机械运动

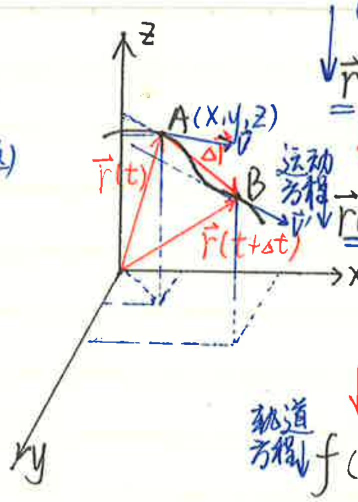
一、基本概念

- 理想模型
  - 质点：物体的大小、形状产生的影响甚小，可以忽略不计（对其本身或针对问题）
  - 刚体：物体的形状、大小不可忽略，而形状、大小的改变却可以忽略
- 参考系和坐标系
  - 直角坐标系
  - 自然坐标系
  - 球坐标系

二、机械运动

- 平动
  - 位置矢量 $\vec r$
  - 位移 $\Delta\vec r$
  - 速度 $\vec v$　$\bar{\vec v}$　$|\vec v|$
  - 加速度 $\vec a$　$\bar{\vec a}$　$\vec a_t$　$\vec a_n$
- 定轴转动
  - 角位置
  - 角位移
  - 角速度
  - 角加速度

※ $\Delta\vec r = \Delta x\vec i+\Delta y\vec j+\Delta z\vec k$



由坐标原点指向质点所在位置的矢量，称为位置矢量，简称位矢或径矢

$\vec r = x\vec i+y\vec j+z\vec k$

↓随时间变化

运动方程 $\vec r(t)=x(t)\vec i+y(t)\vec j+z(t)\vec k$

分量式 $\begin{cases} x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}$

↓把t消去

轨道方程 $f(x,y,z)=C$

注意：① $\Delta\vec r$是质点在Δt时间内的位移矢量，$|\Delta\vec r|=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$是位移的大小。

Δr是位矢模的差　即$\Delta|\vec r|$

② 位移是状态量只与初末位置有关，路程是过程量（标量），然而在极短时间内Δr近似为Δs

对$\vec r$求导 ⟹

$$\vec v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec r}{\Delta t}=\frac{d\vec r}{dt}=\frac{dx}{dt}\vec i+\frac{dy}{dt}\vec j+\frac{dz}{dt}\vec k=v_x\vec i+v_y\vec j+v_z\vec k$$

瞬时速度，简称速度

$$\Rightarrow \vec v(t)=v_x(t)\vec i+v_y(t)\vec j+v_z(t)\vec k$$

$$|\vec v|=\begin{cases}\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2} & \leftarrow \text{针对瞬时}\\ \left|\frac{d\vec r}{dt}\right|=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\vec r|}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{ds}{dt} & \leftarrow \text{针对变化}\end{cases}$$

速度的大小称为速率

※即 $\frac{1}{\Delta t}\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}=|\Delta\vec r|$

或 $\frac{1}{\Delta t}\sqrt{[x(t+\Delta t)-x(t)]^2+[y(t+\Delta t)-y(t)]^2+[z(t+\Delta t)-z(t)]^2}$

※

$$\bar{\vec v}=\frac{\Delta\vec r}{\Delta t}$$

平均速度

平均速度即质点在平均时间内发生的位移（对应的时间）

注意：① 数学意义上，速度是位矢对时间t的一阶导数，物理意义上，速度是位矢对时间的变化率

② 速度反映质点的前进方向

③ 速率反映弧长对时间的变化率，直接反映速度的快慢。

一、库仑定律

$\vec{F}=k\frac{q_1q_2}{r^2}\vec{e_r}$ （q_1q_2：代正负；q_2所受的；$\vec{e_r}$：由施力指向受力）

引入一个新的常数 $\varepsilon_0=\frac{1}{4\pi k}=8.85\times10^{-12}C^2\cdot N^{-1}m^{-2}$（真空介电常量）

$(k=8.9880\times10^{9}N\cdot m^2\cdot C^{-2})$

$(e=1.602\cdots\times10^{-19}C)$

$\Rightarrow\ \vec{F}=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e_r}$

注意：① 库仑定律在两个点电荷的距离小到$10^{-17}m$或大到$10^{7}m$时都成立，是一种长程力

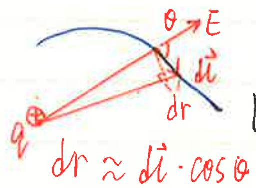
② 区分几个常数
- $\varepsilon_0\to$ 真空介电常量
- $\varepsilon_r\to$ 介质相对电容率
- ε 电容率 $(\varepsilon=\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r)$

二、电场

法拉第最早提出电场概念，解决电荷间相互作用力的传递问题

（电场力是保守力）

电场的性质
- 电场强度 $\vec{E}$：$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q_0}$（定义式）；正电荷带电量较少 $=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e_r}$
- 电势 U：$U=\int_a^{参考点}\vec{E}\,d\vec{l}$



$=\int_a^{参考点}E\,dr$

$U_a-U_b=\int_a^b\vec{E}\,d\vec{l}$

$dr\approx dl\cdot\cos\theta$

* 静电场中a、b两点的电势差等于将单位正电荷（带电量为1）从a点经任意路径移到b点时电场力所作的功

电场力作的功 $A_{ab}=q_0(U_a-U_b)=U_a-U_b=\int_a^b\vec{E}\,d\vec{l}$ 初势能-末势能

* 类比其它保守力的做功
$A_{重ab}=mgh_a-mgh_b$
$A_{弹ab}=\frac{1}{2}kx_a^2-\frac{1}{2}kx_b^2$
$A_{引ab}=-G\frac{Mm}{r_a}-(-G\frac{Mm}{r_b})$

* 保守力做功的性质 $\oint\vec{E}\,d\vec{l}=0$

* 关于电场强度：

① 电场中某点的电场强度$\vec{E}$等于静止于该点的单位正电荷所受的电场力$\vec{F}$

② $\frac{\vec{F}}{q_0}$ 反映了电场在空间不同点的性质，与q_0无关

③ 点电荷系中某点场强是各点电荷单独作用的矢量和（电场叠加原理）

* 而某点电势则为各点电荷单独作用的代数和（电势叠加原理）

<1> 求电场强度

1. 场强叠加原理：$\vec{E}=\sum_{i=1}^{n}\vec{E_i}$；先求 $dE=\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$，再积分

* $\vec{D}$是曲面上各点的电位移矢量，q_i：是曲面内全部的自由电荷

2. 高斯定理：$\oint\!\!\oint_S\vec{D}\,d\vec{S}=\sum_{(S内)}q_i$（$\vec{D}$：由闭合曲面内外的全部自由电荷共同产生的；$\sum q_i$：仅由高斯面内的自由电荷产生）

即 $\Phi_e=\sum_{(S内)}q_i$

* $\vec{D}$ 电位移矢量 $=\varepsilon\vec{E}=\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}$，$\vec{E}$与$\vec{D}$方向相同，大小等于$|\varepsilon||\vec{E}|$

* Φ_e 电通量 $=\int_S\vec{D}\cdot d\vec{S}$，大小为垂直于电位移矢量$\vec{D}$方向的单位面积所通过的电位移线条数，

$|\Phi_e|=\int_S|D||S|\cos\theta$

$\cos\theta$ 为平面法向量方向$\vec{n}$与$\vec{D}$的夹角

* 对于闭合曲面，$\vec{n}$取由内向外

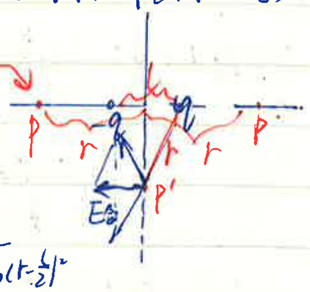
注意：① 可以表述为通过该闭合曲面的电通量，等于该闭合曲面包围的自由电荷的代数和（束缚电荷不算）

② 由此可得 $\sum q_i=0$，闭合曲面上$\vec{D}$并不处处为0

③ 当电荷分布具有某种对称性时，应用高斯定理求解$\vec{E}$

④ 选取高斯面
1. 待求场点在高斯面上
2. 面上全部或部分$\vec{E}$大小相同，各点的法线与该处$\vec{E}$方向一致（或垂直或成恒定夹角）
3. 形状尽可能规整便于计算

ex1：计算电偶极子轴线和中垂线上各点电场强度



① 轴线上

$\vec{E}=\vec{E}_{+q}+\vec{E}_{-q}$

$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(r+\frac{l}{2})^2}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(r-\frac{l}{2})^2}$

（$-q$的一边）$=\frac{-2qrl}{4\pi\varepsilon_0 r^4(1+\frac{l}{2r})(1-\frac{l}{2r})}$

当$r\gg l$有 $E=\frac{-2ql}{4\pi\varepsilon r^3}$

② 在中垂线上

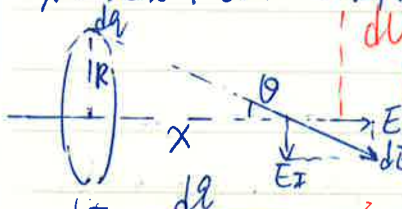
$E=\frac{2q\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0[(\frac{l}{2})^2+r^2]}$，$\cos\alpha=\frac{l}{2\sqrt{r^2+\frac{l^2}{4}}}$

$\Rightarrow E=\frac{ql}{4\pi\varepsilon_0(r^2+\frac{l^2}{4})^{\frac{3}{2}}}$

$r\gg l$ 不要了

$E=\frac{ql}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$

ex2：均匀带电圆环，计算轴线上点P的$\vec{E}$、U



$dU=\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+R^2}}$

$U=\int\frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+R^2}}$

$\Rightarrow U=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+R^2}}$

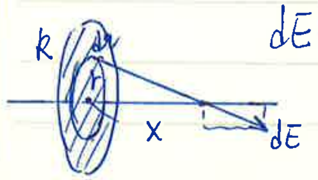
$dE=\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0(x^2+R^2)}$ 注意：对环积分后只剩E_1

$\Rightarrow E=\oint_L\frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0(x^2+R^2)}\cos\theta$ $(\cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}})$ $(\lambda=\frac{q}{2\pi R})$

$\Rightarrow E=\frac{qx}{4\pi\varepsilon_0(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

- $x=0$，$E=0$
- $x\to\infty$，$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$（相当于点电荷）

ex3：均匀带电圆盘，计算轴线上$\vec{E}$



$dE=\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0(r^2+x^2)}$ 同理

$E=\iint\frac{\sigma r\,dr\,d\theta\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0(x^2+r^2)}$

$\sigma=\frac{q}{\pi R^2}$，$\cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}}$

$dU=\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+r^2}}=\frac{\sigma r\,dr\,d\theta}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+r^2}}$

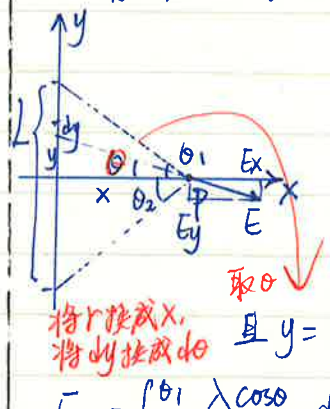
$U=\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\int_0^R\frac{1}{\sqrt{x^2+r^2}}dr^2=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{x^2+R^2}-x)$

$\Rightarrow E=\frac{\sigma x}{4\varepsilon_0}\int_0^R\frac{1}{(x^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}dr^2$

$=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(1-\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{R}{x})^2}})$

- $x\ll R$，盘无穷大，$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ ✓
- $x\gg R$，无穷远，$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$（相当于点电荷）

ex4.有一根均匀带电直线，求其外一点处场强



$E=\sqrt{E_x^2+E_y^2}$（分开算）

$dE_y=-\frac{\lambda dy}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sin\theta$

$dE_x=\frac{\lambda dy}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta$

取θ：$\sin\theta=-\frac{y}{r}$，$\cos\theta=\frac{x}{r}$

将r换成x，将dy换成$d\theta$：且 $y=x\tan\theta$，$dy=\frac{x}{\cos^2\theta}d\theta$

$E_x=\int_{\theta_2}^{\theta_1}\frac{\lambda\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 x}d\theta=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}(\sin\theta_1-\sin\theta_2)$

$E_y=\int_{\theta_2}^{\theta_1}-\frac{\lambda\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 x}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$

- L无限长，$\theta_1\to\frac{\pi}{2}$，$\theta_2\to-\frac{\pi}{2}$，$\begin{cases}E_y=0\\E_x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}dE_x d\theta\end{cases}\Rightarrow E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}$
- $x\gg L$，P远离直线，$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$（相当于点电荷）

ex5.高斯定理（ε取决于高斯面上点的电容率）

壳
- $r<R$，$\iint\varepsilon E ds=0$
- $r>R$，$\varepsilon E\cdot4\pi r^2=q$

球
- $r<R$，$\varepsilon E\cdot4\pi r^2=\rho\cdot\frac{4}{3}\pi r^3$ 或 $\iiint_\Omega\rho(r)dV$
- $r>R$，$\varepsilon E\cdot4\pi r^2=\rho\cdot\frac{4}{3}\pi R^3=q$

线
- $\varepsilon E\cdot2\pi r\cdot dl=\lambda dl$

* 侧面才是有效面

柱面
- $r<R$，$\varepsilon E\iint ds=0$
- $r>R$，$\varepsilon E\cdot2\pi r\cdot dl=2\pi r\lambda dl$ 或 $\sigma 2\pi r dl$（ρ仅限于此处）

柱体
- $r<R$，$\varepsilon E\,2\pi r\cdot dl=\rho\pi r^2 dl$
- $r>R$，$\varepsilon E\cdot2\pi r\,dl=\rho\pi R^2 dl$

Date. Page.

<2> 求电势能

1. 定义法 $U=\int_a^{\text{参考点}}\vec{E}\cdot d\vec{l}$ 需先求出 $\vec{E}$；$\vec{E}$ 分布不连续，则分区间积分

2. 电势叠加原理 $dU=\dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$ 先微元，后积分

$\left(U=\int_r^{\infty}E\,dr=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)$

ex1: 与高斯定理结合　　* 球面内任一点等势

壳 $\begin{cases} r<R,\ E_1=0 \\ r>R,\ E_2=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon r^2} \end{cases}$　$U=\int_r^R E_1 dr+\int_R^{\infty}E_2 dr=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon R}$；$U=\int_r^{\infty}E_2 dr=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon r}$

球 $\begin{cases} r<R,\ E_1 \\ r>R,\ E_2=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon r^2} \end{cases}$　同理 $\Rightarrow U=\int_r^R E_1 dr+\int_R^{\infty}E_2 dr$；$\Rightarrow U=\int_r^{\infty}E_2 dr=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon r}$

$r<a,\ E=0$

$\begin{cases} a<r<R_1,\ E_1=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \\ R_1<r<R_2,\ E_2=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} \\ r>R_2,\ E_3=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \end{cases}$

半径为a的导体棒，以该直线的电势0点，求电介质外表面U

$\Rightarrow U=\int_{R_2}^{0}E\,dr=\int_{R_1}^{0}E_1 dr+\int_{R_2}^{R_1}E_2 dr$

$=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}\ln\left(\dfrac{R_1}{R_2}\right)+\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\dfrac{a}{R_1}\right)$

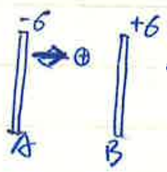
<3> 电场的能量

$\underset{\text{外力}}{dA}=U_{ab}\,dq$

$A=\int_0^Q U_{ab}\,dq$

$U_{ab}=E\cdot d$

$=\dfrac{\sigma}{\varepsilon}\cdot d=\dfrac{qd}{\varepsilon S}$



(电场的能量) $W_e = \Rightarrow A=\int_0^Q \dfrac{qd}{\varepsilon S}dq=\dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2 d}{\varepsilon S}=\dfrac{1}{2}U_{ab}\cdot Q$

$E=\dfrac{Q}{S\varepsilon}$

$U_{AB}=Ed$

$=\dfrac{1}{2}\varepsilon E^2\cdot dS$

$=\dfrac{1}{2}\varepsilon E^2\cdot V$

w_e (电场能量密度)

推广到任意电场 $\Longrightarrow$ $W_e=\iiint_{\Omega} w_e\,dV$

$w_e=\dfrac{1}{2}\varepsilon E^2$

$=\dfrac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}$

<4> 导体与静电平衡

*即导体内部是等势体

由内、外电荷共同决定

导体静电平衡条件 → (导体内无电荷定向运动，电场分布不随时间变化)

1. 导体内部电场强度 $\vec{E}$ 处处为0

$\Rightarrow$ 导体内部无净电荷，电荷只分布在表面；导体表面电荷分布与导体形状和其它带电体有关

2. 导体表面上的电场强度处处垂直于表面

*当导体内部有空腔时

$\Rightarrow$ 空腔内表面电荷处处为0，电荷只分布在导体表面

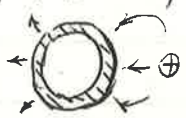
证明：作一个S面，易知S面内 q_i 代数和为0

→ 假设有一处为 $+\sigma$，某另一处为 $-\sigma$ → 则有电场线由 $+\sigma$ 指向 $-\sigma$ → 与导体表面为等势面矛盾

$\Rightarrow$ 空腔内表面电荷处处为0

*静电屏蔽

1. 壳内无电荷



导体内场强依然处处为0，电荷只分布在导体表面

2. 壳内有电荷（壳上带Q）

1. 导体壳内电场强度为0

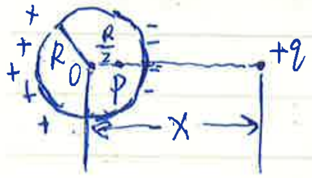
2. 空腔电场由 $-q$ 与 $+q$ 贡献，导体外场强则完全由 $Q+q$ 贡献

（故若外表面接地，则导体空腔能完全屏蔽空腔内电荷对外部的影响）

3. 空腔导体是等势体（壳的电场强度为0）

Date. Page.

ex1. 半径为R的导体球原带电Q，现将一点电荷放于球外距球心x处，求导体球上电荷对P点（$\overline{OP}=\frac{R}{2}$）产生的场强和电势



由导体球已达静电平衡

$E_p=0=E_{球}+E_{+q}$

$E_{+q}=-\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0(x-\frac{R}{2})^2}$

$\Rightarrow E_{球}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0(x-\frac{R}{2})^2}$　(取向右为正)

又导体球内等势

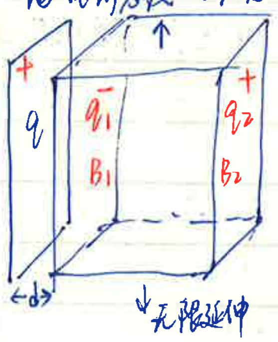
叠加原理 $U_o=U_p$

$U_{o球}+U_{o+q}=U_{球}+U_{+q}$

$\int_0^R 0\,dr+\int_R^{\infty}\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr+\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 x}=U_{球}+\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0(x-\frac{R}{2})}$

$\Rightarrow U_{球}=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}+\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 x}-\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0(x-\frac{R}{2})}$

ex2. 面积均为S的均匀带电平面A和导体板B平行正置，两者距d远小于板宽，设A平面带电q，板B带Q，求 (1) 板B面电荷密度 (2) A、B间 U_{AB}



（大致上可看作板B电荷分布在正对面积 B_1、B_2 上）
*与 B_1、B_2 相比，侧面积其实很小

(1) $Q=q_1+q_2$

由导体内静电平衡

$\dfrac{q_2}{\varepsilon_0 S}+\left(\dfrac{q_1}{\varepsilon_0 S}\right)=\dfrac{q}{\varepsilon_0 S}$　← 是负数

$\Rightarrow q_1=\dfrac{Q-q}{2}$，$\sigma_1=\dfrac{Q-q}{2S}$

$q_2=\dfrac{Q+q}{2}$，$\sigma_2=\dfrac{Q+q}{2S}$

(2) $E_{AB}=\dfrac{q}{2S\varepsilon_0}+\left(-\dfrac{q_1}{2S\varepsilon_0}\right)-\dfrac{q_2}{2S\varepsilon_0}$

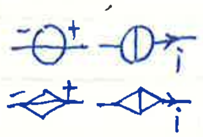
$=\dfrac{q-Q}{2\varepsilon_0 S}$ $\Rightarrow U_{AB}=E_{AB}\cdot d=\left(\dfrac{q-Q}{2\varepsilon_0 S}\right)d$

MOON TREE

一、概念、模型

<1>元件：电阻 ，电感 ，

电容 ．电源

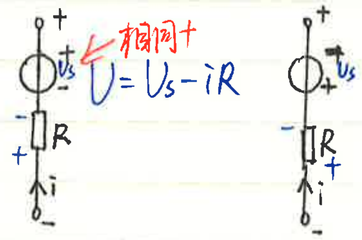


<2>电流<实际电流方向 / 参考电流方向

1. 在实际电路中，我们只需先标定一个参考方向，得到的 i 无论正负都合理，+表示两方向一致，反则反之（实际上我们也只需要参考电流）

2. 在实际电路中，电流由高电势流向低电势，但当我们据此定下电压时，称之为关联参考方向

<3>电压

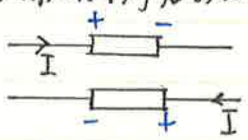


1. 简便求解一组支路电压、同正反负

* 当求 U_{AB} 时，默认了 $\varphi_A > \varphi_B$

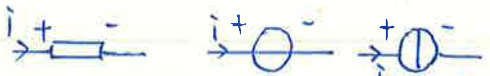
* $U_{AB}=U_{AO}-U_{BO}$

2. 由电流的方向标定 R 的电压 +，-，使之关联有利于后续处理

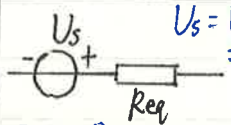
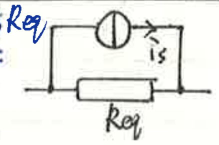


3. 当 U、I 关联时，（电流由元件的+到元件的-）无论计算什么，U、I 代入直接带正负

ex.



<4>电源

	电压源	电流源
作用特点	与之并联（直接）支路电压被确定	完全控制所在支路的电流
等效	 （要按能量流动等效）	$U_s = i_s R_{eq}$ 
重要性质	并联任何东西对外电路都无意义，唯一作用是分流影响电压源功率	串联任何东西对外电路都无意义，唯一作用是分压影响电流源功率

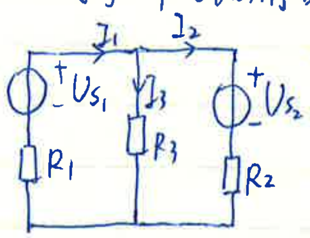
* 在节点电压法中，与电流源串联的电压不能出现在方程中

<5> KCL 和 KVL

KCL $\sum I_i = 0$ < 对于一个节点；先定下各支路参考方向，流入取+，出取-，然后=0

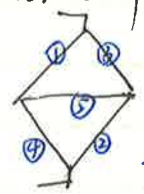
KVL $\sum U_i = 0$ < 对于一个网孔；先选下一个旋转前进方向，所遇为+则取+，所遇为-则取-，然后=0

* 对于一个电路，有 b 条支路，n 个节点，则有 n-1 个独立 KCL 方程，有 b-(n-1) 个 KVL 方程



（节点×2，回路×3，网孔×2，支路×3）

<6>电桥



①②＝③④

⇒ ⑤可忽略，当作开路或断路

* 注意"空间电桥"