Análisis Matemático para Inteligencia Artificial

Verónica Pastor (vpastor@fi.uba.ar),
Martín Errázquin (merrazquin@fi.uba.ar)

Especialización en Inteligencia Artificial

6/5/2022

Espacios con Producto Interno: Definición

Sea $\mathbb{V} - \mathbb{K}$ e.v., donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$, un producto interno sobre $\mathbb{V}$ es una función $\Phi : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ (*o* $\mathbb{C}$) que satisface:

$i^2 = -1$

1. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ (*o* $\mathbb{C}$), $u, v, w \in \mathbb{V}$.
   - $\Phi(u + v, w) = \Phi(u, w) + \Phi(v, w)$
   - $\Phi(\alpha \bullet u, v) = \alpha \bullet \Phi(u, v)$
2. $\Phi(u, v) = \overline{\Phi(v, u)}$ → conjugado en $\mathbb{C}$
3. $\Phi(v, v) \geq 0$, y $\Phi(v, v) = 0$ sii $v = 0$

Notación: $\Phi(u, v) = \langle u, v \rangle$

Repaso de nros. complejos

$z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$

en conjugado de z es

$\overline{z} = a - bi$

- $z . \overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$
- $\overline{\overline{z}} = z$

Definición: A un espacio vectorial real (complejo) provisto de un producto interno se lo llama espacio euclídeo (espacio unitario).

Obs: El p.i. es una generalización del producto escalar en $\mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$).

$(v_1, v_2) . \begin{pmatrix} v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = v_1 . v_3 + v_2 \; v_4$

También hay otros espacios con productos internos ...

Sea $\mathcal{V}$ el espacio de las funciones continuas de valor real (o complejo) en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$ (se nota $\mathcal{C}([-1,1])$) con p.i.

(2)

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx \neq \overline{\langle g, f\rangle} = \overline{\int_{-1}^{1} \underbrace{g(x)\cdot\overline{f(x)}}_{\in \mathcal{C}[-1,1]}dx}$$

$$= \int_{-1}^{1} f(x)\cdot\overline{g(x)}dx$$

Verificar que cumple:

1. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$), $f, g, h \in \mathcal{C}([-1,1])$.
   - $\Phi(f+g, h) = \Phi(f, h) + \Phi(g, h)$
   - $\Phi(\alpha \bullet f, g) = \alpha \bullet \Phi(f, g)$
2. ✓ $\Phi(f, g) = \overline{\Phi(g, f)}$
3. $\Phi(f, f) \geq 0$, y $\Phi(f, f) = 0$ sii $f(x) = 0, \forall x$

(1) $\langle f+g, h\rangle = \int_{-1}^{1} \underbrace{(f+g)(x)}_{\in \mathcal{C}[-1,1] \text{ e.vect}}\cdot\overline{h(x)}\,dx = \int_{-1}^{1}[f(x)+g(x)]\cdot\overline{h(x)}\,dx =$

$= \int_{-1}^{1}\left(f(x)\cdot\overline{h(x)} + g(x)\overline{h(x)}\right)dx \underset{\int + = \int + \int}{=} \underbrace{\int_{-1}^{1} f(x)\overline{h(x)}\,dx + \int_{-1}^{1} g(x)\overline{h(x)}\,dx}_{= \langle f, h\rangle + \langle g, h\rangle}$

$\cdot\ \langle \alpha\bullet f, g\rangle = \int_{-1}^{1}(\alpha\bullet f)(x)\overline{g(x)}\,dx \underset{\mathcal{C}' \text{ e.v}}{=} \int_{-1}^{1}\alpha\cdot f(x)\overline{g(x)}\,dx = \alpha\int_{-1}^{1} f(x)\cdot\overline{g(x)}\,dx =$

$= \alpha\langle f, g\rangle$

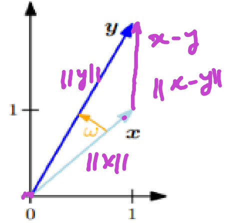
Sea $(\mathbb{V}, \langle ., . \rangle)$ un e.v. real (complejo) con p.i.. Sea $v \in \mathbb{V}$, se define la norma de v asociada a $\langle ., . \rangle$.

Notación: $||v|| = \langle v, v \rangle^{1/2} \longleftrightarrow ||v||^2 = \langle v, v \rangle$

Es la generalización de la longitud de un vector en $\mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$).

Def: A partir de un p.i. se puede se puede definir el ángulo w entre dos vectores x, y

$$\cos(\omega) = \frac{\langle x, y \rangle}{||x|| \, ||y||}$$



Ley de Coseno: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\alpha$

dem) $||x-y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 - \boxed{2||x|| \, ||y|| \cos w}$ (1)

$\langle x-y, x-y \rangle \overset{(1.2)}{=} \langle x, x-y \rangle + \langle -y, x-y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, -y \rangle + \langle -y, x \rangle + \langle -y, -y \rangle = \langle x, x \rangle - 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle = ||x||^2 + ||y||^2 - \boxed{2\langle x, y \rangle}$ (2)

Propiedades de la Norma

Si comparo (1) y (2) $\therefore \cos w = \frac{\cancel{2}\langle x,y\rangle}{\cancel{2}\|x\|\|y\|}$

1. $\forall v \in \mathbb{V}$, $||v|| \geq 0$, y $||v|| = 0$ sii $v = 0$. → módulo de α
2. Sean $\alpha \in \mathbb{R}(o\ \mathbb{C})$, $v \in \mathbb{V}$, $||\alpha \bullet v|| = |\alpha|\ ||v||$.
3. Desigualdad de Cauchy Schwartz: si $u, v \in \mathbb{V}$ entonces

$$|\langle u, v\rangle| \leq ||u||\ ||v|| \quad (*)$$

4. Desigualdad Triangular: si $u, v \in \mathbb{V}$ entonces

$$||u+v||^{2} \leq (||u|| + ||v||)^{2}$$

dm) $\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \dots = \underbrace{\langle u,u\rangle}_{\|u\|^2} + 2\langle u,v\rangle + \underbrace{\langle v,v\rangle}_{\|v\|^2} =$

$\langle u,v\rangle \underset{\text{por ser escalar}}{\leq} |\langle u,v\rangle| \underset{(*)}{\leq} \|u\|\|v\|$

$\leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2 \Rightarrow \|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

dm) Sea $w = u - \frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2} \cdot v$ → escalar $\Rightarrow \|w\|^2 = \left\langle u - \frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}\cdot v,\ u - \frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}\cdot v\right\rangle$

$= \dots = \langle u,u\rangle + \dots -$ finalmente $\|u\| - 2\frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}\cdot\langle u,v\rangle \geq 0 \quad (*)$

Ortogonalidad

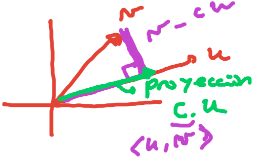
Def: $(\mathbb{V}, \langle ., . \rangle)$ un $\mathbb{K}$-EV (con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$) con p.i. dos vectores $u, v \in \mathbb{V}$ se dicen ortogonales si $\langle u, v \rangle = 0$.

Teorema de Pitágoras: Si $u, v \in \mathbb{V}$ son ortogonales entonces $||u + v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$.

Def: $(\mathbb{V}, \langle ., . \rangle)$ un $\mathbb{K}$-EV (con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$) con p.i.. Se dice que $\{v_1, ..., v_r\} \subset \mathbb{V}$ es un conjunto ortogonal si $\langle v_i, v_j \rangle = 0, \ \forall i \neq j$. Si $||v_i|| = 1, \ \forall i$ se dice que es un conjunto ortonormal.

La proyección ortogonal del vector v sobre el vector u es otro vector que notamos como $P_u(v)$, y se define:

$$P_{\underbrace{u}_{\text{sobre}}}(v) = \frac{\langle u, v \rangle}{||u||} \frac{u}{||u||} = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle} u$$



Def: Una base ortonormal (BON) de un E.V. es una base $B = \{v_1, ..., v_n\}$ que satisface:

Ejemplo $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0, \ \forall i \neq j$$
$$\langle v_i, v_i \rangle = 1, \ \forall i$$

• genera

• son l.i

$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 3$

Obs: Si sólo se cumple que $\langle v_i, v_j \rangle = 0, \ \forall i \neq j$ se dice que es una base ortogonal.

Para transformar una base en una base ortonormal usamos el proceso de Gram-Schmidt: A partir de una base $B = \{v_1, ..., v_n\}$ cualq...

$$k_1 = v_1 \checkmark$$
$$k_2 = v_2 - Proy_{k_1}(v_2)$$
$$\vdots$$
$$k_n = v_n - \sum_{i=1}^{n-1} Proy_{k_i}(v_n)$$

$k_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$k_2 = v_2 - P_{k_1}(v_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{\langle k_1, v_2 \rangle}{\langle k_1, k_1 \rangle} \cdot k_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

normalizo

$\tilde{k}_i = \frac{k_i}{||k_i||}$

$||\tilde{k}_i|| = \left|\left| \frac{k_i}{||k_i||} \right|\right| = \frac{||k_i||}{||k_i||} = 1$

Y así, $\tilde{B} = \{k_1, ..., k_n\}$ pidiendo que $||k_i|| = 1$ resulta una BON.

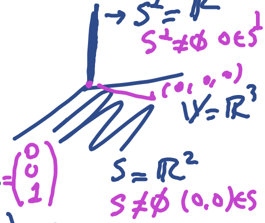
$\tilde{B} = \{\tilde{k}_1, \tilde{k}_2, ..., \tilde{k}_n\}$ BON

$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$

Complemento Ortogonal

Sea $\mathbb{V}$ un EV de dimensión $n < \infty$ y $S \subset \mathbb{V}$ un SEV de dimensión $m \leq n$. El complemento ortogonal ($S^{\perp}$) es un SEV de de dimensión $n - m$ que satisface:

$$S \cup S^{\perp} = \mathbb{V} \quad \wedge \quad S \cap S^{\perp} = \emptyset$$



Ejemplo:

$S = \text{gen}\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=u}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=v} \right\}$ es SEV veamos que pic

$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 + 2 + 0 \neq 0$

$\dim(S) = 2$

algo $= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

buscamos $S^\perp$, $\dim S^\perp = 1$

1) Por G-S $k_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $k_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - P_{k_1}(v)$; $k_3 = (w) - P_{k_1}(w) - P_{k_2}(w)$

2) $u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2 v_3 - v_2 u_3, -u_1 v_3 + v_1 u_3, u_1 v_2 - v_1 u_2)$

$\quad 1\ 0\ 2\ 1 \qquad 1\ 0\ 1\ 1 \qquad 1\ 2\ 1\ 1$

$= (-2, 1, 1)$

Distancia

Sea $\mathbb{V}$-$\mathbb{K}, (\mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C})$ EV con p.i. $\langle ., . \rangle$ se define la distancia $d : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbf{K}$ como $d(u, v) = ||u - v||$.

Propiedades:

1. $d(u, v) \geq 0, \ \forall u, v \in \mathbb{V}$
2. $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$
3. $d(u, v) = d(v, u), \ \forall u, v \in \mathbb{V}$
4. $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v), \ \forall u, v, w \in \mathbb{V}$ (Desig. Triangular)

Observación: Existen distancias que no están asociadas a ninguna norma.

Matrices definidas positivas

Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se dice definida positiva si es simétrica y vale que:

$$x^T A x > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = A^T$$

Si vale que $x^T A x \geq 0$ se la llama semi definida positiva.

Ejemplo: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$ es simétrica $a_{12} = a_{21}$ $(A = A^T)$

$$\underset{1\times 2}{(x \ y)} \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}} \underset{2\times 1}{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \underset{1\times 2}{(2x+3y, 3x+9y)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (2x+3y) \cdot x + (3x+9y) \cdot y$$

$$= \underbrace{2x^2}_{>0} + \underbrace{3xy + 3xy}_{=6xy\ ?} + \underbrace{9y^2}_{>0} = (3y)^2$$

$$= x^2 + \underbrace{x^2 + 2x(3y) + (3y)^2}_{} =$$

$$\rightarrow \text{Recordar } (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$= \underbrace{x^2}_{\geq 0} + \underbrace{(x+3y)^2}_{\geq 0} > 0$$

Teorema: Sea $\mathbb{V}$ un EV de dimensión finita, y B una base de $\mathbb{V}$, vale que es un p.i. sii existe una matriz definida positiva talque:

$$\langle x, y\rangle = \tilde{x}^T A \tilde{y}$$

donde $\tilde{x}, \ \tilde{y}$, son las representaciones de $x, \ y$ en la base B.

Sea $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación, donde $\mathbb{V}, \ \mathbb{W}$ son dos conjuntos arbitrarios. Se dice que T es:

- Inyectiva: si $\forall x, \ y \in \mathbb{V} : T(x) = T(y) \to x = y$
- Suryectiva: si $T(\mathbb{V}) = \mathbb{W}$
- Biyectiva: si es inyectiva y suryectiva.

Transformaciones Lineales

Sean $\mathbb{V}, \ \mathbb{W}$ dos EV, $L : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ es una transformación lineal si:

$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y) \ \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \ \forall x, y \in \mathbb{V}$$

¿Es $L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ y \end{pmatrix}$ una T.L? $L\left(\alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = L\begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta x_2 \\ \alpha y_1 + \beta y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha x_1 + \beta x_2)\cdot(\alpha y_1 + \beta y_2) \\ \alpha y_1 + \beta y_2 \end{pmatrix}$ (1)

- Isomorfismo: $L : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ es lineal y biyectiva.
- Endomorfismo: si $L : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ es lineal.
- Automorfismo: $L : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ es lineal y biyectiva.

mientras que $\alpha L\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \beta L\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} x_2 y_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \alpha x_1 y_1 + \beta x_2 y_2 \\ \alpha y_1 + \beta y_2 \end{pmatrix}$ (2)

como (1) y (2) son $\neq$ L no es T.L

Teorema: Sea $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$, dos espacios vectoriales de dimensión finita son un isomorfismo sii $dim(\mathbb{V}) = dim(\mathbb{W})$.

Teorema: Sea $\mathbb{V}$ un EV, $dim(\mathbb{V}) = n < \infty$ tiene un isomorfismo con $\mathbb{R}^n$. Si consideramos la base $B = \{v_1, ..., v_n\}$, todo $v \in \mathbb{V}$ puede escribirse como $v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$. Luego las coordenadas de v en la base B resulta:

$$\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)^T \in \mathbb{R}^n$$

$$L(v) = L(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = \underbrace{\alpha_1 L(v_1) + \dots + \alpha_n}_{\text{coeficientes}} L(v_n) = w$$

$L: \mathbb{V} \to \mathbb{W}$

$B_{\mathbb{V}}$ $B_{\mathbb{W}}$

Pensando a los coeficientes, tenemos distintas maneras de representar una T. Lineal:

1) Indicando donde van por la T.L. los elementos de la base
2) Gráficamente
3) Matricialmente

Ejemplo $L(v) = c.v$ $\quad v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$Av = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = cv = \begin{bmatrix} cx \\ cy \end{bmatrix}$$

Núcleo e Imagen de una transformación

Sea $L : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$, se define:

- Núcleo (o Kernel) $Nu(L) = \{v \in \mathbb{V} : L(v) = 0_W\}$,
- Imagen $Im(L) = L(\mathbb{V}) = \{w \in \mathbb{W} : \exists v \in \mathbb{V},\ w = L(v)\}$

Teorema: **Toda transformación lineal se puede representar de forma matricial.**

- Espacio Nulo de A: es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ formado por todas las soluciones del sistema lineal homogéneo $Av = 0$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

$$N(A) = \{v \in \mathbb{R}^{n\times 1} : Av = 0\}$$

- Espacio columna de A: es el subespacio de $\mathbb{R}^m$ generado por los n vectores columna de A:

$$EC(A) = \{\alpha_1(a_{11}, ..., a_{m1})^T + ... + \alpha_m(a_{1n}, ..., a_{mn})^T, \alpha_i \in \mathbb{R}\}$$

- Espacio fila de A: e el subespacio de R^n generado por los m vectores fila de A:

$$EF(A) = \{\alpha_1(a_{11}, ..., a_{1n}) + ... + \alpha_m(a_{m1}, ..., a_{mn}), \alpha_i \in \mathbb{R}\}$$

Veamos un ejemplo...

Sea $L\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}$

1) Ver que es T.L: $L(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha L(v_1) + \beta L(v_2)$ (HACER)

2) $\forall v \in \mathbb{R}^2$ $\quad v = x e_1 + y e_2 \Rightarrow L(v) = x L(e_1) + y L(e_2) = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Es decir $L(v)$ es comb. lineal de $L(e_1), L(e_2)$.

$\therefore \operatorname{Im}(L) = \operatorname{gen}\{L(e_1), L(e_2)\} = \mathbb{R}^2$ (suryectiva)

3) Si miramos $\operatorname{Nu}(L) = \{v \in \mathbb{R}^2 : L(v) = 0_{\mathbb{R}^2(W)}\} = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ (inyectiva)

$$L(v) = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \to x=y \end{cases} \longrightarrow 2x=0 \quad x=0,\ y=0$$

Por lo tanto como $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y es biyectiva es un AUTOMORFISMO

NOTEMOS que

$$\dim(\operatorname{Im}(L)) + \dim(\operatorname{Nu}(L)) = \dim \mathbb{R}^2 \begin{pmatrix} \text{esp de} \\ \text{llegada} \end{pmatrix}$$

$$2 \quad + \quad 0 \quad = 2$$

Seguimos con el ejemplo...

Miremos la matriz asociada a la T.L $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

- E sp. nulo de A $N(A) = \{ v \in \mathbb{R}^2 : Av = 0 \} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$$[A \mid 0] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[F_2 - F_1]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x + y = 0 \to y = 0 \\ -2x = 0 \to x = 0 \end{array}$$

- $EC(A) = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ elegimos las columnas de A que tienen pivotes

- $EF(A) = \text{gen}\{ (1,1), (1,-1) \} = \langle (1,1), (0,-2) \rangle$

Se define el rango de A, $r(A)$, como la dim $EF(A)$ y dim $EC(A)$

$$r(A) + \dim(N(A)) = \dim \mathbb{R}^2 \ (\text{cant de columnas de } A)$$

$$2 + 0 = 2$$

Teorema: Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $dim(EC(A)) = dim(EF(A)) = r(A)$. Donde $r(A)$ se denomina rango de la matriz.

Definición: Se denomina nulidad de una matriz A a la dimensión de su espacio nulo $N(A)$, $n(A) = dim(N(A))$, siendo $N(A) = \{v \in \mathbb{R}^n, Av = 0\}$

Teorema de Rango-Nulidad: Para toda matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ se verifica:

$$r(A) + n(A) = n$$

Como L es biyectiva, $\exists L^{-1} : \underset{(w}{\mathbb{R}^2} \underset{\longrightarrow}{\longrightarrow} \underset{v)}{\mathbb{R}^2}$ de manera

que $L \underset{\text{composición}}{\circ} L^{-1} = L^{-1} \circ L = I$ $\quad L^{-1}(L(v)) = L^{-1}(w) = v$

Como vimos que toda t. lineal se representa matricialmente

$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = Id$

En el ejemplo verificar que $L^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}$