吉林大学

JILIN UNIVERSITY OF CHINA

计算机控制系统

计算机控制系统

第十五讲

能控性与能观性判别

教师：唐志国
单位：通信工程学院

能控性与能观性判别

本讲主要内容：

- （一）能控性定义与判别
- （二）能观性定义与判别
- （三）对偶原理
- （四）能控能观充要条件
- （五）输出能控性

能控性定义与判别

对于n阶线性定常离散系统

$$\boldsymbol{x}(k+1)=A\boldsymbol{x}(k)+B\boldsymbol{u}(k);\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$$

若存在有限个输入向量序列能将某个初始状态在第 l 步控制到零状态，则称此状态是能控的。若系统的所有状态都是能控的，则称此系统是状态完全能控的，或简称**系统是能控的**。

由上式描述的线性定常离散系统状态完全能控的充分必要条件是能控性矩阵 $W_c=[B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B]$ 行满秩。

例题1： 已知线性定常离散系统的状态方程为

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -2\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 1\end{bmatrix}u(k)$$

判别其能控性。

解 首先计算

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -2\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 1\end{bmatrix}\quad A^2B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -2\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -2\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 1\end{bmatrix}$$

则能控性矩阵

$$W_{\mathrm{c}}=[B\quad AB\quad A^2B]=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\qquad rank[W_{\mathrm{c}}]=1<3=n$$

系统不能控。

例题2： 给定线性定常离散系统的状态方程为

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(k)+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{u}(k)$$

判别系统的能控性。

解 计算

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\0 & 2 & 0\\1 & 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 2\\1 & 0\end{bmatrix}\quad A^2B=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\0 & 2 & 0\\1 & 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\0 & 2 & 0\\1 & 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 6\\0 & 4\\4 & 2\end{bmatrix}$$

能控性矩阵为

$$W_{\mathrm{c}}=[B\quad AB\quad A^2B]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 6\\0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4\\0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 2\end{bmatrix}\qquad rank[W_{\mathrm{c}}]=3=n$$

系统能控。

能观性定义与判别

对于线性定常离散系统

$$\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + B\mathbf{u}(k); \mathbf{y}(k) = C\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k)$$

若已知输入序列和有限个采样瞬间测量到的输出序列，可以唯一地确定出系统的任意初始状态，则称系统是状态能观测的，或简称**系统是能观的**。

由上式描述的线性定常离散系统状态完全能观测的充分必要条件是能观测性矩阵

$$W_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \cdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

列满秩

满秩。

例题3： 给定线性定常离散系统动态方程

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\begin{bmatrix}2 & 0 & 3\\ -1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(k)+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{u}(k) \qquad \boldsymbol{y}(k)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(k)$$

判别系统的能观性。

解： 对给定的3阶系统，计算

$$CA=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad CA^2=\begin{bmatrix} 4 & 3 & 12 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

则能观性矩阵为

$$W_o=\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 12 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix} \qquad rank[W_o]=3$$

因此，所给系统状态能观测。

多选题 3分

已知 S_1 是一个能观不能控的单输入单输出线性定常离散系统；S_2 是 S_1 的对偶系统；S_3 是 S_1 经过非奇异线性变换得到的特征值为 -0.3 、$0.1\pm0.2j$ 的系统；S_4 是 S_1 经采样开关离散前的相应线性定常连续系统，则下面结论正确的是_____

A S1是不稳定的

B S2是能控的

C S3是不能观的

D S4的能控性和能观性均是不能确定的

唐志国

提交

S_1 A B C D 控 观

S_2 A^T C^T B^T D 观 控

对偶原理

给定线性定常离散系统S_1、S_2的状态空间表达式分别为

$$S_1 \qquad \begin{aligned} \boldsymbol{x}(k+1) &= A\boldsymbol{x}(k) + B\boldsymbol{u}(k) \\ \boldsymbol{y}(k) &= C\boldsymbol{x}(k) + D\boldsymbol{u}(k) \end{aligned}$$

$$S_2 \qquad \begin{aligned} \boldsymbol{x}^*(k+1) &= A^T\boldsymbol{x}^*(k) + C^T\boldsymbol{u}^*(k) \\ \boldsymbol{y}^*(k) &= B^T\boldsymbol{x}^*(k) + D\boldsymbol{u}^*(k) \end{aligned}$$

设$S_1=(A, B, C)$、$S_2=(A^T, C^T, B^T)$是互为对偶的两个系统，则S_1的能控性等价于S_2的能观测性；S_1的能观测性等价于S_2的能控性。或者说，若S_1是状态完全能控的(完全能测观的)，则S_2是状态完全能观测的(完全能控的)。

能控能观充要条件

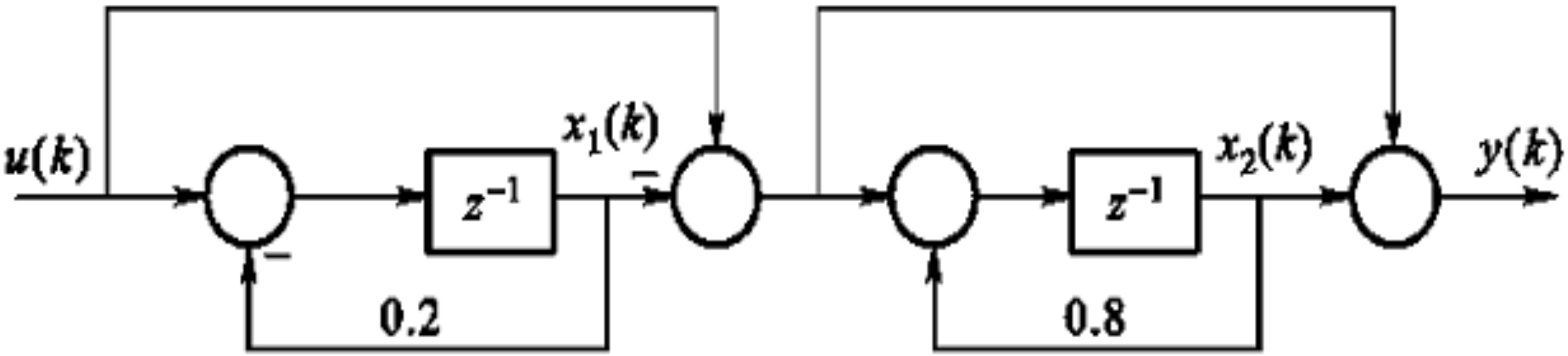
稳定性

- 非奇异相似变换不改变系统的能控性
- 非奇异相似变换不改变系统的能观性
- 离散系统状态能控性、能观性与脉冲传递函数的关系
  - 单输入-单输出线性定常离散系统完全能控和完全能观的充分必要条件是脉冲传递函数不存在着零、极点相消。

    能控、能观 $\Leftrightarrow$ 零极点对消

  - 如果存在着零、极点相消，系统或者是不完全能控，或者是不完全能观，或者既不完全能控又不完全能观。

例题4： 检验如下图所示系统的能控性和能观性。



解： 根据图中选定的状态变量写出系统的动态方程

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\begin{bmatrix}-0.2 & 0\\ -1 & 0.8\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(k)+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}u(k) \qquad y(k)=\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(k)+u(k)$$

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}-0.2 & 0\\ -1 & 0.8\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}u(k)$$

$$y(k)=\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}x(k)+u(k)$$

能控性矩阵

$$W_c=\begin{bmatrix}b & Ab\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -0.2\\ 1 & -0.2\end{bmatrix} \quad rank[W_c]=1<2$$

因此系统不能控。

能观性矩阵

$$W_o=\begin{bmatrix}c\\ cA\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -0.8 & 0.8\end{bmatrix} \quad rank[W_o]=1<2$$

故系统不能观。

该系统有两对零、极点对消。

$$G(z)=c(zI-A)^{-1}b+d$$

$$=\frac{1-0.6z^{-1}-0.16z^{-2}}{1-0.6z^{-1}-0.16z^{-2}}=\frac{(1-0.8z^{-1})(1-0.2z^{-1})}{(1-0.8z^{-1})(1-0.2z^{-1})}=1$$

$G = C(zI-A)^{-1}B + D$

可观测 可控制

输出能控性

输出能控性

对于n阶线性定常离散系统，输入向量为r维，输出向量为m维

$$\boldsymbol{x}(k+1) = A\boldsymbol{x}(k) + B\boldsymbol{u}(k) \qquad \boldsymbol{y}(k) = C\boldsymbol{x}(k) + D\boldsymbol{u}(k)$$

若存在有限个输入向量序列能将系统输出从某个初始状态在第q步控制到任意最终输出，则称此系统是输出完全能控的，简称输出能控。

由上式描述的线性定常离散系统输出能控的充要条件是输出能控性矩阵

$$W_s = \begin{bmatrix} D & CB & CAB & \cdots & CA^{n-1}B \end{bmatrix}$$

行满秩 。