Matemática Discreta

Lógica de Primeira Ordem - 5

Universidade de Aveiro 2018/2019

http://moodle.ua.pt

Substituição de variáveis

Notação

- $VAR = \{v : \ v$ variável individual $\}$;
- $CONST = \{c : \ c$ constante $\}$;
- $TERM = \{t : \ t$ termo $\}$.

Observação: $CONST \cup VAR \subset TERM$.

Substituição de variáveis

Definição (de substituição de variáveis)

Uma substituição é uma função $\varphi_V : VAR \to TERM$ tal que, sendo $U_\varphi = \{v \in VAR : \varphi_V(v) \neq v\}$ e supondo que $U_\varphi = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, podemos descrever a função φ_V através do conjunto

$$\{t_1/v_1, t_2/v_2, \ldots, t_n/v_n\},$$

onde $t_i = \varphi_V(v_i) \neq v_i$, para $i = 1, 2, \ldots, n$.
ε denota a substituição identidade ou vazia.

Este modo de descrever φ_V leva-nos com algum abuso de linguagem a escrever $\varphi_V = \{t_1/v_1, \ldots, t_n/v_n\}$ para indicar que

- se $v_i \in U_\varphi$, então $\varphi_V(v_i) = t_i$;
- se $v_i \notin U_\varphi$, então $\varphi_V(v_i) = v_i$.

Exemplos

Seguem-se dois exemplos de substituições.

1) $\varphi_V = \{f(z)/x, x/z\}$

- $U_\varphi = \{x, z\}$;
- $\varphi_V(x) = f(z)$;
- $\varphi_V(z) = x$.

2) $\delta_V = \{a/x, g(y)/y, f(g(x))/z\}$

- $U_\delta = \{x, y, z\}$;
- $\delta_V(x) = a$;
- $\delta_V(y) = g(y)$;
- $\delta_V(z) = f(g(x))$.

Substituição de termos

Definição (de substituição de termos)

Seja $\Theta_V = \{\Theta_V(v_1)/v_1, \ldots, \Theta_V(v_n)/v_n\}$ uma substituição. Θ_V induz uma função $\Theta_T : TERM \to TERM$, definida recursivamente por:

1. se $t_i \in VAR$, então $\Theta_T(t_i) = \Theta_V(t_i)$;
2. se $t_i \in CONST$, então $\Theta_T(t_i) = t_i$;
3. se $t_i \notin VAR \cup CONST$, ou seja, se t_i é um termo da forma $f(t_{i_1}, \ldots, t_{i_k})$ onde f é um símbolo de função com k argumentos, então

$$\Theta_T(f(t_{i_1}, \ldots, t_{i_k})) = f(\Theta_T(t_{i_1}), \ldots, \Theta_T(t_{i_k})).$$

Exemplo

Considerando o termo

$$t = s(x, f(y, u), h(x, z))$$

e a substituição

$$\Theta_V = \{f(x, z)/x, g(y, f(x, y))/y, h(x, y)/z, v/u\},$$

onde s, f, g e h são símbolos de função e x, y, z e u são símbolos de variáveis, obtém-se:

$$\begin{aligned}
\Theta_T(t) &= s(\Theta_T(x), \Theta_T(f(y, u)), \Theta_T(h(x, z))) \\
&= s(\Theta_T(x), f(\Theta_T(y), \Theta_T(u)), h(\Theta_T(x), \Theta_T(z))) \\
&= s(\Theta_V(x), f(\Theta_V(y), \Theta_V(u)), h(\Theta_V(x), \Theta_V(z))) \\
&= s(f(x, z), f(g(y, f(x, y)), v), h(f(x, z), h(x, y))).
\end{aligned}$$

Concretização de uma expressão

Definição (de concretização de uma expressão)

Dada uma substituição $\Theta = \{\Theta_V(v_1)/v_1, \ldots, \Theta_V(v_n)/v_n\}$ e uma expressão E, designa-se por concretização (ou exemplo) de E e denota-se por $E\Theta$, a expressão que se obtém de E substituindo, simultaneamente, cada ocorrência da variável v_i por $t_i = \Theta_V(v_i)$.

Observação: se W é um conjunto de expressões, então $W\Theta = \{E\Theta : E \in W\}$.
Exemplo: Para $\Theta = \{a/x, f(b)/y, c/z\}$ e $E = F(x, y, g(z))$, obtém-se

$$\begin{aligned}
E\Theta &= F(\Theta_T(x), \Theta_T(y), \Theta_T(g(z))) \\
&= F(\Theta_V(x), \Theta_V(y), g(\Theta_V(z))) \\
&= F(a, f(b), g(c)).
\end{aligned}$$

Composição de substituições

Definição (de composição de substituições)

Sejam θ_V e λ_V substituições de variáveis. Então a composição de θ_V após λ_V define-se como sendo

$$\theta_V \Delta \lambda_V = \theta_T \circ \lambda_V,$$

onde o símbolo $\circ$ denota a composição usual de funções.

De acordo com esta definição, dadas as substituições θ_V e λ_V, a sua composição $\theta_V \Delta \lambda_V$ descreve-se esquematicamente pelo diagrama

$$\begin{tikzcd}
VAR \arrow[r, "\lambda_V"] \arrow[dr, "\theta_V \Delta \lambda_V = \theta_T \circ \lambda_V"'] & TER \arrow[d, "\theta_T"] & VAR \arrow[l, "\theta_V"'] \\
 & TER &
\end{tikzcd}$$

Exemplo

Considerando as substituições $\theta = \{f(y)/x, z/y\}$ e $\lambda = \{a/x, g(x)/y, y/z\}$, vamos determinar $\theta_V \Delta \lambda_V$.

$$\begin{aligned}
\theta_V \Delta \lambda_V &= \theta_T \circ \lambda_V \\
&= \{\theta_T(\lambda_V(x))/x, \theta_T(\lambda_V(y))/y, \theta_T(\lambda_V(z))/z\} \\
&= \{\theta_T(a)/x, \theta_T(g(x))/y, \theta_T(y)/z\} \\
&= \{a/x, g(\theta_V(x))/y, \theta_V(y)/z\} \\
&= \{a/x, g(f(y))/y, z/z\} \\
&= \{a/x, g(f(y))/y\}
\end{aligned}$$

Unificação

Definição (de substituição unificadora)

Uma substituição Θ diz-se unificadora (ou unificador) para o conjunto de expressões $W = \{E_1, \ldots, E_p\}$ se $W\Theta = \{E\Theta\}$, ou seja, é tal que $E\Theta = E_1\Theta = \ldots = E_p\Theta$.

Definição (de conjunto unificável)

O conjunto de expressões diz-se unificável se existe uma substituição unificadora (um unificador) para ele.

Exemplo: O conjunto $W = \{P(a, y), P(x, f(b))\}$ é unificável, uma vez que admite o unificador $\Theta = \{a/x, f(b)/y\}$. Com efeito,

$$\begin{aligned}\{E\Theta\} &= \{P(\Theta_T(a), \Theta_T(y)), P(\Theta_T(x), \Theta_T(f(b)))\} \\ &= \{P(a, f(b))\}.\end{aligned}$$

Unificador mais geral

Definição (de unificador mais geral)

Um unificador σ para um conjunto de expressões $W = \{E_1, \ldots, E_p\}$ diz-se um unificador mais geral se qualquer que seja o unificador θ para o conjunto de expressões W existe uma substituição λ tal que $\theta = \lambda\Delta\sigma$.

Ideia base do algoritmo de unificação:

1. Dadas duas expressões verificar se são idênticas:
2. Caso não sejam idênticas, identificar as diferenças para se tentar a unificação.

Conjunto das diferenças

Definição (de conjunto das diferenças)

Designa-se por conjunto das diferenças, D, de um conjunto de expressões, $W \neq \emptyset$, o conjunto que se obtém da seguinte forma:

1. determina-se o primeiro símbolo (a contar da esquerda), no qual nem todas as expressões em W têm exactamente esse símbolo;
2. retira-se de cada expressão em W a subexpressão que começa com o símbolo determinado no item 1 e que ocupa essa posição.

Exemplo: Sendo $W = \{P(x, f(y)), P(x, a), P(x, g(u, y))\}$, obtém-se $D = \{f(y), a, g(u, y)\}$.

Algoritmo de unificação

- **Input**: W (conjunto de expressões);
  - *a*) $k := 0$; $W_k := W$; $\sigma_k := \varepsilon$;
  - *b*) **Se** W_k é singular, **então** STOP **senão** determinar o conjunto de diferenças D_k;
  - *c*) **Se** existem v_k e t_k em D_k tais que v_k é uma variável que não ocorre em t_k, **então** saltar para *d*) **senão** STOP (W não é unificável);
  - *d*) $\sigma_{k+1} := \{t_k/v_k\}\Delta\sigma_k$; $W_{k+1} := W_k\{t_k/v_k\}$; $k := k + 1$ e voltar a *b*);
- **Output**: σ_k (unificador mais geral para W).

Exemplo de aplicação do algoritmo de unificação

Vamos determinar um unificador para o conjunto de expressões $W = \{P(a, x, f(g(y))), P(z, f(z), f(u))\}$.

1. Fazer $k := 0$; $W_0 := W$; $\sigma_0 = \varepsilon$;
2. Uma vez que W_0 não é um conjunto singular, pelo que σ_0 não é um unificador para W, determinamos $D_0 = \{a, z\}$;
3. $\sigma_1 = \{\sigma_1(v_0)/v_0\}\Delta\varepsilon = \{a/z\}$;

$$\begin{aligned} W_1 &= W_0\{t_o/v_0\} \\ &= \{P(a, x, f(g(y))), P(z, f(z), f(u))\}\{a/z\} \\ &= \{P(a, x, f(g(y))), P(a, f(a), f(u))\} \end{aligned}$$

4. Uma vez que W_1 não é um conjunto singular, determinamos $D_1 = \{x, f(a)\}$;
5. $\cdots$

- Referência bibliográfica:
  D. M. Cardoso, M. P. Carvalho, *Noções de Lógica Matemática*, Universidade de Aveiro, 2007 (versão revista em Março 2015, disponível na página da disciplina).