现代控制理论

第三章 线性系统的可控性和可观测性

3.1线性定常系统的可控性

1．线性定常离散系统状态可控性

$$x(k+1)=Gx(k)+Hu(k),x(0)$$

(1) 线性定常离散系统可控性定义

对于上式所示的系统，在有限时间间隔$0\leq t\leq nT$内，若存在无约束的阶梯控制信号$u(0)$，$u(1)$，…，$u(n-1)$，能使系统的状态从任意初态$x(0)$转移到任意终态$x(n)$，则称系统是状态完全可控的，简称为系统可控。

否则，称系统为不可控。

(2) 线性定常离散系统可控性判据

若线性定常离散系统的状态方程为

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k), x(0)$$

则该系统可控的充分必要条件为其可控性矩阵

$$S_c = \begin{bmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{bmatrix}$$

满秩，即 $$rankS_c = n$$

证明

$$x(k)=G^k x(0)+\sum_{i=0}^{k-1}G^{k-1-i}Hu(i)$$

- 根据系统可控性的定义，若一个系统是可控的，在有限时间间隔**0≤*t*≤*nT***内，针对任意初态***x*(0)**和任意终态***x*(*n*)**，当***k*＝*n***时，***u*(0)**，***u*(1)**，**…**，***u*(*n*-1)**一定存在。
- 因此，***k*=*n***时，***u*(0)**，***u*(1)**，**…**，***u*(*n*-1)**的解存在的条件，即为系统可控时应满足的条件

令***k*=*n***，

$$x(n)=G^n x(0)+\sum_{i=0}^{n-1}G^{n-1-i}Hu(i)$$

$$\Longrightarrow\quad x(n)-G^n x(0)=\sum_{i=0}^{n-1}G^{n-1-i}Hu(i)$$

$$x(n)-G^n x(0)=G^{n-1}Hu(0)+G^{n-2}Hu(1)+\cdots+GHu(n-2)+Hu(n-1)$$

$$\Downarrow$$

$$x(n)-G^n x(0)=\begin{bmatrix} G^{n-1}H & G^{n-2}H & \cdots & GH & H \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(n-2) \\ u(n-1) \end{bmatrix}$$

上式表示非齐次线性方程组

特点：

n个方程

n个未知数**u(0)，u(1)，…，u(n-1)**

在**x(0)**、**x(n)**任意的情况下，要使上述方程组有解的充分必要条件是 $S_c^{'}=\begin{bmatrix} G^{n-1}H & \cdots & GH & H \end{bmatrix}$

满秩，且 $rankS_c^{'}=n$

亦即 $S_c=\begin{bmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{bmatrix}$ 且$rankS_c=n$

离散可控性例题

2．线性定常连续系统状态可控性

$$\dot{x} = Ax + Bu, x(0)$$

(1) 线性定常连续系统可控性定义

对于上式所示的系统，在有限时间区域$t_0 \le t \le t_f$内，若存在无约束的分段连续控制信号$u(t)$，能使系统的状态从任意初态$x(t_0)$转移到任意终态$x(t_f)$，则称系统是状态完全可控的，简称为系统可控。

否则，称系统为不可控。

(2) 线性定常连续系统可控性判据

线性定常连续系统的状态方程 $\dot{x} = Ax + Bu, x(0)$

可控的充分必要条件

$$S_c = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

满秩，即 $rankS_c = n$

示例

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}_f) = \Phi(\boldsymbol{t}_f)\boldsymbol{x}(0) + \int_0^{t_f} \Phi(\boldsymbol{t}_f - \tau)\boldsymbol{Bu}(\tau)\boldsymbol{d}\tau$$

$$= \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{A}\boldsymbol{t}_f}\boldsymbol{x}(0) + \int_0^{t_f} \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{t}_f - \tau)}\boldsymbol{Bu}(\tau)\boldsymbol{d}\tau$$

$$\boldsymbol{x}(0) = -\int_0^{t_f} \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{A}\tau}\boldsymbol{Bu}(\tau)\boldsymbol{d}\tau$$

因为 $e^{-A\tau} = \sum_{m=0}^{n-1} a_m(\tau)A^m = a_0(\tau)I + a_1(\tau)A + \cdots + a_{n-1}(\tau)A^{n-1}$

$$u_m = \int_0^{t_f} a_m(\tau)u(\tau)d\tau, m = 1, 2, ..., n-1$$

$$\boldsymbol{x}(0) = -\int_0^{t_f} \sum_{\boldsymbol{m}=0}^{\boldsymbol{n}-1} \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{m}}(\tau)\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{Bu}(\tau)\boldsymbol{d}\tau = -\sum_{\boldsymbol{m}=0}^{\boldsymbol{n}-1} \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{B}\int_0^{t_f} \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{m}}(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\boldsymbol{d}\tau = \sum_{\boldsymbol{m}=0}^{\boldsymbol{n}-1} \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{Bu}_{\boldsymbol{m}}$$

$$= -(\boldsymbol{Bu}_0 + \boldsymbol{ABu}_1 + \cdots + \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{n}-1}\boldsymbol{Bu}_{\boldsymbol{n}-1})$$

(3) 可控标准形

结论：状态方程具有可控标准形的系统一定可控。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\Rightarrow S_c = \begin{bmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \times \\ 0 & 1 & -a_{n-1} & \cdots & \times \\ 1 & -a_{n-1} & -a_{n-2}+a_{n-1}^2 & \cdots & \times \end{bmatrix}$$

结论： 一个可控系统，若其矩阵A，b不具有可控标准形形式，则定可选择适当非奇异线性变换化为可控标准形。

$$\dot{x} = Ax + bu \xrightarrow{x = P\bar{x}} \dot{\bar{x}} = P^{-1}AP\bar{x} + P^{-1}bu$$

$$\bar{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \bar{b} = P^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(4)系统可控的另一种表达方式

【引例】 $A=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}\quad b=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\end{bmatrix}$

$$\det S_c=\det\begin{bmatrix}b & Ab\end{bmatrix}=\begin{vmatrix}b_1 & \lambda_1 b_1\\ b_2 & \lambda_2 b_2\end{vmatrix}=\lambda_2 b_1 b_2-\lambda_1 b_1 b_2$$

$$\det S_c\neq 0\longrightarrow\begin{cases}\lambda_1\neq\lambda_2\\ b_1\neq 0,\quad b_2\neq 0\end{cases}$$

输入阵中无全零行

$$A=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1\\ 0 & \lambda_1\end{bmatrix}\quad b=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\end{bmatrix}$$

$$\det S_c=\det\begin{bmatrix}b & Ab\end{bmatrix}=\begin{vmatrix}b_1 & \lambda_1 b_1+b_2\\ b_2 & \lambda_1 b_2\end{vmatrix}=\lambda_1 b_1 b_2-(\lambda_1 b_1+b_2)b_2=-b_2^2$$

$$\det S_c\neq 0\longrightarrow b_2\neq 0$$

输入阵中与约当块最后一行所对应的行是非零行向量

◆对角形可控判据（A为对角阵，对角上元素互不相同）

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ \vdots\\ u_p\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad \begin{aligned}&\dot{x}_1=\lambda_1x_1+b_{11}u_1+b_{12}u_2+\cdots+b_{1p}u_p\\ &\dot{x}_2=\lambda_2x_2+b_{21}u_1+b_{22}u_2+\cdots+b_{2p}u_p\\ &\cdots\\ &\dot{x}_n=\lambda_nx_n+b_{n1}u_1+b_{n2}u_2+\cdots+b_{np}u_p\end{aligned}$$

对角形可控判据 矩阵A为对角形且对角元素两两互异时，若输入矩阵B中不出现全零行，则系统可控。

◆约当形可控判据

(a)
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 & & & \\ & \lambda_1 & & & \\ & & \lambda_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p}\\ b_{31} & b_{32} & \cdots & b_{3p}\\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\\ \vdots\\ u_p\end{bmatrix}$$

➢其中的对角部分应用对角形可控判据，即要求输入矩阵B中不出现全零行，则系统对角部分的状态可控。

➢约当部分，展开后可得

$$\dot{x}_1=\lambda_1 x_1+x_2+b_{11}u_1+b_{12}u_2+\cdots+b_{1p}u_p$$
$$\dot{x}_2=\lambda_1 x_2+b_{21}u_1+b_{22}u_2+\cdots+b_{2p}u_p$$

要求约当块最后一行对应的输入矩阵*B*中的行不出现全零行，则系统约当部分的状态可控。

(b)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & & \\ & \lambda_1 & & & \\ & & \lambda_1 & & \\ & & & \lambda_1 & \\ & & & & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ b_{31} & b_{32} & \cdots & b_{3p} \\ b_{41} & b_{42} & \cdots & b_{4p} \\ b_{51} & b_{52} & \cdots & b_{5p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_{21} & b_{21} & \dots & b_{2p} \\ b_{31} & b_{32} & \dots & b_{3p} \\ b_{41} & b_{42} & \dots & b_{4p} \end{bmatrix}$$

要求：除满足对角判据外，上述矩阵行满秩，则系统可控

示例

(5) 连续状态方程离散化后的可控性

举例说明

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -w^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]$$

$$= \mathcal{L}^{-1} \begin{bmatrix} s & -1 \\ w^2 & s \end{bmatrix}^{-1} = \mathcal{L}^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{s}{s^2 + w^2} & \dfrac{1}{s^2 + w^2} \\ \dfrac{-w^2}{s^2 + w^2} & \dfrac{s}{s^2 + w^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos wt & \dfrac{\sin wt}{w} \\ -w \cdot \sin wt & \cos wt \end{bmatrix}$$

$$x(k+1) = \Phi(T)x(k) + Hu(k)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos wT & \dfrac{\sin wT}{w} \\ -w \sin wT & \cos wT \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1 - \cos wT}{w^2} \\ \dfrac{\sin wT}{w} \end{bmatrix} u(k)$$

$$H=\int_0^T \Phi(\tau)bd\tau=\int_0^T \begin{bmatrix} \dfrac{\sin w\tau}{w} \\ \cos w\tau \end{bmatrix} d\tau=\begin{bmatrix} \dfrac{1-\cos wT}{w^2} \\ \dfrac{\sin wT}{w} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} H & \Phi H \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{1-\cos wT}{w^2} & \dfrac{\cos wT-\cos^2 wT+\sin^2 wT}{w^2} \\ \dfrac{\sin wT}{w} & \dfrac{2\sin wT\cos wT-\sin wT}{w} \end{bmatrix}$$

✓ 离散化系统的采样周期选择不当时，便不能保持原连续系统的可控性。

✓ 当连续系统状态方程不可控时，不管采样周期T如何选择，离散化后系统一定是不可控的。

(6) 输出可控性

$$\dot{x} = Ax + bu \qquad y = Cx + Du$$

●**线性定常连续系统输出可控性定义**

对于上式所示的系统，在有限时间区域$t_0 \le t \le t_f$内，若存在无约束的分段连续控制信号$u(t)$，能使系统的输出从任意初值$y(t_0)$转移到任意终态$y(t_f)$，则称系统是输出可控的。

●**线性定常连续系统可控性判据**

$$S_{co} = \begin{bmatrix} Cb & CAb & CA^2b & \cdots & CA^{n-1}b & D \end{bmatrix}$$

行满秩，且 $\quad rankS_{co} = q$

3.2线性定常系统的可观测性

1．线性定常离散系统状态可观测性

(1) 离散系统可观测定义

$$x(k+1)=Gx(k)+Hu(k),\quad x(0)$$

$$y(k)=Cx(k)+Du(k)$$

已知输入$u(0)$，…，$u(n-1)$的情况下，通过在**有限个采样周期内**测量到的输出$y(0)$，$y(0)$，…，$y(n\text{-}1)$，能唯一地确定任意初始状态$x(0)$的n个分量，则称系统是完全可观测的，简称系统可观测。

(2) 离散系统可观测判据

系统可观测的充分必要条件是其可观测性矩阵

$$V=\begin{bmatrix} C \\ CG \\ \vdots \\ CG^{n-1} \end{bmatrix}$$

列满秩，且秩为n，即

$$rankV=n$$

证明　离散系统的状态方程的解为

$$x(k)=G^k x(0)+\sum_{i=0}^{k-1}G^{k-1-i}Hu(i)$$

$$y(k)=CG^k x(0)+\underbrace{C\sum_{i=0}^{k-1}G^{k-1-i}Hu(i)+Du(k)}$$

$u(i)$ 为已知量，不失一般性可令其为零

$$y(k)=CG^k x(0),k=0,1,\cdots,n-1$$

$$\left.\begin{aligned} y(0)&=Cx(0)\\ y(1)&=CGx(0)\\ y(2)&=CG^2x(0)\\ &\vdots\\ y(n-1)&=CG^{n-1}x(0)\end{aligned}\right\}$$

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(n-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CG \\ \vdots \\ CG^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix}$$

在上式的$\boldsymbol{nq}$个方程中若有$\boldsymbol{n}$个独立方程，可确定唯一的一组$\boldsymbol{x_1(0)}$，…，$\boldsymbol{x_n(0)}$，其可观测性矩阵列满秩，且秩为$\boldsymbol{n}$，即

$$rank\begin{bmatrix} C \\ CG \\ \vdots \\ CG^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

示例

2．线性定常连续系统状态可观测性

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); x(t_0)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

(1) 线性定常连续系统可观测性定义

已知输入$u(t)$，通过在**有限时间间隔$t_0 \le t \le t_f$内**测量到的输出$y(t)$，能唯一地确定任意初始状态$x(t_0)$，则称系统是完全可观测的，简称系统可观测。

(2) 线性定常连续系统可观测性判据

系统可观测 ⟺ $rankV = rank\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n$

示例

(3) 可观测标准形

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad B' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

可控标准形

$A^T = A'$

$B^T = B'$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & -a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

可观标准形

结论： 状态方程具有可观测标准形的系统一定可观测。

$$V=\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^2 \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \times \\ \vdots & \vdots & \ddots & \times & \times \\ 0 & 1 & \cdots & \times & \times \\ 1 & 0 & \cdots & \times & \times \end{bmatrix}$$

结论： 一个可观测系统，若其矩阵A，C不具有可观标准形形式，则定可选择适当非奇异线性变换化为可观标准形。

(4)系统可观测的另一种表达方式

【引例】 $A=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}c_1 & c_2\end{bmatrix}$

$$\det V=\det\begin{bmatrix}C\\ CA\end{bmatrix}=\begin{vmatrix}c_1 & c_2\\ \lambda_1 c & \lambda_2 c_2\end{vmatrix}=\lambda_2 c_1 c_2-\lambda_1 c_1 c_2$$

$$\det V\neq 0 \longrightarrow \begin{cases}\lambda_1\neq\lambda_2\\ c_1\neq 0,\quad c_2\neq 0\end{cases}$$

输出阵中无全零列

$A=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1\\ 0 & \lambda_1\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}c_1 & c_2\end{bmatrix}$

$$\det V=\det\begin{bmatrix}C\\ CA\end{bmatrix}=\begin{vmatrix}c_1 & c_2\\ \lambda_1 c_1 & c_1+\lambda_1 c_2\end{vmatrix}=c_1^2$$

$$\det V\neq 0 \longrightarrow c_1\neq 0$$

输出阵中与约当块第一列所对应的列是非零列向量

◆对角形可观判据 $(\lambda_i \neq \lambda_j)$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_q \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} C_1 & C_2 & & C_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{q1} & c_{q2} & \cdots & c_{qn} \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]x(0) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} x_1(0) + C_2 e^{\lambda_2 t} x_2(0) + \cdots + C_n e^{\lambda_n t} x_n(0)$$

对角形可观判据 矩阵A为对角形且对角元素两两互异时，<u>输出矩阵C中不出现全零列</u>，则系统可观测。

◆约当形可观判据

(a) $$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 & & & \\ & \lambda_1 & & & \\ & & \lambda_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}\qquad \begin{array}{c}\\ \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} C_1 & C_2 & & C_n \end{array}$$

$$\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_q\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ c_{q1} & c_{q2} & \cdots & c_{qn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$$

➢其中的对角部分应用对角形可观判据，即要求<u>输出矩阵C中不出现全零列</u>，则系统对角部分的状态可观测。

➢约当部分

要求<u>约当块第一列对应的输出矩阵C中的列不为全零列</u>，则系统约当部分的状态可控。

(b)

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\\\dot{x}_4\\\dot{x}_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boxed{\begin{matrix}\lambda_1 & 1\\ & \lambda_1\end{matrix}} & & & \\ & \boxed{\lambda_1} & & \\ & & \boxed{\lambda_1} & \\ & & & \lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_q\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15}\\c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25}\\ & & \cdots & & \\c_{q1} & c_{q2} & c_{q3} & c_{q4} & c_{q5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_5\end{bmatrix}$$

要求:

(1) 满足对角、约当判据

(2) 下述矩阵

$$\begin{bmatrix}c_{11} & c_{13} & c_{14}\\c_{21} & c_{23} & c_{24}\\\vdots & & \\c_{q1} & c_{q3} & c_{q4}\end{bmatrix}$$

列满秩，则系统可观测

示例

(5) 连续状态方程离散化后的可控性

举例说明

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -w^2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u,\quad y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

$$\boxed{rankV=rank\begin{bmatrix}C^T & A^TC^T\end{bmatrix}=rank\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=2=n}$$

$$\Phi(t)=\mathcal{L}^{-1}[(sI-A)^{-1}]$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\begin{bmatrix}s & -1\\ w^2 & s\end{bmatrix}^{-1}=\mathcal{L}^{-1}\begin{bmatrix}\dfrac{s}{s^2+w^2} & \dfrac{1}{s^2+w^2}\\ \dfrac{-w^2}{s^2+w^2} & \dfrac{s}{s^2+w^2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos wt & \dfrac{\sin wt}{w}\\ -w\cdot\sin wt & \cos wt\end{bmatrix}$$

$$x(k+1)=\Phi(T)x(k)+Hu(k)$$

$$=\begin{bmatrix}\cos wT & \dfrac{\sin wT}{w}\\ -w\sin wT & \cos wT\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\ x_2(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{1-\cos wT}{w^2}\\ \dfrac{\sin wT}{w}\end{bmatrix}u(k)$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\ x_2(k)\end{bmatrix}$$

$$V^{'}=\begin{bmatrix}C^T & G^TC^T\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \cos wT\\ 0 & \sin wT\end{bmatrix}$$

✓ 离散化系统的采样周期选择不当时，便不能保持原连续系统的可观测性。

✓ 当连续系统状态方程不可观测时，不管采样周期T如何选择，离散化后系统一定不可观测。

3.3线性变换对系统可控性、可观测性的影响

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned} \xrightarrow{x = P\bar{x}} \begin{aligned}\dot{\bar{x}} &= P^{-1}AP\bar{x} + P^{-1}bu \\ y &= CP\bar{x} + Du\end{aligned}$$

1. 非奇异线性变换不改变系统的可控性

$$rank\bar{S} = rank\left[P^{-1}b \quad (P^{-1}AP)P^{-1}b \quad (P^{-1}AP)^2P^{-1}b \quad \cdots \quad (P^{-1}AP)^{n-1}P^{-1}b\right]$$

$$= rank\left[P^{-1}b \quad P^{-1}Ab \quad (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)P^{-1}b \quad \cdots \quad \underbrace{(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)}_{n-1}P^{-1}b\right]$$

$$= rank\left[P^{-1}b \quad P^{-1}Ab \quad P^{-1}A^2b \quad \cdots \quad P^{-1}A^{n-1}b\right]$$

$$= rankP^{-1}\left[b \quad Ab \quad A^2b \quad \cdots \quad A^{n-1}b\right]$$

$$= rank\left[b \quad Ab \quad A^2b \quad \cdots \quad A^{n-1}b\right] = rankS$$

2. 非奇异线性变换不改变系统的可观测性

$$rank\bar{V} = rank\begin{bmatrix}(CP)^T & (P^{-1}AP)^T(CP)^T & [(P^{-1}AP)^2]^T(CP)^T & \cdots & [(P^{-1}AP)]^T(CP)^T\end{bmatrix}^T$$

$$= rank\begin{bmatrix}P^TC^T & P^TA^T(P^T)^{-1}P^TC^T & \cdots & \cdots & P^T(A^{n-1})^T(P^T)^{-1}P^TC^T\end{bmatrix}^T$$

$$= rankP^T\begin{bmatrix}C^T & A^TC^T & (A^2)^TC^T & \cdots & (A^{n-1})^TC^T\end{bmatrix}^T$$

$$= rank\begin{bmatrix}C^T & A^TC^T & (A^2)^TC^T & \cdots & (A^{n-1})^TC^T\end{bmatrix}^T$$

$$= rankV$$

4.4 可控性、可观性与传递函数的关系

定理 对单输入单输出系统，若其传递函数存在零极点对消，则由状态变量选择的不同而定，系统要么可控不可关测，要么不可控可观测，要么不可控不可观测；若系统传递函数没有零极点对消，或传递函数不可约，则系统一定即可控又可观测。

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \\ \vdots \\ \dot{\bar{x}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{bmatrix} \bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \bar{x}_i$$

$$G(s)=\frac{y(s)}{u(s)}=\begin{bmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s-\lambda_1 & & & \\ & s-\lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & s-\lambda_n\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{s-\lambda_1} & & & \\ & \frac{1}{s-\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{s-\lambda_n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}$$

$$G(s)=\frac{\beta_1\alpha_1}{s-\lambda_1}+\frac{\beta_2\alpha_2}{s-\lambda_2}+\cdots+\frac{\beta_n\alpha_n}{s-\lambda_n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\beta_i\alpha_i}{s-\lambda_i}$$

$\left.\begin{array}{l}\alpha_i\neq 0\\ \beta_i=0\end{array}\right\}$ x_i可控不可观测

$\left.\begin{array}{l}\alpha_i=0\\ \beta_i\neq 0\end{array}\right\}$ x_i不可控可观测

$\left.\begin{array}{l}\alpha_i=0\\ \beta_i=0\end{array}\right\}$ x_i不可控不可观测

$\Leftrightarrow \dfrac{0}{s-\lambda_i}$

传递函数中存在零极点对消

$\left.\begin{array}{l}\alpha_i\neq 0\\ \beta_i\neq 0\end{array}\right\}$ x_i可控可观测

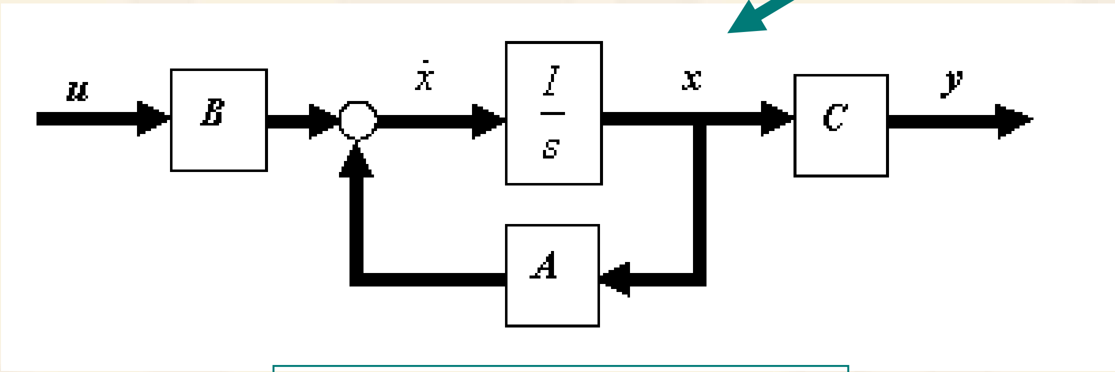
传递函数中没有零极点对消

$$\frac{0}{s-\lambda_1}+\frac{c_2}{s-\lambda_2}+\frac{c_3}{s-\lambda_3}=\frac{(s-\lambda_1)[c_2(s-\lambda_3)+c_3(s-\lambda_2)]}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)(s-\lambda_3)}$$

3.5　对偶原理

$$|\lambda I - A| = 0$$

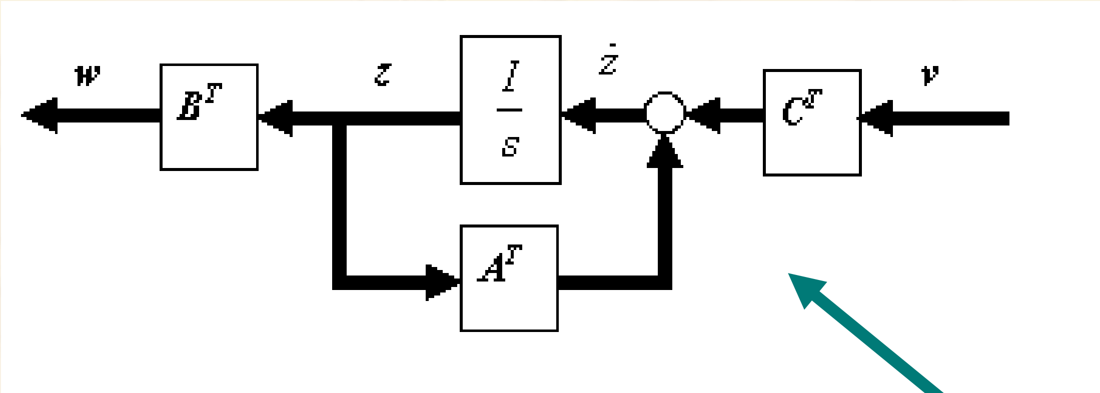
系统S_1的动态方程



$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

有相同的的特征值

系统S_2的动态方程



$$\dot{z} = A^T z + C^T v$$
$$w = B^T z$$

$$|\lambda I - A^T| = 0$$

$$G_2(s) = B^T(sI - A^T)^{-1}C^T = B^T[(sI - A)^T]^{-1}C^T$$

$$= B^T[(sI - A)^{-1}]^T C^T = [C(sI - A)^{-1}B]^T = G_1^T(s)$$

$$S_1 \quad \begin{cases} [B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B] \\ \left[C^T \quad A^TC^T \quad \cdots \quad (A^T)^{n-1}C^T\right]^T \end{cases}$$

$$S_2 \quad \begin{cases} \left[C^T \quad A^TC^T \quad \cdots \quad (A^T)^{n-1}C^T\right] \\ \left[(B^T)^T \quad (A^T)^T(B^T)^T \quad \cdots \quad [(A^T)^T]^{n-1}(B^T)^T\right]^T \end{cases}$$

$$= \left[B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B\right]^T$$

对偶原理：系统S_1的可控（可观测）条件与对偶系统S_2的可观测（可控）条件完全相同。

例

3.6 可控标准型与可观测标准型

Co:一个可控系统，当***A***，***b***不具有可控标准型时，可以选择适当的变换化为可控标准型。设系统状态方程为：

$$\dot{x} = Ax + bu$$

进行非奇异变换： $x = P\bar{x}$ ，变换为： $\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{b}u$

其中：

$$\bar{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \bar{b} = P^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

可控标准型变换阵P的确定方法：

（1）计算可控性判别矩阵：$Q_c=\begin{bmatrix} b & Ab & A^2b & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix}$

（2）计算 Q_c^{-1}，并设 Q_c^{-1} 的一般形式为：

$$Q_c^{-1}=\begin{bmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix}$$

（3）取 Q_c^{-1} 的最后一行，构成 P_1^{-1}， $P_1^{-1}=\begin{bmatrix} q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix}$

（4）按下列方式构造阵

$$P^{-1}=\begin{bmatrix} P_1^{-1} \\ P_1^{-1}A \\ \vdots \\ P_1^{-1}A^{n-1} \end{bmatrix}$$

（5） $P=(P^{-1})^{-1}$, P便是化可控标准型的非奇异变换阵。

【例3.6.1】已知系统的状态方程为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

试判别状态可控性，如可控将状态方程化为可控标准型。

解：（1）首先判别可控性

$$Q_c = [b \quad Ab] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad rankQ_c = 2$$

故系统是可控的。

（2）化可控标准型

① $Q_c = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ② $Q_c^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ③ $P_1^{-1} = [-1 \quad 1]$

④ $P^{-1} = \begin{bmatrix} P_1^{-1} \\ P_1^{-1} A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ⑤ $P = (P^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\bar{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = P^{-1}b = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

即有可控标准

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Ob:一个可观测系统，若其矩阵*A*，*C*不具有可观标准形形式，则定可选择适当非奇异线性变换化为可观标准形。

利用对偶原理，可以把可观测的**SISO**系统化为可观测标准型的问题转化为将其对偶系统化为可控标准型的问题。若一个系统$\Sigma_1(A, B, C)$可观测，但**A**、**C**不是可观测标准型，其对偶系统$\Sigma_2(A^*, B^*, C^*)$一定可控，但不具有可控标准型。可利用已知的化为可控标准型的原理和步骤，先将Σ_2化为可控标准型，再根据对偶原理，便可获得Σ_1的可观测标准型。

具体步骤如下**(1) ,(2),(3),(4),(5).**

（1）写出对偶系统 $\sum_2$ 的可控性判别矩阵

$$Q_c^* = \begin{bmatrix} B^* & A^* B^* & \cdots & A^{*n-1} B^* \end{bmatrix}$$

（2）求 Q_c^{*-1}，设一般形式为

$$Q_c^{*-1} = \begin{bmatrix} q_{11}^* & \cdots & q_{1n}^* \\ \vdots & & \vdots \\ q_{n1}^* & \cdots & q_{nn}^* \end{bmatrix}$$

（3）取 Q_c^{*-1} 的最后一行，构成 P_1^{*-1}，并构造 P^{*-1}

$$P^{*-1} = \begin{bmatrix} P_1^{*-1} \\ P_1^{*-1} A^* \\ \vdots \\ P_1^{*-1} A^{*n-1} \end{bmatrix}$$

（4）求 P^{*-1} 的逆阵 P^{*}。

P^{*} 阵便是把 $\sum_2$ 化为可控标准型的变换阵。

$$\dot{\bar{x}}^{*}=(P^{*-1}A^{*}P^{*})\bar{x}^{*}+(P^{*-1}B^{*})u^{*}\qquad y^{*}=(C^{*}P^{*})\bar{x}^{*}$$

（5）对 $\sum_2(A^{*},B^{*},C^{*})$ 再利用对偶原理，便可将

$\sum_1(A,B,C)$ 化为可观测标准型。

$$\dot{\bar{x}}=(P^{*-1}A^{*}P^{*})^{T}\,\bar{x}+(C^{*}P^{*})^{T}\,u$$

$$=(P^{*T}AP^{*-T})\bar{x}+(P^{*T}B)u$$

$$y=(P^{*-1}B^{*})^{T}\,\bar{x}=(CP^{*-T})\bar{x}$$

【例3.6.2】已知线性定常系统的动态方程为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u \qquad y=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}x$$

试判别可观测性。如可观测，写出可观测标准型。

解：

（1）$Q_o=\begin{bmatrix}C\\CA\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 1\end{bmatrix}$ $rankQ_o=2$，故系统状态完全可观测。

（2）求可观测标准型

①列写其对偶系统的可控性判别矩阵

$$A^*=A^T=\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} \qquad B^*=C^T=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \qquad C^*=B^T=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}$$

$$Q_c^*=\begin{bmatrix}B^* & A^*B^*\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 1\end{bmatrix}$$

②求 Q_c^{*-1}　$Q_c^{*-1}=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix}$

③构造 P^{*-1}　$P^{*-1}=\begin{bmatrix}P_1^{*-1}\\ P_1^{*-1}A^*\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{bmatrix}$

④求 P^*　$P^*=(P^{*-1})^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -2 & 1\end{bmatrix}$

⑤可观测标准型为

$$\dot{\bar{x}}=(P^{*T}AP^{*-T})\bar{x}+(P^{*T}B)u \qquad y=(CP^{*-T})\bar{x}$$

其中：$P^{*T}AP^{*-T}=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$　$P^{*T}B=\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}$　$CP^{*-T}=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}$

即

$$\dot{\bar{x}}=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{bmatrix}\bar{x}+\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}u \qquad y=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\bar{x}$$

3.7规范分解****

- 系统中只要有一个状态变量不可控便称系统不可控，那么不可控系统便含有可控和不可控两种状态变量；
- 只要有一个状态变量不可观测便称系统不可观测，那么不可观测系统便含有可观测和不可观测两种状态变量。
- 从可控性、可观测性角度出发，状态变量可
    - 分解成可控可观测状态变量 x_{co}
    - 可控不可观测状态变量 $x_{c\bar{o}}$
    - 不可控可观测状态变量 $x_{\bar{c}o}$
    - 不可控不可观测状态变量 $x_{\bar{c}\bar{o}}$
- 由相应状态变量作坐标轴构成的子空间也分成四类，并把系统也相应分成四类子系统，称为系统的规范分解。

一、系统按可控性的结构分解

设不可控线性定常系统为 $\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx$

其可控性判别矩阵的秩为**r(r<n)**　即 $rankQ_c = r < n$

则存在非奇异变换 $x = R_c \bar{x}$

将状态空间表达式变换为：$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u, y = \bar{C}\bar{x}$

其中：

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_c \\ \cdots\cdots \\ x_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{matrix} \}r \\ \\ \}(n-r) \end{matrix}$$

$$\bar{A} = R_c^{-1} A R_c = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} \bar{A}_{11} & \vdots & \bar{A}_{12} \\ \cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots \\ 0 & \vdots & \bar{A}_{22} \end{array}\right] \begin{matrix} \}r \\ \\ \}(n-r) \end{matrix} \\ \begin{matrix} \underbrace{\qquad}_{r} & \underbrace{\qquad}_{(n-r)} \end{matrix} \end{array}$$

$$\bar{B} = R_c^{-1} B = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \cdots\cdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \}\ r \\ \\ \}\ n-r \end{matrix}$$

$$\bar{C} = CR_c = \left[\underbrace{\bar{C}_1}_{r} \ \vdots \ \underbrace{\bar{C}_2}_{(n-r)} \right]$$

r

非奇异变换阵 $R_c = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 & \cdots & R_r & R_{r+1} & \cdots & R_n \end{bmatrix}$ 中的

n个列向量可按如下方法构造：

前***r***个列向量 $R_1, R_2, \cdots, R_r$ 是可控性判别矩阵

$$Q_c = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

中的***r***个线性无关的列；另外(***n-r***)个列向量 $R_{r+1}, \cdots, R_n$ 在确保

R_c 为非奇异的条件下任意选择。

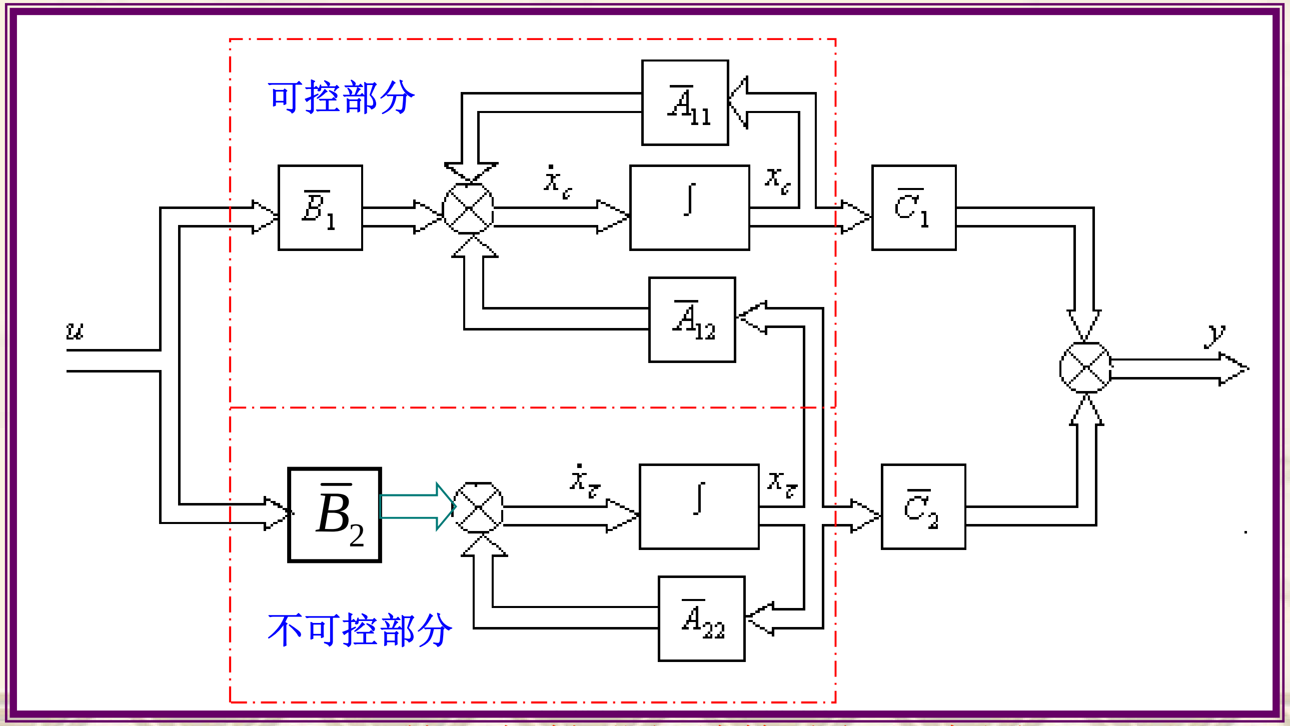
将变换后的动态方程展开，有

$$\dot{x}_c = \bar{A}_{11} x_c + \bar{A}_{12} x_{\bar{c}} + \bar{B}_1 u \qquad \dot{x}_{\bar{c}} = \bar{A}_{22} x_{\bar{c}}$$

$$y = \bar{C}_1 x_c + \bar{C}_2 x_{\bar{c}}$$

即　可控子系统动态方程为：
$$\dot{x}_c = \overline{A}_{11}x_c + \overline{A}_{12}x_{\bar{c}} + \overline{B}_1 u$$
$$y_1 = \overline{C}_1 x_c$$

不可控子系统动态方程为：
$$\dot{x}_{\bar{c}} = \overline{A}_{22}x_{\bar{c}}$$
$$y_2 = \overline{C}_2 x_{\bar{c}}$$



按可控性进行结构分解示意图

【例3.7.1】设线性定常系统

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & -3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}u,\qquad y=\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\end{bmatrix}x$$

判别可控性。若系统不可控，将系统按可控性进行规范分解。

解：

（1）判别可控性

$$Q_c=\begin{bmatrix}b & Ab & A^2b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & -3\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix},\qquad rankQ_c=2<n$$

故系统不完全可控。

（2）构造按可控性进行规范分解的非奇异变换阵 R_c

$$R_c=\begin{bmatrix}R_1 & R_2 & R_3\end{bmatrix}\qquad R_1=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix},\quad R_2=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix},\quad R_3=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

故而

$$R_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

变换后系统的动态方程为： $\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u, y = \bar{C}\bar{x}$

式中：

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_c \\ x_{\bar{c}} \end{bmatrix} \qquad \bar{A} = R_c^{-1}AR_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:c} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ \hdashline 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

$$\bar{B} = R_c^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \hdashline 0 \end{array}\right]$$

$$\bar{C} = CR_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:c} 1 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

可控子系统动态方程：

$$\dot{x}_c=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & -2\end{bmatrix}x_c+\begin{bmatrix}-1\\ -2\end{bmatrix}\overline{x}_{\bar{c}}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u,\qquad y_1=\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}x_c$$

不可控子系统动态方程：

$$\dot{x}_{\bar{c}}=-x_{\bar{c}},\qquad y_2=-2x_{\bar{c}}$$

为了说明在构造变换阵 R_c 时，$R_{r+1},\cdots,R_n$ 列是任意选取的（当然必须保证 R_c 为非奇异），现取 $R_c=\begin{bmatrix}R_1 & R_2 & R_3\end{bmatrix}$ 中的 $R_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}^T$，即

$$R_c=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\dot{\overline{x}}=\overline{A}\overline{x}+\overline{B}u,\qquad y=\overline{C}\overline{x}$$

式中：

$$\bar{x}=\begin{bmatrix} x_c \\ x_{\bar{c}} \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}=R_c^{-1}AR_c=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc:c} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \\ \hdashline 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

$$\bar{B}=R_c^{-1}B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \hdashline 0 \end{array}\right]$$

$$\bar{C}=CR_c=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc:c} 1 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

即有

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_c \\ x_{\bar{c}} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}u \qquad y=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_c \\ x_{\bar{c}} \end{bmatrix}$$

二、系统按可观测性的结构分解

设不可观测线性定常系统为 $\dot{x}=Ax+Bu, \quad y=Cx$，其可观测性判别矩阵 Q_0的秩为$r(\ r<n)$，即$rank\ Q_0=r<n$ 则存在非奇异变换

$$x=R_o\bar{x}$$

将状态空间表达式变换为：$\dot{\bar{x}}=\bar{A}\bar{x}+\bar{B}u, \quad y=\bar{C}\bar{x}$

其中：

$$\bar{x}=\begin{bmatrix} x_o \\ \cdots\cdots \\ x_{\bar{o}} \end{bmatrix}\begin{matrix} \}r \\ \\ \}(n-r) \end{matrix}$$

$$\bar{A}=R_o^{-1}AR_o=\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c:c} \bar{A}_{11} & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{array}\right]\begin{matrix} \}r \\ \\ \}(n-r) \end{matrix} \\ \begin{matrix} \underbrace{\quad}_{r} & \underbrace{\quad}_{(n-r)} \end{matrix} \end{array}$$

$$\bar{B}=R_o^{-1}B=\begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \cdots\cdots \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix}\begin{matrix} \}r \\ \\ \}(n-r) \end{matrix}$$

$$\bar{C}=CR_o=[\underbrace{\bar{C}_1}_{r} \ \vdots \ \underbrace{0}_{(n-r)}]$$

非奇异线性变换阵可这样构造：

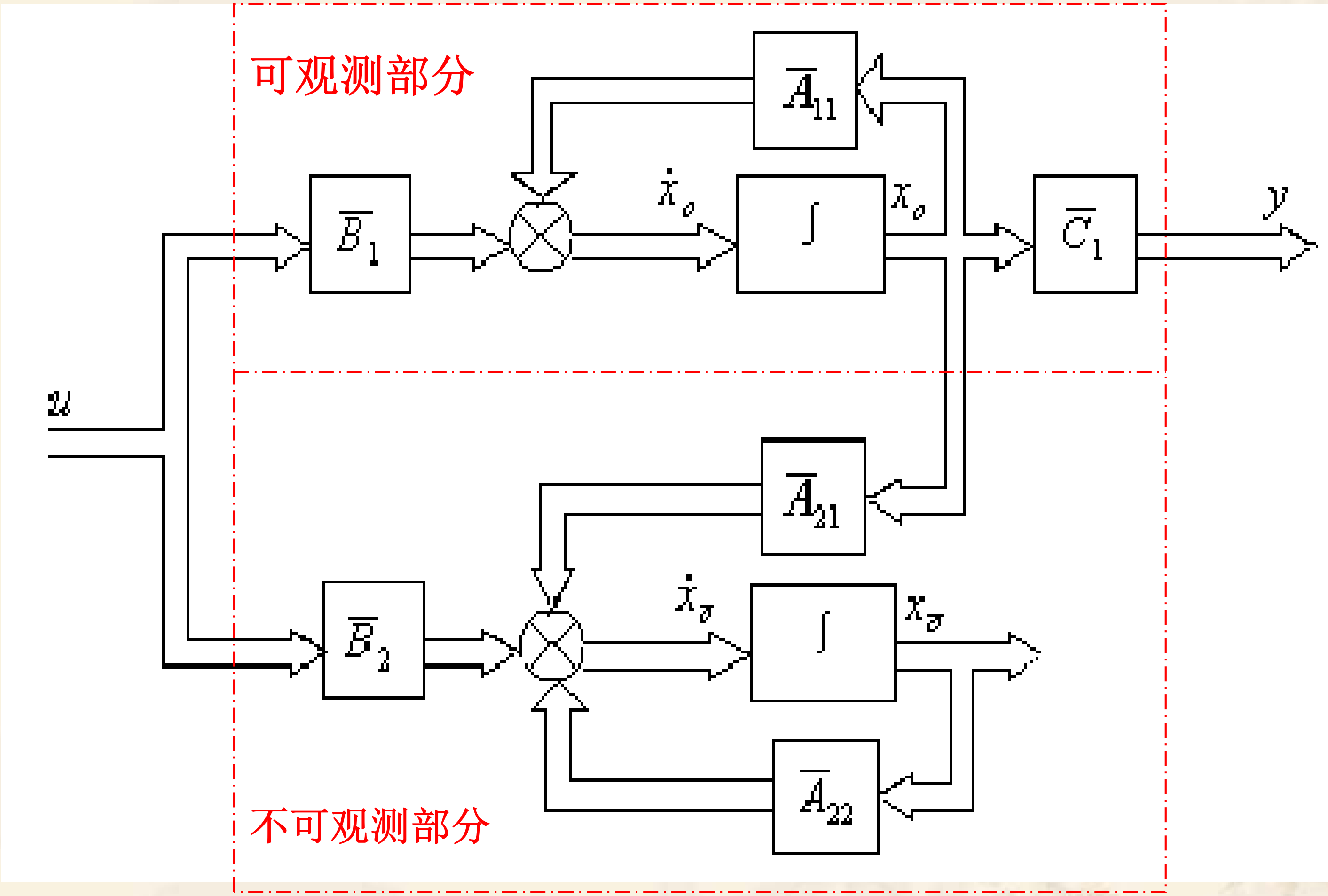
$$R_o^{-1} = \begin{bmatrix} R_1^T \\ \vdots \\ R_r^T \\ R_{r+1}^T \\ \vdots \\ R_n^T \end{bmatrix}$$

R_0^{-1}中的前r个向量$R_1^T, \ldots, R_r^T$，为可观测性判别矩阵Q_0中的r个线性无关的行。另外(n-r)个行向量$R_{r+1}^T, \ldots, R_n^T$在确保R_0^{-1}是非奇异的条件下完全是任意选取的。

可见，经上述变换后系统的分解为可观测的维子系统和不可观测的 **(n - r)** 维子系统。

可观测子系统： $\dot{x}_o = \overline{A}_{11} x_o + \overline{B}_1 u, y_1 = \overline{C}_1 x_o$

不可观测子系统： $\dot{x}_{\bar{o}} = \overline{A}_{21} x_o + \overline{A}_{22} x_{\bar{o}} + \overline{B}_2 u \qquad y_2 = 0$



按可观测性进行结构分解示意图

【例3.7.2】设线性定常系统

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&0&-1\\1&0&-3\\0&1&-3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}u,\qquad y=\begin{bmatrix}0&1&-2\end{bmatrix}x$$

判别可观测性。若系统不可观测，将系统按可观测性进行规范分解。

解：

（1）判别可观测性

$$Q_o=\begin{bmatrix}c\\cA\\cA^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&-2\\1&-2&3\\-2&3&-4\end{bmatrix}\qquad rankQ_o=2<n$$ ，故系统不可观测。

（2）构造非奇异变换阵 R_o。取

$$R_o^{-1}=\begin{bmatrix}R_1^T\\R_2^T\\R_3^T\end{bmatrix}\qquad R_1^T=\begin{bmatrix}0&1&-2\end{bmatrix}\qquad R_2^T=\begin{bmatrix}1&-2&3\end{bmatrix}$$

在保证 R_o^{-1} 非奇异的条件下，任取 $R_3^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$R_o^{-1} = \begin{bmatrix} R_1^T \\ R_2^T \\ R_3^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_o = (R_o^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

于是 $\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u, y = \bar{C}\bar{x}$

即
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_o \\ \dot{x}_{\bar{o}} \end{bmatrix} = R_o^{-1}AR_o \begin{bmatrix} x_o \\ x_{\bar{o}} \end{bmatrix} + R_o^{-1}Bu = \left[\begin{array}{cc:c} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ \hdashline 1 & 0 & -1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_o \\ x_{\bar{o}} \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ \hdashline 0 \end{array}\right] u \qquad y = \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_o \\ x_{\bar{o}} \end{bmatrix}$$

可观测子系统为： $\dot{x}_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} x_o + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_o$

不可观测子系统为： $\dot{x}_{\bar{o}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_o - x_{\bar{o}}$

三、按可控性和可观测性分解

若线性定常系统 $\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx$

其状态不完全可控、不完全可观测，则存在非奇异变换

$$x = R\bar{x}$$

将原状态空间表达式变换为：$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u, y = \bar{C}\bar{x}$

其中：

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_{co} \\ x_{c\bar{o}} \\ x_{\bar{c}o} \\ x_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} \qquad \bar{A} = R^{-1}AR = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = R^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \bar{C} = CR = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & C_2 & 0 \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_{co}\\ \dot{x}_{c\bar{o}}\\ \dot{x}_{\bar{c}o}\\ \dot{x}_{\bar{c}\bar{o}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11} & 0 & A_{13} & 0\\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24}\\ 0 & 0 & A_{33} & 0\\ 0 & 0 & A_{43} & A_{44}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{co}\\ x_{c\bar{o}}\\ x_{\bar{c}o}\\ x_{\bar{c}\bar{o}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\\ 0\\ 0\end{bmatrix}u \qquad y=\begin{bmatrix}C_1 & 0 & C_2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{co}\\ x_{c\bar{o}}\\ x_{\bar{c}o}\\ x_{\bar{c}\bar{o}}\end{bmatrix}$$

可见，只要确定了变换矩阵***R***，只需经过一次变换便可对系统同时按可控性和可观测性进行结构分解。但***R***的构造涉及较多线性空间的概念，比较麻烦，可用如下步骤分解：

第一步：将系统$\sum(A,B,C)$按可控性分解。

第二步：把可控子系统$\sum_C$按可观测性分解。

第三步：把不可控子系统$\sum_{\bar{c}}$按可观测性分解。

第四步：综合上述三次变换，导出系统同时按可控性和可观测性进行结构分解的表达式。

End of Chapter 3