

# 单级倒立摆的建模与 PID 控制

## 一 设计内容

倒立摆系统的控制问题一直是控制研究中的一个典型问题。控制的目的是通过给小车底座施加一个力 $u$ （控制量），使小车停留在预定的位置，并使杆不倒下，即不超过一个预先定义好的垂直偏离角度范围，图 1 为一级倒立摆系统示意图，小车质量为 $M$ ，摆的质量为 $m$ ，小车位置为 $x$ ，摆的角度为 $\theta$ 。

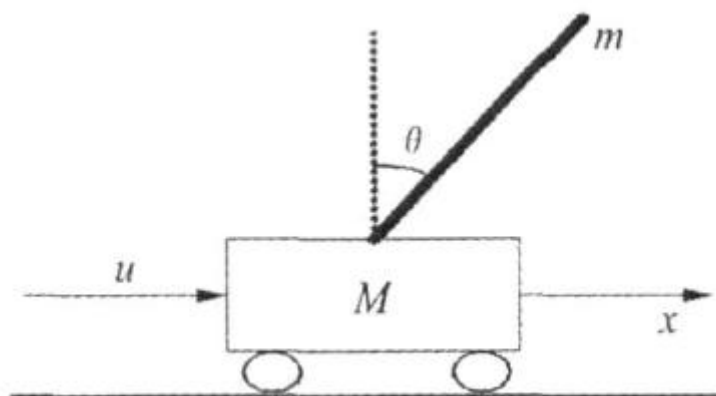


图 1 单级倒立摆系统

根据牛顿运动定律可得单级倒立摆数学模型为：（注：有兴趣的同学可以查找相关文献推导，这里只给出结论）

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} &= \frac{m(m+M)gl}{(M+m)I + Mml^2}\theta - \frac{ml}{(M+m)I + Mml^2}u \\ \ddot{x} &= -\frac{m^2gl^2}{(M+m)I + Mml^2}\theta + \frac{I + ml^2}{(M+m)I + Mml^2}u\end{aligned}$$

式中， $I = \frac{1}{12}mL^2$ ， $l = \frac{1}{2}L$ 。

控制指标共有 4 个，即单级倒立摆的摆角 $\theta$ 、摆速 $\dot{\theta}$ 、小车位置 $x$ 和

小车速度  $\dot{x}$ 。请将倒立摆运动方程（即数学模型）转化为状态方程  $\dot{x} = Ax + Bu$  的形式，其中令  $x(1) = \theta$ ,  $x(2) = \dot{\theta}$ ,  $x(3) = x$ ,  $x(4) = \dot{x}$ 。

## 二 设计要求

1 根据单级倒立摆的状态方程，在 Simulink 环境下搭建单级倒立摆模型。

2 仿真中倒立摆的参数为：重力加速度  $g = 9.8m/s^2$ ，小车质量  $M = 1.0kg$ ，杆的质量  $m = 0.1kg$ ，杆的半长  $L = 0.5m$ ，**小车相对于导轨的摩擦系数  $\mu_c = 0.0005$ ，杆相对于小车的摩擦系数  $\mu_p = 0.000002$** ， $u$  为作用于小车上的力，即控制器输出，在  $[-10, 10]$  上连续取值。初始条件取  $\theta(0) = -10^\circ, \dot{\theta}(0) = 0, x(0) = 0.20, \dot{x}(0) = 0$ ，期望状态为  $\theta(0) = 0^\circ, \dot{\theta}(0) = 0, x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$ 。**对每个控制目标采用 PID 控制，使倒立摆从初始状态达到期望状态，并具备较好地响应曲线。**