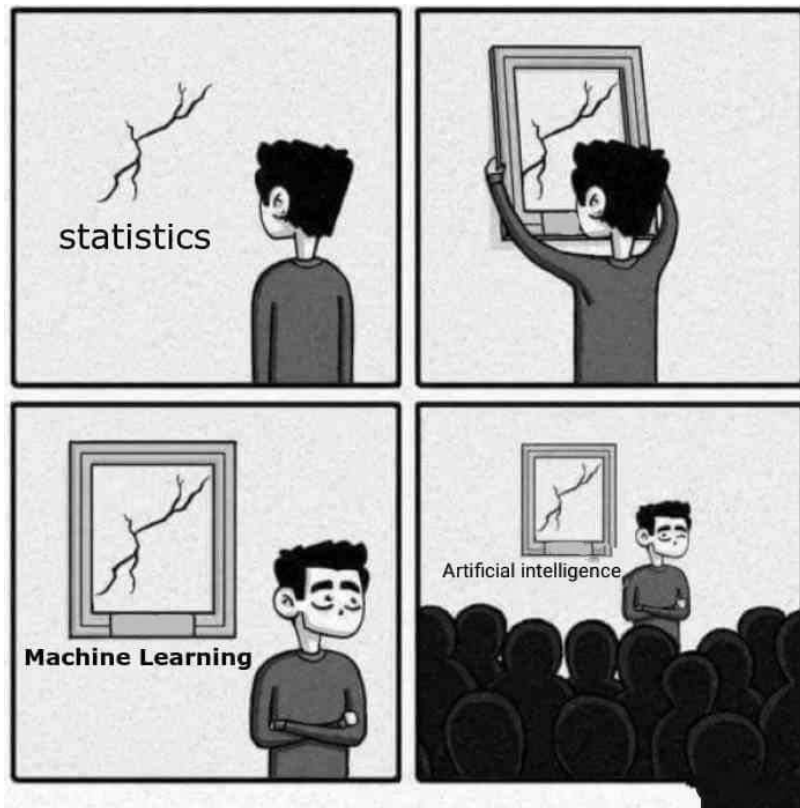
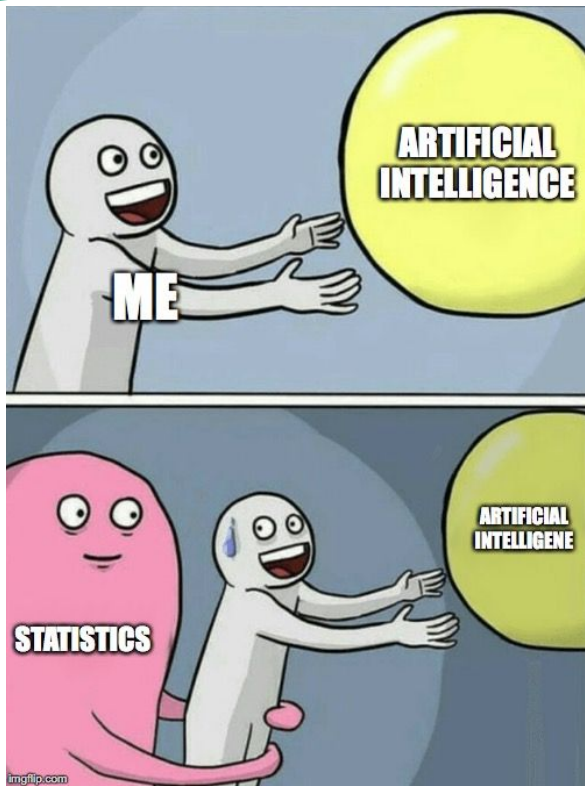


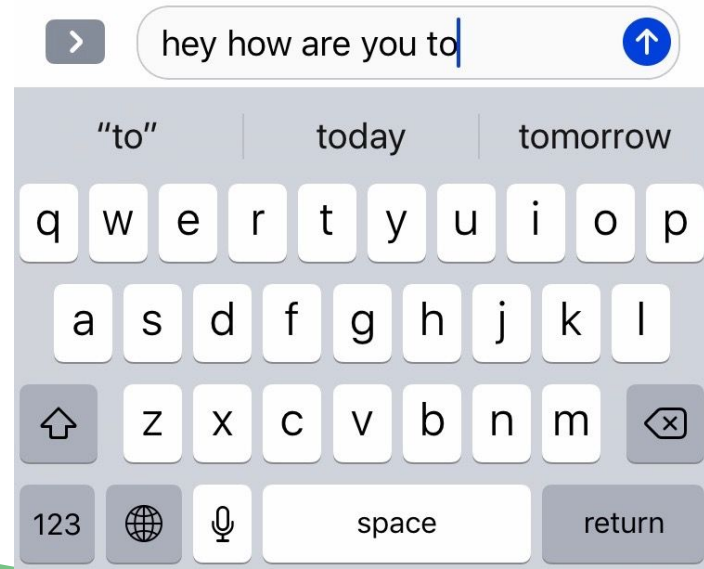
# Probabilidad y Estadística

## Clase 1

Ud. se encuentra  
aquí:

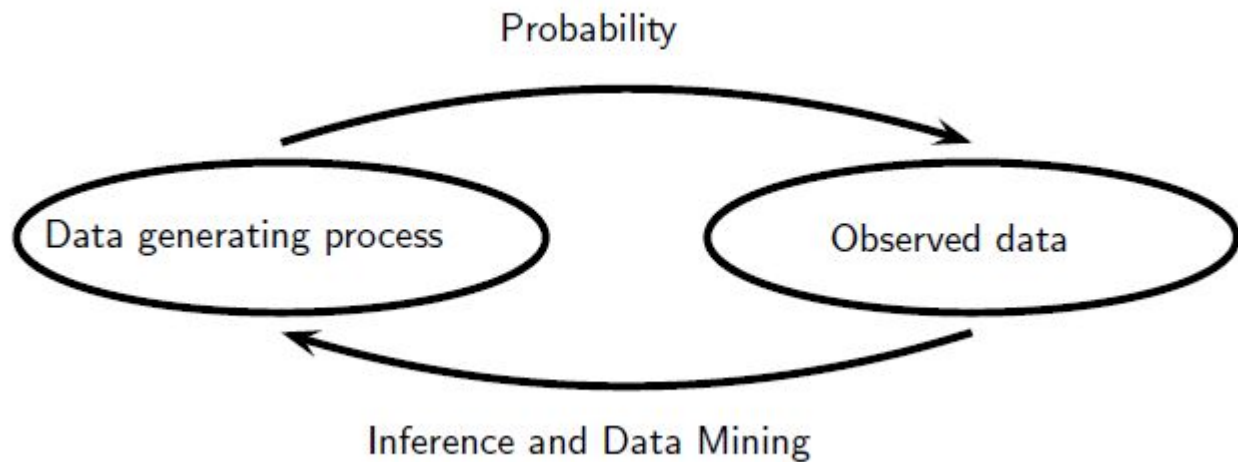
para poder estar  
aquí:





# Ejemplos de probabilidad en IA?

# Probabilidad vs. Estadística



# Cronograma

TP 1	Clase 1	Repaso Distribuciones útiles.
	Clase 2	V.a. condicionadas Esperanza condicional
	Clase 3	ECM y estimadores de cuadrados mínimos Estimador de máxima verosimilitud
TP2	Clase 4	Estimación Bayesiana
	Clase 5	Estimación no paramétrica
	Clase 6	Intervalos de confianza
FINAL	Clase 7	Test de hipótesis
	Clase 8	Examen

# Repaso

# Espacios de Probabilidad

$\Omega \neq \emptyset$ ,  $\mathcal{A}$  una colección de subconjuntos de  $\Omega$

$$A, * \Omega \in \mathcal{A}, \emptyset = \Omega^c$$

$$A, * A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A} \quad \text{Cerrado por complemento}$$

$$A, * B, C \in \mathcal{A} \Rightarrow B \cup C \in \mathcal{A} \quad \text{Cerrado bajo Uniones Numerables}$$

$(\Omega, \mathcal{A})$  Espacio Medible

$$\Omega = \{\{1\}, \{2\}\} ; \mathcal{A} = \{\{1, 2\}, \{1\}, \{2\}, \{\emptyset\}\}$$

$$\{1\}^c = \{2\}$$

$$\mathcal{A} = \{\Omega, \emptyset\}$$

La menor algebra de  $\Omega$   $\mathcal{A} = \{\Omega, \emptyset\}$

$$\Omega \stackrel{\circ}{=} \mathbb{N}, \mathbb{P} = \{2, 4, 6, \dots\} \rightarrow \text{Pares}, \mathbb{N}: \text{Números naturales sin el cero}$$

$$\mathcal{F} = \{\mathbb{P}, \mathbb{I}, \mathbb{N}, \emptyset\}$$

$$\mathbb{P} \cup \emptyset = \mathbb{P}$$

$$\mathbb{P} \cup \mathbb{N} = \mathbb{N}$$

$$\mathbb{P} \cup \mathbb{I} = \mathbb{N}$$

$$\mathbb{P}^c = \mathbb{I}, \mathbb{I}^c = \mathbb{P}$$

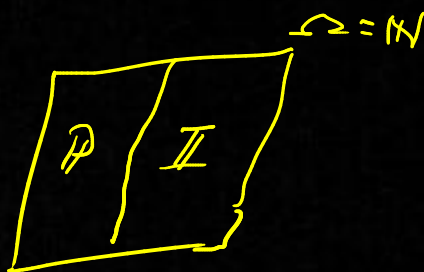
$$\emptyset^c = \Omega \stackrel{\circ}{=} \mathbb{P}$$

Otros subconjuntos de Omega:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$B = \{5, \dots, 8\}$$

$$\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, \dots\} \quad \text{Números Primos}$$



-Probar lo siguiente por Inducción:

$$\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$$



$$A' \text{ } \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$$

Si  $\mathcal{A}$  cumple con  $A_1, A_2$  y  $A_3 \Rightarrow \mathcal{A}$  es una  $\sigma$ -álgebra



# Espacio de Probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ y variables aleatorias

$$\begin{aligned} \Omega &\in \mathcal{A} \\ B \in \mathcal{A} &\Rightarrow B^c \in \mathcal{A} \\ B, C \in \mathcal{A} &\Rightarrow B \cup C \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

$$P: \Omega \rightarrow [0, 1]$$

$$0 \leq P(A) \leq 1, \forall A \in \mathcal{A}$$

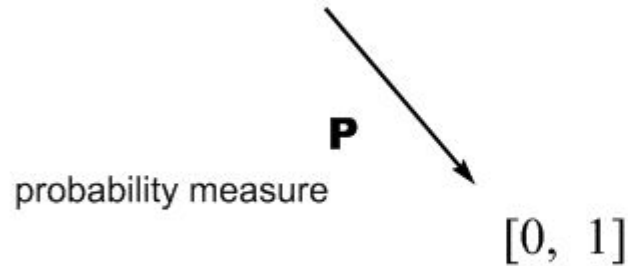
$$P(\Omega) = 1$$

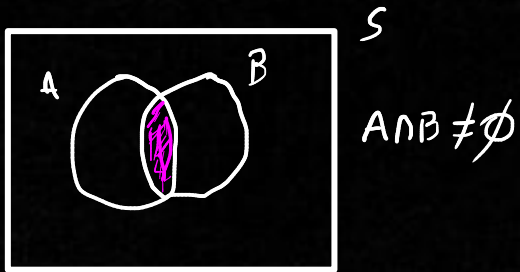
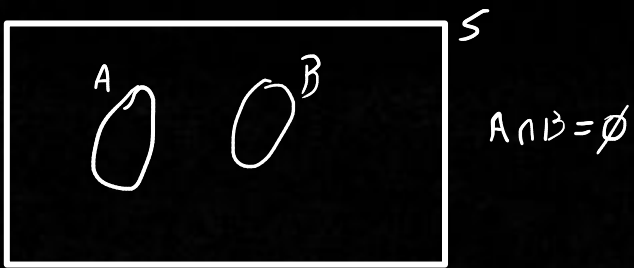
$$A \cap B = \emptyset, P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$P(A \cup A^c) = P(\Omega) = 1; A \cap A^c = \emptyset \Rightarrow P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c) = 1$$

$$\Rightarrow P(A) = 1 - P(A^c)$$

$\mathcal{A}$   
( $\sigma$  - algebra on  $\Omega$ )

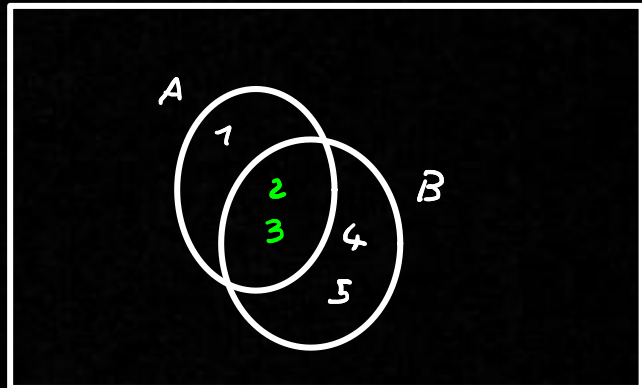




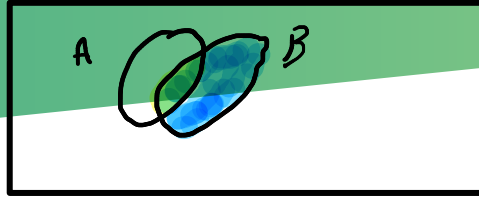
$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{2, 3, 4, 5\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$



# Probabilidades condicionales y proba. total



**Def:** Se llama **probabilidad condicional** de A dado B ( $\mathbb{P}(A|B)$ ) a la probabilidad de que ocurra el evento A sabiendo que B ha ocurrido, y está definida por

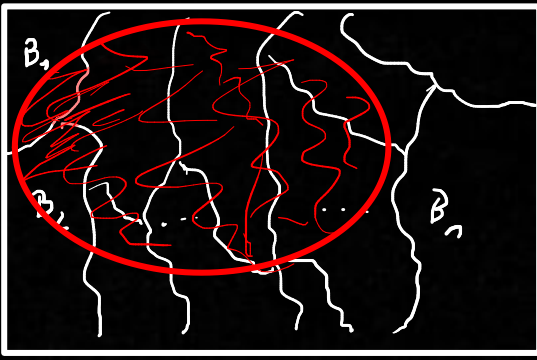
$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

**Def:** Diremos que los eventos  $B_1, \dots, B_n$  forman una **partición** si  $B_i \cap B_j = \emptyset \forall i, j$  y  $\bigcup_{i=1}^n B_j = \Omega$ .

Luego podemos describir al evento A como  $A = (A \cap B_1) \cup \dots \cup (A \cap B_n)$  de forma que

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B_1) + \dots + \mathbb{P}(A \cap B_n) \stackrel{*}{=} \mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \dots + \mathbb{P}(A|B_n)\mathbb{P}(B_n)$$

**Fórmula de probabilidad total**



$$A = \bigcup_{i=1}^n A \cap B_i$$

$$\begin{aligned} P(A) &= P\left(\bigcup_{i=1}^n B_i\right) = \\ &= \sum_{i=1}^n P(A \cap B_i) \end{aligned}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A|B) P(B)$$

Supongamos que en una población la prevalencia de un virus es de un 0,5% (0,005) y la probabilidad de que un test sea positivo si la persona si la persona esta infectada es del 99% (0,99)

$P(\text{Infectado} | +)$

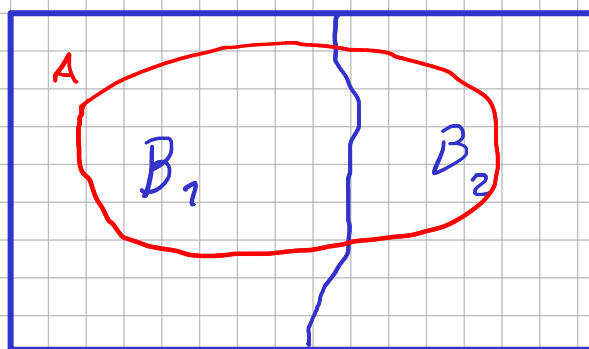
$P(0,005 | 0,99) = ??? < 50\%$

Aplicar el Teorema de Bayes

$B_1 = \text{Infectado}$

$B_2 = \text{No Infectado}$

$A = \text{Positivo}$



$$P(B_1 | A) = \frac{P(A | B_1) P(B_1)}{P(A \cap B_1) P(B_1) + P(A \cap B_2) P(B_2)}$$

$$P(B_2) = P(B_1^c) = 1 - P(B_1)$$

# Teorema de Bayes e independencia

**Teorema de Bayes:** Sean  $B_1, \dots, B_n$  una partición de  $\Omega$ , y  $A$  un evento con probabilidad positiva:

$$\mathbb{P}(B_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)}$$

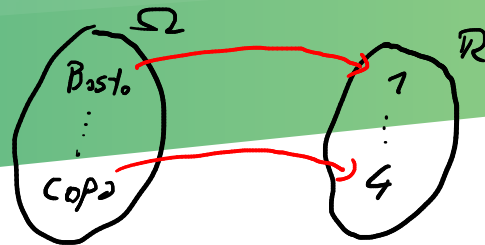
**Def:** Diremos que dos eventos  $A$  y  $B$  son **independientes** si y sólo si vale que

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$
$$\omega \mapsto X(\omega)$$

# Variables aleatorias

# Variables aleatorias



Una va.  $X$  es una función que mapea eventos a números.

Ejemplo: basto  $\rightarrow 1$ , Oro  $\rightarrow 2$ , espada  $\rightarrow 3$ , copa  $\rightarrow 4$

$X$  tiene asociada una función de distribución, definida como

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

$$F_X(x) \in [0, 1] \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$F_X(x)$  es monótona no decreciente

$F_X(x)$  es continua por derecha

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$$

además se define la función de distribución inversa o función

cuantil como  $F_X^{-1}(q) = \inf\{x : F(x) > q\}$

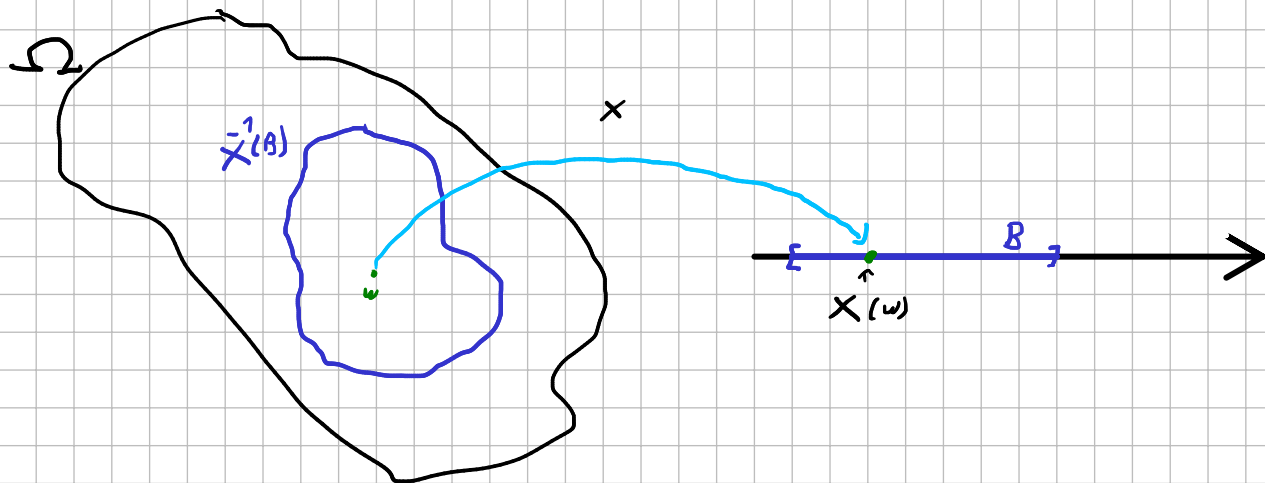
Si  $F_X$  es estrictamente creciente y continua,  $F_X^{-1}$  es su inversa.



Dado un Espacio de Probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , y una variable aleatoria  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  diremos que es una

Variable Aleatoria si cumple:

$$X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$$



$$VAD: X = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

"Conteo de tiradas de un dado hasta dar con un 6"

$$VAC: X \in [10, 13],$$

"Tiempo hasta que ocurra algo"

# Tipos de v.a.

- Discretas (v.a.d): toman valores en un conjunto discreto o numerable de puntos. Si  $X$  es **v.a.d**, tendrá además función de probabilidad dada por

$$p_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$$

- Continuas (v.a.c): toman valores en un intervalo continuo. Si  $X$  es una **v.a.c**, tendrá asociada una función de densidad

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

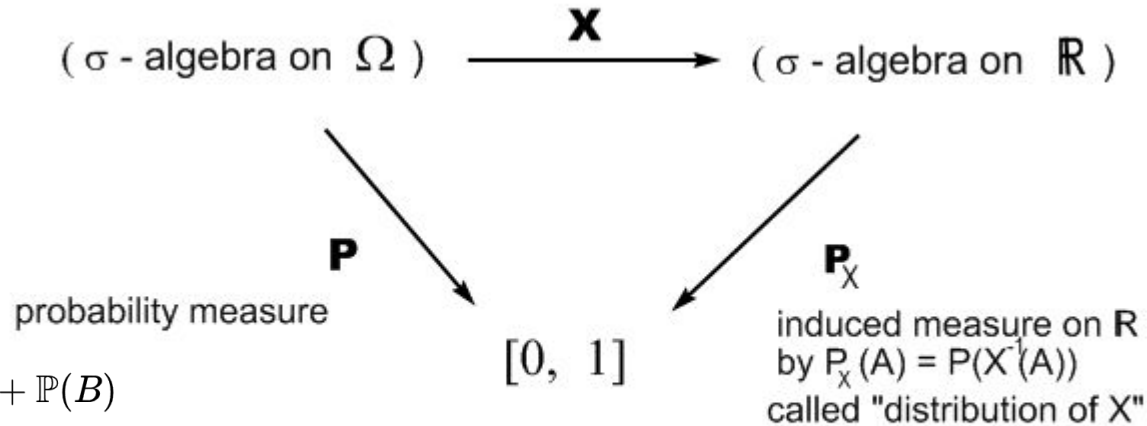
¿Qué propiedades debían cumplir cada una de estas funciones?

# Espacio de Probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ y variables aleatorias

$$\begin{aligned} \Omega &\in \mathcal{A} \\ B \in \mathcal{A} &\Rightarrow B^c \in \mathcal{A} \\ B, C \in \mathcal{A} &\Rightarrow B \cup C \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1, \forall A \in \mathcal{A} \\ \mathbb{P}(\Omega) &= 1 \end{aligned}$$

$$A \cap B = \emptyset, \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$



$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$X: \Omega \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}} \mathbb{R}^2$$

$$\omega \mapsto \begin{pmatrix} x_1(\omega) \\ x_2(\omega) \end{pmatrix}$$

# Vectores aleatorios

# Distribución conjunta y marginales

$X \backslash Y$	$Y = 0$	$Y = 1$	$P_{X,Y}$
$X=0$	1/10	2/10	3/10
$X=1$	3/10	4/10	7/10
$P_Y(y)$	4/10	6/10	1

Si tenemos dos variables  $X$  e  $Y$  se define su **función de distribución conjunta** como  $F_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y)$  y vale la regla del rectángulo:

$$\mathbb{P}(a < X \leq b, c < Y \leq d) = F_{X,Y}(b, d) - F_{X,Y}(a, d) - F_{X,Y}(b, c) + F_{X,Y}(a, c)$$

**Caso continuo:**  $f_{X,Y}(x, y)$  es la **función de densidad conjunta** y se definen las **funciones de densidad marginales** como  $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y) dy$  y  $f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y) dx$

**Caso discreto:**  $p_{X,Y}(x, y)$  es **función de probabilidad conjunta** y se definen las **funciones de probabilidad marginal** como  $p_X(x) = \sum_y p_{X,Y}(x, y)$  y  $p_Y(y) = \sum_x p_{X,Y}(x, y)$

# Independencia de v.a.

Diremos que dos v.a.  $X$  e  $Y$  son **independientes** si vale que

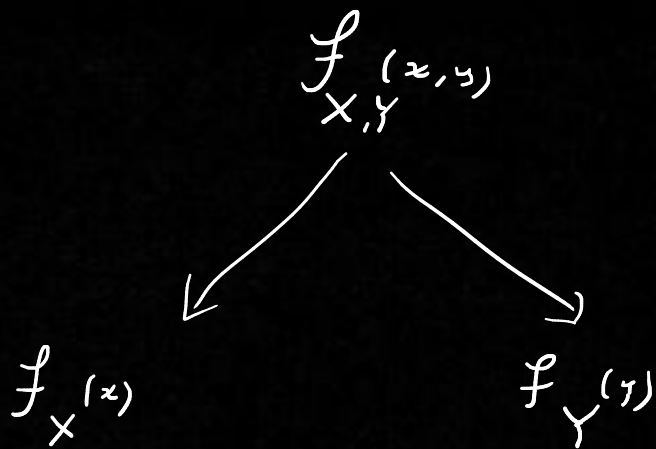
$$F_{X.Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Caso **discreto**:

$$p_{X.Y}(x, y) = p_X(x)p_Y(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Caso **continuo**:

$$f_{X.Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$



$$P_X(x) = \sum_y P_{X,Y}(x,y) = \frac{3}{10} + \frac{7}{10}$$

$$P_Y(y) = ?$$

# Bibliografía



# Bibliografía

“Mathematical Statistics with Applications”, Dennis D. Wackerly, William Mendenhall III, Richard L. Scheaffer.

“All of Statistics: A Concise Course in Statistical Inference”, Larry Wasserman.