

1.- Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2 3y^2 - 1}{x^2 + y^2}.$$

2.- Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^3 - xy^2 - 2y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Se pide:

- i) ¿Es continua en $(0,0)$? ¿y en \mathbb{R}^2 ?
- ii) Calcular las derivadas parciales, si es que existen, en los puntos $(0,0)$ y $(0,1)$.
- iii) Justificar la existencia o no del plano tangente en los puntos $(0,0)$ y $(0,1)$, calculándolo donde exista.

3.- Dada la función $f(x,y) = x^2 + 4(y+1)^2$. Se pide:

- i) ¿Es diferenciable en $(1, -1/2)$? Calcular el gradiente en dicho punto.
- ii) Calcular la derivada direccional de $f(x,y)$ en el punto $(1, -1/2)$ en la dirección y sentido dados por el vector $(1, 1)$.
- iii) Calcular la dirección y sentido en que la derivada direccional de $f(x,y)$ en $(1, -1/2)$ es máxima, calculando su valor. Verificar que efectivamente la derivada direccional calculada en ii) es menor o igual que la máxima.
- iv) Determinar la dirección en que la derivada direccional de $f(x,y)$ en $(1, -1/2)$ es nula.

4.- Sea la función $f(x,y) = 4x^2y^2 - x^2 - y^2$. Se pide:

- i) Obtener y clasificar los puntos críticos de $f(x,y)$.
- ii) Hallar los extremos absolutos de $f(x,y)$ en el conjunto

$$\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

5.- Dada la función $f(x,y) = x^2 + y^2$, se pide calcular:

- i) $\iint_{\Omega} f(x,y) dx dy$, siendo $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$.
- ii) $\iint_{\Sigma} f(x,y) dx dy$, siendo Σ , la región del primer cuadrante situada entre las parábolas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.