吉林大学

JILIN UNIVERSITY OF CHINA

计算机控制系统

计算机控制系统

第十二讲

最少拍控制器设计

教师： 唐志国
单位： 通信工程学院

最少拍控制器设计

本讲主要内容：

z^{-n}　　有零阶保持器

- （一）稳定不含纯滞后广义对象 (特殊)
- （二）任意广义对象 (一般)(核心)

对(二)改进

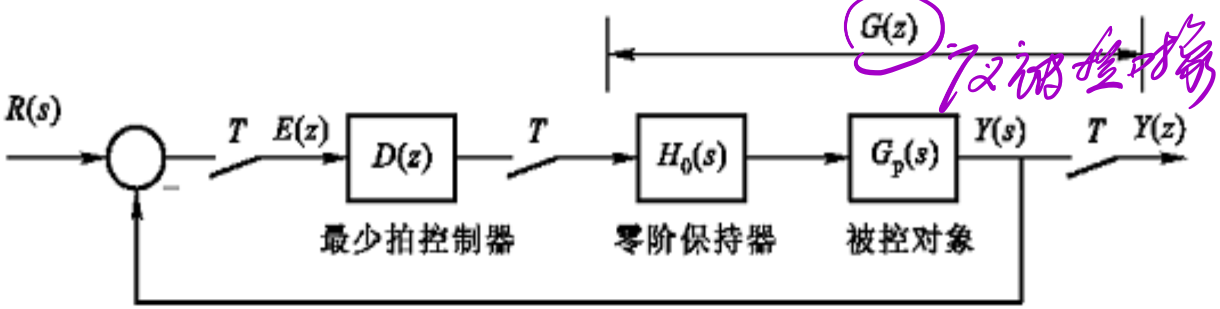
- （三）最少拍无纹波控制器
- （四）含阻尼因子的最少拍控制器

稳定不含纯滞后广义对象

最少拍设计，是指系统在典型输入信号(如阶跃信号，速度信号，加速度信号等)作用下，经过最少拍(有限拍)，使系统输出的稳态误差为零。

t_s　一个采样周期为一拍

稳
准
快



$$G(z)=\mathscr{Z}[G(s)]=\mathscr{Z}[H_0(s)G_P(s)]$$

这里，广义被控对象的脉冲传递函数在z平面单位圆上及单位圆外没有极点，且不含有纯滞后环节。

输出在有限拍N拍内
跟踪上系统输入，
$E(z)$只有有限项。

闭环脉冲传递函数

$$\Phi(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=\frac{D(z)G(z)}{1+D(z)G(z)}$$

误差脉冲传递函数

$$\Phi_{\mathrm{e}}(z)=\frac{E(z)}{R(z)}=\frac{1}{1+D(z)G(z)}=1-\Phi(z)$$

则有

$$D(z)=\frac{1-\Phi_{\mathrm{e}}(z)}{\Phi_{\mathrm{e}}(z)G(z)}=\frac{\Phi(z)}{\Phi_{\mathrm{e}}(z)G(z)}$$

倒推

$$E(z)=\Phi_{\mathrm{e}}(z)R(z)$$

倒推

$$E(z)=\sum^{\infty}e(iT)z^{-i}=e(0)+e(1)z^{-1}+e(2)z^{-2}+\cdots$$

不同输入信号$R(z)$作用下，本着使$E(z)$项数最少的原则，选择合适的$\Phi_{\mathrm{e}}(z)$，即可设计出最少拍无差系统控制器。

计算机控制系统

单位阶跃输入

$r(t)=1(t)=t^0$　$K_p=\lim\limits_{z\to1}(1-z^{-1})^0G(z)$　$e_{ss}=\dfrac{T^0}{1+K_p}$　**0型系统，常数**

$R(z)=\dfrac{1}{(1-z^{-1})}$　$p=1$　$E(z)=1$　**I 拍**

单位速度输入

$r(t)=t^1$　$K_v=\lim\limits_{z\to1}(1-z^{-1})^1G(z)$　$e_{ss}=\dfrac{T^1}{K_v}$　**I 型系统，常数**

$R(z)=\dfrac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$　$p=2$　$E(z)=Tz^{-1}$　**II拍**

单位加速度输入

$r(t)=\dfrac{1}{2}t^2$　$K_a=\lim\limits_{z\to1}(1-z^{-1})^2G(z)$　$e_{ss}=\dfrac{T^2}{K_a}$　**II型系统，常数**

$R(z)=\dfrac{T^2z^{-1}(1+z^{-1})}{2(1-z^{-1})^3}$　$p=3$　$E(z)=\dfrac{1}{2}T^2z^{-1}+\dfrac{1}{2}T^2z^{-2}$　**III拍**

$$R(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}\qquad R(z)=\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}\qquad R(z)=\frac{T^2z^{-1}(1+z^{-1})}{2(1-z^{-1})^3}$$

一般地，典型输入信号的z变换具有如下形式

$$R(z)=\frac{A(z^{-1})}{(1-z^{-1})^q}$$

$A(z^{-1})$是不包含$(1-z^{-1})$因式的z^{-1}的多项式。

$$E(z)=\Phi_e(z)R(z)=\Phi_e(z)\frac{A(z^{-1})}{(1-z^{-1})^q}$$

为使系统对典型输入无稳态误差，$\Phi_e(z)$应具有

$$\Phi_e(z)=(1-z^{-1})^pF(z^{-1}),\quad p\ge q$$

式中，$F(z^{-1})$是不含$(1-z^{-1})$因式的z^{-1}的有限多项式。选择合适的$\Phi_e(z)$就是**选择合适的p及$F(z^{-1})$**。

$$E(z)=\Phi_{e}(z)R(z)=\Phi_{e}(z)\frac{A(z^{-1})}{(1-z^{-1})^{q}}$$

单位阶跃信号

$$R(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}$$

保证拍数最少

选择 $\Phi_{e}(z)=1-z^{-1}$，即 $p=1$，$F(z^{-1})=1$，使 $\Phi_{e}(z)$ 具有最简形式，则

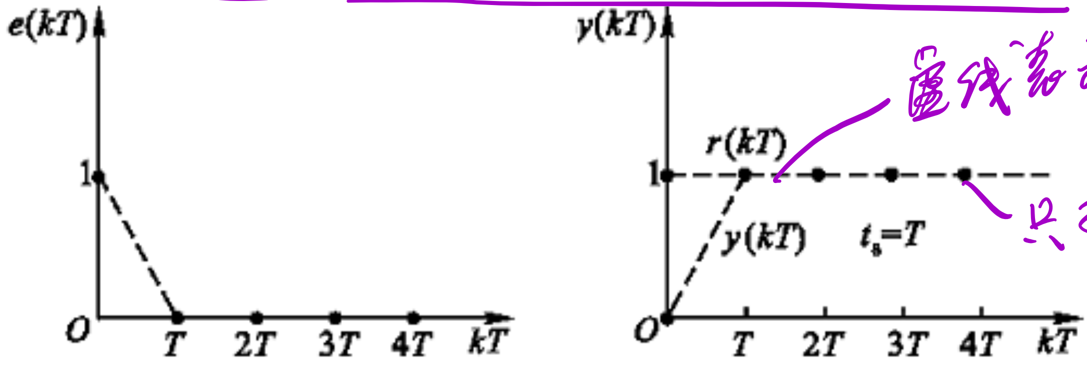
$$E(z)=(1-z^{-1})\frac{1}{1-z^{-1}}=1$$

1拍

由 z 变换定义可知 $e(t)$ 为

$$e(0)=1,\quad e(T)=e(2T)=e(3T)=\cdots=0$$

虚线表示对中间采样点形式未知



只描绘了采样点

(a)　　(b)

$$E(z)=\Phi_e(z)R(z)=\Phi_e(z)\frac{A(z^{-1})}{(1-z^{-1})^q}$$

单位速度信号

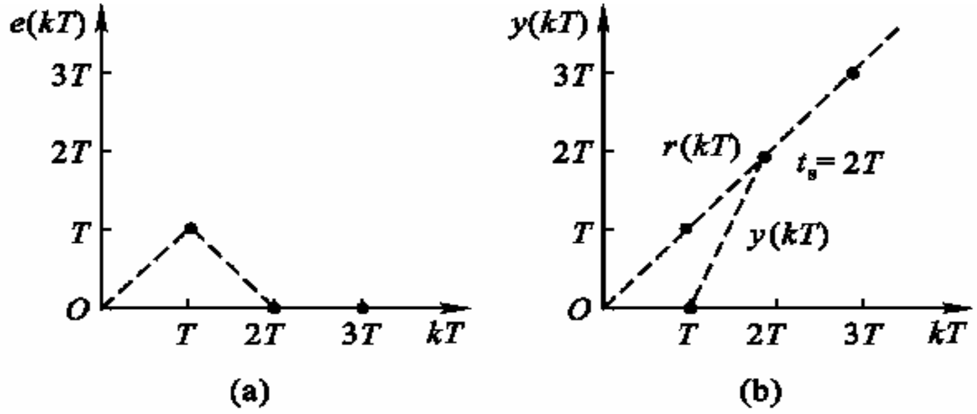
$$R(z)=\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

选择 $p=2$， $F(z^{-1})=1$， 则 $\Phi_e(z)=(1-z^{-1})^2$，使 $\Phi_e(z)$ 具有最简形式， 则

$$E(z)=(1-z^{-1})^2\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}=Tz^{-1}$$

由 z 变换定义可知 $e(t)$ 为

$$e(0)=0,e(T)=T,e(2T)=e(3T)=\cdots=0$$



$$E(z)=\Phi_e(z)R(z)=\Phi_e(z)\frac{A(z^{-1})}{(1-z^{-1})^q}$$

单位加速度信号

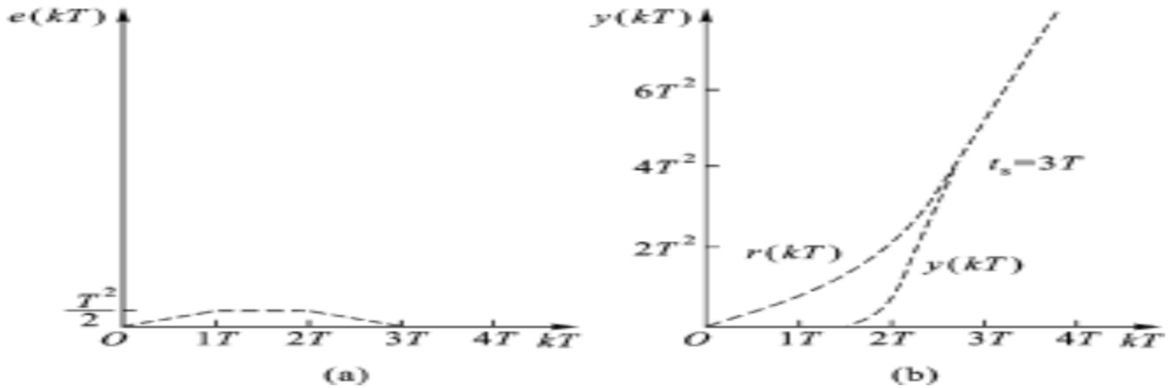
$$R(z)=\frac{T^2z^{-1}(1+z^{-1})}{2(1-z^{-1})^3}$$

选择p=3，$F(z^{-1})=1$，即$\Phi_e(z)=(1-z^{-1})^3$，使$\Phi_e(z)$具有最简形式，则

$$E(z)=(1-z^{-1})^3\frac{T^2z^{-1}(1+z^{-1})}{2(1-z^{-1})^3}=\frac{1}{2}T^2z^{-1}+\frac{1}{2}T^2z^{-2}$$

由z变换定义可知$e(t)$为

$$e(0)=0,e(T)=\frac{1}{2}T^2,e(2T)=\frac{1}{2}T^2,e(3T)=\cdots=0$$



任意广义对象

设广义脉冲传递函数$G(z)$为

$$G(z)=\frac{z^{-m}(p_0+p_1z^{-1}+\cdots+p_bz^{-b})}{q_0+q_1z^{-1}+\cdots+q_az^{-a}}=\frac{\prod_{i=1}^{u}(1-b_iz^{-1})}{\prod_{n=1}^{v}(1-a_nz^{-1})}G'(z)$$

b_1，b_2，…，b_u是$G(z)$的u个不稳定零点，

a_1，a_2，…，a_v是$G(z)$的v个不稳定极点，

纯稳定

$G'(z)$是$G(z)$中不包含单位圆上或单位圆外的零极点部分。

当对象不包含延迟环节时，$m=1$；当对象包含延迟环节时，$m>1$。

零阶保持器

对单位反馈：闭环零点=开环零点
闭环极点由开环零、极点共同决定（根轨迹的理论根据）

$$\Phi_e(z) = 1 - \Phi(z) = \frac{1}{1 + D(z)G(z)}$$

说明D(z)中没有不稳定的零点

$\Phi_e(z)$的零点应包含$G(z)$在z平面单位圆上或单位圆外的所有极点

$$\Phi_e(z) = \prod_{n=1}^{v}(1 - a_n z^{-1})F_1(z^{-1})$$

$F_1(z^{-1})$是关于z^{-1}的多项式且不包含$G(z)$中的不稳定极点a_n

$$\Phi(z) = \frac{D(z)G(z)}{1 + D(z)G(z)}$$

$\Phi(z)$应保留$G(z)$所有不稳定零点

没有，说明D(z)中没有不稳定的极点

$$\Phi(z) = \prod_{i=1}^{u}(1 - b_i z^{-1})F_2(z^{-1})$$

$F_2(z^{-1})$为关于z^{-1}的多项式且不包含$G(z)$中的不稳定零点b_i

$$D(z)=\frac{\Phi(z)}{(1-\Phi(z))G(z)}=\frac{\Phi(z)}{\Phi_{e}(z)G(z)}=\boxed{\frac{F_2(z^{-1})}{F_1(z^{-1})G'(z)}}$$

$D(z)$不再包含$G(z)$的z平面单位圆上或单位圆外零极点。

考虑到准确性、快速性，应选择

互相影响

$$\Phi_{e}(z)=(1-z^{-1})^{p}\prod_{n=1}^{v}(1-a_n z^{-1})F_1(z^{-1})$$

前面项

对应于阶跃、速度、及速度输入，p分别取1，2，3。

综合考虑闭环系统的稳、快、准，$\Phi(z)$选为

$$\Phi(z)=z^{-m}\prod_{i=1}^{u}(1-b_i z^{-1})\sum_{j=0}^{q+r-1}c_j z^{-j}=F_2(z^{-1})$$

其中，r为$G(z)$纯不稳定的极点数(**z=1极点除外**)；q分别取1，2，3；c_j为$q+r$个待定系数，$c_j(j=0,1,2,\ldots,q+r-1)$

初始值

$$\Phi(1)=1,\dot{\Phi}(1)=0,\cdots\cdots,\Phi^{(q-1)}(1)=0$$

$$\Phi(a_n)=1\qquad(n=1,2,3,\cdots,r)$$

任意广义对象最少拍控制器设计步骤：

✓将开环脉冲传函纯稳定零极点保留 G'中整理成如下

$$G(z)=\frac{z^{-m}(p_0+p_1z^{-1}+\cdots+p_bz^{-b})}{q_0+q_1z^{-1}+\cdots+q_az^{-a}}=\frac{\prod_{i=1}^{u}(1-b_iz^{-1})}{\prod_{n=1}^{v}(1-a_nz^{-1})}G'(z)$$

✓利用最小拍设计思想构造闭环脉冲传函如下

$$\Phi(z)=z^{-m}\prod_{i=1}^{u}(1-b_iz^{-1})\sum_{j=0}^{q+r-1}c_jz^{-j}$$

其中，b_i是$G(z)$的不稳定零点，u是不稳定零点个数；a_n是$G(z)$的不稳定极点，v是不稳定极点个数，r是纯不稳定极点个数；q视输入形式选为1、2或3；z^{-m}为原来G中延迟环节。

✓求待定参数，

$$\Phi(1)=1,\dot{\Phi}(1)=0,\cdots\cdots,\Phi^{(q-1)}(1)=0$$

$$\Phi(a_n)=1 \qquad (n=1,2,3,\cdots,r)$$

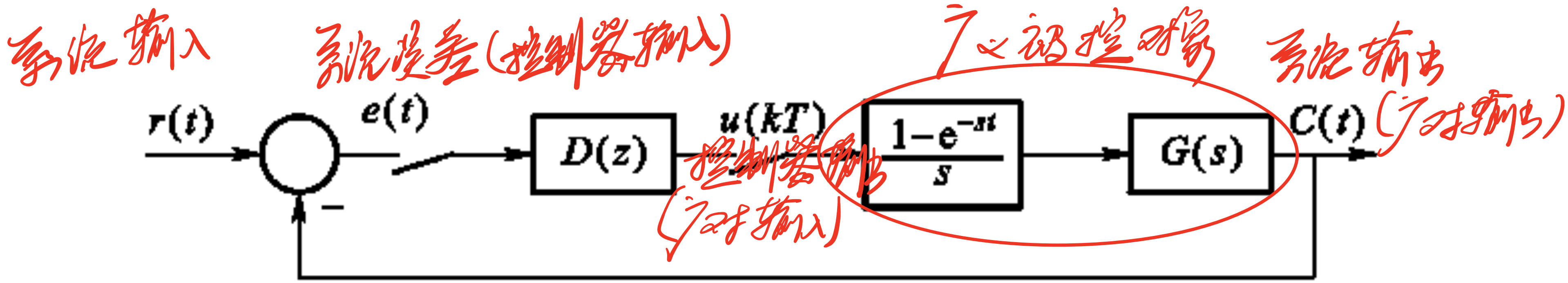
✓利用 $\Phi_e(z)=1-\Phi(z)$ $D(z)=\dfrac{\Phi(z)}{\Phi_e(z)G(z)}$求出最小拍控制器。

例题1：

在下图所示系统中，被控对象 $G_p(s)=\dfrac{K}{s(T_m s+1)}$

已知 $K=10\text{s}^{-1}$， $T=T_m=0.025\text{s}$，则按前面所述最少拍设计方法，

针对单位速度输入信号设计最少拍控制系统。



$$\Phi(z)=z^{-m}\prod_{i=1}^{u}(1-b_i z^{-1})\sum_{j=0}^{q+r-1}c_j z^{-j}$$

解：
$$G(s)=\frac{1-\mathrm{e}^{-sT}}{s}\frac{K}{s(T_\mathrm{m}s+1)}$$

$$G(z)=\mathscr{Z}[\frac{1-\mathrm{e}^{-sT}}{s}\frac{K}{s(T_\mathrm{m}s+1)}]=K(1-z^{-1})[\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}-\frac{T_\mathrm{m}}{1-z^{-1}}+\frac{T_\mathrm{m}}{1-e^{-T/T_\mathrm{m}}z^{-1}}]$$

$$=\frac{0.092z^{-1}(1+0.718z^{-1})}{(1-z^{-1})(1-0.368z^{-1})}$$

可以看出，不稳零点个数u=0，不稳极点个数v=1，不稳的极点是a=1，纯不稳极点个数r=0。

由于系统针对单位速度输入进行设计，故q=2。

表达系统纯滞后的项保留，即z^{-1}

$$\Phi(z)=z^{-1}(c_0+c_1 z^{-1})$$

$$\Phi(z) = z^{-1}(c_0 + c_1 z^{-1})$$

$$\Phi(1) = c_0 + c_1 = 1$$

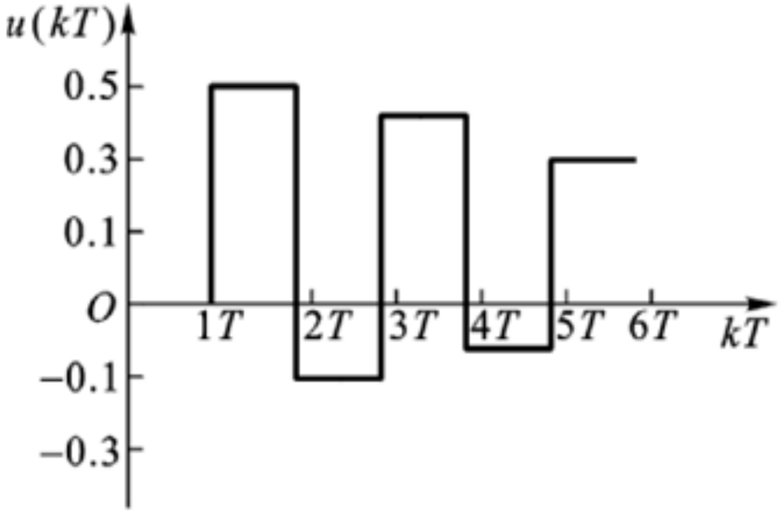
$$\Phi'(1) = c_0 + 2c_1 = 0$$

闭环脉冲传递函数为

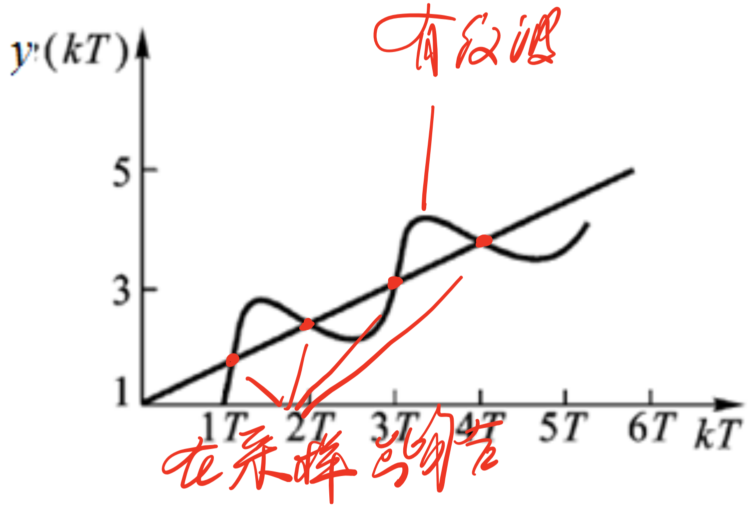
$$\Phi(z) = z^{-1}(2 - z^{-1}) = 2z^{-1} - z^{-2}$$

$$\Phi_e(z) = 1 - \Phi(z) = (1 - z^{-1})^2$$

$$D(z) = \frac{\Phi(z)}{\Phi_e(z)G(z)} = \frac{21.8(1-0.5z^{-1})(1-0.368z^{-1})}{(1-z^{-1})(1+0.718z^{-1})} = \frac{U}{E}$$



(a) 数字控制器输出波形



(b) 输出波形

计控系统在采样时刻是无纹波的，在采样时刻中间是有纹波的

最少拍无纹波控制器

最少拍设计是采用z变换进行的，仅在采样点处是闭环反馈控制，在采样点间实际上是开环运行的。因此，在采样点处的误差为零，并不能保证采样点之间的误差也为零。事实上，按上面方法设计的最少拍系统的输出响应在采样点间存在纹波。为使被控对象在稳态时的输出与输入同步，要求被控对象必须具有相应的能力。

例如，若输入为等速输入函数，被控对象$G_p(s)$的稳态输出也应为等速函数。因此就要求$G_p(s)$中至少有一个积分环节。

系统进入稳态后，若数字控制器输出$u(t)$仍然有波动，则系统输出就会有纹波。因此要求$u(t)$在稳态时，或者为0，或者为常值。由

控制器的输出

$$Y(z)=\Phi(z)R(z)=U(z)G(z)$$

知$U(z)=\Phi(z)R(z)/G(z)$。要求$u(t)$在稳态时无波动，就意味着$U(z)/R(z)$为z^{-1}的有限项多项式。而这要求$\Phi(z)R(z)$包含$G(z)$的所有零点，即

除尽

$$\Phi(z)=\prod_{i=1}^{w}(1-b_i z^{-1})F(z^{-1})$$

其中，w为广义对象$G(z)$的所有零点个数，$b_i(i=1,2,\ldots,w)$为$G(z)$的所有零点。

任意广义对象最少拍无纹波控制器设计步骤：

✓将开环脉冲传函纯稳定零极点保留 G' 中整理成如下

$$G(z)=\frac{z^{-m}(p_0+p_1z^{-1}+\cdots+p_bz^{-b})}{q_0+q_1z^{-1}+\cdots+q_az^{-a}}=\frac{\prod_{i=1}^{u}(1-b_iz^{-1})}{\prod_{n=1}^{v}(1-a_nz^{-1})}G'(z)$$

✓利用最小拍无纹波设计思想构造闭环脉冲传函如下

$$\Phi(z)=z^{-m}\prod_{f=1}^{w}(1-b_fz^{-1})\sum_{j=0}^{q+r-1}c_jz^{-j}$$

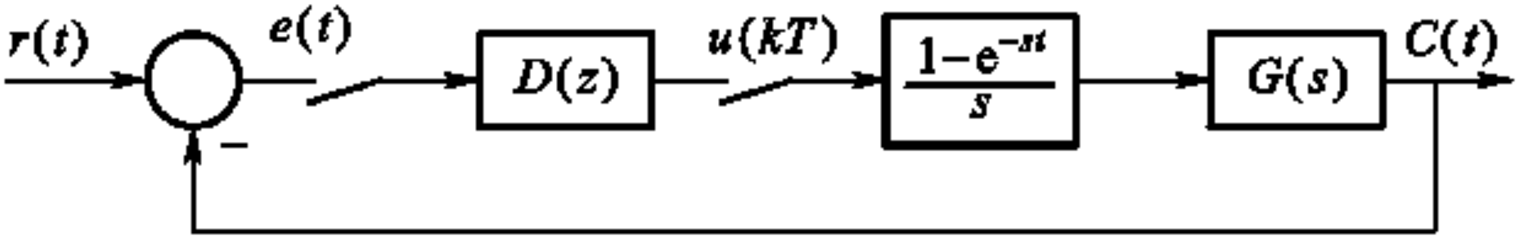
其中， b_i是$G(z)$的不稳定零点， u是不稳定零点个数； b_f是$G(z)$的所有零点， w是所有零点个数； a_n是$G(z)$的不稳定极点， v是不稳定极点个数，r是纯不稳定极点个数；q视输入形式选为1、2或3；z^{-m}为原来G中延迟环节。

✓求待定参数，
$$\Phi(1)=1,\dot{\Phi}(1)=0,\cdots\cdots,\Phi^{(q-1)}(1)=0$$
$$\Phi(a_n)=1 \qquad (n=1,2,3,\cdots,r)$$

✓利用$\Phi_e(z)=1-\Phi(z)D(z)=\dfrac{\Phi(z)}{\Phi_e(z)G(z)}$求最小拍无纹波控制器。

例题2：

系统结构及被控对象与例1相同。被控对象 $G_p(s)=\dfrac{K}{s(T_m s+1)}$ 已知 K=10s^{-1}，T=Tm=0.025s，试针对等速输入函数设计快速无纹波系统。



$$\Phi(z)=z^{-m}\prod_{f=1}^{w}(1-b_f z^{-1})\sum_{j=0}^{q+r-1}c_j z^{-j}$$

解：零阶保持器和被控对象组成的广义对象脉冲传递函数为

$$G(z)=\frac{0.092z^{-1}(1+0.718z^{-1})}{(1-z^{-1})(1-0.368z^{-1})}$$

可以看出，所有零点个数 $w=1$，$b_f=-0.718$，不稳极点个数 $v=1$，不稳的极点是 $a=1$，纯不稳极点个数 $r=0$。

由于系统针对等速输入进行设计，故 $q=2$。

表达系统纯滞后的项保留，即 z^{-1}

2+0-1 =1

$$\Phi(z)=z^{-1}\underbrace{(1+0.718z^{-1})}_{\text{稳定}}(c_0+c_1z^{-1})$$

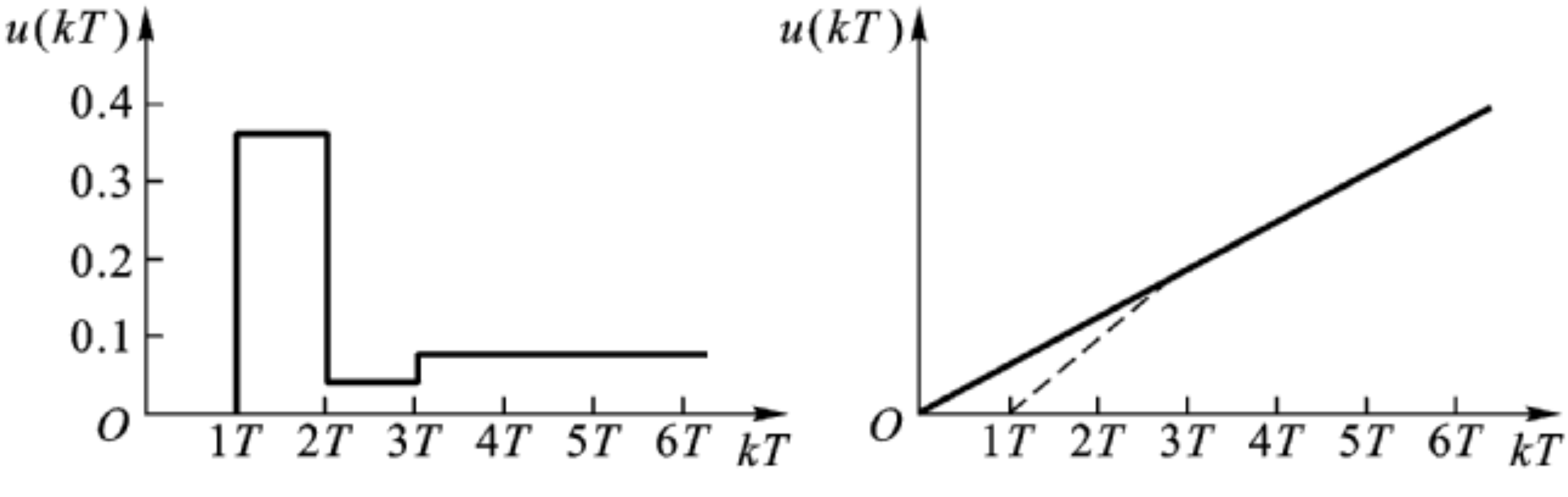
$$\Phi(z) = z^{-1}(1+0.718z^{-1})(c_0 + c_1 z^{-1})$$

$$\Phi(1) = 1$$

$$\Phi'(1) = \left.\frac{\mathrm{d}\Phi(z)}{\mathrm{d}z}\right|_{z=1} = 0$$

$$c_0 = 1.407, \quad c_1 = -0.826$$

$$D(z) = \frac{\Phi(z)}{1-\Phi(z)}\frac{1}{G(z)} = \frac{15.29(1-0.368z^{-1})(1-0.587z^{-1})}{(1-z^{-1})(1+0.592z^{-1})}$$



(a) (b)

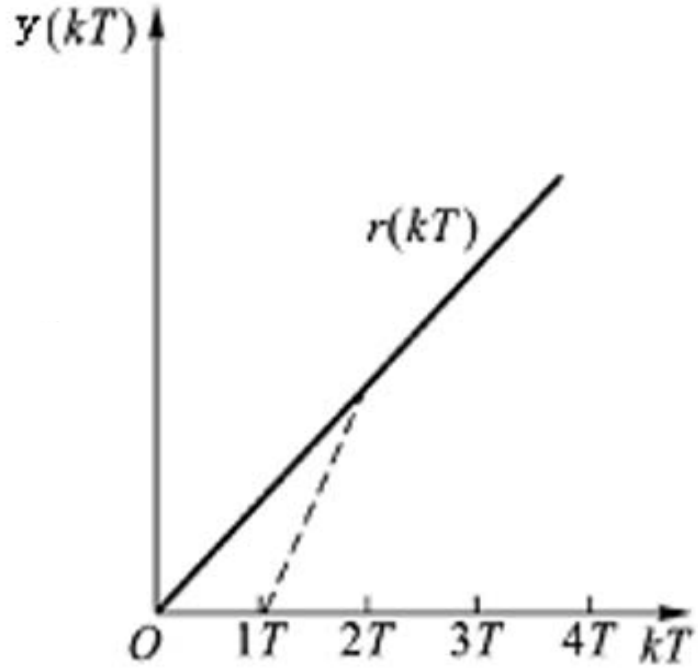
含阻尼因子的最少拍控制器

当Φ(z)是按单位速度输入信号设计时，有

$$\Phi_e(z) = (1 - z^{-1})^2$$

或

$$\Phi(z) = 2z^{-1} - z^{-2}$$

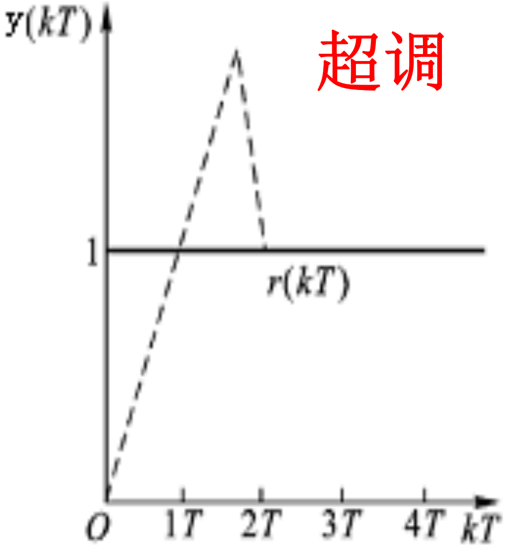


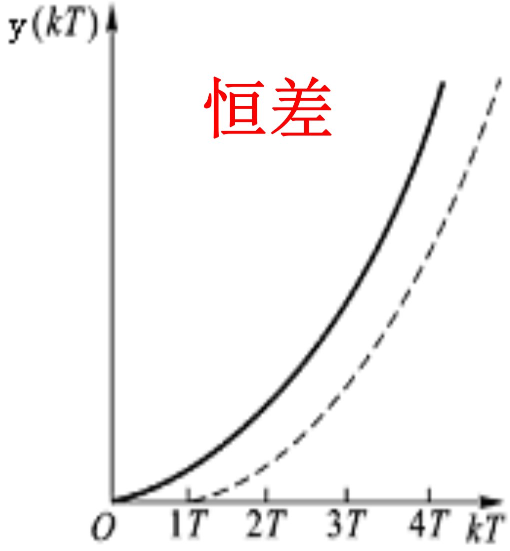
系统输出经2拍在采样点处无差地跟踪上输入。

含阻尼因子的最少拍控制器

保持按此选择设计的D(z)不变，对应另两种典型输入时，有

单位阶跃输入： $r(t)=1$ 单位加速度输入： $r(t)=\frac{1}{2}t^2$





含阻尼因子的最少拍控制器

最少拍过渡过程响应方法具有对输入函数适应性差的缺点，阻尼权因子方法是对各种输入函数的响应采用折衷方法处理，使它对不同输入信号都具有较满意的性能。当然，这样的系统已不具备最少拍响应了。设计程序很简单，即在所期望的闭环脉冲传递函数$\Phi(z)$中先引入一个权因子C，且用$1-Cz^{-1}$除$1-\Phi(z)$得

$$1-\Phi_w(z)=\frac{1-\Phi(z)}{1-Cz^{-1}}$$

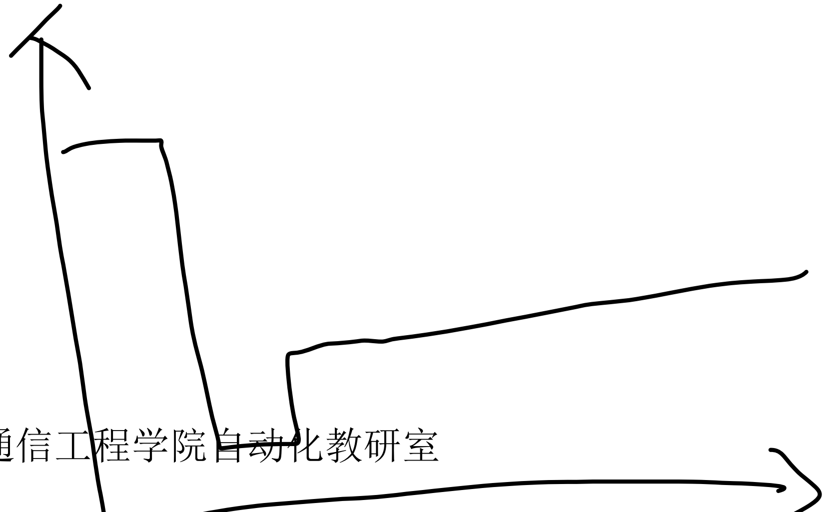
因为C现在是以$\Phi_w(z)$的一个极点出现，所以我们必须限制C的大小在-1和$+1$之间，以便使$\Phi_w(z)$是稳定的。

含阻尼因子的最少拍控制器

给定广义对象的脉冲传递函数为

$$G(z)=\frac{0.005z^{-1}(1-0.9z^{-1})}{(1-z^{-1})(1-0.905z^{-1})}$$

试针对单位阶跃输入和单位速度输入采用权因子设计方法设计最少拍控制系统。并画出系统的输出序列波形图。

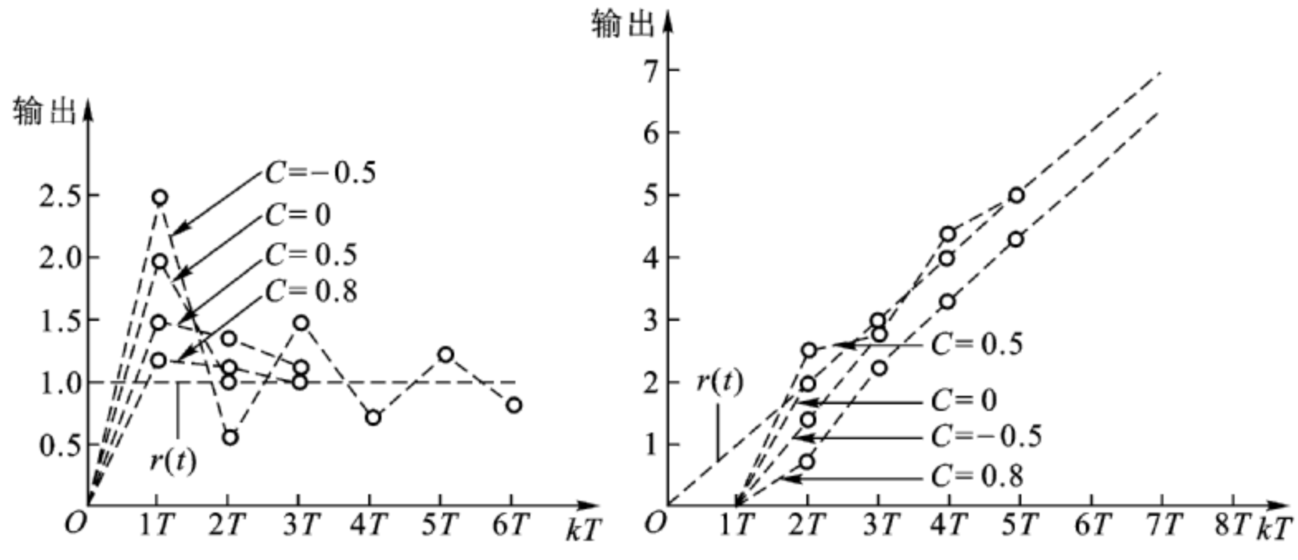


含阻尼因子的最少拍控制器

对于单位速度输入，按最少拍设计可以给出闭环脉冲传递函数为

$$\Phi(z) = z^{-1}(2 - z^{-1})$$

所设计系统在单位阶跃和单位速度输入下的响应如图



(a) 单位阶跃输入　　(b) 单位速度输入

含阻尼因子的最少拍控制器

根据 $$1-\Phi_w(z)=\frac{1-\Phi(z)}{1-Cz^{-1}}$$ 有

$$1-\Phi_w(z)=\frac{1-\Phi(z)}{1-Cz^{-1}}=\frac{(1-z^{-1})^2}{1-Cz^{-1}}$$

在c为负值时，阶跃响应的过调量比最少拍响应大。c=0.8时，阶跃响应的过调量只有20%，但是，阶跃响应和速度响应都很慢到达稳态值。由图还可以看出，在这种情况下最好选c为0.5。