Vorkurs Mathematik Lösungen

FaRaFIN Vorkurs-Team

2010

Inhaltsverzeichnis

2 Basismathematik **5**
- 2.1 Bruchrechnung Lösung 5
- 2.2 Potenzen Lösung 6
- 2.3 Binomische Formeln Lösung 12
- 2.4 Polynomdivision Lösungen 14

3 Quadratische Gleichungen Lösungen **19**

4 Lineare Gleichungssysteme Lösungen **21**

5 Betrag, Kreis, Ungleichungen **29**
- 5.1 Betrag 29
- 5.2 Kreis 29
- 5.3 Ungleichungen 31
  - 5.3.1 Ungleichungen mit einer Variablen 31
  - 5.3.2 Ungleichungen mit mehreren Variablen 40

6 Vollständige Induktion Lösung **51**
- 6.1 Gleichungen 51
- 6.2 Ungleichung 57
- 6.3 Teilbarkeitsprobleme 60
- 6.4 Ableitungen 64

7 Funktionen Loesungen **69**
- 7.1 Trigonometrische Funktionen 69
  - 7.1.1 Exponentialfunktionen und Logarithmus 71
- 7.2 Kurvendiskusion 74

8 Vektoren Lösungen **77**

9 Komplexe Zahlen **85**

2 Basismathematik

2.1 Bruchrechnung Lösung

Autor: Katja Matthes

Aufgabe 1

1. $\frac{20}{6} = \frac{10}{3}$
2. $\frac{92}{4} = 23$
3. $\frac{360}{25} = \frac{72}{5}$
4. $\frac{1716}{308} = \frac{39}{7}$

Aufgabe 2

1. $\frac{56}{65} \cdot 12 \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{13}{16} = 6$
2. $1 : \left(\frac{2}{9} + \frac{1}{7}\right) = \frac{63}{23}$
3. $\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{4}\right) : \frac{3}{4} = \frac{7}{15}$

Aufgabe 3

1. $\frac{\frac{8}{9}}{\frac{16}{27}} = \frac{3}{2}$
2. $\frac{2\frac{1}{3}}{1\frac{1}{6}} = 2$
3. $\frac{5\frac{1}{2}}{\frac{11}{12}} = 6$
4. $\frac{\frac{99}{100}}{\frac{9}{10}} = \frac{11}{10}$

Aufgabe 4

1. $\frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3} - \frac{2}{9} + \frac{3}{4} \cdot 1\frac{7}{9} = \frac{5}{3}$
2. $3\frac{5}{12} - 2\frac{5}{6} + 1\frac{1}{3} : \frac{4}{9} - 2\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

Aufgabe 5

1. $\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{9}{11}-\frac{3}{7}\right)=\frac{15}{77}$
2. $\left(\frac{1}{8}+\frac{7}{12}\right):\left(5-\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{6}$
3. $\frac{4}{7}\cdot\left(\left(1\frac{1}{2}-\frac{5}{9}\right):4\frac{1}{4}\right)=\frac{8}{63}$
4. $\frac{4}{5}:\left[\left(\frac{5}{8}-\frac{1}{3}\right)\cdot 12\right]=\frac{8}{35}$
5. $\frac{3}{4}\cdot\left(2\frac{1}{2}:1\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{2}$

Aufgabe 6

1. $\frac{\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}}{\frac{5}{14}}=\frac{3}{10}$
2. $\frac{1\frac{3}{4}+\frac{5}{6}}{\frac{1}{4}}=\frac{31}{3}$
3. $\frac{\frac{8}{9}}{3\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=\frac{16}{63}$
4. $\frac{\left(\frac{3}{5}-\frac{5}{10}\right):\frac{2}{5}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$

2.2 Potenzen Lösung

Autor: Katja Matthes

Aufgabe 1

1. $3x^4-x^4-x^3(x+2)=x^4-2x^3$
2. $-12a^2+3a(a+1)=-9a^2+3a$
3. $ax^n+4x^n=(a+4)x^n$
4. $(1-t)^2-\frac{1}{2}(1-t)^2=\frac{1}{2}(1-t)^2$
5. $a(x+t)^k-b(x+t)^k=(a-b)(x+t)^k$
6. $tx^3-3x^2+2tx^3-4x^2=3tx^3-7x^2$
7. $t^3\cdot t^4-t^5(t^2+1)=-t^5$
8. $x^2\cdot x^3\cdot x^4=x^9$
9. $3a^k\cdot a^{k-1}\cdot a=3a^{2k}$
10. $b^n\cdot b^{2n+1}=b^{3n+1}$

11. $(x+1)^{n-1} \cdot (x+1)^{n+1} = (x+1)^{2n}$
12. $\left(\frac{x}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{x}{3}\right)^2 = \left(\frac{x}{3}\right)^6$
13. $t^2 \cdot x^2 \cdot t^n \cdot x^{n-1} = t^{2+n} x^{n+1}$
14. $a \cdot b^k \cdot a^{2n} \cdot b^{k-3} = a^{2n+1} \cdot b^{2k-3}$
15. $(x-2)^n \cdot (x-2)^{1-n} = x-2$
16. $0,3^6 \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^6 = 1$
17. $2^x \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^x \cdot 5 = 5^{x+1}$
18. $2^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 2$
19. $\left(\frac{x}{4}\right)^4 \cdot 4^6 = 4^2 x^4$
20. $2^n \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^n \cdot x = x^{n+1}$
21. $9 \cdot 3^{n+1} = 3^{n+3}$
22. $(a-b)^9 \cdot (a-b) = (a-b)^{10}$
23. $\left(\frac{a-b}{c}\right)^{2k} \cdot \left(\frac{c}{a-b}\right)^{2k} = 1$

Aufgabe 2

1. $\frac{a^6}{a^3} = a^3$
2. $\frac{x^{2n+1}}{x^n} = x^{n+1}$
3. $\frac{15e^{x+1}}{5e^x} = 3e$
4. $\frac{x^4}{x^7} = x^{-3}$
5. $\frac{2a^{1-2n}}{4a^{n+1}} = \frac{1}{2}a^{-3n}$
6. $\frac{a^4 b^{4n+3}}{a^n b^{2n-1}} = a^{4-n} b^{2n+4}$
7. $\frac{81}{3^{x+3}} = 3^{1-x}$
8. $\frac{(a-b)^3}{(a-b)^{n-1}} = (a-b)^{4-n}$
9. $\frac{(ab)^3}{x^2 y} \cdot \frac{(xy)^2}{a^4 b^2} = \frac{by}{a}$
10. $\frac{a^{n+1}}{a^n} = a$
11. $\frac{10^3}{2^3} = 5^3$
12. $\frac{2{,}5^4}{0{,}5^4} = 5^4$

13. $\frac{(10ab)^k}{(4b)^k} = \left(\frac{5}{2}a\right)^k$

14. $\left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}$

15. $\left(\frac{-1}{a-b}\right)^3 = -(a-b)^{-3}$

16. $\left(\frac{x}{2}\right)^3 : \left(\frac{x}{3}\right) = \frac{3}{8}x^2$

17. $(-5^2)^3 = -5^6$

18. $3(c^4)^3 - 6c^{12} = -3c^{12}$

19. $(3b^2c^{n-1})^4 = 81b^8c^{4n-4}$

20. $\left(\frac{7a^2}{49b^3}\right)^2 = \frac{a^4}{49b^6}$

21. $\left(\frac{-1}{c^3}\right)^{2n} = \frac{1}{c^{6n}}$

22. $(3b^{n+1} \cdot c^{n-1})^2 = 9b^{2n+2}c^{2n-2}$

23. $(x^2y^3z^2)^5 = x^{10}y^{15}z^{10}$

24. $(0,5e^{x+2})^2 = 0,25e^{2x+4}$

25. $\left(\frac{2}{x^2}\right)^5 - \left(\frac{3}{x^5}\right)^2 = \frac{23}{x^{10}}$

26. $\left[\left(-\frac{3}{t}\right)^3\right]^4 \cdot \frac{t^9}{81} = \frac{3^8}{t^3}$

27. $\frac{(ab)^2}{x^3y} \cdot \frac{x^5y^2}{a^2b} = bx^2y$

28. $(\frac{(4-12x)^3}{64} = 1 - 3x)^3$

29. $\frac{(2x-4)^5}{(2-x)^3} = -32(2-x)^2$

30. $\frac{(4ab)^4}{(6a^2)^4} \cdot \frac{5}{b^4} = \frac{80}{81}a^{-4}$

31. $(a-b^2) \cdot (a-b^2)^n = (a-b^2)^{n+1}$

Aufgabe 3

1. $\left(\frac{1}{2}x^2\right)^5 + \frac{1}{8}(x^2)^5 + (2x^5)^2 = \frac{133}{32}x^{10}$

2. $\frac{1}{4} \cdot 2^4(2^2)^3 = 2^8$

3. $(3^{n+1})^2 = 3^{2n+2}$

4. $(3x^2 - 5x)(1 - x^3) + (x^2 + 3x^4)x^3 = 3x^7 - 2x^5 + 5x^4 + 3x^2 - 5x$

5. $a^{2r}b^r(a^{2r} - a^rb^{r+1} + b^{2r+2}) = a^{4r}b^r - a^{3r}b^{2r+1} + a^{2r}b^{3r+2}$

Aufgabe 4

1. $-3x^3 \cdot x^2 + 5x \cdot x^4 = 2x^5$

2. $4t^{n-4}t^3 - t \cdot t^{n-2} = 3t^{n-1}$

3. $2x^5y^3y - 4x^3y^2x^2y^2 = -2x^5y^4$

4. $\frac{4x^5+6x^4-12x^2}{2x^2} = 2x^3 + 3x^2 - 6$

5. $(9 \cdot 3^n - 3^{n+1}) : 3^{n-1} = 18$

6. $(2x+6)^2 + (x+3)^2 = 5(x+3)^2$

7. $\frac{5a-20}{4a-16} = \frac{5}{4}$

8. $(3t^2 - 3t^3)^2 = 9t^4(1-t)^2$

Aufgabe 5

1. $3a^2 + 6a^3 = 3a^2(1+2a)$

2. $\frac{1}{2}e^x - \frac{1}{4}e^{x+1} = \frac{1}{4}e^x(2-e)$

3. $a^{5b} + 3a^b = a^b(a^{4b}+3)$

4. $2^x + 2^{x+1} = 3 \cdot 2^x$

5. $x^4 + 2x^3 = x^3(x+2)$

6. $x^{n+3} - 4x^{n+2} = x^{n+2}(x-4)$

7. $-6t^{n+2} + 18t^{2-n} = 6t^2(-t^n + 3t^{-n})$

8. $e^x - e^{3x} = e^x(1-e^{2x})$

Aufgabe 6

1. $\frac{x^4-x^3}{x^2-x} = x^2$

2. $\frac{e^{3x}+e^{2x}}{e^{2x}} = e^x + 1$

3. $\frac{a^7b^3-ab^7}{a^5b-a^2b^4} = \frac{a^6b^2-b^6}{a^4-ab^3}$

4. $\frac{32}{2^{n+5}} + \frac{2^{-n+3}}{8} = \frac{1}{2^{n-1}}$

Aufgabe 7

1. $y = \frac{1}{4}x^4 - 2tx^3 + \frac{9}{2}t^2x^2$ mit $x = 3t \Rightarrow y = \frac{27}{4}t^4$

2. $y = e^{x^2-t^2} + 3e^{5t-(t-x)}$ mit $x = -t \Rightarrow y = 1 + 3e^{3t}$

3. $y = \frac{3}{2t^2}x^4 - \frac{4}{t}x^3 + 3x^2 - 4$ mit $x = \frac{1}{3}t \Rightarrow y = \frac{11}{54}t^2 - 4$

4. $y = \frac{e^{3tx}+4e^3}{tx-4}$ mit $x = \frac{1}{t} \Rightarrow y = -\frac{5}{3}e^3$

5. $y = \frac{tx^3}{2(x+t)^2}$ mit $x = -3t \Rightarrow y = -\frac{27}{8}t^2$

Aufgabe 8

1. $a^n + a^{4-n} + a^{2n} = a^{2n}(a^{-n} + a^{4-3n} + 1)$

2. $a^3 + a^{1-n} + a^{n+4} = a^{n+3}(a^{-n} + a^{-2n-2} + a)$

3. $\frac{3}{2}x^4 + \frac{3}{4}x^3 + \frac{1}{8}x^2 = \frac{1}{8}x^2(12x^2 + 6x + 1)$

4. $e^{3x} - 2e^{-x} = e^{-x}(e^{4x} - 2)$

5. $te^{2x} - 2e^{x+1} = e^x(te^x - 2e)$

Aufgabe 9

1. $\frac{1}{4} \cdot 2^{-4} \cdot (2^2)^3 = 1$

2. $(e^x - e^{-x} + 5)e^x = e^{2x} + 5e^x - 1$

3. $2^x(2^{-1} + 2^x) = 2^{x-1} + 2^{2x}$

4. $(x^4 + x^{-2})(x^3 - x^{-3}) = x^7 - x^{-5}$

Aufgabe 10

1. $a^2 \cdot (a^2)^{-2} + 3a\left(\frac{1}{a}\right)^3 = 4a^{-2}$

2. $\frac{1}{18} \cdot (3^2)^2 + \frac{1}{2} \cdot 3^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 6$

3. $(x^2 \cdot x^{-3})^{-2} + \left(\frac{3}{x^2}\right)^{-1} = \frac{4}{3}x^2$

4. $a^5 \cdot a^{-2} + 4a^2 \cdot a = 5a^3$

5. $\left(\frac{2}{x}\right)^3 + \left(\frac{1}{x}\right)^3 = \frac{9}{x^3}$

6. $\frac{1}{e^{2x}} + 3(e^{-x})^2 - \left(\frac{2}{e^x}\right)^2 = 0$

7. $e^{-x} \cdot e^{-x+2} \cdot e^{2x-3} = e^{-1}$

8. $6x^3 \cdot x^{-1} - 8x^4 \cdot x^{-2} = -2x^2$

9. $(t^7 - t^4) \cdot t^{-3} = t^4 - t$

Aufgabe 11

1. $\frac{-2^3 - 2 \cdot 4}{2 \cdot 2^3} = -1$

2. $\frac{(1-x)^2}{(x-1)} = x - 1$

3. $\frac{e^{3x+1}}{e^{-x+2}} = e^{4x-1}$

4. $\frac{1{,}5e^{3x} - e^x}{1{,}5e^{3x}} = 1 - \frac{2}{3}e^{-2x}$

Aufgabe 12

1. $a^4 \cdot a^{-6} - 3a^3 \cdot a^{-5} + a^2 = -2a^{-2} + a^2$

2. $(a^{n+2} - 4a^n - 2a^{2-n}) \cdot \frac{a^{-2}}{2} = \frac{1}{2}a^n - 2a^{n-2} - a^{-n}$

3. $4x^{-4}x^7 - 0,5x^4x^{-1} + \left(\frac{1}{x^2}\right)^{1,5} = 3,5x^3 + \frac{1}{x^3}$

4. $\frac{a^{n+1}}{a} + \frac{a^{2n-1}}{a^{n+2}} + (a^{n-1})^2 \cdot a^{2-n} = 2a^n + a^{n-3}$

5. $\frac{2^{2k}}{8} \cdot 2^{3-k} + 2 \cdot 2^{k-1} = 2^{k+1}$

Aufgabe 13

1. n **gerade:**

$$\begin{aligned}(a-b)^n + (b-a)^n &= (a-b)^n + (-1)^n \cdot (a-b)^n \\ &= (a-b)^n + (a-b)^n \\ &= 2(a-b)^n\end{aligned}$$

n **ungerade:**

$$\begin{aligned}(a-b)^n + (b-a)^n &= (a-b)^n + (-1)^n \cdot (a-b)^n \\ &= (a-b)^n - (a-b)^n \\ &= 0\end{aligned}$$

2. n **gerade:**

$$\begin{aligned}&(x-2)^n + (2x-4)^n - (2-x)^n \\ =&(x-2)^n + (2x-4)^n - (-1)^n \cdot (x-2)^n \\ =&(x-2)^n + (2x-4)^n - (x-2)^n \\ =&(2x-4)^2\end{aligned}$$

n **ungerade:**

$$\begin{aligned}&(x-2)^n + (2x-4)^n - (2-x)^n \\ =&(x-2)^n + 2^n \cdot (x-2)^n - (-1)^n \cdot (x-2)^n \\ =&(x-2)^n + 2^n \cdot (x-2)^n + (x-2)^n \\ =&2(x-2)^n + 2^n(x-2) \\ =&(2+2^n)(x-2)^n\end{aligned}$$

2.3 Binomische Formeln Lösung

Autor: Katja Matthes

Aufgabe 1

1. $(4x+3y^3)^2 = 16x^2 + 24xy^3 + 9y^6$
2. $-(x^4-2)^2 = -x^8 + 4x^4 - 4$
3. $(x^2-x^3)(x^2+x^3) = x^4 - x^6$
4. $(3x^2+2t)^2 = 9x^4 + 12x^2t + 4t^2$
5. $-\frac{1}{2}(x^2-4)^2 = -\frac{1}{2}x^4 + 4x^2 - 8$
6. $\left(-\frac{1}{2}(x^2-4)\right)^2 = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 4$
7. $x^2y^2(x^4+2x^2y+y^2) = (x^3y+xy^2)^2$

Aufgabe 2

1. $(x-3)^n \cdot (x+3)^n = (x^2-9)^n$
2. $\frac{(a^2-b^2)^3}{(a-b)^3} = (a+b)^3$
3. $\frac{(4-x^2)^n}{(2-x)^n} = (2+x)^n$
4. $\frac{(c-1)^{n-1}}{(c^2-1)^{n-1}} = \frac{1}{(c+1)^{n-1}}$
5. $\frac{(a^{2n}-b^{2n})^2}{(a^n-b^n)^2} = (a^n+b^n)^2$
6. $(a^3-ab^2)(a+b)^2 = a(a-b)(a+b)^3$
7. $\frac{[(x-y)^2]^k}{(x^2-y^2)^k} = \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^k$
8. $(a+b)^4(a-b)^4(a^2-b^2)^5 = (a^2-b^2)^9$

Aufgabe 3

1. $(3x-6)\left(\frac{1}{4}x^2-x+1\right)=\frac{3(x-2)^3}{4}$
2. $a^2-2a^3+a^4=a^2(1-a)^2$
3. $3a^3-12a^9=3a^2(1-2a^3)(1+2a^3)$
4. $x^4-a^2=(x^2-a)(x^2+a)$
5. $3-x^2=(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)$
6. $x^{2n}+4x^n+4=(x^n+2)^2$
7. $x^{n+2}-6x^{n+1}+9x^n=x^n(x-3)^2$
8. $e^{2x}-1=(e^x-1)(e^x+1)$
9. $x^2e^x+2xe^x+e^x=e^x(x+1)^2$

Aufgabe 4

1. $\frac{a^3+2a^2b+ab^2}{(a+b)^2}=a$
2. $\frac{a^4-a^2b^2}{ab-a^2}=-a(a+b)$
3. $\frac{t^3+6t^2+9t}{t^2-9}=\frac{t(t+3)}{t-3}$
4. $\frac{x^{2n}-10x^n+25}{x^{2n}-25}=\frac{x^n-5}{x^n+5}$
5. $\frac{x^6-t^2}{x^4+tx}=\frac{x^3-t}{x}$
6. $\frac{x^{n+3}-x^{n+1}}{x^{n+1}+x^n}=x(x-1)$
7. $\frac{(x^2+8xy+16y^2)}{(2x-3y)^{-2}}:\frac{x^2-16y^2}{2x-3y}=\frac{(x+4y)(2x-3y)^3}{x-4y}$
8. $\frac{4t^2-4}{t^2+2t+1}=\frac{4(t-1)}{t+1}$

9. $\frac{x^{n-1}-x^n}{x^n-x^{n+2}} = \frac{1}{x(1+x)}$

10. $\frac{2(a^2+b^2)^2}{a^5-ab^4} = \frac{2(a^2+b^2)}{a(a^2-b^2)}$

11. $\frac{x^4-x^3}{x^4-x^2} = \frac{x}{x+1}$

12. $\frac{x^3y-xy^5}{x^3y^2-x^2y^4} = \frac{x+y^2}{xy}$

13. $\frac{am-an+bm-bn}{a^2-b^2} = \frac{m-n}{a-b}$

Aufgabe 5

1. $(e^x+e^{-x})^2 = e^{2x}+e^{-2x}+2$

2. $(a^2-a^{-2})^2 = a^4-2+a^{-4}$

3. $(x^{-2}-3x)(x^{-2}+3x) = x^{-4}-9x^2$

4. $(2^{-x}+2^x)(2^{-x}-2^x) = 2^{-2x}-2^{2x}$

Aufgabe 6

1. $\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^x-e^{-x}} = e^x+e^{-x}$

2. $\left(\frac{x-y}{a-b}\right)^5 \cdot \left(\frac{x-y}{5}\right)^{-2} \cdot \frac{(a-b)^2}{(x^2-y^2)} = \frac{25(x-y)^2}{(x+y)(a-b)^3}$

2.4 Polynomdivision Lösungen

Autor: Marko Rak

1.
$$\begin{array}{l}
\big(x^3 \qquad\qquad +1\big) : \big(x+1\big) = x^2 - x + 1 \\
\underline{-x^3 - x^2} \\
\qquad -x^2 \\
\qquad \underline{x^2 + x} \\
\qquad\qquad x + 1 \\
\qquad\qquad \underline{-x - 1} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

2.
$$\begin{array}{l}
\big(x^4 \qquad\qquad -x+1\big) : \big(x^2+x+1\big) = x^2 - x + \dfrac{1}{x^2+x+1} \\
\underline{-x^4 - x^3 - x^2} \\
\qquad -x^3 - x^2 - x \\
\qquad \underline{x^3 + x^2 + x}
\end{array}$$

3.
$$\begin{array}{l}
\big(x^2 \qquad -9\big) : \big(x+3\big) = x - 3 \\
\underline{-x^2 - 3x} \\
\qquad -3x - 9 \\
\qquad \underline{3x + 9} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

4.
$$\begin{array}{l}
\big(6x^3 - 5x^2 - 36x + 35\big) : \big(3x-7\big) = 2x^2 + 3x - 5 \\
\underline{-6x^3 + 14x^2} \\
\qquad 9x^2 - 36x \\
\qquad \underline{-9x^2 + 21x} \\
\qquad\qquad -15x + 35 \\
\qquad\qquad \underline{15x - 35} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

5.
$$\begin{array}{l}
\big(x^5 \qquad\qquad -x^2 - 2x + 1\big) : \big(x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x + 1\big) = x + 1 + \dfrac{-x^3}{x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x + 1} \\
\underline{-x^5 + x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x} \\
\qquad x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 1 \\
\qquad \underline{-x^4 + x^3 - 2x^2 + 3x - 1} \\
\qquad\qquad -x^3
\end{array}$$

6.
$$\begin{array}{l}
\big(x^5 - x^3 + x^2 + x - 2\big) : \big(x^2 - 1\big) = x^3 + 1 + \dfrac{x-1}{x^2-1} \\
\underline{-x^5 + x^3} \\
\qquad\qquad x^2 + x - 2 \\
\qquad\qquad \underline{-x^2 \qquad +1} \\
\qquad\qquad\qquad x - 1
\end{array}$$

7. $$\begin{array}{l}
\big(\ \ 3x^3+2x^2+4x\ \ +9\big):\big(3x+5\big)=x^2-x+3+\dfrac{-6}{3x+5}\\
\underline{-3x^3-5x^2}\\
\qquad\quad -3x^2+4x\\
\qquad\quad\ \ \underline{3x^2+5x}\\
\qquad\qquad\qquad 9x\ \ +9\\
\qquad\qquad\quad \underline{-9x-15}\\
\qquad\qquad\qquad\quad -6
\end{array}$$

8. $$\begin{array}{l}
\big(\ \ 2x^5+8x^4\ \ +x^3\ \ -x^2+12x+3\big):\big(x^2+4x+1\big)=2x^3-x+3+\dfrac{x}{x^2+4x+1}\\
\underline{-2x^5-8x^4-2x^3}\\
\qquad\qquad\quad -x^3\ \ -x^2+12x\\
\qquad\qquad\quad\ \ \underline{x^3+4x^2\quad +x}\\
\qquad\qquad\qquad\quad 3x^2+13x+3\\
\qquad\qquad\qquad \underline{-3x^2-12x-3}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x
\end{array}$$

9. $$\begin{array}{l}
\big(\ \ x^6-2x^5+9x^4-8x^3+15x^2\big):\big(x^2-x+5\big)=x^4-x^3+3x^2\\
\underline{-x^6\ \ +x^5-5x^4}\\
\qquad\quad -x^5+4x^4-8x^3\\
\qquad\quad\ \ \underline{x^5\ \ -x^4+5x^3}\\
\qquad\qquad\qquad 3x^4-3x^3+15x^2\\
\qquad\qquad\quad \underline{-3x^4+3x^3-15x^2}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

10. $$\begin{array}{l}
\big(\ \ 2x^7-x^6+3x^5-\tfrac{1}{2}x^4+x^3\big):\big(2x^3-x^2+2x\big)=x^4+\tfrac{1}{2}x^2\\
\underline{-2x^7+x^6-2x^5}\\
\qquad\qquad\quad x^5-\tfrac{1}{2}x^4+x^3\\
\qquad\qquad \underline{-x^5+\tfrac{1}{2}x^4-x^3}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

11. $$\begin{array}{l}
\big(\ \ x^7-6x^5\ \ +x^4-11x^2-3x+1\big):\big(x^3+2\big)=x^4-6x^2-x+\dfrac{x^2-x+1}{x^3+2}\\
\underline{-x^7\qquad\ \ -2x^4}\\
\qquad -6x^5\ \ -x^4-11x^2\\
\qquad\ \ \underline{6x^5\qquad\ \ +12x^2}\\
\qquad\qquad -x^4\ \ \ +x^2-3x\\
\qquad\qquad\ \ \underline{x^4\qquad\quad\ +2x}\\
\qquad\qquad\qquad\quad x^2\ \ -x
\end{array}$$

12. $$\begin{array}{l}
\big(3x^5+6x^4+\frac{11}{3}x^3+4x^2+\frac{20}{3}x\big):\big(3x^4+x^3+4x\big)=x+\frac{5}{3}+\dfrac{2x^3}{3x^4+x^3+4x}\\
\underline{-3x^5-x^4\qquad\qquad -4x^2}\\
\qquad 5x^4+\frac{11}{3}x^3\qquad +\frac{20}{3}x\\
\qquad \underline{-5x^4-\frac{5}{3}x^3\qquad -\frac{20}{3}x}\\
\qquad\qquad 2x^3
\end{array}$$

13. $$\begin{array}{l}
\big(\frac{1}{6}x^4+\frac{11}{36}x^3-\frac{23}{18}x^2-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\big):\big(\frac{1}{2}x^2-\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}\big)=\frac{1}{3}x^2+\frac{3}{2}x+1\\
\underline{-\frac{1}{6}x^4+\frac{4}{9}x^3-\frac{2}{9}x^2}\\
\qquad \frac{3}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{3}x\\
\qquad \underline{-\frac{3}{4}x^3+2x^2-x}\\
\qquad\qquad \frac{1}{2}x^2-\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}\\
\qquad\qquad \underline{-\frac{1}{2}x^2+\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}}\\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

14. $$\begin{array}{l}
\big(\frac{1}{2}x^5+\frac{5}{4}x^4+\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x\big):\big(\frac{1}{2}x^2+x\big)=x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\\
\underline{-\frac{1}{2}x^5-x^4}\\
\qquad \frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^3\\
\qquad \underline{-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^3}\\
\qquad\qquad -\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x\\
\qquad\qquad \underline{\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x}\\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

15. $$\begin{array}{l}
\big(\frac{1}{2}x^5-\frac{3}{4}x^4-\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{4}x^2-\frac{15}{4}x+\frac{7}{4}\big):\big(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\big)=x^4-x^3-x^2+x-7\\
\underline{-\frac{1}{2}x^5+\frac{1}{4}x^4}\\
\qquad -\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{4}x^3\\
\qquad \underline{\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{4}x^3}\\
\qquad\qquad -\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{4}x^2\\
\qquad\qquad \underline{\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{4}x^2}\\
\qquad\qquad\qquad \frac{1}{2}x^2-\frac{15}{4}x\\
\qquad\qquad\qquad \underline{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad -\frac{7}{2}x+\frac{7}{4}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{\frac{7}{2}x-\frac{7}{4}}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

3 Quadratische Gleichungen Lösungen

Autor: Marko Rak

Es werden nur die Lösungsansätze und -hilfen aufgeführt.

1. $x^2 - x - 2 = 0$
   $x_1 = -1, x_2 = 2$

2. $4x^2 + 16x - 84 = 0$
   $x_1 = -7, x_2 = 3$

3. $\frac{1}{2}x^2 + 3x + 4 = 0$
   $x_1 = -4, x_2 = -2$

4. $4x^2 + 48x + 144 = 0$
   $x_{12} = -6$

5. $(x - \sqrt{157})^2 = 0$
   $x_{12} = \sqrt{157}$

6. $\frac{7}{3}x^3 + \frac{49}{3}x^2 + 35x + 21 = 0$
   rate $x_1 = -1$,
   dann Polynomdivision:
   $x^2 + 6x + 9 = 0$
   $x_{23} = -3$

7. $\frac{7}{4}x^2 + 7x = -7$
   $x_{12} = -2$

8. $|x^2| = 4$
   $x_1 = 2, x_2 = -2$

9. $|x|^2 = 4$
   $x_1 = -2, x_2 = 2$

10. $|x^2 - 4| = 2$
    gilt genau dann, wenn
    $x^2 - 4 = \pm 2$
    $x_{12} = \pm\sqrt{2}, x_{34} = \pm\sqrt{6}$

11. $x^2 = x + 12$
    $x_1 = -3, x_2 = 4$

12. $3x^2 + 4x + 1 = 0$
    $x_1 = -\frac{1}{3}$
    $x_2 = -1$

13. $x^5 - 25x^3 + 144x = 0$
    klammere $x_1 = 0$ aus,
    substituiere $u = x^2$ zu
    $u^2 - 25u + 144 = 0$
    $u_1 = 9, u_2 = 16$
    nach Rücksubstitution:
    $x_{23} = \pm 3, x_{45} = \pm 4$

14. $(x - \pi)(x + \pi) = 0$
    $x_{12} = \pm\pi$

15. $\frac{x^3-2x^2}{x-2} + \frac{2x^2+4x}{x+2} = -1$
    Polynomdivision der Summanden:
    $x^2 - 2x = 1$
    $x12 = 1 \pm \sqrt{2}$

16. $x^4 - 14x^3 + 59x^2 - 70x = 0$
    klammere $x_1 = 0$ aus,
    rate $x_2 = 2$
    dann Polynomdivision:
    $x^2 - 12x + 35 = 0$
    $x_3 = 5, x_4 = 7$

17. $3x^7 - 42x^5 + 147x^3 = 0$
klammere $x_{123} = 0$ aus,
substituiere $u = x^2$ zu
$u^2 - 14u + 49 = 0$
$u_{12} = \pm 7$
nach Rücksubstitution:
$x_{45} = \sqrt{7}, x_{67} = -\sqrt{7}$

18. $x^{12} = 4096$
$x_i = 2$; $i \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$
$x_j = -2$; $j \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$
Hinweis: 2er-Potenzen wichtig!

19. $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 = 0$
rate $x_1 = -1$,
dann Polynomdivision:
$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$
rate $x_2 = -1$,
dann Polynomdivision:
$x^2 + 2x + 1 = 0$
$x_{34} = -1$

20. $(\sqrt{2}x + 2\sqrt{2})^2 = 0$
klammere $\sqrt{2}$ aus:
$x_{12} = -2$

21. $2ax^2 - 12ax + 18a = 0$
Fallunterscheidung:
   a) a = 0,
   dann ist für alle x die Gleichung erfüllt
   b) a $\neq$ 0,
   nach Division durch **2a**:
   $x^2 - 6x + 9 = 0$
   $x_{12} = 3$

22. $\frac{1}{x^2} + 1 = 2$
Erweitern der Gleichung mit x^2:
$x^2 - 1 = 0$
$x_{12} = \pm 1$

23. $\frac{4}{x} + x = 4$
mit x erweitern und auf eine Seite bringen:
$x^2 - 4x + 4 = 0$
$x_{12} = 2$

4 Lineare Gleichungssysteme Lösungen

Autor: Marko Rak

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Lösungen folgender Gleichungssysteme.

1.

x_1	x_2	x_3			
1	5	2	3	$\leftarrow$	
2	-2	4	5		$\leftarrow$
1	1	2	1	$\cdot(-1)$	$\cdot(-2)$
1	1	2	1		
0	4	0	2	$\cdot(1)$	
0	-4	0	3	$\leftarrow$	
1	1	2	1		
0	4	0	2		
0	0	0	5		

Widerspruch in der letzten Zeile $\Rightarrow$ keine Lösung

2.

x_1	x_2	x_3			
7	8	5	3	$\leftarrow$	
3	-3	2	1	$\cdot(-\frac{7}{3})$	$\cdot(-6)$
18	21	13	8		$\leftarrow$
3	-3	2	1		
0	15	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\leftarrow$	
0	39	1	2	$\cdot(-\frac{15}{39})$	
3	-3	2	1		
0	39	1	2		
0	0	$-\frac{2}{39}$	$-\frac{4}{39}$		

$$\begin{aligned} x_3 &= 2 \\ x_2 &= 0 \\ x_1 &= -1 \end{aligned}$$

3.

x_1	x_2	x_3	x_4				
1	1	3	4	-3	$\cdot(-2)$	$\cdot(-2)$	$\cdot(-1)$
2	3	11	5	2	$\leftarrow$		
2	1	3	2	-3		$\leftarrow$	
1	1	5	2	1			$\leftarrow$
1	1	3	4	-3			
0	1	5	-3	8	$\cdot(1)$		
0	-1	-3	-6	3	$\leftarrow$		
0	0	2	-2	4			
1	1	3	4	-3			
0	1	5	-3	8			
0	0	2	-2	4	$\cdot(-1)$		
0	0	2	-9	11	$\leftarrow$		
1	1	3	4	-3			
0	1	5	-3	8			
0	0	2	-2	4			
0	0	0	-7	7			

$$\begin{aligned} x_4 &= -1 \\ x_3 &= 1 \\ x_2 &= 0 \\ x_1 &= 2 \end{aligned}$$

4.

x_1	x_2	x_3				
1	2	3	-4	$\cdot(-5)$	$\cdot(-7)$	$\cdot(-2)$
5	-1	1	0	$\leftarrow$		
7	3	7	-8		$\leftarrow$	
2	3	-1	11			$\leftarrow$
1	2	3	-4			
0	-11	-14	20		$\leftarrow$	
0	-11	-14	20	$\leftarrow$		
0	-1	-7	19	$\cdot(-11)$	$\cdot(-11)$	
1	2	3	-4			
0	-1	-7	19			
0	0	63	-189	$\cdot(-1)$		
0	0	63	-189	$\leftarrow$		
1	2	3	-4			
0	-1	-7	19			
0	0	63	-189			
0	0	0	0			

$$\begin{array}{rcrcr} x_3 & = & -3 & & \\ x_2 & = & 2 & & \\ x_1 & = & 1 & & \end{array}$$

5.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5			
-1	1	1	0	-1	0	$\cdot(1)$	$\cdot(3)$
1	-1	-3	2	-1	2	$\leftarrow$	
0	3	-1	-5	-7	9		
3	-3	-5	2	5	2		$\leftarrow$
-1	1	1	0	-1	0		
0	3	-1	-5	-7	9		
0	0	-2	2	-2	2	$\cdot(-1)$	
0	0	-2	2	2	2	$\leftarrow$	
-1	1	1	0	-1	0		
0	3	-1	-5	-7	9		
0	0	-2	2	-2	2		
0	0	0	0	4	0		

$$\begin{array}{rcrcr} x_5 & = & 0 & & \\ x_4 & = & & & t \\ x_3 & = & -1 & + & t \\ x_2 & = & \frac{8}{3} & + & 2t \\ x_1 & = & \frac{5}{3} & + & 3t \end{array}$$

6.

x_1	x_2	x_3	x_4				
1	-2	-3	0	-7	$\cdot(-2)$	$\cdot(2)$	$\cdot(-1)$
2	-1	2	7	-3	$\leftarrow$		
-2	1	3	3	8		$\leftarrow$	
1	4	5	-2	7			$\leftarrow$
1	-2	-3	0	-7			
0	3	8	7	11	$\cdot(1)$	$\cdot(-2)$	
0	-3	-3	3	-6	$\leftarrow$		
0	6	8	-2	14		$\leftarrow$	
1	-2	-3	0	-7			
0	3	8	7	11			
0	0	5	10	5	$\cdot(\frac{8}{5})$		
0	0	-8	-16	-8	$\leftarrow$		
1	-2	-3	0	-7			
0	3	8	7	11			
0	0	5	10	5			
0	0	0	0	0			

$$\begin{aligned} x_4 &= t \\ x_3 &= 1 - 2t \\ x_2 &= 1 + 3t \\ x_1 &= -2 \end{aligned}$$

7.

x_1	x_2	x_3				
1	-1	1	4	$\cdot(-1)$	$\cdot(-4)$	$\cdot(-2)$
1	2	1	13	$\leftarrow$		
4	5	4	43		$\leftarrow$	
2	4	2	26			$\leftarrow$
1	-1	1	4			
0	3	0	9	$\cdot(-3)$	$\cdot(-2)$	
0	9	0	27	$\leftarrow$		
0	6	0	18		$\leftarrow$	
1	-1	1	4			
0	3	0	9			
0	0	0	0			
0	0	0	0			

$$\begin{aligned} x_3 &= t \\ x_2 &= 3 \\ x_1 &= 7 - t \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Lösungen folgender Gleichungssysteme in Abhängigkeit von a und b.

1.

x_1	x_2	x_3			
2	-1	4	0	$\leftarrow$	
1	3	-1	0	$\cdot(-2)$	$\cdot(-7)$
7	7	4-a	0		$\leftarrow$
1	3	-1	0		
0	-7	6	0	$\cdot(-2)$	
0	-14	11-a	0	$\leftarrow$	
1	3	-1	0		
0	-7	6	0		
0	0	-1-a	0		

Fall 1: $a = -1$

$$\begin{aligned} x_3 &= t \\ x_2 &= \tfrac{6}{7}t \\ x_1 &= -\tfrac{11}{7}t \end{aligned}$$

Fall 2: $a \neq -1$

$$\begin{aligned} x_3 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ x_1 &= 0 \end{aligned}$$

2.

x_1	x_2	x_3			
1	1	1	0	$\cdot(-1)$	$\cdot(-a)$
1	a	1	4	$\leftarrow$	
a	3	a	-2		$\leftarrow$
1	1	1	0		
0	a-1	0	4		
0	3-a	0	-2		

Fall 1: $a = 1$ oder $a = 3$ ergibt keine Lösung.

Fall 2: $a \neq 1$ und $a \neq 3$

$$\begin{array}{ccc|cc}
x_1 & x_2 & x_3 & & \\
\hline
1 & 1 & 1 & 0 & \\
0 & \text{a-1} & 0 & 4 & \cdot(-\frac{3-a}{a-1}) \\
0 & \text{3-a} & 0 & \text{-2} & \leftarrow \\
\hline
1 & 1 & 1 & 0 & \\
0 & \text{a-1} & 0 & 4 & \\
0 & 0 & 0 & \frac{2a-10}{a-1} &
\end{array}$$

Fall 2a: $a = 5$

$$\begin{array}{rcrcr}
x_3 & = & & & t \\
x_2 & = & 1 & & \\
x_1 & = & -1 & - & t
\end{array}$$

Fall 2b: $a \neq 1$, $a \neq 3$ und $a \neq 5$ ergibt keine Lösung

3.

$$\begin{array}{ccc|ccc}
x_1 & x_2 & x_3 & & & \\
\hline
1 & \text{-2} & 3 & 4 & \cdot(-2) & \cdot(-1) \\
2 & 1 & 1 & \text{-2} & \leftarrow & \\
1 & \text{a} & 2 & \text{b} & & \leftarrow \\
\hline
1 & \text{-2} & 3 & 4 & & \\
0 & 5 & \text{-5} & \text{-10} & \cdot(-\frac{2+a}{5}) & \\
0 & \text{2+a} & \text{-1} & \text{b-4} & \leftarrow & \\
\hline
1 & \text{-2} & 3 & 4 & & \\
0 & 5 & \text{-5} & \text{-10} & & \\
0 & 0 & \text{1+a} & \text{2a+b} & &
\end{array}$$

Fall 1a: $a = -1$ und $b = 2$

$$\begin{array}{rcrcr}
x_3 & = & & & t \\
x_2 & = & -2 & + & t \\
x_1 & = & & - & t
\end{array}$$

Fall 1b: $a = -1$ und $b \neq 2$ ergibt keine Lösung

Fall 2: $a \neq -1$

$$
\begin{aligned}
x_3 &= \tfrac{2a+b}{1+a} \\
x_2 &= \tfrac{b-2}{1+a} \\
x_1 &= \tfrac{2a+b}{1+a}
\end{aligned}
$$

5 Betrag, Kreis, Ungleichungen

5.1 Betrag

1. $|x| = 7$
   $x_1 = 7, x_2 = -7$

2. $|x + 5| = 10$
   1. Fall:
   $(x + 5) = 10 \rightarrow x = 5$
   2.Fall:
   $-(x + 5) = 10 \rightarrow x = -15$

3. $|2x - 3| = 1$
   1. Fall:
   $(2x - 3) = 1 \rightarrow x = 2$
   2.Fall:
   $-(2x - 3) = 1 \rightarrow x = 1$

4. $|2x - 4| = 6x + 36$
   1. Fall:
   $(2x - 4) = 6x + 36 \rightarrow x = -10$, aber ungültig, da $|2 \cdot (-10) - 4)| = 6 \cdot (-10) + 36 \rightarrow 24 = -24 f.A.$
   2.Fall:
   $-(2x - 4) = 6x + 36 \rightarrow x = -4$

5.2 Kreis

1. a) $M(1|3); P(4|3)$
   allgemeine Kreisgleichung: $(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2$
   einsetzen: $(4 - 1)^2 + (3 - 3)^2 = r^2$
   $\rightarrow r = 3$
   $\curvearrowright (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 9$

   b) $M(-1|5); P(6| - 4)$
   einsetzen: $(6 + 1)^2 + (-4 - 5)^2 = r^2$

$\rightarrow r = \sqrt{130}$
$\curvearrowright (x+1)^2 + (y-5)^2 = 130$

c) $M(-2|-1); P(4|3)$
einsetzen: $(4+2)^2 + (3+1)^2 = r^2$
$\rightarrow r = \sqrt{52}$
$\curvearrowright (x+2)^2 + (y+1)^2 = 52$

2. a) $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 5 = 4$
nach binomischer Formel zu Kreisgleichung umstellen:
$(x^2 - 4x) + (y^2 - 2y) = -1$
$(x-2)^2 - 4 + (y-1)^2 - 1 = -1$
$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$

$\curvearrowright$ Kreis mit $M(2|1)$ und $r = 2$

b) $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 10 = 1$
nach binomischer Formel zu Kreisgleichung umstellen:
$(x^2 + 6x) + (y^2 + 2y) = -9$
$(x+3)^2 - 9 + (y+1)^2 - 1 = -9$
$(x+3)^2 + (y+1)^2 = 1$

$\curvearrowright$ Kreis mit $M(-3|-1)$ und $r = 1$

3. $P_1(6|7); P_2(2|9); P_3(-1|0)$

Aufstellen der Kreisgleichungen:
1.$(6 - x_m)^2 + (7 - y_m)^2 = r^2$
2.$(2 - x_m)^2 + (9 - y_m)^2 = r^2$
3.$(-1 - x_m)^2 + (-y_m)^2 = r^2$

Gleichsetzen von 1 und 2; 2 und 3:
$(6 - x_m)^2 + (7 - y_m)^2 = (2 - x_m)^2 + (9 - y_m)^2$
$(2 - x_m)^2 + (9 - y_m)^2 = (-1 - x_m)^2 + (-y_m)^2$

Auflösen und Zusammenfassen:
$4y_m = 8x_m$
$84 - 6x_m = 18y_m$

Umstellen nach x_m und Gleichsetzen:
$\frac{1}{2}y_m = 14 - 3y_m$
$\curvearrowright y_m = 4$

Einsetzen des Ergebnisses:
$x_m = \frac{1}{2}y_m = \frac{1}{2} * 4 = 2$
$r = \sqrt{(6-2)^2 + (7-4)^2} = \sqrt{25} = 5$

$\curvearrowright$ Kreis: $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 25$

5.3 Ungleichungen

5.3.1 Ungleichungen mit einer Variablen

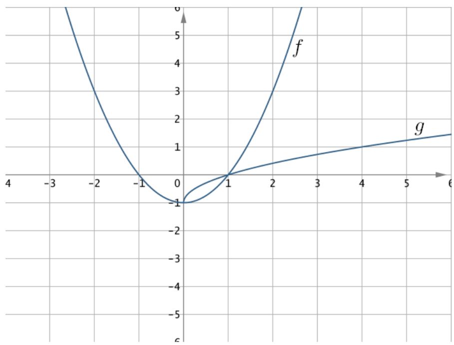
1. Aufgabe:

$$f : (x + 1)(x - 1) \leq 0$$

$$g : \sqrt{x} \geq 1$$

Lösung:

$$-1 \leq x \leq 1$$



2. Aufgabe:

$$f : \sqrt{\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 + \frac{21}{8}x + \frac{9}{8}} < \sqrt{\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{8}}$$

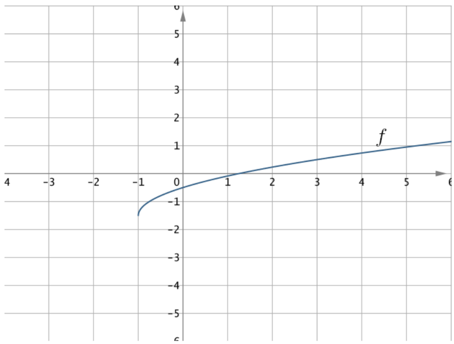
Zwischenschritte:

$$\sqrt{(\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{3}{\sqrt{2}})^2(x + 1)} < \frac{3}{2}\sqrt{(\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{3}{\sqrt{2}})^2}$$

$$\sqrt{(x + 1)} < \frac{3}{2}$$

Lösung:

$$-1 < x < \frac{5}{4}$$

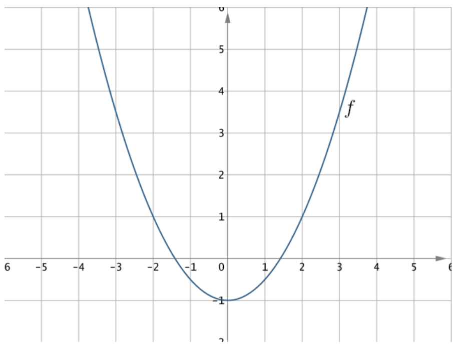


3. Aufgabe:

$$f : \frac{1}{2}x^2 - 1 > 0$$

Lösung:

$$x < \sqrt{2} \cup x > \sqrt{2}$$



4. Aufgabe:

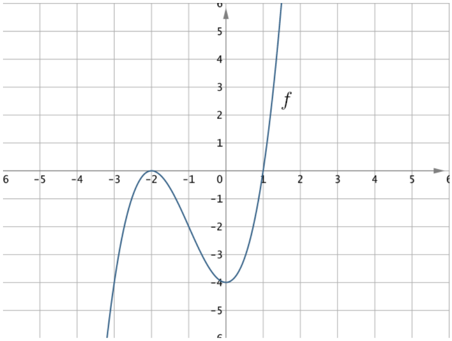
$$f : x^3 + 3x^2 - 4 > 0$$

Zwischenschritt:

$$(x - 1)(x + 2)^2 > 0$$

Lösung:

$$1 < x$$



5. Aufgabe:

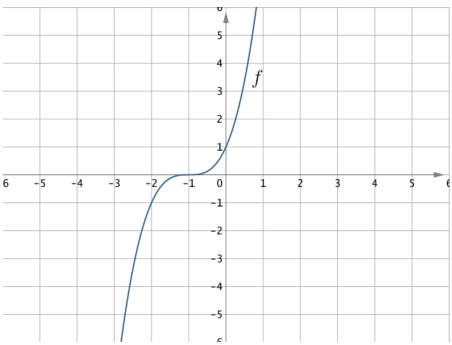
$$f : x^3 + 3x^2 + 3x + 1 < 0$$

Tipp: Pascallsches Dreieck
Zwischenschritt:

$$(x + 1)^3 < 0$$

Lösung:

$$x < -1$$



6. Aufgabe:

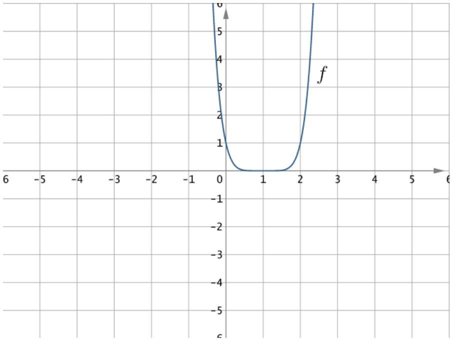
$$f : x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1 \leq 0$$

Nochmal: Pascallsches Dreieck
Zwischenschritt:

$$(x - 1)^6 \leq 0$$

Lösung:

$$x = 1$$

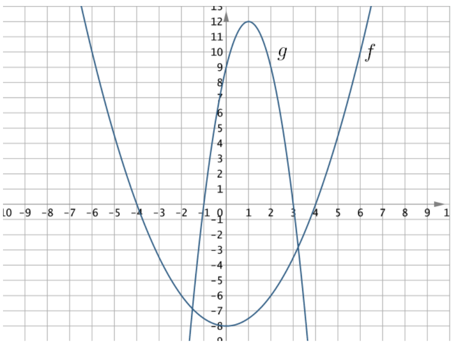


7. Aufgabe:

$$f : \frac{1}{2}x^2 - 8 > 0$$

$$g : -3(x - 1)^2 + 12 > 0$$

Lösung:
1.Gl: $x^2 > 16 \rightarrow x > 4 \cup x < -4$
2.Gl: $-1 < x < 3$
keine Lösung!

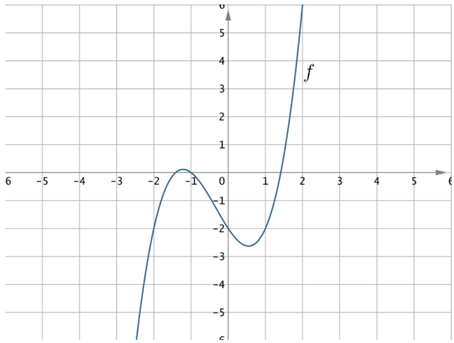


8. Aufgabe:

$$f : (x^2 - 2)(x + 1) \geq 0$$

Lösung:

$$-\sqrt{2} < x < -1 \cup x > \sqrt{2}$$



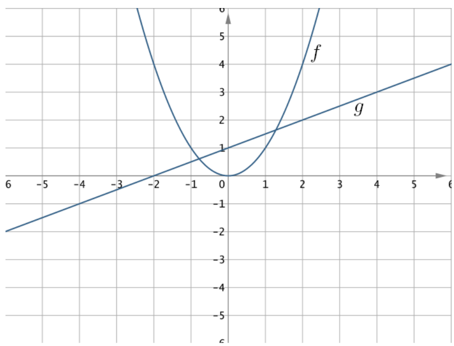
9. Aufgabe:

$$f : ax^2 > 0$$

$$g : \frac{1}{2}x + 1 > 0$$

Lösung:
1.Gl: $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
2.Gl: $x > -2$

$$x > -2 \; und \; x \neq 0$$



10. Aufgabe:

$$f : x^2 + a > 0$$

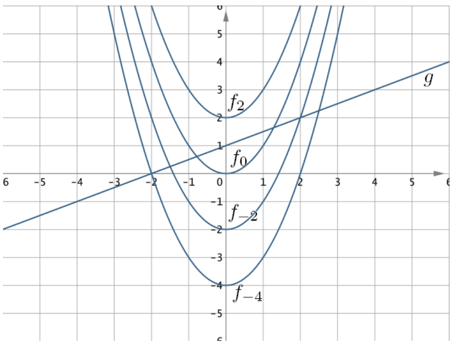
$$g : \frac{1}{2}x + 1 > 0$$

Lösung:
1.Gl:

$x \in \mathbb{R}$	$a > 0$
$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$a = 0$
$x < -\sqrt{a} \cup x > \sqrt{a}$	$a < 0$

2.Gl: $x > -2$

$x > -2$	$a > 0$
$x > -2$ und $x \neq 0$	$a = 0$
$-2 < x < -\sqrt{a} \cup x > \sqrt{a}$	$-4 < a < 0$
$x > \sqrt{a}$	$a \leq -4$



11. Aufgabe:

$$f : -x^2 + a < 0$$

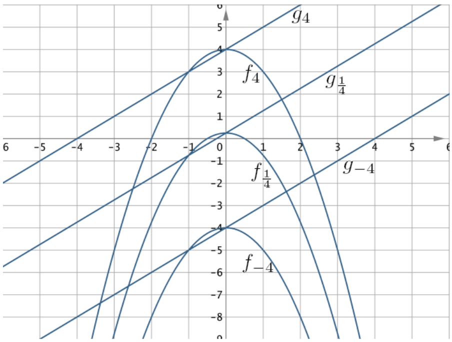
$$g : x + a < 0$$

Lösung:
1.Gl:

$x < -\sqrt{a} \cup x > \sqrt{a}$	$a > 0$
$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$a = 0$
$x \in \mathbb{R}$	$a < 0$

2.Gl: $x < -a$

$x < -a$	$a > 1$
$x < -\sqrt{a}$	$0 < a <= 1$
$x < 0$	$a = 0$
$x < -a$	$a < 0$



12. Aufgabe:

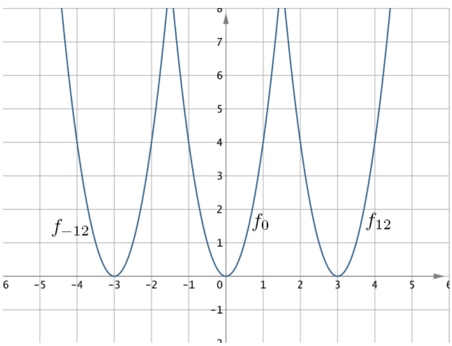
$$f : 4x^2 - 2ax + \frac{1}{4}a^2 \geq 0$$

Zwischenschritt:

$$(x - \frac{1}{4}a)^2 \geq 0$$

Lösung:

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{4}a\}$$

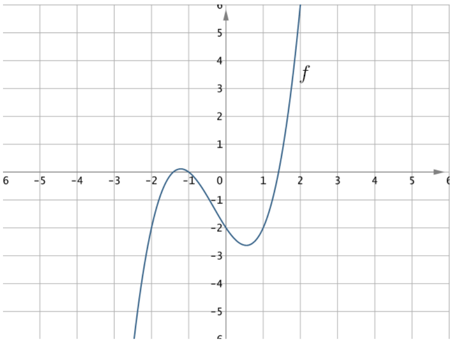


13. Aufgabe:

$$f : x^3 + x^2 - 2x \geq 2$$

(siehe Aufgabe 8)
Lösung:

$$-\sqrt{2} < x < -1 \cup x > \sqrt{2}$$



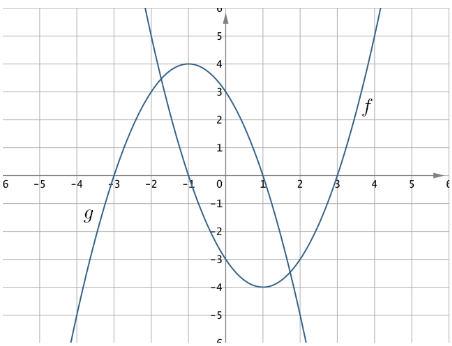
14. Aufgabe:

$$f : (x - 1)^2 - 4 < 0$$

$$g : -(x + 1)^2 + 4 > 0$$

Lösung:
1.Gl: $-1 < x < 3$
2.Gl: $-3 < x < 1$

$$-1 < x < 1$$



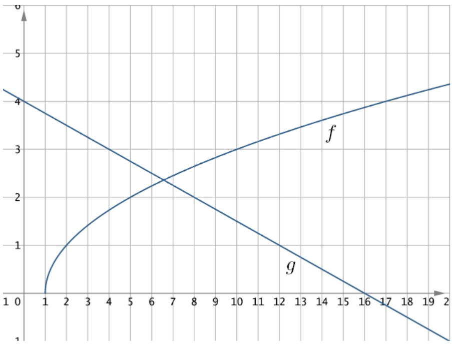
15. Aufgabe:

$$f : \sqrt{(x-1)} \;\geq\; 0$$

$$g : -\frac{1}{4}x \;+\; 4 \;<\; 0$$

Lösung:
1.Gl: $x \;\geq\; 1$
2.Gl: $x \;>\; 16$

$$x \;>\; 16$$



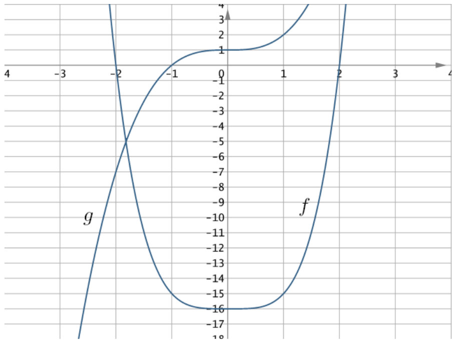
16. Aufgabe:

$$f : x^4 \;-\; 16 \;\leq\; 0$$

$$g : x^3 \;+\; 1 \;\geq\; 0$$

Lösung:
1.Gl: $-2 \;\leq\; x \;\leq\; 2$
2.Gl: $x \;\geq\; -1$

$$-1 \;\leq\; x \;\leq\; 2$$

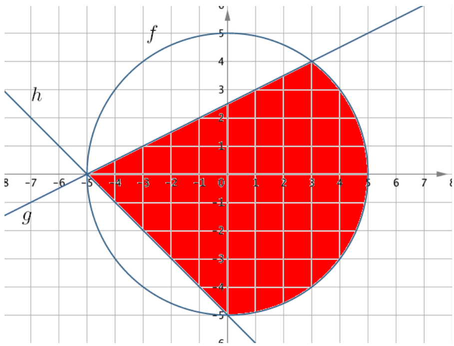


5.3.2 Ungleichungen mit mehreren Variablen

1. Aufgabe:

$$f : x^2 + y^2 < 25$$
$$g : \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} > y$$
$$h : -x - 5 < y$$

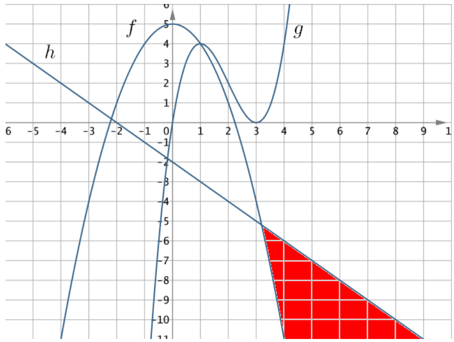
Lösung:



2. Aufgabe:

$$f : -x^2 + 5 < y$$
$$g : x(x - 3)^2 > y$$
$$h : -x - 2 > y$$

Lösung:

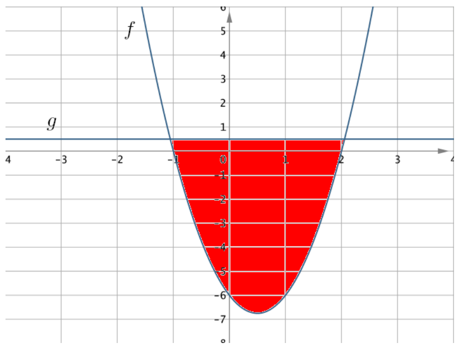


3. Aufgabe:

$$f: 3x^2 - 3x - 10 < -4 + y$$

$$g: y \leq \frac{1}{2}$$

Lösung:



4. Aufgabe:

$$f: y < \frac{2x^2 + 3x + 4}{-x^4 - 2x^3 - x^2 + 4x + (2x + x^2)^2}$$

$$g: -\frac{1}{x} < y$$

$$h: -(\frac{1}{\sqrt{2}}x)^2 < y - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 2$$

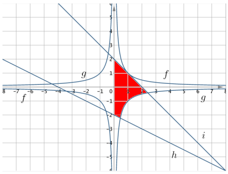
$$i: y + x - 2 < 0$$

Zwischenschritt:

$$f: y < \frac{1}{x}$$

$$h: y > -\frac{1}{2}x - 2$$

Lösung:



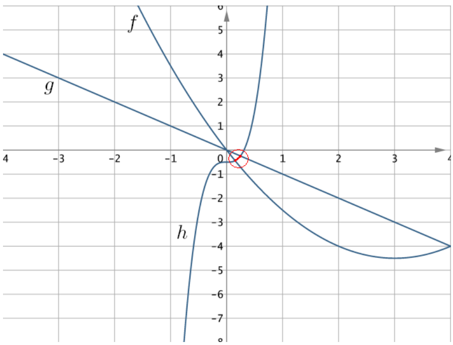
5. Aufgabe:

$$f: \frac{1}{2}x^2 - 3x \leq y$$

$$g: y \leq -x$$

$$h: 17x^3 - \frac{1}{2} = y$$

Lösung:



6. Aufgabe:

$$f: y + \sqrt{\frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x - 1}} > 0$$

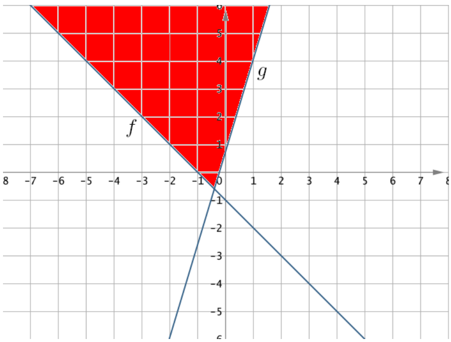
$$g : \frac{2}{20}x \ - \ \frac{1}{3}y \ + \ \frac{3}{12} \ < \ 0$$

Zwischenschritt:

$$f : y \ > \ -x \ - \ 1$$

$$g : y \ > \ \frac{10}{3}x \ + \ \frac{3}{4}$$

Lösung:



7. Aufgabe:

$$f : \frac{1}{2}x \ - \ 2 < y$$

$$g : \frac{1}{2}x \ + \ 2 > y$$

$$h : 2x \ - \ 4 < y$$

$$i : 2x \ + \ 4 > y$$

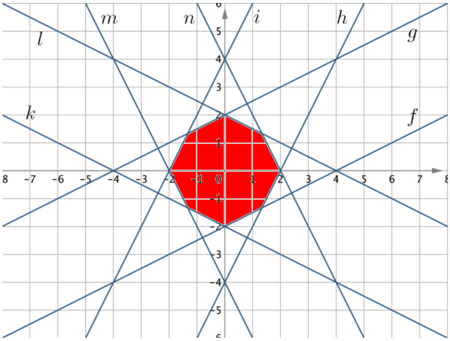
$$k : -\frac{1}{2}x \ - \ 2 < y$$

$$l : -\frac{1}{2}x \ + \ 2 > y$$

$$m : -2x \ - \ 4 < y$$

$$n : -2x \ + \ 4 > y$$

Lösung:

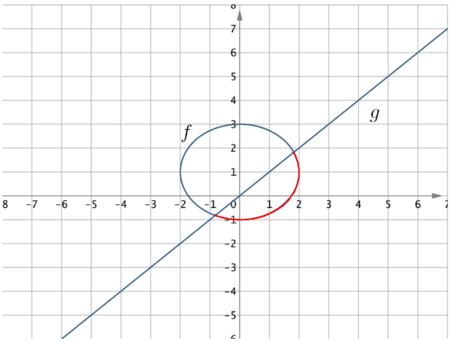


8. Aufgabe:

$$f : |(x^2 + (y - 1)^2| = 4$$

$$g : x \geq y$$

Lösung:



9. Aufgabe:

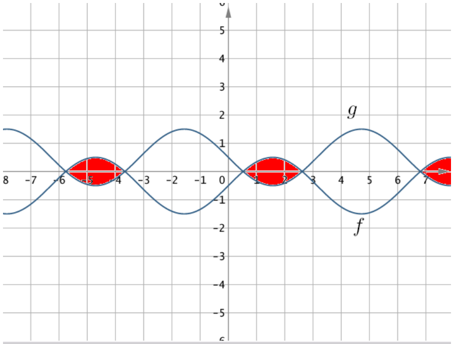
$$f : ((\sin x) + \frac{1}{2})^2 - \frac{3}{4} - y - (\sin x)^2 < 0$$

$$g : \cos(x + \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{2} < y$$

Zwischenschritt:

$$f : y < \sin x - \frac{1}{2}$$

Lösung:



10. Aufgabe:

$$f : |\frac{1}{x}| > y$$

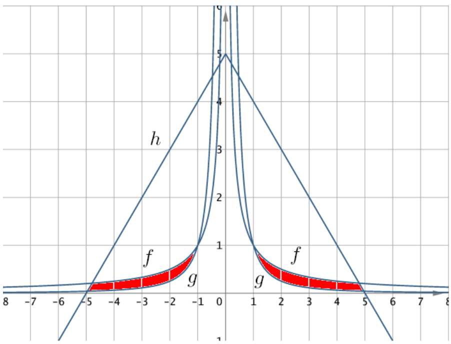
$$g : -\frac{1 + 7x^2}{x^2 y} > -\frac{y + 7}{y}$$

$$h : |x| + y < 5$$

Zwischenschritt:

$$g : y > \frac{1}{x^2}$$

Lösung:

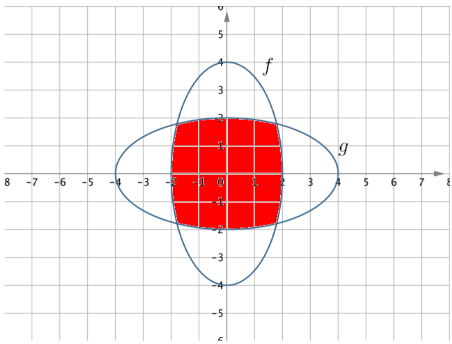


11. Aufgabe:

$$f : 4x^2 + y^2 <= 16$$

$$g : x^2 + 4y^2 <= 16$$

Lösung:



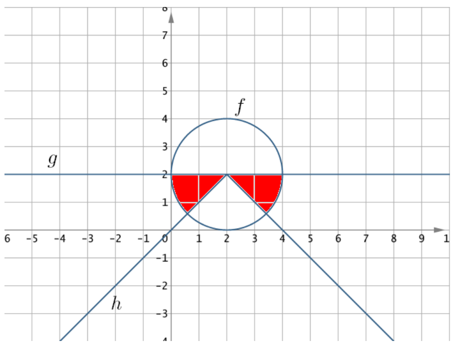
12. Aufgabe:

$$f : (y - 2)^2 < 4 - (x - 2)^2$$

$$g : y - 2 < 0$$

$$h : -|x - 2| + 2 < y$$

Lösung:



13. Berechnen Sie für die Ungleichung den Flächeninhalt der Lösungsmenge!
Aufgabe:

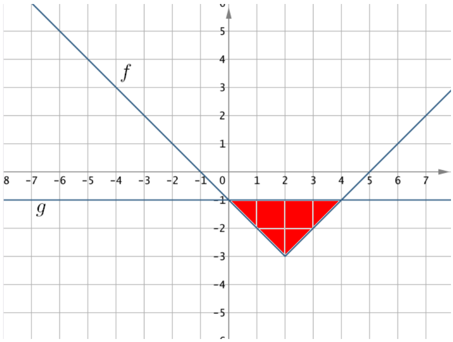
$$f : (2y - 3)^2 + (3y + 2)^2 + y - 10 \geq \left|\frac{4x + 4(\frac{1}{2}x - \frac{3}{2})^2 - 9}{x}\right| + 13y^2$$

$$g : y \leq -1$$

Zwischenschritt:

$$f : y \geq |x - 2| - 3$$

Lösung: Flächeninhalt $= 4$



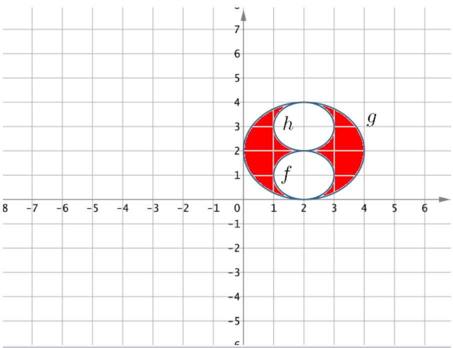
14. Berechnen Sie für das Ungleichungssystem den Flächeninhalt der Lösungsmenge!
Aufgabe:

$$f: x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 \geq 1$$
$$g: (x - 2)^2 + (y - 2)^2 \leq 4$$
$$h: (x - 2)^2 + (y - 3)^2 \geq 1$$

Zwischenschritt:

$$f: (x - 2)^2 + (y - 1)^2 \geq 1$$

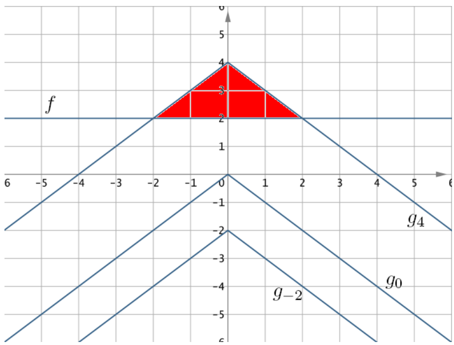
Lösung: Flächeninhalt $= 4\pi - 2\pi = 2\pi$



15. Für welches a ist der Flächeninhalt der Lösungsmenge = 2 ? Aufgabe:

$$f: y \geq 2$$
$$g: -|x| + a \leq y$$

Lösung: Flächeninhalt = 2 für $a = 2$

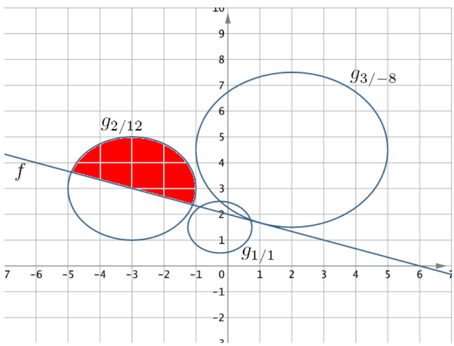


16. Bestimmen Sie ein a und ein b, für das der Flächeninhalt der Lösungsmenge 2π ergibt!
    Aufgabe:

    $$f : -\frac{1}{3}x \ \leq y \ - \ 2$$

    $$g : (x + \frac{1}{4}b)^2 \ + \ (y \ - \ \frac{3}{2}a)^2 \ \leq \ a^2$$

    (einfachste) Lösung: $a = 2$, $b = 12$



17. Beschreiben sie die Lösungsmenge des Ungleichungssystems!
    Aufgabe:

    $$f : x^2 \ + \ y^2 \ + \ z(z \ + \ 2) \ < \ 8$$

    $$g : x \ \leq \ 0$$

    $$h : y \ \leq \ 0$$

Zwischenschritt:

$$f : x^2 + y^2 + (z + 1)^2 < 9$$

Lösung:
Die Lösungsmenge ist eine Halbkugel unter der x-y-Ebene im $\mathbb{R}^3$, die um eine Einheit in z-Richtung verschoben ist.

18. Beschreiben sie die Lösungsmenge des Ungleichungssystems!
Aufgabe:

$$f : (x - 2\sqrt{3})^2 + (x - 2\sqrt{3})^2 + (z - 2\sqrt{3})^2 \leq 36$$

$$g : (x + 2\sqrt{3})^2 + (x + 2\sqrt{3})^2 + (z + 2\sqrt{3})^2 \leq 36$$

Lösung:
Es ist schnell ersichtlich, dass es sich mit zwei Kugeln mit Radius $r = 6$ handelt. Bei näherer Betrachtung ist zu erkennen, dass der Abstand des Mittelpunktes ebenfalls 6 beträgt. Da sich die Kugeln genau gegenüberliegen, haben sie nur den Ursprung als gemeinsame Lösung. Die Lösungsmenge ist somit nur der Punkt mit $x = 0, y = 0, z = 0$.

6 Vollständige Induktion Lösung

Autor: Katja Matthes

6.1 Gleichungen

Aufgabe 1

Gesucht: Formeln für $1+3+5+...+2n-1=\sum_{k=1}^{n} 2k-1$
Finden der Vermutung:

$$\sum_{k=1}^{1} 2k-1=1 \qquad \sum_{k=1}^{3} 2k-1=9$$
$$\sum_{k=1}^{2} 2k-1=4 \qquad \sum_{k=1}^{4} 2k-1=16$$

Zu Zeigen: $\sum_{k=1}^{n} 2k-1=n^2$
Ind.anfang: $n_0=1$
Ind.voraussetzung: $\sum_{k=1}^{n} 2k-1=n^2$
Ind.behauptung: $\sum_{k=1}^{n+1} 2k-1=(n+1)^2$
Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} 2k-1 &= \sum_{k=1}^{n} 2k-1+2(n+1)-1 && |\text{nach Voraussetzung} \\
&= n^2+2n+2-1 && |\text{Zusammenfassen} \\
&= n^2+2n+1 && |\text{Binomische Formel} \\
&= (n+1) && |\text{qed}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Gesucht: Formeln für $4 + 8 + 12 + ... + 4n = 2n(n + 1) = \sum_{k=1}^{n} 4k$
Finden der Vermutung:

$$\sum_{k=1}^{1} 4k = 4 = 2 \cdot 1 \cdot 2 \qquad \sum_{k=1}^{3} 4k = 24 = 2 \cdot 3 \cdot 4$$

$$\sum_{k=1}^{2} 4k = 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \qquad \sum_{k=1}^{4} 4k = 40 = 2 \cdot 4 \cdot 5$$

Zu Zeigen: $\sum_{k=1}^{n} 4k = 2n(n + 1)$
I.anfang: $n_0 = 1$
I.voraussetzung: $\sum_{k=1}^{n} 4k = 2n(n + 1)$
I.behauptung: $\sum_{k=1}^{n+1} 4k = 2(n + 1)((n + 1) + 1)$
Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} 4k &= \sum_{k=1}^{n} 4k + 4(n + 1) && |\text{Voraussetzung} \\
&= 2n(n + 1) + 4(n + 1) && |\text{2 Ausklammern} \\
&= 2(n(n + 1) + 2(n + 1)) && |(n + 1) \text{ Ausklammern} \\
&= 2(n + 1)(n + 2) \\
&= 2(n + 1)((n + 1) + 1) && |\text{qed}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

I.anf.: $n_0 = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{1} 2k = 2 \cdot 1 = 2 = 1^2 + 1$
I.vor.: $\sum_{k=1}^{n} 2k = n^2 + n$
I.beh.: $\sum_{k=1}^{n+1} 2k = (n + 1)^2 + (n + 1)$
Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} 2k &= \sum_{k=1}^{n} 2k + 2(n + 1) && |\text{Voraussetzung} \\
&= n^2 + n + 2(n + 1) && |\text{Ausmultiplizieren} \\
&= n^2 + n + 2n + 2 && |\text{Umordnen} \\
&= n^2 + 2n + 1 + n + 1 && |\text{Binomische Formel} \\
&= (n + 1)^2 + (n + 1) && |\text{qed}
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

I.anf.: $n_0 = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{3} = \frac{1}{2\cdot 1+1}$
I.vor.: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$
I.beh.: $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n+1}{2(n+1)+1}$
Induktionsbeweis:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{1}{(2(n+1)-1)(2(n+1)+1)}$$

|Voraussetzung

$$= \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$= \frac{n \cdot (2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)} \qquad |\text{Ausmultiplizieren}$$

$$= \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)} \qquad |\text{Polynomdivision}$$

$$= \frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} \qquad |\text{Kürzen}$$

$$= \frac{n+1}{2n+3} \qquad |\text{Umformen}$$

$$= \frac{n+1}{2(n+1)+1} \qquad |\text{qed}$$

Aufgabe 5

I.anf.: $n_0 = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$
I.vor.: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$
I.beh.: $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n+1}{(n+1)+1}$

Induktionsbeweis:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} \\
=&\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)((n+1)+1)} && |\text{Voraussetzung} \\
=&\frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
=&\frac{n \cdot (n+2)+1}{(n+1)(n+2)} && |\text{Ausmultiplizieren} \\
=&\frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} && |\text{Binomische Formel} \\
=&\frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} && |\text{Kürzen} \\
=&\frac{n+1}{n+2} && |\text{Umformen} \\
=&\frac{n+1}{(n+1)+1} && |\text{qed}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 6

I.anf.: $n_0 = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{2}{2} = \frac{1(1+1)}{2}$
I.vor.: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
I.beh.: $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$
Induktionsbeweis:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) && |\text{Voraussetzung} \\
= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\
= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} && |(n+1)\ \text{Ausklammern} \\
= \frac{(n+1)(n+2)}{2} && |\text{Umformen} \\
= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} && |\text{qed}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 7

I.anf.: $n_0 = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = \frac{6}{6} = \frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}$
I.vor.: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
I.beh.: $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$
Induktionsbeweis:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 && |\text{Voraussetzung} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} && |(n+1)\ \text{Ausklammern} \\
&= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} && |\text{Polynomdivision} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} && |\text{Umformen} \\
&= \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6} && |\text{qed}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 8

I.anf.: $n_0 = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{1} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2^1} = 2 - \frac{3}{2} = 2 - \frac{1+2}{2^1}$
I.vor.: $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$
I.beh.: $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{(n+1)+2}{2^{n+1}}$
Induktionsbeweis:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} + \frac{n+1}{2^{n+1}} && |\text{Voraussetzung} \\
&= 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \\
&= 2 + \frac{-2(n+2) + (n+1)}{2^{n+1}} && |\text{Zusammenfassen} \\
&= 2 + \frac{-(n+3)}{2^{n+1}} && |(-)\ \text{Vorziehen} \\
&= 2 - \frac{(n+1)+2}{2^{n+1}} && |\text{qed}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 9

I.anf.: $n_0 = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{0} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{2}{3} = 3 \cdot \frac{1}{3} = 3\left(1 - \frac{2}{3}^{0+1}\right)$
I.vor.: $\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 3 \cdot \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$
I.beh. $\sum_{k=0}^{n+1} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 3 \cdot \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{(n+1)+1}\right)$
Induktionsbeweis:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} \left(\frac{2}{3}\right)^k &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} && |\text{Voraussetzung} \\
&= 3 \cdot \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} && |\text{R. Br. mit 3 erweitern} \\
&= 3 \cdot \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{3 \cdot 2^{n+1}}{3^{n+2}} && |\text{3 Ausklammern} \\
&= 3 \cdot \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}}\right) \\
&= 3 \cdot \left(1 + \frac{-3 \cdot 2^{n+1} + 2^{n+1}}{3^{n+2}}\right) \\
&= 3 \cdot \left(1 + \frac{-2 \cdot 2^{n+1}}{3^{n+2}}\right) && |\text{Potenzgesetze} \\
&= 3 \cdot \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}\right) && |\text{Umformen} \\
&= 3 \cdot \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{(n+1)+1}\right) && |\text{qed}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 10

I.anf.: $n_0 = 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{1} q^k = 1 + q = \frac{(1+q)(1-q)}{(1-q)} = \frac{1-q^{1+1}}{1-q}$
I.vor.: $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
I.beh..: $\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{1-q^{(n+1)+1}}{1-q}$

Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} q^k &= \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1} && |\text{Voraussetzung} \\
&= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} \\
&= \frac{(1-q^{n+1}) + (1-q)q^{n+1}}{1-q} && |\text{Zusammenfassen} \\
&= \frac{1-q^{n+2}}{1-q} && |\text{Umformen} \\
&= \frac{1-q^{(n+1)+1}}{1-q} && |\text{qed}
\end{aligned}$$

6.2 Ungleichung

Aufgabe 1 - Bernoulli-Ungleichung

I.anf.: $n_0 = 1 \Rightarrow (1+x)^1 = 1 + x \geq 1 + 1 \cdot x$
I.vor.: $(1+x)^n \geq 1 + nx$
I.beh.: $(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$
Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n \cdot (1+x) && |\text{Voraussetzung} \\
&\geq (1+nx) \cdot (1+x) && |\text{Ausmultiplizieren} \\
&= 1 + x + nx + nx^2 && |x \text{ teilweise ausklammern} \\
&= 1 + (n+1)x + nx^2 && |\text{da } nx^2 \geq 0 \\
&\geq 1 + (n+1)x && |\text{qed}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

I.anf.: $n_0 = 6$
$n = 5 \Rightarrow 5^2 + 10 = 35 < 32 = 2^5$ falsche Aussage
$n = 6 \Rightarrow 6^2 + 10 = 46 < 64 = 2^6$ wahre Aussage
I.vor.: $n^2 + 10 < 2^n$
I.beh.: $(n+1)^2 + 10 < 2^{n+1}$

Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned}
(n+1)^2+10 &= n^2+2n+1+10 && |\text{Voraussetzung} \\
&< 2^n+2n+1 && |\text{da } 2n<2n+1<n^2,\ n\geq 3 \\
& && |\text{Vgl. Aufgabe 3} \\
&< 2^n+n^2+1 && |\text{da } 1<10 \\
&< 2^n+n^2+10 && |\text{Voraussetzung} \\
&< 2^n+2^n && |\text{Zusammenfassen} \\
&= 2\cdot 2^n && |\text{Potenzgesetze} \\
&= 2^{n+1} && |\text{qed}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

I.anf.: $n_0 = 3 \Rightarrow 3^2 = 9 > 7 = 2\cdot 3+1$
I.vor.: $n^2 > 2n+1$
I.beh.: $(n+1)^2 > 2(n+1)+1$
Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned}
(n+1)^2 &= n^2+2n+1 && |\text{Voraussetzung} \\
&> 2n+1+2n+1 && |\text{Ordnen} \\
&= 2n+2+2n && \\
&= 2(n+1)+2n && |\text{da } 2n>1 \text{ mit } n\in\mathbb{N} \\
&> 2(n+1)+1 && |\text{qed}
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

I.anf.: $n_0 = 5 \Rightarrow 2^5 = 32 > 25 = 5^2$
I.vor.: $2^n > n^2$
I.beh.: $2^{n+1} > (n+1)^2$
Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned}
2^{n+1} &= 2^n\cdot 2 && |\text{Voraussetzung} \\
&> n^2\cdot 2 && |\text{als Summe schreiben} \\
&= n^2+n^2 && |n^2>2n+1 \text{ Vgl. Aufg. 3} \\
&> n^2+2n+1 && |\text{Binomische Formel} \\
&= (n+1)^2 && |\text{qed}
\end{aligned}$$

Aufgabe 5

I.anf.: $n_0 = 2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} > \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$
I.vor.: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}$
I.beh.: $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n+1}$
Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} && |\text{Voraussetzung} \\ &> \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\ &\overset{?}{>} \sqrt{n+1} \end{aligned}$$

Noch zu zeigen:

$$\begin{aligned} \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} &> \sqrt{n+1} && |\cdot\sqrt{n+1} \\ \sqrt{n \cdot (n+1)} + 1 &> n+1 && |-1 \\ \sqrt{n^2+n} &> n && |n^2 \text{ Ausklammern} \\ \sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)} &> n && |\text{teilweise Wurzel ziehen} \\ n\sqrt{1+\frac{1}{n}} &> n && |\div n, \text{ da } n > 0 \\ \sqrt{1+\frac{1}{n}} &> 1 && |\text{wahre Aussage } \forall n \in \mathbb{N} \\ & && |\text{qed} \end{aligned}$$

Aufgabe 6

I.anf.: $n_0 = 3 \Rightarrow \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{86}{120} > \frac{65}{120} = \frac{13}{24}$
I.vor.: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} > \frac{13}{24}$
I.beh.: $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(n+1)+k} > \frac{13}{24}$

Induktionsbeweis:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(n+1)+k} \qquad |\text{Indexverschiebung}$$

$$=\sum_{k+2}^{n+2} \frac{1}{n+k} \qquad |\text{Summanden abspalten}$$

$$=\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)} \qquad |\text{0-Erweiterung}$$

$$=\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)}$$

$|$Indexverschiebung

$$=\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)}$$

$|$Voraussetzung

$$>\frac{13}{24} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)}$$

$|$Zusammenfassen

$$=\frac{13}{24} + \frac{-(2n+1)\cdot 2 + 2(n+1) + (2n+1)}{(2n+1)\cdot 2(n+1)}$$

$|$weiter Zusammenfassen

$$=\frac{13}{24} + \frac{1}{(2n+1)\cdot 2(n+1)}$$

$|$da $\frac{1}{(2n+1)\cdot 2(n+1)} > 0$

$$>\frac{13}{24} \qquad |\text{qed}$$

6.3 Teilbarkeitsprobleme

Aufgabe 1

I.anf.: $n_0 = 1 \Rightarrow 8|9^1 - 1 \Leftrightarrow 8|8$
I.vor.: $8|9^n - 1$

I.beh.: $8|9^{n+1} - 1$
Induktionsbeweis: $(m_x \in \mathbb{N})$

$$\begin{aligned}
9^{n+1} - 1 &= 9 \cdot 9^n - 1 && |\text{0-Erweiterung} \\
&= 9 \cdot 9^n - 9 + 9 - 1 && |\text{9 Ausklammern} \\
&= 9 \cdot (9^n - 1) + 8 && |\text{Voraussetzung} \\
&= 9 \cdot 8 \cdot m_1 + 8 && |\text{8 Ausklammern} \\
&= 8 \cdot (9m_1 + 1) \\
&= 8 \cdot m_2 && |\text{qed}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

I.anf.: $n_0 = 1 \Rightarrow 6|7^1 - 1 \Leftrightarrow 6|6$
I.vor.: $6|7^n - 1$
I.beh.: $6|7^{n+1} - 1$
Induktionsbeweis: $(m_x \in \mathbb{N})$

$$\begin{aligned}
7^{n+1} - 1 &= 7 \cdot 7^n - 1 && |\text{0-Erweiterung} \\
&= 7 \cdot 7^n - 7 + 7 - 1 && |\text{7 Ausklammern} \\
&= 7 \cdot (7^n - 1) + 6 && |\text{Voraussetzung} \\
&= 7 \cdot 6 \cdot m_1 + 6 && |\text{6 Ausklammern} \\
&= 6 \cdot (7m_1 + 1) \\
&= 6 \cdot m_2 && |\text{qed}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

I.anf.: $n_0 = 1 \Rightarrow a - 1|a^1 - 1$
I.vor.: $a - 1|a^n - 1$
I.beh.: $a - 1|a^{n+1} - 1$
Induktionsbeweis: $(m_x \in \mathbb{N})$

$$\begin{aligned}
a^{n+1} - 1 &= a \cdot a^n - 1 && |\text{0-Erweiterung} \\
&= a \cdot a^n - a + a - 1 && |a \text{ Ausklammern} \\
&= a \cdot (a^n - 1) + (a - 1) && |\text{Voraussetzung} \\
&= a \cdot (a - 1) \cdot m_1 + (a - 1) && |(a - 1) \text{ Ausklammern} \\
&= (a - 1) \cdot (am_1 + 1) \\
&= (a - 1) \cdot m_2 && |\text{qed}
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

I.anf.: $n_0 = 1 \Rightarrow 3|1^3 + 6 \cdot 1^2 + 14 \cdot 1 \Leftrightarrow 3|21$
I.vor.: $3|n^3 + 6n^2 + 14n$
I.beh.: $3|(n+1)^3 + 6(n+1)^2 + 14(n+1)$
Induktionsbeweis: $(m_x \in \mathbb{N})$

$$
\begin{aligned}
&(n+1)^3 + 6(n+1)^2 + 14(n+1) && \\
=&n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 6n^2 + 12n + 6 + 14n + 14 && |\text{Sortieren} \\
=&(n^3 + 6n^2 + 14n) + 3n^2 + 15n + 21 && |\text{Voraussetzung} \\
=&3 \cdot m_1 + 3n^2 + 15n + 21 && |\text{3 Ausklammern} \\
=&3 \cdot (m_1 + n^2 + 5n + 7) && \\
=&3 \cdot m_2 && |\text{qed}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 5

I.anf.: $n_0 = 1 \Rightarrow 3|2^{2\cdot 1} - 1 \Leftrightarrow 3|4 - 1 \Leftrightarrow 3|3$
I.vor.: $3|2^{2n} - 1$
I.beh.: $3|2^{2(n+1)} - 1$
Induktionsbeweis: $(m_x \in \mathbb{N})$

$$
\begin{aligned}
2^{2(n+1)} - 1 &= 4 \cdot 2^{2n} - 1 && |\text{0-Erweiterung} \\
&= 4 \cdot 2^{2n} - 4 + 4 - 1 && |\text{4 Ausklammern} \\
&= 4 \cdot (2^{2n} - 1) + 3 && |\text{Voraussetzung} \\
&= 4 \cdot 3 \cdot m_1 + 3 && |\text{3 Ausklammern} \\
&= 3 \cdot (4m_1 + 1) && \\
&= 3 \cdot m_2 && |\text{qed}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 6

I.anf.: $n_0 = 1 \Rightarrow 6|1^3 - 1 \Leftrightarrow 6|0$
I.vor.: $6|n^3 - n$
I.beh.: $6|(n+1)^3 - (n+1)$

Induktionsbeweis: $(m_x \in \mathbb{N} \cup 0)$

$$
\begin{aligned}
&(n+1)^3 - (n+1) \\
=&n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 && |\text{Ordnen} \\
=&(n^3 - n) + 3n^2 + 3n && |\text{Voraussetzung} \\
=&6 \cdot m_1 + 3n^2 + 3n \\
\stackrel{?}{=}&6 \cdot m_1 + 6 \cdot m_2 \\
=&6 \cdot (m_1 + m_2) \\
=&6 \cdot m_3
\end{aligned}
$$

Noch zu zeigen: $6|3n^2 + 3n$
I.anf.: $n_0 = 1 \Rightarrow 6|3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 \Leftrightarrow 6|6$
I.vor.: $6|3n^2 + 3n$
I.beh.: $6|3(n+1)^2 + 3(n+1)$
Induktionsbeweis: $(m_x \in \mathbb{N})$

$$
\begin{aligned}
3(n+1)^2 + 3(n+1) &= 3n^2 + 6n + 3 + 3n + 3 && |\text{Ordnen} \\
&= (3n^2 + 3n) + 6n + 6 && |\text{Voraussetzung} \\
&= 6 \cdot m_1 + 6n + 6 && |\text{6 Ausklammern} \\
&= 6 \cdot (m_1 + n + 1) \\
&= 6 \cdot m_2 \\
& && |\text{qed}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 7

I.anf.: $n_0 = 1 \Rightarrow 6|3 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 \Leftrightarrow 6|12$
I.vor.: $6|3n^2 + 9n$
I.beh.: $6|3(n+1)^2 + 9(n+1)$
Induktionsbeweis: $(m_x \in \mathbb{N})$

$$
\begin{aligned}
3(n+1)^2 + 9(n+1) &= 3n^2 + 6n + 3 + 9n + 9 && |\text{Ordnen} \\
&= (3n^2 + 9n) + 6n + 12 && |\text{Voraussetzung} \\
&= 6 \cdot m_1 + 6n + 12 && |\text{6 Ausklammern} \\
&= 6 \cdot (m_1 + n + 2) \\
&= 6 \cdot m_2 && |\text{qed}
\end{aligned}
$$

6.4 Ableitungen

Aufgabe 1

I.anf.: $n_0 = 1$

$$\begin{aligned} f(x) &= x + a \cdot \cos x \\ f'(x) &= -a \sin x \\ f''(x) &= -a \cos x = (-1)^1 \cdot a \cdot \cos x = f^{(2\cdot 1)}(x) \end{aligned}$$

I.vor.: $f^{(2n)}(x) = (-1)^n \cdot a \cdot \cos x$
I.beh.: $f^{(2(n+1))}(x) = (-1)^{n+1} \cdot a \cdot \cos x$
Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned} f^{(2(n+1))}(x) &= f^{(2n+2))}(x) \\ &= [f^{(2n)}(x)]'' && |\text{Voraussetzung} \\ &= [(-1)^n \cdot a \cdot \cos x]'' && |\text{Ableitung bilden} \\ &= [(-1)^{n+1} \cdot a \cdot \sin x]' && |\text{Ableitung bilden} \\ &= (-1)^{n+1} \cdot a \cdot \cos x && |\text{qed} \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Gesucht: Formel für $f^{(2n+1)}(x)$ mit $f(x) = x + a \cos x$
Finden der Vermutung:

$$\begin{aligned} f(x) &= x + a \cos x \\ f'(x) &= -a \sin x && (n = 0) \\ f''(x) &= -a \cos x \\ f'''(x) &= a \sin x && (n = 1) \end{aligned}$$

Zu zeigen: $f^{(2n+1)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot a \cdot \sin x$
I.anf.:$n_0 = 0$
I.vor.: $f^{(2n+1)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot a \cdot \sin x$
I.beh.: $f^{(2(n+1)+1)}(x) = (-1)^{(n+1)+1} \cdot a \cdot \sin x$

Induktionsbeweis:

$$
\begin{aligned}
f^{(2(n+1)+1)}(x) &= f^{(2n+3)}(x) \\
&= [f^{(2n+1)}(x)]'' && |\text{Voraussetzung} \\
&= [(-1)^{n+1} \cdot a \cdot \sin x]'' && |\text{Ableitung bilden} \\
&= [(-1)^{n+1} \cdot a \cdot \cos x]' && |\text{Ableitung bilden} \\
&= (-1)^{n+1} \cdot (-1) \cdot a \cdot \sin x \\
&= (-1)^{(n+1)+1} \cdot a \cdot \sin x && |\text{qed}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3

Gesucht: Formel für $f^{(2n)}(x)$ mit $f(x) = x + \sin(a \cdot x)$, $a > 0$
Finden der Vermutung:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x + \sin(a \cdot x) \\
f'(x) &= a \cdot \cos(a \cdot x) \\
f''(x) &= -a^2 \sin(a \cdot x) && (n = 1) \\
f'''(x) &= -a^3 \cos(a \cdot x) \\
f^{(4)}(x) &= a^4 \sin(a \cdot x) && (n = 2)
\end{aligned}
$$

Zu zeigen: $f^{(2n)}(x) = (-1)^n \cdot a^{2n} \cdot \sin(a \cdot x)$
I.anf.: $n_0 = 1$
I.vor.: $f^{(2n)}(x) = (-1)^n \cdot a^{2n} \cdot \sin(a \cdot x)$
I.beh.: $f^{(2(n+1))}(x) = (-1)^{n+1} \cdot a^{2(n+1)} \cdot \sin(a \cdot x)$
Induktionsbeweis:

$$
\begin{aligned}
f^{(2(n+1))}(x) &= f^{(2n+2)}(x) \\
&= [f^{(2n)}(x)]'' && |\text{Voraussetzung} \\
&= [(-1)^n \cdot a^{2n} \cdot \sin(a \cdot x)]'' && |\text{Ableitung bilden} \\
&= [(-1)^n \cdot a^{2n} \cdot a \cdot \cos(a \cdot x)]' \\
&= [(-1)^n \cdot a^{2n+1} \cdot \cos(a \cdot x)]' && |\text{Ableitung bilden} \\
&= (-1)^n \cdot (-1) \cdot a^{2n+1} \cdot a \cdot \sin(a \cdot x) \\
&= (-1)^{n+1} \cdot a^{2n+2} \cdot \sin(a \cdot x) \\
&= (-1)^{n+1} \cdot a^{2(n+1)} \cdot \sin(a \cdot x) && |\text{qed}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4

I.anf.: $n_0 = 1$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{x+1} \\ f'(x) &= (x+1)^{-1} + x \cdot (-1)(x+1)^{-2} \\ &= \frac{1}{(x+1)^2} = (-1)^{1+1} \cdot \frac{1!}{(x+1)^{1+1}} \\ &= f^{(1)}(x) \end{aligned}$$

I.vor.: $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot \frac{n!}{(x+1)^{n+1}}$
I.beh.: $f^{(n+1)}(x) = (-1)^{(n+1)+1} \cdot \frac{(n+1)!}{(x+1)^{(n+1)+1}}$
Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned} & f^{(n+1)}(x) \\ =& [f^{(n)}(x)]' && |\text{Voraussetzung} \\ =& [(-1)^{n+1} \cdot \frac{n!}{(x+1)^{n+1}}]' && |\text{Ableitung bilden} \\ =& (-1)^{n+1} \cdot (-1) \cdot (n+1) \frac{n!}{(x+1)^{(n+1)+1}} \\ =& (-1)^{(n+1)+1} \cdot \frac{(n+1)!}{(x+1)^{(n+1)+1}} && |\text{qed} \end{aligned}$$

Aufgabe 5

Gesucht: Formel für $f^{(n)}(x)$ mit $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$, $x \neq -2$
Finden der Vermutung:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)(x-2)^{-1} \\ f'(x) &= (x-2)^{-1} + (x+1)(-1)(x-2)^{-2} \\ &= -3(x-2)^{-2} = (-1)^1 \cdot 3 \cdot (x-2)^{-(1+1)} \\ f''(x) &= -3(-2)(x-2)^{-3} = 3 \cdot 2 \cdot (-1)^2 (x-2)^{-(2+1)} \\ f^{(3)}(x) &= 3 \cdot 2 \cdot (-3)(x-2)^{-4} = 3 \cdot 3! \cdot (-1)^3 (x-2)^{-(3+1)} \end{aligned}$$

Zu zeigen: $f^{(n)}(x) = \frac{3 \cdot (-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}}$
I.anf.: $n_0 = 1$
I.vor.: $f^{(n)}(x) = \frac{3 \cdot (-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}}$

I.beh.: $f^{(n+1)}(x) = \frac{3\cdot(-1)^{n+1}(n+1)!}{(x-2)^{(n+1)+1}}$
Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= [f^{(n)}(x)]' && |\text{Voraussetzung} \\
&= \left[\frac{3\cdot(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}}\right]' && |\text{Ableitung bilden} \\
&= \frac{3\cdot(-1)^n \cdot n! \cdot (n+1)\cdot(-1)}{(x-2)^{n+2}} \\
&= \frac{3\cdot(-1)^{n+1}(n+1)!}{(x-2)^{(n+1)+1}} && |\text{qed}
\end{aligned}$$

Aufgabe 6

Gesucht: n_0 und eine Formel für $f^{(n)}(x)$ mit $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1 + \frac{1}{x-1}$
Finden der Vermutung:

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^3 + x^2 + x + 1 + \frac{1}{x-1} \\
f'(x) &= 3x^2 + 2x + 1 + (-1)(x-1)^{-2} \\
f''(x) &= 6x + 2 + (-1)^2 \cdot 2(x-1)^{-3} \\
f'''(x) &= 6 + (-1)^3 \cdot 3!(x-1)^{-4} \\
f^{(4)} &= (-1)^4 \cdot 4!(x-1)^{-5} \\
f^{(5)} &= (-1)^5 \cdot 5!(x-1)^{-6}
\end{aligned}$$

Zu zeigen: $f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot \frac{n!}{(x-1)^{n+1}}$
I.anf.: $n_0 = 4$
I.vor.:$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot \frac{n!}{(x-1)^{n+1}}$
I.beh.: $f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot \frac{(n+1)!}{(x-1)^{(n+1)+1}}$
Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned}
&f^{(n+1)}(x) \\
&=[f^{(n)}(x)]' && |\text{Voraussetzung} \\
&= \left[(-1)^n \cdot \frac{n!}{(x-1)^{n+1}}\right]' && |\text{Ableitung bilden} \\
&=(-1)^n \cdot \frac{n!}{(x-1)^{(n+1)+1}} \cdot (-1) \cdot (n+1) \\
&=(-1)^{n+1} \cdot \frac{(n+1)!}{(x-1)^{(n+1)+1}} && |\text{qed}
\end{aligned}$$

Aufgabe 7

Gesucht: Formel für $f^{(2n)}(x)$ mit $f(x) = \sin \frac{x}{a}$
Finden der Vermutung:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin \frac{x}{a} \\
f'(x) &= \frac{1}{a} \cos \frac{x}{a} \\
f''(x) &= -\frac{1}{a^2} \sin \frac{x}{a} && (n=1) \\
f^{(3)} &= -\frac{1}{a^3} \cos \frac{x}{a} \\
f^{(4)} &= \frac{1}{a^4} \sin \frac{x}{a} && (n=2)
\end{aligned}$$

Zu zeigen: $f^{(2n)}(x) = \frac{(-1)^n}{a^{2n}} \cdot \sin \frac{x}{a}$
I.anf.: $n_0 = 1$
I.vor.:$f^{(2n)}(x) = \frac{(-1)^n}{a^{2n}} \cdot \sin \frac{x}{a}$
I.beh.: $f^{(2(n+1))}(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{a^{2(n+1)}} \cdot \sin \frac{x}{a}$
Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned}
f^{(2(n+1))}(x) &= f^{(2n+2))}(x) \\
&= [f^{(2n)}(x)]'' && |\text{Voraussetzung} \\
&= \left[(-1)^n \cdot \frac{1}{a^{2n}} \cdot \sin \frac{x}{a}\right]'' && |\text{Ableitung bilden} \\
&= \left[(-1)^n \cdot \frac{1}{a^{2n+1}} \cdot \cos \frac{x}{a}\right]' && |\text{Ableitung bilden} \\
&= (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{a^{2n+2}} \cdot sin \frac{x}{a} \\
&= (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{a^{2(n+1)}} \cdot sin \frac{x}{a} && |\text{qed}
\end{aligned}$$

7 Funktionen Loesungen

7.1 Trigonometrische Funktionen

1. a) $\sin\frac{2\pi}{3} = \sin(\pi - \frac{2\pi}{3}) = \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

   b) $\sin\frac{5\pi}{6} = \sin(\pi - \frac{5\pi}{6}) = \sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}\sqrt{1}$

   c) $\sin\pi = \sin(\pi - \pi) = 0$

   d) $\sin\frac{3\pi}{2} = \sin(\pi - \frac{3\pi}{2}) = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -\sin(\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{2}\sqrt{4}$

   e) $\sin\frac{11\pi}{6} = \sin(\pi - \frac{11\pi}{6}) = \sin(-\frac{5\pi}{6}) = -\sin(\pi - \frac{5\pi}{6}) = -\sin(\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}\sqrt{1}$

   f) $\sin\frac{7\pi}{3} = \sin(\pi - \frac{7\pi}{3}) = \sin(-\frac{4\pi}{3}) = -\sin(\pi - \frac{4\pi}{3}) = -\sin(-\frac{1\pi}{3}) = \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

   g) $\sin\frac{29\pi}{6} = \sin(\pi - \frac{29\pi}{6}) = \sin(-\frac{23\pi}{6}) = -\sin(\pi - \frac{23\pi}{6}) = -\sin(-\frac{17\pi}{6}) = \sin(\pi - \frac{17\pi}{6}) = \sin(-\frac{11\pi}{6}) = -\sin(\pi - \frac{11\pi}{6}) = -\sin(-\frac{5\pi}{6}) = \sin(\pi - \frac{5\pi}{6}) = \sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}\sqrt{1}$

   h) $\sin(-\frac{3\pi}{4}) = -\sin(\frac{3\pi}{4}) = -\sin(\pi - \frac{3\pi}{4}) = -\sin(\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

   i) $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

   j) $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

   k) $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{1}$

   l) $\cos\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{0}$

   m) $\cos\frac{11\pi}{6} = -\cos(\pi - \frac{11\pi}{6}) = -\cos(\frac{5\pi}{6}) = cos(\frac{1\pi}{6}) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

   n) $\cos\frac{3\pi}{4} = -\cos(\pi - \frac{3\pi}{4}) = -\cos(\frac{1\pi}{4}) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

   o) $\cos\frac{2\pi}{3} = -\cos(\pi - \frac{2\pi}{3}) = -\cos(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2}\sqrt{1}$

p) $\cos\frac{4\pi}{6} = -\cos(\pi - \frac{2\pi}{3}) = -\cos(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2}\sqrt{1}$

q) $\cos\frac{7\pi}{3} = -\cos(\pi - \frac{7\pi}{3}) = \cos(\pi - \frac{4\pi}{3}) = \cos(\frac{1\pi}{3}) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

r) $\cos-\frac{11\pi}{4} = \cos(\frac{11\pi}{4}) = -\cos(\pi - \frac{11\pi}{4}) = \cos(\pi - \frac{7\pi}{4}) = \cos-\frac{3\pi}{4}) = -\cos(-\frac{1\pi}{4}) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

s) $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{1}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}})$

t) $\tan-\frac{\pi}{3} = \frac{\sin\frac{-\pi}{6}}{\cos\frac{-\pi}{6}} = \frac{-\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} = -\frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}\sqrt{1}} = -\sqrt{3}$

2.

α	β	a	b	c
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	1	1	$\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	2	$\sqrt{12}$	4
kein Dreieck		$\frac{1}{2}\sqrt{3}$		$\frac{1}{2}$
$53,13°$	$26,87°$	4	3	5
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	1	$\sqrt{3}$	2
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{4}{\sqrt{3}}$

3.

$$\begin{aligned}
\sin(4\alpha) &= 2(\sin(2\alpha)\cos(2\alpha)) \\
&= 4\sin(\alpha)\cos(\alpha)\cos(2\alpha) \\
&= 4\sin(\alpha)\cos(\alpha)\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) \\
&= 4\sin(\alpha)\cos^3(\alpha) - 4\sin^3(\alpha)\cos(\alpha) \\
\sin(4\alpha) &= 4(\sin(\alpha)\cos^3(\alpha) - \sin^3(\alpha)\cos(\alpha))
\end{aligned}$$

4. Ich löse die Aufgabe mal von hinten - muss auch andersrum gehen...

$$\begin{aligned}
2\cos^2\alpha - 1 &= 2\cos^2\alpha - (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) \\
&= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\
&= \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha \\
&= \cos(\alpha + \alpha) \\
&= \cos(2\alpha)
\end{aligned}$$

5. Wenn die Seitenlänge des Würfels maximal sein soll, muss der Durchmesser der Kugel gleich der Diagnoalen des Würfels sein.

$$r = 1 \text{ (Radius der Kugel)}$$
$$a = \text{ (Kante des Wuerfels)}$$
$$D = a\sqrt{3} \text{ (Diagonale des Wuerfels)}$$

$$2r = a\sqrt{3}$$
$$a = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

7.1.1 Exponentialfunktionen und Logarithmus

1. a) $1 = e^x \; x = 0$

   b) $8 = 2^x \; x = 3$

   c) $3 = 5e^x \; x = ln(\frac{3}{5})$

   d) $e = \frac{e^x}{e} \; x = 2$

   e) $9 = e^{cx} \; x = \frac{ln(9)}{c}$

   f) $3 = log_2(x) \; x = 8$

   g) $0 = log_{42}(x) \; x = 1$

   h) $0 = 5log_5(x) \; x = 1$

   i) $9 = 3ln(e^x) \; x = 3$

2. a) $lg2 + lg5 = lg10 = 1$

   b) $lg5 + lg6 - lg3 = lg10 = 1$

   c) $3lna + 5lnb - lnc = ln(\frac{a^3b^5}{c})$ für $c \neq 0$

   d) $2lnv - lnv = ln(v^2) - lnv = ln(v)$ für $v \neq 0$

   e) $\frac{1}{2}log_7 9 - \frac{1}{4}log_7 81 = log_7\sqrt{9} - log_7\sqrt[4]{81} = 0$

f)

$$\begin{aligned}
log_3(x-4)+log_3(x+4) &= 3\\
log_3((x-4)(x+4)) &= 3\\
log_3(x^2-16) &= 3\\
x^2-16 &= 3^3\\
x &= \pm\sqrt{43}
\end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned}
2log_2(4-x)+4 &= log_2(x+5)-1\\
5 &= log_2(x+5)-log_2(4-x)^2\\
5 &= log_2(\frac{x+5}{(4-x)^2})\\
2^5 &= \frac{x+5}{(4-x)^2}\\
32(4-x) &= x+5\\
32(16-8x+x^2) &= x+5\\
512-256x+32x^2 &= x+5\\
32x^2-257x+507 &= 0\\
x^2-\frac{257}{32}x+\frac{507}{32} &= 0\\
x_1 &= \frac{1}{64}(257+\sqrt{1157})\\
x_2 &= \frac{1}{64}(257-\sqrt{1157})
\end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned}
log_5x &= log_5 6-2log_5 3\\
0 &= log_5 6-log_5(3^2)-log_5 x\\
0 &= log_5(\frac{6}{9x})\\
1 &= \frac{2}{3x}\\
x &= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

3. $N(t) = N_0 \cdot e^{kt}$
   für $N_0 = 100 \; und \; k = 2$
   $N(t) = 100 \cdot e^{2t}$

$$\text{a)} \quad \begin{array}{rccc} t & N(t) & & \\ 5 & 100e^{10} & \approx & 2,2 \cdot 10^{6} \\ 10 & 100e^{20} & \approx & 4,85 \cdot 10^{10} \\ 20 & 100e^{40} & \approx & 2,35 \cdot 10^{19} \\ 50 & 100e^{100} & \approx & 2,688 \cdot 10^{45} \\ 100 & 100e^{200} & \approx & 7,2 \cdot 10^{88} \end{array}$$

b) A - Anzahl der Bakterien

$$A = 100 \cdot e^{2t}$$

$$ln(\frac{A}{100} = 2t)$$

$$t = \frac{1}{2}(ln(A) - ln(100) \approx \frac{1}{2}(ln(A) - 4,6)$$

$$\begin{array}{rccc} A & t & & \\ 500 & \frac{1}{2}ln(5) & \approx & 0,8 \\ 1000 & \frac{1}{2}ln(10) & \approx & 1,15 \\ 5000 & \frac{1}{2}ln(50) & \approx & 1,96 \\ 10000 & \frac{1}{2}ln(100) & \approx & 2,3 \end{array}$$

4. $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$
   $mit \; N_0 = 1000 \; , \; \lambda = 2$
   $N(t) = 1000 \cdot e^{-2t}$

$$\text{a)} \quad \begin{array}{rccc} t & t & & \\ 1 & 1000 \cdot e^{-2} & \approx & 135,3 \\ 5 & 1000 \cdot e^{-10} & \approx & 0,45 \\ 10 & 1000 \cdot e^{-20} & \approx & 2,06 \cdot 10^{-6} \\ 100 & 1000 \cdot e^{-200} & \approx & 1,38 \cdot 10^{-84} \end{array}$$

b) M = noch vorhandenes Material
   $M = N(t) = 1000 \cdot e^{-2t}$
   $t = -\frac{1}{2}ln(\frac{M}{1000})$

M			t		
$\frac{1}{4} \cdot 1000$	$=$	250	$-\frac{1}{2}ln(\frac{1}{4})$	$\approx$	$0,69$
$\frac{1}{2} \cdot 1000$	$=$	500	$-\frac{1}{2}ln(-\frac{1}{2})$	$\approx$	$0,35$
$\frac{3}{4} \cdot 1000$	$=$	750	$-\frac{1}{2}ln(-\frac{3}{4})$	$\approx$	$0,144$
$\frac{7}{8} \cdot 1000$	$=$	875	$-\frac{1}{2}ln(-\frac{7}{8})$	$\approx$	$0,0667$

7.2 Kurvendiskusion

1. a) $f(x) = -x^3 + 3x - 2$
$f'(x) = -3x^2 + 3$
$f''(x) = -6x$
$f'''(x) = -6$

Definitionsbereich: $D(f) = \mathbb{R}$
Wertebereich: $W(f) = \mathbb{R}$
Nullstellen:
$x_1 = 1$
$x_2 = -2$

Extremstellen:
Minimum bei (-1;-4)
Maximum bei (1;0)

Wendepunkte: (0;-2)
Verhalten im Unendlichen:
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

b) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$
$f'(x) = 3x^2 - 8x + 5$
$f''(x) = 6x - 8$
$f'''(x) = 6$

Definitionsbereich: $D(f) = \mathbb{R}$
Wertebereich: $W(f) = \mathbb{R}$
Nullstellen:
$x_1 = 1$
$x_2 = 2$

Extremstellen:
Minimum bei $(1\frac{2}{3}; -\frac{4}{27})$
Maximum bei (1;0)

Wendepunkte: $(1\frac{1}{3}; -\frac{3}{27})$
Verhalten im Unendlichen:
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

2.

$$g(x) = \frac{3x^4 - 12x^3 + 9x^2 + 12x - 12}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$$
$$g(x) = 3x + \frac{-6x^2 + 18x - 12}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} \text{ Polynomdivision}$$

Definitionslücken: $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 \neq 0 \to x \neq 1; x \neq 2$
Definitionsbereich: $D(f) = \mathbb{R} \wedge x \neq 1 \wedge x \neq 2$
Wertebereich: $W(f) = \mathbb{R}$
Nullstellen:

$$\begin{aligned} 3x^4 - 12x^3 + 9x^2 + 12x - 12 &= 0 \\ x_1 &= 1 \\ x_2 &= -1 \\ x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Verhalten im Unendlichen:
$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$
$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$
Extremstellen: TODO
Wendepunkte: TODO

3. $f(x) = 2\sin(x\pi)$
$f'(x) = 2\pi\cos(x\pi)$
$f''(x) = -2\pi^2\sin(x\pi)$
$f'''(x) = -2\pi^3\cos(x\pi)$
Definitionsbereich: $D(f) = \mathbb{R}$

Wertebereich: $W(f) = \mathbb{R} \wedge -2 \leq f(x) \leq 2$

Nullenstellen: $1 \cdot k$ mit $k \in \mathbb{Z}$
Extremstellen:
Maximum: $(2k + 0,5; 2)$ mit $k \in \mathbb{Z}$
Minimum: $(2k - 0,5; -2)$ mit $k \in \mathbb{Z}$
Wendepunkte: $(k; 0)$ mit $k \in \mathbb{Z}$

Flächeninhalt vom Dreieck ABC:
mit A(0;0) B(x;0) C(x;$2\sin(\pi x)$)

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2} \cdot g \cdot h \\
A &= \frac{1}{2} \cdot x \cdot 2\sin(\pi x) \\
A &= x \cdot \sin(\pi x) \\
A' &= \sin(\pi x) + x\pi\cos(\pi x) \\
A'' &= 2\pi\cos(\pi x) - \pi^2 x \sin(\pi x) \\
A' &= 0 \\
x &\approx 0,64577
\end{aligned}
$$

8 Vektoren Lösungen

Autor: Marko Rak

Aufgabe 1

Berechne die Vektoren, mit

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) $a + b - c + d = \begin{pmatrix} 7 \\ 15 \\ 7 \end{pmatrix}$

b) $d - c - b - a = \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $3a - 2b + c = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \\ -15 \end{pmatrix}$

d) $a - \frac{1}{2}c + (-3)b + 2d = \begin{pmatrix} 29 \\ 19 \\ -13 \end{pmatrix}$

e) $2a - b + 5c - d = \begin{pmatrix} -9 \\ -14 \\ -18 \end{pmatrix}$

f) $3a - 5b + 4c + 2d = \begin{pmatrix} 32 \\ 14 \\ -34 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2

Berechne die Länge der Vektoren:

a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$

b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \sqrt{17}$

c) $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \sqrt{50}$

d) $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3$

e) $\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \sqrt{18}$

f) $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 4$

Aufgabe 3

Bestimme das Skalarprodukt der Vektoren:

a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

b) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = -14$

c) $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} = -12$

Aufgabe 4

Bestimme den eingeschlossenen Winkel:

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = 45^\circ$

b) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 13 \end{pmatrix} = \arccos 0 = 90^\circ$

Aufgabe 5

Berechne das Kreuzprodukt:

a) $\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-7\\9\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-8\\-1\\4\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}-2\\-3\\-1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-4\\-2\\-7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}19\\-10\\-8\end{pmatrix}$

Aufgabe 6

Überprüfe, ob die Vektoren linear abhängig sind. In diesem Fall stelle einen der Vektoren als Linearkombination der anderen dar. (Hinweis: Nutze den Gauss-Algorithmus)

a) ..

$$\begin{array}{cc|c} c_1 & c_2 & \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} c_2 &= 0 \\ c_1 &= 0 \end{aligned}$$

b) ..

$$\begin{array}{cc|cc} c_1 & c_2 & & \\ \hline 3 & 5 & 0 & \cdot(-\frac{5}{3}) \\ 5 & 3 & 0 & \leftarrow \\ \hline 3 & 5 & 0 & \\ 0 & -\frac{16}{3} & 0 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} c_2 &= 0 \\ c_1 &= 0 \end{aligned}$$

c) ..

c_1	c_2	c_3		
1	7	17	0	$\cdot(-2)$
2	3	5	0	$\leftarrow$
1	7	17	0	
0	-11	-29	0	

$$\begin{aligned} c_3 &= t \\ c_2 &= -\tfrac{29}{11}t \\ c_1 &= \tfrac{16}{11}t \end{aligned}$$

$$-\tfrac{16}{11}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\tfrac{29}{11}\begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17\\5\end{pmatrix}$$

d) ..

c_1	c_2	c_3	
1	2	3	0
0	5	7	0
0	0	1	0

$$\begin{aligned} c_3 &= 0 \\ c_2 &= 0 \\ c_1 &= 0 \end{aligned}$$

e) ..

c_1	c_2	c_3			
7	3	10	0	$\leftarrow$	
2	-5	-3	0	$\cdot(-\frac{7}{2})$	$\cdot(-\frac{5}{2})$
5	8	13	0		$\leftarrow$
2	-5	-3	0		
0	$-\frac{41}{2}$	$-\frac{41}{2}$	0	$\cdot(-1)$	
0	$-\frac{41}{2}$	$-\frac{41}{2}$	0	$\leftarrow$	
2	-5	-3	0		
0	$-\frac{41}{2}$	$-\frac{41}{2}$	0		
0	0	0	0		

$$\begin{aligned} c_3 &= t \\ c_2 &= -t \\ c_1 &= -t \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix}7\\2\\5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\-5\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\-3\\13\end{pmatrix}$$

f) ..

c_1	c_2	c_3			
-2	1	7	0	$\cdot(-\frac{3}{2})$	$\cdot(2)$
-3	0	6	0	$\leftarrow$	
4	1	5	0		$\leftarrow$
-2	1	7	0		
0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{9}{2}$	0	$\leftarrow$	
0	3	19	0	$\cdot(\frac{1}{2})$	
-2	1	7	0		
0	3	19	0		
0	0	5	0		

$$\begin{aligned} c_3 &= 0 \\ c_2 &= 0 \\ c_1 &= 0 \end{aligned}$$

g) ..

c_1	c_2	c_3			
3	-2	-7	0	$\cdot(-\frac{7}{3})$	$\cdot(-\frac{5}{3})$
7	5	3	0	$\leftarrow$	
5	1	-3	0		$\leftarrow$
3	-2	-7	0		
0	$\frac{29}{3}$	$\frac{58}{3}$	0	$\leftarrow$	
0	$\frac{13}{3}$	$\frac{26}{3}$	0	$\cdot(-\frac{29}{13})$	
3	-2	-7	0		
0	$\frac{13}{3}$	$\frac{26}{3}$	0		
0	0	0	0		

$$\begin{aligned} c_3 &= t \\ c_2 &= -2t \\ c_1 &= t \end{aligned}$$

$$-\begin{pmatrix}3\\7\\5\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}-2\\5\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7\\3\\-3\end{pmatrix}$$

h) ..

c_1	c_2	c_3	c_4			
1	0	0	1	0	$\cdot(-1)$	$\cdot(-1)$
0	1	1	1	0		
1	1	3	0	0	$\leftarrow$	
1	1	2	1	0		$\leftarrow$
1	0	0	1	0		
0	1	1	1	0		$\leftarrow$
0	1	3	-1	0	$\leftarrow$	
0	1	2	0	0	$\cdot(-1)$	$\cdot(-1)$
1	0	0	1	0		
0	1	2	0	0		
0	0	-1	1	0	$\leftarrow$	
0	0	1	-1	0	$\cdot(1)$	
1	0	0	1	0		
0	1	2	0	0		
0	0	1	-1	0		
0	0	0	0	0		

$$\begin{aligned} c_4 &= t \\ c_3 &= t \\ c_2 &= -2t \\ c_1 &= -t \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

i) ..

c_1	c_2	c_3	c_4			
1	1	0	0	0	$\cdot(-2)$	$\cdot(-1)$
0	0	1	0	0		
2	1	0	1	0	$\leftarrow$	
1	1	1	1	0		$\leftarrow$
1	1	0	0	0		
0	0	1	0	0	$\cdot(-1)$	
0	-1	0	1	0		
0	0	1	1	0	$\leftarrow$	
1	1	0	0	0		
0	0	1	0	0		
0	-1	0	1	0		
0	0	0	1	0		

$$
\begin{aligned}
c_4 &= 0\\
c_3 &= 0\\
c_2 &= 0\\
c_1 &= 0
\end{aligned}
$$

9 Komplexe Zahlen

Autor: Julia Hempel

Aufgabe 1

1.
   - $|z_1| = \sqrt{(-2)^2} = 2$
   - $\varphi_1 = arctan\frac{-2}{0} = -\frac{\pi}{2}$ (siehe Tabelle)
   - Eulersche Form: $z_1 = 2e^{\frac{-\pi}{2}i}$
2.
   - $|z_2| = \sqrt{3^2} = 3$
   - $\varphi_2 = arctan\frac{0}{3} = 0$ (siehe Tabelle)
   - Eulersche Form: $z_2 = 3e^{0\cdot i}$
3.
   - $|z_3| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$
   - $\varphi_3 = arctan\frac{2}{1} \approx 63,4°$ (siehe TR)
   - Eulersche Form: $z_3 = \sqrt{5}e^{arctan(2)\cdot i}$
4.
   - $|z_4| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$
   - $\varphi_4 = arctan\frac{-3}{4} \approx 323,1°$ (siehe TR)
   - Eulersche Form: $z_4 = 5e^{arctan(\frac{-3}{4})\cdot i}$
5.
   - $|z_5| = \sqrt{\left(e^{\frac{\pi}{4}}\right)^2 + 0} = e^{\frac{\pi}{4}}$
   - $\varphi_5 = arctan\frac{0}{e^{\frac{\pi}{4}}} = 0$ (nur Realteil vorhanden)
   - Eulersche Form: $z_5 = e^{\frac{\pi}{4}}e^{0\cdot i}$

6.
   - $|z_6| = 1$, denn allgemein gilt:$(|z| \cdot e^{(i\varphi)})$
   - $\varphi_6 = arctan\frac{\pi}{4}$ (siehe eulersche Form)
   - kartesische Form:
     $x = |z| \cdot cos\varphi = 1 \cdot cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
     $y = |z| \cdot sin\varphi = 1 \cdot cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
     $z_6 = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot i$

7.
   - $|z_7| = 2$, denn allgemein gilt:$(|z| \cdot e^{(i\varphi)})$
   - $\varphi_7 = -\frac{3}{4}\pi$ (siehe eulersche Form)
   - kartesische Form:
     $x = |z| \cdot cos\varphi = 2 \cdot cos(-\frac{3\pi}{4}) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$
     $y = |z| \cdot sin\varphi = 2 \cdot cos(-\frac{3\pi}{4}) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$
     $z_7 = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot i$

8.
   - $|z_8| = -\frac{1}{2}$, denn allgemein gilt:$(|z| \cdot e^{(i\varphi)})$
   - $\varphi_8 = \frac{3\pi}{4}$ (siehe eulersche Form)
   - kartesische Form:
     $x = |z| \cdot cos\varphi = 1 \cdot cos(\frac{3\pi}{4}) = 0$
     $y = |z| \cdot sin\varphi = 1 \cdot cos(\frac{3\pi}{4}) = -1$
     $z_8 = -1i$

Aufgabe 2

1. Addition
$$
\begin{aligned}
(1+2i) + (4-3i) &= (1+4) + i(2-3) &&= 5 - i \\
(2+4i) + 3 &= (2+3) + 4i &&= 5 + 4i \\
(4+2i) - 2i &= 4 + i(2-2) &&= 4
\end{aligned}
$$

2. Multiplikation
$$
\begin{aligned}
(1+2i) * (4-3i) &= 1*4 + 1*(-3i) + 2i*4 + 2i*(-3i) &&= 10 + 5i \\
(3+2i) * (3-2i) &= 9 + 6i - 6i - 4i^2 &&= 13 \\
(1+3i) * ((-1) * 3i) &= 1 + 3i - 3i + 9i^2 &&= -10
\end{aligned}
$$

3. Division

$$\frac{(1+2i)*(4+3i)}{(4-3i)*(4+3i)} = \frac{-2+11i}{25}$$
$$\frac{(3+2i)*(3+2i)}{(3-2i)*(3+2i)} = \frac{5+12i}{13}$$
$$\frac{(1+3i)*(-1-3i)}{(-1+3i)*(-1-3i)} = \frac{8-6i}{10}$$

4. Potenzieren

- $e^{1+2i} = e^1 * e^{2i}$
  $r = e^1; \varphi = 2$
  Umwandlung in kartesische Koordinaten:
  $x = r * cos\varphi = -0,42e$
  $y = r * sin\varphi = -0,91e$
  $z = -0,43e + 0,91e * i$

- $ln(1+2i)$
  Umwandlung in Eulersche Darstellung:
  $r = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$
  $\varphi = arctan\frac{2}{1} = arctan(2)$
  $ln(\sqrt{5}e^{i*arctan(2)})$
  Anwenden der Logarithmengesetze:
  $z = \frac{1}{2} * ln(5) + arctan(2) * i$

Aufgabe 3

a) Quadratwurzeln

$$\sqrt{-i} = \sqrt{e^{-i*\frac{\pi}{2}}} = e^{-i*\frac{\pi}{4}+k\pi}; k \in \{0,1\}$$

$$\sqrt{-1+i} = \sqrt{\sqrt{2} * e^{i*\frac{3\pi}{4}}} = \sqrt[4]{2} * e^{i*\frac{3\pi}{8}+k*\pi}; k \in \{0,1\}$$

b) 3.Wurzel

$$\sqrt[3]{8e^{\frac{2\pi}{3}*i}} = 2 * e^{i*\frac{2}{9}*\pi+k*\frac{2}{3}\pi}; k \in \{0,1,2\}$$

c) Nullstelle der Polynome

- $p_1(x) = x^5 - x^4 - 2x^2 - 4x = 0$
  Klammere x aus $\rightarrow x_1 = 0$

  Rate $x_2 = -1$
  Polynomdivision ergibt $x^3 - 2x^2 + 2x - 4 = 0 = 0$

  Rate $x_3 = 2$
  Polynomdivision ergibt: $x^2 + 2 = 0$
  $x_{4,5} = \sqrt{-2} = \pm\sqrt{2}i$

- $p_2(y) = y^4 - 3y^3 + 2 = 0$

  Substituiere $y^2 = x$
  $x^2 + 3x + 2 = 0$

  Mitternachtsformel:
  $x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$
  $x_1 - 1; x_2 = -2$

  Rücksubstitution:
  $y_1^2 = -1 \rightarrow y_{1,2} = \pm i$
  $y_2^2 = -2 \rightarrow y_{3,4} = \pm\sqrt{2}i$