一阶 可分离变量，齐次，一阶线性，伯努利方程

$y''=f(x,y')$　$y''=f(y,y')$ 可降阶

二阶 二阶常系数

一、一阶微分方程

（15）设函数 $f(x)$ 连续，且满足 $f(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{-f(t)}\mathrm{d}t$，则 $f(1)=$（ B ）　$f(x)=\ln(x+1)$

（A）0；　$y=f(x)$　（B）$\ln 2$；　（C）1；　$f(0)=0$　（D）e．　$C=1$

$f'(x)=e^{-f(x)}$ 即 $\frac{dy}{dx}=e^{-y}$　$e^y dy=dx$　$e^y=x+C$　$y=\ln(x+C)$

（16）微分方程 $xy'+y=xe^x$ 满足初始条件 $y(1)=0$ 的特解为 $\frac{x-1}{x}e^x$________．

$xy'+y=xe^x$　$y'=-\frac{y}{x}+e^x$

先解 $y'=-\frac{y}{x}$　$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$　$\frac{1}{y}dy=-\frac{1}{x}dx$　$\ln|y|=\ln|\frac{1}{x}|+\ln|C|$

$y=\frac{C}{x}$，令常数变易 $y=\frac{C(x)}{x}$ 代入方程 $\frac{C'(x)}{x}=e^x$　$C'(x)=xe^x$

$C(x)=(x-1)e^x+C$　$y=\frac{(x-1)e^x+C}{x}$ 有 $C=0$

（17）微分方程 $y'+y=1+x$ 满足初始条件 $y(0)=4$ 的特解为_ $y=x+4e^{-x}$ ___．

（18）微分方程 $y'+y=\mathrm{e}^x$ 满足初始条件 $y(0)=0$ 的特解是（ C ）．

（A）$\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})-1$　　（B）$1-\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})$

（C）$\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})$　　（D）$\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^x)$

（18）微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}$ 满足初始条件 $y(1)=1$ 的特解为___ $y=x$ _____．

$\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}$　$\ln|y|=\ln|x|+\ln|C|$

$y=Cx$

（19）设 $y=f(x)$ 可导，求解方程 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{2}f(x)=x^2$．

解：由题意 $f(0)=0$，~~两边求导~~

$f(x)+\frac{1}{2}f'(x)=2x$ 即 $y'=-2y+4x$

先解 $y'=-2y$ 即 $\frac{dy}{dx}=-2y$　$\frac{dy}{y}=-2dx$　$\ln|y|=-2x+C_1$

$y=e^{-2x+C_1}=Ce^{-2x}$

有 $y=Ce^{-2x}$，令常数变易 $y=C(x)e^{-2x}$

代入方程 $C'(x)e^{-2x}=4x$　$C'(x)=4xe^{2x}$

$C(x)=\int 4xe^{2x}dx=\int 2x\,de^{2x}=e^{2x}2x-e^{2x}+C$

$y=[e^{2x}(2x-1)+C]\cdot e^{-2x}=(2x-1)+Ce^{-2x}$

由 $f(0)=0$　$C=1$　$y=2x-1+e^{-2x}$.

二、二阶微分方程　　　$e^{x}(x\cos x+2\sin x)$　　$\lambda\pm\omega i=1\pm i$

（15）方程 $y''-2y'+2y=e^{x}(x\cos x+2\sin x)$ 特解的形式为(D　)

$r^2-2r+2=0$　　$\frac{2\pm\sqrt{4-8}}{2}=1\pm i$

（A）$y_1=e^{x}[(Ax+B)\cos x+C\sin x]$；

（B）$y_1=e^{x}[Ax\cos x+C\sin x]$；

（C）$y_1=e^{x}[(Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x]$　；

（D）$y_1=xe^{x}[(Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x]$.

（15）求微分方程 $y''=4y+x+\mathrm{e}^{2x}$ 的通解.

先解 $y''-4y=0$，特征方程 $r^2-4=0$，$r_{1,2}=\pm 2$，~~齐次通解 $Y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}$~~

~~$Y=(C_1+C_2x)e^{2x}$~~　$Y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}$

$y''-4y=x$ 的特解　$y_1^*=-\frac{1}{4}x$

$=e^{0x}\cdot x$　$y_1^*=Ax+B$ 代回方程得　$y_1^*=-\frac{1}{4}x$

$y''-4y=e^{2x}$，特解 $y_2^*=xAe^{2x}$ 代回方程得　$y_2^*=\frac{1}{4}xe^{2x}$

通解　$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}xe^{2x}$

（16）求微分方程 $y''+4y=2x^2$ 满足 $y(0)=0,\ y'(0)=1$ 的特解.

$r^2+r-2=0$ $(r+2)(r-1)=0$ $r_1=1,\ r_2=-2$

（17）微分方程 $y''+y'-2y=xe^x\cos x$ 的一个特解形式为（ A）.

$=e^x(x\cos x+0\sin x)$ 　 $\lambda\pm\omega i=1\pm i$

（A） $e^x[(ax+b)\cos x+(cx+d)\sin x]$

（B） $xe^x[(ax+b)\cos x+(cx+d)\sin x]$

（C） $e^x(ax+b)\cos x$ ✗

（D） $xe^x(ax+b)\cos x$ ✗

（17）设函数 $f(x)$ 有二阶连续的导数， $f(0)=0, f'(0)=1,$ 且

$$[xy(x+y)-f(x)y]\mathrm{d}x+[f'(x)+x^2y]\mathrm{d}y=0$$

是全微分方程，求函数 $f(x)$ 的表达式.

$\frac{\partial P}{\partial y}=x^2+2xy-f(x)$ 　 $\frac{\partial Q}{\partial x}=f''(x)+2xy$ 　由 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ 得

$x^2-f(x)=f''(x)$ 　设 $z=f(x)$ 得 $z''+z=x^2$

~~对应齐次~~ $z''+z=0$, $r^2+1=0$ 　 $r=\pm i$ 　齐次通解 $z=C_1\cos x+C_2\sin x$

非齐次特解 $z^*=ax^2+bx+c$ 　代回方程得 $a=1$ 　 $b=0$ 　 $c=-2$.

通解 $z=C_1\cos x+C_2\sin x+ax^2+bx+c$ 　由 $f(0)=0$, $f'(0)=1$

$=C_1\cos x+C_2\sin x+x^2-2$ 　得 $\begin{cases}C_1-2=0\\C_2=1\end{cases}$ 　 $C_1=2$ 　 $C_2=1$

$z'=-C_1\sin x+C_2\cos x+2x$

$f(x)=2\cos x+\sin x+x^2-2$

（18）设二阶常系数非齐次线性方程 $y''+ay'+by=(cx+d)e^{2x}$ 有特解

$r^2+ar+b=0$ 　 $r_1=1,\ r_2=2$

$y=2e^x+(x^2-1)e^{2x}$， $=2e^x-e^{2x}+x^2e^{2x}$

$C_1e^x+C_2e^{2x}+x^2e^{2x}$

写出该方程的通解，并求出常数 a,b,c,d 的值.

特征值 1,2, 　 $a=-(1+2)=-3$ 　 $b=1\times2=2$

$y''-3y'+2y=(cx+d)e^{2x}$ ← $y^*=x^2e^{2x}$ 代回方程 求出 c,d

（19）方程 $y''-3y'+2y=e^x\cos 2x$ 的特解形式为(　A 　).

（A） $e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$； 　　（B） $C_1e^x\cos 2x$；

（C） $xe^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$； 　　（D） $C_2e^x\sin 2x$.

$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$ 　 $r=\alpha\pm\beta i$

（19）以 $y=2e^x\cos 3x$ 为一个特解的二阶常系数齐次线性微分方程为

$y''-2y'+10y=$ ______. 　 $1\pm3i$ 　 $r^2+pr+q=0$

$p=-(r_1+r_2)=-2$

$q=r_1r_2=10$