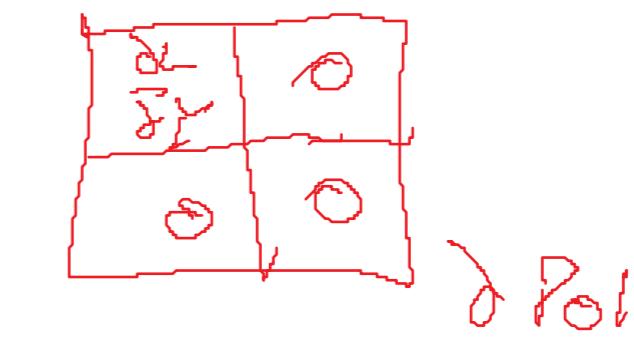


Consideraciones:

- I 1 solo canal (escala de grises) $\Rightarrow I [H, W]$
- w 1 solo filtro (kernel) $\Rightarrow w [k_1, k_2]$
- padding \rightarrow valid $\Rightarrow Y [H - k_1 + 1, W - k_2 + 1]$
- stride $\rightarrow 1$



Operaciones

convolución $(w * I)_{i,j} = \sum_{m=0}^{k_1-1} \sum_{n=0}^{k_2-1} I(i-m, j-n) w(m, n)$

correlación cruzada $(w \otimes I)_{i,j} = \sum_{m=0}^{k_1-1} \sum_{n=0}^{k_2-1} I(i+m, j+n) w(m, n)$

Nuestra capa de CONV realiza la sig. operación:

$$\hat{Y}(i,j) = (\text{w} \otimes I)_{(i,j)} + b = \sum_{m=0}^{k_1-1} \sum_{n=0}^{k_2-1} I(i+m, j+n) w(m,n) + b$$



Nuestra función de costo L en la salida de dicha capa va a ser función de el valor verdadero \hat{Y} y la salida de nuestra capa \hat{Y} . Queremos hallar:

1º $\frac{\partial L}{\partial w}$ → para poder optimizar los parámetros del kernel

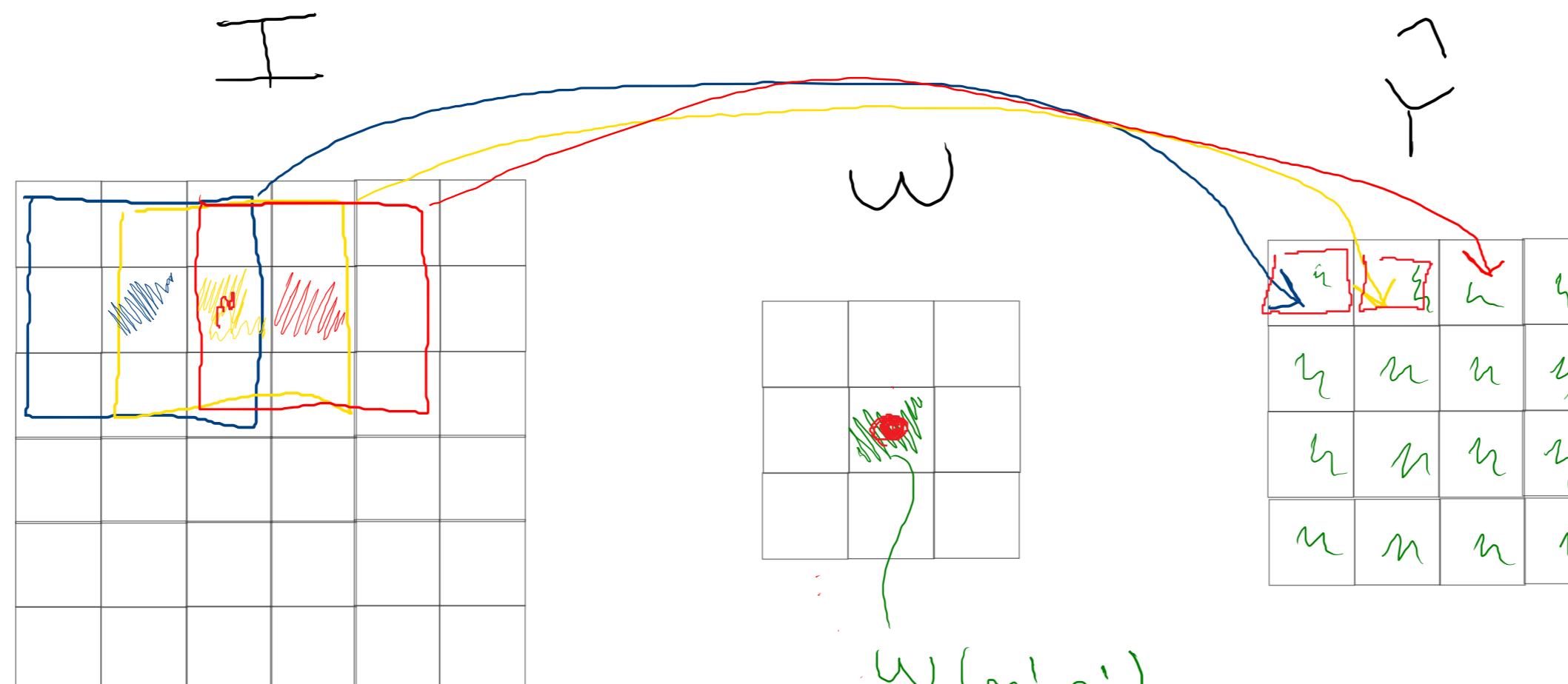
2º $\frac{\partial L}{\partial I}$ → para poder pasar el gradiente a la capa previa

(tambien será necesario hallar $\frac{\partial L_i}{\partial b}$ para optimizar b ..)

Comencemos con

$$\frac{\partial L}{\partial w}$$

¿Cómo afecta a la salida \hat{Y} variar 1 peso $w(m', n')$?



$$\frac{\partial L}{\partial w(m', n')} = \underbrace{\sum_{i=0}^{H_{k_1}} \sum_{j=0}^{W-k_2} \frac{\partial L}{\partial \hat{Y}(i,j)} \cdot \frac{\partial \hat{Y}(i,j)}{\partial w(m', n')}}_{\text{Sumatoria en todo } \hat{Y}}$$

Sumatoria en todo \hat{Y}

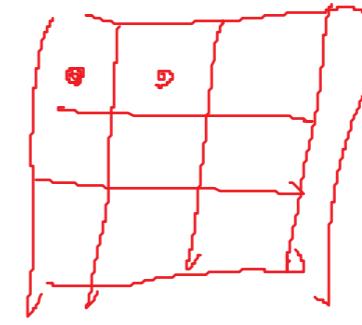
$\Delta w(m', n')$
afecta a
todos los
pixeles de \hat{Y}

↓
 L se ve afectado
por cada pixel de \hat{Y}

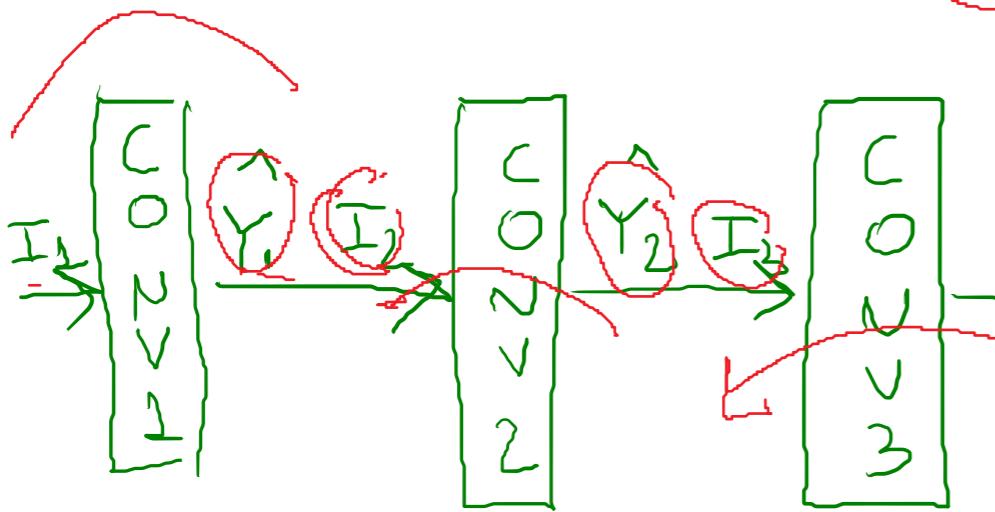
entonces :

$$\frac{\partial L}{\partial w(m', n')} =$$

$$\sum_{i=0}^{H-k_1} \sum_{j=0}^{W-k_2} \frac{\partial L}{\partial \hat{Y}(i, j)}.$$



1



Esto me lo
aporta la capa
posterior, es el
 $\frac{\partial L}{\partial I}$ pero de la
capa que sigue

La entrada de una
capa es la salida
de su previa

$$\frac{\partial \hat{Y}(i, j)}{\partial w(m', n')}$$

aquí tenemos
que trabajar

$\hat{Y}(i, j)$
por definición ...

$$\frac{\partial \hat{Y}(i, j)}{\partial w(m', n')} = \frac{\partial}{\partial w(m', n')}$$

$$\left[\sum_{m=0}^{k_1-1} \sum_{n=0}^{k_2-1} I(i+m, j+n) \cdot w(m, n) + b \right]$$

sumo en
todo el kernel w

$$\frac{\partial \hat{Y}(i,j)}{\partial w(m',n')} = \frac{\partial}{\partial w(m',n')} \left[\sum_{m=0}^{k_1-1} \sum_{n=0}^{k_2-1} I(i+m, j+n) \cdot w(m, n) + b \right]$$

Hay Σ solo termino donde
 $m=m'$
 $n=n'$

$$= \frac{\partial}{\partial w(m',n')} \left[\dots + I(i+m', j+n') \cdot w(m', n') + \dots + b \right]$$

Al derivar se eliminan todos los términos que no tienen $w(m',n')$

$$\frac{\partial \hat{Y}(i,j)}{\partial w(m',n')} = \boxed{I(i+m', j+n')} \quad \begin{array}{l} \text{Sust. tuimos} \\ \text{en } \end{array}$$

1

$$\frac{\partial L}{\partial w(m', n')} = \sum_{i=0}^{H-k_1} \sum_{j=0}^{W-k_2} \frac{\partial L}{\partial Y(i, j)} \cdot I(i+m', j+n')$$

lo hallado

1'

reordenamos

$$\frac{\partial L}{\partial w(m', n')} = \sum_{i=0}^{H-k_1} \sum_{j=0}^{W-k_2} I(m'+i, n'+j) \frac{\partial L}{\partial Y(i, j)} = \left(\frac{\partial L}{\partial Y} \otimes I \right) (m', n')$$

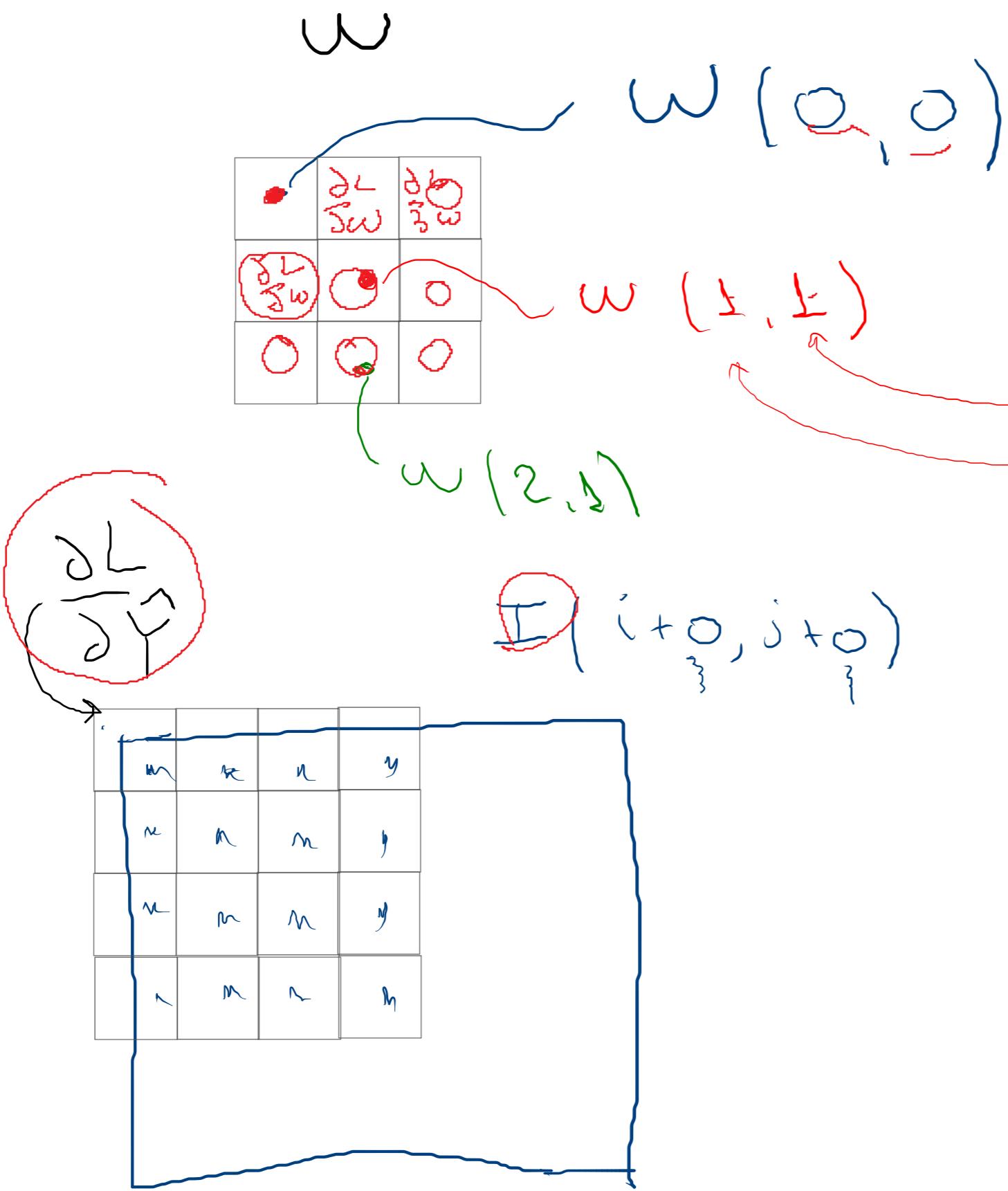
Suma en Y

$$\frac{\partial L}{\partial w(m', n')} = \left(\frac{\partial L}{\partial Y} \otimes I \right) (m', n')$$

- Para cada elemento
del kernel tendré
1 producto a
resolver

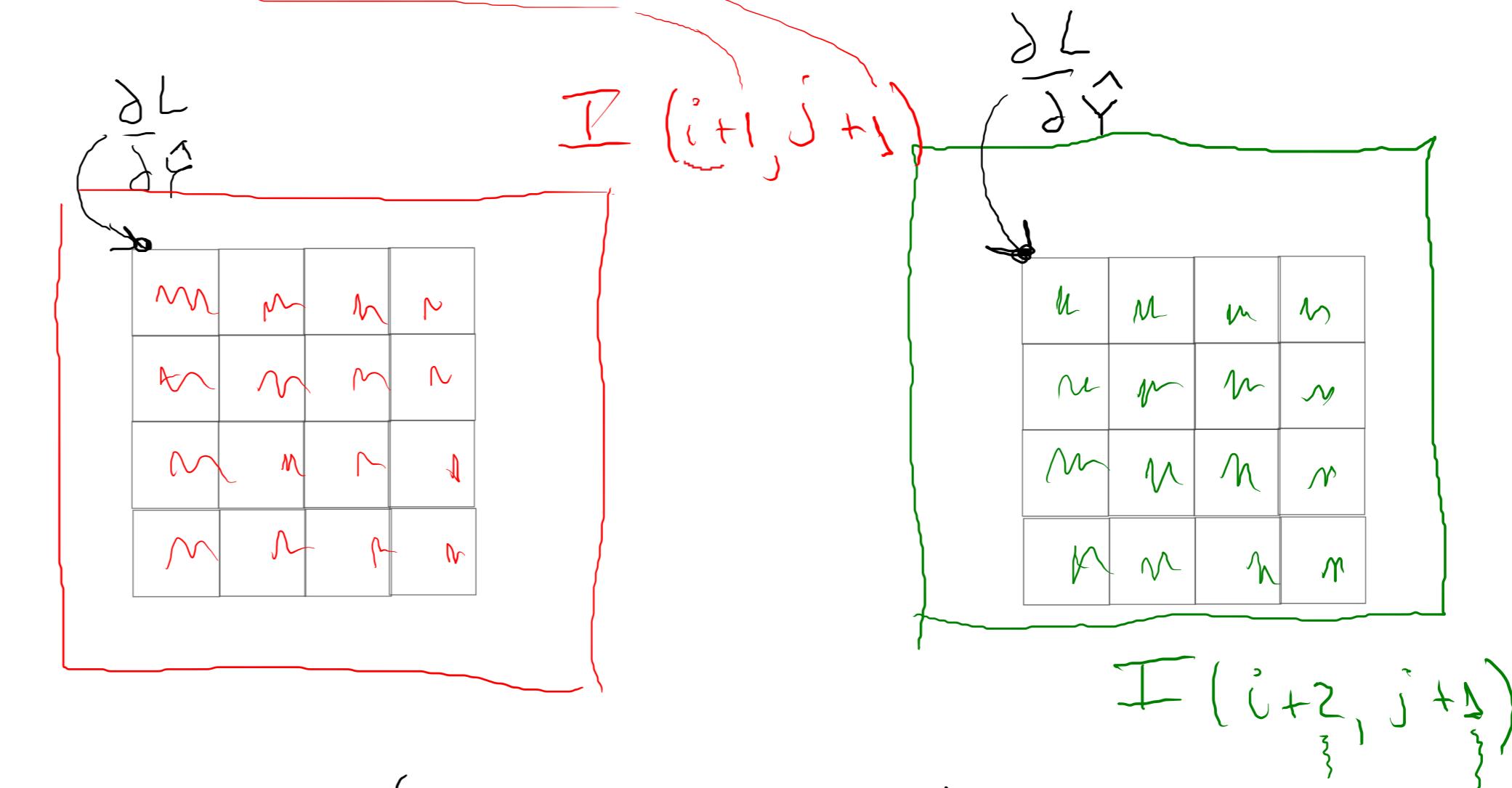
vienen dados
por la capa
siguiente

es la entrada



$$\frac{\partial L}{\partial w(m,n)} = \sum_{i=0}^{k_1} \sum_{j=0}^{k_2} I(m+i, n+j) \cdot \frac{\partial L}{\partial Y(i,j)}$$

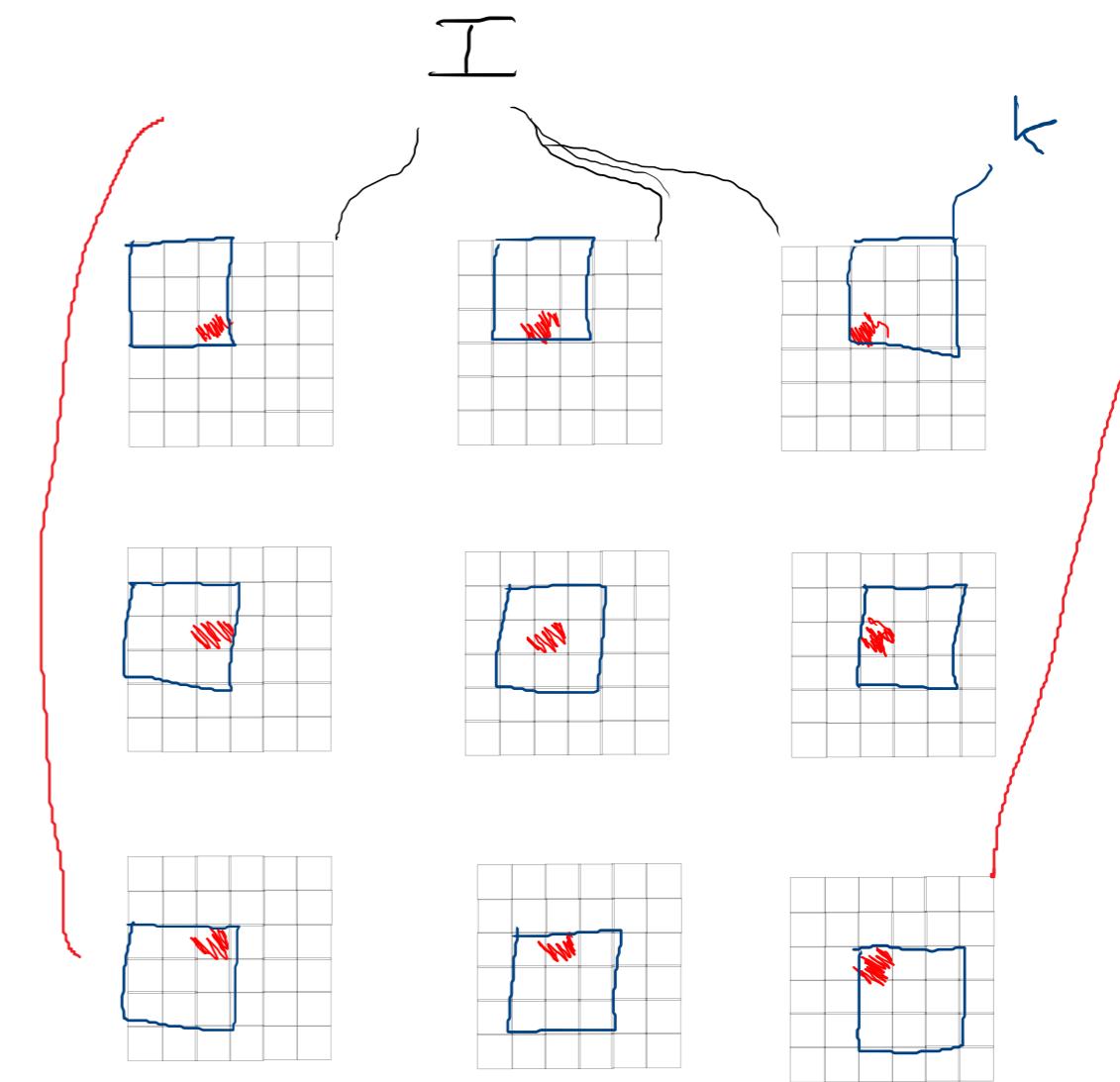
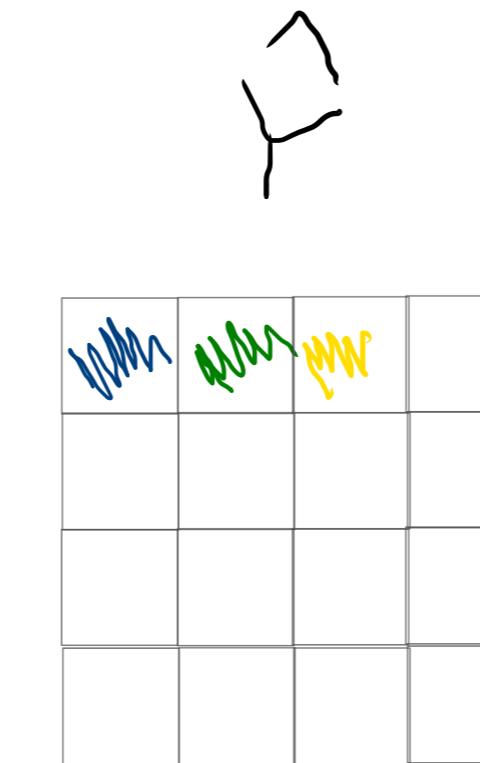
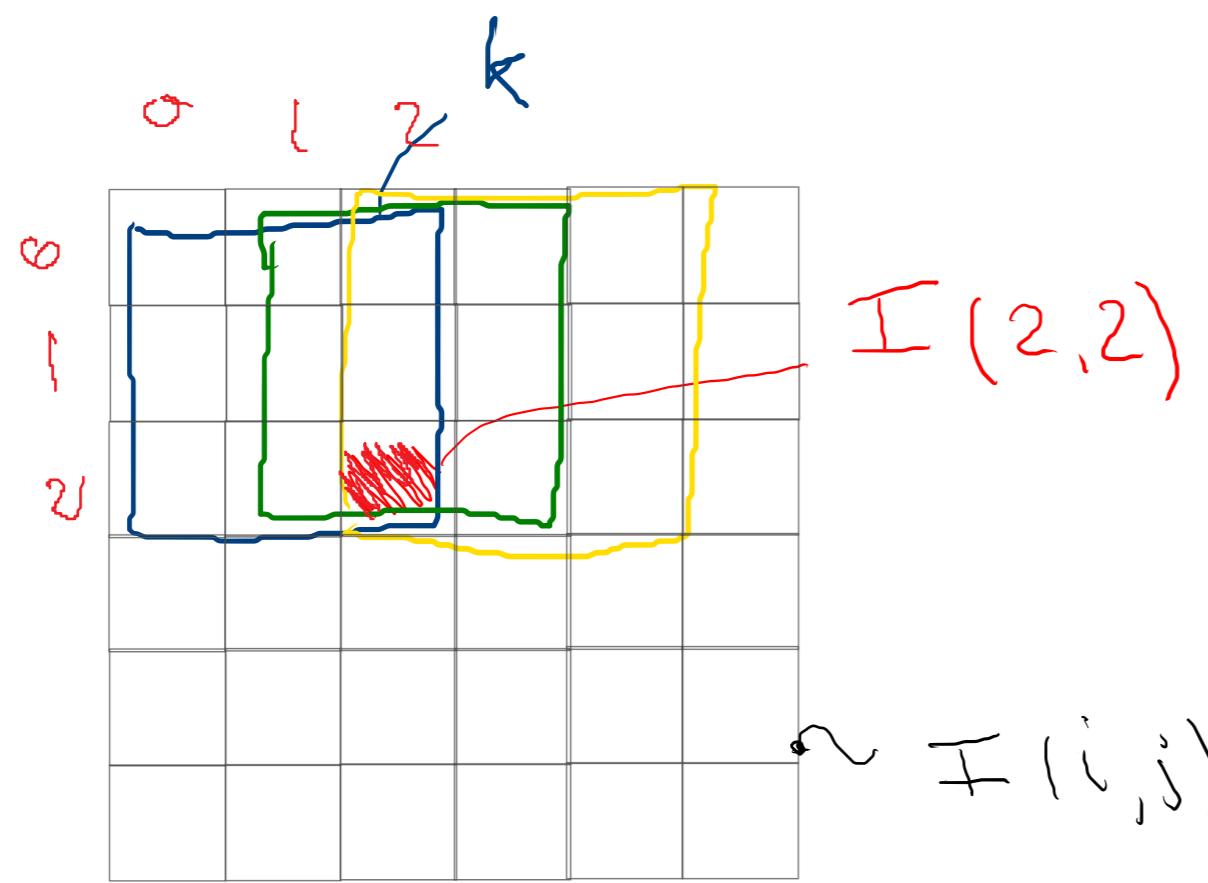
¿Cómo se interpreta?



... son q $(k_1 \cdot k_2)$ en total...

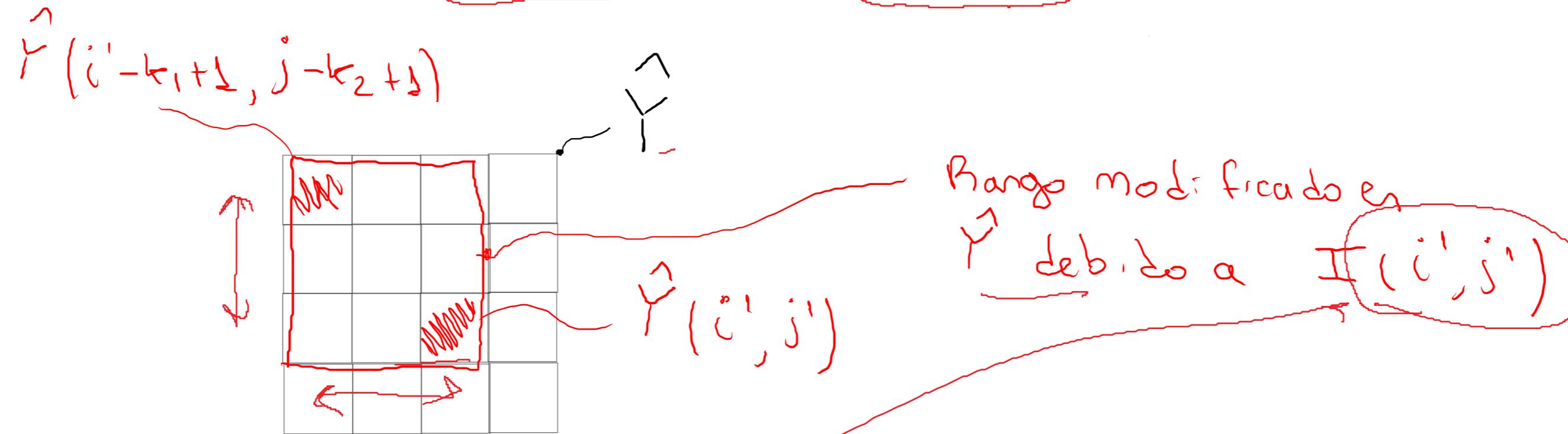
Ahora seguimos con $\frac{\partial L}{\partial I}$ (para poder pasar el grad hacia la capa previa)

¿Como varia \hat{Y} cuando se varia 1-pixel de I ? \Rightarrow dependerá del tamaño del kernel



En este ejemplo hay $9(k_1 \cdot k_1)$ posiciones afectadas en \hat{Y} por el pixel $I(2,2)$

Un pixel $I(i', j')$ va a modificar un área de \hat{Y} en el rango $[i'-k_1+1 : i' ; j'-k_2+1 : j']$



Entonces:

$$\frac{\partial L}{\partial I(i', j')} = \sum_{m=0}^{k_1-1} \sum_{n=0}^{k_2-1} \frac{\frac{\partial L}{\partial \hat{F}(i'-m, j'-n)}}{\partial I(i', j')}$$

en el rango del kernel
 de la capa posterior

a trabajar
 2

el pixel (i', j') modifica a \hat{F} en el rango del kernel

$$\frac{\partial \hat{Y}(i'-m, j'-n)}{\partial I(i', j')} = \frac{\partial}{\partial I(i', j')} \left[\sum_{p=0}^{k_1-1} \sum_{q=0}^{k_2-1} I((i'-m)+p, (j'-n)+q) \cdot w(p, q) + b \right]$$

range del kernel

$\hat{Y}(i', j')$ por definición

hay 1 solo término donde
 $p = m$
 $q = n$

$I(i'-m+m, j'-n+n) = I(i', j')$

entonces

$$\frac{\partial}{\partial I(i', j')} \left[\dots + I(i', j') \cdot w(m, n) + \dots + b \right]$$

$$\frac{\partial \hat{Y}(i'-m, j'-n)}{\partial I(i', j')} = w(m, n)$$

sustituimos
en ②

$$\frac{\partial L}{\partial I(i', j')} = \sum_{m=0}^{k_1-1} \sum_{n=0}^{k_2-1} \frac{\partial L}{\partial F(i'-m, j'-n)} \cdot \underbrace{w(m, n)}_{\text{lo hallado}} \quad \textcircled{2'}$$

rango del kernel

$$\frac{\partial L}{\partial I(i', j')} = (w * \frac{\partial L}{\partial F})(i', j')$$

para cada elemento
de la entrada tengo
que resolver el producto

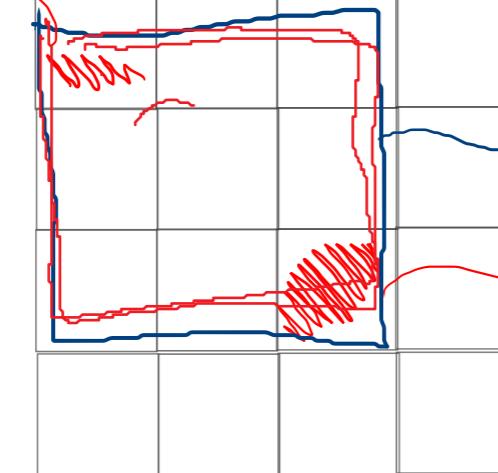
viene dado por
la capa siguiente

Para un (i^*, j^*) dado ...

$i^* - m$

$j^* - n$

con
 $m = k_1 - 1$
 $n = k_2 - 1$



$$\begin{cases} i^* = 2 \\ j^* = 2 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{con } m = 0 \\ \text{y } n = 0 \end{array} \right.$$

... hay que resolver ese producto
elemento a elemento.

$$\frac{\partial L}{\partial Y}$$

es

$$\frac{\partial L}{\partial Y}$$

especializado en sus
diagonales

$$\frac{\partial L}{\partial I(i^*, j^*)} = \sum_{m=0}^{k_1-1} \sum_{n=0}^{k_2-1} \frac{\partial L}{\partial Y}(i^*-m, j^*-n) \cdot w(m, n)$$

¿Cómo se interpreta?

es la porción de \hat{Y}
afectada por $I(i^*, j^*)$

$$\frac{\partial L}{\partial Y}$$

$$Q = \frac{a}{c} \Big| \frac{b}{d} \quad Q^* = \frac{d}{b} \Big| \frac{c}{a}$$

					.

			.