第12课：

第14章　多变量函数的微分学

- **内容：**

第14.7节 隐函数定理（续）

第14.8节 逆映射定理

第14.9节 高阶偏导数

- **作业：**

练习题14.8：1[自己练习], 2.

练习题14.9：1(2,3,6,8-10,[其余自己练习]), 2-3, 5, 6(2).

问　题14.9：1*-3*.

第11-2课：复合函数的微分/求导

复 合 函 数 的 微分/求导

- 回忆-复合函数

设 $\boldsymbol{f}: D \to \mathbb{R}^m,\ \boldsymbol{g}: \Omega \to \mathbb{R}^k,\ \boldsymbol{f}(D) \subset \Omega \subset \mathbb{R}^m$

复合函数 $\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f}: D \to \mathbb{R}^k$, 定义为 $\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\mathbf{x})),\ \mathbf{x} \in D$

- **复合函数的微分**

设 $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}$ 如上，$\boldsymbol{a} \in D^o,\ \boldsymbol{b} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) \in \Omega^o$

如果$\boldsymbol{f}$在$\boldsymbol{a}$点可微, $\boldsymbol{g}$在$\boldsymbol{b}$点可微, 则复合函数在$\boldsymbol{a}$点可微, 且

$$d(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{a}) = J\boldsymbol{g}(\boldsymbol{b})J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\Delta \boldsymbol{x} \qquad \text{(矩阵乘积)}$$

也即 $J(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{a}) = J\boldsymbol{g}(\boldsymbol{b})J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ —— 进一步展开如下：

第11-2课：复合函数的微分/求导

- **复合函数的雅可比矩阵**

  记 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}),\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$，将雅可比矩阵重新表示：

  $J(\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f})=J\boldsymbol{g}J\boldsymbol{f}$ 也可以表示为 $J\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})=J\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y})J\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$

这样复合函数的雅可比矩阵公式可写成 (易记忆与理解)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial u_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_k}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial u_k}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial u_k}{\partial y_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

- 特例k=n=1：$\dfrac{du}{dx}=\sum_{j=1}^{m}\dfrac{\partial u}{\partial y_j}\dfrac{\partial y_j}{\partial x}$ —— 链式法则求导公式

第11-1课：向量值函数的微分

✓ 例1.

研究 $\boldsymbol{f}(r,\theta,z)=\begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ z \end{pmatrix},\ r\ge 0,\ 0\le\theta<2\pi,\ -\infty<z<+\infty$

解：为研究函数的可微性，计算雅可比矩阵如下：

$$\boldsymbol{Jf}(r,\theta,z)=\begin{pmatrix} D_r f_1 & D_\theta f_1 & D_z f_1 \\ D_r f_2 & D_\theta f_2 & D_z f_2 \\ D_r f_3 & D_\theta f_3 & D_z f_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

注意该雅可比矩阵处处连续，因此这个函数处处可微

并且 $$\begin{pmatrix} df_1 \\ df_2 \\ df_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta r \\ \Delta\theta \\ \Delta z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta\Delta r-r\sin\theta\Delta\theta \\ \sin\theta\Delta r+r\cos\theta\Delta\theta \\ \Delta z \end{pmatrix}$$ □

第12-1课：回顾-函数的微分/求导

- 例1. $$\boldsymbol{f}(x,y,z)=\begin{pmatrix} z\sqrt{x^2+y^2} \\ \ln|x+y+z| \end{pmatrix},\quad x+y+z\neq 0$$

用微分法计算其微分和雅可比矩阵

解：$$df_1=d(z\sqrt{x^2+y^2})\ =zd(\sqrt{x^2+y^2})+\sqrt{x^2+y^2}dz$$

$$=z\frac{d(x^2+y^2)}{2\sqrt{x^2+y^2}}+\sqrt{x^2+y^2}dz\ =z\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}+\sqrt{x^2+y^2}dz,$$

$$df_2=d(\ln|x+y+z|)\ =\frac{d(x+y+z)}{x+y+z}=\frac{dx+dy+dz}{x+y+z}$$

$$\therefore\ d\boldsymbol{f}\ =\begin{pmatrix} \dfrac{zxdx+zydy}{\sqrt{x^2+y^2}}+\sqrt{x^2+y^2}dz \\ \dfrac{dx+dy+dz}{x+y+z} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}} & \dfrac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}} & \sqrt{x^2+y^2} \\ \dfrac{1}{x+y+z} & \dfrac{1}{x+y+z} & \dfrac{1}{x+y+z} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

由此得到雅可比矩阵 $\boldsymbol{H}f=\ldots\ldots$ □

第11-4课：隐函数定理: 更一般情况

- **隐函数定理** (推广到 n元隐函数)

设 $F\in C^1(D),\ D\subset\mathbb{R}^{n+1},\ (\boldsymbol{x}_0,y_0)\in D^o$ 满足以下条件:

$$F(\boldsymbol{x}_0,y_0)=0,\quad \frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{x}_0,y_0)\neq 0$$

则 $\exists\delta,\eta>0$ 并且有函数 $f:B_\delta(\boldsymbol{x}_0)\to(y_0-\eta,y_0+\eta)$

具有以下性质

- (1) $F(\boldsymbol{x},f(\boldsymbol{x}))=0,\ \forall\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|<\delta,\quad f(\boldsymbol{x}_0)=y_0$
- (2) $f\in C^1(B_\delta(\boldsymbol{x}_0))$
- (3) $D_i f(\boldsymbol{x})=-\dfrac{\partial F}{\partial x_i}(\boldsymbol{x},y)\Big/\dfrac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{x},y),\quad y=f(\boldsymbol{x}),\ i=1,2,\cdots,n$

第11-4课：隐函数定理: 更一般情况

- **隐函数定理** (再推广- 向量值隐函数)

  设 $\boldsymbol{F} \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$, $D \subset \mathbb{R}^{n+m}$, $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) \in D^o$ 满足以下条件:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) = \boldsymbol{0}, \quad \det[J_{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)] \neq 0$$

则 $\exists \delta, \eta > 0$ 以及函数 $\boldsymbol{f}: B_\delta(\boldsymbol{x}_0) \to B_\eta(\boldsymbol{y}_0)$

满足以下性质

- (1) $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{0}, \ \forall \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| < \delta, \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{y}_0$
- (2) $\boldsymbol{f} \in C^1(B_\delta(\boldsymbol{x}_0), \mathbb{R}^m)$
- (3) $J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = -[J_{\boldsymbol{y}} F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})]^{-1} J_{\boldsymbol{x}} F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$

上面使用的矩阵记号说明如下——

第11-4课：隐函数定理: 更一般情况

- 隐函数定理中的矩阵记号

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\begin{pmatrix} F_1(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m) \\ \vdots \\ F_m(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m) \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix} f_1(x_1,\cdots,x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1,\cdots,x_n) \end{pmatrix}$$

$$J\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\begin{pmatrix} J_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & J_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \end{pmatrix}$$ —— 雅可比矩阵分块

$$J_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\begin{pmatrix} D_{x_1}F_1 & \dots & D_{x_n}F_1 \\ \vdots & & \vdots \\ D_{x_1}F_m & \dots & D_{x_n}F_m \end{pmatrix},\ J_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\begin{pmatrix} D_{y_1}F_1 & \dots & D_{y_m}F_1 \\ \vdots & & \vdots \\ D_{y_1}F_m & \dots & D_{y_m}F_m \end{pmatrix}$$

注：$J_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$是m阶可逆方阵： $\det[J_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)]\neq 0$

第12-1课：回顾-函数的微分/求导

✓ 例3. $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$

令$F(x,y,z)=0$ 得到隐函数 $z=f(x,y)$

计算隐函数的微分/偏导数

解：考虑 $\mathrm{d}F(x,y,z)=0$ 得到

$$d(x^2+y^2+z^2-1)=2(xdx+ydy+zdz)=0$$

$$\therefore\ dz=-\frac{xdx+ydy}{z}$$ —— 隐函数的微分

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}$$ ——隐函数的偏导数 □

第12-1课：回顾-函数的微分/求导

✓ 例4. $F_1(x,y,u,v)=3x^2+y^2+u^2+v^2-2$

$$F_2(x,y,u,v)=x^2+2y^2-u^2+v^2$$

令$F_1=F_2=0$ 得到隐函数$u(x,y),v(x,y)$, 考虑 $dF_1=dF_2=0$：

$$d(3x^2+y^2+u^2+v^2-2)=2(3xdx+ydy+udu+vdv)=0$$

$$d(x^2+2y^2-u^2+v^2)=2(xdx+2ydy-udu+vdv)=0$$

整理得 $\begin{cases} udu+vdv=-3xdx-ydy \\ udu-vdv=xdx+2ydy \end{cases}$

解出微分 $\begin{cases} du=\dfrac{-2xdx+ydy}{2u} \\ dv=\dfrac{-4xdx-3ydy}{2v} \end{cases}$ 即 $d\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\dfrac{x}{u} & \dfrac{y}{2u} \\ -\dfrac{2x}{v} & -\dfrac{3y}{2v} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$ □

第12-2课：反函数/逆映射定理

反函数/逆映射定理

- **反函数/逆映射问题**：给定 $f: D \to \mathbb{R}^n,\ D \subset \mathbb{R}^n$

考察f的反函数及其性质——— $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$

分析：考虑应用隐函数定理，为此定义 $\boldsymbol{F}: \tilde{D} \to \mathbb{R}^n$

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}),\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^n \times D = \tilde{D} \subset \mathbb{R}^{2n}$$

再取 $\boldsymbol{y}_0 \in D^o,\ \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_0)$，则 $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) \in \tilde{D}^o$，$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) = \boldsymbol{0}$

注意 $J_y \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = -J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$ ——— 假设 $\boldsymbol{f} \in C^1$

此外 $J_x \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = J\boldsymbol{x} = \boldsymbol{I}_n$ ——— n 阶单位矩阵

回忆隐函数定理, 应用于反函数情况 ———

第12-2课：反函数/逆映射定理

- **隐函数定理** (回忆)

设 $\boldsymbol{F}\in C^1(D,\mathbb{R}^m),\ D\subset\mathbb{R}^{n+m}$，$(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)\in D^o$ 满足以下条件：

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)=\boldsymbol{0},\ \det[J_y\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)]\neq 0$$

则 $\exists\delta,\eta>0$ 以及 $\boldsymbol{g}:B_\delta(\boldsymbol{x}_0)\to B_\eta(\boldsymbol{y}_0)$

具有以下性质

- (1) $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{y}_0$
- (2) $\boldsymbol{g}\in C^1(B_\delta(\boldsymbol{x}_0),\mathbb{R}^m)$
- (3) $J\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=-[J_y\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})]^{-1}J_x\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\quad \boldsymbol{y}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$

其中 $\left(J_x\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\quad J_y\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right)=J\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$

[反函数应用

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$$

$$J_y\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=-J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$$

$$J_x\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=J\boldsymbol{x}=\boldsymbol{I}_n$$
]

第12-2课：反函数/逆映射定理

- **反函数/逆映射定理** (局部版)

  设 $\boldsymbol{f} \in C^1(D,\mathbb{R}^n)$, $D \subset \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{y}_0 \in D^o$ 满足条件：

$$\det[J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_0)] \neq 0$$

则 $\exists \delta, \eta > 0$ 以及函数 $\boldsymbol{g}: B_\delta(\boldsymbol{x}_0) \to B_\eta(\boldsymbol{y}_0)$，其中 $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_0)$ 满足以下性质

- (1) $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{x},\ \forall \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| < \delta$, $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{y}_0$
- (2) $\boldsymbol{g} \in C^1(B_\delta(\boldsymbol{x}_0), \mathbb{R}^n)$
- (3) $J\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = [J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})]^{-1}$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$

  注1：函数$\boldsymbol{g}$就是$\boldsymbol{f}$在$\boldsymbol{y}_0$点附近的反函数

  注2：定理只保证在$\boldsymbol{y}_0$点局部存在反函数

第12-2课：反函数/逆映射定理

- **反函数/逆映射定理** (整体版)

  设 $\boldsymbol{f} \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$, $D \subset \mathbb{R}^n$ 为开集，且

  1) $\boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^n$ 为单射

  2) $\forall \boldsymbol{y} \in D$, $\det[J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})] \neq 0$

则记 $\Omega = \boldsymbol{f}(D)$, 存在$\boldsymbol{f}$的反函数 $\boldsymbol{f}^{-1} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$

且 $J\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{x}) = [J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})]^{-1}$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{x})$, $\forall \boldsymbol{x} \in \Omega$

证：由1)即得到反函数存在；

为得到反函数的光滑性和雅可比矩阵公式

只须应用局部版反函数定理 $\square$

第12-2课：反函数/逆映射定理

✓ **例1.** 已知平面极坐标变换

$$\boldsymbol{f}: x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$$

计算其雅可比矩阵和逆变换的雅可比矩阵

解：用微分法如下

$$d\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} d(r\cos\theta) \\ d(r\sin\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta \\ \sin\theta dr + r\cos\theta d\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ J\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}, \quad \det(J\boldsymbol{f}) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

$$\therefore\ J\boldsymbol{f}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \square$$

第12-3课：高阶偏导数

高阶偏导数

- 本节仅考虑数值函数

  设 $f: D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n$ 为开集

  - **1阶偏导数：** $D_i f(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})$ 称为一阶偏导数
  - **2阶偏导数：** 若 f 在 D 内每一点都有一阶偏导数, 则

$D_i f : D \to \mathbb{R}$ 可继续考虑偏导数, 得到二阶偏导数, 记为

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} := \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} := \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$$

  - **n阶偏导数：**

$$\frac{\partial^n f}{\underbrace{\partial x_i \partial x_j \cdots \partial x_k}_{n\text{个}}} := \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial^{n-1} f}{\underbrace{\partial x_j \cdots \partial x_k}_{n-1\text{个}}}\right) \quad \text{——递推定义}$$

第12-3课：高阶偏导数

✓ 例1. $z=\arctan\dfrac{y}{x},\ x\neq 0,$ 计算所有2阶偏导数

解：依次计算 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{y}{x^2+y^2},\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x}{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)=\frac{-1}{x^2+y^2}+\frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\qquad \square$$

【注意】$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ —— 是否偶然？

第12-3课：高阶偏导数

✓ 例2.

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2>0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$$ 求原点2阶混合偏导数

解：需要先计算原点附近的一阶偏导数，令 $x^2+y^2>0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}[xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}]=y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+xy\frac{\partial}{\partial x}[1-\frac{2y^2}{x^2+y^2}]$$

$$=y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+\frac{4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$$

注意x-y的对称性

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{x(y^4+4x^2y^2-x^4)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$$

第12-3课：高阶偏导数

✓ 例2. $$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2>0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$$ 求原点2阶混合偏导数

解(续)：前面得到

当 $x^2+y^2>0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$

在原点：$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0=\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ ——类似得到

由此可得

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right]=\lim_{y\to 0}\frac{[-y-0]}{y}=-1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right]=\lim_{x\to 0}\frac{x-0}{x}=1 \qquad \square$$

第12-3课：高阶偏导数

- Clairaut定理 (1739-1740-法)

设 $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$是开集, $P=(x_0, y_0) \in D$

若 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ 和 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ 在D内存在且在P点连续, 则二者在该点相等

证：任取 $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \in D$, $\Delta x, \Delta y \neq 0$

分别记 $\varphi(\Delta x) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0+\Delta x, y_0)$, Δy 固定

$\psi(\Delta y) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y)$, Δx 固定

注意到

$$\varphi(\Delta x) - \varphi(0) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0+\Delta y) + f(x_0, y_0)$$

$$\psi(\Delta y) - \psi(0) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0+\Delta x, y_0) + f(x_0, y_0) = \varphi(\Delta x) - \varphi(0)$$

第12-3课：高阶偏导数

- Clairaut定理证明 (续)：$\varphi(\Delta x)-\varphi(0)=\psi(\Delta y)-\psi(0) \qquad (*)$

  上式左端应用一元函数微分中值定理 $\exists\theta_1\in(0,1)$

$$\varphi(\Delta x)-\varphi(0)=\varphi'(\theta_1\Delta x)\Delta x$$

$$=[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1\Delta x,y_0)]\Delta x$$

继续应用一元函数微分中值定理 $\exists\theta_2\in(0,1)$

$$\varphi(\Delta x)-\varphi(0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\theta_2\Delta y)\Delta x\Delta y$$

回到等式$(*)$右端类似地讨论, 得到 $\eta_1,\eta_2\in(0,1)$

$$\psi(\Delta y)-\psi(0)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0+\eta_1\Delta x,y_0+\eta_2\Delta y)\Delta x\Delta y$$

代入等式$(*)$两端, 消去 $\Delta x\Delta y$之后取极限 ——

注意两个二阶混合偏导数的连续性, 便得需要的结果 $\square$

第12-3课：高阶偏导数

- **推论**

设 $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$是开集

若f在D内所有k阶偏导数都存在且连续，则k阶偏导数的值与关于自变量的求导次序无关。

例如：
$$\frac{\partial^4 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3 \partial x_1} = \frac{\partial^4 f}{\partial x_3 \partial x_2 \partial x_1^2} = \frac{\partial^4 f}{\partial x_1^2 \partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial^4 f}{\partial x_2 \partial x_1 \partial x_3 \partial x_1} = \cdots$$

- **记号**：设 $D \subset \mathbb{R}^n$是开集

$$C^k(D) := \{ f: D \to \mathbb{R} \mid f\text{的所有}k\text{阶偏导数在}D\text{ 中连续}\}$$

称为D上k阶连续可微函数空间/集合

第12-3课：高阶偏导数

- **例3.** $\Delta := \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ 称为Laplace微分算子，设 $f \in C^2$

令 $u = f(r),\ r = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$，已知$\Delta u = 0$，求 $f(r) = ?$

解：$\dfrac{\partial u}{\partial x_i} = f'(r)\dfrac{\partial r}{\partial x_i} = f'(r)\dfrac{x_i}{r},\ i = 1, \cdots, n \qquad [\dfrac{\partial r}{\partial x_i} = \dfrac{x_i}{r}]$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}[f'(r)\frac{x_i}{r}] = f''(r)\frac{x_i^2}{r^2} + f'(r)\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{x_i}{r}) \qquad [\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{1}{r}) = -\frac{x_i}{r^3}]$$

$$= f''(r)\frac{x_i^2}{r^2} + f'(r)(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}), \quad i = 1, \ldots, n$$

$$\therefore\ \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = f''(r) + f'(r)\frac{n-1}{r} = 0$$

注意 $\dfrac{d}{dr}[r^{n-1} f'(r)] = r^{n-1}[f''(r) + \dfrac{n-1}{r} f'(r)] = 0$

$$\therefore\ r^{n-1} f'(r) = const. \quad f'(r) = \frac{c}{r^{n-1}}, \quad f(r) = \begin{cases} a + b/r^{n-2}, & n > 2 \\ a + b\ln r, & n = 2 \end{cases} \qquad \square$$

问：对多元函数中值定理是否成立？

定理：设$f:D\to R$可微分，区域D是凸的，则任意a，$b\in D$，在a,b确定的直线上存在一点ξ使得

$$f(b)-f(a)=Jf(\xi)(b-a)$$

问：向量值函数中值定理是否成立？（一般：否）

定理：设$f:D\to R^m$可微分，区域D是凸的，则任意a，b$\in$D，在a,b确定的直线上存在一点ξ使得

$$\|f(b)-f(a)\|\le\|Jf(\xi)\|\|(b-a)\|$$

称之为“拟微分中值定理”

推论：设$f:D\to R^m$可微分，区域D是凸的，如果Jf=0, 则f在D上为一常量。

注：上述结论对一般区域都成立。证明用到连通性。

第12课：

- **作业：**

  练习题14.8：1[自己练习], 2.

  练习题14.9：1(2,3,6,8-10,[其余自己练习]), 2-3, 5, 6(2).

  问　题14.9：1*-3*.

- **预习**（下次课内容）：

  第14.10节 Taylor公式 (多元函数的多项式近似)

  第14.11节 极值