- 定义12：设π是一判定问题，$p(\cdot)$是任一多项式，用π_p表示π的这样一个子问题：它的任一输入长度为n的实例的最大数小于$p(n)$.如果存在某个多项式$p(\cdot)$使π_p是NP-完全的，则称π是强NP-完全的.

- 定理5：在P与NP不相等的假设下，强NP-完全问题不存在伪多项式时间算法.

- 划分问题不是强NP-完全的

- TSP-D是强NP-完全的

- 三元划分问题也是强NP-完全的

$$S=\{a_1,a_2,\cdots,a_{3n}\},\sum_{i=1}^{3n}a_i=nB,\frac{B}{4}<a_i<\frac{B}{2}.$$

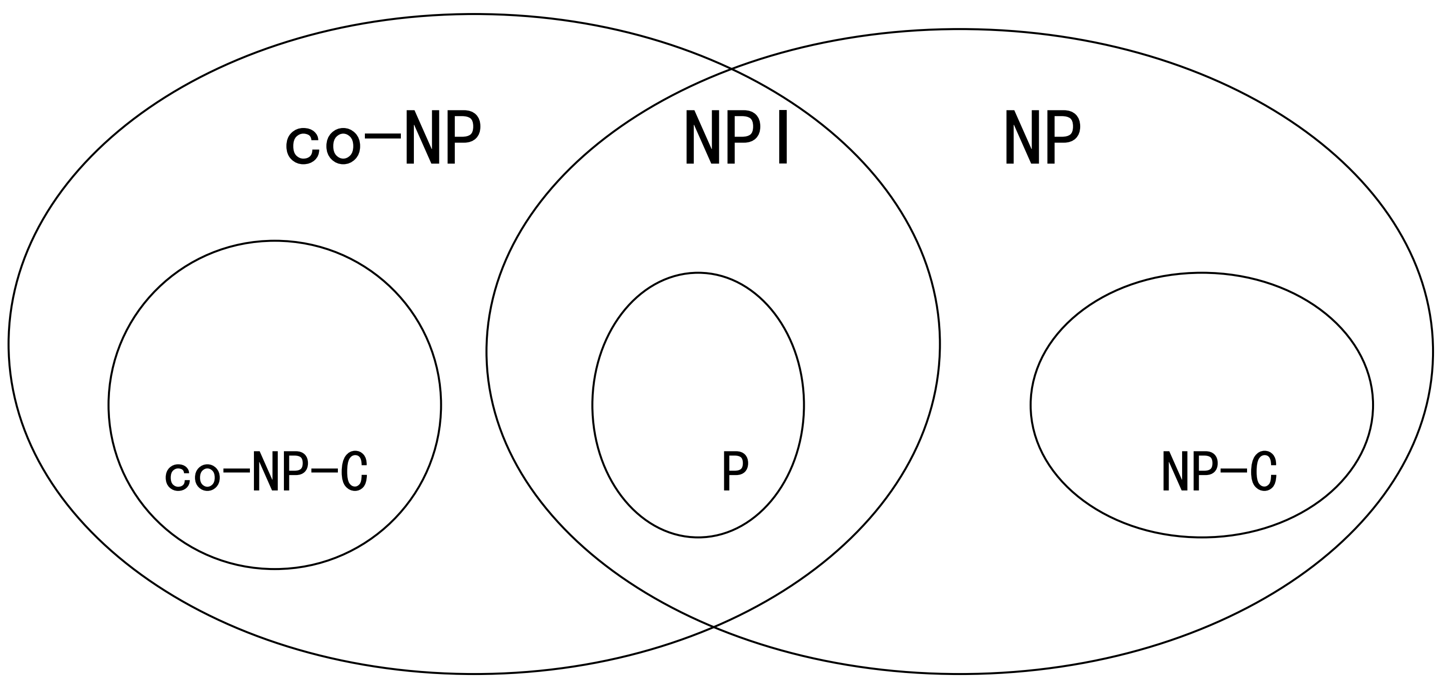
问：是否能将S分成n个不相交的子集，使每个子集中数的总和为B?

- 定义13：如果某优化问题π的判定问题是NP-完全的，则称问题π是NP-难的；如果判定问题是强NP-完全的，则称π是强NP-难的.

- 定理6：除非P=NP，NP-难问题没有多项式时间算法，强NP-难问题没有伪多项式时间算法.

- 定义14：co-NP类问题是由一些NP类问题的补组成的.
- 哈密顿圈的补问题：给定图G(V,E)，是否不存在一条每个顶点只经过一次的闭回路?
- 定义15：co-NP-完全问题：（1）它属于co-NP类；（2）所有co-NP问题都可以多项式时间归约到它.

- 定义16：若一个问题既属于NP类，又属于co-NP类，那么把它称作NP-Intermediate(NPI).
- 素数问题 $\longleftrightarrow$ 合数问题

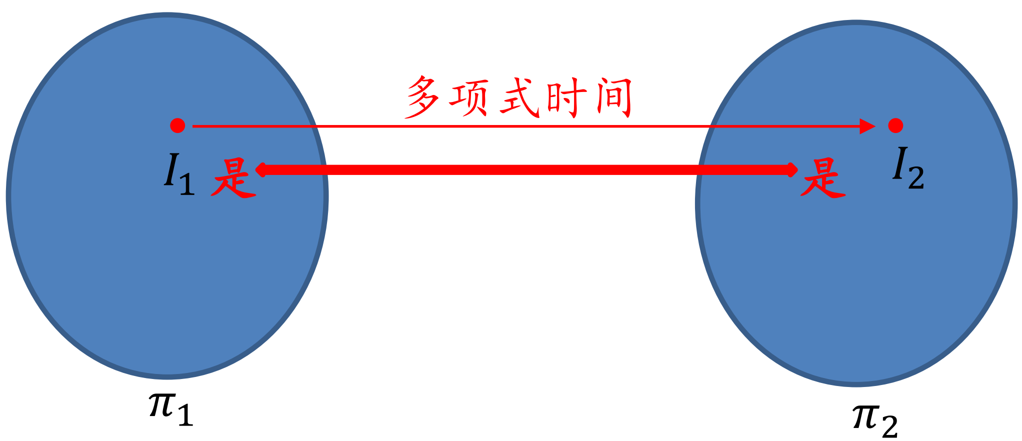


证明：3SAT问题是NP-完全的

- 定义10：如果NP类中所有问题都可以多项式时间归约到NP类中某个问题π，则称π是NP-完全问题.
- 定理3：如果π_1是NP-完全问题，$\pi_2 \in NP$，且π_1可以多项式时间归约到π_2，则π_2是NP-完全问题.

- 定义8：给定一个判定问题，如果存在一个算法，对任何一个答案为“是”的实例，该算法首先给出一个猜想，该猜想规模不超过实例输入长度的某个多项式函数，且验证猜想的正确性仅需多项式时间，那么称该问题属于NP类。

- 定义9：设有两个判定问题π_1,π_2，如果对π_1的任一实例I_1，可以多项式时间构造出π_2的一个实例I_2，使I_1的答案为“是”当且仅当I_2的答案为“是”，则称π_1可以多项式时间归约到π_2.



证明：3SAT问题是NP-完全的

1. $3SAT \in NP$

2. $SAT \Rightarrow 3SAT$

热身：$3SAT \longrightarrow SAT$

$$I_1 \longrightarrow I_2$$

$$\boxed{U, f} \longrightarrow \boxed{U, f}$$

证明：3SAT问题是NP-完全的

$$SAT \Rightarrow 3SAT$$

$$I_1 \longrightarrow I_2$$

$$SAT:\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}, f = c_1 \cdot c_2 \cdots c_m.$$

$$\Rightarrow 3SAT:\{y_i\}, F = C_1 \cdot C_2 \cdots$$

$$(1)\ c_i = (x_l + x_k + x_h) \Rightarrow C_i = (x_l + x_k + x_h);$$

$$(2)\ c_i = (x_l + x_k) \Rightarrow C_i = (x_l + x_k + y_{si}) \cdot (x_l + x_k + \overline{y_{si}});$$

$$(3)\ c_i = (x_l) \Rightarrow$$
$$C_i = (x_l + y_{ki} + y_{si}) \cdot (x_l + y_{ki} + \overline{y_{si}}) \cdot (x_l + \overline{y_{ki}} + y_{si}) \cdot (x_l + \overline{y_{ki}} + \overline{y_{si}});$$

$$(4)\ c_i = (x_1 + x_2 + \cdots + x_k) \Rightarrow C_i = (x_1 + x_2 + y_1) \cdot (x_3 + \overline{y_1} + y_2)$$
$$\cdot (x_4 + \overline{y_2} + y_3) \cdots (x_{k-2} + \overline{y_{k-4}} + y_{k-3})(x_{k-1} + x_k + \overline{y_{k-3}});$$

$$(4)\ c_i = (x_1 + x_2 + \cdots + x_k) \Rightarrow C_i = (x_1 + x_2 + y_1)\cdot(x_3 + \overline{y_1} + y_2)$$
$$\cdot(x_4 + \overline{y_2} + y_3)\cdots(x_{k-2} + \overline{y_{k-4}} + y_{k-3})(x_{k-1} + x_k + \overline{y_{k-3}});$$

$c_i = 1 \Rightarrow C_i = 1$（存在）

$$(a)\ x_1 + x_2 = 1 \Rightarrow y_s = 0, 1 \le s \le k-3.$$

$$(b)\ x_{k-1} + x_k = 1 \Rightarrow y_s = 1, 1 \le s \le k-3.$$

$$(c)\ x_l = 1(2 < l < k-1) \Rightarrow y_s = 1,\ 1 \le s \le l-2$$
$$y_s = 0,\ \ l-2 < s \le k-3.$$

$$(4)\ c_i=(x_1+x_2+\cdots+x_k)\Rightarrow C_i=(x_1+x_2+y_1)\cdot(x_3+\overline{y_1}+y_2)$$
$$\cdot(x_4+\overline{y_2}+y_3)\cdots(x_{k-2}+\overline{y_{k-4}}+y_{k-3})(x_{k-1}+x_k+\overline{y_{k-3}});$$

$C_i=1\Rightarrow c_i=1$（存在）

$(a)\ y_1=0\Rightarrow x_1+x_2=1\Rightarrow c_i=1;$

$(b)\ y_{k-3}=1\Rightarrow x_{k-1}+x_k=1\Rightarrow c_i=1;$

$$(c)\ \begin{array}{l} y_1=1(x_1+x_2=0),\\ \overline{y_{k-3}}=1(x_{k-1}+x_k=0)\Rightarrow \end{array} \quad \begin{array}{l} x_3+y_2=1\\ x_4+\overline{y_2}+y_3=1\\ \cdots\\ x_{k-3}+\overline{y_{k-5}}+y_{k-4}=1\\ x_{k-2}+\overline{y_{k-4}}=1 \end{array}$$

若 $c_i=(x_1+x_2+\cdots+x_k)=0\Rightarrow y_{k-4}=\overline{y_{k-4}}=1$，矛盾.

$$c_i = 1 \Rightarrow C_i = 1\text{（存在）}$$
$$C_i = 1 \Rightarrow c_i = 1\text{（存在）}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$c_i = 1 \Rightarrow C_i = 1\text{（存在）}$$
$$c_i = 0 \Rightarrow C_i = 0\text{（一定）}$$

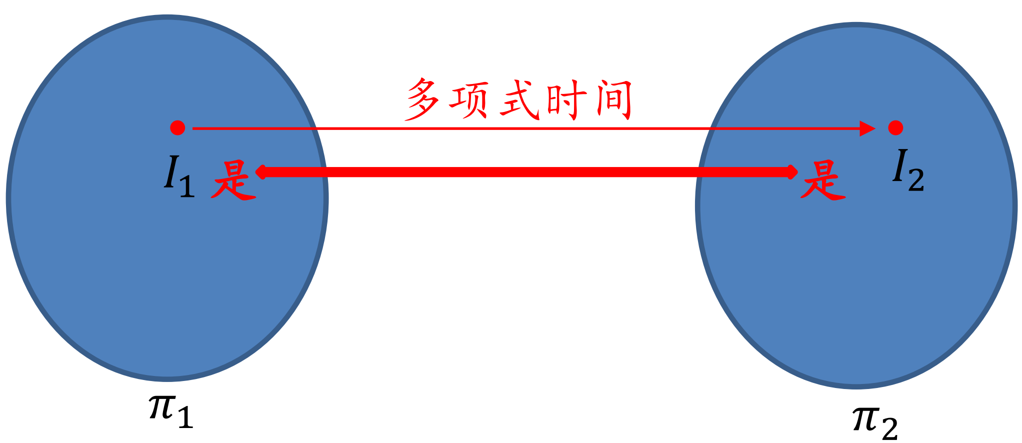
$$(4)\ c_i = (x_1 + x_2 + \cdots + x_k) \Rightarrow C_i = (x_1 + x_2 + y_1)\cdot(x_3 + \overline{y_1} + y_2)$$
$$\cdot(x_4 + \overline{y_2} + y_3)\cdots(x_{k-2} + \overline{y_{k-4}} + y_{k-3})(x_{k-1} + x_k + \overline{y_{k-3}});$$

$$c_i = 0 \Rightarrow C_i = 0\text{（一定）}$$

$$y_1 = 1$$
$$y_2 = 1$$
$$\cdots$$
$$y_{k-3} = 1$$
$$\overline{y_{k-3}} = 0$$

证明：图的着色问题是NP-完全的

- 给定无向图G=(V,E)及正整数K，问：是否可以用K种颜色为V中顶点着色，即V中的每一个顶点分配一种颜色，使得不会有两个相邻顶点具有相同颜色.



证明：图的着色问题是NP-完全的

1. $COLORING \in NP$
2. $3SAT \Rightarrow COLORING$

$3SAT:\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}, f = c_1 \cdot c_2 \cdots c_m, |c_i| = 3, n \geq 4.$

$\Rightarrow COLORING: G(V, E); K$

$3SAT: f$ 可满足 $\Rightarrow COLORING: G(V, E); K$可着色

$COLORING: G(V, E); K$可着色 $\Rightarrow 3SAT: f$ 可满足

证明：图的着色问题是NP-完全的

2. $3SAT \Rightarrow COLORING$

$3SAT:\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}, f=c_1\cdot c_2\cdots c_m, |c_i|=3, n\geq 4.$

$\Rightarrow COLORING:G(V,E);K$

$3SAT:f$ 可满足 $\Rightarrow COLORING:G(V,E);K$可着色

$COLORING:G(V,E);K$可着色 $\Rightarrow 3SAT:f$ 可满足

$$V=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\cup\{\overline{x_1},\overline{x_2},\cdots,\overline{x_n}\}\cup\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}\cup\{c_1,c_2,\cdots,c_m\}$$

$$E=\{(x_i,\overline{x_i})\}\cup\{(x_j,y_i)\mid i\neq j\}\cup\{(\overline{x_j},y_i)\mid i\neq j\}$$

$$\cup\{(y_i,y_j)\mid i\neq j\}\cup\{(x_i,c_k)\mid x_i\notin c_k\}\cup\{(\overline{x_i},c_k)\mid\overline{x_i}\notin c_k\}$$

$$K=n+1$$

$(1)\{(y_i, y_j) \mid i \neq j\}, y_i$着颜色$i$

$(2)\{(x_j, y_i) \mid i \neq j\} \cup \{(\overline{x_j}, y_i) \mid i \neq j\}, x_i, \overline{x_i}$着颜色$i$或$n+1$

$(3)\{(x_i, \overline{x_i})\}, x_i$着颜色$i, \overline{x_i}$着颜色$n+1$;或者相反

$(4)\{(x_i, c_k) \mid x_i \notin c_k\} \cup \{(\overline{x_i}, c_k) \mid \overline{x_i} \notin c_k\}, n \geq 4 \Rightarrow c_k$不能着$n+1$

$3SAT: f$ 可满足 $\Rightarrow COLORING: G(V, E); K$可着色

$c_k = x_r + x_s + x_t$,若x_r真，则c_k着色r

$COLORING: G(V, E); K$可着色 $\Rightarrow 3SAT: f$ 可满足