



关于滑动摩擦力 做功的一点想法

◇ 北京 俞 鹏¹ 彭 征²

在人教版高中物理教材《必修2》第7章第2节“功”当中,其实已对2种功的定义都给出了“明确”的说法:“到了19世纪20年代,法国科学家科里奥利扩展了这一基本思想,明确地把作用于物体上的力和受力点沿力方向的位移的乘积叫作‘力的功’”;“……一个物体受到力的作用,并在力的方向上发生了一段位移,这个力就对物体做了功”。

考虑到给普通高中学生不宜过分强调2种功的区别,教材中对这2种功的区别做了模糊处理。但这种处理方式对那些爱刨根问底的学生而言,可能会引起概念上的混乱。

首先,对这2种功的定义及其使用情景做个明确的说明:对于某一段功 $\Delta W = F \cdot \Delta s$, 位移 Δs 是谁的?

情况1 Δs 是作用点的位移,这时对应的功叫作广义功。广义功标志了能量在物体间的转移,即能量转化的量度,但不一定能拿来处理物体的质心动能变化。

情况2 Δs 是物体(质心)的位移,这时对应的功叫作狭义功,又叫质功。狭义功不一定能作为能量转化的量度,但可以用在质心动能定理当中来计算质心动能的变化。

如果受力对象的各个细微部分(小到每一个分子)的运动轨迹都完全一样(绝对的平动),那么作用点的位移自然就是物体质心的位移,此时广义功和狭义功是一样的,因此这种情况下我们写出的功既可以用来计算功能关系,也可以应用到动能定理。比如:用绳将一个重力为 mg 的木块缓慢提高 h , 绳对木块做的功 $W = mgh$ 可以同时表示2种功(广义功和狭义功)。因此,一方面 W 可以表示绳传递给木块的能量,另一方面 W 也可以用在对木块的动能定理当中,即 $W - mgh = 0 - 0$ 。

但是,对于作用点和质心位移不一样的情况,使用这2种功就应当注意区别了。

在举例之前,先对质点组的能量情况做个说明:

对于一个由 N 个质点构成的系统, F_i 表示第 i 个质点受到的所有外力, F_{ij} 表示第 i 个质点对第 j 个质点的内力,则对第 i 个质点列出方程:

$$(F_i + \sum_{j \neq i} F_{ji}) \Delta s_i = m_i a_i \cdot \Delta s_i = \frac{1}{2} m_i \Delta(v_i^2) = \Delta E_{ki},$$

方程两边同时对 i 求和,可得:

$$(\sum_i F_i) \cdot \Delta s_i + \sum_i (\sum_{j \neq i} F_{ji} \cdot \Delta s_i) = \sum_i \Delta E_{ki}. \quad ①$$

式①常被人叫作质点组的动能定理,即系统所有质点的总动能变化量等于外力对每个质点做的功与所有内力做功之和,如果认为每个质点都不具有从式子中涉及的力获得“内部能量”的能力(比如原子能级的跃迁),则这里的功都可以当作广义功,即都可以用来描述能量的转移。事实上,上式左边第1项代表了外界与系统的能量交换,第2项则代表了系统内部势能与动能的转化。

对式①左边第2项再做个说明:如果系统中每个分子的位移都一样(绝对的平动),则由牛顿第三定律可知,此时该项为0,这就回到了前面用绳子提升木块的情况,木块内部并不会有什么能量参与到做功中来;然而如果物体有了形变,则一般来说 $\Delta s_i \neq \Delta s_j$, 于是会导致 $F_{ji} \cdot \Delta s_i + F_{ij} \cdot \Delta s_j \neq 0$, 这种情况对应于物体的内部能量(例如势能、化学能、热力学能等)与动能的转化,特别是当动能转化为热力学能时,一般有 $\sum_{i,j} (F_{ji} \cdot \Delta s_i + F_{ij} \cdot \Delta s_j) < 0$, 这种情况叫作耗散。

对该质点组的能量,还可以有另外一种处理方式:

$$(\sum_i F_i) \cdot \Delta s_c = (\sum_i m_i) a_c \cdot \Delta s_c = \frac{1}{2} m_c (v_c^2 - v_{c0}^2) = \Delta E_{kc}. \quad ②$$

式②叫作质心的动能定理,其实笔者更倾向于将其直接称为动能定理,因为在一些国外的教材当中也直接将质心的牛顿第二定律 $\sum_i F_i = (\sum_i m_i) a_c$ 直接称为牛顿第二定律,毕竟很多时候我们关心的往往就是质心运动。式②中的功自然就是狭义功,该式往往不能够描述所有能量转移,它只能用来计算质心动能的变化,而各质点相对于质心的动能没有被表现出来。



例1 如图1,小木块在长板上运动,它们之间滑动摩擦力大小为 F_f 。假设水平面是光滑的。当小木块

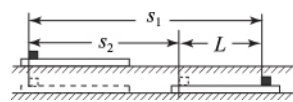


图1

运动了 s_1 时,长板运动了 s_2 , 相对位移为 L 。求长木板对小木块做功 W_1 以及小木块对长木板做功 W_2 。

分析 该问题一般这样处理:将做功考虑成力乘以受力物体的位移,则摩擦力对小木块做功为 $W_1 = -F_f s_1$, 摩擦力对长板做功为 $W_2 = F_f s_2$, 可以看出这里求得的应当是狭义功,因此可以利用 W_1 和 W_2 对木块和木板分别使用动能定理,易得小木块动能减少



了 $F_1 s_1$, 长板动能增加了 $F_1 s_2$, 而一对摩擦力做的总功就是 $W_1 + W_2 = -F_1 L$, 这就是耗散产生的热量。

然而, 对于上面的这种解释, 总是有一些爱钻研的同学会提出这样的问题: 木板对小木块做了 $-F_1 s_1$ 的功, 木板将从木块那里得到 $F_1 s_1$ 的能量, 而木块对木板做了 $F_1 s_2$ 的功, 木块将给木板 $F_1 s_2$ 的能量, 那么事实上木块到底给了木板多少能量呢?

这个问题里涉及滑动摩擦力, 其实滑动摩擦力的成因非常复杂, 我们并不十分清楚, 但可以认为滑动摩擦力应该是接触面上若干个分子之间相互作用的结果, 所以滑动摩擦力 F_f 应该是若干个分子间作用力 F_{fi} 的合力, 即 $F_f = \sum F_{fi}$. 实际上, 我们不可能去研究出每个分子在相互作用时的位移 s_i , 因此我们在计算摩擦力做功时就只有一个选择了: 直接用 $\sum F_{fi}$ 乘以质心的位移 s_c . 因此, 笔者认为: 滑动摩擦力做功为狭义功, 不可以拿来讨论功能关系! 由此可知, 上面的 W_1 和 W_2 都是狭义功, 都不能描述木块给了木板多少能量, 只能描述木块和木板的(质心)动能变化. 至于生热 $Q = F_f s_{\text{相对}} = F_1 L$ 是能量转化的结果, 它在任何参考系里看也不可能是广义功, 因此 $F_f s_{\text{相对}}$ 也不能拿来描述功能关系, 只能用来表示耗散的机械能。

同样, 还是在人教版高中物理教材《必修2》第7章第2节“功”当中, 还说了这样一段话: “当一个物体在几个力的共同作用下发生一段位移时, 这几个力对物体所做的总功, 等于各个力分别对物体所做功的代数和. 可以证明, 它也就是这几个力的合力对物体所做的功。”然而, 应当注意的是, 这段话只是对狭义功才是正确的, 因为在计算狭义功时, 可以有

$$\sum_i (F_i \cdot \Delta s_c) = (\sum_i F_i) \cdot \Delta s_c. \quad (2)$$

若是对于广义功, 系统各质点的位移可能不同, 则合力该乘以谁的位移呢? 就算乘质心, 也是

$$\sum_i (F_i \cdot \Delta s_i) \neq (\sum_i F_i) \cdot \Delta s_c. \quad (2)$$

因此, 教材中的这段话对于广义功是不对的, 所以, 教材这样处理其实有点引导学生们走狭义功和动能定理这条路的意思. 不过这样做也很有道理, 毕竟, 滑动摩擦力做功的问题是回避不了的, 而按前文中的观点, 滑动摩擦力做功都只能是狭义功。

广义功和狭义功这2种功的形式我们都应该关注并且了解, 广义功拿来算功能关系, 狭义功用来解决质心动能, 各有意义, 没有优劣之分, 我们不能完全回避某一种功, 也不能将这2种功混淆使用. 其实, 有很多能量问题如果能从广义功和狭义功2个方面都进行分析, 往往可以理解得更加透彻。



例2 汽车速度较高时, 空气阻力不能忽略. 将汽车简化为横截面积约 1 m^2 的长方体, 并以此模型估算汽车以 $60 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ 行驶时克服空气阻力所增加的功率. 已知空气密度 $\rho = 1.3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

分析 假设汽车的截面积为 A , 当汽车以一定速度运动时, 将推动前方的空气使之获得相应的速度, 则在 Δt 时间内, 车前方以 A 为底、 $v\Delta t$ 为高的柱形空气获得的动能 $\Delta E_k = \Delta mv^2 / 2 = \rho A v \Delta t \times v^2 / 2$.

为使该空气柱在 Δt 时间内获得上述动能, 车需付出的功率 $P = \frac{\Delta E_k}{\Delta t} = \frac{1}{2} \rho A v^3 = 3.009 \text{ W}$.

在上面的解答中, 能量的计算是存在问题的, 因为空气增加的不仅是动能, 还有热力学能。

方法1 换做以车为参考系来看这个问题, 在车系中, 空气以速率 v 迎面刮来, 遇到车就停了, 则在 Δt 时间内, 以 A 为底、 $v\Delta t$ 为高的柱形空气的整体动能全部都转化成热力学能

$$Q = \Delta E_k = \frac{1}{2} \Delta mv^2 = \frac{1}{2} \rho A v \Delta t \times v^2.$$

这部分生热在地面系中看也是一样多的(热力学能一般默认为相对质心系的分子动能、势能之和), 所以在 Δt 时间内, 车需付出的功率

$$P = \frac{\Delta E_k + Q}{\Delta t} = \rho A v^3 = 6.018 \text{ W}.$$

方法2 该题也可以先利用动量定理先求出车和空气之间的相互作用力大小. 在 Δt 时间内, 车前方以 A 为底、 $v\Delta t$ 为高的柱形空气增加的动量等于车对空气的冲量, 即 $F\Delta t = \rho A v \Delta t \times v$. 车克服空气阻力所做的广义功对应的能量应该全部来自于汽车动力系统, 于是有 $P = Fv = \rho A v^3 = 6.018 \text{ W}$.

方法3 该题也可以对车前方以 A 为底、 $v\Delta t$ 为高的柱形空气使用质心动能定理, 需要注意的是, 这时 F 做功应当用狭义功, 即乘以这团气体的质心位移, 容易看出, 当这部分柱形空气经过 Δt 时间被全部堆积到一起时, 气体质心位移 $\Delta s_c = v\Delta t / 2$.

于是, 对气体的质心动能定理

$$F\Delta s_c = Fv\Delta t / 2 = \rho A v \Delta t \times v^2 / 2.$$

也可以得到 $F = \rho A v^2$, 再进一步用广义功求得功率, 与前面2种解法结果一致。

总结: 广义功和狭义功的区别对于理解功能关系和动能定理至关重要. 对于滑动摩擦力做功, 笔者将其归为狭义功的理解方式可以有效地解决很多问题, 此法可以供大家参考。

(作者单位: 1. 北京二中
2. 人民教育出版社)