

第4章 被控过程的数学模型

本章要点

- 1) 掌握被控过程机理建模的方法与步骤;
- 2) 熟悉被控过程的自衡和非自衡特性;
- 3) 熟悉单容过程和多容过程的阶跃响应曲线及解析表达式;
- 4) 重点掌握被控过程基于阶跃响应的建模步骤、作图方法和数据处理;
- 5) 熟悉被控过程的一次完成最小二乘建模方法, 学会用MATLAB语言编写算法程序。
- 6) 熟悉被控过程的递推最小二乘建模方法, 学会用MATLAB语言编写算法程序。

4.1 过程建模的基本概念

4.1.1 被控过程的数学模型及其作用

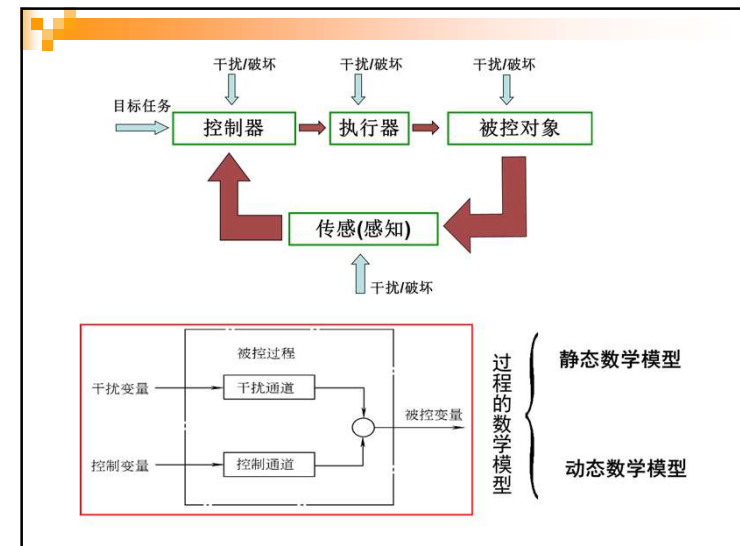
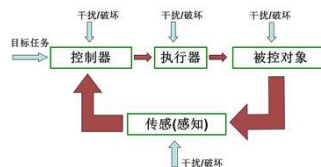
被控过程的数学模型是指过程的输入变量与输出变量之间定量关系的描述
其中:

过程的输入变量至输出变量的信号联系称为通道

控制作用至输出变量的信号联系称为控制通道

干扰作用至输出变量的信号联系称为干扰通道

过程的输出为控制通道与干扰通道的输出之和



被控过程的数学模型在过程控制中的重要性

- 1) 全面、深入地掌握被控过程的数学模型是控制系统设计的基础。
- 2) 良好数学模型的建立是控制器参数确定的重要依据。
- 3) 数学建模是仿真或研究、开发新型控制策略的必要条件。
- 4) 通过对生产工艺过程及相关设备数学模型的分析或仿真，可以为生产工艺及设备的设计与操作提供指导。
- 5) 利用数学模型可以及时发现工业过程中控制系统的故障及其原因，并提供正确的解决途径。

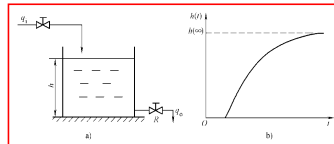
4.1.2 被控过程的特性

依据过程特性的不同分为自衡特性与无自衡特性、单容特性与多容特性、振荡与非振荡特性等

1. 有自衡特性和无自衡特性

当原来处于平衡状态的过程出现干扰时，其输出量在**无人或无控制装置的干预下**，能够自动恢复到原来或新的平衡状态，则称该过程具有自衡特性，否则，该过程则被认为无自衡特性。

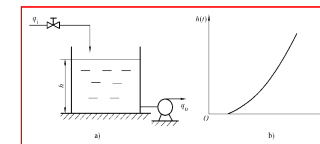
具有自衡特性的过程及其响应曲线



自平衡特性其传递函数的典型形式有：

一阶惯性环节	$G(s) = \frac{K}{(Ts+1)}$	可自衡的单容
二阶惯性环节	$G(s) = \frac{K}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$	可自衡的双容
一阶惯性+纯滞后环节	$G(s) = \frac{K e^{-\tau s}}{(Ts+1)}$	什么样的单容？
二阶惯性+纯滞后环节	$G(s) = \frac{K e^{-\tau s}}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$	什么样的双容？

无自衡过程及其阶跃响应曲线



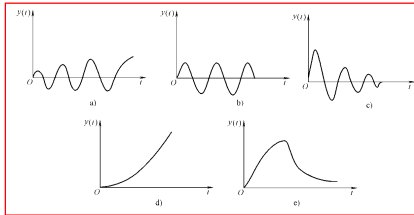
无平衡特性其传递函数的典型形式有：

一阶环节	$G(s) = \frac{1}{Ts}$	什么样的双容？
二阶环节	$G(s) = \frac{1}{T_1s(T_2s+1)}$	
一阶+纯滞后环节	$G(s) = \frac{1}{Ts} e^{-\tau s}$	
二阶+纯滞后环节	$G(s) = \frac{1}{T_1s(T_2s+1)} e^{-\tau s}$	

3. 振荡与非振荡过程的特性

在阶跃输入作用下，输出会出现多种形式：

- a)、b)和c)为振荡过程
- d)和e)为非振荡过程



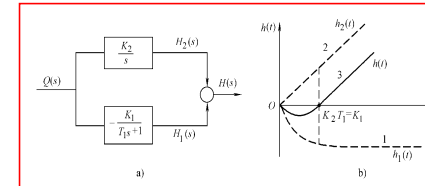
衰减振荡的传递函数为

$$G(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{(T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1)}$$

$(0 < \zeta < 1)$

4. 具有反向特性的过程

对过程施加一阶跃输入信号，若开始一段时间内，过程的输出先降后升或先升后降，即出现相反的变化方向，则称其为具有反向特性的被控过程。



你煮过面条吗？

4.1.3 过程建模方法

1. 机理演绎法

根据被控过程的内部机理，运用已知的**静态或动态平衡**关系，用数学解析的方法求取被控过程的数学模型。

- 物理定律：牛顿第一定律、能量守恒定律、……
- 化学反应方程
- 电路定律
- ……

基于等号找
输入输出关系

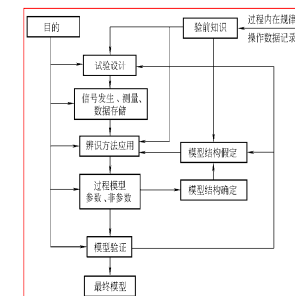
4.1.3 过程建模方法

2. 试验辨识法

主要思路是：

先给被控过程人为地施加一个输入作用，然后记录过程的输出变化量，得到一系列试验数据或曲线，最后再根据输入—输出试验数据确定其模型的结构（包括模型形式、阶次与纯滞后时间等）与模型的参数。

主要步骤：



3. 混合法

机理演绎法与试验辨识法的相互交替使用的一种方法

4.2 解析法建立过程的数学模型

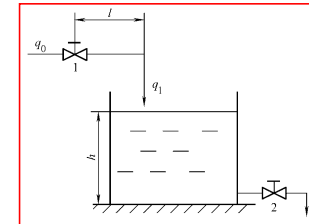
4.2.1. 解析法建模的一般步骤

- 1) 明确过程的输出变量、输入变量和其他中间变量；
- 2) 依据过程的内在机理和有关定理、定律以及公式列写静态方程或动态方程；
- 3) 消去中间变量，求取输入、输出变量的关系方程；
- 4) 将其简化成控制要求的某种形式，如高阶微分（差分）方程或传递函数（脉冲传递函数）等；

4.2 解析法建立过程的数学模型

4.2.2 单容过程的解析法建模

例1：某单容液位过程，贮罐中液位高度 h 为被控参数，流入贮罐的体积流量为 q_1 过程的输入量并可通过阀门1的开度来改变；流出贮罐的体积流量 q_2 为过程的干扰，其大小可以通过阀门2的开度来改变。试确定 q_1 与 h 之间的数学关系？



➤ 第一步找平衡关系

即在单位时间内贮罐的液体流入量与单位时间内贮罐的液体流出量之差应等于贮罐中液体贮存量的变化率

则有：

$$q_1 - q_2 = A \frac{dh}{dt}$$

$$q_1 - q_2 = A \frac{dh}{dt}$$

写为增量形式为

$$\Delta q_1 - \Delta q_2 = A \frac{d\Delta h}{dt}$$

Δq_1 Δq_2 Δh 分别为偏离某平衡状态的增量。 A 为贮罐的截面积

假定 Δq_2 与 Δh 近似成正比，而与阀门2的液阻 R_2 成反比

则有

$$\Delta q_2 = \frac{\Delta h}{R_2}$$

➤ 第二步消除中间变量 Δq_2

$$\Delta q_1 - \Delta q_2 = A \frac{d\Delta h}{dt} \quad \Delta q_2 = \frac{\Delta h}{R_2}$$

$$R_2 A \frac{d\Delta h}{dt} + \Delta h = R_2 \Delta q_1 \quad T = R_2 C \text{ 为被控过程的时间常数}$$

$$K = R_2 \text{ 为被控过程的放大系数}$$

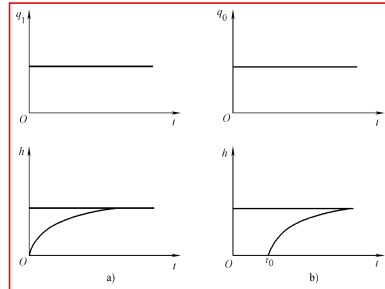
$$G(s) = \frac{H(s)}{Q(s)} = \frac{R_2}{R_2 Cs + 1} = \frac{K}{Ts + 1} \quad C \text{ 为被控过程的容量系数，或称过程容量，这里 } C = A$$

如果以体积流量 q_0 为过程的输入量, 那么, 当阀1的开度产生变化后, q_0 需流经长度为 l 的管道后才能进入贮罐而使液位发生变化。即 q_0 需经一段延时才能被控制

可以得到纯滞后的单容过程的微分方程和传递函数

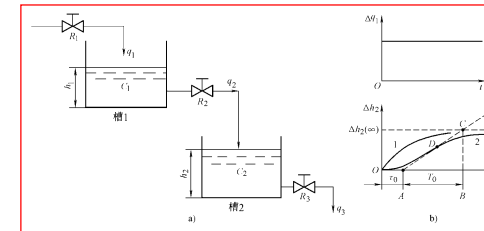
$$\left. \begin{aligned} T \frac{d\Delta h}{dt} + \Delta h &= K \Delta q_0 (t - \tau_0) \\ G(s) = \frac{H(s)}{Q_0(s)} &= \frac{K}{Ts + 1} e^{-\tau_0 s} \end{aligned} \right\}$$

单容过程的阶跃响应曲线:
比较有延迟与无延迟的区别



4.2.3 多容过程的解析法建模

以自衡特性的双容过程为例, 如图设为 q_1 过程输入量, 第二个液位槽的液位 h_2 为过程输出量, 若不计第一个与第二个液位槽之间液体输送管道所形成的时间延迟, 试求 q_1 与 h_2 之间的数学关系。



4.2.3 多容过程的解析法建模

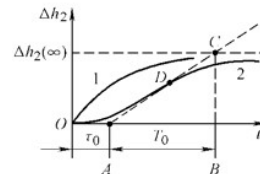
根据动态平衡关系, 列出以下增量方程

$$\begin{aligned} C_1 \frac{d\Delta h_1}{dt} &= \Delta q_1 - \Delta q_2 & \Delta q_2 &= \frac{\Delta h_1}{R_2} \\ C_2 \frac{d\Delta h_2}{dt} &= \Delta q_2 - \Delta q_3 & \Delta q_3 &= \frac{\Delta h_2}{R_3} \end{aligned}$$

$$G(s) = \frac{Q(s)}{Q_0(s)} \times \frac{H_2(s)}{Q(s)} = \frac{1}{T_1 s + 1} \times \frac{R_3}{T_2 s + 1}$$

其中 $T_1 = R_2 C_1$ 为槽1的时间常数
 $T_2 = R_3 C_2$ 为槽2的时间常数

一阶惯性环节与延迟环节可互为近似环节



4.3 实验法建立过程的数学模型

4.3.1 响应曲线法

响应曲线法是指通过操作调节阀, 使被控过程的控制输入产生一阶跃变化或方波变化, 得到被控量随时间变化的响应曲线或输出数据, 再根据输入—输出数据, 求取过程的输入—输出之间的数学关系。响应曲线法又分为阶跃响应曲线法和方波响应曲线法

4.3.1.1 阶跃响应曲线法

一、注意事项

- 1) 试验测试前, 被控过程应处于相对稳定的工作状态
- 2) 在相同条件下应重复多做几次试验, 减少随机干扰的影响
- 3) 对正、反方向的阶跃输入信号进行试验, 以衡量过程的非线性程度
- 4) 一次试验后, 应将被控过程恢复到原来的工况并稳定一段时间再做第二次试验
- 5) 输入的阶跃幅度不能过大, 以免对生产的正常进行产生不利影响。但也不能过小, 以防其它干扰影响的比重相对较大而影响试验结果。

二、模型结构的确定

在完成阶跃响应试验后，应根据试验所得的响应曲线确定模型的结构

一阶惯性	$G(s) = \frac{K_0}{T_0 s + 1}$	$G(s) = \frac{1}{T_0 s}$
一阶惯性+纯滞后	$G(s) = \frac{K_0}{T_0 s + 1} e^{-\tau s}$	$G(s) = \frac{1}{T_0 s} e^{-\tau s}$
二阶惯性	$G(s) = \frac{K_0}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$	$G(s) = \frac{1}{T_1 s(T_2 s + 1)}$
二阶惯性+纯滞后	$G(s) = \frac{K_0}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} e^{-\tau s}$	$G(s) = \frac{1}{T_1 s(T_2 s + 1)} e^{-\tau s}$

注意：对于更高阶或其它较复杂的系统，应在保证辨识精度的前提下，数学模型结构应尽可能简单

三、模型参数的确定

(1) 确定一阶环节的参数

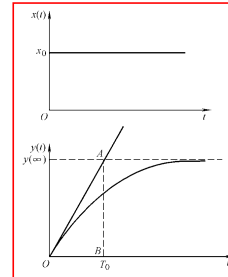
该响应曲线可近似为无时延的一阶环节
则其输入与输出的关系为：

$$y(t) = K_0 x_0 (1 - e^{-t/T_0})$$

其中 K_0 为过程的放大系数， T_0 为时间常数。

上式中，当 $y(t)|_{t \rightarrow \infty} = y(\infty) = K_0 x_0$ 时

$$K_0 = \frac{y(\infty)}{x_0} \quad \text{和} \quad \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = K_0 x_0 / T_0$$



以上式为斜率在 $t=0$ 处作切线，切线方程为 $\frac{K_0 x_0}{T_0} t$ 当 $t = T_0$ 时

则有：

$$\frac{K_0 x_0}{T_0} t|_{t=T_0} = K_0 x_0 = y(\infty)$$

图解法为：

先由上阶跃响应曲线定出 $y(\infty)$ ，根据 $y(t)|_{t \rightarrow \infty} = y(\infty) = K_0 x_0$ 确定 K_0

再在阶跃响应曲线的起点 $t=0$ 处作切线，该切线与 $y(\infty)$ 的交点所对应的时间（上图中阶跃响应曲线上的 OB 段）即为 T_0

T_0 的确定还可以使用**计算法**：

$$\left. \begin{aligned} y(t) &= K_0 x_0 (1 - e^{-t/T_0}) \\ y(t)|_{t \rightarrow \infty} &= y(\infty) = K_0 x_0 \end{aligned} \right\} y(t) = y(\infty) (1 - e^{-t/T_0})$$

令 t 分别为 $T_0/2$ 、 T_0 、 $2T_0$ 时，则有 $y(T_0/2) = 39\% \cdot y(\infty)$

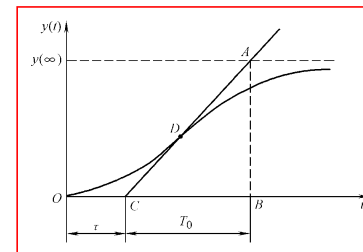
$y(T_0) = 63\% \cdot y(\infty)$ 以及 $y(2T_0) = 86.5\% \cdot y(\infty)$ 在阶跃响应曲线上求得三个状态下的时间 t_1 、 t_2 、 t_3 ，计算出 T_0

(2) 确定一阶时延环节的参数

如果曲线呈现S形状如右图所示，则该过程可用一阶惯性+时延环节近似

一阶惯性+时延环节的传递函数 $G(s) = \frac{K_0}{T_0 s + 1} e^{-\tau s}$

有三个参数需要确定 K_0 、 T_0 、时延时间 τ



图解法
行不行？

(2) 确定一阶时延环节的参数

K_0 的确定方法不变,

T_0 和 τ 的确定步骤是:

先将阶跃响应 $y(t)$ 转化为标么值 $y_0(t)$

$$y_0(t) = y(t)/y(\infty) \quad (\text{去掉 } K_0 \text{ 的影响})$$

$$y_0(t) = \begin{cases} 0 & t < \tau \\ 1 - e^{-\frac{t-\tau}{T_0}} & t \geq \tau \end{cases}$$

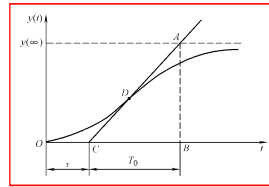
选取两个不同时刻 t_1, t_2 , 代入

$$\left. \begin{aligned} y_0(t_1) &= 1 - e^{-\frac{t_1-\tau}{T_0}} \\ y_0(t_2) &= 1 - e^{-\frac{t_2-\tau}{T_0}} \end{aligned} \right\}$$

两边取自然对数, 求解化简可得:

$$\left. \begin{aligned} T_0 &= \frac{t_2 - t_1}{\ln[1 - y_0(t_1)] - \ln[1 - y_0(t_2)]} \\ \tau &= \frac{t_2 \ln[1 - y_0(t_1)] - t_1 \ln[1 - y_0(t_2)]}{\ln[1 - y_0(t_1)] - \ln[1 - y_0(t_2)]} \end{aligned} \right\}$$

→ T_0 和 τ



(3) 确定二阶环节的参数

二阶无时延环节阶跃响应曲线如右图:

$$\text{传递函数为: } G(s) = \frac{K_0}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

三个需要确定的参数 K_0, T_0, T_1

K_0 的确定与一阶环节确定方法相同

T_0, T_1 的确定采用两点法。设二阶无时延环节的输入、输出关系为

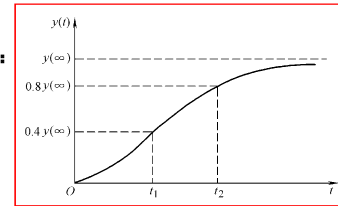
$$y(t) = K_0 x_0 \left(1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right) \quad \text{其中 } x_0 \text{ 为阶跃输入的幅值}$$

取阶跃响应曲线上任意两个时刻的坐标, (这里为 $0.4y(\infty)$ 和 $0.8y(\infty)$ 对应的时间)

$$\left. \begin{aligned} \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t_1}{T_1}} - \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t_1}{T_2}} &= 0.6 \\ \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t_2}{T_1}} - \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t_2}{T_2}} &= 0.2 \end{aligned} \right\}$$

求解可得

$$\left. \begin{aligned} T_1 + T_2 &\approx \frac{1}{2.16} (t_1 + t_2) \\ \frac{T_1 T_2}{(T_1 + T_2)^2} &\approx (1.74 \frac{t_1}{t_2} - 0.55) \end{aligned} \right\}$$



注意: 用这种方法确定 T_1 和 T_2 时, 应满足 $0.32 < t_1/t_2 < 0.46$ 的条件

因为, 当 $t_1/t_2 = 0.32$ 时, 应为一阶环节 $\frac{K_0}{(T_0 s + 1)}$ 其中 $T_0 = \frac{t_1 + t_2}{2.12}$

当 $t_1/t_2 = 0.46$ 时, 应为二阶环节 $\frac{K_0}{(T_0 s + 1)^2}$ 其中 $T_0 = \frac{t_1 + t_2}{2 \times 2.18}$

当 $t_1/t_2 > 0.46$ 时, 应为二阶以上环节。

对于 n 阶环节传递函数 $G(s) = \frac{K_0}{(T_0 s + 1)^n}$ T_0 可以按 $T_0 \approx \frac{t_1 + t_2}{2.16 n}$ 近似计算

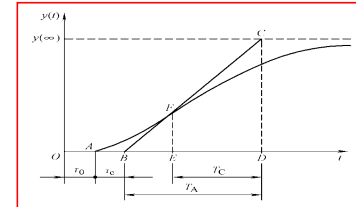
其中 n 可以根据的 t_1/t_2 大小由下表确定

n	1	2	3	4	5	6	7	8	10	12	14
t_1/t_2	0.32	0.46	0.53	0.58	0.62	0.65	0.67	0.685	0.71	0.735	0.75

高阶过程的 n 与 t_1/t_2 的关系

(4) 确定二阶时延环节的参数

二阶时延环节阶跃响应曲线:



$$\text{传递函数为: } G(s) = \frac{K_0 e^{-s\tau_0}}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

需确定参数 4 个 K_0, T_1, T_2, τ

自学图解法

4.3.1.2 方波响应曲线法

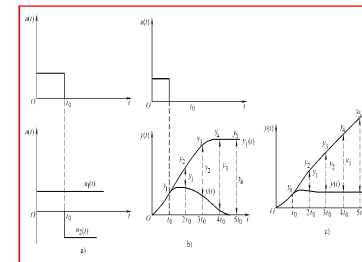
方波响应曲线法是在正常输入的基础上，施加一方波输入，并测取相应输出的变化曲线，据此估计过程参数。

- 实验更容易实现
- 传递函数不直观

通常在实验获取方波响应曲线后，先将其转换为阶跃响应曲线，然后再按阶跃响应法确定有关参数。

输出响应由两个时间相差 t_0 、极性相反、形状完全相同的阶跃响应的叠加而成。

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = y_1(t) - y_1(t - t_0)$$



所需的阶跃响应为

$$y_1(t) = y(t) + y_1(t - t_0)$$

$t=0 \sim t_0$ 阶跃响应曲线与方波响应曲线重合 依次类推，即可由方波响应曲线求出完整的阶跃响应曲线
 $t=0 \sim 2t_0$ 时， $y_1(2t_0) = y(2t_0) + y_1(t_0)$

4.3.2 最小二乘法

4.3.2.1 离散化模型与输入试验信号

1. 离散化模型

(1) 离散时域模型

如果对被控过程的输入信号 $u(t)$ ，输出信号 $y(t)$ 进行采样，采样周期为 T

则相应得到差分方程为

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_{n_a} y(k-n_a) = b_1 u(k-1) + \dots + b_{n_b} u(k-n_b)$$

4.3.2 最小二乘法

(2) 离散频域模型

离散频域模型可用脉冲传递函数表示。对输出离散序列 $\{y(k)\}$ 进行Z变换

$$G(z^{-1}) = \frac{Y(z^{-1})}{U(z^{-1})} = \frac{(b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_{n_b} z^{-n_b})}{(1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{n_a} z^{-n_a})} = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}$$

其中：

$$\left. \begin{aligned} B(z^{-1}) &= (b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_{n_b} z^{-n_b}) \\ A(z^{-1}) &= (1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_{n_a} z^{-n_a}) \end{aligned} \right\}$$

2. 输入试验信号

(1) 输入试验信号的条件与要求

为了使被控过程是可辨识的，输入试验信号必须满足如下条件：

- 1) 在辨识时间内被控过程的模态必须被输入试验信号持续激励。
- 2) 输入试验信号的选择应能使辨识模型的精度最高；

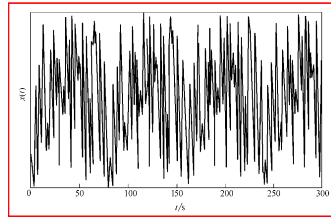
从工程的角度，输入试验信号的选取还要考虑如下一些要求：

- 4) 输入试验信号的功率或幅值不宜过大，也不能太小；
- 5) 输入试验信号对过程的“净扰动”要小；
- 6) 工程上易于实现，成本低。

(2) 输入试验信号的选取

白色噪声作为输入试验信号可以保证获得较好的辨识效果，但白色噪声在工程上不易实现

研究表明，最长线性移位寄存器序列（简称M序列）具有近似白色噪声的性能

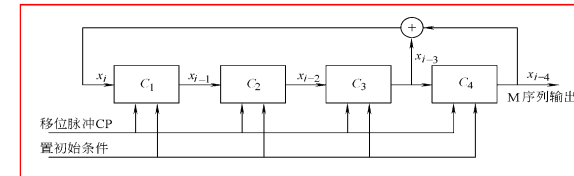


3. M序列的产生

M序列的产生通常有两种方法，一是用移位寄存器产生，二是用软件实现。

(1) 移位寄存器产生

M序列可以很容易地用线性反馈移位寄存器产生，结构图如下



(2) 软件实现

可以使用MATLAB语言编程实现产生M序列

4.3.2.2 最小二乘法

最小二乘法将待辨识的过程看作“黑箱”如图所

输入和输出 $y(t)$ 是可以量测的； $e(k)$ 为量测噪声

则过程模型为 $A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k) + e(k)$

其中 $A(z^{-1}) = 1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_{n_a}z^{-n_a}$

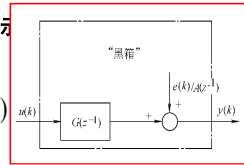
$B(z^{-1}) = b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_{n_b}z^{-n_b}$

最小二乘法要解决的问题是如何利用过程的输入/输出量测数据确定多项式 $A(z^{-1})$ 和 $B(z^{-1})$ 的系数

对于模型 $A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k) + e(k)$ 展开后写成最小二乘格式为

$$y(k) = h^T(k)\theta + e(k) \quad \text{其中} \quad h(k) = [-y(k-1), \dots, -y(k-n_a), u(k-1), \dots, u(k-n_b)]^T$$

$$\theta = [a_1, a_2, \dots, a_{n_a}, b_1, b_2, \dots, b_{n_b}]^T$$



4.3.2.3 最小二乘问题的解

1. 一次完成解法（适用于理论研究）

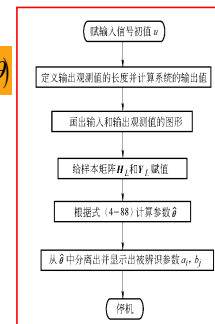
将准则函数 $J(\theta) = \sum_{k=1}^L (y(k) - h^T(k)\theta)^2$ 写成二次型的形式 $J(\theta) = (Y_L - H_L\theta)^T (Y_L - H_L\theta)$

其中 $H_L\theta$ 代表模型的输出。显然，极小化的 $J(\theta)$ ，即可求得参数 θ 的估计值使模型的输出“最好”地预报过程的输出。

经计算，有唯一的 $\hat{\theta}$ 满足 $J(\theta) = (Y_L - H_L\theta)^T (Y_L - H_L\theta)$

使 $J(\theta)|_{\hat{\theta}} = \min$

这种计算 $\hat{\theta}$ 的方法称作最小二乘法，对应的 $\hat{\theta}$ 称为最小二乘参数估计值。

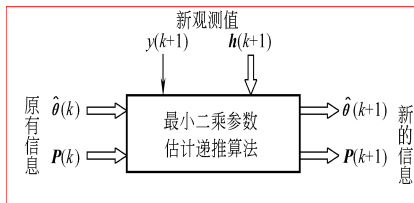


(2) 最小二乘递推解法 (适合于计算机在线辨识)

递推算法的**优点**：每次计算只需采用 $k+1$ 时刻的输入/输出数据修正 k 时刻的参数估计值，从而使参数估计值不断更新，而无需对所有数据进行重复计算，适合于在线辨识。

其**核心思想**是下一时刻的参数估计值等于上一时刻参数估计值加一项修正项

其信息变换图如下：



(3) 模型阶次和纯滞后时间的确定

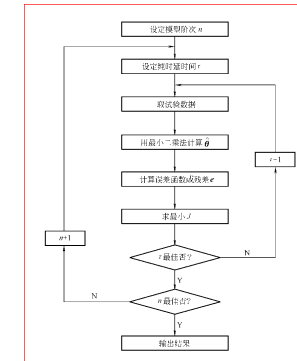
上述情况都是假定在系统阶次 n 和纯滞后时间 τ 已知的情况下，但实际情况是这两个参数未必能够事先知道，往往也需要根据试验数据加以确定。

确定模型阶次 n 最简单实用的方法是采用数据拟合度检验法。

它是通过比较不同阶次的模型输出与实际过程的输出拟合程度来决定模型的阶次。

纯滞后时间 τ 可以采用阶跃响应曲线法获得，也可以比较不同 τ 值的损失函数来求取。

确定 n 和 τ 的最小二乘法计算机程序流程图如图所示



本章结束，谢谢！