Odpowiedzi na pytania z egzaminu licencjackiego

1 Wektory i macierze – definicje i podstawowe operacje.

Macierz to układ liczb, symboli lub wyrażeń zapisanych w postaci prostokątnej tablicy. W algebrze liniowej macierze wprowadza się często jako sposób skondensowanego zapisu układów równań liniowych, co ma na celu wyeliminowanie powtarzających się elementów standardowej notacji układów równań tego rodzaju z wieloma niewiadomymi. Macierze pozwalają również na reprezentowanie przekształceń liniowych w sposób umożliwiający przeprowadzanie obliczeń. Ponieważ wiele przekształceń geometrycznych (jak na przykład obroty przestrzeni $\mathbb{R}^n$ wokół początku układu współrzędnych) są przekształceniami liniowymi, macierze znajdują zastosowanie w geometrii analitycznej i grafice komputerowej.

Przykład zapisu macierzy 3×3 $\begin{bmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 2 & 9 & 0 \end{bmatrix}$

Macierze $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ i $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ uważa się za równe, jeśli mają ten sam typ i równe odpowiadające sobie elementy, tzn. dla każdej możliwej pary i, j zachodzi $a_{ij} = b_{ij}$.

Sumę macierzy $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ definiuje się „po współczynnikach”, tzn. za pomocą wzoru $\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij} + b_{ij}]$ dla wszystkich i, j. Z definicji wynika (ale można napisać wprost), że można dodawać macierzy tylko o takich samych wymiarach.

$$\begin{bmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 2 & 9 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 8 \\ 8 & 10 & 8 \\ 3 & 9 & 4 \end{bmatrix}$$

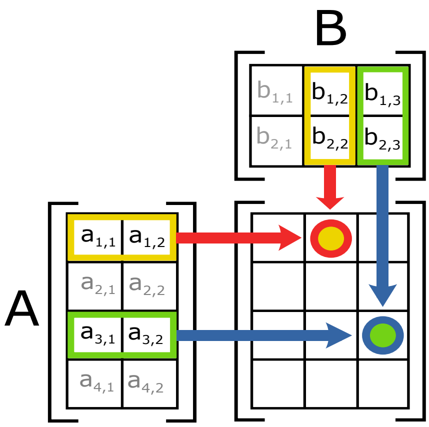
Mnożenie przez skalar macierzy $\mathbf{A}$ oraz liczby c również definiuje się „po współczynnikach", czyli $c\mathbf{A} = [ca_{ij}]$ dla dowolnych i, j.

$$2 * \begin{bmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 2 & 9 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 6 & 4 \\ 10 & 8 & 2 \\ 4 & 18 & 0 \end{bmatrix}$$

Działanie mnożenia macierzy jest zdefiniowane najczęściej jako tzw. iloczyn Cauchy'ego: dla dla macierzy $\mathbf{A}$ typu $m \times n$ oraz $\mathbf{B}$ typu $n \times p$ dany jest on jako taka macierz $\mathbf{C}$ typu $m \times p$, oznaczana $\mathbf{AB}$, dla której
$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$ dla dowolnych i, j.

Mnożenie to jest łączne ($A(BC) = (AB)C$), ale nie jest przemienne ($AB \neq BA$).

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 6 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2*1+3*0+7*5 \\ 6*1+1*0+2*5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37 \\ 16 \end{bmatrix}$$



Rysunek 1: Schemat mnożenia macierzy A i B

Elementem neutralnym mnożenia macierzy przez siebie jest macierz diagonalna, zawierająca na swojej przekątnej same jedynki.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 6 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Przestawienie bądź transpozycja danej macierzy $\mathbf{A}$, tzn. zamiana jej kolumn i wierszy miejscami (z zachowaniem kolejności). Macierz transponowaną lub przestawioną względem macierzy $\mathbf{A}$ definiuje się jako macierz

$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = [a_{ji}]$ dla wszystkich i, j, przy czym $(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ oraz $\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$.

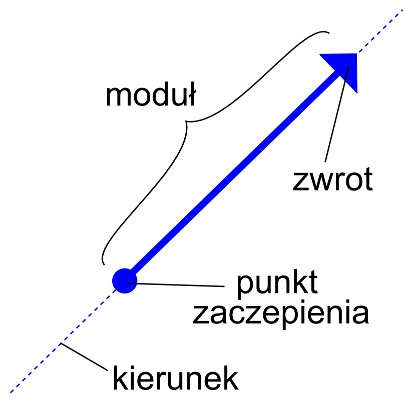
Wyznacznikiem $\det(\mathbf{A})$ lub $|\mathbf{A}|$ macierzy kwadratowej $\mathbf{A}$ nazywa się liczbę kodującą pewne właściwości przekształcenia A reprezentowanego przez tę macierz.

Wyznacznik macierzy stopnia drugiego dany jest wzorem

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

Wektor jest macierzą o wymiarach $n \times 1$. Reprezentuje on punkt w przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Jego podstawowe trzy cechy to:

- długość - czasami inaczej zwana modułem lub wartością
- kierunek - kierunek prostej zawierającej wektor
- zwrot - grot strzałki



Rysunek 2: Ilustracja wektora

Dodawanie oraz mnożenie przez skalar wektora jest zdefiniowane w ten sam sposób jak w przypadku macierzy.

Iloczyn skalarny dwóch wektorów to **liczba**, którą obliczamy dodając iloczyny odpowiednich współrzędnych.

$$\vec{a} = [2, 1, 3], \vec{b} = [4, 1, 2]$$
$$\vec{a} \circ \vec{b} = 2 * 4 + 1 * 1 + 3 * 2 = 15$$

Iloczyn skalarny możemy również obliczyć znając długości wektorów $|\vec{a}|$ i $|\vec{b}|$ oraz kąt α między nimi:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \|\vec{a}\| * \|\vec{b}\| * \cos\alpha$$

Długość wektora $\vec{a}$ może być zdefiniowana jako pierwiastek iloczynu skalarnego z samym sobą.

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}}$$

Iloczyn wektorowy - działanie dwuargumentowe przyporządkowujące parze wektorów przestrzeni $\mathbb{R}^3$ pewien wektor tej przestrzeni.

Iloczyn wektorowy $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ wektorów $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ określa się następująco:

- jeśli wektory $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ są liniowo zależne, to $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$
- jeśli wektory $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ nie są liniowo zależne, to $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c}$, gdzie $\mathbf{c}$ jest wektorem prostopadłym do płaszczyzny wyznaczonej przez $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$.

2 Funkcje skrótu (mieszające) i ich zastosowania.

Funkcja skrótu, funkcja mieszająca lub funkcja haszująca – funkcja przyporządkowująca dowolnie dużej liczbie krótką wartość o stałym rozmiarze, tzw. skrót nieodwracalny.

W informatyce funkcje skrótu pozwalają na ustalenie krótkich i łatwych do weryfikacji sygnatur dla dowolnie dużych zbiorów danych. Sygnatury mogą chronić przed przypadkowymi lub celowo wprowadzonymi modyfikacjami danych (sumy kontrolne), a także mają zastosowania przy optymalizacji dostępu do struktur danych w programach komputerowych (tablice mieszające).

Szczególną podgrupą funkcji skrótu są funkcje uznawane za bezpieczne do zastosowań kryptologicznych (jak np. SHA-3). Kryptograficzna funkcja skrótu powinna spełniać kombinację następujących kryteriów, w zależności od zastosowania:

- Odporność na kolizje (collision resistance) – brak praktycznej możliwości wygenerowania dwóch dowolnych wiadomości o takim samym skrócie
- Odporność na kolizje konkretnych wiadomości (target collision-resistance, preimage resistance) pierwszego i drugiego rzędu – brak praktycznej możliwości wygenerowania wiadomości o takim samym skrócie jak wskazana wiadomość
- Jednokierunkowość (one-wayness) – brak możliwości wnioskowania o wiadomości wejściowej na podstawie wartości skrótu. Zmiana dowolnego pojedynczego bitu wiadomości powinna zmieniać średnio połowę bitów skrótu w sposób, który nie jest istotnie podatny na kryptoanalizę różnicową.

Przykładowe funkcje skrótu to SHA-1 (SHA128), SHA-2 (SHA256), SHA-3(SHA512), MD5.

6 Sposoby cyfrowej reprezentacji liczby całkowitej i rzeczywistej.

Liczby całkowite

Kod ZM (kod znak-moduł) Sprawa w kodzie ZM jest w miarę prosta i klarowna. Najstarszy bit b_{n-1} dla n-bitowej liczby jest bitem znaku i określa czy liczba jest dodatnia czy ujemna:

- 0 - liczba dodatnia,
- 1 - liczba ujemna.

Bity od b_{n-1} do b_0 odpowiadają za kodowanie wartości samej liczby. Wzór na obliczenie wartości liczby zakodowanej w **ZM**:

$$L_{ZM} = (-1)^{b_{n-1}} \cdot (b_{n-2}2^{n-2} + ... + b_2 2^2 + b_1 2^1 + b_0 2^0)$$

Przykładowe kodowanie liczby na ośmiu bitach w kodzie **ZM**:

$$26 \longrightarrow \mathbf{0}0011010$$
$$-26 \longrightarrow \mathbf{1}0011010$$

Proste, logiczne, fajne. Pytania, problemy? To jedziemy dalej.

Kod U2 (kod uzupełnień do 2) Tutaj sprawa się nieco komplikuje z zapisem liczb ujemnych. Bit b_{n-1} ma wagę -2^{n-1} co sprawia, że musimy bitowo tak jakby zapisać odwrotność liczby, którą chcemy reprezentować jako ujemna (i dodać 1, żeby się wszystko zgadzało). W zapisie liczb dodatnich zapis jest identyczny jak w **ZM** - na najstarszym bicie musimy tylko zachować 0.

Istnieje prosty algorytm konwersji na U2 z wykorzystaniem ZM:

1. Zapisać moduł liczby w ZM,
2. Dokonać inwersji bitów (0 na 1 i 1 na 0),
3. Zwiększ wynik dodając 1.

Przykład z liczbą -27 na 8 bitach:

$$\begin{tikzcd} & \text{Odwracamy bity} \arrow[d] & \\ 00011011 \arrow[r] & 11100100 \arrow[r] & \mathbf{11100101} \\ \text{Zapisujemy liczbę 27 w ZM} \arrow[u] & & \text{Dodajemy 1} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Liczby rzeczywiste

Zapis stałopozycyjny Do zapisu liczby stałoprzecinkowej przeznaczona jest z góry określona liczba bitów, a pozycję przecinka ustala się arbitralnie, w zależności od wymaganej dokładności, wolne bity uzupełniając zerami. Do reprezentacji liczb ze znakiem stosuje także kod U2.

Liczba $6,25 = 110,01_{(2)}$ zapisana na 8 bitach gdy częśd ułamkowa zajmuje 3 najmłodsze bity, ma postać:

$$\underbrace{00110}_{\text{część całkowita}}\overbrace{010}^{\text{część ułamkowa}}$$

A w reprezentacji U2 będzie miała postać:

$$11001110$$

Część całkowita liczby zachowuje się identycznie jak w przypadku zwykłych liczb całkowitych, natomiast bity w części ułamkowej posiadają wagi 2^{-1}, 2^{-2}, itd. - czyli $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, ..., więc ilość bitów w części ułamkowej wpływa na precyzję zapisu.

Zapis zmiennopozycyjny Liczba zmiennoprzecinkowa jest komputerową reprezentacją liczb rzeczywistych zapisanych w postaci wykładniczej o podstawie 2. Przykładowa notacja:

$$(-1)^Z \cdot M \cdot 2^C = (-1)^Z \cdot (1+m) \cdot 2^{c-BIAS}$$

gdzie:

$(-1)^Z$ - znak liczby

$M = 1 + m$ - znormalizowana mantysa (liczba spełniająca warunek: $1 \leqslant M \leqslant 2$). Ponieważ przed przecinkiem stoi zawsze 1, więc można ją przedstawić w postaci $1+m$, gdzie m jest liczbę ułamkową: $0 \leqslant m \leqslant 1$)

$C = c - BIAS$ - cecha (liczba całkowita), która dzięki zastosowaniu stałej BIAS pozwoli przedstawid cechę w postaci różnicy c-BIAS (c jest liczbą całkowitą dodatnią, tzw spolaryzowana cechę)

$BIAS$ - stała (liczba całkowita BIAS zależna od danej implementacji – rozwiązuje problem znaku cechy)

Kodujemy wyłącznie:

z - bit znaku

m - mantysę pomniejszoną o 1

c - cechę przesuniętą o BIAS

Załóżmy, że operujemy następującym zmiennopozycyjnym formatem zapisu liczby rzeczywistej:

- na zapis przeznaczamy 16 bitów
- najstarszy bit (b_{15}) to bit znaku (będziemy stosowad kod ZM)
- kolejne 6 bitów (b_9-b_{14}) to mantysa
- pozostałe bity (b_0-b_8) są przeznaczone na zapis cechy i przyjmijmy, że BIAS=9

Przedstawimy liczbę +0,0224609375 w powyższym formacie. Naszą liczbę zapisujemy w systemie binarnym w postaci wykładniczej o podstawie 2, przesuwamy przecinek zapisując ją w notacji wykładniczej:

$$0,0224609375 = 0,0000010111_{(2)} = 1,0111_{(2)} \cdot 2^{-6}$$

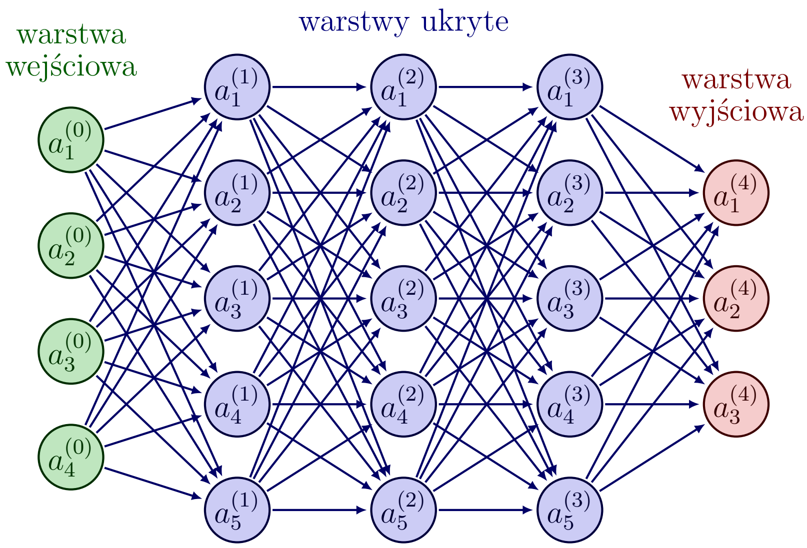
Z tego wynika, że:

- Znak: $(-1)^0$
- Mantysa: $1.\underline{\mathbf{0111}}_2$
- Cecha: $-6 = 3 - 9 = 11_2 - BIAS$

Oto liczba 0,0224609375 zapisana w zadanym formacie:

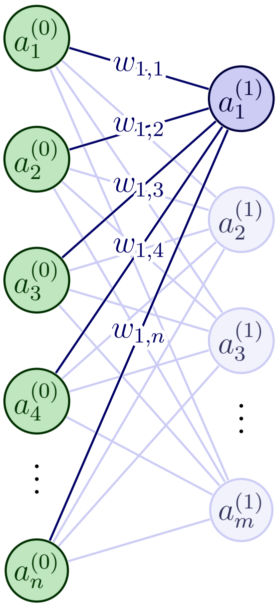
$$\underbrace{0}_{\text{bit znaku}}\overbrace{011100}^{\text{mantysa}}\,\underbrace{000000011}_{\text{cecha}}$$

33 Budowa sieci neuronowych.



Sieci neuronowe, znane również jako sztuczne sieci neuronowe lub symulowane sieci neuronowe są częścią funkcji uczenia maszynowego i stanowią podstawę algorytmów uczenia głębokiego. Ich nazwa i struktura są wzorowane na ludzkim mózgu i naśladują sposób, w jaki biologiczne neurony komunikują się między sobą.

Sztuczne sieci neuronowe składają się z warstw węzłów, obejmujących warstwę wejściową, jedną lub więcej warstw ukrytych oraz warstwę wyjściową. Każdy węzeł (sztuczny neuron) łączy się z innym i ma powiązaną wagę oraz próg. Jeśli wyjście dowolnego pojedynczego węzła przekracza określoną wartość progową, węzeł ten jest aktywowany podczas wysyłania danych do



$$= \sigma\left(w_{1,0}a_0^{(0)} + w_{1,1}a_1^{(0)} + \ldots + w_{1,n}a_n^{(0)} + b_1^{(0)}\right)$$

$$= \sigma\left(\sum_{i=1}^{n} w_{1,i}a_i^{(0)} + b_1^{(0)}\right)$$

$$\begin{pmatrix} a_1^{(1)} \\ a_2^{(1)} \\ \vdots \\ a_m^{(1)} \end{pmatrix} = \sigma\left[\begin{pmatrix} w_{1,0} & w_{1,1} & \ldots & w_{1,n} \\ w_{2,0} & w_{2,1} & \ldots & w_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{m,0} & w_{m,1} & \ldots & w_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^{(0)} \\ a_2^{(0)} \\ \vdots \\ a_n^{(0)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1^{(0)} \\ b_2^{(0)} \\ \vdots \\ b_m^{(0)} \end{pmatrix}\right]$$

$$a^{(1)} = \sigma\left(\mathbf{W}^{(0)}a^{(0)} + \mathbf{b}^{(0)}\right)$$

kolejnej warstwy sieci. W przeciwnym razie żadne dane nie są przekazywane do następnej warstwy sieci.

O każdym pojedynczym węźle należy myśleć jak o modelu regresji liniowej złożonym z danych wejściowych, wag, odchyleń (lub wartości progowych) i danych wyjściowych. Rysunek powyżej przedstawia właśnie te obliczenia dla jednego neurona. Macierz $\mathbf{W}^{(0)}$ jest macierzą wszystkich wag wchodzących do każdego neurona warstwy $a^{(0)}$ z warstwy poprzedniej, wektor $b^{(}0)$ to wartości wszystkich *bias-ów* danej warstwy, a σ to funkcja aktywacji danej warstwy.

Wagi pomagają określić znaczenie każdej zmiennej, przy czym większe z nich mają większy wpływ na wynik wyjściowy w porównaniu do innych danych wejściowych. Wszystkie dane wejściowe są następnie mnożone przez swoje odpowiednie wagi, a potem sumowane. Następnie wyniki są przepuszczane przez funkcję aktywacji, która określa wartość wyjściową.

53 Deklaratywne programowanie w logice: klauzule Horne'a, nawracanie

Logika Hoare'a – formalizm matematyczny służący do opisu poprawności algorytmów. Trójka $\{P\}C\{Q\}$ oznacza, że fragment kodu C, o ile na wejściu będzie miał stan spełniający warunek P, oraz zakończy swoje działanie, to na wyjściu da stan spełniający warunek Q. Formułę P nazywamy warunkiem wstępnym, a formułę Q nazywamy warunkiem końcowym.

Przykład: do instrukcji przypisania $x := 5$ możemy dopisać następujące warunki wstępne i końcowe:

$$\{\text{true}\}x := 5\{x = 5\}$$

co oznacza, że przy dowolnym stanie przed wykonaniem instrukcji, po wykonaniu instrukcji będziemy mieli stan, w którym zmiennej x jest przypisana wartość 5.

Prawdą jest też bardziej skomplikowana formuła:

$$\{x = y + z\}\{\text{if } x < y \text{ then } z := -z\}\{x \leqslant y + z\}$$