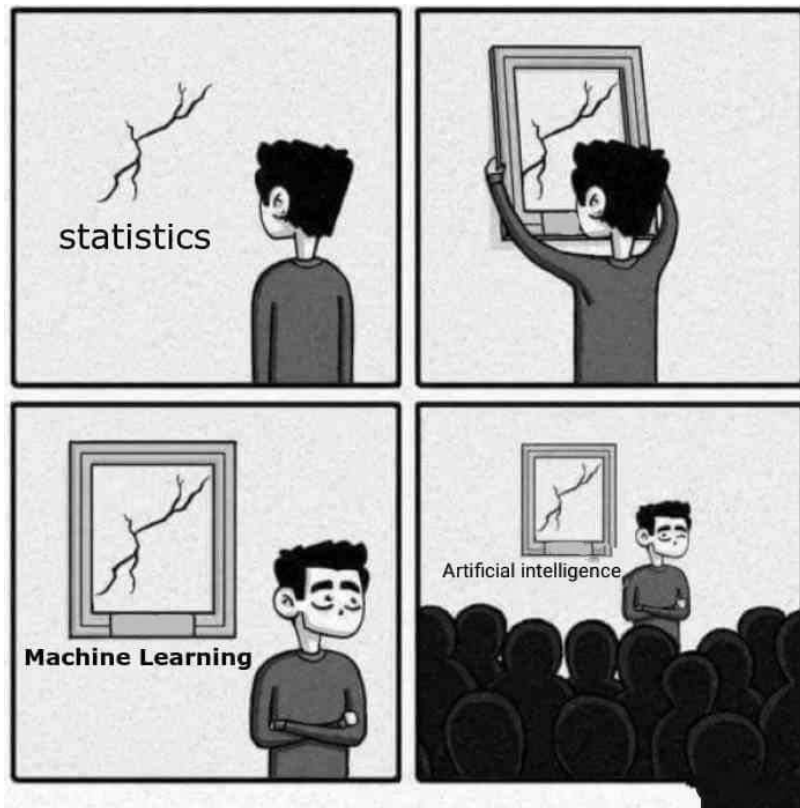
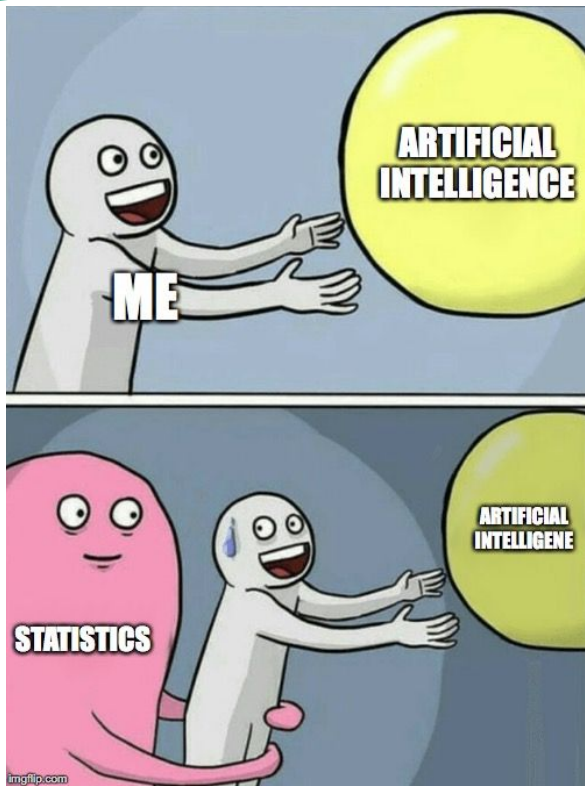


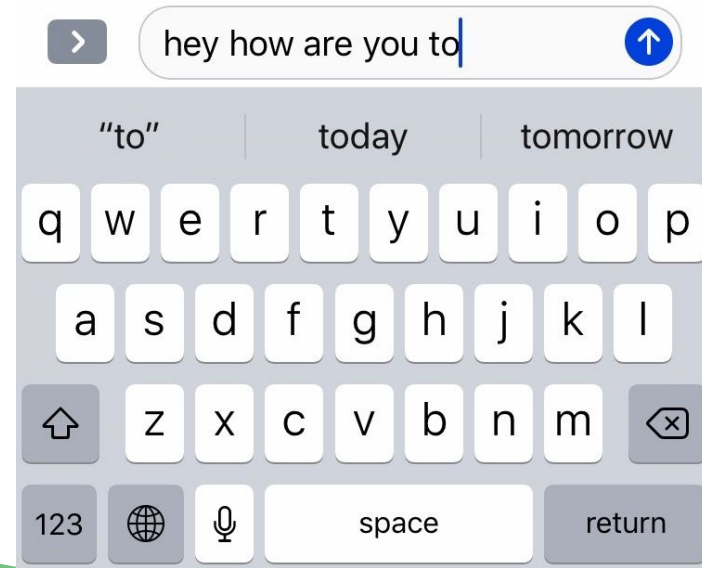
Probabilidad y Estadística

Clase 1

Ud. se encuentra
aquí:

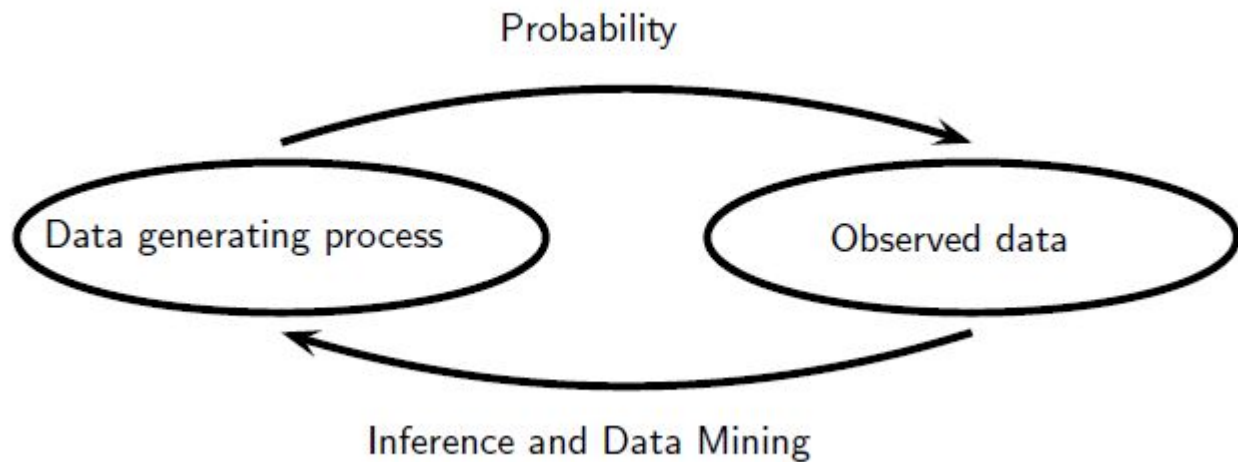
para poder estar
aquí:





Ejemplos de probabilidad en IA?

Probabilidad vs. Estadística



Cronograma

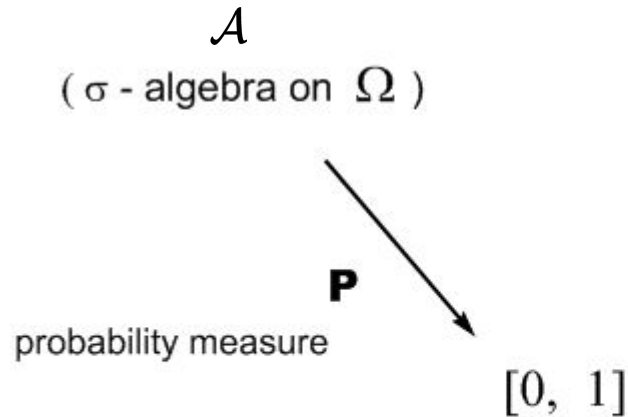
Clase 1	Repaso Distribuciones útiles.
Clase 2	V.a. condicionadas Esperanza condicional
Clase 3	ECM y estimadores de cuadrados mínimos Estimador de máxima verosimilitud
Clase 4	Estimación Bayesiana
Clase 5	Estimación no paramétrica
Clase 6	Intervalos de confianza
Clase 7	Test de hipótesis
Clase 8	Examen

Repaso

Espacio de Probabilidad (Ω, \mathcal{A}, P) y variables aleatorias

$$\begin{aligned}\Omega &\in \mathcal{A} \\ B \in \mathcal{A} &\Rightarrow B^c \in \mathcal{A} \\ B, C \in \mathcal{A} &\Rightarrow B \cup C \in \mathcal{A}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0 \leq \mathbb{P}(A) &\leq 1, \forall A \in \mathcal{A} \\ \mathbb{P}(\Omega) &= 1 \\ A \cap B = \emptyset, &\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)\end{aligned}$$



Probabilidades condicionales y proba. total

Def: Se llama **probabilidad condicional** de A dado B ($\mathbb{P}(A|B)$) a la probabilidad de que ocurra el evento A sabiendo que B ha ocurrido, y está definida por

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Def: Diremos que los eventos B_1, \dots, B_n forman una **partición** si $B_i \cap B_j = \emptyset \forall i, j$ y $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$.

Luego podemos describir al evento A como $A = (A \cap B_1) \cup \dots \cup (A \cap B_n)$ de forma que

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B_1) + \dots + \mathbb{P}(A \cap B_n) = \mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \dots + \mathbb{P}(A|B_n)\mathbb{P}(B_n)$$

Fórmula de probabilidad total

Teorema de Bayes e independencia

Teorema de Bayes: Sean B_1, \dots, B_n una partición de Ω , y A un evento con probabilidad positiva:

$$\mathbb{P}(B_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)}$$

Def: Diremos que dos eventos A y B son **independientes** si y sólo si vale que

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Variables aleatorias

Variables aleatorias

Una va. X es una función que mapea eventos a números.

Ejemplo: basto $\rightarrow 1$, Oro $\rightarrow 2$, espada $\rightarrow 3$, copa $\rightarrow 4$

X tiene asociada una función de distribución, definida como

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

$$F_X(x) \in [0, 1] \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$F_X(x)$ es monótona no decreciente

$F_X(x)$ es continua por derecha

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$$

además se define la función de distribución inversa o función

cuantil como $F_X^{-1}(q) = \inf\{x : F(x) > q\}$

Si F_X es estrictamente creciente y continua, F_X^{-1} es su inversa.

Tipos de v.a.

- Discretas (v.a.d): toman valores en un conjunto discreto o numerable de puntos. Si X es **v.a.d**, tendrá además función de probabilidad dada por

$$p_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$$

- Continuas (v.a.c): toman valores en un intervalo continuo. Si X es una **v.a.c**, tendrá asociada una función de densidad

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

¿Qué propiedades debían cumplir cada una de estas funciones?

$$P(I_n \neq 1 | \Theta) = \frac{P(\Theta | I_n \neq 1) P(I_n \neq 1)}{P(\Theta | I_n \neq 1) P(I_n \neq 1) + P(\Theta | I_n = 1) P(I_n = 1)} \sim 0,19$$

0,99

$$P(I_n \neq 1) = 0,005, \quad P(N_0 | I_n \neq 1) = 0,995$$

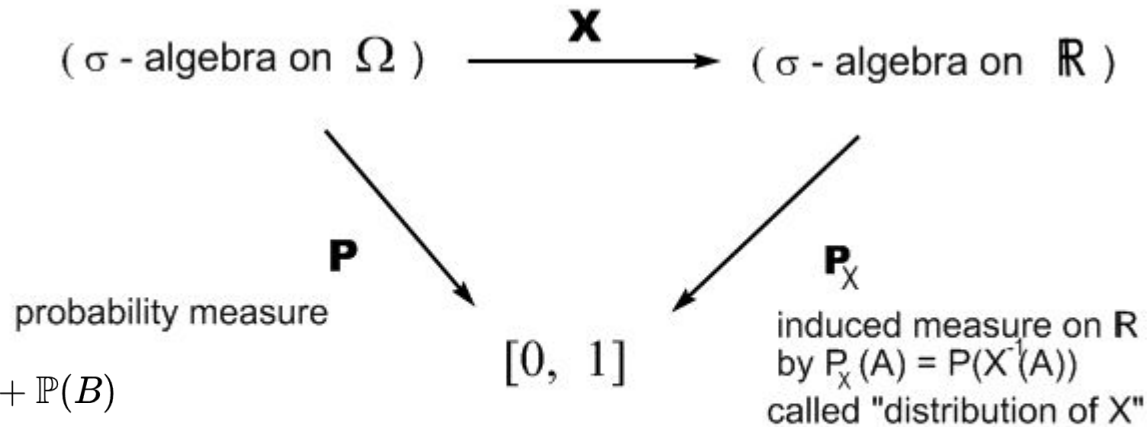
$$P(\Theta | N_0 | I_n \neq 1) = 1 - 0,99$$

Espacio de Probabilidad (Ω, \mathcal{A}, P) y variables aleatorias

$$\begin{aligned} \Omega &\in \mathcal{A} \\ B \in \mathcal{A} &\Rightarrow B^c \in \mathcal{A} \\ B, C \in \mathcal{A} &\Rightarrow B \cup C \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1, \forall A \in \mathcal{A} \\ \mathbb{P}(\Omega) &= 1 \end{aligned}$$

$$A \cap B = \emptyset, \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$



$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Vectores aleatorios

Distribución conjunta y marginales

$$F_X(b) =$$

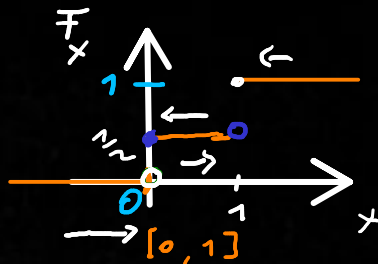
$X \backslash Y$	$Y = 0$	$Y = 1$	
$X = 0$	$1/10$	$2/10$	$3/10$
$X = 1$	$3/10$	$4/10$	$7/10$
	$4/10$	$6/10$	1

Si tenemos dos variables X e Y se define su **función de distribución conjunta** como $F_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y)$ y vale la regla del rectángulo:

$$\mathbb{P}(a < X \leq b, c < Y \leq d) = F_{X,Y}(b, d) - F_{X,Y}(a, d) - F_{X,Y}(b, c) + F_{X,Y}(a, c)$$

Caso continuo: $f_{X,Y}(x, y)$ es la **función de densidad conjunta** y se definen las **funciones de densidad marginales** como $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y) dy$ y $\int_a^b f_X(x) dx = \mathbb{P}(a \leq X \leq b)$
 $f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y) dx$

Caso discreto: $p_{X,Y}(x, y)$ es **función de probabilidad conjunta** y se definen las **funciones de probabilidad marginal** como $p_X(x) = \sum_y p_{X,Y}(x, y)$ y
 $p_Y(y) = \sum_x p_{X,Y}(x, y)$



- $F_x \in [0, 1]$
- Monótona No Dec.
- Cont. por Derecha
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_x(x) = 0$

$$F_x(x) \rightarrow 1 \text{ as } x \rightarrow +\infty$$

$$F_x(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

Dada una moneda equilibrada

$Y =$ " # Numero de tiros hasta observar la primera cara"

$$Y = \mathbb{N}$$

$$P_Y(1) = P(Y=1) = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$P_Y(2) = P(Y=2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0.25$$

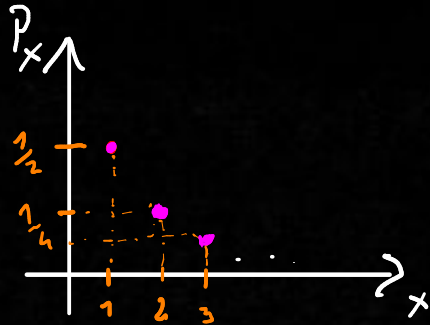
$$P_Y(3) = P(Y=3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Omega = \{ \{c\}, \{x\} \}$$

$$Y = \Omega \rightarrow \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$$

$$P(B|A) = P(B)$$

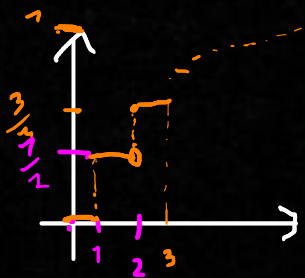
$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$



$$P_X(x) \geq 0$$

$$\sum_{x \in A} P_X(x) = 1$$

$$\sum_{x \in B} P_X(x) = P_X(X \in B)$$



Independencia de v.a.

Diremos que dos v.a. X e Y son **independientes** si vale que

$$F_{X.Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Caso **discreto**:

$$p_{X.Y}(x, y) = p_X(x)p_Y(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Caso **continuo**:

$$f_{X.Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

x

Momentos

Momentos

$$\frac{p}{f}(x) \left\{ \begin{array}{l} f_X \\ p_X \end{array} \right.$$

Esperanza (o media):

$$E[X] = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx \quad ; \quad \sum_x x p(x)$$

X, Y

$$E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[g(X)] &= \int g(x) f_X(x) dx \\ &= \sum g(x) p_X(x) \end{aligned}$$

Varianza:

$$E[X^2 - 2X \overbrace{E[X]}^{\mu_X} + (E[X])^2] = E[X^2] - 2\mu_X E[X] + E[X]^2$$

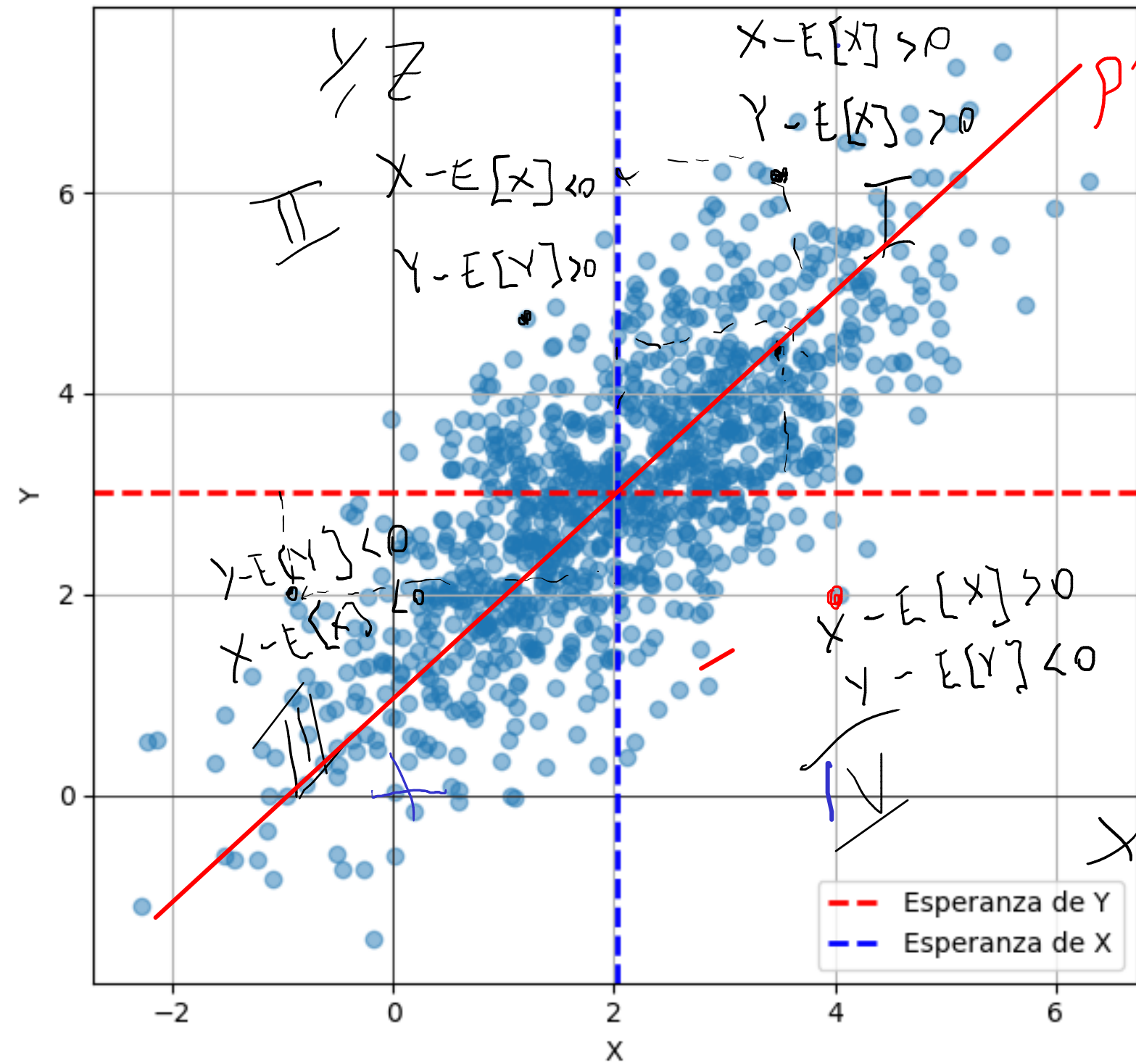
$$\text{var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$$

Covarianza:

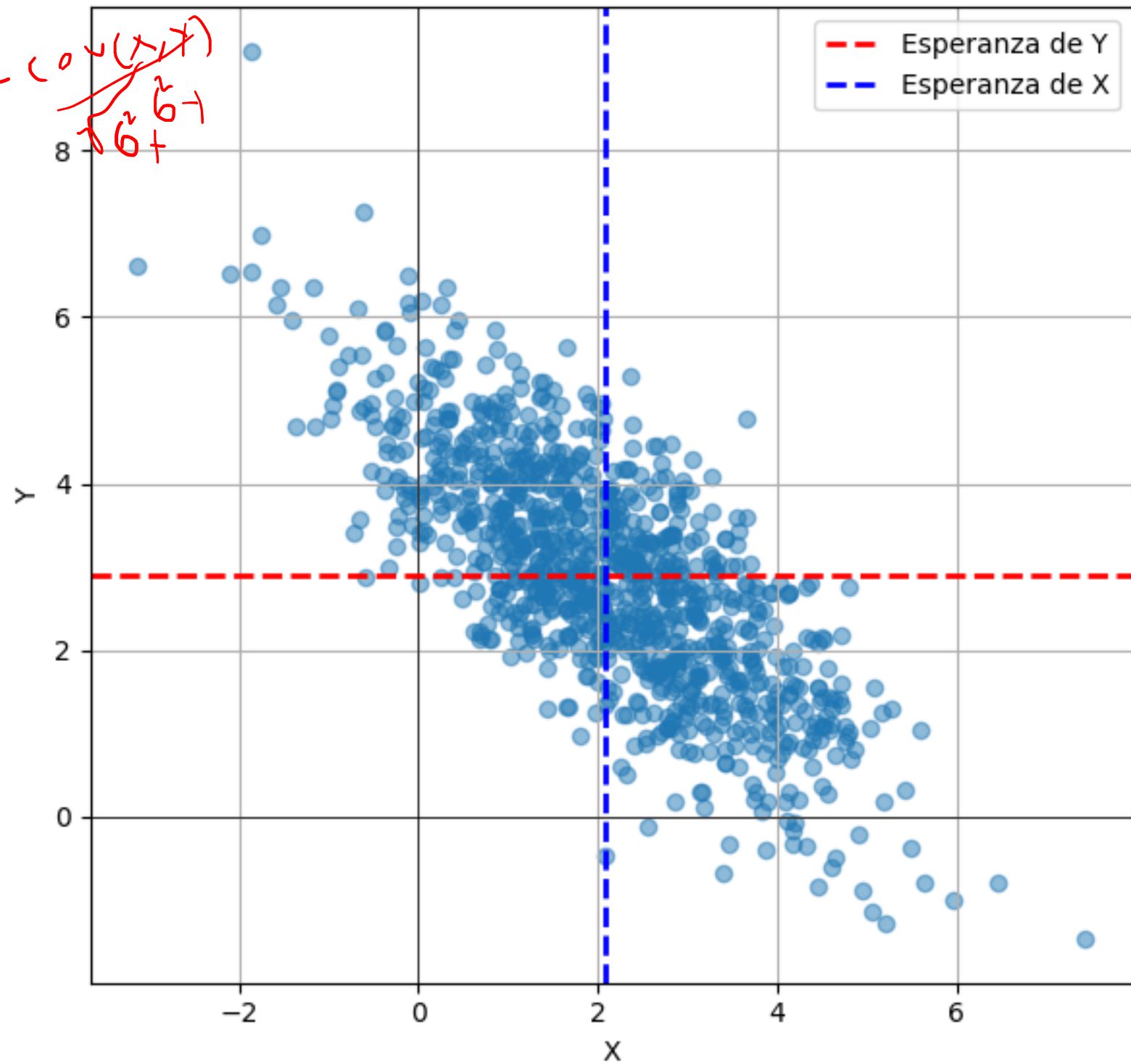
$$= E[X^2] - 2\mu_X^2 + (\mu_X)^2 = E[X^2] - \mu_X^2 = E[X^2] - (E[X])^2$$

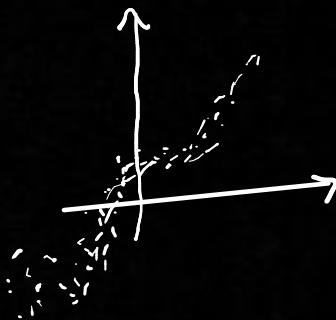
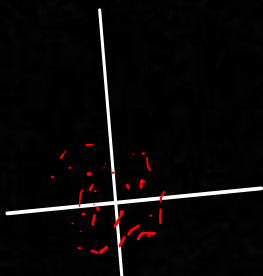
$$\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

Covarianza Positiva



Covarianza Negativa





Algunas distribuciones útiles

Variables discretas

$$X = \begin{cases} 1 & E_x: t_0 \\ 0 & F_x: (t_0) \end{cases} \quad X \sim \text{Ber}(p)$$

$$P_X = \begin{cases} p & x=1 \\ 1-p & x=0 \end{cases}$$

- **Bernoulli(p):** $X = \{0,1\}$. Asociada a la ocurrencia o no de un éxito

- **Binomial(n, p):** cantidad de éxitos en n ensayos.

$$Y \sim \text{Bin}(n, p) \quad P_Y(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} ;$$

- **Geométrica(p):** cantidad de ensayos que debo realizar hasta observar el primer éxito

$$Z \sim \text{Geo}(p) \quad P_Z(z) = (1-p)^{z-1} p$$

$$P(z=3) = \left(\frac{1}{2}\right)^{3-1} \cdot \frac{1}{2}$$

$$n=6, \quad \begin{matrix} E & F & E & E & E & F \\ E & E & E & E & F & E \end{matrix}$$

$$x=4, \quad n-x=2$$

Ejercicio 0

$$P_X(X=3)=$$

Se tira sucesivamente un dado

1. Probabilidad de necesitar ~~de~~ 3 tiros hasta ver el primer 2
2. Probabilidad de ver exactamente un 2 en 5 tiros

$$X \sim \text{Geo}\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$n=5, p=\frac{1}{6}$$

$$Z \sim \text{Bin}\left(5, \frac{1}{6}\right) \quad P_Z(Z) = \binom{5}{1} p (1-p)^4$$

Variables continuas

$$I\{a \leq x < b\} = \begin{cases} 1 & a \leq x < b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$|a - b| = \varepsilon \quad \int_{\mathbb{R}} f_X(x) dx = 1$$

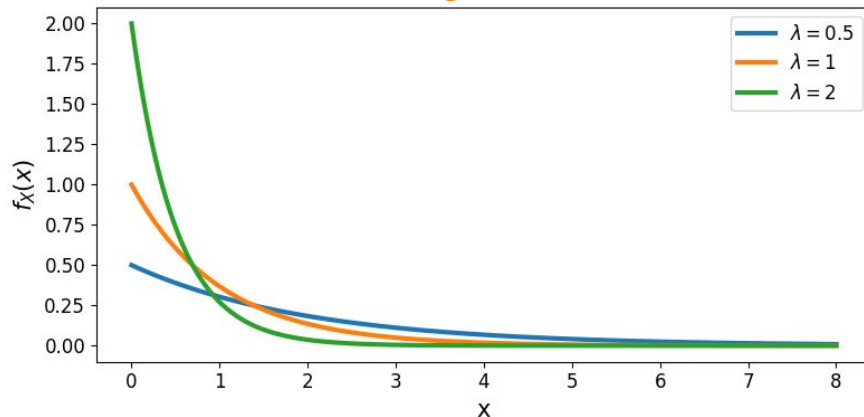
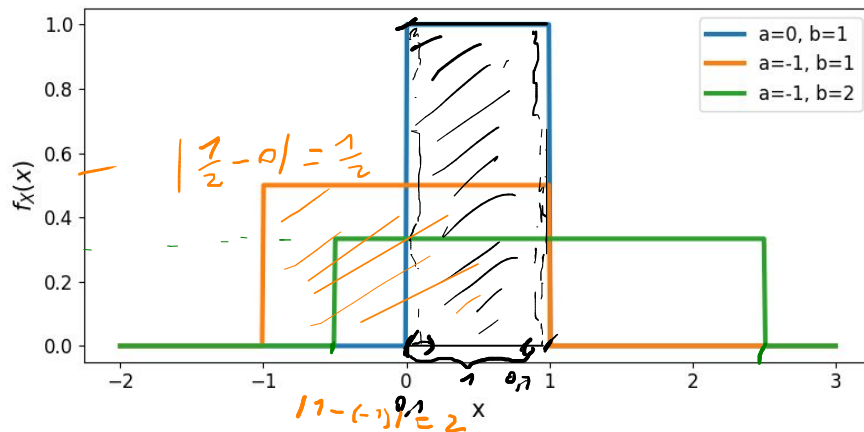
- Uniforme:** todos los puntos son equiprobables. $X \sim \mathcal{U}(a, b)$

$$\frac{1}{4 - (-\frac{1}{2})} = \frac{1}{\frac{9}{2}} = \frac{2}{9}$$

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \mathbf{I}\{a < x < b\}$$

- Exponencial:** sirve para modelar tiempos hasta eventos que no tienen memoria. $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{I}\{x > 0\}$$



Variables continuas

- Normal (gaussiana). $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

μ es la media
 σ^2 es la
 varianza

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

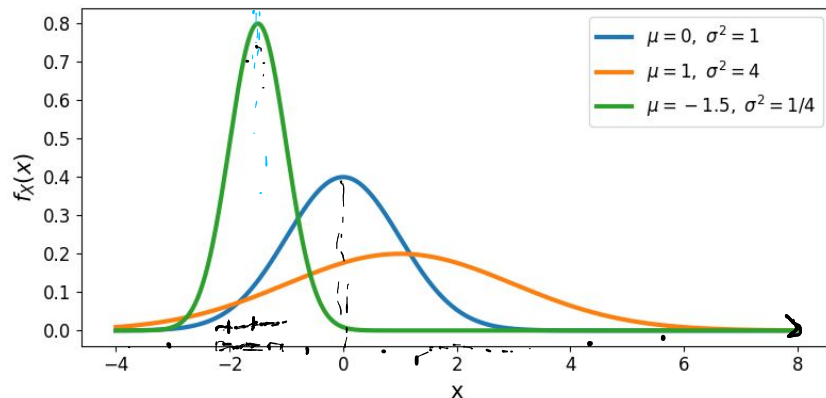
$$X \sim \mathcal{N}(0, 1), f_X(x) =$$

Propiedades: Sean X, Y dos v.a. Independientes

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \xrightarrow{Z} \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad (\text{estandarización})$$

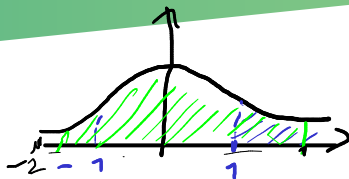
$$X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2), Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2) \rightarrow aX + bY \sim \mathcal{N}(a\mu_X + b\mu_Y, a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2)$$

(combinación lineal de normales es normal)



Ejercicio 1

$$X \sim \mathcal{N}(0, 1)$$



Sea X una v.a con distribución normal estándar. Hallar la probabilidad de que

1. $X > 1$; $P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - F_X(1)$; $P(X < 2) - P(X < -2)$

2. $X < -1$

3. $|X| < 2$

$$P(-2 < X < 2) ; F_X(2) - F_X(-2)$$

4. Hallar los cuantiles 0.1 y 0.9

Sea además $Y \sim \mathcal{N}(2, 9)$

$$X + Y \sim \mathcal{N}(2 \cdot \mu_X + \mu_Y, 4\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$$

1. Hallar $P(2X + Y < 5)$

$$\sim \mathcal{N}(2, 13)$$

Ejercicio 2

El tiempo (en minutos) entre llamadas a un call center tiene una distribución exponencial de parámetro $1/5$.

1. Calcular la probabilidad de que la primer llamada llegue después de 2 minutos
2. Calcular la probabilidad de que la primer llamada llegue después de los 5 minutos, si se sabe que en los primeros 3 minutos no se recibieron llamados

Distribución normal multivariada

Función de densidad conjunta

Sea $\underline{X} = [X_1, \dots, X_n]^T$ un vector aleatorio continuo, diremos que X tiene distribución normal multivariada, si su función de densidad conjunta es de la forma

$$f_{\underline{X}}(\underline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\Sigma|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2} (\underline{x} - \underline{\mu})^T \Sigma^{-1} (\underline{x} - \underline{\mu})} , \quad \Sigma$$

media

$$\underline{\mu} = [\mu_1, \dots, \mu_n]^T$$

matriz de covarianza .

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & cov(X_1, X_2) & \dots & cov(X_1, X_n) \\ cov(X_2, X_1) & \sigma_2^2 & \dots & cov(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cov(X_n, X_1) & cov(X_n, X_2) & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

Notación: $\underline{X} \sim \mathcal{N}(\underline{\mu}, \Sigma)$, .

Distribuciones marginales

$$X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2) \dots$$

$$\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \Sigma) \Rightarrow X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$$

$$\boldsymbol{\mu} = [\mu_1, \dots, \mu_n]^T$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & cov(X_1, X_2) & \dots & cov(X_1, X_n) \\ cov(X_2, X_1) & \sigma_2^2 & \dots & cov(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cov(X_n, X_1) & cov(X_n, X_2) & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 3

Sean X,Y dos v.a. Con función de densidad conjunta

$$x - 0 = x$$

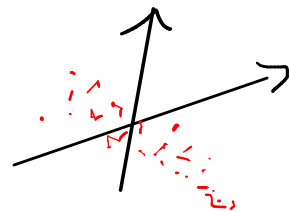
$$\sigma_1^2 = 1, \sigma_2^2 = 2$$

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi \cdot 0.6} e^{-\frac{1}{2} \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -0.8 \\ -0.8 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}$$

1. Calcular $E[X]$, $E[Y]$, $\text{var}(X)$, $\text{var}(Y)$, y $\text{cov}(X,Y)$
2. Hallar las densidades marginales de X e Y
3. Calcular $P(X < 2, Y < -1)$

$$X \sim N(\mu_X = 0, \sigma^2 = 1)$$

$$Y \sim N(0, 1)$$



Bibliografía

Bibliografía

“Mathematical Statistics with Applications”, Dennis D. Wackerly, William Mendenhall III, Richard L. Scheaffer.

“All of Statistics: A Concise Course in Statistical Inference”, Larry Wasserman.