

Пояснительная записка для
заключительного этапа Олимпиады «Надежда Энергетики»
по направлению:
Мехатроника и робототехника

Работу выполнил: Сергеев К.О.

Дата: 20.04.2023

Дано:



Мобильный робот состоит из платформы оснащенной механум колесами. Известны направления роликов на колесах. В системе координат связанной с геометрическим центром платформы заданы скорости движения. Требуется:

Выразить скорости вращения колёс $\dot{\varphi}_i$ через компоненты скорости платформы V_L, V_T, Ω . Исследовать вращение колёс при выполнении элементарных движений: поступательного вперёд; поступательного вбок; вращения вокруг центра платформы. Положительное направление вращения колёс – против часовой стрелки вокруг оси Y . Радиус каждого колеса R .

Мобильный робот представлен заданной кинематической схемой.

Параметры робота известны. $R=0.1\text{ м}$ $h=0.3\text{ м}$ $l=0.2\text{ м}$

Управление роботом задается в связанной системе координат при помощи параметров V_L, V_T, Ω .

Дана траектория движения робота

Временной дискрет движения по траектории задается произвольно в диапазоне от 0.01 до 0.1 секунды

Поступательное движения платформы без изменения направления движения платформы

Траектория	Модуль скорости М/с	Время движения Сек.
Домик	0.1	20

Даны параметры возмущений окружающей среды в каждой точке траектории моделируются как величина с распределением по Гауссу

Параметры погрешностей колес

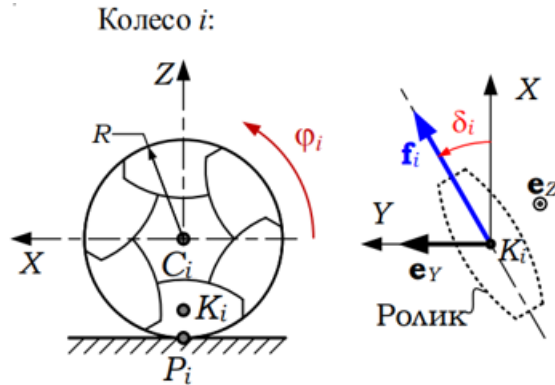
Параметр	1	2	3	4
Математическое ожидание	$0.01 \cdot R$	$0.03 \cdot R$	$0.02 \cdot R$	$0.04 \cdot R$
СКО	$0.05 \cdot V $	$0.05 \cdot V $	$0.05 \cdot V $	$0.05 \cdot V $

Требуется:

1. Выразить скорости вращения колёс $\dot{\phi}_i$ через компоненты скорости платформы V_L, V_T, Ω .
2. Сформировать скорости в связанной системе координат при перемещении по заданной траектории.
3. На основании скоростей в каждой точке траектории найти угловые скорости движения колес платформы
4. Для угловой скорости каждого колеса в точках траектории сформировать погрешность определения угловой скорости в виде белого шума с заданными параметрами – математическим ожиданием и среднеквадратичным отклонением.
5. В качестве информации с датчиков робота считаем известными, угловые скорости колес, полученные в пункте 4.
6. По информации из пунктов 3 и 4 требуется сформировать ПИ регулятор для стабилизации движения робота по заданной траектории.

Решение:

1. Выразим скорости вращения колес $\dot{\varphi}$.



Найдём скорость точки контакта P_i , используя формулы Эйлера:

$$\begin{aligned}\vec{v}_{P_i} &= \vec{v}_{C_i} + [\vec{\omega}_{\text{кол}i}, \vec{r}_{C_i P_i}], \\ \vec{v}_{C_i} &= \vec{v}_O + [\vec{\omega}_{\text{пл}}, \vec{r}_{OC_i}].\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\vec{v}_{P_i} = \vec{v}_O + [\vec{\omega}_{\text{пл}}, \vec{r}_{OC_i}] + [\vec{\omega}_{\text{кол}i}, \vec{r}_{C_i P_i}].$$

Запишем последнее уравнение в проекциях на оси платформенной СК $OXYZ$:

$$\begin{bmatrix} V_{P_i X} \\ V_{P_i Y} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_L \\ V_T \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\Omega & 0 \\ \Omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_i \\ l_i \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\Omega & \dot{\varphi}_i \\ \Omega & 0 & 0 \\ -\dot{\varphi}_i & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -R \end{bmatrix}.$$

получаем:

$$\begin{aligned}V_{P_i X} &= V_L - \Omega l_i - R\dot{\varphi}_i, \\V_{P_i Y} &= V_T + \Omega h_i\end{aligned}$$

Условие в точке контакта:

$$\begin{aligned}(\vec{v}_{P_i}, \vec{f}_i) &= V_{P_i X} \cos \delta_i + V_{P_i Y} \sin \delta_i = \\(V_L - \Omega l_i - R\dot{\varphi}_i) \cos \delta_i &+ (V_T + \Omega h_i) \sin \delta_i = 0.\end{aligned}$$

Выразим скорость вращения i -го колеса:

$$\dot{\varphi}_i = \frac{1}{R} [V_L + V_T \operatorname{tg} \delta_i + (h_i \operatorname{tg} \delta_i - l_i) \Omega].$$

Колесо 1: $\delta_1 = 45^\circ$, $l_1 = l$, $h_1 = h$:

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{1}{R} [V_L + V_T + (h - l)\Omega].$$

Колесо 2: $\delta_2 = -45^\circ$, $l_2 = -l$, $h_2 = h$:

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{1}{R} [V_L - V_T - (h - l)\Omega].$$

Колесо 3: $\delta_3 = 45^\circ$, $l_3 = l$, $h_3 = -h$:

$$\dot{\varphi}_3 = \frac{1}{R} [V_L + V_T - (h + l)\Omega].$$

Колесо 4: $\delta_4 = -45^\circ$, $l_4 = -l$, $h_4 = -h$:

$$\dot{\varphi}_4 = \frac{1}{R} [V_L - V_T + (h + l)\Omega].$$

2. Сформируем скорости в связанной системе координат при перемещении по заданной траектории.

Траектория “Домик” представлена на рисунке 1. Робот движется по траектории $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 0$. Пусть все стороны домика равны, и робот движется по каждому участку равномерно с одинаковым временем $t = T / 5 = 20 / 5 = 4$ сек. Тогда можно найти длину участка траектории, $L = V * t = 0.1 * 4 = 0.4$ м.

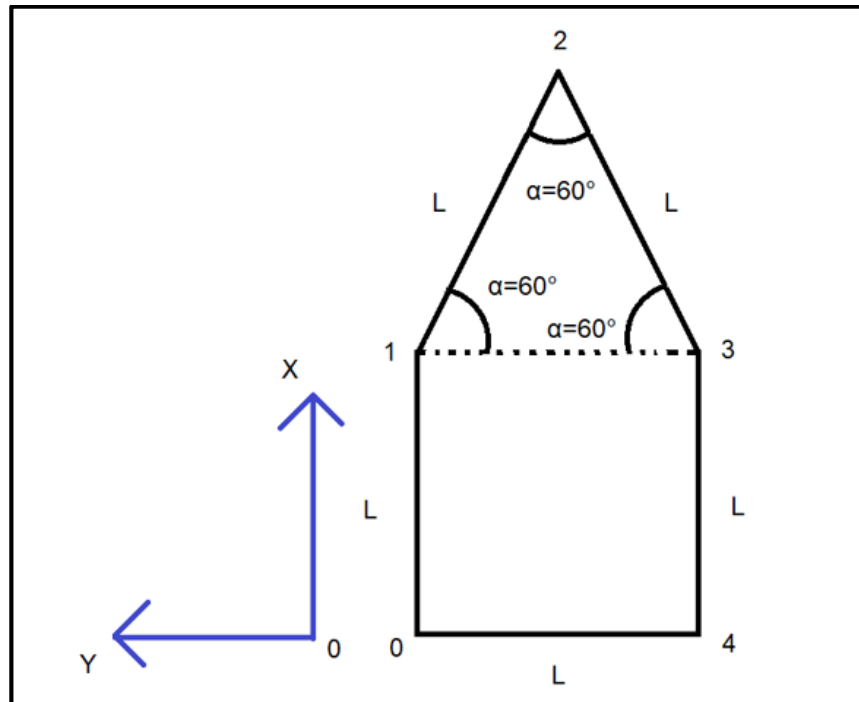


Рисунок 1. Траектория движения робота.

Сформируем скорости $V_L = V_x$, $V_T = V_y$, $\Omega = Psi$ на каждом участке траектории. $Psi = 0$ на любом участке траектории по условию.

Участок $0 \rightarrow 1$: Движение вперед:

$$V_y = 0,$$

$$V_x = V = 0.1 \text{ м/с.}$$

Участок $1 \rightarrow 2$: Движение вправо-вперед:

$$V_x = V * \sin 60^\circ = 0.1 * \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.0866 \text{ м/с,}$$

$$V_y = -V * \cos 60^\circ = -0.1 * 0.5 = -0.05 \text{ м/с.}$$

Участок 2 → 3: Движение вправо-вниз:

$$V_x = -V * \sin(60^\circ) = -0.1 * \frac{\sqrt{3}}{2} = -0.0866 \text{ м/с,}$$

$$V_y = -V * \cos(60^\circ) = -0.1 * 0.5 = -0.05 \text{ м/с.}$$

Участок 3 → 4: Движение вниз:

$$V_x = 0,$$

$$V_y = -V = -0.1 \text{ м/с}$$

Участок 4 → 0: Движение влево:

$$V_x = 0,$$

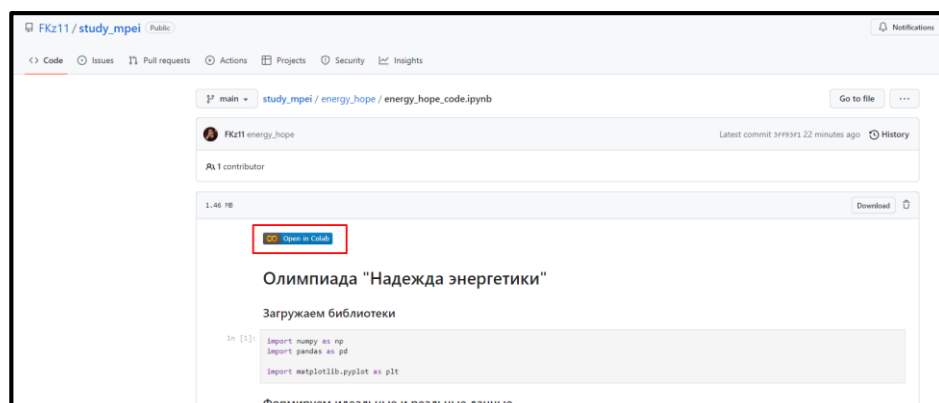
$$V_y = V = 0.1 \text{ м/с.}$$

Дальнейшее решение будет проводиться в веб-приложении Jupyter Notebook, на языке программирования Python, с помощью математических пакетов NumPy и Pandas, а также использую пакет визуализации Matplotlib.

Ссылка на код проекта:

https://github.com/FKz11/study_mpei/blob/main/energy_hope/energy_hope_code.ipynb

Код можно запустить онлайн, нажав на кнопку, показанную на изображении ниже:



3. Найдем угловые скорости колёс в каждый момент времени.

Подставим найденные значения $V_x = V_L$, $V_y = V_T$ из п. 2 в уравнения для угловых скоростей колёс в п. 1. Получим идеальные угловые скорости колёс, показанные на рисунке 2:

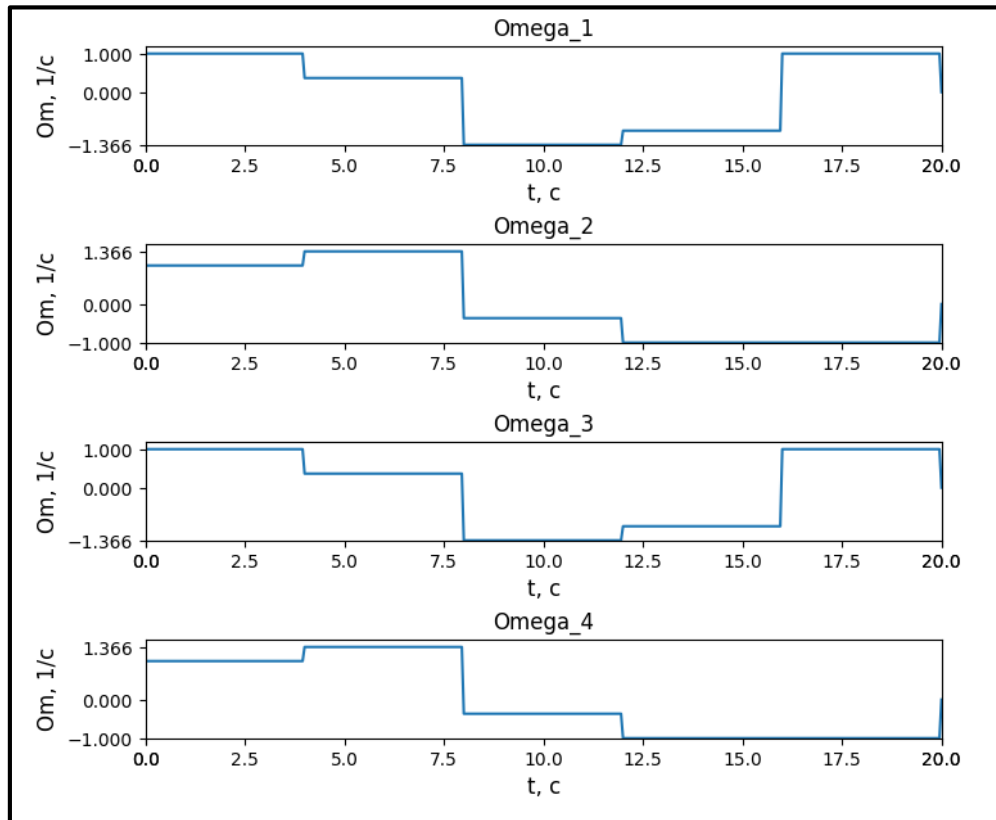


Рисунок 2. Идеальные угловые скорости колёс.

4. Сформируем погрешности определения угловой скорости.

Используем нормальное распределение (распределение Гаусса) со следующими параметрами математического ожидания M и среднеквадратичного отклонения σ :

Колесо 1:

$$M = 0.01 * R = 0.001,$$

$$\sigma = 0.05 * |V| = 0.005.$$

Колесо 2:

$$M = 0.03 * R = 0.003,$$

$$\sigma = 0.05 * |V| = 0.005.$$

Колесо 3:

$$M = 0.02 * R = 0.002,$$

$$\sigma = 0.05 * |V| = 0.005.$$

Колесо 4:

$$M = 0.04 * R = 0.004,$$

$$\sigma = 0.05 * |V| = 0.005.$$

Вид нормального распределения представлен на рисунке 3:

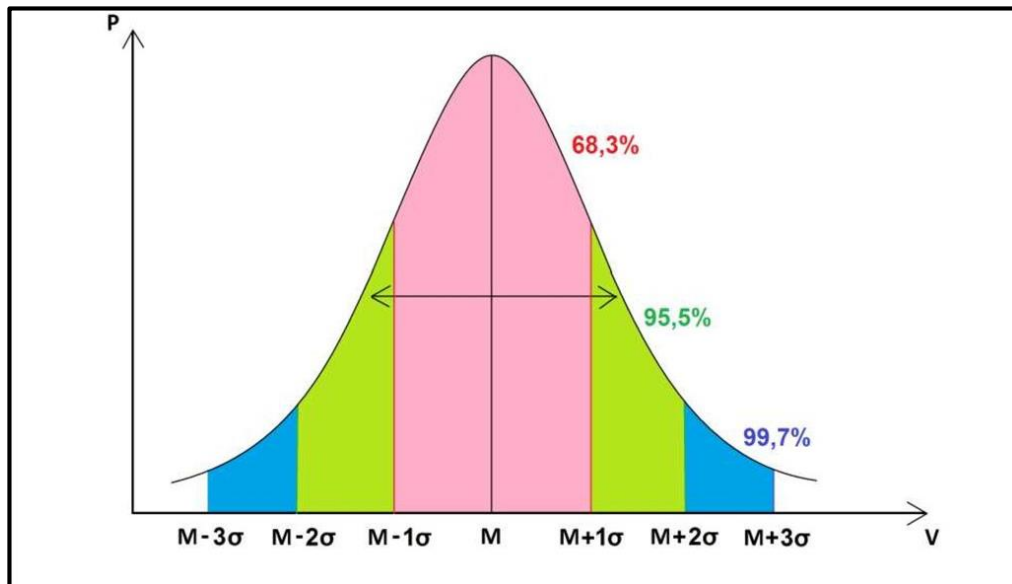


Рисунок 3. Вид нормального распределения.

Нормальное распределение задаётся формулой:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(x-Mx)^2}{2\sigma^2}}$$

Сформированный шум представлен на рисунке 4:

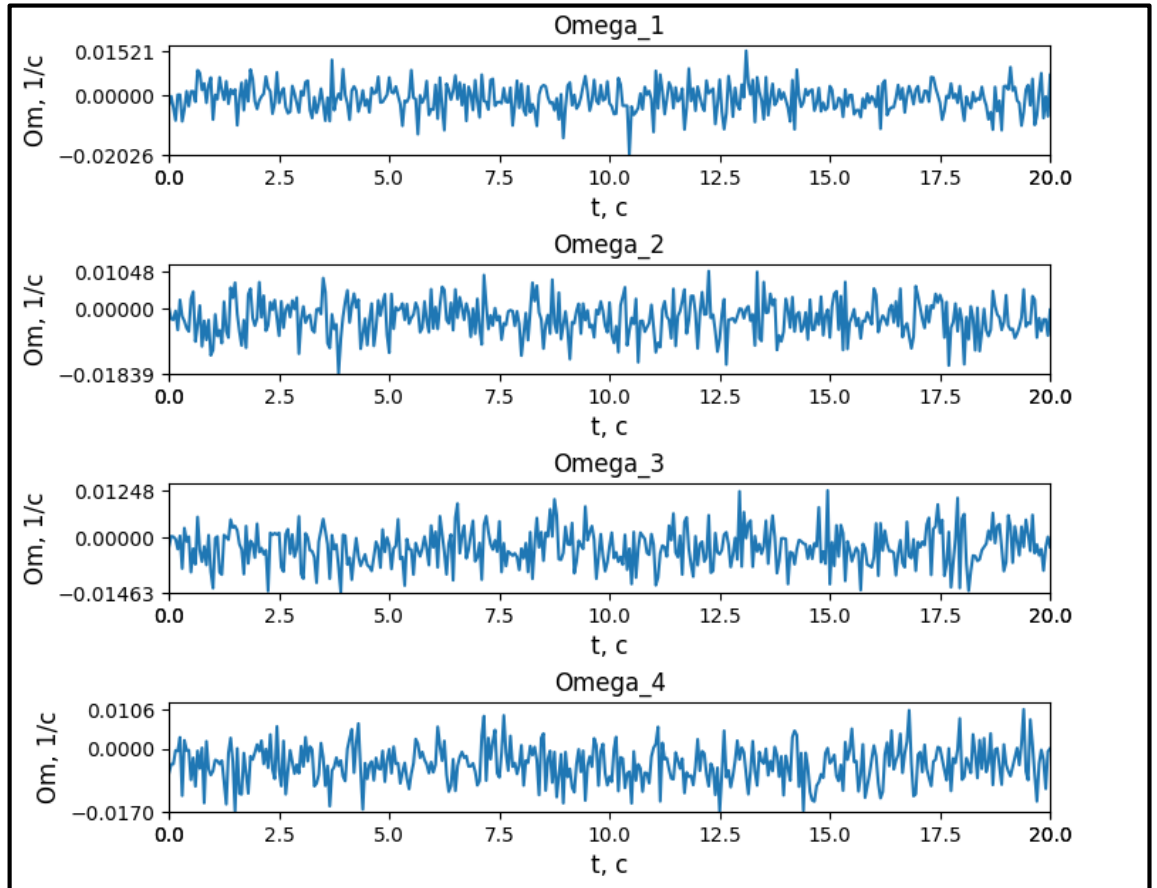


Рисунок 4. Сформированный шум по нормальному распределению.

5. Смоделируем реальные данные используя сформированный шум.

Для этого найдём формулы для выражения $dpsi = \Omega, V_x, V_y$ через $\omega_1 = \dot{\varphi}_1, \omega_2 = \dot{\varphi}_2, \omega_3 = \dot{\varphi}_3, \omega_4 = \dot{\varphi}_4$ используя систему уравнений из п.1.

Домножим уравнения 2 и 3 из п.1 на -1, а затем сложим все уравнения и выразим $dpsi$ тогда формула будет иметь вид:

$$dpsi = \frac{R}{4h} [\omega_1 - \omega_2 - \omega_3 + \omega_4].$$

Сложим все уравнения из п.1 и выразим V_x , тогда формула будет иметь вид:

$$V_x = \frac{R}{4} [\omega a_1 + \omega a_2 + \omega a_3 + \omega a_4].$$

Домножим уравнения 2 и 4 из п.1 на -1, а затем сложим все уравнения и выразим V_y , тогда формула будет иметь вид:

$$V_y = \frac{R}{4} [\omega a_1 - \omega a_2 + \omega a_3 - \omega a_4] + d\psi * l.$$

Графики идеальных координат представлены на рисунке 5:

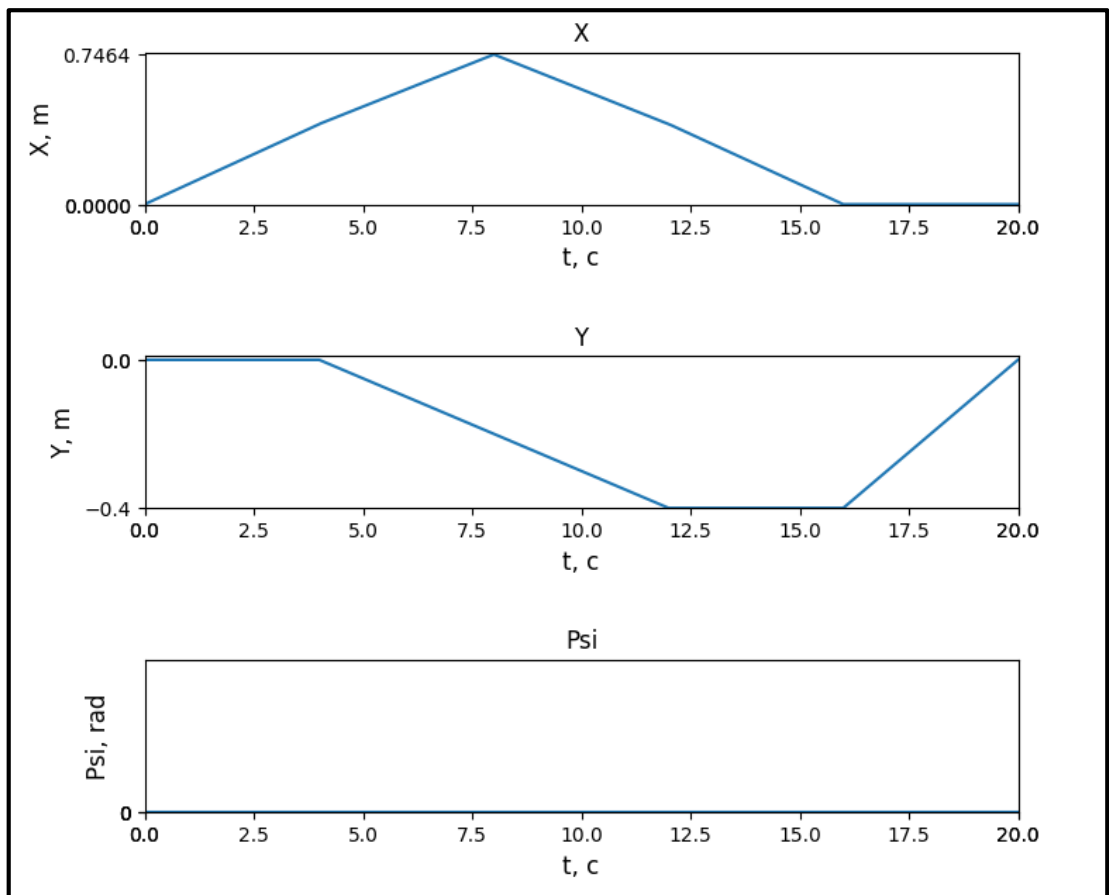


Рисунок 5. Графики идеальных координат.

Графики реальных угловых скоростей представлены на рисунке 6:

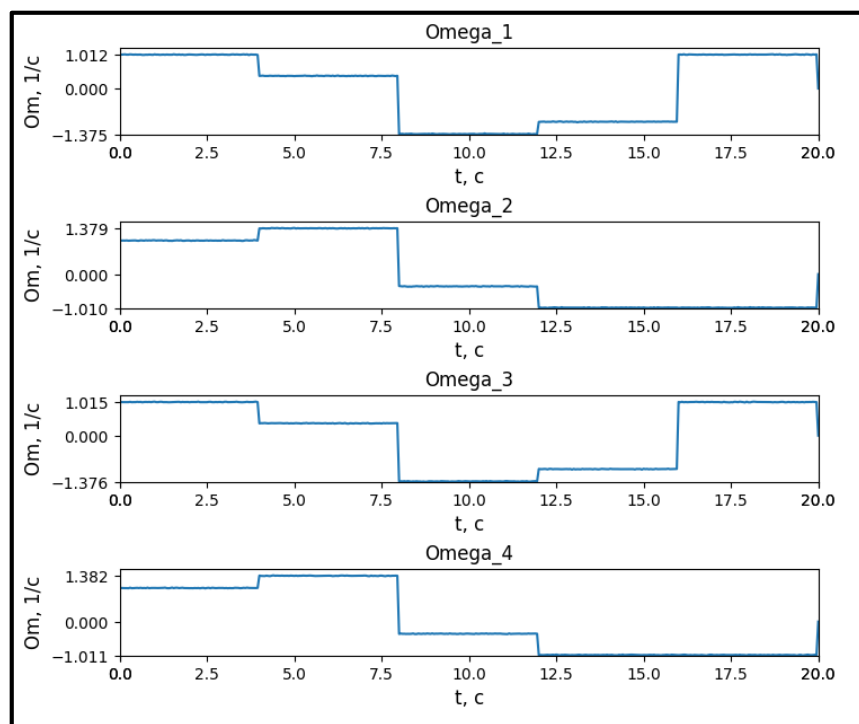


Рисунок 6. Графики реальных угловых скоростей.

Графики реальных координат представлены на рисунке 7:

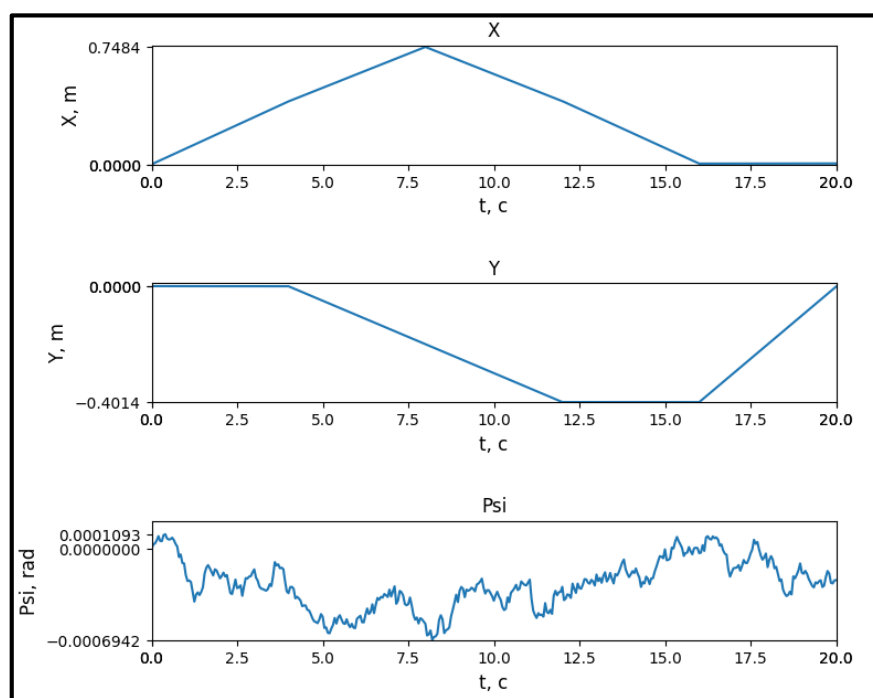


Рисунок 7. Графики реальных координат.

Погрешности по координатам представлены на рисунке 8:

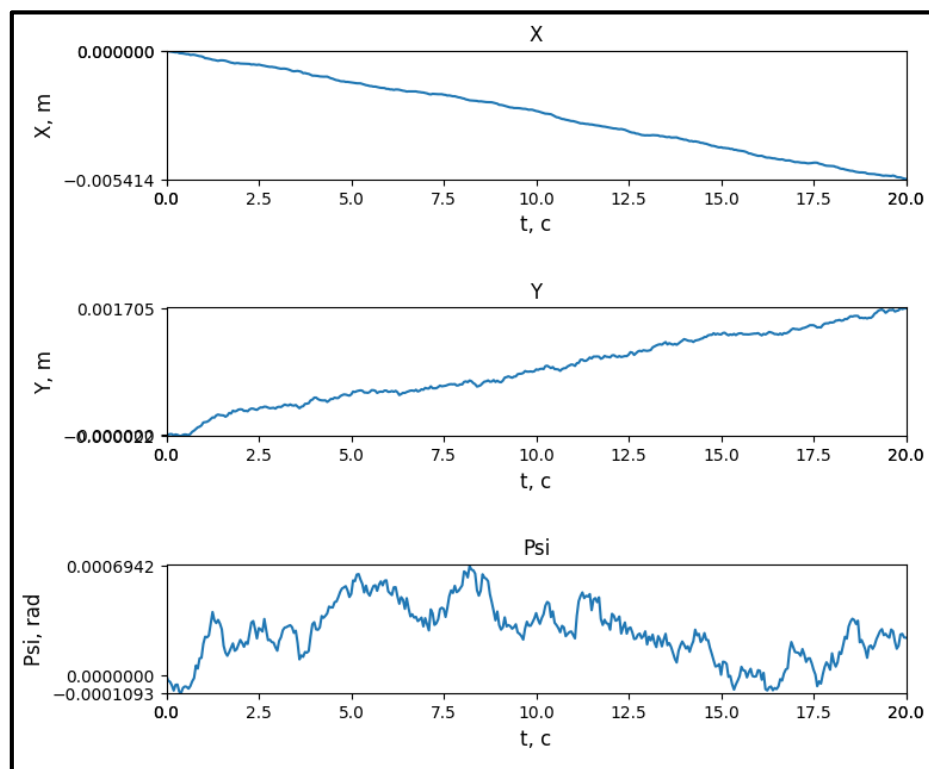


Рисунок 8. Погрешности по координатам.

Сравнение траекторий представлено на рисунке 9:

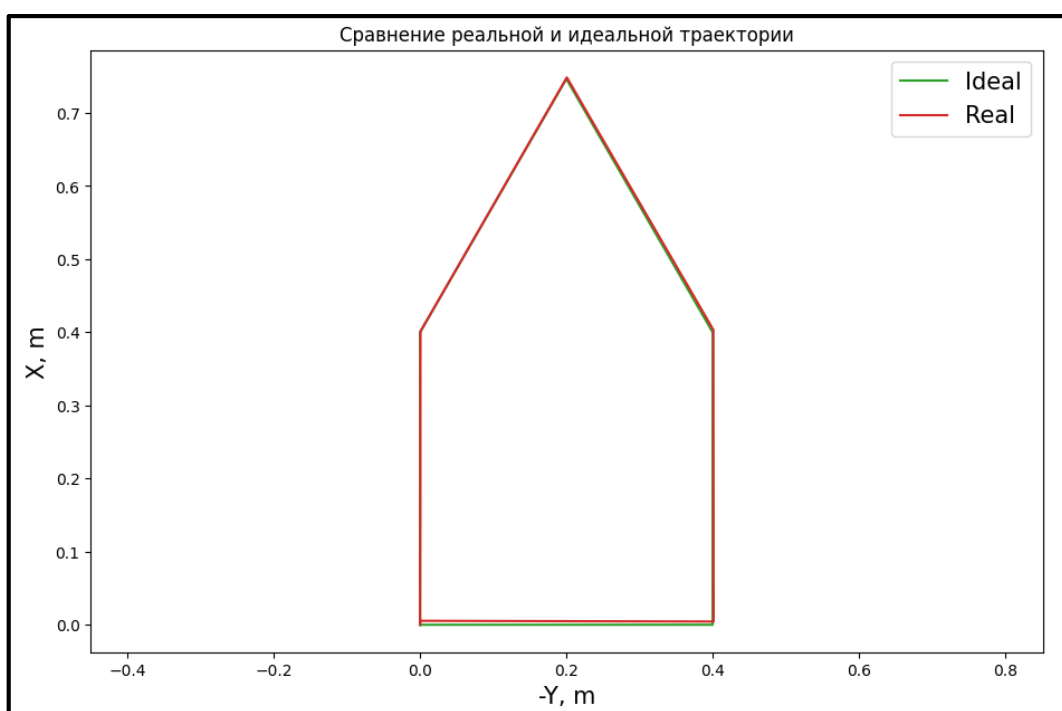


Рисунок 9. Сравнение траекторий.

6. Сформируем ПИ-регулятор и сравним погрешности восстановленной траектории с идеальной и погрешности реальной с идеальной по параметрам распределения.

Принципиальная схема ПИ-регулятора представлена на рисунке 10:

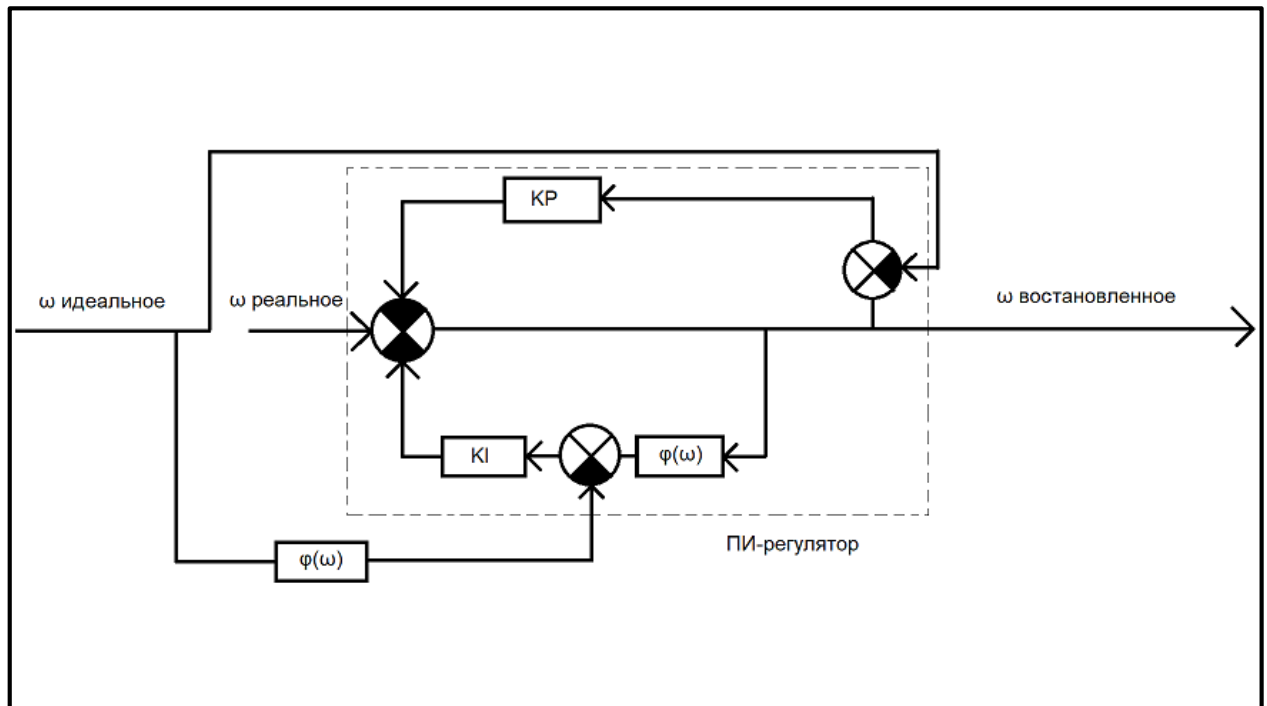


Рисунок 10. Схема ПИ-регулятора.

В этой схеме $\varphi_i(\omega) = \varphi_{i-1}(\omega) + dt * \omega$,

КР – коэффициент пропорциональности в ПИ-регуляторе,

КИ – коэффициент интегральности в ПИ-регуляторе.

Тогда итоговая формула примет вид:

$$\omega_i^{\text{вост.}} = \omega_i^{\text{реал.}} - (\omega_{i-1}^{\text{вост.}} - \omega_{i-1}^{\text{идеал.}}) * KP - (\varphi_{i-1}^{\text{вост.}} - \varphi_{i-1}^{\text{идеал.}}) * KI,$$

При этом:

$$\omega_0^{\text{вост.}} = \omega_0^{\text{реал.}}$$

Графики восстановленных угловых скоростей представлены на рисунке 11:

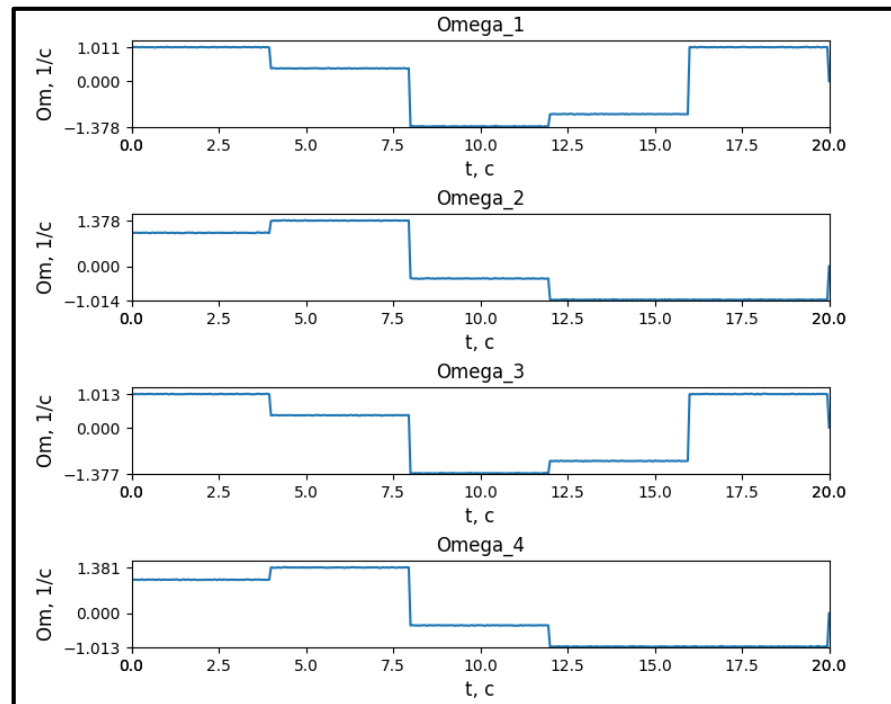


Рисунок 11. Графики восстановленных угловых скоростей.

Графики восстановленных координат представлены на рисунке 12:

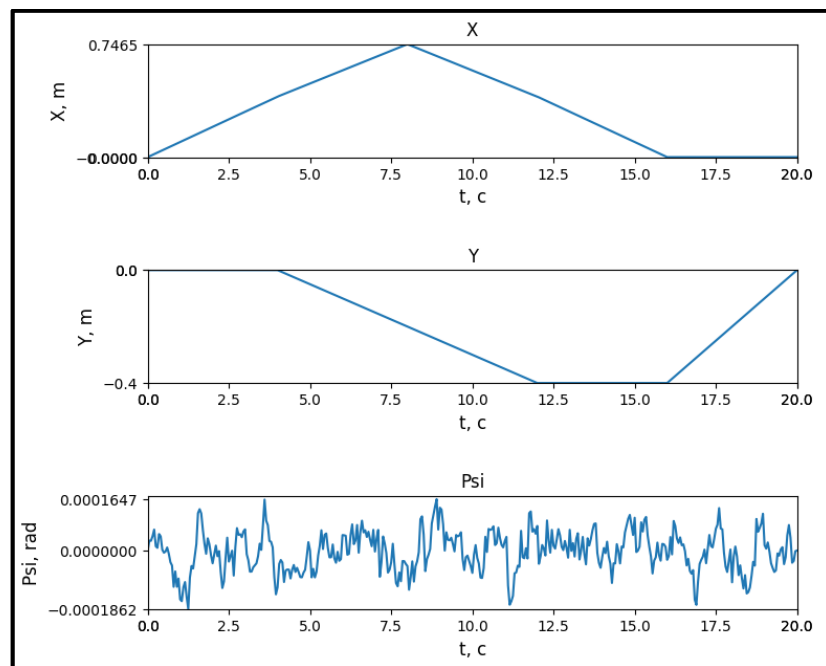


Рисунок 12. Графики реальных координат.

Сравнение погрешностей по угловым скоростям представлены на рисунке 13:

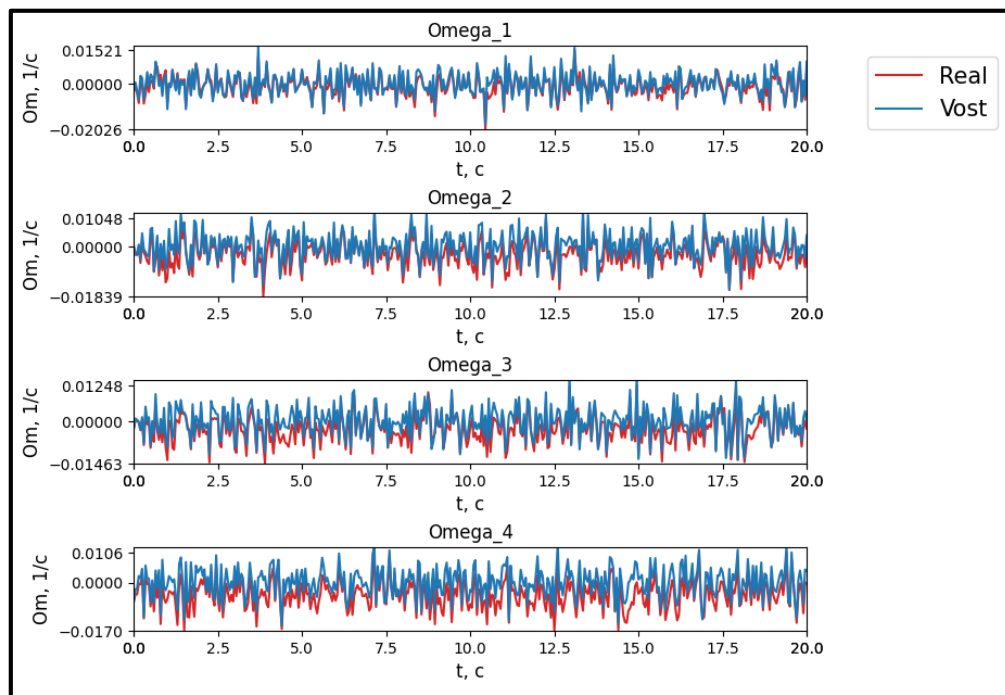


Рисунок 13. Погрешности по угловым скоростям.

Сравнение погрешностей по координатам представлены на рисунке 14:

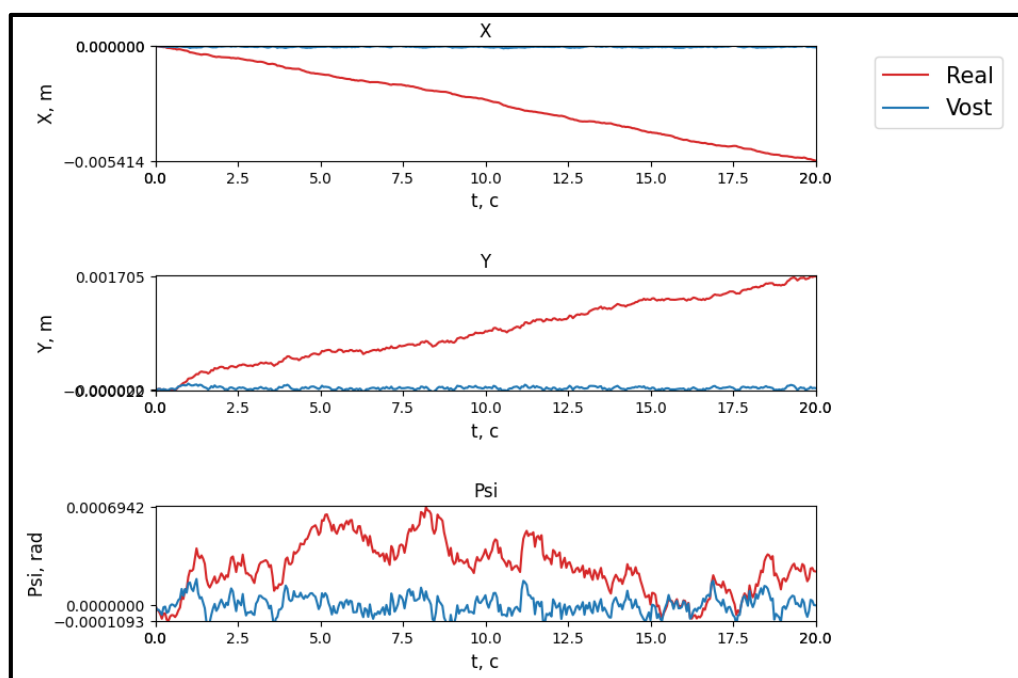


Рисунок 14. Погрешности по координатам.

Сравнение траекторий представлены на рисунке 15:

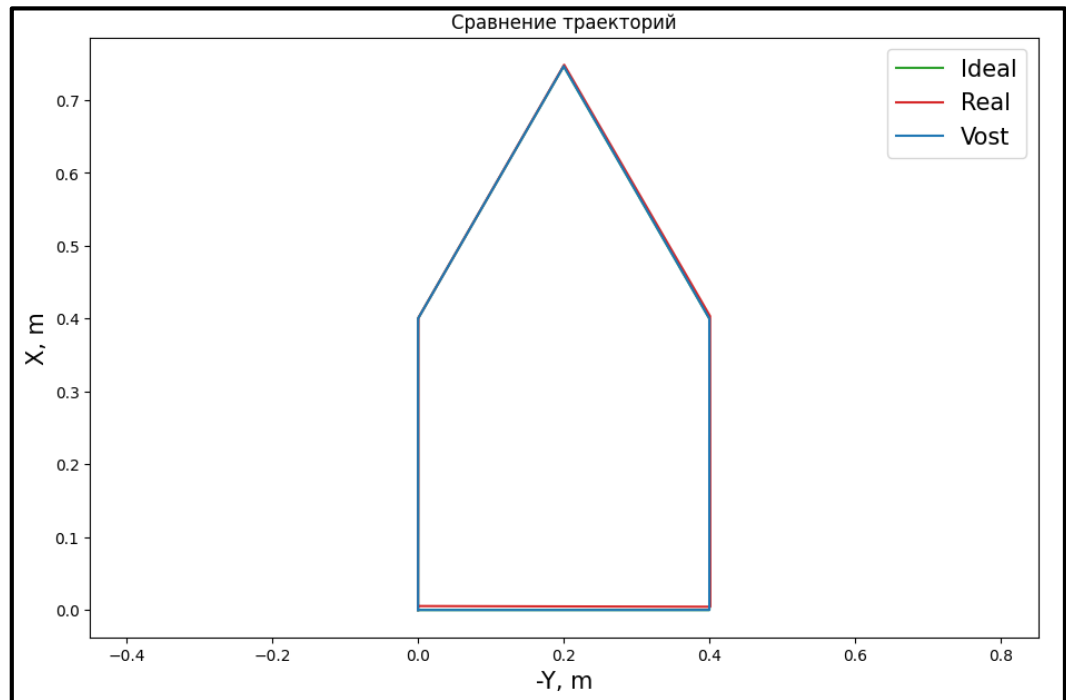


Рисунок 15. Траектории.

Посмотрим на такие параметры распределения погрешностей, как математическое ожидание погрешностей (не модуля погрешностей) и среднеквадратическое отклонение погрешностей.

Форму для их нахождения следующие:

$$M = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n},$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - M)^2}{n}}.$$

Где x – это точка измерения, а n – количество точек.

Параметры распределения погрешностей представлены на рисунке 16:

	omega_1	omega_2	omega_3	omega_4	Vx	Vy	dpsi	X	Y	Psi
Math_ir	-0.001093	-0.002834	-0.002646	-0.004219	-0.000270	0.000086	0.000014	-0.002673	0.000888	0.000271
SKO_ir	0.004806	0.005013	0.004946	0.005056	0.000258	0.000296	0.000866	0.001598	0.000466	0.000185
Math_iv	-0.000004	-0.000034	-0.000026	-0.000031	-0.000002	0.000001	0.000002	-0.000053	0.000017	0.000002
SKO_iv	0.005190	0.005387	0.005276	0.005395	0.000272	0.000320	0.000930	0.000022	0.000021	0.000064

Рисунок 16. Параметры распределения погрешностей.

Значения во сколько раз меньше параметры распределения погрешностей координат восстановленных значений от реальных представлены на рисунке 17:

	X	Y	Psi
Math	49.997223	52.622607	113.354922
SKO	74.186401	22.164293	2.911851

Рисунок 17. Во сколько раз меньше параметры распределения погрешностей координат восстановленных значений от реальных.

Вывод:

В данной работе мы выявили зависимость линейных скоростей мобильного робота от угловых скоростей его механум-колёс, ввели ПИ-регулятор в управление и получили значительно лучшую траекторию и параметры распределения погрешностей.