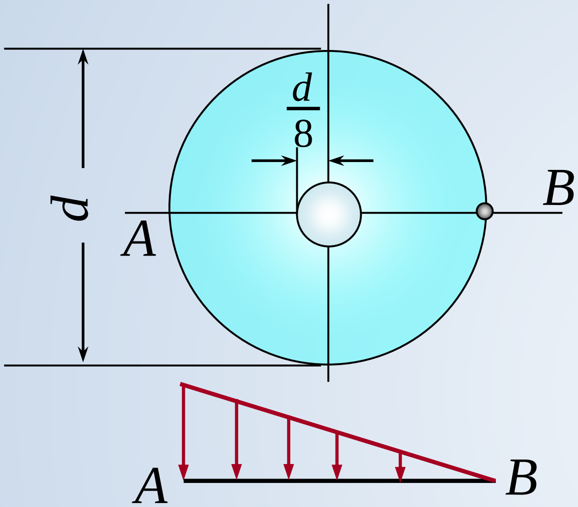


偏心压缩总可以简化为压缩与弯曲的组合. 对于拉应力的危险点, 当压缩引起的压应力等于弯曲引起的最大拉应力时, 就可据此求出**不产生拉应力时的偏心距的极限值**. 即

$$\sigma_{\max} = -\frac{F_{\mathrm{N}}}{A} + \frac{M}{W} \leq 0$$

12.3 拉伸(压缩)与弯曲的组合 偏心拉伸(压缩)

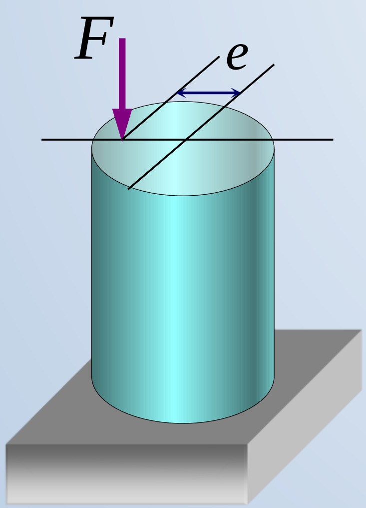
圆形截面杆的截面核心

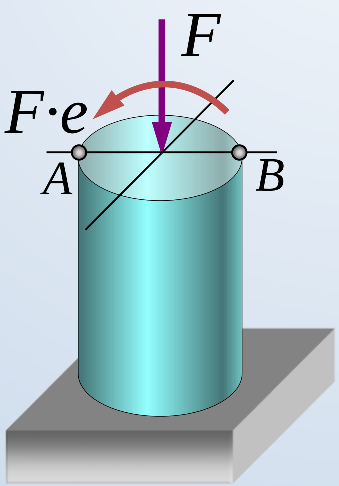


对于圆杆，不产生拉应力的极限偏心距的条件为：

$$\sigma_{\mathrm{t\,max}} = -\frac{F_{\mathrm{N}}}{A} + \frac{M}{W} \le 0$$

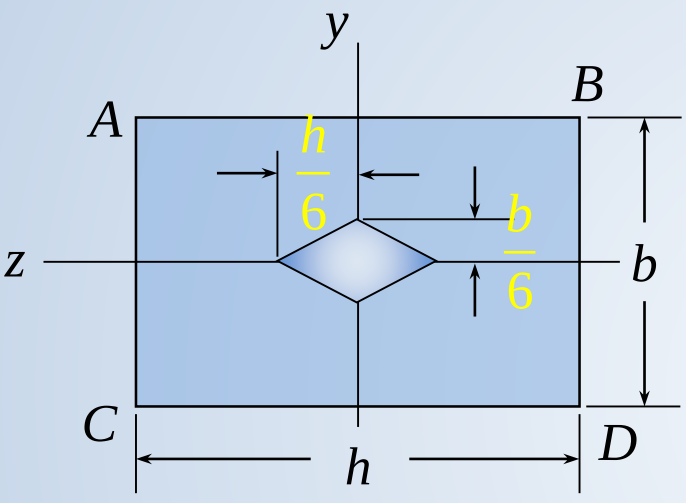
即 $$-\frac{F}{\frac{1}{4}\pi d^2} + \frac{F\cdot e}{\frac{1}{32}\pi d^3} \le 0$$

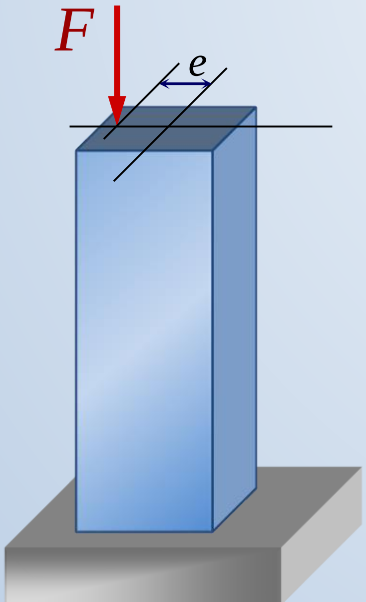




偏心距 $\boxed{e \le \frac{d}{8}}$

矩形截面杆的截面核心





若中性轴与AB边重合,则

$$\sigma_{\mathrm{t\,max}} = -\frac{F_{\mathrm{N}}}{A} + \frac{M_z}{W_z} \le 0 \qquad -\frac{F}{bh} + \frac{F\cdot e}{\frac{1}{6}hb^2} \le 0$$

偏心距 $\boxed{e \le \frac{b}{6}}$

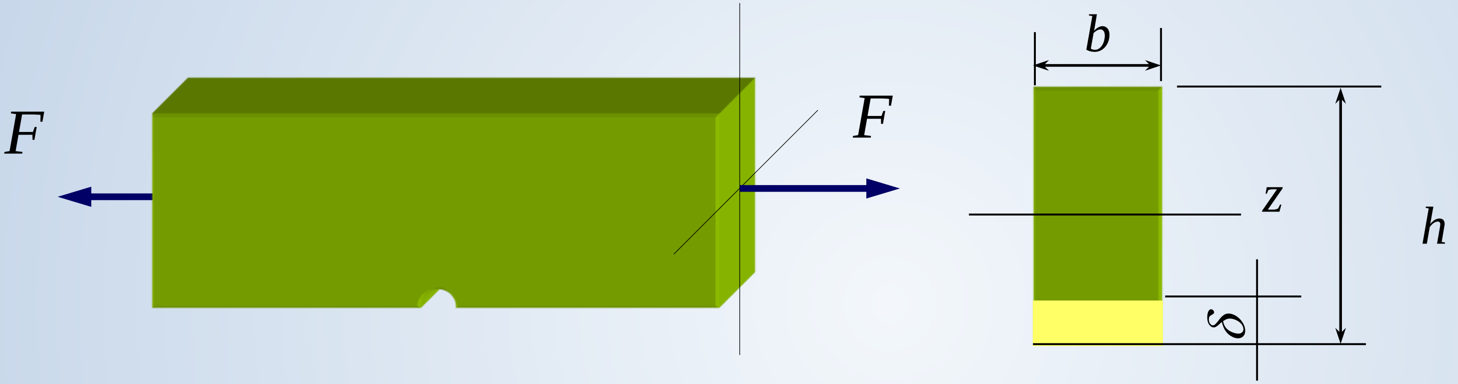
若中性轴与AC边重合,则

$$\sigma_{\mathrm{t\,max}} = -\frac{F}{A} + \frac{M}{W_y} \le 0 \qquad -\frac{F}{bh} + \frac{F\cdot e}{\frac{1}{6}bh^2} \le 0$$

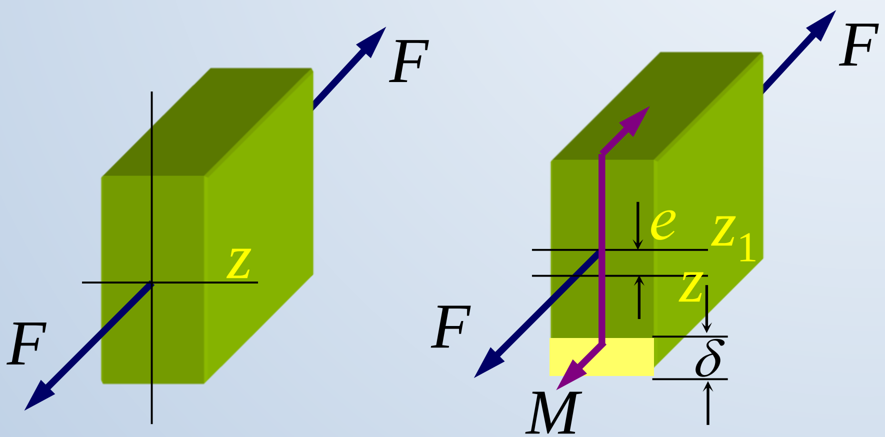
偏心距 $\boxed{e \le \frac{h}{6}}$

12.3 拉伸(压缩)与弯曲的组合　偏心拉伸(压缩)

例3 已知h=8cm，b=4cm，δ=1 cm，F=320N，[σ]=150MPa，不考虑应力集中的影响，试校核其强度。



解：1.外力分析



平行移F 至轴线z_1，

附加弯矩 $M = F\cdot e$

$$e = \frac{h}{2} - \frac{h-\delta}{2} = \frac{\delta}{2} = 0.5\text{cm}$$

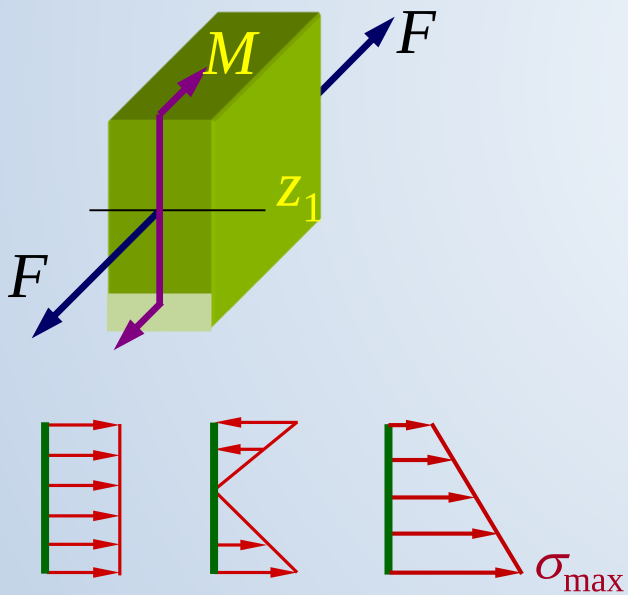
12.3 拉伸(压缩)与弯曲的组合 偏心拉伸(压缩)

2.内力分析

缺口截面为危险截面

$$F_N = F = 320\,\mathrm{kN}$$

$$M = F \cdot e = 1.6\,\mathrm{kN\cdot m}$$



3.应力分析 危险点在缺口顶端

$$\sigma_{F_N} = \frac{F_N}{A} = \frac{320\times10^3}{40\times(80-10)} = 114\,\mathrm{MPa}$$

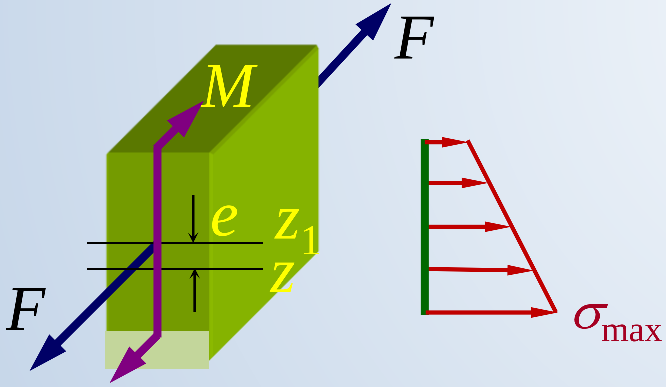
$$\sigma_M = \frac{M}{W} = \frac{16\times10^3}{\frac{1}{6}40\times(80-10)^2} = 49\,\mathrm{MPa}$$

$$\sigma_{max} = \frac{F_N}{A} + \frac{M}{W} = 163\,\mathrm{MPa}$$

12.3 拉伸(压缩)与弯曲的组合 偏心拉伸(压缩)

4.强度计算

$$\sigma_{\max}=163\,\text{MPa}>[\sigma]=150\,\text{MPa}$$

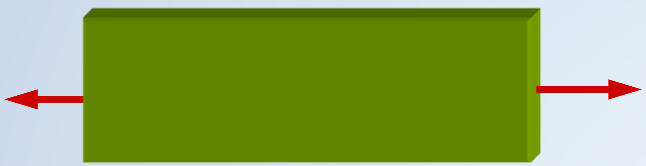


$$\frac{\sigma_{t\max}-[\sigma]}{[\sigma]}=8.7\%>5\%$$

所以,杆件的强度不够.

12.3 拉伸(压缩)与弯曲的组合 偏心拉伸(压缩)

5. 讨论



不开口时

$$\sigma=\frac{F_{\mathrm{N}}}{A}=100\,\mathrm{MPa}<[\sigma]$$

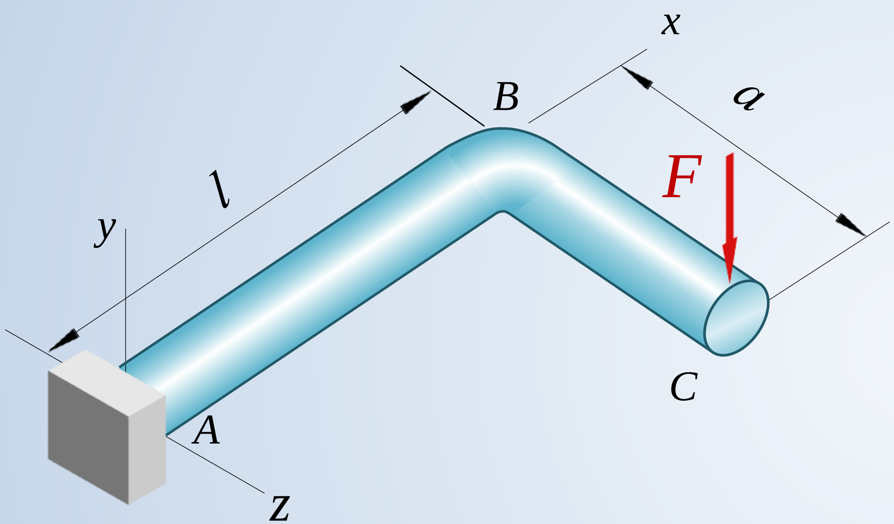
对称开口时

$$\sigma=\frac{F_{\mathrm{N}}}{A_{\min}}=133\,\mathrm{MPa}<[\sigma]$$

结论 尽可能不要造成偏心载荷，若要开槽尽量对称开。

12.4 扭转与其他变形的组合

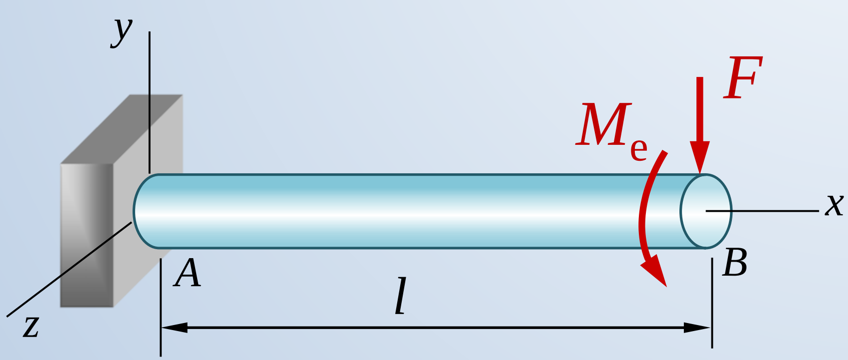
一. 圆轴扭转与一个平面弯曲的组合



以直角曲拐为例，讨论杆 AB 的强度问题。

1.外力分析

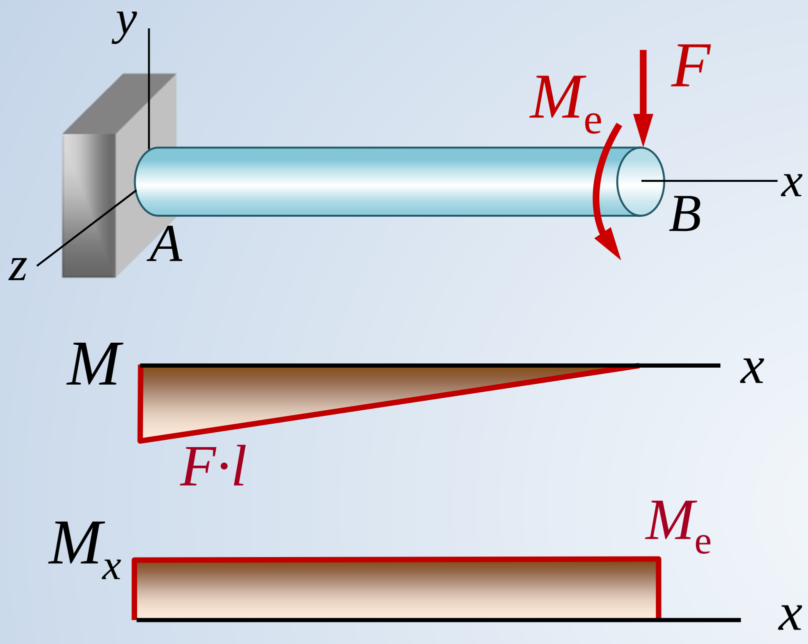
将F平移到B截面



F ⇨ 弯曲

$M_e = F \cdot a$ ⇨ 扭转

12.4 扭转与其他变形的组合



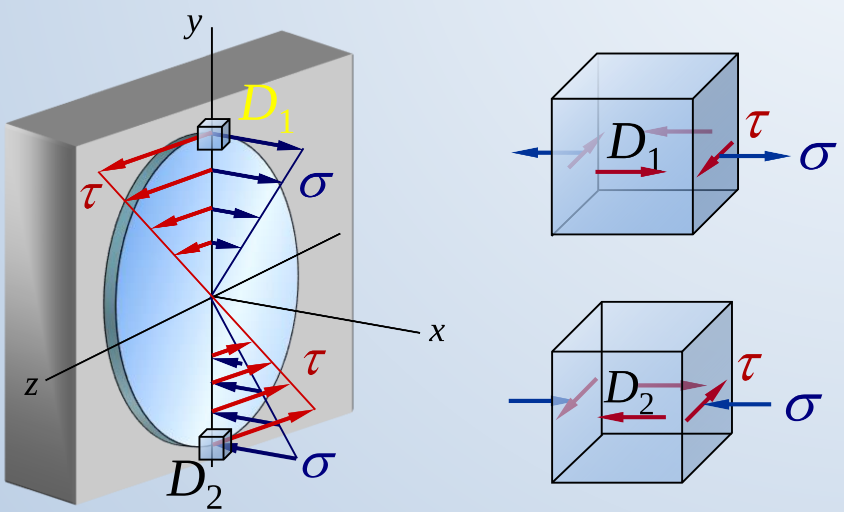
2.内力分析(危险截面)

危险截面：A

$$M_{\max} = F \cdot l$$

$$M_{x\max} = M_e = F \cdot a$$

3. 应力分析(危险点)



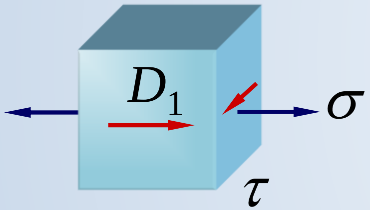
危险点：D_1，D_2

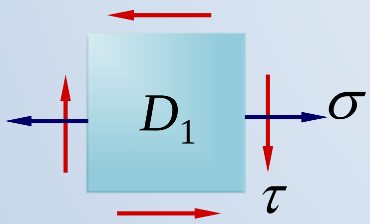
$$M \Rightarrow \sigma = \frac{M_{\max}}{W}$$

$$M_x \Rightarrow \tau = \frac{M_{x\max}}{W_p}$$

12.4 扭转与其他变形的组合

4. 强度计算





危险点属二向应力状态，

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{\max}\\ \sigma_{\min}\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

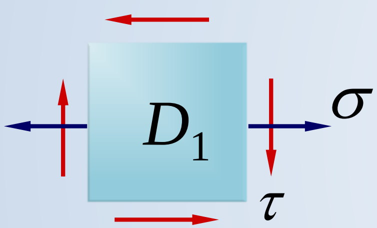
$$= \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

$$\sigma_1 = \sigma_{\max} = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = \sigma_{\min} = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

12.4 扭转与其他变形的组合



$$\sigma_1=\sigma_{\max}=\frac{\sigma}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}$$

$$\sigma_2=0$$

$$\sigma_3=\sigma_{\min}=\frac{\sigma}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}$$

对于塑性材料

由第三强度理论

$$\sigma_{r3}=\sigma_1-\sigma_3$$

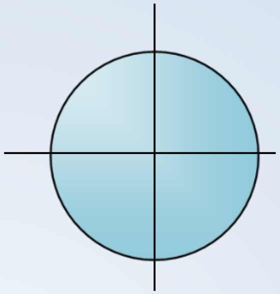
$$\sigma_{r3}=\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}\le[\sigma]$$

由第四强度理论

$$\sigma_{r4}=\sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]}$$

$$\sigma_{r4}=\sqrt{\sigma^2+3\tau^2}\le[\sigma]$$

12.4 扭转与其他变形的组合



$$W_P = 2W$$

将 $\sigma = \dfrac{M_{\max}}{W}$ $\tau = \dfrac{M_{x\max}}{W_p}$ 代入

$$\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \le [\sigma]$$

得

$$\boxed{\sigma_{r3} = \frac{1}{W}\sqrt{M_{\max}^2 + M_{x\max}^2} \le [\sigma]}$$

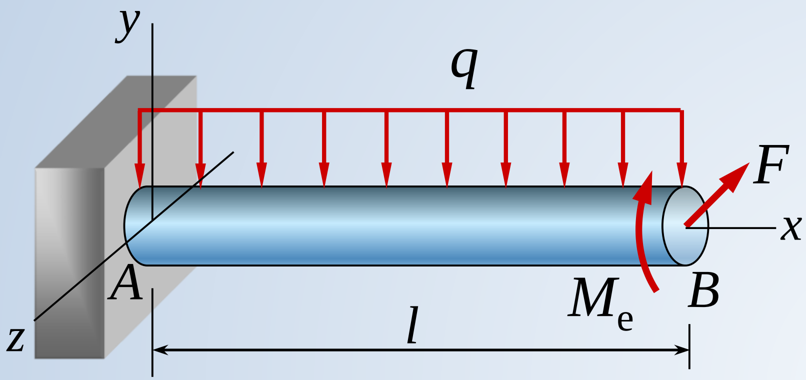
同理

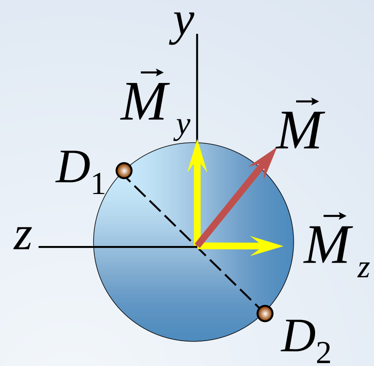
$$\boxed{\sigma_{r4} = \frac{1}{W}\sqrt{M_{\max}^2 + 0.75M_{x\max}^2} \le [\sigma]}$$

圆轴弯扭组合强度条件

12.4 扭转与其他变形的组合

二. 圆轴扭转与两个平面弯曲的组合



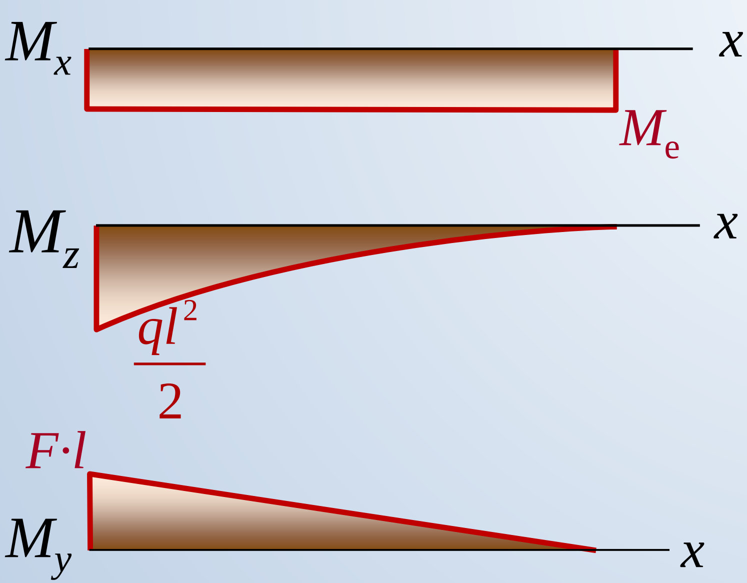


1. 外力分析

$$F \Rightarrow M_y$$

$$q \Rightarrow M_z$$

$$M_e \Rightarrow M_x$$

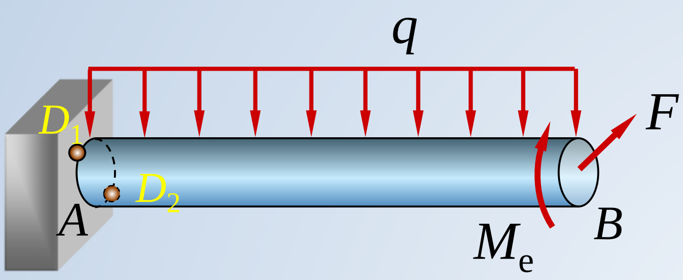


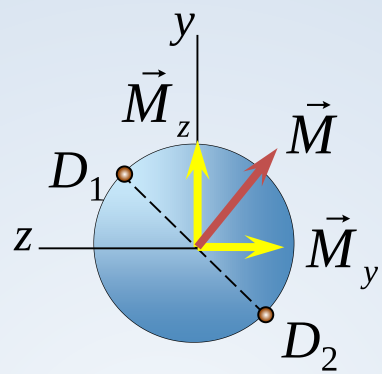
2. 内力分析　危险截面：A

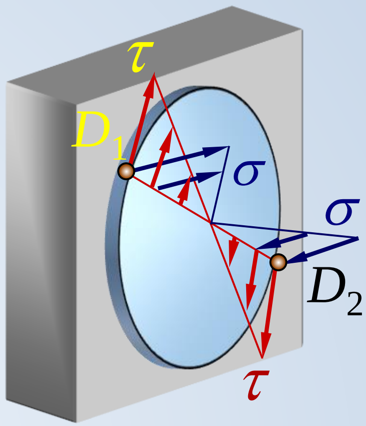
$$M_{x\max} = M_e$$

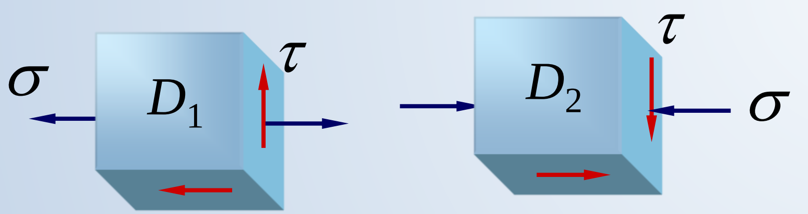
$$\left.\begin{aligned} M_{z\max} &= \frac{ql^2}{2} \\ M_{y\max} &= F \cdot l \end{aligned}\right\} M_{\max} = \sqrt{M_{y\max}^2 + M_{z\max}^2}$$

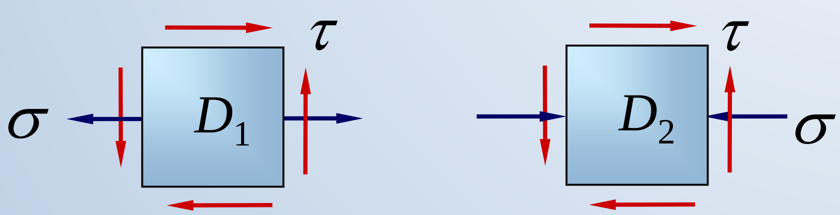
12.4 扭转与其他变形的组合











3. 应力分析

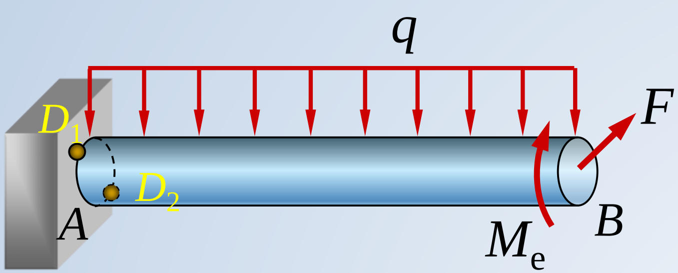
危险点：　D_1，D_2

$$\sigma = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{\sqrt{M_{y\max}^2 + M_{z\max}^2}}{W}$$

$$\tau = \frac{M_{x\max}}{W_p} = \frac{M_{x\max}}{2W}$$

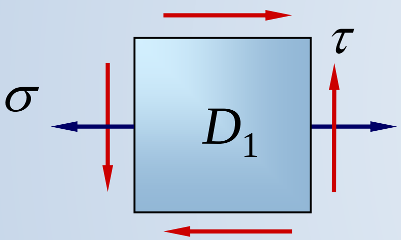
12.4 扭转与其他变形的组合

4.强度计算



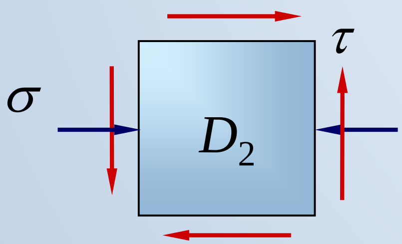
危险点属二向应力状态

根据材料确定强度理论



$$\sigma_{r3}=\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}=\frac{1}{W}\sqrt{M_{x\max}^2+M_{y\max}^2+M_{z\max}^2}$$

$$\sigma_{r3}=\frac{1}{W}\sqrt{M_{\max}^2+M_{x\max}^2}\le[\sigma]$$

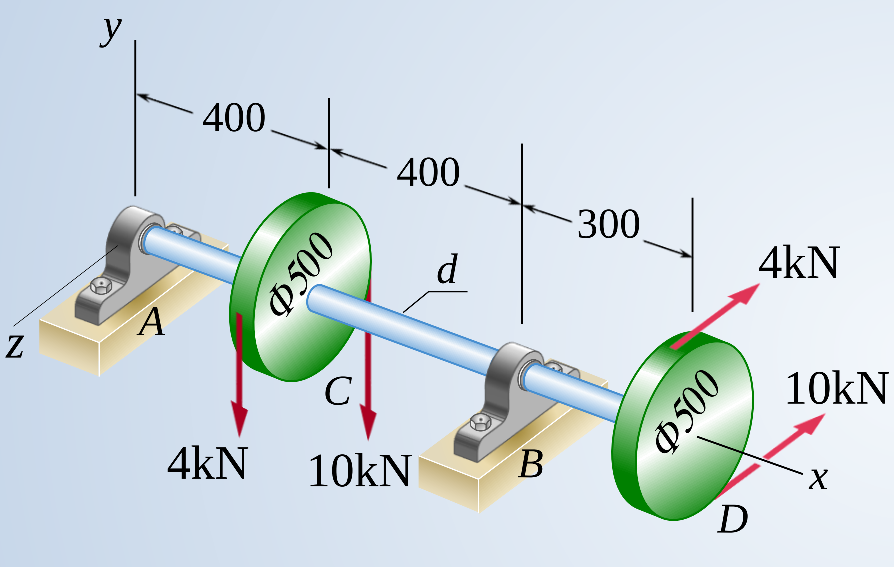


圆轴(两个)弯(与)扭组合

注意 $M_{y\max},M_{z\max},M_{x\max}$为危险截面上的内力

12.4 扭转与其他变形的组合

例4 已知$[\sigma]=120\text{MPa}$ 试设计轴径d



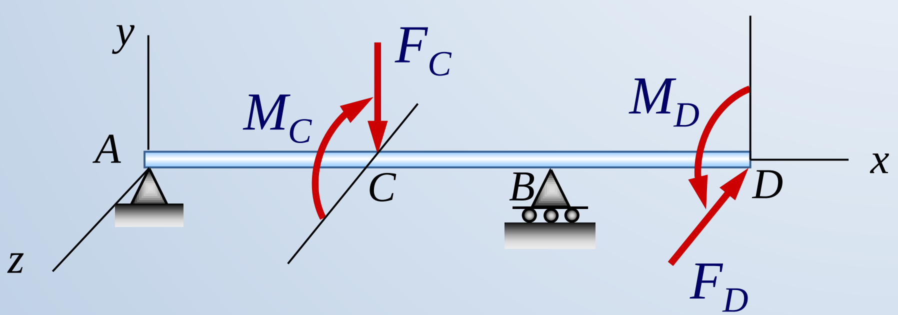
解：1. 外力分析

$$F_C = F_D = 14\text{kN}$$

$$M_C = M_D$$

$$= (10-4)\times10^3\times250\times10^{-3}$$

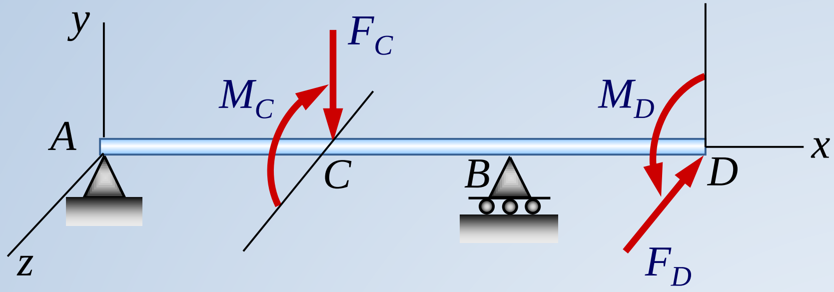
$$= 1.5\text{kN}\cdot\text{m}$$

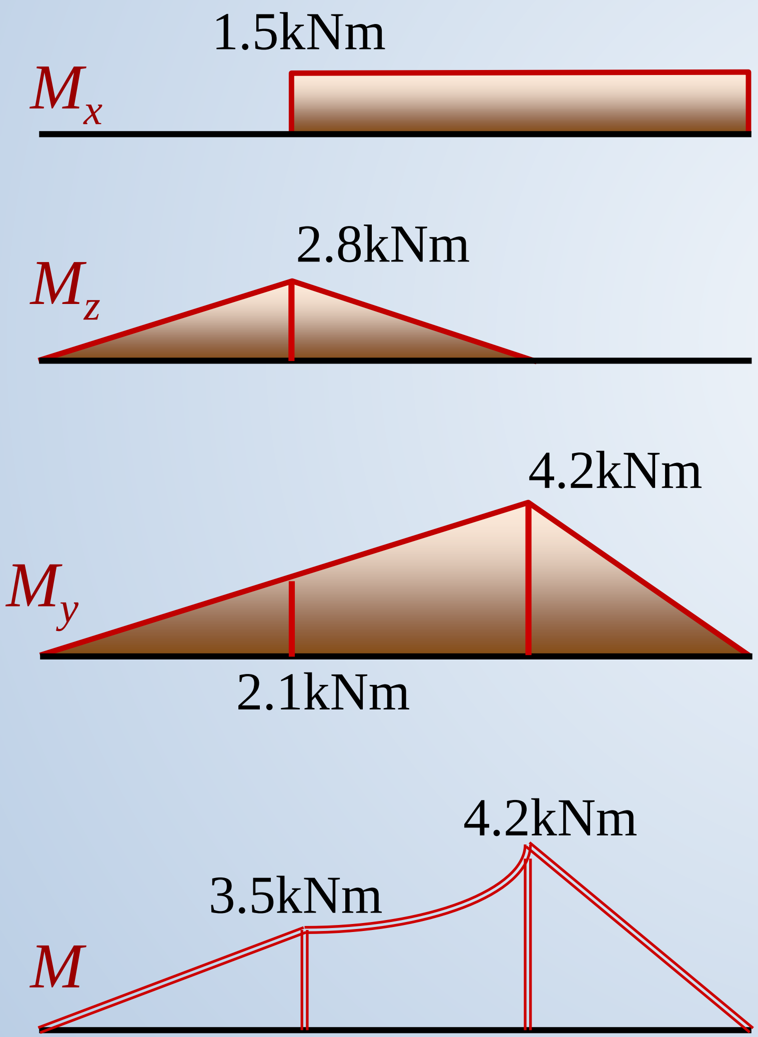


$$F_C \Rightarrow M_y$$

$$F_D \Rightarrow M_z$$

$$M_C, M_D \Rightarrow M_x$$





2. 内力分析

危险截面：B

$$M_{max} = 4.2\,\mathrm{kN \cdot m}$$

$$M_{x\max} = 1.5\,\mathrm{kN \cdot m}$$

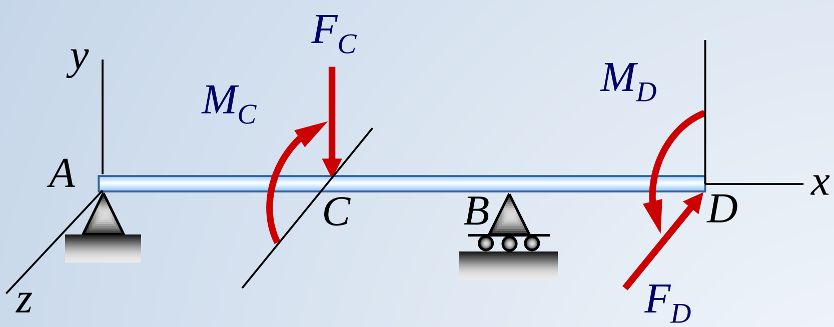
3.强度计算---设计d

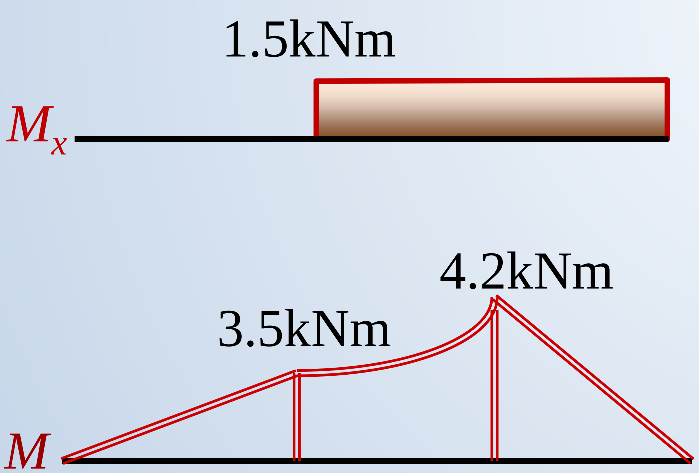
$$\boxed{\sigma_{r3} = \frac{1}{W}\sqrt{M_{max}^2 + M_{x\max}^2} \le [\sigma]}$$

$$W \ge \frac{1}{[\sigma]}\sqrt{M_{max}^2 + M_{x\max}^2}$$

$$\frac{\pi d^3}{32} \ge \frac{1}{[\sigma]}\sqrt{M_{max}^2 + M_{x\max}^2}$$

12.4 扭转与其他变形的组合





3. 强度计算---设计d

$$\frac{\pi d^3}{32} \geq \frac{1}{[\sigma]}\sqrt{M_{\max}^2 + M_{x\max}^2}$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32}{\pi[\sigma]}\sqrt{M_{\max}^2 + M_{x\max}^2}}$$

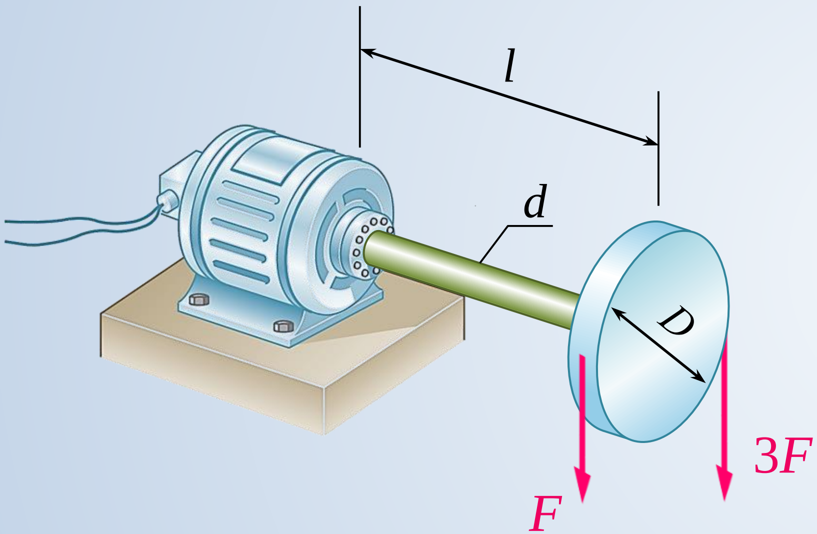
$$= \sqrt[3]{\frac{32}{\pi \times 120 \times 10^6}\sqrt{4200^2 + 1500^2}}$$

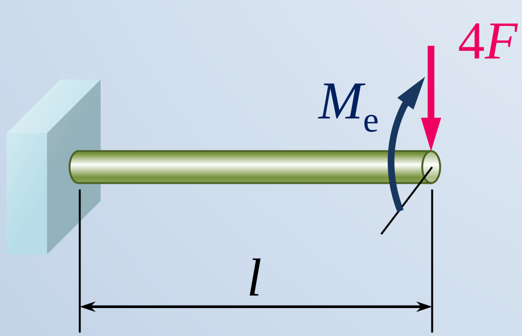
$$= 72.3 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}$$

取 d =74mm

12.4 扭转与其他变形的组合

例5 图示传动轴，d=80mm, 转速n=110r/min, P=11.77kW, D = 660mm, [σ]=70MPa，试按第三强度理论计算 [l]。





解：1. 外力分析

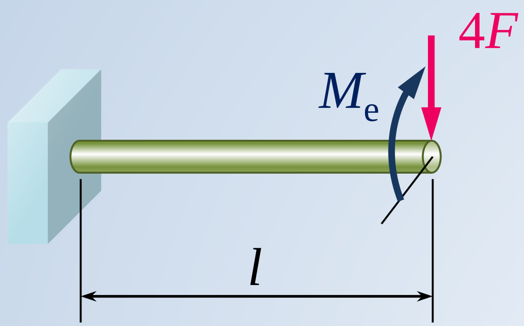
将P 向截面形心平移

$$M_e = 9549\frac{P}{n} = 1022\,\mathrm{N\cdot m}$$

$$M_e = (3F - F)\frac{D}{2}$$

故 $F = \dfrac{M_e}{D} = 1548\,\mathrm{N}$

12.4 扭转与其他变形的组合

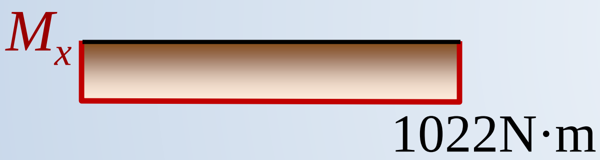


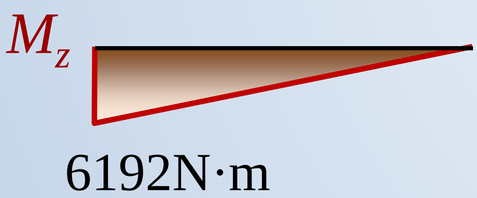
2. 内力分析

危险截面：固定端

$$M_{x\max} = M_{e} = 1022\,\mathrm{N\cdot m}$$

$$M_{\max} = 4Fl = 4\times 1548 l = 6192 l\ \mathrm{N\cdot m}$$





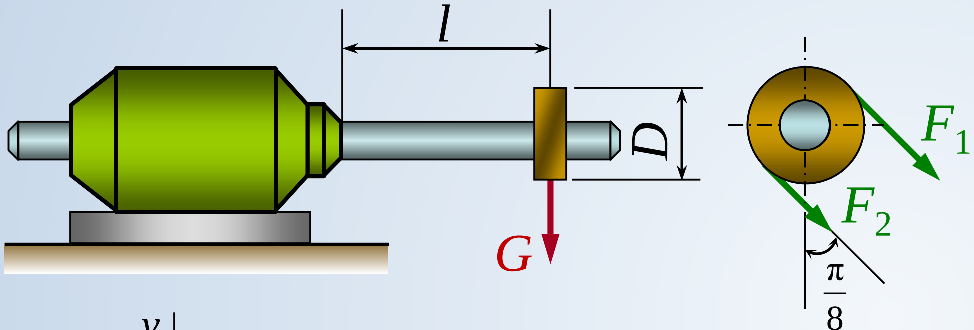
3. 用强度理论求 [l]

$$\sigma_{r3} = \frac{1}{W}\sqrt{M_{\max}^{2} + M_{x\max}^{2}} \le [\sigma]$$

$$(6192l)^{2} \le \left(\frac{120\times 10^{6}\cdot \pi \cdot 80\times 10^{-3}}{32}\right)^{2} - 1022^{2}$$

得　[l]=0.54m

例6 图示电动机，P=9.8kW, n=800r/min, 皮带轮 D=25cm, G=700N, $F_1=2F_2$, l=1.2m,$[\sigma]$=100MPa， 试选择轴的直径d.

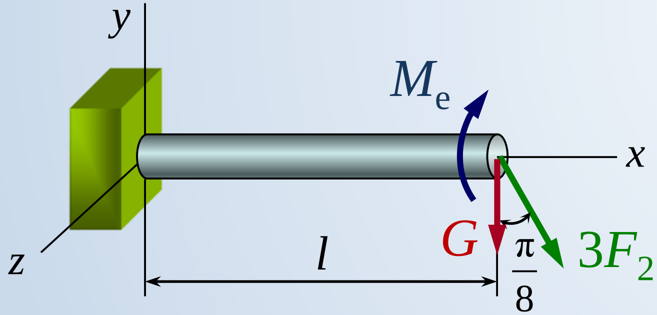


解：1. 外力分析

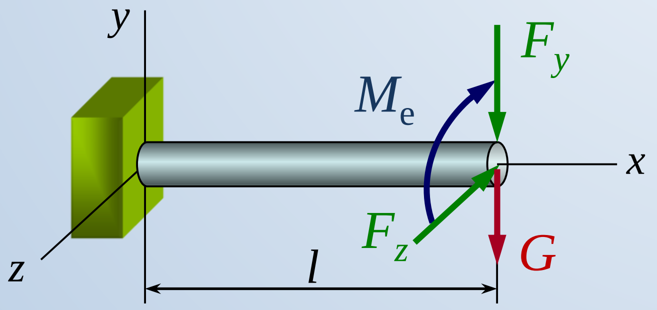
$$M_e = 9549\frac{P}{n} = 9549\times\frac{9.8}{800} = 117\,\mathrm{N\cdot m}$$

将F_1, F_2向形心简化

$$(F_1 - F_2)\cdot\frac{D}{2} = F_2\cdot\frac{D}{2} = M_e$$



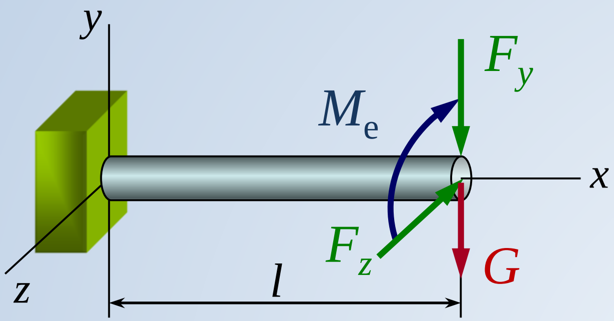
解得：$F_2 = \dfrac{2M_e}{D} = \dfrac{2\times117}{25\times10^{-2}} = 936\,\mathrm{N}$

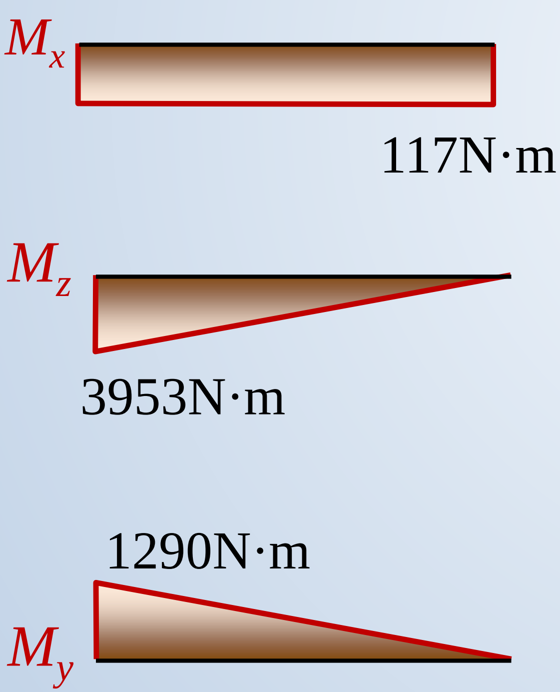


$$F_y = 3F_2\cdot\cos\frac{\pi}{8} = 3\times936\times\cos\frac{\pi}{8} = 2594\,\mathrm{N}$$

$$F_z = 3F_2\cdot\sin\frac{\pi}{8} = 3\times936\times\sin\frac{\pi}{8} = 1075\,\mathrm{N}$$

12.4 扭转与其他变形的组合





2. 内力分析

$$M_{x\max} = M_e = 117\ \mathrm{N\cdot m}$$

$$M_{z\max} = (F_y + G)\cdot l = (2594+700)\times 1.2 = 3953\ \mathrm{N\cdot m}$$

$$M_{y\max} = F_z \cdot l = 1075\times 1.2 = 1290\ \mathrm{N\cdot m}$$

危险截面：固定端

$$M_{\max} = \sqrt{M_{y\max}^2 + M_{z\max}^2}$$

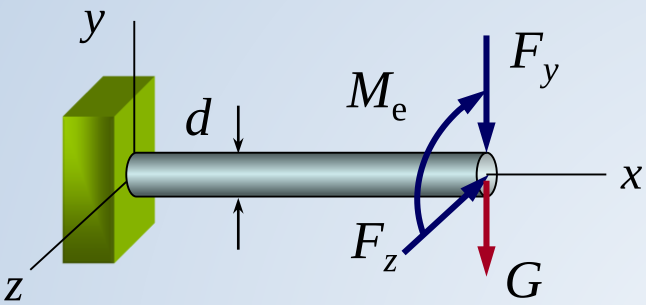
$$= \sqrt{3953^2 + 1290^2} = 4158\ \mathrm{N\cdot m}$$

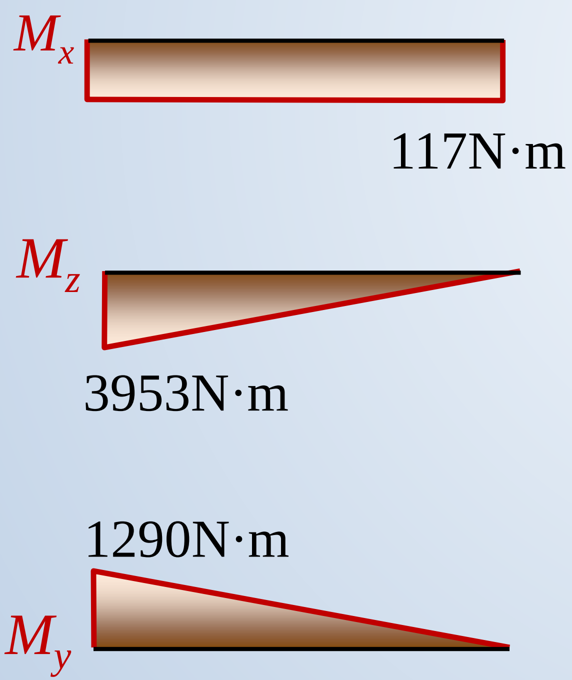
3. 用第三强度理论设计d

$$\sigma_{r3} = \frac{1}{W}\sqrt{M_{\max}^2 + M_{x\max}^2} \le [\sigma]$$

$$W \ge \frac{1}{[\sigma]}\sqrt{M_{\max}^2 + M_{x\max}^2} \qquad W = \frac{\pi d^3}{32}$$

12.4 扭转与其他变形的组合





3. 用第三强度理论设计d

$$\frac{\pi d^3}{32} \geq \frac{1}{[\sigma]}\sqrt{M_{\max}^2 + M_{x\max}^2}$$

解得：

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32}{\pi[\sigma]}\sqrt{M_{\max}^2 + M_{x\max}^2}}$$

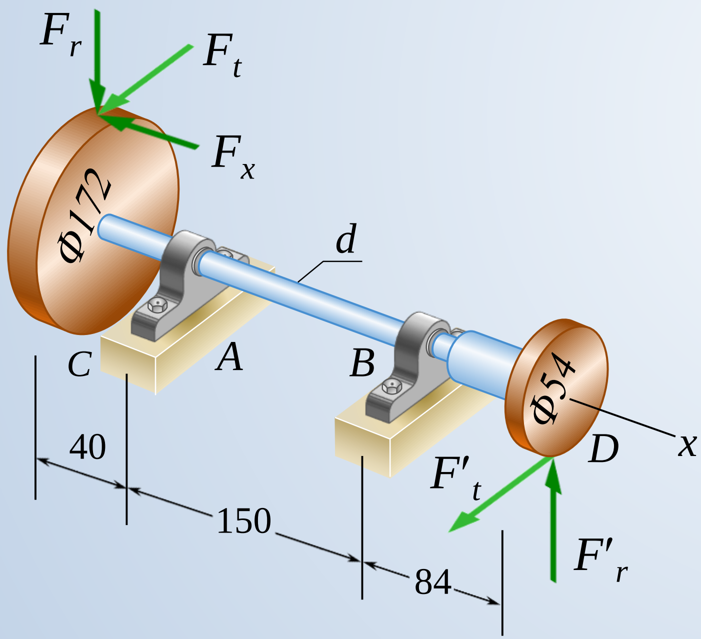
$$= \sqrt[3]{\frac{32}{100\times10^6\pi}\sqrt{4158^2 + 117^2}}$$

$$= 0.075\text{m}$$

取　d=76mm

12.4 扭转与其他变形的组合

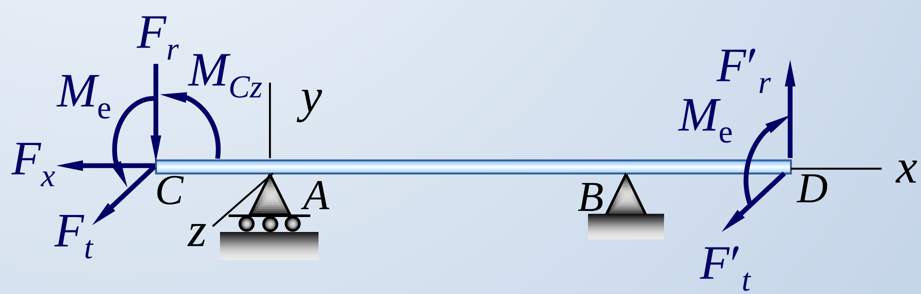
例7 左斜齿轮 F_t=4.55kN，F_x=1.22kN，F_r= 1.72kN , 右直齿轮F'_t=14.49kN，F'_r =5.25kN，d =4cm， [σ]=210MPa，试对CD轴作强度校核。



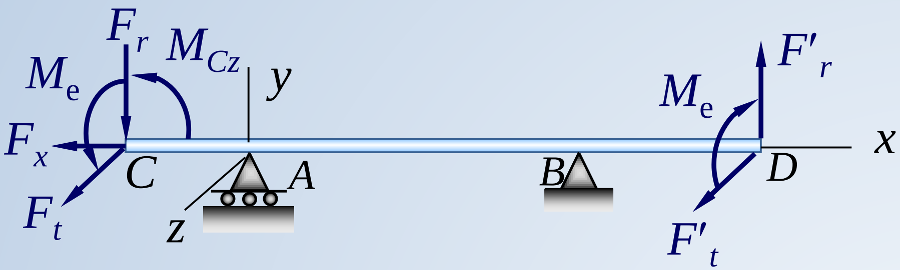
解：1. 外力分析

$$M_{Cz}=F_x\cdot\frac{172}{2}=1.22\times\frac{172}{2}=105\,\mathrm{N\cdot m}$$

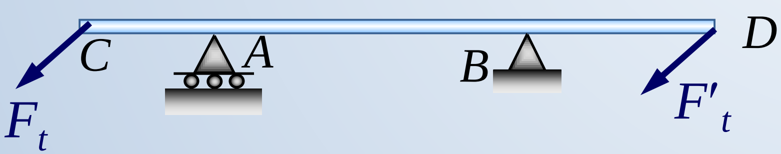
$$M_e=F_t\cdot\frac{172}{2}=F_t'\cdot\frac{54}{2}=4.55\times\frac{172}{2}=391\,\mathrm{N\cdot m}$$

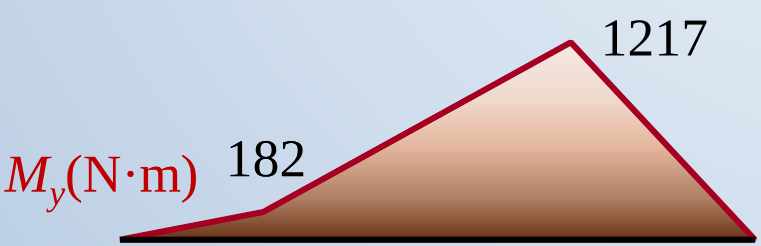


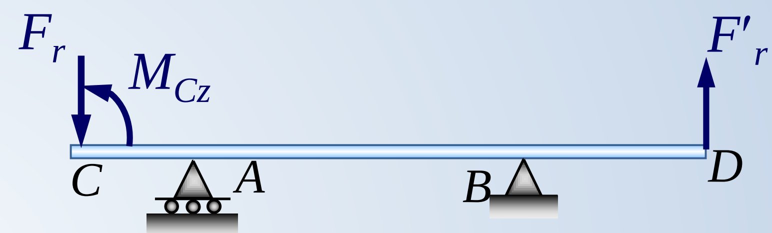
12.4 扭转与其他变形的组合

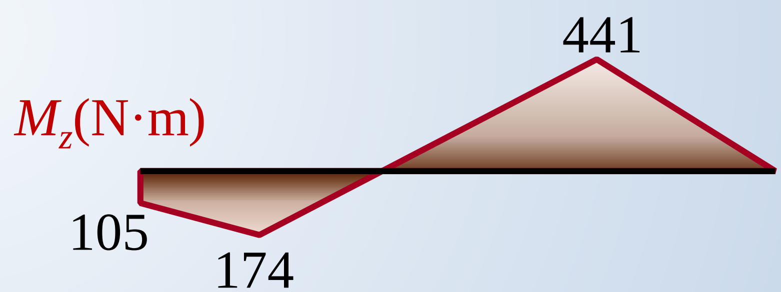


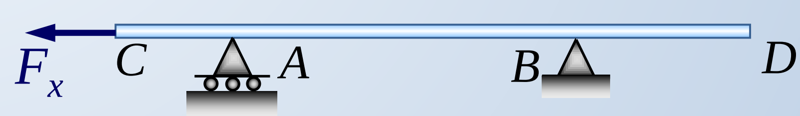
2. 内力分析

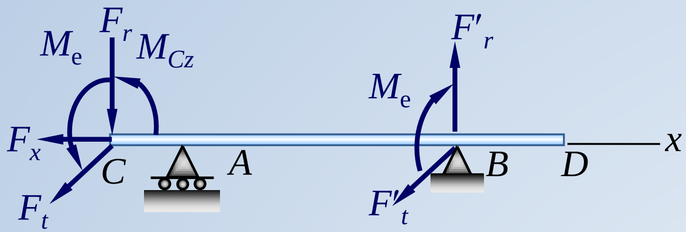












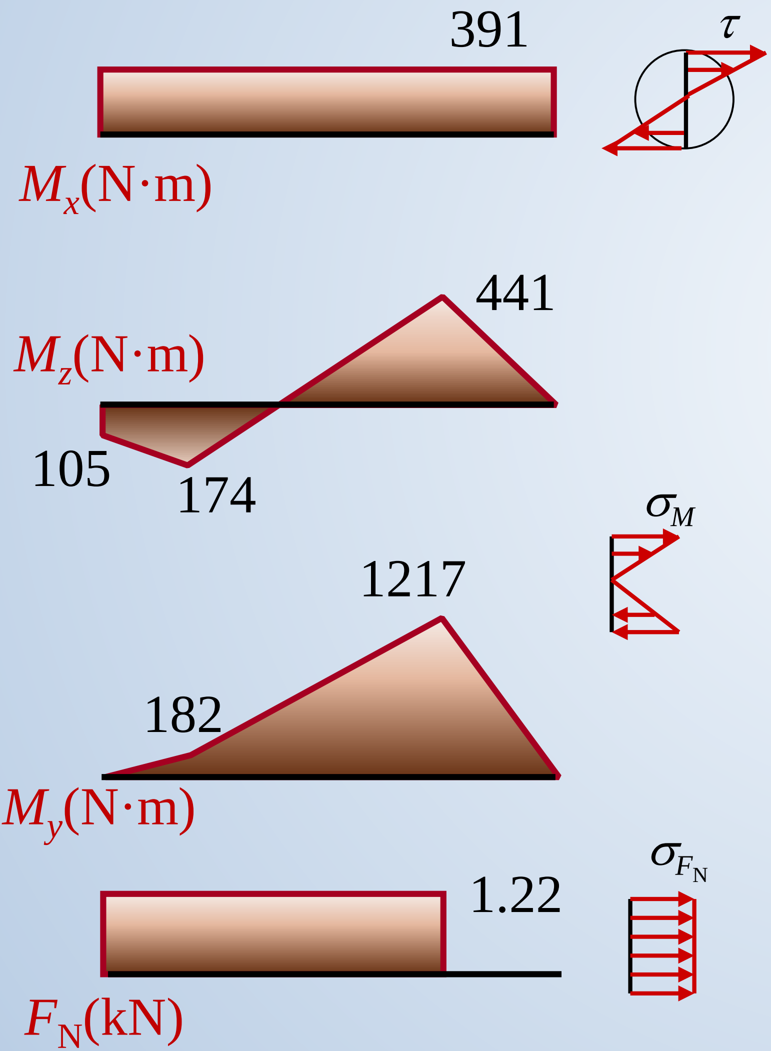
2. 内力分析

危险截面： B

$$M_{\max}=\sqrt{M_{By\max}^2+M_{Bz\max}^2}$$

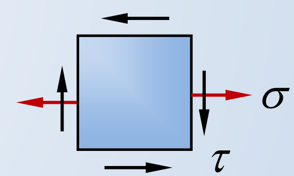
$$=\sqrt{441^2+1217^2}=1294\,\mathrm{N\cdot m}$$

$$M_{x\max}=391\,\mathrm{N\cdot m}\qquad F_{\mathrm{N}\max}=1220\,\mathrm{N}$$



3. 应力分析

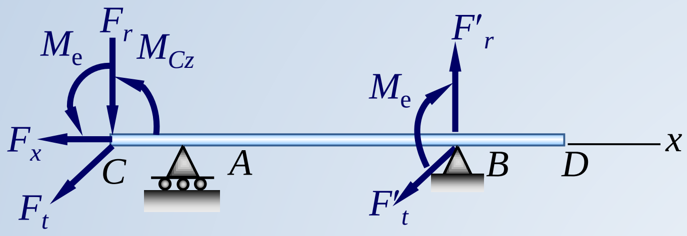
$$\sigma=\frac{F_{\mathrm{N}\max}}{A}+\frac{M_{\max}}{W}$$

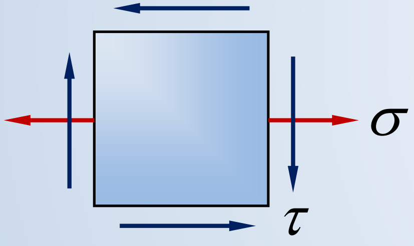


$$=\frac{1220}{\pi\cdot 4\times10^{-2}/4}+\frac{1294}{\pi\cdot\left(4\times10^{-2}\right)^3/32}=207.3\mathrm{MPa}$$

$$\tau=\frac{M_{x\max}}{W_{\mathrm{P}}}=\frac{391}{\pi\cdot\left(4\times10^{-2}\right)^3/16}=31.1\mathrm{MPa}$$

12.4 扭转与其他变形的组合





$$\sigma = 207.3\text{MPa}$$

$$\tau = 31.1\text{MPa}$$

4. 强度校核

根据第四强度理论，有

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{207.3^2 + 3\times 31.1^2}$$

$$= 214.2\,\text{MPa} > [\sigma]$$

但 $$\frac{\sigma_{r4} - [\sigma]}{[\sigma]} \times 100\% = \frac{214.2 - 210}{210} \times 100\%$$

$$= 2\% < 5\%$$

故该轴还可以正常工作

Thank you！