Chapitre 7
Les fonctions rationnelles

I- Définition

On dit que F(x) est une fonction rationnelle si $F(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, P et Q étant deux polynômes.

- Si P et Q ont des coefficients tous réels, alors F∈ ℝ(x)
- Si P et Q comportent au moins un coefficient complexe non réel, alors F∈ ℂ(x).

Les racines de Q sont appelées pôles de F. On cherche à décomposer F(x) en éléments simples sur ℝ (ou sur ℂ) afin de simplifier l'application de la théorie du signal.

II- Partie entière d'une fonction rationnelle

1) Division euclidienne de deux polynômes

Soient A et B deux polynômes quelconques. La division euclidienne de A par B (aussi appelée division suivant les puissances décroissantes) donnera :

$$A = B * Q + R$$

Où Q et R sont deux polynômes tels que d°(R)<d°(B)

A polynôme dividende
B polynôme diviseur
Q polynôme quotient
R polynôme reste

a) Exemple 1

Effectuer la division euclidienne de $A(x) = x^4 + 5x^3 + 3x^2 + x - 1$ par $\mathrm{B}(x) = x^2 + 3x + 4$

$$\begin{array}{r|l}
x^4 + 5x^3 + 3x^2 + x - 1 & x^2 + 3x + 4 \\ \hline
-(x^4 + 3x^3 + 4x^2) & x^2 + 2x - 7 \\
= 3x^3 + x^2 + x - 1 & \\
-(2x^3 + 6x^2 + 8x) & \\
= \; - 7x^2 - 7x - 1 & \\
-(-7x^2 - 21x - 28 & \\
= 14x + 27 &
\end{array}$$

$R(x) = 14x + 27$ vérifie d°(R)<d°(B)=2.
Ici $Q(x) = x^2 + 2x - 7$
Donc $x^4 + 5x^3 + 3x^2 + x - 1 = (x^2 + 3x + 4)(x^2 + 2x - 7) + 14x + 27$

b) Exemple 2

Effectuer la division euclidienne de $A(x) = x^2 + 3x + 1$ par $B(x) = x^3 - 5x^2 + x - 5$

$x^2 + 3x + 1$	$x^3 - 5x^2 + x - 5$
	$\cancel{\frac{1}{x}}$

$x^2 + 3x + 1 = (x^3 - 5x^2 + x - 5) * 0 + (x^2 + 3x + 1)$. On a ce cas de figure lorsque d°(B)>D°(A) → Q=0 et R=A.

2) Notion de partie entière

Soit la fonction rationnelle $F(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$

La division euclidienne de A(x) par B(x) donne

$$A(x) = B(x) * Q(x) + R(x)$$

Avec d°(R)<d°(B)

Donc

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{B(x) * Q(x) + R(x)}{B(x)} = \frac{B(x) * Q(x)}{B(x)} + \frac{R(x)}{B(x)} = Q(x) * \frac{R(x)}{B(x)}$$

On notera

$$F(x) = \frac{A(x)}{B(x)} = E(x) + \frac{R(x)}{B(x)} = E(x) + F_1(x)$$

C'est une première décomposition de la fonction F(x).
Par exemple :

$$F(x) = \frac{x^4 + 5x^3 + 3x^2 + x - 1}{x^2 + 3x + 4} = x^2 + 2x - 7 + \frac{14x + 27}{x^2 + 3x + 4}$$

$$x^2 + 2x - 7 = E(x)$$

III- Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$

Soit $F(x) = \frac{A(x)}{B(x)} = E(x) + F_1(x)$

$F_1(x) = \frac{R(x)}{B(x)}$ avec d°(R)<d°(B)

1) Cas où $B(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_p)$

Ici, x_1, x_2, x_p sont réels

a. Forme de la décomposition sur $\mathbb{R}$

$F_1(x) = \frac{R(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_p)} = \frac{A(1)}{(x-x_1)} + \frac{A(2)}{(x-x_2)} + \dots + \frac{A(p)}{(x-x_p)}$

Avec $A_1, A_2, \dots, A_p$ coefficients réels

b. Exemple :

Décomposer la fraction rationnelle $G(x) = \frac{x^2+3}{(x-1)(x-2)(x+5)}$ sur $\mathbb{R}$

$$G(x) = \frac{U(x)}{D(x)}$$

1. Partie entière : E(x)=0 car d°(U)<d°(D)
2. Forme de décomposition sur $\mathbb{R}$:

$$G(x) = \frac{x^2+3}{(x-1)(x-2)(x+5)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x+5)}$$

Avec A, B, C ∈ $\mathbb{R}$

3. Calcul des coefficients

- Calculons A

On multiplie les deux membres de (1) par (x-1). On obtient :

$$\frac{x^2+3}{(x-2)(x+5)} = A + \frac{B(x-1)}{(x-2)} + \frac{C(x-1)}{(x+5)}$$

On prend alors x=1 : $\frac{4}{-1*6} = A + 0*0$ Donc A=$-\frac{2}{3}$

- Calculons B

On multiplie par (x-2) :

$$\frac{x^2+3}{(x-1)(x+5)} = \frac{A(x-2)}{(x-1)} + B + \frac{C(x-2)}{(x+5)}$$

On prend x=2 : $\frac{7}{7} = 0*B + 0 \; Donc \; B = 1$

- Calculons C

En utilisant la même méthode, on a :

$$\frac{x^2+3}{(x-1)(x-2)} = \frac{A(x+5)}{(x-1)} + \frac{B(x+5)}{(x-2)} + C$$

$$C = \frac{28}{-6*(-7)} = \frac{2}{3}$$

4. Synthèse dans $\mathbb{R}$

$$G(x)=\frac{x^2+3}{(x-1)(x-2)(x+5)}=-\frac{2}{3(x-1)}+\frac{1}{(x-2)}+\frac{2}{3(x+5)}$$

2) Cas où $B(x)=(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_p)(x-x_{01})^2(x-x_{02})^3$

$$F_1(x)=\frac{R(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_p)(x-x_{01})^2(x-x_{02})^3}$$
$$=\frac{A(1)}{(x-x_1)}+\frac{A(2)}{(x-x_2)}+\dots+\frac{A(p)}{(x-x_p)}+\frac{B_1}{(x-x_{01})}+\frac{B_2}{(x-x_{01})^2}$$
$$+\frac{C_1}{(x-x_{02})}+\frac{C_2}{(x-x_{02})^2}+\frac{C_3}{(x-x_{02})^3}$$

$$x_1;\ x_2;\ x_p\ sont\ des\ pôles\ d'ordre 1$$
$$x_{01}\ est\ un\ pôle\ d'ordre\ 2$$
$$x_{02}\ est\ un\ pôle\ d'ordre\ 3$$

Exemple : Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fonction rationnelle :

$$H(x)=\frac{x}{(x-1)(x-2)^2(x+1)^3}$$

1. Partie entière E(x)= 0 car d°(U)<d°(D)
2. Forme de la décomposition sur $\mathbb{R}$.

$$x_1=1: pôle\ réel\ d'ordre 1: un\ élément\ simple$$
$$x_2=2: pôle\ réel\ d'ordre\ 2: deux\ élément\ simples$$
$$x_3=3: pôle\ réel\ d'ordre\ 3: trois\ élément\ simples$$

$$A(x)=\frac{A_1}{(x-1)}+\frac{B_1}{(x-2)}+\frac{B_2}{(x-2)^2}+\frac{C_1}{(x+1)}+\frac{C_2}{(x+1)^2}+\frac{C_3}{(x+1)^3}$$

Et ces 6 coefficients sont réels.

3. Calcul des coefficients

Calculons A : On multiplie par x-1 et x← 1

$$\frac{1}{(1-2)^2(1+1)^3}=A+0+0+0+0+0\ Donc\ A=\frac{1}{8}$$

Calculons B_2 : On multiplie par $(x-2)^2$ et x←2

$$\frac{2}{6*3^3} = 0 + 0 + B_2 + 0 + 0 + 0 \ Donc \ B_2 = \frac{2}{27}$$

Calculons C_3

$$\frac{-1}{(-2)(-3)^2} = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + C_3 \ Donc \ C_3 = \frac{1}{18}$$

Calcul de $B_1; C_1 \ et \ C_2$

On multiplie les membres par x. On ne garde que les termes de plus haut degré. On simplifie :

$$\frac{x^2}{x^6} = \frac{1}{x^4} = A + B_1 + \frac{B_2}{x} + C_1 + \frac{C_2}{x} + \frac{C_3}{x^2}$$

Or x→+∞ → A+B_1+C_1=0 soit $B_1 + C_1 = \frac{-1}{8}$

On fait x=0

$$0 = \frac{A}{-1} + \frac{B_1}{-2} + \frac{B_2}{4} + \frac{C_1}{1} + \frac{C_2}{1^2} + \frac{C_3}{1^3}$$

Soit

$$\frac{1}{8} - \frac{B_2}{4} - C_3 = -\frac{B_1}{2} + C_1 + C_2$$

$$\frac{1}{8} - \frac{2}{4*27} - \frac{1}{18} = -\frac{B_1}{2} + C_1 + C_2$$

$$\frac{1}{2^3} - \frac{1}{2*3^3} - \frac{1}{2*3^2} = -\frac{B_1}{2} + C_1 + C_2$$

$$\frac{3^2 - 2^2 - 2*3}{2^3*3^3} = -\frac{B_1}{2} + C_1 + C_2$$

$$-\frac{B_1}{2} + C_1 + C_2 = \frac{17}{216}$$

On fait x=-2

$$\frac{-2}{(-3)*(-4)^2*(-1)^3} = \frac{A}{-3} + \frac{B_1}{-4} + \frac{B_2}{(-4)^2} + \frac{C_1}{-1} + \frac{C_2}{(-1)^2} + \frac{C_3}{(-1)^3}$$

Pour le calcul de C_1; C_2; C_3

Pour le calcul de C_1; C_2; C_3

« division selon les puissances croissantes des polynômes »

On pose H=x+1 ou x=H-1

$$H(x) = \frac{h-1}{(h-2)(h-3)^2 * h^3} = \frac{-1+h}{(-18+21h-8h^2+h^3)h^3}$$

$$\begin{array}{l|l}
-1+h & -18+21h-8h^2+h^3 \\
\hline
-(-1+\frac{7}{6}h-\frac{4}{9}h^2+\frac{1}{18}h^3) & \frac{1}{18}+\frac{1}{18*6}h-\frac{1}{18*4}h^2 \\
=-\frac{1}{6}h+\frac{4}{9}h^2-\frac{1}{18}h^3 & \\
-(-\frac{1}{6}h+\frac{7}{36}h^2-\frac{2}{27}h^3+\frac{1}{18*6}h^4 & \\
=\frac{1}{4}h^2+\frac{5}{18*3}h^3-\frac{1}{18*6}h^4 & \\
-(\frac{1}{4}h^2-\frac{7}{24}h^3+\frac{1}{9}h^4-\frac{1}{18*4}h^5 & \\
=\frac{167}{504}h^3-\frac{13}{108}h^4+\frac{1}{72}h^5 &
\end{array}$$

On arrête la division à ce stade et on l'écrit sur une seule ligne :

Dividende =Diviseur x quotient + reste

$$-1+h = (-18+21h-8h^2+h^3)\left(\frac{1}{18}+\frac{1}{18*6}h-\frac{1}{18*4}h^2\right)+\frac{167}{504}h^3 - \frac{13}{108}h^4+\frac{1}{72}h^5$$

$$\frac{-1+h}{-18+21h-8h^2+h^3} = \frac{1}{18}+\frac{1}{108}h-\frac{1}{72}h^2+\frac{\frac{167}{504}h^3-\frac{13}{108}h^4+\frac{1}{72}h^5}{-18+21h-8h^2+h^3}$$

$$H(x) = \frac{-1+h}{-18+21h-8h^2+h^3}$$

$$= \frac{1}{18h^3}+\frac{1}{108h^2}-\frac{1}{72h}+\frac{\frac{167}{504}-\frac{13}{108}h+\frac{1}{72}h^2}{-18+21h-8h^2+h^3}$$

$$H(x) = \frac{x}{(x-1)(x-2)^2(x+1)^3}$$

$$= \frac{1}{18(x+1)^3}+\frac{1}{18(x+1)^2}-\frac{1}{72(x+1)}+\frac{\alpha(x)}{(x-1)(x-2)^2}$$

On a donc obtenu $C_1 = \frac{-1}{72}$; $C_2 = \frac{1}{108}$; $C_3 = \frac{1}{18}$

Calcul de B_1

On a vu que $A+B_1+C_1=0$ Donc $B_1 = -A - C_1 = -\frac{1}{8} + \frac{1}{72} = -\frac{1}{9}$

Synthèse sur $\mathbb{R}$

$$H(x) = \frac{x}{(x-1)(x-2)^2(x+1)^3}$$
$$= \frac{1}{8(x-1)} - \frac{1}{9(x-2)} + \frac{1}{27(x-2)^2} - \frac{1}{72(x+1)} + \frac{1}{108(x+1)^2} + \frac{1}{18(x+1)^3}$$

Cette méthode est intéressante lorsque la fonction admet un pôle d'ordre supérieur ou égal à 3.

3) Cas où $B(x) = (x-x_0)(x-x_1)^2(x^2+px+q)$ avec $p^2 - 4q < 0$

a- Principe

$$F(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$$
$$= \underbrace{\frac{A_1}{(x-x_0)} + \frac{B_1}{(x-x_1)} + \frac{B_2}{(x-x_1)^2}}_{\text{Eléments simples de 1ère Espèce}} + \underbrace{\frac{C_1x+D_1}{x^2+px+q} + \cdots + \frac{C_rx+D_r}{(x^2+px+q)^r}}_{\text{Eléments simples de deuxième espèce}}$$

b- Exemple

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fonction :

$$K(x) = \frac{x}{(x-1)(x^2+1)(x^2+x+1)}$$

La partie entière E(x)=0 car d°(N)<d°(D).

Forme de la décomposition sur $\mathbb{R}$:

$$x_0 = 1 \; pôle\ réel\ d'ordre\ 1 \rightarrow élément\ simple\ de\ 1ère\ espèce$$
$$x^2+1 \; se\ factorise\ pas\ dans\ \mathbb{R} \rightarrow 1\ élément\ simple\ de\ 2ème\ espèce$$
$$x^2+x+1 \; ne\ se\ factorise\ pas\ dans\ \mathbb{R}$$
$$\rightarrow 1\ élément\ simple\ de\ 2ème\ espèce$$

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Fx+G}{x^2+x+1} \quad (4)$$

Avec A, B, C, F, G éléments de $\mathbb{R}$

Calcul des coefficients

- **Coefficient A :** on multiplie par (x-1) et x=1

$$\frac{1}{(1^2+1)(1^2+1+1)} = A + 0 + 0 \quad Donc\ A = \frac{1}{6}$$

- **Calculons B et C en plongeant dans ℂ**

On multiplie les membres de (4) par x^2+1 et x=i

$$\frac{i}{(i-1)(i^2+i+1)} = 0 + Bi + C + 0 \quad Donc\ Bi + C = \frac{1}{i-1}$$

$$= \frac{-1-i}{(-1+i)(-1-i)} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

- **Calculons F**

On multiplie les membres de (4) par x, on ne garde pas les termes de plus haut degré, et x=+∞.

$$\frac{x^2}{x^5} = \frac{Ax}{x} + \frac{Bx}{x^2} + \frac{Fx^2}{x^2} \quad \rightarrow \quad \frac{A}{x^3} = A + B + F$$

$$0 = A + B + F <=> F = A - B = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

- **Calculons G**

On prend x=0 dans (4)

$$0 = \frac{A}{-1} + \frac{C}{1} + \frac{G}{1} \rightarrow G = A - C = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

IV- Décomposition en éléments simples sur ℂ

Soit la fonction rationnelle $F(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$ avec des coefficients dans A(x) et B(x) qui sont réels ou complexes.
Imaginons que d°(A)<d°(B) ce qui donne une partie entières E(x)=0.
Si B(x) est de degré n, d'après le théorème d'Alembert, il admet n racines distinctes ou confondues dans ℂ et
$B(x) = (x - x_1) * \dots * (x - x_p)(x - x_{01})^{\alpha}(x - x_{02})^{\beta}$

Par exemple :

$$F(x)=\frac{A(x)}{B(x)}$$
$$=\frac{A_1}{x-x_1}+\cdots+\frac{A_p}{(x-x_p)}+\frac{B_1}{x-x_{01}}+\cdots+\frac{B_\alpha}{(x-x_{01})^\alpha}+\frac{C_1}{x-x_{02}}$$
$$+\cdots+\frac{C_\beta}{(x-x_{02})^\beta}$$

Avec $A_1 A_p B_1 B_\alpha C_1 C_\beta \ \in \mathbb{C}$

Exemple : Décomposer sur $\mathbb{C}$:

$$L(x)=\frac{x}{(x-1)(x^2+4)(x+i)^2}=\frac{N(x)}{D(x)}$$

Partie entière E(x)=0 car d°(N)<d°(D).

Forme de la décomposition :

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+4)(x+i)^2}=\frac{x}{(x-1)(x+2i)(x-2i)(x+i)^2}$$
$$=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2i}+\frac{C}{x-2i}+\frac{F_1}{x+i}+\frac{F_2}{(x+i)^2}$$

Il n'y a que des éléments simples de 1ère espèce.

Calcul des coefficients :

- **Calcul de A :**

On multiplie par (x-1) et x=1 :

$$\frac{1}{5(1+i)^2}=A+0+0+0+0\to A=-\frac{i}{10}$$

- **Calcul de F_2 :**

On multiplie par $(x+i)^2$ et $x=-i$

$$\frac{-i}{(-i-1)^3}=0+0+0+0+F_2\to \quad F_2=\frac{-i}{-3-3i}=\frac{-i(-3+3i)}{9+9}=\frac{3+3i}{18}$$

- **Calcul de B :** On multiplie par (x+2i) et x=2i

$$\frac{-2i}{(-2i-1)(-4i)(-i)^2}=0+B+0+0+0\to \quad B=\frac{1}{2(-1)(-1-2i)}$$
$$=\frac{1}{2(1+2i)}=\frac{1-2i}{2*5}=\frac{1-2i}{10}$$

- **Calcul de C :** On multiplie par $x - 2i$ et $x = 2i$

$$\frac{2i}{(2i-1)(4i)(3i)} = 0 + 0 + C + 0 + 0$$

$$C = \frac{2i}{-36i(2i-1)} = \frac{-1}{18(2i-1)} = \frac{-1(-1-2i)}{18(-1+2i)(2i-1)} = \frac{1+2i}{90}$$

- **Calcul de F_1 :** On multiplie par x et on ne garde que les termes de plus haut degré

$$\frac{x^3}{x^5} = \frac{A_x}{x} + \frac{B_x}{x} + \frac{C_x}{x} + \frac{F_{1x}}{x} + \frac{F_{2x}}{x^2} = \frac{1}{x^3}$$

$$= 1 + B + C + F_{1x} + \frac{F_{2x}}{x} \Leftrightarrow A + B + C + F_{1x} = 0$$

$$Donc\ F_{1x} = -A - B - C = \frac{i}{10} - \frac{1-2i}{10} - \frac{1+2i}{90} = \frac{-2+5i}{18}$$

- **Synthèse sur $\mathbb{C}$:**

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+4)(x+i)^2} = \frac{-i}{10(x-1)} + \frac{1-2i}{10(x+2i)} + \frac{1+2i}{90(x-2i)} - \frac{2-5i}{18(x+i)} + \frac{1+i}{6(x+i)^2}$$

Chapitre 8
Calcul d'Intégrales

Introduction

Le terme « intégrale » désigne en mathématiques plusieurs concepts assez différents :

- Intégrale indéfinie notée $\int_I F(x)dx$ désigne l'ensemble des primitives d'une fonction F sur I∈ ℝ. Si f(x) est une primitive de F(x) sur I, c'est-à-dire $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$ alors $\int_I F(x)dx = F(x) + k, \; k \in \mathbb{R}$

- Intégrale définie notée $\int_a^b F(x)dx$ avec F bornée et intégrable sur [a ;b], représente l'aire algébrique de la partie du plan compris entre le graph C_f et les droites d'équation $y = 0$; $x = a$; $et\ x = b$

Si F est une primitive quelconque de F sur [a ;b], alors

$$\int_a^b F(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

- L'intégrale fonction de l'une de ses bornes notée $h(x) = \int_a^x f(t)dt\ ou\ k(x) = \int_x^b f(t)dt\ avec\ x \in [a; b]$

- L'Intégrale généralisée : f n'est pas bornée au voisinage de a, b ou de c avec c∈ $[a; b]$.

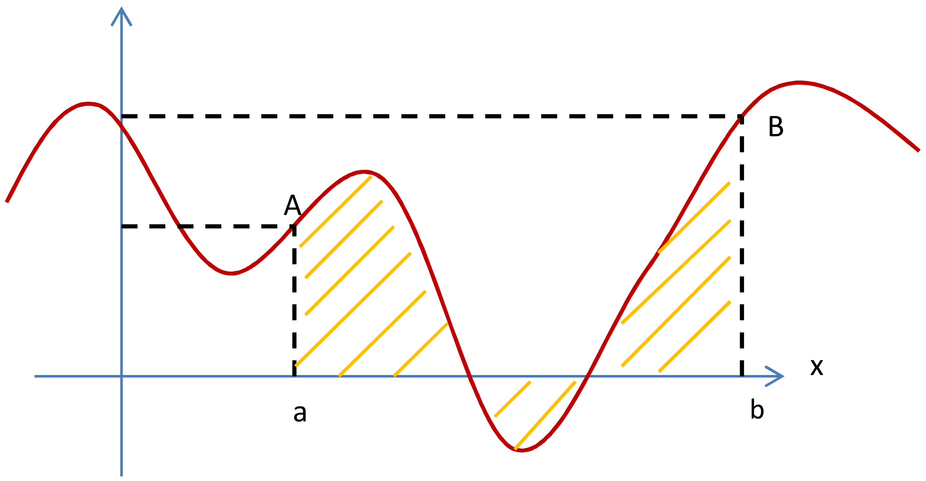
I- Intégrale définie :

1) Définition par les sommes de Darboux

Cf TD Mathématiques S2

2) Propriétés de l'Intégrale définie :

a) Interprétation géométrique



$\int_a^b F(x)dx$ est la valeur positive ou négative de l'aire A limitée par l'axe AB de Cp, les droites verticales (x=a et x=b) et l'axe (Ox). Les aires au-dessus de Ox sont positives. Les aires au-dessous de Ox sont négatives. La somme de ces aires donne un résultat positif ou négatif.

b) Relation de Chasles

Si O, A et B sont trois points du plan, on a $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$

De même, si C ∈]a; b[alors $\int_a^c F(x)dx + \int_c^b F(x)dx = \int_a^b F(x)dx$

c) Linéarité

Si F et g sont deux fonctions bornées et intégrables sur [a ;b], si α ∈ ℝ

$$\int_a^b [F(x) + g(x)]dx = \int_a^b F(x)dx * \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b [\alpha F(x)]dx = \alpha \int_a^b F(x)dx$$

d) Signe de $\int_a^b F(x)dx$

Si $\forall\, x \in [a; b],\ F(x) \geq 0$, alors $\int_a^b F(x)dx \geq 0$

En fait, si f est continue sur [a ;b], non identiquement nulle sur [a ;b], et que $\forall x \in [a; b], f(x) \geq 0, alors\ \int_a^b F(x)dx > 0$

Conséquences :

- Si F et g sont des fonctions telles que $\forall x \in [a\,; b], F(x) \leq g(x)$
$$alors \int_a^b F(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$
- $$\left|\int_a^b F(x)dx\right| \leq \int_a^b |F(x)|dx$$

3) Valeur moyenne de f sur [a ;b]

F étant bornée et intégrable, on appelle valeur moyenne de F sur [a ;b] le nombre

$$\rho = \frac{1}{b-a}\int_a^b F(x)dx$$

Cf TD sur les intégrales

$$\mu = \frac{F(b) - F(a)}{2}$$

4) Calcul approché de $\int_a^b F(x)dx$

Si on ne connait pas une primitive F de f, comment faire ? Il existe des méthodes numériques pour obtenir une valeur approchée à la première valeur :

- Méthode des rectangles peu efficace
- Méthode du trapèze plus efficace
- Méthode des paraboles (ou de Simpson).

II- Technique de recherche des primitives

1) Tableau des primitives usuelles

Fonction F	Primitive f
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + k$
$\sqrt{x} = x^{1/2}$	$\frac{2}{3}x^{3/2} + k$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert) + k$
cos(x)	sin(x)+k
sin(x)	-cos(x)+k
$\cos \omega x + \varphi$	$\frac{1}{\omega}\sin(\omega x + \varphi) + k$
$\sin \omega x + \varphi$	$-\frac{1}{\omega}\cos(\omega x + \varphi) + k$
$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tan^2 x$	$\tan x + k$
$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$	$-ln\lvert\cos x\rvert + k$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\tan^{-1} x + k \quad x \in [-1;1]$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sin^{-1} x + k$
e^x	e^x
e^{ax}	$\frac{1}{a}e^{ax} + k$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{2}ln\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert + k$ $si\ x \in [-1;1], cela\ vaut\ \tan^{-1} x + k$

2) Linéarité

Si f et g son deux fonctions intégrables sur [a ;b], λ et p deux réels quelconques.

$$\int_a^b [\lambda f(x) + pg(x)]dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + p\int_a^b g(x)dx$$

De même pour la recherche des primitives.

<u>Exemple :</u> On veut calculer $I = \int_a^{\pi/3} sin^2(x)dx$.

Il convient d'abord de linéariser $sin^2(x)$ pour ensuite utiliser la linéarité de la primitive.

On sait que $\cos(2x) = 1 - 2sin^2(x)$ Donc on peut déduire que :

$$sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$$

D'où

$$I = \int_a^{\pi/3} [\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)]dx = \frac{1}{2}\int_a^{\pi/3} dx - \frac{1}{2}\int_a^{\pi/3} \cos(2x)$$

$$= \frac{1}{2}[x]_0^{\pi/3} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3} - 0\right) - \frac{1}{4}[\sin(2x)]_0^{\pi/3}$$

$$= \frac{\pi}{6} - \frac{1}{4}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \frac{1}{4}\sin(0) = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{4} * \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}$$

3) Changement de variable

On peut définir un changement explicite (x=φ(t)) ou implicite (ou cas par cas).

Posons $x = \varphi(t)$, φ étant une fonction continue et strictement monotone (donc φ est bijective et φ^{-1} existe) sur $[t_1; t_2]$,

Avec

$$t_1 = \varphi^{-1}(a) \;\; ou \; t_1 = \varphi^{-1}(b)$$
$$t_2 = \varphi^{-1}(b) \; ou \; t_2 = \varphi^{-1}(a)$$

De x =φ(t) on obtient $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$ soit $dx = \varphi'(t)dt$.

Alors

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} F(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt$$

La deuxième intégrale semble plus compliquée que la première mais tout dépend des exemples !

Ancienne variable d'intégration : x
Nouvelle variable d'intégration : t

Les bornes changent : [a ;b] → $[t_1; t_2]$

Exemple : On veut calculer $J = \int_0^{1/2} \sqrt{1 - x^2} dx$

Au moyen d'un changement de variable explicite, $x = \varphi(t)$,

- D'abord :
  $1 - x^2 > 0$ sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ donc $\sqrt{1 - x^2}$ existe et J est une intégrale définie
- On cherche φ(t) bijective sur $[t_1; t_2]$.
  $\varphi(t) = \sin(t)\ sur\ \left[0\ ;\ \frac{\pi}{6}\right]$. En effet, $\sin(0) = 0\ et \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$
  sin(t) est continue et strictement croissante de $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{6}\right]\ dans\ \left[0\ ;\ \frac{1}{2}\right]$
  Donc bijective.

On pose $x = \sin(t)$, alors $dx = \cos(t)\, dt$

$$J = \int_0^{1/2} \sqrt{1 - x^2} dx = \int_0^{\pi/6} \sqrt{1 - sin^2(t)} * \cos(t)\, dt$$

Or

$$cos^2(t) + sin^2(t) = 1\ donc\ 1 - sin^2(t) = cos^2(t)$$

D'où

$$J = \int_0^{\pi/6} \sqrt{cos^2(t)} * \cos(t)\, dt = \int_0^{\pi/6} |\cos(t)| * \cos(t)\, dt$$

Or pour $t \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{6}\right]$, cos(t)>0 donc on peut en déduire : $|\cos(t)| = \cos(t)$

Donc

$$J = \int_0^{\pi/6} cos^2(t) dt$$

Le changement de variable nous a permis d'enlever la racine. Il faut alors linéariser $\cos^2$(t). On sait que cos(2t)=2$\cos^2$(t)-1 donc :

$$cos^2(t) = \frac{1 + \cos(2t)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t)$$

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} dt + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} \cos(2t) dt = \frac{1}{2}[t]_0^{\pi/6} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{\pi/6}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{6} - 0\right] + \frac{1}{4}\left[\sin\left(\frac{2\pi}{6}\right) - \sin(0)\right] = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{4} * \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}$$

Résumons les étapes du calcul de J :

$$J = \int_0^{1/2} \sqrt{1-x^2}dx \; = \; \int_0^{\pi/6} \sqrt{1-sin^2(t)} * \cos(t)\,dt$$

$$= \int_0^{\pi/6} \sqrt{cos^2(t)} * \cos(t)\,dt \; = \int_0^{\pi/6} |\cos(t)| * \cos(t)\,dt$$

$$= \int_0^{\pi/6} cos^2(t)dt \; = \int_0^{\pi/6} \frac{1+\cos(2t)}{2}dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} dt + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} \cos(2t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}[t]_0^{\pi/6} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{\pi/6} \; = \; \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}$$

4) Intégration par parties

a. Principe

Si $u(x)$ et $v(x)$ sont deux fonctions intégrables sur [a ;b] et dérivables, on a :

$$[u(x) * v(x)]' = u'(x) * v(x) + u(x) * v'(x)$$

Donc

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx \; = \int_a^b \big([u(x) * v(x)]' - u'(x)v(x)\big)dx$$

$$\Leftrightarrow \int_a^b uv' \; = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$$

b. Exemple

Calculer $K = \int_0^1 \arctan(x)\,dx$

On pose

$$u(x) = \arctan(x) \quad \rightarrow \quad u'(x) = \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$v'^{(x)} = dx \quad \rightarrow \quad v(x) = x$$

$$K = \int_0^1 uv' \; = \; [x * \arctan(x)]_0^1 - \int_0^1 x * \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= [1 * \arctan(1) - 0 * \arctan(0)] - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}$$

$$K \; = \; \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{w'(x)}{w(x)}dx$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}[\ln(|w(x)|)]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}[\ln(x^2+1)]_0^1$$
$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}[\ln|2| - \ln|1|]$$

Finalement, on a :

$$K = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$$

c. Exemple de deux intégrations par parties successives

Calculer $L = \int_0^{\pi/2} e^{-x} * \sin x \, dx$

Intégration par parties n°1 :

On pose :

$$u(x) = \sin(x) \rightarrow \quad u'(x) = \cos(x)\,dx$$
$$et\ v'(x) = e^{-x} \rightarrow \quad v(x) = -e^{-x}$$

$$L = \int_0^{\pi/2} uv' = [uv]_0^{\pi/2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'v = [-e^{-x} * \sin x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} -e^{-x}\cos x\,dx$$
$$= -[e^{-x} * \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\pi/2} e^{-x}\cos x\,dx$$
$$= -\left[e^{-\frac{\pi}{2}} * \sin\frac{\pi}{2} - e^0 \sin 0\right] + \ L_1$$
$$= -e^{-\frac{\pi}{2}} + L_1$$

Intégration par parties n°2 :

On fait une intégration par parties pour $L_1 = \int_0^{\pi/2} e^{-x}\cos x\,dx$

On pose :

$$u(x) = \cos x \ \rightarrow \quad u'(x) = -\sin x$$
$$et\ v'(x) = e^{-x} \rightarrow \quad v(x) = -e^{-x}$$

$$L_1 = [-e^{-x} * \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\pi/2} (-e^{-x})(-\sin x\,dx)$$
$$= \ -[e^{-x} * \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\pi/2} e^{-x}\sin x\,dx$$
$$= \ -[e^{-x} * \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} - L = 1 - L$$

Synthèse des deux intégrations par parties :

$$L = -e^{-\frac{\pi}{2}} + L_1 \quad = \quad -e^{-\frac{\pi}{2}} + 1 - L$$

Donc

$$2L = 1 - e^{-\frac{\pi}{2}}$$

D'où

$$L = \frac{1 - e^{-\frac{\pi}{2}}}{2}$$

5) Intégration d'une fonction rationnelle

On veut calculer $\int_a^b \frac{N(x)}{D(x)} dx$

Il faut d'abord décomposer $\frac{N(x)}{D(x)}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$. Imaginons que

$$\frac{N(x)}{D(x)} = E(x) + \frac{A_1}{(x - x_0)} + \frac{A_2}{(x - x_0)^2} + \frac{A_3}{(x - x_0)^3} + \frac{Bx + C}{x^2 + px + q}$$

Avec $x^2 + px + q$ est un polynôme qui ne se factorise pas dans $\mathbb{R}$.

Remarque : L'intégration de $\frac{M_x + N}{x^2 + px + q}$ n'est pas au programme et ne sera pas étudié.

$$.\int_a^b E(x)dx = [polynôme]_a^b$$

$$.\int_a^b \frac{A_1}{(x - x_0)} dx = A_1 * [\ln|x - x_0|]_a^b \;\; car\; [\ln|x - x_0|]' = \frac{1}{x - x_0}$$

$$.\int_a^b \frac{A_2}{(x - x_0)^2} dx = A_2 \int_a^b (x - x_0)^{-2}\, dx = A_2 \left[\frac{(x - x_0)^{-2+1}}{-2 + 1}\right]_a^b$$

$$= A_2 \left[\frac{-1}{x - x_0}\right]_a^b$$

$$.\int_a^b \frac{A_3}{(x - x_0)^3} dx = A_3 \int_a^b (x - x_0)^{-3}\, dx = A_3 \left[\frac{(x - x_0)^{-3+1}}{-3 + 1}\right]_a^b$$

$$= A_3 \left[\frac{-1}{2(x - x_0)^2}\right]_a^b$$

$$\int_a^b \frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx = B\int_a^b \frac{x+\frac{C}{B}}{x^2+px+q}dx = \frac{B}{2}\int_a^b \frac{2x+\frac{2C}{B}}{x^2+px+q}dx$$

$$= M\int_a^b \frac{2x+p+\frac{2C}{B}-p}{x^2+px+q}dx = M\int_a^b \frac{2x+p}{x^2+px+q} + \frac{\overbrace{\frac{2C}{B}-p}^{T}}{x^2+px+q}$$

$$= M\int_a^b \frac{2x+p}{x^2+px+q} + \overbrace{MT}^{S}\int_a^b \frac{dx}{x^2+px+q}$$

$$\int_a^b \frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx = M[\ln|x^2+px+q|]_a^b + S\int_a^b \frac{dx}{\left(x+\frac{P}{2}\right)^2+q-\frac{P^2}{4}}$$

$$= M[\ln|x^2+px+q|]_a^b + S\int_a^b \frac{dx}{\left(x+\frac{P}{2}\right)^2+\overbrace{\frac{2q-P^2}{4}}^{\alpha}}$$

α est supérieur à 0 car $p^2 - 49 < 0$ $\;donc\; 49 - p^2 > 0.$

Donc

$$\int_a^b \frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx = M[\ln|x^2+px+q|]_a^b + S\int_a^b \frac{dx}{\alpha+\left(x+\frac{P}{2}\right)^2}$$

$$= M[\ln|x^2+px+q|]_a^b + \frac{S}{\alpha}\int_a^b \frac{dx}{1+\frac{1}{\alpha}\left(x+\frac{P}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{?}{} + \frac{S}{\alpha}\int_a^b \frac{dx}{1+\left(\frac{2x+P}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2}$$

$$= \frac{?}{} + \frac{S}{\alpha}\left[\sqrt{\alpha}\arctan\frac{2x+P}{2\sqrt{\alpha}}\right]_a^b$$

$$= M[\ln|x^2+px+q|]_a^b + \frac{S}{\sqrt{\alpha}}\left[\arctan\left(\frac{2x+P}{2\sqrt{\alpha}}\right)\right]_a^b$$

Chapitre 9
Equations différentielles

I- Définition

On appelle équation différentielle du 1er ordre (ED1) toute relation du type $R(x, y, y') = 0$ (1) entre la variable réelle x, la fonction numérique inconnue $y(x)$ et sa dérivée $y'(x)$.
On dit que $\varphi(x)$ est une solution particulière de (1) sur $I \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\forall x \in I,\ R\big(x, \varphi(x), \varphi'(x)\big) = 0$. Intégrer ou résoudre (1), c'est déterminer toutes les fonctions de x qui vérifient (1).

II- Equations différentielles du 1er ordre à variables séparables

1) Description

Une ED1 à variables séparables (AVS) est une ED1 que l'on peut transformer sous la forme $y' = \frac{f(x)}{g(y)}$ avec $y' = \frac{dy}{dx}$, on obtiendra $\frac{dy}{dx} = \frac{F(x)}{G(y)}$
Ou encore : (2)

$$g(y)dy = F(x)dx$$

On dit qu'on a séparé x et y (considérés comme variables). Si on intègre les deux nombres de (2), on obtient

$$\int g(y)dy = \int F(x)dx$$

Si, de plus, $F(x)$est une primitive de $f(x)$ et $G(y)$ de $g(y)$,
Alors $G(y) + \lambda = F(x) + \mu$ ou encore $G(y) = F(x) + \nu$ on peut avoir $y = ax + k$

2) Exemple

Résoudre l'ED1 : (3) $y^2 - 2xy' = 0\ sur\ \mathbb{R}$. A cause de y^2, (3) ne sera pas linéaire. Regardons si (3) est une ED1 AVS.
On pose

$$y' = \frac{dy}{dx}\quad alors\ on\ a\ (3){:}\ y^2 - 2x\frac{dy}{dx} = 0$$

$$y^2 = 2x\frac{dy}{dx} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{dx}{2dy} = \frac{dy}{y^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{2x}$$

Donc oui, (3) est bien à variables séparables.
Donc :

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{dx}{2x} \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \left[-\frac{1}{x}\right] = \frac{1}{2}[\ln|x|]$$

Soit

$$-\frac{1}{y} + k_1 = \frac{1}{2}(\ln|x| + k_2)$$

Soit

$$-\frac{1}{y} = \frac{1}{2}\ln|x| + k_3$$

Soit

$$\frac{1}{y} = -\frac{1}{2}\ln|x| + \lambda = -\ln|x|^{\frac{1}{2}} + \lambda$$

D'où

$$y = \frac{1}{\lambda - \ln\sqrt{|x|}}$$

On a résolu (3) et la solution générale de (3) s'écrit :

$$y_{G(x)}(x) = \frac{1}{\lambda - \ln\sqrt{|x|}} \quad , avce\ \ \lambda \in \mathbb{R}$$

III- Equation différentielle de 1er ordre linéaire

1) Description

On appelle ED1L toute équation de la fonction $Ay' + By = 0$ (équation différentielle du 1er ordre linéaire à coefficients constants sans second membre).

(4) $A(x)y' + B(x)y = 0$ (équation différentielle du 1er ordre linéaire à coefficients variables sans second membres.
$Ay' + By = C(x)$ (équation différentielle du premier odre linéaire à coefficients constants avec second membre).
$A(x)y' + B(x)y = C(x)$ (équation différentielle du premier ordre linéaire à coefficient variable avec second membre).

Avec $A(x), B(x), C(x)$ 3 fonctions numériques et A et B sont deux réels.

2) Résultat fondamental !

La solution générale d'une ED1L ASM sera notée $y_{GEASM}(x)$
La solution générale d'une ED1LSSM sera notée $y_{GESSM}(x)$.
Une solution particulière d'une ED1LASM sera notée $y_{PEASM}(x)$. La solution générale de (4) sera notée

$$y_{GEASM}(x) = \quad y_{GESSM}(x) + y_{PEASM}(x)$$

Solution générale solution générale de (4') Solution particulière

3) Méthode de résolution

a- Pour trouver $y_{GESSM}(x)$

On résoudra (4') comme une ED1 à variables séparables.

b- Pour trouver $y_{PEASM}(x)$

On procèdera :

- Par intuition en observant le second membre.
- En appliquant une astuce sugérée par l'énoncé.
- En faisant varier la constante λ apparue dans $y_{GESSM}(x)$.

En effet, si on a trouvé dans la 1ère étape $y_{GESSM}(x) = \lambda.\varphi(x),\ \lambda \in \mathbb{R}$, on cherche $y_{PEASM}(x)$ sous la forme $y_p(x) = \lambda(x).\varphi(x)$

4) Exemple :

a- Résoudre (5) : $(1 + x^2)y' - xy = 1$

Diagnostic : (5) est une ED1L ACV ASM.

- Solution générale de l'ESSM associée à (5).

Cette ESSM est $(1 + x^2)y' - xy = 0$

On sait qu'elle est AVS, on pose $y' = \frac{dy}{dx}$

Alors $(1 + x^2)\frac{dy}{dx} - xy = 0$

$$\Leftrightarrow \ (1 + x^2)\frac{dy}{dx} = xy \quad soit \quad \frac{dy}{y} = \frac{xdx}{1 + x^2}$$

$$\Leftrightarrow \ \int \frac{dy}{y} = \int \frac{xdx}{1 + x^2} \qquad \Leftrightarrow \qquad [\ln|y|] = \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{1 + x^2} = \frac{1}{2}[\ln|1 + x^2|]$$

Soit

$$\ln|y| + k_1 = \frac{1}{2}(\ln(1 + x^2) + k_2$$

Soit

$$\ln|y| = \frac{1}{2}(\ln(1+x^2) + k_3$$

Soit

$$\ln|y| = \ln\left(\sqrt{1+x^2}\right) + k_3 \quad \Leftrightarrow \quad e^{\ln|y|} = e^{\ln\left(\sqrt{1+x^2}\right)+k_3}$$

Soit

$$|y| = \sqrt{1+x^2} * e^{k_3} = \sqrt{1+x^2} * k_4$$

La solution générale de l'ESSM est :

$$y_{GESSM}(x) = \lambda * \sqrt{1+x^2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

- Cherchons une solution particulière de l'EASM (5) :

Par intuition, on trouve $y_{PEASM}(x) = x$

Synthèse :

La solution générale e (5) s'écrit :

$$y_{g(5)}(x) = y_{GESSM}(x) + y_{PEASM}(x)$$
$$= \lambda * \sqrt{1+x^2} + x \ , \lambda \in \mathbb{R}$$