吉林大学
JILIN UNIVERSITY

工程力学

第2章 汇交力系 力偶系

第2章 汇交力系 力偶系

2.1 汇交力系的简化

2.2 汇交力系的平衡

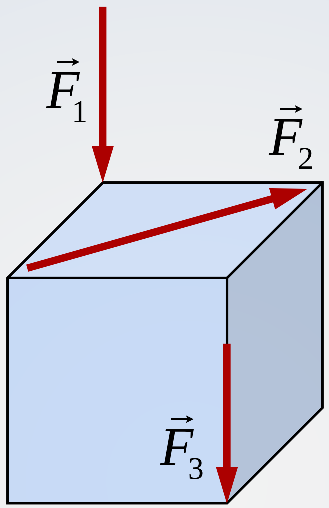
2.3 力偶系的简化

2.4 力偶系的平衡

力系的分类

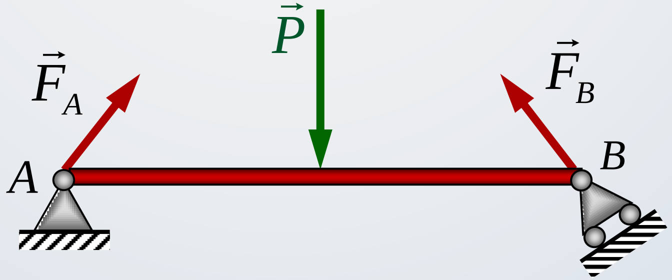
力系的分类：

一. 空间力系：



力线空间分布

二. 平面力系：



力线平面分布

力系的分类

1. 平面汇交力系：

力线共面，且汇交一点。

2. 平面力偶系：

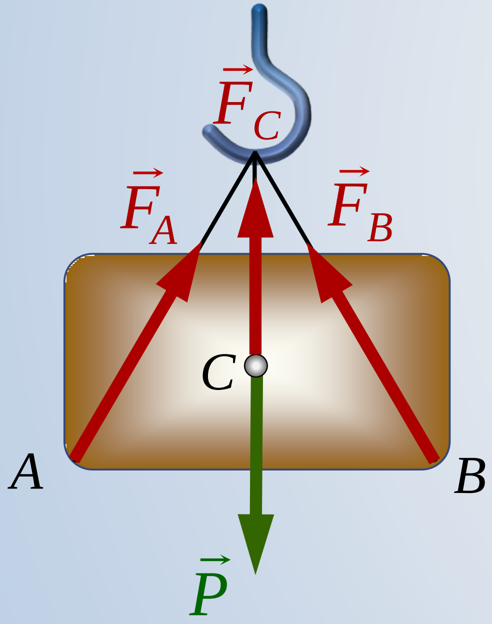
力线共面，且相互平行，构成力偶

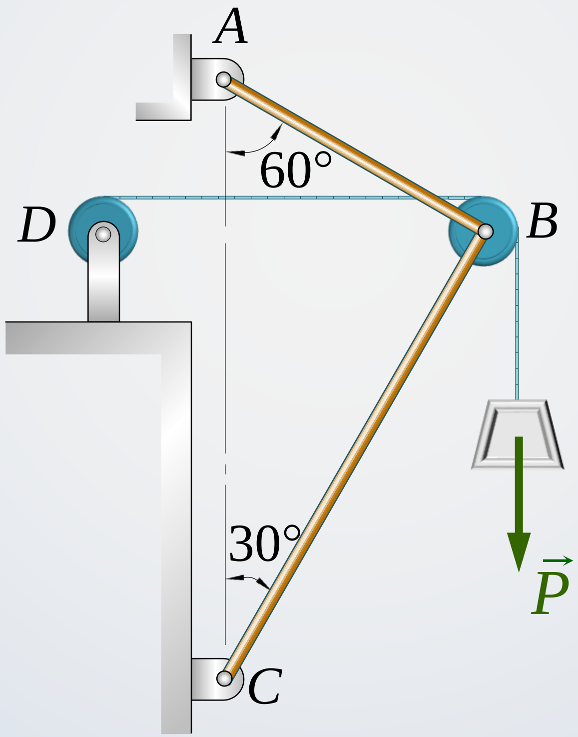
3. 平面任意力系：

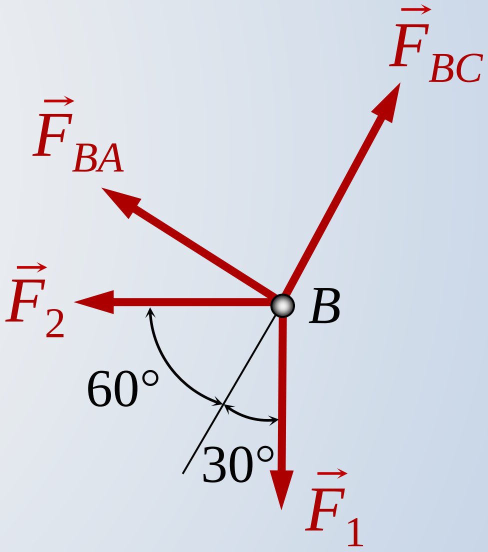
力线共面，且任意分布。

2.1 汇交力系的简化

一、平面汇交力系实例

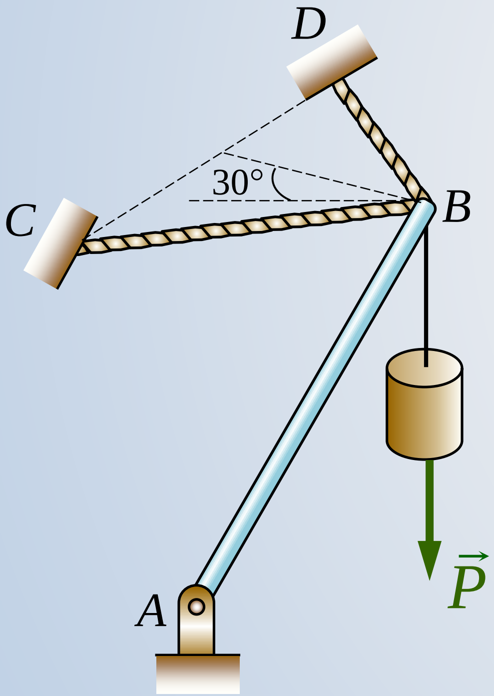


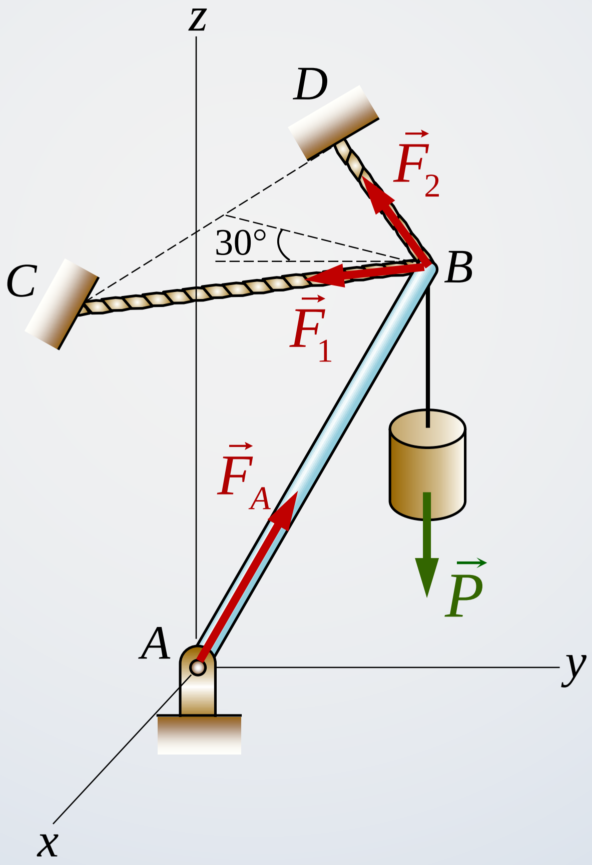




2.1 汇交力系的简化

二、空间汇交力系实例





2.1 汇交力系的简化

三、汇交力系的简化

1、几何法：（作图）

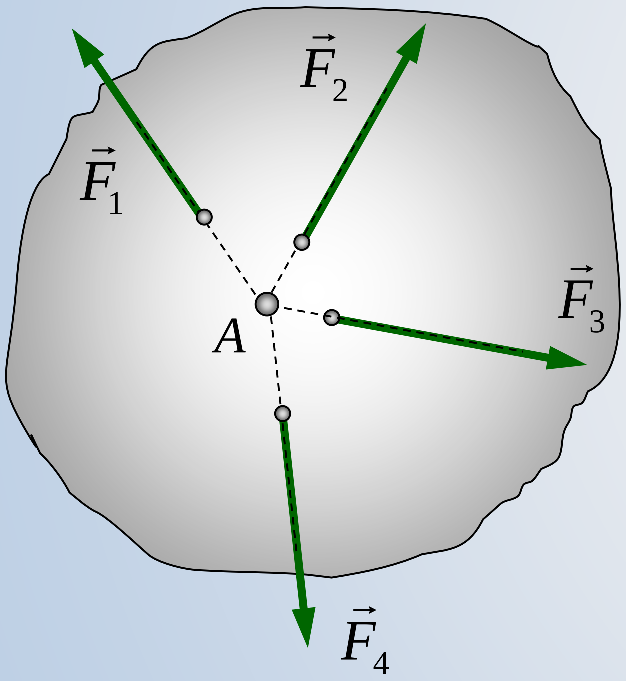
直观、简单

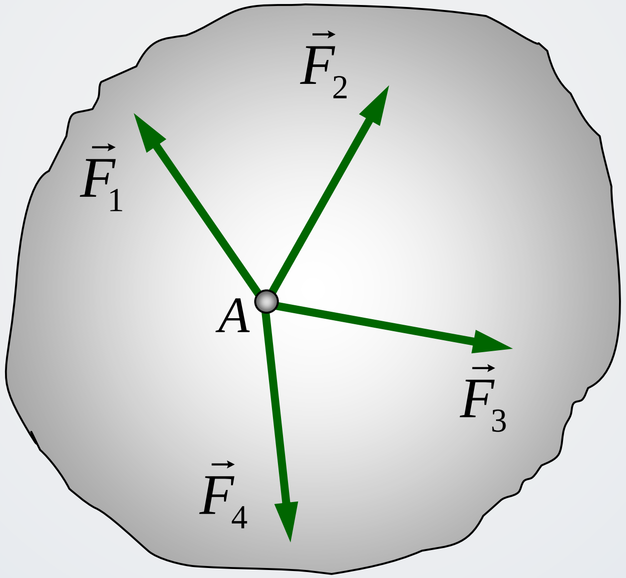
2、解析法：（列投影式）

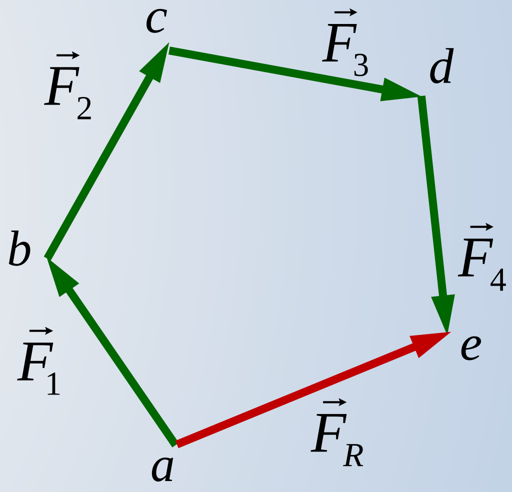
解决复杂问题

2.1 汇交力系的简化

1、几何法







力的多边形法则

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$$

2.1 汇交力系的简化

2、解析法

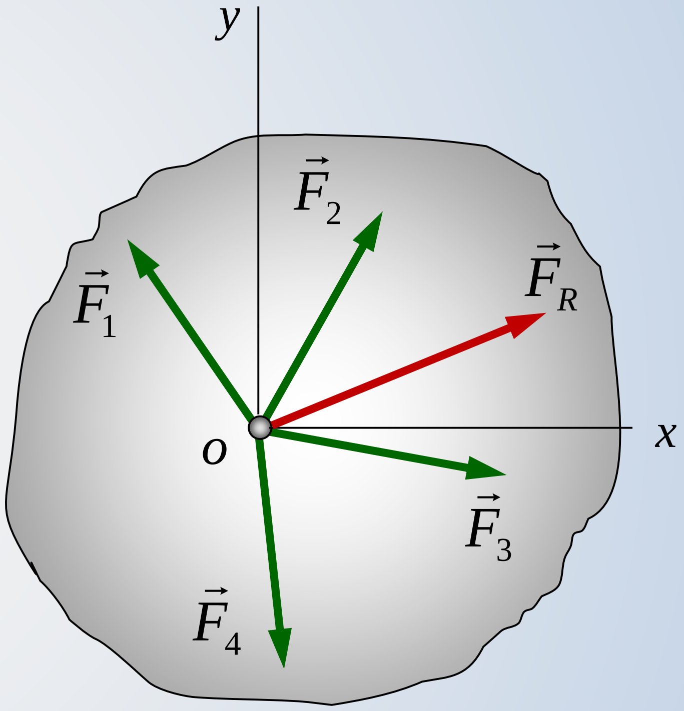
(1) 合力投影定理

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n$$

$$F_{Rx} = F_{x1} + F_{x2} + \cdots + F_{xn} = \sum F_x$$

$$F_{Ry} = F_{y1} + F_{y2} + \cdots + F_{yn} = \sum F_y$$

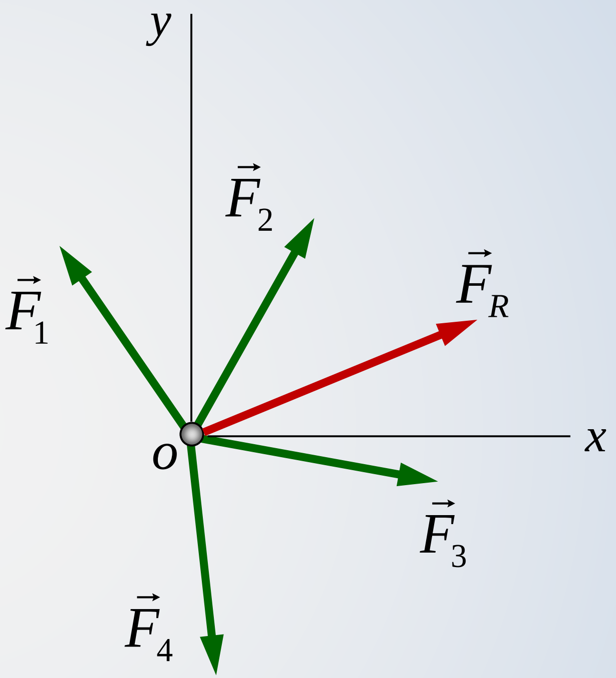
$$F_{Rz} = F_{z1} + F_{z2} + \cdots + F_{zn} = \sum F_z$$



汇交力系的合力在某轴上的投影=各分力在同一轴上投影的代数和。

2.1 汇交力系的简化

(2) 由合力投影定理求合力。



$$\vec{F}_R = F_{Rx}\vec{i} + F_{Ry}\vec{j} + F_{Rz}\vec{k}$$

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2 + F_{Rz}^2}$$

$$= \sqrt{\left(\Sigma F_x\right)^2 + \left(\Sigma F_y\right)^2 + \left(\Sigma F_z\right)^2}$$

$$\cos(\vec{F}_R, \vec{i}) = \frac{F_{Rx}}{F_R} \quad \cos(\vec{F}_R, \vec{j}) = \frac{F_{Ry}}{F_R} \quad \cos(\vec{F}_R, \vec{k}) = \frac{F_{Rz}}{F_R}$$

2.2 汇交力系的平衡

一、平面汇交力系的平衡条件及平衡方程

1. 简化： $\vec{F}_R = \sum \vec{F}_i$

$$F_{Rx} = \sum F_x \quad F_{Ry} = \sum F_y \quad F_R = \sqrt{\sum F_x^2 + \sum F_y^2}$$

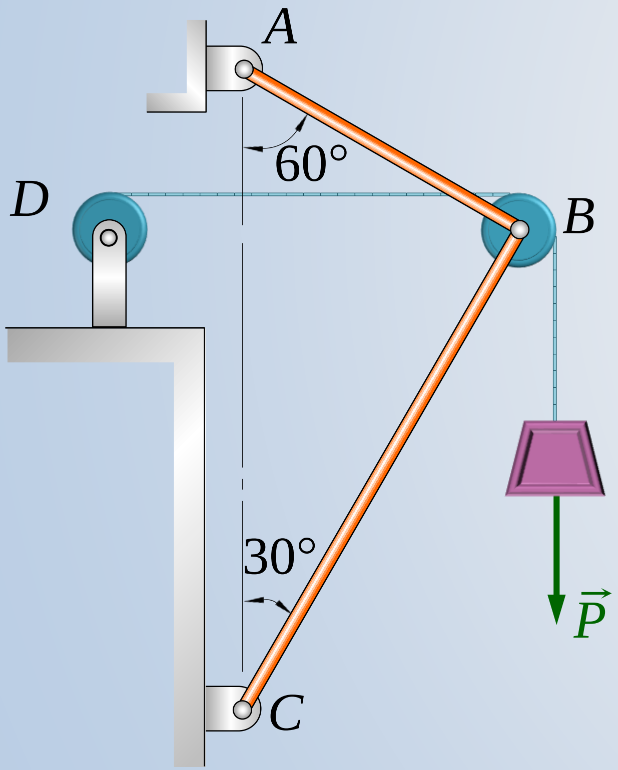
2. 平衡条件： $\vec{F}_R = 0$

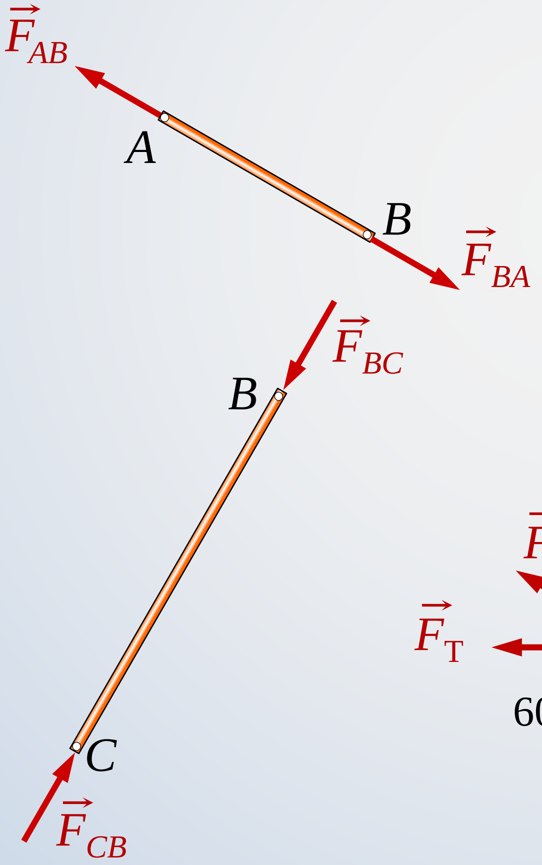
3. 平衡方程： $\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0$

2.2 汇交力系的平衡

例1 重物$P = 20\ \text{kN}$，不计其它物体重量 。求平衡时杆AB, BC 所受的力。

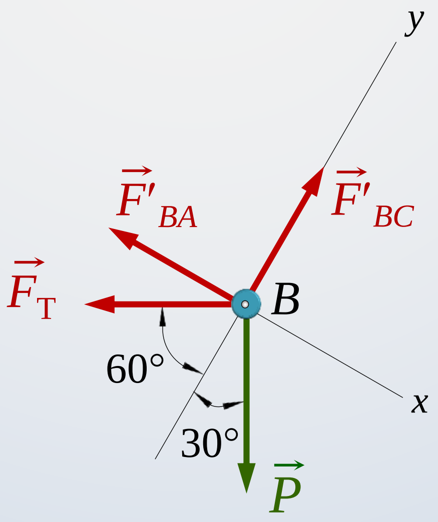
解：取滑轮B，画受力图





$$\sum F_x = 0 \qquad -F'_{BA} - F_{\mathrm{T}}\cos 30^\circ + P\cos 60^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0 \qquad F'_{BC} - F_{\mathrm{T}}\cos 60^\circ - P\cos 30^\circ = 0$$



解得 $F'_{BA} = -7.32\ \text{kN}$

$F'_{BC} = 27.32\ \text{kN}$

2.2 汇交力系的平衡

二、空间汇交力系的平衡条件及平衡方程

1. 简化： $\vec{F}_R = \sum \vec{F}_i$

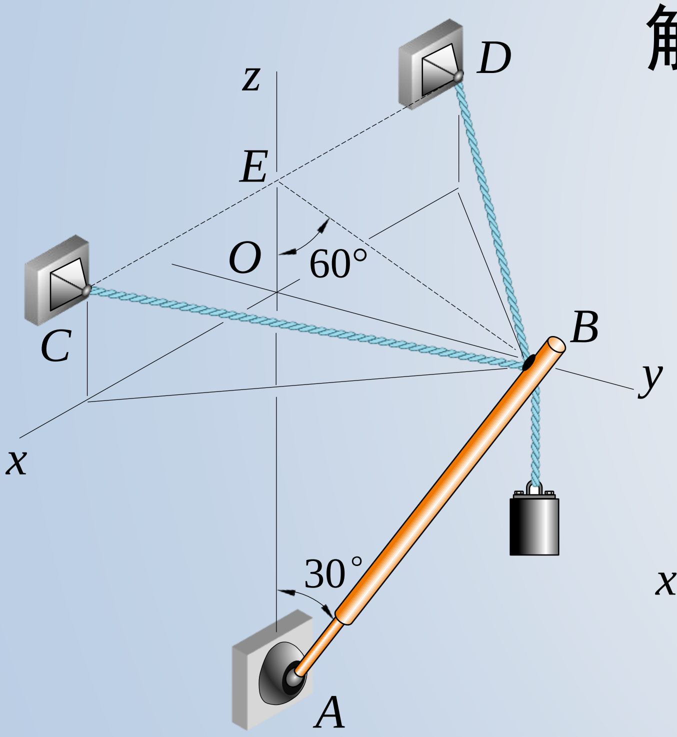
$$F_{Rx} = \sum F_{xi} \quad F_{Ry} = \sum F_{yi} \quad F_{Rz} = \sum F_{zi} \quad F_R = \sqrt{\sum F_x^2 + \sum F_y^2 + \sum F_z^2}$$

2. 平衡条件： $\vec{F}_R = 0$

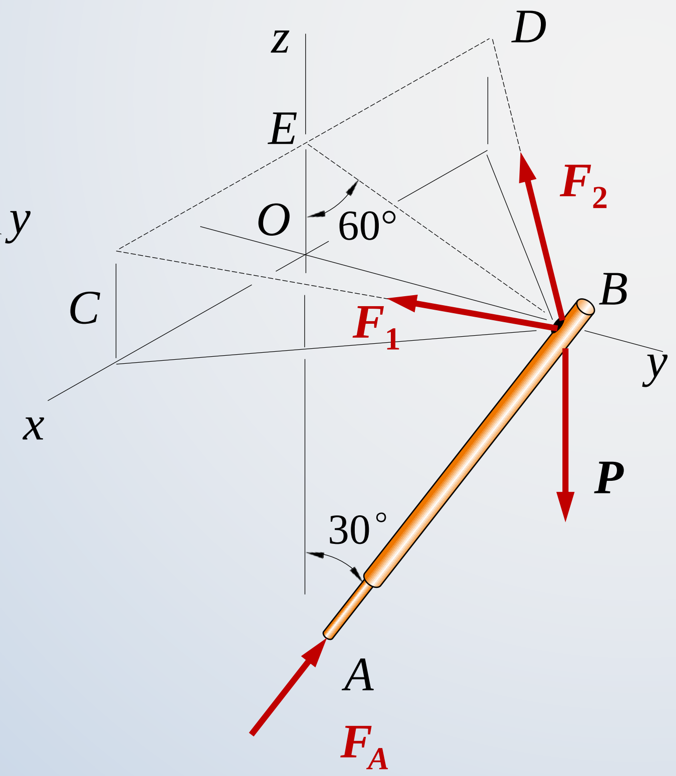
3. 平衡方程： $\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum F_z = 0$

2.2 汇交力系的平衡

例2 已知：$CE = EB = ED$，物重 P =10kN。起重杆重量不计，与z轴夹角为30°, $\angle OEB = 60°$, 求起重杆和绳所受的力。



解: • 取杆AB，画受力图



• 列平衡方程：

$$\sum F_x = 0, \quad F_1 \sin 45^\circ - F_2 \sin 45^\circ = 0$$

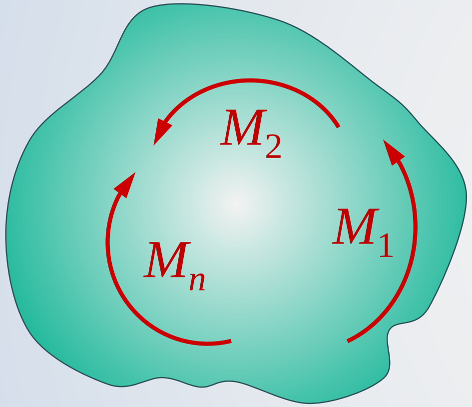
$$\sum F_y = 0, \quad F_A \sin 30^\circ - F_1 \cos 45^\circ \sin 60^\circ - F_2 \cos 45^\circ \sin 60^\circ = 0$$

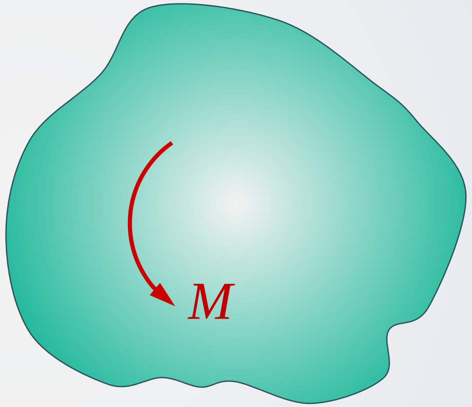
$$\sum F_z = 0, \quad F_1 \cos 45^\circ \cdot \cos 60^\circ + F_2 \cos 45^\circ \cdot \cos 60^\circ + F_A \cos 30^\circ - P = 0$$

解得 $F_1 = F_2 = 3.54\ \text{kN}$，$F_A = 8.66\ \text{kN}$

一、力偶系的简化

1. 平面力偶系的简化



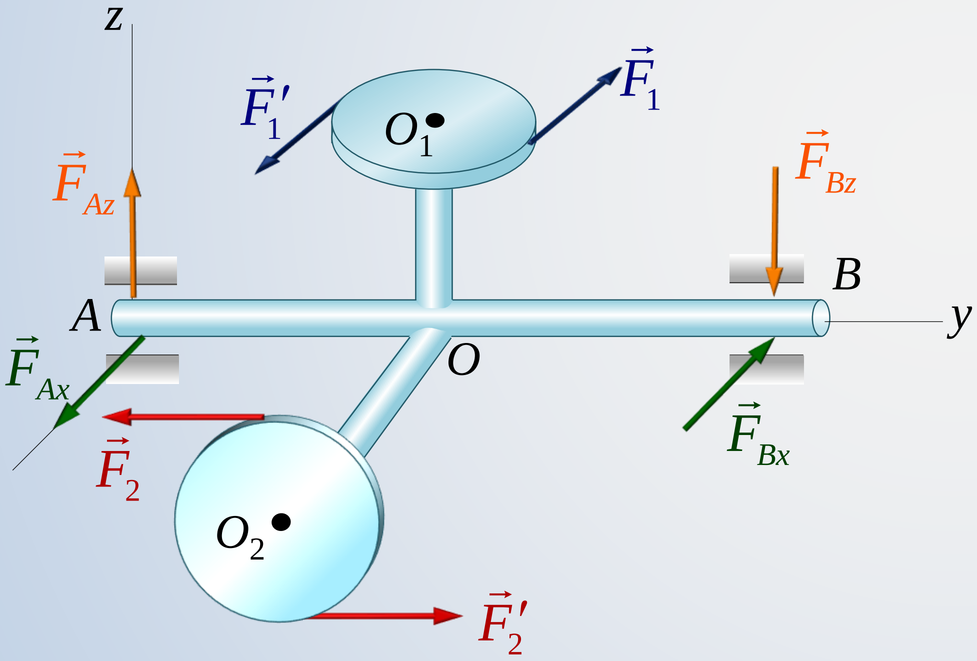


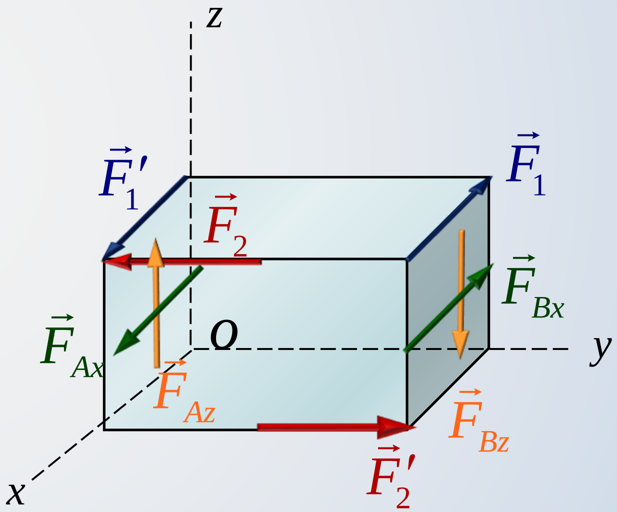
结论 平面力偶系合成为一个合力偶，合力偶矩等于各分力偶矩的代数和。

$$M = M_1 + M_2 + \cdots + M_n = \sum M_i$$

2. 空间力偶系的简化

实例

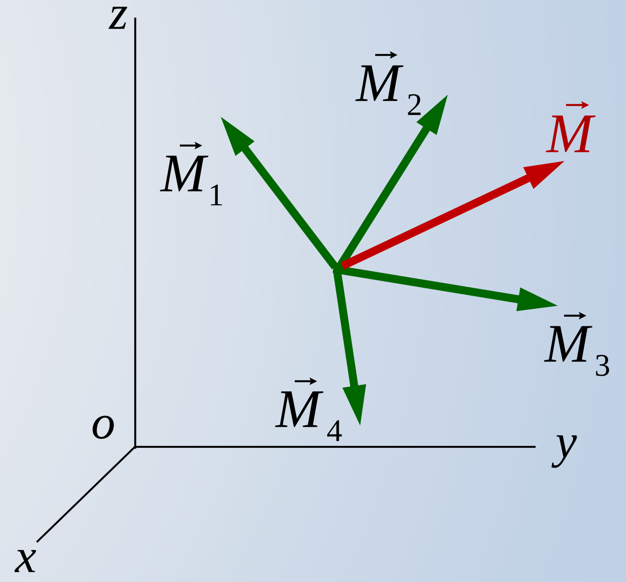




2.3 力偶系的简化

2、空间力偶系的合成

空间力偶系合成的结果为一合力偶，其力偶矩矢$\vec{M}$等于各力偶矩矢的矢量和。



$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \cdots + \vec{M}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i$$

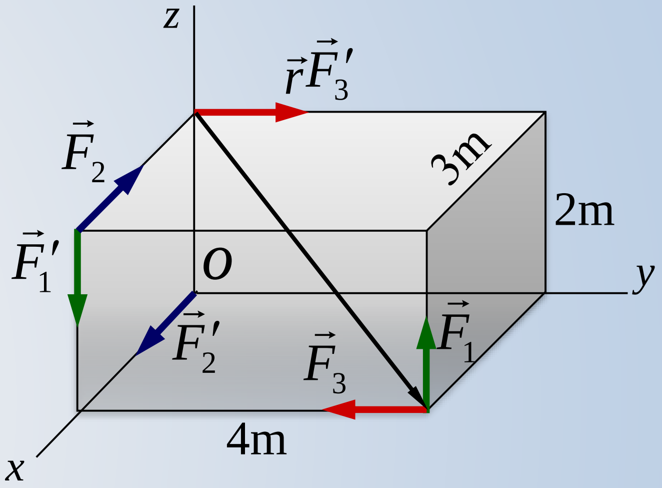
$$M_x = \sum_{i=1}^{n} M_{ix} \quad M_y = \sum_{i=1}^{n} M_{iy} \quad M_z = \sum_{i=1}^{n} M_{iz}$$

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$$

$$\cos(\vec{M},\vec{i}) = \frac{M_x}{M} \quad \cos(\vec{M},\vec{j}) = \frac{M_y}{M} \quad \cos(\vec{M},\vec{k}) = \frac{M_z}{M}$$

2.3 力偶系的简化

例3 已知 $F_1 = F_1' = 3\,\mathrm{kN}$，$F_2 = F_2' = 5\,\mathrm{kN}$，$F_3 = F_3' = 2\,\mathrm{kN}$ 求：合力偶



解：$\vec{M}_1 = \vec{M}\left(\vec{F}_1, \vec{F}_1'\right) = 3\times 4i = 12i$

$$\vec{M}_2 = \vec{M}\left(\vec{F}_2, \vec{F}_2'\right) = -5\times 2j = -10j$$

$$\vec{M}_3 = \vec{M}\left(\vec{F}_3, \vec{F}_3'\right) = \vec{r}\times\vec{F}_3 = (3i + 4j - 2k)\times(-2j) = -4i - 6k$$

合力偶 $\vec{M} = \sum_{i=1}^{3}\vec{M}_i = 8i - 10j - 6k$

$$M = \sqrt{8^2 + (-10)^2 + (-6)^2} = 10\sqrt{2}\,\mathrm{kN}$$

$$\cos(\vec{M},\vec{i}) = \frac{8}{10\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{5} \quad \cos(\vec{M},\vec{j}) = \frac{-10}{10\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos(\vec{M},\vec{k}) = \frac{-6}{10\sqrt{2}} = -\frac{3\sqrt{2}}{10}$$

2.4 力偶系的平衡

一、平面力偶系的平衡

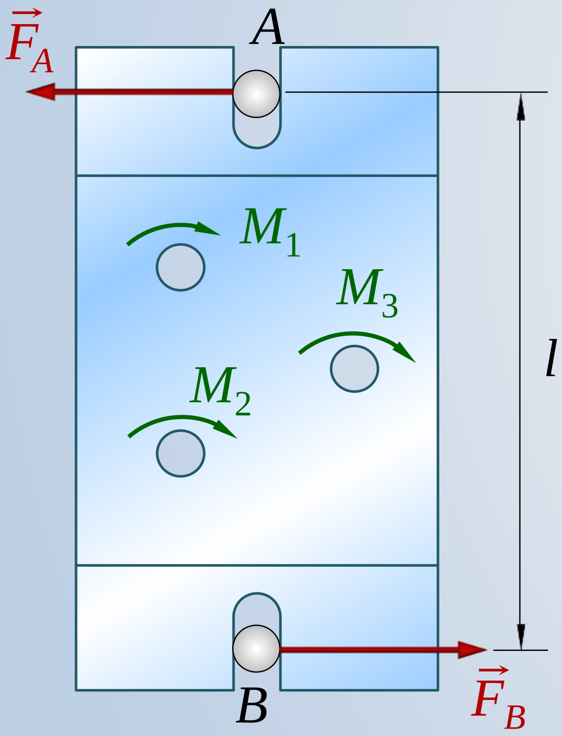
1. 简化 ： $M = M_1 + M_2 + \cdots + M_n = \sum M_i$

2. 平衡条件： $M = 0$

3. 平衡方程： $\sum M_i = 0$

2.4 力偶系的平衡

例4 钻头对工件作用有三个力偶，其矩分别为$M_1 = M_2 = 10\ \text{N·m}$，$M_3 = 20\text{N·m}$，固定螺栓$A$和$B$的距离$l = 200\text{mm}$。 求两个光滑螺栓所受的水平力。



解：选工件，画受力图

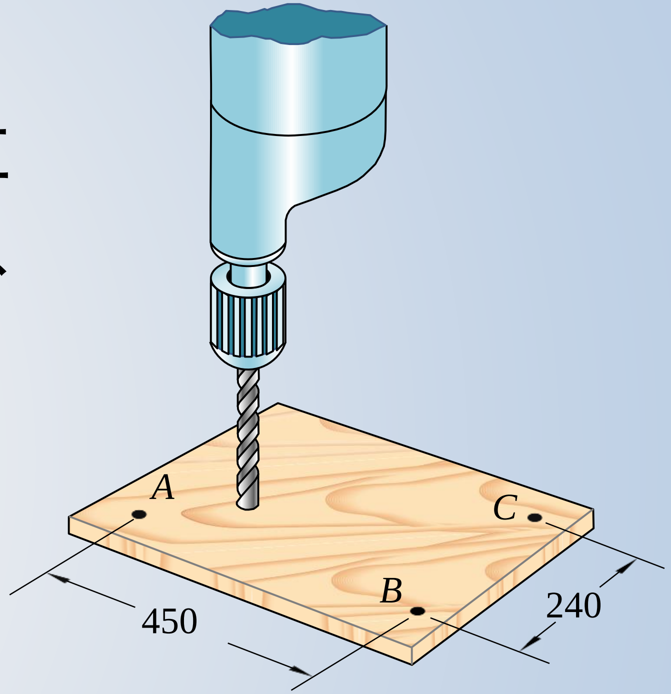
$$\sum M_i = 0,\quad F_A \cdot l - M_1 - M_2 - M_3 = 0$$

解得

$$F_A = \frac{M_1 + M_2 + M_3}{l} = \frac{10\times 2 + 20}{200\times 10^{-3}} = 200\text{N}$$

2.4 力偶系的平衡

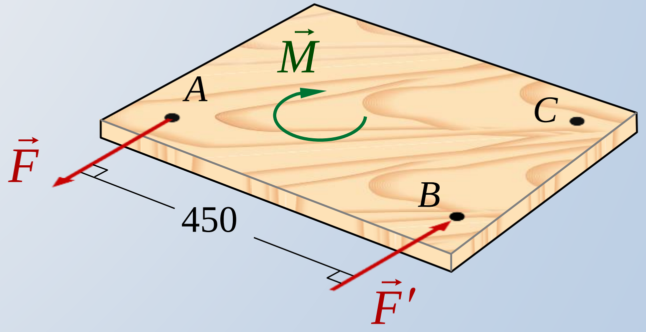
例5 一块木板用两根钉子固定在工作台上如图所示。已知转孔机工作时的力偶矩为12N·m，当钉子分别位于(1)*A*和*B*；(2) *B*和*C*；(3)*A*和*C*时，钉子承受的力至少为多少？



解: (1) • 取板作为研究对象；

• 力 $\vec{F}$ 至少为

$$F=\frac{M}{d}=\frac{12}{450\times10^{-3}}=26.7\mathrm{N}$$



二、空间力偶系的平衡

1. 平衡条件： $\vec{M}_o = 0$

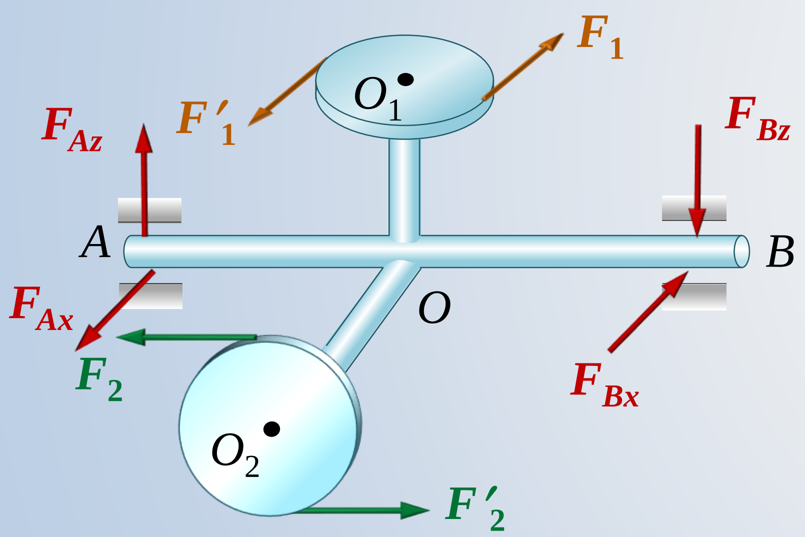
2. 平衡方程： $\sum M_x = 0$

$$\sum M_y = 0$$

$$\sum M_z = 0$$

2.4 力偶系的平衡

例6 已知AB=800mm，两圆盘半径均为200mm，$F_1 = 30\text{N}$，$F_2 = 50\text{N}$。求轴承A和B处的约束力 。



解：• 取整体为研究对象；

• 由力偶系的平衡方程，

$$\sum M_x = 0,\quad 400 \cdot F_2 - 800 \cdot F_{Az} = 0$$

$$\sum M_z = 0,\quad 400 \cdot F_1 + 800 \cdot F_{Ax} = 0$$

解得：$F_{Ax} = F_{Bx} = -15\text{N}$, $F_{Az} = F_{Bz} = 25\text{N}$

F_{Ax}, F_{Bx} 的方向与假设相反。

谢 谢！