Transformation de Laplace

On appelle transformée de Laplace du signal *s(t)*, le signal *S(p)* défini sur C à valeurs dans C tel que :

$$\mathcal{L}\left(s(t)\right) = S\left(p\right) = \int_{0^-}^{+\infty} s(t).e^{-pt}.dt$$

1 - <u>Linéarité</u>

$$\mathcal{L}\left(\lambda s_1(t) + \mu s_2(t)\right) = \lambda.S_1(p) + \mu.S_2(p) \text{ pour } \lambda,\mu \in C$$

Attention :

$$\mathcal{L}\left(s_1(t) \times s_2(t)\right) \neq \mathcal{L}\left(s_1(t)\right) \times \mathcal{L}\left(s_2(t)\right) \text{ et } \mathcal{L}^{-1}\left(S_1(p) \times S_2(p)\right) \neq \mathcal{L}^{-1}\left(S_1(p)\right) \times \mathcal{L}^{-1}\left(S_2(p)\right)$$

2 - <u>Théorème du retard</u>

$$\mathcal{L}\left(s(t-\tau)\right) = e^{-\tau p}.S(p) \text{ où } S(p) = \mathcal{L}\left(s(t)\right)$$

3 - <u>Transformée de Laplace d'un signal périodique</u>

Soit $s(t)$ un signal, périodique de période T, de motif $s_0(t)$:

$$\mathcal{L}\left(s(t)\right) = \frac{S_0(p)}{1 - e^{-Tp}} \text{ où } S_0(p) = \mathcal{L}\left(s_0(t)\right)$$

4 - <u>Transformée de la dérivée</u>

$$\mathcal{L}\left(\frac{ds(t)}{dt}\right) = p.S(p) - s(0^-) \text{ où } S(p) = \mathcal{L}\left(s(t)\right)$$

5 - <u>Transformée de la primitive</u>

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t s(x)dx\right) = \frac{S(p)}{p} \text{ où } S(p) = \mathcal{L}\left(s(t)\right)$$

d'où :

$$\int_0^{+\infty} s(x)dx = \lim_{p \to 0} S(p)$$

6 - <u>Transformée de</u> $s(at)$ <u>où</u> $a \in R_+^*$

$$\mathcal{L}\left(s(at)\right) = \frac{1}{a} S\left(\frac{p}{a}\right) \text{ où } S(p) = \mathcal{L}\left(s(t)\right)$$

7 - <u>Transformée de</u> $e^{-at}s(t)$

$$\mathcal{L}\left(e^{-at}s(t)\right) = S(p+a)$$

8 - <u>Transformée de</u> $t.s(t)$

$$\mathcal{L}(t.s(t)) = -\frac{d}{dp}S(p) \text{ où } S(p) = \mathcal{L}(s(t))$$

9 - <u>Transformée de</u> $\dfrac{s(t)}{t}$

$$\mathcal{L}\left(\frac{s(t)}{t}\right) = \int_p^{+\infty} S(u).du \text{ où } S(p) = \mathcal{L}(s(t))$$

10 - <u>Théorème de la valeur initiale</u>

$$s(0^+) = \lim_{p\to+\infty} (p.S(p))$$

11 - <u>Théorème de la valeur finale</u>

$$s(+\infty) = \lim_{p\to 0} (p.S(p))$$

(valable si $p.S(p)$ a tous ses pôles à parties réelles strictement négatives)

12 - <u>Convolution</u>

$$\mathcal{L}((s_1 * s_2)(t)) = S_1(p).S_2(p)$$

$$\mathcal{L}^{-1}((S_1 * S_2)(p)) = s_1(t).s_2(t)$$