Vorkurs Mathematik

Gerhard Gossen
Katja Matthes
Marc Mittner
Marko Rak
Christian Braune
Andreas Zöllner

2011

Fachschaftsrat der Fakultät für Informatik der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

Dieses Heft wurde vom Fachschaftsrat der Fakultät für Informatik der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg für den Mathematik-Vorkurs 2011 produziert.

Inhaltsverzeichnis

1 Spickzettel

Autor: Gerhard Gossen

Dieser „Spickzettel" enthält grundlegende Definitionen und Schreibweisen, die du im Studium und im Vorkurs brauchst. Wir werden den Inhalt im Kurs meist voraussetzen.

1.1 Zahlenbereiche

Zeichen	Beschreibung	Beispiele
$\mathbb{N}$	Natürliche Zahlen: Positive ganze Zahlen Die 0 ist meistens nur enthalten, wenn die Bezeichnung $\mathbb{N}_0$ verwendet wird	$1;\ 2;\ 3;\ 454647;\ 8892349823$
$\mathbb{Z}$	Ganze Zahlen: Alle positiven und negativen ganzen Zahlen (engl. ganze Zahl: *integer*)	$-2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 42;\ -645631;\ 3469079$
$\mathbb{Q}$	Rationale Zahlen: Zahlen, die sich als Bruch von zwei ganzen Zahlen darstellen lassen	$\frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{4}{3};\ -\frac{6}{23};\ 0.2 (= \frac{1}{5})$
$\mathbb{R}$	Reelle Zahlen	$1,25; \sqrt{2}; \pi$
$\mathbb{C}$	Komplexe Zahlen (siehe Kap. 9)	$2+3i; i; -6-42i$

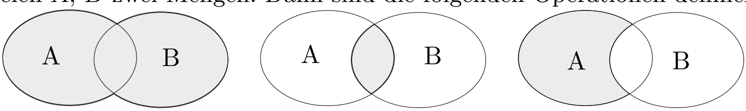
Jeder Zahlbereich enthält alle Zahlbereiche darüber: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

1.2 Mengen

Mengen können auf verschiedene Arten dargestellt werden. Die beiden wichtigsten sind diese:

- explizite Auflistung: $M = \{a, b, c, d\}$ enthält die Elemente a, b, c und d.
- Angabe einer zu erfüllenden Bedingung: $M = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x < 42\}$ enthält alle natürlichen Zahlen zwischen 0 und 42 (ohne diese beiden Zahlen).

Seien A, B zwei Mengen. Dann sind die folgenden Operationen definiert:



Vereinigung $A \cup B$ — Durchschnitt $A \cap B$ — Differenz $A \setminus B$

a ist Element von A: $a \in A$.
Die *leere Menge* ($\emptyset$) ist die Menge, die keine Elemente hat.

klein	groß	Name	übliche Verwendung
α		Alpha	Winkel
β		Beta	Winkel
γ	Γ	Gamma	
δ	Δ	Delta	Δ: Differenz
ε		Epsilon	sehr kleine positive Zahl
η		Eta	
θ	Θ	Theta	θ: Winkel in Polarkoordinaten
λ		Lambda	multiplikativer Faktor
μ		My	
ξ		Xi	
π	Π	Pi	$\pi = 3,14\ldots$, Π: Produkt
ρ		Rho	
σ	Σ	Sigma	Σ: Summe
τ		Tau	
ϕ	Φ	Phi	ϕ: Winkel
χ		Chi	
ψ	Ψ	Psi	
ω	Ω	Omega	

Tabelle 1.1: Auswahl von wichtigen griechischen Buchstaben

Zwei Mengen sind gleich ($A = B$), wenn beide aus den selben Elementen bestehen.

- Zwei Mengen heißen *disjunkt*, wenn sie keine gemeinsamen Elemente haben: $A \cap B = \emptyset$.
- Eine Menge A kann vollständig in einer anderen Menge B enthalten sein: $A \subseteq B$ (sprich: *A ist eine Teilmenge von B*). Wenn $A \neq B$ gilt, ist A eine *echte Untermenge* von B ($A \subset B$).
- Analog ist definiert: A ist eine (echte) Obermenge von B: $A \supseteq B$ ($A \supset B$).
- Die *Komplementmenge* $\overline{A}$ der Menge A enthält alle Elemente, die in A nicht enthalten sind. Wenn A eine Teilmenge einer Trägermenge X ist, dann gilt: $\overline{A} = X \setminus A$

1.3 Intervalle

Ein Intervall ist ein zusammenhängender Zahlenbereich, der durch seine beiden Endpunkte bestimmt ist. Es wird zwischen geschlossenen und offenen Intervallen unterschieden. Ein *geschlossenes Intervall* $[a, b]$ enthält a und b (inklusiv), ein *offenes Intervall* (a, b) enthält a und b nicht mehr (exklusiv).

Es ist möglich, beide Arten zu kombinieren. Es entsteht ein *halboffenes Intervall*: $[a, b)$ enthält a, aber nicht b, während $(a, b]$ hingegen b, aber nicht a enthält.

Symbol	Bedeutung
$\exists x$	es existiert (mindestens) ein x
$\nexists x$	es existiert kein x
$\forall x$	für alle x gilt ...
$\pm$	Plus/Minus, z. B. $x_{1,2} = \pm 1 \rightarrow x_1 = -1, x_2 = +1$
$\sum_{i=1}^{n} a_i$	$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$
$\prod_{i=1}^{n} a_i$	$a_1 \cdot a_2 \cdot \ \cdots \ \cdot a_n$
∞	Unendlich
$\wedge$	logisches und
$\vee$	logisches oder
$\neg$	logische Negation
$:=$	ist definiert als
$<, \leq$	kleiner als, kleiner oder gleich (oft auch: „echt kleiner, kleiner“)
$>, \geq$	größer als, größer oder gleich (oft auch: „echt größer, größer“)
$=, \neq$	gleich, ungleich

Tabelle 1.2: Wichtige Sonderzeichen

1.4 Abkürzungen und Vokabeln

gdw. Kurz für „genau dann, wenn“. Als Symbol wird auch $\Leftrightarrow$ verwendet.

qed Am Ende eines Beweises. Lateinisch „quod erat demonstrandum“ („was zu zeigen / beweisen war“). Bedeutung: Hurra, wir haben den Beweis endlich hinter uns. Gedruckt wird auch das Zeichen $\square$ verwendet.

kommutativ „vertauschbar“. Eine Operation (z.B. $+, \cdot$) ist kommutativ, wenn man die beiden Operanden vertauschen kann, ohne das Ergebnis zu ändern. Als Formel ausgedrückt, heißt das: $a \circ b = b \circ a$, wobei $\circ$ für die Operation steht.

distributiv Ausklammern ist erlaubt: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

assoziativ Die Reihenfolge, in der die Operation durchgeführt wird, ist beliebig: $a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$.

es existiert ein Es gibt *mindestens* ein Element, das die Aussage erfüllt.

es existiert genau ein Es gibt nur ein einziges Element, das die Aussage erfüllt.

notwendige Bedingung Diese Bedingung ist immer erfüllt, falls eine Aussage gilt. Es gibt aber auch Fälle, in denen die Bedingung erfüllt ist, obwohl die Aussage nicht gilt.

hinreichende Bedingung Wenn diese Bedingung erfüllt ist, gilt die Aussage auf jeden Fall. Es gibt aber Fälle, in denen die Aussage gilt, die Bedingung aber nicht erfüllt ist.

notwendige und hinreichende Bedingung Immer dann, wenn diese Bedingung erfüllt ist, gilt auch die Aussage (und umgekehrt).

2 Basismathematik

2.1 Bruchrechnung

Autor: Katja Matthes

2.1.1 Definition

Ein Bruch ist die Darstellung einer rationalen Zahl als Quotient.

Bruch: $\frac{Z}{N}$ mit $Z \in \mathbb{Z}$ und $N \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

Z ... Zähler N ... Nenner

Zwei Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ heißen gleichnamig, wenn sie den gleichen Nenner haben: $b = d$.

2.1.2 Kürzen und Erweitern

Ein Bruch wird gekürzt, indem sowohl Nenner als auch Zähler durch die gleiche Zahl dividiert werden.

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot c} \stackrel{:c}{=} \frac{a}{b}$$

Ein Bruch wird erweitert, indem sowohl Nenner wie Zähler mit dem gleichen Faktor multipliziert werden.

$$\frac{a}{b} \stackrel{\cdot c}{=} \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$$

2.1.3 Spezielle Rechenregeln

Addition von gleichnamigen Brüchen

Zwei gleichnamige Brüche werden addiert, indem ihre Zähler addiert werden und der Nenner übernommen wird.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}$$

Subtraktion von gleichnamigen Brüchen

Zwei gleichnamige Brüche werden subtrahiert, indem ihre Zähler subtrahiert werden und der Nenner beibehalten wird.

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a - c}{b}$$

Multiplikation mit einem Faktor

Ein Bruch wird mit einem Faktor n multipliziert, indem der Zähler mit diesem Faktor multipliziert wird, während der Nenner übernommen wird.

$$\frac{a}{b} \cdot n = \frac{a \cdot n}{b}$$

Division durch eine Zahl

Ein Bruch wird durch eine Zahl $n \neq 0$ dividiert, indem der Nenner mit dieser Zahl multipliziert wird und der Zähler beibehalten wird.

$$\frac{a}{b} : n = \frac{a}{b \cdot n}$$

2.1.4 Allgemeine Rechenregeln

Addition

Zwei Brüche werden addiert, indem sie zunächst gleichnamig gemacht werden und dann die Zähler addiert werden.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$$

Subtraktion

Zwei Brüche werden subtrahiert, indem sie zunächst gleichnamig gemacht werden und dann die Zähler subtrahiert werden.

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} - \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d}$$

Multiplikation

Zwei Brüche werden muliplíziert, indem jeweils die Nenner und Zähler multipliziert werden.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Division

Ein Bruch wird durch einen anderen dividiert, indem er mit dessen Kehrwert multipliziert wird.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

2.1.5 Aufgaben

Aufgabe 1

Kürze soweit möglich.

1. $\frac{20}{6}$
2. $\frac{92}{4}$
3. $\frac{360}{25}$
4. $\frac{1716}{308}$

Aufgabe 2

Berechne und kürze soweit wie möglich.

1. $\frac{56}{65} \cdot 12 \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{13}{16}$
2. $1 : \left(\frac{2}{9} + \frac{1}{7}\right)$
3. $\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{4}\right) : \frac{3}{4}$

Aufgabe 3

Berechne.

1. $\frac{\frac{8}{9}}{\frac{16}{27}}$
2. $\frac{2\frac{1}{3}}{1\frac{1}{6}}$
3. $\frac{5\frac{1}{2}}{\frac{11}{12}}$
4. $\frac{\frac{99}{100}}{\frac{9}{10}}$

Aufgabe 4

Berechne.

1. $\frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3} - \frac{2}{9} + \frac{3}{4} \cdot 1\frac{7}{9}$
2. $3\frac{5}{12} - 2\frac{5}{6} + 1\frac{1}{3} : \frac{4}{9} - 2\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}$

Aufgabe 5

Berechne.

1. $\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{9}{11} - \frac{3}{7}\right)$
2. $\left(\frac{1}{8} + \frac{7}{12}\right) : \left(5 - \frac{3}{4}\right)$
3. $\frac{4}{7} \cdot \left(\left(1\frac{1}{2} - \frac{5}{9}\right) : 4\frac{1}{4}\right)$
4. $\frac{4}{5} : \left[\left(\frac{5}{8} - \frac{1}{3}\right) \cdot 12\right]$
5. $\frac{3}{4} \cdot \left(2\frac{1}{2} : 1\frac{1}{4}\right)$

Aufgabe 6

Berechne.

1. $\frac{\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7}}{\frac{5}{14}}$
2. $\frac{1\frac{3}{4} + \frac{5}{6}}{\frac{1}{4}}$
3. $\frac{\frac{8}{9}}{3\frac{1}{3} + \frac{1}{6}}$
4. $\frac{\left(\frac{3}{5} - \frac{5}{10}\right) : \frac{2}{5}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}}$

2.2 Potenzen

Autor: Katja Matthes

2.2.1 Definition

Potenzen sind eine abkürzende Schreibweise für eine wiederholte Multiplikation mit einem Faktor.

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ Faktoren}} = a^n$$

a^n ... Potenz $\qquad$ a ... Basis $\qquad$ n ... Exponent

2.2.2 Besondere Exponenten

Seien $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $n \in \mathbb{N}_0$, dann gilt:

$$a^0 = 1$$

$$a^1 = a$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

2.2.3 Potenzgesetze

Folgende **Potenzgesetze** gelten für alle m, $n \in \mathbb{Z}$ und a, $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

1. Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem die Basis beibehalten wird und die Exponenten addiert werden.

   $$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

2. Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem die Basis beibehalten wird und die Exponenten subtrahiert werden.

   $$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

3. Potenzen mit gleichem Exponenten werden multipliziert, indem die Basen multipliziert werden und der Exponent beibehalten wird.

   $$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

4. Potenzen mit gleichem Exponenten werden dividiert, indem die Basen dividiert werden und der Exponent beibehalten wird.

   $$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

5. Potenzen werden potenziert, indem die Basis beibehalten wird und die Exponenten multipliziert werden.

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} = (a^n)^m$$

2.2.4 Wurzeln

Seien m, $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$, dann gilt:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Damit sind die Potenzgesetze auch auf Wurzeln anzuwenden. Man nennt a den Radikanten und n den Wurzelexponenten.

2.2.5 Wurzelgesetze

Für m, $n \in \mathbb{N}_{>1}$ und nichtnegativen reelen Radikanden a und b gilt:

1. $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^{m+n}}$

2. $\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a^{n-m}}$

3. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

4. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

5. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$

2.2.6 Aufgaben

Aufgabe 1

Vereinfache.

1. $3x^4 - x^4 - x^3(x+2)$
2. $-12a^2 + 3a(a+1)$
3. $ax^n + 4x^n$
4. $(1-t)^2 - \frac{1}{2}(1-t)^2$
5. $a(x+t)^k - b(x+t)^k$
6. $tx^3 - 3x^2 + 2tx^3 - 4x^2$
7. $t^3 \cdot t^4 - t^5(t^2+1)$
8. $x^2 \cdot x^3 \cdot x^4$
9. $3a^k \cdot a^{k-1} \cdot a$
10. $b^n \cdot b^{2n+1}$
11. $(x+1)^{n-1} \cdot (x+1)^{n+1}$
12. $\left(\frac{x}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{x}{3}\right)^2$
13. $t^2 \cdot x^2 \cdot t^n \cdot x^{n-1}$
14. $a \cdot b^k \cdot a^{2n} \cdot b^{k-3}$
15. $(x-2)^n \cdot (x-2)^{1-n}$
16. $0,3^6 \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^6$
17. $2^x \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^x \cdot 5$
18. $2^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4$
19. $\left(\frac{x}{4}\right)^4 \cdot 4^6$
20. $2^n \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^n \cdot x$
21. $9 \cdot 3^{n+1}$
22. $(a-b)^9 \cdot (a-b)$
23. $\left(\frac{a-b}{c}\right)^{2k} \cdot \left(\frac{c}{a-b}\right)^{2k}$

Aufgabe 2

Vereinfache.

1. $\frac{a^6}{a^3}$
2. $\frac{x^{2n+1}}{x^n}$
3. $\frac{15e^{x+1}}{5e^x}$
4. $\frac{x^4}{x^7}$
5. $\frac{2a^{1-2n}}{4a^{n+1}}$
6. $\frac{a^4 b^{4n+3}}{a^n b^{2n-1}}$
7. $\frac{81}{3^{x+3}}$
8. $\frac{(a-b)^3}{(a-b)^{n-1}}$
9. $\frac{(ab)^3}{x^2 y} \cdot \frac{(xy)^2}{a^4 b^2}$
10. $\frac{a^{n+1}}{a^n}$
11. $\frac{10^3}{2^3}$
12. $\frac{2,5^4}{0,5^4}$
13. $\frac{(10ab)^k}{(4b)^k}$
14. $\left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \frac{a}{b}$

15. $\left(\frac{-1}{a-b}\right)^3$
16. $\left(\frac{x}{2}\right)^3 : \left(\frac{x}{3}\right)$
17. $(-5^2)^3$
18. $3(c^4)^3 - 6c^{12}$
19. $(3b^2c^{n-1})^4$
20. $\left(\frac{7a^2}{49b^3}\right)^2$
21. $\left(\frac{-1}{c^3}\right)^{2n}$
22. $(3b^{n+1} \cdot c^{n-1})^2$
23. $(x^2y^3z^2)^5$
24. $(0,5e^{x+2})^2$
25. $\left(\frac{2}{x^2}\right)^5 - \left(\frac{3}{x^5}\right)^2$
26. $\left[\left(-\frac{3}{t}\right)^3\right]^4 \cdot \frac{t^9}{81}$
27. $\frac{(ab)^2}{x^3y} \cdot \frac{x^5y^2}{a^2b}$
28. $\frac{(4-12x)^3}{64}$
29. $\frac{(2x-4)^5}{(2-x)^3}$
30. $\frac{(4ab)^4}{(6a^2)^4} \cdot \frac{5}{b^4}$
31. $(a-b^2) \cdot (a-b^2)^n$

Aufgabe 3

Vereinfache.

1. $\left(\frac{1}{2}x^2\right)^5 + \frac{1}{8}(x^2)^5 + (2x^5)^2$
2. $\frac{1}{4} \cdot 2^4(2^2)^3$
3. $(3^{n+1})^2$
4. $(3x^2 - 5x)(1 - x^3) + (x^2 + 3x^4)x^3$
5. $a^{2r}b^r(a^{2r} - a^rb^{r+1} + b^{2r+2})$

Aufgabe 4

Vereinfache.

1. $-3x^3 \cdot x^2 + 5x \cdot x^4$
2. $4t^{n-4}t^3 - t \cdot t^{n-2}$
3. $2x^5y^3y - 4x^3y^2x^2y^2$
4. $\frac{4x^5+6x^4-12x^2}{2x^2}$
5. $(9 \cdot 3^n - 3^{n+1}) : 3^{n-1}$
6. $(2x+6)^2 + (x+3)^2$
7. $\frac{5a-20}{4a-16}$
8. $(3t^2 - 3t^3)^2$

Aufgabe 5

Faktorisiere - Schreibe als Produkt durch Ausklammern.

1. $3a^2 + 6a^3$
2. $\frac{1}{2}e^x - \frac{1}{4}e^{x+1}$
3. $a^{5b} + 3a^b$
4. $2^x + 2^{x+1}$
5. $x^4 + 2x^3$
6. $x^{n+3} - 4x^{n+2}$5pt
7. $-6t^{n+2} + 18t^{2-n}$
8. $e^x - e^{3x}$

Aufgabe 6

Vereinfache.

1. $\frac{x^4-x^3}{x^2-x}$
2. $\frac{e^{3x}+e^{2x}}{e^{2x}}$
3. $\frac{a^7b^3-ab^7}{a^5b-a^2 5ptb^4}$
4. $\frac{32}{2^{n+5}} + \frac{2^{-n+3}}{8}$

Aufgabe 7

Berechne y.

1. $y = \frac{1}{4}x^4 - 2tx^3 + \frac{9}{2}t^2x^2$ mit $x = 3t$
2. $y = e^{x^2-t^2} + 3e^{5t-(t-x)}$ mit $x = -t$
3. $y = \frac{3}{2t^2}x^4 - \frac{4}{t}x^3 + 3x^2 - 4$ mit $x = \frac{1}{3}t$
4. $y = \frac{e^{3tx}+4e^3}{tx-4}$ mit $x = \frac{1}{t}$
5. $y = \frac{tx^3}{2(x+t)^2}$ mit $x = -3t$

Aufgabe 8

Klammere aus.

1. $a^n + a^{4-n} + a^{2n} = a^{2n}(\ldots)$
2. $a^3 + a^{1-n} + a^{n+4} = a^{n+3}(\ldots)$
3. $\frac{3}{2}x^4 + \frac{3}{4}x^3 + \frac{1}{8}x^2 = \frac{1}{8}x^2(\ldots)$
4. $e^{3x} - 2e^{-x} = e^{-x}(\ldots)$
5. $te^{2x} - 2e^{x+1} = e^x(\ldots)$

Aufgabe 9

Multipliziere aus und vereinfache.

1. $\frac{1}{4} \cdot 2^{-4} \cdot (2^2)^3$
2. $(e^x - e^{-x} + 5)e^x$
3. $2^x(2^{-1} + 2^x)$
4. $(x^4 + x^{-2})(x^3 - x^{-3})$

Aufgabe 10

Vereinfache/Fasse zusammen.

1. $a^2 \cdot (a^2)^{-2} + 3a\left(\frac{1}{a}\right)^3$
2. $\frac{1}{18} \cdot (3^2)^2 + \frac{1}{2} \cdot 3^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$
3. $(x^2 \cdot x^{-3})^{-2} + \left(\frac{3}{x^2}\right)^{-1}$
4. $a^5 \cdot a^{-2} + 4a^2 \cdot a$
5. $\left(\frac{2}{x}\right)^3 + \left(\frac{1}{x}\right)^3$
6. $\frac{1}{e^{2x}} + 3(e^{-x})^2 - \left(\frac{2}{e^x}\right)^2$
7. $e^{-x} \cdot e^{-x+2} \cdot e^{2x-3}$
8. $6x^3 \cdot x^{-1} - 8x^4 \cdot x^{-2}$
9. $(t^7 - t^4) \cdot t^{-3}$

Aufgabe 11

Vereinfache/Fasse zusammen.

1. $\frac{-2^3-2\cdot 4}{2\cdot 2^3}$
2. $\frac{(1-x)^2}{(x-1)}$
3. $\frac{e^{3x+1}}{e^{-x+2}}$
4. $\frac{1{,}5e^{3x}-e^x}{1{,}5e^{3x}}$

Aufgabe 12

Vereinfache/Fasse zusammen.

1. $a^4 \cdot a^{-6} - 3a^3 \cdot a^{-5} + a^2$
2. $(a^{n+2} - 4a^n - 2a^{2-n}) \cdot \frac{a^{-2}}{2}$
3. $4x^{-4}x^7 - 0{,}5x^4x^{-1} + \left(\frac{1}{x^2}\right)^{1{,}5}$
4. $\frac{a^{n+1}}{a} + \frac{a^{2n-1}}{a^{n+2}} + (a^{n-1})^2 \cdot a^{2-n}$
5. $\frac{2^{2k}}{8} \cdot 2^{3-k} + 2 \cdot 2^{k-1}$

Aufgabe 13*

Vereinfache. (Tipp: Mache eine Fallunterscheidung.)

1. $(a-b)^n + (b-a)^n$
2. $(x-2)^n + (2x-4)^n - (2-x)^n$

2.3 Binomische Formeln

Autor: Katja Matthes

2.3.1 Definition

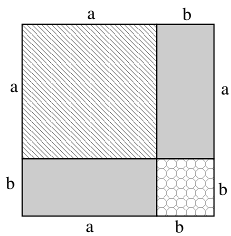
Die Binomischen Formeln sind Formeln zur Darstellung und zum Lösen von Quadrat-Binomen. Sie erleichtern das Ausmultiplizieren von Klammerausdrücken und erlauben Term-Umformungen von bestimmten Summen und Differenzen in Produkte. Dies stellt sehr oft die einzige Lösungsstrategie bei der Vereinfachung von Bruchtermen, beim Radizieren von Wurzeltermen sowie Logarithmenausdrücken dar.

2.3.2 Formeln

Erste binomische Formel

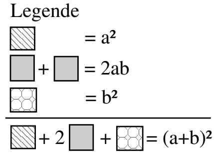
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Die erste binomische Formel kann wie im folgenden Bild dargestellt werden:



Die Fläche eines Quadrates entspricht seiner Seitenlänge zum Quadrat. In der Abbildung beträgt die Seitelänge des Quadrats $(a+b)$. Dementsprechend ist der Flächeninhalten des gesamten Quadrates $(a+b)^2$.

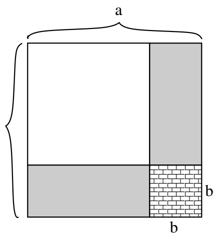
Die gleiche Fläche entsteht auch, indem ein schraffiertes Quadrat (Fläche: a^2), zwei graue Rechtecke (Fläche: $2 \cdot ab$) und ein gekringeltes Quadrat (Fläche: b^2) zusammen gelegt werden. Es ergibt sich also folgende Legende:



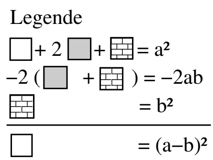
Zweite binomische Formel

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Die zweite binomische Formel kann durch folgende Abbildung veranschaulicht werden:



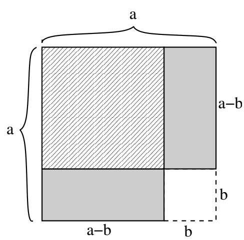
Gesucht ist der Flächeninhalt des weißen Quadrats: $(a-b)^2$. Das gesamte Quadrat in der Abbildung hat eine Fläche von a^2. Zur Berechnung stehen zwei weitere Flächen zur Verfügung: Das gekachelte Quadrat besitzt alleine einen Flächeninhalt von b^2 und zusammen mit einem grauen Rechteck jeweils einen Flächeninhalt von ab. Um die gesuchte Fläche zu erhalten, können von dem gesamten Quadrat zunächst die zwei grauen Rechtecke entfernt werden, indem $2 \cdot ab$ abgezogen werden (also: $-2 \cdot ab$). Dadurch wird das gekachelte Quadrat jedoch ein mal zuviel entfernt, so dass es wieder hinzuaddiert werden muss ($+b^2$). Daraus ergibt sich folgende Legende:



Dritte binomische Formel

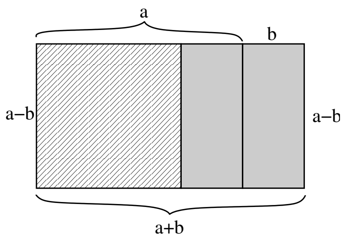
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Die dritte binomische Formel kann mit Hilfe der beiden folgenden Bilder erklärt werden:

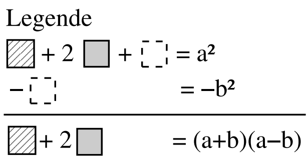


Gesucht ist die Fläche, die aus dem schraffierten Quadrat und den beiden grauen Rechtecken besteht. Am einfachsten erhalten wir diese, indem wir (wieder) vom gesamten Quadrat (Fläche: a^2) das kleine weiße Quadrat (Fläche: b^2) abziehen.

Allerdings können wir die Flächen auch so anordnen, dass das folgende Bild entsteht.



Die Fläche eines Rechtecks entspricht dem Produkt seiner Seitenlängen, hier $(a+b)$ und $(a-b)$. Daraus ergibt sich folgende Legende:



2.3.3 Aufgaben

Aufgabe 1

Wende die binomischen Formeln zur Vereinfachung an.

1. $(4x + 3y^3)^2$
2. $-(x^4 - 2)^2$
3. $(x^2 - x^3)(x^2 + x^3)$
4. $(3x^2 + 2t)^2$
5. $-\frac{1}{2}(x^2 - 4)^2$
6. $\left(-\frac{1}{2}(x^2 - 4)\right)^2$
7. $x^2y^2(x^4 + 2x^2y + y^2)$

Aufgabe 2

Vereinfache. Verwende dabei die binomischen Formeln.

1. $(x-3)^n \cdot (x+3)^n$
2. $\frac{(a^2-b^2)^3}{(a-b)^3}$
3. $\frac{(4-x^2)^n}{(2-x)^n}$
4. $\frac{(c-1)^{n-1}}{(c^2-1)^{n-1}}$
5. $\frac{(a^{2n}-b^{2n})^2}{(a^n-b^n)^2}$
6. $(a^3-ab^2)(a+b)^2$
7. $\frac{[(x-y)^2]^k}{(x^2-y^2)^k}$
8. $(a+b)^4(a-b)^4(a^2-b^2)^5$

Aufgabe 3

Faktorisiere/Schreibe als Produkt.

1. $(3x-6)\left(\frac{1}{4}x^2-x+1\right)$
2. $a^2-2a^3+a^4$
3. $3a^3-12a^9$
4. x^4-a^2
5. $3-x^2$
6. $x^{2n}+4x^n+4$
7. $x^{n+2}-6x^{n+1}+9x^n$
8. $e^{2x}-1$
9. $x^2e^x+2xe^x+e^x$

Aufgabe 4

Vereinfache.

1. $\frac{a^3+2a^2b+ab^2}{(a+b)^2}$
2. $\frac{a^4-a^2b^2}{ab-a^2}$
3. $\frac{t^3+6t^2+9t}{t^2-9}$
4. $\frac{x^{2n}-10x^n+25}{x^{2n}-25}$
5. $\frac{x^6-t^2}{x^4+tx}$
6. $\frac{x^{n+3}-x^{n+1}}{x^{n+1}+x^n}$
7. $\frac{(x^2+8xy+16y^2)}{(2x-3y)^{-2}} : \frac{x^2-16y^2}{2x-3y}$
8. $\frac{4t^2-4}{t^2+2t+1}$
9. $\frac{x^{n-1}-x^n}{x^n-x^{n+2}}$
10. $\frac{2(a^2+b^2)^2}{a^5-ab^4}$
11. $\frac{x^4-x^3}{x^4-x^2}$
12. $\frac{x^3y-xy^5}{x^3y^2-x^2y^4}$
13. $\frac{am-an+bm-bn}{a^2-b^2}$

Aufgabe 5

Multipliziere aus und vereinfache.

1. $(e^x + e^{-x})^2$
2. $(a^2 - a^{-2})^2$
3. $(x^{-2} - 3x)(x^{-2} + 3x)$
4. $(2^{-x} + 2^x)(2^{-x} - 2^x)$

2.3.4 Aufgabe 6

Vereinfache/Fasse zusammen.

1. $\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^x - e^{-x}}$
2. $\left(\frac{x-y}{a-b}\right)^5 \cdot \left(\frac{x-y}{5}\right)^{-2} \cdot \frac{(a-b)^2}{(x^2-y^2)}$

2.4 Polynomdivision

Autor: Gerhard Gossen
Überarbeitung: Marko Rak

2.4.1 Polynome

Ein Polynom ist ein Term der Form

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad a_n \neq 0$$

wobei die $a_i \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ und x variabel sind.

Der Grad eines Polynoms $(\operatorname{grad} p(x))$ ist der höchste Exponent von x. Beispielsweise ist $\operatorname{grad}\left(3x^2 + 2x^5 - 25x\right) = 5$.

2.4.2 Verfahren

Gegeben sind zwei Polynome $p(x)$ und $q(x)$. Die Division $p(x) : q(x)$ ergibt zwei neue Polynome:

$$p(x) : q(x) = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)}.$$

Dabei ist $r(x)$ der „Rest“ der Division.

Bei der Berechnung entfernt man die höchsten Terme nacheinander. Dazu sucht man einen Term $s_k = b_k x^k$, der mit dem ersten Term von q multipliziert den ersten Term von p ergibt. Diesen Term multipliziert man mit q und subtrahiert ihn von p. Der entstehende Term p' ist vom Grad kleiner als p. s_k wird zum ersten Term von $s(x)$ (dem „Ergebnispolynom“). Dieses Verfahren führt man solange durch wie möglich, also solange $\operatorname{grad} p'(x) \geq \operatorname{grad} q(x)$.

2.4.3 Beispiel

Berechnet werden soll $(-3 - 3x^2 + x + x^3) : (1 + x)$.

Zuerst ordnen wir die Polynome nach Exponenten: $(x^3 - 3x^2 + x - 3) : (x + 1)$. Im ersten Schritt wird also x^3 entfernt, der erste Ergebnisterm ist damit x^2, da $x^2 \cdot x = x^3$. Damit subtrahieren wir $x^2(x + 1) = x^3 + x^2$.

$$\begin{array}{l}
\big(\quad x^3 - 3x^2 \;\; + x - 3\big) : \big(x + 1\big) = x^2 \qquad\qquad + \dfrac{}{x+1} \\
\underline{\;-x^3 \;\; - x^2\;} \\
\qquad\quad - 4x^2 \;\; + x
\end{array}$$

Jetzt müssen wir also nur noch $(-4x^2 + x - 3) : (x + 1)$ berechnen. Wir rechnen analog solange wie möglich weiter.

$$
\begin{array}{l}
\big(\quad x^3 - 3x^2 \quad + x - 3\big) : \big(x+1\big) = x^2 - 4x + 5 + \dfrac{}{x+1} \\
\underline{\;- x^3 \;\; - x^2\;} \\
\qquad - 4x^2 \quad + x \\
\qquad \underline{\;\;\; 4x^2 + 4x} \\
\qquad\qquad\qquad 5x - 3 \\
\qquad\qquad\quad \underline{- 5x - 5} \\
\qquad\qquad\qquad\quad - 8
\end{array}
$$

Wir berechnen jetzt $-8 : (x+1)$. Da $\operatorname{grad}(-8) < \operatorname{grad}(x+1)$, bricht die Polynomdivision hier ab. -8 ist der „Rest“ $r(x)$ der Berechnung.

$$
\begin{array}{l}
\big(\quad x^3 - 3x^2 \quad + x - 3\big) : \big(x+1\big) = x^2 - 4x + 5 + \dfrac{-8}{x+1} \\
\underline{\;- x^3 \;\; - x^2\;} \\
\qquad - 4x^2 \quad + x \\
\qquad \underline{\;\;\; 4x^2 + 4x} \\
\qquad\qquad\qquad 5x - 3 \\
\qquad\qquad\quad \underline{- 5x - 5} \\
\qquad\qquad\qquad\quad - 8
\end{array}
$$

Das Ergebnis von $(x^3 - 3x^2 + x - 3) : (x+1)$ ist damit $x^2 - 4x + 5 + \frac{-8}{x+1}$. Als Probe multiplizieren wir das Ergebnis mit $(x+1)$.

$$
\begin{aligned}
(x^2 - 4x + 5 + \frac{-8}{x+1})(x+1) &= x^2(x+1) - 4x(x+1) + 5(x+1) + \frac{-8}{x+1}(x+1) \\
&= (x^3 + x^2) + (-4x^2 - 4x) + (5x+5) + (-8) \\
&= x^3 - 3x^2 + x - 3
\end{aligned}
$$

Dies ist unser ursprüngliches Polynom, wir haben also richtig gerechnet.

2.4.4 Weitere Beispiele

$$
\begin{array}{l}
\big(\quad 4x^5 - x^4 + 2x^3 \quad + x^2 \qquad\qquad - 1\big) : \big(x^2+1\big) = 4x^3 - x^2 - 2x + 2 + \dfrac{2x-3}{x^2+1} \\
\underline{\;- 4x^5 \qquad\quad - 4x^3\;} \\
\qquad\quad - x^4 - 2x^3 \quad + x^2 \\
\qquad\quad \underline{\;\;\; x^4 \qquad\qquad + x^2} \\
\qquad\qquad\qquad - 2x^3 + 2x^2 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{\;\;\; 2x^3 \qquad\quad + 2x} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 2x^2 + 2x - 1 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{- 2x^2 \qquad\quad - 2} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 2x - 3
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\big(\quad x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 8x - 4\big) : \big(x^2 - 4\big) = x^2 + 2x + 1 \\
\underline{-x^4 \qquad\quad + 4x^2} \\
\qquad 2x^3 + x^2 - 8x \\
\qquad \underline{-2x^3 \qquad + 8x} \\
\qquad\qquad x^2 \qquad - 4 \\
\qquad\qquad \underline{-x^2 \qquad + 4} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

2.4.5 Aufgaben

Berechne:

1. $(x^3 + 1) : (x + 1)$
2. $(x^4 - x + 1) : (x^2 + x + 1)$
3. $(x^2 - 9) : (x + 3)$
4. $(6x^3 - 5x^2 - 36x + 35) : (3x - 7)$
5. $(x^5 - x^2 - 2x + 1) : (x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x + 1)$
6. $(x^5 - x^3 + x^2 + x - 2) : (x^2 - 1)$
7. $(3x^3 + 2x^2 + 4x + 9) : (3x + 5)$
8. $(2x^5 + 8x^4 + x^3 - x^2 + 12x + 3) : (x^2 + 4x + 1)$
9. $(x^6 - 2x^5 + 9x^4 - 8x^3 + 15x^2) : (x^2 - x + 5)$
10. $(2x^7 - x^6 + 3x^5 - \frac{1}{2}x^4 + x^3) : (2x^3 - x^2 + 2x)$
11. $(x^7 - 6x^5 + x^4 - 11x^2 - 3x + 1) : (x^3 + 2)$
12. $(3x^5 + 6x^4 + \frac{11}{3}x^3 + 4x^2 + \frac{20}{3}x) : (3x^4 + x^3 + 4x)$
13. $(\frac{1}{6}x^4 + \frac{11}{36}x^3 - \frac{23}{18}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}) : (\frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3})$
14. $(\frac{5}{4}x^4 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^5 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x) : (\frac{1}{2}x^2 + x)$
15. $(\frac{1}{2}x^5 - \frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{15}{4}x + \frac{7}{4}) : (\frac{1}{2}x - \frac{1}{4})$

3 Quadratische Gleichungen

Autor: Marc Mittner
Überarbeitung: Marko Rak, Julia Hempel, Johannes Jendersie

3.1 Definition

Eine quadratische Gleichung ist eine Gleichung, die sich auf die Form

$$ax^2 + bx + c = 0$$

überführen lässt, mit $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Eine quadratische Gleichung ist in Normalform, falls $a = 1$, also

$$x^2 + px + q = 0 \quad \text{mit}$$

$$p = \frac{b}{a} \quad \text{und}$$

$$q = \frac{c}{a}$$

3.2 Lösen quadratischer Gleichungen

Jede quadratische Gleichung hat entweder keine, eine oder zwei reelle Lösungen.

3.2.1 Satz von Vieta:

Die reellen Zahlen a und b sind genau dann Lösungen der Gleichung $x^2+px+q = 0$, wenn für die Koeffizienten p und q gilt:

$$p = -(a + b)$$

$$q = a \cdot b$$

Daraus folgt: Hat eine quadratische Gleichung die Lösungen a und b, so lässt sie sich folgendermaßen darstellen:

$$(x - a)(x - b) = 0$$

Umgekehrt können die Lösungen aus dieser faktorisierten Form direkt abgelesen werden.

3.2.2 Mitternachtsformel

Jede quadratische Gleichung ($ax^2 + bx + c = 0$) kann mit Hilfe der Mitternachtsformel gelöst werden:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

3.2.3 p-q-Formel

Jede quadratische Gleichung in Normalform ($x^2 + px + q = 0$) kann mit Hilfe der hergeleiteten p-q-Formel gelöst werden. Die Herleitung erfolgt mit der quadratischen Ergänzung:

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Zusammenhang mit der Mitternachtsformel:

$$p = \frac{b}{a}$$
$$q = \frac{c}{a}$$

3.2.4 Satz vom Nullprodukt

Ein Produkt ist genau dann gleich Null, wenn einer seiner Faktoren gleich Null ist. Lässt sich eine Gleichung auf die Form $(ax^2 + bx + c) \cdot x^k = 0$ bringen, so hat die Gleichung nach dem Satz vom Nullprodukt die Lösungen $x_{1,2,..,k} = 0$ und die Lösungen x_{k+1} und x_{k+2} können mit Hilfe der Mitternachtsformel / p-q-Formel gelöst werden.

3.2.5 Substitution

Hat eine Gleichung die Form $ax^{2k} + bx^k + c = 0$, so kann x^k durch eine Variable u substituiert werden:

$$au^2 + bu + c = 0$$

Diese Gleichung kann dann als quadratische Gleichung gelöst werden. Für die Ergebnisse u_1 und u_2 gilt dann:

$$u_1 = x^k \qquad\qquad u_2 = x^k$$
$$x_{1,2} = \sqrt[k]{u_1} \qquad\qquad x_{3,4} = \sqrt[k]{u_2}$$

Dabei gilt für die Anzahl der Lösungen:

- keine Lösung, wenn $u < 0$ und k gerade
- eine Lösung, wenn $-\infty < u < \infty$ und k ungerade oder $u = 0$ und k gerade.
- zwei Lösungen, wenn $u > 0$ und k gerade

3.3 Beispiele

1. $3x^2 + 3x - 36 = 0$

   Ausklammern:
   $$\begin{aligned} 3(x^2 + x - 12) &= 0 \\ x^2 + x - 12 &= 0 \end{aligned}$$

   Lösen mit p-q-Formel ($p = 1$, $q = -12$):
   $$\begin{aligned} x_{1,2} &= -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + 12} \\ &= -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{49}{4}} \\ &= -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{7}{2} \\ x_1 &= 3 \\ x_2 &= -4 \end{aligned}$$

   faktorisierte Darstellung:
   $$3(x-3)(x+4) = 0$$

2. $x^7 + 19x^4 - 216x = 0$

   Ausklammern:
   $$\begin{aligned} x(x^6 + 19x^3 - 216) &= 0 \\ x_1 &= 0 \end{aligned}$$

   Substitution von $x^3 = u$:
   $$u^2 + 19u - 216 = 0$$

   Lösen mit p-q-Formel ($p = 19$, $q = -216$):
   $$\begin{aligned} u_{1,2} &= -\tfrac{19}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{19}{2}\right)^2 + 216} \\ &= -\tfrac{19}{2} \pm \sqrt{\tfrac{361}{4} + \tfrac{864}{4}} \\ &= -\tfrac{19}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1225}{4}} \\ &= -\tfrac{19}{2} \pm \tfrac{35}{2} \\ u_1 &= 8 \\ u_2 &= -27 \end{aligned}$$

   Resubstitution:

$x^3 = u_1$ ergibt die Lösungen
$x^3 = 8$
$x_2 = 2$

$x^3 = u_2$ ergibt die Lösungen
$x^3 = -27$
$x_3 = -3$

3.4 Aufgaben

Für alle Aufgaben gilt grundsätzlich: $x, y, z \in \mathbb{R}$ sind Variable $a, b, c \in \mathbb{R}$ sind feste Parameter

Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

1. $x^2 - x - 2 = 0$
2. $4x^2 + 16x - 84 = 0$
3. $\frac{1}{2}x^2 + 3x + 4 = 0$
4. $4x^2 + 48x + 144 = 0$
5. $(x - \sqrt{157})^2 = 0$
6. $\frac{7}{3}x^3 + \frac{49}{3}x^2 + 35x + 21 = 0$
7. $\frac{7}{4}x^2 + 7x = -7$
8. $|x^2| = 4$
9. $|x|^2 = 4$
10. $|x^2 - 4| = 2$
11. $x^2 = x + 12$
12. $3x^2 + 4x + 1 = 0$
13. $x^5 - 25x^3 + 144x = 0$
14. $(x - \pi)(x + \pi) = 0$

15. $\dfrac{x^3 - 2x^2}{x - 2} + \dfrac{2x^2 + 4x}{x + 2} = 1$

16. $x^4 - 14x^3 + 59x^2 - 70x = 0$

17. $3x^7 - 42x^5 + 147x^3 = 0$

18. $x^{12} = 4096$

19. $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 = 0$

20. $(\sqrt{2}x + 2\sqrt{2})^2 = 0$

21. $2ax^2 - 12ax + 18a = 0$

22. $\dfrac{1}{x^2} + 1 = 2$

23. $\dfrac{4}{x} + x = 4$

4 Lineare Gleichungssysteme

Autor: Marko Rak

4.1 Definition

Als *lineares Gleichungssystem* bezeichnet man eine Menge von m Gleichungen, die n Unbekannte enthalten. Allgemein lässt sich solch ein Gleichungssystem immer in folgender Form darstellen:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & + & \cdots & + & a_{3n}x_n & = & b_3 \\
\vdots & & & & & & \ddots & & & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_3 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}
$$

4.2 Lineare Abhängigkeit

Eine lineare Gleichung der obigen Form ist *linear abhängig*, wenn sie sich durch die anderen Gleichungen des Systems und der Multiplikation mit einer Konstanten c_i darstellen lässt.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & - & b_1 & \\
= & (a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & - & b_2) & c_2 \\
+ & (a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & \cdots & + & a_{3n}x_n & - & b_3) & c_3 \\
\vdots & & & & & \ddots & & & & & \vdots \\
+ & (a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & - & b_m) & c_n
\end{array}
$$

Andernfalls ist sie *linear unabhängig* von den anderen Gleichungen des Systems.

4.3 Lösbarkeit

Ob ein lineares Gleichungssystem lösbar ist und wie viele Lösungen es hat, ist unterschiedlich. Dabei tritt immer einer der folgenden Fälle auf:

1. Das Gleichungssystem hat keine Lösung.

2. Das Gleichungssystem hat genau eine Lösung.

3. Das Gleichungssystem hat mehrere (meist unendlich viele) Lösungen.

Kriterien für die Lösbarkeit und die Zuteilung eines linearen Gleichungssystems zu einem dieser Fälle, würde dem Vorlesungsinhalt vorgreifen und wird daher hier nicht ausführlich erklärt. Allgemein lässt sich jedoch sagen: Hat ein lineares Gleichungssystem mehr Unbekannte als linear unabhängige Gleichungen, so hat es mehrere Lösungen.

4.4 Lösungsverfahren

Neben den bereits bekannten Lösungsverfahren wie Gleich-, Einsetzungsverfahren usw., existieren noch weitere, systematische Verfahren. Dazu zählt u.A. das *Gauss-Verfahren* (auch *Gauss-Algorithmus* genannt), welches unter Verwendung einer vereinfachten Gleichungssystemdarstellung eine Diagonalform oder auch Dreiecksform erstellt. Diese beschleunigt das Finden von Lösungen.

4.4.1 Vereinfachte Darstellung

Ein allgemeines lineares Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & + & \cdots & + & a_{3n}x_n & = & b_3 \\
\vdots & & & & & & \ddots & & & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_3 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}$$

lässt sich vereinfacht wie folgt darstellen:

$$\begin{array}{ccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n & \\
\hline
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\
\vdots & & & \ddots & & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m
\end{array}$$

Nun werden die Unbekannten, da in allen Gleichungen der Systems gleich, nur noch im Tabellenkopf dargestellt. Tauchen in Gleichungen des Systems bestimmte Unbekannte nicht auf, werden sie in dieser Tabellendarstellung mit Faktor 0 aufgeführt. Das Gleichheitszeichen wird nun repräsentiert durch die Trennung vor der letzten Spalte. Auf die Additionsoperatoren wird gezielt verzichtet und die Subtraktion wird als Addition mit einem negativen Operanden betrachtet. Elementare Umformungen ändern nichts an der Lösung des linearen Gleichungssystems. Unter elementare Umformungen versteht man:

1. das Vertauschen von Spalten oder Zeilen
2. die Multiplikation einer Zeile mit einer Konstanten
3. die Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen

4.4.2 Diagonalform

Die *Diagonalform* des obigen allgemeinen linearen Gleichungssystems sieht wie folgt aus:

x_1	x_2	x_3	x_4	$\cdots$	x_{n-1}	x_n	
a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	$\cdots$	$a_{1(n-1)}$	a_{1n}	b_1
0	a^*_{22}	a^*_{23}	a^*_{24}	$\cdots$	$a^*_{2(n-1)}$	a^*_{2n}	b^*_2
0	0	a^*_{33}	a^*_{34}	$\cdots$	$a^*_{3(n-1)}$	a^*_{3n}	b^*_3
0	0	0	a^*_{44}	$\cdots$	$a^*_{4(n-1)}$	a^*_{3n}	b^*_3
$\vdots$				$\ddots$			$\vdots$
0	0	0	0	$\cdots$	$a^*_{(m-1)(n-1)}$	$a^*_{(m-1)n}$	b^*_{m-1}
0	0	0	0	$\cdots$	0	a^*_{mn}	b^*_m

Mittels dieses Schemas lassen sich die Lösungen des linearen Gleichungssystem relativ leicht erschließen. Man beginnt von unten und arbeitet sich zeilenweise aufwärts. Dabei kann mit jeder neuen Zeile eine weitere Unbekannte bestimmt werden.
Aus der letzten Zeile

$$a^*_{mn}x_n = b^*_m$$

ergibt sich

$$x_n = \frac{b^*_m}{a^*_{mn}}.$$

Nun wird x_n in die vorletzte Zeile

$$a^*_{(m-1)(n-1)}x_{n-1} + a^*_{(m-1)n}x_n = b^*_{m-1}$$

eingesetzt und nach x_{n-1} umgestellt, was

$$x_{n-1} = \frac{b^*_{m-1} - \frac{a^*_{(m-1)n}}{a^*_{mn}}b^*_m}{a^*_{(m-1)(n-1)}}$$

ergibt. Dies wird zeilenweise aufsteigend bis zur ersten Gleichung fortgesetzt, sodass gegebenenfalls alle Unbekannten ermittelt werden können.

4.4.3 Gauss-Algorithmus

Der bereits angesprochende *Gauss-Algorithmus* dient der Herstellung der Diagonalform aus einem beliebigen linearen Gleichungssystem. Dazu wird die vereinfachte Darstellung genutzt und mittels elementarer Umformungen schrittweise die Dreiecksform erstellt. Wir wählen in jedem Schritt eine Gleichung und addieren ein Vielfaches dieser zu jeder anderen Gleichung, um eine Spalte mit möglichst vielen Nullen zu erzeugen.

Die Ausgangssituation stellt sich wie folgt dar:

$$
\begin{array}{ccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n & \\
\hline
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\
\vdots & & & \ddots & & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m
\end{array}
$$

Wir wählen die erste Gleichung aus und addieren ein Vielfaches davon zu den anderen Gleichungen, um in der ersten Spalte Nullen zu erzeugen.

$$
\begin{array}{ccccc|ccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n & & & & & \\
\hline
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 & \cdot(-\frac{a_{21}}{a_{11}}) & \cdot(-\frac{a_{31}}{a_{11}}) & \cdots & \cdot(-\frac{a_{m1}}{a_{11}}) \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 & \hookleftarrow & & & \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 & & \hookleftarrow & & \\
\vdots & & & \ddots & & \vdots & & & \ddots & \\
a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m & & & & \hookleftarrow
\end{array}
$$

Somit ergibt sich nach dem ersten Schritt diese Tabelle:

$$
\begin{array}{ccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n & \\
\hline
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\
0 & a'_{32} & a'_{33} & \cdots & a'_{3n} & b'_3 \\
\vdots & & & \ddots & & \vdots \\
0 & a'_{m2} & a'_{m3} & \cdots & a'_{mn} & b'_m
\end{array}
$$

Nun wählen wir die zweite Gleichung und addieren ein Vielfaches davon zu jeder folgenden Gleichung, um in der zweiten Spalte auch Nullen zu erzeugen.

$$
\begin{array}{ccccc|cccc}
x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n & & & & \\
\hline
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 & & & \\
0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 & \cdot(-\frac{a'_{32}}{a'_{22}}) & \cdots & \cdot(-\frac{a'_{m2}}{a'_{22}}) \\
0 & a'_{32} & a'_{33} & \cdots & a'_{3n} & b'_3 & \hookleftarrow & & \\
\vdots & & & \ddots & & \vdots & & \ddots & \\
0 & a'_{m2} & a'_{m3} & \cdots & a'_{mn} & b'_m & & & \hookleftarrow
\end{array}
$$

Was uns nach dem zweiten Schritt zu der folgenden Tabelle bringt:

$$\begin{array}{ccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n & \\
\hline
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\
0 & 0 & a''_{33} & \cdots & a''_{3n} & b''_3 \\
\vdots & & & \ddots & & \vdots \\
0 & 0 & a''_{m3} & \cdots & a''_{mn} & b''_m
\end{array}$$

Dieser Ablauf wird wiederholt, bis die gewünschte Diagonalform entstanden ist und sich das erzeugte Schema wie oben beschrieben auflösen lässt.

$$\begin{array}{cccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_{n-1} & x_n & \\
\hline
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} & b_1 \\
0 & a^*_{22} & a^*_{23} & \cdots & a^*_{2(n-1)} & a^*_{2n} & b^*_2 \\
0 & 0 & a^*_{33} & \cdots & a^*_{3(n-1)} & a^*_{3n} & b^*_3 \\
\vdots & & & \ddots & & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a^*_{mn} & b^*_m
\end{array}$$

4.5 Beispiele

Für alle Beispiele gilt $x_i \in \mathbb{R}$

1. Die Ausgangssituation stellt sich wie folgt dar:

$$\begin{array}{ccccccc}
3x_1 & - & 1x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\
7x_1 & - & 4x_2 & - & 1x_3 & = & -2 \\
-x_1 & - & 3x_2 & - & 12x_3 & = & -5
\end{array}$$

und lässt sich vereinfacht darstellen:

x_1	x_2	x_3	
3	-1	2	1
7	-4	-1	-2
-1	-3	-12	-5

Jetzt wird schrittweise die Diagonalform erzeugt. Um Zeit und Platz zu sparen, lassen sich alle Schritte in einer Tabelle durchführen.

x_1	x_2	x_3			
3	-1	2	1	$\cdot(-\frac{7}{3})$	$\cdot(\frac{1}{3})$
7	-4	-1	-2	$\hookleftarrow$	
-1	-3	-12	-5		$\hookleftarrow$
3	-1	2	1		
0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{17}{3}$	$-\frac{13}{3}$	$\cdot(-2)$	
0	$-\frac{10}{3}$	$-\frac{34}{3}$	$-\frac{14}{3}$	$\hookleftarrow$	
3	-1	2	1		
0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{17}{3}$	$-\frac{13}{3}$		
0	0	0	4		

Nach Herstellung der Diagonalform lässt sich das Ergebnis wie oben beschrieben leicht erschließen. In diesem Beispiel entsteht ein Widerspruch in der letzten Gleichung

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 4.$$

Somit hat das lineare Gleichungssystem keine Lösung.

2. Eine weitere, diesmal gleich vereinfachte, Aufgabenstellung.

x_1	x_2	x_3	
2	-5	3	3
4	-12	8	4
3	1	-2	9

Die schrittweise Umformung:

x_1	x_2	x_3			
2	-5	3	3	$\cdot(-2)$	$\cdot(-\frac{3}{2})$
4	-12	8	4	$\hookleftarrow$	
3	1	-2	9		$\hookleftarrow$
2	-5	3	3		
0	-2	2	-2	$\cdot(\frac{17}{4})$	
0	$\frac{17}{2}$	$-\frac{13}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\hookleftarrow$	
2	-5	3	3		
0	-2	2	-2		
0	0	2	-4		

Es ergibt sich also nacheinander aus den letzten drei Gleichungen.

$$\begin{aligned} x_3 &= -2 \\ x_2 &= -1 \\ x_1 &= 2 \end{aligned}$$

Somit hat das lineare Gleichungssystem genau eine Lösung.

3. Ein letztes Beispiel in aller Kürze.

x_1	x_2	x_3			
1	-2	3	4	$\cdot(-3)$	$\cdot(-2)$
3	1	-5	5	$\hookleftarrow$	
2	-3	4	7		$\hookleftarrow$
1	-2	3	4		
0	7	-14	-7	$\cdot(-\frac{1}{7})$	
0	1	-2	-1	$\hookleftarrow$	
1	-2	3	4		
0	7	-14	-7		
0	0	0	0		

Es ist eine Nullzeile entstanden, welche auftritt, wenn zwei Gleichungen linear abhängig sind. Folglich hat das lineare Gleichungssystem nur noch 2 (linear unabhängige) Gleichungen und 3 Unbekannte. Es lässt sich eine Variable frei wählen, was zu unendlich vielen Lösungen für dieses lineare Gleichungssystems führt. Wir setzen also

$$x_3 = t, t \in \mathbb{R}$$

und lösen nun die anderen Unbekannten in Abhängigkeit von t auf.

$$\begin{array}{lcrcr} x_2 & = & -1 & + & 2t \\ x_1 & = & 2 & + & t \end{array}$$

4.6 Literatur

Grundstudium.info `http://www.grundstudium.info/linearealgebra/lineare_algebra_grundlagennode9.php`

Mathematik.de `http://www.mathematik.de/mde/fragenantworten/erstehilfe/linearegleichungssysteme/linearegleichungssysteme.html`

4.7 Aufgaben

Für alle Aufgaben gilt $x_i \in \mathbb{R}$ und $a, b \in \mathbb{R}$ sind fest.

4.7.1 Einfache Gleichungssysteme

Bestimmen Sie die Lösungen folgender Gleichungssysteme.

1. $$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 5 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \end{array}$$

2. $$\begin{array}{rcrcrcr} 7x_1 & + & 8x_2 & + & 5x_3 & = & 3 \\ 3x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ 18x_1 & + & 21x_2 & + & 13x_3 & = & 8 \end{array}$$

3. $$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & -3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 11x_3 & + & 5x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & -3 \\ x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \end{array}$$

4. $$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & -4 \\ 5x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 7x_1 & + & 3x_2 & + & 7x_3 & = & -8 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 11 \end{array}$$

5. $$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & - & x_5 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & = & 2 \\ & & 3x_2 & - & x_3 & - & 5x_4 & - & 7x_5 & = & 9 \\ 3x_1 & - & 3x_2 & - & 5x_3 & + & 2x_4 & + & 5x_5 & = & 2 \end{array}$$

6. $$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & & & = & -7 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & 7x_4 & = & -3 \\ -2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & = & 8 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & = & 7 \end{array}$$

7. $$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 13 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & = & 43 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 26 \end{array}$$

4.7.2 Parametrisierte Gleichungssysteme

Bestimmen Sie die Lösungen folgender Gleichungssysteme in Abhängigkeit von a und b.

1. $$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ 7x_1 & + & 7x_2 & + & (4-a)x_3 & = & 0 \end{array}$$

2. $$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & ax_2 & + & x_3 & = & 4 \\ ax_1 & + & 3x_2 & + & ax_3 & = & -2 \end{array}$$

3. $$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & -2 \\ x_1 & + & ax_2 & + & 2x_3 & = & b \end{array}$$

5 Betrag, Ungleichungen, Kreis

5.1 Betrag

Autor: Marc Mittner
Überarbeitung: Christian Rutsch

5.1.1 Definition

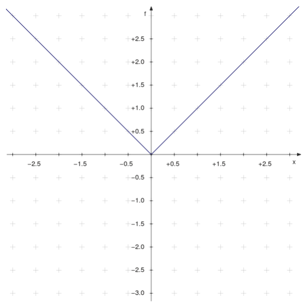
Für eine reelle Zahl x ist der Betrag definiert als:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

5.1.2 Die Betragfunktion

Graph der Betragfunktion $f(x) = |x|$ ist:

- symmetrisch zur y-Achse
- $y \geq 0$ für alle Werte $x \in \mathbb{R}$.



5.1.3 Rechenregeln für den Betrag

1. $|-a| = |a|$
2. $|a| \geq 0; |a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
3. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
4. $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$ für b$\neq 0$
5. $|a^n| = |a|^n$ für n$\in \mathbb{N}$
6. $|a + b| \leq |a| + |b|$ (sogenannte Dreiecksungleichung)

5.1.4 Beispiele

Gleichungen mit Beträgen werden durch Fallunterscheidung gelöst.

1. $|x-1| = 3$

   Fallunterscheidung

   1.Fall:

   $$\begin{aligned}(x-1) &= 3\\ x &= 4\end{aligned}$$

   2. Fall:

   $$\begin{aligned}-(x-1) &= 3\\ x &= -2\end{aligned}$$

2. $(x+3)^2 = 4 \to |x+3| = 2$

   Fallunterscheidung

   1. Fall:

   $$\begin{aligned}+(x+3) &= 2\\ \to x &= -1\end{aligned}$$

   2. Fall:

   $$\begin{aligned}-(x+3) &= 2\\ \to -x-3 &= 2\\ \to x &= -5\end{aligned}$$

5.1.5 Aufgaben

Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

1. $|x| = 7$
2. $|x+5| = 10$
3. $|2x-3| = 1$
4. $|2x-4| = 6x+36$

5.2 Rund um den Kreis

Autor: Marc Mittner
Überarbeitung: Christian Rutsch

5.2.1 Definition

Ein Kreis beschreibt die Menge aller Punkte, die von einem gegebenen Mittelpunkt aus den gleichen Abstand haben – oder als mathematisch saubere Definition:

$$K = \{X \in E,\ |\overline{MX}| = r\}$$

(Erläuterung: Der Kreis K ist eine Menge, die alle Punkte X einer Ebene E enthält, für die gilt, dass die Länge der Strecke $\overline{MX}$ gerade den Radius r ergibt.)

5.2.2 Mathematische Beschreibung

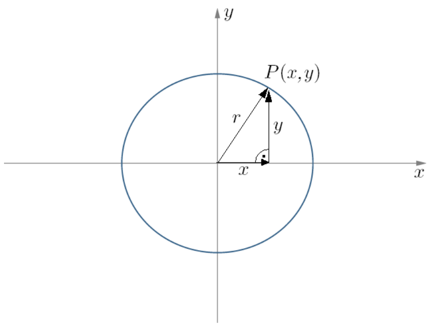
Für die mathematische Beschreibung eines Kreises gibt es verschiedene Möglichkeiten. Hier soll nur die Darstellung mit kartesischen Koordinaten behandelt werden.

5.2.3 Koordinatengleichung

Die Koordinatengleichung eines Kreises im kartesischen Koordinatensystem lautet:

$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$$

Der Mittelpunkt des Kreises ist dabei $M = (x_M, y_M)$, der Radius des Kreises ist r. Durch den Satz des Pythagoras wird klar, wie diese Beziehung zustande kommt:



x, y und r bilden ein rechtwinkliges Dreieck. Also folgt aus dem Satz von Pythagoras (mit dem Mittelpunkt $M = \binom{0}{0}$):

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Der Mittelpunkt des Kreises muss jedoch nicht zwingend der Ursprung des Koordinatensystems sein, sodass bei einer Verschiebung des Kreises in x- bzw. y-Richtung die folgende Koordinatengleichung ensteht:

$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$$

Ein wichtiger Begriff (grade für die komplexen Zahlen (Kapitel 9) sowie die Sinus- und Cosinusfunktionen (Abschnitt 7.1)) ist der Einheitskreis. Der Einheitskreis ist ein normaler Kreis um den Ursprung mit dem Radius $r = 1$:

$$x^2 + y^2 = 1$$

5.2.4 Funktionsgleichung

Durch Umformen der Koordinatengleichung erhält man zwei Funktionsgleichungen zur Beschreibung des Kreises. Zum einen für den oberen Teilbogen:

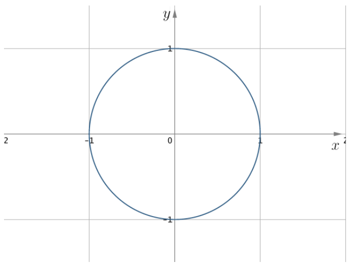
$$y = y_M + \sqrt{r^2 - (x - x_M)^2}$$

und für den unteren Teilbogen:

$$y = y_M - \sqrt{r^2 - (x - x_M)^2}$$

5.2.5 Beispiele

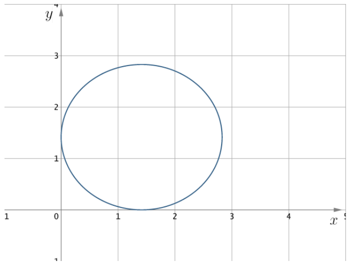
1. Der Einheitskreis mit Radius $r = 1$ um den Ursprung $M = (0, 0)$:



   Koordinatengleichung:

   $$x^2 + y^2 = 1$$

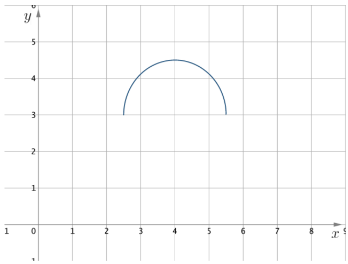
2. Kreis mit Radius $r = \sqrt{2}$ und Mittelpunkt $M = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$:



Koordinatengleichung:

$$(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 = 2$$

3. Oberer Halbkreis mit Radius $r = 1.5$ und Mittelpunkt $M = (4, 3)$



Funktionsgleichung:

$$y = 3 + \sqrt{2.25 - (x - 4)^2}$$

5.2.6 Aufgaben

1. Stellen Sie die Kreisgleichung für einen Kreis mit dem Mittelpunkt M auf, der durch den Punkt P_1 geht.
   a) $M(1|3); P(4|3)$
   b) $M(-1|5); P(6|-4)$
   c) $M(-2|-1); P(4|3)$
2. Welches geometrische Objekt wird durch die Gleichung beschrieben? Skizzieren Sie dieses in einem Koordinatensystem
   a) $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 5 = 4$
   b) $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 10 = 1$
3. * Geben Sie die Gleichung des Kreises an, der durch die Punkte $P_1(6|7)$, $P_2(2|9)$und $P_3(-1|0)$ geht.

5.3 Ungleichungen

Autor: Marc Mittner
Überarbeitung: Christian Rutsch

5.3.1 Definition

Eine Ungleichung stellt eine Ordnung zweier mathematischer Objekte dar. Ungleichungen werden bezüglich der Anzahl der Variablen und der Potenz, in der die Variablen auftreten, unterschieden. Dabei variiert je nach Typ der Ungleichung das Lösungsverfahren.

5.3.2 Äquivalenzumformung von Ungleichungen

Zur Umformung von Ungleichungen sind folgende Operationen zulässig:

- Addition einer Zahl $a \in \mathbb{R}$ auf beiden Seiten.
- Subtraktion einer Zahl $a \in \mathbb{R}$ auf beiden Seiten.
- Multiplikation/Division mit einer Zahl $a \in \mathbb{R}, a > 0$ auf beiden Seiten.
- Multiplikation/Division mit einer Zahl $a \in \mathbb{R}, a < 0$ auf beiden Seiten. Dabei ist zu beachten, dass das Ordnungszeichen umgedreht wird!
- Bei Ziehen der Quadratwurzel muss darauf geachtet werden, dass die Ungleichung in zwei Teile zerfällt:

$$\begin{aligned} x^2 < a^2 &\Leftrightarrow \\ -a < x < a &\Leftrightarrow \\ |x| < a & \end{aligned}$$

(siehe Beispiel bei quadratischen Ungleichungen).

Änderung der Ordnungszeichen bei Multiplikation/Division mit einer Zahl $a < 0$:

- $<$ wird zu $>$, aus $>$ wird $<$
- $\leq$ wird zu $\geq$, aus $\geq$ wird $\leq$
- Die Zeichen „$=$“ und „$\neq$“ bleiben erhalten.

Nicht generell erlaubt sind folgende Umformungen:

- beidseitige Multiplikation mit 0
- beidseitige Division durch 0
- beidseitiges Quadrieren

5.3.3 Lineare Ungleichungen

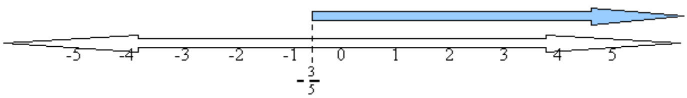
Eine lineare Ungleichung ist eine Ungleichung, in der die Variable nur in der ersten Potenz enthalten ist. Jede lineare Ungleichung kann in eine dieser drei Formen gebracht werden:

$$ax + b > c \quad \text{oder} \quad ax + b \geq c \quad \text{oder} \quad ax + b \neq c$$

Zur Lösung einer linearen Ungleichung wird die Variable durch Umformen isoliert:
Beispiel:

$$\begin{aligned} 3 - 4x - 13 + 2x - 3x + 12 &\leq 5 && \text{Zusammenfassen} \\ -5x + 2 &\leq 5 && \mid -2 \\ -5x &\leq 3 && \mid \div(-5) \\ x &\geq -\frac{3}{5} \end{aligned}$$

Graphische Darstellung des Lösungsbereichs:



Allgemein:

$$\begin{aligned} ax + b &\leq c && \mid -b \\ ax &\leq c - b && \mid \div a \ (a > 0) \\ x &\leq \frac{c-b}{a} \end{aligned}$$

5.3.4 Quadratische Ungleichungen

Bei quadratischen Ungleichungen können Variablen auch in der zweiten Potenz auftreten. Jede quadratische Ungleichung kann in eine der Formen

$$x^2 + px + q > r \quad \text{oder} \quad x^2 + px + q \geq r \quad \text{oder} \quad x^2 + px + q \neq r$$

zusammengefasst werden.
Zur Lösung wird das Verfahren der quadratischen Ergänzung verwendet. Bei diesem Verfahren wird zur normierten Form der quadratischen Ungleichung

$$x^2 + px + q > r$$

der Teil $x^2 + px$ zu einer binomischen Formel erweitert.

Allgemein:

$$x^2 + px + q < r \qquad | - q$$

Quadratische Ergänzung:

$$\begin{aligned} x^2 + px &< r - q && | + \left(\frac{1}{2}p\right)^2 \\ x^2 + px + \left(\frac{1}{2}p\right)^2 &< r - q + \left(\frac{1}{2}p\right)^2 && \text{Binom} \\ \left(x + \frac{1}{2}p\right)^2 &< r - q + \left(\frac{1}{2}p\right)^2 \\ |x + \frac{1}{2}p| &< \sqrt{r - q + \left(\frac{1}{2}p\right)^2} \end{aligned}$$

Daraus folgen die beiden Lösungen:

$$\begin{aligned} x_1 &< \sqrt{r - q + \left(\frac{1}{2}p\right)^2} - \frac{1}{2}p \\ x_2 &> -\sqrt{r - q + \left(\frac{1}{2}p\right)^2} - \frac{1}{2}p \end{aligned}$$

Somit erhält man die p-q-Formel für quadratische Gleichungen in normierter Form ($r = 0$):

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} 5x^2 + 12 - 12x - 3x^2 &\geq 26 && \text{Zusammenfassen} \\ 2x^2 - 12x + 12 &\geq 26 && \text{Normieren} \\ x^2 - 6x + 6 &\geq 13 && | - 6 \end{aligned}$$

Quadratische Ergänzung:

$$\begin{aligned} x^2 - 6x &\geq 7 && | + 9 \\ x^2 - 6x + 9 &\geq 16 && \text{2. binom. Formel} \\ (x - 3)^2 &\geq 16 \end{aligned}$$

Die Ungleichung zerfällt in zwei Teile:

$$|x-3| \geq 4$$

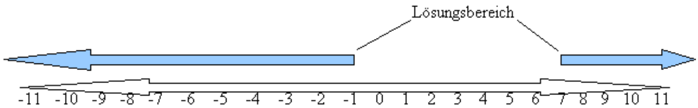
1. Fall:

$$x_1 - 3 \geq 4$$
$$x_1 \geq 7$$

2. Fall:

$$-x_2 + 3 \geq 4$$
$$x_2 \leq -1$$

Graphische Darstellung des Lösungsbereichs:



5.3.5 Ungleichungen höherer Ordnung

Zum Lösen von Ungleichungen höherer Ordnung eignet sich wegen der Komplexität der Gleichungen meist nur die Darstellung der Gleichung als Produkt in der Form:

$$(x-a_1) \cdot (x-a_2) \cdot \ldots \cdot (x-a_n) > 0$$

Die analytische Berechnung der Nullstellen ist aber nicht immer möglich. Lediglich bei Ungleichungen der Ordnung drei ist diese Faktorisierung noch praktikabel.

5.3.6 Bruchungleichungen

Bei Bruchungleichungen ist darauf zu achten, dass zuerst der Definitionsbereich festgestellt werden muss, da eine Division durch Null nicht zulässig ist. Dazu werden alle Belegungen der Variablen, die eine solche Division verursachen würden, aus dem Definitionsbereich entnommen.

Lösen von Bruchungleichungen

Zum Lösen von Bruchungleichungen benutzt man folgende Vorgehensweise:

1. Multiplikation beider Seiten mit dem Hauptnenner
2. Ausmultiplizieren
3. Lösen der entstehenden (quadratischen) Ungleichung

Beispiel

$$\frac{(3x-2)}{(x+2)} + \frac{(2+5x)}{(x^2-4)} \leq \frac{(x+3)}{(x-2)}$$

Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, +2\}$

Multiplikation mit dem Hauptnenner $(x+2)(x-2) = (x^2-4)$:

$$\frac{(3x-2)}{(x+2)} \cdot (x^2-4) + \frac{(2+5x)}{(x^2-4)} \cdot (x^2-4) \leq \frac{(x+3)}{(x-2)} \cdot (x^2-4)$$
$$(3x-2)(x-2) + 2 + 5x \leq (x+3)(x+2)$$

Ausmultiplizieren:

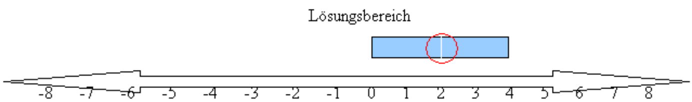
$$3x^2 - 8x + 4 + 2 + 5x \leq x^2 + 5x + 6$$

Lösen der entstandenen quadratischen Gleichung:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 8x &\leq 0 \\ x^2 - 4x) &\leq 0 \\ x^2 - 4x + 4 &\leq 4 \\ |x-2| &\leq 2 \\ x &\leq 4 \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Lösung für die Ungleichung sind somit alle x mit $0 \leq x \leq 4$ außer $x = 2$, da diese Belegung nicht im Definitionsbereich liegt und somit auch nicht im Lösungsbereich liegen kann. $L = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 4, x \neq 2\}$

Graphische Darstellung des Lösungsbereichs:



5.3.7 Ungleichungen mit mehreren Variablen

Ungleichungen mit mehreren Variablen haben statt einem eindimensinalen einen mehrdimensinalen Lösungsbereich. Die Dimension nimmt mit der Anzahl der Variablen zu. So hat ein Ungleichungssystem mit zwei Variablen eine Lösung im $\mathbb{R}^2$ (also in einer Ebene) und Ungleichungssysteme mit n Variablen haben eine Lösung im $\mathbb{R}^n$.

Beispiel: Ungleichung mit 2 Variablen

$$2x^2 + 3 - y - 2 > 2$$
$$2 - \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}y + 2$$

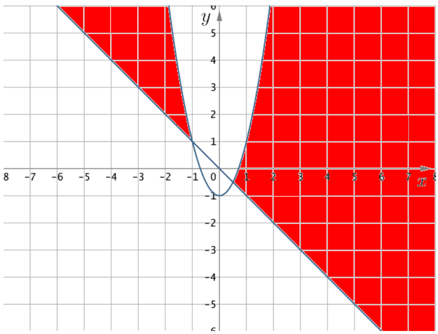
Zum Lösen des Ungleichungssystems wird zuerst eine Variable isoliert.

$$y < 2x^2 - 1$$
$$y > -x$$

Dadurch ergibt sich nun:

$$2x^2 - 1 > y > -x$$

Graphische Darstellung des Lösungsbereichs:



Der markierte Bereich stellt den Lösungsbereich dar.
Die Punkte auf den Funktionen selbst sind nicht im Lösungsbereich enthalten.
Für den Bereich $-1 \leq x \leq \frac{1}{2}$ existiert keine Lösung.
Für alle anderen Werte von x sind alle Punkte, für die die Bedingung

$$2x^2 - 1 > y > -x$$

erfüllt ist, in der Lösungsmenge enthalten.

5.3.8 Quellen

- `http://ilias.tfh-wildau.de/~laborwww/downloads/Kap2_komplett.pdf`
- Wikipedia: Lösen von Ungleichungen
- `ftp://ftp.fernuni-hagen.de/pub/fachb/mathe/algeo/schulte/1011C3.pdf` (nicht mehr verfügbar)

5.3.9 Aufgaben

Ungleichungen mit einer Variablen

Lösen Sie folgende Ungleichungssysteme analytisch:

1. $$\begin{aligned} (x+1)(x-1) &\leq 0 \\ \sqrt{x} &\geq 1 \end{aligned}$$

2. $$\sqrt{\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 + \frac{21}{8}x + \frac{9}{8}} < \sqrt{\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{8}}$$

3. $$\frac{1}{2}x^2 - 1 > 0$$

4. $$x^3 + 3x^2 - 4 > 0$$

5. $$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 < 0$$

6. $$x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1 \leq 0$$

7. $$\begin{aligned} \frac{1}{2}x^2 - 8 &> 0 \\ -3(x-1)^2 + 12 &> 0 \end{aligned}$$

8. $$(x^2 - 2)(x+1) \geq 0$$

9. Geben Sie die Lösungsmenge des Ungleichungssystems in Abhängigkeit von a an.
$$\begin{aligned} ax^2 &> 0 \\ \frac{1}{2}x + 1 &> 0 \end{aligned}$$

10. Geben Sie die Lösungsmenge des Ungleichungssystems in Abhängigkeit von a an.
$$\begin{aligned} x^2 + a &> 0 \\ \frac{1}{2}x + 1 &> 0 \end{aligned}$$

11. Geben Sie die Lösungsmenge des Ungleichungssystems in Abhängigkeit von a an.
$$\begin{aligned} -x^2 + a &< 0 \\ x + a &< 0 \end{aligned}$$

12. Geben Sie die Lösungsmenge des Ungleichungssystems in Abhängigkeit von a an.

$$4x^2 - 2ax + \frac{1}{4}a^2 \geq 0$$

13. $$x^3 + x^2 - 2x \geq 2$$

14. $$\begin{aligned} (x-1)^2 - 4 &< 0 \\ -(x+1)^2 + 4 &> 0 \end{aligned}$$

15. $$\begin{aligned} \sqrt{(x-1)} &\geq 0 \\ -\frac{1}{4x} + 4 &< 0 \end{aligned}$$

16. $$\begin{aligned} x^4 - 16 &\leq 0 \\ x^3 + 1 &\geq 0 \end{aligned}$$

Ungleichungen mit mehreren Variablen

Lösen Sie folgende Ungleichungssysteme graphisch:

1. $$\begin{aligned} &x^2 + y^2 < 25 \\ &\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} > y \\ &-x - 5 < y \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} -x^2 + 5 &< y \\ x(x-3)^2 &> y \\ -x - 2 &> y \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} 3x^2 - 3x - 10 &< -4 + y \\ y &\leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} y &< \frac{2x^2 + 3x + 4}{-x^4 - 2x^3 - x^2 + 4x + (2x + x^2)^2} \\ -\frac{1}{x} &< y \\ -(\frac{1}{\sqrt{2}}x)^2 &< y - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 2 \\ y + x - 2 &< 0 \end{aligned}$$

5.
$$\frac{1}{2}x^2 - 3x \leq y$$
$$y \leq -x$$
$$17x^3 - \frac{1}{2} = y$$

6.
$$y + \sqrt{\frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x - 1}} > 0$$
$$\frac{2}{20}x - \frac{1}{3}y + \frac{3}{12} < 0$$

7.
$$\frac{1}{2} - 2 < y$$
$$\frac{1}{2} + 2 > y$$
$$2x - 4 < y$$
$$2x + 4 > y$$
$$-\frac{1}{2} - 2 < y$$
$$-\frac{1}{2} + 2 > y$$
$$-2x - 4 < y$$
$$-2x + 4 > y$$

8.
$$|(x^2 + (y - 1)^2)| = 4$$
$$x \geq y$$

9.
$$((\sin x) + \frac{1}{2})^2 - \frac{3}{4} - y - (\sin x)^2 > 0$$
$$\cos(x + \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{2} < y$$

10.
$$\left|\frac{1}{x}\right| > y$$
$$-\frac{1 + 7x^2}{x^2 y} > -\frac{y + 7}{y}$$
$$|x| + y < 5$$

11.
$$4x^2 + y^2 \leq 16$$
$$x^2 + 4y^2 \leq 16$$

12.
$$\begin{aligned}(y-2)^2 &< 4-(x-2)^2\\ y-2 &< 0\\ |x-2|+2 &< y\end{aligned}$$

13. Berechnen Sie für die Ungleichung den Flächeninhalt der Lösungsmenge:

$$\begin{aligned}(2y-3)^2+(3y+2)^2+y-10 \geq \left|\frac{4x+4(\frac{1}{2}x-\frac{3}{2})^2-9}{x}\right|+13y^2\\ y \leq -1\end{aligned}$$

14. Berechnen Sie für das Ungleichungssystem den Flächeninhalt der Lösungsmenge:

$$\begin{aligned}f: &\quad x^2-4x+4+y^2-2y+1 \geq 1\\ g: &\quad (x-2)^2+(y-2)^2 \leq 4\\ h: &\quad (x-2)^2+(y-3)^2 \geq 1\end{aligned}$$

15. Für welches a ist der Flächeninhalt der Lösungsmenge gleich 2?

$$\begin{aligned}y &\geq 2\\ -|x|+a &\leq y\end{aligned}$$

16. Bestimmen Sie ein a und ein b, für das der Flächeninhalt der Lösungsmenge 2π ergibt!

$$\begin{aligned}-\frac{1}{3}x &\leq y-2\\ (x+\frac{1}{4}b)^2+(y-\frac{3}{2}a)^2 &\leq a^2\end{aligned}$$

17. Beschreiben Sie die Lösungsmenge des Ungleichungssystems:

$$\begin{aligned}x^2+y^2+z(z+2) &< 8\\ x &\leq 0\\ y &\leq 0\end{aligned}$$

18. Beschreiben Sie die Lösungsmenge des Ungleichungssystems:

$$\begin{aligned}(x-2\sqrt{3})^2+(y-2\sqrt{3})^2+(z-2\sqrt{3})^2 &\leq 36\\ (x+2\sqrt{3})^2+(y+2\sqrt{3})^2+(z+2\sqrt{3})^2 &\leq 36\end{aligned}$$

6 Vollständige Induktion

Autor: Katja Matthes
Überarbeitung: Sebastian Nielebock

6.1 Prinzip

Vollständige Induktion ist eine mathematische Beweismethode. Das Ziel der vollständigen Induktion besteht darin, die Gültigkeit einer Aussage für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0 \in \mathbb{N}_0$ (Induktionsanfang) nachzuweisen.

1. **Induktionsanfang**
   Man zeigt, dass die Aussage für die natürliche Zahl $n_0 = 1$ (oder auch $n_0 = 0, 2, 3, ...$) gilt.

2. **Induktionsschritt**
   - Induktionsvoraussetzung: Es wird angenommen, dass die Aussage für eine feste natürliche Zahl n gilt.
   - Induktionsbehauptung: Es wird behauptet, dass die Aussage unter der Voraussetzung auch für die nachfolgende natürliche Zahl $n + 1$ gilt.
   - Induktionsbeweis: Die Induktionsbehauptung wird unter Verwendung der Induktionsvoraussetzung bewiesen.

3. **Schlussfolgerung**
   Aus dem Verbund von Verankerung und Vererbung folgt, dass die Aussage tatsächlich für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$ gilt.

6.2 Einschub: Das Summen- und Produktzeichen

Viele Aufgaben in der Induktion sind mit Summen- und Produktzeichen formuliert. Um einen Teil der Beweise besser führen zu können, ist es notwendig einige Regeln für diese Symbole zu kennen.

6.2.1 Allgemein

Das Summen- bzw. das Produktzeichen stellen jeweils eine Verkürzung für die Addition bzw. Multiplikation dar:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \; ; \; \prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \; \cdots \; \cdot a_n$$

6.2.2 Letzten Index ausklammern

Eine sehr nützliche Regel zum Induktionsbeweis ist das Ausklammern des letzten Index. Für viele Beweise lässt sich so der Induktionsschritt leicht zeigen:

$$\sum_{i=l}^{n+1} a_i = \left(\sum_{i=l}^{n} a_i\right) + a_{n+1} \ ; \ \prod_{i=l}^{n+1} a_i = \left(\prod_{i=l}^{n} a_i\right) \cdot a_{n+1}$$

6.2.3 Assoziativgesetz

$$\sum_{i=l}^{m-1} a_i + \sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=l}^{n} a_i \ ; \ \prod_{i=l}^{m-1} a_i \cdot \prod_{i=m}^{n} a_i = \prod_{i=l}^{n} a_i$$

6.2.4 Kommutativgesetz

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m}^{n} a_{m+n-i} \ ; \ \prod_{i=m}^{n} a_i = \prod_{i=m}^{n} a_{m+n-i}$$

6.2.5 Verbindung zweier Summen- bzw. Produktzeichen

$$\sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} b_i = \sum_{i=m}^{n} (a_i + b_i) \ ; \ \prod_{i=m}^{n} a_i \cdot \prod_{i=m}^{n} b_i = \prod_{i=m}^{n} (a_i \cdot b_i)$$

6.2.6 Doppelsummen bzw. Doppelprodukte

$$\sum_{i=m}^{n} \sum_{j=k}^{l} a_{ij} = \sum_{j=k}^{l} \sum_{i=m}^{n} a_{ij} \ ; \ \prod_{i=m}^{n} \prod_{j=k}^{l} a_{ij} = \prod_{j=k}^{l} \prod_{i=m}^{n} a_{ij}$$

6.3 Beispielaufgabe

Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2(2^n - 1)$$

6.3.1 Induktionsanfang

Wir zeigen, dass die Aussage richtig ist für $n_0 = 1$.

$$\sum_{k=1}^{1} 2^k = 2^1 = 2 = 2(2^1 - 1)$$

(wahre Aussage)

6.3.2 Induktionsschritt

Induktionsvoraussetzung: Wir nehmen an, dass die Annahme gültig ist für ein festes $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2(2^n - 1)$$

Induktionsbehauptung: Wir behaupten, dass dann die Aussage auch für die nachfolgende Zahl $n+1$ $(n \mapsto n+1)$ gilt.

$$\sum_{k=1}^{n+1} 2^k = 2(2^{n+1} - 1)$$

Induktionsbeweis: Mit Hilfe der Induktionsvorraussetzung wird die linke Seite der Behauptung in deren rechte Seite umgewandelt.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} 2^k &= \sum_{k=1}^{n} 2^k + 2^{n+1} && |\text{nach Voraussetzung} \\
&= 2(2^n - 1) + 2^{n+1} && |\text{Potenzgesetze} \\
&= 2(2^n - 1) + 2 \cdot 2^n && |\text{2 ausklammern} \\
&= 2(2^n - 1 + 2^n) && |\text{zusammenfassen} \\
&= 2(2 \cdot 2^n - 1) && |\text{Potenzgesetze} \\
&= 2(2^{n+1} - 1)
\end{aligned}$$

6.3.3 Induktionsschluss

Damit ist durch das Prinzip der vollständigen Induktion die Induktionsbehauptung und damit auch die Aussage:

$$\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2(2^n - 1)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

qed.

6.4 Literatur

- Bigalke, Köhler, Kuschnerow, Ledworuski: *Mathematik 11. Leistungsfach.* 1. Auflg. 2001. Cornelsen Verlag, Berlin.
- `http://www.math.uni-sb.de/ag/wittstock/lehre/WS00/analysis1/Vorlesung/node10.html`

6.5 Aufgaben

Gleichungen

1. Die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen $1+3+5+...+2n-1$ soll bestimmt werden. Stellen Sie eine Vermutung auf und beweisen Sie diese durch Induktion.

2. Die Summe von $4+8+12+...+4n$, also der ersten n durch 4 teilbaren natürlichen Zahlen, soll bestimmt werden. Stellen Sie eine Vermutung auf und beweisen Sie diese durch Induktion.

3. Beweisen Sie: Die Summe der ersten n geraden natürlichen Zahlen ist gleich n^2+n, d.h.

$$\sum_{k=1}^{n} 2k = n^2 + n$$

4. Beweisen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die Summenformel

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

5. Beweisen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die Summenformel

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

6. Beweisen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die Summenformel

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

7. Beweisen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die Summenformel

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

8. Beweisen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die Summenformel

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

9. Beweisen Sie die Summenformel:
$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k = 3\cdot\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$$

10. Beweisen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die Summenformel (mit $0 < q < 1$)
$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Ungleichungen

1. Beweisen Sie die **Bernoulli-Ungleichung**: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \geq -1$ gilt: $(1+x)^n \geq 1+nx$

2. Bestimmen Sie die kleinste natürliche Zahl n_0, für die folgende Ungleichung richtig ist: $n^2+10 < 2^n$. Beweisen Sie, dass die Ungleichung für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$ richtig ist.

3. Beweisen Sie: Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 3$ gilt: $n^2 > 2n+1$

4. Beweisen Sie: Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 5$ gilt: $2^n > n^2$

5. Beweisen Sie: Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ gilt:
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}$$

6. Beweisen Sie: Für alle natürlichen Zahlen $n > 2$ gilt:
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} > \frac{13}{24}$$

Teilbarkeitsprobleme

1. Beweisen Sie: Für alle natürlichen Zahlen n ist 8 ein Teiler von 9^n-1

2. Beweisen Sie: Für alle natürlichen Zahlen n ist 6 ein Teiler von 7^n-1

3. Beweisen Sie: Für alle natürlichen Zahlen n ist $a-1$ ein Teiler von a^n-1 mit $a \in \mathbb{R}$ und $a > 1$

4. Beweisen Sie, dass der Term n^3+6n^2+14n für alle natürlichen Zahlen ein Vielfaches von 3 ist.

5. Beweisen Sie: Für alle natürlichen Zahlen n ist 3 ein Teiler von $2^{2n}-1$

6. Beweisen Sie: Für alle natürlichen Zahlen n ist 6 ein Teiler von n^3-n

7. Beweisen Sie: Für alle natürlichen Zahlen n ist $3n^2+9n$ durch 6 teilbar.

Ableitungen

1. Zeigen Sie, dass für die Ableitungen $(2n)$-ten Grades der Funktion $f(x) = x + a \cdot \cos x$ gilt: $f^{(2n)}(x) = (-1)^n \cdot a \cdot \cos x$ $(n \in \mathbb{N})$.

2. Stellen Sie eine Vermutung über die ungeraden Ableitungen $f^{(2n+1)}(x)$ der Funktion $f(x) = x + a \cdot \cos x$ und beweisen Sie diese.

3. Formulieren Sie eine Formel für $f^{(2n)}(x)$ mit $f(x) = x + \sin(a \cdot x)$ und $a > 0$. Beweisen Sie diese.

4. Beweisen Sie, dass für $f(x) = \frac{x}{x+1}$ mit $x \neq -1$ gilt:
$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot \frac{n!}{(x+1)^{n+1}} \ .$$

5. Formulieren Sie eine Formel für $f^{(n)}(x)$ mit $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ und $x \neq -2$. Beweisen Sie diese.

6. Sei $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1 + \frac{1}{x-1}$. Ab welcher Ableitung kann eine allgemeingültige Formel aufgestellt werden? Vermuten Sie eine Formel und beweisen Sie diese.

7. Sei $f(x) = \sin \frac{x}{a}$. Stellen Sie eine Formel für die $(2n)$-te Ableitung von f auf und beweisen Sie diese.

7 Funktionen

Autor: Gerhard Gossen

Eine Funktion f ist eine Abbildung, die einem Wert aus dem *Definitionsbereich* $D(f)$ genau einen Wert aus dem *Wertebereich* $W(f)$ zuordnet. Die übliche Darstellung ist $f : X \to Y$ (sprich: f ist eine Abbildung von X nach Y), wobei X die Definitionsmenge ($D(f) \subseteq X$) und Y die Zielmenge ist ($W(f) \subseteq Y$). Definitions- und Zielmenge sind oft $\mathbb{R}$ (die reellen Zahlen).
Verbreitete Funktionen sind z.B. Geraden ($f(x) = m \cdot x + n$), Polynome ($f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$), die trigonometrischen Funktionen ($\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, siehe Abschnitt 7.1) oder Exponentialfunktionen (a^x, siehe Abschnitt 7.2). Abbildung 7.1 zeigt die Graphen einiger Funktionen.

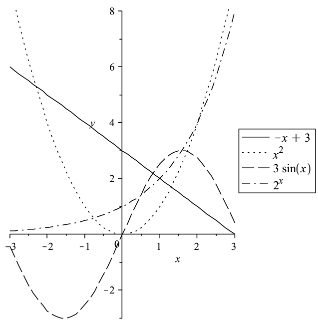


Abbildung 7.1: Bekannte Funktionen

Alle Funktionen, die wir im Vorkurs behandeln, sind Funktionen mit *einer Veränderlichen*, also Funktionen, die von einer einzigen Variable (meist x) abhängen. Die Eigenschaften einer Funktion kann man über eine *Kurvendiskussion* (siehe Abschnitt 7.3) herausbekommen. Zuerst werden wir aber zwei wichtige Funktionsfamilien vorstellen: die trigonometrischen Funktionen (Winkelfunktionen, Abschnitt 7.1) und die Exponentialfunktionen (Abschnitt 7.2).

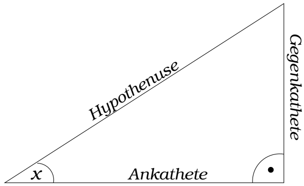
7.1 Trigonometrische Funktionen

Die trigonometrischen Funktionen $\sin, \cos, \tan$ sind die Winkelfunktionen. Sie sind für Winkel im Bogenmaß definiert (z. B. $x = \frac{\pi}{2}$). Winkel im Gradmaß (z. B. $x = 90^\circ$) können eindeutig ins Bogenmaß umgerechnet werden ($90^\circ \equiv \frac{\pi}{2}$). Deswegen ist auch die Schreibweise $\sin 90^\circ$ möglich.

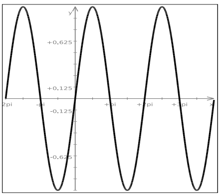
7.1.1 Definition

Im rechtwinkligen Dreieck gilt:

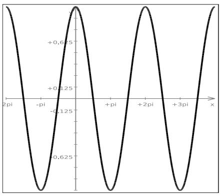
$$\begin{aligned}
\sin x &= \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}} \\
\cos x &= \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}} \\
\tan x &= \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\sin x}{\cos x}
\end{aligned}$$



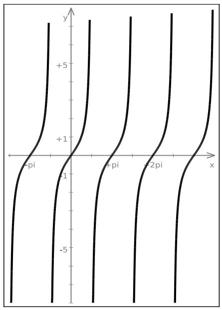
Diese Definitionen lassen sich verallgemeinern, so dass die Funktionen für alle reellen Zahlen definiert sind (im rechtwinkligen Dreieck: $0 \leq x \leq 90^\circ$). Damit ergeben sich diese Funktionen:



$\sin x$



$\cos x$



$\tan x$

Man sieht, dass der Cosinus gegenüber dem Sinus nur um $\frac{\pi}{2}$ verschoben ist, es gilt also:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

Beispiel:

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(0) = 0 \\
\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{2}\right) = \cos(-\pi) = -1
\end{aligned}$$

7.1.2 Periodizität und Symmetrie

Alle Winkelfunktionen sind periodisch, d. h. alle Werte wiederholen sich in regelmäßigen Abständen. Es gilt also für jede ganze Zahl k:

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x \quad \cos(x + 2k\pi) = \cos x \quad \tan(x + k\pi) = \tan x$$

(Zur Erinnerung: $2\pi \equiv 360^\circ$, deswegen entspricht $2k\pi$ genau k Vollkreisen).

Beispiele:

$$\begin{aligned}
&\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{9\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{13\pi}{2}\right) = \dots \\
&\cos(\pi) = \cos(3\pi) = \cos(5\pi) = \cos(7\pi) = \dots \\
&\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \dots
\end{aligned}$$

Die Sinus- und Cosinusfunktion sind symmetrisch, der Sinus ist punktsymmetrisch zum Ursprung, der Cosinus achsensymmetrisch zur y-Achse. Zusammen mit der Periodizität folgen daraus folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned}
&(2)\quad \sin(\pi - x) = \sin x \qquad \cos(\pi - x) = -\cos x \qquad \tan(\pi - x) = -\tan x \\
&(3)\quad \sin(\pi + x) = -\sin x \qquad \cos(\pi + x) = -\cos x \qquad \tan(\pi + x) = \tan x \\
&(4)\quad \sin(2\pi - x) = -\sin x \qquad \cos(2\pi - x) = \cos x \qquad \tan(2\pi - x) = -\tan x
\end{aligned}$$

Das Vorzeichen ist also vom Quadranten abhängig, in dem sich x befindet. Diesen Zusammenhang zeigt Abbildung 7.2.
Die Werte für $\sin x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ reichen damit aus, um alle Werte für sin und cos bestimmen. Die wichtigsten Werte sind in der folgenden Tabelle.

x im Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
x im Gradmaß	0	30°	45°	60°	90°
$\sin x$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$
$\cos x$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$

7.1.3 Umkehrfunktionen

Die Umkehrfunktionen zu sin, cos und tan sind arcsin, arccos und arctan (sprich: *arcus sinus*, *arcus cosinus* und *arcus tangens*). Da die trigonometrischen Funktionen periodisch sind (z. B. gilt $\sin(0) = \sin(2\pi) = 0$), kann es keine eindeutige

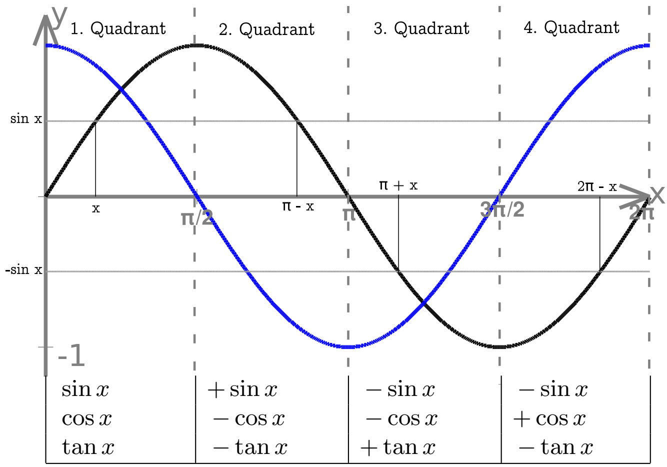


Abbildung 7.2: Symmetrie von Sinus und Cosinus

Umkehrfunktion geben (in diesem Beispiel: ist arcsin(0) gleich 0 oder 2π?). Deswegen sind die Funktionen nur auf einem bestimmten Bereich umkehrbar. Diese Bereiche sind:

$$\begin{array}{rcccl}
y = \sin x & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} & \Longleftrightarrow & x = \arcsin y & -1 \leq y \leq 1 \\
y = \cos x & 0 \leq x \leq \pi & \Longleftrightarrow & x = \arccos y & -1 \leq y \leq 1 \\
y = \tan x & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} & \Longleftrightarrow & x = \arctan y & y \in \mathbb{R}
\end{array}$$

7.1.4 Trigonometrischer Pythagoras

Für alle x gilt: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Diese Aussage heißt auch *trigonometrischer Pythagoras*. Damit kann manchmal ein Term vereinfacht werden.

7.1.5 Additionstheoreme

Die Winkelfunktionen haben unter anderem diese wichtigen Eigenschaften:

$$\begin{aligned}
\sin(x_1 + x_2) &= \sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2 \\
\sin(x_1 - x_2) &= \sin x_1 \cos x_2 - \cos x_1 \sin x_2 \\
\cos(x_1 + x_2) &= \cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2 \\
\cos(x_1 - x_2) &= \cos x_1 \cos x_2 + \sin x_1 \sin x_2
\end{aligned}$$

Beispiele:

$$\begin{aligned}
\sin(120^\circ) &= \sin(60^\circ + 60^\circ) = \sin(\tfrac{\pi}{3} + \tfrac{\pi}{3}) && \text{(wende Additionstheorem an)}\\
&= \sin\tfrac{\pi}{3}\cos\tfrac{\pi}{3} + \cos\tfrac{\pi}{3}\sin\tfrac{\pi}{3}\\
&= \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\cos\tfrac{\pi}{3} + \cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\tfrac{1}{2}\sqrt{3} = \sqrt{3}\cos\tfrac{\pi}{3} && \text{(wandele cos in sin)}\\
&= \sqrt{3}\sin\left(\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}\sin\tfrac{\pi}{6}\\
&= \tfrac{1}{2}\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Probe über Symmetrie:

$$\begin{aligned}
\sin(120^\circ) &= \sin\left(\tfrac{2\pi}{3}\right) = \sin(\pi - \tfrac{\pi}{3}) \quad \text{(mit 7.1.2(2))}\\
&= \sin(\tfrac{\pi}{3}) = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}
\end{aligned}$$

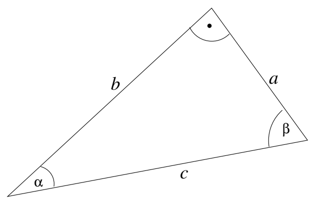
7.1.6 Aufgaben

1. Berechne mit Hilfe der Tabelle in Abschnitt 7.1.2 folgende Werte:

a) $\sin\frac{2\pi}{3}$	f) $\sin\frac{7\pi}{3}$	k) $\cos\frac{\pi}{3}$	p) $\cos\frac{4\pi}{6}$
b) $\sin\frac{5\pi}{6}$	g) $\sin\frac{29\pi}{6}$	l) $\cos\frac{\pi}{2}$	q) $\cos\frac{7\pi}{3}$
c) $\sin\pi$	h) $\sin-\frac{3\pi}{4}$	m) $\cos\frac{11\pi}{6}$	r) $\cos-\frac{11\pi}{4}$
d) $\sin\frac{3\pi}{2}$	i) $\cos\frac{\pi}{6}$	n) $\cos\frac{3\pi}{4}$	s) $\tan\frac{\pi}{6}$
e) $\sin\frac{11\pi}{6}$	j) $\cos\frac{\pi}{4}$	o) $\cos\frac{2\pi}{3}$	t) $\tan-\frac{\pi}{3}$

2. Berechne die fehlenden Seitenlängen. Die Bezeichnungen entsprechen der nebenstehenden Zeichnung.

α	β	a	b	c
			1	$\sqrt{2}$
		2		4
		$\frac{1}{2}\sqrt{3}$		$\frac{1}{2}$
		4	3	
$\frac{\pi}{6}$		1		
	$\frac{\pi}{3}$		2	



3. Leite folgende Aussage her:

$$\sin(4\alpha) = 4(\sin\alpha\cdot\cos^3\alpha - \sin^3\alpha\cdot\cos\alpha)$$

4. Leite her, dass folgende Aussage gilt:

$$\cos(2\alpha) = 2\cdot\cos^2\alpha - 1$$

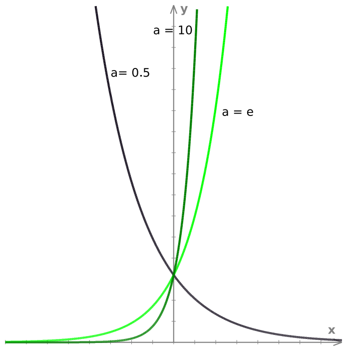
5. * Eine Kugel mit dem Radius 1 umschließt einen Würfel. Bestimme die maximale Seitenlänge des Würfels.

7.2 Exponentialfunktionen und Logarithmus

7.2.1 Exponentialfunktionen

Exponentialfunktionen sind Funktionen der Form $f(x) = a^x$, wobei a eine konstante Zahl > 0 ist. Diese Funktionen haben einige gemeinsame Eigenschaften:

- $f(x) > 0$, d. h. insbesondere die Funktion hat keine Nullstelle
- $f(0) = 1$, da $a^0 = 1$ für alle a



Die Funktion hat abhängig von a folgende Form:

$\mathbf{a} > \mathbf{1}$ streng monoton wachsend, für $x \to -\infty$ geht $f(x)$ gegen 0.

$\mathbf{0} < \mathbf{a} < \mathbf{1}$ streng monoton fallend, für $x \to \infty$ geht $f(x)$ gegen 0.

$\mathbf{a} = \mathbf{1}$ die Funktion ergibt konstant 1 ($f(x) = 1^x$).

Eine spezielle Exponentialfunktion ist die e-Funktion $f(x) = e^x$, mit der sich viele natürliche Vorgänge beschreiben lassen. $e = 2,718281828459\ldots$ ist die *Eulersche Zahl*. Die e-Funktion hat die Eigenschaft, dass $e^x = (e^x)' = (e^x)'' = (e^x)^{(n)}$, d. h. alle Ableitungen der Funktion sind gleich der Funktion.
Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktionen ist der Logarithmus:

$$y = a^x \Longleftrightarrow x = \log_a y.$$

7.2.2 Logarithmus

Der Logarithmus $\log_a b$ (sprich: Logarithmus von b zur Basis a) ist die Zahl c, für die $a^c = b$ gilt. Der Logarithmus ist damit die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion.
Wichtige Logarithmen sind:

Natürlicher Logarithmus Logarithmus zur Basis e: $\log_e x = \ln x$

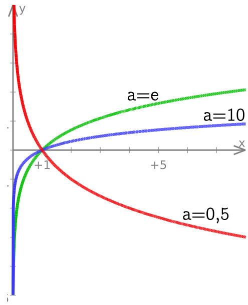


Abbildung 7.3: Graph der Funktion $\log_a x$, mit $a \in \{e, 10, \frac{1}{2}\}$.

Dekadischer Logarithmus Logarithmus zur Basis 10: $\log_{10} x = \lg x$

Binärer Logarithmus Logarithmus zur Basis 2: $\log_2 x = \operatorname{ld} x$

7.2.3 Logarithmusfunktion

Der Graph der Logarithmusfunktion (Abbildung 7.3) verhält sich ähnlich wie der Graph der Exponentialfunktion: Abhängig von a ist der Graph entweder monoton fallend ($0 < a < 1$) oder steigend ($a > 1$). Die Funktion ist nur für positive Zahlen definiert, der Grenzwert für $x \to 0$ ist $\pm\infty$. Der Funktionswert $\log_a(1)$ ist 0, unabhängig von a. Für große Werte von x (und $n > 0$) gilt: $log_a(x) < n \cdot x$, die Logarithmusfunktion wächst also langsamer als eine lineare Funktion.

7.2.4 Logarithmengesetze

$$
\begin{aligned}
\log_a(u \cdot v) &= \log_a u + \log_a v \\
\log_a \frac{u}{v} &= \log_a u - \log_a v \\
\log_a u^r &= r \cdot \log_a u
\end{aligned}
$$

7.2.5 Basiswechsel

Ein Logarithmus zu einer ungewöhnlichen Basis a kann berechnen werden, indem dieser auf eine andere Basis b gebracht wird:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \text{ z. B. } \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Dies ist nützlich, da die meisten Taschenrechner nur die Logarithmen zur Basis e (Taste `ln`) und 10 (Taste `log`) berechnen können. Alle anderen Logarithmen müssen auf diese Basen umgerechnet werden.

7.2.6 Aufgaben

1. Löse nach x:

   a) $1 = e^x$
   b) $8 = 2^x$
   c) $3 = 5e^x$
   d) $e = \frac{e^x}{e}$
   e) $9 = e^{cx}$
   f) $3 = \log_2 x$
   g) $0 = \log_{42} x$
   h) $0 = 5\log_5 x$
   i) $9 = 3\ln e^x$

2. Vereinfache:

   a) $\lg 2 + \lg 5$
   b) $\lg 5 + \lg 6 - \lg 3$
   c) $3\ln a + 5\ln b - \ln c$
   d) $2\ln v - \ln v$
   e) $\frac{1}{2}\log_7 9 - \frac{1}{4}\log_7 81$
   f) $\log_3(x-4) + \log_3(x+4) = 3$
   g) $2\log_2(4-x)+4 = \log_2(x+5)-1$
   h) $\log_5 x = \log_5 6 - 2\log_5 3$

3. Das Wachstum von Bakterienkulturen lässt sich mit Hilfe der e-Funktion beschreiben. Die Anzahl der Bakterien zum Zeitpunkt t ist eine Funktion $N(t)$, die abhängig ist von der anfänglichen Anzahl der Bakterien (also der Wert $N_0 := N(0)$) und der Wachstumsrate k des Bakteriums (konstant). Es entsteht damit die Formel: $N(t) = N_0 e^{kt}$.

   Für $N_0 = 100, k = 0,2$:

   a) Wieviele Bakterien gibt es zum Zeitpunkt 5 (10, 20, 50, 100)?
   b) Zu welchem Zeitpunkt gibt es 500 (1000, 5000, 10000) Bakterien?

4. Die Anzahl von Teilchen eines radioaktiven Materials ist ein Exponentialfunktion der Zeit $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$, wobei N_0 die Anzahl der Teilchen zum Zeitpunkt 0 und λ die Zerfallskonstante des Materials ist. Gegeben sind $N_0 = 1000, \lambda = 2$.

   a) Wieviele Teilchen sind zum Zeitpunkt 1 (5, 10, 100) noch vorhanden?
   b) Wie lange dauert es, bis $\frac{1}{4}$ (die Hälfte (Halbwertszeit), $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$) des Materials zerfallen ist?

7.3 Kurvendiskussion

Autor: Andreas Zöllner
Überarbeitung: Gerhard Gossen

Eine Kurvendiskussion hilft uns eine Funktion zu „verstehen“. Wir bekommen Informationen über die Form des Graphs (z. B. Anzahl und Lage von Extrema und Wendepunkten) und über wichtige Punkte (z.B. Nullstellen) der Funktion.
Eine Kurvendiskussion hat eine feste Reihenfolge von Schritten. Einige davon können von Mathematik-Programmen durchgeführt werden, aber bei komplexeren Funktionen ist der eigene Hirnschmalz gefragt.

7.3.1 Definitionsbereich

Als erstes sollte man sich über den Definitionsbereich $D(f)$ der Funktion f im Klaren sein: Für welche Werte $x \in \mathbb{R}$ ist $f(x)$ überhaupt definiert? Die Funktion $\frac{1}{x-1}$ ist beispielsweise für $x = 1$ nicht definiert (Division durch 0!), die Logarithmusfunktion ist nur für positive Werte definiert.
Isolierte Punkte, an denen f nicht definiert ist, heißen **Definitionslücken**. Hierbei unterscheidet man verschiedene Arten von Definitionslücken, worauf wir hier jedoch nicht näher eingehen wollen.
Der Definitionsbereich wird als Menge angegeben. Beispiele für verschiedene Bereich gibt Tabelle 7.1.

7.3.2 Wertebereich

Der Wertebereich einer Funktion lässt sich meist über Betrachtungen zur Stetigkeit, der Extrema, der Monotonie und der Asymptoten ermitteln.

7.3.3 Nullstellen

Eine Stelle $x_0 \in D(f)$ heißt eine **Nullstelle** der Funktion f, wenn

$$f(x_0) \ = \ 0\,,$$

Definitonsbereich	**Beschreibung**
$D(f) = \mathbb{R}$	Der Definitionsbereich ist die gesammte Definitionsmenge.
$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{c\}$	Die Funktion hat eine Definitionslücke an der Stelle c.
$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \wedge x \geq c\}$	f ist nur in den Intervallen (a, b) und $[c, \infty)$ definiert.

Tabelle 7.1: Beispiele für Definitionsbereiche

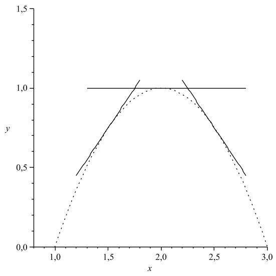


Abbildung 7.4: Tangenten der Funktion $-(x-2)^2+1$ an den Stellen $\frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}$

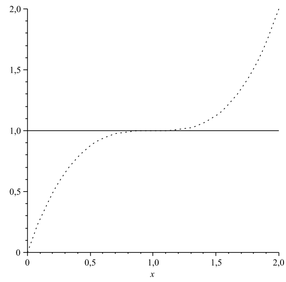


Abbildung 7.5: Sattelpunkt der Funktion $(x-1)^3+1$ an der Stelle $x=1$

zur Bestimmung der Nullstellen müssen wir daher alle Lösungen der Gleichung

$$f(x) \;=\; 0$$

finden.

7.3.4 Extrema

Um die Extrema einer Funktion f bestimmen zu können, müssen die ersten beiden Ableitungen von f existieren. Eine Stelle x_0 ist ein Extremum von f, wenn gilt:

1. $f'(x_0) = 0$ (*notwendige Bedingung*)

2. $f''(x_0) \neq 0$ (*hinreichende Bedingung*)

Bei $f''(x) > 0$ liegt ein lokales Minimum, bei $f''(x) < 0$ ein lokales Maximum vor.

Die **globalen Extrema** erhält man, indem man zusätzlich das Verhalten der Funktion an den Grenzen des Definitionsbereichs in Betracht zieht. Also z. B. falls $D(f) = \mathbb{R}$ sind dies die Werte $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$.

Die erste Ableitung gibt also die Steigung der Tangenten an den Graphen an. Links von einem Maximum ist die Steigung positiv, rechts davon ist sie negativ (siehe Abb. 7.4). Der Nulldurchgang der Ableitung entspricht also einer Tangenten mit der Steigung 0, also einer horizontalen Gerade. Bei einem Minimum wechselt die Steigung der Tangenten entsprechend von negativ zu positiv.

7.3.5 Exkursion: Ableiten einer Funktion

Differentiationsregeln

1. Faktorregel: $c \cdot f(x)(c \in \mathbb{R}, konstant) \Rightarrow c \cdot f'(x)$
2. Summenregel: $f(x) + g(x) \Rightarrow f'(x) + g'(x)$
3. Produktregel:$f(x) \cdot g(x) \Rightarrow f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
4. Quotientenregel: $\frac{f(x)}{g(x)}(g(x) \neq 0) \Rightarrow \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
5. Kettenregel: $f(g(x)) \Rightarrow f'(g(x)) \cdot g'(x)$

wichtige Ableitungen

Funktion	Ableitung
c	0
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$sinx$	$\cos x$
$cosx$	$-\sin x$
$tanx$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
e^x	e^x
lnx	$\frac{1}{x}$

7.3.6 Wendepunkte

An einem *Wendepunkt* ändert sich das Krümmungsverhalten des Funktionsgraphen, der Graph wechselt also von einer Links- in eine Rechtskurve oder umgekehrt.
Das notwendige Kriterium für eine Wendestelle bei x_0 ist, dass der Wert der zweiten Ableitung Null wird: $f''(x_0) = 0$. Zusätzlich muss noch eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt sein:

Der Wert der dritten Ableitung ist ungleich Null: $f'''(x_0) \neq 0$. Dabei muss aber die dritte Ableitung existieren.

Das Vorzeichen der zweiten Ableitung wechselt in x_0: Falls keine dritte Ableitung existiert oder ihre Berechnung zu aufwändig ist, muss man das Vorzeichen auf beiden Seiten von x_0 vergleichen.

Die zweite Ableitung gibt die Änderung der Steigung an. Wenn die zweite Ableitung positiv ist, wird die Steigung größer, der Graph macht also eine Linkskurve. Eine Rechtskurve entsteht dementsprechend bei einer sinkenden Steigung der Tangente, also einer negativen zweiten Ableitung.
Eine Spezialform eines Wendepunktes ist der *Sattelpunkt*, bei dem sowohl die erste als auch die zweite Ableitung Null ist. Ein Beispiel dafür zeigt Abbildung 7.5. Hier

sieht man, dass es zur Bestimmung der Extrema nicht ausreicht, eine Nullstelle der ersten Ableitung zu finden, es muss auch die zweite Ableitung überprüft werden.

7.3.7 Verhalten im Unendlichen, Polstellen, Asymptoten

Unter dem Verhalten der Funktion f im Unendlichen versteht man die Grenzwerte

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)\,,$$

sofern diese existieren.
Die Asymptoten beschreiben das Verhalten der Funktion f im Unendlichen und an Polstellen (eine Art von Definitionslücken) genauer. Der Begriff „asymptotisch“ bedeutet dabei „sich annähernd“. Eine **Asymptote** der Funktion f ist eine lineare Funktion

$$y \;=\; mx + n \quad \text{für gewisse } m, n \in \mathbb{R}\,,$$

der sich die Funktion f annähert.

7.3.8 Graph der Funktion

Mit Hilfe dieser Informationen kann man den Graphen der Funktion jetzt gut zeichnen. Dazu zeichnet man Nullstellen, Extrema, Wendepunkte und eventuelle Asymptoten auf und hat damit schon die Grobstruktur gegeben. Falls nötig, kann man noch die Funktionswerte für einzelne Stellen berechnen, um etwa die Stärke der Krümmung zu erkennen.

7.3.9 Übungsaufgaben

1. Führen Sie eine vollständige Kurvendiskussion für die Funktionen durch:
   $$f(x) = -x^3 + 3x - 2$$
   $$f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$$
2. Führen Sie eine Kurvendiskussion für die Funktion
   $$g(x) \;=\; \frac{3x^4 - 12x^3 + 9x^2 + 12x - 12}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$$
   durch.
3. Führen Sie eine Kurvendiskussion für die Funktion
   $$f(x) \;=\; 2\sin(x \cdot \pi)$$
   durch.

   Es soll nun ein Dreieck ABC unter den Graphen der Funktion gelegt werden. Dieses sei durch die Punkte $A(0,0)$, $B(x,0)$ und $C(x, f(x))$ für $x \in [0,1]$ gegeben. Berechnen Sie die Stelle x so, dass die Maßzahl des Flächeninhalts des Dreiecks ABC maximal wird.

8 Vektoren

Autor: Gerhard Gossen
Überarbeitung: Marko Rak, Melanie Pflaume

8.1 Definition

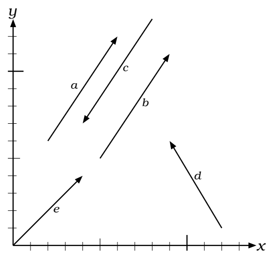
Der Vektor

$$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

ist ein n-dimensionaler Vektor. Die *Komponenten* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sind reelle Zahlen.
In der Vorlesung wird statt $\overrightarrow{x}$ meist nur x geschrieben.
Geometrisch interessant sind Vektoren der Dimension 2

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ und Dimension 3: } x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Sie können als Pfeile in eine bestimmte Richtung dargestellt werden. Man kann sie auch als *Verschiebung* interpretieren. Der Nullvektor $\overrightarrow{0}$ bzw. 0 ist der Vektor, bei dem alle Komponenten 0 sind. Der *Ortsvektor* eines Punktes P ist der Vektor zwischen dem Ursprung des Koordinatensystems und P. Ein *Skalar* ist eine einzelne Zahl vom selben Typ wie $x_1, x_2, \ldots, x_n$.



$$a = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = b, \; c = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix} = -1 \cdot a, \; d = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \; e = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

8.2 Operationen

8.2.1 Addition und Subtraktion

Zwei Vektoren werden addiert, indem die einzelnen Komponenten addiert werden:

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

Die Subtraktion ist analog:

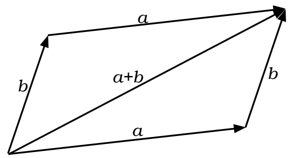
$$x - y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \\ \vdots \\ x_n - y_n \end{pmatrix}$$

Beispiele:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Geometrisch gesehen entspricht die Addition der Vektoren a und b der Verschiebung, die durch Verschieben zuerst in Richtung a und danach in Richtung b entsteht. Wie man in der Zeichnung erkennt, ist die Addition *kommutativ*, d. h. $a + b = b + a$.



8.2.2 Multiplikation mit einem Skalar

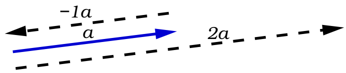
Ein Vektor wird mit einem Skalar multipliziert, indem jede einzelne Komponente mit dem Skalar multipliziert wird:

$$\lambda \cdot x = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot x_2 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$$

Die Multiplikation mit dem Skalar 0 ergibt immer den Nullvektor.
Beispiele:

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \quad 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad -1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \quad 0 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Geometrisch entspricht die Multiplikation einer *Streckung* um den Faktor λ.



Vektor a, skaliert mit $\lambda = -1$ (oben) und $\lambda = 2$ (unten).

8.3 Linearkombination

Jeder Vektor b, der sich als Summe $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n$ darstellen lässt, heißt *Linearkombination* der Vektoren $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Die λ_i sind reelle Zahlen.

8.4 Lineare Abhängigkeit

Die Vektoren $a_1, \ldots a_n$ sind *linear unabhängig*, wenn die Gleichung

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n = \overrightarrow{0}$$

nur die triviale Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ hat. Ansonsten sind die Vektoren *linear abhängig*.
Wenn zwei oder mehr Vektoren linear abhängig sind, so kann ein Vektor als Linearkombination der anderen Vektoren dargestellt werden.
Beispiel: Die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

sind linear abhängig, da

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ bzw. } 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} = 0.$$

8.5 Betrag eines Vektors

Der Betrag $|a|$ eines Vektors entspricht der Länge dieses Vektors. Er wird berechnet als

$$|a| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$$

Beispiele:

$$\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$\left| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\left| \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2 + 7^2 + 1^2} = \sqrt{4+9+1+49+1} = \sqrt{64} = 8$$

Manchmal wird der Betrag auch anders definiert.

8.6 Skalarprodukt

Das Skalarprodukt (a, b) der beiden Vektoren a und b ist die reelle Zahl

$$(a, b) = |a||b| \cos \alpha,$$

wobei α der Winkel zwischen den Vektoren ist (andere Schreibweise: $a \cdot b$). Durch Umstellen entsteht eine Formel zur Bestimmung des Winkels α:

$$\cos \alpha = \frac{(a, b)}{|a||b|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots a_n b_n}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots a_n^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots b_n^2}}$$

$$\left(= \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}} \right)$$

Meist will man überprüfen, ob zwei Vektoren orthogonal zueinander sind. Mit $\cos(90°) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ ergibt sich:

$$\frac{(a, b)}{|a||b|} = 0$$

Beispiele:

1. Winkel zwischen $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$:

$$\cos\alpha = \frac{\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)}{\left|\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right|\left|\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{1\cdot 0 + 0\cdot 1}{1\cdot 1} = 0$$

$$\alpha = \arccos(0) = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$$

2. Winkel zwischen $a = \begin{pmatrix}-4\\2\\-2\end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix}10\\-5\\5\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{(a,b)}{|a||b|}\\ &= \frac{-40+(-10)+(-10)}{\sqrt{24}\sqrt{150}} = \frac{-60}{\sqrt{4\cdot 6}\sqrt{25\cdot 6}}\\ &= -\frac{60}{2\sqrt{6}\cdot 5\sqrt{6}} = -\frac{60}{60} = -1\\ \alpha &= \arccos(-1) = \pi = 180^\circ\end{aligned}$$

Hinweis:
Das Skalarprodukt zweier Vektoren n'ter Ordnung lässt sich auch folgendermaßen berechnen:

$$(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$$

8.7 Kreuzprodukt

Das *Kreuzprodukt* zweier Vektoren a und b (beide ungleich dem Nullvektor) ist ein neuer Vektor. Dieser ist orthogonal zu a und b. Schreibweise: $a \times b$.
Das Kreuzprodukt für 3-dimensionale Vektoren wird so berechnet:

$$a \times b = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_2b_3 - a_3b_2\\a_3b_1 - a_1b_3\\a_1b_2 - a_2b_1\end{pmatrix}$$

Merkhilfe: Der Wert an der Stelle • ergibt sich aus $(1)\cdot(2)-(3)\cdot(4)$, wobei $(1),\ldots,(4)$ aus der Formel zu entnehmen sind.

$$\begin{pmatrix}\bullet\\ \\ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \\ 1\\ 3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} \\ 4\\ 2\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix} \\ \bullet\\ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ \\ 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\ \\ 4\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix} \\ \\ \bullet\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 3\\ \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\ 2\\ \end{pmatrix}$$

Beispiele:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot6-3\cdot5\\3\cdot4-1\cdot6\\1\cdot5-2\cdot4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot0-0\cdot1\\0\cdot0-1\cdot0\\1\cdot1-0\cdot0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

8.8 Aufgaben

1. Berechne die Vektoren, mit

$$a=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}-4\\1\\5\end{pmatrix},c=\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix},d=\begin{pmatrix}7\\9\\1\end{pmatrix}:$$

a) $a+b-c+d$

b) $d-c-b-a$

c) $3a-2b+c$

d) $a-\frac{1}{2}c+(-3)b+2d$

e) $2a-b+5c-d$

f) $3a-5b+4c+2d$

2. Berechne die Länge der Vektoren:

a) $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}4\\3\\5\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix}2\\-2\\2\\2\end{pmatrix}$

3. Bestimme das Skalarprodukt der Vektoren:

a) $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-7\\5\end{pmatrix}$

4. Bestimme den eingeschlossenen Winkel:

a) $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-5\\1\\13\end{pmatrix}$

5. Berechne das Kreuzprodukt:

a) $\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}-2\\-3\\-1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-4\\-2\\-7\end{pmatrix}$

6. Überprüfe, ob die Vektoren linear abhängig sind. In diesem Fall stelle einen der Vektoren als Linearkombination der anderen dar. (Hinweis: Nutze den Gauss-Algorithmus)

a) $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}17\\5\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\5\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\7\\1\end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix}7\\2\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-5\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}10\\-3\\13\end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix}-2\\-3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\6\\5\end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix}3\\7\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\5\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-7\\3\\-3\end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$

9 Komplexe Zahlen

Autor: Andreas Zöllner

9.1 Historie

Es gibt keine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$, die die Gleichung

$$x^2 = -1$$

erfüllt. Zur Formulierung von Lösungen dieser Gleichung muss eine Zahlbereichserweiterung durchgeführt werden. Deshalb führte R. Bombielli Mitte des 16. Jahrhunderts das Symbol $\sqrt{-1}$ ein, für das L. Euler später i schrieb. Diese **imaginäre Einheit** ist definiert als eine Lösung der Gleichung

$$\mathrm{i}^2 = -1\,.$$

Man beachte, dass i *nicht* definiert ist als $\sqrt{-1}$. Dies hat den Grund, dass die Gleichung $x^2 = -1$ keine *eindeutige* Lösung hat – ihre andere Lösung ist $-\mathrm{i}$.
Euler entdeckte auch die für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gültige Formel

$$\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x\,(\cos y + \mathrm{i}\sin y)\,. \tag{9.1}$$

9.2 Kartesische Darstellung

Eine **komplexe Zahl** z ist ein Symbol der Form

$$z = x + \mathrm{i}y \qquad \text{mit } x, y \in \mathbb{R}. \tag{9.2}$$

Die **Menge der komplexen Zahlen** wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet,

$$\mathbb{C} = \{\, x + \mathrm{i}y \mid x, y \in \mathbb{R}\,\}\,.$$

Aus dieser **kartesischen Darstellung** $z = x + \mathrm{i}y$ der komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$ ergibt sich die Veranschaulichung von z als geordnetes Paar bzw. zweidimensionaler Vektor $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, d. h. als Punkt der **Gaußschen Zahlenebene**.
Für eine komplexe Zahl $z = x + \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ bezeichnen

$$\mathrm{Re}(z) := x \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Im}(z) := y$$

den **Realteil** bzw. **Imaginärteil** von z. Damit ist also

$$z = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{i}\cdot\mathrm{Im}(z)\,.$$

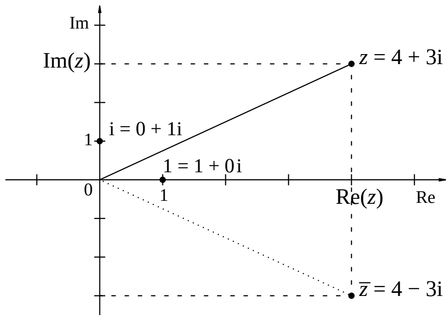
Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist offensichtlich die Teilmenge der komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Im}(z) = 0$. Die komplexen Zahlen mit $\mathrm{Re}(z) = 0$ heißen die *rein imaginären Zahlen.*

9.3 Rechenoperationen

Mit den komplexen Zahlen wird nach den in $\mathbb{R}$ üblichen Rechenregeln gerechnet. Dabei wird i wie eine Variable behandelt, für die $\mathrm{i}^2 = -1$ gilt, d. h. beim Rechnen auftretende Potenzen i^k werden wieder auf $\mathrm{i} = \mathrm{i}^1$ zurückgeführt, so dass wieder eine kartesische Darstellung einer komplexen Zahl als Ergebnis der Rechnung vorliegt.
Hierbei benötigt man noch das folgende Konzept: Die **konjugiert komplexe Zahl** zu $z = x + \mathrm{i}y$ ist die komplexe Zahl

$$\overline{z} \;=\; \overline{x + \mathrm{i}y} \;:=\; x - \mathrm{i}y \qquad \text{für } x, y \in \mathbb{R}.$$

Grafisch interpretiert in der Gaußschen Zahlenebene entspricht dies der Spiegelung an der reellen Achse.



Es ergeben sich nun die grundlegenden Rechenoperationen. Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

- Addition. Sie erfolgt komponentenweise:

$$(a + \mathrm{i}b) \;+\; (c + \mathrm{i}d) \;=\; (a + c) + \mathrm{i}(b + d)$$

- Subtraktion. Sie erfolgt ebenfalls komponentenweise:

$$(a + \mathrm{i}b) \;-\; (c + \mathrm{i}d) \;=\; (a - c) + \mathrm{i}(b - d)$$

- Multiplikation. Es wird ausmultipliziert (gemäß den binomischen Regeln):

$$(a + \mathrm{i}b) \cdot (c + \mathrm{i}d) \;=\; ac + \mathrm{i}bc + \mathrm{i}ad + \mathrm{i}^2 bd \;=\; (ac - bd) + \mathrm{i}(bc + ad)$$

- Division. Der Nenner wird reellwertig gemacht, indem der Bruch mit der konjugiert komplexen Zahl des Nenners erweitert wird:

$$\begin{aligned} \frac{a + \mathrm{i}b}{c + \mathrm{i}d} \;&=\; \frac{(a + \mathrm{i}b)(c - \mathrm{i}d)}{(c + \mathrm{i}d)(c - \mathrm{i}d)} \;=\; \frac{(ac + bd) + \mathrm{i}(bc - ad)}{c^2 + d^2} \\ &=\; \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \mathrm{i}\,\frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \end{aligned}$$

- Potenzieren mit Exponenten $n \in \mathbb{N}$. Es wird wiederholt multipliziert. Dabei gelten

  $$(a+\mathrm{i}b)^0 \ := \ 1 \quad \text{und} \quad (a+\mathrm{i}b)^{n+1} \ = \ (a+\mathrm{i}b)\cdot(a+\mathrm{i}b)^n.$$

  Wichtig sind hierbei die ganzzahligen Potenzen von i. Für $n \in \mathbb{Z}$ ist

  $$\mathrm{i}^n \ = \ \begin{cases} 1\,, & \text{falls} \quad n \equiv 0 \mod 4 \\ \mathrm{i}\,, & \text{falls} \quad n \equiv 1 \mod 4 \\ -1\,, & \text{falls} \quad n \equiv 2 \mod 4 \\ -\mathrm{i}\,, & \text{falls} \quad n \equiv 3 \mod 4 \end{cases}$$

9.4 Eulersche Darstellung

Zu einer komplexen Zahl $z = x + \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ betrachten wir deren Darstellung als Vektor der Gaußschen Zahlenebene in *Polarkoordinaten*,

$$z \ = \ r\,(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) \qquad \text{mit } \ r \geq 0 \ \text{ und } \ -\pi < \varphi \leq \pi.$$

Der **Betrag** $|z|$ von z ist

$$|z| \ := \ \sqrt{x^2+y^2} \ = \ \sqrt{z\cdot\overline{z}} \ = \ r \ \geq \ 0$$

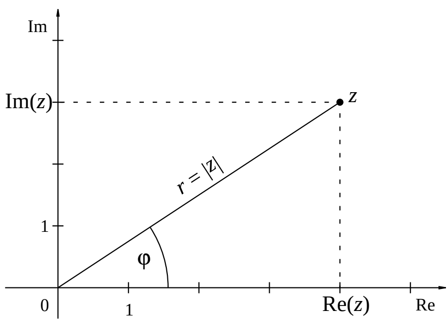
und das **(Haupt-)Argument** $\arg(z)$ von z ist

$$\arg(z) \ = \ \varphi \ \in \ (-\pi, \pi]\,.$$

Die Winkel $\varphi + 2k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$ heißen die **Argumente** von z. Man beachte, dass sämtliche dieser Winkel ein und dieselbe komplexe Zahl z bestimmen, d. h.

$$z \ = \ r(\cos(\varphi + 2k\pi) + \mathrm{i}\sin(\varphi + 2k\pi)) \qquad \text{für alle } \ k \in \mathbb{Z},$$

und dass das Hauptargument durch die Forderung $\varphi \in (-\pi, \pi]$ eindeutig festgelegt ist.



Mit der Eulerschen Formel (9.1) ergibt sich die **Eulersche Form** der Darstellung einer komplexen Zahl $z = x + \mathrm{i}y$ für $x, y \in \mathbb{R}$,

$$z \;=\; r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \qquad \text{mit } r = |z| \text{ und } \varphi = \arg z. \tag{9.3}$$

Mit dieser Darstellung vereinfachen sich einige Rechnungen mit komplexen Zahlen. Seien $r, s \geq 0$ und $\varphi, \psi \in (-\pi, \pi]$. Dann gelten unter Anwendung der Potenzgesetze:

- Multiplikation: $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \cdot s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi} \;=\; (rs)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi+\psi)}$
- Division: Für $s > 0$ gilt $\dfrac{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}{s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}} \;=\; \dfrac{r}{s}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi-\psi)}$

Nun lassen sich die Grundrechenoperationen in der Gaußschen Zahlenebene geometrisch interpretieren.

- Addition und Subtraktion sind gerade die gewöhnlichen (d. h. komponentenweisen) Operationen für (zweidimensionale) Vektoren.
- Bei der Multiplikation werden die Beträge der beiden Operanden multipliziert und die Argumente addiert.
- Der Übergang von z zur konjugiert komplexen Zahl $\overline{z}$ entspricht einer Spiegelung an der reellen Achse. Eine Spiegelung an der imaginären Achse ergibt sich beim Übergang von z zu $-z$.

9.5 Umrechnung zwischen kartesischen und Polarkoordinaten

Zunächst sei noch an den Zusammenhang zwischen den Winkelmaßen erinnert. Ein Vollkreis von 360° entspricht 2π. Somit gilt

$$\varphi \text{ in Grad} \;=\; (\varphi \text{ in Radiant}) \cdot \frac{180^\circ}{\pi}\,.$$

Speziell gelten also $90^\circ = \pi/2$ und $180^\circ = \pi$.
Gegeben sei ein Punkt $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ (im kartesischen Koordinatensystem). Dann ergeben sich seine Polarkoordinaten (r, φ) zu

$$r \;=\; |z| \;=\; \sqrt{x^2 + y^2} \;\geq\; 0$$

und φ als Lösung des Gleichungssystems

$$r\cos\varphi \;=\; x \quad \text{und} \quad r\sin\varphi \;=\; y \qquad \text{mit} \qquad \varphi \;\in\; (-\pi, \pi]\,.$$

Dieses trigonometrische Gleichungssystem lässt sich für $x \neq 0$ lösen, indem man eine Lösung ψ von $\tan\psi = y/x$ findet, etwa

$$\psi \;=\; \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \;\in\; \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

und dann anhand der Vorzeichen von x und y sicherstellt, dass der Winkel in den richtigen Quadranten zeigt, also $\varphi = \psi + k\pi$ mit dem richtigen Wert von $k \in \mathbb{Z}$.

x	y	$\varphi =$
≥ 0	$= 0$	0
< 0	$= 0$	π
$= 0$	> 0	$\pi/2$
$= 0$	< 0	$-\pi/2$

x	y	$\varphi \in$
> 0	> 0	$(0, \pi/2)$
> 0	< 0	$(-\pi/2, 0)$
< 0	> 0	$(\pi/2, \pi)$
< 0	< 0	$(-\pi, -\pi/2)$

Schemata der Vorzeichen:

$$\sin : \begin{array}{c|c} + & + \\ \hline - & - \end{array} \qquad \cos : \begin{array}{c|c} - & + \\ \hline - & + \end{array} \qquad \tan : \begin{array}{c|c} - & + \\ \hline + & - \end{array}$$

Gegeben sei ein Punkt in Polarkoordinaten $z = (r, \varphi) \in [0, \infty) \times (-\pi, \pi]$. Dann ergeben sich seine kartesischen Koordinaten (x, y) zu

$$x = r \cos \varphi \qquad \text{und} \qquad y = r \sin \varphi \, .$$

9.6 Rechnen mit komplexen Zahlen

Für das Rechnen mit komplexen Zahlen bietet sich mal die kartesische, mal die Eulersche Form der Darstellung an.
Sei in den folgenden Beispielen

$$z = x + \mathrm{i}y = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi + 2k\pi)}$$

mit $x, y \in \mathbb{R}$ und $r \geq 0$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$, sowie $k \in \mathbb{Z}$. Dann ergeben sich

- Exponentialfuntion:

$$\mathrm{e}^z = \exp(z) = \mathrm{e}^{x + \mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}y},$$

  die komplexe Zahl mit Betrag e^x und Hauptargument y
- Logarithmus:

$$\ln z = \ln\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi + 2k\pi)}\right) = \ln r + \mathrm{i}(\varphi + 2k\pi) \, , \; k \in \mathbb{Z} \, ,$$

  offensichtlich nicht eindeutig, mit Hauptwert $\ln r + \mathrm{i}\varphi$
- Potenzieren mit reellen Exponenten $a \in \mathbb{R}$

$$z^a = (r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi + 2k\pi)})^a = r^a \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(a\varphi + 2ak\pi)}$$

  Und falls $a \in \mathbb{Z}$ ist auch $\ell := ak \in \mathbb{Z}$, und daher gilt speziell

$$z^a = r^a \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(a\varphi + 2\ell\pi)} = r^a \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}a\varphi}$$

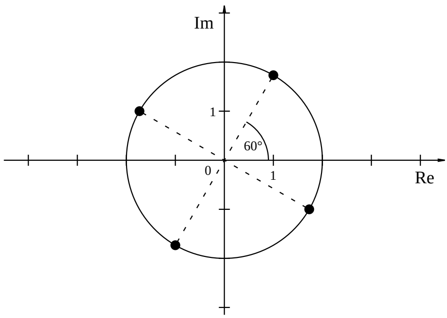
- Radizieren: Für $n = 2, 3, \ldots$ und $a = |a|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \in \mathbb{C}$ heißt die Gleichung

  $$x^n = a$$

  die ***n*-te Kreisteilungsgleichung**. Die ***n*-ten Wurzeln** aus a ergeben sich als deren Lösung zu

  $$x = \sqrt[n]{|a|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, \ldots, n-1\,.$$

  Diese komplexen Zahlen teilen den Kreis um den Nullpunkt mit Radius $\sqrt[n]{|a|}$ in n gleiche Teile.



Beispiel: Die vierten Wurzeln aus $16\,\mathrm{e}^{\frac{4}{3}\pi\mathrm{i}}$.

9.7 Beispiele

Es folgen einige Beispiele für das Rechnen mit speziellen komplexen Zahlen.

Es gelten

$$\mathrm{i} = 0 + \mathrm{i}\cdot 1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}},$$

sowie

$$1 = 1 + \mathrm{i}\cdot 0 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 0} \qquad \text{und} \qquad -1 = -1 + \mathrm{i}\cdot 0 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi},$$

folglich die interessante Gleichung

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} + 1 = 0\,,$$

die alle „wichtigen“ Zahlen (0, 1, e, π und i) in einen Zusammenhang stellt.

Außerdem gelten

$$\begin{aligned} 1^{\mathrm{i}} &= \exp(\ln 1^{\mathrm{i}}) = \exp(\mathrm{i}\cdot\ln 1) = \exp(\mathrm{i}\cdot\ln \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 2k\pi}) \\ &= \exp(\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}\cdot 2k\pi) = \mathrm{e}^{-2k\pi} \\ \mathrm{i}^{\mathrm{i}} &= \exp(\ln \mathrm{i}^{\mathrm{i}}) = \exp(\mathrm{i}\cdot\ln \mathrm{i}) = \exp\Big(\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}(\frac{\pi}{2}+2k\pi)\Big) \\ &= \mathrm{e}^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)} \end{aligned}$$

9.8 Übungsaufgaben

1. Gegeben sind die komplexen Zahlen

$$\begin{array}{llll} z_1 = -2i & z_2 = 3 & z_3 = 1+2\mathrm{i} & z_4 = 4-3\mathrm{i} \\ z_5 = \mathrm{e}^{\pi/4} & z_6 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} & z_7 = 2\mathrm{e}^{-\frac{3\pi}{4}\mathrm{i}} & z_8 = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 3\pi/2} \end{array}$$

1. Berechnen Sie jeweils ihren Betrag und ihr Hauptargument.
2. Rechnen Sie von der kartesischen in die Eulersche Form bzw. umgekehrt um.
3. Stellen Sie die Zahlen grafisch in der Gaußschen Zahlenebene dar.

2. Berechnen Sie

1. $(1+2\mathrm{i})+(4-3\mathrm{i})$, $(2+4\mathrm{i})+3$, $(4+2\mathrm{i})-2\mathrm{i}$
2. $(1+2\mathrm{i})\cdot(4-3\mathrm{i})$, $(3+2\mathrm{i})\cdot(3-2\mathrm{i})$, $(1+3\mathrm{i})\cdot(-1+3\mathrm{i})$
3. $\dfrac{1+2\mathrm{i}}{4-3\mathrm{i}}, \dfrac{3+2\mathrm{i}}{3-2\mathrm{i}}, \dfrac{1+3\mathrm{i}}{-1+3\mathrm{i}}$
4. $(1+\mathrm{i})^{4/2}$, $\big((1+\mathrm{i})^4\big)^{1/2}$
5. $\exp(1+2\mathrm{i})$, $\ln(1+2\mathrm{i})$

3. Berechnen Sie

1. die Quadratwurzeln von $-\mathrm{i}$ und von $\mathrm{i}-1$,
2. die dritten Wurzeln von $8\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}\cdot\mathrm{i}}$,
3. die Nullstellen der Polynome $p_1(x) = x^5 - x^4 - 2x^2 - 4x$ und $p_2(y) = y^4 + 3y^2 + 2$.

Hausaufgabe

1. Informieren Sie sich, welche Möglichkeiten zur Verarbeitung komplexer Zahlen Ihre Lieblingsprogrammiersprache bzw. die Programmiersprache Java bietet. Schreiben Sie gegebenenfalls ein Paket zur Arbeit mit komplexen Zahlen.

2. Informieren Sie sich über Mandelbrot- und Julia-Mengen und das „Apfelmännchen", und schreiben Sie ein Programm zur grafischen Darstellung dieser Fraktale.

9.9 Literatur

[1] I. N. Bronstein et al. *Teubner-Taschenbuch der Mathematik.* (2 Bände) B. G. Teubner Leipzig, 1996.

[2] K. Vetters. *Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik.* B. G. Teubner Stuttgart, 2004.