Se desea estimar la media de una variable con distribución N(μ,9) a partir del promedio de n realizaciones. Analizar las bondades de las que goza dicho estimador.

$X_1, X_2, \ldots, X_n = \underline{X}$ $\quad \hat{\mu}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

$\text{var}(\hat{\mu})$? $\quad B(\hat{\mu})$? $\quad ECM(\hat{\mu}^n)$?

$B = \mathbb{E}[\hat{\mu} - \mu] = \underline{\mathbb{E}[\hat{\mu}]} - \mu$

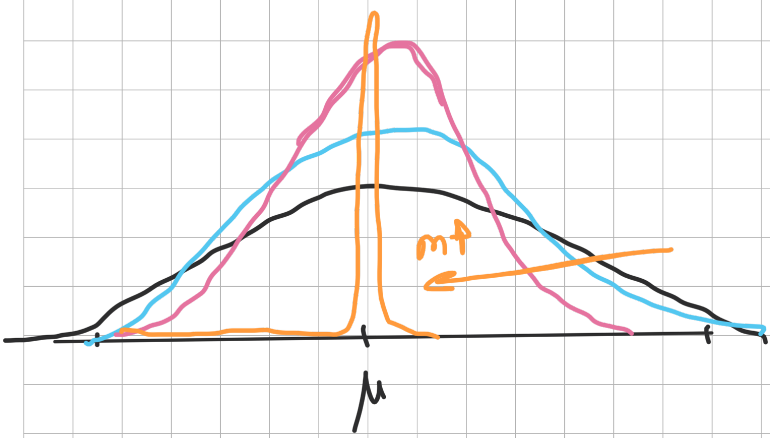
$\mathbb{E}[\hat{\mu}] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\mathbb{E}[X_i]}_{\mu} = \frac{1}{n} n\mu = \mu$

$\Rightarrow B(\hat{\mu}^n) = 0 \rightarrow$ insesgado

$\text{var}(\hat{\mu}) = \text{var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\text{var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$

$\mathbb{E}\left[(\hat{\mu} - \mathbb{E}[\hat{\mu}])^2\right]$ $\quad \overset{\text{indep.}}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\text{var}(X_i)}_{9}$

$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} 9 = \frac{n\,9}{n^2} = \frac{9}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$



$ECM = \text{var}(\hat{\mu}) + B^2 = \underbrace{\frac{9}{n} + 0} \longrightarrow 0$

Teorema de Bayes

$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$

X cont $\quad \Theta$ cont. $\to$ di apo $\quad$ func de proba

X cont $\quad \Theta$ discreto $\to p_{\Theta|\underline{X}=\underline{x}}(\theta) : \dfrac{f_{\underline{X}|\Theta=\theta}(\underline{x})\,\pi(\theta)}{\sum_{\theta} f_{\underline{X}|\Theta=\theta}(\underline{x})\,\pi(\theta)}$

X discreto $\quad \Theta$ discreto $\to p_{\Theta|\underline{X}=\underline{x}}(\theta) = \dfrac{p_{\underline{X}|\Theta=\theta}(\underline{x})\,\pi(\theta)}{\sum_{\theta} p_{\underline{X}|\Theta=\theta}(\underline{x})\,\pi(\theta)}$

La posición del impacto en un tiro al blanco (en decímetros) respecto del cero sobre el eje x es una variable aleatoria X con distribución normal de media cero y varianza 1/θ, donde θ representa la precisión del tirador.
A priori, la precisión θ tiene una distribución Chi-cuadrado de 8 grados de libertad. Lucas tiro 10 veces al blanco y observó que $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 17$. Hallar la distribución a posteriori de θ.
~~Hallar la estimación de Bayes de θ para la el riesgo cuadrático~~

$n = 10$

$X_i \mid \Theta = \theta \sim N(0, 1/\theta)$

$\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 17$

$$\pi(\theta) = \frac{1}{2^4\,\Gamma(4)}\,\theta^{4-1} e^{-\theta/2}\, \mathbb{1}\{\theta > 0\}$$

$m = k/2 \quad \lambda = 1/2 \quad \Gamma(4, 1/2)$

$$f_{\Theta|\underline{X}=\underline{x}}(\theta) = \frac{f_{\underline{X}|\Theta=\theta}(\underline{x})\,\pi(\theta)}{\int \dots \, d\theta}$$

$$f_{\underline{X}|\Theta=\theta}(\underline{x}) \overset{iid}{=} \prod_{i=1}^{10} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1/\theta}}\, e^{-\frac{x_i^2 \cdot \theta}{2}} = \frac{\theta^{10/2}}{(\sqrt{2\pi})^{10}}\, e^{-\frac{\sum x_i^2}{2\,1/\theta}}$$

17

$$f_{\Theta|\underline{X}=\underline{x}}(\theta) = \frac{\frac{\theta^{10/2}}{(\sqrt{2\pi})^{10}}\, e^{-\frac{\sum_{i=1}^{10} x_i^2 \cdot \theta}{2}} \cdot \frac{1}{2^4 \cdot 3!}\,\theta^3 e^{-\theta/2}\, \mathbb{1}\{\theta > 0\}}{\int \dots \, d\theta}$$

} facto de escala

$$\propto \theta^5 e^{-\sum x_i^2 \cdot \frac{\theta}{2}}\, \theta^3 e^{-\theta/2}\, \mathbb{1}\{\theta > 0\}$$

$\Gamma(m, \lambda)$

$$\frac{\lambda^m}{\Gamma(m)}\,\theta^{m-1} e^{-\lambda \theta}\, \mathbb{1}\{\theta>0\} = \theta^{8} e^{-\frac{\theta}{2}\left(\sum x_i^2 + 1\right)}\, \mathbb{1}\{\theta > 0\}$$

17

$m-1 \to m = 9$

$\lambda = 9 = \dfrac{17+1}{2}$

$$\Theta \mid \underline{X} = \underline{x} \sim \Gamma(9, 9)$$

$$\hat{\Theta} = \mathbb{E}[\Theta \mid \underline{X} = \underline{x}] = 9/9 = 1$$

MAP: $\frac{\alpha_n - 1}{\lambda} = \frac{9-1}{9} = 8/9$

$\mathbb{P}(X \in A) = \int_A \int_{-\infty}^{\infty} f_{X|\Theta=\theta}(x) f_{\Theta|\underline{X}=\underline{x}}(\theta) d\theta dx$ ← prob. total

$$= \int_A \int f_{X|\Theta=\theta}(x)\, f_{\Theta|\underline{X}=\underline{x}}(\theta)\, dx\, d\theta$$

Si Θ es disc. $\sum_{\theta} f_{X|\Theta=\theta}(x)\, p_{\Theta|\underline{X}=\underline{x}}(\theta)$

La probabilidad de acertar a un blanco es p. Se realizan 10 tiros independientes, en los cuales se observaron 4 aciertos. A partir este valor observado estimar el valor de p por MV. $p \in (0,1)$

$\underline{X} = (X_1, \dots, X_{10})$, $X_i \overset{iid}{\sim} \mathcal{B}er(p)$

log verosimilitud

$$L(p; \underline{x}) = \prod_{i=1}^{10} p^{x_i} (1-p)^{1-x_i} = p^{\sum x_i} (1-p)^{10 - \sum x_i}$$

$$\hookrightarrow \ln(L(p;\underline{x})) = \left(\sum x_i\right) \ln(p) + \left(10 - \sum x_i\right) \ln(1-p)$$

$$\frac{d \ln(L(p;\underline{x}))}{dp} = \frac{\sum x_i}{p} - \frac{(10 - \sum x_i)}{1-p} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sum x_i}{p} = \frac{10 - \sum x_i}{1-p} \Rightarrow (1-p)\sum x_i = p(10 - \sum x_i)$$

$$\Rightarrow \sum x_i - \cancel{p\sum x_i} = 10p - \cancel{p\sum x_i} \Rightarrow \hat{p} = \frac{\sum x_i}{10} = 0{,}4$$

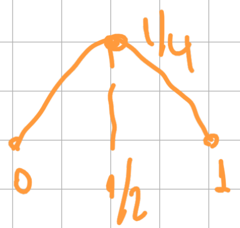
($\sum x_i = 4$)

$\hat{p}(\underline{X}) = \frac{\sum X_i}{10}$ $\qquad E[\hat{p}] = \frac{1}{10}\sum E[X_i] = \frac{1}{10}\cdot 10\, E[X_1] = E[X_1] = p$

$\Rightarrow \hat{p}$ es insesgado

$B(\hat{p}) = E[\hat{p} - p] = E[\hat{p}] - p = p - p = 0$ ✓

$Var(\hat{p}) = Var\left(\frac{1}{10}\sum X_i\right) = \frac{1}{10^2} Var\left(\sum X_i\right) \overset{\text{indep}}{=} \frac{1}{10^2}\sum Var(X_i) \overset{i.d}{=} \frac{1}{10^2}\, 10 \cdot Var(X_1) = \frac{Var(X)}{10} = \frac{\boxed{p(1-p)}}{10} < 1/40$



$ECM = Var(\hat{p}) + 0 = 1/40$

1. Sea X~U(0, θ). Hallar el EMV para θ basado en una muestra de tamaño n.
2. Si en una muestra de tamaño 3 se observaron los valores (0.756, 1.1, 3,11), hallar el valor estimado de θ.

$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} \mathbb{1}\{0 < x_i < \theta\} = \frac{1}{\theta^n} \mathbb{1}\{\theta > \max(\underline{x})\}$

$\hat{\theta} = \max(\underline{X}) = 3.11$

→ todas las indicadoras valen 1

↳ Hay 1 indicadora que vale 0 $\Rightarrow L(\theta) = 0$

estimamos p $\qquad \hat{p} = \frac{\sum x_i}{10} = 4/10$

Siguiendo el ejercicio 7, estimar la probabilidad de que se necesiten al menos 2 tiros para observar el primer acierto.

N: # de tiros hasta el 1º acierto

$N \sim \text{Geométrica}(p)$

$\mathbb{P}(N \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(N < 2) = 1 - \mathbb{P}(N = 1) = 1 - p$

Es función de p

ppio de invariancia

$\widehat{\mathbb{P}(N \geq 2)} = 1 - \hat{p} = 1 - 4/10 = 0{,}6$