

导数常见放缩 (a 为参数) 要先证明再用!

① 对数

$$\ln x \leq \ln a + \frac{x}{ae} \quad (\text{当 } x=ae \text{ 时取等})$$

$$\text{特例: } a=0 \text{ 时, } \ln x \leq \frac{x}{e} \quad (x=e \text{ 时取等})$$

$$a=\frac{1}{e} \text{ 时, } \ln x \leq x-1 \quad (x=1 \text{ 时取等})$$

$$\ln x \leq \ln a - \frac{1}{2} + \frac{2x}{ae} - \frac{x^2}{2a^2e^2} \quad (x \leq ae \text{ 时成立, } x=ae \text{ 时取等})$$

$$\ln x \geq \ln a - \frac{1}{2} + \frac{2x}{ae} - \frac{x^2}{2a^2e^2} \quad (x \geq ae \text{ 时成立, } x=ae \text{ 时取等})$$

$$\ln x \leq \ln a - \frac{5}{6} + \frac{3x}{ae} - \frac{3x^2}{2a^2e^2} + \frac{x^3}{3a^3e^3} \quad (x=ae \text{ 时取等})$$

② 指数

$$e^x \geq e^a(1-a) + e^a x \quad (\text{当 } x=a \text{ 时取等})$$

$$\text{特例: } a=1 \text{ 时, } e^x \geq ex \quad (\text{当 } x=1 \text{ 时取等})$$

$$a=0 \text{ 时, } e^x \geq 1+x \quad (\text{当 } x=0 \text{ 时取等})$$

$$e^x \geq e^a(1-a+\frac{1}{2}a^2) + e^a(1-a)x + \frac{1}{2}e^a x^2 \quad (x \geq a \text{ 时成立, } x=a \text{ 时取等})$$

$$e^x \leq e^a(1-a+\frac{1}{2}a^2) + e^a(1-a)x + \frac{1}{2}e^a x^2 \quad (x \leq a \text{ 时成立, } x=a \text{ 时取等})$$

$$e^x \geq e^a(1-a+\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{6}a^3) + e^a(1-a+\frac{1}{2}a^2)x + \frac{1}{2}e^a(1-a)x^2 + \frac{1}{6}e^a x^3 \quad (x \geq a \text{ 时取等})$$

③ 三角函数 (可通过平移/对称变换拟于下形式)

$$\sin x \leq x \quad (x \geq 0 \text{ 时成立, } x=0 \text{ 时取等})$$

$$\sin x \geq x - \frac{x^3}{6} \quad (x \geq 0 \text{ 时成立, } x=0 \text{ 时取等})$$

$$\sin x \geq x \quad (x \leq 0 \text{ 时成立, } x=0 \text{ 时取等})$$

$$\sin x \leq x - \frac{x^3}{6} \quad (x \leq 0 \text{ 时成立, } x=0 \text{ 时取等})$$

$$|\sin x| \leq 1 \quad (x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \text{ 时取等})$$

$$|\cos x| \leq 1 \quad (x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \text{ 时取等})$$

$$\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2} \quad (x=0 \text{ 时取等})$$

$$\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \quad (x=0 \text{ 时取等})$$

$$\tan x \geq x \quad (x \geq 0 \text{ 时成立, } x=0 \text{ 时取等})$$

$$\tan x \geq x + \frac{x^3}{3} \quad (x \geq 0 \text{ 时成立, } x=0 \text{ 时取等})$$

$$\tan x \leq x \quad (x \leq 0 \text{ 时成立, } x=0 \text{ 时取等})$$

$$\tan x \leq x + \frac{x^3}{3} \quad (x \leq 0 \text{ 时成立, } x=0 \text{ 时取等})$$

