

CHAPITRE 8 : COURBES PLANES



Plan du chapitre

1 Fonctions vectorielles d'une variable réelle	1
1.A Notions de topologies	1
1.A.1 Norme euclidienne	1
1.A.2 Parties ouvertes, fermées, bornées de \mathbb{R}^p	1
1.B Limites, continuité, dérivabilité	3
2 Courbes du plan	6
2.A Modes de représentations	6
2.B Passage d'un mode de représentation à l'autre	8
3 Courbes paramétrées du plan	10
3.A Définition	10
3.B Etude d'une courbe paramétrée	10
3.B.1 Domaine de définition	11
3.B.2 Réduction de l'intervalle d'étude	11
3.B.3 Etude des variations	12
3.B.4 Tangente, points réguliers et stationnaires.	13
3.B.5 Etude locale : développements limités	15
3.B.6 Etude des branches infinies : développements asymptotiques	17
4 Propriétés métriques des courbes paramétrées	18
4.A Longueur d'une courbe et abscisse curviligne	19
4.B Repère de Frenet	21
4.C Etude en un point birégulier	24
5 Enveloppe et développée	25
5.A Enveloppe d'une famille de droites	25
5.B Développée d'une courbe	27
6 Tangente des courbes définies par une équation implicite	30

1 - Fonctions vectorielles d'une variable réelle

1.A - Notions de topologies

1.A.1) Norme euclidienne

Définition 1: Norme euclidienne sur \mathbb{R}^p

Soit $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$. On appelle norme du vecteur x le nombre réel positif ou nul :

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_p^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^p x_k^2}.$$

Exemple

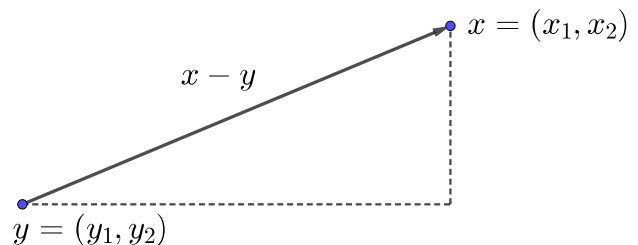
- Si $p = 1$, $\|x\| = \|(x_1)\| = \sqrt{x_1^2} = |x_1|$.
- Si $p = 2$,

$$\|x\| = \|(x_1, x_2)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = |x_1 + ix_2|$$

$$\text{et } \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Dans le plan :

$$\|x - y\|^2 = (x_1 - y_1)^2 + (y_1 - y_2)^2$$



Proposition 2: Propriétés de la norme

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^p$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

- $\|x\| \geq 0$ et $\|x\| = 0 \iff x = 0_{\mathbb{R}^p}$.
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.
- $||x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Remarques

- Soit $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$. La norme de x majore la valeur absolue de chaque composante :

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_p^2} \geq \sqrt{0^2 + \dots + 0^2 + x_k^2 + 0^2 + \dots + 0^2} = |x_k|.$$

- Pour $p = 2$, en notant $z = x_1 + ix_2$, on retrouve les inégalités $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$, $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$.
- La norme de $\|x - y\|$ représente la distance entre les points x et y .

1.A.2) Parties ouvertes, fermées, bornées de \mathbb{R}^p

Définition 3: Boules ouvertes et boules fermées de \mathbb{R}^p

Soit $a \in \mathbb{R}^p$ et $r > 0$ un nombre réel strictement positif. On appelle :

- **boule ouverte** de centre a et de rayon r , l'ensemble $\mathcal{B}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^p : \|x - a\| < r\}$.
- **boule fermée** de centre a et de rayon r , l'ensemble $\mathcal{B}_f(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^p : \|x - a\| \leq r\}$.

Exemple : Boules unités de $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$

- Si $p = 1$, $B(0, 1) = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\} =]-1; 1[$ et $B_f(0, 1) = [-1; 1]$.
- Si $p = 2$, la boule ouverte $B(0, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ est l'intérieur du disque unité et la boule fermée $B_f(0, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ est le disque unité.
- Si $p = 3$, $B(0, 1)$ est l'intérieur de la boule de centre O et de rayon 1, et $B_f(0, 1)$ est la boule de centre O et de rayon 1.

Définition 4: Ouverts et fermés de \mathbb{R}^p

- On dit qu'une partie A de \mathbb{R}^p est ouverte si : $\forall x \in A, \exists r > 0, B(x, r) \subset A$.
- On dit qu'une partie A de \mathbb{R}^p est fermée si son complémentaire $\mathbb{R}^p \setminus A$ est ouvert.

Proposition 5

Une boule ouverte est une partie ouverte de \mathbb{R}^p et une boule fermée est une partie fermée de \mathbb{R}^p .

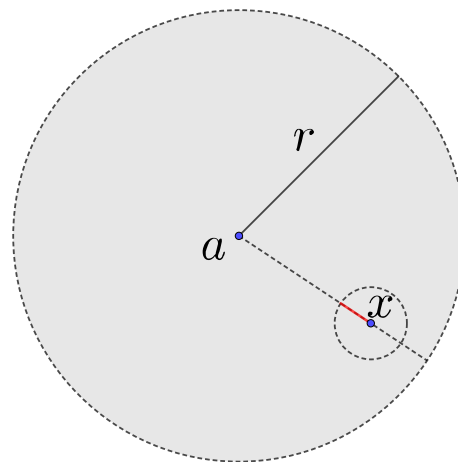
Démonstration.

- Soit $\mathcal{B}(a, r)$ une boule ouverte et $x \in \mathcal{B}(a, r)$. On pose $\rho = \frac{r - \|x - a\|}{2} > 0$ et on considère la boule ouverte $\mathcal{B}(x, \rho)$. Vérifions que $\mathcal{B}(x, \rho) \subset \mathcal{B}(a, r)$. Soit $y \in \mathcal{B}(x, \rho)$. On obtient par l'inégalité triangulaire :

$$\|y - a\| = \|y - x + x - a\| \leq \|y - x\| + \|x - a\| < \rho + \|x - a\|.$$

Ainsi, $\|y - a\| < \frac{r - \|x - a\|}{2} + \|x - a\| = \frac{r}{2} + \frac{\|x - a\|}{2} < r$ i.e. $y \in \mathcal{B}(a, r)$.

- On procède de manière analogue pour démontrer que la boule $\mathcal{B}_f(a, r)$ est fermée : son complémentaire $\{x \in \mathbb{R}^p : \|x - a\| > r\}$ est ouvert.



□

Remarques

- Une partie peut-être ni ouverte, ni fermée : par exemple $] - 1; 1]$, $[0; +\infty[$ dans \mathbb{R} . Dans \mathbb{R}^2 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 \leq 2\}$ n'est ni ouverte, ni fermée.
- \emptyset et \mathbb{R}^p sont des parties à la fois ouvertes et fermées de \mathbb{R}^p (ce sont les seules).

Exemple

Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}$ alors :

- L'ensemble $\{x \in \Omega : f(x) < a\}$ est un ouvert de Ω .
- L'ensemble $\{x \in \Omega : f(x) \leq a\}$ est un fermé de Ω .

Exercice 6

Représenter les quatre parties de \mathbb{R}^2 suivantes et dire si elles sont ouvertes ou fermées :

- $A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} -1 < x < 1, \\ -1 < y < 1. \end{cases} \right\}$
- $C = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} -1 \leq x \leq 1, \\ -1 < y < 1. \end{cases} \right\}$
- $B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} -1 \leq x \leq 1, \\ -1 \leq y \leq 1. \end{cases} \right\}$
- $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} -1 < x \leq 1, \\ -1 \leq y < 1. \end{cases} \right\}$

Toutes ces parties sont contenues dans $\mathcal{B}_f(0, \sqrt{2})$. On dit qu'elles sont bornées :

Définition 7: Partie bornée de \mathbb{R}^p

Une partie A de \mathbb{R}^p est bornée si elle est contenue dans une certaine boule.
Autrement dit, A est bornée si : $\exists R \geq 0, \forall x \in A, \|x\| \leq R$.

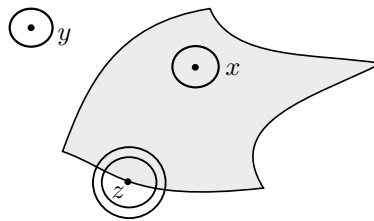
Définition 8: Point intérieur, adhérent, extérieur

Soit A une partie de \mathbb{R}^p et $x \in \mathbb{R}^p$.

- On dit que x est un point intérieur de A s'il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\mathcal{B}(x, r) \subset A$.
- On dit que x est un point extérieur de A s'il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\mathcal{B}(x, r) \cap A = \emptyset$.
- On dit que x est un point adhérent à A si pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathcal{B}(x, r) \cap A \neq \emptyset$.

Sur le schéma ci-contre :

- Le point x est intérieur.
- Le point y est extérieur.
- Le point z est adhérent.

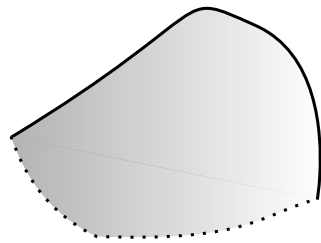


Définition 9: Frontière

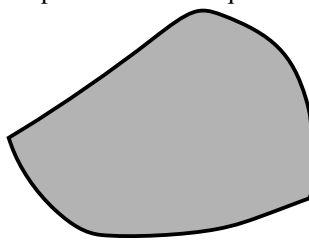
Soit A une partie de \mathbb{R}^p . La frontière de A est l'ensemble des points x tels que toute boule ouverte centrée en x rencontre à la fois A et son complémentaire.

Autrement dit, c'est l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^p : \forall r \in \mathbb{R}_+^* : \mathcal{B}(x, r) \cap A \neq \emptyset \text{ et } \mathcal{B}(x, r) \cap (\mathbb{R}^p \setminus A) \neq \emptyset\}$.

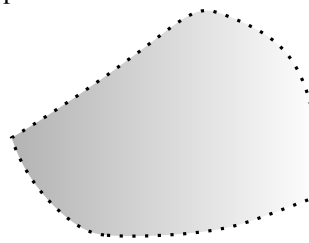
La frontière est donc l'ensemble des points adhérents qui ne sont pas intérieurs.



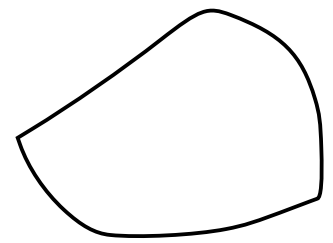
Ensemble A



Adhérence



Intérieur



Frontière

Exemple

Les ensembles de l'Exercice 6 ont tous la même adhérence, le même intérieur et la même frontière.

1.B - Limites, continuité et dérivabilité des fonctions vectorielles

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans \mathbb{R}^p (ou sur $\mathbb{R} \setminus \{t_0\}$). On note

$$\begin{aligned} f : I &\longrightarrow \mathbb{R}^p \\ t &\longmapsto (f_1(t), \dots, f_p(t)). \end{aligned}$$

Les p fonctions f_i sont appelées les **fonctions coordonnées**.

Définition 10: Limite en $t_0 \in I$

On dit que f admet $\ell \in \mathbb{R}^p$ pour limite en $t_0 \in I$ si $\lim_{t \rightarrow t_0} \|f(t) - \ell\| = 0$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall t \in I, (|t - t_0| < \alpha \implies \|f(t) - \ell\| < \varepsilon).$$

Proposition 11: Caractérisation par les fonctions coordonnées

Soit $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_p) \in \mathbb{R}^p$. On a l'équivalence :

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = \ell \iff \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \lim_{t \rightarrow t_0} f_i(t) = \ell_i.$$

Démonstration.

\Rightarrow On suppose que $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = \ell$.

On fixe $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et on montre que $\lim_{t \rightarrow t_0} f_i(t) = \ell_i$.

Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Par hypothèse, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $t \in I$:

$$|t - t_0| < \alpha \implies \|f(t) - \ell\| < \varepsilon \quad \text{qui implique } |f_i(t) - \ell_i| \leq \|f(t) - \ell\| < \varepsilon.$$

\Leftarrow On suppose que pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\lim_{t \rightarrow t_0} f_i(t) = \ell_i$. Montrons que $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = \ell$.

Pour cela on fixe $\varepsilon > 0$ quelconque. Par hypothèse pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$:

$$\exists \alpha_i > 0, \forall t \in I, (|t - t_0| < \alpha_i \implies |f_i(t) - \ell_i| < \varepsilon). \quad \text{On pose } \alpha = \min_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket} \alpha_i > 0.$$

Alors pour tout $t \in I$:

$$|t - t_0| < \alpha \implies \|f(t) - \ell\| = \sqrt{\sum_{i=1}^p (f_i(t) - \ell_i)^2} < \sqrt{p\varepsilon^2} = \sqrt{p}\varepsilon.$$

□

Exemple

La fonction $t \mapsto \left(\frac{\sin(t)}{t}, \frac{\sqrt{1+t}-1}{t}\right)$ admet en 0 la limite $(1, \frac{1}{2})$.

Définition 12: Continuité en $t_0 \in I$, continuité sur I .

- On dit que f est continue en t_0 si $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = f(t_0)$.
- On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point $t_0 \in I$.

Proposition 13: Caractérisation par les fonctions coordonnées

La fonction f est continue en t_0 si et seulement si chaque fonction $f_i, i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ est continue en t_0 .

Exemple

La fonction définie sur $I = [-1; +\infty[$ comme suit est continue sur I :

$$f(t) = \begin{cases} \left(\frac{\sin(t)}{t}; \frac{\sqrt{1+t}-1}{t}\right) & \text{si } t \neq 0 \\ \left(1; \frac{1}{2}\right) & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

Définition 14: Dérivabilité en $t_0 \in I$, fonction dérivée

- On dit que f est dérivable en $t_0 \in I$ si la limite $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ existe et est finie.

On appelle alors vecteur dérivé le vecteur noté $f'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$.

- On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point $t_0 \in I$ et on appelle fonction dérivée la fonction notée f' , définie sur $I : t \mapsto f'(t)$.

Remarques

- On appelle vecteur dérivée **à droite** la limite : $\lim_{t \rightarrow t_0^+} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ si elle existe.
- On appelle vecteur dérivée **à gauche** la limite : $\lim_{t \rightarrow t_0^-} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ si elle existe.
- La fonction f est dérivable en t_0 si et seulement si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite en t_0 et que ces dérivées sont égales.
- Pour tout $t \neq t_0$, $\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \left(\frac{f_1(t) - f_1(t_0)}{t - t_0}, \dots, \frac{f_p(t) - f_p(t_0)}{t - t_0} \right)$.
Ainsi, f est dérivable en t_0 de vecteur dérivée $(\ell'_1, \dots, \ell'_p)$ si et seulement si chaque fonction $f_i, i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ est dérivable en t_0 de nombre dérivée ℓ'_i .

Proposition 15: Opération sur les dérivées

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}^p$ deux fonctions dérivables sur I .

1. Pour tout réel $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha f + g$ est dérivable sur I et $(\alpha f + g)' = \alpha f' + g'$.
2. Pour toute fonction $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$, dérivable sur I , $\lambda \times f$ est dérivable sur I .
De plus, $(\lambda \times f)' = \lambda' \times f + \lambda \times f'$.
3. Pour toute fonction $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow I$, dérivable sur \mathbb{R} , $f \circ \lambda$ est dérivable sur \mathbb{R} .
De plus, $(f \circ \lambda)' = \lambda' \times f' \circ \lambda$.
4. On note $(\cdot | \cdot)$ le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^p . Alors $(f | g)$ est dérivable sur I et

$$(f | g)' = (f' | g) + (f | g').$$

5. Si $p = 3$, alors $f \wedge g$ est dérivable sur I et $(f \wedge g)' = f' \wedge g + f \wedge g'$.

Démonstration.

1. $\alpha f + g = (\alpha f_1 + g_1, \dots, \alpha f_p + g_p)$. La formule suit du cas des fonctions numériques d'une variable réelle appliqué à chacune des composantes et de la caractérisation de la dérivabilité d'une fonction vectorielle par les fonctions coordonnées.
2. $\lambda f = (\lambda f_1, \dots, \lambda f_p)$. Même conclusion.
3. $f \circ \lambda = (f_1 \circ \lambda, \dots, f_p \circ \lambda)$. Même conclusion.
4. $(f | g) = \sum_{i=1}^p f_i g_i$. Ainsi, $(f | g)' = \sum_{i=1}^p (f'_i g_i + f_i g'_i) = \sum_{i=1}^p f'_i g_i + \sum_{i=1}^p f_i g'_i = (f' | g) + (f | g')$.
5. $f \wedge g = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2 g_3 - f_3 g_2 \\ f_3 g_1 - g_3 f_1 \\ f_1 g_2 - f_2 g_1 \end{pmatrix}$. Ainsi,

$$(f \wedge g)' = \begin{pmatrix} f'_2 g_3 + f_2 g'_3 - f'_3 g_2 - f_3 g'_2 \\ f'_3 g_1 + f_3 g'_1 - g'_3 f_1 - g_3 f'_1 \\ f'_1 g_2 + f_1 g'_2 - f'_2 g_1 - f_2 g'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'_2 g_3 - f'_3 g_2 \\ f'_3 g_1 - g_3 f'_1 \\ f'_1 g_2 - f'_2 g_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_2 g'_3 - f_3 g'_2 \\ f_3 g'_1 - g'_3 f_1 \\ f_1 g'_2 - f_2 g'_1 \end{pmatrix} = f' \wedge g + f \wedge g'.$$

□

Définition 16: Dérivées successives, classe \mathcal{C}^k

- On définit la n -ième dérivée $f^{(n)}$ de la fonction f par récurrence : $f^{(0)} = f$ et si $f^{(n)}$ est dérivable sur I , $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$.
- On dit que f est de classe \mathcal{C}^n sur I si f est n fois dérivable sur I et $f^{(n)}$ est continue sur I .

Par récurrence, on obtient le résultat suivant :

Proposition 17: Dérivées successives d'une combinaison linéaire, d'un produit

- Si $f, g \in \mathcal{C}^n(I)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $\alpha f + g \in \mathcal{C}^n(I)$ et $(\alpha f + g)^{(n)} = \alpha f^{(n)} + g^{(n)}$.
- Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}^p$ et $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$ sont de classe \mathcal{C}^n sur I alors $\lambda \times f$ est de classe \mathcal{C}^n sur I et

$$(\lambda \times f)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \lambda^{(k)} \times f^{(n-k)}.$$

Définition 18: Développement limité en $t_0 \in I$

On dit que f admet un développement limité en t_0 à l'ordre n si ses fonctions coordonnées admettent chacune un développement limité en t_0 à l'ordre n .

A partir du cas des fonctions numériques d'une variable réelle, on obtient :

Théorème 19

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^n sur I et $t_0 \in I$. Alors,

$$f(t) \underset{t \rightarrow t_0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(t-t_0)^k}{k!} \begin{pmatrix} f_1^{(k)}(t) \\ \vdots \\ f_p^{(k)}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o((t-t_0)^n) \\ \vdots \\ o((t-t_0)^n) \end{pmatrix}$$

Exemple : $DL_3(0)$

$$f(t) = \begin{pmatrix} \cos(3t) \\ \sin(3t) \end{pmatrix} \underset{t \rightarrow 0}{=} \begin{pmatrix} 1 - \frac{(3t)^2}{2!} + o(t^3) \\ \left((t - \frac{t^3}{3!} + o(t^3)) \right)^3 \end{pmatrix} \underset{t \rightarrow 0}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o(t^3) \\ o(t^3) \end{pmatrix}.$$

Exercice 20

Déterminer le $DL_3(\sqrt{3})$ de $f(t) = \left(\frac{t^2+9}{t^2+1}; \frac{t(t^2+9)}{t^2+1} \right)$.

Solution. On commence par déterminer le $DL_3(0)$ de $x(t)$, pose $t = \sqrt{3} + h$:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{t^2+9}{t^2+1} \underset{t \rightarrow \sqrt{3}}{=} \frac{(\sqrt{3}+h)^2+9}{(\sqrt{3}+h)^2+1} \underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{12+2\sqrt{3}h+h^2}{4+2\sqrt{3}h+h^2} \underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{12+2\sqrt{3}h+h^2}{4} \frac{1}{1+\frac{2\sqrt{3}h+h^2}{4}} \\ &\underset{h \rightarrow 0}{=} \left(3 + \frac{\sqrt{3}}{2}h + \frac{h^2}{4} \right) \left(1 - \frac{2\sqrt{3}h+h^2}{4} + \left(\frac{2\sqrt{3}h+h^2}{4} \right)^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}h+h^2}{4} \right)^3 + o\left(\frac{2\sqrt{3}h+h^2}{4} \right) \right) \\ &\underset{h \rightarrow 0}{=} \left(3 + \frac{\sqrt{3}}{2}h + \frac{h^2}{4} \right) \left(1 - \frac{2\sqrt{3}h+h^2}{4} + \left(\frac{12h^2+4\sqrt{3}h^3}{16} \right) - \left(\frac{24\sqrt{3}h^3}{64} \right) + o(h^3) \right) \\ &\underset{h \rightarrow 0}{=} \left(3 + \frac{\sqrt{3}}{2}h + \frac{h^2}{4} \right) \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}h + h^2 \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \right) + h^3 \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{8} \right) + o(h^3) \right) \underset{h \rightarrow 0}{=} \left(3 + \frac{\sqrt{3}}{2}h + \frac{h^2}{4} \right) \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}h + \frac{h^2}{2} - \frac{\sqrt{3}h^3}{8} + o(h^3) \right) \\ &\underset{h \rightarrow 0}{=} 3 + h \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + h^2 \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \right) + h^3 \left(-\frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{8} \right) + o(h^3) \underset{h \rightarrow 0}{=} 3 - \sqrt{3}h + h^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}h^3 + o(h^3) \end{aligned}$$

$$\text{Alors } y(t) \underset{t \rightarrow \sqrt{3}}{=} t x(t) \underset{h \rightarrow 0}{=} 3\sqrt{3} + \frac{1}{4}h^3 + o(h^3) \text{ et } f(t) \underset{t \rightarrow \sqrt{3}}{=} \begin{pmatrix} \frac{3}{3\sqrt{3}} \\ \frac{3}{3\sqrt{3}} \end{pmatrix} - (t-\sqrt{3}) \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{0} \\ 0 \end{pmatrix} + (t-\sqrt{3})^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{0} \\ 0 \end{pmatrix} + (t-\sqrt{3})^3 \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{4}} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o((t-\sqrt{3})^3) \\ o((t-\sqrt{3})^3) \end{pmatrix}.$$

2 - Courbes du plan

2.A - Modes de représentations

Trois modes de représentations possibles : équation cartésienne, paramétrage, équation implicite.

Il est possible de passer d'un mode de représentation à l'autre plus ou moins simplement.

Définition 21: Courbe définie par une équation cartésienne

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application définie sur un intervalle I . La courbe définie par l'équation cartésienne $y = f(x)$ est l'ensemble des points du plan

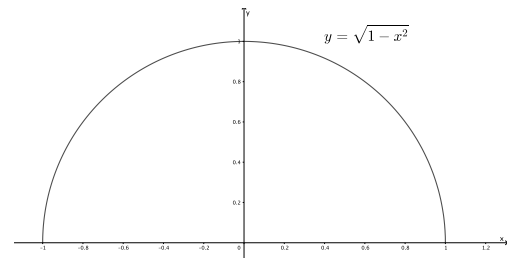
$$\mathcal{C} = \{(x, f(x)) : x \in I\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I, y = f(x)\}.$$

Exemple

Soit $f : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$.

On représente ci-contre la courbe

$$\mathcal{C} = \{(x, \sqrt{1 - x^2}) : x \in [-1; 1]\}.$$



Remarques

L'application $x \in I \mapsto (x, f(x))$ est injective. Autrement dit, la courbe \mathcal{C} ne possède pas de points doubles ; si M est un point du plan, la courbe \mathcal{C} passe au plus une fois par M .

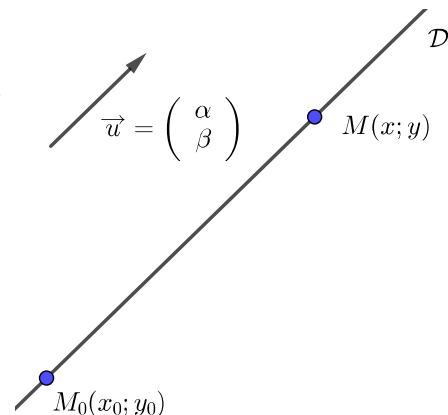
Définition 22: Courbe définie par un paramétrage

Soient $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications définies sur un intervalle I . La courbe définie par le paramétrage $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ décrit dans le plan l'ensemble $\mathcal{C} = \{(x(t); y(t)) : t \in I\}$ des points de coordonnées $(x(t); y(t))$.

Exemple : Paramétrage d'une droite

Soit \mathcal{D} la droite passant par le point $M_0(x_0; y_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. Alors $M(x; y) \in \mathcal{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{M_0M}$ et \vec{u} sont colinéaires :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{D} &\iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\ &\iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = x_0 + t\alpha \\ y = y_0 + t\beta \end{cases} \end{aligned}$$



Exemple : Paramétrage d'un cercle

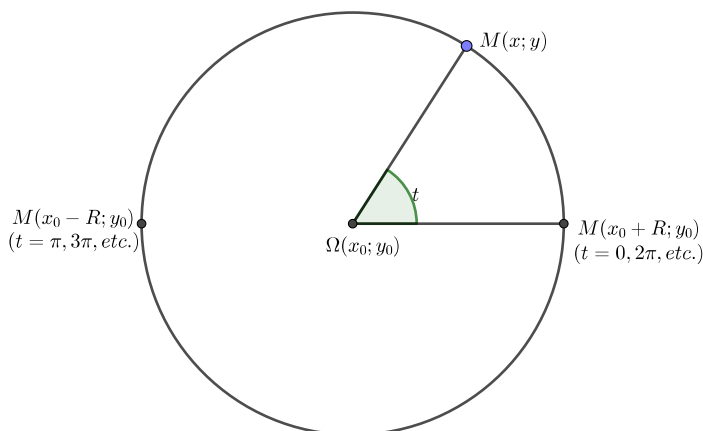
Soit \mathcal{C} le cercle de centre $\Omega(x_0; y_0)$ et de rayon R .

Alors $M(x; y) \in \mathcal{C}$ si et seulement si $\Omega M = R$ c'est à dire

$$||\overrightarrow{\Omega M}|| = R \Leftrightarrow \left(\frac{x-x_0}{R}\right)^2 + \left(\frac{y-y_0}{R}\right)^2 = 1.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} M(x; y) \in \mathcal{C} &\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} \frac{x-x_0}{R} = \cos(t) \\ \frac{y-y_0}{R} = \sin(t) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = x_0 + R \cos(t) \\ y = y_0 + R \sin(t) \end{cases} \end{aligned}$$



Avec le mode de représentation paramétrique, la courbe \mathcal{C} possède d'éventuels points multiples.

Définition 23: Courbe définie par une équation implicite

Soit $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une application définie sur un intervalle I .

La courbe d'équation $F(x, y) = 0$ est l'ensemble $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = 0\}$.

Exemple : Équation de droite du plan

- Si $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la droite \mathcal{D} alors $ax + by - c = 0$ est une équation cartésienne de \mathcal{D} . En effet, si $M(x_0; y_0)$ et $M(x; y)$ appartiennent à \mathcal{D} , alors en notant $(\cdot | \cdot)$ le produit scalaire euclidien sur le plan directement orienté \mathbb{R}^2 alors

$$(\overrightarrow{M_0 M} | \vec{n}) = 0 \Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right) = 0 \Leftrightarrow ax + by - (ax_0 + by_0) = 0.$$

- Un vecteur directeur \vec{u} de \mathcal{D} est donc orthogonal à \vec{n} : $\vec{u} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ convient : $(\vec{u} | \vec{n}) = 0$.

On le vérifie, encore, en exploitant la colinéarité de \vec{u} et $\overrightarrow{M_0 M}$ via la nullité du déterminant :

$$0 = \det(\overrightarrow{M_0 M}, \vec{u}) = \begin{vmatrix} x - x_0 & -b \\ y - y_0 & a \end{vmatrix} \Leftrightarrow 0 = a(x - x_0) + b(y - y_0) \Leftrightarrow ax + by - (ax_0 + by_0) = 0.$$

Exemple : Équation implicite de cercle

Une équation implicite du cercle de centre $\Omega(x_0; y_0)$ dans le plan \mathbb{R}^2 muni de sa structure euclidienne usuelle : $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - R^2 = 0$.

2.B - Passage d'un mode de représentation à l'autre

- Si \mathcal{C} est définie par une équation cartésienne $y = f(x)$, on obtient aisément une représentation paramétrique : $\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$. Le paramètre est simplement la coordonnée x .
- Si \mathcal{C} est définie par une équation cartésienne $y = f(x)$, on a également aisément une équation implicite : $F(x, y) = y - f(x) = 0$.
- Si \mathcal{C} est définie par une équation implicite, il n'est pas toujours possible d'obtenir une équation cartésienne.

Par exemple, l'équation $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = R^2$ donne deux équations cartésiennes $y = +\sqrt{1-x^2}$ et $y = -\sqrt{1-x^2}$. Les demi-cercles possèdent donc de telles équations cartésiennes réduites mais pas le cercle entier.

- Si \mathcal{C} est définie par une représentation paramétrique, il n'est pas toujours possible d'obtenir une équation cartésienne (notamment si \mathcal{C} possède des points doubles).

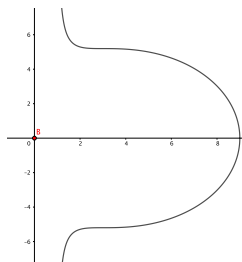
En revanche, on peut éliminer le paramètre pour obtenir une équation implicite comme dans l'exemple ci-dessous :

Exemple

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = \frac{t^2 + 9}{t^2 + 1} & (1), \\ y = \frac{t^3 + 9t}{t^2 + 1} & (2). \end{cases}$$

On a $y = tx$ et on obtient, en injectant $t = \frac{y}{x}$ ($x > 0$) dans (1) :

$$x = \frac{\frac{y^2}{x^2} + 9}{\frac{y^2}{x^2} + 1} \Leftrightarrow x - \frac{y^2 + 9x^2}{y^2 + x^2} = 0 \quad (*).$$



Attention : L'équation $y^2(x-1) + x^2(x-9) = 0$ est vérifiée au point $(x, y) = (0, 0)$ qui n'appartient pas à la courbe.

Réciproquement, si (x, y) vérifie (*) on pose $t = \frac{y}{x}$ ($x > 0$) et on retrouve le paramétrage de $x(t)$ et $y(t)$ initial.

- Si \mathcal{C} est donnée par une équation implicite, on peut parfois avoir recours à un faisceau de droites pour en déduire un paramétrage :

Exemple

On considère l'ellipse $\mathcal{E} : 4x^2 + y^2 = 4$ et le faisceau de droites $(\mathcal{D}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ passant par le point $(1; 0)$: $\mathcal{D}_t : y = t(x-1)$.

- Toute droite \mathcal{D}_t coupe l'ellipse en deux points $(1; 0)$ et un autre point.

En effet, on injecte $y = t(x-1)$ dans l'équation de \mathcal{E} et on obtient l'équation du second degré d'inconnue x possédant deux solutions réelles :

$$x^2(4+t^2) - 2t^2x + (t^2-4) = 0, \quad \Delta = 64, \quad x = 1 \text{ ou } x = \frac{t^2-4}{t^2+4}.$$

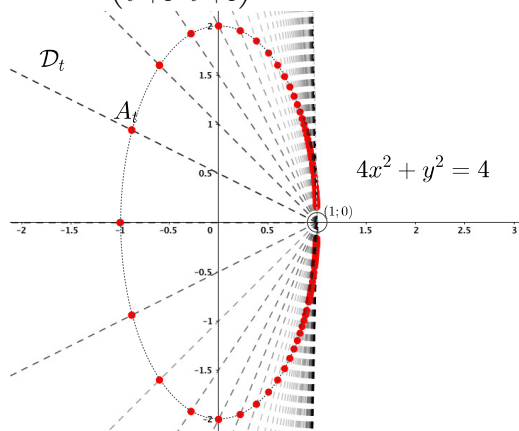
Les ordonnées correspondantes $y = t(x-1)$ permettent alors d'obtenir les deux points d'intersection

$$\mathcal{D}_t \cap \mathcal{E} = \left\{ (1; 0), \left(\frac{t^2-4}{t^2+4}; \frac{-8t}{t^2+4} \right) \right\} = \{(1; 0), A_t\}.$$

- **Réciproquement,** tout point $M(x; y)$ de l'ellipse est l'intersection de \mathcal{E} et d'une droite $\mathcal{D}_t : y = t(x-1)$.

En effet, $M(x, y)$ vérifie $4x^2 + y^2 = 4$. Si $(x; y) \neq (1; 0)$ on pose $t = \frac{y}{x-1}$ et on obtient comme ci-dessus

$$(x; y) = \left(\frac{t^2-4}{t^2+4}; \frac{-8t}{t^2+4} \right) \in \mathcal{E} \cap \mathcal{D}_t \text{ avec } \mathcal{D}_t : y = t(x-1).$$



On obtient **un** paramétrage de l'ellipse \mathcal{E} (privée du point $(1; 0)$) :

$$\begin{cases} x = \frac{t^2-4}{t^2+4} \\ y = -\frac{8t}{t^2+4} \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Un autre paramétrage de l'ellipse (complète) :

$$\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = 2 \sin(t) \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

3 - Courbes paramétrées du plan

3.A - Définition

Définition 24

- On appelle **courbe paramétrée** toute application $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R}^2 .
- On appelle **support** de la courbe paramétrée par f l'ensemble des points $M(t)$ de coordonnées $(x(t); y(t))$, $t \in I$ du plan.

Dans le reste du chapitre $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ désigne une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans \mathbb{R}^2 .

On distinguera bien la notion de courbe paramétrée et celle de support ; de même qu'on distingue la notion de fonction numérique de son expression $f(x)$; ou en physique la notion de mouvement de celle de trajectoire.

Exemple

- L'ellipse $\mathcal{E}' : 4x^2 + y^2 = 4$ privée du point $(1; 0)$ admet deux paramétrages (au moins)

$$\begin{cases} x = \frac{t^2 - 4}{t^2 + 4} \\ y = -\frac{8t}{t^2 + 4} \end{cases}, \text{ avec } t \in \mathbb{R} \text{ et } \begin{cases} x = \cos(\theta) \\ y = 2 \sin(\theta) \end{cases}, \text{ avec } \theta \in]0; 2\pi[$$

- Le cercle privé du point $(-1; 0)$ admet deux paramétrages (au moins) :

$$f : t \mapsto \begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases}, \text{ avec } t \in]-\pi; \pi[\text{ et } g : u \mapsto \begin{cases} x = \frac{1 - u^2}{1 + u^2} \\ y = \frac{2u}{1 + u^2} \end{cases}, \text{ avec } u \in \mathbb{R}$$

On obtient le second paramétrage à partir du premier en posant :

$$t = 2 \arctan(u) = \varphi(u) \iff u = \tan\left(\frac{t}{2}\right) \quad \text{alors : } \overrightarrow{OM}(t) = f(t) = f(\varphi(u)) = g(u) = \overrightarrow{OM}(u).$$

Remarques : Changement de paramétrage

Soit $\varphi : J \rightarrow I, u \mapsto \varphi(u) = t$ une bijection de classe \mathcal{C}^1 .

La courbe paramétrée par f a le même support que celle paramétrée par $g(u) = f(\varphi(u)) = f(t)$.

On note au passage qu'au point de paramètre $t_0 = \varphi(u_0) \iff u_0 = \varphi^{-1}(t_0)$, on a :

$$\frac{dg}{du}(u_0) = \frac{d(f \circ \varphi)}{du}(u_0) = \varphi'(u_0) \frac{df}{dt}(t_0) = \varphi'(u_0) \frac{df}{dt}(\varphi(u_0))$$

$$\begin{array}{ccc} \varphi(u) = t & \begin{array}{c} I \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \\ \uparrow \varphi \\ J \end{array} & g(u) = f(\varphi(u)) = f(t) \\ u & \nearrow g = f \circ \varphi & \end{array}$$

3.B - Etude d'une courbe paramétrée

On considère $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée c'est à dire une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur I .

Suivant la situation, $f(t)$ désigne : le point $M(t)$ de coordonnées $(x(t); y(t))$ ou le vecteur $\overrightarrow{OM}(t) \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

3.B.1) Domaine de définition

On détermine les domaines des fonctions x et y . Le domaine de définition \mathcal{D}_f de f est leur **intersection**.

Exemple

$$t \mapsto f(t) = \left(\frac{t}{t^2 - 1}; \frac{t^2}{t - 1} \right). \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$$

Exemple

$$t \mapsto f(t) = (-2 \operatorname{sh}^3(t); 2 \operatorname{ch}^3(t)). \mathcal{D}_f = \mathbb{R}.$$

3.B.2) Réduction de l'intervalle d'étude

Périodicités et symétries permettent de limiter l'étude à des parties du domaine de définition :

— Si x et y sont T -périodiques, on les étudie sur un intervalle de longueur T .

Exemple : $f(t) = (\cos(t); \sin(t))$.

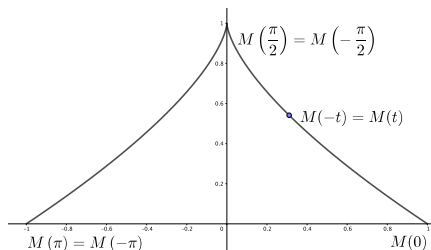
Il suffit d'étudier la courbe sur $[-\pi; \pi]$ (ou $[0; 2\pi]$, etc.).

— Si x et y sont paires : il suffit d'étudier la courbe sur $\mathcal{D}_f \cap \mathbb{R}_+$.

Exemple : $f(t) = (\cos^3(t); \sin^2(t))$.

Les fonctions x et y sont 2π -périodiques : on restreint l'étude à $[-\pi; \pi]$.

Les fonctions x et y sont paires, il suffit donc d'étudier la courbe sur $[0; \pi]$.



— Si x est paire et y impaire, on restreint l'étude à $\mathcal{D}_f \cap \mathbb{R}_+$ et on complète par réflexion d'axe (\mathcal{O}_x) .

Exemple : Le cercle : $f(t) = (\cos(t); \sin(t))$.

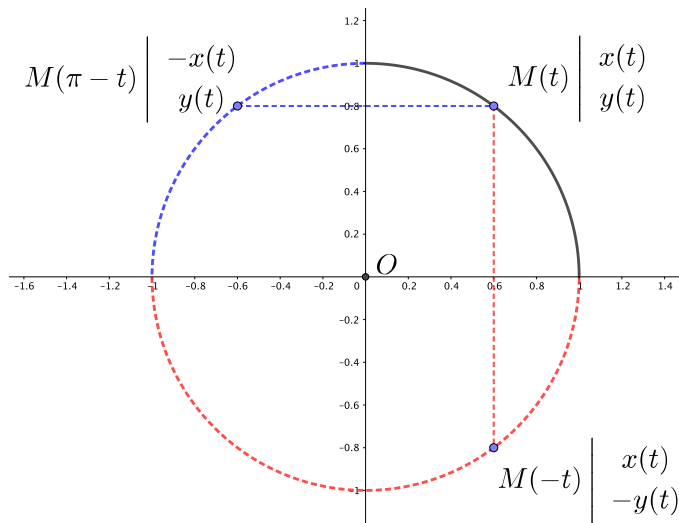
Les fonctions x et y sont 2π -périodiques : on restreint l'étude à $[-\pi; \pi]$.

La fonction x est paire, y impaire : on restreint l'étude à $[0; \pi]$ et on complète par réflexion d'axe (\mathcal{O}_x) .

Remarques

$$\forall t \in [0; \frac{\pi}{2}], \begin{cases} x(\pi - t) = -x(t) \\ y(\pi - t) = y(t) \end{cases}$$

On peut encore réduire l'intervalle d'étude à $[0; \frac{\pi}{2}]$ et compléter par les réflexions d'axe (\mathcal{O}_x) et (\mathcal{O}_y) .



— Si x et y sont impaires : on restreint l'étude à $\mathbb{R}_+ \cap \mathcal{D}_f$ et on complète par symétrie centrale de centre O .

Exemple : Lemniscate de Bernoulli

$$f(t) = (\sin(t); \sin(2t)).$$

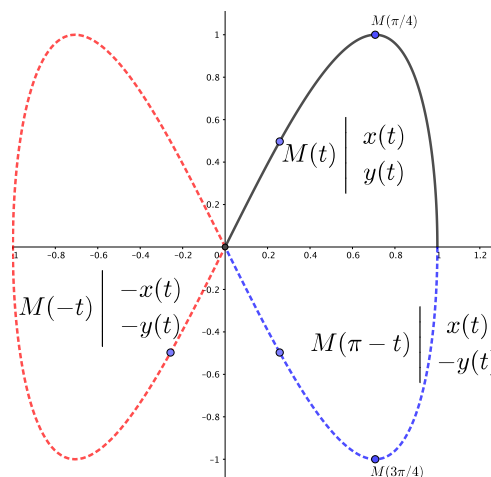
Les fonctions x et y sont 2π -périodiques : on restreint l'étude à $[-\pi; \pi]$.

Les fonctions x et y sont impaires : on travaille sur $[0; \pi]$ et on complète par symétrie centrale de centre O .

Remarques

$$\text{On a } \begin{cases} x(\pi - t) = x(t) \\ y(\pi - t) = -y(t) \end{cases}.$$

On peut encore réduire l'intervalle d'étude à $[0; \frac{\pi}{2}]$ et compléter par les deux réflexions d'axe (\mathcal{O}_x) et (\mathcal{O}_y).



- Il existe encore d'autres possibilités afin réduire l'intervalle d'étude que nous rencontrerons en TD. Il faut être capable de les retrouver sur un schéma rapide.

3.B.3) Etude des variations

On superpose les tableaux de variations des fonctions x et y sur I afin d'étudier leur évolution conjointe et d'en déduire la trajectoire des points $(x(t); y(t))$ pour $t \in I$.

Exemple

$$t \mapsto f(t) = (\cos^3(t); \sin^2(t)).$$

La fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

Les fonctions coordonnées définies par $x(t) = \cos^3(t)$ et $y(t) = \sin^2(t)$ sont 2π -périodiques, on étudie la courbe sur $[-\pi; \pi]$.

Les fonctions x et y sont paires, on restreint l'étude à $[0; \pi]$: l'étude est complète sur cet intervalle.

$$\text{Enfin, } \forall t \in [0; \frac{\pi}{2}], \begin{cases} x(\pi - t) = -x(t) \\ y(\pi - t) = y(t) \end{cases}.$$

On peut encore restreindre l'intervalle d'étude à $[0; \frac{\pi}{2}]$ et compléter par réflexion d'axe (\mathcal{O}_y).

t	0		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	0	—	0
x	1	\searrow	0
$y'(t)$	0	+	0
y	0	\nearrow	1

- Pour tout $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $x'(t) = -3 \sin(t) \cos^2(t) \leq 0$ et s'annule en 0 et $\frac{\pi}{2}$.
- Pour tout $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $y'(t) = 2 \cos(t) \sin(t) \geq 0$ et s'annule en 0 et $\frac{\pi}{2}$.
- Le seul tableau de variation ne permet pas de dessiner le support de la courbe. Il faut notamment pouvoir caractériser les points de paramètres $t = 0$ et $t = \frac{\pi}{2}$: le vecteur dérivé est nul en ces deux points.

3.B.4) Tangente, points réguliers et stationnaires.

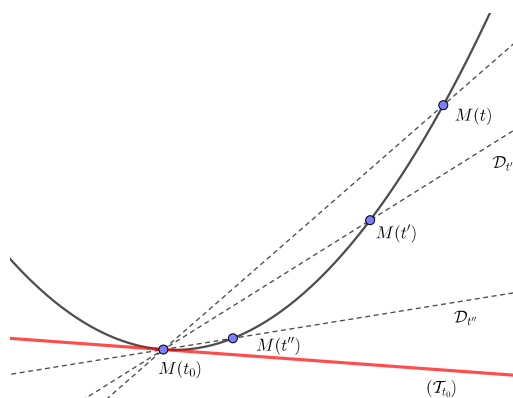
Définition 25

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée; f de classe \mathcal{C}^1 sur I . Soit $t_0 \in I$.

- On appelle **demi-tangente à droite** en $M(t_0)$ la demi-droite issue de $M(t_0)$ et dirigée par le vecteur, s'il existe, $\lim_{t \rightarrow t_0^+} \frac{\overrightarrow{M(t_0)M(t)}}{\|\overrightarrow{M(t_0)M(t)}\|}$.
- On appelle **demi-tangente à gauche** en $M(t_0)$ la demi-droite issue de $M(t_0)$ et dirigée par le vecteur, s'il existe, $\lim_{t \rightarrow t_0^-} \frac{\overrightarrow{M(t_0)M(t)}}{\|\overrightarrow{M(t_0)M(t)}\|}$.
- On appelle **tangente** en $M(t_0)$ la droite passant par et $M(t_0)$, et dirigée par le vecteur, s'il existe, $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\overrightarrow{M(t_0)M(t)}}{\|\overrightarrow{M(t_0)M(t)}\|}$.

Remarques

- $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\overrightarrow{M(t_0)M(t)}}{\|\overrightarrow{M(t_0)M(t)}\|}$ existe si et seulement si les limites à droite et à gauche existent et sont égales.
- La tangente (\mathcal{T}_{t_0}) , si elle existe, apparaît donc comme la droite limite des droites sécantes \mathcal{D}_t lorsque $t \rightarrow t_0$.



Interprétation cinématique.

Le mouvement d'un point dans le plan est modélisé en mécanique par une application

$$t \in I \mapsto f(t) = \overrightarrow{OM(t)} = (x(t); y(t)) \in \mathbb{R}^2,$$

où t représente le temps.

La trajectoire de ce mouvement est l'ensemble décrit par les points $M(t)$: c'est le support de la courbe paramétrée par f .

La vitesse moyenne du point entre les instants t_0 et t est la distance $\|\overrightarrow{M(t_0)M(t)}\| = \|f(t) - f(t_0)\|$ divisée par $t - t_0$.

Si $t \rightarrow t_0$, on obtient la vitesse instantanée $v_{t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\|f(t) - f(t_0)\|}{t - t_0}$.

Si cette quantité est non nulle, on va faire le lien entre :

- le vecteur unitaire tangent $\frac{\overrightarrow{M(t_0)M(t)}}{\|\overrightarrow{M(t_0)M(t)}\|}$ à la courbe au point t_0 ,
- et le vecteur dérivé $f(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$.

Définition 26: Points réguliers, singuliers

- Le point $M(t_0)$ est dit **régulier** si le vecteur dérivé $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t_0) = \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix}$ est non nul.
- Le point $M(t_0)$ est dit **stationnaire (ou singulier)** si le vecteur dérivé $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t_0) = \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix}$ est nul.
- Une courbe est dite régulière si elle ne possède aucun point singulier, c'est-à-dire si les points $M(t)$, $t \in I$ sont tous réguliers.

Proposition 27

Soit $M(t_0)$ un point régulier.

La courbe paramétrée par f possède une tangente au point $M(t_0)$ dirigée par le vecteur dérivé :

$$f'(t_0) = \frac{d\vec{OM}}{dt}(t_0).$$

Démonstration. Le point $M(t_0)$ est régulier donc le vecteur dérivé $f'(t_0)$ est non nul. Alors :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} \left\| \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \right\| &= \lim_{t \rightarrow t_0} \left\| \begin{pmatrix} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} \\ \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0} \end{pmatrix} \right\| = \lim_{t \rightarrow t_0} \sqrt{\left(\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} \right)^2 + \left(\frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0} \right)^2} \\ \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\|f(t) - f(t_0)\|}{|t - t_0|} &= \sqrt{x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2} = \|f'(t_0)\|. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{\overrightarrow{M(t_0)M(t)}}{\|\overrightarrow{M(t_0)M(t)}\|} = \frac{f(t) - f(t_0)}{\|f(t) - f(t_0)\|} = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \times \frac{t - t_0}{\|f(t) - f(t_0)\|} \begin{cases} \xrightarrow[t \rightarrow t_0^+]{\frac{f'(t_0)}{\|f'(t_0)\|}}, \\ \xrightarrow[t \rightarrow t_0^-]{\frac{f'(t_0)}{\|f'(t_0)\|}}. \end{cases}$$

La courbe possède une tangente en $M(t_0)$ dirigée par le vecteur $f'(t_0)$. □

Remarques

Si $M(t_0)$ est régulier alors le vecteur dérivé en $M(t_0)$ est non nul et $\frac{d\vec{OM}}{dt}(t_0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ avec $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ dirige la tangente en $M(t_0)$.

Un vecteur normal est $\vec{n} = \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix}$ et une équation cartésienne de la tangente (\mathcal{T}_{t_0}) est $-\beta x + \alpha y - c = 0$ (avec $c = -\beta x(t_0) + \alpha y(t_0)$ car $M(t_0) \in (\mathcal{T}_{t_0})$).

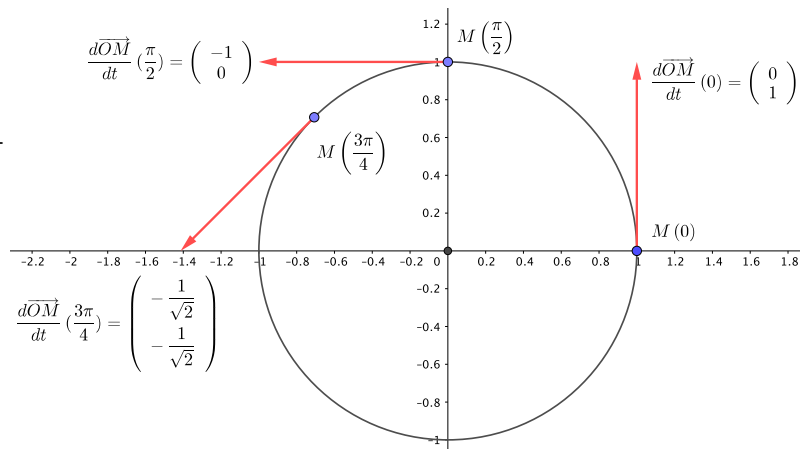
Le coefficient directeur de la tangente est donnée par $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)} \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Exemple

La courbe $t \mapsto f(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ est régulière car

$$\frac{d\vec{OM}}{dt}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

n'est pas nul.



La tangente rend compte du comportement local de la courbe : dans le cas d'un point régulier $M(t_0)$ le vecteur dérivé $\frac{d\vec{OM}}{dt}(t_0)$ fournit une approximation locale : $f(t) = f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0) + \begin{pmatrix} o(t - t_0) \\ o(t - t_0) \end{pmatrix}$

Exemple : Support du lemniscate de Bernoulli

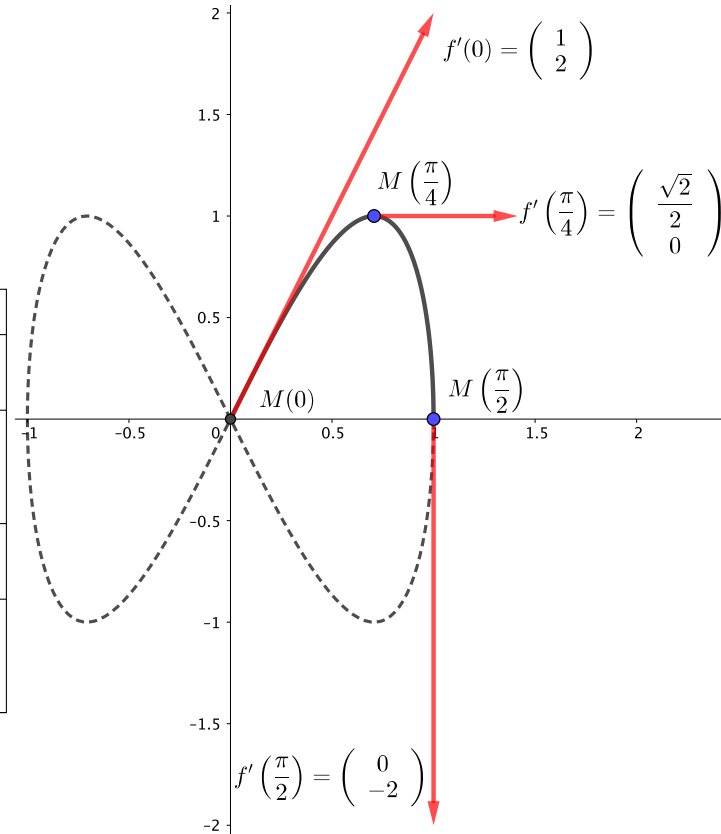
$$f(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}.$$

On a déjà justifié que l'étude peut-être restreinte à l'intervalle $[0; \frac{\pi}{2}]$ et complétée par la réflexion d'axe (O_x) et symétrie centrale de centre O .

$$f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \text{ avec } \forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 2 \cos(2t) \end{pmatrix}.$$

$$f'(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}; f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$		+	+
$x(t)$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$y'(t)$	+	0	-
$y(t)$	0	1	0



En un point singulier, le vecteur dérivé n'apporte pas d'information. Il faut poursuivre le DL.

3.B.5) Etude locale : développements limités

Sous réserve de régularité suffisante, on effectue un développement limité de f au voisinage de t_0 :

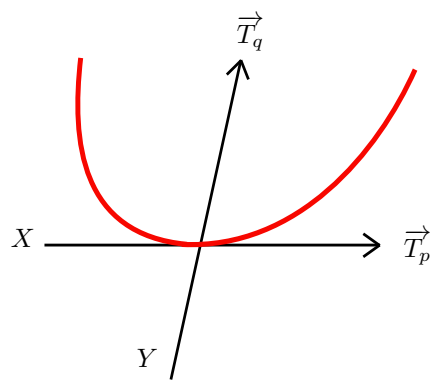
$$f(t) \underset{t \rightarrow t_0}{=} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \underset{t \rightarrow t_0}{=} \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix} + (t-t_0)^p \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{\vec{T}_p \neq 0} + \underbrace{\dots}_{\begin{pmatrix} o((t-t_0)^p) \\ o((t-t_0)^p) \end{pmatrix}} + (t-t_0)^q \underbrace{\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}}_{\det(\vec{T}_q, \vec{T}_p) \neq 0} + \begin{pmatrix} o((t-t_0)^q) \\ o((t-t_0)^q) \end{pmatrix},$$

de telle sorte que (s'ils existent) :

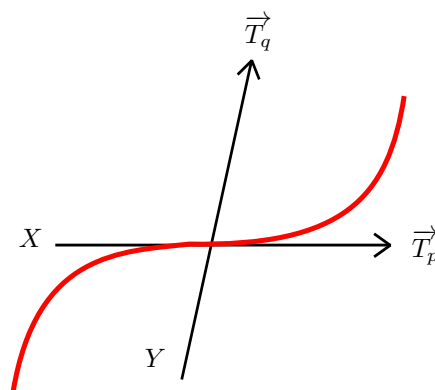
- $\vec{T}_p = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ soit le **premier vecteur non nul** du DL (dans le cas singulier $p \geq 2$),
- $\vec{T}_q = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ soit le premier vecteur du développement, **non colinéaire** à \vec{T}_p .

On obtient alors un repère local $\mathcal{R}_{t_0} = (M(t_0), \vec{T}_p, \vec{T}_q)$ dans lequel tout point $M(t)$ de coordonnées $(X(t), Y(t))$ dans \mathcal{R}_{t_0} vérifie :

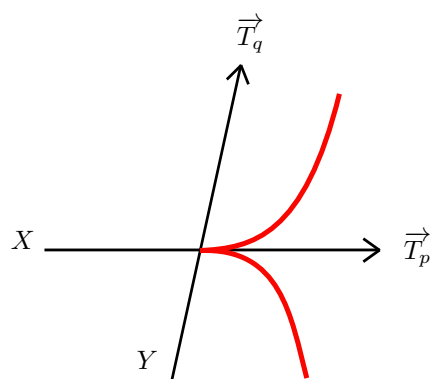
$$\overrightarrow{M(t_0)M(t)} = f(t) - f(t_0) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix} \underset{t \rightarrow t_0}{=} \underbrace{X(t)}_{\underset{t_0}{\sim} (t-t_0)^p} \vec{T}_p + \underbrace{Y(t)}_{\underset{t_0}{\sim} (t-t_0)^q} \vec{T}_q.$$



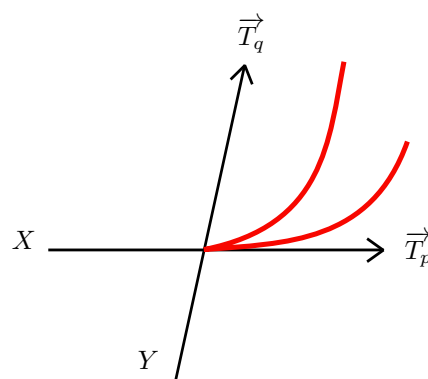
p impaire , q paire
point ordinaire



p impaire , q impaire
point d'inflexion



p paire , q impaire
point de rebroussement de première espèce



p paire , q paire
point de rebroussement de 2de espèce

Exemple : Support d'une courbe avec études locales

$t \mapsto f(t) = (\cos^3(t); \sin^2(t))$ est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

On a déjà justifié que l'étude est complète sur $[0; \pi]$ par 2π -périodicité et parité des fonctions coordonnées. On a également justifié que l'on peut restreindre l'intervalle d'étude à $[0; \frac{\pi}{2}]$ et compléter par réflexion d'axe (\mathcal{O}_y).

t	0	$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	0	0
x	1	0
$y'(t)$	0	0
y	0	1

- $M(0)$ est un point de rebroussement de 2de espèce :

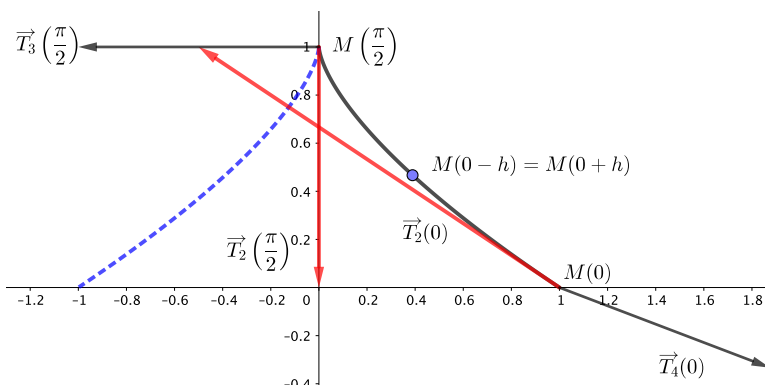
$$f(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + t^4 \begin{pmatrix} \frac{7}{8} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o(t^4) \\ o(t^4) \end{pmatrix}.$$

- $M(\frac{\pi}{2})$ est un point de rebroussement de première espèce :

$$f(t) \underset{t \rightarrow \frac{\pi}{2}}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o(t^4) \\ o(t^4) \end{pmatrix}.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos^3(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} \left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + o(t^4)\right)^3 \underset{t \rightarrow 0}{=} 1 + 3\left(-\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24}\right) + 3\left(\frac{t^4}{4}\right) + o(t^4) \underset{t \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{7}{8}t^4 + o(t^4) \\ \sin^2(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} \left(t - \frac{t^3}{3!} + o(t^4)\right)^2 \underset{t \rightarrow 0}{=} t^2 - \frac{2t^4}{6} + o(t^4) \underset{t \rightarrow 0}{=} t^2 - \frac{1}{3}t^4 + o(t^4) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos^3\left(h + \frac{\pi}{2}\right) \underset{h \rightarrow 0}{=} -\sin^3(h) \underset{h \rightarrow 0}{=} -\left(h - \frac{h^3}{3!} + o(h^3)\right)^3 \underset{h \rightarrow 0}{=} -h^3 + o(h^3) \\ \sin^2\left(h + \frac{\pi}{2}\right) \underset{h \rightarrow 0}{=} \left(1 - \frac{h^2}{2!} + o(h^3)\right)^2 \underset{h \rightarrow 0}{=} 1 - 2\frac{h^2}{2} + o(h^3) \underset{h \rightarrow 0}{=} 1 - h^2 + o(h^3) \end{array} \right.$$

**3.B.6) Etude des branches infinies : développements asymptotiques**

La courbe présente une branche infinie, si l'une des coordonnées au moins tend vers $\pm\infty$ lorsque $t \rightarrow t_0 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

- Si $\lim_{t_0} x = \pm\infty$ et $\lim_{t_0} y \in \mathbb{R}$ alors il y a au voisinage de $M(t_0)$ une asymptote horizontale.
- Si $\lim_{t_0} x \in \mathbb{R}$ et $\lim_{t_0} y = \pm\infty$ alors il y a au voisinage de $M(t_0)$ une asymptote verticale.
- Si x et y tendent vers l'infini on étudie le comportement du quotient $\frac{y(t)}{x(t)}$.
 - Si $\lim_{t_0} \frac{y}{x} = 0$: la courbe présente une branche parabolique horizontale.
 - Si $\lim_{t_0} \frac{y}{x} = +\infty$: la courbe présente une branche parabolique verticale.
 - Si $\lim_{t_0} \frac{y}{x} = a \in \mathbb{R}^*$ alors :

- i. Si $\lim_{t_0} (y - ax) = b$ la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe. La position relative de la courbe et de son asymptote est donnée par le signe de $y(t) - (ax(t) + b)$.
- ii. Si $\lim_{t_0} (y - ax) = \pm\infty$, la courbe présente une branche parabolique de direction $y = ax$.

Exemple : $f(t) = \begin{pmatrix} -2\text{sh}^3(t) \\ 2\text{ch}^3(t) \end{pmatrix}$.

On écrit $x(t) = -2\text{sh}^3(t)$ et $y(t) = 2\text{ch}^3(t)$ ce qui définit deux fonctions de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

La fonction x est impaire et la fonction y est paire.

Il suffit donc d'étudier la courbe sur \mathbb{R}_+ et de compléter par réflexion d'axe ($\mathcal{O}y$).

On a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x'(t) = -6\cosh(t)\sinh^2(t)$ et $y'(t) = 6\sinh(t)\cosh^2(t)$.

On en déduit le tableau de variations ci-dessous.

t	0	$+\infty$
$x'(t)$	0	-
$x(t)$	0	$-\infty$
$y'(t)$	0	+
$y(t)$	2	$+\infty$

On fait une **étude locale** au voisinage de $t = 0$ au point $M(0) = (0, 2)$:

$$\begin{cases} x(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} -2 \left(t + \frac{t^3}{6} + o(t^3) \right)^3 = -2t^3 + o(t^3) \\ y(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} 2 \left(1 + \frac{t^2}{2} + o(t^3) \right)^3 = 2 + 3t^2 + o(t^3). \end{cases}$$

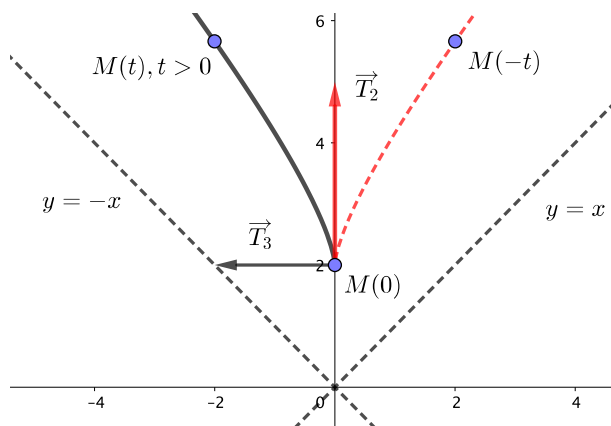
Le point $(0, 2)$ est donc un point de rebroussement de première espèce : la courbe traverse sa tangente au point $M(0)$:

$$f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o(t^3) \\ o(t^3) \end{pmatrix}.$$

Étude asymptotique : on a

- $\lim_{+\infty} x = -\infty$ et $\lim_{+\infty} y = +\infty$.
- $\frac{y(t)}{x(t)} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{2}{2} \frac{e^{3t}}{e^{3t}} = -1$.
- $y(t) - (-1)x(t)$
 $= \frac{2e^{3t}}{8} \left[(1 + e^{-2t})^3 - (1 - e^{-2t})^3 \right]$
donc $y(t) + x(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} \frac{e^{3t}}{4} [6e^{-2t} + o(e^{-2t})]$
puis $y(t) + x(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3e^t}{2} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty$.

Ainsi la courbe présente une branche parabolique de direction $y = -x$ pour t au voisinage de $+\infty$.



4 - Propriétés métriques des courbes paramétrées

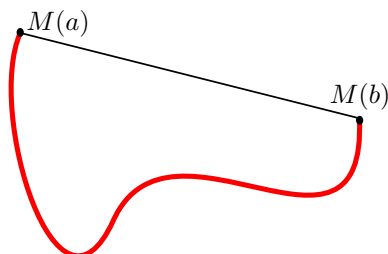
Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \overrightarrow{OM}(t)$ une application de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle I et **régulière**.

4.A - Longueur d'une courbe et abscisse curviligne

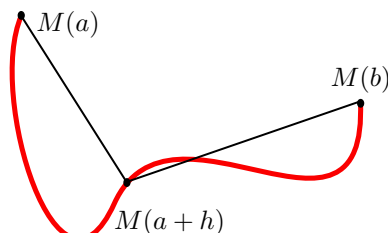
Définition 28

Soient $a, b \in I$ avec $a \leq b$. La **longueur** de la courbe entre les points $M(a)$ et $M(b)$ est :

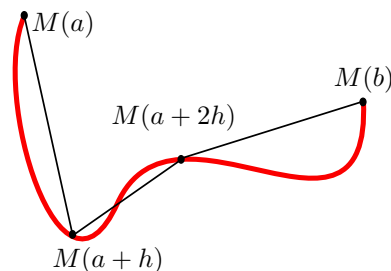
$$L = \int_a^b \|f'(t)\| dt = \int_a^b \left\| \frac{d\vec{OM}(t)}{dt} \right\| dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \quad (L \in \mathbb{R}_+).$$



$$L_1 = \|\vec{M(a)M(b)}\|$$



$$L_2 = \|\vec{M(a)M(a+h)}\| + \|\vec{M(a+h)M(b)}\|$$



$$L_3 = \sum_{i=0}^2 \|\vec{M(a+ih)M(a+(i+1)h)}\|$$

Exemple

La courbe paramétrée par $t \mapsto f(t) = \begin{pmatrix} R \cos(t) \\ R \sin(t) \end{pmatrix}$ est le cercle de centre O et de rayon $R > 0$. Cette courbe est régulière et sa longueur vaut

$$\int_0^{2\pi} \|f'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-R \sin(t))^2 + (R \cos(t))^2} dt = 2\pi R.$$

Une courbe peut admettre plusieurs paramétrages :

Le cercle $\mathcal{C}(O; 1)$ privé de $(-1; 0)$: $f(t) = \begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases}, t \in]-\pi; \pi[$ et $g(u) = \begin{cases} x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \\ y = \frac{2u}{1+u^2} \end{cases}, u \in \mathbb{R}.$

Avec $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$: $g(u) = g\left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right) = f(t) \iff g(u) = f(2 \arctan(u)) = f(t)$

$$\iff g(u) = f(\varphi(u)) = f(t) \iff g(u) = g(\varphi^{-1}(t)) = f(t)$$

Avec les deux paramétrages on trouve bien sûr la même longueur :

On a $\int_{-\pi}^{\pi} \|f'(t)\| dt = 2\pi$ et un calcul donne la convergence et la valeur de : $\int_{-\infty}^{+\infty} \|g'(u)\| du = 2\pi.$

Le changement de variable $u = \tan(t/2) \iff t = 2 \arctan(u)$ permet de déduire une intégrale de l'autre.

Proposition 29

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ deux paramétrages de la même courbe tels que $\varphi : J \rightarrow I$ est une application strictement monotone de classe \mathcal{C}^1 sur J vérifiant $\forall u \in J, g(u) = f \circ \varphi(u)$. Alors :

$$\int_I \|f'(t)\| dt = \int_J \|g'(u)\| du.$$

Démonstration. Il s'agit de la formule du changement de variable. Notons : $g(u) = f \circ \varphi(u) = f(t)$.

— **Cas φ strictement croissant.** On effectue le changement de variable $t = \varphi(u)$:

u	c	d
φ	a	b

$$\begin{aligned} \int_a^b \|f'(t)\| dt &= \int_c^d \|f'(\varphi(u))\| \underbrace{\varphi'(u)}_{>0} du \\ &= \int_c^d \|f'(\varphi(u))\varphi'(u)\| du = \int_c^d \|g'(u)\| du. \end{aligned}$$

— **Cas φ strictement décroissant.** Preuve analogue en notant que $|\varphi'(u)| = -\varphi'(u)$

□

Définition 30: Abscisse curviligne

On appelle **abscisse curviligne** de f d'origine $t_0 \in I$ la fonction $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall t \in I, \psi(t) = \int_{t_0}^t \|f'(\tau)\| d\tau = \int_{t_0}^t \left\| \frac{d\overrightarrow{OM}(\tau)}{d\tau} \right\| d\tau = \int_{t_0}^t \sqrt{x'(\tau)^2 + y'(\tau)^2} d\tau.$$

L'abscisse curviligne correspond à la *longueur algébrique* de la courbe entre les points $M(t_0)$ et $M(t)$ la courbe étant parcourue dans le sens donné par le paramètre t croissant. On dit que la courbe est **orientée** par le sens de parcours, lui-même fixé par le choix du paramétrage \mathcal{C}^1 bijectif.

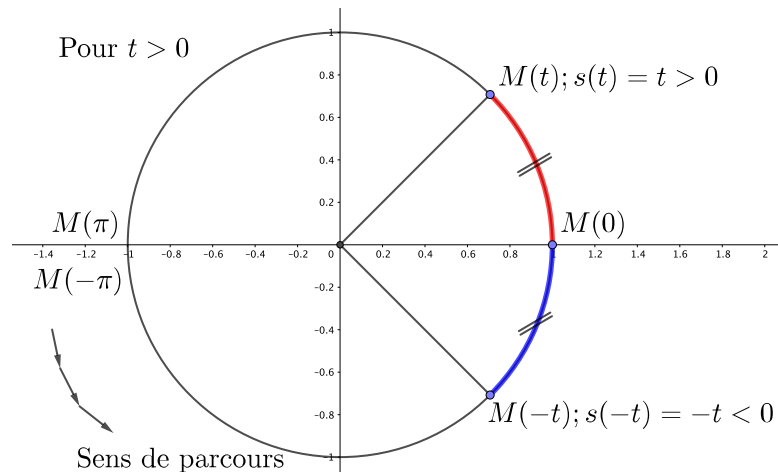
Exemple : Abscisse curviligne sur le cercle

Soit $t_0 = 0$. Pour tout $t \in [-\pi; \pi]$,

$$\psi(t) = \int_0^t \sqrt{(-\sin(\tau))^2 + (\cos(\tau))^2} d\tau = t$$

Ci-contre, les longueurs des arcs reliant $M(0)$ à $M(t)$ ou $M(-t)$ sont égales mais leurs longueurs algébriques opposées; le signe dépendant du sens de parcours imposé par le paramétrage.

Par exemple $s(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{\pi}{4}$ et $s(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}$.



Exercice 31

Soit $u \in [-\pi; \pi] \mapsto g(u) = \begin{pmatrix} \cos(-u) \\ \sin(-u) \end{pmatrix}$.

- Quel est le support de la courbe paramétrée par g ?
- Quel est le sens de parcours ?
- Déterminer l'abscisse curviligne d'origine 0 aux points de paramètre $t = \frac{\pi}{4}$ et $t = -\frac{\pi}{4}$.

L'abscisse curviligne fournit un paramétrage particulièrement intéressant de la courbe.

Avec ce paramétrage, la courbe est parcourue à **vitesse constante 1**.

On a $\psi \in \mathcal{C}^1(I)$ car ψ est une primitive de la fonction $t \mapsto \|f'(t)\|$ continue (et strictement positive).

Ainsi, ψ est strictement croissante et réalise une bijection de I sur l'intervalle $\psi(I) = J$.

La fonction $\varphi = \psi^{-1}$, bijection réciproque de ψ dérivable sur J car $\forall t \in I, \psi'(t) = \|f'(t)\| > 0$:

$$\psi^{-1} : J \longrightarrow I$$

$$\text{On a } t = \psi^{-1}(s) \iff s = \psi(t) \text{ et}$$

$$s \mapsto \psi^{-1}(s) = t.$$

$$\text{on a } (\psi^{-1})'(s) = \frac{1}{\psi'(\psi^{-1}(s))} = \frac{1}{\frac{d\psi}{dt}(t)} = \frac{1}{\|f'(\psi^{-1}(s))\|}.$$

La courbe paramétrée par

$$g : J \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$s \longmapsto f \circ \psi^{-1}(s) \quad \text{a le même support que } f \text{ et } g'(s) = (\psi^{-1})'(s) \times f'(\psi^{-1}(s)) = \frac{f'(\psi^{-1}(s))}{\|f'(\psi^{-1}(s))\|}$$

Ainsi comme annoncé $\forall s \in J, \|g'(s)\| = 1$. On écrit $s = \psi(t)$ et on obtient les formules plus suggestives :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{ds}(s) = \frac{1}{\frac{ds}{dt}(t)} \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t) \text{ i.e. } \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds} = \frac{dt}{ds} \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \text{ et on retrouve } \left\| \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds} \right\| = \frac{1}{\left\| \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right\|} \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = 1.$$

4.B - Repère de Frenet

On considère une courbe régulière paramétrée par $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe \mathcal{C}^2 .

Définition 32: Repère de Frenet

On appelle repère de Frenet au point $M(t)$ le repère orthonormé direct $(M(t), \vec{T}(t), \vec{N}(t))$ où

- $\vec{T}(t)$ est le **vecteur tangent** unitaire $\vec{T}(t) = \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|} = \frac{1}{\left\| \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right\|} \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds} = g'(s)$.
- $\vec{N}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{T}(t)$ le vecteur directement orthogonal à $\vec{T}(t)$, appelé **vecteur normal**.

Si $\varphi : J \rightarrow I$ est une application **strictement croissante** telle que $f(t) = f(\varphi(u)) = g(u)$, on a

$$\frac{g'(u)}{\|g'(u)\|} = \frac{(f \circ \varphi(u))'}{\|(f \circ \varphi(u))'\|} \stackrel{[\varphi'(u) > 0]}{=} \frac{\varphi'(u)f'(\varphi(u))}{\varphi'(u)\|f'(\varphi(u))\|} = \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}.$$

Le vecteur T est donc invariant via ce type de re-paramétrage (notamment par l'abscisse curviligne).

On notera indifféremment $\vec{T}(t), \vec{T}(u), \vec{T}$ et $\vec{N}(t), \vec{N}(u), \vec{N}$.

Définition 33: Courbure

En tout point de la courbe, les vecteurs $\frac{d\vec{T}}{ds}$ et \vec{N} sont colinéaires.

On appelle courbure la fonction γ définie par $\frac{d\vec{T}}{ds} = \gamma \vec{N}$.

Démonstration. $(\vec{T} | \vec{T}) = 1$ donc en dérivant : $2 \left(\frac{d\vec{T}}{ds} | \vec{T} \right) = 0$. Ainsi, $\frac{d\vec{T}}{ds} \perp \vec{T}$ i.e. $\frac{d\vec{T}}{ds}$ et \vec{N} sont colinéaires. \square

Remarques : Calcul pratique de la courbure

Les vecteurs $\frac{d\vec{T}}{ds}$ et \vec{N} sont colinéaires : $g''(s) = \frac{d\vec{T}}{ds} = \gamma \vec{N}$ (*).

En général le paramètre t est quelconque, différent de l'abscisse curviligne : $f(t) = f(\psi^{-1}(s)) = g(s)$.

Néanmoins, le vecteur tangent $\vec{T}(t)$ est unitaire par définition, donc comme dans la preuve ci-dessus, il existe $\Gamma(t)$

tel que $\frac{d\vec{T}}{dt} = \Gamma(t) \vec{N}$ (**).

Attention le coefficient $\Gamma(t) = \Gamma(\psi^{-1}(s))$ n'est pas la courbure au point de paramètre t (ou s).

On a $g'(s) = \vec{T}(t) = \vec{T}(\psi^{-1}(s))$ donc :

$$g''(s) = \frac{d}{ds} (\vec{T} \circ \psi^{-1})(s) = (\psi^{-1})'(s) \frac{d\vec{T}}{dt}(\psi^{-1}(s)) = \frac{1}{\|f'(\psi^{-1}(s))\|} \frac{d\vec{T}}{dt}(\psi^{-1}(s))$$

On en déduit avec (*) puis (**) que

$$\frac{d\vec{T}}{dt}(t) = \frac{d\vec{T}}{dt}(\psi^{-1}(s)) = \gamma(s) \|f'(\psi^{-1}(s))\| \vec{N} \quad \text{donc } \gamma(s) \|f'(\psi^{-1}(s))\| = \Gamma(\psi^{-1}(s)).$$

On obtient avec le paramètre t :

$$\gamma(s) = \frac{\Gamma(\psi^{-1}(s))}{\|f'(\psi^{-1}(s))\|} = \frac{\Gamma(t)}{\|f'(t)\|} = \gamma(t).$$

On retrouvera la formule sur chaque exemple de calcul de courbure avec les notations suggestives :

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = \Gamma \vec{N}, \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{ds}{dt} \gamma \vec{N} \quad \text{avec} \quad \frac{ds}{dt} = s'(t) = \|f'(t)\|.$$

Exemple : Courbure de parabole

Soit $t \mapsto f(t) = \begin{pmatrix} t \\ \frac{t^2}{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) : \forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \neq 0$ et $\|f'(t)\| = \sqrt{1+t^2}$.

Le repère de Frenet $(M(t), \vec{T}(t), \vec{N}(t))$:

$$\vec{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{N}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \begin{pmatrix} -t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{On a } \frac{d\vec{T}}{dt}(t) = \begin{pmatrix} \frac{-t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix} = \frac{1}{1+t^2} \vec{N}(t) \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{d\vec{T}}{ds} = \|f'(t)\| \gamma(t) \vec{N}(t).$$

$$\text{Ainsi, } \gamma(t) = \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Exemple : Courbure d'une droite

Soit $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ un vecteur de norme 1, directeur d'une droite passant par le point $(x_0; y_0)$.

Une paramétrisation de cette droite est donnée par la fonction $t \mapsto f(t) = \begin{pmatrix} x_0 + t\alpha \\ y_0 + t\beta \end{pmatrix}$.

$f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) : \forall t \in \mathbb{R}, \|f'(t)\| = \left\| \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right\| = 1 \neq 0$: la courbe est régulière.

On obtient $\vec{T}(t) = \frac{d\vec{OM}}{dt}(t) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ (ce qui n'est pas surprenant) et $\vec{N}(t) = \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix}$.

Ainsi, $0\vec{N} = \frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{ds}{dt} \gamma \vec{N}$.

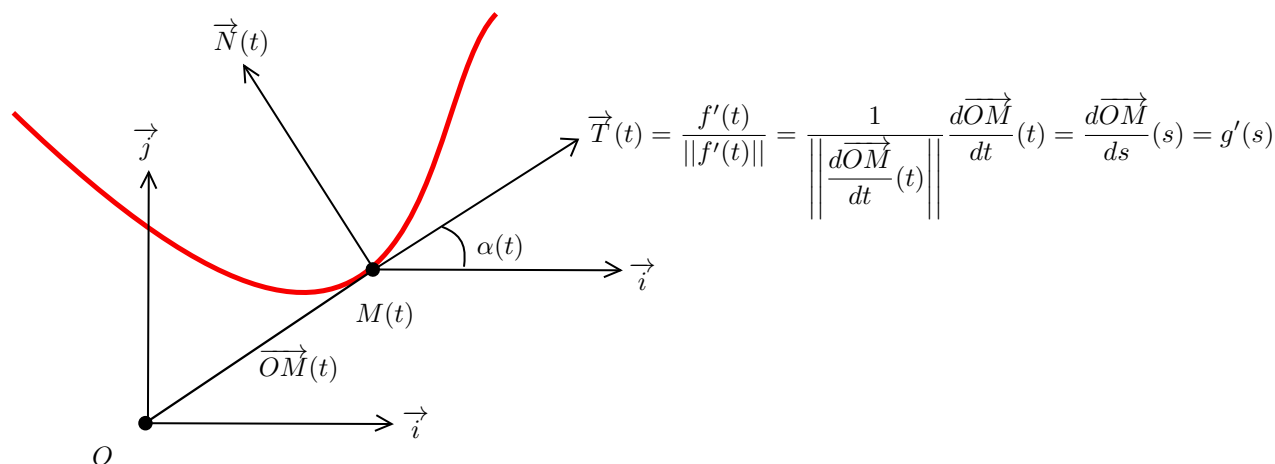
On en déduit $\gamma = 0$.

Exemple : Courbure d'un cercle de rayon $R > 0$

$t \mapsto f(t) = \begin{pmatrix} R \cos(t) \\ R \sin(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

On a $\|f'(t)\| = R \neq 0$ la courbe est régulière et $\vec{T}(t) = \begin{pmatrix} -R \sin(t) \\ R \cos(t) \end{pmatrix}$; $\vec{N}(t) = \begin{pmatrix} -R \cos(t) \\ -R \sin(t) \end{pmatrix}$.

On a $\frac{d\vec{T}}{dt}(t) = \vec{N}(t)$ et $\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{d\vec{T}}{ds} = \|f'(t)\| \gamma \vec{N}$ donc $\gamma(t) = \frac{1}{R}$.

Schéma : Repère de Frenet**Théorème 34: Théorème de relèvement (admis)**

On suppose que $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ est de classe \mathcal{C}^2 sur I .

Il existe une fonction $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 sur I telle que

$$\forall t \in I, \vec{T}(t) = \cos \alpha(t) \vec{i} + \sin \alpha(t) \vec{j} = \begin{pmatrix} \cos \alpha(t) \\ \sin \alpha(t) \end{pmatrix}.$$

On obtient alors $\forall t \in I, \vec{N}(t) = \begin{pmatrix} -\sin \alpha(t) \\ \cos \alpha(t) \end{pmatrix}$ et par conséquent :

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\alpha}{ds} \frac{d\vec{T}}{d\alpha} = \frac{d\alpha}{ds} \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix} = \frac{d\alpha}{ds} \vec{N} \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{N}}{ds} = \frac{d\alpha}{ds} \frac{d\vec{N}}{d\alpha} = \frac{d\alpha}{ds} \begin{pmatrix} -\cos \alpha \\ -\sin \alpha \end{pmatrix} = -\frac{d\alpha}{ds} \vec{T}.$$

Théorème 35: Formules de Frenet

- La courbure γ vérifie : $\gamma = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{dt}{ds} \frac{d\alpha}{dt}$
- Les formules de Frenet sont les suivantes :

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\alpha}{ds} \vec{N} \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{N}}{ds} = -\frac{d\alpha}{ds} \vec{T}.$$

Exemple : Courbure d'un cercle de rayon $R > 0$

$$t \mapsto f(t) = \begin{pmatrix} R \cos(t) \\ R \sin(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}).$$

On a $\|f'(t)\| = R > 0$ la courbe est régulière et $\vec{T}(t) = \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|} = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(t + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$. Le

relèvement $\alpha : t \mapsto t + \frac{\pi}{2}$ convient. Alors $\gamma = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{dt}{ds} \frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{\|f'(t)\|} \times 1 = \frac{1}{R}$.

Interprétation géométrique de la courbure.

Supposons la courbe paramétrée par une abscisse curviligne : $s \mapsto g(s)$ avec g de classe \mathcal{C}^2 .

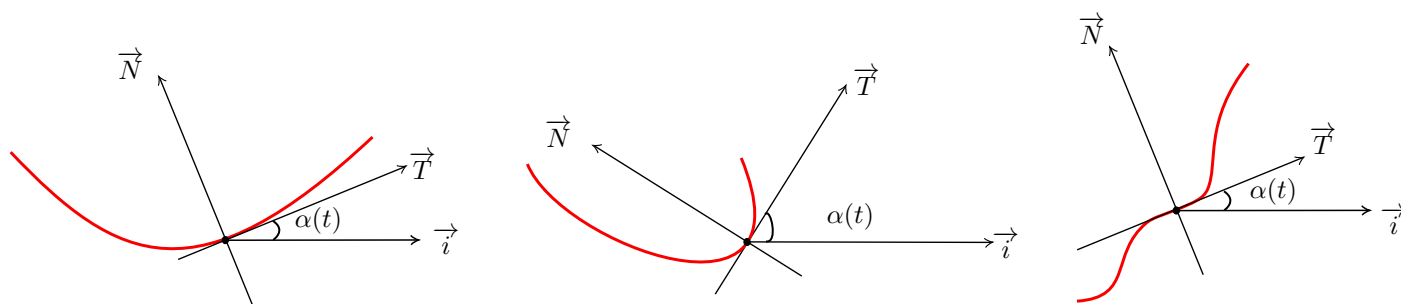
Alors au voisinage du point de paramètre s_0 :

$$\begin{aligned} g(s) &\underset{s \rightarrow s_0}{=} g(s_0) + (s - s_0)g'(s_0) + \frac{(s - s_0)^2}{2}g''(s_0) + \begin{pmatrix} o((s - s_0)^2) \\ o((s - s_0)^2) \end{pmatrix} \\ &\underset{s \rightarrow s_0}{=} g(s_0) + (s - s_0)\vec{T} + \frac{(s - s_0)^2}{2}\gamma\vec{N} + \begin{pmatrix} o((s - s_0)^2) \\ o((s - s_0)^2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La tangente, portée par le vecteur dérivé \vec{T} , fournit une approximation locale de l'allure de la courbe autour de $M(s_0)$. Le terme d'ordre 2 dans le développement limité décrit le virage que prend la courbe suivant le second vecteur \vec{N} du repère de Frenet.

Plus la courbure $\gamma = \frac{d\alpha}{ds}$ est importante, plus les variations de l'angle α sont importantes : le virage pris par la courbe est d'autant plus serré que la courbure est importante.

Dans le cas d'une courbure nulle, au contraire, l'angle α ne varie pas au voisinage de s_0 . Dans ce cas la courbe présente un point d'inflexion en $M(s_0)$.



Dans les dessins ci-dessus, la courbure est positive et la courbe est attirée (plus ou moins vite) dans le sens du vecteur \vec{N} . Si la courbure est négative au contraire, la courbe prend un virage en s'éloignant du sens du vecteur \vec{N} .

4.C - Etude en un point birégulier

On considère une courbe paramétrée régulière par $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe \mathcal{C}^2 .

Définition 36: Point birégulier

On dit que le point M est un point birégulier si la famille $\left(\vec{T}, \frac{d\vec{T}}{ds}\right)$ est libre.

Puisque $\frac{d\vec{T}}{ds} = \gamma \vec{N}$ et que $\vec{N} \perp \vec{T}$, le point M est birégulier si et seulement si $\gamma \neq 0$.

Définition 37: Rayon de courbure, centre de courbure, cercle de courbure

Soit M un point birégulier.

- On appelle rayon de courbure en $M(t)$, le réel $R(t) = \frac{1}{\gamma(t)}$.
- On appelle centre de courbure en $M(t)$, le point $C(t)$ défini par :

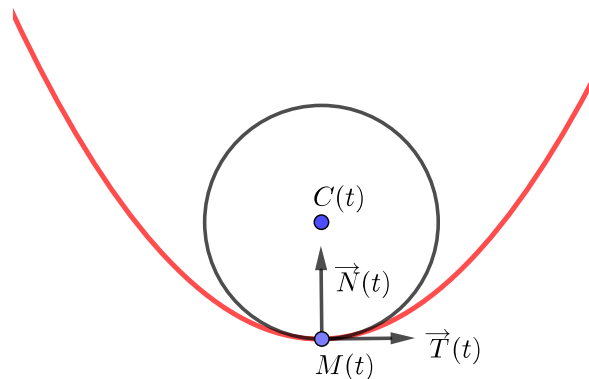
$$C(t) = M(t) + R(t)\vec{N}(t).$$

- On appelle cercle de courbure en $M(t)$, le cercle de centre $C(t)$ et de rayon $|R(t)|$.

En un point birégulier $\gamma \neq 0$, donc la courbure conserve un signe constant au voisinage de t .

Ainsi, le rayon de courbure, de même que la courbure, peut-être positif ou **négatif** (c'est le **cas** lorsque la courbe prend un virage en s'éloignant du sens donné par \vec{N}). D'où la valeur absolue dans la définition du cercle de courbure.

C'est le cercle approchant au mieux la courbure de la courbe au voisinage de $M(t)$. En particulier le rayon de courbure d'une courbe de rayon R est $\gamma^{-1} = R$ car la courbure vaut $\gamma = \frac{1}{R}$.



5 - Enveloppe d'une famille de droites et développée d'une courbe

5.A - Enveloppe d'une famille de droites

Définition 38

Soit I un intervalle de \mathbb{R} .

On considère une famille de droites $(D_t)_{t \in I}$ telle que D_t passe par le point $A(t)$ et est dirigée par le vecteur $\vec{u}(t)$.

On suppose que les fonctions A et \vec{u} sont de classe \mathcal{C}^2 .

On appelle enveloppe de la famille de droites (D_t) , toute courbe Γ de classe \mathcal{C}^1 telle que les droites de la famille $(D_t)_{t \in I}$ soient exactement les tangentes de Γ :

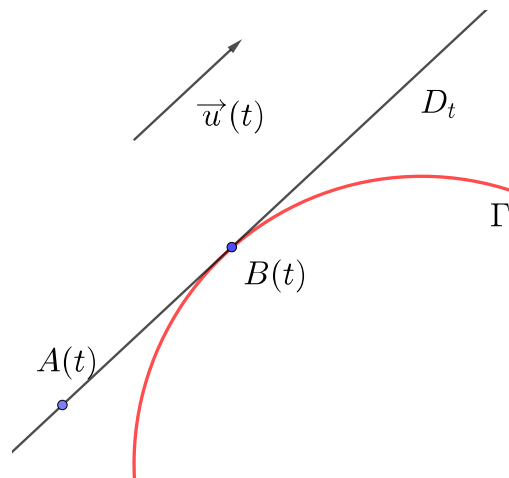
- Pour tout $t \in I$, D_t est tangente à Γ .
- En tout point de la courbe Γ la tangente est l'une des droites de la famille $(D_t)_{t \in I}$.

Supposons que la famille $(D_t)_{t \in I}$ admet une enveloppe Γ .
Alors,

$$B \in \Gamma$$

si et seulement si

- $$\begin{cases} (1) & \text{Il existe un } t \in I, \text{ tel que } B \in D_t \\ (2) & \text{La droite } D_t \text{ est tangente à } \Gamma \text{ en } B \end{cases}$$



Existence et unicité sous la condition que $(\vec{u}(t), \vec{u}'(t))$ est une famille libre.

Analyse : supposons que Γ existe.

D'une part, (1) $\iff \exists \lambda(t) \in \mathbb{R}, B(t) = A(t) + \lambda(t) \vec{u}(t)$.

D'autre part,

$$\begin{aligned} (2) &\iff \det \left(\frac{d\vec{OB}}{dt}(t); \vec{u}(t) \right) = 0 \\ &\iff \det(A'(t) + \lambda'(t) \vec{u}(t) + \lambda(t) u'(t); \vec{u}(t)) = 0 \\ &\iff_{[\det(\vec{u}(t), \vec{u}'(t)) \neq 0]} \det(A'(t); \vec{u}(t)) + \lambda(t) \det(\vec{u}'(t); \vec{u}(t)) = 0. \end{aligned}$$

Puisque $(\vec{u}(t); \vec{u}'(t))$ est une famille libre, on obtient :

$$\lambda(t) = - \frac{\det(A'(t); \vec{u}(t))}{\det(\vec{u}'(t); \vec{u}(t))} = \frac{\det(A'(t); \vec{u}'(t))}{\det(\vec{u}(t); \vec{u}'(t))} \quad \lambda \in \mathcal{C}^1(I).$$

Dans ce cas, la courbe paramétrée par $t \mapsto A(t) + \lambda(t) \vec{u}(t)$ vérifie les conditions (1) et (2).

Synthèse. On suppose toujours que la famille $(\vec{u}(t); \vec{u}'(t))$ est libre. Dans ce cas la courbe paramétrée par $t \mapsto A(t) + \lambda(t) \vec{u}(t)$ avec λ (bien) définie comme ci-dessus vérifie les conditions (1) et (2).

Exemple : Cardiode vue comme enveloppe des cordes d'un cercle

On considère pour tout $t \in]0; 2\pi[$, les points $A_1(t) = (\cos(t); \sin(t))$ et $A_2(t) = (\cos(2t); \sin(2t))$.

On considère la famille de droites $(D_t)_{t \in]0; 2\pi[}$ passant par le point $A(t)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} \cos(2t) - \cos(t) \\ \sin(2t) - \sin(t) \end{pmatrix}$.

— Si l'enveloppe Γ de la famille $(D_t)_{t \in]0; 2\pi[}$ existe alors un point M appartient à Γ si et seulement s'il existe $t \in]0; 2\pi[$ et $\lambda(t) \in \mathbb{R}$ tel que

$$M(t) = A(t) + \lambda(t) \vec{u}(t).$$

— D_t est tangente à Γ au point $M(t)$, donc $\frac{d\vec{OM}}{dt}(t)$ est colinéaire à $\vec{u}(t)$:

$$\det \left(\frac{d\vec{OM}}{dt}(t), \vec{u}(t) \right) = 0 \iff \det(A'(t) + \lambda'(t) \vec{u}(t) + \lambda(t) \vec{u}'(t); \vec{u}(t)) = 0$$

$$\iff \lambda(t) = \frac{\det(A'(t); \vec{u}(t))}{\det(u(t); u'(t))}$$

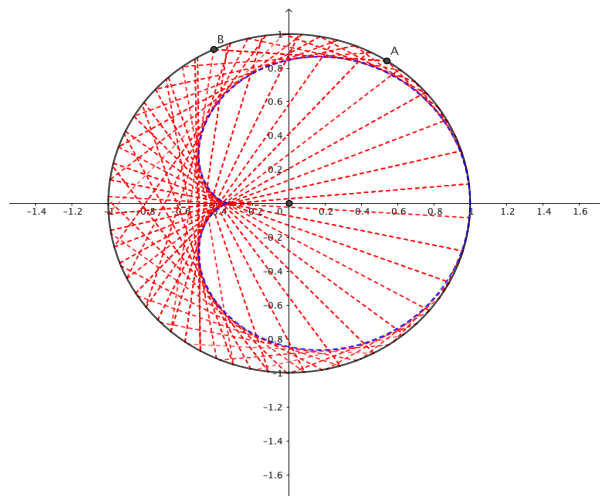
$$\iff \lambda(t) = \frac{\begin{vmatrix} -\sin(t) & \cos(2t) - \cos(t) \\ \cos(t) & \sin(2t) - \sin(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos(2t) - \cos(t) & -2\sin(2t) + \sin(t) \\ \sin(2t) - \sin(t) & 2\cos(2t) - \cos(t) \end{vmatrix}}$$

$$\iff \lambda(t) = \frac{1 - \cos(t)}{\underbrace{3 - 3\cos(t)}_{\neq 0 (*)}} = \frac{1}{3} \quad (\text{car } t \in]0; 2\pi[)$$

(*) : la famille $(\vec{u}(t), \vec{u}'(t))$ est libre, λ est \mathcal{C}^1 sur $]0; 2\pi[$.

L'enveloppe des droites $(D_t)_{t \in]0; 2\pi[}$ existe donc et est donnée par

$$\begin{aligned} t \in]0; 2\pi[&\mapsto \Gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) + \frac{1}{3}(\cos(2t) - \cos(t)) \\ \sin(t) + \frac{1}{3}(\sin(2t) - \sin(t)) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2\cos(t) + \cos(2t) \\ 2\sin(t) + \sin(2t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**5.B - Développée d'une courbe****Définition 39: Développée**

La développée d'une courbe régulière est l'ensemble de ses centres de courbure.

Théorème 40

La développée d'une courbe régulière est l'enveloppe des normales à la courbe.

Démonstration. – La développée de la courbe régulière paramétrée par $f \in \mathcal{C}^2(I)$, est l'ensemble des centres de courbure de ses points biréguliers, c'est-à-dire l'ensemble des points :

$$C(t) = M(t) + R(t)\vec{N}(t).$$

– L'enveloppe Γ des normales est la courbe paramétrée par la fonction de classe \mathcal{C}^1 :

$$t \mapsto M(t) + \lambda(t)\vec{N}(t), \quad \text{avec} \quad \lambda(t) = \frac{\det\left(\frac{d\vec{OM}}{dt}(t); \vec{N}(t)\right)}{\det(\vec{N}(t); \vec{N}'(t))},$$

où $M(t)$ est un point birégulier de la courbe.

Notons que la famille $(\vec{N}(t), \vec{N}'(t))$ est libre car $\frac{d\vec{N}}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{d\vec{N}}{ds} = -\gamma \|f'(t)\| \vec{T}$ qui donne

$$\det(\vec{N}(t), \vec{N}'(t)) = -\gamma \|f'(t)\| \underbrace{\det(\vec{N}, \vec{T})}_{(\vec{N}, \vec{T}): \text{B.O.N indirecte}} = \gamma \|f'(t)\| \neq 0.$$

– On obtient puisque $\frac{d\vec{OM}}{dt}(t) = \|f'(t)\| \vec{T}(t)$:

$$\lambda(t) = \frac{1}{\gamma(t)} = R(t).$$

Conclusion la développée Γ paramétrée par : $t \mapsto M(t) + R(t)\vec{N}(t)$ est bien l'enveloppe des normales à la courbe paramétrée par f .

Attention : Ici, $\lambda = \frac{1}{\gamma}$ car on a choisi \vec{N} comme vecteur directeur de la normale. On peut choisir un autre vecteur et obtenir une fonction λ différente. \square

Exemple : Développée de la parabole

On considère la parabole, déjà étudiée, paramétrée par $f : t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \frac{t^2}{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. La courbe est régulière et en tout point la courbure est égale à $\gamma(t) = \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} \neq 0$: la courbe est birégulière.

On obtient comme dans la partie précédente $\vec{N}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \begin{pmatrix} -t \\ 1 \end{pmatrix}$.

– La développée est donc la courbe Γ paramétrée par

$$t \mapsto C(t) = M(t) + \frac{1}{\gamma(t)} \vec{N}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \frac{t^2}{2} \end{pmatrix} + \underbrace{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}_{1+t^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \begin{pmatrix} -t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t^3 \\ 1 + \frac{3}{2}t^2 \end{pmatrix}.$$

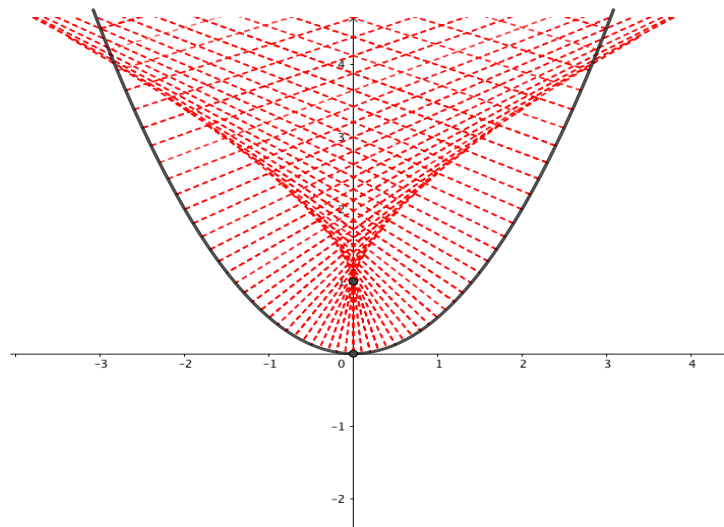
– Retrouvons cette développée via la caractérisation en termes d'enveloppe des normales.

L'enveloppe des normales, dirigées par $\vec{n}(t) = \begin{pmatrix} -t \\ 1 \end{pmatrix}$, est la courbe Γ paramétrée par :

$$t \mapsto M(t) + \lambda(t)\vec{n}(t) \quad \text{avec} \quad \lambda(t) = \frac{\det\left(\frac{d\vec{OM}}{dt}(t); \vec{n}(t)\right)}{\det(\vec{n}(t); \vec{n}'(t))}.$$

$$\text{On trouve } \lambda(t) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -t & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}} = 1 + t^2.$$

On retrouve alors bien la développée via sa caractérisation comme enveloppe des normales.



6 - Tangente des courbes définies par une équation implicite

L'étude des courbes définies par une équation implicite $F(x, y) = 0$ n'est en général pas aussi balisé que dans le cas d'une courbe paramétrée.

On tente souvent d'obtenir un paramétrage (par exemple à l'aide d'un faisceau de droites) ou encore d'obtenir, au moins localement, une équation cartésienne $y = \varphi(x)$ ou $x = \psi(y)$.

On admet le résultat suivant fournissant une équation cartésienne d'une courbe en un point régulier :

Théorème 41

Soit $F(x, y) = 0$ une équation implicite d'une courbe avec $F \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U})$ avec $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ ouvert.

Soit $M(x_0; y_0)$ un point régulier de la courbe c'est à dire tel que $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0); \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \neq (0, 0)$.

Alors une équation cartésienne de la tangente au point $M(x_0; y_0)$ est donnée par :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

Démonstration. (admise)

On admet que si $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, on peut écrire localement au voisinage de $(x_0; y_0)$: $y = \varphi(x)$.

Ainsi, l'équation $F(x; y) = 0$ devient $F(x; \varphi(x)) = 0$.

On dérive en chaîne cette expression et on obtient :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \varphi'(x_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \iff \varphi'(x_0) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}.$$

Localement au voisinage de $(x_0; y_0)$ les points de la courbe sont les points vérifiant $y = \varphi(x)$. La tangente au point $M(x_0; y_0)$ admet donc pour équation :

$$y = \varphi'(x_0)(x - x_0) + \varphi(x_0) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}(x - x_0) + y_0 \iff \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

□