第三章 计算机控制系统数学基础

3.1 差分方程

在连续系统中，表示输出和输入信号关系的数学模型用微分方程和传递函数来描述；在离散系统中，则用差分方程、脉冲传递函数和离散状态空间表达式三种方式来描述。

- 差分方程的一般概念
- 差分方程的求解

1. 差分方程的一般概念

一般情况下，线性常系数差分方程的输入r为一序列，用

$$r=r(k)=\{r(0),r(1),r(2),\ldots\}$$

来表示；输出y也是一序列，用

$$y=y(k)=\{y(0),y(1),y(2),\ldots\}$$

来表示。则系统的输入与输出之间可以用线性常系数差分方程来描述，即

$$y(k+n)=-\sum_{j=1}^{n}a_j y(k+n-j)+\sum_{j=0}^{n}b_j r(k+n-j)$$

连续系统中，PI控制器的输出可表示为

其中，a_j，b_j是由系统物理参数确定的常数。

$$u(t)=K_P e(t)+K_I\int_0^t e(\tau)d\tau$$

2. 差分方程的求解

✓ 差分方程的经典解法　例3.1

差分方程的经典解法与微分方程的解法类似。其全解包括对应齐次方程的通解和非齐次方程的一个特解。

✓ 差分方程的迭代解法　例3.2

如果已知系统的差分方程和输入值序列，则在给定输出值序列的初始值之后，就可以利用迭代方法计算出任何时刻的输出值。

原理：根据初始条件(边界条件)，逐步递推计算出后面各时刻的输出，即由前一时刻的已知结果，递推出后一时刻的待求值。

〖例3.1〗求解差分方程

$$y(k+2)-5y(k+1)+6y(k)=0$$

初始条件为 $y(1)=5, y(2)=9$

解：上式的特征方程为

$$\lambda^2-5\lambda+6=0$$

特征根: $\lambda_1=2 \quad \lambda_1=3$

齐次方程的通解:

$$y(k)=l_1\lambda_1^k+l_2\lambda_2^k=l_1\times 2^k+l_2\times 3^k$$

把两个初始条件分别代入上式，得到系数的值，所以差分方程的通解为

$$y(k)=3\times 2^k-\frac{1}{3}\times 3^k$$

因差分方程的右边为零，故其特解为零。

〖例3.2〗 已知离散系统的差分方程为

$$y(k+1)-2y(k)=r(k)$$

初始条件$y(0)=0, r=r(k)=\{r(0), r(1), r(2), \ldots\}=\{1,0,1,0,1,0,\ldots\}$，求方程的解。

解：

$$y(k+1)=2y(k)+r(k)$$

当$k=0$时 $$y(1)=2y(0)+r(0)=1$$

当$k=1$时 $$y(2)=2y(1)+r(1)=2$$

当$k=2$时 $$y(3)=2y(2)+r(2)=5$$

依次类推，方程可求解。

3.2 z变换

- z变换的定义
- z变换的性质和定理
- ✓ 用z变换法解线性常系数差分方程　　例3.3

采用z变换法解线性常系数差分方程和利用拉氏变换法解微分方程相类似。解的过程是先将差分方程经z变换后成为z的代数方程，然后求出未知序列的z表达式$Y(z)$，最后查z变换表或用其他方法求得$y(k)$。

1. z变换的定义

在拉氏变换中引入新复变量

$$z = e^{Ts}$$

从而有

$$F^*(s)\Big|_{s=\frac{1}{T}\ln z} = F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)(e^{Ts})^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}$$

$F(z)$称为离散时间函数$f^*(z)$的z变换。z变换实际是一个无穷级数形式，它必须是收敛的。就是说，极限

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} f(kT)z^{-k}$$

存在时，$f^*(z)$的z变换才存在。

$$Z[f(t)] = Z[f^*(t)] = F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}$$

2. z变换的性质和定理

线性性质 $$\mathscr{Z}[\alpha_1 f_1(t)\pm\alpha_2 f_2(t)]=\alpha_1 F_1(z)\pm\alpha_2 F_2(z)$$

求和定理 $$\mathscr{Z}[\sum_{j=0}^{k} f(j)]=\frac{z}{z-1}\mathscr{Z}[f(k)]$$

$$\mathscr{Z}[\sum_{j=0}^{k-1} f(j)]=\frac{1}{z-1}\mathscr{Z}[f(k)]$$

平移定理 $$\mathscr{Z}[f(t+nT)=z^{n}F(z)-\sum_{j=0}^{n-1} z^{n-j}f(j)$$

$$\mathscr{Z}[f(t-nT)]=z^{-n}F(z)$$

初值定理 $$f(0)=\lim_{z\to\infty}F(z)$$

z变换的性质和定理

终值定理

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{z\to1}(\frac{z-1}{z})F(z) = \lim_{z\to1}(1-z^{-1})F(z)$$

z变换的微分

$$\mathscr{Z}[tf(t)] = -Tz\frac{\mathrm{d}F(z)}{\mathrm{d}z}$$

z变换的积分

$$\mathscr{Z}[\frac{f(t)}{t}] = \int_0^{\infty}\frac{F(z)}{Tz}\mathrm{d}z + \lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}$$

卷积定理 设

$$f_1(kT)*f_2(kT)\overset{\Delta}{=}\sum_{n=0}^{k} f_1(nT)f_2[(k-n)T]$$

则

$$F_1(z)F_2(z) = \mathscr{Z}\{\sum_{n=0}^{k} f_1(nT)f_2[(k-n)T]\}$$

比例尺变化

$$\mathscr{Z}(f(at)) = F(z^{1/a})$$

〖例3.3〗用z变换法解下列差分方程

$$y(k+2)+3y(k+1)+2y(k)=0$$

初始条件为$y(0)=0,\ y(1)=1$。

解：对上式进行z变换得

$$z^2Y(z)-z^2y(0)-zy(1)+3zY(z)-3zy(0)+2Y(z)=0$$

代入初始条件，并解得

$$Y(z)=\frac{z}{z^2+3z+2}=\frac{z}{(z+1)(z+2)}=\frac{z}{z+1}-\frac{z}{z+2}$$

查表求z反变换得

$$y(k)=(-1)^k-(-2)^k \qquad (k=0,1,2,\boxed{?})$$

3.3 逆z变换

所谓逆z变换，是已知z变换表达式$F(z)$，求相应离散序列$f(kT)$的过程。常用的逆z变换法有如下三种：部分分式展开法；幂级数展开法（长除法）；留数计算法。

- 部分分式展开法
- 幂级数展开法(长除法)
- 留数计算法

1. 部分分式展开法

部分分式展开法又称查表法，其基本思想是根据已知的$F(z)$，通过查z变换表找出相应的$f(kT)$。然而z变换表的内容有限，需要把$F(z)$展开成部分分式以便查表。

具体方法和求拉氏变换的部分分式展开法类似，分为特征方程无重根和有重根两种情况。

例3.4

例3.5

〖例3.4〗 求 $F(z)=\dfrac{z}{z^2-3z+2}$ 的反变换。

解：由于

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{1}{z^2-3z+2}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}$$

故有

$$f(t)=(2)^{\frac{t}{T}}-(1)^{\frac{t}{T}}$$

即

$$f(kT)=(2)^k-1$$

〖例3.5〗 求 $F(z)=\dfrac{-3+z^{-1}}{1-2z^{-1}+z^{-2}}$ 的反变换。

解：$F(z)$的特征方程为 $(1-z^{-1})^2$，所以特征方程有两重根。

设

$$F(z)=\frac{-3+z^{-1}}{1-2z^{-1}+z^{-2}}=\frac{A}{(1-z^{-1})^2}+\frac{B}{(1-z^{-1})}$$

其中A,B为

$$A=(1-z^{-1})^2F(z)\Big|_{z^{-1}=1}=(-3+z^{-1})\Big|_{z^{-1}=1}=-2$$

$$B=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[(1-z^{-1})^2F(z)]\Big|_{z^{-1}=1}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[-3+z^{-1}]\Big|_{z^{-1}=1}=-1$$

所以有

$$F(z)=\frac{-3+z^{-1}}{1-2z^{-1}+z^{-2}}=\frac{-2}{(1-z^{-1})^2}+\frac{-1}{(1-z^{-1})}$$

由于在表中查不到上式第一项的z反变换，故将上式两边都乘z-1

$$z^{-1}F(z)=\frac{-2z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}+\frac{-z^{-1}}{(1-z^{-1})}$$

由于 $$Z^{-1}[\frac{-2z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}]=-\frac{2}{T}t,\qquad Z^{-1}[\frac{-z^{-1}}{(1-z^{-1})}]=-1(t-T)$$

故有

$$f(t)=-\frac{2}{T}(t+T)-1(t)$$

即

$$f(kT)=-2(k+1)-1$$

2. 幂级数展开法

由z变换的定义

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}=f(0)+f(T)z^{-1}+f(2T)z^{-2}+\cdots+f(kT)z^{-k}+\cdots$$

可以看出序列 $f(kT)$值是上述幂级数中z^{-k}的系数，对于用有理函数表示的z变换，可以直接用分母去除分子，得到幂级数的展开形式，如果级数是收敛的，则级数中z^{-k}的系数就是 $f(kT)$ 的值。在用长除法求系数时，$F(z)$的分子和分母都必须写成z^{-1}的升幂形式。

例3.6

〖例3.6〗 求下式的逆z变换

$$F(z)=\frac{z^2+2z}{z^2-2z+1}$$

解：

$$F(z)=\frac{z^2+2z}{z^2-2z+1}=\frac{1+2z^{-1}}{1-2z^{-1}+z^{-2}}$$

长除格式

$$\begin{array}{r|l}
 & 1+4z^{-1}+7z^{-2}+\cdots \\ \hline
1-2z^{-1}+z^{-2} & 1+2z^{-1} \\
 & 1-2z^{-1}+z^{-2} \\ \cline{2-2}
 & \quad 4z^{-1}-z^{-2} \\
 & \quad 4z^{-1}-8z^{-2}+4z^{-3} \\ \cline{2-2}
 & \qquad 7z^{-2}-4z^{-3}
\end{array}$$

由长除结果得

$$f^*(t)=\delta(t)+4\delta(t-T)+7\delta(t-2T)+\cdots$$

3. 留数计算法

实际遇到的z变换式$F(z)$，除了有理分式外，也可能有超越函数，此时用留数法求逆z变换比较合适。当然，这种方法对有理分式也适用。

设已知z变换函数$F(z)$，则可证明$F(z)$的逆z变换$f(kT)$值，可由下式计算

$$f(kT)=\sum_{i=1}^{m}\mathrm{Res}[F(z)z^{k-1}]_{z=p_i}$$

即$f(kT)$等于全部极点的留数之和。

例3.7

〖例3.7〗设z变换函数 $F(z)=\dfrac{z^2}{z^2-1.5z+0.5}$ 试用留数法解其逆z变换。

解：因该函数有两个极点：1和0.5，先求出 $F(z)z^{k-1}$ 对这两个极点的留数：

$$\mathrm{Res}\left[\frac{z^2 z^{k-1}}{(z-1)(z-0.5)}\right]\Bigg|_{z\to 1}=\lim_{z\to 1}\left[(z-1)\frac{z^{k+1}}{(z-1)(z-0.5)}\right]=2$$

$$\mathrm{Res}\left[\frac{z^2 z^{k-1}}{(z-1)(z-0.5)}\right]\Bigg|_{z\to 0.5}=\lim_{z\to 0.5}\left[(z-0.5)\frac{z^{k+1}}{(z-1)(z-0.5)}\right]=-(0.5)^k$$

则

$$f(k)=2-(0.5)^k$$

3.4 脉冲传递函数

- 1. 脉冲传递函数的定义
- 2. 脉冲传递函数的求法
- 3. 脉冲传递函数与差分方程
- 4. 开环脉冲传递函数
- 5. 闭环脉冲传递函数

1. 脉冲传递函数的定义

线性离散系统的脉冲传递函数定义为零初始条件下，系统或环节的输出采样函数z变换和输入采样函数z变换之比。设开环离散系统如图 3.3 所示，系统输入信号为$r(t)$，采样后$r^*(t)$的z变换函数为$R(z)$。经虚设的采样开关后得到输出采样函数$y^*(t)$及其z变换$Y(z)$。则根据定义得线性定常离散系统脉冲传递函数

$$G(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=\frac{\sum_{k=0}^{\infty}y(kT)z^{-k}}{\sum_{k=0}^{\infty}r(kT)z^{-k}}$$

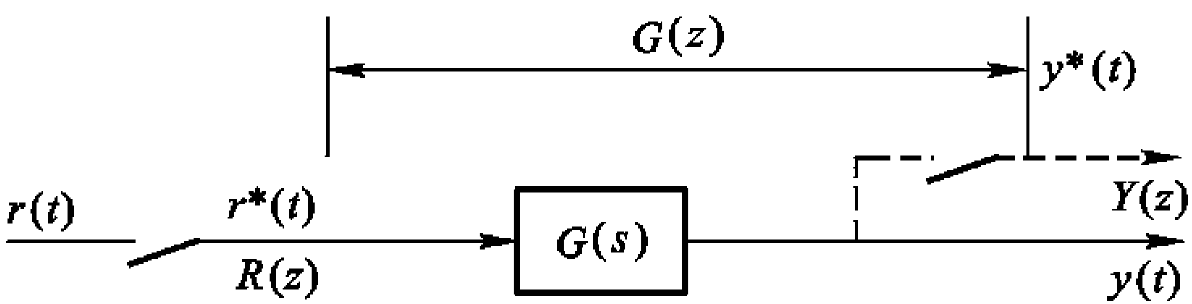

图3.3 开环离散系统

2. 脉冲传递函数的求法

脉冲传递函数的含义是：系统脉冲传递函数$G(z)$就是系统单位脉冲响应$g(t)$的采样值$g^*(t)$的z变换。即用下式表示

$$G(z)=\sum_{k=0}^{\infty} g(kT)z^{-k}$$

当系统的传递函数$G(s)$已知时，可按下列步骤求取脉冲传递函数$G(z)$。

- ✓ 用逆拉氏变换求脉冲过渡函数$g(t)=\mathscr{L}^{-1}[G(s)]$
- ✓ 将$g(t)$按采样周期离散化得$g(kT)$
- ✓ 根据上式求得脉冲传递函数$G(z)$

$G(z)=Z[L^{-1}G(s)]$

$\Downarrow$

$G(z)=Z[G(s)]$

3. 脉冲传递函数与差分方程

根据z变换及逆z变换的性质，脉冲传递函数与差分方程之间可以相互转换。典型的线性离散系统的差分方程可以写成

$$y(k)=\sum_{j=0}^{n}b_j r(k-j)-\sum_{j=1}^{n}a_j y(k-j)$$

在系统初始条件为零的情况下，对上式求z变换

$$Y(z)=\sum_{j=0}^{n}b_j R(z)z^{-j}-\sum_{j=1}^{n}a_j Y(z)z^{-j}$$

系统的脉冲传递函数为

$$G(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=\frac{\sum_{j=0}^{n}b_j z^{-j}}{1+\sum_{j=1}^{n}a_j z^{-j}}$$

例3.8

例3.9

〖例3.8〗 设线性离散系统的差分方程为

$$y(k)+2y(k-1)+4y(k-2)+8y(k-3)=r(k)-2r(k-1)+3r(k-2)$$

前提

且初始条件为零。试求系统的脉冲传递函数。

解：对差分方程求z变换，得

$$Y(z)+2Y(z)z^{-1}+4Y(z)z^{-2}+8Y(z)z^{-3}=R(z)-2R(z)z^{-1}+3R(z)z^{-2}$$

系统的脉冲传递函数为

$$G(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=\frac{1-2z^{-1}+3z^{-2}}{1+2z^{-1}+4z^{-2}+8z^{-3}}$$

〖例3.9〗 设线性离散系统脉冲传递函数为

$$G(z)=\frac{z^3+2z^2+3z+1}{z^3+z^2+2z+3}$$

试求系统的差分方程。

解：

$$G(z)=\frac{C(z)}{R(z)}=\frac{z^3+2z^2+3z+1}{z^3+z^2+2z+3}=\frac{1+2z^{-1}+3z^{-2}+z^{-3}}{1+z^{-1}+2z^{-2}+3z^{-3}}$$

对上式两边求逆z变换，可得差分方程为

$$y(k)+y(k-1)+2y(k-2)+3y(k-3)=r(k)+2r(k-1)+3r(k-2)+r(k-3)$$

4. 开环脉冲传递函数

- 串联环节之间有采样开关情况
- 串联环节之间无采样开关情况
- 输入处无采样开关情况

例3.10

串联环节之间有采样开关情况

因为 $Y(s) = G_2(s)A^*(s)$

所以有 $Y(z) = G_2(z)A(z)$

同理有 $A(s) = G_1(s)E^*(s)$

$A(z) = G_1(z)E(z)$

因此 $Y(z) = G_2(z)G_1(z)E(z)$

此时开环脉冲传递函数 $G(z) = G_2(z)G_1(z)$

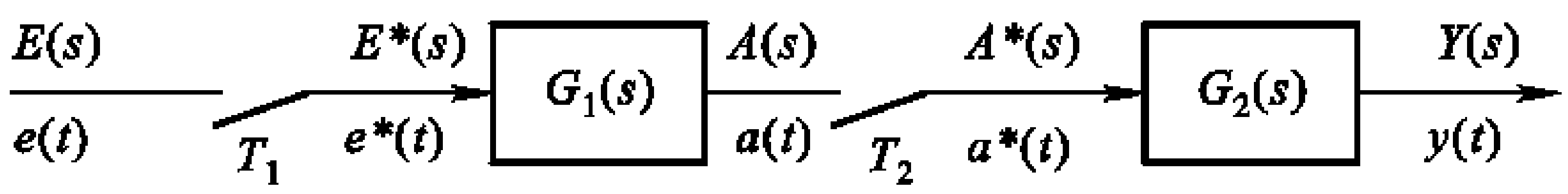

图3.5 串联环节之间有采样开关

串联环节之间无采样开关情况

因为

$$Y(s)=G_2(s)G_1(s)E^*(s)$$

则有

$$Y(z)=G_2G_1(z)E(z)$$

此时开环脉冲传递函数为

$$G(z)=G_2G_1(z)=\mathscr{Z}[G_2(s)G_1(s)]$$

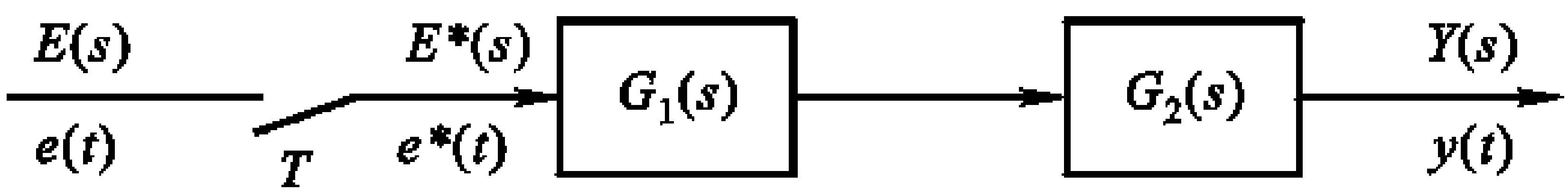

图3.6 串联环节之间无采样开关

输入处无采样开关情况

因为 $Y(s)=G_2(s)A^*(s)$

$$Y(z)=G_2(z)A(z)$$

$$A(s)=G_1(s)E(s)$$

$$A(z)=G_1E(z)=\mathscr{Z}[G_1(s)E(s)]$$

故有 $Y(z)=G_2(z)G_1E(z)$

当输入处无采样开关时，求不出输出对输入的脉冲传递函数，只能求出输出采样信号的z变换。

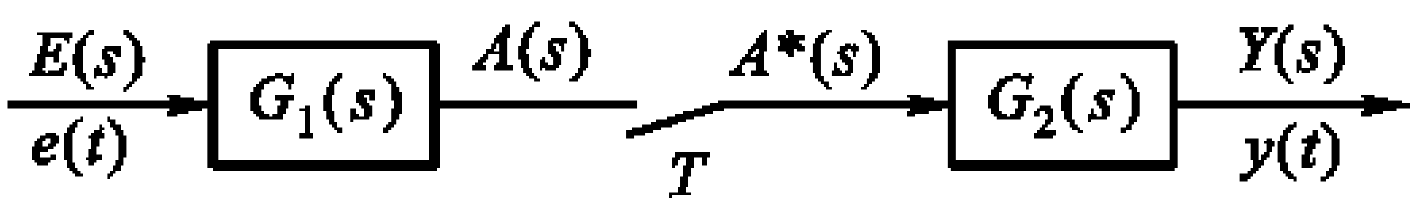

图3.7 输入处无采样开关

5. 闭环脉冲传递函数

由于采样开关的配置不同，因此闭环离散系统没有统一的结构形式。 $\Phi(z) \neq Z[\Phi(s)]$ $\quad \Phi_e(z) \neq Z[\Phi_e(s)]$

闭环脉冲传递函数的分析方法与开环脉冲传递函数类似。

例3.11

$$E(z) = \frac{R(z)}{1+MG(z)} \xrightarrow{Y(z)=G(z)E(z)} \Phi(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1+MG(z)}$$

$$\Phi_e(z) = \frac{E(z)}{R(z)} = \frac{1}{1+MG(z)}$$

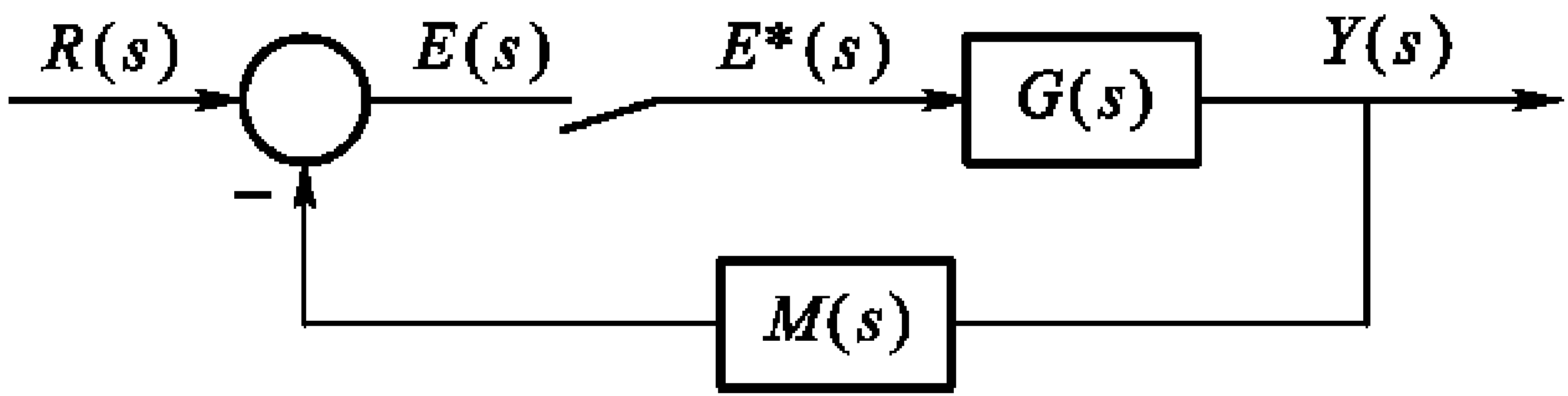

图 3.8 闭环离散系统常见结构形式

〖例3.11〗设闭环离散系统结构图如图3.9，试证其输出信号的z变换为

$$Y(z)=\frac{GR(z)}{1+GM(z)}$$

证明：由图可知 $$Y(s)=G(s)E(s)$$

$$E(s)=R(s)-M(s)Y^*(s)$$

所以有 $$Y(s)=G(s)R(s)-G(s)M(s)Y^*(s)$$

取采样信号的z变换，得

$$Y(z)=GR(z)-GM(z)Y(z)$$

即 $$Y(z)=\frac{GR(z)}{1+GM(z)}$$

CLICK HERE

图3.9 离散系统结构图