Programme de khôlle semaines 5 et 6

Questions de cours

Il faut connaître toutes les définitions et résultats du Chapitre 3 : Compléments d'algèbre linéaire.

La khôlle commence par l'énoncé précis d'un des résultats suivants. La preuve sera demandée pour certains résultats :

❶ L'intersection de deux s.e.v. est un s.e.v. (Proposition 3) - **PREUVE**
❷ Une famille finie de polynômes non nuls, échelonnée en degrés est libre (Proposition 11).
❸ Existence d'un supplémentaire en dimension finie (Théorème 41).
❹ $M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$. Le calcul des dimensions des espaces des matrices symétriques/antisymétriques pourra être guidé (Exercice 48) - **PREUVE**
❺ Caractérisation de la somme directe de deux sous-espaces : la somme $F+G$ est directe si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$. (Proposition 39) - **PREUVE**
❻ Caractérisation de la somme directe de $p \geqslant 2$ sous-espaces par l'unicité de la décomposition du vecteur nul. (Proposition 51).
❼ Famille génératrice de l'image d'une application linéaire $f : E \to F$ avec E de dimension finie. (Théorème 64).
❽ Caractérisation de la surjectivité/l'injectivité d'une application linéaire via son image/son noyau. (Théorèmes 63,60).
❾ Théorème du rang (Théorème 68) - **PREUVE**
Application à la caractérisation de la bijectivité d'une application linéaire entre deux espaces de même dimension finie (théorèmes 70, 71).

L'examinateur reviendra ensuite sur l'un des sujets suivants :

❶ Définition d'une homothétie vectorielle. Matrice en dimension finie.
❷ Propriétés d'un projecteur (Proposition 91).
❸ Caractérisation d'un projecteur (Théorème 92).
❹ Propriétés d'une symétrie vectorielle (Proposition 96).
❺ Caractérisation des symétries vectorielles (théorème 97).
❻ Définition et caractérisation d'un hyperplan d'un espace de dimension finie. (Théorèmes 104,105)
❼ Intersection d'hyperplans. (Théorème 107).

La khôlle se poursuit par la résolution d'un ou plusieurs exercices sur les sujets :

— Matrice, dans la base canonique, d'une projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$ donnée par ses caractéristiques géométriques $F = \mathrm{Im}(p)$ et $G = \ker(p)$ en passant par sa matrice dans une base adaptée à la somme directe $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$ et en utilisant les formules de changement de base.
— Matrice, dans la base canonique, d'une symétrie vectorielle de $\mathbb{R}^3$ donnée par ses caractéristiques géométriques $F = \ker(p - \mathrm{id}_E)$ et $G = \ker(p + \mathrm{id}_E)$ en passant par sa matrice dans une base adaptée à la somme directe $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.
— Calcul des puissances d'une matrice (par récurrence, par la formule du binôme de Newton, par une division euclidienne,...)
— Étude de familles finies vecteurs : libres, génératrices, bases.
— Étude d'espaces supplémentaires (en dimension finie ou non).
— Étude d'applications linéaires entre espaces de dimensions finies ($\mathbb{K}_n[X], \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K}^n$...). Matrice d'une application linéaire, théorie du rang. Changement de base. Trace d'une application linéaire.
— Sous-espaces stables d'un espace vectoriel, endomorphisme induit et matrice en dimension finie.
— Étude d'applications linéaires entre espaces de dimension infinies (espaces de polynômes $\mathbb{K}[X]$, de suites numériques, de fonctions,...)
— Étude d'hyperplans en dimension finie, intersection d'hyperplans.

A préparer : trois exercices d'entrainement (voir ci-desous) :

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par $\varphi(P) = P(X+1) - P(X)$.

1. Montrer que φ est une application linéaire.
2. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, calculer $\varphi(X^k)$. En déduire que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. (a) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ de degré d. Déterminer le degré de $\varphi(P)$.
   (b) Déterminer $\mathrm{Im}(\varphi)$ et $\ker(\varphi)$.
4. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n.
   Montrer que $(P, \varphi(P), \varphi^2(P), \ldots, \varphi^n(P))$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
5. (a) Soit $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $P(X+1) - P(X) = Q(X)$ et $P(0) = 0$.
   (b) Déterminer un tel polynôme pour $Q = X(X+1)(X+2)$ et en déduire une expression simplifiée de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k+1)(k+2)$.

Exercice 2

1. Soient f, g les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associés aux matrices

$$P = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Montrer que f est une projection vectorielle et g une symétrie vectorielle.
   Déterminer leurs caractéristiques géométriques.

2. On considère dans $\mathbb{R}^3$ le plan $\mathcal{P}$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équations cartésiennes respectives :

$$\mathcal{P} : x + y + z = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{D} : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & 2z & = & 0 \end{array} \right. .$$

   Déterminer dans la base canonique :
   — La matrice de la projection sur $\mathcal{P}$ parallèlement à $\mathcal{D}$.
   — La matrice de la symétrie par rapport à $\mathcal{P}$ parallèlement à $\mathcal{D}$.

Exercice 3

Soit f l'application définie par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = (4x + y - z, 2x + 3y - z, 2x + y + z).$$

1. Montrer que f est une application linéaire et donner sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer deux scalaires $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $f - \lambda id_{\mathbb{R}^3}$ et $f - \mu id_{\mathbb{R}^3}$ ne sont pas des automorphismes.
3. Montrer que $E = \ker(f - \lambda id_{\mathbb{R}^3}) \oplus \ker(f - \mu id_{\mathbb{R}^3})$.
4. Déterminer la matrice de f dans une base à adaptée à cette somme directe.