4、基变换

- 若初始基可行解$X^{(0)}$不是最优解及不能判别无界时，需要找一个新的基可行解。
- 具体做法是：
  - 从原可行解基中换一个列向量(当然要保证线性独立)，得到一个新的可行基，称为基变换。为了换基，先要确定换入变量，再确定换出变量，让它们相应的系数列向量进行对换，就得到一个新的基可行解。

（1）. 换入变量的确定

- 由(16)式可知，当某些$\sigma_j>0$时，若x_j增大，则目标函数值还可以增大。这时需要将某个非基变量x_j换到基变量中去(称为换入变量)。
- 若有两个以上的$\sigma_j>0$，那么选哪个非基变量作为换入变量呢?为了使目标函数值增加得快，从直观上看应选$\sigma_j>0$中的较大者，即若

$$\max_j(\sigma_j>0)=\sigma_k$$

则应选择x_k为换入变量。

也可以任选或按最小足码选。

（2）. 换出变量的确定

- 设P_1，P_2，…，P_m是一组线性独立的向量组，它们对应的基可行解是$X^{(0)}$，将它代入约束方程组(11)得到

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^{(0)} P_i = b \qquad (17)$$

- 其他的向量$P_{m+1}, P_{m+2}, \ldots, P_{m+t}, \ldots, P_n$都可以用$P_1$，$\mathrm{P}_2$，…，$P_m$线性表示。
- 若确定非基变量P_{m+t}为换入变量，必然可以找到一组不全为0的数(i=1,2,…,m)使得

$$P_{m+t} = \sum_{i=1}^{m} \beta_{i,m+t} P_i \quad \text{或} \quad P_{m+t} - \sum_{i=1}^{m} \beta_{i,m+t} P_i = 0 \qquad (18)$$

- 在(18)式两边同乘一个正数θ，然后将它加到(17)式上，得到

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^{(0)} P_i + \theta\left(P_{m+t} - \sum_{i=1}^{m} \beta_{i,m+t} P_i \right) = b \quad \text{或}$$

$$\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}} \left(x_i^{(0)} - \theta\beta_{i,m+t} \right) P_i + \theta P_{m+t} = b \qquad (19)$$

当 θ 取适当值时，就能得到满足约束条件的一个可行解(即非零分量的数目不大于 m 个)。

就应使$\left(x_i^{(0)} - \theta\beta_{i,m+t}\right)$, $i = 1,2,\cdots,m$.中的某一个为零，

并保证其余的分量为非负。

这个要求可以用以下的办法达到：

比较各比值$\left(x_i^{(0)} - \theta\beta_{i,m+t}\right)$, $i = 1,2,\cdots,m$ 。

又因为 θ 必须是正数，所以只选择$\dfrac{x_i^{(0)}}{\beta_{i,m+t}}$ $(i = 1,2,\cdots,m)$ $(\beta_{i,m+t} > 0)$

中比值最小的等于 θ 。

- 以上描述用数学式表示为：

$$\theta=\min_i\left(\frac{x_i^{(0)}}{\beta_{i,m+t}}\middle|\beta_{i,m+t}>0\right)=\frac{x_l^{(0)}}{\beta_{l,m+t}}$$

这时 x_l 为换出变量。按最小比值确定 θ 值，称为最小比值规则。将 $\theta=\dfrac{x_l^{(0)}}{\beta_{l,m+t}}$ 代入 X 中，便得到新的基可行解。

$$\sum_{i=1}^{m}x_i^{(0)}P_i+\theta\left(P_{m+t}-\sum_{i=1}^{m}\beta_{i,m+t}P_i\right)=b \quad 或$$

$$\sum_{i=1}^{\mathrm{m}}\left(x_i^{(0)}-\theta\beta_{i,m+t}\right)P_i+\theta P_{m+t}=b \qquad (19)$$

- 新的基可行解为

第l个分量

$\downarrow$

$$X^{(1)} = \left(x_1^{(0)} - \frac{x_l^{(0)}}{\beta_{l,m+t}} \cdot \beta_{1,m+t}, \cdots, 0, \cdots, \right.$$

$$\left. x_m^{(0)} - \frac{x_l^{(0)}}{\beta_{l,m+t}} \cdot \beta_{m,m+t}, \cdots, 0, \frac{x_l^{(0)}}{\beta_{l,m+t}}, \cdots, 0, \right)$$

$\uparrow$

第$m+t$个分量

- 由此得到由$X^{(0)}$转换到$X^{(1)}$的各分量的转换公式

$$x_i^{(1)} = \begin{cases} x_i^{(0)} - \dfrac{x_l^{(0)}}{\beta_{l,m+t}} \cdot \beta_{i,m+t} & i \neq m+t \\ \dfrac{x_l^{(0)}}{\beta_{l,m+t}} & i = m+t \end{cases}$$

$$\beta_{i,m+t} = 0, i = m+1, m+2, \cdots, n$$

- 现在的问题是，这个新解$X^{(1)}$的m个非零分量对应的列向量是否线性独立?

- 事实上，因为$X^{(0)}$的第l个分量对应于$X^{(1)}$的相应分量是零，即

$$x_l^{(0)} - \theta\beta_{l,m+t} = 0$$

其中 $x_l^{(0)},\theta$ 均不为零，根据 θ 规则(最小比值)，

$\beta_{l,m+t} \neq 0$。$x^{(1)}$ 中的 m 个非零分量对应的 m 个列向量是 P_j(j=1, 2, ⋯, m, $j \neq l$) 和 P_{m+t}。若这组向量不是线性独立，则一定可以找到不全为零的数 α_j，使下式成立：

$$P_{m+t} = \sum_{j=1}^{m} a_j P_j, \quad j \neq l \qquad (20)$$

又因

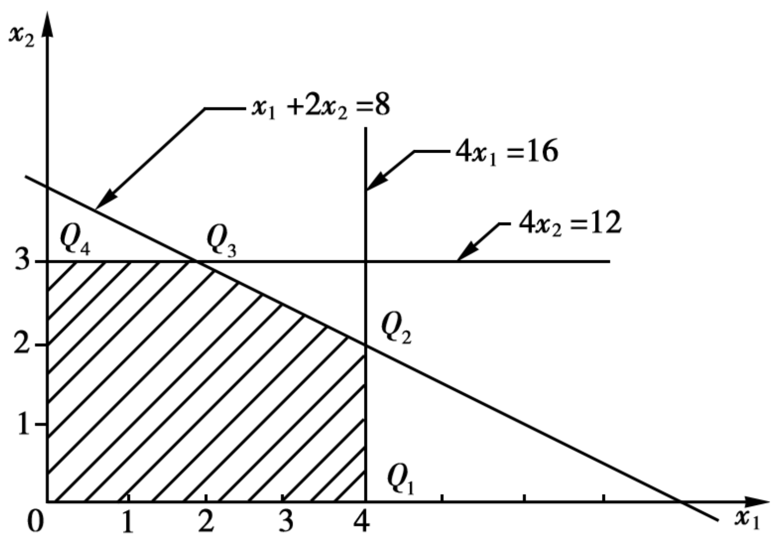
$$P_{m+t} = \sum_{j=1}^{m} \beta_{j,m+t} P_j, \qquad (21)$$

将(21)式减(20)式得到

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq l}}^{m} (\beta_{j,m+t} - a_j) P_j + \beta_{l,m+t} P_l = 0$$

•由于上式中至少有$\beta_{l,m+t} \neq 0$，所以上式表明P_1，P_2，…，P_m是线性相关，这与假设相矛盾。

- 由此可见，$X^{(1)}$的m个非零分量对应的列向量$P_j(j=1,2,\ldots,m,j\neq l)$与$P_{\mathrm{m+t}}$是线性独立的，即经过基变换得到的解是基可行解。
- 实际上，从一个基可行解到另一个基可行解的变换，就是进行一次基变换。从几何意义上讲，就是从可行域的一个顶点转向另一个顶点。



四、单纯形法的计算步骤

1. 单纯型表
2. 计算步骤

2. 计算步骤

- （1）按数学模型确定初始可行基和初始基可行解。

- （2）计算各非基变量x_j的检验数，$\boxed{\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij},}$
  检查检验数，若所有检验数
  $\boxed{\sigma_j \le 0,\ j = 1,2,\cdots n}$
  则已得到最优解，可停止计算。否则转入下一步。

- (3) 在$\sigma_j>0$, $j=m+1,\ldots,n$中，若有某个σ_k对应x_k的系数列向量$P_k\leq 0$，则此问题是无界，停止计算。否则，转入下一步。

- (4) 根据$\max(\sigma_j>0)=\sigma_k$，确定$x_k$为换入变量，按$\theta$规则计算

$$\theta=\min\left(\frac{b_i}{a_{ik}}\middle|a_{ik}>0\right)=\frac{b_l}{a_{lk}}$$

可确定x_l为换出变量，转入下一步。

(5) 以a_{lk}为主元素进行迭代(即用高斯消去法或称为旋转运算)，把x_k所对应的列向量

$$P_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{lk} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix} \quad \text{变换} \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow \text{第}l\text{行} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

重复(2)～(5)，直到终止。

1. 单纯型表

- 为了便于理解计算关系，现设计一种计算表，称为单纯形表，其功能与增广矩阵相似。
- 将线性规划（目标函数与约束条件）改写成n+1个变量，m+1个方程的方程组。

$$
\begin{array}{lllll}
x_1 & & + a_{1m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\
& x_2 & + a_{2m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\
& \ddots & & \\
& & x_m + a_{mm+1}x_{m+1} + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m
\end{array}
$$

$$
-z + c_1x_1 + \cdots + c_mx_m + c_{m+1}x_{m+1} + \cdots + c_nx_n = 0
$$

- 为了便于迭代运算，可将上述方程组写成增广矩阵形式

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc|c}
-z & x_1 & x_2 & \cdots & x_m & x_{m+1} & \cdots & x_n & b
\end{array}\\
\left(\begin{array}{cccccccc|c}
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,m+1} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{2,m+1} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{m,m+1} & \cdots & a_{mn} & b_m \\
1 & c_1 & c_2 & \cdots & c_m & c_{m+1} & \cdots & c_n & 0
\end{array}\right)
\end{array}
$$

- 若将z看作不参与基变换的基变量，它与$x_1,x_2,\ldots,x_m$的系数构成一个基，这时可采用行初等变换将$c_1,c_2,\ldots,c_m$变换为零，使其对应的系数矩阵为单位矩阵。得到

$$
\begin{array}{ccccccccc}
-z & x_1 & x_2 & \cdots & x_m & x_{m+1} & \cdots & x_n & b \\
\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{cccccccc|c}
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,m+1} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{2,m+1} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{m,m+1} & \cdots & a_{mn} & b_m \\
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{m+1}-\sum_{i=1}^{m} c_i a_{i,m+1} & \cdots & c_n-\sum_{i=1}^{m} c_i a_{in} & -\sum_{i=1}^{m} c_i b_i
\end{array}\right)
$$

根据上述增广矩阵设计初始单纯形表。

$c_j \rightarrow$			c_1	$\cdots$	c_m	c_{m+1}	$\cdots$	c_n	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	$\cdots$	x_m	x_{m+1}	$\cdots$	x_n	
c_1	x_1	b_1	1	$\cdots$	0	$a_{1,m+1}$	$\cdots$	a_{1n}	θ_1
c_2	x_2	b_2	0	$\cdots$	0	$a_{2,m+1}$		a_{2n}	θ_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
c_m	x_m	b_m	0	$\cdots$	1	$a_{m,m+1}$	$\cdots$	a_{mn}	θ_m
	$-z$	$-\sum_{i=1}^{m} c_i b_i$	0	$\cdots$	0	$c_{m+1} - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{i,m+1}$	$\cdots$	$c_n - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{in}$	

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 4x_1 + x_4 = 16 \\ 4x_2 + x_5 = 12 \\ x_j \geq 0 \quad j = 1,2,\cdots,5 \end{cases}$$

目标函数中各变量的价值系数。

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
0	x_3	8	1	2	1	0	0	8/2=4
0	x_4	16	4	0	0	1	0	–
0	x_5	12	0	[4]	0	0	1	12/4=3
−z		0	2	3	0	0	0	

基变量

2.由它确定为换出变量

3.确定主元素

1.由它确定为换入变量

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
0	x_3	2	[1]	0	1	0	−1/2	2
0	x_4	16	4	0	0	1	0	4
3	x_2	3	0	1	0	0	1/4	−
−z		−9	2	0	0	0	−3/4	

换出变量

换人变量

主元素

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
2	x_1	2	1	0	1	0	−1/2	−
0	x_4	8	0	0	−4	1	[2]	4
3	x_2	3	0	1	0	0	1/4	12
−z		−13	0	0	−2	0	1/4	

换出变量

换入变量

主元素

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	X_4	x_5	
2	x_1	4	1	0	0	1/4	0	
0	x_5	4	0	0	−2	1/2	1	
3	x_2	2	0	1	1/2	−1/8	0	
−z		−14	0	0	−3/2	−1/8	0	

最后一行的所有检验数都已为负或零，这表示目标函数值已不可能再增大，于是得到最优解$X^*=X^{(3)}=(4,2,0,0,4)^T$

目标函数的最大值 $z^*=14$

- 五、单纯形法的进一步讨论

- **5.1** 人工变量法
- **5.2** 退化
- **5.3** 检验数的几种表示形式

人工变量法

1. 大M法
2. 两阶段法

设线性规划问题的约束条件 $\sum_{j=1}^{n} P_j x_j = b$

其中没有可作为初始基的单位矩阵，则分别给每一个约束方程加入人工变量$x_{n+1},\ldots,x_{n+m}$，得到

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \qquad + x_{n+2} & = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \cdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \qquad\qquad + x_{n+m} & = b_m \\ x_1, \cdots, x_n \geq 0; \quad x_{m+1}, \cdots, x_{n+m} \geq 0 & \end{cases}$$

- 以$x_{n+1},\ldots$，x_{n+m}为基变量，并可得到一个$m\times m$单位矩阵。令非基变量$x_1,\ldots,x_n$为零，便可得到一个初始基可行解 $X^{(0)}=(0,0,\ldots,0,b_1,b_2,\ldots,b_m)^T$
- 因为人工变量是后加入到原约束条件中的虚拟变量，要求经过基的变换将它们从基变量中逐个替换出来。
- 基变量中不再含有非零的人工变量，这表示原问题有解。
- 若在最终表中当所有$c_j-z_j\le 0$，而在其中还有某个非零人工变量，这表示原问题无可行解。
- 以下讨论如何解含有人工变量的线性规划问题。

1. 大M法

- **例**　现有线性规划问题，试用大M法求解。

$$\min z = -3x_1 + x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \le 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 3 \\ -2x_1 + x_3 = 1 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

- **解** 在上述问题的约束条件中加入松弛变量x_4，剩余变量x_5，得到

$$
\begin{aligned}
&\min z = -3x_1 + x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\
&\begin{cases}
x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\
-4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 3 \\
-2x_1 + x_3 = 1 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{cases}
\end{aligned}
$$

- 在上述问题的约束条件中加入人工变量x_6,x_7，得到

$$\min z = -3x_1 + x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 + Mx_6 + Mx_7$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 3 \\ -2x_1 + x_3 + x_7 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{cases}$$

这里M是一个任意大的正数。

- 因本例的目标函数是要求min，所以用所有$c_j - z_j \geq 0$来判别目标函数是否实现了最小化.

$c_j \rightarrow$			-3	1	1	0	0	M	M	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ_i
0	x_4	11	1	-2	1	1	0	0	0	
M	x_6	3	-4	1	2	0	-1	1	0	
M	x_7	1	-2	0	1	0	0	0	1	
		0	-3	1	1	0	0	M	M	

$c_j \rightarrow$			-3	1	1	0	0	M	M	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ_i
0	x_4	11	1	-2	1	1	0	0	0	11
M	x_6	3	-4	1	2	0	-1	1	0	3/2
M	x_7	1	-2	0	[1]	0	0	0	1	1
		-4M	-3+6M	1-M	1-3M	0	M	0	0	

$c_j \rightarrow$			-3	1	1	0	0	M	M	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	x_4	10	3	-2	0	1	0	0	-1	
M	x_6	1	0	[1]	0	0	-1	1	-2	1
1	x_3	1	-2	0	1	0	0	0	1	
		-1-M	-1	1-M	0	0	M	0	3M-1	
0	x_4	12	[3]	0	0	1	-2	2	-5	4
1	x_2	1	0	1	0	0	-1	1	-2	
1	x_3	1	-2	0	1	0	0	0	1	
		-2	-1	0	0	0	1	M-1	M+1	
-3	x_1	4	1	0	0	1/3	-2/3	2/3	-5/3	
1	x_2	1	0	1	0	0	-1	1	-2	
1	x_3	9	0	0	1	2/3	-4/3	4/3	-7/3	
		2	0	0	0	1/3	1/3	M-1/3	M-2/3	

- 从上表的最终计算结果可看出，已得到最优解：

$x_1=4, x_2=1, x_3=9$，$x_4=x_5=x_6=x_7=0$；目标函数$z=-2$。

2. 两阶段法

- 第一阶段：不考虑原问题是否存在基可行解；给原线性规划问题加入人工变量，并构造仅含人工变量的目标函数和要求实现最小化。

目标函数 $\min \omega = x_{n+1} + \cdots + x_{n+m} + 0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n$

约束条件
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n \qquad + x_{n+2} & = b_2 \\ \qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots\cdots + a_{m}x_n \qquad\qquad + x_{n+m} & = b_m \\ x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+m} \geq 0 & \end{cases}$$

- 第一阶段求解
  - 用单纯形法求解上述模型。若得到的最优值w=0，说明原问题存在基可行解，可以进行第二段计算。否则原问题无可行解，应停止计算。
- 第二阶段求解
  - 从第一阶段计算得到的最终表中除去人工变量，将目标函数行的系数，换为原问题的目标函数系数，作为第二阶段计算的初始表。

- **例** 试用两阶段法求解如下线性规划问题：

目标函数 $\min z = -3x_1 + x_2 + x_3$

约束条件 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \le 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 3 \\ -2x_1 + x_3 = 1 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$

- **解**: 先在上述线性规划问题的约束方程中加入人工变量，给出第一阶段的数学模型为：

目标函数 $\min \omega = x_6 + x_7$

约束条件 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 3 \\ -2x_1 + x_3 + x_7 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \ge 0 \end{cases}$

$c_j \rightarrow$			0	0	0	0	0	1	1	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ_i
0	x_4	11	1	-2	1	1	0	0	0	11
1	x_6	3	-4	1	2	0	-1	1	0	3/2
1	x_7	1	-2	0	[1]	0	0	0	1	1
		-4(0)	6(0)	-1(0)	-3(0)	0(0)	1(0)	0(1)	0(1)	
0	x_4	10	3	-2	0	1	0	0	-1	-
1	x_6	1	0	[1]	0	0	-1	1	-2	1
0	x_3	1	-2	0	1	0	0	0	1	-
		-1	0	-1	0	0	1	0	3	
0	x_4	12	3	0	0	1	-2	2	-5	
0	x_2	1	0	1	0	0	-1	1	-2	
0	x_3	1	-2	0	1	0	0	0	1	
		0	0	0	0	0	0	1	1	

- 第一阶段用单纯形法求解，求得的结果是w=0，最优解是$x_1=0,x_2=1,x_3=1,x_4=12,x_5=x_6=x_7=0$
- 因为人工变量$x_6=x_7=0$，所以(0，1，1，12，0)^{T}是原线性规划问题的基可行解。

- 将第一阶段的最终表中的人工变量删除，填入原问题的目标函数系数，进行第二阶段计算：

$c_j \rightarrow$			-3	1	1	0	0	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_4	12	[3]	0	0	1	-2	4
1	x_2	1	0	1	0	0	-1	-
1	x_3	1	-2	0	1	0	0	-
		-2(0)	-1(-3)	0(1)	0(1)	0(0)	1(0)	
-3	x_1	4	1	0	0	1/3	-2/3	
1	x_2	1	0	1	0	0	-1	
1	x_3	9	0	0	1	2/3	-4/3	
		2	0	0	0	1/3	1/3	

- 从而得到最优解：$x_1=4, x_2=1, x_3=9$, 目标函数值 $z=-2$

注1：退化

- 在单纯形法计算中用θ规则确定换出变量时，有时存在两个以上相同的最小比值，这样在下一次迭代中就有一个或几个基变量等于零，这就出现了退化解。
- 这时换出变量$x_l=0$，迭代后目标函数值不变。这时不同基表示为同一顶点。有人构造了一个特例，当出现退化时，进行多次迭代，而基从B_1,B_2，…又返回到B_1，即出现计算过程的循环，便永远达不到最优解。

- 尽管实际计算过程中循环现象极少出现，但还是有可能发生的。如何解决这问题? 先后有人提出了“摄动法”，“字典序法”。
- 1974年由勃兰特(Bland)提出一种简便的规则，简称勃兰特规则：
  - (1) 选取$c_j - z_j > 0$中下标最小的非基变量x_k为换入变量，即 $k=\min(j \mid c_j - z_j > 0)$
  - (2) 当按θ规则计算存在两个和两个以上最小比值时，选取下标最小的基变量为换出变量。
- 按勃兰特规则计算时，一定能避免出现循环。

注2：检验数的几种表示形式

- 设$x_1,x_2,\ldots,x_m$为约束方程的基变量，$x_i = b_i - \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = 1,2,\cdots,m$
  - 将它们代入目标函数后，可有两种表达形式

$$(1) \quad z = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i + \sum_{j=m+1}^{n} (c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}) x_j$$

$$= z_0 + \sum_{j=m+1}^{n} (c_j - z_j) x_j$$

$$(2) \quad z = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i - \sum_{j=m+1}^{n} (\sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j) x_j$$

$$= z_0 - \sum_{j=m+1}^{n} (z_j - c_j) x_j$$

检验数 \ 标准型	max $z=CX$ $AX=b, X\geqslant 0$	min $z=CX$ $AX=b, X\geqslant 0$
c_j-z_j z_j-c_j	$\leqslant 0$ $\geqslant 0$	$\geqslant 0$ $\leqslant 0$

5.4 单纯形法小结

- (1) 根据实际问题给出数学模型，列出初始单纯形表。进行标准化，见下表。分别以每个约束条件中的松弛变量或人工变量为基变量，列出初始单纯形表。

变量	$x_j \geqslant 0$ $x_j \leqslant 0$ x_j无约束	不需要处理 令 $x'_j=-x_j, x'_j \geqslant 0$ 令 $x_j=x'_j-x''_j$， $x'_j, x''_j \geqslant 0$
约束条件	$b \geqslant 0$ $b<0$ $\geqslant$ $=$ $\leqslant$	不需要处理 约束条件两端同乘-1 加松弛变量 加人工变量 减去剩余（松弛）变量，加人工变量
目标函数	max z min z 加入变量的系数 松弛变量 人工变量	不需要处理 令 $z'=-z$，求 max z' 0 -M

六、 应用举例

- 一般讲，一个经济、管理问题凡满足以下条件时，才能建立线性规划模型。
  - (1) 要求解问题的目标函数能用数值指标来表示，且为线性函数；
  - (2) 存在着多种方案及有关数据；
  - (3) 要求达到的目标是在一定约束条件下实现的，这些约束条件可用线性等式或不等式来描述。

- 例 （配料问题）某工厂要用三种原材料C、P、H混合调配出三种不同规格的产品A、B、D。已知产品的规格要求，产品单价，每天能供应的原材料数量及原材料单价列于下表。该厂应如何安排生产，使利润收入为最大?

产品名称	规 格 要 求	单价（元/kg）
A	原材料 C 不少于 50% 原材料 P 不超过 25%	50
B	原材料 C 不少于 25% 原材料 P 不超过 50%	35
D	不限	25

原材料名称	每天最多供应量（kg）	单价/(元/kg)
C	100	65
P	100	25
H	60	35

- **解：** 如以A_C表示产品A中C的成分，A_P表示产品A中P的成分，依次类推。

$$A_C \ge \frac{1}{2}A, \quad A_P \le \frac{1}{4}A, \quad B_C \ge \frac{1}{4}B, \quad B_P \le \frac{1}{2}B \quad (1)$$

$$A_C+A_P+A_H=A; \quad B_C+B_P+B_H=B \quad (2)$$

- 将(2)逐个代入(1)并整理得到

$$-\frac{1}{2}A_C+\frac{1}{2}A_P+\frac{1}{2}A_H \le 0$$

$$-\frac{1}{4}A_C+\frac{3}{4}A_P-\frac{1}{4}A_H \le 0$$

$$-\frac{3}{4}B_C+\frac{1}{4}B_P+\frac{1}{4}B_H \le 0$$

$$-\frac{1}{2}B_C+\frac{1}{4}B_P-\frac{1}{2}B_H \le 0$$

- 根据原材料供应数量的限额。加入到产品A、B、D的原材料C总量每天不超过100kg，P的总量不超过100kg，H总量不超过60kg。

$$A_C+B_C+D_C \leq 100$$

$$A_P+B_P+D_P \leq 100$$

$$A_H+B_H+D_H \leq 60$$

- 在约束条件中共有9个变量，为计算和叙述方便，分别用$x_1,\ldots,x_9$表示。令

$$x_1=\mathrm{A_c},\ x_2=\mathrm{A_p},\ x_3=\mathrm{A_H},$$

$$x_4=\mathrm{B_C},\ x_5=\mathrm{B_P},\ x_6=\mathrm{B_H},$$

$$x_7=\mathrm{D_C},\ x_8=\mathrm{D_P},\ x_9=\mathrm{D_H}.$$

- max z=50(x_1+x_2+x_3)+35(x_4+x_5+x_6)+25(x_7+x_8+x_9)

  - 65(x_1+x_4+x_7) - 25(x_2+x_5+x_8) - 35(x_3+x_6+x_9)

  =-15x_1+25x_2+15x_3-30x_4+10x_5-40x_7-10x_9

$$
\begin{cases}
-\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3 \le 0 \\
-\frac{1}{4}x_1+\frac{3}{4}x_2-\frac{1}{4}x_3 \le 0 \\
-\frac{3}{4}x_4+\frac{1}{4}x_5+\frac{1}{4}x_6 \le 0 \\
-\frac{1}{2}x_4+\frac{1}{2}x_5-\frac{1}{2}x_6 \le 0 \\
x_1+x_4+x_7 \le 100 \\
x_2+x_5+x_8 \le 100 \\
x_3+x_6+x_9 \le 60 \\
x_1,\cdots,x_9 \ge 0
\end{cases}
$$

- 为了得到初始解，在约束条件中加入松弛变量x_{10}～x_{16}，得到数学模型：

目标函数 $$\max z = -15x_1 + 25x_2 + 15x_3 - 30x_4 + 10x_5 - 40x_7 - 10x_9 + \\ + 0(x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16})$$

约束条件

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + x_{10} = 0 \\ -\frac{1}{4}x_1 + \frac{3}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_3 + x_{11} = 0 \\ -\frac{3}{4}x_4 + \frac{1}{4}x_5 + \frac{1}{4}x_6 + x_{12} = 0 \\ -\frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5 - \frac{1}{2}x_6 + x_{13} = 0 \\ x_1 + x_4 + x_7 + x_{14} = 100 \\ x_2 + x_5 + x_8 + x_{15} = 100 \\ x_3 + x_6 + x_9 + x_{16} = 60 \\ x_1, \cdots, x_9, x_{10}, \cdots, x_{16} \geq 0 \end{cases}$$

- 最优解
  - 用单纯形法计算，经过四次迭代，得最优解为：

    $x_1=100, x_2=50, x_3=50$

  - 这表示：需要用原料C为100kg，P为50kg，H为50kg，构成产品A。
  - 即每天只生产产品A为200kg，分别需要用原料C为100kg，P为50kg，H为50kg。
  - 从最终计算表中得到，总利润是z=500元/天。

例 **连续投资问题：**某部门在今后五年内考虑给下列项目投资，已知：

- 项目A，从第一年到第四年每年年初需要投资，并于次年末回收本利115%；
- 项目B，第三年初需要投资，到第五年末能回收本利125%，但规定最大投资额不超过4万元；
- 项目C，第二年初需要投资，到第五年末能回收本利140%，但规定最大投资额不超过3万元；
- 项目D，五年内每年初可购买公债，于当年末归还，并加利息6%。
- 该部门现有资金10万元，问它应如何确定给这些项目每年的投资额，使到第五年末拥有的资金的本利总额为最大?

解： (1) 确定决策变量

- 以x_{iA},x_{iB},x_{iC},x_{iD}(i=1,2,…，5)分别表示第i年年初给项目A，B，C，D的投资额，它们都是待定的未知变量。根据给定的条件，将变量列于下表中。

项目	第一年	第二年	第三年	第四年	第五年
A	x_{1A}	x_{2A}	x_{3A}	x_{4A}	/
B	/	/	x_{3B}	/	/
C	/	x_{2C}	/	/	/
D	x_{1D}	x_{2D}	x_{3D}	x_{4D}	x_{5D}

（2）投资额应等于手中拥有的资金额

由于项目D每年都可以投资，并且当年末即能回收本息。所以该部门每年应把资金全部投出去，手中不应当有剩余的呆滞资金。

- 第一年：该部门年初拥有100000元，所以有 $x_{1A}+x_{1D}=100000$
- 第二年：因第一年给项目A的投资要到第二年末才能回收。所以该部门在第二年初拥有资金额仅为项目D在第一年回收的本息$x_{1D}(1+6\%)$。于是第二年的投资分配是 $x_{2A}+x_{2C}+x_{2D}=1.06x_{1D}$

- 第三年初的资金额是从项目A第一年投资及项目D第二年投资中回收的本利总和：$x_{1A}(1+15\%)$及$x_{2D}(1+6\%)$。于是第三年的资金分配为

$$x_{3A}+x_{3B}+x_{3D}=1.15x_{1A}+1.06x_{2D}$$

- 第四年：$x_{4A}+x_{4D}=1.15x_{2A}+1.06x_{3D}$
- 第五年：$x_{5D}=1.15x_{3A}+1.06x_{4D}$

此外，由于对项目B、C的投资有限额的规定，即：

$$x_{3B}\le 40000$$

$$x_{2C}\le 30000$$

(3) 目标函数

问题是要求在第五年末该部门手中拥有的资金额达到最大，

与五年末资金有关的变量是：$x_{4A}, x_{3B}, x_{2C}, x_{5D}$

因此这个目标函数可表示为：

$$\max z=1.15x_{4A}+1.40x_{2C}+1.25x_{3B}+1.06x_{5D}$$