第13课：

第14章　多变量函数的微分学

- **内容：**

  第14.10节 Taylor公式（多元函数的多项式逼近）

  第14.11节 极值问题（Taylor公式应用）

第13-1课：多元函数的多项式逼近

多元函数的多项式逼近

- **回忆**：用一元多项式逼近一元函数 (Taylor公式)

设 $f \in C^{m+1}[a,b],\ \forall x_0, x_0+\Delta x \in [a,b],\ \exists \theta \in (0,1),$

$$f(x_0+\Delta x)=\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)\Delta x^k+R_m(x)$$

其中L-余项 $R_m(x)=\dfrac{1}{(m+1)!}f^{(m+1)}(x_0+\theta\Delta x)\Delta x^{m+1}$

注：$x_0+\theta\Delta x=\xi$ 在x_0与$x_0+\Delta x$之间

- **推广**：用n元多项式逼近n元函数 ——

第13-1课：多元函数的多项式逼近

- **多项式逼近问题**

  1) 设n元函数 f(x) 在a点可微, 则

$$f(\boldsymbol{a}+\Delta\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + \sum_{k=1}^{n} D_i f(\boldsymbol{a})\Delta x_i + o(\|\Delta\boldsymbol{x}\|)$$

即在x=a点附近，可以用1次多项式逼近f(x)

  2) 若上面f(x)在a点有m+1阶连续偏导数,

是否有m次多项式P_m(x)，使得

$$f(\boldsymbol{a}+\Delta\boldsymbol{x}) = P_m(\Delta\boldsymbol{x}) + o(\|\Delta\boldsymbol{x}\|^m)\,?$$

若答案肯定, P_m(x)=?

第13-1课：多元函数的多项式逼近

- **方法** (将n元函数化为1元函数情况)

设 $f \in C^{m+1}(B_r(\boldsymbol{a})),\ \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n,\ r > 0,\ \forall \Delta\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n,\ \|\Delta\boldsymbol{x}\| < r$

定义 $\varphi(t) = f(\boldsymbol{a} + t\Delta\boldsymbol{x}) \in C^{m+1}[0,1]$

应用一元函数的Taylor公式：$\forall t \in [0,1],\ \exists \theta \in (0,1)$

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} t^k + \frac{\varphi^{(m+1)}(\theta t)}{(m+1)!} t^{m+1}$$

特别取t=1得到

$$\varphi(1) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} + \frac{\varphi^{(m+1)}(\theta)}{(m+1)!}$$

将引入的1元函数回到n元函数f的表达式——

第13-1课：多元函数的多项式逼近

- **方法** (续-由1元函数回到n元函数)

已知 $\varphi(t)=f(\boldsymbol{a}+t\Delta\boldsymbol{x})\in C^{m+1}[0,1]$, $\exists\theta\in(0,1)$

成立 $$\varphi(1)=\sum_{k=1}^{m}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}+\frac{\varphi^{(m+1)}(\theta)}{(m+1)!} \qquad (*)$$

其中 $\varphi(1)=f(\boldsymbol{a}+\Delta\boldsymbol{x})$, $\varphi(0)=f(\boldsymbol{a})$,

计算 $$\varphi'(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(\boldsymbol{a}+t\Delta\boldsymbol{x})}{\partial x_i}\Delta x_i,\quad \varphi'(0)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i}\Delta x_i$$

$$\varphi''(t)=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a}+t\Delta\boldsymbol{x})}{\partial x_i\partial x_j}\Delta x_i\Delta x_j,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

只考虑m=1，代回 (*) 得到 ——

第13-1课：多元函数的多项式逼近

- Taylor公式 (C^2函数的多项式逼近)

设 $f \in C^2(B_r(\boldsymbol{a}))$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$

则 $\forall \|\Delta\boldsymbol{x}\| < r$, $\exists \theta \in (0,1)$

$$f(\boldsymbol{a}+\Delta\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i}\Delta x_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a}+\theta\Delta\boldsymbol{x})}{\partial x_i \partial x_j}\Delta x_i \Delta x_j$$

为简化表达形式, 引入2阶偏导数构成的Hess矩阵

$$Hf(\boldsymbol{x}) := \begin{pmatrix} D_{11}f(\boldsymbol{x}) & \cdots & D_{1n}f(\boldsymbol{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ D_{n1}f(\boldsymbol{x}) & \cdots & D_{nn}f(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}_{n\times n} \qquad D_{ij}f(\boldsymbol{x}) := \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x}), \quad i,j=1,\cdots,n$$

综上, 可以得到以下2种Taylor多项式逼近公式 ——

第13-1课：多元函数的多项式逼近

- Taylor公式 (C^2函数的多项式逼近)

设 $f\in C^2(B_r(\boldsymbol{a}))$, 则 $\forall\ \|\Delta\boldsymbol{x}\|<r,\ \exists\theta\in(0,1)$

$$f(\boldsymbol{a}+\Delta\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{a})+Jf(\boldsymbol{a})\Delta\boldsymbol{x}+\frac{1}{2}(\Delta\boldsymbol{x})^T Hf(\boldsymbol{a}+\theta\Delta\boldsymbol{x})\Delta\boldsymbol{x}$$

—— 带Lagrange型余项

或粗略地写为

$$f(\boldsymbol{a}+\Delta\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{a})+Jf(\boldsymbol{a})\Delta\boldsymbol{x}+\frac{1}{2}(\Delta\boldsymbol{x})^T Hf(\boldsymbol{a})\Delta\boldsymbol{x}+o(\|\Delta x\|^2)$$

—— 带Peano型余项

上面公式采用了矩阵记号与运算约定。

证：只须注意 $[D_{ij}f(\boldsymbol{a}+\theta\Delta\boldsymbol{x})-D_{ij}f(\boldsymbol{a})]\Delta x_i\Delta x_j=o(\|\Delta\boldsymbol{x}\|^2)$

求和导出 $(\Delta\boldsymbol{x})^T[Hf(\boldsymbol{a}+\theta\Delta\boldsymbol{x})-Hf(\boldsymbol{a})]\Delta\boldsymbol{x}=o(\|\Delta\boldsymbol{x}\|^2)$ □

为了给出多元泰勒公式一个简单容易记忆形式，我们引入高阶微分概念。

定义:高阶微分 设x, y的改变量为h, k

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x,y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}h+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}k$$

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x,y)$$

二阶微分

$$=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}h^2+2\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}hk+\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}k^2$$

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(x,y)=\sum_{i=0}^{m}C_m^i\frac{\partial^m f(x,y)}{\partial x^i\partial y^{m-i}}h^i k^{m-i}$$

m阶微分

$$(m=1,\cdots,n+1)$$

毅二元函数为例Taylor公式就可以叙述为:

假设 $f(x,y)$ 在包含 $M_0(x_0,y_0)$ 的区域 D 中

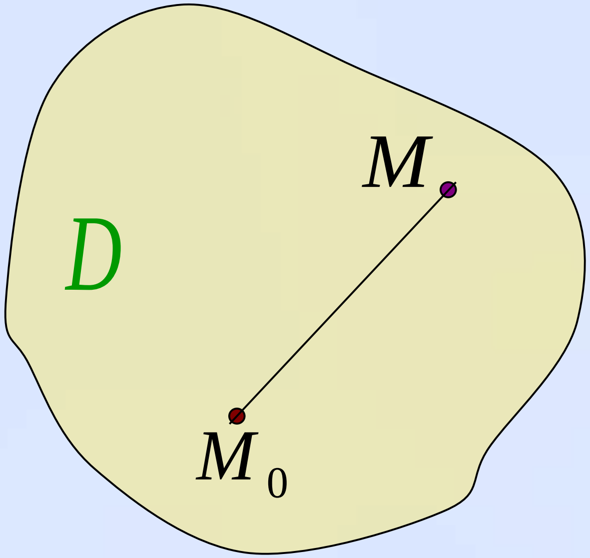
有连续的 $n+1$ 阶偏导数. $M(x,y)$ 是 D 任意一点.

线段 $\overline{M_0M}$ 完全在区域 D 内. 则有

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})f(x_0,y_0)$$

$$+\frac{1}{2!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^2 f(x_0,y_0)+\cdots+$$

$$\frac{1}{n!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^n f(x_0,y_0)\quad+\alpha_{\mathrm{n}}\ .$$



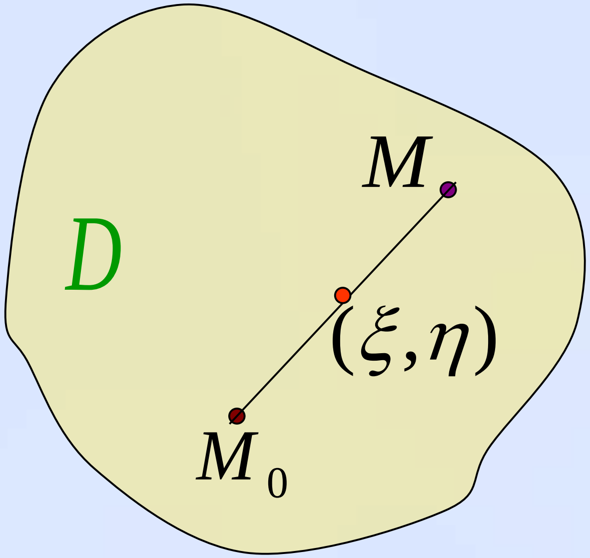
α_n 为 n 阶余项.

佩亚诺余项： $o[(x-x_0)^q+(y-y_0)^q]$.

拉格朗日余项：

$$\alpha_n=\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1}f(\xi,\eta).$$

(ξ,η) 是线段 $\overline{M_0M}$ 上一点.



第13-1课：多元函数的多项式逼近

- **例1.** 方程 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 在P点附近确定隐函数 $z=z(x,y)$

令 $P=(a,b,c)$, $z(a,b)=c\neq 0$, 求z在P点的Taylor展开(o-余项)

解：首先隐函数方程关于x求导

$$2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}=0, \qquad \therefore \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z}$$

隐函数方程关于x求导2次

$$1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=1+\frac{x^2}{z^2}+z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0, \quad \therefore \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{z^2+x^2}{z^3}$$

隐函数方程关于xy各求导1次

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}+z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{xy}{z^2}+z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0, \quad \therefore \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{xy}{z^3}$$

第13-1课：多元函数的多项式逼近

- **例1** (续) 计算隐函数 $z = z(x, y)$ 在P点的Taylor展开

已经得到 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{z^2 + x^2}{z^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{xy}{z^3}$

由对称性 $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{z^2 + y^2}{z^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -\frac{xy}{z^3}$

因此 $Jz(a,b) = -(\frac{a}{c}, \frac{b}{c})$, $Hz(a,b) = -\frac{1}{c^3}\begin{pmatrix} c^2 + a^2 & ab \\ ab & c^2 + b^2 \end{pmatrix}$

$$z(a + x, b + y) = z(a,b) + Jz(a,b)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x, y)Hz(a,b)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + o(\cdots)$$

$$= c - \frac{ax + by}{c} - \frac{(c^2 + a^2)x^2 + 2abxy + (c^2 + b^2)y^2}{2c^3}$$

$$+ o(x^2 + y^2) \quad \square$$

[例1]将$f(x,y)=\sin(2x+y)$在$x_0=0, y_0=\frac{\pi}{4}$附近展开为一阶泰勒公式。

[解] $\frac{\partial f}{\partial x}=2\cos(2x+y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}=\cos(2x+y)$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-4\sin(2x+y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-2\sin(2x+y)$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-\sin(2x+y)$, $f(0,\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$f'_x(0,\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}$, $f'_y(0,\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$f_{xx}(\xi,\eta)=-4\sin(2\xi+\eta)$, $f_{xy}(\xi,\eta)=-2\sin(2\xi+\eta)$,

$f_{yy}(\xi,\eta)=-\sin(2\xi+\eta)$, 于是

$$\sin(2x+y)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}(y-\frac{\pi}{4})+\frac{1}{2!}[-4\sin(2\xi+\eta)x^2$$

$$+2(-2\sin(2\xi+\eta))x(y-\frac{\pi}{4})-\sin(2\xi+\eta)(y-\frac{\pi}{4})^2].$$

(ξ,η)在$(0,\frac{\pi}{4})$与(x,y)的连线上.

[例 2]求 $f(x,y)=e^{x+y}$ 在 $(0,0)$ 点带皮亚诺余项的三阶泰勒展式。

解 间接法

$$e^{t}=1+t+\frac{1}{2!}t^{2}++\frac{1}{3!}t^{3}+o(t^{3})$$

令 $t=x+y$

$$e^{x+y}=1+(x+y)+\frac{1}{2!}(x+y)^{2}+$$

$$+\frac{1}{3!}(x+y)^{3}+o((x+y)^{3})$$

又 $\left|x+y\right|^2=(x+y)^2$

$=x^2+y^2+2xy$

$\leq 2(x^2+y^2)$

$$\left|\frac{(x+y)^3}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}\right|=\left|\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}\right|^{\frac{3}{2}}\leq 2\sqrt{2}$$

$$\frac{o((x+y)^3)}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}=\frac{o((x+y)^3)}{(x+y)^3}\cdot\frac{(x+y)^3}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}$$

当 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}\to 0$ 时

$$\frac{o((x+y)^3)}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}\to 0$$

即 $o((x+y)^3)=o(\rho^3)$

$$e^{x+y}=1+(x+y)+\frac{1}{2!}(x+y)^2+$$

$$+\frac{1}{3!}(x+y)^3+o(\rho^3)$$

例: 写出$f(x,y)=x^y$在点(1,1)的邻域内带*Peano*余项的3阶*Taylor*公式, 并求$(1.1)^{1.02}$.

解: $f(x,y)=x^y,\ f_x'=yx^{y-1},\ f_y'=x^y\ln x,$

$$f_{xx}''=y(y-1)x^{y-2},\ f_{yy}''=x^y\ln^2 x,\ f_{xy}''=x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x,$$

$$f_{xxx}'''=y(y-1)(y-2)x^{y-3},\qquad f_{yyy}'''=x^y\ln^3 x$$

$$f_{xxy}'''=(2y-1)x^{y-2}+y(y-1)x^{y-2}\ln x,$$

$$f_{xyy}'''=yx^{y-1}\ln^2 x+2x^{y-1}\ln x.$$

令$x_0=y_0=1, h=x-1, k=y-1.$

$$f(1,1)=f_x'(1,1)=f_{xy}''(1,1)=f_{xxy}'''(1,1)=1,$$

$$f_y'(1,1)=f_{xx}''(1,1)=f_{yy}''(1,1)$$

$$=f_{xxx}'''(1,1)=f_{yyy}'''(1,1)=f_{xyy}'''(1,1)=0$$

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})f(x_0,y_0)$$

$$+\frac{1}{2!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^2 f(x_0,y_0)$$

$$+\frac{1}{3!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^3 f(x_0,y_0)+o((\sqrt{h^2+k^2})^3)$$

$$f(x,y) = 1 + (x-1) + (x-1)(y-1)$$

$$+ \frac{1}{2}(x-1)^2(y-1)$$

$$+ o\left(\left(\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}\right)^3\right)$$

$$(1.1)^{1.02} \approx 1.1 + 0.1 \times 0.02 + \frac{1}{2} \times 0.01 \times 0.02$$

$$= 1.1021. \square$$

Question. 二元函数在一点的Taylor多项式是否唯一？如何证明？

唯一！

例. $\cos(x^2+y^2)$在$(0,0)$的8阶带Peano余项的Taylor展开式.

解: $$\cos t = 1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n)!}+o(t^{2n}),\ t\to 0\text{时}.$$

$$\cos(x^2+y^2)=1-\frac{(x^2+y^2)^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{(x^2+y^2)^{2n}}{(2n)!}$$

$$+o((x^2+y^2)^{2n}),\ x^2+y^2\to 0\text{时}.$$

令$n=2$得

$$\cos(x^2+y^2)=1-\frac{(x^2+y^2)^2}{2!}+\frac{(x^2+y^2)^4}{4!}+o((x^2+y^2)^4),$$

$$x^2+y^2\to 0\text{时}.\square$$

例. $\ln(2+x+y+xy)$在$(0,0)$带Peano余项的2阶Taylor展开.

解: $x+y+xy\to 0$ 时,

$$\ln(2+x+y+xy)=\ln 2+\ln(1+\frac{x+y+xy}{2})$$

$$=\ln 2+\frac{x+y+xy}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{x+y+xy}{2}\right)^2+o\left((x+y+xy)^2\right)$$

$x^2+y^2\to 0$时, 必有$x+y+xy\to 0$ 时, 因此

$$\frac{o((x+y+xy)^2)}{x^2+y^2}=\frac{o((x+y+xy)^2)}{(x+y+xy)^2}\cdot\frac{(x+y+xy)^2}{x^2+y^2}\to 0,$$

$$\ln(2+x+y+xy)$$

$$=\ln 2+\frac{x+y}{2}-\frac{x^2+y^2-2xy}{8}+o(x^2+y^2).\square$$

问：对多元函数中值定理是否成立？

定理：设$f:D\to R$可微分，区域D是凸的，则任意a，b$\in$D,
在a,b确定的直线上存在一点ξ使得
$f(b)-f(a)=Jf(\xi)(b-a)$

问：向量值函数中值定理是否成立？（一般：否）

定理：设$f:D\to R^m$可微分，区域D是凸的，则任意a，b$\in$D,
在a,b确定的直线上存在一点ξ使得
$\|f(b)-f(a)\|\leq\|Jf(\xi)\|\|(b-a)\|$

称之为“拟微分中值定理”

推论：设$f:D\to R^m$可微分，区域D是凸的，如果Jf=0, 则f在D上为一常量。

注：上述结论对一般区域都成立。证明用到连通性。

第13-2课：多元函数的极值问题

多元函数的极值问题

- **极值问题**

  求函数的极大/极小值、最大/最小值

  —— Taylor公式的一个应用

- **极值** (局部最值): 设 $f: D \to \mathbb{R},\ \boldsymbol{a} \in D^o$

- $f(a)$是极大值：$\exists r > 0,\ \forall \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < r,\ f(\boldsymbol{x}) \le f(\boldsymbol{a})$
- $f(a)$是极小值：$\exists r > 0,\ \forall \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < r,\ f(\boldsymbol{x}) \ge f(\boldsymbol{a})$

[严格极值定义略去]

若$f(a)$是极大值/极小值，则称a是极大值点/极小值点

第13-2课：多元函数的极值问题

- **回忆：一元函数情况——Fermat引理**

  若1元函数$f(x)$在可微点a达到极值, 则 $f'(a)=0$

- **推广：** 令 $f:D\to\mathbb{R},\ \boldsymbol{a}\in D^o,$

转化为1元函数 $h(t)=f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{u}),\ \boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{u}\|=1$

若$x=\boldsymbol{a}$是f 的极值点, 则t=0是h的极值点, $h'(0)=D_{\boldsymbol{u}}f(\boldsymbol{a})=0$

➢ **极值必要条件**

1) 设f 在$\boldsymbol{a}$点达到极值且$D_{\boldsymbol{u}}f$存在, 则$D_{\boldsymbol{u}}f(\boldsymbol{a})=0$ ；

2) 若f 在$\boldsymbol{a}$点达到极值且可微, 则 $Jf(\boldsymbol{a})=\mathbf{0}$

也即　$D_i f(\boldsymbol{a})=0,\quad i=1,2,\ldots,n$　　$\square$

第13-2课：多元函数的极值问题

- **驻点-临界点：**

  若函数$Jf(a)$=0 (向量), 则称a为f 的驻点 (也称临界点)

  注1：在有些文献中, 不可微点也被称为临界点。

  注2：可微函数的极值点必是驻点, 但反之不必成立。

✓ **反例：** $f(x,y)=x^2-y^2$

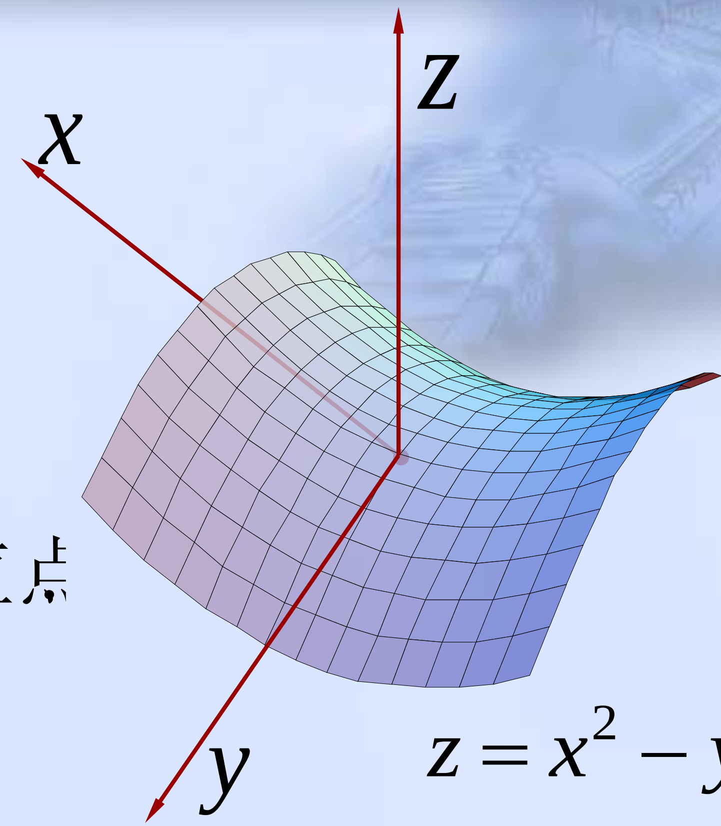
$$Jf(0,0)=(0,0)$$ —— 原点是驻点/临界点

$$\forall \varepsilon>0,\ f(\varepsilon,0)=\varepsilon^2>0>-\varepsilon^2=f(0,\varepsilon)$$ —— 原点非极值点

驻点不是极值的充分条件.

例如考察函数

$$z = f(x, y) = x^2 - y^2$$



$z = x^2 - y^2$

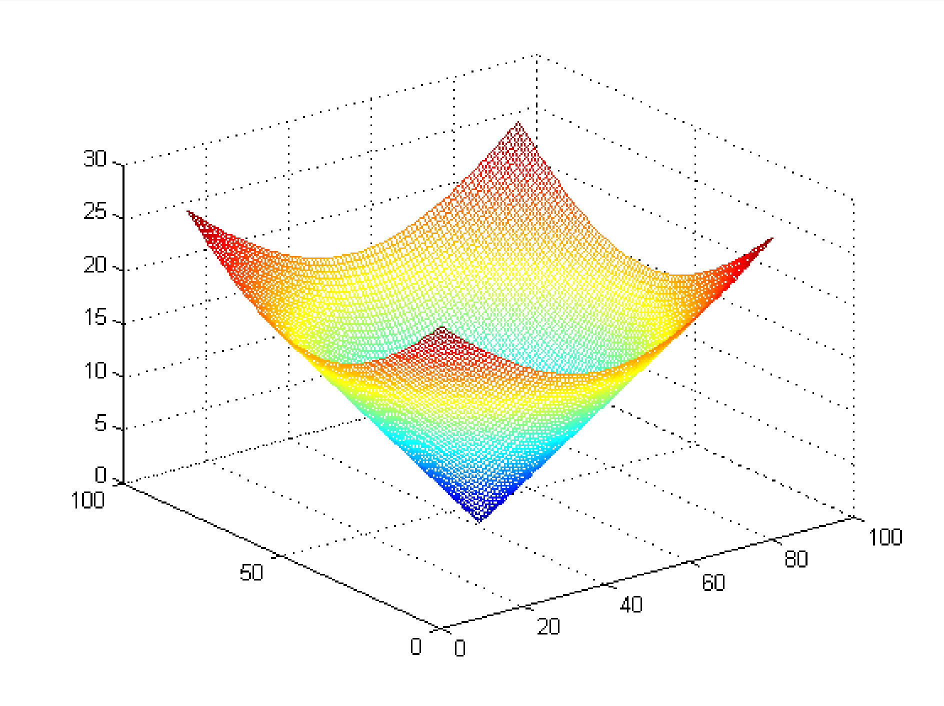
$O(0,0)$ 是驻点，但不是极值点

$f(x,0)$ 在 $(0,0)$ 取极小值;

$f(0,y)$ 在 $(0,0)$ 取极大值.

$f(0,0)$ 既不是极大值，也不是极小值.

$O(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的鞍点驻点

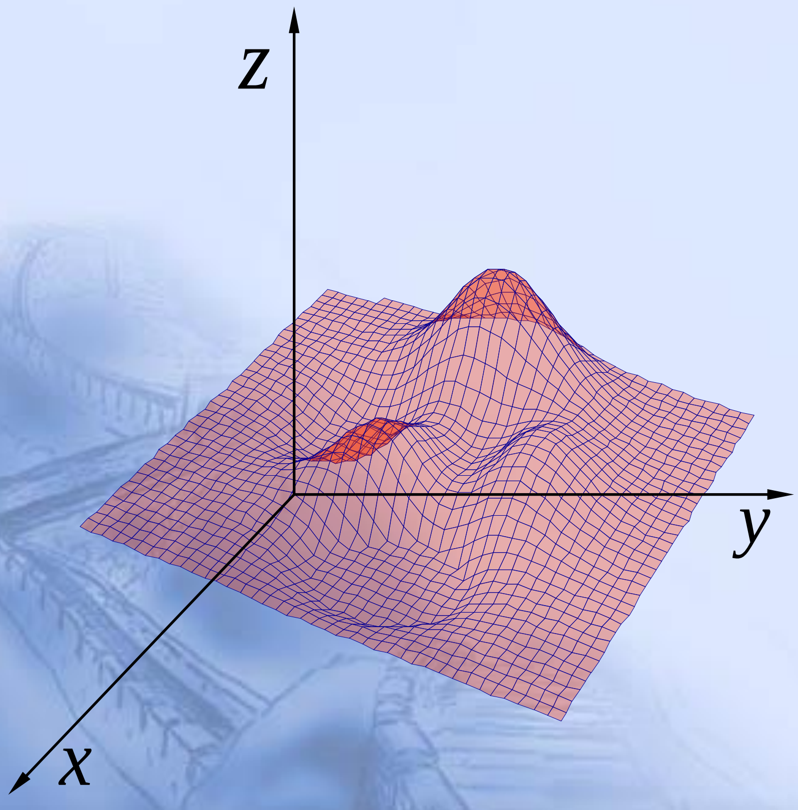


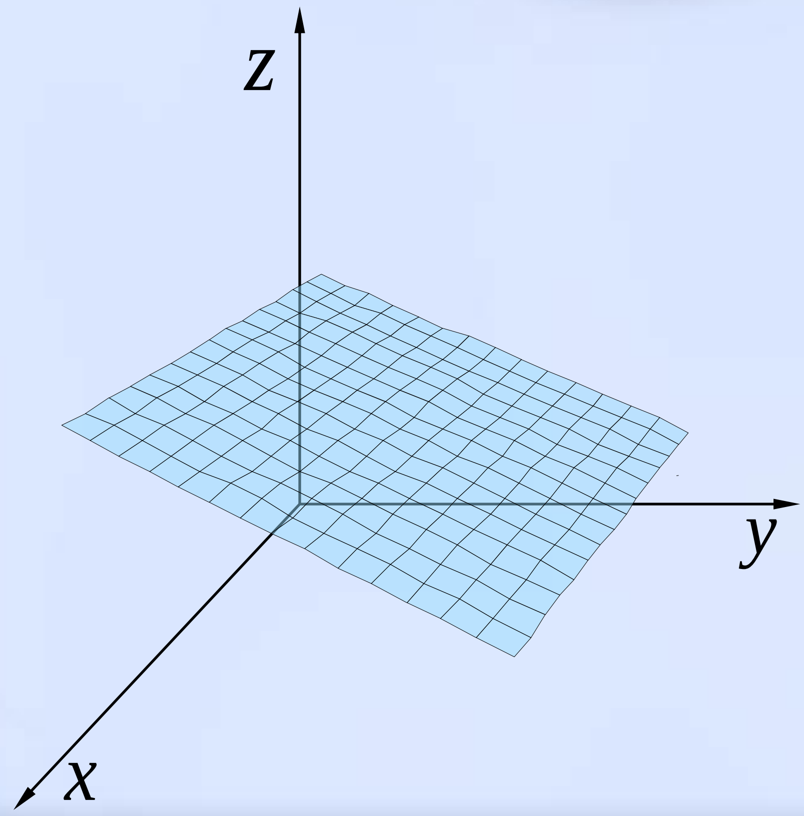
函数$z=\sqrt{x^2+y^2}$，

在(0, 0)点取得极值

但偏导数不存在

与一元函数类似多元函数可能有多个极值，也可能没有极值.





第13-2课：多元函数的极值问题

- **分析：** 极值的充分条件?

设$\boldsymbol{a}$是f (x)的驻点则由Taylor公式(假定f是C^2函数)

$$f(\boldsymbol{a}+\Delta\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + \frac{1}{2}(\Delta\boldsymbol{x})^T Hf(\boldsymbol{a}+\theta\Delta\boldsymbol{x})\Delta\boldsymbol{x}$$

可见$\boldsymbol{a}$是否极值点由Hess矩阵$Hf(\boldsymbol{a})$的性质决定——

1) 若Hf正定, 则$f(\boldsymbol{a})$为极小：$\forall\Delta\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0},\ (\Delta\boldsymbol{x})^T Hf\,\Delta\boldsymbol{x}>0$

2) 若Hf负定, 则$f(\boldsymbol{a})$为极大：$\forall\Delta\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0},\ (\Delta\boldsymbol{x})^T Hf\,\Delta\boldsymbol{x}<0$

3) 若Hf不定, 则$f(\boldsymbol{a})$不是极值？

第13-2课：多元函数的极值问题

- **定理** (极值的充分条件)

  设$\boldsymbol{a}$是$f(\mathrm{x})$的驻点且$\exists r>0,\ f\in C^2(B_r(\boldsymbol{a}))$, 则

  (1) 若$Hf(\boldsymbol{a})$正定, 则$f(\boldsymbol{a})$为严格极小；

  (2) 若$Hf(\boldsymbol{a})$负定, 则$f(\boldsymbol{a})$为严格极大；

  (3) 若$Hf(\boldsymbol{a})$不定, 则$f(\boldsymbol{a})$不是极值。

✓ 证(1): 如前观察 $f(\boldsymbol{a}+\Delta\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{a})+\dfrac{1}{2}(\Delta\boldsymbol{x})^T Hf(\boldsymbol{a}+\theta\Delta\boldsymbol{x})\Delta\boldsymbol{x}$

已知矩阵$Hf(\boldsymbol{a})$正定, 其特征值全部大于0

由连续性可知在$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$附近$Hf(\boldsymbol{x})$也正定, 由此导出

$$f(\boldsymbol{a}+\Delta\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{a})+\frac{1}{2}(\Delta\boldsymbol{x})^T Hf(\boldsymbol{a}+\theta\Delta\boldsymbol{x})\Delta\boldsymbol{x}>f(\boldsymbol{a})$$

✓ 证(2): 与(1)完全平行。

第13-2课：多元函数的极值问题

✓ 证(3): 论证基于Taylor展开式

$$f(\boldsymbol{a}+\Delta\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + \frac{1}{2}(\Delta\boldsymbol{x})^T Hf(\boldsymbol{a})\Delta\boldsymbol{x} + o(\|\Delta\boldsymbol{x}\|^2)$$

已知矩阵$Hf(a)$不定：$\exists \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^n$，$\|\boldsymbol{u}\|=\|\boldsymbol{v}\|=1$,

$$\boldsymbol{u}^T Hf(\boldsymbol{a})\boldsymbol{u} > 0 > \boldsymbol{v}^T Hf(\boldsymbol{a})\boldsymbol{v}$$

特别有 $f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{u}) = f(\boldsymbol{a}) + \frac{t^2}{2}(\boldsymbol{u}^T Hf(\boldsymbol{a})\boldsymbol{u}) + o(t^2)$

$$f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{a}) + \frac{t^2}{2}(\boldsymbol{v}^T Hf(\boldsymbol{a})\boldsymbol{v}) + o(t^2)$$

所以当$t\neq 0$ 充分小时

$$f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{u}) > f(\boldsymbol{a}) > f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{v}) \quad \text{——} \quad f(a)\text{不是极值} \quad \square$$

第13-2课：多元函数的极值问题

2元函数的极值判别

设 $\boldsymbol{a}$是 $f(x,y)$ 的驻点且 $\exists r>0,\ f\in C^2(B_r(\boldsymbol{a}))$

记 $$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\boldsymbol{a}),\ B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\boldsymbol{a}),\ C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\boldsymbol{a})$$

(1) $AC-B^2>0,\ A>0,$ 则$f(\boldsymbol{a})$为严格极小；

(2) $AC-B^2>0,\ A<0,$ 则$f(\boldsymbol{a})$为严格极大；

(3) $AC-B^2<0,$ 则$f(\boldsymbol{a})$不是极值。

证：注意

$$Hf(\boldsymbol{a})=\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \quad \begin{cases} (1)\text{——正定} \\ (2)\text{——负定} \\ (3)\text{——不定} \end{cases} \quad \cdots\cdots \quad \square$$

第13-2课：多元函数的极值问题

- **注**-极值判别说明

关于Hess矩阵$Hf(a)$的性质, 除了正定-负定-不定之外还有半定情况：半正定-半负定——这时定理失效。

✓ **反例**：考虑两个函数 $f_{\pm}(x,y)=x^2\pm y^4$

$$Jf_{\pm}(0,0)=(2x,\pm 4y^3)_{x=y=0}=(0,0)$$ —— 原点是驻点

Hess矩阵 $$Hf_{\pm}(0,0)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & \pm 12y^2\end{pmatrix}_{x=y=0}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$ ——半正定

$f_{+}(x,y)=x^2+y^4$ 在原点取得极小

$f_{-}(x,y)=x^2-y^4$ 在原点无极值

第13-3课：多元函数极值-实例

✓ **例1.** 方程 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 在P点附近确定隐函数 $z=z(x,y)$

$P=(a,b,c),\ \ z(a,b)=c\neq 0,$ 之前已经求出

$$Jz(a,b)=-(\frac{a}{c},\frac{b}{c}),\quad Hz(a,b)=-\frac{1}{c^3}\begin{pmatrix} c^2+a^2 & ab \\ ab & c^2+b^2 \end{pmatrix}$$

如果P是驻点，则

$$Jz(a,b)=(0,0),\qquad \therefore\quad a=b=0$$

这时

$$Hz(0,0)=-\frac{1}{c^3}\begin{pmatrix} c^2 & 0 \\ 0 & c^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1/c & 0 \\ 0 & -1/c \end{pmatrix}$$

若$c>0$, $Hz(0,0)$负定, $z(0,0)=c$是极大值；

若$c<0$, $Hz(0,0)$正定, $z(0,0)=c$是极小值。 □

第13-3课：多元函数的极值-实例

✓ 例2. $f(x,y)=2x^4+y^4-2x^2-2y^2$, 求极值点和极值

解：先求临界点, 列出临界点方程

$$\frac{\partial f}{\partial x}=8x^3-4x=0,\quad \therefore\ 4x(2x^2-1)=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=4y^3-4y=0,\quad \therefore\ 4y(y^2-1)=0$$

解得 $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=0 \\ y=\pm 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=\pm 1/\sqrt{2} \\ y=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=\pm 1/\sqrt{2} \\ y=\pm 1 \end{cases}$ (共9个点)

进一步计算Hess矩阵

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=24x^2-4,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=12y^2-4,$$ 综上——

第13-3课：多元函数的极值-实例

✓ 例2 (续) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=24x^2-4,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=12y^2-4$

综上列表如下

临界点	$(0,0)$	$(0,\pm1)$	$(\pm1/\sqrt{2},0)$	$(\pm1/\sqrt{2},\pm1)$
$Hf(x,y)$	$\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 0 & 8\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}8 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}8 & 0\\ 0 & 8\end{pmatrix}$
正负定	负定	不定	不定	正定
极值？	极大值	非极值	非极值	极小值

由此导出：

$f(0,0)=0$ 为极大值， $f(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\pm1)=-\dfrac{3}{2}$ 为极小值 □

[例1] 设方程$x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$

确定隐函数$z=f(x,y)$，求其极值

［解］ $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{x-1}{z-2}=0$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{y+1}{z-2}=0$ $\Rightarrow$ $x_0=1$，$y_0=-1$ 驻点

当$x_0=1,\ y_0=-1$时，　$z_1=6,\ z_2=-2$

在点$(1,-1,6)$处，$F_z'=2\cdot 6-4\neq 0$

所以在$(1,-1)$的某个邻域U中，确定隐函数

$z=f_1(x,y)$　　$f_1(1,-1)=6$

计算二阶偏导数

$$A=\left.\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}\right|_{(1,-1,6)}=-\frac{1}{4}<0 \qquad B=\left.\frac{\partial^2 f_1}{\partial x\partial y}\right|_{(1,-1,6)}=0$$

$$C=\left.\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}\right|_{(1,-1,6)}=-\frac{1}{4}<0$$

因为 $A<0,\quad AC-B^2>0$

所以 $f_1(x,y)$ 在 $(1,-1)$ 达到极大值 6

在点$(1,-1,-2)$, $F_z' = 2\cdot(-2)-4 \neq 0$

所以在$(1,-1)$的某个邻域W中,确定隐函数

$$z = f_2(x,y) \qquad f_2(1,-1) = -2$$

$$A = \left.\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}\right|_{(1,-1,-2)} = \frac{1}{4} > 0 \qquad B = \left.\frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y}\right|_{(1,-1,-2)} = 0$$

$$C = \left.\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}\right|_{(1,-1,-2)} = \frac{1}{4} > 0$$

因为 $A > 0, \quad AC - B^2 > 0$

所以$f_2(x,y)$在$(1,-1)$达到极小值: -2

第13-3课：多元函数极值-实例

- 例3. 最小二乘法

已知y是x的2次函数, 即 $y = ax^2 + bx + c$

为确定**a,b,c**进行系列试验, 得到数据 $(x_j, y_j), j = 1, 2, \cdots, N$

问如何由这些数据得到最佳的 ***a,b,c***?

- 方法：任给一组(***a,b,c***), 定义误差函数

$$\sigma(a,b,c) = \sum_{j=1}^{N} (ax_j^2 + bx_j + c - y_j)^2$$

求出的最佳(***a,b,c***)应该使得误差函数达到最小值。

为此，首先求解临界点方程 $\dfrac{\partial\sigma}{\partial a} = \dfrac{\partial\sigma}{\partial b} = \dfrac{\partial\sigma}{\partial c} = 0,$ ……

第13-3课：多元函数极值-实例

✓ **例3** (续) 已知 $\sigma(a,b,c)=\sum_{j=1}^{N}(ax_j^2+bx_j+c-y_j)^2$

临界点方程组：

$$\frac{\partial\sigma}{\partial a}=2\sum_{j=1}^{N}(ax_j^2+bx_j+c-y_j)x_j^2=0$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial b}=2\sum_{j=1}^{N}(ax_j^2+bx_j+c-y_j)x_j=0$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial c}=2\sum_{j=1}^{N}(ax_j^2+bx_j+c-y_j)=0$$

整理得

$$\left.\begin{aligned}
&(\sum_{j=1}^{N}x_j^4)a+(\sum_{j=1}^{N}x_j^3)b+(\sum_{j=1}^{N}x_j^2)c=\sum_{j=1}^{N}x_j^2y_j\\
&(\sum_{j=1}^{N}x_j^3)a+(\sum_{j=1}^{N}x_j^2)b+(\sum_{j=1}^{N}x_j)c=\sum_{j=1}^{N}x_jy_j\\
&(\sum_{j=1}^{N}x_j^2)a+(\sum_{j=1}^{N}x_j)b+(\sum_{j=1}^{N}1)c=\sum_{j=1}^{N}y_j
\end{aligned}\right\}\text{线性代数方程组}$$

第13-3课：多元函数极值-实例

- 例3 (续二)　注意 $\sigma(a,b,c)\geq 0$

  1) 必有最小值

  2) 最小值点必是临界点

  3) 临界点方程组系数矩阵非奇异：$\det\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{N}x_j^4 & \sum_{j=1}^{N}x_j^3 & \sum_{j=1}^{N}x_j^2\\ \sum_{j=1}^{N}x_j^3 & \sum_{j=1}^{N}x_j^2 & \sum_{j=1}^{N}x_j\\ \sum_{j=1}^{N}x_j^2 & \sum_{j=1}^{N}x_j & \sum_{j=1}^{N}1\end{pmatrix}\neq 0$

  [只要 $N\geq 3$]

所以有唯一解组 (a_*,b_*,c_*)

综上得到最佳系数 (a_*,b_*,c_*)

$$\therefore\quad y=a_*x^2+b_*x+c_*\qquad\square$$

注：也可以利用Hess矩阵判断 (a_*,b_*,c_*) 是极小值点

第13-3课：多元函数极值-实例

✓ **推广-最小二乘法**

已知y是x的n次函数, 即

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

根据已知数据 $(x_j, y_j), j = 1, 2, \cdots, N,$　求函数y的最佳系数使误差 σ(…) 达到最小：

$$\sigma(a_0, a_1, \cdots, a_n) = \sum_{j=1}^{N} (a_n x_j^n + \cdots + a_1 x_j + a_0 - y_j)^2$$

为此需要求解临界点方程组

$$\frac{\partial \sigma}{\partial a_i} = 0,\ i = 0, 1, \cdots, n$$ ——(临界点方程组)

第13-3课：多元函数极值-实例

✓ **推广2-最小二乘法**

已知z是x,y的2次齐次函数, 即 $z = ax^2 + bxy + cy^2$

根据数据 (x_j, y_j, z_j), $j = 1, 2, \cdots, N$, 求系数(a,b,c)使得误差

$$\sigma(a,b,c) = \sum_{j=1}^{N}(ax_j^2 + bx_jy_j + cy_j^2 - z_j)^2$$

达到最小。为此导出相应的临界点方程组：

$$\frac{\partial\sigma}{\partial a} = 2\sum_{j=1}^{N}(ax_j^2 + bx_jy_j + cy_j^2 - z_j)x_j^2 = 0$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial b} = 2\sum_{j=1}^{N}(ax_j^2 + bx_jy_j + cy_j^2 - z_j)x_jy_j = 0$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial c} = 2\sum_{j=1}^{N}(ax_j^2 + bx_jy_j + cy_j^2 - z_j)y_j^2 = 0$$

第13-3课：多元函数极值-实例

- 推广2 (续)

已知 $\sigma(a,b,c)=\sum_{j=1}^{N}(ax_j^2+bx_jy_j+cy_j^2-z_j)^2$

整理临界点方程组：

$$\left.\begin{aligned}(\sum_{j=1}^{N}x_j^4)a+(\sum_{j=1}^{N}x_j^3y_j)b+(\sum_{j=1}^{N}x_j^2y_j^2)c=\sum_{j=1}^{N}x_j^2z_j\\(\sum_{j=1}^{N}x_j^3y_j)a+(\sum_{j=1}^{N}x_j^2y_j^2)b+(\sum_{j=1}^{N}x_jy_j^3)c=\sum_{j=1}^{N}x_jy_jz_j\\(\sum_{j=1}^{N}x_j^2y_j^2)a+(\sum_{j=1}^{N}x_jy_j^3)b+(\sum_{j=1}^{N}y_j^4)c=\sum_{j=1}^{N}y_j^2z_j\end{aligned}\right\}\text{线性代数方程组}$$

解得唯一解组 (a_*,b_*,c_*)

$$\therefore\quad z=a_*x^2+b_*xy+c_*y^2\qquad\square$$

第13课:

- **作业:**

  练习题14.10：1-4.

  练习题14.11：1(2,4,[其余自己练习]), 2-3, 4*.

- **预习**（下次课内容）：

  第14.12节 函数条件极值