保密★启用前

2018-2019 学年第一学期期末考试

《概率论与数理统计 B》

考生注意事项

1．答题前，考生须在试题册指定位置上填写考生**教学号**和考生姓名；**在答题卡指定位置上填写考试科目、考生姓名和考生教学号，并涂写考生教学号信息点。**

2．选择题的答案必须涂写在答题卡相应题号的选项上，非选择题的答案必须书写在答题卡指定位置的边框区域内。超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题册上答题无效。

3．填（书）写部分必须使用黑色字迹签字笔书写，字迹工整、笔迹清楚；涂写部分必须使用 2B 铅笔填涂。

4．考试结束，将答题卡和试题册按规定交回。

（以下信息考生必须认真填写）

考生教学号								
考生姓名								

一、选择题：1～6 小题，每小题 3 分，共 18 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．请将答案写在答题卡上，写在试题册上无效．

1．设随机变量 $X \sim N(0,1), Y = 2X+1,$ 则 Y 服从（　A　）．

（A）$N(1,4)$　（B）$N(0,1)$　（C）$N(1,1)$　（D）$N(0,2)$

2．若随机变量 X 和 Y 的协方差等于 0，则以下结论正确的是（　B　）．

（A）X 和 Y 相互独立　（B）$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

（C）$D(X-Y)=D(X)-D(Y)$　（D）$D(XY)=D(X)\cdot D(Y)$

3．设随机变量 X 和 Y 相互独立，其分布函数相应为 $F_1(x)$和$F_2(y)$，则随机变量 $U=\max\{X,Y\}$ 的分布函数为 $F(u)=$（　C　）．

（A）$\max\{F_1(u),F_2(u)\}$　（B）$\min\{1-F_1(u),1-F_2(u)\}$

（C）$F_1(u)F_2(u)$　（D）$1-[1-F_1(u)][1-F_2(u)]$

4．设总体 $X \sim B(m,p)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的样本，则 $D\left(\overline{X}\right)$ =（　D　）．

（A）$p(1-p)$　（B）$\dfrac{p(1-p)}{n}$　（C）$mp(1-p)$　（D）$\dfrac{mp(1-p)}{n}$

5. 设总体 X 的数学期望为 μ，方差为 σ^2，$\left(X_1,X_2\right)$ 是 X 的一个样本，则在下述的 4 个估计量中，（　C　）是最有效的.

（A）$\hat{\mu}_1=\dfrac{1}{5}X_1+\dfrac{4}{5}X_2$　（B）$\hat{\mu}_2=\dfrac{1}{8}X_1+\dfrac{7}{8}X_2$

（C）$\hat{\mu}_3=\dfrac{1}{2}X_1+\dfrac{1}{2}X_2$　（D）$\hat{\mu}_4=\dfrac{2}{3}X_1+\dfrac{1}{3}X_2$

6. 样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 来自总体 $N\left(\mu,12^2\right)$，若要检验 $H_0:\mu\le 100$，应采用统计量为（ B　）.

（A）$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{12}{\sqrt{n}}}$　（B）$\dfrac{\overline{X}-100}{\frac{12}{\sqrt{n}}}$　（C）$\dfrac{\overline{X}-100}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}}$　（D）$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$

二、填空题：7～12 小题，每小题 3 分，共 18 分．请将答案写在答题卡上，写在试题册上无效．

7. 已知事件 A 和 B 相互独立, 且 $P(A)=0.4$，$P(B)=0.5$, 则 $P(A\bigcup B)=$ __0.7____.

8. 设随机变量 $X\sim N(1.5,2^2)$，则 $P(X\geq 3.5)$ = __0.1587__.（$\Phi(1)=0.8413$）

9. 某人忘记了电话号码的最后一位数字，因而他在拨打到最后一位时采取随机拨号，则他拨号不超过 3 次而接通所需电话的概率为__0.3____.

10. 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 则由切比雪夫不等式可知 $P\{|X-\mu|\geq 2\sigma\}\leq$ __0.25__.

11. 设 X_1,X_2,X_3,X_4 与 Y_1,Y_2,Y_3,Y_4,Y_5 分别是来自服从标准正态分布总体的 X 和 Y 的一组简单随机样本，且两者相互独立，$\overline{X}$ 和 $\overline{Y}$ 分别为其样本均值，随机变量 $Z=\sum_{i=1}^{4}\left(X_i-\overline{X}\right)^2+\sum_{j=1}^{5}\left(Y_j-\overline{Y}\right)^2$，则数学期望 $E(Z)=$ __7____.

12. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 从总体 X 中抽取样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，样本均值为 $\overline{X}$，样本方差为 S^2，总体 μ 和 σ^2 均未知，则 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为__$(\overline{X}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\overline{X}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}})$__.

三、解答题：13～19 小题，共 64 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．请将答案写在答题卡上，写在试题册上无效．

13.（本题满分 8 分）

某厂产品有 70%不需要调试即可出厂，另 30%需经过调试，调试后有 80%能出厂，求：（1）该厂产品能出厂的概率；（2）任取一件出厂产品是未经调试的概率.

解 A——需经调试　$\overline{A}$——不需调试　B——出厂

则 $P(A)=30\%$　$P(\overline{A})=70\%$　$P(B|A)=80\%$　$P(B|\overline{A})=1$

（1）由全概率公式：$P(B)=P(A)\cdot P(B|A)+P(\overline{A})\cdot P(B|\overline{A})$

$=30\%\times 80\%+70\%\times 1=94\%$.　------4 分

（2）由贝叶斯公式：$P(\overline{A}\,|\,B)=\dfrac{P(\overline{A}B)}{P(B)}=\dfrac{P(\overline{A})\cdot P(B\,|\,\overline{A})}{94\%}=\dfrac{70}{94}$ ------8 分

14.（本题满分 8 分）

设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} ax+1, & 0<x<2, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$ 试确定常数 a，并计算 $P\{X\ge 1.5\}$.

解

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_0^2 (ax+1)dx=2a+2, \therefore a=-0.5.$$ ----------4 分

$$P\{X\ge 1.5\}=\int_{1.5}^{+\infty} f(x)dx=\int_{1.5}^{2}(-0.5x+1)dx=0.0625$$ -----------8 分

15.（本题满分 8 分）

已知二维随机变量 (X,Y) 的分布律为

X \ Y	-1	0
-1	0.3	0.3
1	0.1	0.3

（1）求 X 和 Y 的分布律；（2）求 $E(-2X+1)$, $D(-2X+1)$；

（3）判断 X 和 Y 是否相关.

解 （1）边缘分布律

X	-1	1
p	0.6	0.4

---------2 分

Y	-1	0
p	0.4	0.6

---------4 分

（2）$E(X)=-0.2, E(Y)=-0.4, D(X)=0.96, D(Y)=0.24,$

$$E(-2X+1)=-2E(X)+1=1.4$$
$$D(-2X+1)=4D(X)=3.84$$ -----------6 分

（3）$E\left(XY\right)=(-1)\times(-1)\times0.3+1\times(-1)\times0.1=0.2$

$\operatorname{cov}(X,Y)=EXY-EX\bullet EY\neq0,$ 从而 $\rho_{XY}\neq0,$

因此，X 和 Y 相关。 ----------8 分

16.（本题满分 8 分）

在次品率为 $\frac{1}{6}$ 的一大批产品中，任意抽 300 件产品，利用中心极限定理计算抽取的产品中次品件数在 40 与 60 之间的概率.（$\Phi(10\sqrt{\frac{6}{250}})=0.9394$）

解 设 X 为 300 件产品中次品的件数，$X\sim B\left(300,\frac{1}{6}\right)$，

则 $E(X)=50$，$D(X)=\frac{250}{6}$， ---4 分

于是有

$$p(40<X<60)\approx\Phi\left(\frac{60-50}{\sqrt{\frac{250}{6}}}\right)-\Phi\left(\frac{40-50}{\sqrt{\frac{250}{6}}}\right)=2\Phi(10\sqrt{\frac{6}{250}})-1=0.8788.$$ ---8 分

17.（本题满分 8 分）

设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)},-\infty<x<+\infty,$ 随机变量 $Y=2X+5$，求 Y 的概率密度函数.

解 **Y** 的分布函数

$$F_Y(y)=P\{Y\leq y\}=P\{2X+5\leq y\}=P\{X\leq\frac{y-5}{2}\}$$

$$=\int_{-\infty}^{\frac{y-5}{2}}f(x)dx=\int_{-\infty}^{\frac{y-5}{2}}\frac{1}{\pi(1+x^2)}dx$$ -------------5 分

Y 的密度函数

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\left[\int_{-\infty}^{\frac{y-5}{2}}\frac{1}{\pi(1+x^2)}dx\right]'=\frac{2}{\pi[4+(y-5)^2]}$$ ---------8 分

18.（本题满分 12 分）

设二维随机变量(X,Y)的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{21}{4}x^2y, & x^2\le y\le 1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$

求：（1）$P\{X>Y\}$；（2）关于X和关于Y的边缘概率密度；（3）条件概率密度$f_{Y|X}(y|x)$；（4）判断X与Y是否相互独立.

解（1） $p\{X>Y\}=\iint\limits_{x>y}f(x,y)dxdy=\int_0^1\left[\int_{x^2}^{x}\frac{21}{4}x^2ydy\right]dx$

$=\int_0^1\left[\frac{21}{4}\cdot x^2\frac{1}{2}(x^2-x^4)\right]dx=\frac{3}{20}$ ----------2 分

（2） $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{x^2}^{1}\frac{21}{4}x^2ydy\\ 0\end{cases}=\begin{cases}\frac{21}{8}x^2(1-x^4), & -1\le x\le 1\\ 0, & 其他.\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{21}{4}x^2ydx\\ 0\end{cases}=\begin{cases}\frac{7}{2}y^{\frac{5}{2}}, & -1\le y\le 1\\ 0, & 其他.\end{cases}$ --------6 分

（3）当$-1<x<1$ 时，

$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{\frac{21}{4}x^2y}{\frac{21}{8}x^2(1-x^4)}=\dfrac{2y}{1-x^4}, & x^2<y<1\\ 0, & 其他.\end{cases}$ ----------10 分

（4）由于$f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，故X与Y不独立. ----------12 分

19.（本题满分 12 分）

设总体X的分布函数为 $F(x;\beta)=\begin{cases}1-(\frac{1}{x})^{\beta}, x>1,\\ 0, \quad x\le 1.\end{cases}$ 其中参数$\beta>1$未知，又$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体X的随机样本，求：（1）X的概率密度函数

$f(x;\beta)$；（2）参数β的矩估计量；（3）参数β的最大似然估计量.

解 由题意

（1） $f(x;\beta)=\begin{cases}\dfrac{\beta}{x^{\beta+1}}, x>1,\\ 0, \quad x\le 1.\end{cases}$ ------------4 分

（2） $EX=\int_1^{+\infty}x\dfrac{\beta}{x^{\beta+1}}\mathrm{d}x=\dfrac{\beta}{\beta-1}$

$EX=\overline{X}$

$\beta=\dfrac{\overline{X}}{\overline{X}-1}$. ------------8 分

（3）设$x_1,\cdots,x_n$为一组样本值，似然函数为

$$L(\beta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\beta)=\begin{cases}\dfrac{\beta^n}{(x_1\cdots x_n)^{\beta+1}}, x_i>1,\\ 0, \quad 其\quad 他.\end{cases} \quad i=1,2,\cdots,n.$$

当$x_i>1$时，$\ln L(\beta)=n\ln\beta-(\beta+1)\ln(x_1\cdots x_n)$

令$\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\beta)}{\mathrm{d}\beta}=\dfrac{n}{\beta}-\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i=0$，得$\beta$的最大似然估计量为

$$\beta=\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i}.$$ ------------12 分