现代控制理论

第二章 线性定常系统状态方程的解

2.1 线性定常连续系统状态方程的解

❖ 线性定常连续系统的状态方程的标准形式

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

当$u(t)=0$时，有

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

自由运动

当$u(t) \neq 0$时，有

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

受迫运动

1. 线性连续系统齐次状态方程的解

(1) 幂级数法

纯量（或称标量）齐次微分方程为

$$\dot{x}(t) = ax(t), \qquad x(t)\big|_{t=0} = x(0),\ a \in R$$

$$x(t) = e^{at} \cdot x(0)$$

$$= (1 + at + \frac{1}{2!}a^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}a^kt^k + \cdots)x(0)$$

- 与纯量微分方程的解法相似，求解齐次状态方程。

❖ 设

b_0，…，b_k都是n维向量

$$x(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots + b_k t^k + \cdots$$

$$\dot{x}(t) = b_1 + 2b_2 t + \cdots + k b_k t^{k-1} + \cdots$$

比较系数

$\dot{x}(t) = Ax(t)$

$$\dot{x}(t) = A\left(b_0 + b_1 t + \cdots + b_k t^k + \cdots\right)$$

$$b_1 = Ab_0 \Longrightarrow b_1 = Ax(0)$$

$$b_2 = \frac{1}{2} b_1 = \frac{1}{2!} A^2 b_0 \Longrightarrow b_2 = \frac{1}{2!} A^2 x(0)$$

$$\vdots$$

$$b_k = \frac{1}{k!} A^k b_0 \Longrightarrow b_k = \frac{1}{k!} A^k x(0)$$

$$\vdots$$

令t=0

$$b_0 = x(0)$$

$$x(t) = (I + At + \frac{1}{2}A^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^kt^k + \cdots)x(0)$$

定义 $$e^{At} = I + At + \frac{1}{2}A^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^kt^k + \cdots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^kt^k$$

于是 $$x(t) = e^{At}x(0)$$

$$e^{At} \triangleq \Phi(t)$$

$$x(t) = \Phi(t)x(0)$$

矩阵指数（函数）

状态转移矩阵

(2) 拉普拉斯变换法—齐次状态方程的解

$$\dot{x}(t) = Ax(t),\ \ x(0)$$

取拉氏变换

$$sX(s) = AX(s) + x(0)$$

$$(sI - A)X(s) = x(0)$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x(0)$$

取拉氏反变换

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]x(0)$$

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]$$

例

2. 状态转移矩阵的运算性质

$$\Phi(t)=e^{At}=I+At+\frac{1}{2}A^2t^2+\cdots+\frac{1}{k!}A^kt^k+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^kt^k$$

(1) $\Phi(0)=I$

$$x(t)=\Phi(t)x(0) \Longrightarrow x(0)=\Phi(0)x(0)$$

(2) $\dot{\Phi}(t)=A\Phi(t)=\Phi(t)A,\ \dot{\Phi}(0)=A$

(3) $\Phi(t_1\pm t_2)=\Phi(t_1)\Phi(\pm t_2)=\Phi(\pm t_2)\Phi(t_1)$

(4) $\Phi^{-1}(t)=\Phi(-t),\ \Phi^{-1}(-t)=\Phi(t)$

(5) $$e^{P^{-1}APt} = P^{-1}e^{At}P$$

(6) 两种常见的状态转移矩阵

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}, \Phi(t) = e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda\end{bmatrix}$$

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \cdots & \dfrac{t^{m-1}}{(m-1)!}e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & \cdots & \dfrac{t^{m-2}}{(m-2)!}e^{\lambda t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda t}\end{bmatrix}$$

状态转移矩阵例题

3. 连续系统非齐次状态方程解

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), x(0)$$

(1) 积分法

$$\Big\downarrow \boxed{e^{-At}}$$

$$e^{-At}[\dot{x}(t) - Ax(t)] = e^{-At}Bu(t)$$

因为 $\frac{d}{dt}[e^{-At}x(t)] = -Ae^{-At}x(t) + e^{-At}\dot{x}(t) = e^{-At}[\dot{x}(t) - Ax(t)]$

所以有 $\frac{d}{dt}[e^{-At}x(t)] = e^{-At}Bu(t)$

$$\Longrightarrow e^{-At}x(t) - x(0) = \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

$$\Longrightarrow x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

零输入响应

零状态响应

即

$$\boxed{x(t)=\Phi(t)x(0)+\int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau}$$

一般情况，初始时刻t_0，则有

$$x(t)=e^{A(t-t_0)}x(t_0)+\int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$x(t)=\Phi(t-t_0)x(t_0)+\int_{t_0}^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

(2) 拉氏变换法

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), x(0)$$

$\xrightarrow{\text{取拉氏变换}}$

$sX(s)-x(0)=AX(s)+BU(s)$

$(sI-A)X(s)=x(0)+BU(s)$

$\Rightarrow X(s) = (sI-A)^{-1}x(0)+ (sI-A)^{-1} BU(s)$

$\xRightarrow{\text{取拉氏反变换}}$ $x(t)= \mathcal{L}^{-1}[(sI-A)^{-1}]x(0) + \mathcal{L}^{-1}[(sI-A)^{-1}BU(s)]$

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

非齐次状态方程解例题

2.2 线性离散系统状态方程及其解

1. 线性离散状态方程的建立

（1）由差分方程建立离散系统的状态空间表达式

$$y(k+n)+a_{n-1}y(k+n-1)+a_{n-2}y(k+n-2)+\cdots+a_0y(k)=b_0u(k)$$

$x_1(k)=y(k)$; $x_2(k)=y(k+1)=x_1(k+1)$; $x_3(k)=y(k+2)=x_2(k+1)$;

$\cdots$; $x_n(k)=y(k+n-1)=x_{n-1}(k+1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1(k+1)=x_2(k) \\ x_2(k+1)=x_3(k) \\ \cdots \\ x_{n-1}(k+1)=x_n(k) \\ x_n(k+1)=-a_0x_1(k)-a_1x_2(k)-\cdots-a_{n-1}x_n(k)+u(k) \end{cases}$$

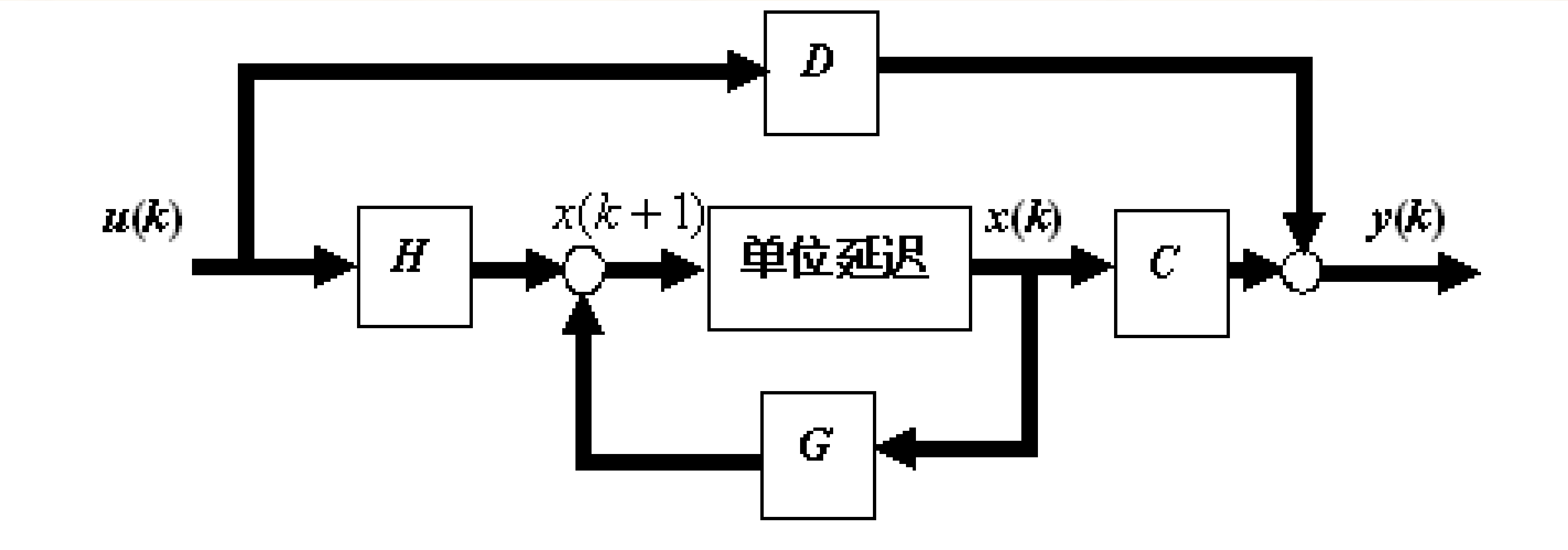
$$\begin{cases} x(k+1) = Gx(k) + Hu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases}$$

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\boldsymbol{a}_0 & -\boldsymbol{a}_1 & -\boldsymbol{a}_2 & \cdots & -\boldsymbol{a}_{n-1} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

线性定常离散系统一般表达式:

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$



线性定常离散系统状态变量图

例（差分方程建立离散系统的状态空间表达式）

(2)由脉冲传递函数建立线性定常离散系统的状态空间表达式

$$\bar{G}(z)=\frac{\bar{b}_n z^n+\bar{b}_{n-1}z^{n-1}+\cdots+\bar{b}_1 z+\bar{b}_0}{\bar{a}_n z^n+\bar{a}_{n-1}z^{n-1}+\cdots+\bar{a}_1 z+\bar{a}_0}$$

$$\bar{G}(z)=\frac{b_n z^n+b_{n-1}z^{n-1}+\cdots+b_1 z+b_0}{z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1 z+a_0}$$

$$a_i=\frac{\bar{a}_i}{\bar{a}_n},b_i=\frac{1}{\bar{a}_n}\bar{b}_i$$

$$\bar{G}(z)=\frac{\beta_{n-1}z^{n-1}+\beta_{n-2}z^{n-2}+\cdots+\beta_1 z+\beta_0}{z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1 z+a_0}+d$$

$$\beta_i=\frac{b_i}{b_n},\quad d=b_n$$

$$G(z)=\frac{\beta_{n-1}z^{n-1}+\beta_{n-2}z^{n-2}+\cdots+\beta_1 z+\beta_0}{z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1 z+a_0}$$

$$G(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{Y(z)}{U(z)}\frac{Q(z)}{Q(z)}=\frac{Q(z)}{U(z)}\frac{Y(z)}{Q(z)}$$

$$\frac{Q(z)}{U(z)}=\frac{1}{z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1 z+a_0}$$

$$\frac{Y(z)}{Q(z)}=\beta_{n-1}z^{n-1}+\beta_{n-2}z^{n-2}+\ldots+\beta_1 z+\beta_0$$

$$z^nQ(z)+a_{n-1}z^{n-1}Q(z)+\ldots+a_1zQ(z)+a_0Q(z)=U(z)$$

根据*z*变换位移定理，在零初始条件下，有

$$q(k+n)+a_{n-1}q(k+n-1)+\ldots+a_1q(k+1)+a_0q(k)=u(k)$$

$$x_1(k)=q(k),x_2(k)=q(k+1)=x_1(k+1),\ldots,x_n(k)=q(k+n-1)=x_{n-1}(k+1)$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u(k)$$

$$y(k)=\begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \cdots & \beta_{n-2} & \beta_{n-1} \end{bmatrix}x(k)$$

$$\begin{cases} Y(z)=\beta_{n-1}z^{n-1}Q(z)+\beta_{n-2}z^{n-2}Q(z)+\ldots+\beta_1zQ(z)+\beta_0Q(z) \\ y(k)=\beta_{n-1}q(k+n-1)+\beta_{n-2}q(k+n-2)+\cdots+\beta_1q(k+1)+\beta_0q(k) \end{cases}$$

(3)由连续系统的动态方程经过离散化求取离散系统的动态方程

$$\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx + Du$$

解为 $x(t) = \Phi(t-t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$

令t_0=kT，则 $x(t_0) = x(kT) \triangleq x(k)$

令t=(k+1)T，则 $x(t) = x[(k+1)T] \triangleq x(k+1)$

在 $t \in [k, k+1]$ 区间内，$u(k) = u(k+1) =$ 常数，于是其解为

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \Phi[(k+1)T - kT]\boldsymbol{x}(k) + \int_{kT}^{(k+1)T} \Phi[(k+1)T - \tau]\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k)d\tau$$

记 $\boldsymbol{H} = \int_{kT}^{(k+1)T} \Phi[(k+1)T - \tau]\boldsymbol{B}d\tau$ 令$(k+1)T - \tau = \tau'$

示例

$\Longrightarrow$ $H = \int_{0}^{T} \Phi(\tau)Bd\tau$ 记 $\Phi(T) = \Phi(t)|_{t=T} \triangleq G$

$\boxed{x(k+1) = Gx(k) + Hu(k)}$ $\boxed{y(k) = Cx(k) + Du(k)}$

2．线性定常离散状态方程的解

$$x(k+1)=Gx(k)+Hu(k)，\ x(0)$$

(1) 递推法

$$x(1)=Gx(0)+Hu(0)$$

$$x(2)=Gx(1)+Hu(1)=G^2x(0)+GHu(0)+Hu(1)$$

$$x(3)=Gx(2)+Hu(2)=G^3x(0)+G^2Hu(0)+GHu(1)+Hu(2)$$

$$\cdots$$

$$x(k)=Gx(k-1)+Hu(k-1)$$

$$=G^kx(0)+G^{k-1}Hu(0)+\cdots+GHu(k-2)+Hu(k-1)$$

$$=G^kx(0)+\sum_{i=0}^{k-1}G^{k-i-1}Hu(i)$$

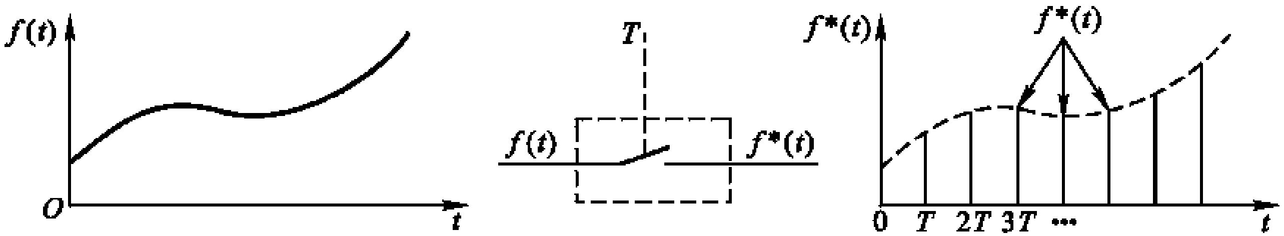
$$\Phi(k)=G^k \quad x(k)=\Phi(k)x(0)+\sum_{i=0}^{k-1}\Phi(k-i-1)Hu(i)$$

信号采样

采样或采样过程，就是抽取连续信号在离散时间瞬时值的序列过程，有时也称为离散化过程。

在计算机控制系统中，采样过程是不可缺少的。对时间和幅值均连续的模拟信号经过采样得到在时间上离散、幅值连续的脉冲序列，由A/D转换器整量化后才能送入计算机进行处理和运算。

完成采样操作的装置称为采样器或采样开关。



理想采样开关的采样过程

z变换的定义

在拉氏变换中引入新复变量

$$z = e^{Ts}$$

从而有

$$F^*(s)|_{s=\frac{1}{T}\ln z} = F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)(e^{Ts})^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}$$

$F(z)$称为离散时间函数$f^*(z)$的z变换。z变换实际是一个无穷级数形式，它必须是收敛的。就是说，极限

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N} f(kT)z^{-k}$$

存在时，$f^*(z)$的z变换才存在。

z变换的性质和定理

线性性质

$$Z[\alpha_1 f_1(t) \pm \alpha_2 f_2(t)] = \alpha_1 F_1(z) \pm \alpha_2 F_2(z)$$

求和定理

$$Z[\sum_{j=0}^{k} f(j)] = \frac{z}{z-1} Z[f(k)]$$

$$Z[\sum_{j=0}^{k-1} f(j)] = \frac{1}{z-1} Z[f(k)]$$

平移定理

$$Z[f(t+nT) = z^n F(z) - \sum_{j=0}^{n-1} z^{n-j} f(j)$$

$$Z[f(t-nT)] = z^{-n} F(z)$$

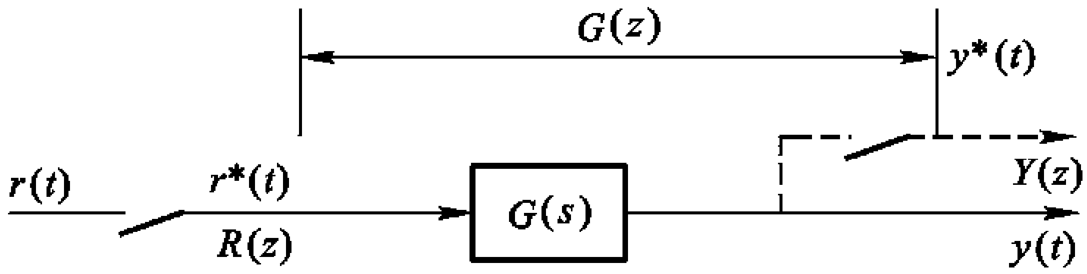
初值定理

$$f(0) = \lim_{z\to\infty} F(z)$$

脉冲传递函数的定义

线性离散系统的脉冲传递函数定义为零初始条件下，系统或环节的输出采样函数z变换和输入采样函数z变换之比。设开环离散系统如下图所示，系统输入信号为$r(t)$，采样后$r^*(t)$的z变换函数为$R(z)$。经虚设的采样开关后得到输出采样函数$y^*(t)$及其z变换$Y(z)$。则根据定义得线性定常离散系统脉冲传递函数

$$G(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=\frac{\sum_{k=0}^{\infty} y(kT)z^{-k}}{\sum_{k=0}^{\infty} r(kT)z^{-k}}$$



开环离散系统

(2) $\mathcal{Z}$变换法

$$x(k+1)=Gx(k)+Hu(k)$$

对上式两端取z变换，可得

$$zX(z)-zx(0)=GX(z)+HU(z)$$

$$\Longrightarrow \quad (zI-G)X(z)=zX(z)+HU(z)$$

$$\Longrightarrow \quad X(z)=(zI-G)^{-1}zx(0)+(zI-G)^{-1}HU(z)$$

$$\Longrightarrow \quad x(k)=\mathcal{Z}^{-1}[zI-G)^{-1}z]x(0)+\mathcal{Z}^{-1}[(zI-G)^{-1}HU(z)]$$

$$\mathcal{Z}^{-1}[zI-A)^{-1}z]=\Phi(k)=G^{k}$$

$$\mathcal{Z}^{-1}[zI-G)^{-1}HU(z)]=\sum_{i=0}^{k-1}\Phi(k-i-1)Hu(i)=\sum_{i=0}^{k-1}G^{k-i-1}Hu(i)$$

End of Chapter 2