试卷编号：______

诚信考试，诚信做人。

学院：________ 专业：________ 班级：________ 学号：________ 姓名：________

装 订 线

广东工业大学考试试卷（ A ）

2021 -- 2022 学年度第 2 学期

课程名称：高等数学（2）（期中考试） 学分______ 试卷满分____分

考试形式：闭卷 （开卷或闭卷）

题 号	一	二	三(1)	三(2)	三(3)	三(4)	四	五	六	附加题	总分
评卷得分											
评卷签名											
复核得分											
复核签名											

一、填空题（共 5 小题，每题 4 分，共 20 分）

1. 求函数$z=xy+\sqrt{\ln\frac{R^2}{x^2+y^2}}+\sqrt{x^2+y^2-R^2}$的定义域______________.

答案： $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=R^2\}$

2. $z=x^y+\frac{y}{x}$, 则 $dz=$______________

答案： $dz=(yx^{y-1}-\frac{y}{x^2})dx+(x^y\ln x+\frac{1}{x})dy$

3. 已知向量$|\vec{a}|=2$， $|\vec{b}|=\sqrt{2}$， 且 $\vec{a}\bullet\vec{b}=2$， 则$|\vec{a}\times\vec{b}|=$__________. 答案： 2

4. 设$f(x,y)=x+(y-1)\arctan\sqrt{x}$, 求 $f_x(x,1)=$__________. 答案： 1

解析：先把 y=1 直接代入，在求导。

5. 函数$u=x^2+y^2+z^2-3xz$ 在点 $M_0(1,1,1)$ 处沿$\vec{l}=\{1,2,2\}$的方向导数为________

答案： $\frac{1}{3}$

二、单项选择题（共 6 小题，每题 4 分，共 24 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)}\frac{\sin(x-y)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=$ （ ）. 答案：C

(A) **0**； (B) 1； (C) 2； (D) 不存在.

2．已知函数 $z=f(x,y)$，且 $f_x(0,0)=3$， $f_y(0,0)=2$，则下列结论正确的是（　　） 答案： D

(A) $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续； (B) $dz\big|_{(0,0)}=3dx+2dy$；

(C) $z=f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处沿任何方向的方向导数都存在；

(D) $z=f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处沿 x 轴方向的方向导数是 3，沿 y 轴负方向的方向导数是 -2.

3、考虑二元函数 $f(x.y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的如下性质：

① 连续；② 极限存在；③ 可微分；④ 两个偏导数都存在.

若用“$P\Rightarrow Q$”表示可由性质 P 推出性质 Q，则下列关系成立的是（　　）. 答案：**D**

（A）④⇒①⇒②；（B）③⇒④⇒①；（C）④⇒③⇒②； （D）③⇒①⇒②.

4.求曲线 $\begin{cases} x=t \\ y=-t^2 \\ z=t^3 \end{cases}$ 的所有切线中，与平面x+2y+z=-4平行的切线 （ ）.答案：B

.

（A） 1 条 （B） 2 条 （C） 至少 3 条 （D） 不存在

分析 曲线 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$ 的切线方向向量为 $(x'(t),y'(t),z'(t))$.

曲线的切线与平面平行，即曲线切线的方向向量与平面的法向量垂直. 根据向量垂直的充要条件，即可得解.

解 曲线的切线方向向量为 $(x'(t),y'(t),z'(t))=(1,-2t,3t^2)$. 依题意知，切线的方向向量应与平面 $x+2y+z=-4$ 的法向量垂直，于是有

$$(1,-2t,3t^2)\cdot(1,2,1)=1-4t+3t^2=0,$$

解得 $t_1=\dfrac{1}{3}$， $t_2=1$.

所以与平面 $x+2y+z=-4$ 平行的切线应有两条.

故应选(B).

5．直线 $\dfrac{x-1}{-2}=y=z$ 与平面 $x+y+z=1$ 的位置关系是（　　）. 答案：（**A**）

（A）直线在平面内；　　（B）平行但不在平面内；

（C）垂直；　　（D）相交但不垂直.

6. 曲面 $x^2+4y^2+z^2=1$ 与平面 $x+z=a$ 的交线在 yoz 平面上的投影方程为（　　）. 答案：**A**

（A）$\begin{cases} (a-z)^2+4y^2+z^2=1 \\ x=0 \end{cases}$； （B）$\begin{cases} x^2+4y^2+(a-x)^2=1 \\ z=0 \end{cases}$；

（C）$\begin{cases} x^2+4y^2+(a-x)^2=1 \\ x=0 \end{cases}$；　　　　（D）$(a-z)^2+4y^2+z^2=1.$

三、计算下列各题（共 30 分）

1、（7 分）设 $z=y\,f(2x,\dfrac{y}{x})$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$。

解：$\dfrac{\partial z}{\partial y}=f+yf_2'\bullet\dfrac{1}{x}=f+\dfrac{y}{x}f_2'$ ……………………………………3 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{y}{x^2}f_2'+\frac{y}{x}\frac{\partial(f_2')}{\partial x}$$ ……………………………………4 分

$$=2f_1'-\frac{y}{x^2}f_2'-\frac{y}{x^2}f_2'+\frac{y}{x}f_{21}''\cdot 2-\frac{2y}{x^2}+\frac{y}{x}f_{22}''\cdot(-\frac{y}{x^2})$$ ……………………………………6 分

$$=2f_1'-\frac{2y}{x^2}f_2'+\frac{2y}{x}f_{21}''-\frac{y^2}{x^3}f_{22}''$$ ……………………………………7 分

2.（7分）设函数 $z(x,y)$ 由方程 F（$x+yz$, y+z）=0给出，F，z都是可微函数，求dz.

解：记 $x+yz$=u, y+z $=v$

法一：公式法　$F_x=F_u\dfrac{\partial u}{\partial x}+F_v\dfrac{\partial v}{\partial x}=F_u$

$$F_y=F_u\frac{\partial u}{\partial y}+F_v\frac{\partial v}{\partial y}=zF_u+F_v$$

$$F_z=F_u\frac{\partial u}{\partial z}+F_v\frac{\partial v}{\partial z}=yF_u+F_v$$ ……………3分

当 $F_z\neq 0,\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z}=-\dfrac{F_u}{yF_u+F_v},\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y}{F_z}=-\dfrac{zF_u+F_v}{yF_u+F_v}$

$$dz=\ -\frac{F_u}{yF_u+F_v}dx-\frac{zF_u+F_v}{yF_u+F_v}dy$$ ……7分

法二：微分法　$dF=F_u du+F_v dv=F_u d(x+yz)+F_v d(\text{y+z})$

$$=F_u(dx+ydz+zdy)+F_v(d\text{y}+dz)=0$$

$$dz=\ -\frac{F_u}{yF_u+F_v}dx-\frac{zF_u+F_v}{yF_u+F_v}dy$$

3、（8分）求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-3x=0 \\ 2x-2y+z-1=0 \end{cases}$,在点（1，1，1）处的切线和法平面方程，并求出原点到法平面方程的距离。

解：第一个曲面的法向量为$\overrightarrow{n_1}=(2x-3,2y,2z)|_{(1,1,1)}=(-1,2,2)$,

第二个曲面的法向量为$\overrightarrow{n_2}=(2,-2,1)$,

所以切线的切向量$\vec{T}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=(6,5,-2)$ $\cdots$4分

切线方程为$\dfrac{x-1}{6}=\dfrac{y-1}{5}=\dfrac{z-1}{-2}$

法平面为$6(x-1)+5(y-1)-2(z-1)=0$,即$6x+5y-2z-9=0$ $\cdots$6分

原点到法平面的距离为

$$d=\frac{|-9|}{\sqrt{6^2+5^2+(-2)^2}}=\frac{9\sqrt{65}}{65}$$ $\cdots$8分

4.(8分）设直线L:$\begin{cases}x+y+b=0\\x+ay-z-3=0\end{cases}$在平面$\pi$上，而平面$\pi$与曲面z=$x^2+y^2$相切于点（1，−2, 5），求a，b.

解：设过直线L的平面束方程为：$x+y+b+\lambda(x+ay-z-3)=0$,

即：（1+λ）x+（1+$a\lambda$）$y-\lambda z+b-3\lambda=0$ ………2分

在点（1，−2, 5）处曲面的法向量$\vec{n}=(2x,2y,-1)|_{(1,-2,5)}=(2,-4,-1)$

切平面方程为:2（x−1）−4(y+2)−(z−5)=0,

即 2x−4y−z−5=0 ………5分

又因切平面与平面π重合，则

$$\frac{1+\lambda}{2}=\frac{1+a\lambda}{-4}=\frac{-\lambda}{-1}=\frac{b-3\lambda}{-5}$$

得 $\lambda=1$，$a=-5,b=-2$. ………8分

四、（8 分）试确定函数 $\boldsymbol{f(x,y)=\mathrm{e}^x(x+y^2+2y)}$ 的极值点和极值.

解 由方程组$\begin{cases}\boldsymbol{f_x=\mathrm{e}^x(x+y^2+2y+1)=0}\\\boldsymbol{f_y=\mathrm{e}^x(2y+2)=0}\end{cases}$，解得驻点（0,-1），……………… (3 分)

$$\boldsymbol{f_{xx}=\mathrm{e}^x(x+y^2+2y+2)}$$

$$\boldsymbol{f_{xy}=\mathrm{e}^x(2y+2)}$$

$$\boldsymbol{f_{yy}=2\mathrm{e}^x}$$

故 $\boldsymbol{A=f_{xx}\big|_{(0,-1)}=1,\quad B=f_{xy}\big|_{(0,-1)}=0,\quad C=f_{yy}\big|_{(2,-2)}=2}$ ， $\cdots$ (6 分)

$\boldsymbol{AC-B^2=2>0}$,故函数在（0,-1）处取得极值，又$\boldsymbol{A>0}$，

所以（0,-1）为函数极小值点，极小值为 $\boldsymbol{f(0,-1)=-1}$. …………… (8 分)

五、（9分）(1)从点（1，-1，1）到直线$\begin{cases} y=z-1 \\ x=0 \end{cases}$的做一垂线，求（1）垂足（5分）；

（2）一平面通过此垂线并垂直于平面z=0，求此平面的方程（4分）。

解：（1）直线$\begin{cases} y=z-1 \\ x=0 \end{cases}$的方向向量为:$\vec{s}=(0,1,1)$

以$\vec{s}=(0,1,1)$为法向量并过点(1,-1,1)的平面为：

(y+1)+(z-1)=0，即　y+z=0　　　…3分

和直线联立$\begin{cases} y=z-1 \\ x=0 \\ \text{y+z=0} \end{cases}$ 得垂足（0，$-\frac{1}{2},\frac{1}{2}$）　　…5分

（2）设所求平面方程为$Ax+By+Cz+D=0$,因为垂直于平面$z=0$，则C=0。

又过点(1,-1,1)和垂足（0，$-\frac{1}{2},\frac{1}{2}$），得

$$\begin{cases} A-B+D=0 \\ -\frac{1}{2}B+D=0 \end{cases},\quad \Rightarrow B=2D,\ A=D,$$

则所求平面为$x+2y+1=0$　　　…9分

六、（9 分）设有一圆板占有平面闭区域$\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$，当该圆板被加热时点$(x,y)$处的温度函数为$T=x^2+2y^2-x$，求该圆板的最热点和最冷点.

解：$\begin{cases} T_x=2x-1=0 \\ T_y=4y=0 \end{cases}$，解得$x=\frac{1}{2}$，$y=0$，即驻点$(\frac{1}{2},0)$在$x^2+y^2\le 1$内；…5 分

在圆域$x^2+y^2\le 1$的边界$x^2+y^2=1$上，

法一：构造拉格朗日函数$F(x,y,\lambda)$：

$$F(x,y,\lambda)=x^2+2y^2-x+\lambda(x^2+y^2-1)，并由\begin{cases} F_x=2x-1+2\lambda x=0 \\ F_y=4y+2\lambda y=0 \\ F_\lambda=x^2+y^2-1=0 \end{cases},$$

解得条件驻点：$(-\frac{1}{2},\pm\frac{\sqrt{3}}{2})$，$(\pm 1,0)$；　　　……… 7 分

由于$T(\frac{1}{2},0)=-\frac{1}{4}$，$T(-\frac{1}{2},\pm\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{9}{4}$，$T(1,0)=0$，$T(-1,0)=2$，

故该圆板的最热点在$(-\frac{1}{2},\pm\frac{\sqrt{3}}{2})$，最冷点在$(\frac{1}{2},0)$。　　………9 分

法二（直接代入）：$y^2=1-x^2$，代入$T=x^2+2y^2-x$中，

得$T=x^2+2(1-x^2)-x=2-x^2-x,\quad T'=-2x-1=0,\quad x=-\dfrac{1}{2}$，

则 $y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，得驻点 $(-\dfrac{1}{2},\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2})$

故该圆板的最热点在 $(-\dfrac{1}{2},\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，最冷点在 $(\dfrac{1}{2},0)$ ………9 分

注：在条件极值中，如果能把条件代入，就尽量采用直接法，会比拉格朗日方法便捷。

附加题（20 分）：

1.（10分）函数 $z=f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在原点 $(0,0)$ 处

（1）（5分）证明偏导数存在，且可微；（2）（5分）证明函数在该点处偏导数不连续。

注：证偏导数存在 2 分，可微 4 分，偏导连续 4 分。

解：（1）证偏导数存在

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x^2\sin\dfrac{1}{\Delta x^2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\sin\frac{1}{\Delta x^2}=0$$

即偏导数$f_x(0,0)$存在，为0。

同样可证偏导数$f_y(0,0)$存在，为0 $\quad\cdots$2分

证可微

$$\Delta z-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]=f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)=(\Delta x^2+\Delta y^2)\sin\frac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

$$\lim_{\rho\to 0^+}\frac{\Delta z-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]}{\rho}=\lim_{\rho\to 0^+}\frac{(\Delta x^2+\Delta y^2)\sin\dfrac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\rho}$$

$$\underline{\underline{\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}}\lim_{\rho\to 0^+}\frac{\rho^2\sin\dfrac{1}{\rho^2}}{\rho}=\lim_{\rho\to 0^+}\rho\sin\frac{1}{\rho^2}=0$$

所以可微。 $\cdots$6分

（2）证偏导数连续

由（1）知，$f_x(0,0)=0$

当$x^2+y^2\neq 0$, $f_x=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}+(x^2+y^2)\cos\frac{1}{x^2+y^2}\cdot(-\frac{1}{(x^2+y^2)^2})\cdot 2x$

$$=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$$

$f_y=2y\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2y}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$ $\cdots$7分

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f_x(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$

其中$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$极限不存在，

所以$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f_x(x,y)\neq f_x(0,0)$,偏导数$f_x(x,y)$在（0,0）点不连续。

同理偏导数$f_x(x,y)$也不连续。 $\cdots$10分

2、（10 分）设有直线$L_1:\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{1}$及$L_2:\frac{x+4}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-4}{3}$。试求（1）与两条直线都垂直且相交的直线 L 方程，(2)并求绕 y 轴旋转一周所成曲面方程。

解：（1）设L_1：$\vec{s}_1=(1,-1,1)$； L_2：$\vec{s}_2=(2,1,3)$，则所求直线L的方向向量可取为

$$\vec{s}=\vec{s}_1\times\vec{s}_2=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&-1&1\\2&1&3\end{vmatrix}=-4\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}\cdots\cdots\cdots\cdots 3\text{ 分}$$

法一：设L和L_1的交点满足$\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{1}=t_1$，为$P_1(t_1-2,3-t_1,t_1-1)$

设L和L_2的交点满足$\frac{x+4}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-4}{3}=t_2$，为$P_2(2t_2-4,t_2,3t_2+4)$

$\overrightarrow{P_1P_2}//(-4,-1,3)\Rightarrow\frac{2t_2-4-(t_1-2)}{-4}=\frac{t_2-(3-t_1)}{-1}=\frac{3t_2+4-(t_1-1)}{3}$，

$t_1=2$，$t_2=0$。 则$P_2(-4,0,4)$

直线L方程为$\frac{x-4}{-4}=\frac{y}{-1}=\frac{z-4}{3}$

法二：设(x,y,z)为L上任意一点，则过L和L_1的平面为

$$\begin{vmatrix}x+2&y-3&z+1\\1&-1&1\\-4&-1&3\end{vmatrix}=0\quad\text{即 }2x+7y+5z-12=0$$

则过L和L_2的平面为

$$\begin{vmatrix} x+4 & y & z-4 \\ 2 & 1 & 3 \\ -4 & -1 & 3 \end{vmatrix}=0 \quad 即 \quad 3x-9y+z+8=0$$

公锤线即为两个面的交线，所求直线 L 为 $\begin{cases} 2x+7y+5z-12=0 \\ 3x-9y+z+8=0 \end{cases}$

(2)并求绕 y 轴旋转一周所成曲面方程。

直线L的参数式方程为 $\begin{cases} x=-4t+4 \\ y=-t \\ z=3t+4 \end{cases}$

绕y旋转一周，$\begin{cases} x^2+z^2=(-4t+4)^2+(3t+4)^2 \\ y=-t \end{cases}$

消t得$x^2+z^2-25y^2-8y-32=0$