Filip Jay Doba
Škola: ŠpMNDaG
Ročník: 4.

Na začiatok si všimnime, že operátor $*$, keďže nezáleží na poradí operandov, vieme rovnako dobre písať ako funkciu a a b a keďže nás vlastne zaujíma ich súčet, tak povedzme že

$$f(a) = a - \lfloor a \rfloor$$

a dobudúcna zapíšme že

$$a = f(a) + \lfloor a \rfloor$$

Ešte je dobré poznamenať, že

$$f(a) \in \langle 0; 1)$$

snáď zo zjavných dôvodov, a tým pádom pre $a, b \in \mathbb{R}$:

$$f(a) + f(b) \in \langle 0; 2)$$

a tiež

$$k \in \langle 0; 1) \implies \lfloor k \rfloor = 0 \implies f(k) = k$$

Poďme týmto zápisom niečo dokázať.

$$f(a+b) = a + b - \lfloor a + b \rfloor \tag{1}$$

$$f(f(a) + f(b)) = f(a) + f(b) - \lfloor f(a) + f(b) \rfloor \tag{2}$$

Zoberme najskôr prípad, že $f(a) + f(b) < 1$

$$2) \implies f(a) + f(b) - \lfloor f(a) + f(b) \rfloor = f(a) + f(b)$$

$$\lfloor a + b \rfloor = \lfloor f(a) + \lfloor a \rfloor + f(b) + \lfloor b \rfloor \rfloor$$

$$\lfloor n + k \rfloor, n \in \mathbb{Z}, k \in \langle 0; 1) = \lfloor n \rfloor$$

$$n = \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor, k = f(a) + f(b)$$

$$\lfloor a + b \rfloor = \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor$$

$$1) \implies a + b - \lfloor a + b \rfloor = a + b - \lfloor a \rfloor - \lfloor b \rfloor = f(a) + f(b) = f(f(a) + f(b))$$

$$f(a+b) = f(f(a) + f(b))$$

Prípad 2, že $f(a) + f(b) \in \langle 1; 2)$

$$\lfloor f(a) + f(b) \rfloor = 1$$

$$2) \implies f(a) + f(b) - \lfloor f(a) + f(b) \rfloor = f(a) + f(b) - 1$$

$$\lfloor a + b \rfloor = \lfloor f(a) + \lfloor a \rfloor + f(b) + \lfloor b \rfloor \rfloor$$

$$\lfloor n + k \rfloor, n \in \mathbb{Z}, k \in \langle 1; 2) = \lfloor n \rfloor + 1$$

$$n = \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor, k = f(a) + f(b)$$

$$\lfloor a + b \rfloor = \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor + 1$$

$$1) \implies a + b - \lfloor a + b \rfloor = a + b - \lfloor a \rfloor - \lfloor b \rfloor - 1 = f(a) + f(b) - 1 = 2)$$

$$f(a+b) = f(f(a) + f(b))$$

Teda, $\forall a, b \in \mathbb{R} : f(a+b) = f(f(a) + f(b))$ Postupnosť zo zadania môžeme zapísať ako

$$A_0 = x, A_1 = f(x + x), A_2 = f(f(2x) + x), A_3 = f(f(f(2x) + x) + x), ...$$

Alebo rekurzívne

$$A_{n+1} = f(A_n + x), A_0 = x$$

Keďže $x \in \langle 0; 1)$, vieme A_2 prepísať na

$$A_2 = f(f(2x) + f(x)) = f(2x + x) = f(3x)$$

A ak to funguje raz, tak vieme indukciou ukázať, že to musí fungovať furt, podľa doteraz zavedených rovností

$$A_{n+1} = f(A_n + x) = f(f((n+1)x) + x) = f(f(n+1)x + f(x)) = f((n+1)x + x) = f((n+2)x)$$

čím dostávame explicitné vyadrenie

$$A_n = f(x(n+1))$$

Konečne môžeme ísť na otázku zo zadania: ak máme dané x, existuje takéto n?

$$f(x(n+1)) = 0$$

$$x(n+1) = \lfloor x(n+1) \rfloor$$

$$x(n+1) \in \mathbb{N}$$

$$\exists n \in \mathbb{N}^0 : x(n+1) \in \mathbb{N}$$

čo je ekvivalentné otázke, či $x \in \mathbb{Q}$ medzi 0 a 1. Existuje medzi 0 a 1 nekonečne veľa iracionálnych čísel? Stačí nám jedno, napríklad $\frac{\sqrt{2}}{2}$[1]. Zoberme nakoniec nekonečnú množinu $\{\frac{1}{m}\frac{\sqrt{2}}{2} : m \in \mathbb{N}\}$, ktorej všetky členy musia byť iracionálne, nakoľko sú racionálnymi násobkami iracionálneho čísla, a máme vyhrané.

[1]Dôkaz tohoto opovážlivého tvrdenia necháme na čitateľa