



Génie Electrique et Informatique Industrielle

Tronc Commun semestre 3

AU3 : Asservissement et Régulation

Jean Duplaix

1. Introduction à l'automatique

1.1. Définitions

Automatique : science et technique des méthodes et moyens d'étude et de conception des systèmes automatisés (agencement de parties qui se coordonnent pour atteindre un résultat). En anglais terme générique plus précis : « automatic control » soit commande automatique.

Système : boîte noire qui possède des entrées (actions gérées et subies) et des sorties (réactions induites).

Systèmes à événements discrets : commande logique combinatoire et séquentielle (API)

Systèmes continus : commande en temps continu (analogique) ou discret (numérique)

Remarque : Dans ces fiches, seuls les systèmes continus seront traités.

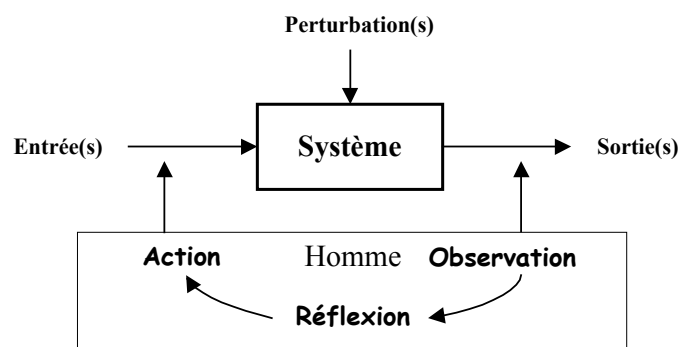
1.2. Régulation et asservissement

Un système régulé a pour but essentiel de maintenir une ou plusieurs grandeurs physiques de sorties à une valeur constante ou de leur faire suivre un cycle d'évolution et ceci indépendamment des entrées perturbatrices.

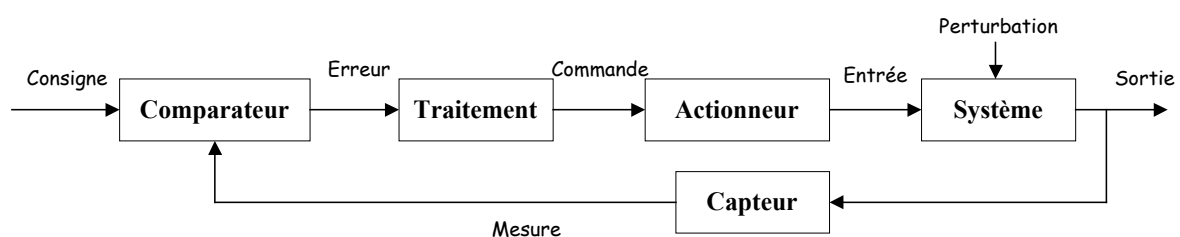
Un système asservi doit permettre de faire suivre à une ou plusieurs grandeurs de sortie une loi évolutive et non fixée à l'avance. La copie doit être la plus fidèle possible sans influence des perturbations. Le système est nécessairement bouclé.

1.3. Comportement humain et système bouclé

Adaptation de la démarche de raisonnement en trois phases : observation, réflexion et action.



De la boucle ouverte à la boucle fermée



1.4. Historique, inventeurs et chercheurs

- Les préludes → 1930

Inventions : L'horloge à eau (clepsydre) de Ktesybios (-250 ans avant JC), régulateur de vitesse de Watt (1788)

Théories : Laplace, Fourier et Cauchy (1749-1857) (transformées, séries, fonction de la variable complexe, Routh, Hurwitz et Heaviside (1850-1925) (bouclage et stabilité, calcul opérationnel)

- 1930 → 1960

Inventions : les premiers régulateurs de turbines et télescopes

Théories : Black, Nyquist, Bode, Ziegler et Nichols (1927-1942) (fonctions de transfert : commande classique approche fréquentielle et temporelle)

- 1960 → 1980

Inventions : les régulateurs analogiques de type PID et introduction des calculateurs

Théories : Kalman, Cypkin et Jury (1960-1964) (représentation d'état, systèmes non-linéaires et systèmes échantillonnés)

- 1980 → à nos jours

Inventions : implication de plus en plus forte de l'outil informatique dans les boucles

Théories : approche optimale et robuste (performances exigées et incertitudes sur le modèle, analyse des défauts, diagnostic et supervision de système)

1.5. Quelques exemples de boucles

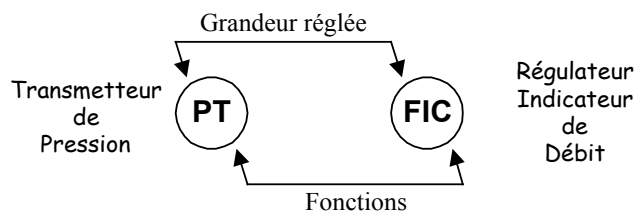
Du système mono-entrée mono-sortie (SISO) au système multi-entrées multi-sorties (MIMO).

- Régulation de vitesse d'une automobile.
- Mélange eau chaude-froide pour une douche : mélangeur, mitigeur et mitigeur thermostatique.
- Gestion du micro-climat et d'une culture hors-sol dans une serre agricole.

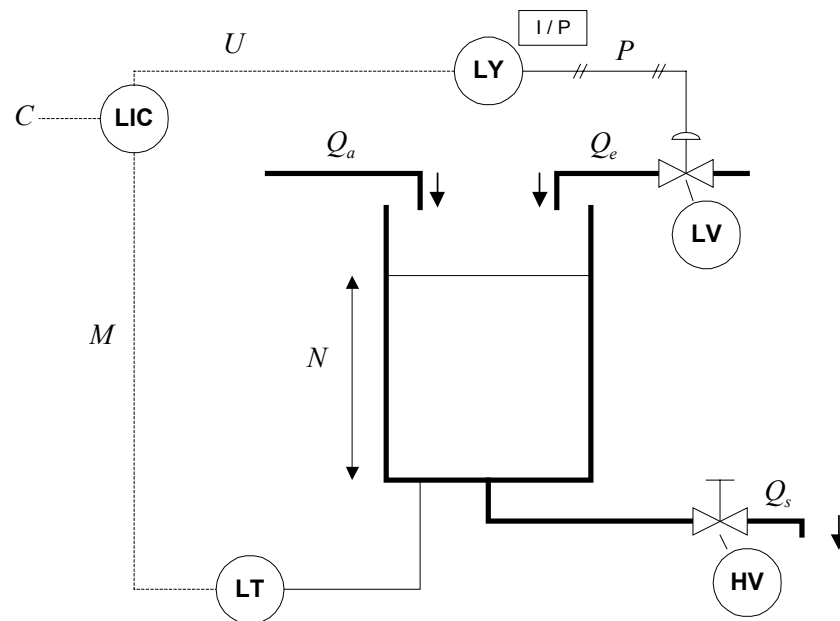
1.6. Schéma TI (norme Afnor E 04-203-1)

Représentation symbolique en régulation à base de cercles où figurent des lettres définissant la grandeur physique réglée et la ou les fonctions de l'élément.

Exemples de composants :



Régulation de niveau d'un réservoir d'une installation de dilution de sirop : le but est de maintenir le niveau H constant dans le réservoir pour assurer un débit de sortie constant Q_s réglé par l'ouverture d'une vanne manuelle, le débit de produit recyclé Q_a n'étant pas constant.



LT: transmetteur de niveau LIC: régulateur indicateur de niveau

LY: convertisseur courant/tension

LV: vanne réglante de niveau HV: vanne manuelle

1.7. Modélisation

Dans ce module, l'ensemble composants-système est considéré comme SISO ou MISO, continus, causaux, linéaires et invariants. Leur description est faite à l'aide d'équations différentielles linéaires à coefficients constants (EDLCC). Bien que la plupart des comportements soit non-linéaires, une étude linéarisée autour d'un point de fonctionnement peut être envisagée. L'effet de phénomènes typiquement non-linéaires comme la saturation, l'insensibilité (seuil) ou hystérésis (jeu) pourra être considéré dans un environnement de simulation ou expérimental.

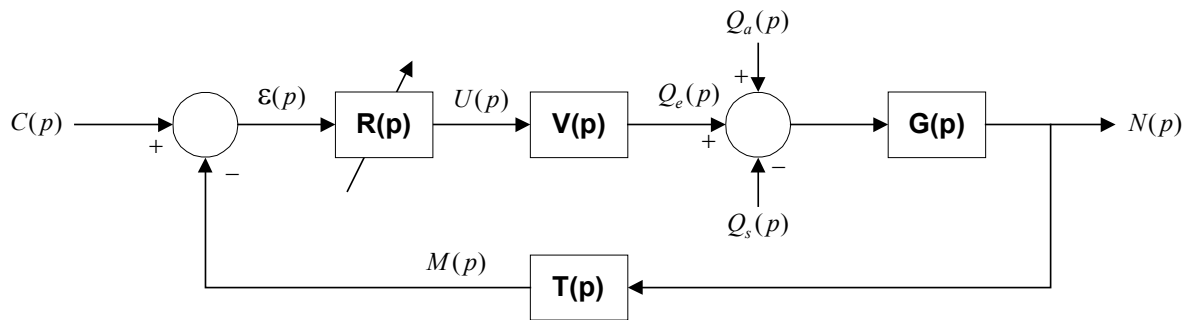
1.8. Outils mathématiques

Le choix de la transformation de Laplace s'impose au moins pour trois raisons :

- Les EDLCC dépassent généralement l'ordre 2
- La traduction fonction de transfert permet grâce à la transformée inverse la résolution des problèmes temporels (stabilité, précision, rapidité)
- La traduction fonction de transfert permet grâce à la substitution dans le transfert de l'opérateur p par $j\omega$ d'étudier l'aspect harmonique (fréquentiel) des boucles (bande passante)

1.9. Schéma-blocs ou schéma fonctionnel

La définition des fonctions de transfert de chaque bloc de l'ensemble d'un procédé permet de construire un schéma fonctionnel qui formalise l'étude d'analyse et de synthèse de la boucle. Un tel projet peut être fait à la main ou en s'aidant d'outils informatiques dédiés pour l'étude et la simulation. Le schéma TI de la régulation de niveau du paragraphe 6 conduit au schéma fonctionnel ci-dessous après avoir nommé les différentes fonctions de transfert des éléments du système.



$$\text{Transfert mesure niveau-consigne : } \frac{M(p)}{C(p)} = \frac{R(p)V(p)G(p)T(p)}{1 + R(p)V(p)G(p)T(p)}$$

$$\text{Transfert mesure niveau-débit sortie : } \frac{M(p)}{Q_s(p)} = \frac{-G(p)T(p)}{1 + R(p)V(p)G(p)T(p)}$$

$$\text{Transfert mesure niveau-débit recyclé : } \frac{M(p)}{Q_a(p)} = \frac{G(p)T(p)}{1 + R(p)V(p)G(p)T(p)}$$

Remarques :

- Toutes les fonctions de transfert possèdent le même dénominateur nommé équation caractéristique.
- La partie réglable $R(p)$ intervient dans l'équation caractéristique et a une incidence sur les pôles de ces transferts.
- Le dénominateur (polynôme caractéristique) est un polynôme construit à partir des zéros et des pôles de la boucle ouverte
- L'incidence du régulateur $R(p)$ n'a pas le même rôle vis à vis des perturbations et de la consigne.

Bibliographie :

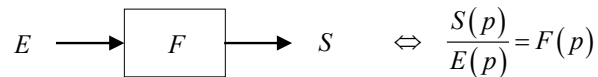
- Cours BTS CIRA Rouvière : <http://gatt.club.fr/index.html>
- Cours PSI Masséna : <http://projetsi.chez-alice.fr/>
- Cours et exercices corrigés Collection Sciences Sup (IUT BTS Licence) Editeur Dunod
Automatique : Systèmes linéaires et continus *S. Le Ballois et P. Codron* 2006
Automatique : Contrôle et régulation *P. Prouvost* 2005

2. Bases théoriques et performances d'une boucle

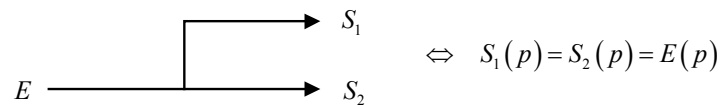
2.1. Manipulation et réduction des schémas-blocs

- Formalisme*

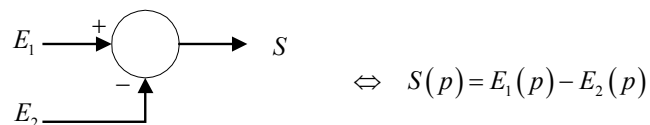
Bloc :



Jonction :

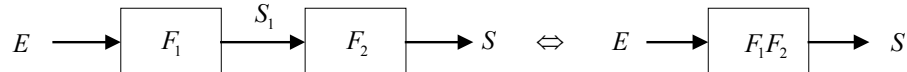


Sommeur ou comparateur :

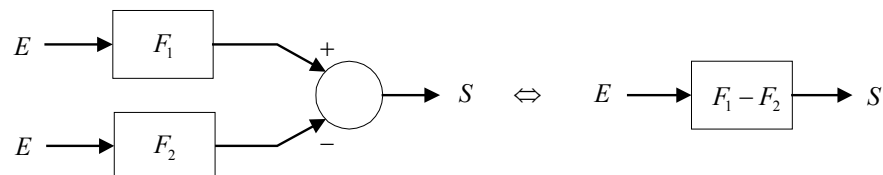


- Structures de base*

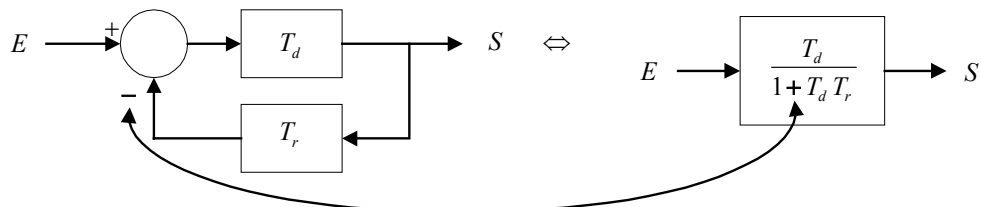
Série :



Parallèle :

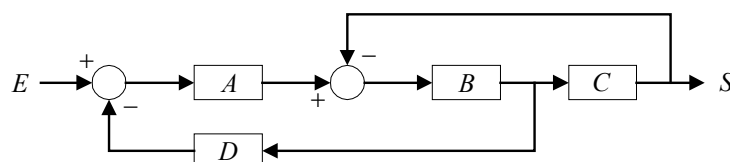


Boucle :



Remarques : $T_{BO}(p) = T_d T_r$ et $\frac{E(p)}{S(p)} = \frac{1}{T_{BF}(p)} = \frac{1}{T_d(p)} + T_r(p)$

- Réduction (exemple)*



La fonction de transfert de la boucle fermée est : $\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A(p).B(p).C(p)}{1 + B(p).(A(p).D(p) + C(p))}$

2.2. Transformation de Laplace

Ce cours correspondant au modules Ma21 et AA4 de 1^{ère} année, nous ne donnerons ci-dessous que les résultats principaux utilisés en Automatique.

- *Définition*

Transformée de Laplace monolatérale d'une fonction causale $f(t)$ nulle pour $t < 0$:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p = \sigma + j\omega & \text{variable complexe} \\ \operatorname{Re}(p) > \sigma_0 \geq 0 & \text{rayon de convergence} \end{cases}$$

- *Linéarité* : $\mathbf{L}((\alpha.f_1(t) + \beta.f_2(t)).v(t)) = \alpha.F_1(p) + \beta.F_2(p)$
- *Multiplication par e^{-at}* : $\mathbf{L}(e^{-at}.f(t).v(t)) = F(p+a)$
- *Théorème de la dérivée* : $\mathbf{L}(\dot{f}(t).v(t)) = p.F(p) - f(0_+)$
- *Théorème de l'intégration* : $\mathbf{L}\left(\left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right).v(t)\right) = \frac{F(p)}{p}$
- *Théorème du retard* : $\mathbf{L}(f(t-t_0).v(t-t_0)) = e^{-t_0 p}.F(p)$
- *Théorème de la valeur finale* : $f(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} [p.F(p)]$
- *Théorème de la valeur initiale* : $f(0_+) = \lim_{p \rightarrow \infty} [p.F(p)]$

2.3. Passage EDLCC à fonction de transfert

$$\text{EDLCC : } b_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + \dots + b_0 s(t) = a_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + \dots + a_0 e(t) \quad \text{avec } n \text{ ordre du système } (n \geq m)$$

$$\text{Fonction de transfert obtenu sans conditions initiales : } \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{a_0 + a_1 p + \dots + a_m p^m}{b_0 + b_1 p + \dots + b_n p^n}$$

2.4. Fonctions de transfert standards (aspect temporel)

- *Réponse temporelle* : entrée typique échelon \Rightarrow réponse indicielle

$$e(t) = e_0.v(t) \Rightarrow \begin{cases} e(t) = 0 & \text{pour } t < 0 \\ e(t) = e_0 & \text{pour } t > 0 \end{cases} \xrightarrow{\mathbf{L}} E(p) = \frac{e_0}{p}$$

- Définitions des caractéristiques d'une réponse indicielle unitaire

* **Système** : $\frac{S(p)}{E(p)} = F(p)$

* **Gain statique** : $K = \lim_{t \rightarrow \infty} [s(t)] = \lim_{p \rightarrow 0} [F(p)]$

* **Temps d'établissement ou de réponse à 5% :** $\forall t > T_{r5\%} \quad \frac{|s(t)-K|}{K} < 5\%$

* **Dépassement et temps de montée au 1er maximum :** $D\% = \frac{s(T_m) - K}{K}$

• *Ordre 1*

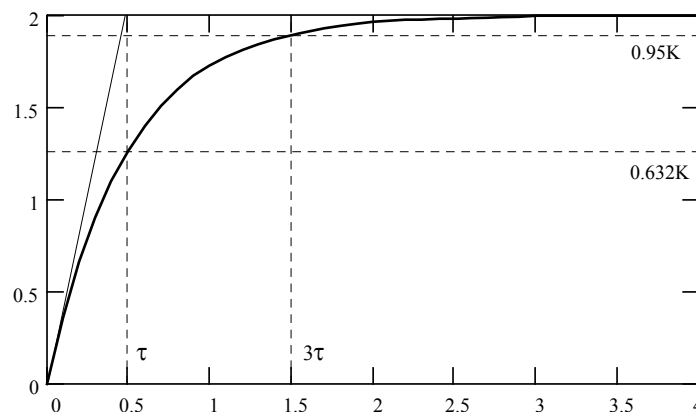
Equation différentielle canonique : $\tau \cdot \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K \cdot e(t)$ avec $K > 0$ et $\tau > 0$

Forme canonique de la fonction de transfert : $\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau \cdot p}$

Gain statique : K

Temps d'établissement ou temps de réponse à 5% : $K - s(T_{r5\%}) = 0.05K$ soit $T_{r5\%} \approx 3 \cdot \tau$

Réponse indicielle unitaire $K = 2$ et $\tau = 0.5s$:



• *Ordre 2*

Equation différentielle canonique : $\frac{1}{\omega_0^2} \cdot \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + 2 \cdot \frac{\alpha}{\omega_0} \cdot \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K \cdot e(t)$

avec ω_0 : pulsation propre ($\omega_0 > 0$) et α : coefficient d'amortissement ($\alpha > 0$) et $K > 0$.

Forme canonique de la fonction de transfert : $\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K \omega_0^2}{p^2 + 2\alpha \omega_0 p + \omega_0^2}$

Recherche des pôles : $p^2 + 2\alpha \omega_0 p + \omega_0^2 = 0 \Leftrightarrow p = -\alpha \omega_0 \pm \omega_0 \cdot \sqrt{\alpha^2 - 1}$

d'où 3 cas possibles : $\begin{cases} \alpha > 1 \Rightarrow 2 \text{ pôles réels distincts} \Leftrightarrow \text{réponse apériodique} \\ \alpha = 1 \Rightarrow 1 \text{ pôle réel double} \Leftrightarrow \text{réponse apériodique critique} \\ \alpha < 1 \Rightarrow 2 \text{ pôles complexes conjugués} \Leftrightarrow \text{réponse oscillante amortie} \end{cases}$

Gain statique : K

Temps d'établissement ou temps de réponse à 5% :

- Cas $\alpha \geq 1$: Le temps de réponse évalué par analyse numérique à l'intersection de la réponse apériodique $s(t)$ avec la droite $y = 0.95K$

- Cas $0 < \alpha < 1$:

Pulsation des oscillations amorties $\omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - \alpha^2}$

La réponse est oscillatoire amortie de pseudo-période $T_p = \frac{2\pi}{\omega_p}$

Le premier dépassement vaut $D_1 = \frac{s(\pi/\omega_p) - K}{K} = e^{-\frac{\pi\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}}$ pour $t_{m1} = \frac{\pi}{\omega_p}$.

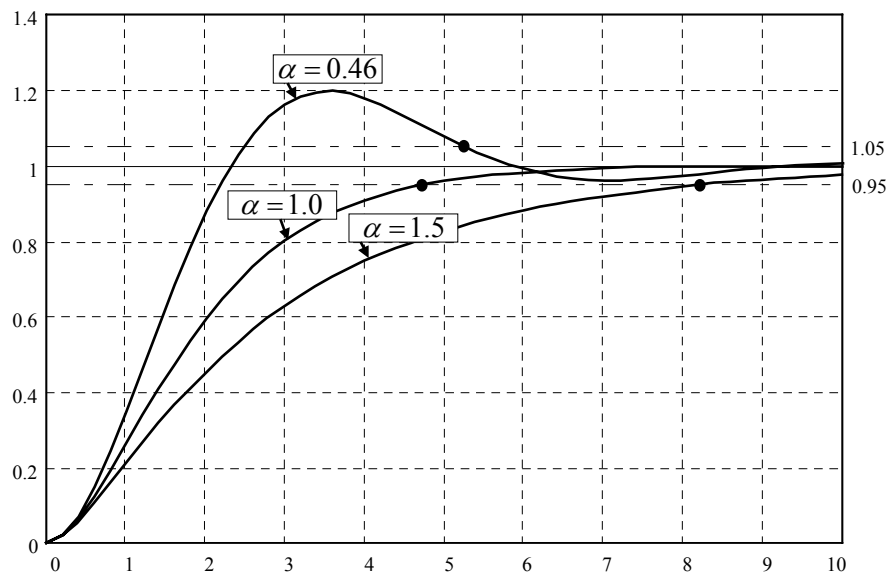
Le temps de réponse doit être évalué par analyse numérique à l'intersection de la réponse $s(t)$ avec la droite $s = 0.95K$ ou $s = 1.05K$. Pour obtenir un encadrement de la localisation du point d'intersection valide $(i-1)\frac{\pi}{\omega_p} < t < i\frac{\pi}{\omega_p}$, il faut déterminer la

$i^{\text{ème}}$ alternance tel que $D_i = D_1^i < 5\%$ ($i \geq 1$) :

si i est paire l'intersection s'effectue avec $s = 1.05K$

si i est impaire l'intersection s'effectue avec $s = 0.95K$

Réponse indicielle unitaire avec $K=1$, $\omega_0=1$ rad/s et $\alpha=0.46, 1, 1.5$:



2.5. Fonctions de transfert standards (aspect harmonique)

- Réponse sinusoïdale

L'hypothèse linéaire conduit en régime établi à une sortie sinusoïdale de même fréquence. La sortie est caractérisée par rapport à l'entrée avec un rapport en amplitude A et une phase Φ .

$$e(t) = e_0 \sin \omega t \rightarrow s(t) = A e_0 \sin(\omega t + \Phi)$$

Le calcul de A et Φ se fait directement en remplaçant p par $j\omega$ dans la fonction de transfert

$$F(p) : \quad A(\omega) = |F(j\omega)| \quad \text{et} \quad \Phi(\omega) = \arg(F(j\omega))$$

- *Ordre 1*

$$F(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \Rightarrow F(j\omega) = \frac{K}{1 + j\tau\omega}$$

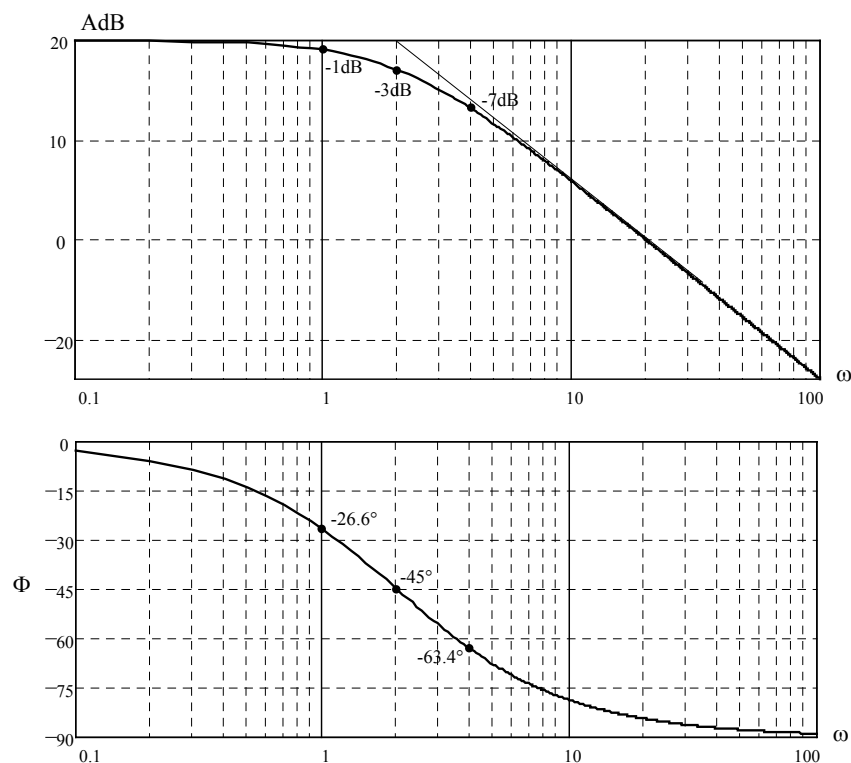
Amplitude : $A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}} \Rightarrow A_{dB}(\omega) = 20\log K - 10\log(1 + \tau^2\omega^2)$

Phase : $\Phi(\omega) = -\arctan(\tau\omega)$

Points remarquables :

- si $\omega = 1/\tau \Rightarrow A_{dB}(\omega) = 20\log K - 3\text{dB}$ et $\Phi(\omega) = -45^\circ$ pulsation de brisure
- si $\omega = 1/2\tau \Rightarrow A_{dB}(\omega) \approx 20\log K - 1\text{dB}$ et $\Phi(\omega) \approx -26.6^\circ$
- si $\omega = 2/\tau \Rightarrow A_{dB}(\omega) \approx 20\log K - 6\text{dB} - 1\text{dB}$ et $\Phi(\omega) \approx -45^\circ - 26.6^\circ$

Réponse harmonique avec $K = 10$ et $\tau = 0.5\text{ s}$:



- *Ordre 2*

$$F(p) = \frac{K}{1 + 2\frac{\alpha}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \Rightarrow F(j.u) = \frac{K}{1 - u^2 + 2j\alpha u} \text{ avec } u = \frac{\omega}{\omega_0} \text{ (pulsation réduite)}$$

Amplitude : $A(u) = \frac{K}{\sqrt{(1 - u^2)^2 + 4\alpha^2 u^2}} \Rightarrow A_{dB}(u) = 20\log K - 10\log[(1 - u^2)^2 + 4\alpha^2 u^2]$

Maximum en amplitude (surtension) :

Si $\alpha < \sqrt{2}/2$, il existe un maximum pour $u = u_r \Rightarrow \omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\alpha^2}$ (pulsation de résonance) :

$$A_{\max}(u) = \frac{K}{2\alpha\sqrt{1-\alpha^2}} \Rightarrow A_{\max \text{ dB}}(u) = 20\log K - 20\log(2\alpha) - 10\log(1-\alpha^2)$$

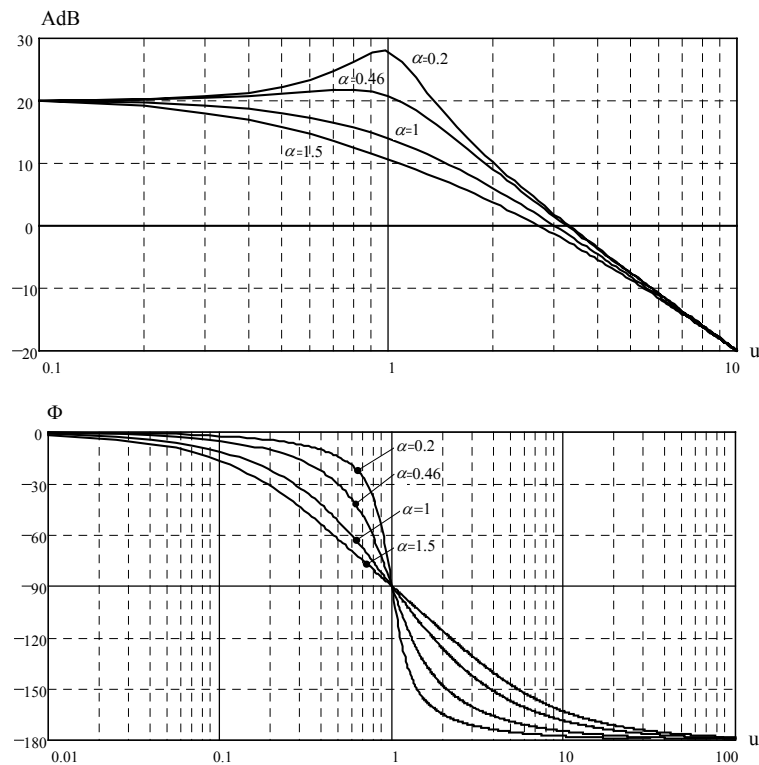
Phase : si $u \leq 1$ alors $\Phi(u) = -\arctan\left(\frac{2\alpha u}{1-u^2}\right)$

si $u > 1$ alors $\Phi(u) = -\arctan\left(\frac{2\alpha u}{1-u^2}\right) - \pi$

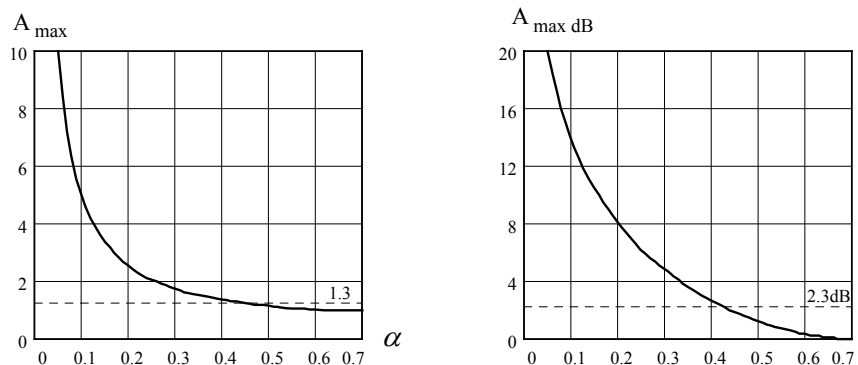
Point remarquable :

- si $\omega = \omega_0 \Rightarrow A_{\text{dB}}(1) = 20\log K - 20\log(2\alpha)$ et $\Phi(1) = -90^\circ$

Exemples de réponse harmonique avec $K = 10$ et $\alpha = 0.2, 0.46, 1, 1.5$:



Evolution de la surtension en fonction du coefficient d'amortissement pour $K = 1$:



- *Conclusion :*

Dans les deux paragraphes précédents, seuls des transferts stables ($K > 0$, $\tau > 0$, $\alpha > 0$ et $\omega_0 > 0$) ont été présentés. Nous évoquerons au chapitre suivant la propriété de stabilité.

Pour compléter ces originaux, l'analyse de l'influence de(s) zéro(s) dans les transferts peut être un exercice intéressant. Nous pouvons citer au passage deux transferts particuliers qui sont l'intégrateur et le dérivateur.

2.6. Qualités d'une boucle

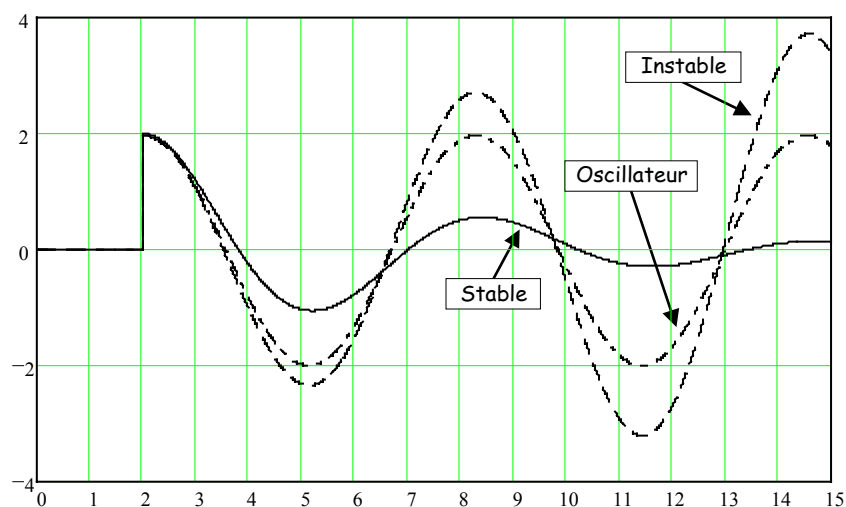
- *Stabilité asymptotique :*

Une qualité essentielle et surtout indispensable pour une boucle est sa stabilité. Une définition simple de cette propriété de la stabilité asymptotique est la suivante.

Définition : Un système est stable asymptotiquement si écarté de sa position d'équilibre après un régime transitoire il revient à sa position initiale.

Dans la figure ci-dessous sont tracées trois évolutions possibles pour des systèmes linéaires : stable et instable de type système oscillant, et oscillateur « parfait » : cas limite stable et instable (une moindre variation de paramètre système entraîne soit un état stable, soit un état instable).

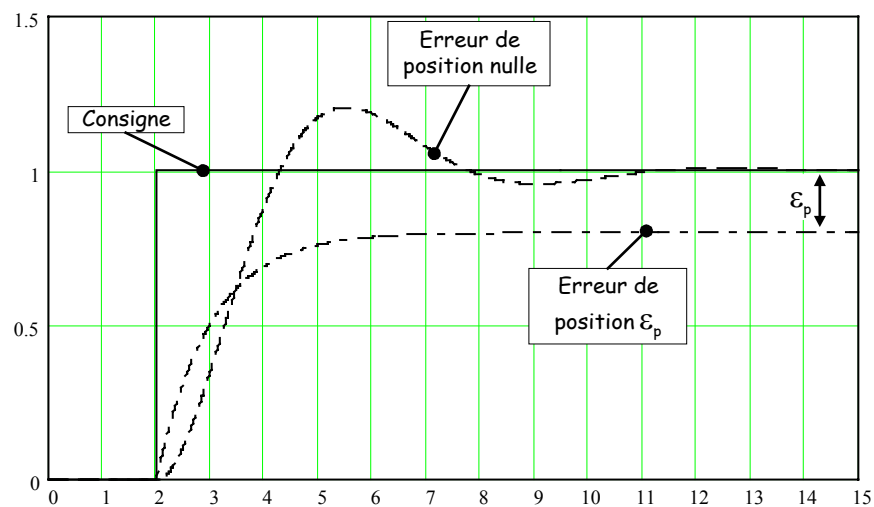
Les trois comportements qualitatifs en stabilité d'un système linéaire :



- *Précision :*

Pour une boucle stable, il est naturel de vouloir contrôler en régime permanent l'écart existant entre la consigne et la grandeur de sortie réglée ou l'influence d'une perturbation sur la sortie. Cette qualité est la précision qui est différente suivant la nature de la variation de consigne ou de la perturbation. Classiquement, l'erreur statique (ou de position) est la première considérée (voir figure ci-dessous). Les erreurs dynamiques de vitesse et d'accélération font partie des qualités et des performances imposées pour un cahier des charges pour la réalisation d'un asservissement.

Précision statique d'un système en rapport avec une variation de consigne :



- *Rapidité :*

Une façon d'évaluer la rapidité est l'utilisation de la notion de temps de réponse à x % qui est le temps que met la mesure pour entrer définitivement dans une zone encadrant à $\pm x$ % la valeur finale. Au sens du cahier des charges, les valeurs 5% et 1% sont les plus courantes.

- *Conclusion :*

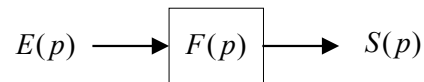
Ces trois propriétés de base comme en général dans le monde de la physique sont souvent contradictoires au sens des objectifs, toute l'habileté de l'automaticien sera d'établir un compromis de réglage de la boucle étudiée en régulation et/ou en asservissement.

3. Analyse d'une boucle : stabilité et précision

3.1. Conditions à satisfaire pour avoir une stabilité absolue puis relative d'une boucle

- *Généralités*

Ecarter un système de sa position d'équilibre pour conclure sur sa stabilité revient au sens théorique à étudier la réponse impulsionnelle du système.



$$e(t) = \delta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} E(p) = 1 \Rightarrow S(p) = F(p) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t)$$

Pour trouver la transformée inverse du transfert, il faut faire apparaître les éléments simples qui se distinguent par la nature des pôles (réels $p = -a$ ou complexes $p = -a \pm j\omega$) distincts ou multiples :

$$\frac{A}{p+a}, \frac{B.(p+a)}{(p+a)^2 + \omega^2} \text{ et } \frac{C\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$$

et qui ont respectivement pour transformée inverse

$$A.e^{-at}.v(t), B.e^{-at}.\cos(\omega t).v(t) \text{ et } C.e^{-at}.\sin(\omega t).v(t)$$

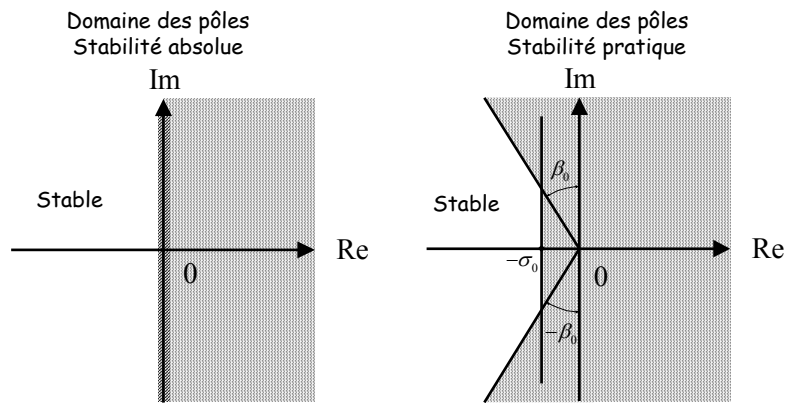
Pour que ces expressions tendent vers 0 quand t tend vers l'infini, il faut que a soit strictement positif.

Conclusion : un système est stable si tous ses pôles sont situés strictement dans le demi-plan de gauche du plan complexe ($\text{Re}(pôles), \text{Im}(pôles)$), c'est le domaine de stabilité absolue.

Pour définir un domaine de stabilité relative, nous imposons une certaine qualité d'amortissement :

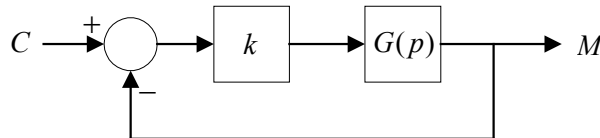
- pôles réels : forme canonique $1 + \tau p = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{\tau} \geq \sigma_0 \Leftrightarrow \tau \leq \frac{1}{\sigma_0}$
- pôles complexes : forme canonique $p^2 + 2\alpha\omega_0 p + \omega_0^2 \Rightarrow p = -\alpha\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1-\alpha^2}$ les pôles se situent alors sur des droites passant par l'origine et faisant un angle $\pm\beta$ avec l'axe des imaginaires avec $\sin(\beta) = \alpha \Rightarrow \alpha \geq \alpha_0 \Leftrightarrow \beta \geq \beta_0 = \arcsin(\alpha_0)$

Conclusion : un système a une stabilité pratique satisfaisante si tous ses pôles réels sont à gauche de la droite σ_0 et tous ses pôles complexes dans le secteur $\pm\beta_0$ du plan complexe à partie réelle négative (voir figure ci-dessous).



- *Cas d'une boucle*

L'analyse de la stabilité se fera avec un paramètre variable k (amplification du signal d'erreur : action proportionnelle) et un retour unitaire toujours possible en comparant consigne (image de l'entrée) et mesure (image de la sortie).



La fonction de transfert de boucle fermée est :

$$T_{BO}(p) = k.G(p) \Rightarrow T_{BF}(p) = \frac{k.G(p)}{1 + k.G(p)} = \frac{k.N_G(p)}{D_G(p) + k.N_G(p)}$$

Le polynôme caractéristique $D_G(p) + k.N_G(p)$ permet d'étudier la stabilité en fonction du réglage du gain k par la recherche de ses racines (lieu des racines ou lieux d'Evans).

3.2. Lieux des racines

Avec l'outil informatique, il est facile de représenter le lieu des pôles d'un système ou des racines de son équation caractéristique, soit en le programmant (Mathcad), soit en utilisant la macro-commande disponible dans le progiciel (Scilab ou Matlab).

- Exemple d'un système du 3^{ème} ordre:

Fonction de transfert de boucle ouverte :

$$T_{BO}(p) = \frac{2k}{p(p+1)(p+2)} \Rightarrow T_{BF}(p) = \frac{2k}{p^3 + 3p^2 + 2p + 2k}$$

Les pôles sont les racines du polynôme caractéristique $p^3 + 3p^2 + 2p + 2k = 0$, quand le gain k varie de 0 à l'infini, les trois racines décrivent chacune trois branches comme visualisées sur la figure suivante. Nous indiquons quelques valeurs caractéristiques de k et le vecteur des pôles correspondant noté $r(k)$.

- Trois racines réelles stables : $0 < k \leq 0.19245 \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} < r(k) \leq \begin{pmatrix} -2.155 \\ -0.423 \\ -0.423 \end{pmatrix}$

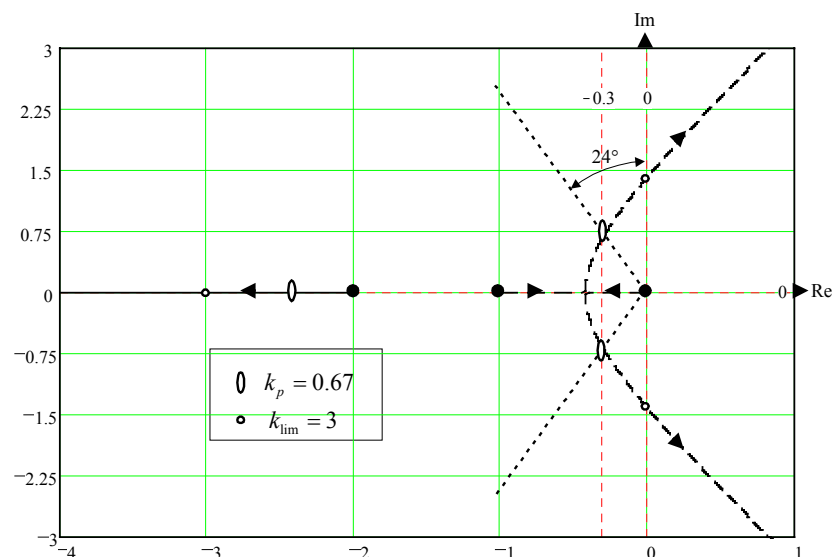
- Une racine réelle stable et deux racines complexes conjuguées stable :

$$0.19245 < k < 3 \Rightarrow \begin{pmatrix} -2.155 \\ -0.423 \\ -0.423 \end{pmatrix} < r(k) < \begin{pmatrix} -3 \\ \sqrt{2}j \\ -\sqrt{2}j \end{pmatrix}$$

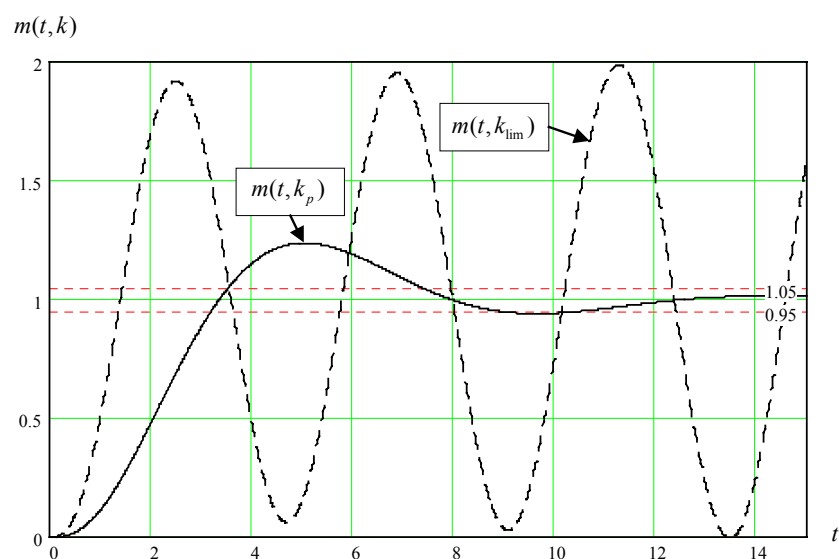
La limite de stabilité absolue est donc $k_{\text{lim}} = 3$.

Pour avoir une image de la stabilité relative, le coefficient d'amortissement des oscillations amorties est $\alpha_0 = 0.4$ soit $\beta_0 \approx 24^\circ$, la valeur de gain correspondante notée k_p vaut 0.67.

Lieu des pôles et concept stabilité absolue et relative



Comparaison des réponses indicielles unitaires de la boucle pour k_{lim} et k_p



3.3. Critère algébrique de Routh

Ce critère permet de trouver les conditions de **stabilité absolue** sans calculer les racines du polynôme caractéristique de la boucle.

- Ordonner le polynôme dans l'ordre décroissant des puissances de p :

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} + \dots + a_1 p + a_0$$

- Former le tableau de Routh : (exemple pour n impair)

P o s e r	1	a_n	a_{n-2}	a_1	0
	2	a_{n-1}	a_{n-3}	a_0	0
C a l c u l e r	3	A_1	A_2	0	
	4	B_1	B_2	0	
		
		
	$n-2$	L_1	L_2	0		
	$n-1$	M_1	M_2	0		
	n	N_1	0			
	$n+1$	O_1	0			

avec

$$A_1 = \frac{a_{n-1} a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}, \quad A_2 = \frac{a_{n-1} a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}, \quad \dots$$

$$B_1 = \frac{A_1 a_{n-3} - a_{n-1} A_2}{A_1}, \quad B_2 = \frac{A_1 a_{n-5} - a_{n-1} A_3}{A_1}, \quad \dots$$

.....

$$N_1 = \frac{M_1 L_2 - L_1 M_2}{M_1} \quad \text{avec} \quad M_2 = a_0$$

$$O_1 = a_0$$

- Pour que la boucle soit stable, il faut que tous les coefficients du polynôme soient présents et de même signe, et si cette condition est vérifiée que les coefficients de la première colonne du tableau de Routh soient de même signe (le nombre de changements de signe de la 1^{ère} colonne donne le nombre de pôles instables).

- Exemples :

- ordre 1 : $\tau p + 1 \Rightarrow \begin{matrix} \tau & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix}$ stable si $\tau > 0$

- ordre 2 : $p^2 + 2\alpha\omega_0 p + \omega_0^2 \Rightarrow \begin{matrix} 1 & \omega_0^2 & 0 \\ 2\alpha\omega_0 & 0 & 0 \\ \omega_0^2 & 0 & \end{matrix}$ stable si $\alpha\omega_0 > 0$

- ordre 3 : $p^3 + 3p^2 + 2p + 2k \Rightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2k & 0 \\ \frac{6-2k}{3} & 0 & \\ 2k & 0 & \end{matrix}$ stable si $0 < k < 3$

Conclusion : Ce critère est facile à appliquer mais il ne nous donne que les limites de réglage pour obtenir la stabilité absolue de la boucle.

3.4. Critère géométrique de Nyquist simplifié ou du revers

Ce critère est applicable à un système dont la fonction de transfert en boucle ouverte ne possède pas de pôles et de zéros à partie réelle positive. Dans le cas contraire, il faut appliquer le critère de Nyquist complet que nous ne présentons pas dans ce cours.

La base de l'application de ce critère est d'exploiter l'équation caractéristique $1 + k.G(j\omega) = 0$ sous la forme position de $k.G(j\omega)$ par rapport au point dit critique (limite de stabilité) $(-1, 0)$ du plan complexe ou par rapport au point critique $(0\text{dB}, -180^\circ)$ des plans de Black et Bode.

- *Règle du revers dans le plan de Nyquist* : Un système bouclé est stable si en décrivant le lieu du transfert de boucle ouverte $k.G(j\omega)$ dans le sens croissant des ω , le point critique $(-1, 0)$ du plan complexe est laissé à gauche.
- *Règle du revers dans le plan de Black* : Un système bouclé est stable si en décrivant le lieu de la fonction de transfert de boucle ouverte $k.G(j\omega)$ dans le sens croissant des ω , le point critique $(0\text{dB}, -180^\circ)$ du plan de Black est laissé à droite.
- *Règle du revers dans le plan de Bode* : Un système bouclé est stable si pour la pulsation ω_{-180° où l'argument de $k.G(j\omega)$ vaut -180° , le module de $k.G(j\omega_{-180^\circ})$ est inférieur à 0dB .
- *Exemple d'un système du 3^{ème} ordre* :

Recherche de la limite de stabilité en étudiant les conditions sur k pour laisser le point critique $(-1, 0)$ à gauche, une étude similaire peut être faite en raisonnant en module et argument par rapport au point critique $(0\text{dB}, -180^\circ)$.

$$T_{BO}(p) = \frac{2k}{p(p+1)(p+2)} \Rightarrow \begin{cases} \text{Re}(T_{BO}(j\omega)) = \frac{-6k}{(1+\omega^2)(4+\omega^2)} \\ \text{Im}(T_{BO}(j\omega)) = \frac{-2k(2-\omega^2)}{\omega(1+\omega^2)(4+\omega^2)} \end{cases}$$

d'où

$$\text{Im}(T_{BO}(j\omega)) = 0 \text{ avec } \text{Re}(T_{BO}(j\omega)) \neq 0 \Rightarrow \omega_{-180^\circ} = \sqrt{2} \text{ puis } \text{Re}(T_{BO}(j\omega_{-180^\circ})) > -1 \Rightarrow 0 < k < 3$$

Nous retrouvons les résultats de l'approche lieu des pôles et celui du critère de Routh avec en plus par rapport à ce dernier la pulsation de l'oscillation limite.

3.5. Marges de stabilité à partir de l'approche géométrique

Dans le domaine temporel avec le lieu des pôles, nous avons introduit un domaine de stabilité pratique. De même avec l'approche harmonique, nous pouvons définir cette notion en introduisant une « distance » du lieu de la fonction de transfert de boucle ouverte au point critique.

- *Marge de gain :*

Elle correspond à la distance du point critique $(-1, 0)$ à l'intersection du lieu de boucle ouverte $k.G(j\omega)$ avec l'axe réel. Physiquement, la marge de gain représente la quantité par laquelle nous pouvons multiplier la partie réelle $k.G(j\omega)$ pour passer par $(-1, 0)$ pour la pulsation $\omega = \omega_{-180^\circ}$

$$A_{-180^\circ} = k \cdot |G(j\omega_{-180^\circ})| \Rightarrow MG = \frac{1}{A_{-180^\circ}} \text{ ou } MG_{dB} = -20 \log(A_{-180^\circ})$$

D'un point de vue pratique, la marge de gain doit être comprise entre 3 et 10 soit 10 à 20 dB.

- *Marge de phase*

Elle correspond à l'angle que fait l'axe des réels négatifs avec la droite joignant l'origine du repère et le point de module 1 du lieu de boucle ouverte. Physiquement, la marge de phase représente la quantité de phase que nous pouvons perdre avant que la boucle fermée ne devienne instable.

$$M\varphi = \arg(kG(j\omega)) + 180^\circ \text{ pour } \omega = \omega_{0dB} \text{ pulsation pour laquelle } |kG(j\omega)| = 1$$

D'un point de vue pratique, la marge de phase est supérieure ou égale à 45°.

- *Exemple d'un système du 3^{ème} ordre*

Nous imposons une marge de phase de 45°. L'argument de la fonction de transfert de boucle ouverte doit être de -135° .

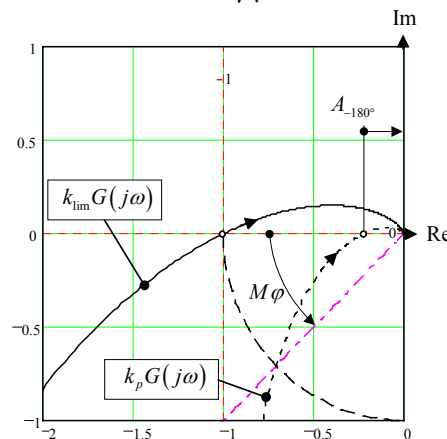
$$\arg(kG(j\omega)) = -90^\circ - \arctan(\omega) - \arctan(0.5\omega) = -135^\circ \Leftrightarrow \frac{1.5\omega}{1-0.5\omega^2} = 1$$

L'équation du 2^{ème} degré en ω conduit à deux solutions dont seule la solution positive est retenue $\omega = \omega_{0dB} \approx 0.56 \text{ rad/s}$.

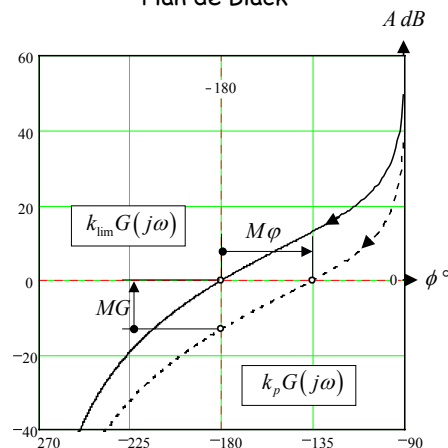
La valeur du réglage du gain vérifie pour cette pulsation un module unité :

$$k|G(j\omega_{0dB})| = \frac{2k}{\omega_{0dB} \cdot \sqrt{1+\omega_{0dB}^2} \cdot \sqrt{4+\omega_{0dB}^2}} = 1 \Rightarrow k_p = 0.669$$

Plan de Nyquist

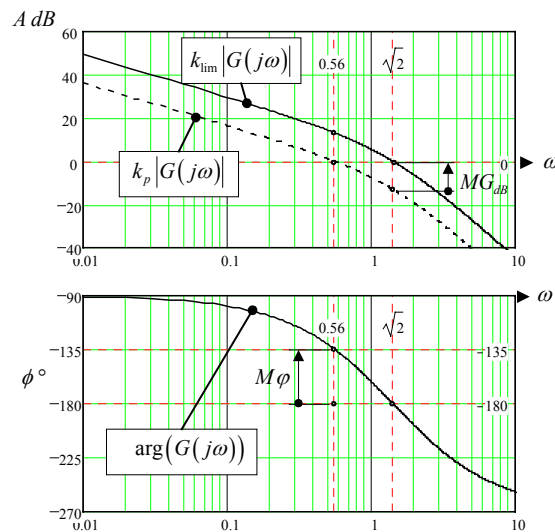


Plan de Black



La marge de gain résultante est :

$$A_{-180^\circ} = k_p \cdot |G(j\omega_{-180^\circ})| = 0.223 \Rightarrow MG = \frac{1}{A_{-180^\circ}} = 4.49 \text{ ou } MG_{dB} = -20 \log(A_{-180^\circ}) \approx 13 \text{ dB}$$



Plan de Bode

$$\omega_{-180^\circ} = 1.414 \text{ rd/s}$$

$$\omega_{0dB} = 0.562 \text{ rd/s}$$

$$k_{lim} = 3$$

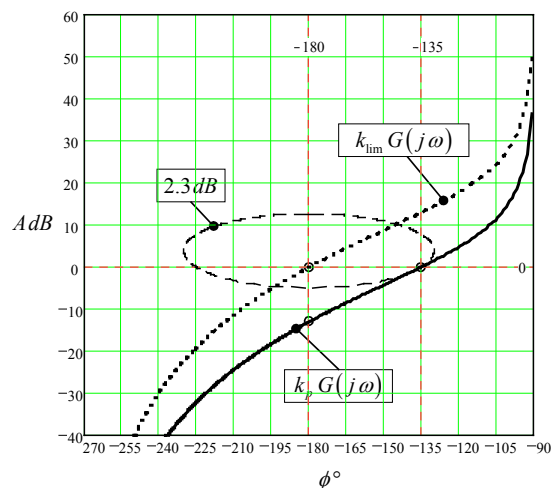
$$k_p = 0.669$$

$$M\phi = 45^\circ$$

$$MG_{dB} = 13 \text{ dB}$$

3.6. Abaque de Black-Nichols

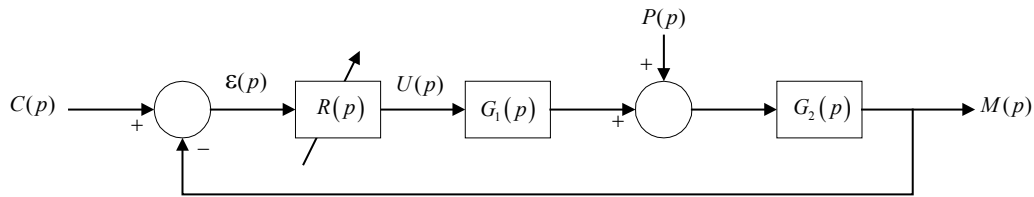
Cet abaque est un plan de Black ($|Y|_{dB}$ et $\arg(Y)$) sur lequel ont été représentées les courbes iso-gain et iso-phase caractéristiques de la fonction $\frac{Y}{1+Y}$. L'utilité de ce plan est que pour un point du plan représenté par son module en dB et son argument en degré, en ce point se « coupent » une courbe iso-gain et une courbe iso-phase qui correspondent au module en dB et à l'argument en degré du nombre complexe $\frac{Y}{1+Y}$. Pour un automaticien, l'utilisation de cet abaque permet le passage du tracé de la boucle ouverte à celui de la boucle fermée d'une boucle à retour unitaire.



Nous illustrons ci-dessus avec le réglage pratique du système du 3^{ème} ordre, l'iso-gain de 2.3 dB qui signifie qu'en 2^{ème} ordre équivalent, le système se comporte en réponse indicielle avec un 1^{er} dépassement voisin de 22 % (recoupement avec les résultats du lieu des pôles en stabilité relative).

3.7. Précision

La précision (en régime permanent) dépend, contrairement à la stabilité, de la nature des signaux de consigne ou de perturbation. Pour donner des résultats, nous utilisons la structure de boucle suivante :



- *Erreur due à une modification de consigne*

Sans perturbation, la fonction de transfert erreur-consigne s'écrit :

$$\varepsilon_c(p) = \frac{1}{1 + R(p)G_1(p)G_2(p)} \cdot C(p)$$

Nous pouvons, pour ce système considéré comme stable, appliquer le théorème de la valeur finale : $\varepsilon_c(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (p \varepsilon_c(p))$. En mettant la fonction de transfert sous la forme qui fait apparaître

pôles et zéros : $T_{BO}(p) = R(p)G_1(p)G_2(p) = \gamma \frac{(p-z_1) \cdot (p-z_2) \cdot \dots \cdot (p-z_m)}{p^i (p-p_1) \cdot (p-p_2) \cdot \dots \cdot (p-p_{n-i})}$ avec i le nombre

de pôles à l'origine (intégrateurs) et $m \leq n$ pour assurer la causalité. Nous posons $T_{BO}(p) \underset{p \rightarrow 0}{\approx} \frac{K}{p^i}$

avec K gain de boucle.

- Consigne échelon unité ou erreur de position : $C(p) = 1/p$

$$\varepsilon_{pos} = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{p^i}{p^i + K} \right) \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_{pos} = \frac{1}{1+K} & \text{si aucun intégrateur} \\ \varepsilon_{pos} = 0 & \text{si au moins un intégrateur} \end{cases}$$

- Consigne rampe de vitesse unité ou erreur de vitesse : $C(p) = 1/p^2$

$$\varepsilon_{vit} = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{p^{i-1}}{p^i + K} \right) \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_{vit} = \infty & \text{si aucun intégrateur} \\ \varepsilon_{vit} = \frac{1}{K} & \text{si au moins un intégrateur} \\ \varepsilon_{vit} = 0 & \text{si au moins deux intégrateurs} \end{cases}$$

- Consigne rampe en accélération ou erreur d'accélération : $C(p) = 1/p^3$

$$\varepsilon_{acc} = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{p^{i-2}}{p^i + K} \right) \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_{acc} = \infty & \text{si aucun intégrateur} \\ \varepsilon_{acc} = \infty & \text{si au moins un intégrateur} \\ \varepsilon_{acc} = \frac{1}{K} & \text{si au moins deux intégrateurs} \\ \varepsilon_{acc} = 0 & \text{si au moins trois intégrateurs} \end{cases}$$

Remarque : Nous ne devons pas oublier deux choses fondamentales. L'erreur quand elle est finie, est le plus souvent inversement proportionnelle au gain de boucle et quand elle est nulle (sans non-

linéarité), chaque intégrateur apporte un déphasage de 90° . Un nombre d'intégrateurs important et un gain fort sont deux conditions qui dégradent la stabilité de la boucle.

- *Erreur due à une perturbation*

Avec une consigne nulle, la fonction de transfert erreur-perturbation est :

$$\varepsilon_p(p) = \frac{-G_2(p)}{1 + R(p)G_1(p)G_2(p)} \cdot P(p)$$

En suivant la même décomposition que précédemment, nous devons distinguer le nombre de pôles à l'origine contenus dans RG_1 ($i1$ pôles) et G_2 ($i2$ pôles) mais aussi la répartition du gain

respectivement K_1 et K_2 : $T_{BO}(p) \approx \frac{K_1 \cdot K_2}{p^{i1+i2}}$

- perturbation échelon unité $P(p) = \frac{1}{p}$

$$\varepsilon_{pert} = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{-K_2 p^{i1}}{p^{i1+i2} + K_1 K_2} \right) \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_{pert} = \frac{-K_2}{1 + K_1 K_2} & \text{si aucun intégrateur} \\ \varepsilon_{pert} = -\frac{1}{K_1} & \text{si au moins un intégrateur} \\ & \text{dans } G_2(p) \text{ et aucun dans } G_1(p) \\ \varepsilon_{pert} = 0 & \text{si au moins un intégrateur} \\ & \text{dans } G_1(p) \end{cases}$$

En conclusion la localisation des intégrateurs est bénéfique si ces derniers sont situés en amont de la perturbation. De même, si l'erreur est constante, cette dernière est plus petite si nous augmentons le gain en amont de la perturbation.

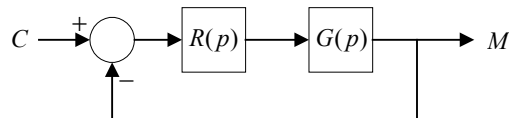
Conclusion finale : L'automaticien doit résoudre le dilemme stabilité-précision. Un seul paramètre de réglage en l'occurrence le gain k est en général insuffisant, le chapitre suivant débouche sur la synthèse d'une boucle.

4. Synthèse d'une boucle : correcteurs

4.1. Quelques structures de correction

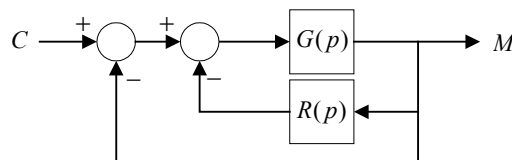
L'essentiel de notre présentation est basé sur une structure de correction série. Cette approche est de loin la plus répandue. La fonction de transfert correcteur représente la relation erreur-commande.

Boucle correction série

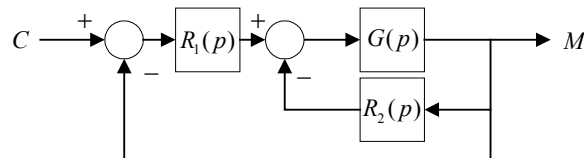


Nous pouvons imaginer une correction parallèle ou mixte (voir boucle TD amplification en série et retour tachymétrique) .

Boucle correction parallèle

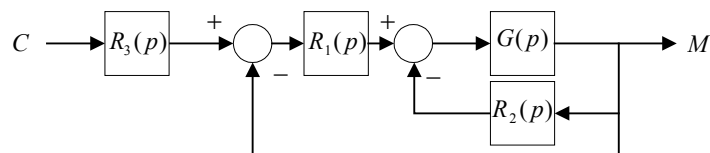


Boucle correction mixte



Nous présentons une dernière forme de boucle avec un élément de correction hors bouclage, nous disposons alors de trois degrés de liberté avec la possibilité pour le correcteur hors bouclage d'éviter les sauts de variation brutale de consigne en entrée de boucle.

Boucle correction à trois degrés de liberté



Dans la suite de la fiche, nous ne développons que la correction série.

4.2. Eléments pour réaliser un « bon » réglage

Le but du réglage est, dans la plupart des cas, d'obtenir des performances temporelles, comme nous l'avons montré au niveau de l'étude de la stabilité. Nous pouvons, notamment pour les systèmes d'ordre supérieur à 2, avoir un raisonnement à partir de la fonction de transfert de boucle ouverte dans

le domaine harmonique (par exemple en faisant référence sur la bande d'utilisation du système à un équivalent de comportement de type 2^{ème} ordre : abaque de black). Un simulateur peut permettre de confirmer les réglages.

$$\text{Fonction de transfert de la boucle à correction série : } \frac{M(p)}{C(p)} = \frac{R(p)G(p)}{1 + R(p)G(p)}$$

Nous pouvons distinguer trois domaines de pulsation à gérer pour la boucle ouverte :

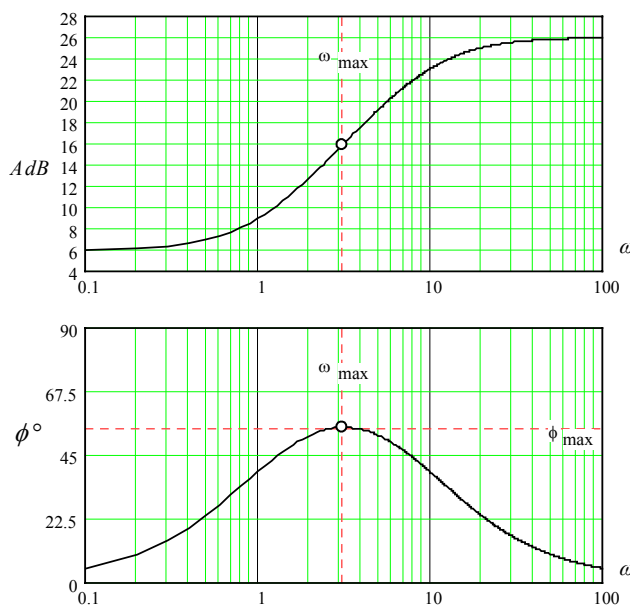
- pulsation basse : assurer un gain fort ou un comportement intégrateur de la fonction de transfert de boucle ouverte (précision)
- pulsation de coupure ou ω_{0dB} : assurer une marge de phase suffisante pour assurer une stabilité relative satisfaisante
- pulsation élevée : avoir une atténuation forte pour « filtrer » les éventuels bruits de mesure.

D'une manière générale, cela conduit à trois actions classiques : Proportionnelle (gain), Intégrale (précision) et Dérivée (stabilité). La structure PID sera étudiée au chapitre 5. Nous allons pour l'instant nous limiter à la présentation de deux correcteurs qui permettent les mêmes réglages globalement que le PID mais de manière « indépendante » : les correcteurs à avance et à retard de phase.

4.3. Deux correcteurs classiques : avance et retard de phase

• Correcteur à avance de phase

$$\text{Fonction de transfert : } R(p) = K_r \frac{1 + aTp}{1 + Tp} \text{ avec } a > 1$$



Résultats principaux

$$\omega_{\max} = \frac{1}{T\sqrt{a}}$$

$$\sin(\phi_{\max}) = \frac{a-1}{a+1}$$

Exemple tracé dans Bode

$$K_r = 2, \quad a = 10 \quad \text{et} \quad T = 0.1 \text{ s}$$

$$\omega_{\max} = 3.162 \text{ rad/s}$$

$$\phi_{\max} \approx 55^\circ$$

$$A_{\min} \approx 6 \text{ dB}$$

$$A_{\max} \approx 26 \text{ dB}$$

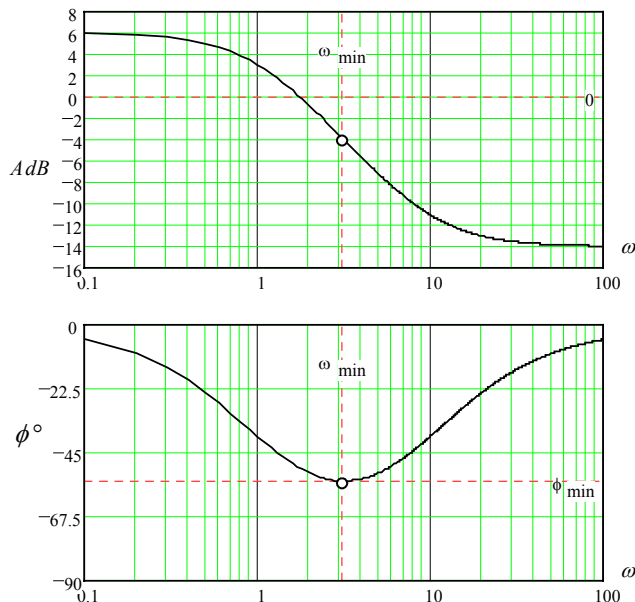
Apports du correcteur à avance de phase : effet stabilisant (marge de phase) et augmentation de la bande passante (meilleure rapidité de réponse).

Une méthode de placement du correcteur :

- Définir par une condition sur la précision de la boucle le gain K_r et repérer la phase $\phi(\omega_{0dB})$ pour la pulsation ω_{0dB} du transfert de boucle ouverte avec seulement K_r .
- Calculer la marge de phase résultante $M\phi_r = 180^\circ + \phi(\omega_{0dB})$ et l'apport de phase du correcteur $\phi_{\max} = M\phi_{\text{désirée}} + 5^\circ - M\phi_r$ pour respecter la marge de phase désirée $M\phi_{\text{désirée}}$ (l'augmentation de la marge de phase de 5° permet implicitement de tenir compte de l'augmentation de la bande passante apportée par le correcteur).
- En déduire $a = \frac{1 + \sin(\phi_{\max})}{1 - \sin(\phi_{\max})}$ et $T = \frac{1}{\omega_{0dB}\sqrt{a}}$, vérifier sur le tracé la marge de phase obtenue.

- *Correcteur à retard de phase*

Fonction de transfert : $R(p) = K_r \frac{1+Tp}{1+aTp}$ avec $a > 1$



Résultats principaux

$$\omega_{\min} = \frac{1}{T\sqrt{a}}$$

$$\sin(\phi_{\min}) = -\frac{a-1}{a+1}$$

Exemple tracé dans Bode

$$K_r = 2, \quad a = 10 \quad \text{et} \quad T = 0.1s$$

$$\omega_{\min} = 3.162 \text{ rad/s}$$

$$\phi_{\min} \approx -55^\circ$$

$$A_{\min} \approx 6 \text{ dB}$$

$$A_{\max} \approx -14 \text{ dB}$$

Apport du correcteur à retard de phase : amélioration de la précision mais avec effet déstabilisant et une diminution de la bande passante (transitoire plus long).

Le placement du correcteur tient surtout compte de l'amélioration de la précision en choisissant le gain K_r et le paramètre a , la pulsation de brisure $\frac{1}{T}$ est choisie au moins une décade au-dessous de la pulsation ω_{0dB} pour ne pas trop détériorer la marge de phase.

- *Conclusion*

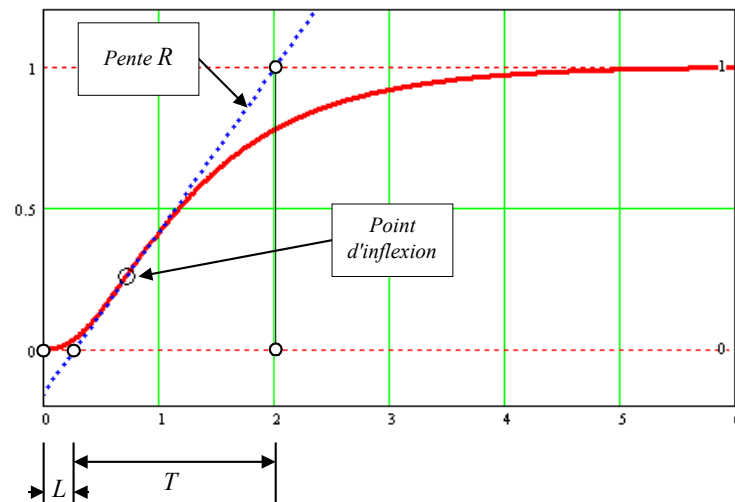
Suivant le cahier des charges, il est bien sûr très intéressant de placer en série les deux correcteurs avance et retard de phase pour augmenter les possibilités de réglage.

5. Régulation industrielle

5.1. Quelques bases d'identification

Le but est de déterminer un modèle sous la forme d'une fonction de transfert de l'ensemble actionneur-processus-transmetteur. Nous limitons la présentation aux systèmes apériodique ou intégrateur identifiés à partir d'une réponse indicielle en boucle ouverte et à partir de la recherche de l'oscillation limite en boucle fermée.

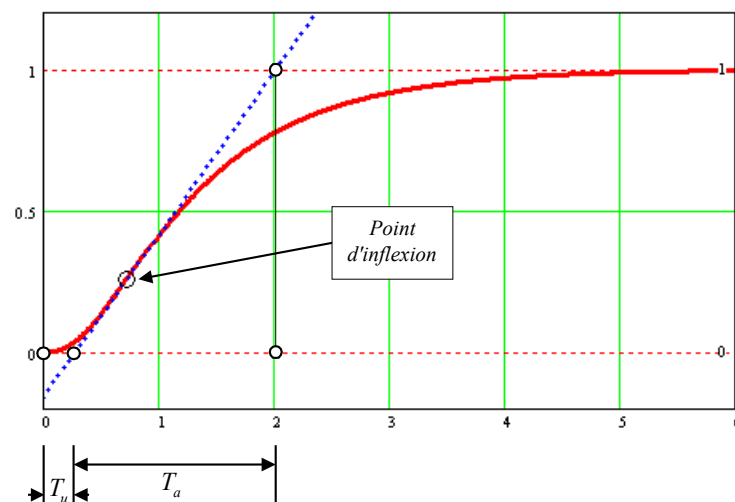
- *Signature LRT* (boucle ouverte : courbe en S)



Exemple de réponse indicielle unitaire gain 1

Modèle LRT
$$G_s(p) = \frac{R.e^{-L.p}}{p + T^{-1}} \quad \text{avec} \quad K = RT = \frac{\Delta_{mesure}}{\Delta_{commande}}$$

- *Méthode de Strejc* (boucle ouverte : courbe en S)



Exemple de réponse indicielle unitaire gain 1

Modèle de Strejc
$$G_s(p) = \frac{K_s.e^{-r_s.p}}{(1 + \tau_s.p)^{n_s}} \quad \text{avec} \quad K_s = \frac{\Delta_{mesure}}{\Delta_{commande}}$$

$\left. \frac{T_u}{T_a} \right _{n_{ent}}$	Ordre n_s	$\left. \frac{\tau}{T_a} \right _{n_{ent}}$
0.000	1	1.000
0.104	2	0.368
0.218	3	0.271
0.319	4	0.224
0.410	5	0.195
0.493	6	0.175
0.570	7	0.161
0.642	8	0.149

Tableau des coefficients

Principe de la méthode :

Etape 1 : A partir des mesures T_u et T_a sur la réponse, calculer $\eta = \frac{T_u}{T_a}$

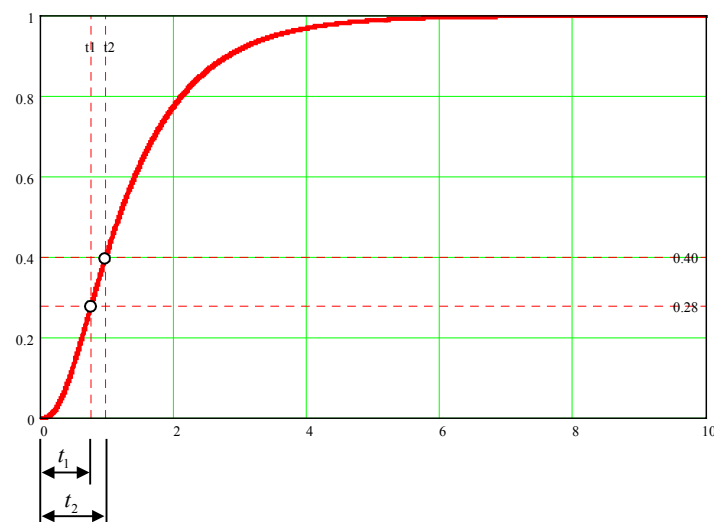
Etape 2 : Prendre pour n_s la valeur entière du tableau pour la valeur $\left. \frac{T_u}{T_a} \right|_{n_{ent}}$ immédiatement

inférieure à η , la constante de temps du modèle est $\tau_s = \left. \frac{\tau}{T_a} \right|_{n_{ent}} \cdot T_a$

Etape 3 : Le retard pur du modèle est $r_s = T_u - \left. \frac{T_u}{T_a} \right|_{n_{ent}} \cdot T_a$

Remarque : Les résultats sont conditionnés par la détermination du point d'inflexion.

- *Méthode de Broïda* (boucle ouverte courbe en S)

**Exemple de réponse indicielle unitaire gain 1**

$$\text{Modèle de Broïda} \quad G_b(p) = \frac{K_b \cdot e^{-r_b \cdot p}}{1 + \tau_b \cdot p} \quad \text{avec} \quad K_b = \frac{\Delta \text{mesure}}{\Delta \text{commande}}$$

Principe de la méthode :

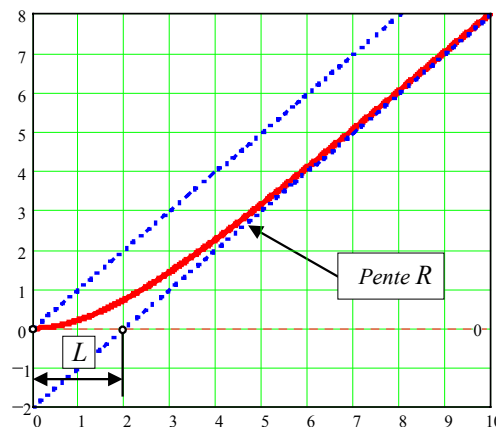
Etape 1 : relever les instants t_1 et t_2 correspondants respectivement à 28% et 40% de la valeur finale.

Etape 2 : La constante de temps du modèle est $\tau_b = 5.5 (t_2 - t_1)$.

Le retard pur du modèle est $r_b = 2.8 t_1 - 1.8 t_2$

Remarque : Cette méthode est plus simple à programmer.

- *Méthode de Broïda* (boucle ouverte, système intégrateur)



Exemple de réponse indicielle unitaire gain 1

$$\text{Modèle de Broïda ou LR : } G_b(p) = \frac{R \cdot e^{-L \cdot p}}{p}$$

- *Méthode de Strejc* (boucle fermée)

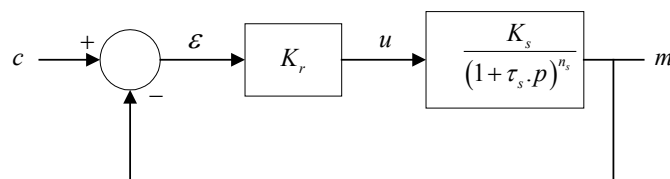


Schéma de la boucle fermée

L'opérateur fait varier l'action proportionnelle du régulateur K_r jusqu'à la limite de stabilité de la boucle (K_s connu par un essai statique en boucle ouverte).

Les deux relations suivantes conduisent à la détermination des paramètres du modèle de Strejc :

$$\frac{K_r K_s}{(1 + (\tau_s \omega_{osc})^2)^{\frac{n_s}{2}}} = 1 \quad \text{et} \quad -n_s \arctan(\tau_s \omega_{osc}) = -\pi$$

d'où $K_r K_s = \cos\left(\frac{\pi}{n_s}\right)^{-n_s} \Rightarrow n_s$ (**Tableau ci-dessous**) puis $T_{osc} \Rightarrow \tau_s = \frac{T_{osc}}{2\pi} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{n_s}\right)$

$K_r K_s$	n_s	$K_r K_s$	n_s	$K_r K_s$	n_s
232.09	2.1	8.00	3	2.37	6
72.92	2.2	6.56	3.2	2.21	6.5
38.95	2.3	5.60	3.4	2.08	7
25.63	2.4	4.91	3.6	1.97	7.5
18.84	2.5	4.40	3.8	1.88	8
14.81	2.6	4.00	4	1.81	8.5
12.19	2.7	3.32	4.5	1.75	9
10.36	2.8	2.89	5	1.70	9.5
9.02	2.9	2.59	5.5	1.65	10

- *Méthode de Broïda* (boucle fermée)

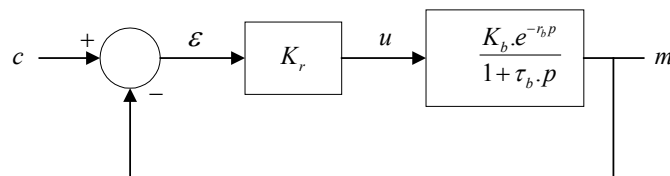


Schéma de la boucle fermée

Après avoir déterminé K_b connu par un essai statique en boucle ouverte, l'opérateur relève le gain K_r et la période T_{osc} qui conduit à la limite de stabilité.

Les paramètres du modèle de Broïda se déduisent des relations suivantes :

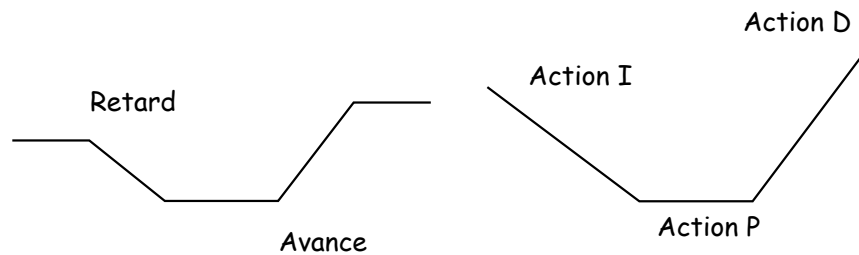
$$\tau_b = \frac{T_{osc}}{2\pi} \cdot \sqrt{(K_r K_b)^2 - 1} \quad \text{et} \quad r_b = \frac{T_{osc}}{2\pi} \cdot \left(\pi - \arctan\left(\sqrt{(K_r K_b)^2 - 1}\right) \right)$$

Remarque : Les méthodes d'identification en boucle fermée présentées peuvent compte tenu de la recherche du gain limite de stabilité, engendrer des phénomènes non linéaires (saturation par exemple). Il peut être intéressant d'utiliser une méthode basée sur la recherche d'un cycle limite avec un relais à la place de l'amplification régulateur.

5.2. Les régulateurs PID

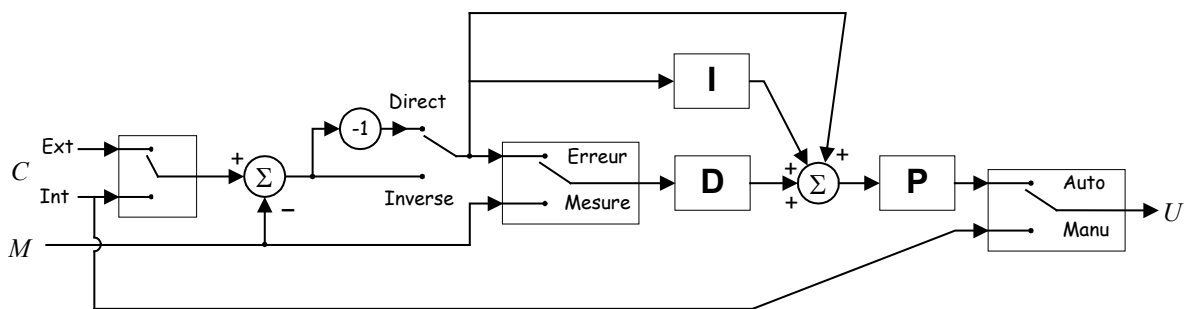
Un des régulateurs industriels les plus utilisés est le PID : action proportionnelle, action intégrale et action dérivée. Nous retrouvons grâce aux actions proportionnelle et intégrale la possibilité d'agir sur la précision et d'apporter de la phase par l'action dérivée pour avoir une stabilité satisfaisante.

Les combinaisons possibles sont de type P, PI, PD et PID. La figure ci-dessous représente sous forme des asymptotes, une comparaison en module entre le correcteur retard-avance et le régulateur PID.



Asymptotes en module retard-avance et PID

- *Architecture d'un régulateur PID*



Exemple d'un PID à structure mixte

- *Fonction de transfert des 3 actions*

Action proportionnelle : $U_P(p) = K_p \cdot \mathcal{E}(p)$

Action intégrale : $U_I(p) = \frac{1}{T_i p} \cdot \mathcal{E}(p)$

Action dérivée non filtrée : $U_D(p) = T_d p. \mathcal{E}(p)$ et filtrée $U_D(p) = \frac{T_d p}{1 + N^{-1} T_d p}. \mathcal{E}(p)$

- *Structures de base* (action dérivée non filtrée)

Type mixte : $K_{r,m} \left(1 + \frac{1}{T_{i,m}p} + T_{d,m}p \right)$

Type parallèle : $K_{r,p} + \frac{1}{T_{i,p}p} + T_{d,p}p$

Type série : $K_{r,s} \left(1 + \frac{1}{T_{i,s} p} \right) (1 + T_{d,s} p)$

- *Passage d'une structure à une autre*

La connaissance du type de structure est impérative. La synthèse du régulateur est réalisée à partir d'une structure donnée, le régleur doit ensuite adapter les valeurs des actions à régler à la structure technologique du régulateur.

	Vers mixte	Vers parallèle	Vers série
De mixte <i>Pour série</i> $T_{i,m} > 4.T_{d,m}$	---	$K_{r,p} = K_{r,m}$ $T_{i,p} = T_{i,m} / K_{r,m}$ $T_{d,p} = K_{r,m} T_{d,m}$	$K_{r,s} = 0.5 K_{r,m} (1 + \sqrt{1 - 4 T_{d,m} / T_{i,m}})$ $T_{i,s} = 2 T_{d,m} / (\sqrt{1 - 4 T_{d,m} / T_{i,m}} - 1)$ $T_{d,s} = 2 T_{d,m} / (1 + \sqrt{1 - 4 T_{d,m} / T_{i,m}})$
De parallèle <i>Pour série</i> $K_{r,p}^2 > 4.T_{d,p} / T_{i,p}$	$K_{r,m} = K_{r,p}$ $T_{i,m} = K_{r,p} T_{i,p}$ $T_{d,m} = T_{d,p} / K_{r,p}$	---	$K_{r,s} = 0.5 (K_{r,p} + \sqrt{K_{r,p}^2 - 4 T_{d,p} / T_{i,p}})$ $T_{i,s} = 2 T_{d,p} / (K_{r,p} - \sqrt{K_{r,p}^2 - 4 T_{d,p} / T_{i,p}})$ $T_{d,s} = 2 T_{d,p} / (K_{r,p} + \sqrt{K_{r,p}^2 - 4 T_{d,p} / T_{i,p}})$
De série	$K_{r,m} = K_{r,s} (T_{i,s} + T_{d,s}) / T_{i,s}$ $T_{i,m} = T_{i,s} + T_{d,s}$ $T_{d,m} = T_{i,s} T_{d,s} / (T_{i,s} + T_{d,s})$	$K_{r,p} = K_{r,s} (T_{i,s} + T_{d,s}) / T_{i,s}$ $T_{i,p} = T_{i,s} / K_{r,s}$ $T_{d,p} = K_{r,s} T_{d,s}$	---

5.3. Réglages du régulateur PID

De nombreuses solutions de réglages existent, certaines sont décrites sous la forme d'un mode opératoire dans les notices de régulateur. D'autres sont implantées sous la forme d'un programme d'autoréglage dans les régulateurs à structure interne numérique.

Nous décrivons ici, principalement trois approches, deux basées sur des considérations temporelles en s'appuyant sur une identification en boucle ouverte et en boucle fermée, la troisième méthode proposée est basée sur l'approche harmonique dans un contexte de marge de stabilité.

- *Méthode de Ziegler-Nichols 1* (modèle de Broïda)

Résultats de réglage pour un régulateur à structure mixte : $\frac{U(p)}{C(p) - M(p)} = K_r \left(1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p \right)$

Modèle du processus :

$$\text{stable } G_b(p) = \frac{K_b \cdot e^{-r_b \cdot p}}{1 + \tau_b \cdot p} \quad \text{ou instable } G_b(p) = \frac{R_b \cdot e^{-r_b \cdot p}}{p}$$

avec $R_b = \text{pente du procédé intégrateur} = \frac{K_b}{\tau_b}$ pour un procédé stable

Type de régulateur	K_r	T_i	T_d
P	$\frac{1}{r_b R_b}$	-----	-----
PI	$\frac{0.9}{r_b R_b}$	$3.33 r_b$	-----
PID	$\frac{1.2}{r_b R_b}$	$2 r_b$	$0.5 r_b$

Remarque : Ces réglages conduisent à des systèmes avec des réponses indicielles de consigne trop oscillantes (1^{er} dépassement de l'ordre de 30%). Nous proposons ci-après un tableau pour un modèle de Broïda stable qui dépend du facteur de réglabilité $r = \frac{\tau_b}{T_i}$.

Considérer ce facteur permet d'avoir une idée du choix du type de régulateur à utiliser et aussi de constater que plus le retard est important devant la constante de temps du procédé moins l'utilisation du PID est satisfaisante. Il faut alors mettre en place d'autres types de régulateur possibles avec les technologies numériques (PIR par exemple).

Réglabilité r	K_r	T_i	T_d
0 à 0.1	$\frac{5}{K_b}$	τ_b	0
0.1 à 0.2	$\frac{0.5}{K_b r}$	τ_b	0
0.2 à 0.5	$\frac{0.5(1+0.5r)}{K_b r}$	$(1+0.5r)\tau_b$	$\frac{0.5\tau_b r}{(1+0.5r)}$
> 0.5	PID non recommandé		

- *Méthode de Ziegler-Nichols 2* (approche boucle fermée)

Relevés du gain limite de stabilité $K_l = K_b K_{rs}$ et de la période de l'oscillation limite T_{osc} .

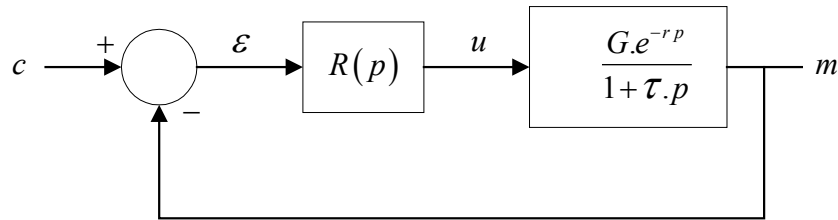
Type de régulateur	K_r	T_i	T_d
P	$0.5 K_{rs}$	-----	-----
PI	$0.45 K_{rs}$	$\frac{T_{osc}}{1.2}$	-----
PID	$0.6 K_{rs}$	$\frac{T_{osc}}{2}$	$\frac{T_{osc}}{8}$

Tableau basé sur une réponse oscillante avec une diminution pic à pic de 1/4 et modifié

Type de régulateur	K_r	T_i	T_d
original	$0.6 K_{rs}$	$\frac{T_{osc}}{2}$	$\frac{T_{osc}}{8}$
léger dépassement	$0.33 K_{rs}$	$\frac{T_{osc}}{2}$	$\frac{T_{osc}}{3}$
très faible dépassement	$0.2 K_{rs}$	$\frac{T_{osc}}{2}$	$\frac{T_{osc}}{3}$

- Exemple de détermination du réglage PID (approche harmonique avec marge de stabilité)

Schéma de boucle :



$$\text{Régulateur de type série : } R(p) = K_r \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right) \cdot (1 + T_d p)$$

Relation au niveau argument du transfert de boucle ouverte à la pulsation $\omega_{-\pi}$:

$$\arctan(T_i \omega_{-\pi}) + \arctan(T_d \omega_{-\pi}) - r \omega_{-\pi} - \frac{\pi}{2} - \arctan(\tau \omega_{-\pi}) = -\pi$$

Relation en module pour la pulsation $\omega_{-\pi}$ afin d'avoir une marge de gain de 6dB :

$$\frac{K_r G \sqrt{1 + T_i^2 \omega_{-\pi}^2} \sqrt{1 + T_d^2 \omega_{-\pi}^2}}{T_i \omega_{-\pi} \sqrt{1 + \tau^2 \omega_{-\pi}^2}} = \frac{1}{2}$$

Bilan 1 : Régulateur P soit $T_i \rightarrow \infty$ et $T_d = 0$

$$\text{Système à résoudre} \quad \begin{cases} -r \omega_{-\pi} - \arctan(\tau \omega_{-\pi}) = -\pi \\ \frac{K_r G}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega_{-\pi}^2}} = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{soit 2 équations et 2 inconnues } K_r, \omega_{-\pi}$$

Bilan 2 : Régulateur PI soit $T_d = 0$

$$\text{Système à résoudre} \quad \begin{cases} -r \omega_{-\pi} - \arctan(\tau \omega_{-\pi}) + \arctan(T_i \omega_{-\pi}) = -\frac{\pi}{2} \\ \frac{K_r G \sqrt{1 + T_i^2 \omega_{-\pi}^2}}{T_i \omega_{-\pi} \sqrt{1 + \tau^2 \omega_{-\pi}^2}} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

soit 2 équations et 3 inconnues $K_r, T_i, \omega_{-\pi}$

Bilan 3 : Régulateur PID

$$\text{Système à résoudre} \quad \begin{cases} -r \omega_{-\pi} - \arctan(\tau \omega_{-\pi}) + \arctan(T_i \omega_{-\pi}) + \arctan(T_d \omega_{-\pi}) = -\frac{\pi}{2} \\ \frac{K_r G \sqrt{1 + T_i^2 \omega_{-\pi}^2} \sqrt{1 + T_d^2 \omega_{-\pi}^2}}{T_i \omega_{-\pi} \sqrt{1 + \tau^2 \omega_{-\pi}^2}} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

soit 2 équations et 4 inconnues $K_r, T_i, T_d, \omega_{-\pi}$

Régulateur P : Pour résoudre l'équation transcendante en argument, nous pouvons faire l'hypothèse à vérifier en application que la pulsation $\omega_{-\pi}$ est « grande » ce qui entraîne un déphasage de la partie 1^{er} ordre du modèle de Broïda voisin de $\frac{\pi}{2}$.

$$\Rightarrow \omega_{-\pi} \approx \frac{\pi}{2r} \quad \text{et} \quad K_r \approx 0.785 \frac{\tau}{Gr}$$

Régulateur PI : Pour résoudre « facilement » les équations, nous pouvons faire une hypothèse de compensation zéro-pôle en introduisant l'équation supplémentaire $T_i = \tau$

$$\Rightarrow \omega_{-\pi} \approx \frac{\pi}{2r} ; \quad K_r \approx 0.785 \frac{\tau}{Gr} \quad \text{et} \quad T_i = \tau$$

Régulateur PID : Pour résoudre le système, nous devons introduire 2 équations supplémentaires, nous conservons la compensation zéro-pôle ($T_i = \tau$) et nous utilisons l'action dérivée pour avoir

un apport de phase de $\frac{\pi}{4}$ $\left(\arctan(T_d \omega_{-\pi}) = \frac{\pi}{4} \right)$

$$\Rightarrow \omega_{-\pi} \approx \frac{3\pi}{4r} ; \quad K_r \approx 0.833 \frac{\tau}{Gr} ; \quad T_i = \tau \quad \text{et} \quad T_d = 0.424r$$

Ces considérations terminent le cours AU3, les résultats étant donnés sous forme de fonctions de transfert notamment au niveau des correcteurs et régulateurs sont relatifs au domaine analogique. Ils vont être étendus à une structure numérique dans le module complémentaire AS21

Sommaire

1. Introduction à l'automatique	1
1.1. Définitions.....	2
1.2. Régulation et asservissement	2
1.3. Comportement humain et système bouclé.....	2
1.4. Historique, inventeurs et chercheurs	3
1.5. Quelques exemples de boucles.....	3
1.6. Schéma TI (norme Afnor E 04-203-1)	3
1.7. Modélisation	4
1.8. Outils mathématiques	4
1.9. Schéma-blocs ou schéma fonctionnel	4
2. Bases théoriques et performances d'une boucle.....	6
2.1. Manipulation et réduction des schémas-blocs	6
2.2. Transformation de Laplace.....	7
2.3. Passage EDLCC à fonction de transfert.....	7
2.4. Fonctions de transfert standards (aspect temporel)	7
2.5. Fonctions de transfert standards (aspect harmonique)	9
2.6. Qualités d'une boucle	12
3. Analyse d'une boucle : stabilité et précision.....	14
3.1. Conditions à satisfaire pour avoir une stabilité absolue puis relative d'une boucle.....	14
3.2. Lieux des racines	15
3.3. Critère algébrique de Routh	17
3.4. Critère géométrique de Nyquist simplifié ou du revers	18
3.6. Abaque de Black-Nichols.....	20
3.7. Précision	21
4. Synthèse d'une boucle : correcteurs.....	23

4.1.	<i>Quelques structures de correction</i>	23
4.2.	<i>Eléments pour réaliser un « bon » réglage</i>	23
4.3.	<i>Deux correcteurs classiques : avance et retard de phase</i>	24
5.	Régulation industrielle	26
5.1.	<i>Quelques bases d'identification</i>	26
5.2.	<i>Les régulateurs PID</i>	29
5.3.	<i>Réglages du régulateur PID</i>	31