Análisis Matemático para Inteligencia Artificial

Verónica Pastor (vpastor@fi.uba.ar),
Martín Errázquin (merrazquin@fi.uba.ar)

Especialización en Inteligencia Artificial

2/9/2022

Sea $\mathbb{V} - \mathbb{K}$ e.v., donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$, un producto interno sobre $\mathbb{V}$ es una función $\Phi : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ (*o* $\mathbb{C}$) que satisface:

1. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ (*o* $\mathbb{C}$), $u, v, w \in \mathbb{V}$.
   - $\Phi(u + v, w) = \Phi(u, w) + \Phi(v, w)$
   - $\Phi(\alpha \bullet u, v) = \alpha \bullet \Phi(u, v)$
2. $\Phi(u, v) = \overline{\Phi(v, u)}$ → conjugado
3. $\Phi(v, v) \geq 0$, y $\Phi(v, v) = 0$ sii $v = 0$

Notación: $\boxed{\Phi(u, v) = \langle u, v\rangle}$

Ejemplo Sean $p(x), q(x), r(x) \in P_2$

$\Phi(p(x) + q(x), r(x)) =$ → el p.i. canónico

$(\underbrace{p(x) + q(x)}_{\in P_2}) \cdot \underbrace{r(x)}_{\in P_2} =$

$p(x) \cdot r(x) + q(x) \cdot r(x) =$

$\langle p, r\rangle + \langle q, r\rangle$

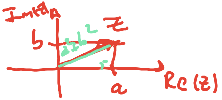
Definición: A un espacio vectorial real (complejo) provisto de un producto interno se lo llama espacio euclídeo (espacio unitario).

Obs: El p.i. es una generalización del producto escalar en $\mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$).

$(1, 2) \cdot (-1, 3) = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 = 5$

También hay otros espacios con productos internos ...

Sea $\mathcal{V}$ el espacio de las funciones continuas de valor real (o complejo) en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$ (se nota $\mathcal{C}([-1,1])$) con p.i.



$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx$$

Repaso de $\mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$

$z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ donde se def $a = Re(z)$ y $b = Im(z)$, y también se define $\bar{z} = a - bi$

Prop. inmed. $\boxed{\bar{\bar{z}} = z}$ (*)

$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 \Rightarrow \|z\|^2 = a^2 + b^2$

Verificar que cumple:

1. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$), $f, g, h \in \mathcal{C}([-1,1])$.
   - $\Phi(f + g, h) = \Phi(f, h) + \Phi(g, h)$
   - $\Phi(\alpha \bullet f, g) = \alpha \bullet \Phi(f, g)$
2. $\Phi(f, g) = \overline{\Phi(g, f)}$
3. $\Phi(f, f) \geq 0$, y $\Phi(f, f) = 0$ sii $f(x) = 0, \forall x$

$\langle f, f\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\cdot\overline{f(x)}dx = \int_{-1}^{1} \underbrace{f^2(x)}_{\geq 0} dx \geq 0$

dem 1) $\langle f+g, h\rangle = \int_{-1}^{1} (f(x)+g(x))\cdot\overline{h(x)}\,dx = \int_{-1}^{1} \left(f(x)\cdot\overline{h(x)} + g(x)\overline{h(x)}\right)dx \underset{\text{prop. de las } \int}{=} \int_{-1}^{1} f(x)\overline{h(x)}\,dx + \int_{-1}^{1} g(x)\overline{h(x)}\,dx = \langle f, h\rangle + \langle g, h\rangle$

distr

dem 2) $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\cdot\overline{g(x)}\,dx \overset{(*)}{=} \int_{-1}^{1} \overline{\overline{f(x)}}\,\overline{g(x)}\,dx = \int_{-1}^{1} \overline{\overline{f(x)}\,g(x)}\,dx = \int_{-1}^{1} g(x)\overline{f(x)}\,dx = \overline{\langle g, f\rangle}$

$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$

conmut.

Sea $(\mathbb{V}, \langle ., . \rangle)$ un e.v. real (complejo) con p.i.. Sea $v \in \mathbb{V}$, se define la norma de v asociada a $\langle ., . \rangle$.

Notación: $||v|| = \langle v, v \rangle^{1/2}$ ó $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle$

Es la generalización de la longitud de un vector en $\mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$).

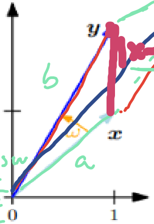
Def: A partir de un p.i. se puede se puede definir el ángulo w entre dos vectores x, y

$$\cos(\omega) = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \, \|y\|}$$

Teorema del Coseno

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos w$

si $w = \frac{\pi}{2}$ es 0



c^2

$\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y \rangle = \langle x, x-y \rangle + \langle -y, x-y \rangle =$

$= \langle x, x \rangle + \langle x, -y \rangle + \langle -y, x \rangle + \langle -y, -y \rangle = \|x\|^2 - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \|y\|^2$

$= \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\| \, \|y\| \cos w$ (despejar)

1. $\forall v \in \mathbb{V},\ ||v|| \geq 0$, y $||v|| = 0$ sii $v = 0$.
2. Sean $\alpha \in \mathbb{R}(o\ \mathbb{C})$, $v \in \mathbb{V}$, $||\alpha \bullet v|| = |\alpha|\ ||v||$.
3. Desigualdad de Cauchy Schwartz: si $u, v \in \mathbb{V}$ entonces

$$\overbrace{|\langle u, v\rangle|}^{\geq 0} \leq ||u||\ ||v||$$

4. Desigualdad Triangular: si $u, v \in \mathbb{V}$ entonces

$$||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$$

dem 3) Definimos $w = u - \frac{\langle u, v\rangle}{\|v\|^2} \cdot v$ y calculo $\|w\|^2 \geq 0$ (*)

$k,\ k \in \mathbb{R}$

$\|w\|^2 = \langle w, w\rangle = \langle u - kv, u - kv\rangle = \langle u, u\rangle - 2k\langle u, v\rangle + k^2\langle v, v\rangle =$

$= \|u\|^2 - 2\frac{\langle u, v\rangle}{\|v\|^2} \cdot \langle u, v\rangle + \left(\frac{\langle u, v\rangle}{\|v\|^2}\right)^2 \cdot \|v\|^2 =$

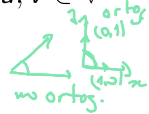
$= \|u\|^2 - 2\frac{\langle u, v\rangle^2}{\|v\|^2} + \frac{\langle u, v\rangle^2}{(\|v\|^2)^{\cancel{2}}} \cdot \cancel{\|v\|^2} = \|u\|^2 - \frac{\langle u, v\rangle^2}{\|v\|^2} \geq 0$ (*)

$\sqrt{\|u\|^2\|v\|^2}$

$\sqrt{\langle u, v\rangle^2}$

$= |\langle u, v\rangle|$

Def: $(\mathbb{V}, \langle .,. \rangle)$ un $\mathbb{K}$-EV (con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$) con p.i. dos vectores $u, v \in \mathbb{V}$ se dicen ortogonales si $\langle u, v \rangle = 0$.



Teorema de Pitágoras: Si $u, v \in \mathbb{V}$ son ortogonales entonces $||u+v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$.

$(0,1)\cdot(1,0)=0$

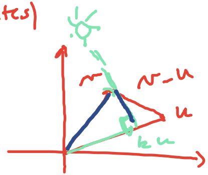
Def: $(\mathbb{V}, \langle .,. \rangle)$ un $\mathbb{K}$-EV (con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$) con p.i.. Se dice que $\{v_1, ..., v_r\} \subset \mathbb{V}$ es un conjunto ortogonal si $\langle v_i, v_j \rangle = 0, \ \forall i \neq j$. Si $||v_i|| = 1, \ \forall i$ se dice que es un conjunto ortonormal.

Si tengo v_j tq $\|v_j\| \neq 1$ ent. $u = \frac{v_j}{\|v_j\|} \Rightarrow \|u\| = \left\|\frac{v_j}{\|v_j\|}\right\| = \frac{\|v_j\|}{\|v_j\|} = 1$, $\|v_j\| \in \mathbb{R}$

La proyección ortogonal del vector v sobre el vector u es otro vector que notamos como $P_u(v)$, y se define:

k (de antes)

$$P_u(v) = \frac{\langle u, v \rangle}{||u||} \frac{u}{||u||} = \overbrace{\frac{\langle u, v \rangle}{\underbrace{\langle u, u \rangle}_{\|u\|^2}}}^{k} u$$



Proceso de Ortogonalización de Gram Schmidt

Def: Una base ortonormal (BON) de un E.V. es una base $B = \{v_1, ..., v_n\}$ que satisface:

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0, \ \forall i \neq j$$
$$\langle v_i, v_i \rangle = 1, \ \forall i$$

Obs: Si sólo se cumple que $\langle v_i, v_j \rangle = 0, \ \forall i \neq j$ se dice que es una base ortogonal.

Para transformar una base en una base ortonormal usamos el proceso de Gram-Schmidt:

$$k_1 = v_1$$
$$k_2 = v_2 - Proy_{k_1}(v_2) = v_2 - \frac{\langle v_2, k_1 \rangle}{\langle k_1, k_1 \rangle} \cdot v_2$$
$$\vdots$$
$$k_3 = v_3 - \left(Proy_{k_1}(v_3) + P_{k_2}(v_3) \right)$$
$$k_n = v_n - \sum_{i=1}^{n-1} Proy_{k_i}(v_n)$$

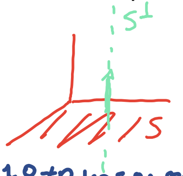
Y así, $\tilde{B} = \{k_1, ..., k_n\}$ pidiendo que $||k_i|| = 1$ resulta una BON.

Complemento Ortogonal

Sea $\mathbb{V}$ un EV de dimensión $n < \infty$ y $S \subset \mathbb{V}$ un SEV de dimensión $m \leq n$. El complemento ortogonal $(S^{\perp})$ es un SEV de de dimensión $n - m$ que satisface:

$\dim S + \dim S^{\perp} = \dim \mathbb{V}$

$$\underbrace{S \cup S^{\perp} = \mathbb{V}} \quad \wedge \quad \underbrace{S \cap S^{\perp} = \emptyset}$$



Ejemplo:

Sea $S = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right\}$ con el pic

$\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \right\rangle = 1.1 + 1.2 + 1.0 \neq 0$ no son ortog.

prod. vect

1) $\vec{n} = u \times v = \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-2, +1, 1) \quad \therefore \quad S^{\perp} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ (sólo en $\mathbb{R}^3$)

2) G. Schmidt. $k_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $k_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} - \dfrac{\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\|^2} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} - \dfrac{\cancel{3}\,1}{\cancel{3}} \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

$\underbrace{k_3}_{\in S^{\perp}} = \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}_{\text{inventorno}} - \left(\dfrac{\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\|^2} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \dfrac{\left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\|^2} \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \dfrac{(-1)}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}-1/3\\ -1/3 + 1/2 \\ 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/3\\1/6\\1/6\end{pmatrix} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$

Distancia

Sea $\mathbb{V}$-$\mathbb{K}$, ($\mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$) EV con p.i. $\langle .,. \rangle$ se define la distancia $d : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbf{K}$ como $d(u,v) = ||u - v||$.

Propiedades:

1. $d(u,v) \geq 0, \ \forall u, v \in \mathbb{V}$
2. $d(u,v) = 0 \Leftrightarrow u = v$
3. $d(u,v) = d(v,u), \ \forall u, v \in \mathbb{V}$
4. $d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v), \ \forall u, v, w \in \mathbb{V}$ Desig. Triang

Observación: Existen distancias que no están asociadas a ninguna norma.

Matrices definidas positivas

Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se dice definida positiva si es simétrica y vale que:

$$x^T A x > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ es simét

$a_{21} = a_{12}$

A es sim. $A = A^T$

Si vale que $x^T A x \geq 0$ se la llama semi definida positiva.

Ejemplo: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$ es simétrica $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$ ✓

completo cuadrado

$$x^T A x = \underbrace{(x, y)}_{1\times 2} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}}_{2\times 2} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{2\times 1} = (2x+3y, 3x+9y)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

$$(2x+3y)x + (3x+9y)y = 2x^2 + 3xy + 3xy + 9y^2 =$$

$$x^2 + [x^2 + 2x(3y) + (3y)^2] = \underbrace{x^2}_{\geq 0} + \underbrace{(x+3y)^2}_{\geq 0} > 0$$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Teorema: Sea $\mathbb{V}$ un EV de dimensión finita, y B una base de $\mathbb{V}$, vale que es un p.i. sii existe una matriz definida positiva tal que:

$$\langle x, y \rangle = \tilde{x}^T A \tilde{y}$$

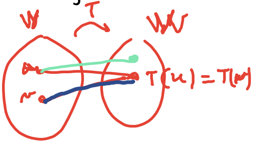
$(1,2)\cdot(3,1) = 3+2 = 5$

$(1,2) I \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 5$

donde $\tilde{x}, \ \tilde{y}$, son las representaciones de $x, \ y$ en la base B.

Sea $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación, donde $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ son dos conjuntos arbitrarios. Se dice que T es:

$x \neq y \to T(x) \neq T(y)$



- Inyectiva: si $\forall x,\ y \in \mathbb{V} : T(x) = T(y) \to x = y$
- Suryectiva: si $T(\mathbb{V}) = \mathbb{W}$ Imagen
- Biyectiva: si es inyectiva y suryectiva.

Transformaciones Lineales

Sean $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ dos EV, $L : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ es una transformación lineal si:

$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ \forall x, y \in \mathbb{V}$$

$- L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ y \end{pmatrix}$ es T.L? $\quad L\left(\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \stackrel{?}{=} \alpha L\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \beta L\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$\alpha \begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x_2 y_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 y_1 + \beta x_2 y_2 \\ \alpha y_1 + \beta y_2 \end{pmatrix}$ 2 term

$L\left(\begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta x_2 \\ \alpha y_1 + \beta y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} (\alpha x_1 + \beta x_2)(\alpha y_1 + \beta y_2) \\ \alpha y_1 + \beta y_2 \end{pmatrix}$ 4 term

NO es T.L.

- Isomorfismo: $L : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ es lineal y biyectiva.
- Endomorfismo: si $L : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ es lineal.
- Automorfismo: $L : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ es lineal y biyectiva.

Teorema: Sea $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$, dos espacios vectoriales de dimensión finita son un isomorfismo sii $dim(\mathbb{V}) = dim(\mathbb{W})$.

Teorema: Sea $\mathbb{V}$ un EV, $dim(\mathbb{V}) = n < \infty$ tiene un isomorfismo con $\mathbb{R}^n$. Si consideramos la base $B = \{v_1, ..., v_n\}$, todo $v \in \mathbb{V}$ puede escribirse como $v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$. Luego las coordenadas de v en la base B resulta:

$$\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)^T \in \mathbb{R}^n$$

$p(x) \in \mathcal{P}_2$, $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

isomorfismo con $\mathbb{R}^3$

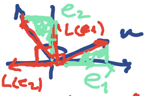
$[a_0, a_1, a_2] = \text{gen}\{[1,0,0], [0,1,0], [0,0,1]\}$

$$L(v) = L(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) \overset{\text{Les T.L}}{=} \alpha_1 L(v_1) + \dots + \alpha_n L(v_n) \in \mathbb{W}$$

La transf. lineal

- Lleva bases en bases.
- Indicando donde va un vector genérico
- Gráficamente: L es una rot. de $\pi/2$
- Matricial

L(w)



$L(e_1) = e_2$

$L(e_2) = -e_1$

Sea L la T.L. que rota a un vector $\frac{\pi}{2}$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\downarrow$ $L(e_1)$ $\quad$ $\downarrow$ $L(e_2)$

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$$

Núcleo e Imagen de una transformación

Sea $L : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$, se define:

- Núcleo (o Kernel) $Nu(L) = \{v \in \mathbb{V} : L(v) = 0_W\}$,
- Imagen $Im(L) = L(\mathbb{V}) = \{w \in \mathbb{W} : \exists v \in \mathbb{V},\ w = L(v)\}$

Teorema: **Toda transformación lineal se puede representar de forma matricial.**

- Espacio Nulo de A: es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ formado por todas las soluciones del sistema lineal homogéneo $Av = 0$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$$N(A) = \{v \in \mathbb{R}^{n\times 1} : Av = 0\}$$

- Espacio columna de A: es el subespacio de $\mathbb{R}^m$ generado por los n vectores columna de A:

$$EC(A) = \{\alpha_1(a_{11}, ..., a_{m1})^T + ... + \alpha_m(a_{1n}, ..., a_{mn})^T, \alpha_i \in \mathbb{R}\}$$

- Espacio fila de A: e el subespacio de R^n generado por los m vectores fila de A:

$$EF(A) = \{\alpha_1(a_{11}, ..., a_{1n}) + ... + \alpha_m(a_{m1}, ..., a_{mn}), \alpha_i \in \mathbb{R}\}$$

Veamos un ejemplo...

Sea $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}$

1) Verificar que L es una T.L (TAREA)
2) Buscar Im (L) y Nu (L)

$Nu(L) = \{ v \in \mathbb{R}^2 : L(v) = 0_{\mathbb{R}^2} \}$ $L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases}$ $2x = 0 \to x = 0$ $\therefore y = 0$

$\therefore Nu(L) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ inyectiva

$Im(L) = \{ w \in \mathbb{R}^2 : \exists v \in \mathbb{R}^2, w = L(v) \}$. Sea $v \in \mathbb{R}^2$, como $\mathbb{R}^2$ ev. $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ genérico

$v = \underbrace{x}_{\in \mathbb{R}} e_1 + \underbrace{y}_{\in \mathbb{R}} e_2 \Rightarrow L(v) \underset{\text{L T.L}}{=} x L(e_1) + y L(e_2)$, $L(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $L(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ son l.i

$Im(L) = gen\{L(e_1), L(e_2)\}$

$\therefore Im(L) = \mathbb{R}^2$ sury.

$\boxed{\text{L es AUTOMORF.}}$

NOTAR $\dim Nu(L) + \dim(Im L) = \dim \mathbb{R}^2$
$\quad 0 \quad + \quad 2 \quad = 2$

$L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}$

$\begin{cases} \overset{1}{a_{11}} x + \overset{1}{a_{12}} y = x+y \\ \overset{1}{a_{21}} x + \overset{-1}{a_{22}} y = x-y \end{cases}$

Siempre se puede ¿)= $L\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Seguimos con el ejemplo... Miramos MATRICIALMENTE

Sea $A := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ busco el Esp Nulo de A, Esp. fila y Esp. Col.

- $N(A) = \{ v \in \mathbb{R}^2 : Av = 0 \}$ $\quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix}$

  $N(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

  1 pivote

  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_2 - F_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ $\quad [A \mid b]$ sist. equiv. $x + y = 0$, $-2y = 0$

  e.f.

- EC(A) para ver col. l.i miramos las que tienen pivotes.

  $EC(A) = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \neq \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ PORQUE HICE OP. FILA

- $EF(A) = \text{gen}\{ (1,1), (1,-1) \} = \text{gen}\{ (1,1), (0,-2) \}$

NOTAR $\dim EC(A) = \dim EF(A)$ se define como rango (A) y se define la nulidad de A nul(A) a la dim(N(A))

Observar $\quad \text{rango}(A) + \text{nul}(A) = \dim \mathbb{R}^2$

$\qquad\qquad\qquad 2 + 0 = \dim \mathbb{R}^2$

Conclusiones ...

Teorema: Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $dim(EC(A)) = dim(EF(A)) = r(A)$. Donde $r(A)$ se denomina rango de la matriz.

Definición: Se denomina nulidad de una matriz A a la dimensión de su espacio nulo $N(A)$, $n(A) = dim(N(A))$, siendo $N(A) = \{v \in \mathbb{R}^n, Av = 0\}$

Teorema de Rango-Nulidad: Para toda matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ se verifica:

$$r(A) + n(A) = n$$