随机变量整理：（期中前部分）

一. 随机变量基本概念及离散型随机变量数字特征

1. 表示方法：大写拉丁字母（如X）或小写希腊字母（如ξ）。
2. 类型：离散型、连续型。
3. 离散型随机变量分布列（概率分布）：对$\forall k$的$P(X=x_k)=p_k$。其中检查：$p_k\geq 0$ 且 $\sum p_k=1$。
4. 均值（数学期望）：$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$，刻画$X$平均取值。
5. 方差：$D(X)=\sum_{i=1}^{n}[x_i-E(X)]^2 p_i = E(X^2)-E(X)^2$，刻画$X$离散程度。标准差$\sqrt{D(X)}$。

二. 随机变量间的关系

1. 对$Y=f(X)$，对确定X有唯一确定Y，且二者对应概率相同。
2. 对$Y=aX+b$，

   (1) $E(Y)=aE(X)+b$；

   (2) $D(Y)=a^2 D(X)$，即$\sqrt{D(Y)}=a\sqrt{D(X)}$。

三. 随机变量大题答题格式（例）

ξ的所有可能取值为0，1，2。

$P(\xi=0)=C_2^0(1-p)^2=\frac{9}{16}$

$P(\xi=1)=C_2^1 p(1-p)=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$

$P(\xi=2)=C_2^2 p^2=\frac{1}{16}$，

$\therefore$ ξ的分布列为：

ξ	0	1	2
P	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{16}$

$$E(\xi)=0\times\frac{9}{16}+1\times\frac{6}{16}+2\times\frac{1}{16}$$
$$=\frac{6+2}{16}$$
$$=\frac{1}{2}.$$

四. 常见的概率分布（正态分布N在下半学期）

名称	情境	表示	$P(X=k)$	$E(X)$	$D(X)$
伯努利（两点）分布	一次独立试验，期望事件概率p	无	p	p	$p(1-p)$
二项分布	n次独立试验，期望事件概率p	$X\sim B(n,p)$	$C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
超几何分布（不建议记）	总数N件物品，期望的M件，不放回抽n件	$X\sim H(N,n,M)$	$\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$	$\frac{nM}{N}$	$\frac{nM}{N}(1-\frac{M}{N})\frac{N-n}{N-1}$

$$H(N,n,M)\xrightarrow[p=\frac{M}{N}]{M\gg n}B(n,p)\xrightarrow[\sigma^2=np(1-p)]{\mu=np,\ n\text{很大}}N(\mu,\sigma^2)$$

超几何分布　　　二项分布　　　正态分布

$\uparrow$ 多次重复

两点分布

条件概率有关公式（人教选必2原文）

定义 $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(AB)}{P(B)}$

$0\le P(A|B)\le 1$

$P(A|A)=1$

$B\cap C=\varnothing$ 时 $P((B\cup C)|A)=P(B|A)+P(C|A)$

$P(A|B)+P(\overline{A}|B)=1$

乘法公式 $P(BA)=P(A)P(B|A)$

$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)$

全概率公式 $P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})$

定理1：$A_1, A_2, \cdots, A_n\subseteq\Omega$ 满足

1. $A_iA_j=\varnothing$ $(i\ne j,\ i,j=1,2,\cdots,n)$
2. $A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega$
3. $P(A_i)>0$，$i=1,2,\cdots,n$，

有 $P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(BA_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$

贝叶斯公式 $P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})}$

定理2：$A_1, A_2, \cdots, A_n\in\Omega$ 满足

1. $A_iA_j=\varnothing$ $(i\ne j,\ i,j=1,2,\cdots,n)$
2. $A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega$
3. $1>P(A_i)>0$，$i=1,2,\cdots,n$

对 $B\in\Omega$ 且 $P(B)>0$，有

$P(A_j|B)=\frac{P(A_j)P(B|A_j)}{P(B)}=\frac{P(A_j)P(B|A_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)}$

计数 知识提纲

1. 分类加法计数原理 $N=m_1+m_2+\cdots+m_n$
   分步乘法计数原理 $N=m_1\cdot m_2\cdot\cdots\cdot m_n$ （基本计数原理）

2. 排列数 $A_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}=n(n-1)\cdots(n-m+1)$ （排列数公式）

   全排列数 $A_n^n=n!$

   特殊规定 $A_n^0=0!=1$

   性质 $A_n^m+mA_n^{m-1}=A_{n+1}^m$

3. 组合数 $C_n^m=\dfrac{A_n^m}{A_m^m}=\dfrac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m\cdot(m-1)\cdots\cdot2\cdot1}=\dfrac{n!}{(n-m)!\,m!}$ （组合数公式）

   特殊组合数 $C_n^0=1$，$C_n^1=n$，$C_n^n=1$.

   性质 $C_n^m=C_n^{n-m}$ $C_n^{m+1}+C_n^m=C_{n+1}^{m+1}$

4. 计数方法：

   综合使用基本计数原理

   转化为等价排列组合问题

   将基本计数原理与排列组合有机结合

   排除法 捆绑法 插空法 隔板法

5. 二项式定理 $(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\cdots+C_n^ka^{n-k}b^k+\cdots+C_n^nb^n$

   二项展开式第k+1项 $T_{k+1}=C_n^ka^{n-k}b^k$ （二项展开式通项公式）

   二项式系数性质 $C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^k+\cdots+C_n^n=2^n$

   $C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots=C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots$

   $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^n$ 先变大后变小 $\begin{cases}n\text{为偶数，中间项二项式系数最大}\\ n\text{为奇数，中间两项二项式系数相等且最大}\end{cases}$