Análisis Matemático para Inteligencia Artificial

Verónica Pastor (vpastor@fi.uba.ar),
Martín Errázquin (merrazquin@fi.uba.ar)

Especialización en Inteligencia Artificial

28/10/2022

Sea $\mathbb{V} - \mathbb{K}$ e.v., donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$, un producto interno sobre $\mathbb{V}$ es una función $\Phi : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ (*o* $\mathbb{C}$) que satisface:

1. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ (*o* $\mathbb{C}$), $u, v, w \in \mathbb{V}$.
   - $\Phi(u + v, w) = \Phi(u, w) + \Phi(v, w)$ "prop. distributiva"
   - $\Phi(\alpha \bullet u, v) = \alpha \bullet \Phi(u, v)$ "sale el escalar"
2. $\Phi(u, v) = \overline{\Phi(v, u)}$ "conmutativo" conjugado. Si a,b ER
3. $\Phi(v, v) \geq 0$ y $\Phi(v, v) = 0$ sii $v = 0$ $z \in \mathbb{C},\ z = a + bi$

Notación: $\Phi(u, v) = \langle u, v \rangle$ z conjugado: $\bar{z} = a - bi$

Definición: A un espacio vectorial real (complejo) provisto de un producto interno se lo llama espacio euclídeo (espacio unitario).

Obs: El p.i. es una generalización del producto escalar en $\mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$).

$\langle (1,2),(3,-1) \rangle = 1.3 + 2(-1) = 1$

producto escalar

También hay otros espacios con productos internos ...

$=(\mathcal{V}, \mathbb{K}, +, \cdot)$

Sea $\mathcal{V}$ el espacio de las funciones continuas de valor real (o complejo) en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$ (se nota $\mathcal{C}([-1,1])$) con p.i.

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx$$

conjugada

$z\bar{z} = |z|^2$

$(a+bi)(a-bi) = a^2+b^2$

Repaso de $\mathbb{C}$

$z = a+bi \Rightarrow \bar{z} = a-bi$

$\Rightarrow \bar{\bar{z}} = a+bi$ $\quad \boxed{z = \bar{\bar{z}}}$ (*1)

$\overline{z\cdot w} = \overline{(a+bi)(c+di)} = \overline{ac-bd+(ad+bc)i}$

$= ac-bd-(ad+bc)i$

$= \bar{z}\cdot\bar{w}$ (*2)

$i^2=-1$

Verificar que cumple:

1. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$), $f, g, h \in \mathcal{C}([-1,1])$.
   - $\Phi(f+g, h) = \Phi(f,h) + \Phi(g,h)$ $=$ (*)
   - $\Phi(\alpha \bullet f, g) = \alpha \bullet \Phi(f,g)$ TAREA
2. $\Phi(f,g) = \overline{\Phi(g,f)}$ $= \overline{\int_{-1}^{1} g(x)\, f(x)\, dx}$
3. $\Phi(f,f) \geq 0$, y $\Phi(f,f) = 0$ sii $f(x) = 0, \forall x$

(1) $\langle f+g, h\rangle = \int_{-1}^{1} (f+g)(x)\,\overline{h(x)}dx = \int_{-1}^{1} [f(x)+g(x)]\,\overline{h(x)}\,dx =$

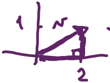
$= \int_{-1}^{1} \left[[f(x)\bar{h}(x)] + [g(x)\bar{h}(x)]\right]dx = \underbrace{\int_{-1}^{1} f(x)\,\overline{h(x)}\,dx}_{\langle f,h\rangle} + \underbrace{\int_{-1}^{1} g(x)\,\overline{h(x)}dx}_{\langle g,h\rangle} =$ (*)

(2) $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx \overset{(*1)}{=} \overline{\overline{\int_{-1}^{1} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx}} \overset{(*2)}{=} \overline{\int_{-1}^{1} \overline{f(x)}\cdot g(x)\,dx} =$ $\to \in \mathbb{C}^1$

$= \overline{\int_{-1}^{1} g(x)\,\overline{f(x)}\,dx} = \overline{\langle g, f\rangle}$

(3) $\int_{-1}^{1} f^2(x)\,dx \geq 0$

Definición de Norma



$\sqrt{2^2+1^2} = \|v\|$

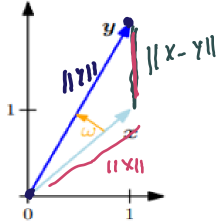
Sea $(\mathbb{V}, \langle ., . \rangle)$ un e.v. real (complejo) con p.i.. Sea $v \in \mathbb{V}$, se define la norma de v asociada a $\langle ., . \rangle$.

Notación: $\|v\| = \langle v, v \rangle^{1/2}$

Es la generalización de la longitud de un vector en $\mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$).

Def: A partir de un p.i. se puede se puede definir el ángulo w entre dos vectores x, y

$$\cos(\omega) = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \, \|y\|}$$



Ley del coseno: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$

$\underbrace{\|x-y\|^2}_{a} = \langle x-y, x-y \rangle \overset{①}{=} \langle x, x-y \rangle - \langle y, x-y \rangle \overset{①}{=} \langle x,x \rangle - \langle x,y \rangle -$

$- [\langle y,x \rangle - \langle y,y \rangle] = \underbrace{\|x\|^2}_{b} - \underbrace{2\langle x,y \rangle}_{(b+c)^2} + \underbrace{\|y\|^2}_{c}$

def, ②

Por comparación:

$\cos\alpha = \frac{\langle x,y \rangle}{\|x\| \|y\|}$

1. $\forall v \in \mathbb{V},\ ||v|| \geq 0$, y $||v|| = 0$ sii $v = 0$. $\to \langle \alpha . v, \alpha . v \rangle^{1/2}$
2. Sean $\alpha \in \mathbb{R}(o\ \mathbb{C})$, $v \in \mathbb{V}$, $||\alpha \bullet v|| = |\alpha|\ ||v||$. módulo, norma
3. Desigualdad de Cauchy Schwartz: si $u, v \in \mathbb{V}$ entonces
$$\boxed{|\underbrace{\langle u, v\rangle}_{\text{nro}}| \leq ||u||.\,||v||}$$
4. Desigualdad Triangular: si $u, v \in \mathbb{V}$ entonces
$$||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$$

TAREA probar $||u+v||^2$ y usar C. Schwartz

dem ③ Sea $w = u - \underbrace{\frac{\langle u, v\rangle}{||v||^2}}_{\text{escalar } \alpha} . v$, luego calculan $||w||^2 = \langle w, w\rangle =$

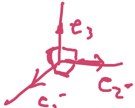
$= \langle u - \alpha . v, u - \alpha . v\rangle \underset{\text{prop de } \langle , \rangle}{=} ||u||^2 - \langle u, \alpha v\rangle - \langle \alpha v, u\rangle + |\alpha|^2 ||v||^2 = ||u||^2 - 2\frac{\langle u,v\rangle^2}{||v||^2} + \frac{\langle u,v\rangle^2}{||v||^{4}{}_{2}} . \cancel{||v||^2}$

$0 \leq ||w||^2 = ||u||^2 - \frac{\langle u,v\rangle^2}{||v||^2} \underset{\text{despejo}}{\Longrightarrow} \sqrt{|\langle u,v\rangle|^2} \leq \sqrt{||u||^2 . ||v||^2}$

$\sqrt{c^2} = |c|$

Def: $(\mathbb{V}, \langle ., . \rangle)$ un $\mathbb{K}$-EV (con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$) con p.i. dos vectores $u, v \in \mathbb{V}$ se dicen ortogonales si $\langle u, v \rangle = 0$.

Teorema de Pitágoras: Si $u, v \in \mathbb{V}$ son ortogonales entonces $||u + v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$.



$\langle (1,0,0), (1,0,0) \rangle = 1^2 + 0^2 + 0^2 = 1$

Def: $(\mathbb{V}, \langle ., . \rangle)$ un $\mathbb{K}$-EV (con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$) con p.i.. Se dice que $\{v_1, ..., v_r\} \subset \mathbb{V}$ es un conjunto ortogonal si $\langle v_i, v_j \rangle = 0, \ \forall i \neq j$. Si $||v_i|| = 1, \ \forall i$ se dice que es un conjunto ortonormal.

La proyección ortogonal del vector v sobre el vector u es otro vector que notamos como $P_u(v)$, y se define:

siempre es unitario

$\left\| \frac{u}{||u||} \right\| = 1$

$$P_u(v) = \frac{\langle u, v \rangle}{||u||} \frac{u}{||u||} = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle} u$$

α

Proyección de v sobre u

Proceso de Ortogonalización de Gram Schmidt

Def: Una base ortonormal (BON) de un E.V. es una base $B = \{v_1, ..., v_n\}$ que satisface:

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0, \ \forall i \neq j$$
$$\langle v_i, v_i \rangle = 1, \ \forall i$$

Obs: Si sólo se cumple que $\langle v_i, v_j \rangle = 0, \ \forall i \neq j$ se dice que es una base ortogonal.

Para transformar una base en una base ortonormal usamos el proceso de Gram-Schmidt:

$$k_1 = v_1$$
$$k_2 = v_2 - Proy_{k_1}(v_2)$$
$$\vdots$$
$$k_n = v_n - \sum_{i=1}^{n-1} Proy_{k_i}(v_n)$$

$k_3 = v_3 - \left[Proy_{k_2}(v_3) + Proy_{k_1}(v_3) \right]$

$\left\| \frac{k_i}{\|k_i\|} \right\| = \frac{1}{\|k_i\|} \cdot \|k_i\| = 1$

Y así, $\tilde{B} = \{k_1, ..., k_n\}$ pidiendo que $||k_i|| = 1$ resulta una BON.

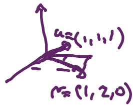
los k_i son ortogonales

Complemento Ortogonal

Sea $\mathbb{V}$ un EV de dimensión $n < \infty$ y $S \subset \mathbb{V}$ un SEV de dimensión $m \leq n$. El complemento ortogonal ($S^{\perp}$) es un SEV de de dimensión $n - m$ que satisface:

$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$ cte. k_3

$$S \cup S^{\perp} = \mathbb{V} \quad \wedge \quad S \cap S^{\perp} = \emptyset \quad \{0\}$$



Ejemplo: Sea $S = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \right\}$ subesp. de $\mathbb{R}^3 = \mathbb{V}$

son l.i (forman un plano) $\Rightarrow \boxed{\dim S = 2}$ y $\dim \mathbb{R}^3 = 3$

¿Son ortogonales? $\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \right\rangle = 1^2 + 1\,2 + 0 = 3 \neq 0$ no son ortos

Busco $S^{\perp}$ tal que $\dim S^{\perp} = 3 - 2 = 1 \Rightarrow$ busco un vector w tal que $\langle w, u\rangle = 0$ y $\langle w, v\rangle = 0$

Por Gram-Schmidt: $k_3 = v_3 - P_{k_1}(v_3) - P_{k_2}(v_3)$

Busco: $\{k_1, k_2, k_3\}$, $k_1 = u$, $k_2 = v - P_u(v)$

elijo $v_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$??

$k_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$$k_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle} \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} - \overbrace{\boxed{\frac{3}{3}}}^{=1} \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$= k_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \left[\frac{\overbrace{\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle}^{=1}}{\underbrace{\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle}_{=3}} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{\overbrace{\left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle}^{=-1}}{\underbrace{\left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle}_{=2}} \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \left[\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \right] =$$

$$\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \right)$$

Distancia

Sea $\mathbb{V}$-$\mathbb{K}$, ($\mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$) EV con p.i. $\langle ., . \rangle$ se define la distancia $d : \underbrace{\mathbb{V} \times \mathbb{V}}_{(u,v)} \to \mathbb{K}$ como $d(u, v) = ||u - v||$.

Propiedades:

1. $d(u, v) \geq 0, \ \forall u, v \in \mathbb{V}$ ✓
2. $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow \underline{u = v}$
3. $d(u, v) = d(v, u), \ \forall u, v \in \mathbb{V}$
4. $\underline{d(u, v)} \leq d(u, w) + d(w, v), \ \forall u, v, w \in \mathbb{V}$

Observación: Existen distancias que no están asociadas a ninguna norma.

Matrices definidas positivas

Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se dice definida positiva si es simétrica y vale que:

$$x^T A x > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$$

$x^T A x$ define un p.i

Si vale que $x^T A x \geq 0$ se la llama semi definida positiva.

$\langle x, y \rangle = \underset{\mathbb{R}^n}{x} {}^{T} \underset{n\times n}{A} \underset{n\times 1}{y}$ ($y \in \mathbb{R}^n$, x^T: $1\times n$)

Ejemplo: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$ ¿A es simétrica? Es $A = A^T$ $(a_{ij} = a_{ji}, i \neq j)$

diag. principal quedan en su lugar $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$

$$\underset{1\times 2}{x^T A x = (x, y)} \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underset{1\times 2}{(2x+3y \quad 3x+9y)} \underset{2\times 1}{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \qquad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(2x+3y)x + (3x+9y)y = 2x^2 + 3xy + 3xy + 9y^2 = x^2 + x^2 + 2\underset{a}{x}(\underset{b}{3y}) + (3y)^2$$

$$= \underbrace{x^2}_{\geq 0} + (\underbrace{x+3y}_{\geq 0})^2 > 0 \text{ definida positiva}$$

Puede fallar $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

Teorema: Sea $\mathbb{V}$ un EV de dimensión finita, y B una base de $\mathbb{V}$, vale que es un p.i. sii existe una matriz definida positiva tal que:

$$\langle x, y \rangle = \tilde{x}^T A \tilde{y}$$

donde $\tilde{x}, \ \tilde{y}$, son las representaciones de $x, \ y$ en la base B.

Sea $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación, donde $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ son dos conjuntos arbitrarios. Se dice que T es:

- Inyectiva: si $\forall x,\ y \in \mathbb{V} : T(x) = T(y) \to x = y$
- Suryectiva: si $T(\mathbb{V}) = \mathbb{W}$
- Biyectiva: si es inyectiva y suryectiva.

Transformaciones Lineales

Sean $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ dos EV, $L : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ es una transformación lineal si:

$$\rightarrow \quad L(\underbrace{\alpha x + \beta y}_{\text{comb. lineal}}) = \alpha L(x) + \beta L(y) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ \forall x, y \in \mathbb{V} \qquad (\text{E.C.L})$$

- Isomorfismo: $L : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ es lineal y biyectiva. $\Rightarrow \dim \mathbb{V} = \dim \mathbb{W}$
- Endomorfismo: sí $L : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ es lineal.
- Automorfismo: $L : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ es lineal y biyectiva. Endo + Iso

Representaciones

Teorema: Sea $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$, dos espacios vectoriales de dimensión finita son un isomorfismo sii $dim(\mathbb{V}) = dim(\mathbb{W})$.

Teorema: Sea $\mathbb{V}$ un EV, $\boxed{dim(\mathbb{V}) = n} < \infty$ tiene un isomorfismo con $\mathbb{R}^n$. Si consideramos la base $B = \{v_1, ..., v_n\}$, todo $v \in \mathbb{V}$ puede escribirse como $v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$. Luego las coordenadas de v en la base B resulta:

$$\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)^T \in \mathbb{R}^n$$

$\downarrow$ aplico L

$\mathbb{V} = \mathcal{P}_2(x) = \{p(x) : gr(p) \leq 2\}$

Ejemplo: $p(x) = 1 + 2x - \frac{3}{4}x^2$

$(1, 2, -\frac{3}{4})$

$q(x) : -\frac{1}{2} + x + 0x^2$

$(-\frac{1}{2}, 1, 0)$

$L(\overset{\in \mathbb{W}}{v}) = L(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) =$ ↳ L es una trans. lineal

$= \alpha_1 \underbrace{L(v_1)}_{\in \mathbb{W}} + \dots + \alpha_n \underbrace{L(v_n)}_{\in \mathbb{W}} = w \in \mathbb{W}$

$L : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ Un T. Lineal

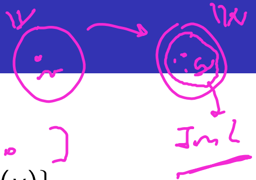
$B_{\mathbb{V}} \mapsto B_{\mathbb{W}}$

1) Gráficamente (1)
2) Matricial.
3) Se definir viendo bases en bases

(1) Ej: $L(v) = cv$ $c = cte \to c > 1$ dilatación; $0 < c < 1$ contracción; $c < 0$ inversión

otro ej rotaciones

Núcleo e Imagen de una transformación



Sea $L : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$, se define:

- Núcleo (o Kernel) $Nu(L) = \{v \in \mathbb{V} : L(v) = 0_W\}$,
- Imagen $Im(L) = L(\mathbb{V}) = \{w \in \mathbb{W} : \exists v \in \mathbb{V},\ w = L(v)\}$

Teorema: **Toda transformación lineal se puede representar de forma matricial.**

- Espacio Nulo de A: es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ formado por todas las soluciones del sistema lineal homogéneo $Av = 0$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

$$N(A) = \{v \in \mathbb{R}^{n\times 1} : \overset{m\times n}{A}\overset{n}{v} = 0\}$$

m × 1

- Espacio columna de A: es el subespacio de $\mathbb{R}^m$ generado por los n vectores columna de A:

$$EC(A) = \{\alpha_1(a_{11}, ..., a_{m1})^T + ... + \alpha_m(a_{1n}, ..., a_{mn})^T, \alpha_i \in \mathbb{R}\}$$

- Espacio fila de A: es el subespacio de R^n generado por los m vectores fila de A:

$$EF(A) = \{\alpha_1(a_{11}, ..., a_{1n}) + ... + \alpha_m(a_{m1}, ..., a_{mn}), \alpha_i \in \mathbb{R}\}$$

Sea $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $L\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}$
endomorfismo

1) Probar q. L es una Transf. Lineal TAREA (Ec L)

2) $\forall v \in \mathbb{R}^2$ $v = x \underset{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\underset{\shortparallel}{e_1}} + y \underset{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\underset{\shortparallel}{e_2}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow L(v) = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y \\ -y \end{pmatrix}$

$= x \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{L(e_1)} + y \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{L(e_2)}$

Es decir, $L(v)$ es comb. lineal de $L(e_1)$ y $L(e_2)$

$\therefore \operatorname{Im}(L) = \mathbb{R}^2$ (suryectiva) $\Rightarrow \dim \operatorname{Im}(L) = 2$

$\underline{Nu(L)} = \{ v \in \mathbb{R}^2 : L(v) = 0_{W=\mathbb{R}^2} \} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ $\quad \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\therefore$ L inyect. $\quad \dim(Nu(L)) = 0$ $\quad x = y = 0$

$\therefore$ L resulta un automorfismo

$\dim \mathbb{R}^2_{(V)} = \dim \operatorname{Im}(L) + \dim Nu(L)$

Seguimos con el ejemplo...

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad Ax = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}$$

Esp. Nulo $N(A) = \{ v \in \mathbb{R}^2 : Av = \vec{0} \} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[F_2 - F_1]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x + y = 0 \to x = 0 \\ -2y = 0 \to y = 0 \end{array}$$

Reducción por filas Gauss-Jordan

Esp. columna de A

$EC(A) = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ $\quad \dim EC = 2$

$\dim EF = 2$

$\#$

Esp. fila de (A)

$EF(A) = \text{gen}\{ (1 \;\; 1), (1 \;\; -1) \} = \text{gen}\{ (1 \;\; 1), (0, -2) \}$

$\dim \underset{0}{Nu}(A) + \dim \underset{2}{E}(A) = \dim \mathbb{R}^2$

Teorema: Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $dim(EC(A)) = dim(EF(A)) = r(A)$. Donde $r(A)$ se denomina rango de la matriz.

Definición: Se denomina nulidad de una matriz A a la dimensión de su espacio nulo $N(A)$, $n(A) = dim(N(A))$, siendo $N(A) = \{v \in \mathbb{R}^n, Av = 0\}$

Teorema de Rango-Nulidad: Para toda matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ se verifica:

$$r(A) + n(A) = n$$