卡点总结

目的：零点存在定理$\boxed{正}$零$\boxed{负}$，而不允许使用极限

一般情形：$x\to+\infty$ 时 $\ln x<\sqrt{x}<x<x^2<x^3<e^x\to+\infty$ $\frac{1}{\sqrt{x}}>\frac{1}{x}>\frac{1}{x^2}>\frac{1}{x^3}>\frac{1}{e^x}\to0$

$x\to+0$ 时 $\ln x>-\frac{1}{\sqrt{x}}>-\frac{1}{x}>-\frac{1}{x^2}>-\frac{1}{x^3}\to-\infty$，$\frac{1}{\sqrt{x}}<\frac{1}{x}<\frac{1}{x^2}<\frac{1}{x^3}\to+\infty$

$x\to-0$ 时 $\ln(-x)>\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{1}{x}>\frac{1}{x^3}\to-\infty$，$\frac{1}{x^2}<\frac{1}{x^4}\to+\infty$

$x\to-\infty$ 时 $-\frac{1}{x}>\frac{1}{x^2}>-\frac{1}{x^3}>\frac{1}{e^x}\to+0$，$\frac{1}{x}<-\frac{1}{x^2}<\frac{1}{x^3}<-\frac{1}{e^x}\to-0$

参数形式：无参，非极限参（取值范围边界达不到0或∞），极限参（取值范围-/=界为0或∞）

原则：

① 粗犷：通过加项使点更接近极限，偏离零点，方便证明；

② 放缩：把复杂项放缩成更不利的常数，便于找点；

③ 简洁：卡的点找清晰一点的，卡的过程找短一点的，节约时间，方便拿分。

思路：

无参 $\xrightarrow[\text{放缩}]{\text{瞪眼}}$ 常值卡点（常考）

参数放缩到边界

非极限参 $\xrightarrow[\text{放缩}]{\text{瞪眼}}$ 常见参数卡点（常考）

分类讨论

极限参 $\xrightarrow[\text{套路}]{}$ 放缩卡点（难，不建议）→ 求个极限（万不得已，难且没时间了）

常值卡点相关：$e^0=1$，$e^1=e\approx2.718$，$e^2\approx7.39$（用 $e\in(2.7,2.8)$ 放缩证明）

$\sqrt{e}\approx1.649\in(\frac{1}{2},\frac{2}{3})$，$\ln1=0$，$\ln e=1$，$\ln2\approx0.693$，

$\ln3\approx1.099$，$\ln5\approx1.609$，$0^n=0$，$1^n=1$

简易放缩：$\sin x\in[-1,1]$，$\cos x\in[-1,1]$，$\forall x\geq0, x^n\geq0$

常见参数卡点相关：e^x 用 $\ln a$ 去指数，$\ln x$ 用 e^a 去对数（因题而定）

a取值范围	a	$-a$	$\frac{1}{a}$	$-\frac{1}{a}$	a^2	e^a	e^{-a}	$\ln\lvert a\rvert$	$-\ln\lvert a\rvert$	$\sqrt{\lvert a\rvert}$
$a\in\overrightarrow{(1,+\infty)}$	$\overrightarrow{(1,+\infty)}$	$\overleftarrow{(-\infty,1)}$	$\overleftarrow{(0,1)}$	$\overrightarrow{(-1,0)}$	$a^2>a$ $\overrightarrow{(1,+\infty)}$	$\overrightarrow{(e,+\infty)}$	$\overleftarrow{(0,\frac{1}{e})}$	$\overrightarrow{(0,+\infty)}$	$\overleftarrow{(-\infty,0)}$	$\sqrt{\lvert a\rvert}<a$ $\overrightarrow{(1,+\infty)}$
$a\in\overleftarrow{(0,1)}$	$\overleftarrow{(0,1)}$	$\overrightarrow{(-1,0)}$	$\overrightarrow{(1,+\infty)}$	$\overleftarrow{(-\infty,-1)}$	$a^2<a$ $\overleftarrow{(0,1)}$	$\overleftarrow{(1,e)}$	$\overrightarrow{(\frac{1}{e},1)}$	$\overleftarrow{(-\infty,0)}$	$\overrightarrow{(0,+\infty)}$	$\sqrt{\lvert a\rvert}>a$ $(0,1)$
[$a\in\overrightarrow{(0,+\infty)}$]	$\overrightarrow{(0,+\infty)}$	$\overleftarrow{(-\infty,0)}$	$\overleftarrow{(0,+\infty)}$	$\overrightarrow{(-\infty,0)}$	$\overrightarrow{(0,+\infty)}$	$\overrightarrow{(1,+\infty)}$	$\overleftarrow{(0,1)}$	$\overrightarrow{(-\infty,+\infty)}$	$\overleftarrow{(-\infty,+\infty)}$	$\overrightarrow{(0,+\infty)}$
$a\in\overrightarrow{(-1,0)}$	$\overrightarrow{(-1,0)}$	$\overleftarrow{(0,1)}$	$\overleftarrow{(-\infty,-1)}$	$\overrightarrow{(1,+\infty)}$	$\overleftarrow{(0,1)}$	$\overrightarrow{(\frac{1}{e},1)}$	$\overleftarrow{(1,e)}$	$\overleftarrow{(-\infty,0)}$	$\overrightarrow{(0,+\infty)}$	$\overleftarrow{(0,1)}$
$a\in\overleftarrow{(-\infty,-1)}$	$\overleftarrow{(-\infty,-1)}$	$\overrightarrow{(1,+\infty)}$	$\overrightarrow{(-1,0)}$	$\overleftarrow{(0,1)}$	$\overrightarrow{(1,+\infty)}$	$\overleftarrow{(0,\frac{1}{e})}$	$\overrightarrow{(e,+\infty)}$	$\overrightarrow{(0,+\infty)}$	$\overleftarrow{(-\infty,0)}$	$\overrightarrow{(1,+\infty)}$
[$a\in\overleftarrow{(-\infty,0)}$]	$\overleftarrow{(-\infty,0)}$	$\overrightarrow{(0,+\infty)}$	$\overrightarrow{(-\infty,0)}$	$\overleftarrow{(0,+\infty)}$	$\overrightarrow{(0,+\infty)}$	$\overleftarrow{(0,1)}$	$\overrightarrow{(1,+\infty)}$	$\overrightarrow{(-\infty,+\infty)}$	$\overleftarrow{(-\infty,+\infty)}$	$\overrightarrow{(0,+\infty)}$

取最值法：$f(x)=g(x)+h(x)$，均单调递增，$f(\max\{g(x)\text{零点},h(x)\text{零点}\}+1)>0$，$f(\min\{g(x)\text{零点},h(x)\text{零点}\}-1)<0$

$f(x)=g(x)+h(x)$，均单调递减，$f(\max\{g(x)\text{零点},h(x)\text{零点}\}+1)<0$，$f(\min\{g(x)\text{零点},h(x)\text{零点}\}-1)>0$

对 $f(x)=g(x)\cdot h(x)$ 及其它定义域/单调性的情形，可灵活转化该法

一步三回头法：看看前两问有无可用的点或放缩方法

分类讨论法：把参数含极限的取值范围拆成含极限的小区间和不含极限的大区间，分开卡点，

如：$a\in(0,1)\to\begin{cases}① a\in[\frac{1}{e},1)，粗犷地卡\\② a\in(0,\frac{1}{e})，用放缩\end{cases}$

常见套路放缩：对 e^x, $\ln x$ 这种不好搞的，取到所需的高幂次即可

I. 泰勒法：在某点 x_0 附近 $f(x)$ 近似为与之相切的幂函数 $g(x)$

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

由此得出放缩后的函数，构建新函数求导列表证明放缩成立

例：$e^x \ge e^a(1-a)+e^a x$ ($x=a$ 取等)

$e^x \,?\, e^a(1-a+\frac{1}{2}a^2)+e^a(1-a)x+\frac{1}{2}e^a x^2$ ($x \,?\, a$，两问号符号相同)

$e^x \ge e^a(1-a+\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{6}a^3)+e^a(1-a+\frac{1}{2}a^2)x+\frac{1}{2}e^a(1-a)x^2+\frac{1}{6}e^a x^3$ ($x=a$ 取等)

$\ln x \le \ln a+\frac{x}{ae}$ ($x=ae$ 取等)

$\ln x \,?\, \ln a-\frac{1}{2}+\frac{2x}{ae}-\frac{x^2}{2a^2e^2}$ ($x \,?\, ae$，两问号符号相同)

$\ln x \le \ln a-\frac{5}{6}+\frac{3x}{ae}-\frac{3x^2}{2a^2e^2}+\frac{x^3}{3a^3e^3}$ ($x=ae$ 取等)

$\sin x \,?\, x$ ($x \,?\, 0$，两问号符号相反)

$\sin x \,?\, x-\frac{x^3}{6}$ ($x \,?\, 0$，两问号符号相同)

$\cos x \ge 1-\frac{x^2}{2}$ ($x=0$ 取等)

$\cos x \le 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$ ($x=0$ 取等)

$\tan x \,?\, x$ ($x \,?\, 0$，两问号符号相同，$x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$)

$\tan x \,?\, x+\frac{x^3}{3}$ ($x \,?\, 0$，两问号符号相同，$x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$)

II. 性质法：想用n次幂就用n次幂！($n>0$) 之后根据需求进一步化简幂函数式

$e^x \ge x+1$ (构造 $g(x)=e^x-x-1$ 证明)

$\Rightarrow e^{nx}\ge(x+1)^n$ ($x\ge-1$) $\Rightarrow e^x\ge(\frac{x}{n}+1)^n$ ($x\ge-n$)

$\ln x\le x-1$ (构造 $g(x)=\ln x-x+1$ 证明)

$\Rightarrow \ln x^n\le x^n-1$ ($x>0$) $\Rightarrow \ln x\le\frac{1}{n}(x^n-1)$ ($x>0$)

若 $n<0$，在0附近范围内符号相反（很难得，但不好证也不常用）；泰勒法解均可类比

III. 拼凑法：平时凑好的不可取等放缩，考场证，不好推，有时比泰勒/性质法更好用

例：$e^x\ge x^2+\frac{1}{2}x+1$ ($x\ge0$ 时成立，$x=0$ 取等)

$\ln x<4\sqrt{x}-\frac{15}{4}$ ($x>0$ 成立)

IV. 转化法：许多放缩仅在一定区间内好用，可以构建函数把定义域转过去

例：$g(x)=f(-x)$，$g(x)=f(\frac{1}{x})$

此法也可在常见参数卡点时把定义域转到习惯处，避免头脑发昏

（如 $f(x)=x-\frac{a}{e^x}$，$a\to-0$，$x\to-\infty$，可转化为 $g(x)=-x+be^x$，$b\to+0$，$x\to+\infty$，明朗多了）