Odpowiedzi na pytania z egzaminu licencjackiego

1 Wektory i macierze – definicje i podstawowe operacje.

Macierz to układ liczb, symboli lub wyrażeń zapisanych w postaci prostokątnej tablicy. W algebrze liniowej macierze wprowadza się często jako sposób skondensowanego zapisu układów równań liniowych, co ma na celu wyeliminowanie powtarzających się elementów standardowej notacji układów równań tego rodzaju z wieloma niewiadomymi. Macierze pozwalają również na reprezentowanie przekształceń liniowych w sposób umożliwiający przeprowadzanie obliczeń. Ponieważ wiele przekształceń geometrycznych (jak na przykład obroty przestrzeni $\mathbb{R}^n$ wokół początku układu współrzędnych) są przekształceniami liniowymi, macierze znajdują zastosowanie w geometrii analitycznej i grafice komputerowej.

Przykład zapisu macierzy 3×3 $\begin{bmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 2 & 9 & 0 \end{bmatrix}$

Macierze $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ i $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ uważa się za równe, jeśli mają ten sam typ i równe odpowiadające sobie elementy, tzn. dla każdej możliwej pary i, j zachodzi $a_{ij} = b_{ij}$.

Sumę macierzy $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ definiuje się „po współczynnikach", tzn. za pomocą wzoru $\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij} + b_{ij}]$ dla wszystkich i, j. Z definicji wynika (ale można napisać wprost), że można dodawać macierzy tylko o takich samych wymiarach.

$$\begin{bmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 2 & 9 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 8 \\ 8 & 10 & 8 \\ 3 & 9 & 4 \end{bmatrix}$$

Mnożenie przez skalar macierzy $\mathbf{A}$ oraz liczby c również definiuje się „po

współczynnikach", czyli $c\mathbf{A} = [ca_{ij}]$ dla dowolnych i, j.

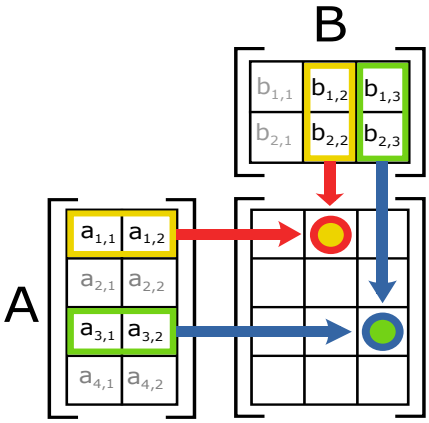
$$2 * \begin{bmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 2 & 9 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 6 & 4 \\ 10 & 8 & 2 \\ 4 & 18 & 0 \end{bmatrix}$$

Działanie mnożenia macierzy jest zdefiniowane najczęściej jako tzw. iloczyn Cauchy'ego: dla dla macierzy $\mathbf{A}$ typu $m \times n$ oraz $\mathbf{B}$ typu $n \times p$ dany jest on jako taka macierz $\mathbf{C}$ typu $m \times p$, oznaczana $\mathbf{AB}$, dla której

$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$ dla dowolnych i, j.

Mnożenie to jest łączne $(A(BC) = (AB)C)$, ale nie jest przemienne $(AB \neq BA)$.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 6 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2*1+3*0+7*5 \\ 6*1+1*0+2*5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37 \\ 16 \end{bmatrix}$$



Rysunek 1: Schemat mnożenia macierzy A i B

Elementem neutralnym mnożenia macierzy przez siebie jest macierz diagonalna, zawierająca na swojej przekątnej same jedynki.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 6 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Przestawienie bądź transpozycja danej macierzy $\mathbf{A}$, tzn. zamiana jej kolumn i wierszy miejscami (z zachowaniem kolejności). Macierz transponowaną lub przestawioną względem macierzy $\mathbf{A}$ definiuje się jako macierz

$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = [a_{ji}]$ dla wszystkich i, j, przy czym $(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ oraz $\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$.

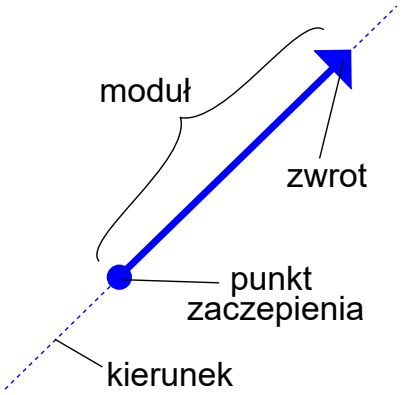
Wyznacznikiem $\det(\mathbf{A})$ lub $|\mathbf{A}|$ macierzy kwadratowej $\mathbf{A}$ nazywa się liczbę kodującą pewne właściwości przekształcenia A reprezentowanego przez tę macierz.

Wyznacznik macierzy stopnia drugiego dany jest wzorem

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

Wektor jest macierzą o wymiarach $n \times 1$. Reprezentuje on punkt w przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Jego podstawowe trzy cechy to:

- długość - czasami inaczej zwana modułem lub wartością
- kierunek - kierunek prostej zawierającej wektor
- zwrot - grot strzałki



Rysunek 2: Ilustracja wektora

Dodawanie oraz mnożenie przez skalar wektora jest zdefiniowane w ten sam sposób jak w przypadku macierzy.

Iloczyn skalarny dwóch wektorów to **liczba**, którą obliczamy dodając iloczyny odpowiednich współrzędnych.

$$\vec{a} = [2, 1, 3], \vec{b} = [4, 1, 2]$$
$$\vec{a} \circ \vec{b} = 2 * 4 + 1 * 1 + 3 * 2 = 15$$

Iloczyn skalarny możemy również obliczyć znając długości wektorów $|\vec{a}|$ i $|\vec{b}|$ oraz kąt α między nimi:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \|\vec{a}\| * \|\vec{b}\| * \cos\alpha$$

Długość wektora $\vec{a}$ może być zdefiniowana jako pierwiastek iloczynu skalarnego z samym sobą.

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}}$$

Iloczyn wektorowy - działanie dwuargumentowe przyporządkowujące parze wektorów przestrzeni $\mathbb{R}^3$ pewien wektor tej przestrzeni.

Iloczyn wektorowy $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ wektorów **a** i **b** określa się następująco:

- jeśli wektory **a** i **b** są liniowo zależne, to $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$
- jeśli wektory **a** i **b** nie są liniowo zależne, to $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c}$, gdzie **c** jest wektorem prostopadłym do płaszczyzny wyznaczonej przez **a** i **b**.

2 Funkcje skrótu (mieszające) i ich zastosowania.

Funkcja skrótu, funkcja mieszająca lub funkcja haszująca – funkcja przyporządkowująca dowolnie dużej liczbie krótką wartość o stałym rozmiarze, tzw. skrót nieodwracalny.

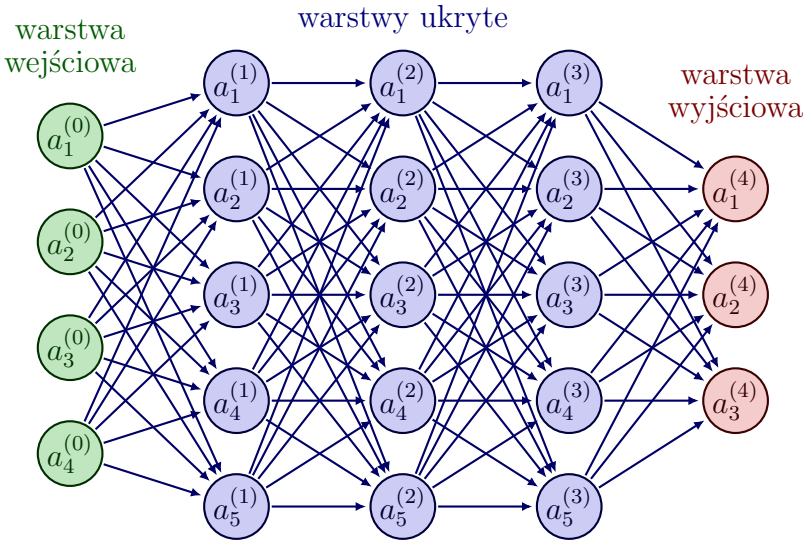
W informatyce funkcje skrótu pozwalają na ustalenie krótkich i łatwych do weryfikacji sygnatur dla dowolnie dużych zbiorów danych. Sygnatury mogą chronić przed przypadkowymi lub celowo wprowadzonymi modyfikacjami danych (sumy kontrolne), a także mają zastosowania przy optymalizacji dostępu do struktur danych w programach komputerowych (tablice mieszające).

Szczególną podgrupą funkcji skrótu są funkcje uznawane za bezpieczne do zastosowań kryptologicznych (jak np. SHA-3). Kryptograficzna funkcja skrótu powinna spełniać kombinację następujących kryteriów, w zależności od zastosowania:

- Odporność na kolizje (collision resistance) – brak praktycznej możliwości wygenerowania dwóch dowolnych wiadomości o takim samym skrócie
- Odporność na kolizje konkretnych wiadomości (target collision-resistance, preimage resistance) pierwszego i drugiego rzędu – brak praktycznej możliwości wygenerowania wiadomości o takim samym skrócie jak wskazana wiadomość
- Jednokierunkowość (one-wayness) – brak możliwości wnioskowania o wiadomości wejściowej na podstawie wartości skrótu. Zmiana dowolnego pojedynczego bitu wiadomości powinna zmieniać średnio połowę bitów skrótu w sposób, który nie jest istotnie podatny na kryptoanalizę różnicową.

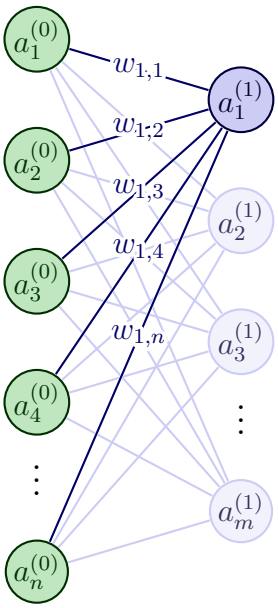
Przykładowe funkcje skrótu to SHA-1 (SHA128), SHA-2 (SHA256), SHA-3(SHA512), MD5.

33 Budowa sieci neuronowych.



Sieci neuronowe, znane również jako sztuczne sieci neuronowe lub symulowane sieci neuronowe są częścią funkcji uczenia maszynowego i stanowią podstawę algorytmów uczenia głębokiego. Ich nazwa i struktura są wzorowane na ludzkim mózgu i naśladują sposób, w jaki biologiczne neurony komunikują się między sobą.

Sztuczne sieci neuronowe składają się z warstw węzłów, obejmujących warstwę wejściową, jedną lub więcej warstw ukrytych oraz warstwę wyjściową. Każdy węzeł (sztuczny neuron) łączy się z innym i ma powiązaną wagę oraz próg. Jeśli wyjście dowolnego pojedynczego węzła przekracza określoną wartość progową, węzeł ten jest aktywowany podczas wysyłania danych do kolejnej warstwy sieci. W przeciwnym razie żadne dane nie są przekazywane do następnej warstwy sieci.



$$= \sigma\left(w_{1,0}a_0^{(0)} + w_{1,1}a_1^{(0)} + \ldots + w_{1,n}a_n^{(0)} + b_1^{(0)}\right)$$

$$= \sigma\left(\sum_{i=1}^{n} w_{1,i}a_i^{(0)} + b_1^{(0)}\right)$$

$$\begin{pmatrix} a_1^{(1)} \\ a_2^{(1)} \\ \vdots \\ a_m^{(1)} \end{pmatrix} = \sigma\left[\begin{pmatrix} w_{1,0} & w_{1,1} & \ldots & w_{1,n} \\ w_{2,0} & w_{2,1} & \ldots & w_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{m,0} & w_{m,1} & \ldots & w_{m,n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1^{(0)} \\ a_2^{(0)} \\ \vdots \\ a_n^{(0)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1^{(0)} \\ b_2^{(0)} \\ \vdots \\ b_m^{(0)} \end{pmatrix}\right]$$

$$a^{(1)} = \sigma\left(\mathbf{W}^{(0)}a^{(0)} + \mathbf{b}^{(0)}\right)$$

O każdym pojedynczym węźle należy myśleć jak o modelu regresji liniowej złożonym z danych wejściowych, wag, odchyleń (lub wartości progowych) i danych wyjściowych. Rysunek powyżej przedstawia właśnie te obliczenia dla jednego neurona. Macierz $\mathbf{W}^{(0)}$ jest macierzą wszystkich wag wchodzących do każdego neurona warstwy $a^{(0)}$ z warstwy poprzedniej, wektor $b^(0)$ to wartości wszystkich *bias-ów* danej warstwy, a σ to funkcja aktywacji danej warstwy.

Wagi pomagają określić znaczenie każdej zmiennej, przy czym większe z nich mają większy wpływ na wynik wyjściowy w porównaniu do innych danych wejściowych. Wszystkie dane wejściowe są następnie mnożone przez swoje odpowiednie wagi, a potem sumowane. Następnie wyniki są przepuszczane przez funkcję aktywacji, która określa wartość wyjściową.

53 Deklaratywne programowanie w logice: klauzule Horne'a, nawracanie

Logika Hoare'a – formalizm matematyczny służący do opisu poprawności algorytmów. Trójka $\{P\}C\{Q\}$ oznacza, że fragment kodu C, o ile na wejściu

będzie miał stan spełniający warunek P, oraz zakończy swoje działanie, to na wyjściu da stan spełniający warunek Q. Formułę P nazywamy warunkiem wstępnym, a formułę Q nazywamy warunkiem końcowym.

Przykład: do instrukcji przypisania $x := 5$ możemy dopisać następujące warunki wstępne i końcowe:

$$\{\text{true}\}x := 5\{x = 5\}$$

co oznacza, że przy dowolnym stanie przed wykonaniem instrukcji, po wykonaniu instrukcji będziemy mieli stan, w którym zmiennej x jest przypisana wartość 5.

Prawdą jest też bardziej skomplikowana formuła:

$$\{x = y + z\}\{\text{if } x < y \text{ then } z := -z\}\{x \leqslant y + z\}$$

66 Charakterystyka kryptografii symetrycznej oraz asymetrycznej.

Kryptografia symetryczna

W kryptografii symetrycznej szyfrowanie i deszyfrowanie wykonywane jest przy użyciu tego samego klucza. W niektórych algorytmach wykorzystywane są dwa klucze, jednak muszą one być od siebie zależne w taki sposób, że znając jeden z nich, można wygenerować drugi.

Rysunek 3: Zasada działania kryptografii symetrycznej

W celu zapewnienia bezpiecznej komunikacji, algorytm szyfrowania musi być tak skonstruowany, żeby odtworzenie tekstu jawnego bez znajomości klucza było zadaniem trudnym obliczeniowo. Dodatkowym wymaganiem jest

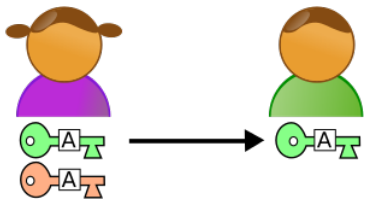
tajność klucza – przed rozpoczęciem wymiany wiadomości, należy opracować protokół uzgadniania lub przekazywania klucza.

Algorytmy szyfrowania symetrycznego możemy podzielić na algorytmy blokowe i strumieniowe. Pierwsze z nich przekształcają blok danych ustalonej długości, traktując go jako całość, na szyfrogram o tej samej liczbie bitów. Szyfry strumieniowe przyjmują natomiast ciąg (strumień) danych. Algorytmy kryptografii symetrycznej są szybkie, zwykle wymagają też mniejszej mocy obliczeniowej niż algorytmy asymetryczne. Powszechnie stosowanym szyfrem symetrycznych jest **AES**.

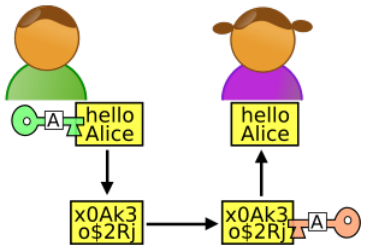
Kryptografia asymetryczna

Kryptografia asymetryczna to rodzaj kryptografii, w którym jeden z używanych kluczy jest udostępniony publicznie. Każdy użytkownik może użyć tego klucza do zaszyfrowania wiadomości, ale tylko posiadacz drugiego, tajnego klucza może odszyfrować taką wiadomość.

Kryptografia asymetryczna opiera się na funkcjach jednokierunkowych – takich, które da się łatwo wyliczyć w jedną stronę, ale bardzo trudno w drugą. Np. mnożenie jest łatwe, a rozkład na czynniki (z ang. faktoryzacja) trudny (na czym przykładowo opiera się **RSA**). Potęgowanie modulo jest łatwe, a logarytmowanie dyskretne jest trudne (na czym opierają się ElGamal, DSA i **ECC**).



Rysunek 4: Krok 1: Alice przesyła do Boba swój klucz publiczny

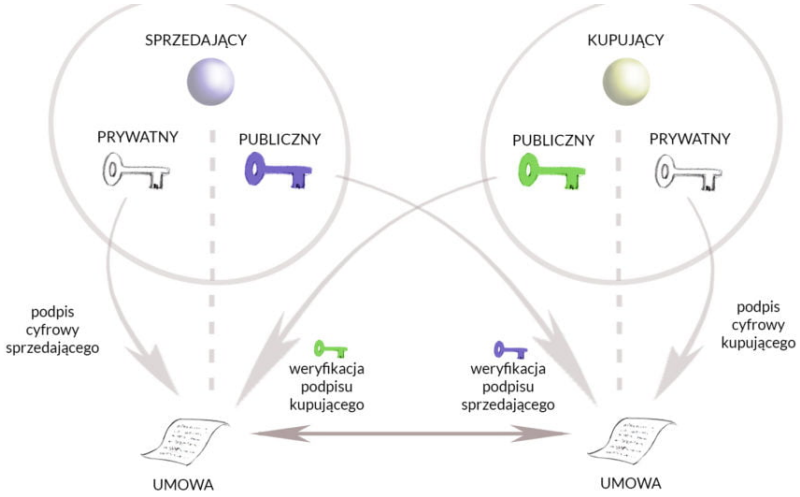


Rysunek 5: Kroki 2 i 3: Bob szyfruje wiadomość kluczem publicznym Alice, która to następnie otrzymuje zaszyfrowaną wiadomość i rozszyfrowuje ją kluczem prywatnym

Klucz publiczny używany jest do zaszyfrowania informacji, klucz prywatny do jej odczytu. Ponieważ klucz prywatny jest w wyłącznym posiadaniu adresata informacji, tylko on może ją odczytać. Natomiast klucz publiczny jest udostępniony każdemu, kto zechce zaszyfrować wiadomość.

Ponieważ kryptografia asymetryczna jest o wiele wolniejsza od symetrycznej, prawie nigdy nie szyfruje się wiadomości za pomocą kryptosystemów asymetrycznych (również ze względu na ograniczenie wielkości szyfrowanej wiadomości). Zamiast tego szyfruje się jedynie klucz jakiegoś szyfru symetrycznego, takiego jak np. AES. Takie protokoły, łączące elementy kryptografii symetrycznej i asymetrycznej, nazywa się hybrydowymi.

Nadawcy mogą także używać kluczy prywatnych do cyfrowego podpisywania wiadomości. Te podpisy cyfrowe pozwalają odbiorcom uwierzytelnić tożsamość nadawcy i spać spokojnie, wiedząc, że wiadomości nie zostały zmienione od momentu podpisania. W takim przypadku przesyłane informacje mogą być publiczne, a odbiorca może użyć certyfikatu, który towarzyszy tej informacji, aby zweryfikować integralność i autentyczność podpisanej wiadomości.



Rysunek 6: Jak działa podpis