Análisis Matemático para Inteligencia Artificial

Verónica Pastor (vpastor@fi.uba.ar),
Martín Errázquin (merrazquin@fi.uba.ar)

Especialización en Inteligencia Artificial

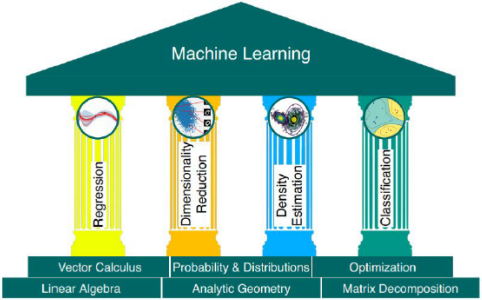
26/8/2022

Presentación de la Materia

¿Por qué estudiar Análisis Matemático?

A medida que Machine Learning se vuelve más común, y los paquetes de software se vuelven más simples de usar, uno se abstrae cada vez más de los detalles técnicos que hay detrás. **Modelo de caja negra.**

Esto trae el **peligro** de desconocer las decisiones de diseño y las limitaciones de cada algoritmo.

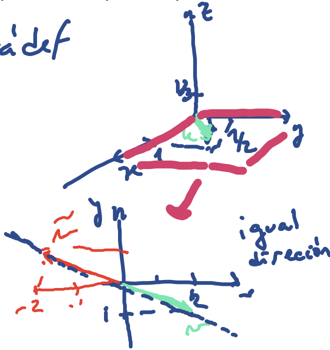


"Mathematics for Machine Learning", Deisenroth, Faisal, Ong

Bibliografía Recomendada: **Mathematics for Machine Learning**
Marc Peter Deisenroth, A. Aldo Faisal, and Cheng Soon Ong.
Published by Cambridge University Press (2020).
Está disponible gratis en http://mml-book.github.io/

Empecemos considerando los vectores $u = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ y $v = (2, -1)$, ¿podemos sumar los vectores?

$(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}) + (2, -1) = (3, -\frac{1}{2},$? No está def



¿qué ocurre si tomamos $\tilde{v} = (-2, 1)$?

$\tilde{v}$ y v $v(-1) = \tilde{v}$

$(-1)(2, -1) = (-2, 1)$

$\therefore$ Para definir correctamente $u + v$ deben estar en el mismo conjunto, y es posible cambiar el sentido y tamaño del vector. Es decir, que si el espacio vectorial es $\mathbb{R}^n$ podemos realizar estas operaciones:

1. $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^n \to x + y \in \mathbb{R}^n$
2. $x \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R} \to kx \in \mathbb{R}^n$

¿Estudiar espacios vectoriales sólo sirve para vectores?

$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ $\quad$ $(2, -1, 0)$

$\mathcal{P}_2$ son todos los polinomios de grado menor o igual a 2

Sean $p(x) : 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}x^2$ y $q(x) : 2 - x$ $+0x^2$, ¿valen 1 y 2?

1. $p(x) + q(x) = (p+q)(x) = 3 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}x^2$

2. $k \cdot p(x) = (kp)(x) = k\left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}x^2\right) = k + \frac{1}{2}kx + \frac{3}{4}kx^2$

Repasemos el producto de polinomios: $p(x) \cdot q(x) =$

$= \left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}x^2\right) \cdot (2 - x) = 2 - \cancel{x} + \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{x} \cdot \cancel{2} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{\cancel{4}_2}x^2 \cdot \cancel{2} - \frac{3}{4}x^3$

$= 2 + x^2 - \frac{3}{4}x^3$ ¿dónde vive? $(p \cdot q)(x) \in \mathcal{P}_3$

se escapó de $\mathcal{P}_2$

Algunas definiciones...

Sea $\mathbb{V} \neq \emptyset$, se define una operación (o suma) a una función $+ : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}$.

Esta operación se espera que cumpla con las siguientes propiedades:

1. Asociativa: $(x + y) + z = x + (y + z), \forall x, y, z \in \mathbb{V}$.
2. Elemento Neutro: $\forall x \in \mathbb{V}, \exists e \in \mathbb{V}$ tal que $x + e = e + x = x$.
3. Opuesto: $\forall x \in \mathbb{V}, \exists \tilde{x} \in \mathbb{V}$ tal que $x + \tilde{x} = \tilde{x} + x = e$.
4. Conmutativa: $\forall x, y \in \mathbb{V}, x + y = y + x$.

Sean $\mathbb{V} \neq \emptyset, \mathbb{K} \neq \emptyset$, se define una operación (o producto escalar) a una función $\bullet : \mathbb{K} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}$. Este conjunto $\mathbb{K}$ es generalmente $\mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$ es un cuerpo de escalares.

Comentario: *Un cuerpo es un conjunto con algunas operaciones sobre los elementos de éste, que se comportan como la adición, sustracción, multiplicación y división que cumplen con las propiedades que conocemos. Para no especificar el cuerpo se usa la palabra* ***escalar****.*

Definición de **Espacio Vectorial**

Diremos que $\mathcal{V} = (\mathbb{V}, +, \mathbb{K}, \bullet)$ es un espacio vectorial si $\mathbb{K}$ y $\mathbb{V}$ son conjuntos no vacíos y la operación $+$ en $\mathbb{V}$, y la acción $\bullet$ de $\mathbb{K}$ en $\mathbb{V}$ cumplen:

1. $+$ es asociativa
2. $+$ tiene elemento neutro
3. $+$ tiene elemento inverso u opuesto
4. $+$ es conmutativa
5. $\alpha \bullet (v + w) = \alpha \bullet v + \alpha \bullet w, \ \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall v, w \in \mathbb{V}$
6. $(\alpha + \beta) \bullet v = \alpha \bullet v + \beta \bullet v, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall v \in \mathbb{V}$
7. $\bullet$ tiene elemento neutro: $1 \bullet v = v, \forall v \in \mathbb{V}$
8. $\bullet$ es asociativa:

$$\underbrace{\alpha \bullet \underbrace{(\beta \bullet v)}_{\in \mathbb{V}}}_{\in \mathbb{V}} = \underbrace{\underbrace{(\alpha\beta)}_{\in \mathbb{K}} \bullet v}_{\in \mathbb{V}}, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall v \in \mathbb{V}$$

Subespacios Vectoriales: definición

Sea $\mathcal{V} = (\mathbb{V}, +, \mathbb{K}, \bullet)$ un espacio vectorial, un subconjunto $S \subseteq \mathbb{V}$, $S \neq \emptyset$ se dice que es un subespacio de $\mathbb{V}$ si la suma y el producto por escalares de $\mathbb{V}$ son una operación y una acción en S que lo convierten en un $\mathbb{K}$-espacio vectorial.

Condiciones necesarias y suficientes para caracterizar subespacios

S es un subespacio en un $\mathbb{K}$-espacio vectorial sii:

1. $S \neq \emptyset$ $(0 \in S)$
2. $v, w \in S \rightarrow v + w \in S$
3. $\alpha \in \mathbb{K}, v \in S \rightarrow \alpha \bullet v \in S$

Subespacios triviales

- $\{0\} \subseteq \mathbb{V}$
- $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{V}$

Sea $\mathcal{V} = (\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \bullet)$, sea
$S = \{\alpha \bullet (a, b, c), \alpha \in \mathbb{R}\}$,
¿es un subespacio vectorial?

¿$S \neq \emptyset$ ó $(0,0,0) \in S$?

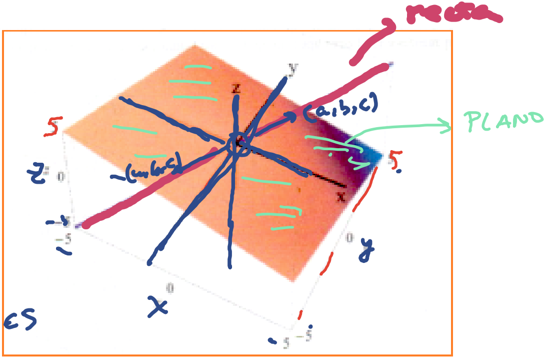
$\alpha = 0$, $S \neq \emptyset$

$0<\alpha<1$ achica contracción

$\alpha>1$ agranda dilatación

$\alpha<0$ cambia el sentido

u+v ES

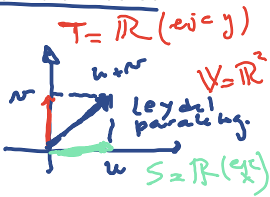


Algunos ejemplos más ...

Sean S, T subespacios de $\mathcal{V} = (\mathbb{V}, +, \mathbb{K}, \bullet)$. Probar si también los son:

1. $S \cap T = \{v \in \mathbb{V} : v \in S \wedge v \in T\} \subseteq \mathbb{V}$.
2. $S + T = \{v \in \mathbb{V} : v = s + t, s \in S, t \in T\} \subseteq \mathbb{V}$.
3. $S \cup T = \{v \in \mathbb{V} : v \in S \vee v \in T\} \subseteq \mathbb{V}$.

$u+v \notin S \cup T$ ∴ $S \cup T$ no es subesp



Demostremos 2 y 3

$S + T = \{v \in \mathbb{V} : v = s + t, s \in S, t \in T\} \subseteq \mathbb{V}$

Sistemas generadores

Definición: Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial, y $G = \{v_1, \dots, v_r\} \subseteq \mathbb{V}$. Una combinación lineal de G es un elemento $v \in \mathbb{V}$ tal que $v = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \bullet v_i$, donde $\alpha_i \in \mathbb{K}$, para $i = 1, \dots, r$.

$(2,-1) = \underbrace{2}_{\alpha_1}\underbrace{(1,0)}_{e_1} + \underbrace{(-1)}_{\alpha_2}\cdot\underbrace{(0,1)}_{e_2} + 0(1,1)$ e_i vectores canónicos

Definición: Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial, y $G \subseteq \mathbb{V}$. Se dice que G es un sistema de generadores de $\mathcal{V}$ si todo elemento de $\mathbb{V}$ es una combinación lineal de G.

Notación: $\langle G \rangle = \mathbb{V}$. gen$(\mathbb{V}) = G$

Sea $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ dado un vector cualquiera $v \in \mathbb{R}^3$, ¿podemos escribirlo como combinación lineal de los vectores de G?

$G \subseteq \mathbb{R}^3$

$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 1(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 0 + 2(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (6-4)+2(1-2) = 2-2=0$

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ¿existen α, β y γ?

como $\mathbb{R}^3$ es un esp. vect. la suma y prod por esc están def

$= \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\beta \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4\gamma \\ 3\gamma \\ 2\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta + 4\gamma \\ \alpha + \beta + 3\gamma \\ \alpha + 2\gamma \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} a = \alpha + 2\beta + 4\gamma \\ b = \alpha + \beta + 3\gamma \longrightarrow b = (c - 2\gamma) + \beta + 3\gamma = c + \beta + \gamma \quad (*) \\ c = \alpha + 2\gamma \longrightarrow \underline{\alpha = c - 2\gamma} \end{cases}$$

$\mathbb{R}$ (asoc., conmut)

despejo β de $(*)$

$\underline{\beta = b - c - \gamma}$

verif

$a = c - \cancel{2\gamma} + 2b - 2c - \cancel{2\gamma} + \cancel{4\gamma}$

$a = 2b - c$

Independencia Lineal

Dentro de los conjuntos generadores, nos interesan aquellos que son mínimos (menor cantidad de elementos).

Sea $S \subseteq \mathcal{V}$ un subespacio vectorial, y sea:

- $\{v_1, ..., v_n\} \subseteq \mathbb{V}$. Entonces $\langle v_1, ..., v_n \rangle \subseteq S$ sii $v_i \in S$, $\forall 1 \leq i \leq n$.
- $\{v_1, ..., v_n, v_{n+1}\} \subseteq \mathbb{V}$. Entonces $\langle v_1, ..., v_n, v_{n+1} \rangle = \langle v_1, ..., v_n \rangle$ sii $v_{n+1} \in \langle v_1, ..., v_n, \rangle$

Definición: Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial, y sea $\{v_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de vectores en $\mathbb{V}$; se dice que $\{v_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es linealmente independiente (l.i.) sii

$$\sum_{\alpha \in I} k_\alpha \bullet v_\alpha = 0 \rightarrow k_\alpha = 0, \ \forall \alpha \in I$$

todos escalares nulos

Observar:

- $\{0\}$ es linealmente dependiente (l.d.) $(0,0) = \alpha(0,0)$, $\alpha \neq 0$
- si $v \neq 0$, $\{v\}$ es l.i. $(0,0) = 0(2,3)$ por ejemplo $v = (2,3)$
- si $v_1 \propto v_2$ (colineales), $\{v_1, v_2\}$ es l.d. ejemplo: $2(1,1) + (-1)(2,2) = (0,0)$ $\neq 0$ $\neq 0$
- si v_1, v_2 no nulos, ni proporcionales, $\{v_1, v_2\}$ es l.i.

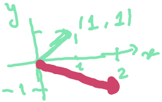
Definición: Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial, un conjunto $\{v_\alpha\}_{\alpha\in I}$ se llama base de $\mathcal{V}$ si $\{v_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es un conjunto linealmente independiente de $\mathbb{V}$ que satisface $\underbrace{\langle v_\alpha\rangle_{\alpha\in I} = \mathbb{V}}$. → es decir, genera todo el espacio

Definición: Sean $\mathcal{V}$ un espacio vectorial, $B=\{v_1,\ldots,v_n\}$ una base de $\mathcal{V}$. Diremos que n es la dimensión de $\mathcal{V}$, donde $n<\infty$.

Comentario: Tener en cuenta que existen espacios vectoriales con dimensión infinita.

Ejemplo $\{e_1, e_2\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$ siendo $e_1=(1,0)$, $e_2=(0,1)$

$(1,1)$, $(2,-1)$ son l.i



$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+2\beta \\ \alpha-\beta \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a = \alpha+2\beta \\ b = \alpha-\beta \end{cases}$$

→ si sumo $a+b = 2\alpha+\beta$

$a+b-2\alpha = \beta$ (**)

$b = \alpha - a - b + 2\alpha$

$\frac{2b+a}{3} = \alpha$ (*)

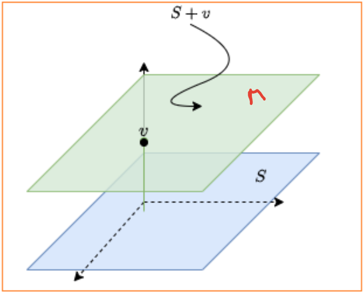
Luego de (*) y (**)

$\beta = a+b-\frac{2}{3}(2b+a)$

$\therefore \exists\, \alpha,\beta$ generan $\mathbb{R}^2$

$$\boxed{\text{Otra base posible de } \mathbb{R}^2 \text{ es } \{(1,1),(2,-1)\}}$$

Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial, M es una variedad lineal $M \subseteq \mathbb{V}$ es un conjunto de la forma $M = \{s + v,\ donde\ s \in S\}$, siendo S subespacio de $\mathcal{V}$, y $v \in \mathbb{V}$.



Matrices $\mathbb{R}^{2\times 3}$ es un esp. vect.?

$$0_{2\times3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \underbrace{A}_{\in \mathbb{R}^{2\times3}} + 0_{2\times3} = \begin{bmatrix} a_{11}+0 & a_{12}+0 & a_{13}+0 \\ a_{21}+0 & a_{22}+0 & a_{23}+0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = a_{11}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + (a_{12})\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \dots + (a_{23})\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La base canónica de $\mathbb{R}^{2\times3}$ es $B_c = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \dots \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right.$