Análisis Matemático para Inteligencia Artificial

Verónica Pastor (vpastor@fi.uba.ar),
Martín Errázquin (merrazquin@fi.uba.ar)

Especialización en Inteligencia Artificial

Clase 3

Colab

El mundo del Data Science y las competencias de Machine Learning cobraron mucha relevancia con la competencia de Netflix, que prometía **1M USD** a quien pudiera obtener una performance de un 10% por sobre su algoritmo de base para el problema de recomendación de películas.

En este contexto surgió una nueva variante de modelo en base a factorización de matrices.

¿Lo interesante? Con las dos clases de AM ya nos alcanza para entenderlo!

¿Por qué funciona la inversa? (1/2)

Demostremos que:

$x^T A x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz definida positiva, entonces es invertible:

$\exists A^{-1} / AA^{-1} = I \iff det(A) \neq 0$

Dem.: (por método del absurdo)

Supongamos que el determinante de A es cero, y llegaremos a una solución absurda.

$det(A) = 0 \iff \nexists A^{-1} \iff \exists x \neq 0_v / Ax = 0$

Si $det(A) = 0$ y queremos resolver un sistema $Ax = 0$ significa que además de la solución trivial hay infinitas soluciones, es decir $rango(A) < n$, entonces

$$\exists \tilde{x} \neq 0 : A\tilde{x} = 0 \Rightarrow \tilde{x}^T A\tilde{x} = \tilde{x}^T 0 = 0$$

y entonces no se cumple que $\tilde{x}^T A\tilde{x} > 0$.

¿Por qué funciona la inversa? (2/2)

Demostremos que:

$A = x \cdot x^T + \lambda I_k$ **es definida positiva**, es decir, $y^T A y > 0, \ \forall y \in \mathbb{R}^k - \{0\}$

$\sum_j v_j \cdot v_j^T + \lambda I_k = v_1 \cdot v_1^T + v_2 \cdot v_2^T + \dots + v_z \cdot v_z^T + \lambda I_k$

Dem.: Sea $y \in \mathbb{R}^k - \{0\}$

$$y^T(x \cdot x^T + \lambda I_k)y = y^T x x^T y + y^T \lambda I_k y$$

$x \quad \lambda y^T y \quad <y,y>$

(recordemos que el p.i. es $< u, v >= u^T v$), prop. asociativa,

$$< y, x >< x, y > + \lambda < y, y > = \underbrace{< x, y >^2}_{\geq 0} + \overbrace{\underbrace{\lambda}_{>0} \underbrace{||y||^2}_{>0}}^{>0} > 0.$$

$\forall y \in \mathbb{R}^k / \{0\}$

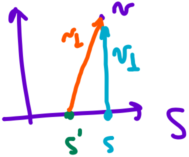
x def. del modelo

$\therefore x \cdot x^T + \lambda I_k$ es definida positiva.

Proyección

$v \xrightarrow{\Pi} 1 \circlearrowright^{\Pi}$

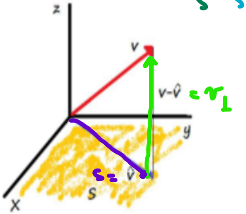
Sea $\mathbb{V}$ un EV y $S \subset \mathbb{V}$ un SEV. Una transformación lineal $\Pi : \mathbb{V} \rightarrow S$ es una proyección si $\Pi^2 = \Pi \circ \Pi = \Pi$
Esto significa que la matriz de transformación asociada a la proyección cumple con la propiedad de idempotencia: $[\Pi]^2 = [\Pi]$.



Proyección Ortogonal

Dado $\mathbb{V}$ un EV con p.i. y $S \subset \mathbb{V}$ un SEV, el objetivo es dado $v \in \mathbb{V}$ hallar $\tilde{v} \in S$ que sea "lo más parecido posible" a v.

$$\tilde{v} \in S : \tilde{v} = arg\ min_{s \in S} \overbrace{||v - s||}^{dist(v,s)}$$



Además vale que $\langle \underbrace{v - \tilde{v}}_{v_\perp}, s \rangle = 0, \ \forall s \in S$

Obs: La ortogonalidad de la proyección tiene que ver con el p.i. que se use.

Teorema de proyección

Sea $\mathbb{V}$ un EV de dimensión finita con p.i. $\langle .,. \rangle$, S un SEV. Dado $v \in \mathbb{V}$ existe un único $\tilde{v} \in S$ tal que

$\exists$ $!$

$$||v - \tilde{v}|| \leq ||v - u||, \quad \forall u \in \mathbb{S}$$

$\begin{pmatrix} | & & | \\ s_1 & \cdots & s_m \\ | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$

$\tilde{v} = B \cdot \alpha$

¿Cómo hallar la proyección?

$||v - \tilde{v}||$

Sea $\mathbb{V}$ un EV de dimensión n con p.i. $\langle .,. \rangle$, y $S \subset \mathbb{V}$ un SEV, $dim(S) = m \geq 1$, y sea $B = \{s_1, ..., s_m\}$ una BON de S. Buscamos encontrar la proyección de $\tilde{v} \in S$ de $v \in \mathbb{V}$ ($\tilde{v} = \Pi_S(v)$).

Como $\tilde{v} \in S$, $\tilde{v} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i s_i$ $\Rightarrow$ busco los coeficientes que minimizan $||v - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i s_i||$. El problema puede escribirse como:

$$\Pi_S(v) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i s_i = B\alpha, \quad B = [s_1, ..., s_m], \; \alpha = [\alpha_1, ..., \alpha_m]^T$$

Como por definición $\langle v - \Pi_S(v), s\rangle = 0$, $\forall s \in S$, debo resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

si $\langle v_\perp, s_i \rangle = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$ como $\forall s \in S$ $\quad s = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i s_i$

$\langle v_\perp, s \rangle = \langle v_\perp, \sum \alpha_i s_i \rangle = \sum \alpha_i \cdot 0 = 0$

$$\begin{cases} \langle v - \Pi_S(v), s_1 \rangle = 0 \\ \vdots \\ \langle v - \Pi_S(v), s_m \rangle = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s_1^T(v - B\alpha) = 0 \\ \vdots \\ s_m^T(v - B\alpha) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} -s_1^T- \\ \vdots \\ -s_m^T- \end{pmatrix} (v - B\alpha) = 0$$

$$B^T(v - B\alpha) = 0 \Leftrightarrow B^T v = B^T B\alpha \Leftrightarrow \alpha = (B^T B)^{-1} B^T v$$

mat. proy. $\quad$ coord. en base B de $\tilde{v} = \Pi_S(v)$ $\quad$ vector proyectado

$$\Pi_S = B(B^T B)^{-1} B^T$$

$\tilde{v}$

$\Pi_S(v) = B \cdot \alpha = \underbrace{B \cdot (B^T B)^{-1} \cdot B^T}\cdot v$

Observación: Si B es una BON entonces $P_{\Pi_S} = BB^T$.

Supongamos que tenemos un sistema sobredeterminado de la forma:

$$Ab = y,\ A \in \mathbb{R}^{m \times n},\ b \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^m,\ m > n.$$

b es la solución de cuadrados mínimos

Como $m > n$, puede que no exista b que satisfaga todas las m ecuaciones, entonces busco la solución que más se acerque (busco $Proy_{Col(A)} y$)

$$\hat{b} = \underbrace{(A^T A)^{-1} A^T y}_{\hat{\beta}} \Rightarrow P = A(A^T A)^{-1} A^T$$

$\hookrightarrow \Pi_{Col(A)}$

$y \approx \beta \cdot x$

$\hat{y} = \beta \cdot x = P \cdot y$

Colab

Ya vimos que el ajuste por cuadrados mínimos funciona en la teoría, ahora veámoslo funcionar en la práctica!