试卷编号：______

诚信考试，诚信做人。

学 院：________ 专 业：________ 班 级：________ 学 号：________ 姓 名：________

装 订 线

广东工业大学考试试卷（ A ）

20 21 -- 2022 学年度第 1 学期

课程名称： 概率论与数理统计（56 学时） **学分____试卷满分 100_____分**

考试形式： 闭卷 （开卷或闭卷）

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
评卷得分											
评卷签名											
复核得分											
复核签名											

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1、下列说法错误的是（ B. ）

（A）必然事件与任意事件都是相互独立的

（B）随机变量的分布函数都是连续函数

~~（C）~~ $D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2Cov(X,Y)$

~~（D）~~ 若随机变量 X 与 Y 独立，则 E(XY)=EXEY

2、若 f(x)是连续型随机变量 X 的概率密度函数，则 f(x)一定满足（ C. ）

（A）f(x)一定是连续函数 （B）$F'(x)=f(x)$ （C）$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$ （D）f(x)>0

3、甲乙丙三人独立破译一个密码，破译的概率分别是 $\frac{1}{3}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{2}$，则他们同时破译密码的概率是（B-）

(A) $\frac{13}{18}$ (B) $\frac{1}{36}$ (C) $\frac{35}{36}$ (D) 1

4、设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} x & 0<x\le 1 \\ 2-x & 1<x\le 2 \\ 0 & 其它 \end{cases}$，则 $P(0.2<X<1.2)=$（D.）

$[\frac{1}{2}x^2]_{0.2}^{1}+[2x-\frac{1}{2}x^2]_{1}^{1.2}$

(A) 0.5 (B) 0.6 (C) 0.7 (D) 0.66

$\int_{0.2}^{1}x\,dx+\int_{1}^{1.2}(2-x)\,dx=$

$=0.5-0.02+2.4-0.72-(2-0.5)$

$=0.48+2.4-0.72-1.5$

$=0.9+0.48-0.72=1.38-0.72=0.66$

5、某人射击时，中靶的概率为 $\frac{1}{4}$，如果射击直到中靶为止，则射击刚好第 3 次击中的概率为（ B ）

（A）27/64 （B）9/64 （C）3/64 （D）1/64

答案：1、B， 2、C ，3、B， 4、D， 5、B.

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

$P(X=1)+P(X=0)=4P(X=2)$

1、设随机变量 X 服从泊松分布，且 $P(X\le 1)=4P(X=2)$，则 $P(X=3)$=($\frac{1}{6e}$)

2、设$X_1,X_2,\ldots,X_n$是总体 $N(0,\sigma^2)$的样本，S^2是样本方差，则$(n-1)S^2/\sigma^2$服从(χ^2分布

3、设随机变量 X 服从区间（0，2）上的均匀分布，试用切比雪夫不等式估计

$X-E(X)>\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$

$P(|X-1|>1)\le$（ $\frac{1}{3}$ ） 4

$F(y)=P\{Y\le y\}=P\{2X\le y\}=P\{X\le \frac{y}{2}\}$

$=F(\frac{y}{2})=\int_0^{\frac{y}{2}}e^{-x}dx$

4、设随机变量 X 的概率密度函数 $f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x\ge 0;\\ 0, & \text{else}\end{cases}$,则 $Y=2X$ 的概率密度函数是 $\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}$ ）

$=1-e^{-\frac{y}{2}}$

5、设随机变量 X 服从参数为 2 的泊松分布， $Y\sim B(4,\frac{1}{2})$，且 X，Y 相互独立，则方差 $D(3X-2Y)=$

$D(X)=2$ $D(3X)=9X=18$

（ 22 ） $D(Y)=1$ $D(2Y)=4Y=4$

1、1/(6e) 2、$\chi^2(n-1)$ 3、1/3 4、$f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y/2}, & y>0;\\ 0, & \text{else.}\end{cases}$ 5、20

三、（10 分）已知一批产品中 90%是合格的，检查时，一个合格品被误认为是次品的概率为 0.05，一个次品被误认为是合格品的概率是 0.02，求 $0.9\times0.95+0.1\times0.02$

（1）一个产品经检查后被认为是合格品的概率； $\frac{0.9\times0.95}{0.9\times0.95+0.1\times0.02}$

（2）一个被检查后认为是合格品的产品，实际上是确实是合格品的概率。

解：设 A=“任取一产品，经检验为合格品”，B=“任取一产品，产品是合格品”

（1）$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})=0.9\times0.95+0.1\times0.02=0.857$

（2）$P(B|A)=P(AB)/P(A)=0.9\times0.95/0.857=0.9977$

四、计算题(每小题 5 分，共 15 分)

(1) 设X_1，X_2,...,X_5是独立同分布的随机变量，$X_1\sim N(0,1)$,$Y=a(X_1+X_2+X_3)^2+b(X_4+X_5)^2$，其中 a,b 为常数，求 a,b 的值，且指出 Y 服从的分布。

(2) 设 $X\sim N(0,1), Y\sim N(1,8)$且 X 与 Y 相互独立，求 $E(XY)$以及 $P(X+Y>1)$.

(3) 设随机变量 X 表示为测量到某一目标的距离时发生的误差，测量单位为厘米。如果 X 服从区间(-1,6)上的均匀分布，试求在三次独立的测量中至少有一次误差绝对值超过 2 厘米的概率。

解：

1、*因为*$X_1+X_2+X_3\sim N(0,3)$; $X_4+X_5\sim N(0,2)$

所以$(X_1+X_2+X_3)/\sqrt{3}\sim N(0,1)$; $(X_4+X_5)/\sqrt{2}\sim N(0,1)$

故$((X_1+X_2+X_3)/\sqrt{3})^2+((X_4+X_5)/\sqrt{2})^2\sim\chi^2(2)$以及 a=1/3,b=1/2

2、因为设 $X\sim N(0,1), Y\sim N(1,8)$且 X 与 Y 相互独立，

所以 $X+Y\sim N(1,9), E(XY)=EXEY=0$

从而 $P(X+Y>1)=1/2$

3、设 A=“误差绝对值超过 2 厘米”，Y 表示三次独立测量中误差绝对值超过 2 厘米的次数，

$$Y\sim B(3,P(A))$$

由 $X\sim U(-1,6)$,则

$$P(A)=P(|X|>2)=P(2<X<6)=4/7$$

五、（15 分）设随机变量（X，Y）的概率密度为 $0<y<x<1$

$$f(x, y)=\begin{cases}2, & 0<x<1, 0<y<x, \\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试求 $f_X(x)=\int_0^x f(x,y)dy$

（1）边缘密度函数$f_X(x), f_Y(y)$;并判断 X 与 Y 是否独立？（5 分）

（2）求 E(XY), DX 和 Cov(X,Y)（10 分）

$E(X)=\int_0^1\int_0^x 2x\,dy\,dx$

解：（1）当 $x\in(0,1)$, $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int_0^x 2dy=2x$;

当 $x\notin(0,1)$, $f_X(x)=0$;

同理：$f_Y(y)=\begin{cases}2(1-y), & 0<y<1; \\ 0, & else\end{cases}$

显然，$f_X(x)f_Y(y)\neq f(x,y)$,所以 X 与 Y 不独立。

(2)

$EX=\int_0^1\int_0^x x\times 2dydx=2/3$; $EX^2=\int_0^1\int_0^x x^2\times 2dydx=1/2$;

$$EY=\int_0^1\int_0^x y\times 2dydx=1/3\ ;\ EY^2=\int_0^1\int_0^x y^2\times 2dydx=1/6$$

$$E(XY)=\int_0^1\int_0^x xy\times 2dydx=1/4$$

DX=1/18; DY=1/18;

Cov(X,Y)=E(XY)-EXEY=1/36.

六、（10 分）某药厂研制了一种新药，声称该药品对于医治一种疑难的血液病的治愈率为 0.8。医院检验员任意抽查 100 个服用此药品的病人，问这 100 个人中多于 75 人治愈的概率？（要求利用中心极限定理，且$\Phi(1.25)=0.8944$）

解：

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{第}i\text{人治愈}, \\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\qquad i=1,2,\cdots,100.$$

令 $X=\sum_{i=1}^{100}X_i$. 则 $X\sim B(100,0.8)$,

$$P\{\sum_{i=1}^{100}X_i>75\}=1-P\{X\le 75\}\approx 1-\Phi\left(\frac{75-100\times 0.8}{\sqrt{100\times 0.8\times 0.2}}\right)$$

$$=1-\Phi(-1.25)=\Phi(1.25)=0.8944.$$

七、（10 分）设总体 X 的概率密度为

$$f(x,\theta)=\begin{cases}(1+\theta)x^{\theta}, & 0<x<1; \\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

其中 θ 是未知参数 $\theta > -1$（）,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，求：
（1） θ 的矩估计；（2） θ 的最大似然估计.

解 (1) 由于

$$EX = \int_0^1 x(1+\theta)x^{\theta}dx = \frac{1+\theta}{2+\theta}.$$

解得，$\theta = \dfrac{1-2EX}{EX-1}$

所以参数 θ 的矩估计为

$$\frac{1-2\overline{X}}{\overline{X}-1}.$$

(2) 似然函数为

$$L(\theta) = (1+\theta)^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{\theta}, 0 < x_i < 1, i = 1,2...n,$$

取对数，得

$$\ln(L(\theta)) = n\ln(1+\theta) + \theta\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i), 0 < x_i < 1, i = 1,2...n$$

两边对 θ 求导，得

$$\frac{d\ln(L(\theta))}{d\theta} = \frac{n}{1+\theta} + \sum_{i=1}^{n}\ln(x_i) = 0$$

所以 θ 的最大似然估计为

$$\frac{-n}{\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)} - 1.$$

八、（10 分）设(X,Y)的联合分布律如下

X \ Y	-1	1	2
-1	1/4	a	3/10
2	3/20	3/20	1/20

解:(1) $\frac{1}{4} + a + \frac{3}{10} + \frac{3}{10} + \frac{1}{20} = 0$

(1) 求 a 值以及 Z=XY 的分布律；

$\therefore a = \frac{1}{10}$

(2) 求 U=min{X,Y}的分布律，以及 P(U =− 1|X =− 1)

(2). Z=XY

取值 -2, -1, 1, 2, 4

解：根据联合分布律的满足的性质，a=1/10;

(X,Y)	P	Z=XY	U
(-1.-1)	1/4	1	-1
(-1,1)	1/10	-1	-1
(-1,2)	3/10	-2	-1

(2,-1)	3/20	-2	-1
(2,1)	3/20	2	1
(2,2)	1/20	4	2

Z	-2	-1	1	2	4
P	9/20	1/10	1/4	3/20	1/20

U	-1	1	2
P	4/5	3/20	1/20

$$P(U=-1|X=-1)=\frac{P(U=-1,X=-1)}{P(X=-1)}=\frac{1/4+1/10+3/10}{1/4+1/10+3/10}=1$$