吉林大学 JILIN UNIVERSITY

工程力学

第8章 弯曲内力

第8章 弯曲内力

§ 8.1 平面弯曲的概念和实例

§ 8.2 梁的支座及载荷的简化

§ 8.3 平面弯曲时梁横截面上的内力
——剪力和弯矩

§ 8.4 剪力方程和弯矩方程 剪力图和弯矩图

§ 8.5 分布载荷集、剪力和弯矩间的关系
及其应用

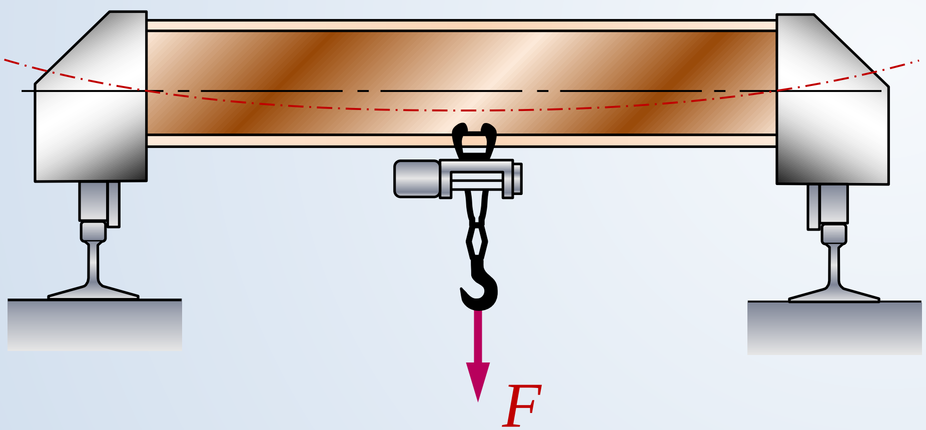
§ 8.6 用叠加法作弯矩图

§ 8.7 平面刚架和曲杆的弯内力

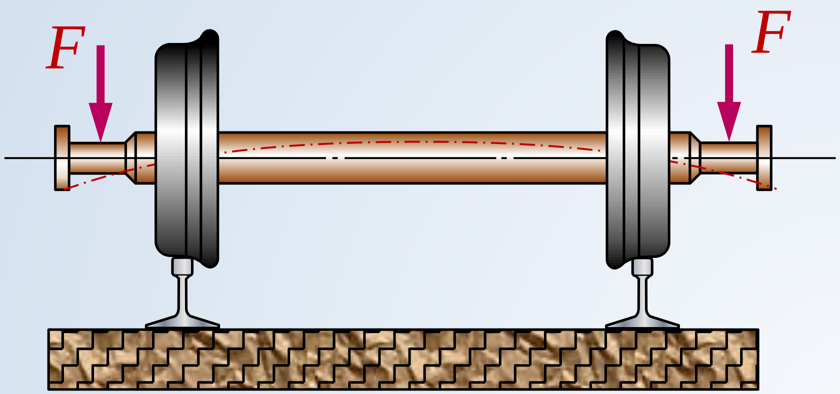
8.1 平面弯曲的概念和实例

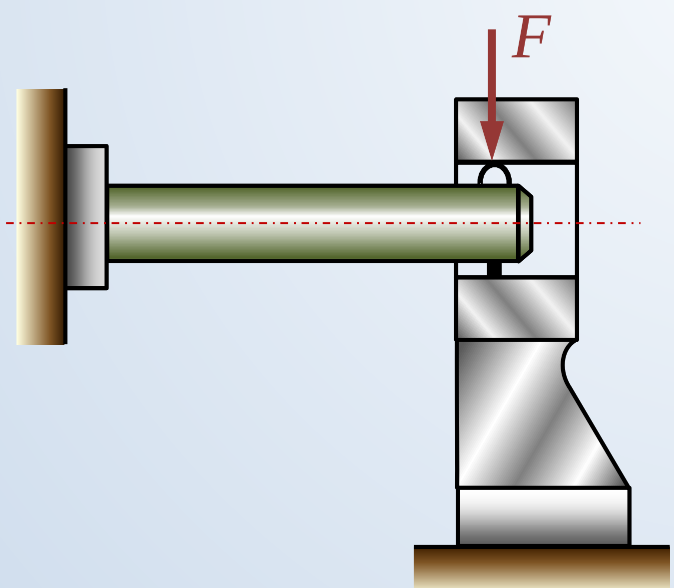
一. 平面弯曲的概念和实例

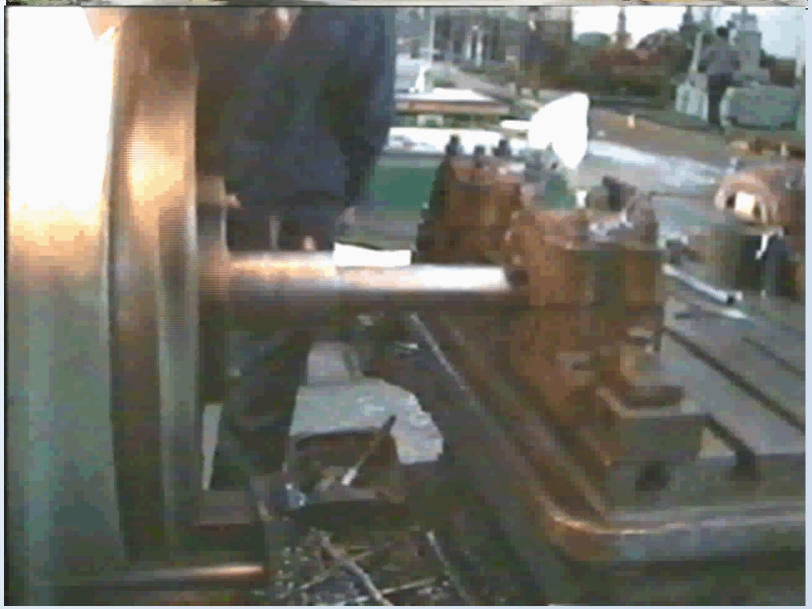
1.平面弯曲实例



8.1 平面弯曲的概念和实例



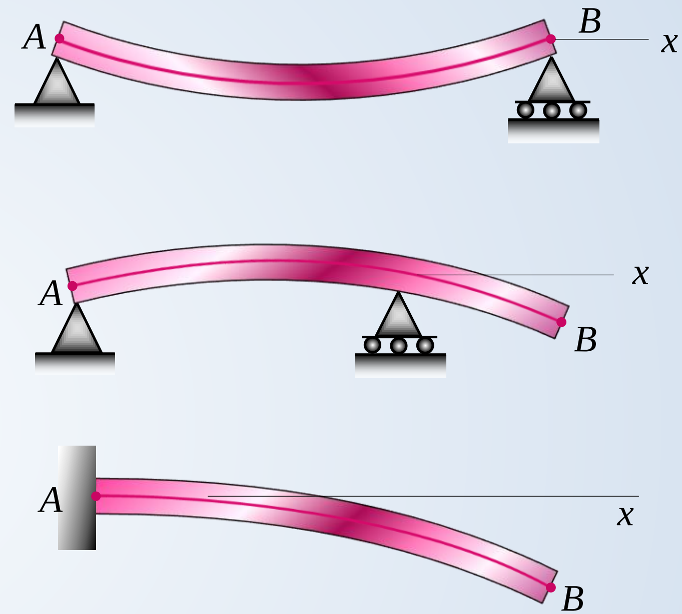




8.1 平面弯曲的概念和实例

2. 弯曲受力特点:

外力垂直于杆件的轴线，外力偶矩通过或平行于轴线



3.弯曲变形特点:

杆的轴线的曲率发生变化,相邻两横截面之间产生垂直轴线的相对转动

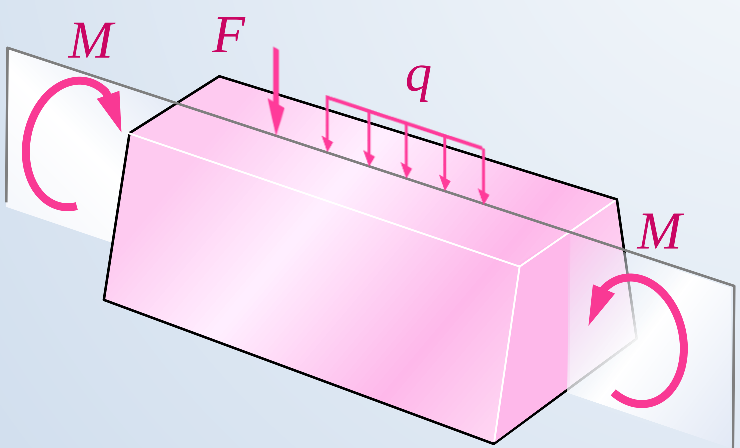
梁: 以弯曲变形为主的杆件

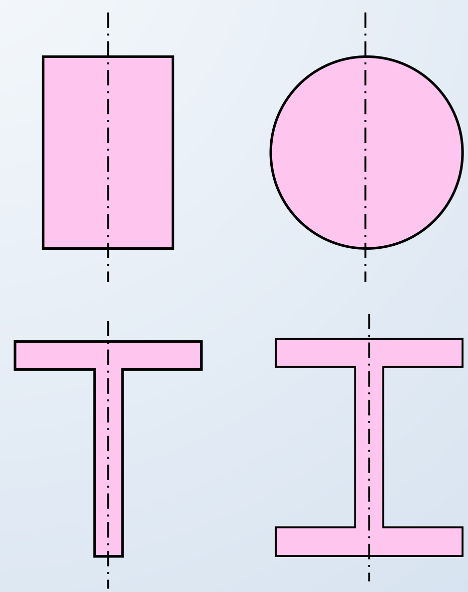
8.1 平面弯曲的概念和实例

4. 产生平面弯曲的充分条件

梁有纵向对称面 $\left\{ \begin{array}{l} \text{截面纵向对称轴} \\ \text{梁轴线} \end{array} \right.$

全部外力作用于对称面

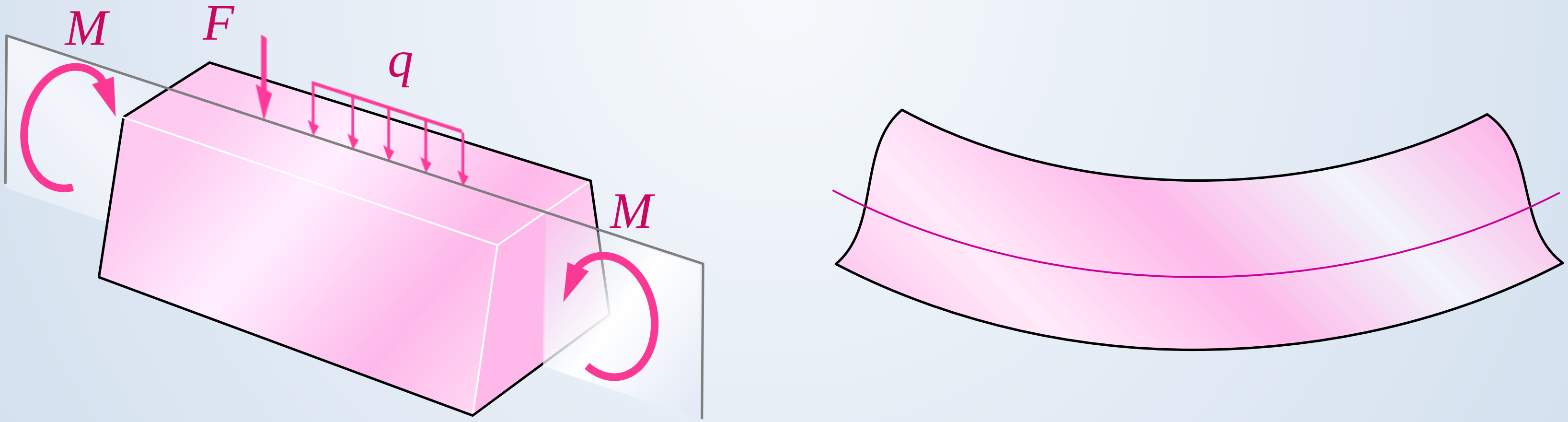




8.1 平面弯曲的概念和实例

5. 平面弯曲的变形特点

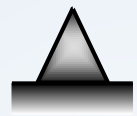
变形前后梁的轴线位于同一平面内



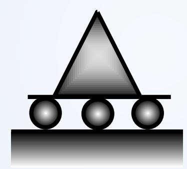
8.2 梁的支座及载荷的简化

1.支座的基本形式

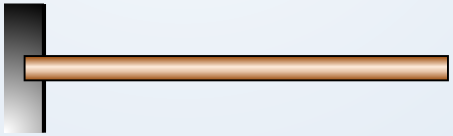
固定铰支座



可动铰支座

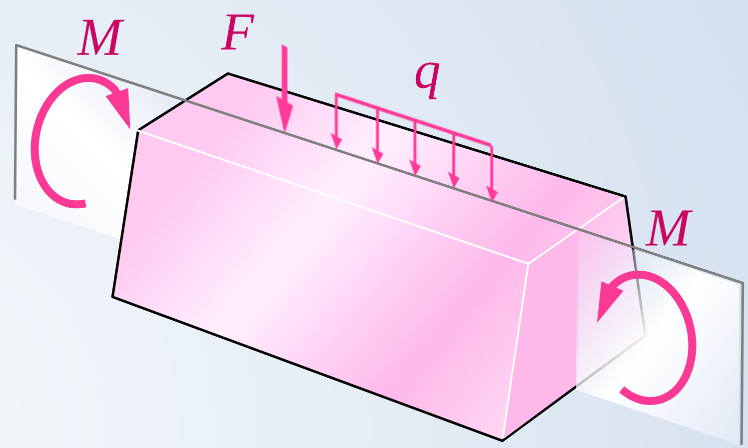


固定端支座



8.2 梁的支座及载荷的简化

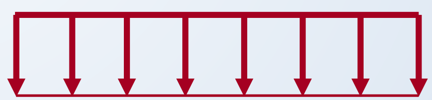
2.载荷形式



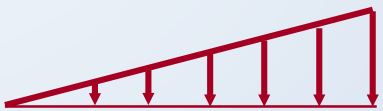
集中力　　F(N)

集中力偶　　M(N · m)

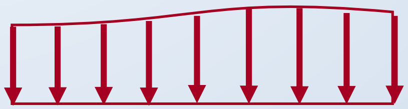
分布力
- 均匀分布



- 线性分布



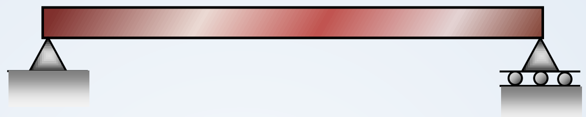
- 非线性分布



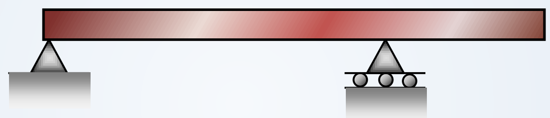
8.2 梁的支座及载荷的简化

3. 静定梁的基本形式

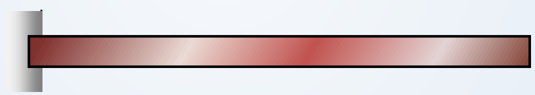
（1）简支梁



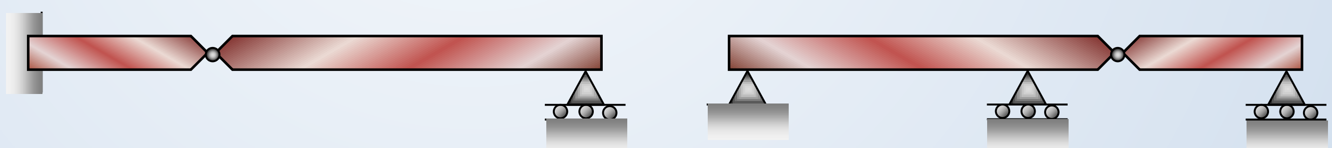
（2）外伸梁



（3）悬臂梁



子母梁

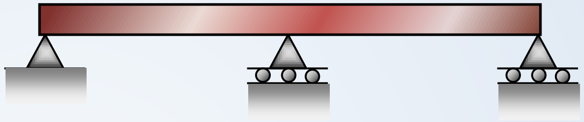


弯曲变形的主要研究对象为直梁。

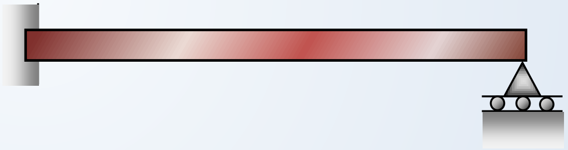
8.2 梁的支座及载荷的简化

4. 超静定梁的基本形式

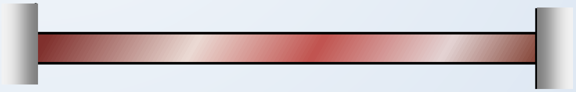
（1）连续梁



（2）一端铰支梁

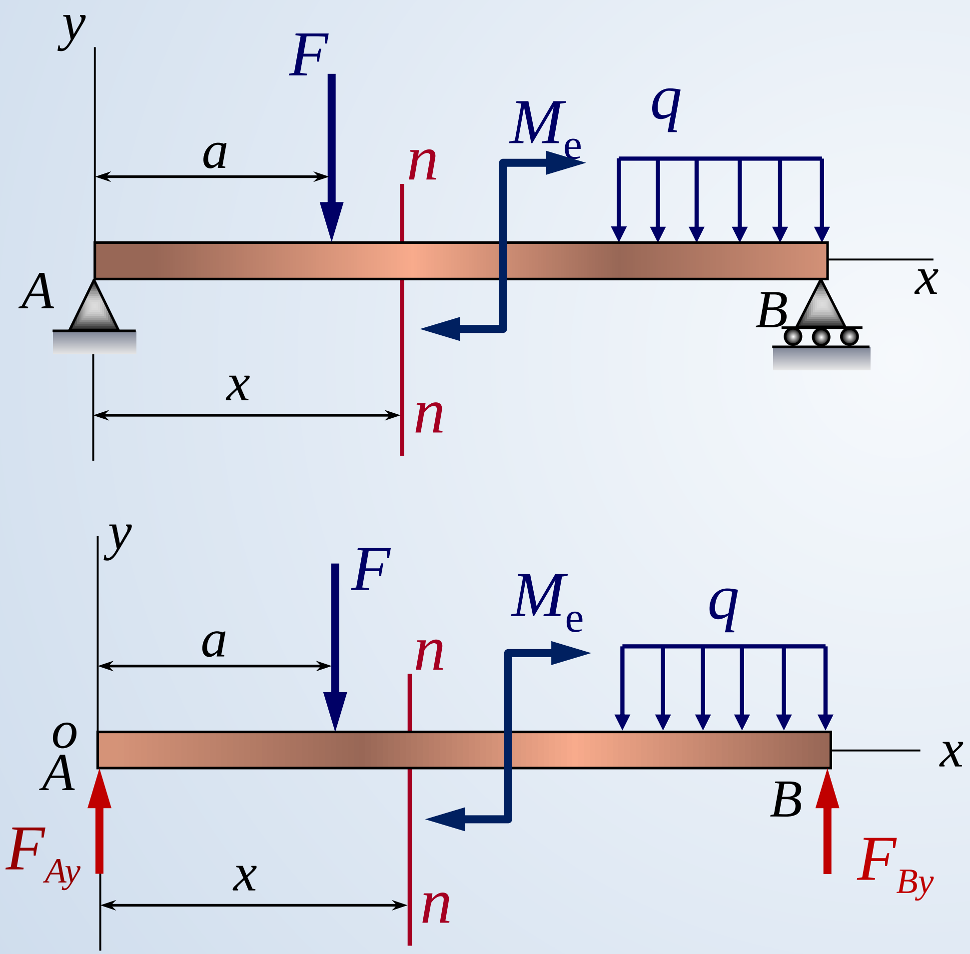


（3）固定梁



8.3 平面弯曲时梁横截面上的内力—剪力和弯矩

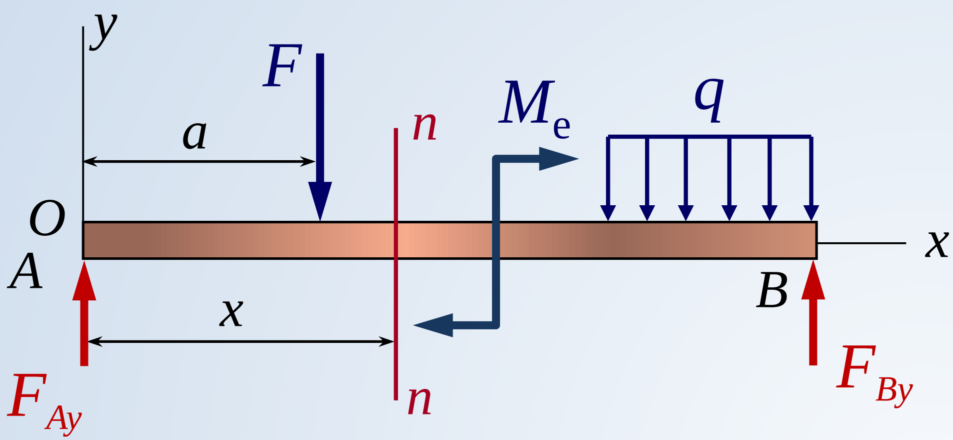
一.用截面法求内力



1）首先正确求支反力得到F_{Ay}和F_{By}

2）截面法求n-n内力

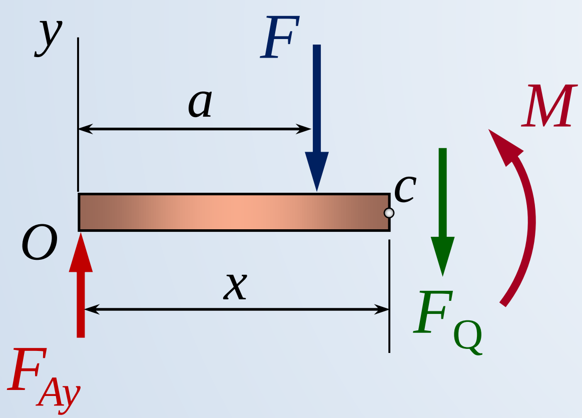
8.3 平面弯曲时梁横截面上的内力—剪力和弯矩



截、取、代、平

$$\sum F_y = 0 \quad F_{Ay} - F - F_Q = 0$$

解得 $F_Q = F_{Ay} - F$



$$\sum M_c = 0 \quad M + F\cdot(x-a) - F_{Ay}\cdot x = 0$$

解得 $M = F_{ay}x - Fx + Fa$

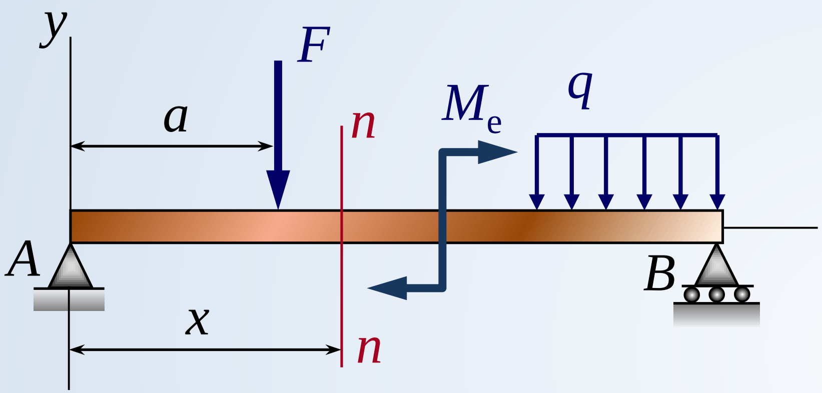
F_Q — 剪力

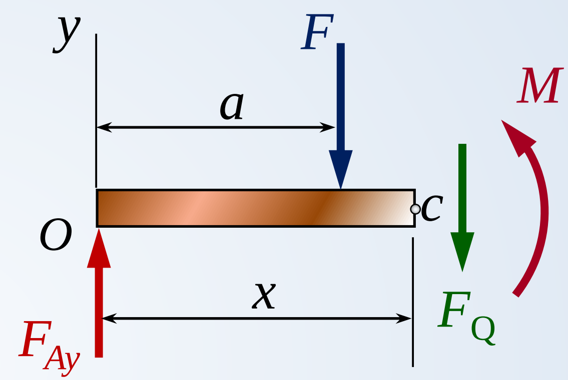
M — 弯矩

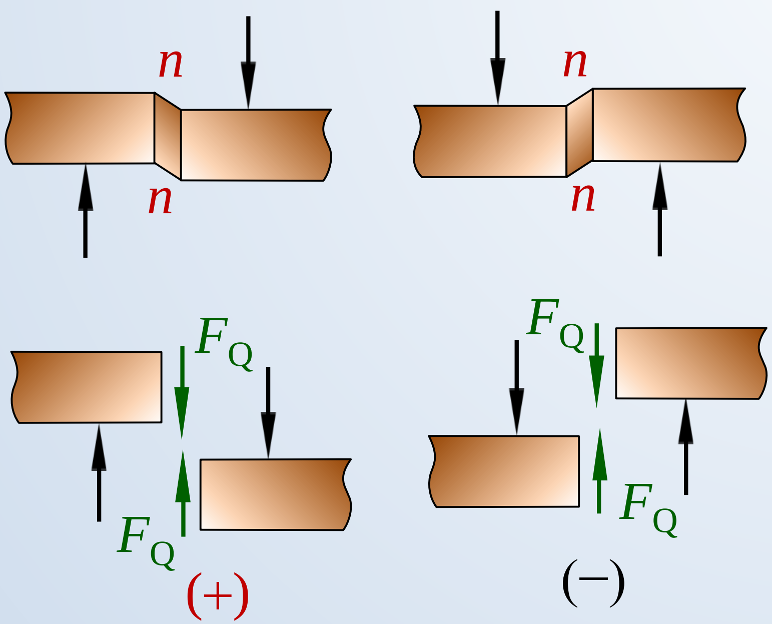
弯曲变形的内力

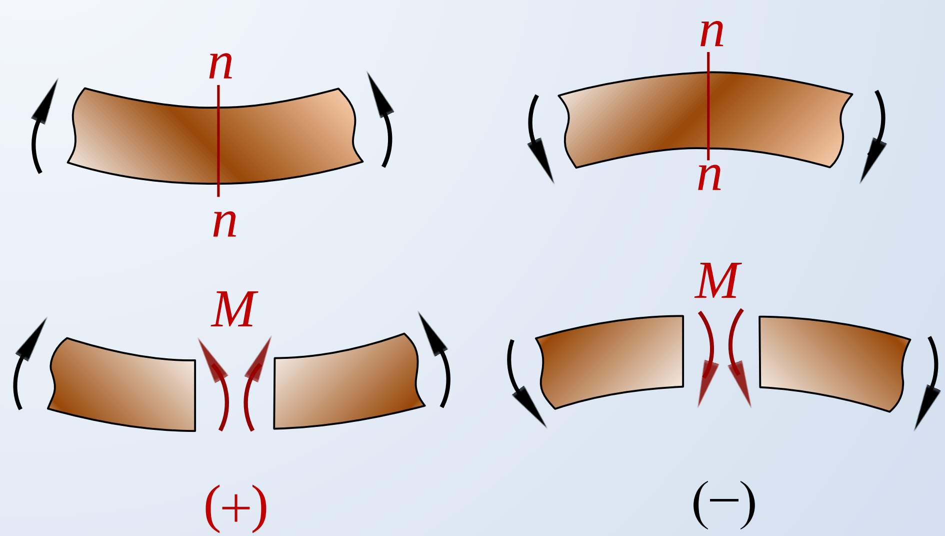
8.3 平面弯曲时梁横截面上的内力—剪力和弯矩

二.内力符号规定

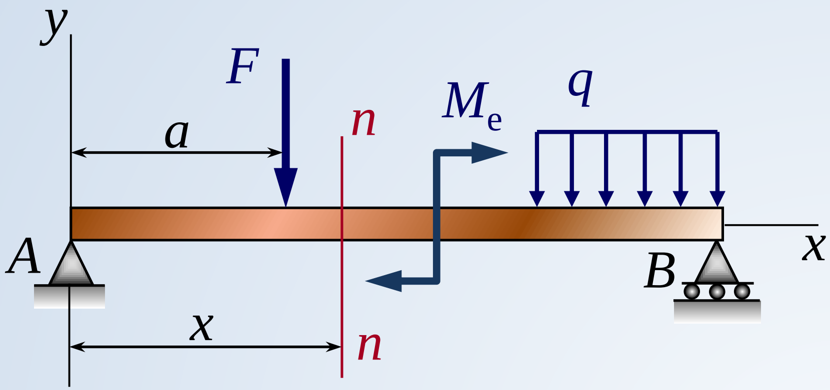


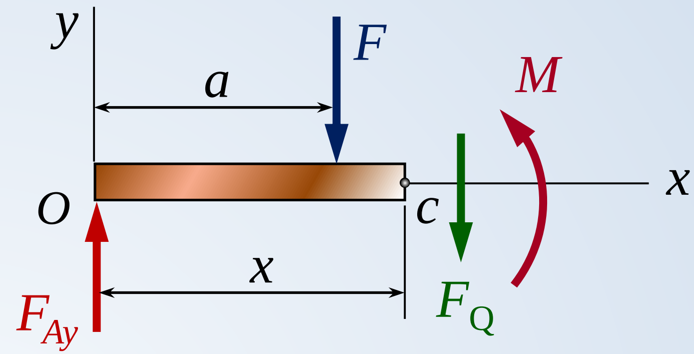






8.3 平面弯曲时梁横截面上的内力—剪力和弯矩



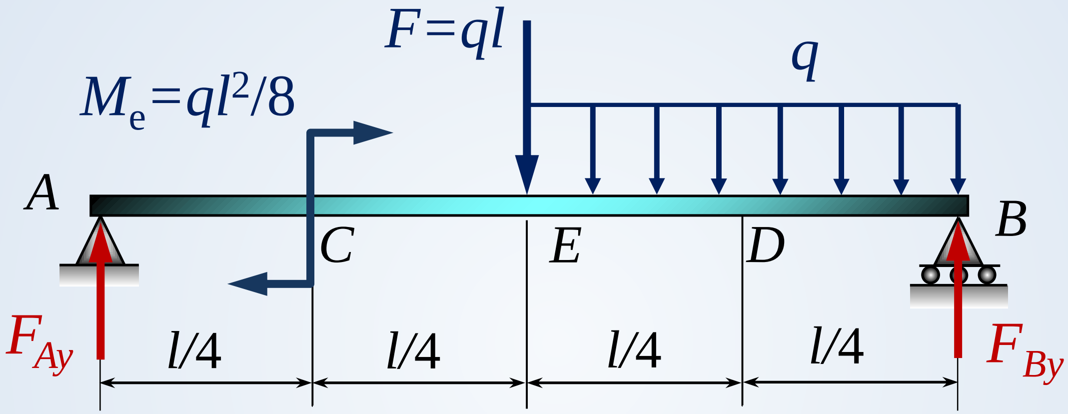


根据符号规定,可以得到下述两个规律:

1.任意横截面上的剪力, 等于作用在此截面左侧（或右侧）梁上所有外力在y轴上投影的代数和；向上（下）的力产生正剪力，向下（上）的力产生负剪力。

2.任意横截面上的弯矩, 等于作用在此横截面任一侧所有外力对该截面形心力矩的代数和；向上的力产生正弯矩，向下的力产生负弯矩。

例1 已知: m, F, q, l 求: D截面内力

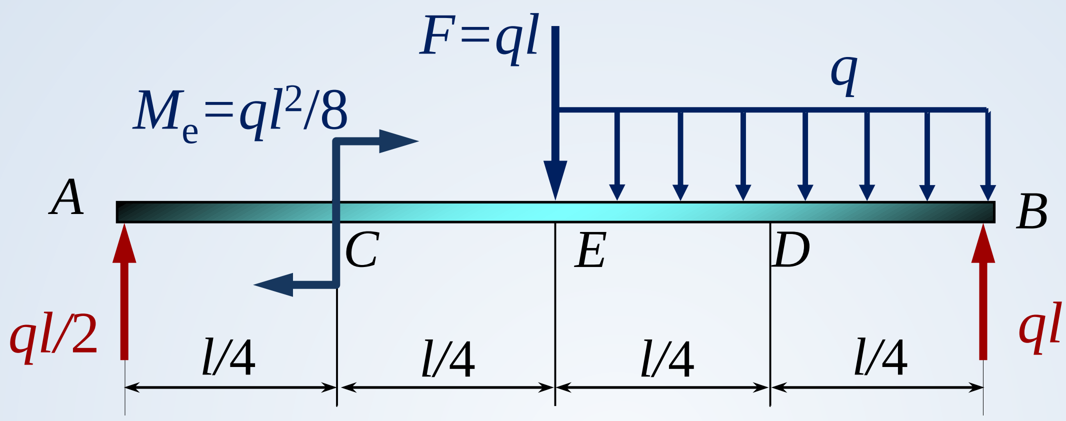


解:1.求支反力

$$\sum M_B = 0 \quad -F_{Ay}l - M_e + \frac{Fl}{2} + \frac{ql}{2}\cdot\frac{l}{4} = 0$$ 解得 $F_{Ay} = \dfrac{ql}{2}$

$$\sum M_A = 0 \quad -F_{By}l - \frac{ql}{2}\cdot\frac{3l}{4} - \frac{Fl}{2} - M_e = 0$$ 解得 $F_{By} = ql$

8.3 平面弯曲时梁横截面上的内力—剪力和弯矩



2.求D截面的内力

D截面的剪力：
$$F_{\mathrm{Q}}=\frac{ql}{2}-ql-\frac{ql}{4}=-\frac{3}{4}ql$$

D截面的弯矩：
$$M=ql\times\frac{l}{4}-q\cdot\frac{l}{4}\times\frac{l}{8}=\frac{7ql^2}{32}$$

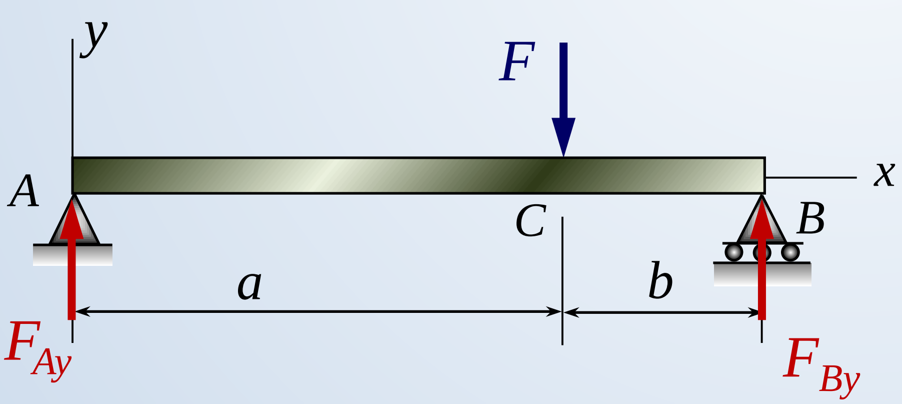
8.4 剪力方程和弯矩方程　剪力图和弯矩图

$$F_{\mathrm{Q}} = F_{\mathrm{Q}}(x)$$
$$M = M(x)$$

为剪力方程和弯矩方程

利用剪力方程弯矩方程画剪力图和弯矩图

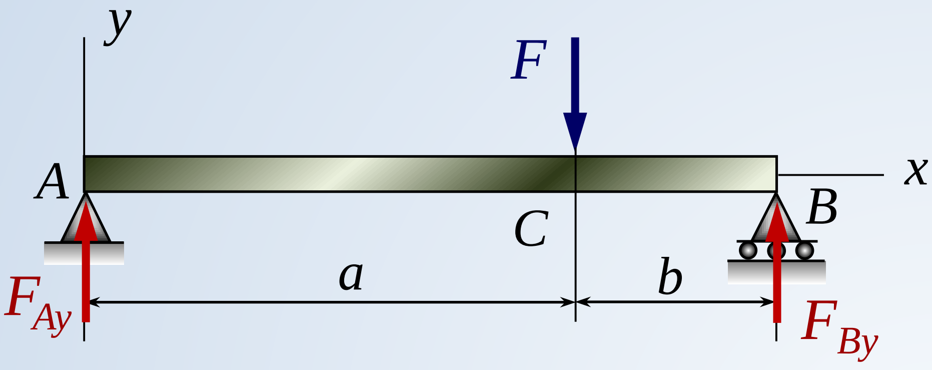
例2　列出下列梁的剪力方程和弯矩方程，并作剪力图和弯矩图



解：1.求支反力

$$F_{Ay} = \frac{Fb}{a+b}, \qquad F_{By} = \frac{Fa}{a+b}$$

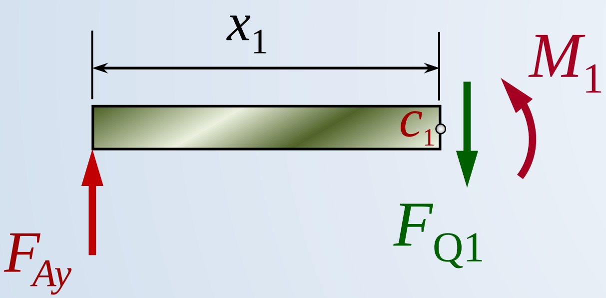
8.4 剪力方程和弯矩方程 剪力图和弯矩图



2. 写剪力方程和弯矩方程

*AC*段

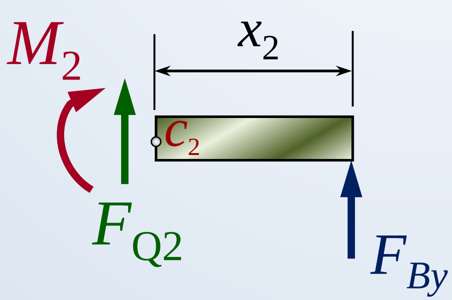
$$F_{Q1} = F_{Ay} \qquad M_1 = F_{Ay} x_1$$



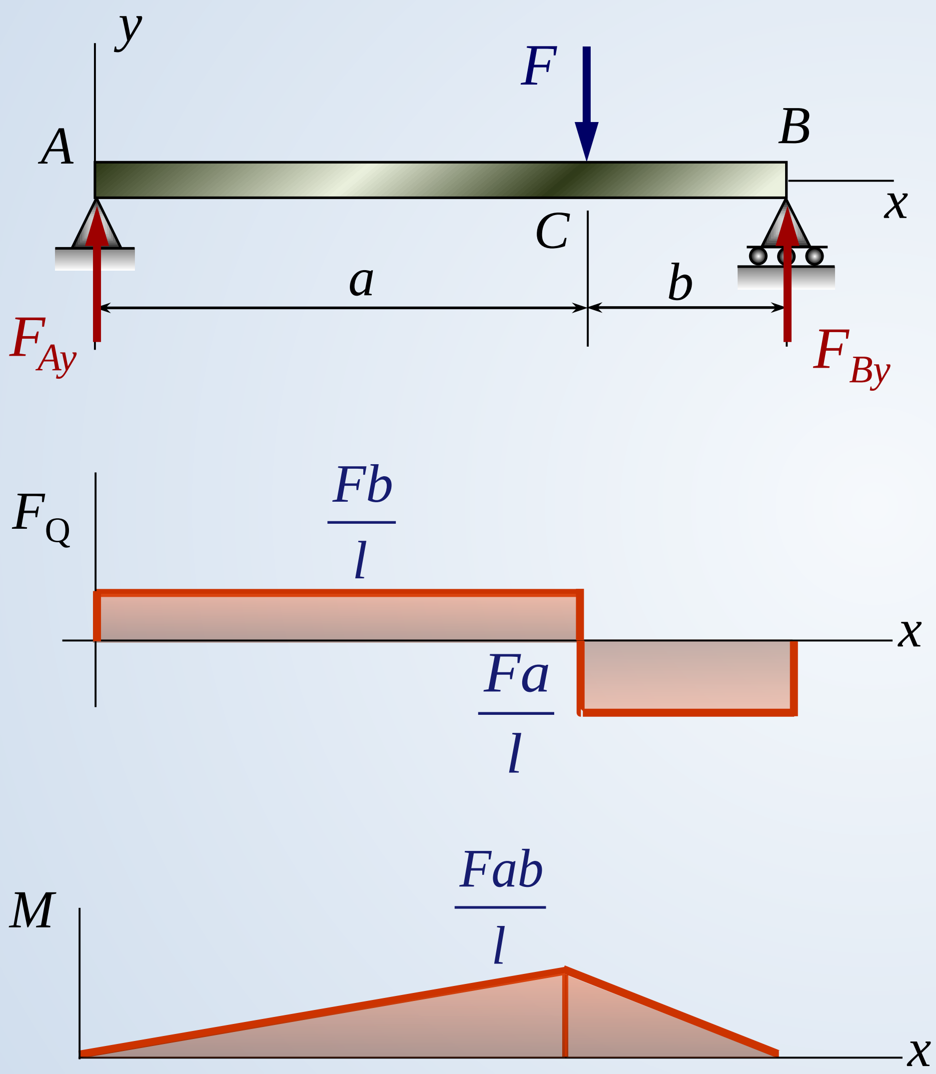
*CB*段

$$F_{Q_2} = F_{Ay} - F = -F_{By}$$

$$M_2 = F_{By} x_2$$



8.4 剪力方程和弯矩方程　剪力图和弯矩图



3.画剪力图和弯矩图

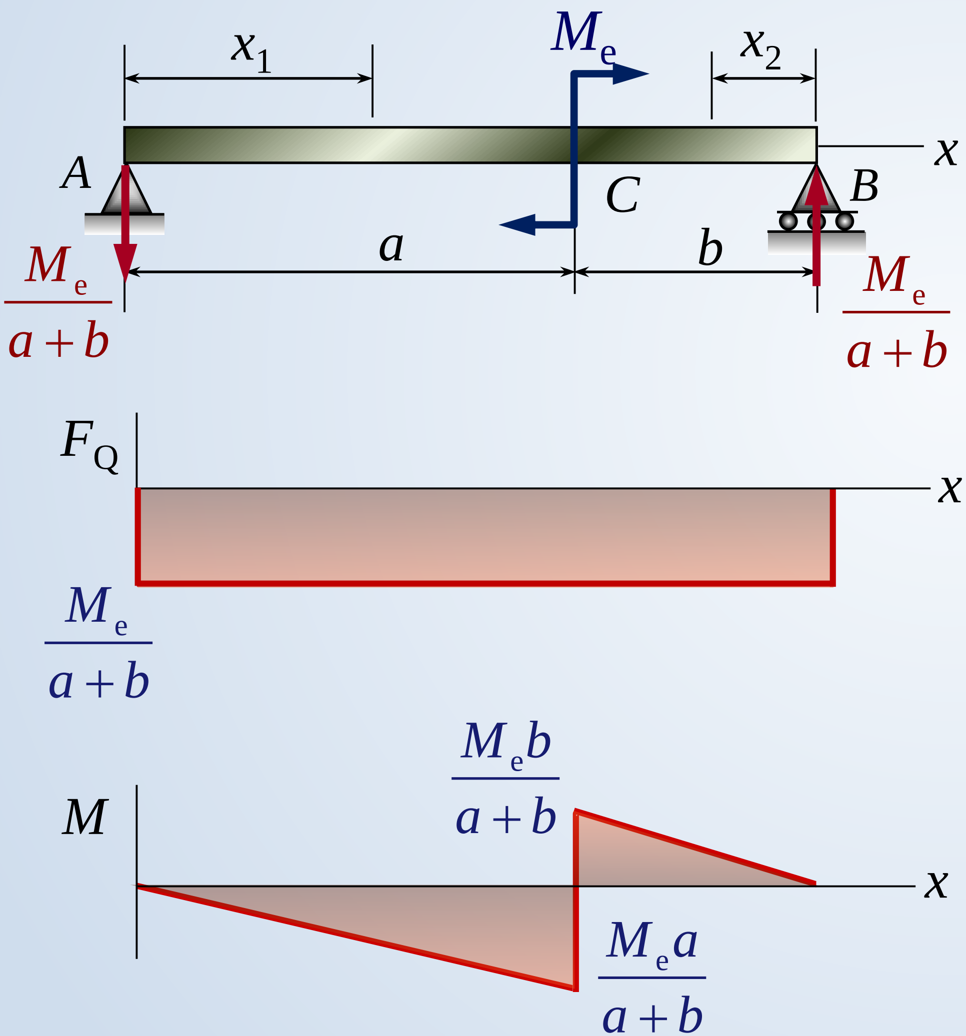
$$F_{Q1} = F_{Ay} = \frac{Fb}{a+b}$$

$$F_{Q_2} = -F_{By} = -\frac{Fa}{a+b}$$

$$M_1 = F_{Ay}x_1 = \frac{Fb}{a+b}x_1$$

$$M_2 = F_{By}x_2 = \frac{Fa}{a+b}x_2$$

例3 列内力F_Q，M方程, 作F_Q, M 图



解: 1.求支反力

校核支反力！

2.列F_Q, M 方程

$$F_{Q1} = -M_e/(a+b)$$

$$M_1 = -M_e \cdot x_1/(a+b)$$

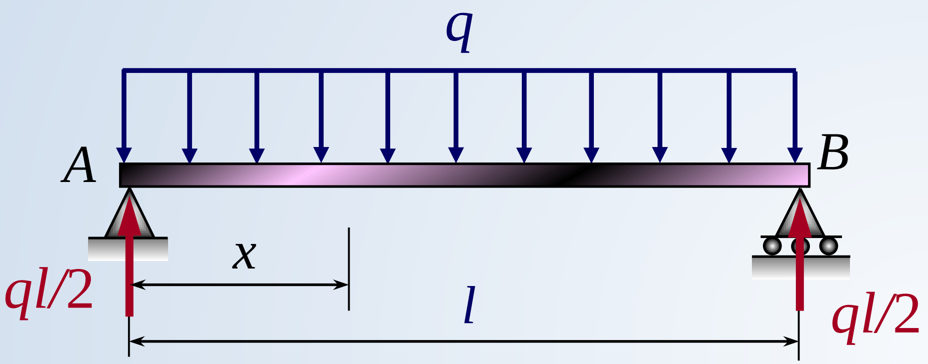
$$F_{Q2} = -M_e/(a+b)$$

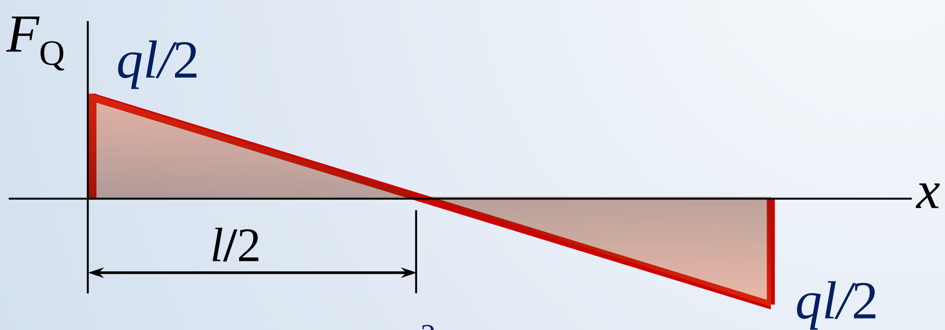
$$M_2 = M_e \cdot x_2/(a+b)$$

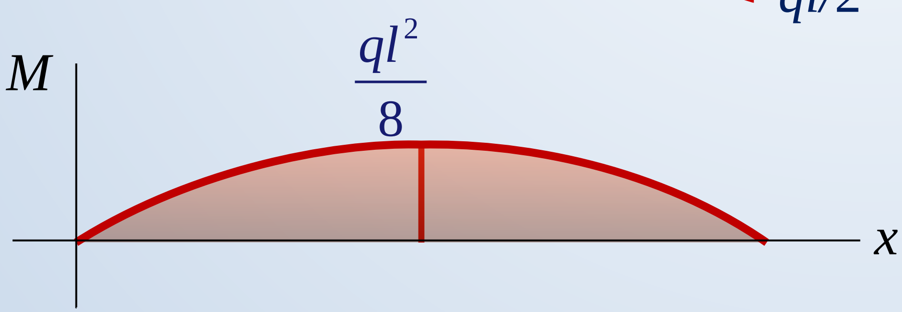
3.作F_Q, M 图

8.4 剪力方程和弯矩方程　剪力图和弯矩图

例4、列图示内力(F_Q, M) 方程,作F_Q、M 图







解: 1.求支反力

2.列F_Q, M 方程

$$F_Q(x) = ql/2 - qx$$

$$M(x) = qlx/2 - qx^2/2$$

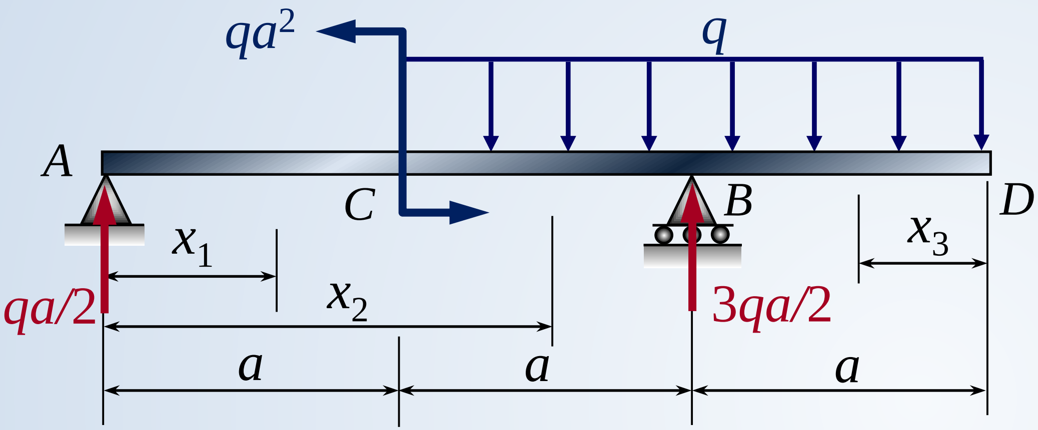
3.作F_Q, M 图

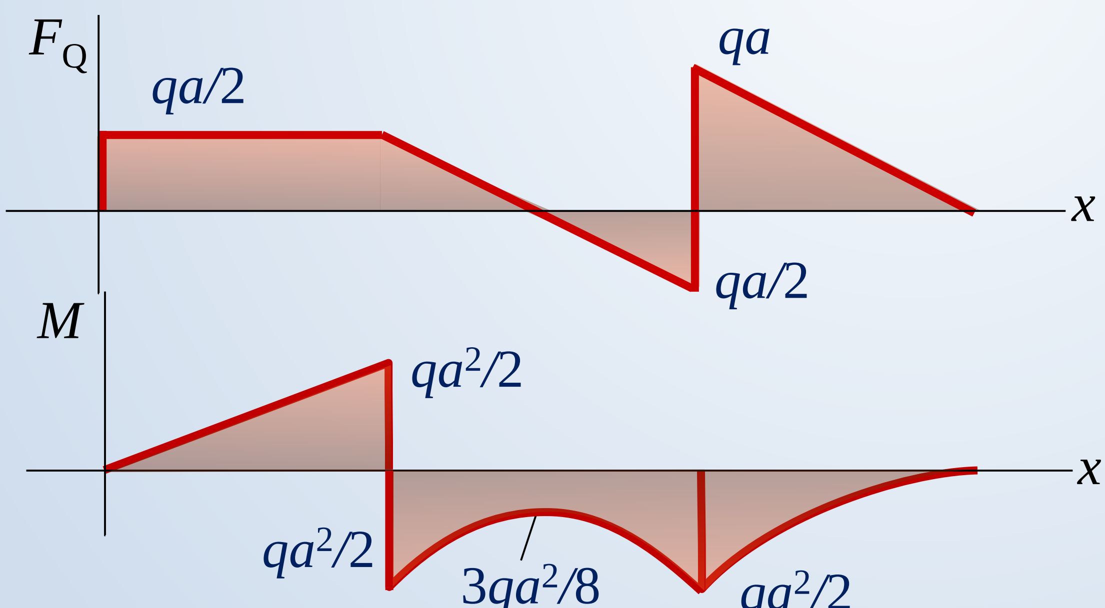
$$M'(x) = \frac{ql}{2} - qx$$

令 $M'(x) = 0$, 得 $x_0 = \frac{l}{2}$

$$M(x_0) = \frac{ql^2}{8}$$

例5 列图示内力方程,作F_Q、M 图





解:1.求支反力

2.列F_Q, M 方程

AC段 $F_{Q1} = qa/2$

$$M_1 = qax_1/2$$

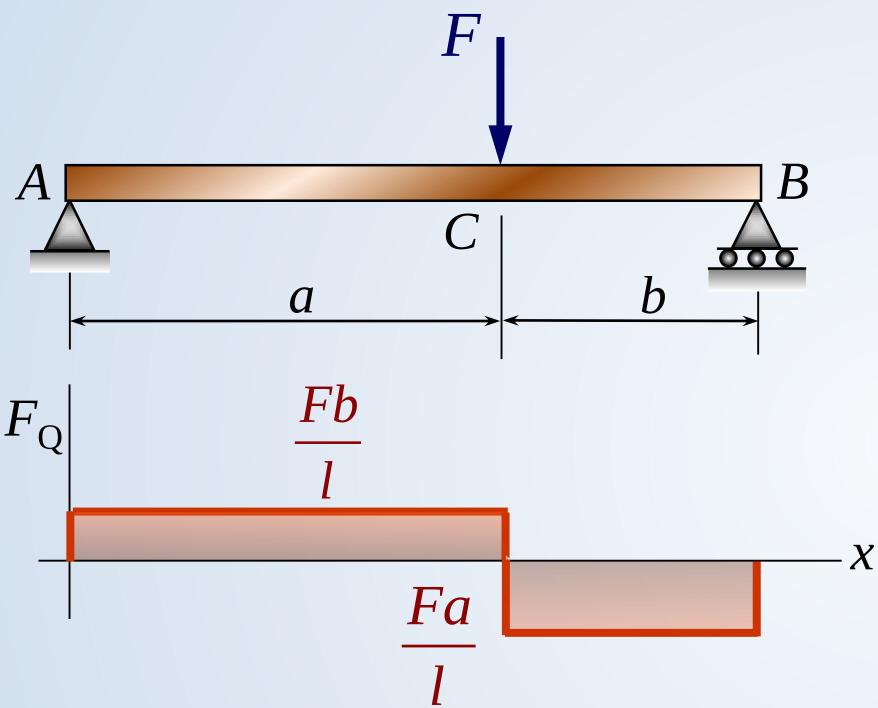
CB段 $F_{Q_2} = \dfrac{qa}{2} - q(x_2 - a)$

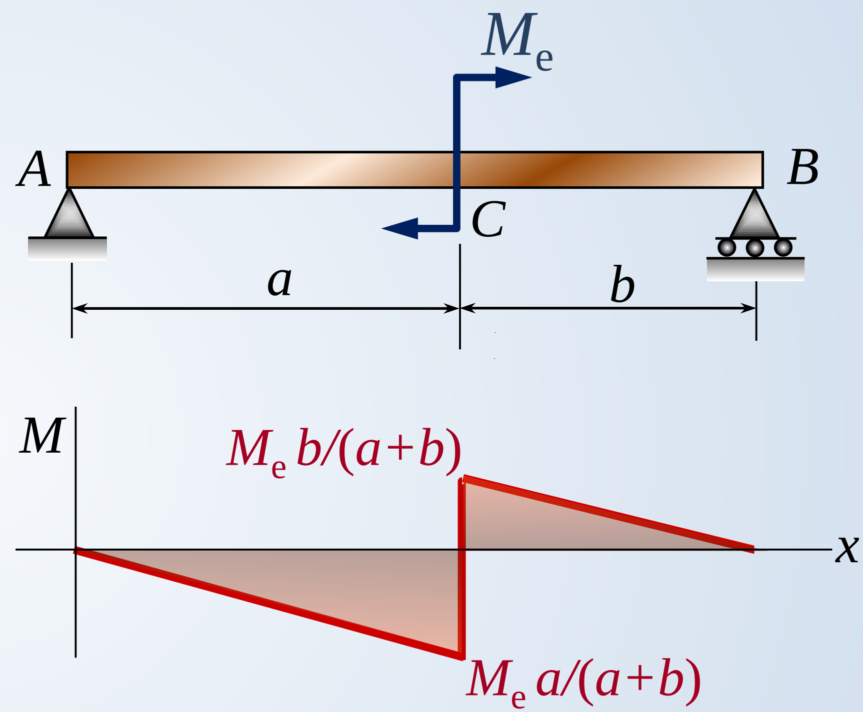
$$M_2 = \frac{qa}{2}x_2 - qa^2 - \frac{q(x_2-a)^2}{2}$$

BD段 $F_{Q_3} = qx_3$

$$M_3 = -\frac{qx_3^2}{2}$$

8.4 剪力方程和弯矩方程 剪力图和弯矩图





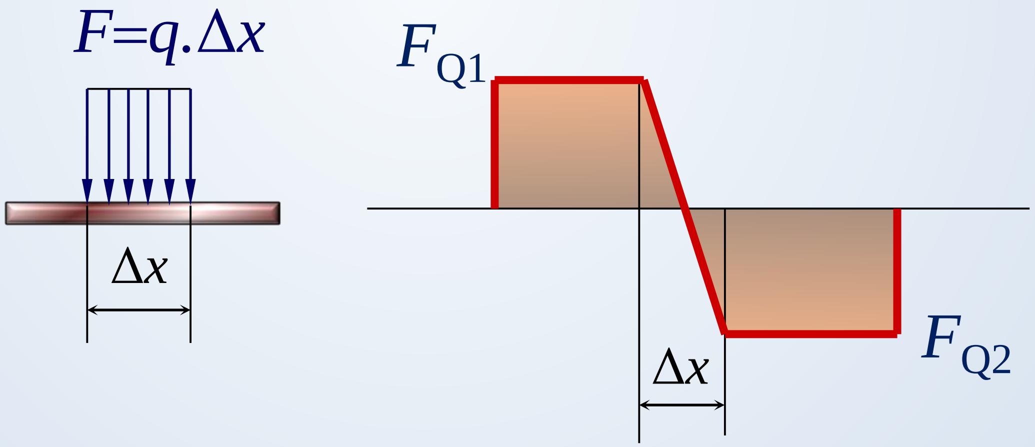
F 作用面两侧F_Q图有突变，其突变值$=F$，

M 作用面两侧M图有突变，其突变值$=M$。

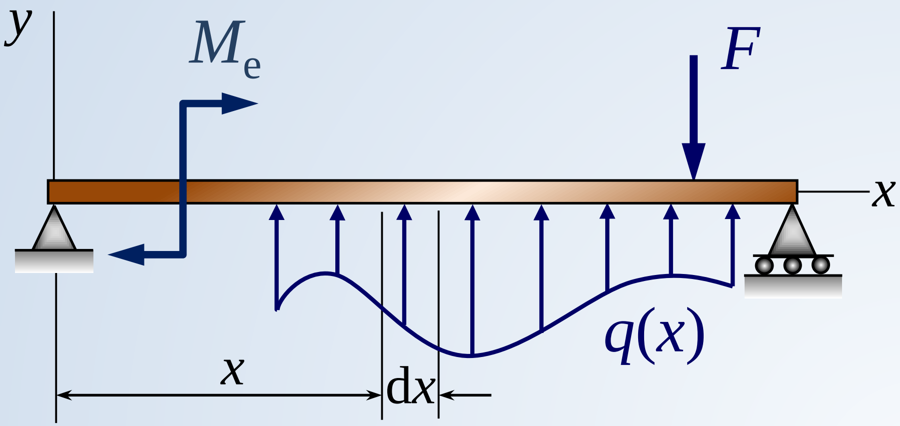
8.4 剪力方程和弯矩方程 剪力图和弯矩图

这使得F 和M作用面没有确切的F_Q和M？

事实并非如此，因为 F 和M事实上不可能集中作用于一点，它实际分布于一个微段Δx,



8.5 分布载荷集、剪力和弯矩间的关系及其应用

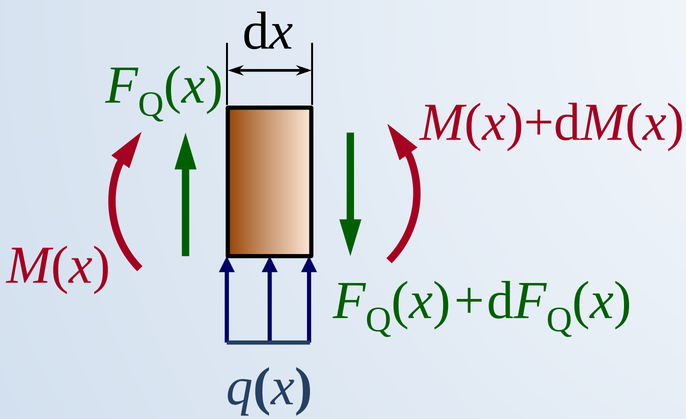


取dx，由微段的平衡，略去高阶微量，得：

$\Sigma F_y = 0 \qquad \mathrm{d}F_Q(x)/\mathrm{d}x = q(x)$

$\Sigma M = 0 \qquad \mathrm{d}M(x)/\mathrm{d}x = F_Q(x)$

推得 $\mathrm{d}^2M(x)/\mathrm{d}x^2 = q(x)$



经积分得：

$$F_Q(x_2) - F_Q(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} q(x)\mathrm{d}x$$

$$M(x_2) - M(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} F_Q(x)\mathrm{d}x$$

$q(x)$向上为正

8.5 分布载荷集、剪力和弯矩间的关系及其应用

利用$q(x)$, $F_Q(x)$, $M(x)$之间的微、积分关系可以帮助绘制校核F_Q、M 图。利用归纳的q, F, M 作用下F_Q, M 图的特征，可以找出绘制F_Q, M 图的简便方法。

绘制F_Q、M 图的简便方法

一. 正确求出支反力。

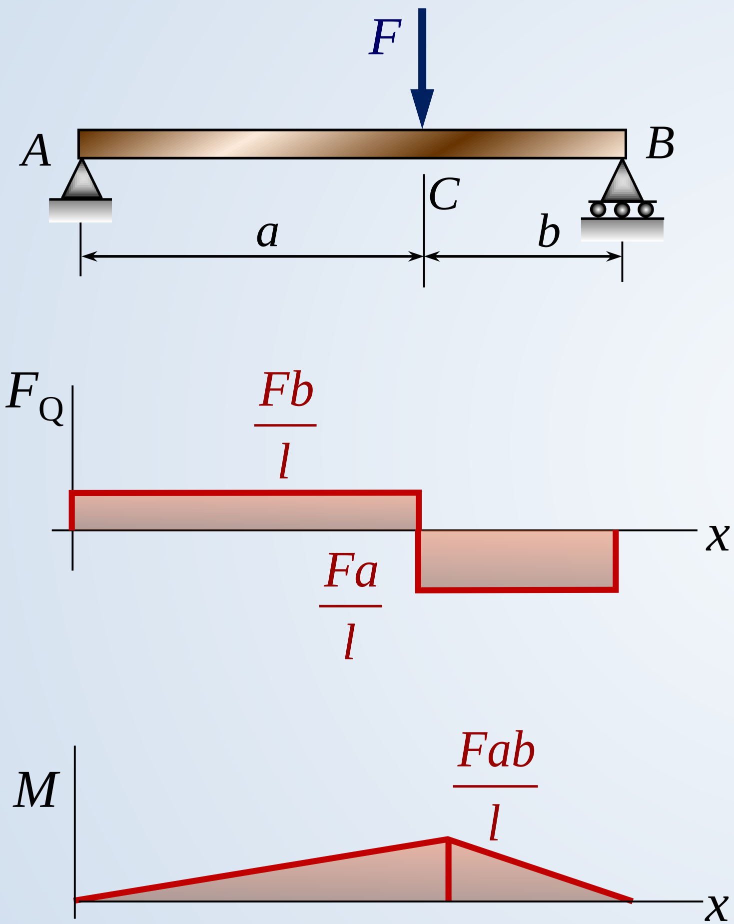
二. 有集中力F 作用处, F_Q图有突变,

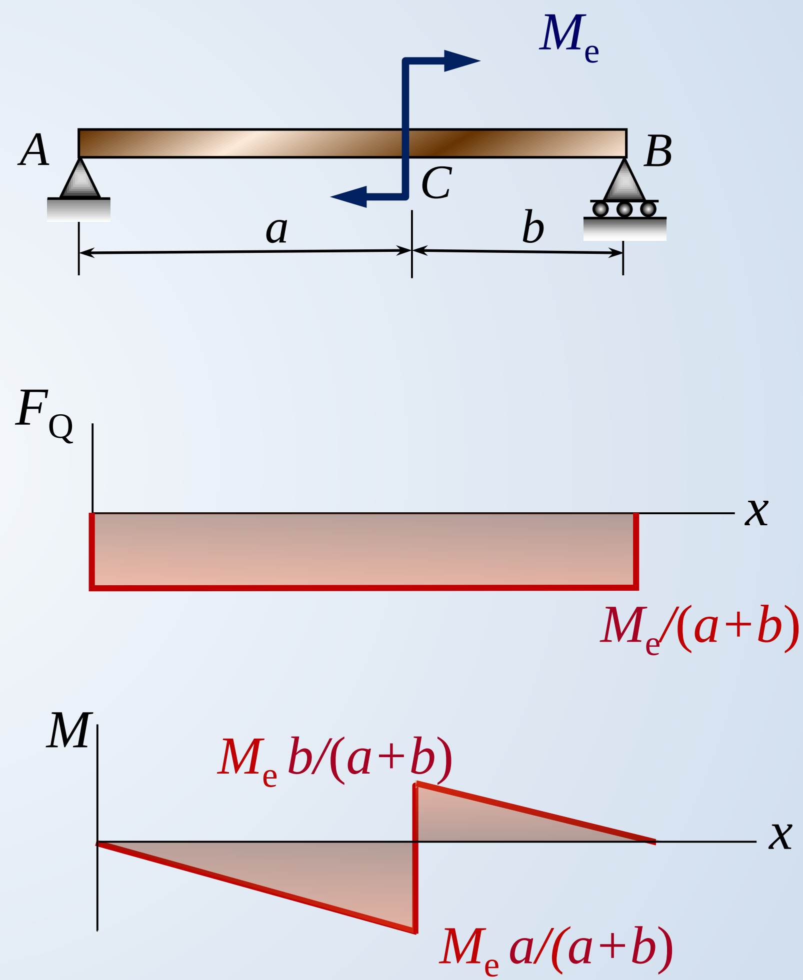
方向与F一致(左)，突变值 $=F$, M 图有折线

三. 有集中力偶 M 作用处, M 图有突变,

方向与M一致(左), 突变值 $=M$, F_Q图不变。

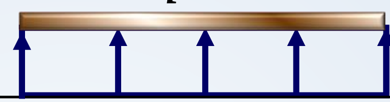
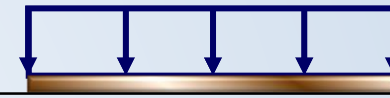
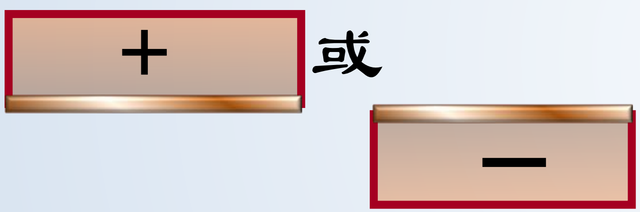
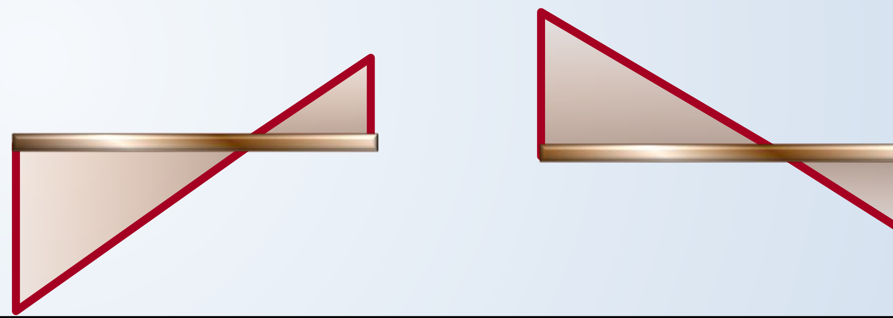
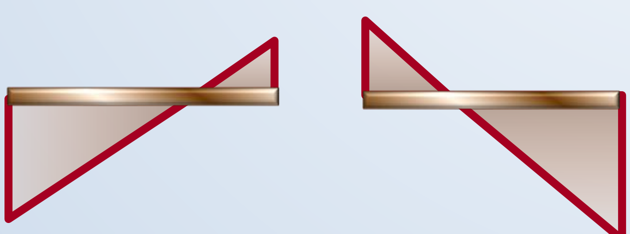
8.5 分布载荷集、剪力和弯矩间的关系及其应用





8.5 分布载荷集、剪力和弯矩间的关系及其应用

四. q 与F_Q，M 图的关系

	$q=0$ 段	$q>0$	$q<0$
			
F_Q 图	$F_Q=C$为水平线  或0	$F_Q=qx+a$ 为斜直线 	
M 图	$M=Cx+a$ 为斜直线  $F_Q>0$ $F_Q<0$	$M=\dfrac{qx^2}{2}+ax+b$ 为抛物线  $q>0$	$q<0$

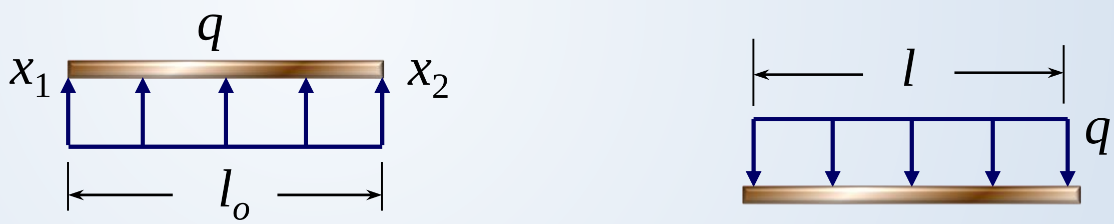
8.5 分布载荷集、剪力和弯矩间的关系及其应用

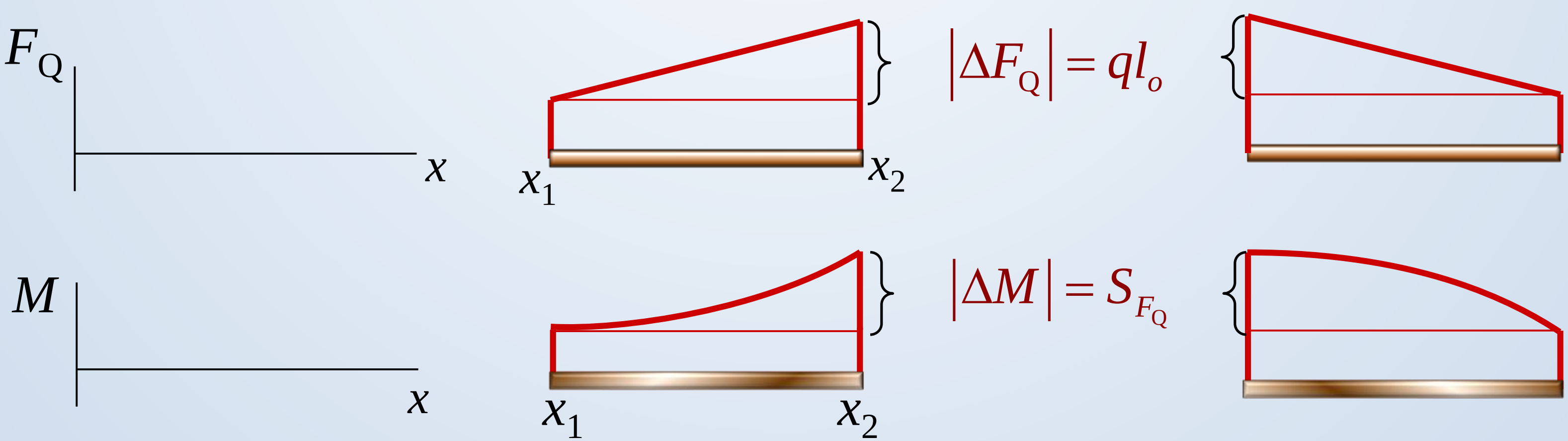
五.F_Q=0处，M 取得极值。

六.在 F_Q，M 图中标出F，M，均布q起止点的 F_Q和 M 的值，及M 取得极值处的值。

F_Q, M 值的计算方法：方法一；方法二：

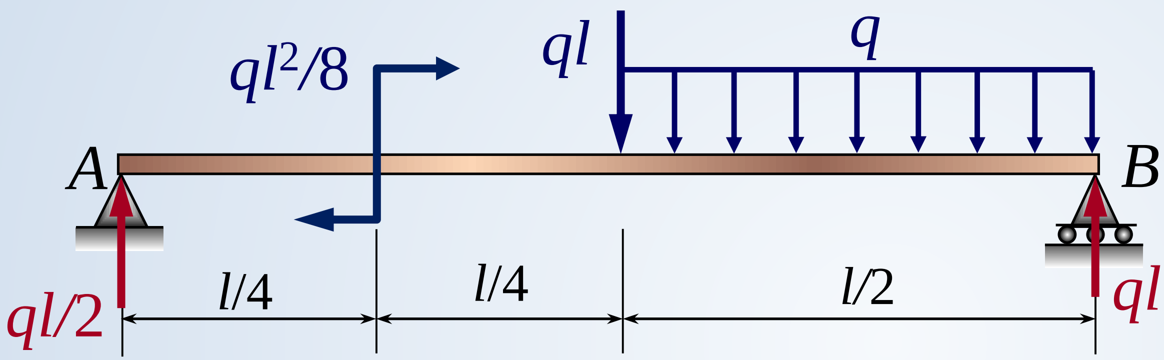
面积增量法





8.5 分布载荷集、剪力和弯矩间的关系及其应用

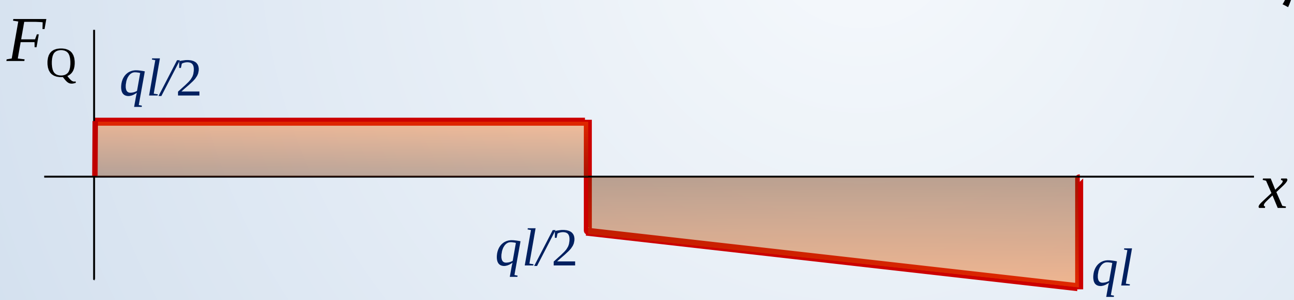
例 6 试画出图示梁的剪力图和弯矩图（作内力图）



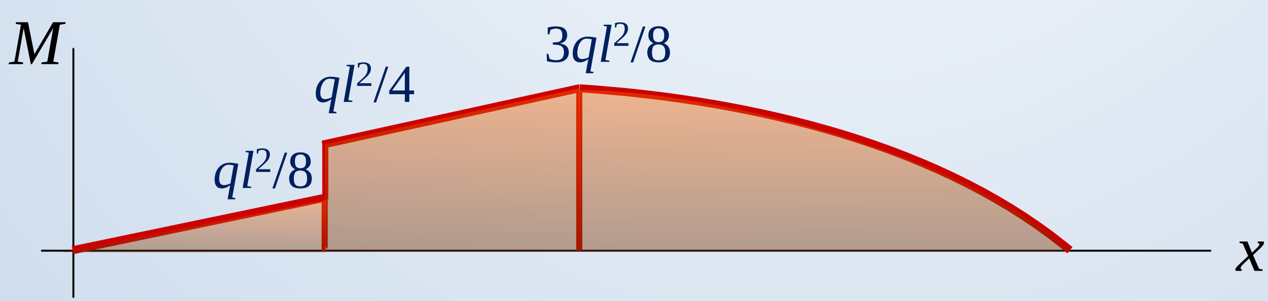
解:1.求支反力

$F_{Ay}=ql/2$

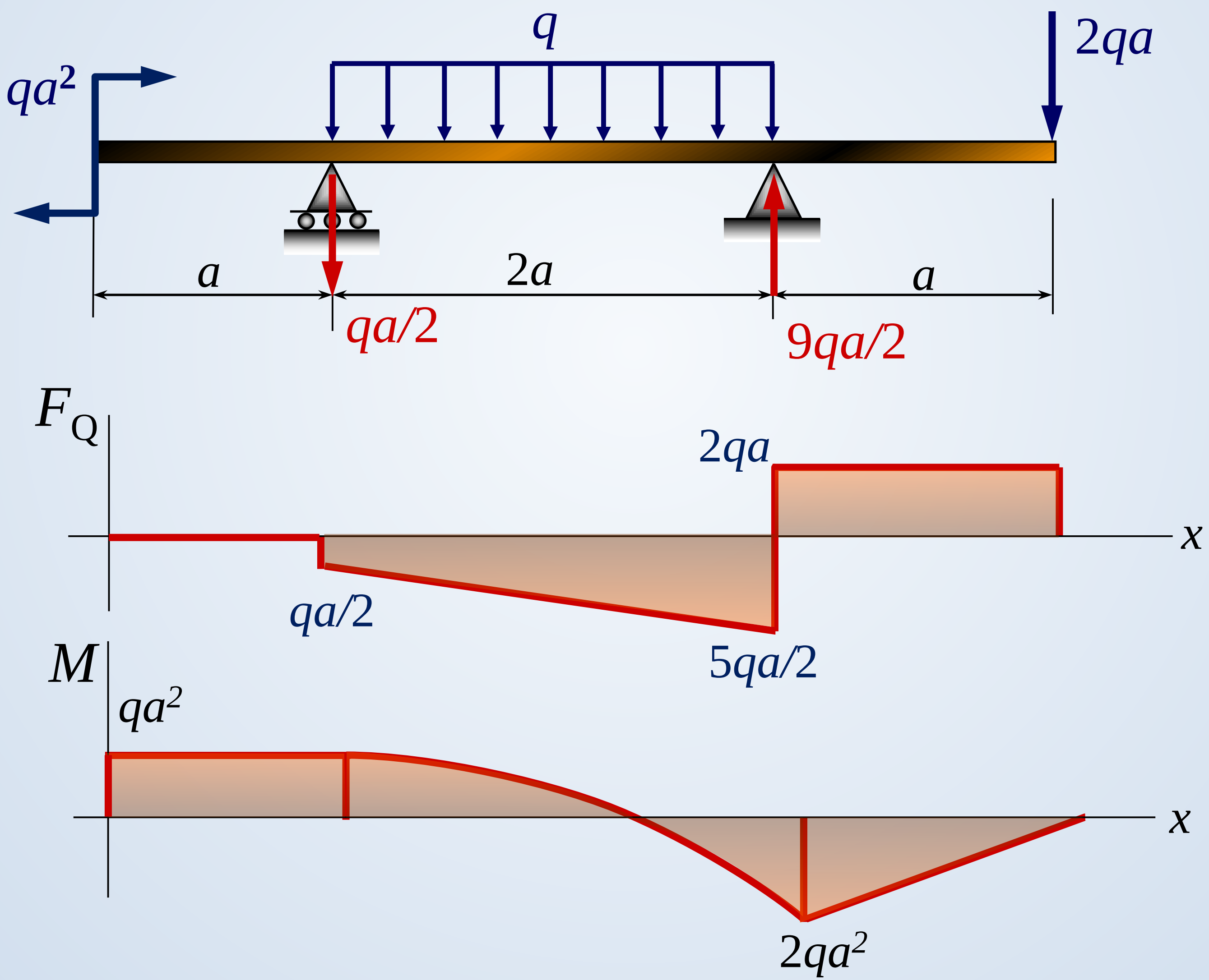
$F_{By}=ql$



2.画F_Q, M 图

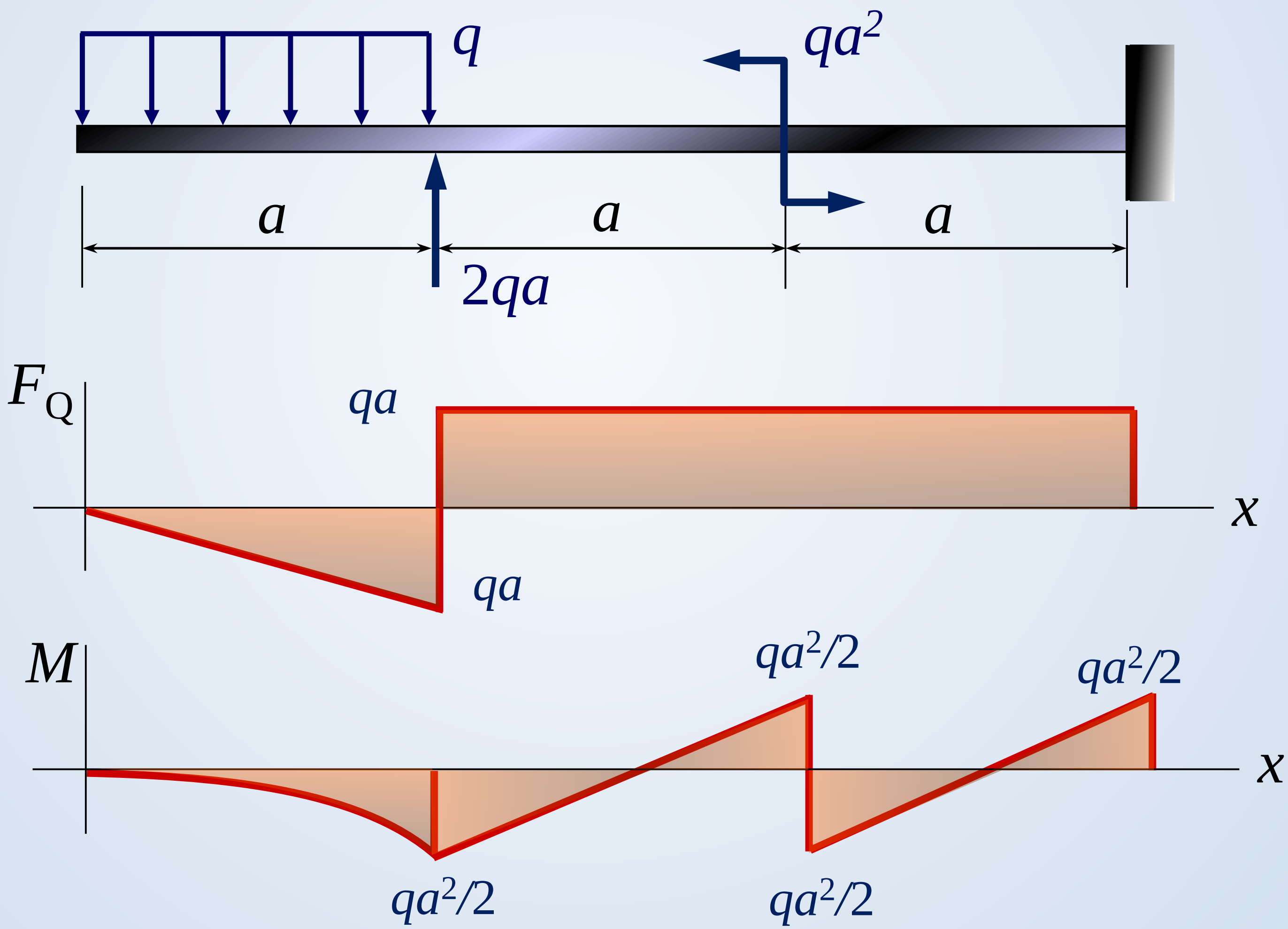


例 7 试画出图示梁的剪力图和弯矩图（作内力图）



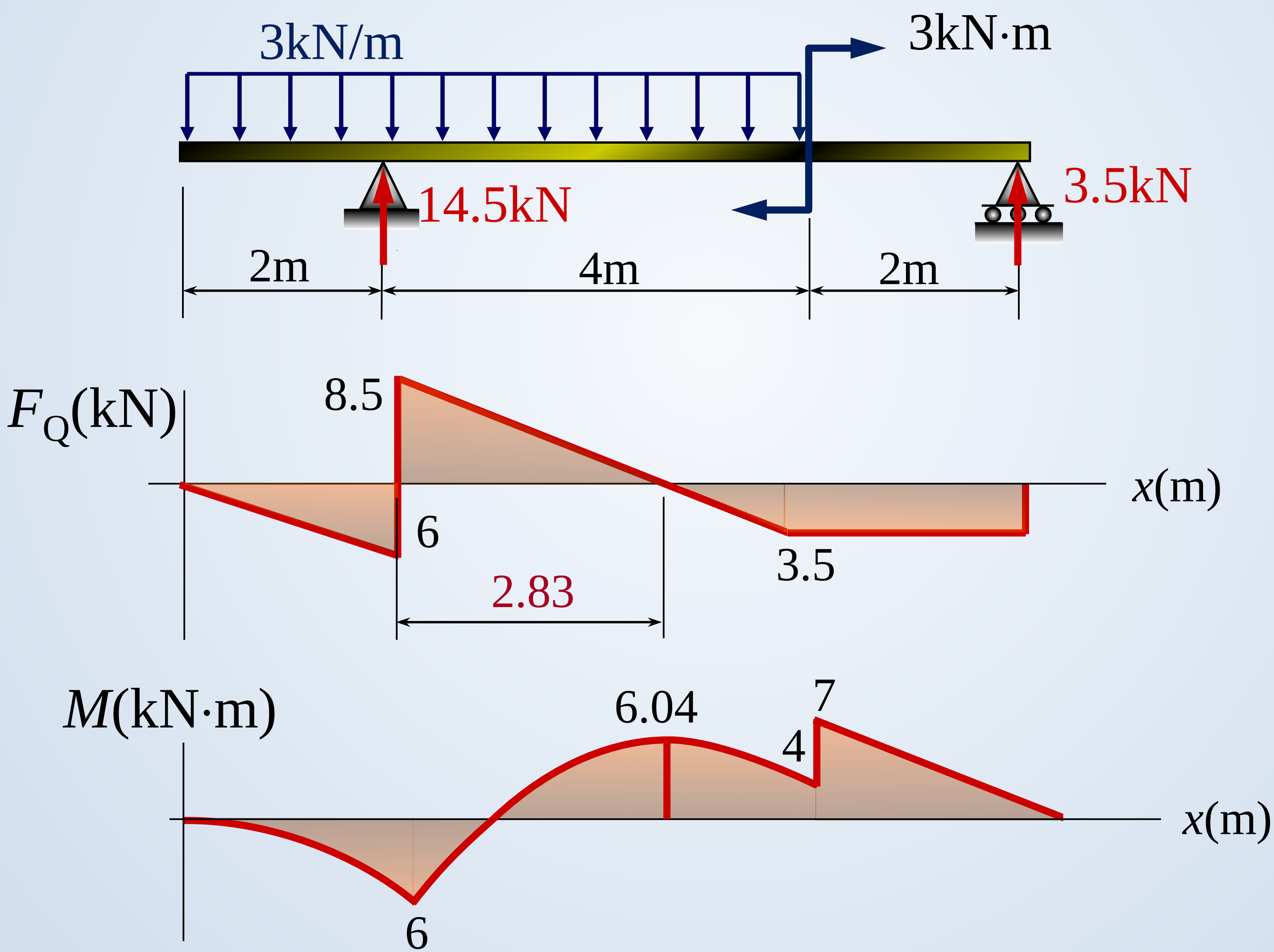
8.5 分布载荷集、剪力和弯矩间的关系及其应用

例 8 试画出图示梁的剪力图和弯矩图（作内力图）

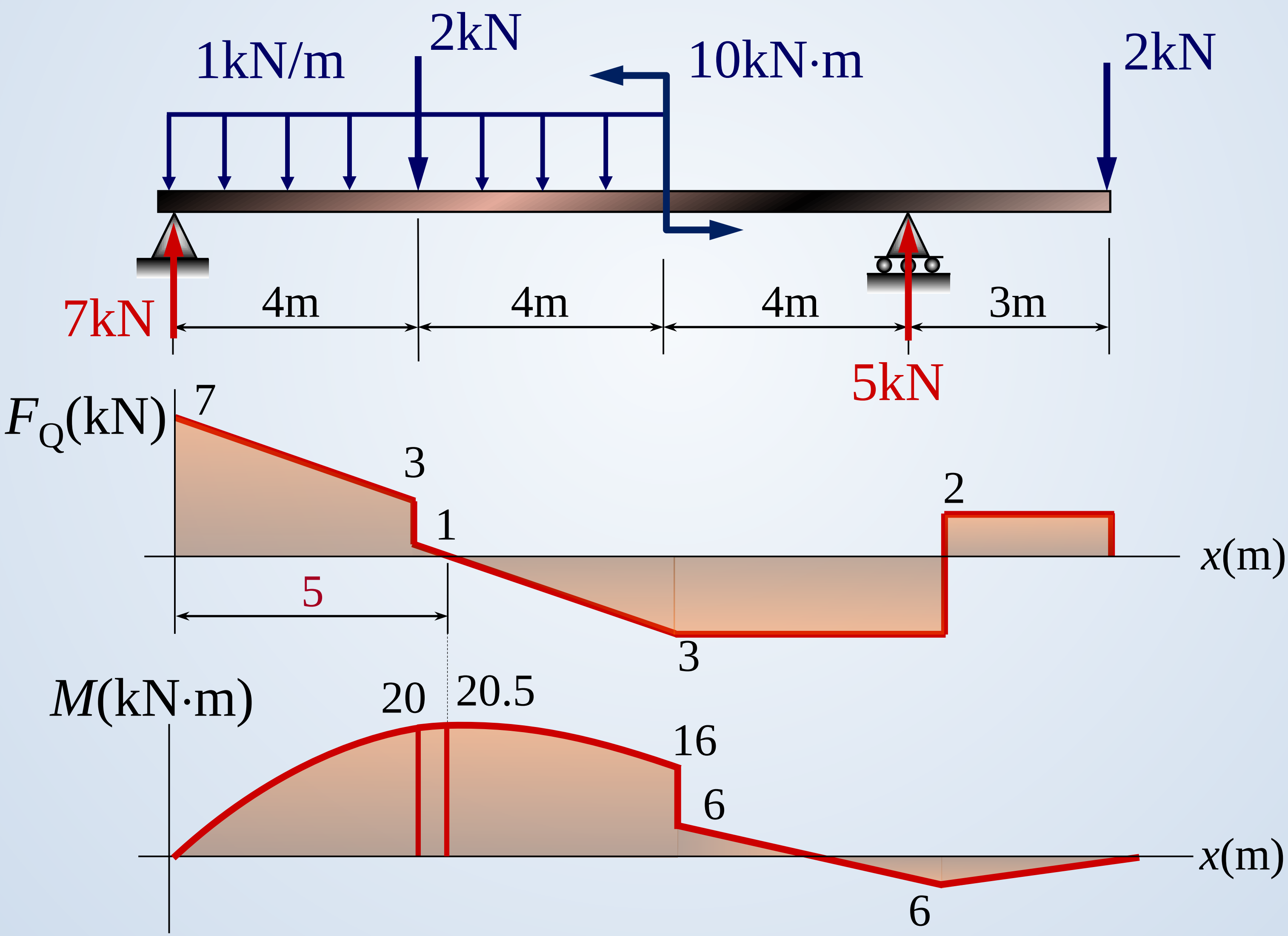


8.5 分布载荷集、剪力和弯矩间的关系及其应用

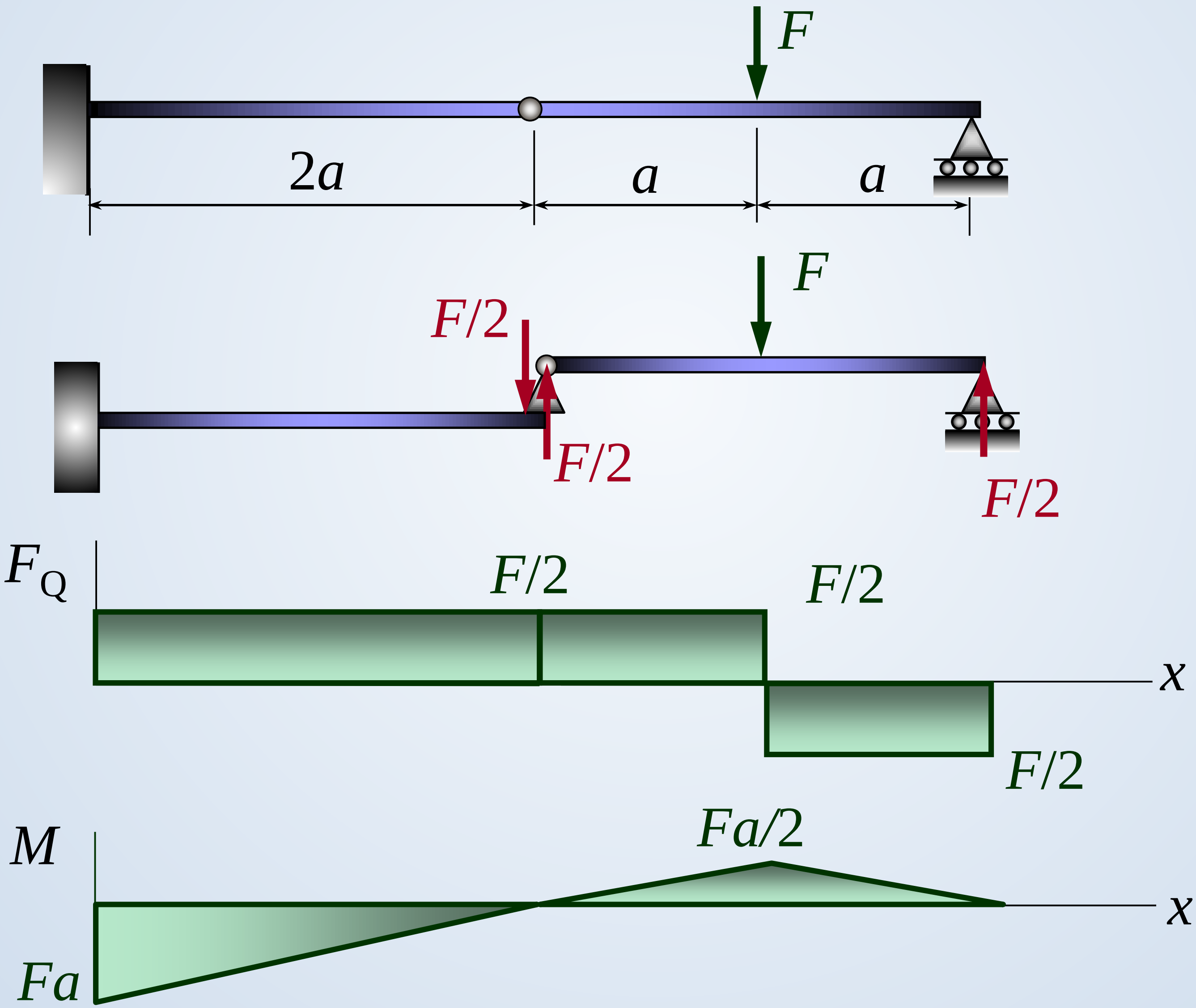
例9试画出图示梁的剪力图和弯矩图（作内力图）



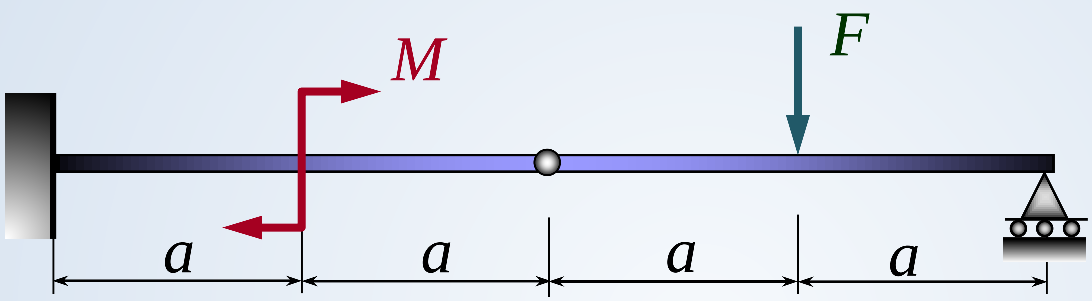
例10 试画出图示梁的剪力图和弯矩图

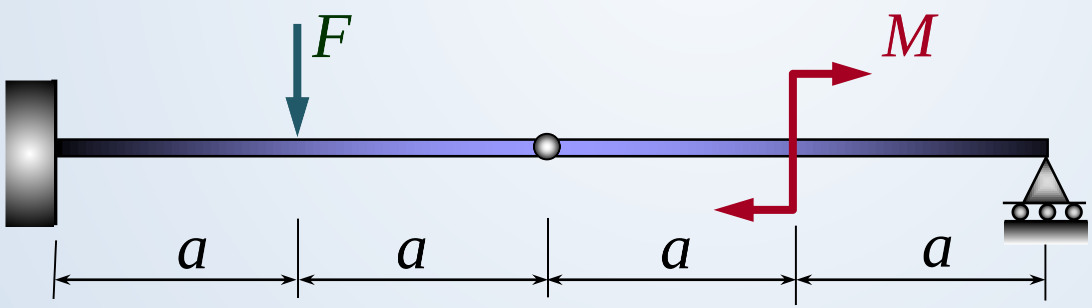


例12 试画出图示梁的剪力图和弯矩图（作内力图）



例 13 试画出图示梁的剪力图和弯矩图





8.6 用叠加法作弯矩图

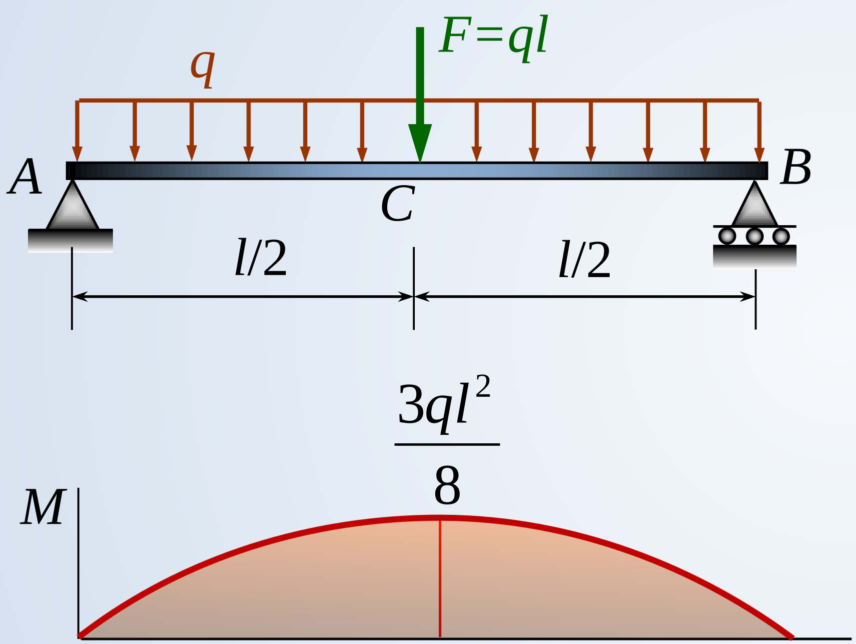
叠加原理：由几个载荷共同作用下所引起的某一物理量（内力，应力，应变或变形等），等于每一个载荷（主动）单独作用下所引起的该物理量的叠加（代数和）。

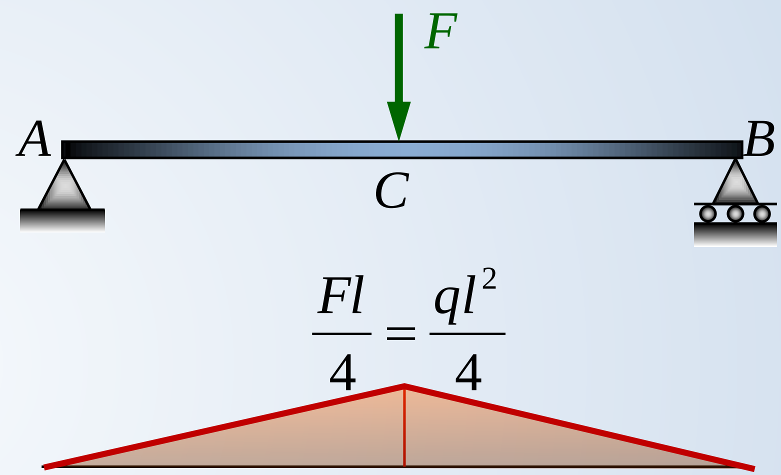
应用条件：所求物理量（内力，应力，应变或变形等）必须与载荷为线性关系（线弹性结构）

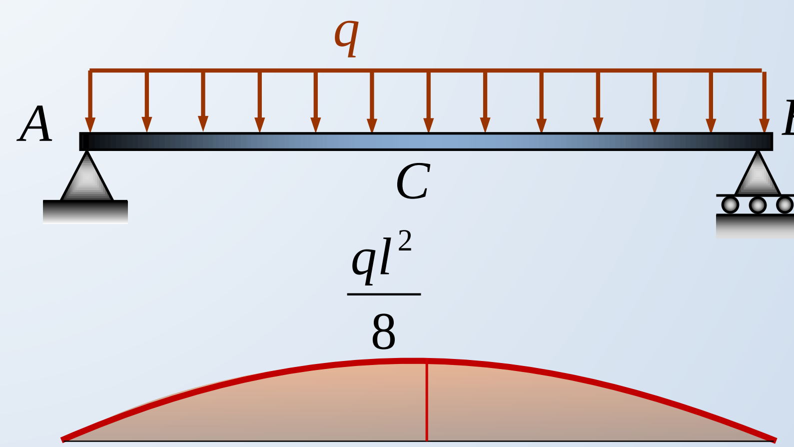
方法：先分别画出每一载荷单独作用时梁的弯矩图，然后将同一截面相应的各纵坐标代数叠加。

8.6 用叠加法作弯矩图

例14 试画出图示梁的剪力图和弯矩图

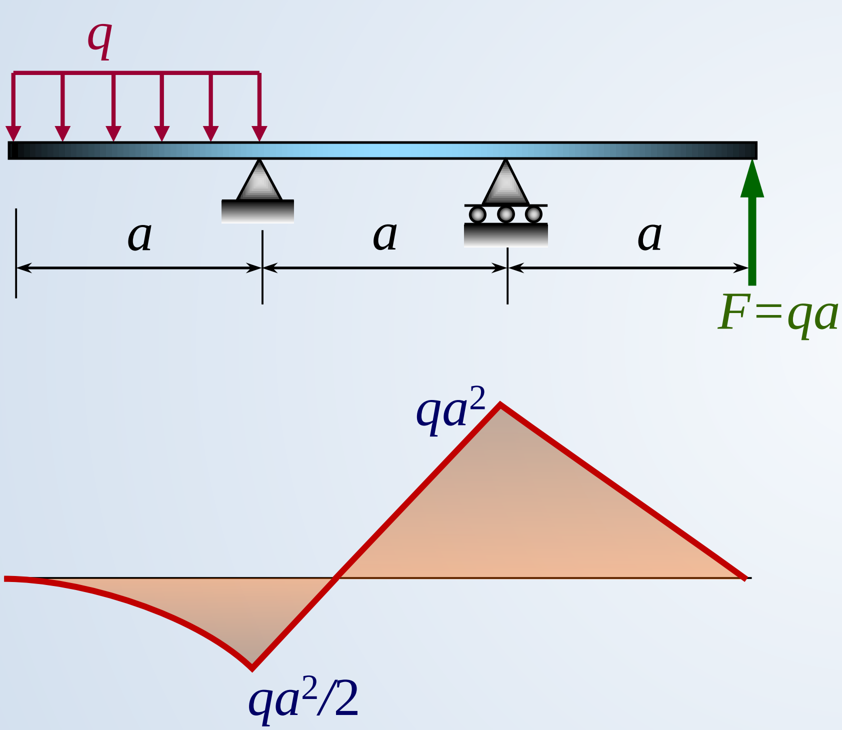


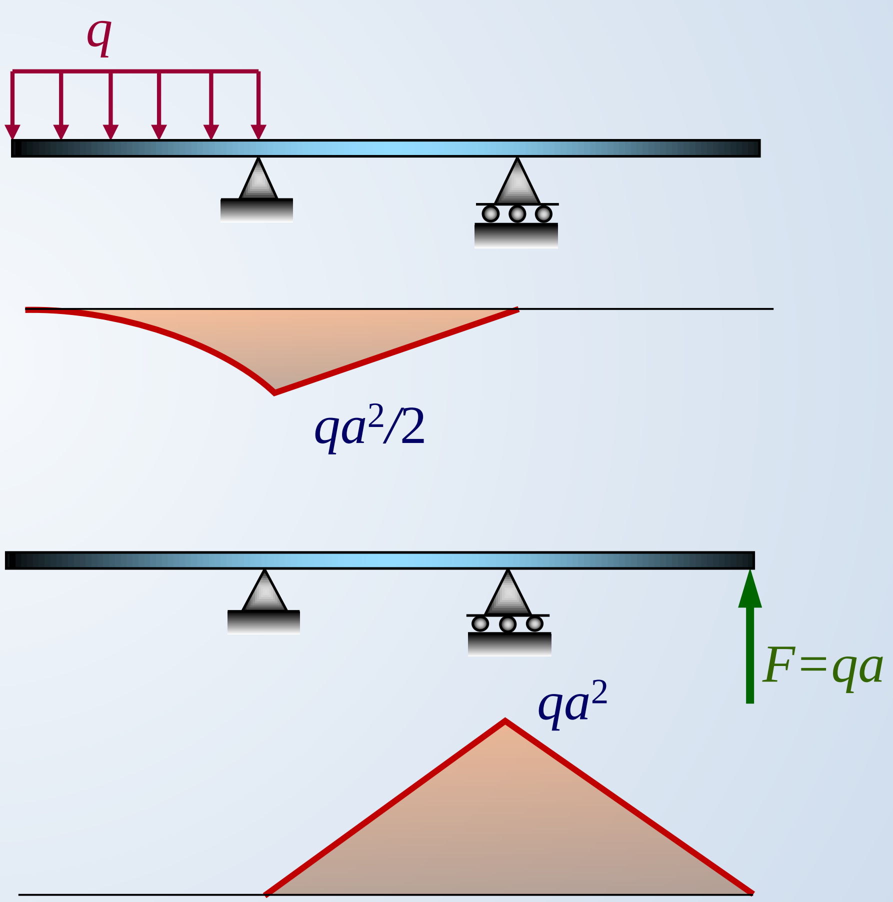




8.6 用叠加法作弯矩图

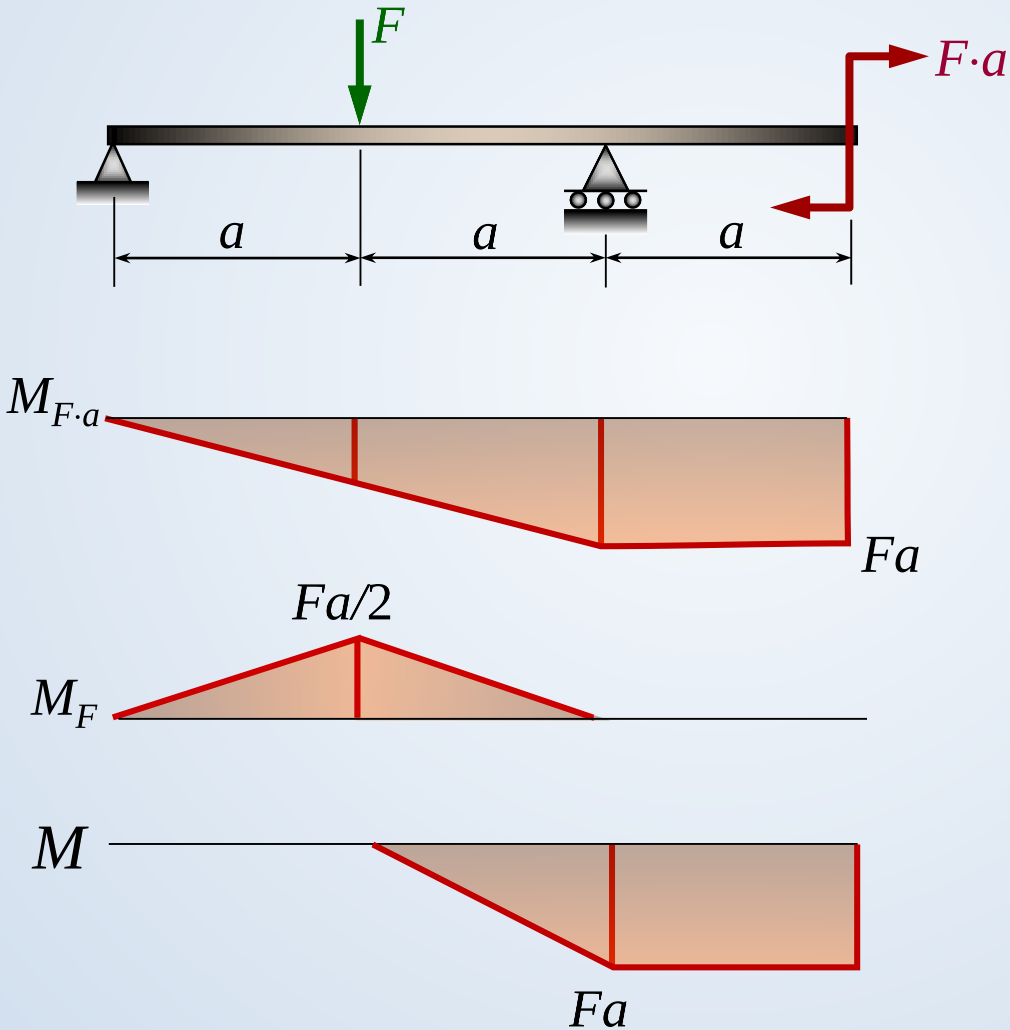
例 15 试画出图示梁的剪力图和弯矩图（作内力图）



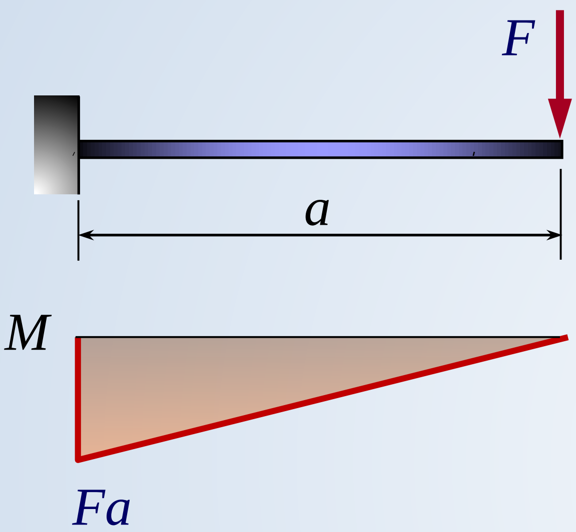


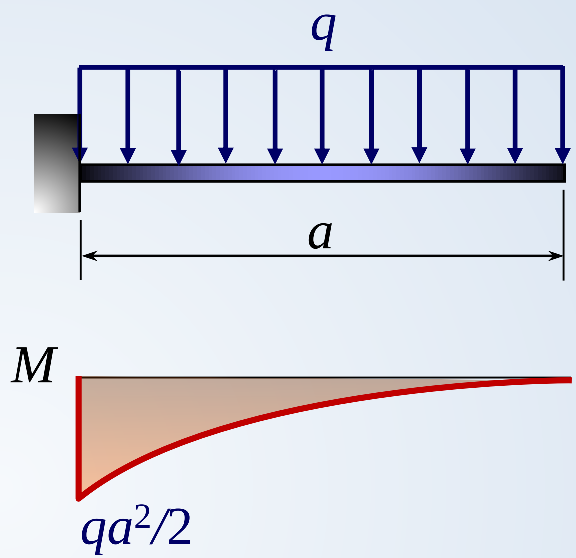
8.6 用叠加法作弯矩图

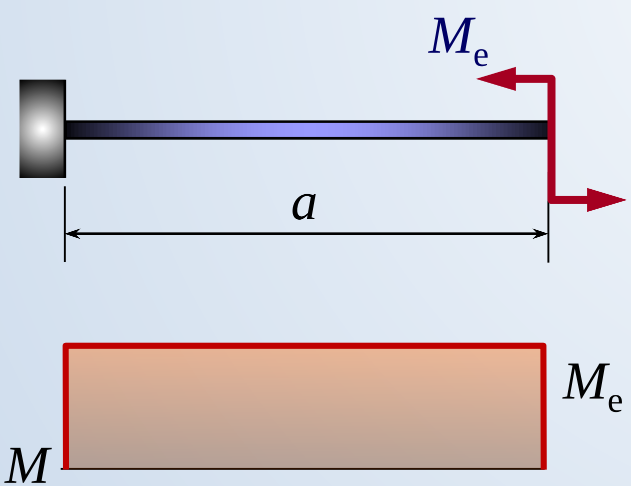
例 16 试画出图示梁的剪力图和弯矩图

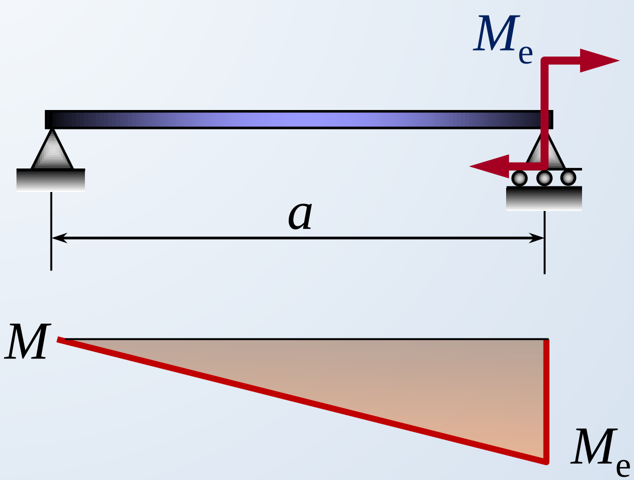


8.6 用叠加法作弯矩图

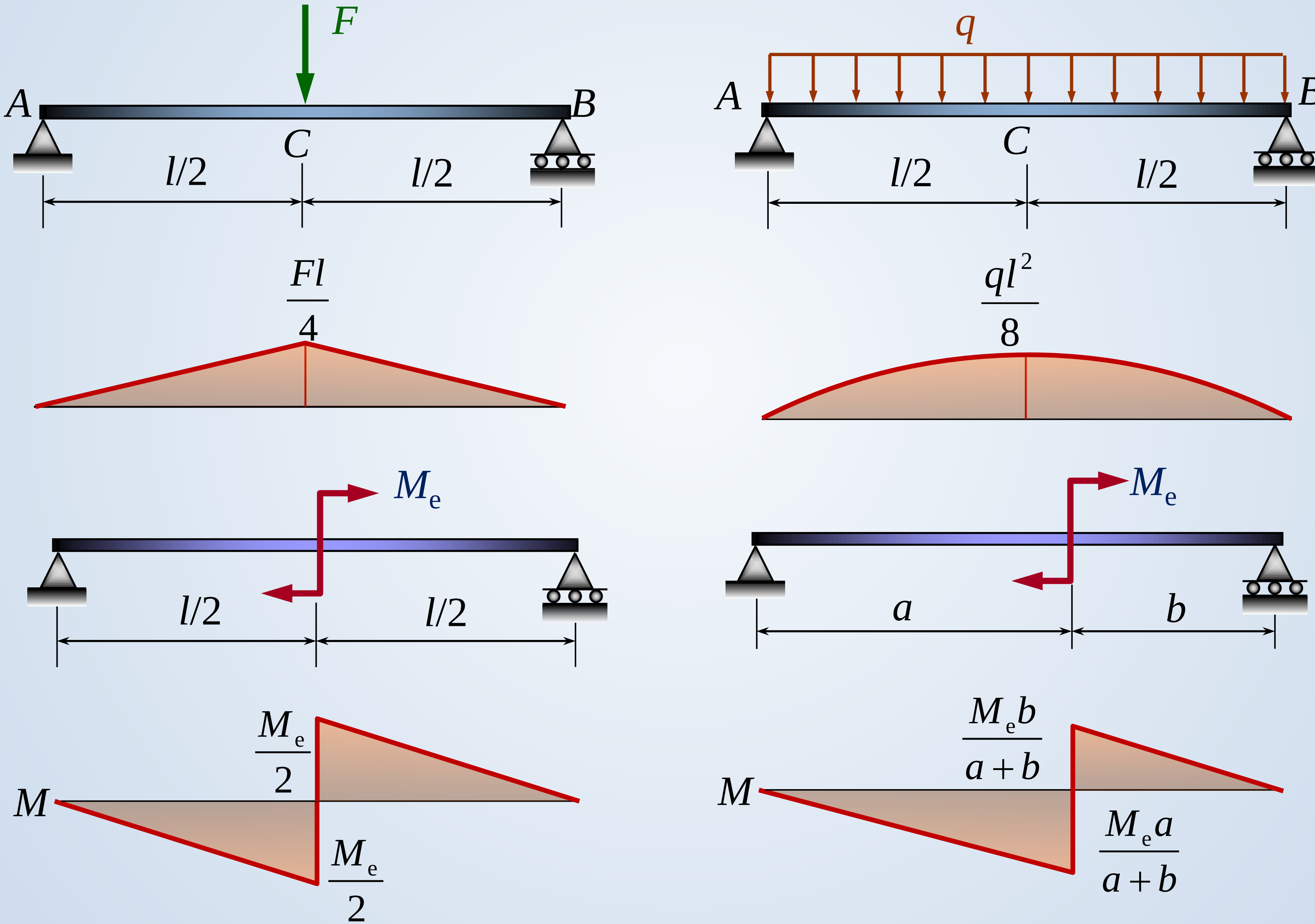




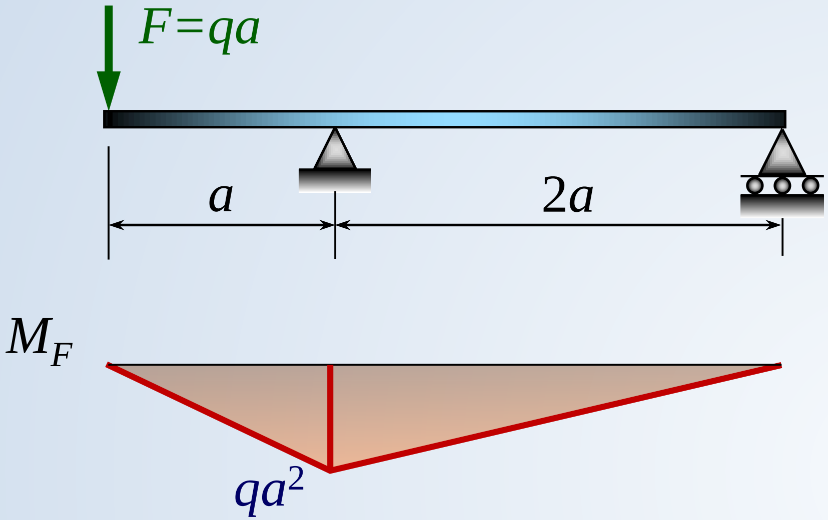


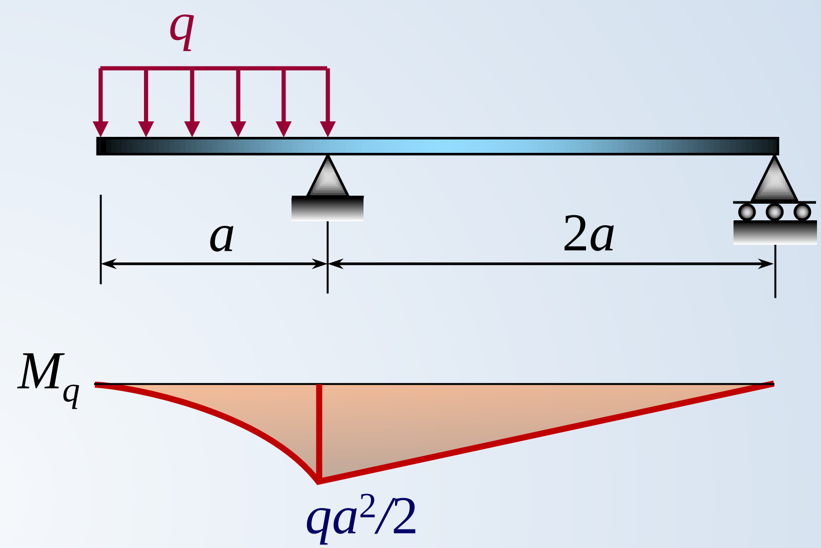


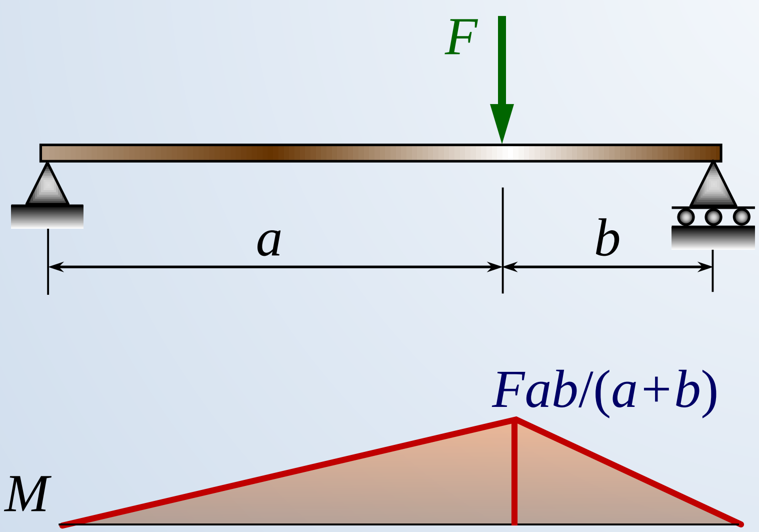
8.6 用叠加法作弯矩图

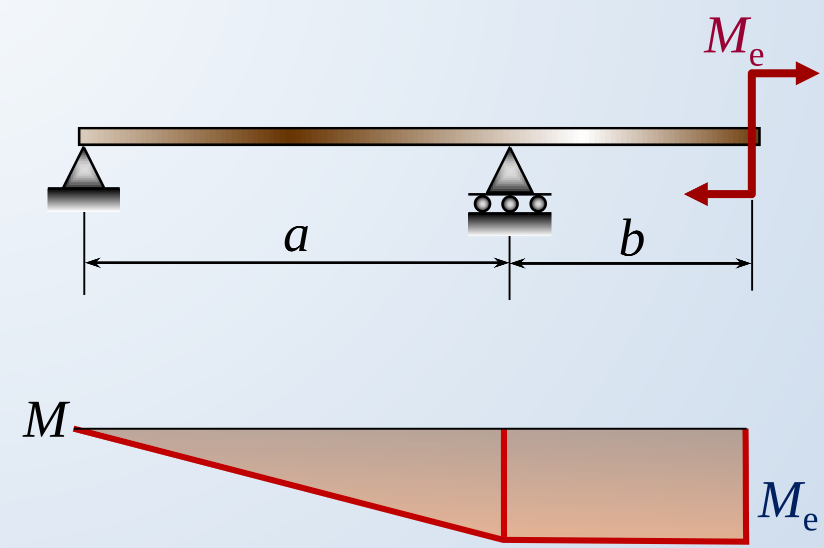

F
A
B
C
l/2
l/2
$\frac{Fl}{4}$
q
A
B
C
l/2
l/2
$\frac{ql^2}{8}$
M_e
l/2
l/2
M
$\frac{M_e}{2}$
$\frac{M_e}{2}$
M_e
a
b
M
$\frac{M_e b}{a+b}$
$\frac{M_e a}{a+b}$

8.6 用叠加法作弯矩图









8.7 平面刚架和曲杆的弯曲内力

一. 平面刚架的内力

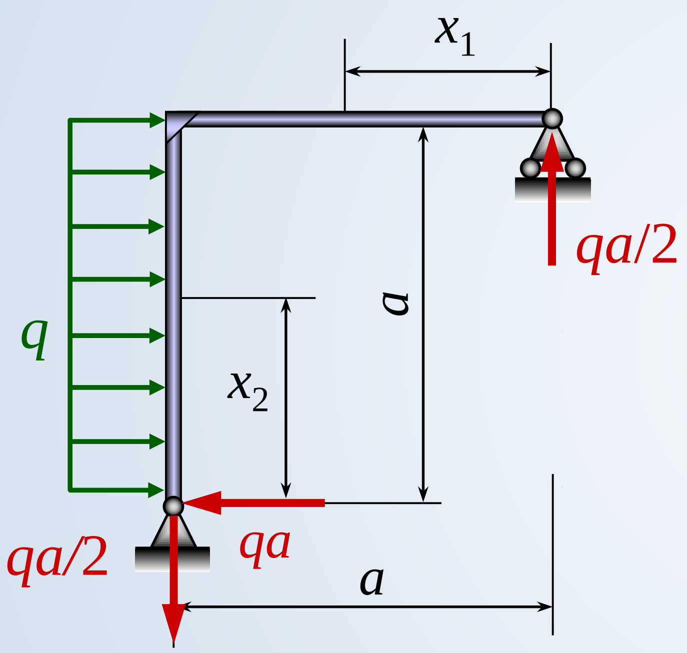
工程中某些结构的轴线是由几段直线组成的折线，这种结构的每两组成部分用刚节点联接。

刚节点---刚性接头处，相连杆件间的夹角在受力时不变化，刚节点不仅能传力，而且还能传递力矩。

刚架---杆系在联接处用刚节点联接起来的结构。

平面刚架---刚架的各杆系位于同一平面内

例17 列出平面刚架的内力方程，并作内力图



解：1. 求支反力

2. 分段建立内力方程

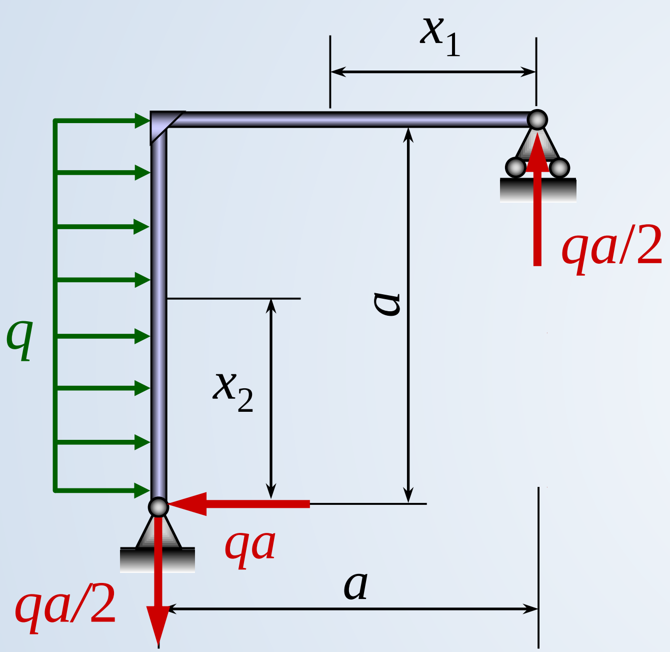
$$F_{N1} = 0 \quad F_{Q1} = -qa/2 \quad M_1 = qax_1/2$$

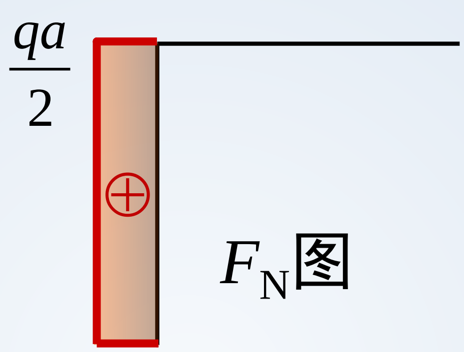
$$F_{N2} = qa/2 \quad F_{Q2} = qa - qx_2$$

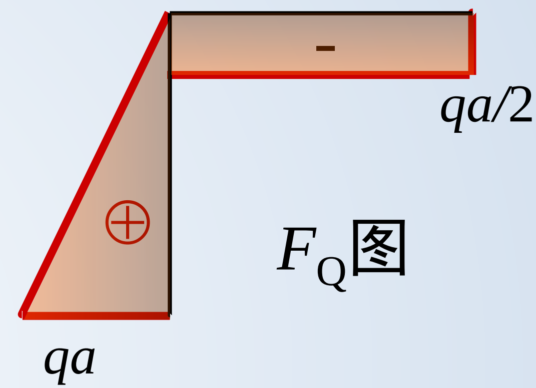
$$M_2 = qax_2 - qx_2^2/2$$

8.7 平面刚架和曲杆的弯曲内力

3、作F_Q、M、F_N 图



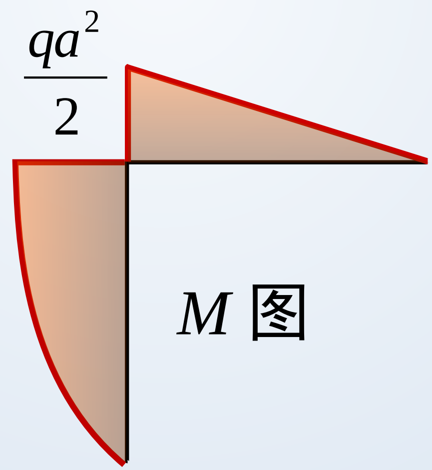




$F_{N1}=0 \quad F_{Q1}=-qa/2 \quad M_1=qax_1/2$

$F_{N2}=qa/2 \quad F_{Q2}=qa-qx_2$

$M_2=qax_2-qx_2^2/2$

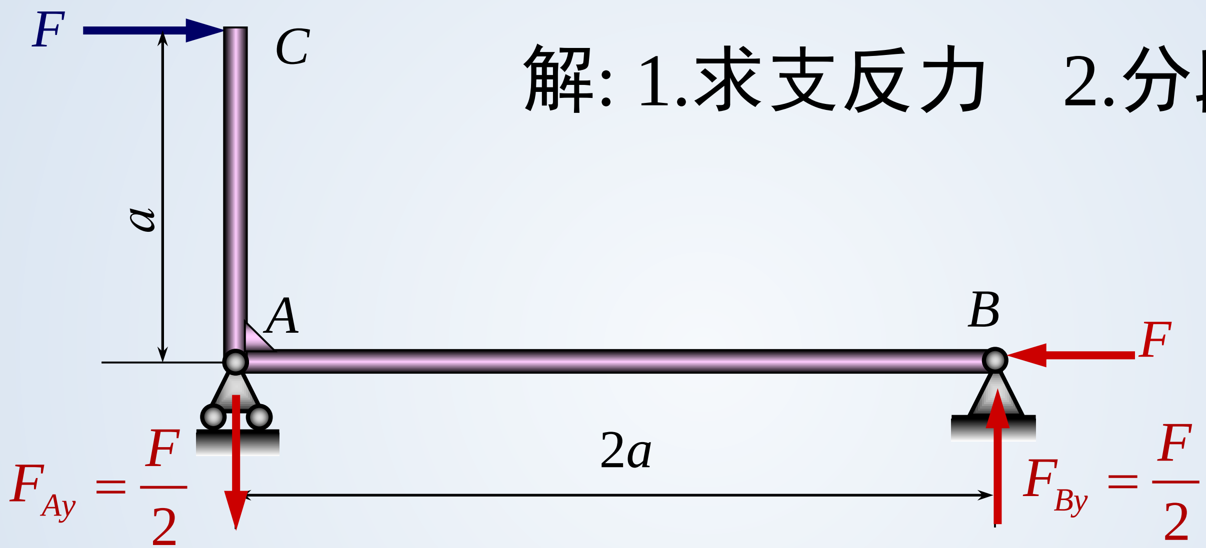


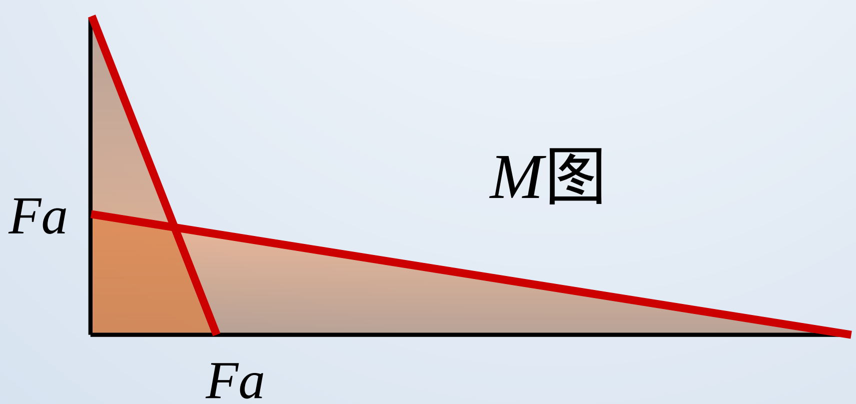
M图画在杆件受压侧即和直梁的规定一样

8.7 平面刚架和曲杆的弯曲内力

例 18 试画出图示梁的弯矩图。

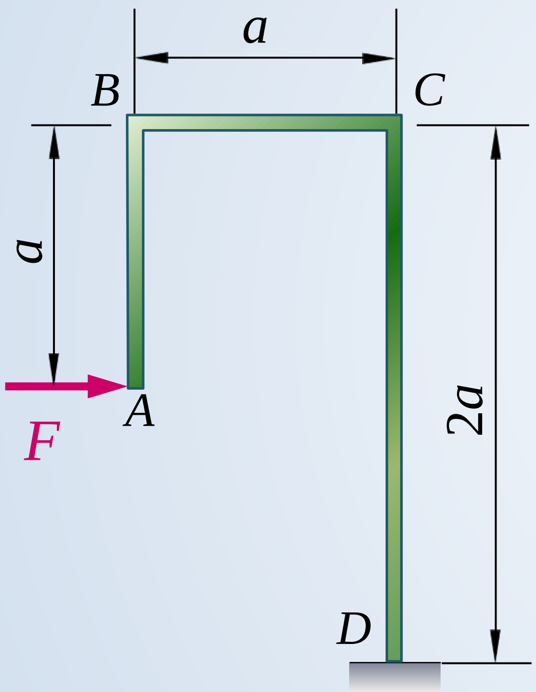
解: 1.求支反力　2.分段画图

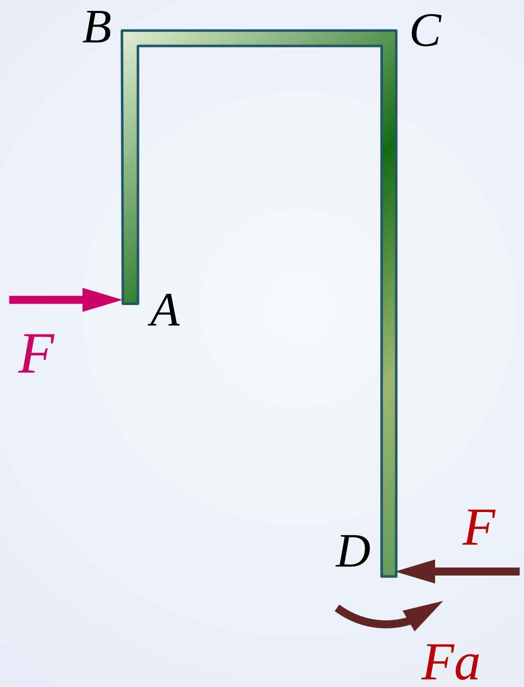


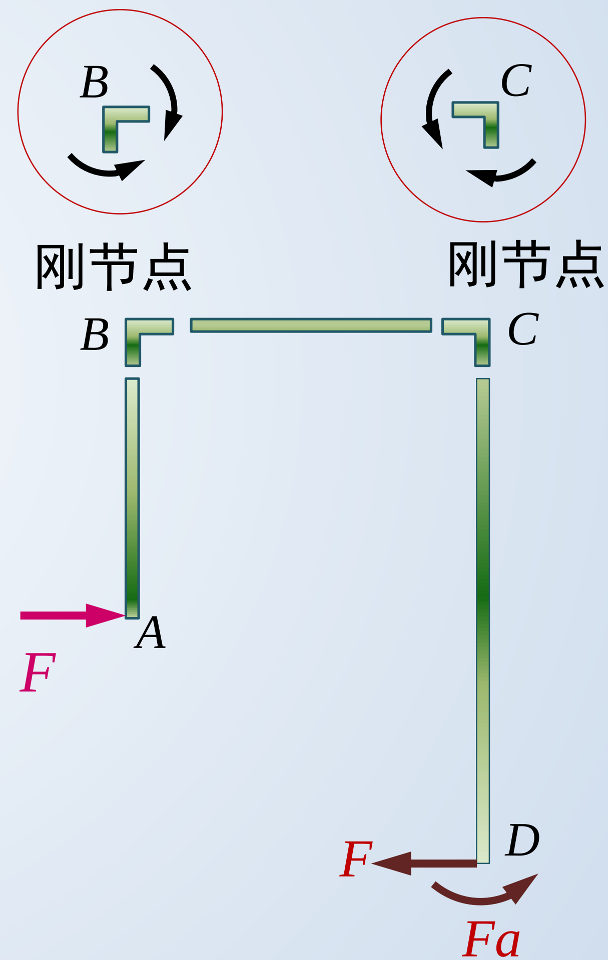


8.7 平面刚架和曲杆的弯曲内力

例 19 试画出图示梁的弯矩图。

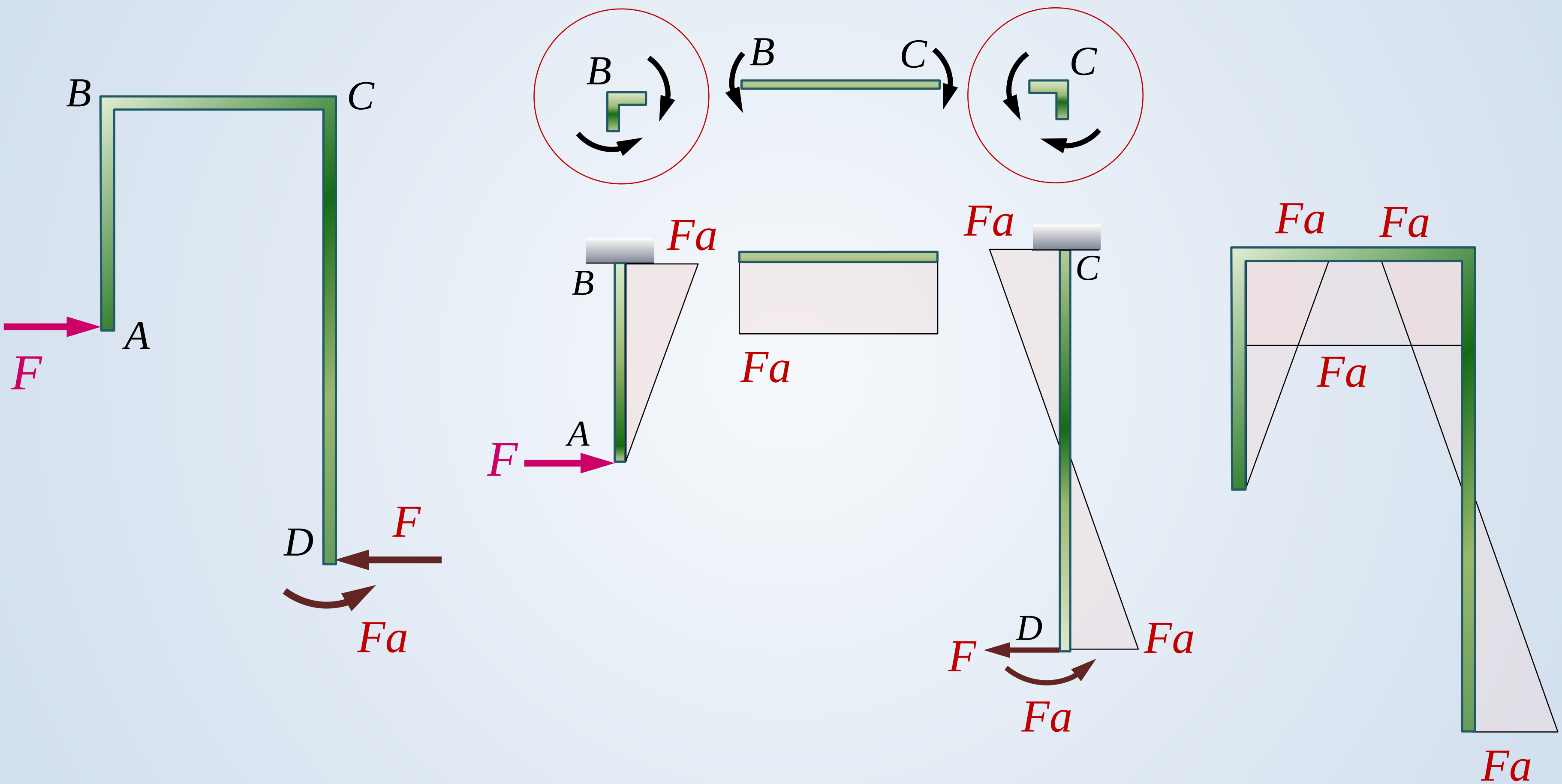






解: 1.求支反力　2.分段画M 图

8.7 平面刚架和曲杆的弯曲内力



二. 平面曲杆的弯曲内力

平面曲杆—轴线是一平面曲线

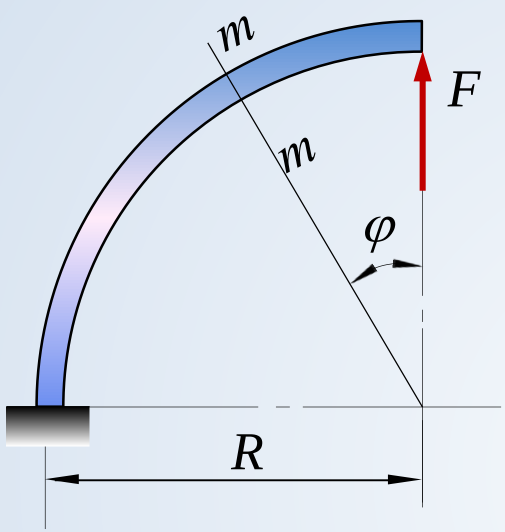
小曲率杆—对小曲率的平面曲杆，其内力的计算仍采用直梁的方法

截面法—任意截面切开，设内力F_N, F_Q, M 根据平衡方程即可列出内力方程

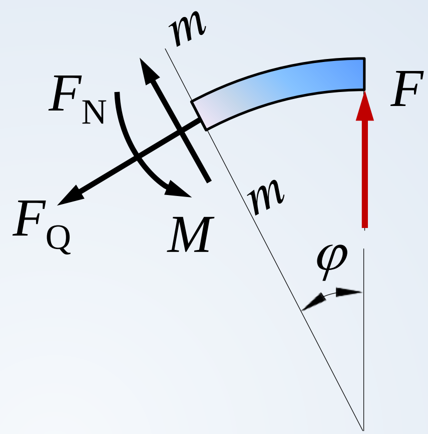
内力符号规定:

F_N, F_Q 同前； M—使轴线曲率增加为正

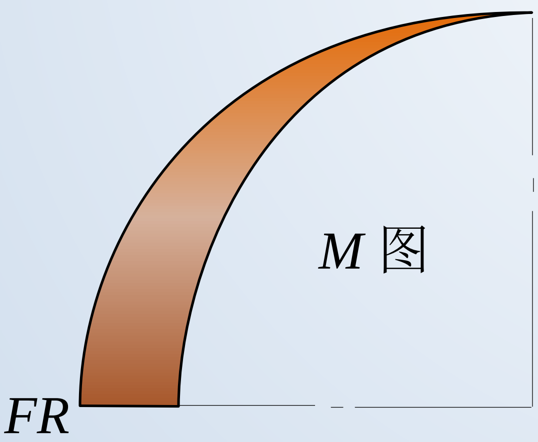
8.7 平面刚架和曲杆的弯曲内力



(a)



(b)



(c)

$$F_N(\varphi) = F\sin\varphi,$$

$$F_Q(\varphi) = -F\cos\varphi,$$

$$M(\varphi) = -FR\sin\varphi$$

Thank you!