

# 一种用分母结构转化分子的思路

作者：姜鱼

发布日期：2025 年 2 月 21 日

注意到一个等式变换：

$$\frac{x}{x+3} = 1 - \frac{3}{x+3}$$

原来的函数中，分子和分母处各有一个可变量 $x$ ，通常处理这种函数的时候，这会使分析更加复杂。我们只希望变量出现在分母处，而使分子变为更加简单的常数3，这样的结构变换大大地简化了我们的分析难度。

仔细看变换的本质原理，关键在这个“1”处。我们将这个1视为分式 $\frac{1}{1}$ ，继而让分子分母同时乘上 $x+3$ ，这样就可以使分母的结构转移到分子上：

$$1 - \frac{3}{x+3} = \frac{x+3}{x+3} - \frac{3}{x+3}$$

分母的部分分为“ $x$ ”和“3”，我们要保留 $x$ 而去掉3的部分，于是有了这个等式。生动形象的来说，我们的分母有 $x+3$ ，而分子从 $x$ 替换成了3。显然如果分子是3，我们也可以如此一般置换为 $x$ 。

我们将其比喻为一个「置换反应」。

接下来分母更加复杂，但是我们依然可以利用类似的思路去置换我们想要的部分。例如：

$$\frac{x}{(x+3)(x+4)} = \frac{1}{x+4} - \frac{3}{(x+3)(x+4)} = \frac{x+3}{(x+4)(x+3)} - \frac{3}{(x+3)(x+4)}$$

这个时候我们会发现，需要分式上下同乘 $x+3$ 的部分不再是1，而是分式 $\frac{1}{x+4}$ ，结构或许变得复杂了，但是思路其实还是如法炮制。依然是利用分母中同时包含变量 $x$ 和常数的特性，将分子的变量成分置换为常数。当然，对象有所转变，形式有所复杂，但是手段是不变的。甚至如果我们的目标是置换另一个变量 $y$ ，也可以实现。例如：

$$\frac{x}{(x+y)(x+y+1)} = \frac{1}{x+y+1} - \frac{y}{(x+y)(x+y+1)}$$

或者

$$\frac{x}{(x+y)(x+y+1)} = \frac{1}{x+y} - \frac{y+1}{(x+y)(x+y+1)}$$

思路上是一致的。

当然，其实有更简单的手法，就是把复杂因式变成熟悉的样子，比如这样看待：

$$\frac{x}{(x+k)(x+k+1)} = \frac{x}{(x+k)} \cdot \frac{1}{(x+k+1)} = \left[1 - \frac{k}{x+k}\right] \cdot \frac{1}{(x+k+1)} = \frac{1}{(x+k+1)} - \frac{k}{(x+k)(x+k+1)}$$

从分母中置换分子的思路可以帮助我们处理很多麻烦。在需要的时候把当前不想要的分子结构，置换为分母中包含的其他我们更愿意见到的结构，可以使我们的解题思路更开阔。