

Vorkurs Mathematik Lösungen

FaRaFIN Vorkurs-Team

2010

Inhaltsverzeichnis

2	Basismathematik	5
2.1	Bruchrechnung Lösung	5
2.2	Potenzen Lösung	7
2.3	Binomische Formeln Lösung	13
2.4	Polynomdivision Lösungen	16
3	Quadratische Gleichungen Lösungen	21
4	Lineare Gleichungssysteme Lösungen	23
5	Betrag, Kreis, Ungleichungen	31
5.1	Betrag	31
5.2	Kreis	31
5.3	Ungleichungen	33
5.3.1	Ungleichungen mit einer Variablen	33
5.3.2	Ungleichungen mit mehreren Variablen	42
6	Vollständige Induktion Lösung	53
6.1	Gleichungen	53
6.2	Ungleichung	59
6.3	Teilbarkeitsprobleme	62
6.4	Ableitungen	66
8	Vektoren Lösungen	71

2 Basismathematik

2.1 Bruchrechnung Lösung

Autor: Katja Matthes

Aufgabe 1

1. $\frac{20}{6} = \frac{10}{3}$

4. $\frac{112}{49} = \frac{16}{7}$

7. $\frac{1716}{308} = \frac{39}{7}$

2. $\frac{92}{4} = 23$

5. $\frac{360}{25} = \frac{72}{5}$

3. $\frac{86}{12} = \frac{43}{6}$

6. $\frac{420}{40} = \frac{21}{2}$

Aufgabe 2

1. $\frac{3}{7} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{28}{45} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{18}$

5. $1 : \left(\frac{2}{9} + \frac{1}{7}\right) = \frac{63}{23}$

2. $\frac{56}{65} \cdot 12 \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{13}{16} = 6$

6. $\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{4}\right) : \frac{3}{4} = \frac{7}{15}$

3. $\frac{98}{99} \cdot \frac{13}{14} \cdot \frac{11}{7} \cdot \frac{5}{26} = \frac{5}{18}$

7. $\frac{5}{8} \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{13}{15}\right) = \frac{31}{48}$

4. $\frac{63}{8} \cdot \frac{5}{18} \cdot \frac{32}{33} \cdot \frac{11}{14} = \frac{5}{3}$

8. $\left(\frac{9}{11} - \frac{5}{8}\right) \cdot \frac{4}{17} = \frac{1}{22}$

Aufgabe 3

1. $\frac{\frac{8}{9}}{\frac{16}{27}} = \frac{3}{2}$

4. $\frac{\frac{5}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{5}{2}$

7. $\frac{\frac{6\frac{1}{4}}{16}}{\frac{1}{16}} = \frac{20}{3}$

2. $\frac{\frac{1}{5}}{\frac{9}{10}} = \frac{2}{9}$

5. $\frac{\frac{2\frac{2}{7}}{1\frac{1}{3}}}{\frac{1}{7}} = \frac{12}{7}$

8. $\frac{\frac{99}{100}}{\frac{9}{10}} = \frac{11}{10}$

3. $\frac{\frac{2\frac{1}{3}}{1\frac{1}{6}}}{\frac{1}{6}} = 2$

6. $\frac{\frac{5\frac{1}{2}}{1\frac{1}{12}}}{\frac{1}{12}} = 6$

Aufgabe 4

1. $\frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3} - \frac{2}{9} + \frac{3}{4} \cdot 1\frac{7}{9} = \frac{5}{3}$
2. $5\frac{1}{2} - \frac{3}{7} : \frac{8}{21} + 1\frac{9}{16} : 3\frac{3}{4} = \frac{115}{24}$
3. $1\frac{3}{5} : \frac{4}{15} + \frac{11}{12} - 5\frac{2}{3} + \frac{1}{8} \cdot 4 = \frac{7}{4}$
4. $3\frac{5}{12} - 2\frac{5}{6} + 1\frac{1}{3} : \frac{4}{9} - 2\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

Aufgabe 5

1. $(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}) \cdot (\frac{9}{11} - \frac{3}{7}) = \frac{15}{77}$
2. $(\frac{1}{8} + \frac{7}{12}) : (5 - \frac{3}{4}) = \frac{1}{6}$
3. $\frac{4}{7} \cdot ((1\frac{1}{2} - \frac{5}{9}) : 4\frac{1}{4}) = \frac{8}{63}$
4. $\frac{4}{5} : [(\frac{5}{8} - \frac{1}{3}) \cdot 12] = \frac{8}{35}$
5. $\frac{3}{4} \cdot (2\frac{1}{2} : 1\frac{1}{4}) = \frac{3}{2}$

Aufgabe 6

1. $1\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{4} + \frac{5}{8} = 4$
2. $2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{4} \cdot 1\frac{3}{5} = \frac{9}{2}$
3. $1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{3} - 1\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{4} = \frac{1}{3}$
4. $5\frac{1}{2} \cdot 3 - 3\frac{1}{3} \cdot 4 = \frac{19}{6}$
5. $\frac{2}{3} \cdot 5 - 4 \cdot \frac{1}{3} = 2$
6. $6 \cdot 2\frac{1}{3} - 1\frac{1}{4} \cdot 8 = 4$
7. $6 \cdot \frac{4}{7} - 2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{202}{63}$
8. $3\frac{3}{4} \cdot 2 - 1\frac{2}{7} \cdot 3 = \frac{51}{14}$
9. $2\frac{3}{4} : 2 + \frac{5}{8} = 2$
10. $\frac{4}{5} : 2 - \frac{2}{5} : 3\frac{1}{3} = \frac{7}{25}$
11. $3 : 5\frac{1}{2} - 2 : 3\frac{2}{3} = 0$
12. $4 : 9 + \frac{1}{2} : \frac{9}{10} = 1$
13. $4 \cdot \frac{2}{3} - 4 : 6 = 2$
14. $\frac{4}{5} : 3 + 2 : 5 = \frac{2}{3}$
15. $4 : \frac{3}{8} - \frac{5}{3} : 10 = \frac{21}{2}$
16. $8 : 3 - \frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{7}{6}$

Aufgabe 7

1. $\frac{\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7}}{\frac{5}{14}} = \frac{3}{10}$

5. $\frac{\frac{1}{8} \cdot (\frac{1}{32} + \frac{3}{4})}{(\frac{1}{5} - \frac{2}{25}) \cdot \frac{1}{3}} = 4$

2. $\frac{1\frac{3}{4} + \frac{5}{6}}{\frac{1}{4}} = \frac{31}{3}$

6. $\frac{4 + (\frac{1}{3} \cdot (2\frac{3}{4} - 1\frac{3}{8}))}{(2\frac{1}{3} : \frac{7}{9}) \cdot ((\frac{1}{4} + 2\frac{5}{8}) - 2)} = \frac{107}{63}$

3. $\frac{\frac{8}{9}}{3\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = \frac{16}{63}$

7. $\frac{(\frac{4}{7} + 2\frac{1}{2}) \cdot \frac{1}{3} + 1}{\frac{2}{5} \cdot (1\frac{3}{4} - \frac{5}{6})} = \frac{425}{77}$

4. $\frac{(\frac{3}{5} - \frac{5}{10}) \cdot \frac{2}{5}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$

2.2 Potenzen Lösung

Autor: Katja Matthes

Aufgabe 1

1. $3x^4 - x^4 - x^3(x+2) = x^4 - 2x^3$

2. $-12a^2 + 3a(a+1) = -9a^2 + 3a$

3. $ax^n + 4x^n = (a+4)x^n$

4. $(1-t)^2 - \frac{1}{2}(1-t)^2 = \frac{1}{2}(1-t)^2$

5. $a(x+t)^k - b(x+t)^k = (a-b)(x+t)^k$

6. $tx^3 - 3x^2 + 2tx^3 - 4x^2 = 3tx^3 - 7x^2$

7. $t^3 \cdot t^4 - t^5(t^2+1) = -t^5$

8. $x^2 \cdot x^3 \cdot x^4 = x^9$

9. $3a^k \cdot a^{k-1} \cdot a = 3a^{2k}$

10. $b^n \cdot b^{2n+1} = b^{3n+1}$

11. $(x+1)^{n-1} \cdot (x+1)^{n+1} = (x+1)^{2n}$

2 Basismathematik

$$12. \quad \left(\frac{x}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{x}{3}\right)^2 = \left(\frac{x}{3}\right)^6$$

$$13. \quad t^2 \cdot x^2 \cdot t^n \cdot x^{n-1} = t^{2+n} x^{n+1}$$

$$14. \quad a \cdot b^k \cdot a^{2n} \cdot b^{k-3} = a^{2n+1} \cdot b^{2k-3}$$

$$15. \quad (x-2)^n \cdot (x-2)^{1-n} = x-2$$

$$16. \quad 0,3^6 \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^6 = 1$$

$$17. \quad 2^x \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^x \cdot 5 = 5^{x+1}$$

$$18. \quad 2^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 2$$

$$19. \quad \left(\frac{x}{4}\right)^4 \cdot 4^6 = 4^2 x^4$$

$$20. \quad 2^n \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^n \cdot x = x^{n+1}$$

$$21. \quad 9 \cdot 3^{n+1} = 3^{n+3}$$

$$22. \quad (a-b)^9 \cdot (a-b) = (a-b)^{10}$$

$$23. \quad \left(\frac{a-b}{c}\right)^{2k} \cdot \left(\frac{c}{a-b}\right)^{2k} = 1$$

Aufgabe 2

1. n gerade:

$$\begin{aligned}(a-b)^n + (b-a)^n &= (a-b)^n + (-1)^n \cdot (a-b)^n \\ &= (a-b)^n + (a-b)^n \\ &= 2(a-b)^n\end{aligned}$$

n ungerade:

$$\begin{aligned}(a-b)^n + (b-a)^n &= (a-b)^n + (-1)^n \cdot (a-b)^n \\ &= (a-b)^n - (a-b)^n \\ &= 0\end{aligned}$$

2. n gerade:

$$\begin{aligned}
& (x-2)^n + (2x-4)^n - (2-x)^n \\
&= (x-2)^n + (2x-4)^n - (-1)^n \cdot (x-2)^n \\
&= (x-2)^n + (2x-4)^n - (x-2)^n \\
&= (2x-4)^2
\end{aligned}$$

 n ungerade:

$$\begin{aligned}
& (x-2)^n + (2x-4)^n - (2-x)^n \\
&= (x-2)^n + 2^n \cdot (x-2)^n - (-1)^n \cdot (x-2)^n \\
&= (x-2)^n + 2^n \cdot (x-2)^n + (x-2)^n \\
&= 2(x-2)^n + 2^n(x-2) \\
&= (2+2^n)(x-2)^n
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

- | | |
|---|---|
| 1. $\frac{a^6}{a^3} = a^3$ | 12. $\frac{2,5^4}{0,5^4} = 5^4$ |
| 2. $\frac{x^{2n+1}}{x^n} = x^{n+1}$ | 13. $\frac{(10ab)^k}{(4b)^k} = \left(\frac{5}{2}a\right)^k$ |
| 3. $\frac{15e^{x+1}}{5e^x} = 3e$ | 14. $\left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}$ |
| 4. $\frac{x^4}{x^7} = x^{-3}$ | 15. $\left(\frac{-1}{a-b}\right)^3 = -(a-b)^{-3}$ |
| 5. $\frac{2a^{1-2n}}{4a^{n+1}} = \frac{1}{2}a^{-3n}$ | 16. $\left(\frac{x}{2}\right)^3 : \left(\frac{x}{3}\right) = \frac{3}{8}x^2$ |
| 6. $\frac{a^4b^{4n+3}}{a^nb^{2n-1}} = a^{4-n}b^{2n+4}$ | 17. $(-5^2)^3 = -5^6$ |
| 7. $\frac{81}{3^{x+3}} = 3^{1-x}$ | 18. $3(c^4)^3 - 6c^{12} = -3c^{12}$ |
| 8. $\left(\frac{(a-b)^3}{(a-b)^{n-1}} = a-b\right)^{4-n}$ | 19. $(3b^2c^{n-1})^4 = 81b^8c^{4n-4}$ |
| 9. $\frac{(ab)^3}{x^2y} \cdot \frac{(xy)^2}{a^4b^2} = \frac{by}{a}$ | 20. $\left(\frac{7a^2}{49b^3}\right)^2 = \frac{a^4}{49b^6}$ |
| 10. $\frac{a^{n+1}}{a^n} = a$ | 21. $\left(\frac{-1}{c^3}\right)^{2n} = \frac{1}{c^{6n}}$ |
| 11. $\frac{10^3}{2^3} = 5^3$ | 22. $(3b^{n+1} \cdot c^{n-1})^2 = 9b^{2n+2}c^{2n-2}$ |

$$23. \quad (x^2 y^3 z^2)^5 = x^{10} y^{15} z^{10}$$

$$28. \quad \left(\frac{4-12x}{64}\right)^3 = 1 - 3x)^3$$

$$24. \quad (0,5e^{x+2})^2 = 0,25e^{2x+4}$$

$$29. \quad \frac{(2x-4)^5}{(2-x)^3} = -32(x-2)^2$$

$$25. \quad \left(\frac{2}{x^2}\right)^5 - \left(\frac{3}{x^5}\right)^2 = \frac{23}{x^{10}}$$

$$26. \quad \left[\left(-\frac{3}{t}\right)^3\right]^4 \cdot \frac{t^9}{81} = \frac{3^8}{t^3}$$

$$30. \quad \frac{(4ab)^4}{(6a^2)^4} \cdot \frac{5}{b^4} = \frac{80}{81} a^{-4}$$

$$27. \quad \frac{(ab)^2}{x^3 y} \cdot \frac{x^5 y^2}{a^2 b} = bx^2 y$$

$$31. \quad (a-b^2) \cdot (a-b^2)^n = (a-b^2)^{n+1}$$

Aufgabe 4

$$1. \quad \left(\frac{1}{2}x^2\right)^5 + \frac{1}{8}(x^2)^5 + (2x^5)^2 = \frac{133}{32}x^{10}$$

$$2. \quad \frac{1}{4} \cdot 2^4(2^2)^3 = 2^8$$

$$3. \quad (3^{n+1})^2 = 3^{2n+2}$$

$$4. \quad (3x^2 - 5x)(1 - x^3) + (x^2 + 3x^4)x^3 = 3x^7 - 2x^5 + 5x^4 + 3x^2 - 5x$$

$$5. \quad a^{2r}b^r(a^{2r} - a^r b^{r+1} + b^{2r+2}) = a^{4r}b^r - a^{3r}b^{2r+1} + a^{2r}b^{3r+2}$$

Aufgabe 5

$$1. \quad -3x^3 \cdot x^2 + 5x \cdot x^4 = 2x^5$$

$$6. \quad (2x+6)^2 + (x+3)^2 = 5(x+3)^2$$

$$2. \quad 4t^{n-4}t^3 - t \cdot t^{n-2} = 3t^{n-1}$$

$$7. \quad \frac{5a-20}{4a-16} = \frac{5}{4}$$

$$3. \quad 2x^5 y^3 y - 4x^3 y^2 x^2 y^2 = -2x^5 y^4$$

$$8. \quad (3t^2 - 3t^3)^2 = 9t^4(1-t)^2$$

$$4. \quad \frac{4x^5 + 6x^4 - 12x^2}{2x^2} = 2x^3 + 3x^2 - 6$$

$$9. \quad \frac{(2x-6)^2}{4} = (x-3)^2$$

$$5. \quad (9 \cdot 3^n - 3^{n+1}) : 3^{n-1} = 18$$

$$10. \quad \frac{(-2a-4)^3}{a+2} = -8(a+2)^2$$

Aufgabe 6

1. $3a^2 + 6a^3 = 3a^2(1 + 2a)$

5. $x^4 + 2x^3 = x^3(x + 2)$

2. $\frac{1}{2}e^x - \frac{1}{4}e^{x+1} = \frac{1}{4}e^x(2 - e)$

6. $x^{n+3} - 4x^{n+2} = x^{n+2}(x - 4)$

3. $a^{5b} + 3a^b = a^b(a^{4b} + 3)$

7. $-6t^{n+2} + 18t^{2-n} = 6t^2(-t^n + 3t^{-n})$

4. $2^x + 2^{x+1} = 3 \cdot 2^x$

8. $e^x - e^{3x} = e^x(1 - e^{2x})$

Aufgabe 7

1. $\frac{x^4 - x^3}{x^2 - x} = x^2$

5. $\frac{x^4 - 6x^3}{5x - 30} = \frac{x^3}{5}$

2. $\frac{(3x^2 - 6x^3)^2}{9x^4} = (1 - 2x)^2$

6. $\frac{a^7 b^3 - a b^7}{a^5 b - a^2 b^4} = \frac{a^6 b^2 - b^6}{a^4 - a b^3}$

3. $\frac{5x+15}{x+3} = 5$

7. $\frac{3+6x^2}{2x} - \frac{6x^3-5}{3x^2} - \frac{2x^4-2}{2x^3} = \frac{9x^2+10x+6}{6x^3}$

4. $\frac{e^{3x} + e^{2x}}{e^{2x}} = e^x + 1$

8. $\frac{32}{2^{n+5}} + \frac{2^{-n+3}}{8} = \frac{1}{2^{n-1}}$

Aufgabe 8

1. $y = \frac{1}{4}x^4 - 2tx^3 + \frac{9}{2}t^2x^2$ mit $x = 3t \Rightarrow y = \frac{27}{4}t^4$

2. $y = e^{x^2-t^2} + 3e^{5t-(t-x)}$ mit $x = -t \Rightarrow y = 1 + 3e^{3t}$

3. $y = \frac{3}{2t^2}x^4 - \frac{4}{t}x^3 + 3x^2 - 4$ mit $x = \frac{1}{3}t \Rightarrow y = \frac{11}{54}t^2 - 4$

4. $y = \frac{e^{3tx} + 4e^3}{tx-4}$ mit $x = \frac{1}{t} \Rightarrow y = -\frac{5}{3}e^3$

5. $y = \frac{tx^3}{2(x+t)^2}$ mit $x = -3t \Rightarrow y = -\frac{27}{8}t^2$

Aufgabe 9

1. $a^n + a^{4-n} + a^{2n} = a^{2n}(a^{-n} + a^{4-3n} + 1)$

2. $a^{k-2} + a^{3k} + a^{-k-1} = a^{-k}(a^{2k-2} + a^{4k} + a^{-1})$

2 Basismathematik

$$3. \quad a^3 + a^{1-n} + a^{n+4} = a^{n+3}(a^{-n} + a^{-2n-2} + a)$$

$$4. \quad \frac{3}{2}x^4 + \frac{3}{4}x^3 + \frac{1}{8}x^2 = \frac{1}{8}x^2(12x^2 + 6x + 1)$$

$$5. \quad e^{3x} - 2e^{-x} = e^{-x}(e^{4x} - 2)$$

$$6. \quad te^{2x} - 2e^{x+1} = e^x(te^x - 2e)$$

Aufgabe 10

$$1. \quad \frac{1}{4} \cdot 2^{-4} \cdot (2^2)^3 = 1$$

$$2. \quad (e^x - e^{-x} + 5)e^x = e^{2x} + 5e^x - 1$$

$$3. \quad 2^x(2^{-1} + 2^x) = 2^{x-1} + 2^{2x}$$

$$4. \quad (x^4 + x^{-2})(x^3 - x^{-3}) = x^7 - x^{-5}$$

Aufgabe 11

$$1. \quad a^2 \cdot (a^2)^{-2} + 3a \left(\frac{1}{a}\right)^3 = 4a^{-2}$$

$$6. \quad \frac{1}{e^{2x}} + 3(e^{-x})^2 - \left(\frac{2}{e^x}\right)^2 = 0$$

$$2. \quad \frac{1}{18} \cdot (3^2)^2 + \frac{1}{2} \cdot 3^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 6$$

$$7. \quad e^{-x} \cdot e^{-x+2} \cdot e^{2x-3} = e^{-1}$$

$$3. \quad (x^2 \cdot x^{-3})^{-2} + \left(\frac{3}{x^2}\right)^{-1} = \frac{4}{3}x^2$$

$$8. \quad 4t^2 \cdot t^{-3} - t \cdot t^{-2} = 3t^{-1}$$

$$4. \quad a^5 \cdot a^{-2} + 4a^2 \cdot a = 5a^3$$

$$9. \quad 6x^3 \cdot x^{-1} - 8x^4 \cdot x^{-2} = -2x^2$$

$$5. \quad \left(\frac{2}{x}\right)^3 + \left(\frac{1}{x}\right)^3 = \frac{9}{x^3}$$

$$10. \quad (t^7 - t^4) \cdot t^{-3} = t^4 - t$$

Aufgabe 12

$$1. \quad \frac{-2^3 - 2 \cdot 4}{2 \cdot 2^3} = -1$$

$$3. \quad \frac{e^{3x+1}}{e^{-x+2}} = e^{4x-1}$$

$$2. \quad \frac{(1-x)^2}{(x-1)} = x - 1$$

$$4. \quad \frac{1,5e^{3x} - e^x}{1,5e^{3x}} = 1 - \frac{2}{3}e^{-2x}$$

Aufgabe 13

1. $a^4 \cdot a^{-6} - 3a^3 \cdot a^{-5} + a^2 = -2a^{-2} + a^2$
2. $(a^{n+2} - 4a^n - 2a^{2-n}) \cdot \frac{a^{-2}}{2} = \frac{1}{2}a^n - 2a^{n-2} - a^{-n}$
3. $4x^{-4}x^7 - 0,5x^4x^{-1} + \left(\frac{1}{x^2}\right)^{1,5} = 3,5x^3 + \frac{1}{x^3}$
4. $\frac{a^{n+1}}{a} + \frac{a^{2n-1}}{a^{n+2}} + (a^{n-1})^2 \cdot a^{2-n} = 2a^n + a^{n-3}$
5. $5 \cdot 2^{n+1} - 2^n + 8 \cdot 2^{n-2} - 12 \cdot 2^{n-1} = 5 \cdot 2^n$
6. $\frac{2^{2k}}{8} \cdot 2^{3-k} + 2 \cdot 2^{k-1} = 2^{k+1}$

2.3 Binomische Formeln Lösung

Autor: Katja Matthes

Aufgabe 1

1. $(4x + 3y^3)^2 = 16x^2 + 24xy^3 + 9y^6$
2. $-(x^4 - 2)^2 = -x^8 + 4x^4 - 4$
3. $(x^2 - x^3)(x^2 + x^3) = x^4 - x^6$
4. $(3x^2 + 2t)^2 = 9x^4 + 12x^2t + 4t^2$
5. $-\frac{1}{2}(x^2 - 4)^2 = -\frac{1}{2}x^4 + 4x^2 - 8$
6. $\left(-\frac{1}{2}(x^2 - 4)\right)^2 = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 4$
7. $x^2y^2(x^4 + 2x^2y + y^2) = (x^3y + xy^2)^2$

Aufgabe 2

1. $(x - 3)^n \cdot (x + 3)^n = (x^2 - 9)^n$

2 Basismathematik

2. $\frac{(a^2-b^2)^3}{(a-b)^3} = (a+b)^3$
3. $\frac{(4-x^2)^n}{(2-x)^n} = (2+x)^n$
4. $\frac{(c-1)^{n-1}}{(c^2-1)^{n-1}} = \frac{1}{(c+1)^{n-1}}$
5. $\frac{(a^{2n}-b^{2n})^2}{(a^n-b^n)^2} = (a^n+b^n)^2$
6. $(a^3-ab^2)(a+b)^2 = a(a-b)(a+b)^3$
7. $\frac{[(x-y)^2]^k}{(x^2-y^2)^k} = \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^k$
8. $(a+b)^4(a-b)^4(a^2-b^2)^5 = (a^2-b^2)^9$

Aufgabe 3

1. $(3x-6)\left(\frac{1}{4}x^2-x+1\right) = \frac{3(x-2)^3}{4}$
2. $a^2-2a^3+a^4 = a^2(1-a)^2$
3. $3a^3-12a^9 = 3a^2(1-2a^3)(1+2a^3)$
4. $x^4-a^2 = (x^2-a)(x^2+a)$
5. $3-x^2 = (\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)$
6. $x^{2n}+4x^n+4 = (x^n+2)^2$
7. $x^{n+2}-6x^{n+1}+9x^n = x^n(x-3)^2$
8. $e^{2x}-1 = (e^x-1)(e^x+1)$
9. $x^2e^x+2xe^x+e^x = e^x(x+1)^2$

Aufgabe 4

1. $\frac{a^3+2a^2b+ab^2}{(a+b)^2} = a$

2. $\frac{a^4 - a^2 b^2}{ab - a^2} = -a(a + b)$
3. $\frac{t^3 + 6t^2 + 9t}{t^2 - 9} = \frac{t(t+3)}{t-3}$
4. $\frac{x^{2n} - 10x^n + 25}{x^{2n} - 25} = \frac{x^n - 5}{x^n + 5}$
5. $\frac{x^6 - t^2}{x^4 + tx} = \frac{x^3 - t}{x}$
6. $\frac{x^{n+3} - x^{n+1}}{x^{n+1} + x^n} = x(x - 1)$
7. $\frac{(x^2 + 8xy + 16y^2)}{(2x - 3y)^{-2}} : \frac{x^2 - 16y^2}{2x - 3y} = \frac{(x + 4y)(2x - 3y)^3}{x - 4y}$
8. $\frac{4t^2 - 4}{t^2 + 2t + 1} = \frac{4(t-1)}{t+1}$
9. $\frac{x^{n-1} - x^n}{x^n - x^{n+2}} = \frac{1}{x(1+x)}$
10. $\frac{2(a^2 + b^2)^2}{a^5 - ab^4} = \frac{2(a^2 + b^2)}{a(a^2 - b^2)}$
11. $\frac{x^4 - x^3}{x^4 - x^2} = \frac{x}{x+1}$
12. $\frac{x^3 y - xy^5}{x^3 y^2 - x^2 y^4} = \frac{x+y^2}{xy}$
13. $\frac{am - an + bm - bn}{a^2 - b^2} = \frac{m-n}{a-b}$

Aufgabe 5

1. $(e^x + e^{-x})^2 = e^{2x} + e^{-2x} + 2$
2. $(a^2 - a^{-2})^2 = a^4 - 2 + a^{-4}$
3. $(x^{-2} - 3x)(x^{-2} + 3x) = x^{-4} - 9x^2$
4. $(2^{-x} + 2^x)(2^{-x} - 2^x) = 2^{-2x} - 2^{2x}$

Aufgabe 6

$$1. \quad \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{25(x-y)^2}{(x+y)(a-b)^3}$$

$$2. \quad \left(\frac{x-y}{a-b}\right)^5 \cdot \left(\frac{x-y}{5}\right)^{-2} \cdot \frac{(a-b)^2}{(x^2-y^2)} = e^x + e^{-x}$$

2.4 Polynomdivision Lösungen

Autor: Marko Rak

$$1. \quad \begin{array}{r} x^3 \\ - x^3 - x^2 \\ \hline - x^2 \\ x^2 + x \\ \hline x + 1 \\ - x - 1 \\ \hline 0 \end{array} : (x+1) = x^2 - x + 1$$

$$2. \quad \begin{array}{r} x^4 \\ - x^4 - x^3 - x^2 \\ \hline - x^3 - x^2 - x \\ x^3 + x^2 + x \\ \hline 0 \end{array} : (x^2 + x + 1) = x^2 - x + \frac{1}{x^2 + x + 1}$$

$$3. \quad \begin{array}{r} x^2 \\ - x^2 - 3x \\ \hline - 3x - 9 \\ 3x + 9 \\ \hline 0 \end{array} : (x+3) = x - 3$$

$$\begin{array}{r}
4. \quad \begin{array}{r} 6x^3 - 5x^2 - 36x + 35 \\ - 6x^3 + 14x^2 \\ \hline 9x^2 - 36x \\ - 9x^2 + 21x \\ \hline - 15x + 35 \\ 15x - 35 \\ \hline 0 \end{array} : (3x - 7) = 2x^2 + 3x - 5
\end{array}$$

$$5. (x^5 - x^2 - 2x + 1) : (x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x + 1) = x + 1; \text{Rest} : x^3$$

$$\begin{array}{r}
6. \quad \begin{array}{r} x^5 - x^3 + x^2 + x - 2 \\ - x^5 + x^3 \\ \hline x^2 + x - 2 \\ - x^2 \quad + 1 \\ \hline x - 1 \end{array} : (x^2 - 1) = x^3 + 1 + \frac{x-1}{x^2-1}
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
7. \quad \begin{array}{r} 3x^3 + 2x^2 + 4x + 9 \\ - 3x^3 - 5x^2 \\ \hline - 3x^2 + 4x \\ 3x^2 + 5x \\ \hline 9x + 9 \\ - 9x - 15 \\ \hline - 6 \end{array} : (3x + 5) = x^2 - x + 3 + \frac{-6}{3x+5}
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
8. \quad \begin{array}{r} 2x^5 + 8x^4 + x^3 - x^2 + 12x + 3 \\ - 2x^5 - 8x^4 - 2x^3 \\ \hline - x^3 - x^2 + 12x \\ x^3 + 4x^2 + x \\ \hline 3x^2 + 13x + 3 \\ - 3x^2 - 12x - 3 \\ \hline x \end{array} : (x^2 + 4x + 1) = 2x^3 - x + 3 + \frac{x}{x^2+4x+1}
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
9. \quad \left(\begin{array}{r} x^6 - 2x^5 + 9x^4 - 8x^3 + 15x^2 \\ -x^6 + x^5 - 5x^4 \end{array} \right) : (x^2 - x + 5) = x^4 - x^3 + 3x^2 \\
\hline
\begin{array}{r} -x^5 + 4x^4 - 8x^3 \\ x^5 - x^4 + 5x^3 \end{array} \\
\hline
\begin{array}{r} 3x^4 - 3x^3 + 15x^2 \\ -3x^4 + 3x^3 - 15x^2 \end{array} \\
\hline
0
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
10. \quad \left(\begin{array}{r} 2x^7 - x^6 + 3x^5 - \frac{1}{2}x^4 + x^3 \\ -2x^7 + x^6 - 2x^5 \end{array} \right) : (2x^3 - x^2 + 2x) = x^4 + \frac{1}{2}x^2 \\
\hline
\begin{array}{r} x^5 - \frac{1}{2}x^4 + x^3 \\ -x^5 + \frac{1}{2}x^4 - x^3 \end{array} \\
\hline
0
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
11. \quad \left(\begin{array}{r} x^7 - 6x^5 + x^4 - 11x^2 - 3x + 1 \\ -x^7 + 2x^4 \end{array} \right) : (x^3 + 2) = x^4 - 6x^2 - x + \frac{x^2 - x + 1}{x^3 + 2} \\
\hline
\begin{array}{r} -6x^5 - x^4 - 11x^2 \\ 6x^5 + 12x^2 \end{array} \\
\hline
\begin{array}{r} -x^4 + x^2 - 3x \\ x^4 + 2x \end{array} \\
\hline
x^2 - x
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
12. \quad \left(\begin{array}{r} 3x^5 + 6x^4 + \frac{11}{3}x^3 + 4x^2 + \frac{20}{3}x \\ -3x^5 - x^4 - 4x^2 \end{array} \right) : (3x^4 + x^3 + 4x) = x + \frac{5}{3} + \frac{2x^3}{3x^4 + x^3 + 4x} \\
\hline
\begin{array}{r} 5x^4 + \frac{11}{3}x^3 + \frac{20}{3}x \\ -5x^4 - \frac{5}{3}x^3 - \frac{20}{3}x \end{array} \\
\hline
2x^3
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
13. \quad \left(\begin{array}{r} \frac{1}{6}x^4 + \frac{11}{36}x^3 - \frac{23}{18}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{6}x^4 + \frac{4}{9}x^3 - \frac{2}{9}x^2 \end{array} \right) : \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{2}x + 1 \\
\hline
\begin{array}{r} \frac{3}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x \\ -\frac{3}{4}x^3 + 2x^2 - x \end{array} \\
\hline
\begin{array}{r} \frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{2}{3} \end{array} \\
\hline
0
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 14. \quad \left(-\frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x \right) : \left(\frac{1}{2}x^2 + x \right) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \\
 \hline
 \quad \quad \quad \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 \\
 \quad \quad \quad - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 15. \quad \left(\frac{1}{2}x^5 - \frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{15}{4}x + \frac{7}{4} \right) : \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \right) = x^4 - x^3 - x^2 + x - 7 \\
 \hline
 \quad \quad \quad -\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{4}x^3 \\
 \quad \quad \quad \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{4}x^3 \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^2 \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \frac{1}{2}x^2 - \frac{15}{4}x \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad -\frac{7}{2}x + \frac{7}{4} \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \frac{7}{2}x - \frac{7}{4} \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0
 \end{array}$$

3 Quadratische Gleichungen Lösungen

Autor: Marko Rak

Es werden nur die Lösungsansätze und -hilfen aufgeführt.

1. $x^2 - x - 2 = 0$
 $x_1 = -1, x_2 = 2$
2. $4x^2 + 16x - 84 = 0$
 $x_1 = -7, x_2 = 3$
3. $\frac{1}{2}x^2 + 3x + 4 = 0$
 $x_1 = -4, x_2 = -2$
4. $4x^2 + 48x + 144 = 0$
 $x_{12} = -6$
5. $(x - \sqrt{157})^2 = 0$
 $x_{12} = \sqrt{157}$
6. $\frac{7}{3}x^3 + \frac{49}{3}x^2 + 35x + 21 = 0$
rate $x_1 = -1$,
dann Polynomdivision:
 $x^2 + 6x + 9 = 0$
 $x_{23} = -3$
7. $\frac{7}{4}x^2 + 7x = -7$
 $x_{12} = -2$
8. $|x^2| = 4$
 $x_1 = 2, x_2 = -2$
9. $|x|^2 = 4$
 $x_1 = -2, x_2 = 2$
10. $|x^2 - 4| = 2$
gilt genau dann, wenn
- $x^2 - 4 = \pm 2$
 $x_{12} = \pm\sqrt{2}, x_{34} = \pm\sqrt{6}$
11. $x^2 = x + 12$
 $x_1 = -3, x_2 = 4$
12. $3x^2 + 4x + 1 = 0$
 $x_1 = -\frac{1}{3}$
 $x_2 = -1$
13. $x^5 - 25x^3 + 144x = 0$
klammere $x_1 = 0$ aus,
substituiere $u = x^2$ zu
 $u^2 - 25u + 144 = 0$
 $u_1 = 9, u_2 = 6$
nach Rücksubstitution:
 $x_{23} = \pm 3, x_{45} = \pm\sqrt{6}$
14. $(x - \pi)(x + \pi) = 0$
 $x_{12} = \pm\pi$
15. $\frac{x^3 - 2x^2}{x - 2} + \frac{2x^2 + 4x}{x + 2} = -1$
Polynomdivision der Summanden:
 $x^2 - 2x = 1$
 $x_{12} = 1 \pm \sqrt{2}$
16. $x^4 - 14x^3 + 59x^2 - 70x = 0$
klammere $x_1 = 0$ aus,
rate $x_2 = 2$
dann Polynomdivision:
 $x^2 - 12x + 35 = 0$
 $x_3 = 5, x_4 = 7$

3 Quadratische Gleichungen Lösungen

17. $3x^7 - 42x^5 + 147x^3 = 0$

klammere $x_{123} = 0$ aus,

substituiere $u = x^2$ zu

$$u^2 - 14u + 49 = 0$$

$$u_{12} = \pm 7$$

nach Rücksubstitution:

$$x_{45} = \sqrt{7}, x_{67} = -\sqrt{7}$$

18. $x^{12} = 4096x_{1..12} = 2$

Hinweis: 2er-Potenzen wichtig!

19. $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 = 0$

$$\text{rate } x_1 = -1,$$

dann Polynomdivision:

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$\text{rate } x_2 = -1,$$

dann Polynomdivision:

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$x_{34} = -1$$

20. $(\sqrt{2}x + 2\sqrt{2})^2 = 0$

klammere $\sqrt{2}$ aus:

$$x_{12} = -2$$

21. $2mx^2 - 12mx + 18m = 0$

Fallunterscheidung:

a) $m = 0,$

dann ist für alle x die Gleichung erfüllt

b) $m \neq 0,$

nach Division durch **2m**:

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$x_{12} = 3$$

22. $\frac{1}{x^2} + 1 = 2$

Erweitern der Gleichung mit x^2 :

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x_{12} = \pm 1$$

23. $\frac{4}{x} + x = 4$

mit x erweitern und auf eine Seite bringen:

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$x_{12} = 2$$

4 Lineare Gleichungssysteme Lösungen

Autor: Marko Rak

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Lösungen folgender Gleichungssysteme.

1.

x_1	x_2	x_3		
1	5	2	3	←
2	-2	4	5	←
1	1	2	1	$\cdot(-1)$ $\cdot(-2)$
1	1	2	1	
0	4	0	2	$\cdot(1)$
0	-4	0	3	←
1	1	2	1	
0	4	0	2	
0	0	0	5	

Widerspruch in der letzten Zeile \Rightarrow keine Lösung

2.

x_1	x_2	x_3		
7	8	5	3	←
3	-3	2	1	$\cdot(-\frac{7}{3})$ $\cdot(-6)$
18	21	13	8	←
3	-3	2	1	
0	15	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	←
0	39	1	2	$\cdot(-\frac{15}{39})$
3	-3	2	1	
0	39	1	2	
0	0	$-\frac{2}{39}$	$-\frac{4}{39}$	

$$\begin{aligned} x_3 &= 2 \\ x_2 &= 0 \\ x_1 &= -1 \end{aligned}$$

3.

x_1	x_2	x_3	x_4				
1	1	3	4	-3	$\cdot(-2)$	$\cdot(-2)$	$\cdot(-1)$
2	3	11	5	2	\leftarrow		
2	1	3	2	-3		\leftarrow	
1	1	5	2	1			\leftarrow
1	1	3	4	-3			
0	1	5	-3	8	$\cdot(1)$		
0	-1	-3	-6	3	\leftarrow		
0	0	2	-2	4			
1	1	3	4	-3			
0	1	5	-3	8			
0	0	2	-2	4	$\cdot(-1)$		
0	0	2	-9	11	\leftarrow		
1	1	3	4	-3			
0	1	5	-3	8			
0	0	2	-2	4			
0	0	0	-7	7			

$$x_4 = -1$$

$$x_3 = 1$$

$$x_2 = 0$$

$$x_1 = 2$$

4.

x_1	x_2	x_3				
1	2	3	-4	$\cdot(-5)$	$\cdot(-7)$	$\cdot(-2)$
5	-1	1	0	\leftarrow		
7	3	7	-8		\leftarrow	
2	3	-1	11			\leftarrow
1	2	3	-4			
0	-11	-14	20		\leftarrow	
0	-11	-14	20	\leftarrow		
0	-1	-7	19	$\cdot(-11)$	$\cdot(-11)$	
1	2	3	-4			
0	-1	-7	19			
0	0	63	-189	$\cdot(-1)$		
0	0	63	-189	\leftarrow		
1	2	3	-4			
0	-1	-7	19			
0	0	63	-189			
0	0	0	0			

$$\begin{aligned}x_3 &= -3 \\x_2 &= 2 \\x_1 &= 1\end{aligned}$$

5.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5			
-1	1	1	0	-1	0	·(1)	·(3)
1	-1	-3	2	-1	2	←	
0	3	-1	-5	-7	9		
3	-3	-5	2	5	2		←
-1	1	1	0	-1	0		
0	3	-1	-5	-7	9		
0	0	-2	2	-2	2	·(-1)	
0	0	-2	2	2	2	←	
-1	1	1	0	-1	0		
0	3	-1	-5	-7	9		
0	0	-2	2	-2	2		
0	0	0	0	4	0		

$$\begin{aligned}x_5 &= 0 \\x_4 &= t \\x_3 &= -1 + t \\x_2 &= \frac{8}{3} + 2t \\x_1 &= \frac{5}{3} + 3t\end{aligned}$$

6.

x_1	x_2	x_3	x_4				
1	-2	-3	0	-7	$\cdot(-2)$	$\cdot(2)$	$\cdot(-1)$
2	-1	2	7	-3	\leftarrow		
-2	1	3	3	8		\leftarrow	
1	4	5	-2	7			\leftarrow
1	-2	-3	0	-7			
0	3	8	7	11	$\cdot(1)$	$\cdot(-2)$	
0	-3	-3	3	-6	\leftarrow		
0	6	8	-2	14		\leftarrow	
1	-2	-3	0	-7			
0	3	8	7	11			
0	0	5	10	5	$\cdot(\frac{8}{5})$		
0	0	-8	-16	-8	\leftarrow		
1	-2	-3	0	-7			
0	3	8	7	11			
0	0	5	10	5			
0	0	0	0	0			

$$\begin{aligned}
 x_4 &= t \\
 x_3 &= 1 - 2t \\
 x_2 &= 1 + 3t \\
 x_1 &= -2
 \end{aligned}$$

7.

x_1	x_2	x_3				
1	-1	1	4	$\cdot(-1)$	$\cdot(-4)$	$\cdot(-2)$
1	2	1	13	\leftarrow		
4	5	4	43		\leftarrow	
2	4	2	26			\leftarrow
1	-1	1	4			
0	3	0	9	$\cdot(-3)$	$\cdot(-2)$	
0	9	0	27	\leftarrow		
0	6	0	18		\leftarrow	
1	-1	1	4			
0	3	0	9			
0	0	0	0			
0	0	0	0			

$$\begin{aligned}
 x_3 &= t \\
 x_2 &= 3 \\
 x_1 &= 7 - t
 \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Lösungen folgender Gleichungssysteme in Abhängigkeit von a und b .

1.

x_1	x_2	x_3			
2	-1	4	0	\leftarrow	
1	3	-1	0	$\cdot(-2)$	$\cdot(-7)$
7	7	4-a	0		\leftarrow
1	3	-1	0		
0	-7	6	0	$\cdot(-2)$	
0	-14	11-a	0	\leftarrow	
1	3	-1	0		
0	-7	6	0		
0	0	-1-a	0		

Fall 1: $a = -1$

$$\begin{aligned} x_3 &= t \\ x_2 &= \frac{6}{7}t \\ x_1 &= -\frac{11}{7}t \end{aligned}$$

Fall 2: $a \neq -1$

$$\begin{aligned} x_3 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ x_1 &= 0 \end{aligned}$$

2.

x_1	x_2	x_3			
1	1	1	0	$\cdot(-1)$	$\cdot(-a)$
1	a	1	4	\leftarrow	
a	3	a	-2		\leftarrow
1	1	1	0		
0	a-1	0	4		
0	3-a	0	-2		

Fall 1: $a = 1$ oder $a = 3$ ergibt keine Lösung.

Fall 2: $a \neq 1$ und $a \neq 3$

x_1	x_2	x_3		
1	1	1	0	
0	a-1	0	4	$\cdot(-\frac{3-a}{a-1})$
0	3-a	0	-2	\leftarrow
1	1	1	0	
0	a-1	0	4	
0	0	0	$\frac{2a-10}{a-1}$	

Fall 2a: $a = 5$

$$\begin{aligned} x_3 &= t \\ x_2 &= 1 \\ x_1 &= -1 - t \end{aligned}$$

Fall 2b: $a \neq 1$, $a \neq 3$ und $a \neq 5$ ergibt keine Lösung

3.

x_1	x_2	x_3			
1	-2	3	4	$\cdot(-2)$	$\cdot(-1)$
2	1	1	-2	\leftarrow	
1	a	2	b		\leftarrow
1	-2	3	4		
0	5	-5	-10	$\cdot(-\frac{2+a}{5})$	
0	2+a	-1	b-4	\leftarrow	
1	-2	3	4		
0	5	-5	-10		
0	0	1+a	2a+b		

Fall 1a: $a = -1$ und $b = 2$

$$\begin{aligned} x_3 &= t \\ x_2 &= -2 + t \\ x_1 &= -t \end{aligned}$$

Fall 1b: $a = -1$ und $b \neq 2$ ergibt keine Lösung

Fall 2: $a \neq -1$

$$\begin{aligned}x_3 &= \frac{2a+b}{1+a} \\x_2 &= \frac{b-2}{1+a} \\x_1 &= \frac{2a+b}{1+a}\end{aligned}$$

5 Betrag, Kreis, Ungleichungen

5.1 Betrag

1. $|x| = 7$
 $x_1 = 7, x_2 = -7$
2. $|x + 5| = 10$
 1. Fall:
 $(x + 5) = 10 \rightarrow x = 5$
 2. Fall:
 $-(x + 5) = 10 \rightarrow x = -15$
3. $|2x - 3| = 1$
 1. Fall:
 $(2x - 3) = 1 \rightarrow x = 2$
 2. Fall:
 $-(2x - 3) = 1 \rightarrow x = 1$
4. $|2x - 4| = 6x + 36$
 1. Fall:
 $(2x - 4) = 6x + 36 \rightarrow x = -10$
 2. Fall:
 $-(2x - 4) = 6x + 36 \rightarrow x = -4$

5.2 Kreis

1. a) $M(1|3); P(4|3)$
allgemeine Kreisgleichung: $(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2$
einsetzen: $(4 - 1)^2 + (3 - 3)^2 = r^2$
 $\rightarrow r = 3$
 $\hookrightarrow (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 3$
- b) $M(-1|5); P(6| - 4)$
einsetzen: $(6 + 1)^2 + (-4 - 5)^2 = r^2$

$$\rightarrow r = \sqrt{130}$$

$$\curvearrowright (x+1)^2 + (y-5)^2 = \sqrt{130}$$

c) $M(-2|-1); P(4|3)$
 einsetzen: $(4+2)^2 + (3+1)^2 = r^2$
 $\rightarrow r = \sqrt{52}$
 $\curvearrowright (x+2)^2 + (y+1)^2 = \sqrt{52}$

2. a) $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 5 = 4$
 nach binomischer Formel zu Kreisgleichung umstellen:
 $(x^2 - 4x) + (y^2 - 2y) = -1$
 $(x-2)^2 - 4 + (y-1)^2 - 1 = -1$
 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$

\curvearrowright Kreis mit $M(2|1)$ und $r = 2$

b) $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 10 = 1$
 nach binomischer Formel zu Kreisgleichung umstellen:
 $(x^2 + 6x) + (y^2 + 2y) = -9$
 $(x+3)^2 - 9 + (y+1)^2 - 1 = -9$
 $(x+3)^2 + (y+1)^2 = 1$

\curvearrowright Kreis mit $M(-3|-1)$ und $r = 1$

3. $P_1(6|7); P_2(2|9); P_3(-1|0)$

Aufstellen der Kreisgleichungen:

1. $(6 - x_m)^2 + (7 - y_m)^2 = r^2$
 2. $(2 - x_m)^2 + (9 - y_m)^2 = r^2$
 3. $(-1 - x_m)^2 + (-y_m)^2 = r^2$

Gleichsetzen von 1 und 2; 2 und 3:

$$(6 - x_m)^2 + (7 - y_m)^2 = (2 - x_m)^2 + (9 - y_m)^2$$

$$(2 - x_m)^2 + (9 - y_m)^2 = (-1 - x_m)^2 + (-y_m)^2$$

Auflösen und Zusammenfassen:

$$4y_m = 8x_m$$

$$84 - 6x_m = 18y_m$$

Umstellen nach x_m und Gleichsetzen:

$$\frac{1}{2}y_m = 14 - 3y_m$$

$$\curvearrowright y_m = 4$$

Einsetzen des Ergebnisses:

$$x_m = \frac{1}{2}y_m = \frac{1}{2} * 4 = 2$$

$$r = \sqrt{(6-2)^2 + (7-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\curvearrowright \text{Kreis: } (x-2)^2 + (y-4)^2 = 5$$

5.3 Ungleichungen

5.3.1 Ungleichungen mit einer Variablen

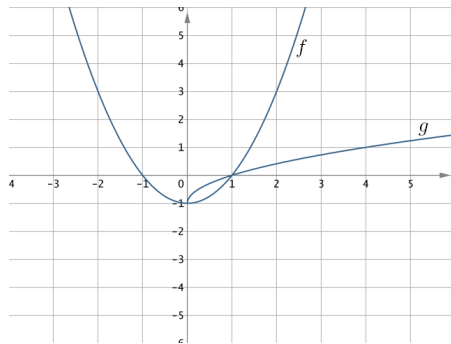
1. Aufgabe:

$$f : (x + 1)(x - 1) \leq 0$$

$$g : \sqrt{x} \geq 1$$

Lösung:

$$-1 \leq x \leq 1$$



2. Aufgabe:

$$f : \sqrt{\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 + \frac{21}{8}x + \frac{9}{8}} < \sqrt{\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{8}}$$

Zwischenschritte:

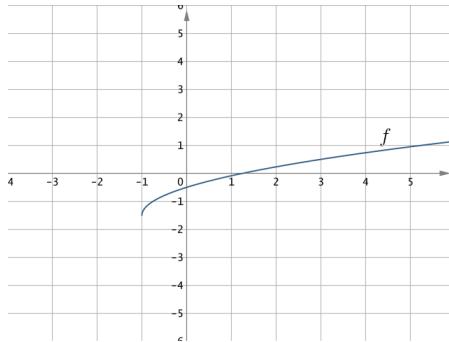
$$\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2(x+1)} < \frac{3}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

5 Betrag, Kreis, Ungleichungen

$$\sqrt{(x + 1)} < \frac{3}{2}$$

Lösung:

$$0 < x < \frac{5}{4}$$

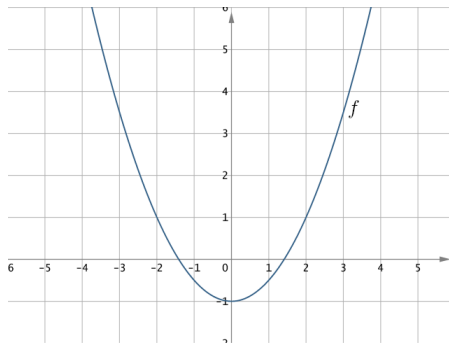


3. Aufgabe:

$$f : \frac{1}{2}x^2 - 1 > 0$$

Lösung:

$$x < \sqrt{2} \cup x > \sqrt{2}$$



4. Aufgabe:

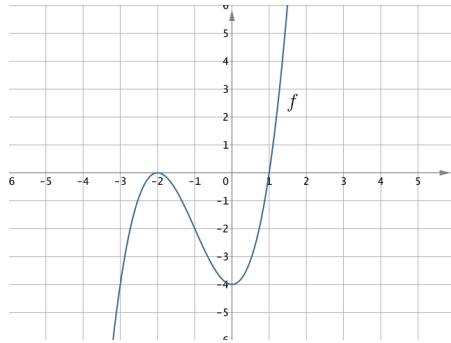
$$f : x^3 + 3x^2 - 4 > 0$$

Zwischenschritt:

$$(x - 1)(x + 2)^2 > 0$$

Lösung:

$$1 < x$$



5. Aufgabe:

$$f : x^3 + 3x^2 + 3x + 1 < 0$$

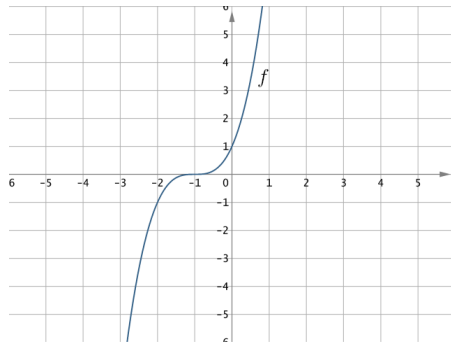
Tipp: Pascallsches Dreieck

Zwischenschritt:

$$(x + 1)^3 < 0$$

Lösung:

$$x < -1$$



6. Aufgabe:

$$f : x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1 \leq 0$$

5 Betrag, Kreis, Ungleichungen

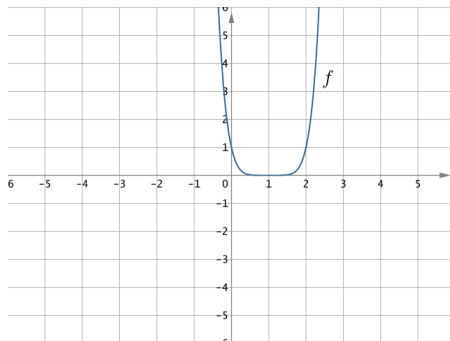
Nochmal: Pascallsches Dreieck

Zwischenschritt:

$$(x - 1)^6 \leq 0$$

Lösung:

$$x \geq 1$$



7. Aufgabe:

$$f : \frac{1}{2}x^2 - 8 > 0$$

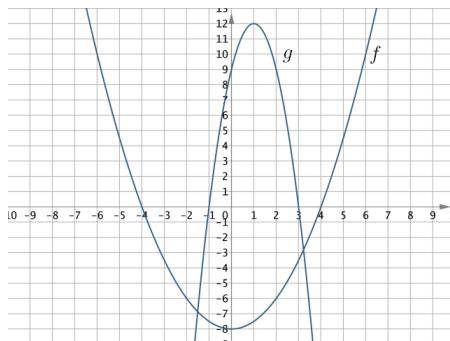
$$g : -3(x - 1)^2 + 12 > 0$$

Lösung:

1.Gl: $x^2 > 16 \rightarrow x > 4 \cup x < -4$

2.Gl: $-1 < x < 3$

keine Lösung!

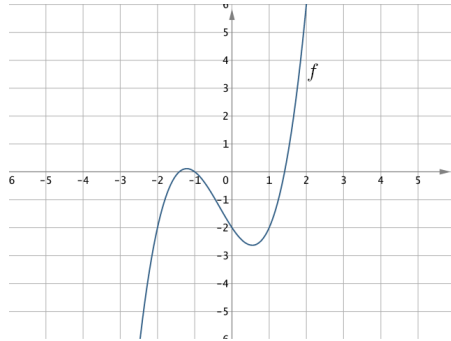


8. Aufgabe:

$$f : (x^2 - 2)(x + 1) \geq 0$$

Lösung:

$$-\sqrt{2} < x < -1 \cup x > \sqrt{2}$$



9. Aufgabe:

$$f : ax^2 > 0$$

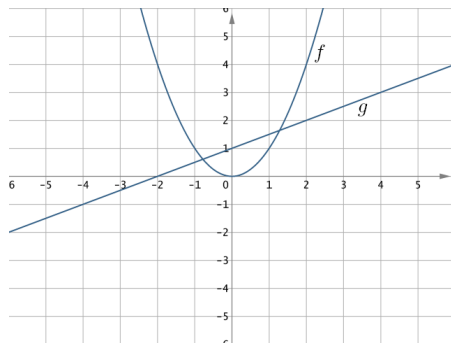
$$g : \frac{1}{2}x + 1 > 0$$

Lösung:

1.Gl: $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

2.Gl: $x > -2$

$$x > -2 \text{ und } x \neq 0$$



10. Aufgabe:

$$f: x^2 + a > 0$$

$$g: \frac{1}{2}x + 1 > 0$$

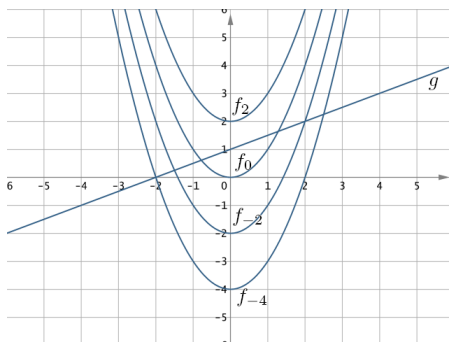
Lösung:

1.Gl:

$x \in \mathbb{R}$	$a > 0$
$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$a = 0$
$x < -\sqrt{a} \cup x > \sqrt{a}$	$a < 0$

2.Gl: $x > -2$

$x > -2$	$a > 0$
$x > -2$ und $x \neq 0$	$a = 0$
$-2 < x < -\sqrt{a} \cup x > \sqrt{a}$	$-4 < a < 0$
$x > \sqrt{a}$	$a \leq -4$



11. Aufgabe:

$$f: -x^2 + a < 0$$

$$g: x + a < 0$$

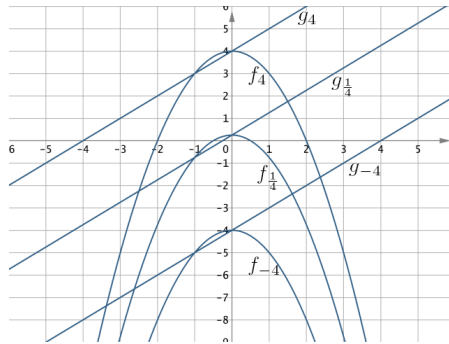
Lösung:

1.Gl:

$x < -\sqrt{a} \cup x > \sqrt{a}$	$a > 0$
$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$a = 0$
$x \in \mathbb{R}$	$a < 0$

2.Gl: $x < -a$

$x < -a$	$a > 1$
$x < -\sqrt{a}$	$0 < a \leq 1$
$x < 0$	$a = 0$
$x < -a$	$a < 0$



12. Aufgabe:

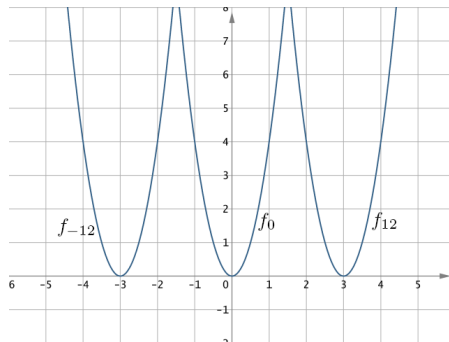
$$f : 4x^2 - 2ax + \frac{1}{4}a^2 \geq 0$$

Zwischenschritt:

$$(x - \frac{1}{4}a)^2 \geq 0$$

Lösung:

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{4}a\}$$



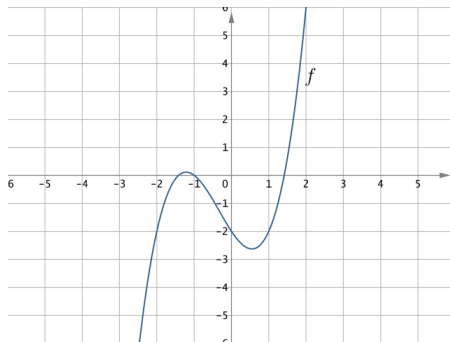
13. Aufgabe:

$$f : x^3 + x^2 - 2x \geq 2$$

(siehe Aufgabe 8)

Lösung:

$$-\sqrt{2} < x < -1 \cup x > \sqrt{2}$$



14. Aufgabe:

$$f : (x - 1)^2 - 4 < 0$$

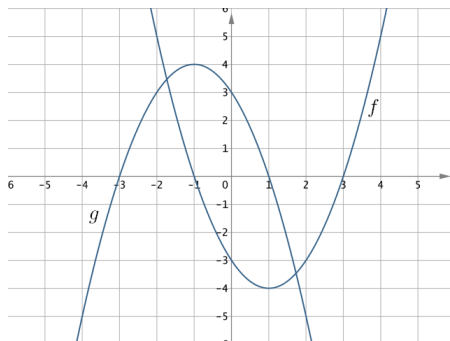
$$g : -(x + 1)^2 + 4 > 0$$

Lösung:

1.Gl: $-1 < x < 3$

2.Gl: $-3 < x < 1$

$$-1 < x < 1$$



15. Aufgabe:

$$f : \sqrt{(x-1)} \geq 0$$

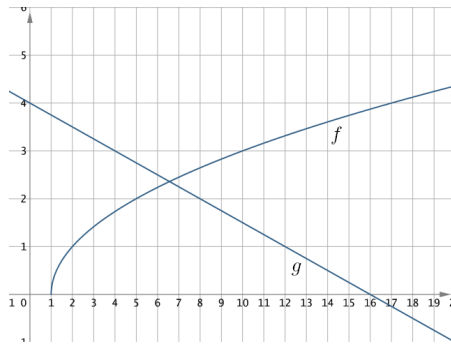
$$g : -\frac{1}{4}x + 4 < 0$$

Lösung:

1.Gl: $x \geq 1$

2.Gl: $x > 16$

$$x > 16$$



16. Aufgabe:

$$f : x^4 - 16 \leq 0$$

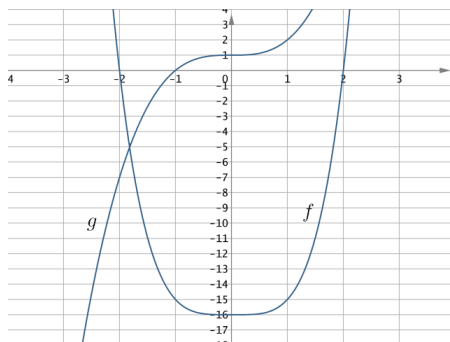
$$g : x^3 + 1 \geq 0$$

Lösung:

1.Gl: $-2 \leq x \leq 2$

2.Gl: $x \geq -1$

$$-1 \leq x \leq 2$$



5.3.2 Ungleichungen mit mehreren Variablen

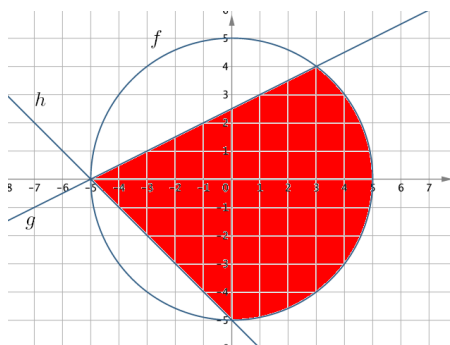
1. Aufgabe:

$$f : x^2 + y^2 < 25$$

$$g : \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} > y$$

$$h : -x - 5 < y$$

Lösung:



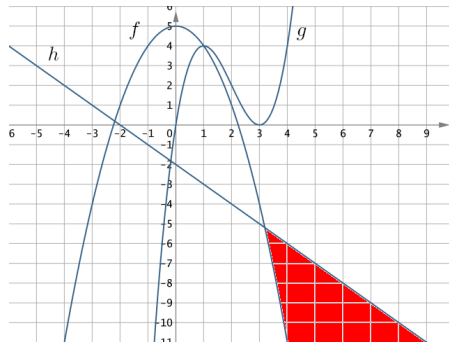
2. Aufgabe:

$$f : -x^2 + 5 < y$$

$$g : x(x - 3)^2 > y$$

$$h : -x - 2 > y$$

Lösung:

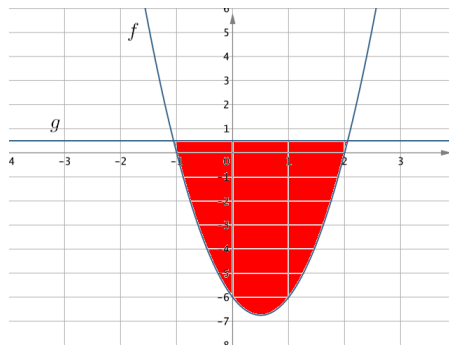


3. Aufgabe:

$$f : 3x^2 - 3x - 10 < -4 + y$$

$$g : y \leq \frac{1}{2}$$

Lösung:



4. Aufgabe:

$$f : y < \frac{2x^2 + 3x + 4}{-x^4 - 2x^3 - x^2 + 4x + (2x + x^2)^2}$$

$$g : -\frac{1}{x} < y$$

$$h : -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x\right)^2 < y - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 2$$

$$i : y + x - 2 < 0$$

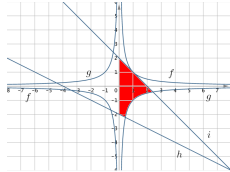
5 Betrag, Kreis, Ungleichungen

Zwischenschritt:

$$f : y < \frac{1}{x}$$

$$h : y > -\frac{1}{2}x - 2$$

Lösung:



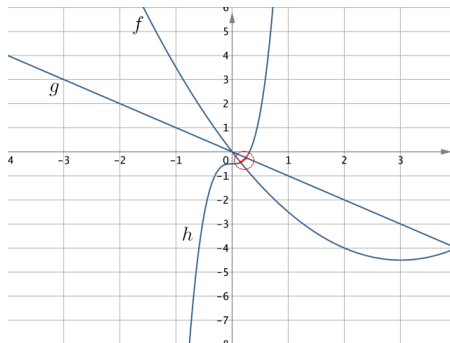
5. Aufgabe:

$$f : \frac{1}{2}x^2 - 3x \leq y$$

$$g : y \leq -x$$

$$h : 17x^3 - \frac{1}{2} = y$$

Lösung:



6. Aufgabe:

$$f : y + \sqrt{\frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x - 1}} > 0$$

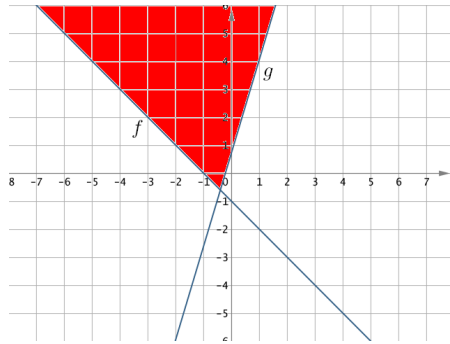
$$g : \frac{2}{20}x - \frac{1}{3}y + \frac{3}{12} < 0$$

Zwischenschritt:

$$f : y > -x - 1$$

$$g : y > \frac{10}{3}x + \frac{3}{4}$$

Lösung:



7. Aufgabe:

$$f : \frac{1}{2}x - 2 < y$$

$$g : \frac{1}{2}x + 2 > y$$

$$h : 2x - 4 < y$$

$$i : 2x + 4 > y$$

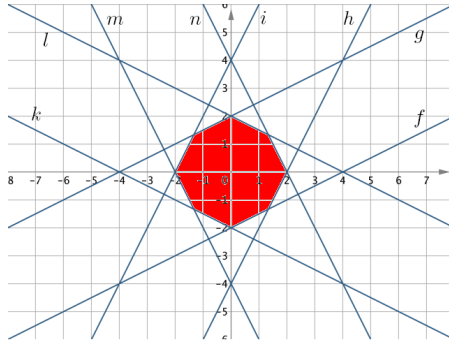
$$k : -\frac{1}{2}x - 2 < y$$

$$l : -\frac{1}{2}x + 2 > y$$

$$m : -2x - 4 < y$$

$$n : -2x + 4 > y$$

Lösung:

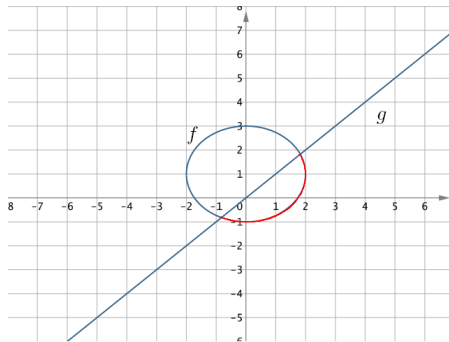


8. Aufgabe:

$$f : |(x^2 + (y - 1)^2) = 4$$

$$g : x \geq y$$

Lösung:



9. Aufgabe:

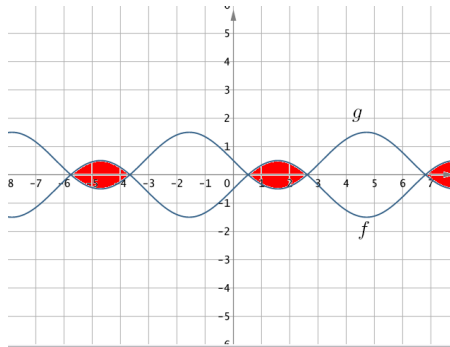
$$f : ((\sin x) + \frac{1}{2})^2 - \frac{3}{4} - y - (\sin x)^2 < 0$$

$$g : \cos(x + \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{2} < y$$

Zwischenschritt:

$$f : y < \sin x - \frac{1}{2}$$

Lösung:



10. Aufgabe:

$$f : \left| \frac{1}{x} \right| > y$$

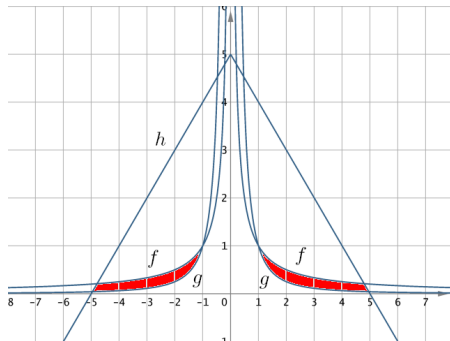
$$g : -\frac{1 + 7x^2}{x^2 y} > -\frac{y + 7}{y}$$

$$h : |x| + y < 5$$

Zwischenschritt:

$$g : y > \frac{1}{x^2}$$

Lösung:

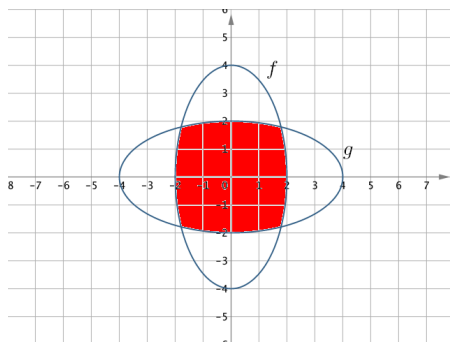


11. Aufgabe:

$$f : 4x^2 + y^2 \leq 16$$

$$g : x^2 + 4y^2 \leq 16$$

Lösung:



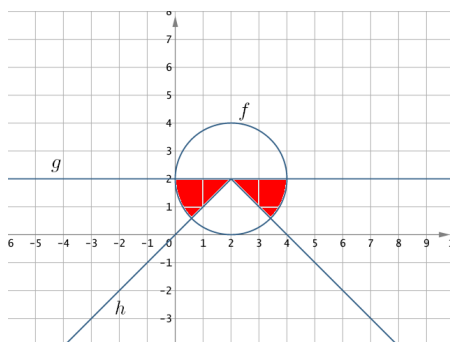
12. Aufgabe:

$$f : (y - 2)^2 < 4 - (x - 2)^2$$

$$g : y - 2 < 0$$

$$h : -|x - 2| + 2 < y$$

Lösung:



13. Berechnen Sie für die Ungleichung den Flächeninhalt der Lösungsmenge!

Aufgabe:

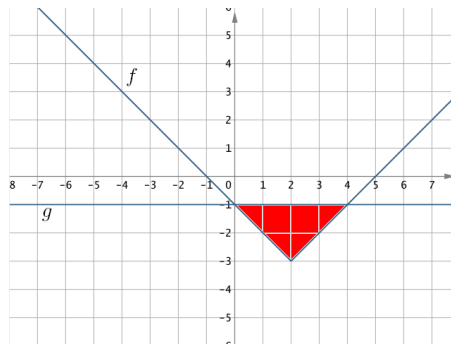
$$f : (2y - 3)^2 + (3y + 2)^2 + y - 10 \geq \left| \frac{4x + 4(\frac{1}{2}x - \frac{3}{2})^2 - 9}{x} \right| + 13y^2$$

$$g : y \leq -1$$

Zwischenschritt:

$$f : y \geq |x - 2| - 3$$

Lösung: Flächeninhalt = 4



14. Berechnen Sie für das Ungleichungssystem den Flächeninhalt der Lösungsmenge!

Aufgabe:

$$f : x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 \geq 1$$

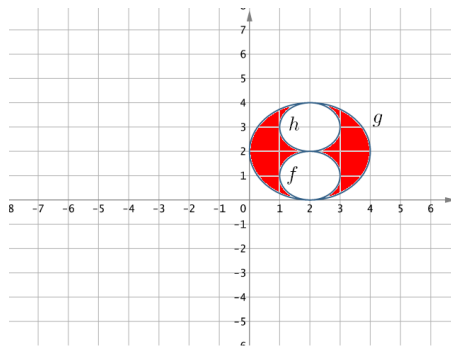
$$g : (x - 2)^2 + (y - 2)^2 \leq 4$$

$$h : (x - 2)^2 + (y - 3)^2 \geq 1$$

Zwischenschritt:

$$f : (x - 2)^2 + (y - 1)^2 \geq 1$$

Lösung: Flächeninhalt $= 4\pi - 2\pi = 2\pi$

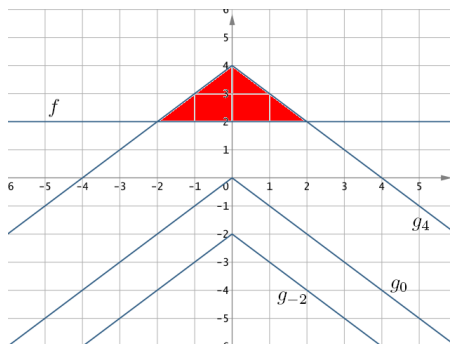


15. Für welches a ist der Flächeninhalt der Lösungsmenge $= 2$? Aufgabe:

$$f : y \geq 2$$

$$g : -|x| + a \leq y$$

Lösung: Flächeninhalt $= 2$ für $a = 2$

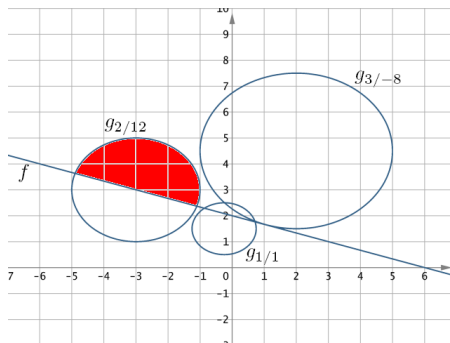


16. Bestimmen Sie ein a und ein b , für das der Flächeninhalt der Lösungsmenge 2π ergibt!
Aufgabe:

$$f : -\frac{1}{3}x \leq y - 2$$

$$g : (x + \frac{1}{4}b)^2 + (y - \frac{3}{2}a)^2 \leq a^2$$

(einfachste) Lösung: $a = 2$, $b = 12$



17. Beschreiben sie die Lösungsmenge des Ungleichungssystems!
Aufgabe:

$$f : x^2 + y^2 + z(z + 2) < 8$$

$$g : x \leq 0$$

$$h : y \leq 0$$

Zwischenschritt:

$$f : x^2 + y^2 + (z + 1)^2 < 9$$

Lösung:

Die Lösungsmenge ist eine Halbkugel unter der x-y-Ebene im \mathbb{R}^3 , die um eine Einheit in z-Richtung verschoben ist.

18. Beschreiben sie die Lösungsmenge des Ungleichungssystems!

Aufgabe:

$$f : (x - 2\sqrt{3})^2 + (x - 2\sqrt{3})^2 + (z - 2\sqrt{3})^2 \leq 36$$

$$g : (x + 2\sqrt{3})^2 + (x + 2\sqrt{3})^2 + (z + 2\sqrt{3})^2 \leq 36$$

Lösung:

Es ist schnell ersichtlich, dass es sich mit zwei Kugeln mit Radius $r = 6$ handelt. Bei näherer Betrachtung ist zu erkennen, dass der Abstand des Mittelpunktes ebenfalls 6 beträgt. Da sich die Kugeln genau gegenüberliegen, haben sie nur den Ursprung als gemeinsame Lösung. Die Lösungsmenge ist somit nur der Punkt mit $x = 0, y = 0, z = 0$.

6 Vollständige Induktion Lösung

Autor: Katja Matthes

6.1 Gleichungen

Aufgabe 1

Gesucht: Formeln für $1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1 = \sum_{k=1}^n 2k - 1$

Finden der Vermutung:

$$\sum_{k=1}^1 2k - 1 = 1$$

$$\sum_{k=1}^3 2k - 1 = 9$$

$$\sum_{k=1}^2 2k - 1 = 4$$

$$\sum_{k=1}^4 2k - 1 = 16$$

Zu Zeigen: $\sum_{k=1}^n 2k - 1 = n^2$

Ind.anfang: $n_0 = 1$

Ind.voraussetzung: $\sum_{k=1}^n 2k - 1 = n^2$

Ind.behauptung: $\sum_{k=1}^{n+1} 2k - 1 = (n+1)^2$

Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} 2k - 1 &= \sum_{k=1}^n 2k - 1 + 2(n+1) - 1 && | \text{nach Voraussetzung} \\ &= n^2 + 2n + 2 - 1 && | \text{Zusammenfassen} \\ &= n^2 + 2n + 1 && | \text{Binomische Formel} \\ &= (n+1)^2 && | \text{qed} \end{aligned}$$

Aufgabe 2**Gesucht:** Formeln für $4 + 8 + 12 + \dots + 4n = 2n(n+1) = \sum_{k=1}^n 4k$ **Finden der Vermutung:**

$$\sum_{k=1}^1 4k = 4 = 2 \cdot 1 \cdot 2$$

$$\sum_{k=1}^3 4k = 24 = 2 \cdot 3 \cdot 4$$

$$\sum_{k=1}^2 4k = 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$$

$$\sum_{k=1}^4 4k = 40 = 2 \cdot 4 \cdot 5$$

Zu Zeigen: $\sum_{k=1}^n 4k = 2n(n+1)$ **I.anfang:** $n_0 = 1$ **I.voraussetzung:** $\sum_{k=1}^n 4k = 2n(n+1)$ **I.behauptung:** $\sum_{k=1}^{n+1} 4k = 2(n+1)((n+1)+1)$ **Induktionsbeweis:**

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} 4k &= \sum_{k=1}^n 4k + 4(n+1) && | \text{Voraussetzung} \\ &= 2n(n+1) + 4(n+1) && | 2 \text{ Ausklammern} \\ &= 2(n(n+1) + 2(n+1)) && | (n+1) \text{ Ausklammern} \\ &= 2(n+1)(n+2) \\ &= 2(n+1)((n+1)+1) && | \text{qed} \end{aligned}$$

Aufgabe 3**I.anf.:** $n_0 = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^1 2k = 2 \cdot 1 = 2 = 1^2 + 1$ **I.vor.:** $\sum_{k=1}^n 2k = n^2 + n$ **I.beh.:** $\sum_{k=1}^{n+1} 2k = (n+1)^2 + (n+1)$ **Induktionsbeweis:**

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} 2k &= \sum_{k=1}^n 2k + 2(n+1) && | \text{Voraussetzung} \\ &= n^2 + n + 2(n+1) && | \text{Ausmultiplizieren} \\ &= n^2 + n + 2n + 2 && | \text{Umordnen} \\ &= n^2 + 2n + 1 + n + 1 && | \text{Binomische Formel} \\ &= (n+1)^2 + (n+1) && | \text{qed} \end{aligned}$$

Aufgabe 4

$$\text{I.anf.: } n_0 = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^1 \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{3} = \frac{1}{2 \cdot 1 + 1}$$

$$\text{I.vor.: } \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

$$\text{I.beh.: } \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n+1}{2(n+1)+1}$$

Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{1}{(2(n+1)-1)(2(n+1)+1)} \\ & \quad | \text{Voraussetzung} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \\ &= \frac{n \cdot (2n+3) + 1}{(2n+1)(2n+3)} && | \text{Ausmultiplizieren} \\ &= \frac{2n^2 + 3n + 1}{(2n+1)(2n+3)} && | \text{Polynomdivision} \\ &= \frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} && | \text{Kürzen} \\ &= \frac{n+1}{2n+3} && | \text{Umformen} \\ &= \frac{n+1}{2(n+1)+1} && | \text{qed} \end{aligned}$$

Aufgabe 5

$$\text{I.anf.: } n_0 = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^1 \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$$

$$\text{I.vor.: } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

$$\text{I.beh.: } \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n+1}{(n+1)+1}$$

Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)((n+1)+1)} && | \text{Voraussetzung} \\
&= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n \cdot (n+2) + 1}{(n+1)(n+2)} && | \text{Ausmultiplizieren} \\
&= \frac{n^2 + 2n + 1}{(n+1)(n+2)} && | \text{Binomische Formel} \\
&= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} && | \text{Kürzen} \\
&= \frac{n+1}{n+2} && | \text{Umformen} \\
&= \frac{n+1}{(n+1)+1} && | \text{qed}
\end{aligned}$$

Aufgabe 6

$$\mathbf{I.anf.:} \quad n_0 = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^1 k = 1 = \frac{2}{2} = \frac{1(1+1)}{2}$$

$$\mathbf{I.vor.:} \quad \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\mathbf{I.beh.:} \quad \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^n k + (n+1) && | \text{Voraussetzung} \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\
&= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} && | (n+1) \text{ Ausklammern} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2} && | \text{Umformen} \\
&= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} && | \text{qed}
\end{aligned}$$

Aufgabe 7

I.anf.: $n_0 = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^1 k^2 = 1^2 = \frac{6}{6} = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6}$

I.vor.: $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

I.beh.: $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$

Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)^2 && | \text{Voraussetzung} \\
 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
 &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} && | (n+1) \text{ Ausklammern} \\
 &= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} \\
 &= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} && | \text{Polynomdivision} \\
 &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} && | \text{Umformen} \\
 &= \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6} && | \text{qed}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 8

I.anf.: $n_0 = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^1 \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2^1} = 2 - \frac{3}{2} = 2 - \frac{1+2}{2^1}$

I.vor.: $\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$

I.beh.: $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{(n+1)+2}{2^{n+1}}$

Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} &= \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} + \frac{n+1}{2^{n+1}} && | \text{Voraussetzung} \\
 &= 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \\
 &= 2 + \frac{-2(n+2) + (n+1)}{2^{n+1}} && | \text{Zusammenfassen} \\
 &= 2 + \frac{-(n+3)}{2^{n+1}} && | (-) \text{ Vorziehen} \\
 &= 2 - \frac{(n+1)+2}{2^{n+1}} && | \text{qed}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 9

$$\text{I.anf.: } n_0 = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^0 \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{2}{3} = 3 \cdot \frac{1}{3} = 3 \left(1 - \frac{2}{3}^{0+1}\right)$$

$$\text{I.vor.: } \sum_{k=0}^n \left(\frac{2}{3}\right)^k = 3 \cdot \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$$

$$\text{I.beh.: } \sum_{k=0}^{n+1} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 3 \cdot \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{(n+1)+1}\right)$$

Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} \left(\frac{2}{3}\right)^k &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{2}{3}\right)^k + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} && |\text{Voraussetzung} \\ &= 3 \cdot \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} && |\text{R. Br. mit 3 erweitern} \\ &= 3 \cdot \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{3 \cdot 2^{n+1}}{3^{n+2}} && |3 \text{ Ausklammern} \\ &= 3 \cdot \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}}\right) \\ &= 3 \cdot \left(1 + \frac{-3 \cdot 2^{n+1} + 2^{n+1}}{3^{n+2}}\right) \\ &= 3 \cdot \left(1 + \frac{-2 \cdot 2^{n+1}}{3^{n+2}}\right) && |\text{Potenzgesetze} \\ &= 3 \cdot \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}\right) && |\text{Umformen} \\ &= 3 \cdot \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{(n+1)+1}\right) && |\text{qed} \end{aligned}$$

Aufgabe 10

$$\text{I.anf.: } n_0 = 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^1 q^k = 1 + q = \frac{(1+q)(1-q)}{(1-q)} = \frac{1-q^{1+1}}{1-q}$$

$$\text{I.vor.: } \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$\text{I.beh...: } \sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{1-q^{(n+1)+1}}{1-q}$$

Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{n+1} q^k &= \sum_{k=0}^n q^k + q^{n+1} && | \text{Voraussetzung} \\
 &= \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + q^{n+1} \\
 &= \frac{(1 - q^{n+1}) + (1 - q)q^{n+1}}{1 - q} && | \text{Zusammenfassen} \\
 &= \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q} && | \text{Umformen} \\
 &= \frac{1 - q^{(n+1)+1}}{1 - q} && | \text{qed}
 \end{aligned}$$

6.2 Ungleichung

Aufgabe 1 - Bernoulli-Ungleichung

I.anf.: $n_0 = 1 \Rightarrow (1 + x)^1 = 1 + x \geq 1 + 1 \cdot x$

I.vor.: $(1 + x)^n \geq 1 + nx$

I.beh.: $(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)x$

Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned}
 (1 + x)^{n+1} &= (1 + x)^n \cdot (1 + x) && | \text{Voraussetzung} \\
 &\geq (1 + nx) \cdot (1 + x) && | \text{Ausmultiplizieren} \\
 &= 1 + x + nx + nx^2 && | x \text{ teilweise ausklammern} \\
 &= 1 + (n + 1)x + nx^2 && | \text{da } nx^2 \geq 0 \\
 &\geq 1 + (n + 1)x && | \text{qed}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 2

I.anf.: $n_0 = 6$

$n = 5 \Rightarrow 5^2 + 10 = 35 < 32 = 2^5$ falsche Aussage

$n = 6 \Rightarrow 6^2 + 10 = 46 < 64 = 2^6$ wahre Aussage

I.vor.: $n^2 + 10 < 2^n$

I.beh.: $(n + 1)^2 + 10 < 2^{n+1}$

Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned}
 (n+1)^2 + 10 &= n^2 + 2n + 1 + 10 && | \text{Voraussetzung} \\
 &< 2^n + 2n + 1 && | \text{da } 2n < 2n + 1 < n^2, n \geq 3 \\
 &&& | \text{Vgl. Aufgabe 3} \\
 &< 2^n + n^2 + 1 && | \text{da } 1 < 10 \\
 &< 2^n + n^2 + 10 && | \text{Voraussetzung} \\
 &< 2^n + 2^n && | \text{Zusammenfassen} \\
 &= 2 \cdot 2^n && | \text{Potenzgesetze} \\
 &= 2^{n+1} && | \text{qed}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 3

I.anf.: $n_0 = 3 \Rightarrow 3^2 = 9 > 7 = 2 \cdot 3 + 1$

I.vor.: $n^2 > 2n + 1$

I.beh.: $(n+1)^2 > 2(n+1) + 1$

Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned}
 (n+1)^2 &= n^2 + 2n + 1 && | \text{Voraussetzung} \\
 &> 2n + 1 + 2n + 1 && | \text{Ordnen} \\
 &= 2n + 2 + 2n \\
 &= 2(n+1) + 2n && | \text{da } 2n > 1 \text{ mit } n \in \mathbb{N} \\
 &> 2(n+1) + 1 && | \text{qed}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 4

I.anf.: $n_0 = 5 \Rightarrow 2^5 = 32 > 25 = 5^2$

I.vor.: $2^n > n^2$

I.beh.: $2^{n+1} > (n+1)^2$

Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned}
 2^{n+1} &= 2^n \cdot 2 && | \text{Voraussetzung} \\
 &> n^2 \cdot 2 && | \text{als Summe schreiben} \\
 &= n^2 + n^2 && | n^2 > 2n + 1 \text{ Vgl. Aufg. 3} \\
 &> n^2 + 2n + 1 && | \text{Binomische Formel} \\
 &= (n+1)^2 && | \text{qed}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 5

$$\text{I.anf.: } n_0 = 2 \Rightarrow \sum_{k=1}^2 \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} > \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\text{I.vor.: } \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}$$

$$\text{I.beh.: } \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n+1}$$

Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} && |\text{Voraussetzung} \\ &> \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\ &\stackrel{?}{>} \sqrt{n+1} \end{aligned}$$

Noch zu zeigen:

$$\begin{aligned} \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} &> \sqrt{n+1} && |\cdot \sqrt{n+1} \\ \sqrt{n \cdot (n+1)} + 1 &> n+1 && | -1 \\ \sqrt{n^2 + n} &> n && | n^2 \text{ Ausklammern} \\ \sqrt{n^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)} &> n && |\text{teilweise Wurzel ziehen} \\ n\sqrt{1 + \frac{1}{n}} &> n && | \div n, \text{ da } n > 0 \\ \sqrt{1 + \frac{1}{n}} &> 1 && |\text{wahre Aussage } \forall n \in \mathbb{N} \\ &&& |\text{qed} \end{aligned}$$

Aufgabe 6

$$\text{I.anf.: } n_0 = 3 \Rightarrow \sum_{k=1}^3 \frac{1}{n+k} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{86}{120} > \frac{65}{120} = \frac{13}{24}$$

$$\text{I.vor.: } \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} > \frac{13}{24}$$

$$\text{I.beh.: } \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(n+1)+k} > \frac{13}{24}$$

Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(n+1)+k} && | \text{Indexverschiebung} \\
&= \sum_{k=2}^{n+2} \frac{1}{n+k} && | \text{Summanden abspalten} \\
&= \sum_{k=2}^n \frac{1}{n+k} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)} && | 0\text{-Erweiterung} \\
&= \sum_{k=2}^n \frac{1}{n+k} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)} \\
&\quad | \text{Indexverschiebung} \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)} \\
&\quad | \text{Voraussetzung} \\
&> \frac{13}{24} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)} \\
&\quad | \text{Zusammenfassen} \\
&= \frac{13}{24} + \frac{-(2n+1) \cdot 2 + 2(n+1) + (2n+1)}{(2n+1) \cdot 2(n+1)} \\
&\quad | \text{weiter Zusammenfassen} \\
&= \frac{13}{24} + \frac{1}{(2n+1) \cdot 2(n+1)} \\
&\quad | \text{da } \frac{1}{(2n+1) \cdot 2(n+1)} > 0 \\
&> \frac{13}{24} \quad | \text{qed}
\end{aligned}$$

6.3 Teilbarkeitsprobleme**Aufgabe 1**

$$\mathbf{I.anf.}: n_0 = 1 \Rightarrow 8|9^1 - 1 \Leftrightarrow 8|8$$

$$\mathbf{I.vor.}: 8|9^n - 1$$

I.beh.: $8|9^{n+1} - 1$ **Induktionsbeweis:** $(m_x \in \mathbb{N})$

$$\begin{aligned}
9^{n+1} - 1 &= 9 \cdot 9^n - 1 && |0\text{-Erweiterung} \\
&= 9 \cdot 9^n - 9 + 9 - 1 && |9 \text{ Ausklammern} \\
&= 9 \cdot (9^n - 1) + 8 && |Voraussetzung \\
&= 9 \cdot 8 \cdot m_1 + 8 && |8 \text{ Ausklammern} \\
&= 8 \cdot (9m_1 + 1) \\
&= 8 \cdot m_2 && |qed
\end{aligned}$$

Aufgabe 2**I.anf.:** $n_0 = 1 \Rightarrow 6|7^1 - 1 \Leftrightarrow 6|6$ **I.vor.:** $6|7^n - 1$ **I.beh.:** $6|7^{n+1} - 1$ **Induktionsbeweis:** $(m_x \in \mathbb{N})$

$$\begin{aligned}
7^{n+1} - 1 &= 7 \cdot 7^n - 1 && |0\text{-Erweiterung} \\
&= 7 \cdot 7^n - 7 + 7 - 1 && |7 \text{ Ausklammern} \\
&= 7 \cdot (7^n - 1) + 6 && |Voraussetzung \\
&= 7 \cdot 6 \cdot m_1 + 6 && |6 \text{ Ausklammern} \\
&= 6 \cdot (7m_1 + 1) \\
&= 6 \cdot m_2 && |qed
\end{aligned}$$

Aufgabe 3**I.anf.:** $n_0 = 1 \Rightarrow a - 1|a^1 - 1$ **I.vor.:** $a - 1|a^n - 1$ **I.beh.:** $a - 1|a^{n+1} - 1$ **Induktionsbeweis:** $(m_x \in \mathbb{N})$

$$\begin{aligned}
a^{n+1} - 1 &= a \cdot a^n - 1 && |0\text{-Erweiterung} \\
&= a \cdot a^n - a + a - 1 && |a \text{ Ausklammern} \\
&= a \cdot (a^n - 1) + (a - 1) && |Voraussetzung \\
&= a \cdot (a - 1) \cdot m_1 + (a - 1) && |(a - 1) \text{ Ausklammern} \\
&= (a - 1) \cdot (am_1 + 1) \\
&= (a - 1) \cdot m_2 && |qed
\end{aligned}$$

Aufgabe 4**I.anf.:** $n_0 = 1 \Rightarrow 3|1^3 + 6 \cdot 1^2 + 14 \cdot 1 \Leftrightarrow 3|21$ **I.vor.:** $3|n^3 + 6n^2 + 14n$ **I.beh.:** $3|(n+1)^3 + 6(n+1)^2 + 14(n+1)$ **Induktionsbeweis:** ($m_x \in \mathbb{N}$)

$$\begin{aligned}
& (n+1)^3 + 6(n+1)^2 + 14(n+1) \\
&= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 6n^2 + 12n + 6 + 14n + 14 && | \text{Sortieren} \\
&= (n^3 + 6n^2 + 14n) + 3n^2 + 15n + 21 && | \text{Voraussetzung} \\
&= 3 \cdot m_1 + 3n^2 + 15n + 21 && | 3 \text{ Ausklammern} \\
&= 3 \cdot (m_1 + n^2 + 5n + 7) \\
&= 3 \cdot m_2 && | \text{qed}
\end{aligned}$$

Aufgabe 5**I.anf.:** $n_0 = 1 \Rightarrow 3|2^{2 \cdot 1} - 1 \Leftrightarrow 3|4 - 1 \Leftrightarrow 3|3$ **I.vor.:** $3|2^{2n} - 1$ **I.beh.:** $3|2^{2(n+1)} - 1$ **Induktionsbeweis:** ($m_x \in \mathbb{N}$)

$$\begin{aligned}
2^{2(n+1)} - 1 &= 4 \cdot 2^{2n} - 1 && | 0\text{-Erweiterung} \\
&= 4 \cdot 2^{2n} - 4 + 4 - 1 && | 4 \text{ Ausklammern} \\
&= 4 \cdot (2^{2n} - 1) + 3 && | \text{Voraussetzung} \\
&= 4 \cdot 3 \cdot m_1 + 3 && | 3 \text{ Ausklammern} \\
&= 3 \cdot (4m_1 + 1) \\
&= 3 \cdot m_2 && | \text{qed}
\end{aligned}$$

Aufgabe 6**I.anf.:** $n_0 = 1 \Rightarrow 6|1^3 - 1 \Leftrightarrow 6|0$ **I.vor.:** $6|n^3 - n$ **I.beh.:** $6|(n+1)^3 - (n+1)$

Induktionsbeweis: $(m_x \in \mathbb{N} \cup 0)$

$$\begin{aligned}
 & (n+1)^3 - (n+1) \\
 = & n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 && | \text{Ordnen} \\
 = & (n^3 - n) + 3n^2 + 3n && | \text{Voraussetzung} \\
 = & 6 \cdot m_1 + 3n^2 + 3n \\
 \stackrel{?}{=} & 6 \cdot m_1 + 6 \cdot m_2 \\
 = & 6 \cdot (m_1 + m_2) \\
 = & 6 \cdot m_3
 \end{aligned}$$

Noch zu zeigen: $6|3n^2 + 3n$

I.anf.: $n_0 = 1 \Rightarrow 6|3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 \Leftrightarrow 6|6$

I.vor.: $6|3n^2 + 3n$

I.beh.: $6|3(n+1)^2 + 3(n+1)$

Induktionsbeweis: $(m_x \in \mathbb{N})$

$$\begin{aligned}
 3(n+1)^2 + 3(n+1) &= 3n^2 + 6n + 3 + 3n + 3 && | \text{Ordnen} \\
 &= (3n^2 + 3n) + 6n + 6 && | \text{Voraussetzung} \\
 &= 6 \cdot m_1 + 6n + 6 && | 6 \text{ Ausklammern} \\
 &= 6 \cdot (m_1 + n + 1) \\
 &= 6 \cdot m_2 \\
 &&& | \text{qed}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 7

I.anf.: $n_0 = 1 \Rightarrow 6|3 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 \Leftrightarrow 6|12$

I.vor.: $6|3n^2 + 9n$

I.beh.: $6|3(n+1)^2 + 9(n+1)$

Induktionsbeweis: $(m_x \in \mathbb{N})$

$$\begin{aligned}
 3(n+1)^2 + 9(n+1) &= 3n^2 + 6n + 3 + 9n + 9 && | \text{Ordnen} \\
 &= (3n^2 + 9n) + 6n + 12 && | \text{Voraussetzung} \\
 &= 6 \cdot m_1 + 6n + 12 && | 6 \text{ Ausklammern} \\
 &= 6 \cdot (m_1 + n + 2) \\
 &= 6 \cdot m_2 && | \text{qed}
 \end{aligned}$$

6.4 Ableitungen

Aufgabe 1

I.anf.: $n_0 = 1$

$$f(x) = x + a \cdot \cos x$$

$$f'(x) = -a \sin x$$

$$f''(x) = -a \cos x = (-1)^1 \cdot a \cdot \cos x = f^{(2 \cdot 1)}(x)$$

I.vor.: $f^{(2n)}(x) = (-1)^n \cdot a \cdot \cos x$

I.beh.: $f^{(2(n+1))}(x) = (-1)^{n+1} \cdot a \cdot \cos x$

Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned}
 f^{(2(n+1))}(x) &= f^{(2n+2)}(x) \\
 &= [f^{(2n)}(x)]'' && \text{|Voraussetzung} \\
 &= [(-1)^n \cdot a \cdot \cos x]'' && \text{|Ableitung bilden} \\
 &= [(-1)^{n+1} \cdot a \cdot \sin x]' && \text{|Ableitung bilden} \\
 &= (-1)^{n+1} \cdot a \cdot \cos x && \text{|qed}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Gesucht: Formel für $f^{(2n+1)}(x)$ mit $f(x) = x + a \cos x$

Finden der Vermutung:

$$f(x) = x + a \cos x$$

$$f'(x) = -a \sin x \quad (n = 0)$$

$$f''(x) = -a \cos x$$

$$f'''(x) = a \sin x \quad (n = 1)$$

Zu zeigen: $f^{(2n+1)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot a \cdot \sin x$

I.anf.: $n_0 = 0$

I.vor.: $f^{(2n+1)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot a \cdot \sin x$

I.beh.: $f^{(2(n+1)+1)}(x) = (-1)^{(n+1)+1} \cdot a \cdot \sin x$

Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned}
 f^{(2(n+1)+1)}(x) &= f^{(2n+3)}(x) \\
 &= [f^{(2n+1)}(x)]'' && | \text{Voraussetzung} \\
 &= [(-1)^{n+1} \cdot a \cdot \sin x]'' && | \text{Ableitung bilden} \\
 &= [(-1)^{n+1} \cdot a \cdot \cos x]' && | \text{Ableitung bilden} \\
 &= (-1)^{n+1} \cdot (-1) \cdot a \cdot \sin x \\
 &= (-1)^{(n+1)+1} \cdot a \cdot \sin x && | \text{qed}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Gesucht: Formel für $f^{(2n)}(x)$ mit $f(x) = x + \sin(a \cdot x)$, $a > 0$

Finden der Vermutung:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x + \sin(a \cdot x) \\
 f'(x) &= a \cdot \cos(a \cdot x) \\
 f''(x) &= -a^2 \sin(a \cdot x) && (n = 1) \\
 f'''(x) &= -a^3 \cos(a \cdot x) \\
 f^{(4)}(x) &= a^4 \sin(a \cdot x) && (n = 2)
 \end{aligned}$$

Zu zeigen: $f^{(2n)}(x) = (-1)^n \cdot a^{2n} \cdot \sin(a \cdot x)$

I.anf.: $n_0 = 1$

I.vor.: $f^{(2n)}(x) = (-1)^n \cdot a^{2n} \cdot \sin(a \cdot x)$

I.beh.: $f^{(2(n+1))}(x) = (-1)^{n+1} \cdot a^{2(n+1)} \cdot \sin(a \cdot x)$

Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned}
 f^{(2(n+1))}(x) &= f^{(2n+2)}(x) \\
 &= [f^{(2n)}(x)]'' && | \text{Voraussetzung} \\
 &= [(-1)^n \cdot a^{2n} \cdot \sin(a \cdot x)]'' && | \text{Ableitung bilden} \\
 &= [(-1)^n \cdot a^{2n} \cdot a \cdot \cos(a \cdot x)]' \\
 &= [(-1)^n \cdot a^{2n+1} \cdot \cos(a \cdot x)]' && | \text{Ableitung bilden} \\
 &= (-1)^n \cdot (-1) \cdot a^{2n+1} \cdot a \cdot \sin(a \cdot x) \\
 &= (-1)^{n+1} \cdot a^{2n+2} \cdot \sin(a \cdot x) \\
 &= (-1)^{n+1} \cdot a^{2(n+1)} \cdot \sin(a \cdot x) && | \text{qed}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 4**I.anf.:** $n_0 = 1$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{x}{x+1} \\
 f'(x) &= (x+1)^{-1} + x \cdot (-1)(x+1)^{-2} \\
 &= \frac{1}{(x+1)^2} = (-1)^{1+1} \cdot \frac{1!}{(x+1)^{1+1}} \\
 &= f^{(1)}(x)
 \end{aligned}$$

I.vor.: $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot \frac{n!}{(x+1)^{n+1}}$ **I.beh.:** $f^{(n+1)}(x) = (-1)^{(n+1)+1} \cdot \frac{(n+1)!}{(x+1)^{(n+1)+1}}$ **Induktionsbeweis:**

$$\begin{aligned}
 &f^{(n+1)}(x) \\
 &= [f^{(n)}(x)]' && \text{|Voraussetzung} \\
 &= [(-1)^{n+1} \cdot \frac{n!}{(x+1)^{n+1}}]' && \text{|Ableitung bilden} \\
 &= (-1)^{n+1} \cdot (-1) \cdot (n+1) \frac{n!}{(x+1)^{(n+1)+1}} \\
 &= (-1)^{(n+1)+1} \cdot \frac{(n+1)!}{(x+1)^{(n+1)+1}} && \text{|qed}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 5**Gesucht:** Formel für $f^{(n)}(x)$ mit $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$, $x \neq -2$ **Finden der Vermutung:**

$$\begin{aligned}
 f(x) &= (x+1)(x-2)^{-1} \\
 f'(x) &= (x-2)^{-1} + (x+1)(-1)(x-2)^{-2} \\
 &= -3(x-2)^{-2} = (-1)^1 \cdot 3 \cdot (x-2)^{-(1+1)} \\
 f''(x) &= -3(-2)(x-2)^{-3} = 3 \cdot 2 \cdot (-1)^2 (x-2)^{-(2+1)} \\
 f^{(3)}(x) &= 3 \cdot 2 \cdot (-3)(x-2)^{-4} = 3 \cdot 3! \cdot (-1)^3 (x-2)^{-(3+1)}
 \end{aligned}$$

Zu zeigen: $f^{(n)}(x) = \frac{3 \cdot (-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}}$ **I.anf.:** $n_0 = 1$ **I.vor.:** $f^{(n)}(x) = \frac{3 \cdot (-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}}$

I.beh.: $f^{(n+1)}(x) = \frac{3 \cdot (-1)^{n+1} (n+1)!}{(x-2)^{(n+1)+1}}$

Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned}
 f^{(n+1)}(x) &= [f^{(n)}(x)]' && | \text{Voraussetzung} \\
 &= \left[\frac{3 \cdot (-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}} \right]' && | \text{Ableitung bilden} \\
 &= \frac{3 \cdot (-1)^n \cdot n! \cdot (n+1) \cdot (-1)}{(x-2)^{n+2}} \\
 &= \frac{3 \cdot (-1)^{n+1} (n+1)!}{(x-2)^{(n+1)+1}} && | \text{qed}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 6

Gesucht: n_0 und eine Formel für $f^{(n)}(x)$ mit $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1 + \frac{1}{x-1}$
Finden der Vermutung:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^3 + x^2 + x + 1 + \frac{1}{x-1} \\
 f'(x) &= 3x^2 + 2x + 1 + (-1)(x-1)^{-2} \\
 f''(x) &= 6x + 2 + (-1)^2 \cdot 2(x-1)^{-3} \\
 f'''(x) &= 6 + (-1)^3 \cdot 3!(x-1)^{-4} \\
 f^{(4)}(x) &= (-1)^4 \cdot 4!(x-1)^{-5} \\
 f^{(5)}(x) &= (-1)^5 \cdot 5!(x-1)^{-6}
 \end{aligned}$$

Zu zeigen: $f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot \frac{n!}{(x-1)^{n+1}}$

I.anf.: $n_0 = 4$

I.vor.: $f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot \frac{n!}{(x-1)^{n+1}}$

I.beh.: $f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot \frac{(n+1)!}{(x-1)^{(n+1)+1}}$

Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned}
 &f^{(n+1)}(x) \\
 &= [f^{(n)}(x)]' && | \text{Voraussetzung} \\
 &= \left[(-1)^n \cdot \frac{n!}{(x-1)^{n+1}} \right]' && | \text{Ableitung bilden} \\
 &= (-1)^n \cdot \frac{n!}{(x-1)^{(n+1)+1}} \cdot (-1) \cdot (n+1) \\
 &= (-1)^{n+1} \cdot \frac{(n+1)!}{(x-1)^{(n+1)+1}} && | \text{qed}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 7**Gesucht:** Formel für $f^{(2n)}(x)$ mit $f(x) = \sin \frac{x}{a}$ **Finden der Vermutung:**

$$f(x) = \sin \frac{x}{a}$$

$$f'(x) = \frac{1}{a} \cos \frac{x}{a}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{a^2} \sin \frac{x}{a} \quad (n = 1)$$

$$f^{(3)}(x) = -\frac{1}{a^3} \cos \frac{x}{a}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{1}{a^4} \sin \frac{x}{a} \quad (n = 2)$$

Zu zeigen: $f^{(2n)}(x) = \frac{(-1)^n}{a^{2n}} \cdot \sin \frac{x}{a}$ **I.anf.:** $n_0 = 1$ **I.vor.:** $f^{(2n)}(x) = \frac{(-1)^n}{a^{2n}} \cdot \sin \frac{x}{a}$ **I.beh.:** $f^{(2(n+1))}(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{a^{2(n+1)}} \cdot \sin \frac{x}{a}$ **Induktionsbeweis:**

$$\begin{aligned}
 f^{(2(n+1))}(x) &= f^{(2n+2)}(x) \\
 &= [f^{(2n)}(x)]'' && | \text{Voraussetzung} \\
 &= \left[(-1)^n \cdot \frac{1}{a^{2n}} \cdot \sin \frac{x}{a} \right]'' && | \text{Ableitung bilden} \\
 &= \left[(-1)^n \cdot \frac{1}{a^{2n+1}} \cdot \cos \frac{x}{a} \right]' && | \text{Ableitung bilden} \\
 &= (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{a^{2n+2}} \cdot \sin \frac{x}{a} \\
 &= (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{a^{2(n+1)}} \cdot \sin \frac{x}{a} && | \text{qed}
 \end{aligned}$$

8 Vektoren Lösungen

Autor: Marko Rak

Aufgabe 1

Berechne die Vektoren, mit

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$1. \ a + b - c + d = \begin{pmatrix} 7 \\ 15 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$4. \ a - \frac{1}{2}c + (-3)b + 2d = \begin{pmatrix} 29 \\ 19 \\ -13 \end{pmatrix}$$

$$2. \ d - c - b - a = \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$5. \ 2a - b + 5c - d = \begin{pmatrix} -9 \\ -14 \\ -18 \end{pmatrix}$$

$$3. \ 3a - 2b + c = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \\ -15 \end{pmatrix}$$

$$6. \ 3a - 5b + 4c + 2d = \begin{pmatrix} 32 \\ 14 \\ -34 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

Berechne die Länge der Vektoren:

$$1. \ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$2. \ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \sqrt{17}$$

$$3. \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \sqrt{50}$$

$$5. \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \sqrt{27}$$

$$4. \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3$$

$$6. \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \sqrt{53}$$

Aufgabe 3

Bestimme das Skalarprodukt der Vektoren:

$$1. \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$2. \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = -14$$

$$3. \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} = -12$$

Aufgabe 4

Bestimme den eingeschlossenen Winkel:

$$1. \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = 45^\circ$$

$$2. \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 13 \end{pmatrix} = \arccos 0 = 90^\circ$$

Aufgabe 5

Berechne das Kreuzprodukt:

$$1. \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$2. \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$3. \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ -10 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6

Überprüfe, ob die Vektoren linear abhängig sind. In diesem Fall stelle einen der Vektoren als Linearkombination der anderen dar. (Hinweis: Nutze den Gauss-Algorithmus)

$$1. \begin{array}{cc|c} & c_1 & c_2 & \\ \hline 1. & .. & 1 & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$c_2 = 0$$

$$c_1 = 0$$

2. ..

$$\begin{array}{cc|c} c_1 & c_2 & \\ \hline 3 & 5 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ \hline 3 & 5 & 0 \\ 0 & -\frac{16}{3} & 0 \end{array} \begin{array}{l} \\ \cdot(-\frac{5}{3}) \\ \leftarrow \end{array}$$

$$c_2 = 0$$

$$c_1 = 0$$

3. ..

c_1	c_2	c_3	
1	7	17	0 $\cdot(-2)$
2	3	5	0 \leftarrow
1	7	17	0
0	-11	-29	0

$$\begin{aligned} c_3 &= t \\ c_2 &= -\frac{29}{11}t \\ c_1 &= \frac{16}{11}t \end{aligned}$$

$$-\frac{16}{11} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{29}{11} \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 5 \end{pmatrix}$$

4. ..

c_1	c_2	c_3	
1	2	3	0
0	5	7	0
0	0	1	0

$$\begin{aligned} c_3 &= 0 \\ c_2 &= 0 \\ c_1 &= 0 \end{aligned}$$

5. ..

c_1	c_2	c_3	
7	3	10	0 \leftarrow
2	-5	-3	0 $\cdot(-\frac{7}{2})$ $\cdot(-\frac{5}{2})$
5	8	13	0 \leftarrow
2	-5	-3	0
0	$-\frac{41}{2}$	$-\frac{41}{2}$	0 $\cdot(-1)$
0	$-\frac{41}{2}$	$-\frac{41}{2}$	0 \leftarrow
2	-5	-3	0
0	$-\frac{41}{2}$	$-\frac{41}{2}$	0
0	0	0	0

$$\begin{aligned} c_3 &= t \\ c_2 &= -t \\ c_1 &= -t \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \\ 13 \end{pmatrix}$$

6. ..

c_1	c_2	c_3			
-2	1	7	0	$\cdot(-\frac{3}{2})$	$\cdot(2)$
-3	0	6	0	\leftarrow	
4	1	5	0		\leftarrow
-2	1	7	0		
0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{9}{2}$	0	\leftarrow	
0	3	19	0	$\cdot(\frac{1}{2})$	
-2	1	7	0		
0	3	19	0		
0	0	5	0		

$$\begin{aligned}c_3 &= 0 \\c_2 &= 0 \\c_1 &= 0\end{aligned}$$

7. ..

c_1	c_2	c_3			
3	-2	-7	0	$\cdot(-\frac{7}{3})$	$\cdot(-\frac{5}{3})$
7	5	3	0	\leftarrow	
5	1	-3	0		\leftarrow
3	-2	-7	0		
0	$\frac{29}{3}$	$\frac{58}{3}$	0	\leftarrow	
0	$\frac{13}{3}$	$\frac{26}{3}$	0	$\cdot(-\frac{29}{13})$	
3	-2	-7	0		
0	$\frac{13}{3}$	$\frac{26}{3}$	0		
0	0	0	0		

$$\begin{aligned}c_3 &= t \\c_2 &= -2t \\c_1 &= t\end{aligned}$$

$$-\begin{pmatrix}3\\7\\5\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-2\\5\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\3\\-3\end{pmatrix}$$

8. ..

c_1	c_2	c_3	c_4			
1	0	0	1	0	$\cdot(-1)$	$\cdot(-1)$
0	1	1	1	0		
1	1	3	0	0	\leftarrow	
1	1	2	1	0		\leftarrow
1	0	0	1	0		
0	1	1	1	0		\leftarrow
0	1	3	-1	0	\leftarrow	
0	1	2	0	0	$\cdot(-1)$	$\cdot(-1)$
1	0	0	1	0		
0	1	2	0	0		
0	0	-1	1	0	\leftarrow	
0	0	1	-1	0	$\cdot(1)$	
1	0	0	1	0		
0	1	2	0	0		
0	0	1	-1	0		
0	0	0	0	0		

$$\begin{aligned}
 c_4 &= t \\
 c_3 &= t \\
 c_2 &= -2t \\
 c_1 &= -t
 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

9. ..

c_1	c_2	c_3	c_4			
1	1	0	0	0	$\cdot(-2)$	$\cdot(-1)$
0	0	1	0	0		
2	1	0	1	0	\leftarrow	
1	1	1	1	0		\leftarrow
1	1	0	0	0		
0	0	1	0	0	$\cdot(-1)$	
0	-1	0	1	0		
0	0	1	1	0	\leftarrow	
1	1	0	0	0		
0	0	1	0	0		
0	-1	0	1	0		
0	0	0	1	0		

$$\begin{aligned} c_4 &= 0 \\ c_3 &= 0 \\ c_2 &= 0 \\ c_1 &= 0 \end{aligned}$$