

基础知识

电路模型公式:

电感: $u = L \frac{di}{dt}$ 电容: $i = C \frac{du}{dt}$

线性 $\begin{cases} \text{叠加性: } x_1(t) + x_2(t) \rightarrow x_1(t) + x_2(t) \\ \text{齐次性: } a x(t) \rightarrow a y(t) \end{cases}$

拉氏变换: 公式: $F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt = \mathcal{L}\{f(t)\}$
 $f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) \cdot e^{st} ds = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$

常用公式:

$f(t)$	$F(s)$
单位冲激 $\delta(t)$	1
单位阶跃 $1(t)$	$\frac{1}{s}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
单位斜坡 t	$\frac{1}{s^2}$
单位加速度 $\frac{1}{2}t^2$	$\frac{1}{s^3}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$

两大移位定理: $\begin{cases} \mathcal{L}\{f(t-\tau)\} = e^{-s\tau} F(s) \\ \mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a) \end{cases}$
 化简用, 反成为便

$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s) \\ \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f(\infty) \end{cases}$
 终值定理 $= \lim_{s \rightarrow 0} s F(s)$

留数法 拆解传递

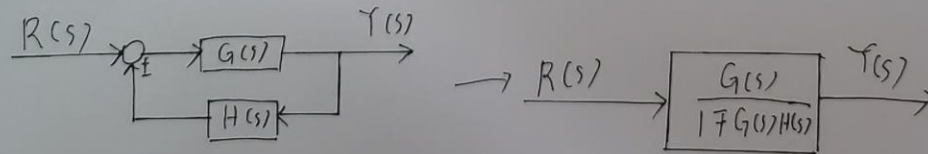
$$F(s) = k \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = \frac{C_1}{s - p_1} + \frac{C_2}{s - p_2} + \dots + \frac{C_n}{s - p_n}$$

有重根时, 最高次数 \rightarrow 1次, 依次求低 \rightarrow 高阶导

传递函数: "0" 初始条件下, 输出与输入的拉氏变换之比

常见环节	传递函数
比例	$G(s) = k$
惯性	$G(s) = \frac{1}{Ts + 1}$
积分	$G(s) = \frac{1}{Ts}$
微分	$G(s) = Ts$
振荡	$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$
延迟	$G(s) = e^{-Ts}$

方框图 核心: 凑成标准形式



负反馈下: 闭环 = $\frac{\text{前项}}{1 + \text{开环}}$ 本处都是 误差 = $\frac{1}{1 + \text{开环}}$

梅森增益公式:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\sum_k P_k \Delta_k}{\Delta}$$

两两独立的回路增益

$$\Delta \text{ 特征式: } 1 - \underbrace{\sum L_1}_{\text{单回路增}} + \underbrace{\sum L_m L_n}_{\text{两两独立的回路增益}} - \sum L_r L_s L_t$$

P_k : 第 k 条前向通路增益

Δ_k : 与第 k 条前向通路不相联的回路增益余子式 (1-增)

总结: 本章为零碎知识点, 难度不高, 为后述方法论的基础

时域分析 (共三部分)

系统的本质为跟随, 即输出向输入靠拢。因此阶跃输入对应的输出在 1 左右稳定; 冲激输入对应的输出在 0 左右稳定。

系统的阶次和参数只影响过程, 不影响结果。

时域分析是在 t 坐标下进行的, 因此优点是简单明确, 缺点是计算量大, 这也促就了根轨迹这一方法的诞生。

本章的时域分析仅针对 $\left\{ \begin{array}{l} \text{冲激} \\ \text{阶跃} \\ \text{斜坡} \\ \text{加速度} \end{array} \right.$ 输入, 正弦输入部分为频域分析, 实现幅值和相位的变化。

我们研究的系统仅为二阶系统, 即振荡环节,

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_n \rightarrow \text{自然频率} \\ \zeta \rightarrow \text{阻尼比} \end{array} \right.$$

阻尼比决定了系统收敛的快慢, 可理解为阻力, 阻力越大, 系统收到输入后, 稳定得越快, 越小, 稳定得越慢, 直至无法稳定。

注意, 临界稳定也是一种不稳。

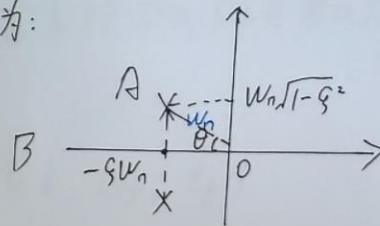
欠阻尼状态下

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

特征根分布图为:



此图中, 包含一切重要参数:

$OA = \omega_n$ 自然频率

$\theta = \arccos \zeta$ 为阻尼角, 与 ζ 负相关, $\zeta = \cos \theta$, 决定超调

A点纵坐标为 $\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$, 为振荡频率, 决定了峰值时间

A点横坐标为 $-\zeta\omega_n$, 决定了稳定时间

$T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$, 即与A点的高度呈负相关

$P.O. = e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$, θ 越大, ζ 越小, P.O. 越大
 $\zeta = \cos[\arctan(\frac{\pi}{\ln P.O.})]$

$T_s = \begin{cases} \frac{4}{\omega_n \zeta}, & \Delta = 2\% \\ \frac{3}{\omega_n \zeta}, & \Delta = 5\% \end{cases}$, A点向左, T_s 减小

$T_r = \frac{\pi - \arccos \zeta}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$ 不重要, T_r, T_s, T_p 均与 ω_n 呈负相关

二阶欠阻尼系统:

引入极点: $|\frac{1}{r}| \geq (10/5) |G u_0|$ 时, 忽略不计

多组极点时, 若 b 均远 a , 则只用 a 观测系统
(主极点)

引入零点: 会导致 $P.O. \downarrow$, $t_d \downarrow$, $t_r \uparrow$

导致二阶系统一定程度上向一阶靠拢

尽量避免将零点选在虚轴或主极点
附近, 将对系统性能造成较大冲击

稳态误差: 系统稳定后, 与输入的差值

方式一:
$$e_{ss} = e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1+G(s)} \cdot R(s)$$

↓
单位负反馈时

方式二: "开环传递"整理为:

$$G(s) = \frac{K \prod_{j=1}^M (z_j s + 1)}{s^N \prod_{i=1}^Q (T_i s + 1)}$$

"尾1型"!!!

N 对应系统阶型, K 本意为开环增益 (所有实数的运算结果)

系统 阶型 输入类型	Type 0	Type 1	Type 2
阶跃 $A(t)$	$\frac{A}{1+K_P}$	0	0
斜坡 $A t$	∞	$\frac{A}{K_v}$	0
加速度 $A \cdot \frac{1}{2} t^2$	∞	∞	$\frac{A}{K_a}$

K_P, K_v, K_a 均为 K

系统判稳：罗斯准则

即不画时域的输出图，仅凭特征方程的根的分布来确定系统是否稳定，存在非负根则不稳定。

非负根一定会产生 e^{at} , $a > 0$ 的项, $t \rightarrow \infty$ 时, 输出一定发散, 系统必然不稳定。

罗斯准则本质上为数学方法, 与自动控制无关

稳定的概念：有界输入 \rightarrow 有界输出

相对稳定性：在控制领域, 表示便于量稳定性的程度, 罗斯准则无法准确表现, 但频域的乃氏定理可以。(裕度)

临界稳定也是不稳。

特征多项式所有的系数都存在且具有相同符号,可直接判断稳定.

罗斯准则:

多项式正根的数量等同于罗斯表第一列数符号变化的次数.

出现0时 { 仅第1列出现, 当作 ε (无穷小的正数)
(系统不稳或临界稳) { 全0行, 对上一行进行求导, 系数代入全零行
列辅助方程

罗斯表的同一行, 分母相同, 行列式右列不同

罗斯准则对于虚轴上的重根, 失效

罗斯表可用于圈定参数范围, 使得系统稳定

越远离虚轴越稳定, 可通过将 $s \rightarrow s + \frac{k}{\downarrow}$
的形式, 限定根的分布. 根在 $s=k$ 左侧

根轨迹:

通过时域的输出曲线虽然可以很直观地看出系统的 $t_r, t_s, t_p, P.O.$, 稳定与否, 但该曲线的求取方法太过复杂, 而真实系统中, 开环增益等参数又在不断变化, 相应的特性也在不断变化, 因此, 如何找到一种便捷的方式反应系统特性促就了根轨迹的产生。

由上一章可知, 根的分布图可表露多种信息, 因此, 画出特征方程的根随参数变化的轨迹便是合理的, 这, 就是根轨迹法。

系统的开环增益需整理成“首1型”。即

$$KG(s) = K \frac{\prod_{i=1}^m (s+z_i)}{\prod_{j=1}^n (s+p_j)}$$

CE: $KG(s) = -1$ 用以求 K

第1步: 整理开环增益为首1型,
确定零点(终)极点(起点)

$$\begin{cases} |KG(s)| = 1 \\ \angle KG(s) = 180^\circ + 2L\pi \end{cases}$$

点在根轨迹上的充要条件

根轨迹数 = 极点数

m 个极点指向零点

$n-m$ 个极点指向无穷远

第2步: 右角定根轨迹范围:

实轴上奇数个极点/零点的左侧

第3步: 求取渐近线 (存在不在实轴上的极点时, 一定有)

$$\text{位置 } \sigma_A = \frac{\sum \text{poles} - \sum \text{zeros}}{n-m}, \text{ 一定位于实轴上}$$

$$\text{渐近线夹角: } \varphi_A = \frac{2l+1}{n-m} \pi, l=0, 1, 2, \dots, (n-m-1), \text{ 平分}$$

第4步: 确定与虚轴的交点 (根据渐近线判断)

列写 CE (整式形式),

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{法一: 令 } s=j\omega, \text{ 代入方程, 令 } \operatorname{Re}, \operatorname{Im}=0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{法二: 列写罗斯表, 求取全0行上面一行方程的解} \end{array} \right.$$

第5步: 确定分离点、分离角

$$\text{令 } K = - \frac{\prod_{j=1}^n (s+p_j)}{\prod_{i=1}^m (s+z_i)}, \text{ 求 } \frac{d(K)}{d(s)} = 0, \text{ 得分离点 } s$$

$$\text{分离角 } \alpha = \frac{\pm(2l+1)}{L} \pi \quad (l=0, 1, 2, \dots, L-1)$$

L 为分离轨迹数

第6步: 确定出发角和到达角 (出现

$$\text{出发角(极点) } \theta_{pk} = \pi + \left(\sum_{z=1}^m \angle \text{与零点的夹角} - \sum_{z=1}^n \angle \text{与其它极点的角} \right)$$

$$\text{终止角(零点) } \varphi_{zl} = \pi - \left(\sum_{z=1}^m \angle \text{与零点} - \sum_{z=1}^n \angle \text{与极点} \right)$$

第七步：验算

开环极点之和 = 闭环极点之和

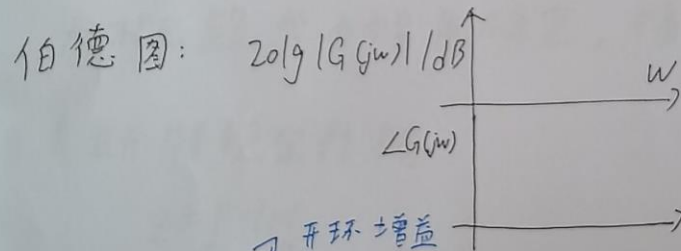
技巧，两极点一零点，根轨迹一定是圆/圆的一部分

根轨迹参数不独立时，可利用特征方程转换

当系统增加零极点时，零点主要通过更加靠近线位置以修正系统稳定性。

频域分析法

根轨迹更像是一种为了简化分析的手段，频域分析在自动控制领域是和时域并列的，两者互不可替代。频域分析主要针对的是正弦输入，其输出也是正弦，不过对幅值调整了 $|G(j\omega)|$ 倍，对相位调整了 $\angle G(j\omega)$ 。频域分析研究的就是，随 ω 的变化，系统对于输入的幅值和相角增益的变化，有伯德图和乃氏图两种形式。前者对于多段叠加的复杂系统比较擅长，后者则可进行判稳，并给出定量、定性的结论。



例：

$$G(s) = \frac{100(s+1)}{s^2(s+10)}$$

开环传递函数，尾1型

2: $-20 \times 2 = -40$, 初始斜率为40

转折点在10, 100,

10时, 向上20, 变为-20

100时向下20, 变为-40

低频段:

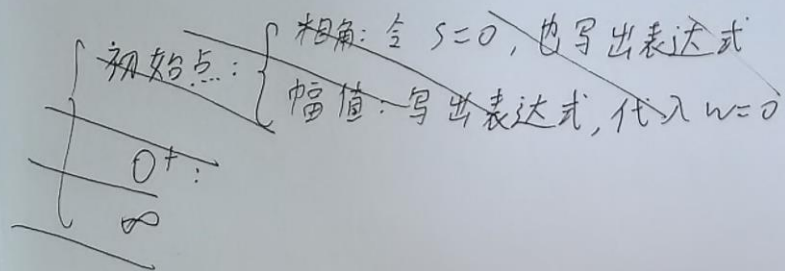
1. 过 $(1, 20\lg k)$
2. $k = \omega^v$ 与实轴交点

$(\frac{s}{\omega_n})^2 + \frac{2\zeta s}{\omega_n} + 1$, 转折频率为 ω_n

剪切频率: $|G(j\omega_c)| = 1$, 与实轴交点

奈乃图, 即 PPT 上的 "polar plot", 绘制在复域 (S 平面)
将点理解为相量, 具有幅值和相量.

Nyquist 曲线即为这些点的合集——带箭头的曲线



写出 $|G(j\omega)|$ 和 $\angle G(j\omega)$ 表达式

由此判断初始点位置和相角, 终止点位置和相角
大概趋势由幅角确定, 幅值修正

奈奎斯特稳定判据

$$Z = P - 2N$$

在 S 平面右侧开环极点 \uparrow 乃此曲线逆时针绕 $(-1, j0)$ 的圈数

$Z=0$ 时, 系统稳定

首尾不相连时要补线

幅值裕度: 令 $\angle G(j\omega) = -180^\circ \rightarrow \omega = \omega_x$, 代入 $20 \lg |G(j\omega)|$

相角裕度: 令 $|G(j\omega)| = 1$ 或 $\lg |G(j\omega)| = 0 \rightarrow \omega = \omega_x$,
代入 $\angle G(j\omega) + 180^\circ$

离散控制系统

离散控制系统严格来说和前面所学的所有内容为并列关系, 拥有相应的离散根轨迹等, 与连续系统的传递对应的是脉冲传递, 为输出与输入的Z变换的比值。(傅里叶变换的比值即频域内的传递)。本章我们仅分析时域性能与误差分析。

信号采样: $x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \delta(t-kT)$ → 单位冲激

经信号采样后, 系统仍是离散的

零阶保持器(ZOH): 表示为 $G_0(s) = \frac{1}{s}(1 - e^{-sT})$

经保持后, 信号“连续”带阶跃

Z变换: $Z\{f(t)\} = F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k}$ → 采样周期

常用Z变换:

$x(t)$	$X(z)$
$\delta(t-kT)$	z^{-k}
$u(t)$	$\frac{z}{z-1}$
t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
e^{-at}	$\frac{z}{z - e^{-aT}}$
$e^{-at}x(t)$	$X(ze^{aT})$
$\frac{1}{2}t^2$	$\frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$

终值定理

$$f(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(kT)$$

$$= \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)f(z)]$$

$$z \rightarrow 1$$

$$\frac{t^n}{n!}$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial a^n} \left(\frac{z}{z - e^{aT}} \right)$$

z反变换: { 法一: 长除法 (有误差) ...
法二: 留数法 (除z化简求逆)

加了取样器和零阶保持器后的脉冲传递

$$G(z) = (1-z^{-1})z \left\{ \frac{G_r(s)}{s} \right\}$$

列写脉冲传递, 梅森增益公式同样适用

稳定性分析:

在z域中, $|z|=1$ 为稳定性判别依据

法一: 列写 $D(z) = 1 + G(z) = 0$

当根在 $|z|=1$ 内时, 系统稳定

法二: 令 $z = \frac{w+1}{w-1}$, 转化为由罗基斯准则判断, 可求参数范围

稳态误差计算: { 终值定理: $e(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \phi_e(z) \cdot R(z)$
 \Rightarrow 误差传递

~~开环传递函数:~~
 ~~$K(z)$~~
 ~~$(z-1)^v A(z)$~~

由得到的阶次决定

静态误差系数法 $\begin{matrix} \text{类型} & \text{输入} & A(t) & At & A \cdot \frac{1}{2} t^2 \\ 0 & \frac{A}{1+K} & \infty & \infty \\ 1 & 0 & \frac{AT}{K} & \frac{\infty}{K} \\ 2 & 0 & 0 & \frac{\infty}{K} \end{matrix}$

K 为 $\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^v GH$

非线性系统:

本身很复杂, 要求较简单

常见非线性: 饱和:



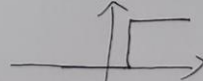
死区:



继电特性:



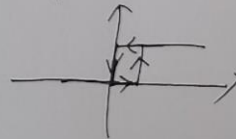
继电 + 死区



摩擦:



滞环:



非线性系统可能有多个平衡状态, 与系统参数、结构、
初始条件、输入信号均有关

对于正弦输入, 可能会改变其频率, 用"描述函数法"
来分析

如何求得描述函数不重要

对于输入 $x(t) = A \sin \omega t$, 有输出 $y(t) = Y_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$

描述函数 $N(A) = \frac{Y_1 e^{j\varphi_1}}{A}$, 在题目中会给出

非线性系统的稳定性 (使用频域分析求解)

绘制原系统的乃氏曲线, 判断与 $-\frac{1}{N(A)}$ 的关系

交点的稳定与否由进入的区域决定