Épreuve de Mathématiques A

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.

Tournez la page S.V.P.

Question préliminaire

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et f et g deux endomorphismes de E tels que

$$f \circ g = g \circ f$$

Soit λ une valeur propre de f, $E_\lambda(f)$ le sous-espace propre associé.
Montrer que le sous-espace $E_\lambda(f)$ est stable par g c'est à dire

$$\forall x \in E_\lambda(f),\ g(x) \in E_\lambda(f).$$

Partie I

Soient f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans la base canonique sont respectivement

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que f et g commutent.
2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f et g.
   Les matrices A et B sont-elles diagonalisables ? trigonalisables ?
3. On note e_1 un vecteur propre de g associé à la valeur propre 2. En utilisant la question préliminaire, déterminer un vecteur e_2 non colinéaire à e_1 tel que le sous-espace $Vect(e_1, e_2)$ soit stable par f et par g.
   En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de f et g sont triangulaires supérieures.

Partie II

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension n, $n \in \mathbb{N}^*$, et soit f un endomorphisme de E admettant n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

1. Montrer qu'il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E constituée de vecteurs propres de f.
2. Soit $(a_0, \ldots, a_d) \in \mathbb{C}^{d+1}$. On considère le polynôme P défini par

   $$P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i.$$

   Soit u l'endomorphisme de E défini par

   $$u = P(f) = \sum_{i=0}^{d} a_i f^i$$

   avec $f^0 = Id$ l'application identité de E, et pour $k \geq 1$, $f^k = f \circ \cdots \circ f$ est la k-ième composée de f.

   (a) Montrer que f et u commutent.

(b) Exprimer les valeurs propres de u en fonction de celles de f et montrer que u est diagonalisable dans la même base que f.

3. On suppose dans cette question uniquement que $E = \mathbb{C}^5$. On note I_5 la matrice identité d'ordre 5. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer les valeurs propres (éventuellement complexes) de A.

(b) Trouver 5 nombres réels a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 tels que

$$B = a_0 I_5 + a_1 A + a_2 A^2 + a_3 A^3 + a_4 A^4.$$

(c) En déduire les valeurs propres (éventuellement complexes) de B.

4. On revient à un espace E général. Soit g un endomorphisme de E qui commute avec f.

(a) Quelle est la dimension de E_{λ_i}, sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ_i ?

(b) En déduire, en se servant également de la question préliminaire que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, e_i est également un vecteur propre de g. On notera μ_i la valeur propre associée.

(c) g est-il diagonalisable ?

(d) On note $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients complexes de degré strictement inférieur à n et on considère l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}_{n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ P & \longmapsto & (P(\lambda_1), \ldots, P(\lambda_n)) \end{array}.$$

i. Vérifier que l'application φ est linéaire.

ii. Vérifier que son noyau est réduit au polynôme nul.

iii. Montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré strictement inférieur à n tel que

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \qquad P(\lambda_i) = \mu_i.$$

(e) Déduire des questions précédentes qu'il existe un polynôme P de degré strictement inférieur à n tel que $g = P(f)$.

5. On considère la matrice

$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer une matrice orthogonale Q telle que $Q^{-1} M Q$ soit diagonale.

(b) On cherche une matrice N telle que $N^2 = M$. Montrer en utilisant les résultats de la question 4 que si une telle matrice N existe, alors,

– $Q^{-1} N Q$ est diagonale.

– Il existe deux réels α et β tels que

$$N = \alpha I_2 + \beta M$$

où I_2 désigne la matrice identité d'ordre 2.

(c) Déterminer toutes les matrices N vérifiant $N^2 = M$.

Partie III

On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ orienté muni d'un repère orthonormé direct (i, j, k). On note $\langle u, v\rangle$ le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^3$ des vecteurs u et v.

1. On considère la rotation r d'axe dirigé par le vecteur unitaire a et d'angle θ.
   (a) Rappeler l'expression générale de l'image $r(u)$ d'un vecteur u de $\mathbb{R}^3$ orthogonal à a.
   (b) Montrer que tout vecteur v de $\mathbb{R}^3$ s'écrit de manière unique
   $$v = u + \lambda a$$
   avec a et u orthogonaux.
   (c) En déduire l'expression générale de l'image $r(v)$ d'un vecteur v quelconque de $\mathbb{R}^3$.
2. On considère f la réflexion par rapport au plan d'équation $x + y = 0$ et g la réflexion par rapport au plan d'équation $y + z = 0$.
   (a) Quelle est la nature de $f \circ g$? Préciser ses éléments caractéristiques.
   (b) Donner la matrice de $f \circ g$ dans la base canonique.
   (c) Les endomorphismes f et g commutent-ils ?
   (d) Déterminer les valeurs propres (complexes) de $f \circ g$ et de $g \circ f$.
3. On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est
   $$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$
   Montrer que cet endomorphisme est une rotation dont on précisera les éléments caractéristiques.
4. Soit a un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$ et λ un réel strictement positif. On considère l'application φ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par
   $$\forall u \in \mathbb{R}^3,\ \varphi(u) = u + \lambda\langle u, a\rangle a.$$
   (a) Vérifier que φ est un endomorphisme.
   (b) Pour quelle(s) valeur(s) de λ l'application φ est-elle une isométrie ?
   (c) Reconnaître alors φ.

IN CHOISY – 12 1029 – D'après documents fournis