Programme de khôlle semaines 17 et 18

A préparer : Description des endomorphismes donnés par leur matrice dans la base canonique : $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$C=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$, $D=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$

Questions de cours: Savoir énoncer et démontrer les résultats suivants

- Prouver que les expressions suivantes définissent des produits scalaires :
  - $E=\mathbb{R}^n$, $(x|y)=\displaystyle\sum_{k=1}^n x_k y_k$
  - $E=\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, $(f|g)=\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)dt$.
  - $E=\mathbb{R}[X]$, $(P|Q)=\displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)dt$.
  - $E=\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $(A|B)=\mathrm{tr}({}^tAB)$
  - $E=\mathbb{R}_n[X]$, $(P|Q)=\displaystyle\sum_{k=0}^n P(k)Q(k)$.
  - $E=\{f\in C^0(I) : \displaystyle\int_I f(t)^2dt \text{ converge}\}$, $(f|g)=\displaystyle\int_I f(t)g(t)dt$ avec I intervalle de $\mathbb{R}$.
- Identités remarquables : $||x+y||^2=||x||^2+2(x|y)+||y||^2$, identité du parallélogramme, de polarisation.
- Inégalité de Cauchy-Schwarz.
- Inégalité triangulaire.
- Théorème de Pythagore.
- Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.
- Décomposition d'un vecteur d'un espace euclidien dans une b.o.n. $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ de E :
$$x=\sum_{k=1}^n (x|\varepsilon_k)\varepsilon_k.$$
- Expression du produit scalaire de deux vecteurs d'un espace euclidien muni d'une b.o.n.
- Si F est un s.e.v. de dimension finie d'un espace préhilbertien : $E=F\oplus F^\perp$.
- Si $F\subset G$ alors $G^\perp\subset F^\perp$.

Questions de cours: Savoir-faire

- Principe d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
- Caractérisations de la projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie :
  - $p_F(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^p (x|\varepsilon_k)\varepsilon_k$ avec $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_p)$ b.o.n. de F.
  - **Ou de manière équivalente** : $p_F(x)\in F$ et $x-p_F(x)\in F^\perp$.
- Déterminer la distance d'un vecteur $x\in E$ à un sous-espace F de dimension finie. Problèmes de minimisations.

Questions de cours: Savoir énoncer et démontrer les résultats suivants

- Une matrice est orthogonale si et seulement si ses lignes forment une b.o.n. de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- Une matrice est orthogonale si et seulement c'est la matrice de passage entre deux b.o.n.
- f est une isométrie si et seulement si f conserve le produit scalaire **si et seulement si** l'image de toute b.o.n est une b.o.n. **si et seulement si** la matrice de f dans toute b.o.n. est orthogonale.
- Si F est stable par f alors $F^\perp$ aussi.
- s est une symétrie orthogonale si et seulement si sa matrice dans toute b.o.n. est symétrique.

Questions de cours: Savoir-faire

- Classification des symétries orthogonales du plan et de l'espace.
- Classification des isométries planes.
- Classification des isométries positives de l'espace.
- Savoir déterminer les éléments géométriques caractéristiques d'une isométrie f donnée par sa matrice dans la base canonique.
  Dans le cas d'une isométrie négative (sauf pour les réflexions), on commence par étudier $g=-f$.
- Savoir déterminer la matrice d'une isométrie dans la base canonique en connaissant ses éléments géométriques caractéristiques.