第一章 函数与极限

一、极限问题

二、连续与间断点

1.等价无穷小代换

常用等价无穷小：

当$x \to 0$时,

$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x$

$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \sqrt[n]{1+x}-1 \sim \frac{1}{n}x,$

$(1+x)^a - 1 \sim ax\ (a \neq 0)$，$x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1$

上述等价无穷小更一般形式，若 $\lim \Delta = 0,$

$\Delta \sim \sin\Delta,\quad \Delta \sim \tan\Delta,\quad 1-\cos\Delta \sim \frac{1}{2}\Delta^2, \cdots\cdots$

注意使用条件，加减里面尽量不用。

一、极限问题

求函数极限

1. 等价无穷小代换
2. 两个重要极限
3. 洛必达法则

2.两个重要极限

(1) $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$ $\quad lim\ \frac{\sin\Delta}{\Delta}=1$或$lim\ \frac{\Delta}{\sin\Delta}=1$

（$lim\ \Delta=0$）

(2) $\boxed{\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e}$ $\quad \lim(1+\frac{1}{\square})^{\square}=e,$

（其中 $\lim\square=\infty$）

$\boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e}$ $\quad 1^{\infty}$

3.洛必达法则 $\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty},0\cdot\infty,\infty-\infty,\quad 0^0\quad 1^\infty\quad \infty^0$型

解决方法:

$\boxed{\infty-\infty}\xrightarrow[\text{转化}]{\text{通分}}\boxed{\frac{0}{0}}\ \boxed{\frac{\infty}{\infty}}\xleftarrow[\text{转化}]{\text{取倒数}}\boxed{0\cdot\infty}\xleftarrow[\text{转化}]{\text{取对数}}\boxed{0^0}\ \boxed{1^\infty}\ \boxed{\infty^0}$

$f^g=e^{g\ln f}$

$\boxed{0\cdot\infty\text{型}}$

注：对于 $\lim f(x)^{g(x)}$

若是$\lim f(x)=A\neq 0,\lim g(x)=B,\lim f(x)^{g(x)}=A^B$,

更多地 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\ln f(x)}$

二、连续与间断点

1. 函数在一点连续的等价形式

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\Longleftrightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$$

$$\Longleftrightarrow \underbrace{\lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)}_{\text{左连续}}=\underbrace{\lim_{x\to x_0^+} f(x)}_{\text{右连续}}$$

第一类间断点 $\left\{\begin{matrix}\text{可去间断点}\\ \text{跳跃间断点}\end{matrix}\right\}$ 左右极限都存在

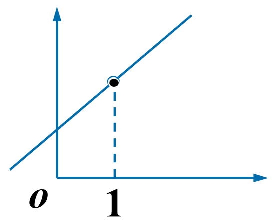
第二类间断点 $\left\{\begin{matrix}\text{无穷型}\\ \text{振荡型}\end{matrix}\right\}$ 左右极限至少有一个不存在

2. 间断点的分类

第一类间断点: 左极限 $f(x_0^-)$ 与右极限 $f(x_0^+)$ 均存在

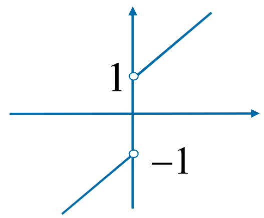
$\neq f(x_0)$ 或 $f(x_0)$无定义

(1) 可去间断点 $\quad f(x_0^-)=f(x_0^+)$



如果补充定义，在点$x=1$处连续

(2) 跳跃间断点 $\quad f(x_0^-)\neq f(x_0^+)$



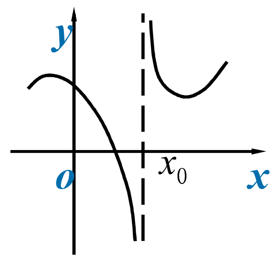
2. 间断点的分类

第二类间断点:

左极限 $f(x_0^-)$ 与右极限 $f(x_0^+)$ 至少有一个不存在

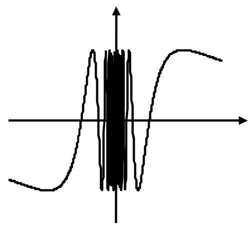
(1) 无穷型

若其中有一个为 ∞，x_0**为无穷间断点**



(2) 振荡型

若其中有一个为振荡, x_0 **为振荡间断点**



三、闭区间上连续函数的性质

设 $f(x)\in C[a,b]$,则

1. $f(x)$ 在 $[a,b]$上有界;

2. $f(x)$ 在 $[a,b]$上达到最大值与最小值;
（最值定理）

3. 当 $f(a)f(b)<0$ 时, 必存在 $\xi\in(a,b)$, 使 $f(\xi)=0$.

（零点定理）

4. $f(x)$ 在 $[a,b]$上可取最大与最小值之间的任何值;

（介值定理）

第二、三章 导数与导数应用

第二、三章 导数与导数应用

知识点：（P114求导表）

1. 导数的定义
2. 高阶求导
3. 微分
4. 隐函数和参数方程求导（二阶） 对数求导法
5. 求函数的单调区间、极值；曲线的凹凸性与拐点 渐近线
6. 用中值定理证明含有导数的等式或方程

罗尔、拉格朗日、柯西

一. 隐函数和参数方程的求导

1、已知函数 $y=f(x)$ 由方程 $e^y+xy-2x-1=0$ 所确定，求 $y''(0)$.

解：方程两边对 x 求导 $e^y y'+y+xy'-2=0$ ①

把 $x=0$ 代入原方程得 $y=0$，代入①中，得 $y'(0)=2$

①式两边再对 x 求导 $e^y(y')^2+e^y y''+y'+y'+xy''=0$ ②

把 $x=0$、$y=0$、$y'(0)=2$ 代入②中得 $y''(0)=-8$

二、求函数的单调区间、极值与最值、凹凸性与拐点

单调 $\begin{cases} f'(x)\ge 0 \Leftrightarrow \text{单增} \\ f'(x)\le 0 \Leftrightarrow \text{单减} \end{cases}$ $\Rightarrow$ 分界点是驻点+不可导点

$\Downarrow$

$\begin{cases} f''(x_0)>0 & \text{极小} \\ f''(x_0)<0 & \text{极大} \end{cases} \Leftarrow$ 极值点

$\Downarrow$ +端点

最值点

（定积分结合）

凹凸 $\begin{cases} f''(x)>0 \Leftrightarrow \text{凹} \\ f''(x)<0 \Leftrightarrow \text{凸} \end{cases}$ $\Rightarrow$ 分界点是f″(x)=0的点+不可导点

$\Downarrow$

$f'''(x_0)\neq 0 \Leftarrow$ 拐点

5. 求由方程：$\int_0^y e^{t^2}dt=\frac{1}{2}[\sqrt[3]{x}-1]^2(x>0)$ 所确定的函数：$y=y(x)$的极值。

积分上限函数、隐函数求导，极值最值问题。

解：等式两边对 x 求导：$e^{y^2}\cdot y'=(\sqrt[3]{x}-1)\cdot\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

$$y'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}e^{-y^2}(\sqrt[3]{x}-1)$$

由于 $x>0$，所以 $x=1$ 为唯一驻点，

当$0<x<1$, $y'<0$, 当$x>1$, $y'>0$, $x=1$为极小值点，

$$\int_0^{y(1)} e^{t^2}dt=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{1}-1)^2=0$$

又 $e^{t^2}>0$，故函数：$y=y(x)$的极小值为：$y=y(1)=0$。

三、利用中值定理证明等式和不等式(罗尔)

名称	条件	结论
罗尔定理	(1) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 (2) $f(x)$ 在 (a,b) 内可导 (3) $f(a)=f(b)$	$\exists\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=0$
拉格朗日定理	(1) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 (2) $f(x)$ 在 (a,b) 内可导	$\exists\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
柯西定理	(1) $f(x)$、$F(x)$ 在$[a,b]$上连续 (2) $f(x)$、$F(x)$ 在(a,b) 内可导 (3) $F'(x)\neq 0$	$\exists\xi\in(a,b)$ 使得 $\frac{f(a)-f(b)}{F(a)-F(b)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$

总结 利用罗尔定理来证明，常用的辅助函数有

要证明的结论：	可考虑的辅助函数：
$\xi f'(\xi)+f(\xi)=0$	$xf(x)$
$\xi f'(\xi)+nf(\xi)=0$	$x^n f(x)$
$\xi f'(\xi)-f(\xi)=0$	$\frac{f(x)}{x}$
$\xi f'(\xi)-nf(\xi)=0$	$\frac{f(x)}{x^n}$
$f'(\xi)+\lambda f(\xi)=0$	$e^{\lambda x}f(x)$

第四、五章 不定积分与定积分

一、不定积分与定积分

不定积分： $\int f(x)dx = F(x)+C \quad F'(x) = f(x)$

定积分： $\int_a^b f(x)dx = F(x)\big|_a^b = F(b)-F(a)$

是一个数

注：不定积分用换元法，一定要回带，并且+C。
定积分用换元法，记得变上下限

性质7（积分中值定理） 如果 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

第四、五章 不定积分与定积分

一、不定积分与定积分概念

二、求积分方法

（换元、分部积分、奇偶对称）

三、反常积分

四、积分上限函数求导

二、求积分方法

1. 换元

1） 三角代换

$\sqrt{a^2-x^2} \quad x = a\sin t$

$\sqrt{a^2+x^2} \quad x = a\tan t$

$\sqrt{x^2-a^2} \quad x = a\sec t$

$\sin^n x\cos^k x dx$

若n, k中有一个为奇数，拆奇凑分

若n, k均为偶数，降幂

$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$

$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$

2）倒代换： $t = \frac{1}{x}$

3）含有简单根式，整体代换 $t = \sqrt[k]{ax+b}, t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+e}}$

二、求积分方法

2. 分部积分

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int_a^b u\,dv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

➢经验顺序 按照“反、对、幂、指、三”的顺序，前者选为u，后者选为v'

三、反常积分

反常积分 $\left\{\begin{array}{l}\text{积分区间无限}\\ \text{被积函数无界}\end{array}\right\}$ —— （1）计算积分 （2）求极限

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(a)$$

a为瑕点 $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - \lim_{x\to a^+} F(x)$

3）利用奇偶性求定积分

$f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续， 偶倍奇零

（1）若 $f(x)$ 为偶函数，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$$

（2）若 $f(x)$ 为奇函数，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

四、积分上限函数的应用

积分上限函数的求导 ： $\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{\varphi(x)} f(t)dt = f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x) - f[g(x)]\cdot g'(x)}$$

常见综合题型：

可以考虑极限、连续性、求导问题、单调区间、凹凸区间、极值、最值等，求导时注意正确使用它的求导公式。

第六章 定积分几何应用

围绕面积、旋转体体积

（与最值结合）

一、求平面图形的面积

$$A=\int_a^b f(x)dx$$

"曲边"

1. 画草图

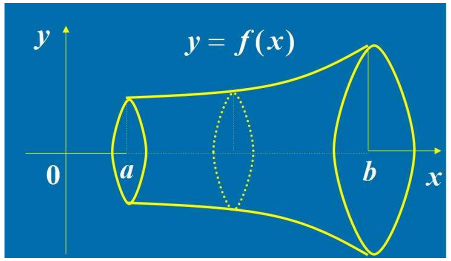
2. 确定积分区间，积分式

3. 计算面积

二、旋转体体积

绕 x 轴旋转一周立方体体积

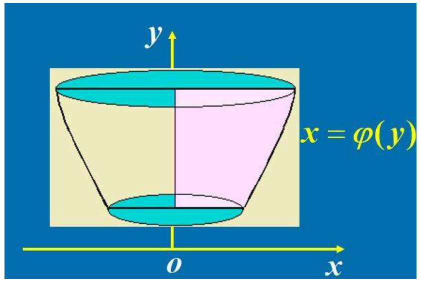
$$V_x=\int_a^b \pi[f(x)]^2 dx$$



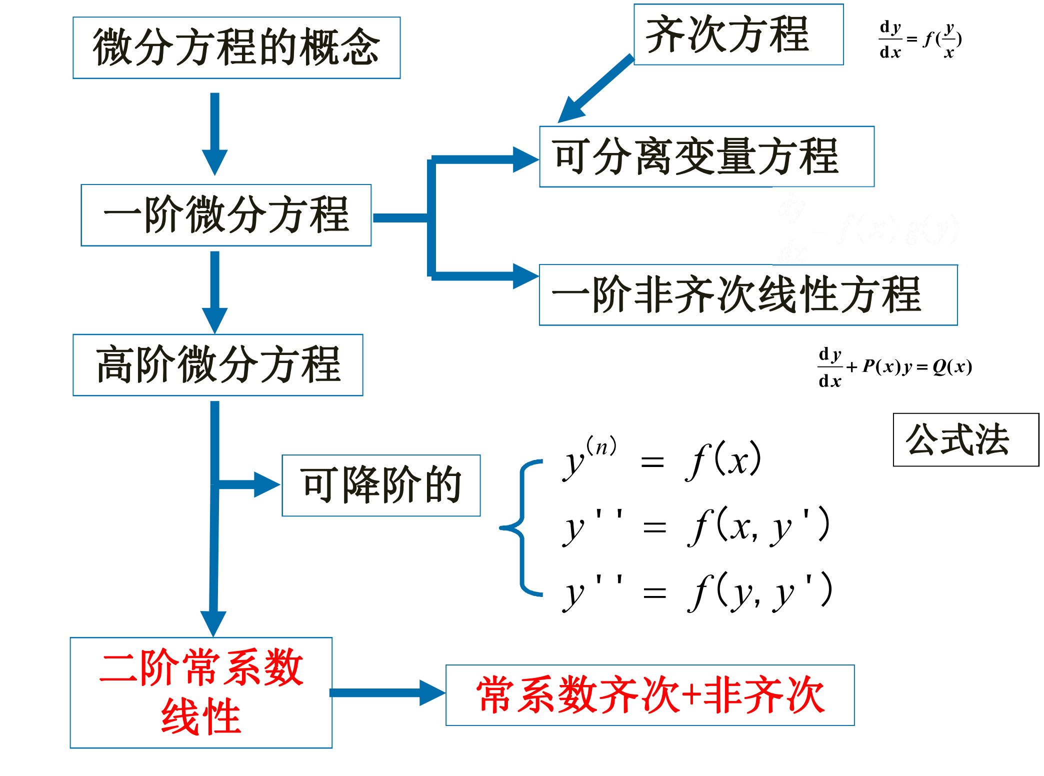
绕 y 轴旋转一周立方体体积

$$V_y=\int_c^d \pi x^2 dy$$

$$V_y=\int_c^d \pi[\varphi(y)]^2 dy$$



第七章 微分方程



二、二阶常系数非齐次线性微分方程

$$y''+py'+qy=f(x) \qquad (1)$$

$f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$

第一步　求出对应的齐次方程

$$y''+py'+qy=0$$

的通解　$Y=c_1y_1+c_2y_2$

特征方程：　$r^2+pr+q=0$

第二步　求出方程（1）的一个特解　y^*

第三步　写出方程（1）的通解

$$y=Y+y^*=c_1y_1+c_2y_2+y^*$$

（C_1,C_2为任意常数）

一、一阶微分方程

（1）可分离变量：$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$　把跟x有关，跟y有关单独放一边，再积分

（2）齐次方程：$\frac{dy}{dx}=f(\frac{y}{x})$　令 $u=\frac{y}{x}$，$y=ux, y'=u+xu'$，

$$u+x\frac{du}{dx}=f(u)$$

（3）一阶非齐次线性微分方程

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$$

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]$$

(1) 齐次通解

$$y''+py'+qy=0 \qquad (2)$$

$$r^2+pr+q=0 \qquad (3)$$

特征方程（3）的根的判别式	特征方程（3）的根的情形	微分方程（2）的通解
$p^2-4q>0$	两个不相等的实根　r_1, r_2	$Y=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}$
$p^2-4q=0$	两个相等的实根　$r_1=r_2$	$Y=(c_1+c_2x)e^{r_1x}$
$p^2-4q<0$	一对共扼复根　$r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$	$Y=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)$

(2) 非齐次特解

P354:1,2,3,4,6,7

$$y''+py'+qy=e^{\lambda x}P_m(x)$$

λ 是常数，$P_m(x)$是m次多项式

对应齐次方程的特征方程：$r^2+pr+q=0$

方程的特解设为

$$y^* = x^k R_m(x)e^{\lambda x}\ ,\qquad k=\begin{cases}0 & \lambda\text{不是根}\\ 1 & \lambda\text{是单根,}\\ 2 & \lambda\text{是重根}\end{cases}$$

设：$R_m(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m$

$b_0,b_1,\cdots,b_m$ 用待定系数法确定。

1. 求解微分方程的通解：（1）$y''+2y'=-x+3$

$f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$

$$\boxed{y^*=x^kR_m(x)e^{\lambda x}\ ,}\qquad k=\begin{cases}0 & \lambda\text{不是根}\\ 1 & \lambda\text{是单根,}\\ 2 & \lambda\text{是重根}\end{cases}$$

（1）解：（I）齐次方程对应的特征方程：

$$r^2+2r=0$$

特征根：$r_1=0$，$r_2=-2$

齐次方程通解：$Y=C_1+C_2e^{-2x}$

$(II)\lambda=0$ ，$m=1$，$\lambda=0$ 是单根，设特解为：$y^*=x(ax+b)$

（III）$y^{*\prime}=2ax+b$，$y^{*\prime\prime}=2a$代入原方程中

$2a+4ax+2b=-x+3$ 对比系数得：$a=-\dfrac{1}{4}$，$b=\dfrac{7}{2}$

特解$y^*=-\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{7}{4}x$

（IV）原非齐次方程通解为：$y=Y+y^*=C_1+C_2e^{-2x}-\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{7}{4}x$

（C_1与C_2为任意常数）

2. 求微分方程 $y''-10y'+9y=e^{2x}$ 满足初始条件 $y(0)=\dfrac{6}{7}$，$y'(0)=\dfrac{33}{7}$ 的特解。

①对应齐次方程的特征方程：$r^2-10r+9=0$

特征根：$r_1=1$，$r_2=9$

对应齐次方程的同解为：$Y=C_1e^x+C_2e^{9x}$，

$f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$

$$\boxed{y^*=x^kR_m(x)e^{\lambda x}\ ,}\qquad k=\begin{cases}0 & \lambda\text{不是根}\\ 1 & \lambda\text{是单根,}\\ 2 & \lambda\text{是重根}\end{cases}$$

② $\lambda=2$ ，$m=0$，$\lambda=2$不是特征根

③ 设非齐次方程的特解为：$y^*=Ae^{2x}$，

代入原方程，解的 $A=-\dfrac{1}{7}$。

④ 非齐次方程的通解为：$y=C_1e^x+C_2e^{9x}-\dfrac{1}{7}e^{2x}$

代入初始条件得 $C_1=\dfrac{1}{2}$，$C_2=\dfrac{1}{2}$。所求特解为：$y=\dfrac{1}{2}e^x+\dfrac{1}{2}e^{9x}-\dfrac{1}{7}e^{2x}$.

3. 设函数 $\varphi(x)$ 连续，且满足

$$\varphi(x)=e^x+\int_0^x t\varphi(t)dt-x\int_0^x\varphi(t)dt$$ 求 $\varphi(x)$.

解 对积分方程两边求导 $\varphi'(x)=e^x-\int_0^x\varphi(t)dt$

再求导得 $\varphi''(x)+\varphi(x)=e^x$ $\quad y''(x)+y=e^x$

初始条件为 $\varphi(0)=1,\varphi'(0)=1$

特征方程为 $r^2+1=0$，特征根为 $r=\pm i$，

对应齐次方程的通解：$\Phi(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$

由于 $f(x)=e^x,\lambda=1$ 不是特征根，$P_m(x)=1$，$m=0$

故设特解为 $\varphi^*(x)=ae^x$，代入原方程并化简得

$2ae^x=e^x$，$a=\dfrac{1}{2}$，$\varphi^*(x)=\dfrac{1}{2}e^x$，

3. 设函数 $\varphi(x)$ 连续，且满足

$$\varphi(x)=e^x+\int_0^x t\varphi(t)dt-x\int_0^x \varphi(t)dt$$ 求 $\varphi(x)$.

解 对积分方程两边求导 $\varphi'(x)=e^x-\int_0^x \varphi(t)dt$

再求导得 $\varphi''(x)+\varphi(x)=e^x$ $y''(x)+y=e^x$

初始条件为 $\varphi(0)=1,\varphi'(0)=1$

特征方程为 $r^2+1=0,$ 特征根为 $r=\pm i,$

对应齐次方程的通解： $\Phi(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$

$\varphi^*(x)=\frac{1}{2}e^x,$ $\therefore\ \varphi(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+e^x/2$

再代入初始条件可得 $\varphi(x)=\frac{1}{2}(\cos x+\sin x+e^x)$

6. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内可导，且 $\int_1^2 f(x)dx=f(0)$，

证明：至少存在一点 $\xi\in(0,2)$，使得 $f'(\xi)=0$.

证明：由已知 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续，则由积分中值定理，至少存在一点 $\eta\in[1,2]$，使得

$\int_1^2 f(x)dx=f(\eta)(2-1)$，从而有 $f(\eta)=f(0)$. ……………3 分

显然 $f(x)$ 在 $[0,\eta]$ 上连续，在 $(0,\eta)$ 内可导，且 $f(\eta)=f(0)$，

由罗尔定理，至少存在一点 $\xi\in(0,\eta)\subset(0,2)$，使得 $f'(\xi)=0$. …………… 7 分

7. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(1)=3\int_0^{\frac{1}{3}} e^{1-x^2}f(x)dx$，

证明：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=2\xi f(\xi)$。

证明：辅助函数 $F(x)=e^{-x^2}f(x)$

显然 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导；

$F(1)=e^{-1}f(1)=3\int_0^{\frac{1}{3}} e^{-x^2}f(x)dx=3\int_0^{\frac{1}{3}} F(x)dx=F(\eta)$，

其中 $0<\eta<\frac{1}{3}$

所以，根据罗尔定理，在区间 $(\eta,1)$ 内，至少存在一点 ξ，使得

$F'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)=2\xi f(\xi)$ 成立

8 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，在开区间 $(0,1)$ 内可导。

且有 $\int_0^{\frac{2}{\pi}} e^{f(x)}\arctan x\,dx=\frac{1}{2}$， $f(1)=0$，

则至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $(1+\xi^2)\arctan\xi\cdot f'(\xi)=-1$。

证明：由积分中值定理知，存在 $\eta\in\left(0,\frac{2}{\pi}\right)$，使 $e^{f(\eta)}\arctan\eta\cdot\frac{2}{\pi}=\frac{1}{2}$

$e^{f(\eta)}\arctan\eta=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\pi}{4}$。又 $e^{f(1)}\arctan 1=\frac{\pi}{4}$，

若设 $\varphi(x)=e^{f(x)}\arctan x$， $x\in[\eta,1]\subset[0,1]$，

显然 $\varphi(x)$ 在 $[\eta,1]$ 满足连续、可导，且 $\varphi(\eta)=\varphi(1)$

由罗尔定理，从而至少存在一点 $\xi\in(\eta,1)\subset(0,1)$ 使 $\varphi'(\xi)=0$。

而 $$\varphi'(\xi)=e^{f(\xi)}f'(\xi)\arctan\xi+\frac{e^{f(\xi)}}{1+\xi^2},$$

从而有 $(1+\xi^2)\arctan\xi\cdot f'(\xi)=-1$