数值优化：习题作业 01

讲师：黄文，厦门大学
截止日期 3 月 23 日上课提交

2022 年 3 月 6 日

1. 计算 $f(x) = 10(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$ 的梯度 $\nabla f(x)$ 以及海森矩阵 $\nabla^2 f(x)$。并证明 $x^* = (1,1)^T$ 是 f 唯一的一个局部极小值。并证明海森矩阵在 x^* 上是正定的。

2. 考虑二次凸优化问题 $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x$。其中

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

   当使用最速下降法求解该问题时，最少几步收敛，步长如何选取?

3. 设 $f \in C^2$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的凸函数。另 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$，$s = x_2 - x_1$, $y = \nabla f(x_2) - \nabla f(x_1)$，证明 $s^T y \geq 0$。

4. 利用 slides 04 定理二，证明

   - $r_{k+1}^T r_k = 0$;
   - 在线性共轭梯度法中，β_{k+1} 的两个形式等价，也就是 $\frac{r_{k+1}^T A p_k}{p_k^T A p_k} = \frac{r_{k+1}^T r_{k+1}}{r_k^T r_k}$。

5. 证明将 Polak-Ribiére、Hestenes-Steifel、以及 Dai-Yuan 的非线性共轭梯度法用来解决二次凸问题并使用精确步长时，非线性共轭梯度法退化成为线性共轭梯度法。

6. 函数 f 光滑。假设序列 $\{x_k\}$ 满足 $f(x_{k+1}) < f(x_k)$ 并且 $\liminf_{k\to\infty} \|\nabla f(x_k)\| = 0$。

   - 函数 f 有下界，能否推出 x_k 收敛? 为什么?
   - 函数的次水平集 $\{x : f(x) \leq f(x_0)\}$ 是紧集能否推出 x_k 收敛? 为什么?
   - 函数是凸的能否推出 x_k 收敛? 为什么?
   - 函数是强凸的能否推出 x_k 收敛? 为什么?

7. 推导当模长是加权模时，Cauchy point 的计算公式：

   - 计算 $p_* = \arg\min_{\|p\|_W \leq \Delta} g^T p$，这里 $\|v\|_W^2 = v^T W v$, W 是对称正定矩阵;
   - 计算 $\tau_* = \arg\min_{\tau \geq 0} \tau g^T p_* + \frac{1}{2}\tau^2 p_*^T B p_*$ 使得 $\|\tau p_*\|_W \leq \Delta$;
   - 给出 Cauchy point 的公式 $\tau_* p_*$。

   这个 Cauchy 点是带预条件信赖域算法中用到.