吉林大学
JILIN UNIVERSITY

工程力学

第6章 轴向拉伸和压缩

第六章 轴向拉伸和压缩

6.1 轴向拉伸和压缩的概念及实例

6.2 轴向拉伸（或压缩）时横截面上的内力和应力

6.3 轴向拉伸（或压缩）时斜截面上的内力和应力

6.4 材料在轴向拉伸和压缩时的力学性能

6.5 许用应力、安全系数和强度条件

6.6 轴向拉伸（或压缩）时的变形

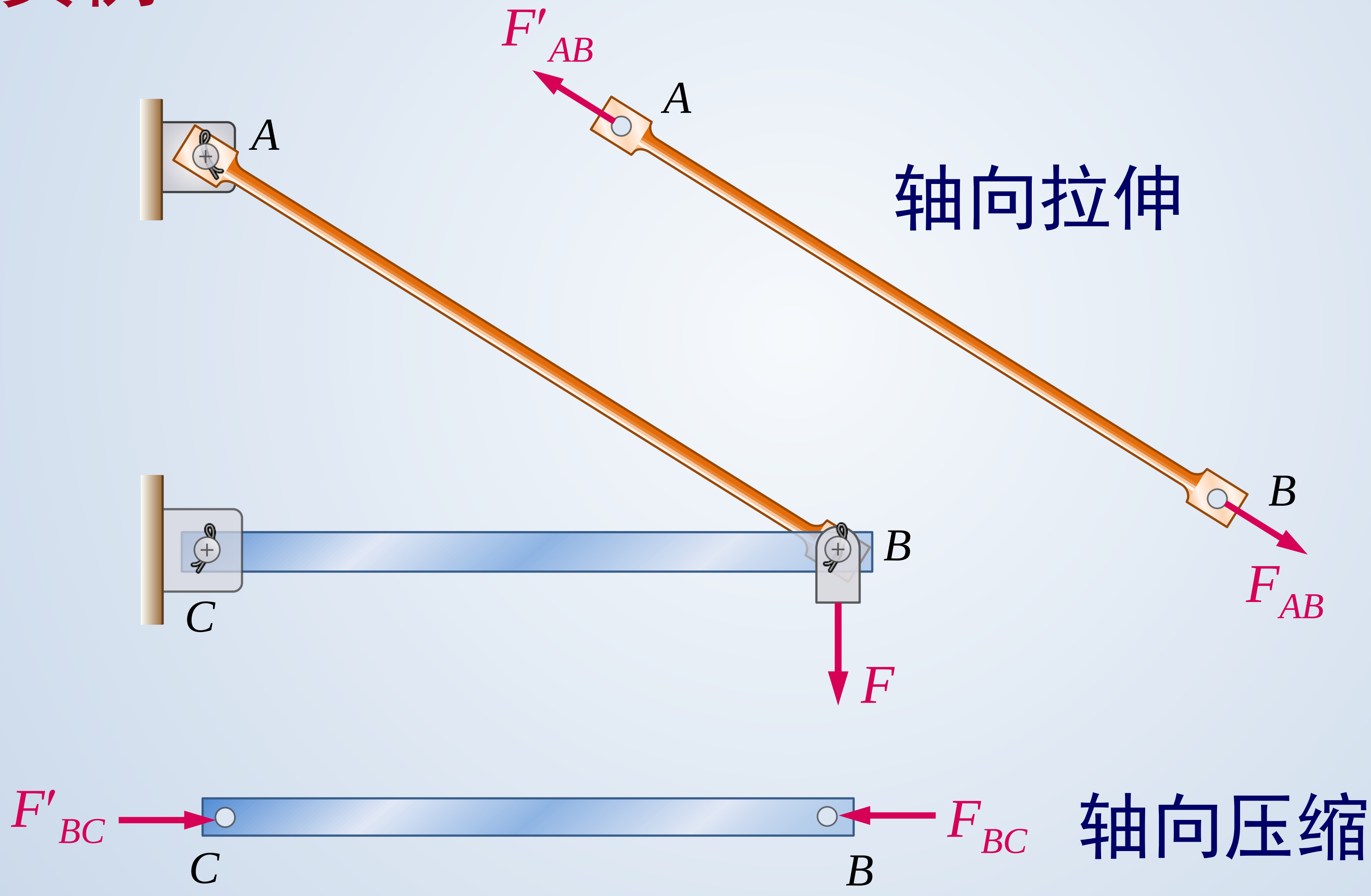
6.7 轴向拉伸（或压缩）时的弹性变形能

6.8 杆件拉伸、压缩的超静定问题

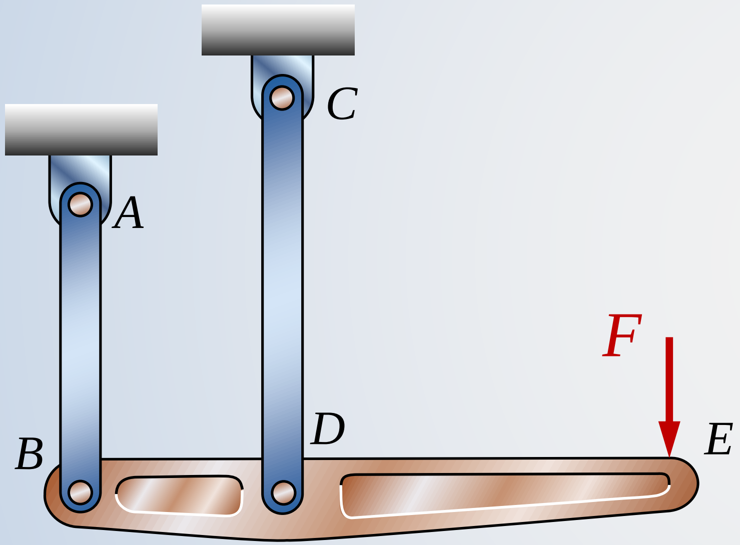
6.9 应力集中的概念

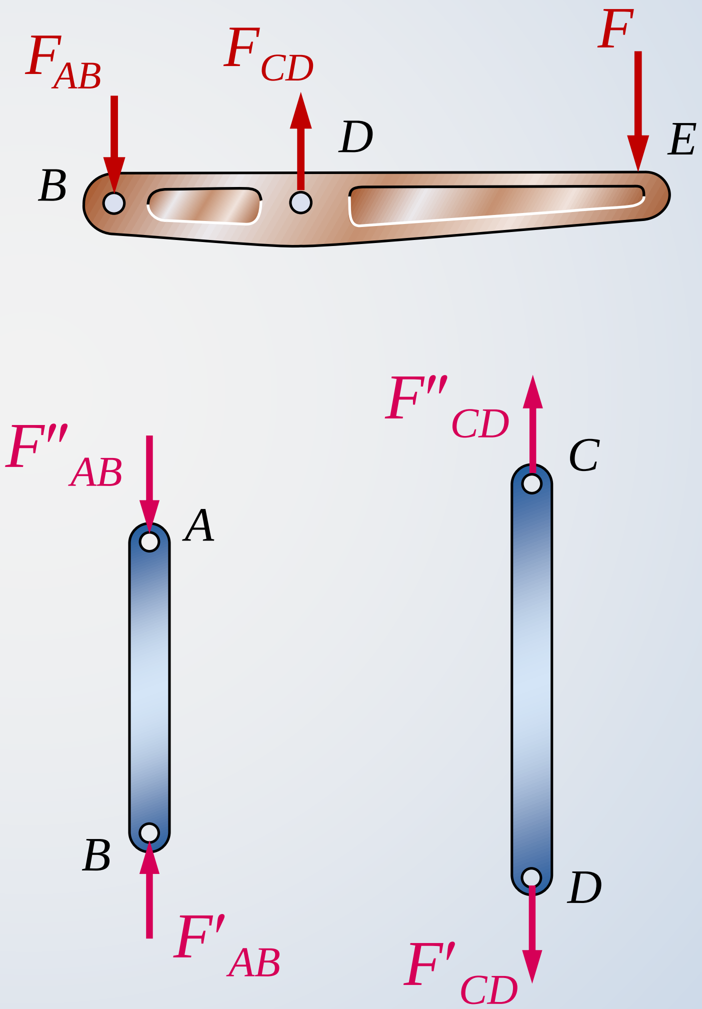
6.1 轴向拉伸和压缩的概念及实例

一. 实例



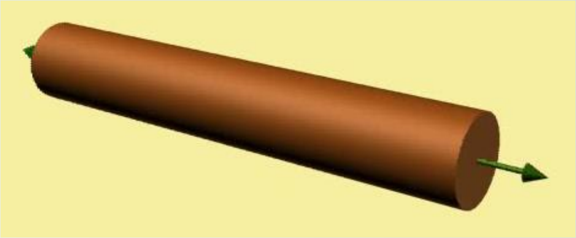
6.1 轴向拉伸和压缩的概念及实例





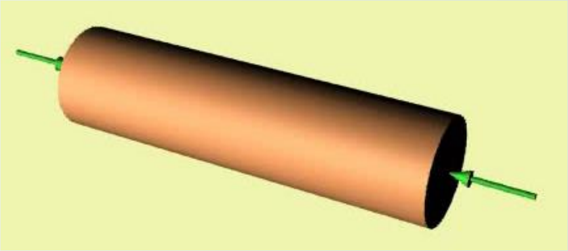
6.1 轴向拉伸和压缩的概念及实例

二. 外力



外力作用特点:

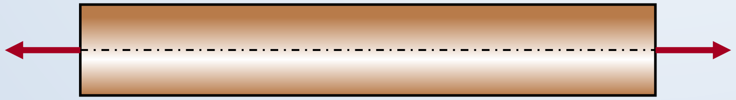
力通过轴线



变形特点(主要):

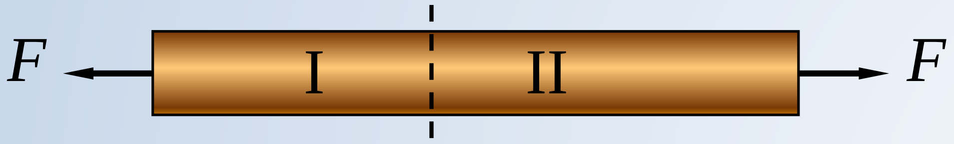
沿轴线方向伸长或缩短

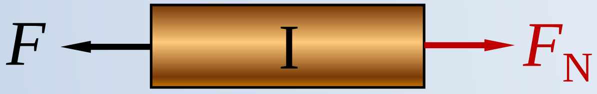
受 力 简 图:



6.2 轴向拉伸（或压缩）时横截面上的内力和应力

一. 横截面上的内力





截面法:

1.截　2.取（任取）3.代　4.平

$$\sum F_x = 0 \qquad F_N = F$$

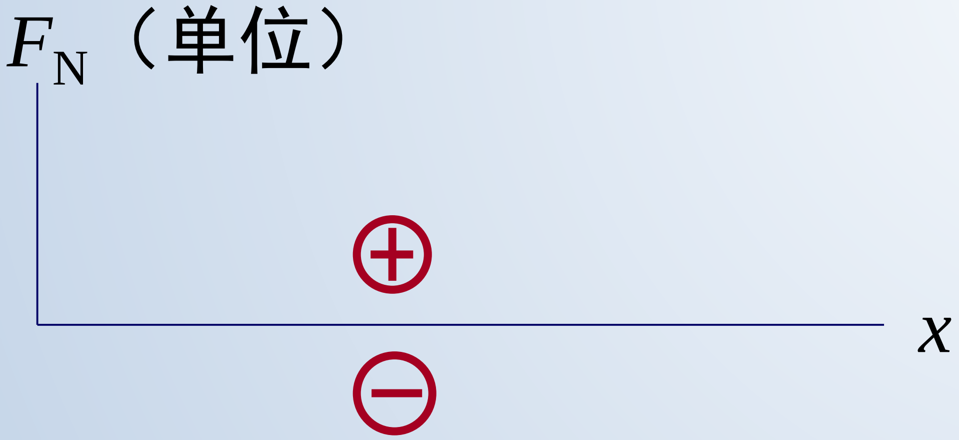
说 明

1. F_N 为内力,因过轴线, 称轴力

2. 轴力F_N的符号规定: 拉为正　压为负

轴力图　当杆件受多个外力作用时，各段的内力将发生变化，为了明显地表现出轴力的大小、正负，引出内力图

轴力图的画法



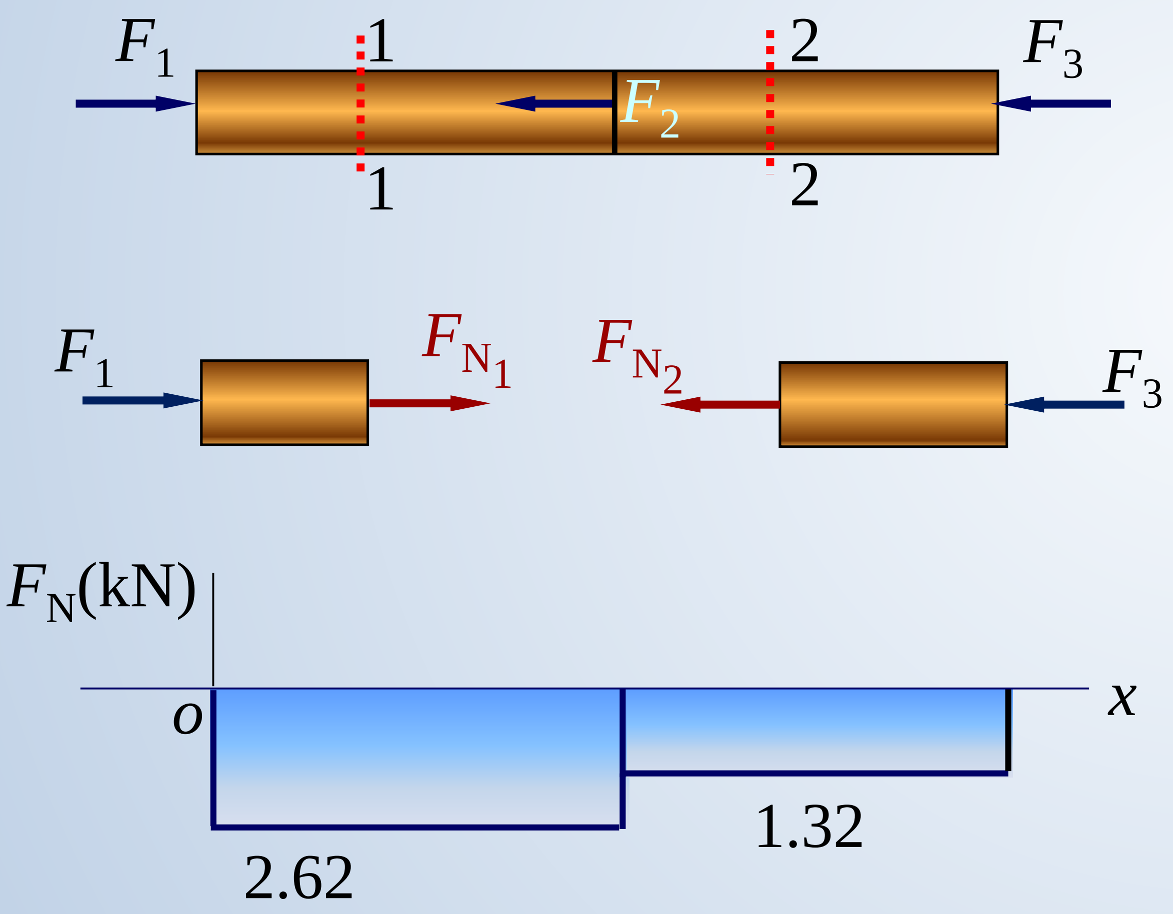
取定坐标轴

取定比例尺

标出特征值

6.2 轴向拉伸（或压缩）时横截面上的内力和应力

例 1 已知: F_1=2.62kN F_2=1.3kN F_3=1.32kN 试判断危险截面（画轴力图）



解: 1.用截面法求内力

$$F_{N_1} + F_1 = 0$$

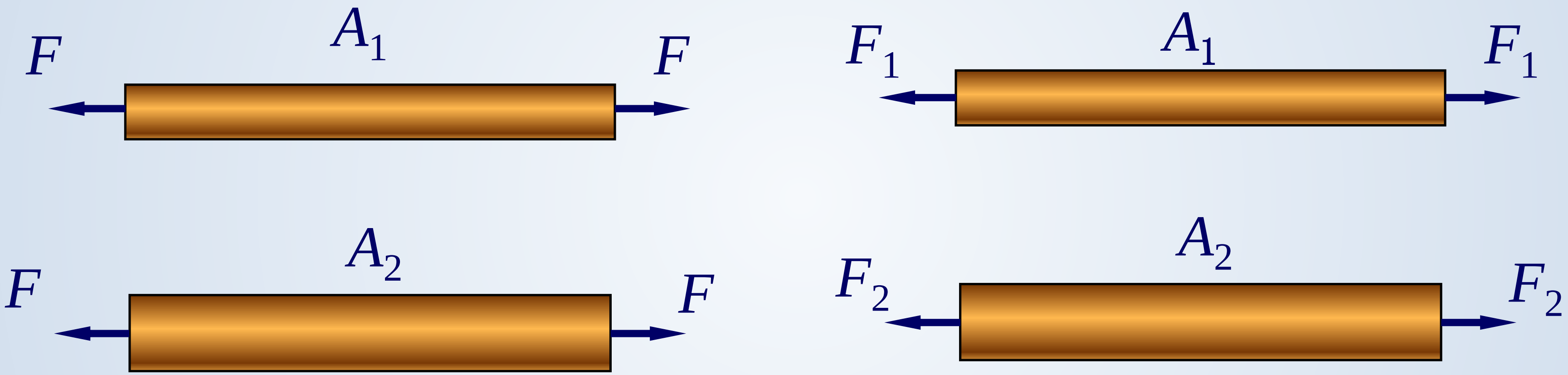
$$F_{N1} = -F_1 \text{ 压力}$$

$$F_{N_2} + F_3 = 0$$

$$F_{N2} = -F_3 \text{ 压力}$$

2. 画轴力图:

二. 横截面上的应力

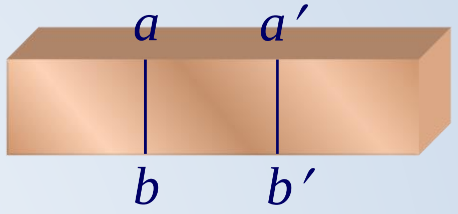


$A_2>A_1,F$ 相同,哪个危险？ $A_2>A_1,F_2>F_1$, 哪个安全?

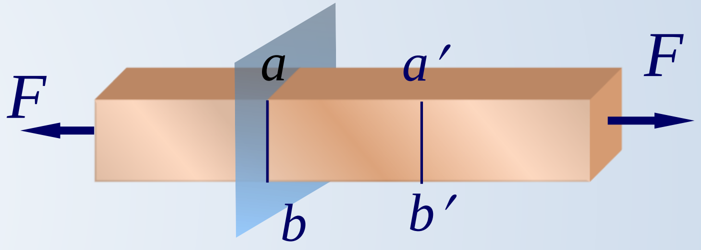
6.2 轴向拉伸（或压缩）时横截面上的内力和应力

公式推导

1.实验观察：直线平移



2.推理: 面平移



3.假设：平面假设 $\varepsilon = C_1,\ \sigma = C_2$

4.平衡方程：$F_{\mathrm{N}} = \int_A \sigma \mathrm{d}A = \sigma \int_A \mathrm{d}A = \sigma A$

$$\sigma = \frac{F_{\mathrm{N}}}{A}$$

6.2 轴向拉伸（或压缩）时横截面上的内力和应力

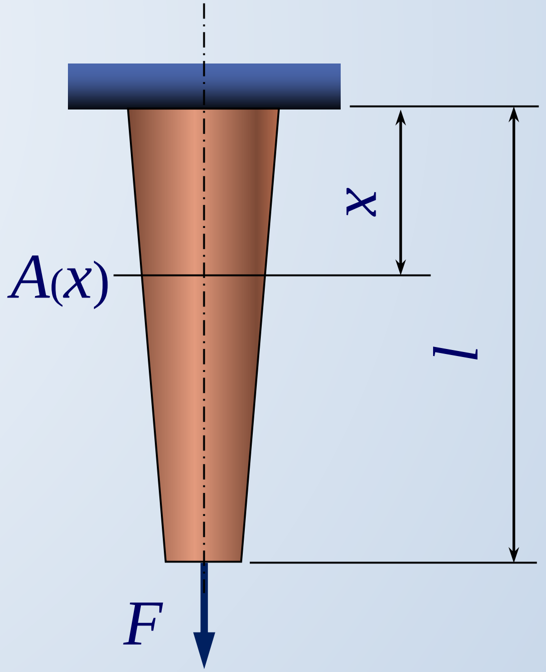
说明

1. 外力作用线必须与杆件轴线重合。

2. 若轴力沿轴线变化，先作轴力图，再求各面上的应力。

3. 若截面尺寸沿轴线缓慢变化,公式近似为：

$$\sigma(x)=\frac{F_{\mathrm{N}}(x)}{A(x)}$$

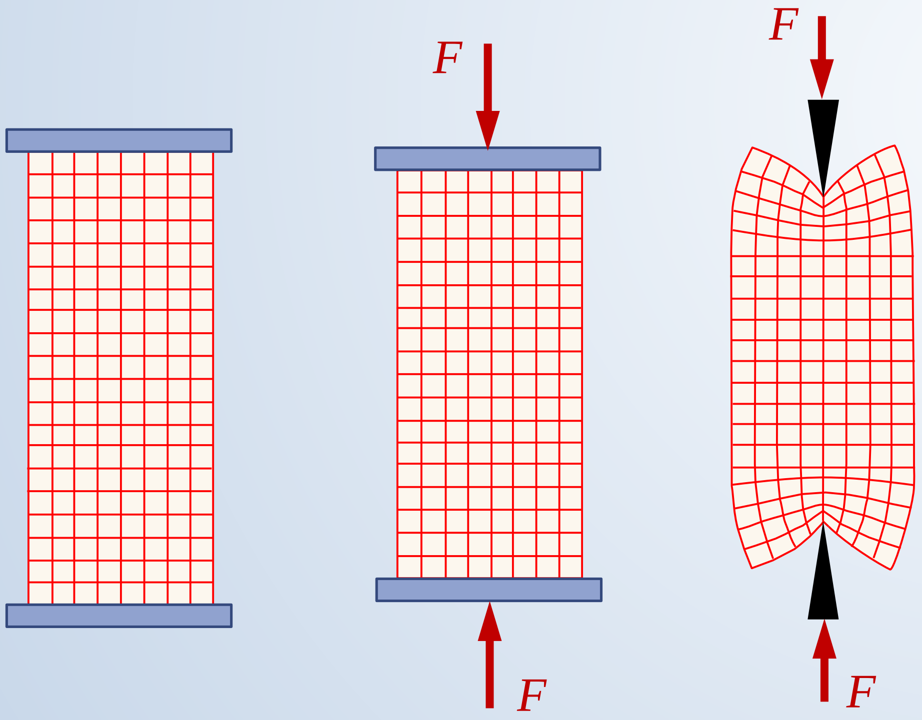


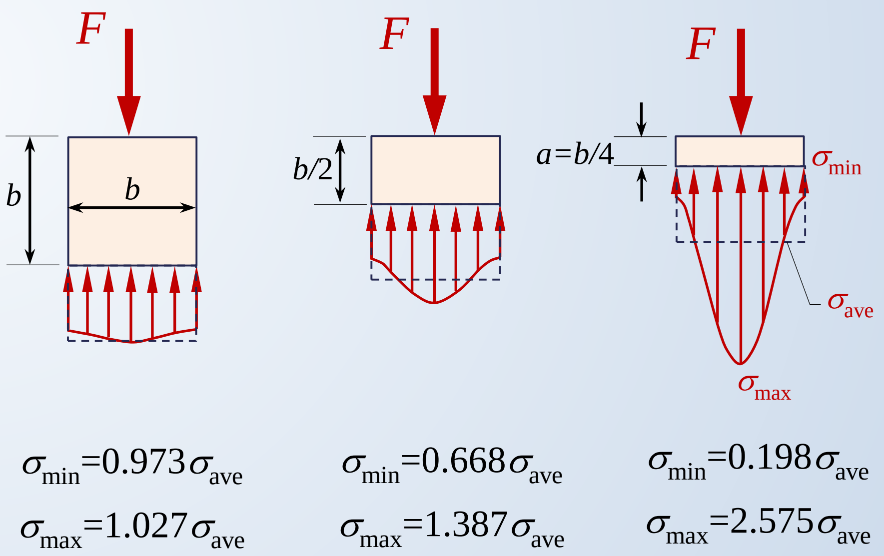
4. 公式只在距外力作用点较远处才适用。

6.2 轴向拉伸（或压缩）时横截面上的内力和应力

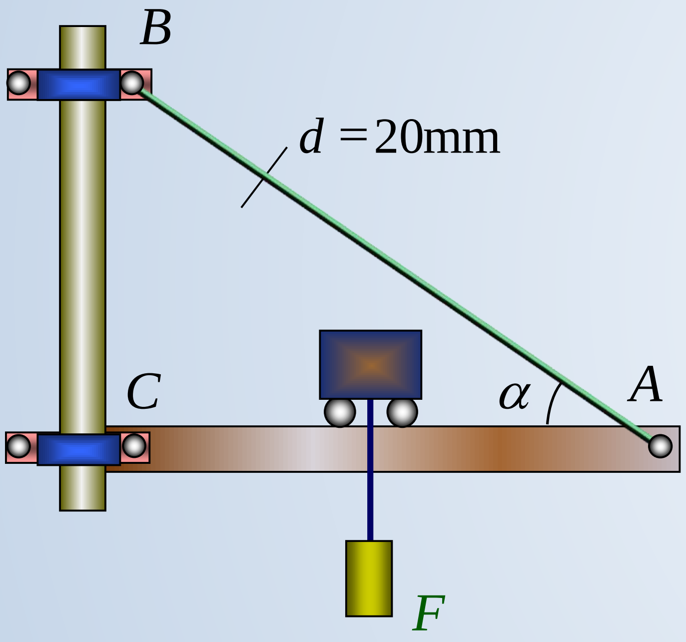
圣维南原理:

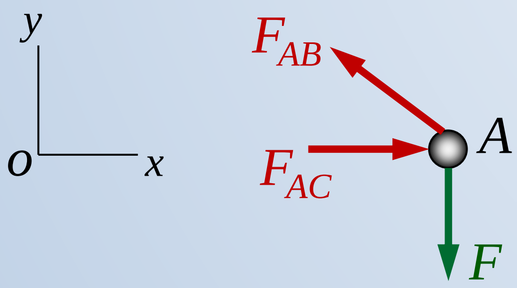
加力点附近区域应力分布比较复杂，公式不适用。当 $a > b$ 公式仍适用。





例2. 一悬臂吊车，载荷 F=15kN, AC=1.9m, BC=0.8m. 当F 移到A点时，求AB 杆横截面上的应力。





解： 1.求外力

$$\sum F_y=0 \quad F_{AB}\sin\alpha-F=0 \quad 得 \quad F_{AB}=\frac{F}{\sin\alpha}$$

$$\sin\alpha=\frac{0.8}{\sqrt{0.8^2+1.9^2}}=0.388 \quad F_{AB}=\frac{15}{0.388}=38.7\,\text{kN}$$

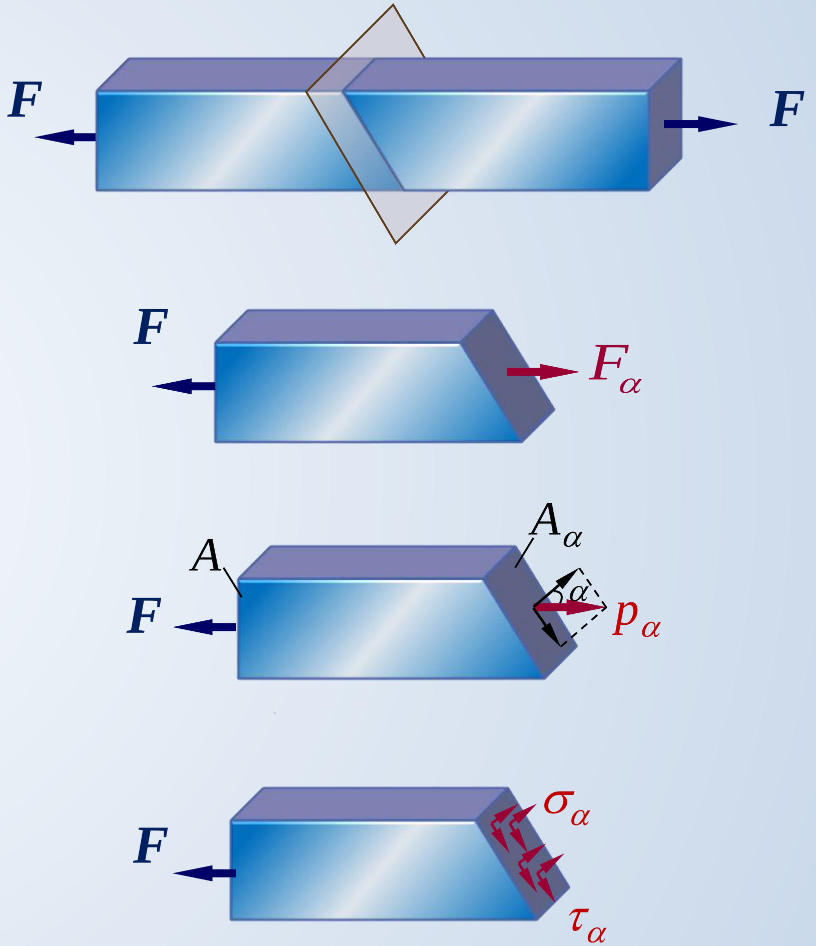
2.求内力 $\quad F_{\text{N}}=F_{AB}=38.7\text{k N}$

3.求应力

$$\sigma_{AB}=\frac{F_{\text{N}}}{A}=\frac{F_{AB}}{A}=\frac{38.7\times10^3}{\frac{\pi}{4}\cdot(20\times10^{-3})^2}=123\text{MPa}$$

$$\boxed{\sigma_{AB}=123\text{MPa}}$$

6.3 轴向拉伸（或压缩）时斜截面上的内力和应力



斜面上内力: $F_\alpha = F$

斜面上全应力

$$p_\alpha = \frac{F_\alpha}{A_\alpha} = \frac{F}{\dfrac{A}{\cos\alpha}} = \frac{F\cos\alpha}{A} = \sigma\cos\alpha$$

应力分解:

$$\sigma_\alpha = p_\alpha \cos\alpha$$

斜面上正应力 $\sigma_\alpha = \sigma\cos^2\alpha$

$$\tau_\alpha = p_\alpha \sin\alpha = \sigma\cos\alpha\sin\alpha$$

斜面上切应力 $\tau_\alpha = \dfrac{\sigma}{2}\sin 2\alpha$

6.3 轴向拉伸（或压缩）时斜截面上的内力和应力

讨论

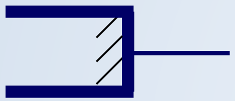
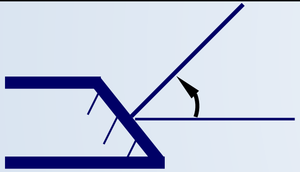
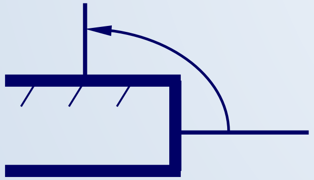
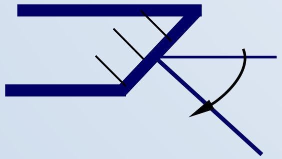
1. σ_α， τ_α是三角函数

2. σ_α， τ_α有极值

3. 符号规定:

4.列表找出$\sigma_{\max}$、$\tau_{\max}$

6.3 轴向拉伸（或压缩）时斜截面上的内力和应力

α	σ_α	τ_α	$\sigma_{\max}$	$\tau_{\max}$
0^0 	σ	0	σ	
45^0 	$\frac{\sigma}{2}$	$\frac{\sigma}{2}$		$\frac{\sigma}{2}$
90^0 	0	0		
-45^0 	$\frac{\sigma}{2}$	$-\frac{\sigma}{2}$		

6.3 轴向拉伸（或压缩）时斜截面上的内力和应力

结论

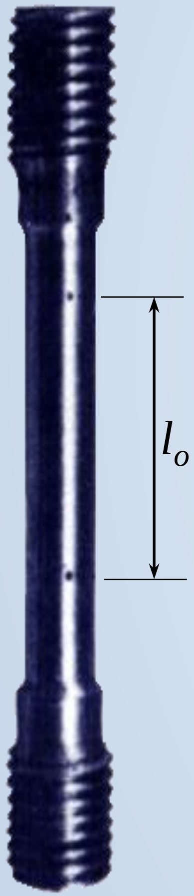
轴向拉压 $\begin{cases} \sigma_{max}\text{发生在横截面} \\ \tau_{max}\text{发生在与轴线成}45^0\text{斜面上} \end{cases}$

粉笔拉伸、压缩破坏断口是什么样的？是什么应力引起的破坏?

前面计算的是构件所受到的工作载荷及工作应力,至于构件能否承受这些应力,要了解材料本身的性质,而了解材料的最好也是唯一的办法就是试验。

6.4 材料在轴向拉伸和压缩时的力学性能

实验



实验条件: 常温、静载

实验设备: 万能实验机

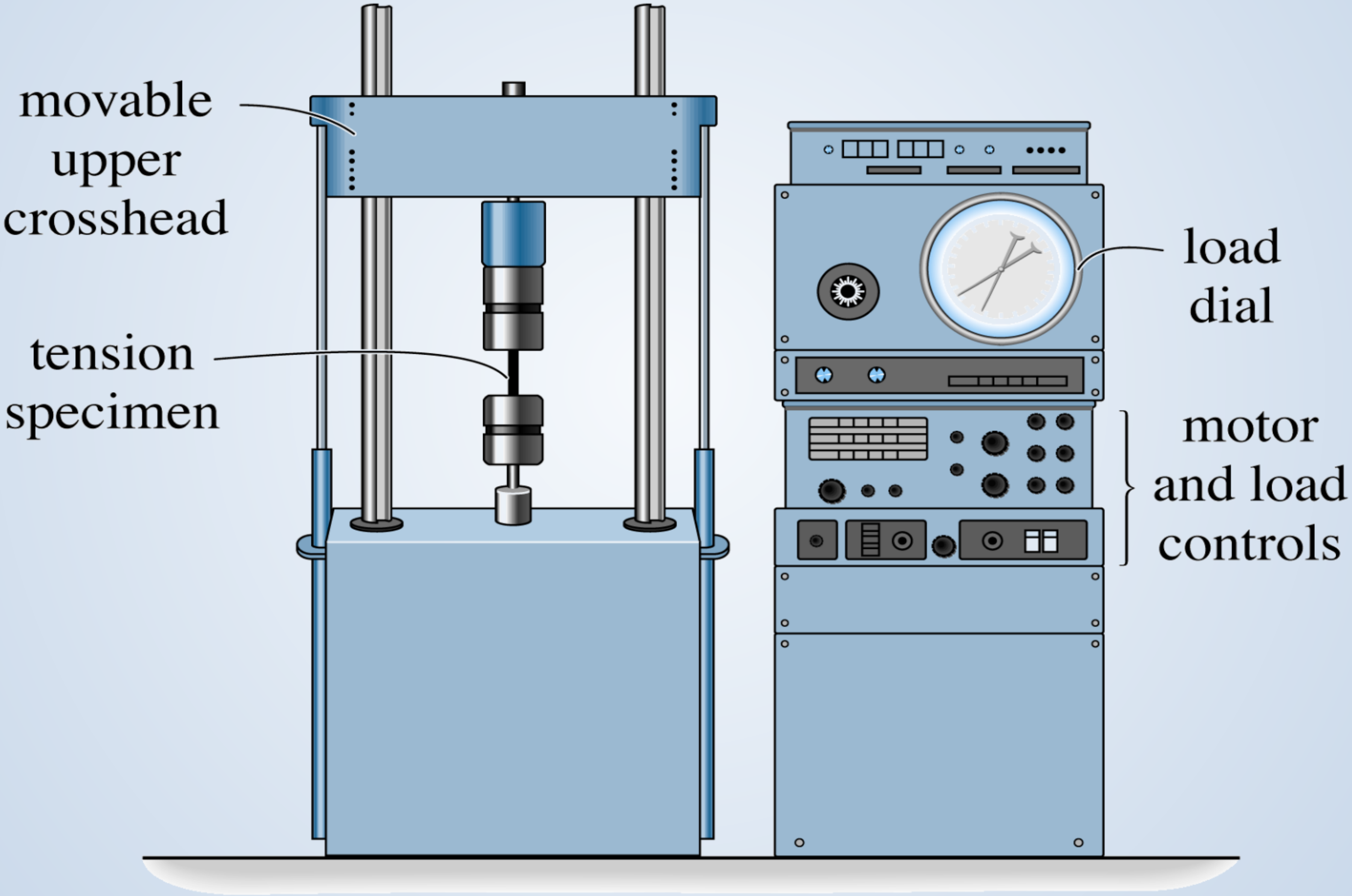
标准试件: 国标

材料分类

塑性材料 — 断裂前发生较大的塑性变形(如低碳钢)

脆性材料 — 断裂前发生较少的塑性变形(如铸铁)

实验设备: 万能实验机


movable
upper
crosshead
tension
specimen
load
dial
motor
and load
controls

6.4 材料在轴向拉伸和压缩时的力学性能

拉、压实验属破坏性实验

标准试件 ⟶ 拉、压一直到断(破坏)

↓ 测量尺寸 ↓ 选实验机

观察实验过程 —— 试件、载荷（指针）、$F-\Delta L$图的变化

得到：
- 坏的件
- 数值
- 图 $F-\Delta L$ 变形图

6.4 材料在轴向拉伸和压缩时的力学性能

计算指标

分析结果
- 数值
- 破坏形状
- 原因分析

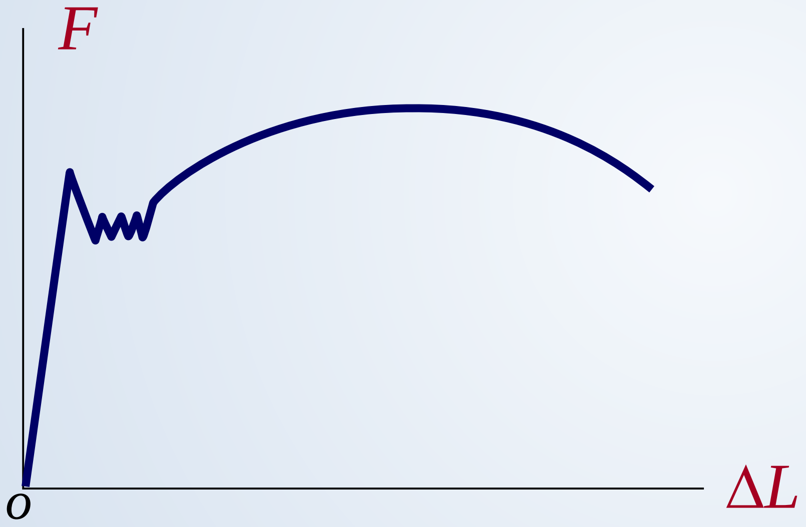
比较
- 不同材料相同受力
- 相同材料不同受力

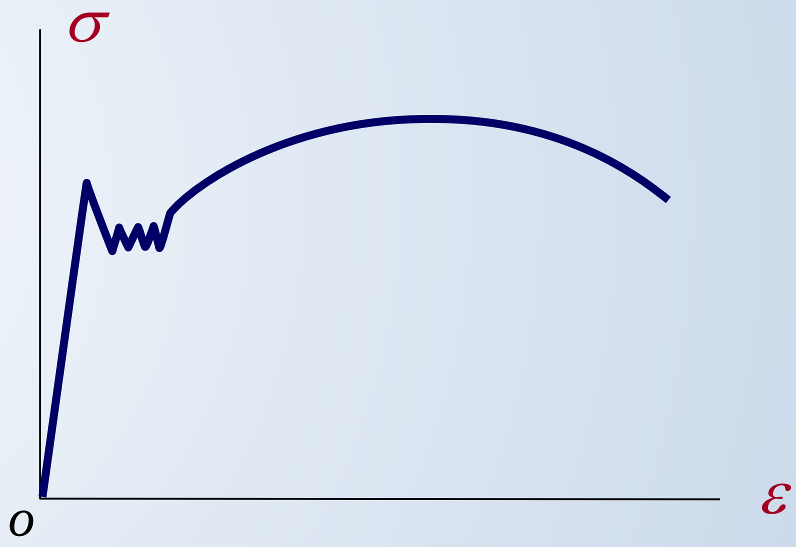
} 材料的指标、破坏形式

了解材料在拉、压时的力学性质

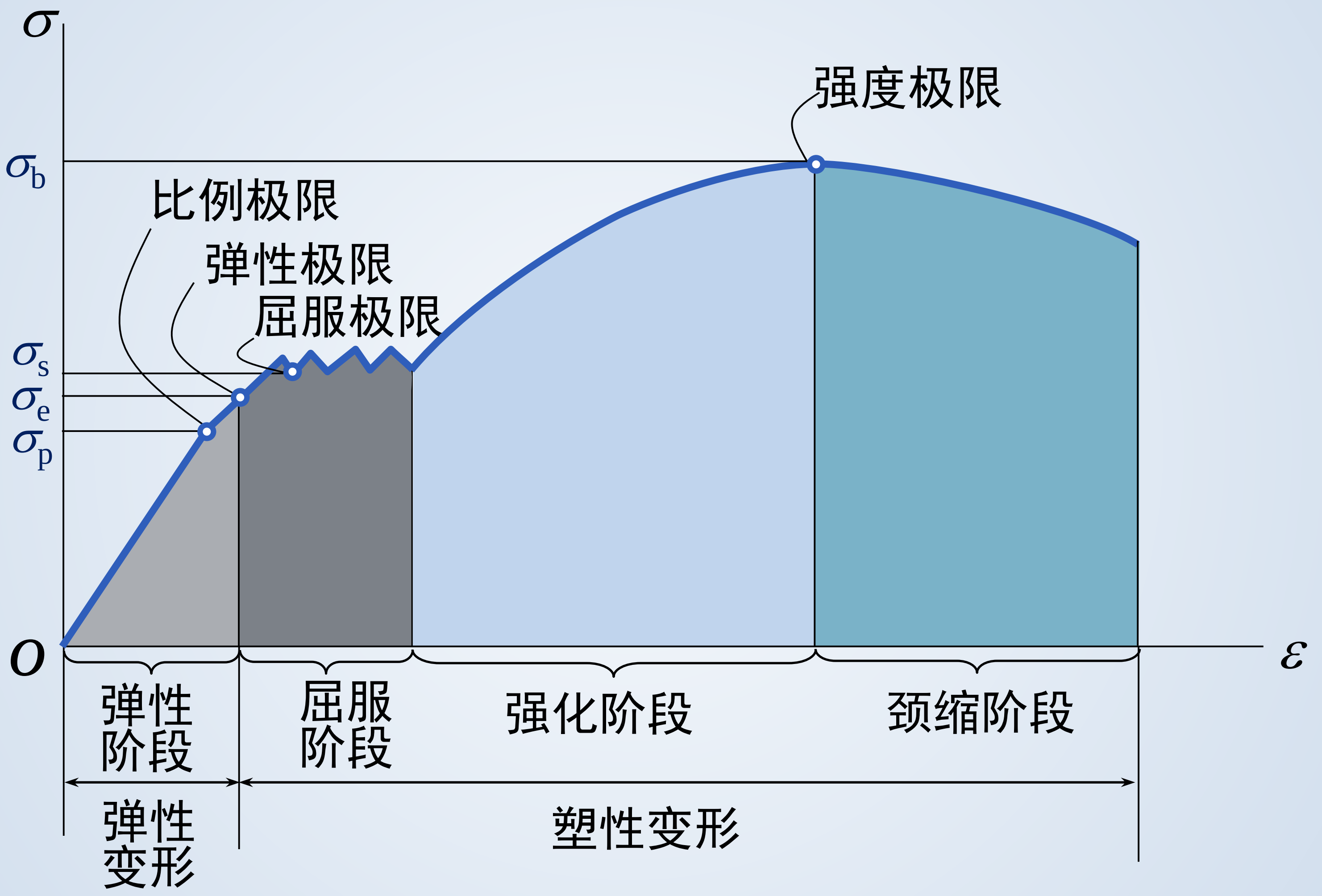
6.4 材料在轴向拉伸和压缩时的力学性能

一、低碳钢的拉伸





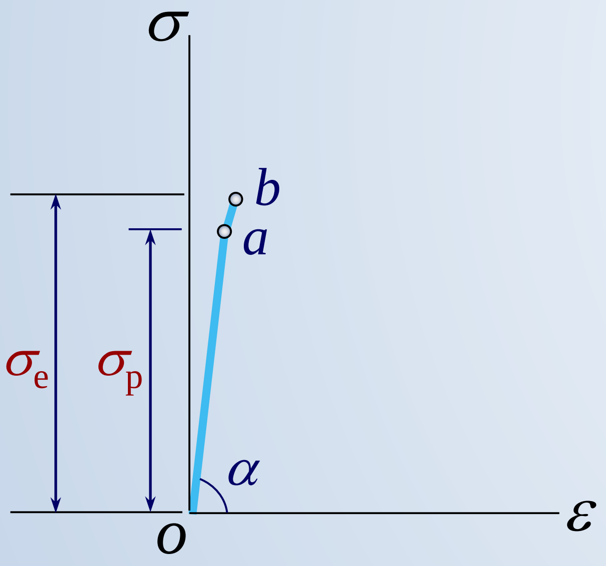
6.4 材料在轴向拉伸和压缩时的力学性能



塑性材料（钢）轴向拉伸的应力-应变图

四个阶段

1.弹性阶段



特点: 变形为弹性

oa 直线段内 $\sigma \propto \varepsilon$ $\sigma = \tan\alpha\varepsilon$

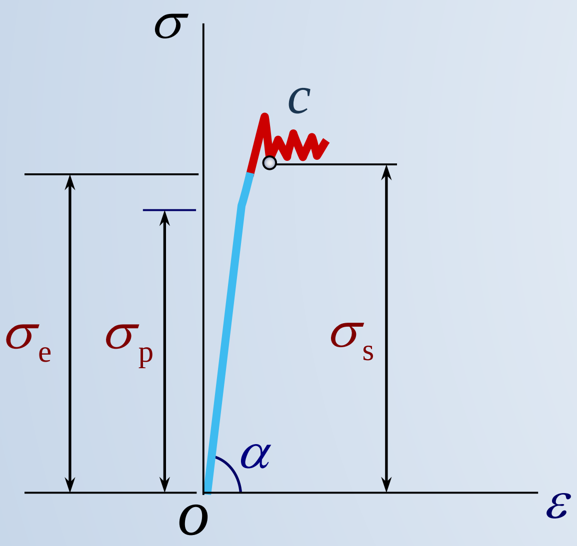
胡克定律 $\boxed{\sigma = E\varepsilon}$ E--弹性模量

力学指标: σ_p 比例极限

σ_e 弹性极限

2. 屈服阶段

特点：绝大部分为塑性变形

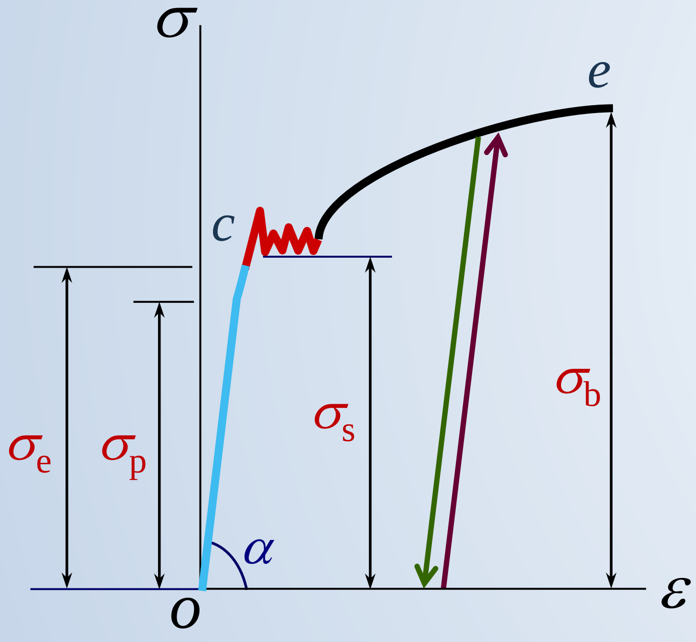


指针摆动，试件表面 出现45°划移线。

力学指标：σ_{s} 屈服极限

表达式：$\sigma_{s}=\dfrac{F_{s}}{A}$

3.强化阶段



特点：大部分为塑性变形

卸载定律---直线规律

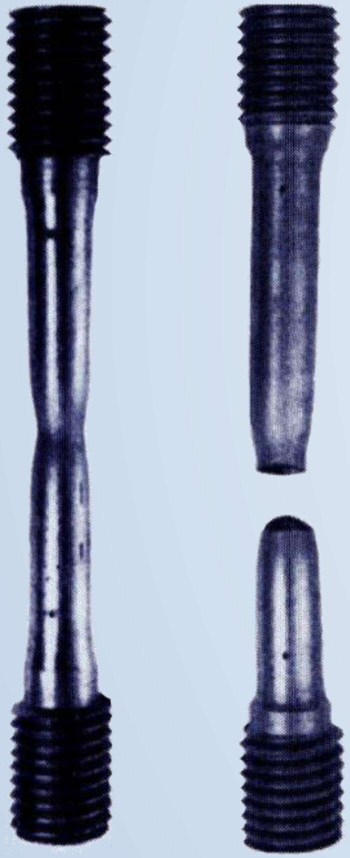
冷作硬化现象

力学指标: σ_b强度极限

表达式: $$\sigma_b = \frac{F_b}{A}$$

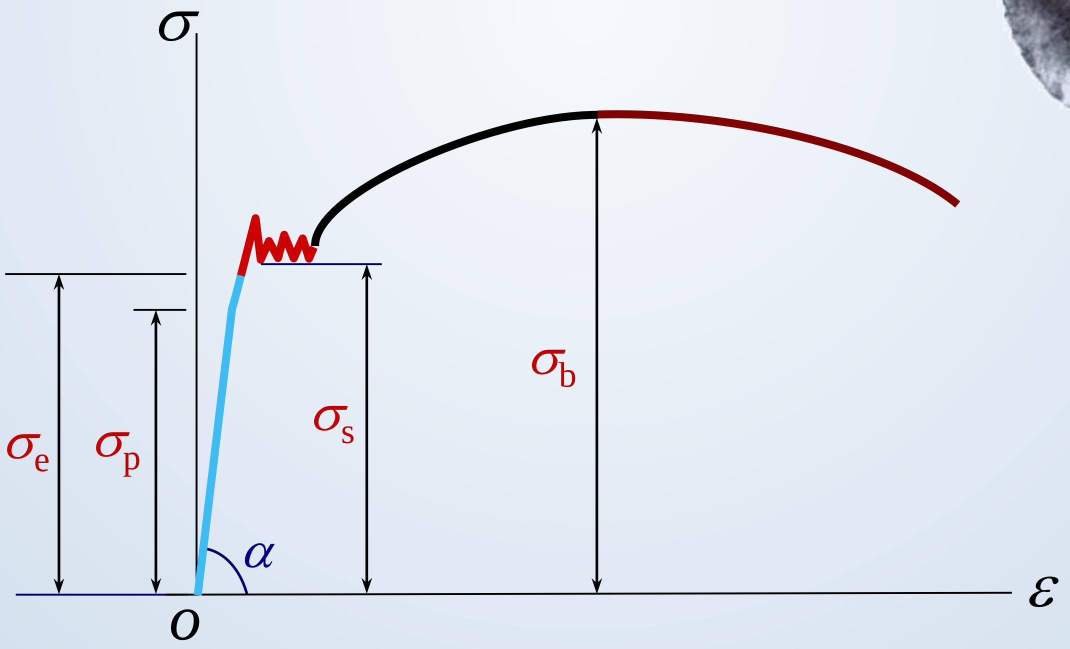
6.4 材料在轴向拉伸和压缩时的力学性能

4.颈缩阶段



特点：大部分为塑性变形

局部颈缩　断口杯状



6.4 材料在轴向拉伸和压缩时的力学性能

什么应力引起的破坏？

What reason is the specimen broken?

颈缩　　　　破坏

6.4 材料在轴向拉伸和压缩时的力学性能

强度指标

$$\begin{cases} \sigma_{\mathrm{s}} = \dfrac{F_{\mathrm{s}}}{A} & \text{屈服极限} \\ \sigma_{\mathrm{b}} = \dfrac{F_{\mathrm{b}}}{A} & \text{强度极限} \end{cases}$$

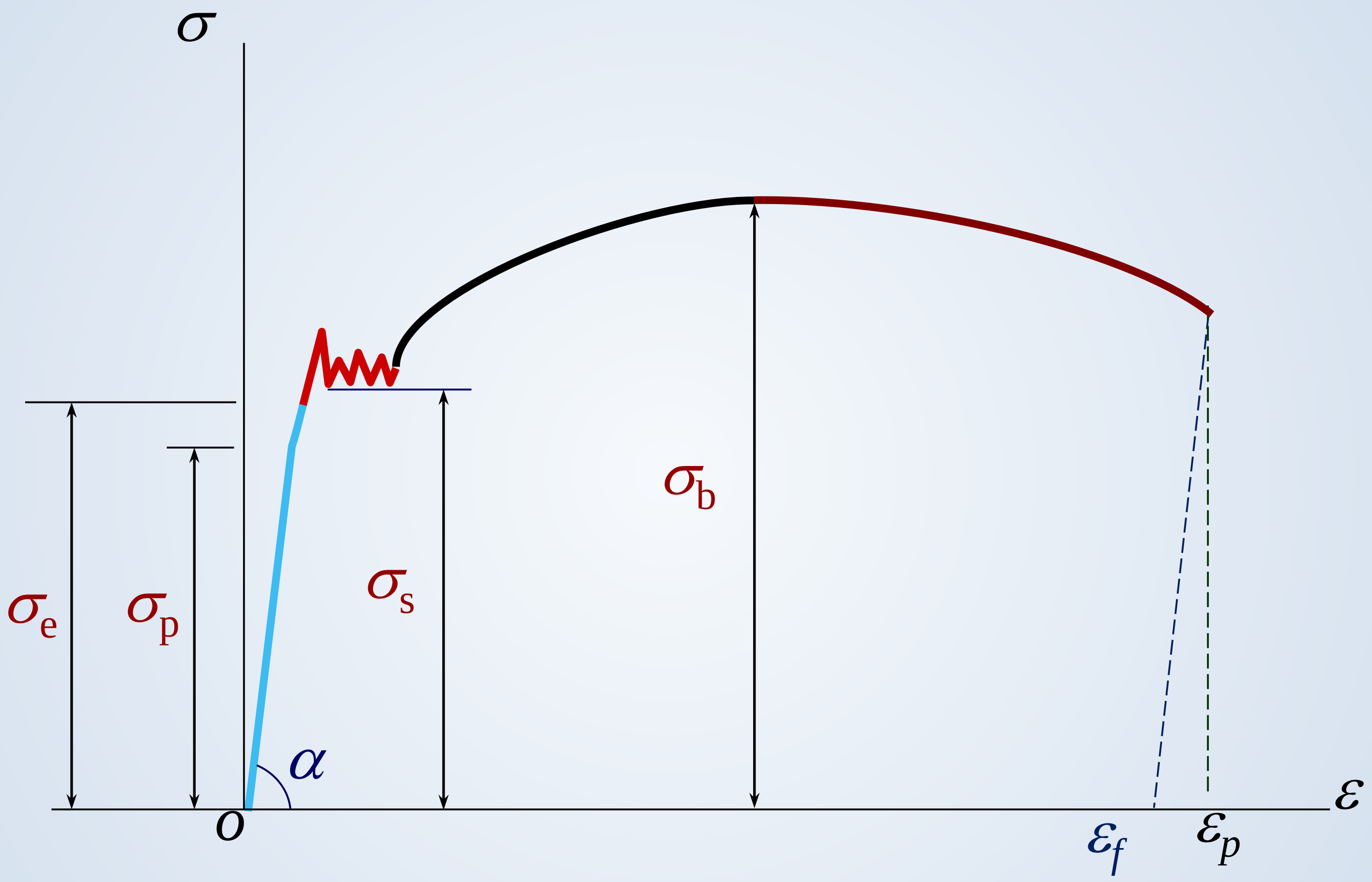
塑性指标

$$\begin{cases} \delta = \dfrac{l_1 - l}{l} 100\% & \text{伸长率} \\ \psi = \dfrac{A - A_1}{A} 100\% & \text{断面收缩率} \end{cases}$$

如何区分塑性材料和脆性材料？

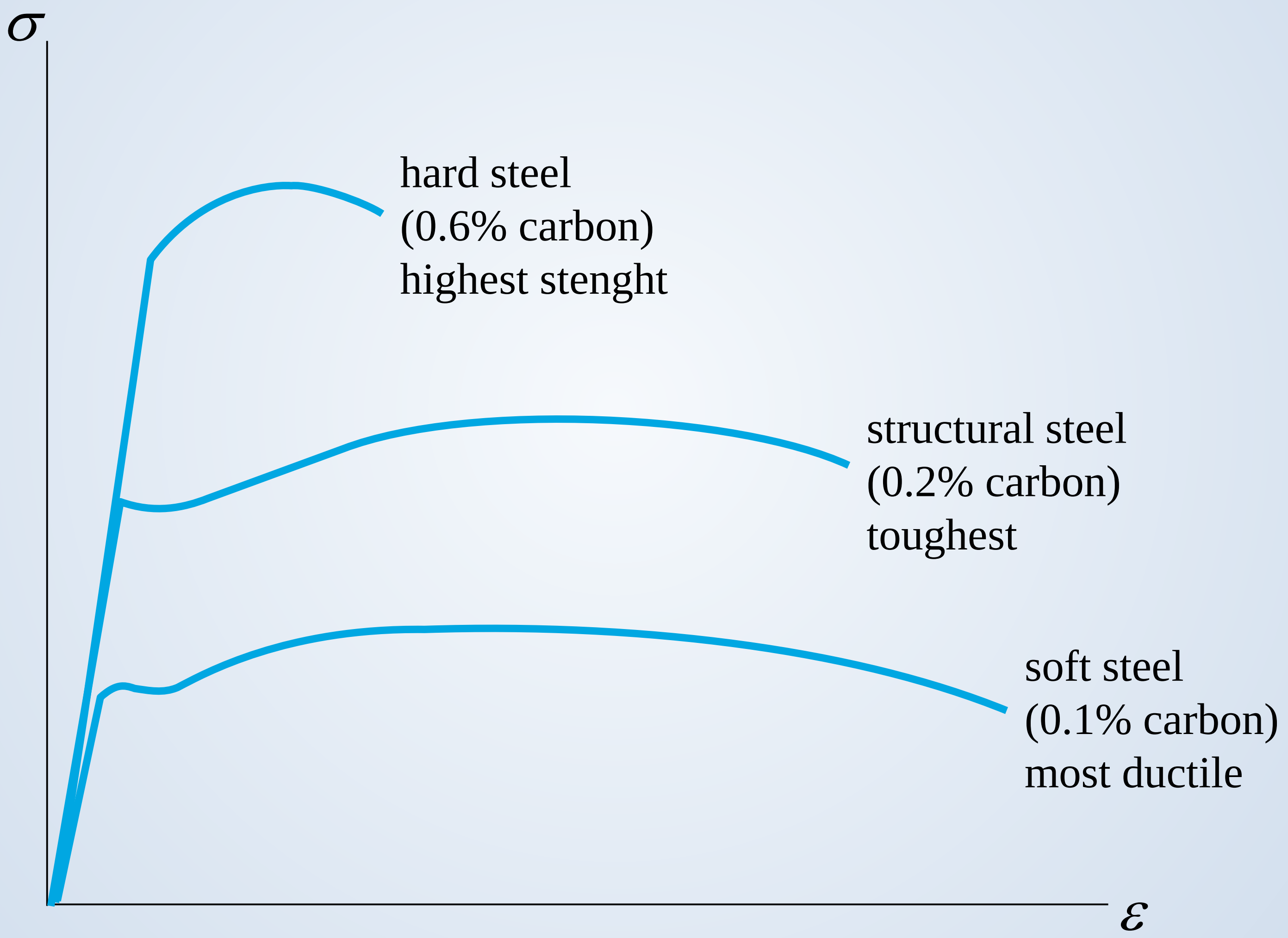
$\delta \geq 5\%$ 为塑材材料　$\delta < 5\%$ 为脆材材料

6.4 材料在轴向拉伸和压缩时的力学性能



伸长率 $\delta = \varepsilon_f$

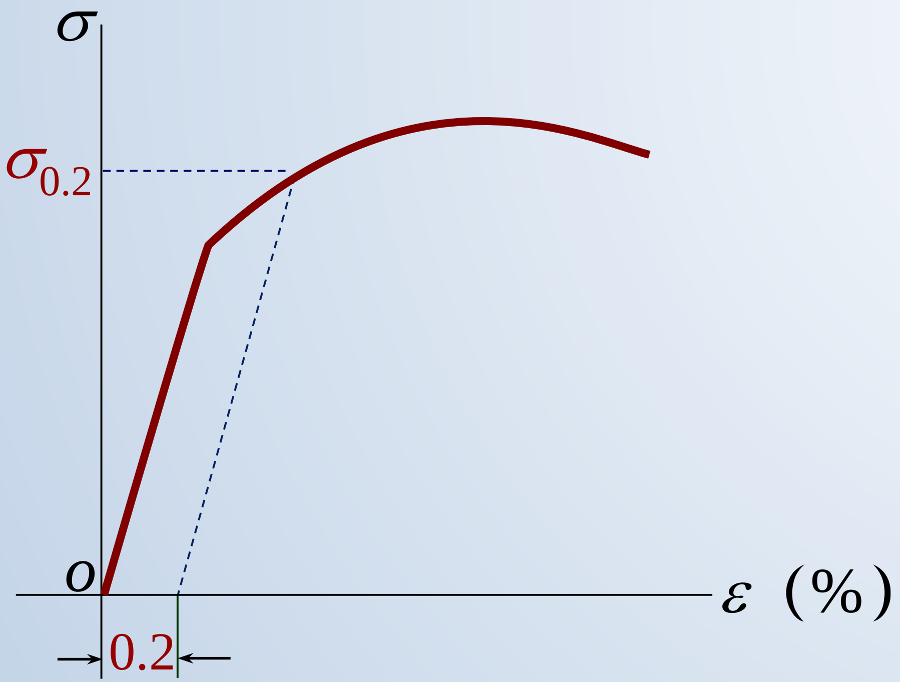
6.4 材料在轴向拉伸和压缩时的力学性能



二、其他塑性材料拉伸时的力学性质

不同: 多数塑性材料无明显屈服平台

共性：有直线段,塑性变形较大,强度极限较高

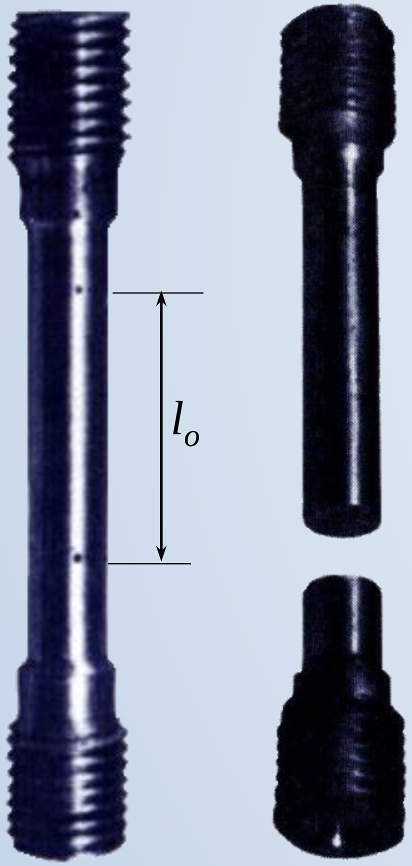


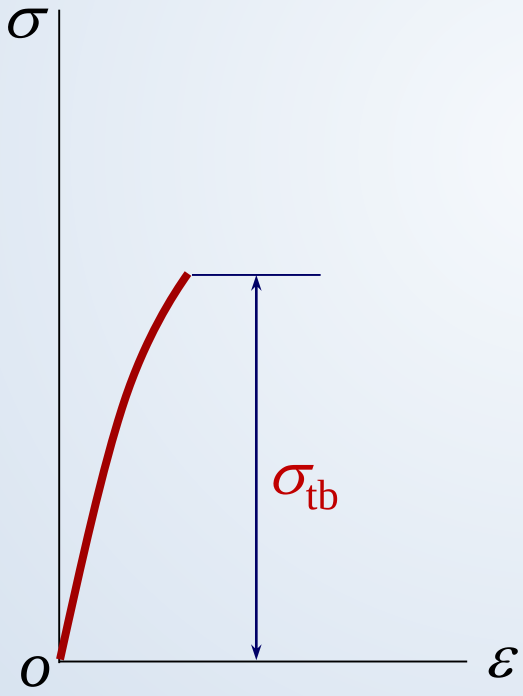
条件屈服极限$\sigma_{0.2}$：

产生0.2%的塑性变形所对应的应力。

6.4 材料在轴向拉伸和压缩时的力学性能

三、铸铁拉伸





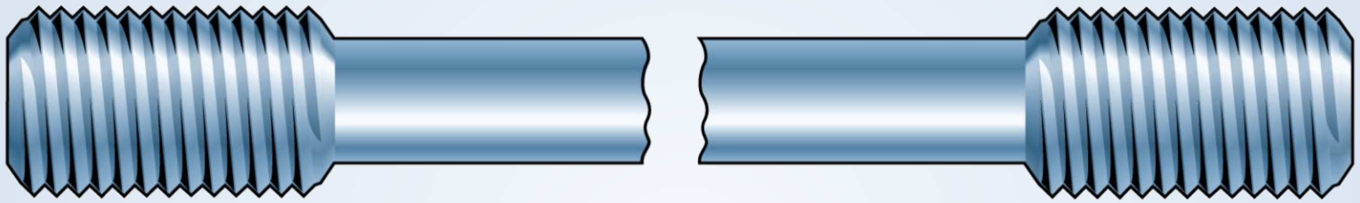
σ–ε 微弯曲线，近似直线，

$$\sigma = E\varepsilon$$

σ_b 较小。断口沿横截面，平齐、粗糙

6.4 材料在轴向拉伸和压缩时的力学性能

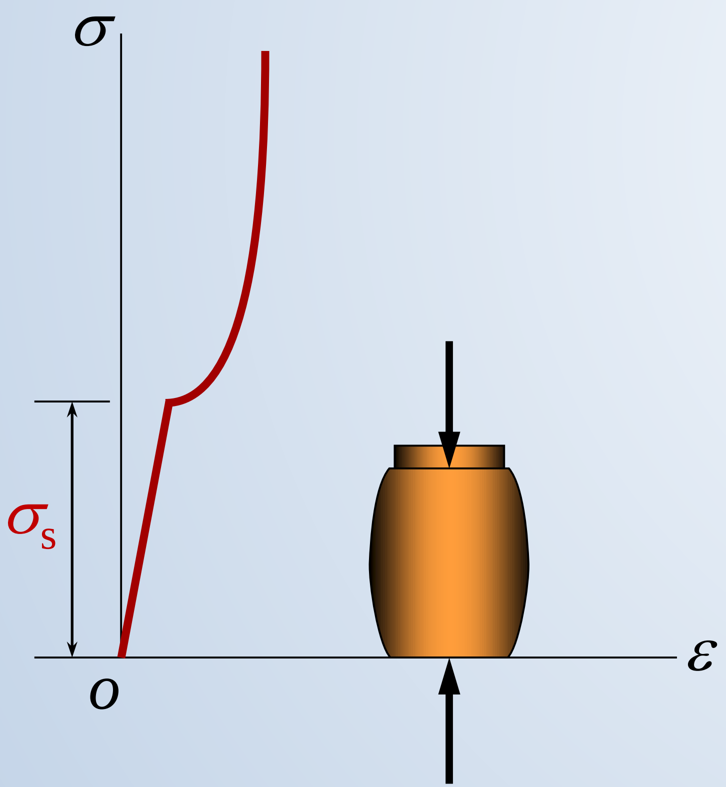
铸铁拉伸



什么应力引起的破坏？

四、压缩

1. 低碳钢压缩



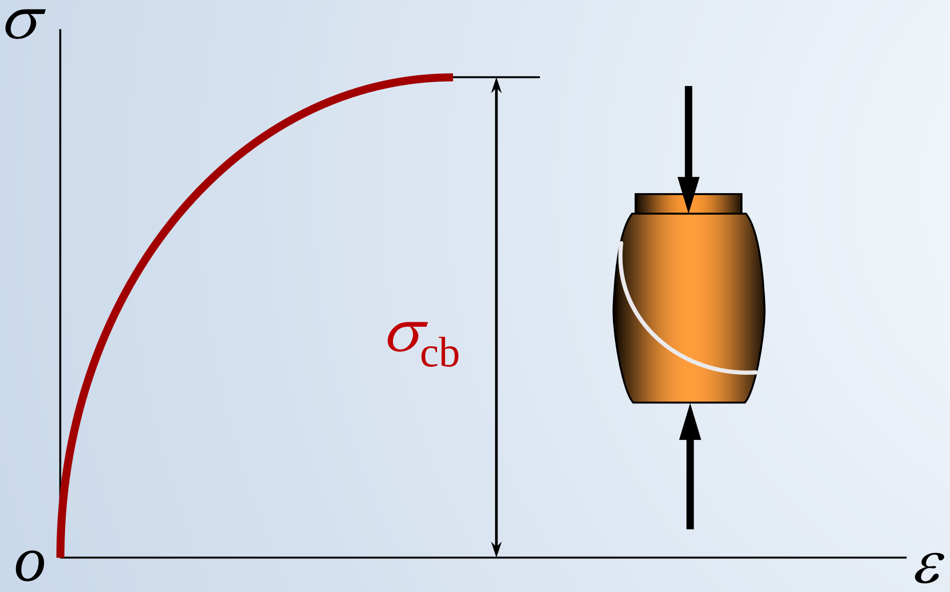
与拉伸比较 $E_t \approx E_c = E$

$\sigma_{st} \approx \sigma_{sc} = \sigma_s$

得不到σ_b，压短而不断裂，

以屈服极限作为破坏依据。

2.铸铁压缩



$$\sigma_{tb} << \sigma_{cb}$$

断口沿与轴线大致成45^0面错开

6.4 材料在轴向拉伸和压缩时的力学性能

五、材料的塑性和脆性及其相对性

常温、静载下

塑性材料强度指标：屈服极限 σ_s 和强度极限 σ_b

脆性材料的强度指标：强度极限 σ_{tb} 和 σ_{cb}

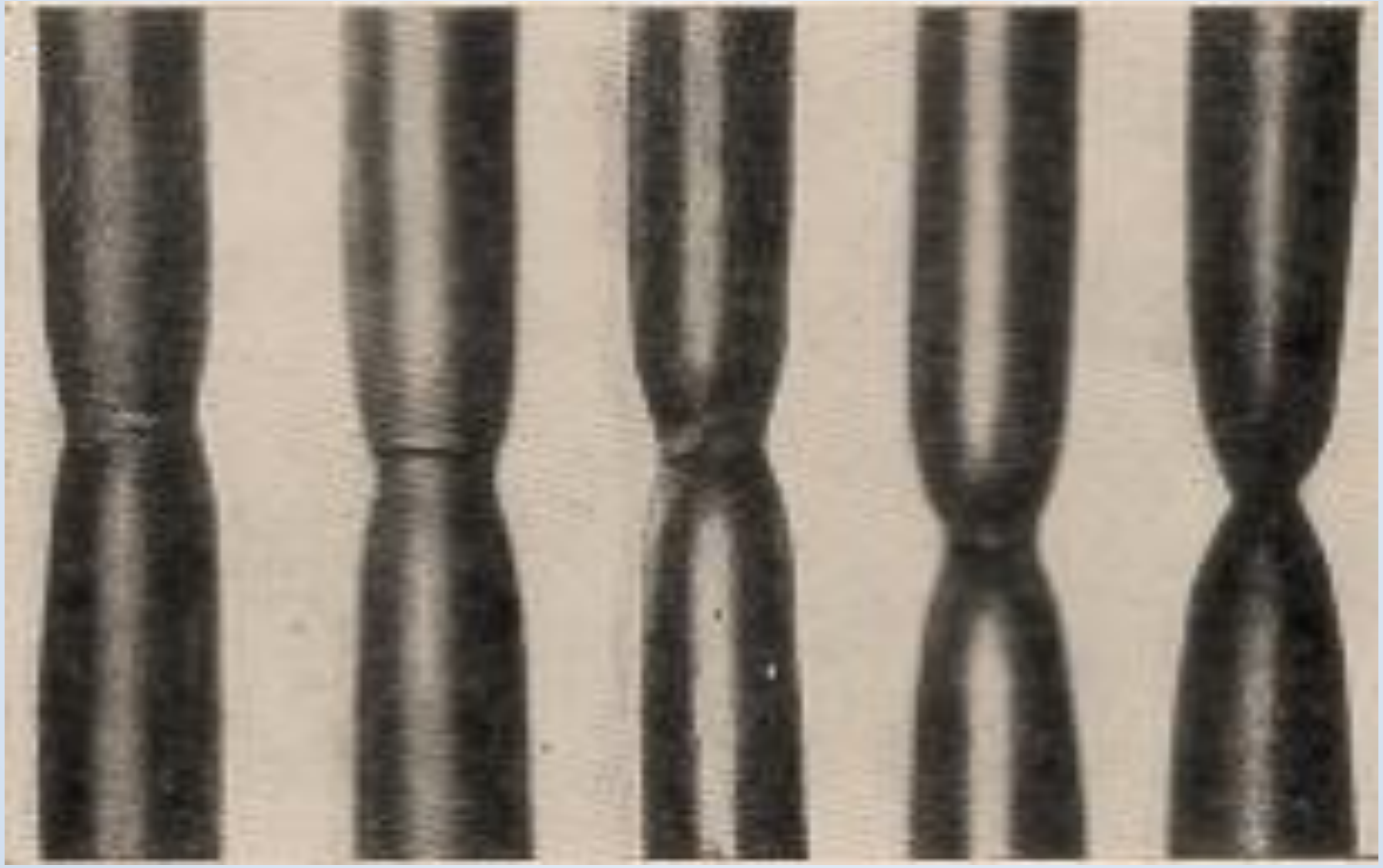
塑性材料的塑性指标高, $\delta \geq 5\%$

脆性材料的塑性指标低, $\delta < 5\%$

温度发生变化时，材料的性质也会随之发生改变

6.4 材料在轴向拉伸和压缩时的力学性能

20°C 200°C 300°C 400°C 500°C



温度影响

6.5 许用应力、安全系数和强度条件

一、工作应力

构件受到的 $\sigma = \dfrac{F_{\mathrm{N}}}{A}$

二、极限应力σ_{u}

材料不失效（破坏）所能承受的最大应力

塑性材料 $\sigma_{\mathrm{u}} = \sigma_{\mathrm{s}}$

脆性材料σ_{u} $\left\langle \begin{array}{l} \sigma_{\mathrm{tb}} \\ \sigma_{\mathrm{cb}} \end{array} \right.$

6.5 许用应力、安全系数和强度条件

三、安全系数与许用应力

安全系数 $n>1$, $n_s=1.2\sim 2.5$, $n_b=2\sim 3.5$

许用应力 $\boxed{[\sigma]=\dfrac{\sigma_u}{n}}$

塑性材料 $[\sigma]=\dfrac{\sigma_s}{n_s}$

脆性材料 $[\sigma_t]=\dfrac{\sigma_{tb}}{n_b}$ $[\sigma_c]=\dfrac{\sigma_{cb}}{n_b}$

四、强度条件

等直拉压杆 $\boxed{\sigma_{max}=\dfrac{F_{N\max}}{A}\le[\sigma]}$

6.5 许用应力、安全系数和强度条件

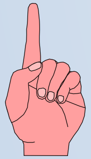
五、强度条件可解决的三类问题：

1.校核:已知外力、截面、材料

$\sigma \leq [\sigma]$ 安全 $\sigma > [\sigma]$ 不安全

2.设计：已知外力、材料, 可求 $A \geq \dfrac{F_{\mathrm{N}}}{[\sigma]}$

3.确定许可载荷:已知截面 材料,可求 $[F] = A[\sigma]$



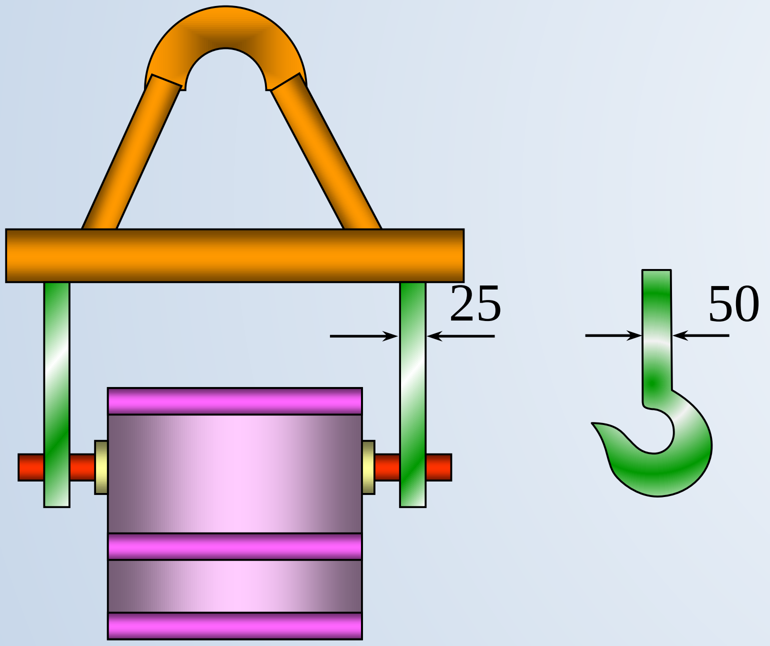
步骤

1. 外力分析 2.内力分析（画F_{N}图，得F_{Nmax}）

3.用 $\boxed{\sigma_{\max} = \dfrac{F_{\mathrm{N}\max}}{A} \leq [\sigma]}$ 作校核、设计、确载计算。

6.5 许用应力、安全系数和强度条件

例3 已知：吊杆材料的许用应力, $[\sigma]$=80MPa, 铁水包自重为8kN, 最多能容30kN重的铁水. 试校核吊杆的强度。



解：1.吊杆外力 $F=\dfrac{30+8}{2}=19\,\text{kN}$

2.吊杆内力 $F_N=F=19\,\text{kN}$

3.校核吊杆强度

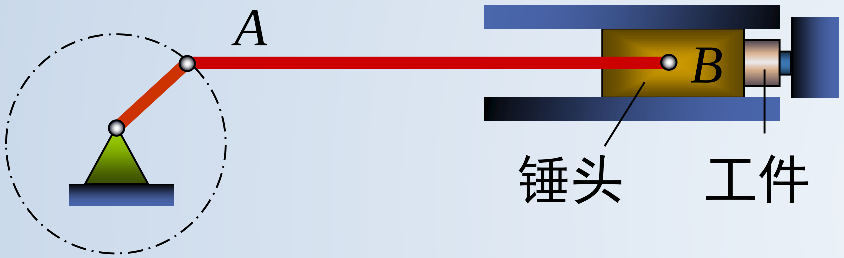
$$\sigma_{max}=\frac{F_N}{A}=\frac{19\times10^3}{25\times50\times10^{-6}}=15.2\,\text{MPa}$$

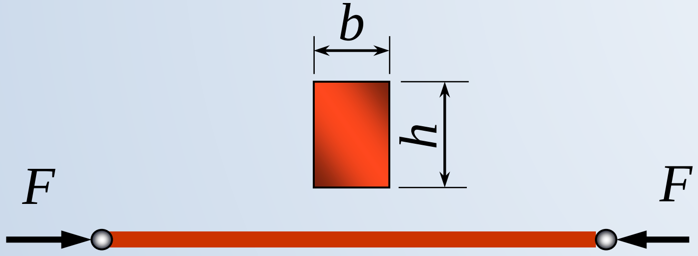
$\boxed{\sigma_{max}\le[\sigma]}$ 吊杆满足强度条件

6.5 许用应力、安全系数和强度条件

例4 连杆AB接近水平，镦压力 F = 3.78MN，横截面为矩形 $h:b$ = 1.4

σ = 90MPa,试设计截面尺寸。





解：1. 求杆AB的外力 $F = 3.78\,\mathrm{MN}$

2. 求轴力F_{N} $F_{\mathrm{N}} = F = 3.78\,\mathrm{MN}$

3. 由强度条件 $\sigma_{\max} = \dfrac{F_{\mathrm{N\,max}}}{A} \le [\sigma]$

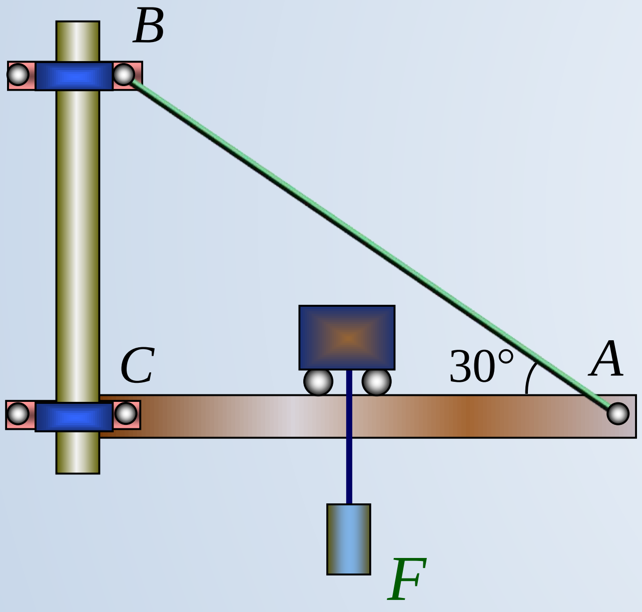
$$A \ge \frac{F_{\mathrm{N}}}{[\sigma]} = \frac{3.78\times10^6}{90\times10^6} = 0.42\mathrm{m}^2 = 420\,\mathrm{cm}^2$$

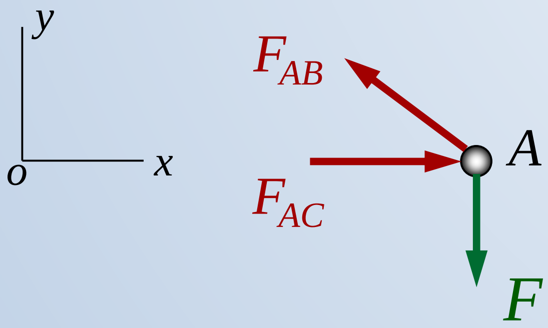
$$A = bh = 1.4b^2 = 420\,\mathrm{cm}^2 \qquad \boxed{b = 17.3\,\mathrm{cm} \quad h = 24.3\,\mathrm{cm}}$$

6.5 许用应力、安全系数和强度条件

例5 木杆AC $A_1=100\,\mathrm{cm}^2$ $[\sigma]_1=7\,\mathrm{MPa}$ 钢杆AB $A_2=6\,\mathrm{cm}^2$ $[\sigma]_2=160\,\mathrm{MPa}$

载荷在A处时，求许可吊重 $[F]$。





解：1.求杆AC和杆AB的外力

$$\sum F_x=0 \qquad F_{AC}-F_{AB}\cos 30^0=0$$

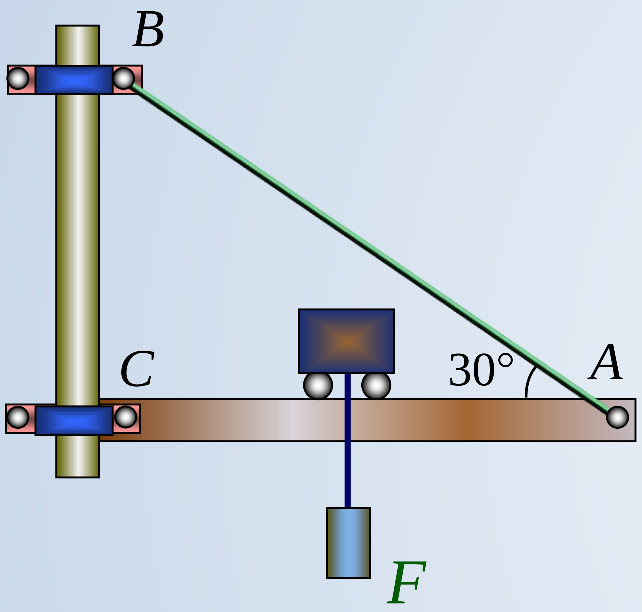
$$\sum F_y=0 \qquad F_{AB}\sin 30^0-F=0$$

解得：$F_{AB}=\dfrac{F}{\sin 30^0}$，$F_{AC}=\dfrac{F}{\tan 30^0}$

2. 杆AB、AC 的轴力

$$F_{\mathrm{N}_{AC}}=F_{AC} \qquad F_{\mathrm{N}_{AB}}=F_{AB}$$

6.5 许用应力、安全系数和强度条件



3. 由强度条件 $\sigma_{\max}=\dfrac{F_{N\max}}{A}\le[\sigma]$ 确定$[F]$

$$\sigma_{AC}=\frac{F_{NAC}}{A_1}=\frac{F_{AC}}{A_1}=\frac{F_1}{\tan 30^0 A}\le[\sigma]_1$$

得 $F_1\le[\sigma]_1\tan 30^0 A_1$

$$[F]_1=7\times10^6\times\frac{\sqrt{3}}{3}\times100\times10^{-4}=40.5\,\text{kN}$$

同理可得 $[F]_2=48\,\text{kN}$

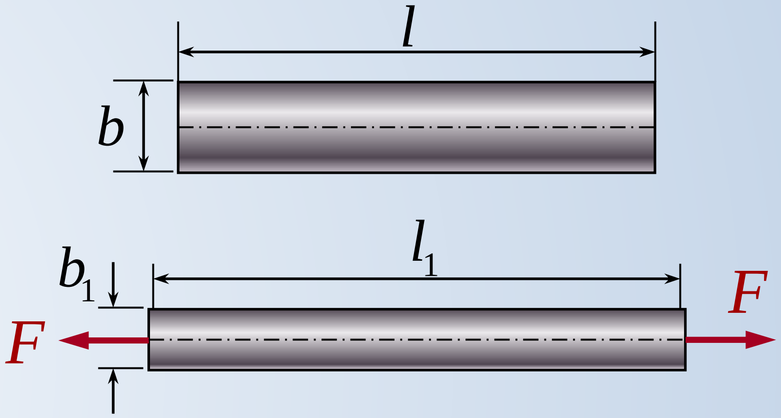
许可吊重 $\boxed{[F]=40.5\,\text{kN}}$

6.6 轴向拉伸（或压缩）时的变形

一.纵向变形和横向变形

纵向变形 $\Delta l = l_1 - l$ 纵向应变 $\varepsilon = \dfrac{\Delta l}{l}$

横向变形 $\Delta b = b_1 - b$ 横向应变 $\varepsilon' = \dfrac{\Delta b}{b}$



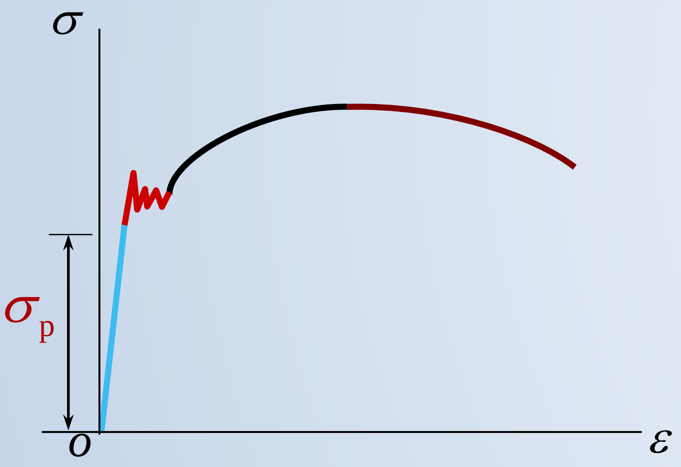
试验表明:在线弹性范围内

$$\mu = \left|\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right| \qquad \varepsilon' = -\mu\varepsilon$$

μ –泊松比(横向变形系数)

二. 胡克定律 (Hooke's law)

由实验知: $\sigma \le \sigma_{\mathrm{p}}$ $\boxed{\sigma = E\varepsilon}$ $\varepsilon = \dfrac{\sigma}{E}$



当 $\varepsilon = C$ 时 $\Delta l = \varepsilon l = \dfrac{\sigma}{E} l = \dfrac{F_{\mathrm{N}} l}{EA}$

胡克定律的两种表达式：

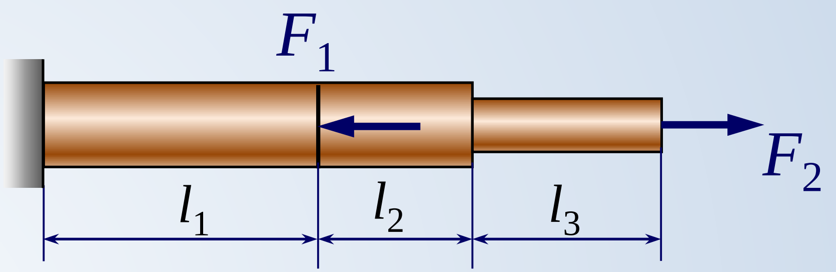
$$\boxed{\varepsilon = \frac{\sigma}{E}} \qquad \boxed{\Delta l = \frac{F_{\mathrm{N}} l}{EA}}$$

EA—抗拉(压)刚度

6.6 轴向拉伸（或压缩）时的变形

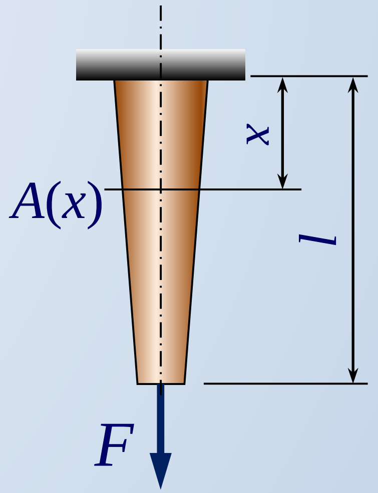
说明

1.当F_N, EA 沿轴线为分段常数时



$$\Delta l=\sum_{i=1}^{n}\frac{F_{Ni}l_i}{E_iA_i}$$

2.当$F_N(x)$, $A(x)$沿轴线变化时，取微段dx 后再积分

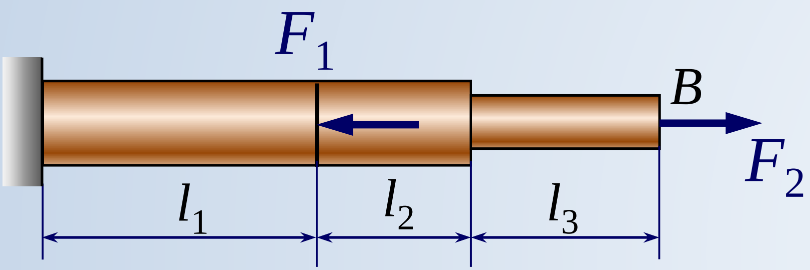


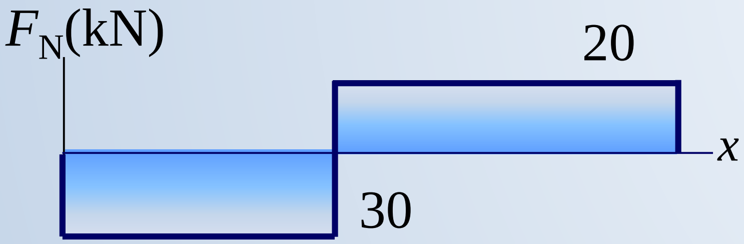
$$\Delta l=\int_l\frac{F_N(x)\mathrm{d}x}{EA(x)}$$

6.6 轴向拉伸（或压缩）时的变形

例6 已知: $F_1 = 50\,\text{kN}$ $F_2 = 20\,\text{kN}$ $l_1 = 120\,\text{mm}$ $l_2 = l_3 = 100\,\text{mm}$ $A_1 = A_2 = 500\,\text{mm}^2$

$A_3 = 250\,\text{mm}^2$ $E = 200\,\text{GPa}$ 求: u_B $\varepsilon_{\max}$





解: 1.求各段内力

$F_{N_1} = 20 - 50 = -30\,\text{kN}$

$F_{N_2} = 20\,\text{kN}$ $F_{N_3} = 20\,\text{kN}$

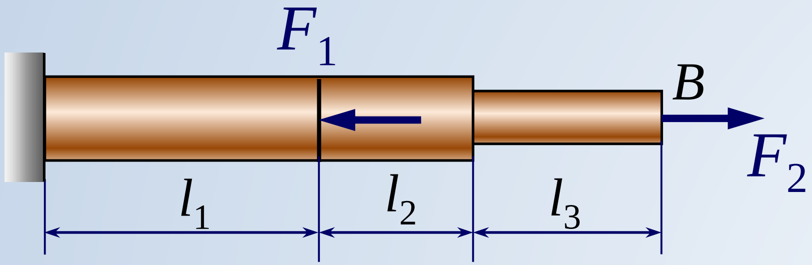
2.求u_B $u_B = \Sigma \Delta l_i$ Δl_i有正负

$$\Delta l_1 = \frac{F_{N_1} l_1}{E_1 A_1} = \frac{-30\times10^3\times120\times10^{-3}}{200\times10^9\times500\times10^{-6}} = -0.036\,\text{mm}$$

同理 $\Delta l_2 = 0.02\,\text{mm}$ $\Delta l_3 = 0.04\,\text{mm}$

$\sum \Delta l_i = -0.036 + 0.02 + 0.04 = 0.024\,\text{mm}$ $\boxed{u_B = 0.024\,\text{mm}}$

6.6 轴向拉伸（或压缩）时的变形



3.求$\varepsilon_{\max}$

$$\varepsilon_i = \frac{\Delta l_i}{l_i} \quad 或 \quad \varepsilon_i = \frac{\sigma_i}{E} = \frac{F_i}{EA_i}$$

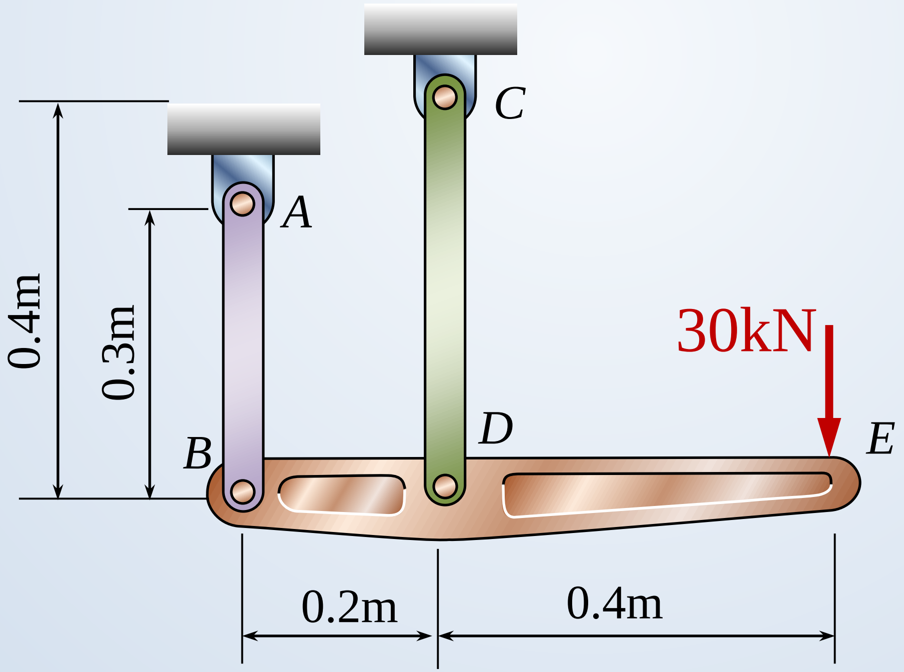
$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta l_1}{l_1} = \frac{-3.6\times10^{-5}}{120\times10^{-3}} = -3.0\times10^{-4}$$

同理 $\varepsilon_2 = 2.0\times10^{-4}$ $\varepsilon_3 = 4.0\times10^{-4}$

$\boxed{\varepsilon_{\max} = 4.0\times10^{-4}}$ ε 量纲1

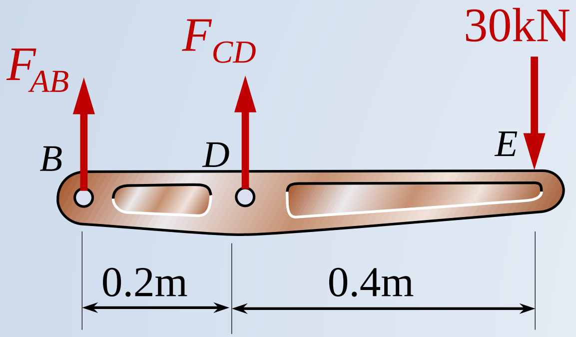
6.6 轴向拉伸（或压缩）时的变形

例7 如图所示，*BDE*为刚体，杆*AB*材料为铝，E =70GPa，截面面积为500mm^2. 杆*CD*材料为钢, E =200GPa, 截面面积为600mm^2, 当结构受到30kN的力作用时, 求: *B*, *D*和*E*点的位移。



6.6 轴向拉伸（或压缩）时的变形

解：对刚体BDE受力分析



$$\sum M_B = 0$$

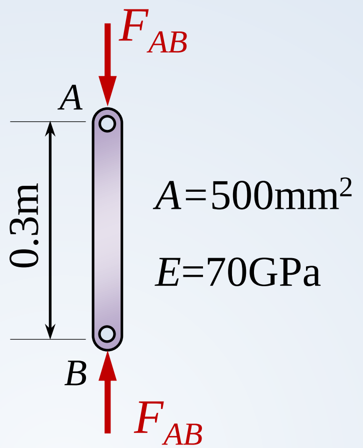
$$0 = -30\times10^3\times0.6 + F_{CD}\times0.2$$

$$F_{CD} = +90\text{kN} \quad \text{tension}$$

$$\sum M_D = 0$$

$$0 = -30\times10^3\times0.4 - F_{AB}\times0.2$$

$$F_{AB} = -60\text{kN} \quad \text{compression}$$



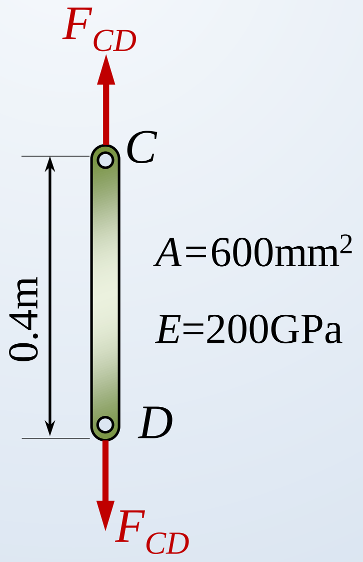
B点位移:

$$\delta_B = \frac{F_{NAB}l}{EA} = \frac{F_{AB}l}{EA}$$

$$= \frac{-60\times10^3\times0.3}{500\times10^{-6}\times70\times10^9}$$

$$= -514\times10^{-6}\,\text{m}$$

$$\boxed{\delta_B = 0.514\ \text{mm}\ \uparrow}$$



D点位移:

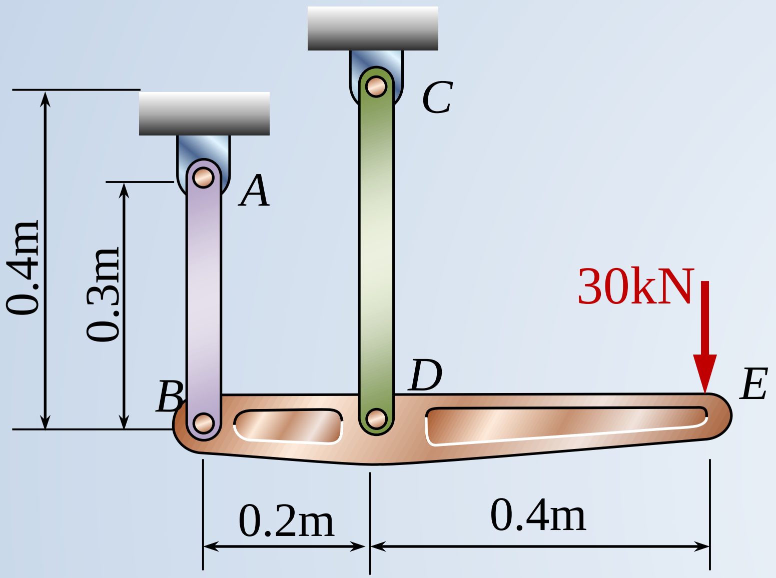
$$\delta_D = \frac{F_{NCD}l}{EA} = \frac{F_{CD}l}{EA}$$

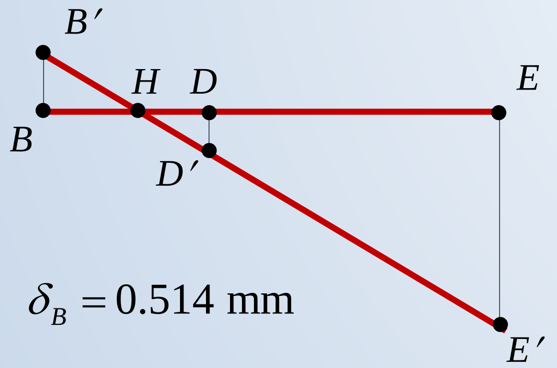
$$= \frac{90\times10^3\times0.4}{600\times10^{-6}\times200\times10^9}$$

$$= 300\times10^{-6}\,\text{m}$$

$$\boxed{\delta_D = 0.300\ \text{mm}\ \downarrow}$$

6.6 轴向拉伸（或压缩）时的变形





$\delta_B = 0.514\ \text{mm}$

$\delta_D = 0.300\ \text{mm}$

*E*点位移:

$$\frac{BB'}{DD'} = \frac{BH}{HD}$$

$$\frac{0.514}{0.300} = \frac{(200\ ) - HD}{HD}$$

$$HD = 73.7\ \text{mm}$$

$$\frac{EE'}{DD'} = \frac{HE}{HD}$$

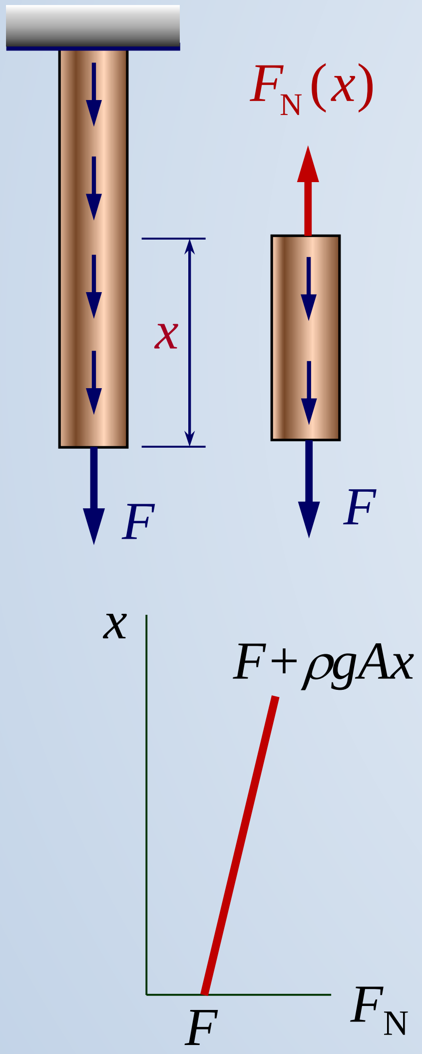
$$\frac{\delta_E}{0.300} = \frac{400 + 73.7}{73.7}$$

$$\delta_E = 1.928\ \text{mm}$$

$$\boxed{\delta_E = 1.928\ \text{mm}\ \downarrow}$$

6.6 轴向拉伸（或压缩）时的变形

例8 已知: F,ρ,l,A,E 求: $\sigma_{\max}$ Δl



解: 内力计算 $F_N(x)=F+\rho gAx$

应力计算 $\sigma(x)=\dfrac{F_N(x)}{A}$

$$\sigma_{\max}=\frac{F_{N\max}}{A}=\frac{F+\rho gAl}{A}=\frac{F}{A}+\rho gl$$

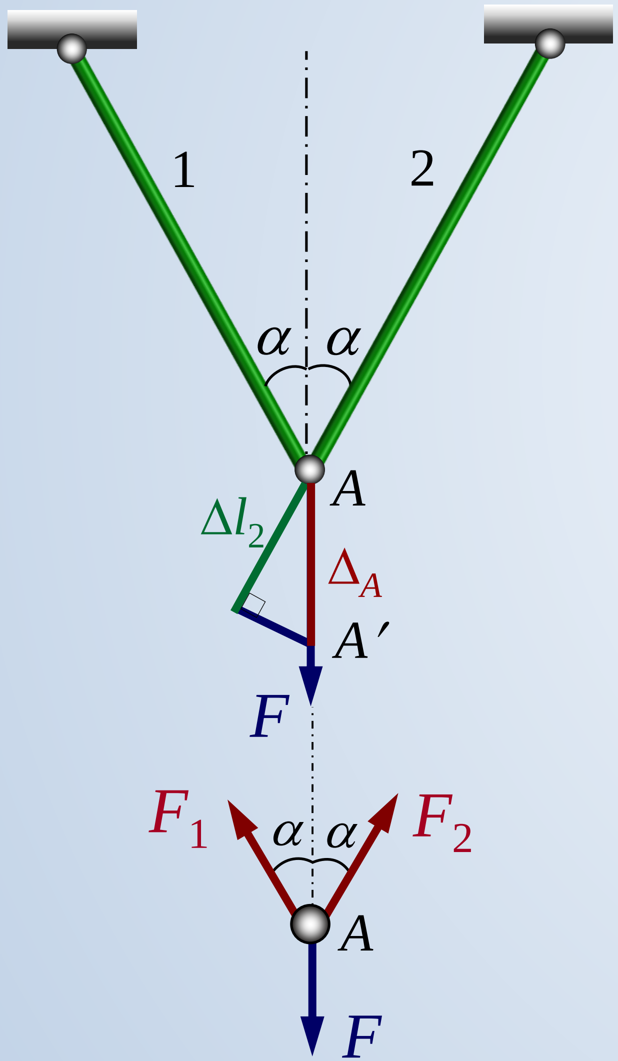
变形计算

$$\Delta l=\int_l \frac{F_N(x)\mathrm{d}x}{EA}=\int_0^l \frac{(F+\rho gAx)}{EA}\mathrm{d}x=\frac{Fl}{EA}+\frac{\rho gl^2}{2E}$$

注意内力为x 的函数

6.6 轴向拉伸（或压缩）时的变形

例9 已知: α, l, d, E, F 求: Δ_A



解: 1.求外力 $$F_1 = F_2 = \frac{F}{2\cos\alpha}$$

2.求内力 $$F_{\mathrm{N}1} = F_{\mathrm{N}2} = F_1 = F_2$$

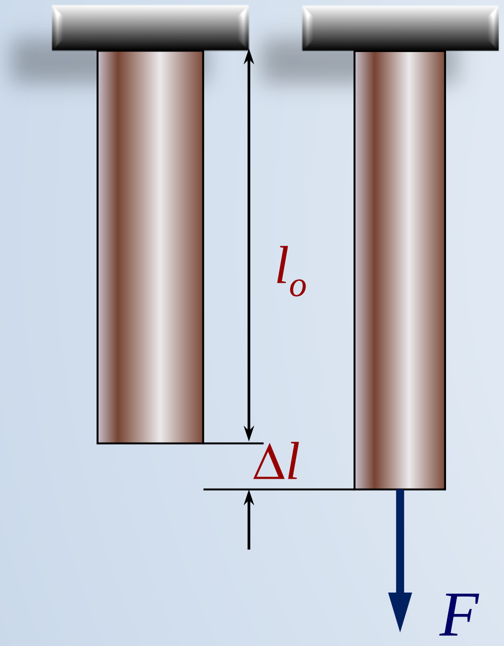
3.计算变形 $$\Delta l_1 = \Delta l_2 = \frac{F_{\mathrm{N}_1} l}{EA}$$

4.位移分析 $$\Delta_A = \frac{\Delta l_2}{\cos\alpha} = \frac{Fl}{2EA\cos^2\alpha}$$

注意: 小变形条件的应用

6.7 轴向拉伸（或压缩）时的弹性变形能

一、变形能的概念和功能原理



外力 → 杆件变形

↓　　　　↓

做功W　　变形能U

U=W

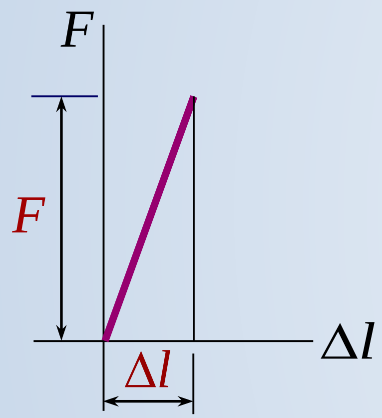
功能原理

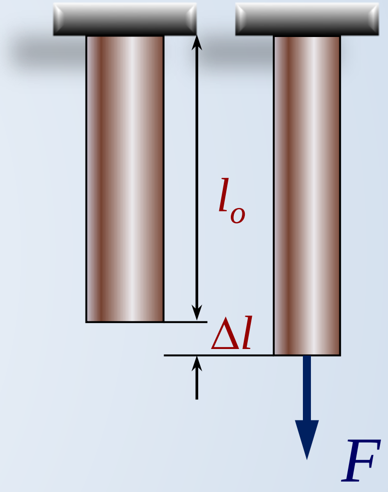
不计其他能量损失

6.7 轴向拉伸或压缩时的弹性变形能

二、轴向拉压杆的变形能及比能

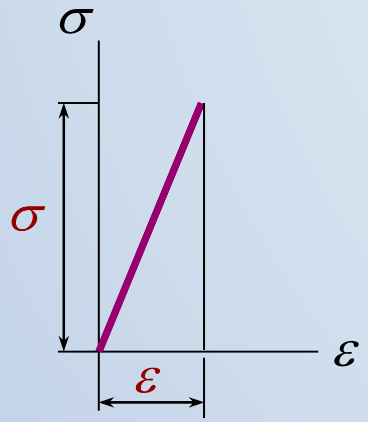
对线弹性体：外力作用点位移 $\delta = \Delta l$





$$U = W = \frac{1}{2}F\delta = \frac{1}{2}F\Delta l$$

$$\Delta l = \frac{F_N l}{EA}$$ 故 $$\boxed{U = \frac{F_N^2 l}{2EA}}$$

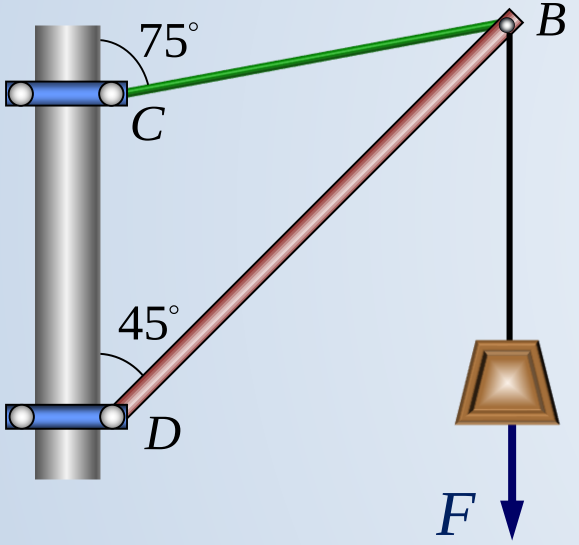


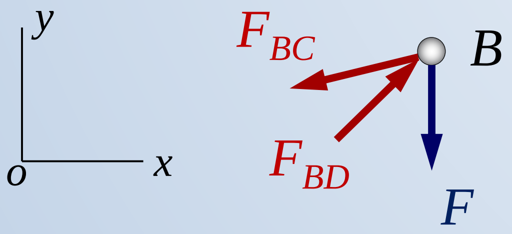
比能 $u = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon = \frac{\sigma^2}{2E}$

利用功能原理可求力的作用点位移

6.7 轴向拉伸（或压缩）时的弹性变形能

例10 杆BD外径90cm, 壁厚2.5mm, l_{BC}=3m ,E=30GPa . BC是两条钢索, 面积171.82mm^2, EI=177GPa, F=30kN. 求：δ_B





解： 1. 求外力

$$\sum F_x = 0 \qquad F_{BD}\sin 45^\circ - F_{BC}\sin 75^\circ = 0$$

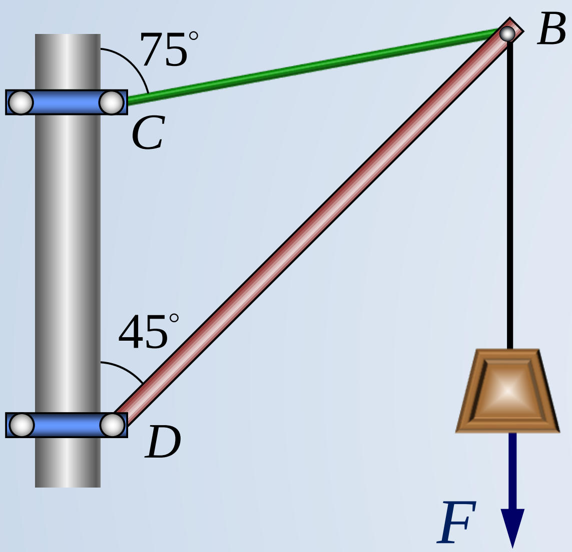
$$\sum F_y = 0 \qquad F_{BD}\cos 45^\circ - F_{BC}\cos 75^\circ - F = 0$$

解得 $F_{BC} = 1.41F \quad F_{BD} = 1.93F$

2. 求内力 $F_{N_{BC}}$，$F_{N_{BD}}$

$$F_{N_{BC}} = 1.41F \quad F_{N_{BD}} = 1.93F$$

2.7 轴向拉伸（或压缩）时的弹性变形能



3. 求 U $\quad U = U_{BC} + U_{BD}$

$$U = U_{BC} + U_{BD} = \frac{F_{N_{BC}}^{2} l_{BC}}{2E_1A_1} + \frac{F_{N_{BD}}^{2} l_{BD}}{2EA_2}$$

其中 $\quad A_1 = 344\text{mm}^2,\quad A_2 = 687\text{mm}^2$

4. 求 W，代入$W = U$

$$W = \frac{1}{2}F\delta_B \qquad \frac{1}{2}F\delta_B = \frac{F_{N_{BC}}^{2} l_{BC}}{2E_1A_1} + \frac{F_{N_{BD}}^{2} l_{BD}}{2EA_2}$$

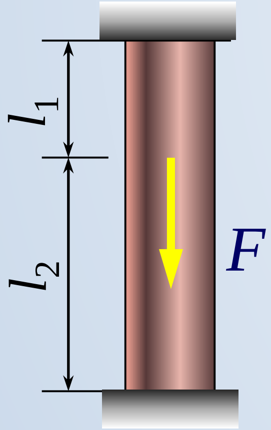
解得 $\quad \delta_B = \dfrac{1}{F}\left(\dfrac{F_{BC}^{2} l_{BC}}{E_1A_1} + \dfrac{F_{BD}^{2} l_{BD}}{EA_2}\right) = 4.48\times10^{-3}\,\text{m}$

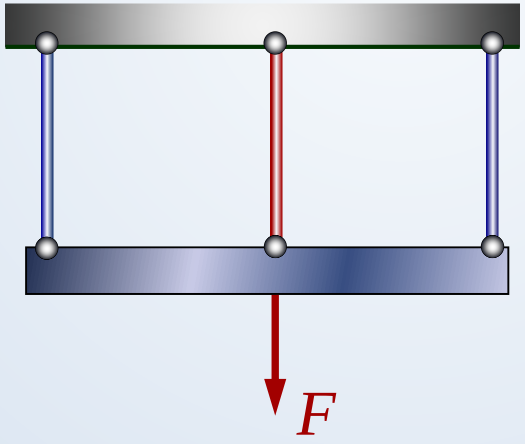
6.8 杆件拉伸、压缩的超静定问题

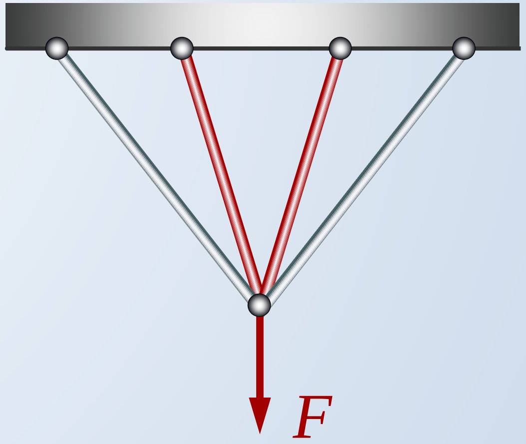
一、超静定的概念

超静定： 未知力数 > 独立平衡方程数

称超静定问题 结构称超静定结构





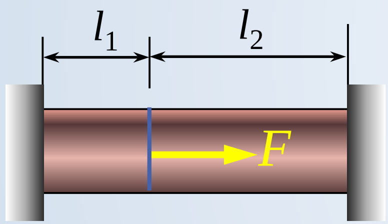


6.8 杆件拉伸、压缩的超静定问题

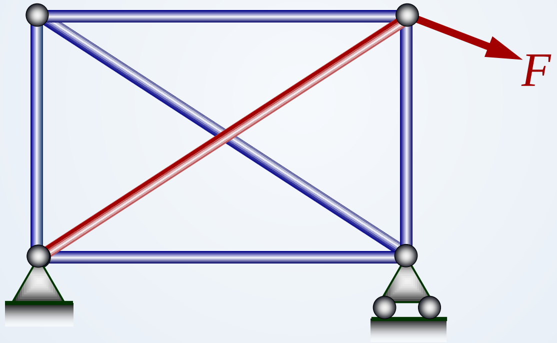
二、超静定问题的解法(步骤)

1.判定次数

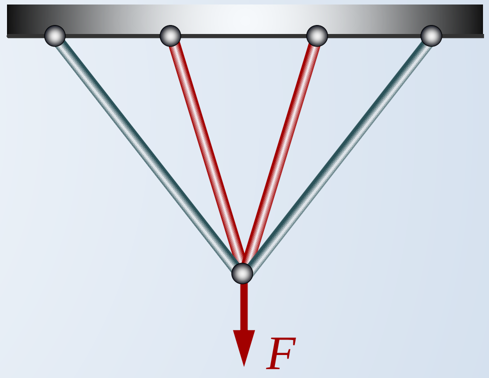
超静定次数=全部未知力数- 有效静力平衡方程数



$n=2-1=1$

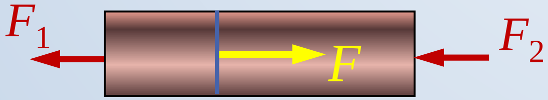


$n=3+6-2\times4=1$



$n=4-2=2$

2.列出静力平衡方程（外力—内力）

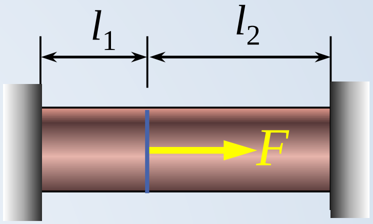


$$F_1+F_2=F$$

6.8 杆件拉伸、压缩的超静定问题

3.补充方程

补充方程数 = 超静定的次数.

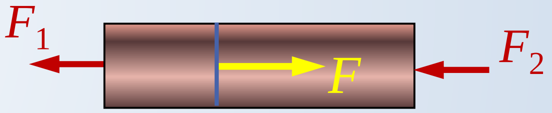


几何方程 $\Delta l_1 + \Delta l_2 = 0$

物理方程
$$\begin{cases} \Delta l_1 = \dfrac{F_1 l_1}{EA} \\ \Delta l_2 = -\dfrac{F_2 l_2}{EA} \end{cases}$$

补充方程

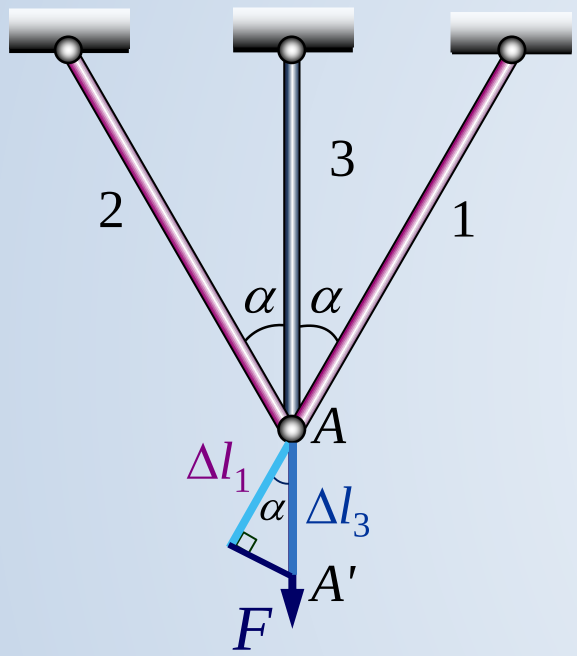
$$\frac{F_1 l_1}{EA} - \frac{F_2 l_2}{EA} = 0$$



4.联立求解平衡方程和补充方程，即可求出全部未知力。

6.8 杆件拉伸、压缩的超静定问题

例11 已知：$l_1 = l_2 \quad A_1 = A_2 \quad E_1 = E_2 \quad E_3 A_3$



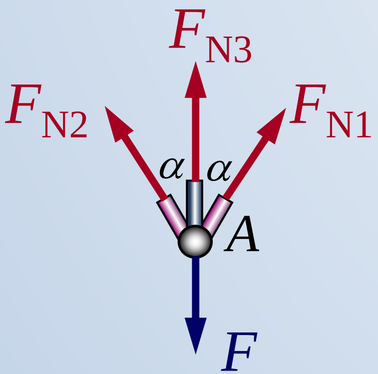
解：1.一次超静定

2.平衡方程：

$$\sum F_x = 0 \qquad F_{N_1} \sin\alpha - F_{N_2} \sin\alpha = 0$$

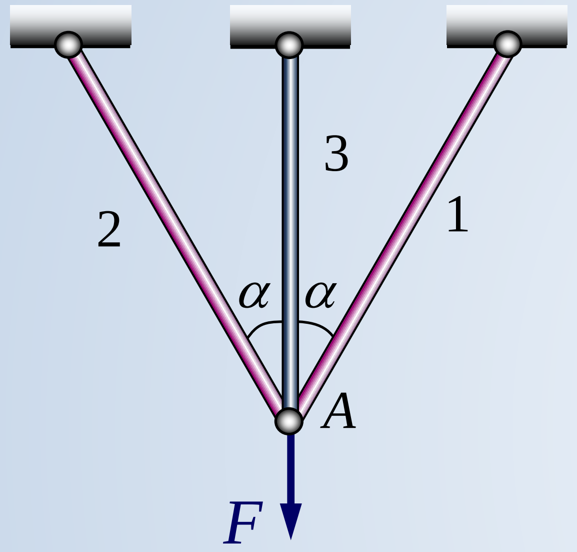
$$\sum F_y = 0 \qquad F_{N_3} + F_{N_1} \cos\alpha + F_{N_2} \cos\alpha - F = 0$$

3.几何方程：$\Delta l_3 \cos\alpha = \Delta l_1 = \Delta l_2$



4.物理方程：$\Delta l_1 = \dfrac{F_{N_1} l_1}{E_1 A_1} \quad \Delta l_2 = \dfrac{F_{N_2} l_2}{E_2 A_2} \quad \Delta l_3 = \dfrac{F_{N_3} l_3}{E_3 A_3}$

6.8 杆件拉伸、压缩的超静定问题



补充方程：
$$\frac{F_{N_3} l_3}{E_3 A_3} \cos\alpha = \frac{F_{N_1} l_1}{E_1 A_1 \cos\alpha}$$

5.联立求解 平 + 补

解得：
$$F_{N_1} = F_{N_2} = \frac{F}{2\cos\alpha + \dfrac{E_3 A_3}{E_1 A_1 \cos^2\alpha}}$$

$$F_{N_1} \sin\alpha - F_{N_2} \sin\alpha = 0$$

$$F_{N_3} + F_{N_1} \cos\alpha + F_{N_2} \cos\alpha - F = 0$$

$$F_{N_3} = \frac{F}{1 + 2\dfrac{E_1 A_1}{E_3 A_3} \cos^3\alpha}$$

6.8 杆件拉伸、压缩的超静定问题

讨论

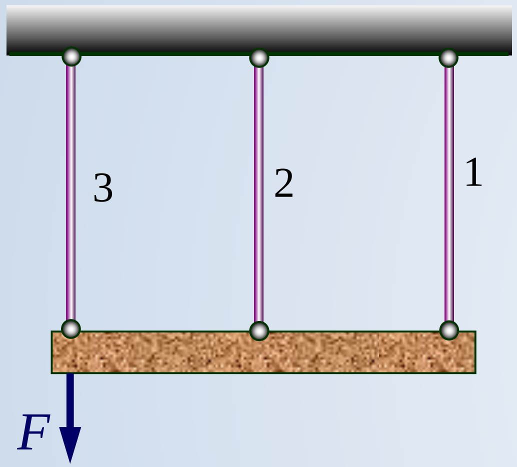
1.超静定结构的特点

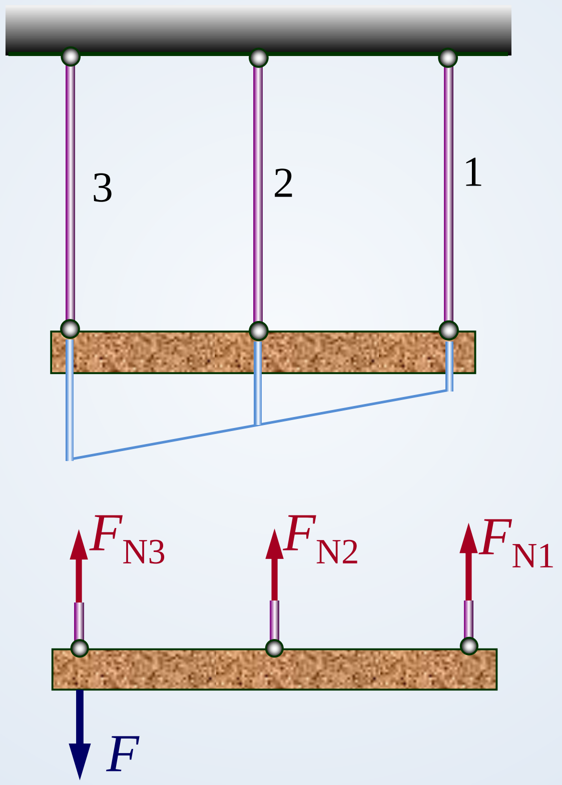
超静定结构的内力与该杆的刚度及各杆的刚度有关，超静定结构的内力与材料有关，这是与静定结构的最大差别。

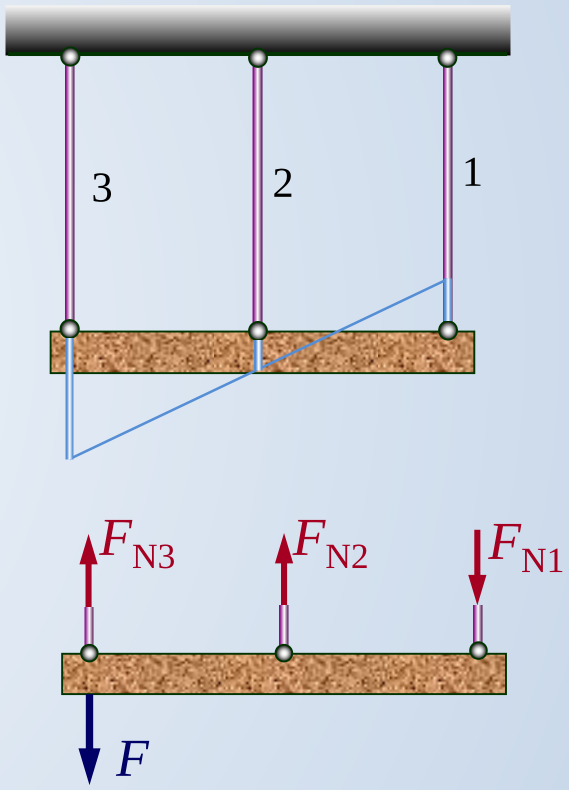
内力与自身的刚度成正比,这使力按刚度来合理分配,这也是超静定结构的最大特点—合理分配载荷。

6.8 杆件拉伸、压缩的超静定问题

2.变形分析中要画出变形图







变形的可能性

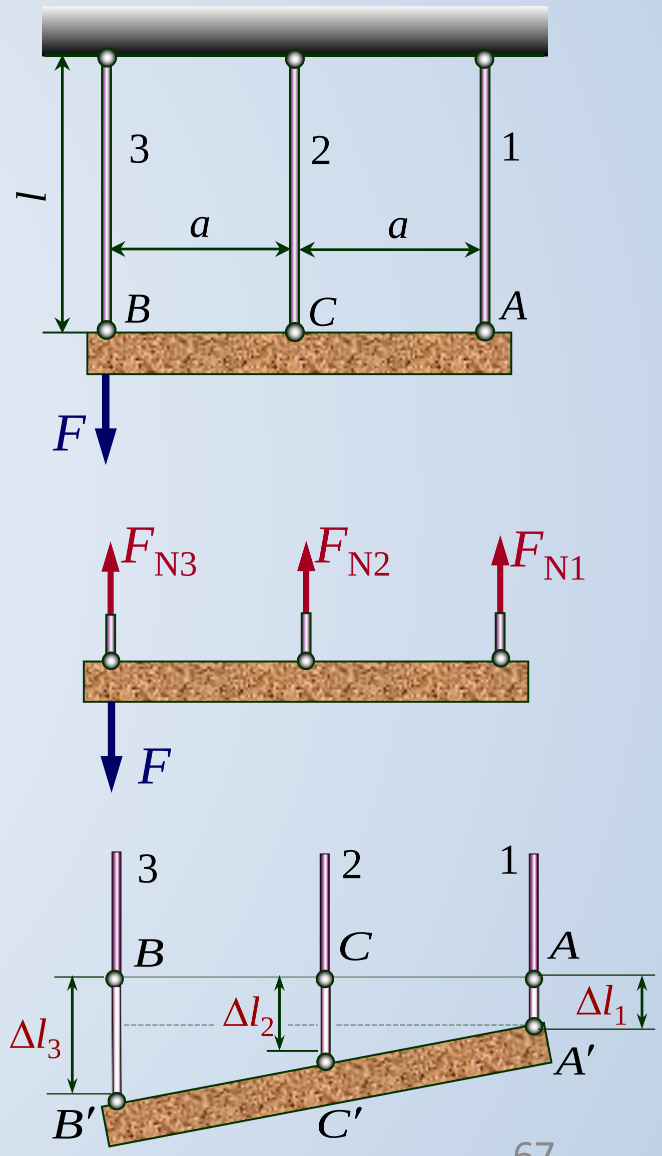
变形的一般性

变形与受力的一致性

6.8 杆件拉伸、压缩的超静定问题

例13 AB为刚体，杆1、2、3的长度l、EA均相等。

求：三杆轴力。



解：1. 结构为1次超静定；

2. 平衡方程

$$\sum F_y = 0 \quad F_{N1} + F_{N2} + F_{N3} - F = 0 \qquad \text{(a)}$$

$$\sum M_B = 0 \quad F_{N1} \cdot 2a + F_{N2} \cdot a = 0$$

3. 几何方程 $\Delta l_1 + \Delta l_3 = 2\Delta l_2$

4. 物理方程 $\Delta l_i = \dfrac{F_{Ni} l_i}{E_i A_i}$

由上两式，得

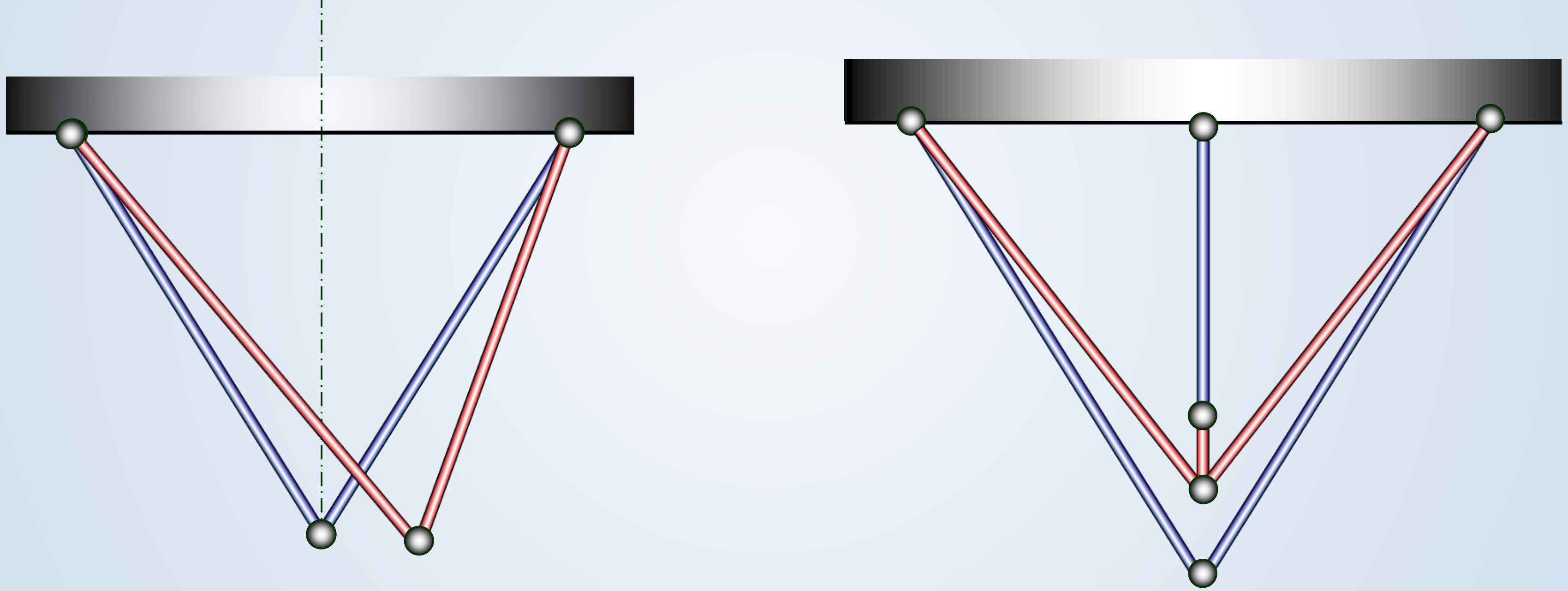
$$\frac{F_{N_1} l_1}{E_1 A_1} + \frac{F_{N_3} l_3}{E_3 A_3} = \frac{2F_{N_2} l_2}{E_2 A_2} \qquad \text{(b)}$$

解(a) (b)得 $F_{N_1} = -\dfrac{F}{6}$, $F_{N_2} = \dfrac{F}{3}$, $F_{N_3} = \dfrac{5F}{6}$

6.8 杆件拉伸、压缩的超静定问题

三、装配应力

1.什么叫装配应力？



在超静定中,由于制造误差,使结构在未受力之前就使结构中存在的应力(初应力)称为装配应力。

6.8 杆件拉伸、压缩的超静定问题

2.装配应力的计算方法

解法与解超静定相同。

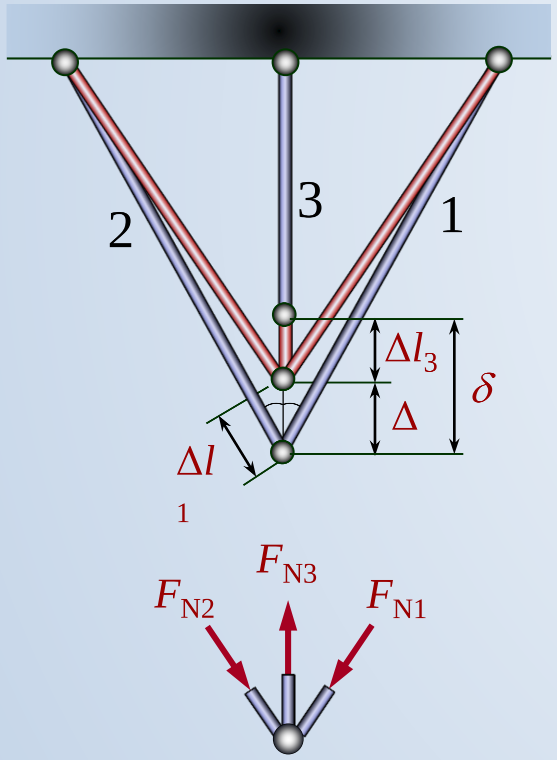
3.装配应力的利弊

利: 靠装配应力紧配合；产生与受力相反的预应力；

害: 要控制误差,避免由于装配而产生的附加应力。

6.8 杆件拉伸、压缩的超静定问题

例12 已知1, 2杆与3杆夹角α, $E_1A_1=E_2A_2$, $l_1=l_2$, 3杆刚度为E_3A_3, 设计杆长为l, δ<<l, 加工时实际尺寸短了.求：强行装配后, 各杆所产生的装配应力。



解： 1. 平衡方程

$$\sum F_x = 0 \quad F_{N_1}\sin\alpha - F_{N_2}\sin\alpha = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{N_3} - F_{N_1}\cos\alpha - F_{N_2}\cos\alpha = 0$$

2. 几何方程 $\Delta l_3 + \Delta = \Delta l_3 + \dfrac{\Delta l_1}{\cos\alpha} = \delta$

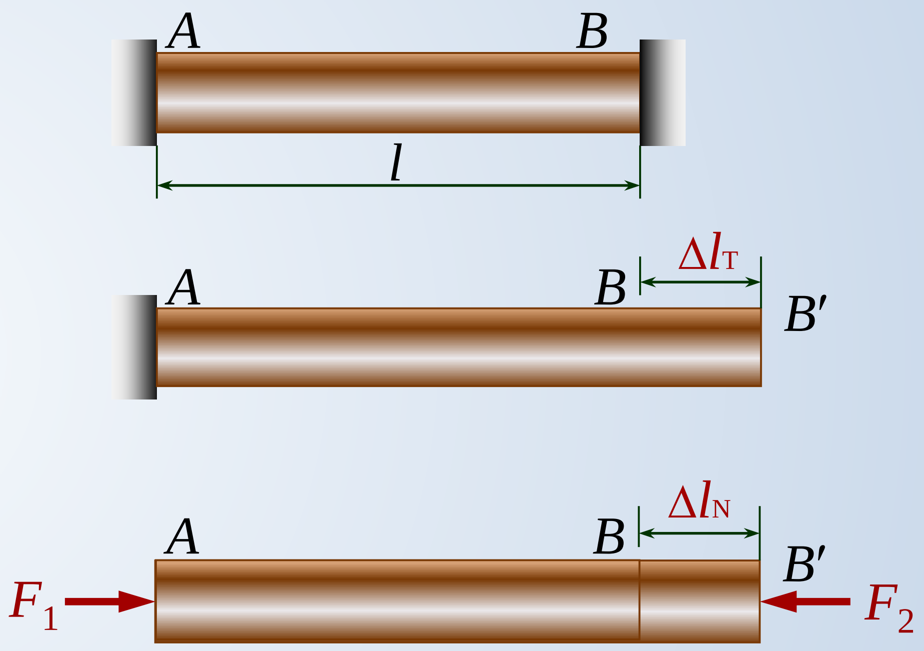
3. 物理方程 $\Delta l_i = \dfrac{F_{N_i} l_i}{E_i A_i}$

解得 $F_{N_1} = F_{N_2} = \dfrac{F_{N3}}{2\cos\alpha}$ ，$F_{N_3} = \dfrac{E_3A_3\delta}{l\left(1+\dfrac{E_3A_3}{2E_1A_1\cos^3\alpha}\right)}$

四、温度应力

1.什么叫温度应力?

由于温度的变化而引起的应力。

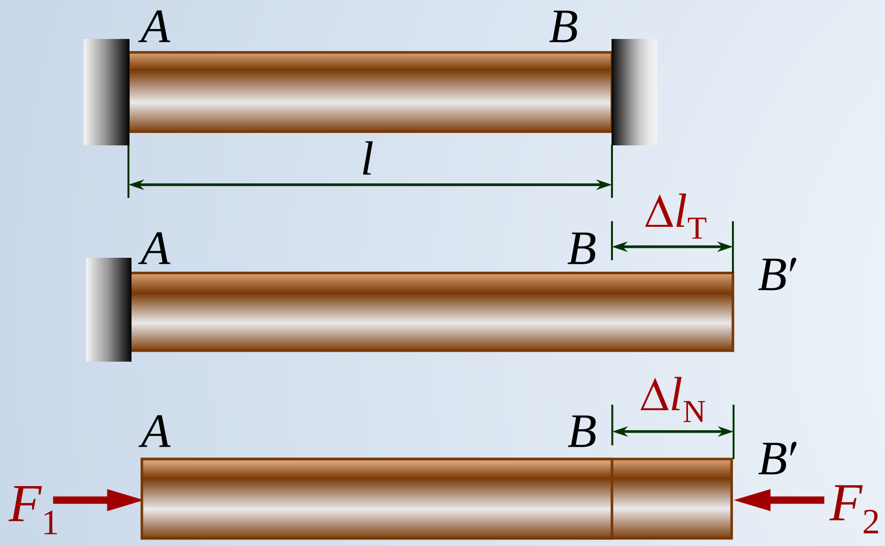


2.温度应力的解法

与解超静定问题相同。

6.8 杆件拉伸、压缩的超静定问题

例14 已知:E=200GPa, α =12.5×10^{-6}/C° 求:ΔT=40C° σ=?



解: 几何方程 $\Delta l_T = \Delta l_N$

物理方程 $\Delta l_T = \alpha l \Delta T$

$$\Delta l_N = \frac{F_N l}{EA} = \frac{Fl}{EA}$$

补充方程 $\alpha l \Delta T = \dfrac{Fl}{EA}$

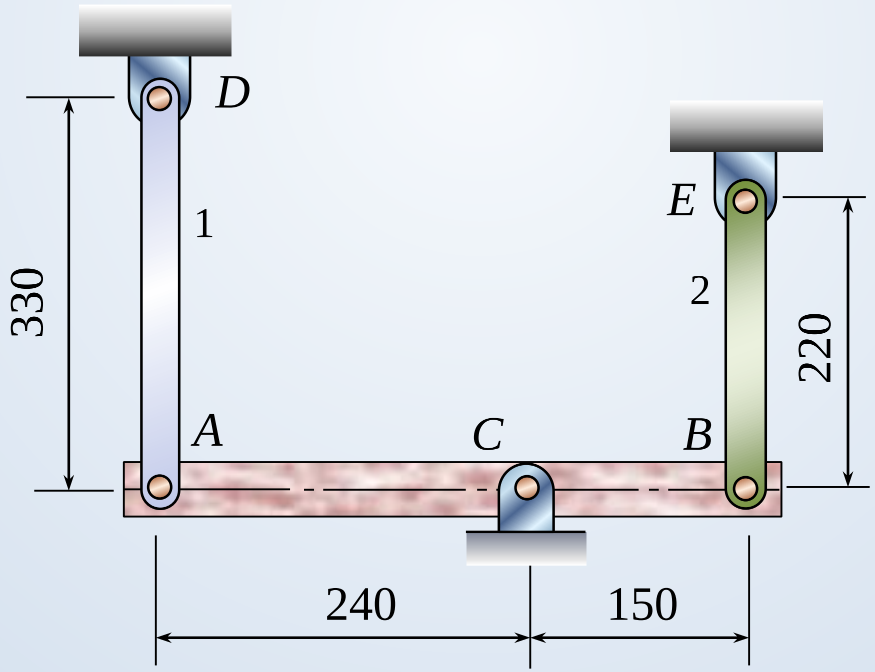
解得 $\sigma = E\alpha\Delta T$ =100MPa

40°度的温度变化产生较大应力。设计中必须考虑温度应力

6.8 杆件拉伸、压缩的超静定问题

例15 AB为刚体, 钢杆AD的$E_1 = 200\text{GPa}$, $A_1 = 100\text{mm}^2$, 线膨胀系数$\alpha_1 = 12.5\times10^{-6}/^\circ\text{C}$; 铜杆$EB$的$E_2 = 100\text{GPa}$, $A_2 = 200\text{mm}^2$, $\alpha_2 = 16.5\times10^{-6}/^\circ\text{C}$

求温度升高30°C时两杆的轴力。



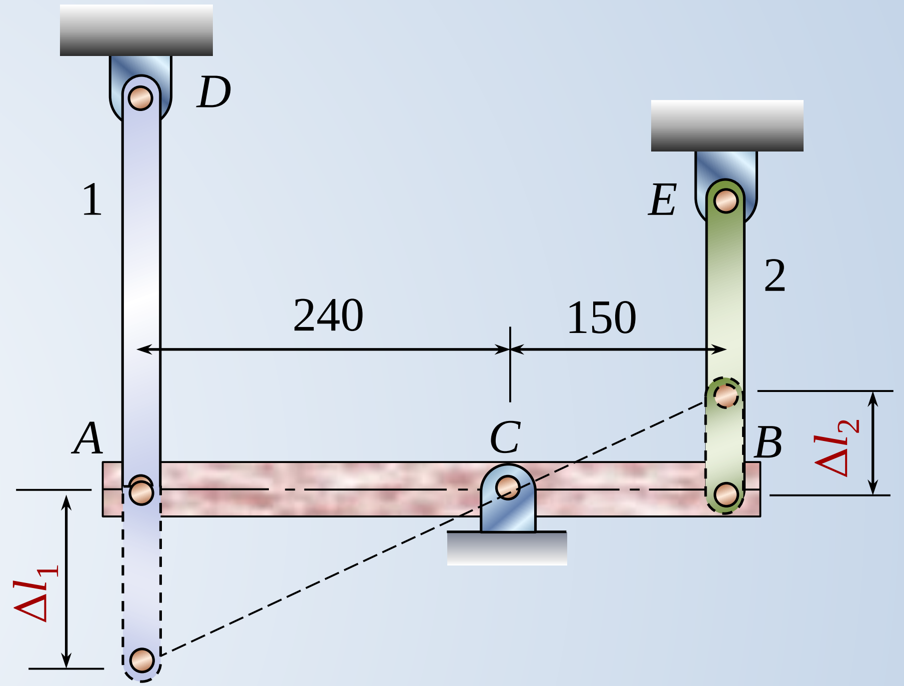
6.8 杆件拉伸、压缩的超静定问题

解: • 一次超静定

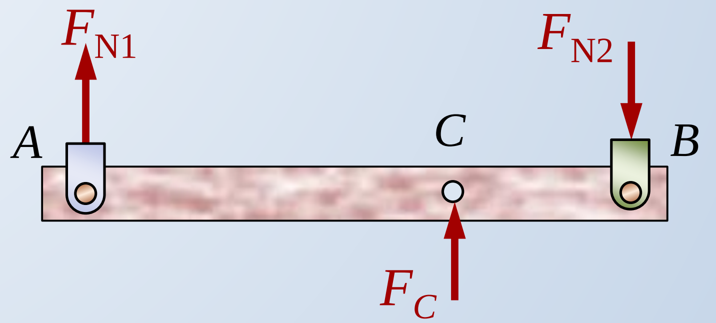
• 平衡方程 $\sum M_C = 0 \quad 240F_{N_1} + 150F_{N_2} = 0$

• 几何方程 $\dfrac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \dfrac{240}{150} = \dfrac{8}{5}$

• 物理方程 $\Delta l_1 = \dfrac{F_{N_1} l_1}{E_1 A_1} + \alpha_1 \Delta T l_1, \quad \Delta l_2 = \dfrac{F_{N_2} l_2}{E_2 A_2} - \alpha_2 \Delta T l_2$



得补充方程 $124 + 0.0165F_{N_1} = 1.6 \times (0.011F_{N_2} - 109)$

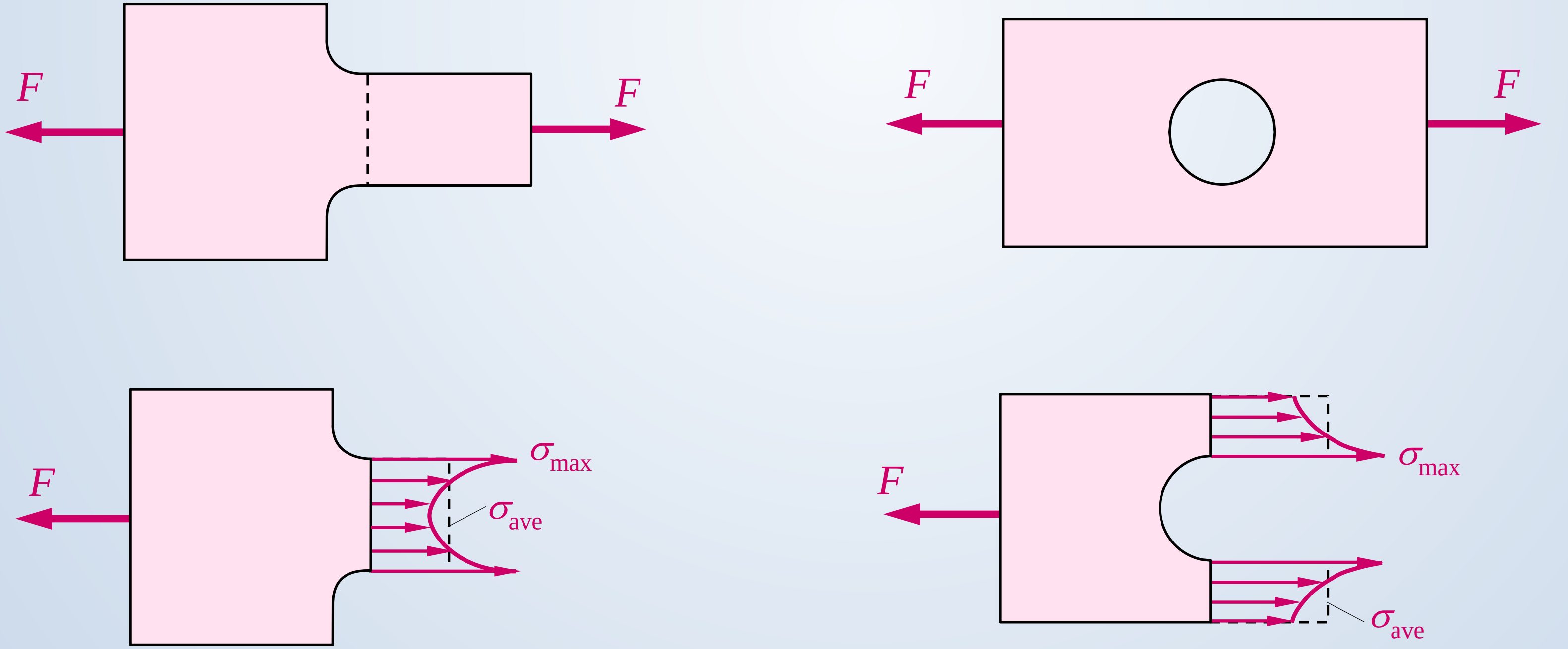


联立求解，得 $\boxed{F_{N1} = -6.68\text{kN}, \quad F_{N2} = 10.7\text{kN}}$

6.9 应力集中的概念

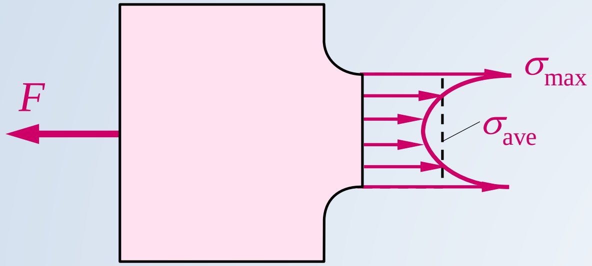
一、应力集中现象

由于构件外形、截面尺寸突然变化而引起局部应力急剧增大的现象。



6.9 应力集中的概念

二、理论应力集中系数



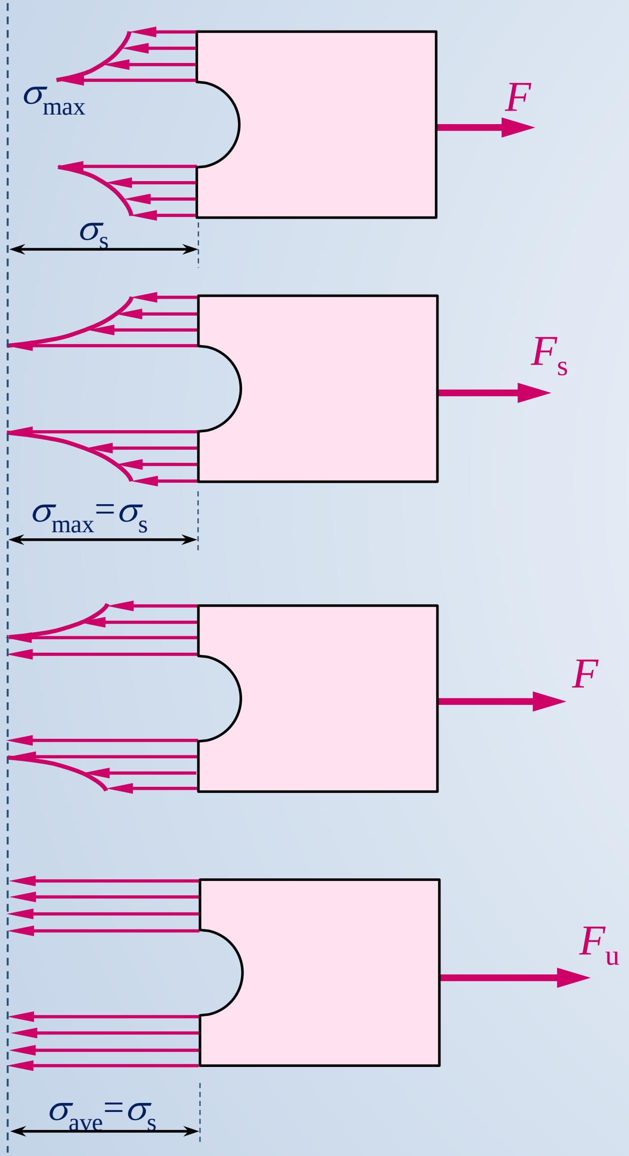
$$K = \sigma_{max} / \sigma_{ave} \qquad K > 1(\text{查表})$$

理论应力集中系数可衡量应力集中程度。

三、应力集中对构件强度的影响

应力集中是一个很复杂而且很重要的问题,其影响的程度与材料性质,载荷的形式都有密切关系。

6.9 应力集中的概念



静载荷作用下

塑性材料：有屈服,可不考虑应力集中

脆性材料：无屈服,在应力集中处首先断裂

动载荷作用下

不论什么材料都必须考虑应力集中的影响,而且往往是造成构件破坏的主要根源。

Thank you !