# Najmenšia a najväčšia hodnota (aplikácie)
# Fyzikálny význam derivácie

Zuzana Minarechová

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Slovenská technická univerzita, Stavebná fakulta

24 Október 2022

# Obsah prednášky

- **Najmenšia a najväčšia hodnota - slovné úlohy**
- **Fyzikálny význam derivácie**

Najmenšia a najväčšia hodnota - slovné úlohy

# Najmenšia a najväčšia hodnota - slovné úlohy

## Príklad 1

Skladové priestory majú tvar kvádra s objemom $500\,\mathrm{m}^3$. Dĺžka má byť dvojnásobkom šírky, $1\,\mathrm{m}^2$ strechy je $3\times$ drahší ako $1\,\mathrm{m}^2$ bočnej steny. Aké musia byť rozmery skladu, aby bola stavba najlacnejšia?

# Najmenšia a najväčšia hodnota - slovné úlohy

## Príklad 1

Skladové priestory majú tvar kvádra s objemom $500\,\mathrm{m}^3$. Dĺžka má byť dvojnásobkom šírky, $1\,\mathrm{m}^2$ strechy je $3\times$ drahší ako $1\,\mathrm{m}^2$ bočnej steny. Aké musia byť rozmery skladu, aby bola stavba najlacnejšia?

**Riešenie:** Označme $x$ dĺžku, $y$ šírku a $z$ výšku skladu. Potom cena stavby $C$ je:

$$C(x,y,z) = 3xy + 2(xz + yz).$$

Vieme, že $x = 2y$ a poznáme objem

$$V = 500 = xyz = 2y^2 z.$$

Z toho $z = \frac{250}{y^2}$. Dostaneme optimalizačnú funkciu

$$C(y) = 6y^2 + \frac{1500}{y} = \frac{6y^3 + 1500}{y},$$

# Najmenšia a najväčšia hodnota - slovné úlohy

pričom $y \in (0, \infty)$. Nájdeme stacionárne body funkcie $C$:

$$
\begin{aligned}
C'(y) &= \frac{18y^3 - (6y^3 + 1500)}{y^2} = \frac{12y^3 - 1500}{y^2}, \\
0 &= \frac{12y_0^3 - 1500}{y_0^2} = 12\frac{y_0^3 - 125}{y_0^2}.
\end{aligned}
$$

Rovnica má jediné riešenie $y_0 = 5\,\text{m}$. Overíme, že $C$ má v bode $(5, C(5))$ lokálne minimum:

$$
\begin{aligned}
C''(y) &= 12\frac{3y^4 - 2y(y^3 - 125)}{y^4} = 12\frac{y^3 + 250}{y^3}, \\
C''(y_0) &= 12\frac{125 + 250}{125} = 36 > 0.
\end{aligned}
$$

Šírka $5\,\text{m}$ je optimálna. Určíme ešte zvyšné rozmery. Optimálna dĺžka je $x_0 = 2y_0$, teda $10\,\text{m}$ a výška je $z_0 = \frac{250}{y_0^2} = 10\,\text{m}$.

## Príklad 2

Aké rozmery má mať konzerva objemu 1 liter v tvare valca, aby sme na jej výrobu spotrebovali čo najmenej materiálu?

# Najmenšia a najväčšia hodnota - slovné úlohy

## Príklad 2

Aké rozmery má mať konzerva objemu 1 liter v tvare valca, aby sme na jej výrobu spotrebovali čo najmenej materiálu?

**Výsledok:**

$r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$

$h = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$

# Najmenšia a najväčšia hodnota - slovné úlohy

## Príklad 3

Nosnosť pravouhlého trámu je priamo úmerná jeho šírke násobenej druhou mocninou jeho výšky. Aké rozmery máme zvoliť, ak sekáme trám z valcovitého kmeňa s priemerom 1 meter, aby sme dosiahli maximálnu nosnosť?

### Príklad 3

Nosnosť pravouhlého trámu je priamo úmerná jeho šírke násobenej druhou mocninou jeho výšky. Aké rozmery máme zvoliť, ak sekáme trám z valcovitého kmeňa s priemerom 1 meter, aby sme dosiahli maximálnu nosnosť?

**Výsledok:**

$N = c.s.v^2$, kde $c$ je kladná konštanta.

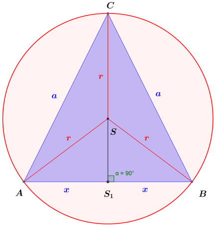
$s = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$v = \frac{\sqrt{6}}{3}$

## Príklad 4

Do kružnice s polomerom $r > 0$ vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom $P$. Aké má mať rozmery?

**Nákres situácie:**

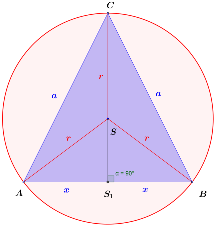



Obr.: Rovnoramenný trojuholník vpísaný do kružnice s polomerom $r > 0$.

### Príklad 4

Do kružnice s polomerom $r > 0$ vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obsahom $P$. Aké má mať rozmery?

**Nákres situácie:**




Obr.: Rovnoramenný trojuholník vpísaný do kružnice s polomerom $r > 0$.

**Výsledok:** Základňa má mať $\sqrt{3}r$, výška $\frac{3}{2}r$, potom $P = \frac{3\sqrt{3}r^2}{4}$.

# Najmenšia a najväčšia hodnota - slovné úlohy

## Príklad 5

Kartón tvaru obdĺžnika má rozmery $60\,\mathrm{cm} \times 28\,\mathrm{cm}$. Z rohov vystrihneme štvorce a zo zvyšku spravíme krabicu. Aká veľká musí byť strana vystrihnutých štvorcov $a$, aby bol objem krabice maximálny?

# Najmenšia a najväčšia hodnota - slovné úlohy

## Príklad 5

Kartón tvaru obdĺžnika má rozmery $60\,\mathrm{cm} \times 28\,\mathrm{cm}$. Z rohov vystrihneme štvorce a zo zvyšku spravíme krabicu. Aká veľká musí byť strana vystrihnutých štvorcov $a$, aby bol objem krabice maximálny?

**Výsledok:** $a = 6\,\mathrm{cm}$.

## Príklad 6

Do gule s polomerom $r$ vpíšte rotačný kužeľ, ktorý má najväčší objem.

# Najmenšia a najväčšia hodnota - slovné úlohy

## Príklad 5

Kartón tvaru obdĺžnika má rozmery $60\,\text{cm} \times 28\,\text{cm}$. Z rohov vystrihneme štvorce a zo zvyšku spravíme krabicu. Aká veľká musí byť strana vystrihnutých štvorcov $a$, aby bol objem krabice maximálny?

**Výsledok:** $a = 6\,\text{cm}$.

## Príklad 6

Do gule s polomerom $r$ vpíšte rotačný kužeľ, ktorý má najväčší objem.

**Výsledok:** Výška kužeľa má byť $\frac{5}{3}r$ a polomer podstavy $\frac{\sqrt{5}}{3}r$.

# Fyzikálny význam derivácie

# Fyzikálny význam derivácie

- Ak je **stav fyzikálnej veličiny v závislosti od času určený funkciou**

$$y = f(t),$$

tak **rýchlosť zmeny tejto veličiny** je určená funkciou

$$y = f'(t).$$

- Preto, ak sa teleso pohybuje priamočiaro v smere $x$-ovej osi a jeho poloha v čase $t$ je $x(t)$, tak funkcia

$$v(t) = x'(t)$$

určuje jeho **rýchlosť** a funkcia

$$a(t) = x''(t) = v'(t)$$

určuje jeho **zrýchlenie** v čase $t$.

# Fyzikálny význam derivácie

### Príklad 7

Z bodu $A$ štartujú naraz cyklista a motorkár. Cyklista sa pohybuje na sever, motorkár na západ. Funkcie $S_C$ a $S_M$ predstavujú polohu cyklistu a motorkára v čase $t\,[\mathrm{s}]$ (pre $t > 0$). Napíšte funkciu, vyjadrujúcu rýchlosť, akou sa cyklista a motorkár od seba vzďaľujú, ak

$$\begin{aligned} S_C(t) &= t(1 + \operatorname{arctg} t)\,[\mathrm{m}], \\ S_M(t) &= t^2(1 + \ln(t+1))\,[\mathrm{m}]. \end{aligned}$$

**Riešenie:** Dráhy cyklistu a motorkára sú na seba kolmé. Z toho dostaneme funkciu, vyjadrujúcu ich vzdialenosť v čase $t$

$$S(t) = \sqrt{S_C^2(t) + S_M^2(t)} = \sqrt{t^2(1 + \operatorname{arctg} t)^2 + t^4(1 + \ln(t+1))^2}\,[\mathrm{m}].$$

## Fyzikálny význam derivácie

Rýchlosť, akou sa od seba vzďaľujú, je daná deriváciou funkcie $s$, teda

$$
\begin{aligned}
S'(t) &= \frac{1}{2}\,\frac{\left(t^2(1+\operatorname{arctg} t)^2 + t^4(1+\ln(t+1))^2\right)'}{\sqrt{t^2(1+\operatorname{arctg} t)^2 + t^4(1+\ln(t+1))^2}} = \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{2t(1+\operatorname{arctg} t)^2 + t^2\cdot 2(1+\operatorname{arctg} t)\cdot\frac{1}{1+t^2}}{\sqrt{t^2(1+\operatorname{arctg} t)^2 + t^4(1+\ln(t+1))^2)}} + \\
&+ \frac{1}{2}\,\frac{4t^3(1+\ln(t+1))^2 + t^4 2(1+\ln(t+1))\cdot\frac{1}{t+1}}{\sqrt{t^2(1+\operatorname{arctg} t)^2 + t^4(1+\ln(t+1))^2)}} = \\
&= \frac{(1+\operatorname{arctg} t)^2 + t\,\frac{1+\operatorname{arctg} t}{1+t^2} + 2t^2(1+\ln(t+1))^2 + t^3\,\frac{1+\ln(t+1)}{t+1}}{\sqrt{(1+\operatorname{arctg} t)^2 + t^2(1+\ln(t+1))^2}}\,[\mathrm{m.s^{-1}}].
\end{aligned}
$$

# Fyzikálny význam derivácie

### Príklad 8

Majme rádioaktívnu látku, ktorá v čase $t_0 = 0\,[\mathrm{s}]$ pozostáva z $q$ atómov. Funkcia, ktorá popisuje počet atómov tejto látky v čase $t$, je $f(t) = q \cdot e^{-0{,}001t}$. Nájdite rýchlosť rozpadu látky v čase $t$ a okamih $t_0$, v ktorom sa počet atómov zredukuje na polovicu (polčas rozpadu).

**Riešenie:** Označme rýchlosť rozpadu atómov $v$. Potom

$$v(t) = f'(t) = -0,001qe^{-0{,}001t}\,[\mathrm{s}^{-1}].$$

Záporná hodnota funkcie $v$ znamená, že rýchlosť rozpadu sa znižuje. Nájdime polčas rozpadu tejto látky. Potrebujeme vyriešiť rovnicu

$$q \cdot e^{-0{,}001t_0} = \frac{1}{2}q.$$

# Fyzikálny význam derivácie

Bezprostredne z tejto rovnice dostaneme, že polčas rozpadu nezávisí od počtu atómov, ktoré boli v látke v čase $t = 0\,[\mathrm{s}]$. Rovnicu zlogaritmujeme a dostaneme

$$-0,001t_0 = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

a z toho $t_0 = \frac{\ln 2}{0{,}001} \doteq 693,15\,[\mathrm{s}]$.

# Fyzikálny význam derivácie

## Príklad 9

Pohyb telesa je daný funkciou $S(t) = 6t^2 - t^3$ [km]. V čase $t_0 = 0$ [h] sa teleso nachádza v bode $A$. Zistite, v ktorých okamihoch teleso zastane a kedy bude mať nulové zrýchlenie. Pre tieto okamihy vypočítajte vzdialenosť telesa od bodu $A$.

**Výsledok:**

Teleso stojí v čase $t_0 = 0\,[\mathrm{h}]$ a v čase $t_0 = 4\,[\mathrm{h}]$ a nachádza sa vo vzdialenosti $32\,[\mathrm{km}]$ od bodu $A$.

Nulové zrýchlenie má v čase $t_1 = 2\,[\mathrm{h}]$ a nachádza sa vo vzdialenosti $16\,[\mathrm{km}]$ od bodu $A$.

Ďakujem za pozornosť.