La cantidad de accidentes semanales en una planta industrial tiene una distribución de Poisson de media μ. En una muestra de 100 semanas se observaron las frecuencias:

Cantidad de accidentes	0	1	2	3	4	5
Frecuencia	10	29	25	17	13	6

A priori, μ tiene una distribución exponencial de media 2. Hallar la distribución a posteriori de μ.

X = # de accidentes por semana.

$n = 100$ $\quad X_i|_{M=\mu} \overset{iid}{\sim} \mathcal{P}oi(\mu)$

Se lee así: hubo 10 semanas sin accidentes, hubo 29 semanas con 1 accidente, hubo 25 semanas con 2 accidentes ...

A priori

$\hookrightarrow M \sim \mathcal{E}(1/2)$ (también es caso particular de una gama $\Rightarrow$ pa' usarlas conjugadas)

$\hookrightarrow$ uso M para la v.a. que represente a μ

A posteriori:

$$f_{M|\underline{X}=\underline{x}}(\mu) = \frac{p_{\underline{X}|M=\mu}(\underline{x})\,\pi(\mu)}{\int p_{\underline{X}|M=\mu}(\underline{x})\,\pi(\mu)\,d\mu}$$

$$\pi(\mu) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}\mu}\,\mathbb{1}\{\mu>0\}$$

$$p_{\underline{X}|M=\mu} = \prod_{i=1}^{100} p_{X_i|M=\mu}(x_i) = \prod_{i=1}^{100} \frac{\mu^{x_i}}{x_i!} e^{-\mu} = \frac{\mu^{\sum x_i}\, e^{-100\cdot\mu}}{\prod_{i=1}^{100} x_i!}$$

$$\Rightarrow f_{M|\underline{X}=\underline{x}}(\mu) = \frac{\dfrac{\mu^{\sum_{}^{100} x_i}\, e^{-100\cdot\mu}}{\prod_{i=1}^{100} x_i!}\,\dfrac{1}{2} e^{-1/2\,\mu}\,\mathbb{1}\{\mu>0\}}{\int \dfrac{\mu^{\sum^{100} x_i}\, e^{-100\cdot\mu}}{\prod_{i=1}^{100} x_i!}\,\dfrac{1}{2} e^{-1/2\,\mu}\,\mathbb{1}\{\mu>0\}\,d\mu}$$

no depende de μ $\Rightarrow$ constante

saco las constantes

$$\propto \mu^{\sum^{100} x_i}\, e^{-100\mu}\, e^{-1/2\mu}\,\mathbb{1}\{\mu>0\}$$

$$= \mu^{\sum^{100} x_i}\, e^{-100{,}5\,\mu}\,\mathbb{1}\{\mu>0\}$$

$\to m = \sum x_i + 1$

Trato de encontrar los parámetros de la gamma:

$$\frac{\lambda^m}{\Gamma(m)}\,\mu^{m-1}\, e^{-\lambda\mu}\,\mathbb{1}\{\mu>0\}$$

$$\Rightarrow \quad M \mid \underline{X} = \underline{x} \sim \Gamma\left(\sum_{i=1}^{100} x_i + 1,\ 100{,}5\right)$$

Con la tablita de datos, cuánto vale $\sum_{i=1}^{100} x_i$? $\sum x_i = 0 \cdot 10 + 1 \cdot 29 + 2 \cdot 25 + 3 \cdot 17 + 4 \cdot 13 + 5 \cdot 6 = 212$

de accidentes

de veces que vi esa cantidad de accidentes

Reemplazando: $\boxed{M \mid \underline{X} = \underline{x} \sim \Gamma\left(213,\ 100{,}5\right)}$