数值优化：习题作业 02

讲师：黄文，厦门大学
截止日期 4 月 13 日上课提交

2022 年 3 月 26 日

1. 在 3 维空间中，考虑二维平面和两个不在平面中的两个点 z_1 和 z_2。使用最优性条件来描述 x_*，这里 x_* 最小化了定义在二维平面中的函数 $f(x) = \|z_1 - x\| + \|z_2 - x\|$。

2. 考虑 3 维带约束优化问题

$$\min f(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + 0.1x_3^2) + 0.55x_3$$
$$\text{subject to } x_1 + x_2 + x_3 = 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

   求它的全局极小值。

3. 证明由

$$\begin{aligned} (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 &\leq 2 \\ (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 &\leq 2 \\ x_1 &\geq 0, \end{aligned}$$

   定义的可行域在点 $x^* = (0, 0)^T$ 出 MFCQ 成立，但是 LICQ 不成立。

4. 将以下不光滑带约束优化问题转换为光滑带约束优化问题：

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} |x_1^2 - 1| + |x_2|$$
$$\text{subject to } |x_1| + x_2 \leq 10.$$

5. 寻找抛物线 $y = \frac{1}{5}(x-1)^2$ 上最靠近 $(x, y) = (1, 2)$ 的点。这个问题可以被描述为下面优化问题：

$$\min f(x, y) = (x-1)^2 + (y-2)^2 \quad \text{subject to } (x-1)^2 = 5y.$$

   - 计算所有的 KKT 点。是否 LICQ 在这些点上成立?
   - 那些点是解。
   - 通过消去变量 x 可以将问题变为一个无约束优化问题。说明为什么这个无约束优化问题的解不能是原问题的解。

6. 考虑优化问题：

$$\min_{x \in \mathbb{B}^n} \frac{1}{2} x^T A x$$

   其中 A 为对称满秩矩阵并且 A 的最小特征值为负数，$\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T B x \leq 1\}$，$B$ 为对称正定矩阵。

- 计算目标函数的梯度，写出 Lagrangian 函数与 KKT 条件；
- 所有满足 KKT 条件的点有什么特点。其中哪一个或哪一些是全局最小值；

7. 将下面的两个线性规划问题转化为标准形式：

$$
\begin{aligned}
\min_{x,y,z} \; & x + 2y + 3z \\
\text{subject to: } & 2 \leq x + y \leq 3 \\
& 4 \leq x + z \leq 5 \\
& x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0
\end{aligned}
$$

和

$$
\begin{aligned}
\min_{x,y,z} \; & |x| + |y| + |z| \\
\text{subject to: } & x + y \leq 1 \\
& 2x + z = 3
\end{aligned}
$$

8. 证明线性规划中内点算法系数矩阵
$$
\begin{bmatrix} 0 & A^T & I \\ A & 0 & 0 \\ S & 0 & X \end{bmatrix}
$$
是满秩的当且仅当矩阵 A 是行满秩的。

9. 考虑线性规划问题
$$\min_{x_1,x_2} x_1, \text{ subject to } x_1 + x_2 = 1, (x_1, x_2) \geq 0$$
证明 $x^* = [0,1]^T$, $\lambda^* = 0$, $s^* = [1,0]^T$ 和 $x = [1,0]^T$, $\lambda = 1$, $s = [0,-1]^T$ 都是 $F(x, \lambda, s) = 0$ 的解。但是第二个解和线性规划问题无关。

10. 考虑二次规划问题：
$$
\begin{aligned}
\min_x \quad & q(x) = \tfrac{1}{2} x^T G x + x^T c \\
\text{s.t.} \quad & Ax - b = 0,
\end{aligned}
$$
其中 $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, 并且 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 是行满秩。令 Z 为 A 的零空间的一组基。如果 $Z^T G Z$ 有负特征值，那么上述问题没有有限解。

11. 考虑如下二次规划问题：
$$
\begin{aligned}
\min_{x\in\mathbb{R}^2} \; & (x_1 - 1)^2 + 4(x_2 - 2)^2 \\
\text{subject to } & x_2 + x_1 - 2 \leq 0 \\
& x_1 \geq -2 \\
& x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$
使用 active set method 求解该问题。初始点为 $x^0 = (-2, 1)^T$，初始 working set 为 $\mathcal{W}_0 = \{2\}$，写出每步过程。