Probabilidad y estadística
Clase 2

Ejercicio 7

Sean X e Y dos v.a. con distribución de Poisson de parámetros μ y λ respectivamente. Hallar la función de probabilidad de W = X + Y.

$\rightarrow X \sim \mathcal{P}oi(\mu) \rightarrow \underline{p_X(x) = \frac{\mu^x}{x!}e^{-\mu}}, \; x \in \mathbb{N}_0$

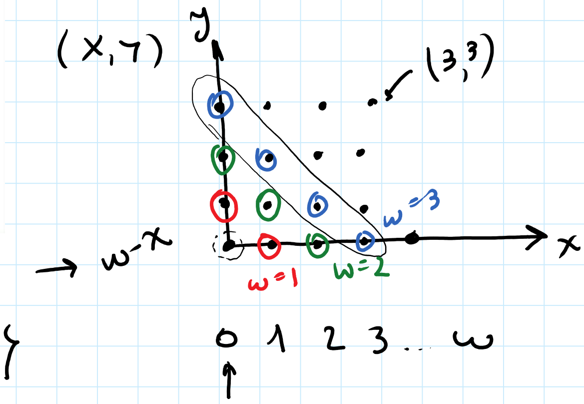
supuesto X e Y independientes.

24

X e Y variables Poisson

$R_X = \{0, 1, 2, \dots\}$

$R_Y = \{0, 1, 2, \dots\}$



$W = X + Y \qquad R_W = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$p_W(w) = \mathbb{P}(W = w)$

Eventos equivalentes

$p_W(0) = \mathbb{P}(X=0, Y=0) = \mathbb{P}(X=0) \cdot \mathbb{P}(Y=0) = \frac{e^{-\mu}\cancel{\mu^0}}{\cancel{0!}} \frac{e^{-\lambda}\cancel{\lambda^0}}{\cancel{0!}}$

$= e^{-(\mu+\lambda)}$

$$p_W(1) = \mathbb{P}(W=1) = \mathbb{P}(X=0, Y=1) + \mathbb{P}(X=1, Y=0) =$$

$$= e^{-\mu} \cdot \lambda e^{-\lambda} + \mu e^{-\mu} e^{-\lambda} =$$

$$= e^{-(\mu+\lambda)} \cdot \frac{(\mu+\lambda)^1}{1!}$$

$$p_W(w) = \mathbb{P}(W = w) = \sum_{i=1}^{w} \mathbb{P}(X=i, Y=w-i) = \sum_{i=1}^{w} \mathbb{P}(X=i) \cdot \mathbb{P}(Y=w-i)$$

$$= \sum_{i=1}^{w} \frac{e^{-\mu} \mu^i}{i!} \cdot \frac{e^{-\lambda} \lambda^{w-i}}{(w-i)!} = \frac{e^{-(\mu+\lambda)}}{w!} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{w} \frac{w!}{i!(w-i)!} \mu^i \lambda^{w-i}}_{(\mu+\lambda)^w}$$

$$W \sim Poi(\mu+\lambda)$$

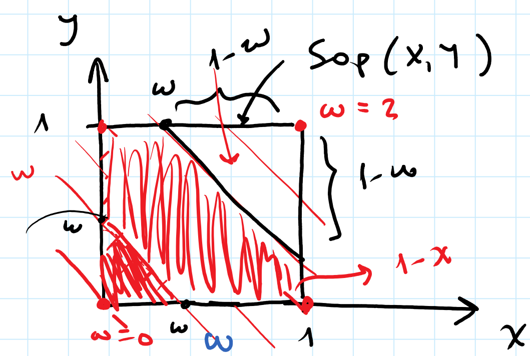
Ejercicio 8

Sean X,Y ~ U(0,1) e independientes. Hallar la función de densidad de W = X+Y

$X \sim \mathcal{U}[a,b]$ $f_X(x) = \frac{1}{b-a}$

25

$X \sim \mathcal{U}[0,1]$ $Y \sim \mathcal{U}[0,1]$



$$f_{XY}(x,y) = \underbrace{f_X(x)}_{} \cdot \underbrace{f_Y(y)}_{}$$

$$= 1 \cdot 1 = 1$$

$W = X + Y$ $Sop(W) = (0,2)$

$F_W(1) = \mathbb{P}(W \le 1) = \mathbb{P}(X+Y \le 1) = \mathbb{P}(Y \le 1-X)$

$$F_W(1) = \mathbb{P}(W \leq 1) = \mathbb{P}(X+Y \leq 1) = \mathbb{P}(Y \leq 1-X)$$

$$= \frac{1 \cdot 1}{2} \cdot 1 = 1/2$$

$w \in [0,1)$

$$F_W(w) = \mathbb{P}(W \leq w) = \frac{w \cdot w}{2} \cdot 1 = \frac{w^2}{2} \qquad w \in [0,1)$$

$$F_W(w) = \mathbb{P}(W \leq w) = 1 - \frac{(1-w)(1-w)}{2} = 1 - \frac{(1-w)^2}{2}$$

$w \in [1,2)$

si $w \geq 2$ $\quad F_W(w) = 1$

$$F_W(w) = \begin{cases} 0 & \text{si } w < 0 \\ w^2/2 & \text{si } 0 \leq w < 1 \\ 1 - \frac{(1-w)^2}{2} & \text{si } 1 \leq w < 2 \\ 1 & \text{si } w \geq 2 \end{cases} \quad ; \quad f_W(w) = \frac{\partial F_W}{\partial w}$$

Ejercicio 1

$X, Y \overset{iid}{\sim} \mathcal{E}(\lambda)$ $\qquad U = X + Y$, $\quad V = \frac{X}{X+Y}$

Sean $X_1, X_2 \overset{i.i.d}{\sim} \mathcal{E}(\lambda)$ y sean $U = X_1 + X_2$ y $V = \frac{X_1}{X_1+X_2}$. Hallar $f_{U,V}(u,v)$ ¿Qué puede decir al respecto?

$f_{U,V}(u,v)$

$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

4

TRANSFORMACIÓN $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$g(X,Y) = (\underbrace{X+Y}_{U}, \underbrace{\tfrac{X}{X+Y}}_{V})$$

CAMBIO DE VARIABLE $\quad f_{UV}(u,v)$

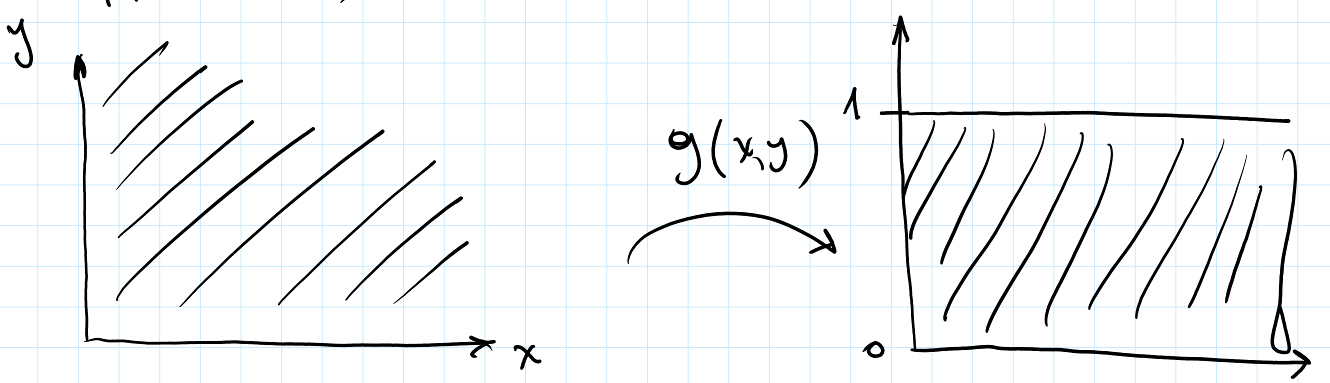
$$\underbrace{\iint_D f_{XY}(x,y)\,dx\,dy}_{\mathbb{P}((X,Y) \in D)} = \underbrace{\iint_{g(D)=\tilde{D}} f_{XY}(g^{-1}(u,v))\,|J_{g^{-1}}|\,du\,dv}_{\mathbb{P}((U,V) \in \tilde{D})}$$

$$f_{UV}(u,v) = f_{XY}(g^{-1}(u,v)) \cdot |J_{g^{-1}}|$$

$$J_g = \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} \end{bmatrix} \qquad g^{-1}(u,v) = (\underbrace{\quad}_{x}, \underbrace{\quad}_{y})$$

- existe inversa única (transformación 1 a 1)
- derivadas parciales continuas

$X, Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$ $\qquad v = \frac{x}{x+y}$



$\mathrm{Sop}(X,Y): \{x>0, y>0\}$ $\qquad \mathrm{Sop}(U,V) = \left\{ \begin{array}{l} u>0 \\ v \in (0,1) \end{array} \right\}$ $\quad u = x+y$

$$f_{UV}(u,v) = \overbrace{\underbrace{f_{XY}}_{(1)}(\underbrace{g^{-1}(u,v)}_{(2)})} \cdot \overbrace{\underbrace{|J_{g^{-1}}|}_{(3)}}\ \mathbb{1}\{u>0, v\in(0,1)\}$$

$\cancel{uv} + u(1-v) =$
$= u$

(1) $\quad f_{XY}(x,y) = \lambda e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda y} = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}$ ✓

(2) $\quad g^{-1}(u,v) = (\overbrace{uv}, \overbrace{u(1-v)})$

- $u = x+y$ $\qquad v = \frac{x}{x+y} = \frac{x}{u} \Rightarrow x = u.v$

$$y = u - x = u - uv = u(1-v)$$

(9) $$|J_{g^{-1}}| = \left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}\right| =$$

$$\left|\det\begin{pmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{pmatrix}\right| = |-\cancel{u}v - u(1-v)|$$

$$= |-u| = u$$

queda $$f_{UV}(u,v) = \underbrace{u\lambda^2 e^{-\lambda u}}\, \mathbb{1}\{u>0,\ v\in[0,1]\}$$

$$U \sim \gamma(2, \lambda)$$

tiempo hasta 2 eventos

$U = X + Y$

$$V \sim \mathcal{U}[0,1]$$

VARIABLES ALEATORIAS CONDICIONADAS.

Ejercicio 3 (P)

1. Se tira un dado equilibrado, y luego se tira una moneda equilibrada tantas veces como indica el dado. Sea X el resultado obtenido en el dado, y sea Y la cantidad de caras obtenidas al lanzar la moneda. a) Obtener la distribución de Y|X=6 y luego la distribución de Y|X=x (para todos los posibles x); b) Obtener la distribución de X|Y=3.

1. Sean X,Y dos v.a. conjuntamente uniformes en el triángulo de vértices (0,0), (2,2), (0,2). Hallar la función de densidad de Y|X=x.

15

X = resultado del dado

Y = # caras que salieron

condicionadas mutuamente

a) $Y|X=6$: # caras que salieron si se tiró 6 veces la moneda

$Y|X=6 \sim Bin(n=6, p=1/2)$

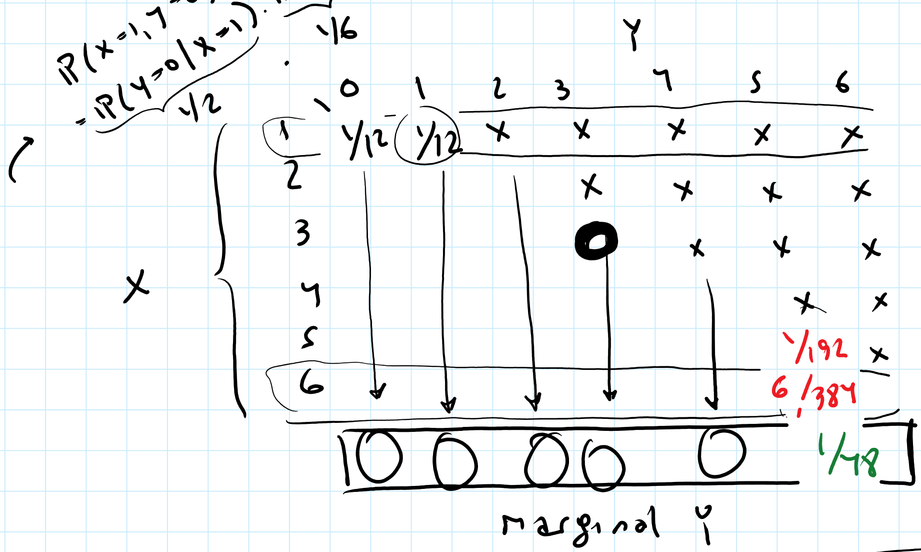
variable aleatoria condicionada

$Y|X=x \sim Bin(n=x, p=1/2)$

$x \in \{1,2,3,4,5,6\}$

$\mathbb{P}(X=1, Y=0) = \mathbb{P}(Y=0|X=1) \cdot \mathbb{P}(X=1)$

$= 1/2 \cdot 1/6$



1) $p_{XY}(5,5) = \mathbb{P}(Y=5|X=5) \cdot \mathbb{P}(X=5)$

$= 1/2^5 \cdot 1/6$

$= 1/192$

2) $p_{XY}(6,5) = 6 \cdot 1/2^6 \cdot 1/6$

$= 6/384$

$p_Y(6) = 7/384$

$X|Y=5$

$$\mathbb{P}(X=5|Y=5) = \frac{p_{XY}(5,5)}{p_Y(5)} = \frac{1/192}{1/48} = 1/4$$

$$\mathbb{P}(X=6|Y=5) = \frac{p_{XY}(6,5)}{p_Y(5)} = \frac{6/384}{1/48} = 3/4$$

U : $X|Y=3$

nueva variable

$R_U = \{3, 4, 5, 6\}$

$$\mathbb{P}(U=3) = \mathbb{P}(X=3|Y=3) = \frac{\mathbb{P}(X=3, Y=3)}{\mathbb{P}(Y=3)} =$$

$$= \frac{p_{XY}(3,3)}{p_Y(3)}$$

$$\mathbb{P}(U=4) = \mathbb{P}(X=4 \mid Y=3) = \frac{\mathbb{P}(X=4, Y=3)}{\mathbb{P}(Y=3)}$$

$$= \frac{p_{XY}(4,3)}{p_Y(3)}$$

$$\mathbb{P}(U=u) = \frac{p_{XY}(u,3)}{p_Y(3)}$$

Variables discretas

Sean X, Y dos variables aleatorias, y sean $p_X(x) > 0$ y $p_{X,Y}(x,y)$ las función de probabilidad marginal de X y la función de probabilidad conjunta respectivamente. Se define la **función de probabilidad condicionada de Y dado que $X = x$** como:

$$\boxed{p_{Y|X=x}(y} = \mathbb{P}[Y=y|X=x] = \frac{\mathbb{P}(X=x, Y=y)}{\mathbb{P}(X=x)} = \boxed{\frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_X(x)}}$$

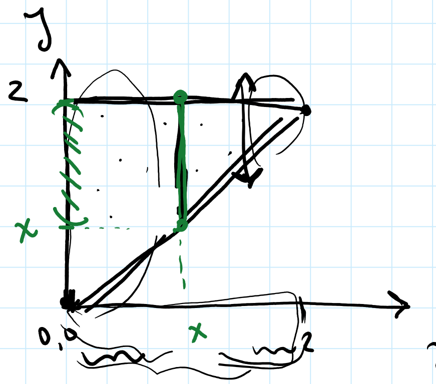
12

$$p_{X|Y=y}(x) = \frac{p_{XY}(x,y)}{p_Y(y)}$$

ej. 2)

X e Y $\mathcal{U}$ pero

$\frac{x \cdot 2}{4}$



$Y|X = 1 \sim \mathcal{U}[1,2]$

idea $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{P(B)}$

① $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\text{área } \triangledown} = \frac{1}{2} \mathbb{1}\{(x,y) \in \triangledown\}$

$\underbrace{Y|X=x}_{\text{v.a continua}}$ $\quad$ Sop $(Y|X=x) = (x, 2)$

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{XY}(x,y) \;①}{f_X(x) \;②}$$

② $f_X(x) = \int f_{XY}(x,y)\, dy$

Idea $P(\ldots) = \dfrac{\ldots}{P(B)}$

(2) $f_X(x) = \int f_{XY}(x,y)\,dy$

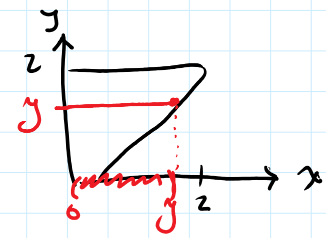
$$= \int_x^2 \frac{1}{2}\,dy = \frac{y}{2}\Big|_x^2$$

$$= \frac{2-x}{2} = -\frac{x}{2} + 1$$

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{1/\cancel{2}}{\frac{2-x}{\cancel{2}}} = \frac{1}{2-x}\,\mathbb{1}\{y \in (x,2)\} \quad \forall x \in (0,2)$$

$$\Longrightarrow \quad Y|X=x \sim \mathcal{U}[x,2]$$

se puede ver que $\quad X|Y=y \sim \mathcal{U}[0,y] \quad \forall y \in (0,2)$



Variables continuas

Sean X, Y dos variables aleatorias con función de densidad conjunta $f_{X,Y}(x,y)$ y densidad marginal de X $f_X(x)$. Se define la **función de densidad condicional de Y dado $X = x$** como

$$\underbrace{f_{Y|X=x}}(y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$$

Obs: Si $f_{Y|X=x}(y) = f_Y(y)$ X e Y son independientes.

13

IDEA $\quad \mathbb{P}(A \cap B) = \underbrace{\mathbb{P}(A|B)}\cdot\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)\cdot P(A)$

Para nosotros
$$\begin{cases} p_{XY}(x,y) = p_{X|Y=y}(x)\cdot p_Y(y) = p_{Y|X=x}(y)\cdot p_X(x) \\ f_{XY}(x,y) = f_{X|Y=y}(x)\cdot f_Y(y) = f_{Y|X=x}(y)\cdot f_X(x) \end{cases}$$

$$f_{XY}(x,y) = \underbrace{f_{X|Y=y}(x) \cdot f_Y(y)}_{\text{factorización de la conjunta}} = f_{Y|X=x}(y) \cdot f_X(x)$$

Ejercicio 4

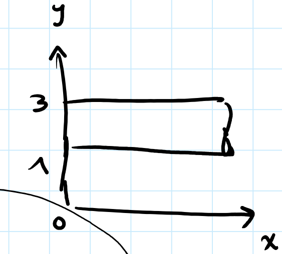
Sean X, Y dos v.a. con función de densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{e^{-x/2y}}{4y}\mathbf{1}\{0 < x, 1 < y < 3\}$$

Hallar la función de densidad de X|Y=y

17

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{4y} e^{-\frac{x}{2y}} \cdot \mathbb{1}\{x > 0,\ 1 < y < 3\}$$



$$= \underbrace{\frac{1}{2} \mathbb{1}\{1 < y < 3\}}_{f_Y(y)} \cdot \underbrace{\frac{1}{2y} e^{-\frac{1}{2y} \cdot x}\ \mathbb{1}\{x > 0\}}_{f_{X|Y=y}(x)}$$

$$Y \sim \mathcal{U}[1,3]\ ;\ X|Y=y \sim \mathcal{E}\left(\lambda = \frac{1}{2y}\right)$$

MEZCLA

Ejercicio 5

Para ir al trabajo Juan puede tomar el subte, o el tren, eligiendo viajar en tren el 60% de las veces. Si viaja en subte, el tiempo de viaje (en horas) es una v.a. con distribución U(0.75,1), mientras que si viaja en tren distribuye de manera uniforme en el intervalo (0.8, 1.25).

1. Calcular la función de densidad del tiempo viaje ✓
2. Hallar la probabilidad de que haya viajado en tren si se sabe que tardó más de 0.9hs en llegar al trabajo. ✓
3. Hallar la probabilidad de que haya viajado en tren si se sabe que tardó exactamente 0.9hs en llegar al trabajo.

$P(\ , T=0.9) = \cancel{P(T=0.9)}\ 0$

20

PROB. TOTAL $\quad \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \mid B_1) \cdot P(B_1) + P(A \mid B_2) \cdot P(B_2)$

T = tiempo total de viaje (en horas)

B_1 = "viaja en subte" $\{J=1\}$

B_2 = "viaja en tren" $\{J=2\}$

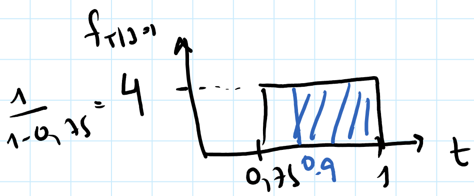
$J \begin{cases} 1 & \text{si subte} \\ 2 & \text{si tren} \end{cases}$

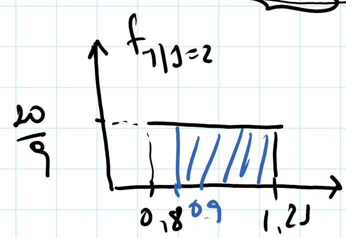
$$T | J=1 \sim \mathcal{U}[0{,}75, 1] \qquad T | J=2 \sim \mathcal{U}[0{,}8 ; 1{,}25]$$

$$\mathbb{P}(\underbrace{T > 0.9}_{A}) = \mathbb{P}(T > 0.9 | J=1) . \mathbb{P}(J=1) + \mathbb{P}(T > 0{,}9 | J=2) . \mathbb{P}(J=2)$$

$$= \quad 2/5 \quad 0{,}4 \quad + \quad 7/9 \quad 0{,}6 \quad =$$

$\mathbb{P}(J=2, T > 0{,}9)$





$$= \frac{47}{75} \simeq 0{,}626$$

$$F_T(t) = \mathbb{P}(T \leq t) = F_{T|J=1}(t) . \mathbb{P}(J=1) + F_{T|J=2}(t) \, \mathbb{P}(J=2)$$

$$f_T(t) = \frac{\partial F_T(t)}{\partial t} = f_{T|J=1}(t) . \mathbb{P}(J=1) + f_{T|J=2}(t) \; \mathbb{P}(J=2)$$

$\rightarrow f_{T|J=1}(t) = 4 \; \mathbb{1}\{t \in (0{,}75, 1)\}$

$\rightarrow f_{T|J=2}(t) = \frac{20}{9} \mathbb{1}\{t \in (0{,}8, 1{,}25)\}$

a)

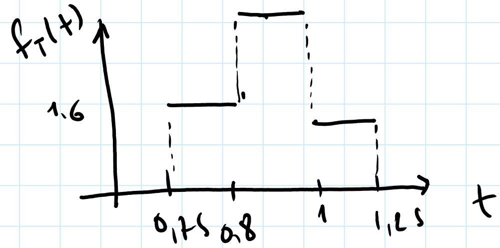
$t \in (0{,}75, 0{,}8) \qquad f_T(t) = 4 . 0{,}4 = 1{,}6$

$t \in (0{,}8, 1) \qquad f_T(t) = 4 . 0{,}4 + \frac{20}{9} . 0{,}6 = \frac{44}{15}$

$t \in (1, 1{,}25) \qquad f_T(t) = \frac{20}{9} . 0{,}6 = \frac{4}{3}$

$t \notin (0{,}75, 1{,}25) \qquad f_T(t) = 0$

$t \notin (0{,}75,\ 1{,}25) \qquad f_T(t) = 0$



b) $$\mathbb{P}(J=2 \mid T>0{,}9) = \frac{\mathbb{P}(J=2,\ T>0{,}9)}{\mathbb{P}(T>0{,}9)}$$

$$= \frac{7/9 \cdot 0{,}6}{2/5 \cdot 0{,}4 + 7/9 \cdot 0{,}6} = \frac{35}{47} =$$

$$= \boxed{0{,}7446}$$