Modellierung und Simulation **Übung 01**
WS 2016/17 **Abgabefrist: Siehe elearning bzw. exchange**

Name: _____ **Aufwand (h):** _____

Punkte: _____

Aufgabe 1 (8 Pkt): MATLAB

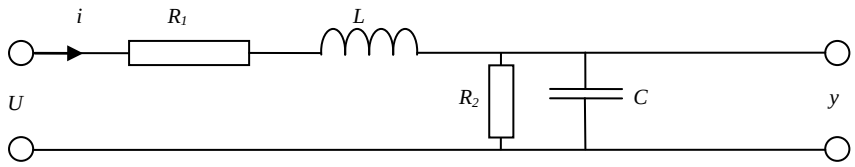
Polynome, eine wesentliche Grundlage bei der Beschreibung des dynamischen Verhaltens von beliebigen Systemen, können als Zeilenvektoren angegeben werden; Polynome von Grad n können allgemein durch Vektoren der Länge n+1 dargestellt werden.

Beispiel: Das Polynom
$p = 5s^5 – 3s^4 + s^2 + 2s$
lautet in seiner vollständigen Darstellung
$p = 5s^5 – 3s^4 + 0s^3 + s^2 + 2s + 0s^0$
und kann durch den Vektor
p = [5 -3 0 1 2 0]
definiert werden.

Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion, welcher ein Polynom beliebigen Grades als Zeilenvektor übergeben wird plus Angabe des Bereiches, für den dieses Polynom ausgewertet und gezeichnet werden soll; die Schrittweite der Auswertung bzw. graphischen Darstellung soll optional übergeben werden können, wenn nicht definiert soll sie 0.01 betragen.
Achten Sie bei der graphischen Ausgabe auf die Generierung von sinnvollen Diagramm-Überschriften.
(Und rufen Sie für diese Übung nicht einfach eine Polynom-Funktion von MATLAB auf!)

Aufgabe 2 (8 Pkt): Elektrotechnik Basics: Der „Serienresonanzkreis“

Gegeben sei folgende Schaltung:



Zusätzlich wissen wir:

$$u(t) = R_1 * i(t) + L * \frac{\partial i(t)}{\partial t} + y(t)$$

$$i(t) = \frac{1}{R_2} y(t) + C \frac{\partial y(t)}{\partial t}$$

Gesucht ist eine Beschreibung der elektrischen Spannung *y* als Reaktion auf die angelegte Spannung *u*.

Bringen Sie dieses System in die (A,B,C)-Normalform und simulieren Sie es in MATLAB, ohne Simulations-Tools (wie etwa SIMULINK) zu verwenden.
Tips:

- Mit Hilfe der Symbolic Math Toolbox für MATLAB dürfte Ihnen dies um einiges leichter fallen
- Modellieren Sie das System aufbauend auf die Zustände *i(t)* und *y(t)*

Aufgabe 3 (8 Pkt): Theorie der Kontinuierlichen Modellierung

Aufgabe 3a (4 Pkt)

Die Beschreibung von Systemen kann wie in der Vorlesung präsentiert mit Hilfe der sog. (A,B,C) Methode geschehen.
Beschreiben Sie in eigenen Worten in Form eines kurzen Aufsatzes (max. eine Seite), was damit gemeint ist, was die Funktion von A, B und C ist und wie die Dimensionen dieser Matrizen mit der Anzahl an Inputs, Outputs und Zuständen des beschriebenen Systems zusammenhängen.
Nehmen Sie auch zu folgenden Fragen Stellung:

- Wozu sollten wir eine solche mathematische Beschreibung überhaupt brauchen?
- Wozu die Lösung im Zeitbereich, wenn es Simulations-Software gibt?
- Wozu dann Simulations-Software, wenn es die Berechnungsmethode gibt?

Aufgabe 3b (4 Pkt)

Wie hängen die Formeln

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t); x(0) = x_o$$

$$y(t) = Cx(t)$$

und

$$x(t) = e^{tA}x(0) + \int_0^t e^{(t-\tau)A}Bu(\tau)d\tau$$

$$y(t) = Ce^{tA}x(0) + \int_0^t Ce^{(t-\tau)A}Bu(\tau)d\tau$$

mit den in Aufgabe 3a beschriebenen Matrizen zusammen, und wozu braucht man sie beim Modellieren und Simulieren von Systemen?

Hinweise: Geben Sie Ihre Ausarbeitung gedruckt auf Papier ab.
Abgegebene Beispiele müssen in der Übungsstunde präsentiert werden können.

1 Matlab

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit der Aufgabenstellung 1 der ersten Übung. Die folgenden Quelltexte zeigen die *Matlab* Funktionen, die für diesen Teil der Übung implementiert wurden.

In die Funktion *printPolynom* wurden Prüfungen der übergebenen Argumente implementiert wie

- *Gültigkeit der Argumentanzahl*
- *Gültigkeit des Vektors*
- *Gültigkeit der übergebenen Grenzen und Schrittweite*

Wenn die Schrittweite nicht gegeben ist, dann wird der Standardwert 0.01 verwendet.

Listing 1: Funktion zum Plotten eines Polynoms des Grades n

```
function printPolynom(poly, tStart, tEnd, tStep)
% This function calculates the polynom and plots it
% x-axis: tStart:[tStep,0.01]:tEnd
% y-axis: polyval(poly, currentStep)

% ------------------------- BEGIN Prepare -------------------------------
polySize = size(poly);       % get dimensions of matrix
if (nargin == 3)             % Set default for steps if not given
    tStep = 0.01;
end
% ------------------------- END Prepare ---------------------------------

% ------------------------- BEGIN Validation ----------------------------
if(nargin < 3)                          % Validate parameter count
    error('At least line vector, tStart and tEnd must be given');
elseif(polySize(1) ~= 1)                % Validate for line vector
    error('Only line vectors are allowed');
elseif(tStart > tEnd)                   % Range check
    error('tStart must not overflow tEnd');
elseif((tStep >= 1) || (tStep <= 0))  % Range check
    error('tStep must be ''0 < tStep < 1''');
end
% ------------------------- END Validation ------------------------------

% ------------------------- BEGIN Logic ---------------------------------
stepCount = int8((tEnd - tStart) / tStep);
x    = zeros(1, stepCount);             % pre-allocate x
y    = zeros(1, stepCount);             % pre-allocate y
idx  = 1;                               % counter valriable
cols = polySize(2);
for t=tStart:tStep:tEnd                 % loop over range
    x(idx) = t;                         % build x-axis
    yValue = 0;
    for i=1:1:cols                      % calculate polynom
        yValue = yValue + poly(1, i) * t^(cols - i);
    end
    y(idx) = yValue;                     % build y-axis
    idx    = idx + 1;                    % increase counter
end

figure;                                  % open new window
plot(x, y);                              % plot function over t
hold on                                  % hold on
xlabel(['t (', num2str(tStep), ')']);    % define xlabel
```

```
ylabel('y');                              % define yLabel
legend(strcat('y(t)=', poly2Str(poly))) % define legend
% ------------------------ END Logic ----------------------------------
end
```

Listing 2: Funktion zum Umwandeln eines Polynoms des Grades n in eine Zeichenklette

```
function value = poly2Str( poly )
% This function prints the ploynom represented by the line vector
% to its string representation

polySize = size(poly);
cols     = polySize(2);
value    = '';

if(polySize(1) ~= 1)                % Validate for line vector
    error('Only line vectors are allowed');
end

for i=1:1:cols
    polyVal = poly(1, i);
    pot     = cols - i;

    if(polyVal ~= 0)                    % print only value != 0
        if((i > 1) && (polyVal >= 0))   % add plus sign if positive number
            value = strcat(value, {' +'});
        end
        value = strcat(value, {' '}, num2str(polyVal));
        if(pot > 1)                     % add pot only if greather than 1
            value = strcat(value,  {' * x^'}, num2str(pot));
        elseif(pot == 1)
            value = strcat(value,  {' * x'});
        end
    end
end

end
```

Die Funktion aus dem Quelltext 2 zeigt die Funktion, die implementiert wurde, um die Polynomfunktion repräsentiert durch einen Zeilenvektor in seine Repräsentation mit einer Zeichenkette zu konvertieren. Dies war erforderlich, da die Funktion *poly2Sym* nicht zur Verfügung stand.

1.1 Simulation des Polynoms

Folgender Abschnitt beschäftigt sich mit den Simulationen des Polynoms.

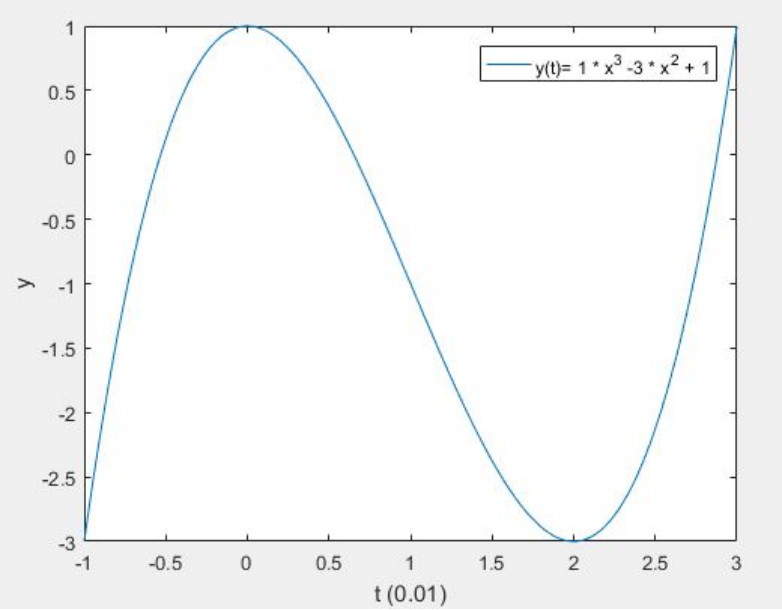


Abbildung 1: Simulation 1 P=[1 -3 0 1]

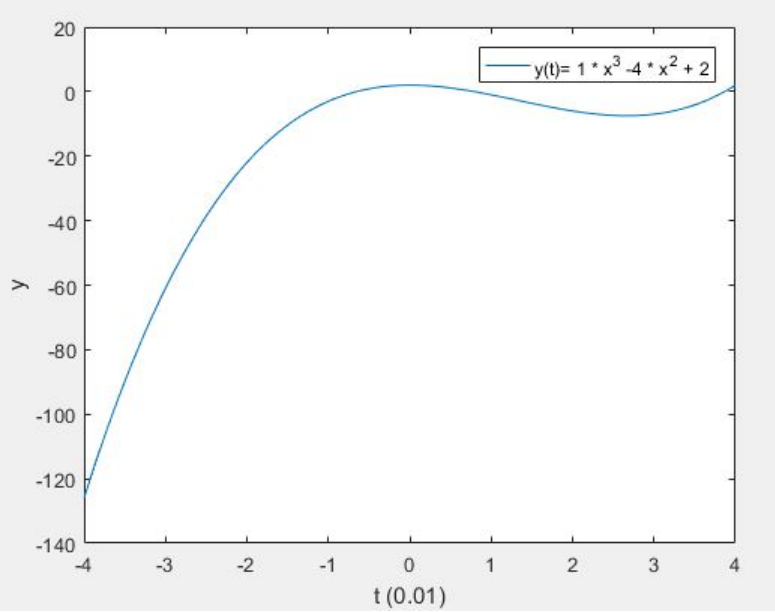


Abbildung 2: Simulation 2 P=[1 -3 0 2]

2 Der Serienresonanzkreis

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit der Aufgabenstellung 2 der ersten Übung.

Umformen der Gleichung nach $\check{i}(t)$.

$$\begin{array}{lcll} u(t) & = & R_1 * i(t) + L * \frac{\delta i(t)}{\delta t} + y(t) & \\ u(t) & = & R_1 * i(t) + L * \check{i}(t) + y(t) & \frac{\delta i(t)}{\delta t} = \check{i}(t) \\ u(t) - R_1 * i(t) - y(t) & = & L * \check{i}(t) & -R_1 * i(t) - y(t)) \\ \frac{1}{L} * u(t) - \frac{R_1}{L} * i(t) - \frac{1}{L} * y(t) & = & \check{i}(t) & /L \end{array}$$

$$\check{i}(t) = \frac{1}{L} * u(t) - \frac{R_1}{L} * i(t) - \frac{1}{L} * y(t)$$

Umformen der Gleichung nach $\check{y}(t)$.

$$\begin{array}{lcll} i(t) & = & \frac{1}{R_2} * y(t) + C * \frac{\delta y(t)}{\delta t} & \\ i(t) & = & \frac{1}{R_2} * y(t) + C * \check{y}(t) & \frac{\delta y(t)}{\delta t} = \check{y}(t) \\ i(t) - \frac{1}{R_2} * y(t) & = & C * \check{y}(t) & -\frac{1}{R_2} * y(t) \\ \frac{1}{C} * i(t) - \frac{1}{C * R_2} * y(t) & = & \check{y}(t) & /C \end{array}$$

$$\check{y}(t) = \frac{1}{C} * i(t) - \frac{1}{C * R_2} * y(t)$$

Substitution von $i(t), y(t)$

$$x_1(t) = i(t)$$

$$x_2(t) = y(t)$$

$$\check{x_1}(t) = -\frac{R_1}{L} * x_1(t) - \frac{1}{L} * x_2(t) + \frac{1}{L} * u(t)$$
$$\check{x_2}(t) = \frac{1}{C} * x_1(t) - \frac{1}{C * R_2} * x_2(t) + 0 * u(t)$$

A, B, C Matrizen aufstellen:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{R_1}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{C*R_2} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

In A, B, C Normalform bringen:

$$\check{X}(t) = \begin{bmatrix} \frac{R_1}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{C*R_2} \end{bmatrix} * X(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} * U(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} * X(t)$$

Listing 3: Skript zum Simulieren eines Serienresonanzkreises

```
% ------------------------ BEGIN Setup --------------------------------
% Here we initialize the starting test data
% ------------------------ BEGIN Setup --------------------------------
data.R1 = 1;
data.R2 = 2;
data.C  = 3;   % 1   | 2   | 3
data.L  = 2.5; % 2.5 | 1.5
data.U  = 1;
%data.vector.A  = [data.R1/data.L -(1/data.L) ;
%                  1/data.C -(1/(data.C * data.R2))];

data.vector.A  = [(data.R1/data.L) -(1/data.L) ;
                  (1/data.C) -(1/(data.C * data.R2))];
data.vector.B  = [(1/data.L); 0];
data.vector.C  = [0 1];
data.vector.X0 = [0 ; 0];
data.eval.tStart = 0;
data.eval.tEnd   = 50;
data.eval.tStep  = 0.5;
% ------------------------ END Setup ----------------------------------

% ------------------------ INIT RUN -----------------------------------
% Here we run our simulation runCount times, with the defined movements of
% the input variables
% ------------------------ INIT RUN -----------------------------------
i = 1;                      % init i run variable
tStart = data.eval.tStart;  % local tStart
tEnd   = data.eval.tEnd;    % local tEnd
tStep  = data.eval.tStep;   % local tStep
A      = data.vector.A;     % local A vector
B      = data.vector.B;     % local B vector
C      = data.vector.C;     % local C vector
X0     = data.vector.X0;    % local X0 vector
U      = data.U;            % local U voltage
xAxis = tStart:tStep:tEnd;  % allocate x-axis
yAxis = zeros(1, int8((tEnd - tStart) / tStep)); % allocate y-axis

syms tau;                   % register tau
for t=tStart:tStep:tEnd     % loop over simulation time frame
    yAxis(1,i) = C * (double((expm(t * A) * X0) ...
                    + (int(expm((t - tau) * A) * B * U, tau, 0, t))));
    i    = i + 1;           % inc run variable
end

figure;                                 % open new window
plot(xAxis, yAxis);                     % plot function over t
hold on                                 % hold on
xlabel(['t (', num2str(tStep), ')']);   % define xlabel
ylabel('y');                            % define yLabel
legend('Serial resonance cycle');
% ------------------------ END RUN ------------------------------------
```

2.1 Simulationen des Serienresonanzkreises

Folgender Abschnitt behandelt die durchgeführten Simulationen für den Serienresonanzkreis. Die Simulationen wurden mit den folgenden zeitlichen Parametern durchgeführt $tStart = 0$, $tEnd = 50$ und $tStep = 0.5$. Da das Integrieren in Matlab sehr teuer ist, wurde eine nicht so feine Schrittbreite gewählt.

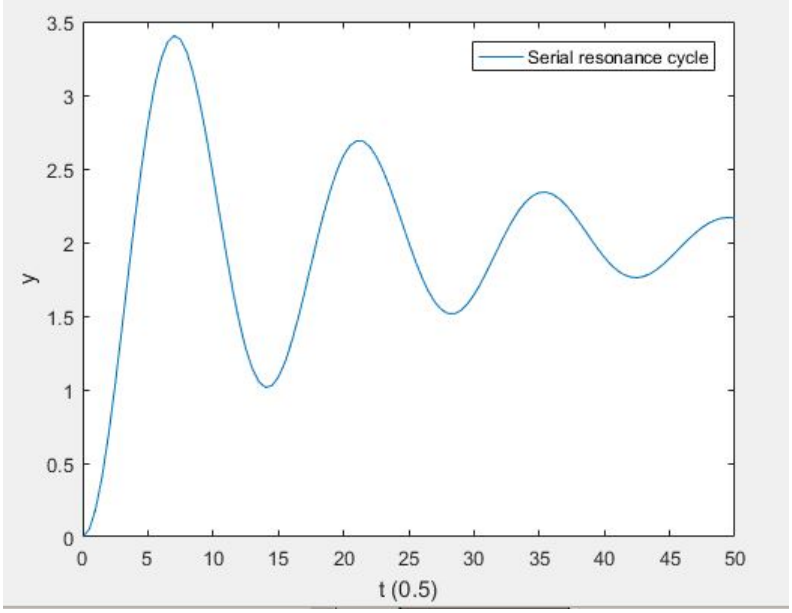


Abbildung 3: Simulation 1 mit R1=1 , R2=2 , C=1 , L=2.5, U=1

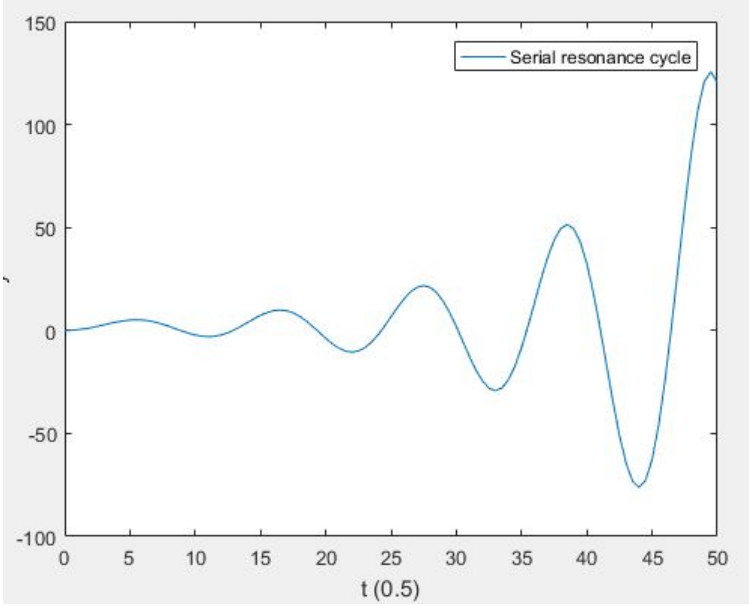


Abbildung 4: Simulation 1 mit R1=1 , R2=2 , C=1 , L=1.5, U=1

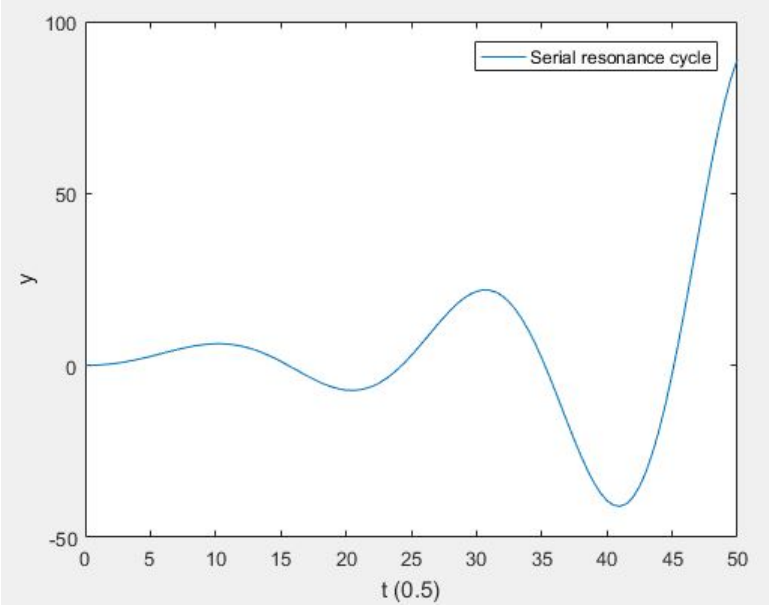


Abbildung 5: Simulation 1 mit R1=1 , R2=2 , C=2 , L=2.5, U=1

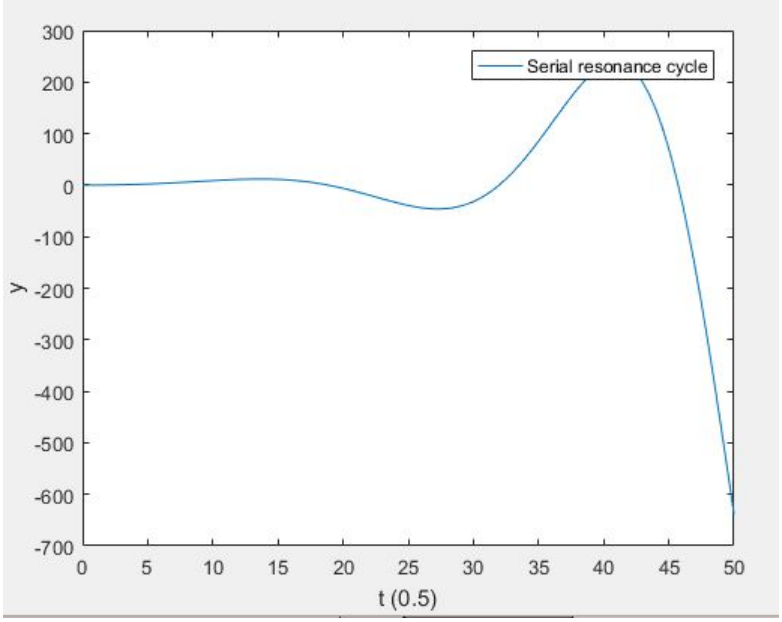


Abbildung 6: Simulation 1 mit R1=1 , R2=2 , C=3 , L=2.5, U=1

3 Theorie der Kontinuierlichen Modellierung

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit der Aufgabenstellung 3 der ersten Übung.

3.1 3a Beschreibung der A,B,C Methode

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit der Beschreibung der A, B, C Methode.

Die A, B, C Normalform verwendet die Matrizen A, B und C, welche die Vektoren sind, mit denen die Eingangs-, die Ausgangs- und die Zustandsvariablen beeinflusst werden.

A-Matrix ist der Vektor, der die gegenseitige Beeinflussung der inneren Zustände beschreibt. Die A-Matrix hat so viele Spalten wie es innere Zustände gibt, die in der $X(0)$-Matrix durch die Anzahl der Zeilen gegeben ist.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{R_1}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{C*R_2} \end{bmatrix} X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix}$$

B-Matrix ist der Vektor, der die Beeinflussung der Eingangsvariablen beschreibt. Die B-Matrix hat so viele Spalten wie es Eingangsvariablen gibt, die in der $U(t)$-Matrix durch die Anzahl der Zeilen gegeben ist.

$$B = \begin{bmatrix} \frac{R_1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} U(t) = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

C-Matrix ist der Vektor, der definiert wird, je nachdem welchen Output man erhalten will. Die C-Matrix wird in der Ausgangsgleichung $y(t) = C * X(t)$ verwendet. Die Anzahl der Spalten ergibt sich aus der Anzahl der Zeilen der Ausgangsmatrix, die angibt wie viele Ausgangsvariablen es gibt. Die Werte 0 und 1 in der C-Matrix werden verwendet um die einzelnen Ausgangsvariabeln bei der Betrachtung miteinzubeziehen oder auszuschließen.

$$C_{i(t)} * X(t) \; ; \; \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} i(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad | \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} i(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad | \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} i(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

Hat man sein System auf die A, B, C Normalform gebracht, kann man die einzelnen Werte mit dem Integral ausrechnen, das sich durch die Umformung der A, B, C Normalform ergibt, wenn der Zustand $X(0)$ bekannt ist.

Diese mathematische Beschreibung zeigt, die Zusammenhänge und Beeinflussung der Variablen innerhalb des Systems. Mit der A, B, C Normalform, kann die Veränderung eines Zustands im System zum Zeitpunkt t berechnet werden.

Die Simulationssoftware verwendet die Berechnungsmethoden intern um auf die graphische Darstellung zu kommen, also kann es keine Simulationssoftware geben, die nicht auf Grundlage dieser Berechnungsmethoden arbeitet.

3.2 3b Zusammenhang der Formeln der A, B, C Methode

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit der Beschreibung des Zusammenhangs der Formeln der A, B, C Methode.

Das abgeleitete Integral der A, B, C Normalform wird dazu verwendet zu berechnen, wie sich ein Zustand in einem System zu einem Zeitpunkt t verhält bzw. wie stark sich ein Wert eines Zustand zu Zeitpunkt t verändert. Hat man sein System erst einmal in die A, B, C Normalform gebracht, dann kann man das Integral anwenden um die Simulationen über die Zeit T zu erstellen.