一、 随机事件及其概率

（18）设事件A与事件B相互独立，且$P(A)=0.3$，$P(A\cup\bar{B})=0.7$，则$P(B)$=<u>3/7</u>.

（18）. 设A,B为两个互斥事件，且$P(A)>0$, $P(B)>0$，则下列结论中正确的是(　　C　　).

(A) $P(B|A)>0$　　　　(B) $P(A|B)=P(A)$

(C) $P(A|B)=0$　　　　(D) $P(AB)=P(A)P(B)$

（18）1. 三个箱子中，第一箱装有 4 个黑球 1 个白球，第二箱装有 3 个黑球 3 个白球，第三箱装有 3 个黑球 5 个白球。现先任取一箱，再从该箱中任取一球。求：（1）取出的球是白球的概率；（2）若取出的是白球，该球属于第二箱的概率。

解：设A_i为"取出第i个箱子"，$i=1,2,3$，B为"取出白球"，则由已知条件得

$$\mathrm{P}(A_1)=\mathrm{P}(A_2)=\mathrm{P}(A_3)=\frac{1}{3},$$

$$\mathrm{P}(B|A_1)=\frac{1}{5}，\mathrm{P}(B|A_2)=\frac{3}{6}，\mathrm{P}(B|A_3)=\frac{5}{8}.$$ …3 分

（1） 由全概率公式得

$$\mathrm{P}(B)=\sum_{i=1}^{3}\mathrm{P}(A_i)\mathrm{P}(B|A_i)=\frac{53}{120}$$ …6 分

（2）由逆概率公式得

$$\mathrm{P}(A_2|B)=\frac{\mathrm{P}(A_2)\mathrm{P}(B|A_2)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{20}{53}$$

（17）设A,B是同一个试验中的两个事件，且$P(A)=0.61$, $P(A-B)=0.22$，

则$P(\overline{AB})=$<u>0.61</u>.

（17）抛掷两颗均匀的骰子，已知两颗骰子点数之和为 7 点，则其中一颗为 1 点的概率为<u>1/3</u>.

（17）设 A、B、C 三个事件两两相互独立，则 A、B、C 相互独立的充分必要条件是（　A　）

(A)　A与BC独立　　　　(B)　AB与$A\cup C$独立

(C)　AB与AC独立　　　　(D)　$A\cup B$与$A\cup C$独立

（17）1. 在电报通讯中，发送端发出的是由"g"和"–"两种信号组成的序列。由于受到随机干扰，接收端收到的是"g"和"–"及"不清"三种信号组成的序列。假设发送"g"和

“-”的概率分别为 0.7 和 0.3；在已知发送“g”时，接收到“g”、“-”和“不清”的概率分别为 0.8、0.1 和 0.1；在已知发送“-”时，接收到“g”、“-”和“不清”的概率分别为 0.2、0.7 和 0.1.

求（1）接收到信号“g”、“-”和“不清”的概率；

（2）在接收到信号“不清”的条件下，发送信号为“-”的概率。

解:（1）由全概率公式

$$
\begin{aligned}
P(B_1) &= P(A_1)\cdot P(B_1 \mid A_1) + P(A_2)\cdot P(B_1 \mid A_2) \\
&= 0.7\times 0.8 + 0.3\times 0.2 = 0.62
\end{aligned}
$$

$$P(B_2) = 0.7\times 0.1 + 0.3\times 0.7 = 0.28$$

$$P(B_3) = 0.7\times 0.1 + 0.3\times 0.1 = 0.1$$

（2）由贝叶斯公式得

$$P(A_2 \mid B_3) = \frac{P(A_2)P(B_3 \mid A_2)}{P(A_1)P(B_3 \mid A_1) + P(A_2)P(B_3 \mid A_2)}$$

$$= \frac{0.3\times 0.1}{0.7\times 0.1 + 0.3\times 0.1} = 0.3$$

（16）设事件 A 与事件 B 相互独立，且 $P(A)=0.3$，$P(B)=0.4$，则 $P(A\cup B)=$ <u>0.58</u>.

（16）设 A,B 为对立事件，$0<P(B)<1$，则下列概率值为 1 的是(　B　).

(A) $P(\bar{A}\mid\bar{B})$　　(B) $P(\bar{A}\mid B)$　　(C) $P(B\mid A)$　　(D) $P(AB)$

（16）. 已知甲、乙两箱中装有同种产品，其中甲箱中装有 2 件合格品和 2 件次品，乙箱中仅装有 2 件合格品，现从甲箱中随机地取出 2 件放入乙箱，求：（1）乙箱中次品数 X 的概率分布；（2）从乙箱中任取一件是次品的概率.

解：1. 解: (1)

X	0	1	2
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

(2) 设 B_i 为从甲箱中取出2件含有 i 件次品的事件（i=0, 1, 2），A 为从乙箱中任取一件是次品的事件，由全概率公式

$$P(A) = P(A\mid B_0)\cdot P(B_0) + P(A\mid B_1)\cdot P(B_1) + P(A\mid B_2)\cdot P(B_2)$$

$$= 0 + \frac{1}{4}\times\frac{2}{3} + \frac{2}{4}\times\frac{1}{6} = \frac{1}{4}.$$

（15）每次试验成功率为 $p(0<p<1)$, 进行重复试验，直到第 10 次试验才取得 4 次成功的概率为（　　B　　）

(A)　$C_{10}^{4}P^{4}(1-P)^{6}$　　　　(B)　$C_{9}^{3}P^{4}(1-P)^{6}$

(C)　$C_{9}^{4}P^{4}(1-P)^{5}$　　　　(D)　$C_{9}^{3}P^{3}(1-P)^{6}$

（15）设 A,B 为两相互独立的随机事件， $P(A\cup B)=0.6$，$P(A)=0.4$， 则 $P(B)=$

$\underline{\frac{1}{3}}$

（15）有两箱同种零件，在第一箱内装 50 件，其中有 10 件是一等品；在第二箱内装 30 件，其中有 18 件是一等品。现从两箱中随机地取出一箱，然后从该箱中取两次零件，取出的零件均不放回，

求：（1）第一次取出的零件是一等品的概率；

（2）在第一次取出的零件是一等品的条件下，第二次取出的零件是一等品的概率。

解: （1）设 B_1 为零件取自第一箱， B_2 为零件取自第二箱， A 为第一次取得一等品的概率，由全概率公式

$$P(A)=P(A|B_1)\cdot P(B_1)+P(A|B_2)\cdot P(B_2)$$

$$=\frac{10}{50}\times\frac{1}{2}+\frac{18}{30}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{5}$$

设 B_1 为零件取自第一箱且第一次取得一等品，B_2 为零件取自第二箱且第一次取得一等品， A 为第二次取得一等品，由全概率公式

$$P(A)=P(A|B_1)\cdot P(B_1)+P(A|B_2)\cdot P(B_2)$$

$$=(\frac{9}{49}\times\frac{1}{2}+\frac{18}{30}\times\frac{1}{2})\times\frac{10}{50}\times\frac{1}{2}+(\frac{10}{50}\times\frac{1}{2}+\frac{17}{29}\times\frac{1}{2})\times\frac{18}{30}\times\frac{1}{2}=0.4856$$

（14）已知 $P(A)=\frac{1}{4}$， $P(B|A)=\frac{1}{3}$， $P(A|B)=\frac{1}{2}$， 则 $P(A\cup B)=$ $\underline{\quad\frac{1}{3}\quad}$.

（14）某商店成箱出售玻璃杯，每箱 20 只，设各箱含 0，1，2 只残次品的概率分别为 0.8, 0.1 和 0.1。一顾客欲购买一箱玻璃杯，由售货员任取一箱，而顾客开箱随机地察看 4 只；若无残次品，则买下该箱玻璃杯，否则退回。试求：

（1）顾客买此箱玻璃杯的概率；

（2）在顾客买的此箱玻璃杯中，确实没有残次品的概率。

解：用 A_i 表示箱中有 $i(i=0,1,2)$ 只残次品，用 B 表示顾客买下玻璃杯。

$P(A_0)=0.8,\qquad P(A_1)=0.1,\qquad P(A_2)=0.1$

$P(B|A_0)=1,\qquad P(B|A_1)=\dfrac{C_{19}^4}{C_{20}^4}=\dfrac{4}{5},\qquad P(B|A_2)=\dfrac{C_{18}^4}{C_{20}^4}=\dfrac{12}{19}$

（1） 由全概率公式

$$P(B)=P(B|A_0)P(A_0)+P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)$$

$$=0.8+0.1\times\frac{4}{5}+0.1\times\frac{12}{19}=0.94$$

（2） 由贝叶斯公式

$$P(A_0|B)=\frac{P(A_0)P(B|A_0)}{P(B)}=\frac{0.8}{0.94}=0.85$$

（13）设某厂有A，B，C三个车间,生产同一种产品，每个车间的产量分别占全厂的25%，35%，40%，各车间的次品率分别为5%，4%，2%，(1)求全厂产品的次品率；(2)若任取一件是次品，求这件次品是A车间生产的概率.

解：设 B={任取一件是次品}， A_i ={产品是第i个车间生产的}，$i=1,2,3$

(1) $P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_iB)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)$

=0.25×0.05+0.35×0.04+0.4×0.02

=0.0345.

(2) $P(A_1|B)=\dfrac{P(A_1B)}{P(B)}=\dfrac{0.25\times0.05}{0.0345}=\dfrac{25}{69}$

（12）设A,B为两个随机事件，且$P(A)=0.5$，$P(B)=0.6$，$P(A-B)=0.3$，则

$P(A\cup B)=$ <u>0.9</u>.

（12）设有 4 张卡片分别标有数字 1，2，3，4．从这四张卡片中任取一张，设事件A为取到 1 或 2，事件B为取到 1 或 3，则事件A与B是（ C ）的

(A) 互不相容； (B) 互为对立； (C) 相互独立； (D) 无法确定．

（12）某商店出售的灯炮由甲乙两厂生产，其中甲厂的产品占 60%，乙厂的产品占 40%，已知甲厂产品的次品率为 4%，乙厂产品的次品率为 5%，一顾客随机的取出一个灯炮，求：（1）取出的是合格品的概率；

（2）已知取出的是合格品，它是甲厂生产的概率为多少？

解：设A_i分别表示“甲、乙两厂生产的产品”的事件（i=1，2）

B 表示“取出的是合格品”的事件，由已知

$P(A_1)=\dfrac{60}{100},P(A_2)=\dfrac{40}{100}$

$P(B|A_1)=\frac{60}{100},P(B|A_2)=\frac{95}{100}$,则

（1）由全概率公式 $P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)$

$$=\frac{60}{100}\times\frac{96}{100}+\frac{40}{100}\times\frac{95}{100}=0.956$$

（2） 由贝叶斯公式 $P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}=\frac{\frac{60}{100}\times\frac{96}{100}}{0.956}=0.5963$

（11）设 A,B 为两个随机事件，且 $P(B)=0.4$， $P(A\cup B)=0.5$，则 $P(A|\overline{B})=$ $\underline{\frac{1}{6}}$.

（11）已知甲、乙两箱中装有同种产品，其中甲箱中装有 3 件合格品和 3 件次品，乙箱中仅装有 3 件合格品. 从甲箱中任取 3 件产品放入乙箱后，求从乙箱中任取一件产品是次品的概率.

解： X 的可能取值为 0，1，2，3， X 的分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{C_3^kC_3^{3-k}}{C_6^3},k=0,1,2,3.$$

即 $P\{X=0\}=\frac{1}{20},P\{X=1\}=\frac{9}{20},P\{X=2\}=\frac{9}{20},P\{X=3\}=\frac{1}{20}.$

设 A 表示事件“从乙箱中任取一件产品是次品”，由于 $\{X=i\}, i=0,1,2,3.$ 构成完备事件组，由全概率公式有

$$P(A)=\sum_{k=0}^{3}P\{X=k\}P\{A|X=k\}=\sum_{k=0}^{3}P\{X=k\}\cdot\frac{k}{6}=\frac{1}{4}.$$

（10）已知 $P(A)=\frac{1}{4}$， $P(B)=\frac{1}{6}$， $P(A|B)=\frac{1}{2}$，则 $P(A\cup B)=$ __1/3______.

（09）设 A,B,C 是三个随机事件，已知 $P(A)=P(B)=P(C)=0.3,\ P(AB)=P(BC)=0,$ $P(AC)=0.2,$ 则 A，B，C 全不发生的概率为 __0.3____ .

(09) 在 10 件产品中有 2 件次品, 依次取出 2 件产品, 每次取一件, 取后不放回, 则第二次取到次品的概率为(C)

（A） $\frac{1}{45}$.　　（B） $\frac{8}{45}$.　　（C） $\frac{1}{5}$.　　（D） $\frac{16}{45}$

(09) 设 $0<P(A)<1,$ 且 $P(B|A)=P(B|\overline{A})$，试证 A 与 B 相互独立.

证 由全概率公式

$$
\begin{aligned}
P(B) &= P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A}) \\
&= P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A}) \\
&= P(B|A)[P(A) + P(\bar{A})] \\
&= P(B|A),
\end{aligned}
$$

所以

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(A)P(B),$$

故 A 与 B 相互独立.

二、 一维随机变量及其分布

（18）设随机变量X的概率分布为

X	0	1	2	3
P	0.1	0.2	0.6	0.1

若随机变量$Y=(X-2)^2$，则$P\{Y=1\}=$ ___0.3___.

（18）若要$f(x)=\cos x$成为随机变量X的概率密度，则X的可能取值区间是(A).

(A) $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$　　(B) $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$　　(C) $[0,\pi]$　　(D) $\left[\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{7\pi}{4}\right]$

（18）某公共汽车站每隔 5 分钟有一辆汽车到站，在该站等车的乘客可全部乘上这辆车，假设各乘客到达该站的时间是随机的且相互独立,，求（1）一位乘客等车时间超过 3 分钟的概率，（2）在该站上车的 5 位乘客中恰有 2 位等车时间超过 3 分钟的概率。

解：（1）设一位乘客等车的时间为X，则X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}, & 0<x<5, \\ 0, & 其他.\end{cases}$$

一位乘客等车时间超过 3 分钟的概率

$$\mathrm{P}\{X>3\}=\int_3^5\frac{1}{5}\mathrm{d}x=\frac{2}{5}.$$

（2）设 5 位乘客中等车时间超过 3 分钟的人数为Y, 则$Y\sim B\left(5,\frac{2}{5}\right)$。

所求概率为

$$\mathrm{P}\{Y=2\}=C_5^2\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(1-\frac{2}{5}\right)^3=\frac{216}{625}$$

（17）设连续性随机变量 X 的分布函数在某区间的表达式为 $\frac{1}{x^2+1}$，其余部分为常数，写出此分布函数的完整表达式 $F(\mathrm{x})=\begin{cases}\frac{1}{x^2+1} & ,\text{当}x<0\text{时}\\ 1,\ \text{当}x\geq 0\text{时}\end{cases}$ ________________.

（17）设 $F\ (x)$ 为随机变量 X 的分布函数，在下列概率中可表示为 $F(a)-F\ (a-0)$ 的是（ C ）

(A) $P\{X\leq a\}$ (B) $P\{X>a\}$

(C) $P\{X=a\}$ (D) $P\{X\geq a\}$

（17）设连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=A+B\arctan x,\quad -\infty<x<+\infty$

求（1）常数 A、B．（2）随机变量 X 落在 $(-1,1)$ 内的概率．（3）X 的概率密度函数．

解：（1）$F(-\infty)=0, F(+\infty)=1$ 得，

$$A+B(-\frac{\pi}{2})=0, A+B(\frac{\pi}{2})=1, \text{得}A=\frac{1}{2},\ B=\frac{1}{\pi}.$$

（2）
$$P(-1<x<1)=F(1)-F(-1)$$
$$=(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4})-(\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}$$

（3）X 的概率密度函数 $f(x)=F'(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)},-\infty<x<+\infty$...

（17）

解：设 Y 的分布函数为 $F_Y(y)=P\{Y\leq y\}$.

当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=P\{Y\leq y\}=P\{X^2\leq y\}=0$，...

当 $y\geq 0$ 时，$F_Y(y)=P\{Y\leq y\}=P\{X^2\leq y\}=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})$，

因此 Y 的概率密度函数为 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{y}}\mathrm{e}^{-\sqrt{y}}, & y>0,\\ 0, & y<0.\end{cases}$

（16）设随机变量 $X\sim B(2,\ 0.1)$，则 $P\{X=1\}$ = <u>0.18</u>.

（16）设随机变量 X 的概率密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$ 则随机变量

$Y=2X+1$的概率密度函数为___ $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{y-1}{2} & 1<y<3\\ 0 & 其他\end{cases}$ ______________.

（16）设随机变量 $X\sim N(0,1), Y=2X+1,$ 则 Y 服从(　C　).

(A) $N(0,1)$　　(B) $N(1,1)$　　(C) $N(1,4)$　　(D) $N(0,2)$

（16）设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\dfrac{1}{2}e^{-|x|}$（$-\infty<x<\infty$）. 求：(1) X 的分布函数；(2) $D(X)$.

解 (1) X 的分布函数为

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x}, & x<0,\\ 1-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}, & x\ge 0.\end{cases}$$

(2) $E(X)=\dfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-|x|}=0$，$E(X^2)=\dfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-|x|}=\int_0^{\infty}x^2e^{-x}dx=2$，

$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=2$.

（15）设随机变量 X 的分布律为

X	−2	0	2
P	0.4	0.3	0.3

则 $Y=8-X^3$ 的分布律为______________

X	0	8	16
P	0.3	0.3	0.4

（15）设 $F_1(x)与F_2(x)$ 分别为随机变量 $X_1与X_2$ 的分布函数，为使 $F(x)=aF_1(x)-bF_2(x)$ 是某一随机变量的分布函数，在下列给定的各组数值中应取（　C　）

(A)　$a=-\dfrac{1}{2},b=\dfrac{3}{2}$　　(B)　$a=\dfrac{2}{3},b=\dfrac{2}{3}$

(C)　$a=\dfrac{3}{5},b=-\dfrac{2}{5}$　　(D)　$a=\dfrac{1}{2},b=-\dfrac{3}{2}$

（15）.已知随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}ax+b, & 0<x<1,\\ 0, & 其\ 他,\end{cases}$$

且 $P\left\{X>\dfrac{1}{2}\right\}=\dfrac{5}{8}$, 求（1）常数 a,b 的值；（2）$P\left\{\dfrac{1}{4}<X\le\dfrac{1}{2}\right\}$.

解:（1）由 $1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(ax+b)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}a+b$，

再由 $\frac{5}{8}=P\{X>\frac{1}{2}\}=\int_{\frac{1}{2}}^{1}(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{3}{8}a+\frac{1}{2}b,$

解得 $a=1,b=\frac{1}{2}$. .

（2） $P\{\frac{1}{4}<X\le\frac{1}{2}\}=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}(x+\frac{1}{2})\mathrm{d}x=\frac{7}{32}$. .

(14)设随机变量 X 在区间 (0,2) 上服从均匀分布，则随机变量 $Y=X^2$ 的概率密度为 $f_Y(y)=$ ____ $\begin{cases}\frac{1}{4\sqrt{y}},0<y<4\\ 0, \quad 其他\end{cases}$ ____

（14）设随机变量 X 与 Y 相互独立，其概率分布分别为

X	0	1
P	0.4	0.6

Y	0	1
P	0.4	0.6

则有(B)

A. $P(X=Y)=0.$ *B.* $P(X=Y)=0.52.$ *C.* $P(X=Y)=0.5.$ *D.* $P(X=Y)=1.$

（14） 设随机变量 X 服从正态分布 N(0,1)，对给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，数 u_α 满足 $P\{X>u_\alpha\}=\alpha$，若 $P\{|X|<x\}=\alpha$，则 x 等于(C)

A. $u_{\frac{\alpha}{2}}$. *B.* $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$. *C.* $u_{\frac{1-\alpha}{2}}$. *D.* $u_{1-\alpha}$.

（14）设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}4x^3, & 0<x<1,\\ 0, & 其它,\end{cases}$$

则使 $P\{X>a\}=P\{X<a\}$ 成立的常数 $a=$（ D ）

A. $\sqrt[4]{2}$. *B.* $\frac{1}{2}$. *C.* $1-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$. *D.* $\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

（14）设连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}k\mathrm{e}^x, & x<0,\\ \frac{1}{4}, & 0\le x<2,\\ 0, & x\ge 2,\end{cases}$$

求（1）常数 k，（2） X 的分布函数 $F(x)$，（3） $E(X)$.

解：(1) $1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{0}ke^x dx+\int_0^2\frac{1}{4}dx=k+\frac{1}{2}$，得 $k=\frac{1}{2}$

(2) $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$

当$x<0$时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}e^{t}dt=\frac{1}{2}e^{x}$

当$0\le x<2$时，$F(x)=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}e^{t}dt+\int_{0}^{x}\frac{1}{4}dt=\frac{1}{2}+\frac{x}{4}$

当$x\ge 2$时，$F(x)=1$

(3) $E(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-\infty}^{0}x\frac{1}{2}e^{x}dx+\int_{0}^{2}x\frac{1}{4}dx=0$

（13）设连续型随机变量X的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}1-e^{-3x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$ 则$P\{X>1\}$

= _e^{-3}______________ .

（13）已知离散型随机变量X的概率分布（右图），$F(x)$为其分布函数，则$F(\frac{3}{2})$= $\frac{1}{2}$ _____.

X	0	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

（13）已知随机变量X的概率密度为$f_X(x)$，令$Y=-2X$，则Y的概率密度$f_Y(y)$为（　D　）.

A. $2f_X(-2y)$. *B.* $f_X(-\frac{y}{2})$. *C.* $-\frac{1}{2}f_X(-\frac{y}{2})$. *D.* $\frac{1}{2}f_X(-\frac{y}{2})$

（13）设随机变量$X\sim B(3,0.2)$，且随机变量$Y=\frac{X(3-X)}{2}$，则$P\{Y=0\}$=(　C　) .

A. 0.512. *B.* 0.008. *C.* 0.52. *D.* 0.48.

（13）设随机变量X的概率密度为$f(x)=Ae^{-|x|}(-\infty<x<+\infty)$, 求（1）系数$A$;（2）$P\{0\le X\le 1\}$；（3）分布函数$F(x)$.

解：(1) 由$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}Ae^{-|x|}dx=2A=1$，得$A=\frac{1}{2}$.

(2) $P\{0\le X\le 1\}=\frac{1}{2}\int_{0}^{1}e^{-x}dx=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{e})$.

(3) $F(x)=P\{X\le x\}$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x}e^{t}dt, & x<0\\ \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}e^{t}dt+\frac{1}{2}\int_{0}^{x}e^{-t}dt, & x\ge 0\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x}, & x<0\\ 1-\frac{1}{2}e^{x}, & x\ge 0\end{cases}$$

（12）已知 X 服从[0,1]上的均匀分布，则 $Y=2X+1$ 的概率密度为

$f_Y(y)=\begin{cases} 1/2 & 1<y<3 \\ 0 & 其他 \end{cases}$.

（12）设随机变量 $X\sim N(0,1), Y=2X+1$，则 Y 服从（ A ）

（A） $N(1,4)$.　（B） $N(0,1)$.　（C） $N(1,1)$.　（D）. $N(1,2)$.

（12）下列函数中，哪个能是随机变量 X 的分布函数（ C ）

(A) $F(x)=\begin{cases} 0, & x<-2, \\ 1/2, & -2\le x<0, \\ 3/2, & x\ge 0; \end{cases}$　(B) $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \sin x, & 0\le x<\pi, \\ 1, & x\ge \pi; \end{cases}$

(C) $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \sin x, & 0\le x<\dfrac{\pi}{2}, \\ 1, & x\ge \dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$　(D) $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ x-1/3, & 0\le x<\dfrac{1}{2}, \\ 1, & x\ge \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

（12）设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} x & 0\le x<1, \\ 2-x & 1\le x<2, \\ 0 & 其他, \end{cases}$（1）求随机变量 X 的分布函数；（2）求 $P\{0.5\le X\le 1.5\}$.

解　(1)　当 $x\le 0$ 时，$F(x)=0$；　　当 $0\le x<1$ 时, $F(x)=\int_0^x t\,dt=\dfrac{1}{2}x^2$；

当 $1\le x<2$ 时，$F(x)=\int_0^1 t\,dt+\int_1^x (2-t)dt=2x-1-\dfrac{1}{2}x^2$.

当 $x\ge 2$ 时，$F(x)=1$.

所以 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases} 0 & x\le 0, \\ \dfrac{1}{2}x^2 & 0\le x<1, \\ 2x-1-\dfrac{1}{2}x^2 & 1\le x<2, \\ 1 & x\ge 2, \end{cases}$

（2） $P\{0.5\le X\le 1.5\}=F(1.5)-F(0.5)$=0.65.

（11）若 X 服从正态分布 $N(2,\sigma^2)$，且 $P\{2<X<4\}=0.3$，则 $P\{X\le 0\}=$

0.2 .

（11）设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} k\sqrt{x}, 0<x<1 \\ 0,其他 \end{cases}$（1）求常数 k 的值；（2）写出随机变量 X 的分布函数.

解：（1）由 $\int_0^1 \mathrm{k}\sqrt{x}dx=1$，得 $k=\frac{3}{2}$.

(2) 当 $x\le 0$ 时，$F(x)=0$；

当 $0<0<1$ 时, $F(x)=\int_0^x \frac{3}{2}\sqrt{t}dt=x^{\frac{3}{2}}$；

当 $x\ge 1$ 时，$F(x)=1$.

（10）设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其概率密度为 $f(x)$，且 $P\{X\ge 1\}=\frac{1}{2}$，$f(1)=1$, 则（ B ）

(A) $\mu=1,\sigma^2=1$；

(B) $\mu=1,\sigma^2=\frac{1}{2\pi}$；

(C) $\mu=1,\sigma^2=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$；

(D) $\mu=0,\sigma^2=1$.

（10）设相互独立的随机变量 X_1 和 X_2 的分布函数分别为 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$，概率密度分别为 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$，则随机变量 $Y=\min(X_1,X_2)$ 的概率密度 $f(x)$ 等于（ D ）

(A) $f_1(x)f_2(x)$ ；

(B) $f_1(x)F_1(x)+f_2(x)F_2(x)$；

(C) $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$；

(D) $f_1(x)[1-F_2(x)]+f_2(x)[1-F_1(x)]$.

（10）任设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<1, \\ k(2-x), & 1\le x<2, \\ 0, & 其它, \end{cases}$ 求

(1) 常数 k 的值；(2) 随机变量 X 的分布函数.

解：(1) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$，有 $\int_0^1 xdx+\int_1^2 k(2-x)dx=\frac{1}{2}+\frac{k}{2}=1$，所以 $k=1$.

(2) 当 $x<0$ 时，$F(x)=0$，

当$0\le x<1$时，$F(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x tdt=\frac{1}{2}x^2$，

当$1\le x<2$时，$F(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^1 tdt+\int_1^x(2-t)dt=2x-\frac{1}{2}x^2-1$，

当$x>2$时，$F(x)=1$.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{1}{2}x^2, & 0\le x<1,\\ 2x-\frac{1}{2}x^2-1, & 1\le x<2,\\ 1, & x\ge 2.\end{cases}$$

（09）设随机变量$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则随着σ的增大，概率$P\{|X-\mu|<\sigma\}$（ D ）

（A）单调增大. （B）单调减小. （C）增减不定. （D）保持不变.

（09）取两个不大于 1 的正数，则它们的积不大于$\frac{2}{9}$，且它们的和不大于 1 的概率为 1/3+2/9ln2 .

（09）设随机变量X在区间[2，5]上服从均匀分布，对X做 3 次独立观察，求至少有两次观察值大于 3 的概率.

解：由已知X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}, x\in[2,5],\\ 0, x\notin[2,5].\end{cases}$$

设$A_i(i=1,2,3)$表示第i次观察值大于 3 的事件，则有

$$p(A_i)=P\{X>3\}=\int_3^5\frac{1}{3}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}, i=1,2,3.$$

设A表示至少有两次观察值大于 3 的事件，则有

$$P(A)=P(A_1A_2\overline{A_3})+P(A_1\overline{A_2}A_3)+P(\overline{A_1}A_2A_3)+P(A_1A_2A_3)$$

$$=3\left(\frac{2}{3}\right)^2\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{20}{27}.$$

(09 分)已知随机变量X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}ax+b, & 0<x<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$

且$P\left\{X>\frac{1}{2}\right\}=\frac{5}{8}$，求(1)常数$a,b$的值；(2) $P\left\{\frac{1}{4}<X\le\frac{1}{2}\right\}$.

解：(1)由 $1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}a+b$，

再由 $\frac{5}{8}=P\{X>\frac{1}{2}\}=\int_{\frac{1}{2}}^1(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{3}{8}a+\frac{1}{2}b,$

解得 $a=1,b=\frac{1}{2}$.

(2) $P\{\frac{1}{4} < X \le \frac{1}{2}\} = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} (x + \frac{1}{2})\mathrm{d}x = \frac{7}{32}$.

三、二维随机变量及其分布

（18）设随机变量X在区间$(0,1)$内服从均匀分布，在条件$X = x(0 < x < 1)$下，随机变量Y在区间$(0, x)$内服从均匀分布，则X和Y的联合概率密度为

$$\underline{f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < y < x < 1, \\ 0, & 其他, \end{cases}}.$$

（18）设(X, Y)是二维随机变量，与$\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$不等价的是 (D).

(A) $E(XY) = E(X)E(Y)$　　(B) $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$

(C) $D(X - Y) = D(X) + D(Y)$　　(D) X 和 Y 相互独立

1. （18）设二维随机变量(X, Y)的分布律为

X \ Y	1	2	3
1	$\frac{1}{8}$	a	$\frac{1}{24}$
2	b	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

且$P\{X = 1\} = \frac{1}{2}$.（1）求常数a, b；（2）求(X, Y)关于X和关于Y的边缘分布律（只写出计算结果表格）；（3）判断X与Y是否相互独立？

解：（1）由已知可得

$$\begin{cases} \frac{1}{8} + a + \frac{1}{24} + b + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 1 \\ \frac{1}{8} + a + \frac{1}{24} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{1}{8} \end{cases}$$

(2)

X	1	2
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Y	1	2	3
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{6}$

（3）因$\mathrm{P}\{X = 1, Y = 2\} = \frac{1}{3} \neq \mathrm{P}\{X = 1\}\mathrm{P}\{Y = 2\} = \frac{7}{24}$，故$X$与$Y$不独立.

（18）设随机变量X和Y相互独立，概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}1，0\le x\le 1，\\ 0，\quad 其他，\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}，\quad y>0，\\ 0，\quad 其他.\end{cases}$$

求随机变量$Z=2X+Y$的概率密度.

解：因X和Y相互独立，故(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}，\quad 0\le x\le 1，y>0，\\ 0，\quad 其他.\end{cases}$$

Z的分布函数为

$$F_Z(z)=P\{2X+Y\le z\}=\begin{cases}0, & z<0,\\ \int_0^{\frac{z}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{z-2x}e^{-y}\mathrm{d}y, & 0\le z<2,\\ \int_0^{1}\mathrm{d}x\int_0^{z-2x}e^{-y}\mathrm{d}y, & z\ge 2,\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & z<0,\\ \frac{1}{2}(z-1+e^{-z}), & 0\le z<2,\\ 1-\frac{1}{2}(e^2-1)e^{-z}, & z\ge 2,\end{cases}$$

$$f_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ \frac{1}{2}(1-e^{-z}), & 0\le z<2,\\ \frac{1}{2}(e^2-1)e^{-z}, & z\ge 2.\end{cases}$$

（17）设二维随机变量$(X，Y)$在区域D上服从均匀分布，D由曲线$y=\dfrac{1}{x},y=0,x=1,x=e^2$所围成，则$(X,Y)$关于$X$的边缘概率密度在$x=e$点的值为<u>1/2e　　.</u>

(17) 设两个相互独立的随机变量X与Y分别服从正态分布$N(0,1)$和$N(1,1)$，则（ B ）

（A）$P\{X+Y\le 0\}=\dfrac{1}{2}$　　（B）$P\{X+Y\le 1\}=\dfrac{1}{2}$

（C）$P\{X-Y\le 0\}=\dfrac{1}{2}$　　（D）$P\{X-Y\le 1\}=\dfrac{1}{2}$

(17) 已知随机变量X和Y的概率分布分别为

X	−1	0	1
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Y	0	1
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

并且$P\{XY=0\}=1.$

（1）求二维随机变量(X,Y)的概率分布（只写出计算结果表格）;

（2）判别 X 和Y 是否相互独立。

解：（1）

$Y \backslash X$	-1	0	1	$P_{\cdot j}$
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$p_{i\cdot}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

（2）由 X 和Y 的联合分布律和边缘分布律可知

$$p\{X=-1,\ Y=0\}=\frac{1}{4},\ P\{X=-1\}\cdot P\{Y=0\}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

所以 X 和Y 不相互独立。

（16）设随机变量(X,Y)的概率密度 $f(x,y)=\begin{cases}Cx, & 0<x<1,\ 0<y<2,\\ 0, & 其他\end{cases}$

(1) 求常数 C；(2) 求 $P\{X+Y>1\}$；(3) 求 X 与 Y 的边缘概率密度，并判断 X 与 Y 是否相互独立.

解 (1)由 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$，有

$$C\int_0^1 dx\int_0^2 x\mathrm{d}y=C=1.$$

(2) $$P\{X+Y>1\}=1-\int_0^1 xdx\int_0^{1-x}dx=\frac{5}{6}$$

(3)因为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0<y<2,\\ 0, & 其他\end{cases}$$

显然，对任意实数 x 和 y，都有 $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$

所以 X 与 Y 相互独立.

（15）设平面区域G是由x轴，y轴以及直线$x+\frac{y}{2}=1$所围成的三角形域，二维随机变量

(X,Y)在G上服从均匀分布，则 $f_{X|Y}(x|y)=$（　A　）$(0<y<2)$

（A） $f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\dfrac{2}{2-y}, & 0<x<1-\dfrac{y}{2},\\ 0, & 其它.\end{cases}$ 　（B） $f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\dfrac{2}{1-y}, & 0<x<1-\dfrac{y}{2},\\ 0, & 其它.\end{cases}$

（C） $f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2-y}, & 0<x<1-\dfrac{y}{2},\\ 0, & 其它.\end{cases}$ 　(D) $f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-y}, & 0<x<1-\dfrac{y}{2},\\ 0, & 其它.\end{cases}$

（15）设ξ,η是相互独立且服从同一分布的两个离散型随机变量，已知ξ的分布律为$P\{\xi=i\}=\dfrac{1}{3},i=1,2,3,$ 又设 $X=\max(\xi,\eta),Y=\min(\xi,\eta)$，求$(X,Y)$的联合分布律和边缘分布律（只写出计算结果表格）。

解：

X \ Y	1	2	3	$P_{\cdot j}$
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{9}$
2	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$
3	0	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
$p_{i\cdot}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{5}{9}$	1

1.（15）设两个相互独立的随机变量X和Y都在区间$(0,1)$上服从均匀分布，求随机变量$Z=X+Y$的概率密度。

解：由已知二维随机变量的联合概率密度

$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,0<y<1,\\ 0, & 其它\end{cases}$$

边缘概率密度 $f_X(x)=\begin{cases}1,0<x<1\\ 0,其它\end{cases}$ 　　$f_Y(y)=\begin{cases}1,0<y<1\\ 0,其它\end{cases}$

根据卷积公式得

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-y)f_Y(y)dy=\int_0^1 f_X(z-y)dy$$

令$z-y=t$，得 　$f_Z(z)=\int_{z-1}^{z}f_X(t)dt,\quad -\infty<z<+\infty$

当 $z<0$ 时， $f_Z(z)=0$

当 $0\le z<1$ 时， $f_Z(z)=\int_{z-1}^{z} f_X(t)dt=\int_{z-1}^{0}0dt+\int_{0}^{z}1dt=z$

当 $1\le z<2$ 时， $f_Z(z)=\int_{z-1}^{z} f_X(t)dt=\int_{z-1}^{1}1dt+\int_{1}^{z}0dt=2-z$

当 $z\ge 2$ 时， $f_Z(z)=\int_{z-1}^{z} f_X(t)dt=\int_{z-1}^{z}0dt=0$

综上所述，随机变量 Z 的概率密度为

$$f_Z(z)=\begin{cases} z, & 0\le z<1 \\ 2-z, & 1\le z<2 \\ 0, & z<0 \text{或} z\ge 2 \end{cases}.$$

（14）设随机变量 X 与 Y 相互独立，且均服从区间[0, 3]上的均匀分布，则 $P\{\max\{X,Y\}\le 1\}$=______$\frac{1}{9}$______.

（14）设随机变量 X 与 Y 相互独立，其概率分布分别为

X	0	1
P	0.4	0.6

Y	0	1
P	0.4	0.6

则有(B)

A. $P(X=Y)=0.$ *B.* $P(X=Y)=0.52.$ *C*. $P(X=Y)=0.5.$ *D.* $P(X=Y)=1.$

（14）设 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{6}e^{-(\frac{x}{2}+\frac{y}{3})}, x>0, y>0 \\ 0, \quad \text{其它} \end{cases}$$

求（1）边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$；

（2）X 与 Y 是否相互独立?

（3） $Z=X+Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

解：(1)

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{+\infty}\frac{1}{6}e^{-(\frac{x}{2}+\frac{y}{3})}dy=\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}, x>0 \\ 0, \quad x\le 0\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^{+\infty}\frac{1}{6}e^{-(\frac{x}{2}+\frac{y}{3})}dx=\frac{1}{3}e^{-\frac{y}{3}}, y>0 \\ 0, \quad y\le 0\end{cases}$$

(2) $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$, X 与 Y 相互独立

(3) X 与 Y 相互独立,由卷积公式

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}f_Y(z-x)dx$$

$z\le 0$时，$f_Z(z)=0,$

当$z>0$时，令$z-x=t,$则$x=z-t$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{2}e^{-\frac{z-t}{2}}f_Y(t)dt=\int_0^z\frac{1}{2}e^{-\frac{z-t}{2}}\frac{1}{3}e^{-\frac{t}{3}}dt=e^{-\frac{z}{3}}-e^{-\frac{z}{2}}$$

$$f_Z(z)=\begin{cases}e^{-\frac{z}{3}}-e^{-\frac{z}{2}}, z>0\\ 0, \quad z\le 0\end{cases}$$

（13）设二维随机变量(X,Y)服从区域D上的均匀分布，其中D为x轴、y轴和直线$x+y=1$所围成的三角形区域，则$P\{X<Y\}=$ __1/2_________.

（13）二维随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}1/\pi & x^2+y^2<1,\\ 0 & 其他\end{cases}$

则随机变量X与Y为（　C　）.

A. 独立同分布． *B.* 独立不同分布． *C.* 不独立同分布． *D.* 不独立不同分布.

（13）已知(X,Y)概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}4x, & 0<x<1, \quad 0<y<x^2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

（1）、求关于 X和 Y 的边缘概率密度；（2）判断 X与 Y是否相互独立；

（3）、求$P(X>\frac{1}{2},Y>\frac{1}{4})$.

解：（1）

$$f_X(x)=\begin{cases}4x^3, & 0<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}2(1-y), & 0<y<1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

（2）显然 $f(x,y)\ne f_X(x)\cdot f_Y(y)$, 所以 X 与 Y 不相互独立；

（3） $P(X>\frac{1}{2})=\int_{\frac{1}{2}}^{1}4x^3dx=\frac{15}{16}$

$$P(X>\frac{1}{2},\ Y>\frac{1}{4})=\int_{\frac{1}{2}}^{1}dx\int_{\frac{1}{4}}^{x^2}4xdy=\frac{9}{16}$$

（12）

设二维随机变量(X,Y)的分布律为（右图）

且两个随机事件$\{X=0\}$与$\{X+Y=1\}$相互独立，

则（　B　）

$X \backslash Y$	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

(A) $a=0.2,b=0.3$；(B) $a=0.4,b=0.1$；　(C) $a=0.3,b=0.2$；(D) $a=0.1,b=0.4$.

（12）已知二维随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}ke^{-(2x+y)} & ,x>0,y>0\\ 0 & ,\ \text{其它}\end{cases}$

求：（1）系数k；

（2）(X,Y)关于X和关于Y的边缘概率密度；

（3）判断X和Y是否相互独立？

解：（1）$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}ke^{-(2x+y)}dxdy$

$$=k\int_0^{+\infty}e^{-2x}dx\int_0^{+\infty}e^{-y}dy=k\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\Big|_0^{+\infty}\left(-e^{-y}\right)\Big|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{2}k,\text{故}k=2$$

（2）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 2\int_0^{+\infty}e^{-(2x+y)}dy, & x>0\end{cases}=\begin{cases}0 & ,x\le 0\\ 2e^{-2x} & ,x>0\end{cases}$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}0 & ,y\le 0\\ 2\int_0^{+\infty}e^{-(2x+y)}dx & ,y>0\end{cases}=\begin{cases}0 & ,y\le 0\\ e^{-y} & ,y>0\end{cases}$$

（3）由于对任意x,y有：$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$故X与Y相互独立

（12）设二维随机变量服从二维正态分布，$(X,Y)\sim N(0,1,1,2,0)$，求$Z=X-Y$的概率密度$f_Z(z)$.

解：由于$(X,Y)\sim N(0,1,1,2,0)$，则$E(X)=0,E(Y)=1$，$D(X)=1,D(Y)=2$，$\rho=0$.

则X与Y相互独立，$E(Z)=E(X-Y)=-1$，$D(X+Y)=D(X)+D(Y)=3$

$X-Y\sim N(-1,3)$，$f_Z(z)=\frac{1}{\sqrt{6\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(z+1)^2}{6}},-\infty<z<+\infty$

（11）已知二维随机变量(X,Y)的概率分布为

$Y \backslash X$	1	2	3

0	$\dfrac{3}{16}$	$\dfrac{3}{8}$	a
1	b	$\dfrac{1}{8}$	$\dfrac{1}{16}$

如果 X 与 Y 相互独立，则（　C　）

(A) $a=\dfrac{1}{16},b=\dfrac{3}{16}$；　(B) $a=\dfrac{1}{4},b=0$；　(C) $a=\dfrac{3}{16},b=\dfrac{1}{16}$；　(D) $a=0,b=\dfrac{1}{4}$.

（11）设随机变量 X 和 Y 相互独立，且都服从标准正态分布 $N(0,1)$，求 $Z=(X+Y)^2$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

解： 设 $T=X+Y$，则 $Z=T^2$，$T\sim N(0,2)$，

概率密度为 $f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{4}},-\infty<t<+\infty$

Z 的分布函数 $F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{T^2\le z\}$

当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=0$

当 $z\ge 0$ 时，$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=\int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{4}}\mathrm{d}t$

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{\pi z}}\mathrm{e}^{-\frac{z}{4}},z>0\\ 0,\text{其它}.\end{cases}$$

（11）设随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}6xy^2,0<x<1,0<y<1,\\ 0,\qquad \text{其　它}.\end{cases}$

（1）求关于 X 和 Y 的边缘概率密度 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$；（2）判断 X 与 Y 是否相互独立；（3）求 $P\{X\ge Y\}$.

解：

（1）关于 X 的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^1 6xy^2\,\mathrm{d}y=2x,\quad 0<x<1\\ 0\qquad\qquad \text{其他}.\end{cases}$$

关于 Y 的边缘概率密度 $f_Y(y)$

$$f_Y(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_0^1 6xy^2\,\mathrm{d}x=3y^2,\quad 0<y<1\\ 0,\qquad\qquad \text{其他}.\end{cases}$$

（2）由于 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，所以 X 与 Y 相互独立

（3）$P\left\{X\ge Y\right\}=6\int_0^1 x\,\mathrm{d}\,x\int_0^x y^2\,\mathrm{d}\,y=\dfrac{2}{5}$

（10）设随机变量 U 在区间 $[-2,2]$ 上服从均匀分布，令 $X=\begin{cases}-1 & 若U\le -1,\\ 1 & 若U>-1,\end{cases}$ $Y=\begin{cases}-1 & 若U\le 1,\\ 1 & 若U>1,\end{cases}$ 求 (X,Y) 的概率分布.

解：（1）(X,Y) 可能取的值为（-1，-1），（-1，1），（1，-1），（1，1）

$P\left\{X=-1,Y=-1\right\}=P\left\{U\le -1,U\le 1\right\}=\dfrac{1}{4}$；

$P\left\{X=-1,Y=1\right\}=P\left\{U\le -1,U>1\right\}=0$；

$P\left\{X=1,Y=-1\right\}=P\left\{U>-1,U\le 1\right\}=\dfrac{1}{2}$；

$P\left\{X=1,Y=1\right\}=P\left\{U>-1,U>1\right\}=\dfrac{1}{4}$.

(X,Y) 的概率分布为

$Y \backslash X$	-1	1
-1	$1/4$	$1/2$
1	0	$1/4$

3. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}A\mathrm{e}^{-(2x+3y)}, x>0, y>0,\\ 0, \quad 其他\end{cases}$，

（1）求常数 A；（2）求边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$；（3）判断 X 与 Y 是否相互独立.

解　（1）由 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=1 \Rightarrow A=6$；

（2）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2x}, x>0,\\ 0, x\le 0.\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x=\begin{cases}3\mathrm{e}^{-3x}, x>0,\\ 0, \quad x\le 0.\end{cases}$

（3） $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，相互独立；

（10）设两个相互独立的随机变量 X 和 Y 都在区间 $[0,1]$ 上服从均匀分布，求随机变量 $Z=X+Y$ 概率密度 $f_Z(z)$.

解法 1　由卷积公式 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x$ ，

为确定积分限, 先找出使被积函数不为 0 的区域 $\begin{cases} 0\le x\le 1 \\ 0\le z-x\le 1 \end{cases}$

当 $0\le z<1$ 时， $f_Z(z)=\int_0^z \mathrm{d}x=z$；

当 $1\le z<2$ 时， $f_Z(z)=\int_{z-1}^1 \mathrm{d}x=2-z$；

当 $z<0,\ z\ge 2$ 时， $f_Z(z)=0$，

$$f_Z(z)=\begin{cases} z, & 0\le z<1, \\ 2-z, & 1\le z<2, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

解法 2

$$f(x,y)=\begin{cases} 1 & 0<x<1, 0<y<1, \\ 0 & \text{其他}, \end{cases}$$

当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=0$；

当 $0\le z<1$ 时，$F_Z(z)=\dfrac{z^2}{2}$；

当 $1\le z<2$ 时，$F_Z(z)=1-\dfrac{1}{2}(2-z)^2=2z-1-\dfrac{1}{2}z^2$；

当 $z\ge 2$ 时，$F_Z(z)=1$，

所以，$$F_Z(z)=\begin{cases} 0, & z<0, \\ \dfrac{1}{2}z^2, & 0\le z<1, \\ 2z-1-\dfrac{1}{2}z^2, & 1\le z<2, \\ 1, & z\ge 2. \end{cases}$$

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases} z, & 0<z<1, \\ 2-z, & 1<z<2, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

（09）设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}},-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$$

则 $P\{X>Y\}=$ <u>0.5</u>.

（09）设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{2}x+y\right)}, & x>0,y>0, \\ 0, & 其他, \end{cases}$$

（1）证明 X 与 Y 相互独立；（2）利用卷积公式求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

解:（1）由 $f(x,y)$ 可得随机变量 X,Y 边缘的概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}, x>0, \\ 0, \quad x\le 0. \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases} \mathrm{e}^{-y}, y>0, \\ 0, \quad y\le 0. \end{cases}$$

从而有 $f(x,y)=f_x(x)f_y(y)$,因此 X 与 Y 相互独立,

（2）由卷积公式

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}f_Y(z-x)\mathrm{d}x$$

$$\underline{\underline{令t=z-x}} \quad -\frac{1}{2}\int_z^{+\infty}\mathrm{e}^{\frac{t-z}{2}}f_Y(t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{z}\mathrm{e}^{t-z}f_Y(t)\mathrm{d}t$$

$$=\begin{cases} \frac{1}{2}\int_0^z\mathrm{e}^{\frac{t-z}{2}}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{dt}, & z>0 \\ 0, & z\le 0 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}(1-\mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}), & z>0, \\ 0, & z\le 0. \end{cases}$$

四、随机变量的数字特征

（18）设(X,Y)是二维随机变量，与$\mathrm{Cov}(X,Y)=0$不等价的是（ D ）.

(A) $E(XY)=E(X)E(Y)$ (B) $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

(C) $D(X-Y)=D(X)+D(Y)$ (D) X 和 Y 相互独立

（18）设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}24xy, & (x,y)\in \mathrm{D}, \\ 0, & 其他, \end{cases}$$

其中区域D是由两坐标轴与$x+y-1=0$所围成的区域，求X与Y的相关系数ρ_{XY}.

解： $E(X)=E(Y)=\int_0^1\int_0^{1-x}24x^2\,y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{2}{5}$,

$$E(X^2)=E(Y^2)=\int_0^1\int_0^{1-x}24x^3\,y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{5}$$

$$E(XY)=\int_0^1\int_0^{1-x}24x^2\,y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{2}{15},$$

$$D(X)=D(Y)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{25},$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=-\frac{2}{75},$$

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=-\frac{2}{3}.$$

（17）已知随机变量 X、Y 分别服从 $N(1,3^2),N(0,4^2)$，$\rho_{XY}=-\frac{1}{2}$，设$Z=\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}$.

求（1）Z 的数学期望与方差；

（2）X 与Z 的相关系数；

（3）X 与Z 是否相互独立？为什么？

解：（1）由 $EX=1$，$DX=9$，$EY=0$，$DY=16$，

得 $EZ=E(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2})=\frac{1}{3}EX+\frac{1}{2}EY=\frac{1}{3}$，

$$DZ=D(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2})=D(\frac{X}{3})+D(\frac{Y}{2})+2Cov(\frac{X}{3},\frac{Y}{2})$$
$$=\frac{1}{9}DX+\frac{1}{4}DY+\frac{1}{3}Cov(X,Y)$$
$$=\frac{1}{9}DX+\frac{1}{4}DY+\frac{1}{3}\rho_{XY}\sqrt{DX}\sqrt{DY}=1+4-2=3$$

(2)

$$Cov(X,Z)=Cov(X,\frac{X}{3}+\frac{Y}{2})=\frac{1}{3}Cov(X,X)+\frac{1}{2}Cov(X,Y)$$
.
$$=\frac{1}{3}DX+\frac{1}{2}\rho_{XY}\sqrt{DX}\sqrt{DY}=3-3=0$$

所以 $\rho_{XY}=0$

（3）由于二维正态随机变量相关系数为零和相互独立两者是等价的结论，可知 X 与Z

是相互独立的。

（16）已知二维随机变量(X,Y)服从二维正态分布，则X和Y的相关系数$\rho_{XY}=0$是X和Y相互独立的（ A ）.

(A) 充分必要条件　　(B) 必要非充分条件

(C) 充分非必要条件　　(D) 既不是充分条件也不是必要条件

（16）设随机变量X和Y的方差存在且都不等于零，则$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$是X和Y (C).

(A) 不相关的充分非必要条件　　(B) 不相关的必要非充分条件

(C) 不相关的充分必要条件　　(D) X和Y相互独立的充分必要条件

（16）某箱装有 100 件产品，其中一、二和三等品分别为 80、10 和 10 件，现从中随机抽取一件，记

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{抽到}i\text{等品},\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\quad i=1，2，3，$$

求：(1) 随机变量(X_1,X_2) 的概率分布（只写出分布表）；(2) $Cov(X_1，X_2)$.

解 (1)二维离散型随机变量(X_1,X_2)的联合概率分布为

X_1 \ X_2	0	1
0	0. 1	0.1
1	0. 8	0

(2) $E(X_1)=0.8$，$E(X_2)=0.1$，$E(X_1X_2)=0$，$D(X_1)=0.16$，$D(X_2)=0.09$

$\mathrm{Cov}(X_1,X_2)=E(X_1X_2)-E(X_1)E(X_2)=-0.08$.

（15） 设X与Y相互独立，且$EX=1,EY=4,DX=DY=2$,则$E[(X+Y)^2]=$ ___29___

（15）设X,Y为两个随机变量，已知$\mathrm{cov}(X,Y)=0$,则必有（ C ）

(A) X与Y相互独立　　(B) $D(XY)=D(X)D(Y)$

(C) $E(XY)=E(X)E(Y)$　　(D) 以上都不对

（14） 设X, Y是两个相互独立同服从正态分布$N(0,1)$的随机变量，则$E((X-Y)^2)$ = __2___.

（14）设随机向量 $(X,Y) \sim N(1,2,4,9,\frac{1}{3})$，则 $\mathrm{Cov}(X,Y) =$ （ D ）.

A. $\frac{1}{2}$.　　*B.* 4.　　*C.* 18.　　*D.* 2.

（14）设 A,B 为两个随机事件,且 $P(A)=\frac{1}{4}$，$P(B|A)=\frac{1}{3}$，$P(A|B)=\frac{1}{2}$，令

$$X=\begin{cases}1, & A\text{发生}，\\ 0, & A\text{不发生}，\end{cases} \qquad Y=\begin{cases}1, & B\text{发生}，\\ 0, & B\text{不发生}.\end{cases}$$

求(1) 二维随机变量 (X,Y) 的概率分布（只写出计算结果表格）;

(2) X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY};

解（1）

Y \ X	0	1
0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{12}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

（2）

X	0	1
P	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

Y	0	1
P	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

XY	0	1
P	$\frac{11}{12}$	$\frac{1}{12}$

$E(X)=\frac{1}{4}$, $E(Y)=\frac{1}{6}$, $E(XY)=\frac{1}{12}$,

$E(X^2)=\frac{1}{4}, E(Y^2)=\frac{1}{6}$,,

$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{3}{16}$

$D(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2=\frac{5}{36}$

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=\frac{\sqrt{15}}{15}$$

(13) 设随机变量 $X\sim N(0,1)$，对 X 作 4 次独立观测，Y 表示观测到 $X>0$ 的次数，则随机变量 Y 的数学期望 $E(Y)$ =（　A　）.

A. 2.　　*B.* 1.　　*C.* 0 .　　*D.* 3 .

(13) 设随机向量 $(X,Y)\sim N(1,1,4,9,\frac{1}{2})$，则 $\mathrm{Cov}(X,Y)=$　(　B　) .

A. $\frac{1}{2}$.　　*B.* 3.　　*C.* 18.　　*D.* 36.

(13) 在一只口袋中装有 3 个黑球和 2 个白球，从该口袋中任取球两次，如果将第一次取出的一个球放回后再取第二个球，令

$$X=\begin{cases}0 & 第一次取出白球,\\ 1 & 第一次取出黑球,\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}0 & 第二次取出白球,\\ 1 & 第二次取出黑球,\end{cases}$$

求（1）随机变量 (X,Y) 的概率分布及 (X,Y) 关于 X 和关于 Y 的边缘分布（只写出计算结果表格）；（2）$\mathrm{Cov}(X,Y)$；（3）$P\{X+Y=1\}$.

解　（1）

X \ Y	0	1	$P_{i\cdot}$
0	$\frac{4}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{2}{5}$
1	$\frac{6}{25}$	$\frac{9}{25}$	$\frac{3}{5}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	1

(2) $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$.

(3) $P\{X+Y=1\}=P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=0\}=\frac{12}{25}$.

(12) 设一批产品的次品率为 0.02，从中每次任取 1 个产品，作 100 次放回抽样检查，则抽检的 100 个产品中次品数 X 的数学期望 E(X)=<u>　　2　　　</u> .

(12) 设随机变量 X 服从[1，3]上的均匀分布，则 $Y=\frac{1}{X}$ 的数学期望 $E(Y)=$（　D　）

（A）$\frac{1}{2}$；　（B）2；　（C）$\ln 3$；　（D）$\frac{1}{2}\ln 3$.

(11) 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<-1, \\ 0.4, & -1\le x<1, \\ 0.8, & 1\le x<3, \\ 1, & x\ge 3.\end{cases}$ 则期望 $E(X)=$ <u>0.6　</u>.

(11) 设随机变量 X_1 和 X_2 的方差分别为 4 和 1，X_1 和 X_2 的相关系数 $\rho=0.5$，则随机变量 $Y=2X_1-X_2$ 的方差 $D(Y)$ 等于（　A　）

(A) 13；　(B) 15；　(C) 16；　(D) 17.

(11) 设随机变量 X 与 Y 满足 $D(X+Y)=D(X-Y)$，则（　A　）

(A) X 与 Y 不相关；　(B) X 与 Y 相互独立；　(C) $D(Y)=0$；　(D) $D(X)=0$

(11) 设二维离散型随机变量 (X,Y) 的联合概率分布为

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$

（1）写出关于 X 、Y 及 XY 的概率分布；（2）求 X 和 Y 的相关系数 ρ_{XY}.

解：（1）

X	0	1	2
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

Y	0	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

XY	0	1	4
P	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

（2） $E(X)=\frac{4}{3}$, $E(Y)=1$, $E(XY)=\frac{4}{3}$， $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$，

$\rho_{XY}=0$

(10) 设离散型随机变量 X 服从二项分布 $B(4,\frac{1}{4})$, 则 $E(X^2)=$ <u>7/4</u>.

(10)若随机变量 X 与 Y 满足 $Y=1-\frac{X}{2}$，且 $D(X)=2$，则 $\mathrm{Cov}(X,Y)=$ <u>−1</u>.

(10) 已知二维随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布，则 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=0$ 是 X 与 Y 相互独立的（ C ）

(A) 充分条件，但不是必要条件； (B) 必要条件，但不是充分条件；

(C) 充分必要条件； (D) 既不是充分也不是必要条件.

(09) 设随机变量 $X\sim B(6,p)$，且 $E(X)=2.4$, 则 $D(X)=$ <u>1.44</u>

(09) 设 $D(X)=2$，则 $D(2X-1)=$（ D ）

（A）5. （B）6. （C）7. （D）8.

五、大数定律与中心极限定理

(18) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_{12}$ 是相互独立同分布的随机变量，$E(X_i)=\mu$，$D(X_i)=8$，$(i=1,2,\cdots,12)$，则由切比雪夫不等式可知 $\mathrm{P}\{|\bar{X}-\mu|\geq 4\}\leq$ <u>1/24</u>，其中 $\overline{X}=\frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12}X_i$.

(17) 设随机变量 X 的数学期望 $E(X)=100$，方差 $D(Y)=10$，则由切比雪夫不等式

$P\{80 < X < 120\} \geq$（ D ）

(A) 0.025 (B) 0.5

(C) 0.96 (D) 0.975

(16) 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，则由切比雪夫不等式可知 $P\{|X-\mu| \geq 3\sigma\} \leq$ $\underline{\frac{1}{9}}$.

4.(15) 设随机变量 X 和 Y 的数学期望都是 2，方差分别为 1 和 4，相关系数为 0.5.根据切比雪夫不等式，估计概率 $P\{|X-Y| \geq 6\}$。

解：因为 $E(X-Y) = EX - EY = 0$.

$$\begin{aligned} D(X-Y) &= DX + DY - 2\operatorname{cov}(X,Y) \\ &= DX + DY - 2\rho_{XY}\sqrt{DXDY} \\ &= 1+4-2\times 0.5\times\sqrt{1\times 4} = 3 \end{aligned}$$

根据切比雪夫不等式有

$$\begin{aligned} P\{|X-Y| \geq 6\} &= P\{|X-Y-E(X-Y)| \geq 6\} \\ &\leq \frac{D(X-Y)}{6^2} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

(14) 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，则由切比雪夫不等式可知 $P\{|X-\mu| < 3\sigma\} \geq$ $\underline{\frac{8}{9}}$.

(13) 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_{100}$ 相互独立，且 $X_i = \begin{cases} 1, & \text{事件A发生}, \\ 0, & \text{事件A不发生}, \end{cases}$

$i = 1,2,\cdots,100$，$P(A) = 0.8$，$\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，若 $Y = \sum_{i=1}^{100} X_i$，则由中心极限定理知 Y 的分布函数 $F(y)$ 近似等于（ B ）.

A. $\Phi(y)$. B. $\Phi(\frac{y-80}{4})$. C. $\Phi(\frac{y-0.8}{0.4})$. D. $\Phi(\frac{y-80}{16})$.

(12) 设随机变量 $Y_n (n=1,2,\cdots)$ 服从 $B(n,p)(0<p<1)$，则有（ B ）

(A) 当 n 充分大时，Y_n 近似服从 N（0, 1）;

(B) 当 n 充分大时，Y_n 近似服从 N（np, np(1-p)）;

(C) 对任意正整数 n, $\frac{Y_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ 近似服从 N（0, 1）;

(D) 当 n 充分大时，$\frac{Y_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ 近似服从 N（np, np(1-p)）.

(11) 设 X 的方差为 2.5，则根据切比雪夫不等式 $P\left\{\left|X-EX\right|\geq\sqrt{7.5}\right\}\leq$ ____$\frac{1}{3}$____.

(10)设 X 的方差为 2，则根据切比雪夫不等式估计 $P\left\{\left|X-E(X)\right|\geq 2\right\}\leq$ ____1/2____.

(09) 设随机变量 X 在区间[-1，3]上服从均匀分布，若由切比雪夫不等式有 $P\{|X-1|<\varepsilon\}\geq\frac{2}{3}$，则 $\varepsilon=$(B)

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

六、样本及其函数的分布

(18)设随机变量X和Y都服从标准正态分布$N(0,1)$，则下列结论中正确的是(C).

(A) $X+Y$服从正态分布 (B) X^2+Y^2服从χ^2分布

(C) X^2和Y^2都服从χ^2分布 (D) X^2/Y^2服从F分布

(17) 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，并且服从同一个分布，期望为 μ，方差为 σ^2，

(17)令 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，则 $D(\overline{X})=$ ____$\frac{\sigma^2}{n}$____. 设 X_1,X_2,X_3 是来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，其中 μ 为已知，σ^2 为未知，则下列各式中不是统计量的为（ D ）

(A) $X_2-2\mu$ (B) $\mu X_1+X_3e^{X_2}$

(C) $\max(X_1,X_2,X_3)$ (D) $\frac{1}{\sigma^2}(X_1+X_2+X_3)$

(16) 设 $X_1,X_2,\cdots X_n$ 是来自总体 $X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$ 的样本，其中 μ 已知,σ 未知，则下列不是统计量的是(D).

(A) $\max\limits_{1\leq k\leq n}X_k$ (B) $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\mu$ (C) $\min\limits_{1\leq k\leq n}X_k$ (D) $\sum_{k=1}^{n}\frac{X_k}{\sigma}$

(16) 某厂检验保温瓶的保温性能，在保温瓶中灌满沸水，24 小时后测定其保温温度为 T， $T\sim N(62,5^2)$，若独立进行两次抽样测试，各次分别抽取 20 只和 12 只，样本均值分别为$\overline{T}_1,\overline{T}_2$，求样本均值$\overline{T}_1$与$\overline{T}_2$的差的绝对值大于$1^0C$ 的概率. $(\Phi(\sqrt{\frac{3}{10}})=0.7088)$

解：$E(\overline{T}_1-\overline{T}_2)=0$，$D(\overline{T}_1-\overline{T}_2)=\frac{25}{20}+\frac{25}{12}=\frac{10}{3}$，$\overline{T}_1-\overline{T}_2\sim N(0,\frac{10}{3})$，

$P\left\{\left|\overline{T}_1-\overline{T}_2\right|>1\right\}=1-P\left\{\left|\overline{T}_1-\overline{T}_2\right|\le 1\right\}=2-2\Phi(\sqrt{\frac{3}{10}})=0.5824$

（16）设总体 $X\sim N(1,2^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_9$ 是从总体取的样本. $\overline{X},S^2$ 分别为样本均值和样本方差，求 $E(S^2)$ 、$D(S^2)$ 及 $E[(\overline{X}S^2)^2]$

解：由 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，得

$$E（S^2)=\sigma^2=4,\ D(S^2)=\frac{2\sigma^4}{n-1}=4，$$

又因 $\overline{X}^2$ 与 $(S^2)^2$ 相互独立，$E(\overline{X})=1,\ D(\overline{X})=4/9$，从而

$$E[(\overline{X}S^2)^2]=E[\overline{X}^2]E[(S^2)^2]=$$
$$\left\{D(\overline{X})+[E(\overline{X})]^2\right\}\left\{D(S^2)+[E(S^2)]^2\right\}$$
$$=\left(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2\right)\left(\frac{2\sigma^4}{n-1}+\sigma^4\right)=\frac{260}{9}$$

（15）设 $X\sim N(\mu,\sigma^2),\overline{X},S^2$ 分别为容量是 n 的样本均值与样本方差，即

$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\overline{X}}{\sigma}\right)^2\sim$ ___$\chi^2(n-1)$___.

（14）设 $X_1,X_2,\cdots X_{10}$ 是来自正态总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本，令 $Y=a(X_1+X_2+\cdots X_6)^2+b(X_7+\cdots X_{10})^2$，为使 Y 服从 χ^2 分布，则 $a=$___$\frac{1}{6}$___, b =___$\frac{1}{4}$___.

（14）设 $X\sim N(0,\sigma^2),X_1,\cdots,X_9$ 是来自总体 X 的简单随机样本，样本均值为 $\overline{X}$，试确定 σ 的值，使得 $P\left\{1\le\overline{X}\le 3\right\}$ 为最大.

解：由于 $u=\frac{\overline{X}-0}{\sigma/\sqrt{9}}=\frac{3}{\sigma}\overline{X}\sim N(0,1)$

$$g(\sigma)=P\{1\le\overline{X}\le 3\}=P\{\frac{3}{\sigma}\le\frac{3}{\sigma}\overline{X}\le\frac{9}{\sigma}\}$$
$$=\Phi(\frac{9}{\sigma})-\Phi(\frac{3}{\sigma})$$

$$g'(\sigma)=\varphi(\frac{9}{\sigma})(-\frac{9}{\sigma^2})-\varphi(\frac{3}{\sigma})(-\frac{3}{\sigma^2})=\frac{3}{\sigma^2}[\varphi(\frac{3}{\sigma})-3\varphi(\frac{9}{\sigma})]$$

令 $g'(\sigma)=0,\varphi(\frac{3}{\sigma})=3\varphi(\frac{9}{\sigma})$, 即 $e^{-\frac{9}{2\sigma^2}}=3e^{-\frac{81}{2\sigma^2}}$，解得 $\sigma=\frac{6}{\sqrt{\ln 3}}$。

当 $\sigma>\frac{6}{\sqrt{\ln 3}}$ 时, $g'(\sigma)<0$, 当 $\sigma<\frac{6}{\sqrt{\ln 3}}$ 时, $g'(\sigma)>0$，

$\sigma=\frac{6}{\sqrt{\ln 3}}$ 是 $g(\sigma)$ 的最大值点。

（13）设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim N(0,5),Y\sim\chi^2(5)$，则随机变量

_$Z=\frac{X}{\sqrt{Y}}$_________服从 $t(5)$ 分布.

（12）设总体 X~N（30，16），从总体 X 中随机抽取容量为 25 的样本，试求样本均值 $\overline{X}$ 落在 29 到 31 之间的概率。（已知：$\Phi(1.25)=0.8944,\Phi(1.96)=0.975$）

解　　由 $u=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

可得 $P\left\{29<\overline{X}<31\right\}=P\left\{\frac{29-30}{4/\sqrt{25}}<\frac{\overline{X}-30}{4/\sqrt{25}}<\frac{31-30}{4/\sqrt{25}}\right\}$

$=P\left\{-1.25<\overline{X}<-1.25\right\}$

$=\Phi(1.25)-\Phi(-1.25)$

=0. 7888.

（12）设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim N(\mu,\sigma^2),\frac{Y}{\sigma^2}\sim\chi^2(\mathrm{n})$，证明 $t=\frac{X-\mu}{\sqrt{Y/n}}\sim t(n)$

解：因 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，所以 $\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$

又 $\frac{Y}{\sigma^2}\sim\chi^2(n)$ 且 X 与 Y 相互独立，则 $\frac{X-\mu}{\sigma}$ 与 $\frac{Y}{\sigma^2}$ 相互独立

故由 t 分布定义知

$\frac{\frac{X-\mu}{\sigma}}{\sqrt{\frac{Y}{\sigma^2}/n}}\sim t(n)$ 即 $\frac{X-\mu}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}\sim t(n)$。

（11）设随机变量 $X_1,X_2,\cdots X_n(n>1)$ 相互独立同分布，分布函数为 $F(x)$，记随机变量 $X=\max(X_1,X_2,\cdots X_n)$，则 X 的分布函数 $F_X(x)=$__$F^n(x)$______.

（11）设总体 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$， $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>1)$ 是取自总体 X 的简单随机样本，$\overline{X},S^2$ 分别为样本均值和样本方差，则服从 $\chi^2(n-1)$ 的随机变量是（　D　　）

(A) $\sum_{i=1}^{n}X_i^2$； (B) S^2； (C) $(n-1)\overline{X}^2$； (D) $(n-1)S^2$.

（11）设总体 X 服从参数为 $p(0<p<1)$ 的（0−1）分布， $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的一个简单随机样本，记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$， $T=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，求（1） $E(\overline{X})$ 和 $D(\overline{X})$；（2） $E(T)$.

解：（1）由于总体 X 服从参数为 $p(0<p<1)$ 的（0−1）分布，

$$EX=p,DX=p(1-p),$$

则 $E\overline{X}=p,D\overline{X}=\frac{p(1-p)}{n}$.

设样本方差为 S^2，根据 $E(S^2)=DX$，

从而 $E(S^2)=E(\frac{T}{n-1})=p(1-p)$，

故 $E(T)=(n-1)p(1-p)$.

（10）设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自正态总体 $N(0,\sigma^2)$ 的样本，其中 $\sigma>0$，则统计量 $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 服从___$\chi^2(n)$____分布.

（09）设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，则样本均值 $\bar{X}$ 的概率密度为

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{n(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},-\infty<x<+\infty$$

（09）设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$， $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的样本，则

$$P\left\{\frac{|\overline{X}-\mu|}{\sigma/\sqrt{n}}<u_{0.025}\right\}=$$（　B　）

（A）0.975.　　　（B）0.95.　　　（C）0.05.　　　（D）0.025.

（09）设总体 $X \sim N(0,\sigma^2)$，从总体 X 中抽取样本 $X_1, X_2, \cdots, X_{24}$，样本均值为 $\bar{X}$，试确定 σ 的值，使得 $P\{1 < \bar{X} < 2\}$ 最大.

解：由于 $u = \dfrac{\overline{X} - 0}{\sigma / \sqrt{24}} \sim N(0,1)$，于是有

$$g(\sigma) = P\{1 < \overline{X} < 2\} = P\left\{\frac{1}{\sigma/\sqrt{24}} < \frac{\overline{X}}{\sigma/\sqrt{24}} < \frac{2}{\sigma/\sqrt{24}}\right\}$$

$$= P\left\{\frac{\sqrt{24}}{\sigma} < u < \frac{2\sqrt{24}}{\sigma}\right\} = \Phi\left(\frac{2\sqrt{24}}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\sqrt{24}}{\sigma}\right),$$

$$g'(\sigma) = -\frac{2\sqrt{24}}{\sigma^2}\varphi\left(\frac{2\sqrt{24}}{\sigma}\right) + \frac{\sqrt{24}}{\sigma^2}\varphi\left(\frac{\sqrt{24}}{\sigma}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{24}}{\sigma^2}\left[\varphi\left(\frac{\sqrt{24}}{\sigma}\right) - 2\varphi\left(\frac{2\sqrt{24}}{\sigma}\right)\right]$$

$$= \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} e^{\frac{24}{2\sigma^2}}\left(1 - 2e^{-\frac{36}{\sigma^2}}\right),$$

令 $g'(\sigma) = 0$ 得驻点 $\sigma = \dfrac{6}{\sqrt{\ln 2}}$，因为 当 $\sigma < \dfrac{6}{\sqrt{\ln 2}}$ 时 $g'(\sigma) > 0$，而当 $\sigma > \dfrac{6}{\sqrt{\ln 2}}$ 时

$g'(\sigma) < 0$，所以 $\sigma = \dfrac{6}{\sqrt{\ln 2}}$ 是 $g(\sigma)$ 的最大值点，即应取 $\sigma = \dfrac{6}{\sqrt{\ln 2}}$.

七、参数估计

（18）设总体X的均值为μ，方差为σ^2，X_1, X_2, X_3, X_4是来自总体X的样本，则下列　μ的无偏估计量中最有效的是（ D　）.

(A) $\frac{1}{6}X_1 + \frac{1}{6}X_2 + \frac{1}{3}X_3 + \frac{1}{3}X_4$　　(B) $\frac{1}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{3}X_3$

(C) $\frac{3}{5}X_1 + \frac{4}{5}X_2 - \frac{1}{5}X_3 - \frac{1}{5}X_4$　　(D) $\frac{1}{4}X_1 + \frac{1}{4}X_2 + \frac{1}{4}X_3 + \frac{1}{4}X_4$

（18）设总体X的概率密度为

$$f(x;\theta) = \begin{cases} (\theta+1)x^\theta, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中$\theta(\theta > -1)$是未知参数，$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体X的样本，求θ的矩估计量和最大似然估计量.

解：$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x;\theta)\mathrm{d}x = \int_0^1 (\theta+1)x^\theta \mathrm{d}x = \frac{\theta+1}{\theta+2}$,

令$E(X) = \bar{X}$，即$\frac{\theta+1}{\theta+2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}$

解得θ的矩估计量为

$$\hat{\theta}=\frac{2\bar{X}-1}{1-\bar{X}}$$

设$x_1,x_2,\cdots,x_n$是样本设$X_1,X_2,\cdots,X_n$的观察值，则似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\begin{cases}(\theta+1)^n\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\theta}, & 0<x_i<1(\mathrm{i}=1,2,\cdots,\mathrm{n}),\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

当$0<x_i<1(\mathrm{i}=1,2,\cdots,\mathrm{n})$时，$L(\theta)>0$, 且

$$\ln L(\theta)=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\,,\quad \frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}x}=\frac{n}{\theta+1}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

令$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}x}=0$，解得$\theta$的最大似然估计值为$\hat{\theta}=-1-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$，$\theta$的最大似然估计量为

$$\hat{\theta}=-1-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$$

（18）设总体X的均值$E(X)=\mu$，方差$D(X)=\sigma^2>0$都存在，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体X的样本，证明：不论总体X服从什么分布，样本方差

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

是总体方差σ^2的无偏估计.

证明:

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\bar{X}^2 \qquad \ldots 2\text{ 分}$$

$$E(S^2)=\frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right)=\frac{1}{n-1}\left[E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)-E(n\bar{X}^2)\right]$$

$$=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)-nE(\bar{X}^2)\right]=\frac{n}{n-1}\left[(\sigma^2+\mu)-\left(\frac{\sigma^2}{n}+\mu\right)\right]$$

$$=\sigma^2$$

（17）设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1}, & 0\le x\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$ $\theta>0$ 为未知参数，

$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的样本，求θ的矩估计量和最大似然估计量。

解：由于

$$\mu_1 = EX = \int_0^1 \sqrt{\theta} x^{\sqrt{\theta}} dx = \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}$$

令 $\mu_1 = A_1$, 即

解得θ的矩估计量为$\hat{\theta} = \left(\frac{\overline{X}}{1-\overline{X}}\right)^2$

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为样本值，似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \sqrt{\theta} x_i^{\sqrt{\theta}-1} = \theta^{\frac{n}{2}} (\prod_{i=1}^{n} x_i)^{\sqrt{\theta}-1}$$

取对数，得

$$\ln L(\theta) = \frac{n}{2} \ln\theta + (\sqrt{\theta} - 1)\sum_{i=1}^{n} \ln x_i$$

令 $\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{n}{2} \cdot \frac{1}{\theta} + \frac{1}{2\sqrt{\theta}} \sum_{i=1}^{n} \ln x_i = 0$

解得 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta} = \frac{n^2}{(\sum_{i=1}^{n} \ln x_i)^2}$，

θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta} = \frac{n^2}{(\sum_{i=1}^{n} \ln X_i)^2}$

（17）设总体 $X \sim U(0，\theta)$，X_1，X_2,L ,X_n $(n \geq 2)$ 是取自总体 X 的样本，已知 θ 的两个无偏估计量为 $\hat{\theta}_1 = 2\overline{X}$，$\hat{\theta}_2 = \frac{n+1}{n} \max(X_1，X_2, \cdots, X_n)$，判别 $\hat{\theta}_1$与 $\hat{\theta}_2$ 哪个更有效?

解：$D(\hat{\theta}_1) = D(2\overline{X}) = 4D(\overline{X}) = 4\frac{D(X)}{n} = 4\frac{\theta^2}{12n} = \frac{\theta^2}{3n}$，

记$Y = \max(X_1, X_2, \cdots, X_n)$,则$\hat{\theta}_2 = \frac{n+1}{n} Y$

$$由f_Y(y) = \begin{cases} \frac{ny^{n-1}}{\theta^n} & 0 < y < \theta \\ 0 & 其他 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E(Y) = \int_0^\theta y \frac{ny^{n-1}}{\theta^n} dy = \frac{n}{n+1}\theta \\ E(Y^2) = \int_0^\theta y^2 \frac{ny^{n-1}}{\theta^n} dy = \frac{n}{n+2}\theta^2 \end{cases}$$

于是$D(\hat{\theta}_2) = \frac{(n+1)^2}{n^2} D(Y) = \frac{(n+1)^2}{n^2}\left[E(Y^2) - E^2(Y)\right] = \frac{\theta^2}{n(n+2)}$.

因为$D(\hat{\theta}_2)=\dfrac{\theta^2}{n(n+2)}<\dfrac{\theta^2}{3n}=D(\hat{\theta}_1)$,所以$\hat{\theta}_2$比$\hat{\theta}_1$更有效

（16）设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的一个样本，$\overline{X}$ 为样本均值，则下列样本函数中不是总体 X 期望 μ 的无偏估计量是（ D ）.

(A) $\overline{X}$　(B) $X_1+X_2-X_3$　(C) $0.2X_1+0.3X_2+0.5X_3$　(D) $\sum^n X_i$

(16) 设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}x^{\frac{1-\theta}{\theta}}, & 0<x<1\\ 0, & 其他,\end{cases}$，其中 $\theta(\theta>0)$ 是未知参数，又 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为取自总体 X 的样本，求 θ 的矩估计量和最大似然估计量.

解(1) $E(X)=\int_0^1 x\dfrac{1}{\theta}x^{\frac{1-\theta}{\theta}}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\theta+1}$

令 $E(X)=\overline{X}\Rightarrow\theta$ 的矩估计量 $\theta=\dfrac{1-\overline{X}}{\overline{X}}$.

(2) 设 $x_1,\cdots,x_n$ 为一组样本值

似然函数为 $L(\theta)=\prod_{i=1}^n\dfrac{1}{\theta}x_i^{\frac{1-\theta}{\theta}}=\left(\dfrac{1}{\theta}\right)^n\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1-\theta}{\theta}}$，　$0<x_1,\cdots,x_n<1$

取对数　$\ln L(\theta)=-n\ln\theta+\dfrac{1-\theta}{\theta}\ln(\prod_{i=1}^n x_i)$，

令 $\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=0$即$-\dfrac{n}{\theta}-\dfrac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^n\ln x_i=0$，得 $\hat{\theta}=-\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n\ln x_i$.

最大似然估计量为 $\hat{\theta}=-\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n\ln X_i$.

（15）设 n 个随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布，$DX_1=\sigma^2$，$\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$，$S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n(X_i-\overline{X})^2$，则（ D ）

(A)　S 是 σ 的无偏估计量　　(B)　S 是 σ 的最大似然估计量

(C)　S 是 σ 的一致估计量　　(D)　S 与 $\overline{X}$ 相互独立

（15）设总体 X 的分布律为 $P\{X=x\}=(1-p)^{x-1}p,x=1,2,3,\cdots$

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的样本，.求 p 的矩估计量和最大似然估计量。

解：由于

$$\mu_1 = EX = \sum_{x=1}^{\infty} x(1-p)^{x-1} p = p\sum_{x=1}^{\infty} xq^{x-1} = p(\frac{q}{1-p})' = \frac{1}{p}$$

令 $\mu_1 = A_1$, 即

$$\frac{1}{p} = \overline{X}$$

解得 p 的矩估计量为 $\hat{p} = \frac{1}{\overline{X}}$

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为样本值，似然函数为

$$L(p) = \prod_{i=1}^{n} P\{X_i = x_i\} = \prod_{i=1}^{n} (1-p)^{x_i - 1} p$$

取对数，得

$$\ln L(\theta) = n\ln p + (\sum_{i=1}^{n} x_i - n)\ln(1-p)$$

令 $\frac{d\ln L(p)}{dp} = \frac{n}{p} + \frac{-1}{1-p}(\sum_{i=1}^{n} x_i - n) = 0$

解得 p 的最大似然估计值为 $\hat{p} = \frac{1}{\overline{x}}$， p 的最大似然估计量为 $\hat{p} = \frac{1}{\overline{X}}$

（15）设 $X_{1,} X_2, \cdots, X_n$ 为来自参数 n, p 的二项分布总体，试求 P^2 的无偏估计量。

解：总体 $X \sim B(n, p)$，所以 $EX = np$， $DX = np(1-p)$，

$$E(X^2) = DX + [EX]^2 = np(1-p) + n^2p^2 = np + n(n-1)p^2$$

$$= EX + n(n-1)p^2$$

$$\frac{E(X^2) - E(X)}{n(n-1)} = E\left[\frac{1}{n(n-1)}(X^2 - X)\right] = P^2$$

用样本矩 A_2, A_1 分别代替相应的总体矩 $E(X^2), E(X)$,得 P^2 的无偏估计量

$$\hat{P}^2 = \frac{A_2 - A_1}{n(n-1)} = \frac{1}{n^2(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - X_i).$$

（14）设总体的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} (\theta+1)x^{\theta}, 0 < x < 1 \\ 0, \quad 其它 \end{cases}$$

试用来自总体的样本值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，求未知参数 θ 的矩估计值和极大似然估计

值.

解：先求矩估计

$$\mu_1 = E(X) = \int_0^1 x(\theta+1)x^\theta dx = \frac{\theta+1}{\theta+2}$$

令 $\mu_1 = A_1$，即 $\frac{\theta+1}{\theta+2} = \overline{X}$

故θ的矩估计量为$\hat{\theta} = \frac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$

矩估计值为$\hat{\theta} = \frac{2\bar{x}-1}{1-\bar{x}}$，

似然函数 $L(\theta) = \prod_{i=1}^{n}(\theta+1)x_i^\theta = (\theta+1)^n (x_1 x_2 \cdots x_n)^\theta$

取对数

$$\ln L(\theta) = n\ln(\theta+1) + \theta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{n}{\theta+1} + \sum_{i=1}^{n}\ln x_i = 0$

得θ的极大似然估计为

$$\hat{\theta} = -1 - \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}.$$

（13）设总体 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{6x(\theta-x)}{\theta^3}, & 0 < x < \theta, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

X_1，X_2，…，X_n为来自总体 X 的样本，$\overline{X}$ 为样本均值，试求 (1) θ的矩估计量 $\hat{\theta}$； (2) $\hat{\theta}$的方差$D(\hat{\theta})$.

解 (1) $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^\theta \frac{6}{\theta^3}x^2(\theta-x)dx = \frac{\theta}{2}$，

由 $E(X) = A_1 = \overline{X}$，得$\theta$的矩估计量为 $\hat{\theta} = 2\overline{X}$.

(2) $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^\theta \frac{6}{\theta^3}x^3(\theta-x)dx = \frac{3\theta^2}{10}$，

所以 $D(X) = E(X^2) - (EX)^2 = \frac{1}{20}\theta^2$，

故 $D(\hat{\theta}) = D(2\overline{X}) = \frac{4}{n}D(X) = \frac{1}{5n}\theta^2$.

（12）设总体 X 服从参数为$\lambda(\lambda > 0)$指数分布，λ未知，$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体 X

的样本，则λ的矩估计量$\hat{\lambda}=$____$\frac{1}{\overline{X}}$____.

（12）设总体X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1}, 0<x<1\\ 0, \quad 其他\end{cases}$，其中$\theta>0$是未知参数，又$X_1,X_2,\cdots,X_n$为取自总体$X$的简单随机样本，求$\theta$最大似然估计量.

解 设$x_1,\cdots,x_n$是$X_1,X_2,\cdots,X_n$的观察值

当$0<x_i<1(i=1,2,\cdots,n)$时，似然函数为$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\sqrt{\theta}x_i^{\sqrt{\theta}-1}$，

取对数 $\ln L(\theta)=\frac{n}{2}\ln\theta+(\sqrt{\theta}-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$.

令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{2\theta}+\frac{1}{2\sqrt{\theta}}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$

得 $\hat{\theta}=\frac{n^2}{(\sum_{i=1}^{n}\ln X_i)^2}$

（11）设总体X的期望和方差存在，且$E(X)=\mu,D(X)=\sigma^2$，$X_1,X_2,\cdots,X_n(n>1)$是取自总体X的简单随机样本，$\overline{X}$是样本均值，则有（ D ）

(A) X_i是μ的无偏估计，$\overline{X}$不是μ的无偏估计；

（B） X_i不是μ的无偏估计，$\overline{X}$是μ的无偏估计；

（C） X_i与$\overline{X}$都是μ的无偏估计，且X_i比$\overline{X}$更有效；

（D） X_i与$\overline{X}$都是μ的无偏估计，且$\overline{X}$比X_i更有效.

（11）设总体X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}(\theta+1)(x-1)^{\theta}, 1<x<2\\ 0, \quad 其它\end{cases}$，其中$\theta>-1$是未知参数，又$X_1,X_2,\cdots,X_n(n>1)$为取自总体$X$的简单随机样本，求$\theta$的矩估计量和最大似然估计量.

解：（1） $EX=\int_1^2 x(\theta+1)(x-1)^{\theta}\,\mathrm{d}\,x=\frac{2\theta+3}{\theta+2}$

令 $EX=\overline{X}\Rightarrow\theta$ 的矩估计量 $\theta=\dfrac{2\overline{X}-3}{2-\overline{X}}$.

（2）设 $x_1,\cdots,x_n$ 为一组样本值

似然函数为 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}(\theta+1)(x_i-1)^{\theta}=(\theta+1)^n[\prod_{i=1}^{n}(x_i-1)]^{\theta}$，

取对数 $\ln L(\theta)=n\ln(\theta+1)+\theta\ln\prod_{i=1}^{n}(x_i-1)$

令 $\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=0$ 即 $\dfrac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i-1)=0$

得 $\hat{\theta}=-\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i-1)}-1$

（10）设总体 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\beta}{x^{\beta+1}}, x>1,\\ 0, \quad x\le 1,\end{cases}$ 其中参数 $\beta>1$ 是未知参数. 又 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本， 求参数 β 的矩估计量和最大似然估计量.

解 由 $E(X)=\int_1^{+\infty}x\dfrac{\beta}{x^{\beta+1}}\mathrm{d}x=\dfrac{\beta}{\beta-1}=\overline{X}$，则参数 β 的矩估计量为 $\widehat{\beta}=\dfrac{\overline{X}}{\overline{X}-1}$ ……（5分）

设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的观测值，似然函数为

$$L(\beta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\beta)=\begin{cases}\dfrac{\beta^n}{(x_1\cdots x_n)^{\beta+1}}, x_i>1, \\ 0, \quad 其他.\end{cases} \quad i=1,2,\cdots,n.$$

当 $x_i>1$ 时， $\ln L(\beta)=n\ln\beta-(\beta+1)\ln(x_1\cdots x_n)$

令 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\beta)}{\mathrm{d}\beta}=\dfrac{n}{\beta}-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$ 得 β 的最大似然估计量为 $\widehat{\beta}=\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$.

（10）设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，记 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$， $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，证明:

（1）统计量$T=\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2$是$\mu^2$的无偏估计量；

（2）$D(S^2)=\frac{2\sigma^4}{n-1}$.

解（1）

$$E(T)=E(\bar{X}^2)-\frac{1}{n}E(S^2)=D(\bar{X})+(E(\bar{X})^2-\frac{1}{n}E(S^2)=\mu^2+\frac{1}{n}\sigma^2-\frac{1}{n}\sigma^2=\mu^2\ ,$$

所以T是μ^2的无偏估计量.

（2）由$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，

则$D(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2})=2(n-1)\Rightarrow\frac{(n-1)^2}{\sigma^4}D(S^2)=2(n-1)\Rightarrow D(S^2)=\frac{2\sigma^4}{n-1}$

（09）设总体X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^\theta, & 0<x<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

其中$\theta>-1$是未知参数, $X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体X的样本, 试求参数θ的矩估计量和最大似然估计量.

解:（1） 因为 $\mu_1=E(X)=\int_0^1 x(\theta+1)x^\theta\mathrm{d}x=\frac{\theta+1}{\theta+2}$,

令 $\mu_1=A_1$，即

$$\frac{\theta+1}{\theta+2}=\overline{X}\ ,$$

解得θ的矩估计量为

$$\hat{\theta}=\frac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}.$$

（2）设$x_1,x_2,\cdots,x_n$是样本$X_1,X_2,\cdots,X_n$的观测值$(0<x_i<1,i=1,2,\cdots,n)$，似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^n f(x_i)=\prod_{i=1}^n(\theta+1)x_i^\theta=(\theta+1)^n(x_1x_2\cdots x_n)^\theta,$$

取对数得 $$\ln L(\theta)=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^n\ln x_i\ ,$$

令 $$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^n\ln x_i=0\ ,$$

解得θ的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=-1-\frac{n}{\sum_{i=1}^n\ln x_i}$,

从而得θ的最大似然估计量为 $\hat{\theta}=-1-\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i}$

八、假设检验

（18）设总体$X\sim N(\mu,1)$，一组样本值为$-2,1,3,-2$，则参数μ的置信水平为 0.95 的置信区间为___(-0.98, 0.98)___．（$u_{0.025}=1.96$）

（18）设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体X的样本，若μ未知，检验假设为$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$; $H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$，则应取检验统计量为（ B ）．

(A) $\dfrac{nS^2}{\sigma_0^2}$ (B) $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$

(C) $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ (D) $\dfrac{1}{\sigma_0^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$

（17）设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，从总体 X 中抽取样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，样本均值为 $\overline{X}$，样本方差为 S^2，总体 μ和σ^2 均未知，则 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $(\overline{X}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}},\overline{X}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}})$___．

（17）在假设检验中，原假设H_0，备择假设H_1，则（ B ）称为第二类错误

（A）H_0为真，接受H_1 （B）H_0不真，接受H_0

（C）H_0为真，拒绝H_1 （D）H_0不真，拒绝H_0

（16）设总体$X\sim N(\mu,1)$，$X_1,X_2,\cdots,X_{16}$是来自总体的样本，其样本均值$\bar{x}=5.2$，则未知参数μ的置信水平为 0.95 的置信区间为___(4.71,5.69)___．（$u_{0.025}=1.96$）

（16）设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots X_n$是来自总体X的样本，$\overline{X}$为样本均值，若 σ^2 已知，检验假设为 $H_0:\mu=\mu_0;H_1:\mu\neq\mu_0$，则应取检验统计量为 $\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$___．

(15) 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ和σ^2 均未知，统计假设取为 $H_0: \mu = \mu_0; H_1: \mu \neq \mu_0$,若用 t 检验法进行假设检验，则在显著水平 α 之下，拒绝域是__ $|t| \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ __

(15) 无论 o^2 是否已知，正态总体均值 μ 的置信区间的中心都是（　C　）

（A）μ　　（B）σ^2　　（C）$\overline{X}$　　（D）S^2

(14) 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$， μ 与 σ^2 均未知， $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为总体 X 的样本，则参数 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为（　A　）

A. $\left(\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1),\ \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right)$.　　*B.* $\left(\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n),\ \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n)\right)$.

C. $\left(\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2},\ \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2}\right)$.　　*D.* $\left(\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n),\ \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n)\right)$.

(14)设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$， σ^2 未知，假设 $H_0: \mu = \mu_0$ 的拒绝域为 $\mu \leq -\mu_\alpha$，则备择假设 H_1 为（　B　）

A. $\mu \neq \mu_0$.　　*B.* $\mu < \mu_0$.　　*C* $\mu > \mu_0$..　　*D.* $\mu \leq \mu_0$.

(13) 对正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$，取显著水平 $a =$ __0.1__ 时，原假设 $H_0: \sigma^2 = 1$ 的拒绝域为 $\chi^2_{0.95}(\boldsymbol{n}-1) \geq (\boldsymbol{n}-1)\boldsymbol{S}^2$或$(\boldsymbol{n}-1)\boldsymbol{S}^2 \geq \chi^2_{0.05}(\boldsymbol{n}-1)$.

(13) 设总体 $X \sim N(\mu, 0.09)$，从总体 X 中抽取一个样本值如下：

12.6，　13.4，　12.8，　13.2，

求总体均值 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间(附表：$u_{0.025} = 1.96$，$u_{0.05} = 1.645$).

解　$\alpha = 0.05$，$u_{\alpha/2} = u_{0.025} = 1.96$，$n = 4$，$\sigma = 0.3$，$\bar{x} = 13$，

总体均值 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间为

$$(\bar{x} - u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = (13 - 1.96 \times \frac{0.3}{\sqrt{4}}, 13 + 1.96 \times \frac{0.3}{\sqrt{4}})$$

=（12.71，13.29）.

(12) 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，在 σ^2 未知的条件下检验假设 $H_0: \mu = \mu_0$，$H_1: \mu \neq \mu_0$. 取检验统计量 $t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$ □ $t(n-1)$，给定显著性水平 α，则原假设 H_0 的拒绝域为_____ $|t| \geq t_{\alpha/2}(n-1)$ ___________.

(12) 设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，σ^2 已知，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，总体均值 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的双侧置信区间为 $\underline{(\bar{X} - u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma^2}{\sqrt{n}}, \bar{X} + u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma^2}{\sqrt{n}})}$.

(11) 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 σ^2 未知，$\overline{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差，则 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的双侧置信区间为

$$\underline{(\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}})}$$

(10) 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$, 其中 μ,σ^2 未知，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为取自总体 X 的简单随机样本，则参数 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为（ D ）

(A) $(\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}},\ \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}})$；

(B) $(\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n),\ \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n))$；

(C) $(\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n),\ \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n))$；

(D) $(\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\ \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1))$.

(10) 在假设检验中，如果待检验的原假设为 H_0, 那么犯第二类错误是指（ A ）

(A) H_0 不成立，接受 H_0；　　(B) H_0 成立，接受 H_0；

(C) H_0 成立，拒绝 H_0；　　(D) H_0 不成立，拒绝 H_0.

(09) 设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的样本, $\bar{x}$ 为样本均值, S^2 为样本方差，μ 未知. 检验假设 $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2, H_1:\sigma^2 \neq \sigma_0^2$，应取检验统计量 $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \underline{\chi^2(n-1)}$.

(09) 对正态总体的数学期望 μ 进行假设检验, 如果在显著水平 0.05 下接受 $H_0:\mu=\mu_0$, 那么在显著性水平 0.01 下, 下列结论正确的是（ A ）

(A) 必接受 H_0.　　(B) 可能接受 H_0, 也可能拒绝 H_0.

（C）必拒绝 H_0 .　　　　　　　　　　（D）不接受 H_0 , 也不拒绝 H_0