试卷编号：______

诚信考试，诚信做人。

学院：________ 专业：________ 班级________ 学号：________ 姓名：________

装　订　线

广东工业大学考试试卷（ A 卷 ）

2021 -- 2022 学年度第 2 学期

课程名称： 线性代数　　学分 2　　试卷满分 100 分

考试形式： 闭卷 （开卷或闭卷）

题　号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
评卷得分											
评卷签名											
复核得分											
复核签名											

$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

$\begin{vmatrix} 1^3-5\times1^2+7 & 0 & 0 \\ 0 & 2^3-5\times2^2+7\times2 & 0 \\ 0 & 0 & 3^3-5\times3^2+7\times3 \end{vmatrix}$

1、已知 3 阶方阵 A 的特征值为 1, 2, 3，求 $|A^3-5A^2+7A|=$ 18 ______.

$A(A-E)=2E$

2、设方阵 A 满足 $A^2-A-2E=O$, 则 $A^{-1}=$ $\frac{A-E}{2}$ ______.

(1,2,3)

3、已知 $\alpha=(1,2,3)^T, \beta=(3,2,1)^T$, 且 α 与 $k\alpha+\beta$ 正交，则 $k=$ ______.

4、如果 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=3$, 则 $\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 2a_{21}-3a_{31} & 2a_{22}-3a_{32} & 2a_{23}-3a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}=$ ______.

5、设 A 为 3 阶方阵，$R(A)=1$, 则伴随矩阵 A^* 的秩 $R(A^*)=$ ______.

二、单选题（每小题 4 分，共 20 分）

1、设 n 阶方阵 A 与 B 相似，则（ C ）.

（A）存在可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP=B$　　（B）$\lambda E-A=\lambda E-B$

（C）存在对角矩阵 Λ, 使得 A 与 B 都相似于 Λ　　（D）$|A|\neq|B|$

$\begin{vmatrix} 3 & k & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ k & -5 & -1 \end{vmatrix}=0$

2、若齐次线性方程组 $\begin{cases} 3x+ky+z=0 \\ 4y+z=0 \\ kx-5y-z=0 \end{cases}$ 有非零解，则 k 应为（　　）.

（A）$k=0$　　（B）$k=1$　　（C）$k=2$　　（D）$k=-2$

3、设 A,B 均为 n 阶方阵，下面结论正确的是（ B ）.

$(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$

（A）若 A,B 均可逆，则 $A+B$ 可逆　　（B）若 A,B 均可逆，则 AB 可逆

（C）若 $A+B$ 可逆，则 $A-B$ 可逆　　　　　　　　（D）若 $A+B$ 可逆，则 A,B 均可逆

4、设 η_1,η_2 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的任意 2 个解，则下列结论**错误**的是（ A ）.

（A）$\eta_1+\eta_2$ 是 $Ax=0$ 的一个解　　　　　　（B）$\frac{1}{2}\eta_1+\frac{1}{2}\eta_2$ 是 $Ax=b$ 的一个解

（C）$\eta_1-\eta_2$ 是 $Ax=0$ 的一个解　　　　　　（D）$2\eta_1-\eta_2$ 是 $Ax=b$ 的一个解

5、下列**不是** n 维向量组 $a_1,a_2,\cdots a_s$ 线性无关的充要条件是（ A ）.

（A）存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots k_s$ 使得 $k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_sa_s\neq 0$

（B）不存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots k_s$ 使得 $k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_sa_s=0$

（C）$a_1,a_2,\cdots a_s$ 的秩等于 s

（D）$a_1,a_2,\cdots a_s$ 中任意一个向量都不能用其余向量线性表示

三、（8 分）已知行列式 $D=\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$, A_{ij} **表示代数余子式，求** $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$.

解:

$$\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b-a & b-a & b-a \\ b & a-b & 0 & 0 \\ b & 0 & a-b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(a-b)^2$$

四、（10 分）求解矩阵方程 $AX=A+X$, **其中** $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

解:

$$(A-E)X=A$$

$$X=(A-E)^{-1}A$$

$$A-E=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

五、（10 分）求向量组 $a_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\4\end{pmatrix},a_2=\begin{pmatrix}0\\3\\1\\2\end{pmatrix},a_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix},a_4=\begin{pmatrix}2\\1\\5\\6\end{pmatrix}$ 的一个最大无关组，并将其余向量用最大无关组线性表示.

解：

六、（8 分）设向量组 a_1,a_2,a_3 线性无关，$b_1=a_1+2a_2,b_2=a_2+2a_3,b_3=a_1+2a_3$，证明向量组 b_1,b_2,b_3 线性无关.

证明：

七、（10 分）问 λ 取何值时，非齐次线性方程组

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=1\\ x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda\\ x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2\end{cases}$$

（1）有唯一解；（2）无解；（3）有无穷多解？并在有无穷多解时求出它的通解.

解：

八、（14 分）求一个正交变换 $x = Py$, 把二次型 $f = -2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 化为标准形.

解: $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$|\lambda E-A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ \lambda & \lambda & -1 \\ \lambda-2 & -1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ \lambda-2 & -1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ \lambda-2 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)(\lambda^2+\lambda-2)$$

$$=-(\lambda-1)^2(\lambda+2)$$

$\lambda_1=\lambda_2=1 \quad \lambda_3=-2$

对于 $\lambda_3=-2$ $\quad \xi_1=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$p_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

对于 $\lambda_2=\lambda_1=1$ $\quad \xi_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \xi_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\eta_3=\xi_3-\frac{(\eta_2,\eta_3)}{(\eta_2,\eta_2)}\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$