线性规划的对偶理论

一、对偶问题的提出
二、线性规划的对偶理论
三、对偶单纯形法

一、对偶问题的提出

- 什么是对偶？
  - 对同一事物（或问题），从不同的角度（或立场）提出相对的两种不同的表述。
- 例如：在平面内，矩形的面积与其周长之间的关系，有两种不同的表述方法。
  - 周长一定，面积最大的矩形是正方形。
  - 面积一定，周长最短的矩形是正方形。
- 这种表述有利于加深对事物的认识和理解。
- 线性规划问题也有对偶关系。

- **例** 某工厂在计划期内要安排生产Ⅰ、Ⅱ两种产品，已知生产单位产品所需的设备台时及A、B两种原材料的消耗，如下表所示。

产品 设备 资源	Ⅰ	Ⅱ	拥有量
设备	1	2	8台时
原材料 A	4	0	16 kg
原材料 B	0	4	12 kg

- **每生产一件产品Ⅰ可获利2元，每生产一件产品Ⅱ可获利3元，问应如何安排计划使该工厂获利最多?**

简单的线性规划模型为:

目标函数 $max\ z = 2x_1 + 3x_2$

$$
约束条件: \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 4x_1 \leq 16 \\ 4x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}
$$

- 从对偶的角度来看：
  - 假设该工厂的决策者决定不生产产品I、II，而将其所有资源出租或外售。这时工厂的决策者就要考虑给每种资源如何定价的问题。
  - 设用y_1，y_2，y_3分别表示出租单位设备台时的租金和出让单位原材料A，B的附加额。

- 他在做定价决策时，做如下比较：若用1个单位设备台时和4个单位原材料A可以生产一件产品I，可获利2元，那么生产每件产品I的设备台时和原材料出租或出让的所有收入应不低于生产一件产品I的利润，这就有 $y_1+4y_2 \geq 2$.
- 同理将生产每件产品II的设备台时和原材料出租或出让的所有收入应不低于生产一件产品II的利润，这就有

$$2y_1+4y_3 \geq 3$$

- 把工厂所有设备台时和资源都出租或出让，其收入为

$$w = 8y_1+16y_2+12y_3$$

- 从工厂的决策者来看当然w愈大愈好；但受到接受方的制约，从接受者来看他的支付愈少愈好，所以工厂的决策者只能在满足大于等于所有产品的利润条件下，提出一个尽可能低的出租或出让价格，才能实现其原意，为此需解如下的线性规划问题：

$$\begin{aligned} &\min w=8y_1+16y_2+12y_3 \\ &\quad y_1+4y_2 \qquad \geq 2 \\ &\quad 2y_1 \qquad +4y_3 \geq 3 \\ &\quad y_i \geq 0,\ i=1,2,3 \end{aligned} \qquad (1)$$

称这个线性规划问题为原线性规划问题(这里称为原问题)的对偶问题。这就是从另一角度提出的线性规划问题。

二、线性规划的对偶理论

1、原问题与对偶问题的关系

- 原线性规划问题：｛max $z=CX$ | $AX\le b$，$X\ge 0$｝
- 对偶规划问题：{ min $w=Yb$ | $YA\ge C$　$Y\ge 0$ }

目标函数　$max\ z = 2x_1 + 3x_2$

$$\text{约束条件}:\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

min $w=8y_1+16y_2+12y_3$

$y_1+4y_2 \ge 2$

$2y_1 + 4y_3 \ge 3$

$y_i \ge 0$，$i=1,2,3$

❖ 原问题（LP）：

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0$$

❖ 对偶问题(DP)

$$\min \omega = y_1 b_1 + y_2 b_2 + \cdots + y_{\mathrm{m}} b_m$$

$$(y_1, y_2, \cdots, y_m)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \geq (c_1, c_2, \cdots, c_n)$$

$$y_1, y_2, \cdots, y_n \geq 0$$

❖ 原问题与对偶问题的标准形式（对称形式）

x_j \ y_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	原关系	$\min \omega$
y_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	$\leq$	b_1
y_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	$\leq$	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	$\leq$	b_m
对偶关系	$\geq$	$\geq$	$\cdots$	$\geq$		
maxz	c_1	c_2	$\cdots$	c_n	maxz $=$	$\min \omega$

- 非对称形式的变换关系
  - 原问题的约束条件中含有等式约束条件时，按以下步骤处理。
  - 设等式约束条件的线性规划问题为

$$max\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1,2,\cdots m \\ x_j \geq 0, j = 1,2,\cdots,n \end{cases}$$

- 第一步：先将等式约束条件分解为两个不等式约束条件

$$\max z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i, \quad i=1,2,\cdots m\\ x_j\ge 0, j=1,2,\cdots,n\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le b_i \quad i=1,2,\cdots,m \text{（2）}\\ \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\ge b_i \quad i=1,2,\cdots,m\\ \qquad\qquad\Downarrow\\ -\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le -b_i \quad i=1,2,\cdots,m \text{（3）}\end{cases}$$

- 第二步：按对称形式变换关系可写出它的对偶问题
  - 设y_i'是对应(2)式的对偶变量，y_i''是对应(3)式的对偶变量，i=1,2,...， m

$$\min \omega = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i' + \sum_{i=1}^{m} \left(-b_i y_i''\right)$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i' + \sum_{i=1}^{m} \left(-a_{ij} y_i''\right) \geq c_j, j = 1,2,\cdots n \\ y_i', y_i'' \geq 0, \quad i = 1,2,\cdots m \end{cases}$$

将上述规划问题的各式整理后得到

$$\min \omega = \sum_{i=1}^{m} b_i\left(y_i^{'} - y_i^{''}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\left(y_i^{'} - y_i^{''}\right) \ge c_j, \quad j = 1,2,\cdots,n$$

$$y_i^{'}, y_i^{''} \ge 0$$

令$y_i = \left(y_i^{'} - y_i^{''}\right)$,

$$min\ \omega = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j, \quad j = 1,2,\cdots,n \\ y_i \text{ 为无约束}, i = 1.2.\cdots,m \end{cases}$$

综合上述，线性规划的原问题与对偶问题的关系可表示为：

原问题(或对偶问题)	对偶问题（或原问题）
目标函数max z	目标函数min ω
变量：n个 ≥ 0 ≤ 0 无约束	约束条件：n个 $\geq$ $\leq$ $=$
约束条件：m个 $\leq$ $\geq$ $=$	变量：m个 ≥ 0 ≤ 0 无约束
约束条件右端项	目标函数变量的系数
目标函数变量的系数	约束条件右端项

例 试求下述线性规划原问题的对偶问题

$$\min z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \geq 5 \\ 2x_1 + 2x_3 - x_4 \leq 4 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 \leq 0,\ x_2, x_3 \geq 0, \quad x_4\text{无约束} \end{cases}$$

由原问题和对偶问题的对应关系，可以直接写出上述问题的对偶问题，

$$\max z' = 5y_1 + 4y_2 + 6y_3$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \geq 2 \\ y_1 + y_3 \leq 3 \\ -3y_1 + 2y_2 + y_3 \leq -5 \\ y_1 - y_2 + y_3 = 1 \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \leq 0,\ y_3\text{无约束} \end{cases}$$

2. 对偶问题的基本性质

- 原线性规划问题：｛max $z=CX$ | $AX\leq b$，$X\geq 0$｝
- 对偶规划问题： { min $w=Yb$ | $YA\geq C$　$Y\geq 0$ }

1. 对称性：对偶问题的对偶是原问题

证明：设原问题是

$$\max z=CX;\ AX\leq b;\quad X\geq 0$$

根据对偶问题的对称变换关系，可以找到它的对偶问题是

$$\min w=Yb;\ YA\geq \mathrm{C};\quad Y\geq 0$$

若将上式两边取负号，又因-min w=max(-ω)可得到

$$\max(-w)=-Yb;\ -YA\leq -C;\quad Y\geq 0$$

根据对称变换关系，得到上式的对偶问题是

$$\min(-w')=-CX;\quad -AX\geq -b;\ X\geq 0$$

又因 $\min(-w')=-\max w'$，可得

$$\max w'=\max z=CX;\quad AX\leq b;\ X\geq 0$$

这就是原问题。

2. 弱对偶性：

若$\overline{X}$是max问题的可行解，$\overline{Y}$是min问题的可行解

则存在$C\overline{X} \le \overline{Y}b$

证明：设原问题是$max\ z = CX;\ AX \le b;\ X \ge 0$

因$\overline{X}$是原问题的可行解，所以满足约束条件,即

$$A\overline{X} \le b$$

若$\overline{Y}$是对偶问题的可行解，将$\overline{Y}$左乘上式，得到

$$\overline{Y}A\overline{X} \le \overline{Y}b$$

原问题的对偶问题是$:\min\ \omega = Yb; YA \ge C; Y \ge 0$

因$\overline{Y}$是对偶问题的可行解，所以满足$\overline{Y}A \ge C$

将$\overline{X}$右乘上式,得到$\overline{Y}A\overline{X} \ge C\overline{\boldsymbol{X}}$

于是得到$C\overline{X} \le \overline{Y}A\overline{X} \le \overline{Y}b$

- 3. 无界性：若max问题为无界解，则min问题无可行解

$LP:$

$$\max z = x_1 + x_2$$

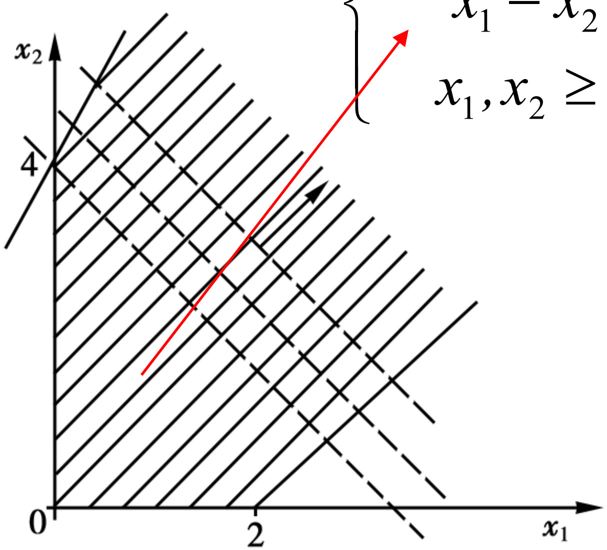
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 - x_2 \le 2 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow$$

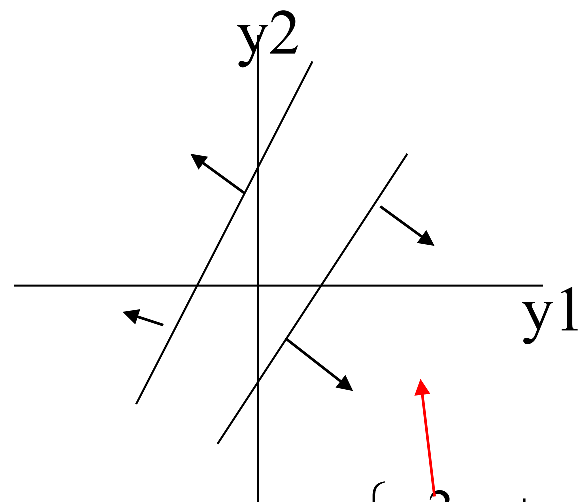
$DP:$

$$\min \omega = 4y_1 + 2y_2$$

$$\begin{cases} -2y_1 + y_2 \ge 1 \\ y_1 - y_2 \ge 1 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 - x_2 \le 2 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$





$$\begin{cases} -2y_1 + y_2 \ge 1 \\ y_1 - y_2 \ge 1 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$$

- 注意：这个性质不存在逆。即min问题无可行解时，max问题可能无界解或无可行解

$$
\begin{array}{lcl}
DP: & & LP: \\
\max z = x_1 + x_2 & & \min \omega = -y_1 - y_2 \\
\begin{cases} x_1 - x_2 \le -1 \\ -x_1 + x_2 \le -1 \\ \quad x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} & \Leftarrow & \begin{cases} y_1 - y_2 \ge 1 \\ -y_1 + y_2 \ge 1 \\ \quad y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}
\end{array}
$$

皆无可行解

- 4. 可行解是最优解时的性质

设$\hat{X}$是max问题的可行解，$\hat{Y}$是min问题的可行解，

当$C\hat{X}=\hat{Y}b$时，$\hat{X},\hat{Y}$是最优解。

证：若$C\hat{X}=\hat{Y}b$，根据性质2可知，min问题的

所有可行解$\overline{Y}$都存在$\overline{Y}b \geq C\hat{X}$;因$C\hat{X}=\hat{Y}b$,

所以$\overline{Y}b \geq \hat{Y}b$.可见是使目标函数取值最小的可行解，

因而是最优解.

同理可证明，对原问题的所有可行解$\overline{X}$,

存在$C\hat{X}=\hat{Y}b \geq C\overline{X}$,所以是最优解.

- 5. 对偶定理：　若原问题有最优解，那么对偶问题也有最优解；且目标函数值相等。

证：设$\hat{X}$是原问题的最优解，它对应的基矩阵B，

必存在$C - C_B B^{-1} A \le 0$,即得到$\hat{Y} A \ge C$,其中$\hat{Y} = C_B B^{-1}$.

即$\hat{Y}$是对偶问题的可行解，使得$\omega = \hat{Y} b = C_B B^{-1} b$，

因原问题的$\hat{X}$是最优解，使目标函数取值$z = C\hat{X} = C_B B^{-1} b$，

由此，得到$\hat{Y} b = C_B B^{-1} b = C\hat{X}$,

可见$\hat{Y}$是对偶问题的最优解。

- 例.　已知线性规划问题

$$\max z=x_1+x_2$$

$$-x_1+x_2+x_3\leq 2$$

$$-2x_1+x_2-x_3\leq 1$$

$$x_1,x_2,x_3\geq 0$$

试用对偶理论证明上述线性规划问题无最优解。

证：首先容易验证该问题存在可行解，例如（0,0,0）

- 上述问题的对偶问题为

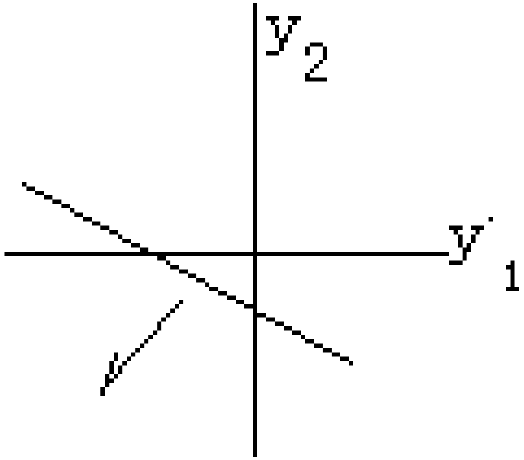
$$\min w = 2y_1 + y_2$$

$$-y_1 - 2y_2 \geq 1$$

$$y_1 + y_2 \geq 1$$

$$y_1 - y_2 \geq 0$$

$$y_1, \ y_2 \geq 0$$



由约束条件可知对偶问题无可行解；原问题虽然有可行解，但无最优解。

- 6. 互补松弛性

若$\hat{X},\hat{Y}$分别为原问题和对偶问题的可行解，

那么$\hat{Y}X_S = 0$和$Y_S\hat{X} = 0$;当且仅当，$\hat{X},\hat{Y}$为最优解。

证：设原问题和对偶问题的标准关系是

原问题	对偶问题
$\max z = CX$	$\min \omega = Yb$
$AX + X_S = b$	$YA - Y_S = C$
$X, X_S \geq 0$	$Y, Y_S \geq 0$

将原问题目标函数中的系数向量C用C=YA-Y_S代替后，得到 $z=(YA - Y_S)X=YAX - Y_SX$ (4)

将对偶问题的目标函数中系数列向量b，用$b=AX+X_S$代替后，得到 $w=Y(AX+X_S)=YAX+YX_S$ (5)

- 若$Y_S\hat{X}=0,\hat{Y}X_S=0$;则$\hat{Y}b=\hat{Y}A\hat{X}=C\hat{X}$,

  由性质4，可知$\hat{X},\hat{Y}$是最优解。

- 又若$\hat{X},\hat{Y}$分别是原问题和对偶问题的最优解，

  根据性质5，则有$C\hat{X}=\hat{Y}A\hat{X}=\hat{Y}b$

  由（4），（5）式可知，必有

  $$\hat{Y}X_S=0,Y_S\hat{X}=0$$

- 例.　已知线性规划问题

$$\min w=2x_1+3x_2+5x_3+2x_4+3x_5$$

$$x_1+x_2+2x_3+x_4+3x_5\geq 4$$

$$2x_1-x_2+3x_3+x_4+x_5\geq 3$$

$$x_j\geq 0，j=1，2，\ldots，5$$

已知其对偶问题的最优解为$y_1^*=4/5$，$y_2^*=3/5$；$z=5$。试用对偶理论找出原问题的最优解 。

$$y_1 * x_6 = y_2 * x_7 = 0$$

- 解：先写出它的对偶问题

$\max z=4y_1+3y_2$

$y_1+2y_2\le 2$ ①

$y_1-\ y_2\le 3$ ②

$2y_1+3y_2\le 5$ ③

$y_1+\ y_2\le 2$ ④

$3y_1+\ y_2\le 3$ ⑤

$y_1，y_2\ge 0$

$$y_3 * x_1 = y_4 * x_2 = y_5 * x_3 = y_6 * x_4 = y_7 * x_5 = 0$$

将$y_1^* = 4/5, y_2^* = 3/5$的值代入约束条件，

得②$=1/5<3$，③$=17/5<5$，④$=7/5<2$------它们为严格不等式；

由互补松弛性得

$$x_2^* = x_3^* = x_4^* = 0。$$

因y^*_1，$y^*_2>0$；原问题的两个约束条件应取等式，

故有 $x_1^* + 3x_5^* = 4$，

$2x_1^* + x_5^* = 3$

求解后得到$x_1^*=1, x_5^*=1$；故原问题的最优解为

$$X^* = (1，0，0，0，1)^T；w^* = 5$$

- 7. 原问题检验数与对偶问题解的关系

设原问题是 max $z=CX$; $AX+X_S=b$; $X,X_S\geq 0$

它的对偶问题是 min $w=Yb$; $YA-Y_S=C$; $Y,Y_S\geq 0$

则原问题单纯形表的检验数行对应其对偶问题的一个基解，其对应关系见下表

原问题	X_B	X_N	X_S
检验数	0	$C_N-C_BB^{-1}N$	$-C_BB^{-1}$
对偶问题	Y_{S1}	$-Y_{S2}$	$-Y$

Y_{S1}是对应原问题中基变量X_B的剩余变量，

Y_{S2}是对应原问题中非基变量X_N的剩余变量。

证：设B是原问题的一个可行基，于是$A=(B,N)$；原问题可改写为

$$\max z=C_BX_B+C_NX_N$$

$$BX_B+NX_N+X_S=b$$

$$X_B,\ X_N,\ X_S\geq 0$$

相应地对偶问题可表示为

$$\min w=Yb$$

$$YB-Y_{S1}=C_B \qquad (6)$$

$$YN-Y_{S2}=C_N \qquad (7)$$

$$Y,\ Y_{S1},Y_{S2}\geq 0$$

这里$Y_S=(Y_{S1},\ Y_{S2})$。

当求得原问题的一个解：

$$X_B=B^{-1}b$$

其相应的检验数为

$$C_N - C_B B^{-1} N \text{ 与 } -C_B B^{-1}$$

现分析这些检验数与对偶问题的解之间的关系：令$Y=C_B B^{-1}$，

将它代入(6)式，(7)式得

$$Y_{S1}=0,\ -Y_{S2}=C_N - C_B B^{-1} N$$

六、对偶单纯形法

- 原问题与对偶问题的解之间的对应关系：在单纯形表中进行迭代时，在b列中得到的是原问题的基可行解，而在检验数行得到的是对偶问题的基解。
- 通过逐步迭代，当在检验数行得到对偶问题的解也是基可行解时，根据性质4、5可知，已得到最优解，即原问题与对偶问题都是最优解。

- 根据对偶问题的对称性，可以这样考虑：若保持对偶问题的解是基可行解，即$c_j - C_B B^{-1} P_j \leq 0$，而原问题在非可行解的基础上，通过逐步迭代达到基可行解，这样也得到了最优解。其优点是原问题的初始解不一定是基可行解，可从非基可行解开始迭代。
- 设原问题为

$$
\begin{aligned}
\max\ z &= CX \\
AX &= b \\
X &\geq 0
\end{aligned}
$$

又设B是一个基。不失一般性，令$B=(P_1, P_2, \ldots, P_m)$，它对应的变量为 $X_B=(x_1, x_2, \ldots, x_m)$。

当非基变量都为零时，可以得到$X_B=B^{-1}b$。若在$B^{-1}b$中至少有一个负分量，设$(B^{-1}b)_i<0$，并且在单纯形表的检验数行中的检验数都为非正，即对偶问题保持可行解，它的各分量是

(1) 对应基变量$x_1, x_2, \ldots, x_m$的检验数是

$$\sigma_i=c_i-z_i=c_i-C_BB^{-1}P_j=0, \quad i=1,2,\ldots,m$$

(2) 对应非基变量$x_{m+1}, \ldots, x_n$的检验数是

$$\sigma_j=c_j-z_j=c_j-C_BB^{-1}P_j\le 0, \quad j=m+1,\ldots,n$$

- 每次迭代是将基变量中的负分量x_l取出，去替换非基变量中的x_k，经基变换，所有检验数仍保持非正。从原问题来看，经过每次迭代，原问题由非可行解往可行解靠近。当原问题得到可行解时，便得到了最优解。

对偶单纯形法的计算步骤

(1) 对线性规划问题进行变换，使列出的初始单纯形表中所有检验数都小于等于0（非正），即得到对偶问题的基可行解。

(2) 检查b列的数字，若都为非负，检验数都为非正，则已得到最优解。停止计算。若检查b列的数字时，至少还有一个负分量，检验数保持非正，那么进行以下计算。

(3) 确定换出变量。按min $\{(B^{-1}b)_i \mid (B^{-1}b)_i < 0 = (B^{-1}b)_l$对应的基变量$x_l$为换出变量。

（4）确定换入变量。在单纯形表中检查x_l所在行的各系数$\alpha_{lj}(j=1,2,\ldots, n)$。若所有$\alpha_{lj}\geq 0$，则无可行解，停止 计算。若存在$\alpha_{lj}<0$ $(j=1,2,\ldots, n)$, 计算

$$\theta = \min_j \left(\frac{c_j - z_j}{a_{lj}} \middle| a_{lj} < 0 \right) = \frac{c_k - z_k}{a_{lk}}$$

按θ规则所对应的列的非基变量x_k为换入变量，这样才能保持得到的对偶问题解仍为可行解。

（5）以α_{lk}为主元素，按原单纯形法在表中进行迭代运算，得到新的计算表。

重复步骤(2)～(5)。

- 例　用对偶单纯形法求解

$$\min w=2x_1+3x_2+4x_3$$

$$x_1+2x_2+x_3\geq 3$$

$$2x_1-x_2+3x_3\geq 4$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3\geq 0$$

解：先将此问题化成下列形式，以便得到对偶问题的初始可行基

$$\max\ z=-2x_1-3x_2-4x_3$$

$$-x_1-2x_2-x_3+x_4\qquad=-3$$

$$-2x_1+x_2-3x_3\qquad+x_5=-4$$

$$x_j\geq 0,\ j=1,2,\ldots,5$$

- 建立此问题的初始单纯形表：

$c_j \rightarrow$			-2	-3	-4	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	-3	-1	-2	-1	1	0
0	x_5	-4	[-2]	1	-3	0	1
c_j-z_j			-2	-3	-4	0	0

从表中看到，检验数行对应的对偶问题的解是可行解。

因b列数字为负，故需进行迭代运算。

- 换出变量的确定：

按上述对偶单纯形法计算步骤(3)，计算

$$\min(-3,-4)=-4$$

故x_5为换出变量。

- 换入变量的确定：

按上述对偶单纯形法计算步骤(4)，计算

$$\theta = \min\left(\frac{-2}{-2}, -, \frac{-4}{-3}\right) = \frac{-2}{-2} = 1$$

故x_1为换入变量。

- 换入、换出变量的所在列、行的交叉处“−2”为主元素。

按单纯形法计算步骤进行迭代，得

$c_j \rightarrow$			−2	−3	−4	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	−1	0	[−5/2]	1/2	1	−1/2
−2	x_1	2	1	−1/2	3/2	0	−1/2
$c_j - z_j$			0	−4	−1	0	−1

由上表看出，对偶问题仍是可行解，而 b 列中仍有负分量。
故重复上述迭代步骤，得

$c_j \to$			-2	-3	-4	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-3	x_2	2/5	0	1	-1/5	-2/5	1/5
-2	x_1	11/5	1	0	7/2	-1/5	-2/5
$c_j - z_j$			0	0	-9/5	-8/5	-1/5

上表中，b列数字全为非负，检验数全为非正，故问题的最优解为

$$X^* = (11/5，2/5，0，0，0)^T$$

若对应两个约束条件的对偶变量分别为y_1和y_2，则对偶问题的最优解为

$$Y^* = (y_1^*, y_2^*) = (8/5, 1/5)$$