数值优化：程序作业 02

讲师：黄文，厦门大学
截止日期 4 月 13 日 14:20:00（上课前 10 分钟）截止

2022 年 3 月 26 日

1 实现功能概述

实现一个求解线性规划的内点算法（细节见后面部分，另提供模版）：

- 实现 slides 3-2 中，33-35 页的 practical primal-dual 内点法
- 在系数为 $A(XS^{-1})A^T$ 的线性方程求解中使用 QR 分解

2 测试问题

测试随机产生的线性规划问题：

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^T x, \text{ subject to } Ax = b \text{ and } x \geq 0 \tag{2.1}$$

这里 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$，$b \in \mathbb{R}^m$，$c \in \mathbb{R}^n$ 并且都由 Matlab 函数 $randn$ 产生。

- **对比 Matlab 自带求解器 linprog 与自己实现的求解器**
  内点算法算法的在以下几种情况下终止：
  - $\|[r^c; r^b]\|_2 < \text{tol}$ 并且 $\mu < tol$，其中 tol 为用户给定的决定精度的参数，μ 是 duality measure，r^c 与 r^b 的定义见 slides 3-2。该条件满足在用户要求的精度下找到了解。
  - $iter >$ max iteration，也就是当迭代数超过了用户给定的最大迭代步数。
  - $|c^T x| > 1/eps$，其中 eps 为机器精度。该条件满足表示最优值无下界。
  - $\|r^b\|/\|r^b_{\min}\| > 1.01$ 并且 $\|r^b\| > \text{tol}$，这里 $\|r^b_{\min}\|$ 为到目前迭代为止 $\|r^b\|$ 的最小值，tol 的定义与第一个判断条件相同。
  - $\|r^c\|/\|r^c_{\min}\| > 1.01$ 并且 $\|r^c\| > \text{tol}$，这里 $\|r^c_{\min}\|$ 为到目前迭代为止 $\|r^c\|$ 的最小值，tol 的定义与第一个判断条件相同。
  - 线性系统没法正确的求解。

  注意线性规划问题的解有如下三种情况。

  - 可行域为空集。
  - 最优值无下界，也就是为 $-\infty$。
  - 解存在。

  另 $m = 10$，$n = 20$。随机生成 100 次问题，用 Matlab 自带求解器 linprog 求解线性规划问题并输出以上三种情况的个数。用自带求解器求解线性规划问题，输出五种终止条件的解得个数。观察当解存在时，两种方法是否都能找到解。

  Matlab 自带函数 linprog 默认使用一种单纯型法，通过下面方法生成保证有可行域的问题：

Listing 1: 生成问题

```
xfeasible = randn(n, 1); xfeasible(find(xfeasible < 0)) = 0;
A = randn(m, n);
b = A * xfeasible;
c = randn(n, 1);
```

令其中 $n = 500, m = 300$。随机生成 10 次问题并比较两种算法。输出两种算法的计算时间的平均值以及两种算法得到的函数值最小值之差的平均值，给出你的观察结论。

3 要求

- 最大迭代步数为 100。tol 设置为 10^{-7}。Slides 3-2 的 34 页种 η_k 取法按照 $\eta_0 = 0.9, \eta_{k+1} = 1 - (1 - \eta_k)/2$ 来取。

- 内点法种的线性系统按照 Slides 3-2 中 36 页来求解。其中关于系数为 $A(XS^{-1})A^T$ 的线性系统使用 QR 分解来求解。如果使用无修改的 Cholesky 分解来求解这个线性系统，会出现什么问题?

参考文献