高等数学作业

答案

BⅡ

吉林大学公共数学教学与研究中心

2018年2月

第一次作业

学院____________班级____________姓名____________学号____________

一、单项选择题

1．$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{3xy}{x^2+y^2}=$（ D ）.

（A）$\dfrac{3}{2}$；（B）0；（C）$\dfrac{6}{5}$；（D）不存在.

2．二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处（ C ）.

（A）连续，偏导数存在；（B）连续，偏导数不存在；

（C）不连续，偏导数存在；（D）不连续，偏导数不存在.

3．设 $f(x,y)=y(x-1)^2+x(y-2)^2$，在下列求 $f_x(1,2)$ 的方法中，不正确的一种是（ B ）.

（A）因 $f(x,2)=2(x-1)^2,\ f_x(x,2)=4(x-1)$，故 $f_x(1,2)=4(x-1)|_{x=1}=0$；

（B）因 $f(1,2)=0$，故 $f_x(1,2)=0'=0$；

（C）因 $f_x(x,y)=2y(x-1)+(y-2)^2$，故 $f_x(1,2)=f_x(x,y)\big|_{\substack{x=1\\ y=2}}=0$；

（D）$f_x(1,2)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x,2)-f(1,2)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2(x-1)^2-0}{x-1}=0$.

4．若 $f(x,y)$ 的点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数都存在，则（ C ）.

（A）$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某个邻域内有界；

（B）$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某个邻域内连续；

（C）$f(x,y_0)$ 在点 x_0 处连续，$f(x_0,y)$ 在点 y_0 处连续；

（D）$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续.

5．设 $z=f(x,y),\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2$，且 $f(x,0)=1,\ f_y(x,0)=x$，则 $f(x,y)$ 为（ B ）.

（A）$1-xy+x^2$；（B）$1+xy+y^2$；（C）$1-x^2y+y^2$；（D）$1+x^2y+y^2$.

二、填空题

1． $z=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$ 的定义域为 $\underline{y^2\le 4x, 0<x^2+y^2<1}$.

2． $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1-\sqrt{1-xy}}{xy}=$ ____1/2________.

3．设 $f(x,y)=x+y-\sqrt{x^2+y^2}$，则 $f_x'(3,4)=\underline{2/5}$， $f_y'(3,4)=$ __1/5_______.

4．设 $u=\ln(3x-2y+z)$，则 $\mathrm{d}u=\underline{\dfrac{3dx-2dy+dz}{3x-2y+z}}$.

5．设 $z=x^y$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\underline{x^{y-1}\left(1+y\ln x\right)}$.

三、计算题

1.计算 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to 1}}\left(1+\dfrac{y}{x+y}\right)^{x+y}$

解： $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to 1}}\left(1+\dfrac{y}{x+y}\right)^{x+y}=\lim\limits_{\substack{t\to\infty\\ y\to 1}}\left(1+\dfrac{y}{t}\right)^{t}=e^{\lim\limits_{\substack{t\to\infty\\ y\to 1}}\frac{y}{t}\cdot t}=e$

2．讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 的连续性.

解一：当 $p\left(x,y\right)$ 沿 y 轴(x=0)趋于 O（0,0）时，

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2+xy}{x^2+y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y^2}=0$$

当 $p\left(x,y\right)$ 沿 $y=x$，趋于 O（0,0）时，

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x\to 0}}\frac{x^2+xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{2x^2}=1$$

所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f\left(x,y\right)$ 不存在，因此函数在原点不连续.

解二：当 $p\left(x,y\right)$ 沿 $y=kx$ 趋于 O（0,0）时，

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}}\frac{x^2+xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+k\right)x^2}{\left(1+k^2\right)x^2}=\frac{1+k}{1+k^2}$$ 与 k 有关，因此函数在原点不连续.

3．设 $f\left(x,y\right)=\sqrt{x^2\left|y\right|}$，求 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$， $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

解. $f(x,y)=\left|x\right|\sqrt{\left|y\right|}=\begin{cases}x\sqrt{\left|y\right|}, & x>0\\ -x\sqrt{\left|y\right|}, & x<0\\ 0, & x=0\end{cases}$

当 $x>0$ 时，$\dfrac{\partial f}{\partial x}=\sqrt{|y|}$，当 $x<0$ 时，$\dfrac{\partial f}{\partial x}=-\sqrt{|y|}$，

当 $x=0,\ y\neq 0$ 时，

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2|y|}-0}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|\sqrt{|y|}}{x}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|\sqrt{|y|}}{x}=\sqrt{|y|}, & x\geq 0\\ \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|\sqrt{|y|}}{x}=-\sqrt{|y|}, & x<0\end{cases}$$ 极限不存在；

当 x=0, y=0 时，$\dfrac{\partial f}{\partial x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{0-0}{\Delta x}=0$

$$f(x,y)=|x|\sqrt{|y|}=\begin{cases}|x|\sqrt{y}, & y>0\\ |x|\sqrt{-y}, & y<0\\ 0, & y=0\end{cases}$$

当 $y>0$ 时，$\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{|x|}{2\sqrt{y}}$，当 $y<0$ 时，$\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{-|x|}{2\sqrt{-y}}$

当 $y=0,x\neq 0$ 时，

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,\Delta y)-f(x,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{|x|\sqrt{|\Delta y|}}{\Delta y}=\infty$$，极限不存在.

当 $y=0,x=0$ 时，

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0-0}{\Delta y}=0$$

4．求 $u=\int_{xz}^{yz}\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$ 的偏导数.

解 $u=-\int_0^{xz}\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t+\int_0^{yz}\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\mathrm{e}^{x^2z^2}\cdot z,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\mathrm{e}^{y^2z^2}\cdot z,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=-\mathrm{e}^{x^2z^2}\cdot x+\mathrm{e}^{y^2z^2}\cdot y$$

5．讨论函数 $f\left(x,\ y\right)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$ 在 $\left(0,\ 0\right)$ 点的可微性.

解 $f_x'(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x-0}{\Delta x}=1$

$$f_y'(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y-0}{\Delta y}=1$$

设 $z=f\left(x,\ y\right)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$

因为 $\Delta z=\sqrt[3]{(\Delta x)^3+(\Delta y)^3}$，而 $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\Delta y\right)\Big|_{(0,0)}=\Delta x+\Delta y$

所以$\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\Delta z-\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\Delta y\right)\Big|_{(0,0)}}{\rho}=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\sqrt[3]{(\Delta x)^3+(\Delta y)^3}-(\Delta x+\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$,

设$\Delta y=k\Delta x$，则

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^3+(\Delta y)^3}-(\Delta x+\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+k^3}-(1+k)}{\sqrt{1+k^2}}\frac{\Delta x}{|\Delta x|}\text{不存在，}$$

故在$(0,\ 0)$点的不可微.

6．证明函数$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$在点(0, 0)处：（1）连续；（2）偏导数存在；（3）不可微.

解（1）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sqrt{|xy|}=0=f(0,0)$，所以$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$在$(0,0)$连续.

（2）$f_x'(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{0-0}{\Delta x}=0$

$f_y'(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{0-0}{\Delta y}=0$

（3）设$z=f(x,y)=\sqrt{|xy|}$，因为$\Delta z=\sqrt{|\Delta x\cdot\Delta y|}$，而$\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\Delta y\right)\Big|_{(0,0)}=0$

所以$\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\Delta z-\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\Delta y\right)\Big|_{(0,0)}}{\rho}=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\sqrt{|\Delta x\cdot\Delta y|}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$，设$\Delta y=k\Delta x$，则

$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\sqrt{|\Delta x\cdot\Delta y|}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=k\Delta x\to 0}}\dfrac{\sqrt{(\Delta x)^2|k|}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta x)^2k^2}}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt{|k|}}{\sqrt{1+k^2}}$与$k$有关，

因此上式极限不存在，所以不可微.

第二次作业

学院____________班级___________姓名___________学号____________

一、单项选择题

1．设 $z=\dfrac{y}{f(x^2-y^2)}$，其中 $f(u)$ 为可导函数，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$（　B　）.

（A）$-\dfrac{2xy}{f^2(x^2-y^2)}$；　　（B）$-\dfrac{2xyf'(x^2-y^2)}{f^2(x^2-y^2)}$；

（C）$-\dfrac{yf'(x^2-y^2)}{f^2(x^2-y^2)}$；　　（D）$-\dfrac{f(x^2-y^2)-yf'(x^2-y^2)}{f^2(x^2-y^2)}$.

2．设方程 $F(x-y, y-z, z-x)=0$ 确定 z 是 x，y 的函数，F 是可微函数，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$（　D　）.

（A）$-\dfrac{F_1'}{F_3'}$；　（B）$\dfrac{F_1'}{F_3'}$；　（C）$\dfrac{F_x-F_z}{F_y-F_z}$；　（D）$\dfrac{F_1'-F_3'}{F_2'-F_3'}$.

3．设 $x=x(y,z), y=y(z,x), z=z(x,y)$ 都由方程 $F(x,y,z)=0$ 所确定的隐函数，则下列等式中，不正确的一个是（　C　）.

（A）$\dfrac{\partial x}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial x}=1$；　　（B）$\dfrac{\partial x}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x}=1$；

（C）$\dfrac{\partial x}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x}=1$；　　（D）$\dfrac{\partial x}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x}=-1$.

4．设 $u=u(x,y), v=v(x,y)$ 都是可微函数，C 为常数，则在下列梯度运算式中，有错误的是（　A　）.

（A）$\nabla C=0$；　　（B）$\nabla(Cu)=C\nabla u$；

（C）$\nabla(u+v)=\nabla u+\nabla v$；　　（D）$\nabla(uv)=v\nabla u+u\nabla v$.

5．$u=f(r)$，而 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，且函数 $f(r)$ 具有二阶连续导数，则 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=$（ B　）.

（A）$f''(r)+\dfrac{1}{r}f'(r)$；　　（B）$f''(r)+\dfrac{2}{r}f'(r)$；

（C）$\dfrac{1}{r^2}f''(r)+\dfrac{1}{r}f'(r)$；　　（D）$\dfrac{1}{r^2}f''(r)+\dfrac{2}{r}f'(r)$.

二、填空题

1．已知 $f(1,2)=4,\ \mathrm{d}f(1,2)=16\mathrm{d}x+4\mathrm{d}y,\ \mathrm{d}f(1,4)=64\mathrm{d}x+8\mathrm{d}y$，则 $z=f(x, f(x,y))$ 在点（1，2）处对 x

的偏导数为<u> 192   </u>.

2．由方程 $xy-yz+zx=\mathrm{e}^z$ 所确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 在点（1, 1）处的全微分为<u> $\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$</u>.

3． $r=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点（0, 0）处沿 x 轴正向的方向导数为<u>   1   </u>.

4．函数 $u=x^2+y^2+z^2-xy+2yz$ 在点 $(-1,2,-3)$ 处的方向导数的最大值等于<u>$\sqrt{21}$</u>.

三、计算与解答题

1．设 f 是 $C^{(2)}$类函数， $z=f(\mathrm{e}^{xy},x^2-y^2)$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 $$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot\mathrm{e}^{xy}\cdot y+f_2'\cdot 2x=y\mathrm{e}^{xy}f_1'+2xf_2'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\mathrm{e}^{xy}f_1'+y\cdot\mathrm{e}^{xy}\cdot xf_1'+y\mathrm{e}^{xy}\left[f_{11}''\mathrm{e}^{xy}\cdot x+f_{12}''\cdot(-2y)\right]+2x\left[f_{21}''\cdot\mathrm{e}^{xy}\cdot x+f_{22}''\cdot(-2y)\right]$$

$$=(1+xy)\mathrm{e}^{xy}f_1'+xy\mathrm{e}^{2xy}f_{11}''+2(x^2-y^2)\mathrm{e}^{xy}f_{12}''-4$$

2． $z=(1+xy)^y$，求 dz .

解 $$\frac{\partial z}{\partial x}=y(1+xy)^{y-1}\cdot y=y^2(1+xy)^{y-1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial\mathrm{e}^{y\ln(1+xy)}}{\partial y}=(1+xy)^y\left[\ln(1+xy)+\frac{xy}{1+xy}\right].$$

$$z=(1+xy)^y$$

$$\Rightarrow dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=y^2(1+xy)^{y-1}dx+\frac{\partial}{\partial y}\left[e^{y\ln(1+xy)}\right]dy$$

$$=y^2(1+xy)^{y-1}dx+\left[(1+xy)^y\ln(1+xy)+xy(1+xy)^{y-1}\right]dy$$

3．设 f，φ 是 $C^{(2)}$类函数， $z=yf\left(\dfrac{x}{y}\right)+x\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$，证明：

（1） $x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$；　　　（2） $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

证明 $$\frac{\partial z}{\partial x}=yf'\cdot\frac{1}{y}+\varphi+x\varphi'\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=f'+\varphi-\frac{y}{x}\varphi'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''\cdot\frac{1}{y}+\varphi'\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)+\frac{y}{x^2}\varphi'-\frac{y}{x}\varphi''\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=\frac{1}{y}f''+\frac{y^2}{x^3}\varphi''$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)+\varphi'\cdot\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\varphi'-\frac{y}{x}\varphi''\frac{1}{x}=-\frac{x}{y^2}f''-\frac{y}{x^2}\varphi''$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f+y\cdot f'\left(-\frac{x}{y^2}\right)+x\cdot\varphi'\frac{1}{x}=f-\frac{x}{y}f'+\varphi'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)+\frac{x}{y^2}f'-\frac{x}{y}\cdot f''\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)+\varphi''\cdot\frac{1}{x}=\frac{x^2}{y^3}f''+\frac{1}{x}\varphi''$$

$$x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x\left[\frac{1}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{y^2}{x^3}\varphi''\left(\frac{y}{x}\right)\right]+y\left[-\frac{x}{y^2}f''\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{y}{x^2}\varphi''\left(\frac{y}{x}\right)\right]=0$$

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^2\left[\frac{1}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{y^2}{x^3}\varphi''\left(\frac{y}{x}\right)\right]-y^2\left[\frac{1}{x}\varphi''\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{x^2}{y^3}f''\left(\frac{x}{y}\right)\right]=0$$

4．设 $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x}$，求 $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

解 $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)=\arctan\frac{y}{x}$, $\quad \frac{1}{2}\cdot\frac{2x+2y\cdot y'}{x^2+y^2}=\frac{\frac{y'x-y}{x^2}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$

化简得 $\frac{x+yy'}{x^2+y^2}=\frac{y'x-y}{x^2+y^2}$，所以 $(y-x)y'=-(x+y)$, $y'=\frac{x+y}{x-y}$

$$y''=\frac{\left(1+y'\right)\left(x-y\right)-\left(x+y\right)\left(1-y'\right)}{\left(x-y\right)^2}=\frac{2\left(x\cdot y'-y\right)}{\left(x-y\right)^2}=\frac{2\left(x\cdot\frac{x+y}{x-y}-y\right)}{\left(x-y\right)^2}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)}{\left(x-y\right)^3}$$

5．设 $\begin{cases}x=\mathrm{e}^u+u\sin v,\\ y=\mathrm{e}^u-u\cos v,\end{cases}$ 求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$.

解 在方程组两端求全微分并整理，得

$$\begin{cases}(\mathrm{e}^u+\sin v)\mathrm{d}u+u\cos v\mathrm{d}v=\mathrm{d}x\\(\mathrm{e}^u-\cos v)\mathrm{d}u+u\sin v\mathrm{d}v=\mathrm{d}y\end{cases}$$

$$D=\begin{vmatrix}\mathrm{e}^u+\sin v & u\cos v\\ \mathrm{e}^u-\cos v & u\sin v\end{vmatrix}=u\left[\mathrm{e}^u\left(\sin v-\cos v\right)+1\right],D_1=\begin{vmatrix}\mathrm{d}x & u\cos v\\ \mathrm{d}y & u\sin v\end{vmatrix}=u\sin v\mathrm{d}x-u\cos v\mathrm{d}y$$

所以 $\mathrm{d}u=\frac{D_1}{D}=\frac{\sin v}{e^u\left(\sin v-\cos v\right)+1}\mathrm{d}x-\frac{\cos v}{eu\left(\sin v-\cos v\right)+1}\mathrm{d}y$

因此 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\sin v}{\mathrm{e}^u\left(\sin v-\cos v\right)+1}$

$$D_2=\begin{vmatrix}\mathrm{e}^u+\sin v & \mathrm{d}x\\ \mathrm{e}^u\text{-}\cos v & \mathrm{d}y\end{vmatrix}=\left(\mathrm{e}^u+\sin v\right)\mathrm{d}y-\left|\mathrm{e}^u-\cos v\right|\mathrm{d}x$$

所以 $\mathrm{d}v=\frac{D_2}{D}=\frac{\left(\cos v-\mathrm{e}^u\right)\mathrm{d}x+\left(\mathrm{e}^u+\sin v\right)\mathrm{d}y}{u\left[\mathrm{e}^{\mathrm{u}}\left(\sin v\text{-}\cos v\right)+1\right]}$

因此 $\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\mathrm{e}^u+\sin v}{u\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)+u}$

6．设 $u=f(x,y,z),\varphi(x^2,\mathrm{e}^y,z)=0,y=\sin x$，其中 f，φ 是 $C^{(1)}$类函数，求 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

解 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f_1'+f_2'\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+f_3'\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$,

由 $\mathrm{d}z=\dfrac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$，有 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

在 $\varphi(x^2,\mathrm{e}^y,z)=0$ 两边对 x,y 分别求偏导数，得

$$2x\varphi_1'+\varphi_z'\frac{\partial z}{\partial x}=0,\quad \mathrm{e}^y\varphi_2'+\varphi_z'\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2x\varphi_1'}{\varphi_z'},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\mathrm{e}^y\varphi_2'}{\varphi_z'}=-\frac{\mathrm{e}^{\sin x}\varphi_2'}{\varphi_z'}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f_1'+f_2'\cos x-f_3'\frac{2x\varphi_1'+\varphi_2'\mathrm{e}^{\sin x}\cos x}{\varphi_z'}$$

7．求函数 $z=\ln(x+y)$ 的点(1, 2)处沿着抛物线 $y^2=4x$ 的该点切线方向的方向导数.

解 $z_x=\dfrac{1}{x+y},z_y=\dfrac{1}{x+y},z_x(1,2)=z_y(1,2)=\dfrac{1}{3}$

$$y=2\sqrt{x}\quad y'=2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}\quad y'\Big|_{(1,2)}=1\quad \tan\alpha=1$$

$$\alpha_1=\frac{\pi}{4},\alpha_2=\frac{3}{4}\pi,\beta_1=\frac{\pi}{4},\beta_2=\frac{3}{4}\pi$$

$$\cos\alpha_1=\cos\beta_1=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\qquad \cos\alpha_2=\cos\beta_2=\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial l_1}=z_x(1,2)\cos\alpha_1+z_y(1,2)\cos\beta_1=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial l_2}=z_x(1,2)\cos\alpha_2+z_y(1,2)\cos\beta_2=-\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{3}$$

第三次作业

学院____________班级___________姓名___________学号____________

一、单项选择题

1．在曲线 $x=t, y=-t^2, z=t^3$ 的所有切线中，与平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线(B).

（A）只有一条；（B）只有两条；（C）至少有三条；（D）不存在.

2．设函数 $f(x,y)$ 在点(0, 0)附近有定义，且 $f_x(0,0)=3, f_y(0,0)=1$，则(C).

（A）$dz(0,0)=3dx+dy$；

（B）曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的法向量为 $\{3,1,1\}$；

（C）曲线 $\begin{cases} z=f(x,y), \\ y=0 \end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的切向量为 $\{1,0,3\}$；

（D）曲线 $\begin{cases} z=f(x,y), \\ y=0 \end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的切向量为 $\{3,0,1\}$.

3．曲面 $z=x+f(y-z)$ 的任一点处的切平面 (D).

（A）垂直于一定直线；（B）平等于一定平面；

（C）与一定坐标面成定角；（D）平行于一定直线.

4．设 $u(x,y)$ 在平面有界闭区域 D 上是 $C^{(2)}$类函数，且满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \neq 0$ 及 $\frac{\partial^{2u}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，则 $u(x,y)$ 的 (B).

（A）最大值点和最小值点必定都在 D 的内部；

（B）最大值点和最小值点必定都在 D 的边界上；

（C）最大值点在 D 的内部，最小值点在 D 的边界上；

（D）最小值点在 D 的内部，最得到值点在 D 的边界上.

二、填空题

1．如果曲面 $xyz=6$ 在点 M 处的切平面平行于平面 $6x-3y+2z+1=0$，则切点 M 的坐标是__（-1，2，-3）__.

2．曲线 $\begin{cases} x^2+4y^2+9z^2=14, \\ x+y+z=1 \end{cases}$ 在点 $(1,1,-1)$ 处的法平面方程是__13*x*-10*y*-3*z*-6=0__.

3．$z=x^2+y^2$ 在条件 $x+y=1$ 下的极小值是 $\frac{1}{2}$.

4．函数 $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 在点 $M(1,1,1)$ 处沿曲面 $2z=x^2+y^2$ 在该点的外法线方向的方向导数是 $\frac{1}{3}$.

三、计算题

1．求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6, \\ z=x^2+y^2 \end{cases}$ 在点 $(1,1,2)$ 处的切线方程.

解一： $\begin{cases} 2yy' + 2zz' = -2x \text{ ①} \\ -2yy' + z' = 2x \text{ ②} \end{cases}$ ①+②：$z'=0$

代入 $y'=-\dfrac{x}{y}, y'(1,1,2)=-1$　　　　　所以 $\vec{s}=(1,-1,0)$

切线方程：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-2}{0}$，即 $\begin{cases}x-1=1-y\\ z=2\end{cases}$

解二： $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-6, Fx=2x, Fy=2y, Fz=2z, \overrightarrow{n_1}=(2,2,4)$

取 $\overrightarrow{n_1}=(1,1,2)$，　$\vec{s}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}$

$G(x,y,z)=x^2+y^2-z$，$G_x=2x$，$G_y=2y$，$G_z=-1$

$\overrightarrow{n_2}=(2,2,-1)$

s_1 切平面：$1\cdot(x-1)+1\cdot(y-1)+2(z-2)=0$ 即 $x+y+2z-6=0$

s_2 切平面：$2(x-1)+2(y-1)-(z-2)=0$ 即：$2x+2y-z-2=0$

所以切线方程为 $\begin{cases}x+y+2z-6=0\\ 2x+2y-z-2=0\end{cases}$

2．过直线 $\begin{cases}10x+2y-2z=27,\\ x+y-z=0\end{cases}$ 作曲面 $3x^2+y^2-z^2=27$ 的切平面，求其方程.

解： 设切点为 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，切平面方程为：$3x_0x+y_0y-z_0z-27=0$……①

过已知直线的平面束方程为 $10x+2y-2z-27+\lambda(x+y-z)=0$

即：$(10+\lambda)x+(2+\lambda)y+(-\lambda-2)z-27=0$……②

当①②为同一平面时有：$10+\lambda=3x_0, 2+\lambda=y_0, -\lambda-2=-z_0$

且 $3x_0^2+y_0^2-z_0^2=27$

解得 $\begin{cases}x_0=3\\ y_0=1\\ z_0=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_0=-3\\ y_0=-17\\ z_0=-17\end{cases}$

对应的切平面方程为：$\begin{matrix}9x+y-z-27=0\\ 9x+17y-17z+27=0\end{matrix}$

3．证明曲面 $x^{2/3}+y^{2/3}+z^{2/3}=a^{2/3}(a>0)$ 上任意点处的切平面在各个坐标轴上的截距平方和等于 a^2 .

. **解** 设 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 为曲面上任一点

切平面方程为：$\dfrac{2}{3}x_0^{-\frac{1}{3}}(x-x_0)+\dfrac{2}{3}y_0^{-\frac{1}{3}}(y-y_0)+\dfrac{2}{3}z_0^{-\frac{1}{3}}(z-z_0)=0$

即：$x_0^{-\frac{1}{3}}x+y_0^{-\frac{1}{3}}y+z_0^{\frac{1}{3}}z=a^{\frac{2}{3}}$

令 $y=z=0$ 得 x 轴截距 $X=a^{\frac{2}{3}}x_0^{\frac{1}{3}}$，同理 $Y=a^{\frac{2}{3}}y_0^{\frac{1}{3}}$，$Z=a^{\frac{2}{3}}z_0^{\frac{1}{3}}$.

所以 $X^2+Y^2+Z^2=(x_0^{\frac{2}{3}}+y_0^{\frac{2}{3}}+z_0^{\frac{2}{3}})a^{\frac{4}{3}}=a^2$.

4．求 $f(x, y)=x^4+y^4-2x^2-2y^2+4xy$ 的极值

解 驻点：$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=4x^3-4x+4y=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=4y^3-4y+4x=0\end{cases}\Rightarrow(x,\ y)=(0,\ 0),\ \left(\sqrt{2},\ -\sqrt{2}\right),\ \left(-\sqrt{2},\ \sqrt{2}\right)$

二阶偏导：$f''_{xx}=12x^2-4,\ f''_{xy}=4,\ f''_{yy}=12y^2-4$

1．在$(0,\ 0)$点，$f''_{xx}=12x^2-4=-4<0,\ \left(f''_{xy}\right)^2-f''_{xx}\cdot f''_{yy}=16-16=0,$ 无法使用充分条件判断，

但由于在直线$y=x$上，$f(x,\ x)=2x^4\xrightarrow{\text{在 }x=0}$取极小值；

在直线$y=-x$上，$f(x,\ -x)=2x^4-8x^2\xrightarrow{\text{在 }x=0}$取极大值.

所以$(0,\ 0)$不是极值点.

2．在$\left(\sqrt{2},\ -\sqrt{2}\right)$点，

$f''_{xx}=12x^2-4=20>0,\ \left(f''_{xy}\right)^2-f''_{xx}\cdot f''_{yy}=-384<0,$ 为极小值点，且$f\left(\sqrt{2},\ -\sqrt{2}\right)=-8$

3．在$\left(-\sqrt{2},\ \sqrt{2}\right)$点，

$f''_{xx}=12x^2-4=20>0,\ \left(f''_{xy}\right)^2-f''_{xx}\cdot f''_{yy}=-384<0,$ 为极小值点，且$f\left(-\sqrt{2},\ \sqrt{2}\right)=-8$

故$f(x,\ y)$存在极小值$f\left(-\sqrt{2},\ \sqrt{2}\right)=-8$.

5．求函数$f(x,y)=x^2+y^2-12x+16y$在区域$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 25\}$上的最大值和最小值.

解 $\begin{cases}fx=2x-12=0\\ fy=2y+16=0\end{cases}\quad\begin{cases}x=6\\ y=-8\end{cases}$ 不在D内，所以D内无极值点.

在边界$x^2+y^2=25$上，$f(x,y)=25-12x+16y$

$L(x,y)=25-12x+16y+\lambda\left(x^2+y^2-25\right)$

$\begin{cases}Lx=-12+2\lambda x=0\\ Ly=16+2\lambda y=0\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=3\\ y=-4\end{cases}\quad\begin{cases}x=-3\\ y=4\end{cases}$，$x^2+y^2=25$

$f(3,-4)=-75$ 最小，$f(-3,4)=125$ 最大.

6．在过点$P(1,3,6)$的所有平面中，求一平面，使之与三个坐标平面所围四面体的体积最小.

解：设平面方程为$Ax+By+Cz=1$，其中A,B,C均为正，则它与三坐标平面围成四面体的体积为

$V=\dfrac{1}{6}\dfrac{1}{ABC}$，且$A+3B+6C=1$，令

$F(A,B,C,\lambda)=ABC+\lambda(A+3B+6C-1)$，则由

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial A} = BC + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial A} = AC + 3\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial A} = AB + 6\lambda = 0 \\ A + 3B + 6C = 1 \end{cases}$$，求得 $$\begin{cases} A = \dfrac{1}{3} \\ B = \dfrac{1}{9} \\ C = \dfrac{1}{18} \end{cases}$$．由于问题存在最小值，

因此所求平面方程为$\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{9} + \dfrac{z}{18} = 1$，且$V_{\min} = \dfrac{1}{6} \times 3 \times 9 \times 18 = 81$．

第四次作业

学院__________班级__________姓名__________学号__________

一、单项选择题

1．设 $f(x,y)$ 连续，且 $f(x,y)=xy+\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由 $y=0$，$y=x^2$，$x=1$所围区域，则 $f(x,y)$ 等于(C).

（A）xy；（B）$2xy$；（C）$xy+\dfrac{1}{8}$；（D）$xy+1$.

2．设 D 是 xOy 平面上以(1, 1), (-1, 1)和(-1, -1)为顶点的三角形区域，D_1 是 D 的第一象限部分，则 $\iint\limits_D(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 等于(A).

（A）$2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；（B）$2\iint\limits_{D_1}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；

（C）；$4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ （D）0.

3．设平面区域 $D:1\le x^2+y^2\le 4$, $f(x,y)$ 是在区域 D 上的连续函数，则 $\iint\limits_D f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 等于 (A).

（A）$2\pi\int_1^2 rf(r)\mathrm{d}r$；（B）$2\pi\left[\int_0^2 rf(r)\mathrm{d}r+\int_0^1 rf(r)\mathrm{d}r\right]$；

（C）$2\pi\int_1^2 rf(r^2)\mathrm{d}r$；（D）$2\pi\left[\int_0^2 rf(r^2)\mathrm{d}r+\int_0^1 rf(r^2)\mathrm{d}r\right]$.

4．设有空间区域 $\Omega_1: x^2+y^2+z^2\le R^2,\ z\ge 0$ 及 $\Omega_2: x^2+y^2+z^2\le R^2$，$x\ge 0$，$y\ge 0$，$z\ge 0$，则 (C).

（A）$\iiint\limits_{\Omega_1}x\mathrm{d}V=4\iiint\limits_{\Omega_2}x\mathrm{d}V$；（B）$\iiint\limits_{\Omega_1}y\mathrm{d}V=4\iiint\limits_{\Omega_2}y\mathrm{d}V$；

（C）$\iiint\limits_{\Omega_1}z\mathrm{d}V=4\iiint\limits_{\Omega_2}z\mathrm{d}V$；（D）$\iiint\limits_{\Omega_1}xyz\mathrm{d}V=4\iiint\limits_{\Omega_2}xyz\mathrm{d}V$.

二、填空题

1．积分 $\int_0^2\mathrm{d}x\int_x^2 \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=\underline{\dfrac{1}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-4}\right)}$.

2．交换积分次序：$\int_0^1\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^4\mathrm{d}x\int_{x-2}^{\sqrt{x}}f(x,y)\mathrm{d}y=\underline{\int_{-1}^2\mathrm{d}y\int_{y^2}^{y+2}f(x,y)\mathrm{d}x}$.

3．设区域 D 为 $|x|+|y|\le 1$，则 $\iint\limits_D(|x|+|y|)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\underline{\dfrac{4}{3}}$.

4．设区域 D 为 $x^2+y^2\le R^2$，则 $\iint\limits_D\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\underline{\dfrac{\pi R^4}{4}\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)}$.

5．直角坐标中三次积分 $I=\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}f(x,y,z)\mathrm{d}z$ 在柱面坐标中先 z 再 r 后 θ 顺序的三次积分是 $\underline{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}r\int_0^{r^2}f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)r\mathrm{d}z}$

三、计算题

1．$\iint|x^2+y^2-4|\mathrm{d}\sigma$，其中 D 为圆域 $x^2+y^2\le 9$

解 将区域 D 分为 D_1, D_2，其中

$D_1=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 4\right\}, D_2=\left\{(x,y)\mid 4\le x^2+y^2\le 9\right\}$.于是

$$\iint_D |x^2+y^2-4|\mathrm{d}\sigma=\iint_{D_1}(4-x^2-y^2)\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_2}(x^2+y^2-4)\mathrm{d}\sigma$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2(4-r^2)rdr+\int_0^{2\pi}d\theta\int_2^3(r^2-4)rdr$$

$$=2\pi(2r^2-\frac{1}{4}r^4)\Big|_0^2+2\pi(\frac{1}{4}r^4-2r^2)\Big|_2^3$$

$$=\frac{41}{2}\pi$$

2．计算 $\iint_D \frac{x\sin y}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由 $y=x^2$ 和 $y=x$ 所围成的区域.

解 求 $y=x^2$ 和 $y=x$ 的交点 $(0,0),(1,1)$，先对 x 后对 y 积分，积分区域为

$$D:\begin{cases}y\le x\le\sqrt{y}\\0\le y\le 1\end{cases}$$

$$\iint_D\frac{x\sin y}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{y}}x\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\sin y}{y}\left(\frac{y}{2}-\frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\sin y\mathrm{d}y-\frac{1}{2}\int_0^1 y\sin y\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}(1-\cos 1)+\frac{1}{2}(\cos 1-\sin 1)$$

$$=\frac{1}{2}(1-\sin)$$

3．计算 $\iint_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 2,\sqrt{2x-x^2}\le y\le\sqrt{4-x^2}\}$.

解 极坐标为 $D:\begin{cases}2\cos\theta\le r\le 2\\0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\end{cases}$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{2\cos\theta}^2 r^2\cdot r\mathrm{d}r=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{r^4}{4}\right]_{2\cos\theta}^2\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\left(1-\cos^4\theta\right)\mathrm{d}\theta$$

$$=4\cdot\frac{\pi}{2}-4\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=2\pi-\frac{3\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$$

4．计算 $\iiint_\Omega xy^2z^3\mathrm{d}V$，其中 Ω 是由曲面 $z=xy$ 与平面 $y=x, x=1$ 和 $z=0$ 所围成的闭或区域.

解 将积分区域 Ω 视为 xy 型域

$$\Omega=\{(x,y,z)\big|0\le z\le xy,(x,y)\in D_{xy}\}$$

其中 Dxy 是 Oxy 平面上的区域

$$Dxy=\{(x,y)\big|0\le y\le x,0\le x\le 1\}$$

$$\iiint\limits_{\Omega} xy^2z^3\mathrm{d}V = \int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^x y^2\mathrm{d}y\int_0^{xy} z^3\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^1 x^5\left[\frac{y^7}{7}\right]_0^x \mathrm{d}x = \frac{1}{28}\int_0^1 x^{12}\mathrm{d}x = \frac{1}{28}\times\frac{1}{13} = \frac{1}{3}$$

5． $I = \iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv, \Omega$ 是由曲线 $y^2 = 2z$，$x = 0$ 绕 z 轴旋转一周而成的曲面与两平面 $z = 2, z = 8$ 所围的立体.

解：旋转曲面方程 $x^2+y^2 = 2z$，$2 \le z \le 8$

使用柱面坐标，在柱面坐标系中，$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$

$$D(z): x^2+y^2 \le 2z \Rightarrow r^2 \le 2z \Rightarrow 0 \le r \le \sqrt{2z}$$

$$I = \int_2^8 dz\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\sqrt{2z}} r^2\cdot rdr = 336\pi$$

6．设 $f(x,y)$ 在 $x^2+y^2 \le 1$ 上连续，求证：$\lim\limits_{R\to 0}\frac{1}{R^2}\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} f(x,y)d\sigma = \pi f(0,0)$

证明 设 $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le R^2\}$

由重积分中值定理，$\exists(\xi,\eta)\in D$，使得 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)\sigma = \pi R^2 f(\xi,\eta)$，

当 $R \to 0$ 时，$(\xi,\eta) \to (0,0)$

由 f 的连续性，知 $\lim\limits_{R\to 0} f(\xi,\eta) = f(0,0)$，从而有：

$$\lim_{R\to 0}\frac{1}{R^2}\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

$$= \lim_{R\to 0}\frac{1}{R^2}\pi R^2 f(\xi,\eta) = \pi\lim_{R\to 0} f(\xi,\eta) = \pi f(0,0)$$

四、证明题

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续且恒大于零，证明

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{f(x)} \ge (b-a)^2 .$$

分析：左 $= \int_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x\int_a^b \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{f}\left(\mathrm{y}\right)} = \iint\limits_D \frac{f\left(x\right)}{f\left(y\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

左 $= \int_a^b f\left(y\right)\mathrm{d}y\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{f\left(x\right)} = \iint\limits_D \frac{f\left(y\right)}{f\left(x\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

所以，左 $= \frac{1}{2}\iint\limits_D\left[\frac{f\left(x\right)}{f\left(y\right)} + \frac{f\left(y\right)}{f\left(x\right)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

右$=(b-a)^2=\iint\limits_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

其中 $D=\{(x,y)|a\le x\le b,a\le y\le b\}$

只须证：$\dfrac{f(x)}{f(y)}+\dfrac{f(y)}{f(x)}\ge 2$,即$\left(\sqrt{\dfrac{f(x)}{f(y)}}-\sqrt{\dfrac{f(y)}{f(x)}}\right)^2\ge 0$

证明：设$D:\begin{cases}a\le x\le b\\ a\le y\le b\end{cases}$

因为 $\iint\limits_D\left[\sqrt{\dfrac{f(x)}{f(y)}}-\sqrt{\dfrac{f(y)}{f(x)}}\right]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ge 0$

即：$\iint\limits_D\left[\dfrac{f(x)}{f(y)}+\dfrac{f(y)}{f(x)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ge\iint\limits_D 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

所以$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b\dfrac{1}{f(y)}\mathrm{d}y+\int_a^b f(y)\mathrm{d}y\cdot\int_a^b\dfrac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\ge 2(b-a)^2$

$2\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b\dfrac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\ge 2(b-a)^2$, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b\dfrac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\ge(b-a)^2$

第五次作业

学院____________班级____________姓名____________学号____________

一、单项选择题

1．设 L 是圆周 $x^2+y^2=a^2$，则 $\oint_L (x^2+y^2)^n \mathrm{d}s=$（ D ）．

（A）$2\pi a^n$；（B）$2\pi a^{n+1}$；（C）$2\pi a^{2n}$；（D）$2\pi a^{2n+1}$．

2．设 L 是由(0, 0), (2, 0), (1, 1)三点连成的三角形边界曲线，则 $\oint_L y\mathrm{d}s=$（A ）.

（A）$\sqrt{2}$；（B）$2+\sqrt{2}$；（C）$2\sqrt{2}$；（D）$2+2\sqrt{2}$．

3．设 Σ 是锥面 $x^2+y^2=z^2$ 在 $0\le z\le 1$ 的部分，则 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}S=$(D).

（A）$\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r$；（B）$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r$；

（C）$\sqrt{2}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r$；（D）$\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r$．

4．设 Σ 为 $x^2+y^2+z^2=a^2\ (z\ge 0)$，$\Sigma_1$ 是 Σ 在第一卦限中的部分，则有(C).

（A）$\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}S=4\iint\limits_{\Sigma_1}x\mathrm{d}S$；（B）$\iint\limits_{\Sigma}y\mathrm{d}S=4\iint\limits_{\Sigma_1}x\mathrm{d}S$；

（C）$\iint\limits_{\Sigma}z\mathrm{d}S=4\iint\limits_{\Sigma_1}x\mathrm{d}S$；（D）$\iint\limits_{\Sigma}xyz\mathrm{d}S=4\iint\limits_{\Sigma_1}xyz\mathrm{d}S$．

二、填空题

1．设 $L: x^2+y^2=1, y\ge 0$ 则 $\int_L e^{x^2+y^2}\arctan\sqrt{x^2+y^2}\,ds=$________. $\dfrac{e}{4}\pi^2$．

2．$L:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，周长为 a，则 $\oint_L(2xy+3x^2+4y^2)\mathrm{d}s=$ __$12a$__.

3．设 Γ 表示曲线弧 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos t, y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin t, z=\dfrac{t}{2}, (0\le t\le 2\pi)$，则

$\int_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\underline{\dfrac{3}{2}\pi+\dfrac{2}{3}\pi^3}$．

4．设 Σ 是柱面 $x^2+y^2=a^2\ (a>0)$ 在 $0\le z\le h$ 之间的部分，则 $\iint\limits_{\Sigma}x^2\mathrm{d}S=\underline{\pi a^3 h}$．

5．设 Σ 是上半椭球面 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}+z^2=1\,(z\ge 0)$，已知 Σ 的面积为 A，则

$\iint\limits_{\Sigma}(4x^2+9y^2+36z^2+xyz)\mathrm{d}S=\underline{36A}$.

三、计算题

1．计算 $\oint_L \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$，直线 $y=x$ 及 x 轴在第一象限内所围成的扇形的整个边界.

解：

$L=L_1+L_2+L_3$

$L_1: y=0,\quad 0\le x\le a \qquad L_2: x^2+y^2=a^2$

$L_3: y=x, 0\le x\le \dfrac{a}{2}$

$\int\limits_{L_1} e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds=\int_0^a e^x dx=e^a-1$; $\int\limits_{L_2} e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds=\int\limits_{L_2} e^a ds=\dfrac{\pi a}{4}e^a$; $\int\limits_{L_3} e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a} e^{\sqrt{2}x}\sqrt{2}dx=e^a-1$

所以 $\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds=2(e^a-1)+\dfrac{\pi a}{4}e^a$

2．计算$\oint_\Gamma z^2 ds$，其中$\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2,\\ x+y+z=0.\end{cases}$.

解 因为$\oint_\Gamma x^2 ds=\oint_\Gamma y^2 ds=\oint_\Gamma z^2 ds$，

所以$\oint_\Gamma z^2 ds=\dfrac{1}{3}\oint_\Gamma (x^2+y^2+z^2)ds=\dfrac{1}{3}\oint_\Gamma a^2 ds=\dfrac{1}{3}a^2\cdot 2\pi a=\dfrac{2}{3}\pi a^3$

3．计算$I=\iint\limits_\Sigma |xyz|dS \quad \sum: z=x^2+y^2$被$z=1$所截下部分

解 由于被积分区域$\sum$关于xoz和yoz对称，而$|xyz|$为偶函数，所以

$I=4\iint\limits_{\Sigma_1} xyz dS$，其中$\Sigma_1$为第一卦限部分曲面. $D_1=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}$

$$=4\iint\limits_{D_1} xy(x^2+y^2)\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta d\theta\int_0^1 r^5\sqrt{1+4r^2}dr$$

$$=2\int_0^1 r^5\sqrt{1+4r^2}dr$$

$$=\frac{1}{4}\int_1^5\sqrt{u}\left(\frac{u-1}{4}\right)^2 du=\frac{125\sqrt{5}-1}{420}.$$

此处设$u=1+4r^2$

4．求$I=\iint\limits_S \dfrac{dS}{x^2+y^2+z^2}$ ，其中S是介于$z=0, z=H$之间的圆柱面$x^2+y^2=R^2$

解 $I=2\iint\limits_{S_1}\dfrac{dS}{x^2+y^2+z^2} \qquad S_1:\begin{cases}x=\sqrt{R^2-y^2}\\ 0\le z\le H, -R\le y\le R\end{cases}$

而$x'_y=-\dfrac{y}{\sqrt{R^2-y^2}}, x'_z=0$

则 $I=2\iint\limits_D \dfrac{1}{(R^2-y^2)+y^2+z^2}\sqrt{1+0+\dfrac{y^2}{R^2-y^2}}dydz$

$$=2R\int_0^H\frac{dz}{z^2+R^2}\int_{-R}^R\frac{dy}{\sqrt{R^2-y^2}}=2\pi\arctan\frac{H}{R}$$

四、应用题

1．求柱面 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ 被球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 包围部分的面积 S

解 根据第一类曲线积分的几何意义：如 $\sum$ 是以 L 为准线，母线平行于 z 轴的柱面，介于平面 $z=0$ 和曲面 $z=f\left(x,\ y\right)$ $\left[f\left(x,\ y\right)\geq 0\right]$ 之间的部分，则 $\int_L f(x,y)ds$ 的值就是柱面 $\sum$ 的侧面积.则

$$S=\oint_L\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}s=8\int_{L_1}\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}s$$

其中： $L:\begin{cases}x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1\\ z=0\end{cases}$， L_1 是 L 的第一象限部分。取 L_1 参数方程

$$\begin{cases}x=\cos^3\theta\\ y=\sin^3\theta\end{cases}\quad\left(0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}S&=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\cos^6\theta-\sin^6\theta}\cdot\sqrt{\left(-3\cos^2\theta\sin\theta\right)^2+\left(3\sin^2\theta\cos\theta\right)^2}\cdot d\theta\\
&=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)\left(\cos^4\theta-\cos^2\theta\sin^2\theta+\sin^4\theta\right)}\cdot 3\sin\theta\cos\theta d\theta\\
&=24\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\cos^4\theta+\cos^2\theta\sin^2\theta-\sin^4\theta}\cdot\sin\theta\cos\theta d\theta\\
&=24\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\sin\theta\cos\theta\right]^2 d\theta=6\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\theta d\theta=6\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 4\theta}{2}d\theta=\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi\end{aligned}$$

2．求面密度 $\rho=1$ 的均匀半球壳 $x^2+y^2+z^2=a^2\ (z\geq 0)$ 关于 z 轴的转动惯量.

解

$$I_z=\iint_\Sigma(x^2+y^2)\rho_0\mathrm{d}s$$

$$\Sigma: z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}\ .\quad D_{xy}: x^2+y^2\leq a^2.\quad \mathrm{d}s=\frac{R\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

$$\begin{aligned}I_z&=\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\cdot\rho_0\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\rho_0 R\cdot\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R r^2\cdot\frac{r}{\sqrt{R^2-r^2}}\mathrm{d}r\\
&=2\pi\rho_0 R\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}R^3\sin^3 t\cdot\frac{R\cos t}{R\cos t}\mathrm{d}t\\
&=2\pi\rho_0 R^4\cdot\frac{2}{3}\cdot 1\end{aligned}$$

$$\left(r=R\sin t,\mathrm{d}r=R\cos t\mathrm{d}t, r\big|_0^R\leftrightarrow t\big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)$$

第六次作业

学院____________班级____________姓名____________学号____________

一、单项选择题

1．设 L 是圆周 $x^2+y^2=a^2\ (a>0)$ 负向一周，则曲线积分

$\oint_L (x^3-x^2y)\mathrm{d}x+(xy^2-y^3)\mathrm{d}y=$（ B ）.

（A）0；（B）$-\dfrac{\pi a^4}{2}$；（C）$-\pi a^4$；（D）πa^4.

2．设 L 是椭圆 $4x^2+y^2=8x$ 沿逆时针方向，则曲线积分 $\oint_L \mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=$（ A ）.

（A）2π；（B）π；（C）1；（D）0.

3.设 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧，则曲面积分

$\displaystyle\oiint_\Sigma \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(z^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=$（D）.

（A）0；（B）1；（C）2π；（D）4π.

4．已知 $\dfrac{(x+ay)\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{(x+y)^2}$ 为某函数的全微分，则 $a=$（B ）正确.

（A）-1；（B）0；（C）2（D）1.

二、填空题

1．设 L 为 $x^2+(y-1)^2=4$ 正向一周，则 $\oint_L \dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+(y-1)^2}=\underline{2\pi}$.

2．设 L 为封闭折线 $|x|+|y|=1$ 正向一周，则 $\oint_L x^2y^2\mathrm{d}x-\cos(x+y)\mathrm{d}y=\underline{\ \ 0\ \ }$.

3．设 L 为 $y=\int_0^x \tan t\mathrm{d}t$ 从 $x=0$ 到 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 一段弧，将 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 化为第一型曲线积分为 $\underline{\int_L (P\cos x+Q\sin x)\mathrm{d}s}$.

4．设 Σ 是平面 $3x+2y+2\sqrt{3}z=6$ 在第一卦限部分的下侧，则 $I=\iint_\Sigma P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 化为对面积的曲面积分为 $I=\underline{\iint_\Sigma -\frac{1}{5}(3P+2Q+2\sqrt{3}R)dS}$.

5．设 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$，法向量向外，则 $\oiint_\Sigma x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\underline{\ \ \frac{4}{5}\pi a^5\ \ }$.

6．设 $u=x^2+2y+yz$，则 $\mathrm{div}(\mathrm{grad}u)=\underline{\ \ 2\ \ }$.

三、计算题

1．计算 $\int_L y^2\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y$，其中 L 是抛物线 $y=x^2$ 上从点 $A(1,1)$ 到 $B(-1,1)$，再沿直线到 $C(0,2)$ 的曲线.

解 $\int_L y^2\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=\int_{\overline{AB}} y^2\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y+\int_{\overline{BC}} y^2\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y$

$\overrightarrow{AB}:\begin{cases}x=x\\ y=x^2\end{cases}$， $x:1\to -1$ $\mathrm{d}y = 2x$

$\therefore \int_{\overline{AB}} y^2\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y = \int_1^{-1}(x^4 - x\cdot 2x)\mathrm{d}x$

$= -2\int_0^1 (x^4 - 2x^2)\mathrm{d}x = -2\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{3}\right) = \frac{14}{15}$

$\overline{BC}:\begin{cases}x=x\\ y=x+2\end{cases}$ $x:-1\to 0$ $\mathrm{d}y=\mathrm{d}x$

$\therefore \int_{\overline{BC}} y^2\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y = \int_{-1}^{0}(x+2)^2\mathrm{d}x - \int_{-1}^{0} x\cdot\mathrm{d}x = \left[\frac{(x+2)^3}{3}\right]_{-1}^{0} - \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} = \frac{7}{3}+\frac{1}{2}=\frac{17}{6}$

原 $=\frac{14}{15}+\frac{17}{6}=\frac{113}{30}$

2．计算 $\int_L (x^2-y)\mathrm{d}x-(x+\sin y)\mathrm{d}y$，其中 L 是圆周 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 上从 $A(2,0)$ 到 $O(0,0)$ 的一段弧.

解一：补充 $\overline{OA}$，则 $L+\overline{OA}$ 构成闭曲线（正向），

由 Green 公式：$\oint_{L+\overline{OA}}(x^2-y)\mathrm{d}x-(x+\sin y)\mathrm{d}y=\iint\limits_{\mathrm{D}} 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$

而 $\int_{\overline{OA}}(x^2-y)\mathrm{d}x-(x+\sin y)\mathrm{d}y=\int_0^2 x^2\mathrm{d}x=\frac{8}{3}$· $\therefore$ 原 $=0-\frac{8}{3}=-\frac{8}{3}$

解二：$P=x^2-y, Q=-(x+\sin y)$ 在 xoy 面内有一阶连续偏导，且

$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=-1$ 所以曲线积分与路径无关，则

$$\int_L (x^2-y)\mathrm{d}x-(x+\sin y)\mathrm{d}y=\int_{\overline{AO}}(x^2-y)\mathrm{d}x-(x+\sin y)\mathrm{d}y=\int_2^0 x^2\mathrm{d}x=\left[\frac{x^3}{3}\right]_2^0=-\frac{8}{3}.$$

3．设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有一阶连续导数，L 是半平面 $(y>0)$ 内的有向分段光滑曲线，其起点为 (a,b)，终点为 (c,d)．证明

$$I=\int_L \frac{1}{y}[1+y^2f(xy)]\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]\mathrm{d}y$$

（1）证明曲线积分 I 与路径 L 无关

（2）当 $ab=cd$ 时，求 I 的值

证明（1） $P=\frac{1}{y}[1+y^2f(xy)],\quad Q=\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]$

$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=f(xy)-\frac{1}{y^2}+xyf'(xy)$，所以曲线积分 I 与路径 L 无关

解：（2）由于与路径无关，取折线段 (a,b) 到 (c,b)，以及 (c,b) 到 (c,d)

利用 $ab=cd$，则

$I=\int_L \frac{1}{y}[1+y^2f(xy)]\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]\mathrm{d}y$

$=\int_a^c \frac{1}{b}\left(1+b^2f(bx)\right)\mathrm{d}x+\int_b^d \frac{c}{y^2}\left(y^2f(cy)-1\right)\mathrm{d}y$

$=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}$

4．设力 $\boldsymbol{F}=\dfrac{-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}}{y^2}$，证明力 F 在上半平面内所作的功与路径无关，并求从点 $A(1,2)$ 到点 $B(2,1)$ 力 F 所作的功.

（1）证明 $\omega=\int_{\overline{AB}}-\dfrac{1}{y}\mathrm{d}x+\dfrac{x}{y^2}\mathrm{d}y$

$$P=-\frac{1}{y},Q=\frac{x}{y^2} \text{ 在 } y>0 \text{ 有一阶连续偏导，且 } \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{1}{y^2}.$$

所以 F 在上半平面内所作的功与路径无关.

（2）取积分路径为折线 $A-C(1,1)-B$ 则

$$\omega=\left(\int_{\overline{AC}}+\int_{\overline{CB}}\right)\left(-\frac{1}{y}\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}y=\int_{\overline{AC}}\frac{x}{y^2}\mathrm{d}y+\int_{\overline{CB}}-\frac{1}{y}\mathrm{d}x$$

$$=\int_2^1\frac{1}{y^2}\mathrm{d}y+\int_1^2-1\mathrm{d}x=-\left[\frac{1}{y}\right]_2^1-1=-\frac{3}{2}.$$

5．计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是曲面 $z=1-x^2-y^2\ (z\geq 0)$ 的上侧.

解：投影域 $D_{xy}:x^2+y^2\leq 1$，用合一投影法

$$I=\iint\limits_{\Sigma}2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\left[4x^4+4y^4+3(\left(1-x^2-y^2\right)^2-1)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\pi$$

6．计算 $\iint\limits_{\Sigma}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是抛物面 $z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$ 介于平面 $z=0$ 与 $z=2$ 之间部分的下侧.

解一（合一投影法），$D_{xy}=\{(x,y)|\ x^2+y^2\leq 4\}$，$z_x=x$，$\Sigma$ 取下侧，由公式得

$$\iint\limits_{\Sigma}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{D_{xy}}\left\{\left[\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2+x\right](-x)-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\left[\frac{1}{4}x(x^2+y^2)^2+x^2+\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^3\mathrm{d}r=8\pi$$

解二：（Gauss 公式），补充 $\Sigma_0:z=2$ 上侧 $(x^2+y^2\leq 4)$，则 $\Sigma+\Sigma_0$ 成闭曲面（外侧），由 Gauss 公式，得

$$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_0}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}0\mathrm{d}V=0$$

而 $\iint\limits_{\Sigma_0}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{xy}}-2\cdot\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\cdot\pi\cdot 2^2=-8\pi$.

所以 $\iint\limits_{\Sigma}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0-(-8\pi)=8\pi$.

7．计算 $I=\oint_{\Gamma}-y^2\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+z^2\mathrm{d}z$，其中 Γ 是平面 $y+z=2$ 与柱面 $x^2+y^2=1$ 的交线，从 z 轴正向

看去，Γ取逆时针方向.

解 设$\Sigma: y+z=2. x^2+y^2 \le 1$，取上侧由 stokes 公式：

$$I=\oint_{\Gamma}-y^2\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+z^2\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\,\mathrm{d}\,x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & x & z^2\end{vmatrix}$$

$$=\iint_{\Sigma}(1+2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_{xy}}(1+2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi \qquad \text{其中}\iint_{D_{xy}}2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

阶段测试题

学院____________班级____________姓名____________学号

一、单项选择题（每小题 3 分，满分 18 分）

1．二元函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续，且 $f_x'(x_0,y_0)$、 $f_y'(x_0,y_0)$ 存在是 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微的（ B ）条件.

（A）充分　　（B）必要　　（C）充分必要　　（D）非充分非必要

2．已知 $f_x(x,y)$、 $f_y(x,y)$ 在（0，0）连续，则 $z=f(x,y)$ 在（0，0）处， $\phi(x)=f(x,0)$ 在 $x=0$ 处（　A ）.

（A）均连续　　（B）均不一定连续

（C）均不连续　　（D） $\phi(x)$ 一定连续， $f(x,y)$ 不一定连续

3．设 L 为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的顺时针方向，则 $\oint_{\mathrm{L}}(x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y=$（ A）.

（A） $2\pi ab$　　（B） $-2\pi ab$　　（C） 0　　（D） 2π

4．设 D 由 $y=\sqrt{1-x^2}$ 和 $y=0$ 围成，则 $\iint\limits_D(\mathrm{e}^y\sin x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$（　C　）.

（A）0　　（B）1　　（C）2/3　　（D）4/3

5．设 $\varOmega$ 由 $z=x^2+y^2, x^2+y^2+z^2=2\quad(z\ge 0)$ 围成，则三重积分 $\iiint\limits_{\varOmega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V$ 化为柱面坐标系下三次积分为（　D　）.

（A） $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2}r\mathrm{d}r\int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}}(r^2+z^2)\mathrm{d}z$　　（B） $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}r\mathrm{d}r\int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}}(r^2+z^2)\mathrm{d}z$

（C） $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{1}r\mathrm{d}r\int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}}2\mathrm{d}z$　　（D） $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{1}r\mathrm{d}r\int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}}(r^2+z^2)\mathrm{d}z$

6．设 $\varOmega: x^2+y^2+z^2\le 1. \varSigma: x^2+y^2+z^2=1. r: x^2+y^2+z^2=1$， $x=0(y\ge 0)$ 由（0，0，−1）到（0，0，1）则以下计算（　D　）错误.

（A） $\iiint\limits_{\varOmega}z\mathrm{d}V=0$　　（B） $\iint\limits_{\varSigma}z\mathrm{d}S=0$（C） $\int_r z\mathrm{d}s=0$　　（D） $\int_r z\mathrm{d}y=0$

二、填空题（每小题 3 分，满分 21 分）

1．已知 $f(x,y)=\mathrm{e}^{3x}\ln 2y$，则 $f_x'(0,\frac{1}{2})=$___0___， $f_{yy}''(0,1)=$___-1___.

2． $u=xy^2+z^3-xyz$ 在点 $M(1,1,1)$ 处沿 $\bar{l}=$__（0 ,1 ,2）__方向的方向导数最大，方向导数的最大为 $\underline{\sqrt{5}}$.

3．设 $u=\dfrac{1}{2}[\phi(x+at)+\phi(x-at)]+\dfrac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}f(t)\mathrm{d}t$，其中 $f,\phi\in C^{(2)}$，则 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=$___0___.

4．设 $\varOmega$ 为由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$， $z=2$ 围成的空间区域， a 为常数，则 $\iiint\limits_{\varOmega}a\mathrm{d}V=\underline{\dfrac{8}{3}\pi a}$.

5．L 为上半圆周 $y=\sqrt{1-x^2}$，则 $\int_L (x+y)^2 e^{x^2+y^2} ds = \underline{e\cdot\pi}$.

6．设 Σ 是柱面 $x^2+y^2=1$ 在 $0\le z\le 2$ 之间的部分，则 $\iint\limits_{\Sigma} y^2 dS = \underline{2\pi}$.

7．设 $I=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}R} dx\int_0^x f(x,y)dy+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}R}^{R} dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y)dy$，改变积分次序

$I=\underline{\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}R} dy\int_y^{\sqrt{R^2-y^2}} f(x,y)dx}$；化为极坐标下二次积分为 $I=\underline{\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta\int_0^R f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr}$.

三、解答题（每小题 8 分，满分 48 分）

1． $z=f(2x-y, y\sin x)+xg(e^x\ln y)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，g 具有二阶导数.求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解： $z=f(2x-y, y\sin x)+xg(e^x\ln y)$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot 2+f_2'\cdot y\cos x+g+x\cdot g'\cdot e^x\cdot \ln y$$
$$=2f_1'+\cos xyf_2'+xe^x\ln y\cdot g'+g$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2[f_{11}''(-1)+f_{12}'\sin x]+\cos\cdot f_2'+\cos xy[f_{21}''(-1)+f_{22}''\cdot\sin x]$$
$$+xe^x\left[\frac{1}{y}g'+\ln y\cdot g''\cdot e^x\cdot\frac{1}{y}\right]+g'\cdot e^x\cdot\frac{1}{y}$$
$$=-2f_{11}''+(2\sin x-y\cos x)f_{12}''+y\sin x\cos xf_{22}''+\cos xf_2'+(x+1)\cdot\frac{e^x}{y}g'+\frac{xe^{2x}}{y}\ln yg''$$

2．已知 $y=e^{ty}+x$，而 t 是由方程 $y^2+t^2-x^2=1$ 确定的 x,y 的函数，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

解法 1： $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=e^{ty}\left(y\dfrac{dt}{dx}+t\dfrac{dy}{dx}\right)+1\\ 2y\cdot\dfrac{dy}{dx}+2t\dfrac{dt}{dx}-2x=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}(1-te^{ty})\dfrac{dy}{dx}-ye^{ty}\dfrac{dt}{dx}=1\\ y\dfrac{dy}{dx}+t\dfrac{dt}{dx}=x\end{cases}$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\begin{vmatrix}1 & -ye^{ty}\\ x & t\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1-te^{ty} & -ye^{ty}\\ y & t\end{vmatrix}}=\frac{t+xye^{ty}}{t+(y^2-t^2)e^{ty}}$$

解法 2： 在方程组两边求微分，及：$\begin{cases}dy=e^{ty}(ydt+tdy)+dx\cdots(1)\\ 2ydy-2tdt-2xdx=0\cdots(2)\end{cases}$

由（2）$dt=\dfrac{xdx-ydy}{t}$ 代入（1）

$dy=e^{ty}\left(y\cdot\dfrac{xdx-ydy}{t}+tdy\right)+dx$， 整理得 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{t+xye^{ty}}{t+(y^2-t^2)e^{ty}}$

3．计算 $\iint\limits_D \dfrac{\cos y}{y}dxdy$，其中 D 由 $y=\sqrt{x},\ y=x$ 围成.

解： 由 $y=\sqrt{x},\ y=x$ 得交点 $O(0,0), A(1,1)$，区域 $D:\begin{cases}y^2\le x\le y\\ 0\le y\le 1\end{cases}$

$$\iint_D \frac{\cos y}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}y\int_{y^2}^{y}\frac{\cos y}{y}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\cos y}{y}(y-y^2)\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 \cos y\mathrm{d}y - \int_0^1 y\cos y\mathrm{d}y$$

$$= [\sin y]_0^1 - [y\sin y]_0^1 + \int_0^1 \sin y\mathrm{d}y = \sin 1 - \sin 1 - [\cos y]_0^1 = 1-\cos 1$$

4．计算 $I = \iint\limits_{\Sigma}\frac{1}{z}\mathrm{d}S$ ，其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2x$ 截得的有限部分.

解： $z=\sqrt{x^2+y^2},\ z_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ z_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \mathrm{d}S=\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$D_{xy}: x^2+y^2\le 2x,\ y\ge 0$ 即 $r=2\cos\theta,\ 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$

$$I = \iint\limits_{\Sigma}\frac{1}{z}\mathrm{d}S = 2\iint\limits_{D_{xy}}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\frac{1}{r}\cdot\sqrt{2}r\mathrm{d}r$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sqrt{2}\cos\theta\mathrm{d}\theta = 4\sqrt{2}$$

5．计算曲线积分 $\int_{ONA}(2x\sin y - y)\mathrm{d}x + (x^2\cos y - 1)\mathrm{d}y$，其中 ONA 为连接 $O(0,\ 0)$ 和 $A(2,\dfrac{\pi}{2})$ 的任何路径，但与直线 OA 围成的图形 $ONAO$ 有定面积 π .

解： $P=2x\sin y - y, Q = x^2\cos y - 1\quad \dfrac{\partial P}{\partial y} = 2x\cos y - 1, \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2x\cos y$

补充 $\overrightarrow{AO}$，则 $ONAO$ 成闭曲线（正向）

由 Green 公式，$\oint_{ONAO}(2x\sin y - y)\mathrm{d}x + (x^2\cos y - 1)\mathrm{d}y = \iint\limits_{D} 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi$

而 $OA:\begin{cases} x = x \\ y = \dfrac{\pi}{4}x\end{cases}\quad x:\ 0\to\ 2\quad \mathrm{d}y = \dfrac{\pi}{4}\mathrm{d}x$，所以

$$\int_{\overrightarrow{OA}}(2x\sin y - y)\mathrm{d}x + (x^2\cos y - 1)\mathrm{d}y = \int_0^2\left(2x\sin\frac{\pi}{4}x - \frac{\pi}{4}x + \frac{\pi}{4}x^2\cos\frac{\pi}{4}x - \frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x$$

$$\because \frac{\pi}{4}\int_0^2 x^2\cos\frac{\pi}{4}x\mathrm{d}x = \int_0^2 x^2\mathrm{d}\sin\frac{\pi}{4}x = \left[x^2\sin\frac{\pi}{4}x\right]_0^2 - \int_0^2 \sin\frac{\pi}{4}x\cdot 2x\mathrm{d}x = 4 - \int_0^2 2x\cdot\sin\frac{\pi}{4}x\mathrm{d}x$$

$$\int_{\overrightarrow{OA}}(2x\sin y - y)\mathrm{d}x + (x^2\cos y - 1)\mathrm{d}y = 4 - \int_0^2\frac{\pi}{4}x\mathrm{d}x - \int_0^2\frac{\pi}{4}\mathrm{d}x = 4-\pi$$

$$\int_{ONA}(2x\sin y - y)\mathrm{d}x + (x^2\cos y - 1)\mathrm{d}y = \pi + (4-\pi) = 4$$

6．设 $f(x)$ 连续，$F(t) = \iiint\limits_{\Omega}[z^2 + f(x^2+y^2)]\mathrm{d}V$ ，其中 $\Omega: 0\le z\le h, x^2+y^2\le t^2$ ，求 $\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$ ，$\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{F(t)}{t^2}$.

解： $F(t) = \iiint\limits_{\Omega}[z^2 + f(x^2+y^2)]\mathrm{d}V = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t r\mathrm{d}r\int_0^h [z^2 + f(r^2)]\mathrm{d}z$

$$=2\pi\int_0^t r\cdot\left[\frac{h^3}{3}+f(r^2)\cdot h\right]\mathrm{d}r$$

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}=2\pi\cdot t\left[\frac{h^3}{3}+f(t^2)\cdot h\right]$$

$$\lim_{t\to0^+}\frac{F(t)}{t^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{t\to0^+}\frac{2\pi t\left[\frac{h^3}{3}+f(t^2)h\right]}{2t}=\pi\left[\frac{h^3}{3}+f(0)h\right]$$

四、证明题（满分 6 分）

求证 $\left|\int_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z\right|\le\int_\Gamma\sqrt{P^2+Q^2+R^2}\mathrm{d}s$，并由此估计 $\left|\oint_\Gamma z\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z\right|$ 的上界，其中 Γ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线并已取定方向，P,Q,R 为连续函数.

证明： $\left|\int_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z\right|=\left|\int_\Gamma(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}s\right|$

$$\le\int_\Gamma\left|(P,Q,R)\cdot(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)\right|\mathrm{d}s$$

$$=\int_\Gamma\sqrt{P^2+Q^2+R^2}\cdot1\cdot\left|\cos\theta\right|\mathrm{d}s\le\int_\Gamma\sqrt{P^2+Q^2+R^2}\mathrm{d}s$$

$$\left|\oint_\Gamma z\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z\right|\le\oint_\Gamma\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}s=\oint_\Gamma a\mathrm{d}s=2\pi a^2$$

五、应用题（满分 7 分）

求内接于椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，且棱平行于对称轴的体积最大的长方体.

解： 设第一卦限内顶点为 $p(x,y,z)$，则长方体长、宽、高分别为 $2x$、$2y$、$2z$

$V=2x\cdot2y\cdot2z$，且 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

作 $L(x,y,z)=xyz+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)$

令 $\begin{cases}L_x=yz+\frac{2\lambda x}{a^2}=0\\L_y=xz+\frac{2\lambda y}{b^2}=0\\L_z=xy+\frac{2\lambda z}{c^2}=0\end{cases}$ （1） $L_\lambda=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$ （2）

由（1）得：$\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$，将其代入（2）

$\therefore x=\frac{a}{\sqrt3},y=\frac{b}{\sqrt3},z=\frac{c}{\sqrt3}$，由实际意义，则最大体积为 $V=8xyz=\frac{8}{9}\sqrt3abc$.

第七次作业

学院____________班级___________姓名___________学号

一、单项选择题

1．设 $0 < a_n < \dfrac{1}{n}(n=1,2,3,\cdots)$，则下列级数中肯定收敛的是（ D ）.

（A）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$；（B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$；（C）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}$；（D）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n}$.

2．若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都发散，则（ C ）.

（A）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 发散；（B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n v_n$ 发散；

（C）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(|u_n|+|v_n|)$ 发散；（D）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n^2+v_n^2)$ 发散.

3．设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则必收敛的级数为（ D ）.

（A）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{u_n}{n}$；（B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$；

（C）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$；（D）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$.

4．设 a 为常数，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\sin\alpha}{n^2}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$（ C ）.

（A）绝对收敛；（B）条件收敛；（C）发散；（D）收敛性取决于 a 的值.

5．已知函数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 在 $x=-2$ 处收敛，则在 $x=0$ 处，该级数为（ C ）.

（A）发散；（B）条件收敛；（C）绝对收敛；（D）收敛性不定.

6．幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n3^n}x^n$ 的收敛域是（ D ）.

（A）$[-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}]$；（B）$[-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3})$；（C）$[-3, 3]$；（D）$[-3,3)$.

7．2^x 展开为 x 的幂级数是（ C ）.

（A）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$；（B）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n!}x^n$；（C）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x\ln 2)^n}{n!}$；（D）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x\ln 2)^n}{n}$.

二、填空题

1．若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n=2, \sum_{n=1}^{\infty}u_{2n-1}=5$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=$ ______8______.

2．设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛半径为 2，则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x+1)^{n+1}$ 的收敛区间 （-3，1）3．幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n+(-3)^n}x^{2n}$ 的收敛半径为 $\sqrt{3}$.

4．设函数 $f(x)=x^2, x\in[0,1]$，而 $s(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x, \quad x\in(-\infty,+\infty)$，其中

$a_n=2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\mathrm{d}x, n=0,1,2,\cdots$，则 $s(-1)$ 的值为____1______.

三、计算题

1．设正项数列 $\{a_n\}$ 单调减少，且 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散，试问级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$ 是否收敛？并说明理由.

解 因为 $a_n>0$，且 $\{a_n\}$ 单调减少，所以 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$（单调有界准则），由极限性质，$a\geq 0.$

若 $a=0$，因为 $\sum(-1)^n a_n$ 为交错级数，由 Leibniz 判别法，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛，这与题设矛盾，故 $a>0.$

设 $u_n=\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n, n=1,2,\cdots,$ 有由根值判别法，

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n+1}=\frac{1}{a+1}<1. \quad \therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n \text{ 收敛}.$$

2．求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ln^n 3}{2^n}+\frac{1}{n(n+1)}\right)$ 的和.

解：$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^n 3}{2^n}=\frac{\frac{\ln 3}{2}}{1-\frac{\ln 3}{2}}=\frac{\ln 3}{2-\ln 3}，\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ln^n 3}{2^n}+\frac{1}{n(-n+1)}\right)=\frac{\ln 3}{2-\ln 3}+1=\frac{2}{2-\ln 3}$$

3．讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n n!}{n^n}$的敛散性．

解

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{a^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{a^n\cdot n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{an^n}{(n+1)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\frac{a}{\mathrm{e}}$$

当$\frac{a}{\mathrm{e}}<1$，即$a<\mathrm{e}$，级数收敛；当$\frac{a}{\mathrm{e}}>1$，即$a>\mathrm{e}$，级数发散．

当$a=\mathrm{e}$时，级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n n!}{n^n}$

$\because \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\mathrm{e}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$，而$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$单增趋于 e．$\therefore$ e 为其上确界

$\therefore\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}$． $\therefore u_{n+1}/u_n>1$． $\therefore\ u_1$=e． $\therefore\lim_{n\to\infty}u_n\neq 0.\therefore\sum\frac{e^n n!}{n^n}$级数发散

4．讨论交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot(\sqrt[n]{a}-1)$ (a >0, $a\neq$1) 是绝对收敛还是条件收敛．

解：$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}(\sqrt[n]{a}-1)\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|(\sqrt[n]{a}-1)\right|$

当$a>1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}(\sqrt[n]{a}-1)\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|(\sqrt[n]{a}-1)\right|=\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{a}-1)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{a}-1}{\dfrac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln a}-1}{\dfrac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n}\ln a}{\dfrac{1}{n}}=\ln a>0$$

当$0<a<1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}(\sqrt[n]{a}-1)\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|(\sqrt[n]{a}-1)\right|=\sum_{n=1}^{\infty}(1-\sqrt[n]{a})$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\sqrt[n]{a}}{\dfrac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln a}}{\dfrac{1}{n}}=-\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n}\ln a}{\dfrac{1}{n}}=-\ln a>0，$$

而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\cdot(\sqrt[n]{a}-1)\right|$发散．所以原级数不是绝对收敛．

当$0<a<1$时，原级数为交错级数：$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot(\sqrt[n]{a}-1)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-\sqrt[n]{a})$

设 $f(x)=1-a^{\frac{1}{x}}$， $f'(x)=\frac{1}{x^2}a^{\frac{1}{x}}\ln a<0$，所以 $f(x)$ 单调减少，

因此，$0<u_{n+1}=1-\sqrt[n+1]{a}<1-\sqrt[n]{a}=u_n$，

而 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\sqrt[n]{a})=0$． $\therefore\sum(-1)^n(1-\sqrt[n]{a})$ 收敛

当 $a>1$ 时，原级数为交错级数，

设 $f(x)=a^{\frac{1}{x}}-1$， $f'(x)=-\frac{1}{x^2}a^{\frac{1}{x}}\ln a<0$，所以 $f(x)$ 单调减少，

因此有 $0<u_{n+1}=\sqrt[n+1]{a}-1<\sqrt[n]{a}-1=u_n$，

而 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{a}-1)=0$． $\therefore\sum(-1)^{n-1}(\sqrt[n]{a}-1)$ 收敛

综上，原级数条件收敛．

5．求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-4)^n$ 收敛区间及和函数 $S(x)$．

解：$R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right|=1$，所以收敛区间为 $-1<x-4<1$，即 $3<x<5$．

当 $x=3$ 时，级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{n})$，由调和级数知发散；

当 $x=5$ 时，级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$，由交错级数的 Leibniz 判别法知此级数是收敛的. 所以收敛域为 $(-3,5]$．

设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-4)^n$，则 $S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(x-4)^{n-1}=\frac{1}{1+(x-4)}=\frac{1}{x-3}$，

所以，$S(x)=\ln(x-3),\quad(3<x\le 5)$．

6．将函数 $f(x)=\frac{1}{x^2-5x+6}$ 在 $x=4$ 点展成幂级数.

解

$$
\begin{aligned}
f(x)&=\frac{1}{(x-2)(x-3)}=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}\\
&=\frac{1}{(x-4)+1}-\frac{1}{(x-4)+2}=\frac{1}{1-[-(x-4)]}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\left(-\dfrac{x-4}{2}\right)}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}[-(x-4)]^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-4}{2}\right)^n\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[1-\frac{1}{2^{n+1}}\right](x-4)^n.\quad(3<x<5)
\end{aligned}
$$

（$|-(x-4)|<1,\left|-\frac{x-4}{2}\right|<1$．解得 $|x-4|<1$ 交集）

7．求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ 的和函数.

解：$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1}$

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right| = 1. \quad \therefore R = 1.$$

设 $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \quad (-1,1)$，则 $\int_0^x s(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$

$$\therefore s(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} \quad (-1,1)$$

$x=1$．$\sum_{n=1}^{\infty} n$．级数发散．$x=-1$．级数为$\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot(-1)^n$发散．$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2} \quad (-1,1)$.

8．设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数，且 $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le 1, \\ 0, & 1<x<2, \end{cases}$ 写出 $f(x)$ 的傅里叶级数与其和函数，并求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ 的和.

解：① 将 $f(x)$ 作周期延拓，$2l=2, l=1$.（且$-1<x<0$时 $f(x)=0$）

② $a_0 = \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$

$$a_n = \int_{-1}^{1} f(x)\cos n\pi x\mathrm{d}x = \int_0^2 f(x)\cos n\pi x\mathrm{d}x = \int_0^1 x\cdot\cos n\pi x\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{n\pi}\int_0^1 x\cdot\mathrm{d}\sin n\pi x = \frac{1}{n\pi}\left[x\cdot\sin n\pi x\Big|_0^1 - \int_0^1 \sin n\pi x\mathrm{d}x\right]$$
$$= \frac{-1}{n^2\pi^2}\int_0^1 \sin n\pi x\cdot\mathrm{d}n\pi x = \frac{1}{n^2\pi^2}\left[\cos n\pi x\right]_0^1$$
$$= \frac{-1}{n^2\pi^2}\left[\cos n\pi - \cos 0\right] = \frac{1}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n - 1\right] = \begin{cases} \frac{-2}{n^2\pi^2}, & n\text{奇数} \\ 0, & n\text{偶数} \end{cases}$$

$$b_n = \int_{-1}^{1} f(x)\cdot\sin n\pi x\mathrm{d}x = \int_0^2 f(x)\cdot\sin n\pi x\mathrm{d}x = \int_0^1 x\cdot\sin n\pi x\mathrm{d}x$$
$$= \frac{-1}{n\pi}\int_0^1 x\cdot\mathrm{d}\cos n\pi x = -\frac{1}{n\pi}\left[x\cdot\cos n\pi x\Big|_0^1 - \int_0^1 \cos n\pi x\mathrm{d}x\right]$$
$$= -\frac{1}{n\pi}\cos n\pi = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}, \quad n=1,2,\cdots$$

③ 当 $x\ne 2k+1, k=0,\pm1,\cdots$时.

$$f(x) = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)\pi x + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin n\pi x$$

当 $x=2k+1, k=0,\pm1,\cdots$时，级数收敛于$\frac{1}{2}$.

④ 令 $x=0,\ f(0)=0, \therefore 0 = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$，即$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

9．设 $a_1=2,\ a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{1}{a_n})$ 证明： ①$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在 ②$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)$ 收敛.

证明：① 有界性： $a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{1}{a_n})\geq 1$，即 $\{a_n\}$ 有下界 1；

单调性： $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}(a_n+\frac{1}{a_n})-a_n=\frac{1}{2a_n}(1-a_n{}^2)\leq 0$ 故 $\{a_n\}$ 单调不增

由单调有界性定理 $\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，

②由于 $a_n\geq 1\Rightarrow\frac{a_n}{a_{n+1}}-1=\frac{a_n-a_{n+1}}{a_{n+1}}\leq a_n-a_{n+1}$

对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$， $S_n=(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+\cdots+(a_n-a_{n+1})=a_1-a_{n+1}$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=a_1-\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}$ 存在，因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$ 收敛.

由正项级数比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=\sum\limits_{n-1}^{\infty}\frac{a_n-a_{n+1}}{a_{n+1}}$ 收敛.

第八次作业

学院____________班级____________姓名____________学号____________

一、单项选择题

1．下列各组函数可以构成微分方程 $y''+2y'+y=0$ 的基本解组的是(C).

（A） $\sin x, x\sin x$；（B） $\mathrm{e}^{x}, x\mathrm{e}^{x}$；（C） $\mathrm{e}^{-x}, x\mathrm{e}^{-x}$；（D） $\mathrm{e}^{x}, \mathrm{e}^{-x}$.

2．若 y_1, y_2 是方程 $y'+p(x)y=q(x)(q(x)\neq 0)$ 的两个解，要使 $\alpha y_1+\beta y_2$ 也是該方程的解，α, β 应满足关系式 (A).

（A） $\alpha+\beta=1$；（B） $\alpha+\beta=0$；（C） $\alpha\beta=1$；（D） $\alpha\beta=0$.

3．设线性无关的函数 $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ 均是方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的解，C_1, C_2 是任意常数，则该方程的通解是 (D).

（A） $C_1y_1+C_2y_2+y_3$；

（B） $C_1y_1+C_2y_2-(C_1+C_2)y_3$；

（C） $C_1y_1+C_2y_2-(1-C_1-C_2)y_3$；

（D） $C_1y_1+C_2y_2+(1-C_1-C_2)y_3$.

4．若 2 是微分方程 $y''+py'+qy=\mathrm{e}^{2x}$ 的特征方程的一个单根，则该微分方程必有一个特解 $y^{*}=$(B).

（A） $A\mathrm{e}^{2x}$；（B） $Ax\mathrm{e}^{2x}$；（C） $Ax^2\mathrm{e}^{2x}$；（D） $x\mathrm{e}^{2x}$.

5．方程 $y''-3y'+2y=\mathrm{e}^{x}\cos 2x$ 的特解形式为(A).

（A） $\mathrm{e}^{x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$；（B） $C_1\mathrm{e}^{x}\cos 2x$；

（C） $x\mathrm{e}^{x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$；（D） $C_2\mathrm{e}^{x}\sin 2x$.

6．以 $y_1=2\cos x, y_2=\sin x$ 为特解的二阶常系数齐次线性微分方程是 (B).

（A） $y''-y=0$；（B） $y''+y=0$；

（C） $y''-y'=0$；（D） $y''+y'=0$.

二、填空题

1．当 n= 0 或 1 时，方程 $y'+p(x)y=q(x)y^{n}$ 为一阶线性微分方程.

2．常微分方程 $(3x^2+6xy^2)\mathrm{d}x+(6x^2y+4y^2)\mathrm{d}y=0$ 的通解是 $x^3+3x^2y^2+\frac{4}{3}y^3=C$.

3．若 y_1, y_2, y_3 是二阶非齐次线性微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的线性无关的解，则用 y_1, y_2, y_3 表达此方程的通解为 $C_1(y_1-y_3)+C_2(y_2-y_3)+y_3$（不唯一）.

4．微分方程 $2y^{(4)} - 2y^{(3)} + 5y'' = 0$ 的通解为 $\underline{c_1 + c_2 x + \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\left(c_3 \cos\frac{3}{2}x + c_4 \sin\frac{3}{2}x\right)}$.

5．微分方程 $y'' - y' = 1$ 的通解 $y = \underline{c_1 + c_2 e^x - x}$.

6．以 $y = 2\mathrm{e}^x \cos 3x$ 为一个特解的二阶常系数线性微分方程为 $\underline{y'' - 2y' + 10y = 0}$.

7． $y'' - 5y' + 6y = \mathrm{e}^x \sin x + 6$ 的一个特解形式为 $\underline{y = \mathrm{e}^x(a\cos x + b\sin x) + C}$.

三、计算题

1．求解微分方程 $xy' = y(\ln y - \ln$.

解 变形：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}$，设 $u = \dfrac{y}{x}$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，

将其代入原方程：$u + x\cdot\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u\ln u$，分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}u}{u(\ln u - 1)} = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$

积分得：$\ln(\ln u - 1) = \ln x + \ln C$，即 $u = \mathrm{e}^{Cx+1}$，所以原方程通解为 $y = x\mathrm{e}^{Cx+1}$

2．求解微分方程 $(y^2 - 6x)y' + 2y =$

解 把 x 看作 y 的函数．方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} - \dfrac{3}{y}x = -\dfrac{y}{2}$．为一阶线性非齐次微分方程.

通解为

$$
\begin{aligned}
x &= \mathrm{e}^{\int \frac{3}{y}\mathrm{d}y}\left[C + \int -\frac{y}{2}\mathrm{e}^{\int -\frac{3}{y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y\right] \\
&= \mathrm{e}^{3\ln y}\left[C + \int -\frac{y}{2}\cdot \mathrm{e}^{-3\cdot\ln y}\mathrm{d}y\right] \\
&= y^3\left[C + \int -\frac{y}{2}\cdot\frac{1}{y^3}\mathrm{d}y\right] \\
&= y^3\left[C + \frac{1}{2y}\right] = Cy^3 + \frac{y^2}{2}.
\end{aligned}
$$

3．求解微分方程 $y'' + y'^2 = 1,\ y|_{x=0} = 0,\ y'|_{x=0} = 1$.

解：此方程为可降阶．令 $y' = p(x)$．则 $y'' = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$ 代入 $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + p^2 = 1$.

当 $p \neq \pm 1$ 时，分离变量为 $\dfrac{\mathrm{d}p}{1 - p^2} = \mathrm{d}x$.

$p = 1$ 时，$\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 0.$ $\therefore p = 1$ 即 $y' = 1$ 也是解，满足 $y'\big|_{x=0} = 1$.

积分 $y = x + C.$ $\because y\big|_{x=0} = 0.$ $\therefore C = 0$. ∴原方程特解为 $y = x$.

4．求解微分方程 $y' + x\sin 2y = x\mathrm{e}^{-x^2}\cos^2 y$，$y(0) = \dfrac{\pi}{4}$.

解 $y' + 2x\sin y\cos y = x\mathrm{e}^{-x^2}\cos^2 y$，则 $\dfrac{1}{\cos^2 y}y' + 2x\tan y = x\mathrm{e}^{-x^2}$

令 $u=\tan y$，于是可得方程 $u'+2xu=x\mathrm{e}^{-x^2}$．所以

$$u=\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}(\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C)=\mathrm{e}^{-x^2}(\int x\mathrm{e}^{-x^2}\cdot\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x+c)=\mathrm{e}^{-x^2}(\frac{x^2}{2}+C)$$

即 $\tan y=\mathrm{e}^{-x^2}(\frac{1}{2}x^2+C)$.

$1=\tan y(0)=C$，所以 $\tan y=\mathrm{e}^{-x^2}(\frac{1}{2}x^2+1)$

5．已知曲线 $y=f(x)$ 经过原点，在原点的切线平行于直线 $2x-y-5=0$，且 $y=f(x)$ 满足微分方程 $y''-6y'+9y=\mathrm{e}^{3x}$，求此曲线的方程.

解 方程 $y''-6y'+9y=\mathrm{e}^{3x}$ 的特征方程为 $r^2-6r+9=0$

解得特征根为 $r_1=r_2=3$ ，对应齐次方程通解为 $Y=C_1\mathrm{e}^{3x}+C_2x\mathrm{e}^{3x}$.

设非齐次方程的特解形式为 $y^*=Ax^2\mathrm{e}^{3x}$，代入原方程得 $y^*=\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{3x}$

由 $y(0)=0, y'(0)=2$ 得 $C_1=0, C_2=2$，故所求曲线方程为 $y=\frac{x}{2}(x+4)\mathrm{e}^{3x}$

6．求微分方程 $y''-y=\sin^2 x$ 的通解.

解① 二阶常系数非齐次方程 $f(x)=\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$. $f_1(x)=\frac{1}{2}$. $f_2(x)=-\frac{\cos 2x}{2}$.

特征方程：$r^2-1=0$　$r=\pm 1$. $y''-y=0$ 通解 $Y=C_1\mathrm{e}^{x}+C_2\mathrm{e}^{-x}$

② 显然 $y_1^*=-\frac{1}{2}$ 为 $y''-y=\frac{1}{2}$ 的特解.

对 $y''-y=-\frac{1}{2}\cos 2x. \lambda=0. \omega=2. m=0. \because \lambda+i\omega=2i$ 不是特征根

所以设 $y_2^*=a\cos 2x+b\sin 2x.\ y_2^{*\prime}=-2a\sin 2x+2b\cos 2x,\ y_2^{*\prime\prime}=-4a\cos 2x-b\sin 2x.$

代入整理．$-5a\cos 2x-5b\sin 2x=-\frac{1}{2}\cos 2x. \therefore a=\frac{1}{10}, b=0.$

$y_2^*=\frac{1}{10}\cos 2x$　$\therefore y^*=y_1^*+y_2^*=\frac{-1}{2}+\frac{1}{10}\cos 2x$.

③ 原方程通解为 $y=Y+y^*=C_1\mathrm{e}^{x}+C_2\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{2}+\frac{1}{10}\cos 2x$.

（当 $\lambda+i\omega$ 不是特征方程根；$\lambda=0$；$m=0$．本题可设 $y_2^*=a\cos 2x$）

7．求解 $y''-3y'+2y=2\mathrm{e}^{x}$ 满足 $y(0)=1, y'(0)=-1$.

解 对应的齐次方程的通解为 $Y=C_1\mathrm{e}^{x}+C_2\mathrm{e}^{2x}$，设特解为 $y^*=Ax\mathrm{e}^{x}$ 代入原方程得 $A=-2$，故原方程通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{x}+C_2\mathrm{e}^{2x}-2x\mathrm{e}^{x}$，由 $y(0)=1, y'(0)=-1$ 得 $C_1=1, C_2=0$，所以

$y=(1-2x)\mathrm{e}^x$.

8.求解欧拉方程 $x^2y''-xy'+2y=x\ln x$.

解 Euler 方程. 令 $x=\mathrm{e}^t$. 则 $t=\ln x$. 则 $xy'=Dy,\ x^2y''=D(D-1)y$. 则方程化为 $D^2y-2Dy+2y=t\cdot\mathrm{e}^t$，即：$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+2y=t\mathrm{e}^t(*)$

此方程为二阶常系数非齐次方程．且 $\lambda=1$．特征方程：$r^2-2r+2=0.\ r_{1,2}=1\pm i$

（*）对应齐次方程的通解为 $Y=\mathrm{e}^t(C_1\cos t+C_2\sin t)$.

因为 $\lambda=1$ 不是特征根．所以设非齐次方程的特解为 $y^*=(at+b)\mathrm{e}^t$

$y^{*\prime}=\mathrm{e}^t(at+a+b).\ y^{*\prime\prime}=\mathrm{e}^t(at+2a+b)$．代入（*）整理得：

$at+b=t.\quad \therefore a=1.\ b=0\quad y^*=t\mathrm{e}^t$.

所以（*）通解为 $y=\mathrm{e}^t(C_1\cos t+C_2\sin t)+t\mathrm{e}^t$.

将 $t=\ln x$ 代入．得原方程通解为 $y=x[C_1\cos(\ln x)+C_2\sin(\ln x)]+x\cdot\ln x$.

四、综合题

设 $f(x)$ 具有二阶连续导数，$f(0)=0,\ f'(0)=1$，且

$$[xy(x+y)-f(x)y]\mathrm{d}x+[f'(x)+x^2y]\mathrm{d}y=0$$

是全微分方程，求 $f(x)$ 及此全微分方程的通解．

解：由全微分方程充要条件 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$．有

$$x^2+2xy-f(x)=f''(x)+2xy$$

即：$f''(x)+f(x)=x^2$ 为二阶常系数非齐次微分方程，$\lambda=0.\ m=2$.

记 $z=f(x)$，对应齐次方程的特征方程：$r^2+1=0$．$r=\pm i\quad Z=C_1\cos x+C_2\sin x$.

因为 $\lambda=0$ 不是特征根．所以设非齐次方程的特解为 $z^*=ax^2+bx+c$，

将其代入方程得 $2a+ax^2+bx+c=x^2$．解得

$a=1,b=0,c=-2.\quad \therefore z^*=x^2-2$.

$z=C_1\cos x+C_2\sin x+x^2-2.\quad z'=-C_1\sin x+C_2\cos x+2x$.

将 $z\big|_{x=0}=0.\quad z'\big|_{x=0}=1$ 代入上式得 $C_1=2,C_2=1$.

$\therefore f(x)=2\cos x+\sin x+x^2-2$.

将 $f(x)$ 代入，原方程为：

$(xy^2-2\cos x\cdot y-\sin x\cdot y+2y)\mathrm{d}x+(-2\sin x+\cos x+2x+x^2y)\mathrm{d}y=0$

通解为：$\dfrac{1}{2}x^2y^2+2xy+(-2\sin x+\cos x)y=C$.

综合练习题

学院__________班级__________姓名__________学号

一、单项选择题

1．函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点(0, 0)处（ C ）.

（A）不连续；　　（B）偏导数存在；

（C）沿任一方向的方向导数存在；　　（D）可微.

2．设 $f(x)$ 为连续函数，$F(t)=\int_1^t dy\int_y^t f(x)dx$ 则 $F'(2)$ 为（ B ）.

（A）$2f(2)$；　　（B）$f(2)$；

（C）$-f(2)$；　　（D）0.

3．设 $f(x,y)$ 为 $D:x^2+y^2\le a^2$ 上的连续函数，则 $\lim\limits_{a\to 0^+}\dfrac{1}{\pi a^2}\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=$（ B ）.

（A）不存在；　（B）$f(0,0)$；　（C）$f(1,1)$；　（D）$f_x'(0,0)$.

4．设 Ω 由平面 $x+y+z+1=0, x+y+z+2=0, x=0, y=0, z=0$ 围成，

$I_1=\iiint\limits_\Omega[\ln(x+y+z+3)]^2\mathrm{d}V, I_2=\iiint\limits_\Omega(x+y+z)^2\mathrm{d}V$，则(A).

（A）$I_1<I_2$；　（B）$I_1>I_2$；　（C）$I_1\le I_2$；　（D）$I_1\ge I_2$.

5．设 $\sum a_n$ 为正项级数，下列结论中正确的是（ B ）.

（A）若 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；

（B）若存在非零常数 λ，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=\lambda$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散；

（C）若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2a=0$；

（D）若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，则存在非零常数 λ，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=\lambda$.

6．若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\dfrac{1}{4}$，则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^{2n}$ （ A ）.

（A）当 $|x|<2$ 时绝对收敛；　　（B）当 $|x|>\dfrac{1}{4}$ 时绝对发散；

（C）当 $|x|<4$ 时绝对收敛；　　（D）当 $|x|>\dfrac{1}{2}$ 时绝对发散.

7．设 $y=f(x)$ 是方程 $y''+y'=\mathrm{e}^{\sin x}$ 的解，并且 $f'(x_0)=0$，则 $f(x)$ （ C ）.

（A）在点 x_0 的某邻域内单调增加；　　（B）在点 x_0 的某邻域内单调减少；

（C）在点 x_0 处取极小值　　（D）在点 x_0 处取极大值.

二、填空题

1．函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续且可偏导，是 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微的＿必要＿条件.

2．设 $z=\mathrm{e}^{xy}-\cos\mathrm{e}^{xy}$，则 $\underline{\mathrm{d}z=e^{xy}(1+\sin e^{xy})(ydx+xdy)}$.

3．设函数 $u(x,y)=f(x+y)+f(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}g(t)\mathrm{d}t$，其中 f 具有二阶导数，g 具有一阶导数，则 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=$＿＿0＿＿.

4．设 L 为椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，其周长为 a，则 $\oint_L(2xy+3x^2+4y^2)\mathrm{d}s=$＿＿$12a$＿＿.

5．周期为 2 的函数 $f(x)$，它在一个周期内的表达式为 $f(x)=x,-1\le x\le 1$，设它的傅里叶级数的和函数为 $s(x)$，则 $s\left(\dfrac{3}{2}\right)=$＿＿-1/2＿＿.

6．以 $y_1(x)=\sin x,\ y_2(x)=\cos x$ 为特解的二阶常系数齐次线性微分方程是＿$y''+y=0$＿.

7．曲面 $\Sigma:|x|+|y|+|z|=1$，则 $\oiint\limits_{\Sigma}(x+|y|)\mathrm{d}S=\underline{\dfrac{4\sqrt{3}}{3}}$.

三、计算题

1．设 $z=x^3 f\left(xy,\dfrac{y}{x}\right)$，$f$ 具有连续的二阶偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2 f+x^3\left[f_1'\cdot y+f_2'\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)\right]=3x^2 f+x^3yf_1'-xyf_2'$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^3\left[f_1'\cdot x+f_2'\cdot\frac{1}{x}\right]=x^4 f_1'+x^2 f_2'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x}=4x^3 f_1'+x^4\left[f_{11}''y+f_{12}''\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)\right]+2xf_2'+x^2\left[f_{21}''y+f_{22}''\left(-\frac{y}{x^2}\right)\right]$$

$$=4x^3 f_1'+2xf_2'+x^4yf_{11}''-yf_{22}''$$

2．设 $y=y(x)$，$z=z(x)$ 是由方程 $z=xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z)=0$ 确定的函数，其中 f 和 F 分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导数，求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

解：由 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=f+xf'(1+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})$，$F_x+F_y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+F_z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0$

解得 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\dfrac{fF_y+xf'(F_y-F_x)}{F_y+xf'F_z}$

3．求 $\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{e}^{|z|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 为球体 $x^2+y^2+z^2\le 1$.

解：$\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{e}^{|z|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 2\iiint\limits_{\Omega_1} \mathrm{e}^{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$． $\Omega_1:\begin{cases} D_z: x^2+y^2\le 1-z^2 \\ 0\le z\le 1 \end{cases}$

$$= 2\int_0^1 \mathrm{d}z\iint\limits_{D_z} \mathrm{e}^z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_0^1 \mathrm{e}^z\cdot\pi(1-z^2)\mathrm{d}z \quad 而$$

$$\int_0^1 \mathrm{e}^z\mathrm{d}z = \mathrm{e}-1$$

$$\int_0^1 z^2\mathrm{e}^z\mathrm{d}z = \int_0^1 z^2\mathrm{d}e^z = [z^2\cdot\mathrm{e}^z]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^z\cdot 2z\mathrm{d}z$$

$$= \mathrm{e} - 2\int_0^1 z\mathrm{d}\mathrm{e}^z = \mathrm{e} - 2z\mathrm{e}^z\Big|_0^1 + 2\int_0^1 \mathrm{e}^z\mathrm{d}z = -\mathrm{e}+2\mathrm{e}-2$$

$$= \mathrm{e}-2$$

$$\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{e}^{|z|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 2\pi[(\mathrm{e}-1)-(\mathrm{e}-2)] = 2\pi\ .$$

4．设 $z=z(x,y)$ 是由 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 确定的函数，求 $z=z(x,y)$ 的极值点和极值.

解：取微分：$2x\mathrm{d}x-6y\mathrm{d}x-6x\mathrm{d}y+20y\mathrm{d}y-2z\mathrm{d}y-2y\mathrm{d}z-2z\mathrm{d}z=0$

即：$(y+z)dz=(x-3y)dx+(-3x+10y-z)dy$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x-3y}{y+z},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-3x+10y-z}{y+z} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=0 \end{cases}$$

解得 $x=3y, z=y$，得 $x_1=9, y_1=3, z_1=3; x_2=-9, y_2=-3, z_2=-3$

而 $P_1(9,3)$ 处，$A=\frac{1}{6}>0, B=-\frac{1}{2}, C=\frac{5}{3}, AC-B^2=\frac{1}{36}>0$． 则函数有极小值 z(9,3)=3

$P_2(-9,-3)$ 处，$A=-\frac{1}{6}<0, B=\frac{1}{2}, C=-\frac{5}{3}, AC-B^2=\frac{1}{36}>0$.则函数有极大值 z(-9,-3)=-3

5．设函数 $f(u)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有二阶导数，且 $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$ 满足等式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0\ .$$

（Ⅰ）验证： $f''(u)+\dfrac{f'(u)}{u}=0$；

（Ⅱ）若 $f(1)=0,\ f'(1)=1$，求函数 $f(u)$ 的表达式.

解：（Ⅰ）由 $z=f(u),u=\sqrt{x^2+y^2}$

得： $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}=f'(u)\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(u)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+f'(u)\frac{y^2}{(x^2+y^3)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=f''(u)\frac{x^2}{x^2+y^2}+f'(u)\frac{y^2}{(x^2+y^3)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(u)\frac{y^2}{x^2+y^2}+f'(u)\frac{x^2}{(x^2+y^3)^{\frac{3}{2}}}$$

则有：$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

$$=f''(u)\frac{x^2}{x^2+y^2}+f'(u)\frac{y^2}{(x^2+y^3)^{\frac{3}{2}}}+f''(u)\frac{y^2}{x^2+y^2}+f'(u)\frac{x^2}{(x^2+y^3)^{\frac{3}{2}}}=0$$

得： $f''(u)+\dfrac{f'(u)}{u}=0$

（Ⅱ） 由 $f''(u)+\dfrac{f'(u)}{u}=0$，解得 $f'(u)=\dfrac{C_1}{u}$， 由 $f'(1)=1,$ 可得 $C_1=1$，

有 $f'(u)=\dfrac{1}{u}$， $\therefore f(u)=\ln u+C,$ 由 $f(1)=0,$ 得 C=0，因此 $f(u)=\ln u$

6．计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2zy\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 其中 Σ 为曲面 $z=1-x^2-\dfrac{y^2}{4}\ (0\le z\le 1)$ 的上侧.

解：取 Σ_1 为 xOy 平面上被椭圆 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ 所围部分的下侧，记 Ω 为由 Σ 和 Σ_1 围成的空间闭区域，根据高斯公式

$$I_1=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2zy\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}(z+2z+0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^1 3zdz\iint\limits_{x^2+\frac{y^2}{4}\le 1-z}dxdy=\int_0^1 6\pi z(1-z)dz=\pi$$

又 $I_2=\iint\limits_{\Sigma_1}xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2zy\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-3\iint\limits_{x^2+\frac{y^2}{4}\le 1}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$

所以 $I=I_1-I_2=\pi$

7．将函数 $f(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x$ 展开成 x 的幂级数.

解：$f'(x)=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{1+x}-\frac{-1}{1-x}\right]+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}-1$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{1+x^2}\right]-1=\frac{1}{1-x^4}-1$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(x^4\right)^n-1=\sum_{n=1}^{\infty}x^{4n}\ \left(|x|<1\right)$$

$$\therefore\ \int_0^x\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)+\frac{1}{2\left(1+x^2\right)}-1\right]\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x x^{4n}\mathrm{d}x$$

即：$f\left(x\right)=\sum_{n-1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\left(|x|<1\right)$

8．已知齐次方程 $(x-1)y''-xy'+y=0$ 的通解为 $Y(x)=c_1x+c_2\mathrm{e}^x$ 求非齐次方程 $(x-1)y''-xy'+y=(x-1)^2$ 的通解.

解：把所给方程写成标准形式 $y''-\frac{x}{x-1}y'+\frac{1}{x-1}y=x-1.$

设所求方程解为：$y=C_1(x)x+C_2(x)e^x$

则有：$\begin{cases}xC_1'(x)+\mathrm{e}^xC_2'(x)=0,\\ C_1'(x)+\mathrm{e}^xC_2'(x)=x-1.\end{cases}$ 解得 $C_1'(x)=-1,\quad C_2'(x)=x\mathrm{e}^{-x}.$

积分，得：$C_1(x)=C_1-x$，$C_2(x)=C_2-(x+1)\mathrm{e}^{-x}.$

于是所求非齐次方程的通解为 $\boldsymbol{y=C_1x+C_2\mathrm{e}^x-(x^2+x+1).}$

9．设 $u=u(r)$ 具有二阶导数，$u=u(\sqrt{x^2+y^2})$ 满足方程

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}-\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}+u=x^2+y^2$$

求 $u(\sqrt{x^2+y^2})$ 的表达式.

解：$\frac{\partial u}{\partial x}=u'(r)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\qquad\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=u''(r)\frac{x^2}{x^2+y^2}+u'(r)\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

同理：$\frac{\partial u}{\partial y}=u'(r)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\qquad\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=u''(r)\frac{y^2}{x^2+y^2}+u'(r)\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

代入方程得：$u''+u=r^2$

解该微分方程 通解为：$u=C_1\cos r+C_2\sin r+r^2-2$

即：$u(\sqrt{x^2+y^2})=C_1\cos\sqrt{x^2+y^2}+C_2\sin\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2-2$

四、应用题

在第一卦限内作球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的切平面，使该切平面与三坐标面所围成的四面体的体积最小，求这切平面的切点.

解：设切点为 $\left(x_0,y_0,z_0\right)$，则

$$F\left(x,y,z\right)=x^2+y^2+z^2-a^2, Fx=2x, Fy=2y, Fz=2z$$

切平面方程：

$$2x_0\left(x-x_0\right)+2y_0\left(y-y_0\right)+2z_0\left(z-z_0\right)=0 \quad \text{即}: x_0x+y_0y+z_0z=a^2$$

令 $y=z=0$,得 x 轴截距 $z=\dfrac{a^2}{x_0}$，同理 $Y=\dfrac{a^2}{y_0}, z=\dfrac{a^2}{z_0}$

$V=\dfrac{a^6}{6}\cdot\dfrac{1}{x_0y_0z_0}$，　当 $x_0y_0z_0$ 最大时 V 最小，

作 $L\left(x_0,y_0,z_0,\lambda\right)=x_0y_0z_0+\lambda\left(x_0^2+y_0^2+z_0^2-a^2\right)$

令
$$\begin{cases} Lx_0=y_0z_0+2\lambda x_0=0 \\ Ly_0=x_0z_0+2\lambda y_0=0 \\ Lz_0=x_0y_0+2\lambda z_0=0 \end{cases}$$

$$x_0^2+y_0^2+z_0^2=a^2$$

解得 $x_0=y_0=z_0=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$ 时，V 最小，所以切点 $\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}},\dfrac{a}{\sqrt{3}},\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)$.

五、证明题

设 $a_n=\int_0^{\pi/4}(\tan x)^n\,\mathrm{d}x, n=1,2,3,\cdots$. 证明：对任意常数 $\lambda>0$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛.

证明：　$a_n>0$

$$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n-2}x\cdot\sec^2 xdx-a_{n-2}<\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n-2}xd\tan x=\frac{1}{n-1}$$

$\therefore 0<a_n<\dfrac{1}{n-1}$　　因此对于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n^\lambda}$ 有，$0<\dfrac{a_n}{n^\lambda}<\dfrac{1}{n^\lambda(n-1)}$

当 $\lambda>0$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^\lambda(n-1)}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛.

综合模拟题（一）

学院____________班级____________姓名____________学号___________

一、填空题(共 5 道小题，每小题 3 分，满分 15 分)

1．设函数 $z=\sqrt{x^4+y^4}$，则 $z'_x(0,0)=$ __0__ .

2．设 L 是直线 $y=x$ 上由点 A（0,0）到点 B（1,1）的线段，则第一型曲线积分 $\int_L \sqrt{y}\,\mathrm{d}s=\underline{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}$.

3．设曲面 Σ 为圆锥面 $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$ 在 xoy 面上方的部分，则第一型曲面积分

$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}S=\underline{8\sqrt{2}\pi}$.

4．设函数 $f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi\le x<0,\\ x, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$ 将 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上展开为傅里叶（Fourier）级数，使

$f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，则 $a_1=\underline{\dfrac{-4}{\pi}}$.

5．微分方程 $xy'+y=0$ 满足 $y(1)=1$ 的解是 $\underline{y=\dfrac{1}{x}}$.

二、选择题(共 5 道小题，每小题 3 分，满分 15 分)

1．函数 $z=x^3+y^3-3xy$ 的极小值点是（ A ）

（A）(1,1)；（B）(0,0)；（C）(0,1)；（D）(1,0).

2．设山坡的高度为 $z=5-x^2-2y^2$，一个登山者在山坡上点 $(-\frac{3}{2},-1,\frac{3}{4})$ 处，他决定沿最陡的道路向上攀登，则他应当选取的方向 $\boldsymbol{l}$ 是（ A ）

（A）$\boldsymbol{l}=(3,4)$；（B）$\boldsymbol{l}=(-3,-4)$；（C）$\boldsymbol{l}=(-4,3)$；（D）$\boldsymbol{l}=(4,-3)$.

3．交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n+a}\ (a>0)$（ B ）

(A) 绝对收敛；(B) 条件收敛；

(C) 敛散性与 a 有关；(D) 发散.

4．幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ 的收敛域是（ C ）.

（A）$(0,2]$；（B）$(-2,0)$；（C）$[0,2)$；（D）$[-1,1)$.

5．函数 $y=C_1\mathrm{e}^{x}+C_2\mathrm{e}^{-2x}+x\mathrm{e}^{x}$ 满足的一个微分方程是（ D　）

（A） $y''-y'-2y=3x\mathrm{e}^{x}$；　　　　（B） $y''-y'-2y=3\mathrm{e}^{x}$；

（C） $y''+y'-2y=3x\mathrm{e}^{x}$；　　　　（D） $y''+y'-2y=3\mathrm{e}^{x}$．

三、（满分 6 分）

设 $z=f(x\mathrm{e}^{y},x)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$．

解

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\frac{\partial u}{\partial x}+f_2'=e^{y}f_1'+f_2'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^{y}f_1'+xe^{2y}f_{11}''+xe^{y}f_{21}''$$

四、解答下列各题(共 4 个小题，每小题 10 分，满分 40 分)

1．计算二重积分 $\iint\limits_D(|x-y|+2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 D 为圆域 $x^2+y^2\le 1$ 在第一象限的部分.

解： $\iint\limits_D(|x-y|+2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$=\iint\limits_{D_1}(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}(y-x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+2\iint\limits_D\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$ ....5 分

$$=\frac{2}{3}(\sqrt{2}-1)+\frac{\pi}{2}$$ ....10 分

2．计算三重积分 $I=\iiint\limits_\Omega(x+y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$,其中 Ω 是由圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=1$ 围成的闭区域.

解： 由对称性，$\iiint\limits_\Omega x\,\mathrm{d}v=\iiint\limits_\Omega y\,\mathrm{d}v=0$ ·········5 分

$$\iiint\limits_\Omega z\,\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\,\mathrm{d}r\int_r^1 z\,\mathrm{d}z=\frac{\pi}{4}$$ ·········10 分

3．设 $\varphi(x)$ 具有连续的导数，且 $\varphi(0)=0$，又曲线积分 $\int_L xy^2\,\mathrm{d}x+y\varphi(x)\,\mathrm{d}y$ 与路径无关，（1）求 $\varphi(x)$ 表达式;（2）计算 $\int_{(0,0)}^{(1,1)}xy^2\,\mathrm{d}x+y\varphi(x)\,\mathrm{d}y$．

解：由曲线积分与路径无关的充要条件知

$$\frac{\partial}{\partial x}[y\varphi(x)]=\frac{\partial}{\partial y}(xy^2)$$ ·········3 分

得 $\varphi'(x)=2x$，解得 $\varphi(x)=x^2$ ·········6 分

取积分路径 $y=x$，则有

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)}x^2y\,\mathrm{d}x+y\varphi(x)\,\mathrm{d}y=\int_0^1 2x^3\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$$ ·········10 分

4．已知 $f_n(x)$ 满足 $f_n'(x)=f_n(x)+x^{n-1}\mathrm{e}^x, n$ 为正整数，且 $f_n(1)=\dfrac{\mathrm{e}}{n}$，求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 之和.

解：$f_n(x)$ 满足一阶线性非齐次微分方程，由通解公式有

$$f_n(x)=\mathrm{e}^{\int \mathrm{d}x}(C+\int x^{n-1}e^x e^{-\int \mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x)=(\frac{x^n}{n}+C)\mathrm{e}^x \quad \cdots\cdots 4\text{ 分}$$

由 $f_n(1)=\dfrac{\mathrm{e}}{n}$，得 C=0，从而 $f_n(x)=\dfrac{x^n}{n}\mathrm{e}^x$ ……6 分

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}\Rightarrow -\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} \quad \cdots\cdots 8\text{ 分}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)=-\mathrm{e}^x\ln(1-x), -1\le x<1. \quad \ldots\ldots 10\text{ 分}$$

五、解答下列各题(共 3 个小题，每小题 8 分，满分 24 分)

1．曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\ x+y+z=0\end{cases}$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线及法平面方程.

解：方程组两边对 x 求导，得切向量为

$$\overline{S}=\left(-6,0,6\right) \quad \cdots\cdots 4\text{ 分}$$

切线方程为 $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-1}{1}$ ……6 分

法平面方程为 $x-z=0$ ……8 分

2. 利用高斯公式计算第二型曲面积分

$$I=\oiint_{\Sigma}xz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x^2y-z^3)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(2xy+y^2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的内侧表面.

解：由高斯公式有

$$\mathrm{I}=-\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v \quad \cdots\cdots 4\text{ 分}$$

$$=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^4\sin\varphi\,\mathrm{d}r=-\frac{4}{5}\pi \quad \cdots\cdots 8\text{ 分}$$

3. 将函数 $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+x-2}$ 展开成 x 的幂级数.

解：$f(x)=\dfrac{3x}{x^2+x-2}=3x\dfrac{1}{(x+2)(x-1)}=x(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+2})$ ……3 分

$$=-\frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}x^n-\ \ x\sum_{n=0}^{\infty}\ x^n \qquad ……6 分$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}-1)x^{n+1}, x\in(-1,1) \qquad …… 8 分$$

综合模拟题（二）解答

一、单项选择题（共 6 道小题，每小题 3 分，满分 18 分）

1. 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, x^2+y^2\neq 0,\\ 0, \quad x^2+y^2=0.\end{cases}$ 关于 $f(x,y)$ 有以下命题：

① $f_x'(0,0)=0, f_y'(0,0)=0.$

② $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处极限不存在.

③ $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续.

④ $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

以上命题中结论正确的个数是（ C ）

(A) 1 个. (B) 2 个. (C) 3 个. (D) 4 个.

2. 二次积分 $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{x}}\dfrac{\sin y}{y}\mathrm{d}y=$（ A ）

(A) $1-\sin 1$. (B) $\sin 1-1$. (C) $1+\sin 1$. (D) $\sin 1$.

3. 设曲面 $\sum$ 是柱面 $x^2+y^2=4$ 在 $0\le z\le 1$ 之间的部分，则 $\iint\limits_{\Sigma}x^2\,\mathrm{d}S=$（ D ）

(A) π. (B) 2π. (C) 4π. (D) 8π.

4．设二元函数 $U(x,y)$ 的全微分 $\mathrm{d}U=xy^2\,\mathrm{d}x+x^2y\,\mathrm{d}y$，则 $U(x,y)$ 的一个表达式为（ B ）

（A）$\dfrac{1}{2}x^2+y^2$. （B）$\dfrac{1}{2}x^2y^2$. （C）x^2y^2. （D）. $x^2-\dfrac{1}{2}y^2$.

5. 如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$在$x=-1$处收敛，则该级数在$x=2$处（ B ）

(A) 条件收敛. (B) 绝对收敛.

(C) 发 散. (D) 敛散性不定.

6. 方程$y''+y'-2y=\mathrm{e}^x(\cos x-7\sin x)$特解的形式是（ A ），其中$a,b$为常数.

(A) $\mathrm{e}^x(a\cos x+b\sin x)$. (B) $x\mathrm{e}^x(a\cos x+b\sin x)$.

(C) $a\mathrm{e}^x\cos x$. (D) $b\mathrm{e}^x\sin x$.

二、填空题（共 6 道小题，每小题 3 分，满分 18 分）.

1. 设函数$z=\dfrac{x}{y}+xy$，则$\mathrm{d}z\big|_{(2,1)}=$ $\underline{2dx+0dy}$.

2. 函数$z=x^2-xy+y^2$在点$(1,1)$处沿方向$\boldsymbol{l}=\underline{(1,1)}$的方向导数最大.

3. 设曲线L的方程为$\begin{cases} x=\cos t \\ y=2\sin t \end{cases}(0\le t\le \dfrac{\pi}{2})$，则$\int_L xy\,\mathrm{d}s=\underline{\dfrac{14}{9}}$.

4. 设级数$\sum_{n=1}^{\infty} a^{\ln\frac{1}{n}}\quad (a>0)$，当$\underline{a>\mathrm{e}}$时级数收敛.

解 $a^{\ln\frac{1}{n}}=\mathrm{e}^{\ln\frac{1}{n}\cdot\ln a}=(\mathrm{e}^{\ln\frac{1}{n}})^{\ln a}=\dfrac{1}{n^{\ln a}}$，所以当$\ln a>1$，即$a>\mathrm{e}$时收敛.

5. 设函数$f(x)$是以2π为周期的周期函数，且在区间$[-\pi,\pi]$上的表达式为

$f(x)=\begin{cases} 2, -\pi\le x\le 0, \\ x, 0<x\le\pi, \end{cases}$则$f(x)$的傅里叶级数在$x=0$处收敛于$\underline{\qquad 1 \qquad}$.

6. 将函数$\dfrac{1}{x}$展开成$(x-3)$的幂级数的形式为 ________. $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3^{n+1}}(x-3)^n, 0<x<6$

三、按要求解答下列各题（共 6 道小题，每小题 7 分，满分 42 分）.

1. 设f为$C^{(2)}$类函数，且$z=f(x^2+y)$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xf'(x^2+y)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=f'(x^2+y)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2xf''(x^2+y)$

2．求曲面 $x=\mathrm{e}^{2y-z}$ 在点 $(1,1,2)$ 处的切平面与法线方程.

解 设 $F(x,y,z)=e^{2y-z}-x=0$

$\frac{\partial F}{\partial x}=-1$，$\frac{\partial F}{\partial y}=2e^{2y-z}$，$\frac{\partial F}{\partial z}=-e^{2y-z}$

则曲面 $x=\mathrm{e}^{2y-z}$ 在点 $(1,1,2)$ 处法向量为 $(-1,2,-1)$

因此切平面方程 $-1(x-1)+2(y-1)-1(z-2)=0$，化简得 $x-2y+z-1=0$

法线方程为 $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{-1}$

3．求函数 $f\left(x\right)=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$ 的极值.

解 $\frac{\partial f}{\partial x}=4x^3-2x-2y=0$，$\frac{\partial f}{\partial y}=4y^3-2x-2y=0$

解得驻点 $M_1(1,1),M_2(-1,-1),M_3(0,0)$.

$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=12x^2-2$，$B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-2$，$C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=12y^2-2$

当 $x=1,y=1$ 时，$A=10$，$B=-2$，$C=10$

$AC-B^2=96>0,$ 且 $A=10>0$，则 $f(1,1)=-2$ 为极小值

当 $x=-1,y=-1$ 时，$A=10$，$B=-2$，$C=10$

$AC-B^2=96>0,$ 且 $A=10>0$，则 $f(-1,-1)=-2$ 为极小值

当 $x=0,y=0$ 时，$A=-2$，$B=-2$，$C=-2$，$AC-B^2=0,$

在 $M_3(0,0)$ 的充分小的邻域内，沿直线 $y=-x$，有 $f(x,-x)=2x^4\geq 0$，而沿直线 $y=0$，且 $|x|<1$ 有 $f(x,0)=x^2(x^2-1)\leq 0$，因此 $f(0,0)$ 不是极值.

4. 计算$\iint\limits_D \left|x-y^2\right| \mathrm{d}\sigma$，其中$D=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le 1, 0\le y\le 1\right\}$.

解 $\iint\limits_D \left|x-y^2\right| \mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_1}(y^2-x)d\sigma+\iint\limits_{D_2}(x-y^2)d\sigma$

$=\int_0^1 dx\int_{\sqrt{x}}^1 (y^2-x)dy+\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x}}(x-y^2)dy$

$=\int_0^1[\frac{1}{3}-x+\frac{2}{3}x\sqrt{x}]dx+\frac{2}{3}\int_0^1 x\sqrt{x}dx$

$=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{4}{15}+\frac{4}{15}=\frac{11}{30}$

5. 计算$\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V$，其中$\Omega$由锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$和球面$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$围成.

解 $\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi d\varphi\int_0^1 r^4 dr=\frac{2\pi}{5}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

6. 求微分方程$y'+y=1+x^2$满足初始条件$y(0)=4$的解.

解 由$y'+y=1+x^2$得$y'=-y+1+x^2$，通解为

$y(x)=e^{-\int dx}[\int(1+x^2)e^{\int dx}dx+C$

$=e^{-x}[e^x(x^2-2x+3)+C]=x^2-2x+3+Ce^{-x}$

$y(x)=x^2-2x+3+Ce^{-x}$

又$y(0)=4$，则有$C=1$，特解为$y(x)=x^2-2x+3+\mathrm{e}^{-x}$

四、按要求解答下列各题（共 3 道小题，满分 22 分）.

1. （满分 8 分）

计算$\int_L (y^3+x\mathrm{e}^{2y})\mathrm{d}x+(x^2\mathrm{e}^{2y}-x^3)\mathrm{d}y$，其中曲线$L$是$x^2+y^2=4x$的上半圆周，顺时针方向.

解 添加$L_1: y=0,$ 且x由 4 到 0，则由格林公式得

$\oint_{L+L_1}(y^3+x\mathrm{e}^{2y})\mathrm{d}x+(x^2\mathrm{e}^{2y}-x^3)\mathrm{d}y=3\iint\limits_D(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{4\cos\theta}r^3\mathrm{d}r$

$=3\times 64\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta=3\times 64\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=36\pi$

$\int_{L_1}(y^3+x\mathrm{e}^{2y})\mathrm{d}x+(x^2\mathrm{e}^{2y}-x^3)\mathrm{d}y=\int_{L_1}(y^3+x\mathrm{e}^{2y})\mathrm{d}x=\int_{L_1}x\mathrm{d}x=\int_4^0 x\mathrm{d}x=-8$

所以$\int_L (y^3+x\mathrm{e}^{2y})\mathrm{d}x+(x^2\mathrm{e}^{2y}-x^3)\mathrm{d}y=36\pi+8$

2.（满分 8 分）

计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} y^3 \mathrm{d}z\mathrm{d}x+(y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中曲面 Σ 为 $z=x^2+y^2(0\le z\le 1)$ 的下侧.

解 取 $\Sigma_1: z=1, D: x^2+y^2\le 1$ 的上侧，由高斯公式得

$$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}(3y^2+1)\mathrm{d}V$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_{r^2}^1(3r^2\sin^2\theta+1)\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r(3r^2\sin^2\theta+1)(1-r^2)\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(3r^3\sin^2\theta+r-3r^5\sin^2\theta-r^3)\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[\frac{3}{4}r^4\sin^2\theta+\frac{1}{2}r^2-\frac{3}{6}r^6\sin^2\theta-\frac{1}{4}r^4\right]_0^1\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[\frac{3}{4}\sin^2\theta+\frac{1}{2}-\frac{3}{6}\sin^2\theta-\frac{1}{4}\right]\mathrm{d}\theta=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}(\sin^2\theta+1)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{3\pi}{4}$$

$$\iint\limits_{\Sigma_1} y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma_1}(y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D}(y+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\pi$$

所以 $\iint\limits_{\Sigma} y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{3\pi}{4}-\pi=-\frac{\pi}{4}$

3.（满分 6 分）设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内收敛，和函数为 $y(x)$，且满足

$$y''-2xy'-4y=0, y(0)=0, y'(0)=1,$$

（1）证明 $a_{n+2}=\frac{2}{n+1}a_n, n=1,2,\cdots$；（2）求 $y(x)$ 表达式.

证明（1）$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n+\cdots$

$$y'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2\cdots+na_nx^{n-1}+(n+1)a_{n+1}x^n+\cdots$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$$

$$y''(x)=2a_2+3\times 2\times a_3x+4\times 3\times a_4x^2=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$

将上式代入 $y''-2xy'-4y=0$，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2}-2na_n-4a_n]x^n=0$$

因此 $(n+2)(n+1)a_{n+2}-2na_n-4a_n=0$，所以 $(n+2)(n+1)a_{n+2}=2(n+2)a_n$

有 $a_{n+2}=\frac{2}{n+1}a_n$， $n=1,2,\cdots$， 且 $a_2=2a_0$

解（2）由 $y(0)=0, y'(0)=1$ 得 $a_0=0$， $a_1=1$，又 $a_{n+2}=\frac{2}{n+1}a_n$， $n=1,2,\cdots$，及 $a_2=2a_0$

则 $a_{2k}=0, k=0,1,2,\cdots$

$$a_{2k+1}=\frac{2}{2k}a_{2k-1}=\frac{2}{2k}\frac{2}{2k-2}a_{2k-3}=\frac{2}{2k}\frac{2}{2k-2}\frac{2}{2k-4}a_{2k-5}$$
$$=\cdots=\frac{2}{2k}\frac{2}{2k-2}\frac{2}{2k-4}\cdots\frac{2}{2}a_1=\frac{1}{k!}$$

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_1x+a_3x^3+a_5x^5+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k+1}x^{2k+1}$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^{2k+1}=x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(x^2)^k=xe^{x^2}$$