一．选择题：（每小题 4 分，共 20 分）

$2^3\times\frac{1}{2}=4$

1、设 A 为 3 阶方阵，且$|A|=2$，则$|2A^{-1}|=$ ［ D. ］

A．-4　　　　B．-1　　　C．1　　　　D．4

2、设行列式 $\boldsymbol{D}=|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\mathbf{2}&\mathbf{5}&\mathbf{-1}&\mathbf{3}\\ \mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{1}\\ \mathbf{3}&\mathbf{0}&\mathbf{-8}&\mathbf{7}\\ \mathbf{4}&\mathbf{-3}&\mathbf{5}&\mathbf{1}\end{vmatrix}$，则 $2A_{41}+5A_{42}-A_{43}+3A_{44}=$ ［ A. ］

$2\quad 5\quad -1\quad 3$

（A）0　　　（B） 1　　　（C） －1　　　（D）－16

3、设 3 元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax=b}$ 的两个解为 α=（1，0，2）^{T}，β=（1，-1，3）^{T}，且系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 r($\boldsymbol{A}$)=2，则对于任意常数 k, k_1, k_2, 方程组的通解可表为［ C. ］

A．$k_1(1,0,2)^T+k_2(1,-1,3)^T$　　　　B．$(1,0,2)^T+k\,(1,-1,3)^T$

C．$(1,0,2)^T+k\,(0,1,-1)^T$　　　　D．$(1,0,2)^T+k\,(2,-1,5)^T$

$3^3|A+\frac{2}{3}E|$

4、设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，且已知$|3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|=0$，则 $\boldsymbol{A}$ 必有一个特征值为［ B ］

A．$-\frac{3}{2}$　　B．$-\frac{2}{3}$　　C．$\frac{2}{3}$　D．$\frac{3}{2}$

$R(A)=n$

5、设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，则齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax=0}$ 仅有零解的充分必要条件是［ A ］

A．$\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关　　　B．$\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关

C．$\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关　　　D．$\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关

二、填空题：（每小题 4 分, 共 20 分）

1、设三阶方阵 A 的特征值分别为−2、1、1, 且 B 与 A 相似, 则$|2\mathbf{B}|=$ -16 .

$\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&0&1&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\1&1&1&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&0&0&1\\0&1&1&0&1&0\\0&0&1&1&0&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&-1&1\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&1&0&0\end{array}\right)$

2、设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$，则 $A^{-1}=$ $\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$.

3、已知向量组 $\alpha_1=(1,1,1)$，$\alpha_2=(1,2,0)$，$\alpha_3=(3,0,0)$ 是 R^3 的一组基，则向量 $\beta=(8,7,3)$ 在这组基下的坐标是 (3,2,1) .

$|A|=6$

4、设 $A=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&3&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，则 $A^*=$ $\begin{pmatrix}6&-4&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$.

$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&1&0&0\\0&3&0&0&1&0\\0&0&2&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&1&0&0\\0&1&0&0&\frac{1}{3}&0\\0&0&1&0&0&\frac{1}{2}\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-\frac{2}{3}&0\\0&1&0&0&\frac{1}{3}&0\\0&0&1&0&0&\frac{1}{2}\end{array}\right)$

5、设向量组 $\alpha_1=(1,2,3)$，$\alpha_2=(4,5,6)$，$\alpha_3=(3,3,3)$ 与向量组 β_1,β_2,β_3 等价，则向量组 β_1,β_2,β_3 的秩为 2 .

$\begin{pmatrix}1&4&3\\2&5&3\\3&6&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&4&3\\0&-3&-3\\0&-6&-6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&4&3\\0&-3&-3\\0&0&0\end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix}1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4} & 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{vmatrix} = -\frac{1}{12}\times 2\times 3\times 4=-2$$

$$\begin{pmatrix}1&4&1&0\\-1&2&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&4&1&0\\0&6&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&4&1&0\\0&1&\frac16&\frac16\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&\frac13&-\frac23\\0&1&\frac16&\frac16\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2&0&1&0\\-1&1&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&\frac12&0\\-1&1&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&\frac12&0\\0&1&\frac12&1\end{pmatrix}$$

???

三、【8 分】计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&0&0\\1&0&3&0\\1&0&0&4\end{vmatrix}$ 的值.

$X=A^{-1}CB^{-1}$

四、【10 分】已知 $A=\begin{pmatrix}1&4\\-1&2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&0\\-1&1\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}3&1\\0&-1\end{pmatrix}$，矩阵 X 满足 $AXB=C$，求解 X.

$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac13&-\frac23\\\frac16&\frac16\end{pmatrix}$ $B^{-1}=\begin{pmatrix}\frac12&0\\\frac12&1\end{pmatrix}$

$X=\begin{pmatrix}\frac13&-\frac23\\\frac16&\frac16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac12&0\\\frac12&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1&1\\\frac12&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac12&0\\\frac12&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\\frac14&0\end{pmatrix}$

五、【10 分】设向量组 $\alpha_1(1,-1,2,1)^T$，$\alpha_2(2,-2,4,-2)^T$，$\alpha_3(3,0,6,-1)^T$，$\alpha_4(0,3,0,-4)^T$.

（1）求向量组的一个极大线性无关组；

（2）将其余向量表为该极大线性无关组的线性组合.

$$\begin{pmatrix}1&2&3&0\\-1&-2&0&3\\2&4&6&0\\1&-2&-1&-4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&0\\0&0&3&3\\0&0&0&0\\0&-4&-4&-4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&0\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&-3\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

六、【10 分】已知线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+\lambda x_3=-2\\x_1+\lambda x_2+x_3=-2\\\lambda x_1+x_2+x_3=\lambda-3\end{cases}$，

$$\begin{pmatrix}1&1&\lambda&-2\\1&\lambda&1&-2\\\lambda&1&1&\lambda-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&\lambda&-2\\0&\lambda-1&1-\lambda&0\\0&1-\lambda&1-\lambda^2&3\lambda-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&\lambda&-2\\0&\lambda-1&1-\lambda&0\\0&0&-(\lambda+2)(\lambda-1)&3\lambda-3\end{pmatrix}$$

$2-\lambda-\lambda^2$

无解：$R(A)<R(A,b)$ $\lambda=-2$

唯一解：$R(A)=R(A,b)=n$ $\lambda\neq-2,\lambda\neq1$

无穷解：$R(A)=R(A,b)<n$ $\lambda=1$，则 $\begin{pmatrix}1&1&1&-2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$x_1+x_2+x_3=-2$

（1）讨论 λ 为何值时，方程组无解、有惟一解、有无穷多个解.

（2）在方程组有无穷多个解时，求出方程组的通解（用一个特解和导出组的基础解系表示）.

$X=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}c_1+\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}c_2+\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}$

$A^n=P\Lambda^nP^{-1}$

?七、【10 分】设 $A=\begin{bmatrix}2&-1\\-1&2\end{bmatrix}$，求 A^n.

$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&-1\\-1&2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)^2-1=(\lambda-1)(\lambda-3)$

666

$\therefore\lambda_1=1,\ \lambda_2=3$

当 $\lambda_1=1$ 时 $(A-E)X=0$，$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $\therefore P=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$ $\Lambda^n=\begin{pmatrix}1&0\\0&3^n\end{pmatrix}$

当 $\lambda_2=3$ 时 $(A-3E)X=0$，$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ $P^{-1}=\frac12\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$

八、【12 分】已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$，求正交矩阵 P 和对角矩阵 Λ，使 $P^{-1}AP=\Lambda$.

$\frac12\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}=\frac12\begin{pmatrix}1+3^n&1-3^n\\1-3^n&1+3^n\end{pmatrix}$

$|\lambda E-A|=\lambda^2(\lambda-3)$ $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ $\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac12(\beta_1)$ $\lambda_3=3$

$\lambda_1=\lambda_2=0$ $\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ 标准化 $a_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\Rightarrow$ 标准化

$\lambda_3=3$ $\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ $\beta_2=\begin{pmatrix}-\frac12\\-\frac12\\1\end{pmatrix}$

$P=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$

$\Lambda=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}$

一、选择题（每小题 4 分，共计 20 分）

太难了

1．设 A,B 是 3 阶矩阵,且 $A=\begin{pmatrix}\alpha\\2\gamma_2\\3\gamma_3\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}\beta\\\gamma_2\\\gamma_3\end{pmatrix}$，其中 $\alpha,\beta,\gamma_2,\gamma_3$ 均为 3 维行向量,

$\begin{vmatrix}\alpha\\r_2\\r_3\end{vmatrix}=3$

$|A|=18,|B|=3$,则行列式 $|A-B|=$（ A ）

$\begin{vmatrix}\beta\\r_2\\r_3\end{vmatrix}=3$ $\begin{vmatrix}\alpha\\r_2\\2r_3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\beta\\r_2\\2r_3\end{vmatrix}$

A. 0　　B. 5　　C. 3　　D. 10

2．设 $D=\begin{array}{c}\begin{matrix}1&3&1&1\end{matrix}\\\begin{pmatrix}1&0&2&3\\1&3&-1&2\\1&3&1&2\\1&0&1&2\end{pmatrix}\end{array}$，D 的（i,j）元代数余子式记为 $A_{i,j}$，则

$$\begin{vmatrix}1&3&1&1\\1&3&-1&2\\1&3&1&2\\1&0&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&1&2\\1&3&1&1\\1&3&-1&2\\1&3&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&1&2\\0&3&0&1\\0&3&-2&0\\0&3&0&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&0&1\\3&-2&0\\3&0&0\end{vmatrix}=6$$

$A_{11}+3A_{12}+A_{13}+A_{14}=$ （D. ）

A. 0　　B. -6　　C. 12　　D. 6

3. 设 A 为三阶矩阵，将 A 的第一列加到第二列得到矩阵 B，再交换 B 的第二行和第三行得

$B=AP_1$

$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

到单位阵．记 $P_1=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，则 $A=$（D. ）

$P_2B=E$

$B=P_2^{-1}$

P_2P^{-1}

$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$

A. P_1P_2　　B. $P_1^{-1}P_2$　　C. P_2P_1　　D. $P_2P_1^{-1}$

4. 设向量组 $I_1:\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$ 可由向量组线 $I_2:\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s$ 线性性表示，则下列命题正确的是（　）A???

A. 若向量组 I_1 线性无关，则 $r\le s$；　B. 若向量组 I_1 线性相关，则 $r>s$；

C. 若向量组 I_2 线性无关，则 $r\le s$；　D. 若向量组 I_2 线性相关，则 $r>s$.

5．设 3 阶矩阵 A 的行列式|A|=8，已知 A 有 2 个特征值-1 和 4，则另一特征值为　（B　）

A.　2　　B.　-2　　C.　4　　D.　5

二、填空题（每小题 5 分，共计 30 分）

1. 3 阶矩阵 A 满足 $|A|=2$，则 $|(2A)^{-1}A^*|=$ $\frac{1}{4}$

$|(2A)^{-1}|A|A^{-1}|$
$=|\frac{1}{2}A^{-1}\cdot 2A^{-1}|=|A^{-1}|=\frac{1}{4}$

?2. 行列式 $A=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}=$ $(b-a)(c-a)(c-b)$

$\begin{vmatrix}1&0&0\\a&b-a&c-a\\a^2&b^2-a^2&c^2-a^2\end{vmatrix}\to\begin{vmatrix}b-a&c-a\\b^2-a^2&c^2-a^2\end{vmatrix}$
$=(b-a)(c-a)\begin{vmatrix}1&1\\b+a&c+a\end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix}b&c\\b^2&c^2\end{vmatrix}=bc^2-cb^2$　$\begin{vmatrix}a&c\\a^2&c^2\end{vmatrix}=ac^2-ca^2$　$\begin{vmatrix}a&b\\a^2&b^2\end{vmatrix}=ab^2-ba^2$

3. 设 A 是秩为 2 的 5×4 矩阵，$a_1=(1,1,2,3)^T$，$a_2=(-1,1,4,-1)^T$，$a_3=(5,-1,8,9)^T$ 是

$(2,0,-2,4)$　$(-6,2,-4,-10)$

齐次方程 $AX=b$ 的解向量，则 $AX=0$ 的通解可表示为 $\begin{pmatrix}2\\0\\-2\\4\end{pmatrix}c_1+\begin{pmatrix}-6\\2\\-4\\-10\end{pmatrix}c_2$

4. 若向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix}$ $\times(-4)$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\end{pmatrix}$ $\times 3$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\-4\\-8\\a\end{pmatrix}$ 线性相关，则 $a=$ 2.

5. 设实向量 α,β 的长度依次为 2 和 3，则向量 $\alpha+\beta$ 与 $\alpha-\beta$ 的内积 $\langle\alpha+\beta,\alpha-\beta\rangle=$ -5.

$|\alpha|^2-|\beta|^2$

6. 设 $A_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$，$A_2=\begin{pmatrix}0&-1\\3&0\end{pmatrix}$，$A=\begin{pmatrix}A_1&0\\0&A_2\end{pmatrix}$，则 $A^{-1}=$ $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&0&0\\0&0&0&\frac{1}{3}\\0&0&-1&0\end{pmatrix}$

$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{A_1}&0\\0&\frac{1}{A_2}\end{pmatrix}$　$A_2=\begin{pmatrix}0&-1&1&0\\3&0&0&1\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}3&0&0&1\\0&-1&1&0\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{1}{3}\\0&1&-1&0\end{pmatrix}$

$$(A,E)=\begin{pmatrix}0&1&1&1&0&0\\2&1&0&0&1&0\\1&-1&1&0&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&1&0&0&1\\2&1&0&0&1&0\\0&1&1&1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&-1&1&0&0&1\\0&-1&-2&0&1&-2\\0&1&1&1&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&1&0&0&1\\0&0&-2&1&1&-2\\0&1&1&1&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&1&0&0&1\\0&1&1&1&0&0\\0&0&-2&1&1&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&1&0&0&1\\0&1&1&1&0&0\\0&0&-1&\frac12&\frac12&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&0&\frac12&\frac12&0\\0&1&0&\frac32&\frac12&-1\\0&0&-1&\frac12&\frac12&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&2&1&-1\\0&1&0&\frac32&\frac12&-1\\0&0&1&\frac12&\frac12&-1\end{pmatrix}$$

$XA=B$
$X=BA^{-1}$

$$\begin{pmatrix}1&-1&3\\4&3&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2&1&-1\\\frac32&\frac12&-1\\\frac12&\frac12&-1\end{pmatrix}=?$$

三.（8 分）、已知 $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\2&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}$ 和 $B=\begin{pmatrix}1&-1&3\\4&3&2\end{pmatrix}$，满足 $XA-B=O$，求矩阵 X.

四．（10 分）设向量组 $\alpha_1=(1,2,1,3),\alpha_2=(4,-1,-5,-6),$ $\alpha_3=(-1,-3,-4,-7),$

$\sim R(A)=$

$\alpha_4=(2,1,2,3)$。求此向量组的秩和一个极大无关组。

???

五.（8 分）已知向量 a_1,a_2,a_3,a_4 线性无关，而 $b_1=a_1+a_2$，$b_2=a_2+a_3$，$b_3=a_3+a_4$，

Why?

$b_4=a_1+a_4$。试讨论向量 b_1,b_2,b_3,b_4 的线性相关性。

$$(b_1\ b_2\ b_3\ b_4)=(a_1\ a_2\ a_3\ a_4)\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{vmatrix}=0$$

六.（12 分）对参数 λ 讨论方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+(2-\lambda)x_3=1\\(3-2\lambda)x_1+(2-\lambda)x_2+x_3=\lambda\\(2-\lambda)x_1+(2-\lambda)x_2+x_3=1\end{cases}$$

的解，有无穷多解时，求出其解.

$$\begin{pmatrix}1&1&2-\lambda&1\\3-2\lambda&2-\lambda&1&\lambda\\2-\lambda&2-\lambda&1&1\end{pmatrix}\sim$$

七、（12 分） 已知 1 是矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&a&1\\1&1&-1\\1&0&0\end{pmatrix}$ 对应的二重特征值，（1）求 a 的值；（2）求

$1+1+\lambda=1$
$\lambda=-1$

可逆阵 P 和对角阵 Q 使得 $P^{-1}AP=Q$。

$$1\times1\times(-1)=\begin{vmatrix}0&a&1\\1&1&-1\\1&0&0\end{vmatrix}=-a-1$$