Priebeh funkcie - 1.časť

Zuzana Minarechová

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Slovenská technická univerzita, Stavebná fakulta

15 Október 2020

Úvod

- Na začiatok jeden motivačný citát od prof. Luboša Picka (KMA MFF UK Praha):

  Odposlechnuto na matfyzu:

  > *Milý Bože, kdyby mi zbývala už jen jediná hodina života, dej, ať ji mohu strávit na přednášce z matematické analýzy. Pak mi bude tato hodina připadat jako věčnost.*

  (student, jenž si nepřál být jmenován)

Obsah prednášky

- **Monotónnosť**
- **Konvexnosť, konkávnosť, inflexné body**
- **Lokálne extrémy**

Monotónnosť

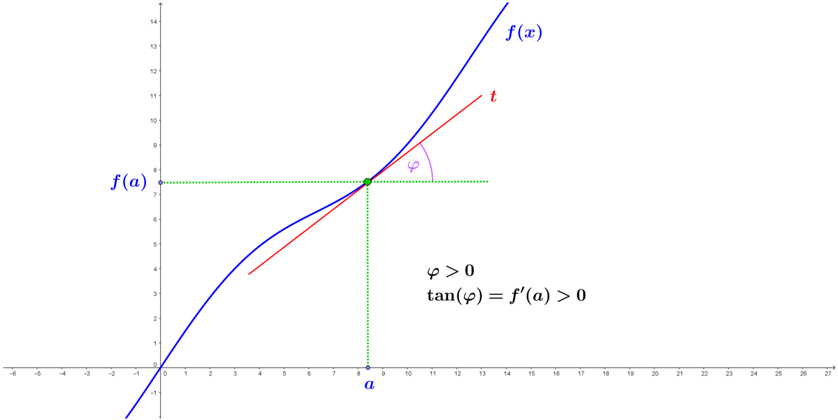
Monotónnosť

- Pomocou **prvej derivácie** funkcie môžeme zistiť, v ktorých intervaloch **funkcia rastie alebo klesá**, t.j.:

Monotónnosť

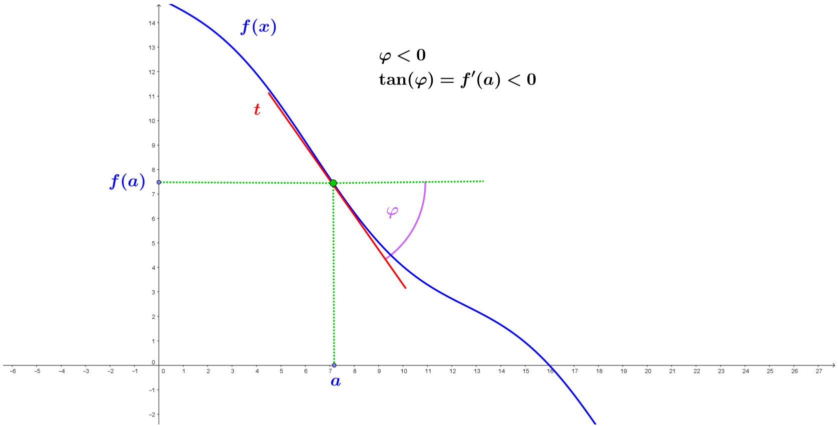
Ak $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ *platí pre každé* $x \in (a, b)$*, tak funkcia* f *je ostro rastúca (ostro klesajúca) v intervale* (a, b)*.*

Monotónnosť



Obr.: Ostro rastúca funkcia

Monotónnosť



Obr.: Ostro klesajúca funkcia

Monotónnosť

- **Dôsledkom vety o strednej hodnote** je tvrdenie:
  Ak $f'(x) = 0$ *pre všetky* $x \in (a, b)$, *tak* f *je konštantná funkcia v intervale* (a, b).

Monotónnosť

- **Dôsledkom vety o strednej hodnote** je tvrdenie:
  Ak $f'(x) = 0$ *pre všetky* $x \in (a, b)$, *tak* f *je konštantná funkcia v intervale* (a, b).

- **Dôsledkom je tvrdenie užitočné pri dôkazoch nerovností medzi funkciami**:
  Nech funkcie f *a* g *sú spojité v intervale* $\langle a, b\rangle$ *a* $f(a) \leq g(a)$. *Ak* $f'(x) \leq g'(x)$ *pre každé* $x \in (a, b)$, *tak aj* $f(x) \leq g(x)$ *pre každé* $x \in (a, b)$.

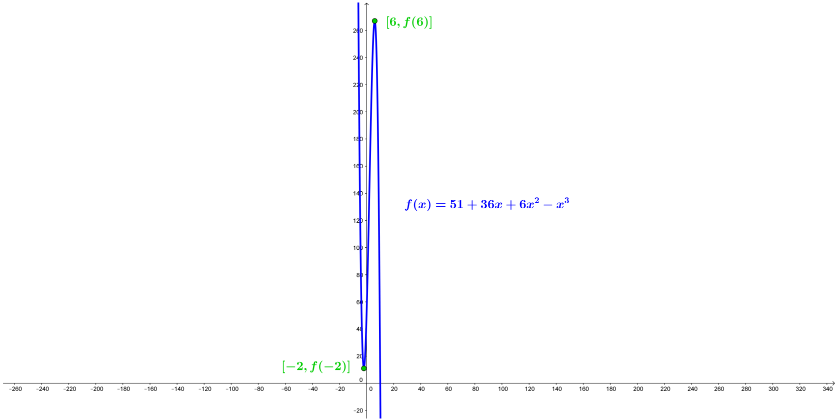
Monotónnosť - riešené príklady

Príklad

Zistite intervaly, v ktorých rastú a intervaly, v ktorých klesajú funkcie:
a) $y = 51 + 36x + 6x^2 - x^3$,
b) $y = 2x^2 - \ln x$,
c) $y = x^2 e^{-x}$.

Riešenie:

a)
- Definičný obor funkcie je množina $\mathbf{R}$
- Vypočítame deriváciu $y' = 36 + 12x - 3x^2$ a pre určenie intervalov, v ktorých funkcia rastie, t.j. riešime kvadratickú nerovnicu $36 + 12x - 3x^2 > 0$.
- Riešením je interval $(-2, 6)$, t.j. funkcia je rastúca v tomto intervale.
- Klesajúca je v intervaloch, ktoré sú riešením opačnej nerovnice, teda funkcia je klesajúca v intervaloch $(-\infty, -2)$ a $(6, \infty)$.



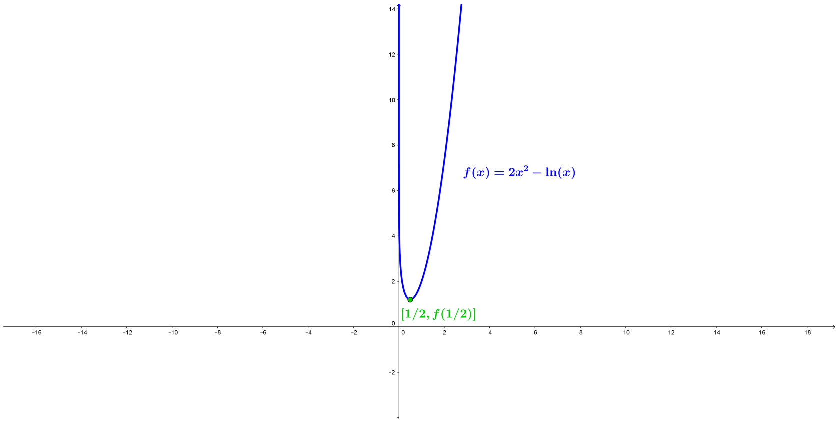
Obr.: a) Graf funkcie $y = 51 + 36x + 6x^2 - x^3$

Monotónnosť - riešené príklady

b)

- Definičným oborom funkcie $y = 2x^2 - \ln x$ je množina $D = (0, \infty)$.
- Vypočítame deriváciu $y' = 4x - \frac{1}{x}$. Riešením nerovnice $4x - \frac{1}{x} > 0$ sú intervaly $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ a $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$.
- Riešením opačnej nerovnice sú intervaly $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ a $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.
- Vzhľadom na svoj definičný obor je funkcia rastúca v intervale $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ a klesajúca v intervale $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Monotónnosť - riešené príklady



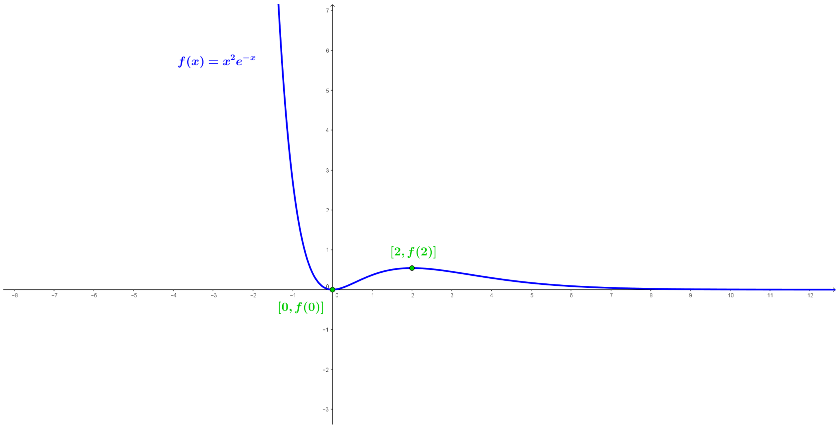
Obr.: b) Graf funkcie $y = 2x^2 - \ln(x)$

Monotónnosť - riešené príklady

c)

- Definičný obor funkcie $y = x^2 e^{-x}$ je množina $\mathbf{R}$.
- Derivácia funkcie je $y' = (2x - x^2)e^{-x}$. Pretože druhý činiteľ je kladný pre všetky $x \in \mathbf{R}$, znamienko derivácie závisí len od prvého člena.
- Preto je funkcia rastúca v intervale $(0, 2)$ a klesajúca v intervaloch $(-\infty, 0)$ a $(2, \infty)$.

Monotónnosť - riešené príklady



Obr.: c) Graf funkcie $y = x^2e^{-x}$

Monotónnosť - neriešené príklady

Príklad

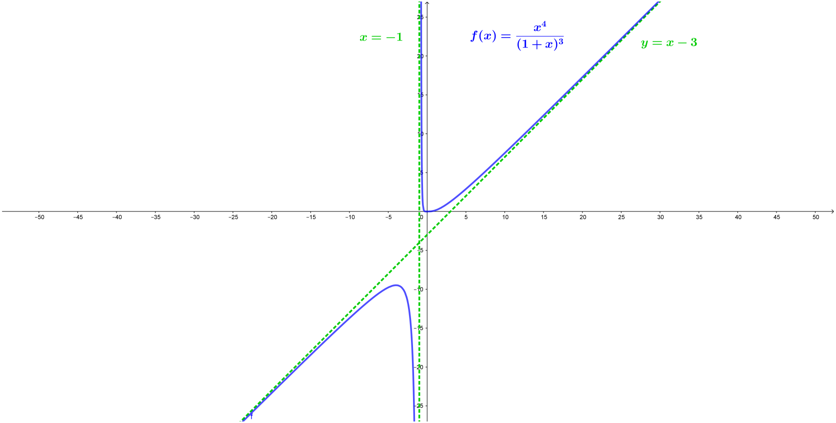
Zistite intervaly, v ktorých rastú a intervaly, v ktorých klesajú funkcie:

a) $f(x) = \frac{x^4}{(1+x)^3}$

b) $f(x) = x + 2\,\mathrm{arccotg}(x)$

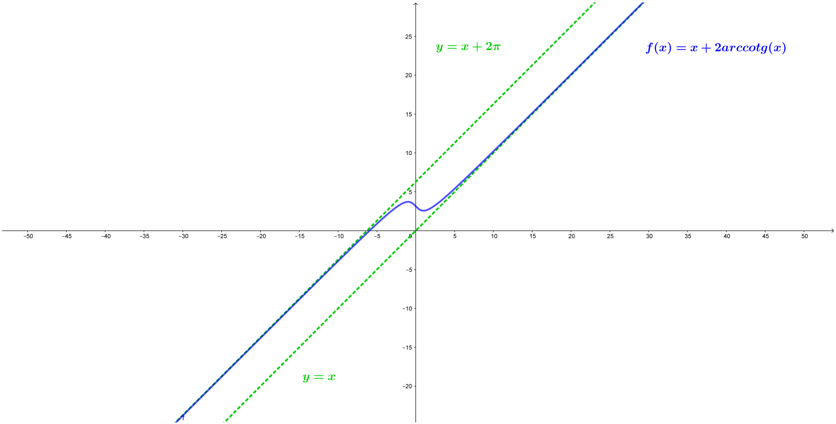
c) $f(x) = \cos(x) + \ln(\cos(x))$

Monotónnosť - neriešené príklady



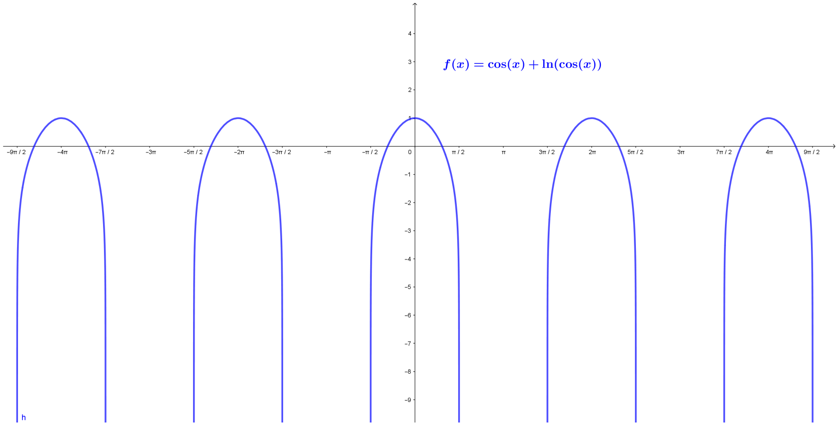
Obr.: a) Graf funkcie $f(x) = \frac{x^4}{(1+x)^3}$

Monotónnosť - neriešené príklady



Obr.: b) Graf funkcie $f(x) = x + 2\,\mathrm{arccotg}(x)$

Monotónnosť - neriešené príklady

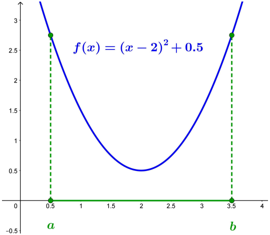


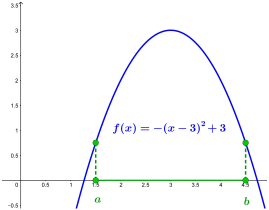
Obr.: c) Graf funkcie $f(x) = \cos(x) + \ln(\cos(x))$

Konvexnosť, konkávnosť, inflexné body

Konvexnosť, konkávnosť, inflexné body

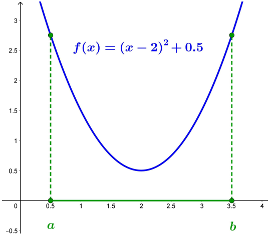
- Funkcia je **konvexná (konkávna) v intervale** (a, b), ak **jej graf je otvorený nahor (nadol)**.

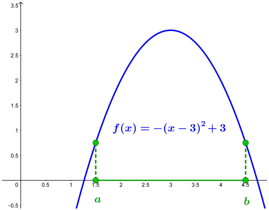




Konvexnosť, konkávnosť, inflexné body

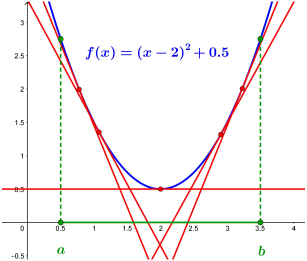
- Funkcia je **konvexná (konkávna) v intervale** (a, b), ak **jej graf je otvorený nahor (nadol)**.

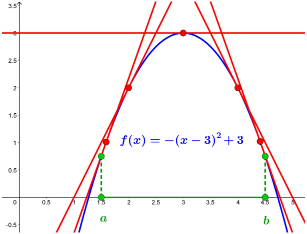




- **Konvexnosť alebo konkávnosť** môžeme určiť pomocou **druhej derivácie**: *Ak* $f''(x) > 0$ $(f''(x) < 0)$ *platí pre každé* $x \in (a, b)$, *tak funkcia* f *je konvexná (konkávna) v intervale* (a, b).

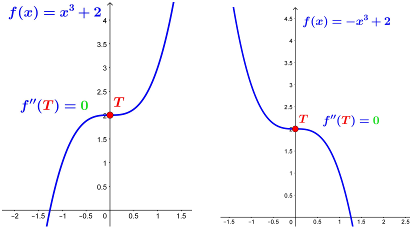
- **Geometrická interpretácia:** Funkcia f spojitá na intervale (a, b), ktorá má v každom vnútornom bode intervalu deriváciu $f'(x)$, je konvexná (konkávna) na intervale (a, b), ak pre každú dotyčnicu ku grafu funkcie platí, že všetky body grafu okrem dotykového bodu ležia nad (pod) touto dotyčnicou.





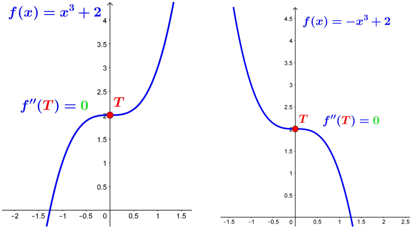
Konvexnosť, konkávnosť, inflexné body

- Bod a funkcie f, v ktorom má funkcia deriváciu, nazývame **inflexný bod**, ak je funkcia na istom ľavom okolí bodu a konvexná (konkávna) a v istom pravom okolí bodu a je funkcia konkávna (konvexná).



Konvexnosť, konkávnosť, inflexné body

- Bod a funkcie f, v ktorom má funkcia deriváciu, nazývame **inflexný bod**, ak je funkcia na istom ľavom okolí bodu a konvexná (konkávna) a v istom pravom okolí bodu a je funkcia konkávna (konvexná).



- Inými slovami: Bod, v ktorom sa funkcia mení z konvexnej na konkávnu alebo naopak, voláme inflexný bod.
- **Inflexné body hľadáme podľa pravidla**: *Ak a je inflexný bod funkcie f a $f''(a)$ existuje, tak $f''(a) = 0$.*

Konvexnosť, konkávnosť, inflexné body - riešené príklady

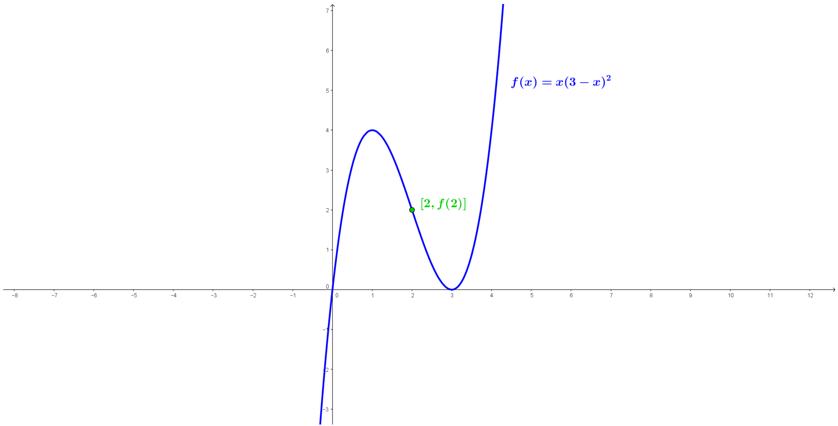
Príklad

Nájdite intervaly, v ktorých sú konvexné a intervaly, v ktorých sú konkávne funkcie:
a) $y = x(3-x)^2$,
b) $y = \ln(1+x^3)$,
c) $y = x \operatorname{arctg}(x)$.

Riešenie:

a)
- Definičný obor je množina $\mathbf{R}$.
- $y' = (3-x)^2 - 2x(3-x) = 3(3-x)(1-x)$ a
  $y'' = 3(x-1+x-3) = 6x-12$.
- Druhá derivácia je kladná pre x z intervalu $(2, \infty)$, preto je funkcia na tomto intervale konvexná.
- Na druhej strane, druhá derivácia je záporná pre x z intervalu $(-\infty, 2)$, preto je funkcia na tomto intevale konkávna.
- Jediný inflexný bod je bod $[2, 2]$.

Konvexnosť, konkávnosť, inflexné body - riešené príklady



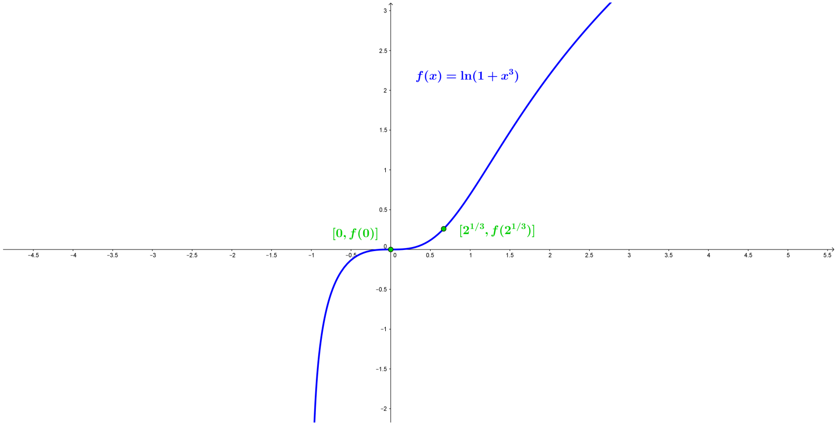
Obr.: a) Graf funkcie $y = x(3-x)^2$

Konvexnosť, konkávnosť, inflexné body - riešené príklady

b)

- Definičný obor funkcie $y = \ln(1 + x^3)$ je interval $(-1, \infty)$.
- Prvá derivácia: $y' = \frac{3x^2}{1+x^3}$
- Druhá derivácia: $y'' = \frac{3x(2-x^3)}{(1+x^3)^2}$
- Pretože menovateľ zlomku $\frac{3x(2-x^3)}{(1+x^3)^2}$ je v celom definičnom obore funkcie kladný, o znamienku rozhoduje čitateľ.
- Funkcia je konvexná v intervale $\left(0, \sqrt[3]{2}\right)$ a konkávna v intervaloch $(-1, 0)$ a $\left(\sqrt[3]{2}, \infty\right)$.
- Funkcia má dva inflexné body $[0, 0]$ a $\left[\sqrt[3]{2}, \ln 3\right]$.

Konvexnosť, konkávnosť, inflexné body - riešené príklady

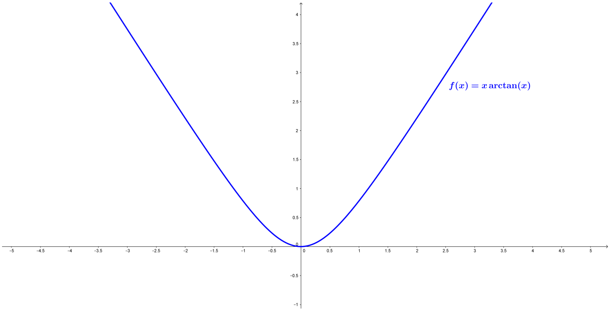


Obr.: b) Graf funkcie $y = \ln(1+x^3)$

Konvexnosť, konkávnosť, inflexné body - riešené príklady

c)

- Definičný obor funkcie $y = x\,\mathrm{arctg}(x)$ je množina $\mathbf{R}$.
- $y' = \mathrm{arctg}(x) + \frac{x}{1+x^2}$ a $y'' = \frac{2}{(1+x^2)^2}$ je kladná pre všetky $x \in \mathbf{R}$.
- Funkcia je konvexná v celej množine $\mathbf{R}$ a preto nemá inflexné body.



Obr.: c) Graf funkcie $y = x\,\mathrm{arctg}(x)$

Konvexnosť, konkávnosť, inflexné body - neriešené príklady

Príklad

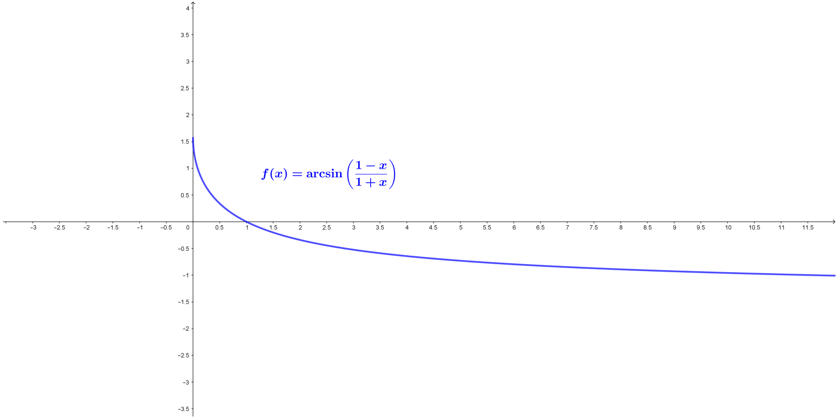
Nájdite intervaly, v ktorých sú konvexné a intervaly, v ktorých sú konkávne funkcie:

a) $f(x) = \arcsin\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

b) $f(x) = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$

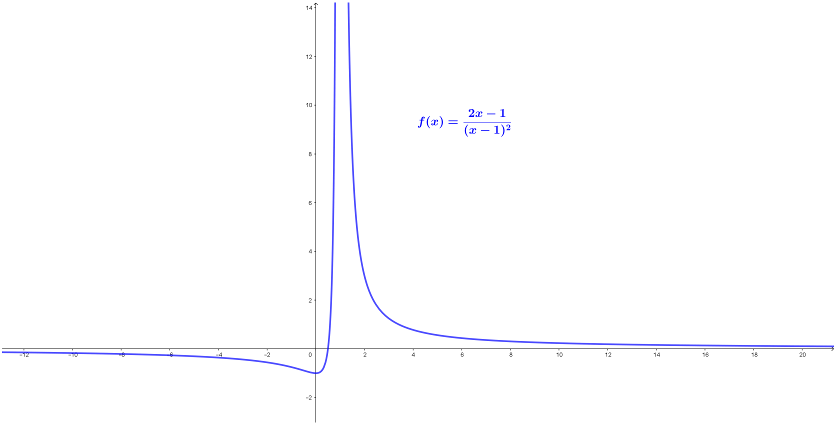
c) $f(x) = 1 + (x^2 - 1)^3$

Konvexnosť, konkávnosť, inflexné body - neriešené príklady



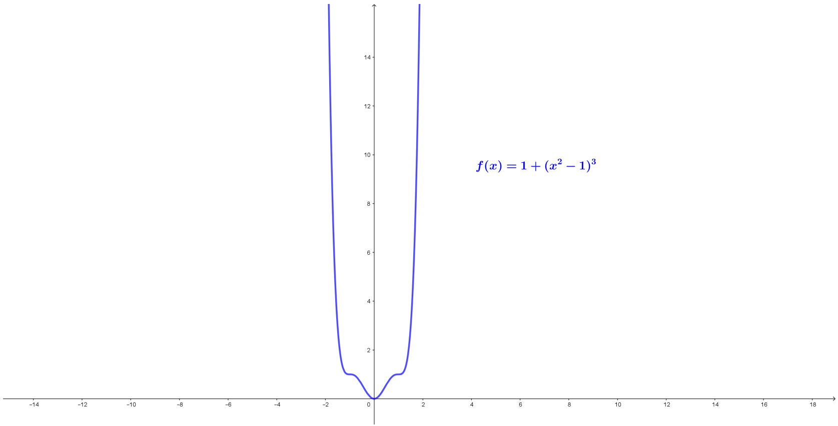
Obr.: a) Graf funkcie $f(x) = \arcsin\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

Konvexnosť, konkávnosť, inflexné body - neriešené príklady



Obr.: b) Graf funkcie $f(x) = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$

Konvexnosť, konkávnosť, inflexné body - neriešené príklady



Obr.: c) Graf funkcie $f(x) = 1 + (x^2 - 1)^3$

Extrémy funkcie

Extrémy funkcie

- Funkcia f má v bode a **lokálne maximum (minimum)**, ak existuje také okolie O bodu a, že pre všetky $x \in O - \{a\}$ platí $f(x) < f(a)$ $(f(x) > f(a))$.

Extrémy funkcie

- Funkcia f má v bode a **lokálne maximum (minimum)**, ak existuje také okolie O bodu a, že pre všetky $x \in O - \{a\}$ platí $f(x) < f(a)$ $(f(x) > f(a))$.
- **Lokálne maximum**

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \left[\begin{array}{r} f(x)-f(a)\leq 0 \\ x-a<0 \end{array}\right] \geq 0 \\ \lim\limits_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \left[\begin{array}{r} f(x)-f(a)\leq 0 \\ x-a>0 \end{array}\right] \leq 0 \end{cases}$$

- **Lokálne minimum**

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \left[\begin{array}{r} f(x)-f(a)\geq 0 \\ x-a<0 \end{array}\right] \leq 0 \\ \lim\limits_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \left[\begin{array}{r} f(x)-f(a)\geq 0 \\ x-a>0 \end{array}\right] \geq 0 \end{cases}$$

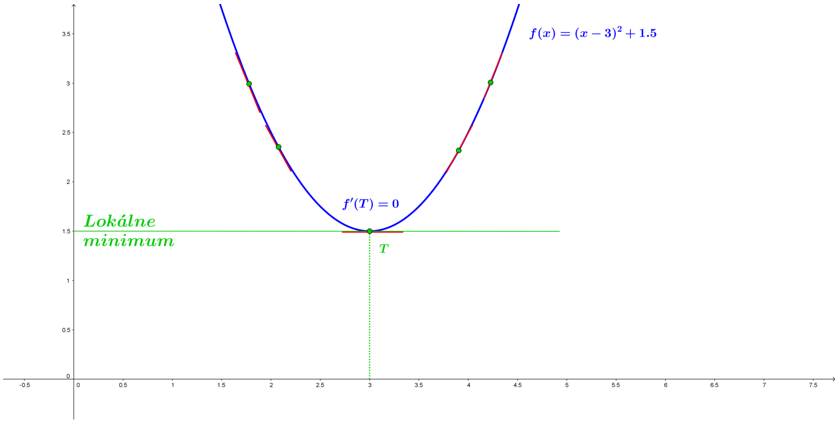
Extrémy funkcie

- Lokálne maximá a minimá funkcie voláme spoločným názvom **lokálne extrémy**.

Extrémy funkcie

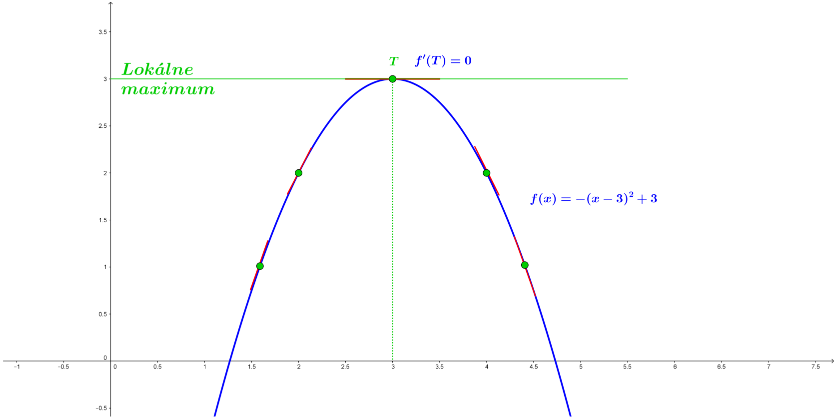
- Lokálne maximá a minimá funkcie voláme spoločným názvom **lokálne extrémy**.
- **Pri určovaní lokálnych extrémov funkcie** používame nasledujúce tvrdenie:
  Ak má funkcia f v bode a lokálny extrém a $f'(a)$ existuje, tak $f'(a) = 0$. Ak naviac $f''(a) < 0$ $(f''(a) > 0)$, tak f má v bode a lokálne maximum (minimum).

Extrémy funkcie



Obr.: Lokálne minimum funkcie

Extrémy funkcie



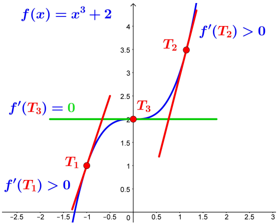
Obr.: Lokálne maximum funkcie

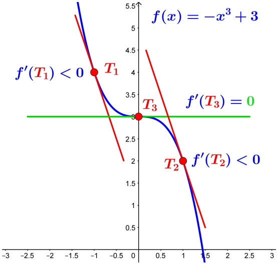
Extrémy funkcie

- Body, v ktorých **má derivácia funkcie nulovú hodnotu** voláme **stacionárne body funkcie**.

Extrémy funkcie

- Body, v ktorých **má derivácia funkcie nulovú hodnotu** voláme **stacionárne body funkcie**.
- Funkcia môže mať stacionárne body aj v bodoch, v ktorých nemá lokálny extrém:





Obr.: Stacionárny bod - nie v každom stacionárnom bode musí byť extrém

Extrémy funkcie

- Majme funkciu $f(x) = |x|, x \in \mathbf{R}$. Táto funkcia má v bode a minimum, ale $f'(x)$ neexistuje. Čo s tým?

Extrémy funkcie

- Majme funkciu $f(x) = |x|, x \in \mathbf{R}$. Táto funkcia má v bode a minimum, ale $f'(x)$ neexistuje. Čo s tým?
  Pri určovaní lokálneho extrému môžeme namiesto druhej derivácie použiť aj fakt, že funkcia f má lokálne maximum v bode a, ak je rastúca v niektorom ľavom okolí bodu a a klesajúca v niektorom pravom okolí bodu a.

Extrémy funkcie

- Majme funkciu $f(x) = |x|, x \in \mathbf{R}$. Táto funkcia má v bode a minimum, ale $f'(x)$ neexistuje. Čo s tým?
  Pri určovaní lokálneho extrému môžeme namiesto druhej derivácie použiť aj fakt, že funkcia f má lokálne maximum v bode a, ak je rastúca v niektorom ľavom okolí bodu a a klesajúca v niektorom pravom okolí bodu a.
- Pri určovaní lokálnych extrémov vo všeobecnosti postupujeme tak, že najskôr určíme **všetky body,** v ktorých **derivácia je rovná 0 alebo derivácia neexistuje**, a potom z nich vyberieme tie, ktoré sú lokálnymi extrémami.

Extrémy funkcie - riešené príklady

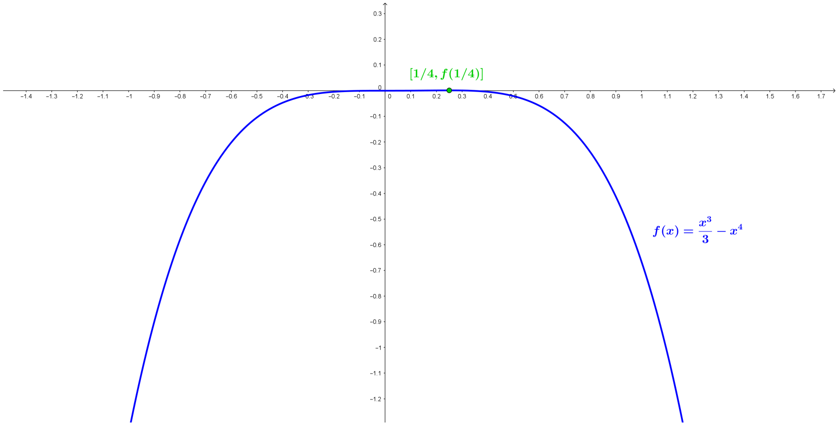
Príklad

Určíme lokálne extrémy funkcií:
a) $y = \frac{x^3}{3} - x^4$, b) $y = 1 - |1 - x|$, c) $y = \ln x + \frac{1}{x}$.

Riešenie:

a)
- Funkcia je definovaná a má deriváciu $y' = x^2 - 4x^3$ pre všetky $x \in \mathbf{R}$.
- Preto môže nadobúdať lokálne extrémy len v stacionárnych bodoch, t.j. v riešeniach rovnice $x^2 - 4x^3 = 0$.
- Táto rovnica má dve riešenia $x_1 = 0$ a $x_2 = \frac{1}{4}$. Na určenie, či ide skutočne o extrém a o aký typ extrému ide, použijeme druhú deriváciu $y'' = 2x - 12x^2$ a jej hodnoty v stacionárnych bodoch.
- Hodnota $y''(0) = 0$ nedáva informáciu, hodnota $y''(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} < 0$ rozhoduje o tom, že funkcia má lokálne maximum $\frac{1}{32}$ v bode $\frac{1}{4}$.
- Pre určenie povahy bodu 0 použijeme intervaly monotónnosti: funkcia je rastúca aj v ľavom aj v pravom okolí bodu 0, preto nemá v tomto bode lokálny extrém.

Extrémy funkcie - riešené príklady



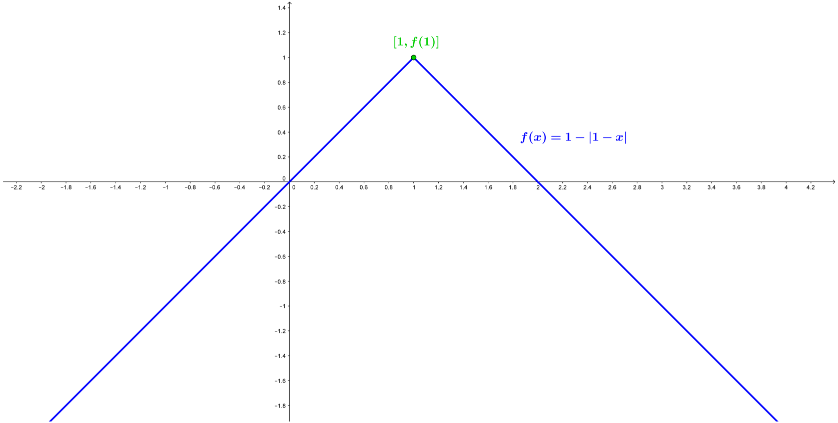
Obr.: a) Graf funkcie $y = \frac{x^3}{3} - x^4$

Extrémy funkcie - riešené príklady

b)

- Funkcia $y = 1 - |1 - x|$ je rovná funkcii $y = x$ a má deriváciu $y' = 1$ v intervale $(-\infty, 1)$ a rovná sa funkcii $y = 2 - x$ a má deriváciu $y' = -1$ v intervale $(1, \infty)$.
- Preto v žiadnom bode z týchto intervalov (oba sú otvorené) nemôže mať lokálny extrém.
- V samotnom bode 1 funkcia nemá deriváciu, napriek tomu má v tomto bode lokálne (aj absolútne) maximum rovné 1, pretože naľavo od neho rastie a napravo od neho klesá.

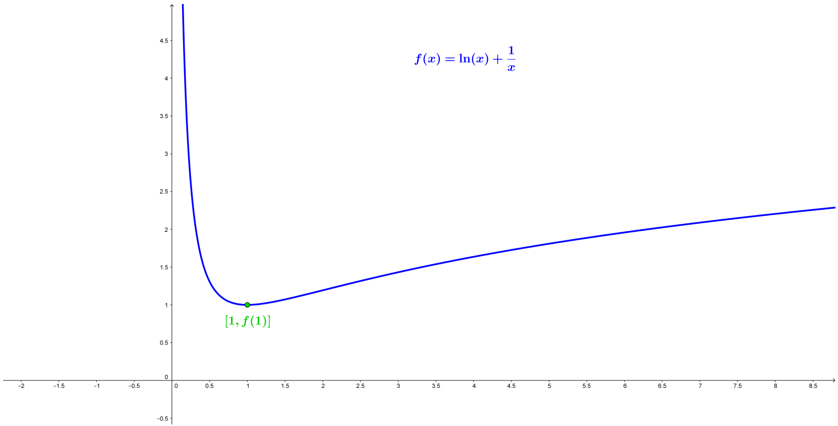
Extrémy funkcie - riešené príklady



Obr.: b) Graf funkcie $y = 1 - |1 - x|$

c)
- Definičný obor funkcie $y = \ln\ x + \frac{1}{x}$ je množina $D = (0, \infty)$.
- Derivácia funkcie $y' = \frac{x-1}{x^2}$ je nulová jedine v bode $x = 1$.
- Druhá derivácia $y'' = \frac{2-x}{x^3}$ je v tomto bode rovná 1, preto má funkcia v tomto bode lokálne minimum.

Extrémy funkcie - riešené príklady



Obr.: c) Graf funkcie $y = \ln(x) + \frac{1}{x}$

Extrémy funkcie - neriešené príklady

Príklad

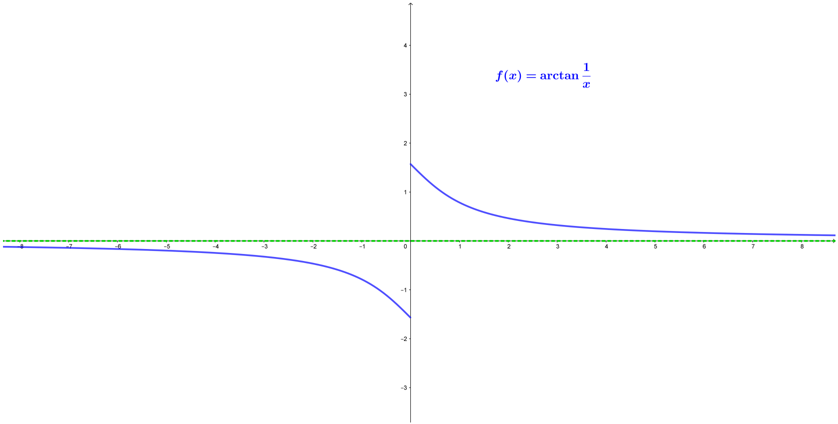
Nájdite lokálne extrémy funkcií (ak existujú):

a) $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

b) $f(x) = xe^{\frac{-x^2}{2}}$

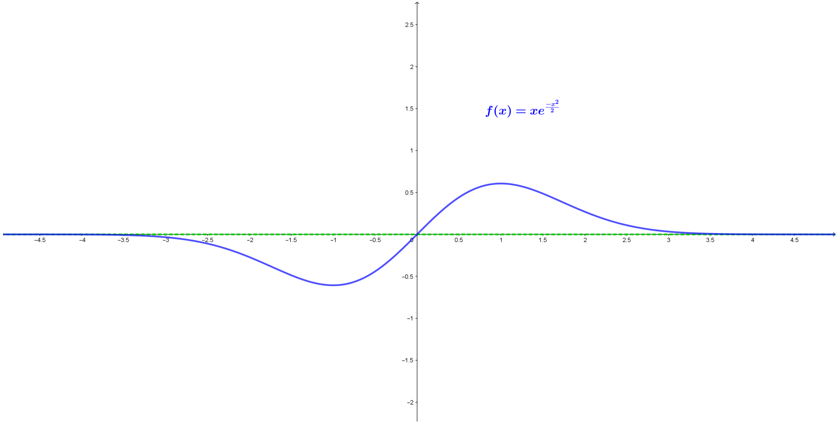
c) $f(x) = \frac{2}{e^x - 3}$

Extrémy funkcie - neriešené príklady



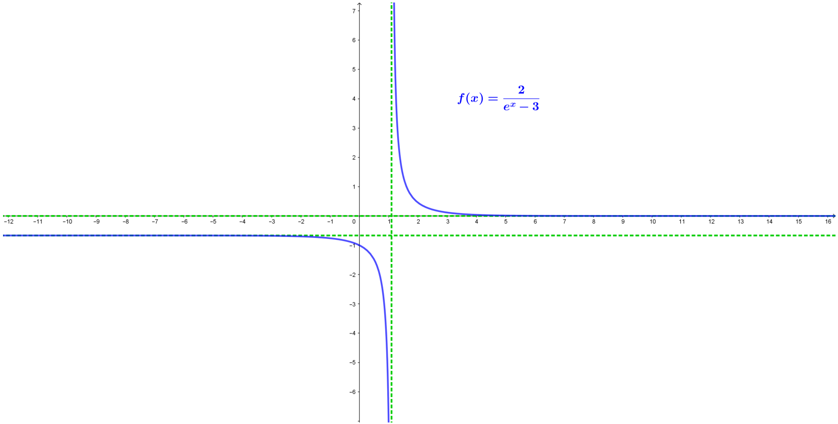
Obr.: a) Graf funkcie $y = \arctan \frac{1}{x}$

Extrémy funkcie - neriešené príklady



Obr.: b) Graf funkcie $y = xe^{\frac{-x^2}{2}}$

Extrémy funkcie - neriešené príklady



Obr.: c) Graf funkcie $y = \frac{2}{e^x - 3}$

Ďakujem za pozornosť.