Diferenciálny počet - derivácia funkcie (2. časť)

Zuzana Minarechová

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Slovenská technická univerzita, Stavebná fakulta

6 Október 2022

Obsah prednášky

- Derivácie
  - Derivácia **implicitnej funkcie**
  - Derivácia **funkcie určenej parametrickými rovnicami**
  - Derivácie **vyšších rádov**
- Diferenciálny počet - aplikácie
  - **Dotyčnica a normála** ku grafu funkcie

Obsah prednášky

- Derivácie
  - **Derivácia implicitnej funkcie**
  - Derivácia funkcie určenej parametrickými rovnicami
  - Derivácie vyšších rádov
- Diferenciálny počet - aplikácie
  - Dotyčnica a normála ku grafu funkcie

Derivácia implicitnej funkcie

- Rovnica $F(x, y) = 0$ určuje funkčný vzťah medzi veličinami x a y.
- Takúto funkciu voláme **funkcia určená implicitne** rovnicou $F(x, y) = 0$.
- Ak funkcia určená implicitne má deriváciu v niektorej množine, tak túto môžeme vypočítať aj **bez explicitného vyjadrenia** funkcie f.
- Postupujeme pri tom tak, že derivujeme obidve strany rovnice, pričom ľavú stranu **derivujeme ako zloženú funkciu** $F(x, y(x))$.
- Tento postup je veľmi užitočný najmä v situáciách, keď veličinu y nie sme schopní z rovnice vyjadriť.

Príklad

Vypočítajte deriváciu funkcie $x^2 + y^2 = 1$.

Riešenie: Rovnica $x^2 + y^2 = 1$ určuje dve funkcie $f_1 : y = \sqrt{1 - x^2}$ a $f_2 : y = -\sqrt{1 - x^2}$. Vypočítame ich derivácie bez pomoci tohoto explicitného vyjadrenia:

$$2x + 2y.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$$

a po vyjadrení hľadanej derivácie

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{y}$$

Derivácia implicitnej funkcie - Príklady

Príklad

Nájdite deriváciu implicitnej funkcie:

1) $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$

2) $x^2 - 3xy + 4y^2 - 2x + 3y = 0$

3) $x^2y^3 - \sin(xy) = 0$

Derivácia implicitnej funkcie - Príklady

Príklad

Nájdite deriváciu implicitnej funkcie:

1) $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$

   $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{y+2x}{x+2y}$

2) $x^2 - 3xy + 4y^2 - 2x + 3y = 0$

   $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2+3y-2x}{-3x+8y+3}$

3) $x^2y^3 - \sin(xy) = 0$

   $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-2xy^3+\cos(xy)y}{3x^2y^2-\cos(xy)x}$

Obsah prednášky

- Derivácie
  - Derivácia implicitnej funkcie
  - **Derivácia funkcie určenej parametrickými rovnicami**
  - Derivácie vyšších rádov
- Diferenciálny počet - aplikácie
  - Dotyčnica a normála ku grafu funkcie

Derivácia funkcie určenej parametrickými rovnicami

- Rovinná krivka býva často určená **parametrickými rovnicami**

$$x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad t \in (a, b).$$

V prípade, keď $f'(t) \neq 0$ pre všetky $t \in (a, b)$, je krivka grafom funkcie určenej parametrickými rovnicami, ktorej deriváciu môžeme počítať aj bez jej explicitného vyjadrenia pomocou vzťahu:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}.$$

Derivácia funkcie určenej par. rovnicami - Riešené príklady

Príklad

Vypočítajte deriváciu funkcie určenej parametrickými rovnicami

$$x = \cos t, \qquad y = \sin t, \qquad t \in \langle \pi, 2\pi \rangle.$$

Riešenie:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\operatorname{cotg} t.$$

Derivácia funkcie určenej par. rovnicami - Príklady

Príklad

Nájdite deriváciu funkcie danej parametrickými rovnicami:
$x = te^t$,
$y = t^3 + 6t$, $t \in (0, \infty)$.

Príklad

Nájdite deriváciu funkcie danej parametrickými rovnicami:
$x = \sqrt{t^3}$,
$y = t^2$, $t \in (0, \infty)$.

Derivácia funkcie určenej par. rovnicami - Príklady

Príklad

Nájdite deriváciu funkcie danej parametrickými rovnicami:
$x = te^t$,
$y = t^3 + 6t$, $t \in (0, \infty)$.
$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{3(t^2+2)}{e^t(1+t)}$

Príklad

Nájdite deriváciu funkcie danej parametrickými rovnicami:
$x = \sqrt{t^3}$,
$y = t^2$, $t \in (0, \infty)$.
$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{4\sqrt{t}}{3}$

Obsah prednášky

- Derivácie
  - Derivácia implicitnej funkcie
  - Derivácia funkcie určenej parametrickými rovnicami
  - **Derivácie vyšších rádov**
- Diferenciálny počet - aplikácie
  - Dotyčnica a normála ku grafu funkcie

Derivácie vyšších rádov

- Keďže derivácia elementárnej funkcie je funkciou, má zmysel hovoriť o derivácii derivácie atď.
- Druhou deriváciou funkcie f je derivácia funkcie f' (ak existuje).
- Pomocou indukcie môžeme takto definovať derivácie ľubovoľného rádu. **Deriváciou n-tého rádu alebo n-tou deriváciou funkcie f je derivácia (n-1)-ej derivácie funkcie** f (ak existuje).
- Derivácie vyšších rádov označujeme takto

$$f'',\ f''',\ f^4,\ f^5, \dots,\ f^{(n)}$$
$$y'',\ y''',\ y^4,\ y^5, \dots,\ y^{(n)}$$
$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2},\ \frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3},\ \frac{\mathrm{d}^4 y}{\mathrm{d}x^4},\ \frac{\mathrm{d}^5 y}{\mathrm{d}x^5}, \dots,\ \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$$

Derivácie vyšších rádov - Riešené príklady

Príklad

Vypočítajte deriváciu funkcie $(\log_2\ 3x)'''$ a

Riešenie:

$$\begin{aligned}
(\log_2 3x)' &= \frac{1}{3x\ln 2}\cdot 3 = \frac{1}{x\ln 2}\\
(\log_2 3x)'' &= \left(\frac{1}{x\ln 2}\right)' = \frac{1}{\ln 2}\cdot\left(\frac{-1}{x^2}\right)\\
(\log_2 3x)''' &= \left(\frac{1}{\ln 2}\cdot\left(\frac{-1}{x^2}\right)\right)' = \frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{2}{x^3}.
\end{aligned}$$

Derivácie vyšších rádov - Príklady

Príklad

Nájdite deriváciu:

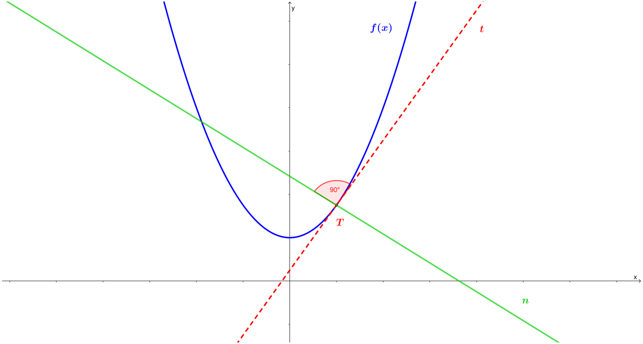
1) $f^4(x)$ ak $f(x) = x^6 + 5x^4 + 2x^3 - x^2$ $\quad f^4(x) = 360x^2 + 120$
2) $f^4(x)$ ak $f(x) = \frac{2}{x}$ $\quad f^4(x) = \frac{48}{x^5}$
3) $f''(x)$ ak $f(x) = \tan x$ $\quad f''(x) = 2\frac{\sin x}{\cos^3 x}$
4) $f'''(x)$ ak $f(x) = \arctan x$ $\quad f'''(x) = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$
5) $f^5(x)$ ak $f(x) = x^4 \ln x$ $\quad f^5(x) = \frac{24}{x}$

Obsah prednášky

- Derivácie
  - Derivácia implicitnej funkcie
  - Derivácia funkcie určenej parametrickými rovnicami
  - Derivácie vyšších rádov
- Diferenciálny počet - aplikácie
  - **Dotyčnica a normála ku grafu funkcie**

Dotyčnica a normála ku grafu funkcie

- Nech t a n sú priamky, ktorých smernice sú k_t a k_n. Potom priamky t a n sú na seba kolmé práve vtedy, keď $k_t \cdot k_n = -1$.



Obr.: Dotyčnica a normála ku grafu funkcie $y = f(x)$ v bode T

Dotyčnica a normála ku grafu funkcie

- Ak existuje derivácia funkcie f v bode x_0, tak **číslo** $f'(x_0)$ **je smernicou dotyčnice** ku grafu funkcie $y = f(x)$ v bode $[x_0, y_0]$ a číslo $-\frac{1}{f'(x_0)}$ je smernicou normály ku grafu funkcie $y = f(x)$ v bode $[x_0, y_0]$. Preto

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

je rovnica dotyčnice ku grafu funkcie f v bode $[x_0, f(x_0)]$ a

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

je rovnica normály ku grafu funkcie f v bode $[x_0, y_0]$.

Dotyčnica a normála ku grafu funkcie - Riešené príklady

Príklad

Nájdite rovnicu dotyčnice k funkcii $f(x) = x^2$, ak dotykový bod T má x-ovú súradnicu $x_0 = 2$.

Príklad

Nájdite rovnicu dotyčnice k funkcii $f(x) = x^2$, ak dotykový bod T má x-ovú súradnicu $x_0 = 2$.

Riešenie: Najprv vypočítame y-ovú súradnicu bodu T:

$$y_0 = f(2) = 4.$$

Dotykový bod má súradnice $T = (2, 4)$.

Dotyčnica a normála ku grafu funkcie - Riešené príklady

Príklad

Nájdite rovnicu dotyčnice k funkcii $f(x) = x^2$, ak dotykový bod T má x-ovú súradnicu $x_0 = 2$.

Riešenie: Najprv vypočítame y-ovú súradnicu bodu T:

$$y_0 = f(2) = 4.$$

Dotykový bod má súradnice $T = (2, 4)$.
Vypočítame smernicu dotyčnice k_t:

$$k_t = f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 2^2}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 4.$$

Dotyčnica t má rovnicu t: $y - 4 = 4(x - 2)$.

Dotyčnica a normála ku grafu funkcie - Riešené príklady

Príklad

Nájdite rovnicu dotyčnice k funkcii $f(x) = |x|$, ak dotykový bod má súradnice $T = (0, 0)$.

Dotyčnica a normála ku grafu funkcie - Riešené príklady

Príklad

Nájdite rovnicu dotyčnice k funkcii $f(x) = |x|$, ak dotykový bod má súradnice $T = (0, 0)$.

Riešenie: Potrebujeme vypočítať deriáciu funkcie f pre $x_0 = 0$, teda limitu. Zvlášť vypočítame limitu sprava a limitu zľava.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} \frac{|x| - 0}{x - 0} &= \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1, \\ \lim_{x \to 0^-} \frac{|x| - 0}{x - 0} &= \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1. \end{aligned}$$

To znamená, že $|x|$ nemá pre $x = 0$ deriváciu, teda neexistuje ani dotyčnica v bode T.

Dotyčnica a normála ku grafu funkcie - Riešené príklady

Príklad

Nájdite rovnicu dotyčnice k funkcii $f(x) = x^2 - 2x$, ktorá je rovnobežná s priamkou $p: \; y = x$.

Dotyčnica a normála ku grafu funkcie - Riešené príklady

Príklad

Nájdite rovnicu dotyčnice k funkcii $f(x) = x^2 - 2x$, ktorá je rovnobežná s priamkou $p: \ y = x$.

Riešenie: Smernica priamky p je $k_p = 1$.

Dotyčnica a normála ku grafu funkcie - Riešené príklady

Príklad

Nájdite rovnicu dotyčnice k funkcii $f(x) = x^2 - 2x$, ktorá je rovnobežná s priamkou $p: \ y = x$.

Riešenie: Smernica priamky p je $k_p = 1$. Rovnobežné priamky majú rovnaké smernice, preto pre smernicu dotyčnice k_t platí

$$k_t = k_p = 1.$$

Dotyčnica a normála ku grafu funkcie - Riešené príklady

Príklad

Nájdite rovnicu dotyčnice k funkcii $f(x) = x^2 - 2x$, ktorá je rovnobežná s priamkou $p: \; y = x$.

Riešenie: Smernica priamky p je $k_p = 1$. Rovnobežné priamky majú rovnaké smernice, preto pre smernicu dotyčnice k_t platí

$$k_t = k_p = 1.$$

Poznáme smernicu dotyčnice, ale nepoznáme dotykový bod T. Označme súradnice dotykového bodu $T = (x_0, y_0)$. To znamená, že hľadáme x_0, v ktorom $f'(x_0) = 1$.

$$f'(x_0) = (x_0^2 - 2x_0)' = 2x_0 - 2$$

Dotyčnica a normála ku grafu funkcie - Riešené príklady

Dostali sme rovnicu $2x_0 - 2 = 1$ a z toho $x_0 = \frac{3}{2}$.

Dotyčnica a normála ku grafu funkcie - Riešené príklady

Dostali sme rovnicu $2x_0 - 2 = 1$ a z toho $x_0 = \frac{3}{2}$.
Dosadíme x_0 do funkcie f a dostaneme y_0:

$$y_0 = f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2\frac{3}{2} = -\frac{3}{4}.$$

Dotykový bod má súradnice $T = \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}\right)$.

Rovnica dotyčnice je $t: \; y + \frac{3}{4} = x - \frac{3}{2}$.

Dotyčnica a normála ku grafu funkcie - Príklady

Príklad

Nájdite rovnicu dotyčnice t a normály n ku grafu funkcie $f(x) = \tan x$ v bode $T = \left(\frac{\pi}{4}, ?\right)$.

$t : y - 1 = 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

$n : y - 1 = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Príklad

Nájdite rovnicu dotyčnice t a normály n ku grafu funkcie $f(x) = x^2 - 3x + 5$ tak, aby t bola rovnobežná s priamkou $p : x - y + 1 = 0$.

$t : y - 3 = 1(x - 2)$

$n : y - 3 = -1(x - 2)$

Dotyčnica a normála ku grafu funkcie - Príklady

Príklad

Nájdite rovnicu dotyčnice t a normály n ku grafu funkcie $f(x) = \ln(x-2)$ tak, aby t bola kolmá na priamku $p : x + y = 0$.

$t : y - 0 = 1(x - 3)$

$n : y - 0 = -1(x - 3)$

Príklad

Nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie $f(x) = \arctan x$ tak, aby dotyčnica zvierala s osou x uhol $\alpha = 45\,\mathrm{deg}$.

$t : y - 0 = 1(x - 0)$

$n : y - 0 = -1(x - 0)$

Ďakujem za pozornosť.