Análisis Matemático para Inteligencia Artificial

Verónica Pastor (vpastor@fi.uba.ar),
Martín Errázquin (merrazquin@fi.uba.ar)

Especialización en Inteligencia Artificial

24/03/2023

Proyección Ortogonal

Proyección

Sea $\mathbb{V}$ un EV y $S \subset \mathbb{V}$ un SEV. Una transformación lineal $\Pi : \mathbb{V} \to S$ es una proyección si $\Pi^2 = \Pi \circ \Pi = \Pi$

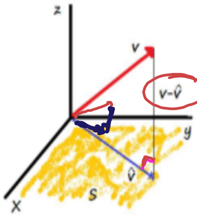
Esto significa que la matriz de transformación asociada a la proyección cumple con la propiedad de idempotencia: $[\Pi]^2 = [\Pi]$.

Proyección Ortogonal

Dado $\mathbb{V}$ un EV con p.i. y $S \subset \mathbb{V}$ un SEV, el objetivo es dado $v \in \mathbb{V}$ hallar $\tilde{v} \in S$ que sea "lo más parecido posible" a v.

$\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$

$S =$ plano x-y



$$\tilde{v} \in S : \tilde{v} = arg \ min_{s \in S} ||v - s||$$

Además vale que $\langle v - \tilde{v}, s \rangle = 0, \ \forall s \in S$

*

Obs: La ortogonalidad de la proyección tiene que ver con el p.i. que se use.

Sea $\mathbb{V}$ un EV de dimensión finita con p.i. $\langle .,. \rangle$, S un SEV. Dado $v \in \mathbb{V}$ existe un único $\tilde{v} \in S$ tal que

$$||v - \tilde{v}|| \leq ||v - u||, \quad \forall u \in \mathbb{V}$$

¿Cómo hallar la proyección?

Sea $\mathbb{V}$ un EV de dimensión n con p.i. $\langle .,. \rangle$, y $S \subset \mathbb{V}$ un SEV, $dim(S) = m \geq 1$, y sea $B = \{s_1, ..., s_m\}$ una BON de S. Buscamos encontrar la proyección de $\tilde{v} \in S$ de $v \in \mathbb{V}$ ($\tilde{v} = \Pi_S(v)$).

Como $\tilde{v} \in S$, $\tilde{v} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i s_i \Rightarrow$ busco los coeficientes que minimizan $||v - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i s_i||$. El problema puede escribirse como:

$$\Pi_S(v) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i s_i = B\alpha, \quad B = [s_1, ..., s_m], \; \alpha = [\alpha_1, ..., \alpha_m]^T$$

Como por definición $\langle v - \Pi_S(v), s\rangle = 0$, $\forall s \in S$, debo resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

aplico p.i $\langle x, y\rangle = y^T x$

$$\begin{cases} \langle v - \Pi_S(v), s_1\rangle = 0 \\ \vdots \\ \langle v - \Pi_S(v), s_m\rangle = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s_1^T(v - B\alpha) = 0 \\ \vdots \\ s_m^T(v - B\alpha) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} -s_1^T- \\ \vdots \\ -s_m^T- \end{pmatrix} (v - B\alpha) = 0$$

$$B^T(v - B\alpha) = 0 \Leftrightarrow B^T v = B^T B\alpha \Leftrightarrow \alpha = \boxed{(B^TB)^{-1}B^T} v$$

$(B^T)^{-1}$ $(B^T)^{-1}$

Como $\Pi_S(v) = B\alpha$

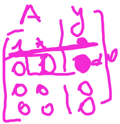
$v = B\alpha$

$B^{-1} v = \underbrace{B^{-1}B}_{I}\alpha$

$$\Pi_S^{(v)} = \underbrace{B}_{B}\underbrace{(B^TB)^{-1}B^T}_{\alpha}$$

Observación: Si B es una BON entonces $P_{\Pi_S} = BB^T$.

Supongamos que tenemos un sistema sobredeterminado de la forma:



m×n n×1 , m×1

$$Ab = y, \ A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \ b \in \mathbb{R}^n, \ y \in \mathbb{R}^m, \ m > n.$$

más ecuaciones que incógnitas

b es la solución de cuadrados mínimos

Como $m > n$, puede que no exista b que satisfaga todas las m ecuaciones, entonces busco la solución que más se acerque (busco $Proy_{Col(A)} y$)

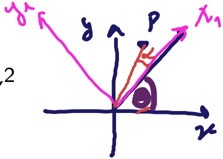
$$b = (A^T A)^{-1} A^T y \ \Rightarrow \ P = A(A^T A)^{-1} A^T$$

(y) (y)

Colab

Ya vimos que el ajuste por cuadrados mínimos funciona en la teoría, ahora veámoslo funcionar en la práctica!

Se acuerdan cuando vimos formas cuadráticas:



$$\overset{x^T}{[x \quad y]} \overset{A}{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}} \overset{x}{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}} = 2x^2 + \boxed{6xy} + 9y^2$$

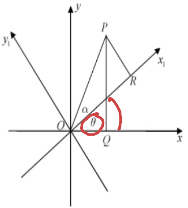
Si rotamos un ángulo θ

la figura dada por: $2x^2 + 6xy + 9y^2 = 1$

a la forma canónica $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 = 1$

Esto nos lleva a

una matriz de transición $S = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}$



$\tilde{x}$ en el plano x_1-y_1

$$x^T A x = (S\tilde{x})^T A (S\tilde{x}) = \tilde{x}^T (S^T A S)\tilde{x} \Rightarrow x^T A x = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2$$

$(S\tilde{x})^T = \tilde{x}^T S^T$ y asociativa

Obs.: S resulta una matriz ortogonal, $S^T A S = S^{-1} A S = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = D$

$S^T = S^{-1}$

Autovalores y Autovectores: definición

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}, \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ diremos que $\lambda \in \mathbb{K}$ es un autovalor (ava) de A y $x \in \mathbb{K}^n, x \neq 0$ es un autovector (ave) asociado a λ si:

$$\underbrace{\overset{n\times n}{A}\overset{n\times 1}{x}}_{n\times 1} = \underbrace{\lambda \overset{n\times 1}{x}}_{n\times 1}$$

Interpretación geométrica: A cada vector que se encuentre en la dirección de x, la transformación $T(x) = Ax$ lo contrae (o expende) por un factor λ.

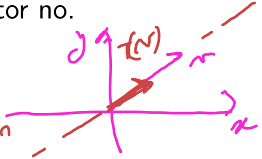
Importante: un autovalor puede ser nulo, un autovector no.

$T(X) = \lambda X \quad 0<\lambda<1$

$AX = \lambda X$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R}$

El vector x es invariante bajo la transformación



$E_\lambda = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} y, y \in \mathbb{R} \right\}$

autoespacio asociado al a.v.a 2

1. Geometría: curvas planas o superficies.
2. Sistemas dinámicos.
3. Análisis del comportamiento de sistemas de ecuaciones diferenciales.
4. Análisis de estabilidad.
5. Cadenas de Markov.
6. Grafos.
7. Reducción de dimensiones.
8. Cálculo de resonancias del sistema.
9. PageRank.

Dada $A \in \mathbb{K}^{n\times n}, \mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ es un autovalor de A sii λ es un cero del polinomio característico, $p(\lambda)$, de A:

matriz Identidad

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I)$$

por ej $(\lambda - 1)^2 = 0$ $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$

Observación: Puede ocurrir que algún λ sea raíz múltiple de $p(\lambda)$. $Av = \lambda v$

Se llama multiplicidad algebraica, m_a, a la cantidad de veces que λ aparece como raíz. En el ejemplo $p(\lambda) = (\lambda - 1)^2$ $m_a(1) = 2$

Se llama multiplicidad geométrica, m_g, del autovalor λ, a la cantidad de autovectores l.i. asociados a λ.

Siempre: $1 \leq m_g \leq m_a$

Sea $A = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ busco $p(\lambda) = det\left(\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = det\left(\begin{bmatrix} 4-\lambda & -4 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix}\right)$

$= (4-\lambda)(-\lambda) - (-4) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ $m_a(2) = 2$ Faltan los a.v.e

$\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \left(\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - 2I\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ $\begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ $x = 2y$, $y \in \mathbb{R}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$

$= \langle (2,1) \rangle$

$m_g = 1$

Propiedades de los autovectores

Dada $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, el conjunto de todos los autovectores asociados al autovalor λ generan un subespacio de $\mathbb{K}^n$ (autoespacio de A respecto de λ). El conjunto de todos los autovectores de A se llama autoespectro.

Si λ es un autovalor de $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, el autoespacio E_λ asociado es la solución al sistema homogéneo $(A - \lambda I)x = 0$.

Teorema: Los autovectores $x_1, ..., x_n$ de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con n autovalores distintos de $\lambda_1, ..., \lambda_n$ son linealmente independientes. Es decir, forman una base de $\mathbb{R}^n$.

$A = A^T$

Teorema: Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es simétrica, entonces existe una base ortonormal correspondiente a un espacio vectorial formado por autovectores de A y además $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = 1, \ldots, n$.

$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$, Busco los ava: $p(\lambda) = \det\left(\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} - \lambda I\right) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 2 & -5-\lambda \end{pmatrix} =$

$= (2-\lambda).(-5-\lambda) - (2.(-3)) = \lambda^2 + 3\lambda - 10 + 6 = \lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$

Busco $\lambda_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-4(-4)}}{2} = \dfrac{-3 \pm 5}{2}$ $\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -4 \end{cases}$ $p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 4)$

Autoespectro $= \{1, -4\}$ que son distintos $\underset{\text{TEO}}{\Longrightarrow}$ existen dos av.e li

• Busco E_1: $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = x \; ① \\ 2x - 5y = y \; ② \end{cases}$

Haciendo ①-②

$2y = x - y$

$\boxed{x = 3y}$ y libre

$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.y \; , y \in \mathbb{R} \right\}$ en particular $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

• Busco E_{-4} $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -4\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = -4x \\ 2x - 5y = -4y \end{cases}$

$2y = -4x + 4y$

$4x = 2y$

$\underbrace{y = 2x}$

x libre

$E_{-4} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} x \; , x \in \mathbb{R} \right\}$ en part. $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ asoc. $\lambda = -4$

Ahora puedo construir una matriz $S = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ de manera que se verifica $S^{-1} A S = D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$

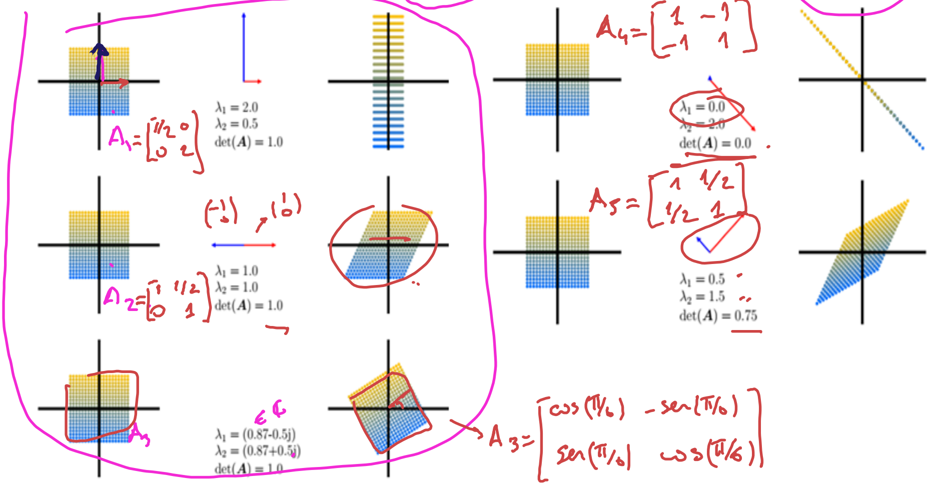
$ \; v_1 \;\; v_2$

$\longrightarrow S \overset{!}{\sim} I$ porque v_1 y v_2 son l.i

Recordar $S^{-1} = \dfrac{1}{\det(S)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ siendo $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

verificar $S^{-1} A S = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}(A) S = D$

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$: Área: $det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ y Perímetro: $Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$



Diagonalización

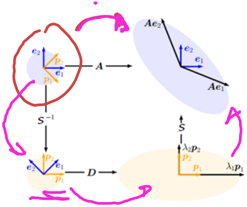
Definición:

Una matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es diagonalizable si $\exists S \in \mathbb{K}^{n\times n}$ no singular (es decir, tiene inversa) tal que:

$$S^{-1}AS = D$$

$Ax = \lambda x$

$= x\lambda$



donde D es una matriz *diagonal*.

Teorema: Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es diagonalizable sii A tiene n autovectores linealmente independientes.

dem: ($\Leftarrow$) Sea x_i un a.v.e asoc. al a.v.a λ_i, se verifica $Ax_i = \lambda_i x_i$

y como $\lambda_i x_i \in \mathbb{R}$, $\lambda_i x_i = x_i \lambda_i$. Si pienso $AX = A[x_1 \dots x_i \dots x_n] =$

$= [Ax_1 \dots Ax_i \dots Ax_n] = [\lambda_1 x_1 \dots \lambda_i x_i \dots \lambda_n x_n] = [x_1 \lambda_1 \dots x_i \lambda_i \dots x_n \lambda_n]$

X tiene inv. n vectores son l.i

$= XD$ Entonces $AX = XD \Rightarrow X^{-1}AX = D$

X tiene inversa $\Rightarrow \det(X) \neq 0$

$\Rightarrow$) Como A es diag. verif: $X^{-1}AX = D \Rightarrow X$

es decir, las columnas (a.v.e) son l.i.

Conclusiones para $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$

1. A es diagonalizable $\Rightarrow$ los vectores columna de la matriz de diagonalización S son los autovectores de A y los elementos de D son los autovalores de A.
2. S no es única, se pueden reordenar columnas, etc $\Rightarrow$ D será distinta.
3. A tiene n autovalores distintos $\Rightarrow$ los autovectores correspondientes son l.i. $\Rightarrow$ A es diagonalizable.
4. A tiene menos de n autovectores l.i. $\Rightarrow$ A no es diagonalizable.
5. Si hay autovalores repetidos y si:
   - $m_a = m_g$ (en los ava repetidos) $\Rightarrow$ los ave son l.i.
   - $m_a > m_g$ (en un ava repetido) $\Rightarrow$ A no es diagonalizable.

   $\rightarrow$ si fuera $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica
6. Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es una matriz hermítica ($A = \overline{A^T} = A^H$) $\Rightarrow$ A es diagonalizable y las columnas forman una BON.

Sea $L : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ endomorfismo sobre $\mathbb{K} - e.v.$ con $dim(\mathbb{V}) = n$. Si $p(\lambda)$ se factoriza en $\mathbb{K}$ entonces existe una base que viene dada por la matriz en bloques $(m < n)$.

∄D

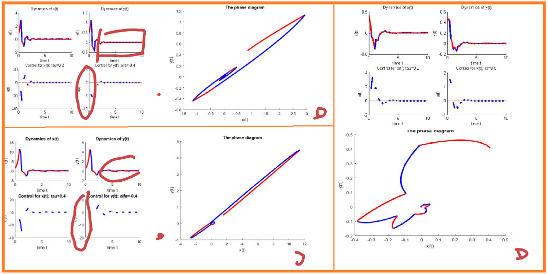
$$\exists\; J = \begin{bmatrix} A_1 & . & . & . & 0 \\ 0 & . & & & . \\ . & & . & & . \\ . & & & . & \\ 0 & . & . & . & A_m \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times n}, \quad A_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & . & . & & . \\ . & & . & . & . \\ . & & & . & 1 \\ 0 & . & . & . & \lambda_k \end{bmatrix}, \quad \sum_{k=1}^{m} \lambda_k = n.$$

Obs.: Cuando es diagonalizable $m = n$.

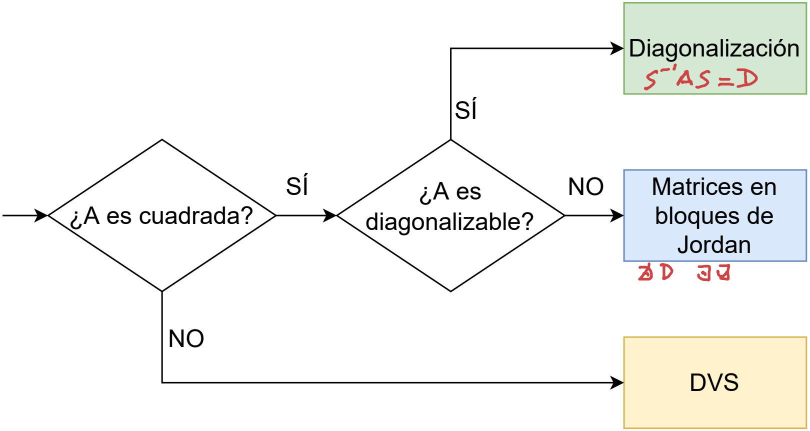
A_1, A_2, A_3

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Aplicación en Control



¿Qué puede pasar al intentar diagonalizar?



Descomposición en Valores Singulares (DVS)

¿Qué pasa cuando A no es cuadrada?

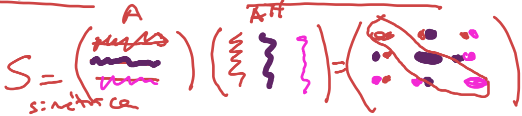
Teorema: Dada $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, siempre se puede obtener una matriz hermítica, semidefinida positiva $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ como:

$$\underset{}{S \overset{\text{def}}{\doteq}} \underbrace{A^H}_{n\times m} \underbrace{A}_{m\times n} \Rightarrow S \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

Obs.: $\tilde{S} \in \mathbb{C}^{m\times m}$ definida como $\tilde{S} \doteq \underbrace{A}_{m\times n}\underbrace{A^H}_{n\times m}$ también resulta hermítica y semidefinida positiva. $\Rightarrow \tilde{S} \in \mathbb{C}^{m\times m}$

$\rightarrow x^T \tilde{S} x \geq 0$

Obs. (II): Como $S, \tilde{S}$ son semidef. positivas, todos sus autovalores son reales **no negativos**.



DVS: Definición

Teorema: Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ una matriz de rango $r \in \{0, \dots, \text{mín}\{m, n\}\}$. La descomposición en valores singulares (DVS, SVD en inglés) de A se define como:

$$A = U \cdot \Sigma \cdot V^T$$

"D"

m×n   m×o o×o o×n

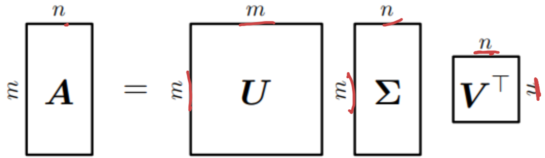
Antes $S^{-1}AS = D$

$A = SDS^{-1}$

n×n   n×n n×n n×n

donde:

- $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ es la matriz ortogonal formada por los aves de AA^T. → m×m
- $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}$ es la matriz "diagonal" de valores singulares $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$, con λ_i los primeros $p = \text{mín}\{m, n\}$ avas de AA^T y A^TA.
- $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es la matriz ortogonal formada por los aves de A^TA. → n×n



Ejemplo: Hallar una DVS

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\in \mathbb{R}^{2\times 3}$

Calculamos $\underset{3\times 2}{A^T} \underset{2\times 3}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ya es un ava

- prop: como la matriz está en bloques 1 es un autovalor $\lambda = 1$
- Vemos que A^TA tiene 2 filas iguales, $A^TA \not\sim_f I$ no tiene inversa, $\det(A^TA) = 0$, $\lambda = 0$
- Vimos $tr(A^TA) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i = 0 + 1 + \lambda = \sum_{i=1}^{3} a_{ii} = 3$ despejo $1 + \lambda = 3 \to \lambda = 2$

Como tengo 3 ava $\neq$ tendré 3 ave l.i. Hay que buscarlos.
Calcularlos para verificar que dan: $v_{\lambda=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $v_{\lambda=1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $v_{\lambda=2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Como la matriz A^TA es simétrica sabemos que v_i forman una BON
construyo (luego de normalizar) $V = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

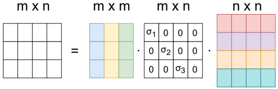
donde cada vector columna de V se corresponde con un ava.
y puedo escribir a $\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1} & 0 \end{pmatrix}$ y para determinar
U podemos calcular los ava de AA^T o bien despejar
de la igualdad $A = U\Sigma V^T \Rightarrow AV = U\Sigma \Rightarrow u_i = \frac{Av_i}{\sigma_i}$

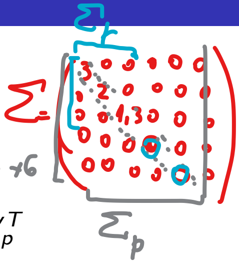
TAREA verificar que $U = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ con DVS $A = U\Sigma V^T$:

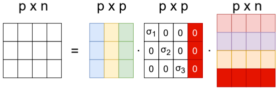
$AA^T \in \mathbb{R}^{m\times m}$

$A^TA \in \mathbb{R}^{n\times n}$



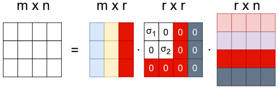


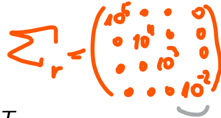
- Si $p = min\{m, n\}$, la DVS compacta es $A = U_p\Sigma_p V_p^T$



- Si $\sigma_1, \dots, \sigma_r > 0, \underbrace{\sigma_{r+1}, \dots, \sigma_p}_{p-r} = 0$, la DVS reducida es $A = U_r\Sigma_r V_r^T$

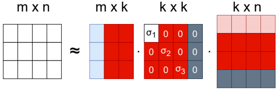
r





- Sea $k \in \{1, \dots, r-1\}$, la DVS truncada es $A \approx U_k\Sigma_k V_k^T$

!



Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y el sistema lineal $Ax = y$. La inversa de A no está definida, pero si $m > n$ una posible solución (cuadrados mínimos) era

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T y$$

¿Pero qué ocurre si $A^T A$ no es invertible? Se define la pseudoinversa de Moore-Penrose como

$$A^\dagger = V_r \Sigma_r^{-1} U_r^T$$

$A = U_r \cdot \Sigma_r \cdot V_r^T$

invertible

y $\hat{x} = A^\dagger y$ es (si $m < n$) la solución de mínima norma euclídea o (si $m > n$) la aproximación de mínimo error cuadrático/distancia euclídea.

Obs.: Todo lo anteriormente visto también vale para $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, utilizando $\cdot^H$ en vez de $\cdot^T$. Se utilizaron matrices reales para facilitar la lectura.

Colab

Una aplicación obvia para la DVS es, como vimos recién, la "solución"de sistemas de ecuaciones para los cuales el método de cuadrados mínimos no es factible.

¿Pero es ese el único uso que le podemos dar? Las descomposiciones siempre nos brindan un criterio bajo el cual obtener la *mejor* aproximación de *orden k* para el objeto a descomponer, y eso podría llegar a ser muy útil.