Devoir maison n°13 : Coniques et matrices symétriques

Exercice I : coniques dans le plan (Maths A 2004)

On note $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ le repère orthonormé direct usuel de $\mathbb{R}^2$.
On considère les matrices :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -2 \end{pmatrix}$$

et on note u_1, u_2 les endomorphismes canoniquement associés aux matrices A_1 et A_2.

1. Calculer $A_1A_2 - A_2A_1$.
2. Existe-t-il une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle les matrices u_1, u_2 sont toutes deux diagonales ?
3. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. On considère les coniques :

$$(\mathscr{C}_1) : {}^tXA_1X = 8a^2$$

$$(\mathscr{C}_2) : {}^tXA_2X = a^2$$

avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

   (a) Déterminer la nature, les éléments de symétrie et les asymptotes éventuelles des coniques $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

   (b) Existe-t-il une rotation de $\mathbb{R}^2$ qui amène simultanément les axes de $\mathscr{R}$ sur les axes de symétrie de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$?

   (c) Déterminer l'angle $\theta \in [0; \frac{\pi}{2}]$ de la rotation vectorielle transformant le repère $\mathscr{R}$ en un repère dont les axes sont les axes de symétrie de $\mathscr{C}_1$.

Exercice II : coniques dans l'espace

On se place dans l'espace $E = \mathbb{R}^3$ muni du repère orthonormé direct $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$: on considère les droites D et D' :

$$D : \begin{cases} x - y = 0 \\ z + a = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad D' : \begin{cases} x + y = 0 \\ z - a = 0 \end{cases}$$

et on appelle Σ l'ensemble des points $M \in \mathbb{R}^3$ équidistants des droites D et D', c'est-à-dire :

$$d(M, D) = d(M, D').$$

1. Déterminer une équation de Σ.
2. Soit $h \in \mathbb{R}$; étudier la nature de l'intersection Σ avec le plan $z = h$ et en préciser les les caractéristiques géométriques (asymptotes et sommets éventuels).
3. Soit $\theta \in [0; \pi]$ fixé ; On désigne par C_θ la courbe intersection de Σ et du plan P_θ d'équation $x\sin(\theta) - y\cos(\theta) = 0$.

   (a) Déterminer une base orthonormée directe $\mathscr{B}_\theta = (\overrightarrow{I_\theta}, \overrightarrow{J_\theta}, \vec{n})$ de l'espace dont les deux premiers vecteurs sont des vecteurs directeurs de P_θ.

   (b) Montrer que C_θ admet dans $\mathscr{R}$ la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = t\cos(\theta) \\ y(t) = t\sin(\theta) \\ z(t) = t^2\dfrac{\sin(\theta)\cos(\theta)}{2a} \end{cases}, (t \in \mathbb{R}).$$

   (c) On note $\mathscr{R}_\theta = (O, \mathscr{B}_\theta)$: déterminer une représentation paramétrique de C_θ dans $\mathscr{R}_\theta$.

   (d) En déduire une équation cartésienne de C_θ dans $\mathscr{R}_\theta$ puis la nature géométrique de C_θ.

Exercice III : Théorème spectral

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que la matrice ${}^tAA$ est diagonalisable.
2. Montrer que $Sp({}^tAA) \subset \mathbb{R}_+$.
3. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de ${}^tAA$.
   Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{1 \leqslant k,l \leqslant n} a_{k,l}^2$.
4. Soit $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $Sp(S) \subset \mathbb{R}_+$.

   (a) Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tAA$.

   (b) Montrer qu'il existe une matrice $B \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = B^2$.