Aprendizaje Profundo

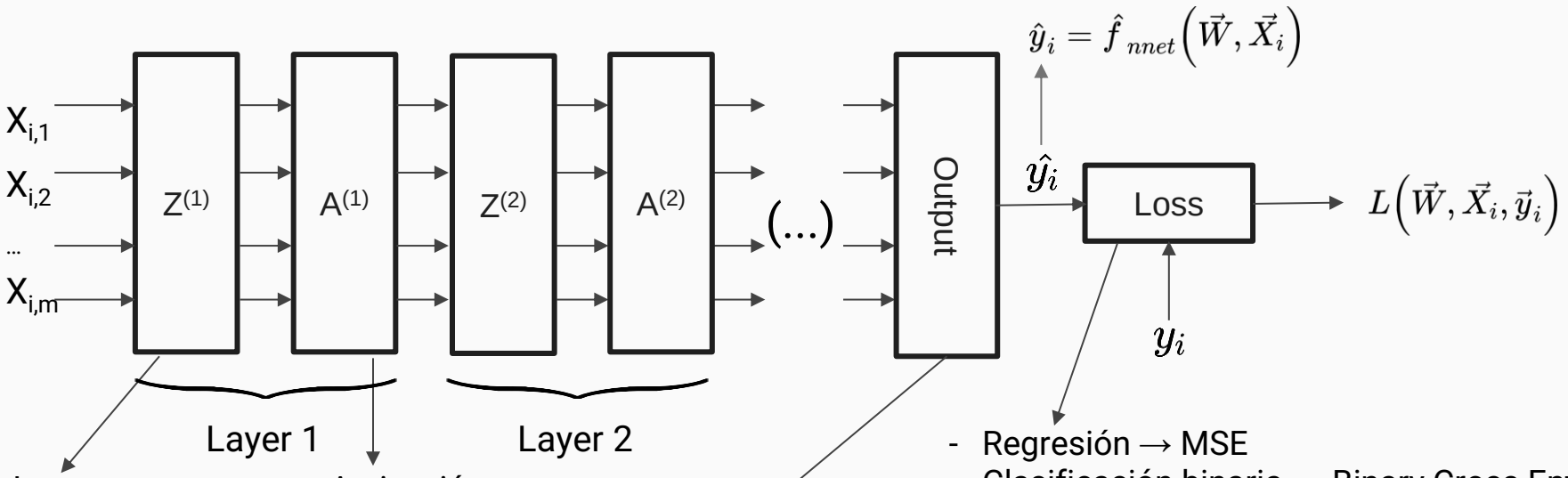
Facultad de Ingeniería
Universidad de Buenos Aires

Profesores:

Marcos Maillot
Antonio Zarauz Moreno
Gerardo Vilcamiza

Datos elaborados por BCP para uso Interno

Red neuronal feedforward con p layers



Layer:
- Lineal
- Recurrente
- Convolucional
- Attention

Activación:
- Sigmoid
- ReLU
- Tanh

Optimización:
- GD, SGD, Mini-Batch
- AdaGrad, RMSprop, Adam (2014)

- Regresión → ∅
- Clasificación binaria → Sigmoid
- Clasificación multiclase → Softmax

- Regresión → MSE
- Clasificación binaria → Binary Cross Entropy
- Clasificación multiclase → Cross Entropy

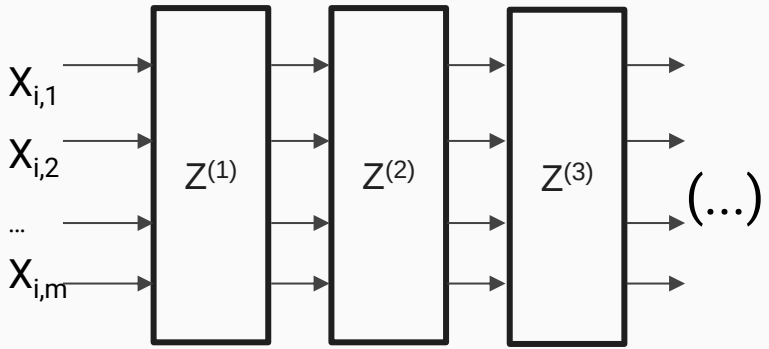
Datos elaborados por BCP para uso Interno

Funciones de activación

Datos elaborados por BCP para uso Interno

Funciones de activación

- **No usar función de activación**



$$\vec{Z}_i^{(1)} = \vec{W}^{(1)} \cdot \vec{X}_i + \vec{b}^{(1)}$$

$$\vec{Z}_i^{(2)} = \vec{W}^{(2)} \cdot \vec{Z}_i^{(1)} + \vec{b}^{(2)} = \vec{W}^{(2)} \cdot \left(\vec{W}^{(1)} \cdot \vec{X}_i + \vec{b}^{(1)} \right) + \vec{b}^{(2)}$$

$$= \left(\vec{W}^{(2)} \cdot \vec{W}^{(1)} \right) \cdot \vec{X}_i + \left(\vec{W}^{(2)} \cdot \vec{b}^{(1)} + \vec{b}^{(2)} \right)$$

$$\vec{W}' \qquad \vec{b}'$$

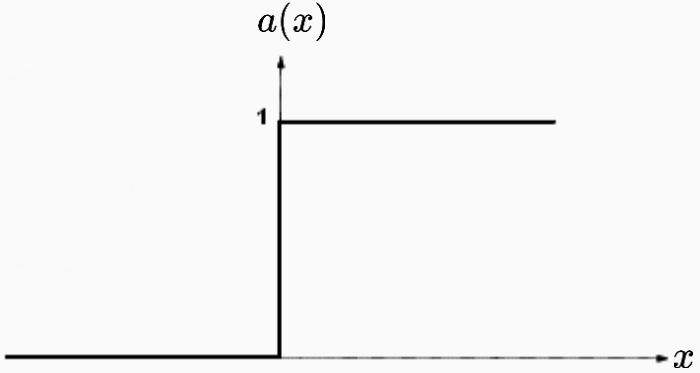
$$\hat{y}_i = \vec{W}' \cdot \vec{X}_i + \vec{b}'$$ **Regresión Lineal**

¡Debo utilizar una función de activación no lineal!

Datos elaborados por BCP para uso Interno

Funciones de activación

- **Escalón**



$$a(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \longrightarrow a'(x) = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \\ ? & x = 0 \end{cases}$$

$$\partial L/\partial W_{1,1}^{(1)} = \partial L/\partial \hat{y}_i \cdot \partial \hat{y}_i/\partial a_{i,1}^{(1)} \cdot \partial a_{i,1}^{(1)}/\partial Z_{i,1}^{(1)} \cdot \partial Z_{i,1}^{(1)}/\partial W_{1,1}^{(1)}$$

$$\partial L/\partial W_{1,1}^{(1)} = 0$$

$$W_{1,1}^{(1)} \leftarrow W_{1,1}^{(1)} - \alpha \cdot \cancel{\partial L/\partial W_{1,1}^{(1)}}$$

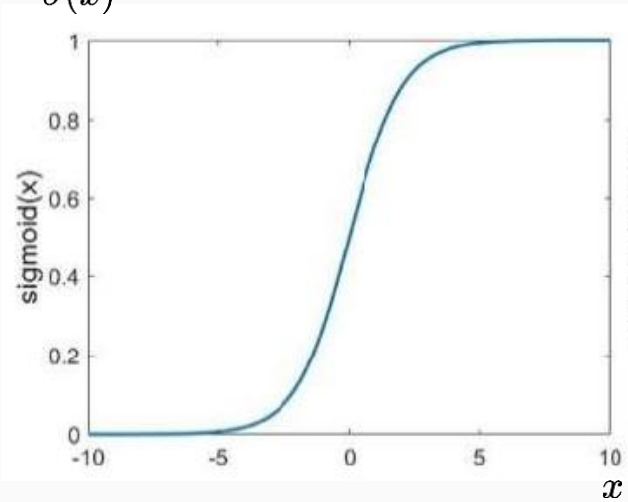
Me cancela el Backpropagation y el modelo deja de aprender

Datos elaborados por BCP para uso Interno

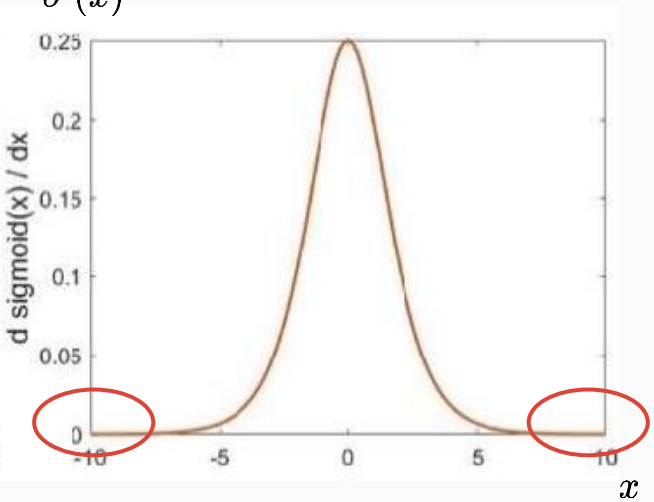
Funciones de activación

- **Sigmoid**

$\sigma(x)$



$\sigma'(x)$



$$\sigma(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x+1}$$

$$\sigma'(x) = \sigma(x) \cdot (1 - \sigma(x))$$

$$\partial L / \partial W^{(1)}_{1,1} = (\dots) \cdot \partial a^{(1)}_{i,1} / \partial Z^{(1)}_{i,1} \cdot (\dots)$$

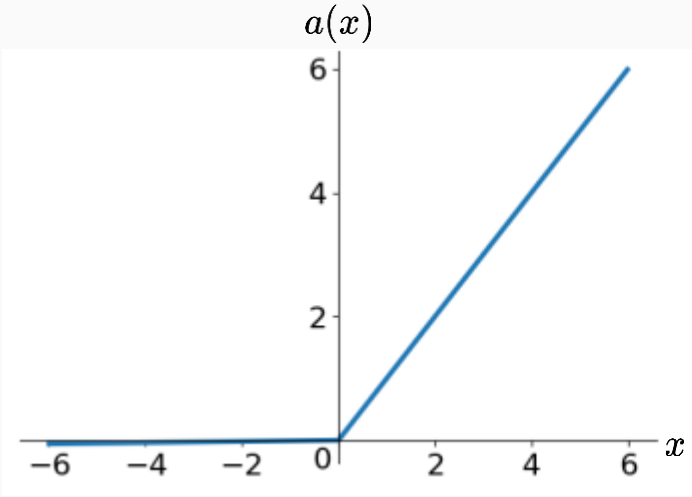
Optimización lenta → El modelo aprende muy lentamente

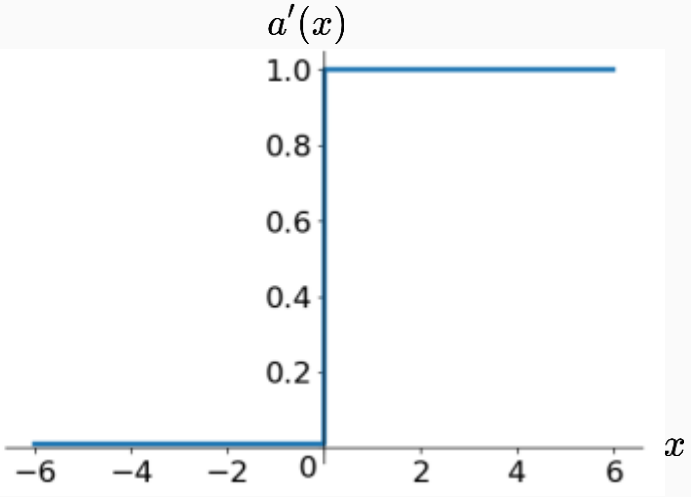
Para valores absolutos altos de la entrada, la derivada es muy pequeña → Vanishing Gradients

Datos elaborados por BCP para uso Interno

Funciones de activación

- **ReLU**





$$a(x) = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

$$a(x) = \max(0, x)$$

$$a'(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

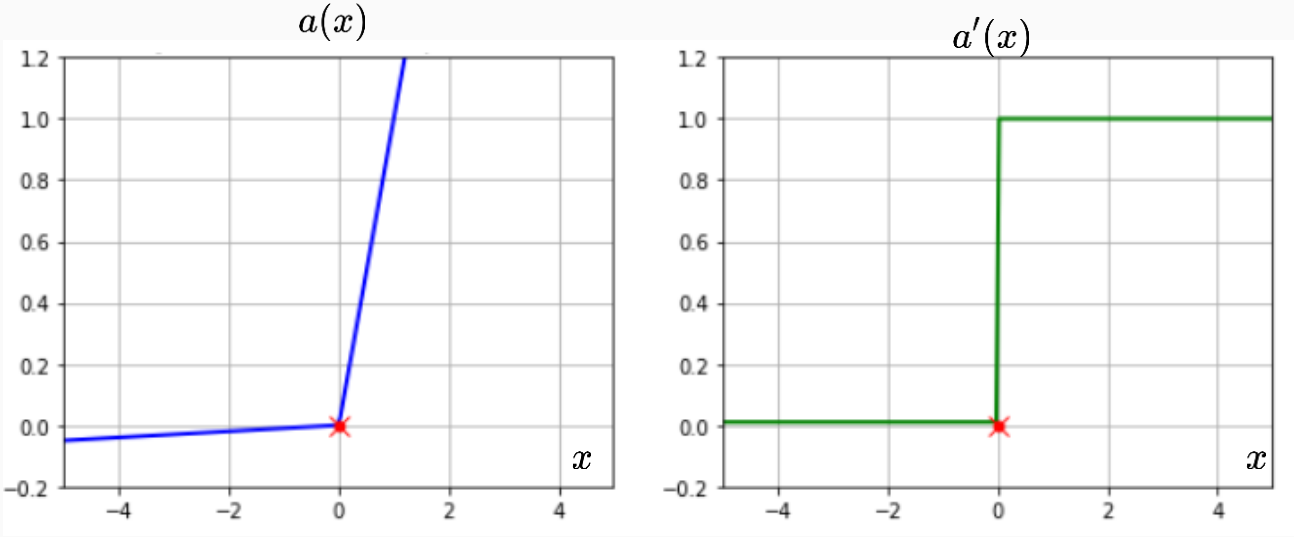
Paso Forward y Backward extremadamente simples de calcular (entrenamiento muy rápido)

Para valores negativos de la entrada el gradiente es 0

Datos elaborados por BCP para uso Interno

Funciones de activación

- **Leaky ReLU**



$$a(x) = \begin{cases} x, & x > 0 \\ \beta \cdot x, & x \leq 0 \end{cases} \qquad a'(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ \beta, & x \leq 0 \end{cases}$$

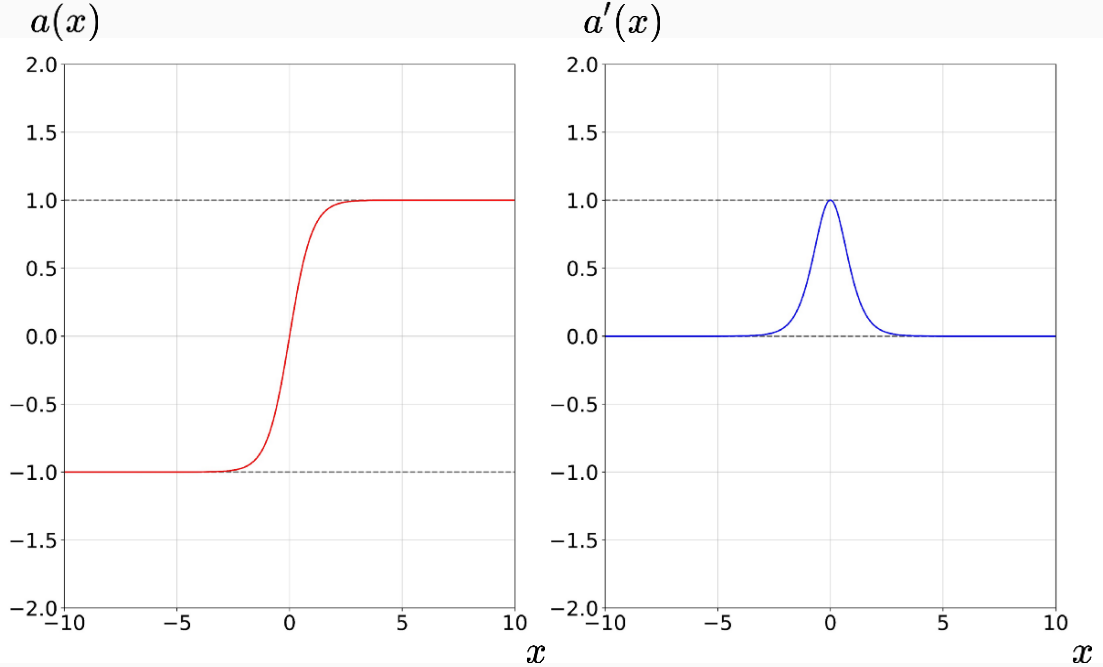
$$a(x) = \max(\beta \cdot x, x)$$

$$\text{Valor típico } \beta = 0.01$$

Datos elaborados por BCP para uso Interno

Funciones de activación

- **Tanh**



$$a(x) = \tanh(x) = 2 \cdot \sigma(x) - 1$$

$$a'(x) = 1 - (\tanh(x))^2$$

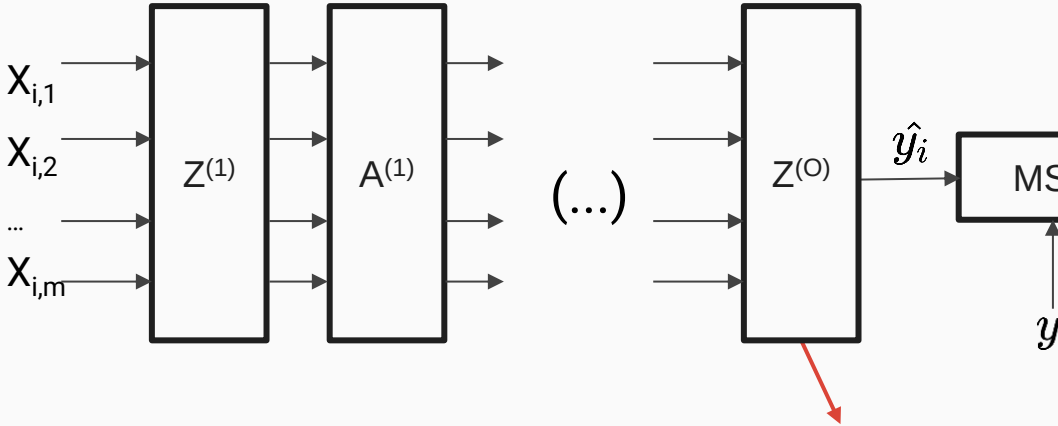
Datos elaborados por BCP para uso Interno

Funciones de salida
Loss function

Datos elaborados por BCP para uso Interno

Funciones de salida + Loss function

- **Regresión**



$$L\left(\vec{W}, \vec{X}_i, \vec{y}_i\right)$$

$$L = (y - \hat{y}_i)^2$$

$$\hat{y}_i \in R$$

$$y_i \in R$$

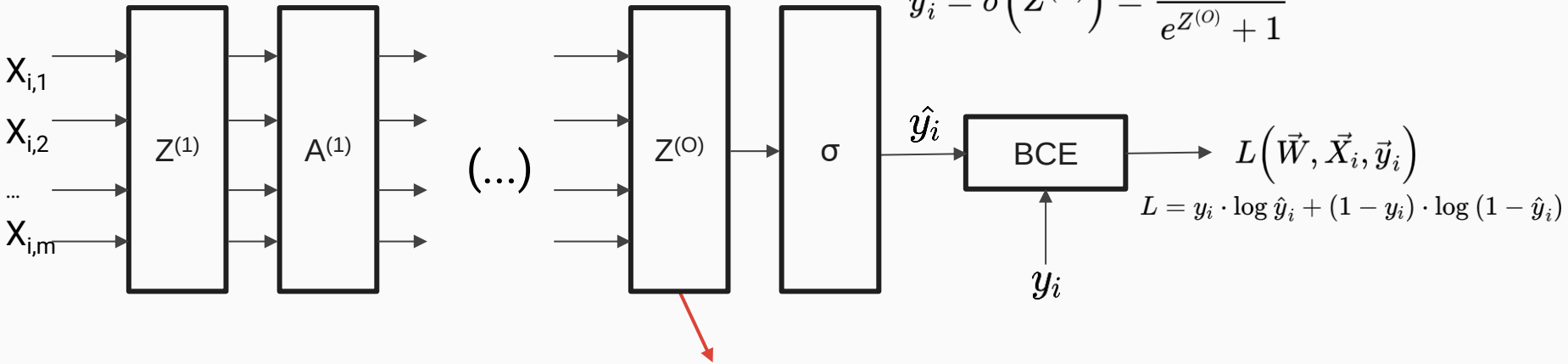
$$L \in R$$

1 sola salida = 1 sola neurona

Datos elaborados por BCP para uso Interno

Funciones de salida + Loss function

- **Clasificación binaria**



$$\hat{y}_i = \sigma\left(Z^{(O)}\right) = \frac{e^{Z^{(O)}}}{e^{Z^{(O)}} + 1}$$

$$L = y_i \cdot \log \hat{y}_i + (1 - y_i) \cdot \log (1 - \hat{y}_i)$$

1 sola salida = 1 sola neurona

$$Z_i^{(o)} \in R$$

$$\hat{y}_i \in (0, 1) \rightarrow \text{probabilidad de clasificar } y_i = 1$$

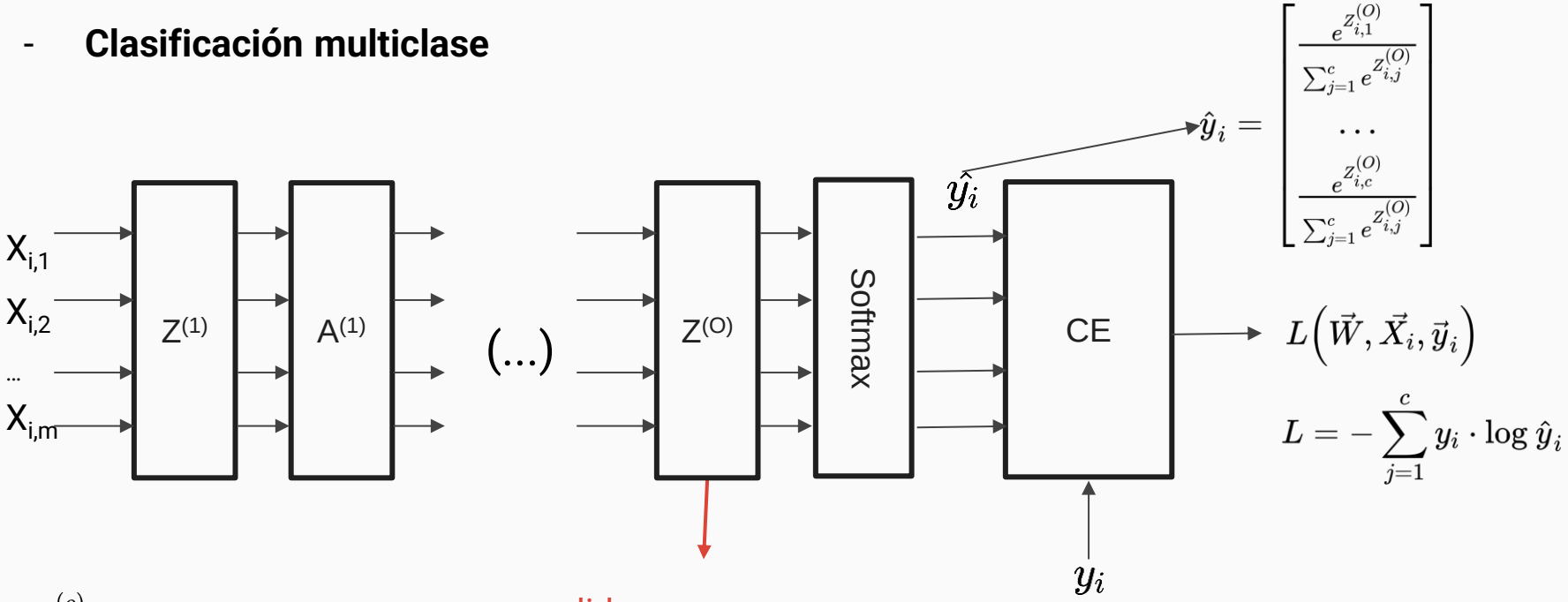
$$y_i \in \{0, 1\}$$

$$L \in R$$

Datos elaborados por BCP para uso Interno

Funciones de salida + Loss function

- **Clasificación multiclase**



c salidas = c neuronas

$\vec{Z}_i^{(o)} \in R^{c\,x\,1}$,

$\vec{\hat{y}}_i \in R^{c\,x\,1} / \hat{y}_{i,j} \in [0,1] \forall j \in \{1,..,c\} \rightarrow$ probabilidad de clasificar y_i en cada clase

$y_i \in R^{c\,x\,1} \rightarrow$ one hot encoding

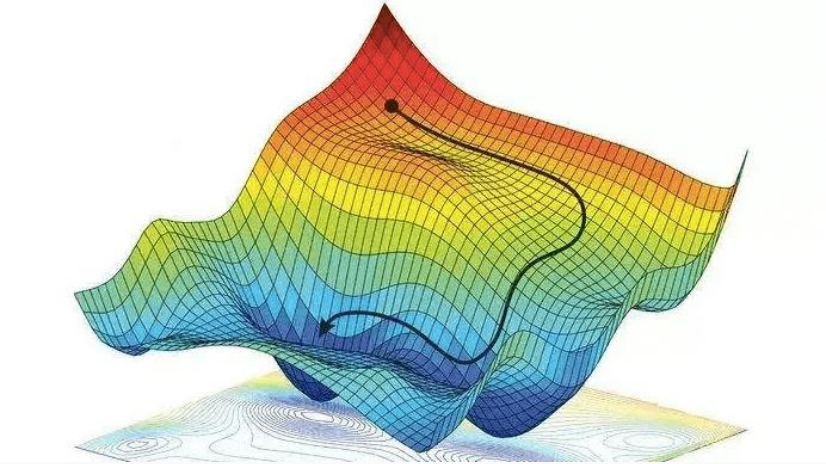
$L \in R$

Datos elaborados por BCP para uso Interno

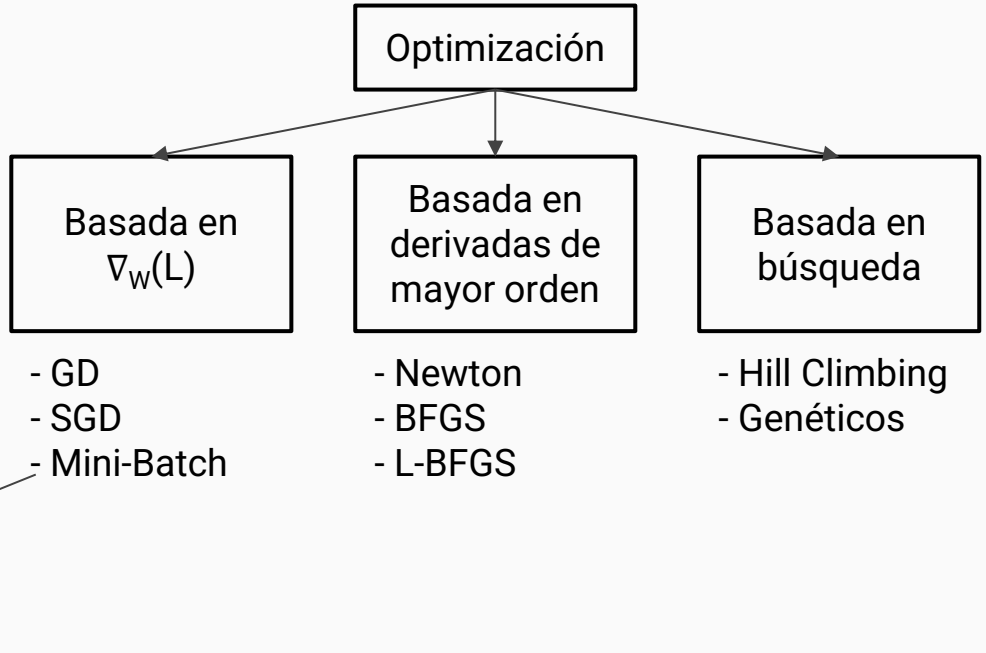
Optimización

Datos elaborados por BCP para uso Interno

Optimización



Objetivo: encontrar el mínimo



Datos elaborados por BCP para uso Interno

Optimización

$$\text{MSE} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y - \hat{y}_i)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} l_i\left(\vec{W}, \vec{X}_i, y_i\right)$$

	GD	SGD	Mini-Batch
Cálculo del gradiente	$\nabla_{\vec{W}} = \vec{\nabla}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} l_i\left(\vec{W}, \vec{X}_i, y_i\right)\right)$	$\nabla_{\vec{W}} = \vec{\nabla}\left(l_i\left(\vec{W}, \vec{X}_i, y_i\right)\right)$	$\nabla_{\vec{W}} = \vec{\nabla}\left(\frac{1}{b}\sum_{i=1}^{b} l_i\left(\vec{W}, \vec{X}_i, y_i\right)\right)$
# actualizaciones de W	n_epoch	n_epoch x n	n_epoch x (n / b)
Cantidad de memoria	Mucha memoria O(n)	Muy poca memoria O(1)	Intermedio O(b)
Velocidad cálculos	Muy rápido O(n_epoch)	Muy lento O(n_epoch x n)	Intermedio O(n_epoch x (n / b))

Datos elaborados por BCP para uso Interno

Optimización

- **Mini-Batch**

for epoch in n_epoch:

  for b in batches: → # batches: n/b

  * Forward: $\vec{\hat{y}}_b = \hat{f}_{nnet}\left(\vec{X}_b\right)$ → $\vec{X}_b \in R^{b\,x\,m}$

  * Error → $L\left(\vec{y}_b, \vec{\hat{y}}_b\right)$

  * Backward → $\vec{\nabla}_{\vec{W}} = \frac{1}{b}\sum_{i=1}^{b} l_i(y_i, \hat{y}_i)$

  * $\vec{W} \leftarrow \vec{W} - \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{W}}$

- ¿Cuántas veces actualizo W por epoch? n/b veces

- ¿Cuántas veces actualizo W en total? n_epoch*n/b

- ¿Hiperparámetros?
  n_epoch, b, α

Datos elaborados por BCP para uso Interno

Optimización

- **Mini-Batch + Momento de primer orden**

for epoch in n_epoch:
  for b in batches:

* Forward: $\vec{\hat{y}}_b = \hat{f}_{nnet}\left(\vec{X}_b\right)$
* Error $\rightarrow L\left(\vec{y}_b, \vec{\hat{y}}_b\right)$
* Backward $\rightarrow \vec{\nabla}_{\vec{W}} = \frac{1}{b}\sum_{i=1}^{b} l_i(y_i, \hat{y}_i)$
* $\vec{v} \leftarrow \xi \cdot \vec{v} + \alpha \cdot \vec{\nabla}_{\vec{W}}$ $\longrightarrow \begin{cases} \xi = 0 & \Longrightarrow \vec{V} = \alpha \cdot \vec{\nabla}_{\vec{W}} \rightarrow \text{Mini-Batch} \\ \xi > 0 & \rightarrow \text{Mini-Batch con momento de } 1^{\text{er}} \text{ orden} \end{cases}$
* $\vec{W} \leftarrow \vec{W} - \vec{v}$

- ¿Hiperparámetros? n_epoch, b, ξ, α

Datos elaborados por BCP para uso Interno

Optimización

- **Adam (2014)**

for epoch in n_epoch:

for b in batches:

* Forward: $\vec{\hat{y}}_b = \hat{f}_{nnet}\left(\vec{X}_b\right)$
* Error $\rightarrow L\left(\vec{y}_b, \vec{\hat{y}}_b\right)$
* Backward $\rightarrow \vec{\nabla}_{\vec{W}} = \frac{1}{b}\sum_{i=1}^{b} l_i(y_i, \hat{y}_i)$
* $\vec{v} \leftarrow p_1 \cdot \vec{v} + (1 - p_1) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{W}}$ → Momento 1er orden
* $\vec{r} \leftarrow p_2 \cdot \vec{r} + (1 - p_2) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{W}} \odot \vec{\nabla}_{\vec{W}}$ → Momento 2do orden
* $\vec{\triangle} \leftarrow -\frac{\alpha}{\sqrt{\vec{r}}} \cdot \vec{v}$
* $\vec{W} \leftarrow \vec{W} + \vec{\triangle}$

Hadamard product
(element-wise product)

- ¿Hiperparámetros? n_epoch, b, p_1, p_2, α

Datos elaborados por BCP para uso Interno

EJERCICIO

1. En el ejercicio de clase 1, utilizar como optimizador Mini-Batch con momento de primer orden.
2. Modificar ξ y α y analizar qué sucede.
3. Observar si la optimización converge con menos cantidad de epochs.

Datos elaborados por BCP para uso Interno