



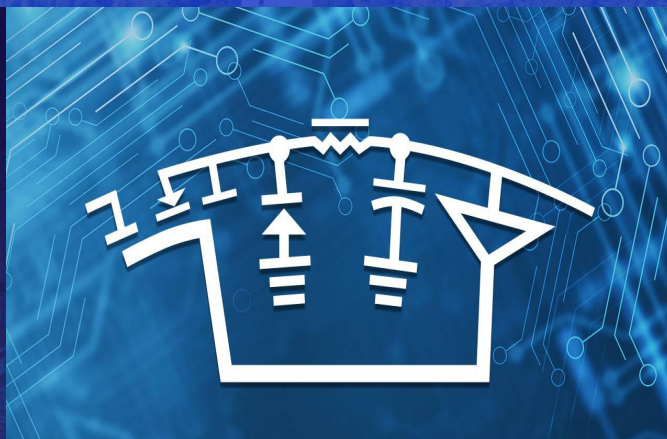
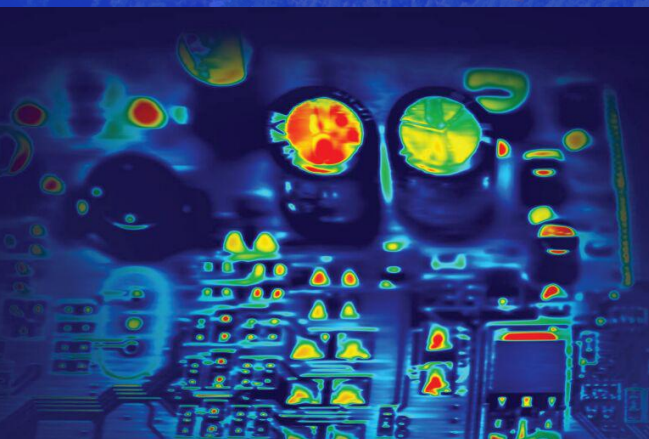
吉林大学

JILIN UNIVERSITY OF CHINA

传感器与检测原理

Principles of Sensors and Measurement

第二章 测量误差与分析



第二章 测量误差与分析



2.1 误差分析基础

2.2 系统误差处理

2.3 随机误差处理

2.4 粗大误差处理

2.1.1 误差的基本概念

测量误差的定义

由于检测系统(仪表)不可能绝对精确，测量原理的局限、测量方法的不尽完善、环境因素和外界干扰的存在以及测量过程可能会影响被测对象的原有状态等因素，使得测量结果不能准确地反映被测量的真值而存在一定的偏差，这个**偏差**就是测量误差。

2.1.1 误差的基本概念

误差 (Error) :

$$\text{误差} = \text{测量值} - \text{真值}$$

真值 (True Value) :
观测一个量时, 该量本身所具有的真实大小。

分类:

理论真值

三角形内角之和恒为 180°

约定真值

一个整圆周角为 360°

相对真值

1Kg铂铱合金原器
为1Kg的约定真值

高精度的石英钟可视为普通机械闹钟的相对真值

2.1.1 误差的基本概念

➤ 约定真值

根据国际计量委员会通过并发布的各种物理参量单位的定义，利用当今最高科学技术复现的实物单位基准，其值被公认为国际或国家基准，称为约定真值。

➤ 相对真值

如果高一级检测仪器(计量器具)的误差仅为低一级检测仪器的误差的 $1/3 \sim 1/10$ ，则可认为前者是后者的相对真值。

➤ 标称值

计量或测量器具上标注的量值。

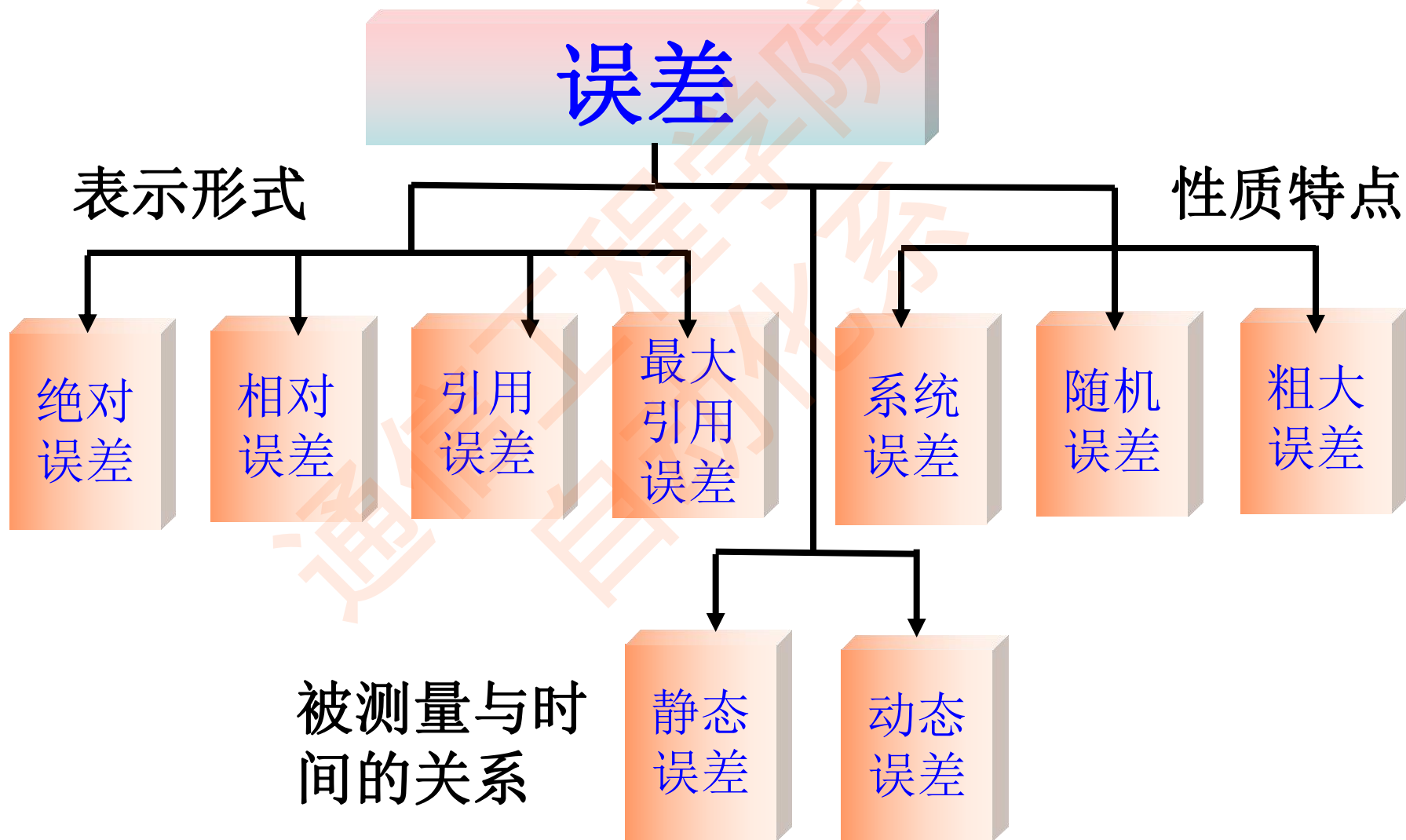
天平砝码上标注的1g

精密电阻器上标注的 10Ω

➤ 示值

检测仪器（或系统）指示或显示（被测参量）的数值叫示值，又称**测量值**或读数。

2.1.2 误差的分类



绝对误差 (Absolute Error)

绝对误差 = 测量值 - 真值

定义:

$$\Delta x = X - X_0$$

绝对误差
测量值

被测量的真值，常用约定真值或相对真值代替

- 特点:
- 1) 绝对误差说明了系统示值偏离真值的大小，其值可正可负
 - 2) 其量纲与被测量相同

相对误差 (Relative Error) :

定义:

$$\delta = \frac{\Delta x}{X_0}$$

绝对误差

被测量的真值, 可用约定真值或相对真值代替, 工程上常用平均值代替

相对误差

特点:

- 1) 相对误差有大小和符号, 一般来说相对误差值越小, 其测量精度就越高
- 2) 无量纲, 一般用**百分数**来表示

引用误差 (Fiducial Error of a Measuring Instrument)

定义:

$$\gamma = \frac{\Delta x}{L}$$

绝对误差

标称范围 (或量程) 上限

引用误差

特点:

- 1) 即使是同一检测系统, 其测量范围内的不同示值处的引用误差也可能不同
- 2) 有大小和符号, 无量纲, 一般用**百分数**来表示

最大引用误差（或满度最大引用误差）

定义：

$$\gamma_{\max} = \frac{|\Delta x_{\max}|}{L}$$

所有测量值中最大绝对误差的绝对值

标称范围（或量程）上限

最大引用误差

特点：

- 1) 最大引用误差是检测系统的**基本误差**，是检测系统的**最主要质量指标**，能很好地表征检测系统的测量精确度
- 2) 无量纲，一般用**百分数**来表示

按误差性质分类

➤ 系统误差

恒差系统误差：多次重复测量同一被测参量时，其测量误差的大小和符号保持不变。

变差系统误差：误差按某一确定的规律变化。

系统误差产生的原因

① 测量装置方面的因素

测量装置本身性能不完善或安装、布置、调整不当。

② 环境方面的因素

测量过程中温度、湿度、气压、电磁干扰等环境条件发生变化。

③ 测量方法的因素

测量方法不完善、或测量所依据的理论本身不完善。

④ 测量人员的因素

测量人员视读方式不当等。

系统误差特征：测量误差出现的有规律性和产生原因的可知性。

按误差性质分类

➤ 随机误差

在相同条件下多次重复测量同一被测参量时，测量误差的大小与符号均无规律变化，这类误差称为随机误差。

随机误差产生的原因

① 测量装置方面的因素

某些零部件变形及性能不稳定，电路随机噪声等。

② 环境方面的因素

温度、湿度、气压变化，光照强度、电磁波干扰，电网的畸变与波动等

随机误差特征：1) 难以预测
2) 服从某种统计规律

通常用精密度表征随机误差的大小。精密度越低，随机误差越大；精密度越高，随机误差越小。

按误差性质分类

➤粗大误差

明显超出规定条件下预期的误差。

粗大误差产生的原因

① 测量人员的主观因素

由于测量者工作责任感不强、工作过于疲劳、缺乏经验操作不当等造成的错误读数和记录。

② 客观外界条件的因素

测量条件意外的改变（如机械冲击、外界振动等）。

粗大误差特征：误差数值大，明显歪曲了测量结果。

正常的测量数据应是剔除了粗大误差的数据，通常研究的测量结果误差中仅包含系统和随机两类误差。

按被测参量与时间的关系分类

➤ 静态误差

被测参量不随时间变化时所测得的误差称为静态误差。

➤ 动态误差

被参测量随时间变化过程中进行测量时所产生的附加误差称为动态误差。

2.1.3检测仪器的精度等级与容许误差

1 精度等级

反应测量结果与真值接近程度的量，称为精度。

取**最大引用误差**百分数的分子作为检测仪器（系统）精度等级的标志，精度等级用符号 **G** 表示。

0.1、0.2、0.5、1.0、1.5、2.5、5.0 七个等级，是我国工业检测仪器（系统）常用精度等级。

检测仪器（系统）的精度等级按**选大不选小**的原则套用标准化精度等级值。

2.1.3检测仪器的精度等级与容许误差

例：量程为0 ~ 1000 V的数字电压表，如果其整个量程中最大绝对误差为1.05V，则有

$$\gamma_{\max} = \frac{|\Delta x_{\max}|}{L} * 100\% = \frac{1.05}{1000} * 100\% = 0.105\%$$

但按**选大不选小**的原则该数字电压表的精度等级G应为0.2级。

仪表精度等级的数字愈小，仪表的精度愈高。如0.5级的仪表精度优于1.0级仪表，而劣于0.2级仪表。

精度等级高低仅说明该检测仪表的引用误差最大值的大小，它决不意味着该仪表某次实际测量中出现的具体误差值是多少。

2.1.3 检测仪器的精度等级与容许误差

2 容许误差

容许误差（工作误差）是指检测仪器在规定使用条件下可能产生的**最大误差范围**。

检测仪器的准确度、稳定度等指标都可用容许误差来表征。

例：被测电压实际值约为21.7 V，现有四种电压表：1.5级、量程为0 ~ 30 V的A表；1.5级、量程为0 ~ 50 V的B表；1.0级、量程为0 ~ 50 V的C表；0.2级、量程为0 ~ 360 V的D表。请问选用哪种规格的电压表进行测量所产生的测量误差较小？

$$\gamma_{\max} = \frac{|\Delta x_{\max}|}{L}$$

2.1.3 检测仪器的精度等级与容许误差

A表: $|\Delta x_{\max}| = |\gamma_{\max}| * L = 1.5\% * 30 = 0.45 \text{ V}$

B表: $|\Delta x_{\max}| = |\gamma_{\max}| * L = 1.5\% * 50 = 0.75 \text{ V}$

C表: $|\Delta x_{\max}| = |\gamma_{\max}| * L = 1.0\% * 50 = 0.50 \text{ V}$

D表: $|\Delta x_{\max}| = |\gamma_{\max}| * L = 0.2\% * 360 = 0.72 \text{ V}$

四者比较，通常选用A表进行测量所产生的测量误差较小。

检测仪表产生的测量误差不仅与所选仪表**精度等级 G 有关**，
而且与所选仪表的**量程有关**。

通常量程 L 和测量值 X 相差愈小，测量准确度较高。所以，
在选择仪表时，**应选择测量值尽可能接近的仪表量程**。

第二章 测量误差与分析



2.1 误差分析基础

2.2 系统误差处理

2.3 随机误差处理

2.4 粗大误差处理

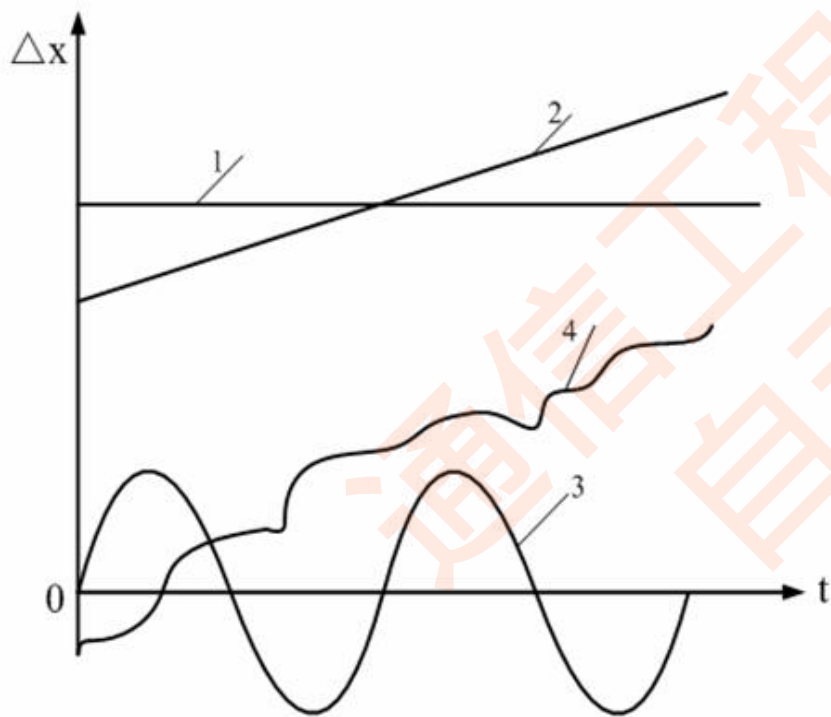
2.2 系统误差处理

在一般工程测量中，系统误差与随机误差总是**同时**存在的，但系统误差往往**远大于**随机误差。

为保证和提高测量精度，需要研究发现系统误差，进而设法校正和消除系统误差的原理、方法与措施。

系统误差的特点是其**出现的有规律性**，系统误差的产生原因一般可通过实验和分析研究确定与消除。

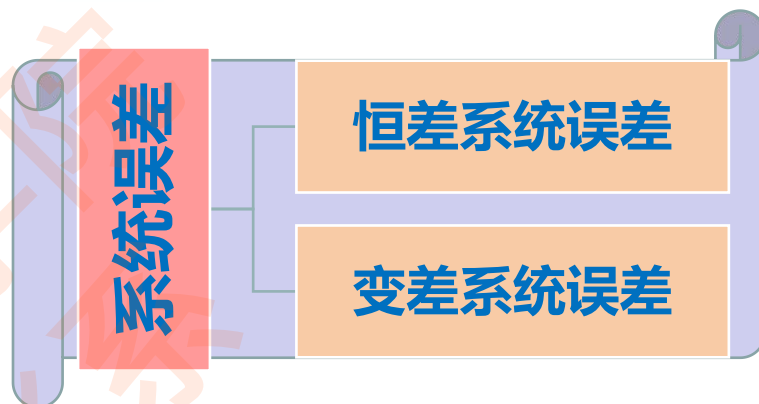
2.2.1 系统误差的特点及常见变化规律



系统误差随测量时间变化的几种常见关系曲线

曲线1表示测量误差的大小与方向不随时间变化的**恒差型系统误差**；曲线2为测量误差随时间以某种斜率呈线性变化的**线性变差型系统误差**；曲线3表示测量误差随时间作某种周期性变化的**周期变差型系统误差**；曲线4为上述三种关系曲线的某种组合形态，呈现复杂规律变化的**复杂变差型系统误差**。

2.2.2 系统误差的判别和确定



1 恒差系统误差的确定

➤ 实验比对

一种常用的恒差型系统误差发现和确定方法。可分为：

- 1) **标准器件法**（简称标准件法）：采用精密器件作为标准
- 2) **标准仪器法**（简称标准表法）：采用精密仪器作为标准

2.2.2 系统误差的判别和确定

➤ 原理分析与理论计算

此类误差的经常表现为在传感器转换过程中**存在零位**、传感器输出信号与被测参量间**存在非线性**、传感器**内阻大**而信号调理电路**输入阻抗不够高**，处理信号时采用的是**略去高次项**的近似经验公式或采用**经简化的电路模型**等。

针对性的研究和计算、评估实际值与理想值之间的恒定误差，然后设法校正、补偿和消除。

2.2.2 系统误差的判别和确定

➤ 改变外界测量条件

有些检测系统在工作环境或被测参量数值变化的情况下，测量系统误差也会随之变化。

对这类检测系统需要通过逐个改变外界测量条件，以发现和确定仪器在不同工况条件下的系统误差。

2.2.2 系统误差的判别和确定

2 变差系统误差的确定

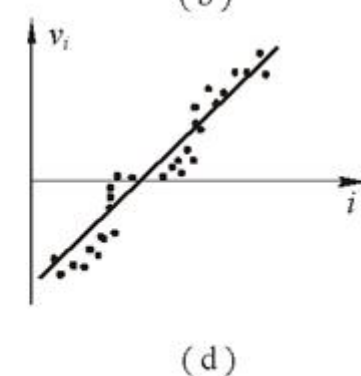
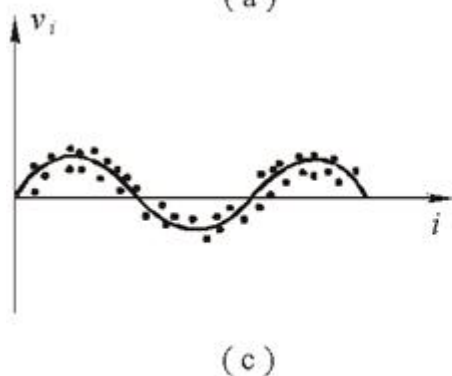
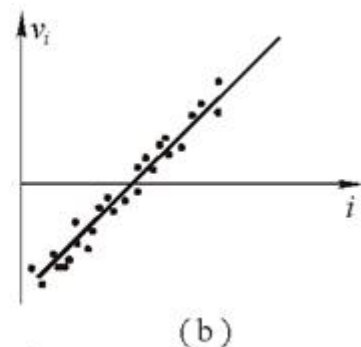
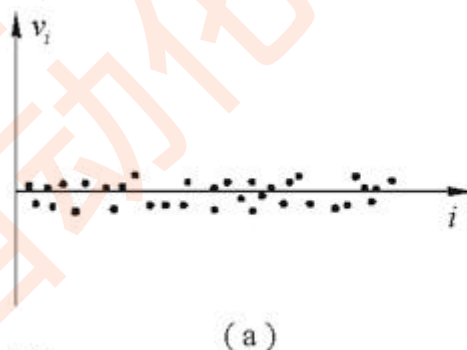
➤ 残差观察法

残差（剩余偏差）：测量数据及各测量值与全部测量数据算术平均值之差。

直接由残差数据或残差曲线图形来判断有无系统误差。

适于发现有规律变化的系统误差。

使用前提：系统误差比随机误差大。



2.2.2 系统误差的判别和确定

➤马利科夫准则（判断线性系统误差）

将同一条件下重复测量得到的一组测量值 X_1 、 X_2 、...、 X_i 、...、 X_n 按序排列，并求出相应的残差 ν_1 、 ν_2 、...、 ν_i 、...、 ν_n ，

$$\nu_i = X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = X_i - \bar{X}$$

将残差序列以中间值 ν_k 为界分为前后两组，分别求和，然后把两组残差和相减，即

$$D = \sum_{i=1}^k \nu_i - \sum_{i=s}^n \nu_i$$

当 n 为偶数时，取 $k=n/2$ 、 $s=n/2+1$ ；当 n 为奇数时，取 $k=(n+1)/2=s$ 。

若 D 近似等于零，表明不含线性系统误差；若 D 明显不为零（且大于 ν_i ），则表明存在线性系统误差。

2.2.2 系统误差的判别和确定

➤ 阿贝—赫梅特准则（判断周期性误差）

将同一条件下重复测量得到的一组测量值 X_1 、 X_2 、...、 X_n 按序排列，求出残差 ν_1 、 ν_2 、...、 ν_n ，然后计算

$$A = \left| \sum_{i=1}^{n-1} \nu_i \nu_{i+1} \right| = \left| \nu_1 \nu_2 + \nu_2 \nu_3 + \dots + \nu_{n-1} \nu_n \right|$$

如果 $A > \sigma^2 \sqrt{n-1}$ 成立（ σ^2 为本测量数据序列的方差），则表明存在周期性系统误差。

2.2.3 减小和消除系统误差的方法

1 针对产生系统误差的主要原因采取对应措施

对测量过程中可能产生的系统误差的环节作仔细分析，寻找产生系统误差的主要原因，并采取相应针对性措施，是减小和消除系统误差最基本和最常用的方法。

2.2.3 减小和消除系统误差的方法

2 采用修正方法减小恒差系统误差

具体做法：

- 测量前先通过标准器件法或标准仪器法比对，得到该检测仪器系统误差的修正值，制成系统误差修正表；
- 用该检测仪器进行具体测量时将测量值与修正值相加，从而大大减小或基本消除该检测仪器原先存在的系统误差。

2.2.3 减小和消除系统误差的方法

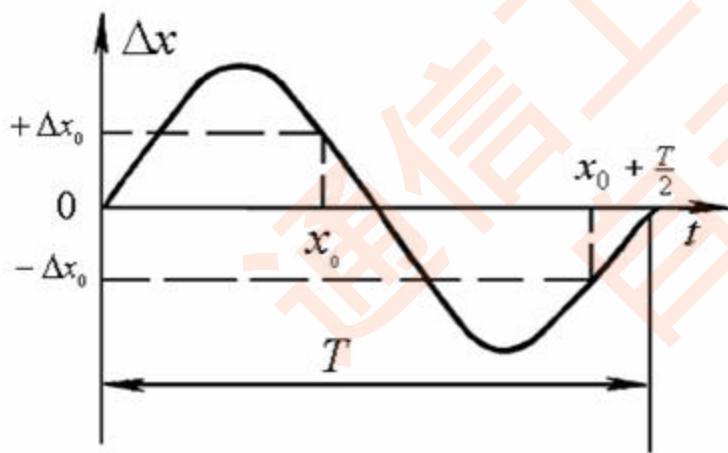
3.采用交叉读数法减小线性系统误差

交叉读数法（对称测量法）：在时间上将测量值顺序等间隔对称安排，取各对称点两次交叉读入测量值，然后取其算术平均值作为测量值，即可有效地减小测量的线性系统误差。

2.2.3 减小和消除系统误差的方法

4. 采用半周期法减小周期性系统误差

对周期性系统误差，可以相隔半个周期进行一次测量。



半周期读数示意图

取两次读数的算术平均值，即可有效地减小周期性系统误差。因为相差半周期的两次测量，其误差在理论上具有大小相等、符号相反的特征，所以这种方法在理论上能很好地减小和消除周期性系统误差。

第二章 测量误差与分析



2.1 误差分析基础

2.2 系统误差处理

2.3 随机误差处理

2.4 粗大误差处理

2.3 随机误差处理

随机误差按照不可预定的方式变化，但在一定条件下，它的**概率分布通常服从一定的统计规律**。

在排除系统误差的前提下，可以用数理统计的方法对随机误差进行处理。

2.3.1 随机误差的分布规律

1 正态分布

大量的试验结果表明，随机误差的分布规律多数服从正态分布。

连续型正态分布随机变量 x 的概率密度函数表达式为：

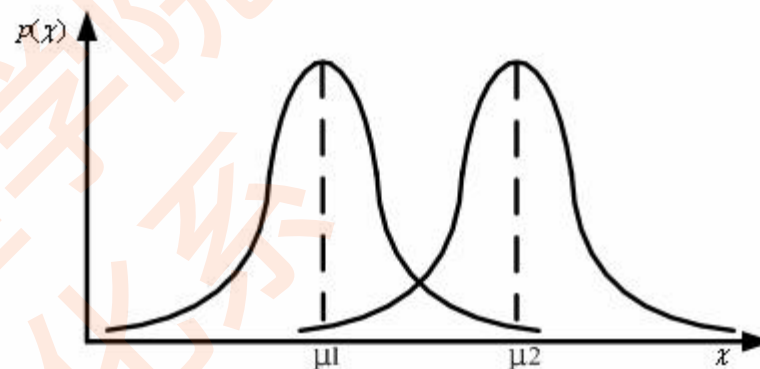
$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

随机变量的数学期望

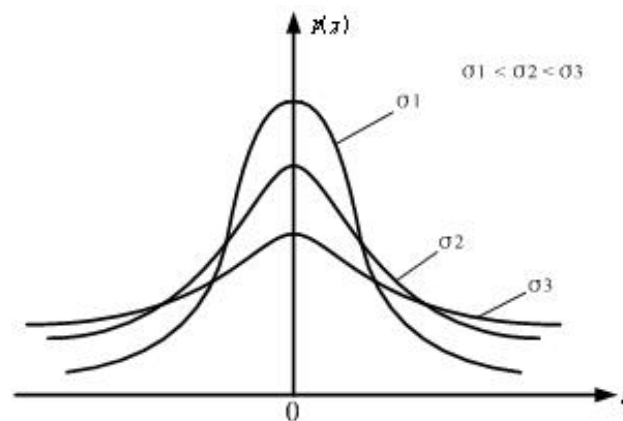
随机变量的均方根差或标准偏差 (简称标准差)

2.3.1 随机误差的分布规律

μ 和 σ 是决定正态分布曲线的特征参数。 μ 是正态分布的位置特征参数； σ 为正态分布的离散特征参数。 μ 值改变， σ 值保持不变，正态分布曲线的形状保持不变而位置根据 μ 值改变而沿横坐标移动；当 μ 值不变， σ 值改变，则正态分布曲线的位置不变，但形状改变。 σ 越小，曲线越尖锐，测量数据离散性越小，测量数据精度越高。



μ 对正态分布的影响示意图



σ 对正态分布的影响示意图

2.3.1 随机误差的分布规律

正态分布随机误差的统计特性：

有界性

随机误差的幅度均不超过一定的界限；

单峰性

幅度小的随机误差比幅度大的随机误差出现的概率大；

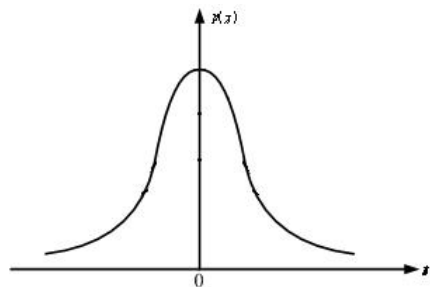
对称性

等值而符号相反的随机误差出现的概率接近相等；

抵偿性

重复测量次数 n 趋于无穷时，随机误差的代数和为零。

重复测量次数足够大时，算数平均值就是真值较理想的替代值



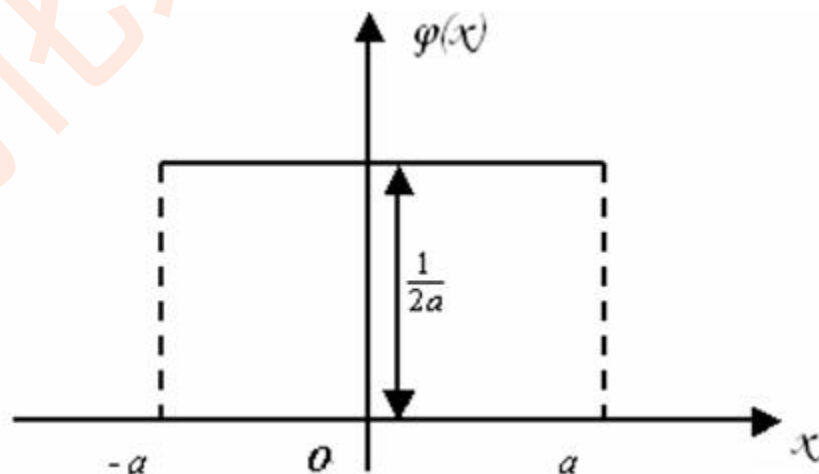
2.3.1 随机误差的分布规律

2 均匀分布

均匀分布的特点是：在某一区域内，随机误差出现的概率处处相等，而在该区域外随机误差出现的概率为零。均匀分布的概率密度函数 $\varphi(x)$ 为

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & (-a \leq x \leq a) \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

式中， a 为随机误差的极限值。



2.3.2 随机误差的评价指标

1 算术平均值

如果能够对某一量进行无限多次测量，就可得到不受随机误差影响的测量值。然而在实际工程测量中，测量次数 n 不可能无穷大，而测量真值 X_0 通常也不可能已知。根据对已消除系统误差的有限次等精度测量数据样本 X_1 、 X_2 、...、 X_i 、...、 X_n ，求其算术平均值，即

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

对于有限次测量，只能把算术平均值近似地作为被测量的真值。

2.3.2 随机误差的评价指标

2 均方根误差

由于均方根误差 σ 的值反映了随机误差的散布程度，因此 σ 可用来作为评定随机误差的尺度。

样本均方根误差常使用贝塞尔（Bessel）公式来估计

$$\hat{\sigma}(X) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n v_i^2}{n-1}}$$

2.3.2 随机误差的评价指标

算术平均值的均方根误差：

$$\hat{\sigma}(\bar{X}) = \frac{1}{\sqrt{n}} \hat{\sigma}(X)$$

算术平均值的方差仅为样本方差的 $1/n$ ，算术平均值的离散度比测量数据的离散度要小。因此，在有限次等精度重复测量中，用算术平均值估计被测量值要比用测量数据序列中任何一个都更为合理和可靠。

- n 较小时，增加测量次数 n ，可减小测量结果的标准差，提高测量精度。
- 增加测量次数 n 使数据采集和处理的工作量增加，且因测量时间不断增大而使“等精度”的测量条件无法保持，由此产生新的误差。
- 测量次数 n 一般取4~24次。

2.3.2 随机误差的评价指标

3 测量结果的置信度

置信度表征真值能以多大的概率落在某一数值区间内。该数值区间称为**置信区间**，其界限称为**置信限**。该置信区间包含真值的概率称为**置信概率**（置信水平）。

置信限和置信概率综合体现测量结果的可靠程度，称为测量结果的**置信度**。

2.3.2 随机误差的评价指标

对于正态分布，由于测量值在某一区间出现的概率与标准差 σ 的大小相关，故一般把测量值 X_i 与真值 X_0 的偏差 Δx 的置信区间取为 σ 的若干倍，即

$$V x = \pm k \sigma$$

式中 k 为置信系数。

令 $\delta = x - \mu$ ，则测量偏差落在某区间的概率表达式为：

$$P(|\delta| < k\sigma) = \int_{-k\sigma}^{+k\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-\delta^2}{2\sigma^2}} d\delta = \int_{-k\sigma}^{+k\sigma} p(\delta) d\delta$$

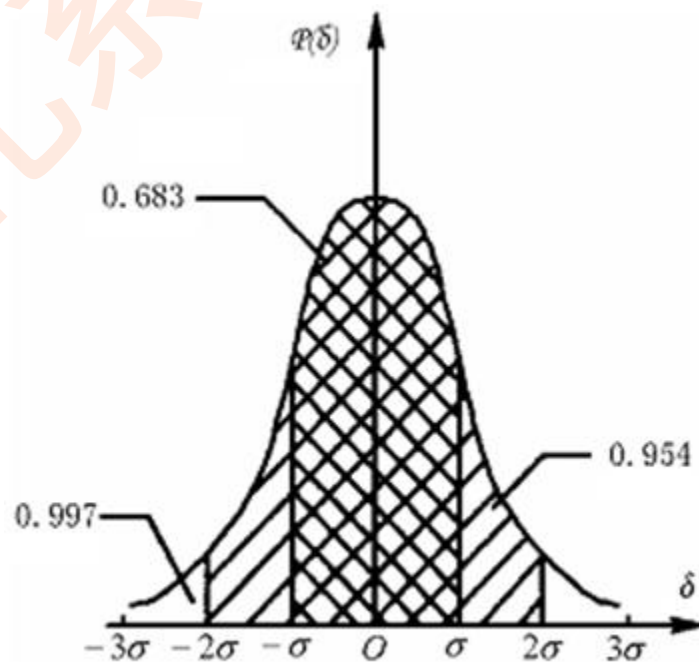
2.3.2 随机误差的评价指标

对于正态分布，置信系数 k 值确定后，置信概率便可确定。当 k 分别选取1、2、3时，则测量误差 Δx 落入正态分布置信区间 $\pm\sigma$ 、 $\pm 2\sigma$ 、 $\pm 3\sigma$ 的概率值分别为：

$$P\{|\delta| \leq \sigma\} = \int_{-\sigma}^{+\sigma} p(\delta) d\delta = 0.6827$$

$$P\{|\delta| \leq 2\sigma\} = \int_{-2\sigma}^{+2\sigma} p(\delta) d\delta = 0.9545$$

$$P\{|\delta| \leq 3\sigma\} = \int_{-3\sigma}^{+3\sigma} p(\delta) d\delta = 0.9973$$



不同置信区间的概率分布示意图

第二章 测量误差与分析

2.1 误差分析基础

2.2 系统误差处理

2.3 随机误差处理

2.4 粗大误差处理

2.4 粗大误差处理

粗大误差的判别

1. 定性分析

分别对测量环境、测量条件、测量设备、测量步骤进行分析。这种判断无严格规则，应细致和谨慎的实施。

2. 定量判断

以统计学原理和误差理论等相关知识为依据，对测量数据中的异常值的“异常程度”进行定量计算，以确定该异常值是否为应剔除的坏值。

2.4 粗大误差处理

1 拉伊达(莱因达、 3σ)准则

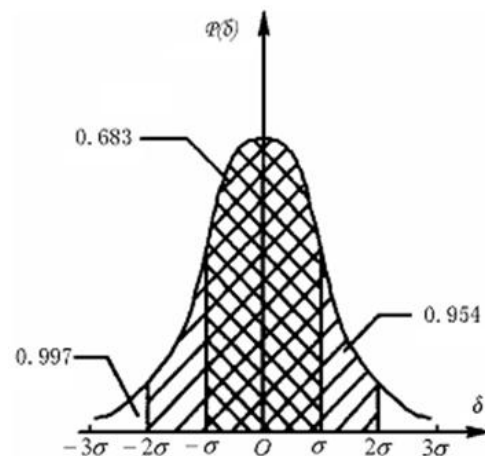
对于正态分布，其某次测量的误差大于 3σ 的可能性仅为0.27%。因此，把测量误差大于标准差 σ （或其估计值）的**3倍**测量值作为测量坏值予以舍弃。

$$|\Delta X_k| = |X_k - X_0| > 3\sigma$$

工程应用的拉伊达准则表达式为

$$|\Delta X_k| = |X_k - \bar{X}| > 3\hat{\sigma} = K_L$$

式中 K_L 为置信系数。



2.4 粗大误差处理

拉伊达准则是以测量次数充分大为前提，但通常测量次数比较少，因此该准则只是一个近视的准则。

- 按准则剔除坏值后，还要对剩下的测量数据重新计算算数平均值和标准差，然后重新判别是否还存在粗大误差，若存在，剔除相应的坏值，再重新计算，直到准则判别无粗大误差为止。
- 拉伊达准则只适用于测量次数较多 ($n > 25$)、测量误差分布接近正态分布的情况使用。
- 当等精度测量次数较少 ($n \leq 20$) 时，采用基于正态分布的拉伊达准则，其可靠性将变差，且容易造成鉴别值界限太宽而无法发现坏值。
- 当测量次数 $n < 10$ 时，拉伊达准则将彻底失效，不能判别任何粗大误差。

2.4 粗大误差处理

2 格拉布斯(Grubbs)准则

格拉布斯准则是以小样本测量数据，以t分布为基础用数理统计方法推导得出的。在小样本测量数据中满足表达式

$$|\Delta X_k| = |X_k - \bar{X}| > K_G(n, a) \hat{\sigma}(x)$$

式中， X_k 为被疑为坏值的异常测量值， $K_G(n, a)$ 为格拉布斯准则的鉴别值。

2.4 粗大误差处理

格拉布斯准则的鉴别值 $K_G(n, a)$ 是和测量次数 n 、危险概率 a 相关的数值，可通过查相应的数表获得。

$K_G(n, a)$ 数值表

$n \backslash a$	0.01	0.05	$n \backslash a$	0.01	0.05	$n \backslash a$	0.01	0.05
3	1.16	1.15	12	2.55	2.29	21	2.91	2.58
4	1.49	1.46	13	2.61	2.33	22	2.94	2.60
5	1.75	1.67	14	2.66	2.37	23	2.96	2.62
6	1.91	1.82	15	2.70	2.41	24	2.99	2.64
7	2.10	1.94	16	2.74	2.44	25	3.01	2.66
8	2.22	2.03	17	2.78	2.47	30	3.10	2.74
9	2.32	2.11	18	2.82	2.50	35	3.18	2.81
10	2.41	2.18	19	2.85	2.53	40	3.24	2.87
11	2.48	2.23	20	2.88	2.56	50	3.34	2.96

当 $a=0.05$ 或 0.01 时，可得到鉴别值 $K_G(n, a)$ 的置信概率分别为**0.95**和**0.99**。

➤ 当存在多个可疑测量数据时，只能舍弃误差最大的可疑数据，然后按剔除后的测量数据序列重新计算并重复进行判别，直到判明无坏值为止。