Programme de khôlle semaines 15 et 16

Questions de cours: Savoir énoncer et démontrer les résultats suivants

- Nombre de p-listes d'un ensemble de cardinal n.
- Nombre A_n^p d'arrangements d'un ensemble de cardinal n.
- Nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n.
- Nombre $\binom{n}{p}$ de combinaisons de p éléments d'un ensemble de cardinal n.
- Nombre de sous-ensembles (= parties) d'un ensemble de cardinal n.

Questions de cours: Savoir énoncer avec précision les def/thm suivants

- Définition d'un ensemble dénombrable.
- Exemples usuels : $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}$, $E \times F$ avec E, F dénombrables.
- Tribu (notée $\mathscr{A}$).
- Probabilité sur un espace probabilisable : application définie sur $\mathscr{A}$ à valeurs dans $[0;1]$, $P(\Omega) = 1$ et σ-additive.
- Une suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définit une loi de probabilité si et seulement si $p_n \geqslant 0$ pour tout n et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$.
- Théorème de continuité monotone.
- **Formules :** Probabilité conditionnelle. Probabilités composées. Probabilités totales. Formule de Bayes.
- Indépendance de deux événements, indépendance mutuelle.

EXERCICES À PRÉPARER

L'un des exercices de la colle pourra porter sur l'un des exercices 1 à 6 suivants :

Exercice 1

Des boules en nombre infini numérotées $1, 2, \dots$ sont placées successivement, indépendamment les unes des autres dans trois boites.

1. Pour $k \geqslant 2$, on note l'événement "deux des trois boites sont non vides pour la première fois lorsqu'on place la k-ième boule".

   Calculer $P(A_k)$ puis $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} P(A_k)$. Commenter.
2. Pour $i \geqslant 3$, on note B_i : "les trois boites sont non vides pour la première fois lorsqu'on place la i-ième boule". Calculer $P_{A_k}(B_i)$ pour $k \geqslant 2$ et $i \geqslant 3$.

   En déduire $P(B_i)$ puis $\displaystyle\sum_{i=3}^{+\infty} P(B_i)$. Commenter.

Exercice 2

Une urne contient initialement une boule rouge. On procède à une succession de tirages dans cette urne, avec le protocole suivant : à chaque tirage, on tire une boule. Si elle n'est pas rouge, on s'arrête. Sinon, on remet la boule rouge tirée, on ajoute une boule verte et on passe au tirage suivant.
Calculer la probabilité que le jeu ne s'arrête pas.

Exercice 3

On joue avec une pièce équilibrée à pile ou face les tirages étant indépendants.
C : "on n'obtient que des faces".
Monter que $P(C) = 0$ de **deux méthodes différentes.**

Exercice 4

On dispose de deux pièces : la pièce A donne face avec la probabilité $\frac{1}{2}$, la pièce B donne face avec la probabilité $2/3$.
On choisit une pièce au hasard et on la lance. Si l'on obtient face, on conserve la pièce que l'on vient de lancer, sinon on change de pièce.
On effectue une suite finie de lancers.

1. On note p_n la probabilité de jouer avec la pièce A au n-ième lancer. Calculer p_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. En déduire la probabilité d'obtenir face au n-ième lancer.

Exercice 5

On effectue des tirages dans une urne contenant initialement a boules blanches et b boules noires. Après chaque tirage, la boule est remise dans l'urne avec $c \in \mathbb{N}^*$ boules de la même couleur.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la probabilité p_n pour que la première boule blanche soit obtenue au n-ième tirage.
2. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{b+kc}{a+b+kc}$.
   (a) Montrer que $p_n = a_{n-1} - a_n$ pour tout $n \geqslant 2$.
   (b) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n$ et en déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} p_n$. Interpréter.

Exercice 6

On lance une pièce équilibrée n fois ($n \geqslant 2$) de manière indépendante. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on définit A_k : "on obtient pile au k-ième lancer". On note A_{n+1} : "le nombre de piles obtenus au bout des n lancers est pair".

1. Déterminer les probabilités des événements A_k pour $k \in [\![1, n+1]\!]$.
2. (a) Déterminer la probabilité $P\left(\bigcap_{k=1}^{n+1} A_k\right)$.

   (b) En déduire que les événements $A_1, \dots, A_{n+1}$ ne sont pas mutuellement indépendants.
3. Montrer que toute sous-famille de n événements choisis parmi $A_1, \dots, A_n, A_{n+1}$ forme une famille d'événements mutuellement indépendants.