工数.2

1. $\int x f'(x)dx=\int x df(x)=xf(x)-\int f(x)dx$ $(\ln^2 x)'=\frac{2\ln x}{x}$
$=2\ln x-\ln^2 x$

2. 令$e^x=t$
$f'(t)=\frac{\ln t}{t}$ $\int f'(t)=\int\frac{\ln t}{t}dt=\int \ln t\, d\ln t$ $f(1)=\frac{1}{2}\ln^2 1=0$
$=\frac{1}{2}\ln^2 t$

4. $\int_0^1 xf(x)dx$
$=\int_0^1 f(x)d\frac{1}{2}x^2$
$=\frac{1}{2}x^2f(x)-\int_0^1\frac{1}{2}x^2f'(x)dx$
$=\frac{1}{2}x^2f(x)-\int_0^1 x^3e^{-x^4}dx$
$=\frac{1}{2}x^2f(x)\Big|_0^1+\frac{1}{4}e^{-x^4}\Big|_0^1$

$f'(x)=2xe^{-x^4}$

一、填空题：（共 24 分，每小题 4 分）

$\int x df(x)=f(x)x-\int f(x)dx$

1、已知 $\ln^2 x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int xf'(x)\,\mathrm{d}x=$ $\underline{2\ln x-\ln^2 x+C}$.

$f'(x)=\frac{\ln x}{x}$ $\frac{1}{2}\ln^2 x$

2、已知 $f'(e^x)=xe^{-x}$，且 $f(1)=0$，则 $f(x)=$ $\underline{\frac{1}{2}(\ln x)^2}$.

3、$\int_{-2}^{2}\max\{1,x^2\}\,dx=\int_{-2}^{1}x^2\,dx+\int_{-1}^{1}1\,dx+\int_{1}^{2}x^2\,dx=\frac{20}{3}$.

4、已知$f(x)=\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt$，则$\int_0^1 xf(x)\,dx=\frac{1}{4}(e^{-1}-1)$.

5、$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}dx=-\int_1^{+\infty}\ln x\,d\frac{1}{x}=-\left(\frac{1}{x}\ln x\Big|_1^{+\infty}-\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx\right)=1$.

6、设$f'(x)$在$(-\infty,+\infty)$连续，则$\frac{d}{dx}\int_a^x(x-t)f'(t)dt=f(x)-f(a)$.

二、选择题：（共 24 分，每小题 4 分）

$\frac{d}{dx}\int_a^x(x-t)f'(t)dt$
$=\frac{d}{dx}\left[\int_a^x xf'(t)dt-\int_a^x tf'(t)dt\right]$
$=\left[x\int_a^x f'(t)dt-\int_a^x tf'(t)dt\right]'=\int_a^x f'(t)dt$
$=f(x)-f(a)$

1、设 $f(x)$ 为可导函数，则：（ C ）

A. $\int f(2x)dx=f(2x)$； B. $\int f'(2x)dx=f(2x)$；

C. $(\int f(2x)dx)'=f(2x)$； D. $(\int f(2x)dx)'=f(2x)+C$.

2、若连续函数$y=f_1(x)$与$y=f_2(x)$在$[a,b]$上关于x轴对称，则$\int_a^b f_1(x)dx+\int_a^b f_2(x)dx=$（ C ）

A. $2\int_a^b f_1(x)dx$; B. $2\int_a^b f_2(x)dx$; C. 0; D. $2\int_a^b[f_1(x)-f_2(x)]dx$.

3、若 e^{-x} 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int x^2 f(\ln x)dx=$（ C ）

A. $-\frac{1}{4}x^4+C$ B. $\frac{1}{4}x^4+C$ C. $-\frac{1}{2}x^2+C$ D. $\frac{1}{2}x^2+C$

4、若 $f(x)$ 为可导函数，且已知$f(0)=0,f'(0)=2$,则$\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x^2}$的值为（ B ）.

A. 0 B. 1 C. 2 D. 不存在

5、$\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx=$（ B ）.

A. $x-\cos x+C$ B. $\arcsin x-\sqrt{1-x^2}+C$

C. $\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$ D. $\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C$

6、曲线$r=3\theta\ (0\le\theta\le2\pi)$所围成图形的面积是（ D ）

A. $4\pi^3$ B. $3\pi^3$ C. $6\pi^3$ D. $12\pi^3$

三、计算下列不定积分（共 40 分，每小题 8 分）

1、求$\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}(\sin t)^{\frac{3}{2}}dt}{\int_0^x t(t-\sin t)dt}$.

解：由洛必达法则，

$$原式 = \lim_{x\to 0}\frac{2x(\sin x^2)^{\frac{3}{2}}}{x(x-\sin x)} \quad = 2\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{(1-\cos x)} = 2\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{\frac{1}{2}x^2} = 12$$

2、 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x}, & x \geq 0 \\ \frac{1}{1+e^x}, & x < 0 \end{cases}$ ，求$\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x-1)dx$

$f_{-\frac{1}{2}}^{1}$ $f_{-\frac{1}{2}}^{0}$

解： 对$\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x-1)dx$，令$x-1=t$，当$x=\frac{1}{2}$ 时，$t=-\frac{1}{2}$;当 $x=2$ 时，$t=1$;

原式 $\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x-1)dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} f(t)dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}dx + \int_{0}^{1}\frac{1}{1+x}dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{0}\frac{de^{-x}}{e^{-x}+1} + \ln(x+1)\Big|_0^1$$

$$= \ln 2 - \ln(e^{-x}+1)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{0} = \ln(e^{\frac{1}{2}}+1)$$

3、 $\int \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$

解：令 $\sqrt[6]{x} = t$， 则$x = t^6, dx = 6t^5 dt$

$$原式=\int \frac{6t^5}{(1+t^2)t^3}dt = 6\int \frac{t^2}{1+t^2}dt = 6\int \frac{1+t^2-1}{1+t^2}dt = 6\int (1-\frac{1}{1+t^2})dt \quad \cdots\cdots 4分$$

$$= 6t - 6\arctan t + C$$

$$= 6\sqrt[6]{x} - t\arctan \sqrt[6]{x} + C$$

4、 $\int \frac{4\sin x + 3\cos x}{\sin x + 2\cos x}dx$.

解： $\frac{4\sin x + 3\cos x}{\sin x + 2\cos x} = \frac{m(\sin x + 2\cos x)' + n(\sin x + 2\cos x)}{\sin x + 2\cos x} = \frac{(n-2m)\sin x + (2n+m)\cos x}{\sin x + 2\cos x}$

$$\begin{cases} n-2m=4 \\ 2n+m=3 \end{cases}, \quad n=2, m=-1$$

$$原式= \int \frac{-(\sin x + 2\cos x)' + 2(\sin x + 2\cos x)}{\sin x + 2\cos x}dx$$

$$= -\ln|\sin x + 2\cos x| + 2x + C$$

5、计算反常积分$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$.

解：令 $\arctan x = u$ ， $x = \tan u$ ， $dx = \sec^2 u du$ ，

当 $x=0$， $u=0$， $x \to +\infty$， $u \to \frac{\pi}{2}$.

$$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{u}{(1+\tan^2 u)^{\frac{3}{2}}}\sec^2 udu$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}u\cos udu$$

$$=[u\sin u]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin udu \quad =\frac{\pi}{2}-1.$$

四、（6分）证明：当$x>0$时，$\int_0^x(\sqrt{1+t}-1)dt<\frac{1}{4}x^2$.

证明：设$f(x)=\frac{1}{4}x^2-\int_0^x(\sqrt{1+t}-1)dt$，

则$f(x)$在$[0,+\infty)$可导，且$f(0)=0$，

$f'(x)=\frac{1}{2}x-\sqrt{1+x}+1$，$f'(0)=0$

$f''(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}$

当$x>0$时，$f''(x)>0$，$f'(x)$在$[0,+\infty)$上单调增加，从而当$x>0$时，有$f'(x)>f'(0)=0$，

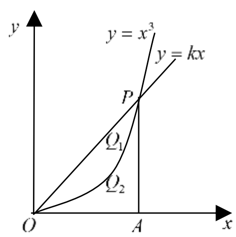
同理得出$f(x)$ $[0,+\infty)$上单调增加，所以当$x>0$时，$f(x)>f(0)=0$，

即 $\int_0^x(\sqrt{1+t}-1)dt<\frac{1}{4}x^2$

五、（10分）曲线$y=x^3$ $(x\ge 0)$与直线$y=kx$ $(k>0)$相交于点P，PA垂直于x轴且垂足为A（如图），曲线$y=x^3$分ΔOAP为两部分Q_1、Q_2.

（1）证明：图形Q_1、Q_2两部分的面积相等.

（2）求图形Q_1、Q_2分别绕x旋转一周所成的旋转体的体积之比.



第五题图

解：（1）由$\begin{cases}y=x^3\\y=kx\end{cases}$得交点$x=0$，$x=\sqrt{k}$

于是有 $S_1=\int_0^{\sqrt{k}}(kx-x^3)dx=\frac{1}{4}k^2$，$S_2=\int_0^{\sqrt{k}}x^3dx=\frac{1}{4}k^2$，

所以 $S_1=S_2$

（2）$V_1=\pi\int_0^{\sqrt{k}}[(kx)^2-(x^3)^2]dx=\frac{4}{21}k^{\frac{7}{2}}\pi$，

$V_2=\pi\int_0^{\sqrt{k}}(x^3)^2dx=\frac{1}{7}k^{\frac{7}{2}}\pi$，

所以 $\frac{V_1}{V_2}=\frac{4}{3}$

六、附加题（10 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且满足 $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)dx$，

证明：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

证明：设 $F(x)=xf(x)$，

由积分中值定理，存在 $\eta\in[0,\frac{1}{2}]$，使得

$$\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)dx=\int_0^{\frac{1}{2}} F(x)dx=\frac{1}{2}F(\eta)$$

由已知条件，$F(1)=f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)dx=F(\eta)$.

于是 $F(x)$ 在 $[\eta,1]$ 上满足罗尔定理的条件，所以 $\exists\xi\in(\eta,1)\subset(0,1)$，使得 $F'(\xi)=0$，

又 $F'(x)=f(x)+xf'(x)$，故 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$

一填空题

1. 设函数$f(x)=\begin{cases}\frac{3\sin(x-2)}{x-2}, x<2\\ e^{2ax}, x\geq 2\end{cases}$，在$(-\infty,\infty)$上连续，则常数$a=$ $\frac{1}{4}\ln 3$

2. $f'(0)=1$, 则$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h)-f(-h)}{\ln(1+4h)}=\lim\limits_{h\to 0}\left[\frac{f(h)-f(0)}{h}+\frac{f(-h)-f(0)}{-h}\right]\times\frac{h}{\ln(1+4h)}=2f'(0)\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{3}\times\frac{3x}{x-2}}=e^3$;

$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=$

4. 曲线$\begin{cases}x=e^t\sin 2t\\ y=e^t\cos t\end{cases}$，在$t=0$所对对应点的切线方程为: $2y-x-2=0$;

$x=0$
$y=1$

5. 若$f(x)=\cos 2x$，则$f^{(100)}(x)=$ $2^{100}\cos\left(2x+100\times\frac{\pi}{2}\right)=2^{100}cos 2x$

6. 由方程$xy+\ln y=1$所确定的函数$y=f(x)$的导数为 $y+xy'+\frac{1}{y}y'=0$, $y'=\frac{-y^2}{xy+1}$;

$y+xy'+\frac{y'}{y}=0$

7. 设$g(x)$可微，$y=x^{g(x)}$，$(x>0)$，则$dy=$ $x^{g(x)}\left(g'(x)\ln x+\frac{g(x)}{x}\right)dx$;

$e^{g(x)\ln x}$ $y=e^{g(x)\ln x}$ $e^{g(x)\ln x}(g'(x)\ln x+\frac{g(x)}{x})$

8. 函数$f(x)=e^{-x}$带有佩亚诺余项的二阶麦克劳林公式为$e^{-x}=1-x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$;

$1-x+\frac{x^2}{2!}$

二选择题

1. 已知函数 $y=f(x)$在x_0处的导数$f'(x_0)=2$，则当$\Delta x\to 0$时，$f(x)$在x_0处的微分dy是(D)

A. 与Δx等价的无穷小.　B. 比Δx高阶的无穷小.

C. 比Δx低阶的无穷小.　D. 与Δx同阶而非等价的无穷小.

2. $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}, x\neq 1\\ 1, x=1\end{cases}$，则$x=1$是$f(x)$的(C)

A. 连续点; B. 可去间断点; C. 跳跃间断点; D. 第二类间断点

3. 函数$f(x)=xe^{-x}$在$[-1,2]$上有(C)

A. 最大值 0　B.最小值 0　C. 最大值e^{-1}　D. 最小值e^{-1}

4. 曲线$y=\frac{1}{x}+\arctan x$的渐近线条数为(C)

A. 1　B. 2　C. 3　D. 0

5. 设$f(x)$有二阶连续导数，且$f'(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f''(x)}{|x|}=1$，则(D)

A. $(0,f(0))$是曲线$y=f(x)$的拐点;　B. $f(0)$是$f(x)$的极大值;

C. $f(0)$是$f(x)$的极大值，$(0,f(0))$也是曲线$y=f(x)$的拐点;

D. $f(0)$是$f(x)$的极小值;

6. 当$x\to 0$时，$e^{-\frac{1}{2}x}-1$与$\cos x-1$的关系为(B)

A. 是等价无穷小　B. $\cos x-1$是比$e^{-\frac{1}{2}x}-1$高阶的无穷小

C. 是同阶但非等价无穷小　D. $\cos x-1$是比$e^{-\frac{1}{2}x}-1$低阶的无穷小

7. 函数$f(x)=(x+1)\sqrt{2-x}$在$[-1,2]$上满足罗尔定理条件的$\xi=$(B)

A. -1　B. 1　C. 0　D. 2

$f'(x)=0$

8. 已知$f'(x_0)=1$，则$\lim\limits_{x\to 0}n\left[f\left(x_0+\frac{2}{n}\right)-f(x_0)\right]=$(D)

A. 0　B. ∞　C. $\frac{1}{2}$　D. 2

三计算题

1、 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos\left(e^{2x}-1\right)}{\ln\left(1-3x^2\right)}$

解：$e^{2x}-1\sim 2x$，$1-\cos(e^{2x}-1)\sim\frac{1}{2}(e^{2x}-1)^2$，$\ln(1-3x^2)\sim-3x^2$，

$$\therefore\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(e^{2x}-1)}{\ln(1-3x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(e^{2x}-1)^2}{-3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(2x)^2}{-3x^2}=-\frac{2}{3}$$

2、 求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{\tan x-x}{x}\right)^{\frac{x}{\tan x-x}\times\left(\frac{1}{1-\cos x}\times\frac{\tan x-x}{x}\right)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2(\tan x-x)}{x^3}}$

$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2(\sec x^2-1)}{3x^2}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2(\tan x)^2}{3x^2}}=\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}$

3、 求函数$y=x-\ln\left(1+x\right)$的单调区间和极值

解： $x\in(-1,+\infty)$，$y'=(x-\ln(1+x))'=1-\frac{1}{1+x}=0$，得驻点 $x=0$，

$x\in(-1,0)$，$y'<0$ 单调递减； $x\in(0,+\infty)$，$y'>0$ 单调递增;

故 $f(0)=0$ 为极小值

4、 设函数$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases}x=t+e^t\\ y=\sin t\end{cases}$确定，求$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}$

解： $\frac{dy}{dx}=\left.\frac{cost}{1+e^t}\right|_{t=0}=\frac{1}{2}$，

$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{cost}{1+e^t}\right)'\times\frac{1}{x_t'}=\left.\frac{-sint\left(1+e^t\right)-cost\left(e^t\right)}{(1+e^t)^3}\right|_{t=0}=-\frac{1}{8}$

5、 讨论函数$f(x)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{1}{x}}, & x<0\\ (x-1)\sin\frac{1}{x-1}, & x\geq 0\end{cases}$的连续性。若有间断点，请指出间断点的类型。

解: （1）函数在$(-\infty，0)$，$(0,1)$，$(1，+\infty)$ 连续，

（2）在$x=0$时，$\lim\limits_{x\to 0-}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$，$\lim\limits_{x\to 0+}(x-1)\sin\frac{1}{x-1}=\sin 1$，$x=0$是跳跃间断点

（3）在$x=1$时，$\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\sin\frac{1}{x-1}=0$ ，$x=1$是可去间断点。

四证明题

1、 证明不等式（二选一，多做不多得分）（1）当$x>0$时，$\frac{1}{x+1}<\ln(1+x)<x$.

证明：令$f(x)=\ln\left(1+x\right)$，**在$[0,x]$满足拉格朗日中值定理，**

$\ln(1+x)-\ln(1+0)=\ln(1+x)=\frac{x}{1+\xi}$，

又 $\frac{1}{1+\xi}<\frac{1}{1+\xi}<1$， 得 $\frac{x}{1+\xi}<\frac{x}{1+\xi}<x$， $[0,x]$

从而有$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$ ，证毕。

(2) $x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\frac{x+y}{2}$，$(x>0,y>0,x\neq y)$.

证明：令$F(x)=x\ln x$， $(x>0,\ y>0,\ x\neq y)$,显然函数可导，

$F'(x)=\ln x+1$，$F''(x)=\frac{1}{x}>0,(x>0)$，从而$F(x)$在**（0，$+\infty$）是下凸的，有**

$\frac{F(x)+F(y)}{2}>F(\frac{x+y}{2})$， *即* $\frac{x\ln x+y\ln y}{2}>\frac{(x+y)}{2}\ln\frac{x+y}{2}$ ，得证。

2、设$f(x)$在$[0,\ 1]$上连续，在$(0,\ 1)$内可导，且$f(1)=0$，证明至少存在一点$\xi\in(0,1)$，使$2f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

证明：令$F(x)=x^2\mathrm{f}(x)$，**在**$[\mathbf{0},\mathbf{1}]$ 上连续，在$(0,\ 1)$内可导，$F(0)=F(1)=0$，**满足罗尔中值定理，则**至少存在一点$\xi\epsilon(\mathbf{0},\mathbf{1})$，**使**$\boldsymbol{F}'^{(\xi)}=\mathbf{2}\xi\boldsymbol{f}(\xi)+\xi^2f'(\xi)=0$，

即 $\mathbf{2}\boldsymbol{f}(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

五附加题

1 试确定常数a和b，使$f(x)=x-(\mathrm{a}+\mathrm{b}\cos x)\sin x$为当$x\to0$时关于$x$的5阶无穷小。

解：由麦克劳林公式：

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+1})$$

$$f(x)=x-(\mathrm{a}+\mathrm{b}\cos x)\sin x=x-a\sin x-\frac{b}{2}\sin 2x$$

$$=x-a\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)\right)-\frac{b}{2}\left(2x-\frac{(2x)^3}{3!}+\frac{(2x)^5}{5!}+o(x^5)\right)$$

$$=(1-a-b)x+(a+4b)\frac{x^3}{3!}-(a+16b)\frac{x^5}{5!}+o(x^5)$$

由题意a,b需满足：$\begin{cases}1-a-b=0\,,\\ a+4b=0\,,\\ a+16b\neq0\,,\end{cases}$ 解得$a=\frac{4}{3}\,,b=-\frac{1}{3}$.

2 已知函数$f(x)$在$[0,\ 1]$上连续，在$(0,\ 1)$满足$f(0)=0\,,f(1)=1$

(1) 证明：存在$\xi\in(0,1)$，使得$f(\xi)=1-\xi$.

(2) 证明：存在不同的$\eta_1,\eta_1\in(0,1)$，使得$f'(\eta_1)f'(\eta_2)=1$.

证明：（1）设 $F(x)=f(x)+x-1$，**在**$[\mathbf{0},\mathbf{1}]$**连续，**$F(0)\times F(1)<0$，由零点存在定理至少存在一点$\xi\epsilon(\mathbf{0},\mathbf{1})$，**使**$F(\xi)=0$，即$f(\xi)=1-\xi$，得证。

（2）由已知$f(x)$**在**$[\mathbf{0},\xi]$**，**$[\xi,\mathbf{1}]$**区间分别满足拉格朗日中值定理，结合（1）则有**

$f(\xi)-f(0)=f'(\eta_1)\xi$ ， $(1-\xi)=f'(\eta_1)\xi$ ， $\eta_1\in(\mathbf{0},\xi)$ ；

$f(1)-f(\xi)=f'(\eta_2)(1-\xi)$ ， $\xi=f'(\eta_2)(1-\xi)$ ， $\eta_2\in(\xi,1)$ ；

即 $f'(\eta_1)\times f'(\eta_2)=1$， 得证。

1、设$(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\dfrac{\pi}{3}$,且$|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=8$,则$|\vec{a}-\vec{b}|=$_____.

2、已知$\vec{a}=(-1,2,3),\vec{b}=(4,5,1)$，则$\vec{b}$在$\vec{a}$上的投影为_____.

3、过点$(4,-1,3)$且平行于直线$\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{5}$的直线方程为 ______ .

4、函数$z=\ln(1+x^2+y^2)$在点（1，1）处的全微分$dz=$____________.

5、曲面$x^2+2y^2+3z^2=15$在点$(2,2,1)$处的切平面方程为______________.

6、曲线$x=t,y=t^2,z=t^3$在点$(-1,1,-1)$处的切线方程为________.

7、设函数$z=f(x,y)$由方程$x+y+z=xyz-1$确定，则函数$z=f(x,y)$在$(0,0)$处的梯度$\mathbf{grad}f(0,0)=$______________.

8、函数$f(x,y,z)=x^2+y^2+z$在点$M(1,1,1)$处的最大方向导数为________.

9、已知$f(x,x^3)=x^8+6x^3+2x-1$，$f_1(x,x^3)=7x^4-3x+10$，则$f_2(x,x^3)$ = __________________.

10、在曲线$\begin{cases} y=-x \\ z^2=-1+2x \end{cases}$上点$(1,-1,1)$处的法平面方程为______________ .

11、曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9 \\ x+z=1 \end{cases}$关于$yoz$面的投影柱面方程为

12、设函数$z=z(x,y)$由方程$F(x+2z,y+3z)=0$所确定，其中$F(u,v)$具有连续偏导数，则$2\frac{\partial z}{\partial x}+3\frac{\partial z}{\partial y}=$

13、设$z=f(x^2+2y,\ln xy)$，$f(u,v)$具有二阶连续偏导数，求$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

14、已知函数$z=\sin(2x+y)$，求：(1) 该函数 z 在点$(0,0)$处的全微分; (2) z 在点$(0,0)$处指向点（1,1）的方向导数.

15、试确定函数$f(x,y)=e^x(x+y^2+2y)$的极值点和极值.

16、设曲面方程为$F(z-ax,z-by)=0$（a,b为正常数）.$F(u,v)$具有一阶连续的偏导数，且$F_u^2+F_v^2\neq 0$，试证明此曲面上任一点处法线恒垂直于一常向量.

17、在椭球面$2x^2+y^2+z^2=1$上，求距离平面$2x+y-z=6$的最近点和最远点。

18、在椭球面$2x^2+2y^2+z^2=1$上求一点，使得函数$u=x^2+y^2+z^2$在该点处沿$l=(1,-1,0)$方向的方向导数最大.

19、设有一凤凰山，取它的底面所在平面为xoy坐标面，其底部所占的区域为$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2-xy\le 75\}$，凤凰山的高度为$h(x,y)=75-x^2-y^2+xy$，现欲利用此山进行攀岩活动，为此寻找山脚坡度最大的点作为攀爬点，试确定攀登起点的位置。