期望的定义

作者： 姜鱼

日期：2025 年 3 月 11 日

对于离散型随机变量

$$E\left[X\right]=\sum_{x}xP\left\{X=x\right\}$$

我们定义它的期望，类似于均值，是这组数据中能得到的平均结果。但是不同于直接取均值的理念，我们从期望的角度，用性质为其定义：如果一处变量在整体中的占比（或者说概率）越大，那么期望就更有可能落在这个数上；此外，概率相同的多个变量在，我们再考虑从变量本身的大小出发，取其均值，定义期望落在这个均值上。

基于这样的思路，我们最终定义了以$x\times P$为单元再对其求和的计算方法。实际上可以理解为加权，以<u>变量的数值</u>加权<u>变量的占比</u>。

离散变量的概率，是对每处的变量值考察其概率。概率学依赖于集合，所以我们永远可以视其为某一部分集合A在另一部分集合B中的占比，个体之于整体。所以过渡到连续变量，则是对一段变量出现的区间考察其概率，相当于范围之于整体。

所以概率需要积分：

$$P\left\{a\leqslant x\leqslant b\right\}=\int_{a}^{b}p\left(x\right)dx$$

所以需要用一段区间中每处变量为其概率的加权：

$$E\left[x\right]=\int_{a}^{b}xp\left(x\right)dx$$

当然，乘法是有交换律的，我们也可以反向思考由概率为变量加权进行求和或者积分，殊途同归。