Análisis Matemático para Inteligencia Artificial

Verónica Pastor (vpastor@fi.uba.ar),
Martín Errázquin (merrazquin@fi.uba.ar)

Especialización en Inteligencia Artificial

25/3/2022

Se acuerdan cuando vimos formas cuadráticas:

$$\overset{x^T}{[x \cdot y]}\overset{A}{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}}\overset{x}{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}} = 2x^2 + 6xy + 9y^2$$

Ec. cuadrática $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$

Si rotamos un ángulo θ

la figura dada por: $2x^2 + \cancel{6xy} + 9y^2 = 1$ ✓ → elipse

a la forma canónica $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 = 1$ $\quad \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$

$1/\lambda_1 \quad 1/\lambda_2$

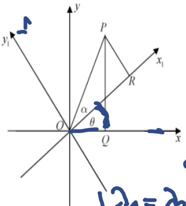
Esto nos lleva a

una matriz de transición $S = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$

T. Lineal $\quad (AB)^T = B^T A^T$

1 asoc

$$x^T Ax = (S\tilde{x})^T A(S\tilde{x}) = \tilde{x}^T(S^T AS)\tilde{x} \Rightarrow x^T Ax = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 & \text{círculo} \\ \underset{>0}{\lambda_1} \neq \underset{>0}{\lambda_2} & \text{elip} \\ \lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0 & \text{hipérb} \end{cases}$$



Obs.: S resulta una matriz ortogonal, $S^T AS = S^{-1}AS = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = D$

Autovalores y Autovectores: definición

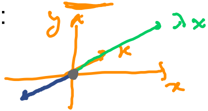
Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}, \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ diremos que $\lambda \in \mathbb{K}$ es un autovalor (ava) de A y $x \in \mathbb{K}^n, x \neq 0$ es un autovector (ave) asociado a λ si:

$n \times 1$

$n\times n \quad n \times 1 \qquad n \times 1$

$$Ax = \lambda x$$

$$L(x) = \lambda x$$



Interpretación geométrica: A cada vector que se encuentre en la dirección de x, la transformación $T(x) = Ax$ lo contrae (o expende) por un factor λ.

Importante: un autovalor puede ser nulo, un autovector no.

Ejemplo

$A v_1 = \lambda v_1$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \underset{2\times 1}{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}} - \underset{2\times 1}{\lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}} = \underset{2\times 1}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{\left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} - \lambda I}_{A - \lambda I} \right\} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 9-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(9-\lambda) - 9 = 0$$

$$\lambda^2 - 11\lambda + 9 = 0 < \begin{matrix} \lambda_1 = 10,11 \\ \lambda_2 = 0.89 \end{matrix}$$

elipse

Los ave se calculan: $A v_1 = \lambda_1 v_1$

Recordar que si $\det(M) \neq 0 \Rightarrow \exists M^{-1}$

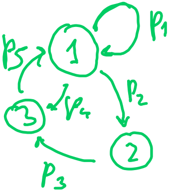
$MX = 0$

$M^{-1} M X = M^{-1} 0$

$X = 0$

Autovalores y Autovectores: algunas aplicaciones

1. Geometría: curvas planas o superficies.
2. Sistemas dinámicos.
3. Análisis del comportamiento de sistemas de ecuaciones diferenciales.
4. Análisis de estabilidad.
5. Cadenas de Markov.
6. Grafos.
7. Reducción de dimensiones.
8. Cálculo de resonancias del sistema.
9. PageRank.



Dada $A \in \mathbb{K}^{n\times n}, \mathbb{R}\ o\ \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{K}^n$ es un autovalor de A sii λ es un cero del polinomio característico, $p(\lambda)$, de A:

A , det(A)
[V , D] = eig(A)
MatLAB

$$\boxed{p(\lambda) = det(A - \lambda I)}$$

pivote

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & & & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

Observación: Puede ocurrir que algún λ sea raíz múltiple de $p(\lambda)$.

Se llama multiplicidad algebraica, m_a, a la cantidad de veces que λ aparece como raíz.

Se llama multiplicidad geométrica, m_g, del autovalor λ, a la cantidad de autovectores linealmentes asociado a λ.

$$det(M) = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$$

calculo por fila i

menor [MATRIZ SIN FILA i y COL j]

Observación

$1 \leq m_g \leq m_a$

Propiedades de los autovectores

Dada $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, el conjunto de todos los autovectores asociados al autovalor λ generan un subespacio de $\mathbb{K}^n$ (autoespacio de A respecto de λ). El conjunto de todos los autovectores de A se llama autoespectro.

Si λ es un autovalor de $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, el autoespacio E_λ asociado es la solución al sistema homogéneo $(A - \lambda I)x = 0$.

Teorema: Los autovectores $x_1, ..., x_n$ de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con n autovalores distintos de $\lambda_1, ..., \lambda_n$ son linealmente independientes. Es decir, forman una base de $\mathbb{R}^n$.

$\lambda_1 \neq \lambda_2$

$\downarrow \quad \downarrow$

$v_1 \neq v_2$ no colineales

Teorema: Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es simétrica, entonces existe una base ortonormal correspondiente a un espacio vectorial formado por autovectores de A y además $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = 1, \ldots, n$.

Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$ $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 2 & -5-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-5-\lambda)+6$

$= \lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$ $\begin{array}{l} \nearrow \lambda = 1 \\ \searrow \lambda = -4 \end{array}$ $p(\lambda) = \underline{(\lambda - 1)(\lambda + 4)}$ Autoespectro $= \{1, -4\}$

- E_1 $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2x - 3y = x \\ 2x - 5y = y \end{cases}$ $2y = x - y$ $\boxed{3y = x}$

$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \underline{\begin{pmatrix} 3y \\ y \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R}} \right\}$ en particular $E_1 = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

- E_{-4} $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -4\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2x - 3y = -4x \\ 2x - 5y = -4y \end{cases} \rightarrow y = 2x$

$E_{-4} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

Ejemplo $\begin{bmatrix}2 & -3\\ 2 & -5\end{bmatrix}$ $\det A = 2(-5) - 2(-3) = -4$

$= -10 + 6$

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, vale:

- Área: $det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1(-4) = -4$

$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n) = 0$ $p(0) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$

El det se conserva

- Perímetro: $Tr(A) = \left|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right|$

$tr(A) = tr\begin{pmatrix}2 & -3\\ 2 & -5\end{pmatrix} = 2 - 5 = -3$

$= \lambda_1 + \lambda_2 = 1 + (-4) = -3$

Matrices Semejantes $K^{n\times n}$ tiene inv.

A es semejante a A' sii $\exists\, S$ no singular tq $A' = S^{-1} A S$

- $\det A = \det(A')$ Recordar $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ // $\det(S^{-1}) = \frac{1}{\det(S)}$, $\det(S) \neq 0$

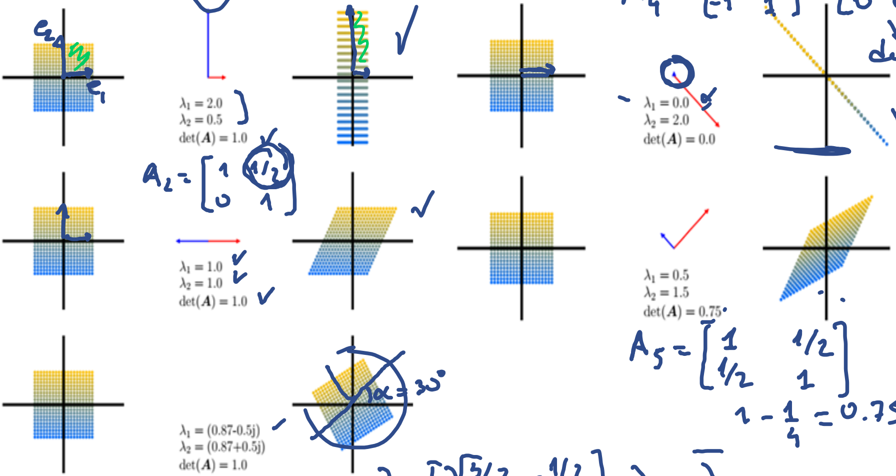
$\det(A') = \det(S^{-1} A S) \overset{!}{=} \cancel{\det(S^{-1})}\det(A)\cancel{\det(S)} = \det(A)$

- $tr(A) = tr(A')$ $tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji}\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ji} a_{ij} = tr(BA)$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 \to F_2 + F_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\det =$



$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

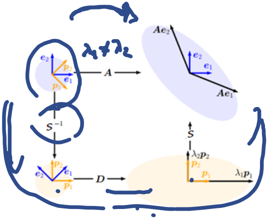
$$A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$1 - \frac{1}{4} = 0.75$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} \cos(\pi/6) & -\operatorname{sen}(\pi/6) \\ \operatorname{sen}(\pi/6) & \cos(\pi/6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = \overline{\lambda_2}$$

Diagonalización

$A^n x$



Definición:
Una matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es diagonalizable si $\exists S \in \mathbb{K}^{n\times n}$ no singular (es decir, tiene inversa) tal que:

$$S^{-1}AS = D$$

donde D es una matriz *diagonal*.

Teorema: Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es diagonalizable sii ($\Leftrightarrow$) A tiene n autovectores linealmente independientes.

$A x_i = \lambda_i x_i$

dem) ($\Leftarrow$) Sea x_i un ave de λ_i $\quad S = \begin{bmatrix} \downarrow & & \downarrow \\ x_1 & \dots & x_n \\ | & & | \end{bmatrix} \in K^{n\times n}$ $\quad \exists S^{-1}$ pq x_i son l.i

Ent. $\underset{n\times n}{A} S = A\begin{bmatrix} | & & | \\ x_1 & \dots & x_n \\ | & & | \end{bmatrix}_{n\times 1} = \begin{bmatrix} Ax_1 & \dots & Ax_n \end{bmatrix}_{n\times 1} = \begin{bmatrix} \underbrace{\lambda_1 x_1}_{\in K^{n\times 1}} & \dots & \lambda_n x_n \end{bmatrix} =$ λ_i escalar

$= \begin{bmatrix} x_1 \lambda_1 & \dots & x_n \lambda_n \end{bmatrix} = SD$, $\quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$ $\quad \therefore AS = SD$

$A \underbrace{S S^{-1}}_{I} = SDS^{-1}$

$\Rightarrow$) A es diag. entonces $\exists S$ no singular
lo que es equivalente a que todas sus columnas son l.i

Conclusiones para $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$

1. A es diagonalizable $\Rightarrow$ los vectores columna de la matriz de diagonalización S son los autovectores de A y los elementos de D son los autovalores de A.
2. ~~R~~ S no es única, se pueden reordenar columnas, etc $\Rightarrow$ D será distinta.
3. A tiene n autovalores distintos $\Rightarrow$ los autovectores correspondientes son l.i. $\Rightarrow$ A es diagonalizable.
4. A tiene menos de n autovectores l.i. $\Rightarrow$ A no es diagonalizable.
5. Si hay autovalores repetidos y si:
   - $m_a = m_g$ (en los ava repetidos) $\Rightarrow$ los ave son l.i.
   - $m_a > m_g$ (en un ava repetido) $\Rightarrow$ A no es diagonalizable.
6. Si $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es una matriz hermítica ($A = \overline{A^T} = A^H$) $\Rightarrow$ A es diagonalizable y las columnas forman una BON.

Sea $L : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ endomorfismo sobre $\mathbb{K} - e.v.$ con $dim(\mathbb{V}) = n$. Si $p(\lambda)$ se factoriza en $\mathbb{K}$ entonces existe una base que viene dada por la matriz en bloques $(m < n)$.

$$J = \begin{bmatrix} A_1 & . & . & . & 0 \\ 0 & . & & & . \\ . & & . & & . \\ . & & & . & . \\ 0 & . & . & . & A_m \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times n}, \quad \underbrace{A_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & . & . & & . \\ . & & . & . & . \\ . & & & . & 1 \\ 0 & & & & \lambda_k \end{bmatrix}}_{\text{BLOQUE}} \in K^{m\times m}$$

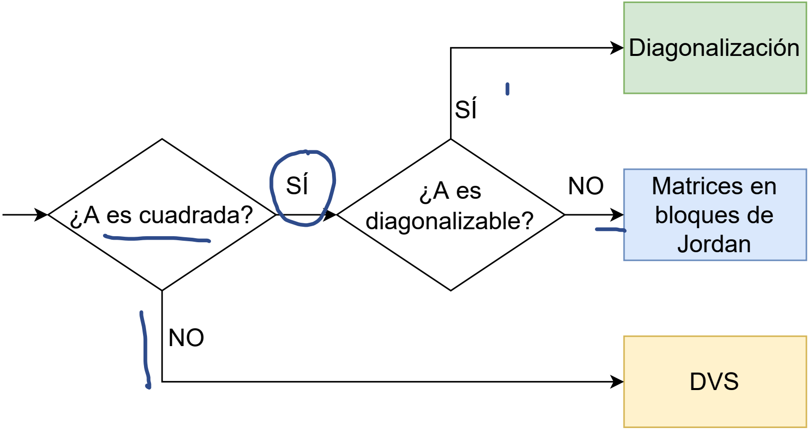
con $\sum_{k=1}^{m} \lambda_k = n$. ✓

Obs.: Cuando es diagonalizable $m = n$.

Forma de Jordan

Ejemplo $\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ / $\lambda = 2$ $\quad 2 = m_a > m_g = 1$ $\quad J = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad P = \begin{bmatrix} v_1 & \cancel{v_2} \\ \downarrow & \end{bmatrix}$ ave as λ

¿Qué puede pasar al intentar diagonalizar?



Descomposición en Valores Singulares (DVS)

Teorema: Dada $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, siempre se puede obtener una matriz hermítica, semidefinida positiva $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ como:

$$\underset{n\times n}{S} \doteq \underset{n\times m}{A^H} \underset{m\times n}{A}$$

En $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$A^T A = S$

S es simétrica

Obs.: $\tilde{S} \in \mathbb{C}^{m\times m}$ definida como $\tilde{S} \doteq AA^H$ también resulta hermítica y semidefinida positiva.

Obs. (II): Como $S, \tilde{S}$ son semidef. positivas, todos sus autovalores son reales **no negativos**.

DVS: Definición

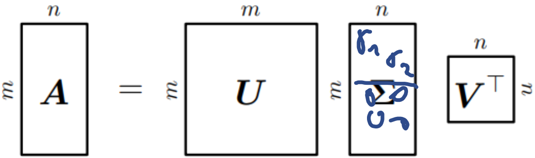
Teorema: Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ una matriz de rango $r \in \{0, \ldots, \text{mín}\{m, n\}\}$. La descomposición en valores singulares (DVS, SVD en inglés) de A se define como:

$m\times n \quad m\times m \quad m\times n \quad n\times n$

$$A = U \cdot \Sigma \cdot V^T$$

donde:

- $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ es la matriz ortogonal formada por los aves de AA^T.
- $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}$ es la matriz "diagonal" de valores singulares $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$, con λ_i los primeros $p = \text{mín}\{m, n\}$ avas de AA^T y A^TA.
- $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es la matriz ortogonal formada por los aves de A^TA.



Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Calculamos $A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Hallamos los ava: 1) A^TA tiene 2 filas iguales $\to \det(A^TA) = 0 = \lambda_1\lambda_2$

$\therefore \lambda_1 = 0$

Autoespectro $\{0, 1, 2\}$ 2) $\lambda_2 = 1$

3) $tr(A^TA) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 + 1 + \lambda_3 = 3$

$\therefore \lambda_3 = 2$

$\Sigma = \begin{pmatrix} \underbrace{\sqrt{2}}_{``\sigma_1"} & 0 & 0 \\ 0 & \underbrace{\sqrt{1}}_{=\sigma_2} & 0 \end{pmatrix}$

$A \cdot A^T \in \mathbb{R}^{2\times2}$

Busco los ave: $v_{\lambda=0} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_{\lambda=1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_{\lambda=2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\tilde{v}_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}$

Construyo $V = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

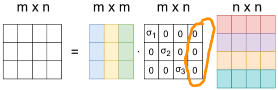
$\frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{2}}$

Buscamos $\underset{2\times3}{A} = \underset{2\times2}{U}\,\underset{2\times3}{\Sigma}\,\underset{3\times3}{V^T}$ $u_i = \frac{A v_i}{\sigma_i}$

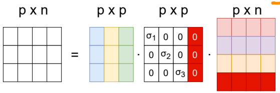
O bien calcular ave de AA^T $\longrightarrow U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Verificar $A = U\Sigma V^T$

DVS Compacta, Reducida y Truncada

Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ con DVS $A = U\Sigma V^T$:



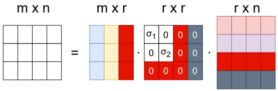
- Si $p = min\{m, n\}$, la DVS compacta es $A = U_p \Sigma_p V_p^T$



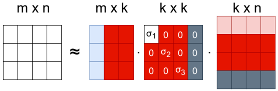
(ya no cuadrada)

- Si $\sigma_1, \ldots, \sigma_r > 0, \sigma_{r+1}, \ldots, \sigma_p = 0$, la DVS reducida es $A = U_r \Sigma_r V_r^T$

nuestro ejemplo



- Sea $k \in \{1, \ldots, r - 1\}$, la DVS truncada es $A \approx U_k \Sigma_k V_k^T$



Matrices mal condicionadas

Pseudoinversa de Moore-Penrose

Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y el sistema lineal $Ax = y$. La inversa de A no está definida, pero si $m > n$ una posible solución (cuadrados mínimos) era

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T y$$

¿Pero qué ocurre si $A^T A$ no es invertible? Se define la pseudoinversa de Moore-Penrose como

$$A^\dagger = V_r \Sigma_r^{-1} U_r^T$$

y $\hat{x} = A^\dagger y$ es (si $m > n$) la solución de mínima norma euclídea o (si $m < n$) la aproximación de mínimo error cuadrático/distancia euclídea.

Obs.: Todo lo anteriormente visto también vale para $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, utilizando $\cdot^H$ en vez de $\cdot^T$. Se utilizaron matrices reales para facilitar la lectura.

Colab

Una aplicación obvia para la DVS es, como vimos recién, la "solución"de sistemas de ecuaciones para los cuales el método de cuadrados mínimos no es factible.

¿Pero es ese el único uso que le podemos dar? Las descomposiciones siempre nos brindan un criterio bajo el cual obtener la *mejor* aproximación de *orden* k para el objeto a descomponer, y eso podría llegar a ser muy útil.