Análisis Matemático para Inteligencia Artificial

Verónica Pastor (vpastor@fi.uba.ar),
Martín Errázquin (merrazquin@fi.uba.ar)

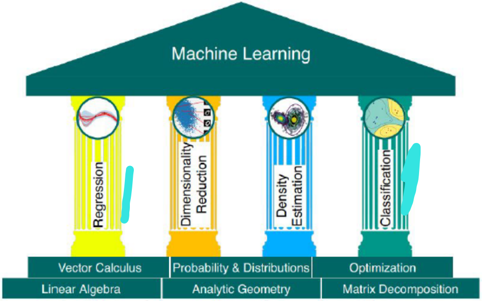
Especialización en Inteligencia Artificial

21/10/2022

¿Por qué estudiar Análisis Matemático?

A medida que Machine Learning se vuelve más común, y los paquetes de software se vuelven más simples de usar, uno se abstrae cada vez más de los detalles técnicos que hay detrás. **Modelo de caja negra.**

Esto trae el **peligro** de desconocer las decisiones de diseño y las limitaciones de cada algoritmo.



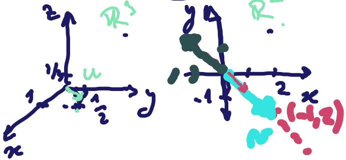
"Mathematics for Machine Learning", Deisenroth, Faisal, Ong

Bibliografía Recomendada: **Mathematics for Machine Learning**
Marc Peter Deisenroth, A. Aldo Faisal, and Cheng Soon Ong.
Published by Cambridge University Press (2020).
Está disponible gratis en `http://mml-book.github.io/`

Empecemos considerando los vectores $u = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ y $v = (2, -1)$, ¿podemos sumar los vectores?

$$u + v = (1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}) + (2, -1)?$$
$$= (3, \tfrac{1}{2} - 1, \tfrac{1}{3} + ?)$$

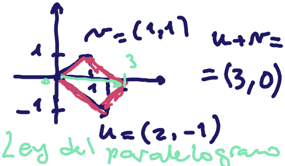
No está definida la suma



¿qué ocurre si tomamos $\tilde{v} = (-2, 1)$?

$$(-1) \cdot (2, -1) = (-2, 1)$$

multiplico por un nro.



$\therefore$ Para definir correctamente $u + v$ deben estar en el mismo conjunto, y es posible cambiar el sentido y tamaño del vector. Es decir, que si el espacio vectorial es $\mathbb{R}^n$ podemos realizar estas operaciones:

1. $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^n \rightarrow x + y \in \mathbb{R}^n$ es cerrado en la suma.
2. $x \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R} \rightarrow kx \in \mathbb{R}^n$

Sean $p(x) : 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}x^2$ y $q(x) : 2 - x$, ¿valen 1 y 2?

$+0x^2$

1. $p(x) + q(x) = (p + q)(x) = 3 - \frac{1}{2}x + \left(\frac{3}{4} + 0\right)x^2 = \underbrace{3 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}x^2}$

   $gr(p+q) \leq gr(p) + gr(q)$

   en software : $(3, -\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$.

2. $k \cdot p(x) = (kp)(x) =$

   $k\left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}x^2\right) = k + \frac{k}{2}x + \frac{3}{4}k \cdot x^2 \in \mathcal{P}_2(x)$

   Hay una biyección $\mathcal{P}_2[x]$ y $\mathbb{R}^3$

Repasemos el producto de polinomios: $p(x) \cdot q(x) =$

$\left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}x^2\right) \cdot (2 - x) = 2 - \cancel{x} + \cancel{1x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^3$

$= 2 + x^2 - \frac{3}{4}x^3 \notin \mathcal{P}_2[x]$

no es cerrado para el producto

Algunas definiciones...

Sea $\mathbb{V} \neq \emptyset$, se define una operación (o suma) a una función $(+) : \underbrace{\mathbb{V}}_{p} \times \underbrace{\mathbb{V}}_{q} \to \underbrace{\mathbb{V}}_{p+q}$.
Esta operación se espera que cumpla con las siguientes propiedades:

1. Asociativa: $(x + y) + z = x + (y + z), \forall x, y, z \in \mathbb{V}$.
2. Elemento Neutro: $\forall x \in \mathbb{V}, \exists e \in \mathbb{V}$ tal que $x + e = e + x = x$.
3. Opuesto: $\forall x \in \mathbb{V}, \exists \tilde{x} \in \mathbb{V}$ tal que $x + \tilde{x} = \tilde{x} + x = e$.
4. Conmutativa: $\forall x, y \in \mathbb{V}, x + y = y + x$.

Sean $\mathbb{V} \neq \emptyset, \mathbb{K} \neq \emptyset$, se define una operación (o producto escalar) a una función $\bullet : \underbrace{\mathbb{K} \times \mathbb{V}}_{(\lambda, p)} \to \underbrace{\mathbb{V}}_{\lambda p}$. Este conjunto $\mathbb{K}$ es generalmente $\mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$ es un cuerpo de escalares.

Comentario: *Un cuerpo es un conjunto con algunas operaciones sobre los elementos de éste, que se comportan como la adición, sustracción, multiplicación y división que cumplen con las propiedades que conocemos. Para no especificar el cuerpo se usa la palabra* ***escalar****.*

Definición de **Espacio Vectorial**

Diremos que $\mathcal{V} = (\mathbb{V}, +, \mathbb{K}, \bullet)$ es un espacio vectorial si $\mathbb{K}$ y $\mathbb{V}$ son conjuntos no vacíos y la operación $+$ en $\mathbb{V}$, y la acción $\bullet$ de $\mathbb{K}$ en $\mathbb{V}$ cumplen:

1. $+$ es asociativa
2. $+$ tiene elemento neutro
3. $+$ tiene elemento inverso
4. $+$ es conmutativa
5. $\alpha \bullet (v + w) = \alpha \bullet v + \alpha \bullet w, \ \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall v, w \in \mathbb{V}$
6. $(\alpha + \beta) \bullet v = \alpha \bullet v + \beta \bullet v, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall v \in \mathbb{V}$
7. $\bullet$ tiene elemento neutro: $1 \bullet v = v, \forall v \in \mathbb{V}$
8. $\bullet$ es asociativa:

$$\overset{2}{\alpha} \bullet (\overset{3}{\beta} \bullet v) = (\alpha\beta) \bullet v, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall v \in \mathbb{V}$$

Grupo. Ejemplo: los nros. enteros ($\mathbb{Z}$)

+ Grupo es conmutativo

distributiva del escalar en la suma

distributiva de la suma de escalares en el producto escalar

producto en $\mathbb{K}$

Sea $\mathcal{V} = (\mathbb{V}, +, \mathbb{K}, \bullet)$ un espacio vectorial, un subconjunto $S \subseteq \mathbb{V}$, $S \neq \emptyset$ se dice que es un subespacio de $\mathbb{V}$ si la suma y el producto por escalares de $\mathbb{V}$ son una operación y una acción en S que lo convierten en un $\mathbb{K}$-espacio vectorial.

Condiciones necesarias y suficientes para caracterizar subespacios

S es un subespacio en un $\mathbb{K}$-espacio vectorial sii:

1. $S \neq \emptyset$ $(0 \in S)$
2. $v, w \in S \rightarrow v + w \in S$ cerrada para la suma
3. $\alpha \in \mathbb{K}, v \in S \rightarrow \alpha \bullet v \in S$

Subespacios triviales

- $\{0\} \subseteq \mathbb{V}$

  $S = \{0\}$
  1) $S \neq \emptyset$
  2) $0 + 0 = 0$, $0 \in S$
  3) $k \cdot 0 = 0$, $0 \in S$
- $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{V}$

  $\mathbb{V} \neq \emptyset \Rightarrow \mathbb{V} \neq \emptyset$

Sea $\mathcal{V} = (\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \bullet)$, sea $S = \{\alpha \bullet (a, b, c), \alpha \in \mathbb{R}\}$, ¿es un subespacio vectorial?

fijo — Recta

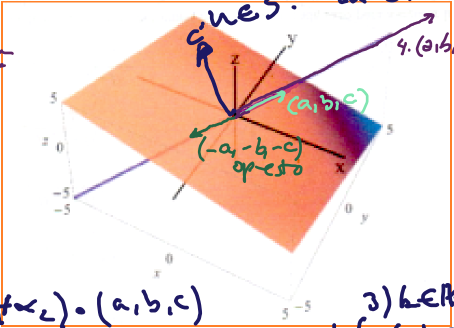
1) $S \neq \emptyset$ $(0,0,0) \in S$?

Puedo usar $\alpha = 0$

$\alpha . (a,b,c) = (0,0,0)$ ✓

2) $u, v \in S \Rightarrow u+v \in S$?

$\alpha_1 . (a,b,c) + \alpha_2 (a,b,c) = (\alpha_1 + \alpha_2) . (a,b,c)$



3) $k \in \mathbb{K}$, $u \in S$

$ku = k.(\alpha . (a,b,c)) = (k.\alpha) . (a,b,c)$ ✓

Algunos ejemplos más ...

Sean S, T subespacios de $\mathcal{V} = (\mathbb{V}, +, \mathbb{K}, \bullet)$. Probar si también los son:

1. $S \cap T = \{v \in \mathbb{V} : v \in S \wedge v \in T\} \subseteq \mathbb{V}$. (y)
2. $S + T = \{v \in \mathbb{V} : v = s + t, s \in S, t \in T\} \subseteq \mathbb{V}$.
3. $S \cup T = \{v \in \mathbb{V} : v \in S \vee v \in T\} \subseteq \mathbb{V}$. (o)

1) $0 \in S \cup T$ ✓ $0 \in S$, $0 \in T$

2) $u, v \in S \cup T \Rightarrow u + v \in S \cup T$

$u \in S$ ó $u \in T$

$v \in S$ ó $v \in T$

↳ ∴ No se cumple 2) No es un subespacio.

Demostremos 2 y 3

$S + T = \{v \in \mathbb{V} : v = s + t, s \in S, t \in T\} \subseteq \mathbb{V}$

1) $S+T \neq \emptyset$? ¿$0 \in S+T$? Sabemos que S subesp. de $\mathbb{V} \to 0 \in S$
y " T " " " $\to 0 \in T$

$\underline{0} = 0+0$, $0 \in S$, $0 \in T$, $0 \in S+T$

2) $u, w \in S+T \Rightarrow u+w \in S+T$?

Como $u \in S+T \to u = s_1 + t_1$, $s_1 \in S$, $t_1 \in T$

y " $w \in S+T \to w = s_2 + t_2$, $s_2 \in S$, $t_2 \in T$

conmutativa y asoc.

Luego, $\underline{u+w} = (s_1+t_1)+(s_2+t_2) \underset{\downarrow}{=} s_1 + (t_1+s_2) + t_2 =$

estoy en $\mathbb{V}$ valen las 8 prop. (asoc)

$= (s_1 + s_2) + (t_1 + t_2) \underset{\downarrow}{=} \underline{s+t}$

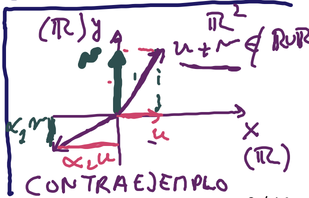
$s_i \in S$, $t_i \in T$ $\quad s \in S$ y $t \in T$

3) $k \in \mathbb{K}$, $u \in S+T \Rightarrow k \cdot u \in S+T$?

$k \cdot u = k \cdot (s+t) = \underbrace{k \cdot s}_{\in S} + \underbrace{k . t}_{\in T} \in S+T$

props

$\therefore S+T$ es un subesp. de $\mathbb{V}$



Sistemas generadores

Definición: Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial, y $G = \{v_1, ..., v_r\} \subseteq \mathbb{V}$. Una combinación lineal de G es un elemento $v \in \mathbb{V}$ tal que $v = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \bullet v_i$, donde $\alpha_i \in \mathbb{K}$, para $i = 1, ..., r$.

Definición: Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial, y $G \subseteq \mathbb{V}$. Se dice que G es un sistema de generadores de $\mathcal{V}$ si todo elemento de $\mathbb{V}$ es una combinación lineal de G.

Notación: $\langle G \rangle = \mathbb{V}$. gen(G)

parentesis angulares

Sea $G = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix} \right\}$ dado un vector cualquiera $v \in \mathbb{R}^3$, → no genera $\mathbb{R}^3$ sólo a los q' verif. (*)

$z-3x+2y=0$

¿podemos escribirlo como combinación lineal de los vectores de G?

$v=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$ ¿$\exists\, \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in K$: $\alpha_1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\alpha_2\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+\alpha_3\cdot\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1 1\\\alpha_1 1\\\alpha_1 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha_2 2\\\alpha_2 1\\\alpha_2 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha_3 4\\\alpha_3 3\\\alpha_3 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3\\\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3\\\alpha_1+2\alpha_3\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x=\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3 \\ y=\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3 \quad (2) \\ z=\alpha_1+2\alpha_3 \end{cases}$$

$\longrightarrow \alpha_1 = z-2\alpha_3$ remplazo en (2)

$$\begin{cases}\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3=x\\ -\alpha_2-\alpha_3=y-x\\ -2\alpha_2-2\alpha_3=z-x\end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}}_{b}=\underbrace{\begin{bmatrix}1&2&4\\1&1&3\\1&0&2\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{bmatrix}}_{X \text{ incog.}}$$

se resuelva $[A \mid b]$ Gauss-Jordan

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&4&x\\1&1&3&y\\1&0&2&z\end{array}\right]\xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-F_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&4&x\\0&-1&-1&y-x\\0&-2&-2&z-x\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_2(-1)}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&4&x\\0&1&1&x-y\\0&-2&-2&z-x\end{array}\right]\xrightarrow{F_3+2F_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&4&x\\0&1&1&x-y\\0&0&0&(z-x)-2(x-y)\end{array}\right] \; (*)$$

(*) $\{\, 0\alpha_1+0\alpha_2+0\alpha_3 = z-3x+2y$

Dentro de los conjuntos generadores, nos interesan aquellos que son mínimos (menor cantidad de elementos).

En caso de $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$

$\alpha_2 = -\alpha_3$

$\alpha_1 = -2\alpha_3$

Sea $S \subseteq \mathcal{V}$ un subespacio vectorial, y sea:

- $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq \mathbb{V}$. Entonces $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle \subseteq S$ sii $v_i \in S$, $\forall 1 \leq i \leq n$.
- $\{v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}\} \subseteq \mathbb{V}$. Entonces $\langle v_1, \ldots, v_n, v_{n+1} \rangle = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ sii $v_{n+1} \in \langle v_1, \ldots, v_n, \rangle$

$\{v_1, \ldots, v_n\}$

Definición: Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial, y sea $\{v_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de vectores en $\mathbb{V}$; se dice que $\{v_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es linealmente independiente (l.i.) sii

$$\sum_{\alpha \in I} k_\alpha \bullet v_\alpha = 0 \to k_\alpha = 0, \ \forall \alpha \in I$$

$v \in \mathbb{R}^2$ genera

$v = (a, b) = \underset{\alpha_1}{a}(1,0) + \underset{\alpha_2}{b}(0,1)$

¿$(1,0)$ y $(0,1)$ son l.i.?

$(0,0) = \alpha_1 (1,0) + \alpha_2 (0,1)$

ejemplo $= (\alpha_1, \alpha_2)$

Observar:

- $\{0\}$ es linealmente dependiente (l.d.) $\forall \alpha \neq 0$ $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$
- si $v \neq 0$, $\{v\}$ es l.i.
- si $v_1 \propto v_2$ (colineales), $\{v_1, v_2\}$ es l.d. $v_1 = c \cdot v_2$
- si v_1, v_2 no nulos, ni proporcionales, $\{v_1, v_2\}$ es l.i.

Bases y dimensión

Definición: Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial, un conjunto $\{v_\alpha\}_{\alpha\in I}$ se llama base de $\mathcal{V}$ si $\{v_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es un conjunto linealmente independiente de $\mathbb{V}$ que satisface $\underbrace{\langle v_\alpha\rangle_{\alpha\in I} = \mathbb{V}}$. $\rightarrow$ y genera todo $\mathbb{V}$

Definición: Sean $\mathcal{V}$ un espacio vectorial, $B = \{v_1, ..., v_n\}$ una base de $\mathcal{V}$. Diremos que n es la dimensión de $\mathcal{V}$, donde $n < \infty$.
Comentario: Tener en cuenta que existen espacios vectoriales con dimensión infinita.

Variedad lineal

Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial, M es una variedad lineal $M \subseteq \mathbb{V}$ es un conjunto de la forma $M = \{s + v, \ \textit{donde} \ s \in S\}$, siendo S subespacio de $\mathcal{V}$, y $v \in \mathbb{V}$.