Análisis Matemático para Inteligencia Artificial

Verónica Pastor (vpastor@fi.uba.ar),
Martín Errázquin (merrazquin@fi.uba.ar)

Especialización en Inteligencia Artificial

10/03/2023

Espacios con Producto Interno: Definición

Sea $\mathbb{V} - \mathbb{K}$ e.v., donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$, un producto interno sobre $\mathbb{V}$ es una función $\Phi : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ (*o* $\mathbb{C}$) que satisface:

1. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ (*o* $\mathbb{C}$), $u, v, w \in \mathbb{V}$.
   - $\Phi(u + v, w) = \Phi(u, w) + \Phi(v, w)$
   - $\Phi(\alpha \bullet u, v) = \alpha \bullet \Phi(u, v)$

   linealidad

   $\in V \ \forall W$ → prod. en $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$)
2. $\Phi(u, v) = \Phi(v, u)$ → simetría
3. $\Phi(v, v) \geq 0$, y $\Phi(v, v) = 0$ sii $v = 0$

Notación: $\Phi(u, v) = \langle u, v \rangle$

Definición: A un espacio vectorial real (complejo) provisto de un producto interno se lo llama espacio euclídeo (espacio unitario).

Obs: El p.i. es una generalización del producto escalar en $\mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$).

$\langle (1,2,3), (2,3,5) \rangle \underset{3}{=} 1.2 + 2.3 + 3.5 = 23$

$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum u_i \cdot v_i$

También hay otros espacios con productos internos ...

Sea $\mathcal{V}$ el espacio de las funciones continuas de valor real (o complejo) en el intervalo $-1 \le x \le 1$ (se nota $\mathcal{C}([-1,1])$) con p.i.

$$\Phi = \langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx$$

conjugado

$z = a + bi$

$a = Re(z)$ $\quad b = Im(z)$

$z = a + bi$ $\quad i$ es el nro imag.

$Im(z)$, b, a, $Re(z)$

$x^2 + 1 = 0$

$i^2 = -1$ $\quad x = i$

Verificar que cumple:

1. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$), $f, g, h \in \mathcal{C}([-1,1])$.
   - $\Phi(f+g,h) = \Phi(f,h) + \Phi(g,h)$
   - $\Phi(\alpha \bullet f, g) = \alpha \bullet \Phi(f,g)$ → TAREA
2. $\Phi(f,g) = \overline{\Phi(g,f)}$
3. $\Phi(f,f) \ge 0$, y $\Phi(f,f) = 0$ sii $f(x) = 0, \forall x \in [-1,1]$

• $\bar{z}$ se lee z conjugado

$\bar{z} = a - bi$

→ prop $\bar{\bar{z}} = \overline{a - bi} = a + bi = z$

$z \cdot \bar{z} = (a+bi)\cdot(a-bi) = a^2 - \cancel{abi} + \cancel{abi} - b^2 i^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$ (*)

$\boxed{|z| = \sqrt{a^2+b^2}}$

$\overline{u \cdot v} = \bar{u} \cdot \bar{v}$

(1) $\langle f+g, h\rangle = \int_{-1}^{1} (f+g)(x)\,\overline{h(x)}\,dx = \int_{-1}^{1} [f(x)+g(x)]\cdot\overline{h(x)}\,dx$

$= \int_{-1}^{1} f(x)\overline{h(x)}\,dx + \int_{-1}^{1} g(x)\overline{h(x)}\,dx = \langle f,h\rangle + \langle g,h\rangle$

(2) $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \int_{-1}^{1} \overline{\overline{f(x)}}\,\overline{g(x)}\,dx = \int_{-1}^{1} \overline{\overline{f(x)}\,g(x)}\,dx = \overline{\int_{-1}^{1} \overline{f(x)}\,g(x)\,dx}$

$= \overline{\int_{-1}^{1} \overline{f(x)}\,g(x)\,dx} = \overline{\int_{-1}^{1} g(x)\,\overline{f(x)}\,dx} = \overline{\langle g, f\rangle}$

(3) $\langle f, f\rangle = \int_{-1}^{1} f^2(x)\,dx \ge 0$ (*)

Definición de Norma

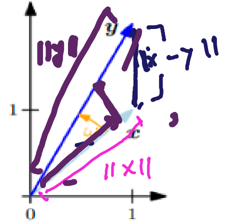
Sea $(\mathbb{V}, \langle ., . \rangle)$ un e.v. real (complejo) con p.i.. Sea $v \in \mathbb{V}$, se define la norma de v asociada a $\langle ., . \rangle$.

Notación: $||v|| = \langle v, v \rangle^{1/2}$ ≥ 0 salvo $v = 0$ $||v|| = 0$

Es la generalización de la longitud de un vector en $\mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$).

Def: A partir de un p.i. se puede se puede definir el ángulo w entre dos vectores x, y

$$\|x\| \|y\| \cos(\omega) = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \, \|y\|} \neq 0 \quad (*)$$



Ley de cosenos

dem $\underbrace{||x-y||}_{=}^{\,2} \overset{(?)}{=} ||x||^2 + ||y||^2 - 2||x|| \, ||y|| \cos w \;\leftarrow (A)$

$(\langle x-y, x-y \rangle^{1/2})^2 \overset{(1)}{=} \langle x, x-y \rangle + \langle -y, x-y \rangle \overset{(2)}{=}$

$\langle x, x \rangle + \langle x, -y \rangle + \langle -y, x \rangle + \langle -y, -y \rangle = ||x||^2 + ||y||^2 -$

$\boxed{2 \langle x, y \rangle} \leftarrow (B)$

(A) tiene que ser = (B) (*)

Ley de cosenos

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \, b.c \cos \alpha$

α es áng. opuesto a a

Propiedades de la Norma

1. $\forall v \in \mathbb{V}$, $||v|| \geq 0$, y $||v|| = 0$ sii $v = 0$.
2. Sean $\alpha \in \mathbb{R}(o\ \mathbb{C})$, $v \in \mathbb{V}$, $||\alpha \bullet v|| = |\alpha|\ ||v||$.
3. Desigualdad de Cauchy Schwartz: si $u, v \in \mathbb{V}$ entonces
$$\boxed{|\underbrace{\langle u, v\rangle}_{\in \mathbb{R} \text{ ó } \mathbb{C}}| \leq ||u||\ ||v||}$$
4. Desigualdad Triangular: si $u, v \in \mathbb{V}$ entonces
$$||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$$

Para la dem $\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle$

Truco para la demostración de Cauchy-Schwartz

Se define $\boxed{w = u - \underbrace{\frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}}\cdot v}$ $v \neq 0$ Luego $\|w\|^2 = \langle u - \underbrace{\frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}}\cdot v,\ u - \underbrace{\frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}}\cdot v\rangle$

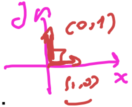
completar con las prop de linealidad...

$$\underbrace{\|u\|^2}_{\geq 0} - 2\frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}\overline{\langle u,v\rangle} + \underbrace{\left(\frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}\right)^2\|v\|^2} \geq 0$$

Ortogonalidad

Def: $(\mathbb{V}, \langle ., . \rangle)$ un $\mathbb{K}$-EV (con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$) con p.i. dos vectores $u, v \in \mathbb{V}$ se dicen ortogonales si $\langle u, v \rangle = 0$.

Teorema de Pitágoras: Si $u, v \in \mathbb{V}$ son ortogonales entonces $||u + v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$.

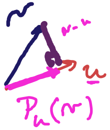


Def: $(\mathbb{V}, \langle ., . \rangle)$ un $\mathbb{K}$-EV (con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$) con p.i.. Se dice que $\{v_1, ..., v_r\} \subset \mathbb{V}$ es un conjunto ortogonal si $\langle v_i, v_j \rangle = 0, \ \forall i \neq j$. Si $||v_i|| = 1, \ \forall i$ se dice que es un conjunto ortonormal

$||(1,0)|| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$
$= \sqrt{\langle (1,0),(1,0)\rangle}$

La proyección ortogonal del vector v sobre el vector u es otro vector que notamos como $P_u(v)$, y se define:

$$P_u(v) = \underbrace{\frac{\langle u, v \rangle}{||u||}}_{\in \mathbb{K}} \frac{u}{||u||} = \boxed{\frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle}} u$$



Proceso de Ortogonalización de Gram Schmidt

Def: Una base ortonormal (BON) de un E.V. es una base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ que satisface:

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0, \ \forall i \neq j$$
$$\langle v_i, v_i \rangle = 1, \ \forall i$$

v defino $\frac{v}{||v||} = u$

$||u|| = \left|\left|\frac{v}{||v||}\right|\right| = \frac{||v||}{||v||} = 1$

Obs: Si sólo se cumple que $\langle v_i, v_j \rangle = 0, \ \forall i \neq j$ se dice que es una base ortogonal.

Para transformar una base en una base ortonormal usamos el proceso de Gram-Schmidt:

$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ $V = \mathbb{R}^2$ p.i. canónico

$$k_1 = v_1$$
$$k_2 = v_2 - Proy_{k_1}(v_2)$$
$$\vdots$$
$$k_n = v_n - \sum_{i=1}^{n-1} Proy_{k_i}(v_n)$$

G-S: $k_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$k_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - P_{k_1}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{v_2} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\underbrace{\left|\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|\right|^2}_{= \langle k_1, k_1 \rangle}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_1 = k_1$

$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

Y así, $\tilde{B} = \{k_1, \dots, k_n\}$ pidiendo que $||k_i|| = 1$ resulta una BON.

$\tilde{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right\}$ verif $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right\rangle = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$ ✓

Sea $\mathbb{V}$ un EV de dimensión $n < \infty$ y $S \subset \mathbb{V}$ un SEV de dimensión $m \leq n$. El complemento ortogonal ($S^{\perp}$) es un SEV de de dimensión $n - m$ que satisface:

$$S \cup S^{\perp} = \mathbb{V} \quad \wedge \quad S \cap S^{\perp} = \emptyset$$

$\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$
$S = \mathbb{R}^2$.
$S^{\perp} = \mathbb{R}$.

Ejemplo:

$$S = \text{gen}\left\{ \begin{array}{cc} u & v \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right\}$$ con p.i. canónico

para buscar $S^{\perp}$ hay q̃ buscar un vector q̃ sea ortogonal a ambos vectores de S

Op. 1 (en $\mathbb{R}^3$)

$$u \times v = \begin{vmatrix} \tilde{i} & \tilde{j} & \tilde{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

Op 2 ($\forall \mathbb{V}$) G. S. $k_3 = v_3 - \left(P_{k_1}(v_3) + P_{k_2}(v_3)\right)$

Para eso $k_1 = u$ $\quad k_2 = k_1 - P_{k_1}(v)$ $\quad$ invento v_3 cualq ($\neq u, \neq v$)

por ej. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Distancia

Sea $\mathbb{V}$-$\mathbb{K}$, ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) EV con p.i. $\langle .,. \rangle$ se define la distancia $d : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{K}$ como $d(u, v) = ||u - v||$.

Propiedades:

1. $d(u, v) \geq 0, \ \forall u, v \in \mathbb{V}$
2. $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$
3. $d(u, v) = d(v, u), \ \forall u, v \in \mathbb{V}$
4. $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v), \ \forall u, v, w \in \mathbb{V}$

Observación: Existen distancias que no están asociadas a ninguna norma.

Matrices definidas positivas

Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se dice definida positiva si es simétrica y vale que: $a_{ij} = a_{ji}$ $\forall i,j$ $i \neq j$

$$x^T A x > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$$

Si vale que $x^T A x \geq 0$ se la llama semi definida positiva.

Ejemplo: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$ es simetrica $a_{12} = a_{21}$ ó lo q' es lo mismo $A = A^T$

$$\underbrace{(x,y)}_{1\times 2}\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}}_{2\times 2}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{2\times 1} = (2x+3y,\ 3x+9y)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2x^2 + \overbrace{3xy + 3xy}^{2.3xy} + \underbrace{9y^2}_{(3y)^2} =$$

$$= x^2 + x^2 + 2x(3y) + (3y)^2 = \underbrace{x^2}_{\geq 0} + \underbrace{(x+3y)^2}_{\geq 0} > 0 \quad \text{def. positiva}$$

Teorema: Sea $\mathbb{V}$ un EV de dimensión finita, y B una base de $\mathbb{V}$, vale que es un p.i. sii existe una matriz definida positiva tal que:

$$\langle x, y\rangle = \tilde{x}^T A \tilde{y} \qquad x^T A x > 0$$

donde $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, son las representaciones de x, y en la base B.

Sea $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación, donde $\mathbb{V}, \ \mathbb{W}$ son dos conjuntos arbitrarios. Se dice que T es:

- Inyectiva: si $\forall x, \ y \in \mathbb{V} : T(x) = T(y) \to x = y$
- Suryectiva: si $T(\mathbb{V}) = \mathbb{W}$
- Biyectiva: si es inyectiva y suryectiva.

$L(\overset{\in V}{v}) = \overset{\in \mathbb{R}}{c}\, v,$

$c > 1, \ L(v) = cv$

DILATACIÓN

$0 < c < 1$

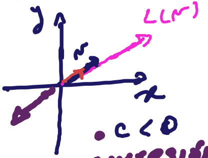
CONTRACCIÓN

$c = 1$ IDENT

Transformaciones Lineales

Sean $\mathbb{V}, \ \mathbb{W}$ dos EV, $L : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ es una transformación lineal si:

$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y) \ \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \ \forall x, y \in \mathbb{V}$$



- Isomorfismo: $L : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ es lineal y biyectiva.
- Endomorfismo: si $L : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ es lineal.
- Automorfismo: $L : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ es lineal y biyectiva.

• $c < 0$ INVERSIÓN

$c = -1$

Representaciones

Teorema: Sea $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$, dos espacios vectoriales de dimensión finita son un isomorfismo sii $dim(\mathbb{V}) = dim(\mathbb{W})$.

Teorema: Sea $\mathbb{V}$ un EV, $dim(\mathbb{V}) = n < \infty$ tiene un isomorfismo con $\mathbb{R}^n$. Si consideramos la base $B = \{v_1, ..., v_n\}$, todo $v \in \mathbb{V}$ puede escribirse como $v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$. Luego las coordenadas de v en la base B resulta:

$$\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)^T \in \mathbb{R}^n$$

$L : \mathcal{P}_2[x] \to \mathbb{R}^3$

$1 \mapsto (1,0,0)$

$p(x) = \underbrace{a_0 1}_{v_1} + \underbrace{a_1 x}_{v_2} + \underbrace{a_2 x^2}_{v_3} \in \mathcal{P}_2[x]$ una base $B_{\mathcal{P}_2} = \{1, x, x^2\}$

$\alpha = (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$

Representaciones
- Gráficamente, por ej. contracción
- Isomorfismo con $\mathbb{R}^n$
- Mirar los transformados de la base.
- Matricialmente.

$L(v) = cv$

$[L(v)] = Av = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cx \\ cy \end{bmatrix}$

Núcleo e Imagen de una transformación

Sea $L : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$, se define:

- Núcleo (o Kernel) $Nu(L) = \{v \in \mathbb{V} : L(v) = 0_W\}$,
- Imagen $Im(L) = L(\mathbb{V}) = \{w \in \mathbb{W} : \exists v \in \mathbb{V},\ w = L(v)\}$

Teorema: **Toda transformación lineal se puede representar de forma matricial.**

- Espacio Nulo de A: es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ formado por todas las soluciones del sistema lineal homogéneo $Av = 0$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

$$N(A) = \{v \in \mathbb{R}^{n\times 1} : Av = 0\}$$

- Espacio columna de A: es el subespacio de $\mathbb{R}^m$ generado por los n vectores columna de A:

$$EC(A) = \{\alpha_1(a_{11}, ..., a_{m1})^T + ... + \alpha_m(a_{1n}, ..., a_{mn})^T, \alpha_i \in \mathbb{R}\}$$

- Espacio fila de A: e el subespacio de R^n generado por los m vectores fila de A:

$$EF(A) = \{\alpha_1(a_{11}, ..., a_{1n}) + ... + \alpha_m(a_{m1}, ..., a_{mn}), \alpha_i \in \mathbb{R}\}$$

Veamos un ejemplo...

$L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\quad L\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \end{pmatrix}$ ¿L es una t.l.?

↳ AUTOMORFISMO

- Veamos si: $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $L(\alpha v_1 + \beta v_2) \overset{?}{=} \alpha L(v_1) + \beta L(v_2)$

$$L\left(\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = L\left(\begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta x_2 \\ \beta y_2 \end{pmatrix}\right) = L\left(\begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta x_2 \\ \alpha y_1 + \beta y_2 \end{pmatrix}\right) \underset{\text{aplico TL}}{=}$$

$$= \begin{pmatrix} (\alpha x_1 + \beta x_2) + (\alpha y_1 + \beta y_2) \\ (\alpha x_1 + \beta x_2) - (\alpha y_1 + \beta y_2) \end{pmatrix} \underset{\text{en } \mathbb{R} \text{ prop. distr.}}{=} \begin{pmatrix} \alpha (x_1 + y_1) + \beta (x_2 + y_2) \\ \alpha (x_1 - y_1) + \beta (x_2 - y_2) \end{pmatrix}$$

$$= \alpha L \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \beta L \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

- $Nu(L) = \left\{ v \in \mathbb{R}^2 : L(v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ $\qquad \begin{cases} x + y = 0 \to x = y = 0 \\ x - y = 0 \to x = y \end{cases}$

Como $Nu(L) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ se dice que es INYECTIVA

- $Im(L) = \{ w \in \mathbb{R}^2 ; \exists v \in \mathbb{R}^2 : L(v) = w \}$

$\forall v \in \mathbb{R}^2 : v = x e_1 + y e_2 \Rightarrow L(v) \underset{TL}{=} x L(e_1) + y L(e_2)$ CODOM

$Im(L) = gen\{L(e_1), L(e_2)\}$, $\dim Im(L) = \dim \mathbb{R}^2$ SURY

$(\dim Im(L) + \dim Nu(L) = \dim \mathbb{R}^2)$

Seguimos con el ejemplo...

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$
$$\begin{array}{cc} L(e_1) & L(e_2)\end{array}$$

$$L(e_1)=\begin{pmatrix}1+0\\1-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{\| \\ \binom{0}{1}}}{L(e_2)}=\begin{pmatrix}0+1\\0-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

$n(A)=\dim N(A)$

- Espacio Nulo de A, $N(A)=\{v\in\mathbb{R}^2 : Av=0\}=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$

$$[A\,|\,0]=\left[\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\end{array}\right]\xrightarrow{f_2-f_1}\left[\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 0\end{array}\right]\xrightarrow{-\frac{1}{2}f_2}\left[\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{array}\right]\xrightarrow{f_1-f_2}$$

Gauss Jordan

pivotes

$$\left[\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{array}\right]\Rightarrow \begin{array}{l}x=0\\ y=0\end{array}$$

$\dim EF(A)=2$

- Esp. fila $EF(A)=\{(1,1),(1\ -1)\}=\{(1\ 0),(0\ 1)\}$
- Esp. columna $EC(A)=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}\rightarrow \dim EC(A)=2$

Definición: Se dice rango de A a la dim. del esp. fila y esp. columna (que siempre son =) $\rightarrow$ $\begin{pmatrix}1 & 0 & A\\ 0 & 1 & B\end{pmatrix}$

$$rg(A)+n(A)=\dim\mathbb{R}^2\ \text{(codominio)}$$
$$2+0=2$$

Conclusiones ...

Teorema: Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $dim(EC(A)) = dim(EF(A)) = r(A)$. Donde $r(A)$ se denomina rango de la matriz.

Definición: Se denomina nulidad de una matriz A a la dimensión de su espacio nulo $N(A)$, $n(A) = dim(N(A))$, siendo $N(A) = \{v \in \mathbb{R}^n, Av = 0\}$

Teorema de Rango-Nulidad: Para toda matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ se verifica:

$$r(A) + n(A) = n$$

son l.i:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_3-5f_1]{f_2-2f_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}f_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_3-6f_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$EF(A) = \{(1,-1),(0,1)\} = \{(1,-1),(2,0)\}$$

$$EC(A) = \left\{\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\} \neq \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$