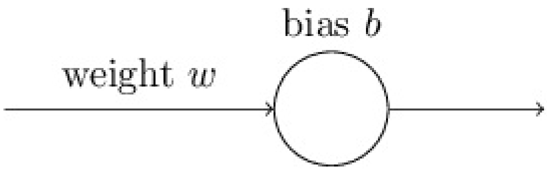
改进的Cost函数Cross-entropy使神经网络学习更快

> 我们理想的情况是神经网络Cost下降的很快

神经网络是如何学习的

举个例子：一个简单的神经网络模型:只有一个神经元，一个输入一个输出，类似如:

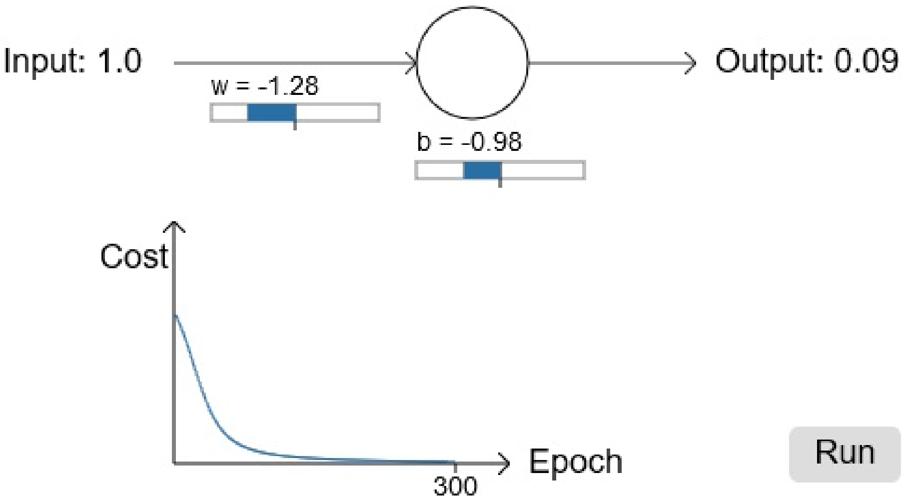


我们使用梯度下降算法来训练这个模型

神经网络学习过程(Cost的变化情况)

假设:输入为1,输出值为0

假设权重w我们设置为0.6,初始偏向b设置为0.9，初始预测的输出a=0.82,学习率为0.15,迭代学习300次:

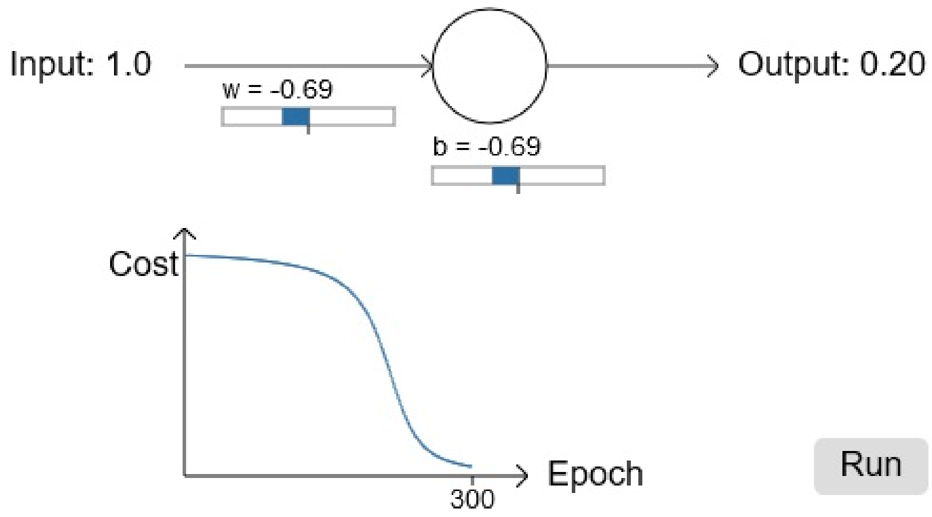


具体演示动画参考

神经网络快速的学习权重和偏向用来降低Cost，虽然最后训练结果和0有些偏差，但是0.09也是很好的结果了

> 改变初始权重和偏向,预计输出,我们在观察Cost函数的变化情况

如果我们改变神经元的初始权重和偏向，假设权重ω我们设置为2.0,初始偏向b设置为2.0，初始预测的输出a= 0.98,学习率为0.15,迭代学习300次:



具体演示动画参考

可以看出Cost函数一开始下降很慢，迭代到200次左右才开始出现明显的下降,而且最后输出值是0.2要比上一个例子0.09差很多。

为什么神经网络会出现一开始学习很慢后来学习变快的情况呢

> **神经网络学习慢说明了偏导数$\partial C/\partial \omega$ 和 $\partial C/\partial b$比较小**

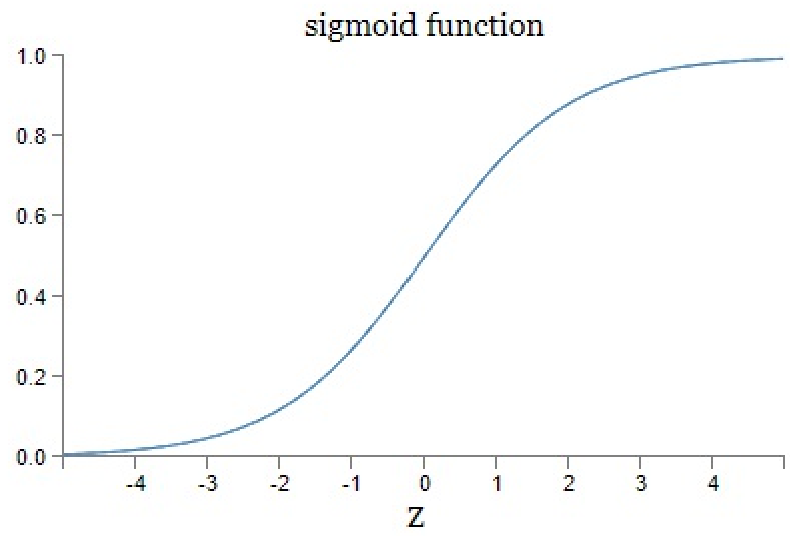
> 回顾之前的Cost函数(二次Cost函数)

$$C = \frac{(y-a)^2}{2}$$

上式中y是真实输出，a是相应的预测输出，$a = \sigma(z)$,z为中间变量($z = \omega x + b$),分别对ω和b求偏导

$$\frac{\partial C}{\partial w} = (a-y)\sigma'(z)x = a\sigma'(z) \text{（把}_{\mathrm{x=1,y=0}}\text{带人）}$$
$$\frac{\partial C}{\partial b} = (a-y)\sigma'(z) = a\sigma'(z),$$

> 回顾下一开始用的激活函数sigmoid函数



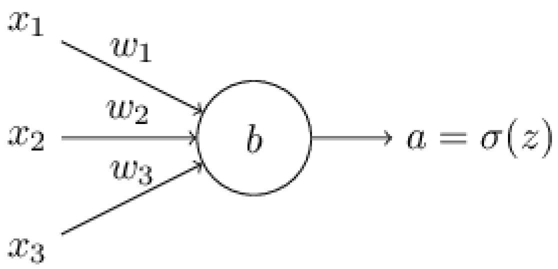
学习速度取决于$a\sigma'(z)$,而a在{0,1}之间，所以a对学习速度影响较小。从图像中可以看出在神经元输出接近0或1的时候，曲线变的很平缓,这个时候$\sigma'(z)$小，所以学习速度很慢。

> 二次Cost函数的缺点

当神经元输出值接近0或1的时候，学习速度很慢，学习的速度跟参数的选择关系很大。

介绍cross-entropy 损失函数（cost function）

使用一个更加复杂的神经网络:
他有一个神经元，三个输入，一个输出



如图$\alpha = \sigma(z)$, 其中 $z = \sum_j w_j x_j + b$

> 定义新的损失函数cross-entropy如下：

$$C = -\frac{1}{n}\sum_x [y \ln a + (1-y)\ln(1-a)]$$

把$\alpha = \sigma(z)$带入上式:

$$C = -\frac{1}{n}\sum_x [y \ln \sigma(z) + (1-y)\ln(1-\sigma(z))]$$

分别对ω和b求偏导:

> 对ω求偏导

> $$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial w_j} &= -\frac{1}{n}\sum_x\left(\frac{y}{\sigma(z)}-\frac{(1-y)}{1-\sigma(z)}\right)\frac{\partial\sigma}{\partial w_j}\\ &= -\frac{1}{n}\sum_x\left(\frac{y}{\sigma(z)}-\frac{(1-y)}{1-\sigma(z)}\right)\sigma'(z)x_j\\ &= -\frac{1}{n}\sum_x\frac{\sigma'(z)x_j}{\sigma(z)(1-\sigma(z))}(\sigma(z)-y)(\text{合并同类项})\end{aligned}$$
>
> 根据sigmoid函数$\sigma(z)=1/(1+e^{-z})$,对它求导得出$\sigma'(z)=\sigma(z)(1-\sigma(z))$带入上式得出:
>
> $$\frac{\partial C}{\partial w_j}=\frac{1}{n}\sum_x x_j(\sigma(z)-y)=\frac{1}{n}\sum_x x_j(a-y) \tag{1}$$

> 对b求偏导
>
> $$\frac{\partial C}{\partial b}=\frac{1}{n}\sum_x(\sigma(z)-y)=\frac{1}{n}\sum_x(a-y) \tag{2}$$

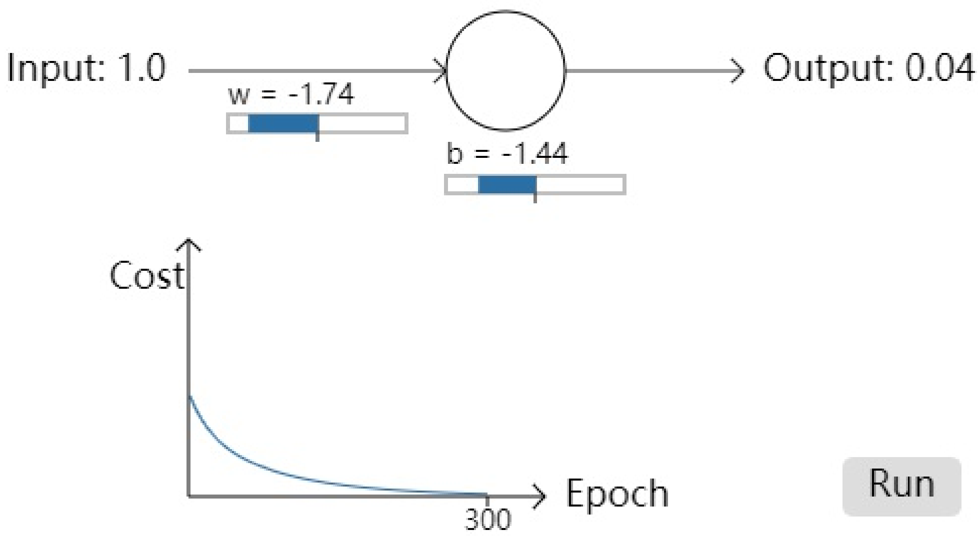
由(1)(2)两个式可以知道:
学习的快慢(即偏导数的大小)取决于a-y,即输出层的error

> cross-entropy函数的好处是:

错误大时,更新多,学得快. 错误小时,学习慢

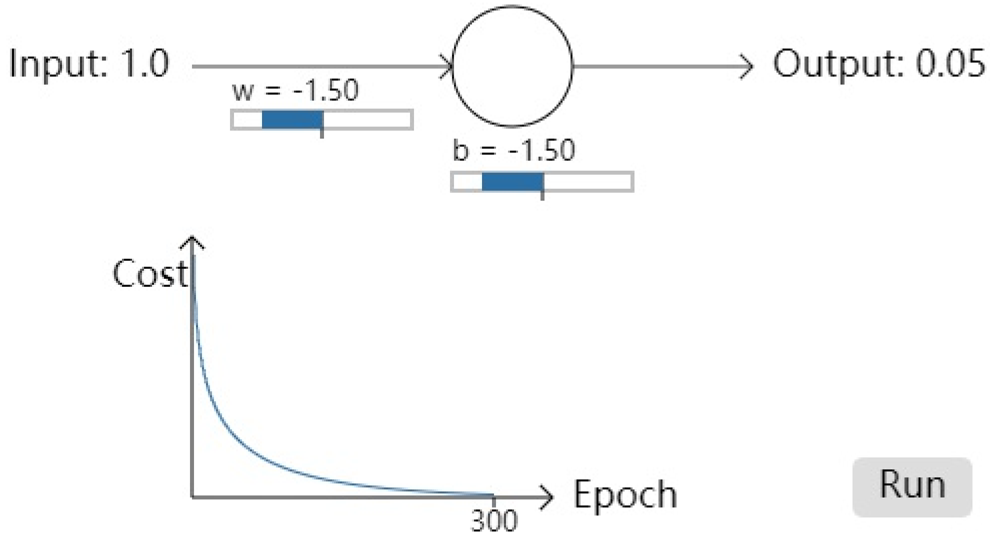
演示cross-entropy损失函数的学习情况

> 起始权重为0.6,偏向为0.9，其他都不变



具体演示动画参考
可以看出，cross-entropy cost函数在一开始就学习的很快（曲线下降的很快），而且最后预测输出为0.04,非常接近0，比之前的二次Cost的效果（0.09）好很多。

> 起始权重和偏向都设置为2.0



具体演示动画参考

总结:

cross-entropy cost几乎总是比二次cost函数好
如果神经元的方程是线性的, 用二次cost函数 (不会有学习慢的问题)