

Probabilidad y Estadística para Inteligencia Artificial

Examen

9 de agosto de 2023

Docentes: Magdalena Bouza, Eric Koplin

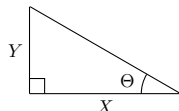
Por favor seguir los siguientes pasos para entregar las soluciones de los ejercicios:

- Subir la resolución al campus ([link para la de exámenes](#)).
- Tienen tiempo hasta el martes 15/08 19hs para entregar el examen
- **Entregar todos los desarrollos en formato pdf.**
- El examen se aprueba con al menos 2 ejercicios bien. Los ejercicios deben estar correctamente desarrollados, explicando todos los pasos necesarios para la resolución.

1. En un canal de comunicación se envían símbolos binarios en una proporción de tres *ceros* por cada cuatro *unos*. El ruido del canal genera errores en la transmisión, en particular se observó que con probabilidad $1/4$ un *cero* es recibido como un *uno*, mientras que la probabilidad de que un *uno* sea recibido como un *cero* es de $1/3$.

- a) Si se recibe un *uno*, cuál es la probabilidad de que se haya enviado un *uno*?
- b) Asumiendo independencia entre los símbolos, si se recibe el mensaje *cero-cero*, cuál es la distribución de los cuatro posibles mensajes que pudieron haber sido enviados?

2. Para fabricar una prenda, Roberto necesita cortar retazos de tela triangulares. Cada recorte que hace es un triángulo rectángulo, cuyos catetos (X e Y) son variables aleatorias que dependen del ángulo de corte Θ , donde $\Theta \sim \text{Uniforme}(0, \pi/2)$. El molde sigue la siguiente figura:



- a) Encontrar la distribución condicional de $Y \mid X = x$.
 - b) ¿Cuál es el soporte y a qué distribución corresponde $Y \mid X = x$?
 - c) ¿Cuál es la probabilidad $\mathbf{P}[Y \leq 10 \mid X = 1]$?
3. Un mayorista requiere caracterizar el stock diario X de un determinado producto. Se sabe que el stock $X \mid \Lambda = \lambda$ se distribuye como una $\text{Poisson}(\lambda)$, para un $\lambda > 0$ determinado. La logística se planifica en base a la distribución *a priori* $\Lambda \sim \text{Gamma}(10, 1)$. Se registraron a lo largo de 6 días los siguientes stocks i.i.d. $\underline{x} = [20, 5, 6, 30, 2, 5]$.
- a) Encontrar la distribución *a posteriori* de Λ .
 - b) Dada la muestra, estime la probabilidad de que una nueva observación X sea mayor a 30.
4. La producción anual (en kilos) de fruta de un manzano es una variable aleatoria con distribución normal con desvío estándar (conocido) de 40 kilos. Para estudiar la peso medio producido se plantan n árboles, suponiendo que el peso producido por cada uno es independiente de los demás.
- a) Encontrar el tamaño muestral n_0 más chico posible de manera de garantizar que un intervalo de confianza para μ de nivel 0.95 tenga una longitud no mayor a 10. *Sugerencia: buscar el intervalo de confianza para un n genérico y analiza como afecta a la longitud del intervalo.*
 - b) Se observa una muestra aleatoria de tamaño n_0 encontrado en **a)** con promedio \bar{x} y se considera el test de hipótesis
$$\begin{cases} H_0 : & \mu = 100 \\ H_1 : & \mu \neq 100 \end{cases}$$
, ¿Cuál es el nivel de significancia del test $\mathbf{1}\{|\bar{x} - 100| > 5\}$?