Integrálny počet
Neurčitý integrál - 2.časť

Zuzana Minarechová

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Slovenská technická univerzita, Stavebná fakulta

7 November 2022

Obsah prednášky

Rozklad na parciálne zlomky

Integrovanie racionálnych funkcií:

a) Integrovanie **polynómov**
b) Integrovanie **rýdzo racionálnych funkcií**
   1) Integrál **prvého** typu zlomkov
   2) Integrál **druhého** typu zlomkov
   3) Integrál **tretieho** typu zlomkov
   4) Integrál **štvrtého** typu zlomkov
c) Integrovanie **racionálnych funkcií**

Rozklad na parciálne zlomky

Rozklad na parciálne zlomky

Veta 1

Nech P je polynóm n-tého stupňa, kde $n \geq 3$. Potom sa dá zapísať v tvare

$$P(x) = P_1(x)P_2(x),$$

kde P_1 a P_2 sú polynómy menšieho stupňa ako n.

Rozklad na parciálne zlomky

Veta 1

Nech P je polynóm n-tého stupňa, kde $n \geq 3$. Potom sa dá zapísať v tvare

$$P(x) = P_1(x)P_2(x),$$

kde P_1 a P_2 sú polynómy menšieho stupňa ako n.

Veta 2

Nech P_1 a P_2 sú ľubovoľné polynómy, ktorých stupne sú postupne n_1 a n_2. Ďalej nech

$$P_1(x) = A\prod_{i=1}^{m}(x - x_i)^{k_i}\prod_{j=1}^{l}Q_j^{r_j}(x)$$

je rozklad polynómu P_1 na koreňové činitele. Potom racionálna funkcia $R(x) = \frac{P_2}{P_1}$ sa dá vyjadriť v tvare:

Rozklad na parciálne zlomky

$$
\begin{aligned}
R(x) &= P_3(x) + \frac{1}{A}\left(\frac{C_{1,1}}{x-x_1} + \frac{C_{1,2}}{(x-x_1)^2} + \cdots + \frac{C_{1,k_1}}{(x-x_1)^{k_1}} + \right. \\
&+ \frac{C_{2,1}}{x-x_2} + \frac{C_{2,2}}{(x-x_2)^2} + \cdots + \frac{C_{2,k_2}}{(x-x_2)^{k_2}} + \\
&\vdots \\
&+ \left. \frac{C_{m,1}}{x-x_m} + \frac{C_{m,2}}{(x-x_m)^2} + \cdots + \frac{C_{m,k_m}}{(x-x_m)^{k_m}}\right) + \\
&+ \frac{1}{A}\left(\frac{D_{1,1}x + E_{1,1}}{Q_1(x)} + \frac{D_{1,2}x + E_{1,2}}{(Q_1(x))^2} + \cdots + \frac{C_{1,l_1}x + E_{1,l_1}}{(Q_1(x))^{r_1}} + \right. \\
&+ \frac{D_{2,1}x + E_{2,1}}{Q_2(x)} + \frac{D_{2,2}x + E_{2,2}}{(Q_2(x))^2} + \cdots + \frac{D_{2,k_2}x + E_{2,k_2}}{(Q_2(x))^{r_2}} + \\
&\vdots \\
&+ \left. \frac{D_{l,1}x + E_{l,1}}{Q_l(x)} + \frac{D_{l,2}x + E_{l,2}}{(Q_l(x))^2} + \cdots + \frac{D_{l,r_l}x + E_{l,r_l}}{(Q_l(x))^{r_l}}\right) = \\
&= P_3(x) + \frac{1}{A}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k_i}\frac{C_{i,j}}{(x-x_i)^j} + \frac{1}{A}\sum_{I=1}^{l}\sum_{J=1}^{r_i}\frac{D_{I,J}x + E_{I,J}}{(Q_I(x))^J},
\end{aligned}
$$

Rozklad na parciálne zlomky

kde P_3 je polynóm stupňa $(n_2 - n_1)$, ak je $n_2 \geq n_1$ a $P_3(x) = 0$, ak je $n_2 < n_1$ a $C_{i,j} \in \mathbf{R}$, $D_{I,J} \in \mathbf{R}$, $E_{I,J} \in \mathbf{R}$ sú vhodné konštanty.

Rozklad na parciálne zlomky

kde P_3 je polynóm stupňa $(n_2 - n_1)$, ak je $n_2 \geq n_1$ a $P_3(x) = 0$, ak je $n_2 < n_1$ a $C_{i,j} \in \mathbf{R}$, $D_{I,J} \in \mathbf{R}$, $E_{I,J} \in \mathbf{R}$ sú vhodné konštanty.

Príklad 1

Rozložte na parciálne zlomky:

a) $\frac{1}{x^2-4}$

b) $\frac{5x^2-17x+12}{x^3-4x^2+4x}$

c) $\frac{2x-3}{x^3+2x^2-x-2}$

d) $\frac{x^3-3x^2-3x-10}{(x-1)^2(x^2+4)}$

Integrovanie racionálnych funkcií

Integrovanie racionálnych funkcií

Racionálnou funkciou rozumieme **podiel dvoch polynómov**.

Integrovanie racionálnych funkcií

Racionálnou funkciou rozumieme **podiel dvoch polynómov**.

a) **Integrovanie polynómov**

Integrovanie racionálnych funkcií

Racionálnou funkciou rozumieme **podiel dvoch polynómov**.

a) **Integrovanie polynómov**

Príklad 2

Vypočítame $\int (5x^7 - 12x^3 + 3x^2 - 9)\,\mathrm{d}x$.

Integrovanie racionálnych funkcií

Racionálnou funkciou rozumieme **podiel dvoch polynómov**.

a) **Integrovanie polynómov**

Príklad 2

Vypočítame $\int (5x^7 - 12x^3 + 3x^2 - 9)\,\mathrm{d}x$.

Riešenie:

$$\begin{aligned}\int (5x^7 &- 12x^3 + 3x^2 - 9)\,\mathrm{d}x = \\ &= 5\int x^7\,\mathrm{d}x - 12\int x^3\,\mathrm{d}x + 3\int x^2\,\mathrm{d}x - 9\int 1\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{5}{8}x^8 - 3x^4 + x^3 - 9x + c.\end{aligned}$$

Integrovanie racionálnych funkcií

b) **Integrovanie rýdzo racionálnych funkcií**

Integrovanie racionálnych funkcií

b) **Integrovanie rýdzo racionálnych funkcií**
Každú rýdzo racionálnu funkciu môžeme vyjadriť v tvare súčtu elementárnych zlomkov. Preto k integrovaniu rýdzo racionálnych funkcií stačí vedieť integrovať všetky 4 typy elem. zlomkov.

Integrovanie racionálnych funkcií

b) **Integrovanie rýdzo racionálnych funkcií**
Každú rýdzo racionálnu funkciu môžeme vyjadriť v tvare súčtu elementárnych zlomkov. Preto k integrovaniu rýdzo racionálnych funkcií stačí vedieť integrovať všetky 4 typy elem. zlomkov.

1) Integrál prvého typu zlomkov prevedieme na základný integrál:

$$\int \frac{a}{x-r}\,\mathrm{d}x \overset{(t=x-r)}{=} a\int \frac{\mathrm{d}t}{t} = a\ln|t| + c = a\ln|x-r| + c.$$

Integrovanie racionálnych funkcií

b) **Integrovanie rýdzo racionálnych funkcií**
Každú rýdzo racionálnu funkciu môžeme vyjadriť v tvare súčtu elementárnych zlomkov. Preto k integrovaniu rýdzo racionálnych funkcií stačí vedieť integrovať všetky 4 typy elem. zlomkov.

1) Integrál prvého typu zlomkov prevedieme na základný integrál:

$$\int \frac{a}{x-r}\,\mathrm{d}x \overset{(t=x-r)}{=} a\int \frac{\mathrm{d}t}{t} = a\ln|t| + c = a\ln|x-r| + c.$$

Príklad 3

Vypočítame $\int \frac{3}{2-5x}\,\mathrm{d}x$.

Integrovanie racionálnych funkcií

b) **Integrovanie rýdzo racionálnych funkcií**
Každú rýdzo racionálnu funkciu môžeme vyjadriť v tvare súčtu elementárnych zlomkov. Preto k integrovaniu rýdzo racionálnych funkcií stačí vedieť integrovať všetky 4 typy elem. zlomkov.

1) Integrál prvého typu zlomkov prevedieme na základný integrál:

$$\int \frac{a}{x-r}\,\mathrm{d}x \overset{(t=x-r)}{=} a\int \frac{\mathrm{d}t}{t} = a\ln|t| + c = a\ln|x-r| + c.$$

Príklad 3

Vypočítame $\int \frac{3}{2-5x}\,\mathrm{d}x$.

Riešenie:

$$\int \frac{3}{2-5x}\,\mathrm{d}x = -\frac{3}{5}\int \frac{\mathrm{d}x}{x-\frac{2}{5}} = -\frac{3}{5}\ln\left|x-\frac{2}{5}\right| + c.$$

Integrovanie racionálnych funkcií

2) Integrál druhého typu zlomkov riešime analogicky. Pre $n > 1$

$$\int \frac{a}{(x-r)^n}\,\mathrm{d}x \overset{(t=x-r)}{=} a\int t^{-n}\mathrm{d}t = a\frac{t^{-n+1}}{-n+1}+c = \frac{a}{(1-n)(x-r)^{n-1}}+c.$$

Integrovanie racionálnych funkcií

2) Integrál druhého typu zlomkov riešime analogicky. Pre $n > 1$

$$\int \frac{a}{(x-r)^n}\,\mathrm{d}x \overset{(t=x-r)}{=} a\int t^{-n}\mathrm{d}t = a\frac{t^{-n+1}}{-n+1}+c = \frac{a}{(1-n)(x-r)^{n-1}}+c.$$

Príklad 4

Vypočítame $\int \frac{8}{(2x+3)^4}\,\mathrm{d}x$.

Integrovanie racionálnych funkcií

2) Integrál druhého typu zlomkov riešime analogicky. Pre $n > 1$

$$\int \frac{a}{(x-r)^n}\,\mathrm{d}x \overset{(t=x-r)}{=} a\int t^{-n}\mathrm{d}t = a\frac{t^{-n+1}}{-n+1}+c = \frac{a}{(1-n)(x-r)^{n-1}}+c.$$

Príklad 4

Vypočítame $\int \frac{8}{(2x+3)^4}\,\mathrm{d}x$.

Riešenie:

$$\begin{aligned}\int \frac{8}{(2x+3)^4}\,\mathrm{d}x &= 8\int \frac{\mathrm{d}x}{2^4(x+\frac{3}{2})^4} \overset{(t=x+\frac{3}{2})}{=} \frac{1}{2}\int t^{-4}\,\mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{-3}}{-3}+c = -\frac{1}{6(x+\frac{3}{2})^3}+c.\end{aligned}$$

Integrovanie racionálnych funkcií

3) Tretí typ zlomku $\frac{ax+b}{x^2+px+q}$, kde $p^2 - 4q < 0$, integrujeme nasledovne:

Integrovanie racionálnych funkcií

3) Tretí typ zlomku $\frac{ax+b}{x^2+px+q}$, kde $p^2-4q<0$, integrujeme nasledovne:

1) Algebraickými úpravami **rozdelíme zlomok na dva zlomky**, ktorých menovatele sú zhodné s menovateľom pôvodného zlomku. **Čitateľ prvého je lineárna funkcia**, ktorá je číselným násobkom derivácie menovateľa **a čitateľ druhého je číslo**:

$$\frac{ax+b}{x^2+px+q}=\frac{\frac{a}{2}(2x+p)}{x^2+px+q}+\frac{b-\frac{ap}{2}}{x^2+px+q}.$$

Integrovanie racionálnych funkcií

3) Tretí typ zlomku $\frac{ax+b}{x^2+px+q}$, kde $p^2-4q<0$, integrujeme nasledovne:

1) Algebraickými úpravami **rozdelíme zlomok na dva zlomky**, ktorých menovatele sú zhodné s menovateľom pôvodného zlomku. **Čitateľ prvého je lineárna funkcia**, ktorá je číselným násobkom derivácie menovateľa **a čitateľ druhého je číslo**:

$$\frac{ax+b}{x^2+px+q}=\frac{\frac{a}{2}(2x+p)}{x^2+px+q}+\frac{b-\frac{ap}{2}}{x^2+px+q}.$$

2) Prvý zlomok integrujeme nasledovne:

$$\int\frac{\frac{a}{2}(2x+p)}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x \overset{(t=x^2+px+q)}{=} \frac{a}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t}=\frac{a}{2}\ln(x^2+px+q)+c.$$

Integrovanie racionálnych funkcií

3) Tretí typ zlomku $\frac{ax+b}{x^2+px+q}$, kde $p^2-4q<0$, integrujeme nasledovne:

1) Algebraickými úpravami **rozdelíme zlomok na dva zlomky**, ktorých menovatele sú zhodné s menovateľom pôvodného zlomku. **Čitateľ prvého je lineárna funkcia**, ktorá je číselným násobkom derivácie menovateľa **a čitateľ druhého je číslo**:

$$\frac{ax+b}{x^2+px+q}=\frac{\frac{a}{2}(2x+p)}{x^2+px+q}+\frac{b-\frac{ap}{2}}{x^2+px+q}.$$

2) Prvý zlomok integrujeme nasledovne:

$$\int\frac{\frac{a}{2}(2x+p)}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x\overset{(t=x^2+px+q)}{=}\frac{a}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t}=\frac{a}{2}\ln(x^2+px+q)+c.$$

3) Integrál druhého zlomku úpravami a substitúciou prevedieme na $\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}$.

Integrovanie racionálnych funkcií

Príklad 5

Vypočítame integrál $\int \frac{3x-1}{x^2+4x+10}\,\mathrm{d}x$

Integrovanie racionálnych funkcií

Príklad 5

Vypočítame integrál $\int \frac{3x-1}{x^2+4x+10}\,\mathrm{d}x$

Riešenie: Najskôr upravíme integrovaný zlomok na súčet dvoch zlomkov

$$\frac{3x-1}{x^2+4x+10} = \frac{\frac{3}{2}(2x+4)}{x^2+4x+10} + \frac{-7}{x^2+4x+10}.$$

Počítame prvý integrál

$$\frac{3}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+10}\,\mathrm{d}x \overset{(t=x^2+4x+10)}{=} \frac{3}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{3}{2}\ln|t| + c =$$

$$= \frac{3}{2}\ln(x^2+4x+10) + c.$$

Počítame druhý integrál

$$\int \frac{-7}{x^2+4x+10}\,\mathrm{d}x = -7\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+10} = -7\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2+6} =$$

Integrovanie racionálnych funkcií

$$= -\frac{7}{6}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(\frac{x+2}{\sqrt{6}}\right)^2 + 1} \overset{(t=\frac{x+2}{\sqrt{6}})}{=} -\frac{7}{6}\int \frac{\sqrt{6}\mathrm{d}t}{t^2+1} =$$

$$= -\frac{7}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg} t + c = -\frac{7}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{6}} + c.$$

Výsledok je súčtom obidvoch integrálov:

$$\int \frac{3x-1}{x^2+4x+10}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\ln(x^2+4x+10) - \frac{7}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{6}} + c.$$

Integrovanie racionálnych funkcií

4) Integrály zo zlomkov štvrtého typu $\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}$ pre $n > 1$ sa počítajú zložitou rekurentnou metódou (*pozn.* takéto typy príkladov nebudeme počítať).

Integrovanie racionálnych funkcií

4) Integrály zo zlomkov štvrtého typu $\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}$ pre $n > 1$ sa počítajú zložitou rekurentnou metódou (*pozn.* takéto typy príkladov nebudeme počítať).

Príklad 6

Vypočítame integrál $\int \frac{4x^3-14x^2+28x-7}{(x-2)^2(x^2-2x+5)}\,\mathrm{d}x$.

Integrovanie racionálnych funkcií

4) Integrály zo zlomkov štvrtého typu $\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}$ pre $n > 1$ sa počítajú zložitou rekurentnou metódou (*pozn.* takéto typy príkladov nebudeme počítať).

Príklad 6

Vypočítame integrál $\int \frac{4x^3-14x^2+28x-7}{(x-2)^2(x^2-2x+5)}\,\mathrm{d}x$.

Riešenie:

1) Integrovanú rýdzo racionálnu funkciu rozložíme na elementárne zlomky

$$\frac{4x^3-14x^2+28x-7}{(x-2)^2(x^2-2x+5)} = \frac{2}{x-2} + \frac{5}{(x-2)^2} + \frac{2x-3}{x^2-2x+5}.$$

Integrovanie racionálnych funkcií

4) Integrály zo zlomkov štvrtého typu $\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}$ pre $n > 1$ sa počítajú zložitou rekurentnou metódou (*pozn.* takéto typy príkladov nebudeme počítať).

Príklad 6

Vypočítame integrál $\int \frac{4x^3-14x^2+28x-7}{(x-2)^2(x^2-2x+5)}\,\mathrm{d}x$.

Riešenie:

1) Integrovanú rýdzo racionálnu funkciu rozložíme na elementárne zlomky

$$\frac{4x^3-14x^2+28x-7}{(x-2)^2(x^2-2x+5)} = \frac{2}{x-2} + \frac{5}{(x-2)^2} + \frac{2x-3}{x^2-2x+5}.$$

2) Integrujeme prvý integrál

$$\int \frac{2}{x-2}\,\mathrm{d}x = 2\ln|x-2| + c.$$

Integrovanie racionálnych funkcií

3) Integrujeme druhý integrál

$$\int \frac{5}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{5}{x-2} + c.$$

Integrovanie racionálnych funkcií

3) Integrujeme druhý integrál

$$\int \frac{5}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{5}{x-2} + c.$$

4) Podobne ako v predchádzajúcom príklade integrujeme tretí integrál

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x-3}{x^2-2x+5}\,\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{2x-2}{x^2-2x+5} - \frac{1}{x^2-2x+5} \right) \mathrm{d}x = \\
&= \ln(x^2-2x+5) - \frac{1}{4} \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2+4} = \\
&= \ln(x^2-2x+5) - \frac{1}{4} \int \frac{\mathrm{d}x}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1} = \\
&= \ln(x^2-2x+5) - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{2} \right) + c.
\end{aligned}$$

Integrovanie racionálnych funkcií

5) Sčítame všetky vypočítané integrály

$$\int \frac{4x^3 - 14x^2 + 28x - 7}{(x-2)^2(x^2 - 2x + 5)}\,\mathrm{d}x =$$

$$= 2\ln|x-2| - \frac{5}{x-2} + \ln(x^2 - 2x + 5) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{2}\right) + c.$$

Integrovanie racionálnych funkcií

c) **Integrovanie racionálnych funkcií**

Integrovanie racionálnych funkcií

c) **Integrovanie racionálnych funkcií**

Každá racionálna funkcia sa dá vyjadriť ako súčet mnohočlena a rýdzo racionálnej funkcie.

Integrovanie racionálnych funkcií

c) **Integrovanie racionálnych funkcií**

Každá racionálna funkcia sa dá vyjadriť ako súčet mnohočlena a rýdzo racionálnej funkcie.

Príklad 7

Vypočítame integrál $\int \frac{x^8+11x^6+15x^4+3x^3+12x^2-18x+27}{x^5+9x^3}\,\mathrm{d}x$.

Integrovanie racionálnych funkcií

c) Integrovanie racionálnych funkcií

Každá racionálna funkcia sa dá vyjadriť ako súčet mnohočlena a rýdzo racionálnej funkcie.

Príklad 7

Vypočítame integrál $\int \frac{x^8+11x^6+15x^4+3x^3+12x^2-18x+27}{x^5+9x^3}\,\mathrm{d}x$.

Riešenie:

1) Funkciu **rozložíme na súčet mnohočlena a rýdzo racionálnej funkcie**. Rozklad menovateľa na súčin je $x^3(x^2+9)$:

$$\frac{x^8+11x^6+15x^4+3x^3+12x^2-18x+27}{x^5+9x^3} =$$

$$= x^3+2x+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}-\frac{4x-5}{x^2+9}.$$

Integrovanie racionálnych funkcií

2) Integrál mnohočlena je jednoduchý $\int (x^3 + 2x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} + x^2 + c$.

Integrovanie racionálnych funkcií

2) Integrál mnohočlena je jednoduchý $\int (x^3 + 2x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} + x^2 + c$.
3) Integrály prvých troch zlomkov sú jednoduché, integrál posledného je

$$\int \frac{4x-5}{x^2+9}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{2x}{x^2+9}\,\mathrm{d}x - 5\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+9} = 2\ln(x^2+9) - \frac{5}{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{3} + c.$$

Integrovanie racionálnych funkcií

2) Integrál mnohočlena je jednoduchý $\int (x^3 + 2x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} + x^2 + c.$
3) Integrály prvých troch zlomkov sú jednoduché, integrál posledného je

$$\int \frac{4x-5}{x^2+9}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{2x}{x^2+9}\,\mathrm{d}x - 5\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+9} = 2\ln(x^2+9) - \frac{5}{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{3} + c.$$

4) Výsledok je súčtom všetkých integrálov

$$\int \frac{x^8 + 11x^6 + 15x^4 + 3x^3 + 12x^2 - 18x + 27}{x^5 + 9x^3}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{x^4}{4} + x^2 + \ln|x| + \frac{2}{x} - \frac{3}{2x^2} - 2\ln(x^2+9) + \frac{5}{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{3} + c.$$

Integrovanie racionálnych funkcií

Príklad 8

Vypočítajte integrály (Satko, str.60/pr.2 c), d), e), h)):

a) $\int \frac{x^3-2x^2+9}{x^2-x-2}\,\mathrm{d}x$

b) $\int \frac{x}{x^3-3x+2}\,\mathrm{d}x$

c) $\int \frac{x^2+x+12}{x^3+7x^2+11x+5}\,\mathrm{d}x$

d) $\int \frac{7-x}{x^3-x^2+3x+5}\,\mathrm{d}x$

Ďakujem za pozornosť.