Análisis Matemático para Inteligencia Artificial

Verónica Pastor (vpastor@fi.uba.ar),
Martín Errázquin (merrazquin@fi.uba.ar)

Especialización en Inteligencia Artificial

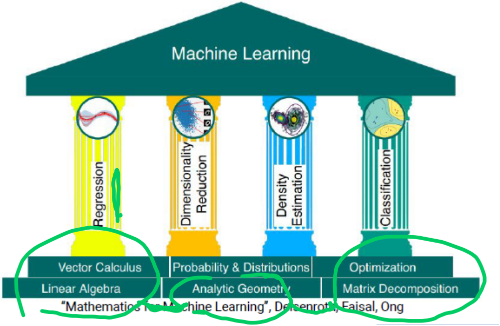
29/4/2022

Presentación de la Materia

¿Por qué estudiar Análisis Matemático?

A medida que Machine Learning se vuelve más común, y los paquetes de software se vuelven más simples de usar, uno se abstrae cada vez más de los detalles técnicos que hay detrás. **Modelo de caja negra.**

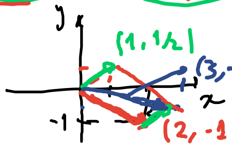
Esto trae el **peligro** de desconocer las decisiones de diseño y las limitaciones de cada algoritmo.



Bibliografía Recomendada: **Mathematics for Machine Learning**
Marc Peter Deisenroth, A. Aldo Faisal, and Cheng Soon Ong.
Published by Cambridge University Press (2020).
Está disponible gratis en `http://mml-book.github.io/`

Empecemos considerando los vectores $u = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ y $v = (2, -1)$, ¿podemos sumar los vectores?

$u + v = (\underbrace{1}_{x}, \underbrace{\tfrac{1}{2}}_{y}, \underbrace{\tfrac{1}{3}}_{z}) + (\underbrace{2}_{x}, \underbrace{-1}_{y})$



$(1, \frac{1}{2}) + (2, -1) = (3, -\frac{1}{2})$

¿qué ocurre si tomamos $\tilde{v} = (-2, 1)$?

$\alpha(2, -1) = (-2, 1)$ cambio el sentido

$\alpha \in \mathbb{R}$, por ej $\alpha = -1$

si $\alpha = 3$, $\alpha(2, -1) = (6, -3)$

$\therefore$ Para definir correctamente $u + v$ deben estar en el mismo conjunto, y es posible cambiar el sentido y tamaño del vector. Es decir, que si el espacio vectorial es $\mathbb{R}^n$ podemos realizar estas operaciones:

1. $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^n \to x + y \in \mathbb{R}^n$
2. $x \in \mathbb{R}^n, \underbrace{k \in \mathbb{R}}_{\text{escalar}} \to kx \in \mathbb{R}^n$

¿Estudiar espacios vectoriales sólo sirve para vectores?

x^0 $\quad$ grado$(p(x)) = 2$ $\quad$ $gr(q(x)) = 1$

Sean $p(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}x^2$ y $q(x) = 2 - x$, ¿valen 1 y 2? $\quad$ $q(x) = 2 - x + \underline{\underline{0x^2}}$

1. $p(x) + q(x) = (p+q)(x) = 3 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}x^2$

prop. distributiva

2. $k \cdot p(x) = (kp)(x) = k\left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}x^2\right) = k + \frac{k}{2}x + \frac{3}{4}kx^2 \in P_2$

$k \in \mathbb{R}$ $\quad$ selec polinomios de grado 2

Repasemos el producto de polinomios: $p(x) \cdot q(x) =$

$$\left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}x^2\right)\left(2 - x\right) = 2x^0 \cancel{- 1x} \cancel{+ 1x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^3 =$$

$$= 2 + x^2 - \frac{3}{4}x^3$$

Término independiente (x^0)

coeficiente principal. $c \neq 0$, que acompaña al $gr(p \cdot q(x)) = 3$

Algunas definiciones...

Sea $\mathbb{V} \neq \emptyset$, se define una operación (o suma) a una función
$+ : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}$. $+(u,v) = u+v$

Esta operación se espera que cumpla con las siguientes propiedades:

1. Asociativa: $(x+y)+z = x+(y+z), \forall x, y, z \in \mathbb{V}$.
2. Elemento Neutro: $\forall x \in \mathbb{V}, \exists e \in \mathbb{V}$ tal que $x+e = e+x = x$.
3. Opuesto: $\forall x \in \mathbb{V}, \exists \tilde{x} \in \mathbb{V}$ tal que $x+\tilde{x} = \tilde{x}+x = e$.
4. Conmutativa: $\forall x, y \in \mathbb{V}, x+y = y+x$.

Sean $\mathbb{V} \neq \emptyset, \mathbb{K} \neq \emptyset$, se define una operación (o producto escalar) a una función $\bullet : \mathbb{K} \times \mathbb{V} \to \mathbb{K}$. Este conjunto $\mathbb{K}$ es generalmente $\mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$ es un cuerpo de escalares. $h \in \mathbb{R}(x)$

Comentario: *Un cuerpo es un conjunto con algunas operaciones sobre los elementos de éste, que se comportan como la adición, sustracción, multiplicación y división que cumplen con las propiedades que conocemos. Para no especificar el cuerpo se usa la palabra* ***escalar****.*

Definición de **Espacio Vectorial**

Diremos que $\mathcal{V} = (\mathbb{V}, +, \mathbb{K}, \bullet)$ es un espacio vectorial si $\mathbb{K}$ y $\mathbb{V}$ son conjuntos no vacíos y la operación $+$ en $\mathbb{V}$, y la acción $\bullet$ de $\mathbb{K}$ en $\mathbb{V}$ cumplen:

Grupo conmutativo

Grupo

1. $+$ es asociativa
2. $+$ tiene elemento neutro
3. $+$ tiene elemento inverso (u opuesto)
4. $+$ es conmutativa
5. $\alpha \bullet (v + w) = \alpha \bullet v + \alpha \bullet w, \ \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall v, w \in \mathbb{V}$
6. $(\alpha + \beta) \bullet v = \alpha \bullet v + \beta \bullet v, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall v \in \mathbb{V}$
7. $\bullet$ tiene elemento neutro: $\underbrace{1}_{\in \mathbb{K}\ (\mathbb{R} \text{ ó } \mathbb{C})} \bullet v = v, \forall v \in \mathbb{V}$
8. $\bullet$ es ~~conmutat~~iva:

$$\underbrace{\alpha \bullet \overbrace{(\beta \bullet v)}^{\in \mathbb{V}}}_{\in \mathbb{V}} = \underbrace{\underbrace{(\alpha\beta)}_{\in \mathbb{K}} \bullet \underbrace{v}_{\in \mathbb{V}}}_{\in \mathbb{V}}, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall v \in \mathbb{V}$$

Por ejemplo $\mathbb{Z}$ (los nros enteros) son un grupo y es conmutativo

$$2 - 3 \neq 3 - 2$$

$$2 + (-3) = (-3) + 2$$

Subespacios Vectoriales: definición

Sea $\mathcal{V} = (\mathbb{V}, +, \mathbb{K}, \bullet)$ un espacio vectorial, un subconjunto $S \subseteq \mathbb{V}$, $S \neq \emptyset$ se dice que es un subespacio de $\mathbb{V}$ si la suma y el producto por escalares de $\mathbb{V}$ son una operación y una acción en S que lo convierten en un $\mathbb{K}$-espacio vectorial.

Condiciones necesarias y suficientes para caracterizar subespacios

S es un subespacio en un $\mathbb{K}$-espacio vectorial sii:

1. $S \neq \emptyset$ $(0 \in S)$
2. $v, w \in S \rightarrow v + w \in S$ cerrado en la +
3. $\alpha \in \mathbb{K}, v \in S \rightarrow \alpha \bullet v \in S$ cerrado para el prod. por un escalar.

Ejemplo: $\boxed{S = \mathbb{R}^2}$ $\mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^3 = \mathbb{V}$

$S = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3\}$

$(x_1, y_1, 0) + (x_2, y_2, 0) = (\underbrace{x_1 + x_2}_{\in \mathbb{R}}, \underbrace{y_1 + y_2}_{\in \mathbb{R}}, 0)$

$\mathbb{R}$ es un cuerpo

Subespacios triviales

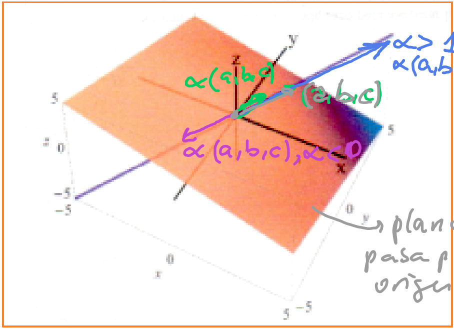
- $S = \{0\} \subseteq \mathbb{V}$
- $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{V}$

A veces, ② y ③ se prueban juntas: $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $u, v \in \mathbb{V}$, si $u, v \in S \rightarrow \alpha u + \beta v \in S$

Ejemplos de subespacios propios

S geométricamente representa una recta que pasa por el origen 5

Sea $\mathcal{V} = (\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \bullet)$, sea $S = \{\alpha \bullet (a, b, c), \underline{\alpha \in \mathbb{R}}\}$, ¿es un subespacio vectorial?



1. $0 \in S$? $(S \neq \emptyset)$ ← ⊗

$\underline{0(a,b,c)} = (0,0,0) \in S$

2. $u, v \in S$, $u \in S \to u = \alpha_1 (a,b,c)$

$v = \alpha_2 (a,b,c)$. Ent

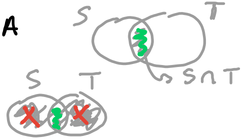
$u + v = (\underbrace{\alpha_1 + \alpha_2}_{\in \mathbb{R}})(a,b,c) \in S$

3. trivial

Algunos ejemplos más ...

Sean S, T subespacios de $\mathcal{V} = (\mathbb{V}, +, \mathbb{K}, \bullet)$. Probar si también los son:

1. $S \cap T = \{v \in \mathbb{V} : v \in S \wedge v \in T\} \subseteq \mathbb{V}$. TAREA (y)
2. $S + T = \{v \in \mathbb{V} : v = \underline{s + t}, s \in S, t \in T\} \subseteq \mathbb{V}$. (combinación lineal)
3. $S \cup T = \{v \in \mathbb{V} : \underline{v \in S} \vee v \in T\} \subseteq \mathbb{V}$. (o)



Demostremos 2 y 3

$S + T = \{v \in \mathbb{V} : v = s + t, s \in S, t \in T\} \subseteq \mathbb{V}$

① $S+T \neq \emptyset$, ¿$0 \in S+T$? $0 \in \mathbb{V}$ y $S \subseteq \mathbb{V}$ subesp $0 \in S$, análog $0 \in T$

$\underbrace{0}_{\in S} + \underbrace{0}_{\in T} = 0$ por ser $\underline{\mathbb{V}}$ un esp. vectorial. Por lo tanto, $S+T \neq \emptyset$ ✓

② Como S y T son subesp, $s_i \in S$, $t_i \in T$, sea $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

si $u, v \in S+T \to \alpha u + \beta v \in S+T$?

$u \in S+T$, $u = s_1 + t_1$; análog $v \in S+T$, $v = s_2 + t_2$ estoy en $\mathbb{V}$ $\downarrow$ (conmut)

$\alpha u + \beta v = \alpha(s_1 + t_1) + \beta(s_2 + t_2) \underset{\text{prop } 5}{=} \alpha s_1 + \alpha t_1 + \beta s_2 + \beta t_2 =$

$\underset{\text{asoc.}}{=} \underbrace{\alpha s_1 + \beta s_2}_{\in S \text{ subesp ② para } S} + \underbrace{\alpha t_1 + \beta t_2}_{\in T \text{ por ②}} = s + t$. Por lo tanto $u + v \in S+T$

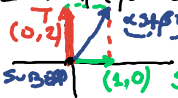
con $s \in S$, $t \in T$

defino $s = \alpha s_1 + \beta s_2$

$t = \alpha t_1 + \beta t_2$

$\therefore$ $S+T \subseteq \mathbb{V}$ es un subesp.

$S \cup T = \{v \in \mathbb{V}, \underline{v \in S} \lor \underline{v \in T}\}$ ②



$\alpha s + \beta t = (1,2)$

CONTRA EJ

① $0 \in S \cup T$, $0 \in S$ y $0 \in T \to 0 \in S \cup T$ $\therefore$ NO es subesp

Sistemas generadores

Definición: Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial, y $G = \{v_1, ..., v_r\} \subseteq \mathbb{V}$. Una combinación lineal de G es un elemento $v \in \mathbb{V}$ tal que $v = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \bullet v_i$, donde $\alpha_i \in \mathbb{K}$, para $i = 1, ..., r$.

Definición: Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial, y $G \subseteq \mathbb{V}$. Se dice que G es un sistema de generadores de $\mathcal{V}$ si todo elemento de $\mathbb{V}$ es una combinación lineal de G.

Notación: $\langle G \rangle = \mathbb{V}$.

$1.(1,0)+\frac{3}{2}(0,2)$

Ejemplo $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$ $\quad G = \{(1,0);(0,2)\}, (1,3)$

$\alpha(1,0) + \beta(0,2) = (1,1)$ $\quad \alpha = 1$ $\in \mathbb{R}$

$\beta = \frac{1}{2}$

$\mathbb{V} = \langle \{(1,0),(0,2)\} \rangle$ $\quad \dim \mathbb{R}^2 = 2$

Demostremos que $\langle G \rangle$ es un subespacio de $\mathcal{V}$

1) $0 \in G?$, $\langle G \rangle \neq \emptyset$ $G = \{v_1, \dots, v_r\} \subseteq \mathbb{V}$

$0 = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r$ si todos los $\alpha_i = 0 \Rightarrow 0 \in \langle G \rangle$ ✓

2) $v, u \in \langle G \rangle$, $u + v \in \langle G \rangle$

$u \in \langle G \rangle \rightarrow u = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r$

$v \in \langle G \rangle \rightarrow v = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_r v_r$

Luego $u + v \stackrel{\text{prop conmut. varias veces y asociat}}{=}$

$= (\alpha_1 v_1 + \beta_1 v_1) + \dots + (\alpha_r v_r + \beta_r v_r)$

$\stackrel{\text{prop 6}}{=} \underbrace{(\alpha_1 + \beta_1)}_{\in \mathbb{R} \text{ (cuerpo de escalares)}} \cdot v_1 + \dots + (\alpha_r + \beta_r) \cdot v_r$

$= \gamma_1 \cdot v_1 + \dots + \gamma_r v_r \in \langle G \rangle$

3) $u \in \langle G \rangle$, $\beta \in \mathbb{K} \rightarrow \beta \cdot u \in \langle G \rangle$?

$\beta \cdot u = \beta \cdot (\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r) \stackrel{\text{props}}{=}$

$= \beta(\alpha_1 v_1) + \dots + \beta(\alpha_r v_r) \stackrel{\text{prop 8}}{=}$

$= \underbrace{(\beta \alpha_1)}_{\in \mathbb{R}} \cdot v_1 + \dots + \underbrace{(\beta \alpha_r)}_{\in \mathbb{R}} \cdot v_r \in \langle G \rangle$

$\therefore \langle G \rangle$ es un subesp de $\mathbb{V}$

Ejemplo

$\circledast$ $\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y-z\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\\ 1\\ 0\end{pmatrix} y + z\begin{pmatrix} -1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$

Sea $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4\\ 3\\ 2\end{pmatrix} \right\}$ dado un vector cualquiera $v \in \mathbb{R}^3$,

¿podemos escribirlo como combinación lineal de los vectores de G?

Sea $v \in \mathbb{R}^3$, ¿$v = \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ es comb. lineal de vectores de G?

es decir, ¿$\exists\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tal que $v = \alpha \begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2\\ 1\\ 0\end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 4\\ 3\\ 2\end{pmatrix}$?

$v = \begin{pmatrix} \alpha\\ \alpha\\ \alpha\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\beta\\ \beta\\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4\gamma\\ 3\gamma\\ 2\gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+2\beta+4\gamma\\ \alpha+\beta+3\gamma\\ \alpha+2\gamma\end{pmatrix}$ dos vectores son iguales si lo son coordenada a coord.

$k \cdot v_i \in V$

$$\begin{cases} x = \alpha + 2\beta + 4\gamma & (3)\\ y = \alpha + \beta + 3\gamma & (2)\\ z = \alpha + 2\gamma & (1)\end{cases}$$

Despejo (1) $\alpha = z - 2\gamma$,

reemplazo en (2) $y = z - 2\gamma + \beta + 3\gamma$

$\beta = y - z - \gamma$, reemplazo en (3) junto con (1)

$x = (z - 2\gamma) + 2(y - z - \gamma) + 4\gamma$

$x = z + 2y - 2z \to \boxed{x = 2y - z}$

Como no hay α, β, γ únicos entonces no genera $\mathbb{R}^3$

$\therefore \langle G\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x = 2y - z \right\}$

Independencia Lineal

Dentro de los conjuntos generadores, nos interesan aquellos que son mínimos (menor cantidad de elementos).

Sea $S \subseteq \mathcal{V}$ un subespacio vectorial, y sea:

- $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq \mathbb{V}$. Entonces $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle \subseteq S$ sii $v_i \in S, \ \forall 1 \leq i \leq n$.
- $\{v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}\} \subseteq \mathbb{V}$. Entonces $\langle v_1, \ldots, v_n, v_{n+1} \rangle = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ sii $v_{n+1} \in \langle v_1, \ldots, v_n, v_{n+1} \rangle$ sobre

Definición: Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial, y sea $\{v_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de vectores en $\mathbb{V}$; se dice que $\{v_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es linealmente independiente (l.i.) sii

$$\sum_{\alpha \in I} k_\alpha \bullet v_\alpha = 0 \to k_\alpha = 0, \ \forall \alpha \in I$$

Observar:

- $\{0\}$ es linealmente dependiente (l.d.) $k \cdot 0 = 0 \ \forall k \in \mathbb{R}$
- si $v \neq 0$, $\{v\}$ es l.i. $k \cdot v = 0 \ (v \neq 0) \to k = 0$
- si $v_1 \propto v_2$ (colineales), $\{v_1, v_2\}$ es l.d. $k_1 \cdot v_1 + k_2 \cdot v_2 = 0 \to v_1 = \boxed{-\frac{k_2}{k_1}} \cdot v_1$ $= c \neq 0$
- si v_1, v_2 no nulos, ni proporcionales, $\{v_1, v_2\}$ es l.i.

$k_1 \cdot v_1 + k_2 \cdot v_2 = 0 \to k_1 = k_2 = 0$

Bases y dimensión

Definición: Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial, un conjunto $\{v_\alpha\}_{\alpha\in I}$ se llama base de $\mathcal{V}$ si $\{v_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es un conjunto linealmente independiente de $\mathbb{V}$ que satisface $\langle v_\alpha\rangle_{\alpha\in I} = \mathbb{V}$.

Definición: Sean $\mathcal{V}$ un espacio vectorial, $B = \{v_1, ..., v_n\}$ una base de $\mathcal{V}$. Diremos que n es la dimensión de $\mathcal{V}$, donde $n < \infty$.

Comentario: Tener en cuenta que existen espacios vectoriales con dimensión infinita.

¿ Es el conjunto $\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ linealmente independiente?

$$k_1\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \overset{?}{\Longrightarrow} k_1=0,\ k_2=0$$

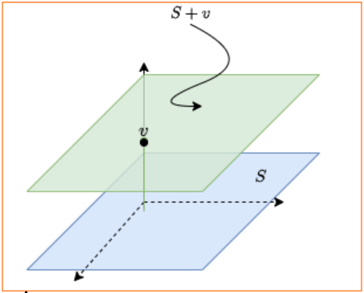
$$\begin{pmatrix}2k_1 - k_2\\k_1\\k_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} k_1=0\\ k_2=0\\ 2.0-0=0 \checkmark \text{ (verif.)}\end{array}$$

$\therefore$ Base $(G) = \left\{\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ entonces $\dim(G) = 2$

El plano qe genera G se $\left\langle \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x = 2y - z\right\}$

Variedad lineal

Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial, M es una variedad lineal $M \subseteq \mathbb{V}$ es un conjunto de la forma $M = \{s + v, \ donde \ s \in S\}$, siendo S subespacio de $\mathcal{V}$, y $v \in \mathbb{V}$.



Notar qe podemos pensar M como un S subespacio y un vector distinto

Una idea de esto ocurre cuando resolvemos ecuaciones (o sist.) diferenciales: $\dot{X} = AX + b$

- Si $b = 0$ sistema homogéneo $\dot{X} = AX$, buscamos la solución en un espacio vectorial. Pero para la parte <u>no</u> homogénea $\dot{X} = AX + b$ buscamos una solución particular X_p tal qe $\dot{X}_p = AX_p + b$ proponiendo soluciones "a ojo" del mismo tipo qe b.