广东工业大学考试试卷（ A ）

2021 -- 2022 学年度第 2 学期

课程名称： 高等数学（2）（期中考试） **学分**______ **试卷满分**____**分**

考试形式： 闭卷 （开卷或闭卷）

注：二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ 积分区域是 D，三重积分 $\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dxdydz$ 积分区域是 Ω

$$\begin{cases} \text{平面上曲线积分积分区域是L}, \int_L f(x,y)ds(\text{对弧长}), \int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy(\text{对坐标}) \\ \text{空间上曲线积分积分区域是}\Gamma, \int_\Gamma f(x,y,z)ds(\text{对弧长}), \int_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz(\text{对坐标}) \end{cases}$$

曲面积分积分区域是 Σ，$\iint\limits_\Sigma f(x,y,z)dS$（对面积），

$\iint\limits_\Sigma P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$（对坐标面）

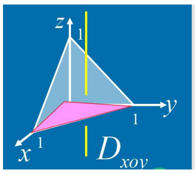
一、填空题（共 5 小题，每题 4 分，共 20 分）

1.设 D：$0 \le y \le \sqrt{1-x^2}$，则 $\iint\limits_D xdxdy=$________.0

解析：积分区域是上半单位圆，关于 y 轴对称。并且被积函数 $f(x,y)=x$，关于 x 是奇函数

2. 设 Ω 为平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标面所围成的空间区域，则 $\iiint\limits_\Omega dV=$__________

解析：可以直接求四面体的体积或利用三重积分 $\iiint\limits_\Omega dV=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}dz=\frac{1}{6}$



3. 已知曲面 Σ 的方程为 $x^2+y^2+z^2=a^2$，则 $\oiint\limits_\Sigma (x^2+y^2+z^2)dS=$________ $4\pi a^4$；

解析：利用被积函数的特点，直接代入为 $\oiint\limits_\Sigma a^2dS=a^2\oiint\limits_\Sigma dS=a^2\cdot 4\pi a^2$（球面积）

4. 将二次积分 $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x,y)dy$ 换成极坐标______________________

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\cos\theta} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$

5.Σ 是平面 $x+y+z=1$ 的上侧，把对坐标的曲面积分 $\iint\limits_\Sigma Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$

化为对面积的曲面积分________________

解析：Σ 的法向量：$\{1,1,1\}$，单位化 $(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

为 $\frac{1}{\sqrt{3}}\iint\limits_\Sigma (P+Q+R)dS$

二、单项选择题（共 6 小题，每题 3 分，共 18 分）

1. 设空间曲线 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2=a^2\\ z=1\end{cases}$，则曲线积分 $\int_\Gamma (x^2+y^2+z^2)ds=$（　　）. **B**

A. $2\pi a^3$　　B. $2\pi a(a^2+1)$　　C. $\pi a^2(a^2+1)$　　D. πa^4

解析：这是曲线积分，可以利用被积函数的特点，直接代入为，化简为 $\int\limits_\Gamma (a^2+1)ds$

2．为使曲线积分 $\int_L F(x,\ y)(ydx+xdy)$ 与积分路径无关，可微函数 $F(x,\ y)$

应满足怎样的条件？　　（　　）　B

A. $xF_y(x,\ y)=yF_x(x,\ y)$　　B. $yF_y(x,\ y)=xF_x(x,\ y)$

C. $F_y(x,\ y)=F_x(x,\ y)$　　D. $x=y$

3.设 $I=\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{1-y}}3x^2y^2dx$，则交换积分次序后 I 等于　　（　　）. C

A. $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x}}3x^2y^2dy$；　　B. $\int_0^{\sqrt{1-y}}dx\int_0^1 3x^2y^2dy$；

C. $\int_0^1 dx\int_0^{1-x^2}3x^2y^2dy$；　　D. $\int_0^1 dx\int_0^{1+x^2}3x^2y^2dy$

4. 设 $I_1=\iint\limits_D \cos\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy, I_2=\iint\limits_D \cos(x^2+y^2)dxdy, I_3=\iint\limits_D \cos(x^2+y^2)^2dxdy$,其中

$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$,则　　（　　）

A. $I_3>I_2>I_1$　　*B.* $I_1>I_2>I_3$　　*C.* $I_2>I_1>I_3$　　*D.* $I_3>I_1>I_2$

解析：选A。在D: $x^2+y^2\le 1$上,$1\ge\sqrt{x^2+y^2}\ge x^2+y^2\ge(x^2+y^2)^2\ge 0$，

从而 $\cos(x^2+y^2)^2\ge\cos(x^2+y^2)\ge\cos\sqrt{x^2+y^2}$

5、$I=\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2+z^2)dV$, 其中 $\Omega: x^2+y^2+z^2\le 1$, 则 $I=$（　　）D

A、$\iiint\limits_\Omega 1dV=\Omega$的体积　　B、$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 r^4\sin\theta dr$

C、$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1 r^4\sin\theta dr$　　D、$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1 r^4\sin\varphi dr$

解析：选 A 错误原因，只有曲线曲面积分才能利用积分方程特点化简被积函数，二重积分三重积分不可以。

6、设曲面Σ的方程为 $x^2+y^2+z^2=a^2\ (z\ge 0)$，$\Sigma_1$ 为Σ在第一卦限中的部分，则下列选项中正确的是（　　）

C

A. $\iint\limits_\Sigma xdS=4\iint\limits_{\Sigma_1}xdS$　B. $\iint\limits_\Sigma ydS=4\iint\limits_{\Sigma_1}ydS$　C. $\iint\limits_\Sigma zdS=4\iint\limits_{\Sigma_1}xdS$　D. $\iint\limits_\Sigma xyzdS=4\iint\limits_{\Sigma_1}xyzdS$

解析：A、B、D 错误原因类似，

如 A：$\iint\limits_{\Sigma} xdS$利用奇偶对称为0，$\iint\limits_{\Sigma_1} xdS$只是上半球面的$\frac{1}{4}$，位于第一卦限，不等于0

答案为 C，利用奇偶对称，上半球面关于 yoz（看 x 奇偶性），xoz（看 y 奇偶性）都对称，f(x, y, z)=z，关于 x,y 都为偶，$\iint\limits_{\Sigma} zdS = 4\iint\limits_{\Sigma_1} zdS = 4\iint\limits_{\Sigma_1} xdS$(再利用坐标轮换)

三、计算下列各题（共 35 分）

1、（7 分） 设 $z = f(xy, x^2 + y^2)$，其中 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

解： $\frac{\partial z}{\partial x} = yf_1' + 2xf_2'$ **---------------------------------3 分**

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(yf_1' + 2xf_2')$$

$$= f_1' + y\frac{\partial f_1'}{\partial y} + 2x\frac{\partial f_2'}{\partial y}$$

$$= f_1' + y(xf_{11}'' + 2yf_{12}'') + 2x(xf_{21}'' + 2yf_{22}'')$$

$$= f_1' + xyf_{11}'' + 2(x^2 + y^2)f_{12}'' + 4xyf_{22}''$$ ··················7 分

2、计算曲线积分 $\int\limits_L (x+y)ds$，其中 L 为连接 $O(0,0)$, $A(2,0)$, $B(0,2)$ 为顶点的三角形.

解：$\int\limits_L (x+y)ds = \int\limits_{OA}(x+y)ds + \int\limits_{OB}(x+y)ds + \int\limits_{AB}(x+y)ds$

$=\int_0^2 \mathrm{xdx} + \int_0^2 \mathrm{ydy} + \int_{\overline{AB}} 2ds$ （利用被积函数特点，x+y=2 代入）

$= 4 + 4\sqrt{2}$

评分标准：OA、OB 直线上各 2 分，AB 占 3 分

3、计算二重积分 $\iint\limits_D \frac{\sin y}{y} dxdy$，其中 D 是由直线 $y = x$ 及 $x = 0, y = \pi$ 所围成的平面区域。

解：由被积函数可知先对 y 不行，先对 x 积。

$D: 0 \le y \le \pi, 0 \le x \le y$

$$\iint\limits_D \frac{\sin y}{y} dxdy = \int_0^\pi dy \int_0^y \frac{\sin y}{y} dx$$ ··4 分

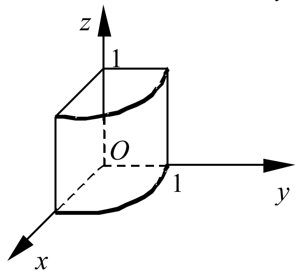
$$=\int_0^{\pi}\frac{\sin y}{y}\cdot ydy$$

$$=\int_0^{\pi}\sin ydy$$

$$=[-\cos y]_0^{\pi}$$

$$=2$$ ……………………………………7 分

4、计算 $\iiint\limits_{\Omega} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=1,x=0,y=0$ 所围成且在第一卦限内的区域.



解：如图，选取柱面坐标系计算方便,

此时，$\Omega:\begin{cases}0\le z\le 1,\\ 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2},\\ 0\le\rho\le 1,\end{cases}$

所以 $\iiint\limits_{\Omega} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\cos\theta\cdot\rho\sin\theta\cdot\rho\mathrm{d}\rho$ ……………（ 4 分）

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\sin 2\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^3\mathrm{d}\rho$$

$$=(-\frac{\cos 2\theta}{4})\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^1=\frac{1}{8}.$$ ……………………………（7 分）

5. 验证 $e^y dx+(xe^y-2y)dy$ 为某个二元函数 $u(x,y)$ 的全微分，并求出这样一个 $u(x,y)$ 。

解：在整个xoy面内，函数P=e^y, Q=xe^y-2y具有一阶连续偏导数，且$\dfrac{\partial P}{\partial y}=e^y=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ ··3 分

因此为某个二元函数全微分。

$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}e^y dx+(xe^y-2y)dy=\int_{(0,0)}^{(x,0)}e^y dx+(xe^y-2y)dy+\int_{(x0)}^{(x,y)}e^y dx+(xe^y-2y)dy$ ··5 分

$=\int_0^x dx+\int_0^y(xe^y-2y)dy=x+[xe^y-y^2]_0^y=x+(xe^y-y^2)-x=xe^y-y^2$ ···7分

方法不唯一

或$du=e^y dx+(xe^y-2y)dy=\dfrac{\partial u}{\partial x}dx+\dfrac{\partial u}{\partial y}dy$

$u=\int\dfrac{\partial u}{\partial x}dx=\int e^y dx=xe^y+g(y)$

$\dfrac{\partial u}{\partial y}=xe^y+g'(y)=xe^y-2y,$ 得$g(y)=y^2+C, u=xe^y-y^2+C$

四、（8 分）计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dS$，其中$\Sigma$是锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}\quad(0\le z\le 1)$。

解：Σ在xoy面上的投影区域$D_{xy}: x^2+y^2\le 1$

$$z_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, z_x=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\sqrt{2}dxdy,$$

于是 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dS=\sqrt{2}\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy$ ……………………………………5 分

$$=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho^3d\rho$$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi$ ……………………………………8 分

五.（**9 分**）计算曲线积分$I=\int_L(x-2y+e^x\sin y)dx+(e^x\cos y-2)dy$，其中$L$为上半圆周$(x-1)^2+y^2=1$，$y\ge 0$沿逆时针方向.

解： $P(x,y)=x-2y+e^x\sin y, Q(x,y)=e^x\cos y-2$，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=2$，………………2 分

记$A(2,0)$，补有向线段$\overrightarrow{OA}$成有向闭合曲线，由格林公式

$\oint_{L\cup\overline{OA}}(x-2y+e^x\sin y)dx+(e^x\cos y-2)dy=\iint_D(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y})dxdy$ ……………5 分

$=\iint_D 2dxdy=\pi$ ……………6 分

$\int_{\overline{OA}}(x-2y+e^x\sin y)dx+(e^x\cos y-2)dy=\int_0^2 xdx=2$ …………………8 分

$I=\int_L(x-2y+e^x\sin y)dx+(e^x\cos y-2)dy=\pi-2$ …………………9 分

未补扣 4 分

六、（10 分）计算曲面积分$\iint_{\Sigma}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$，其中$\sum$为曲面 z=$x^2+y^2$（$0\le z\le 1$）的外侧.

解：补面$\Sigma_1: z=1\quad(x^2+y^2\le 1)$，取上侧， ……………………………1 分

$\Sigma+\Sigma_1$所围成的空间区域为Ω，则

原式 $=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy-\iint_{\Sigma_1} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$

由高斯公式，得

$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy=\iiint_{\Omega} 2(x+y+z)dxdydz$，…………5 分（由对称性）

$=2\iiint_{\Omega} zdxdydz$ （利用截面法）

$=2\int_0^1 zdz\iint_{D_{xy}} dxdy=2\int_0^1 \pi z^2dz=\dfrac{2\pi}{3}$

或 $2\iiint_{\Omega} zdxdydz=2\iint_{D_{xy}} dxdy\int_{x^2+y^2}^1 zdz=2\iint_{D_{\rho\theta}} \rho d\rho d\theta\int_{\rho^2}^1 zdz=2\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 \rho d\rho\int_{\rho^2}^1 zdz$

$=4\pi\int_0^1 \dfrac{1}{2}\rho(1-\rho^4)d\rho=\pi[\dfrac{\rho}{2}-\dfrac{\rho^6}{6}]_0^1=\dfrac{2\pi}{3}$

…………………7 分

而 $\iint_{\Sigma_1} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy=\iint_{x^2+y^2\le 1} dxdy=\pi$ …………………9 分

故 $I=\dfrac{2\pi}{3}-\pi=-\dfrac{\pi}{3}$ ……………………10 分

附加题（20 分）：

一、(10 分) 已知曲线 L 是平面上任意一条无重点的简单闭曲线，取逆时针方向，问常数 a 等于何值时曲线积分 $\oint_L \dfrac{xdx-aydy}{x^2+y^2}=0$，并说明理由。

解：$P=\dfrac{x}{x^2+y^2}$，$Q=\dfrac{-ay}{x^2+y^2}$，$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{2axy}{(x^2+y^2)^2}$ …2 分

（1）当曲线 L 不包含原点 $(0,0)$ 时，$\dfrac{\partial P}{\partial y}$，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 连续。当 $a=-1$ 时，

$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，于是 $\oint_L \dfrac{xdx+ydy}{x^2+y^2}=0$。 ………………………………5 分

（2）当曲线 L 包含原点 $(0,0)$ 时，作以 $(0,0)$ 为圆心，充分小的 ε 为半径的圆 $l: x=\varepsilon\cos\theta$，$y=\varepsilon\sin\theta$，使 l 全部落在 L 内，取顺时针方向，设 L 与 l 所围成的闭区域为 D_1，在 D_1 内，当 $a=-1$ 时，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，

由格林公式，$\oint_{L+l} \dfrac{xdx+ydy}{x^2+y^2}=\iint_{D_1}(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y})dxdy=0$ ……………………………7 分

$$\oint_L \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2} = \oint_{l^-} \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon\cos\theta(-\varepsilon\sin\theta)+\varepsilon\sin\theta(\varepsilon\cos\theta)}{\varepsilon^2} = 0$$

所以当 $a=-1$ 时，无论曲线 L 是否过原点，曲线积分 $\oint_L \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2} = 0$。……10 分

二、（10 分） 变力 $\vec{F} = yz\vec{i} + zx\vec{j} + xy\vec{k}$ 的作用下，质点由原点沿直线 L 运动到椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 上第一卦限的点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处，力 $\vec{F}$ 所做的功 W 可以表示为 $W=\int_L yzdx+zxdy+xydz$，计算 W 并求 (x_0,y_0,z_0) 取何值时 W 最大？ **（提示：求出原点到 M 点这一段直线 L 参数式方程）**

解：直线 L $\begin{cases} x = x_0 t \\ y = y_0 t \\ z = z_0 t \end{cases}$，（$0 \le t \le 1$）…………………（3 分）

$W = \int_L yzdx+zxdy+xydz = x_0y_0z_0\int_0^1 3t^2dt = x_0y_0z_0$ …………………（5 分）

目标函数：$f = xyz$，约束方程：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$

令：$F = xyz + \lambda(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1)$ ………………………（8 分）

$$\begin{cases} F_x = yz + \lambda\frac{2x}{a^2} = 0 \\ F_y = xz + \lambda\frac{2y}{b^2} = 0 \\ F_z = xy + \lambda\frac{2z}{c^2} = 0 \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0 \end{cases}$$

解得：$x=\frac{a}{\sqrt{3}}$，$y=\frac{b}{\sqrt{3}}$，$z=\frac{c}{\sqrt{3}}$

则 $(x_0,y_0,z_0)=(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}})$ 时功 W 最大. ……………………（10 分）