Fista 2021
Concurso de Matemática e Programação

Departamento de Matemática*

Uma moldura de dimensão k numa matriz $(2 \times n)$ é uma submatriz $(2 \times k)$ formada por colunas contíguas da matriz original. Considere uma matriz $(2 \times n)$ onde todas as entradas são 0 ou 1. Seja $A(k, n)$ o número total de matrizes $(2 \times n)$ tais que todas as entradas, de todas as molduras de dimensão k, somam k. Os seguintes exercícios ajudam a perceber o tipo de objectos com que estamos a lidar; sugerimos que tente resolvê-los antes de começar a responder aos desafios do concurso que irão surgir mais adiante como questões numeradas.

- Comece por verificar que $A(2, 2) = 6$ descobrindo todas as matrizes que têm a referida propriedade. Um facto importante é que estas matrizes só têm uma moldura, a própria matriz. Uma das matrizes nas referidas condições é $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- Em seguida, determine o número total de matrizes (2×4) com todas as submatrizes (2×2) a somarem 2, ou seja $A(2, 4)$. Um exemplo destas matrizes é $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- Seja agora $n = 3$, encontre $A(3, 3)$, tenha em atenção que, agora, o número de colunas $(1 \quad 0)^t$ e $(0 \quad 1)^t$ é necessariamente ímpar.
- Seja B uma matriz (2×3) da seguinte forma

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quantas matrizes (2×6) têm com primeira moldura de dimensão 3 a matriz B? Comece por perceber o que pode acontecer na quarta coluna, siga para a quinta e depois para a sexta. Tente compreender a relação que há entre as molduras que não se sobrepõem.

- Repita a pergunta anterior mas com B uma matriz (2×3) da seguinte forma $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- Encontre $A(3, 6)$, (agora a primeira moldura já não tem de ser B).

As perguntas seguintes devem ser respondidas de forma sequencial. Para cada pergunta que resolverem devem enviar a solução para luis.carvalho@iscte-iul.pt. Relembra-se que o grupo vencedor é aquele que responder acertadamente ao maior grupo de perguntas consecutivas no menor tempo. Devem em cada resposta enviar o valor e o código utilizado para o obter.

1. Determine $A(3, 21)$. Sugestão: comece por encontrar uma fórmula para $A(3, 3k)$ e para testar a sua fórmula, verifique que, para $k = 3$ e $k = 4$, obtém, respetivamente, $A(3, 9) = 560$ e $A(3, 12) = 4144$.
2. Determine $A(4, 20)$. Sugestão: determine uma fórmula para $A(4, 4k)$.
3. Calcule agora o valor de $A(10, 20)$.

*Desafio inspirado no project Euler