DEVOIR SURVEILLÉ n°4

Durée : 4 heures

L'usage de calculatrices est interdit

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, **la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Exercice I : Étude d'une courbe

Dans le plan euclidien rapporté au repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ on considère la courbe Γ de représentation sur $\mathbb{R}_-^*$:

$$\begin{cases} x(t) &= t^2 + \dfrac{2}{t} \\ y(t) &= \dfrac{1}{t^2} + 2t \end{cases} \quad \text{avec } \boldsymbol{t < 0}.$$

On notera M_t le point de Γ de paramètre $t < 0$.

1. (a) Dresser le tableau des variations conjointes de x et y. On précisera les limites en 0^- et en $-\infty$.
   (b) Étudier les branches infinies en 0^- et $-\infty$.
   Préciser l'allure de la courbe lorsque $t \to 0^-$ et lorsque $t \to -\infty$.
   (c) Déterminer les paramètres $t_1, t_2 < 0$ tels que $M(t_1) \in (O_y)$ et $M(t_2) \in (O_x)$.
   (d) On admet que $y(t_1) \approx -1,9$ et $x(t_2) \approx -1,9$.
   On donne également $x'(t_1) \approx -3,8, y'(t_1) \approx 3$ et $x'(t_2) \approx -4,8, y'(t_2) \approx 6$.
   Tracer la courbe Γ et placer le point M_{-1}.
2. (a) Montrer que le vecteur $(t, 1)$ est un vecteur directeur de la tangente à Γ au point M_t.
   (b) Montrer qu'une représentation paramétrique de la normale à Γ au point M_t est :

$$\begin{cases} x_t(u) &= t^2 + \dfrac{2}{t} + u \\ y_t(u) &= \dfrac{1}{t^2} + 2t - tu \end{cases} \quad \text{avec } u \in \mathbb{R}.$$

   (c) On note $\mathscr{E}$ la développée de la courbe Γ et E_t les points de $\mathscr{E}$ de paramètres $t < 0$.
   Montrer que : $E_t = \begin{pmatrix} t^2 + \frac{2}{t} \\ \frac{1}{t^2} + 2t \end{pmatrix} + \lambda(t) \begin{pmatrix} 1 \\ -t \end{pmatrix}$ avec $\lambda(t)$ à déterminer.

(d) Utiliser ce résultat pour donner le centre et le rayon du cercle de courbure de Γ au point M_{-1} de paramètre $t=-1$. Tracer ce cercle sur le dessin réalisé à la question 1.(d).

3. Soit Σ le cercle de centre Ω de coordonnées $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et de rayon $r>0$.
On dit que Σ et Γ sont tangents en un point A si :
— $A\in\Sigma\cap\Gamma$.
— la tangente à Σ en A et la tangente à Γ en A sont confondues.

(a) Montrer que Γ et Σ sont tangents en M_{-1} si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{lcl} r & = & \sqrt{2}|a+1| \\ b & = & a \end{array}\right.$$

(b) Dans les conditions établies à la question précédente, donner une équation de Σ sous la forme $f_a(x,y)=0$ ne dépendant que du paramètre a.

(c) Effectuer les développements limités de $x(t)$ et $y(t)$ à l'ordre 3 en $t=-1$.

(d) On donne et on pourra utiliser sans démonstration :

$$f_a(x(t),y(t)) \underset{t\to-1}{=} (28-4a)(t+1)^2+(28-4a)(t+1)^3+o((t+1)^3).$$

Déterminer a pour qu'au voisinage de $t=-1$, $f_a(x(t),y(t))=o((t+1)^3)$.
Quelles remarques peut-on faire concernant Ω et r dans ce cas ?

Exercice II

1. **Question préliminaire**
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie d et f un endomorphisme de E. On note $f^2=f\circ f$.

(a) Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Montrer que :

$$\ker(f-\lambda\,\mathrm{id}_E)\subset\ker(f^2-\lambda^2\,\mathrm{id}_E).$$

Quel lien peut-on en déduire entre les valeurs propres de f et celles de f^2 ?

(b) Démontrer que si $\ker(f)\cap\mathrm{Im}(f)\neq\{0_E\}$ alors :

$$\dim(\ker f^2)\geqslant\dim(\ker f)+1.$$

(c) On note χ_f et χ_{f^2} les polynômes caractéristiques respectifs de f et f^2.
Montrer que $\chi_{f^2}(X^2)=(-1)^d\chi_f(X)\chi_f(-X)$.

2. Dans cette question, n désigne un entier supérieur ou égal à 3 et $E=\mathbb{R}_n[X]$.
Soit f l'application définie pour tout polynôme $P\in E$ par :

$$f(P)=(X^2-X+1)P(-1)+(X^3-X)P(0)+(X^3+X^2+1)P(1).$$

(a) Montrer que f est un endomorphisme de E.

(b) Déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$. On vérifiera que $\ker(f)$ est de dimension $n-2$.

(c) f est-il injectif ? surjectif ?

(d) Justifier que 0 est valeur propre de f. Minorer sa multiplicité.

(e) Démontrer que les polynômes $Q_1 = 3X^3 + 4X^2 - 3X + 4$ et $Q_2 = X^3 + X$ sont des vecteurs propres de f. Quelles sont les valeurs propres associées ?

(f) A-t-on $\ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E$?

(g) Quelles sont les valeurs propres de f^2 ? En déduire que f^2 est diagonalisable.
On utilisera les résultats de la question préliminaire.

(h) Montrer que $\chi_f(X)$ divise $X^{2n-2}(X^2-4)(X^2-16)$.
En déduire que f est trigonalisable.

(i) Montrer que f n'est pas diagonalisable. On pourra raisonner par l'absurde.
Préciser les valeurs propres et les sous-espaces propres.

Problème : marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

Partie I : Formule de Stirling

1. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt$.

   (a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$ pour tout $n \geqslant 2$.

   (b) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $I_n \leqslant I_{n-1} \leqslant I_{n-2}$ et en déduire que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{I_{n-1}}{I_n} = 1$.

   (c) En utilisant $1(a)$, montrer que : $I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\dfrac{\pi}{2}$. On **admet** qu'on a : $I_{2p+1} = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$.

   (d) Déduire des questions précédentes que $\displaystyle\lim_{p \to +\infty} \frac{1}{p}\left[\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p)!}\right]^2 = \pi$.

2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}$$

   (a) Montrer que $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ (notation "grand O")
   En déduire la nature de la série $\sum \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

   (b) En déduire que la suite $(\ln(u_n))_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel λ et qu'il existe $k > 0$ tel que :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} k\sqrt{n}n^n e^{-n}.$$

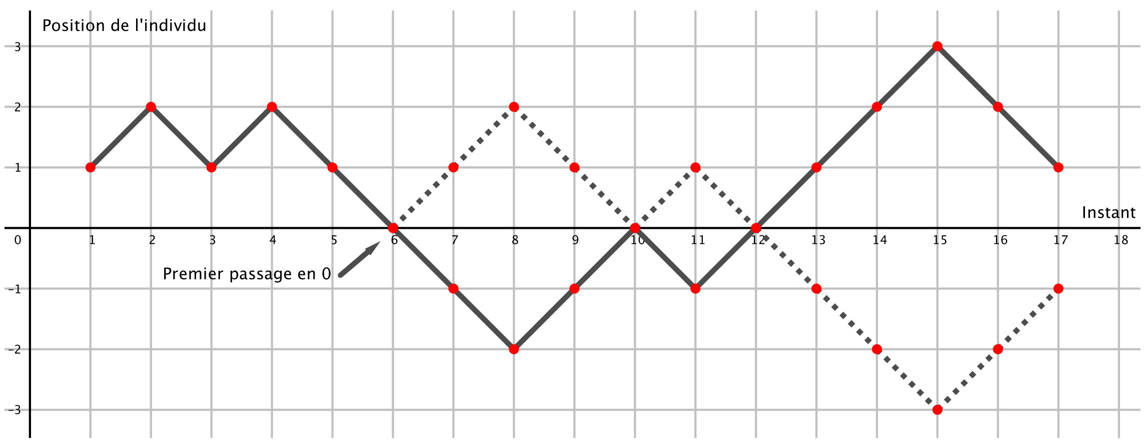
   (c) Utiliser les formules établies en $2(b)$ et $1.(d)$ pour montrer que $k = \sqrt{2\pi}$ et en déduire la formule de Stirling :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2n\pi}n^n e^{-n}.$$

Partie II : Marche aléatoire sur l'axe $\mathbb{Z}$

A l'instant $n = 0$ un individu se trouve position en 0 et à chaque instant il se déplace à droite ou à gauche d'une unité, de façon équiprobable et indépendante des mouvements qui précèdent.

1. Calculer la probabilité de l'événement D : "l'individu se déplace vers la droite à chaque instant." On pourra introduire une suite monotone $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements bien choisis.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On cherche la probabilité de A_n : " l'individu est de nouveau en 0 à l'instant n".
   (a) Justifier que cet événement se produit nécessairement après un nombre pair de déplacements.
   (b) Montrer que $P(A_{2p}) = \dfrac{\binom{2p}{p}}{2^{2p}}$. Que vaut $P(A_{2p+1})$?
   (c) Donner un équivalent de $P(A_{2p})$ à l'aide de la formule de Stirling et donner la limite de $P(A_{2p})$.
3. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On cherche la probabilité de l'événement B_{2p} : "l'individu est de nouveau en 0 *pour la première fois* à l'instant $2p$".
   (a) On suppose que l'individu est en 1 à l'instant 1.
   Montrer qu'il y a $\binom{2p-2}{p-1}$ chemins ramenant l'individu en 1 à l'instant $2p-1$ en $2p-2$ déplacements.
   (b) Justifier qu'il existe autant de chemins de longueur $2p-2$ conduisant de 1 à 1 et qui passent par 0 (au moins une fois) que de chemins de même longueur conduisant de 1 à -1.
   On pourra s'inspirer de la figure ci-dessous.



   (c) En déduire qu'il y a : $\binom{2p-2}{p-1} - \binom{2p-2}{p}$ chemins conduisant l'individu de 1 à l'instant 1 en 1 à l'instant $2p-1$ **sans passer par** 0.
   (d) Montrer enfin que :
$$P(B_{2p}) = \frac{1}{2^{2p-1}}\left(\binom{2p-2}{p-1} - \binom{2p-2}{p}\right).$$
4. Simplifier : $\binom{2p-2}{p-1} + \binom{2p-2}{p}$.
5. En déduire que $P(B_{2p}) = P(A_{2p-2}) - P(A_{2p})$.
6. En déduire enfin la probabilité de l'événement R : "l'individu repasse en 0 au moins une fois".