# 第一章习题答案

**1-1 试求图 1-27 系统的模拟结构图，并建立其状态空间表达式。**

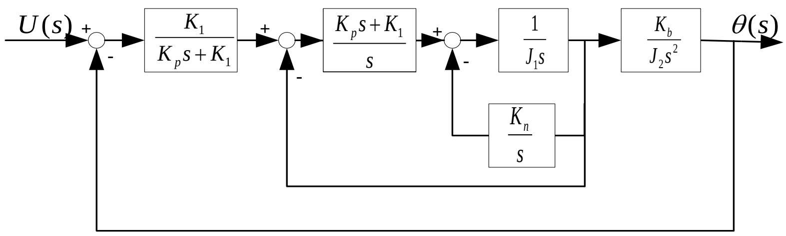



图**1-27**系统方块结构图

解：系统的模拟结构图如下：

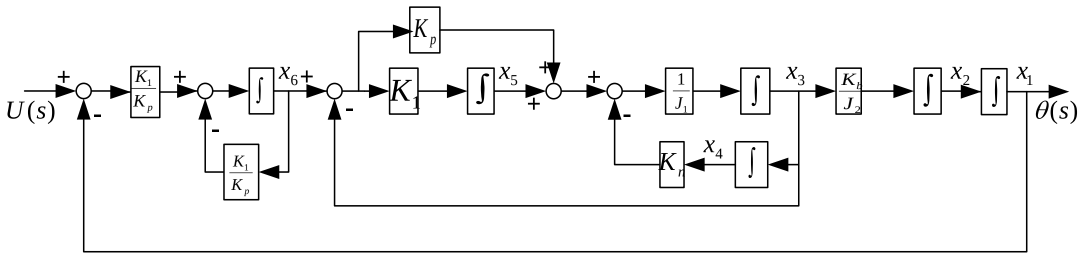



图**1-30**双输入**--**双输出系统模拟结构图

系统的状态方程如下：

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{K_b}{J_2} x_3$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{K_p}{J_1} x_3 - \frac{K_n}{J_1} x_4 + \frac{1}{J_1} x_5 + \frac{K_p}{J_1} x_6$$

$$\dot{x}_4 = x_3$$

$$\dot{x}_5 = -K_1 x_3 + K_1 X_6$$

$$\dot{x}_6 = -\frac{K_1}{K_p} x_1 - \frac{K_1}{K_p} x_6 + \frac{K_1}{K_p} u$$

令 $\theta(s) = y$，则 $y = x_1$

所以，系统的状态空间表达式及输出方程表达式为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\\\dot{x}_4\\\dot{x}_5\\\dot{x}_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0&0\\0&0&\frac{K_b}{J_2}&0&0&0\\0&0&-\frac{K_p}{J_1}&-\frac{K_n}{J_1}&\frac{1}{J}&\frac{K_p}{J_1}\\0&0&1&0&0&0\\0&0&-K_1&0&0&K_1\\-\frac{K_1}{K_p}&0&0&0&0&-\frac{K_1}{K_p}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\\frac{K_1}{K_p}\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\end{bmatrix}$$

**1-2 有电路如图 1-28 所示。以电压$u(t)$为输入量，求以电感中的电流和电容上的电压作为状态变量的状态方程，和以电阻$R_2$上的电压作为输出量的输出方程。**

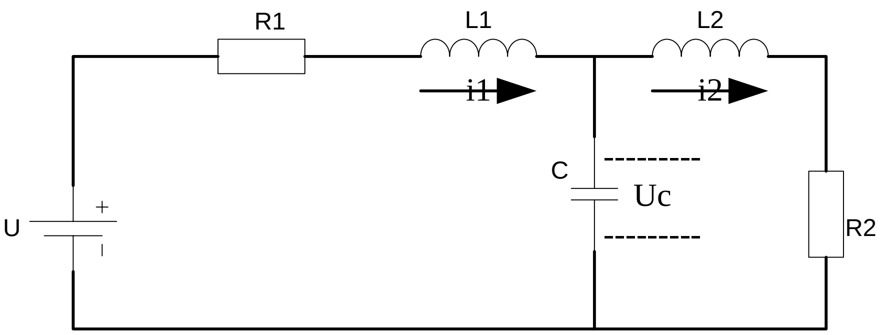



图1-28 电路图

解：由图，令$i_1=x_1,i_2=x_2,u_c=x_3$，输出量$y=R_2x_2$

有电路原理可知：
$$\begin{aligned}&R_1x_1+L_1\dot{x}_1+x_3=u\\&L_2\dot{x}_2+R_2x_2=x_3\\&x_1=x_2+C\dot{x}_3\end{aligned}$$

既得
$$\begin{aligned}&\dot{x}_1=-\frac{R_1}{L_1}x_1-\frac{1}{L_1}x_3+\frac{1}{L_1}u\\&\dot{x}_2=-\frac{R_2}{L_2}x_2+\frac{1}{L_2}x_3\\&\dot{x}_3=-\frac{1}{C}x_1+\frac{1}{C}x_2\\&y=R_2x_2\end{aligned}$$

写成矢量矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L_1} & 0 & -\frac{1}{L_1} \\ 0 & -\frac{R_2}{L_2} & \frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & R_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

**1-3 参考例子 1-3（P19）.**

**1-4 两输入**$u_1$**，**$u_2$**，两输出**$y_1$**，**$y_2$**的系统，其模拟结构图如图 1-30 所示，试求其状态空间表达式和传递函数阵。**

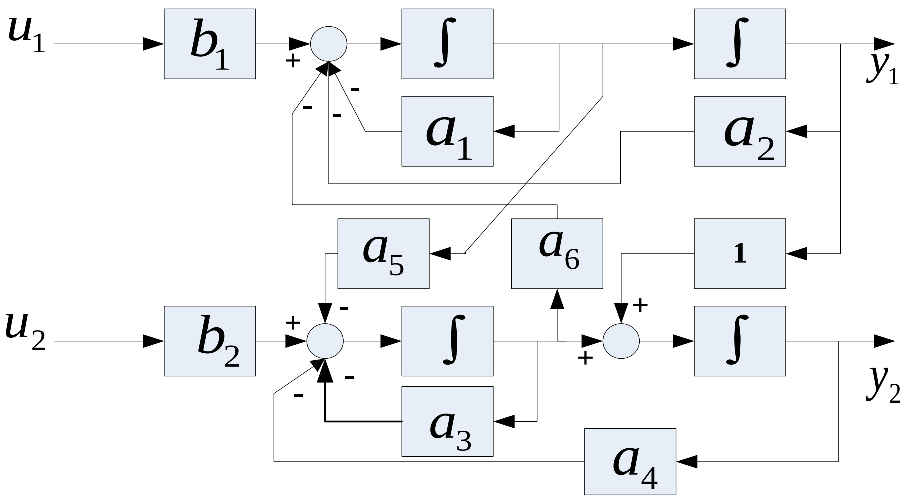



图**1-30**双输入**--**双输出系统模拟结构图

解：系统的状态空间表达式如下所示：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -a_2 & -a_1 & 0 & -a_6 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -a_5 & -a_4 & -a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ a_2 & s + a_1 & 0 & a_6 \\ -1 & 0 & s & -1 \\ 0 & a_5 & a_4 & a_3 \end{bmatrix}$$

$$W_{ux}(s)=(sI-A)^{-1}B=\begin{bmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ a_2 & s+a_1 & 0 & a_6 \\ -1 & 0 & s & -1 \\ 0 & a_5 & a_4 & a_3 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}$$

$$W_{uy}(s)=C(sI-A)^{-1}B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ a_2 & s+a_1 & 0 & a_6 \\ -1 & 0 & s & -1 \\ 0 & a_5 & a_4 & a_3 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}$$

**1-5 系统的动态特性由下列微分方程描述**

(2) $\dddot{y}+5\ddot{y}+7\dot{y}+3y=\ddot{u}+3\dot{u}+2u$

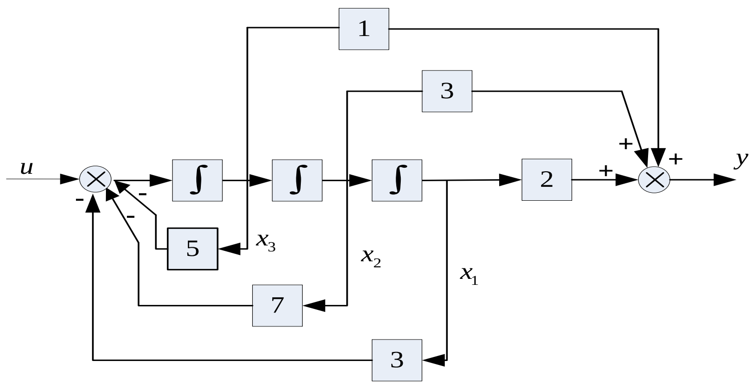
列写其相应的状态空间表达式，并画出相应的模拟结构图。

解：令 $x_1=y$， $x_2=\dot{y}$， $x_3=\ddot{y}$，则有

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -7 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

相应的模拟结构图如下：




**1-6 （2）已知系统传递函数$W(s)=\dfrac{6(s+1)}{s(s+2)(s+3)^2}$,试求出系统的约旦标准型的实现，并画出相应的模拟结构图**

解：$W(s)=\dfrac{6(s+1)}{s(s+2)(s+3)^2}=\dfrac{-4}{(s+3)^2}+\dfrac{-\frac{10}{3}}{s+3}+\dfrac{3}{s+2}+\dfrac{\frac{1}{3}}{s}$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}-4 & -\frac{10}{3} & 3 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}$$

**1-7 给定下列状态空间表达式**

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -2 & -3 & 0\\ -1 & 1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 2\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

（1） 画出其模拟结构图
（2） 求系统的传递函数
解：

（2）$W(s)=(sI-A)=\begin{bmatrix}s & -1 & 0\\ 2 & s+3 & 0\\ 1 & -1 & s+3\end{bmatrix}$

$$\left|sI-A\right|=s(s+3)^2+2(s+3)=(s+3)(s+2)(s+1)$$

$$(sI-A)^{-1}=\frac{1}{(s+3)(s+2)(s+1)}\begin{bmatrix}(s+3)^2 & s+3 & 0\\ -2(s+3) & s(s+3) & 0\\ -s-5 & s-1 & (s+1)(s+2)\end{bmatrix}$$

$$W_{ux}(s)=(sI-A)^{-1}B=\frac{1}{(s+3)(s+2)(s+1)}\begin{bmatrix}(s+3)^2 & s+3 & 0\\ -2(s+3) & s(s+3) & 0\\ -s-5 & s-1 & (s+1)(s+2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 2\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{(s+3)(s+2)(s+1)}\begin{bmatrix}(s+3)\\ s(s+3)\\ (2s+1)(s+3)\end{bmatrix}$$

$$W_{uy}(s)=C(sI-A)^{-1}B=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(s+3)\\ s(s+3)\\ (2s+1)(s+3)\end{bmatrix}\frac{1}{(s+3)(s+2)(s+1)}$$

$$=\frac{(2s+1)}{(s+2)(s+1)}$$

**1-8 求下列矩阵的特征矢量**

（3）$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 2\\ -12 & -7 & -6\end{bmatrix}$

解：A 的特征方程 $|\lambda I-A|=\begin{bmatrix}\lambda & -1 & 0\\ -3 & \lambda & -2\\ 12 & 7 & \lambda+6\end{bmatrix}=\lambda^3+6\lambda^2+11\lambda+6=0$

解之得：$\lambda_1=-1,\lambda_2=-2,\lambda_3=-3$

当 $\lambda_1=-1$ 时，$\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 2\\ -12 & -7 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{11}\\ p_{21}\\ p_{31}\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}p_{11}\\ p_{21}\\ p_{31}\end{bmatrix}$

解得： $p_{21}=p_{31}=-p_{11}$ 令 $p_{11}=1$ 得 $P_1=\begin{bmatrix}p_{11}\\ p_{21}\\ p_{31}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -1\\ -1\end{bmatrix}$

（或令 $p_{11}=-1$，得 $P_1=\begin{bmatrix}p_{11}\\ p_{21}\\ p_{31}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$）

当 $\lambda_1=-2$ 时，$\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 2\\ -12 & -7 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{12}\\ p_{22}\\ p_{32}\end{bmatrix}=-2\begin{bmatrix}p_{12}\\ p_{22}\\ p_{32}\end{bmatrix}$

解得： $p_{22}=-2p_{12},p_{32}=\frac{1}{2}p_{12}$ 令 $p_{12}=2$ 得 $P_2=\begin{bmatrix}p_{12}\\ p_{22}\\ p_{32}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ -4\\ 1\end{bmatrix}$

（或令 $p_{12}=1$，得 $P_2=\begin{bmatrix}p_{12}\\ p_{22}\\ p_{32}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -2\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}$）

当 $\lambda_1=-3$ 时，$\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 2\\ -12 & -7 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{13}\\ p_{23}\\ p_{33}\end{bmatrix}=-3\begin{bmatrix}p_{13}\\ p_{23}\\ p_{33}\end{bmatrix}$

解得： $p_{23}=-3p_{13},p_{33}=3p_{13}$ 令 $p_{13}=1$ 得 $P_3=\begin{bmatrix}p_{13}\\ p_{23}\\ p_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -3\\ 3\end{bmatrix}$

**1-9 将下列状态空间表达式化成约旦标准型（并联分解）**

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&1&-2\\1&0&2\\1&-1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&1\\2&7\\5&3\end{bmatrix}u$$

$$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

（2）

解：A 的特征方程 $\left|\lambda I-A\right|=\begin{bmatrix}\lambda-4&-1&2\\-1&\lambda&-2\\-1&1&\lambda-3\end{bmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)^2=0$

$\lambda_{1,2}=3,\lambda_3=1$

当$\lambda_1=3$时，$\begin{bmatrix}4&1&-2\\1&0&2\\1&-1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{11}\\p_{21}\\p_{31}\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}p_{11}\\p_{21}\\p_{31}\end{bmatrix}$

解之得 $p_{21}=p_{31}=p_{11}$ 令 $p_{11}=1$ 得 $P_1=\begin{bmatrix}p_{11}\\p_{21}\\p_{31}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

当$\lambda_2=3$时，$\begin{bmatrix}4&1&-2\\1&0&2\\1&-1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{11}\\p_{21}\\p_{31}\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}p_{11}\\p_{21}\\p_{31}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

解之得 $p_{12}=p_{22}+1,p_{22}=p_{32}$ 令 $p_{12}=1$ 得 $P_2=\begin{bmatrix}p_{12}\\p_{22}\\p_{32}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$

当$\lambda_3=1$时，$\begin{bmatrix}4&1&-2\\1&0&2\\1&-1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{13}\\p_{23}\\p_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p_{13}\\p_{23}\\p_{33}\end{bmatrix}$

解之得 $p_{13}=0,p_{23}=2p_{33}$ 令 $p_{33}=1$ 得 $P_3=\begin{bmatrix}p_{13}\\p_{23}\\p_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}$

$$T=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&2\\1&0&1\end{bmatrix}\qquad T^{-1}=\begin{bmatrix}0&-1&2\\1&1&-2\\0&1&-1\end{bmatrix}$$

$$T^{-1}B=\begin{bmatrix}0 & -1 & 2\\ 1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 7\\ 5 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & -1\\ -5 & 2\\ -3 & 4\end{bmatrix}$$

$$CT=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 1 & 4\\ 2 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

约旦标准型

$$\dot{\tilde{x}}=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\tilde{x}+\begin{bmatrix}8 & -1\\ -5 & 2\\ -3 & 4\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}3 & 1 & 4\\ 2 & 0 & 3\end{bmatrix}\tilde{x}$$

**1-10 已知两系统的传递函数分别为 $W_1(s)$和 $W_2(s)$**

$$W_1(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2}\\ 0 & \frac{s+1}{s+2}\end{bmatrix}\qquad W_2(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+3} & \frac{1}{s+4}\\ \frac{1}{s+1} & 0\end{bmatrix}$$

**试求两子系统串联联结和并联连接时，系统的传递函数阵，并讨论所得结果**

解：（1）串联联结

$$W(s)=W_2(s)W_1(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+3} & \frac{1}{s+4}\\ \frac{1}{s+1} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2}\\ 0 & \frac{s+1}{s+2}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{(s+1)(s+3)} & \frac{s^2+5s+7}{(s+2)(s+3)(s+4)}\\ \frac{1}{(s+1)^2} & \frac{1}{(s+1)(s+2)}\end{bmatrix}$$

（2）并联联结

$$W(s)=W_1(s)\pm W_1(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2}\\ 0 & \frac{s+1}{s+2}\end{bmatrix}\pm\begin{bmatrix}\frac{1}{s+3} & \frac{1}{s+4}\\ \frac{1}{s+1} & 0\end{bmatrix}$$

**1-11** （第 **3** 版教材）已知如图 **1-22** 所示的系统，其中子系统 **1**、**2** 的传递函数阵分别为

$$W_1(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & -\frac{1}{s}\\ 0 & \frac{1}{s+2}\end{bmatrix}\qquad W_2(s)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

求系统的闭环传递函数

解：

$$W_1(s)W_{21}(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & -\frac{1}{s}\\ 0 & \frac{1}{s+2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & -\frac{1}{s}\\ 0 & \frac{1}{s+2}\end{bmatrix}$$

$$I+W_1(s)W\ (s)=I+\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & -\frac{1}{s}\\ 0 & \frac{1}{s+2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{s+2}{s+1} & -\frac{1}{s}\\ 0 & \frac{s+3}{s+2}\end{bmatrix}$$

$$[I+W_1(s)W_2(s)]^{-1}=\frac{s+1}{s+3}\begin{bmatrix}\frac{s+3}{s+2} & \frac{1}{s}\\ 0 & \frac{s+2}{s+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{s+1}{s+2} & \frac{s+1}{s(s+3)}\\ 0 & \frac{s+2}{s+3}\end{bmatrix}$$

$$W(s)=[I+W_1(s)W_2(s)]^{-1}W_1(s)=\frac{s+1}{s+3}\begin{bmatrix}\frac{s+3}{s+2} & \frac{1}{s}\\ 0 & \frac{s+2}{s+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & -\frac{1}{s}\\ s & \frac{1}{s+2}\end{bmatrix}$$

$$=\frac{s+1}{s+3}\begin{bmatrix}\frac{s+3}{(s+2)(s+1)} & -\frac{1}{s}\\ 0 & \frac{1}{s+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+2} & -\frac{s+1}{s(s+3)}\\ 0 & \frac{1}{s+3}\end{bmatrix}$$

**1-11（第 2 版教材） 已知如图 1-22 所示的系统，其中子系统 1、2 的传递函数阵分别为**

$$W_1(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & -\frac{1}{s}\\ 2 & \frac{1}{s+2}\end{bmatrix}\qquad W_2(s)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

**求系统的闭环传递函数**

解:

$$W_1(s)W_1(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & -\frac{1}{s}\\ 2 & \frac{1}{s+2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & -\frac{1}{s}\\ 2 & \frac{1}{s+2}\end{bmatrix}$$

$$I+W_1(s)W_1(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & -\frac{1}{s}\\ 2 & \frac{1}{s+2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{s+2}{s+1} & -\frac{1}{s}\\ 2 & \frac{s+3}{s+2}\end{bmatrix}$$

$$[I+W_1(s)W_1(s)]^{-1}=\frac{s(s+1)}{s^2+5s+2}\begin{bmatrix}\frac{s+3}{s+2} & \frac{1}{s}\\ -2 & \frac{s+2}{s+1}\end{bmatrix}$$

$$W(s)=[I+W_1(s)W_1(s)]^{-1}W_1(s)=\frac{s(s+1)}{s^2+5s+2}\begin{bmatrix}\frac{s+3}{s+2} & \frac{1}{s}\\ -2 & \frac{s+2}{s+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{s+2} & -\frac{1}{s}\\ s & \frac{1}{s+2}\end{bmatrix}$$

$$=\frac{s(s+1)}{s^2+5s+2}\begin{bmatrix}\frac{s+3}{(s+2)^2}+\frac{2}{s} & -\frac{s+3}{s(s+2)}+\frac{1}{s(s+2)}\\ -\frac{2}{s+2}+\frac{2(s+2)}{s+1} & -\frac{2}{s}+\frac{1}{s+1}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{(s+1)^2(3s+8)}{(s+2)^2(s^2+5s+2)} & -\frac{s+1}{s^2+5s+2}\\ \frac{s^3+6s^2+6s}{(s+2)(s^2+5s+2)} & -\frac{s+2}{s^2+5s+2}\end{bmatrix}$$

**1-12 已知差分方程为**

$$y(k+2)+3y(k+1)+2y(k)=2u(k+1)+3u(k)$$

**试将其用离散状态空间表达式表示，并使驱动函数 u 的系数 b(即控制列阵)为**

**（1）** $b=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

解法 1：

$$W(z)=\frac{2z+3}{z^2+3z+2}=\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z+2}$$

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}u(k)$$

$$y(k)=[1 \quad 1]x(k)$$

解法 2：

$$x_1(k+1)=x_2(k)$$
$$x_2(k+1)=-2x_1(k)-3x_2(k)+u$$
$$y(k)=3x_1(k)+2x_2(k)$$

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u(k)$$
$$y(k)=[3 \quad 2]x(k)$$

求 T,使得 $T^{-1}B=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ 得 $T^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ 所以 $T=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$$T^{-1}AT=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 0\\ -5 & -1\end{bmatrix}$$

$$CT=[3 \quad 2]\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=[3 \quad -1]$$

所以，状态空间表达式为

$$z(k+1)=\begin{bmatrix}-4 & 0\\ -5 & -1\end{bmatrix}z(k)+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}u(k)$$

$$y(k)=\begin{bmatrix}3 & -1\end{bmatrix}z(k)$$

# 第二章习题答案

2-1、证明：由

$$e^{(A+B)t}=I+(A+B)t+\frac{1}{2!}(A+B)^2t^2+\frac{1}{3!}(A+B)^3t^3+\cdots\cdots$$

$$=I+(A+B)t+\frac{1}{2!}(A^2+AB+BA+B^2)t^2+\cdots$$

$$+\frac{1}{3!}(A^3+A^2B+ABA+AB^2+BA^2+BAB+B^2A+B^3)t^3+\cdots$$

$$e^{At}\cdot e^{Bt}=(I+At+\frac{1}{2!}A^2t^2+\frac{1}{3!}A^3t^3+\cdots)\ (I+Bt+\frac{1}{2!}B^2t^2+\frac{1}{3!}B^3t^3+\cdots)$$

$$=I+(A+B)t+\frac{1}{2!}(A^2+2AB+B^2)t^2+\cdots$$

$$+(\frac{1}{3!}A^3+\frac{1}{2!}A^2B+\frac{1}{2!}AB^2+\frac{1}{3!}B^3)t^3+\cdots$$

将以上二式相减，得

$$e^{(A+B)t}-e^{At}\cdot e^{Bt}=\frac{1}{2!}(BA-AB)t^2+\frac{1}{3!}(BA^2+ABA+B^2A+BAB-2A^2B-2AB^2)t^3+\cdots$$

显然，只有 $AB=BA$，才有

$e^{(A+B)t}-e^{At}\cdot e^{Bt}=0$；

即 $e^{(A+B)t}=e^{At}\cdot e^{Bt}$ #

2-2、证明：(2-17)

由 $e^{At}=I+At+\frac{1}{2!}A^2t^2+\frac{1}{3!}A^3t^3+\cdots$

$$=\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&\ddots&\\&&&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\lambda_1t&&&\\&\lambda_2t&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_nt\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{2!}\lambda_1t^2&&&\\&\frac{1}{2!}\lambda_2t^2&&\\&&\ddots&\\&&&\frac{1}{2!}\lambda_nt^2\end{bmatrix}+\cdots$$

$$=\begin{bmatrix}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\lambda_1^kt^k&&&\\&\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\lambda_2^kt^k&&\\&&\ddots&\\&&&\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\lambda_n^kt^k\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}e^{\lambda_1t}&&&\\&e^{\lambda_2t}&&\\&&\ddots&\\&&&e^{\lambda_nt}\end{bmatrix}\ \#$$

证明：（2-18）

由 $e^{At}=I+At+\frac{1}{2!}A^2t^2+\frac{1}{3!}A^3t^3+\cdots$；

知∃可逆阵 $p$ ， $s.t\ \ p^{-1}Ap=\Lambda$ ，则 $A=p\Lambda p^{-1}$，且 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots$是特征根，可知

$$e^{At}=p\begin{bmatrix}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\lambda_1^k t^k & & & \\ & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\lambda_2^k t^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\lambda_n^k t^k\end{bmatrix}p^{-1}$$

$$=p\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t}\end{bmatrix}p^{-1}\ \ \#$$

另证：由 $\dot{x}=Ax$

若 $A$ 可对角化，则∃一变换阵 $p$ ，定义

$x=p\hat{x}$，则

$\dot{\hat{x}}=p^{-1}Ap\hat{x}=\Lambda\hat{x}$

其中 $\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$；

其解为：

$\hat{x}(t)=e^{\Lambda t}\hat{x}(0);$

$x(t)=p\hat{x}(t)=pe^{\Lambda t}p^{-1}x(0);$

又由 $x(t)=e^{At}x(0)$；

故 $e^{At}=pe^{\Lambda t}p^{-1}$ #

注意到

$$e^{A t}=I+A_i t+\frac{1}{2!}A_i{}^2 t^2+\frac{1}{3!}A_i{}^3 t^3+\cdots \qquad (1)$$ 将

由

$$A_i=\begin{bmatrix}\lambda_i & 1 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_i & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & 1\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i\end{bmatrix},$$

于是有

$$A_i{}^2=\begin{bmatrix}\lambda_i{}^2 & 2\lambda_i & 1 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_i{}^2 & 2\lambda_i & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \lambda_i{}^2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 2\lambda_i\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i{}^2\end{bmatrix};$$

$$A_i{}^3=\begin{bmatrix}\lambda_1{}^3 & 3\lambda_1{}^2 & 3\lambda_1 & 1 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_1{}^3 & 3\lambda_1{}^2 & 3\lambda_1 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1{}^3 & 3\lambda_1{}^2 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1{}^3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_1{}^3\end{bmatrix}$$

------

将以上求得的 $A_i$ 及其 $A_i$ 诸次方的表达式带入（1）式，令 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\lambda_i{}^k t^k=\Psi$ 有

$$e^{At}=\begin{bmatrix}\Psi & \frac{\partial\Psi}{\partial\lambda_i} & \frac{\partial^2\Psi}{2!\partial\lambda_i{}^2} & \cdots & \frac{\partial^{m-1}\Psi}{(m-1)!\partial\lambda_i{}^{m-1}}\\ 0 & \Psi & \frac{\partial\Psi}{\partial\lambda_i} & \cdots & \frac{\partial^{m-2}\Psi}{(m-2)!\partial\lambda_i{}^{m-2}}\\ 0 & 0 & \Psi & \cdots & \frac{\partial^{m-3}\Psi}{(m-3)!\partial\lambda_i{}^{m-3}}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \Psi\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2}e^{\lambda t} & \cdots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}e^{\lambda t}\\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \cdots & \frac{t^{m-2}}{(m-2)!}e^{\lambda t}\\ 0 & 0 & e^{\lambda t} & \cdots & \frac{t^{m-3}}{(m-3)!}e^{\lambda t}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda t}\end{bmatrix}=e^{\lambda t}\begin{bmatrix}1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{m-2}}{(m-2)!}\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \frac{t^{m-3}}{(m-3)!}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}$$

这是第 $i$ 个小块的情况，其余小块类似，得证。#

证明：（2-20）
采用拉氏变换法：

$$e^{At} = L^{-1}((sI - A)^{-1})$$

而

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s-\sigma & \omega \\ -\omega & s-\sigma \end{bmatrix} / ((s-\sigma)^2 + \omega^2)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\frac{1}{s-\sigma+j\omega} + \frac{1}{s-\sigma-j\omega}) & \frac{1}{2j}(\frac{1}{s-\sigma-j\omega} - \frac{1}{s-\sigma+j\omega}) \\ -\frac{1}{2j}(\frac{1}{s-\sigma-j\omega} - \frac{1}{s-\sigma+j\omega}) & \frac{1}{2}(\frac{1}{s-\sigma+j\omega} + \frac{1}{s-\sigma-j\omega}) \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = L^{-1}((sI - A)^{-1})$$

$$= e^{\sigma t} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) & \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \\ -\frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) & \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) \end{bmatrix}$$

由 Eular 公式，有

$$e^{At} = e^{\sigma t} \begin{bmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{bmatrix} \quad \#$$

**2-4 用三种方法计算以下矩阵指数函数 $e^{At}$ 。**

（2） $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

解：第一种方法：　　令　　$|\lambda I - A| = 0$

则　$\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ -4 & \lambda-1 \end{vmatrix} = 0$ ，即 $(\lambda-1)^2 - 4 = 0$ 。

求解得到 $\lambda_1 = 3$， $\lambda_2 = -1$

当 $\lambda_1 = 3$ 时，特征矢量 $p_1 = \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{bmatrix}$

由　$Ap_1 = \lambda_1 p_1$，得 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3p_{11} \\ 3p_{21} \end{bmatrix}$

即 $\begin{cases} p_{11} + p_{21} = 3p_{11} \\ 4p_{11} + p_{21} = 3p_{21} \end{cases}$ ，可令 $p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

当 $\lambda_2=-1$ 时，特征矢量 $p_2=\begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix}$

由 $Ap_2=\lambda_2 p_2$，得 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -p_{12} \\ -p_{22} \end{bmatrix}$

即 $\begin{cases} p_{12}+p_{22}=-p_{12} \\ 4p_{12}+p_{22}=-p_{22} \end{cases}$，可令 $p_2=\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

则 $T=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$，$T^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$

$$e^{At}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{3t}+\frac{1}{2}e^{-t} & \frac{1}{4}e^{3t}-\frac{1}{4}e^{-t} \\ e^{3t}+e^{-t} & \frac{1}{2}e^{3t}+\frac{1}{2}e^{-t} \end{bmatrix}$$

第二种方法，即拉氏反变换法：

$$sI-A=\begin{bmatrix} s-1 & -1 \\ -4 & s-1 \end{bmatrix}$$

$$\left[sI-A\right]^{-1}=\frac{1}{(s-3)(s+1)}\begin{bmatrix} s-1 & 1 \\ 4 & s-1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \dfrac{s-1}{(s-3)(s+1)} & \dfrac{1}{(s-3)(s+1)} \\ \dfrac{4}{(s-3)(s+1)} & \dfrac{s-1}{(s-3)(s+1)} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-3}+\frac{1}{s+1}\right) & \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s-3}+\frac{1}{s+1}\right) \\ \frac{1}{s-3}-\frac{1}{s+1} & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-3}+\frac{1}{s+1}\right) \end{bmatrix}$$

$$e^{At}=L^{-1}\left[\left(sI-A\right)^{-1}\right]=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{3t}+\frac{1}{2}e^{-t} & \frac{1}{4}e^{3t}-\frac{1}{4}e^{-t} \\ e^{3t}-e^{-t} & \frac{1}{2}e^{3t}+\frac{1}{2}e^{-t} \end{bmatrix}$$

第三种方法，即凯莱—哈密顿定理

由第一种方法可知 $\lambda_1=3$，$\lambda_2=-1$

$$\begin{bmatrix}\partial_0\\ \partial_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 1 & -1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}e^{3t}\\ e^{-t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & \frac{3}{4}\\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{3t}\\ e^{-t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}e^{3t}+\frac{3}{4}e^{-t}\\ \frac{1}{4}e^{3t}-\frac{1}{4}e^{-t}\end{bmatrix}$$

$$e^{At}=\left(\frac{1}{4}e^{3t}+\frac{3}{4}e^{-t}\right)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\left(\frac{1}{4}e^{3t}+\frac{3}{4}e^{-t}\right)\begin{bmatrix}1 & 1\\ 4 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}e^{3t}+\frac{1}{2}e^{-t} & \frac{1}{4}e^{3t}-\frac{1}{4}e^{-t}\\ e^{3t}-e^{-t} & \frac{1}{2}e^{3t}+\frac{1}{2}e^{-t}\end{bmatrix}$$

**2-5 下列矩阵是否满足状态转移矩阵的条件，如果满足，试求与之对应的 A 阵。**

**（3）** $\Phi(t)=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & 2e^{-2t}-2e^{-t}\\ e^{-t}-e^{-2t} & 2e^{-2t}-e^{-t}\end{bmatrix}$ **（4）** $\Phi(t)=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\left(e^{-t}+e^{3t}\right) & \frac{1}{4}\left(-e^{-t}+e^{3t}\right)\\ -e^{-t}+e^{3t} & \frac{1}{2}\left(e^{-t}+e^{3t}\right)\end{bmatrix}$

解：（3）因为 $\Phi(0)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I$，所以该矩阵满足状态转移矩阵的条件

$$A=\dot{\Phi}(t)\Big|_{t=0}=\begin{bmatrix}-2e^{-t}+2e^{-2t} & -4e^{-2t}+2e^{-t}\\ -e^{-t}+2e^{-2t} & -4e^{-2t}+e^{-t}\end{bmatrix}\Bigg|_{t=0}=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & -3\end{bmatrix}$$

（4）因为 $\Phi(0)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I$，所以该矩阵满足状态转移矩阵的条件

$$A=\dot{\Phi}(t)\Big|_{t=0}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{3}{2}e^{3t} & \frac{1}{4}e^{-t}+\frac{3}{4}e^{3t}\\ e^{-t}+3e^{3t} & -\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{3}{2}e^{3t}\end{bmatrix}\Bigg|_{t=0}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 4 & 1\end{bmatrix}$$

**2-6 求下列状态空间表达式的解：**

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=(1,0)x$$

初始状态 $x(0)=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$，输入 $u(t)$ 时单位阶跃函数。

解： $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

$$sI-A=\begin{bmatrix}s & -1\\ 0 & s\end{bmatrix}$$

$$(sI-A)^{-1}=\frac{1}{s^2}\begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t)=e^{At}=L^{-1}\left[(sI-A)^{-1}\right]=\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

因为 $B=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ， $u(t)=I(t)$

$$x(t)=\Phi(t)x(0)+\int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}+\int_0^t \begin{bmatrix} 1 & t-\tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}d\tau$$

$$=\begin{bmatrix} t+1 \\ 1 \end{bmatrix}+\int_0^t \begin{bmatrix} t-\tau \\ 1 \end{bmatrix}d\tau$$

$$=\begin{bmatrix} t+1 \\ 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{1}{2}t^2 \\ t \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}t^2+t+1 \\ t+1 \end{bmatrix}$$

$$y=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}x=\frac{1}{2}t^2+t+1$$

2-7 考虑如下式给出的系统：

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

证明：（1）脉冲相应：$u(t) = K\delta(t)$， $x(0_) = x_0$时，

由状态方程解为：

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

把$t_0 = 0_$带入，有

$$x(t) = e^{At}x(0\_) + \int_{0\_}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

带入$u(t) = K\delta(t)$，有

$$x(t) = e^{At}x(0\_) + \int_{0\_}^{t} e^{A(t-\tau)}BK\delta(\tau)d\tau \quad \text{(考虑到}\delta\text{函数的特点)}$$

$$= e^{At}x_0 + e^{At}BK$$

(2)阶跃响应：
由状态方程解为：

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

把$t_0 = 0_$带入，有

$$x(t) = e^{At}x(0\_) + \int_{0\_}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$= e^{At}x_0 + e^{At}\int_{0\_}^{t}(I - A\tau + \frac{A^2\tau^2}{2!} - \cdots)d\tau BK$$，积分，有

上式得 $=e^{At}x_0+e^{At}(It-\frac{At^2}{2!}+\frac{A^2t^3}{3!}-\cdots)BK$

$$=e^{At}x_0+e^{At}[-(A^{-1})(e^{-At}-I)]BK$$

$$=e^{At}x_0+A^{-1}(e^{At}-I)BK$$

（3）斜坡响应：

由状态方程解为：

$$x(t)=e^{A(t-t_0)}x(t_0)+\int_{t_0}^{t}e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

把 $t_0=0\_$， $u(t)=kt\times1(t)$ 带入，有

$$x(t)=e^{At}x(0\_)+\int_{0\_}^{t}e^{A(t-\tau)}\tau d\tau BK$$

$$=e^{At}x_0+e^{At}\int_{0\_}^{t}(I-A\tau+\frac{A^2\tau^2}{2!}-\cdots)\tau d\tau BK$$

$$=e^{At}x_0+e^{At}(\frac{I}{2}t^2-\frac{2A}{3!}t^3+\frac{3A^2t^4}{4!}-\cdots)BK$$

$$=e^{At}x_0+A^{-2}(e^{At}-I-At)BK$$

$$=e^{At}x_0+[A^{-2}(e^{At}-I)-A^{-1}t]BK$$

2-8（略）

**2-9 有系统如图 2.2 所示，试求离散化的状态空间表达式。设采样周期分别为 T=0.1s 和 1s，而 $u_1$ 和 $u_2$ 为分段常数。**

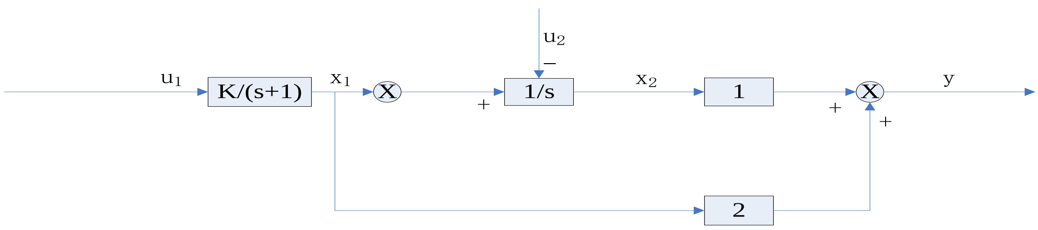
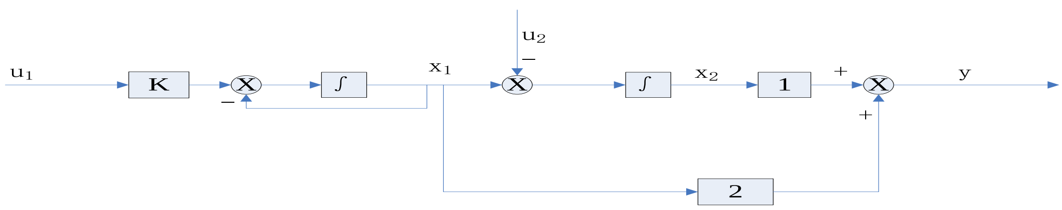



图 2.2　系统结构图

解：将此图化成模拟结构图




列出状态方程

$$\dot{x}_1 = ku_1 - x_1$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - u_2$$

$$y = x_2 + 2x_1$$

$$x = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

则离散时间状态空间表达式为

$$x(k+1) = G(T)x(k) + H(T)u(k)$$

$$y(k) = cx(k) + Du(k)$$

由 $G(T) = e^{At}$ 和 $H(T) = \int_0^T e^{At} dtB$ 得：

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad C^T = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = L^{-1}\left[(sI - A)^{-1}\right] = L^{-1}\left\{\begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} e^{-T} & 0 \\ 1-e^{-T} & 1 \end{bmatrix}$$

$$H = \int_0^T e^{At} dt = \int_0^T \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 1-e^{-T} & 1 \end{bmatrix} dt \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-e^{-T} & 0 \\ T-1+e^{-T} & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k\left(1-e^{-T}\right) & 0 \\ k\left(T-1+e^{-T}\right) & -T \end{bmatrix}$$

当 T=1 时 $$x(k+1) = \begin{bmatrix} e^{-1} & 0 \\ 1-e^{-1} & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} k\left(1-e^{-1}\right) & 0 \\ ke^{-1} & -1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k+1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} x(k)$$

当 T=0.1 时 $$x(k+1) = \begin{bmatrix} e^{-0.1} & 0 \\ 1-e^{-0.1} & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} k\left(1-e^{-0.1}\right) & 0 \\ k\left(e^{-0.1}-0.9\right) & -0.1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k+1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} x(k)$$

2-10 解：G 的特征根为 3/8，5/8；对应的 P 为

$$p=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}；\ p^{-1}=\begin{bmatrix}0.5 & -0.5\\ 0.5 & 0.5\end{bmatrix};$$

$$\Phi(k)=G^k=p\Lambda^k p^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(\frac{3}{8})^k & 0\\ 0 & (\frac{5}{8})^k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.5 & -0.5\\ 0.5 & 0.5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(\frac{3}{8})^k+\frac{1}{2}(\frac{5}{8})^k & -\frac{1}{2}(\frac{3}{8})^k+\frac{1}{2}(\frac{5}{8})^k\\ -\frac{1}{2}(\frac{3}{8})^k+\frac{1}{2}(\frac{5}{8})^k & \frac{1}{2}(\frac{3}{8})^k+\frac{1}{2}(\frac{5}{8})^k\end{bmatrix}$$

由 $x(k)=\Phi(k)x(0)+\sum_{j=0}^{k-1}\Phi(j)Hu(k-j-1)$

由初值和输入可递推计算，得结果如下： $x(1)=\Phi(1)x(0)+\Phi(0)Hu(0)$

$$=\begin{bmatrix}1/2 & 1/8\\ 1/8 & 1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1/8\\ 19/8\end{bmatrix}$$

$x(2)=\Phi(2)x(0)+\Phi(0)Hu(1)+\Phi(1)Hu(0)$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(\frac{3}{8})^2+\frac{1}{2}(\frac{5}{8})^2 & -\frac{1}{2}(\frac{3}{8})^2+\frac{1}{2}(\frac{5}{8})^2\\ -\frac{1}{2}(\frac{3}{8})^2+\frac{1}{2}(\frac{5}{8})^2 & \frac{1}{2}(\frac{3}{8})^2+\frac{1}{2}(\frac{5}{8})^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}T\\ e^{-T}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{8}\\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}T+0.2344\\ e^{-T}+1.1719\end{bmatrix}$$

2-11.

首先写出 $G_0(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}$ 的状态空间表达式

$$G_0(s)=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}$$

$$A_0=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix} \quad B_0=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

$$C_0=\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}$$

求其状态转移矩阵 $e^{A_0 t}=\begin{bmatrix}e^{-t} & 0\\ 0 & e^{-2t}\end{bmatrix}$

对$(A_0, B_0, C_0)$进行离散化，包括零阶保持器。

$$G_0=e^{A_0T}=\begin{bmatrix}e^{-T} & 0\\ 0 & e^{-2T}\end{bmatrix}$$

$$H_0=\int_0^T e^{A_0 t}B_0\,dt=\int_0^T\begin{bmatrix}e^{-t}\\ e^{-2t}\end{bmatrix}dt=\begin{bmatrix}1-e^{-T}\\ \frac{1}{2}(1-e^{-2T})\end{bmatrix}$$

(1) 系统的状态空间表达式

$$x_1(k+1)=e^{-T}x_1(k)+(1-e^{-T})u(k)$$

$$x_2(k+1)=e^{-2T}x_2(k)+\frac{1}{2}(1-e^{-2T})u(k)$$

$$u(k)=r(k)-y(k)=r(k)-(x_1(k)-x_2(k))$$

代入得:

$$x_1(k+1)=(2e^{-T}-1)x_1(k)+(1-e^{-T})x_2(k)+(1-e^{-T})r(k)$$

$$x_2(k+1)=-\frac{1}{2}(1-e^{-2T})x_1(k)+\frac{1}{2}(1+e^{-2T})x_2(k)+\frac{1}{2}(1-e^{-2T})r(k)$$



$$G(T)=\begin{bmatrix}2e-1 & 1-e\\ -\frac{1}{2}(1-e^{-2T}) & \frac{1}{2}(1+e^{-2T})\end{bmatrix}$$

$$H(T)=\begin{bmatrix}1-e^{-T}\\ \frac{1}{2}(1-e^{-2T})\end{bmatrix}$$

(2) 当 $T=0.1s$ 时

$$G=\begin{bmatrix}0.8097 & 0.0952\\ -0.0906 & 0.9094\end{bmatrix} \quad H=\begin{bmatrix}0.0952\\ 0.0906\end{bmatrix}$$

(3) $k=0$ $x_1=0$ $x_2=0$ $y(0)=0$

$k=1$ $x_1=0.0952$ $x_2=0.0906$ $y(1)=0.0045$

$k=2$ $x_1=0.1808$ $x_2=0.1644$ $y(2)=0.0164$

$k=3$ $x_1=0.2572$ $x_2=0.2238$ $y(3)=0.0335$

$k=4$ $x_1=0.3247$ $x_2=0.2708$ $y(4)=0.0539$

$k=5$ $x_1=0.3839$ $x_2=0.3075$ $y(5)=0.0764$

……

$k=100$ $x_1=0.6667$ $x_2=0.3333$ $y(100)=0.3333$

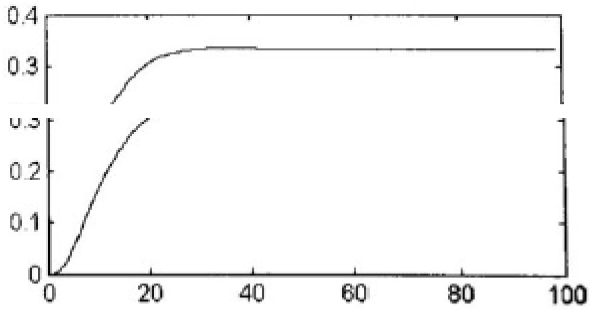
……

<2>. 当 $T=0.1s$ 时

$$G=\begin{bmatrix}0.8097 & 0.0952\\ -0.0906 & 0.9094\end{bmatrix}\quad H=\begin{bmatrix}0.0952\\ 0.0906\end{bmatrix}$$

<3>

| | | | |
|---|---|---|---|
| $k=0$ | $x_1=0$ | $x_2=0$ | $y(0)=0$ |
| $k=1$ | $x_1=0.0952$ | $x_2=0.0906$ | $y(1)=0.0045$ |
| $k=2$ | $x_1=0.1808$ | $x_2=0.1644$ | $y(2)=0.0164$ |
| $k=3$ | $x_1=0.2572$ | $x_2=0.2238$ | $y(3)=0.0335$ |
| $k=4$ | $x_1=0.3247$ | $x_2=0.2708$ | $y(4)=0.0539$ |
| $k=5$ | $x_1=0.3839$ | $x_2=0.3075$ | $y(5)=0.0764$ |
| ······ | | | |
| $k=100$ | $x_1=0.6667$ | $x_2=0.3333$ | $y(100)=0.3333$ |
| ······ | | | |




<4>. 在采样间隔内，$G_0(s)$ 的输入 $u$ 不变，

此时在 $[0.2\quad 0.3]$ 时间区间内 $(A_0, B_0, C_0)$

的初始状态为 $x(2T)=\begin{bmatrix}0.1808\\ 0.1644\end{bmatrix}=x_0$

输入信号为 $u_0=r-y(2T)=0.9836$

以 $t_0=0.2s$ 为初始时刻，在 $t=0.25s$ 时

$$x(t)=e^{A_0(t-t_0)}x_0+\int_{t_0}^{t}e^{A_0(t-\tau)}B_0u_0d\tau$$

$$=\begin{bmatrix}e^{-(t-t_0)} & 0\\ 0 & e^{-2(t-t_0)}\end{bmatrix}x_0+\begin{bmatrix}1-e^{-(t-t_0)}\\ \frac{1}{2}(1-e^{-2(t-t_0)})\end{bmatrix}u_0$$

$$x(0.25)=\begin{bmatrix}0.2200\\ 0.1956\end{bmatrix}$$

$$y(0.25)=C_0x(0.25)=0.0244$$

# 第三章习题答案

**3-1 判断下列系统的状态能控性和能观测性。系统中 a,b,c,d 的取值对能控性和能观性是否有关，若有关，其取值条件如何？**

（1）系统如图 3.16 所示：

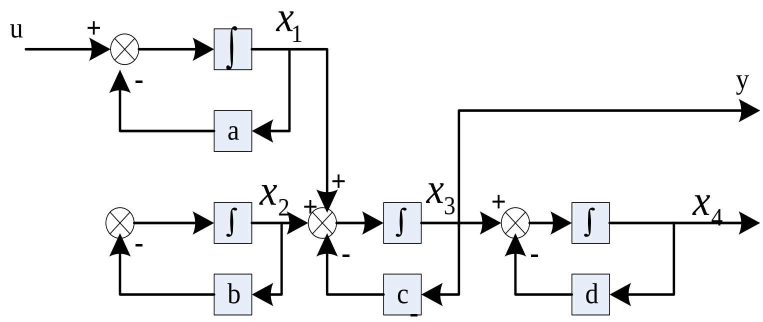



图3.16 系统模拟结构图

解：由图可得：

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -ax_1 + u \\
\dot{x}_2 &= -bx_2 \\
\dot{x}_3 &= -cx_3 + x_2 + x_1 = x_1 + x_2 - cx_3 \\
\dot{x}_4 &= x_3 - dx_4 \\
y &= x_3
\end{aligned}
$$

状态空间表达式为：

$$
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -c & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u
$$

$$
y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x
$$

由于 $\dot{x}_2$ 、 $\dot{x}_3$ 、 $\dot{x}_4$ 与 $u$ 无关，因而状态不能完全能控，为不能控系统。由于 $y$ 只与 $x_3$ 有关，因而系统为不完全能观的，为不能观系统。

（3）系统如下式：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 1\\ a & 0\\ b & 0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}c & 0 & d\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}x$$

解：如状态方程与输出方程所示，A 为约旦标准形。要使系统能控，控制矩阵 b 中相对于约旦块的最后一行元素不能为 0，故有 $a\neq 0,b\neq 0$ 。

要使系统能观，则 C 中对应于约旦块的第一列元素不全为 0，故有 $c\neq 0,d\neq 0$ 。

**3-2 时不变系统**

$$\dot{X}=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 1 & -3\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}X$$

**试用两种方法判别其能控性和能观性。**

解：方法一：

$$A=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 1 & -3\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{M}=\begin{bmatrix}\mathrm{B} & \mathrm{AB}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & -2 & -2\\ 1 & 1 & -2 & -2\end{bmatrix}$$

$rankM=1<2,$系统不能控。

$$\mathrm{N}=\begin{bmatrix}\mathrm{C}\\ \mathrm{CA}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\\ -2 & -2\\ -4 & 4\end{bmatrix}$$

$rankN=2,$系统能观。

方法二：将系统化为约旦标准形。

$$|\lambda\mathrm{I}-\mathrm{A}|=\begin{vmatrix}\lambda+3 & -1\\ -1 & \lambda+3\end{vmatrix}=(\lambda+3)^2-1=0$$

$\lambda_1=-2$，$\lambda_2=-4$

则状态矢量：$A_1P_1=\lambda_1P_1 \Rightarrow P_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

$$A_2P_2=\lambda_2P_2 \Rightarrow P_2=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

$$T=\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix},\quad T^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$T^{-1}AT=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3 & 1\\1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\0 & -4\end{bmatrix}$$

$$T^{-1}B=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$$

$$CT=\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}$$

$T^{-1}B$ 中有全为零的行，系统不可控。CT 中没有全为 0 的列，系统可观。

**3-3 确定使下列系统为状态完全能控和状态完全能观的待定常数$\alpha_i$和$\beta_i$**

$(1)A=\begin{bmatrix}\alpha_1 & 1\\0 & \alpha_2\end{bmatrix},b=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}$

解：构造能控阵：

$$M=\begin{bmatrix}b & Ab\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \alpha_1+1\\1 & \alpha_2\end{bmatrix}$$

要使系统完全能控，则$\alpha_1+1\neq\alpha_2$，即$\alpha_1-\alpha_2+1\neq 0$

构造能观阵：

$$N=\begin{bmatrix}C\\CA\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ \alpha_1 & 1-\alpha_2\end{bmatrix}$$

要使系统完全能观，则$1-\alpha_2\neq-\alpha_1$，即$\alpha_1-\alpha_2+1\neq 0$

**3-4 设系统的传递函数是**

$$\frac{y(s)}{u(s)}=\frac{s+a}{s^3+10s^2+27s+18}$$

（1）当 a 取何值时，系统将是不完全能控或不完全能观的？

（2）当 a 取上述值时，求使系统的完全能控的状态空间表达式。

（3）当 a 取上述值时，求使系统的完全能观的状态空间表达式。

解：(1) 方法 1 ： $W(s)=\dfrac{y(s)}{u(s)}=\dfrac{s+a}{(s+1)(s+3)(s+6)}$

系统能控且能观的条件为 W(s)没有零极点对消。因此当 a=1,或 a=3 或 a=6 时，系统为不能控或不能观。

方法 2：

$$\frac{y(s)}{u(s)}=\frac{s+a}{(s+1)(s+3)(s+6)}=\frac{\frac{a-1}{10}}{s+1}-\frac{\frac{a-3}{6}}{s+3}+\frac{\frac{a-6}{15}}{s+6}$$

$$\lambda_1=-1,\ \lambda_2=-3,\ \lambda_3=-6$$

$$\dot{X}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -6\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}\frac{a-1}{10} & -\frac{a-3}{6} & \frac{a-6}{15}\end{bmatrix}X$$

系统能控且能观的条件为矩阵 C 不存在全为 0 的列。因此当 a=1,或 a=3 或 a=6 时，系统为不能控或不能观。

（2）当 a=1, a=3 或 a=6 时，系统可化为能控标准 I 型

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -18 & -27 & -10\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}a & 1 & 0\end{bmatrix}x$$

（3）根据对偶原理，当 a=1, a=2 或 a=4 时，系统的能观标准 II 型为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -18\\ 1 & 0 & -27\\ 0 & 1 & -10\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}a\\1\\0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}x$$

**3-6 已知系统的微分方程为：** $\dddot{y}+6\ddot{y}+11\dot{y}+6y=6u$

**试写出其对偶系统的状态空间表达式及其传递函数。**

解： $a_0=6,\ a_1=11,\ a_2=6,\ a_3=3,\ b_0=6$

系统的状态空间表达式为

$$
\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u
$$
$$
y=\begin{bmatrix}6 & 0 & 0\end{bmatrix}x
$$

传递函数为

$$
W(s)=C(sI-A)^{-1}B=\begin{bmatrix}6 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s & -1 & 0\\ 0 & s & -1\\ 6 & 11 & s+6\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\frac{6}{s^3+6s^2+11s+6}
$$

其对偶系统的状态空间表达式为：

$$
\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -6\\ 1 & 0 & -11\\ 0 & 1 & -6\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}6\\0\\0\end{bmatrix}u
$$
$$
y=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}x
$$

传递函数为$W(s)=\dfrac{6}{s^3-6s^2-11s+6}$

3-7. 能控标准型为：

$$
A_c=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -10 & 5\end{bmatrix};\quad b_c=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}
$$

3-8. 能观标准型为：

$$
A_o=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & 2\end{bmatrix};\quad b_o=\begin{bmatrix}4\\-1\end{bmatrix};
$$
$$
C_o=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix};
$$

**3-9 已知系统的传递函数为**

$$
W(s)=\frac{s^2+6s+8}{s^2+4s+3}
$$

**试求其能控标准型和能观标准型。**

解：$W(s)=\dfrac{s^2+6s+8}{s^2+4s+3}=1+\dfrac{2s+5}{s^2+4s+3}$

系统的能控标准 I 型为

$$
\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & -4\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u
$$
$$
y=\begin{bmatrix}5 & 2\end{bmatrix}x+u
$$

能观标准 II 型为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & -3\\ 1 & -4\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}5\\ 2\end{bmatrix}u$$
$$y=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}x+u$$

**3-10 给定下列状态空间方程，试判别其是否变换为能控和能观标准型。**

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -2 & -3 & 0\\ -1 & 1 & -3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 2\end{bmatrix}u$$
$$y=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}x$$

解：$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -2 & -3 & 0\\ -1 & 1 & -3\end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 2\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

$$M=\begin{bmatrix}b & Ab & A^2b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & -3\\ 1 & -2 & 7\\ 2 & -5 & 11\end{bmatrix}$$

$rankM=2<3$，系统为不能控系统，不能变换为能控标准型。

$$N=\begin{bmatrix}C\\ CA\\ CA^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ -1 & -1 & -3\\ 1 & -7 & 9\end{bmatrix}$$

$rankN=3$，系统为能观系统，可以变换为能观标准型。

**3-11 试将下列系统按能控性进行分解**

（**1**）$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -4 & 3\end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\end{bmatrix}$

解：

$M=\begin{bmatrix}b & Ab & A^2b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1 & -4\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 9\end{bmatrix}$　　rankM=2<3，系统不是完全能控的。

构造奇异变换阵 $R_c$：$R_1=b=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$，$R_2=Ab=\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 3\end{bmatrix}$，$R_3=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$，其中 $R_3$ 是任意的，只要满足 $R_c$ 满秩。

即 $R_c=\begin{bmatrix}0&-1&0\\0&0&1\\1&3&0\end{bmatrix}$ 得 $R_c^{-1}=\begin{bmatrix}3&0&1\\-1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$

$\overline{A}=R_c^{-1}AR_c=\begin{bmatrix}0&-3&2\\1&4&-2\\0&0&1\end{bmatrix}$ $\overline{b}=R_c^{-1}b=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ $\overline{c}=cR_c=\begin{bmatrix}1&2&-1\end{bmatrix}$

**3-12 试将下列系统按能观性进行结构分解**

（1） $A=\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&1&0\\0&-4&3\end{bmatrix},b=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}1&-1&1\end{bmatrix}$

解： 由已知得 $A=\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&1&0\\0&-4&3\end{bmatrix},b=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}1&-1&1\end{bmatrix}$

则有 $N=\begin{bmatrix}C\\CA\\CA^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&-3&2\\4&-7&4\end{bmatrix}$

rank N=2<3，该系统不能观

构造非奇异变换矩阵 $R_0^{-1}$，有 $R_0^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&-3&2\\0&0&1\end{bmatrix}$

则 $R_0=\begin{bmatrix}3&-1&-1\\2&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

$\dot{\tilde{x}}=R_0^{-1}AR_0\tilde{x}+R_0^{-1}bu=\begin{bmatrix}0&1&0\\-2&3&0\\-7&3&2\end{bmatrix}\tilde{x}+\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}u$

$y=cR_0\tilde{x}=\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}\tilde{x}$

**3-13 试将下列系统按能控性和能观性进行结构分解**

（1）$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&2&3\\-2&0&1\end{bmatrix},b=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}1&1&2\end{bmatrix}$

解：由已知得 $M=\begin{bmatrix}A&Ab&Ab^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&12&26\\2&0&-2\end{bmatrix}$

rank M=3，则系统能控

$$N=\begin{bmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \\ -7 & 4 & 11 \end{bmatrix}$$

rank N=3，则系统能观

所以此系统为能控并且能观系统

取 $T_{c2}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 12 & 26 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$，则 $T_{c2}^{-1}=\begin{bmatrix} -3 & \frac{1}{4} & \frac{7}{4} \\ 7 & -\frac{1}{2} & -3 \\ -3 & \frac{1}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}$

则 $\overline{A}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$， $B=T_{c2}^{-1}b=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$， $\overline{c}=cT_{c2}=\begin{bmatrix} 7 & 13 & 23 \end{bmatrix}$

**3-14 求下列传递函数阵的最小实现。**

（1） $w(s)=\dfrac{1}{s+1}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

解： $\alpha_0=1$， $B_0=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$， $A_c=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$B_c=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$， $C_c=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$， $D_c=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

系统能控不能观

取 $R_0^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，则 $R_0=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

所以 $\hat{A}=R_0^{-1}AR_0=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$， $\hat{B}=R_0^{-1}B_c=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\hat{C}=C_cR_0=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$， $\hat{D}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

所以最小实现为 $\hat{A}_m=1$， $\hat{B}_m=\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$， $\hat{C}_m=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$， $\hat{D}_m=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

验证： $\hat{C}_m\left(sI-\hat{A}_m\right)^{-1}\hat{B}_m=\dfrac{1}{s+1}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}=w(s)$

**3-15 设$\Sigma_1$和$\Sigma_2$是两个能控且能观的系统**

$$\Sigma_1\text{：}\ A_1=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & -4\end{bmatrix},\ b_1=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},\ C_1=\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}$$

$$\Sigma_2\text{：}\ A_2=-2,\ b_2=1,\ C_2=1$$

（1）试分析由$\Sigma_1$和$\Sigma_2$所组成的串联系统的能控性和能观性，并写出其传递函数；

（2）试分析由$\Sigma_1$和$\Sigma_2$所组成的并联系统的能控性和能观性，并写出其传递函数。

解：

（1）$\Sigma_1$和$\Sigma_2$串联

当$\Sigma_1$的输出$y_1$是$\Sigma_2$的输入$u_2$时，$\dot{x}_3=-2x_3+2x_1+x_2$

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -3 & -4 & 0\\ 2 & 1 & -2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}u,\quad y=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}x$$

$$M=\begin{bmatrix}b & Ab & A^2b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & -4\\ 1 & -4 & 13\\ 0 & 1 & -4\end{bmatrix}$$

则 rank M=2<3，所以系统不完全能控。

$$W(s)=C(sI-A)^{-1}B=\frac{s+2}{(s+2)(s+3)(s+4)}=\frac{1}{s^2+7s+12}$$

当$\Sigma_2$得输出$y_2$是$\Sigma_1$的输入$u_1$时

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ -3 & -4 & 1\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u,\quad y=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\end{bmatrix}x$$

因为 $M=\begin{bmatrix}b & Ab & A^2b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -6\\ 1 & -2 & -4\end{bmatrix}$

rank M=3　　则系统能控

因为$N=\begin{bmatrix}c\\ cA\\ cA^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ -3 & -2 & 1\\ 6 & 5 & 4\end{bmatrix}$

rank N=2<3　　　则系统不能观

$$W(s)=C(sI-A)^{-1}B=\frac{1}{s^2+7s+12}$$

（2）$\Sigma_1$ 和 $\Sigma_2$ 并联

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -3 & -4 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}u，\quad y=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\end{bmatrix}x$$

$$M=\begin{bmatrix}A & Ab & Ab^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & -4\\ 1 & -4 & 13\\ 1 & -2 & -4\end{bmatrix}$$

因为 rank M=3，所以系统完全能控

$$N=\begin{bmatrix}c\\ cA\\ cA^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ -3 & -2 & -2\\ 6 & 5 & 4\end{bmatrix}$$

因为 rank N=3，所以系统完全能观

$$w(s)=C(sI-A)^{-1}B=\frac{2\left(s+2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(s+2-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

3-16. 设 $W_0(s)=\dfrac{K_0\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}$ $(m\le n)$

若系统不能控或(和)不能观，则 $W_0(s)$ 有零极点相消，

即 $\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)$ 与 $\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)$ 有公因子。

若系统能控且能观，则无零极点相消。

闭环系统的传递函数为

$$W_f(s)=\frac{K_0\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)-K_0\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}$$

显然 $W_f(s)$ 与 $W_0(s)$ 能相消的零极点是相同的。所以

所以图中开环及闭环系统为能控、能观性一致。

# 第四章习题答案

**4-1 判断下列二次型函数的符号性质：**

（1）$Q(x)=-x_1^2-3x_2^2-11x_3^2+2x_1x_2-x_2x_3-2x_1x_3$

（2）$v(x)=x_1^2+4x_2^2+x_3^2-2x_1x_2-6x_2x_3-2x_1x_3$

解：（1）由已知得

$$Q(x)=\begin{bmatrix}-x_1+x_2-x_3 & x_1-3x_2-\frac{1}{2}x_3 & -x_1-\frac{1}{2}x_2-11x_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\ 1 & -3 & -\frac{1}{2}\\ -1 & -\frac{1}{2} & -11\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

$$\Delta_1=-1<0，\ \Delta_2=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & -3\end{vmatrix}=2>0，\ \Delta_3=\begin{vmatrix}-1 & 1 & -1\\ 1 & -3 & -\frac{1}{2}\\ -1 & -\frac{1}{2} & -11\end{vmatrix}=-\frac{71}{4}<0$$

因此$Q(x)$是负定的

（2）由已知得

$$Q(x)=\begin{bmatrix}x_1-x_2-x_3 & -x_1+4x_2-3x_3 & -x_1-3x_2+x_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 4 & -3\\ -1 & -3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

$$\Delta_1=1>0，\ \Delta_2=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 4\end{vmatrix}=3>0，\ \Delta_3=\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 4 & -3\\ -1 & -3 & 1\end{vmatrix}=-16<0$$

因此$Q(x)$不是正定的

**4-2 已知二阶系统的状态方程：**

$$\dot{x}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}x$$

试确定系统在平衡状态处大范围渐进稳定的条件。

解：方法（1）：要使系统在平衡状态处大范围渐进稳定，则要求满足 A 的特征值均具有负实部。

$$\left|\lambda I-A\right|=\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} \end{vmatrix}$$

即：
$$=\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$
$$=0$$

有解，且解具有负实部。

即：$a_{11}+a_{22}<0$且$a_{11}a_{22}>a_{12}a_{21}$

方法（2）：系统的原点平衡状态 $x_e=0$ 为大范围渐近稳定，等价于 $A^TP+PA=-Q$。

取 $Q=I$，令 $P=\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix}$，则带入 $A^TP+PA=-Q$，得到

$$\begin{bmatrix} 2a_{11} & 2a_{21} & 0 \\ a_{12} & a_{11}+a_{22} & a_{21} \\ 0 & 2a_{12} & 2a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_{11} \\ P_{12} \\ P_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

若 $\begin{vmatrix} 2a_{11} & 2a_{21} & 0 \\ a_{12} & a_{11}+a_{22} & a_{21} \\ 0 & 2a_{12} & 2a_{22} \end{vmatrix}=4(a_{11}+a_{22})(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\neq 0$，则此方程组有唯一解。即

$$P=-\frac{1}{2(a_{11}+a_{22})\left|A\right|}\begin{bmatrix} \left|A\right|+a_{21}^2+a_{22}^2 & -(a_{12}a_{22}+a_{21}a_{11}) \\ -(a_{12}a_{22}+a_{21}a_{11}) & \left|A\right|+a_{11}^2+a_{12}^2 \end{bmatrix}$$

其中 $\det A=\left|A\right|=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$

要求 $P$ 正定，则要求

$$\Delta_1=P_{11}=\frac{\left|A\right|+a_{21}^2+a_{22}^2}{-2(a_{11}+a_{22})\left|A\right|}>0$$

$$\Delta_2=\left|P\right|=\frac{(a_{11}+a_{22})^2+(a_{12}-a_{21})^2}{-4(a_{11}+a_{22})}>0$$

因此 $a_{11}+a_{22}<0$，且 $\det A>0$

**4-3 试用 lyapunov 第二法确定下列系统原点的稳定性。**

（1）$\dot{x}=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}x$

（2）$\dot{x}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}x$

解：（1）系统唯一的平衡状态是 $x_e=0$。选取 Lyapunov 函数为 $V(x)=x_1^2+x_2^2>0$，则

$$\begin{aligned}\dot{V}(x)&=2x_1\dot{x}_1+2x_2\dot{x}_2\\&=2x_1(-x_1+2x_2)+2x_2(2x_1-3x_2)\\&=-2x_1^2+6x_1x_2-6x_2^2\\&=-2(x_1-\frac{3}{2}x_2)^2-\frac{3}{2}x_2^2<0\end{aligned}$$

$\dot{V}(x)$ 是负定的。$\|x\|\to\infty$，有 $V(x)\to\infty$。即系统在原点处大范围渐近稳定。

（2）系统唯一的平衡状态是 $x_e=0$。选取 Lyapunov 函数为 $V(x)=x_1^2+x_2^2>0$，则

$$\begin{aligned}\dot{V}(x)&=2x_1\dot{x}_1+2x_2\dot{x}_2\\&=2x_1(-x_1+x_2)+2x_2(-x_1-x_2)\\&=-2x_1^2-2x_2^2<0\end{aligned}$$

$\dot{V}(x)$ 是负定的。$\|x\|\to\infty$，有 $V(x)\to\infty$。即系统在原点处大范围渐近稳定。

**4-6 设非线性系统状态方程为：**

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=x_2\\\dot{x}_2&=-a(1+x_2)^2x_2-x_1,a>0\end{aligned}$$

试确定平衡状态的稳定性。

解：若采用克拉索夫斯基法，则依题意有：

$$f(x)=\begin{bmatrix}x_2\\-a(1+x_2)^2x_2-x_1\end{bmatrix}$$

$$J(x)=\frac{\partial f(x)}{\partial x^T}=\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & -a-4ax_2-3ax_2^2\end{bmatrix}$$

取 $P=I$

$$\begin{aligned}-Q(x)&=J^T(x)+J(x)\\&=\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & -a-4ax_2-3ax_2^2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & -a-4ax_2-3ax_2^2\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & -2a-8ax_2-6ax_2^2\end{bmatrix}\end{aligned}$$

很明显，$Q(x)$ 的符号无法确定，故改用李雅普诺夫第二法。选取 Lyapunov 函数为

$V(x)=x_1^2+x_2^2>0$，则

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(x) &= 2x_1\dot{x}_1+2x_2\dot{x}_2 \\
&= 2x_1x_2+2x_2(-x_1-a(1+x_2)^2x_2) \\
&= -2a(1+x_2^2)x_2^2<0
\end{aligned}
$$

$\dot{V}(x)$是负定的。$\|x\|\to\infty$，有$V(x)\to\infty$。即系统在原点处大范围渐近稳定。

4-7.

$G=\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\ -3 & -2 & -3\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$，系统平衡状态为$x_e=[0\quad 0\quad 0]^T$

由方程 $G^TPG-P=-I$ 解出 $P=\begin{bmatrix}-19/78 & -10/39 & -1/2\\ -10/39 & -49/78 & -19/13\\ -1/2 & -19/13 & -121/26\end{bmatrix}$，不定号，因此系统不渐进稳定。

实际上，该系统的特征值为 0.1173 + 2.6974i ，0.1173 - 2.6974i ，-1.2346 都在单位圆外，系统是不稳定的。

**4-9 设非线性方程：**

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= -x_1^3-x_2
\end{aligned}
$$

**试用克拉索夫斯基法确定系统原点的稳定性。**

解：（1）采用克拉索夫斯基法，依题意有：

$$f(x)=\begin{bmatrix}x_2\\ -x_1^3-x_2\end{bmatrix}$$

$$J(x)=\frac{\partial f(x)}{\partial x^T}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3x_1^2 & -1\end{bmatrix}$$

$$V(x)=f^T(x)f(x)=\begin{bmatrix}x_2 & -x_1^3-x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x_2\\ -x_1^3-x_2\end{bmatrix}=x_2^2+(-x_1^3-x_2)^2$$

$\|x\|\to\infty$，有$V(x)\to\infty$。

取 $P=I$

$$
\begin{aligned}
-Q(x) &= J^T(x)+J(x) \\
&= \begin{bmatrix}0 & -3x_1^2\\ 1 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3x_1^2 & -1\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}0 & 1-3x_1^2\\ 1-3x_1^2 & -2\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

则 $Q(x)=\begin{bmatrix} 0 & -1+3x_1^2 \\ -1+3x_1^2 & 2 \end{bmatrix}$，根据希尔维斯特判据，有：

$\Delta_1=0$，$\Delta_2=\begin{vmatrix} 0 & 3x_1^2-1 \\ -1+3x_1^2 & 2 \end{vmatrix}=(3x_1^2-1)^2>0$，$Q(x)$ 的符号无法判断。

（2）李雅普诺夫方法：选取 Lyapunov 函数为 $V(x)=\dfrac{3}{4}x_1^4+\dfrac{3}{2}x_2^2>0$，则

$$\begin{aligned}\dot{V}(x)&=3x_1^3\dot{x}_1+3x_2\dot{x}_2\\&=3x_1^3x_2+3x_2(-x_1^3-x_2)\\&=-3x_2^2<0\end{aligned}$$

$\dot{V}(x)$ 是负定的。$\|x\|\to\infty$，有 $V(x)\to\infty$。即系统在原点处大范围渐近稳定。

4-10. 系统的平衡状态在坐标原点，由于 $a_1>0$，可取李雅普诺夫函数为 $V(x)=a_1x_1^2+x_2^2>0$

$\dot{V}(x)=2a_1x_1\dot{x}_1+2x_2\dot{x}_2=2a_1x_1x_2-2x_2(a_1x_1+a_2x_1^2x_2)=-2a_2x_1^2x_2^2\le 0$，(由于 $a_2>0$)，非正定。

并且 $x_1=0$ 时，$x_2\to 0$；$x_2=0$ 时，$x_1\to 0$。即对于 $x=[0\quad x_2]^T\neq 0$ 或 $x=[x_1\quad 0]^T\neq 0$

$\dot{V}(x)$ 不恒为零，所以坐标原点是渐进稳定的；由于 $\|x\|\to\infty$，$V(x)\to\infty$，是大范围渐进稳定。

4-11. 用克拉索夫斯基法，取 $P=I$。

$J(x)=\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & -1+5bx_2^4 \end{bmatrix}$，$J^T(x)=J(x)$，$Q=-J^T(x)-J(x)=\begin{bmatrix} -2a & -2 \\ -2 & 2-10bx_2^4 \end{bmatrix}$

$V(x)=\dot{x}^T\dot{x}=(ax_1+x_2)^2+(x_1-x_2+bx_2^5)^2>0$

$\|x\|\to\infty$，$V(x)\to\infty$，因此只要系统在坐标原点渐近稳定即是大范围渐进稳定的，只要 $Q(x)>0$ 即满足渐近稳定的条件。满足要求的 $a$ 和 $b$ 的取值范围：$a<-1, b<0$。

END

**4-12 试用变量梯度法构造下列系统的李雅普诺夫函数**

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-x_1+2x_1^2x_2\\ \dot{x}_2=-x_2\end{cases}$$

解：假设 $V(x)$ 的梯度为：

$$\nabla V=\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \nabla V_1 \\ \nabla V_2 \end{pmatrix}$$

计算 $V(x)$ 的导数为：

$$\dot{V}(x) = (\nabla V)^T \dot{x} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_1 + 2x_1^2 x_2 \\ -x_2 \end{pmatrix}$$
$$= -a_{11}x_1^2 - \left(a_{12} + a_{21}\right) x_1 x_2 - a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1^2 x_2^2 + 2a_{11}x_1^3 x_2$$

选择参数，试选 $a_{11} = a_{22} = 1, a_{12} = a_{21} = 0$，于是得：

$\nabla V = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$，显然满足旋度方程 $\frac{\partial \nabla V_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \nabla V_2}{\partial x_1}$,即 $\frac{\partial x_1}{\partial x_2} = \frac{\partial x_2}{\partial x_1} = 0$，表明上述选择的参数是允许的。则有：

$$\dot{V}(x) = -(1 - 2x_1 x_2) x_1^2 - x_2^2$$

如果 $1 - 2x_1 x_2 > 0$ 或 $x_1 x_2 < \frac{1}{2}$，则 $\dot{V}(x)$ 是负定的，因此，$x_1 x_2 < \frac{1}{2}$ 是 $x_1$ 和 $x_2$ 的约束条件。

计算得到 $V(x)$ 为：

$$V(x) = \int_0^{x_1 (x_2 = 0)} x_1 dx_1 + \int_0^{x_2 (x_1 = x_1)} x_2 dx_2$$
$$= \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

$V(x)$ 是正定的，因此在 $1 - 2x_1 x_2 > 0$ 即 $x_1 x_2 < \frac{1}{2}$ 范围内，$x_e = 0$ 是渐进稳定的。

# 第五章习题答案

**5-1 已知系统状态方程为：**

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\0 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$$

试设计一状态反馈阵使闭环系统极点配置为-1，-2，-3。

解：依题意有：

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\0 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\end{bmatrix},b=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$M=\begin{bmatrix}b & Ab & A^2b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\0 & 1 & 2\\1 & 1 & 2\end{bmatrix}$ $\quad rankM=3$，系统能控。

系统$\sum_0=(A,b,C)$的特征多项式为：

$\left|\lambda I-A\right|=(\lambda-1)^3-(\lambda-1)+1=\lambda^3-3\lambda^2+2\lambda+1$

则将系统写成能控标准 I 型，则有 $\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\-1 & -2 & 3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$。

引入状态反馈后，系统的状态方程为：$\dot{x}=(A+bK)x+bu$，其中 $K$为$1\times3$ 矩阵，设 $K=\begin{bmatrix}k_0 & k_1 & k_2\end{bmatrix}$，则系统$\sum_K=(A,bK,C)$的特征多项式为：

$f(\lambda)=\det[\lambda I-(A+bK)]=\lambda^3+(-3-k_2)\lambda^2+(2-k_1)\lambda+(1-k_0)$

根据给定的极点值，得到期望特征多项式为：

$f^*(\lambda)=(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)=\lambda^3+6\lambda^2+11\lambda+6$

比较 $f(\lambda)与f^*(\lambda)$ 各对应项系数，可解得：$k_0=-5 \quad k_1=-9 \quad k_2=-9$,则有：$K=\begin{bmatrix}-5 & -9 & -9\end{bmatrix}$。

5-1. 首先判断系统的能控性.

可以判定 此系统完全能控.

状态反馈控制律为: $u=Kx+v$

$K=[k_0 \quad k_1 \quad k_2]$

$f_K(s)=\det(sI-(A+BK))=s^3-(3+k_2)s^2+(2+2k_2-k_1)s+1-k_2+k_1+2k_0$

由给定的闭环极点 $-1,-2,-3$ 得

$f_K^*=(s+1)(s+2)(s+3)=s^3+6s^2+11s+6$

比较系数得 $k_0=23$, $k_1=-50$, $k_2=-9$

$K=[23 \quad -50 \quad -9]$

5-2. 判断系统的能控性, 系统完全能控。

状态反馈控制律为 $u=Kx+v$, $K=[k_0 \; k_1 \; k_2]$

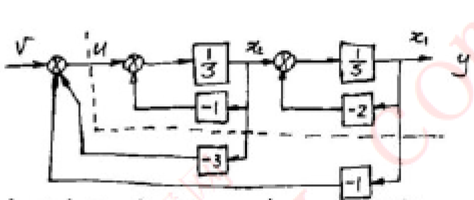
$f_K(s)=\det[sI-(A+BK)]=s^3+(11-10k_2)s^2+(11-10k_2-10k_1)s-10k_0$

由给定的闭环极点 $-10$, $-1\pm j\sqrt{3}$ 得

$f_K^*(s)=(s+10)(s+1+j\sqrt{3})(s+1-j\sqrt{3})=s^3+12s^2+24s+40$

比较系数可得 $k_0=-4$, $k_1=-1.2$, $k_2=-0.1$

5-3. <1>




<2>. 系统完全能控, 故可任意配置极点.

<3>. 取状态反馈控制 $u=Kx+v=[k_0 \; k_1]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+v$

$f_K(s)=|sI-(A+BK)|=s^2+(3-k_1)s+2-k_0-2k_1$

$f_K^*(s)=(s+3)^2=s^2+6s+9$

比较系数得 $k_0=-1$, $k_1=-3$ ; $K=[-1, -3]$

**5-3 有系统：**

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u$$

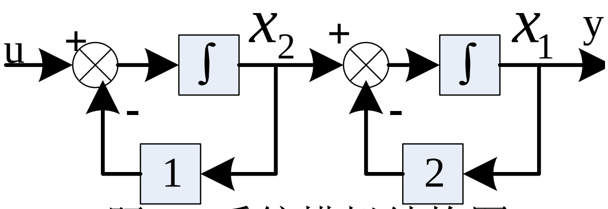
$$y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x$$

（1） 画出模拟结构图。

（2） 若动态性能不满足要求，可否任意配置极点？

（3） 若指定极点为-3，-3，求状态反馈阵。

解（1）系统模拟结构图如下：




题5-3 系统模拟结构图

（2）系统采用状态反馈任意配置极点的充要条件是系统 $\sum_0=(A,b,C)$ 完全能控。

对于系统 $\sum_0=(A,b,C)$ 有：

$M=\begin{bmatrix} b & Ab \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$　　$rankM=2$，系统能控，故若系统动态性能不满足要求，可任意配置极点。

（3）系统 $\sum_0=(A,b,C)$ 的特征多项式为：

$$|\lambda I-A|=(\lambda+2)(\lambda+1)=\lambda^2+3\lambda+2$$

则将系统写成能控标准 I 型，则有 $\dot{x}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$。

引入状态反馈后，系统的状态方程为：$\dot{x}=(A+bK)x+bu$，设 $K=\begin{bmatrix} k_0 & k_1 \end{bmatrix}$，则系统 $\sum_K=(A,bK,C)$ 的特征多项式为：

$$f(\lambda)=\det[\lambda I-(A+bK)]=\lambda^2+(3-k_1)\lambda+(2-k_0)$$

根据给定的极点值，得到期望特征多项式为：

$$f^*(\lambda)=(\lambda+3)^2=\lambda^2+6\lambda+9$$

比较 $f(\lambda)$与$f^*(\lambda)$ 各对应项系数，可解得：$k_0=-7\quad k_1=-3\quad ,K=\begin{bmatrix} -7 & -3 \end{bmatrix}$。

**5-4 设系统传递函数为**

$$\frac{(s-1)(s+2)}{(s+1)(s-2)(s+3)}$$

**试问能否利用状态反馈将传递函数变成**

$$\frac{s-1}{(s+2)(s+3)}$$

若有可能，试求出状态反馈$K$，并画出系统结构图。

解：$W(s)=\dfrac{(s-1)(s+2)}{(s+1)(s-2)(s+3)}=\dfrac{s^2+s-2}{s^3+2s^2-5s-6}$

由于传递函数无零极点对消，因此系统为能控且能观。

能控标准 I 型为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\6&5&-2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$$
$$y=\begin{bmatrix}-2&1&1\end{bmatrix}x$$

令$K=\begin{bmatrix}k_0&k_1&k_2\end{bmatrix}$为状态反馈阵，则闭环系统的特征多项式为

$$f(\lambda)=\det[\lambda I-(A+bK]=\lambda^3+(2-\mathrm{k}_2)\lambda^2+(-5-\mathrm{k}_1)\lambda+(-6+\mathrm{k}_0)$$

由于状态反馈不改变系统的零点，根据题意，配置极点应为-2，-2，-3，得期望特征多项式为

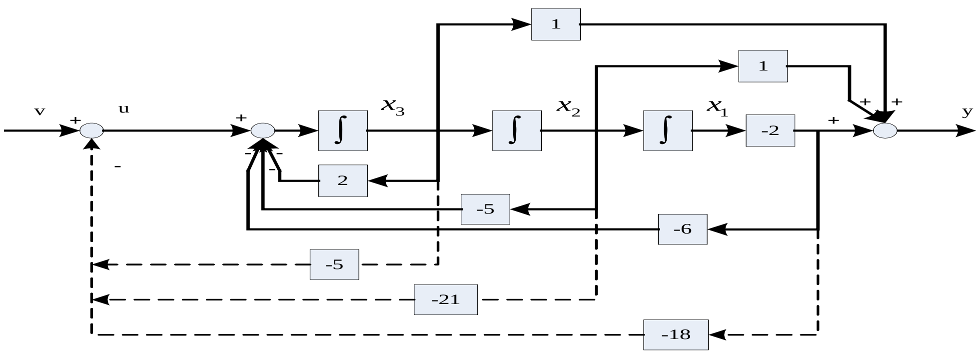
$$f^*(\lambda)=(\lambda+2)(\lambda+3)(\lambda+2)=\lambda^3+7\lambda^2+16\lambda+12$$

比较$f(\lambda)$与$f^*(\lambda)$的对应项系数，可得

$$k_0=-18\quad k_1=-21\qquad k_2=-5$$

即$K=\begin{bmatrix}-18&-21&-5\end{bmatrix}$

系统结构图如下：




题5-4 系统模拟结构图

**5-5 使判断下列系统通过状态反馈能否镇定。**

（1） $\mathrm{A}=\begin{bmatrix}-1&-2&-2\\0&-1&1\\1&0&-1\end{bmatrix},b=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}$

解：系统的能控阵为：

$$M=\begin{bmatrix} b & Ab & A^2b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -5 \end{bmatrix} \qquad rankM=3$$，系统能控。

由定理 5.2.1 可知，采用状态反馈对系统$\sum_0=(A,b,C)$任意配置极点的充要条件是$\sum_0=(A,b,C)$完全能控。又由于$rankM=3$，系统$\sum_0=(A,b,C)$能控，可以采用状态反馈将系统的极点配置在根平面的左侧，使闭环系统镇定。

5-6 (1). 系统的特征多项式为 $f_0(s)=s^2(s^2-11)$

为不稳定系统

(2). 系统是完全能控的 故是状态反馈可镇定的。

状态反馈阵设计略.

5-8 1). $C_1B=[1 \quad 0]$ $\quad d_1=0$

$C_2B=[0 \quad 0]$

$C_2AB=[1 \quad 0]$ $\quad d_2=1$

$E=\begin{bmatrix} C_1B \\ C_2AB \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 不可逆，不能状态反馈解耦.

**5-7 设计一个前馈补偿器，使系统**

$$W(s)=\begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2} \\ \frac{1}{s(s+1)} & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

**解耦，且解耦后的极点为**$-1,-1,-2,-2$。

解：$W(s)=W_0(s)W_d(s)$

$W_d(s)=W_0(s)^{-1}W(s)$

$$W_0(s)^{-1}=\frac{1}{\frac{1}{s(s+1)}-\frac{1}{s(s+1)(s+2)}}\begin{bmatrix}\frac{1}{s} & \frac{-1}{s+2}\\ \frac{-1}{s(s+1)} & \frac{1}{s+1}\end{bmatrix}$$

$$=s(s+2)\begin{bmatrix}\frac{1}{s} & \frac{-1}{s+2}\\ \frac{-1}{s(s+1)} & \frac{1}{s+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s+2 & -s\\ \frac{-(s+2)}{s+1} & \frac{s(s+2)}{s+1}\end{bmatrix}$$

$$W_d(s)=W_0(s)^{-1}W(s)$$

$$=\begin{bmatrix}s+2 & -s\\ \frac{-(s+2)}{s+1} & \frac{s(s+2)}{s+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{(s+1)^2} & 0\\ 0 & \frac{1}{(s+2)^2}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{s+2}{(s+1)^2} & \frac{-s}{(s+2)^2}\\ \frac{-(s+2)}{(s+1)^3} & \frac{s}{(s+1)(s+2)}\end{bmatrix}$$

**5-10 已知系统：**

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x$$

试设计一个状态观测器，使观测器的极点为-r，-2r(r>0)。

解：因为 $N=\begin{bmatrix}c\\ cA\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$满秩，系统能观，可构造观测器。

系统特征多项式为$\det\left[\lambda I-A\right]=\det\begin{bmatrix}\lambda & -1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}=\lambda^2$，所以有 $a_1=0,a_0=0,L=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

$$T^{-1}=LN=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$T=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

于是 $\dot{\bar{x}}=T^{-1}AT\bar{x}+T^{-1}bu=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\bar{x}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u$

$$y=cT\bar{x}=\left(0,1\right)\bar{x}$$

引入反馈阵$\bar{G}=\begin{bmatrix}\bar{g}_1\\\bar{g}_2\end{bmatrix}$，使得观测器特征多项式：

$$
\begin{aligned}
f(\lambda)&=\det\left[\lambda I-\left(\bar{A}-\bar{G}\bar{c}\right)\right]\\
&=\det\begin{bmatrix}\lambda & \bar{g}_1\\ -1 & \lambda+\bar{g}_2\end{bmatrix}\\
&=\lambda^2+\bar{g}_2\lambda+\bar{g}_1
\end{aligned}
$$

根据期望极点得期望特征式：

$$f^*(\lambda)=(\lambda+r)(\lambda+2r)=\lambda^2+3r\lambda+2r^2$$

比较$f(\lambda)$与$f^*(\lambda)$各项系数得：

$$\bar{g}_2=3r,\bar{g}_1=2r^2$$

即$\bar{G}=\begin{bmatrix}2r^2\\3r\end{bmatrix}$，反变换到 x 状态下$G=T\bar{G}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2r^2\\3r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3r\\2r^2\end{bmatrix}$

观测器方程为：

$$
\begin{aligned}
\dot{\hat{x}}&=(A-Gc)\hat{x}+bu+Gy\\
&=\begin{bmatrix}-3r & 1\\ -2r^2 & 0\end{bmatrix}\hat{x}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u+\begin{bmatrix}3r\\2r^2\end{bmatrix}y
\end{aligned}
$$

5-12. 系统完全可观. 可设计观测器(任意配极点)

作线性变换 $x=T\bar{x}$

$$T^{-1}=\begin{bmatrix}C_0\\C\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\qquad T=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$$

$$\bar{A}=T^{-1}AT=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\qquad \bar{B}=T^{-1}B=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\bar{C}=CT=\begin{bmatrix}0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\dot{\bar{x}}_1=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\bar{x}_1+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}u\qquad z=\begin{bmatrix}0&1\end{bmatrix}\bar{x}_1=\dot{y}$$

$$\dot{\bar{x}}_2=\begin{bmatrix}0&1\end{bmatrix}\bar{x}_1\qquad y=\bar{x}_2$$

对子系统1设计全维观测器. $\bar{G}=\begin{bmatrix}\bar{g}_0\\\bar{g}_1\end{bmatrix}$

$$\dot{\hat{\bar{x}}}_1=\begin{bmatrix}0&-\bar{g}_0\\1&-\bar{g}_1\end{bmatrix}\hat{\bar{x}}_1+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}u+\begin{bmatrix}\bar{g}_0\\\bar{g}_1\end{bmatrix}\dot{y}$$

$$f_G(s)=s(s+\bar{g}_1)+\bar{g}_0=s^2+\bar{g}_1s+\bar{g}_0$$

$$f_G^*(s)=(s+4)(s+5)=s^2+9s+20$$

$$\Rightarrow\bar{g}_0=20,\ \bar{g}_1=9\qquad\bar{G}=\begin{bmatrix}20\\9\end{bmatrix}$$

令 $\hat{w}=\hat{\bar{x}}_1-\begin{bmatrix}20\\9\end{bmatrix}y\qquad\hat{\bar{x}}_1=\hat{w}+\begin{bmatrix}20\\9\end{bmatrix}y$

$$\dot{\hat{w}} = \begin{bmatrix} 0 & -20 \\ 1 & -9 \end{bmatrix} \hat{w} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} -180 \\ -61 \end{bmatrix} y$$

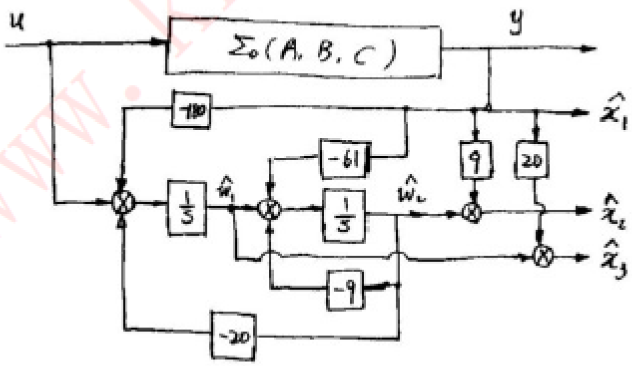
—观测器方程.

$$\hat{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \hat{\bar{x}}_1 \\ \hat{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{w} + \bar{G} y \\ y \end{bmatrix}$$

⑦

$$\hat{x} = T \hat{\bar{x}} = \begin{bmatrix} y \\ \hat{w}_2 + 9y \\ \hat{w}_1 + 20y \end{bmatrix}$$

模拟结构图




5-13　类似于 5-12，设计略。