复变函数

Date. Page.

一、基础知识

1. 解析 ⇄ 可导 ⇄ 连续 ⇄ 极限存在

$f(z)$在z_0及z_0的邻域上处处可导

$f'(z_0)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$ 一般对点而言

* 函数在区域上可导 $\overset{\text{等价}}{=}$ 函数在区域内解析

2. 函数 $f(z)=u+vi$ 在 $z=x+yi$ 处可导

$\Longleftrightarrow$ 满足柯西-黎曼(C-R)方程

$\Delta u = A\Delta x - B\Delta y+\rho_1\Delta x+\rho_2\Delta y$

$\Delta v = B\Delta x + A\Delta y+\rho_3\Delta x+\rho_4\Delta y$

即 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$，且

$(f'(z)=A+Bi)$

3. 复变函数求导法则与实函数一致

定义：$f'(z_0)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$

四则运算

4. 常见的求导等式 *对于其它函数，只能使用定义法试求，而不能套实函数公式

$$\begin{cases}(z^n)'=n\cdot z^{n-1} \quad [kf(z)]'=kf'(z)\\ (e^z)'=e^z\\ (\sin z)'=\cos z\\ (\cos z)'=-\sin z\end{cases}$$

5. $\lim\limits_{z\to 0}\frac{1}{z}=\infty \xleftrightarrow{\text{区分}} \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$ 极限不存在

6. $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\frac{1}{z}}{\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}}=\frac{z^2}{z+1}$（与实函数同）

广泛用于证明 *7. $\left|\int_c f(z)dz\right| \le \int_c |f(z)|ds$ *用求积式子的方向

* 若C上有$|f(z)|\le M$（$f(z)$有界解析）证明

则有$\left|\int_c f(z)dz\right|\le ML_c$

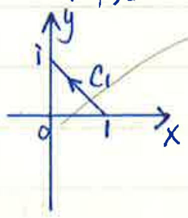
二、积分

1. 化定积分($dz\to dx+idy$)

$\int_c f(z)dz=\int_c (u+vi)(dx+idy)$

$=\underbrace{\int_c udx-vdy}+i\underbrace{\int_c vdx+udy}$ 分为实部分和虚部分积分

ex1: 计算$\int_c \bar{z}dz$，其中C是从点1到i的直线段



$\begin{cases}x=x\\ y=-x+1\end{cases}$ 对x求导 $\begin{cases}dx=dx\\ dy=-dx\end{cases}$

$\int_c \bar{z}=\int_c (x-iy)dz$

$=\int_1^0 [x-(1-x)i](1-i)dx$ 注意C₁为有向线段.

$=\int_1^0(2x-1)dx-i\int_1^0 dx$

$=-i(0-1)=i$

2. 柯西积分定理

$f(z)$在单连通区域B内解析，则对B内任一简单闭曲线有

$\oint_c f(z)dz=0$

*同时推得在区域D内积分与路径无关

ex2: 计算 $\oint_c \sin z' dz$，$C:|z|=1$

为0

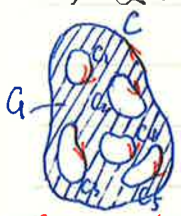
ex3: 计算 $\oint_c \frac{dz}{z^2+2z+4}$，$\oint_c\frac{dz}{z-2}$，$C:|z|=1$

均为0 奇点在积分曲线外，曲线内解析

ex4: 计算 $\oint_{c=c_1+c_2}\frac{\cos z}{z^3}dz$，其中$C_1:|z|=2$正向，$C_2:|z|=3$负向

为0 奇点同时在C_1，C_2内，C_1，C_2反向，相加为0

3. 复合闭路定理



(图中均为正向)

在C内部同时又在$C_1, C_2, \cdots, C_n$外部点集构成有界多连通区域G，称

$\Gamma=C+C_1^-+C_2^-+\cdots+C_n^-$，有

(复合闭路) *当观察者沿Γ正向前进，G总在左手侧

$\oint_\Gamma f(z)dz=\oint_c f(z)dz+\oint_{c_1^-}f(z)dz=0$

又性质 $\int_c f(z)dz=-\int_{c^-}f(z)dz$

$\Rightarrow \oint_c f(z)dz=\sum\limits_{k=1}^{n}\oint_{C_k}f(z)dz$

外侧正向曲线　内侧正向曲线

* 当对某一简单闭曲线积分时，其环绕的区域D内有有限个奇点，则可用复合闭路定理将积分原曲线转化为对环绕各奇点的曲线之和

4. $\begin{cases}\text{柯西积分公式}\\ \text{高阶导积分公式}\end{cases}$ *用此积分公式时，常见于$f(z)$分母有明显的$(z-z_k)^n$…

$$\begin{cases}\oint_c \frac{f(z)}{z-z_0}dz=2\pi i f(z_0)\\ \oint_c\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0)\end{cases}$$

* C为解析区域D内任意一条围绕z_0的简单闭曲线

ex5: $\oint_{c:|z|=1}\frac{dz}{(z-\frac{i}{2})(z+2)}dz$

$=\oint_{c_1}\frac{\frac{1}{z+2}dz}{z-\frac{i}{2}}$ $(c_1:|z-\frac{i}{2}|=\varepsilon)$

$=2\pi i\left(\frac{1}{z+2}\right)\Big|_{z=\frac{i}{2}}=\frac{4\pi i}{4+i}$

ex6: $\oint_{c:|z|=1}\frac{e^z dz}{z^5}=\frac{2\pi i}{4!}(e^z)^{(4)}\Big|_{z=0}$

$=\frac{\pi i}{12}$

Date. Page.

ex7: 从点0到3+i 计算$\int_c z^2dz$

法1: 沿原点至3+i直线段 $\begin{cases}x=x\\ y=\frac{1}{3}x\end{cases}$ $dz=(1+\frac{1}{3}i)dx$

原式$=\int_0^3(x+\frac{1}{3}xi)^2(1+\frac{1}{3}i)dx=6+\frac{26}{3}i$

法2: 先将x由0→3，再将y由0→1

原式$=\int_0^3 x^2dx+\int_0^1(3+iy)^2 i dy=6+\frac{26}{3}i$

*证明: $\oint_c\frac{f(z)}{z-z_0}dz=2\pi i f(z_0)$ 设在 $C:|z-z_0|=R\ (\to 0)$

即证 $\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_c\frac{f(z)}{z-z_0}dz-f(z_0)\right|$ 当$z\to z_0$时，$|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$

$=\left|\frac{1}{2\pi i}\right|\left|\oint_c\frac{f(z)}{z-z_0}dz-2\pi i f(z_0)\right|$

$=\frac{1}{2\pi}\left|\oint_c\frac{f(z)}{z-z_0}dz-\oint_c\frac{dz}{z-z_0}f(z_0)\right|$ 当作常数

$=\frac{1}{2\pi}\left|\oint_c\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz\right|$（估值定理）

$=\frac{1}{2\pi}\oint_c\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right|ds$

$=\frac{1}{2\pi}\oint_c\frac{\varepsilon}{R}ds=\frac{1}{2\pi}\frac{\varepsilon}{R}2\pi R=\varepsilon$（证毕）

MOON TREE

Date. Page.

5. 洛朗级数

*泰勒定理：f(z)在区域D内解析，z_0为D内一点，R为z_0到D边界距离的最小值，则

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n,\ |z-z_0|<R$$

其中 $C_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\oint_c\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$, $n=0,1,2,\cdots$

与实函数保持一致

f(z)在 $R_1<|z-z_0|<R_2$ 内解析，则在该环内

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty}C_n(z-z_0)^n$$

$$C_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\oint_c\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz,\ n=0,\pm1,\pm2$$

C为圆环域内绕z_0任一简单闭曲线（正向）

⇓求积分

令n=-1，

$$C_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_c f(z)dz$$

即 $\oint_c f(z)dz=2\pi i C_{-1}$ 只需求得系数

ex1: 求计算 $\oint_{|z|=2}\frac{ze^{\frac1z}}{1-z}dz$，其中|z|=2为正向圆周

$f(z)=\frac{ze^{\frac1z}}{1-z}$ （有z=0, z=1两个奇点）

在环 $1<|z|<+\infty$ 内展开

$$f(z)=\frac{z e^{\frac1z}}{z(\frac1z-1)}=-(1+\frac1z+\frac{1}{2z^2}+\cdots)(1+\frac1z+\frac{1}{z^2}+\cdots)$$

得 $C_{-1}=-2$

$\therefore \oint_c f(z)dz=-4\pi i$

同理：计算 $\oint_{|z|=2}\frac{z^3e^{\frac1z}}{1+z}dz$，|z|=2为正向圆周

$$f(z)=z^2\frac{e^{\frac1z}}{1+\frac1z}=z^2(1-\frac1z+\frac1{z^2}-\cdots)(1+\frac1z+\frac1{2z^2}+\cdots)$$

解得 $C_{-1}=-\frac13$

$\therefore\oint_c f(z)dz=-\frac{2\pi i}{3}$

注意：①泰勒展开是洛朗展开的特例，当洛朗展开的中心点解析时，在 $0\le|z-z_0|<R$ 内两级数相同

②洛朗展开需注意两要素

- 展开的中心点（解析环的中心点）→ 决定洛朗级数在哪点展开（即展开为$z-z_0$的幂级数中的z_0）
- 根据奇点判断解析环的半径 → 决定 $C_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_c\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$ 中曲线C的半径（会影响后面展开式）

ex: 将 $f(z)=z^2e^{\frac1z}$ 在 $0<|z|<+\infty$ 展开为洛朗级数

$z_0=0$

将 $f(z)=\frac{1}{z^2(z-i)}$ 在 $1<|z-i|<+\infty$ 内展开为洛朗级数

$z_0=i$　$R_1=1, R_2\to+\infty$

③将f(z)在z=0展开为幂级数

或

将f(z)展开为z的幂级数

⟺ 把f(z)在z=0处泰勒展开

（要带上收敛半径!!）

6. 留数

1) 孤立奇点 — f(z)在z_0不解析，但在z_0某个邻域解析，则z_0为f(z)孤立奇点。

z_0：可去奇点、极点（m阶极点）、本性奇点 → f(z)在 $0<|z-z_0|<\delta$ 内洛朗展开（δ趋于0）

- 可去奇点：不含负幂项，即对一切n<0, $C_n=0$
  *$f(z)=\frac{1}{\sin\frac1z}$，$z_0=0$不是孤立奇点
- 极点：只有有限个负幂项，即$\exists m\in N$, $C_{-m}\ne0$，当$n<-m$，$C_n=0$　最高负幂为m
- 本性奇点：有无穷多负幂项，即有无穷多n<0，使$C_n\ne0$

（下接右侧）

三. 展开与级数

1. 洛朗展开 $f(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_c\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi\right)(z-z_0)^n$

解题：①确定z_0（解析环的中心点）

⇒保留f(z)中含$(z-z_0)$的项

②确定f(z)奇点，并结合z_0画出 $R_1<|z-z_0|<R_2$

③尽可能化简f(z)

④将$z-z_0$换元为t，针对不同解析环对f(z)除$z-z_0$外的函数部分展开 → 合理利用解析法　$\frac{1}{1-x}$，$\frac{1}{1+x}$

只求系数时不需解析直接展开即可

*常用函数在z=0处泰勒展开

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots+\frac{z^n}{n!},\ |z|<\infty$$

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},\ |z|<\infty$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!},\ |z|<\infty$$

$$\frac1{1-z}=1+z+z^2+\cdots+z^n,\ |z|<1$$

$$\frac1{1+z}=1-z+z^2+\cdots+(-1)^nz^n,\ |z|<1$$

*注意最后结果最好化为 $\sum_{n=-k}^{\infty}C_n(z-z_0)^n$ 形式　不带±k

ex1: 求 $\frac{1}{z(1-z)^2}$ 在D_1, D_2洛朗级数

D_1: $0<|z|<1$, D_2: $0<|z-1|<1$

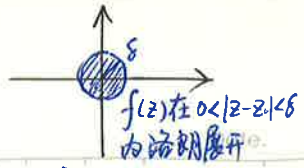
D_1: 确定$z_0=0$　$|z|<1$

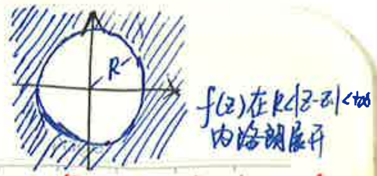
设 $\frac{1}{z(1-z)^2}=S(z)$

保留z → $\frac{1}{(1-z)^2}=zS(z)$

解析性

$\frac{1}{1-z}=\int_0^z zS(z)dz$ （下接左侧）





（上接）（f(z)在$R<|z-z_0|<+\infty$内解析，则无穷远点∞为f(z)孤立奇点）

*当f(z)在 $R<|z-z_0|<+\infty$ 内洛朗展开

∞：
- 可去奇点 → 不含正幂项
- 极点（m阶极点）→ 只含有限个正幂项（最高正幂为m）
- 本性奇点 → 有无穷多个正幂项

2) 判断孤立奇点z_0的类别

可去奇点：
- 展开法 → 首项不为负幂次
- 极限法 → $\lim_{z\to z_0}f(z)=C_0$（C_0为一复常数）C_0可以为0，也可以不为0
  ex: $\frac{\sin z}{z}$

m阶极点：
- 展开法 — 首项为 $C_0(z-z_0)^{-m}$，z_0为m阶极点
  *$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}\varphi(z)$　$\varphi(z_0)\ne0$，即有0次幂项≠0 → 相当于零点法
  常见于f(z)分母出现$(z-z_0)$
  ex: $\frac1z$, $\frac{e^z-1}{z^2}$
- 极限法*（简单判断）$\lim_{z\to z_0}f(z)=\infty$
  ex: $\frac{1}{\sin z}$
- 求导法 $f(z)=\frac{1}{Q(z)}$，$\frac{d^{m-1}Q(z)}{dz^{m-1}}=0$，$\frac{d^mQ(z)}{dz^m}\ne0$，则z为m阶极点
  ex: $\frac{z+1}{z^2-2z}$
  *常见分母出现$(z-z_0)$
- 零点法　z_0为f(z) m阶极点、$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}\varphi(z)$　$\varphi(z)$在$0<|z-z_0|<\delta$内解析，且$\varphi(z_0)\ne0$
  ⟺ z_0为$\frac{1}{f(z)}$ m阶零点
  $\frac{1}{f(z)}=(z-z_0)^m g(z)$　g(z)也在$0<|z-z_0|<\delta$内解析（$g(z)=\frac{1}{\varphi(z)}$）
  *可通过求$\frac{1}{f(z)}$零点阶数求f(z)极点阶数
- P-Q法　分子、分母零点法判断零点阶　$f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$，且$z=z_0$为P(z)的m阶零点，为Q(z)的n阶零点
  ex: $\frac{1-e^{2z}}{z^4}$
  *结合展开法与P-Q法也常用
  - $m\ge n$ → z_0是f(z)可去奇点
  - $m<n$ → z_0是f(z) n-m阶极点

本性奇点：
- 展开法 → 无穷多个负幂项
- 极限法 → $\lim_{z\to z_0}f(z)$不存在

（接右侧）

Date. Page.

（上接左）

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \int_0^z z S(z)\,dz$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\cdot z^{n-1} = zS(z)$$

$\Rightarrow S(z)=\sum_{n=0}^{\infty} n\cdot z^{n-2}$，令 $n-2=t$

$S(z)=\sum_{t=-2}^{\infty}(t+2)z^t$，且 $t=-2$ 时 $C_n=0$

故 $S(z)=\sum_{t=-1}^{\infty}(t+2)z^t$ *注意将首项把无用项去掉

D2：$z_0=1$

设 $\frac{1}{z(1-z)^2}=S(z)$

保留(z-1)项 $\frac{1}{z-1+1}=(z-1)^2S(z)$

$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n=(z-1)^2S(z)$

$\Rightarrow S(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^{n-2}$

即 $S(z)=\sum_{t=-2}^{\infty}(-1)^n(z-1)^t$

ex2：求 $\frac{z}{(z+1)(z+2)}$ 在 $z_0=2$ 处泰勒展开

$\frac{z}{(z+1)(z+2)}=\frac{2}{z+2}-\frac{1}{z+1}$ *先化简再换元

若从一开始换元会非常不方便！

$=\frac{2}{(z-2)+4}-\frac{1}{(z-2)+3}$

$\xlongequal{令z-2=t}\frac{2}{4}\left(\frac{1}{1+\frac{t}{4}}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+\frac{t}{3}}\right)$

$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{t}{4}\right)^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{t}{3}\right)^n$ 再换回 z-2

（接右）

ex：$\mathrm{Res}\left[\frac{\sin z}{z},0\right]=0$，$z=0$ 可去奇点 ←极限法

$\mathrm{Res}\left[\frac{e^{2z}}{(z-1)^2},1\right]=2e^2$，$z=1$ 为二阶极点

零点法

$\frac{1}{z(z-1)(z+2)^2}$，$z=0,z=1$ 为一阶极点，$z=-2$ 为二阶极点

$\mathrm{Res}\left[\cos\frac{1}{1-z},0\right]=0$ ←展开法（本性奇点）

$\cos\frac{1}{1-z}$ 在 $z=1$ 展开，无 $\frac{1}{(z-1)}$ 项

*判断∞处孤立奇点类别

- 展开法 → 直接展开 $f(z)$，由定义得类别（∞处孤立奇点）
- $f(\frac{1}{z})$法 → $f(z)$ ∞处孤立奇点类别：可去、m阶极点、本性

$\Updownarrow$

$f(\frac{1}{z})$ 在 $z=0$ 处孤立奇点类别：可去、m阶极点、本性

3）留数

$\begin{cases} z_0 为 f(z) 一个孤立奇点 \\ f(z) 在 0<|z-z_0|<\delta 内解析 \end{cases}$

$\Rightarrow \mathrm{Res}[f(z),z_0]=C_{-1}$ ← $f(z)$ 在 z_0 洛朗级数的负一次幂系数

从而 $\oint_C f(z)dz=2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z),z_0]$（正向）

- 可去奇点 → $\mathrm{Res}[f(z),z_0]=0$
- 本性奇点 → $\mathrm{Res}[f(z),z_0]=C_{-1}$（洛朗展开，直接求）
- 极点
  1. z_0 为 $f(z)$ m阶极点

     $\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}\{(z-z_0)^m f(z)\}}{dz^{m-1}}$ 求m-1阶导

     *除阶乘数=求导数

     *m=1，$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$
  2. P-Q法

     $P(z_0)\neq0$，$Q(z_0)=0$，$Q'(z_0)\neq0$　$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\frac{P(z)}{Q'(z)}$

（上接左）

2、傅立叶级数

$f_T(t)$ 是以T为周期实值函数，且在 $[\frac{T}{2},\frac{T}{2}]$ 有

$\begin{cases} ①连续或只有有限第一类间断点 \\ ②只有有限个极值点 \end{cases}$，则在 $f_T(t)$ 连续点处有：

$$f_T(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\sin n\omega_0 t)$$

$$\begin{cases} a_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f_T(t)\cos n\omega_0 t\,dt\ (n=0,1,2\cdots) \\ b_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f_T(t)\sin n\omega_0 t\,dt\ (n=1,2,\cdots) \end{cases}$$

在复变函数中，$\begin{cases} e^{in\omega_0 t}=\cos n\omega_0 t+i\sin n\omega_0 t \\ e^{-in\omega_0 t}=\cos n\omega_0 t-i\sin n\omega_0 t \end{cases}$

$\Downarrow$

$$f_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n e^{in\omega_0 t}$$

$$C_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f_T(t)e^{-in\omega_0 t}dt\ (n=0,\pm1,\pm2\cdots)$$

$T=\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{2\pi}{\Delta\omega}$，当 $\Delta\omega\to0$，$T\to\infty$ 时

⇒非周期函数 $f(t)$ 可视为 $f_T(t)\ (T\to\infty)$

$\omega_n=n\cdot\omega_0$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\lim_{\Delta\omega\to0}\sum_{-\infty}^{+\infty}\left\{\left[\int_{-\frac{\pi}{\Delta\omega}}^{\frac{\pi}{\Delta\omega}}f_T(\tau)e^{-i\omega_n\tau}d\tau\right]e^{i\omega_n t}\Delta\omega\right\}$$

*这里视为 $n\cdot\omega_n$ 变化连续！

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau}_{令为F(\omega)}\right]e^{i\omega t}d\omega$$

$\Downarrow$

$\begin{cases} F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt & 傅里叶变换（积掉t，留下\omega） \\ f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega & 积掉\omega，留下t；傅里叶逆变换（也称傅氏变换的积分表达式） \end{cases}$

记作 $F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]$，

$f(t)=\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]$

（上接右） Date Page

3. $\sum_{i=0}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_i]=0$ ←在扩充复平面上只有有限个孤立奇点

*本质上是复合闭路定理

*无穷远处留数（$f(z)$ 在 $R<|z|<+\infty$ 上解析）

1. ~~展开法~~ $\mathrm{Res}[f(z),\infty]=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-}f(z)dz=-C_{-1}$（展开 $f(z)$）

   不一定求出∞留数！！！

   C是一条包围除∞外所有孤立奇点的简单闭曲线

   $f(z)$ 不一定在 $|z|<+\infty$ 内解析（可在 $0<|z|<\infty$ 内展开）
2. $\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-\mathrm{Res}\left[f(\frac{1}{z})\cdot\frac{1}{z^2},0\right]$

ex：求 $\cos z+\sin z$ 在∞留数

可在 $0<|z|<+\infty$ 内展开

$\cos z+\sin z=1+z-\frac{z^2}{2!}-\frac{z^3}{3!}+\cdots$

$\mathrm{Res}[f(z,\infty)]=-C_{-1}=0$　不含 C_{-1}

ex1：计算积分 $\oint_C\frac{dz}{(z+i)^{10}(z-1)(z-3)}$，C为正向 $|z|=2$

由 $\sum_{i=0}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_i]=0$ 有

$\oint_C\frac{dz}{(z+i)^{10}(z-1)(z-3)}=2\pi i\{\mathrm{Res}[f(z),-i]+\mathrm{Res}[f(z),1]\}$

$=-2\pi i\{\mathrm{Res}[f(z),3]+\mathrm{Res}[f(z),\infty]\}$　$z=0$ 本性奇点

$=-2\pi i\left(\frac{1}{2(3+i)^{10}}+\mathrm{Res}\left[\frac{z^{10}}{(1+zi)^{10}(1-z)(1-3z)},0\right]\right)$　$=0$

$=\frac{-\pi i}{(3+i)^{10}}$

ex2：正向圆周下算 $\oint_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{1}{z(z-1)(z+2)^2}dz$

原式 $=2\pi i\{\mathrm{Res}[f(z),0]+\mathrm{Res}[f(z),1]\}$

$=-2\pi i\{\mathrm{Res}[f(z),-2]+\mathrm{Res}[f(z),\infty]\}$　本性

$=-2\pi i\left\{\frac{5}{36}+0\right\}=-\frac{5\pi i}{18}$　$-\mathrm{Res}\left[\frac{z^2}{(1-z)(1+2z)^2},0\right]$

MOON TREE

2020级机器人工程，QQ@2394592730

(接左) Page.

1)性质

- 线性性质 → 积分可加减性可得
- 平移性质 } 积分换元可得
- 伸缩性质
- 微积分性质

证明(分部积分)

$\mathcal{F}[f'(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-i\omega t}dt = f(t)e^{-i\omega t}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + i\omega\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = i\omega\mathcal{F}[f(t)]$

$$\mathcal{F}[f'(t)]=i\omega F(\omega)$$

*且 $\mathcal{F}[f^{(n)}(t)]=(i\omega)^n F(\omega)$

$$\mathcal{F}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right]=\frac{1}{i\omega}F(\omega)$$

2)解微分方程

ex: 求解 $x'(t)+x(t)+\int_{-\infty}^{t} x(t)dt = h(t)$.

其中 $-\infty<t<+\infty$, $h(t)=\begin{cases} e^{-t}, & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases}$

设 $\mathcal{F}[x(t)]=X(\omega)$

$$i\omega X(\omega)+X(\omega)+\frac{1}{i\omega}X(\omega)=\frac{1}{1+i\omega}$$

解得 $X(\omega)=\frac{1}{(1+i\omega)(1+i\omega+\frac{1}{i\omega})}$

$$\therefore x(t)=\mathcal{F}^{-1}[X(\omega)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+i\omega)(1+i\omega+\frac{1}{i\omega})}e^{i\omega t}d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\omega t}}{(1+i\omega)(1+i\omega-\frac{i}{\omega})}d\omega$$

(接右)

ex. 求 $f(z)=\frac{z^7}{(z^2-1)^3(z^2+2)}$ 在所有有限奇点的留数之和

即求 $-\mathrm{Res}\left[\frac{z^7}{(z^2-1)^3(z^2+2)},\infty\right]$

$$=\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z(1-z^2)^3(1+2z^2)},0\right]$$

$$=1$$

(接左) Date. Page.

3. 拉氏变换

古典傅立叶变换要求 $(-\infty,+\infty)$ 上函数绝对可积，拉氏变换扩大其适用范围

设 $f(t)$ 是 $[0,+\infty)$ 上实值函数，对于复参数 $s=\beta+i\omega$ $(\beta>0)$

$$F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

相当于傅立叶中的 $f(t)u(t)e^{-\beta t}$ $(-\infty,+\infty)$上绝对可积

反演积分公式 $f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{+\infty}F(s)e^{st}ds\ (t>0)$

记作 $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$

$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$

1)性质

- 线性性质(积分性质)
- 微积分性质
  - 微分 $\mathcal{L}[f'(t)]=sF(s)-f(0)$

    $\int_0^{+\infty} f'(t)e^{-st}dt = f(t)e^{-st}\Big|_0^{+\infty}+s\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}dt = -f(0)+sF(s)$

    *且 $\mathcal{L}[f^{(n)}(t)]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)$ 注意这一项

    *S次数与求导阶数相加为n-1

    $-\mathcal{L}[tf(t)]=F'(s)$ 像函数性质

    $F'(s)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial f(t)e^{-st}}{\partial s}dt=\int_0^{+\infty}-tf(t)e^{-st}dt=-\mathcal{L}[tf(t)]$
  - 积分 $\mathcal{L}\left[\frac{1}{t}f(t)\right]=\int_s^{\infty}F(s)ds$

    $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right]=\frac{1}{s}F(s)$

2)计算反演积分公式

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\omega}^{\beta+i\omega}F(s)e^{st}ds=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[F(s)e^{st},s_k]$$

有限复平面内的有限孤立奇点

取β使 s_k 均在β左侧