Análisis Matemático para Inteligencia Artificial

Verónica Pastor (vpastor@fi.uba.ar),
Martín Errázquin (merrazquin@fi.uba.ar)

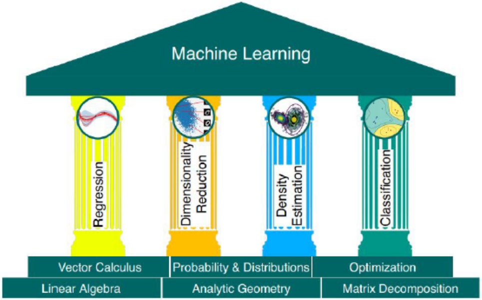
Especialización en Inteligencia Artificial

24/6/2022

¿Por qué estudiar Análisis Matemático?

A medida que Machine Learning se vuelve más común, y los paquetes de software se vuelven más simples de usar, uno se abstrae cada vez más de los detalles técnicos que hay detrás. **Modelo de caja negra.**

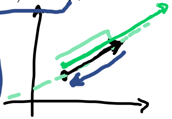
Esto trae el **peligro** de desconocer las decisiones de diseño y las limitaciones de cada algoritmo.



"Mathematics for Machine Learning", Deisenroth, Faisal, Ong

Bibliografía Recomendada: **Mathematics for Machine Learning**
Marc Peter Deisenroth, A. Aldo Faisal, and Cheng Soon Ong.
Published by Cambridge University Press (2020).
Está disponible gratis en `http://mml-book.github.io/`

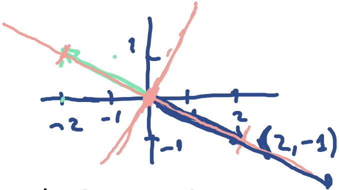
Empecemos considerando los vectores $u = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ y $v = (2, -1)$, ¿podemos sumar los vectores?



$$u + v = \left(1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}\right) + (2, -1) = \underbrace{\left(1+2, \tfrac{1}{2}+(-1), \tfrac{1}{3}+?\right)}_{\text{no está definido}}$$

Ahora $\left(1, \frac{1}{2}\right) + (2, -1) = \left(3, -\frac{1}{2}\right)$ suma

¿qué ocurre si tomamos $\tilde{v} = (-2, 1)$?



$(2, -1) = (-1) \cdot (-2, 1)$ Producto por un escalar

nros (escalares)

$4 \cdot (2, -1) = (8, -4)$

$\therefore$ Para definir correctamente $u + v$ deben estar en el mismo conjunto, y es posible cambiar el sentido y tamaño del vector. Es decir, que si el espacio vectorial es $\mathbb{R}^n$ podemos realizar estas operaciones:

1. $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^n \rightarrow x + y \in \mathbb{R}^n$ cerrada
2. $x \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R} \rightarrow kx \in \mathbb{R}^n$

¿Estudiar espacios vectoriales sólo sirve para vectores?

Polinomios de grado mayor o igual a 2

$-\frac{3}{4}x^2$ $\qquad +0x^2$

Sean $p(x) : 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}x^2$ y $q(x) : 2 - x$, ¿valen 1 y 2?

1. $p(x) + q(x) = (p+q)(x) = \left(1x^0 + \frac{1}{2}x^1 + \frac{3}{4}x^2\right) + \left(2x^0 - 1x\right) =$

$3 - \frac{x}{2} + \frac{3}{4}x^2$

2. $k \cdot p(x) = (kp)(x) = k\left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}x^2\right) = \underbrace{k + \frac{k}{2}x + \frac{3}{4}k x^2}_{\in \text{ polinomios de grado 2}}$

↳ producto por un escalar

⇓

Hay una biyección entre $\mathcal{P}_2[x]$ y $\mathbb{R}^3$.

Repasemos el producto de polinomios: $p(x) \cdot q(x) =$

$= \left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}x^2\right)\left(2 - x\right) =$

$= 2 + \cancel{\frac{2}{2}x} + \frac{3}{\cancel{4}\,2} \cdot \cancel{2}x^2 - \cancel{x} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^3 =$

$= 2 + x^2 - \underbrace{\frac{3}{4}x^3}_{\text{grado } 3} \in \mathcal{P}_2[x]$? NO

Algunas definiciones...

Sea $\mathbb{V} \neq \emptyset$, se define una operación (o suma) a una función $+ : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}$.
Esta operación se espera que cumpla con las siguientes propiedades:

1. Asociativa: $(x + y) + z = x + (y + z), \forall x, y, z \in \mathbb{V}$.
2. Elemento Neutro: $\forall x \in \mathbb{V}, \exists e \in \mathbb{V}$ tal que $x + e = e + x = x$.
3. Opuesto: $\forall x \in \mathbb{V}, \exists \tilde{x} \in \mathbb{V}$ tal que $x + \tilde{x} = \tilde{x} + x = e$.
4. Conmutativa: $\forall x, y \in \mathbb{V}, x + y = y + x$.

Sean $\mathbb{V} \neq \emptyset, \mathbb{K} \neq \emptyset$, se define una operación (o producto escalar) a una función $\bullet : \mathbb{K} \times \mathbb{V} \to \cancel{\mathbb{K}}\,\mathbb{V}$. Este conjunto $\mathbb{K}$ es generalmente $\mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$ es un cuerpo de escalares.

Comentario*: Un cuerpo es un conjunto con algunas operaciones sobre los elementos de éste, que se comportan como la adición, sustracción, multiplicación y división que cumplen con las propiedades que conocemos. Para no especificar el cuerpo se usa la palabra **escalar**.*

Definición de **Espacio Vectorial**

Diremos que $\mathcal{V} = (\mathbb{V}, +, \mathbb{K}, \bullet)$ es un espacio vectorial si $\mathbb{K}$ y $\mathbb{V}$ son conjuntos no vacíos y la operación $+$ en $\mathbb{V}$, y la acción $\bullet$ de $\mathbb{K}$ en $\mathbb{V}$ cumplen:

1. $+$ es asociativa
2. $+$ tiene elemento neutro
3. $+$ tiene elemento inverso
4. $+$ es conmutativa
5. $\alpha \bullet (v + w) = \alpha \bullet v + \alpha \bullet w, \ \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall v, w \in \mathbb{V}$
6. $(\alpha + \beta) \bullet v = \alpha \bullet v + \beta \bullet v, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall v \in \mathbb{V}$
7. $\bullet$ tiene elemento neutro: $1 \bullet v = v, \forall v \in \mathbb{V}$
8. $\bullet$ es ~~conmutativa~~: asociativa

Prop. distributivas

$$\alpha \bullet (\beta \bullet v) = (\alpha\beta) \bullet v, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall v \in \mathbb{V}$$

Subespacios Vectoriales: definición

Sea $\mathcal{V} = (\mathbb{V}, +, \mathbb{K}, \bullet)$ un espacio vectorial, un subconjunto $S \subseteq \mathbb{V}$, $S \neq \emptyset$ se dice que es un subespacio de $\mathbb{V}$ si la suma y el producto por escalares de $\mathbb{V}$ son una operación y una acción en S que lo convierten en un $\mathbb{K}$-espacio vectorial.

Condiciones necesarias y suficientes para caracterizar subespacios

S es un subespacio en un $\mathbb{K}$-espacio vectorial sii:

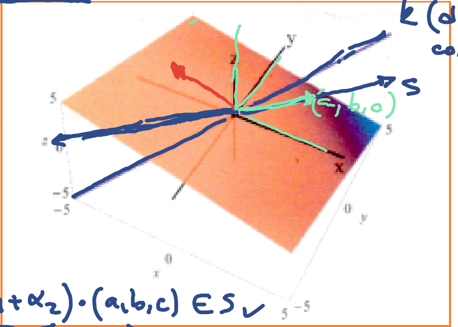
1. $S \neq \emptyset \quad (0 \in S)$
2. $v, w \in S \to v + w \in S$ cerrada en S
3. $\alpha \in \mathbb{K}, v \in S \to \alpha \bullet v \in S$ cerrado en el prod. por escalar

Subespacios triviales

- $S = \{0\} \subseteq \mathbb{V}$
- $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{V}$

$S_2 = \{\alpha \cdot (a,b,c) + \beta (d,e,f),\ \alpha$ y $\beta \in \mathbb{R}$ donde $(a,b,c) \neq k(d,e,f)$ con $k \in \mathbb{R}\}$

Sea $\mathcal{V} = (\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \bullet)$, sea $S = \{\alpha \bullet (a, b, c), \alpha \in \mathbb{R}\}$, ¿es un subespacio vectorial?



1) $S \neq \emptyset$? $(0,0,0) \in S$?

$0 \cdot (a,b,c) = (0,0,0)$ ✓

2) $u, v \in S \rightarrow u+v \in S$?

$\underbrace{\alpha_1 \cdot (a,b,c)}_{u} + \underbrace{\alpha_2 \cdot (a,b,c)}_{v} \overset{⑥}{=} \underbrace{(\alpha_1+\alpha_2)}_{\in \mathbb{R}} \cdot (a,b,c) \in S$ ✓

3) Tarea

Algunos ejemplos más ...

Sean S, T subespacios de $\mathcal{V} = (\mathbb{V}, +, \mathbb{K}, \bullet)$. Probar si también los son:

1. $S \cap T = \{v \in \mathbb{V} : v \in S \overset{y}{\wedge} v \in T\} \subseteq \mathbb{V}$.
2. $S + T = \{v \in \mathbb{V} : \boxed{v = s + t}, s \in S, t \in T\} \subseteq \mathbb{V}$.
3. $S \cup T = \{v \in \mathbb{V} : v \in S \underset{o}{\vee} v \in T\} \subseteq \mathbb{V}$.

Contraejemplo

1) $S \cap T \neq \emptyset$

¿$0 \in S \cap T$?

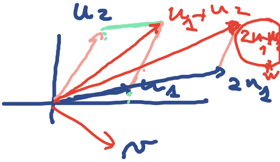
Sabemos $0 \in S$ porque S es subesp y $0 \in T$ (T es subesp)

$0 + 0 = 0 \therefore 0 \in S \cap T$ ✓

Demostremos 2 y 3

$S + T = \{v \in \mathbb{V} : v = s + t, s \in S, t \in T\} \subseteq \mathbb{V}$

Sistemas generadores



Definición: Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial, y $G = \{v_1, \ldots, v_r\} \subseteq \mathbb{V}$. Una combinación lineal de G es un elemento $v \in \mathbb{V}$ tal que $v = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \bullet v_i$, donde $\alpha_i \in \mathbb{K}$, para $i = 1, \ldots, r$.

$w = 2u_1 + u_2$

$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$

Definición: Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial, y $G \subseteq \mathbb{V}$. Se dice que G es un sistema de generadores de $\mathcal{V}$ si todo elemento de $\mathbb{V}$ es una combinación lineal de G.

Notación: $\langle G \rangle = \mathbb{V}$.

Demostremos que $\langle G\rangle$ es un subespacio de $\mathcal{V}$

Sea $G = \text{gen}\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ es subesp. de V?

dem/ ① $0 \in G$? $(G \neq \emptyset)$ $0 = \underbrace{\alpha_1}_{=0} v_1 + \dots + \underbrace{\alpha_r}_{=0} v_r$ si $\alpha_i = 0\ \forall i = 1, r$

② $u, w \in G \to u + w \in G$?

$u \in G \to u = \alpha_1 \cdot v_1 + \dots + \alpha_r v_r$
$w \in G \to w = \beta_1 \cdot v_1 + \dots + \beta_r v_r$ } luego $u + w =$

$= \left(\alpha_1 \cdot v_1 + \dots + \alpha_r \cdot v_r\right) + \left(\beta_1 \cdot v_1 + \dots + \beta_r \cdot v_r\right) \xrightarrow{\text{asoc. conmut}} =$

$= \left(\alpha_1 \cdot v_1 + \beta_1 \cdot v_1\right) + \dots + \left(\alpha_r \cdot v_r + \beta_r \cdot v_r\right) \xrightarrow{\text{aso}} =$

⑥

$= (\alpha_1 + \beta_1) \cdot v_1 + \dots + (\alpha_r + \beta_r) \cdot v_r$ $\therefore u + w \in G$

③ $u \in G, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha \cdot u \in G$? $v = \alpha \cdot u$, $w = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_r v_r$

$\alpha \cdot u = \alpha \cdot \left(\alpha_1 \cdot v_1 + \dots + \alpha_r \cdot v_r\right) = \alpha \cdot (\alpha_1 \cdot v_1) + \dots + \alpha \cdot (\alpha_r \cdot v_r)$

$\overset{⑧}{=} (\underbrace{\alpha\ \alpha_1}_{\beta_1}) \cdot v_1 + \dots + (\underbrace{\alpha\ \alpha_r}_{= \beta_r}) \cdot v_r \overset{⑤}{=} \beta_1 \cdot v_1 + \dots + \beta_r \cdot v_r \in G$

Ejemplo

Sea $G = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix} \right\}$ dado un vector cualquiera $v \in \mathbb{R}^3$, ¿podemos escribirlo como combinación lineal de los vectores de G?

Sea $v \in \mathbb{R}^3$, $v = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ ¿$v \in \langle G \rangle$? ¿Existen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix} \overset{\text{prod. por un escalar}}{=}$$

$$= \begin{pmatrix}\alpha\\\alpha\\\alpha\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\beta\\\beta\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\gamma\\3\gamma\\2\gamma\end{pmatrix} \overset{\text{def. de suma}}{=} \begin{pmatrix}\alpha+2\beta+4\gamma\\\alpha+\beta+3\gamma\\\alpha+2\gamma\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = \alpha + 2\beta + 4\gamma \quad (\text{ec } 1) \\ y = \alpha + \beta + 3\gamma \quad (\text{ec } 2) \\ z = \alpha + 2\gamma \rightarrow \alpha = z - 2\gamma \quad (\text{ec. } 3) \end{cases}$$

(ec. 3)(en 1) $x = z - 2\gamma + 2\beta + 4\gamma$

$\frac{x-z}{2} = \cancel{2}\beta + \cancel{2}\gamma$

$\beta = \frac{x}{2} - \frac{z}{2} - \gamma$ $\quad \gamma$ reemp

en (la ec 2) $y = z - 2\gamma + \frac{x}{2} - \frac{z}{2} - \gamma$

Independencia Lineal

Dentro de los conjuntos generadores, nos interesan aquellos que son mínimos (menor cantidad de elementos).

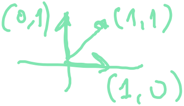
si y sólo si

Sea $S \subseteq \mathcal{V}$ un subespacio vectorial, y sea:

- $\{v_1, ..., v_n\} \subseteq \mathbb{V}$. Entonces $\langle v_1, ..., v_n \rangle \subseteq S$ sii $v_i \in S$, $\forall 1 \leq i \leq n$.
- $\{v_1, ..., v_n, v_{n+1}\} \subseteq \mathbb{V}$. Entonces $\langle v_1, ..., v_n, v_{n+1} \rangle = \langle v_1, ..., v_n \rangle$ sii $v_{n+1} \in \langle v_1, ..., v_n, \cancel{v_{n+1}} \rangle$

Definición: Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial, y sea $\{v_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de vectores en $\mathbb{V}$; se dice que $\{v_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es linealmente independiente (l.i.) sii

$$\sum_{\alpha \in I} k_\alpha \bullet v_\alpha = 0 \Rightarrow k_\alpha = 0, \ \forall \alpha \in I$$



$\alpha(1,0) + \beta(1,1) + \gamma(0,1) = 0$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases} \quad \alpha = \gamma$$

Observar:

- $\{0\}$ es linealmente dependiente (l.d.)
- si $v \neq 0$, $\{v\}$ es l.i.
- si $v_1 \propto v_2$ (colineales), $\{v_1, v_2\}$ es l.d.
- si v_1, v_2 no nulos, ni proporcionales, $\{v_1, v_2\}$ es l.i.

Definición: Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial, un conjunto $\{v_\alpha\}_{\alpha \in I}$ se llama base de $\mathcal{V}$ si $\{v_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es un conjunto linealmente independiente de $\mathbb{V}$ que satisface $\langle v_\alpha \rangle_{\alpha \in I} = \mathbb{V}$.

Definición: Sean $\mathcal{V}$ un espacio vectorial, $B = \{v_1, ..., v_n\}$ una base de $\mathcal{V}$. Diremos que n es la dimensión de $\mathcal{V}$, donde $n < \infty$.
Comentario: Tener en cuenta que existen espacios vectoriales con dimensión infinita.

Variedad lineal

Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial, M es una variedad lineal $M \subseteq \mathbb{V}$ es un conjunto de la forma $M = \{s + v, \ \textit{donde} \ s \in S\}$, siendo S subespacio de $\mathcal{V}$, y $v \in \mathbb{V}$.