《高等数学BI》复习题2答案

一	二	三	四	五	总分

得 分

一、选择题（共6道小题，每小题 3分，满分18分）.

1．设函数 $f(x), g(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内连续,且当 $x\to 0$ 时, $f(x)$ 是 $g(x)$ 的高阶无穷小,则当 $x\to 0$ 时, $\int_0^x f(t)\sin t\mathrm{d}t$ 是 $\int_0^x g(t)t\mathrm{d}t$ 的（ B ）.

(A) 低阶无穷小　　(B)高阶无穷小

(C) 同阶但不等价无穷小　　(D)等价无穷小

2．设函数 $f(x)=\begin{cases} x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x}, & x>0, \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处有连续的一阶导数，则（ D ）.

(A) $\alpha>0$　　(B) $\alpha>1$　　(C) $\alpha\ge 2$　　(D) $\alpha>2$

3．曲线 $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-2x-3}$ 有（ A ）.

(A)一条水平渐近线,一条铅直渐近线

(B)一条水平渐近线,两条铅直渐近

(C)两条水平渐近线,一条铅直渐近线

(D)没有水平渐近线,两条铅直渐近线

4. 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数，$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$，则在区间 $[0,1]$ 上（ D）.

(A)当 $f'(x)\ge 0$ 时， $f(x)\ge g(x)$

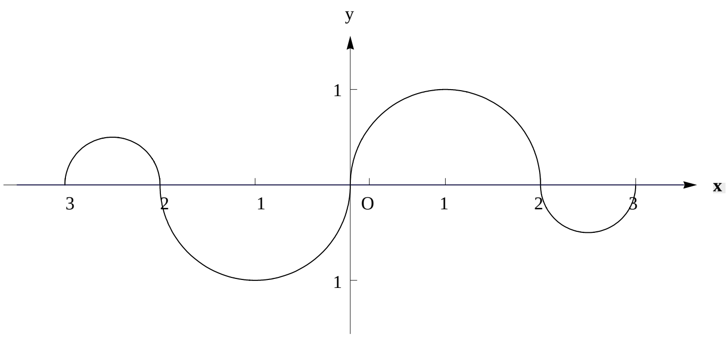
(B)当 $f'(x)\ge 0$ 时， $f(x)\le g(x)$

(C)当 $f''(x)\ge 0$ 时， $f(x)\ge g(x)$

(D)当 $f''(x)\ge 0$ 时， $f(x)\le g(x)$

5．如图，连续函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-3,-2]$、$[2,3]$ 上的图形分别是直径为 1 的上、

下半圆周，在区间 $[-2,0]$、$[0,2]$ 上图形分别是直径为 2 的下、上半圆周，设 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则下列结论正确的是(　　C).



（A）$F(3)=-\dfrac{3}{4}F(-2)$　　　　（B）$F(3)=\dfrac{5}{4}F(2)$

（C）$F(-3)=\dfrac{3}{4}F(2)$　　　　（D）$F(-3)=-\dfrac{5}{4}F(-2)$

6.若反常积分 $\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{-kx}\mathrm{d}x$ 收敛，则必有(　　B　　).

(A) $k>0$　　(B) $k<0$　　(C) $k\ge 0$　　(D) $k\le 0$

得 分

二、填空题（共 6 小题，每小题 3 分，满分 18 分）.

1．若曲线 $y=x^3+ax^2+bx+1$ 有拐点 $(-1,0)$，则 $b=$__3____.

2．$\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=$_____ e^{6} ____________.

3．曲线 $\tan(x+y+\dfrac{\pi}{4})=\mathrm{e}^{y}$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为_____y=-2x_____________.

4．设 $f(x)=\sin^2 x$，则 $f^{(n)}(x)=$ _$2^{n-1}\sin(2x+\dfrac{n-1}{2}\pi)$_________.

5．$\int_{-1}^{1}\left(\dfrac{1+\sin x}{1+x^2}+|x|\right)\mathrm{d}x=$_____$1+\dfrac{\pi}{2}$ ______.

6．空间曲线 $C:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4,\\ y=z\end{cases}$ 在 xoz 平面上的投影曲线_____$\begin{cases}x=0\\ y=z\end{cases}$______.

得 分

三、 解答题（共 6 道题，每小题 8 分，满分 48 分）.

1. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1-\mathrm{e}^{-x}}-\dfrac{1}{x}\right)$.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2-1+e^{-x}}{(1-e^{-x})x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2-1+e^{-x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+2x-e^{-x}}{2x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2+e^{-x}}{2}=\frac{3}{2}$$

2. 已知 $y=y(x)$ 是由参数方程 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2), \\ y=t-\arctan t \end{cases}$ 所确定的函数，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$， $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{t^2}{2t}=\frac{t}{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{1+t^2}{4t}$$

3. 计算不定积分 $\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解 令 $\sqrt[3]{x}=t, x=t^3, \mathrm{d}x=3t^2\mathrm{d}t$

$$\int \mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x=\int \mathrm{e}^t\cdot 3t^2\mathrm{d}t=3\int t^2\mathrm{d}\mathrm{e}^t=3\mathrm{e}^t t^2-6\int \mathrm{e}^t\cdot t\mathrm{d}t$$
$$=3\mathrm{e}^t t^2-6\int t\mathrm{d}\mathrm{e}^t$$
$$=3\mathrm{e}^t t^2-6t\mathrm{e}^t+6\int \mathrm{e}^t\mathrm{d}t$$
$$=3\mathrm{e}^t t^2-6t\mathrm{e}^t+6\mathrm{e}^t+C$$
$$=3\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}\sqrt[3]{x^2}-6\sqrt[3]{x}\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}+6\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}+C$$

4. 设 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<0, \\ x, & x\geq 0. \end{cases}$ 求 $F(x)=\int_{-1}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[-1,1]$ 上的表达式.

$-1\leq x<0$ 时，$F(x)=\int_{-1}^{x}(t+1)\mathrm{d}t=\left.\dfrac{t^2}{2}\right|_{-1}^{x}+(x+1)$

$$=\frac{x^2+2x+1}{2}=\frac{(x+1)^2}{2}$$

$0\leq x\leq 1$ 时，$F(x)=\int_{-1}^{0}(t+1)\mathrm{d}t+\int_{0}^{x}t\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}+\dfrac{x^2}{2}$

5．求曲线 $y=\sqrt{x}\ \left(0\leq x\leq 4\right)$ 上的一条切线，使该切线与直线 $x=0$， $x=4$ 以及曲线 $y=\sqrt{x}$ 所围成的平面图形的面积最小.

解 设 $\left(x_0,y_0\right)$ 为曲线 $y=\sqrt{x}\ \left(0\leq x\leq 4\right)$ 上任一点，易得曲线于该点处的切线方程为：$y-y_0=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}\left(x-x_0\right)$ 即 $y=\dfrac{y_0}{2}+\dfrac{x}{2\sqrt{x_0}}$

得其与 $x=0$， $x=4$ 的交点分别为 $\left(0,\dfrac{y_0}{2}\right)$，$\left(4,\dfrac{y_0}{2}+\dfrac{2}{y_0}\right)$

于是由此切线与直线 $x=0$， $x=4$ 以及曲线 $y=\sqrt{x}$ 所围的平面图形面积为：

$$S=\int_0^4\left(\frac{y_0}{2}+\frac{x}{2\sqrt{x_0}}-\sqrt{x}\right)dx=2y_0+\frac{4}{\sqrt{x_0}}-\frac{16}{3}$$

$$=2\sqrt{x_0}+\frac{4}{\sqrt{x_0}}-\frac{16}{3}$$

问题即求 $S=2\sqrt{x}+\dfrac{4}{\sqrt{x}}-\dfrac{16}{3}\ \left(0\leq x\leq 4\right)$ 的最小值

令 $S=x^{-\frac{1}{2}}+2x^{-\frac{3}{2}}=0$ 得唯一驻点 $x=2$ 且为唯一极小值

所以 当 $x=2$ 时，S 最小

即所求切线即为：$y=\dfrac{x}{2\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

6. 求过直线 $L_1:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z+2}{-2}$，且平行于直线 $L_2:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{-2}$ 的平面方程.

平面法向量

$$n=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}=(-1,0,-1)=-(1,0,1)$$

平面方程为

$$1\times(x-2)+0\times(y-1)+1\times(z+2)=0$$

即$x+z=0$.

得 分

四、（本题满分 10 分）.

设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\varphi(x)-\cos x}{x}, & x\neq 0, \\ a, & x=0, \end{cases}$ 其中 $\varphi(x)$ 具有二阶连续导数, $\varphi(0)=1$.

(1) 求 a 的值, 使 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续;

(2) 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续, 求 $f'(x)$ 并讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 的连续性.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varphi(x)-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(\varphi'(x)+\sin x)=\varphi'(0)$

故当 $a=\varphi'(0)$ 时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

(2) $x\neq 0$ 时 $f'(x)=\dfrac{x[\varphi'(x)+\sin x]-[\varphi(x)-\cos x]}{x^2}$

$x=0$ 时

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\varphi(x)-\cos x}{x}-\varphi'(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)-\cos x-x\varphi'(0)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi'(x)+\sin x-\varphi'(0)}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi''(x)+\cos x}{2}=\frac{1}{2}[\varphi''(0)+1]$$

$$\lim_{x\to 0} f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x[\varphi'(x)+\sin x]-[\varphi(x)-\cos x]}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x[\varphi''(x)+\cos x]}{2x}=\frac{1}{2}[\varphi''(0)+1]=f'(0)$$

$f'(x)$ 在 $x=0$ 的连续.

得 分

五、（本题满分 6 分） 已知 $f'(x)$ 连续, 且当 $x\ge 0$ 时，恒有 $f'(x)>0$.

证明当 $0<a<b$ 时， $\int_a^b tf(t)\mathrm{d}t>\frac{1}{2}[b\int_0^b f(t)\mathrm{d}t-a\int_0^a f(t)\mathrm{d}t]$.

解　令 $F(x)=\int_a^x tf(t)\,\mathrm{d}\,t-\frac{1}{2}[x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-a\int_0^a f(t)\mathrm{d}t], F(a)=0$.

$$F'(x)=xf(x)-\frac{1}{2}\int_0^x f(t)dt-\frac{1}{2}xf(x)=\frac{1}{2}[xf(x)-\int_0^x f(t)dt]$$
$$=\frac{1}{2}[\int_0^x f(x)dt-\int_0^x f(t)dt]=\frac{1}{2}\int_0^x[f(x)-f(t)]dt.$$

由 $f'(x)>0$ 知函数 $f(x)$ 单调递增, 当 $x>t$ 有, $f(x)-f(t)>0$, 有 $F'(x)>0$ 函数 $F(x)$ 单调递增, 当 $0<a<b$ 时， $F(b)>F(a)=0$

$$F(b)=\int_a^b tf(t)\,\mathrm{d}\,t-\frac{1}{2}[b\int_0^b f(t)\mathrm{d}t-a\int_0^a f(t)\mathrm{d}t]>0.$$

即

$$\int_a^b tf(t)\mathrm{d}t>\frac{1}{2}[b\int_0^b f(t)\mathrm{d}t-a\int_0^a f(t)\mathrm{d}t].$$