函数与极限(一) 求极限

Date. Page.

一、基础知识

1. 重要极限

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{\Delta\to0}\frac{\sin\Delta}{\Delta}=1 \\ \text{* 暗含不等式 } \cos x<\frac{\sin x}{x}<1 \text{ 放缩常用} \\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{\Delta\to0}(1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}}=e \end{cases}$$

* $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$ 放缩

2. 麦克劳林公式

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\arctan x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\tan x = x+\frac{x^3}{3}\cdots \text{（不规则）}$$

注意：① 教材中提到的等价无穷小其实就是麦克劳林公式，如下

$$x\to0\begin{cases} \sin x\sim x \\ \tan x\sim x \\ e^x-1\sim x \\ \ln(x+1)\sim x \\ \arcsin x\sim x \\ 1-\cos x\sim\frac{x^2}{2} \\ (1-x)^\alpha-1\sim\alpha x\ (\alpha\neq0) \end{cases}$$

② 几个无穷小的乘除直接用等价无穷小代替，几个无穷小的加减用麦克劳林公式

3. 夹挤定理

$$\left.\begin{aligned} g(x)<f(x)<\varphi(x) \\ \lim g(x)=\lim\varphi(x)=A \end{aligned}\right\}\Rightarrow \lim f(x)=A$$

*计算周期函数、取整函数、n项求和时常考虑夹挤定理

4. 重要思想

① 极限的方向会暗示使用代换的方向，也可以通过设变自变量简化思路

② 无穷小与有界函数的乘积为无穷小（尤其是正弦等有界函数）

③ 乘除时，极限不等于0的因子可用其极限值替代（即先算）

④ 极限存在才能拆！

ex: $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(2x)-f(x)}{x}=2\left[\lim\limits_{x\to0}\frac{f(2x)-f(0)}{2x-0}-\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}\right]$

而极限不一定存在 $=f'(0)$ 故 $f'(0)$ 存在 ×

5. 求渐近线

$$\begin{cases} \text{水平渐近线} & \lim\limits_{x\to\infty\,(+\infty,-\infty)}f(x)=A \\ \text{竖直渐近线} & \lim\limits_{x\to x_0\,(x_0^+,x_0^-)}f(x)=\infty \\ \text{斜渐近线} & \begin{cases} y=kx+b \\ k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} \\ b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx] \end{cases} \end{cases}$$

由 $d=\frac{|kx+b-f(x)|}{\sqrt{k^2-1}}$

$\lim\limits_{x\to\infty} \cancel{f(x)}\,d=0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}|kx+b-f(x)|=0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\frac{|kx+b-f(x)|}{x}=0$

二、解题

1. 有理化 适用 $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ 不好处理

ex1: $\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(\sqrt{x^2+100}+x\right)$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{100x}{\sqrt{x^2+100}-x}$ ← 无法继续，考虑变 x

令 $t=-x$，有原式化为

$\lim\limits_{t\to\infty}\frac{-100}{\sqrt{1+\frac{100}{t^2}}+1}=-50$

2. 洛必达法则 适用 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$

△ 最后一步去lim，因此洛必达要求函数连续

（与某些等价无穷小的处理类似，提供多个思路） 或拆项

$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}=\cdots\cdots=A$

ex1: $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-e^{\tan x}}{\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)}$ 上下求导 $=\frac{-\frac{1}{\cos^2x}e^{\tan x}}{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{2+x}\right)}=-2$

ex2: $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{\ln(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$ 先等价一下

$=\frac{2xe^{x^2}+\sin x}{2x}=\frac{2(2x^2+1)e^{x^2}+\cos x}{2}=\frac{3}{2}$

3. 幂指函数处理

$$\mu(x)^{\varphi(x)}\begin{cases} \to e^{\varphi(x)\ln\mu(x)} & \text{通常会使用 } \ln(x+1)\sim x \\ \to \text{设 } y=\mu(x)^{\varphi(x)}\text{，先求 } \lim y=\lim\varphi(x)\ln\mu(x) \end{cases}$$

ex1: $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{2}{x-1}}=\lim\limits_{x\to1}e^{\frac{2}{x-1}\ln x}$

$=\lim\limits_{x\to1}e^{\frac{2}{x-1}(x-1)}=e^2$

ex2: $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\frac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$，则 $f(x)=$ ____

$\lim\limits_{t\to x}\left(\frac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}=\lim\limits_{t\to x}e^{\frac{x}{\sin t-\sin x}\ln\frac{\sin t}{\sin x}}$

$=\lim\limits_{t\to x}e^{\frac{x(\ln\sin t-\ln\sin x)}{\sin t-\sin x}}=\lim\limits_{t\to x}e^{x}$ ×

此处相减不可直接等价无穷小

$=\lim\limits_{t\to x}e^{\frac{x}{\sin t-\sin x}\left(\frac{\sin t}{\sin x}-1\right)}=e^{\frac{x}{\sin x}}$

ex3: $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}\ (a,b>0,\ a,b\neq1)$

$=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{a^x}{2}+\frac{b^x}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{2x}\left(a^x-1+b^x-1\right)}$ 灵活使用 $\ln(x+1)\sim x$ 的实例

$=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{x\ln a}{2x}+\frac{x\ln b}{2x}}=e^{\frac{\ln ab}{2}}=\sqrt{ab}$ 拓展

ex4: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3^{\frac{1}{x}}-2^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3^{\frac{1}{x}}-1-(2^{\frac{1}{x}}-1)}{\frac{1}{x}}=\frac{\frac{1}{x}(\ln3-\ln2)}{\frac{1}{x}}=\ln\frac{3}{2}$

这里其实有分子同分母两项的操作（此处分母可与两项分别约，故处理方便，与上方需区分）

4. 结构对称性分析（针对极限不同方向采取不同套路）

$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+e^{\frac{1}{x}}}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}$

Date. Page.

函数与极限(二)

(上接)

5.用拉格朗日中值定理求极限

- 可利用夹挤定理得到 ξ 直接求出 $f(\xi)$ $\quad a<f'(\xi)<b$
- 不能直接得到 ξ，需对不等式作处理 $\quad g(x)<f'(\xi)<\varphi(x)$

注意：① 识别同一函数相减的形式，有时是隐含的，如 $\ln(-)$

② 所得 $f(\xi)$ 最终须为常数

ex1：$f(x)$ 在 $x=a$ 处连续，$f(x)=2$，$f'(x)=4$，求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right]^n$

设 $y=\left[\dfrac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right]^n$

两次拉格朗日中值定理

$\ln y = n\left[\ln f(a+\frac{1}{n})-\ln f(a)\right]$ $\quad \xi$ 在 $(a, a+\frac{1}{n})$ 内，$\frac{1}{n}\to 0$，$f(a)<f(\xi_1)<f(a)$

$\ln y = n\cdot\dfrac{1}{f(\xi_1)}\left[f(a+\frac{1}{n})-f(a)\right]$ $\quad f(\xi_1)\to f(a)$，$f(a)<f(\xi_2)<f(a)$

$\ln y = n\cdot\dfrac{1}{f(a)}f'(\xi_2)(a+\frac{1}{n}-a)$ $\quad f'(\xi_2)\to f'(a)$

$\ln y = \dfrac{f'(a)}{f(a)}$ 故原式即 $e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}=e^2$

ex2：$\lim\limits_{t\to\infty} t^2\left[(1+\frac{1}{t})^t-e^{1-\frac{1}{2t}}\right]$

$\underline{\underline{x=\frac{1}{t}}}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\left[e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}-e^{1-\frac{x}{2}}\right]$ $\quad \xi$ 介于 $\frac{1}{x}\ln(1+x)$，$1-\frac{x}{2}$ 之间

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}e^{\xi}\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)-1+\frac{x}{2}\right]$ $\Rightarrow \xi=1$ 拉格朗日

$=e\ \cancel{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}+\frac{1}{2}}$ 不行! $2x$

$=e\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}}{x^3}$ 麦克劳林

$=e\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)-x+\frac{x^2}{2}}{x^3}=\dfrac{e}{3}$

ex3：$f(x)$ 二阶可导且 $f'(0)=0$，$f''(0)=4$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f[\ln(1+x)]}{x^3}$

原式 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(\xi)\left[x-\ln(1+x)\right]}{x^3}$ $\quad \xi$ 介于 x，$\ln(1+x)$，$\to 0$，$\to 0$

洛 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(\xi)(1-\frac{1}{1+x})+f''(\xi)\left[x-\ln(1+x)\right]}{3x^2}$ $\quad f'(\xi)\to 0$

$=\lim\limits_{x\to 0}f''(0)\left[\dfrac{x-(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2))}{3x^2}\right]$

$=4\times(\frac{1}{6})=\frac{2}{3}$

6.用泰勒展开求极限

① 其实质上是麦克劳林公式应用
② 使用泰勒展开要求可导

- $A\pm B$ 型：展开到哪一项出现了系数不相等即可
- $\dfrac{A}{B}$ 型：展开到上下同次即可

* 一些常用的易混麦克劳林公式

$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$	$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3$
$\arcsin x^{*} = x+\frac{x^3}{3!}$ 后项不规律	$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3$
$\tan x^{*} = x+\frac{x^3}{3}$	$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$
$\arctan x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}$	注意：① 乘除形式时可任意变换独立的项 ② 全部归为幂函数是一个好思路
$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$	

ex1：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2+1-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin^2 x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2+1-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})x^2}$ 加减法则

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2+1-(1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4)}{\left[1-\frac{x^2}{2}-(1+x^2)\right]x^2}$ 除法则 加减法则

$=-\dfrac{1}{12}$

ex2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+1-\cos x}{\ln(1+x)+1-e^{x^2}}$ 单独在分子中显然不能得到同次项，此处直接取第一项处理

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1-1}{x+1-1}=1$ (用洛必达法更方便的)

ex3.(上接洛必达法附加)

设 $f(0)=1$，$f'(0)=1$，$f''(0)=2$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+\ln(1-x)-1}{1-\cos x}$

洛 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-\frac{1}{1-x}}{\sin x}$ 洛 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)+\frac{1}{(1-x)^2}}{\cos x}$ 此处不能洛

$=\cancel{1}$ $f''(x)$ 不一定连续

两种方法

法一：导数定义

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-1}{x}$ 不加0直接求 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=f''(0)=2$

法二：泰勒展开

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(0)+f'(0)x-(1+x)}{x}=\dfrac{2x}{x}=2$

* 拓展：泰勒公式的应用

① 求定点 $x=x_0$ 的高阶导数

② 需要将多阶导数联系起来时

* 注意：选取何点进行展开

ex1：已知 $f(x)=\dfrac{e^x}{1+x^2}$，求 $f^{(4)}(0)$.

$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$

$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4+\cdots$

$\Rightarrow \frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4\cdots$

$\left[\frac{1}{24}-\frac{1}{2}+1\right]x^4$

$\Rightarrow \frac{13}{24}x^4=\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4$

$\Rightarrow f^{(4)}(0)=13$

ex2：设函数 $y=f(x)$ 在 $[-1,1]$ 具有三阶连续导数，且 $f(-1)=0$，$f(1)=1$，$f'(0)=0$，证明在 $(-1,1)$ 内至少存在一点 ξ 使 $f'''(\xi)=3$

$f(x)=f(0)+\underbrace{f'(0)x}_{=0}+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(0)}{6}x^3\cdots$

$0=f(-1)=f(0)+\frac{f''(0)}{2}-\frac{f'''(\xi_1)}{6}$ ①

$1=f(1)=f(0)+\frac{f''(0)}{2}+\frac{f'''(\xi_2)}{6}$ ②

② $-$ ① $\Rightarrow \dfrac{f'''(\xi_2)-f'''(\xi_1)}{2}=3$

由函数闭区间连续性质，设 $[-1,1]$ 内 $f(x)_{max}=M$，$f(x)_{min}=m$，

有 $m\le\dfrac{f'''(\xi_2)-f'''(\xi_1)}{2}=3\le M$

故由介值定理，$\exists\ \xi\in(\xi_1,\xi_2)$，

使 $f'''(\xi)=\dfrac{f'''(\xi_2)-f'''(\xi_1)}{2}=3$

导数

Date. Page.

一、导数

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

成立条件:
① $f(x)$ 在 x_0 点的某邻域内有定义
② 极限存在

注意:
① 关注右边式中 Δx 是否能在 x_0 左右均取得

ex: $\lim_{x\to 0}\frac{f(1-\cos x)-f(0)}{x^2}$ 存在 $\not\Rightarrow f'(0)$ 存在

$\Delta x>0$

② 分母中 $f(\ )-f(\ )$，左右不能同时有 Δx

ex: $(x^2)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x-\Delta x)^2-(x+\Delta x)^2}{-2\Delta x}$

$=2x$ 无意义

③ 可导 ⇒ 连续 ⇒ 有极限

$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在

可导⇔可微

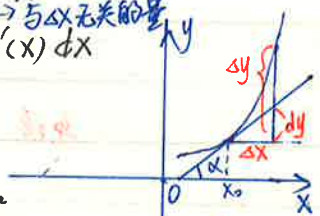
$\Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}f(x_0+\Delta x)=f(x_0)$

微分

$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$

$\Rightarrow dy=A\Delta x$ （A：与 Δx 无关的量）

$\Rightarrow dy=f'(x)dx$



$\tan\alpha=\frac{dy}{dx}=f'(x_0)$

*对于同一个 Δx，dy 与 Δy 趋于相等

1.弧微分

① $y=f(x)$

$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$

$\Rightarrow ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx$

② $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}(\alpha\le t\le\beta)$

$ds=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}$

① $r=r(\theta)\ (\theta_1\le\theta\le\theta_2)\Rightarrow\begin{cases}x=r(\theta)\cos\theta\\ y=r(\theta)\sin\theta\end{cases}$

$ds=\sqrt{(x')^2+(y')^2}$

$=\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}$

2.曲率

$$\bar{K}=\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|=\left|\frac{\arctan y'}{ds}\right|=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

3.运算法则

- 隐函数 将 y 看作因变量，x 看作自变量，对 x 求导
- 复合函数 $\begin{cases}\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \quad * \ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}\\ f'[\varphi(x)]=f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\end{cases}$
- 反函数 当反函数更好求导时

$f(x)\xleftrightarrow{反}\varphi(x)$ $f'(x)=\frac{1}{\varphi'(f(x))}$

二、微分中值定理

1.罗尔定理

若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，并且 $f(a)=f(b)$，则在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得

$\begin{cases}\lim_{x\to a^+}f(x)=f(a)\\ \lim_{x\to b^-}f(x)=f(b)\end{cases}$

$$f'(\xi)=0\quad(a<\xi<b)$$

常见考点：构造函数，充分利用题目条件

ex1: $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，$f(0)=f(1)$，证明 $\exists\xi\in(0,1)$，使 $f''(\xi)=\frac{2f'(\xi)}{1-\xi}$

原式即证 $(\xi-1)^2f''(\xi)+2(\xi-1)f'(\xi)=0$ ←定型

设 $F(x)=(x-1)^2f'(x)$

$\because f(0)=f(1)$

$\therefore \exists\xi'\in(0,1)$，使 $f'(\xi')=0$

$\therefore F(\xi')=0$ 又 $\because F(1)=0=F(\xi')$ ←找等函数值

$\therefore \exists\xi\in(\xi',1)$，即 $\xi\in(0,1)$，使

$F'(\xi)=0$（证毕）

ex2: $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，且 $f(0)=f(1)=0$，且 $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$，证明 $\forall\lambda\in R$，总 $\exists\xi\in(0,1)$，使 $f'(\xi)+\lambda f(\xi)=\lambda\xi^2+2\xi$

原式即证 $\lambda f(\xi)-\lambda\xi^2-(f'(\xi)-2\xi)=0$

即证 $\frac{e^{\lambda x}(f'(x)-2x)-\lambda e^{\lambda x}(f(x)-x^2)}{(e^{\lambda x})^2}=0$

设 $F(x)=\frac{f(x)-x^2}{e^{\lambda x}}$

$F(0)=0$，$F(\frac{1}{2})=\frac{1}{2e^{\frac{\lambda}{2}}}>0$，$F(1)=\frac{-1}{e^{\lambda}}<0$

故由介值定理，$\exists\xi'\in(\frac{1}{2},1)$，$F(\xi')=0$

由罗尔定理，$\exists\xi\in(0,\xi')$，即 $\xi\in(0,1)$，

使 $F'(\xi)=0$（证毕）

Date. Page.

ex3: 有常数 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足 $a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=0$，证明 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0$ 在 $(0,1)$ 上至少有一个实根.

设 $F(x)=a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_2}{3}x^3+\cdots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$

$F(0)=0$，$F(1)=a_0+\frac{a_1}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=0$

由罗尔定理，$F'(\xi)=0\ (0<\xi<1)$

MOON TREE

(必接)

2. 拉格朗日中值定理

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 上可导，则在 (a,b) 内至少 ∃ 一点 ξ，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

(用罗尔定理证明)

※拉格朗日中值定理能实现特定点的函数值 $f(x)$ 与导数值 $f'(x_0)$ 的转换，使用较为灵活

适用
- ① 出现同形式函数差式（或通过变型可得到）
- ② 含 $f(x)$ 的式子难处理，而操作含 $f(x)$ 的式子
  ex：同时含 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 的式子，常变换其中之一（尤见于变上限积分函数）

ex1：设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有二阶导数，且 $f''(x)\geq 0$，证明对 $\forall x_1,x_2\in[a,b]$，都有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leq\frac{1}{2}\left[f(x_1)+f(x_2)\right]$$

原式即证：$\frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-f(x_1)\right)\leq\frac{1}{2}\left(f(x_2)-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right)$

→ 拉格朗日 设 $x_1<x_2$

$\left(x_1<\xi_1<\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ $\left(\frac{x_1+x_2}{2}<\xi_2<x_2\right)$

即：$f'(\xi_1)\left(\frac{x_1+x_2}{2}-x_1\right)\leq f'(\xi_2)\left(x_2-\frac{x_1+x_2}{2}\right)$

又 ∵ $f''(x)\geq 0$，$f'(\xi_2)>f'(\xi_1)$ 　>0 消去公共项

显然成立（证毕）

ex2：$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-2}{x-a}=4$，求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^n$（前面已解）

※注意当 $f'(x)$ 存在时才可用拉格朗日求极限（且 a,b 趋于同一个值）　ex：$\lim\limits_{x\to 0}\ln x-\ln(x^2)$ ✗

ex3：$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导数，且 $|f''(x)|<1$，如果 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上有最大值，证明不等式

$$|f'(0)|+|f'(1)|\leq 1$$

依题意 ∃ $x_0\in(0,1)$ 使 $f(x_0)$ 为最大值 $f'(x_0)=0$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{f'(1)-\overset{=0}{f'(x_0)}}{1-x_0}=f''(\xi_1)\\&\frac{\overset{=0}{f'(x_0)}-f'(0)}{x_0}=f''(\xi_2)\end{aligned}\right\}$$

$\Rightarrow |f'(0)|+|f'(1)|=(1-x_0)|f''(\xi_1)|+x_0|f''(\xi_2)|\leq 1-x_0+x_0=1$

ex4. $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导数，且 $f(0)=0$，$f''(x)<0$，令 $g(x)=\begin{cases}\frac{f(x)}{x}, & x\in(0,1]\\ f'(0), & x=0\end{cases}$，讨论 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上的单调性

$$g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$$

$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(\xi)$　$0<\xi<x$

$$=\frac{x\left(f'(x)-f'(\xi)\right)}{x^2}<0$$

又 ∵ $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=g(0)$

∴ $g(x)$ 在 $x=0$ 连续

∴ $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减

3. 柯西中值定理

设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，且 $g'(x)\neq 0$，则在 (a,b) 内至少 ∃ 一点 ξ，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

(用拉格朗日证明)

ex1：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 $(a>0)$，在 (a,b) 内可导，证明：必 ∃ $\xi,\eta\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=\frac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$

$$\left.\begin{aligned}&\text{由柯西中值定理}\quad\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\eta)}{2\eta}\\&\text{由拉格朗日中值定理}\quad\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)\end{aligned}\right\}$$

⇒ 原式证毕

△函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域D内连续，则在D上可积

一、二重积分

积分元素

被积函数

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

积分区域

$d=\max\limits_{1\le i\le n}\{d_i\}$，$d_i$ 表示 $\Delta\sigma_i$ 的直径

＊本质就是求和取极限

注意：① 二重积分 $\iint_D f(x,y)d\sigma$ 在数值上恰好是以曲面 $z=f(x,y)$ 为曲顶，以区域D为底的曲顶柱体的体积

② 运算性质满足定积分，且总取积分上限大于下限

1. 基本性质

1. $\iint_D k f(x,y)d\sigma$　k可提

2. $\iint_D [f(x,y)\pm g(x,y)]d\sigma$　可拆分

3. $\iint_D f(x,y)d\sigma$　积分区域可加性　$D \to D_1+D_2$

4. $\iint_D d\sigma = $ D的面积(σ)

5. $f(x,y)\le g(x,y)$　保号性

$\Rightarrow \iint_D f(x,y)d\sigma \le \iint_D g(x,y)d\sigma$

＊ $\left|\iint_D f(x,y)d\sigma\right| \le \iint_D |f(x,y)|d\sigma$

6. $m\sigma \le \iint_D f(x,y)d\sigma \le M\sigma$　估值

m: $f(x,y)_{min}$　M: $f(x,y)_{max}$　σ: (D的面积)

⇓

7. $\exists(\xi,\eta)\in D$，使　中值定理

$\iint_D f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)\sigma$ (或说介值)

2. 计算

〈1〉在坐标系下

直角坐标系　$d\sigma \Rightarrow dxdy$

$\Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dxdy$

＊本质上都是用不同方式来表示D上的点进而表示面积

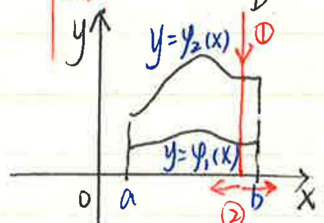
面积元素换

极坐标系　$S\approx r d\theta dr$

$d\sigma \Rightarrow r d\theta dr$

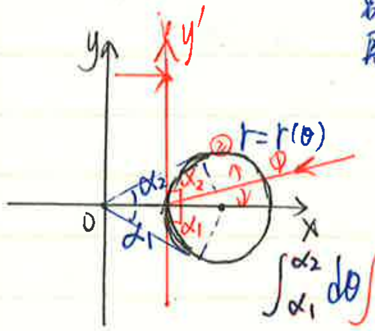
$x \Rightarrow r\cos\theta,\ y\Rightarrow r\sin\theta$

$\Rightarrow \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r d\theta dr$



$$\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$$

步骤：先垂直某轴（后积分）作线，穿过曲线分别为先积分的上、下界，再移动该线



$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\theta\int_0^{r(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r dr$$

步骤：先由外作线穿入曲线到极点，再旋转该线

〈2〉对称性简化

△ 想象对于每个 $y=a$ 面（取当 $f(x,y)$ 是x的奇函数），都有在 y 轴平面两侧有 $+x$ 对应 $+z$，$-x$ 对应 $-z$，故在体积上自然可消

积分区域D关于y轴对称　看x

$\begin{cases} 0, & f(x,y)=-f(-x,y)\ \text{奇} \\ 2\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma, & f(x,y)=f(-x,y)\ \text{偶} \end{cases}$

积分区域D关于x轴对称　看y

$\begin{cases} 0, & f(x,y)=-f(x,-y)\ \text{奇} \\ 2\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma, & f(x,y)=f(x,-y)\ \text{偶} \end{cases}$

积分区域关于 $y=x$ 对称（轮换对称）

$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_D f(y,x)d\sigma$

＊即积分边界区域中x，y可换

积分区域关于原点对称 → 可以分割成分别对x轴和对y轴

＊ $\iint_D f(x,y)d\sigma = 4\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma$　(D_1 第一象限)

可以直接判断在不同象限积分与第一象限是否有别

$f(x,y)=f(-x,y)=f(x,-y)=f(-x,-y)$

ex1: $\iint_D e^{-|x|-|y|}d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,|x|\le a, |y|\le a\}$

原式 $=4\iint_{D_1} e^{-x-y}d\sigma$ (D_1 取第一象限) $=4\int_0^a dx\int_0^a e^{-x-y}dy$

$=4(e^{-2a}-2e^{-a}+1)$

ex2: $\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$，D为 $x^2+y^2\le 1$ 内部

原式 $=4\iint_{D_1}\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$　(D_1 第一象限)

同样D和 D_1 下，

$\iint_D x\ln(x^2+y^2+1)\,dxdy = 0$

$\iint_D xy\,dxdy = 0$　一定任一个，看其中一个即可

＊如看 $f(x,y)$ 是关于x的奇函数，则 D_1 与 D_2 抵消，D_3 与 D_4 消

ex5.（积分中值定理）设 $f(x,y)$ 为 $D: x^2+y^2\le a^2$ 上的连续函数，则 $\lim\limits_{a\to 0^+}\frac{1}{\pi a^2}\iint_D f(x,y)d\sigma = f(0,0)$

由积分中值定理 $\exists\,\eta,\xi\in D$，使 $\iint_D f(x,y)d\sigma = f(\eta,\xi)\sigma = f(\eta,\xi)\pi a^2$

故 $\Rightarrow \lim\limits_{a\to 0^+} f(\eta,\xi) = f(0,0)$

二、三重积分

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dV = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i$$

dV 体积元素 $d=\max_{1\le i\le n}\{d_i\}$ d_i表示ΔV_i的直径

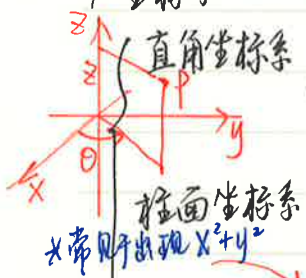
注意：① 三重积分性质与二重完全类似

② $\iiint_\Omega dV = V$ Ω的体积，$\iint_D d\sigma = \sigma$ D的面积

③ 物理意义上三重积分表示质量

计算

1. 坐标系 本质都是在不同坐标系中表示体积



直角坐标系 $dV \Rightarrow dxdydz$

$\Rightarrow \boxed{\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz}$

柱面坐标系 $\begin{cases} x\Rightarrow r\cos\theta \\ y\Rightarrow r\sin\theta \\ z\Rightarrow z\end{cases}$ $dV\Rightarrow r\,dr\,d\theta\,dz$ 不变

$\Rightarrow \boxed{\iiint_\Omega f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,r\,dr\,d\theta\,dz}$

*常见于出现 x^2+y^2

球坐标系 $\begin{cases} x\Rightarrow r\sin\varphi\cos\theta \\ y\Rightarrow r\sin\varphi\sin\theta \\ z\Rightarrow r\cdot\cos\varphi\end{cases}$

$dV = r\,d\varphi\cdot r\,d\theta\,dr$

$dV \Rightarrow r^2\sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta$

$\Rightarrow \boxed{\iiint_\Omega f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)\,r^2\sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta}$

*常见于出现 $x^2+y^2+z^2$ 的 $f(x,y,z)$

注意：① 注意柱面、球中角的起始位置

② 判定积分区域时要常常以运动的思维考虑

③ 切记三重积分定积分区域不是求体积！

2. 计算方法 $\begin{cases}穿针 \\ 切片\end{cases}$

$I=\iiint_\Omega (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$，其中Ω是 (为例)

$\begin{cases} y^2=2z \\ x=0\end{cases}$ 旋转一周所得，且介于 $z=2$ 和 $z=8$ 之间

① 穿针（先单后重）

1. 画一条线穿过被积区域，得到过曲面的方程(函数)
2. 由此得到投影区域
3. 先单后重进行积分

(以投xoy面为例)

$z_1=f(x,y)$

$z_2=f(x,y)$

$$\iint_{D_{投(xy)}} d\sigma \int_{z_2(x,y)}^{z_1(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

线入 线出

*想象线带动底面的小面的移动

本题：依题意曲面为 $x^2+y^2=2z$

$I = I_1 + I_2$

$$= \iint_{D_1} d\sigma \int_{\frac{x^2+y^2}{2}}^{8} (x^2+y^2)\,dz + \iint_{D_2} d\sigma \int_2^8 (x^2+y^2)\,dz$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_2^4 r\,dr \int_{\frac{r^2}{2}}^{8} r^2\,dz + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r\,dr \int_2^8 r^2\,dz$$

$= 336\pi$ ← $z=\frac{x^2+y^2}{2}$

$S=\pi r^2$

② 切片

1. 在被积区域内截一个面，该面是一个动面，由其轴的变量决定其面积函数
2. 限定轴变量的范围

$\sqrt{x^2+y^2}=f_1(z)$

$\sqrt{x^2+y^2}=f_2(z)$

$$\int_a^b dz \iint_{D_{截}(z)} f(x,y,z)\,d\sigma = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{f_2(z)}^{f_1(z)} f(x,y,z)\,d\sigma$$

*若 $f(x,y,z)$ 中只含z，则可直接用 D_z 的面积代替二重积分

本题：$I=\int_2^8 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2z}} r^2\cdot r\,dr$

$= \cancel{2\pi\int_2^8 z\,dz} = \int_2^8 2\pi z^2\,dz$

$= 336\pi$

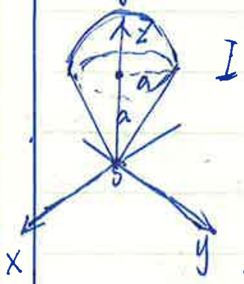
$\begin{cases} 1.清项 \\ 2. 归于第一象限便于计算\end{cases}$

3. 对称性 $\begin{cases}奇偶 \\ 轮换对称\end{cases}$

想象成空间中的密度有对称正负性（空间奇偶性）

ex1: $I=\iiint_\Omega (x-y)^2\,dx\,dy\,dz$，其中Ω：

$x^2+y^2+(z-a)^2\le a^2$，$z\ge\sqrt{x^2+y^2}$



$$I=\iiint_\Omega (x^2+y^2-2xy)\,dx\,dy\,dz$$

积分区域关于 $x=0$ y轴对称，

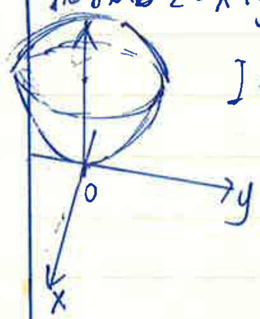
故 $\iiint_\Omega -2xy\,dxdydz=0$

$$=\iiint_\Omega 2x^2\,dxdydz$$ 轮换对称

$$=\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r\,dr \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}+a} 2x^2\,dz$$ (穿针)

$$=\int_a^{2a} dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{a^2-(z-a)^2}} r\,dr + \int_0^a dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z r\,dr$$ (切片)

ex2: $I=\iiint_\Omega (x+y+z)^2\,dxdydz$，其中Ω是抛物面 $z=x^2+y^2$ 和球面 $x^2+y^2+z^2=2$ 所围立体



$$I=\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz)\,dxdydz$$

$2xy+2yz = 2y(x+z) = 0$

$$=\iiint_\Omega (2x^2+z^2)\,dV$$

$$=\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r\,dr \int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}} (2x^2+z^2)\,dz$$