现代控制理论

第五章
李雅普诺夫稳定性分析

吉林大学自动化专业

5.1李雅谱诺夫意义下稳定性的基本概念

$$\dot{x} = f(x,t); x(t;x_0,t_0), x_0 = x(t_0;x_0,t_0)$$

1. 平衡状态定义

$$\dot{x} = f(x_e,t) = 0$$

则称x_e为系统的平衡状态。对线性定常系统，则有

$$\dot{x} = f(x,t) = Ax$$

几点说明：

(1) **直观含义：平衡状态 x_e 直观上为系统平衡时可能具有的一类状态。**

系统平衡的基本特征为 $\dot{x}_e = 0$

(2) **状态形式：平衡状态x_e可由定义求得，可能是状态空间中的点或线段。**

(3) **不唯一性：** $\dot{x}_e = f(x_e,t) = Ax_e = 0$,看系统矩阵A的奇异性

(4) **零平衡状态：一般情况下，平衡状态 x_e=0（状态空间原点）是平衡状态**

(5) **孤立平衡状态：通过坐标转移转换为零平衡状态**

(6) **约定：在 Lyapunov 稳定性分析方法中主要针对孤立平衡状态，即原点**

x_e为球心，k为半径的球域

2．李雅谱诺夫意义下的稳定性

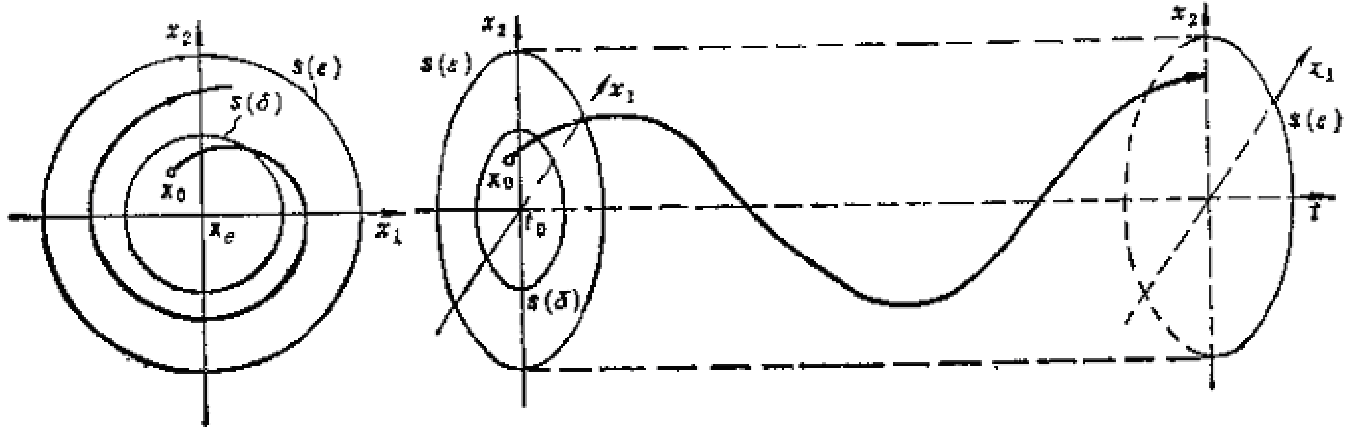
$$\|x - x_e\| \le k 。$$

$$\|x - x_e\| = [(x_1 - x_{1e})^2 + \cdots + (x_n - x_{ne})^2]^{1/2}$$

$\|x_0 - x_e\| \le \delta \longrightarrow$ 初始状态域

$\|x(t;x_0,t_0) - x_e\| \le \varepsilon \longrightarrow$ 状态轨迹域

如果对应于每一个状态的闭球域 $s(\varepsilon)$ ，总存在着一个初始状态的闭球域 $s(\delta)$ 使得当t无限增加时，从 $s(\delta)$ 出发的轨迹不离开 $s(\varepsilon)$ ，系统平衡状态 x_e 在李雅谱诺夫意义下称为稳定的。

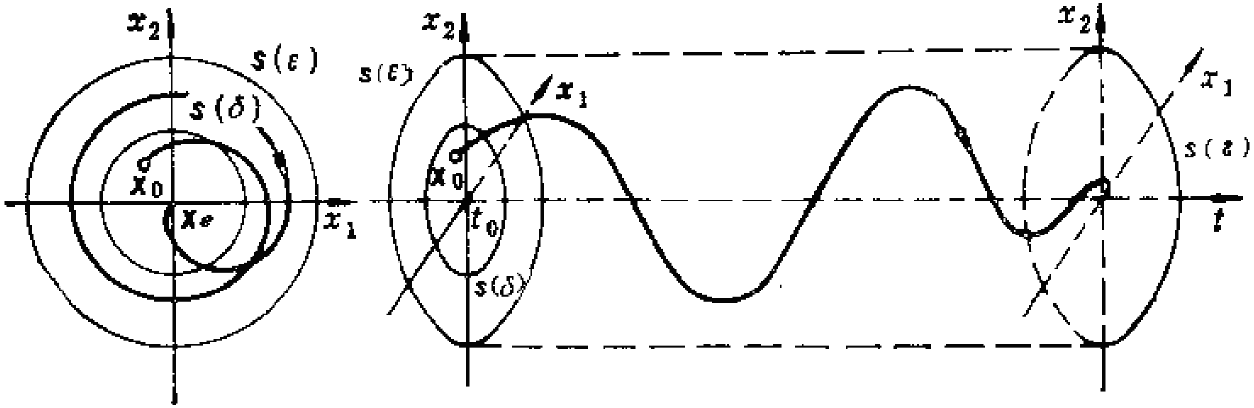


李雅谱诺夫意义下的稳定

3．渐近稳定性

如果平衡状态 x_e 在李雅谱诺夫意义下稳定，且满足

$$\lim_{t\to\infty}\left\| x(t;x_0,t_0)-x_e \right\|=0$$



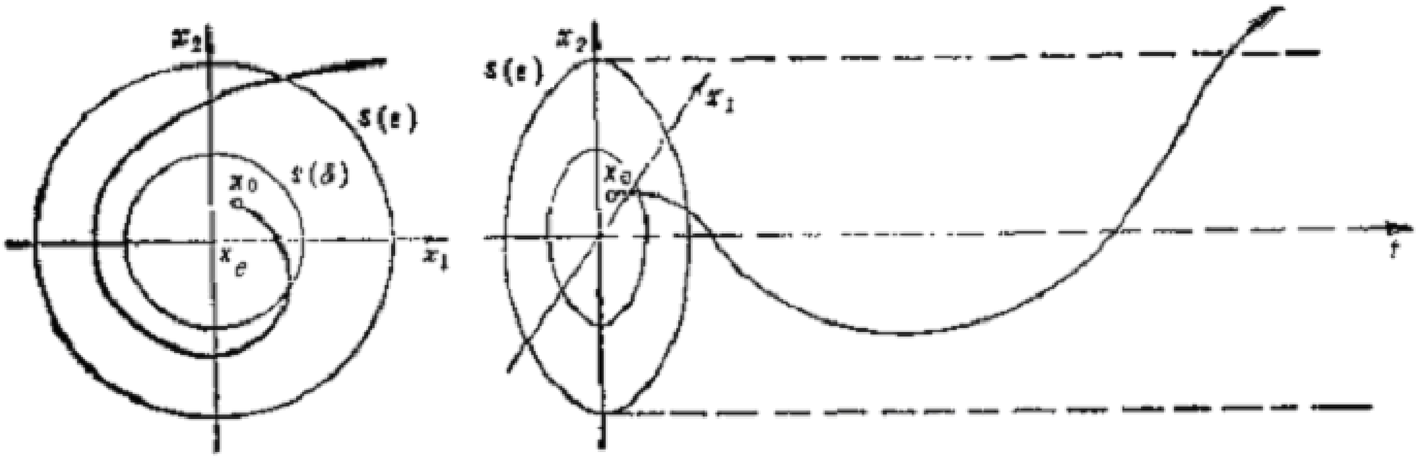
渐近稳定

4．大范围渐近稳定性

对所有的状态（状态空间的所有各点），如果由这些状态出发的轨迹都保持渐近稳定性，那么平衡状态就叫做在大范围内渐近稳定的。

5. 不稳定性

如果对于某个实数 $\varepsilon > 0$ 和任意一个实数 $\delta > 0$，不管这二个实数有多么小在 $s(\delta)$ 内总存在着一个状态 x_0，使得由这一状态出发的轨迹脱离开 $s(\varepsilon)$ ，那么平衡状态 x_e 就称为不稳定的。



➢以上所述稳定性概念，若δ与t_0无关，即状态的具体初始时刻与平衡态是否稳定无关，所涉及的稳定性则为一致稳定性。

➢如一致李雅谱诺夫意义下的稳定、一致渐进稳定及一致大范围渐进稳定等。

6.2 李雅谱诺夫稳定性判别方法

1．李雅谱诺夫第一方法

- 基本思路：求出系统的状态方程，根据状态方程的解判别系统的稳定性。
- 线性定常系统，只要求出系统的特征值就可判别其稳定性.
- 非线性系统，必须首先将系统的状态方程线性化，然后用线性化方程(即一次近似式)的特征值来判别系统的稳定性。

2.李雅谱诺夫第二方法

- 基本思想：用能量变化的观点分析系统的稳定性。若系统储存的能量在运动过程中随着时间的推移逐渐减少，则系统就能稳定；反之，若系统在运动的过程中，不断地从外界吸收能量，使其储存的能量越来越大，则系统就不能稳定。
- 例如日常生活中的单摆，当考虑空气的阻尼，系统就是稳定的；如果在理想真空中，甚至于因势能给它不断补充能量，系统就不能稳定。

（1） 标量函数的符号

- **标量函数的正定性** 如果对所有在域**Ω**中的非零状态***x***，有***V*(*x*)>0**，而且在***x*=0**处有***V*(0)=0**，那么在域**Ω**（域**Ω**包含状态空间的原点）内的标量函数***V*(*x*)**称为是正定的。

$$V(x)=x_1^2+x_2^2, x=(x_1,x_2)^T$$

$$V(x)=x_1^2+2x_2^2$$

$$V(x)=x_1^2+\frac{2x_2^2}{1+x_2^2}$$

- **标量函数的正半定性** 如果对所有在域**Ω**中的非零状态***x***，有***V*(*x*)≥0**，而且在***x*=0**处有***V*(0)=0**，那么在域**Ω**（域**Ω**包含状态空间的原点）内的标量函数***V*(*x*)**称为是正半定的。

$$V(x)=(x_1+x_2)^2+x_3^2, x=(x_1,x_2,x_3)^T$$

$$V(x)=x_1^2+x_2^2, x=(x_1,x_2,x_3)^T$$

$$V(x)=(x_1+x_2)^2$$

标量函数的负定性 如果对所有在域**Ω**中的非零状态***x***，有***V*(*x*)<0**，而且在***x*=0**处有***V*(0)=0**，那么在域**Ω**（域**Ω**包含状态空间的原点）内的标量函数***V*(*x*)**称为是负定的。

$$V(x) = -(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2), x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$$

$$V(x) = -x_1^2 - (3x_1 + 2x_2)^2$$

标量函数的负半定性 如果对所有在域**Ω**中的非零状态***x***，有***V*(*x*)≤0**，而且在***x*=0**处有***V*(0)=0**，那么在域**Ω**（域**Ω**包含状态空间的原点）内的标量函数***V*(*x*)**称为是负定的。

$$V(x) = -(x_1 + x_2)^2$$

标量函数的不定性 如果对所有在域**Ω**中的非零状态***x***，***V*(*x*)**即可为正值又可为负值，那么在域**Ω**（域**Ω**包含状态空间的原点）内的标量函数***V*(*x*)**称为是不定的。

$$V(x) = x_1 x_2 + x_2^2$$

$$V(x) = x_1 x_2$$

（2） 矩阵（二次型）的符号

实对称矩阵

$$V(x) = x^T P x$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

- 矩阵的正定性

$$p_{11} > 0 \qquad \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} > 0 \qquad \cdots \qquad \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

- 矩阵的负定性

$$p_{11} < 0 \qquad \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} > 0 \qquad \cdots$$

负正相间

- 矩阵的不定性

（3）李雅谱诺夫稳定性定理

假设系统的状态方程为

$$\dot{x} = f(x); f(0) = 0$$

如果存在一个具有连续的一阶导数的标量函数***V*(*x*) >0.**

a．若 $\dot{V}(x) < 0$ 则系统是渐近稳定的（如果随着 $\|x\| \to \infty$ ，有 $V(x) \to \infty$ ，则系统是大范围渐近稳定的）。

b．若 $\dot{V}(x) > 0$ ，则系统是不稳定的。

c．若 $\dot{V}(x) \le 0$ ，但 $\dot{V}(x)$ 不恒等于零（除了 $\dot{V}(0) = 0$ 以外），则系统是渐近稳定的；但是，若 $\dot{V}(x)$ 恒等于零则按照李雅谱诺夫关于稳定性的定义，系统是稳定的。但不是渐近稳定的。

示例

3 李雅谱诺夫第二方法在线性定常系统中应用

(1) 线性定常连续系统的李雅谱诺夫稳定性分析

$$\dot{x} = Ax$$

假设***A***是非奇异矩阵，那么唯一的平衡状态是在原点***x* = 0**处。

$$V(x) = x^T P x$$

P*>0, *P*ᵀ=*P

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \\ &= (Ax)^T P x + x^T P A x \\ &= x^T A^T P x + x^T P A x \\ &= x^T (A^T P + PA] x \\ &= -x^T Q x\end{aligned}$$

$$Q = -(A^T P + PA)$$

李雅谱诺夫方程

$$\begin{cases} P>0,\ P^T=P \longrightarrow Q>0 \\ Q>0,\ Q^T=Q \longrightarrow P>0 \end{cases}$$

$$\left(V(x) = x^T P x \Rightarrow \dot{V}(x) = -x^T Q x \right)$$

定理 设描述系统的方程为:

$$\dot{x} = Ax$$

其中，x为n维状态向量；A为nxn维常系数非奇异矩阵。平衡状态x_e=0在大范围内渐近稳定的充要条件为：给定一个正定对称的矩阵Q，则存在着一个正定对称的矩阵P，使得

$$A^T P + PA = -Q$$

$$Q>0,\ Q^T=Q \longrightarrow P>0$$

$V(x) = x^T Px$ 是系统的一个李雅谱诺夫函数。

几点注意

➢如果 $\dot{V}(x)=-x^T Qx$ 沿任意一条轨迹不恒等于零，那么*Q*可取为正半定的。

➢如果我们取一个任意的正定矩阵（或者，如果 $\dot{V}(x)$ 沿任一轨迹不恒等于零，则可取一个任意的正半定矩阵*Q*），并解矩阵方程

$$A^T P + PA = -Q$$

确定*P*。对于平衡状态$x_e=0$的渐近稳定性，*P*的正定性是充要条件。

➢只要特殊的矩阵Q选成是正定的（或根据情况选为正半定的），那么最终结果与矩阵Q选择无关。

➢在确定是不是存在一个正定的赫米特或实对称矩阵*P*时，取$Q = I$是很方便的，其中*I*是单位矩阵。于是，*P*的各元素可按下式确定:

$$A^T P + PA = -I$$

而后检验矩阵*P*是不是正定的。

示例

(2) 线性定常离散系统的李雅谱诺夫稳定性分析

设离散线性定常系统的状态方程为

$$x(k+1) = Gx(k)$$

式中，*x*为*n*维状态向量；*G*为*n* x *n*常系数非奇异矩阵。原点$x_e = 0$是平衡状态。

假设取一个正定的二次型函数（李雅谱诺夫函数）为

$$V[x(k)] = x^T(k)Px(k)$$

P*>0, *P*^{T}=*P

在离散系统中，我们采用*V*[*x*(*k*+1)]和*V*[*x*(*k*)]之差来代替$\dot{V}(x)$**，即**

$$\Delta V[x(k)] = V[x(k+1)] - V[x(k)]$$

$$\begin{aligned}\Delta V[x(k)] &= x^T(k+1)Px(k+1) - x^T(k)Px(k) \\ &= [Gx(k)]^T PGx(k) - x^T(k)Px(k) \\ &= x^T(k)G^T PGx(k) - x^T(k)Px(k) \\ &= x^T(k)[G^T PG - P]x(k)\end{aligned}$$

$$G^T PG - P = -Q$$

$$\Rightarrow \Delta V[x(k)] = -x^T(k)Qx(k)$$

定理 设描述系统的方程为：

$$x(k+1) = Gx(k)$$

上式中，x为n维状态向量；G为nxn维常系数非奇异矩阵。平衡状态x_e=0在大范围内渐近稳定的充要条件为：给定一个正定对称的矩阵Q，则存在着一个正定对称的矩阵P，使得

$$G^T PG - P = -Q$$

Q>0, Q^T=Q $\longrightarrow$ P>0

$V(x) = x^T Px$ 是系统的一个李雅谱诺夫函数。

示例

（3）利用李氏第二方法进行状态反馈设计

利用李氏第二方法还可以对线性定常系统做结构稳定设计，以及选择状态反馈矩阵使闭环系统渐近稳定。

系统状态方程为：

$$\dot{x} = Ax + bu$$

选取李氏函数为：

$$V(x) = x^T P x$$

$P>0$, $P^T=P$

$V(x)$的变化率为：

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(x) &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \\
&= (Ax + bu)^T P x + x^T P (Ax + bu) \\
&= (x^T A^T + b^T u) P x + x^T P A x + x^T P b u \\
&= x^T A^T P x + b^T u P x + x^T P A x + x^T P b u \\
&= x^T [A^T P + PA] x + [b^T P x + x^T P b] u \\
&= x^T [A^T P + PA] x + 2 x^T P b u \\
&= -x^T Q x + 2 x^T P b u
\end{aligned}
$$

若选取Q为正定，为使 $\dot{V}(x) < 0$

$\Downarrow$

$$2x^T P b u \le 0$$

示例