Modellierung und Simulation
WS 2016/17

Übung 04
Abgabefrist: Siehe elearning bzw. exchange

Name: ________________________ **Aufwand (h):** __________

Punkte: __________

Aufgabe 1 (3 + 2 + 1 = 6 Pkt): Schwingkreise und die Modellierung von Produktion und Verkaufsdynamik

(a) Modellieren Sie in SIMULINK die Steuerung der Anheuerung bzw. des Abbauens von Arbeitern in Abhängigkeit vom Lagerstand eines Produktionsumfelds. Nehmen Sie anfänglich einen konstanten Absatz von 900 Einheiten an, eine Produktivität von 10 Einheiten pro Arbeiter, einen Sockel von 50 Stammarbeitsplätzen und einen anfänglichen Lagerstand von 100 vorrätigen Einheiten.
Dokumentieren Sie Ihr Modell und entsprechende Testergebnisse – konvergiert dieses System?

(b) Führen Sie eine Dämpfungskonstante in das Modell ein (mit Wert 0.1). Wie verändert das Ihr Modell und wie wirkt es sich auf die Simulation aus?

(c) Nehmen wir an, der Preis ergebe sich als (200 – Lagerstand / 10). Außerdem beeinflusse der Preis den Absatz: Anstatt eines konstanten Absatzes ergibt sich ein Absatz von (900 – Preis / 10).
Dokumentieren Sie erneut entsprechende Änderungen am Modell und Auswirkungen auf die Simulation.

Aufgabe 2 (6 Pkt): Wachstum, Adrenalingehalt des Blutes

Adrenalingehalt des Blutes: Adrenalin wird von der Nebenniere in das Blut ausgeschüttet (sekretiert) und dort durch Enzyme abgebaut. Die zeitabhängige Sekretionsrate sei in erster Näherung durch die Funktion $f(t) = a + b \cos(\pi(t-8)/12)$, mit $a>b>0$ konstant, bestimmt. Unter der Annahme, dass die Abbaurate proportional (Konstante α) zum gerade vorhandenen Adrenalingehalt $A(t)$ ist, stelle man eine Differenzialgleichung für A auf.
Wie verläuft der Adrenalingehalt für $\alpha = 0.2$, $a = 0.1$, $b = 0.025$ und dem Anfangswert 1 im Zeitraum $0 \leq t < 48$? (Sowohl Simulation als auch direkte Berechnung sind gültige Lösungen)

Aufgabe 3 (6 Pkt): Logistisches Wachstum

Die Vermehrung der Fruchtfliege wurde 1920 von R. Pearl experimentell untersucht und folgende Gleichung für die Population P(t) (t in Tagen gemessen) gefunden:

$$P'(t) = (1/5)\, P(t) - (1/5175)P^2(t).$$

Wie groß ist die Population nach 12 Tagen, wenn anfänglich 10 Fruchtfliegen vorhanden sind?
Wie viele Mitglieder gibt es maximal?
Zeichnen Sie den Populationsverlauf bis zu dem Tag, an dem 99% des maximalen Wertes erreicht sind.

Aufgabe 4 (6 Pkt): Räuber und Beute

Bei einer Räuber-Beute Konstellation sind folgende Daten bekannt:
Wachstumskonstante und mittlerer Bestand der Beute: 0,4 und 300
Sterbekonstante und mittlerer Bestand der Räuber: 0,3 und 50

Berechnen Sie den Verlauf der Räuber- und Beute Population beginnend mit R0 = 5 und B0 = 500.

Hinweise: Geben Sie Ihre Ausarbeitung gedruckt auf Papier ab.
Abgegebene Beispiele müssen in der Übungsstunde präsentiert werden können.

1 Schwingkreise und Verkaufsdynamik

Folgende Simulationsparameter wurden verwendet:

- *startTime:* 0
- *endTime:* variable, angegeben bei Testfall
- *step:* fix, 0.0.1
- *solver:* ode4 (Runge Kutta)

1.1 a

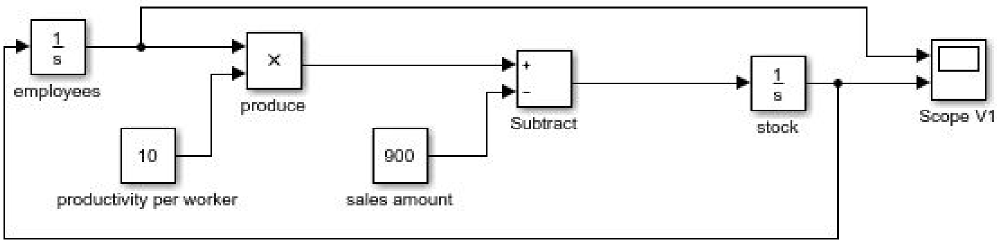

Abbildung 1: Modell mit positiver Rückkopplung

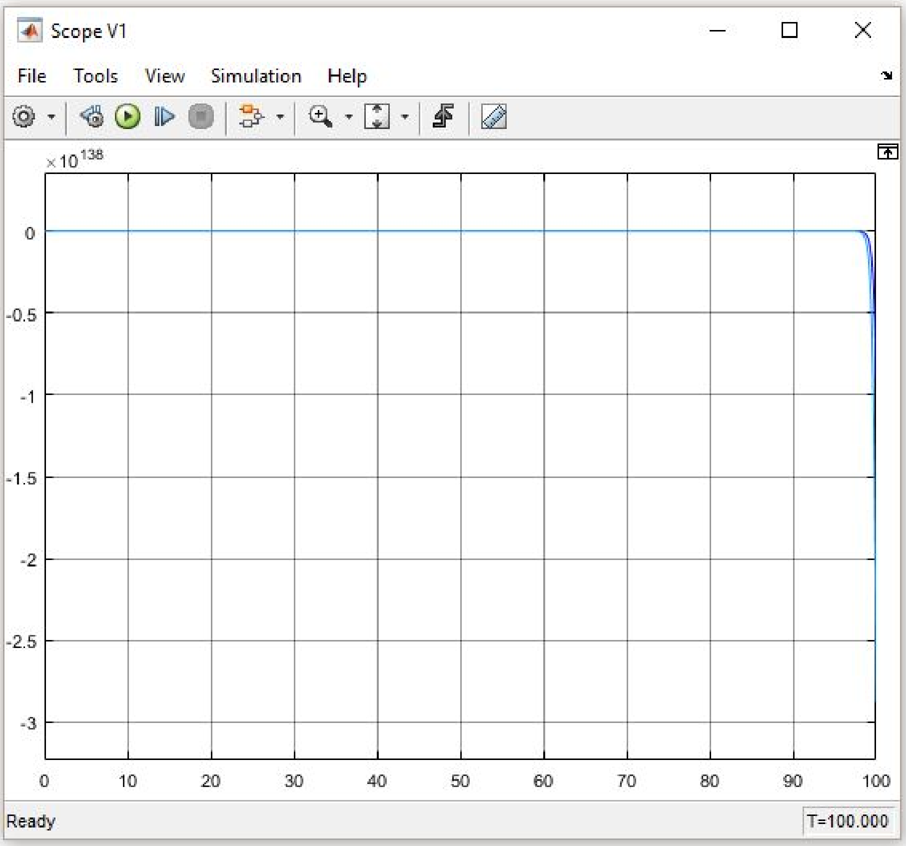

Abbildung 2: Verlauf bis endTime=100

Dieses System hat eine positive Rückkopplung und kann daher nicht zu einem Wert konvergieren, dazu wären zwei negative Rückkopplungen der beiden Integratoren *employees* und *stock* nötig. Es fängt in diesem Fall auch nicht an zu Schwingen sondern *"implodiert"* regelrecht. Es gibt keine Möglichkeit dieses System durch Parameterveränderung zu stabilisieren, da es sich hier um ein instabiles System handelt.

1.2 b

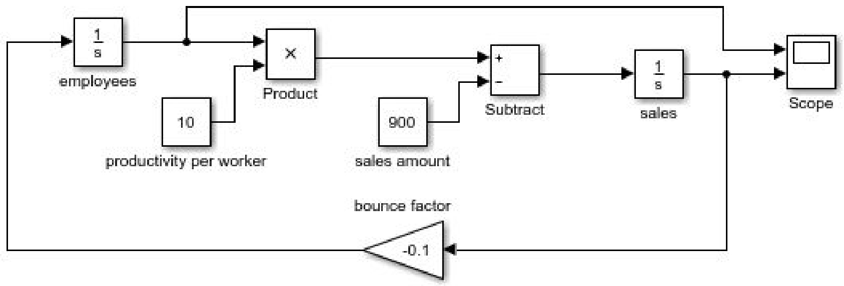

Abbildung 3: Modell mit einfacher negativer Rückkopplung

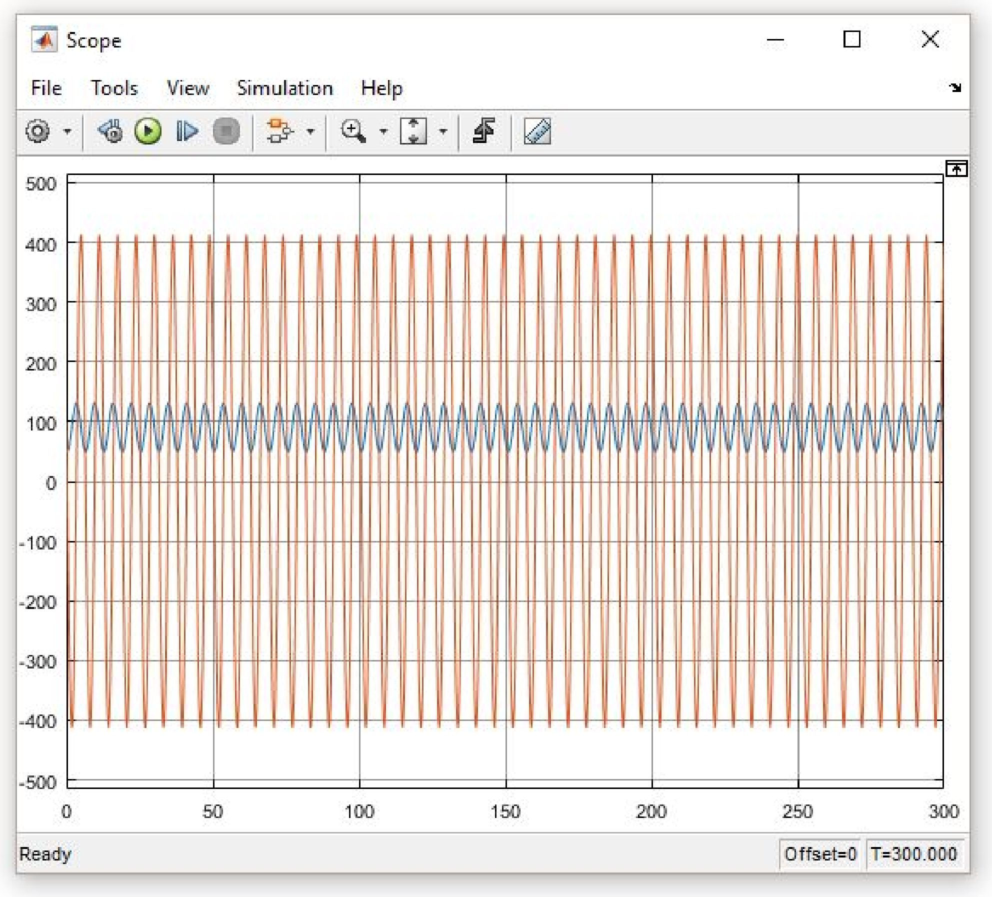

Abbildung 4: Verlauf bis endTime=300

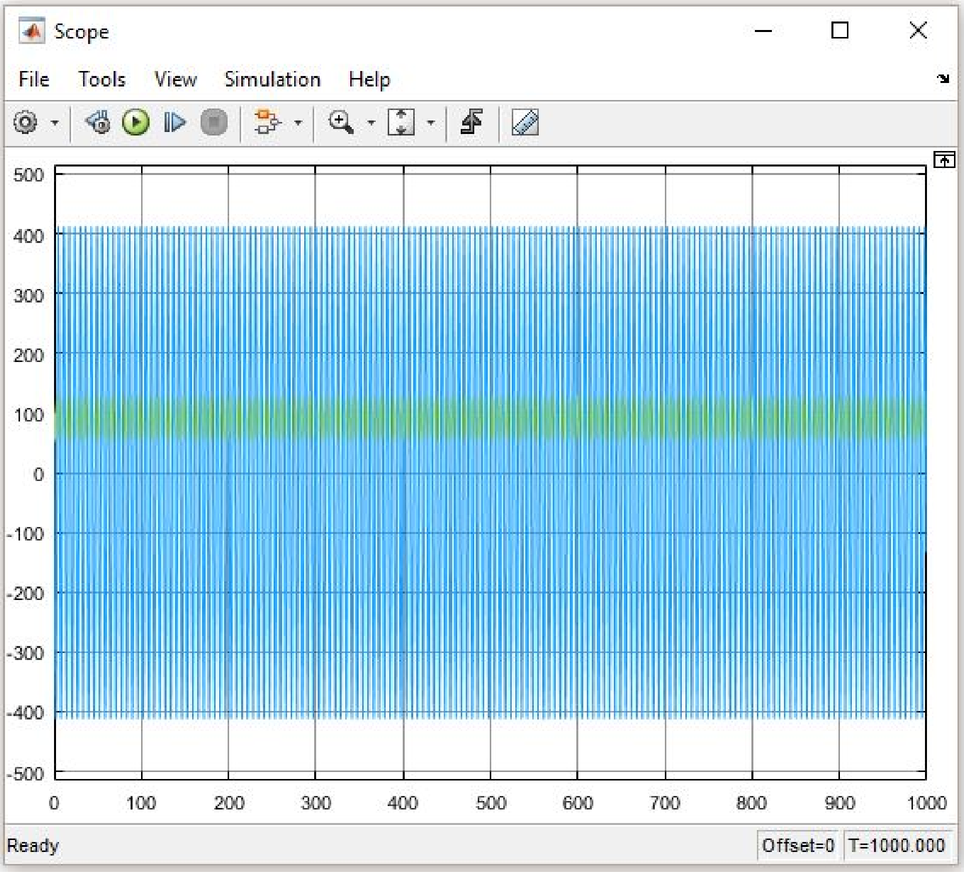

Abbildung 5: Verlauf bis endTime=1000

Dieses System wird durch die negative Rückkopplung stabilisiert und weist ein stabiles Verhalten auf, jedoch ist das System nun ein Schwingkreis. Dieses System wird auch nicht zu einem Wert konvergieren, den es fehlt noch die zweite negative Rückkopplung, die das System dazu anregt zu einem Wert zu konvergieren.

1.3 c

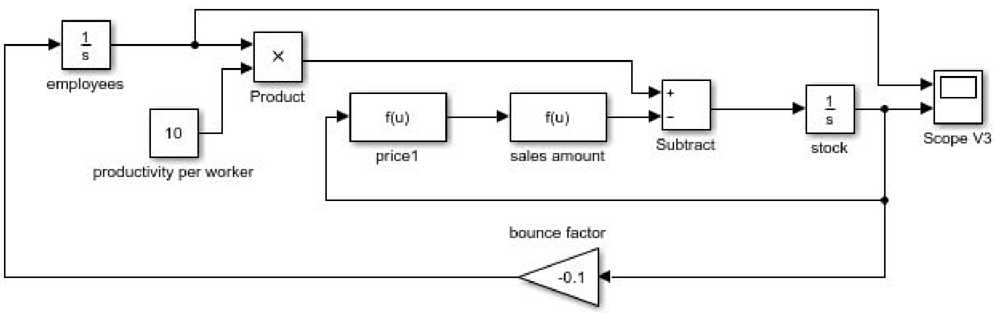

Abbildung 6: Modell mit doppelter negativer Rückkopplung

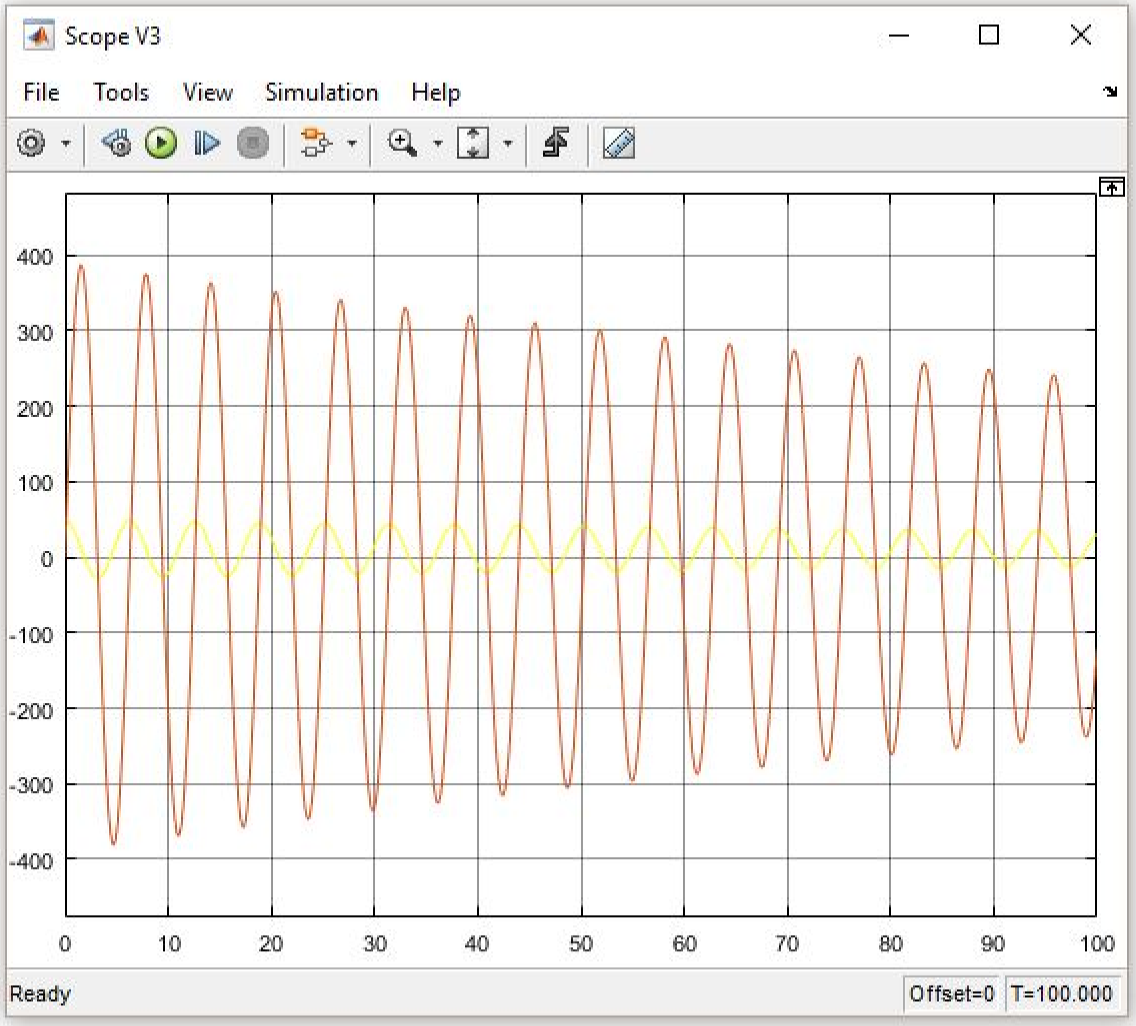

Abbildung 7: Verlauf bis endTime=100

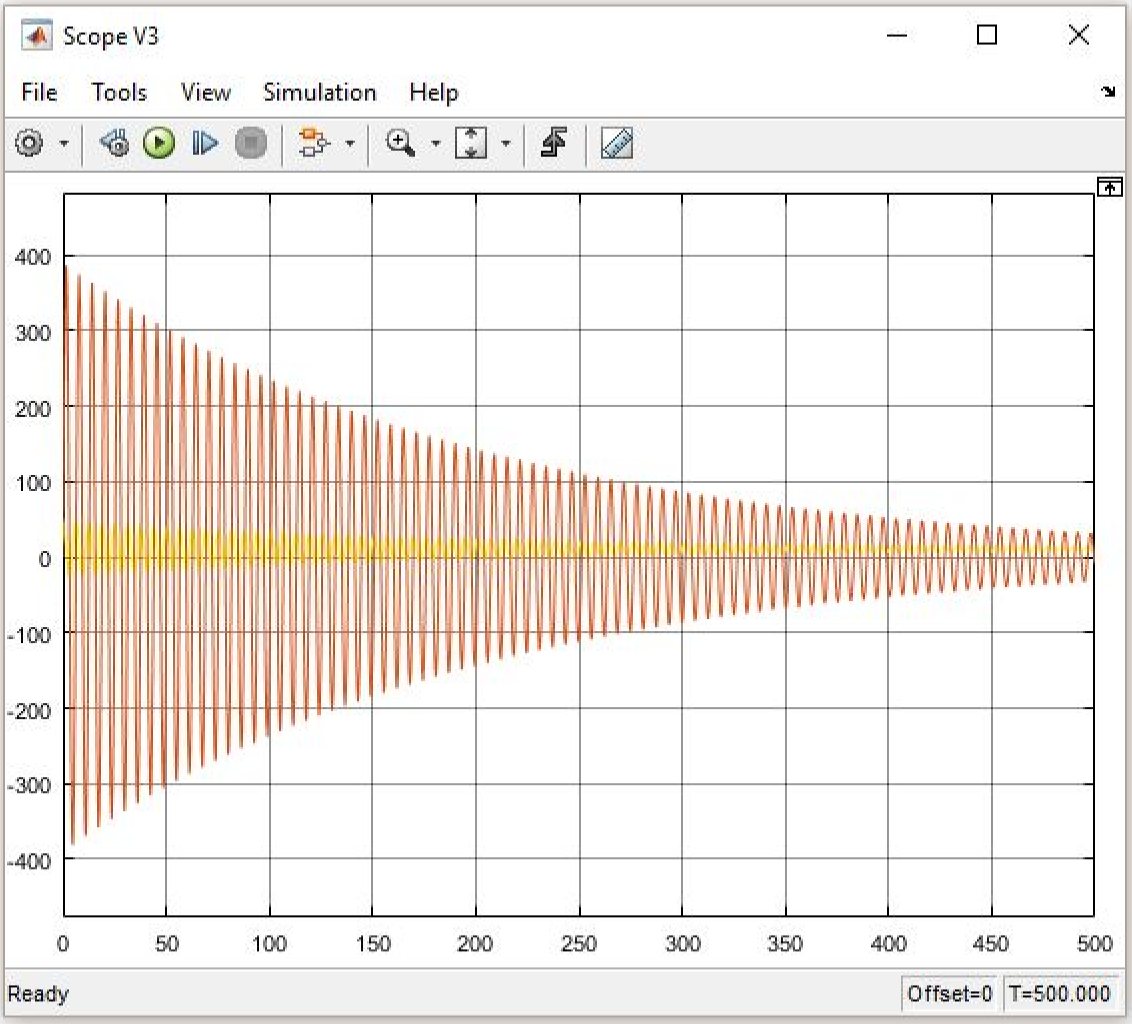

Abbildung 8: Verlauf bis endTime=500

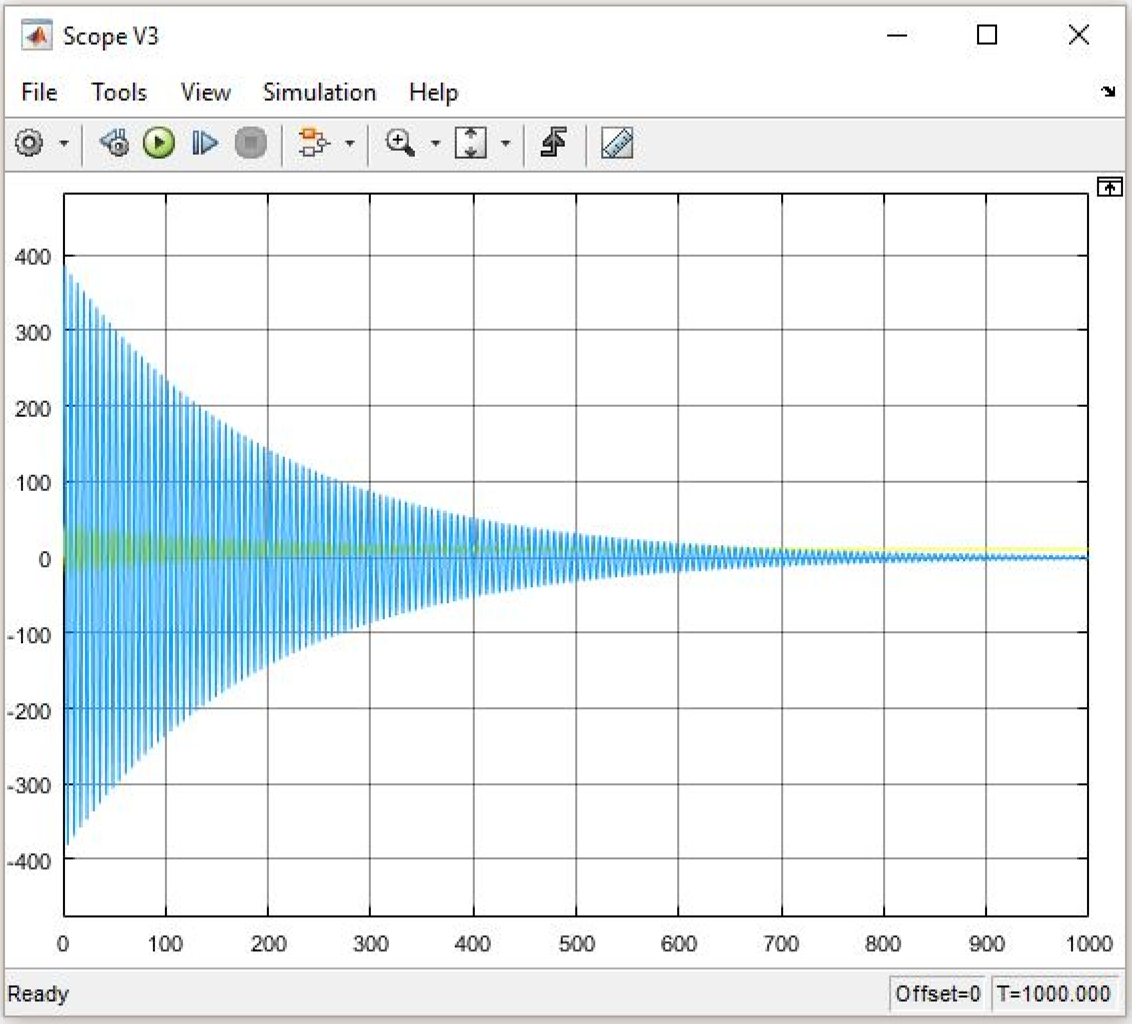

Abbildung 9: Verlauf bis endTime=1000

Mit dem Hinzufügen der zweiten negativen Rückkopplung, wird das System zum gedämpften Schwingkreis, der zu einem Wert konvergiert (*employees, stock*).

2 Adrenalingehalt des Blutes

Listing 1: Skript für die diskrete Berechnung des Verlaufs

```
% simulation parameters
tStep  = 0.01;
tMax   = 48;
tSart  = 1;
% simulation arguments
alpha  = 0.2;
a      = 0.1;
b      = 0.025;
At     = 1;
% result matrizes
res    = [];
tSteps = [];
i      = 1;
for t=tSart:tStep:tMax
    % growth rate at t
    ft = (a + (b * (cos(pi*(t-8)/12))));
    % grotwh and decay
    At_ = (alpha * At) - (At * ft);
    % new At at t
    At  = At + (At_ * tStep);

    % save result
    res(i)    = At;
    tSteps(i) = t;
    i         = i + 1;
end

% plot results
figure;
plot(tSteps, res);
xlabel('t')
ylabel('A')
legend('A(t)');
```

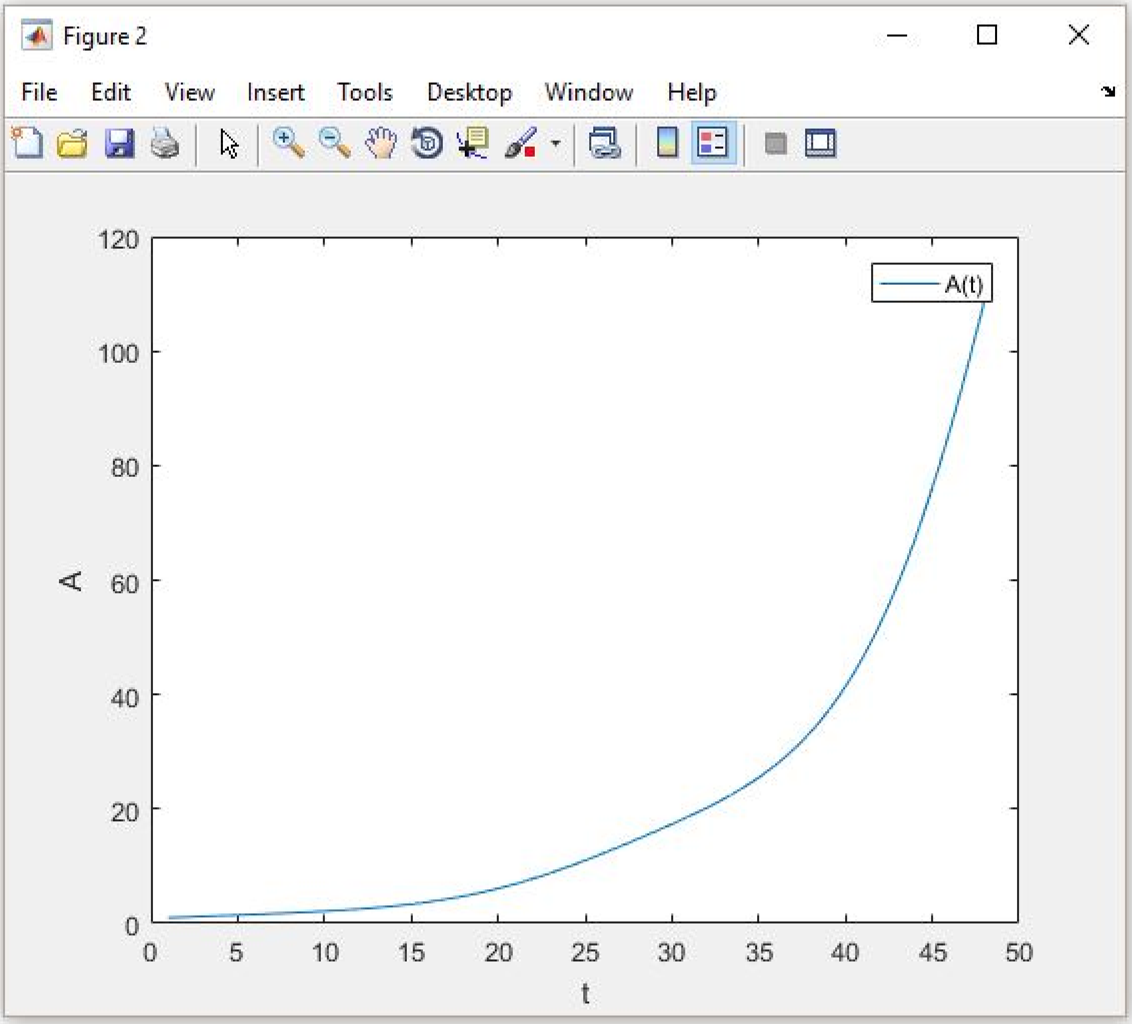

Abbildung 10: Verlauf bis endTime=48

3 Logistisches Wachstum

Listing 2: Skript für die kontinuierliche Berechnung des Verlaufs

```
% Simulation parameters
tStep  = 1;
tMax   = 50;
tSart  = 1;
% simulation arguments
alpha  = 1/5;
beta   = 1/5175;
C      = alpha / beta; % border to converge too
C99    = C * 0.99;     % 99% value
Pt     = 10;           % initial flys
% result matrizes
res    = [];
Pt_12  = 0;            % value at day 12
t_C99  = 0;            % days when 99% has beeen reached first

for t=tSart:tStep:tMax
    % change rate at t
    Pt_     = alpha * Pt - (beta * Pt^2);
    % current value at t
    Pt      = Pt + (Pt_ * tStep);

    % save result
    res(t) = Pt;

    % get value at day 12
    if t == 12
        Pt_12 = Pt;
    end;

    % get days when 99% has been reached first
    if t_C99 == 0 && Pt >= C99
        t_C99 = t;
        break;
    end;
end

% plot results
figure;
plot(1:tStep:t_C99, res);
xlabel('t')
legend('P(t)');
```

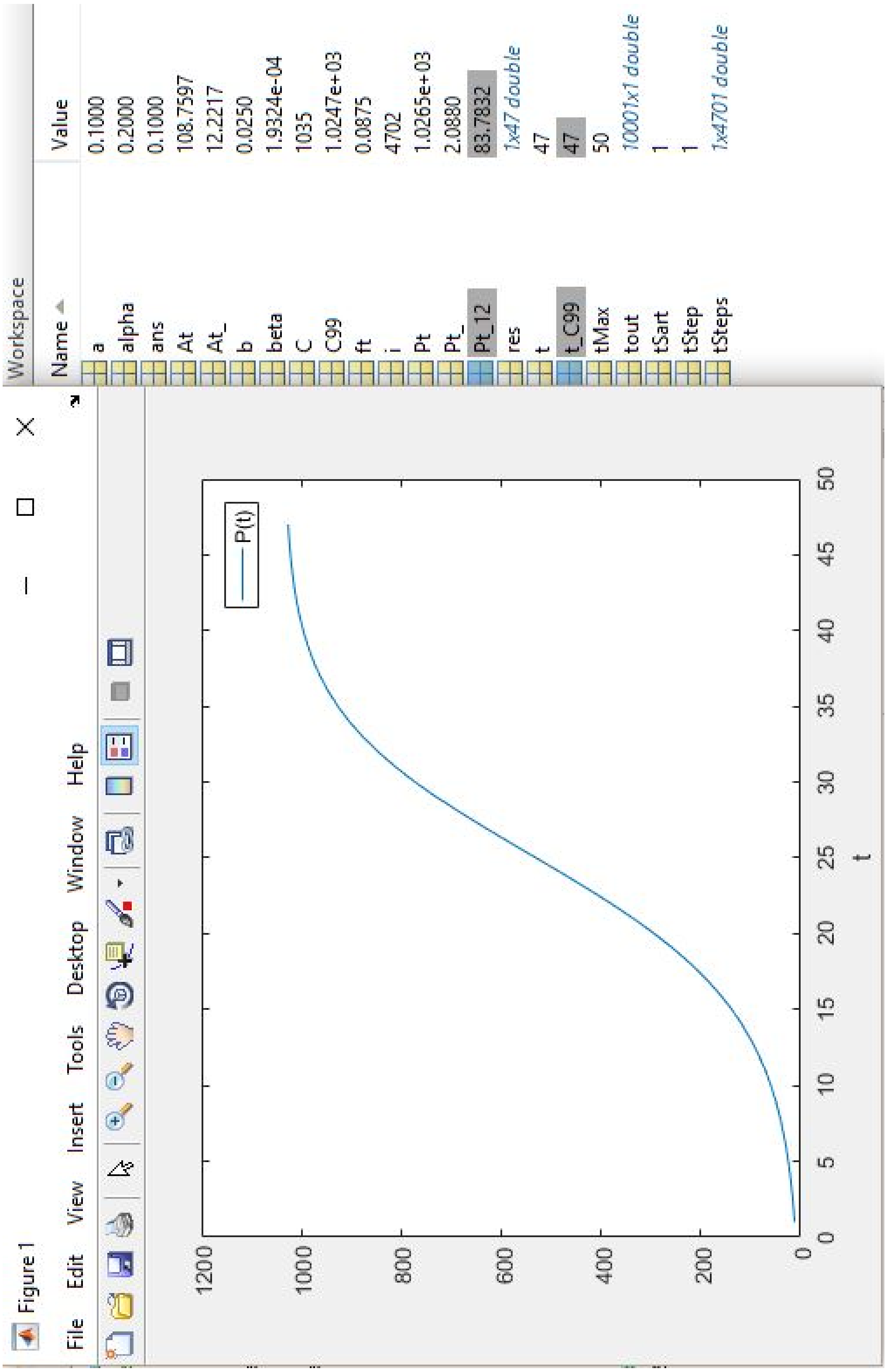

Abbildung 11: t_99=47, Pt_12=83.7832

4 Räuber und Beute

Listing 3: Skript für die kontinuierliche Berechnung des Verlaufs

```
% Simulation parameters
tStep = 0.01;
tMax  = 1003;

% Simulation arguments
alpha = 0.4;          % breath rate
gamma = 0.3;          % death rate
Mb    = 300;          % mean prey
Mr    = 50;           % mean preadator
beta  = alpha / Mr;   % Mr = alpha/beta
delta = gamma / Mb;   % Mb = gamma/delta
Rt    = 5;            % current preadator count (initially 5)
Bt    = 500;          % current prey count (initially 500)

% result container
bProg = zeros(tMax/tStep+1,1);
rProg = zeros(tMax/tStep+1,1);
i     = 1;

for t=0:tStep:tMax
    % change rate of prey at t
    Bt_ = (alpha * Bt) - (beta * Bt * Rt);
    % change rate of predator at t
    Rt_ = (-gamma * Rt) + (delta * Bt * Rt);
    % current prey at t
    Bt = Bt + (Bt_ * tStep);
    % current preadtor at t
    Rt = Rt + (Rt_ * tStep);

    % save results
    bProg(i) = Bt;
    rProg(i) = Rt;
    i = i + 1;

end

% plot P,B over t
figure;
plot(0:tStep:tMax, [bProg, rProg]);
title ('Predator and Prey');
xlabel('t')
ylabel('P,B')

% plot P over B
figure;
plot(bProg, rProg);
title ('Predator and Prey');
xlabel('B')
ylabel('P')
```

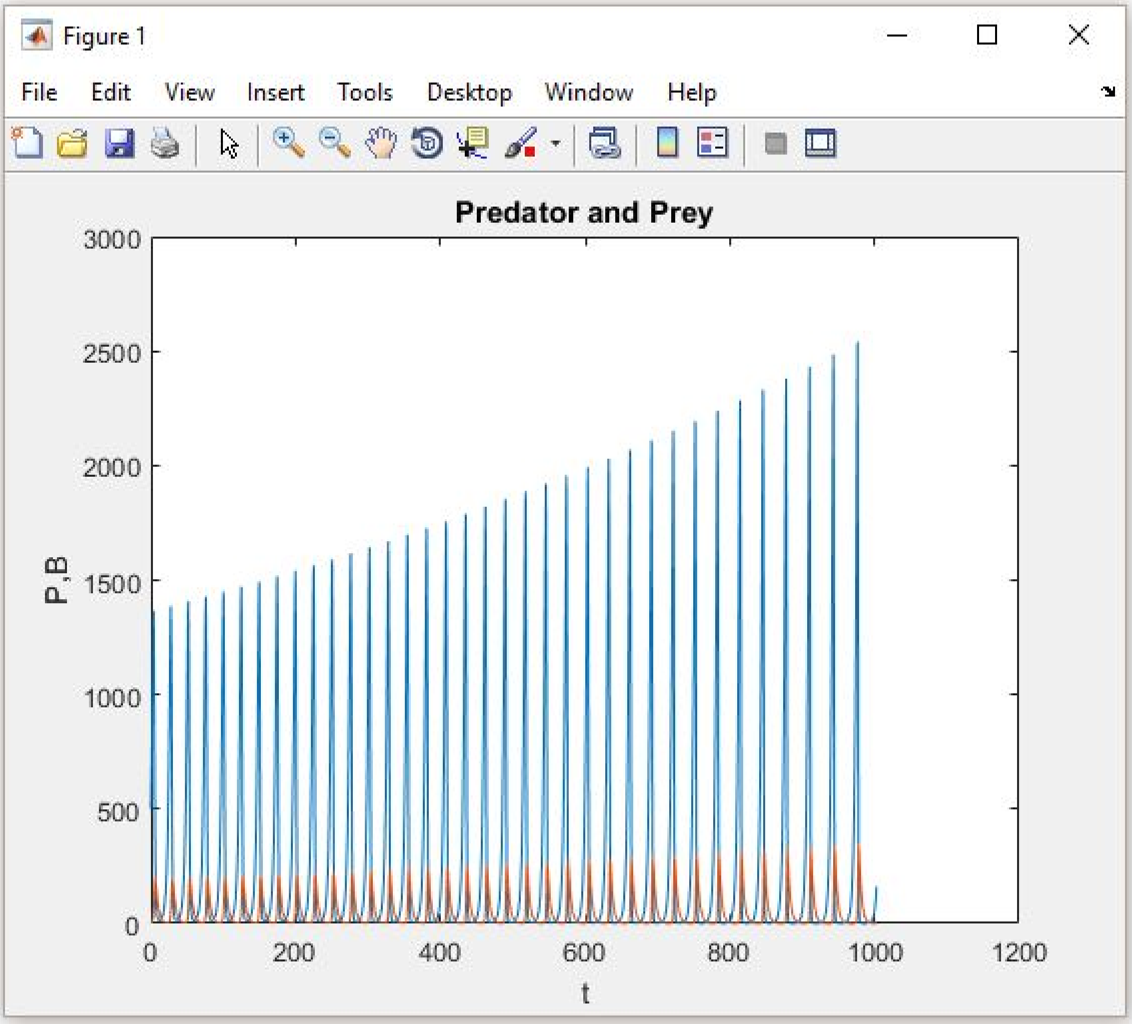

Abbildung 12: Verlauf P,B über t

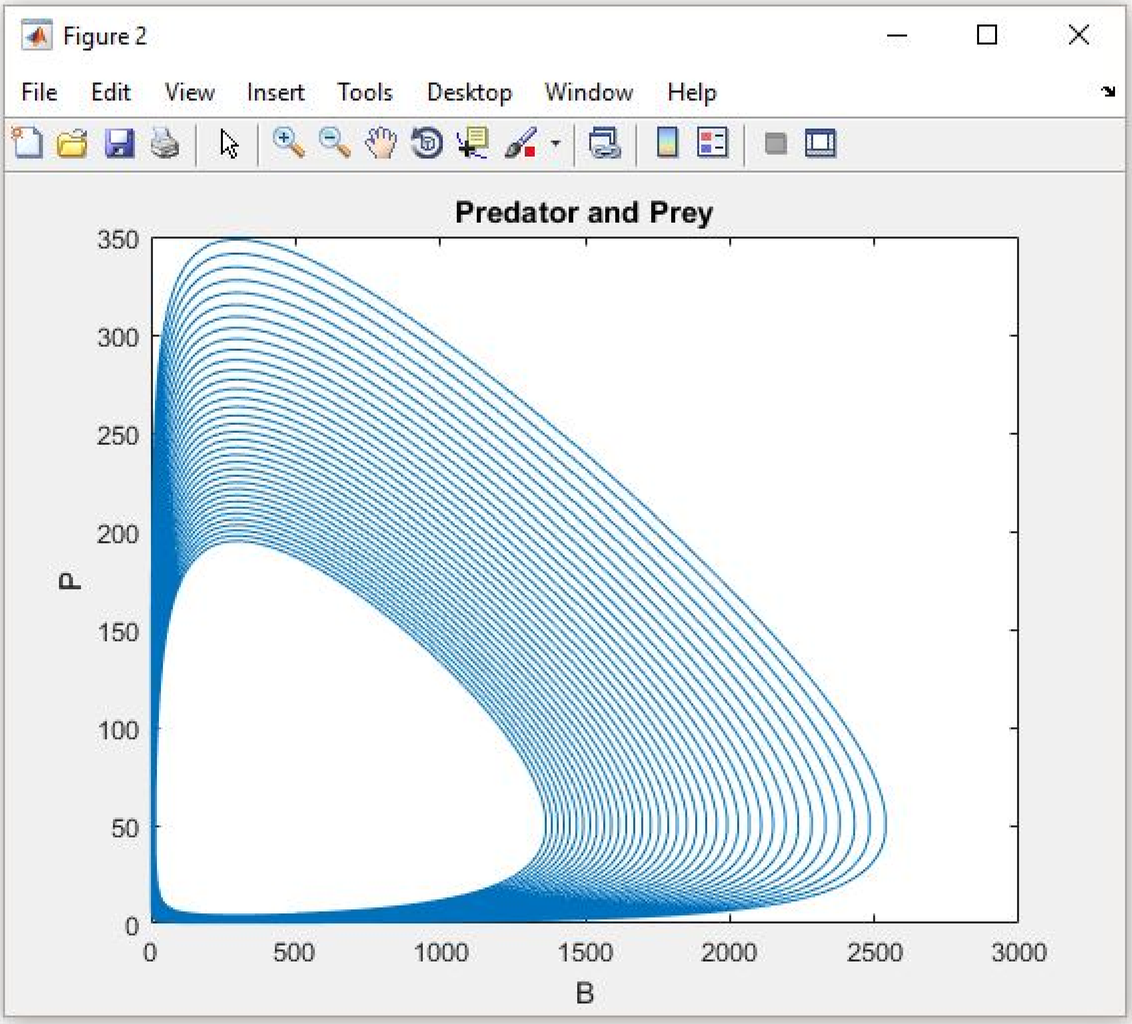

Abbildung 13: Verlauf P über B