计算机控制系统

线性离散状态空间

——选自第7.1节 线性离散系统状态空间

2022年5月

现代控制的应用

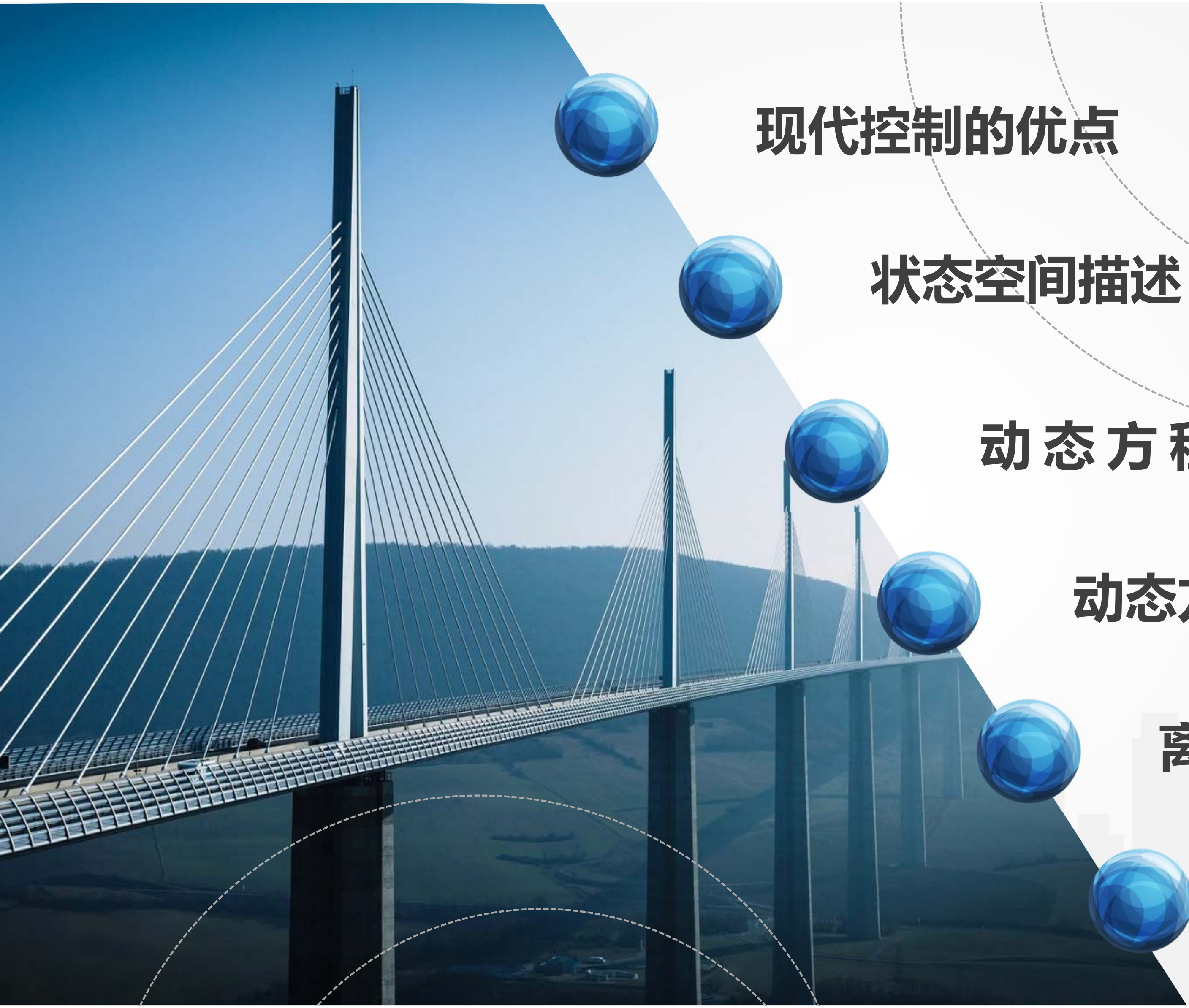
陈枫. 基于视觉的四旋翼飞行系统设计[D]. 杭州电子科技大学, 2016.

现代控制的应用

Caverly R J, Forbes J R. Flexible Cable-Driven Parallel Manipulator Control: Maintaining Positive Cable Tensions[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2017, PP(99):1-10.

现代控制的应用

Wang L, Zhang W, Peng K. Adaptive Integrated Guidance and Autopilot for Hypersonic Glider[C]// 中国控制会议. 2017:11414-11419.



- 现代控制的优点
- 状态空间描述
- 动态方程与差分方程
- 动态方程与脉冲传函
- 离散动态方程求解
- 应用举例

01

现代控制的优点

单选题 2分

设置

此题未设置答案，请点击右侧设置按钮

关于经典控制理论，下面说法正确的是

A 不可以很好的反应系统内部的变化

B 不能很好的处理多输入系统的问题

C 不能处理任意初始条件的系统控制

D 以上说法都不对

提交

脉冲传递函数

零初始条件下，系统输出的Z变换与输入Z变换之比，称为脉冲传递函数。可表示为 $G(z)=\dfrac{Y(z)}{U(z)}$

- 对初始条件有限制 零初
- 只适用于单输入单输出系统 MIMO
- 只有输入输出信息，看不到系统内部状态的变化情况

无法确定最优

02

状态空间描述

状态： 系统在时间域内的动态行为或运动信息的集合。

极大无关组

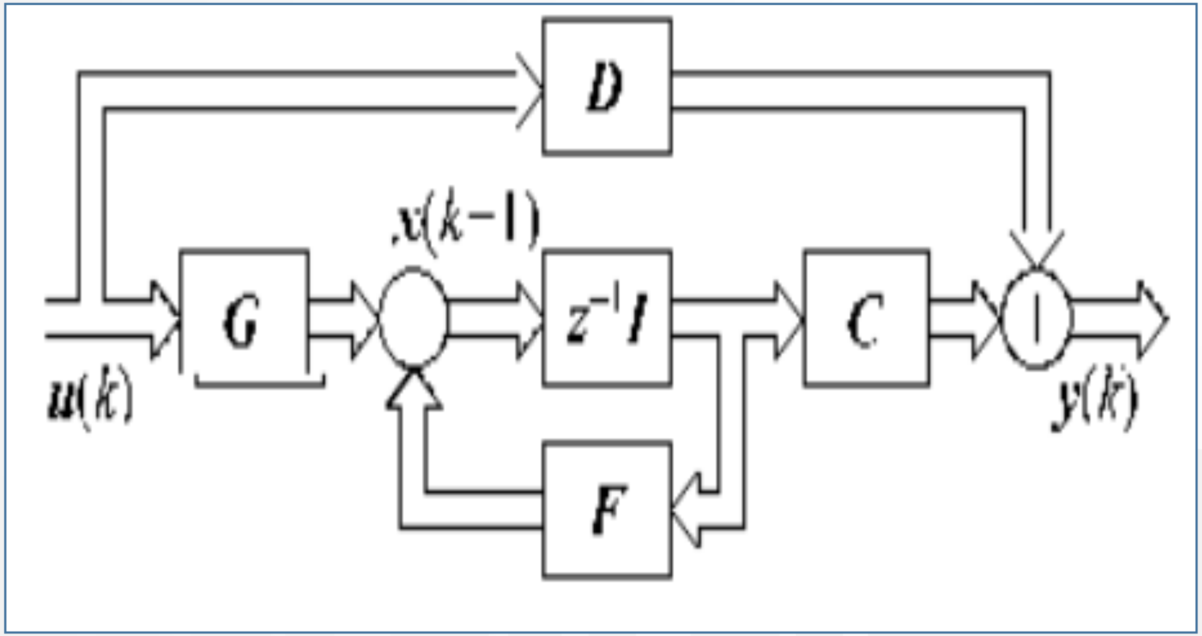
状态变量： 能够完全描述系统所用的相对独立且数目最少的一组状态。

状态向量： 如果完全描述一个给定系统的动态行为需要n个状态变量，那么可将这些状态变量看作是向量的各个分量，写成

$$\mathbf{x}(k)=[x_1(k)\quad x_2(k)\quad \cdots \quad x_n(k)]^T$$

状态空间： 以n维状态变量的各个分量作为基底所形成的n维空间。

➢用状态方程和输出方程来描述系统的方法称为状态空间描述。**状态方程**和**输出方程**也被统称为**动态方程**。



对于线性定常离散系统，其动态方程可以表示为

$$\boldsymbol{x}(k+1)=A\boldsymbol{x}(k)+B\boldsymbol{u}(k);\boldsymbol{x}(0)$$

$$\boldsymbol{y}(k)=C\boldsymbol{x}(k)+D\boldsymbol{u}(k)$$

动态方程

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = A\boldsymbol{x}(k) + B\boldsymbol{u}(k) \\ \boldsymbol{y}(k) = C\boldsymbol{x}(k) + D\boldsymbol{u}(k) \end{cases}$$

$\Downarrow \Uparrow$

脉冲传递函数

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

03...

动态方程与差分方程

给定如下的单输入-单输出线性定常离散系统的差分方程

$$y(k+n)+a_{n-1}y(k+n-1)+\cdots+a_1y(k+1)+a_0y(k)=b_0u(k)$$

式中，*k*表示*kT*时刻；*T*为采样周期；*y*(*k*)，*u*(*k*)分别为*kT*时刻的输出量和输入量，可以如下选取状态变量

$$x_1(k)=y(k) \qquad x_2(k)=y(k+1) \quad \cdots \quad x_n(k)=y(k+n-1)$$

可得如下所示的动态方程

状态方程
输出方程

$$x_1(k+1)=x_2(k) \quad x_2(k+1)=x_3(k) \quad \cdots \quad x_{n-1}(k+1)=x_n(k)$$

$$x_n(k+1)=-a_0x_1(k)-a_1x_2(k)-\cdots-a_{n-1}x_n(k)+b_0u(k)$$

$$y(k)=x_1(k)$$

04...

动态方程与脉冲传函

04 动态方程与脉冲传函

动态方程

- **状态方程** $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$
- **输出方程** $y(k) = Cx(k) + Du(k)$

零初始条件下，系统输出的Z变换与输入Z变换之比，称为脉冲传递函数。

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

$$u(k) \to U(z)$$
$$x(k) \to X(z)$$
$$y(k) \to Y(z)$$
$$x(k+1) \to zX(z)$$

$$X(z) = (zI - A)^{-1} BU(z)$$
$$Y(z) = CX(z) + DU(z)$$

$$Y(z) = C(zI - A)^{-1} BU(z) + DU(z)$$

$$\boxed{G(z) = C(zI - A)^{-1} B + D}$$

05

离散动态方程求解

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

1)迭代法

如果已知 $k=0$ 时状态$x(0)$及 $k=0 \to k$ 之间各个时刻的输入量 $u(0),u(1),\cdots;u(k)$ ，求得现时刻k的状态：

$$x(k) = \underbrace{A^k x(0)}_{\text{通解}} + \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} Bu(j)}_{\text{特解}}$$

$$x(k+1)=Ax(k)+Bu(k)$$

2) z变换法

$$zX(z)-zx(0)=AX(z)+BU(z)$$

$$X(z)=(zI-A)^{-1}[zx(0)+BU(z)]$$

$$x(k)=Z^{-1}[(zI-A)^{-1}z]x(0)+Z^{-1}[(zI-A)^{-1}BU(z)]$$

- 以上两式比较可得

$$A^k=Z^{-1}[(zI-A)^{-1}z]$$

06
应用举例

计算该系统的脉冲传函

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.1 \\ -0.4 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + u(k) \end{cases}$$

结论1：状态方程中A的特征值就是系统的极点。

$$G(z) = C(zI - A)^{-1}B + D \rightarrow G(z) = C\frac{(zI - A)^*}{|zI - A|}B + D$$

$$G(z) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} z & \\ & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -0.8 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} -0.1 \\ -0.4 \end{bmatrix} + 1$$

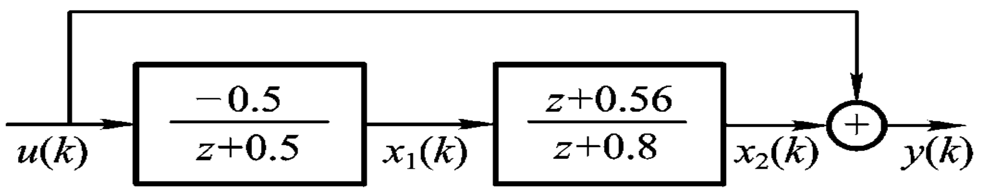
$$G(z) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{z+0.5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z+0.8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.1 \\ -0.4 \end{bmatrix} + 1$$

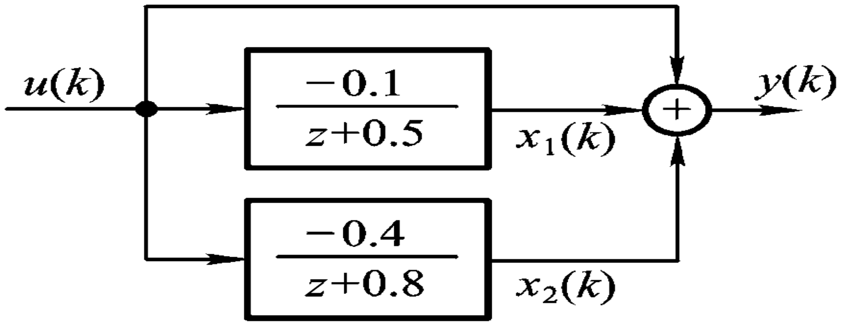
$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^2 + 0.8z + 0.12}{(z+0.5)(z+0.8)}$$

计算该系统的动态方程

$$G(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{z^2+0.8z+0.12}{(z+0.5)(z+0.8)}$$

$$G(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=1+\frac{-0.5z-0.28}{(z+0.5)(z+0.28)}=\begin{cases}1+\dfrac{-0.5}{z+0.5}\cdot\dfrac{z+0.56}{z+0.8}\\[2ex] 1+\dfrac{-0.1}{z+0.5}+\dfrac{-0.4}{z+0.8}\end{cases}$$





串联法

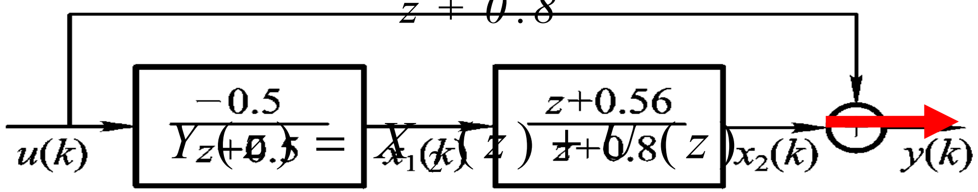
$$1+\frac{-0.5}{z+0.5}\bullet\frac{z+0.56}{z+0.8}$$

$$X_1(z)=\frac{-0.5}{z+0.5}U(z) \rightarrow x_1(k+1)=-0.5x_1(k)-0.5u(k)$$

$$X_2(z)=\frac{z+0.56}{z+0.8}X_1(z) \rightarrow x_2(k+1)=-0.8x_2(k)+x_1(k+1)+0.56x_1(k)$$

$$=0.06x_1(k)-0.8x_2(k)-0.5u(k)$$

$$\rightarrow y(k)=x_2(k)+u(k)$$



$$G(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{z^2+0.8z+0.12}{(z+0.5)(z+0.8)}$$

串联法

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0.06 & -0.8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix}u(k)$$

$$y(k)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}+u(k)$$

并联法

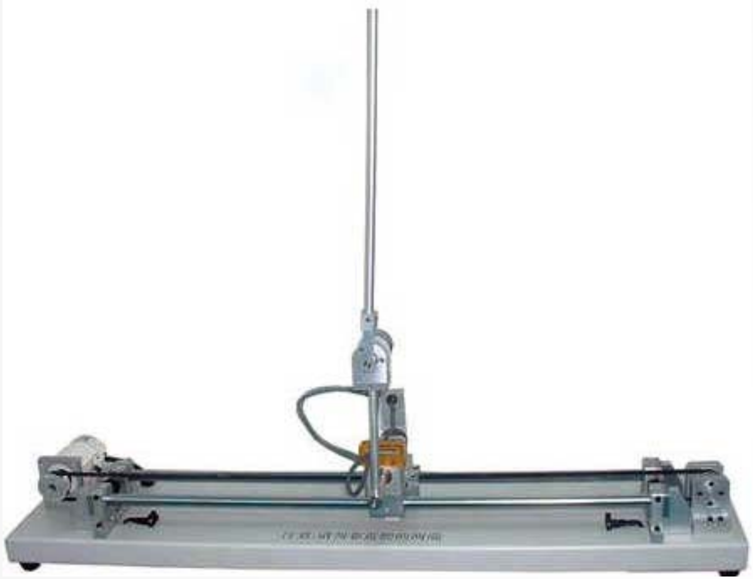
$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -0.8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -0.1 \\ -0.4 \end{bmatrix}u(k)$$

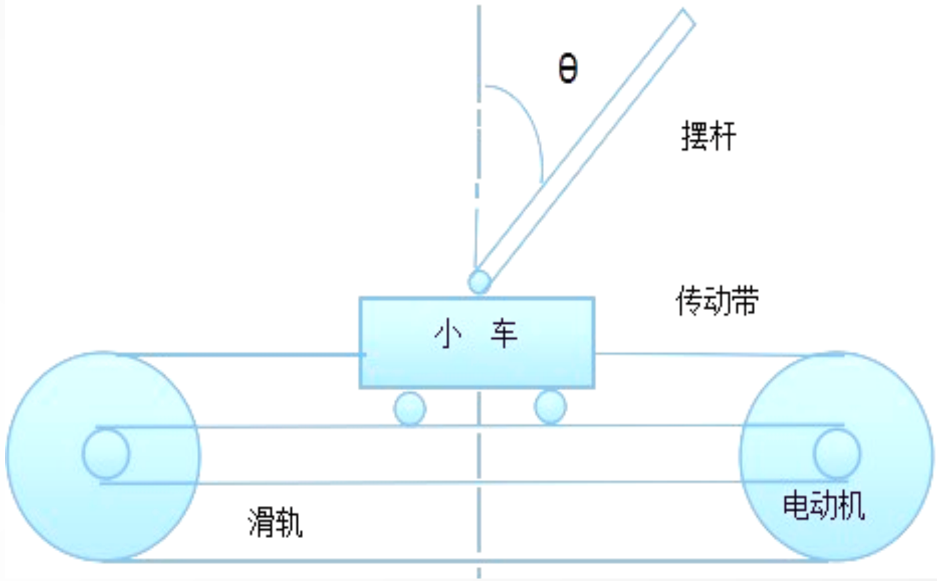
$$y(k)=\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}+u(k)$$

结论2：同一系统，选择**不同**的状态变量，可获得**不同**的动态方程。

结论3：状态变量，选取**不唯一**。

小车倒立摆系统





质量0.1kg，杆长1m的倒立摆，位于质量为1kg的小车上，小车受电机操纵，采样周期T取1秒。请**独立**将系统的脉冲传递函数转换成动态方程；然后**小组成员间讨论和比较**各自的模型及所用转换方法。

小结

一个公式

$$G(z)=C(zI-A)^{-1}B+D$$

两个方程

- **状态方程** $x(k+1)=Ax(k)+Bu(k)$
- **输出方程** $y(k)=Cx(k)+Du(k)$

三个结论

- 结论1：状态方程中A的特征值就是系统的极点。
- 结论3：状态变量，选取不唯一。
- 结论2：同一系统，选择不同的状态变量，可获得不同的动态方程。

附 参考资料

参考书籍

李元春《计算机控制系统》高等教育出版社；

高金源《计算机控制系统》高等教育出版社。

胡寿松《自动控制原理》第9.1节。

相关资料

杨燕. 一级倒立摆系统的快速稳定方法研究[J]. 自动化与仪器仪表, 2015(10):166-168.

Salehian S S M, Billard A. A Dynamical System Based Approach for Controlling Robotic Manipulators During Non-contact/Contact Transitions[J]. IEEE Robotics & Automation Letters, PP(99):1-1.

谢谢！

2022年5月