

# Probabilidad y estadística

## Clase 6

# Intervalos de confianza (continuación )

# Regiones de confianza asintóticas

**Def:** Sea  $\underline{X}_n = X_1, \dots, X_n$  una m.a de una población con distribución perteneciente a la flía.  $F_\theta(x)$ , con  $\theta \in \Theta$ . Se dice que  $S_n(\underline{X}_n)$  es una sucesión de regiones de confianza de nivel asintótico  $1 - \alpha$  si:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_\theta(\theta \in S_n(\underline{X}_n)) = 1 - \alpha$$

**Teorema:** Sea  $\underline{X}_n$  una m.a. de una población con distribución  $F_\theta(x)$ , con  $\theta \in \Theta$ . Supongamos que para cada  $n$  se tiene  $U_n = g(\underline{X}_n, \theta)$  que converge en distribución a  $U$ , donde  $U$  es una v.a. cuya distribución no depende de  $\theta$ . Entonces si  $a$  y  $b$  son tales que  $\mathbb{P}(a < U < b) = 1 - \alpha$  se tiene que  $S_n(\underline{X}_n) = \{\theta : a < U_n < b\}$  es una región de confianza de nivel asintótico  $1 - \alpha$  para  $\theta$ .

# Ejercicio 1

Se arroja 50 veces una moneda con probabilidad  $p$  de salir cara.  
Hallar un intervalo de confianza asintótico de nivel 0.95 para  $p$   
basado en la observación  $x=50$ .

# IC para la media de una población desconocida

En general, dada una m.a  $\underline{X}_n$  de una población desconocida, una buena forma de aproximarse a la media de dicha población es considerar el promedio de las muestras ( $\bar{X}_n$ ).

Por TCL, sabemos que  $\bar{X}_n$  tiende en distribución a una v.a. normal. En particular,

$$\frac{\bar{X}_n - \mathbb{E}[X]}{\sqrt{\text{var}(X)/n}} \stackrel{(a)}{\approx} \mathcal{N}(0, 1)$$

Se puede probar que si se desconoce también la varianza de la población (que es lo más común) vale que

$$\frac{\bar{X}_n - \mathbb{E}[X]}{S/\sqrt{n}} \stackrel{(a)}{\approx} \mathcal{N}(0, 1)$$

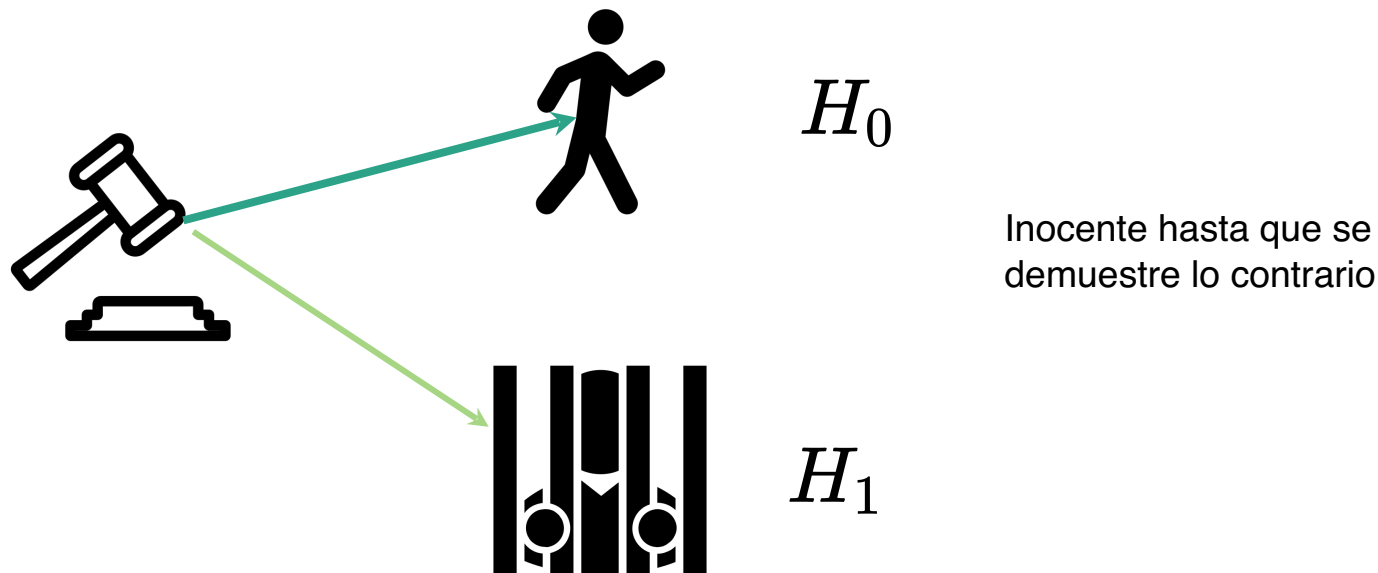
## Ejercicio 2

De un experimento en los efectos de un medicamento para la ansiedad se midió el puntaje en un test de memoria antes y después de tomar el medicamento. A partir de los datos que se encuentran en el archivo `Islander_data.csv` hallar un IC para la media del tiempo de respuesta después de consumir el medicamento.

# Test de hipótesis

# Motivación

Un test de hipótesis es una manera formal de elegir entre dos opciones, o hipótesis.





# Formalicemos esta idea

Sea una m.a.  $\underline{X} = X_1, \dots, X_n$  de una población con distribución perteneciente a una familia  $F_\theta(x)$  con  $\theta \in \Theta$ . Sean  $\Theta_0$  y  $\Theta_1$  tales que  $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \emptyset$  y  $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$ . Un test para este problema será una regla basada en  $\underline{X}$  para decidir entre las dos hipótesis

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \text{ vs. } H_1 : \theta \in \Theta_1$$

Inocente

Culpable

**Definición:** Se llama **test** a una función  $\delta(\underline{X})$  que puede tomar valores 0 o 1.

# Formalicemos esta idea

En un test de hipótesis se plantean dos hipótesis:

$H_1$ : es la hipótesis del investigador (lo que se desea probar). Se la conoce como hipótesis alternativa

$H_0$ : se formula con el objetivo de ser rechazada. Se la conoce como hipótesis nula.

Diremos que rechazamos la hipótesis nula cuando  $\delta(\underline{X}) = 1$ , en caso contrario decimos que no hay evidencia suficiente para rechazar  $H_0$ .

Las hipótesis se formulan sobre parámetros de la **población**, y no de la muestra

# Tipos de error

**Error de tipo I:** Es el error que se comete al rechazar una hipótesis nula que era verdadera. Buscamos que esto tenga muy baja probabilidad.

Encarcelar a una  
persona inocente

$$\mathbb{P}(EI) = \mathbb{P}_{\theta \in \Theta_0}(\delta(\underline{X}) = 1)$$

**Error de tipo II:** Es el error que se comete al no rechazar una hipótesis nula que era falsa.

Dejar libre a una  
persona culpable

$$\mathbb{P}(EII) = \mathbb{P}_{\theta \in \Theta_1}(\delta(\underline{X}) = 0)$$

# Potencia del test

**Def:** Se llama **potencia del test** a la probabilidad de rechazar una hipótesis nula en función del parámetro desconocido sobre el que se plantea la hipótesis.

$$\pi_{\delta}(\theta) = \mathbb{P}_{\theta}(\delta(\underline{X}) = 1).$$

Luego podemos reescribir

$$\mathbb{P}(EI) = \pi_{\delta}(\theta), \theta \in \theta_0 \quad y \quad \mathbb{P}(EII) = 1 - \pi_{\delta}(\theta), \theta \in \Theta_1$$

# Ejercicio 1

Supongamos que en las especificaciones de procedimientos de una planta de energía nuclear se establece que la resistencia media de soldadura debe superar 100lb/plg. Supongamos que somos el director del equipo de inspección del ente regulador estatal que debe determinar si la planta cumple con las especificaciones. Se planea seleccionar una muestra al azar de soldaduras y realizar pruebas en cada una de ellas.

1. ¿Cuáles son las hipótesis a testear?
2. Explicar que significa en este contexto el error de tipo I y el de tipo II, y discutir cuáles son las consecuencias de cometer cada tipo de error

# Nivel de significación

**Def:** Se llama **nivel de significación** del test a la máxima probabilidad de cometer un error de tipo I:

$$\alpha = \sup_{\theta \in \theta_0} \pi_{\delta}(\theta)$$

# Nivel de significación y p-valor

**Def:** Se llama **p-valor** de un test al menor nivel de significación para el cual se rechaza  $H_0$  para una observación dada

**Otra forma:** probabilidad de ver una muestra tanto o más extrema que la que se ha observado

En este [video](#) hay una explicación simpática e intuitiva de lo que representa el p-valor!

# Sobre la construcción de reglas de decisión

En la práctica, las reglas de decisión se construyen basándose en una estadística de la m.a.  $\underline{X}$ , es decir que son de la forma  $\delta(\underline{X}) = \mathbf{I}\{T(\underline{X}) \in \mathcal{R}\}$ . A  $\mathcal{R}$  la conoce como **región crítica o de rechazo**.

Podemos usar el método de pivote que vimos para intervalos de confianza o el EMV



# Tipos de hipótesis

En general, tenemos 3 tipos de hipótesis que deseamos testear:

$$\left. \begin{array}{l} H_0 : \theta \geq \theta_0 \text{ vs. } H_1 : \theta < \theta_0 \\ H_0 : \theta \leq \theta_0 \text{ vs. } H_1 : \theta > \theta_0 \end{array} \right\} \text{ Hipótesis unilaterales}$$
$$H_0 : \theta = \theta_0 \text{ vs. } H_1 : \theta \neq \theta_0 \rightarrow \text{Hipótesis bilaterales}$$

Si el pivote es decreciente en  $\theta$ , un test para

$$H_0 : \theta \leq \theta_0 \text{ vs. } H_1 : \theta > \theta_0 \text{ será } \delta(\underline{X}) = \mathbf{I}\{U_{\theta_0} > k_\alpha\}$$

$$H_0 : \theta \geq \theta_0 \text{ vs. } H_1 : \theta < \theta_0 \text{ será } \delta(\underline{X}) = \mathbf{I}\{U_{\theta_0} < k_\alpha\}$$

$$H_0 : \theta = \theta_0 \text{ vs. } H_1 : \theta \neq \theta_0 \text{ será } \delta(\underline{X}) = \mathbf{I}\{U_{\theta_0} < k_{\alpha/2}\} + \mathbf{I}\{U_{\theta_0} > k_{1-\alpha/2}\}$$

# Ejercicio 3

La longitud de ciertas barras de acero sigue una distribución normal de varianza desconocida. El proveedor de las barras asegura que la media de las mismas es de 4m.

Si en una muestra de 15 barras el promedio de las longitudes fue de 3.88 m, con un desvío muestral de 0.2, ¿qué puede decir respecto de la afirmación del proveedor?

Test-t

# Test con nivel de significación asintótico

**Def:** Sea  $\underline{X}_n = (X_1, \dots, X_n)$  una m.a. de una población con distribución  $F_\theta(x)$ ,  $\theta \in \Theta$ . Se desea testear

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \text{ vs. } H_1 : \theta \in \Theta_1$$

Se dirá que una sucesión de test tiene nivel de significación asintótico  $\alpha$  si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in \Theta_0} \pi_\delta(\theta) = \alpha$$

Nuevamente, podemos basar el test en la distribución asintótica de EMV, o bien usando TCL.

# Ejercicio 3

Se realiza un estudio para estimar la proporción de residentes en una ciudad que están a favor de la construcción de una planta de energía nuclear. En una muestra de 100 personas se observó que la proporción de individuos que se encuentran a favor fue de 0.62

1. ¿Puede decirse con un nivel de significación de 0.01 que la mayor parte de la población está a favor de la construcción de la planta nuclear?
2. Hallar el p-valor.

# Ejercicio 4



A

$$n_X = 80$$
$$x = 22$$



B

$$n_Y = 20$$
$$y = 8$$

Tasa de conversión

$$p_B > p_A?$$

- Diseñar el test de hipótesis
- Para la muestra dada, ¿qué concluye?
- Calcular el p-valor

A/B testing

# Ejercicio 4

De un experimento en los efectos de un medicamento para la ansiedad se midió el puntaje de un test de memoria antes y después de tomar el medicamento.

1. A partir de los datos que se encuentran en el archivo `Islander_data.csv`, diseñar un test de hipótesis de nivel de significación 0.01 para decidir si el tiempo medio de respuesta después de tomar el medicamento es menor que antes de tomarlo.
2. Hallar el p-valor