定义上，**设函数$f(x)$在$x = a$处的某一去心邻域内有定义，对于$\forall\varepsilon > 0$，若$\exists\delta > 0$，使得当x满足$0 < |x-a| < \delta$时，都有$|f(x)-A| < \epsilon$，则称当x趋于a时，$f(x)$有极限$\mathbf{A}$，记为**

$$\lim_{x\to 0} f\left(x\right) = A$$

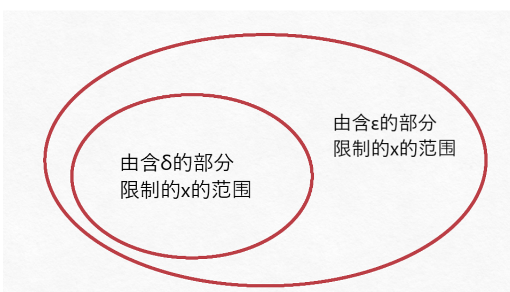
极限的证明完全利用定义，对于证明题，我们要先明确条件和待证明的结论。

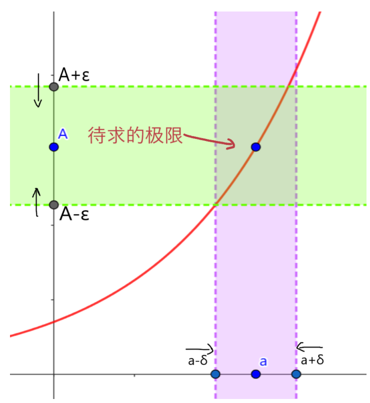
上面这句定义所用的语法非常复杂，如果将其翻译清晰点，证明的思路就会变得简单了。这里其实是逆推顺证，若极限存在，那么我们的已知的就是对于$\forall\varepsilon > 0$，都有$|f(x)-A| < \epsilon$。这里的$f(x)$是一个抽象的代指，在具体问题中，我们会带入具体的解析式并进行一定的化简和求解，让这个 $|f(x)-A| < \epsilon$最终转化为一个x和ϵ的不等式。这个不等式的意义是提供一个，由含ϵ的式子表示的x的取值范围，这是翻译题干的部分。

另一方面，注意到题目中涉及δ的部分，我们用的是存在量词“ $\exists\delta > 0$ ”，所以从中可以确定，我们最终的目标是找出那个存在的δ，显然极限的存在应等价于δ的存在。而对于x，我们也有$0 < |x-a| < \delta$，这表明δ的含义是定义域中$x = a$处去心邻域的范围。这是我们证明结论的部分。

回到前文中ϵ的部分，其所表示的是值域中$f(x) = A$处邻域的范围。ϵ的取值可以任意缩小，这压缩了$f(x)$取值与A的距离。而由$|f(x)-A| < \epsilon$进行反溯求解，解出了一个由ϵ表达的限制x的区间。如果将其视为x与ϵ的约束，而x的区间又由δ描述，这样就可以进一步发现$\delta-\epsilon$的约束关系。这里对δ的要求，是将其作为极限存在的的充分条件，所以我们采取放缩的视角去处理，只要使由δ限制的x的范围包含在由ϵ限制的x的范围内，就能满足极限存在的需求。

随着ϵ的收缩，必要地将δ同时收缩，以确保对应的$f(x)$区间，存在有对应的x的区间作为解，这就是求解极限的本质。通过下面两幅插图感受一下这个概念。





例题：证明$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \frac{2}{3}$

证明：首先，具象化$f(x)$**和**A**，有**$|f\left(x\right)-A| = \left|\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}-\frac{2}{3}\right|$

对等式右侧提公因式，化简得

$$\left|\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}-\frac{2}{3}\right| = \left|\frac{\left(x-1\right)\left(x+1\right)}{\left(x-1\right)\left(2x+1\right)}-\frac{2}{3}\right|$$

$$= \left|\frac{x+1}{2x+1}-\frac{2}{3}\right| = \left|\frac{x-1}{6x+3}\right|$$

再然后，极限在$x=1$处取得，所以对于x的约束$|x-1|<\delta$，我们要求它总会使最终的结果$\left|\frac{x-1}{6x+3}\right|<\epsilon$。通过上述文章的分析，我们知道这实际上是对$\delta$的限制，事实上，我们把两个不等式联立来看，将会是这样的要求：

$$\left|\frac{x-1}{6x+3}\right|<\frac{\delta}{|6x+3|}<\epsilon$$

可见，一个关于$\delta-\epsilon$的约束就这样建立了起来。并且由题意，我们是在用ϵ去限制δ的取值。因为ϵ处的逻辑用语是“$\forall$”（其意为“对于任意的ϵ都有……”）而δ的逻辑用语是“$\exists$”（其意为“存在至少一个δ满足……”）。

但是我们需要去掉其中包含x的部分，这样才是彻底的$\delta-\epsilon$的约束。但对于$x\in\mathbb{R}$的情况，因为分母的$|6x+3|\in(0,+\infty)$，所以我们没办法轻易的消除这个部分，否则在它趋于0的时候，就要引发另一个极限问题了。但很显然我们要求的是$x\to1$的极限，根本不是$x\in\mathbb{R}$的情况，而把x限制在$x\approx1$附近的手段正是δ，回过头来限制δ的手段又是ϵ。

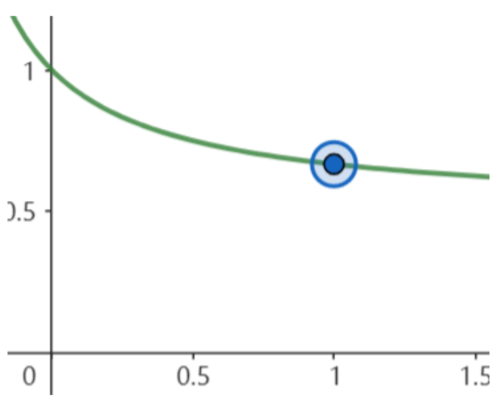
显然距离$x=1$太远的地方是不需要过多考虑的，至少思路上我们要尽可能把δ取小，用以满足很小的ϵ的约束。那么先随便划定一个范围，比如前后距离$\delta=1$的 $0<x<2$，考虑$\delta<1$的时候，必然有$|6x+3|\in(3,15)$，那么

$$\frac{\delta}{|6x+3|}<\underline{\frac{\delta}{3}<\epsilon}$$

划线的部分正是我们要寻找的：由ϵ限制的δ的关系，我们找到了$\delta=3\epsilon$。于是我们可以写出结论：对于$\forall\epsilon$，都$\exists\delta=3\epsilon$，使得当x满足$0<|x-a|<\delta$时，都有$|f(x)-A|<\epsilon$成立。

这个方程是在默认了$\delta<1$下成立的，$\delta<1$对应的约束应有$3\epsilon<1$。而关于如果存在$\delta>1$的情况，其实我们更关注$3\epsilon>1$，但是又考虑到，这个时候其实直接让$\delta=1$就可以使极限成立了，这和我们最开始的思路：让δ尽可能小这点相吻合。

证明的过程兜兜转转，我们为什么要绕那么多弯，进行那么麻烦的步骤呢？仔细观察我们解题时所做的所有事，都是在试图描述δ和ϵ变小的过程和关系，其中最难办的还是在处理一堆不等式上。注意到$f(x)=\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$在$x=1$处并没有定义，函数也没有取值，这导致我们用不了等号，所以麻烦的起源，其实是因为我们热衷于去寻找一个“不存在”的量。因为$x=1$并不能取到，所以我们引入了一个“距离量”δ，用x处于1附近的邻域来代替$x=1$处的样子；因为$f(x)$在$f(1)$处也没有定义，所以我们引入了一个“ϵ”，用“$f(1)$”附近的邻域代替不存在的$f(1)$进行运算，试图猜测和描述$f(1)$的性质。



求极限是一种预言的过程，它不意味着我们关注确切的取值，甚至可以不存在确切的取值，而是关注它的变化，大到整体函数的变化，小到一个邻域周围的变化。我们要做的其实是利用函数的性质，预言它的趋势和走向，我们取极限，看似求得的是最终的结果，但实际上我们真正想要的，是这个结果所反映的函数的性质。尤其是例如涉及无穷的极限，比如e^{-x}在x非常大的时候趋于0，这并非是说我们能找到0的取值，而是关注这个函数趋势的性质的一种表述。当然，这种性质可以展现为图像的形式，也可以体现为代数上的性质，这也是决定我们证明题中真正得以运算求解的原因。

图像上来说，我们利用待求极限点的邻域，仔细审视这里的左右两侧，最后对该点进行预测。如果对于不是那么特殊的情况，类似于$f(x)=2x, \lim_{x\to 1} 2x = 2 = f(1)$。在一个很一般的函数上，找一些比较一般的点，那么我们取的极限往往只是函数值本身，并没有太多出入。

这件事看似很普通，取值也是相同的，但是这个取值的由来是完全不一样的。其一源自于数值计算，其一来自于“预测”。如果我们通过一点的左右两侧的情况，成功预测了那个点的情况，就说明这个点和两侧的函数的性质是紧密相连的。所谓的预测吻合现实的性质，就称为函数的连续性。“连”代表了前后性质的整体一致，“续”说明了彼可算此，此可推彼，函数的连续性，和函数的极限的意义，是密不可分的。

对于不连续的情况，比如对于

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ,x > 0 \\ 0 & ,x = 0 \\ -1 & ,x < 0 \end{cases} \tag{1}$$

我们如果对于$x \to 0$处通过变化趋势的判断的话，用$x<0$的部分，取到的极限将会是-1。而利用$x>0$的部分预测，取到的极限将会是1，这显然和我们所定义的$f(0)=0$都是不同的。可见，一方面，极限的取值和函数值本身并无必然关系，这亦反映了我们取极限的过程绝非等同于计算，而是对性质的评估；另一方面，我们通过不同的预测手段，例如从$x=0$的左侧预测或者从右侧预测，取得的结果也可以不同。

综上，总结为两点角度：①$x=0$处左右两侧的$f(x)$性质不同；②$x=0$处的$f(0)$与左右两侧的$f(x)$性质均不同。这样的函数就是不连续的函数，一方面是图像上显然就不能“连”起来，另一方面对于极限的角度，我们无法根据函数的各种性质去成功预测此处的函数值，反应了前后性质连续不上。

接下来给出定义：对于任意一点$x=a$处，利用其“左侧”$x<a$部分的性质考虑极限，所求称为函数的左极限，记为$\lim_{x\to a^-} f(x) = A$，其中“$x \to a^-$”我们读作“x趋于a负”。同理，通过$x>a$的部分预言的极限，称为右极限，记为$\lim_{x\to a^+} f(x) = A$。对于左右极限不相等的情况，我们不能认为此处的极限是有定义的，需要额外强调待求的极限到底是左极限还是右极限。那么，如果左右极限相等，即

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = A$$

则说明极限$\lim_{x\to a} f(x)$存在且等于A。如果这个点的极限不仅存在，并且和函数值相等，即

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

则函数在该点连续。