

# Skúška z MA I pre rok 2020/2021

## Skupina A

**Príklad č.1 (7 bodov):** Nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie:  
 $f(x) = \ln(2x - 1)$ , ak  $x$ -ová súradnica dotykového bodu je  $x_0 = 1$ .

**Príklad č.2 (12 bodov):** Vyjadrite približne hodnotu funkcie

$$f(x) = \ln(\sin(x))$$

v bode  $x = 86^\circ$  pomocou Taylorovho polynómu 3. stupňa. Stačí napísať výsledný vzťah, zlomky ani zátvorky nemusíte upravovať.

**Príklad č.3 (8 bodov):** Vypočítajte daný výraz

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x[\ln(x) - \ln(x + 2)] + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin(x) + x}{e^x - x - 1}$$

**Príklad č.4 (18 bodov):** Vyšetrite priebeh funkcie  $f(x)$ , ak

$$f(x) = \frac{x}{1 - x^2}$$

**Príklad č.5 (8 bodov):** Zistite, či dané nekonečné rady konvergujú/divergujú

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n+1)} \qquad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2+1}}$$

**Príklad č.6 (10 bodov):** Vypočítajte neurčitý integrál

$$\int x^3 e^{x^2} dx.$$

**Príklad č.7 (12 bodov):** Vypočítajte určitý integrál

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\cos^2(x) - 5 \cos(x) + 6} dx$$

**Príklad č.8 (10 bodov):** Vypočítajte objem rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou rovinnej oblasti ohraničenej grafmi funkcií okolo osi  $o_x$ :  
 $f(x) = x^2 + 1$ ,  $g(x) = -x^2 + 3$ .

# Skupina B

**Príklad č.1 (7 bodov):** Nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie:  
 $f(x) = x^2 + 2x$  tak, aby dotyčnica bola rovnobežná s priamkou  
 $p: 4y - 16x + 5 = 0$ .

**Príklad č.2 (12 bodov):** Vyjadrite približne hodnotu funkcie

$$f(x) = \ln(\sin(x) + 1)$$

v bode  $x = 4^\circ$  pomocou Taylorovho polynómu 3. stupňa. Stačí napísať výsledný vzťah, zlomky ani zátvorky nemusíte upravovať.

**Príklad č.3 (8 bodov):** Vypočítajte daný výraz

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} + \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} \right)$$

**Príklad č.4 (18 bodov):** Vyšetrite priebeh funkcie  $f(x)$ , ak

$$f(x) = x + \frac{1}{x+2}$$

**Príklad č.5 (8 bodov):** Zistite, či dané nekonečné rady konvergujú/divergujú

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^{1+2n}} \qquad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$$

**Príklad č.6 (10 bodov):** Vypočítajte neurčitý integrál

$$\int \ln(x^2 - 2x + 3) \, dx$$

**Príklad č.7 (12 bodov):** Vypočítajte určitý integrál

$$\int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{(e^x - 2)e^x}{e^{2x} + 2e^x + 7} \, dx$$

**Príklad č.8 (10 bodov):** Vypočítajte objem rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou rovinnej oblasti ohraničenej grafmi funkcií okolo osi  $o_x$ :  
 $f(x) = x^2 + 9$ ,  $g(x) = 3x + 7$ .

# Skupina C

**Príklad č.1 (7 bodov):** Nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie:  
 $f(x) = 2x^2 + 3x$  tak, aby dotyčnica bola kolmá na priamku  
 $p: 22y + 2x - 33 = 0$ .

**Príklad č.2 (12 bodov):** Vyjadrite približne hodnotu funkcie

$$f(x) = \ln(\tan(x))$$

v bode  $x = 43^\circ$  pomocou Taylorovho polynómu 3. stupňa. Stačí napísať výsledný vzťah, zlomky ani zátvorky nemusíte upravovať.

**Príklad č.3 (8 bodov):** Vypočítajte daný výraz

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x}}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{x^3}$$

**Príklad č.4 (18 bodov):** Vyšetrite priebeh funkcie  $f(x)$ , ak

$$f(x) = x + \frac{x}{x - 1}$$

**Príklad č.5 (8 bodov):** Zistite, či dané nekonečné rady konvergujú/divergujú

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n} \qquad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2 + 4}$$

**Príklad č.6 (10 bodov):** Vypočítajte neurčitý integrál

$$\int \ln(x^2 - 4x + 6) \, dx$$

**Príklad č.7 (12 bodov):** Vypočítajte určitý integrál

$$\int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{e^x - 1}{e^x - 2} \, dx$$

**Príklad č.8 (10 bodov):** Vypočítajte objem rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou rovinnej oblasti ohraničenej grafmi funkcií okolo osi  $o_x$ :  
 $f(x) = -x^2 + 9$ ,  $g(x) = -3x + 11$ .

# Skupina D

**Príklad č.1 (7 bodov):** Nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie:  
 $f(x) = -x^2 + 4x$  tak, aby normála bola kolmá na priamku  
 $p: y + 4x + 5 = 0$ .

**Príklad č.2 (12 bodov):** Vyjadrite približne hodnotu funkcie

$$f(x) = \ln(\cos(x) + 1)$$

v bode  $x = 85^\circ$  pomocou Taylorovho polynómu 3. stupňa. Stačí napísať výsledný vzťah, zlomky ani zátvorky nemusíte upravovať.

**Príklad č.3 (8 bodov):** Vypočítajte daný výraz

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x[\ln(x+2) - \ln(x+1)] - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{x^3}$$

**Príklad č.4 (18 bodov):** Vyšetrite priebeh funkcie  $f(x)$ , ak

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1} - x$$

**Príklad č.5 (8 bodov):** Zistite, či dané nekonečné rady konvergujú/divergujú

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} (\arctan(n+1))^n \qquad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(\ln 5)^n}$$

**Príklad č.6 (10 bodov):** Vypočítajte neurčitý integrál

$$\int x^2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

**Príklad č.7 (12 bodov):** Vypočítajte určitý integrál

$$\int_0^{\ln 2} \frac{(2e^x + 3)e^x}{e^{2x} + 2e^x + 2} dx$$

**Príklad č.8 (10 bodov):** Vypočítajte objem rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou rovinnej oblasti ohraničenej grafmi funkcií okolo osi  $o_x$ :  
 $f(x) = x^2 + 3$ ,  $g(x) = 2x + 3$ .

# Skupina E

**Príklad č.1 (7 bodov):** Nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie:  
 $f(x) = -\frac{x^2}{2} - 3x$  tak, aby normála bola rovnobežná s priamkou  
 $p: 2y - x + 4 = 0$ .

**Príklad č.2 (12 bodov):** Vyjadrite približne hodnotu funkcie

$$f(x) = \ln(\cos(x) + 1)$$

v bode  $x = 86^\circ$  pomocou Taylorovho polynómu 3. stupňa. Stačí napísať výsledný vzťah, zlomky ani zátvorky nemusíte upravovať.

**Príklad č.3 (8 bodov):** Vypočítajte daný výraz

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x+1)[\ln(x+2) - \ln(x)] + \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x)$$

**Príklad č.4 (18 bodov):** Vyšetrite priebeh funkcie  $f(x)$ , ak

$$f(x) = \frac{2}{x^2 - 1}$$

**Príklad č.5 (8 bodov):** Zistite, či dané nekonečné rady konvergujú/divergujú

$$\text{a) } \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n-2} \qquad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)!}$$

**Príklad č.6 (10 bodov):** Vypočítajte neurčitý integrál

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x + \sqrt[6]{x^5}} dx$$

**Príklad č.7 (12 bodov):** Vypočítajte určitý integrál

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin(x) dx$$

**Príklad č.8 (10 bodov):** Vypočítajte obsah rovinnej oblasti ohraničenej grafmi funkcií:

$$f(x) = x^2 + 2x, \quad g(x) = \frac{x^2}{2}.$$

# Skupina F

**Príklad č.1 (7 bodov):** Nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie:  $f(x) = (x - 1)e^x$ , ak  $x$ -ová súradnica dotykového bodu je  $x_0 = 1$ .

**Príklad č.2 (12 bodov):** Vyjadrite približne hodnotu funkcie

$$f(x) = \ln(\sin(x))$$

v bode  $x = 84^\circ$  pomocou Taylorovho polynómu 3. stupňa. Stačí napísať výsledný vzťah, zlomky ani zátvorky nemusíte upravovať.

**Príklad č.3 (8 bodov):** Vypočítajte daný výraz

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{x^3}$$

**Príklad č.4 (18 bodov):** Vyšetrite priebeh funkcie  $f(x)$ , ak

$$f(x) = \frac{2}{x^2 - 4}$$

**Príklad č.5 (8 bodov):** Zistite, či dané nekonečné rady konvergujú/divergujú

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3 + 2} \qquad \text{b) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2 - \cos^2(n)}$$

**Príklad č.6 (10 bodov):** Vypočítajte neurčitý integrál

$$\int \ln(x^2 - 2x + 5) \, dx$$

**Príklad č.7 (12 bodov):** Vypočítajte určitý integrál

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\cos^2(x) - 5 \cos(x) + 6} \, dx$$

**Príklad č.8 (10 bodov):** Vypočítajte obsah rovinnej oblasti ohraničenej grafmi funkcií:  $f(x) = x^2 - 4x - 2$ ,  $g(x) = 2 - x$ .

# Skupina G

**Príklad č.1 (7 bodov):** Nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie:  
 $f(x) = \frac{x}{x-1}$ , ak  $x$ -ová súradnica dotykového bodu je  $x_0 = 2$ .

**Príklad č.2 (12 bodov):** Vyjadrite približne hodnotu funkcie

$$f(x) = \ln(\tan(x))$$

v bode  $x = 42^\circ$  pomocou Taylorovho polynómu 3. stupňa. Stačí napísať výsledný vzťah, zlomky ani zátvorky nemusíte upravovať.

**Príklad č.3 (8 bodov):** Vypočítajte daný výraz

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x[\ln(x) - \ln(x+2)] + \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} \right)$$

**Príklad č.4 (18 bodov):** Vyšetrite priebeh funkcie  $f(x)$ , ak

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$$

**Príklad č.5 (8 bodov):** Zistite, či dané nekonečné rady konvergujú/divergujú

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} \qquad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{2^n}$$

**Príklad č.6 (10 bodov):** Vypočítajte neurčitý integrál

$$\int x^2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

**Príklad č.7 (12 bodov):** Vypočítajte určitý integrál

$$\int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{(e^x - 2)e^x}{e^{2x} + 2e^x + 7} dx$$

**Príklad č.8 (10 bodov):** Vypočítajte obsah rovinnej oblasti ohraničenej grafmi funkcií:  $f(x) = x^2 - x + 2$ ,  $g(x) = 3x + 2$ .

# Skupina H

**Príklad č.1 (7 bodov):** Nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie:

$$f(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{3}{4}x \text{ tak, aby dotyčnica bola kolmá na priamku}$$
$$p: y - 4x + 2 = 0.$$

**Príklad č.2 (12 bodov):** Vyjadrite približne hodnotu funkcie

$$f(x) = \ln(\sin(x) + 1)$$

v bode  $x = 4^\circ$  pomocou Taylorovho polynómu 3. stupňa. Stačí napísať výsledný vzťah, zlomky ani zátvorky nemusíte upravovať.

**Príklad č.3 (8 bodov):** Vypočítajte daný výraz

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x)}{\sqrt{x+1} - 1} + \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x)$$

**Príklad č.4 (18 bodov):** Vyšetrite priebeh funkcie  $f(x)$ , ak

$$f(x) = x - \frac{x}{x+1}$$

**Príklad č.5 (8 bodov):** Zistite, či dané nekonečné rady konvergujú/divergujú

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)! 3!}{n! 3^n} \qquad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{5^n}$$

**Príklad č.6 (10 bodov):** Vypočítajte neurčitý integrál

$$\int x^3 e^{x^2} dx$$

**Príklad č.7 (12 bodov):** Vypočítajte určitý integrál

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\cos^2(x) - 5 \cos(x) + 6} dx$$

**Príklad č.8 (10 bodov):** Vypočítajte obsah rovinnej oblasti ohraničenej grafmi funkcií:  $f(x) = x^2 - x + 2$ ,  $g(x) = -x + 6$ .