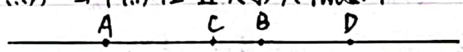
调和点列在圆锥曲线中应用（极点，极线）总结

（不要妄图跳过调和点列学习极点极线）（红笔部分可跳过）

一. 调和点列的由来

给定四个复常数 a, b, c, d，对任一复数（或无穷大）w，定义分式线性函数 $w=f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$，它给出的映射称为分式线性映射。任给定 z 平面上三不同点 z_1, z_2, z_3 及 w 平面上三不同点 w_1, w_2, w_3，存在唯一分式线性变换，将 z_1, z_2, z_3 变为 w_1, w_2, w_3，定义交比 $(u, u_1; u_2, u_3)$，u 为一个平面对应任一点，u_1, u_2, u_3 分别为平面上给定点，交比在该变换中守恒，即 $(z, z_1; z_2, z_3)=(w, w_1; w_2, w_3)$。其中，$(u, u_1; u_2, u_3)=\frac{u-u_2}{u-u_3}:\frac{u_1-u_2}{u_1-u_3}$（若 $u_k=\infty$，令 u_k 的分子或分母变为1，如 $u_2=\infty$，$\frac{1}{u-u_3}:\frac{1}{u_1-u_3}$）。

对解析平面中一直线上四点，A.B.C.D. 记交比 $(AB; CD)=\frac{|OA|-|OC|}{|OA|-|OD|}:\frac{|OB|-|OC|}{|OB|-|OD|}$（O为直线上任一定点），若 $(AB; CD)=\frac{|OA|-|OC|}{|OA|-|OD|}:\frac{|OB|-|OC|}{|OB|-|OD|}=-1$. 则称 A.B.C.D 为调和点列（AB与CD位置可交换），C称为A.B内分点，D称为A.B外分点，四个点位置关系大概如下：



二. 调和点列的比例性质

(1) 由定义知，$|AC||BD|=|AD||BC|$，而且 A.B.C.D 等价。

(2) $\frac{1}{|AC|}+\frac{1}{|AD|}=\frac{2}{|AB|}$。

证明：$\because |CB||AD|=|AC||BD|$，$\therefore |CB|(|AC|+|CB|+|BD|)-|AC||BD|=0$，

$\therefore |AC|^2+|AC||CB|+|AC||BD|+|AC||CB|+|CB|^2+|CB||BD|+|AC|^2+|AC||CB|=2|AC|^2+2|AC||CB|+2|AC||BD|$

$\therefore \frac{1}{|AC|}+\frac{1}{|AC|+|CB|+|BD|}=\frac{2}{|AC|+|CB|}$，得证。

(3) $|AB||CD|=2|AD||BC|$。

证明：$\because |CB||AD|=|AC||BD|$，$\therefore |CB|(|AC|+|CB|+|BD|)=|AC||BD|$，

$\therefore |AC||CB|+|AC||BD|+|CB|^2+|CB||BD|=2|AC||CB|+2|CB|^2+2|CB||BD|$。

$\therefore |AB||CD|=2|AD||BC|$，得证。

(4) 记M为AB中点，有 $|CA||CB|=|CM||CD|$。

证明：$\because |CB||AD|=|AC||BD|$，$\therefore |CB|(|AC|+|CB|+|BD|)=|AC||BD|$，

$\therefore 2|AC||CB|=|AC||CB|+|CB|^2+|AC||BD|-|CB||BD|$。

$\therefore 2|CA||CB|=(|CA|-|CB|)(|CB|+|BD|)$，得证。

三. 调和点列与直线外一点，

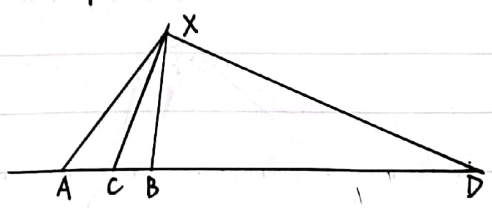
对共线四点，ABCD 及直线外一点 X，以下四个命题中，任意两个能推出另外两个：

(1) A.C.B.D 为调和点列（C为AB内分点，D为AB外分点）；

(2) XC 为 $\angle AXB$ 内角平分线；

(3) XD 为 $\angle AXB$ 外角平分线；

(4) $XC \perp XD$。



证明：(2)、(3)、(4) 任意两个命题显然可以推出第三个命题。

先证明角平分线定理。

过A、B分别作XC垂线，垂足分别为E、F，$\triangle XAE\sim\triangle XBF$，$\triangle CAE\sim\triangle CBF$，可知 $\frac{XA}{XB}=\frac{AC}{BC}$，

过D作 $DG\parallel XA$ 交XB于G，则 $XG=DG$，$\triangle GDB\sim\triangle XAB$，代数运算可知 $\frac{XA}{XB}=\frac{AD}{BD}$，

于是，(1) $\Leftrightarrow \frac{AD}{BD}=\frac{AC}{BC}$，(2) $\Leftrightarrow \frac{XA}{XB}=\frac{AC}{BC}$，(3) $\Leftrightarrow \frac{XA}{XB}=\frac{AD}{BD}$，任意两个命题可以推出第三个命题。

通过反证法得出 (1)(4) $\Rightarrow$ (2)(3)：

作 XC' 平分 $\angle AXB$ 交AB于 C'，XD' 平分 $\angle AXB$ 外角交AB于 D'，

则 $XC'\perp XD'$，$A、C'、B、D'$ 为调和点列。

$\therefore \frac{AD}{BD}=\frac{AC}{BC}$，$\frac{AD'}{BD'}=\frac{AC'}{BC'}$。I. 若 $AC'<AC$，则 $BC'>BC$，$\frac{AD'}{BD'}<\frac{AD}{BD}$，由几何关系，$AD'<AD$，$BD'<BD$，

$\because AB$ 为定值，$\therefore \frac{AD'}{BD'}>\frac{AD}{BD}$，矛盾。II. 若 $AC'>AC$，则 $BC'<BC$，$\frac{AD'}{BD'}>\frac{AD}{BD}$，由几何关系，$AD'>AD$，

$BD'>BD$，$\therefore \frac{AD'}{BD'}<\frac{AD}{BD}$，矛盾。于是 C' 与 C，D' 与 D 重合，得证。

四. 极点极线（本部分暂不予以证明）

1. 代数定义：对圆锥曲线 $Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$，及平面内一点，$P(x_0,y_0)$，

直线 $Ax_0x+By_0y+\frac{1}{2}C(x_0y+y_0x)+\frac{1}{2}D(x+x_0)+\frac{1}{2}E(y+y_0)+F=0$ 为P的极线，P为直线的极点。

2. 几何定义：对圆锥曲线C和点P，

当P在C上时，P点的切线为P的极线，P为其极点；

当P不在C上时，过P作任一交C于A、B两点的直线，都有唯一一点Q使P、Q、A、B组成调和点列，此时Q的轨迹包含于一直线，P为其极点，直线为P的极线。

3. 注：代数定义与几何定义等价；

极点在曲线外时，极线为切点弦；极点在曲线上时，极线为切线。

五. 极点极线有关性质（本部分暂不予以证明）

1. 对一确定二次曲线，平面内任一点有且只有一极线，平面内任一直线有且只有一极点。

2. 配极原则：对一确定二次曲线，P极线过Q $\Leftrightarrow$ Q极线过P；p极点在q上 $\Leftrightarrow$ q极点在p上。

3. 两点连线的极点为两点极线的交点；两线交点的极线为两线极点的连线。

4. 顶点均在一二次曲线上的四边形ABCD，满足AC与BD交点为AB与CD交点及AD与BC交点连线的极点。