

广东工业大学考试试卷 (A)

20 22 -- 20 23 学年度第 1 学期

课程名称: 概率论与数理统计 学分 3 试卷满分 100 分

考试形式: 闭卷 (开卷或闭卷)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
评卷得分											
评卷签名											
复核得分											
复核签名											

一、选择题 (每小题 4 分, 共 20 分)

1、设离散型随机变量 X 的分布律为 $P(X = k) = b/n, k = 1, 2, \dots, n$, 则 $b =$ (A.).
A 1; B 0; C 2; D $1/2$ $\frac{1}{n} \times n = 1$

2、设 A, B 为任意两个随机事件, 且 $P(B) > 0, P(A|B) = 1$, 则一定有 (D.).
A $P(A \cup B) > P(A)$; B $P(A \cup B) > P(B)$; $\frac{P(AB)}{P(B)} = 1$ C
C $P(A \cup B) = P(A)$; D $P(A \cup B) = P(B)$; $\therefore P(AB) = P(A)$

3、设随机变量 X 的密度函数 $f(x)$ 满足 $f(-x) = f(x)$, $F(x)$ 是 X 的分布函数, 则对于任意的实数 a , 下列成立的是 (B.).
A $F(-a) = 1 - \int_0^a f(x)dx$; B $F(-a) = 1/2 - \int_0^a f(x)dx$;
C $F(-a) = 1 - F(a) + f(0)$;
D $F(-a) = F(a)$;
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

4、设 X 服从参数为 2 的泊松分布, 根据切比雪夫不等式有 (C.).
A $P(|X - 2| < 2) \geq 1/2, P(|X - 2| \geq 2) \geq 1/2$;
B $P(|X - 2| < 2) \leq 1/2, P(|X - 2| \geq 2) \leq 1/2$;
C $P(|X - 2| < 2) \geq 1/2, P(|X - 2| \geq 2) \leq 1/2$;
D $P(|X - 2| < 2) \leq 1/2, P(|X - 2| \geq 2) \geq 1/2$.
 $E(X) = D(X) = 2$

5、设 X 与 Y 是独立同分布的离散型随机变量, $P(X = 3) = P(X = -3) = 1/2$, 则

$P(X/Y = 1) =$ (A.).
A $1/2$; B $4/9$; C 1; D $1/4$.

二、填空题 (每小题 4 分, 共 20 分)

1、若事件 A 和事件 B 相互独立, 且 $P(B) = 0.5, P(A - B) = 0.3$, 则 $P(B - A) =$ (0.2).
 $P(A - B) = P(A) - P(AB) = P(A) - 0.5P(A) = 0.3$

2、若随机变量 ξ 服从 $U(1, 6)$, 则方程 $x^2 + \xi x + 1 = 0$ 有实根的概率是 ($\frac{4}{5}$).

$$\iint_{\mathbb{R}^2} kxy dx dy = 1 \quad \int_0^1 \int_0^1 kxy dx dy = 1$$

3、设二维随机变量 (X, Y) 的联合密度函数 $f(x, y) = \begin{cases} kxy, & 0 < x \leq y < 1; \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$ 则 $k = (4)$ 。

4、设二维随机变量 (X, Y) 服从正态分布 $N(1, 1, 4, 4, 0)$ ，则 $D(X - Y) = (8)$ 。

5、将一枚均匀硬币连掷 100 次，则利用中心极限定理可知，正面出现的次数大于 60 的概率近似为 (0.0228) 。（附： $\Phi(2) = 0.9772$ ）

三、计算题（每小题 10 分，共 60 分）
 $\sigma = 25 \quad \frac{3}{50} \rightarrow \frac{3}{20} \rightarrow \frac{3}{10}$
 $P(X > 60) = 1 - \Phi(2)$

1、某单项选择题有四个答案可供选择，已知 60% 的考生掌握了相关知识，可以做出正确的选择；20% 的考生掌握了部分相关知识，可以剔除两个不正确的答案，然后随机的选择一个答案；20% 的考生对相关知识完全没掌握，他们只能随意的选择一个答案。现在任选一位考生，求：

(1) 他选对答案的概率；

(2) 若已知该考生选对答案，问他完全掌握相关知识的概率是多少？

$$(1) \frac{3}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

$$(2) P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{5}$$

2、设总体 X 的概率密度函数为

$$f(x, \theta) = \begin{cases} 2e^{-2(x-\theta)}, & x > \theta, \\ 0, & x \leq \theta. \end{cases}$$

其中 $\theta > 0$ 是未知参数， X_1, X_2, \dots, X_n 是取自 X 的一个样本。记

$$\hat{\theta} = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$

求：

(1) 总体 X 的分布函数；

$$(1) F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = 1 - e^{-2(x-\theta)}$$

(2) 统计量 $\hat{\theta}$ 的概率密度函数；

(2)

3、已知随机变量 X 与 Y 的概率分布如下图，且 $P(X^2 = Y^2) = 1$ ，求 $Z = XY$ 以及 $M = \max\{X, Y\}$ 的概率分布。

X 的分布律：

X	-1	0
P	2/3	1/3

$X Y$	-1	0	1
-1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
0	0	$\frac{1}{3}$	0

M	0	1	-1
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Y 的分布律：

Y	-1	0	1
P	1/3	1/3	1/3

	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
--	---------------	---------------	---------------

$$Z = XY$$

Z	0	1	-1
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

4、设随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 2, & 0 < x < 1, 0 < y < x, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

试求边缘密度函数 $f_X(x)$ 和条件密度函数 $f_{X|Y}(x|y)$ ，以及 $\text{Cov}(X, Y)$ 。

$$f_X(x) = \int_0^x f(x, y) dy = 2x$$

$$f_Y(y) = \int_0^1 f(x, y) dx = 2$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = 1$$

$$0 < y < x < 1$$

$$\text{cov}(X, Y) =$$

5、设二维随机变量(X,Y)服从正方形区域

$D = \{(x, y) | 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ 内的均匀分布，求 $Z = XY$ 的概率密度函数。

$$S = \int_0^1 dx \int_0^1 dy = 1$$

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$f(u) = f(xy) = \int$$

6、设总体 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
p	a^2	$2a(1-a)$	a^2	$1-2a$

其中 $a, 0 < a < 1/2$ 是未知参数，利用总体 X 的如下容量为 8 的样本值: 3, 1, 3, 0, 3, 1, 2, 3, 求参数 a 的矩估计值和最大似然估计值.

$$\begin{aligned} E(X) &= 2a(1-a) + 2a^2 + 3 - 6a \\ &= 2a - 2a^2 + 2a^2 + 3 - 6a \\ &= 3 - 4a \end{aligned}$$

$$\therefore a = \frac{3 - E(X)}{4}$$

$$\bar{X} = E(X) = 1, a = \frac{1}{4}$$

设 $X_1=0, X_2=2, X_3=2, X_4=3$ 是相应样本值

$$\begin{aligned} L(\theta; X_1, X_2, X_3, X_4) &= (1-2a)^4 \cdot a^2 \cdot [2a^2(1-a)]^2 \cdot a^2 \\ &= (1-2a)^4 \cdot 4a^6(1-a)^2 \end{aligned}$$

$$\ln L = 4 \ln(1-2a) + 6 \ln a + 2 \ln(1-a)$$

$$\therefore \frac{d \ln L}{d \theta} = 0$$

$$\therefore 12\theta^2 - 14\theta + 3 = 0$$

$$12\theta^2 - 14\theta + 3 = 0$$

$$\theta_1 = \pm$$