Diferenciálny počet - aplikácie

Zuzana Minarechová

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Slovenská technická univerzita, Stavebná fakulta

10 Október 2022

Obsah prednášky

- **Diferenciál** a diferenciály vyšších rádov
  - **Približné výpočty hodnôt funkcií** pomocou prvého diferenciálu
- **Taylorov a Maclaurinov polynóm**
- **Vety o prírastku funkcie** (Rolleho, Lagrangeova a Cauchyho)
- **Výpočet limít** pomocou L'Hopitalovho pravidla

Diferenciál a diferenciály vyšších rádov

Diferenciál a diferenciály vyšších rádov

Gottfried Wilhelm Leibniz prvý krát predstavil pojem diferenciál, a označenie derivácie pomocou diferenciálov $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ je pomenované po ňom.

Obr.: Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716)

Diferenciál a diferenciály vyšších rádov

- Pri aplikáciách matematiky je často potrebné pracovať **s hodnotami komplikovaných funkcií**. Je možné **nahradiť ich hodnotami jednoduchších funkcií**, ak sú tieto v rámci požadovanej presnosti.
- Často sa k tomu **používajú lineárne funkcie**, keďže sú na výpočty najjednoduchšie.
- Nech má funkcia f v bode x_0 deriváciu. Potom hodnoty funkcie f v blízkom okolí čísla x_0 najlepšie zo všetkých lineárnych funkcií aproximuje (približne vyjadruje) funkcia $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Preto

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

pre čísla x blízke číslu x_0.

Diferenciál a diferenciály vyšších rádov

- Treba si uvedomiť, že aproximácia pomocou diferenciálu, t.j. pomocou dotyčnice, **má iba lokálny význam v okolí bodu**.
- Lineárny výraz

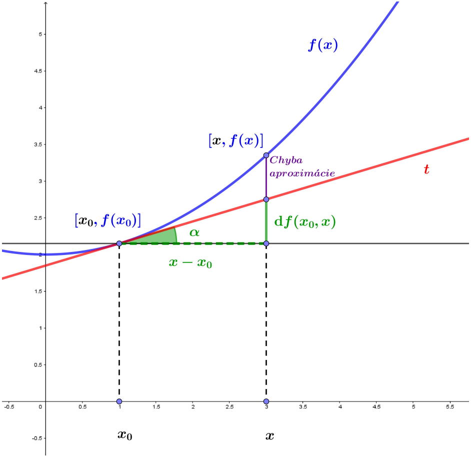
$$\mathrm{d}f(x_0, x) = f'(x_0)(x - x_0)$$

  v tejto aproximácii voláme **diferenciál funkcie** f v bode x_0.
- Všeobecne **diferenciál n-tého rádu funkcie** f v bode x_0 je výraz

$$\mathrm{d}^n f(x_0, x) = f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n,$$

  ak existuje $n-$ tá derivácia funkcie f v bode x_0. Špeciálne, pre $n = 0$, diferenciálom nultého rádu je konštantna $f(x_0)$.

Diferenciál a diferenciály vyšších rádov



Obr.: Prvý diferenciál - geometrická interpretácia

Diferenciály vyšších rádov - Riešené príklady

Príklad 1

Nájdite prvých päť diferenciálov funkcie $f: \ y = \cos x$ v bode $x_0 = 0$.

Riešenie: K nájdeniu diferenciálu potrebujeme príslušnú deriváciu v danom bode. Keďže $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -1$, $y'''(0) = 0$, $y^{(4)}(0) = 1$, $y^{(5)}(0) = 0$, platí

$$\mathrm{d}^0 f(0, x) = 1, \quad \mathrm{d}^2 f(0, x) = -x^2, \quad \mathrm{d}^4 f(0, x) = x^4.$$

Ostatné hľadané diferenciály sú rovné nulovej konštante.

Diferenciál - Príklady

Príklad 2

Nájdite (prvý) diferenciál funkcie f v bode x_0:

1) $f(x) = \ln(\sin x), \; x_0 = \frac{\pi}{4}$ $\quad \mathrm{d}f\left(\frac{\pi}{4}, x\right) = 1\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$
2) $f(x) = \arctan\left(\frac{x}{2}\right), \; x_0 = 2$ $\quad \mathrm{d}f(2, x) = \frac{1}{4}(x - 2)$
3) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}, \; x_0 = 1$ $\quad \mathrm{d}f(1, x) = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - 1)$

Približné výpočty hodnôt funkcií pomocou prvého diferenciálu

Približné výpočty hodnôt funkcií

Ak máme **približne vypočítať hodnotu funkcie** f v bode x, ktorú nie sme z nejakého dôvodu schopní vypočítať presne, postupujeme nasledovne:

1. Nájdeme taký bod x_0 čo najbližšie k bodu x, v ktorom sme schopní vypočítať hodnotu funkcie f a jej deriváciu.
2. Použijeme vzťah $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
3. Ak nie sme spokojní s presnosťou aproximácie, použijeme vzťah $f(x) \approx T_n(f, x_0, x)$ (t.j. vzťah pre aproximáciu Taylorovým polynómom) pre vhodné prirodzené číslo $n > 1$.

Približné výpočty hodnôt funkcií - Riešené príklady

Príklad 3

Vypočítajme pomocou prvého diferenciálu približne hodnotu $\sqrt{80}$.

Riešenie: Ide o výpočet hodnoty $f(80)$ pre funkciu $f: \ y = \sqrt{x}$. Keďže

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

potrebujeme nájsť vhodnú hodnotu x_0 blízko hodnoty 80, v ktorej vieme vypočítať obidve hodnoty $f(x_0)$ aj $f'(x_0)$. Keďže $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, vhodnou hodnotou je $x_0 = 81$. Platí $f(81) = 9$ a $f'(81) = \frac{1}{18}$. Preto

$$\sqrt{80} \approx 9 + \frac{1}{18}(80 - 81) = 9 - \frac{1}{18} = \frac{161}{18} \approx 8,94.$$

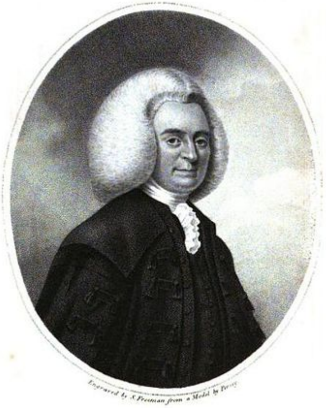
Príklad 4

Použitím diferenciálu približne vypočítajte hodnoty:

a) $\sqrt{98}$ ≈ 9.9
b) $(2.03)^3$ ≈ 8.36
c) $3^{1.95}$ ≈ 8.55
d) $\arctan(1.1)$ $\approx \frac{\pi}{4} + 0.05$
e) $\sin(-0.2)$ ≈ -0.2
f) $\ln(1.3)$ ≈ 0.3

Taylorov a Maclaurinov polynóm

Taylorov polynóm



Obr.: Brook Taylor (1685 - 1731) a Colin Maclaurin (1698 - 1746)

Taylorov polynóm

- Motivácia bola **predstaviť si priebeh zložitých funkcií** a tiež **ich hodnoty**.
- Obaja prišli s **nápadom nahradiť zložitú funkciu jednoduchšou**, napríklad polynómom a vybudovali teórie nezávisle na sebe.
- **Základná myšlienka**: Majme dve funkcie definované na okolí nejakého bodu z ich definičného oboru. Ak sa ich funkčné hodnoty rovnajú, tak sa rovnajú aj ich derivácie, t.j. napr. goniometrickú funkciu sínus môžme approximovať

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

alebo exponenciálnu funkciu

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Taylorova veta

- Nech funkcia f má v okolí bodu x_0 všetky derivácie až do rádu $n+1$, $n \in N$. Potom pre všetky x z tohto okolia platí **Taylorov vzorec**

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

kde $R_n(x)$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)}$$

pričom ξ je vhodné číslo ležiace medzi x_0 a x.

- Chyba $R_n(x)$ sa nazýva **zvyšok** a takýto tvar sa nazýva **Lagrangeov tvar zvyšku**.

Taylorov polynóm

- Nech funkcia f má v okolí bodu x_0 všetky derivácie do rádu n, $n \in N$. Potom pre všetky x z tohto okolia platí

$$\begin{aligned} T_n(f, x_0, x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{d^{(k)} f(x_0, x)}{k!} \end{aligned}$$

voláme **Taylorov mnohočlen (polynóm) funkcie** f **v bode** x_0.

Taylorova veta

- Potom platí

$$\begin{aligned} f(x) &= T_n(f, x_0, x) + R_n(x) = \\ &= T_n(f, x_0, x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)} \end{aligned}$$

- Všimneme si, že pre hodnoty x blízke číslu x_0 je posledný člen (**zvyšok**) blízky 0 a preto

$$f(x) \approx T_n(f, x_0, x)$$

pre x z blízkeho okolia čísla x_0.

- Špeciálny prípad Taylorovho polynómu je ak $x_0 = 0$ a nazýva sa **Maclaurinov polynóm** funkcie f, označujeme ho $M_n(f, x)$.

Taylorov polynóm - Riešené príklady

Príklad 5

Nájdeme Taylorov polynóm 4. stupňa v bode $x_0 = 0$ pre funkciu $f(x) = \cos x$.

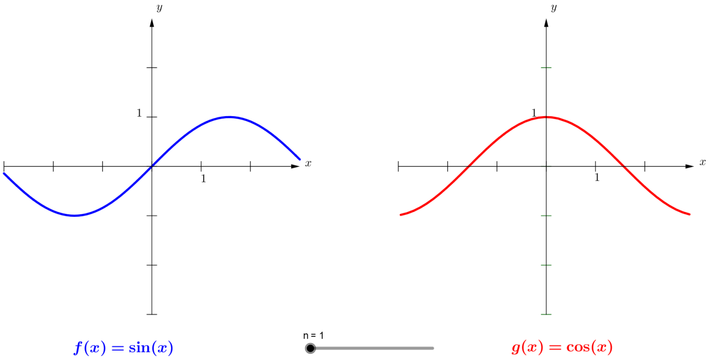
Riešenie: Potrebujeme nájsť diferenciály do rádu 4 funkcie $f(x) = \cos x$. Preto

$$T_4(\cos x, 0, x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

.

Taylorov polynóm

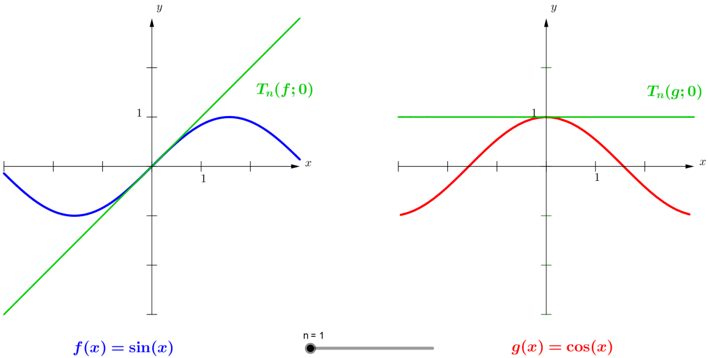
- Majme funkcie $f(x)$ a $g(x)$



Obr.: Grafy funkcií f a g

Taylorov polynóm

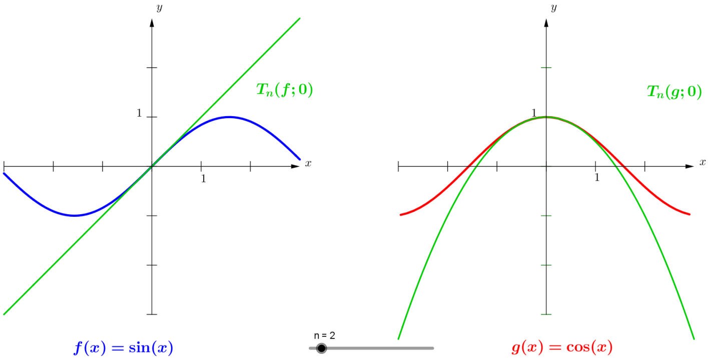
- $T_1(f, 0, x)$ a $T_1(g, 0, x)$



Obr.: Grafy funkcií f a g a ich dotyčnice

Taylorov polynóm

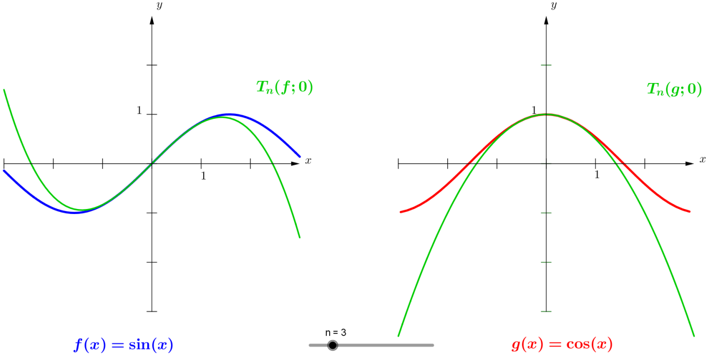
- $T_2(f, 0, x)$ a $T_2(g, 0, x)$



Obr.: Aproximácia polynómom druhého stupňa

Taylorov polynóm

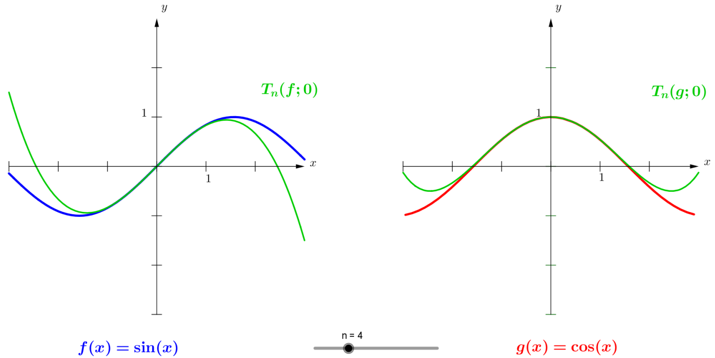
- $T_3(f, 0, x)$ a $T_3(g, 0, x)$



Obr.: Aproximácia polynómom tretieho stupňa

Taylorov polynóm

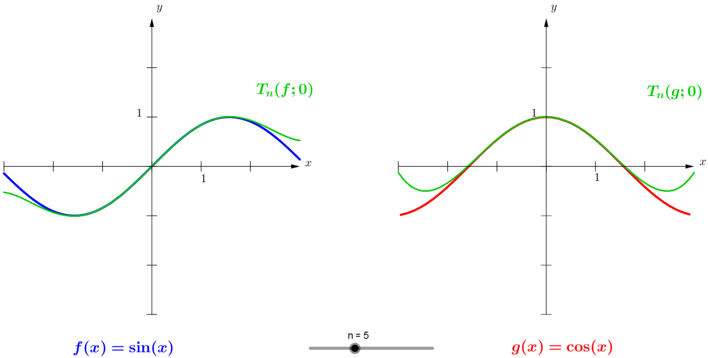
- $T_4(f, 0, x)$ a $T_4(g, 0, x)$



Obr.: Aproximácia polynómom štvrtého stupňa

Taylorov polynóm

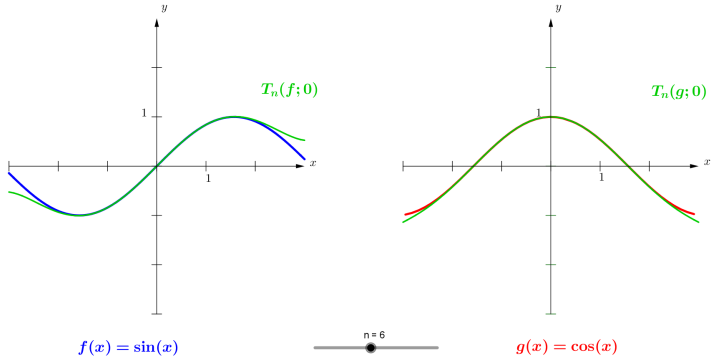
- $T_5(f, 0, x)$ a $T_5(g, 0, x)$



Obr.: Aproximácia polynómom piateho stupňa

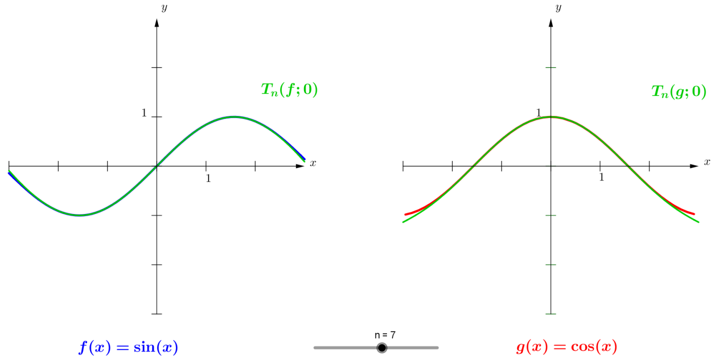
Taylorov polynóm

- $T_6(f, 0, x)$ a $T_6(g, 0, x)$



Obr.: Aproximácia polynómom šiesteho stupňa

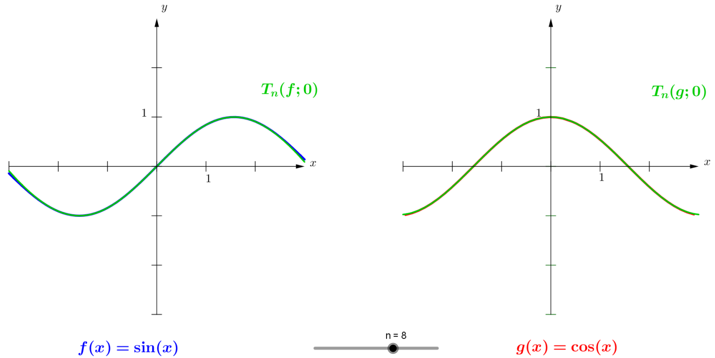
- $T_7(f, 0, x)$ a $T_7(g, 0, x)$



Obr.: Aproximácia polynómom siedmeho stupňa

Taylorov polynóm

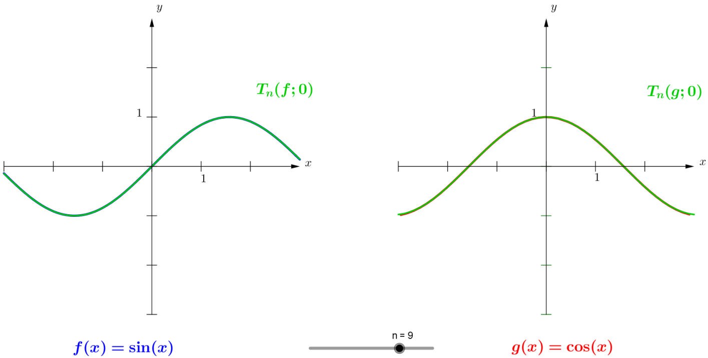
- $T_8(f, 0, x)$ a $T_8(g, 0, x)$



Obr.: Aproximácia polynómom ôsmeho stupňa

Taylorov polynóm

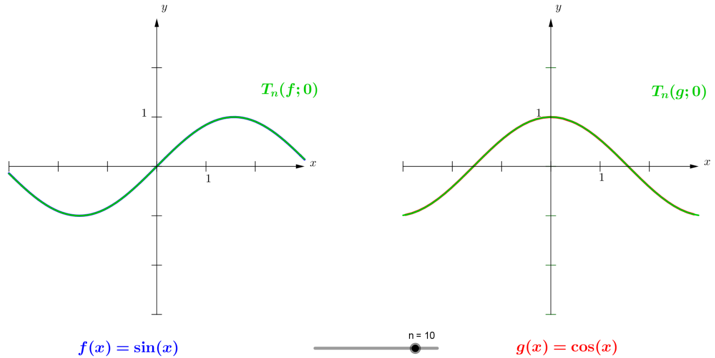
- $T_9(f,0,x)$ a $T_9(g,0,x)$



Obr.: Aproximácia polynómom deviateho stupňa

Taylorov polynóm

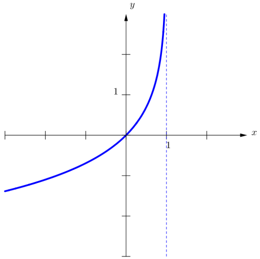
- $T_{10}(f, 0, x)$ a $T_{10}(g, 0, x)$



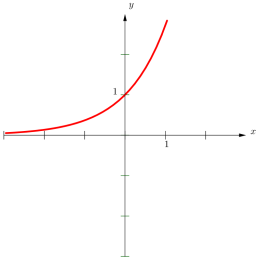
Obr.: Aproximácia polynómom desiateho stupňa

Taylorov polynóm

- Majme funkcie $f(x)$ a $g(x)$



$f(x) = -\log(1-x)$

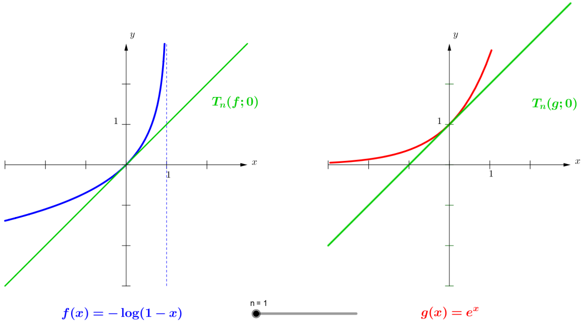


$g(x) = e^x$

Obr.: Grafy funkcií f a g

Taylorov polynóm

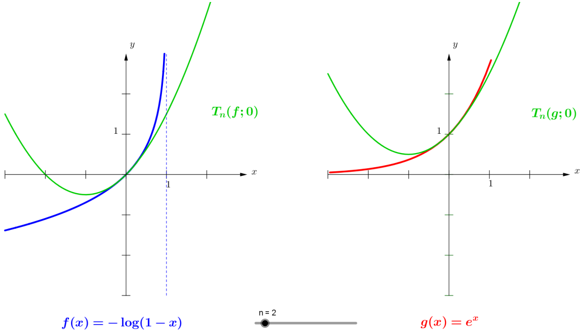
- $T_1(f, 0, x)$ a $T_1(g, 0, x)$



Obr.: Grafy funkcií f a g a ich dotyčnice

Taylorov polynóm

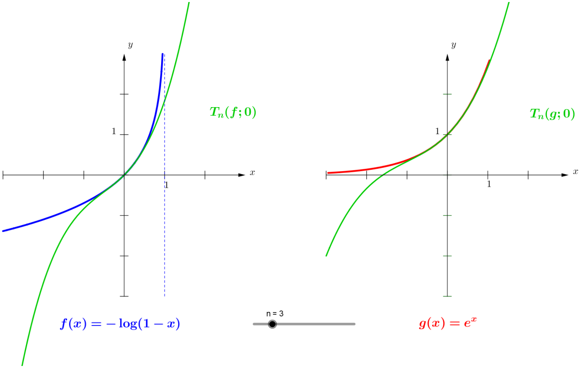
- $T_2(f,0,x)$ a $T_2(g,0,x)$



Obr.: Aproximácia polynómom druhého stupňa

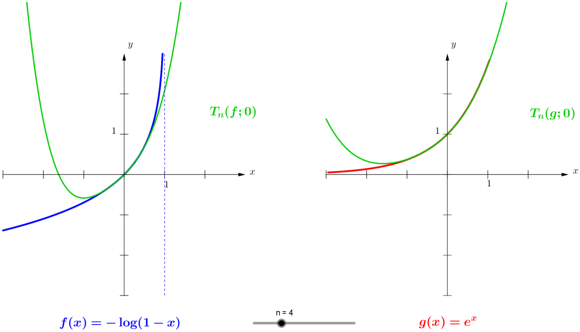
Taylorov polynóm

- $T_3(f,0,x)$ a $T_3(g,0,x)$



Obr.: Aproximácia polynómom tretieho stupňa

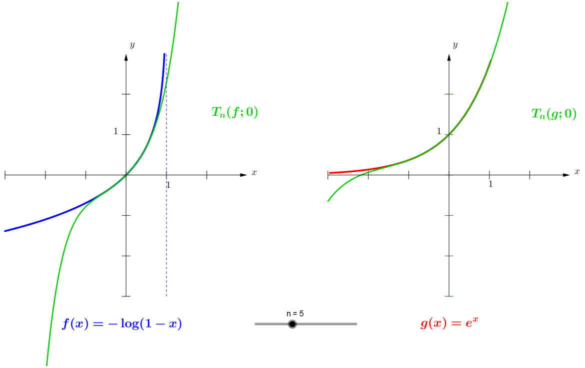
- $T_4(f, 0, x)$ a $T_4(g, 0, x)$



Obr.: Aproximácia polynómom štvrtého stupňa

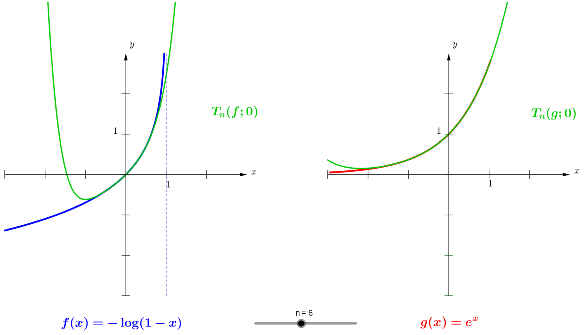
Taylorov polynóm

- $T_5(f, 0, x)$ a $T_5(g, 0, x)$



Obr.: Aproximácia polynómom piateho stupňa

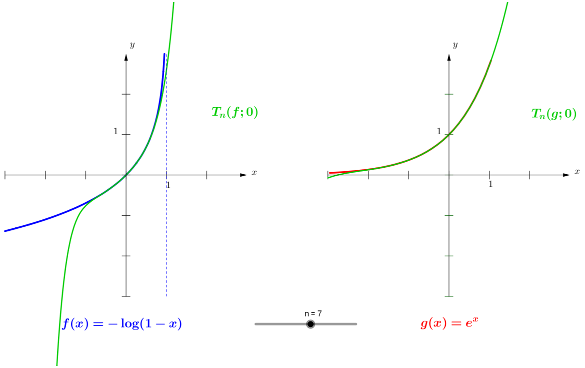
- $T_6(f, 0, x)$ a $T_6(g, 0, x)$



Obr.: Aproximácia polynómom šiesteho stupňa

Taylorov polynóm

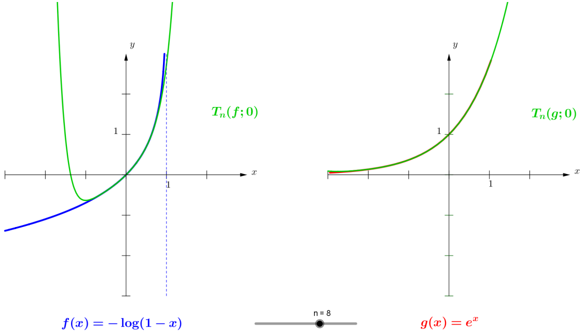
- $T_7(f, 0, x)$ a $T_7(g, 0, x)$



Obr.: Aproximácia polynómom siedmeho stupňa

Taylorov polynóm

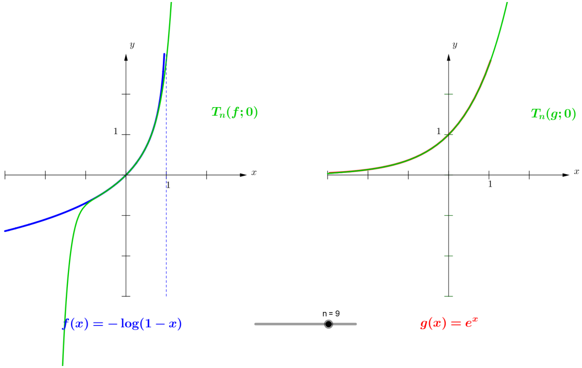
- $T_8(f, 0, x)$ a $T_8(g, 0, x)$



Obr.: Aproximácia polynómom ôsmeho stupňa

Taylorov polynóm

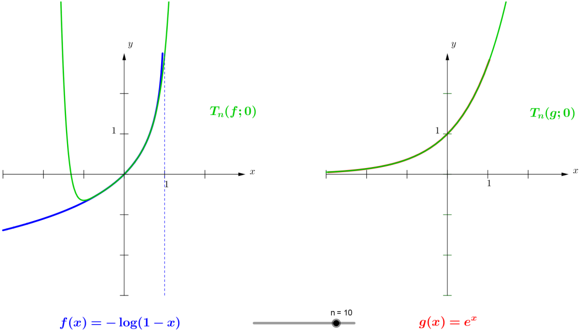
- $T_9(f, 0, x)$ a $T_9(g, 0, x)$



Obr.: Aproximácia polynómom deviateho stupňa

Taylorov polynóm

- $T_{10}(f, 0, x)$ a $T_{10}(g, 0, x)$



Obr.: Aproximácia polynómom desiateho stupňa

Príklad 6

Nájdite Maclaurinov polynóm daného stupňa n funkcie f:

a) $f(x) = \frac{1}{2^x}$, $n = 3$
b) $f(x) = \tan(x)$, $n = 3$
c) $f(x) = \cos(x)$, $n = N$

Príklad 7

Nájdite Taylorov polynóm daného stupňa n funkcie f v bode x_0:

a) $f(x) = x\ln(x), x_0 = 1,\ n = 4$
b) $f(x) = x^x,\ x_0 = 1,\ n = 2$
c) $f(x) = \arctan(x), x_0 = 1,\ n = 2$

Taylorov polynóm - Príklady

Príklad 8

Napíšte Taylorov vzorec pre funkciu $f(x) = \arctan(x)$ v bode $x_0 = 1$ pre $n = 2$.

Príklad 9

Nájdite Maclaurinov vzorec pre všeobecné n pre funkciu e^x.

Príklad 10

Pomocou Maclaurinovho polynómu vypočítajte približnú hodnotu čísla e s chybou menšou ako $0,01$. (*Inými slovami:* Aké n musím zobrať, aby chyba mojej aproximácie bola menšia ako $0,01$?)

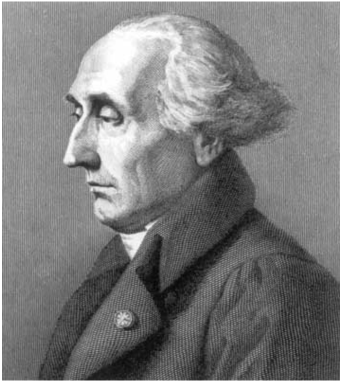
Taylorov polynóm - Príklady

Príklad 11

Vyčíslite približne hodnotu $\ln(1.3)$ pomocou Taylorovho polynómu 2. stupňa a odhadnite akej maximálnej chyby ste sa pri tejto aproximácii dopustili.

Aplikácie - Vety o prírastku funkcie

Vety o prírastku funkcie



Obr.: Michel Rolle (1652 — 1719) a Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813)

Vety o prírastku funkcie

Obr.: Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857)

Vety o prírastku funkcie

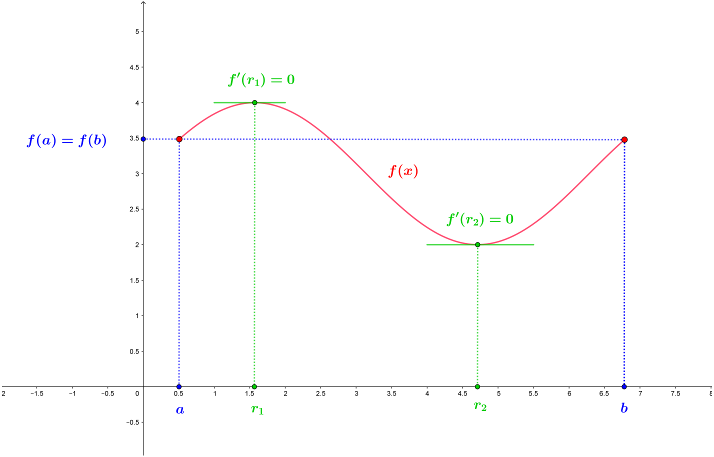
- Existuje viac **viet o strednej hodnote**, ktoré sa tiež volajú **vety o prírastku funkcie**. Tieto vety vyjadrujú za istých podmienok vzťah medzi rozdielom ("prírastkom") hodnôt funkcie v dvoch bodoch a deriváciou funkcie v istom čísle medzi týmito bodmi.
- **Lagrangeova veta o strednej hodnote**
  Nech f má deriváciu v intervale (a, b) a naviac je spojitá v bodoch a a b. Potom existuje také číslo r z intervalu (a, b), že

$$f'(r) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

- Ak medzi predpoklady Lagrangeovej vety doplníme podmienku $f(a) = f(b)$, tak dostaneme **Rolleho vetu**, ktorá zaručuje existenciu takého čísla r z intervalu (a, b), že

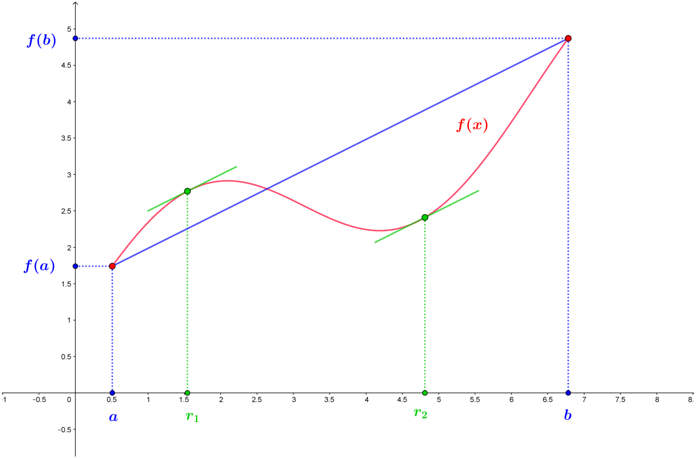
$$f'(r) = 0.$$

Vety o prírastku funkcie



Obr.: Rolleho veta (existencia nulového bodu prvej derivácie)

Vety o prírastku funkcie



Obr.: Lagrangeova veta (okamžitá a priemerná rýchlosť)

Vety o prírastku funkcie

Zovšeobecnením Lagrangeovej vety je **Cauchyho veta o strednej hodnote**:

Nech sú dané funkcie $f(x)$ a $g(x)$, ktoré sú spojité na uzavretom intervale $\langle a, b\rangle$ a diferencovateľné na otvorenom intervale (a, b), pričom $g'(x) \neq 0$, potom existuje $r \in (a, b)$ také, že

$$\left(\frac{f'}{g'}\right)(r) = \frac{f'(r)}{g'(r)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Vety o prírastku funkcie

- Vety o strednej hodnote majú **veľký teoretický význam**, ich dôsledkom je veľa poznatkov v diferenciálnom počte a jeho aplikáciách.
- Názorný fyzikálny zmysel viet o strednej hodnote môže byť napríklad vyjadrený v nasledujúcom tvrdení: Ak auto prejde za 2 hodiny 100 km, tak aspoň v jednom okamihu cesty dosiahne rýchlosť presne 50 km za hodinu.
- V prípade $n = 0$ sa Taylorova veta zhoduje s Lagrangeovou vetou o strednej hodnote.

Aplikácie - Výpočet limít pomocou L'Hospitalovho pravidla

Výpočet limít

Skutočným autorom **L'Hôpitalovho (resp. L'Hospitalovho) pravidla** je švajčiarsky matematik **Johann Bernoulli**, Guillaume de l'Hôpital toto pravidlo len ako prvý publikoval vo svojej knihe v roku 1696.


Obr.: Guillaume Francois Antoine, Marquis de l'Hôpital (1661 – 1704) a Johann Bernoulli (1667 - 1748)

Použitie derivácie pri výpočte limít

- Vypočty limít typu "$\frac{0}{0}$" sú často veľmi komplikované.
- Jedným z riešení je použiť tvz. **L'Hospitalovo pravidlo**:

Nech $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, *v istom okolí čísla* a *majú obidve funkcie* f *a* g *deriváciu, existuje* $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. *Potom existuje aj* $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ *a platí*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- Treba si uvedomiť, že pri L'Hospitalovom pravidle namiesto podielu funkcií, **počítame podiel ich derivácií**, t.j. funkcie derivujeme každú zvlášť, nie ako podiel.

Použitie derivácie pri výpočte limít

- Užitočnosť L'Hospitalovho pravidla vynikne viac, ak si uvedomíme, že limity typu:

$$\frac{\infty}{\infty}, \quad 0.\infty, \quad \infty - \infty, \quad 1^{\infty}, \quad \infty^{0}, \quad 0^{0}$$

môžeme pomocou úprav previesť na limitu typu

$$\frac{0}{0}.$$

- L'Hospitalovo pravidlo môžeme použiť aj niekoľkokrát za sebou a platí aj pre jednostranné limity a limity v nevlastných bodoch.

L'Hospitalovo pravidlo - Riešené príklady

Príklad 12

Pomocou L'Hospitalovho pravidla vypočítame

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{1} = 1.$$

Príklad 13

Pomocou L'Hospitalovho pravidla vypočítame

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} -x = 0.$$

L'Hospitalovo pravidlo - Riešené príklady

Príklad 14

Pomocou L'Hospitalovho pravidla vypočítame $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$

Riešenie:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right) &= \lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x} = \\
&= \lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+\frac{x-1}{x}} = \\
&= \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

L'Hospitalovo pravidlo - Príklady

Príklad 15

Pomocou L'Hospitalovho pravidla vypočítajte:

1) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3 - 2x - 4}{x^2 - x - 2} \quad = \frac{10}{3}$

2) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^{2x}}{x^3} \quad = \infty$

3) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{1}{2 \ln(x)} - \frac{1}{x^2 - 1} \right) \quad = \frac{1}{2}$

4) $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln(x) \quad = 0$

5) $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} \ln(x) \quad = 0$

6) $\lim\limits_{x \to 0} \cos(x)^{\mathrm{cotg}^2(x)}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \quad = \frac{1}{\sqrt{e}}$

L'Hospitalovo pravidlo - Príklady

7) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin(x)}{x^3} \quad = \frac{1}{6}$

8) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}\right) \quad = 0$

9) $\lim\limits_{x\to \infty} \sqrt[x]{x} \quad = 1$

10) $\lim\limits_{x\to \infty} xe^{-x} \quad = 0$

11) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(5x)}{\cos(3x)} \quad = -\frac{5}{3}$

12) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\tan(x) - \frac{1}{\cos(x)}\right) \quad = 0$

13) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\ln(x)}{x} \quad = 0$

Ďakujem za pozornosť.