高等数学作业

BⅡ

吉林大学公共数学教学与研究中心

2018 年 2 月

第一次作业

学院____________班级___________姓名___________学号____________

一、单项选择题

1．$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{3xy}{x^2+y^2}=$（　　）.

（A）$\dfrac{3}{2}$；　　（B）0；　　（C）$\dfrac{6}{5}$；　　（D）不存在.

2．二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处（　　）.

（A）连续，偏导数存在；　　（B）连续，偏导数不存在；

（C）不连续，偏导数存在；　　（D）不连续，偏导数不存在.

3．设 $f(x,y)=y(x-1)^2+x(y-2)^2$，在下列求 $f_x(1,2)$ 的方法中，不正确的一种是（　　）.

（A）因 $f(x,2)=2(x-1)^2, f_x(x,2)=4(x-1)$，故 $f_x(1,2)=4(x-1)|_{x=1}=0$；

（B）因 $f(1,2)=0$，故 $f_x(1,2)=0'=0$；

（C）因 $f_x(x,y)=2y(x-1)+(y-2)^2$，故 $f_x(1,2)=f_x(x,y)\big|_{\substack{x=1\\ y=2}}=0$；

（D）$f_x(1,2)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x,2)-f(1,2)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2(x-1)^2-0}{x-1}=0$.

4．若 $f(x,y)$ 的点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数都存在，则（　　）.

（A）$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某个邻域内有界；

（B）$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某个邻域内连续；

（C）$f(x,y_0)$ 在点 x_0 处连续，$f(x_0,y)$ 在点 y_0 处连续；

（D）$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续.

5．设 $z=f(x,y),\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2$，且 $f(x,0)=1, f_y(x,0)=x$，则 $f(x,y)$ 为（　　）.

（A）$1-xy+x^2$；　（B）$1+xy+y^2$；　（C）$1-x^2y+y^2$；　（D）$1+x^2y+y^2$.

二、填空题

1． $z=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$ 的定义域为__________.

2． $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1-\sqrt{1-xy}}{xy}=$____________.

3．设 $f(x,y)=x+y-\sqrt{x^2+y^2}$，则 $f_x'(3,4)=$________，$f_y'(3,4)=$________.

4．设 $u=\ln(3x-2y+z)$，则 $\mathrm{d}u=$_____________.

5．设 $z=x^y$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$________________.

三、计算题

1.计算 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to 1}}\left(1+\dfrac{y}{x+y}\right)^{x+y}$

2．讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 的连续性.

3．设 $f(x, y)=\sqrt{x^2|y|}$，求 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

4．求 $u=\int_{xz}^{yz} \mathrm{e}^{t^2} \mathrm{d}t$ 的偏导数.

5．讨论函数 $f\left(x, y\right)=\sqrt[3]{x^{3}+y^{3}}$ 在 $\left(0, 0\right)$ 点的可微性.

6．证明函数 $f(x, y)=\sqrt{|xy|}$ 在点$(0, 0)$处：（1）连续；（2）偏导数存在；（3）不可微.

第二次作业

学院____________班级___________姓名___________学号____________

一、单项选择题

1．设 $z=\dfrac{y}{f(x^2-y^2)}$，其中 $f(u)$ 为可导函数，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$（　　）.

（A）$-\dfrac{2xy}{f^2(x^2-y^2)}$；　　（B）$-\dfrac{2xyf'(x^2-y^2)}{f^2(x^2-y^2)}$；

（C）$-\dfrac{yf'(x^2-y^2)}{f^2(x^2-y^2)}$；　　（D）$-\dfrac{f(x^2-y^2)-yf'(x^2-y^2)}{f^2(x^2-y^2)}$.

2．设方程 $F(x-y,y-z,z-x)=0$ 确定 z 是 x，y 的函数，F 是可微函数，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$（　　）.

（A）$-\dfrac{F_1'}{F_3'}$；　　（B）$\dfrac{F_1'}{F_3'}$；　　（C）$\dfrac{F_x-F_z}{F_y-F_z}$；　　（D）$\dfrac{F_1'-F_3'}{F_2'-F_3'}$.

3．设 $x=x(y,z), y=y(z,x), z=z(x,y)$ 都由方程 $F(x,y,z)=0$ 所确定的隐函数，则下列等式中，不正确的一个是（　　）.

（A）$\dfrac{\partial x}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial x}=1$；　　（B）$\dfrac{\partial x}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x}=1$；

（C）$\dfrac{\partial x}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x}=1$；　　（D）$\dfrac{\partial x}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x}=-1$.

4．设 $u=u(x,y), v=v(x,y)$ 都是可微函数，C 为常数，则在下列梯度运算式中，有错误的是（　　）.

（A）$\nabla C=0$；　　（B）$\nabla(Cu)=C\nabla u$；

（C）$\nabla(u+v)=\nabla u+\nabla v$；　　（D）$\nabla(uv)=v\nabla u+u\nabla v$.

5． $u=f(r)$，而 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，且函数 $f(r)$ 具有二阶连续导数，则 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=($　　$)$.

（A）$f''(r)+\frac{1}{r}f'(r)$；　　（B）$f''(r)+\frac{2}{r}f'(r)$；

（C）$\frac{1}{r^2}f''(r)+\frac{1}{r}f'(r)$；　　（D）$\frac{1}{r^2}f''(r)+\frac{2}{r}f'(r)$.

二、填空题

1．已知 $f(1,2)=4,\ \mathrm{d}f(1,2)=16\mathrm{d}x+4\mathrm{d}y,\ \mathrm{d}f(1,4)=64\mathrm{d}x+8\mathrm{d}y$，则 $z=f(x,f(x,y))$ 在点（1, 2）处对 x 的偏导数为__________.

2．由方程 $xy-yz+zx=\mathrm{e}^z$ 所确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 在点（1, 1）处的全微分为____________.

3．$r=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点（0, 0）处沿 x 轴正向的方向导数为_____________.

4．函数 $u=x^2+y^2+z^2-xy+2yz$ 在点 $(-1,2,-3)$ 处的方向导数的最大值等于____.

三、计算与解答题

1．设 f 是 $C^{(2)}$类函数，$z=f(\mathrm{e}^{xy},x^2-y^2)$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

2． $z=(1+xy)^{y}$，求 dz .

3．设 f，φ 是 $C^{(2)}$类函数，$z=yf\left(\dfrac{x}{y}\right)+x\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$，证明：

（1） $x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$ ；　　（2） $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

4．设 $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\dfrac{y}{x}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$．

5．设 $\begin{cases} x=\mathrm{e}^u+u\sin v, \\ y=\mathrm{e}^u-u\cos v, \end{cases}$ 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y}$．

6．设$u = f(x, y, z), \varphi(x^2, \mathrm{e}^y, z) = 0, y = \sin x$，其中求$f$，$\varphi$是$C^{(1)}$类函数，求$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

7．求函数$z = \ln(x + y)$的点(1, 2)处沿着抛物线$y^2 = 4x$的该点切线方向的方向导数.

第三次作业

学院____________班级___________姓名___________学号____________

一、单项选择题

1．在曲线 $x=t,\ y=-t^2,\ z=t^3$ 的所有切线中，与平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线(　).

（A）只有一条；　　（B）只有两条；　　（C）至少有三条；　（D）不存在.

2．设函数 $f(x,y)$ 在点(0, 0)附近有定义，且 $f_x(0,0)=3,\ f_y(0,0)=1$，则(　　).

（A）$\mathrm{d}z(0,0)=3\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$；

（B）曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的法向量为 $\{3,1,1\}$ ；

（C）曲线 $\begin{cases} z=f(x,y), \\ y=0 \end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的切向量为 $\{1,0,3\}$ ；

（D）曲线 $\begin{cases} z=f(x,y), \\ y=0 \end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的切向量为 $\{3,0,1\}$.

3．曲面 $z=x+f(y-z)$ 的任一点处的切平面（　　）.

（A）垂直于一定直线；　　　　　（B）平等于一定平面；

（C）与一定坐标面成定角；　　　（D）平行于一定直线.

4．设 $u(x,y)$ 在平面有界闭区域 D 上是 $C^{(2)}$ 类函数，且满足 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\neq 0$ 及 $\dfrac{\partial^{2u}}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，则 $u(x,y)$ 的（　　）.

（A）最大值点和最小值点必定都在 D 的内部；

（B）最大值点和最小值点必定都在 D 的边界上；

（C）最大值点在 D 的内部，最小值点在 D 的边界上；

（D）最小值点在 D 的内部，最得到值点在 D 的边界上.

二、填空题

1．如果曲面 $xyz=6$ 在点 M 处的切平面平行于平面 $6x-3y+2z+1=0$，则切点 M 的坐标是____________.

2．曲线 $\begin{cases} x^2+4y^2+9z^2=14, \\ x+y+z=1 \end{cases}$ 在点 $(1,1,-1)$ 处的法平面方程是____________.

3．$z=x^2+y^2$ 在条件 $x+y=1$ 下的极小值是_____________.

4．函数 $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 在点 $M(1,1,1)$ 处沿曲面 $2z=x^2+y^2$ 在该点的外法线方向的方向导数是___________.

三、计算题

1．求曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6, \\ z=x^2+y^2 \end{cases}$在点$(1,1,2)$处的切线方程.

2．过直线$\begin{cases} 10x+2y-2z=27, \\ x+y-z=0 \end{cases}$作曲面$3x^2+y^2-z^2=27$的切平面，求其方程.

3．证明曲面 $x^{2/3}+y^{2/3}+z^{2/3}=a^{2/3}\,(a>0)$ 上任意点处的切平面在各个坐标轴上的截距平方和等于 a^2 .

4．求 $f\left(x,\,y\right)=x^4+y^4-2x^2-2y^2+4xy$ 的极值

5．求函数 $f(x,\,y)=x^2+y^2-12x+16y$ 在区域 $D=\{(x,\,y)\,|\,x^2+y^2\le 25\}$ 上的最大值和最小值.

6．在过点 $P(1,3,6)$ 的所有平面中，求一平面，使之与三个坐标平面所围四面体的体积最小.

第四次作业

学院____________班级____________姓名____________学号____________

一、单项选择题

1．设 $f(x,y)$ 连续，且 $f(x,y)=xy+\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由 $y=0$，$y=x^2$，$x=1$ 所围区域，则 $f(x,y)$ 等于(　　).

（A）xy；　（B）$2xy$；　（C）$xy+\frac{1}{8}$；　（D）$xy+1$.

2．设 D 是 xOy 平面上以(1, 1), (-1, 1)和(-1, -1)为顶点的三角形区域，D_1 是 D 的第一象限部分，则 $\iint\limits_D (xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 等于(　　).

（A）$2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；　（B）$2\iint\limits_{D_1}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；

（C）；$4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$　（D）0.

3．设平面区域 $D:1\le x^2+y^2\le 4$, $f(x,y)$ 是在区域 D 上的连续函数，则 $\iint\limits_D f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 等于（　　）.

（A）$2\pi\int_1^2 rf(r)\mathrm{d}r$；　（B）$2\pi\left[\int_0^2 rf(r)\mathrm{d}r+\int_0^1 rf(r)\mathrm{d}r\right]$；

（C）$2\pi\int_1^2 rf(r^2)\mathrm{d}r$；　（D）$2\pi\left[\int_0^2 rf(r^2)\mathrm{d}r+\int_0^1 rf(r^2)\mathrm{d}r\right]$.

4．设有空间区域 $\Omega_1: x^2+y^2+z^2\le R^2, z\ge 0$ 及 $\Omega_2: x^2+y^2+z^2\le R^2$，$x\ge 0$，$y\ge 0$，$z\ge 0$，则(　　).

（A）$\iiint\limits_{\Omega_1}x\mathrm{d}V=4\iiint\limits_{\Omega_2}x\mathrm{d}V$；　（B）$\iiint\limits_{\Omega_1}y\mathrm{d}V=4\iiint\limits_{\Omega_2}y\mathrm{d}V$；

（C）$\iiint\limits_{\Omega_1}z\mathrm{d}V=4\iiint\limits_{\Omega_2}z\mathrm{d}V$；　（D）$\iiint\limits_{\Omega_1}xyz\mathrm{d}V=4\iiint\limits_{\Omega_2}xyz\mathrm{d}V$.

二、填空题

1．积分 $\int_0^2\mathrm{d}x\int_x^2 \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=$____________.

2．交换积分次序：$\int_0^1\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^4\mathrm{d}x\int_{x-2}^{\sqrt{x}}f(x,y)\mathrm{d}y=$____________.

3．设区域 D 为 $|x|+|y|\le 1$，则 $\iint\limits_D(|x|+|y|)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$____________.

4．设区域 D 为 $x^2+y^2\le R^2$，则 $\iint\limits_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$____________.

5．直角坐标中三次积分 $I=\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}f(x,y,z)\mathrm{d}z$ 在柱面坐标中先 z 再 r 后

θ 顺序的三次积分是____.

三、计算题

1. $\iint |x^2+y^2-4| \mathrm{d}\sigma$，其中 D 为圆域 $x^2+y^2 \le 9$

2. 计算 $\iint\limits_D \frac{x\sin y}{y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由 $y=x^2$ 和 $y=x$ 所围成的区域.

3. 计算 $\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 2, \sqrt{2x-x^2}\le y\le \sqrt{4-x^2}\}$.

4．计算 $\iiint\limits_{\Omega} xy^2z^3\mathrm{d}V$ ，其中 Ω 是由曲面 $z=xy$ 与平面 $y=x, x=1$ 和 $z=0$ 所围成的闭或区域.

5． $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv, \Omega$ 是由曲线 $y^2=2z,\ x=0$ 绕 Z 轴旋转一周而成的曲面与

两平面 Z=2，Z=8 所围的立体。

6．．设 $f(x,y)$ 在 $x^2+y^2\leq 1$ 上连续，求证：$\lim\limits_{R\to 0}\dfrac{1}{R^2}\iint\limits_{x^2+y^2\leq R^2} f(x,y)d\sigma=\pi f(0,0)$

四、证明题

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续且恒大于零，证明

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{f(x)} \geq (b-a)^2 .$$

第五次作业

学院____________班级___________姓名___________学号____________

一、单项选择题

1．设 L 是圆周 $x^2+y^2=a^2$，则 $\bigcirc$ $\quad$ $\mathrm{d}s=(\quad)$．

（A）$2\pi a^n$；（B）$2\pi a^{n+1}$；（C）$2\pi a^{2n}$；（D）$2\pi a^{2n+1}$．

2．设 L 是由 $(0,0),(2,0),(1,1)$ 三点连成的三角形边界曲线，则 $\bigcirc$ $\quad(\quad)$．

（A）$\sqrt{2}$；（B）$2+\sqrt{2}$；（C）$2\sqrt{2}$；（D）$2+2\sqrt{2}$．

3．设 Σ 是锥面 $x^2+y^2=z^2$ 在 $0\le z\le 1$ 的部分，则 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}S=(\quad)$．

（A）$\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r$；（B）$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r$；

（C）$\sqrt{2}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r$；（D）$\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r$．

4．设 Σ 为 $x^2+y^2+z^2=a^2\ (z\ge 0)$，$\Sigma_1$ 是 Σ 在第一卦限中的部分，则有$(\quad)$．

（A）$\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}S=4\iint\limits_{\Sigma_1}x\mathrm{d}S$；（B）$\iint\limits_{\Sigma}y\mathrm{d}S=4\iint\limits_{\Sigma_1}x\mathrm{d}S$；

（C）$\iint\limits_{\Sigma}z\mathrm{d}S=4\iint\limits_{\Sigma_1}x\mathrm{d}S$；（D）$\iint\limits_{\Sigma}xyz\mathrm{d}S=4\iint\limits_{\Sigma_1}xyz\mathrm{d}S$．

二、填空题

1．设 $L: x^2+y^2=1, y\ge 0$ 则 $\int_L e^{x^2+y^2}\arctan\sqrt{x^2+y^2}\,ds=$_______________．

2．$L:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，周长为 a，则 $\bigcirc_L$ $\quad xy \quad x \quad +4y^2)ds=$_______．

3．设 Γ 表示曲线弧 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos t, y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin t, z=\dfrac{t}{2}, (0\le t\le 2\pi)$，则 $\int_{\Gamma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=$________．

4．设 Σ 是柱面 $x^2+y^2=a^2\ (a>0)$ 在 $0\le z\le h$ 之间的部分，则 $\iint\limits_{\Sigma}x^2\mathrm{d}S=$________．

5．设 Σ 是上半椭球面 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}+z^2=1\,(z\ge 0)$，已知 Σ 的面积为 A，则 $\iint\limits_{\Sigma}(4x^2+9y^2+36z^2+xyz)\mathrm{d}S=$_____________．

三、计算题

1．计算○ ，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$，直线 $y=x$ 及 x 轴在第一象限内所围成的扇形的整个边界.

2．○ ，其中 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2,\\ x+y+z=0.\end{cases}$.

3． $I=\iint_{\Sigma}|xyz|dS \quad \Sigma: z=x^2+y^2$ 被 $z=1$ 所截下部分

4．求 $I=\iint_{S}\frac{dS}{x^2+y^2+z^2}$　　S：介于 Z=0，Z=H 之间的 $x^2+y^2=R^2$

四、应用题

1．求柱面 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ 被球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 包围部分的面积 S 。

.

2．求面密度 $\rho=1$ 的均匀半球壳 $x^2+y^2+z^2=a^2\ (z\geq 0)$ 关于 z 轴的转动惯量.

第六次作业

学院____________班级___________姓名___________学号____________

一、单项选择题

1．设 L 是圆周 $x^2+y^2=a^2\ (a>0)$ 负向一周，则曲线积分

$$\bigcirc \qquad \mathrm{l}x+(xy^2-y^3)\mathrm{d}y = (\quad)\ .$$

（A）0；　（B）$-\dfrac{\pi a^4}{2}$；　（C）$-\pi a^4$；　（D）πa^4．

2．设 L 是椭圆 $4x^2+y^2=8x$ 沿逆时针方向，则曲线积分

$$\bigcirc \qquad y = (\quad).$$

（A）2π；　（B）π；　（C）1；　（D）0．

3．设 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧，则曲面积分

$$\bigcirc \qquad \frac{\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x\quad+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = (\quad).$$

（A）0；　（B）1；　（C）2π；　（D）4π．

4．已知 $\dfrac{(x+ay)\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{(x+y)^2}$ 为某函数的全微分，则 $a=$（　　）正确．

（A）-1；　（B）0；　（C）2　（D）1．

二、填空题

1．设 L 为 $x^2+(y-1)^2=4$ 正向一周，则 $\bigcirc \qquad \frac{c}{)^2} =$ ________________．

2．设 L 为封闭折线 $|x|+|y|=1$ 正向一周，则 $\bigcirc \qquad \mathrm{os}(x+y)\mathrm{d}y=$ _________．

3．设 L 为 $y=\int_0^x \tan t\mathrm{d}t$ 从 x=0 到 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 一段弧，将 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 化为第一型曲线积分为___________．

4．设 Σ 是平面 $3x+2y+2\sqrt{3}z=6$ 在第一卦限部分的下侧，则 $I=\iint\limits_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 化为对面积的曲面积分为 $I=$ _______________．

5．设 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$，法向量向外，则 $\bigcirc$ ____________．

6．设 $u=x^2+2y+yz$，则 $\operatorname{div}(\operatorname{grad}u)=$ ______________．

三、计算题

1．计算 $\int_L y^2\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y$，其中 L 是抛物线 $y = x^2$ 上从点 $A(1,1)$ 到 $B(-1,1)$，再沿直线到 $C(0,2)$ 的曲线．

2．计算 $\int_L (x^2 - y)\mathrm{d}x - (x + \sin y)\mathrm{d}y$，其中 L 是圆周 $y = \sqrt{2x - x^2}$ 上从 $A(2,0)$ 到 $O(0,0)$ 的一段弧．

3．设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有一阶连续导数，L 是半平面 $(y>0)$ 内的有向分段光滑曲线，其起点为 (a,b)，终点为 (c,d)．证明

$$I=\int_L \frac{1}{y}[1+y^2 f(xy)]\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}[y^2 f(xy)-1]\mathrm{d}y$$

（1）证明曲线积分 I 与路径 L 无关

（2）当 $ab=cd$ 时，求 I 的值

4．设力 $\boldsymbol{F}=\dfrac{-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}}{y^2}$，证明力 $\boldsymbol{F}$ 在上半平面内所作的功与路径无关，并求从点 $A(1,2)$ 到点 $B(2,1)$ 力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功.

5．计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是曲面 $z=1-x^2-y^2\ (z\geq 0)$ 的上侧.

6．计算 $\iint\limits_{\Sigma}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$\sum$是抛物面z=$\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$介于平面$z=0$与z=2之间部分的下侧.

7．计算 $I = \bigcirc$ $\mathrm{l}y + z^2 \mathrm{d}z$ ，其中 Γ 是平面 $y + z = 2$ 与柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 的交线，从 z 轴正向看去，Γ 取逆时针方向．

阶段测试题

学院____________班级___________姓名___________学号____________

一、单项选择题（每小题 3 分，满分 18 分）

1．二元函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续，且 $f_x'(x_0,y_0)$、$f_y'(x_0,y_0)$ 存在是 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微的（　　）条件．

（A）充分　　（B）必要　　（C）充分必要　　（D）非充分非必要

2．已知 $f_x(x,y)$、$f_y(x,y)$ 在（0，0）连续，则 $z=f(x,y)$ 在（0，0）处，$\phi(x)=f(x,0)$ 在 $x=0$ 处（　　）.

（A）均连续　　（B）均不一定连续

（C）均不连续　　（D）$\phi(x)$ 一定连续，$f(x,y)$ 不一定连续

3．设 L 为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的顺时针方向，则$\bigcirc$　　　$y-x)\mathrm{d}y=$（　　）.

（A）$2\pi ab$　　（B）$-2\pi ab$　　（C）0　　（D）2π

4．设 D 由 $y=\sqrt{1-x^2}$ 和 $y=0$ 围成，则 $\iint\limits_D(\mathrm{e}^y\sin x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$（　　）.

（A）0　　（B）1　　（C）2/3　　（D）4/3

5．设 Ω 由 $z=x^2+y^2, x^2+y^2+z^2=2\quad(z\ge 0)$ 围成，则三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V$ 化为柱面坐标系下三次积分为（　　）.

（A）$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r\mathrm{d}r\int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}}(r^2+z^2)\mathrm{d}z$　　（B）$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}} r\mathrm{d}r\int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}}(r^2+z^2)\mathrm{d}z$

（C）$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}}2\mathrm{d}z$　　（D）$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}}(r^2+z^2)\mathrm{d}z$

6．设 $\Omega: x^2+y^2+z^2\le 1.\ \Sigma: x^2+y^2+z^2=1.\ r: x^2+y^2+z^2=1$，$x=0(y\ge 0)$ 由（0，0，-1）到（0，0，1）则以下计算（　　）错误．

（A）$\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}V=0$　　（B）$\iint\limits_{\Sigma}z\mathrm{d}s=0$　　（C）$\int_r z\mathrm{d}s=0$　　（D）$\int_r z\mathrm{d}y=0$

二、填空题（每小题 3 分，满分 21 分）

1．已知 $f(x,y)=\mathrm{e}^{3x}\ln 2y$，则 $f_x'(0,\dfrac{1}{2})=$____________，$f_{yy}''(0,1)=$____________.

2． $u=xy^2+z^3-xyz$ 在点 $M(1,1,1)$ 处沿 $\bar{l}=$ ________方向的方向导数最大，方向导数的最大为______________.

3． 设 $u=\dfrac{1}{2}[\phi(x+at)+\phi(x-at)]+\dfrac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}f(t)\mathrm{d}t$ ， 其中 $f,\phi\in C^{(2)}$ ， 则 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=$ ________.

4．设 Ω 为由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ ， $z=2$ 围成的空间区域，a 为常数，则 $\iiint\limits_{\Omega}a\mathrm{d}V=$ _____.

5．L 为上半圆周 $y=\sqrt{1-x^2}$ ，则 $\int_L (x+y)^2\mathrm{e}^{x^2+y^2}\mathrm{d}s=$ ________________.

6．设 Σ 是柱面 $x^2+y^2=1$ 在 $0\le z\le 2$ 之间的部分，则 $\iint\limits_{\Sigma}y^2\mathrm{d}S=$ ___________.

7．设 $\mathrm{I}=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}R}\mathrm{d}x\int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}R}^{R}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$ ，改变积分次序 $\mathrm{I}=$ _______；化为极坐标下二次积分为 $\mathrm{I}=$ _________.

三、解答题（每小题 8 分，满分 48 分）

1． $z=f(2x-y,y\sin x)+xg(\mathrm{e}^x\ln y)$ ，其中 f 具有二阶连续偏导数，g 具有二阶导数。求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

2．已知 $y=\mathrm{e}^{ty}+x$，而 t 是由方程 $y^2+t^2-x^2=1$ 确定的 x, y 的函数，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

3．计算 $\iint\limits_D \dfrac{\cos y}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 由 $y=\sqrt{x}$, $y=x$ 围成.

4．计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{1}{z}\mathrm{d}S$，其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2x$ 截得的有限部分.

5．计算曲线积分 $\int_{ONA}(2x\sin y-y)\mathrm{d}x+(x^2\cos y-1)\mathrm{d}y$，其中 ONA 为连接点 O(0, 0)和 $A(2,\frac{\pi}{2})$ 的任何路径，但与直线 OA 围成的图形 $ONAO$ 有定面积 π .

6．设 $f(x)$ 连续， $F(t)=\iiint\limits_{\Omega}[z^2+f(x^2+y^2)]\mathrm{d}V$ ，其中 $\Omega: 0\le z\le h, x^2+y^2\le t^2$ ，求 $\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$， $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{F(t)}{t^2}$．

四、证明题（满分 6 分）

求证 $|\oint$ $\oint$ ，并由此估计 $\oint$ $ydz|$ 的上界，其中 r 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线并已取定方向，P,Q,R 为连续函数．

五、应用题（满分 7 分）

求内接于椭球面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$，且棱平行于对称轴的体积最大的长方体.

第七次作业

学院____________班级____________姓名____________学号____________

一、单项选择题

1．设$0<a_n<\dfrac{1}{n}(n=1,2,3,\cdots$ ，则下列级数中肯定收敛的是（　　）.

（A）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$；　（B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$；　（C）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}$；　（D）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n}$.

2．若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 都发散，则（　　）.

（A）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$发散；　（B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n v_n$ 发散；

（C）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(|u_n|+|v_n|)$发散；　（D）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n^2+v_n^2)$发散.

3．设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则必收敛的级数为（　　）.

（A）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{u_n}{n}$；　（B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$；

（C）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$；　（D）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$.

4．设 a 为常数，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\sin\alpha}{n^2}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$（　　）.

（A）绝对收敛；（B）条件收敛；　（C）发散；　（D）收敛性取决于 a 的值.

5．已知函数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在$x=-2$处收敛，则在$x=0$处，该级数为（　　）.

（A）发散；　（B）条件收敛；（C）绝对收敛；（D）收敛性不定.

6．幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n3^n}x^n$ 的收敛域是（　　）.

（A）$[-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}]$；　（B）$[-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3})$；　（C）$[-3,3]$；　（D）$[-3,3)$.

7．2^x展开为x的幂级数是（　　）.

（A）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$；　（B）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n!}x^n$；　（C）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x\ln 2)^n}{n!}$；　（D）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x\ln 2)^n}{n}$.

二、填空题

1．若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n=2, \sum_{n=1}^{\infty}u_{2n-1}=5$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=$____________.

2．设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛半径为 2，则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x+1)^{n+1}$ 的收敛区间为_____.

3．幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n+(-3)^n}x^{2n}$ 的收敛半径为_____________.

4 . 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2+p}}$ 收敛，则常数 p 的最大取值范围是________________________.

5． 设函数 $f(x)=x^2, x\in[0,1]$， 而 $s(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x, \quad x\in(-\infty,+\infty)$， 其中 $a_n=2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\mathrm{d}x, n=0,1,2,\cdots$，则 $s(-1)$ 的值为____________.

三、计算题

1．设正项数列 $\{a_n\}$ 单调减少，且 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散，试问级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$ 是否收敛？并说明理由.

2．求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ln^n 3}{2^n}+\frac{1}{n(n+1)}\right)$的和．

3．讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n n!}{n^n}$的敛散性．

4．讨论交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot(\sqrt[n]{a}-1)$（$a>0$，$a\neq 1$）是绝对收敛还是条件收敛．

5．.求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-4)^{n}$收敛区间及和函数$S(x)$．

6．将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-5x+6}$ 在 $x=4$ 点展成幂级数

7．求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$ 的和函数.

8．设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数，且 $f(x)=\begin{cases} x, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & 1 < x < 2, \end{cases}$ 写出 $f(x)$ 的傅里叶级数与其和函数，并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ 的和.

9. 设 $a_1 = 2,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n})$ 证明： ① $\lim_{n\to\infty} a_n$ 存在 ② $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1)$ 收敛.

第八次作业

学院____________班级___________姓名___________学号____________

一、单项选择题

1．下列各组函数可以构成微分方程 $y''+2y'+y=0$ 的基本解组的是(　　).

（A） $\sin x, x\sin x$；　（B） e^{x}, xe^{x}；　（C） e^{-x}, xe^{-x}；　（D） e^{x}, e^{-x} .

2．若 y_1, y_2 是方程 $y'+p(x)y=q(x)(q(x)\neq 0)$ 的两个解，要使 $\alpha y_1+\beta y_2$ 也是該方程的解，α, β 应满足关系式（　　）.

（A） $\alpha+\beta=1$；　（B） $\alpha+\beta=0$；　（C） $\alpha\beta=1$；　（D） $\alpha\beta=0$.

3．设线性无关的函数 $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ 均是方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的解，C_1, C_2 是任意常数，则该方程的通解是（　　）.

（A） $C_1y_1+C_2y_2+y_3$；

（B） $C_1y_1+C_2y_2-(C_1+C_2)y_3$；

（C） $C_1y_1+C_2y_2-(1-C_1-C_2)y_3$；

（D） $C_1y_1+C_2y_2+(1-C_1-C_2)y_3$.

4．若 2 是微分方程 $y''+py'+qy=e^{2x}$ 的特征方程的一个单根，则该微分方程必有一个特解 $y^{*}=$(　　).

（A） Ae^{2x}；　（B） Axe^{2x}；　（C） Ax^2e^{2x}；　（D） xe^{2x} .

5．方程 $y''-3y'+2y=e^{x}\cos 2x$ 的特解形式为(　　).

（A） $e^{x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$；　（B） $C_1e^{x}\cos 2x$；

（C） $xe^{x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$；　（D） $C_2e^{x}\sin 2x$.

6．以 $y_1=2\cos x, y_2=\sin x$ 为特解的二阶常系数齐次线性微分方程是（　　）.

（A） $y''-y=0$；　（B） $y''+y=0$；

（C） $y''-y'=0$；　（D） $y''+y'=0$.

二、填空题

1．当 n=________时，方程 $y'+p(x)y=q(x)y^n$ 为一阶线性微分方程。

2．常微分方程 $(3x^2+6xy^2)\mathrm{d}x+(6x^2y+4y^2)\mathrm{d}y=0$ 的通解是___________.

3．若 y_1, y_2, y_3 是二阶非齐次线性微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的线性无关的解，则用 y_1, y_2, y_3 表达此方程的通解为___________.

4．微分方程 $2y^{(4)}-2y^{(3)}+5y''=0$ 的通解为___________.

5．微分方程 $y''-y'=1$ 的通解 $y=$___________.

6．以 $y=2\mathrm{e}^x\cos 3x$ 为一个特解的二阶常系数线性微分方程为___________.

7． $y''-5y'+6y=\mathrm{e}^x\sin x+6$ 的一个特解形式为___________.

三、计算题

1．求解微分方程　$xy'=y(\ln y-\ln x)$.

2．求解微分方程　$(y^2-6x)y'+2y=0$

3．求解微分方程 $y'' + y'^2 = 1, y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 1$．

4．求解微分方程 $y' + x\sin 2y = xe^{-x^2}\cos^2 y$，$y(0) = \dfrac{\pi}{4}$

5．已知曲线 $y=f(x)$ 经过原点，在原点的切线平行于直线 $2x-y-5=0$，且 $y=f(x)$ 满足微分方程 $y''-6y'+9y=\mathrm{e}^{3x}$，求此曲线的方程.

6．求微分方程 $y''-y=\sin^2 x$ 的通解.

.

7．求解 $y'' - 3y' + 2y = 2e^{x}$ 满足 $y(0) = 1, y'(0) = -1$;

8.求解欧拉方程 $x^2 y'' - xy' + 2y = x \ln x$.

四、综合题

设 $f(x)$ 具有二阶连续导数，$f(0)=0, f'(0)=1$，且

$$[xy(x+y)-f(x)y]\mathrm{d}x+[f'(x)+x^2y]\mathrm{d}y=0$$

是全微分方程，求 $f(x)$ 及此全微分方程的通解.

综合练习题

学院__________班级__________姓名__________学号__________

一、单项选择题

1．函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点(0, 0)处（　　）.

（A）不连续；　　（B）偏导数存在；

（C）沿任一方向的方向导数存在；　　（D）可微.

2．设 $f(x)$ 为连续函数，$F(t)=\int_1^t dy\int_y^t f(x)dx$ 则 $F'(2)$ 为（　　）.

（A）$2f(2)$；　　（B）$f(2)$；

（C）$-f(2)$；　　（D）0.

3．设 $f(x,y)$ 为 $D:x^2+y^2\le a^2$ 上的连续函数，则 $\lim\limits_{a\to 0^+}\dfrac{1}{\pi a^2}\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=$（　　）.

（A）不存在；　　（B）$f(0,0)$；　　（C）$f(1,1)$；　　（D）$f_x'(0,0)$.

4．设 Ω 由平面 $x+y+z+1=0, x+y+z+2=0, x=0, y=0, z=0$ 围成，$I_1=\iiint\limits_\Omega[\ln(x+y+z+3)]^2\mathrm{d}V, I_2=\iiint\limits_\Omega(x+y+z)^2\mathrm{d}V$，则(　　).

（A）$I_1<I_2$；　　（B）$I_1>I_2$；　　（C）$I_1\le I_2$；　　（D）$I_1\ge I_2$.

5．设 $\sum a_n$ 为正项级数，下列结论中正确的是（　　）.

（A）若 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；

（B）若存在非零常数 λ，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=\lambda$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散；

（C）若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2a=0$；

（D）若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，则存在非零常数 λ，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=\lambda$.

6．若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\dfrac{1}{4}$，则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^{2n}$（　　）.

（A）当 $|x|<2$ 时绝对收敛；　　（B）当 $|x|>\dfrac{1}{4}$ 时绝对发散；

（C）当 $|x|<4$ 时绝对收敛；　　（D）当 $|x|>\dfrac{1}{2}$ 时绝对发散.

7．设 $y=f(x)$ 是方程 $y''+y'=\mathrm{e}^{\sin x}$ 的解，并且 $f'(x_0)=0$，则 $f(x)$（　　）.

（A）在点 x_0 的某邻域内单调增加；　　（B）在点 x_0 的某邻域内单调减少；

（C）在点 x_0 处取极小值　　　　　　（D）在点 x_0 处取极大值．

二、填空题

1．函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 连续且可偏导，是 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 可微的____条件．

2．设 $z = \mathrm{e}^{xy} - \cos \mathrm{e}^{xy}$，则 $\mathrm{d}z =$ ____________．

3．设函数 $u(x, y) = f(x+y) + f(x-y) + \int_{x-y}^{x+y} g(t)\mathrm{d}t$，其中 f 具有二阶导数，g 具有一阶导数，则 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} =$ ____________．

4．设为 L 椭圆 $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$，其周长为 a，则○　　　　　$+4y^2)\mathrm{d}s =$ ___________．

5．周期为 2 的函数 $f(x)$，它在一个周期内的表达式为 $f(x) = x, -1 \le x \le 1$，设它的傅里叶级数的和函数为 $s(x)$，则 $s\left(\dfrac{3}{2}\right) =$ ________________．

6．以 $y_1(x) = \sin x, y_2(x) = \cos x$ 为特解的二阶常系数齐次线性微分方程是_______．

7．曲面 $\Sigma: |x| + |y| + |z| = 1$，则⬭　　　　　$S =$ _______________．

三、计算题

1．设 $z = x^3 f\left(xy, \dfrac{y}{x}\right)$，$f$ 具有连续的二阶偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$．

2．设 $y=y(x)$， $z=z(x)$ 是由方程 $z=xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z)=0$ 确定的函数，其中 f 和 F 分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导数，求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

3．求 $\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{e}^{|z|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 为球体 $x^2+y^2+z^2\le 1$.

4．设 $z=z(x,y)$ 是由 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 确定的函数，求 $z=z(x,y)$ 的极值点和极值.

5．设函数 $f(u)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有二阶导数，且 $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$ 满足等式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0 .$$

（Ⅰ）验证：$f''(u)+\dfrac{f'(u)}{u}=0$；

（Ⅱ）若 $f(1)=0, f'(1)=1$，求函数 $f(u)$ 的表达式.

6．计算 $I=\iint\limits_{\Sigma} xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2zy\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 其中 Σ 为曲 $z=1-x^2-\dfrac{y^2}{4}\,(0\le z\le 1)$ 的上侧.

7．将函数 $f(x)=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{1}{2}\arctan x-x$ 展开成 x 的幂级数.

8．已知齐次方程 $(x-1)y''-xy'+y=0$ 的通解为 $Y(x)=c_1x+c_2\mathrm{e}^x$ 求非齐次方程 $(x-1)y''-xy'+y=(x-1)^2$ 的通解.

9. 设$u=u(r)$具有二阶导数。$u=u(\sqrt{x^2+y^2})$满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}+u=x^2+y^2$$

求$u(\sqrt{x^2+y^2})$的表达式。

四、应用题

在第一卦限内作球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的切平面，使该切平面与三坐标面所围成的四面体的体积最小，求这切平面的切点.

五、证明题

设 $a_n=\int_0^{\pi/4}(\tan x)^n\,\mathrm{d}\,x, n=1,2,3,\cdots$. 证明：对任意常数 $\lambda>0$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\lambda}}$ 收敛.

综合模拟题（一）

学院____________班级___________姓名___________学号_________

一、填空题(共 5 道小题，每小题 3 分，满分 15 分)

1．设函数 $z=\sqrt{x^4+y^4}$，则 $z_x'(0,0)=$____________ .

2．设 L 是直线 $y=x$ 上由点 A（0,0）到点 B（1,1）的线段，则第一型曲线积分

$\int_L \sqrt{y}\,\mathrm{d}s=$_______.

3．设曲面 Σ 为圆锥面 $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$ 在 xoy 面上方的部分，则第一型曲面积分

$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}S=$____________.

4．设函数 $f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi\le x<0,\\ x, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$ 将 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上展开为傅里叶（Fourier）级数，使 $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，则 $a_1=$___________.

5．微分方程 $xy'+y=0$ 满足 $y(1)=1$ 的解是___________.

二、选择题(共 5 道小题，每小题 3 分，满分 15 分)

1．函数 $z=x^3+y^3-3xy$ 的极小值点是（　　　　）

（A）（1,1）；　（B）（0,0）；　（C）（0,1）；　（D）（1,0）.

2．设山坡的高度为 $z=5-x^2-2y^2$，一个登山者在山坡上点 $(-\dfrac{3}{2},-1,\dfrac{3}{4})$ 处，他决定沿最陡的道路向上攀登，则他应当选取的方向 $\boldsymbol{l}$ 是（　　　　）

（A）$\boldsymbol{l}=(3,4)$；　（B）$\boldsymbol{l}=(-3,-4)$；　（C）$\boldsymbol{l}=(-4,3)$；　（D）$\boldsymbol{l}=(4,-3)$.

3．交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n+a}\ (a>0)$（　　　　）

(A) 绝对收敛；　(B) 条件收敛；

(C) 敛散性与 a 有关；　(D) 发散.

4．幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{\sqrt{n+1}}$的收敛域是（　　　）．

（A）$(0,2]$；　（B）$(-2,0)$；　（C）$[0,2)$；　（D）$[-1,1)$.

5．函数$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-2x}+x\mathrm{e}^x$满足的一个微分方程是（　　）

（A）$y''-y'-2y=3x\mathrm{e}^x$；　　（B）$y''-y'-2y=3\mathrm{e}^x$；

（C）$y''+y'-2y=3x\mathrm{e}^x$；　　（D）$y''+y'-2y=3\mathrm{e}^x$.

三、（满分 6 分）

设$z=f(x\mathrm{e}^y,x)$，其中f具有二阶连续偏导数，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

四、解答下列各题(共 4 个小题，每小题 10 分，满分 40 分)

1．计算二重积分 $\iint\limits_{D}(|x-y|+2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 D 为圆域 $x^2+y^2\le 1$ 在第一象限的部分.

2．计算三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$,其中 Ω 是由圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=1$ 围成的闭区域.

3．设 $\varphi(x)$ 具有连续的导数，且 $\varphi(0)=0$，又曲线积分 $\int_L xy^2\,\mathrm{d}x+y\varphi(x)\,\mathrm{d}y$ 与路径无关，（1）求 $\varphi(x)$ 表达式；（2）计算 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2\,\mathrm{d}x+y\varphi(x)\,\mathrm{d}y$.

4．已知 $f_n(x)$ 满足 $f_n'(x)=f_n(x)+x^{n-1}\mathrm{e}^x, n$ 为正整数，且 $f_n(1)=\dfrac{\mathrm{e}}{n}$，求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 之和.

五、解答下列各题(共 3 个小题，每小题 8 分，满分 24 分)

1．曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x+y+z=0 \end{cases}$在点$(1,-2,1)$处的切线及法平面方程.

2．利用高斯公式计算第二型曲面积分

$$\mathrm{I}=\bigcirc \qquad (x^2y-z^3)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(2xy+y^2z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

其中Σ是球面$x^2+y^2+z^2=1$的内侧表面.

3．将函数 $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+x-2}$ 展开成 x 的幂级数.

综合模拟题（二）

学院____________班级___________姓名___________学号__________

一、单项选择题（共 6 道小题，每小题 3 分，满分 18 分）

1．设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$ 关于 $f(x,y)$ 有以下命题：

① $f_x'(0,0)=0, f_y'(0,0)=0.$

② $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处极限不存在.

③ $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续.

④ $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

以上命题中结论正确的个数是（　　）

(A) 1 个.　　(B) 2 个.　　(C) 3 个.　　(D) 4 个.

2．二次积分 $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{x}}\dfrac{\sin y}{y}\mathrm{d}y=$（　　）

(A) $1-\sin 1$.　(B) $\sin 1-1$.　(C) $1+\sin 1$.　(D) $\sin 1$.

3．设曲面 Σ 是柱面 $x^2+y^2=4$ 在 $0\le z\le 1$ 之间的部分，则 $\iint\limits_{\Sigma}x^2\,\mathrm{d}S=$（　　）

(A) π.　　(B) 2π.　　(C) 4π.　　(D) 8π.

4．设二元函数 $U(x,y)$ 的全微分 $\mathrm{d}U=xy^2\,\mathrm{d}x+x^2y\,\mathrm{d}y$，则 $U(x,y)$ 的一个表达式为（　　）

（A）$\dfrac{1}{2}x^2+y^2$.　（B）$\dfrac{1}{2}x^2y^2$.　（C）x^2y^2.　（D）. $x^2-\dfrac{1}{2}y^2$.

5．如果幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处收敛，则该级数在 $x=2$ 处（　　）

(A) 条件收敛.　　(B) 绝对收敛.

(C) 发 散.　　(D) 敛散性不定.

6．方程 $y''+y'-2y=\mathrm{e}^x(\cos x-7\sin x)$ 特解的形式是（　　），其中 a,b 为常数.

(A) $e^x(a\cos x+b\sin x)$.　　(B) $xe^x(a\cos x+b\sin x)$.

(C) $ae^x\cos x$.　　(D) $be^x\sin x$.

二、填空题（共 6 道小题，每小题 3 分，满分 18 分）.

1．函数 $z=\dfrac{x}{y}+xy$，则 $\mathrm{d}z\big|_{(2,1)}=$ ______________________ .

2．函数 $z=x^2-xy+y^2$ 在点 $(1,1)$ 处沿方向 $\boldsymbol{l}$=__________ 的方向导数最大.

3．设曲线 L 的方程为 $\begin{cases} x=\cos t \\ y=2\sin t \end{cases}(0\le t\le\dfrac{\pi}{2})$，则 $\int_L xy\,\mathrm{d}s=$__________.

4．设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a^{\ln\frac{1}{n}}$ $(a>0)$，当__________时级数收敛.

5．设函数 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，且在区间 $[-\pi,\pi]$ 上的表达式为

$f(x)=\begin{cases} 2,-\pi\le x\le 0, \\ x,0<x\le\pi, \end{cases}$ 则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=0$ 处收敛于__________.

6．将函数 $\dfrac{1}{x}$ 展开成 $(x-3)$ 的幂级数的形式为 ______________.

三、按要求解答下列各题（共 6 道小题，每小题 7 分，满分 42 分）.

1．设 f 为 $C^{(2)}$ 类函数，且 $z=f(x^2+y)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

2．求曲面 $x=\mathrm{e}^{2y-z}$ 在点 $(1,1,2)$ 处的切平面与法线方程.

3．求函数 $f\left(x\right)=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$ 的极值.

4．计算$\iint\limits_D \left|x-y^2\right| \mathrm{d}\sigma$，其中$D=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le 1,0\le y\le 1\right\}$.

5．计算$\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}V$，其中$\Omega$由锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$和球面$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$围成.

6．求微分方程 $y' + y = 1 + x^2$ 满足初始条件 $y(0) = 4$ 的解.

四、按要求解答下列各题（共 3 道小题，满分 22 分）.

1.（满分 8 分）

计算 $\int_L (y^3 + x\mathrm{e}^{2y})\,\mathrm{d}x + (x^2\,\mathrm{e}^{2y} - x^3)\,\mathrm{d}y$，其中曲线 L 是 $x^2 + y^2 = 4x$ 的上半圆周，顺时针方向.

2.（满分 8 分）

计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} y^3 \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + (y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中曲面 Σ 为 $z = x^2 + y^2 (0 \le z \le 1)$ 的下侧.

3.（满分 6 分）

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内收敛，和函数为 $y(x)$，且满足

$$y'' - 2xy' - 4y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1,$$

（1）证明 $a_{n+2} = \dfrac{2}{n+1} a_n, n = 1,2,\cdots$；（2）求 $y(x)$ 表达式.