

广东工业大学考试试卷（A）

2021 — 2022 学年度第 1 学期

课程名称：高等数学(1) 学分 5.5 试卷满分 100 分

考试形式：闭卷（开卷或闭卷）

题号	一	二	三					四	五	总分
			1	2	3	4	5			
评卷得分										
评卷签名										
复核得分										
复核签名										

一、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \sin x)^{\ln x} = \underline{1}$;
- 若极限 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h) - f(1)}{h} = 6$, 则 $f'(1) = \underline{-3}$;
- $\int_{-1}^1 (x^2 + \sqrt{4-x^2} \cdot \sin x) dx = \underline{2/3}$;
- 设 $\begin{cases} x = f(t) - \pi \\ y = f(e^{2t} - 1) \end{cases}$, 其中 f 可导, 且 $f'(0) \neq 0$, 则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0} = \underline{2}$;
- 函数 $y = -\frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{2}x^2$ 在其拐点处的切线方程是 $\underline{9x - 2y = 3}$;
- 设 $y' = \frac{1}{x+y}$, 则微分方程通解为 $\underline{y - \ln(x+y+1) = C, \text{ 或 } x = Ce^y - y - 1}$.

二、选择题（每小题 3 分，共 30 分）

说明：请务必把答案填入下表格中，填在题目括号内无效。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	D	A	D	B	B	D	B	C	B

- 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^3 + bx^2 + 2}{x^2 + 2} = 1$ (其中 a, b 为常数), 则 ()
 A. $a=0, b \in \mathbb{R}$ B. $a=0, b=1$ C. $a \in \mathbb{R}, b=1$ D. $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$
- 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $x \cos x$ 是 ()
 A. 无穷小 B. 无穷大 C. 有界但不是无穷小 D. 无界但不是无穷大
- 设 $y = e^{2x-1}$, 则 $y^{(20)}(1) =$ ()
 A. $2^{20}e$ B. $2^{20}e^{-1}$ C. 2^{20} D. e
- 当 $x \rightarrow 0$ 时, 与 $x - \sin x$ 同阶的无穷小是 ()
 A. $x + \tan x$ B. $x \tan x$ C. $x^2 + \tan x$ D. $x^2 \tan x$

5. 点 $x=1$ 是函数 $f(x)=\frac{\ln x}{|x-1|}$ 的 ()
- A. 可去间断点 B. 跳跃间断点 C. 无穷间断点 D. 振荡间断点
6. 设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数, 且 $f'(x)>0$, $f''(x)<0$, Δx 为自变量在点 x_0 处的增量, Δy 与 dy 分别为 $f(x)$ 在 x_0 处对应的增量与微分, 若 $\Delta x>0$, 则 ()
- A. $0<dy<\Delta y$ B. $0<\Delta y<dy$ C. $\Delta y<dy<0$ D. $dy<\Delta y<0$
7. 设 $f(x)$ 的一个原函数为 xe^{-x} , 则 $f'(x)=()$
- A. xe^{-x} B. $(1-x)e^{-x}$ C. $(2+x)e^{-x}$ D. $(-2+x)e^{-x}$
8. 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的邻域内可导, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{x-x_0}=a$ ($a<0$), 则 ()
- A. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值 B. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值
- C. 在 $x=x_0$ 的某邻域内 $f(x)$ 单调增加 D. 在 $x=x_0$ 的某邻域内 $f(x)$ 单调减少
9. 若反常积分 $\int_0^1 \frac{1}{(x-1)^k} dx$ 收敛, 则 (D) .
- A. $k>1$ B. $k \geq 1$ C. $k \leq 1$ D. $k<1$
10. 如果连续函数 $f(x)$ 满足关系式 $f(x)=2\int_0^x f(t)dt+\ln 2$, 则 $f(x)=()$
- A. $e^x \ln 2$ B. $e^{2x} \ln 2$ C. $e^x + \ln 2$ D. Ce^{2x}

三、求解下列各题 (每小题 7 分, 共 35 分)

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (\tan 3x)^{\frac{1}{2\ln x}}$.

解: 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln(\tan 3x) \cdot \frac{1}{2\ln x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \tan 3x}{2\ln x}}$

$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\tan 3x} \cdot 3\sec^2 3x}{\frac{2}{x}}} = e^{\frac{1}{2}}$

2. 计算不定积分 $\int \frac{1-\sqrt{3x+2}}{1+\sqrt{3x+2}} dx$

解: 令 $\sqrt{3x+2}=u, x=\frac{1}{3}(u^2-2), dx=\frac{2u}{3} du$

原式 $= \int \frac{1-u}{1+u} \cdot \frac{2u}{3} du = \frac{2}{3} \int \frac{(u+1)-2+(1-u^2)}{1+u} du$

$= \frac{2}{3} \int [1 - \frac{2}{1+u} + (1-u)] du$

$= \frac{4}{3} \sqrt{3x+2} - x - \frac{4}{3} \ln |1+\sqrt{3x+2}| + C$

3. 求微分方程 $y'' - y' - 2y = (1 - 2x)e^x$ 的通解.

解: (1) 先求齐次方程的通解

$$\text{特征方程 } r^2 - r - 2 = 0, r_1 = 2, r_2 = -1$$

$$\text{所以齐次方程的通解 } Y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$$

(2) 非齐次方程特解为 $y^* = (ax + b)e^x$ 代入微分方程

$$\text{解得: } a = 1, b = 0$$

$$\text{所以特解为 } y^* = xe^x$$

$$\text{因此微分方程的通解为: } y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + xe^x$$

4. 求 $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx$.

解: 法一: 利用伽玛函数的性质, 显然 $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx = \Gamma(3) = 2! = 2$

$$\begin{aligned} \text{法二: } \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx &= -\int_0^{+\infty} x^2 de^{-x} \\ &= -x^2 e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x} \cdot 2x dx \\ &= -2 \int_0^{+\infty} x de^{-x} \\ &= -2xe^{-x} \Big|_0^{+\infty} + 2 \int_0^{+\infty} e^{-x} dx \\ &= 2 \end{aligned}$$

5. 求函数 $f(x) = (2x + 3)e^{\frac{2}{x}}$ 的单调区间、极值以及渐近线方程.

解: 定义域 $\{x | x \neq 0, x \in \mathbb{R}\}$

$$y' = e^{\frac{2}{x}} \cdot \frac{2x^2 - 4x - 6}{x^2} = e^{\frac{2}{x}} \cdot \frac{(2x + 2)(x - 3)}{x^2} = 0, \quad x_1 = -1, x_2 = 3$$

y'	+		-		-		+
y	增区间	极大值点	减区间		减区间	极小值点	增区间

所以, 增区间: $(-\infty, -1), (3, +\infty)$

减区间: $(-1, 0), (0, 3)$

$$\text{极大值: } f(-1) = e^{-2}, \quad \text{极小值: } f(3) = 9e^{\frac{2}{3}}$$

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x + 3)e^{\frac{2}{x}}}{x} = 2, \quad$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left((2x + 3)e^{\frac{2}{x}} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2x \left(e^{\frac{2}{x}} - 1 \right) + 3e^{\frac{2}{x}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} 2x \left(e^{\frac{2}{x}} - 1 \right) + \lim_{x \rightarrow \infty} 3e^{\frac{2}{x}} = 4 + 3 = 7 \end{aligned}$$

故斜渐近线为 $y = 2x + 7$

又 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (2x + 3)e^{\frac{2}{x}} = +\infty$, 所以 $x = 0$ 为铅直渐近线。

四、(10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内大于 0, 并满足 $xf'(x) = f(x) - 3x^2$, 曲线 $y = f(x)$ 与直线 $x=1, y=0$ 所围成图形 D 的面积为 2, 求

(1) 函数 $f(x)$; (2) D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

解: (1) 法一: 由条件 $xf'(x) = f(x) - 3x^2$ 知, $y' - \frac{1}{x}y = -3x$,

所以 $y = f(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} \left(\int -3xe^{-\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right) = x(-3x + C) = -3x^2 + Cx$

又 $2 = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 -3x^2 + Cx dx$, 所以 $C=6$

法二: $x \neq 0$ 时, $\frac{xf'(x) - f(x)}{x} = -3$, 即 $\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = -3$, 故 $f(x) = -3x^2 + Cx$,

方法不唯一

(2) 旋转的体积 $V = \pi \int_0^1 f^2(x) dx = \pi \int_0^1 (-3x^2 + 6x)^2 dx = \frac{24\pi}{5}$

五、(7 分) (注意: 二选一, 多做不多得分)

1、已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且满足 $f(0)=0, f(1)=1$

(1) 证明: 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f(\xi) = 1 - \xi$;

(2) 证明: 存在不同的 $\eta_1, \eta_2 \in (0,1)$, 使得 $f'(\eta_1)f'(\eta_2) = 1$.

2、已知 $y = f(x)$ 是由方程 $x \cos y + \sin x + e^y = 1$ 所确定的隐函数.

(1) 求 $\frac{dy}{dx}$; (2) 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1-f(x)}{1+f(x)} \right)^{\frac{1}{x}}$.

1、证明: (1) 设 $F(x) = f(x) - 1 + x$, 显然

$F(0) = f(0) - 1 = -1 < 0, F(1) = f(1) - 1 + 1 = 1 > 0$

由零点定理知, 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $F(\xi) = 0$ 即 $f(\xi) = 1 - \xi$;

(2) 在 $(0, \xi)$ 上, 利用拉格朗日中值定理得,

$$f'(\eta_1) = \frac{f(\xi) - f(0)}{\xi - 0} = \frac{1 - \xi}{\xi}, \quad \eta_1 \in (0, \xi)$$

在 $(\xi, 1)$ 上, 利用拉格朗日中值定理得,

$$f'(\eta_2) = \frac{f(1) - f(\xi)}{1 - \xi} = \frac{\xi}{1 - \xi}, \quad \eta_2 \in (\xi, 1)$$

所以, $f'(\eta_1)f'(\eta_2) = 1$

2、解: (1) 对 $x \cos y + \sin x + e^y = 1$ 两边 x 求导得:

$$\cos y - x \sin y + \cos x + e^y y' = 0$$

$$\text{所以 } \frac{dy}{dx} = \frac{\cos y + \cos x}{x \sin y - e^y}$$

$$(2) \text{ 由于 } f'(0) = \frac{\cos y + \cos x}{x \sin y - e^y} \Big|_{(0,0)} = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1-f(x)}{1+f(x)} \right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-f(x)) - \ln(1+f(x))}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-f(x))}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+f(x))}{x}}$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-f(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}} = e^4$$