Nekonečné rady - 1. časť

Zuzana Minarechová

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Slovenská technická univerzita, Stavebná fakulta

1 december 2022

Obsah prednášky:

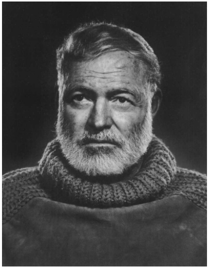
- **úvod**
- **základné pojmy** (definícia, postupnosť čiastočných súčtov, súčet radov, súčin radu a konštanty)
- **nutná podmienka konvergencie radu**
- **geometrický rad**
- **rad so striedavými znamienkami**, Leibnizovo kritérium

Nekonečné rady - úvod

Nekonečné rady - úvod

Ernest Hemingway vraj kedysi povedal:

> *"Najlahší spôsob ako stratiť dôveru a úctu mladých je dávať im* **nekonečné rady**.*"*



Obr.: Ernest Hemingway (1899 – 1961)

pozn. Hemingwayove rady nemali nič spoločné s nekonečnými radmi, ktorým sa budeme venovať :-).

Nekonečné rady - úvod

Príklad 1

$$\frac{13}{7} = 1.\overline{857142}\ldots = 1 + \frac{8}{10} + \frac{5}{100} + \frac{7}{1000} + \frac{1}{10000} + \cdots$$

Nekonečné rady - úvod

Príklad 1

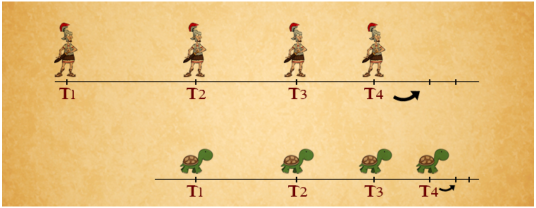
$$\frac{13}{7} = 1.\overline{857142}\ldots = 1 + \frac{8}{10} + \frac{5}{100} + \frac{7}{1000} + \frac{1}{10000} + \cdots$$

Príklad 2

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} = 0.\overline{3}\ldots &= 0.3 + 0.03 + 0.003 + \cdots = \\ &= \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \cdots = \\ &= \frac{3}{10}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \cdots\right) = \\ &= \frac{3}{10}\left(1 + \frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots\right).\end{aligned}$$

Nekonečné rady - úvod

Zenonov paradox: *"Pomalá korytnačka raz vyzvala rýchlonohého Achilla na pretek na 100 metrov. Achilles, vedomý si svojej rýchlosti, dal korytnačke náskok 10 m. Naviac sa rozhodol, že mu postačí byť 10-krát rýchlejší ako korytnačka. Kým však Achilles odbehol svojich 10 m, korytnačka odbehla 1 m, a kým zase odbehol ten 1 m, korytnačka medzitým odbehla 1 dm, a tak to pokračovalo ďalej."*



Obr.: Zenonov paradox - Achilles a korytnačka

Nekonečné rady - úvod

Matematicky celú prebehnutú vzdialenosť môžeme zapísať v tvare

$$10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots$$

Starovekí matematici sa domnievali, že túto konštrukciu je možné opakovať donekonečna, a preto Achilles korytnačku nikdy nedobehne. Nedokázali si totižto predstaviť, že po sčítaní toľkých čiastočných dĺžok (čiže kladných čísel) je možné získať konečné číslo (to by bola dĺžka po ubehnutí ktorej by Achilles korytnačku dobehol).

Nekonečné rady - úvod

"Je možné sčítať nekonečne veľa čísel?"

Nekonečné rady - úvod

Inými slovami: pre danú postupnosť sa teraz pokúsime najsť súčet všetkých jej členov (ak existuje).

Nekonečné rady - úvod

Majme všakovaké postupnosti a skúsme nájsť jednotlivé súčty všetkých ich členov (ak existujú):

1) $\{1\}_{n=1}^{\infty}$
2) $\{2^n\}_{n=1}^{\infty}$
3) $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$
4) $\left\{\frac{1}{3^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$
5) $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$
6) $\{n\}_{n=1}^{\infty}$
7) $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$
8) $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$
9) $\{(-2)^n\}_{n=1}^{\infty}$
10) $\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$

Nekonečné rady - úvod

1) Pre číslenú postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \{1\}_{n=1}^{\infty}$ máme

Nekonečné rady - úvod

1) Pre číslenú postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \{1\}_{n=1}^{\infty}$ máme

$$a_1 = 1$$

Nekonečné rady - úvod

1) Pre číslenú postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \{1\}_{n=1}^{\infty}$ máme

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_1 + a_2 &= 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

Nekonečné rady - úvod

1) Pre číslenú postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \{1\}_{n=1}^{\infty}$ máme

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_1 + a_2 &= 1 + 1 = 2 \\ a_1 + a_2 + a_3 &= 1 + 1 + 1 = 3 \end{aligned}$$

Nekonečné rady - úvod

1) Pre číslenú postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \{1\}_{n=1}^{\infty}$ máme

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1 \\
a_1 + a_2 &= 1 + 1 = 2 \\
a_1 + a_2 + a_3 &= 1 + 1 + 1 = 3 \\
a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &= 1 + 1 + 1 + 1 = 4 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Nekonečné rady - úvod

1) Pre číslenú postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \{1\}_{n=1}^{\infty}$ máme

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_1 + a_2 &= 1 + 1 = 2 \\ a_1 + a_2 + a_3 &= 1 + 1 + 1 = 3 \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &= 1 + 1 + 1 + 1 = 4 \\ &\vdots \end{aligned}$$

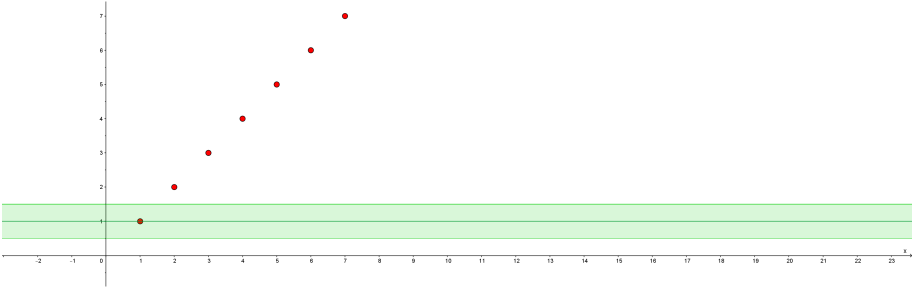
$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots = ?$$

Nekonečné rady - úvod

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots = \infty$$

Nekonečné rady - úvod

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots = \infty$$



Obr.: $L = 1$, $\varepsilon = 0.5$ (ilustračné hodnoty)

Nekonečné rady - úvod

2) Pre číslenú postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \{2^n\}_{n=1}^{\infty}$ dostávame

Nekonečné rady - úvod

2) Pre číslenú postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \{2^n\}_{n=1}^{\infty}$ dostávame

$$a_1 = 2$$

Nekonečné rady - úvod

2) Pre číslenú postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \{2^n\}_{n=1}^{\infty}$ dostávame

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ a_1 + a_2 &= 2 + 4 = 6 \end{aligned}$$

Nekonečné rady - úvod

2) Pre číslenú postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \{2^n\}_{n=1}^{\infty}$ dostávame

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ a_1 + a_2 &= 2 + 4 = 6 \\ a_1 + a_2 + a_3 &= 2 + 4 + 8 = 14 \end{aligned}$$

Nekonečné rady - úvod

2) Pre číslenú postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \{2^n\}_{n=1}^{\infty}$ dostávame

$$\begin{aligned}
a_1 &= 2 \\
a_1 + a_2 &= 2 + 4 = 6 \\
a_1 + a_2 + a_3 &= 2 + 4 + 8 = 14 \\
a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &= 2 + 4 + 8 + 16 = 30 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Nekonečné rady - úvod

2) Pre číslenú postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \{2^n\}_{n=1}^{\infty}$ dostávame

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 2 \\
a_1 + a_2 &= 2 + 4 = 6 \\
a_1 + a_2 + a_3 &= 2 + 4 + 8 = 14 \\
a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &= 2 + 4 + 8 + 16 = 30 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

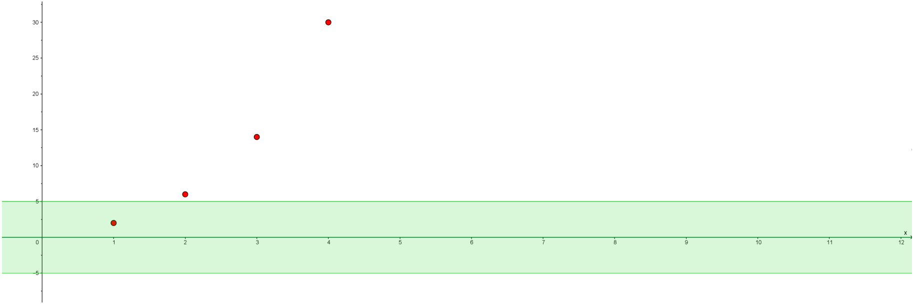
$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^n + \cdots = \color{red}{?}$$

Nekonečné rady - úvod

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^n + \cdots = \infty$$

Nekonečné rady - úvod

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^n + \cdots = \infty$$



Obr.: $L = 0$, $\varepsilon = 5$ (ilustračné hodnoty)

Nekonečné rady - úvod

3) Majme číslenú postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

Nekonečné rady - úvod

3) Majme číslenú postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

Nekonečné rady - úvod

3) Majme číslenú postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2} \\ a_1 + a_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Nekonečné rady - úvod

3) Majme číslenú postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2} \\ a_1 + a_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \\ a_1 + a_2 + a_3 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \end{aligned}$$

Nekonečné rady - úvod

3) Majme číslenú postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{2} \\
a_1 + a_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \\
a_1 + a_2 + a_3 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \\
a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Nekonečné rady - úvod

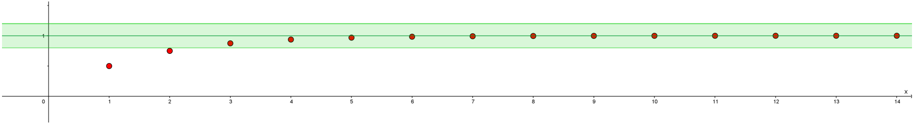
3) Majme číslenú postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left\{ \frac{1}{2^n} \right\}_{n=1}^{\infty}$

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{2} \\
a_1 + a_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \\
a_1 + a_2 + a_3 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \\
a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = ?$$

Nekonečné rady - úvod

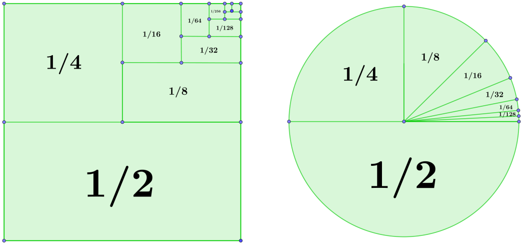
$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1$$



Obr.: $L = 1$, $\varepsilon = 0.2$

Nekonečné rady - úvod

Majme štvorec resp. kruh, ktorého plocha je $1\,m^2$, a ktorý budeme opakovane deliť na polovice.



$$\begin{aligned}
\text{Plocha} &= \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\frac{1}{256}+\dots \\
\text{Plocha} &= \frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{2^8}+\dots \\
\text{Plocha} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1
\end{aligned}$$

Nekonečné rady - úvod

4) Majme číslenú postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{3^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

Nekonečné rady - úvod

4) Majme číslenú postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{3^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

$$a_1 = \frac{1}{3}$$

Nekonečné rady - úvod

4) Majme číslenú postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{3^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{3} \\ a_1 + a_2 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

Nekonečné rady - úvod

4) Majme číslenú postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{3^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{3} \\ a_1 + a_2 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9} \\ a_1 + a_2 + a_3 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} = \frac{13}{27} \end{aligned}$$

Nekonečné rady - úvod

4) Majme číslenú postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{3^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{3} \\
a_1 + a_2 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9} \\
a_1 + a_2 + a_3 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} = \frac{13}{27} \\
a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} = \frac{40}{81} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

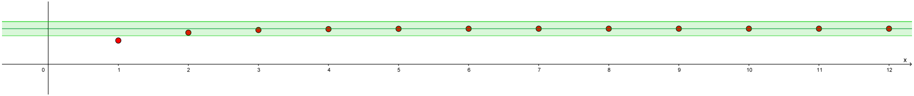
$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots + \frac{1}{3^n} + \cdots = ?$$

Nekonečné rady - úvod

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots + \frac{1}{3^n} + \cdots = \frac{1}{2}$$

Nekonečné rady - úvod

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots + \frac{1}{3^n} + \cdots = \frac{1}{2}$$



Obr.: $L = 0.5$, $\varepsilon = 0.1$

Nekonečné rady - úvod

5) Pre číslenú postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ máme

Nekonečné rady - úvod

5) Pre číslenú postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ máme

$$a_1 = 1$$

Nekonečné rady - úvod

5) Pre číslenú postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ máme

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_1 + a_2 &= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Nekonečné rady - úvod

5) Pre číslenú postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ máme

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_1 + a_2 &= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ a_1 + a_2 + a_3 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6} \end{aligned}$$

Nekonečné rady - úvod

5) Pre číslenú postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ máme

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 1 \\
a_1 + a_2 &= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\
a_1 + a_2 + a_3 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6} \\
a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Nekonečné rady - úvod

5) Pre číslenú postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ máme

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 1 \\
a_1 + a_2 &= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\
a_1 + a_2 + a_3 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6} \\
a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = ?$$

Nekonečné rady - úvod

6) Majme číslenú postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \{n\}_{n=1}^{\infty}$

Nekonečné rady - úvod

6) Majme číslenú postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \{n\}_{n=1}^{\infty}$

$$a_1 = 1$$

Nekonečné rady - úvod

6) Majme číslenú postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \{n\}_{n=1}^{\infty}$

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_1 + a_2 &= 1 + 2 = 3 \end{aligned}$$

Nekonečné rady - úvod

6) Majme číslenú postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \{n\}_{n=1}^{\infty}$

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_1 + a_2 &= 1 + 2 = 3 \\ a_1 + a_2 + a_3 &= 1 + 2 + 3 = 6 \end{aligned}$$

Nekonečné rady - úvod

6) Majme číslenú postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \{n\}_{n=1}^{\infty}$

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 1 \\
a_1 + a_2 &= 1 + 2 = 3 \\
a_1 + a_2 + a_3 &= 1 + 2 + 3 = 6 \\
a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &= 1 + 2 + 3 + 4 = 10 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Nekonečné rady - úvod

6) Majme číslenú postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \{n\}_{n=1}^{\infty}$

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1 \\
a_1 + a_2 &= 1 + 2 = 3 \\
a_1 + a_2 + a_3 &= 1 + 2 + 3 = 6 \\
a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &= 1 + 2 + 3 + 4 = 10 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

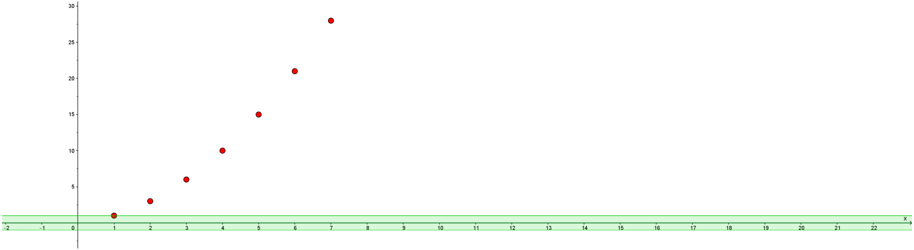
$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = 1 + 2 + 3 + \cdots + n + \cdots = {\color{red}?}$$

Nekonečné rady - úvod

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = 1 + 2 + 3 + \cdots + n + \cdots = \infty$$

Nekonečné rady - úvod

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = 1 + 2 + 3 + \cdots + n + \cdots = \infty$$



Obr.: $L = 0$, $\varepsilon = 1$ (ilustračné hodnoty)

Nekonečné rady - úvod

7) Pre číslenú postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ postupne dostaneme

Nekonečné rady - úvod

7) Pre číslenú postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ postupne dostaneme

$$a_1 = 1$$

Nekonečné rady - úvod

7) Pre číslenú postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ postupne dostaneme

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_1 + a_2 &= 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Nekonečné rady - úvod

7) Pre číslenú postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ postupne dostaneme

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_1 + a_2 &= 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \\ a_1 + a_2 + a_3 &= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{49}{36} \end{aligned}$$

Nekonečné rady - úvod

7) Pre číslenú postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ postupne dostaneme

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1 \\
a_1 + a_2 &= 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \\
a_1 + a_2 + a_3 &= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{49}{36} \\
a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} = \frac{205}{144} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Nekonečné rady - úvod

7) Pre číslenú postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ postupne dostaneme

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_1 + a_2 &= 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \\ a_1 + a_2 + a_3 &= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{49}{36} \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} = \frac{205}{144} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6} \quad :-)$$

(*pozn.* Tento problém známy ako *Basel problem* ako prvý vyriešil Leonhard Euler v roku 1734.)

Nekonečné rady - úvod

8) Majme číslenú postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$

Nekonečné rady - úvod

8) Majme číslenú postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$

$$a_1 = -1$$

Nekonečné rady - úvod

8) Majme číslenú postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$

$$\begin{aligned} a_1 &= -1 \\ a_1 + a_2 &= -1 + 1 = 0 \end{aligned}$$

Nekonečné rady - úvod

8) Majme číslenú postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$

$$\begin{aligned} a_1 &= -1 \\ a_1 + a_2 &= -1 + 1 = 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 &= -1 + 1 - 1 = -1 \end{aligned}$$

Nekonečné rady - úvod

8) Majme číslenú postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$

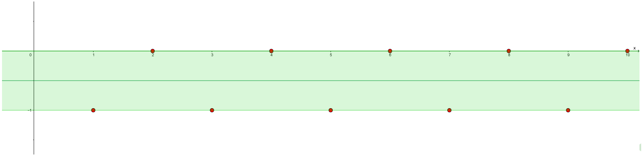
$$\begin{aligned} a_1 &= -1 \\ a_1 + a_2 &= -1 + 1 = 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 &= -1 + 1 - 1 = -1 \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &= -1 + 1 - 1 + 1 = 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Nekonečné rady - úvod

8) Majme číslenú postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$

$$\begin{aligned}
a_1 &= -1 \\
a_1 + a_2 &= -1 + 1 = 0 \\
a_1 + a_2 + a_3 &= -1 + 1 - 1 = -1 \\
a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &= -1 + 1 - 1 + 1 = 0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = -1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^n + \cdots = ?$$



Nekonečné rady - úvod

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = -1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^n + \cdots = ?$$

$$(-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots = \underbrace{((-1) + 1)}_{0} + \underbrace{((-1) + 1)}_{0} + \cdots = 0$$

$$(-1)+1+(-1)+1+(-1)+\cdots = -1+\underbrace{(1 + (-1))}_{0} + \underbrace{(1 + (-1))}_{0} + \cdots = -1$$

(*pozn.* Rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ sa nazýva Grandiho rad, a je to príklad neplatnosti asociativity pre nekonečné rady. Tento rad diverguje.)

Nekonečné rady - úvod

9) Majme číslenú postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \{(-2)^n\}_{n=1}^{\infty}$

$$a_1 = -2$$

Nekonečné rady - úvod

9) Majme číslenú postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \{(-2)^n\}_{n=1}^{\infty}$

$$\begin{aligned} a_1 &= -2 \\ a_1 + a_2 &= -2 + 4 = 2 \end{aligned}$$

Nekonečné rady - úvod

9) Majme číslenú postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \{(-2)^n\}_{n=1}^{\infty}$

$$\begin{aligned} a_1 &= -2 \\ a_1 + a_2 &= -2 + 4 = 2 \\ a_1 + a_2 + a_3 &= -2 + 4 - 8 = -6 \end{aligned}$$

Nekonečné rady - úvod

9) Majme číslenú postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \{(-2)^n\}_{n=1}^{\infty}$

$$
\begin{aligned}
a_1 &= -2 \\
a_1 + a_2 &= -2 + 4 = 2 \\
a_1 + a_2 + a_3 &= -2 + 4 - 8 = -6 \\
a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &= -2 + 4 - 8 + 16 = 10 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Nekonečné rady - úvod

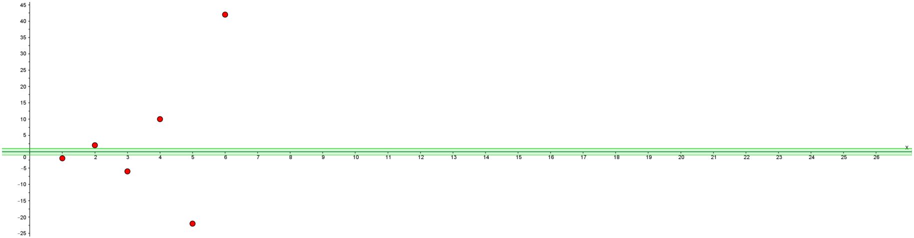
9) Majme číslenú postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \{(-2)^n\}_{n=1}^{\infty}$

$$\begin{aligned} a_1 &= -2 \\ a_1 + a_2 &= -2 + 4 = 2 \\ a_1 + a_2 + a_3 &= -2 + 4 - 8 = -6 \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &= -2 + 4 - 8 + 16 = 10 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = -2 + 4 - 8 + \cdots + (-2)^n + \cdots = \, ?$$

Nekonečné rady - úvod

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = -2 + 4 - 8 + \cdots + (-2)^n + \cdots = \infty$$



Obr.: $L = 0$, $\varepsilon = 1$ (ilustračné hodnoty)

Nekonečné rady - úvod

10) Majme číslenú postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$

Nekonečné rady - úvod

10) Majme číslenú postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$

$$a_1 = -\frac{1}{2}$$

Nekonečné rady - úvod

10) Majme číslenú postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{1}{2} \\ a_1 + a_2 &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Nekonečné rady - úvod

10) Majme číslenú postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{1}{2} \\ a_1 + a_2 &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} \\ a_1 + a_2 + a_3 &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = -\frac{3}{8} \end{aligned}$$

Nekonečné rady - úvod

10) Majme číslenú postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left\{ \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right\}_{n=1}^{\infty}$

$$\begin{aligned}
a_1 &= -\frac{1}{2} \\
a_1 + a_2 &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} \\
a_1 + a_2 + a_3 &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = -\frac{3}{8} \\
a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = -\frac{5}{16} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Nekonečné rady - úvod

10) Majme číslenú postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$

$$\begin{aligned}
a_1 &= -\frac{1}{2} \\
a_1 + a_2 &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} \\
a_1 + a_2 + a_3 &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = -\frac{3}{8} \\
a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = -\frac{5}{16} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

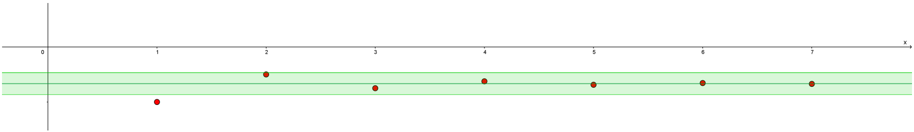
$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \cdots = ?$$

Nekonečné rady - úvod

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \cdots = -\frac{1}{3}$$

Nekonečné rady - úvod

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \cdots = -\frac{1}{3}$$



Obr.: $L = -1/3$, $\varepsilon = 0.1$

Základné pojmy

Nekonečné rady - základné pojmy

Definícia 1

Nech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *je daná nekonečná postupnosť reálnych čísel. Potom symbol*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

nazývame **nekonečný číselný rad**, *alebo skrátene* **nekonečný rad**. *Číslo* a_n *nazývame* n*-tý člen radu.*

(*pozn.* Číselné rady - členmi radu sú čísla; Funkcionálne rady - členmi radu sú funkcie.)

Nekonečné rady - základné pojmy

Definícia 2

K radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je priradená taká postupnosť* $(s_n)_{n=1}^{\infty}$, *že platí*

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

pre každé $n \in \mathbf{N}^+$. *Postupnosť* $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ *nazývame* **postupnosť čiastočných súčtov** *k radu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Nekonečné rady - základné pojmy

Definícia 3

Nech postupnosť čiastočných súčtov $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ *má vlastnú limitu*

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s$$

potom číslo s *nazývame súčtom radu a rad nazývame* **konvergentný**. *Ak limita* $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ *neexistuje alebo je nevlastná, potom hovoríme, že rad je* **divergentný**.

Nekonečné rady - základné pojmy

Vzťah medzi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ je vzájomne jednoznačný $(s_0 = 0)$:

$$
\begin{aligned}
s_1 &= a_1 \\
s_2 &= a_1 + a_2 = s_1 + a_2 \\
&\dots \\
s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = s_{n-1} + a_n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_1 &= s_1 = s_1 - s_0 \\
a_2 &= s_2 - s_1 \\
&\dots \\
a_n &= s_n - s_{n-1}, \quad n \in \mathbf{N}^+.
\end{aligned}
$$

Nekonečné rady - základné pojmy

Ešte pár poznámok, ktoré je dobré si uvedomiť:

- V čom je rozdiel medzi postupnosťou a radom? **Nekonečný číselný rad predstavuje súčet prvkov postupnosti.**

Nekonečné rady - základné pojmy

Ešte pár poznámok, ktoré je dobré si uvedomiť:

- V čom je rozdiel medzi postupnosťou a radom? **Nekonečný číselný rad predstavuje súčet prvkov postupnosti.**
- Z definície je zrejmé, že o tom, **či rad má alebo nemá súčet rozhoduje** to, či **postupnosť** $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ je **konvergentná alebo divergentná**

Nekonečné rady - základné pojmy

Ešte pár poznámok, ktoré je dobré si uvedomiť:

- V čom je rozdiel medzi postupnosťou a radom? **Nekonečný číselný rad predstavuje súčet prvkov postupnosti.**
- Z definície je zrejmé, že o tom, **či rad má alebo nemá súčet rozhoduje** to, či **postupnosť** $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ je **konvergentná alebo divergentná**
- Rad je **konvergentný** $\leftrightarrow$ **má súčet**; rad je **divergentný** $\leftrightarrow$ **nemá súčet**

Nekonečné rady - základné pojmy

Ešte pár poznámok, ktoré je dobré si uvedomiť:

- V čom je rozdiel medzi postupnosťou a radom? **Nekonečný číselný rad predstavuje súčet prvkov postupnosti.**
- Z definície je zrejmé, že o tom, **či rad má alebo nemá súčet rozhoduje** to, či **postupnosť** $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ je **konvergentná alebo divergentná**
- Rad je **konvergentný** $\leftrightarrow$ **má súčet**; rad je **divergentný** $\leftrightarrow$ **nemá súčet**
- **O súčte radu hovoríme iba pri konvergentných radoch**, v prípade **divergentných radov rozlišujeme 3 prípady divergencie**:
  - ak $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$ tak hovoríme, že rad diverguje do $+\infty$,
  - ak $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = -\infty$ tak hovoríme, že rad diverguje do $-\infty$,
  - ak $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \nexists$ tak hovoríme, že rad osciluje.

Nekonečné rady - základné pojmy

Definícia 4

Nech sú dané rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. *Potom rad*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$$

nazývame **súčtom radov** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Nekonečné rady - základné pojmy

Definícia 4

Nech sú dané rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. *Potom rad*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$$

nazývame **súčtom radov** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Ak $c \in \mathbf{R}$, *tak rad*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (c \cdot a_n)$$

nazývame **súčin radu** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **a konštanty** c.

Nekonečné rady - základné pojmy

Veta 1

Nech rad $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ **je súčtom radov** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. *Nech* **tieto rady sú konvergentné** *a platí* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s_1$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = s_2$. *Potom aj* **rad** $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ **je konvergentný** *a platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = s_1 + s_2.$$

Nekonečné rady - základné pojmy

Veta 2

Nech $c \in \mathbf{R}$ *a* $c \neq 0$*. Potom rad* $\sum_{n=1}^{\infty}(c \cdot a_n)$ **je konvergentný práve vtedy, keď je konvergentný rad** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*. V prípade konvergencie, ak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$*, tak*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot s = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Nekonečné rady - základné pojmy

Príklad 3

Majme rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. *Zistite, či daný rad konverguje alebo diverguje.*

Nekonečné rady - základné pojmy

Príklad 3

Majme rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. *Zistite, či daný rad konverguje alebo diverguje.*

Riešenie: Pre všetky $n \in \mathbf{N}^+$ platí

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Nekonečné rady - základné pojmy

Príklad 3

Majme rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. *Zistite, či daný rad konverguje alebo diverguje.*

Riešenie: Pre všetky $n \in \mathbf{N}^{+}$ platí

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\
s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n \\
&= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2+1}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{1} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \cdots + \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} \\
&= 1 - \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

Nekonečné rady - základné pojmy

Príklad 3

Majme rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. *Zistite, či daný rad konverguje alebo diverguje.*

Riešenie: Pre všetky $n \in \mathbf{N}^+$ platí

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\
s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n \\
&= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2+1}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{1} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \cdots + \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} \\
&= 1 - \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1.$$ **Rad konverguje.**

Nekonečné rady - základné pojmy

Príklad 4

Vypočítajte súčet radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *pomocou postupnosti čiastočných súčtov*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+4)}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+4n+3}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+2}}\right)$

d) $\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \cdots$

Príklad 5

Zistite, či rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *konverguje alebo diverguje.*

Nutná podmienka konvergencie radu

Nekonečné rady - nutná podmienka konvergencie radu

Veta 3

Nutná podmienka konvergencie radu:

$$\text{Ak rad} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{konverguje, tak} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Ak neplatí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, *potom rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

(*pozn.* Hovoríme, že podmienka $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ je **nutnou, nie však postačujúcou podmienkou** pre konvergenciu radu, napr. dokázali sme si, že *Harmonický rad* je divergentný. Postupnosť prevrátených hodnôt je síce konvergentná a jej limita je nula, ale harmonický rad diverguje do $+\infty$, napriek tomu, že je splnená nutná podmienka konvergencie.)

Nekonečné rady - nutná podmienka konvergencie radu

Príklad 6

Dokáže, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentný:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n+1}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan n$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} 2n$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{n+1}$

Nekonečné rady - nutná podmienka konvergencie radu

Keď sa vrátime k postupnostiam z úvodu tejto prednášky:

1) $\{1^n\}_{n=1}^{\infty}$
2) $\{2^n\}_{n=1}^{\infty}$
6) $\{n\}_{n=1}^{\infty}$
8) $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$
9) $\{(-2)^n\}_{n=1}^{\infty}$

vieme na základe *Nutnej podmienky konvergencie radu* s určitosťou povedať, že rady, ktoré sú súčtom členov týchto postupností sú divergentné.

Geometrický rad

Nekonečné rady - geometrický rad

Definícia 5

Rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1} + \ldots = a_1(1 + q + \ldots + q^{n-1} + \ldots)$$

nazývame **geometrický rad**. *Číslo* q *nazývame* **kvocient** *geometrického radu.*

Nekonečné rady - geometrický rad

Pre n-tý čiastočný súčet s_n platí

$$
\begin{aligned}
s_n &= a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1} + \ldots = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad \text{ak} \quad q \neq 1, \\
s_n &= n \cdot a_1, \quad \text{ak} \quad q = 1.
\end{aligned}
$$

Dá sa dokázať, že

- pre $|q| \geq 1$ postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverguje,
- pre $|q| < 1$ postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje a platí

$$
\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{a_1}{q-1} \lim_{n\to\infty} (q^n - 1) = \frac{a_1}{q-1}(0-1) = \frac{a_1}{1-q}.
$$

Nekonečné rady - geometrický rad

Veta 4

Geometrický rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}$ **je konvergentný** *práve vtedy, keď* $|q| < 1$*.*
V prípade konvergencie platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = a_1(1 + q + q^2 + ... + q^{n-1} + ...) = \frac{a_1}{1-q}.$$

Nekonečné rady - úvod

Príklad 7

Overme si teraz, či po sčítaní členov geometrického radu z úvodu prednášky

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \cdots$$

dostaneme $\frac{1}{3}$.

Nekonečné rady - úvod

Príklad 7

Overme si teraz, či po sčítaní členov geometrického radu z úvodu prednášky

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \cdots$$

dostaneme $\frac{1}{3}$.

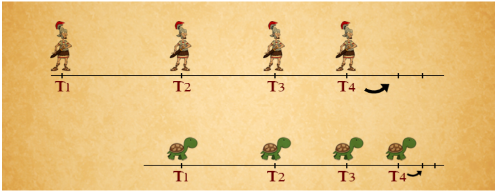
Riešenie: Rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n}$ je GR s $q = \frac{1}{10}$, $a_1 = \frac{3}{10}$ preto

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{3}.$$

Nekonečné rady - úvod

Príklad 8

A čo Achilles? Dobehne korytnačku? ;-)



Obr.: Zenonov paradox - Achilles a korytnačka

$$10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \cdots$$

Nekonečné rady - geometrický rad

Vráťme sa ešte naspäť k postupnostiam z úvodu tejto prednášky (postupnosti sú očíslované ako v úvode prednášky):

Nekonečné rady - geometrický rad

Vráťme sa ešte naspäť k postupnostiam z úvodu tejto prednášky (postupnosti sú očíslované ako v úvode prednášky):

1) $\{1^n\}_{n=1}^{\infty}$: rad $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ diverguje do $+\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$, súčet radu neexistuje.

Nekonečné rady - geometrický rad

Vráťme sa ešte naspäť k postupnostiam z úvodu tejto prednášky (postupnosti sú očíslované ako v úvode prednášky):

1) $\{1^n\}_{n=1}^{\infty}$: rad $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ diverguje do $+\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$, súčet radu neexistuje.
2) $\{2^n\}_{n=1}^{\infty}$: rad $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n$ je GR s $q = 2$ a diverguje do $+\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$, súčet radu neexistuje.

Nekonečné rady - geometrický rad

Vráťme sa ešte naspäť k postupnostiam z úvodu tejto prednášky (postupnosti sú očíslované ako v úvode prednášky):

1) $\{1^n\}_{n=1}^{\infty}$: rad $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ diverguje do $+\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$, súčet radu neexistuje.
2) $\{2^n\}_{n=1}^{\infty}$: rad $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n$ je GR s $q = 2$ a diverguje do $+\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$, súčet radu neexistuje.
3) $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$: rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ je GR s $q = \frac{1}{2}$, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1.$

Nekonečné rady - geometrický rad

Vráťme sa ešte naspäť k postupnostiam z úvodu tejto prednášky (postupnosti sú očíslované ako v úvode prednášky):

1) $\{1^n\}_{n=1}^{\infty}$: rad $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ diverguje do $+\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$, súčet radu neexistuje.
2) $\{2^n\}_{n=1}^{\infty}$: rad $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n$ je GR s $q = 2$ a diverguje do $+\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$, súčet radu neexistuje.
3) $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$: rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ je GR s $q = \frac{1}{2}$, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1.$
4) $\left\{\frac{1}{3^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$: rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ je GR s $q = \frac{1}{3}$, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}.$

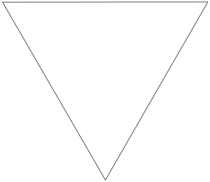
Nekonečné rady - geometrický rad

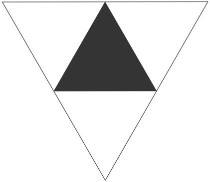
Vráťme sa ešte naspäť k postupnostiam z úvodu tejto prednášky (postupnosti sú očíslované ako v úvode prednášky):

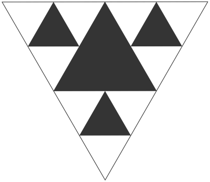
1) $\{1^n\}_{n=1}^{\infty}$: rad $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ diverguje do $+\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$, súčet radu neexistuje.
2) $\{2^n\}_{n=1}^{\infty}$: rad $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n$ je GR s $q = 2$ a diverguje do $+\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$, súčet radu neexistuje.
3) $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$: rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ je GR s $q = \frac{1}{2}$, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$.
4) $\left\{\frac{1}{3^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$: rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ je GR s $q = \frac{1}{3}$, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$.
6) $\{n\}_{n=1}^{\infty}$: rad $\sum_{n=1}^{\infty} n$ diverguje do $+\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$, súčet radu neexistuje.

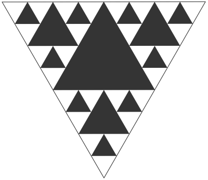
Nekonečné rady - geometrický rad

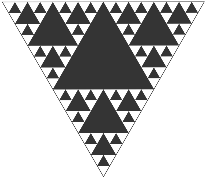
Sierpinskeho trojuholník (Wacław Franciszek Sierpiński (1882 – 1969))

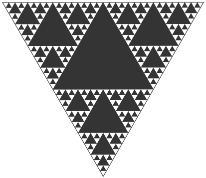

1)


2)


3)


4)


5)


6)

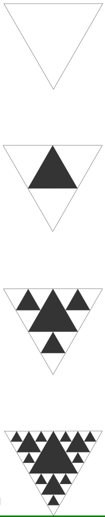
Nekonečné rady - geometrický rad

1) Majme rovnostranný trojuholník s celkovou plochou P.

2) Rozdelíme ho na štyri rovnaké rovnostranné trojuholníky a vnútorný trouholník odoberieme.

3) Zvyšné tri trojuholníky opať rozdelíme, a z každého odoberieme vnútornú časť.

4) Proces opakujeme.



Nekonečné rady - geometrický rad

Získali sme geometrickú postupnosť:

$$\frac{P}{4}, \frac{3P}{16}, \frac{9P}{64}, \dots$$

Pre súčet geometrického radu, kde $a_1 = \frac{P}{4}$ a $q = \frac{3}{4}$, dostávame

$$s_n = \frac{\frac{P}{4}}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{\frac{P}{4}}{\frac{1}{4}} = P.$$

Nekonečné rady - geometrický rad

Príklad 9

Zistite, či geometrický rad konverguje, a ak áno, nájdite jeho súčet:

a) $24 + 12 + 6 + 3 + \dots$

b) $\sqrt{125} + \sqrt{25} + \sqrt{5} + \dots$

c) $\frac{e}{3} + \frac{e^2}{9} + \frac{e^3}{27} + \dots$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^{2n-1}}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3\pi}{5}\right)^n$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} 5 \left(\frac{2}{3}\right)^n$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n}{3^{n+2}}$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+2^n}{6^n}$

Nekonečné rady - geometrický rad

i) $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln 2)^n$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln 2)^n}$

k) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(2\left(\frac{1}{3}\right)^n - 3\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)$

l) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{e}{4}\right)^n + 4\left(\frac{3}{7}\right)^n\right)$

Príklad 10

Prepíšte reálne číslo 1.212121... do racionálneho tvaru a/b, kde a, b sú celé nesúdeliteľné čísla.

Príklad 11

Vyriešte rovnicu

$$\log x + \log \sqrt{x} + \log \sqrt[4]{x} + \log \sqrt[8]{x} + \ldots = 2$$

Rad so striedavými znamienkami (Alternujúci rad)

Nekonečné rady - rad so striedavými znamienkami

Definícia 6

Nech $a_n > 0$ *pre každé* $n \in \mathbf{N}^+$*. Potom rad*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + (-1)^{n+1} a_n + ...$$

nazývame **radom so striedavými znamienkami***.*

Inými slovami: Nekonečný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazývame rad so striedavými znamienkami, ak pre každé $n \in \mathbf{N}^+$ platí

$$\operatorname{sgn}(a_n) = -\operatorname{sgn}(a_{n+1})$$

Nekonečné rady - rad so striedavými znamienkami

Veta 5

Leibnizovo kritérium konvergencie radu

Nech $a_n > 0$ *pre každé* $n \in \mathbf{N}^+$ *a postupnosť* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *je* **nerastúca**. *Ak* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, *tak rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ *je* **konvergentný**.

(*pozn.* Nerastúca postupnosť: $a_n \geq a_{n+1}$, pre $n = 1, 2, \ldots$)

Nekonečné rady - rad so striedavými znamienkami

Vrátme sa naspäť k postupnostiam z úvodu tejto prednášky (postupnosti sú očíslované ako v úvode prednášky):

9) $\{(-2)^n\}_{n=1}^{\infty}$: rad $\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^n$ osciluje, súčet radu neexistuje.

10) $\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$: rad $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}$.

Nekonečné rady - rad so striedavými znamienkami

Príklad 12

Zistite, či nekonečný rad konverguje/diverguje:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n+1}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{(n-1)} \frac{\ln n}{n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n^{1/2}}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^2+10}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{n+5}$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$

i) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^2}{2^n}$

Nekonečné rady - rad so striedavými znamienkami

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)}}{2n-1}$

k) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n+1}$

l) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin n}{6^n}$

m) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{4^n}$

o) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n+1)} \frac{2}{\sqrt{n+7}}$

Ďakujem za pozornosť.