Integrálny počet
Neurčitý integrál - 4.časť

Zuzana Minarechová

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Slovenská technická univerzita, Stavebná fakulta

14 November 2022

Obsah prednášky

1) **Integrovanie iracionálnych funkcií**
   a) Odmocnina z lineárnej lomenej funkcie
   b) Odmocnina z kvadratickej funkcie
2) **Integrovanie transcendetných funkcií**
3) **Opakovanie neurčitých integrálov**

Obsah prednášky

Integrovanie iracionálnych funkcií

a) Odmocnina z lineárnej lomenej funkcie

Ak máme integrovať funkciu, v ktorej sa okrem algebraických operácií vyskytuje odmocnina z lineárnej lomenej funkcie (špeciálne z lineárnej funkcie), t.j. $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ (špeciálne $\sqrt[n]{ax+b}$), tak použijeme substitúciu

$$t=\varphi(x)=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \quad (\text{resp.}\, t=\sqrt[n]{ax+b}).$$

Pri tejto substitúcii je technicky výhodné vyjadriť inverznú funkciu

$$x=\varphi^{-1}(t) \quad \text{a} \quad \mathrm{d}x=\left(\varphi^{-1}\right)'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Všetky tieto vzťahy dosadíme do riešeného integrálu, ktorý tak prevedieme na integrál z racionálnej funkcie premennej t.

Integrovanie iracionálnych funkcií

Príklad 1

Vypočítame integrál $\int \frac{\sqrt{3x+4}}{x-\sqrt{3x+4}}\,\mathrm{d}x$.

Riešenie:

V tomto príklade použijeme substitúciu $t = \sqrt{3x+4}, \quad x \in (-\frac{4}{3}, \infty)$ a vyjadríme inverznú funkciu $x = \frac{t^2-4}{3}$ a tiež $\mathrm{d}x = \frac{2t}{3}\,\mathrm{d}t$, dosadíme

$$I = \int \frac{t}{\frac{t^2-4}{3} - t}\left(\frac{2t}{3}\right)\mathrm{d}t = 2\int \frac{t^2\mathrm{d}t}{t^2+3t-4} = 2\int\left(1 + \frac{3t+4}{t^2-3t-4}\right)\mathrm{d}t.$$

Rýdzo racionálnu funkciu v integrále rozložíme na súčet elem. zlomkov

$$\frac{3t+4}{t^2-3-4} = \frac{\frac{16}{5}}{t-4} - \frac{\frac{1}{5}}{t+1}$$

a pokračujeme v integrovaní

Integrovanie iracionálnych funkcií

$$I = 2(t + \frac{16}{5}\ln|t-4| - \frac{1}{5}\ln|t+1|) + c.$$

Nakoniec výsledok vyjadríme v termínoch premennej x

$$I = 2(\sqrt{3x+4} + \frac{16}{5}\ln|\sqrt{3x+4} - 4| - \frac{1}{5}\ln|\sqrt{3x+4} + 1|) + c.$$

- V prípade, **že sa v integrovanej funkcii vyskytujú dve rôzne odmocniny** $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ a $\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, použijeme substitúciu

$$t = \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}},$$

kde k je **najmenší spoločný násobok** čísel m a n.

Integrovanie iracionálnych funkcií

Príklad 2

Vypočítame integrál $\int \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

Riešenie:

Najmenší spoločný násobok čísel $2,\ 3$ a 4 je číslo 12. Preto použijeme substitúciu $t = \sqrt[12]{x}$, vyjadríme $x = t^{12}$ a $\mathrm{d}x = 12t^{11}\,\mathrm{d}t$. Ďalej uvážime, že $\sqrt{x} = t^6$, $\sqrt[3]{x} = t^4$ a $\sqrt[4]{x} = t^3$ a dosadíme do pôvodného integrálu

$$I = \int \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t^3}{t^4+t^6} 12t^{11}\,\mathrm{d}t = 12 \int \frac{t^{10}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Posledný integrál rozložíme na súčet mnohočlena a rýdzo racionálnej funkcie, a zintegrujeme

$$I = 12\left(\int (t^8 - t^6 + t^4 - t^2 + 1)\,\mathrm{d}t - \int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t\right) =$$

Integrovanie iracionálnych funkcií

$$
\begin{aligned}
&= 12\left(\frac{t^9}{9}-\frac{t^7}{7}+\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}+t-\operatorname{arctg} t\right)+c= \\
&= 12\left(\frac{\sqrt[12]{x^9}}{9}-\frac{\sqrt[12]{x^7}}{7}+\frac{\sqrt[12]{x^5}}{5}-\frac{\sqrt[12]{x^3}}{3}+\sqrt[12]{x}-\operatorname{arctg}\sqrt[12]{x}\right)+c.
\end{aligned}
$$

Integrovanie iracionálnych funkcií

Príklad 3

Vypočítajte integrály (Satko, str.66/pr.6 b), c), d), e)):

a) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt[6]{x^5}}\,\mathrm{d}x$

b) $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x$

c) $\int \frac{\sqrt{1+x}}{x}\,\mathrm{d}x$

d) $\int \frac{\sqrt{2x+3}+x}{\sqrt{2x+3}-x}\,\mathrm{d}x$

Integrovanie iracionálnych funkcií

b) Odmocnina z kvadratickej funkcie

Ak máme integrovať funkciu, v ktorej sa okrem algebraických operácií vyskytuje odmocnina z kvadratickej funkcie $\sqrt{ax^2+bx+c}$, postupujeme nasledovne:

1. Doplnením na štvorec a algebraickými úpravami a substitúciou prevedieme daný výraz na niektorý z výrazov:

$$\sqrt{r^2-u^2}, \quad \sqrt{r^2+u^2}, \quad \sqrt{u^2-r^2}.$$

2. Použitím substitúcií:

$$\begin{array}{rcl} u & = & r\sin t \quad \text{pre} \quad \sqrt{r^2-u^2} \\ u & = & r\tan t \quad \text{pre} \quad \sqrt{r^2+u^2} \\ u & = & \dfrac{r}{\cos t} \quad \text{pre} \quad \sqrt{u^2-r^2} \end{array}$$

prevedieme daný integrál na integrál z trigonometrickej funkcie.

Integrovanie iracionálnych funkcií

Príklad 4

Vypočítame integrál $\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{8+2x-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

Riešenie:
Upravíme $\sqrt{8+2x-x^2} = \sqrt{9-(x-1)^2}$ a zvolíme $u = x-1$, a $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$. Potom môžeme písať

$$I = \int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{8+2x-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{u^2}{\sqrt{9-u^2}}\,\mathrm{d}u.$$

Použijeme substitúciu podľa návodu

$$u = 3\sin t, \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Potom $\mathrm{d}u = 3\cos t\,\mathrm{d}t$ a

$$\sqrt{9-u^2} = \sqrt{9-9\sin^2 t} = \sqrt{9\cos^2 t} = 3\cos t.$$

Integrovanie iracionálnych funkcií

Dosadíme, v úprave použijeme trigonometrickú identitu $\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}$ a integrujeme:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{9\sin^2 t}{3\cos t}\, 3\cos t \,\mathrm{d}t = 9\int \sin^2 t \,\mathrm{d}t = 9\int \frac{1-\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \\ &= \frac{9}{2}\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right) = \frac{9}{2}\left(\arcsin\frac{u}{3} - \frac{u}{3}\frac{\sqrt{9-u^2}}{3}\right) = \\ &= \frac{9}{2}\arcsin\left(\frac{x-1}{3}\right) - \frac{(x-1)}{2}\sqrt{8+2x-x^2} + c. \end{aligned}$$

Integrovanie iracionálnych funkcií

Príklad 5

Vypočítajte integrály (Satko, str.66/pr.6 g)):

a) $\int \frac{1}{\sqrt{8-6x-9x^2}}\,\mathrm{d}x$

b) $\int \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+x+3}}\,\mathrm{d}x$

c) $\int \frac{1}{x-\sqrt{x^2-x+1}}\,\mathrm{d}x$

Obsah prednášky

Integrovanie transcendetných funkcií

Integrovanie transcendetných funkcií

3) **Integrovanie transcendetných funkcií**
Transcendentné funkcie integrujeme podľa okolností buď metódou substitučnou alebo metódou per partes. Pri riešení je často potrebné opakovane kombinovať obidve metódy.

Príklad 6

Vypočítame integrál $I = \int x^3 \left(e^{-x^4} + \operatorname{arccotg} x\right) \mathrm{d}x.$

Riešenie:
Daný integrál rozdelíme na dva. Prvý počítame pomocou substitučnej metódy, druhý metódou per partes.

$$\int x^3 e^{-x^4} \, \mathrm{d}x \overset{t=-x^4}{=} -\frac{1}{4} \int e^t \, \mathrm{d}t = -\frac{1}{4} e^{-x^4} + c,$$

Integrovanie transcendetných funkcií

$$\int x^3 \operatorname{arccotg} x = \left\{ \begin{array}{cc} u' = x^3 & v = \operatorname{arccotg} x \\ u = \frac{x^4}{4} & v' = -\frac{1}{1+x^2} \end{array} \right\} = $$
$$= \frac{x^4}{4} \operatorname{arccotg} x + \frac{1}{4} \int \frac{x^4 \, \mathrm{d}x}{1+x^2}$$

Posledný integrál z racionálnej funkcie počítame rozkladom na mnohočlen a rýdzo racionálnu funkciu

$$\int \frac{x^4 \, \mathrm{d}x}{1+x^2} = \int \left(x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2} \right) \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - x - \operatorname{arccotg} x + c.$$

Celkový výsledok je súčtom obidvoch integrálov

$$I = -\frac{1}{4} e^{-x^4} + \frac{x^4}{4} \operatorname{arccotg} x + \frac{1}{4} \left(\frac{x^3}{3} - x - \operatorname{arccotg} x \right) + c.$$

Obsah prednášky

Opakovanie

Integrovanie neurčitých integrálov

Príklad 7

Vypočítajte integrály:

a) $\int e^{x+e^x}\,\mathrm{d}x$

b) $\int x\sqrt[3]{x+4}\,\mathrm{d}x$

c) $\int x^2 \arctan\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

d) $\int \frac{8x-\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

e) $\int (x^2+3x)e^{-5x}\,\mathrm{d}x$

f) $\int \frac{x}{1-x^2+\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

g) $\int \operatorname{cotg} x \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x$

h) $\int \frac{1}{\cos^2 x\sqrt{5+\tan x}}\,\mathrm{d}x$

i) $\int \ln(x^2-2x-3)\,\mathrm{d}x$

j) $\int \ln(x^2+2x+3)\,\mathrm{d}x$

Ďakujem za pozornosť.