习题1.1 P_6

4.解:

```
  i ← 1
  while(1) do
    if(i*i > n) break
      i ← i+1
  return i-1
```

7.解:

设 $gcd(m,n)=a$

则 $m=ax$, $n=ay$

令 $i=\frac{m}{n}=\frac{x}{y}$

$j=m \bmod n = m-in = ax-iay$
$\qquad\qquad\qquad\qquad = a(x-iy)$

∴ j 可以被 a 整除

∵ m, n 可以被 a 整除

∴ $gcd(m,n)=gcd(n, m \bmod n)$

习题1.2

P_{13}. 1.无解,已知狼 吃 羊 吃 白菜

第一次 只能带羊走,

第二次 无论带谁,都会在对岸存在克制关系

P_{14}. 4.

```
if b*b-4*a*c > 0
    answer1 ← (-b+sqrt(b*b-4*a*c))/2a
    answer2 ← (-b+sqrt(b*b-4*a*c))/2a
    return answer1, answer2
else if b²-4ac = 0
    answer1 ← (-b+sqrt(b*b-4*a*c))/2a
    return answer1
else
    return -1 //无解
```

5.

a.

将十进制正整数每次除以2,直到整数为0

记录余数,将余数逆序放置,即二进制

b.

假设正整数为n

```
  i←0   j←0
  while n≠0 do
    A[i] ← n%2
      i ← i+1
  while j < length/2 do
    A[j], A[length-1-j] = A[length-1-j], A[j]
    j ← j+1
```

习题1.3 P_{19} 4.

a.将城中的两个岛,北岸,南岸视为图的节点

七个桥视为边

问题则为是否存在一条欧拉回路

b.无解,

因为四个节点,的度数均为奇数

需要将奇数度数的节点化为0,至少要2座新桥

习题2.1 P_{39}

2. a.

基本操作：矩阵对应的每一项对应相加

执行次数：n^2次（矩阵阶数）

n次（矩阵元素个数）

b.

基本操作：矩阵的每一排元素和别的每一列 元素一一相乘

执行次数：n^3次（矩阵阶数）

$n^{\frac{3}{2}}$次（矩阵元素个数）

习题2.2 P_{46}

2.

$\lim\limits_{n\to\infty} n(n+1)/2 = n^2$.

$\because t(n)\le cg(n) \Rightarrow t(n)\in O(g(n))$

$t(n)\ge cg(n) \Rightarrow t(n)\in \Omega(g(n))$

$c_2g(n)\le t(n)\le c_1g(n) \Rightarrow t(n)\in \Theta(g(n))$

$\therefore$ a, b, d为真

C为假，正确应为 $n(n+1)/2 \in \Theta(n^2)$

3.

a. $(n^2+1)^{10} \in \Theta(n^{20})$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+1)^{10}}{n^{20}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^{20}}\right)^{10} = 1$$

b. $\sqrt{10n^2+7n+3} \in \Theta(n)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{10n^2+7n+3}}{n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{10+\frac{7}{n}+\frac{3}{n^2}} = \sqrt{10}$$

C. $2n\lg(n+2)^2+(n+2)^2\lg\frac{n}{2} \in \Theta(n^2\lg n)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n\lg(n+2)^2+(n+2)^2\lg\frac{n}{2}}{n^2\lg n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\lg(n+2)^2}{n\lg n}+\frac{(n^2+4+2n)(\lg n-\lg 2)}{n^2\lg n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\lg n-n^2\lg 2+4\lg n-4\lg 2+2n\lg n-2n\lg 2}{n^2\lg n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lg 2}{\lg n}+\frac{4}{n^2}-\frac{4\lg 2}{n^2\lg n}+\frac{2}{n}-\frac{2\lg 2}{n\lg n}\right)$$

$=1$

d. $2^{n+1}+3^{n-1} \in \Theta(3^n)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n-1}}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n\times 2+\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

e. $\lfloor\log_2 n\rfloor \in \Theta(\log n)$

$\log_2 n-1 \le \lfloor\log_2 n\rfloor \le \log_2 n$

$\log_2 n-1 \in \Theta(\log n)$ $\log_2 n \in \Theta(\log n)$

$\therefore \lfloor\log_2 n\rfloor \in \Theta(\log n)$

P_{47} 5.排序：

$\ln^2 n,\ 5\lg(n+100)^{10},\ \sqrt[3]{n},\ 0.001n^4+3n^3+1,\ 3^n,\ 2^{2n},\ (n-2)!$

习题2.3

1.

e. $\sum_{i=0}^{n-1} i(i+1)$

$$\sum_{i=0}^{n-1} i(i+1) = \sum_{i=0}^{n-1} i^2 + \sum_{i=0}^{n-1} i$$

$$= 0+1+4+\dots+(n-1)^2+0+1+2+\dots+(n-1)$$

$$= \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{(n-1)n}{2}$$

$$= \frac{(n-1)n(2n-1+3)}{6}$$

$$= \frac{n(n-1)(n+1)}{3}$$

g. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij$

$$= \sum_{i=1}^{n} i\left(\sum_{j=1}^{n} j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} i\,\frac{(1+n)n}{2}$$

$$= \frac{n(1+n)}{2} \cdot \frac{n(1+n)}{2}$$

$$= \frac{n^2(1+n)^2}{4}$$

2.

c. $\sum_{i=1}^{n}(i+1)2^{i-1}$

$$\sum_{i=1}^{n}(i+1)2^{i-1} = 2\cdot 2^0 + 3\cdot 2^1 + 4\cdot 2^2 + \dots + (n+1)2^{n-1} \quad ①$$

$$2\sum_{i=1}^{n}(i+1)2^{i-1} = 2\cdot 2^1 + 3\cdot 2^2 + \dots + n2^{n-1} + (n+1)2^n \quad ②$$

②-①有

$$\sum_{i=1}^{n}(i+1)2^{i-1} = (n+1)2^n - 2^{n-1} - 2^{n-2} - \dots - 2^2 - 2^1 - 2^1$$

$$= (n+1)2^n - 2^n - 3 = n2^n - 3$$

易知 $\sum_{i=1}^{n}(i+1)2^{i-1} \in \Theta(n2^n)$

d. $\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{i-1}(i+j)$

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{i-1}(i+j) = \sum_{i=0}^{n-1} i+(i+1)+(i+2)+\dots+(2i-2)+(2i-1)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\frac{(3i-1)\times i}{2} = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{3i^2-i}{2}$$

$$= \frac{3}{2}\sum_{i=0}^{n-1} i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} i$$

$$= \frac{3}{2}\frac{(n-1)n(2n-1)}{2} - \frac{1}{2}\times\frac{(n-1)n}{2}$$

易知 $\frac{3}{2}\frac{(n-1)n(2n-1)}{2} - \frac{1}{2}\times\frac{(n-1)n}{2} \in \Theta(n^3)$

5. Secret(A[0..n-1])

a. 求的是数组内最大值-最小值

b. 基本操作：数与数比较

c. 执行了 $2n$ 次

d. 类型：线性效率 $\Theta(n)$

e. 无法改进，因为想要找到数组中的最大最小值，需遍历数组，效率类型只能是线性效率

6. Enigma(A[0..n-1, 0..n-1])

a. 求的是该矩阵是否是对称矩阵

b. 基本操作：数与数是否相等

$$\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=i+1}^{n-1} 1 = \sum_{i=0}^{n-2}(n-1-i) = \frac{(n-1)\times(n-1+1)\times 1}{2} = \frac{(n-1)n}{2}$$

c. 执行了 $\frac{(n-1)n}{2}$ 次

d. 类型：平方效率类型 $\Theta(n^2)$

e. 无法改进，因为必须比较所有 $i<j$ 的元素对

习题 2.4　P59

1. 解递推关系:

a. $x(n)=x(n-1)+5$
$=x(n-2)+10$
$=x(n-3)+15$
$=\dots=x(n-(n-1))+5(n-1)$
$=x(1)+5(n-1)=5(n-1)$

b. $x(n)=3x(n-1)$
$=3^2x(n-2)$
$=3^3x(n-3)$
$=\dots$
$=3^{n-1}x(n-(n-1))$
$=3^{n-1}x(1)=4\cdot 3^{n-1}$

c. $x(n)=x(n-1)+n$
$=x(n-2)+n+n-1$
$=x(n-3)+n+n-1+n-2$
$=\dots=x(n-n)+n+n-1+n-2+\dots+1$
$=n+n-1+n-2+\dots+1+0$
$=\frac{(n+1)n}{2}$

d. $x(n)=x(n/2)+n$
$=x(n/4)+\frac{n}{2}+n$
$=x(n/8)+\frac{n}{4}+\frac{n}{2}+n$
$\because x(1)=1,\ n=2^k$
$\therefore x(n)=x(\frac{n}{2^k})+n+\frac{n}{2}+\frac{n}{4}+\dots+\frac{n}{2^{k-1}}$
$=2^k+2^{k-1}+2^{k-2}+\dots+2^1+2^0$
$=\frac{1-2^k}{1-2}=2^k-1$

e. $x(n)=x(\frac{n}{3})+1$
$=x(\frac{n}{9})+1+1$
$=x(\frac{n}{27})+1+1+1$
$\because x(1)=1,\ n=3^k$
$\therefore x(n)=x(\frac{n}{3^k})+k$
$=x(1)+k=k$

3. 解: 基本操作: 加法和乘法

设递推式为 $g(n)$

$$g(n)=\begin{cases}0 & n=1\\ g(n-1)+3 & n\neq 1\end{cases}$$

$\therefore g(n)=g(n-1)+3$
$=g(n-2)+6$
$=\dots$
$=g(n-n)+3n=3n$