试卷编号：______

诚信考试，诚信做人。

学院：________ 专业：________ 班级：________ 学号：________ 姓名：________

装 订 线

广东工业大学考试试卷（ A 卷 ）

2021 -- 2022 学年度第 2 学期

课程名称： 线性代数 **学分** 2 **试卷满分** 100 **分**

考试形式： 闭卷 （开卷或闭卷）

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
评卷得分											
评卷签名											
复核得分											
复核签名											

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1、已知 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1, 2, 3，求 $\left|\boldsymbol{A}^3-5\boldsymbol{A}^2+7\boldsymbol{A}\right|=$ __**18**__.

2、设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$, 则 $\boldsymbol{A}^{-1}=$ __$\frac{1}{2}(A-E)$__.

3、已知 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,3)^T, \boldsymbol{\beta}=(3,2,1)^T$，且 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $k\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ 正交，则 $k=$ __$-\frac{5}{7}$__.

4、如果 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=3$, 则 $\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 2a_{21}-3a_{31} & 2a_{22}-3a_{32} & 2a_{23}-3a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}=$ __-6__.

5、设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶方阵，$R(\boldsymbol{A})=1$, 则伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的秩 $R(\boldsymbol{A}^*)=$ __**0**__.

二、单选题（每小题 4 分，共 20 分）

1、设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则（ **A** ）.

（A）存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$　　（B）$\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$

（C）存在对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，使得 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都相似于 $\boldsymbol{\Lambda}$　　（D）$|\boldsymbol{A}|\neq|\boldsymbol{B}|$

2、若齐次线性方程组 $\begin{cases} 3x+ky+z=0 \\ 4y+z=0 \\ kx-5y-z=0 \end{cases}$ 有非零解，则 k 应为（ **B** ）.

（A）$k=0$　　（B）$k=1$　　（C）$k=2$　　（D）$k=-2$

3、设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵，下面结论正确的是（ **B** ）.

（A）若 $\boldsymbol{A,B}$ 均可逆，则 $\boldsymbol{A+B}$ 可逆　　　　（B）若 $\boldsymbol{A,B}$ 均可逆，则 $\boldsymbol{AB}$ 可逆

（C）若 $\boldsymbol{A+B}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A-B}$ 可逆　　　　（D）若 $\boldsymbol{A+B}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A,B}$ 均可逆

4、设 $\boldsymbol{\eta_1,\eta_2}$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax=b}$ 的任意 2 个解，则下列结论<u>**错误**</u>的是（ **A** ）.

（A）$\boldsymbol{\eta_1+\eta_2}$ 是 $\boldsymbol{Ax=0}$ 的一个解　　　　（B）$\boldsymbol{\frac{1}{2}\eta_1+\frac{1}{2}\eta_2}$ 是 $\boldsymbol{Ax=b}$ 的一个解

（C）$\boldsymbol{\eta_1-\eta_2}$ 是 $\boldsymbol{Ax=0}$ 的一个解　　　　（D）$\boldsymbol{2\eta_1-\eta_2}$ 是 $\boldsymbol{Ax=b}$ 的一个解

5、下列<u>**不是**</u> n 维向量组 $\boldsymbol{a_1,a_2,\cdots a_s}$ 线性无关的充要条件是（ **A** ）.

（A）存在一组不全为零的数 $\boldsymbol{k_1,k_2,\cdots k_s}$ 使得 $\boldsymbol{k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_sa_s\neq 0}$

（B）不存在一组不全为零的数 $\boldsymbol{k_1,k_2,\cdots k_s}$ 使得 $\boldsymbol{k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_sa_s=0}$

（C）$\boldsymbol{a_1,a_2,\cdots a_s}$ 的秩等于 $\boldsymbol{s}$

（D）$\boldsymbol{a_1,a_2,\cdots a_s}$ 中任意一个向量都不能用其余向量线性表示

三、（8 分）已知行列式 $\boldsymbol{D=\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}, A_{ij}}$ **表示代数余子式，求** $\boldsymbol{A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}}$.

解： $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$　　　　………3 分

$=\begin{vmatrix} a-b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(a-b)^3.$　　　　………8 分

四、（10 分）求解矩阵方程 $\boldsymbol{AX=A+X}$**,其中** $\boldsymbol{A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$.

解： 由 $AX=A+X$ 可得：$(A-E)X=A$，于是 $X=(A-E)^{-1}A$.

$$(A-E, A)=\begin{pmatrix}1&2&0&2&2&0\\2&0&3&2&1&3\\0&1&-1&0&1&0\end{pmatrix}$$ ………2 分

$$\overset{r_2-2r_1}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&0&2&2&0\\0&-4&3&-2&-3&3\\0&1&-1&0&1&0\end{pmatrix}\underset{r_2+4r_1}{\overset{r_1-2r_3}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&2&2&0&0\\0&0&-1&-2&1&3\\0&1&-1&0&1&0\end{pmatrix}\overset{r_2\leftrightarrow r_3}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&2&2&0&0\\0&1&-1&0&1&0\\0&0&-1&-2&1&3\end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{r_2-r_3\\r_3\div(-1)}}{\overset{r_1+2r_3}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&0&-2&2&6\\0&1&0&2&0&-3\\0&0&1&2&-1&-3\end{pmatrix}$$ ………9 分

所以 $X=\begin{pmatrix}-2&2&6\\2&0&-3\\2&-1&-3\end{pmatrix}$. ………10 分

五、（10 分）求向量组 $\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}0\\3\\1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_4=\begin{pmatrix}2\\1\\5\\6\end{pmatrix}$ 的一个最大无关组，并将其余向量用最大无关组线性表示.

解： $A=(a_1,a_2,a_3,a_4)=\begin{pmatrix}1&0&1&2\\-1&3&-1&1\\2&1&2&5\\4&2&0&6\end{pmatrix}\underset{\substack{r_3-2r_1\\r_4-4r_1}}{\overset{r_2+r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&3&0&3\\0&1&0&1\\0&2&-4&-2\end{pmatrix}\underset{r_4\div 2}{\overset{r_2\div 3}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&0&1\\0&1&0&1\\0&1&-2&-1\end{pmatrix}$ … 4 分

$$\underset{r_4-r_2}{\overset{r_3-r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&-2&-2\end{pmatrix}\underset{r_3\div(-2)}{\overset{r_3\leftrightarrow r_4}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\overset{r_1-r_3}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$ ………… 7 分

所以该向量组的一个最大无关组为 a_1,a_2,a_3, 且 $a_4=a_1+a_2+a_3$. ………… 10 分

六、（8 分）设向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性无关，$\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_2+2\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_3$, 证明向量组 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$ 线性无关.

证明： 有题意可得

$(b_1,b_2,b_3)=(a_1,a_2,a_3)\begin{bmatrix}1&0&1\\2&1&0\\0&2&2\end{bmatrix}$, 即 $B=AK$. ……… 3 分

因为 $|K|=6\neq 0$, 所以 K 可逆，从而 $R(B)=R(A)$. ……… 5 分

因为向量组 A 线性无关，所以 $R(A)=3,$ 从而 $R(B)=3.$ ………… 7 分

故向量组 B 线性无关. …………… 8 分

七、（10 分）问 λ 取何值时，非齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

（1）有唯一解；（2）无解；（3）有无穷多解？并在有无穷多解时求出它的通解.

解： $|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \underset{c_1 \div(\lambda+2)}{\overset{c_1+c_2+c_3}{=}} (\lambda+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \underset{r_3-r_1}{\overset{r_2-r_1}{=}} (\lambda+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-1)^2$ …… 3 分

当 $|A| \neq 0,$ 即当 $\lambda \neq -2, \lambda \neq 1$ 时，$R(A)=3,$ 方程组有唯一解. …… 5 分

当 $\lambda=-2$ 时，增广矩阵为

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \underset{\substack{r_2-r_1 \\ r_3+2r_1}}{\overset{r_1 \leftrightarrow r_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \end{pmatrix} \overset{r_3+r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

因为 $R(A)=2, R(B)=3, R(A) \neq R(B),$ 所以此时方程组无解. …… 7 分

当 $\lambda=1$ 时，增广矩阵为

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{r_3-r_1}{\overset{r_2-r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因为 $R(A)=R(B)=1<3,$ 所以此时方程组有无穷多解. 并且它的通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$ …… 10 分

八、（14 分）求一个正交变换 $x = Py,$ 把二次型 $f = -2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 化为标准形.

解：

二次型 f 的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ …… 1 分

由 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda+2)$

求得 A 的特征值为 $\lambda_1=-2,\lambda_2=\lambda_3=1.$ …… 5 分

当 $\lambda_1=-2$ 时，解方程 $(-2E-A)x=0,$ 由 $-2E-A=\begin{pmatrix}-2&1&-1\\1&-2&-1\\-1&-1&-2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得基础解系

$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$.将 ξ_1 单位化，得 $p_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}.$ …… 8 分

当 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 时，解方程 $(E-A)x=0,$ 由 $E-A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&1&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得基础解系

$\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.下面将 ξ_2,ξ_3 正交化：取 $\eta_2=\xi_2,\eta_3=\xi_3-\frac{(\xi_3,\eta_2)}{(\eta_2,\eta_2)}\eta_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}.$

再将 η_2,η_3 单位化得 $p_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},p_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}.$ …… 12 分

取 $P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$， $f=-2y_1^2+y_2^2+y_3^2.$ …… 14 分