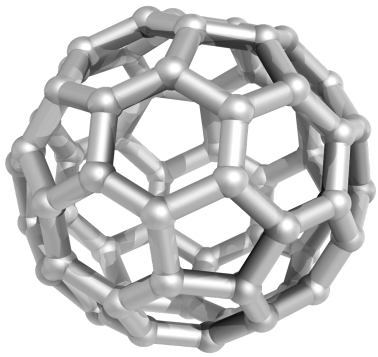
Chapitre 11 : Isométries d'un espace euclidien

Introduction et motivations de ce chapitre

Dans ce chapitre, on va étudier, entre autres notions, les isométries de l'espace qui sont les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ conservant les distances.
Parmi elles, figurent les rotations vectorielles.
Le groupe des rotations de l'isocaèdre est formé par les rotations de l'espace qui laissent invariante la position globale de l'isocaèdre, tout en permutant certaines faces. Les molécules de fullerène ont une structure d'isocaèdre tronqué, et possèdent donc les mêmes symétries que l'isocaèdre de départ.
Ces symétries sont fondamentales, dans la mesure où ce sont ces symétries qui peuvent aider à suggérer les formules de liaisons chimiques, et donc, ensuite, de classer les molécules en fonction de leurs propriétés.



Plan du chapitre

1 Matrices orthogonales **1**

2 Orientation d'un espace euclidien **2**
- 2.A Orientation et produit mixte 2
- 2.B Produit vectoriel en dimension 3 4

3 Isométries vectorielles **5**
- 3.A Définitions 5
- 3.B Symétries orthogonale 8
- 3.C Classification des isométries planes 12
- 3.D Classification des isométries de l'espace 14

1 - Matrices orthogonales

Définition 1: Matrices orthogonales

On appelle matrice orthogonale, toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^\top M = I_n = M\,M^\top$.
On appelle groupe orthogonal l'ensemble des matrices orthogonales. On le note $O_n(\mathbb{R})$ ou $O(n)$.

Théorème 2: Déterminant d'une matrice orthogonale

Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$. Alors :
- M est inversible et $M^{-1} = M^\top$.
- On a $\det(M) = \pm 1$.

Démonstration. — L'inversibilité vient de la définition : $MM^\top = I_n = M^\top M$.
On obtient directement $M^{-1} = M^\top$.
— Les propriétés du déterminant d'un produit de matrice donne pour une matrice orthogonale :

$$1 = \det(I_n) = \det(M^\top M) = \det(M^\top)\det(M) = \det(M)^2.$$

Donc $\det(M) \in \{-1; 1\}$.

□

Remarques

$M \in O_n(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow M^\top M = I_n \Longleftrightarrow MM^\top$.

Définition 3: Groupe spécial orthogonal

On appelle groupe spécial orthogonal l'ensemble des matrices orthogonales de déterminant $+1$.
On le note $SO_n(\mathbb{R})$, $SO(n)$ ou $O_n^+(\mathbb{R})$.

Proposition 4: Propriétés de $O_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R})$

- $O_n(\mathbb{R})$ est stable par produit : $(A, B) \in O_n(\mathbb{R})^2 \Longrightarrow AB \in O_n(\mathbb{R})$.
- $O_n(\mathbb{R})$ est stable par passage à l'inverse : $A \in O_n(\mathbb{R}) \Longrightarrow A^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$.

Ces propriétés sont également vérifiées par le groupe spécial orthogonal $SO_n(\mathbb{R})$.

Démonstration. Soient $(A, B) \in O_n(\mathbb{R})^2$. Alors :
— $(AB)^\top AB = B^\top A^\top AB = B^\top I_n B = B^\top B = I_n$: $AB \in O_n(\mathbb{R})$.
— $((A)^{-1})^\top A^{-1} = (A^\top)^{-1}A^{-1} = (AA^\top)^{-1} = I_n$: $A^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$.
Pour $SO_n(\mathbb{R}) \subset O_n(\mathbb{R})$ il suffit de vérifier les propriétés supplémentaires :
— le produit de deux matrices de déterminant $+1$ est de déterminant $+1$.
— le déterminant d'une matrice de déterminant $+1$ est de déterminant $+1$.

□

Théorème 5: Caractérisation des matrices orthogonales

Une matrice est orthogonale si et seulement si :
- ses colonnes forment une base orthonormale de $\mathscr{M}_{n1}(\mathbb{R})$.
- ses lignes forment une base orthonormale de $\mathscr{M}_{1n}(\mathbb{R})$.

Démonstration. — Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On note $C_1, \dots, C_n$ ses colonnes qui sont des vecteurs de $\mathscr{M}_{n1}(\mathbb{R})$ que l'on munit de son produit scalaire canonique $(X|Y) = X^\top Y$.

$$M \in O_n(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow M^\top M = I_n \Longleftrightarrow (M^\top M)_{ij} = \delta_{ij} = \left\{\begin{array}{lll} 1 & \text{si} & i = j \\ 0 & \text{si} & i \neq j \end{array}\right. \Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{n} m_{ki}m_{kj} = \delta_{ij}$$

$$\Longleftrightarrow C_i^\top C_j = \delta_{ij} \Longleftrightarrow (C_i|C_j) = \delta_{ij}$$

Pour les lignes, il suffit de noter que $M \in O_n(\mathbb{R}) \iff M^\top \in O_n(\mathbb{R})$.

□

Exemple

— La matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas orthogonale mais $N = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est orthogonale.

— La matrice $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ est orthogonale

Théorème 6: Caractérisation des bases orthonormées

Soit E un espace euclidien et $\mathscr{B}_0$ une base orthonormée de E. Soit $\mathscr{B}$ une base de E.
Alors $\mathscr{B}$ est une base orthonormée de E si et seulement si la matrice de passage de $\mathscr{B}_0$ à $\mathscr{B}$ est une matrice orthogonale.

Démonstration. $\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose que $\mathscr{B}_0 = (e_1, \ldots, e_n)$, $\mathscr{B} = (e'_1, \ldots, e'_n)$ sont orthogonales.
On note $P = (p_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de passage de $\mathscr{B}_0$ à $\mathscr{B}$.

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $e'_i = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(e'_i|e_k)}_{p_{ki}} e_k$ car $\mathscr{B}_0$ est une base orthonormée de E.

Donc pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$:

$$(P^\top P)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} p_{ki} p_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (e'_i|e_k)(e'_j|e_k) = \left(e'_i \middle| \sum_{k=1}^{n} (e'_j|e_k) e_k \right) = (e'_i|e'_j) = \delta_{ij}.$$

Ainsi, $P^\top P = I_n$: P est orthogonale
$\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose que P est orthogonale (en conservant les mêmes notations que ci-dessus).
Dans ce cas les colonnes de P forment donc une base orthonormées de $\mathscr{M}_{n1}(\mathbb{R})$ $\quad (*)$.
Les colonnes de P sont les coordonnées $X'_1, \ldots, X'_n$ dans $\mathscr{B}_0$ des vecteurs $e'_1, \ldots, e'_n$ de $\mathscr{B}$.
Ainsi, $(e'_i|e'_j) \underset{(\mathscr{B}_0 \text{ orthonormale})}{=} X_i'^\top X'_j \underset{(*)}{=} \delta_{ij}$: $\mathscr{B}$ est une base orthonormée de E.

□

2 - Orientation d'un espace euclidien

2.A - *Orientation et produit mixte*

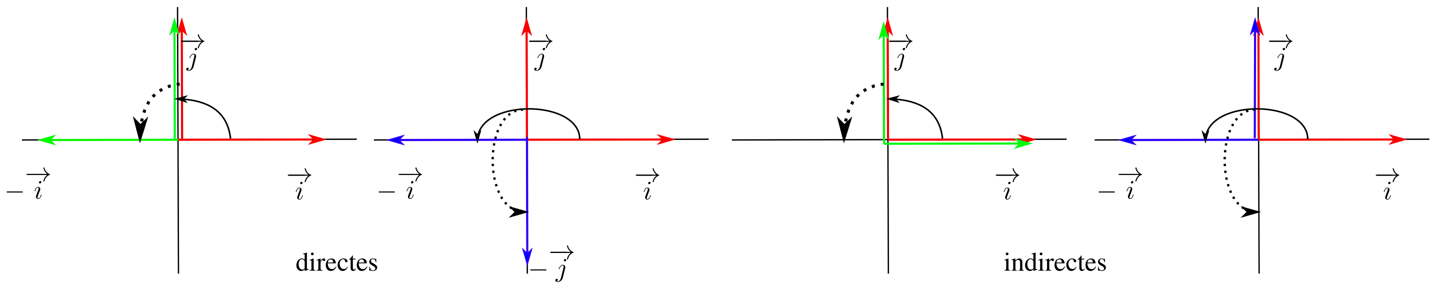
Soit E un espace euclidien.

Définition 7: Orientation

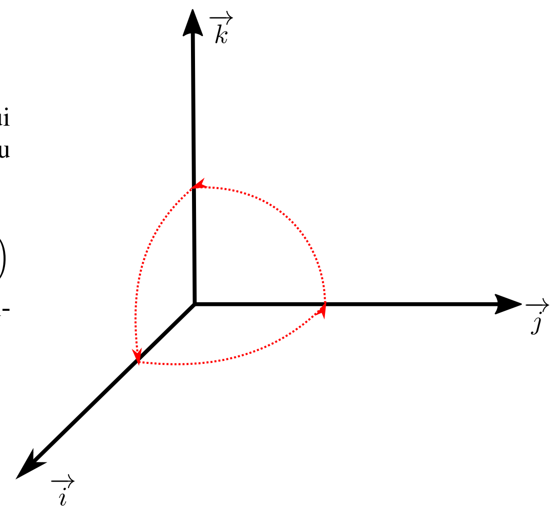
Soient $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ deux bases orthonormales de l'espace euclidien E.
On note $P = P_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}'}$ la matrice de passage entre ces deux bases.
On dit que $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ définissent la **même orientation** si $\det(P) = 1$.
Orienter l'espace consiste à choisir arbitrairement une base orthonormée de E.
Toute autre base définissant la même orientation est dite directe (b.o.n.d). Sinon elle est indirecte.

Exemple : Orientation du plan euclidien $\mathbb{R}^2$

On oriente le plan euclidien par la base canonique $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$.
Les bases $(\vec{j}, \vec{i})$ et $(-\vec{i}, \vec{j})$ sont indirectes.
Les bases $(\vec{j}, -\vec{i})$ et $(-\vec{i}, -\vec{j})$ sont directes. La base $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{i} + \vec{j}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\vec{i} + \vec{j}\right)\right)$ est directe.



Exemple : Orientation de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$



Par convention les bases orthonormées directes de $\mathbb{R}^3$ sont celles qui respectent la règle des trois doigts (ou du bonhomme d'Ampère, ou du tire-bouchon...)

En orientant l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ par la base canonique $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$

— Les bases $\left(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}, \overrightarrow{i}\right)$, $\left(\overrightarrow{k}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, $(-\overrightarrow{i}, -\overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ sont directes.

— Les bases $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{k}, \overrightarrow{j}\right)$, $\left(-\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ sont indirectes.

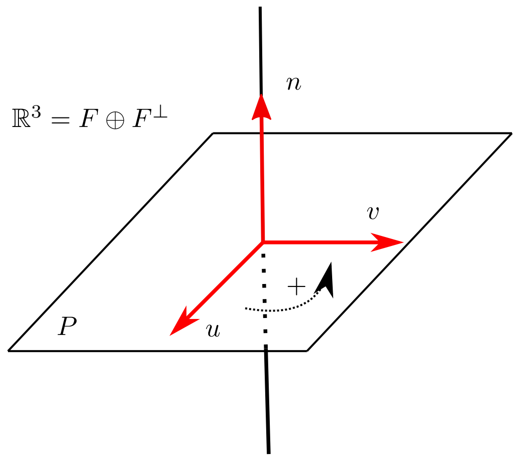
Exemple

— Orienter une droite de $\mathbb{R}^3$ consiste à choisir un vecteur unitaire (de norme 1) de cette droite.

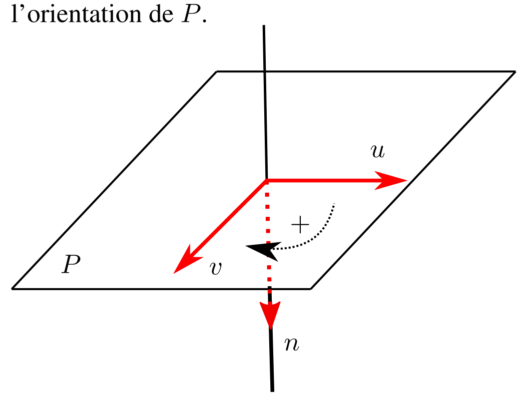
— Orienter un plan P de $\mathbb{R}^3$ consiste à choisir une base orthonormée de P.
De manière équivalente il suffit de choisir un vecteur unitaire n normal à P
(et une orientation de $\mathbb{R}^3$).
En effet ce vecteur induit une orientation sur le plan $P = \text{Vect}(n)^\perp$.
Pour toutes bases orthonormées $(u, v), (u', v')$ de P, on a en effet :

$$\det_{(u,v)}(u', v') = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \det_{(u,v,n)}(u', v', n).$$

Par conséquent les bases $(u, v), (u', v')$ de P ont la même orientation si et seulement si les bases $(u, v, n), (u', v', n)$ de $\mathbb{R}^3$ ont la même orientation. On décrète que (u, v) est une base directe de P si (u, v, n) est une base directe de $\mathbb{R}^3$.



Modifier le choix du vecteur unitaire normal à P modifie l’orientation de P.



L’orientation d’un espace euclidien permet de définir le produit mixte :

Définition 8: Produit mixte

Soit E un espace euclidien orienté par le choix d’une base orthonormée directe $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$.
Soient $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs de E.
On appelle produit mixte de ces n vecteurs le nombre :

$$\det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n) = [x_1, \dots, x_n].$$

Il est indépendant de la base orthonormée directe choisie.

Démonstration.
Soit $\mathscr{B}'$ est une autre base orthonormée directe de E et P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $X_i = PX_i'$ avec X_i, X_i' les coordonnées de x_i respectivement dans $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$.
Alors les matrices des vecteurs coordonnées colonnes vérifient :

$$\begin{pmatrix} X_1 | & \dots & | X_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X_1' | & \dots & | X_n' \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n) = \det(P) \det_{\mathscr{B}'}(x_1, \dots, x_n)$.
Pour conclure, notons P est la matrice de passage entre deux b.o.n.d. donc $\det(P) = 1$. $\square$

Exemple

— On a déjà interprété dans le chapitre Déterminants le produit mixte $[x, y]$ dans $\mathbb{R}^2$ comme l’aire algébrique du parallélogramme engendré par les vecteurs (x, y).
— On a déjà interprété le produit mixte $[x, y, z]$ dans $\mathbb{R}^3$ comme le volume algébrique du parallélépipède engendré par les vecteurs (x, y, z).

2.B - Produit vectoriel en dimension 3

Dans tout ce paragraphe on considère un espace euclidien E de **dimension** 3.
Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une **base orthonormée** directe de E.

Définition 9: Produit vectoriel

Soit $x, y \in E$ de coordonnées $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.
On définit le produit vectoriel $x \wedge y$ des vecteurs x, y le vecteur de coordonnées dans $\mathscr{B}$:

$$\begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 10: Propriétés du produit vectoriel et lien avec le produit mixte

— $x \wedge y$ est **orthogonal au plan** $\mathrm{Vect}(x, y)$: $(x \wedge y|x) = 0$ et $(x \wedge y|y) = 0$.
— **Caractérisation de la colinéarité** : $x \wedge y = 0_E$ si et seulement si (x, y) est liée.
— **Lien avec le produit mixte** : $(x \wedge y|z) = \det(x, y, z) = [x, y, z]$.

Remarques

Dans $\mathbb{R}^3$, on peut de manière équivalente définir le produit vectoriel $x \wedge y$ comme l'unique vecteur **directement orthogonal** au plan $\mathrm{Vect}(x, y)$ de norme $||x||\,||y||\,|\sin(x, y)|$.
On retrouve alors géométriquement l'interprétation du produit produit mixte $[x, y, z] = (x \wedge y|z)$ comme le volume orienté du parallélépipède construit sur (x, y, z).

Théorème 11: Base orthonormée directe de E

Soit (x, y) une famille orthonormale de E.
Alors $(x, y, x \wedge y)$ est une **base orthonormée directe** de E.

3 - Isométries vectorielles

Dans cette partie, on considère un espace euclidien E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

3.A - Définitions

Définition 12: Isométrie vectorielle

Un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ est une isométrie vectorielle si f conserve la norme, c'est-à-dire :

$$\forall x \in E, ||f(x)|| = ||x||.$$

L'ensemble des isométries vectorielles de E est appelé groupe orthogonal et on le note $O(E)$.

Remarques

Une isométrie vectorielle $f \in O(E)$ est également appelée endomorphisme orthogonal.

Exemple

— L'application identité est une isométrie vectorielle.
— Une projection orthogonale sur un sous-espace F non trivial de E ($\neq 0_E, \neq E$) n'est pas une isométrie vectorielle car pour tout $y \in F^\perp, y \neq 0$, $f(y) = 0_E$ donc $||f(y)|| = 0 \neq ||y||$.

Théorème 13: Caractérisations d'une isométrie vectorielle

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E.
- $f \in O(E) \iff \forall (x,y) \in E^2 : (f(x)|f(y)) = (x|y)$.
- $f \in O(E) \iff$ l'image de toute base orthonormale de E est une base orthonormale de E.
- $f \in O(E) \iff$ la matrice de f dans toute base orthonormale de E est orthogonale.

Démonstration.
- **Première caractérisation :**
  $\boxed{\Longleftarrow}$ Si f conserve le produit scalaire (i.e. $\forall (x,y) \in E^2 : (f(x)|f(y)) = (x|y)$) alors en appliquant cette relation avec $x = y$ on obtient :
  $$(f(x)|f(x)) = (x|x) \text{ i.e. } ||f(x)||^2 = ||x||^2 \text{ i.e. } ||f(x)|| = ||x||.$$
  On en déduit que f conserve la norme : $f \in O(E)$.
  $\boxed{\Longrightarrow}$ Si $f \in O(E)$ alors f conserve la norme et l'identité de polarisation donne :
  $$\begin{aligned}\forall (x,y) \in E^2, (f(x)|f(y)) &= \frac{1}{4}\left(||f(x)+f(y)||^2 - ||f(x)-f(y)||^2\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(||f(x+y)||^2 - ||f(x-y)||^2\right)\\ &= \frac{1}{4}(||x+y||^2 - ||x-y||^2)\\ &= (x|y).\end{aligned}$$
  On en déduit que f conserve le produit scalaire.
- **Deuxième caractérisation :**
  $\boxed{\Longrightarrow}$ Soit $f \in O(E)$ et soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E.
  Alors pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $(f(e_i)|f(e_j)) = (e_i|e_j) = \delta_{ij}$.
  Ainsi, $f(\mathscr{B}) = (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base orthonormale de E.
  $\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose que f transforme toute base orthonormale en une base orthonormale.
  Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit $x \in E$: montrons que $||f(x)|| = ||x||$.
  On décompose $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (x|e_k)e_k$ dans la base orthonormale $\mathscr{B}$.
  Alors $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (x|e_k)f(e_k)$.
  Puisque $f(\mathscr{B})$ est une base orthonormale on obtient par le théorème de Pythagore :
  $$||f(x)||^2 = \sum_{k=1}^{n} (x|e_k)^2 ||f(e_k)||^2 = \sum_{k=1}^{n} (x|e_k)^2 = ||x||^2.$$
  Ainsi, $||f(x)|| = ||x||$ pour tout $x \in E$: $f \in O(E)$.
- **Troisième caractérisation :**
  Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E. Alors :
  $$\begin{aligned} f \in O(E) &\iff f(\mathscr{B}) = (f(e_1), \dots, f(e_n)) \text{ est une base orthonormale de } E\\ &\iff Mat_{\mathscr{B}}(f) \text{ est la matrice de passage entre deux base orthonormales}\\ &\iff Mat_{\mathscr{B}}(f) \in O_n(\mathbb{R})\end{aligned}$$

$\square$

Proposition 14: Propriétés des isométries

- Si $f \in O(E)$ alors $f \in GL(E)$ et $f^{-1} \in O(E)$.
- Si $f, g \in O(E)$ alors $f \circ g \in O(E)$.

Démonstration. — Si f est une isométrie vectorielle alors pour tout $x \in E$:

$$f(x) = 0_E \iff ||f(x)|| = 0 \iff ||x|| = 0 \iff x = 0_E.$$

Par conséquent, f est injective.
Mais E est de dimension finie, on en déduit donc que f est un automorphisme de E.
De plus, pour tout $y \in E$, $||f^{-1}(y)|| = ||f(f^{-1}(y))|| = ||y||$: $f^{-1} \in O(E)$.

— Si $f, g \in O(E)$ alors pour tout $x \in E$,

$$||f(g(x))|| = ||g(x)|| = ||x||$$

où l'on utilise que f, puis g, sont des isométries.

□

Théorème 15: Sous-espaces stables

Soit $f \in O(E)$ une isométrie vectorielle
Si F un sous-espace vectoriel stable par f alors $F^\perp$ est également stable par f.

Démonstration. Montrons que $f(F^\perp) \subset F^\perp$. Soit $x \in F^\perp$ fixé.
Il s'agit de montrer que $(f(x)|y) = 0$ pour tout $y \in F$.
On restreint f au sous-espace stable F ; on note $g = f_{|F} \in \mathscr{L}(F)$.
On a $g \in GL(F)$ (car g est injectif et F de dimension finie par exemple.)
Ainsi pour tout $y \in E$ il existe un unique $z \in E$ tel que $y = g(z) = f(z) \quad (*)$.
Par conséquent, pour tout $y \in F$, on a

$$(f(x)|y) \underset{(*)}{=} (f(x)|f(z)) \underset{(f \in O(E))}{=} (x|z) = 0 \text{ car } x \in F^\perp \text{ et } a \in F.$$

□

Définition 16: (et propriété)

Si $f \in O(E)$ alors $\det(f) \in \{-1; 1\}$.

— On appelle isométrie positive une isométrie de déterminant $+1$.
On note $SO(E)$ ou $O^+(E)$ l'ensemble des isométries positives de E.
On l'appelle le groupe spécial orthogonal de E.

— On appelle isométrie négative une isométrie de déterminant -1.

Démonstration. Si $f \in O(E)$ alors la matrice A de f dans toute base orthonormale de E est orthogonale donc est de déterminant ± 1. Ainsi, $\det(f) = \det(A) = \pm 1$. □

Exercice 17

Montrer que toute valeur propre complexe de $A \in O_n(\mathbb{R})$ est de module 1.

Solution. Soit $X \neq 0$ un vecteur propre de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$.
On considère le produit scalaire sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ défini par $\overline{X}^\top Y$.
Alors, d'une part :

$$(AX|AX) = \overline{AX}^\top (AX) = \overline{X}^\top \overline{A}^\top AX \underset{(A \text{ réelle})}{=} \overline{X}^\top A^\top AX = \overline{X}^\top X = (X|X) = ||X||^2.$$

D'autre part :

$$(AX|AX) = (\lambda X|\lambda X) = \overline{\lambda X}^\top \lambda X = \overline{\lambda}\lambda \overline{X}^\top X = |\lambda|^2 ||X||^2.$$

Puisque $X \neq 0$ alors $|\lambda| = 1$.

□

3.B - Symétries orthogonale

Soit E un espace euclidien.
Rappel :
Une symétrie orthogonale est une symétrie s sur un sous-espace vectoriel F parallèlement à $F^\perp$.
Pour tout $x = x_1 + x_2 \in F \oplus F^\perp = E$, on a : $s(x) = x_1 - x_2 = 2p(x) - \mathrm{Id}(x)$.
On a alors $F = \ker(s - \mathrm{Id}) = E_1$ et $F^\perp = \ker(s + \mathrm{Id}) = E_{-1}$.
La symétrie s est bijective car $s \circ s = \mathrm{Id}$ et $s^{-1} = s$.
On a $Sp(s) \subset \{-1, 1\}$ et $\chi_s(X) = (X-1)^{\dim E_1}(X+1)^{\dim E_{-1}}$.
Dans une base $\mathscr{B}$ adaptée à la somme directe $E = F \oplus F^\perp$ la matrice de s :

$$Mat_{\mathscr{B}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}.$$

Si $F = E$ alors $s = \mathrm{Id}_E$ et si $F = \{0_E\}$ alors $s = -\mathrm{Id}_E$.

Théorème 18

Soit s une symétrie vectorielle par rapport à F parallèlement à E :

$$s : \left| \begin{array}{ccccc} E & = & F \oplus G & \longrightarrow & E \\ x & = & x_1 + x_2 & \longmapsto & x_1 - x_2 \end{array} \right.$$

1. Si s est une symétrie orthogonal alors $s \in O(E)$ est une isométrie.
2. Réciproquement, si s est une isométrie alors s est une symétrie orthogonale.

Démonstration. 1. On suppose que s est une symétrie orthogonale : $E = F \oplus F^\perp$ (dans ce cas $G = F^\perp$). Alors pour tout $x = x_1 + x_2 \in F \oplus F^\perp$ on a par le théorème de Pythagore :

$$||s(x)||^2 = ||x_1 - x_2||^2 = ||x_1||^2 + ||x_2||^2 = ||x||^2.$$

Ainsi, s est une isométrie.

2. Réciproquement, on suppose que s est une isométrie. Montrons que $G = F^\perp$.
On rappelle que $F = \ker(s - \mathrm{Id}) = E_1(s)$ et $G = \ker(s + \mathrm{Id}) = E_{-1}(s)$.
Soit $x \in G$, et montrons que $x \in F^\perp$. Pour cela, on se donne $y \in F$ quelconque et on calcule le produit scalaire (en se rappelant qu'une isométrie conserve les produits scalaires) :

$$(x|y) = (s(x)|s(y)) = (-x|y) \text{ car } x \in G = E_{-1}(s) \text{ et } y \in F = E_1(s)$$

D'où $(x|y) = -(x|y)$ donc $(x|y) = 0$. Conclusion $x \in F^\perp$ et par conséquent $G \subset F^\perp$.
Puisque $\dim F^\perp = \dim E - \dim F = \dim G$, on en déduit que $F^\perp = G$ c'est-à-dire s est une symétrie orthogonale.

□

Théorème 19: Caractérisation des symétries orthogonales

Une symétrie vectorielle $s \in \mathscr{L}(E)$ est une symétrie orthogonale si et seulement si sa matrice dans toute base orthonormée est symétrique.

Démonstration. On note $n = \dim E$.
Soit s une symétrie vectorielle et S sa matrice dans une base orthonormale.
On a $S^2 = I_n$ car $s^2 = \mathrm{Id}$. Ainsi, $S^{-1} = S$.
Alors s est orthogonale si et seulement si S est orthogonale c'est-à-dire si et seulement si

$$S^\top = S^{-1} = S : S \text{ symétrique}.$$

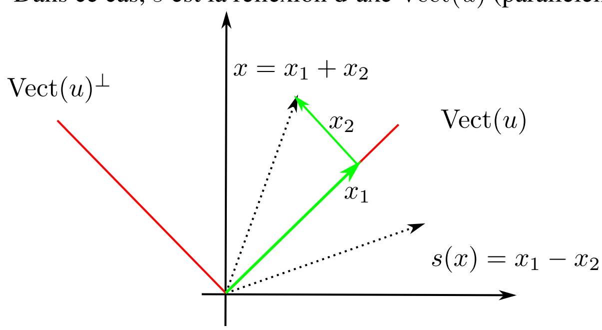
Exemple : Symétrie orthogonale du plan $E = \mathbb{R}^2$

— Si $\dim F = 2$ alors $s = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$.
— Si $\dim F = 1$ alors :
 * $E_1 = \ker(s - \mathrm{Id})$ est de dimension 1
 * $E_{-1} = \ker(s + \mathrm{Id})$ est de dimension 1.

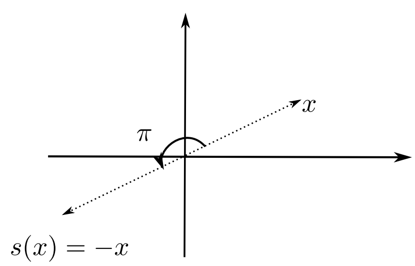
 Dans une base orthonormale $\mathscr{B} = \mathrm{Vect}(u, v)$ adaptée à $\mathbb{R}^2 = E_1 \oplus E_{-1}$, on a :

$$Mat_{\mathscr{B}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

 Dans ce cas, s est la réflexion d'axe $\mathrm{Vect}(u)$ (parallèlement à $\mathrm{Vect}(u)^{\perp} = \mathrm{Vect}(v)$).



— Si $\dim F = 0$ alors $s = -\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$:
 s est la rotation d'angle π.



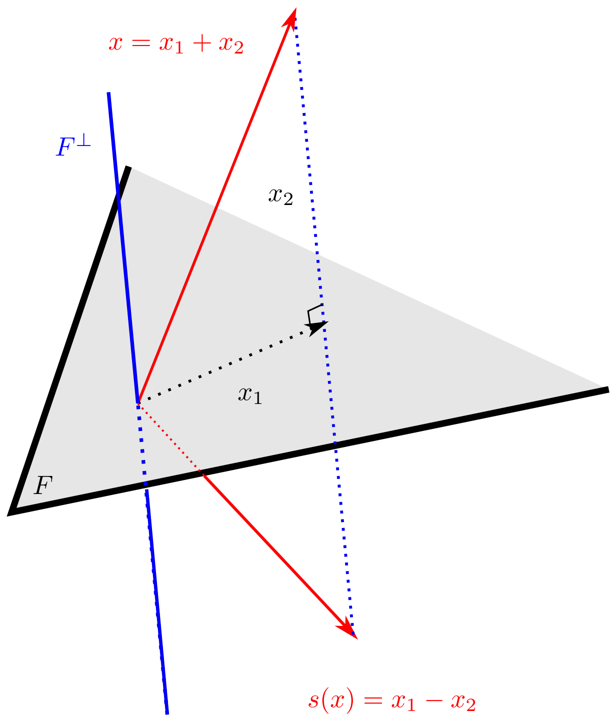
Exemple : Symétrie orthogonale de l'espace $E = \mathbb{R}^3$

— Si $\dim F = 3$ alors $s = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.
— Si $\dim F = 2$ alors :
 * $E_1 = \ker(s - \mathrm{Id})$ est de dimension 2
 * $E_{-1} = \ker(s + \mathrm{Id})$ est de dimension 1.

 Dans une base orthonormale adaptée à $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_{-1}$, on a :

$$Mat_{\mathscr{B}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

 Dans ce cas s est la réflexion par rapport au plan F (parallèlement à $F^{\perp}$).

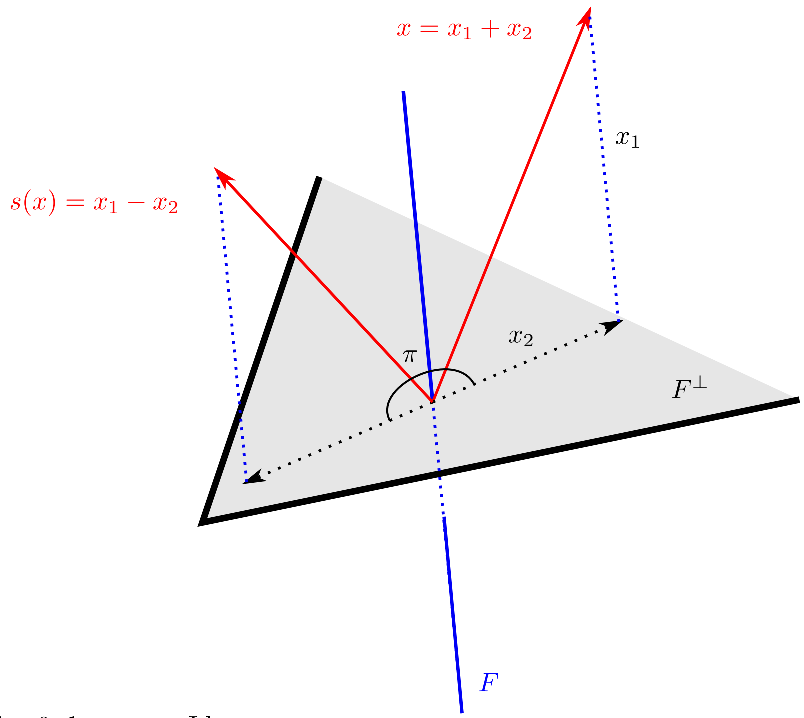


— Si $\dim F = 1$ alors :
- $*$ $E_1 = \ker(s - \mathrm{Id})$ est de dimension 1
- $*$ $E_{-1} = \ker(s + \mathrm{Id})$ est de dimension 2.

Dans une base orthonormale adaptée à $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_{-1}$, on a :

$$Mat_{\mathscr{B}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dans ce cas s est la rotation d'axe F (parallèlement au plan $F^\perp$) : il s'agit d'un retournement c'est-à-dire une rotation d'angle π autour d'une droite vectorielle.



— Si $\dim F = 0$ alors $s = -\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.

□

Exercice 20

Dans les exemples précédents, quelles sont les isométries positives ? négatives ?

Exercice 21

1. Identifier l'endomorphisme $s \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ (et donner ses caractéristiques géométriques) pour lequel on a $Mat_{\mathscr{B}}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ avec $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
2. Identifier l'endomorphisme $s \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ (et donner ses caractéristiques géométriques) pour lequel on a $Mat_{\mathscr{B}}(s) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$ avec $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Solution. 1. La matrice $S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R}) \cap O_2(\mathbb{R})$ est symétrique et orthogonale : s est une symétrie orthogonale.

On a $S - I_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$ donc $E_1 = \ker(s - \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(1, \sqrt{2} - 1)$.

On a $S + I_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$ donc $E_{-1} = \ker(s + \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(1, -\sqrt{2} - 1)$.

s est la réflexion d'axe $F = \mathrm{Vect}(1, \sqrt{2} - 1)$ parallèlement à $F^\perp = \mathrm{Vect}(1, -\sqrt{2} - 1)$.

2. La matrice $S = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix} \in S_3(\mathbb{R}) \cap O_3(\mathbb{R})$ est symétrique et orthogonale.

On a $S - I_3 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -17 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 4 \\ 1 & 4 & -17 \end{pmatrix}$ et on trouve $E_1 = \ker(s - \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(1,4,1)$.

On a $S + I_3 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ donc $E_{-1} = \mathrm{Vect}((2,-1,2);(1,0,-1))$.

s est le retournement d'axe $F = E_1 = \mathrm{Vect}(1,4,1)$ c'est-à-dire la rotation d'angle π, d'axe F parallèlement au plan $F^\perp = \mathrm{Vect}((2,-1,2),(1,0,-1))$.

□

3.C - *Classification des isométries planes*

Soit $f \in O(\mathbb{R}^2)$ et $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$. Soit $A = Mat_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$A \in O_2(\mathbb{R}) \iff A^\top A = I_2 \iff \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix} = I_2 \iff \begin{cases} a^2+c^2 = 1 \\ b^2+d^2 = 1 \\ ab+cd = 0 \end{cases}$$

$a^2 + c^2 = 1 \iff \exists\theta \in \mathbb{R}, a = \cos\theta, c = \sin\theta$ et $b^2 + d^2 = 1 \iff \exists\theta' \in \mathbb{R}, b = \cos\theta', d = \sin\theta'$.
De plus $ab + cd = 0 \iff \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta' = 0 \iff \cos(\theta' - \theta) = 0$.
On obtient $\theta' = \frac{\pi}{2} + \theta\,[\pi]$.
On en déduit que :

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ si } \theta' = \theta + \frac{\pi}{2}\,[2\pi] \quad \textbf{ou} \quad A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \text{ si } \theta' = \theta - \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$$

Théorème 22: Description de $O_2(\mathbb{R})$

— $M \in SO_2(\mathbb{R}) \iff \exists\theta \in \mathbb{R}, M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

— $M \in O_2^-(\mathbb{R}) \iff \exists\theta \in \mathbb{R}, M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$.

Remarques

Si l'on note pour $\theta \in \mathbb{R}$, $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ alors pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $R_\alpha R_\beta = R_{\alpha+\beta} = R_\beta R_\alpha$.
On dit que le groupe spécial orthogonal $SO_2(\mathbb{R})$ est commutatif.

Corollaire 23: $SO(\mathbb{R}^2)$: Nature des isométries positives de $O(\mathbb{R}^2)$

Soit $f \in SO(\mathbb{R}^2) = O^+(\mathbb{R}^2)$ une isométrie vectorielle positive du plan euclidien.
Alors il existe un **unique** $\theta \in]-\pi;\pi]$ tel que pour toute **base orthonormée directe** $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^2$:

$$Mat_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

f est la rotation r_θ d'angle θ : pour toute b.o.n.d. (u, v) on a $\begin{cases} r(u) = \cos(\theta)u + \sin(\theta)v \\ r(v) = -\sin(\theta)u + \cos(\theta)v \end{cases}$

Démonstration. Si $f \in O^+(\mathbb{R}^2)$ alors $\det(f) = 1$.
Ainsi, $Mat_{\mathscr{B}}(f) \in SO_2(\mathbb{R})$ pour tout base orthonormée $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^2$.
Il existe donc $\theta \in]-\pi;\pi]$ tel que $Mat_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Soit $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux base orthonormées directes de $\mathbb{R}^2$.
Dans chacune des bases, la matrice de f est un élément de $SO_2(\mathbb{R})$: $\exists \theta, \theta' \in]-\pi, \pi]$ tel que

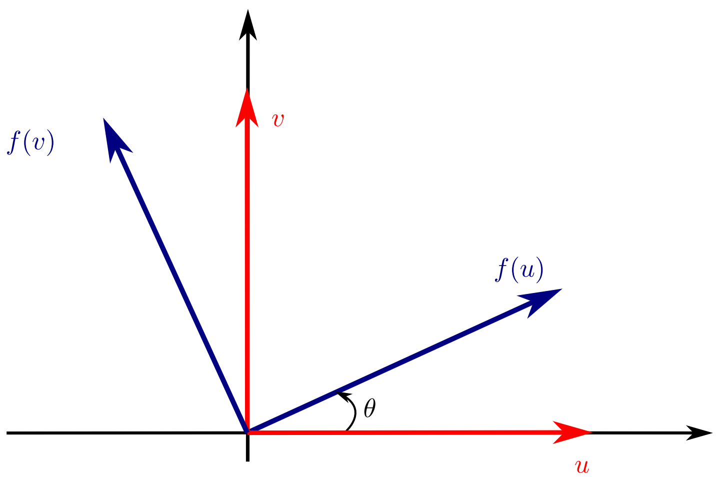
$$Mat_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = R_\theta, \quad Mat_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} \cos\theta' & -\sin\theta' \\ \sin\theta' & \cos\theta' \end{pmatrix} = R_{\theta'}$$

La matrice de passage $P = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$ entre ces deux bases orthonormées directes de est également un élément de $SO_2(\mathbb{R})$ donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $P = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = R_\alpha$.

On a $Mat_{\mathscr{B}}(f) = P Mat_{\mathscr{B}'}(f) P^{-1}$ c'est-à-dire :

$$R_\theta = R_\alpha R_{\theta'} R_\alpha^{-1} \underset{(SO_2(\mathbb{R}) \text{ est commutatif})}{=} R_{\theta'}.$$

Finalement, $\theta' = \theta\,[2\pi]$ mais puisque l'on a choisit $\theta, \theta' \in]-\pi; \pi]$ on obtient : $\theta = \theta'$.
Conclusion : $f = r_\theta$ est la rotation d'angle $\theta \in]-\pi; \pi]$. □



Cas particuliers :
- Si $\theta = 0$ alors $r_0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$
- Si $\theta = \pi$ alors $r_\pi = -\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$.

Corollaire 24: $O^-(\mathbb{R}^2)$: nature des isométries négatives de $\mathbb{R}^2$

Soit f une isométrie négative de $\mathbb{R}^2$.
Alors pour toute base orthonormée $\mathscr{B}$ (directe ou non) de $\mathbb{R}^2$ il existe un unique $\theta \in]-\pi; \pi]$ tel que

$$Mat_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Alors f est la réflexion (symétrie orthogonale) d'axe $F = \mathrm{Vect}\left(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\right)$.

Démonstration. On a $\det(f) = -1$. Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$.
La description de l'ensemble $O_2^-(\mathbb{R})$ montre que la matrice orthogonale $Mat_{\mathscr{B}}(f) \in O_2^-(\mathbb{R})$ s'écrit $Mat_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$: ce réel est unique modulo $[2\pi]$ d'où la première partie de la preuve.

Notons $S = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$.

On observe que $S \in O_2(\mathbb{R}) \cap S_2(\mathbb{R})$ est symétrique et orthogonale :
- $S^\top = S$ donc S est symétrique.
- $S^\top S = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = I_2$

Par conséquent f est une symétrie orthogonale (et $f \neq \pm\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$ donc on sait déjà que f est une réflexion).
Déterminons ses éléments géométriques caractéristiques :

$$S - I_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta - 1 & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sin^2\frac{\theta}{2} & 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\ 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} & -2\cos^2\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.$$

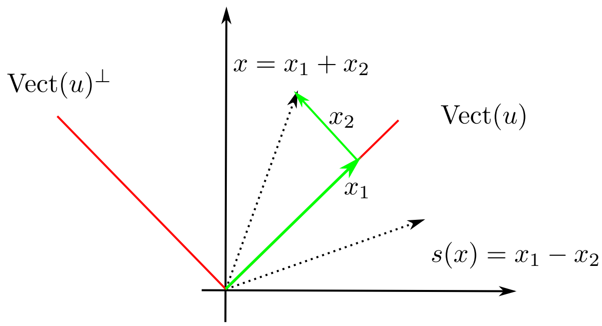
$$S+I_2=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta+1 & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cos^2\frac{\theta}{2} & 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\\ 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} & 2\sin^2\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}.$$

On en déduit les espaces propres de f, chacun étant une droite vectorielle :

$$E_1=\ker(f-\mathrm{Id})=\mathrm{Vect}\left(\cos\frac{\theta}{2},\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$E_{-1}=\ker(f+\mathrm{Id})=\mathrm{Vect}\left(-\sin\frac{\theta}{2},\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

Conclusion : f est la réflexion d'axe $F=E_1$ parallèlement à $F^\perp$. □



Remarques

— Attention aux énoncés : dans le cas des isométries positives, l'angle θ est **valable pour toute** base orthonormée directe de $\mathbb{R}^2$ tandis que dans le cas des isométries négatives, l'angle θ est obtenu pour **le choix d'une** base orthonormée.

— L'angle θ d'une rotation est donc invariant par choix d'une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^2$ (pas d'une réflexion) : on peut alors rigoureusement définir la notation d'angle orienté $\widehat{(u,v)}$: il s'agit de l'unique $\theta\in]-\pi;\pi]$ tel que $r_\theta(u_1)=v_1$ où u_1,v_1 sont les vecteurs colinéaires à u,v et unitaires
(cette rotation existe, il suffit de considérer la matrice de passage de la b.o.n.d. (u_1,u_1') à la b.o.n.d. (v_1,v_1') avec u_1',v_1' les vecteurs unitaires directement orthogonaux à u_1,v_1).

— On a montré qu'une isométrie négative admet pour matrice dans une b.o.n. :

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}.$$

C'est la composée de la rotation d'angle θ et de la réflexion d'axe (O_x).
On a donc $s_\Delta=r_\theta\circ s_{O_x}$ avec $\Delta=\mathrm{Vect}(\cos\frac{\theta}{2},\sin\frac{\theta}{2})$ $(*)$ d'après le Corollaire 24.

— Soit r_θ la rotation d'angle θ. L'égalité $(*)$ donne $r_\theta=s_\Delta\circ s_{O_x}$ car $s_{O_x}^{-1}=s_{O_x}$.

SYNTHÈSE : ISOMÉTRIES DU PLAN

Nature de l'isométrie	déterminant	spectre	espaces propres	matrice dans toute b.o.n.
$\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$ (rotation $\theta=0$)	1	$\{1\}$	$E_1=\mathbb{R}^2$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$
$-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$ (rotation $\theta=\pi$)	1	$\{-1\}$	$E_{-1}=\mathbb{R}^2$	$\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$
rotation d'angle $\theta\neq 0,\pi$	1	$\varnothing$	aucun	$\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\ \sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$
réflexion d'axe $\mathrm{Vect}(u)$	-1	$\{-1;1\}$	$E_1=\mathrm{Vect}(u)$, $E_{-1}=E_1^\perp$	$\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\ \sin\theta&-\cos\theta\end{pmatrix}$

3.D - *Classification des isométries de l'espace*

Soit $f\in O(\mathbb{R}^3)$ une isométrie vectorielle de l'espace.

❶ **Classification des isométries positives de $\mathbb{R}^3$**

Supposons que $f \in SO(\mathbb{R}^3)$ est une isométrie positive c'est-à-dire $\det(f) = 1$.
Notons $\chi_f(X) = (X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma) \in \mathbb{R}[X]$ avec α, β, γ valeurs propres complexes de f.
Les valeurs propres de f sont de module $+1$ (voir Exercice 17) donc $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = 1$.
De plus, χ_f étant de degré impair, il possède nécessairement une racine réelle.
Nécessairement l'une des valeurs propres est égale à $+1$.
Sinon,

- Soit $\alpha = \beta = \gamma = -1$ auquel cas $f = -\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ et $\det(f) = -1$ ce qui n'est pas.
- Soit $\alpha = -1$ et $\beta = \overline{\gamma} \in \mathbb{C}$ et $\det(f) = (-1)\gamma\overline{\gamma} = -|\gamma|^2 = -1$ ce qui n'est pas.

Alors $\dim E_1(f) \geqslant 1$ et trois cas se présentent (on va voir que seulement deux peuvent se réaliser) :

— $\boldsymbol{\dim E_1(f)} = \dim\ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = 3$. Alors $E_1(f) = \mathbb{R}^3$ et $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.

— $\boldsymbol{\dim E_1(f) = 2}$. Puisque $E_1(f)$ est un espace propre pour f, il est stable par f.
Dans ce cas la droite $E_1(f)^\perp = \mathrm{Vect}(w)$ est également stable par f : f possède donc une valeur propre réelle λ autre que $+1$: $\lambda = -1$.
Dans une base de diagonalisation $\mathscr{C}$ on obtient $Mat_{\mathscr{C}}(f) = \mathrm{diag}(1, 1, -1)$.
On obtiendrait $\det(f) = -1$ ce qui n'est pas.
Le cas $\dim E_1(f) = 2$ est donc impossible

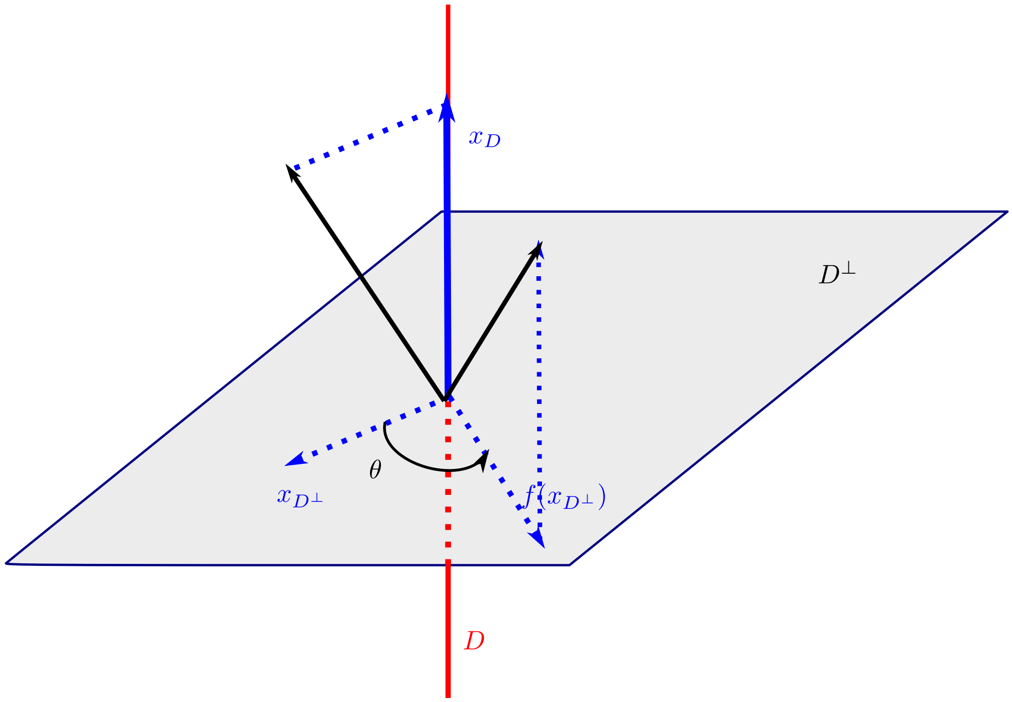
— $\boldsymbol{\dim E_1(f) = 1}$. Dans ce cas $D = E_1(f) = \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}(u)$ est une droite vectorielle stable dirigée par le **vecteur unitaire** u : $f(u) = u$.
L'orthogonal $D^\perp = E_1(f)^\perp = \mathrm{Vect}(v, w)$ est un plan vectoriel également stable par f.
On a $\mathbb{R}^3 = D \oplus D^\perp$.
Dans la base $\mathscr{B} = (u, v, w)$ on a $Mat_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$.
On note $g = f_{|_{D^\perp}}$ l'endomorphisme restreint : $g \in SO(D^\perp)$ est une isométrie vectorielle du plan $D^\perp$. Elle est **directe** car

$$\det(g) = \det Mat_{(v,w)}(g) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{vmatrix} = \det(f) = 1.$$

L'orientation de D fixée par le choix du vecteur unitaire $u \in D$ induit une orientation de $D^\perp$.
Dans toute base orthonormée $\mathscr{B}_{D^\perp} = (\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ directe de $D^\perp$ on a donc :

$$Mat_{\mathscr{B}_{D^\perp}}(g) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

On obtient une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$, $\mathscr{B} = (u, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ en concaténant.
On en déduit que $Mat_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.
Conclusion : f est la rotation d'angle θ autour de la droite $D = \mathrm{Vect}(u)$.



Remarques : (essentielles)

— Le choix de $-u$ comme orientation de D induit l'orientation inverse sur le plan $D^{\perp}$ et donnerait un angle de rotation $-\theta$.

— Pour déterminer θ on remarque que
  * $\operatorname{Tr}(f) = 1 + 2\cos\theta$ ce qui nous donne θ au signe près.
  * Soit u un vecteur unitaire de D. On se donne $v \in D^{\perp}$ et $w = u \wedge v$.
    Alors (v, w) est une base orthonormée directe du plan $D^{\perp}$ et (u, v, w) est une **base orthonormée directe** de $\mathbb{R}^3$. On obtient :

$$\det(u, v, f(v)) = [u, v, f(v)] = (u \wedge v | f(v)) = (w | \cos\theta v + \sin\theta w) = ||w||^2 \sin\theta = \sin\theta.$$

— Seul le signe de $\sin\theta$ nous sert à caractériser l'angle de la rotation. Il n'est pas indispensable de normaliser les vecteurs u, v, w.

— Si $\theta = 0$ on retrouve $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.
Si $\theta = \pi$ alors $Mat_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. On dit que f est une rotation d'angle π autour de $D = \operatorname{Vect}(u)$: f est un retournement (ou demi-tour).

❷ **Hors programme : Classification des isométries négatives de** $\mathbb{R}^3$.
Dans ce cas $\det(f) = -1$ et -1 est nécessairement valeur propre (raisonnement analogue que ci-dessus). On note $-1, e^{i\theta}, e^{-i\theta}$ les racines éventuellement multiples de χ_f.
Comme ci-dessus on montre que dans toute base orthonormée $\mathscr{B}$ directe de $\mathbb{R}^3$ on a :

$$Mat_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Par conséquent $f = r_\theta \circ s$ est la composée commutative d'une rotation dirigée par $D = \operatorname{Vect}(u)$, d'angle θ et d'une réflexion par rapport au plan $\operatorname{Vect}(u)^{\perp}$ (symétrie orthogonale par rapport à $P = \operatorname{Vect}(u)^{\perp}$ parallèlement à la droite $D = \operatorname{Vect}(u)$).

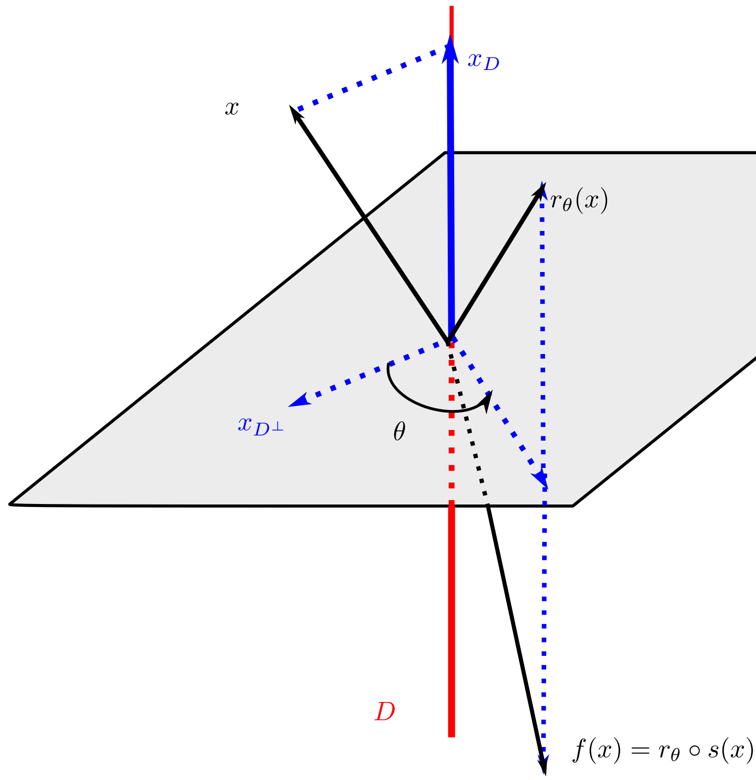
Remarques : (essentielles)

$*$ Si $\theta = 0$, $Mat_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$: f est la réflexion d'hyperplan $P = \text{Vect}(u)^{\perp}$.

$*$ Si $\theta = \pi$ alors $Mat_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $f = -\text{Id}_{\mathbb{R}^3}$.

— L'angle de la rotation dans la composition est donné par

$$\text{Tr}(f) = -1 + 2\cos\theta \text{ et } \sin\theta = [u, v, f(v)] \text{ avec } ||v|| = ||u|| = 1 \text{ et } v \in D^{\perp} = \text{Vect}(u)^{\perp}.$$



SYNTHÈSE : ISOMÉTRIES DE L'ESPACE

Nature	det	spectre	espaces propres	matrice dans une b.o.n.
$\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ (rotation $\theta = 0$)	1	$\{1\}$	$E_1 = \mathbb{R}^3$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
1/2-tour (rotation $\theta = \pi$)	1	$\{1, -1\}$	$E_1 = \mathrm{Vect}(u), E_{-1} = \mathrm{Vect}(u)^\perp$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
rotation d'angle $\theta \neq 0, \pi$	1	$\{1\}$	$E_1 = \mathrm{Vect}(u)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
$-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ ($\theta = \pi$)	-1	$\{-1\}$	$E_{-1} = \mathbb{R}^3$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
réflexion ($\theta = 0$)	-1	$\{1, -1\}$	$E_{-1} = \mathrm{Vect}(u)$ $E_1 = \mathrm{Vect}(u)^\perp$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
comp. $r_\theta \circ s$ $\theta \neq 0, \pi$	-1	$\{-1\}$	$E_{-1} = \mathrm{Vect}(u)$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Exercice 25

Déterminer la nature et les éléments géométriques caractéristiques des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associés aux matrices :

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour B, on pourra commencer par étudier la matrice $-B$.

Démonstration.

1. — Soit $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$.
   Le calcul donne $A^\top A = I_3$. Par conséquent A est une matrice orthogonale.
   — Le calcul donne $\det(A) = 1$ donc $A \in SO_3(\mathbb{R})$ et par conséquent l'isométrie $f \in SO(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à la matrice A est une rotation.
   — On détermine l'espace propre $E_1(f)$.
   $AX = X \iff X \in \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $E_1(f) = \mathrm{Vect}(1,1,0)$.
   Par conséquent, $f \in O(\mathbb{R}^3)$ est donc une rotation d'axe $D = \mathrm{Vect}(1,1,0)$.
   On normalise on obtient $\boldsymbol{u = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)}$ un vecteur unitaire dirigeant D.
   — On a $\mathrm{Tr}(f) = \mathrm{Tr}(A) = 2 = 1 + 2\cos\theta$ donc $\theta \pm \frac{\pi}{3}$.
   — Le vecteur $\boldsymbol{v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)}$ est orthogonal à u et unitaire.
   On a $f(v) = \frac{1}{4\sqrt{2}}(2,-2,-2\sqrt{6}) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1,-1,-\sqrt{6})$ et donc

$$\sin\theta = [u, v, f(v)] = \det(u, v, f(v)) = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

   Finalement, $\theta = \frac{\pi}{3}$ et $f = r_{\frac{\pi}{3}}$ est la rotation d'axe $D = \mathrm{Vect}(u)$ et d'angle $\theta = \frac{\pi}{3}$.

> **Remarques**
>
> Comme nous l'avions remarqué il suffit de calculer le produit mixte $d = [u', v', f(v')]$ avec $u' = (1,1,0), v' = (1,-1,0)$ et $f(v') = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2})$ ce qui donne $d = \sqrt{6}$ puis d'en déduire le signe de $\sin\theta \geqslant 0$ pour conclure que $\theta = \frac{\pi}{3}$.

2. Soit $B = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.
   - Le calcul donne $B^\top B = I_3$ et $\det(B) = -1$ donc $B \in O_3^-(\mathbb{R})$.
     L'isométrie $f \in O^-(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associée à f est une isométrie négative : $f = r_\theta \circ s$ est la composée d'une rotation d'axe $\mathrm{Vect}(u)$ et d'une réflexion par rapport au plan $\mathrm{Vect}(u)^\perp$ avec $u \in E_{-1}(f)$ à déterminer.
   - On détermine l'espace propre $E_{-1}(f)$: $BX = -X \iff X \in \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
     On pose $\boldsymbol{u = \frac{1}{\sqrt{11}}(1,1,3)}$ vecteur unitaire dirigeant l'axe de la rotation $D = \mathrm{Vect}(u)$.
   - On a $\mathrm{Tr}(f) = \mathrm{Tr}(B) = \frac{2}{3} = -1 + 2\cos\theta \iff \cos\theta = \frac{5}{6} \iff \theta = \pm\arccos\frac{5}{6}$.
   - Soit $\boldsymbol{v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)} \in \mathrm{Vect}(u)^\perp$.
     On a donc $\boldsymbol{f(v) = -\frac{1}{3\sqrt{2}}(-1,4,-1)}$.
     Alors $\sin\theta = [u, v, f(v)] = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{11}} & 0 & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{vmatrix} = -\frac{\sqrt{11}}{6} < 0$. Ainsi, $\theta = -\arccos\frac{5}{6}$.

$\square$