保密★启用前

2019-2020 学年第一学期期末考试

《概率论与数理统计 B》参考答案

考生注意事项

1. 答题前，考生须在试题册指定位置上填写考生**教学号**和考生姓名；在答题卡指定位置上填写考试科目、考生姓名和考生**教学号**，并涂写考生**教学号**信息点。
2. 选择题的答案必须涂写在答题卡相应题号的选项上，非选择题的答案必须书写在答题卡指定位置的边框区域内。超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题册上答题无效。
3. 填（书）写部分必须使用黑色字迹签字笔书写，字迹工整、笔迹清楚；涂写部分必须使用 2B 铅笔填涂。
4. 考试结束，将答题卡和试题册按规定交回。

(以下信息考生必须认真填写)

考生教学号								
考生姓名								

一、选择题：1～6 小题，每小题 3 分，共 18 分.

1、D；　2、A；　3、 C；　4、A；　5、D；　6、B.

二、填空题：7～12 小题，每小题 3 分，共 18 分.

7、 0.1；　8、$\frac{1}{3}$；　9、$\frac{37}{64}$；　10、

Z	0	1	2
P	0.1	0.5	0.4

11、$\frac{9}{10}$；

12、$\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$.

三、解答题：13～19 小题，共 64 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

13.（本题满分 10 分）

有两箱同种零件，在第一箱内装 10 件，其中有 9 件是一等品；在第二箱内装 15 件，其中有 7 件是一等品．现从两箱中随机地取出一箱，然后从该箱中取两次零件，每次随机地取出一个零件，取出的零件均不放回．求：

（1）第一次取出的零件是一等品的概率；

（2）在第一次取出的零件是一等品的条件下，第二次取出的零件是一等品的概率.

解 设 A_1、A_2 分别表示事件“第一、二次取到的是一等品”，B_1、B_2 分别表示事件“两个零件来自第一、二箱”.

显然有 $B_1 \cup B_2 = \Omega$， $B_1 B_2 = \varnothing$，

（1）由全概率公式有

$$P(A_1) = P(B_1)P(A_1|B_1) + P(B_2)P(A_1|B_2) \qquad \cdots\cdots 2\text{ 分}$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{9\times 9}{10\times 9} + \frac{1}{2}\times\frac{7\times 14}{15\times 14}$$

$$= 0.68 \qquad \cdots\cdots 4\text{ 分}$$

（2）由

$$P(A_1A_2) = P(B_1)P((A_1A_2)|B_1) + P(B_2)P((A_1A_2)|B_2) \qquad \cdots\cdots 6\text{ 分}$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{9\times 8}{10\times 9} + \frac{1}{2}\times\frac{7\times 6}{15\times 14}$$

$$= 0.5 \qquad \cdots\cdots 8\text{ 分}$$

所以

$$P\left(A_2|A_1\right)=\frac{P\left(A_1A_2\right)}{P\left(A_1\right)}=0.74$$ ……10 分

14.（本题满分 9 分）

同时抛投 3 枚硬币，以 X 表示出现数字面的枚数，求 $E\left(X\right)$，$D\left(X\right)$.

解 X 的所有可能取值为 0, 1, 2, 3.

X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

……4 分

$$E\left(X\right)=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}=\frac{3}{2}$$ ……6 分

$$E\left(X^2\right)=0^2\times\frac{1}{8}+1^2\times\frac{3}{8}+2^2\times\frac{3}{8}+3^2\times\frac{1}{8}=3$$ ……8 分

$$D\left(X\right)=E\left(X^2\right)-\left[E\left(X\right)\right]^2=\frac{3}{4}$$ ……9 分

15.（本题满分 10 分）

设随机变量 X 的概率密度为

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\frac{3}{8}x^2, & 0<x<2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求：（1） 概率 $P\left\{1<X<2\right\}$；（2）$D\left(2X-1\right)$.

解 （1）

$$P\left\{1<X<2\right\}=\int_1^2\frac{3}{8}x^2\mathrm{d}x=\frac{7}{8}$$ ……2 分

(2) $$E\left(X\right)=\int_0^2\frac{3}{8}x\cdot x^2dx=\frac{3}{2}$$ ……4 分

$$E\left(X^2\right)=\int_0^2 \frac{3}{8}x^2\cdot x^2dx=\frac{12}{5}$$ ……6 分

$$D\left(2X-1\right)=4D\left(X\right)$$ ……8 分

$$=4\left[E\left(X^2\right)-\left(E\left(X\right)\right)^2\right]$$

$$=\frac{3}{5}$$ ……10 分

16.（本题满分 8 分）

设随机变量$\left(X,Y\right)$的概率密度为

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases}2-x-y, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求：（1）概率$P\left\{Y\ge X\right\}$；（2）条件概率密度$f_{Y|X}\left(y|x\right)$.

解 （1） $$P\left\{Y\ge X\right\}=\iint\limits_{y\ge x} f\left(x,y\right)dxdy$$ ……2 分

$$=\int_0^1 dx\int_x^1\left(2-x-y\right)dy$$

$$=\frac{1}{2}$$ ……3 分

（2） $$f_X\left(x\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x,y\right)dy$$ ……5 分

$$=\begin{cases}\int_0^1\left(2-x-y\right)dy, & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{3}{2}-x, & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$ ……6 分

当$0\le x\le 1$时

$$f_{Y|X}\left(y|x\right)=\frac{f\left(x,y\right)}{f_X\left(x\right)}=\begin{cases}\dfrac{2-x-y}{\frac{3}{2}-x}, & 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$ ……8 分

17.（本题满分 8 分）

设随机变量 X 和 Y 相互独立，其概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0,\end{cases}$$

求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

解 由 X 和 Y 相互独立，所以 $f(x,y)$ 的概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

$$=\begin{cases}e^{-y}, & 0<x<1, y>0\\ 0, & 其他,\end{cases}$$ ……2 分

设 Z 的分布函数为 $F_Z(z)$

当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=0.$ ……3 分

当 $0\le z<1$ 时，

$$F_Z(z)=\int_0^z dx\int_0^{-x+z}e^{-y}dy=z+e^{-z}-1$$ ……4 分

当 $z\ge 1$ 时，

$$F_Z(z)=\int_0^1 dx\int_0^{-x+z}e^{-y}dy=1-e^{1-z}+e^{-z}$$ ……6 分

所以

$$f_Z(z)=\frac{dF_Z(z)}{dz}=\begin{cases}0, & z<0,\\ 1-e^{-z}, & 0\le z<1,\\ e^{1-z}-e^{-z}, & z\ge 1.\end{cases}$$ ……8 分

18.（本题满分 7 分）

从总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 中抽取容量为 16 的样本，其中 μ 与 σ^2 均为未知，S^2 为样本方差，求概率 $P\left\{\frac{S^2}{\sigma^2}\le 2.0385\right\}$. $\left(\chi^2_{0.01}(15)=30.578\right)$

解 由 $\frac{(16-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(15)$ ……2 分

$$P\left\{\frac{S^2}{\sigma^2}\le 2.0385\right\}=P\left\{\frac{15S^2}{\sigma^2}\le 15\times 2.0385\right\}$$ ……4 分

$$=P\left\{\chi^2(15)\le 30.578\right\}$$

$$=1-P\left\{\chi^2(15)>30.578\right\}$$ ……6 分

$$=1-0.01=0.99$$ ……7 分

19.（本题满分 12 分）

设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}(\theta+1)x^\theta, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$，其中 $\theta>-1$ 是未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本. 求：

（1）θ 的矩估计量；（2）θ 的最大似然估计量.

解（1）

$$E(X)=\int_0^1 x\cdot(\theta+1)x^\theta dx=\frac{\theta+1}{\theta+2}$$ ……2 分

令

$$\frac{\theta+1}{\theta+2}=\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$$

得 θ 的矩估计量为

$$\hat{\theta}=\frac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$$ ……4 分

（2）设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的一组观测值，当 $0<x_i<1,i=1,2,\cdots,n$，似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^n(\theta+1)x_i^\theta=(\theta+1)^n\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^\theta$$ ……6 分

取对数，得

$$\ln L(\theta)=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^n \ln x_i$$ ……8 分

令

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$$ ……10 分

得θ的最大似然估计值为$\hat{\theta}=-1-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$

θ最大似然估计量为$\hat{\theta}=-1-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$ ……12 分