模糊集合论

模糊集合

- 定义 → 模糊集合描述集合X的子集A，描述方式为全部X隶属X的程度
- 表示方式
  - Zadeh表示法（离散有限域） $A=\frac{\mu_A(x_1)}{x_1}+\frac{\mu_A(x_2)}{x_2}+\cdots+\frac{\mu_A(x_n)}{x_n}$
  - 隶属度函数法（多用于连续有限域）
    - 基本原则
    - 构造方法 → 模糊统计法、例证法、专家经验法、二元对比排序法、基本概念扩充法
    - 分类（Z函数、S函数、Π函数）
  - 序偶表示法 $A=\{(x_1,\mu_A(x_1)),(x_2,\mu_A(x_2)),\cdots,(x_n,\mu_A(x_n))\}$
  - 矢量表示法 $A=(\mu_A(x_1),\mu_A(x_2),\cdots,\mu_A(x_n))$
- 运算

模糊关系

→ 通过两个论域上的笛卡儿积把一个A论域中的元素映射到另一个B论域上去

- 笛卡儿积
  - 直积
  - 代数积

eg: $A=\frac{1}{1}+\frac{0.7}{2}+\frac{0.2}{3}$，$B=\frac{0.8}{1}+\frac{0.6}{2}+\frac{0.4}{3}+\frac{0.2}{4}$

$$A\times B=\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0.8 & 0.6 & 0.4 & 0.2 \\ 2 & 0.7 & 0.6 & 0.4 & 0.2 \\ 3 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \end{array}$$

（列方向 B，行方向 A）

- 表示方法
  - 序偶表示法
  - 矩阵表示法
- 模糊关系的合成 → 模糊关系间的运算，设R_1是$U\times V$中的模糊关系，R_2是$V\times W$中的模糊关系，R_1和R_2合成即$U\times V\times W$的模糊关系，记为$R_1\circ R_2$
  - 采用Sup-min合成法

$$\mu_{R_1\circ R_2}(u,w)=\vee\{\mu_{R_1}(u,v)\wedge\mu_{R_2}(v,w)\}$$

eg: $R=\begin{pmatrix}0.2 & 0.8\\0.6 & 0.1\end{pmatrix}$ $S=\begin{pmatrix}0.5 & 0.7\\0.1 & 0\end{pmatrix}$

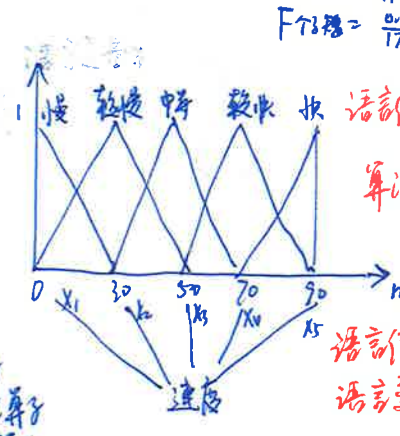
$R\circ S=\begin{pmatrix}0.2 & 0.2\\0.5 & 0.6\end{pmatrix}$

模糊逻辑

⇒ 研究模糊命题的逻辑，模糊命题的真值是隶属度函数

模糊语言逻辑

- 模糊数 ⇒ 一个具有连续隶属度的正规有界凸模糊集合
  - *正规集合：隶属度函数最大值为1
  - *凸模糊集：隶属度函数曲线两点间任一点隶属度都大于等于两点中隶属度较小值
- 语言值 ⇒ 语言系统中与数值有直接联系的词，可用模糊数表示
  - eg: 成年男子身高论域 $U=\{170,180,190,200\}$
  - $F_{个高}=\frac{0.2}{170}+\frac{0.6}{180}+\frac{0.8}{190}+\frac{0.95}{200}$
  - $F_{个矮}=\frac{0.7}{170}+\frac{0.5}{180}+\frac{0.2}{190}+\frac{0.1}{200}$
- 语言变量 ⇒ 用一个五元素集合表征 $(T(X),M,U,G,X)$



语言值集合T(X)
算法规则M
论域U
语言值规则G
语言变量X
$X(T(X),M)\in G$

- 语言算子
  - 语气算子
  - 模糊化算子
  - 判定化算子

$H_\lambda(A)=A^\lambda$

极	非常	很	相当	比较
4	3	2	1.5	0.8

略	稍	有点
0.6	0.4	0.2

模糊逻辑推理

$A \to B = \begin{cases} A \wedge B \text{（即 } A \times B\text{）} & \text{Mamdani推理} \\ (A \wedge B) \vee (1-A) & \text{Zadeh推理} \end{cases}$

*近似推理中，Zedah推理比Mamdani更接近人的思维

1、近似推理
- 大前提1：If A，then B
- 小前提2：If A'

$\Rightarrow \underset{行}{B'} = \underset{行}{A'} \circ \underset{R}{\underline{(A \to B)}}$

R A到B的模糊关系矩阵，一般取 $A \to B = A \times B$（直积），即 $R = A \to B = A \times B$

2、条件推理
- 大前提1：If A，then B；If not A，then C
- 小前提2：If A'

$\Rightarrow \begin{cases} R = (A \to B) \underset{或}{\cup} (\bar{A} \to C) \\ D = A' \circ R \end{cases}$

*注意：大前提和小前提的条件部分形式应当一致

3、多输入推理
- 大前提：If A and B，then C
- 小前提：If A' and B'

$\Rightarrow C' = (A' \wedge B') \circ [(A \wedge B) \to C]$

$\Rightarrow$ 方法一：模糊矩阵法

① 先求 $D = A \times B$

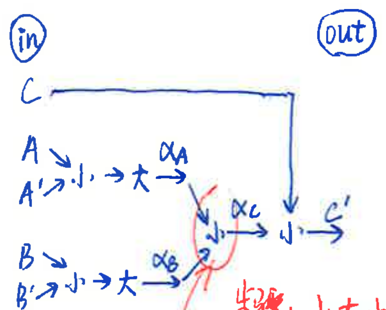
② 将D中每一行顺序排成一列，变为列向量DT

③ 求关系矩阵 $R = DT \times C$

④ 求 $D' = A' \times B'$，再如②将D'变为列向量DT'

⑤ 求模糊推理输出 $\underset{行}{C'} = \underset{行}{DT'} \circ R$

方法二：削顶法



步骤：小大小小

*若 $C' = (A' \text{OR} B') \circ [(A \text{OR} B) \to C]$，第三个小改为大，$\alpha_C = \max\{\alpha_A, \alpha_B\}$

4、多输入规则推理
- 大前提1：If A1 and B1，then C1
- 大前提2：If A2 and B2，then C2
- ⋮
- 小前提：If A' and B'

$\Rightarrow C_1' = (A' \wedge B') \circ [(A_1 \wedge B_1) \to C_1]$

$C_2' = (A' \wedge B') \circ [(A_2 \wedge B_2) \to C_2]$

⋮

$C' = \underbrace{C_1' \cup C_2' \cup \cdots \cup C_n'}_{不同大前提（规则）求得推理输出的并集}$

模糊关系方程的解

没有矩阵方程

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

步骤：

1. 将矩阵方程转化为模糊线性方程组

$$\begin{cases} (a_{11}\wedge r_1)\vee(a_{12}\wedge r_2)\vee(a_{13}\wedge r_3)=b_1 & ① \\ (a_{21}\wedge r_1)\vee(a_{22}\wedge r_2)\vee(a_{23}\wedge r_3)=b_2 & ② \\ (a_{31}\wedge r_1)\vee(a_{32}\wedge r_2)\vee(a_{33}\wedge r_3)=b_3 & ③ \end{cases}$$

2. 先计算式①

$a_{11}\wedge r_1=b_1 \quad a_{12}\wedge r_2=b_1 \quad a_{13}\wedge r_3=b_1$

$a_{11}\wedge r_1\le b_1 \quad a_{12}\wedge r_2\le b_1 \quad a_{13}\wedge r_3\le b_1$

$a\wedge r=b$ 的解 $[r]=\begin{cases} b, & a>b \\ [b,1], & a=b \\ \phi, & a<b \end{cases}$

$a\wedge r\le b$ 的解 $(r)=\begin{cases} [0,b], & a>b \\ [0,1], & a\le b \end{cases}$

3. $R_1'=([r_1],(r_2),(r_3))$ ＊若果一个$[r_i]=\phi$，则整个$R_j'=\phi$

$R_2'=((r_1),[r_2],(r_3))$

$R_3'=((r_1),(r_2),[r_3])$

求出式①的解为 $R'=R_1'\cup R_2'\cup R_3'$ ＊若$R_j'=\phi$，对它取或等价于将它忽略

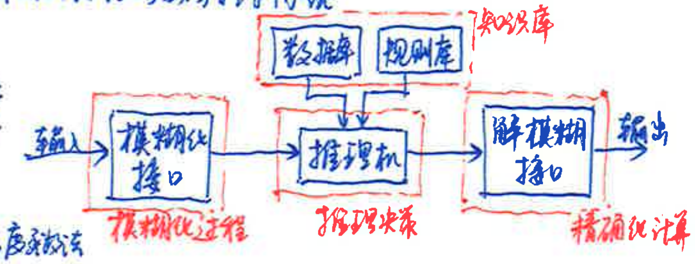
4. 同样方式求出R^2，R^3，

$R=R^1\cap R^2\cap R^3$

方程组之间是且的关系

模糊控制系统 → 一种自动控制系统，它是以模糊数学、模糊语言形式的知识和模糊逻辑推理为理论基础，采用计算机控制技术构成的一种具有闭环结构的数字控制系统

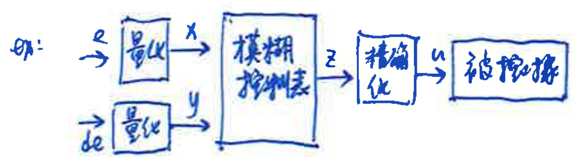
组成
- 模糊控制器 → 主要部件
  1. 模糊化过程
  2. 知识库：数据库、规则库
  3. 推理决策
  4. 精确化计算
     - 最大隶属度函数法
     - 重心法
     - 加权平均法
       - 连续 $v_0 = \dfrac{\int_V v\mu_v(v)dv}{\int_V \mu_v(v)dv}$
       - 离散 $v_0 = \dfrac{\sum_{k=1}^{m} v_k\mu_v(v_k)}{\sum_{k=1}^{m} \mu_v(v_k)}$
- I/O接口
- 执行机构
- 被控对象
- 测量装置



三个功能
1. 把被控对象的测量值从数字量转化为模糊量
2. 对模糊量由给定规则进行模糊推理
3. 把推理结果的模糊输出量转化为实际系统可接受的精确数字量或模拟量

分类（按结构）
- 单变量模糊控制器（单输出）
  - 一维 1输入
  - 二维 2输入
  - 多维 多输入
- 多变量模糊控制器（多输出）

例：

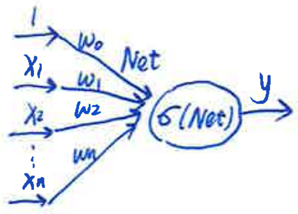


常规设计方法 → 查表法（克服了实时计算量大）
- 基本思想：通过离线计算取得一个模糊控制表，并将控制表存在计算机内存中
- 设定步骤
  1. 确定模糊控制器输入、输出变量
  2. 确定各输入、输出变量的变化范围、量化等级、量化因子
  3. 在 in、out 变量域内定义模糊子集
  4. 模糊规则确定（确定规则表）
  5. 计算模糊控制表（由每个e, de, u的对应关系值得成）
     - 步骤
       ① 输入 $e=m$, $de=n$
       ② 在量化域内，找出包含 $e=m$ 的e的模糊子集，$de=n$ 也是同样
       ③ 由②得e和de的模糊子集，查规则表，得被激活规则
       ④ 对e, de采用单点模糊化（即 $e'=\frac{1}{m}$, $de=\frac{1}{n}$），依据激活规则进行多输入规则推理
       ⑤ 求得 U' 后，精确化，得u，输出

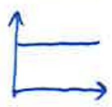
重复①~⑤，直到求出所有e和de对应的u值

神经网络

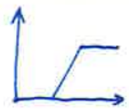
- 神经元模型
  - $\frac{dy}{dt} = -\xi(y) + Net$
  - ⇓ 输入信号稳定或缓慢变化
  - $\frac{dy}{dt} = 0$
  - ⇓
  - $y = \xi^{-1}(Net)$
  - ⇓ 令 $\xi^{-1}(\cdot)$ 为 $\sigma(\cdot)$



- 公式
  - $y = \sigma(Net)$
  - $Net = w_0 + \sum_{j=1}^{n} w_j x_j$
- 激活函数
  - 阈值型



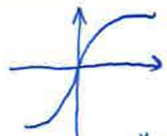
  - 分段线性型



  - Sigmoid函数

$\sigma(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$

  - 双曲正切函数

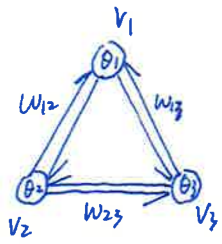


$\sigma(x) = \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$

- 分类
  - 网络结构 →
    - 前向网络
    - 反馈网络
    - 自组织网络
  - 连接方式 →
    - 前向网络
    - 反馈网络
    - 相互结合型网络 → 任意两个神经元之间都可能存在连接
    - 混合型网络 → 层次型网络和网状结构网络的一种结合
- 学习算法
  - 有导师学习（监督式学习）→ 训练过程始终存在一个期望的网络输出
  - 无导师学习（增强式学习）→ 网络不存在一个期望的输出值，需建立一个间接的评价函数
  - 离线学习法
  - 在线学习法
  - 反馈误差学习法
  - 多网络学习法

动态神经网络

- 带时滞的多层感知器网络
- Hopfield网络 →
- 回归神经网络



$y_1 y_2 y_3 = V_1 V_2 V_3$

① 权值更新

$net_1(y_1) = W_{12} \cdot y_2 + W_{13} \cdot y_3 + \theta_1$

$net_2(y_2) = W_{12} y_1 + W_{23} y_3 + \theta_2$

$\vdots$

若 $net_i(y_i) > 0$，则 y_i 由 $0 \to 1$；

若 $net_i(y_i) < 0$，则 y_i 由 $1 \to 0$；

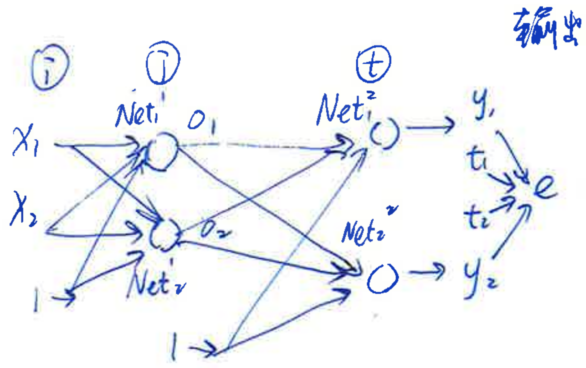
若 $net_i(y_i) = 0$，则 y_i 不变

② 能量井计算

能量函数：$E = -(w_{12} \cdot y_1 y_2 + w_{13} \cdot y_1 y_3 + w_{23} y_2 \cdot y_3 + \theta_1 y_1 + \theta_2 y_2 + \theta_3 y_3)$

能量井：神经网络能量极小状态

BP神经网络



$$\underset{w_{ji}}{x} \to Net_j \xrightarrow{\sigma(\cdot)} o_j \qquad \underset{w_{tj}}{o_j} \to Net_t \xrightarrow{\sigma(\cdot)} y_t$$

$$e = \frac{1}{2}\left[(t_1-y_1)^2+(t_2-y_2)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sum^{t}(t_t-y_t)^2$$

$$Net_1^2 = w_{10} + w_{11}o_1 + w_{12}o_2$$

$$Net_2^2 = w_{20} + w_{21}o_1 + w_{22}o_2$$

$$Net_1^1 = w_{10} + w_{11}x_1 + w_{12}x_2$$

$$Net_2^1 = w_{20} + w_{21}x_1 + w_{22}x_2$$

输出与隐藏层 $\quad w_{tj}(t+1) = w_{tj}(t) + \Delta w_{tj}$

$$\Delta w_{tj} = -\eta\frac{\partial e}{\partial w_{tj}}$$

$$= \eta\left(-\frac{\partial e}{\partial Net_t}\right)\frac{\partial Net_t}{\partial w_{tj}}$$

$$= \eta \cdot \delta_t^2 \cdot o_j$$

$$\delta_t^2 = -\frac{\partial e}{\partial Net_t} = -\frac{\partial e}{\partial y_t}\frac{\partial y_t}{\partial Net_t^2}$$

$$= (t_t-y_t)\,\sigma'(x)\big|_{x=Net_t}$$

隐藏层与输入层 $\quad w_{ji}(t+1) = w_{ji}(t) + \Delta w_{ji}$

$$\Delta w_{ji} = -\eta\frac{\partial e}{\partial w_{ji}}$$

$$= \eta\left(-\frac{\partial e}{\partial Net_j}\right)\frac{\partial Net_j}{\partial w_{ji}}$$

$$= \eta \cdot \delta_j^1 x_i$$

$$\delta_j^1 = -\frac{\partial e}{\partial Net_j^1} = -\frac{\partial e}{\partial o_j}\underbrace{\frac{\partial o_j}{\partial Net_j^1}}_{o_j(1-o_j)}$$

$$= \sum^{t}\left(-\frac{\partial e}{\partial y_t}\frac{\partial y_t}{\partial Net_t^2}\frac{\partial Net_t^2}{\partial o_j}\right)\frac{\partial o_j}{\partial Net_j^1}$$

$$= \sum^{t}\left((t_t-y_t)\,\sigma'(x)\big|_{x=Net_t^2}\, w_{tj}\right)\sigma'(x)\big|_{x=Net_j^1}$$

$$\delta_1^1 = \left(\frac{\partial e}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial Net_1^2}\frac{\partial Net_1^2}{\partial o_1} + \frac{\partial e}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial Net_2^2}\frac{\partial Net_2^2}{\partial o_1}\right)\frac{\partial o_1}{\partial Net_1^1}$$

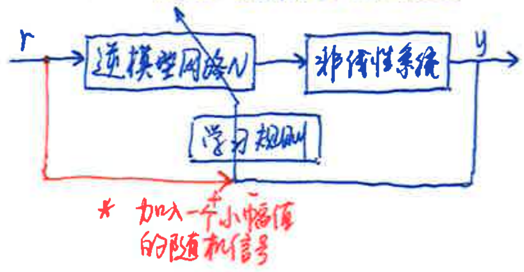
* e通过两条路径，到达隐藏层的第一个节点。

神经网络辨识
(对于非线性动态系统)

- 定义：辨识是在输入和输出数据的基础上，从一组给定的模型中，确定一个与所测系统等价的模型
- 三要素
  - 模型的选择
  - 输入信号的选择
  - 误差准则的选择
- 模型的结构
  - 前向建模法
  - 逆模型法

* 逆模型法存在问题：

1. 学习过程不一定是目标最优的，可以采用下图所示的实用逆模型法
2. 一旦非线性系统对应关系不是一对一的，那么不准确的逆模型可能会建立



神经网络控制器设计

- 直接逆模型控制法 → 假设被控系统可逆，通过离线建模得到系统的逆模型网络，然后用该逆模型网络模型去直接控制被控对象
- △ 直接网络控制法