Nekonečné rady - 2. časť

Zuzana Minarechová

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Slovenská technická univerzita, Stavebná fakulta

5 December 2022

Nekonečné rady

Obsah prednášky:

- **Kritéria konvergencie radov**:
  - **Cauchyho (odmocninové)** kritérium
  - **D'Alambertovo (podielové)** kritérium
  - **Porovnávacie** kritérium
  - **Cauchyho integrálne** kritérium

Nekonečné rady - kritéria konvergencie radov

Definícia 1

Rad $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+k}$ *nazývame* **zvyšok radu** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *po* k*-tom člene.*

Nekonečné rady - kritéria konvergencie radov

Definícia 1

Rad $\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n+k}$ *nazývame* **zvyšok radu** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *po* k*-tom člene.*

Veta 1

Rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je konvergentný práve vtedy, keď je konvergentný jeho zvyšok*

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+k}$$

po (ľubovoľnom) k*-tom člene.*

Cauchyho (odmocninové) kritérium

Nekonečné rady - Cauchyho odmocninové kritérium

Cauchyho odmocninové kritérium

Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je nekonečný rad.

Nekonečné rady - Cauchyho odmocninové kritérium

Cauchyho odmocninové kritérium

Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je nekonečný rad. Predpokladajme, že existuje číslo q, $q < 1$ a také k, že pre každé $n \geq k$ platí $\sqrt[n]{|a_n|} < q$,

Nekonečné rady - Cauchyho odmocninové kritérium

Cauchyho odmocninové kritérium

Nech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je nekonečný rad. Predpokladajme, že existuje číslo q, $q < 1$ a také k, že pre každé $n \geq k$ platí $\sqrt[n]{|a_n|} < q$,čo je splnené, ak

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1,$$

potom nekonečný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Nekonečné rady - Cauchyho odmocninové kritérium

Cauchyho odmocninové kritérium

Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je nekonečný rad. Predpokladajme, že existuje číslo q, $q < 1$ a také k, že pre každé $n \geq k$ platí $\sqrt[n]{|a_n|} < q$,čo je splnené, ak

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1,$$

potom nekonečný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

- Ak $L > 1$, rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Nekonečné rady - Cauchyho odmocninové kritérium

Cauchyho odmocninové kritérium

Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je nekonečný rad. Predpokladajme, že existuje číslo q, $q < 1$ a také k, že pre každé $n \geq k$ platí $\sqrt[n]{|a_n|} < q$,čo je splnené, ak

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1,$$

potom nekonečný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

- Ak $L > 1$, rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.
- Ak $L = 1$, podľa tohto kritéria o konvergencii (divergencii) radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nevieme rozhodnúť.

Nekonečné rady - Cauchyho odmocninové kritérium

Príklad 1

Zistite, či nekonečný rad konverguje/diverguje:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (\arctan(n+1))^n$ - diverguje

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n+1)}$ - konverguje

c) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\ln n}\right)^n$ - konverguje

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)^n$ - konverguje

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^{1+3n}}$ - diverguje

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n^n}$ - konverguje

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ - konverguje

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ - konverguje

Nekonečné rady - Cauchyho odmocninové kritérium

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$ - diverguje

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ - konverguje

k) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+6}{4n-2}\right)^n$ - konverguje

l) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^3+6}{8n^3+3}\right)^n$ - konverguje

D'Alambertovo (podielové) kritérium

Nekonečné rady - D'Alambertovo podielové kritérium

D'Alambertovo podielové kritérium

Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je nekonečný rad.

Nekonečné rady - D'Alambertovo podielové kritérium

D'Alambertovo podielové kritérium

Nech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je nekonečný rad. Predpokladajme, že existuje číslo q, $q < 1$ a také k, že pre každé $n \geq k$ platí $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q$,

Nekonečné rady - D'Alambertovo podielové kritérium

D'Alambertovo podielové kritérium

Nech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je nekonečný rad. Predpokladajme, že existuje číslo q, $q < 1$ a také k, že pre každé $n \geq k$ platí $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q$, čo je splnené, ak

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1,$$

potom nekonečný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Nekonečné rady - D'Alambertovo podielové kritérium

D'Alambertovo podielové kritérium

Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je nekonečný rad. Predpokladajme, že existuje číslo q, $q < 1$ a také k, že pre každé $n \geq k$ platí $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q$, čo je splnené, ak

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1,$$

potom nekonečný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

- Ak $L > 1$, rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Nekonečné rady - D'Alambertovo podielové kritérium

D'Alambertovo podielové kritérium

Nech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je nekonečný rad. Predpokladajme, že existuje číslo q, $q < 1$ a také k, že pre každé $n \geq k$ platí $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q$, čo je splnené, ak

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1,$$

potom nekonečný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

- Ak $L > 1$, rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.
- Ak $L = 1$, podľa tohto kritéria o konvergencii (divergencii) radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nevieme rozhodnúť.

Nekonečné rady - D'Alambertovo podielové kritérium

Príklad 2

Zistite, či nekonečný rad konverguje/diverguje:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}$ - konverguje

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ - o konvergencii nevieme rozhodnúť

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$ - diverguje

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!}$ - konverguje

e) $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{2}{3}\right)^n$ - konverguje

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(\ln 2)^n}$ - diverguje

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!5!}{n!5^n}$ - konverguje

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ - diverguje

Nekonečné rady - D'Alambertovo podielové kritérium

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!n!}{(2n)!}$ - konverguje

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^n}$ - diverguje

k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ - konverguje

l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-3)^n}{4^{n-1}}$ - konverguje

m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^{1+3n}}$ - diverguje

n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{n!}$ - konverguje

Porovnávacie kritérium

Nekonečné rady - Porovnávacie kritérium

Porovnávacie kritérium

Nech sú dané rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ s nezápornými členmi a nech pre každé $n \geq k$ platí, že $a_n \leq b_n$.

Nekonečné rady - Porovnávacie kritérium

Porovnávacie kritérium

Nech sú dané rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ s nezápornými členmi a nech pre každé $n \geq k$ platí, že $a_n \leq b_n$. Potom platí:

Nekonečné rady - Porovnávacie kritérium

Porovnávacie kritérium

Nech sú dané rady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ s nezápornými členmi a nech pre každé $n \geq k$ platí, že $a_n \leq b_n$. Potom platí:

- Ak konverguje rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, tak konverguje aj rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Nekonečné rady - Porovnávacie kritérium

Porovnávacie kritérium

Nech sú dané rady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ s nezápornými členmi a nech pre každé $n \geq k$ platí, že $a_n \leq b_n$. Potom platí:

- Ak konverguje rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, tak konverguje aj rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.
- Ak diverguje rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, tak diverguje aj rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Nekonečné rady - Porovnávacie kritérium

Porovnávacie kritérium

Nech sú dané rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ s nezápornými členmi a nech pre každé $n \geq k$ platí, že $a_n \leq b_n$. Potom platí:

- Ak konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, tak konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- Ak diverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, tak diverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Hovoríme, že rad

- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je majorantný k radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Nekonečné rady - Porovnávacie kritérium

Ako postupujeme pri určovaní konvergencie?

Nekonečné rady - Porovnávacie kritérium

Ako postupujeme pri určovaní konvergencie?

- Ak **predpokladáme konvergenciu** daného radu, **hľadáme k nemu majorantný konvergentný rad**.

Nekonečné rady - Porovnávacie kritérium

Ako postupujeme pri určovaní konvergencie?

- Ak **predpokladáme konvergenciu** daného radu, **hľadáme k nemu majorantný konvergentný rad**.
- Ak naopak **predpokladáme divergenciu radu**, **hľadáme divergentný rad, ku ktorému je daný rad majorantný**.

Nekonečné rady - Porovnávacie kritérium

Príklad 3

Zistite, či nekonečný rad konverguje/diverguje:

a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln n}$ - diverguje

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2+3}}$ - konverguje

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{3^n}$ - konverguje

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n+8}{n(n+1)(n+3)}$ - konverguje

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3+4}$ - konverguje

f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+\sin n}{10^n}$ - konverguje

g) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n-1}$ - diverguje

h) $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{3}{n-3}$ - diverguje

Nekonečné rady - Porovnávacie kritérium

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^4+n)^{1/3}}$ - konverguje

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(n)}{n^2}$ - konverguje

k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{4n-3}$ - diverguje

l) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5}{3n-4}$ - diverguje

m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4+2}{n^5}$ - diverguje

n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+1}$ - konverguje

o) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(3n-4)^2}$ - konverguje

p) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(n)}{2^n}$ - konverguje

Cauchyho integrálne kritérium

Nekonečné rady - Cauchyho integrálne kritérium

Cauchyho integrálne kritérium

Nech rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ má nezáporné členy

Nekonečné rady - Cauchyho integrálne kritérium

Cauchyho integrálne kritérium

Nech rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ má nezáporné členy a existuje k nemu funkcia $f(x)$, ktorá je spojitá, nerastúca (a aj nezáporná) na nejakom intervale $\langle k, \infty)$

Nekonečné rady - Cauchyho integrálne kritérium

Cauchyho integrálne kritérium

Nech rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ má nezáporné členy a existuje k nemu funkcia $f(x)$, ktorá je spojitá, nerastúca (a aj nezáporná) na nejakom intervale $\langle k, \infty)$ a pre každé $n \geq k$ platí $a_n = f(n)$.

Nekonečné rady - Cauchyho integrálne kritérium

Cauchyho integrálne kritérium

Nech rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ má nezáporné členy a existuje k nemu funkcia $f(x)$, ktorá je spojitá, nerastúca (a aj nezáporná) na nejakom intervale $\langle k, \infty)$ a pre každé $n \geq k$ platí $a_n = f(n)$. Potom ak nevlastný integrál

$$\int\limits_k^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

Nekonečné rady - Cauchyho integrálne kritérium

Cauchyho integrálne kritérium

Nech rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ má nezáporné členy a existuje k nemu funkcia $f(x)$, ktorá je spojitá, nerastúca (a aj nezáporná) na nejakom intervale $\langle k, \infty)$ a pre každé $n \geq k$ platí $a_n = f(n)$. Potom ak nevlastný integrál

$$\int\limits_{k}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

konverguje, konverguje aj rad $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$.

Nekonečné rady - Cauchyho integrálne kritérium

Cauchyho integrálne kritérium

Nech rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ má nezáporné členy a existuje k nemu funkcia $f(x)$, ktorá je spojitá, nerastúca (a aj nezáporná) na nejakom intervale $\langle k, \infty)$ a pre každé $n \geq k$ platí $a_n = f(n)$. Potom ak nevlastný integrál

$$\int\limits_{k}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

konverguje, konverguje aj rad $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$. Ak $\int\limits_{k}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ diverguje,

Nekonečné rady - Cauchyho integrálne kritérium

Cauchyho integrálne kritérium

Nech rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ má nezáporné členy a existuje k nemu funkcia $f(x)$, ktorá je spojitá, nerastúca (a aj nezáporná) na nejakom intervale $\langle k, \infty)$ a pre každé $n \geq k$ platí $a_n = f(n)$. Potom ak nevlastný integrál

$$\int\limits_{k}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

konverguje, konverguje aj rad $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$. Ak $\int\limits_{k}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ diverguje, aj rad $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$ diverguje.

Nekonečné rady - Cauchyho integrálne kritérium

Príklad 4

Zistite, či nekonečný rad konverguje/diverguje:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - diverguje

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ - konverguje

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$ - konverguje

d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n \ln n}$ - diverguje

e) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3}{n(\ln n)^{3/2}}$ - konverguje

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n}{(n^2+8)^{2/3}}$ - diverguje

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ - diverguje

Nekonečné rady - Cauchyho integrálne kritérium

h) $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$ - konverguje

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$ - diverguje

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-4n+5}$ - konverguje

k) $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$ - konverguje

Ďakujem za pozornosť.