Integrálny počet
Neurčitý integrál - 3.časť

Zuzana Minarechová

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Slovenská technická univerzita, Stavebná fakulta

10 November 2022

Obsah prednášky

Integrovanie goniometrických (trigonometrických) funkcií:

1) Pomocou univerzálnej substitúcie
2) Využitím úprav pomocou trigonometrických vzťahov

Obsah prednášky

Integrovanie pomocou univerzálnej substitúcie

Integrovanie pomocou univerzálnej substitúcie

Ukážeme si dve možnosti substitúcie:

a) Integrál z ľubovoľnej racionálnej funkcie z funkcií $\sin$ a $\cos$, t.j. funkcie obsahujúcej algebraické operácie a funkcie $\sin$ a $\cos$ (a teda aj $\tan$ a cotg), môžeme pomocou tvz. **univerzálnej goniometrickej substitúcie**:

$$t = \tan\frac{x}{2}, \qquad x \in (-\pi, \pi)\,;$$

previesť na integrál z racionálnej funkcie. Postupujeme tak, že vyjadríme inverznú funkciu, diferenciál $\mathrm{d}x$ a funkcie $\sin x$ a $\cos x$ pomocou t:

$$x = 2\operatorname{arctg}\, t, \quad \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Integrovanie pomocou univerzálnej substitúcie

Príklad 1

Vypočítame $\int \frac{1+\tan x}{1-\tan x}\,\mathrm{d}x$.

Riešenie:

Skôr než začneme počítať, uvedomme si, že úlohu môžeme riešiť v ľubovoľnom intervale, v ktorom je integrovaná funkcia definovaná, t.j. v ľubovoľnom intervale $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{3\pi}{4}+k\pi\right)$ alebo $\left(\frac{3\pi}{4}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$. Integrál upravíme a prevedieme substitúciou na integrál z racionálnej funkcie.

$$\int \frac{1+\tan x}{1-\tan x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{\cos x+\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos x-\sin x}{\cos x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}\,\mathrm{d}x =$$

Integrovanie pomocou univerzálnej substitúcie

$$\int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}-\frac{2t}{1+t^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2t^2-4t-2}{(t^2+1)(t^2+2t-1)}\,\mathrm{d}t.$$

Rýdzo racionálnu funkciu v poslednom integrále rozložíme na súčet elementárnych zlomkov

$$\frac{2t^2-4t-2}{(t^2+1)(t^2+2t-1)} = \frac{2t}{t^2+1} - \frac{1}{t+1+\sqrt{2}} - \frac{1}{t+1-\sqrt{2}}$$

a tieto integrujeme.

$$\int \frac{2t^2-4t-2}{(t^2+1)(t^2+2t-1)}\,\mathrm{d}t = \int \frac{2t}{t^2+1} - \int \frac{\mathrm{d}t}{t+1+\sqrt{2}} - \int \frac{\mathrm{d}t}{t+1-\sqrt{2}} =$$

Integrovanie pomocou univerzálnej substitúcie

$$\ln(t^2+1) - \ln|t+1+\sqrt{2}| - \ln|t+1-\sqrt{2}| = \ln\left|\frac{t^2+1}{t^2+2t-1}\right| + c.$$

Výpočet ukončíme spätnou substitúciou premennej t na pôvodnú premennú x

$$\int \frac{1+\tan x}{1-\tan x}\,\mathrm{d}x = \ln\left|\frac{\tan^2\frac{x}{2}+1}{\tan^2\frac{x}{2}+2\tan\frac{x}{2}-1}\right| + c.$$

Integrovanie pomocou univerzálnej substitúcie

$$\ln(t^2+1) - \ln|t+1+\sqrt{2}| - \ln|t+1-\sqrt{2}| = \ln\left|\frac{t^2+1}{t^2+2t-1}\right| + c.$$

Výpočet ukončíme spätnou substitúciou premennej t na pôvodnú premennú x

$$\int \frac{1+\tan x}{1-\tan x}\,\mathrm{d}x = \ln\left|\frac{\tan^2\frac{x}{2}+1}{\tan^2\frac{x}{2}+2\tan\frac{x}{2}-1}\right| + c.$$

b) Často je možné použiť tiež **substitúciu:**

$$t = \tan x, \qquad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

potom

$$x = \operatorname{arctg} t, \quad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}.$$

Integrovanie pomocou univerzálnej substitúcie

Príklad 2

Vypočítajte integrály (Satko: str.66/Pr.6 k), m); str.59/Pr.5 h), j)):

a) $\int \frac{1-\sin x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$

b) $\int \frac{\tan x}{1+\tan x}\,\mathrm{d}x$

c) $\int \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x$

d) $\int \frac{1}{\sin x-\cos x}\,\mathrm{d}x$

Obsah prednášky

Integrovanie s využitím úprav pomocou trigonometrických vzťahov

Využitím úprav pomocou trigonometrických vzťahov

Ukážeme si riešenie dvoch rôznych situácií:

a) Neurčitý integrál

$$\int \sin^n x \cos^m x \,\mathrm{d}x,$$

kde n a m sú celé čísla a **aspoň jedno z nich je nepárne**. Tento integrál úpravou a substitúciou $t = \cos x$, ak n je nepárne alebo $t = \sin x$, ak m je nepárne **prevedieme na integrál z racionálnej funkcie**.

Využitím úprav pomocou trigonometrických vzťahov

Príklad 3

Vypočítame integrál $\int \frac{1}{\cos^3 x}\,\mathrm{d}x$

Riešenie:

V integrovanej funkcii sa vyskytuje len funkcia $\cos x$. Preto úpravou a substitúciou $t = \sin x$, kde $\mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x$ dostávame

$$\int \frac{1}{\cos^3 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\cos^4 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{(1-\sin^2 x)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}t}{(1-t^2)^2}.$$

Integrál z rýdzo racionálnej funkcie potom riešime rozkladom na elementárne zlomky:

Využitím úprav pomocou trigonometrických vzťahov

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}t}{(1-t^2)^2}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{(1+t)^2}+\frac{1}{1+t}+\frac{1}{(1-t)^2}+\frac{1}{1-t}\right)\mathrm{d}t = \\
&= \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{1+t}+\ln|1+t|+\frac{1}{1-t}-\ln|1-t|\right)+c = \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{2t}{t^2-1}+\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right)+c.
\end{aligned}$$

Po spätnej substitúcii dostávame výsledok

$$\int \frac{1}{\cos^3 x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left(-\frac{2\sin x}{\cos^2 x}+\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|\right)+c.$$

Využitím úprav pomocou trigonometrických vzťahov

b) Neurčité integrály

$$\int \sin mx \cos nx \, \mathrm{d}x, \qquad \int \sin mx \sin nx \, \mathrm{d}x, \qquad \int \cos mx \cos nx \, \mathrm{d}x$$

kde m a n sú prirodzené čísla **prevedieme na jednoduché integrály pomocou trigonometrických vzťahov**:

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right),$$

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right),$$

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right).$$

Využitím úprav pomocou trigonometrických vzťahov

Príklad 4

Vypočítame $\int \sin 2x \cos 5x \, \mathrm{d}x$.

Riešenie:

Použijeme uvedený vzorec pre $\alpha = 2x$ a $\beta = 5x$

$$\int \sin 2x \cos 5x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int \left(\sin(-3x) + \sin 7x\right) \, \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2} \int (-\sin 3x + \sin 7x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{6} \cos 3x - \frac{1}{14} \cos 7x + c.$$

Využitím úprav pomocou trigonometrických vzťahov

Príklad 5

Vypočítajte integrály:

a) $\int \sin^3 x \cos^2 x \, \mathrm{d}x$

b) $\int \frac{1}{\cos x} \, \mathrm{d}x$

c) $\int \sin 3x \cos 2x \, \mathrm{d}x$

d) $\int \cos 2x \cos 3x \, \mathrm{d}x$

e) $\int \sin 2x \sin 3x \, \mathrm{d}x$

aj s použitím nasledujúcich vzťahov (ak je to vhodné):

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right),$$

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right),$$

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right).$$

Ďakujem za pozornosť.