

问题：双线性插值（教材 P70 页）

题目：有一个 2×2 的原图像，坐标描述为 (x, y) 。请运用双线性插值的公式，详细的给出手工计算过程，给出计算式子，得出目标图像的各像素值。

		x		
		0	1	
y	0	59	60	59 60
	1	61	59	61 59

通过双线性插值，得到 4×4 的目标图像，坐标描述为 (i, j)

		i				
		0	1	2	3	
j	0	A00	A01	A02	A03	A00 A01 A02 A03
	1	A10	A11	A12	A13	A10 A11 A12 A13
	2	A20	A21	A22	A23	A20 A21 A22 A23
	3	A30	A31	A32	A33	A30 A31 A32 A33

解：我们先计算两个方向的权重，然后逐点计算目标图像的像素值。

（1）原图像与目标图像坐标（位置）

对于 4×4 的目标图像，每个目标像素坐标 (i, j) 相对于原图像的位置 (x, y) ，原图与目标图像坐标之间的关系，可以表示为：

$$x = i / 3 \quad (i=0,1,2,3), \quad y = j / 3 \quad (j=0,1,2,3)$$

（2）权重计算如下：

$$x \text{ 方向二个权重值: } u = i / 3, \quad 1 - u = 1 - i / 3$$

$$y \text{ 方向二个权重值: } v = j / 3, \quad 1 - v = 1 - j / 3$$

（3）教材 70 页公式（4-27）

$$f(i+u, j+v) = (1-u)(1-v)f(i, j) + (1-u)vf(i, j+1) + u(1-v)f(i+1, j) + uvf(i+1, j+1)$$

原图像的值：

$$f(0, 0)=A00=59, f(0, 1)=A03=60,$$

$$f(1, 0)=A30=61, f(1, 1)=A33=59,$$

	y=0	1	2	3
x=0	59	A01	A02	60
1	A10	A11	A12	A13
2	A20	A21	A22	A23
3	61	A31	A32	59

	0	1	2	3
0	59			60
1		A11		
2				
3	61			59

(4) 逐点计算

我们将逐个计算目标图像的每个像素值。

计算 **A00**: $i=0, j=0, u=0, v=0$ 。

$$\begin{aligned} A00 &= (1-0)(1-0)*f(0, 0) + (1-0)*0*f(0, 1) \\ &\quad + 0*(1-0)*f(1, 0) + 0*0*f(1, 1) \\ &= (1-0)(1-0)*59 + (1-0)*0*60 + 0*(1-0)*61 + 0*0*59 = 59 \end{aligned}$$

计算 **A01**: $i=0, j=1, u=0, v=1/3$ 。

$$\begin{aligned} A01 &= (1-0)(1-1/3)*f(0, 0) + (1-0)*1/3*f(0, 1) \\ &\quad + 0*(1-1/3)*f(1, 0) + 0*1/3*f(1, 1) \\ &= (1-0)(1-1/3)*59 + (1-0)*1/3*60 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +0*(1-1/3)*61+0*1/3*59=59 \\
& =2/3*59+1/3*60=59.33
\end{aligned}$$

计算 A02: $i=0, j=2, u=0, v=2/3$ 。

$$\begin{aligned}
A02 &= (1-0)(1-2/3)*f(0, 0) + (1-0)*2/3*f(0, 1) \\
& \quad + 0*(1-2/3)*f(1, 0) + 0*2/3*f(1, 1) \\
&= (1-0)(1-2/3)*59 + (1-0)*2/3*60 \\
& \quad + 0*(1-2/3)*61 + 0*2/3*59 = 59 \\
&= 1/3*59 + 2/3*60 = 59.67
\end{aligned}$$

计算 A03: $i=0, j=3, u=0, v=1$ 。

$$\begin{aligned}
A02 &= (1-0)(1-1)*f(0, 0) + (1-0)*1*f(0, 1) \\
& \quad + 0*(1-1)*f(1, 0) + 0*1*f(1, 1) \\
&= (1-0)(1-1)*59 + (1-0)*1*60 \\
& \quad + 0*(1-1)*61 + 0*1*59 = 60
\end{aligned}$$

计算 A10: $i=1, j=0, u=1/3, v=0$ 。

$$\begin{aligned}
A02 &= (1-1/3)(1-0)*f(0, 0) + (1-1/3)*0*f(0, 1) \\
& \quad + 1/3*(1-0)*f(1, 0) + 1/3*0*f(1, 1) \\
&= 2/3*59 + 1/3*61 = 59.67
\end{aligned}$$

计算 A11: $i=1, j=1, u=1/3, v=1/3$ 。

$$\begin{aligned}
A11 &= (1-1/3)(1-1/3)*f(0, 0) + (1-1/3)*1/3*f(0, 1) \\
& \quad + 1/3*(1-1/3)*f(1, 0) + 1/3*1/3*f(1, 1)
\end{aligned}$$

$$=2/3*2/3*59+1/3*2/3*60+2/3*1/3*61+1/3*1/3*59=59.67$$

$$A_{12}=66.44$$

计算 A13: $i=1, j=3, u=1/3, v=3/3=1$ 。

$$A_{32}=(1-1/3)(1-1)*f(0,0)+(1-1/3)*1*f(0,1) \\ +1/3*(1-1)*f(1,0)+1/3*1*f(1,1)$$

$$=2/3*0*59+2/3*1*60+1/3*0*61+1/3*1*59$$

$$=2/3*1*60+1/3*1*59=59.67$$

$$A_{13}=59.67$$

$$A_{20}=60.33$$

$$A_{21}=66.67$$

计算 A22: $i=2, j=2, u=2/3, v=2/3$ 。



A22=?

$$A_{23}=59.33$$

$$A_{30}=61$$

$$A_{31}=60.33$$

计算 A32: $i=3, j=2, u=3/3=1, v=2/3$ 。

$$A_{32}=(1-1)(1-2/3)*f(0,0)+(1-1)*2/3*f(0,1) \\ +1*(1-2/3)*f(1,0)+1*2/3*f(1,1)$$

$$=0*1/3*59+0*2/3*60+1*1/3*61+1*2/3*59$$

$$=1*1/3*61+1*1/3*59=59.67$$

$$A_{32}=59.67$$

$$A_{33}=59$$

目标图像的各像素值

	0	1	2	3
0	59			60
1				
2				
3	61			59