Análisis Matemático para Inteligencia Artificial

Verónica Pastor (vpastor@fi.uba.ar),
Martín Errázquin (merrazquin@fi.uba.ar)

Especialización en Inteligencia Artificial

11/3/2022

$(\mathbb{V}, +, \mathbb{K}, \bullet)$

Sea $\mathbb{V} - \mathbb{K}$ e.v., donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$, un producto interno sobre $\mathbb{V}$ es una función $\Phi : \boxed{\mathbb{V} \times \mathbb{V}} \to \mathbb{R}$ (*o* $\mathbb{C}$) que satisface:

1. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ (*o* $\mathbb{C}$), $u, v, w \in \mathbb{V}$.
   - $\Phi(u + v, w) = \Phi(u, w) + \Phi(v, w)$
   - $\Phi(\alpha \bullet u, v) = \alpha \bullet \Phi(u, v)$
2. $\Phi(u, v) = \overline{\Phi(v, u)}$ → conjugado $z = a + bi \to \bar{z} = a - bi$
3. $\Phi(v, v) \geq 0$, y $\Phi(v, v) = 0$ sii $v = 0$

CUIDADO con la NOTACIÓN

$S = \text{gen}\{(\ ), (\ )\}(\ )$

$S = \langle (\ ), (\ ) \rangle$

Notación: $\Phi(u, v) = \langle u, v \rangle$

Definición: A un espacio vectorial real (complejo) provisto de un producto interno se lo llama espacio euclídeo (espacio unitario).

Obs: El p.i. es una generalización del producto escalar en $\mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$).

Sea $\mathcal{V}$ el espacio de las funciones continuas de valor real (o complejo) en el intervalo $0 \leq x \leq 1$ (se nota $\mathcal{C}([-1,1])$) con p.i.

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx$$

conjugado

$\langle \cdot , \cdot \rangle : \mathcal{C}[-1,1] \to \mathbb{R}$

(f, g)

Repaso $\mathbb{C}$, $z = a + bi$

$\overline{\overline{z}} = z$ (1)

(2) $\overline{z}.\overline{w} = (a - bi)(c - di)$

$= (ac - bd) + (-ad - bc)i$

$\overline{z.w} = \overline{(a+bi)(c+di)}$

$\overline{(ac - bd) + (bc + ad)i}$

Verificar que cumple:

1. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$), $f, g, h \in \mathcal{C}([-1,1])$.
   - $\Phi(f+g, h) = \Phi(f, h) + \Phi(g, h)$ ✓
   - $\Phi(\alpha \bullet f, g) = \alpha \bullet \Phi(f, g)$ TAREA
2. $\Phi(f, g) = \overline{\Phi(g, f)}$ → conmut
3. $\Phi(f, f) \geq 0$, y $\Phi(f, f) = 0$ sii $f(x) = 0, \forall x$

prop. de la $\int$.

(1) $\langle f+g, h\rangle = \int_{-1}^{1} (f+g)(x)\overline{h(x)}\,dx = \int_{-1}^{1} \left(f(x) + g(x)\right).\overline{h(x)}dx =$

$= \int_{-1}^{1} f(x)\overline{h(x)}dx + \int_{-1}^{1} g(x)\overline{h(x)}dx = \langle f, h\rangle + \langle g, h\rangle$ ✓

(2) $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\,dx \overset{(1)}{=} \int_{-1}^{1} \overline{\overline{f(x)}}.\overline{g(x)}\,dx \overset{(2)}{=} \int_{-1}^{1} \overline{\overline{f(x)}\,g(x)}\,dx =$

$= \overline{\int_{-1}^{1} g(x)\overline{f(x)}dx} = \overline{\langle g, f\rangle}$

(3) ✓

Definición de Norma

Sea $(\mathbb{V}, \langle ., . \rangle)$ un e.v. real (complejo) con p.i.. Sea $v \in \mathbb{V}$, se define la **norma de v** asociada a $\langle ., . \rangle$.

$\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \rangle^{1/2} = \sqrt{3}$

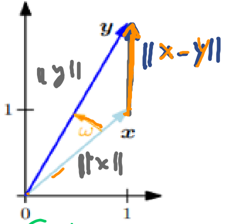
Notación: $||v|| = \langle v, v \rangle^{1/2}$ siempre es un escalar

Es la generalización de la longitud de un vector en $\mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$).

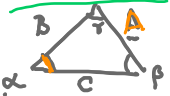
$\left\| \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$

Def: A partir de un p.i. se puede se puede definir el ángulo w entre dos vectores x, y

$$\cos(\omega) = \frac{\langle x, y \rangle}{||x|| \; ||y||}$$



Ley de Cosenos



$A^2 = B^2 + C^2 - 2\cancel{BC}\cos\alpha$

$B^2 = A^2 + C^2 - 2AC\cos\beta$

$\alpha = \frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{2} = \alpha$

$||x-y||^2 = \underbrace{||x||^2 + ||y||^2 - 2||x||\,||y||\cos w}$

$\langle x-y, x-y \rangle = \langle x, x \rangle - 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle$

$= ||x||^2 - 2\underbrace{\langle x, y \rangle} + ||y||^2$

Propiedades de la Norma

1. $\forall v \in \mathbb{V}, \; ||v|| \geq 0$, y $||v|| = 0$ sii $v = 0$. módulo $|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \alpha < 0 \end{cases}$
2. Sean $\alpha \in \mathbb{R}(o\ \mathbb{C})$, $v \in \mathbb{V}$, $||\alpha \bullet v|| = |\alpha| \; ||v||$. norma
3. Desigualdad de Cauchy Schwartz: si $u, v \in \mathbb{V}$ entonces

módulo

$$\underbrace{|\underbrace{\langle u, v\rangle}_{\in \mathbb{K}}|}_{} \leq \underbrace{||u|| \; ||v||}_{\in \mathbb{K}}$$

$\in \mathbb{V}$

4. Desigualdad Triangular: si $u, v \in \mathbb{V}$ entonces

$$||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$$

dem $||u+v||^2 \ldots \leq (||u||^2 + ||v||)^2$

③ Definir vector $w = u - \underbrace{\frac{\langle u, v\rangle}{||v||^2}}_{k \, \in \mathbb{K}} . v$, $w \in \mathbb{V}$

①

$0 \leq ||w||^2 = \langle u - \frac{\langle u,v\rangle}{||v||^2}.v , u - \frac{\langle u,v\rangle}{||v||^2}.v \rangle = \langle u, u\rangle + \langle u, -kv\rangle +$

$= \langle -kv, u\rangle$

$+ \langle -kv, u\rangle + \langle -kv, -kv\rangle = ||u||^2 - 2k \langle v, u\rangle + k^2 \, ||v||^2$

TERMINAR

Ortogonalidad

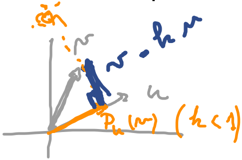
Def: $(\mathbb{V}, \langle .,. \rangle)$ un $\mathbb{K}$-EV (con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$) con p.i. dos vectores $u, v \in \mathbb{V}$ se dicen ortogonales si $\langle u, v \rangle = 0$. $\langle e_1, e_2 \rangle = (1, 0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 + 0 = 0$

Teorema de Pitágoras: Si $u, v \in \mathbb{V}$ son ortogonales entonces $||u + v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$. (Ley de Cosenos)

Def: $(\mathbb{V}, \langle .,. \rangle)$ un $\mathbb{K}$-EV (con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$) con p.i.. Se dice que $\{v_1, ..., v_r\} \subset \mathbb{V}$ es un conjunto ortogonal si $\langle v_i, v_j \rangle = 0, \ \forall i \neq j$. Si $||v_i|| = 1, \ \forall i$ se dice que es un conjunto ortonormal.

La proyección ortogonal del vector v sobre el vector u es otro vector que notamos como $P_u(v)$, y se define:

$$P_u(v) = \frac{\langle u, v \rangle}{||u||} \frac{u}{||u||} = \overset{k}{\frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle}} u$$



Proceso de Ortogonalización de Gram Schmidt

Def: Una base ortonormal (BON) de un E.V. es una base $B = \{v_1, ..., v_n\}$ que satisface:

$$\|\tilde{v}_i\| = \left\| \frac{v_i}{\|v_i\|} \right\| = \frac{\|v_i\|}{\|v_i\|} = 1 \qquad \langle v_i, v_j \rangle = 0, \ \forall i \neq j \ \checkmark$$

$$\langle v_i, v_i \rangle = 1, \ \forall i \ \checkmark \longrightarrow \tilde{v}_i = \frac{v_i}{\|v_i\|} \quad (*)$$

Obs: Si sólo se cumple que $\langle v_i, v_j \rangle = 0, \ \forall i \neq j$ se dice que es una base ortogonal.

Para transformar una base en una base ortonormal usamos el proceso de Gram-Schmidt:

$$k_1 = v_1 \ \checkmark$$

$$k_2 = v_2 - Proy_{k_1}(v_2) = v_2 - \frac{\langle k_1, v_2 \rangle}{\langle k_1, k_1 \rangle} \cdot k_1$$

$$\vdots$$

$$k_n = v_n - \sum_{i=1}^{n-1} Proy_{k_i}(v_n) = v_n - \dots$$

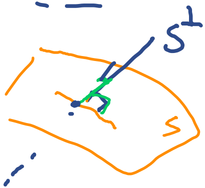
Y así, $\tilde{B} = \{k_1, ..., k_n\}$ pidiendo que $||k_i|| = 1$ resulta una BON.
$(*)$

$\tilde{B}$ base ortogonal

Complemento Ortogonal

Sea $\mathbb{V}$ un EV de dimensión $n < \infty$ y $S \subset \mathbb{V}$ un SEV de dimensión $m \leq n$. El complemento ortogonal $(S^{\perp})$ es un SEV de de dimensión $n - m$ que satisface:

$$S \cup S^{\perp} = \mathbb{V} \quad \wedge \quad S \cap S^{\perp} = \emptyset$$



Ejemplo: $S = \text{gen}\left\{\underset{u}{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}, \underset{v}{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}}\right\} \subset \mathbb{R}^3 \quad \langle u, v\rangle \neq 0$

Por Gram-S.

$k_1 = u = (1,1,1)^T$

$k_2 = v - \text{Proy}_u(v) = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} - \dfrac{\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} - \dfrac{3}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

$\langle k_1, k_2\rangle = 0$

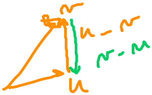
$\text{BON} = \left\{\dfrac{u}{\|u\|}, \dfrac{k_2}{\|k_2\|}\right\} \qquad \dim(S) = 2 \implies \dim(S^{\perp}) = 1$

$v = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ Un paso más de G. S $\quad k_3 = v - \text{Proy}_{k_1}(v) - \text{Proy}_{k_2}(w)$

$= \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \dfrac{\overbrace{\left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle}^{=1}}{\underbrace{\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle}_{3}} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \dfrac{\overbrace{\left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle}^{-1}}{\left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle} \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/3\\1/6\\1/6\end{pmatrix}$ (*)

$-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}^2 \quad \vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-2, 1, 1)$

Sea $\mathbb{V}$-$\mathbb{K}$, ($\mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$) EV con p.i. $\langle .,. \rangle$ se define la distancia $d : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbf{K}$ como $d(u,v) = ||u - v||$.



Propiedades:

1. $d(u,v) \geq 0, \ \forall u, v \in \mathbb{V}$ ✓
2. $d(w,v) = 0 \Leftrightarrow v = w$ ✓
3. $d(u,v) = d(v,u), \ \forall u, v \in \mathbb{V}$ ✓
4. $d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v), \ \forall u, v, w \in \mathbb{V}$ Desig Triang.

Observación: Existen distancias que no están asociadas a ninguna norma.

Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se dice definida positiva si es simétrica y vale que:

$$\underbrace{\overset{1\times n}{x^T}\overset{n\times n}{A}\overset{n\times 1}{x}}_{h\in\mathbb{R}^{1\times 1}} > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Un $\langle \cdot,\cdot \rangle$ puede estar definido por una matriz

Si vale que $x^T Ax \geq 0$ se la llama semi definida positiva.

Ejemplo: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$ es simétrica $A = A^T$ $a_{ij} = a_{ji}$

6

$\longrightarrow A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$

$$(x,y)\,A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underset{1\times 2}{(x,y)}\underset{2\times 2}{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \overset{1\times 2}{\left[2x+3y,\ 3x+9y\right]}\overset{2\times 1}{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} =$$

$$= (2x+3y)\cdot x + (3x+9y)\cdot y = 2x^2 + 3yx + 3xy + 9y^2 = $$

$9y^2 = (3y)^2$

$6y^2 = (\ )^2$

TAREA

$$= x^2 + \underbrace{x^2 + 2\cdot x(3y) + (3y)^2} = \underbrace{x^2}_{\geq 0} + \underbrace{(x+3y)^2}_{\geq 0} > 0$$

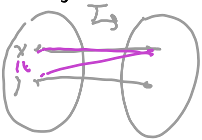
Teorema: Sea $\mathbb{V}$ un EV de dimensión finita, y B una base de $\mathbb{V}$, vale que es un p.i. sii existe una matriz definida positiva talque:

CAMBIO de BASE

$$\langle x, y \rangle = \tilde{x}^T A\tilde{y}$$

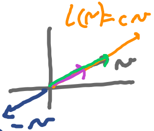
donde $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, son las representaciones de x, y en la base B.

Sea $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación, donde $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ son dos conjuntos arbitrarios. Se dice que T es:



- Inyectiva: si $\forall x,\ y \in \mathbb{V} : T(x) = T(y) \to x = y$
- Suryectiva: si $T(\mathbb{V}) = \mathbb{W}$
- Biyectiva: si es inyectiva y suryectiva.

Transformaciones Lineales



Sean $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ dos EV, $L : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ es una transformación lineal si:

$$\boxed{L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y) \ \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ \forall x, y \in \mathbb{V}}$$

Ejemplo $L : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ $(\mathbb{V} = \mathbb{R}^2)$ $L(v) = cv$, $c \in \mathbb{K}$ $(\mathbb{K} = \mathbb{R})$

$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $c \in \mathbb{R}$ $L(v) = \begin{pmatrix} cx \\ cy \end{pmatrix}$

- Isomorfismo: $L : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ es lineal y biyectiva.
- Endomorfismo: si $L : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ es lineal.
- Automorfismo: $L : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ es lineal y biyectiva.

dilatación $c > 1$ $L(v) = c.v$, $c = 2$

$0 < c < 1$ $c = \frac{1}{2}$ contraigo

$c = 1$ $L(v) = v$ ident.

$c = -1$ inversión

Representaciones

Gráficas – Diag. de Venn, repres. en ejes carts.
Base de $\mathbb{V} \longrightarrow L$ (Base) de $\mathbb{W}$
construyendo una matriz asociada a L

Teorema: Sea $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$, dos espacios vectoriales de dimensión finita son un isomorfismo sii $dim(\mathbb{V}) = dim(\mathbb{W})$.

Teorema: Sea $\mathbb{V}$ un EV, $dim(\mathbb{V}) = n < \infty$ tiene un isomorfismo con $\mathbb{R}^n$. Si consideramos la base $B = \{v_1, ..., v_n\}$, todo $v \in \mathbb{V}$ puede escribirse como $v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$. Luego las coordenadas de v en la base B resulta:

$$\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)^T \in \mathbb{R}^n$$

$L: \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$

$B_{\mathbb{V}} \longmapsto B_{\mathbb{W}}$

$L(v) = L(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) \underset{T.L}{=} \alpha_1 L(v_1) + \dots + \alpha_n L(v_n)$

$L(v) = cv \qquad A = [L]$ (se lee matriz de la transf lineal)

$Av = cv \qquad \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cx \\ cy \end{bmatrix}$

Sea $L : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$, se define: Ker

- Núcleo (o Kernel) $Nu(L) = \{v \in \mathbb{V} : L(v) = 0_W\}$,
- Imagen $Im(L) = L(\mathbb{V}) = \{w \in \mathbb{W} : \exists v \in \mathbb{V},\ w = L(v)\}$

Teorema: **Toda transformación lineal se puede representar de forma matricial.**

- Espacio Nulo de A: es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ formado por todas las soluciones del sistema lineal homogéneo $Av = 0$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

vector

$$N(A) = \{v \in \mathbb{R}^{n\times 1} : Av = 0\}$$

$\mathbb{R}^m (m \times n)(n \times 1) \Rightarrow m \times 1$

- Espacio columna de A: es el subespacio de $\mathbb{R}^m$ generado por los n vectores columna de A:

$$EC(A) = \{\alpha_1(a_{11}, ..., a_{m1})^T + ... + \alpha_m(a_{1n}, ..., a_{mn})^T, \alpha_i \in \mathbb{R}\}$$

- Espacio fila de A: e el subespacio de R^n generado por los m vectores fila de A:

$$EF(A) = \{\alpha_1(a_{11}, ..., a_{1n}) + ... + \alpha_m(a_{m1}, ..., a_{mn}), \alpha_i \in \mathbb{R}\}$$

Veamos un ejemplo...

$L:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad L\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}$ → definición explícita

1) L es una transf lineal $L\left(\alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = L\left(\begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta x_2 \\ \alpha y_1 + \beta y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \alpha(x_1+y_1)+\beta(x_2+y_2) \\ \alpha(x_1-y_1)+\beta(x_2-y_2) \end{pmatrix}$

$\alpha L\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \beta L\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_1-y_1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} x_2+y_2 \\ x_2-y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(x_1+y_1)+\beta(x_2+y_2) \\ \alpha(x_1-y_1)+\beta(x_2-y_2) \end{pmatrix}$

2) $\forall v \in \mathbb{R}^2 \quad v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad v = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad L(v) = x L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + y L\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$L(v)$ es una comb lineal $L(e_1)$ y $L(e_2)$ $\quad Im(L) = gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\} = \mathbb{R}^2$

Suryect. $L(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$ $\quad$ son l.i

$Nu(L) = \{v \in \mathbb{R}^2 : L(v) = 0_{\mathbb{R}^2}\} = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \quad \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 2x = 0 \to x = y = 0$ inyect.

$L:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es lineal y biyect → AUTOMORF.

Sup $\exists\, u, v \;/\; L(u) = L(v)$

$x_1 L(e_1) + y_1 L(e_2) = x_2 L(e_1) + y_2 L(e_2)$

$\dim(Nu(L)) = 0 \qquad \dim(Im(L)) = 2 \qquad \dim \mathbb{R}^2 = 2$

$0 + 2 = 2$

Seguimos con el ejemplo...

$L\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}$ $A = [L] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \end{matrix}$

$\quad L(e_1) \quad L(e_2)$

pivote

$A v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- Espacio Nulo de $A = \{ v \in \mathbb{R}^2 : Av = 0_{\mathbb{R}^2} \}$

$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[F_2 - F_1]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \to \begin{array}{l} x+y=0 \quad x=0 \\ -2y=0 \to y=0 \end{array}$

Forma reducida y escalonada

$N(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

- Esp. Columna $= \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$
- Esp. Fila $= \langle \{ (1,1), (1,-1) \} \rangle$ ó $\langle \{ (1,1), (0,-2) \} \rangle$

$\dim EC(A) = \dim EF(A) = 2 \qquad \dim N(A) = 0$

$$2 + 0 = \dim \mathbb{R}^2$$

$$rg(A) + n(A) = 2$$

Teorema: Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $dim(EC(A)) = dim(EF(A)) = r(A)$. Donde $r(A)$ se denomina rango de la matriz.

Definición: Se denomina nulidad de una matriz A a la dimensión de su espacio nulo $N(A)$, $n(A) = dim(N(A))$, siendo $N(A) = \{v \in \mathbb{R}^n, Av = 0\}$

Teorema de Rango-Nulidad: Para toda matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ se verifica:

$$r(A) + n(A) = n$$

¿$\exists$ $L^{-1}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$? $L \circ L^{-1} = L^{-1} \circ L = Id_{\mathbb{R}^2}$

$A = [L]$ tiene inversa, $A.A^{-1} = A^{-1}A = Id.$

$det(A) \neq 0 \iff$ tiene inversa $A^{-1} = [L^{-1}]$