第二章 线性规划与单纯形法

一、线性规划问题及其数学模型

二、线性规划问题的几何意义

三、单纯形法

四、单纯形法的计算步骤

五、单纯形法的进一步讨论

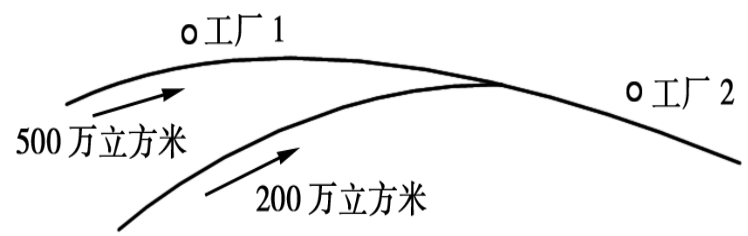
六、应用举例

一、线性规划问题及其数学模型

- 问题的提出
- 图解法
- 线性规划问题的标准形式
- 线性规划问题的解的概念

1、 问题的提出

例 1. 靠近某河流有两个化工厂，流经第一化工厂的河流流量为每天500万立方米，在两个工厂之间有一条流量为每天200万立方米的支流。



化工厂1每天排放含有某种有害物质的工业污水2万立方米，化工厂2每天排放的工业污水为1.4万立方米。从化工厂1排出的污水流到化工厂2前，有20%可自然净化。根据环保要求，河流中工业污水的含量应不大于0.2%。因此两个工厂都需处理一部分工业污水。化工厂1处理污水的成本是1000元/万立方米,化工厂2处理污水的成本是800元/万立方米。问:

在满足环保要求的条件下，每厂各应处理多少工业污水，使两个工厂处理工业污水的总费用最小。

建模型之前的分析和计算

设：

化工厂1每天处理的污水量为x_1万立方米；

化工厂2每天处理的污水量为x_2万立方米

经第2工厂前的水质要求：$\dfrac{(2-x_1)}{500} \le \dfrac{2}{1000}$

经第2工厂后的水质要求：

$$\frac{[0.8(2-x_1)+(1.4-x_2)]}{700} \le \frac{2}{1000}$$

得到本问题的数学模型为：

$$
\begin{aligned}
&\text{目标函数} \quad \min z = 1000x_1 + 800x_2 \\
&\text{约束条件} \quad
\begin{cases}
x_1 \ge 1 \\
0.8x_1 + x_2 \ge 1.6 \\
x_1 \le 2 \\
x_2 \le 1.4 \\
x_1, x_2 \ge 0
\end{cases}
\end{aligned}
$$

- **线性规划问题具有的共同特征：**
- 每一个数学问题都用一组决策变量$(x_1, x_2, \cdots x_n)$ 表示某一方案，这组决策变量的值代表一个具体方案。一般这些变量的取值是非负且连续的；
- 都有关于各种资源和资源使用情况的技术数据，创造新价值的数据：$a_{ij}; c_j\ (i = 1, \cdots m; j = 1, \cdots n)$
- 存在可以量化的约束条件，这些约束条件可以用一组线性等式或线性不等式来表示；
- 都有一个达到某一目标的要求，可用决策变量的线性函数(称为目标函数)来表示。按问题的要求不同，要求目标函数实现最大化或最小化。

线性规划模型的一般形式

目标函数

$$max(min)\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \qquad (1.1)$$

约束条件

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n \le (=,\ge) b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n \le (=,\ge) b_2 \\ &\quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \qquad (1.2) \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots\cdots + a_{mn}x_n \le (=,\ge) b_m \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n \ge 0 \qquad (1.3)$$

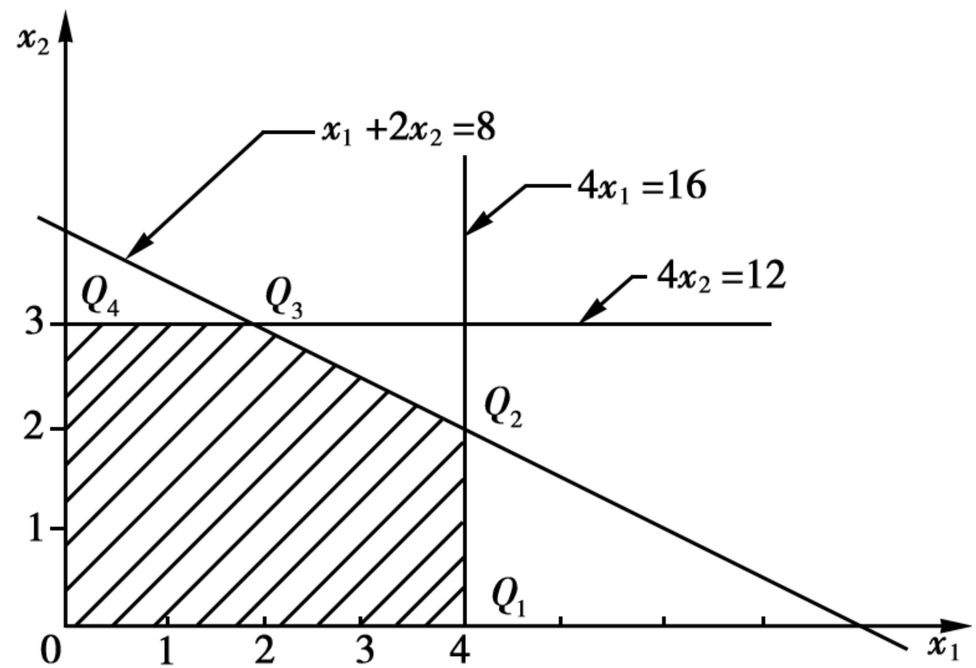
决策变量及各类系数之间的对应关系

		决策变量				资源
		x_1	x_2	$\cdots$	x_n	
活动	1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	b_1
	2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	b_2
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
	m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	b_m
价值系数		c_1	c_2	$\cdots$	c_n	

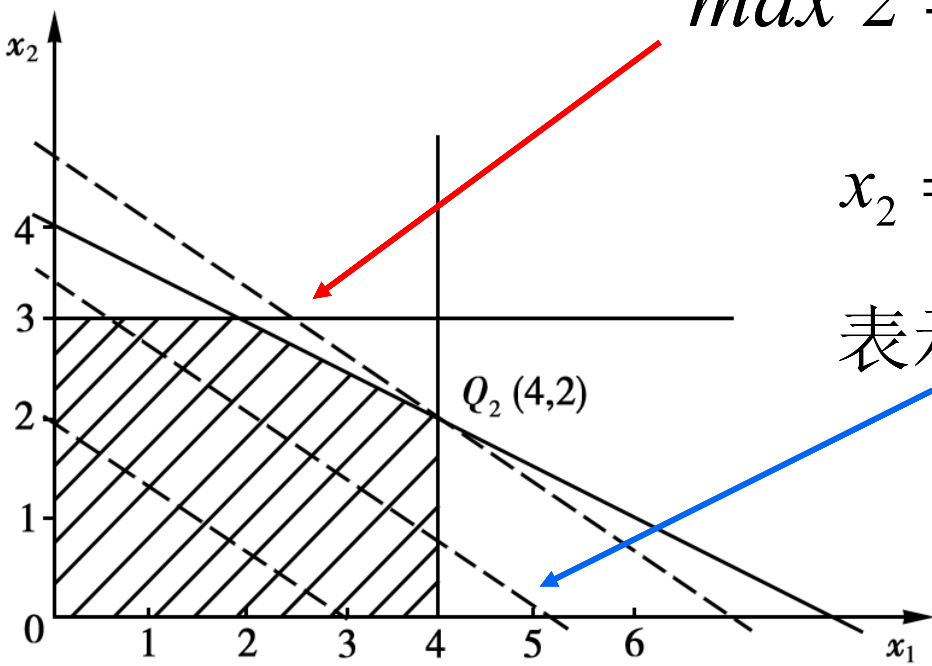
2、图解法

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \qquad \le 16 \\ \qquad 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

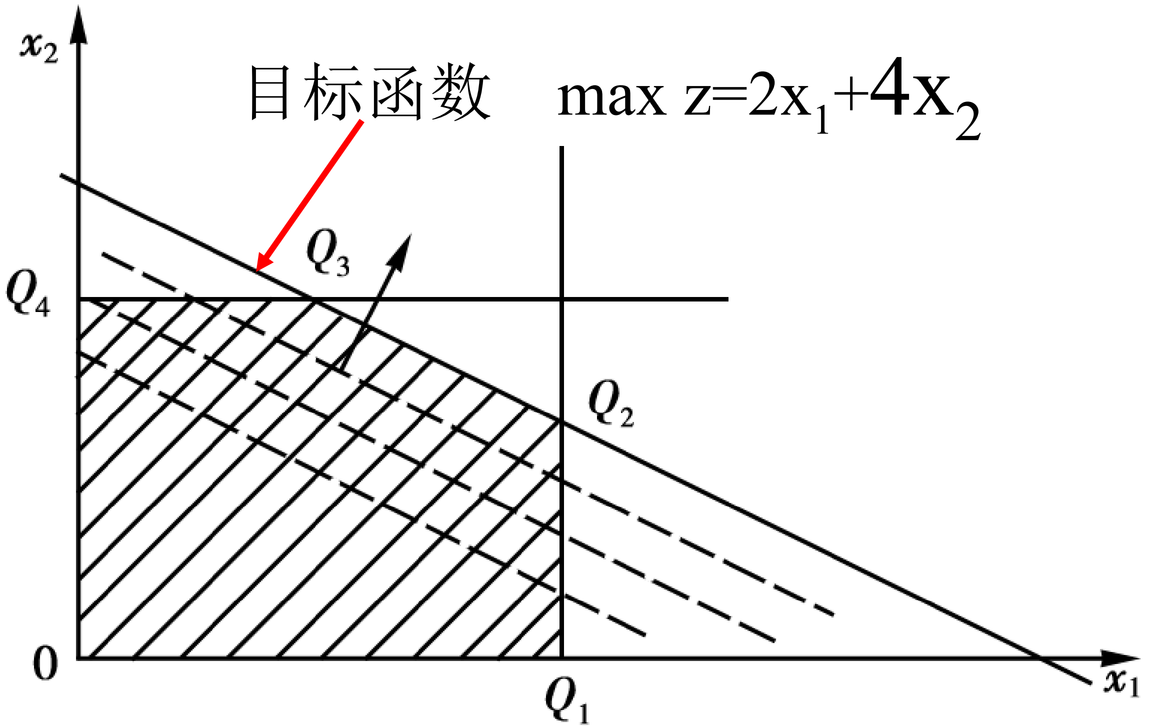


$$x_2 = -\frac{2}{3}x_1 + \frac{z}{3}$$

表示一簇平行线

目标值在（4，2）点，达到最大值14.

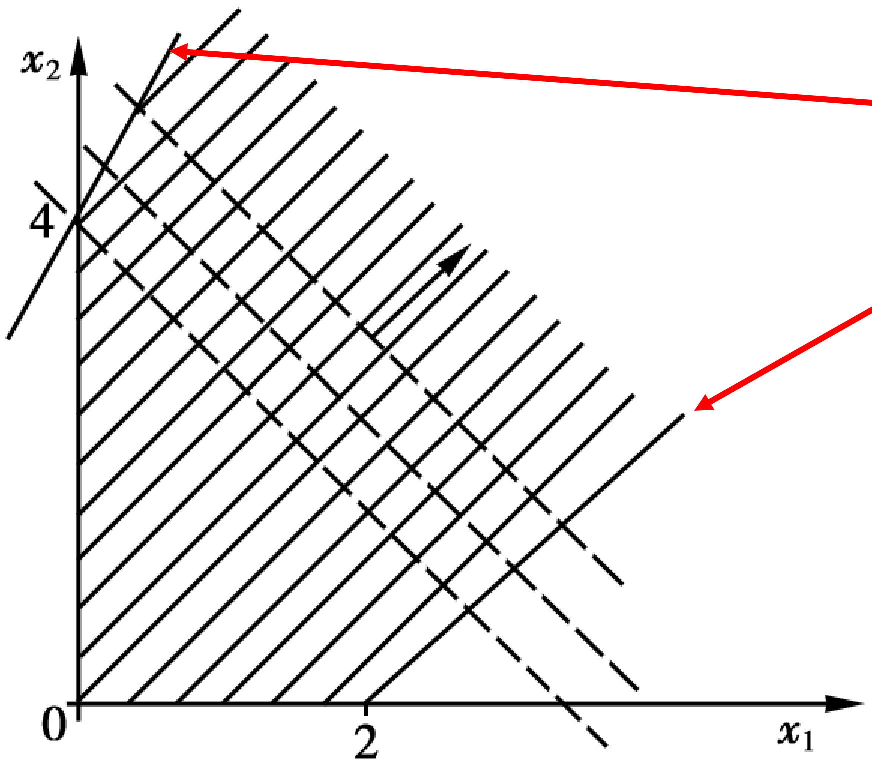
- 通过图解法，可观察到线性规划的解可能出现的几种情况：
- （1）无穷多最优解(多重最优解).



- （2）无界解.

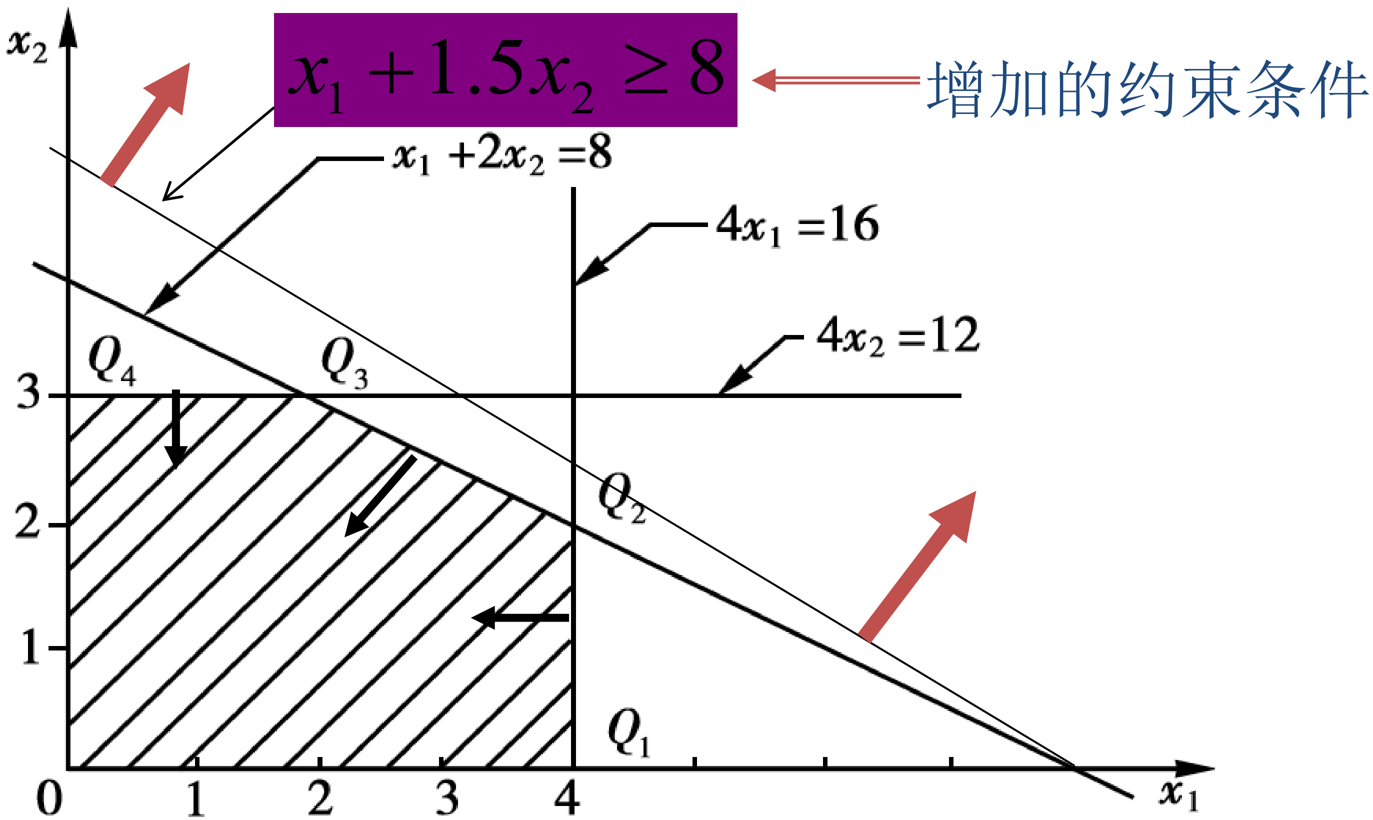
$$\max z = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 - x_2 \le 2 \\ x_1, x_2 \ge o \end{cases}$$



- （3）无可行解.

当存在相互矛盾的约束条件时，线性规划问题的可行域为空集。例如，如果在例1的数学模型中增加一个约束条件：$x_1 + 1.5x_2 \geq 8$， 则该问题的可行域即为**空集**，即无可行解.



3、线性规划问题的标准型式

$M_1:$

目标函数：$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$

约束条件：$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0 \end{cases}$

$m \leq n$

- 用向量形式表示的标准形式线性规划

M_1' :目标函数: $\max z = CX$

$$\text{约束条件:}\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} P_j x_j = b \\ x_j \geq 0, \quad j = 1,2,\cdots,n \end{cases}$$

$C = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$;

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; P_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}; j = 1,2,\cdots n$$

- **用矩阵形式表示的标准形式线性规划**

M_1'' :目标函数:$max\ z = CX$

约束条件:$\begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \end{cases}$

系数矩阵: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(P_1, P_2, \cdots P_n\right)$;

零向量:$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$; 资源向量: $\mathrm{b} = \begin{pmatrix} \mathrm{b}_1 \\ \vdots \\ \mathrm{b}_\mathrm{m} \end{pmatrix}$

决策变量向量: $X = \left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)^T$

- **如何将一般线性规划转化为标准形式的线性规划？**

(1) 若要求目标函数实现最小化，即min $z = CX$，则只需将目标函数最小化变换求目标函数最大化，即令$z' = -z$，于是得到max $z' = -CX$。

(2) 约束条件为不等式，分两种情况讨论：

- 若约束条件为“≤”型不等式，则可在不等式左端加入非负松弛变量，把原“≤”型不等式变为等式约束；
- 若约束条件为“≥”型不等式，则可在不等式左端减去一个非负剩余变量(也称松弛变量)，把不等式约束条件变为等式约束。

(3) 若存在取值无约束的变量x_k，可令

$$x_k = x_k' - x_k''$$

$$x_k',\ x_k'' \geq 0$$

- **例2** 将下述线性规划问题化为标准形式线性规划

$$min\ z = -x_1 + 2x_2 - 3x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 7 \\ x_1 - x_2 + x_3 \ge 3 \\ -3x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1, x_2 \ge 0; x_3\text{为无约束} \end{cases}$$

(1) 用x_4-x_5替换x_3，其中x_4，$x_5 \ge 0$；

(2) 在第一个约束不等式左端加入松弛变量x_6；

(3) 在第二个约束不等式左端减去剩余变量x_7；

(4) 令$z' = -z$，将求$\min z$ 改为求$\max z'$.

$$\max z' = x_1 - 2x_2 + 3(x_4 - x_5) + 0x_6 + 0x_7$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + (x_4 - x_5) + x_6 = 7 \\ x_1 - x_2 + (x_4 - x_5) - x_7 = 3 \\ -3x_1 + x_2 + (x_4 - x_5) = 5 \\ x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{cases}$$