广东工业大学考试试卷（ A ）

<u>2022</u> -- <u>2023</u> 学年度第 __1__ 学期

课程名称：____线性代数____ 学分 2.5   试卷满分 100 分

考试形式： __闭卷__ （开卷或闭卷）

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
评卷得分											
评卷签名											
复核得分											
复核签名											

说明：本试卷共 10 道题，每题 10 分.

1. 已知四阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 8 \end{vmatrix}$，求 $2A_{21} + 4A_{22} + 2A_{23} + 9A_{24}$.

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -4$

2. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$，$A^*$ 是 A 的伴随矩阵，求矩阵 $A^* + 3E$ 的所有特征值.

$\lambda_1 = \lambda_2 = 7 \div 3 \quad \lambda_3 = 7 \div 3$

$A^*: \lambda_1 = \lambda_2 = 7^3 \quad \lambda_3 = 7^2$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 7$

$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-3 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-7 & -2 & -2 \\ \lambda-7 & \lambda-3 & -2 \\ \lambda-7 & -2 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-7)\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & \lambda-3 & -2 \\ 1 & -2 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-7)(\lambda-1)^2$

$|A| = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 7 & 3 & 2 \\ 7 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 7^3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 7^3$

3. 设矩阵 X 满足关系 $AX = A + 2X$，其中 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$，求 X.

$(A-2)X = A$

$X = (A-2E)^{-1}A$

$A-2E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

4. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & t & 2 \\ 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}(2 \quad 3 \quad 4)$，若秩 $R(A+AB) = 2$，求：

$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 9 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

（1）$|E + B|$；（2）参数 t 的值.

$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 6 & 10 & 12 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 12$

$R((E+B)A) \quad R(A)=2$

5. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ \lambda-3 \end{pmatrix}$，当 λ 为何值时，方程组 $Ax = b$ 无解，有唯一解、有无穷多解？并在无穷多解时给出通解表达.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & -2 \\ 1 & \lambda & 1 & -2 \\ \lambda & 1 & 1 & \lambda-3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & -2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & \lambda-3-2\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & -2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 3\lambda-3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & -2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & (2+\lambda)(1-\lambda) & 3(\lambda-1) \end{pmatrix}$

$\lambda = -2$ 无解

$\lambda \neq -2, \lambda = 1$ 无穷

$\lambda \neq -2, \lambda \neq 1$ 唯一解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. 求向量组 $\alpha_1 = (2,4,2)^T, \alpha_2 = (1,1,0)^T, \alpha_3 = (2,3,1)^T$ 与 $\alpha_4 = (3,5,2)^T$ 的秩和一个最大无关组，并把其余向量用该最大无关组线性表出．

$R(A)=2$ $\quad a_1 \quad a_2$ 最大无关组 $\quad a_3 = \frac{1}{2}a_1 + a_2$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_4 = a_1 + a_2$

7. 求一个 **正交** 变换 $x = Py$，把二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3$，
$8x_2x_3$ 化为标准形．

$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad a_1 = (-2,1,0)^T \quad \beta_2 = a_2 - \frac{(a_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1 = \frac{1}{5}(2,4,5)^T$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad a_2 = (2,0,1)^T$

$|\lambda E - A| = (\lambda - 2)^2(\lambda + 7)$ $\quad \beta_1 = (-2,1,0) \quad a_3 = (1,2,-2)^T \qquad x = Py$
$\therefore \lambda_1 = \lambda_2 = 2 \quad \lambda_3 = -7 \quad \beta_2 = (\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 1) \quad \eta_3 = \frac{1}{3}(1,2,-2)^T$

8. 设 3 阶方阵 A 和 3 维列向量 x 满足条件：x, Ax, A^2x 线性无关且 $\underline{A^3x = x + 2Ax + A^2x}$，

（1）记 $P = (x, Ax, A^2x)$，求矩阵 B，使得 $AP = PB$；

（2）求 $|A + E|$． $AP = A(x \ Ax \ A^2x)$ $\qquad\qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\qquad\qquad = (Ax \ A^2x \ x+2Ax+A^2x)$

$\qquad (x \ Ax \ A^2x)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad |A+E| = |PBP^{-1}+E| = |B+E| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$

9. 设非齐次线性方程组 $Ax = b$ 有无穷多解，其解集合的最大无关组为 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s$，证明：

（1）$\xi_1 = \eta_1 - \eta_s, \xi_2 = \eta_2 - \eta_s, \cdots, \xi_{s-1} = \eta_{s-1} - \eta_s$ 是对应齐次方程组 $Ax = 0$ 的解；

（2）$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{s-1}$ 线性无关；

（3）$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{s-1}$ 是 $Ax = 0$ 的一个基础解系．**?**

10. 本题请在以下两道题中择一证明即可．

（1）设 n 阶方阵 A 是满足 $A^2 = E$，证明：A 可逆，且 $R(A - E) + R(A + E) = n$．

（2）设 n 阶方阵 A 是满足 $A^2 = A$（幂等矩阵），且 $R(A) = r$，证明：$R(E - A) = n - r$．

9. (1) $A\xi_i = A(\eta_i - \eta_s) = 0$

(2) 设 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots = 0$

$k_1(\eta_1 - \eta_s) + k_2(\eta_2 - \eta_s) + \cdots + k_{s-1}(\eta_{s-1} - \eta_s)$

$= k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_{s-1}$

(3) $A\xi_1 = A(\eta_1 - \eta_s) = 0$

$A\xi_2 = A(\eta_2 - \eta_s) = 0$

$\cdots$

(2). $A^2 - A = 0$,

$R(A) + R(A-E) \leq n$

$R(A-E) + R(A) = R(E-A) + R(A) \geq R(E) = n$

$\therefore R(A-E) = n - r$

(1) $(A+E)(A-E) = 0$

$R(A+E) + R(A-E) \leq n$

$R(A+E) + R(A-E) = R(A+E) + R(E-A) \leq R(2E) = n$

$\therefore R(A+E) + R(A-E) = n$