Homework 2

2.4

(b)

$$
\begin{aligned}
S &\to 0P0|1P1|0|1 \\
P &\to 1P|0P|\varepsilon
\end{aligned}
$$

(c)

$$S \to 01S|10S|00S|11S|0|1$$

(d)

$$S \to 0S0|1S0|1S1|0S1|0$$

2.6

(a)

$$
\begin{aligned}
S &\to TaT \\
T &\to TT|aTb|bTa|a|\varepsilon
\end{aligned}
$$

(d)

$$
\begin{aligned}
R &\to S|J\#S\#J|J\#S|S\#J \\
S &\to aSa|bSb|\#|\#J\# \\
J &\to aJ|bJ|\#J|\varepsilon
\end{aligned}
$$

2.14

首先添加一个 start variable **S_0**,则有

$$
\begin{aligned}
S_0 &\to A \\
A &\to BAB|B|\varepsilon \\
B &\to 00|\varepsilon
\end{aligned}
$$

接着消除$A \to \varepsilon$和$B \to \epsilon$,可以得到

$$
\begin{aligned}
S_0 &\to A|\varepsilon \\
A &\to BAB|BA|AB|BB|A|B \\
B &\to 00
\end{aligned}
$$

消除$A \to A$可以得到

$$
\begin{aligned}
S_0 &\to A|\varepsilon \\
A &\to BAB|BA|AB|BB|B \\
B &\to 00
\end{aligned}
$$

消除$A \to B$可以得到

$$
\begin{aligned}
S_0 &\to A|\varepsilon \\
A &\to BAB|BA|AB|BB|00 \\
B &\to 00
\end{aligned}
$$

消除$S_0 \to A$可以得到

$$S_0 \to BAB|BA|AB|BB|00|\varepsilon$$
$$A \to BAB|BA|AB|BB|00$$
$$B \to 00$$

添加新的variable U来表示terminals 0

$$S_0 \to BAB|BA|AB|BB|UU|\varepsilon$$
$$A \to BAB|BA|AB|BB|UU$$
$$B \to UU$$
$$U \to 0$$

2.18

(b)

使用反证法，假设A属于CFL，设R为$a^*b^*c^*$,那么$A \cap R$ 也应该属于CFL.

$A \cap R = \{a^n b^n c^n | n \geq 0\}$

假定字符串 $s = a^p b^p c^p = xuyvz$ 属于$A \cap R$,pumping length 为 p.

- 如果u, v都仅包含一种symbol(如a,b,c的任意一种)，那么xu^2yv^2z不能包含相同数量的a,b,c,矛盾
- 如果u或v包含超过一种以上的symbol，那么xu^2yv^2z将会有symbol彼此交错，不再满足同一种symbol连续出现且只存在一段，矛盾

因此$A \cap R$ 不是CFL.因而A不属于CFL

2.20

设$PDA\ M_A = (Q_A, \sum, \Gamma, \delta_A, q_A, F_A), NFA\ M_B = (Q_B, \sum, \delta_B, q_B, F_B)$

构建

$$M_{A/B} = (Q^{A/B}, \sum, \Gamma_{A/B}, \delta_{A/B}, q_{A/B}, F_{A/B})$$
$$where\ Q^{A/B} = Q^A(Q^A \times Q^B)$$
$$\Gamma_{A/B} = \Gamma$$
$$q_{A/B} = q_A q_0\ , q_0 = q_A\ or\ q_B$$
$$F_{A/B} = F_A \times F_B$$
$$For\ q_A \in Q_A : \delta_{A/B}(q_A, a, u) = \{ \begin{matrix} \delta_A(q_A, a, u)\ if\ a \in \sum \\ \delta_A(q_A, \varepsilon, u) \cup \{(q_A, q_B), \varepsilon\}\ if\ a = \varepsilon \end{matrix}$$
$$For\ (q_A, q_B) \in Q_A \times Q_B : \delta_{A/B}((q_A, q_B), a, u) = \{ \begin{matrix} \phi, if\ a \in \sum \\ \cup_{b \in \sum}\{((r_A, r_B), v) : (r_A, v) \in \delta_A(q_A, b, u)\ and\ r_A \in \delta_B(q_B, b)\}, if\ a = \varepsilon \end{matrix}$$

因此 A/B 为CFL

2.26

使用数学归纳法

- **n = 1**: 考虑长度为1的字符串 a,derivation可以为$S \to a$，$steps = 2n - 1 = 1$,成立
- **假设n = k时结论成立**：即对于长度为k的字符串 s ,derivation将需要 2k - 1 steps.
- **n = k + 1**: 考虑一满足CNF的language如下

$$S \to AB$$
$$A \to *x$$
$$B \to *y$$

$|w| = xy$其中 $|x| > 0, |y| > 0$

则$|w| = 1 + (2|x| - 1) + (2|y| - 1) = 2(|x| + |y|) - 1$

$|x| + |y| = n = k + 1$，故结论成立

2.30

使用反证法，在各小题中以B来代指language

(a)

设 p 为pumping length，考虑字符串$s = 0^p1^p0^p1^p = xuyvz$

- 如果u, v都仅包含一种symbol(即0,1的任意一种)，那么xu^2yv^2z的 0,1段的长度 不相等，其不属于B，矛盾
- 如果u或v包含超过一种以上的symbol(即0,1都有)，那么xu^2yv^2z的连续0,1段必定超过了4段，其不属于B，矛盾

所以B 不是 CFL

(b)

设 p 为pumping length，考虑字符串$s = 0^p\#0^{2p}\#0^{3p} = xuyvz$

u,v 都不包含#，否则xu^2yv^2z中#的数目必定大于2.所以u,v必定属于$0^p, 0^{2p}, 0^{3p}$任意一段的子集，那么xu^2yv^2z中其由#分割的三段长度不能满足1:2:3，矛盾，其不属于B

所以B不是CFL

(c)

设 p 为pumping length，考虑字符串$s = a^bb^p\#a^pb^p = xuyvz$

u,v 都不包含#，否则xu^2yv^2z中#的数目必定大于2.其次，u,v不可能都位于#的左段，否则xu^2yv^2z左段的长度必定大于右段，不再满足w为t的子字符串这一条件；另一方面，u,v也不可能都位于#的右段，否则$xu^0yv^0z$$右段的长度必定小于左段，所以只可能存在u在左段，v在右段这一情况

由于$|uyv| \le p$,那么u由b组成，v由a组成，xu^2yv^2z左段的b的数目大于右段，不满足w为t的子字符串这一条件，其不属于B

所以B不是CFL

(d)

设 p 为pumping length，考虑字符串$s = a^bb^p\#a^pb^p = xuyvz$

- u,v 都不包含#，否则xu^2yv^2z中#的数目必定大于2
- u,v不可能都位于#的左段,否则xu^2yv^2z左段不等于右段
- u,v也不可能都位于#的右段，理由同上
- 考虑u在左段，v在右段这一情况，由于$|uyv| \le p$,那么u由b组成，v由a组成，xu^2yv^2z左段的b的数目大于右段，不满足左段和右段b的数目应该相等这一条件，其不属于B

所以B不是CFL

2.40

设 C 为prefix-closed,且为CFL.

使用pumping lemma,设 p 为pumping length,考虑属于 C 的字符串$s = xuyvz, |u| \geq 1$

则$s' = xu^k yv^k z \in C$, $k \geq 0$,由于 C 满足prefix-closed的性质，因此$xu^k \in C, k \geq 0$.因此由xu^*构成的语言为regular language,且属于 C 的子集.

同时，由于$|u| \geq 1$,所以ab^*满足infinite这一性质.

综上可证得，C contains an infinite regular language

2.42

使用反证法，假设 Y 为 CFL

设 p 为pumping length，考虑字符串$s = xuyvz$

- u,v都不包含#，否则不妨假设$u = 1^m \# 1^n, m \geq 0$, $n \geq 0$,那么对于$xu^3 yv^3 z$中间的u^3必然会出现$1^m \# 1^n 1^m \# 1^n 1^m \# 1^n$,出现了$t_i = t_j \ and \ i \neq j$的情况，不属于 Y
- 考虑$u = 1^*, v = 1^*$,对于子字符串uyv有以下两种情况
  - **包含#**：由于u,v不可能包含 #，那么只有可能y包含#，假设由y中的#分割的两段长度分别为m,n,不妨假设m > n > 0，那么可以取$y = 1^n \# 1^n, u = 1^{m-n}, v = \varepsilon$,那么$xu^0 yv^0 z$出现了$t_i = t_j \ and \ i \neq j$的情况，不属于 Y
  - **不包含#**：$uyv = 1^*$，不妨假设uyv所在的由1构成的段长度为m,再取其他任意一段长度为n (n > m),那么可以取$u = 1, v = \varepsilon$,则$xu^{n-m} yv^{n-m}$出现了$t_i = t_j \ and \ i \neq j$的情况，不属于 Y

  故其不满足pumping lemma，因此 Y 不属于 CFL