24-marzo-2017 **Cálculo** Grupo 1MB
1-1-2-3-3

1.- Calcular el siguiente límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{4n^2+\sqrt{16n^4+\sqrt{81n^8+n^4+1}}}}.$$

Solución

La indeterminación es del tipo ∞/∞.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{4\,n^2+\sqrt{16n^4\ +\sqrt{81n^8+n^4+1}}}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n}}{\sqrt{\frac{4\,n^2+\sqrt{16n^4+\sqrt{81n^8+n^4+1}}}{n^2}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{16+\sqrt{\frac{81n^8+n^4+1}{n^8}}}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{16+9}}} = \frac{1}{\sqrt{4+5}} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

2.- Sea $a>0$, y $p\in\mathbb{N}$, determinar el siguiente límite en función de a y p

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+a)^p}{n^p+a^p}\right)^n.$$

Solución Es claro que la indeterminación es del tipo 1^∞. Por tanto podemos buscar el número e, o bien, lo que es equivalente, aplicar la fórmula

$$\lim_{n\to\infty} (a^n)^{b_n} = e^{\lim_{n\to\infty}(a_n-1)b_n}.$$

$$\begin{aligned}
a_n - 1 &= \left(\frac{(n+a)^p}{n^p+a^p} - 1\right) = \frac{(n+a)^p - n^p - a^p}{n^p+a^p} = \\
1\,&\frac{\binom{p}{0}n^pa^0+\binom{p}{1}n^{p-1}a+\binom{p}{2}n^{p-2}a^2+\ldots+\binom{p}{p-1}n^1a^{p-1}+\binom{p}{p}n^0a^p-n^p-a^p}{n^p+a^p} = \\
&\frac{\binom{p}{1}n^{p-1}a+\binom{p}{2}n^{p-2}a^2+\ldots+\binom{p}{p-1}n^1a^{p-1}}{n^p+a^p}
\end{aligned}$$

Tras multiplicar por n, (ya que en este caso $b_n = n$), pasando al límite tendremos

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-1)b_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\binom{p}{1}n^p a + \binom{p}{2}n^{p-1}a^2 + \ldots + \binom{p}{p-1}n^2 a^{p-1}}{n^p + a^p} = \binom{p}{1}a = pa.$$

Luego el resultado será

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+a)^p}{n^p+a^p}\right)^n = e^{pa}.$$

3.- Dada la sucesión recurrente

$$a_{n+1} = \sqrt[3]{7a_n+6}, \qquad a_1 = 17,$$

i) Probar que es monótona y acotada.

ii) Calcular su límite si es que existe.

iii) Sin verificar rigurosamente monotonía y acotación ¿Cuanto valdría su límite si $a_1 = -10$?

Solución

Veamos cuanto vale a_2, $a_2 = \sqrt[3]{7\cdot 17+6} = \sqrt[3]{119+6} = \sqrt[3]{125} = 5$. Aparentemente la sucesión es monótona decreciente ya que $17 = a_1 > a_2 = 5$. Luego lo probaremos con rigor.

Provisionalmente también supongamos que el límite existe, es decir $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, tendremos que se verifica la ecuación $L = \sqrt[3]{7L+6}$, es decir

$$L^3 = 7L+6 \;\Rightarrow\; L^3-7L-6=0 \;\Rightarrow\; \begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -7 & -6 \\ -2 & & -2 & 4 & 6 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & 0. \end{array}$$

Resolvamos $x^2-2x-3=0$,

$$x = \frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2} = \frac{2\pm 4}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1. \end{cases}$$

Luego las raices son 3, -1 y -2. El candidato (es la primera que encontramos suponiéndola decreciente) sería 3.

i) a) Monotonía decreciente por inducción. Es decir hemos de probar que

$$a_1 \ge a_2, \quad \text{y} \quad a_k \ge a_{k+1} \;\Rightarrow\; a_{k+1} \ge a_{k+2}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Es claro, como hemos visto, que $17 = a_1 > a_2 = 5$. Supongamos que

$$a_k \ge a_{k+1} \;\Rightarrow\; 7a_k \ge 7a_{k+1} \;\Rightarrow\; 7a_k+6 \ge 7a_{k+1}+6$$
$$\Rightarrow\; \sqrt[3]{7a_k+6} \ge \sqrt[3]{7a_{k+1}+6} \;\Leftrightarrow\; a_{k+1} \ge a_{k+2},$$

lo anterior es válido para todo k.
Luego se cumplirá que

$$a_n \ge a_{n+1}, \;\forall n \in \mathbb{N}.$$

b) Acotación inferior por 3.
Es decir hemos de probar que

$$a_1 \geq 2, \quad \text{y} \quad a_k \geq 3 \;\Rightarrow\; a_{k+1} \geq 3, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Hemos visto que $a_1 = 17 \geq 3$. Luego la primera condición se cumple. Por otro lado

$$\begin{aligned} a_k \geq 3 \;&\Rightarrow\; 7a_k \geq 7\cdot 3 \;\Rightarrow\; 7a_k + 6 \geq 7\cdot 3 + 6 \\ &\Rightarrow\; \sqrt[3]{7a_k+6} \geq \sqrt[3]{7\cdot 3+6} = \sqrt[3]{27} = 3 \;\Leftrightarrow\; a_{k+1} \geq 3 \end{aligned}$$

$$a_n \geq 3, \;\; \forall n \in \mathbb{N}.$$

ii) Por tanto de a) y b) se deduce, por el teorema que nos dice que monotonía y acotación implican convergencia, que existe $\text{lím}_{n\to\infty} a_n = L$. Luego todas las suposiciones hechas al principio son ciertas y en consecuencia

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 3.$$

iii) Si hacemos $a_1 = -10$ tendremos que

$$a_2 = \sqrt[3]{(-10)\cdot 7 + 6} = \sqrt[3]{-64} = -4,$$

luego $a_1 < a_2$ y sin entrar en detalles la sucesión sería monótona creciente, en consecuencia la primera solución que encontramos empezando por -10 es -2 y ese será por tanto su límite.

4.- Dadas las siguientes series, analizar su carácter sumando aquellas que converjan.

$$\text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(2^n)}{\sqrt{n}}, \qquad \text{ii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(2^n)}{n}, \qquad \text{iii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(2^n)}{2^n}.$$

Solución

Antes de empezar es obvio que $\ln(2^n) = n\ln(2)$, luego

i) Es claro que la primera serie es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(2^n)}{\sqrt{n}} = \sum_{n^1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n}} \ln(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(2)\sqrt{n},$$

Resulta inmediato que falla la condición necesaria ya que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \ln(2)\sqrt{n} = +\infty \neq 0.$$

Luego la serie no converge y al ser de términos positivos diverge.

ii) De modo análogo la segunda serie es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(2^n)}{n} = \sum_{n^1}^{\infty} \frac{n}{n} \ln(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(2) = \ln(2) + \ln(2) + \ln(2) + \dots.$$

Resulta inmediato que falla la condición necesaria ya que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \ln(2) = \ln(2) \neq 0.$$

Luego la serie no converge y al ser de términos positivos diverge.

iii) Por último la tercera serie es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(2^n)}{2^n} = \ln(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}.$$

Para averiguar si es o no convergente le aplicamos el criterio de Cauchy o de la raíz. Tendremos

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \frac{1}{2} < 1.$$

Ya que sabemos que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Por tanto la serie converge. Sumemos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

ya que es una aritmético-geométrica de primera especie de razón $r = 1/2$. Por tanto converge, llamemos

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(2^n)}{2^n}.$$

Calculemos su suma, utilizamos el procedimiento habitual, dado que las dos series en que descomponemos la dada son una aritmético geométrica de razón $1/2$ y una geométrica con la misma razón, y por tanto son convergentes, se puede escribir

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1+1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{2^{n-1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Lo que podemos expresar mediante la ecuación, llamemos S' a la suma de esta serie

$$S' = \frac{1}{2} S' + \frac{1/2}{1-1/2},$$

de donde resolviendo en S' tenemos

$$S'(1 - \frac{1}{2}) = 1 \;\Rightarrow\; S' = 2,$$

Luego la suma pedida S será

$$S = \ln(2)S' = 2\ln(2) = \ln(4).$$

5.- Dada la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3+3n^2+2n}(x-1)^n$. Se pide:

i) Calcular el radio de convergencia.

ii) Determinar el campo de convergencia.

iii) Consideremos el campo de convergencia como un intervalo. Calcular la suma de la serie de potencia en el extremo derecho, si en dicho punto fuera convergente.

Solución

Antes de empezar veamos que

$$n^3+3n^2+2n = n(n^2+3n+2)$$

luego

$$n = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \begin{cases} -2 \\ -1 \end{cases}$$

Por lo que

$$n^3+3n^2+2n = n(n+1)(n+2) \;\;\Rightarrow\;\; a_n = \frac{n+1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n(n+2)}$$

i) Tendremos

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\dfrac{1}{n(n+2)}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{n+2} = 1\cdot 1 = 1.$$

Luego el radio de convergencia es $r = 1$.

ii) Sabemos que $(x_0 - r, x_0 + r) \subset D$. En este caso $x_0 = 1$, luego $(1-1, 1+1) = (0,2)$. Veamos que ocurre en $x = 2$. Por substitución directa tendremos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3+3n^2+2n}(2-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)},$$

Esta serie es claramente convergente por Prinsgheim para $\alpha = 2$, ya que

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha} \frac{1}{n(n+2)} = 1 \neq \infty.$$

Por tanto como $\alpha > 1$ la serie converge. $2 \in D$.

Veamos que ocurre en $x = 0$, quedaría la serie alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3+3n^2+2n}(0-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+2)},$$

pero esta serie es convergente sin más que aplicar el criterio de la convergencia absoluta. Como la serie de los valores absolutos es justamente la que hemos visto más arriba. Resulta que ella es también convergente. En consecuencia

$$D = [0,2].$$

iii) Hemos visto que la serie en $x = 2$ converge. Procedamos a sumarla.

$$n^3+3n^2+2n = n(n+1)(n+2) \;\Rightarrow\; \frac{n+1}{n^3+3n^2+2n} = \frac{n+1}{n(n+1)(n+2)} \;\Rightarrow\; \frac{1}{n(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2}.$$

Resultará

$$1 = A(n+2) + Bn.$$

Demos valores para calcular A y B. Haciendo $n = 0$, tenemos $1 = 2A$, luego $A = 1/2$. Asimismo haciendo $n = -2$, resulta $1 = -2B$, luego $B = -1/2$. Por tanto

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1/2}{n} + \frac{-1/2}{n+2}.$$

Determinemos el valor de la suma parcial n-ésima.

$$\begin{aligned} S_n = {} & \boxed{\frac{1/2}{1}} + \frac{-1/2}{3} + \\ & + \boxed{\frac{1/2}{2}} + \frac{-1/2}{4} + \\ & + \frac{1/2}{3} + \frac{-1/2}{5} + \\ & \vdots \\ & + \frac{1/2}{n-2} + \frac{-1/2}{n} + \\ & + \frac{1/2}{n-1} + \boxed{\frac{-1/2}{n+1}} + \\ & + \frac{1/2}{n} + \boxed{\frac{-1/2}{n+2}} \end{aligned}$$

De donde resulta

$$S_n = \frac{1/2}{1} + \frac{1/2}{2} + \frac{-1/2}{n+1} + \frac{-1/2}{n+2},$$

pasando al límite tendremos

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

en consecuencia para $x = 2$, la serie que resulta es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{3}{4}.$$