4、线性规划问题的解概念

- 1.可行解
- 2.基
- 3.基可行解
- 4.可行基

标准型

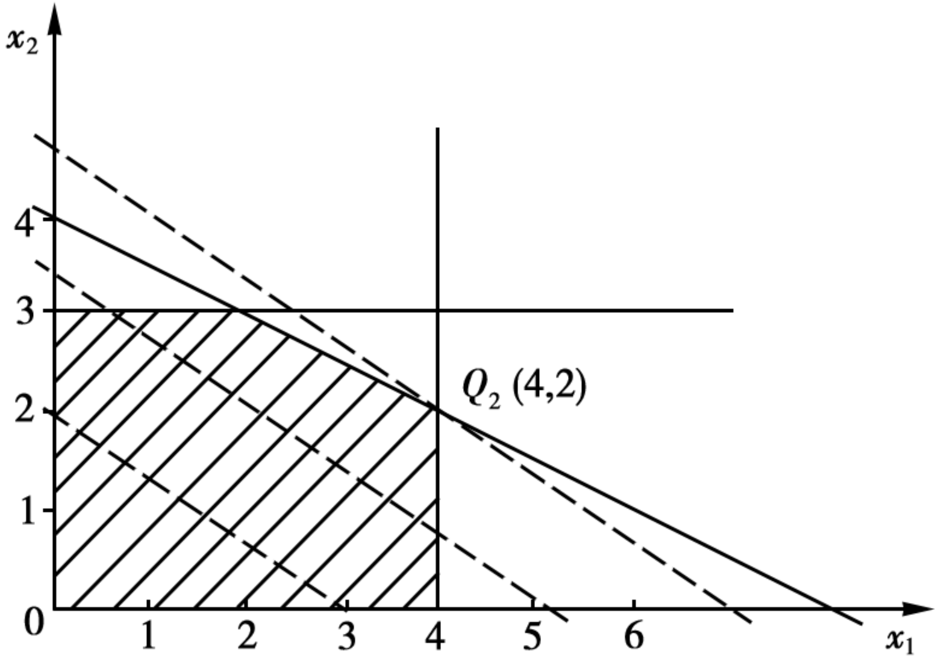
$M_1:$

目标函数：$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$

约束条件：
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

- **1. 可行解**

满足约束条件的解称为线性规划问题的**可行解**，其中使目标函数达到最大值的**可行解**称为**最优解**。



• 2. 基

B是系数矩阵A中的$m \times m$阶非奇异子矩阵$(|B| \neq 0)$称B为线性规划问题的基。

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} = (P_1, P_2, \cdots P_m)$$

$P_j (j = 1,2,\cdots m)$为基向量，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$x_j (j = 1,2,\cdots m)$为基变量。 (x_3, x_4, x_5)

由令非基变量为0得到的解称为基解.

(0,0,8,16,12)

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$s.t. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 4x_1 + x_4 = 16 \\ 4x_2 + x_5 = 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

- **3 基可行解**

满足非负条件的基解，称为基可行解. 基可行解的非零分量的数目不大于m，并且都是非负的。

(0,0,8,16,12)

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

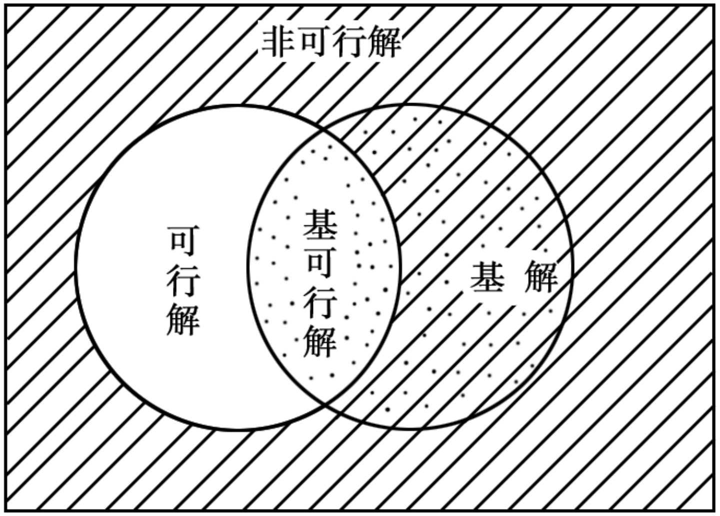
$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 4x_1 + x_4 = 16 \\ 4x_2 + x_5 = 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

- **4 可行基**

对应于基可行解的基，称为可行基。

约束方程组具有的基解的数目最多是C_n^m个，一般基可行解的数目要小于基解的数目。

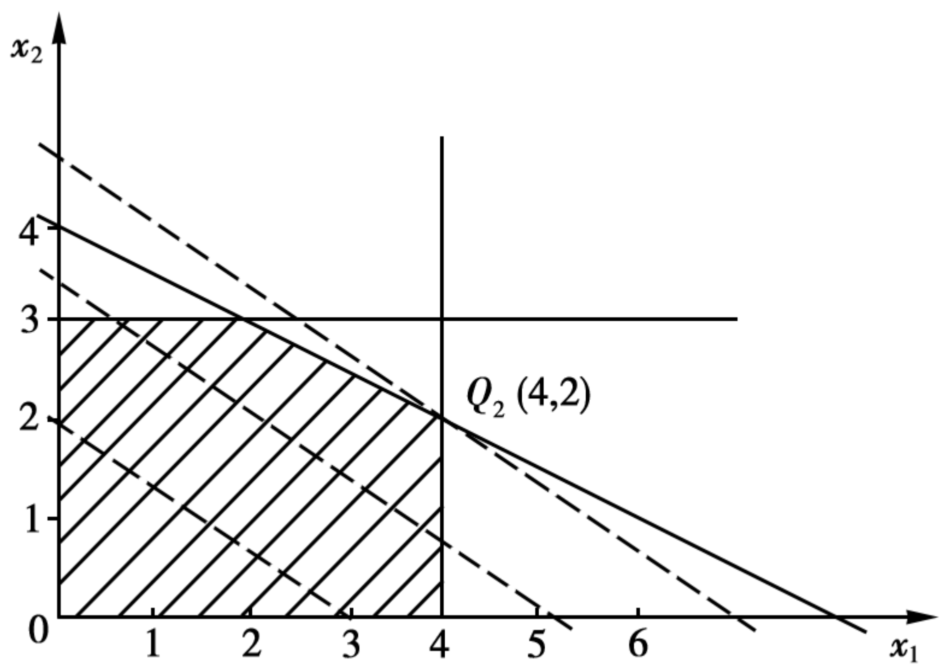
说明：当基解中的非零分量的个数小于m时，该基解是退化解。在以下讨论时，假设不出现退化的情况。



二、线性规划问题的几何意义

1、 基本概念

2、几个定理



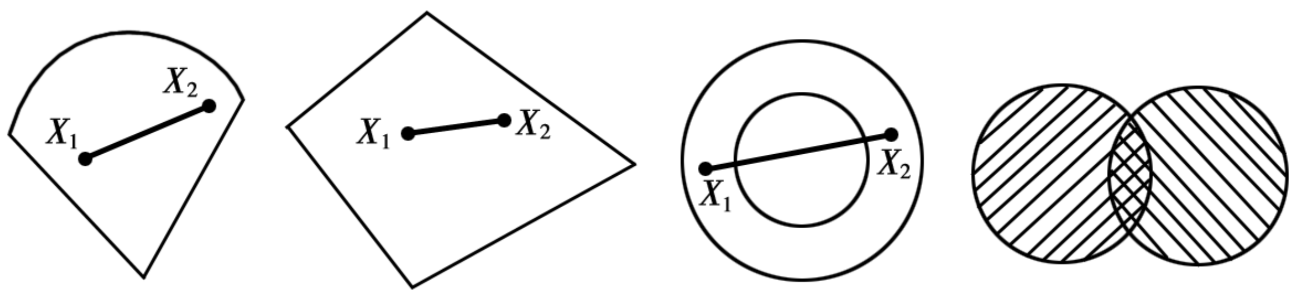
x_2
4
3
2
1
0
1
2
3
4
5
6
x_1
Q_2 (4,2)

1、 基本概念

- 凸集
- 凸组合
- 顶点

凸集

- 设K是n维欧氏空间的一点集，若任意两点$X^{(1)}\in K$，$X^{(2)}\in K$的连线上的所有点$\alpha X^{(1)}+(1-\alpha)X^{(2)}\in K$，$(0\leq\alpha\leq 1)$，则称$K$为凸集。
- 实心圆，实心球体，实心立方体等都是凸集，圆环不是凸集，任何两个凸集的交集是凸集。从直观上讲，凸集没有凹入部分，其内部没有空洞。



(a) (b) (c) (d)

凸组合

- 设$X^{(1)}$，$X^{(2)}$，…，$X^{(k)}$是n维欧氏空间E^n中的k个点。若存在μ_1，μ_2，…，μ_k，且$0 \le \mu_i \le 1$, $i=1,2,\ldots$，k，$\sum_{i=1}^{k} \mu_i = 1$

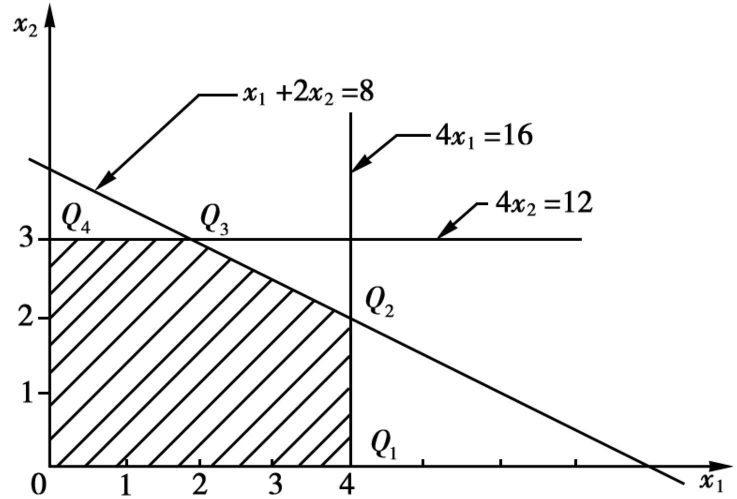
  使　$X=\mu_1 X^{(1)}+\mu_2 X^{(2)}+\ldots+\mu_k X^{(k)}$. 则称$X$为$X^{(1)}$，$X^{(2)}$，…，$X^{(k)}$的一个凸组合（当$0 < \mu_i < 1$时，称为严格凸组合）。

顶点

- 设K是凸集，$X\in K$；若X不能用不同的两点$X^{(1)}\in K$和$X^{(2)}\in K$的线性组合表示为

  $X=\alpha X^{(1)}+(1-\alpha)X^{(2)}$，$(0<\alpha<1)$

  则称X为K的一个顶点(或极点)。



2、几个定理

- **定理1** 若线性规划问题存在可行域，则其可行域 $D=\left\{X \middle| \sum_{j=1}^{n} P_j x_j = b, \quad x_j \geq 0\right\}$ 是凸集。

证明：凸集定义。

- 证明：只需证明D中任意两点连线上的点必然在D内即可。设

$$X^{(1)}=\left(x_1^{(1)},x_2^{(1)},\cdots,x_n^{(1)}\right)^T$$

$$X^{(2)}=\left(x_1^{(2)},x_2^{(2)},\cdots,x_n^{(2)}\right)^T$$

是D内的任意两点；且$X^{(1)}\neq X^{(2)}$。

则有

$$\sum_{j=1}^{n}P_j x_j^{(1)}=b,\ x_j^{(1)}\geq 0,\ j=1,2,\cdots,n$$

$$\sum_{j=1}^{n}P_j x_j^{(2)}=b,\ x_j^{(2)}\geq 0,\ j=1,2,\cdots,n$$

令 $X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ 为 $x^{(1)}, x^{(2)}$ 连线上的任意一点，即

$$X=\alpha X^{(1)}+(1-\alpha)X^{(2)}\quad (0\leqslant\alpha\leqslant 1)$$

X 的每一个分量是 $x_j=\alpha x_j^{(1)}+(1-\alpha)x_j^{(2)}$，将它代入约束条件，

得到

$$\sum_{j=1}^{n} P_j x_j = \sum_{j=1}^{n} P_j \left[\alpha x_j^{(1)} - (1-\alpha) x_j^{(2)}\right]$$

$$= \alpha \sum_{j=1}^{n} P_j x_j^{(1)} + \sum_{j=1}^{n} P_j x_j^{(2)} - \alpha \sum_{j=1}^{n} P_j x_j^{(2)}$$

$$= \alpha b + b - \alpha b = b$$

又因 $x_j^{(1)}, x_j^{(2)} \geq 0, \alpha > 0, 1-\alpha > 0$，所以 $x_j \geqslant 0$， j=1, 2, …, n。

由此可见 X∈D，D 是凸集。　　　　　　　　证毕。

- **引理 1** 线性规划问题的可行解$X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$为基可行解的充要条件是：X的正分量所对应的系数列向量是线性独立的。

证：（1）必要性由基可行解的定义可知。

（2）充分性若向量 P_1，P_2，…，P_k线性独立，则必有 $k\leqslant m$；当 $k=m$ 时，它们恰构成一个基，从而 $X=(x_1, x_2, \cdots, x_k, 0\cdots0)$为相应的基可行解。当 $k<m$ 时，则一定可以从其余的列向量中取出 $m-k$ 个与

P_1，P_2，…，P_k

构成最大的线性独立向量组，其对应的解恰为 X，所以根据定义它是基可行解。

- **定理2** 线性规划问题的基可行解X对应于可行域D的顶点。

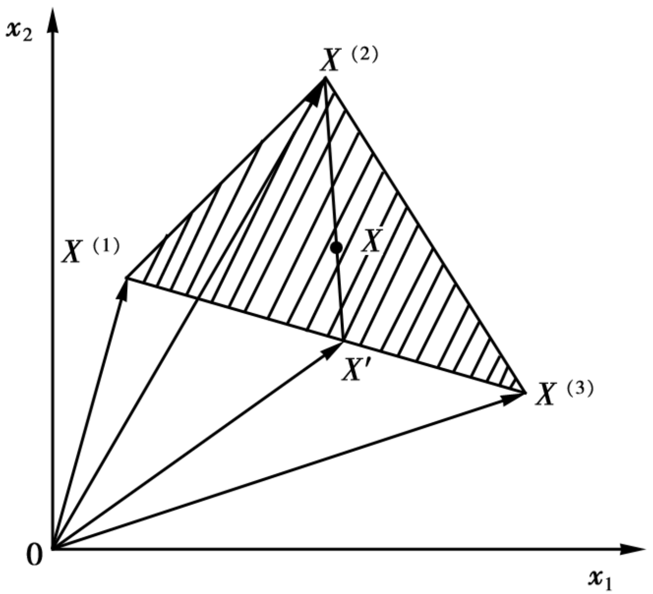
证明：

(1) 若X不是基可行解，则它一定不是可行域D的顶点。

(2) 若X不是可行域D的顶点，则它一定不是基可行解。

- **引理2** 若K是有界凸集，则任何一点$X \in K$可表示为K的顶点的凸组合。

- **例1** 设X是三角形中任意一点，$X^{(1)}$，$X^{(2)}$和$X^{(3)}$是三角形的三个顶点，试用三个顶点的坐标表示X.



解： 任选一顶点$X^{(2)}$，做一条连线$XX^{(2)}$，并延长交于$X^{(1)}$、$X^{(3)}$连接线上一点X'。因为X'是$X^{(1)}$、$X^{(3)}$连线上一点，故可用$X^{(1)}$、$X^{(3)}$线性组合表示为

$$X'=\alpha X^{(1)}+(1-\alpha)X^{(3)} \qquad 0<\alpha<1$$

又因X是X'与$X^{(2)}$连线上的一个点，故

$$X=\lambda X'+(1-\lambda)X^{(2)} \qquad 0<\lambda<1$$

将X'的表达式代入上式得到

$$X=\lambda\left[\alpha X^{(1)}+(1-\alpha)X^{(3)}\right]+(1-\lambda)X^{(2)}$$

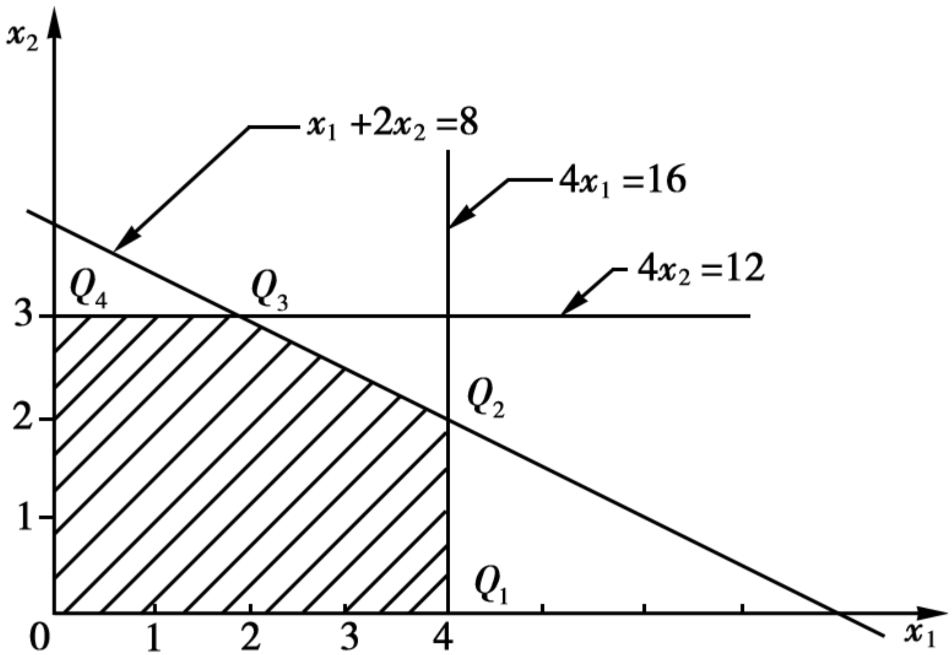
$$=\lambda\alpha X^{(1)}+\lambda(1-\alpha)X^{(3)}+(1-\lambda)X^{(2)}$$

令 $\mu_1=\alpha\lambda,\mu_2=(1-\lambda),\mu_3=\lambda(1-\alpha)$，得到

$$X=\mu_1X^{(1)}+\mu_2X^{(2)}+\mu_3X^{(3)}$$

$$\sum_i\mu_i=1,\ 0<\mu_i<1$$

- **定理 3** 若可行域有界，则线性规划问题的目标函数一定可以在其可行域的顶点上达到最优。



- **定理 3** 若可行域有界，则线性规划问题的目标函数一定可以在其可行域的顶点上达到最优。

证： 设$X^{(1)},X^{(2)}$，…，$X^{(k)}$是可行域的顶点，若$X^{(0)}$不是顶点，且目标函数在$X^{(0)}$处达到最优$z^*=CX^{(0)}$(标准型是$z=\max z$)。

因$X^{(0)}$不是顶点，所以它可以用D的顶点线性表示为

$$X^{(0)}=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i^{(i)} \quad ,\alpha_i>0, \quad \sum_{i=1}^{k}\alpha_i=1$$

代入目标函数得

$$CX^{(0)}=C\sum_{i=1}^{k}\alpha_i X^{(i)}=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i CX^{(i)}$$

在所有的顶点中必然能找到某一个顶点$X^{(\mathrm{m})}$，使$CX^{(m)}$是所有$CX^{(i)}$中最大者。并且将$X^{(m)}$代替上式中的所有$X^{(i)}$，得到

$$\sum_{i=1}^{k}\alpha_i CX^{(i)} \le \sum_{i=1}^{k}\alpha_i CX^{(m)} = CX^{(m)}$$

由此得到 $CX^{(0)} \le CX^{(m)}$，

根据假设$CX^{(0)}$是最大值，所以只能有 $CX^{(0)}=CX^{(m)}$，

即目标函数在顶点$X^{(m)}$处也达到最大值。

注 1. 目标函数可能在多个顶点处达到最大，这时在这些顶点的凸组合上也达到最大值，这时线性规划问题有无限多个最优解。

假设 $\hat{X}^{(1)}$，$\hat{X}^{(2)}$，…，$\hat{X}^{(k)}$

是目标函数达到最大值的顶点，则对这些顶点的凸组合，有

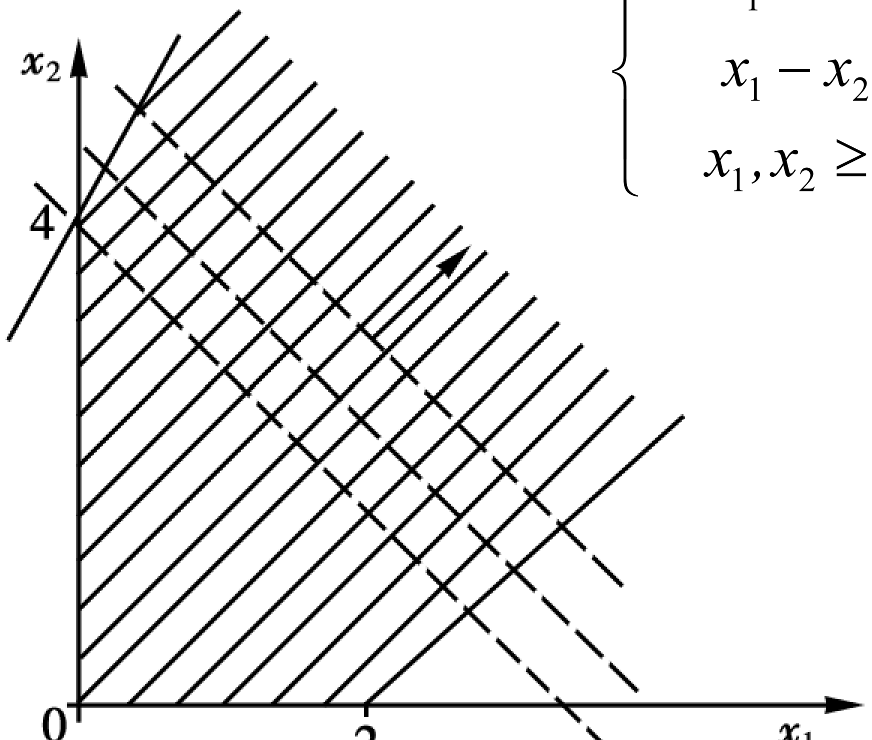
$$\hat{X}=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\hat{X}^{(i)},\ \alpha_i>0,\quad \sum_{i=1}^{k}\alpha_i=1$$

$$C\hat{X}=C\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\hat{X}^{(i)}=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i C\hat{X}^{(i)}$$

- 注 2.若可行域为无界，则可能无最优解，也可能有最优解，若有最优解，也必定在某顶点上得到。

$$max\ z = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x \le 4 \\ x_1 - x_2 \le 2 \\ x_1, x_2 \ge o \end{cases}$$



小结

- 线性规划问题的所有可行解构成的集合是凸集（有界或无界），它们有有限个顶点，线性规划问题的每个基可行解对应可行域的一个顶点。
- 若线性规划问题有最优解，必在某顶点上达到。采用“枚举法”找所有基可行解，然后一一比较，最终必然能找到最优解。
- 虽然顶点数目是有限的，但当n,m较大时，这种办法是行不通的。
- 单纯形法。

三、单纯形法

1 举例

2 初始基可行解的确定

3 最优性检验与解的判别

4 基变换

5 迭代（旋转运算）

1、 举例

- 求解如下线性规划（工厂安排生产）：

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \quad (1) \\
s.t. \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\
& 4x_1 + x_4 = 16 \quad (2) \\
& 4x_2 + x_5 = 12 \\
& x_j \geq 0 \quad j = 1,2,\cdots,5
\end{aligned}
$$

约束条件的系数矩阵为

$$A=\left(P_1,P_2,P_3,P_4,P_5\right)=\begin{pmatrix}1&2&1&0&0\\4&0&0&1&0\\0&4&0&0&1\end{pmatrix}$$

从上式可看到x_3,x_4,x_5的系数构成的列向量

$$P_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},P_4=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},P_5=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

P_3,P_4,P_5是线性独立的，这些向量构成一个基B，对应于B的变量x_3,x_4,x_5为基变量。

$$\begin{cases} x_3 = \quad 8 - x_1 - 2x_2 \\ x_4 = 16 - 4x_1 \\ x_5 = 12 \qquad - 4x_2 \end{cases} \qquad (3)$$

- 将上式代入目标函数（1）得 $z = 0 + 2x_1 + 3x_2 \quad (4)$
- 当令非基变量$x_1=x_2=0$，便得到$z=0$。这时得到一个基可行解$X^{(0)}=(0,0,8,16,12)^{\mathrm{T}}$
- 本基可行解的经济含义是：工厂没有安排生产产品I、II，资源都没有被利用，所以工厂的利润为$z=0$。

从分析新目标函数的表达式(4)可以看到：

非基变量x_1,x_2(即没有安排生产产品I，II)的系数都是正数，因此将非基变量变换为基变量，目标函数的值就可能增大。从经济意义上讲，安排生产产品I或II，就可以使工厂的利润指标增加。所以只要在新目标函数(4)的表达式中还存在有正系数的非基变量，这表示目标函数值还有增加的可能，就需要将非基变量与基变量进行对换。

- 如何确定换入、换出变量
  - 一般选择正系数最大的那个非基变量x_2为换入变量，将它换到基变量中，同时还要确定基变量中哪一个换出来成为非基变量。
  - 可按以下方法来确定换出变量：
    - 分析(3)式，当将x_2定为换入变量后，必须从x_3,x_4,x_5中确定一个换出变量，并保证其余的变量仍然非负，即$x_3,x_4,x_5\geq 0$。
- 当x_1=0时，由(3)式得到

$$\begin{cases} x_3 = 8-2x_2 \geq 0 \\ x_4 = 16 \geq 0 \\ x_5 = 12-4x_2 \geq 0 \end{cases} \qquad (5)$$

– 当x_2取何值时，才能满足非负要求呢？

从(5)式可看出，只有选择

x_2=min(8/2,-,12/4)=3时，才能使(5)式成立。

因当x_2=3时，基变量x_5=0，这就决定用x_2去替换x_5。

以上数学描述说明，每生产一件产品II，需要用掉的各种资源数为(2，0，4)。由这些资源中的薄弱环节，就确定了产品II的产量。

这里就是由原材料B的数量确定了产品II的产量x_2=12/4=3件。

- 为了求得以x_3,x_4,x_2为基变量的一个基可行解和进一步分析问题，需将(3)中x_2的位置与x_5的位置对换，得到

$$\begin{cases} x_3 = 8 - x_1 - 2x_2 \\ x_4 = 16 - 4x_1 \\ x_5 = 12 - 4x_2 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x_3 + 2x_2 = 8 - x_1 & (1) \\ x_4 = 16 - 4x_1 & (2) \\ 4x_2 = 12 - x_5 & (3) \end{cases} \quad (6)$$

高斯消去法

- 将(6)式中x_2的系数列向量变换为单位列向量。其运算步骤是：
- ③′=③/4；①′=①-2×③′;②′=②,
- 并将结果仍按原顺序排列有：

$$\begin{cases} x_3 = 2 - x_1 + \dfrac{1}{2}x_5 & (1)' \\ x_4 = 16 - 4x_1 & (2)' \\ x_2 = 3 - \dfrac{1}{4}x_5 & (3)' \end{cases} \qquad (7)$$

- 再将(1-17)式代入目标函数(1-11)式得到

$$z = 9 + 2x_1 - \frac{3}{4}x_5 \qquad (8)$$

令非基变量 $x_1=x_5=0$，得到 $z=9$，并得到另一个基可行解 $X^{(1)}$

$$X^{(1)}=(0, 3, 2, 16, 0)^T$$

从目标函数的表达式(8)可看到，非基变量x_1的系数是正的，说明目标函数值还可以增大，即$X^{(1)}$还不是最优解。

于是，再用上述方法确定换入、换出变量，继续迭代，得到另一个基可行解$X^{(2)}$

$$X^{(2)}=(2,3,0,8,0)^{T}$$

再经过一次迭代，又得到一个基可行解$X^{(3)}$

$$X^{(3)}=(4,2,0,0,4)^{T}$$

而这时得到目标函数的表达式是：

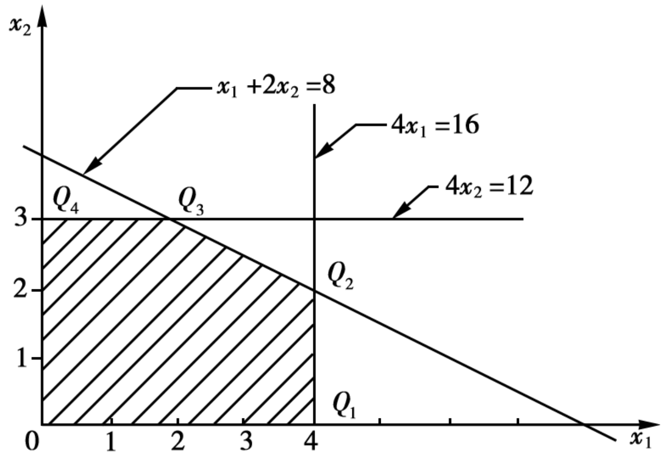
$$z=14-1.5x_3-0.125x_4 \qquad (9)$$

再检查(9)式，可见所有非基变量x_3,x_4的系数都是负数，这说明若要用剩余资源x_3,x_4，就必须支付附加费用。

所以当$x_3=x_4=0$时，即不再利用这些资源时，目标函数达到最大值。所以$X^{(3)}$是最优解。即当产品I生产4件，产品II生产2件时，工厂可以得到最大利润。

- 通过上例，可将每步迭代得到的结果与图解法做一对比。
- 例1的线性规划问题是二维的，即有两个变量x_1,x_2。当加入松弛变量x_3,x_4,x_5后，变换为高维的。这时可以想象，满足所有约束条件的可行域是高维空间中的凸多面体(凸集)。该凸多面体上的顶点，就是基可行解。初始基可行解为$X^{(0)}=(0,0,8,16,12)^T$，对应于图中的原点(0，0)；$X^{(1)}=(0,3,2,16,0)^T$对应于图中的Q_4点(0，3)；　$X^{(2)}=(2，3，0，8，0)^T$对应于Q_3点(2，3)；最优解$X^{(3)}=(4，2，0，0，4)^T$相当于图中的 Q_2点(4，2)。

从初始基可行解$X^{(0)}$开始迭代，依次得到$X^{(1)}$，$X^{(2)}$，$X^{(3)}$，相当于图中的目标函数平移时，（单纯形法）从0点开始，首先碰到Q_4，然后碰到Q_3，最后达到Q_2。



2、初始基可行解的确定

- 为了确定初始基可行解，要首先找出初始可行基。
  - (1)直接观察
  - (2)加松弛变量
  - (3)加非负的人工变量

(1)直接观察

从线性规划问题 $\max z = \sum_{j=i}^{n} c_j x_j \qquad (10)$

$$\sum_{j=1}^{n} P_j x_j = b \qquad (11)$$

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1,2,\cdots,n$$

系数构成的列向量$P_j(j=1,2,\ldots,n)$中，通过直接观察，找出一个初始可行基

$$B = (P_1, P_2, \cdots P_m) = \begin{pmatrix} 1 & & \cdots & \\ & 1 & \cdots & \\ & & \ddots & \\ & & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

(2)加松弛变量

- 对所有约束条件为“≤”形式的不等式，利用化标准型的方法，在每个约束条件的左端加上一个松弛变量。经过整理，重新对x_j及a_{ij}(i=1,2,…,m; j=1,2,…,n)进行编号，则可得下列方程组（$x_1, x_2, \ldots, x_m$ 为松弛变量）：

$$
\begin{array}{l}
x_1 \qquad\qquad + a_{1,m+1}x_{m+1} + \cdots\cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
\quad x_2 \qquad\quad + a_{2,m+1}x_{m+1} + \cdots\cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\qquad \ddots \qquad\quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
\qquad\qquad x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \cdots\cdots + a_{mn}x_n = b_m \\
\qquad\qquad\quad x_j \geq 0, \quad j = 1,2,\cdots,n
\end{array}
\qquad (12)
$$

(3)加非负的人工变量

- 对所有约束条件为“≥”形式的不等式及等式约束情况，若不存在单位矩阵时，可采用人造基方法。
  - 即对不等式约束，减去一个非负的剩余变量，再加上一个非负的人工变量；
  - 对于等式约束，再加上一个非负的人工变量；
- 这样，总能在新的约束条件系数构成的矩阵中得到一个单位矩阵。

3、最优性检验与解的判别

- 由于线性规划问题的求解可能出现唯一最优解、无穷多最优解、无界解和无可行解等四种情况，因此，需要建立解的判别准则。
- 一般情况下，经过迭代后(11)式变成

$$x_i = b_i^{'} - \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij}^{'} x_j, \quad (i = 1,2,\cdots m) \qquad (13)$$

- 将上式代入目标函数(10)式：

$$z=\sum_{i=1}^{n}c_i x_i=\sum_{i=1}^{m}c_i x_i+\sum_{j=m+1}^{n}c_j x_j$$

$$=\sum_{i=1}^{m}c_i(b_i^{'}-\sum_{j=m+1}^{n}a_{ij}^{'}x_j)+\sum_{j=m+1}^{n}c_j x_j$$

$$=\sum_{i=1}^{m}c_i b_i^{'}-\sum_{i=1}^{m}c_i\sum_{j=m+1}^{n}a_{ij}^{'}x_j+\sum_{j=m+1}^{n}c_j x_j$$

$$=\sum_{i=1}^{m}c_i b_i^{'}-\sum_{j=m+1}^{n}\sum_{i=1}^{m}c_i a_{ij}^{'}x_j+\sum_{j=m+1}^{n}c_j x_j$$

$$=\sum_{i=1}^{m}c_i b_i^{'}+\sum_{j=m+1}^{n}\left(c_j-\sum_{i=1}^{m}c_i a_{ij}^{'}\right)x_j \qquad (14)$$

$$z=\sum_{i=1}^{m}c_i b_i^{'}+\sum_{j=m+1}^{n}\left(c_j-\sum_{i=1}^{m}c_i a_{ij}^{'}\right)x_j$$

令 $z_0=\sum_{i=1}^{m}c_i b_i^{'}, z_j=\sum_{i=1}^{m}c_i a_{ij}^{'}, j=m+1,\cdots,n.$

于是 $$z=z_0+\sum_{j=m+1}^{n}\left(c_j-z_j\right)x_j \qquad (15)$$

令 $\sigma_j=c_j-z_j \quad j=m+1,\cdots,n.$

$$z=z_0+\sum_{j=m+1}^{n}\sigma_j x_j \qquad (16)$$

（1）. 最优解的判别规则

若 $X^{(0)}=\left(b_1^{'},b_2^{'},\cdots,b_m^{'},0,\cdots,0\right)^T$ 为对应于基B的一个基可行解，且对于一切$j=m+1,\ldots,n$，有$\sigma_j\leq 0$，则$X^{(0)}$为最优解，称σ_j为检验数。

（2）. 无穷多最优解判别规则

若 $X^{(0)}=\left(b_1',b_2',\cdots,b_m',0,\cdots,0\right)^T$ 为一个基可行解，对于一切 $j=m+1$，…,n，有 $\sigma_j\leq 0$，又存在某个非基变量的检验数 $\sigma_{m+k}=0$，则线性规划问题有无穷多最优解。

证：只需将非基变量 $x_{\mathrm{m+k}}$ 换入基变量中，找到一个新基可行解 $X^{(1)}$。因 $\sigma_{m+k}=0$，由(16)知 $z=z_0$，故 $X^{(1)}$ 也是最优解，$X^{(0)}$ 和 $X^{(1)}$ 连线上所有点都是最优解。

（3）. 无界解判别规则

若 $X^{(0)}=\left(b_1',b_2',\cdots,b_m',0,\cdots,0\right)^T$ 为一基可行解，有一个

$\sigma_{m+k}>0$，并且对i=1,2,…，m，有$a'_{i,m+k}\leq 0$，那么该线性规划问题具有无界解(或称无最优解)。

证：构造一个新的解 $X^{(1)}$，它的分量为

$$x_i^{(1)}=b_i'-\lambda a_{i,m+k}',i=1,\cdots m\quad(\lambda>0)$$

$$x_{m+k}^{(1)}=\lambda$$

$$x_j^{(1)}=0;\quad j=m+1,\cdots,n,\text{并且}j\neq m+k$$

因 $a'_{i,m+k} \leq 0$，所以对任意的$\lambda>0$都是可行解。

把$x^{(1)}$代入目标函数内，得到

$$z=z_0+\lambda\sigma_{m+k}$$

因$\sigma_{m+k}>0$，故当$\lambda\to+\infty$，则$z\to+\infty$，故该问题目标函数无界。

（4）. 其它情形

- 以上讨论都是针对标准型的，即求目标函数最大化时的情况。当要求目标函数最小化时，一种情况是将其化为标准型。
- 如果不化为标准型，只需在上述1，2点中把$\sigma_j \leq 0$改为$\sigma_j \geq 0$，第3点中将$\sigma_{m+\mathrm{k}} > 0$改写为$\sigma_{m+k} < 0$即可。
- 对无可行解的情况将在后面讨论。

4、基变换

- 若初始基可行解$X^{(0)}$不是最优解及不能判别无界时，需要找一个新的基可行解。
- 具体做法是：
  - 从原可行解基中换一个列向量(当然要保证线性独立)，得到一个新的可行基，称为基变换。为了换基，先要确定换入变量，再确定换出变量，让它们相应的系数列向量进行对换，就得到一个新的基可行解。

（1）. 换入变量的确定

- 由(16)式可知，当某些$\sigma_j > 0$时，若x_j增大，则目标函数值还可以增大。这时需要将某个非基变量x_j换到基变量中去(称为换入变量)。
- 若有两个以上的$\sigma_j > 0$，那么选哪个非基变量作为换入变量呢?为了使目标函数值增加得快，从直观上看应选$\sigma_j > 0$中的较大者，即若

$$\max_j\left(\sigma_j > 0\right) = \sigma_k$$

则应选择x_k为换入变量。

也可以任选或按最小足码选。

（2）. 换出变量的确定

- 设P_1，P_2，…，P_m是一组线性独立的向量组，它们对应的基可行解是$X^{(0)}$，将它代入约束方程组(11)得到

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^{(0)} P_i = b \qquad (17)$$

- 其他的向量$P_{m+1}, P_{m+2}, \ldots, P_{m+t}, \ldots, P_n$都可以用$P_1$，$P_2$，…，$P_m$线性表示。
- 若确定非基变量P_{m+t}为换入变量，必然可以找到一组不全为0的数($i=1,2,\ldots,m$)使得

$$P_{m+t} = \sum_{i=1}^{m} \beta_{i,m+t} P_i \quad \text{或} \quad P_{m+t} - \sum_{i=1}^{m} \beta_{i,m+t} P_i = 0 \qquad (18)$$

- 在(18)式两边同乘一个正数θ，然后将它加到(17)式上，得到

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^{(0)} P_i + \theta\left(P_{m+t} - \sum_{i=1}^{m} \beta_{i,m+t} P_i \right) = b \quad \text{或}$$

$$\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}} \left(x_i^{(0)} - \theta\beta_{i,m+t} \right) P_i + \theta P_{m+t} = b \qquad (19)$$

当 θ 取适当值时，就能得到满足约束条件的一个可行解(即非零分量的数目不大于 m 个)。

就应使$\left(x_i^{(0)} - \theta\beta_{i,m+t}\right)$, $i = 1,2,\cdots,m$.中的某一个为零，

并保证其余的分量为非负。

这个要求可以用以下的办法达到：

比较各比值$\left(x_i^{(0)} - \theta\beta_{i,m+t}\right)$, $i = 1,2,\cdots,m$ 。

又因为 θ 必须是正数，所以只选择$\dfrac{x_i^{(0)}}{\beta_{i,m+t}} \left(i = 1,2,\cdots,m \right)$ ($\beta_{i,m+t} > 0$)

中比值最小的等于 θ 。

• 以上描述用数学式表示为：

$$\theta=\min_i\left(\frac{x_i^{(0)}}{\beta_{i,m+t}}\middle|\beta_{i,m+t}>0\right)=\frac{x_l^{(0)}}{\beta_{l,m+t}}$$

这时 x_l 为换出变量。按最小比值确定 θ 值，称为最小比值规则。将 $\theta=\dfrac{x_l^{(0)}}{\beta_{l,m+t}}$ 代入 X 中，便得到新的基可行解。

$$\sum_{i=1}^{m}x_i^{(0)}P_i+\theta\left(P_{m+t}-\sum_{i=1}^{m}\beta_{i,m+t}P_i\right)=b \quad 或$$

$$\sum_{i=1}^{\mathrm{m}}\left(x_i^{(0)}-\theta\beta_{i,m+t}\right)P_i+\theta P_{m+t}=b \qquad (19)$$

- 新的基可行解为

$$\begin{array}{c} \text{第}l\text{个分量} \\ \downarrow \end{array}$$

$$X^{(1)}=\Bigg(x_1^{(0)}-\frac{x_l^{(0)}}{\beta_{l,m+t}}\cdot\beta_{1,m+t},\cdots,0,\cdots,$$

$$x_m^{(0)}-\frac{x_l^{(0)}}{\beta_{l,m+t}}\cdot\beta_{m,m+t},\cdots,0,\frac{x_l^{(0)}}{\beta_{l,m+t}},\cdots,0,\Bigg)$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{第}m+t\text{个分量} \end{array}$$

- 由此得到由$X^{(0)}$转换到$X^{(1)}$的各分量的转换公式

$$x_i^{(1)} = \begin{cases} x_i^{(0)} - \dfrac{x_l^{(0)}}{\beta_{l,m+t}} \cdot \beta_{i,m+t} & i \neq m+t \\ \dfrac{x_l^{(0)}}{\beta_{l,m+t}} & i = m+t \end{cases}$$

$$\beta_{i,m+t} = 0, i = m+1, m+2, \cdots, n$$

- 现在的问题是，这个新解$X^{(1)}$的m个非零分量对应的列向量是否线性独立?

- 事实上，因为$X^{(0)}$的第l个分量对应于$X^{(1)}$的相应分量是零，即

$$x_l^{(0)} - \theta\beta_{l,m+t} = 0$$

其中 $x_l^{(0)},\theta$ 均不为零，根据 θ 规则(最小比值)，

$\beta_{l,m+t}\neq 0$。$x^{(1)}$ 中的 m 个非零分量对应的 m 个列向量是 P_j(j=1, 2, ⋯, m, $j\neq l$) 和 P_{m+t}。若这组向量不是线性独立，则一定可以找到不全为零的数 α_j，使下式成立：

$$P_{m+t} = \sum_{j=1}^{m} a_j P_j, \quad j \neq l \qquad (20)$$

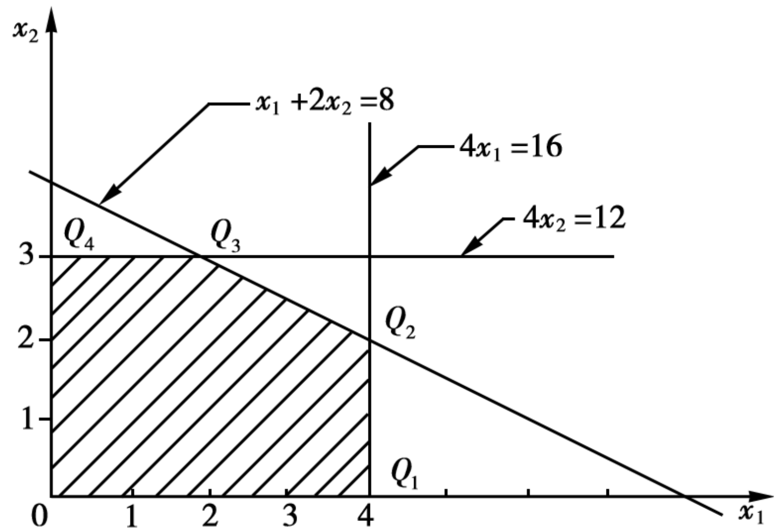
又因

$$P_{m+t} = \sum_{j=1}^{m} \beta_{j,m+t} P_j, \qquad (21)$$

将(21)式减(20)式得到 $$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq l}}^{m} (\beta_{j,m+t} - a_j) P_j + \beta_{l,m+t} P_l = 0$$

•由于上式中至少有$\beta_{l,m+t}\neq 0$，所以上式表明P_1，P_2，…，P_m是线性相关，这与假设相矛盾。

- 由此可见，$X^{(1)}$的m个非零分量对应的列向量$P_j(j=1,2,\ldots,m,j\neq l)$与$P_{m+t}$是线性独立的，即经过基变换得到的解是基可行解。
- 实际上，从一个基可行解到另一个基可行解的变换，就是进行一次基变换。从几何意义上讲，就是从可行域的一个顶点转向另一个顶点。



单纯形法的理论证明到此结束
只用到了代数知识

- 你觉得实际操作如何（方便吗/有问题吗）？

- 如何确定β_i？

- 若确定非基变量P_{m+t}为换入变量，必然可以找到一组不全为0的数(i=1,2,…,m)使得

$$P_{m+t} = \sum_{i=1}^{m} \beta_{i,m+t} P_i \quad 或 \quad P_{m+t} - \sum_{i=1}^{m} \beta_{i,m+t} P_i = 0 \qquad (18)$$

5. 迭代(旋转运算)

- 上述讨论的基可行解的转换方法是用向量方程描述的，在实际计算时不太方便，因此下面介绍**系数矩阵法**。

考虑以下形式的约束方程组（一般线性规划问题的约束方程组中加入松弛变量或人工变量后，很容易得到）：

$$
\begin{array}{llllll}
x_1 & +a_{1,m+1}x_{m+1} & +\cdots+a_{1k}x_k & +\cdots+a_{1n}x_n & =b_1 & \\
\quad x_2 & +a_{2,m+1}x_{m+1} & +\cdots+a_{2k}x_k & +\cdots+a_{2n}x_n & =b_2 & \\
\qquad \ddots & \cdots & \cdots\quad\cdots & \cdots & \cdots & \\
\qquad\quad x_l & +a_{l,m+1}x_{m+1} & +\cdots+a_{lk}x_k & +\cdots+a_{ln}x_n & =b_l & \qquad (22) \\
\qquad\qquad x_m & +a_{m,m+1}x_{m+1} & +\cdots+a_{mk}x_k & +\cdots+a_{mn}x_n & =b_m &
\end{array}
$$

- 设$x_1,x_2,\ldots,x_m$为基变量，对应的系数矩阵是$m\times m$单位阵I，它是可行基。令非基变量$x_{m+1},x_{m+2},\ldots,x_n$为零，即可得到一个基可行解。
- 若它不是最优解，则要另找一个使目标函数值增大的基可行解。这时从非基变量中确定x_k为换入变量。显然这时θ为

$$\theta=\min_i\left(\frac{b_i}{a_{ik}}\middle|a_{ik}>0\right)=\frac{b_l}{a_{lk}}$$

- 在迭代过程中θ可表示为

$$\theta=\min_i\left(\frac{b_i'}{a_{ik}'}\middle|a_{ik}'>0\right)=\frac{b_l'}{a_{lk}'}$$

- 其中b_i',a_{ik}'是经过迭代后对应于b_i,a_{ik}的元素值。

- 按θ规则确定x_l为换出变量，x_k, x_l的系数列向量分别为

$$P_k = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{lk} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix}; \quad P_l = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow \text{第} l \text{个分量} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

- 为了使x_k与x_l进行对换，须把P_k变为单位向量，这可以通过(22)式系数矩阵的增广矩阵进行初等变换来实现。

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
x_1 & \cdots & x_l & \cdots & x_m & x_{m+1} & \cdots & x_k & \cdots & x_n & b
\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccccccccc|c}
1 & & & & & a_{1,m+1} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
 & \ddots & & & & \vdots & & & & & \\
 & & 1 & & & a_{l,m+1} & \cdots & a_{lk} & \cdots & a_{ln} & b_l \\
 & & & \ddots & & & & & & & \\
 & & & & 1 & a_{m,m+1} & \cdots & a_{mk} & \cdots & a_{mn} & b_m
\end{array}\right) \quad (23)
$$

变换的步骤是:

(1) 将增广矩阵(23)式中的第l行除以a_{lk}，得到

$$\left(0,\cdots,\frac{1}{a_{lk}},0,\cdots,0,\frac{a_{l,m+1}}{a_{lk}},\cdots,1,\cdots,\frac{a_{ln}}{a_{lk}}\;\middle|\;\frac{b_l}{a_{lk}}\right)(24)$$

(2) 将(23)式中x_k列的各元素，除a_{lk}变换为1以外，其他都应变换为零。其他行的变换是将(24)式乘以$a_{ik}(i\neq l)$后，从(23)式的第i行减去，得到新的第i行。

$$\left(0,\cdots,-\frac{a_{ik}}{a_{lk}},0,\cdots,0,a_{i,m+1}-\frac{a_{l,m+1}}{a_{lk}}a_{ik},\cdots,0,\cdots,a_{in}-\frac{a_{ln}}{a_{lk}}a_{ik}\;\middle|\;b_i-\frac{b_l}{a_{lk}}a_{ik}\right)$$

由此可得到变换后系数矩阵各元素的变换关系式

$$a_{ij}^{'} = \begin{cases} a_{ij} - \dfrac{a_{lj}}{a_{lk}} a_{ik} & i \neq l \\ \dfrac{a_{lj}}{a_{lk}} & i = l \end{cases} ; \quad b_i^{'} = \begin{cases} b_i - \dfrac{a_{ik}}{a_{lk}} b_i & i \neq l \\ \dfrac{b_l}{a_{lk}} & i = l \end{cases}$$

$a_{ij}^{'}, b_i^{'}$ 是变换后的新元素。

（3）经过初等变换后的新增广矩阵是

$$
\begin{array}{cccccccccc}
x_1 & \cdots & x_l & \cdots & x_m & x_{m+1} & \cdots & x_k & \cdots & x_n & b
\end{array}
$$

$$
\begin{pmatrix}
1 & \cdots & -\dfrac{a_{1k}}{a_{lk}} & \cdots & 0 & a'_{1,m+1} & \cdots & 0 & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & +\dfrac{1}{a_{lk}} & \cdots & 0 & a'_{l,m+1} & \cdots & 1 & \cdots & a'_{l\,n} & b'_l \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & -\dfrac{a_{mk}}{a_{lk}} & \cdots & 1 & a'_{m,m+1} & \cdots & 0 & \cdots & a'_{mn} & b'_m
\end{pmatrix} \quad (25)
$$

(4) 由(25)式中可以看到$x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$，$x_m$的系数列向量构成$m \times m$单位矩阵;它是可行基。当非基变量$x_{m+1}, \ldots$，$x_l, \ldots, x_n$为零时，就得到一个基可行解$X^{(1)}$

$$X^{(1)} = \left(b_1', \cdots, b_{l-1}', 0, b_{l+1}', \cdots, b_m', 0, \cdots, b_l', \cdots, 0\right)^T$$

在上述系数矩阵的变换中，元素a_{lk}称为**主元素**，它所在列称为**主元列**，它所在行称为**主元行**，元素a_{lk}位置变换后为1。

例 试用上述方法计算前面例子的两个基变换。

解：约束方程组的系数矩阵写成增广矩阵

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 12 \end{array}\right) \end{array}$$

当以x_3,x_4,x_5为基变量，x_1,x_2为非基变量，令$x_1,x_2=0$，可得到一个基可行解

$$X^{(0)}=(0,0,8,16,12)^{\mathrm{T}}$$

$$z=0+2x_1+3x_2$$

现用x_2去替换x_5，于是将$x_{3,}$,x_4, x_2的系数矩阵变换为单位矩阵，经变换后为

$$
\begin{array}{cccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\
\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 2 \\
4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 16 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & 3
\end{array}\right)
$$

令非基变量x_1,x_5=0，得到新的基可行解

$$X^{(1)}=(0,3,2,16,0)^{\mathrm{T}}$$