第2课：一般级数的敛散性判别

第9章 数 项 级 数

- 内容：

第9.4节 一般级数（变号级数）

第9.5节 绝对收敛与条件收敛

上节课内容回顾：

定义：数项级数收敛与发散：等价于级数前n项和数列极限的收敛于否。

基本性质：
（1）线性性质
（2）有限项无关性（注意级数的“和“会改变）
（3）对收敛级数任意加括号不改变收敛性于和（结合律成立）
（也可用于判别发散）

正项级数的收敛性判别
（0）必要条件（判别发散）
（1）充要条件（前n 项和有界）
（2）比较判别，极限形式；比阶判别
（3）积分判别
（4）根值判别
（5）比值判别
（6）其他判别*

第2-1课：一般级数：交错级数判别法

一般级数的敛散性判别

- **一般级数**：级数中的各项有正有负(不限制符号)
- 实例：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}=1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^p}+\cdots$ （变号 $p-$级数）

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}=\sin 1+\frac{\sin 2}{2}+\frac{\sin 3}{3}+\frac{\sin 4}{4}+\cdots$$

➢ **一般级数收敛准则（Cauchy）**

级数$\sum a_n$ 收敛=部分和数列$\{S_n\}$收敛：

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbf{N},\quad \forall n>n_0,\ m=1,2,3,\cdots,$$

$$|S_n-S_{n+m}|<\varepsilon \quad\Leftrightarrow\quad |\sum_{k=1}^{m}a_{n+k}|<\varepsilon$$ （尾项级数任意小）

第2-1课：一般级数：交错级数判别法

- **交错级数：** 级数中正负项交错出现

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots, \qquad a_n > 0$$

- **部分和分析**（加括号）：

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n}) = S_{2n+1} - a_{2n+1}$$

$$S_{2n+1} = a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots - (a_{2n} - a_{2n+1}) = S_{2n} + a_{2n+1}$$

- **假设：** $\{a_n\}$单调减（参考前面变号*p*-级数）

  则$\{S_{2n}\}$单调增，$\{S_{2n+1}\}$单调减且都有界：

$$0 \le S_{2n} \le S_{2n+1}, \quad a_{2n+1} \le S_{2n+1} \le a_1$$

  由此导出$\{S_{2n+1}\}$, $\{S_{2n}\}$都收敛

交错级数判敛法

Thm (交错项级数的Leibnitz判别法)

$$a_n > 0, a_n \downarrow, a_n \to 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n\text{收敛, 其和}S \le a_1.$$

Proof. $a_n \downarrow,\ S_{2n} = (a_1 - a_2) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n}) \ge 0,\ S_{2n} \uparrow,$

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \le a_1,$$

即$\{S_{2n}\}$单调上升有上界a_1, 从而有极限, $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S \le a_1.$

又$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}, \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 所以

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = S. \ \square$$

第2-1课：一般级数：交错级数判别法

✓ 例1：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}=1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^p}+\cdots$

- 当 $p\le 0$，级数通项的极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}\ne 0$，级数发散
- 当 $p>0$，$\left\{\frac{1}{n^p}\right\}$单调减且趋于0

根据Leibniz判别法，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 收敛 □

✓ 类似地有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}=\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}-\frac{1}{\ln 5}+\cdots$$ 收敛 □

第2-1课：一般级数：交错级数判别法

✓ 例2：$\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$

解：注意 $\sin(\pi\sqrt{n^2+1})\approx\sin(\pi n)=0$，精确定量刻画如下

应用三角公式（正弦二角和）：

$$\begin{aligned}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})&=\sin[\pi(\sqrt{n^2+1}-n)+\pi n]\\&=\sin[\pi(\sqrt{n^2+1}-n)]\cos(\pi n)\\&=(-1)^n\sin[\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}]\end{aligned}$$

由此可见, 上面级数是一个交错级数；

易见$\left\{\sin[\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}]\right\}$单调减趋于0, 所以上面级数收敛 □

第2-1课：一般级数：交错级数判别法

✓ 例3：$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos[n^2\pi/(n+1)]}{\ln(n+1)}$

解：注意 $\cos\dfrac{n^2\pi}{n+1}\approx\cos n\pi=(-1)^n$，级数很可能是交错的(?)

仍用三角公式（余弦二角和）：

$$\cos\frac{n^2\pi}{n+1}=\cos[(n-1+\frac{1}{n+1})\pi]$$
$$=\cos[(n-1)\pi]\cos\frac{\pi}{n+1}=(-1)^{n-1}\cos\frac{\pi}{n+1}$$

可见，原级数是一个交错级数；

容易验证$\left\{\dfrac{\cos[\pi/(n+1)]}{\ln(n+1)}\right\}$单调减趋于0

综上, 由Leibniz判别法可知原级数收敛　□

第2-2课：乘积型级数及其判别法

乘积型级数的敛散性判别

- **乘积型级数：** $\sum a_n b_n$ （交错级数的推广）
- **实例：** $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}=1-\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3^x}-\frac{1}{4^x}+\cdots$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=1+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}=\sin 1+\frac{\sin 2}{2}+\frac{\sin 3}{3}+\frac{\sin 4}{4}+\cdots$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{2^{n-1}}=\frac{\cos x}{1}+\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\cos 3x}{4}+\frac{\cos 4x}{8}+\cdots$$
- **判别思路：** 设法利用 $\sum a_n$ 的部分和以及 $\{b_n\}$ 的单调性

Lemma (分部求和公式--Abel引理) $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}, 1 \le i \le p$, 则

(1)记$B_k = \sum_{i=1}^{k} \beta_i, \quad k = 1, 2, \cdots, p$, 则

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \beta_i = \sum_{i=1}^{p-1} (\alpha_i - \alpha_{i+1}) B_i + \alpha_p B_p;$$

(2)若$\alpha_1 \ge \alpha_2 \ge \cdots \ge \alpha_p$(或$\alpha_1 \le \alpha_2 \le \cdots \le \alpha_p$), 且$|B_k| \le L$,

$k = 1, 2, \cdots, p$, 则

$$\left| \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \beta_i \right| \le L(|\alpha_1| + 2|\alpha_p|).$$

Proof. (1)记$B_0=0$,则

$$\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\beta_i=\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\left(B_i-B_{i-1}\right)=\sum_{i=1}^{p}\alpha_iB_i-\sum_{i=1}^{p}\alpha_iB_{i-1}$$

$$=\sum_{i=1}^{p}\alpha_iB_i-\sum_{i=0}^{p-1}\alpha_{i+1}B_i$$

$$=\sum_{i=1}^{p-1}\left(\alpha_i-\alpha_{i+1}\right)B_i+\alpha_pB_p-\alpha_1B_0$$

$$=\sum_{i=1}^{p-1}\left(\alpha_i-\alpha_{i+1}\right)B_i+\alpha_pB_p$$

(2)α_i单调, B_i有界,利用(1)中结论,有

$$\left|\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\beta_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{p-1}(\alpha_i-\alpha_{i+1})B_i+\alpha_p B_p\right|$$

$$\le \sum_{i=1}^{p-1}|\alpha_i-\alpha_{i+1}||B_i|+|\alpha_p||B_p|$$

$$\le L\left(\sum_{i=1}^{p-1}|\alpha_i-\alpha_{i+1}|+|\alpha_p|\right)$$

$$\le L\left(|\alpha_1|+2|\alpha_p|\right).\square$$

Thm (Dirichlet判别法)

$$\left.\begin{aligned}&(1)\text{数列}\{a_n\}\text{单调趋于}0;\\&(2)\left|\sum_{k=1}^{n} b_k\right| \le M, \forall n;\end{aligned}\right\} \Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} a_n b_n\text{收敛.}$$

Proof. $\left|\sum_{i=n}^{m} b_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{m} b_i - \sum_{i=1}^{n-1} b_i\right| \le \left|\sum_{i=1}^{m} b_i\right| + \left|\sum_{i=1}^{n-1} b_i\right| \le 2M, \forall n < m.$

$\{a_n\}$单调,由Abel引理,

$$\left|\sum_{i=1}^{p} a_{n+i} b_{n+i}\right| \le 2M(|a_{n+1}| + 2|a_{n+p}|), \forall n, p.$$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,则

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, s.t. |a_n| < \varepsilon, \forall n > N.$$

从而有

$$\left|\sum_{i=1}^{p} a_{n+i} b_{n+i}\right| \le 6M\varepsilon, \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}.$$

由Cauchy收敛准则,$\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_n b_n$收敛.□

Remark. Leibnitz判别法是Dirichlet判别法的特殊情形.

Thm (Abel判别法)

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ \text{数列}\{a_n\}\text{单调且有界,}\\[2ex](2)\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}b_k\text{收敛}\end{array}\right\}\Rightarrow\sum_{k=1}^{+\infty}a_nb_n\text{收敛.}$$

Proof. $\{a_n\}$单调且有界,从而有极限,设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a.$

已知$\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}b_k$收敛, 由Dirichlet判别法, $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}(a_n-a)b_n$ 收敛.

故$\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}a_nb_n=\sum_{k=1}^{+\infty}(a_n-a)b_n+a\sum_{k=1}^{+\infty}b_n$收敛.□

第2-2课：乘积型级数及其判别

✓ 例5：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}=\sin 1+\frac{\sin 2}{2}+\frac{\sin 3}{3}+\frac{\sin 4}{4}+\cdots$

解：这不是交错级数，可看作乘积型级数

其中$\{b_n\}=\{1/n\}$ 单调减趋于0

为应用Dirichlet 判别法，只需验证 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\sin k$ 有界

为此应用三角公式（可以归纳证明）

$$2\sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}\sin kx=\cos\frac{x}{2}-\cos(n+\frac{1}{2})x$$

令x=1得 $|\sum_{k=1}^{n}\sin k|=\dfrac{|\cos\frac{1}{2}-\cos(n+\frac{1}{2})|}{2|\sin\frac{1}{2}|}\le\dfrac{1}{|\sin\frac{1}{2}|}$

综上，应用Dirichlet 判别法导出原级数收敛　□

第2-2课：乘积型级数及其判别

- ✓ 例6：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}$, $x\neq 2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$

解：类似例5的方法可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$ 收敛 (教材pp366-367)

而 $b_n=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$ 单调减有界（收敛于1/e）

应用Abel判别法，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}$ 收敛 □

- ✓ 例7：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n}$

解：注意 $\sin^2 n=\frac{1-\cos 2n}{2}$, $\therefore\ \frac{\sin^2 n}{n}=\frac{1}{2n}-\frac{\cos 2n}{2n}$;

已知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{n}$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n}$ 发散 □

第2-3课：绝对收敛与条件收敛

✓ **例1** (回忆)： $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}=1-\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3^x}-\frac{1}{4^x}+\cdots$

已知当 $x>0$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ 收敛

但 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 仅当 $x>1$ 时收敛，也即

在 $0<x\le 1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ 收敛，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right|$ 发散

由此启发, 级数收敛有不同的类型 ——

第2-3课：绝对收敛与条件收敛

绝对收敛与条件收敛

- **绝对收敛判别法** （对于一般级数）

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 必收敛

证：记 $a_n^+=\dfrac{|a_n|+a_n}{2}$, $a_n^-=\dfrac{|a_n|-a_n}{2}$, $a_n^+\geq 0,\ a_n^-\geq 0,$

则 $|a_n|=a_n^++a_n^-\geq a_n^+,\ a_n^-\geq 0,$

已知 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，由比较判别法 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^+,\sum_{n=1}^{\infty}a_n^-$ 都收敛

注意 $a_n=a_n^+-a_n^-$, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^+-\sum_{n=1}^{\infty}a_n^-$ 收敛 □

Remark. $\sum a_n$发散,$\sum b_n$发散$\Rightarrow \sum(a_n \pm b_n)$？未定！

$\sum a_n$条件收敛,$\sum b_n$条件收敛$\Rightarrow \sum(a_n \pm b_n)$？收敛！

$\sum a_n$绝对收敛,$\sum b_n$绝对收敛$\Rightarrow \sum(a_n \pm b_n)$绝对收敛;

$\sum a_n$绝对收敛,$\sum b_n$条件收敛$\Rightarrow \sum(a_n \pm b_n)$条件收敛;

$\sum a_n$绝对收敛,$\sum b_n$发散$\Rightarrow \sum(a_n \pm b_n)$发散;

$\sum a_n$条件收敛,$\sum b_n$发散$\Rightarrow \sum(a_n \pm b_n)$发散.

第2-3课：绝对收敛与条件收敛

- **绝对收敛** （更强的收敛）

  如果 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛。

- **条件收敛** （较弱的收敛）

  若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，但 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散，则称 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛。

- **注**：正项级数的收敛判别法都可以用来判断绝对收敛；

  有些还可以用来判断级数发散（通项不趋于0）。

例. $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$ 条件收敛. Taylor展开!

Proof. $n\to+\infty$时, $\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}=\frac{(-1)^n}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{n}}$

$$=\frac{(-1)^n}{n}\left[1-\frac{(-1)^n}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]=\frac{(-1)^n}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{(-1)^n}{n}o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$\sum\frac{(-1)^n}{n}$条件收敛, $\sum\frac{1}{n^2}$绝对收敛, $\sum\frac{(-1)^n}{n}o\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛, 故原级数条件收敛.□

例. $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$发散.

Taylor展开!

Proof. $n\to+\infty$时, $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}$

$$=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\cdot\left[1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n}+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$\sum\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$条件收敛, $\sum\frac{1}{n}$发散, $\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}O\left(\frac{1}{n}\right)\right|\le\frac{C}{n^{3/2}}$,

$\sum\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}O\left(\frac{1}{n}\right)$绝对收敛, 故原级数发散.□

Remark.前面两个例子, $n\to+\infty$时,

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}\sim\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}},\ \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}\sim\frac{(-1)^n}{n},$$

$\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$与$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$都条件收敛, 但$\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$发散,

$\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$收敛. 这说明比较判别法、等价无穷小判敛法等判敛法仅对非负项级数适用.

例. $a_n=\dfrac{\sin n}{n^p+\sin n}$, 讨论$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$的收敛性.

解: 1) $p\le 0$时, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\ne 0$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$发散.

2) $p>1$ 时, $|a_n|=\dfrac{|\sin n|}{|n^p+\sin n|}\le\dfrac{1}{n^p-1}$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$绝对收敛.

3) $0<p\le 1$ 时,

$$|a_n|=\frac{|\sin n|}{|n^p+\sin n|}\ge\frac{\sin^2 n}{n^p+1}\ge\frac{\sin^2 n}{2n^p}=\frac{1-\cos 2n}{4n^p},$$

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^p}$ 发散, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\cos 2n}{n^p}$ 收敛 (Dirichlet), 则$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1-\cos 2n}{4n^p}$发散,

从而$\sum |a_n|$发散.

$$a_n=\frac{\sin n}{n^p}\left(1+\frac{\sin n}{n^p}\right)^{-1}=\frac{\sin n}{n^p}\left(1-\frac{\sin n}{n^p}+o\left(\frac{\sin n}{n^p}\right)\right)$$

$$=\frac{\sin n}{n^p}-\frac{\sin^2 n}{n^{2p}}+o\left(\frac{\sin^2 n}{n^{2p}}\right), n\to+\infty\text{时}.$$

- $\frac{1}{2}<p\le 1$时,

$\sum\frac{\sin n}{n^p}$ 收敛, $\left|\frac{\sin^2 n}{n^{2p}}\right|<\frac{1}{n^{2p}}$, $\sum\frac{\sin^2 n}{n^{2p}}$ 收敛, 故$\sum a_n$收敛.

- $0 < p \leq \dfrac{1}{2}$时,

$$a_n - \frac{\sin n}{n^p} = -\frac{\sin^2 n}{n^{2p}} + o\left(\frac{\sin^2 n}{n^{2p}}\right) \sim -\frac{\sin^2 n}{n^{2p}}, n \to +\infty\text{时}.$$

$\sum \dfrac{\sin^2 n}{n^{2p}} = \sum \dfrac{1-\cos 2n}{2n^{2p}}$发散, 因此$\sum\left(a_n - \dfrac{\sin n}{n^p}\right)$发散.

而$\sum \dfrac{\sin n}{n^p}$收敛, 故$\sum a_n$发散.

$$\text{综上,} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n^p + \sin n} \begin{cases} \text{发散,} & p \leq 1/2; \\ \text{条件收敛,} & 1/2 < p \leq 1; \\ \text{绝对收敛,} & p > 1. \end{cases} \quad \square$$

例. $a_n=\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right), p>0,$ 讨论$\sum_{n=2}^{+\infty}a_n$的收敛性.

解: $a_n=\frac{(-1)^n}{n^p}-\frac{1}{2n^{2p}}+o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right).$

- $p>1$时, $\sum a_n$ 绝对收敛.
- $\frac{1}{2}<p\le 1$时, $\sum a_n$ 条件收敛.
- $0<p\le\frac{1}{2}$时, $a_n-\frac{(-1)^n}{n^p}=-\frac{1}{2n^{2p}}+o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)<0, \forall n>>1.$

$\sum\left(a_n-\frac{(-1)^n}{n^p}\right)$发散,而$\sum\frac{(-1)^n}{n^p}$条件收敛,故$\sum a_n$ 发散.□

Remark.Taylor展开在级数判敛中的重要性.

Question.用Taylor展开的方法讨论以下级数的敛散性:

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\left[\sqrt{n}+(-1)^n\right]^p},\quad \begin{cases} p\le 1,\text{发散;}\\ 1<p\le 2,\text{条件收敛;}\\ p>2,\text{绝对收敛.}\end{cases}$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\left[n+(-1)^n\right]^p},\quad \begin{cases} p\le 0,\text{发散;}\\ 0<p\le 1,\text{条件收敛;}\\ p>1,\text{绝对收敛.}\end{cases}$$

注：如何判别绝对收敛还是条件收敛？

利用正项级数判别法或一般级数的Cauchy Abel , Dirichlet判别绝对值级数收敛；

条件收敛的还需要判别其对应的绝对值级数发散。

第2-3课：绝对收敛与条件收敛

- **Cauchy 根式判别法**

- 1) 若存在 $0<q<1$，使得n充分大以后 $\sqrt[n]{|a_n|}\le q$，
  则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛；
- 2) 若有无穷多个n使得 $\sqrt[n]{|a_n|}\ge 1$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。

- **根式判别法的极限形式**

设 $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=q$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 当 $q<1$时绝对收敛，$q>1$时发散

- 注：$q=1$时本判别法失效

第2-3课：绝对收敛与条件收敛

- D'Alembert 比值判别法

- 1) 若存在 $0<q<1$，使得n充分大以后 $a_n \neq 0, \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q,$ 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛；
- 2) 若n充分大以后 $a_n \neq 0, \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1,$ 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。

第2-3课：绝对收敛与条件收敛

- **D'Alembert 判别法的极限形式**：设n充分大后 $a_n \neq 0$
  - 1) 若 $\limsup\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1,$ 则级数 $\sum a_n$ 绝对收敛；
  - 2) 若 $\liminf\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1,$ 则级数 $\sum a_n$ 发散。
  - **注**：$\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ 时判别法失效。

第2-3课：绝对收敛与条件收敛

- 例1 (再回忆)：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$

  已知当$x>0$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ 收敛

  但 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 仅当 x>1 时收敛，综上：

  $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ 在0<x≤1时条件收敛, 在x>1时绝对收敛 □

- **注**：根式判别法和比值判别法都对该级数失效：

  $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n})^{-x}=1$, $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n^x}{(n+1)^x}=1$。

第2-3课：绝对收敛与条件收敛

✓ **例5** (回忆)：已知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$ 收敛，是否绝对收敛？

分析：为了研究 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n}{n}\right|$，注意 $\left|\frac{\sin n}{n}\right| \geq \frac{\sin^2 n}{n} \geq 0$,

由例7知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n}$ 发散,

所以由比较判别法 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n}{n}\right|$ 也发散,

由此可见，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$ 是条件收敛 □

第2-3课：绝对收敛与条件收敛

✓ **例8**：研究收敛性 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^p}$

解：$p>1$时由 $|\frac{\cos n}{n^p}|\le\frac{1}{n^p}$ 及比较判别，原级数绝对收敛；

$0<p\le 1$ 时，$\{1/n^p\}$单调趋于0，$\sum_{k=1}^{n}\cos k$ 有界(回忆前面讨论)

应用Dirichlet判别法，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^p}$ 收敛

再注意 $|\frac{\cos n}{n^p}|\ge\frac{\cos^2 n}{n^p}=\frac{1}{2n^p}+\frac{\cos 2n}{2n^p}$，

类似例7可导出 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{n^p}$ 发散，进而 $\sum_{n=1}^{\infty}|\frac{\cos n}{n^p}|$ 发散，

综上，原级数$p>1$时绝对收敛，$0<p\le 1$时条件收敛 □

第2课：一般级数的敛散性判别

- **预习（下次课内容）：**

  第9.5节 绝对收敛与条件收敛 (续)

  第10.1节 函数项级数及其一般性质

  第10.2节 函数项级数的一致收敛性质

- **作业（本次课）：**

  练习题9.4：1*(1-2), 2*, 3-4, 5(1-3), 6-7, 9-10.

  练习题9.5：1(1-3,5), 2(1-2,3*-4*).

  问题9.4：1(2)*, 5*-6*； 问题9.5：1(1)*.