1. Izvršiti transformaciju tačke A(0, 1, 1) koja se sastoji od rotacije za ugao θ=90° oko Y-ose.

Rješenje:

Zadatak je moguće riješiti na tri načina:

a) klasično rješenje rotacije oko Y-ose, koje možete sami uraditi;
b) pomoću relacije (4) – slajd 16 sa materijala rotacija oko proizvoljne ose u 3D. Pdf
c) pomoću kvaterniona.

b)

Korištenjem relacije (4):

$$\begin{bmatrix} x'_A \\ y'_A \\ z'_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2K+\cos\theta & abK-c\sin\theta & acK+b\sin\theta \\ abK+c\sin\theta & b^2K+\cos\theta & bcK-a\sin\theta \\ acK-b\sin\theta & bcK+a\sin\theta & c^2K+\cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix}$$

a, b i c su koordinate jediničnog vektora ose rotacije. Pošto je osa rotacije Y-osa, njen jedinični vektor je: **n** = a**i** + b**j** + c**k**; a=c=0; b=1; K = 1- cosθ = 1-cos90° = 1 jer je cos90° = 0. Uvrštavanjem u gornju matričnu jednačinu, dobijemo:

$$\begin{bmatrix} x'_P \\ y'_A \\ z'_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0^2\cdot 1+0 & 0\cdot 1\cdot 1-0\cdot 1 & 0\cdot 0\cdot 1+1\cdot 1 \\ 0\cdot 1\cdot 1+0\cdot 1 & 1^2\cdot 1+0 & 1\cdot 0\cdot 1-0\cdot 1 \\ 0\cdot 0\cdot 1-1\cdot 1 & 1\cdot 0\cdot 1+0\cdot 1 & 0^2\cdot 1+0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\cdot 0+0\cdot 1+1\cdot 1 \\ 0\cdot 0+1\cdot 1+0\cdot 1 \\ -1\cdot 0+0\cdot 1+0\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$ Dakle,

tačka A se transformiše u tačku A'(1, 1, 0).

c)

Za rješenje pomoću kvaterniona koristimo jednačinu sa slajda 51:

$A' = qAq^{-1}$

A' kvaternion tačke A';

q kvaternion rotacije koji se računa prema jednačini sa slajda 50;

A kvaternion tačke A koji se predstavlja pomoću relacije na slajdu 41, dakle $A = [0\ (x_A, y_A, z_A)] = [0\ (0, 1, 1)]$

q^{-1} inverzni kvaternion q kvaterniona koji se računa prema izrazima sa slajdova 46 i 47

Dakle:

$$q = \begin{bmatrix} \cos\frac{\vartheta}{2} & \sin\frac{\vartheta}{2} n \end{bmatrix};\ n = jediničed\ \ vektor\ \ rotacije = (0,1,0)$$

$$q = \begin{bmatrix} \cos 45^\circ & \sin 45^\circ (0,1,0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$q^{-1} = \frac{q^*}{|q|}$;q^* - konjugovani kvaternion; slajd 46; |q| - intenzitet kvaterniona slajd 47

$$q^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}}{1} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Pa imamo:

$$A' = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}$$, što drugačije možemo zapisati:

$$A' = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\cdot i & \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot j & 0\cdot k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0\cdot i & 1\cdot j & 1\cdot k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -(0\cdot i) & -\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot j & -(0\cdot k) \end{bmatrix}$$

$$A' = \left(\left[\frac{\sqrt{2}}{2} + 0\cdot i + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot j + 0\cdot k\right]\cdot\left[0 + 0\cdot i + 1\cdot j + 1\cdot k\right]\right)\cdot\left[\frac{\sqrt{2}}{2} - (0\cdot i) - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot j - (0\cdot k)\right]$$

$$A' = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 0 + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 0\cdot i + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1\cdot j + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1\cdot k + 0\cdot i\cdot 0 + 0\cdot i\cdot 0\cdot i + 0\cdot i\cdot 1\cdot j + 0\cdot i\cdot 1\cdot k + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot j\cdot 0 \\ + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot j\cdot 0\cdot i + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot j\cdot 1\cdot j + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot j\cdot 1\cdot k + 0\cdot k\cdot 0 + 0\cdot k\cdot 0\cdot i + 0\cdot k\cdot 1\cdot j + 0\cdot k\cdot 1\cdot k \end{pmatrix}\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{\sqrt{2}}{2} - (0\cdot i) - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot j - (0\cdot k)\right]$$

$$A' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot j + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot k + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot j\cdot j + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot j\cdot k\right)\cdot\left[\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot j\right]$$

Prema pravilima sa slajda 31 imamo: $j\cdot k = i;\quad j\cdot j = -1$, pa gornji izraz ima oblik:

$$A' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot j + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot k - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot i\right)\cdot\left[\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot j\right] = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot i + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot j + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot k\right)\cdot\left[\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot j\right] =$$

$$A' = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot j\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot i\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot i\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot j\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot j\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot j\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot j\right) + \\ + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot k\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot k\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot j\right) \end{pmatrix}$$

$$A' = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot j + \frac{1}{2}\cdot i + \frac{1}{2}\cdot i\cdot(-j) + \frac{1}{2}\cdot j + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot k + \frac{1}{2}\cdot k\cdot(-j)\right)$$

$$A' = \left(0 + 1\cdot j + \frac{1}{2}\cdot i + \frac{1}{2}\cdot(-k) + \frac{1}{2}\cdot k + \frac{1}{2}\cdot i\right) = (0 + 1\cdot j + 1\cdot i) = (0 + 1\cdot i + 1\cdot j) = (0 + 1\cdot i + 1\cdot j + 0\cdot k) = (0,1,1,0)$$

A' (1, 1, 0)

Pokušajte sami uraditi sljedeće zadatke koristeći kvaternione:

1) Izvršiti rotaciju tačke A(1, 1, 1) oko proizvoljne ose koja je definisana vektorom **v** = 1**i** + 4**j** + 8**z** za ugao θ=-75°.
2) Izvršiti rotaciju tačke A(1, 1, 1) oko proizvoljne ose koja je definisana vektorom **v** = 1**i** + 1**j** + 1**z** za ugao θ=60°.
3) Izvršiti rotaciju tačke A(1, 2, -1) oko proizvoljne ose koja je definisana vektorom **v** = 2**i** + 2**j** + 1**z** za ugao θ=120°.
4) Izvršiti rotaciju tačke A(2, 2, -2) oko proizvoljne ose koja je definisana vektorom **v** = 1**i** + 2**j** + 1**z** za ugao θ=-180°.
5) Izvršiti rotaciju tačke A(-2, 1, -2) oko proizvoljne ose koja je definisana vektorom **v** = 2**i** + 1**j** + 2**z** za ugao θ=-270°.