Vieme že

$$0 \leq x$$

$$0 \leq 2 - x \implies x \leq 2$$

Poďme nájsť také x, aby to neplatilo, teda

$$x^2y^2\left(x^2+y^2\right) > 2$$

$$x^2y^2\left((x+y)^2 - 2xy\right) > 2$$

$$x^2y^2\left(4 - 2xy\right) > 2$$

$$x^2y^2\left(2 - xy\right) > 1$$

$$x^2y^2\left(2 - x\left(2-x\right)\right) > 1$$

$$x^2y^2\left(2 - 2x + x^2\right) > 1$$

$$x^2y^2\left(1 + (x-1)^2\right) > 1$$

$$x^2\left(2-x\right)^2\left(1 + (x-1)^2\right) > 1$$

Ak má toto platiť, aspoň jeden z činiteľov

$$x^2\left(2-x\right)^2, \left(1 + (x-1)^2\right)$$

musí byť väčší ako 1.

$$x^2\left(2-x\right)^2 > 1$$

Nakoľko $0 \leq x \leq 2$, aj bez mocnín sú oba činitele ≥ 0, a teda odmocnina bude rastúca

$$\pm x(2-x) > 1$$

$$x(2-x) > 1$$

$$x^2 - 2x < -1$$

$$x^2 - 2x + 1 < 0$$

$$(x+1)^2 < 0$$

Čo zjavne nastať nemôže.

Ak zvolíme zápornú možnosť:

$$x(x-2) > 1$$

Keďže $x - 2 \leq 0$ pre $x \leq 2$ a $x \geq 0$, platí

$$x(x-2) \leq 0$$

Čiže horeuvedené nenastane a môžeme slobodne povedať že

$$0 \leq x^2\left(x-2\right)^2 \leq 1$$

Pozrime sa späť na to, čo vlastne vyvraciame

$$x^2\left(2-x\right)^2\left(1 + (x-1)^2\right) > 1$$

Jemne zmanipulujeme

$$x^2\,(x-2)^2\,(x-1)^2 > 1 - x^2\,(x-2)^2$$

Keďže

$$0 \leq x^2\,(x-2)^2 \leq 1$$

$$0 \geq -x^2\,(x-2)^2 \geq -1$$

$$1 \geq 1 - x^2\,(x-2)^2 \geq 0$$

A dosadíme

$$x^2\,(x-2)^2\,(x-1)^2 > 1 \geq 1 - x^2\,(x-2)^2$$

Už vieme, že $x^2(x-2)^2 \leq 1$, ešte ukážeme

$$(x-1)^2 \leq 1$$

Pre $0 \leq x \leq 1$ je zjavné, že

$$0 \leq 1 - x \leq 1$$

a pre $1 \leq x \leq 2$ je podobne zjavné

$$0 \leq x - 1 \leq 1$$

A preto teda

$$(x-1)^2 \leq 1$$

A dokopy

$$x^2\,(x-2)^2\,(x-1)^2 \leq 1$$

QED
\stvorcek