Priebeh funkcie - 2.časť

Zuzana Minarechová

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Slovenská technická univerzita, Stavebná fakulta

19 Október 2020

Obsah prednášky

- **Priebeh funkcie**
- **Najmenšia a najväčšia hodnota funkcie**

Priebeh funkcie

Priebeh funkcie - postup

- Zisťovanie **priebehu funkcie** spočíva **v popise jej vlastností a načrtnutí jej grafu**.
- **Postup by mal obsahovať**:
  1) **Definičný obor funkcie**;

Priebeh funkcie - postup

- Zisťovanie **priebehu funkcie** spočíva **v popise jej vlastností a načrtnutí jej grafu**.
- **Postup by mal obsahovať**:
  1) **Definičný obor funkcie**;
  2) **Vlastnosti symetrie**: párnosť, nepárnosť, periodickosť;

Priebeh funkcie - postup

- Zisťovanie **priebehu funkcie** spočíva **v popise jej vlastností a načrtnutí jej grafu**.
- **Postup by mal obsahovať**:
  1) **Definičný obor funkcie**;
  2) **Vlastnosti symetrie**: párnosť, nepárnosť, periodickosť;
  3) **Významné body**: napr. nulové body funkcie (t.j. priesečníky s osami); body nespojitosti (v nich treba potom určiť jednostranné limity); body, v ktorých neexistuje derivácia a pod.;

Priebeh funkcie - postup

- Zisťovanie **priebehu funkcie** spočíva **v popise jej vlastností a načrtnutí jej grafu**.
- **Postup by mal obsahovať**:
  1) **Definičný obor funkcie**;
  2) **Vlastnosti symetrie**: párnosť, nepárnosť, periodickosť;
  3) **Významné body**: napr. nulové body funkcie (t.j. priesečníky s osami); body nespojitosti (v nich treba potom určiť jednostranné limity); body, v ktorých neexistuje derivácia a pod.;
  4) **Asymptoty** grafu funkcie;

Priebeh funkcie - postup

- Zisťovanie **priebehu funkcie** spočíva **v popise jej vlastností a načrtnutí jej grafu**.
- **Postup by mal obsahovať**:
  1) **Definičný obor funkcie**;
  2) **Vlastnosti symetrie**: párnosť, nepárnosť, periodickosť;
  3) **Významné body**: napr. nulové body funkcie (t.j. priesečníky s osami); body nespojitosti (v nich treba potom určiť jednostranné limity); body, v ktorých neexistuje derivácia a pod.;
  4) **Asymptoty** grafu funkcie;
  5) **Intervaly monotónnosti** funkcie a jej **lokálne extrémy**;

Priebeh funkcie - postup

- Zisťovanie **priebehu funkcie** spočíva **v popise jej vlastností a načrtnutí jej grafu**.
- **Postup by mal obsahovať**:
  1) **Definičný obor funkcie**;
  2) **Vlastnosti symetrie**: párnosť, nepárnosť, periodickosť;
  3) **Významné body**: napr. nulové body funkcie (t.j. priesečníky s osami); body nespojitosti (v nich treba potom určiť jednostranné limity); body, v ktorých neexistuje derivácia a pod.;
  4) **Asymptoty** grafu funkcie;
  5) **Intervaly monotónnosti** funkcie a jej **lokálne extrémy**;
  6) Intervaly, kde je funkcia **konvexná**, **konkávna** a jej **inflexné body**;

Priebeh funkcie - postup

- Zisťovanie **priebehu funkcie** spočíva **v popise jej vlastností a načrtnutí jej grafu**.
- **Postup by mal obsahovať**:
  1) **Definičný obor funkcie**;
  2) **Vlastnosti symetrie**: párnosť, nepárnosť, periodickosť;
  3) **Významné body**: napr. nulové body funkcie (t.j. priesečníky s osami); body nespojitosti (v nich treba potom určiť jednostranné limity); body, v ktorých neexistuje derivácia a pod.;
  4) **Asymptoty** grafu funkcie;
  5) **Intervaly monotónnosti** funkcie a jej **lokálne extrémy**;
  6) Intervaly, kde je funkcia **konvexná**, **konkávna** a jej **inflexné body**;
  7) **Náčrtok grafu** funkcie.

Priebeh funkcie - riešené príklady

Príklad

Zistíme priebeh funkcie $y = \frac{2x^3}{x^2-1}$.

Riešenie:

1) Definičný obor funkcie je množina $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$.
2) Počítame

$$y(-x) = \frac{2(-x)^3}{(-x)^2 - 1} = -\frac{2x^3}{x^2 - 1} = -y(x),$$

funkcia je nepárna, nie je periodická.

3) Funkcia je spojitá, jediný nulový bod funkcie je bod $[0, 0]$.
4) Asymptoty grafu funkcie bez smernice sú priamky $x = -1$ a $x = 1$, lebo jednostranné limity v nich sú nevlastné.

Priebeh funkcie - riešené príklady

Počítame asymptoty so smernicou:

$$
\begin{aligned}
k &= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2-1} = 2.\\
q &= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3-2x(x^2-1)}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x^2-1} = 0.
\end{aligned}
$$

Vzhľadom na nepárnosť funkcie existuje jediná asymptota jej grafu so smernicou: $y = 2x$.

5) Intervaly monotónnosti funkcie určíme pomocou prvej derivácie $y'(x) = \frac{2x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$. Analýza znamienok derivácie vedie k výsledku:
   - Funkcia je rastúca v intervaloch $(-\infty, -\sqrt{3}),\ (\sqrt{3}, \infty)$.
   - Funkcia je klesajúca v intervaloch $(-\sqrt{3}, -1),\ (-1, 1),\ (1, \sqrt{3})$.

Priebeh funkcie - riešené príklady

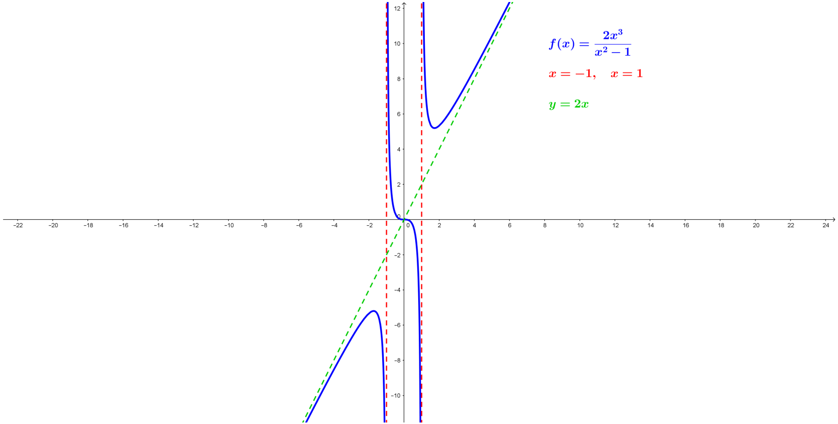
Lokálne extrémy funkcie sú v bodoch, kde funkcia mení rast na klesanie alebo naopak. Pretože body ± 1 nie sú v jej definičnom obore, jediné jej extrémy sú:

- Funkcia má lokálne maximum $-3\sqrt{3}$ v bode $-\sqrt{3}$.
- Funkcia má lokálne minimum $3\sqrt{3}$ v bode $\sqrt{3}$.
  (*pozn.* Všimnite si, že lokálne minimum je väčšie ako lokálne maximum.)

6) Intervaly, kde je funkcia konvexná, konkávna určíme pomocou druhej derivácie $y''(x) = \frac{4x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$, t.j.,
   - Funkcia je konvexná v intervaloch $(-1, 0)$, $(1, \infty)$,
   - funkcia je konkávna v intervaloch $(-\infty, -1)$, $(0, 1)$.

   Funkcia má jediný inflexný bod v bode $[0, 0]$.

7) Náčrtok grafu funkcie:



Obr.: Graf funkcie $y = \frac{2x^3}{x^2-1}$

Priebeh funkcie - riešené príklady

Príklad

Zistíme priebeh funkcie $y = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

Riešenie:

1) Definičný obor funkcie je interval $(-1, 1)$.
2) Počítame

$$y(-x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \ln\ \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1} = -\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = -f(x).$$

   Funkcia je nepárna, nie je periodická.
3) Funkcia je spojitá v definičnom obore, jediný nulový bod je bod $[0, 0]$.
4) Graf funkcie má asymptoty bez smernice $x = -1$ a $x = 1$ v krajných bodoch definičného oboru, lebo $\lim_{x\to 1^-} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \infty$ a $\lim_{x\to -1^+} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = -\infty$.

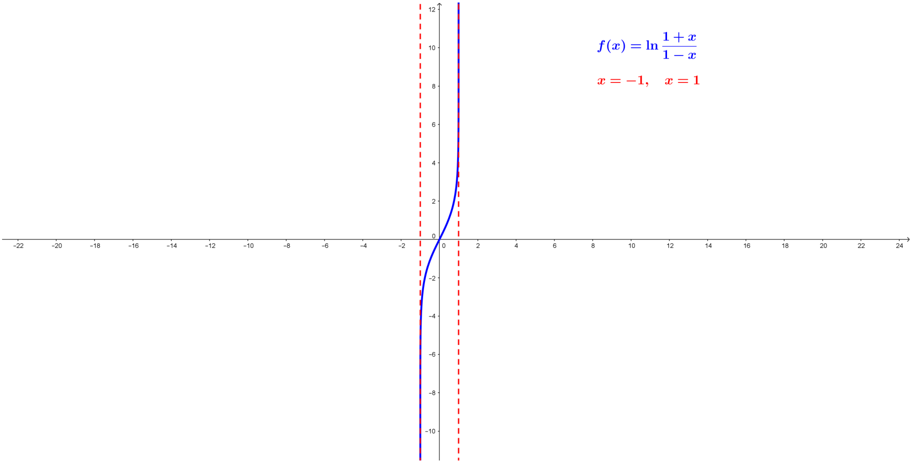
Priebeh funkcie - riešené príklady

Asymptoty so smernicou nemá z dôvodu ohraničenosti svojho definičného oboru.

5) Derivácia funkcie $y'(x) = \frac{2}{1-x^2}$ je kladná v celom definičnom obore, preto funkcia je rastúca, nemá lokálne extrémy.
6) Znamienko druhej derivácie $y''(x) = \frac{4x}{(1-x^2)^2}$ je zhodné so znamienkom x a mení sa v bode 0. Preto
   - Funkcia je konvexná v intervale $(0, 1)$,
   - konkávna v intervale $(-1, 0)$

   a má jediný inflexný bod $[0, 0]$.
7) Náčrtok grafu funkcie:

Priebeh funkcie - riešené príklady



Obr.: Graf funkcie $y = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

Priebeh funkcie - riešené príklady

Príklad

Zistíme priebeh funkcie $y = e^{\sin x}$.

Riešenie:

1) Definičný obor funkcie je množina všetkých reálnych čísel $\mathbf{R}$.
2) Počítame
$$y(-x) = e^{\sin(-x)} = e^{-\sin x} = \frac{1}{e^{\sin x}}.$$
Táto hodnota nie je rovná ani jednej z hodnôt $\pm y(x)$, preto funkcia nie je párna ani nepárna. Je periodická s periódou 2π.
3) Funkcia je spojitá, nemá nulové body.
4) Z dôvodu spojitosti nemá graf funkcie asymptoty bez smernice, keďže je periodická, nemá graf ani asymptoty so smernicou.

Priebeh funkcie - riešené príklady

5) Prvá derivácia $y'(x) = \cos x \; e^{\sin x}$ má znamienko zhodné so znamienkom funkcie $\cos$. Preto

- funkcia rastie v intervaloch $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$ a
- klesá v intervaloch $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$,
- funkcia má lokálne maximá e v bodoch $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ a
- funkcia má lokálne minimá $\frac{1}{e}$ v bodoch $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$,

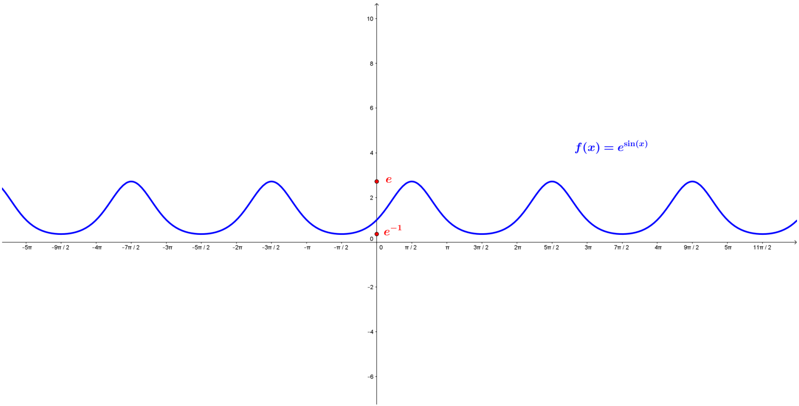
kde k je ľubovoľné celé číslo.

6) Druhá derivácia funkcie $y''(x) = e^{\sin x}(1 - \sin x - \sin^2\ x)$ má znamienko zhodné so znamienkom výrazu v zátvorke. Výpočet nulových bodov tohoto výrazu je možné vykonať len približne. Dostávame:

- funkcia je konvexná v intervaloch $((-1,212 + 2k)\pi, (0,212 + 2k)\pi)$,
- funkcia je konkávna v intervaloch $((0,212 + 2k)\pi, (0,788 + 2k)\pi)$ a
- má inflexné body v bodoch $(0,212 + 2k)\pi$ a $(0,788 + 2k)\pi)$,

kde k je ľubovoľné celé číslo.

7) Náčrtok grafu funkcie:



Obr.: Graf funkcie $y = e^{\sin x}$

Priebeh funkcie - neriešené príklady

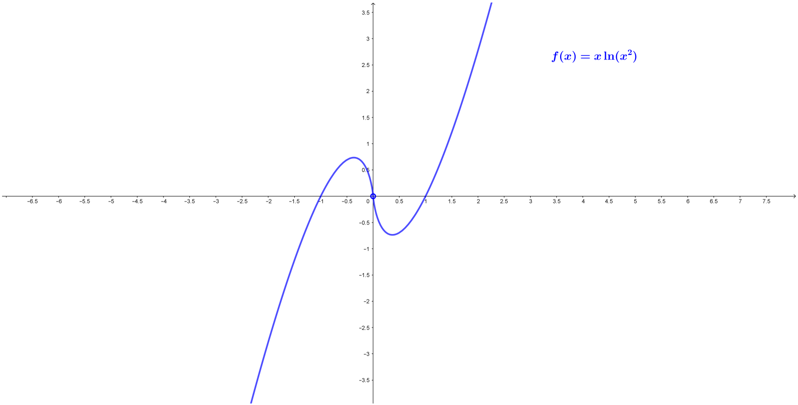
Príklad

Zistite priebeh funkcie:

a) $f(x) = x\ln(x^2)$

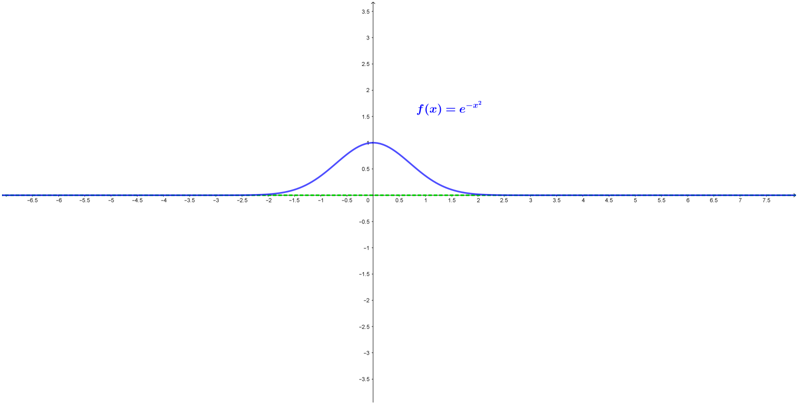
b) $f(x) = e^{-x^2}$

Priebeh funkcie - neriešené príklady



Obr.: a) Graf funkcie $f(x) = x\ln(x^2)$

Priebeh funkcie - neriešené príklady



Obr.: b) Graf funkcie $f(x) = e^{-x^2}$

Najmenšia a najväčšia hodnota

Najmenšia a najväčšia hodnota - postup

V praxi je často potrebné určiť **najväčšiu alebo najmenšiu hodnotu funkcie** v niektorom intervale $\langle a, b\rangle$. Postupujeme nasledovne:

1) Určíme všetky lokálne maximá funkcie v intervale (a, b).
2) Nájdeme najväčšiu z hodnôt všetkých lokálnych maxím a hodnôt v krajných bodoch intervalu: $f(a)$ a $f(b)$.

Analogicky postupujeme pri určovaní najmenšej hodnoty.

Najmenšia a najväčšia hodnota - riešené príklady

Príklad

Zistíme najmenšie a najväčšie hodnoty:

a) funkcie $y = x^3 - 6x^2 + 7$ v intervale $\langle -1, 2 \rangle$,

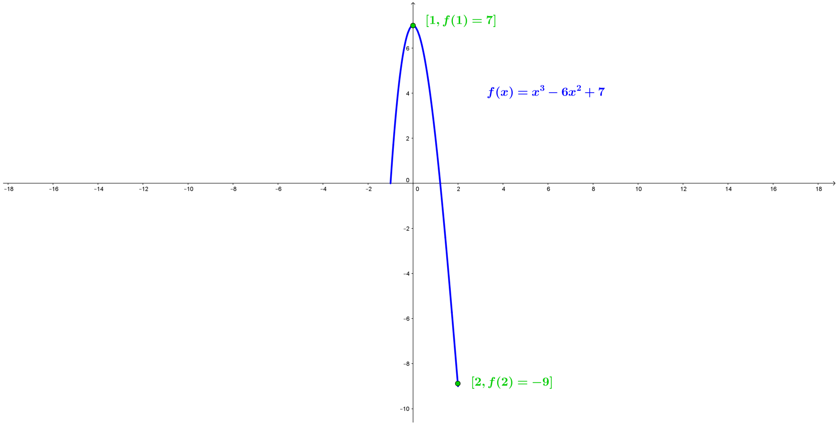
b) funkcie $y = 2x + \cos 2x$ v intervale $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$,

c) funkcie $y = 3 - e^{|x|}$ v intervale $\langle -2, 3)$.

Riešenie:

a) Funkcia má deriváciu v každom bode intervalu, preto lokálne extrémy môžu byť len v jej stacionárnych bodoch. Tie sú určené rovnicou $3x^2 - 12x = 0$, t.j. $x_1 = 0$ a $x_2 = 4$. Z nich do daného intervalu patrí len $x_1 = 0$. Test pomocou druhej derivácie potvrdí lokálne maximum funkcie v tomto bode. Na extrémne hodnoty máme teda troch kandidátov: $f(0) = 7$, $f(-1) = 0$ a $f(2) = -9$. Najmenšou hodnotou funkcie v danom intervale je preto hodnota -9 nadobudnutá v bode 2 a najväčšou hodnota 7 nadobudnutá v bode 0.

Najmenšia a najväčšia hodnota - riešené príklady

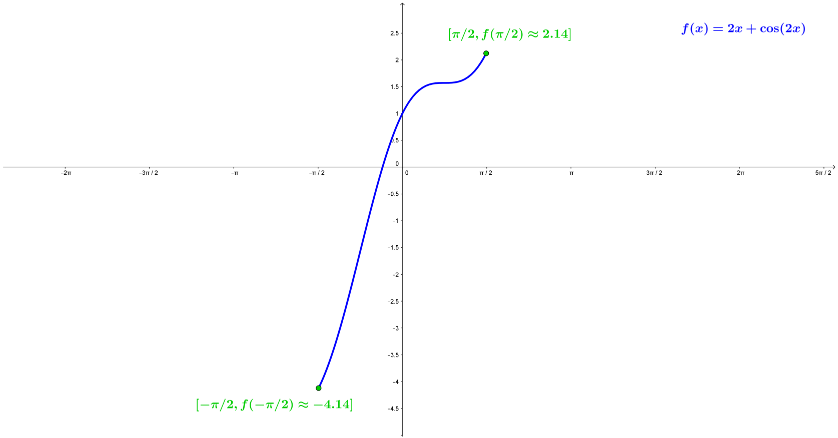


Obr.: a) Graf funkcie $y = x^3 - 6x^2 + 7$ na intervale $\langle -1, 2\rangle$ s vyznačením najmenšej a najväčšej hodnoty

Najmenšia a najväčšia hodnota - riešené príklady

b) Funkcia má deriváciu v každom bode intervalu, preto lokálne extrémy môžu byť len v jej stacionárnych bodoch. Tie sú určené rovnicou $2 - 2\sin 2x = 0$, ktorej riešením v danom intervale je jediné číslo $x = \frac{\pi}{4}$. Ďalej postupujeme podobne ako v predchádzajúcej časti. Najmenšou hodnotou v danom intervale je hodnota $-\pi - 1$ a najväčšou hodnota $\pi - 1$.

Najmenšia a najväčšia hodnota - riešené príklady

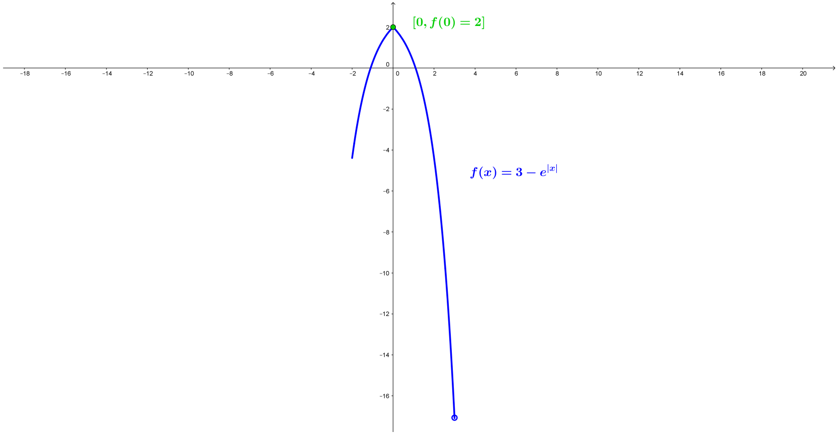


Obr.: b) Graf funkcie $y = 2x + \cos 2x$ na intervale $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ s vyznačením najmenšej a najväčšej hodnoty

Najmenšia a najväčšia hodnota - riešené príklady

c) Pre $x > 0$ je $y = 3 - e^x$ a $y' = -e^x < 0$. Pre $x < 0$ je $y = 3 - e^{-x}$ a $y' = e^{-x} > 0$. Znamienka derivácie určujú, že v bode 0 má funkcia najväčšiu hodnotu $f(0) = 2$ Najmenšiu hodnotu môže nadobudnúť len v krajných bodoch intervalu, z ktorých jeden do intervalu nepatrí. Platí $f(-2) = 3 - e^2 > f(3) = 3 - e^3$. Pretože funkcia je spojitá, v intervale $\langle -2, 3)$ nenadobudne najmenšiu hodnotu.

Najmenšia a najväčšia hodnota - riešené príklady



Obr.: c) Graf funkcie $y = 3 - e^{|x|}$ na intervale $\langle -2, 3)$ s vyznačením najväčšej hodnoty

Ďakujem za pozornosť.