《高等数学BI》复习题1答案

一	二	三	四	五	总分

得 分

一、选择题（共6道小题，每小题 3分，满分18分）.

1. 当 $x\to 0$ 时，$f\left(x\right)=x-\sin ax$ 与 $g\left(x\right)=x^2\ln\left(1-bx\right)$ 是等价无穷小，则（ A）.

（A） $a=1,b=-\dfrac{1}{6}$ （B）$a=1,b=\dfrac{1}{6}$ （C） $a=-1,b=-\dfrac{1}{6}$ （D）$a=-1,b=\dfrac{1}{6}$

2．函数 $f(x)=\begin{cases} x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 点存在二阶导数，则（ D）.

（A） $\alpha>1$ （B） $\alpha>2$ （C） $\alpha\ge 2$ （D） $\alpha>3$

3．设曲线 $y=x^2+ax+b$ 与 $2y=-1+xy^3$ 在点 $(1,-1)$ 处有公共切线，则 a,b 的值分别为（ B ）.

（A） 0, 2 （B） -1, -1 （C） -1, 1 （D） 1, -3

4．设 $f(x)$ 在 $x=0$ 点附近有二阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf''(x)}{1-\cos x}=1$，则（ C ）.

（A） $f''(0)\neq 0$，但 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

（B） $f''(0)=0$，且 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

（C） $f''(0)=0$，且 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

（D） $f''(0)\neq 0$，且 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

5．曲线 $y=x\left(x-1\right)\left(x-2\right)$ 与 x 轴所围成平面图形的面积为（ B ）.

（A） $\int_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ （B） $\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x-\int_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x$

（C） $-\int_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ （D） $-\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x$

6. 下列反常积分中发散的是（ D ）

(A) $\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ (B) $\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-x^2}\mathrm{d}x$ (C) $\int_{2}^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}\mathrm{d}x$ (D) $\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x$

得 分

二、填空题（共 6 小题，每小题 3 分，满分 18 分）.

1．若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^{-kn}=\mathrm{e}^{-10}$, 则 $k=$___2______.

2． $y=f(x)$ 由方程 $x^3+y^3-\sin x+6y=0$ 确定，则 $\mathrm{d}y|_{x=0}=$____$\frac{1}{6}dx$_____.

3．曲线 $y=\frac{x^2}{1+x}$ 的斜渐近线方程为________ $y=x-1$__________.

4．若 $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$，则 $f^{(n)}(1)=$_____$(-1)^n n!2^{-n}$____ .

5． $\int_{-2}^{2}\left(\frac{x}{1+x^2}+|x|\right)\mathrm{d}x=$ ______4___.

6． 曲 线 C: $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=9\\ x+z=1\end{cases}$ 在 xoz 平 面 上 的 投 影 曲 线 方 程 为

$\begin{cases}x+z=1\\ y=0\end{cases}$ $(\frac{1-\sqrt{17}}{2}\le x\le\frac{1+\sqrt{17}}{2})$___.

得 分

二、解答题（共 7 道题，每小题 7 分，满分 49 分）.

1．已知函数 $y=y(x)$ 由方程 $\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t\end{cases}$ 确定，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$， $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解： $\frac{dy}{dt}=3a\sin^2 t\cos t,\frac{dx}{dt}=-3a\cos^2 t\sin t$ ……（2 分）

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t}=-\tan t$$ ……（4 分）

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\sec^2 t}{-3a\cos^2 t\sin t}=\frac{1}{3a}\sec^4 t\csc t$$

……（7 分）

2．证明当 $x>0$ 时，$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$.

证明：令

$$f(x)=1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2},\ f(0)=0$$

$$f'(\mathrm{x})=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+x\frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$$ ……（3 分）

当 $x>0$ 时，$f'(\mathrm{x})=\ln(x+\sqrt{1+x^2})>0$，函数单调递增

……（5 分）

当 $x>0$ 时，$f(x)>f(0)$，即

$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}>0$,得

$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$ ……（7 分）

3．求 $\int_0^1 \mathrm{e}^{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x$.

解：令 $\sqrt{3x+1}=t,x=\frac{1}{3}(t^2-1),\mathrm{d}\,x=\frac{2}{3}t\mathrm{d}t$

……（2 分）

$$\int_0^1 e^{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\int_1^2 e^t t\mathrm{d}t=\frac{2}{3}\int_1^2 t\mathrm{d}e^t$$

$$=\frac{2}{3}te^t\Big|_1^2-\frac{2}{3}\int_1^2 e^t\mathrm{d}t\cdots\cdots(5分)$$

$$=\frac{2}{3}(2\mathrm{e}^2-\mathrm{e})-\frac{2}{3}e^t\Big|_1^2$$

$$=\frac{2}{3}(2\mathrm{e}^2-\mathrm{e})-\frac{2}{3}(\mathrm{e}^2-\mathrm{e})=\frac{2}{3}\mathrm{e}^2\cdots\cdots(7分)$$

4．求 $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}\mathrm{d}x$.

解．令 $x=\frac{1}{t}$

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}dx=\int \frac{\sqrt{\frac{1-t^2}{t^2}}}{\frac{1}{t^4}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=-\int t\sqrt{1-t^2}dt \ \underline{\underline{令 t=\sin u}}\ -\int \sin u\cos^2 udu$$

$$=\frac{1}{3}\cos^3 u+c=\frac{\sqrt{(x^2-1)^3}}{3x^3}+c$$

5．已知 $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c, & x<0 \\ \ln(1+x), & x\ge 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 点有二阶导数, 试确定常数 a,b,c 的值.

解：$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c, & x<0 \\ \ln(1+x), & x\ge 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处有二阶导数，则在 $x=0$ 处连续，且一阶可导。

在 $x=0$ 处连续，可得 $c=0$，

……（1 分）

$$f_-'(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{ax^2+bx}{x}=b$$

$$f_+'(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

……（3 分）

得 $b=1,\ f'(0)=1$

$$f'(\mathrm{x})=\begin{cases} 2ax+1, x<0 \\ \frac{1}{1+x}, \quad x>0 \\ 1, \quad x=0 \end{cases}$$

……（5 分）

$$f''_{-}(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2ax+1-1}{x}=2a$$

$$f''_{+}(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{x}=-1$$

……（7 分）

得$2a=-1, a=-\dfrac{1}{2}$

6．求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x[t^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1)-t]\mathrm{d}t}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}$.

解：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t]\mathrm{d}t}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t]\mathrm{d}t}{x^2.\frac{1}{x}}\cdots(2分)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}[x^2(e^{\frac{1}{x}}-1)-x]\cdots(4分)$$

$$\overset{x=\frac{1}{t}}{=}\lim_{t\to 0^+}[\frac{1}{t^2}(e^t-1)-\frac{1}{t}]$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{(e^t-1)-t}{t^2}=\lim_{t\to 0^+}\frac{e^t-1}{2t}=\frac{1}{2}\cdots(7分)$$

7. 求过点 $A(1,\ 0,\ -2)$ 与平面 π:$3x-y+2z+3=0$ 平行且与直线 L:$\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z}{1}$ 相交的直线方程.

解：方法一：

已知直线 L_1 的方向 $\vec{s}_1=\{4,\ -2,\ 1\}$，其上有一点 $A_1(1,\ 3,\ 0)$，根据已知条件，

过 $A(1,\ 0,\ -2)$ 作平行于平面 π 的平面 π_1

π_1：$3(x-1)-y+2(z+2)=0$

……（3 分）

作平面π_2通过点$A(1,\ 0,\ -2)$和直线L_1，显然

$$\overrightarrow{n_{\pi_1}}=\vec{s_1}\times\overrightarrow{AA_1}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & -2 & 1\\ 0 & 3 & 2\end{vmatrix}=-7\vec{i}-8\vec{j}+12\vec{k}=(-7,\ -8,\ 12)$$

……（6 分）

$$\Rightarrow L_1: 7(x-1)+8y-12(z+2)=0$$

所求直线方程为

$$\begin{cases}3(x-1)-y+2(z+2)=0\\ 7(x-1)+8y-12(z+2)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x-y+2z+1=0\\ 7x+8y-12z-31=0\end{cases}$$ ……（7 分）

方法二：设所求直线方向为

$\vec{s}=\{m,\ n,\ p\}$

已知直线L_1的方向$\vec{s_1}=\{4,\ -2,\ 1\}$，其上有一点$A_1(1,\ 3,\ 0)$,

向量$\overrightarrow{AA_1}=\{0,\ 3,\ 2\}$, $\overrightarrow{AA_1}\times s_1=\{7,\ 8,\ -12\}$,

由已知条件得$\begin{cases}7m+8n-12p=0\\ 3m-n+2p=0\end{cases}$得$m:n:p=4:-50:-31$

直线方程为$\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y}{-50}=\dfrac{z+2}{-31}$

得 分

四、（本题满分 9 分 ）D_1是由$y=x^2, x=2, x=a, y=0$所围成的平面图形；D_2是由$y=x^2, x=a, y=0$所围成的平面图形，其中$0<a<2$.

（1） 分别求D_1绕x轴旋转一周所生成的旋转体体积V_1和D_2绕y轴旋转一周所生成的旋转体体积V_2;

（2） 问a为何值时，V_1+V_2最大，并求其最大值.

解：（1）

$$V_1=\pi\int_a^2(2x^2)^2dx=\frac{4\pi}{5}x^5\Big|_a^2=\frac{4\pi}{5}(32-a^5)$$ ……（2分）

$$V_2=\pi\int_0^{2a^2}a^2dy-\pi\int_0^{2a^2}\left(\sqrt{\frac{y}{2}}\right)^2dy=2\pi a^4-\frac{\pi}{4}y^2\Big|_0^{2a^2}=\pi a^4$$（5分）

$$V=V_1+V_2=\frac{4\pi}{5}(32-a^5)+\pi a^4$$

$V'=-4\pi a^4+4\pi a^3, V''=4\pi a^2(3-4a)$

令$V'=0$,得$a=0$(舍去)，$a=1$,

（2）$V''(1)=-4\pi<0$,由问题的实际意义，

当$a=1$时取最大值……（7分）

最大值为

$$V\Big|_{a=1}=\frac{4\pi}{5}(32-a^5)+\pi a^4\Big|_{a=1}=\frac{129\pi}{5}$$ ……（9分）

得 分

五、（本题满分 6 分） 设 $f(x)$ 在 $[0,\ 1]$ 上连续,在 $(0,\ 1)$ 内可导,且满足 $f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}}xe^{1-x}f(x)\mathrm{d}x$， $k>1$,证明至少存在一点 $\xi\in(0,\ 1)$,使得

$$f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi).$$

证明：令

$F(x)=xe^{1-x}f(x)$, F(x)在[0,1]上连续，(0, 1)内可导

$$\mathrm{F}'(\mathrm{x})=e^{1-x}f(x)-xe^{1-x}f(x)+xe^{1-x}f'(x)$$
$$=e^{1-x}[(1-x)f(x)+xf'(x)]$$ ……（2分）

由积分中值定理, 存在$\eta\in[0,\frac{1}{k}]$

$$\mathrm{F}(1)=\mathrm{f}(1)=\mathrm{k}\int_0^{\frac{1}{k}}xe^{1-x}f(x)dx$$
$$=\mathrm{k}.\frac{1}{k}\eta e^{1-\eta}f(\eta)=\mathrm{F}(\eta)$$ ……（4分）

由Rolle定理，至少存在一点$\xi\in$（η, 1）使得

$\mathrm{F}'(\xi)=0$,即$e^{1-\xi}[(1-\xi)f(\xi)+\xi f'(\xi)]=0$

即 $f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi)$

……（6 分）