DEVOIR SURVEILLÉ n°3

Durée : 4 heures

L'usage de calculatrices est interdit

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, **la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Problème I : Racines carrées d'une matrice

On commence par définir deux notions étudiées dans ce problème.

Définition

On dit qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est une **racine carrée** d'une matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ si $A^2 = B$.

Attention : on n'utilisera PAS les notations $B^{\frac{1}{2}}$ ou $\sqrt{B}$.

Définition

Une matrice symétrique $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est dite **symétrique positive** si toutes ses valeurs propres sont positives.

Partie I

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on note $M_a \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice définie par :

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & 1-4a & -1+4a \\ -3a & -1+2a & 2+a \\ -3a & -2-a & 3+4a \end{pmatrix}.$$

On note f_a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M_a.

1. **Dans cette question on suppose que $a = 1$.**
   (a) Écrire la matrice M_1 et déterminer son polynôme caractéristique.

(b) Montrer que M_1 est diagonalisable et déterminer $P \in GL_3(\mathbb{R})$ et $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que $M_1 = PDP^{-1}$.

(c) Déterminer une matrice $\Delta \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ racine carrée de D.

(d) En déduire une racine carrée de M_1. On exprimera cette racine carrée en fonction de P, P^{-1} et Δ sans chercher à calculer P^{-1}.

(e) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}^2$.

(f) En déduire que la matrice $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ possède une infinité de racines carrées.

(g) En déduire que la matrice M_1 possède une infinité de racines carrées.

2. **Dans cette question on suppose que $\boldsymbol{a = 0}$**. On pose $N = M_0 - I_3$.

(a) Calculer N^2.

(b) En déduire l'existence de réels α et β tels que $\alpha I_3 + \beta N$ soit une racine carrée de M_0.

3. **Dans cette question, on suppose $\boldsymbol{a = -1/3}$**.

(a) Écrire la matrice $M_{-1/3}$ et déterminer son polynôme caractéristique.

(b) Déterminer les espaces propres de $M_{-1/3}$. La matrice $M_{-1/3}$ est-elle diagonalisable ?

(c) Résoudre l'équation matricielle $M_{-1/3}X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(d) Déterminer une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de $f_{-1/3}$ soit : $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(e) Déterminer les matrices commutant avec U c'est-à-dire les matrice $V \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $UV = VU$.

(f) En déduire que U ne possède pas de racine carrée dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

(g) La matrice $M_{-1/3}$ possède-t-elle une racine carrée dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$?

4. **On revient au cas général $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$.**

(a) Déterminer suivant la valeur de $a \in \mathbb{R}$, le rang de $M_a - (1 + 3a)I_3$.

(b) Quelle valeur propre a-t-on mis en évidence ? Expliquez.

(c) Préciser la dimension du sous-espace propre associé, en distinguant les cas $a = 0$, $a = 1$ et $a \notin \{0; 1\}$.

(d) Montrer que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M_a. Quelle valeur propre avons-nous mis en évidence ?

(e) Calculer $\mathrm{Tr}(M_a)$ et déterminer le spectre de M_a.

(f) Montrer que M_a est trigonalisable sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ pour tout a.

(g) Déterminer l'ensemble des valeurs de a pour lesquelles M_a est diagonalisable.

Partie II : racine carrée d'une matrice symétrique positives

Dans toute cette partie on fixe une matrice **symétrique positive** S.

On admet le résultat suivant.

Théorème

Toute matrice symétrique à coefficients réels est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ au moyen d'une matrice de passage $P \in GL_n(\mathbb{R})$.
Ainsi, si S est symétrique positive alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n$ tels que :

$$P^{-1}SP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ i.e. } S = PDP^{-1} \text{ avec } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une matrice diagonale Δ telle que $\Delta^2 = D$ et en déduire une matrice dont le carré est égal à S. On donnera la réponse en fonction de Δ de P et P^{-1}.
2. Notons T une matrice symétrique positive vérifiant $T^2 = S$.
   (a) Montrer que si $\lambda \in Sp(T)$ alors $\lambda^2 \in Sp(S)$.
   (b) Quelle inclusion peut-on en déduire entre les espaces $E_\lambda(T)$ et $E_{\lambda^2}(S)$?
   (c) En utilisant la diagonalisabilité de S et T, justifier que S et T ont les mêmes espaces propres.
   (d) En déduire que $C = P^{-1}TP$ est diagonale.
   (e) Résoudre l'équation $C^2 = D$ et en déduire l'expression de T.

Problème II : Quelques équations différentielles

Partie I - Une équation différentielle

On considère dans cette partie l'équation différentielle

$$x^2y'' + axy' + by = 0, \tag{2}$$

où a et b sont des constantes réelles.

1. Que déduit-on du théorème de Cauchy quant à la structure de l'ensemble des solutions de l'équation (2) sur $I =]0, +\infty[$? Et sur $J =]-\infty, 0[$?
2. Montrer que si y est une solution de (2) sur I, alors $g = y \circ \exp$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants :
$$u'' + (a-1)u' + bu = 0. \tag{3}$$
3. Réciproquement, soit $t \longmapsto g(t)$ une solution de (3) sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction $g \circ \ln$ est solution de (2) sur I.
4. Donner les solutions à valeurs réelles de l'équation (3) dans le cas où $a = 3$ et $b = 1$ et dans le cas où $a = 1$ et $b = 4$. En déduire, dans chacun des cas, les solutions à valeurs réelles de l'équation (2) sur l'intervalle I.

Partie II - Une équation de Bessel

On se propose dans cette partie d'étudier l'équation différentielle :

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0. \tag{4}$$

1. Rappeler la définition du rayon de convergence d'une série entière.

Série entière dont la somme est solution de (4).

On suppose qu'il existe une série entière $\sum_{k\geq 0} c_k x^k$, avec $c_0 = 1$, de rayon de convergence R non nul et dont la fonction somme J_0 est solution de (4) sur $]-R, R[$.

2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{cases} c_{2k+1} &= 0 \\ c_{2k} &= \dfrac{(-1)^k}{4^k\,(k!)^2}. \end{cases}$$

3. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k\geq 0} c_k x^k$.

4. Soient $r > 0$ et f une autre solution de (4) sur $]0, r[$. Montrer que si (J_0, f) est liée dans l'espace vectoriel des fonctions de classe C^2 sur $]0, r[$, alors f est bornée au voisinage de 0.

Inverse d'une série entière non nulle en 0.

Soit $\sum_{k\geq 0} \alpha_k x^k$ une série entière de rayon de convergence $R_\alpha > 0$ telle que $\alpha_0 = 1$. L'objectif de ce paragraphe est de montrer l'existence et l'unicité d'une série entière $\sum_{k\geq 0} \beta_k x^k$ de rayon de convergence $R_\beta > 0$ telle que pour tout x appartenant aux domaines de convergence des deux séries :

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k x^k\right) = 1.$$

5. Montrer que si $\sum_{k\geq 0} \beta_k x^k$ est solution , alors la suite $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ satisfait aux relations suivantes :

$$\begin{cases} & \beta_0 &= 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k} &= 0. \end{cases} \tag{5}$$

6. Soit r un réel tel que $0 < r < R_\alpha$. Montrer qu'il existe un réel $M > 0$ tel que $\forall k \in \mathbb{N} : |\alpha_k| \leq \dfrac{M}{r^k}$.
7. Montrer que (5) admet une unique solution $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$|\beta_k| \leq \frac{M(M+1)^{k-1}}{r^k}.$$

On pourra raisonner par récurrence.

8. Que peut-on dire du rayon de convergence $R_\beta > 0$ de la série entière $\sum_{k\geq 0} \beta_k x^k$?