线代复习：重在思想和做题方法

（总结思路）

先从大题说起：

第 1 类：计算四阶行列式或 n 阶行列式

例 1： 设 $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$，$D$ 的 (i,j) 元的代数余子式记作 A_{ij}，求

$A_{31}+3A_{32}-2A_{33}+2A_{34}$

方法：构造一个新的行列式，直接把第 3 行替换为 1，3，-2，2，其他行不变。

$A_{31}+3A_{32}-2A_{33}+2A_{34}=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$ 下面再用化零法（使某一行的 0 越多越好）。

例 2： 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ 的值；

例 3： 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ 的值；

第 2 类：（1）已知 方阵 A，求 A^{-1}；

方法一：$(A|E)\sim\cdots\sim(E|A^{-1})$ ，注意，这里只能初等行变换。

（2）已知 方阵 A 可逆， $AX=B$ ，求 X；

方法一：$(A|B)\sim\cdots\sim(E|X)$，注意，这里只能初等行变换。

方法二，先用（1）的办法求 A^{-1}，再求 $X=A^{-1}B$；

（3）已知 方阵 A 可逆， $XA=B$ ，求 X；

方法一：$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\sim\cdots\sim\begin{pmatrix}E\\X\end{pmatrix}$初等列变换。方法二，先用（1）的办法求 A^{-1}，再求 $X=BA^{-1}$；

例 1、已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&-1&0\\0&1&2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}3&0&1\\1&1&0\\0&1&4\end{pmatrix}$，（1）求 A 的逆矩阵 A^{-1}；（2）解矩阵方程 $AX=B$.

解：（1）
$$\begin{pmatrix}1&0&1&1&0&0\\1&-1&0&0&1&0\\0&1&2&0&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&1&0&0\\0&-1&-1&-1&1&0\\0&1&2&0&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&1&0&0\\0&-1&-1&-1&1&0\\0&0&1&-1&1&1\end{pmatrix}$$
$$\sim\begin{pmatrix}1&0&0&2&-1&-1\\0&-1&0&-2&2&1\\0&0&1&-1&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&2&-1&-1\\0&1&0&2&-2&-1\\0&0&1&-1&1&1\end{pmatrix},\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\2&-2&-1\\-1&1&1\end{pmatrix};$$

（2）
$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\2&-2&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0&1\\1&1&0\\0&1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-2&-2\\4&-3&-2\\-2&2&3\end{pmatrix}.$$

注意：（2）可用：$(A|B)\sim\cdots\sim(E|X)$进行计算。注意，这里只能初等行变换。

例 2、设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}-1&-2&0\\2&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，求满足矩阵方程 $XA-B=2E$ 的 X.

解：
$$(A,E)=\begin{pmatrix}0&-1&0&1&0&0\\1&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&0\\0&-1&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&0\\0&1&0&-1&0&0\\0&0&1&0&0&1\end{pmatrix},$$
$$A^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad 2E+B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&-2&0\\2&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2&0\\2&1&0\\0&0&2\end{pmatrix},$$
$$X=(2E+B)A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&0\\2&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&0\\-1&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

第 3 类：已知 4 个或 5 个向量，求极大无关组，并将向量组中的其余向量用该极大无关组线性表示。

例 1、设向量组$\alpha_1=(1,4,1,0)^T,\alpha_2=(2,1,-1,-3)^T,\alpha_3=(1,0,-3,-1)^T,\alpha_4=(0,2,-6,3)^T$，求该向量组的秩及一个极大无关组，并将其余向量用此极大无关组线性表示.

解：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&2&1&0\\4&1&0&2\\1&-1&-3&-6\\0&-3&-1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&-7&-4&2\\0&-3&-4&-6\\0&-3&-1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&-3&-1&3\\0&-3&-4&-6\\0&-7&-4&2\end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&-3&-1&3\\0&-3&-4&-6\\0&-21&-12&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&-3&-1&3\\0&0&-3&-9\\0&0&-5&-15\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&-3&-1&3\\0&0&1&3\\0&0&1&3\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&-3&-1&3\\0&0&1&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&-3\\0&-3&0&6\\0&0&1&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&-3\\0&1&0&-2\\0&0&1&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-2\\0&0&1&3\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

向量组的秩为 3，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是一个极大线性无关组，$\alpha_4=\alpha_1-2\alpha_2+3\alpha_3$.

第 4 类：第一类：求齐次方程组 $AX=0$ 的通解问题；什么时候只有零解，什么时候有无穷个解（又称非零解）。

第二类：讨论非齐次线性方程组，一般含有常系数。什么时候无解，什么时候有解，有解时，什么时候唯一，什么时候无穷个解。

作题方法：

1） 如果方程的个数=未知数个数，这时用行列式处理唯一解问题比较好。

2） 如果方程的个数不等于未知数个数，用初等变换法比较好；

例 1、设 3 元齐次线性方程组 $\begin{cases} ax_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+ax_2+x_3=0 \\ x_1+x_2+ax_3=0 \end{cases}$，

（1）确定当 a 为何值时，方程组有非零解；

（2）当方程组有非零解时，求出它的基础解系和全部解.

解：（1）$|A|=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+2 & 1 & 1 \\ a+2 & a & 1 \\ a+2 & 1 & a \end{vmatrix}=(a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=(a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix}$

$=(a+2)(a-1)^2$，$a=-2$ 或 $a=1$ 时，方程组有非零解；

（2）$a=-2$ 时，$A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$\begin{cases} x_1=x_3 \\ x_2=x_3 \\ x_3=x_3 \end{cases}$，

基础解系为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，全部解为 $k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$k$ 为任意实数；

$a=1$ 时，$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$\begin{cases} x_1=-x_2-x_3 \\ x_2=\ \ x_2 \\ x_3=\qquad\ x_3 \end{cases}$，

基础解系为 $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，全部解为 $k_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$k_1,k_2$ 为任意实数.

例 2、已知线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+\lambda x_3=-2 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=-2 \\ \lambda x_1+x_2+x_3=\lambda-3 \end{cases}$，

（1）讨论 λ 为何值时，方程组无解、有惟一解、有无穷多个解.

（2）在方程组有无穷多个解时，求出方程组的通解（用一个特解和导出组的基础解系表示）.

解：$(A,b)=\begin{pmatrix}1 & 1 & \lambda & -2\\ 1 & \lambda & 1 & -2\\ \lambda & 1 & 1 & \lambda-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & \lambda & -2\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 3\lambda-3\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1 & 1 & \lambda & -2\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & (1-\lambda)(\lambda+2) & 3(\lambda-1)\end{pmatrix}$.

(1) $\lambda=-2$ 时无解；

(2) $\lambda\neq-2$ 且 $\lambda\neq1$ 时惟一解，$\lambda=1$ 时有无穷多个解.

(3) $\lambda=1$ 时，$(A,b)\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，$\begin{cases}x_1=-2-x_2-x_3\\ x_2=\qquad x_2\\ x_3=\qquad\qquad x_3\end{cases}$，

通解为 $\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

第 5 类、已知方阵 A，求可逆的矩阵 P，使 A 能对角化。

例 1、设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}$，求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

解：A 的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0\\0&\lambda-2&-1\\0&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-2&-1\\-1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2-4\lambda+3)$$

$$=(\lambda-1)^2(\lambda-3),$$

特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=3$.

对于 $\lambda_1=\lambda_2=1$，解齐次方程组 $(\lambda E-A)x=0$：

$$\lambda E-A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&-1\\0&-1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ \begin{cases}x_1=x_1\\x_2=\quad -x_3\\x_3=\quad x_3\end{cases},\ 取\ p_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ p_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

对于 $\lambda_3=3$，解齐次方程组 $(\lambda E-A)x=0$：

$$\lambda E-A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix},\ \begin{cases}x_1=0\\x_2=x_3\\x_3=x_3\end{cases},\ 取\ p_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

令 $P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$，则 P 是可逆矩阵，使 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$.

例 2、设矩阵 $B=\begin{pmatrix}2&0&1\\3&1&3\\4&0&5\end{pmatrix}$，（1）判定 B 是否可与对角矩阵相似，说明理由；（2）若 B 可与对角矩阵相似，求对角矩阵 Λ 和可逆矩阵 P，使 $P^{-1}BP=\Lambda$.

解：（1）$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&-1\\-3&\lambda-1&-3\\-4&0&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-2&-1\\-4&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2-7\lambda+6)$

$=(\lambda-1)^2(\lambda-6)$，特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=6$.

对于 $\lambda_1=\lambda_2=1$，解齐次线性方程组 $(\lambda E-B)x=0$：

$$\lambda E-B=\begin{pmatrix}-1&0&-1\\-3&0&-3\\-4&0&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ \begin{cases}x_1=\quad -x_3\\x_2=x_2\\x_3=\quad x_3\end{cases},$$

基础解系为 $p_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$p_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$；

对于 $\lambda_3=6$，解齐次线性方程组 $(\lambda E-B)x=0$：

$$\lambda E-B=\begin{pmatrix}4&0&-1\\-3&5&-3\\-4&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1/4\\0&1&-3/4\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \begin{cases}x_1=\dfrac{1}{4}x_3\\x_2=\dfrac{3}{4}x_3\\x_3=\quad x_3\end{cases}，基础解系为 p_3=\begin{pmatrix}1/4\\3/4\\1\end{pmatrix}.$$

3 阶矩阵 B 有 3 个线性无关的特征向量，所以 B 相似于对角阵；

（2）令 $\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&6\end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix}0&-1&1/4\\1&0&3/4\\0&1&1\end{pmatrix}$，则 P 是可逆矩阵，使得 $P^{-1}BP=\Lambda$.

例 3、设矩阵 $A=\begin{pmatrix}-4&-10&0\\1&3&0\\3&6&1\end{pmatrix}$，求可逆矩阵 P 及对角矩阵 D，使得 $P^{-1}AP=D$.

解：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+4&10&0\\-1&\lambda-3&0\\-3&-6&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda+4&10\\-1&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-1)^2$，

特征值 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=\lambda_3=1$.

对于 $\lambda_1=-2$，解齐次线性方程组 $(\lambda E-A)x=0$：

$$\lambda E-A=\begin{pmatrix}2&10&0\\-1&-5&0\\-3&-6&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&5&0\\1&5&0\\1&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&5&0\\0&0&0\\0&-3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3&15&0\\0&-3&1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3&0&5\\0&-3&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&5/3\\0&1&-1/3\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \begin{cases}x_1=-\dfrac{5}{3}x_3\\x_2=\dfrac{1}{3}x_3\\x_3=x_3\end{cases}，基础解系为\ \alpha_1=\begin{pmatrix}-5/3\\1/3\\1\end{pmatrix};$$

对于 $\lambda_2=\lambda_3=1$，解齐次线性方程组 $(\lambda E-A)x=0$：

$$\lambda E-A=\begin{pmatrix}5&10&0\\-1&-2&0\\-3&-6&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0\\1&2&0\\1&2&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \begin{cases}x_1=-2x_2\\x_2=\quad x_2\\x_3=\qquad\quad x_3\end{cases}，基础解系为$$

$\alpha_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

令 $P=\begin{pmatrix}-5/3&-2&0\\1/3&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，$D=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则 P 是可逆矩阵，使 $P^{-1}AP=D$.

4、设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&a\\0&a&3\end{pmatrix}$ 的三个特征值分别为 $1,2,5$，求正的常数 a 的值及可逆矩阵 P，使

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&5\end{pmatrix}.$$

解：由$|A|=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&3&a\\0&a&3\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}3&a\\a&3\end{vmatrix}=2(9-a^2)=1\times2\times5$，得$a^2=4$，$a=2$．

以下类同前面。

例 4、已知方阵$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{pmatrix}$与$B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$相似，

求（1）常数x与y的值；

（2）判断A是否可对角化.

第 6 类：求向量在基下的坐标

1、求向量$\beta=(3,-1,2)^T$在基$\alpha_1=(1,1,2)^T$，$\alpha_2=(-1,3,1)^T$，$\alpha_3=(1,1,1)^T$下的坐标，并将β用此基线性表示.

解：设$\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$，即$(3,-1,2)^T=x_1(1,1,2)^T+x_2(-1,3,1)^T+x_3(1,1,1)^T$，得

$$\begin{cases}x_1-x_2+x_3=3\\x_1+3x_2+x_3=-1\\2x_1+x_2+x_3=2\end{cases},\quad \overline{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1&3\\1&3&1&-1\\2&1&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1&3\\0&4&0&-4\\0&3&-1&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1&3\\0&1&0&-1\\0&3&-1&-4\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&1&3\\0&1&0&-1\\0&0&-1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1&3\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&2\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\end{pmatrix},$$

$x_1=1$，$x_2=-1$，$x_3=1$．

β在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的坐标是$(1,-1,1)$，$\beta=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$．

第 7 类：已知 f, 利用正交变换法，把 f 变为标准型或者规范型。

例 1、设 3 元二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2-2x_1x_2-2x_2x_3$，求正交变换 $x=Py$，将二次型化为标准形.

解：二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}$.

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&1&0\\1&\lambda-2&1\\0&1&\lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda&1&0\\\lambda&\lambda-2&1\\\lambda&1&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}1&1&0\\1&\lambda-2&1\\1&1&\lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=\lambda\begin{vmatrix}1&0&0\\1&\lambda-3&1\\1&0&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-3)\begin{vmatrix}1&0\\1&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)(\lambda-3),$$

特征值 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=1$，$\lambda_3=3$.

对于 $\lambda_1=0$，解齐次线性方程组 $(\lambda E-A)x=0$：

$$\lambda E-A=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&-2&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix},\ \begin{cases}x_1=x_3\\x_2=x_3\\x_3=x_3\end{cases},\ \alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\text{单位化为 } p_1=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix};$$

对于 $\lambda_2=1$，解齐次线性方程组 $(\lambda E-A)x=0$：

$$\lambda E-A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&-1&1\\0&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ \begin{cases}x_1=-x_3\\x_2=0\\x_3=\ x_3\end{cases},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\text{单位化为 } p_2=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix};$$

对于 $\lambda_3=3$，解齐次线性方程组 $(\lambda E-A)x=0$：

$$\lambda E-A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix},\ \begin{cases}x_1=\ x_3\\x_2=-2x_3\\x_3=\ x_3\end{cases},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},\text{ 单位化为}$$

$$p_3=\begin{pmatrix}1/\sqrt{6}\\-2/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\end{pmatrix}.$$

令 $P=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}&-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{3}&0&-2/\sqrt{6}\\1/\sqrt{3}&1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}\end{pmatrix}$，则 P 是正交矩阵，使得 $P^TAP=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，经正交变换 $x=Py$ 后，原二次型化为标准形 $f=0\cdot y_1^2+y_2^2+3y_3^2$.

例 2、已知 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$，求正交变换 $x=Py$，将二次型化为标准形.

解：原二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$.

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & -1\\ -1 & \lambda & -1\\ -1 & -1 & \lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & -1\\ \lambda-2 & \lambda & -1\\ \lambda-2 & -1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & \lambda & -1\\ 1 & -1 & \lambda\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & \lambda+1 & 0\\ 1 & 0 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-2),$$

A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-1$，$\lambda_3=2$．

对于 $\lambda_1=\lambda_2=2$，解齐次方程组 $(\lambda E-A)x=0$：

$$\lambda E-A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ \begin{cases}x_1=-x_2-x_3\\ x_2=\ \ x_2\\ x_3=\ \ \ \ \ \ \ \ \ x_3\end{cases}，取\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix},$$

先正交化：$\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$，$\beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{\|\beta_1\|^2}\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}-\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/2\\ -1/2\\ 1\end{pmatrix}$.

再单位化：$p_1=\dfrac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2}\\ 0\end{pmatrix}$，$p_2=\dfrac{1}{\|\beta_2\|}\beta_2=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{6}\\ -1/\sqrt{6}\\ 2/\sqrt{6}\end{pmatrix}$.

对于 $\lambda_3=2$，解齐次方程组 $(\lambda E-A)x=0$：

$$\lambda E-A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ \begin{cases}x_1=x_3\\ x_2=x_3\\ x_3=x_3\end{cases}，取\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}，单位化为$$

$$p_3=\frac{1}{\|\alpha_3\|}\alpha_3=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{3}\end{pmatrix}.$$

令 $P=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$，则 P 是正交矩阵，经过正交变换 $x=Py$ 后，原二次型化为标准形 $-y_1^2-y_2^2+2y_3^2$．

第 8 类：用配方法化二次型为标准型

用配方法求二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+x_3^2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 的标准形，并写出相应的线性变换.

解：$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+x_3^2-2x_1x_3+4x_2x_3$

$$=(x_1^2-2x_1x_3+x_3^2)+(4x_2^2+4x_2x_3+x_3^2)-x_3^2$$

$$=(x_1-x_3)^2+(2x_2+x_3)^2-x_3^2$$

作可逆线性变换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_3 \\ y_2 = 2x_2 + x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases},$$

得标准形

$f=y_1^2+y_2^2-y_3^2$.

第 9 类：已知 f 为正定二次型，判断参数 t 的范围，并写出二次型 f 的规范性。

例 1、设$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+2x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3$ 为正定二次型，（1）确定t 的取值范围，（2）写出二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$的规范型。

解 （1）二次型的矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，

由于 $f(x_1,x_2,x_3)$ 为正定二次型，则 A 的顺序主子式

$|1|>0$，$\begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 4 \end{vmatrix}=4-t^2>0$，$|A|=4-2t^2>0$

解得 $-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$

（2）由于二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 正定，所以规范形为 $f=z_1^2+z_2^2+z_3^2$

证明题

例 1、 设η为非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的一个解，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$是其导出组 $Ax=0$ 的一个基础解系．证明$\eta,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$线性无关．

证：设$k\eta+k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_r\xi_r=0$，则

$A(k\eta+k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_r\xi_r)=0$，

$kA\eta+k_1A\xi_1+k_2A\xi_2+\cdots+k_rA\xi_r=0$，

$kb+k_1 0+k_2 0+\cdots+k_r 0=0$，

$kb=0$，

由$b\neq 0$，得

$k=0$ --------------------------------- （1）

从而

$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_r\xi_r=0$，

由$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$线性无关，得

$k_1=k_2=\cdots=k_r=0$ -------------- （2）

由（1）（2）可知$\eta,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$线性无关．

例 2、 设 A 是 n 阶方阵，且$(A+E)^2=0$，证明 A 可逆．

证：由$(A+E)^2=0$，得$A^2+2A+E=0$，$-(A^2+2A)=E$，$-(A+2E)A=E$．

所以 A 可逆，且$A^{-1}=-(A+2E)$．

例 3、 设向量组α_1,α_2线性无关，证明向量组$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_2=\alpha_1-\alpha_2$也线性无关．

证：设$k_1\beta_1+k_2\beta_2=0$，即$k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_1-\alpha_2)=0$，$(k_1+k_2)\alpha_1+(k_1-k_2)\alpha_2=0$．

由α_1,α_2线性无关，得$\begin{cases}k_1+k_2=0\\k_1-k_2=0\end{cases}$，因为$\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix}=-2\neq 0$，方程组只有零解，

所以β_1,β_2线性无关．

例 4、 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，令$\beta_1=-\alpha_1+\alpha_3$，$\beta_2=2\alpha_2-2\alpha_3$，$\beta_3=2\alpha_1-5\alpha_2+3\alpha_3$，试证明向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的线性相关性．

解：设$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$，即

$k_1(-\alpha_1+\alpha_3)+k_2(2\alpha_2-2\alpha_3)+k_3(2\alpha_1-5\alpha_2+3\alpha_3)=0$，

$(-k_1+2k_3)\alpha_1+(2k_2-5k_3)\alpha_2+(k_1-2k_2+3k_3)\alpha_3=0$，

由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，得$\begin{cases}-k_1+2k_3=0\\2k_2-5k_3=0\\k_1-2k_2+3k_3=0\end{cases}$，

$\begin{vmatrix}-1&0&2\\0&2&-5\\1&-2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-2&5\\0&2&-5\\1&-2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2&5\\2&-5\end{vmatrix}=0$，有非零解，$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性相关．

例 5、证明：若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关，而
$\beta_1=\alpha_1+\alpha_n,\beta_2=\alpha_1+\alpha_2,\beta_3=\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\beta_n=\alpha_{n-1}+\alpha_n$，
则向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$线性无关的充要条件是$n$为奇数.

证：设$k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_n\beta_n=0$，即$(k_1+k_2)\alpha_1+(k_2+k_3)\alpha_2++\cdots+(k_1+k_n)\alpha_n=0$，

由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关，可得齐次方程组$\begin{cases}k_1+k_2=0\\k_2+k_3=0\\\cdots\\k_1+k_n=0\end{cases}$，其系数行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&0&\cdots&0&0\\0&1&1&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&1&1\\1&0&0&\cdots&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&0&0\\0&1&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&1&1\\0&0&\cdots&0&1\end{vmatrix}+(-1)^{1+n}\begin{vmatrix}1&0&\cdots&0&0\\1&1&\cdots&0&0\\0&1&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&1&1\end{vmatrix}$$

$$=1+(-1)^{1+n},$$

当且仅当n为奇数时，$|A|\neq0$，齐次方程组只有零解，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$线性无关.

例 6、设A，B，$A+B$均为n阶正交矩阵，证明$(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$.

证：A，B，$A+B$均为n阶正交阵，

则$A^T=A^{-1}$，$B^T=B^{-1}$，$(A+B)^T=(A+B)^{-1}$，

所以$(A+B)^{-1}=(A+B)^T=A^T+B^T=A^{-1}+B^{-1}$.

7、若A为n阶幂等阵（$A^2=A$），求证：$r(A)+r(A-E_n)=n$.

证明：

$\because A^2=A$，$\therefore A(A-E_n)=0$

$\therefore r(A)+r(A-E_n)\le n$ ··3 分

又$E_n=-A+E_n-A,$

$\therefore n\le r(-A)+r(E_n-A)=r(A)+r(A-E_n)$

故$n=r(A)+r(A-E_n)$ ··6 分

8、若 A 为 n 阶对合阵（即 $A^2=E$），求证：$r(E_n-A)+r(E_n+A)=n$.

证明：

$$\begin{pmatrix} E-A & O \\ O & E+A \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} E-A & E-A \\ O & E+A \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} E-A & E-A \\ E-A & 2E \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} O & O \\ E-A & 2E \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} O & O \\ O & 2E \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} E & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

所以 $r\begin{pmatrix} E-A & O \\ O & E+A \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} E & O \\ O & O \end{pmatrix}$，即 $r(E_n-A)+r(E_n+A)=n$.

9、设 A 是 $m\times n$ 实矩阵, $\beta\neq 0$ 是 m 维实列向量，

证明：（1）秩 $r(A)=r(A^TA)$；（2）非齐次线性方程组 $A^TAx=A^T\beta$ 有解.

证明：（1）因为若 $A\alpha=0$，则 $A^TA\alpha=A0=0$；

而当 $A^TA\alpha=0$ 时，由

$|A\alpha|^2=(\alpha A)^TA\alpha=\alpha^TA^TA\alpha=\alpha^T0=0$，得 $A\alpha=0$。

因此齐次线性方程组 $Ax=0$ 与 $A^TAx=0$，同解，

故秩 $r(A)=r(A^TA)$。…………………………………………4 分

（2）因为秩

$$r(A^TA)\le r(A^TA,A^T\beta)=r(A^T(A,\beta))\le r(A^T)=r(A)=r(A^TA)$$

因此 $r(A^TA,A^T\beta)=r(A^TA)$，故非齐次线性方程组 $A^TAx=A^T\beta$ 有解。

………………………………………8 分

客观性问题（填空与选择题）

1、熟练掌握伴随矩阵的公式应用。

例 1：设 A 为 3 阶矩阵，$|A|=6$，则 $|A^{-1}|=$ ________ ，$|3A^*|=$________

主要知识点：$|A^{-1}|=|A|^{-1}, |A^m|=|A|^m, |A^*|=|A|^{n-1}, |kA|=k^n|A|$，

$$|kA^*|=k^n|A|^{n-1}$$

例 2：设 A 为 4 阶矩阵，$|A|=\frac{1}{3}$，则 $|3A^*-4A^{-1}|=$__________

主要知识点：$A^*=|A|A^{-1}$，$|kA^{-1}|=k^n|A|^{-1}$；

例 3：设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 为其伴随矩阵，则 $|k\boldsymbol{A}^*|=$ (   ).

（A） $k^n|\boldsymbol{A}|$ （B） $k|\boldsymbol{A}|^n$ （C） $k^n|\boldsymbol{A}|^{n-1}$ （D） $k^{n-1}|\boldsymbol{A}|^n$

2、非齐次线性方程组，系数矩阵的秩与方程的个数关系，对方程组的解的影响。

例 1：设 A 为 $m\times n$ 的矩阵，则 n 元齐次线性方程组 $Ax=0$ 存在非零解的充分必要条件是（ A ）

A、A 的列向量组线性相关　　B、A 的行向量组线性相关

C、A 的列向量组线性无关　　D、A 的行向量组线性无关

分析：本题考查 $Ax=0$ 有非零解的充要条件：$r(A)<n$；而系数矩阵 A 有 n 列，所以列向量组线性相关。

也可以这样理解，矩阵 A 的每一列看作一个向量；

$$A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n) \quad , \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$AX=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=0$，显然列向量组线性相关。

练 1：设 A 为 $m\times n$ 的矩阵，则 n 元齐次线性方程组 $Ax=0$ 只有零解的充分必要条件是（ C ）

A、A 的列向量组线性相关　　　B、A 的行向量组线性相关

C、A 的列向量组线性无关　　　D、A 的行向量组线性无关

练 2：设 A 为 $m\times n$ 矩阵，且 $m<n$，则齐次方程组 $Ax=0$ 必（ C ）

A、无解　　B、只有唯一解　　C、无穷解　　D、不能确定

例 2： 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是四元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的 3 个解向量，且 $R(A)=3$，其中 $\alpha_1=(2,0,5,-1)^T$, $\alpha_2+\alpha_3=(3,2,4,1)^T$, 则该方程组的通解是________________

分析：先求齐次的极大无关组（基础解系），$AX=0$，所以基础解系中向量的个数为：$n-r(A)=4-3=1$ 个；而任意两个非齐次的特解作减法，是齐次特解。

所以齐次特解为：$2\boldsymbol{\alpha}_1-(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)$，非齐次特解用 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 即可。

练习 1： 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是四元非齐次非线性方程组 $Ax=b$ 的 3 个解向量，且 $R(A)=2$，且 $\alpha_1+\alpha_3=(2,3,4,5)^T$，$\alpha_2+\alpha_3=(1,2,3,4)^T$，$\alpha_1+\alpha_2=(3,4,6,7)^T$，则线性方程组 $Ax=b$ 的通解为______________________。

例 1： 设 3 元非齐次线性方程组 ***Ax=b*** 的两个解为 $\alpha=(1,0,2)^T$，$\beta=(1,-1,3)^T$，且系数矩阵 ***A*** 的秩 r(***A***)=2，则对于任意常数 k, k_1, k_2, 方程组的通解可表为[　　]

A. $k_1(1,0,2)^T+k_2(1,-1,3)^T$　　　B. $(1,0,2)^T+k(1,-1,3)^T$

C. $(1,0,2)^T+k(0,1,-1)^T$　　　D. $(1,0,2)^T+k(2,-1,5)^T$

例 2： 已知 η_1,η_2 是非齐次方程 $Ax=b$ 的两个不同的解，ξ_1,ξ_2 是对应齐次方程 $Ax=0$ 的基础解系，$k_1,k_2\in R$，则方程 $Ax=b$ 的通解是（ B ）

A、$k_1\xi_1+k_2(\xi_1+\xi_2)+\dfrac{\eta_2-\eta_1}{2}$；　　B、$k_1\xi_1+k_2(\xi_2-\xi_1)+\dfrac{\eta_2+\eta_1}{2}$

C、$k_1\xi_1+k_2(\eta_1+\eta_2)+\dfrac{\eta_2-\eta_1}{2}$　　D、$k_1\xi_1+k_2(\eta_2-\eta_1)+\dfrac{\eta_2+\eta_1}{2}$

例 3： 已知 n 元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有两个解向量 α,β，则 $\beta-\alpha$ 是（ C ）的解。

(A) $2Ax=b$　(B) $Ax=b$　(C) $Ax=0$　(D) 以上都不是

练习 1： 设 $Ax=b$ 为非齐次线性方程组，则下列结论正确的是（ D ）

（A）若 $Ax=0$ 仅有零解，则 $Ax=b$ 必有唯一解，
（B）若 $Ax=0$ 有非零解，则 $Ax=b$ 必有无穷多解，
（C）若 $Ax=b$ 有无穷多解，则 $Ax=0$ 仅有零解，
（D）若 $Ax=b$ 有无穷多解，则 $Ax=0$ 有非零解.

练 2、若非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 中方程个数少于未知数个数，那么(　B　).

(A) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 必有无穷多解；　　(B) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 必有非零解；

(C) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解；　　(D) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 一定无解.

3、特征值的性质应用；

例 1： 设三阶方阵 A 的特征值分别为−2、1、1, 且 B 与 A 相似, 则 $|2\mathbf{B}|$ =__−16___.

例 2 设 ***A*** 为 3 阶矩阵，且已知|3***A***+2***E***|=0，则 ***A*** 必有一个特征值为[　B　]

A. $-\frac{3}{2}$　　B. $-\frac{2}{3}$　　C. $\frac{2}{3}$　D. $\frac{3}{2}$

例 3： 设 A 为 3 阶方阵，三个特征值为1、1、2， A^* 是 A 的伴随矩阵，则行列式

$|3A^*-2A^{-1}|=$___32____。

例 4： 设矩阵 A 与 $B=\begin{pmatrix}2&&\\&3&\\&&-3\end{pmatrix}$ 相似，则 $|A^*+E|=$___280____ .

练习 1：设 3 阶矩阵 A 的特征值为$1,1,-1$,则 A^* 的特征值为_-1,-1,1_____，行列式

$\left|A^*\right|$**=_1___。**

练习 2：设三阶矩阵 A 的特征值为$1,-1,2$，则$|A^*-2A+3E|$=____54______

练习 3：设矩阵 *A*=$\begin{pmatrix}1&-2&-2\\-2&x&0\\-2&0&0\end{pmatrix}$的特征值为 4，1，-2，则数 *x*=____2___________.

练习 4： 设 λ_1， λ_2， λ_3 为矩阵 ***A***=$\begin{bmatrix}3&9&0\\0&4&5\\0&0&2\end{bmatrix}$的三个特征值，则 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ =（　24　　）

练习 5：设矩阵 *A*=$\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&3&-1\\1&1&1\end{bmatrix}$的三个特征值分别为 λ_1， λ_2， λ_3，则 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$ =

（ 5 ）

4、已知几个向量相关，求常系数；

例 1： 如果向量组 $a_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$， $a_2=\begin{bmatrix}a\\0\\b\end{bmatrix}$， $a_3=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$ 是线性相关的， 则 a,b 满足关系式 a=0. b 为任意数。

例 2： 如果向量组 $a_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$， $a_2=\begin{bmatrix}0\\a\\5\end{bmatrix}$， $a_3=\begin{bmatrix}2\\4\\7\end{bmatrix}$ 是线性相关的， 则 $a=$ 2

练习 1：向量 $\alpha_1=(1,0,1),\alpha_2=(1,2,2),\alpha_3=(1,2,4)$ **线性___无关________（填“相关”或“无关”）**

5、概念性问题（这类比较复杂）

例 1、设 A、B 为 n 阶**实对称可逆**矩阵，则下面命题**错误**的是（ D ）

（A）有可逆矩阵 P、Q 使得 $PBQ=A$

（B）有可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}ABP=BA$

（C）有可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}B^2P=A^2$

（D）有正交矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=P^TAP=B$

解析：

A. 因为 A,B 可逆,故秩相同为 n，所以等价

B. 取 P=A 即可

C. A、B 均为实对称可逆矩阵，其特征值不为 0，A^2,B^2 的正惯性指数为 n,显然二者合同，

即存在可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}B^2P=A^2$

D.显然错误,A,B 不一定相似.可简单举出反例

对角矩阵 diag(1,2,3) 与 diag(2,3,4) 是对称可逆矩阵,但它们不相似

因为相似矩阵的特征值相同.

同类题：设 A，B 是 n 阶实对称可逆矩阵，则存在 n 阶可逆阵 P，使得下列关系式

①PA=B． ② $P^{-1}ABP=BA$． ③ $P^{-1}AP=B$ ． ④ $P^TA^2P=B^2$ ．

成立的个数是（ C ）.

A．1．　　B．2．　　C．3．　　D．4．

[分析] 逐个分析关系式是否成立．

①A，B 均是 n 阶可逆矩阵，故存在可逆阵 Q，W，使 QA=E，WB=E(可逆阵可通过初等行变换化为单位阵)，故有 QA=WB，$W^{-1}QA=B$．记 $W^{-1}Q=P$．则有 PA=B 成立．故(1)式成立．

②A，B 均是 n 阶可逆矩阵，可取 P=A，则有 $A^{-1}(AB)A=(A^{-1}A)BA=BA$．故(2)式成立．

③A，B 均是 n 阶实对称矩阵，它们均可以相似于对角阵，但不一定相似于同一个对角阵，即 A，B 之间不一定相似．故(3)不成立．

④A，B 均是实对称可逆矩阵，其特征值均不为零，A^2，B^2 的特征值均大于零．故 A^2，B^2 的正惯性指数为 n(秩为 n，负惯性指数为 0)，故 A^2 合同 B^2，即存在可逆阵 P，使得 $P^TA^2P=B^2$，故(4)式成立．

由上分析，知应选(C)．

[评注] 由本题可知，两个同阶可逆阵 A，B 必是等价的(由①知)，且其积 AB，BA 必是相似的(由②知)，但 A，B 不一定相似(由③知)，但两个实对称可逆阵 A，B，其平方 A^2 与 B^2 一定是合同的(由④知)。

其他题

1. 已知向量组 $\alpha_1=(1,2,-1,1)$，$\alpha_2=(2,0,t,0)$，$\alpha_3=(0,-4,5,-2)$ 线性相关，则 $t=$___

2. 设方阵 A 满足 $A^2+A-3E=0$，则 $(A+2E)^{-1}=$________________

3. n 阶方阵 A 相似于对角阵的充分必要条件是 A 有 n 个（ C ）

A. 互不相同的特征值　　B. 互不相同的特征向量

C. 线性无关的特征向量　　D. 两两正交的特征向量

4、二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2$ 的正惯性指数为（ C ）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

5、设 A、B 为 n 阶可逆矩阵，则下列结论成立的是（C）

A. $AB=BA$　　**B.存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$**

C .存在可逆矩阵 P 和 Q，使得 $PAQ=B$

D. 存在可逆矩阵 C，使得 $C^TAC=B$

6、设矩阵 $A=\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&a&2\\3&1&1\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&b\end{pmatrix}$ 相似，则 $a=\underline{0}$，$b=\underline{-2}$

7、设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2-a&0\\0&0&3\end{pmatrix}$ 为正定矩阵，则 a 的取值范围是 $\underline{a<1}$.

8、已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+6x_3^2+2ax_1x_2-4x_1x_3+4x_2x_3$ 正定，则 a 的取值范围为____________.

9、三阶方阵 A 的特征值为 1，-1, 2，则 $B=2A^3-3A^2$ 特征值为 $\underline{-1，-5, 4}$;

10、设 n 阶方阵 A 的行列式 $|A|=\frac{1}{3}$，则 $\left|(\frac{1}{3}A)^{-1}-15A^*\right|=$____________.

11、设 A 为 4×3 阶矩阵，且 $R(A)=2$，$B=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&2&2\\0&0&3\end{pmatrix}$，则 $R(AB)=$_______.

12、 设 A, B 为 n 阶可逆方阵，下列各式正确的是(　　)

A. $[(A^{-1})^{-1}]^{T}=[(A^{T})^{T}]^{-1}$　　B. $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$

C. $|AB|=|BA|$　　D. $(A+B)(A-B)=A^{2}-B^{2}$

13、设A,B,C,E为同阶方阵，E为单位阵，若$ABC=E$，则(　　)

A. $ACB=E$　B. $CAB=E$　C. $CBA=E$　D. $BAC=E$

14、若$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=m\neq 0$，则$\begin{vmatrix} 4a_{11} & 5a_{11}-2a_{12} & a_{13} \\ 4a_{21} & 5a_{21}-2a_{22} & a_{23} \\ 4a_{31} & 5a_{31}-2a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$（　　）

A. $-40m$　B. $40m$　C. $-8m$　D. $20m$