Integrálny počet
Určitý integrál - 1.časť

Zuzana Minarechová

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Slovenská technická univerzita, Stavebná fakulta

12 November 2020

Obsah prednášky

- **Pojem** určitého integrálu
- **Vlastnosti** určitého integrálu a **veta o strednej hodnote**
- **Metódy počítania** určitého integrálu
- **Použitie** určitého integrálu v geometrii
  - **Obsah rovinnej oblasti**

Pojem určitého integrálu

Pojem určitého integrálu

- Definícia určitého integrálu je pomerne **zložitá** :-)

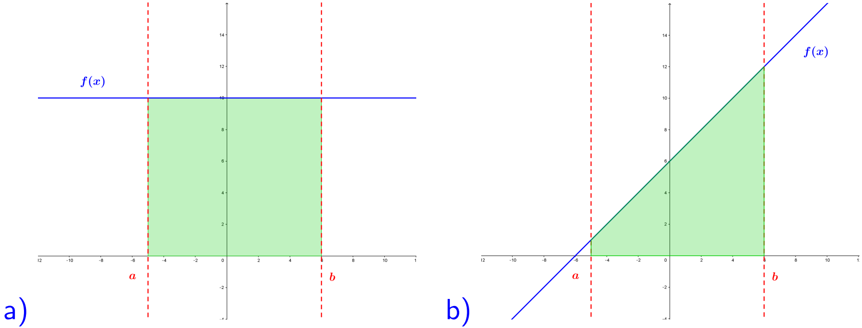
Pojem určitého integrálu

- Definícia určitého integrálu je pomerne **zložitá** :-)
- Predstavme si, že v intervale $\langle a, b \rangle$ je definovaná **nezáporná spojitá funkcia** f a potrebujeme vypočítať **obsah plochy „pod jej grafom"**, t. j. obsah rovinnej oblasti ohraničenej grafom funkcie f, osou o_x a priamkami $x = a$ a $x = b$.

Pojem určitého integrálu

- Definícia určitého integrálu je pomerne **zložitá** :-)
- Predstavme si, že v intervale $\langle a, b\rangle$ je definovaná **nezáporná spojitá funkcia** f a potrebujeme vypočítať **obsah plochy „pod jej grafom“**, t. j. obsah rovinnej oblasti ohraničenej grafom funkcie f, osou o_x a priamkami $x = a$ a $x = b$.
- Pokiaľ je funkcia f **lineárna alebo konštantná**, jedná sa o **lichobežník, prípadne obdĺžnik** a riešenie úlohy je jednoduché:

Pojem určitého integrálu



Obr.: Obsah rovinnej oblasti ohraničenej grafom: a) *konštantnej*, b) *lineárnej* funkcie f, osou o_x a priamkami $x = a$ a $x = b$. Obsah oboch oblastí vypočítame pomocou jednoduchých vzťahov.

Pojem určitého integrálu

Čo ale v prípade **všeobecnej funkcie**?

Pojem určitého integrálu

Čo ale v prípade **všeobecnej funkcie**? Pre všeobecnú funkciu môžeme postupovať nasledovne:

Pojem určitého integrálu

Čo ale v prípade **všeobecnej funkcie**? Pre všeobecnú funkciu môžeme postupovať nasledovne:

1. Bodmi $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ rozdelíme **uzavretý interval** $\langle a, b\rangle$ na n **podintervalov** (resp. **deliacich intervalov**) $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$. Označme d dĺžku najdlhšieho z nich. Číslo d sa nazýva aj **norma delenia**.

Pojem určitého integrálu

Čo ale v prípade **všeobecnej funkcie**? Pre všeobecnú funkciu môžeme postupovať nasledovne:

1. Bodmi $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ rozdelíme **uzavretý interval** $\langle a, b\rangle$ na n **podintervalov** (resp. **deliacich intervalov**) $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$. Označme d dĺžku najdlhšieho z nich. Číslo d sa nazýva aj **norma delenia**.
2. V každom podintervale zvolíme **niektorý bod** p_i.

Pojem určitého integrálu

Čo ale v prípade **všeobecnej funkcie**? Pre všeobecnú funkciu môžeme postupovať nasledovne:

1. Bodmi $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ rozdelíme **uzavretý interval** $\langle a, b\rangle$ na n **podintervalov** (resp. **deliacich intervalov**) $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$. Označme d dĺžku najdlhšieho z nich. Číslo d sa nazýva aj **norma delenia**.
2. V každom podintervale zvolíme **niektorý bod** p_i.
3. V každom podintervale **nahradíme** príslušnú **časť plochy obdĺžnikom** so základňou dĺžky $(x_i - x_{i-1})$ a výškou $f(p_i)$.

Pojem určitého integrálu

Čo ale v prípade **všeobecnej funkcie**? Pre všeobecnú funkciu môžeme postupovať nasledovne:

1. Bodmi $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ rozdelíme **uzavretý interval** $\langle a, b\rangle$ na n **podintervalov** (resp. **deliacich intervalov**) $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$. Označme d dĺžku najdlhšieho z nich. Číslo d sa nazýva aj **norma delenia**.
2. V každom podintervale zvolíme **niektorý bod** p_i.
3. V každom podintervale **nahradíme** príslušnú **časť plochy obdĺžnikom** so základňou dĺžky $(x_i - x_{i-1})$ a výškou $f(p_i)$.
4. **Sčítame obsahy** všetkých takýchto obdĺžnikov:

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(p_i) \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Pojem určitého integrálu

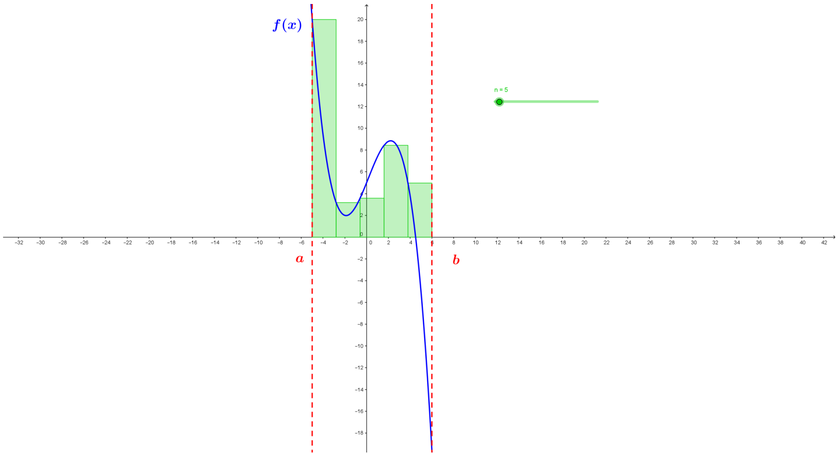
Čo ale v prípade **všeobecnej funkcie**? Pre všeobecnú funkciu môžeme postupovať nasledovne:

1. Bodmi $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ rozdelíme **uzavretý interval** $\langle a, b\rangle$ na n **podintervalov** (resp. **deliacich intervalov**) $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$. Označme d dĺžku najdlhšieho z nich. Číslo d sa nazýva aj **norma delenia**.
2. V každom podintervale zvolíme **niektorý bod** p_i.
3. V každom podintervale **nahradíme** príslušnú **časť plochy obdĺžnikom** so základňou dĺžky $(x_i - x_{i-1})$ a výškou $f(p_i)$.
4. **Sčítame obsahy** všetkých takýchto obdĺžnikov:

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(p_i) \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

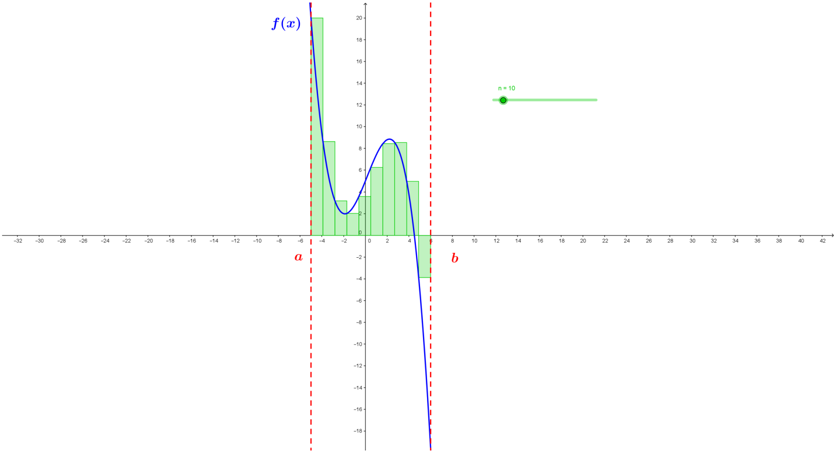
Číslo S nazývame **integrálny súčet funkcie** f pre dané delenie d intervalu $\langle a, b\rangle$ s voľbou bodov $p_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$.

Pojem určitého integrálu



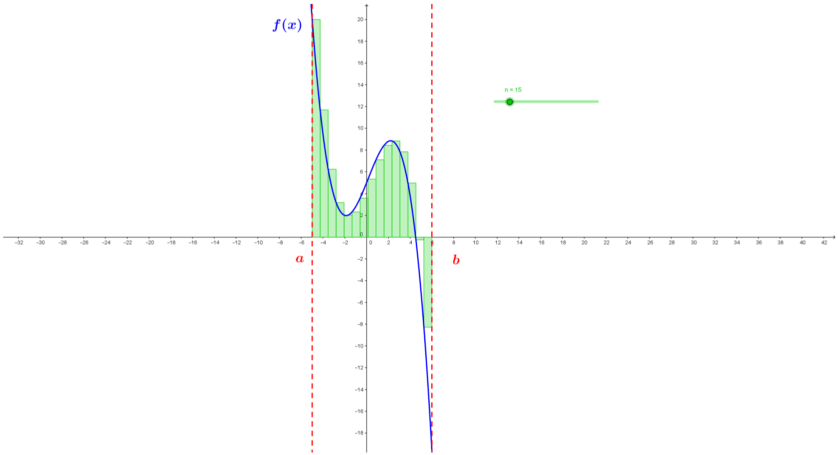
Obr.: Znázornenie **integrálneho súčtu funkcie**, počet podintervalov $n = 5$.

Pojem určitého integrálu



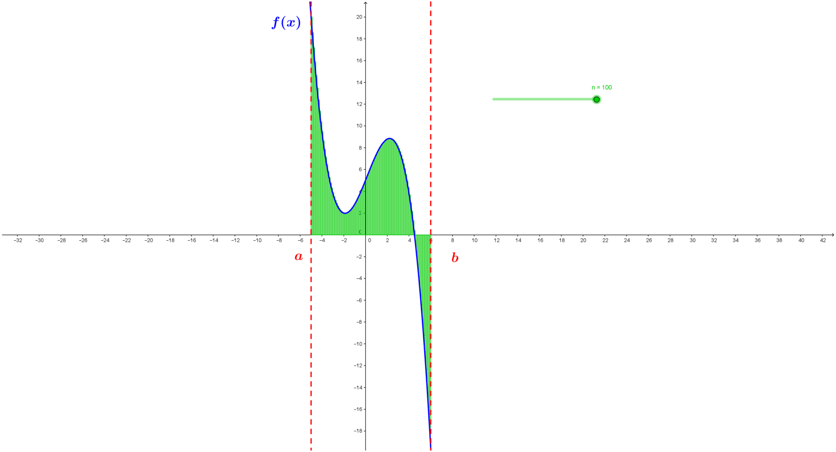
Obr.: Znázornenie **integrálneho súčtu funkcie**, počet podintervalov $n = 10$.

Pojem určitého integrálu



Obr.: Znázornenie **integrálneho súčtu funkcie**, počet podintervalov $n = 15$.

Pojem určitého integrálu



Obr.: Znázornenie **integrálneho súčtu funkcie**, počet podintervalov $n = 100$.

Pojem určitého integrálu

- Dostávame tak **aproximáciu** (približnú hodnotu) **hľadaného obsahu**.

Pojem určitého integrálu

- Dostávame tak **aproximáciu** (približnú hodnotu) **hľadaného obsahu**.
- Z obrázkov je vidieť, že ak zhustíme deliace body, hodnota S sa viac priblíži skutočnej hodnote.

Pojem určitého integrálu

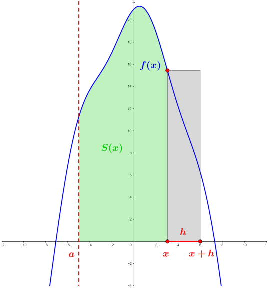
- Dostávame tak **aproximáciu** (približnú hodnotu) **hľadaného obsahu**.
- Z obrázkov je vidieť, že ak zhustíme deliace body, hodnota S sa viac priblíži skutočnej hodnote.
- Preto celý postup opakujeme tak, že dĺžka d podintervalu sa bude blížiť k nule. Takto **limitnou hodnotou aproximácie S bude hľadaný obsah**.

Pojem určitého integrálu

- Dostávame tak **aproximáciu** (približnú hodnotu) **hľadaného obsahu**.
- Z obrázkov je vidieť, že ak zhustíme deliace body, hodnota S sa viac priblíži skutočnej hodnote.
- Preto celý postup opakujeme tak, že dĺžka d podintervalu sa bude blížiť k nule. Takto **limitnou hodnotou aproximácie S bude hľadaný obsah**.
- Tento teoretický postup je však **pre všeobecnú funkciu f prakticky neuskutočniteľný**. Preto hľadáme iný spôsob, ako nájsť hľadaný obsah :-)

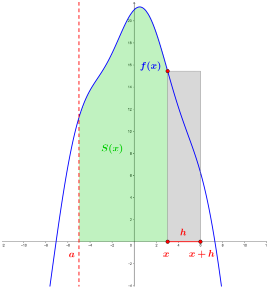
Pojem určitého integrálu

- Označme $S(x)$ obsah plochy pod grafom funkcie f v intervale $\langle a, x\rangle$.



Pojem určitého integrálu

- Označme $S(x)$ obsah plochy pod grafom funkcie f v intervale $\langle a, x\rangle$.



- Všimnime si zmenu $S(x+h) - S(x)$ pre číslo h blízke k nule. Táto sa približne rovná obsahu obdĺžnika so stranami dĺžok h a $f(x)$, teda $S(x+h) - S(x) \approx h \cdot f(x)$.

Pojem určitého integrálu

- Preto

$$\lim_{h\to 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = f(x).$$

Pojem určitého integrálu

- Preto
$$\lim_{h\to 0} \frac{S(x+h)-S(x)}{h} = f(x).$$

- Výraz na ľavej strane je **derivácia funkcie** $S(x)$ v bode x, takže dostávame dôležitý fakt
$$S'(x) = f(x),$$
z ktorého vyplýva, že S je tá primitívna funkcia k funkcii f v intervale $\langle a, b\rangle$, pre ktorú platí $S(a) = 0$ (v bode a sa jedná o „plochu“ s nulovým obsahom).

Pojem určitého integrálu

- Preto

$$\lim_{h\to 0}\frac{S(x+h)-S(x)}{h}=f(x).$$

- Výraz na ľavej strane je **derivácia funkcie** $S(x)$ v bode x, takže dostávame dôležitý fakt

$$S'(x)=f(x),$$

  z ktorého vyplýva, že S je tá primitívna funkcia k funkcii f v intervale $\langle a,b\rangle$, pre ktorú platí $S(a)=0$ (v bode a sa jedná o „plochu“ s nulovým obsahom).

- Preto **hľadaný obsah sa rovná rozdielu** $S(b)-S(a)$.

Pojem určitého integrálu

- Na predchádzajúcich slajdoch sme približne opísali proces integrácie spojitej funkcie f v intervale $\langle a, b\rangle$, ktorý je známy ako:

Newtonova-Leibnizova formula

Nech f je spojitá funkcia v intervale $\langle a, b\rangle$ a F je funkcia primitívna k f v intervale $\langle a, b\rangle$. Určitý integrál funkcie f v intervale $\langle a, b\rangle$ je číslo $F(b) - F(a)$. Tento fakt zapisujeme nasledovne

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Pojem určitého integrálu

- Pri samotnom výpočte postupujeme tak, že **najskôr nájdeme niektorú primitívnu funkciu** F k funkcii f (označenie výrazom v strede) **a potom dosadíme krajné body intervalu a odčítame** (výraz na pravej strane).

Pojem určitého integrálu

- Pri samotnom výpočte postupujeme tak, že **najskôr nájdeme niektorú primitívnu funkciu** F k funkcii f (označenie výrazom v strede) **a potom dosadíme krajné body intervalu a odčítame** (výraz na pravej strane).
- Neurčitý a určitý integrál sú vo svojej podstate naprosto odlišné matematické objekty. Kým **neurčitý integrál je množina funkcií, určitý integrál je číslo**.

Pojem určitého integrálu

- Pri samotnom výpočte postupujeme tak, že **najskôr nájdeme niektorú primitívnu funkciu** F k funkcii f (označenie výrazom v strede) **a potom dosadíme krajné body intervalu a odčítame** (výraz na pravej strane).
- Neurčitý a určitý integrál sú vo svojej podstate naprosto odlišné matematické objekty. Kým **neurčitý integrál je množina funkcií, určitý integrál je číslo**.
- To, čo ich spája (okrem slova integrál v ich názvoch), je skutočnosť, že **určitý integrál sa dá vyjadriť pomocou ľubovoľnej funkcie z neurčitého integrálu**.

Pojem určitého integrálu

Príklad 1

Vypočítajme: a) $\int\limits_1^4 x\,\mathrm{d}x$, b) $\int\limits_1^4 x^2\,\mathrm{d}x$, c) $\int\limits_{-1}^1 x^2\,\mathrm{d}x$, d) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x$.

Pojem určitého integrálu

Príklad 1

Vypočítajme: a) $\int\limits_1^4 x\,\mathrm{d}x$, b) $\int\limits_1^4 x^2\,\mathrm{d}x$, c) $\int\limits_{-1}^1 x^2\,\mathrm{d}x$, d) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x$.

Riešenie:

a)

$$\int\limits_1^4 x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^4 = \frac{4^2}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{15}{2}.$$

b)

$$\int\limits_1^4 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{63}{3}.$$

Pojem určitého integrálu

c)

$$\int_{-1}^{1} x^2 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{2}{3}.$$

d)

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \,\mathrm{d}x = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = -0 - (-1) = 1.$$

Vlastnosti určitého integrálu a veta o strednej hodnote

Vlastnosti určitého integrálu a veta o strednej hodnote

- Ak $a \leq b$, tak definujeme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Vlastnosti určitého integrálu a veta o strednej hodnote

- Ak $a \leq b$, tak definujeme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Ak funkcie sú spojité v intervaloch, v korých integrujeme, platí

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

Vlastnosti určitého integrálu a veta o strednej hodnote

- Ak $a \leq b$, tak definujeme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Ak funkcie sú spojité v intervaloch, v korých integrujeme, platí

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0, \qquad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

Vlastnosti určitého integrálu a veta o strednej hodnote

- Ak $a \leq b$, tak definujeme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Ak funkcie sú spojité v intervaloch, v korých integrujeme, platí

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0, \qquad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_a^b (c\cdot f(x) + d\cdot g(x))\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + d\int_a^b g(x)\mathrm{d}x, \qquad c, d \in \mathbf{R}$$

Vlastnosti určitého integrálu a veta o strednej hodnote

- Ak f je spojitá **párna** funkcia, tak

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Vlastnosti určitého integrálu a veta o strednej hodnote

- Ak f je spojitá **párna** funkcia, tak

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Ak f je spojitá **nepárna** funkcia, tak

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Vlastnosti určitého integrálu a veta o strednej hodnote

- Ak f je spojitá **párna** funkcia, tak

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Ak f je spojitá **nepárna** funkcia, tak

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

- Ak f je spojitá **periodická** funkcia s periódou p a $a,\ c \in \mathbf{R}$, tak

$$\int_{0}^{p} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a}^{a+p} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a}^{a+p} f(x-c)\,\mathrm{d}x.$$

Vlastnosti určitého integrálu a veta o strednej hodnote

- Ak f je spojitá funkcia v intervale $\langle a, b \rangle$, tak existuje také číslo $c \in (a, b)$, že platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)(b-a).$$

Hodnota $f(c)$ v tomto vzťahu sa volá *stredná hodnota integrálu* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ a táto veta sa nazýva: **Veta o strednej hodnote pre určitý integrál**.

Vlastnosti určitého integrálu a veta o strednej hodnote

- Dôsledkom *Vety o strednej hodnote* sú dva vzťahy, ktoré sa používajú na **odhady integrálov** (alebo iných hodnôt), ktoré je ťažké alebo nemožné presne vypočítať:

Vlastnosti určitého integrálu a veta o strednej hodnote

- Dôsledkom *Vety o strednej hodnote* sú dva vzťahy, ktoré sa používajú na **odhady integrálov** (alebo iných hodnôt), ktoré je ťažké alebo nemožné presne vypočítať:

  Ak pre všetky $x \in (a, b)$ *platí* $f(x) \leq g(x)$, *tak*

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Vlastnosti určitého integrálu a veta o strednej hodnote

- Dôsledkom *Vety o strednej hodnote* sú dva vzťahy, ktoré sa používajú na **odhady integrálov** (alebo iných hodnôt), ktoré je ťažké alebo nemožné presne vypočítať:

  Ak pre všetky $x \in (a, b)$ *platí* $f(x) \leq g(x)$, *tak*

  $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

  Ak pre všetky $x \in (a, b)$ *platí* $m \leq f(x) \leq M$, *tak*

  $$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a).$$

Metódy počítania určitého integrálu

Metódy počítania určitého integrálu

Priame integrovanie:

Metódy počítania určitého integrálu

Priame integrovanie:

Príklad 2

Vypočítame $\int\limits_1^4 (3x^2 - 5x)\,\mathrm{d}x$.

Metódy počítania určitého integrálu

Priame integrovanie:

Príklad 2

Vypočítame $\int\limits_1^4 (3x^2 - 5x)\,\mathrm{d}x$.

Riešenie:

Výpočet môžeme uskutočniť priamo

$$\int\limits_1^4 (3x^2 - 5x)\,\mathrm{d}x = \left[x^3 - 5\frac{x^2}{2}\right]_1^4 = \left(4^3 - 5\frac{4^2}{2}\right) - \left(1^3 - 5\frac{1^2}{2}\right) =$$

$$= \left(64 - 5\frac{16}{2}\right) - \left(1 - 5\frac{1}{2}\right) = \frac{51}{2}.$$

Metódy počítania určitého integrálu

Príklad 3

Vypočítame $\int\limits_0^{\pi} |\cos x| \, dx$.

Metódy počítania určitého integrálu

Príklad 3

Vypočítame $\int\limits_0^\pi |\cos x| \, \mathrm{d}x$.

Riešenie:

Pretože funkcia $\cos x$ mení v bode $\frac{\pi}{2}$ intervalu integrácie znamienko, integrál vypočítame ako súčet integrálov.

$$\int\limits_0^\pi |\cos x| \, \mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, \mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^\pi (-\cos x) \, \mathrm{d}x =$$

$$= [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - [\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^\pi = \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0\right) - \left(\sin \pi - \sin \frac{\pi}{2}\right) = 2.$$

Metódy počítania určitého integrálu

Metóda per partes pre určité integrály:

Nech funkcie f a g majú spojité derivácie v intervale $\langle a, b\rangle$. Potom platí

$$\int\limits_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_a^b - \int\limits_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Metódy počítania určitého integrálu

Metóda per partes pre určité integrály:

Nech funkcie f a g majú spojité derivácie v intervale $\langle a, b\rangle$. Potom platí

$$\int\limits_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_a^b - \int\limits_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Príklad 4

Metódou per partes vypočítajme určité integrály

$$\text{a)}\ \int\limits_0^1 x\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x, \qquad \text{b)}\ \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,\mathrm{d}x.$$

Metódy počítania určitého integrálu

Riešenie:

a)

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x \quad =$$

Metódy počítania určitého integrálu

Riešenie:

a)

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{2}{3}x(1-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 + \frac{2}{3}\int_0^1 (1-x)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= 0 - \left[\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \frac{4}{15}$$

b)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,\mathrm{d}x =$$

Metódy počítania určitého integrálu

Riešenie:

a)

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{2}{3}x(1-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 + \frac{2}{3}\int_0^1 (1-x)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= 0 - \left[\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \frac{4}{15}$$

b)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,\mathrm{d}x = [x\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{\pi}{2} + 0 - 1 = \frac{\pi}{2} - 1$$

Metódy počítania určitého integrálu

Substitučná metóda pre určité integrály:

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = (t = \varphi(x)) = \int_{t=\varphi(a)}^{t=\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Metódy počítania určitého integrálu

Substitučná metóda pre určité integrály:

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = (t = \varphi(x)) = \int_{t=\varphi(a)}^{t=\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

- Tento vzťah platí, ak φ' je spojitá funkcia v intervale $\langle a, b\rangle$ a f je spojitá funkcia v obore hodnôt funkcie φ.

Metódy počítania určitého integrálu

Substitučná metóda pre určité integrály:

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = (t = \varphi(x)) = \int_{t=\varphi(a)}^{t=\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

- Tento vzťah platí, ak φ' je spojitá funkcia v intervale $\langle a, b\rangle$ a f je spojitá funkcia v obore hodnôt funkcie φ.
- Uvedomme si, že hranice integrálu na pravej strane vzniknú dosadením hraníc pôvodnej premennej x do vzťahu medzi novou a starou premennou $t = \varphi(x)$.

Metódy počítania určitého integrálu

Príklad 5

Substitučnou metódou vypočítajme určitý integrál: $\int\limits_0^6 2x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Metódy počítania určitého integrálu

Príklad 5

Substitučnou metódou vypočítajme určitý integrál: $\int\limits_0^6 2x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Riešenie:

$$\int\limits_0^6 2x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x \quad =$$

Metódy počítania určitého integrálu

Príklad 5

Substitučnou metódou vypočítajme určitý integrál: $\int\limits_0^6 2x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Riešenie:

$$\int\limits_0^6 2x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{l} t = 1+x^2 \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x \\ t_1 = 1 \\ t_2 = 37 \end{array} \right\} =$$

Metódy počítania určitého integrálu

Príklad 5

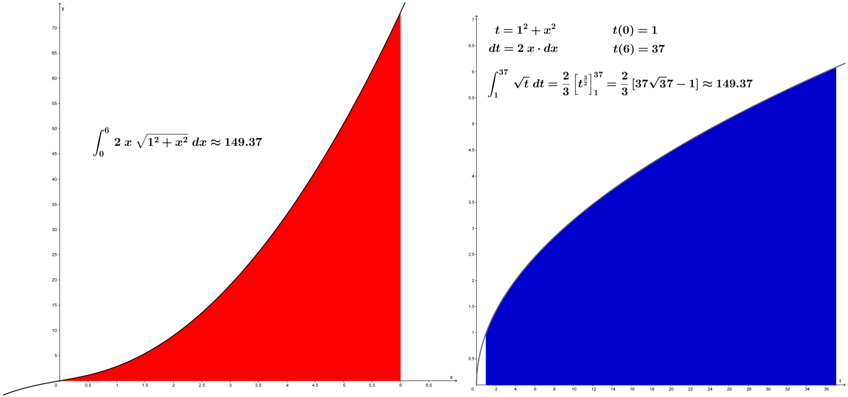
Substitučnou metódou vypočítajme určitý integrál: $\int\limits_0^6 2x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Riešenie:

$$\int\limits_0^6 2x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{l} t = 1+x^2 \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x \\ t_1 = 1 \\ t_2 = 37 \end{array} \right\} = \int\limits_1^{37} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}\left[t^{3/2}\right]_1^{37} =$$

$$= \frac{2}{3}(37\sqrt{37}-1) \approx 149.37$$

Metódy počítania určitého integrálu



Obr.: **Substitučná metóda pre určité integrály** - funkcia a aj hranice integrálu sa zmenili, ale obsah ohraničenej plochy zostal rovnaký.

Metódy počítania určitého integrálu

Príklad 6

Substitučnou metódou vypočítajme určité integrály

$$a) \int_{-2}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+5}, \qquad b) \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x \,\mathrm{d}x.$$

Metódy počítania určitého integrálu

Príklad 6

Substitučnou metódou vypočítajme určité integrály

$$\text{a)} \int_{-2}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+5}, \qquad \text{b)} \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x \,\mathrm{d}x.$$

Riešenie:

a)

$$\int_{-2}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+5} =$$

Metódy počítania určitého integrálu

Príklad 6

Substitučnou metódou vypočítajme určité integrály

$$\text{a)} \int_{-2}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+5}, \qquad \text{b)} \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^{3} x \, \mathrm{d}x.$$

Riešenie:

a)

$$\int_{-2}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+5} = \int_{-2}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2+1} =$$

Metódy počítania určitého integrálu

Príklad 6

Substitučnou metódou vypočítajme určité integrály

$$\text{a)} \int_{-2}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+5}, \qquad \text{b)} \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan{}^3 x \, \mathrm{d}x.$$

Riešenie:

a)

$$\int_{-2}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+5} = \int_{-2}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2+1} = \left\{ \begin{array}{l} t = x+2 \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x \\ t_1 = -2+2 = 0 \\ t_2 = -1+2 = 1 \end{array} \right\} = \int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} =$$

$$= [\arctan t]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

Metódy počítania určitého integrálu

b)

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x \, \mathrm{d}x =$$

Metódy počítania určitého integrálu

b)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x \, \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} \, \mathrm{d}x =$$

Metódy počítania určitého integrálu

b)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x \, \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} \, \mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{l} t = \cos x \\ \mathrm{d}t = -\sin x \, \mathrm{d}x \\ t_1 = \cos 0 = 1 \\ t_2 = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right\} = \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} -\frac{1-t^2}{t^3} \, \mathrm{d}t =$$

$$= \left[\frac{1}{2t^2} + \ln t \right]_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \left(1 + \ln \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\frac{1}{2} + \ln 1 \right) \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \ln 2 \right).$$

Metódy počítania určitého integrálu

Príklad 7

Vypočítajte integrály:

a) $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(2x+1)^3} = \frac{2}{9}$

b) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2} - 1$

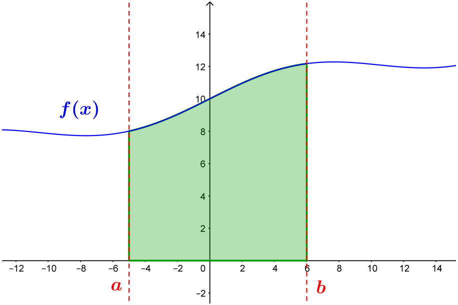
c) $\int\limits_0^{\ln 2} xe^x\,\mathrm{d}x = 2\ln 2 - 1$

d) $\int\limits_9^4 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 3$

Použitie určitého integrálu - **obsah rovinnej oblasti**

Obsah rovinnej oblasti

- **Obsah rovinnej oblasti ohraničenej grafom** $f(x) \geq 0$ (priamkami $x = a$, $x = b$) a osou o_x v intervale $\langle a, b \rangle$

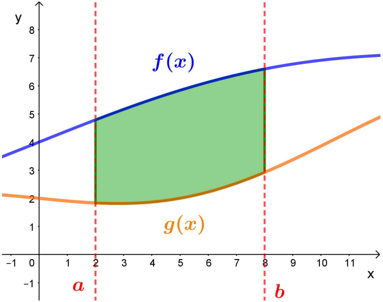


vypočítame pomocou integrálu

$$P = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Obsah rovinnej oblasti

- **Obsah oblasti ohraničenej grafmi funkcií** $f(x) \geq g(x)$ (a priamkami $x = a$, $x = b$) v intervale$\langle a, b \rangle$



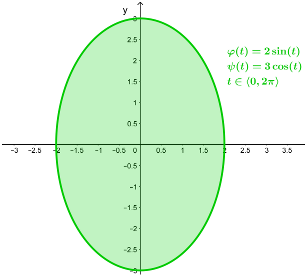
vypočítame pomocou integrálu

$$P = \int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x.$$

Obsah rovinnej oblasti

- Ak je **krivka daná parametrickými rovnicami**

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t), \qquad t \in \langle \alpha, \beta \rangle,$$



tak obsah oblasti ohraničenej krivkou vypočítame pomocou integrálu

$$P = \left| \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \right| .$$

Obsah rovinnej oblasti - 1. príklad

Príklad 8

Nájdeme obsah oblasti ohraničenej parabolou $x^2 = 4y$ a krivkou $y = \frac{8}{x^2+4}$.

Obsah rovinnej oblasti - 1. príklad

Príklad 8

Nájdeme obsah oblasti ohraničenej parabolou $x^2 = 4y$ a krivkou $y = \frac{8}{x^2+4}$.

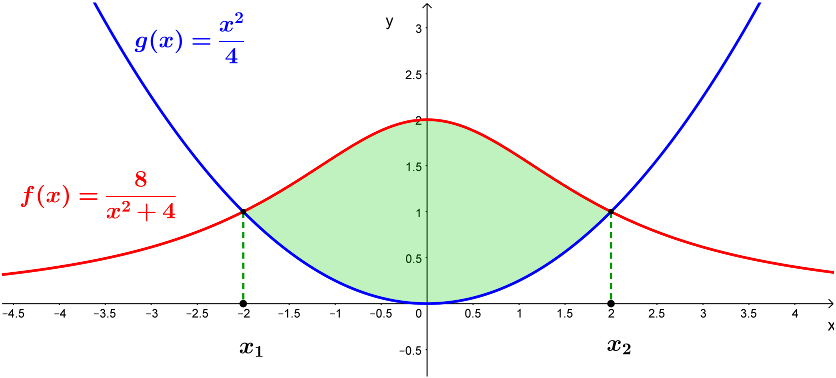
Riešenie:

Najskôr nájdeme x-ové súradnice priesečníkov oboch kriviek (hranice intervalu integrácie). Porovnaním y-ových súradníc bodov obidvoch kriviek dostávame rovnicu $\frac{x^2}{4} = \frac{8}{x^2+4}$, ktorá po úprave vedie k rovnici

$$x^4 + 4x^2 - 32 = 0.$$

Túto rovnicu potom substitúciou $t = x^2$ prevedieme na kvadratickú a vyriešime. Dostaneme reálne riešenia $x_1 = -2$ a $x_2 = 2$.

Obsah rovinnej oblasti - 1. príklad



Obr.: Obsah oblasti ohraničenej parabolou $x^2 = 4y$ a krivkou $y = \frac{8}{x^2+4}$

Obsah rovinnej oblasti - 1. príklad

Zo spojitosti a porovnaním hodnôt obidvoch funkcií dosadením niektorého čísla intervalu integrácie (napr. 0) dostávame, že $\frac{8}{x^2+4} \geq \frac{x^2}{4}$ pre všetky $x \in \langle -2, 2 \rangle$. Preto

$$P = \int_{-2}^{2} \left(\frac{8}{x^2+4} - \frac{x^2}{4} \right) =$$

Obsah rovinnej oblasti - 1. príklad

Zo spojitosti a porovnaním hodnôt obidvoch funkcií dosadením niektorého čísla intervalu integrácie (napr. 0) dostávame, že $\frac{8}{x^2+4} \geq \frac{x^2}{4}$ pre všetky $x \in \langle -2, 2\rangle$. Preto

$$P = \int_{-2}^{2} \left(\frac{8}{x^2+4} - \frac{x^2}{4} \right) = \left[4 \arctan \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} \right]_{-2}^{2} = 2\pi - \frac{4}{3}\ \left[\mathrm{j}^2\right].$$

pozn. Vzhľadom na to, že rovinná oblasť je symetrická podľa osi O_y, tento integrál stačí riešiť na intervale $x \in \langle 0, 2\rangle$ a vypočítanú plochu na záver vynásobiť 2, čím dostaneme plochu hľadanej oblasti.

Obsah rovinnej oblasti - 2. príklad

Príklad 9

Nájdeme obsah oblasti ohraničenej parabolou $y = 3 - 2x - x^2$, jej dotyčnicou v bode $[2, -5]$ a osou o_y.

Obsah rovinnej oblasti - 2. príklad

Príklad 9

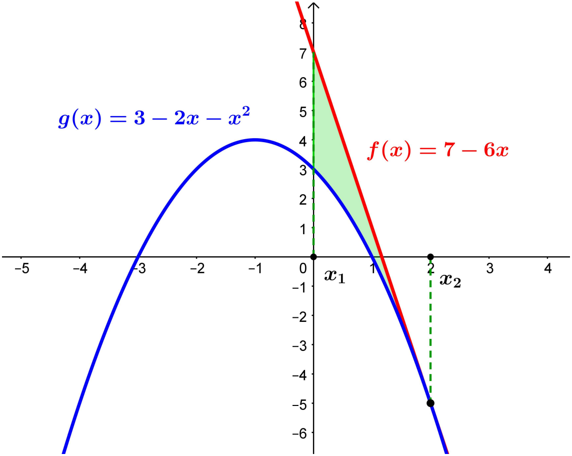
Nájdeme obsah oblasti ohraničenej parabolou $y = 3 - 2x - x^2$, jej dotyčnicou v bode $[2, -5]$ a osou o_y.

Riešenie:

Spomínaná dotyčnica má rovnicu $y = 7 - 6x$. V intervale integrácie $\langle 0, 2\rangle$ platí $7 - 6x \geq 3 - 2x - x^2$, preto

$$P = \int_0^2 \left(7 - 6x - (3 - 2x - x^2)\right) \mathrm{d}x = \int_0^2 (x^2 - 4x + 4)\, \mathrm{d}x = \frac{8}{3}\ \left[\mathrm{j}^2\right].$$

Obsah rovinnej oblasti - 2. príklad



Obr.: Obsah oblasti ohraničenej parabolou $y = 3 - 2x - x^2$, jej dotyčnicou v bode $[2, -5]$ a osou o_y

Obsah rovinnej oblasti - 3. príklad

Príklad 10

Vypočítame obsah oblasti ohraničenej priamkou $y = x + 1$, grafom funkcie $y = \cos x$ a osou o_x.

Obsah rovinnej oblasti - 3. príklad

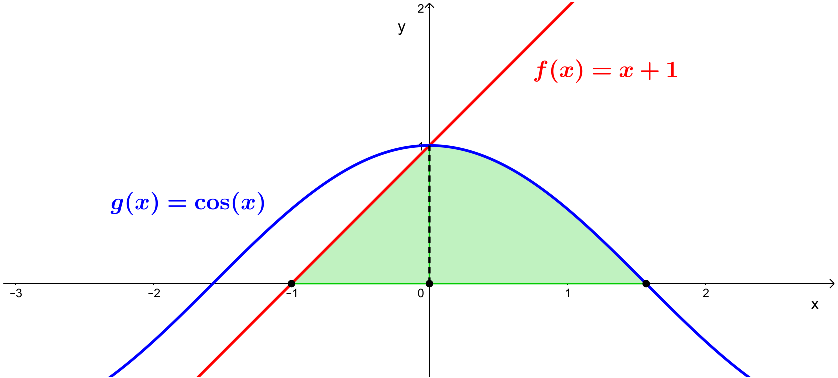
Príklad 10

Vypočítame obsah oblasti ohraničenej priamkou $y = x + 1$, grafom funkcie $y = \cos x$ a osou o_x.

Riešenie:

Priamka $y = x + 1$ pretína o_x v bode $[-1, 0]$, graf funkcie $y = \cos x$ pretne os o_x v bode $[\frac{\pi}{2}, 0]$. Priamka a graf sa pritom pretínajú v bode $[0, 1]$. To znamená, že oblasť, ktorej obsah počítame je v intervale $\langle -1, 0\rangle$ zhora ohraničená grafom priamky $y = x + 1$ a v intervale $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ grafom funkcie $y = \cos x$.

Obsah rovinnej oblasti - 3. príklad



Obr.: Obsah oblasti ohraničenej priamkou $y = x + 1$, grafom funkcie $y = \cos x$ a osou o_x

Obsah rovinnej oblasti - 3. príklad

Preto hľadaný oblasti plochy počítame ako súčet integrálov

$$P = \int\limits_{-1}^{0} (x+1)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\ \left[\mathrm{j}^2\right].$$

Obsah rovinnej oblasti - 4. príklad

Príklad 11

Vypočítame obsah oblasti ohraničenej dvojicou parabol $x = -2y^2$ a $x = 1 - 3y^2$.

Obsah rovinnej oblasti - 4. príklad

Príklad 11

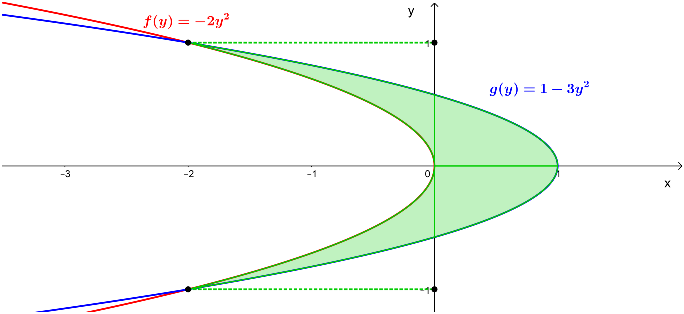
Vypočítame obsah oblasti ohraničenej dvojicou parabol $x = -2y^2$ a $x = 1 - 3y^2$.

Riešenie:

V rovniciach obidvoch parabol je súradnica x funkciou súradnice y. Obidve paraboly sa pretínajú v bodoch $[-2, -1]$ a $[-2, 1]$ a ich osi sú rovnobežné s osou o_x. Nezávislá premenná y je ohraničená v intervale $\langle -1, 1 \rangle$. V tomto intervale platí $-2y^2 \leq 1 - 3y^2$, preto

$$P = \int_{-1}^{1} \left(1 - 3y^2 - (-2y^2)\right) \, \mathrm{d}y = \frac{4}{3} \, \left[\mathrm{j}^2\right] \cdot$$

Obsah rovinnej oblasti - 4. príklad



Obr.: Obsah oblasti ohraničenej dvojicou parabol $x = -2y^2$ a $x = 1 - 3y^2$

pozn. Opäť sa jedná o symetrickú plochu (tentokrát podľa O_x). Preto je vhodné tento integrál riešiť na intervale $x \in \langle 0, 1 \rangle$ a vypočítanú plochu na záver vynásobiť 2, čím dostaneme plochu hľadanej oblasti.

Obsah rovinnej oblasti - príklady na prepočítanie

Príklad 12

Vypočítajte obsahy rovinných oblastí ohraničených uvedenými krivkami:

a) Parabolou $y = 4x - x^2$ a osou o_x. $P = \frac{32}{3}$ $\left[\mathrm{j}^2\right]$
b) Parabolou $y = x^2 + 1$ a priamkou $x + y = 3$. $P = \frac{9}{2}$ $\left[\mathrm{j}^2\right]$
c) Parabolou $y = x^2 - 2$ a priamkou $y = 2$. $P = \frac{32}{3}$ $\left[\mathrm{j}^2\right]$
d) Osou o_y a krivkou $x = y^2 - y^3$. $P = \frac{1}{12}$ $\left[\mathrm{j}^2\right]$
e) Krivkami $y = 2x^2 + 10$ a $y = 4x + 16$, a priamkami $x = -2$, $x = 5$. $P = \frac{142}{3}$ $\left[\mathrm{j}^2\right]$
f) Osou o_y, $x = \frac{\pi}{2}$ a krivkami $y = \cos x$ a $y = \sin x$. $P = 2\sqrt{2} - 2$ $\left[\mathrm{j}^2\right]$
g) Krivkou $x = \frac{1}{2}y^2 - 3$ a priamkou $y = x - 1$. $P = 18$ $\left[\mathrm{j}^2\right]$

Ďakujem za pozornosť.