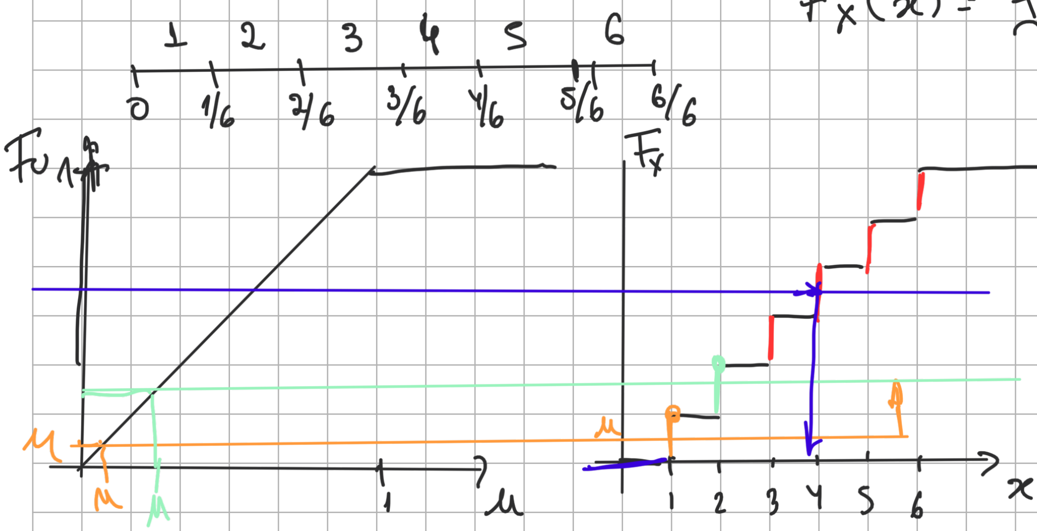
Sea X el resultado de arrojar un dado equilibrado. A partir de 1000 realizaciones de una v.a. uniforme en el intervalo (0,1), simular 1000 realizaciones de X.

Quiero : generar un dado equilibrado

Tengo: uniforme en (0,1)

$$F_X(x) = \underbrace{F_U(u)}_{u}$$



$$F_X^{-1}(u) = \min\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq u\},\ u \in (0,1)$$

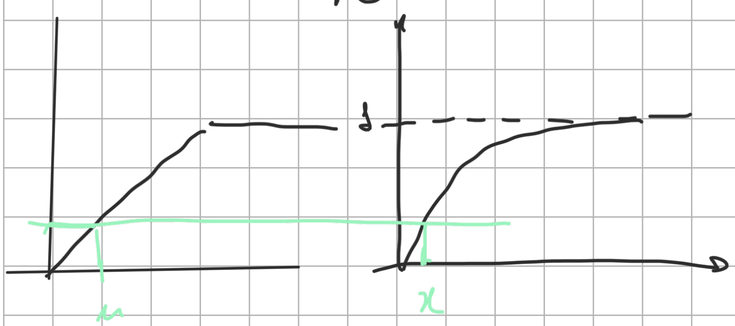
Ejercicio 2

$X \sim \mathcal{E}(1/5)$, X: "tiempo entre llamados"

Generar 1000 valores de X a partir de una $\mathcal{U}(0,1)$

$$F_X(x) = (1 - e^{-1/5\, x})\, \mathbb{1}\{x>0\}$$

$$f_X(x) = 1/5\, e^{-1/5\, x}\, \mathbb{1}\{x>0\}.$$



$$F_U(u) = F_X(x)$$

$$u = (1 - e^{-1/5\, x})$$

$$e^{-1/5\, x} = 1 - u$$

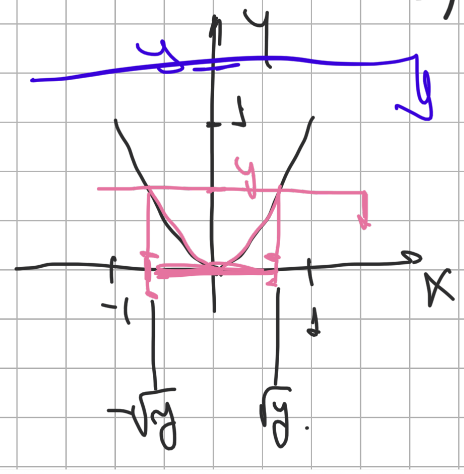
$$\ln \{\ -1/5\, x = \ln(1-u)$$

$$x = \boxed{-5 \ln(1-u)}$$

Sea X~U(-1,1), y sea Y=X². Hallar la función de densidad de Y

$y \in (0,1)$

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(\underbrace{X^2 \leq y}) = \mathbb{P}(-\sqrt{y} < X < \sqrt{y})$$



$$= \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ \dfrac{\sqrt{y} - (-\sqrt{y})}{2} = \sqrt{y} & \text{si } y \in (0,1) \\ 1 & \text{si } y \geq 1. \end{cases}$$

En un equipo de fútbol, Juan y Esteban son los encargados de patear penales. En un torneo Juan pateó 3 penales, mientras que Esteban pateó 5. Si ambos tienen una probabilidad de 0.4 de acertar cada penal, ¿qué distribución sigue el total de penales acertados?

X: "# de aciertos de Juan"

Y: " # de aciertos de Esteban"

$X \sim Bin(3, 0.4)$

$Y \sim Bin(5, 0.4)$

W = "# total de aciertos"

$W = X + Y$

$\underline{P_W(w)?}$

$X = \sum_{i=1}^{3} X_i$

$X_i, Y_i \sim Ber(0.4)$

$Y = \sum_{i=1}^{5} Y_i$

$$X + Y = \sum_{i=1}^{3} X_i + \sum_{i=1}^{5} Y_i = \sum_{i=1}^{8} V_i$$

$V_i \sim Ber(0.4)$

$X + Y \sim Bin(8, 0.4)$

y \ x	0	1	2	3
0				
1				
2				
3				
4				
5				

W	0	1	2	3	4	5	6	7	8
P_W									

$$\mathbb{P}(W=1) = \mathbb{P}(X=1, Y=0) + \mathbb{P}(X=0, Y=1)$$

Suma de Binomiales con igual p da otra binomial.

La cantidad de kilómetros que dura una cámara de bicicleta sigue una distribución exponencial de media 1000.

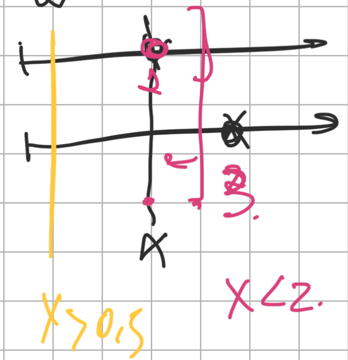
Hallar la distribución de la cantidad de kilómetros que se puede usar una bicicleta antes de tener que realizar la primera reparación.

Suposición: las dos cámaras son independientes

X: "# de Km recorridos por la bici"

Y_1: " Km que dura la rueda 1 " $\quad Y_i \overset{iid}{\sim} \mathcal{E}(1/1000)$

Y_2: " " " " " " 2 "



$$X = \min(Y_1, Y_2) = \begin{cases} Y_1 & \text{si } Y_1 < Y_2 \\ Y_2 & \text{si } Y_1 \geq Y_2 \end{cases}$$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(\min(Y_1, Y_2) \leq x)$$

$$= 1 - P(\min(Y_1, Y_2) > x) \qquad F_{Y_1}(y) = 1 - e^{-\frac{1}{1000} y}$$

$$= 1 - P(Y_1 > x, Y_2 > x)$$

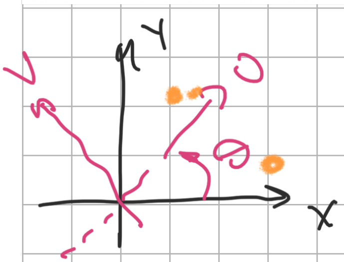
$$\overset{\text{indep.}}{=} 1 - P(Y_1 > x) P(Y_2 > x)$$

$$= 1 - e^{-\frac{1}{1000} x} e^{-\frac{1}{1000} x} = 1 - e^{-\underbrace{\left(\frac{1}{1000} + \frac{1}{1000}\right)}_{2/1000} x}$$

$$\left.\begin{array}{l} X_1 \sim \mathcal{E}(\lambda_1) \\ X_2 \sim \mathcal{E}(\lambda_2) \end{array}\right\} \text{indep.} \Rightarrow \min(X_1, X_2) \sim \mathcal{E}(\underbrace{\lambda_1 + \lambda_2}_{\lambda_1 + \lambda_2})$$

Sean $\cancel{X_1 X_2}$ $X, Y \overset{i.i.d}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ y sean $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}}_{R} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$. Hallar $f_{U,V}(u,v)$

a pata



matriz de rotación

$$h_1(x,y) = u = \cos(\theta)\,x - \sin(\theta)\,y$$

$$h_2(x,y) = v = \sin(x) + \cos(\theta)\,y$$

Transformación es 1 a 1.

y va de 2 var a 2 var

$$\tilde{J} = \det\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{\det(R)} \operatorname{adj} R\right)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$f_{U,V}(u,v) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{|\tilde{J}|}\Bigg|_{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}}$$

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{y^2}{2}} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(x\ y)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}{2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}[u\ v]\underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin(\theta) \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}}_{I}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}}$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{u^2+v^2}{2}}$$

$\hookrightarrow U, V \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$

Sean $X_1, X_2 \overset{i.i.d}{\sim} \mathcal{E}(\lambda)$ y sean $U = X_1 + X_2$ y $V = \frac{X_1}{X_1+X_2}$. Hallar $f_{U,V}(u,v)$. ¿Qué puede decir al respecto?

$U=3 \begin{cases} X_1 = 1 \\ X_2 = 2 \end{cases}$ $\quad \begin{rmatrix} X_1 = 2 \\ X_2 = 1 \end{rmatrix}$ $U=3$

$\downarrow \quad V = 1/3 \qquad \downarrow \quad V = 2/3$

Es 1 a 1

$h_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2 = u \rightarrow x_2 = u - v u = u(1-v) = h_1^{-1}(u,v)$

$h_2(x_1, x_2) = \dfrac{x_1}{\underbrace{x_1+x_2}_{u}} = v \rightarrow x_1 = v \cdot u = h_2^{-1}(u,v)$

$J = \begin{pmatrix} (1-v) & -u \\ v & u \end{pmatrix}$ $\quad |J| = |u(1-v) + vu| = |u| = u$

$u > 0$

$0 < v < 1$

$f_{U,V}(u,v) = \lambda^2 e^{-\lambda(x_1+x_2)} \mathbb{1}\{x_1>0\}\mathbb{1}\{x_2>0\} \Big|_{\substack{x_1 = u(1-v) \\ x_2 = v \cdot u}} \cdot u$

$= \lambda^2 e^{-\lambda u} u \, \mathbb{1}\{u(1-v) > 0\} \, \mathbb{1}\{v \cdot u > 0\}$

$u>0 \quad + \quad + \rightarrow v < 1 \qquad + \; +$

$u<0 \quad - \quad - \rightarrow v > 1 \qquad - \; -$

$V \sim \mathcal{U}(0,1)$

$\boxed{U \sim \Gamma(2,\lambda)} = \lambda^2 u^1 e^{-\lambda u} \mathbb{1}\{u>0\} \quad \mathbb{1}\{0<v<1\}$

sólo depende de u $\qquad$ sólo depende de v.

$\nu - 1 = 1$

$\dfrac{\lambda^k}{(\nu-1)!} x^{\nu-1} e^{-\lambda u}$

U, V son indep