第11课:

第14章 多变量函数的微分学

- **内容：**

第14.3节 向量值函数的微分(复习)

第14.4节 复合函数的微分/求导

第14.6-14.7 节 隐函数定理

第11-1课：向量值函数的微分

Review：函数/映射的微分

- **函数微分**：令 $f: D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n,\ \boldsymbol{a} \in D^o$

在$\boldsymbol{a}$点可微, 如果 $f(\boldsymbol{a}+\Delta\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) = \langle \operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}), \Delta\boldsymbol{x} \rangle + o(\|\Delta\boldsymbol{x}\|)$

- 1) 在a点可微则在该点连续
- 2) 在a点可微则该点n个偏导数都存在: $D_1 f(\boldsymbol{a}), \cdots, D_n f(\boldsymbol{a})$

且方向导数为 $D_{\boldsymbol{u}} f(\boldsymbol{a}) = \langle \operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{u} \rangle,\quad \forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{u}\| = 1$

- **可微性判别**：对于函数 $f: D \to \mathbb{R},\ \boldsymbol{a} \in D^o$

  ? 不可微：在该点连续？偏导数/方向导数存在？ ……

  ? 可微：计算偏导数-验证定义？研究偏导数连续性？

第11-1课：向量值函数的微分

- **函数连续-可导-可微之间的关系**

$$\begin{tikzcd}
\text{偏导数在}\boldsymbol{a}\text{点都连续} \arrow[d] & \text{函数在}\boldsymbol{a}\text{点连续} \\
\text{函数在}\boldsymbol{a}\text{点可微} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
& \text{所有方向导数在}\boldsymbol{a}\text{点都存在}
\end{tikzcd}$$

- **梯度向量的几何意义**

- **方向：函数值增加最快的方向(反向是下降最快的方向)；**
- **大小：函数在该点所有方向导数的最大值。**

第11-1课：向量值函数的微分

✓ **回忆实例**

$$f(x,y)=\begin{cases} x\cos\frac{1}{y}, & y\neq 0 \\ 0, & y=0 \end{cases}$$

$f(x,y)$ 除去x轴外处处连续，在x轴上除原点外处处不连续

考察在原点可微性：已知在原点连续，计算偏导数：

$$D_x f(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x}=0$$

$$D_y f(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y}=0$$

$$\therefore f(x,y)-f(0,0)-D_x f(0,0)x-D_y f(0,0)y$$

$$=x\cos\frac{1}{y}\neq o(\sqrt{x^2+y^2})$$

结论：函数在原点连续，偏导数存在，但函数不可微 □

第11-1课：向量值函数的微分

- **向量值函数的微分**

设 $\boldsymbol{f}: D \to \mathbb{R}^m,\ D \subset \mathbb{R}^n,\ \boldsymbol{a} \in D^o$

称 $\boldsymbol{f}$ 在$\boldsymbol{a}$点可微：如果Jacobi矩阵$J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$存在且满足

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+\Delta\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) = J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\Delta\boldsymbol{x} + o(\|\Delta\boldsymbol{x}\|)$$

其中

$$J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) := \begin{pmatrix} D_1 f_1(\boldsymbol{a}) & \cdots & D_n f_1(\boldsymbol{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 f_m(\boldsymbol{a}) & \cdots & D_n f_m(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f_1(\boldsymbol{a}) \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f_m(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix}$$

这时 $\boldsymbol{f}$ 在$\boldsymbol{a}$点的微分记为 $d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) := J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\Delta\boldsymbol{x}$

- **推论**：若$J\boldsymbol{f}$在$\boldsymbol{a}$点存在且连续, 则 $\boldsymbol{f}$ 在$\boldsymbol{a}$点可微

第11-1课：向量值函数的微分

✓ 例1.

研究 $\boldsymbol{f}(r,\theta,z)=\begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ z \end{pmatrix}$，$r\geq 0,\ 0\leq\theta<2\pi,\ -\infty<z<+\infty$

解：为研究函数的可微性，计算雅可比矩阵如下：

$$\boldsymbol{Jf}(r,\theta,z)=\begin{pmatrix} D_r f_1 & D_\theta f_1 & D_z f_1 \\ D_r f_2 & D_\theta f_2 & D_z f_2 \\ D_r f_3 & D_\theta f_3 & D_z f_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

注意该雅可比矩阵处处连续，因此这个函数处处可微

并且 $$\begin{pmatrix} df_1 \\ df_2 \\ df_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta r \\ \Delta\theta \\ \Delta z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta\Delta r-r\sin\theta\Delta\theta \\ \sin\theta\Delta r+r\cos\theta\Delta\theta \\ \Delta z \end{pmatrix} \qquad \square$$

第11-1课：向量值函数的微分

✓ 例2.

研究 $\boldsymbol{f}(x,y,z)=\begin{pmatrix} z\sqrt{x^2+y^2} \\ \ln|x+y+z| \end{pmatrix},\quad x+y+z\neq 0$

解：计算雅可比矩阵：

$$\boldsymbol{Jf}=\begin{pmatrix} D_x f_1 & D_y f_1 & D_z f_1 \\ D_x f_2 & D_y f_2 & D_z f_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}} & \dfrac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}} & \sqrt{x^2+y^2} \\ \dfrac{1}{x+y+z} & \dfrac{1}{x+y+z} & \dfrac{1}{x+y+z} \end{pmatrix}$$

该雅可比矩阵除去z轴和平面$x+y+z=0$之外处处连续

因此该映射在上述范围内处处可微, 微分可写为：

$$df_1(x,y,z)=\frac{xz\Delta x+yz\Delta y+(x^2+y^2)\Delta z}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$df_2(x,y,z)=\frac{\Delta x+\Delta y+\Delta z}{x+y+z}\qquad\square$$

第11-2课：复合函数的微分/求导

复合函数的微分/求导

- **回忆-复合函数**

  设 $\boldsymbol{f}: D \to \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{g}: \Omega \to \mathbb{R}^k$, $\boldsymbol{f}(D) \subset \Omega \subset \mathbb{R}^m$

复合函数 $\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f}: D \to \mathbb{R}^k$, 定义为 $\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\mathbf{x}))$, $\mathbf{x} \in D$

- **复合函数的微分**

  设 $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$ 如上, $\boldsymbol{a} \in D^o$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) \in \Omega^o$

如果$\boldsymbol{f}$在$\boldsymbol{a}$点可微, $\boldsymbol{g}$在$\boldsymbol{b}$点可微, 则复合函数在$\boldsymbol{a}$点可微, 且

$$d(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{a}) = J\boldsymbol{g}(\boldsymbol{b}) J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) \Delta \mathbf{x} \qquad \text{(矩阵乘积)}$$

也即 $$J(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{a}) = J\boldsymbol{g}(\boldsymbol{b}) J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$$ —— 进一步展开如下：

第11-2课：复合函数的微分/求导

- **复合函数的雅可比矩阵**

记 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}),\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$，将雅可比矩阵重新表示：

$J(\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f})=J\boldsymbol{g}J\boldsymbol{f}$ 也可以表示为 $J\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})=J\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y})J\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$

这样复合函数的雅可比矩阵公式可写成 (易记忆与理解)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial u_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_k}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial u_k}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial u_k}{\partial y_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

- 特例k=n=1： $\frac{du}{dx}=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial u}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x}$ ——— 链式法则求导公式

第11-2课：复合函数的微分/求导

- **链式法则说明**

  以k=n=1为例 (突出重点)：$u = g(\mathbf{y}), \mathbf{y} = \boldsymbol{f}(x)$

注意变量依赖关系：

$$u = g(y_1, \ldots y_m) \quad \begin{array}{c} y_1 = f_1(x) \\ y_2 = f_2(x) \\ \vdots \\ y_m = f_m(x) \end{array} \quad x$$

链式法则=雅可比矩阵公式：

$$\frac{du}{dx} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial y_j} \frac{dy_j}{dx} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_j} \frac{df_j}{dx}$$

[变量名u,y,x] ~ [函数名g,f +变量名y,x]

第11-2课：复合函数的微分/求导

✓ **例3.** 已知 $y=\varphi(x)^{h(x)}$，$\varphi(x)>0$，$\varphi,h\in C^1$，计算 $dy,\dfrac{dy}{dx}$

解：注意 $y=f(u,v)=u^v$，$u=\varphi(x)$，$v=h(x)$

应用链式法则：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{du}{dx}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{dv}{dx}$

其中

$$\frac{\partial f}{\partial u}=vu^{v-1},\quad \frac{\partial f}{\partial v}=u^v\ln u,\quad \frac{du}{dx}=\varphi'(x),\quad \frac{dv}{dx}=h'(x)$$

代入上式得

$$\frac{dy}{dx}=h(x)\varphi(x)^{h(x)-1}\varphi'(x)+\varphi(x)^{h(x)}\ln\varphi(x)h'(x)$$

$$\therefore\ dy=\varphi(x)^{h(x)}\left[\frac{h(x)}{\varphi(x)}\varphi'(x)+\ln\varphi(x)h'(x)\right]\Delta x \qquad \Box$$

第11-2课：复合函数的微分/求导

- 例4. 设 $z=f(xy,\dfrac{x}{y})$, $f(u,v)$是已知2元可微函数, $dz=?$

  解：依照微分定义 $dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\Delta y$,

为计算z的偏导数，需要应用链式法则：记

$$f_1'=\frac{\partial f}{\partial u}(u,v),\ f_2'=\frac{\partial f}{\partial v}(u,v),\quad u=xy,\ v=\frac{x}{y}$$

则
$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\frac{\partial u}{\partial x}+f_2'\frac{\partial v}{\partial x}=yf_1'+\frac{1}{y}f_2'$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f_1'\frac{\partial u}{\partial y}+f_2'\frac{\partial v}{\partial y}=xf_1'-\frac{x}{y^2}f_2'$$

所以
$$dz=(yf_1'+\frac{1}{y}f_2')\Delta x+(xf_1'-\frac{x}{y^2}f_2')\Delta y \qquad \square$$

第11-2课：复合函数的微分/求导

✓ **例4.** 设 $z=f(xy,\dfrac{x}{y})$，$f(u,v)$是已知2元可微函数，$dz=?$

解法二：记 $z=f(u,v)$，$\boldsymbol{g}: u=xy,\ v=\dfrac{x}{y}$

计算Jacobi矩阵 $J(f\circ\boldsymbol{g})(x,y)=Jf(u,v)J\boldsymbol{g}(x,y)$

这导出 $$dz(x,y)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial u/\partial x & \partial u/\partial y\\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}f_1' & f_2'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y & x\\ \dfrac{1}{y} & -\dfrac{x}{y^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix}$$

$$=(yf_1'+\frac{1}{y}f_2')\Delta x+(xf_1'-\frac{x}{y^2}f_2')\Delta y \qquad \square$$

第11-3课：隐函数定理: 最简单情况

隐函数定理

- **隐函数问题** (以简单情况为例)

  给定一个2元函数 $F(x,y)$

  1) $F(x,y)=0$ 是否可以确定/解出一个隐函数 $y=f(x)$?

也即满足 $F(x, f(x))=0$, $f(x)$的定义域？值域？

  2) 函数 $y=f(x)$ 是否连续？可微？

  3) 微分/导数 $f'(x)$ 的计算方法？

反例： $F(x,y)=x^2+y^2+1$

$F(x,y)=0$ 无解, 对于这样的F, 隐函数不存在！

第11-3课：隐函数定理: 简单情况

- **初步观察：** 设隐函数 $y=f(x)$ 存在且可微

则由 $F(x,f(x))=0$ 得到 $\dfrac{d}{dx}[F(x,f(x))]=0$

关于x求导 (形式计算)，应用链式法则：

$$\frac{d}{dx}[F(x,y)]=\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\frac{dy}{dx}=0,\quad y=f(x)$$

解得 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)\Big/\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y),\ y=f(x),$ 只要 $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)\neq 0$

由此得到启发

a) $F(x,y)=0$ 至少有一对根(x_0,y_0)

b) $F(x,y)$ 应该光滑/可微

c) 要求满足 $\partial F/\partial y\neq 0$

第11-3课：隐函数定理: 简单情况

- **隐函数定理** (最简单情况: 1元隐函数)

  设 $F \in C^1(D)$, $D \subset \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in D^o$ 满足以下条件：

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

则 $\exists \delta, \eta > 0$ 以及函数 $f:(x_0-\delta, x_0+\delta) \to (y_0-\eta, y_0+\eta)$

具有以下性质

- (1) $F(x, f(x)) = 0, \ \forall |x - x_0| < \delta, \ \ f(x_0) = y_0$
- (2) $f \in C^1(x_0-\delta, x_0+\delta)$
- (3) $f'(x) = -\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) \Big/ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y), \ \ y = f(x)$

第11-3课：隐函数定理: 简单情况

- **隐函数定理证明** (利用单调性和连续函数介值性质)

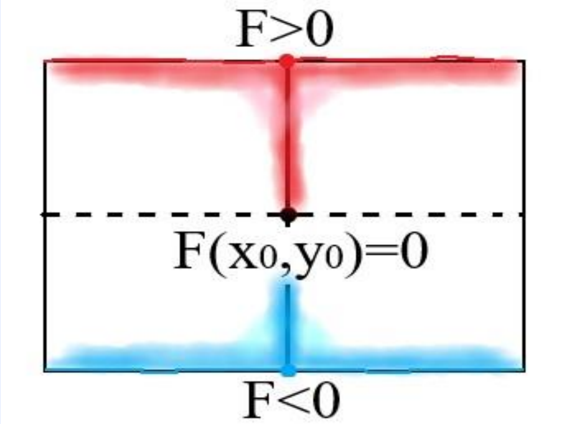
不妨令 $D_yF(x_0,y_0)>0$, 由连续性 $\exists\delta_1,\eta>0$ 使得

$$\forall\,|x-x_0|<\delta_1,\ \ |y-y_0|<\eta,\quad D_yF(x,y)>0,$$

这说明$F(x,y)$关于y严格单调增。结合 $F(x_0,y_0)=0$,

$$\forall y\in[y_0-\eta,y_0),\ F(x_0,y)<0$$

$$\forall y\in(y_0,y_0+\eta],\ F(x_0,y)>0$$



特别有 $F(x_0,y_0-\eta)<0<F(x_0,y_0+\eta)$

再次利用F的连续性得到 $\delta\in(0,\delta_1]$

$$\forall\,|x-x_0|<\delta,\ F(x,y_0-\eta)<0<F(x,y_0+\eta)$$

第11-3课：隐函数定理: 简单情况

- **隐函数定理证明** (续一)

已经得到 $\forall |x-x_0|<\delta,\ F(x,y_0-\eta)<0<F(x,y_0+\eta)$

应用连续函数介值性质, 并注意$F(x,y)$关于y严格单调

对于每个 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$

存在唯一 $y\in(y_0-\eta,y_0+\eta)$, 满足 $F(x,y)=0$

记 $y=f(x)$, 得到函数 $f:(x_0-\delta,x_0+\delta)\to(y_0-\eta,y_0+\eta)$

$$F(x,f(x))=0,\ \forall |x-x_0|<\delta,\quad f(x_0)=y_0$$

注意上面证明过程中, $\eta>0$ 可以任意小, 且

$$|f(x)-f(x_0)|=|f(x)-y_0|<\eta \quad \text{——} f\text{在}x_0\text{点连续}$$

记$y_1=f(x_1)$, 利用$F(x_1,y_1)=0$ 类似上面论证可得f 在x_1点连续

第11-3课：隐函数定理: 简单情况

- **隐函数定理证明** (续二)

为证f的可微性, 取 $\forall x, x+\Delta x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$

记 $y = f(x),\ \Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$

由f的连续性： $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \to 0 \quad (\Delta x \to 0)$

利用F的C^1性质和一元函数中值定理

$$\begin{aligned}
0 &= F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x,y) \qquad [y+\Delta y = f(x+\Delta x)] \\
&= F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x, y+\Delta y) + F(x, y+\Delta y) - F(x,y) \\
&= \left.\begin{aligned} &D_x F(x+\theta_1 \Delta x, y+\Delta y)\Delta x \\ &\qquad + D_y F(x, y+\theta_2 \Delta y)\Delta y, \end{aligned}\right\} \theta_1, \theta_2 \in (0,1)
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{D_x F(x+\theta_1 \Delta x, y+\Delta y)}{D_y F(x, y+\theta_2 \Delta y)} \to -\frac{D_x F(x,y)}{D_y F(x,y)} \qquad \square$$

第11-3课：隐函数定理: 简单情况

✓ **例1.** 研究 $F(x,y)=x-e^y=0$ 确定的隐函数

解：注意$F(1,0)=0$, 令$F(x,y)=0$ 可得隐函数 $y=f(x)$

由 $\dfrac{\partial F}{\partial x}=1,\ \ \dfrac{\partial F}{\partial y}=-e^y\neq 0$ （将x,y作为独立变量计算导数）

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=-\frac{\partial F}{\partial x}\Big/\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{1}{e^y}$$ ——应用隐函数导数公式

或者直接应用链式法则

$$0=\frac{d}{dx}[F(x,y)]=\frac{d}{dx}(x-e^y)=1-e^y\frac{dy}{dx},\quad \therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{e^y}\qquad \Box$$

注：事实上本例中 $y=\ln x,\ \ y'=\dfrac{1}{x},\ \ x=e^y>0$

第11-4课：隐函数定理: 更一般情况

- **隐函数定理** (推广到 n元隐函数)

  设 $F \in C^1(D),\ D \subset \mathbb{R}^{n+1},\ (\boldsymbol{x}_0, y_0) \in D^o$ 满足以下条件：

$$F(\boldsymbol{x}_0, y_0) = 0,\quad \frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{x}_0, y_0) \neq 0$$

则 $\exists \delta, \eta > 0$ 并且有函数 $f: B_\delta(\boldsymbol{x}_0) \to (y_0 - \eta, y_0 + \eta)$

具有以下性质

- (1) $F(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x})) = 0,\ \forall \| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 \| < \delta,\ \ f(\boldsymbol{x}_0) = y_0$
- (2) $f \in C^1(B_\delta(\boldsymbol{x}_0))$
- (3) $D_i f(\boldsymbol{x}) = -\dfrac{\partial F}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}, y) \Big/ \dfrac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{x}, y),\ \ y = f(\boldsymbol{x}),\ i = 1, 2, \cdots, n$

第11-4课：隐函数定理: 更一般情况

✓ 例2. $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$

任取 $P=(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$ 满足 $x_0^2+y_0^2+z_0^2=1$

令$F(x,y,z)=0$, 为得到隐函数 $z=f(x,y)$, 需要 $\dfrac{\partial F}{\partial z}=2z\neq 0$

令 $z_0\neq 0$, 则在上述P点附近得到隐函数 $z=f(x,y)$

且有 $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial x}\bigg/\frac{\partial F}{\partial z}=-\frac{x}{z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial F}{\partial y}\bigg/\frac{\partial F}{\partial z}=-\frac{y}{z}\quad \square$$

注： 若 $z_0>0$, 则 $z=f(x,y)>0$ ——上半球面函数

若 $z_0<0$, 则 $z=f(x,y)<0$ ——下半球面函数

第11-4课：隐函数定理: 更一般情况

- **隐函数定理** (再推广- 向量值隐函数)

  设 $\boldsymbol{F} \in C^1(D,\mathbb{R}^m)$, $D \subset \mathbb{R}^{n+m}$, $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) \in D^o$ 满足以下条件:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) = \boldsymbol{0}, \quad \det[J_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)] \neq 0$$

则 $\exists \delta, \eta > 0$ 以及函数 $\boldsymbol{f} : B_\delta(\boldsymbol{x}_0) \to B_\eta(\boldsymbol{y}_0)$

满足以下性质

- (1) $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{0}, \ \forall \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| < \delta, \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{y}_0$
- (2) $\boldsymbol{f} \in C^1(B_\delta(\boldsymbol{x}_0), \mathbb{R}^m)$
- (3) $J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = -[J_{\boldsymbol{y}}F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})]^{-1} J_{\boldsymbol{x}}F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \ \ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$

上面使用的矩阵记号说明如下——

第11-4课：隐函数定理: 更一般情况

- 隐函数定理中的矩阵记号

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\begin{pmatrix} F_1(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m) \\ \vdots \\ F_m(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m) \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix} f_1(x_1,\cdots,x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1,\cdots,x_n) \end{pmatrix}$$

$$J\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\begin{pmatrix} J_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & J_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \end{pmatrix}$$ —— 雅可比矩阵分块

$$J_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\begin{pmatrix} D_{x_1}F_1 & \dots & D_{x_n}F_1 \\ \vdots & & \vdots \\ D_{x_1}F_m & \dots & D_{x_n}F_m \end{pmatrix},\ J_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\begin{pmatrix} D_{y_1}F_1 & \dots & D_{y_m}F_1 \\ \vdots & & \vdots \\ D_{y_1}F_m & \dots & D_{y_m}F_m \end{pmatrix}$$

注：$J_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$是m阶可逆方阵： $\det[J_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)]\neq 0$

第11-4课：隐函数定理: 更一般情况

- **隐函数定理** (再推广- 向量值隐函数)

  设 $\boldsymbol{F} \in C^1(D,\mathbb{R}^m),\ D \subset \mathbb{R}^{n+m}, (\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) \in D^o$ 满足以下条件：

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) = \boldsymbol{0}, \quad \det[J_y \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)] \neq 0$$

则 $\exists \delta, \eta > 0$ 以及函数 $\boldsymbol{f} : B_\delta(\boldsymbol{x}_0) \to B_\eta(\boldsymbol{y}_0)$

满足以下性质

- (1) $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{0},\ \forall \| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 \| < \delta, \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{y}_0$
- (2) $\boldsymbol{f} \in C^1(B_\delta(\boldsymbol{x}_0), \mathbb{R}^m)$
- (3) $J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = -[J_y F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})]^{-1} J_x F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}),\ \ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$

第11-4课：隐函数定理: 更一般情况

✓ 例3. $F_1(x,y,u,v)=3x^2+y^2+u^2+v^2-2$

$F_2(x,y,u,v)=x^2+2y^2-u^2+v^2$

当 $x_0=y_0=0,\ u_0=v_0=1$, $F_1=F_2=0$，Jacobi矩阵行列式

$$\det[J_{(u,v)}\boldsymbol{F}]=\begin{vmatrix} D_uF_1 & D_vF_1 \\ D_uF_2 & D_vF_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2u & 2v \\ -2u & 2v \end{vmatrix}=8uv\neq 0$$

令$F_1=F_2=0$, 得到该点附近的隐函数$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, 且

$$[J_{(u,v)}\boldsymbol{F}]^{-1}=\frac{1}{4uv}\begin{pmatrix} v & -v \\ u & u \end{pmatrix},\quad J_{(x,y)}\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix} D_xF_1 & D_yF_1 \\ D_xF_2 & D_yF_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6x & 2y \\ 2x & 4y \end{pmatrix}$$

所以

$$\begin{pmatrix} D_xu & D_yu \\ D_xv & D_yv \end{pmatrix}=-\frac{1}{2uv}\begin{pmatrix} v & -v \\ u & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3x & y \\ x & 2y \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} \dfrac{x}{u} & -\dfrac{y}{2u} \\ \dfrac{2x}{v} & \dfrac{3y}{2v} \end{pmatrix}\quad\square$$

第11课:

- **作业：**

  练习题14.4：1-4[自己练习], 5-9, 10*.

  练习题14.6：1(2,4), 2(2-4), 3*, 4-5, 6*.

  练习题14.7：1-2[自己练习], 3-5, 6*.

- **预习**（下次课内容）：

  第14.7-14.8节 隐函数定理和反函数定理

  第14.9节 高阶偏导数