高等数学作业

BⅠ

吉林大学数学中心

2017年8月

第一次作业

学院____________班级___________姓名___________学号____________

一、单项选择题

1．下列结论正确的是(A　).

（A）$\arctan x$ 是单调增加的奇函数且定义域是（$-\infty, +\infty$）　　；

（B）$arc\cot x$ 是单调减少的奇函数且定义域是 $(0,\ \pi)$；

（C）$\arctan x$ 是无界函数；

（D）$\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2} = -\dfrac{\pi}{4}$.

2．下列函数中不是奇函数的为(　B　).

（A）$\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$；（B）$x^3 + \cos x$；（C）$\ln(x + \sqrt{1+x^2})$；（D）$\arcsin x$.

3．函数 $y = \sin 2x + \cos 3x$ 的周期为(　C　).

（A）π；　　（B）$\dfrac{2}{3}\pi$；　　（C）2π；　　（D）6π.

4．. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right) =$（　C　）

（A）0;　　（B）1;　　（C）0.5;　　（D）2.

5.已知数列 $\{x_n\}$ 是单调增加的.则“数列 $\{x_n\}$ 收敛”是“数列 $\{x_n\}$ 有上界”的（　A　）条件

（A）充分必要;（B）必要非充分;（C）充分非必要;（D）即非充分也非必要.

6．设数列 $\{a_n\}$（$a_n > 0, n = 1,2,\cdots$）满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 0$, 则(　D).

（A）$\{a_n\}$ 的敛散性不定；　　（B）$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c \neq 0$；

（C）$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 不存在；　　（D）$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

二、填空题

1．$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-1}}+\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-n}}\right)=$ ____0. 5____.

2．设 $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\ge 0,\\ x^2+2, & x<0,\end{cases}$ $g(x)=2x-4$.

则 $f[g(x)]=$ ___ $\begin{cases}4x-7, & x\ge 2\\ 4x^2-16x+18, & x<2\end{cases}$ ________.

3．函数 $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ 的反函数 $f^{-1}(x)=$__ $\ln\dfrac{x}{1-x}, x\in(0,1)$ ______ .

4．“数列 $\{x_{2n}\}$ 及数列 $\{x_{2n+1}\}$ 同时收敛”是“数列 $\{x_n\}$ 收敛” ____必要____条件.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}[n\sin\dfrac{1}{n}+\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})+(\dfrac{n+2}{n})^{n+1}]=$ ____ $2+e^2$ ____.

三、计算题

1．设 $f(1+\dfrac{1}{x^3})=4+\dfrac{3}{x^3}+\dfrac{1}{x^6}$，求 $f(x)$.

解：令 $t=1+\dfrac{1}{x^3}$，则 $x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{t-1}}$ 代入已知的式子中得，

$$f(t)=4+3(t-1)+t-1)^2$$

即有

$$f(t)=2+t+t^2$$

2．用夹挤定理求 $\lim\limits_{n\to\infty}(a^n+b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}$，其中（$a>b>c>0$）

解：由于 $a<(a^n+b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}<3^{\frac{1}{n}}a$

以及 $$\lim_{n\to\infty}3^{\frac{1}{n}}a=a$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}(a^n+b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}=a$$

四、证明题

设 $x_1=1, x_{n+1}=1+\dfrac{x_n}{x_n+1}, n=1,2,\cdots$，证明 $\lim\limits_{x\to\infty}x_n$ 存在，并求其值.

证：先证明数列 $\{x_n\}$ 单调递增：

$x_1 < x_2$ 显然成立．假设 $x_{k-1} < x_k$ 成立，则有

$$x_{k+1} - x_k = \frac{x_k}{1+x_k} - \frac{x_{k-1}}{1+x_{k-1}} = \frac{x_k - x_{k-1}}{(x_k+1)(x_{k-1}+1)} > 0$$

即 $x_k < x_{k+1}$ 成立．由数学归纳法知，对任何正整数 n，均有 $x_n < x_{n+1}$ 成立．从而数列 $\{x_n\}$ 单增．

再次，显然有 $x_n < 2$ 成立，即数列 $\{x_n\}$ 上有界．根据单调有界原理便知数列 $\{x_n\}$ 收敛．

令 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$，将 $x_{n+1} = 1 + \dfrac{x_n}{x_n+1}$ 两边取极限得 $l^2 = l + 1$，考虑到 l >0 解得 $l = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.因此． $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

第二次作业

学院____________班级____________姓名____________学号____________

一、单项选择题

1．已知 $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{f(x)}{(x-1)^2} = -1$，则下列结论正确的是(　D　).

（A） $f(1)=0$；

（B） $\lim\limits_{x\to1} f(x) < 0$；

（C）存在 $\delta > 0$，当 $|x-1| < \delta$ 时， $f(x) < 0$；

（D）存在 $\delta > 0$，当 $0 < |x-1| < \delta$ 时， $f(x) < 0$.

2．已知 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \neq 0$ 存在，则下列结论不正确的是 (　C　).

（A）若 $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ 不存在，且 $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq \infty$.则 $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$ 不存在，且 $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) \neq \infty$；

（B）若 $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$，则 $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = \infty$；

（C）若$\lim\limits_{x\to a} g(x)$不存在，则$\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$可能存在也可能不存在；

（D）. $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B$,则$\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$=AB.

3．“$f(x_0-0)$与$f(x_0+0)$存在”是“$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在”的(B)条件.

（A）充分；（B）必要；（C）充分且必要；（D）非充分且非必要.

4．当$x\to+\infty$时，$y=e^x\sin x$是(B).

（A）无穷大；（B）无界函数但不是无穷大；

（C）有界函数但不是无穷小；（D）无穷小.

5．（A）当$x\to 0$时，$\sqrt{x+\sqrt{x}}$是$\sqrt[8]{x}$的2阶无穷小；

（B）当$x\to 0$时，$\sqrt[8]{x}$是$\sqrt{x+\sqrt{x}}$的2阶无穷小；

（C）当$x\to 0$时，$\sqrt{x+\sqrt{x}}$是$\sqrt[8]{x}$的4阶无穷小；

（D）当$x\to 0$时，$\sqrt[8]{x}$是$\sqrt{x+\sqrt{x}}$的4阶无穷小.

上面结论正确的是 (A).

6． $x=0$是函数(D)的可去间断点.

（A） $f(x)=x^2+\arctan\dfrac{1}{x}$；（B） $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$；

（C） $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$；（D） $f(x)=\sqrt[3]{x}\sin\dfrac{1}{x}$.

7． $x=0$是(D)函数的跳跃间断点.

（A） $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$；（B） $f(x)=\dfrac{\sin x}{x^2}$；

（C） $f(x)=\cos\dfrac{1}{x}$；（D） $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}$.

二、填空题

1．设$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$存在，且$f(x)=x^{2`}+2x\lim\limits_{x\to 1} f(x)$，则$f(x)$=_____ $x^{2`}$ - $2x$___.

2．已知 $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\frac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$，则 $f(x)$ = ______$e^{\frac{x}{\sin x}}$____________

3．$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^k\sin\frac{1}{x}}{\sin x^2}=0$ 当且仅当 k 满足________$k>2$. ___.

4．已知 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{f(x)}{\sin x}\right)}{e^x-1}=3$，且当 $x\to 0$ 时, $f(x)$ 与 ax^2 是等价无穷小量，则 a=

3______.

5．已知 $f(x)=\begin{cases}\frac{1-e^{\tan x}}{\ln(1+\frac{x}{2})}, & x>0\\ a+x^2, & x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 点连续，则 a=____-2____.

6．函数 $f(x)=\frac{|x|(x^2+3x+2)}{(x^2-1)\sin x}$ 的无穷间断点是 $x=1, k\pi(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ ___.

三、计算与解答题

1．已知 $f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}, & -\frac{\pi}{2}<x<0\\ \frac{ax^2}{\sqrt{1+0.5x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}}, & 0<x<1\end{cases}$，试确定 a 为何值时，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在.

解 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{ax^2}{\sqrt{1+0.5x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}}$

$$=a\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2(\sqrt{1+0.5x\arcsin x}+\sqrt{\cos x})}{1+0.5x\arcsin x-\cos x}$$

$$=2a\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\frac{\arcsin x}{2x}+\frac{1-\cos x}{x^2}}=2a$$

2．求 $\lim\limits_{x\to 0}x[\frac{1}{x}]$. 其中 $[\frac{1}{x}]$ 是不超过 $\frac{1}{x}$ 的最大整数。

证明 设 $\left\{\frac{1}{x}\right\}=\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]$，则有 $0\le\left\{\frac{1}{x}\right\}\le 1$ 于是有

$$\lim_{x\to 0}(x\left[\frac{1}{x}\right])=1-\lim_{x\to 0}(x\left\{\frac{1}{x}\right\})=1$$

3. **求** $\lim_{x\to 0}(\frac{a^x+b^x}{2})^{\frac{1}{x}}$，（$a$ ，b 为不等于 1 的正数.）

解 设 $y=(\frac{a^x+b^x}{2})^{\frac{1}{x}}$，则

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\frac{a^x-1}{2}+\frac{b^x-1}{2})}{x}=\lim_{x\to 0}(\frac{a^x-1}{2x}+\frac{b^x-1}{2x})=\frac{\ln(ab)}{2}$$

于是有

$$\lim_{x\to 0}y=\sqrt{ab}$$

4. 讨论函数 $f(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$ 的连续性。

解 $f(x)=\begin{cases} x,|x|<1 \\ -x,|x|>1 \\ 0,|x|=1 \end{cases}$

$f(x)$ 在除了 $x=1,x=-1$ 之外的任何点都连续. 在 $x=1,x=-1$ 不连续.

四、证明题

1. 设 $f(x)$ 在[a,b]上连续 $(a<x_1<x_2<b)$，证明对任意的两个正数 t_1 ，t_2 都存在 $\xi\in(a,b)$ 使

$$t_1f(x_1)+t_2f(x_2)=(t_1+t_2)f(\xi)$$

证： $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续，$a<x_1<x_2<b$， $f(x)$ 在开区间 $[x_1,x_2]$ 内连续，则 $f(x)$ 在开区间 $[x_1,x_2]$ 存在最大值 M 最小值 m，

$m\le\frac{t_1f(x_1)+t_2f(x_2)}{t_1+t_2}\le M$，$(t_1>0,t_2>0)$，由介值定理得证

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,1$ 上非负连续，且 $f(0)=f(1)=0$，证明方程对任意实数 a（0<a<1）必有 $\xi\in[0,1)$. 使 $f(\xi+a)=f(\xi)$

证明

设 $F(x)=f(x+a)-f(x)$

（1）若 $f(a)=0$，取 $\xi=0$ 即可

（2）若 $f(1-a)=0$，取 $\xi=1-a$ 即可

（3）若 $f(a)\ne 0,f(1-a)\ne 0$.将 $F(x)$ 在 $[0,1-a]$ 用零点定理即可.

第三次作业

学院____________班级___________姓名___________学号____________

一、单项选择题

1．$f(x)$ 在 $x=a$ 处左，右导数 $f'_-(a), f'_+(a)$ 都存在，是 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续的(C　)条件.

（A）充分必要;（B）必要非充分;（C）充分非必要;（D）即非充分也非必要.

2．设方程 $\mathrm{e}^y + xy = \mathrm{e}$ 确定了 y 是 x 的函数，则 $dy|_{x=0}$ (B　).

（A）$\mathrm{d}x$;　　（B）$-\frac{1}{\mathrm{e}}\ \mathrm{d}x$;　　（C）$-\mathrm{d}x$;　　（D）$-\frac{1}{\mathbf{e}}$.

3．设 $y=f(\ln x)$，　$f(u)$ 是可导函数，则 $dy=($　D　$)$.

（A）$f'(\ln x)dx$;　　（B）$f'(\ln x)\ln x dx$;

（C）$f'(\ln x)\frac{1}{\ln x}dx$;　　（D）$f'(\ln x)]\ d\ln x$.

4．设 $y=\sin^2 x$，则 $y^{(n+1)}=($　B　$)$.

（A）$\sin(2x+\frac{n\pi}{2})$;　　（B）$2^n\sin(2x+\frac{n\pi}{2})$;

（C）$2^{n+1}\sin(2x+\frac{n\pi}{2})$;　　（D）$2^n\sin(x+\frac{n\pi}{2})$.

5．设 $f(x)=\begin{cases} x^\alpha \sin\frac{1}{x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$ 则 $\alpha>0$ 是 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续的(　A　)条件.

（A）充分必要;（B）必要非充分;（C）充分非必要;（D）即非充分也非必要.

6．$f(x)=(x-a)\varphi(x)$，且 $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0, \varphi(a)=1$，则 $f'(a)=$ (　A　).

（A）0;　　（B）a;　　（C）1;　　（D）不存在.

7．$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$ 存在是 $f(x)$ 在 x_0 点可导的（　B　）条件.

（A）充分必要;（B）必要非充分;（C）充分非必要;（D）即非充分也非必要.

二、填空题

1．设曲线 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases} xe^t + t\cos x = \pi \\ y=\sin t+\cos^2 t \end{cases}$ 确定，则 $y=y(x)$ 在 $(0,1)$ 处的切线方程为____$y=1+e^\pi x$______.

2．设 $f(x)=2x^3+x^2|x|$，则使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数 n=______2______.

3．设 $y=x\ln|1-x|$，则 $y^{(n)}(0)=$ ________$-n(n-2)!$___.

4．已知 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$ 则 $f(0)=$____0____， $f'(0)=$____1__.

5．已知 $f(x)$ 在 $x=1$ 处具有连续的导数，且 $f'(1)=1$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(\cos^2 2x)=$ -8____.

6．设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可导，且则 $f'(x_0)\neq 0$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y-\mathrm{d}y}{\Delta x}=$______0______.

三、计算题

1．设 $y=[f(\sin\frac{1}{x})]^2+e^{f(x^2)}$，其中 $f(x)$可微. 求 y' .

$$y'=-\frac{2}{x^2}\ f(\sin\frac{1}{x})f'(\sin\frac{1}{x})\cos\frac{1}{x}+2xe^{f(x^2)}f'(x^2)$$

2．设 $y=(x+\sqrt{x^2+a^2})^{\arctan x}$，求 dy .

解 $\ln y=\arctan x\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$

则

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{x^2+1}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+\arctan x\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}})$$

$$y'=(x+\sqrt{x^2+a^2})^{\arctan x}(\frac{1}{x^2+1}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+\arctan x\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}})$$

$$dy=(x+\sqrt{x^2+a^2})^{\arctan x}(\frac{1}{x^2+1}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+\arctan x\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}})dx$$

3．设 $y=2^x\sqrt{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\sqrt{\sec^2 x+1}}$，求 y' .

解 $\ln y=\ln 2^x+\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{4}\ln(\sec^2 x+1)$，则

$$\frac{y'}{y}=\ln 2-\frac{1}{2x^2}+\frac{\sec^2 x\tan x}{2(\sec^2 x+1)}$$

于是

$$y'=2^x\sqrt{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\sqrt{\sec^2 x+1}}\ (\ln 2-\frac{1}{2x^2}+\frac{\sec^2 x\tan x}{2(\sec^2 x+1)})$$

4．设$\begin{cases} x = a（\ln\tan\dfrac{t}{2} + \cos t） \\ y = a\sin t \end{cases}$，求$\dfrac{d^2 y}{dx^2}$.

解：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{a\cos t}{a\dfrac{\cos^2 t}{\sin t}} = \tan t$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\sec^2 t}{a\dfrac{\cos^2 t}{\sin t}} = \frac{\sin t}{a\cos^4 t}$$

5．设$y = f(x)$由方程$xy + \ln y = 1$所确定，求$\left.\dfrac{d^2 y}{dx^2}\right|_{x=0}$.

解　将方程两端对 x 求导

$$y + xy' + \frac{y'}{y} = 0 \qquad （1）$$

将$x = 0, y = e$代入上面方程解得$y'(0) = -e^2$

再将（1）式两端对x求导

$$2y' + xy'' - (\frac{y'}{y})^2 + \frac{y''}{y} = 0$$

代入$x = 0, y = e$，$y'(0) = -e^2$解得$y''(0) = 3e^3$

6．设$f(x) = \begin{cases} \sin x + 2ae^x, & x < 0 \\ 9\arctan x + 2b(x-1)^3, & x \geq 0 \end{cases}$试确定常数$a, b$的值，使得函数 $f(x)$

在 x=0 点可导，并求$f'(0)$.

解　由可导必连续知$f(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$，于是有$a = -b$

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x + 2ae^x + 2b}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x + 2ae^x - 2a}{x - 0} = 1 + 2a$$

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{9\arctan x + 2b(x-1)^3 + 2b}{x - 0} = 9 + 6b$$

由 $f(x)$在 x=0 点可导可得$1 + 2a = 9 + 6b$

经求解得$a = 1, b = -1$.因此$f'(0) = 3$

第四次作业

学院____________班级____________姓名____________学号____________

一、单项选择题

1．(　A　)不满足罗尔定理的条件，但存在$\xi\in(-1,1)$使$f'(\xi)=0$.

（A）$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4} & ,-1\le x<0\\ (x-\dfrac{1}{2})^2 & ,0\le x\le 1\end{cases}$在[-1,1]上；

（B）$f(x)=\begin{cases}x & ,-1\le x<1\\ -1, & x=1\end{cases}$在[-1,1]上；

（C）　$f(x)=|x|$在[-1,1]上；

（D）　$y=x^2$在[-1,1]上.

2．已知$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，则在(a,b)内(　A　).

（A）曲线$y=f(x)$必有切线平行于$y=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x$；

（B）曲线$y=f(x)$只有一条切线平行于$y=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x$；

（C）曲线$y=f(x)$必有切线平行于x轴；

（D）曲线$y=f(x)$在未必有切线.

3．$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)=$(　C　).

（A）∞；　（B）0；　（C）$\dfrac{1}{2}$；　（D）$-\dfrac{1}{2}$.

4．下列各极限都存在，能用洛必达法则求的是(C　).

（A）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$；　（B）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\cos x}{x+\sin x}$；

（C）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\arctan x-\frac{\pi}{2}}{\operatorname{arccot} x}$；　（D）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

5．已知$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，$f'(x)\ne 1$，且$0<f(x)<1$.则$f(x)=x$在(0,1)内有(　D　)个实根.

（A）0；　（B）3；

（C）2；　（D）1.

二、填空题

1．设 $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)$，则方程 $f'(x)=0$ 的实根个数为______3______个，它们分别在区间____（0，1），（1，2），（2，3）_________.

2．$\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=$ ______1_______.

3．已知当 $x\to 0$ 时，$e^{-x}-ax-b$ 与 $\frac{1}{2}x^2$ 是等价无穷小量，则 $a=$ __-1__，$b=$ 1__.

4．函数 $f(x)=\ln x$ 在 x=1 点的二阶泰勒公式为（拉格朗日型余项）$f(x)=x-1-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{1}{3[1+\theta(x-1)]^3}(x-1)^3$___，$(0<\theta<1)$___.

5．$f(x)=x^2\ln(1+x)$，则 $f^{(n)}(0)=$_____ $\frac{(-1)^{n-1}n}{n-2}$ _____$(n>2$.

三、计算题

1．利用泰勒公式求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x+1-\cos x}{\ln(1+x)+1-\mathbf{e}^{x^2}}$.

解 $\sin x=x+o(x)$；$1-\cos x=-\frac{x^2}{2!}-o(x^3)$

$\ln(1+x)=x+o(x)$；$e^{x^2}=1+x^2+o(x^2)$

代入得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+1-\cos x}{\ln(1+x)+1-e^{x^2}}=1$$

2．求 $\lim\limits_{x\to\infty}[x+x^2\ln(1-\frac{1}{x})]$.

解 由泰勒公式有

$$\lim_{x\to\infty}[x+x^2\ln(1-\frac{1}{x})]=\lim_{x\to\infty}[x+x^2(-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o(\frac{1}{x^2})]=-\frac{1}{2}$$

3．求 $\lim\limits_{n\to+\infty}(n\sin\frac{1}{n})^{n^2}$，$n\in N^+$.

解 设 $f(x)=(\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{x^2}}$

$$\lim_{x\to 0^+}\ln f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+\frac{\sin x}{x}-1)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x-x}{x^3}=-\frac{1}{6}$$

故有 $\lim\limits_{n\to+\infty}(n\sin\frac{1}{n})^{n^2}=e^{-\frac{1}{6}}$

四、证明题

1．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续（$a>0$），在 (a,b) 内可导，证明：必存在点 ξ，$\eta\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$.

证明：由于设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续（$a>0$），在 (a,b) 内可导。由柯西中值定理知存在 $\eta\in(a,b)$ 满足

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\eta)}{2\eta}$$

再由拉格朗日中值定理知有 $\xi\in(a,b)$ 满足

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$$

整理上述两式便知，必存在点 ξ，$\eta\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$.

2． $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在(0, 3)内可导， $f(0)=1$, $f(1)+f(2)+f(3)=3$. 证明至少存在一点 $\xi\in(0,3)$，使得 $f'(\xi)=0$.

证明 因 $f(x)$ 在 $[1,3]$ 上连续，所以至少存在一点 $x_0\in[1,3]$，使 $f(x_0)=\dfrac{f(1)+f(2)+f(3)}{3}=1$，又由于 $f(x)$ 在 $[0,x_0]$ 上满足 Rolle 定理条件，根据 Rolle 定理知，至少存在 $\xi\in(0,x_0)\subset(0,3)$，使 $f'(\xi)=0$.

3.当 $x>0$ 时，证明：$\ln(1+x)>x-x^2$.

证明：设 $f(x)=\ln(1+x)-x+x^2$.显然 $f(x)$ 在[0,x]可导，由拉格朗日中值定理知在(0, x)内至少有一点 ξ 使得

$$f(x)=f(0)+f'(\xi)x$$

于是便有

$$\ln(1+x)-x+x^2=\frac{\xi+2\xi^2}{1+\xi}x>0$$

第五次作业

学院____________班级___________姓名___________学号____________

一、单项选择题

1．设 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点，$f(x_0)$ 是极小值,则在该点处(　D　).

（A） $f''(x_0)=0$；　　（B）曲线 $y=f(x)$ 有平行于 x 轴的切线；

（C） $f'(x_0)=0$；　　（D）曲线 $y=f(x)$ 可能没有切线.

2．曲线 $y=(x+2)e^{-\frac{1}{x}}$ 渐近线的条数为(　C　).

（A） 0 条；　（B）1 条；　（C）2 条；　（D）3 条.

3．曲线 $y=\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$ (　C　).

（A）有且仅有水平渐近线；

（B）有且仅有竖直渐近线；

（C）既有水平渐近线，又有竖直渐近线；

（D）有一条斜渐近线.

4．$f(x)$ 二阶可导，$f'(x)>0$，$f''(x)<0$，则在点 x_0 处，当 $\Delta x>0$ 时，有(　B　).

（A） $\Delta y<\mathrm{d}y<0$；　　（B） $\mathrm{d}y>\Delta y>0$；

（C） $\Delta y>\mathrm{d}y>0$；　　（D） $\mathrm{d}y<\Delta y<0$.

5．设 $f(x)$ 有二阶连续的导数，且 $f'(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1$，则(B　).

（A） $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值；　　（B） $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值；

（C） $(0, f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点；　（D）以上都不对.

6．函数 $f(x)=x\sin x+\cos x$，则下列命题正确的是(C).

（A） $f(0)$ 是极大值, $f(\frac{\pi}{2})$ 是极小值 ；（B） $f(0)$ 是极大值, $f(\frac{\pi}{2})$ 是极大值；

（C） $f(0)$ 是极小值, $f(\frac{\pi}{2})$ 是极大值；　（D） $f(0)$ 是极小值, $f(\frac{\pi}{2})$ 是极小值.

7．假设 $f(x)$ 满足关系式，$f''(x)+[f'(x)]^2=x, f'(0)=0$，则(D).

（A） $f'(0)$ 是 $f'(x)$ 的极大值；　（B） $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值；

（C） $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值；　（D） $(0, f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

二、填空题

1．函数 $f(x)=(x-2)\sqrt[3]{(x+2)^2}$ 的单调减少区间是___ $[-2,-\frac{2}{5}]$ _________.

2．取 t 增加方向为弧增加方向，曲线 $\begin{cases} x=t \\ y=t^2 \end{cases}$ 的弧微分 ds =______$\underline{\sqrt{1+4t^2}}$ dt.

3． 函数 $y=|x^2-5x+4|+x$ 在 [-5,6] 上的最小值为 ___1_____，最大值为 49______.

4．已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ 在点 $x=1$ 处有极值-2，则 $a=$______0______，$b=$______-3______，曲线 $y=f(x)$ 的拐点为____（0,0）____________.

5．摆线 $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ $(a>0)$ 在 $t=\pi$ 处的曲率为_____$\underline{\dfrac{1}{4a}}$_____.

三、计算题

1．求函数 $f(x)=\lim\limits_{t\to\infty}\left(\dfrac{t^2x^2}{1+t^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{t^2}{x+t^2}\right)^{t^2}$ 的极值、凹凸区间和拐点.

解（1） $f(x)=\lim\limits_{t\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{1+\dfrac{1}{t^2}}\right)^{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{x}{t^2}\right)^{t^2}}=|x|e^{-x}$

当 $x>0$ 时， $f'(x)=e^{-x}(1-x)$，当 $x<0$ 时， $f'(x)=-e^{-x}(1-x)$.则 $f(x)$ 的可能极值点，x=0,x=1

当 $x>1$ 时， $f'(x)<0$，当 $x<0$ 时， $f'(x)<0$,当 $0<x<1$ 时， $f'(x)>0$

因此 $f(0)=0$ 是极小值，$f(1)=e^{-1}$ 是极大值.

（2）

$$f''(x)=\begin{cases} xe^{-x}-2e^{-x}, x>0 \\ -xe^{-x}+2e^{-x}, x<0 \end{cases}$$

当 $x>2$ 时， $f''(x)>0$，当 $x<0$ 时， $f''(x)>0$,当 $0<x<2$ 时， $f''(x)<0$

因此 $(0,0)$ 及 $(2,2e^{-2})$ 是拐点..

2．讨论方程 $x-\dfrac{\pi}{2}\sin x=k$ （k 为常数)在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 内的实根个数.

解 令 $f(x)=x-\dfrac{\pi}{2}\sin x$，则 $f'(x)=1-\dfrac{\pi}{2}\cos x$，驻点 $a=\arccos\dfrac{2}{\pi}$.

当 $x>a$ 时， $f'(x)>0$，当 $x<a$ 时， $f'(x)<0$.且 $f(0)=0$， $f(\dfrac{\pi}{2})=0$

(1)若 $f(a)<k\le 0$，则原方程恰有两个解解。

(2)若 $f(a)=k$，则原方程有唯一解。

（3）若 $k\notin[f(a),0]$，原方程无解.

3.设 $f(x)$ 在[0, 1]上有二阶导数，且 $f(0)=0, f''(x)<0$.令 $g(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x)}{x}, x\in(0,1] \\ f'(0), x=0 \end{cases}$

讨论 $g(x)$ 在[0,1]上的单调性.

解　当 $0<x\le 1$ 时，$g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=.\dfrac{x（f'(x)-f'(\xi)）}{x^2}$，$0<\xi<x$

由 $f''(x)<0$ 可知 $g'(x)<0$。于是有 $g(x)$ 在（0,1]上是单调减少的。

又 $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=g(0)$

因此 g（x）在[0,1]上连续.故 $g(x)$ 在[0,1]上是单调减少

四、证明题

证明不等式　$2x\arctan x>\ln(1+x^2)$.

证明　令 $F(x)=2x\arctan x-\ln(1+x^2)$，则 F(0)=0

$F'(x)=2\arctan x$

(1) 由于当 $x>0$ 时，$F'(x)>0$ 及 $F(x)$连续，则当 $x\ge 0$ 时，F(x)$\ge F(0)=0$

(2) 由于当 $x<0$ 时，$F'(x)<0$ 及 $F(x)$连续，则当 $x\le 0$ 时，F(x)$\ge F(0)=0$

综合（1）、（2）可知，对任何的 x 均有 F(x)≥ 0。故所要证明的不等式成立.

第六次作业

学院____________班级___________姓名___________学号____________

一、选择题

1．已知 $f'(x)=g'(x), x\in\mathbf{R}$，则有(D).

（A） $f(x)=g(x)$；　　（B） $\left[\int f(x)\,dx\right]'=\left[\int g(x)\,dx\right]'$；

（C） $d\int f(x)\,dx=d\int g(x)\,dx$；　　（D） $f(x)=g(x)+C$.

2．下列命题错误的是(B).

（A）若 $F(x),\Phi(x)$ 都是 $f(x)$ 的原函数，则 $F(x)-\Phi(x)$ 必是常数;

（B）若 $f(x)$ 在区间 I 上不连续，则 $f(x)$ 在 I 上必无原函数;

（C）若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，则 $f(x)$ 的全体原函数族恰好是 $F(x)+C$ （其中 C 是任意常数);

（D）若 $F(x)$ 是原函数 $f(x)$，则 $F(x)$ 是连续函数.

3．若 $f(x)$ 的导函数是 $\sin x$，则 $f(x)$ 有一个原函数为（ B ）．

（A）$1+\sin x$；　（B）$1-\sin x$；　（C）$1+\cos x$；　（D）$1-\cos x$．

二、填空题

1. $\int x(2^x+\log_2 x)\,dx=$ $\frac{1}{\ln 2}(x2^x-\frac{2^x}{\ln 2}+\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{x^2}{4})+C$ ________．

2．若 $\int f(x)dx=\cos x+C$．则 $\int f^{(n)}(x)dx=$ ______ $\cos(x+\frac{n\pi}{2})+C$ ____________

3．$\int \tan^4 x dx=$ ________ $\frac{1}{3}\tan^3 x-\tan x+x+C$ _____．

4．$\int x\sin 2x dx=$ __ $-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$ _________．

5．$\int \frac{3x+2}{\sqrt{1-x^2}}dx=$ _______ $-3\sqrt{1-x^2}+2\arcsin x+C$ ______．

6．设 e^{-x^2} 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int xf'(x)dx=$ ______ $(-2x^2+2x)e^{-x^2}+C$ ___．

三、计算题

1．$\int e^{\sqrt{x}}dx$．

解　令 $\sqrt{x}=t$，则 $dx=2tdt$

$$\int e^{\sqrt{x}}dx=\int 2te^t dt=2te^t-\int 2e^t dt$$
$$=2te^t-2e^t+C$$
$$=2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}-2e^{\sqrt{x}}+C$$

2．$\int \frac{\sin x\cos^3 x}{1+\cos^2 x}dx$．

解　令 $\cos x=t$，则 $dt=-\sin xdx$

$$\int \frac{\sin x\cos^3 x}{1+\cos^2 x}dx=-\int \frac{t^3}{1+t^2}dt=-\int t-\frac{t}{1+t^2}dt$$
$$=-\frac{t^2}{2}+\frac{\ln(1+t^2)}{2}+C$$
$$=-\frac{\cos^2 x}{2}+\frac{\ln(1+\cos^2 x)}{2}+C$$

3. $\int \frac{\arctan x}{x^3} dx$.

解 $\int \frac{\arctan x}{x^3} dx = \frac{-1}{2x^2}\arctan x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\frac{1}{x^2} dx$

$$= \frac{-1}{2x^2}\arctan x + \frac{1}{2}\int (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2})\ dx$$

$$= -\frac{1}{2x^2}\arctan x - \frac{1}{2x} - \frac{1}{2}\arctan x + C$$

4. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$.

解 令 $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}} = t$，则 $dx = 6t^2(t^3-1)dt$

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int 6\frac{t}{t^3-1} t^2(t^3-1)dt$$

$$= \int 6t^3 dt = \frac{3}{2}(1+\sqrt{x})^{\frac{4}{3}} + C$$

5. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-2x+2}} dx$.

解 $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-2x+2}} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2-2}{\sqrt{x^2-2x+2}} dx$

$$= \sqrt{x^2-2x+2} + \int \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+1}} dx$$

$$= \sqrt{x^2-2x+2} + \ln(x-1+\sqrt{x^2-2x+2}) + C$$

6. $\int \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}} \mathrm{d}x$.

解 令 $x = \tan t, (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$，则 $dx = \sec^2 t dt$

$$\int \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}} \mathrm{d}x = \int \frac{\sec^2 t}{\sec^3 t} dt = \int \cos t dt$$

$$= \sin t + C = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C$$

第七次作业

学院____________班级___________姓名___________学号____________

一、单项选择题

1．下列命题中错误的是(　B　).

（A）若 $f(x)$在$[a,b]$上可积，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界；

（B）若 $f(x)$在$[a,b]$上可积，，则 $\int_a^x f(x)dx$ 是 $[a,b]$ 上的原函数；

（C）若 $f(x)$在$[a,b]$上可积，则 $\int_a^x f(x)dx$ 是 $[a,b]$ 上的有界；

（D）若 $f(x)$在$[a,b]$上可积，则 $\int_a^x f(x)dx$ 在 $[a,b]$ 上连续.

2． $f(x)=\int_{\cos x}^{\sin x}\frac{t}{1+e^t}dt$,，则 $f'(x)=$(　D　).

（A）; $\frac{\sin x}{1+e^{\sin x}}-\frac{\cos x}{1+e^{\cos x}}$;　　（B） $\frac{\sin x}{1+e^{\sin x}}\cos x-\frac{\cos x}{1+e^{\cos x}}\sin x$；

（C） $\frac{\sin x}{1+e^{\sin x}}$；　　（D） $\frac{\sin x}{1+e^{\sin x}}\cos x+\frac{\cos x}{1+e^{\cos x}}\sin x$.

3．设 $f(x)$ 是连续函数， $t>0, s>0$，则 $t\int_0^{\frac{s}{t}} f(tx)dx$ 的值(　D　).

（A）依赖于 s 和 t，不依赖于 x；　（B）依赖于 s，t，x；

（C）依赖于 t，不依赖于 s 和 x；　（D）依赖于 s，不依赖于 x 和 t.

4．设 $f(x)$ 是连续函数， $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，则 (　A　).

（A）当 $f(x)$ 为奇函数时， $F(x)$ 必是偶函数；

（B）当 $f(x)$ 为偶函数时， $F(x)$ 必是奇函数；

（C）当 $f(x)$ 是周期函数时， $F(x)$ 必是周期函数；

（D）当 $f(x)$ 是单调增函数时， $F(x)$ 必是单调增函数.

二、填空题

1．设 $f(x)=\int_0^x\sqrt{1-x^2}dx$ 则 $\int_0^1\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx==$ ______ $\arctan\frac{\pi}{4}$ _____.

2． $\int_1^e \sin\ln x dx=$ _____ $\frac{e}{2}(\sin 1-\cos 1)+\frac{1}{2}$ _______________.

3. $\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=$________ $\underline{\frac{2}{15}}$ ___.

4. $\int_{-1}^1[x^6(\arctan x)^3+x^2]\mathrm{d}x=$_____ $\underline{\frac{2}{3}}$ _______.

5. 设 $f(x)$ 连续，且 $f(x)=x+2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$，则 $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=$_____<u>0</u>____.

6. $f(x)$ 连续，$\int_0^x tf(x-t)dt=1-\cos x$ 则 $f(x)=$______<u>$\cos x$</u>____.

三、计算题

1. 设 $\begin{cases} x-e^x\sin t+1=0 \\ y=\int_0^t (e^{t^2}+1)\,dt \end{cases}$. 求 $\frac{dy}{dx}\Big|_{t=0}$

解 将方程组两端对 t 求导得

$$\begin{cases} x'(t)-e^x x'(t)\sin t-e^x\cos t=0 \\ y'(t)=e^{t^2}+1 \end{cases}$$

当 t=0 时,x=-1,y=0

则有 $\frac{dy}{dx}\Big|_{t=0}=\frac{y'(t)}{x'(t)}\Big|_{t=0}=2\mathrm{e}$

2. 求 $\int_0^\pi x\sqrt{\cos^2 x-\cos^4 x}\,\mathrm{d}x$.

解 $\int_0^\pi x\sqrt{\cos^2 x-\cos^4 x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^\pi x|\sin 2x|\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\sin 2x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$$

3. 设 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{\mathrm{e}^x+1}, & x\ge 0, \\ \frac{1}{1+\cos x}, & -1<x<0, \end{cases}$ 求 $\int_1^4 f(x-2)\,\mathrm{d}x$.

解 令 x-2=t

$$\int_1^4 f(x-2)\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^2 f(t)dt$$

$$=\int_{-1}^0 \frac{1}{1+\cos t}dt+\int_0^2\frac{1}{1+e^t}dt$$

$$=\int_{-1}^{0}\frac{1}{2\cos^2\frac{t}{2}}dt+\int_0^2\frac{e^{-t}}{1+e^{-t}}dt$$

$$=\tan\frac{t}{2}\Big|_{-1}^{0}\ -\ln(1+e^{-t})\Big|_0^2$$

$$=\tan\frac{1}{2}-\ln(1+e^{-2})+\ln 2$$

4．已知 $f(x)=\begin{cases}xe^x, x\le 0\\ x+1, x>0\end{cases}$, $F(x)=\int_{-1}^{x}f(t)\mathrm{d}t$，求 $F(x)$ 的表达式.

解 当 $x\le 0$ 时. $F(x)=\int_{-1}^{x}f(t)dt=\int_{-1}^{x}te^t dt=xe^x-e^x+2e^{-1}$

当 $x>0$ 时. $F(x)=\int_{-1}^{x}f(t)dt=\int_{-1}^{0}te^t dt+\int_0^x(t+1)dt=2e^{-1}-1+x+\dfrac{x^2}{2}$

5. 确定常数 a,b,c 使 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_b^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}=c\ne 0$.

解 由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_b^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}=c\ne 0$ 可知，$b=0$.

再由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_0^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a-\cos x}{\frac{\ln(1+x^3)}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a-\cos x}{x^2}$ 得 $a=1$

由此可得

$$c=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\int_0^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

四、证明题

1．设函数 $f(x)$ 在[2, 4]上连续，在(2, 4)内可导，且满足

$\int_3^4(x-1)^2f(x)\mathrm{d}x=f(2)$，证明：至少有一点 $\xi\in(2,4)$，使 $(1-\xi)f'(\xi)=2f(\xi)$.

证明　$f(x)$ 在[3,4]上连续，由积分中值定理可知，在[3,4]上至少有一点 c,使

$$\int_3^4(x-1)^2f(x)\mathrm{d}x=(1-c)^2f(c)$$

设 $F(x)=(x-1)^2 f(x)$，则 $F(x)$ 在[2,c]上连续，在(2,c)内可导，且

$$F(2)=f(2)=F(c)$$

由罗尔定理，至少有一点 $\xi\in(2,c)\subset(2,4)$，使 $(1-\xi)f'(\xi)=2f(\xi)$.

2．证明 $\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$.

证明 令 $x=\pi-t$，则有

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x=-\int_{\pi}^{0}(\pi-t)f(\sin t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\pi}\pi f(\sin t)\mathrm{d}t-\int_0^{\pi}tf(\sin t)\mathrm{d}t+$$

于是有

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$$

第八次作业

学院____________班级___________姓名___________学号____________

一、单项选择题

1．下列反常积分发散的是(　C　).

（A）$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2|x|}\mathrm{d}x$；　　（B）$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；

（C）$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$；　　（D）$\int_{2}^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{(\ln x)^3}}\mathrm{d}x$.

2. $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=0$；　　$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=0$；

$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x=0$；　　$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=2\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$

上面有(　B　)是正确的.

(A)　1 个;　　(B)　2 个;　　(C)　3 个;　　(D)　4.个

3．设 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则由曲线 $y=f(x)$， $y=g(x)$，直线 $x=a, x=b$ 所围成平面图形的面积为(　C　).

（A）$\int_a^b [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$；　　（B）$\int_a^b [|f(x)|-|g(x)|]\mathrm{d}x$；

（C）$\int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$　　（D）$\left|\int_a^b [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x\right|$.

4. 摆线$\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$的一拱与 x 轴所闻的平面图形绕 x 轴旋转所得的旋转体的体积为（ D ）

（A）$\int_0^{2a\pi} \pi a^3(1-\cos t)^3 dt$；　　(B）$\int_0^{2\pi} \pi a^2(1-\cos t)^2 dt$；

（C）$\int_0^{2\pi a} \pi a^2(1-\cos t)^2 dt$；　　（D）$\int_0^{2\pi} \pi a^3(1-\cos t)^3 dt$.

二、填空题

1．弧段 $y=\int_0^x \tan t dt, (0\le x\le \frac{\pi}{4})$ 的长度为______$\underline{\ln(1+\sqrt{2})}$______.

2．$\int_1^e \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}=$______$\underline{\frac{\pi}{2}}$______.

3．曲线$\begin{cases} x=2\cos t \\ y=4\sin t \end{cases}$所围图形面积为________$\underline{8\pi}$___.

三、计算题

1．设函数 $y=x^2(0\le x\le 1)$，t 是 $(0,1)$ 内的一点，问 t 为何值时，由曲线 $y=x^2(0\le x\le 1)$、直线 x=1、直线 $y=t^2$ 及 y 轴所围成的两块图形的面积之和为最小. 并求其最小面积..

解：设面积为 S S，则

$$S=\int_0^t (t^2-x^2)dx+\int_t^1 (x^2-t^2)dx$$

$$=[t^2x-\frac{1}{3}x^3]_0^t+[\frac{1}{3}x^3-t^2x]_t^1$$

$$=\frac{4}{3}t^3-t^2+\frac{1}{3}$$

故 $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=4t^2-2t$，令 $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$=0 得 $t=0$(舍去)，$t=\frac{1}{2}$

当$0<t<\frac{1}{2}$时，$S'(t)<0$，S（t）是单调减少的；

当$1>t>\frac{1}{2}$时，$S'(t)>0$，S（t）是单调增加的.

故当$t=\frac{1}{2}$时其面积最小.其最小面积为 S=$\frac{1}{4}$.

2．以 D 表示曲线$y=x-x^2$与x轴所围成的平面区域。分别求 D 绕x轴、y 轴旋转一周所生成的立体的体积.

解:（1）绕x轴 $V_1=\int_0^1\pi(x-x^2)^2dx=\frac{\pi}{30}$

（2）绕y轴 $V_2=2\int_0^1\pi x(x-x^2)dx=\frac{\pi}{6}$

3. 求双纽线$r^2=a^2\cos2\theta$ 所围图形的面积 **.**

解 利用对称性则所求面积为

$$S=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}a^2\cos2\theta d\theta=\ a^2\sin2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\ =a^2$$

4．某水坝中有一个等腰三角形闸门，闸门顶点朝下笔直竖在水中，它的底边与水平面相齐，已知三角形的底边长为 a（单位 m）,高为 h（单位 m）,求闸门所受的压力。

解 $F=\int_0^h\rho gax\frac{h-x}{h}dx=\frac{a}{6}\rho gh^2$

第九次作业

学院____________班级___________姓名___________学号___________

一、单项选择题

1．平面$2y+5z=0$（ D ）.

（A）平行于yoz平面； （B）平行于x轴但不过 x 轴；

（C）平行于xoz面； （D）过 x 轴.

2．曲线$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=9\\x+z=1\end{cases}$在$xoz$面上的投影曲线为（ B ）

（A）$\begin{cases} y=0 \\ x+z=1 \end{cases}$；　　（B）$\begin{cases} y=0 \\ x+z=1 \end{cases}$，（$\frac{1-\sqrt{17}}{2} \le x \le \frac{1+\sqrt{17}}{2}$）；

（C）$x+z=1$；　　（D）$x+z=1$,($\frac{1-\sqrt{17}}{2} \le x \le \frac{1+\sqrt{17}}{2}$).

3．$\vec{a}=(x,y,z)$，$\vec{b}=(1,2,3)$.则$\vec{a}$与$\vec{b}$垂直的充分必要条件是（C　）.

（A）$L_1:\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$；　　（B）$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$；

(C) $x+2y+3z=0$；　　（D）以上结论均不正确..

4．已知 A(1,1,1),B(-2,1,2),C(-1,2,1).以 A、B、C 为顶点的三角形面积为（ D　）.

（A）　7；　　（B）　14；

（C）　$\sqrt{14}$；　　（D）$\frac{\sqrt{14}}{2}$.

5．设有直线 $L_1:\begin{cases} x=3+t \\ y=2-2t \\ z=2+t \end{cases}$ 与 $L_2:\frac{x-6}{-1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-3}{2}$，则 L_1 与 L_2 的夹角为（　C ）.

（A）$\frac{\pi}{6}$；　　（B）$\frac{\pi}{4}$；　　（C）$\frac{\pi}{3}$；　　（D）$\frac{\pi}{2}$.

6．直线$\begin{cases} x+y+3z+7=0 \\ -3x+3y+5z+3=0 \end{cases}$与平面$4x-2y-2z-3=0$的关系是（ A）.

（A）平行但直线不在平面上；　　（B）直线在平面上；

（C）垂直相交；　　（D）相交但不垂直.

二、填空题

1．$|\vec{a}|=3,|\vec{b}|=4,\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$．则（$\vec{a}-2\vec{b}$）·（$3\vec{a}+\vec{b}$）=____-35____.

2．点（1,2,3）到平面 $2x-2y+z=3$ 的距离为____$\frac{2}{3}$____.

3．点（1，-2,0）到直线 $\frac{x-2}{2}=\frac{y-7}{-2}=\frac{z+2}{1}$ 距离为____$5\sqrt{2}$____.

4．xoz 平面上的曲线 $z=4x^2$ 绕 z 轴旋转一周所形成的旋转曲面的方程为 $z=4x^2+4y^2$ ________. 此曲面 $z\le 16$ 的部分在 xoy 面上的投影区域为

$\{(x,y,z)\,|\,z=0,x^2+y^2\le 4\}$ ____________.

5．空间体 $\{(x,y,z)\,|\,z\le 4-3x^2-y^2,\ z\ge x^2+3y^2\}$ 在 xoy 面上的投影区域为 $\{(x,y,z)\,|\,z=0,x^2+y^2\le 1\}$___.

6．已知向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 两两相互垂直，且 $|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=\sqrt{2},|\vec{c}|=1$．则，则有 $|\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}|=$____2____.

三、计算题

1.若点 M 与 N（2,5,0）关于直线 l: $\dfrac{x+5}{2}=\dfrac{y-7}{-2}=z$ 对称，求 M 的坐标.

解： 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=-5+2t \\ y=7-2t \\ z=t \end{cases}$，过 N 垂直于 l 的平面 π 方程为

$$2x-2y+z+6=0$$

l 与 π 的平面 π 交点为(-1,3,2)。设 $M(a,b,c)$ 则

$\dfrac{a+2}{2}=-1,\dfrac{b+5}{2}=3,\dfrac{c}{2}=2$ 解得 $a=-4,b=1,c=4$

即 M(-4,1,4)

2．求直线 $L:\begin{cases} x+2y+z-1=0 \\ x-2y+z+1=0 \end{cases}$，平面 $\pi: x+y=0$ 的夹角及直线 L 在平面 π 上的投影

解:（1） $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=(4,0,-4)$

取 $\vec{s}=$（1,0,-1）为直线 L 的方向向量。取 $\vec{n}=(1,1,0)$ 为平面 π 的法向量

$$\sin\theta=\left|\frac{\vec{s}\cdot\vec{n}}{|\vec{s}\,\|\,\vec{n}|}\right|=\frac{1}{2}$$

因此平面 π 与 L 交角为 $\dfrac{\pi}{6}$

（2）设过 L 垂直于 π 的平面方程为

$$\lambda(x-2y+z+1)+x+2y+z-1=0$$

根据π与 L 垂直可求得$\lambda = 3$。则π方程为$4x - 4y + 4z + 2 = 0$

故 L 在π上的投影为

$$\begin{cases} 2x - 2y + 2z + 1 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

3．设一平面过点 A(2，4，1)、B(8，2，3)且与平面 $4x$-y+2z =8 垂直，求此平面方程．

解：$\overrightarrow{AB} = (6, -2, 2)$，取$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (-1, -2, 1)$为所求的平面法向量

所求的平面方程为$-(x-2) - 2(y-4) + z - 1 = 0$即

$$-x - 2y + z + 9 = 0$$

4．设直线过点$A(-3, 5 - 9)$且与两直线$L_1: \begin{cases} 3x - y + 5 = 0 \\ 2x - z - 3 = 0 \end{cases}$和$L_2: \begin{cases} 4x - y - 1 = 0 \\ 5x - z + 10 = 0 \end{cases}$相交，求此直线方程..

解 设过 L 及 L_1 的平面为π_1，设过 L 及 L_2 的平面为π_2

过L_2的平面设为λ（$4x - y - 1) + 5x - z + 10 = 0$，将 A 点代入可求得π_2的方程为

$$53x - 2y - 9z + 88 = 0$$

又因 A 在平面$2x - z - 3 = 0$上，因此所求的直线方程为

$$\begin{cases} 53x - 2y - 9z + 88 = 0 \\ 2x - z - 3 = 0 \end{cases}$$

模拟试题（一）

一、 选择题（共 6 道小题，每小题 3 分，满分 18 分）.

1．当 $x\to 0$ 时， $f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小，则（ A ）.

(A) $a=1,b=-\dfrac{1}{6}$ (B) $a=1,b=\dfrac{1}{6}$ (C) $a=-1,b=-\dfrac{1}{6}$ (D) $a=-1,b=\dfrac{1}{6}$

2．函数 $f(x)=\begin{cases} x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 点存在二阶导数，则（ D ）.

(A) $\alpha>1$ (B) $\alpha>2$ (C) $\alpha\ge 2$ (D) $\alpha>3$

3．设曲线 $y=x^2+ax+b$ 与 $2y=-1+xy^3$ 在点 $(1,-1)$ 处有公共切线，则 a,b 的值分别为（ B ）.

(A) $0,\ 2$ (B) $-1,\ -1$ (C) $-1,\ 1$ (D) $1,\ -3$

4．设 $f(x)$ 在 $x=0$ 点附近有二阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf''(x)}{1-\cos x}=1$，则（ C ）.

(A) $f''(0)\ne 0$，但 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(B) $f''(0)=0$，且 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(C) $f''(0)=0$，且 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) $f''(0)\ne 0$，且 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

5．曲线 $y=x(x-1)(x-2)$ 与 x 轴所围成平面图形的面积为（ B ）.

(A) $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ (B) $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$

(C) $-\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ (D) $-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$

6. 下列反常积分中发散的是（ D ）

(A) $\int_{-1}^{1}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ (B) $\int_{-\infty}^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ (C) $\int_{2}^{+\infty}\dfrac{1}{x\ln^2 x}\mathrm{d}x$ (D) $\int_{-1}^{1}\dfrac{1}{\sin x}\mathrm{d}x$

二、填空题（共 6 小题，每小题 3 分，满分 18 分）.

1．若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{n}\right)^{-kn}=\mathrm{e}^{-10}$, 则 $k=$___2______.

2．$y=f\left(x\right)$ 由方程 $x^3+y^3-\sin x+6y=0$ 确定，则 $\mathrm{d}y\big|_{x=0}=$____$\dfrac{1}{6}dx$_____.

3．曲线 $y=\dfrac{x^2}{1+x}$ 的斜渐近线方程为________ $y=x-1$__________.

4．若 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，则 $f^{(n)}(1)=$_____$(-1)^n n!2^{-n}$____ .

5． $\int_{-2}^{2}\left(\dfrac{x}{1+x^2}+|x|\right)\mathrm{d}x=$ ______4___.

6．曲线 $C:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=9\\x+z=1\end{cases}$ 在 xoz 平面上的投影曲线方程

为____$\begin{cases}x+z=1\\y=0\end{cases}$_$\left(\dfrac{1-\sqrt{17}}{2}\le x\le\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}\right)$___.

三、 解答题（共 7 道题，每小题 7 分，满分 49 分）.

1．已知函数 $y=y(x)$ 由方程 $\begin{cases}x=a\cos^3 t\\y=a\sin^3 t\end{cases}$ 确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$， $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解： $\dfrac{dy}{dt}=3a\sin^2 t\cos t,\dfrac{dx}{dt}=-3a\cos^2 t\sin t$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t}=-\tan t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\sec^2 t}{-3a\cos^2 t\sin t}=\frac{1}{3a}\sec^4 t\csc t$$

2．证明当 $x>0$ 时，$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$.

证明：令

$$f(x)=1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2},\ f(0)=0$$

$$f'(\mathrm{x})=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+x\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$$

当 $x>0$ 时，$f'(\mathrm{x})=\ln(x+\sqrt{1+x^2})>0$，函数单调递增

当 $x>0$ 时，$f(x)>f(0)$，即

$$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}>0,\text{得}$$
$$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$$

3．求 $\int_0^1 \mathrm{e}^{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x$.

解：令 $\sqrt{3x+1}=t,\ x=\frac{1}{3}(t^2-1),\ \mathrm{d}\,x=\frac{2}{3}t\mathrm{d}t$

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\int_1^2 \mathrm{e}^t t\mathrm{d}t=\frac{2}{3}\int_1^2 t\mathrm{d}(\mathrm{e}^t)=\frac{2}{3}t\mathrm{e}^t\Big|_1^2-\frac{2}{3}\int_1^2 \mathrm{e}^t\mathrm{d}t$$
$$=\frac{2}{3}(2\mathrm{e}^2-\mathrm{e})-\frac{2}{3}\mathrm{e}^t\Big|_1^2=\frac{2}{3}(2\mathrm{e}^2-\mathrm{e})-\frac{2}{3}(\mathrm{e}^2-\mathrm{e})=\frac{2}{3}\mathrm{e}^2$$

4．求 $\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}\mathrm{d}x$.

解：令 $x=\frac{1}{t}$ $\quad\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}dx=\int\frac{\sqrt{\dfrac{1-t^2}{t^2}}}{\dfrac{1}{t^4}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=-\int t\sqrt{1-t^2}dt$

$$\underline{\underline{\text{令}t=\sin u}}-\int\sin u\cos^2 u du$$

$$=\frac{1}{3}\cos^3 u+c=\frac{\sqrt{(x^2-1)^3}}{3x^3}+c$$

5．已知 $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c, & x<0 \\ \ln(1+x), & x\ge 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 点有二阶导数, 试确定常数 a,b,c 的值.

解： $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c, & x<0 \\ \ln(1+x), & x\ge 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处有二阶导数，则在 $x=0$ 处连续，且一阶可导。

在 $x=0$ 处连续，可得 $c=0$，

$$f_-^{'}(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{ax^2+bx}{x}=b$$

$$f_+^{'}(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

得 $b=1,\ f\,'(0)=1$

$$f\,'(\mathrm{x})=\begin{cases} 2ax+1, x<0 \\ \dfrac{1}{1+x}, \quad x>0 \\ 1, \qquad x=0 \end{cases}$$

$$f_-^{''}(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f\,'(x)-f\,'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2ax+1-1}{x}=2a$$

$$f_+^{''}(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f\,'(x)-f\,'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{1+x}-1}{x}=-1$$

得 $2a=-1, a=-\dfrac{1}{2}$

6．求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x[t^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1)-t]\mathrm{d}t}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}$.

解： $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x[t^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1)-t]\mathrm{d}t}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x[t^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1)-t]\mathrm{d}t}{x^2\cdot\frac{1}{x}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}[x^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1)-x]=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2[(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1)-\dfrac{1}{x}]$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1)-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}$（令 $t=\dfrac{1}{x}$）$=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{(\mathrm{e}^t-1)-t}{t^2}=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\mathrm{e}^t-1}{2t}=\dfrac{1}{2}$

7．求过点 $A(1,\ 0,\ -2)$ 与平面 π:$3x-y+2z+3=0$ 平行且与直线 L:$\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z}{1}$ 相交的直线方程.

解： 方法一：

已知直线 L_1 的方向 $\vec{s_1}=\{4,\ -2,\ 1\}$，其上有一点 $A_1(1,\ 3,\ 0)$，根据已知条件，过 $A(1,\ 0,\ -2)$ 作平行于平面 π 的平面 π_1

π_1： $3(x-1)-y+2(z+2)=0$

作平面 π_2 通过点 $A(1,\ 0,\ -2)$ 和直线 L_1，显然

$$\overrightarrow{n_{\pi_1}}=\vec{s_1}\times\overrightarrow{AA_1}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\4&-2&1\\0&3&2\end{vmatrix}=-7\vec{i}-8\vec{j}+12\vec{k}=(-7,\ -8,\ 12)$$

$$\Rightarrow L_1:7(x-1)+8y-12(z+2)=0$$

所求直线方程为

$$\begin{cases}3(x-1)-y+2(z+2)=0\\7(x-1)+8y-12(z+2)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x-y+2z+1=0\\7x+8y-12z-31=0\end{cases}$$

方法二：设所求直线方向向量为

$$\vec{s}=\{m,\ n,\ p\}$$

已知直线 L_1 的方向 $\vec{s_1}=\{4,\ -2,\ 1\}$，其上有一点 $A_1(1,\ 3,\ 0)$，

向量

$\overrightarrow{AA_1}=\{0,\ 3,\ 2\}$，$\overrightarrow{AA_1}\times s_1=\{7,\ 8,\ -12\}$，

由已知条件得 $\begin{cases}7m+8n-12p=0\\ 3m-n+2p=0\end{cases}$ 得

$m:n:p=4:-50:-31$

直线方程为 $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y}{-50}=\dfrac{z+2}{-31}$

四、（本题满分 9 分 ）

D_1 是由 $y=2x^2,x=2,x=a,y=0$ 所围成的平面图形； D_2 是由 $y=2x^2,x=a,y=0$ 所围成的平面图形，其中 $0<a<2$.

（1）分别求 D_1 绕 x 轴旋转一周所生成的旋转体体积 V_1 和 D_2 绕 y 轴旋转一周所生成的旋转体体积 V_2；

（2）问 a 为何值时，V_1+V_2 最大，并求其最大值.

解：（1）$V_1=\pi\int_a^2(2x^2)^2\mathrm{d}x=\dfrac{4\pi}{5}x^5\Big|_a^2=\dfrac{4\pi}{5}(32-a^5)$

$$V_2=2\pi a^4-\pi\int_0^{2a^2}\left(\sqrt{\frac{y}{2}}\right)^2\mathrm{d}y=2\pi a^4-\frac{\pi}{4}y^2\Big|_0^{2a^2}=\pi a^4$$

（2）$V=V_1+V_2=\pi a^4+\dfrac{4\pi}{5}(32-a^5)$

$V'=-4\pi a^4+4\pi a^3=4\pi a^3(1-a)=0$，得 $a=0,$ 舍去， $a=1$，

由问题的实际意义，当 $a=1$ 时取最大值，最大值为

$$V(1)=\frac{4\pi}{5}(32-1)+\pi=\frac{129}{5}\pi$$

五、（本题满分 6 分）

设 $f(x)$ 在 $[0,\ 1]$ 上连续,在 $(0,\ 1)$ 内可导,且满足 $f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}} x\mathrm{e}^{1-x} f(x)\mathrm{d}x$， $k>1$，证明至少存在一点 $\xi\in(0,\ 1)$,使得

$$f'(\xi)=\left(1-\xi^{-1}\right)f(\xi).$$

证明：令 $F(x)=x\mathrm{e}^{1-x}f(x)$，则 $F(x)$ 在 $[0,\ 1]$ 上连续,在 $(0,\ 1)$ 内可导

$F'(x)=\mathrm{e}^{1-x}f(x)-x\mathrm{e}^{1-x}f(x)+x\mathrm{e}^{1-x}f'(x)$

$F'(x)=\mathrm{e}^{1-x}[(1-x)f(x)+xf'(x)]$，由积分中值定理，存在 $\eta\in[0,\frac{1}{k}]$，

$F(1)=f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}} x\mathrm{e}^{1-x}f(x)\mathrm{d}x=k\cdot\frac{1}{k}\eta\mathrm{e}^{1-\eta}f(\eta)=F(\eta)$

由罗尔定理，至少存在一点 $\xi\in(\eta,1)$ 使得

$F'(\xi)=\mathrm{e}^{1-\xi}[(1-\xi)f(\xi)+\xi f'(\xi)]=0$，即 $f'(\xi)=\left(1-\xi^{-1}\right)f(\xi)$

模拟试卷（二）

一 选择题（共 6 道小题，每小题 3 分，满分 18 分）.

1．设函数 $f(x), g(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内连续,且当 $x\to 0$ 时, $f(x)$ 是 $g(x)$ 的高阶无穷小,则当 $x\to 0$ 时, $\int_0^x f(t)\sin t\,dt$ 是 $\int_0^x g(t)t\,dt$ 的（ B ）.

(A) 低阶无穷小　　(B)高阶无穷小

(C) 同阶但不等价无穷小　　(D)等价无穷小

2．设函数 $f(x)=\begin{cases} x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x}, & x>0, \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处有连续的一阶导数，则（ D ）.

(A) $\alpha>0$　　(B) $\alpha>1$　　(C) $\alpha\ge 2$　　(D) $\alpha>2$

3．曲线 $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-2x-3}$ 有（ A ）.

(A)一条水平渐近线,一条铅直渐近线

(B)一条水平渐近线,两条铅直渐近

(C)两条水平渐近线,一条铅直渐近线

(D)没有水平渐近线,两条铅直渐近线

4．设函数 $f(x)$ 具有二阶导数， $g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$，则在区间 $[0,1]$上（ D ）.

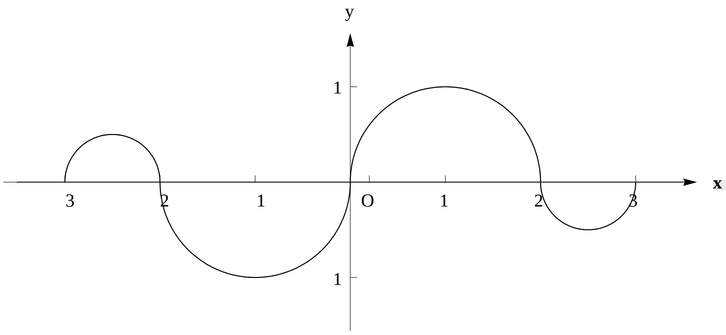
(A)当 $f'(x)\ge 0$ 时， $f(x)\ge g(x)$

(B)当 $f'(x)\ge 0$ 时， $f(x)\le g(x)$

(C)当 $f''(x)\ge 0$ 时， $f(x)\ge g(x)$

(D)当 $f''(x)\ge 0$ 时， $f(x)\le g(x)$

5．如图，连续函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-3,-2]$、$[2,3]$ 上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周，在区间 $[-2,0]$、$[0,2]$ 上图形分别是直径为 2 的下、上半圆周，设 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则下列结论正确的是(C).



（A）$F(3)=-\frac{3}{4}F(-2)$　　（B）$F(3)=\frac{5}{4}F(2)$

（C）$F(-3)=\frac{3}{4}F(2)$　　（D）$F(-3)=-\frac{5}{4}F(-2)$

6.若反常积分 $\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-kx}\mathrm{d}x$ 收敛，则必有(B).

(A) $k>0$　　(B) $k<0$　　(C) $k\ge 0$　　(D) $k\le 0$

二、填空题（共 6 小题，每小题 3 分，满分 18 分）.

1．若曲线 $y=x^3+ax^2+bx+1$ 有拐点 $(-1,0)$，则 $b=$ __3____.

2．$\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=$_____ e^6 ___________.

3．曲线 $\tan(x+y+\frac{\pi}{4})=\mathrm{e}^y$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为_____y=-2x____________.

4．设 $f(x)=\sin^2 x$，则 $f^{(n)}(x)=$ _ $2^{n-1}\sin(2x+\frac{n-1}{2}\pi)$________.

5．$\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+\sin x}{1+x^2}+|x|\right)\mathrm{d}x=$____ $1+\frac{\pi}{2}$ _____.

6．空间曲线 $C:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4,\\ y=z\end{cases}$ 在 xoz 平面上的投影曲线__ $\begin{cases}y=0\\ x^2+2z^2=4\end{cases}$ __.

三、 **解答题（共 6 道题，每小题 8 分，满分 48 分）．**

1．求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1-\mathrm{e}^{-x}}-\dfrac{1}{x}\right)$.

解

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2-1+e^{-x}}{(1-e^{-x})x}\cdots\cdots 2\text{分}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2-1+e^{-x}}{x^2}\cdots\cdots 4\text{分}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+2x-e^{-x}}{2x}\cdots\cdots 6\text{分}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2+e^{-x}}{2}=\frac{3}{2}\cdots\cdots 8\text{分}$$

2．已知 $y=y(x)$ 是由参数方程 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2), \\ y=t-\arctan t \end{cases}$ 所确定的函数，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{t^2}{2t}=\frac{t}{2}\cdots\cdots 4\text{分}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{1+t^2}{4t}\cdots\cdots 8\text{分}$$

3．计算不定积分 $\int \mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$.

解 令 $\sqrt[3]{x}=t, x=t^3, \mathrm{d}x=3t^2\mathrm{d}t$

$$\int \mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x=\int \mathrm{e}^t\cdot 3t^2\mathrm{d}t=3\int t^2\mathrm{d}(\mathrm{e}^t)$$

$$=3t^2\mathrm{e}^t-6\int t\mathrm{e}^t\mathrm{d}t=3t^2\mathrm{e}^t-6\int t\mathrm{d}(\mathrm{e}^t)$$

$$=3t^2\mathrm{e}^t-6t\mathrm{e}^t+6\int \mathrm{e}^t\mathrm{d}t \quad =3t^2\mathrm{e}^t-6t\mathrm{e}^t+6\mathrm{e}^t+C$$

$$=3\sqrt[3]{x^2}\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}-6\sqrt[3]{x}\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}+6\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}+C$$

4. 设 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<0, \\ x, & x\ge 0. \end{cases}$ 求 $F(x)=\int_{-1}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[-1,1]$ 上的表达式.

解 当 $-1\le x<0$ 时，

$$F(x)=\int_{-1}^{x} f(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{x}(t+1)\mathrm{d}t=(\frac{t^2}{2}+t)\Big|_{-1}^{x}=\frac{(x+1)^2}{2}$$

当 $0\le x\le 1$ 时，

$$F(x)=\int_{-1}^{x} f(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{0}(t+1)\mathrm{d}t+\int_{0}^{x}t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}+\frac{x^2}{2}$$

5．求曲线 $y=\sqrt{x}\ \left(0\le x\le 4\right)$ 上的一条切线，使该切线与直线 $x=0$，　$x=4$ 以及曲线 $y=\sqrt{x}$ 所围成的平面图形的面积最小.

解　设 $\left(x_0,y_0\right)$ 为曲线 $y=\sqrt{x}\ \left(0\le x\le 4\right)$ 上任一点，易得曲线于该点处的切线方程为：$y-y_0=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}\left(x-x_0\right)$ 即 $y=\dfrac{y_0}{2}+\dfrac{x}{2\sqrt{x_0}}$

得其与 $x=0$，　$x=4$ 的交点分别为 $\left(0,\dfrac{y_0}{2}\right)$，$\left(4,\dfrac{y_0}{2}+\dfrac{2}{y_0}\right)$

于是由此切线与直线 $x=0$，　$x=4$ 以及曲线 $y=\sqrt{x}$ 所围的平面图形面积为：

$$S=\int_0^4\left(\frac{y_0}{2}+\frac{x}{2\sqrt{x_0}}-\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=2y_0+\frac{4}{\sqrt{x_0}}-\frac{16}{3}\ \ =2\sqrt{x_0}+\frac{4}{\sqrt{x_0}}-\frac{16}{3}$$

问题即求 $S=2\sqrt{x}+\dfrac{4}{\sqrt{x}}-\dfrac{16}{3}\ \left(0\le x\le 4\right)$ 的最小值

令 $S'=x^{-\frac{1}{2}}-2x^{-\frac{3}{2}}=0$ 得唯一驻点 $x=2$　且为唯一极小值
所以 当 $x=2$ 时，S 最小

即所求切线即为：$y=\dfrac{x}{2\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

6. 求过直线$L_1:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z+2}{-2}$，且平行于直线$L_2:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{-2}$的平面方程.

解 平面的法向量为$\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 0 & -2\\ 2 & -1 & -2\end{vmatrix}=-2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，平面方程为

$2(x-2)+2(y-1)+(z+2)=0$，即$2x+2y+z-4=0$

四、（本题满分 10 分）

设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x)-\cos x}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0,\end{cases}$其中$\varphi(x)$具有二阶连续导数, $\varphi(0)=1$.

(1) 求a的值, 使$f(x)$在$x=0$连续;

(2) 已知$f(x)$在$x=0$连续, 求$f'(x)$并讨论$f'(x)$在$x=0$的连续性.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varphi(x)-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(\varphi'(x)+\sin x)=\varphi'(0)$

故当$a=\varphi'(0)$时$f(x)$在$x=0$处连续.

(2) $x\neq 0$时$f'(x)=\dfrac{x[\varphi'(x)+\sin x]-[\varphi(x)-\cos x]}{x^2}$

$x=0$时

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\varphi(x)-\cos x}{x}-\varphi'(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)-\cos x-x\varphi'(0)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi'(x)+\sin x-\varphi'(0)}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi''(x)+\cos x}{2}=\frac{1}{2}[\varphi''(0)+1]\ldots\ldots 7\text{分}$$

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x[\varphi'(x)+\sin x]-[\varphi(x)-\cos x]}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x[\varphi''(x)+\cos x]}{2x}=\frac{1}{2}[\varphi''(0)+1]=f'(0)\cdots\cdots 9\text{分}$$

$f'(x)$在$x=0$的连续.

五、（本题满分 6 分）

已 知 $f'(x)$ 连 续，且 当 $x\geq 0$ 时， 恒 有 $f'(x)>0$. 证 明 当 $0<a<b$ 时，

$$\int_a^b tf(t)\mathrm{d}t > \frac{1}{2}[b\int_0^b f(t)\mathrm{d}t - a\int_0^a f(t)\mathrm{d}t].$$

证明 令 $F(x)=\int_a^x tf(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{2}[x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-a\int_0^a f(t)\mathrm{d}t], F(a)=0$

$$F'(x)=xf(x)-\frac{1}{2}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{2}xf(x)=\frac{1}{2}[xf(x)-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t]$$

$$=\frac{1}{2}[\int_0^x f(x)\mathrm{d}t-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t]=\frac{1}{2}\int_0^x [f(x)-f(t)]\mathrm{d}t$$

由 $f'(x)>0$ 知函数 $f(x)$ 单调递增,当 $x>t$ 有, $f(x)-f(t)>0$，有 $F'(x)>0$，函数 $F(x)$ 单调递增，当 $0<a<b$ 时， $F(b)>F(a)=0$

$$F(b)=\int_a^b tf(t)\,\mathrm{d}\,t-\frac{1}{2}[b\int_0^b f(t)\mathrm{d}t-a\int_0^a f(t)\mathrm{d}t]>0.$$

即

$$\int_a^b tf(t)\mathrm{d}t > \frac{1}{2}[b\int_0^b f(t)\mathrm{d}t - a\int_0^a f(t)\mathrm{d}t].$$