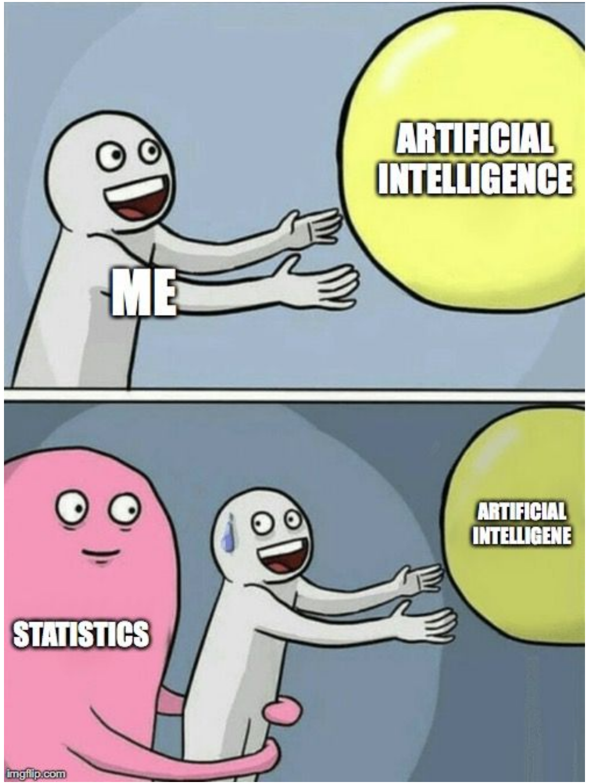
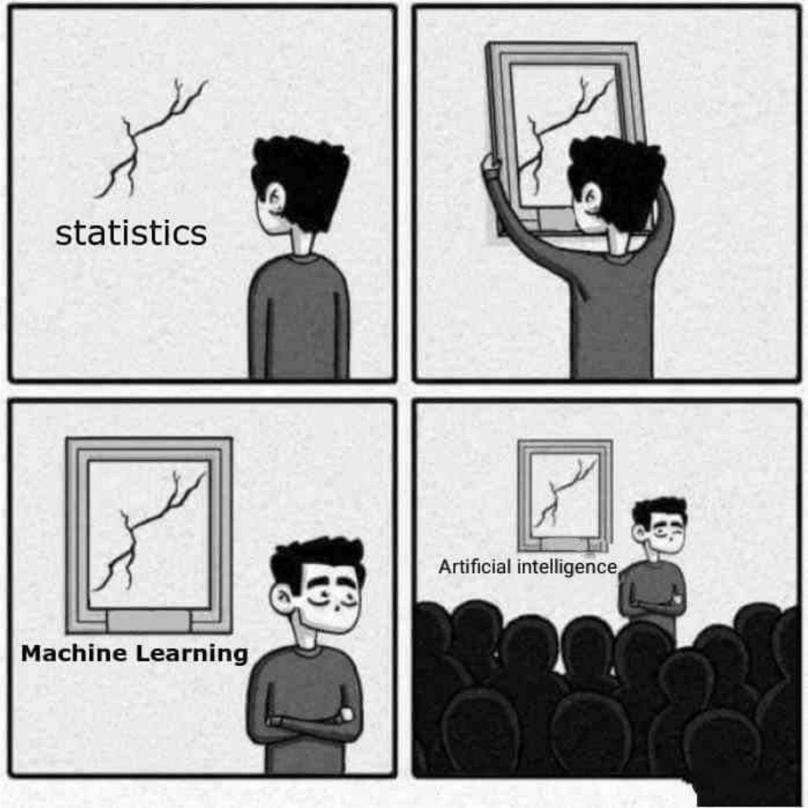
Probabilidad y Estadística

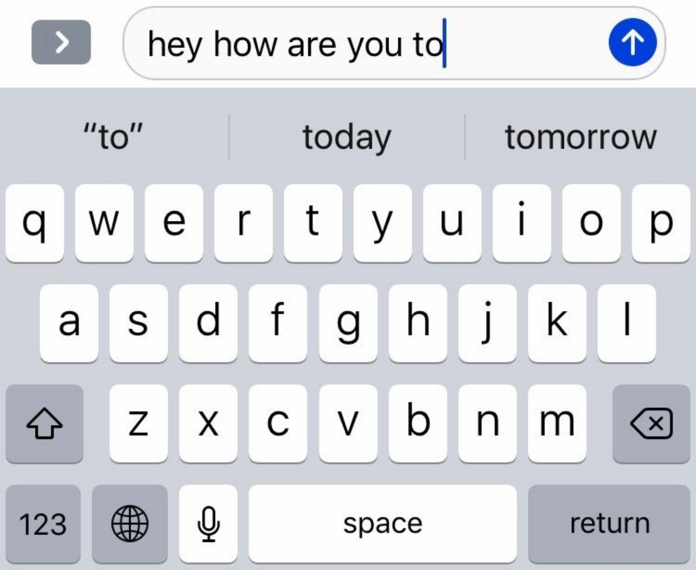
Clase 1

Ud. se encuentra aquí:



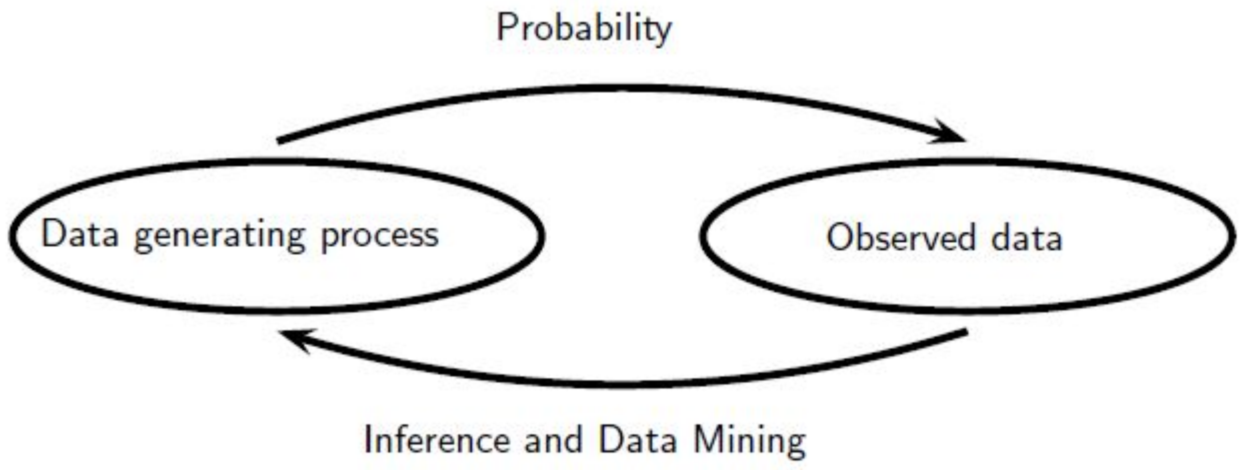
para poder estar aquí:





Ejemplos de probabilidad en IA?

Probabilidad vs. Estadística



"All of Statistics: A Concise Course in Statistical Inference", Larry Wasserman

Cronograma

	Clase 1	Repaso Distribuciones útiles.
TP 1	Clase 2	V.a. condicionadas Esperanza condicional
	Clase 3	ECM y estimadores de cuadrados mínimos Estimador de máxima verosimilitud
TP2	Clase 4	Estimación Bayesiana
	Clase 5	Estimación no paramétrica
	Clase 6	Intervalos de confianza
FINAL	Clase 7	Test de hipótesis
	Clase 8	Examen

Repaso

Espacios de Probabilidad

$\Omega \neq \emptyset$, $\mathcal{A}$ una colección de subconjuntos de Ω

A_1* $\Omega \in \mathcal{A}$, $\emptyset = \Omega^c$

A_2* $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$ Cerrado por complemento

A* $B, C \in \mathcal{A} \Rightarrow B \cup C \in \mathcal{A}$ Cerrado bajo Uniones Numerables

$(\Omega, \mathcal{A})$ Espacio Medible

$\Omega = \{\{1\}, \{2\}\}$; $\mathcal{A} = \{\{1,2\}, \{1\}, \{2\}, \{\emptyset\}\}$

$\{1\}^c = \{2\}$

$\mathcal{A} = \{\Omega, \emptyset\}$

La menor algebra de Ω $\mathcal{A} = \{\Omega, \emptyset\}$

$\Omega \overset{*}{=} \mathbb{N}$, $\mathbb{P} = \{2, 4, 6, \dots\}$ → Pares, $\mathbb{N}$: Números naturales sin el cero

$\mathcal{F} = \{\mathbb{P}, \mathbb{I}, \mathbb{N}, \emptyset\}$

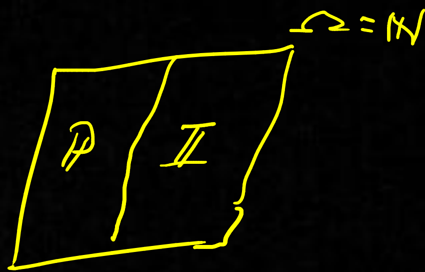
$\mathbb{P} \cup \emptyset = \mathbb{P}$

$\mathbb{P} \cup \mathbb{N} = \mathbb{N}$

$\mathbb{P} \cup \mathbb{I} = \mathbb{N}$

$\mathbb{P}^c = \mathbb{I}$, $\mathbb{I}^c = \mathbb{P}$

$\emptyset^c = \Omega \overset{*}{=} \mathbb{P}$



Otros subconjuntos de Omega:

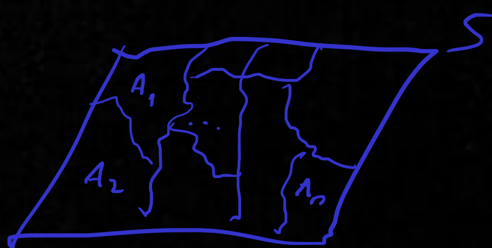
$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$B = \{5, \dots, 8\}$

$P = \{2, 3, 5, 7, \dots\}$ Números Primos

-Probar lo siguiente por Inducción:

$\{A_i\}_{i=1}^{n} \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$



A'_3.- $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

Si $\mathcal{A}$ cumple con A_1, A_2 y A'3 $\Rightarrow \mathcal{A}$ es una σ-álgebra

Espacio de Probabilidad (Ω,A,P) y variables aleatorias

$$\Omega \in \mathcal{A}$$
$$B \in \mathcal{A} \Rightarrow B^c \in \mathcal{A}$$
$$B, C \in \mathcal{A} \Rightarrow B \cup C \in \mathcal{A}$$

$$\mathcal{A}$$

(σ - algebra on Ω)

P

probability measure

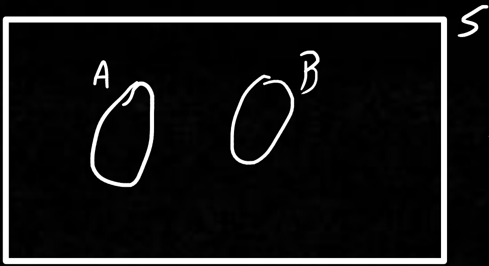
$$[0,\ 1]$$

$$P : \Omega \to [0,1]$$

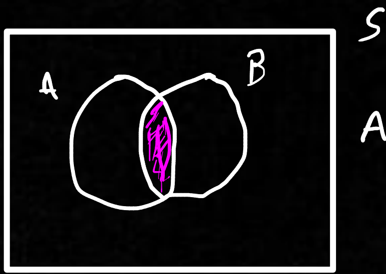
- $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1, \ \forall A \in \mathcal{A}$
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- $A \cap B = \emptyset, \ \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

$$P(A \cup A^c) = P(\Omega) = 1 ; \ A \cap A^c = \emptyset \Rightarrow P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c) = 1$$
$$\Rightarrow P(A) = 1 - P(A^c)$$

"*Probability: A Survery of the Mathematical Theory*" J. Lamperti



$A \cap B = \emptyset$

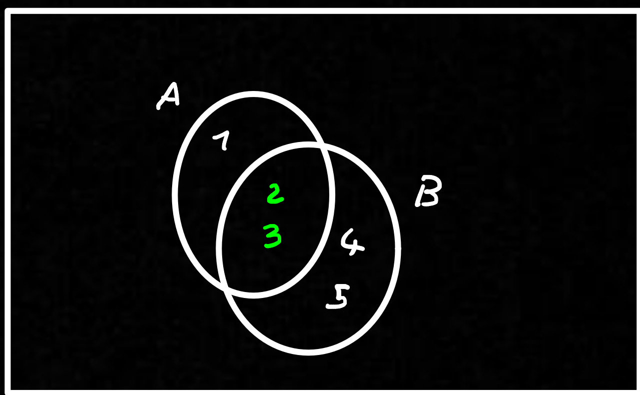


$A \cap B \neq \emptyset$

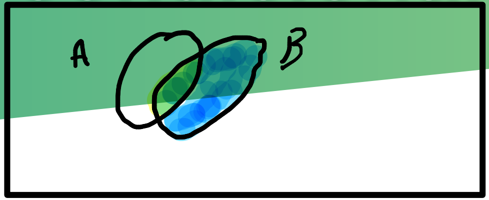
$A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{2, 3, 4, 5\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5$



Probabilidades condicionales y proba. total



Def: Se llama **probabilidad condicional** de A dado B ($\mathbb{P}(A|B)$) a la probabilidad de que ocurra el evento A sabiendo que B ha ocurrido, y está definida por

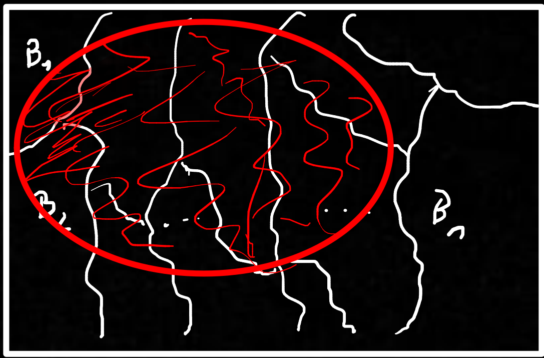
$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Def: Diremos que los eventos $B_1, \dots B_n$ forman una **partición** si $B_i \cap B_j = \emptyset \; \forall i, j$ y $\bigcup_{i=1}^{n} B_j = \Omega$.

Luego podemos describir al evento A como $A = (A \cap B_1) \cup \dots \cup (A \cap B_n)$ de forma que

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B_1) + \dots + \mathbb{P}(A \cap B_n) \overset{*}{=} \mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \dots + \mathbb{P}(A|B_n)\mathbb{P}(B_n)$$

Fórmula de probabilidad total



$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A \cap B_i$$

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P \cap B_i$$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) \overset{*}{=} P(A \mid B)\, P(B)$$

Supongamos que en una poblacion la prevalencia de un virus es de un 0,5% (0,005) y la probabilidad de que un test sea positivo si la persona si la persona esta infectada es del 99% (0,99)

P(Infectado | +)

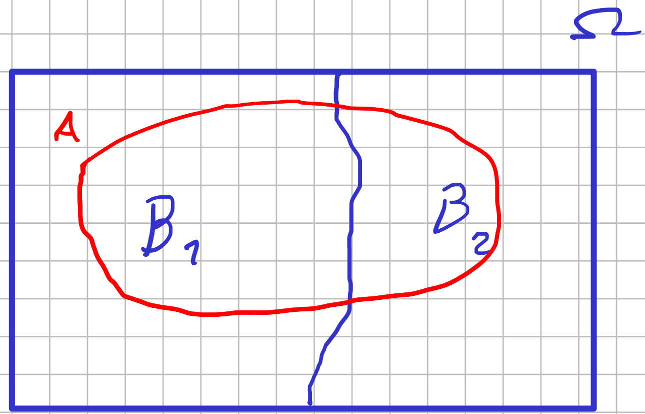
P(0,005 | 0,99)=???   <50%

Aplicar el Teorema de Bayes

B_1 = Infectado

B_2 = No Infectado

A = Positivo



$$P(B_1 | A) = \frac{P(A | B_1) P(B_1)}{P(A \cap B_1) P(B_1) + P(A \cap B_2) P(B_2)}$$

$$P(B_2) = P(B_1^c) = 1 - P(B_1)$$

Teorema de Bayes e independencia

Teorema de Bayes: Sean $B_1, \ldots B_n$ una partición de Ω , y A un evento con probabilidad positiva:

$$\mathbb{P}(B_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)}$$

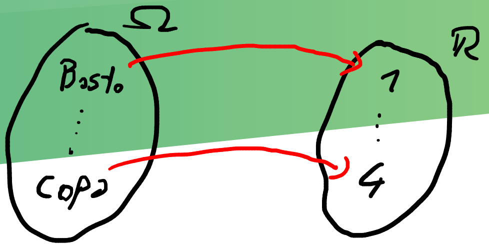
Def: Diremos que dos eventos A y B son **independientes** si y sólo sí vale que

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

$$\begin{aligned} X : \Omega &\to \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto X(\omega) \end{aligned}$$

Variables aleatorias

Variables aleatorias



Una va. X es una función que mapea eventos a números.

Ejemplo: basto →1, Oro →2, espada →3, copa→4

X tiene asociada una función de distribución, definida como

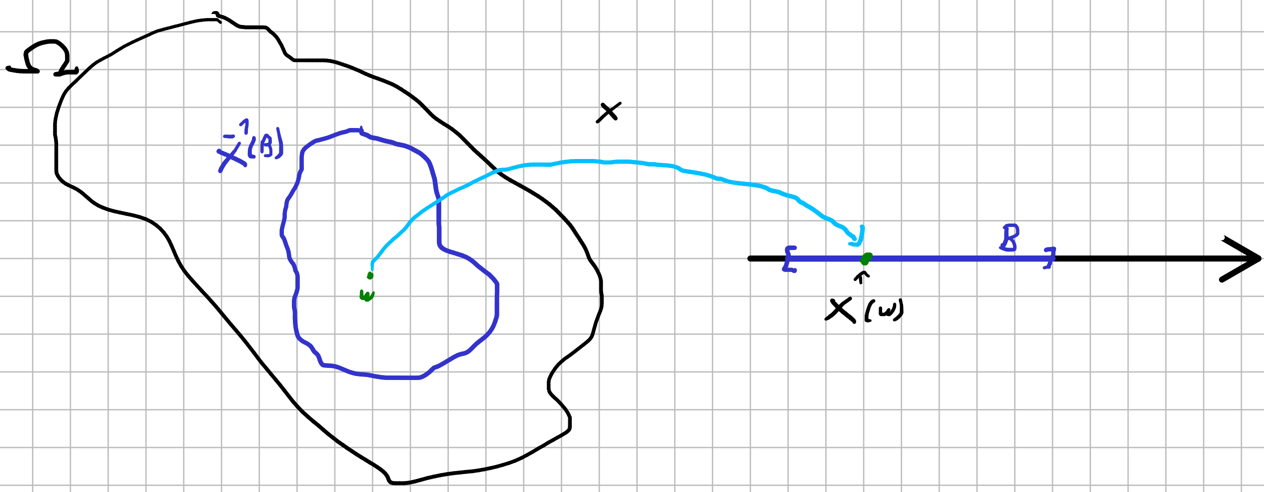
$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

- $F_X(x) \in [0,1] \; \forall \, x \in \mathbb{R}$
- $F_X(x)$ es monótona no decreciente
- $F_X(x)$ es continua por derecha
- $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ y $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$

además se define la función de distribución inversa o función cuantil como $F_X^{-1}(q) = \inf\{x : F(x) > q\}$

Si F_X es estrictamente creciente y contínua, F_X^{-1} es su inversa.

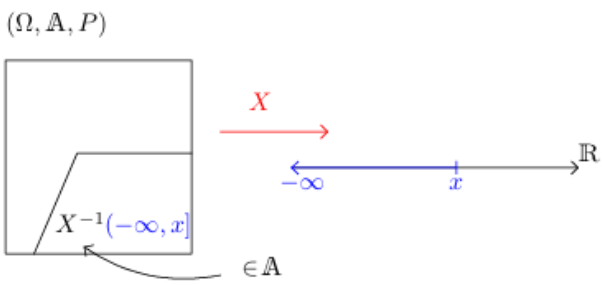
Dado un Espacio de Probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, y una variable aleatoria X: $\Omega \to \mathbb{R}$ diremos que es una Variable Aleatoria si cumple: $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$



VAD: $X = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ "Conteo de tiradas de un dado hasta dar con un 6"

VAC: $X \in [10, 13]$, "Tiempo hasta que ocurra algo"

Observación 2.3. La definición de variable aleatoria puede ser escrita equivalente como sigue : $X\colon\Omega \to \mathbb{R}$ es una variable aleatoria si $X^{-1}(-\infty, x] \in \mathbb{A}$.



Entonces como $X^{-1}(-\infty, x] = \{w \in \Omega\colon X(w) \leq x\} \in \mathbb{A}$, se le puede asignar una probabilidad.

$$P(\{w \in \Omega\colon X(w) \leq x\})$$

Tipos de v.a.

- Discretas (v.a.d): toman valores en un conjunto discreto o numerable de puntos. Si X es **v.a.d**, tendrá además función de probabilidad dada por

$$p_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$$

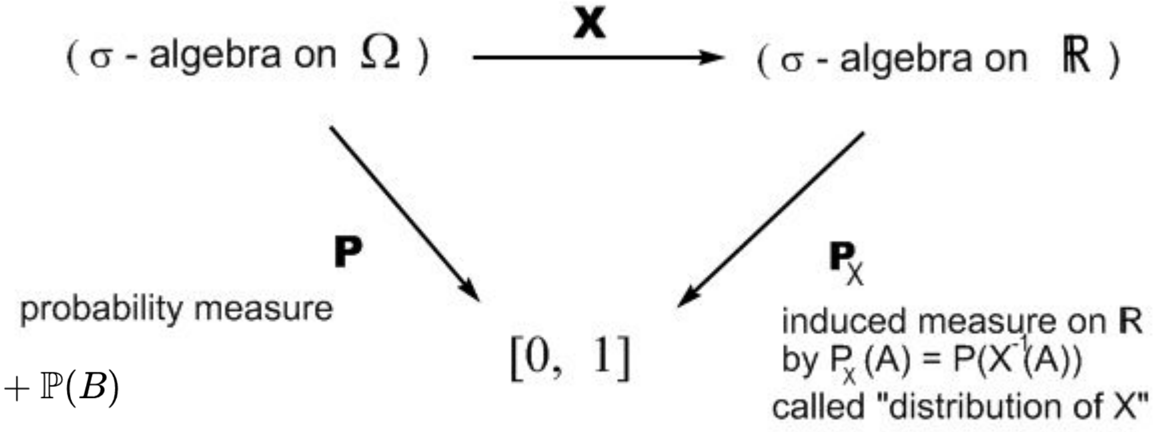
- Continuas (v.a.c): toman valores en un intervalo continuo. Si X es una **v.a.c**. tendrá asociada una función de densidad

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

¿Qué propiedades debían cumplir cada una de estas funciones?

Espacio de Probabilidad (Ω,A,P) y variables aleatorias

$$\Omega \in \mathcal{A}$$
$$B \in \mathcal{A} \Rightarrow B^c \in \mathcal{A}$$
$$B, C \in \mathcal{A} \Rightarrow B \cup C \in \mathcal{A}$$



$$0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1, \ \forall A \in \mathcal{A}$$
$$\mathbb{P}(\Omega) = 1$$
$$A \cap B = \emptyset, \ \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

"*Probability: A Survery of the Mathematical Theory*" J. Lamperti

$$X : \Omega \xrightarrow{\binom{X_1}{X_2}} \mathbb{R}^2$$

$$\omega \longmapsto \begin{pmatrix} X_1(\omega) \\ X_2(\omega) \end{pmatrix}$$

Vectores aleatorios

Distribución conjunta y marginales

$X \backslash Y$	$Y=0$	$Y=1$	$P_X(x)$
X=0	1/10	2/10	3/10
X=1	3/10	4/10	7/10
$P_Y(y)$	4/10	6/10	1

$P_{X,Y}$

Si tenemos dos variables X e Y se define su **función de distribución conjunta** como $F_{X,Y}(x,y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y)$ y vale la regla del rectángulo:

$$\mathbb{P}(a < X \leq b, c < Y \leq d) = F_{X,Y}(b,d) - F_{X,Y}(a,d) - F_{X,Y}(b,c) + F_{X,Y}(a,c)$$

Caso continuo: $f_{X,Y}(x,y)$ es la función de densidad conjunta y se definen las funciones de densidad marginales como $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)dy$ y $f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)dx$

Caso discreto: $p_{X,Y}(x,y)$ es función de probabilidad conjunta y se definen las funciones de probabilidad marginal como $p_X(x) = \sum_y p_{X,Y}(x,y)$ y $p_X(x) = \sum_y p_{X,Y}(x,y)$

Independencia de v.a.

Diremos que dos v.a. X e Y son independientes si vale que

$$F_{X.Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$$

Caso discreto:

$$p_{X.Y}(x,y) = p_X(x)p_Y(y) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$$

Caso continuo:

$$f_{X.Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$$

$$\begin{tikzcd} & f_{X,Y}(x,y) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ f_X(x) & & f_Y(y) \end{tikzcd}$$

$$P_X(x) = \sum_y P_{X,Y}(x,y) = \frac{3}{10} + \frac{7}{10}$$

$$P_Y(y) = ?$$

Bibliografía

Bibliografía

“Mathematical Statistics with Applications”, Dennis D. Wackerly, William Mendenhall III, Richard L. Scheaffer.

“All of Statistics: A Concise Course in Statistical Inference”, Larry Wasserman.