TRAVAUX DIRIGÉS : Courbes et surfaces

On rapporte le plan et l'espace à leur repère orthonormé direct usuel.

1 Révisions de géométrie

Exercice 1: (Solution)

Soient $A(1,4)$, $B(4,1)$ et $C(-1,-2)$ trois points du plan.
Calculer les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC, de son orthocentre H et du centre Ω du cercle circonscrit.

Exercice 2: (Solution)

1. Déterminer l'ensemble des points à égale distance des trois droites d'équations respectives $4x+3y-6=0$, $3x-4y-2=0$ et $y=-6$.
2. Quels sont les cercles tangents à ces trois droites ?

Exercice 3: (Solution)

1. Déterminer l'intersection du plan P d'équation $x-3y+3z-1=0$ et de la droite D d'équations $\begin{cases} x+y-10 &= 0 \\ y+z-6 &= 0 \end{cases}$
2. Déterminer le projeté orthogonal de D sur P.

Exercice 4: (Solution)

Soit P le plan passant par le point $A(1,2,-3)$ et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u}(1,0,-1)$ et $\overrightarrow{v}(2,3,4)$ et P' le plan d'équation $5x+6y+7z+8=0$.

1. Déterminer une équation cartésienne du plan P.
2. Caractériser l'ensemble $P\cap P'$.

Exercice 5: (Solution)

On considère l'ensemble

$$\mathscr{S}=\{M(x,y,z) : x^2+y^2+z^2-2x+2z-2=0\}.$$

1. Montrer que $\mathscr{S}$ est une sphère et déterminer son centre et son rayon.
2. Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation : $2x+y+2z-5=0$. Déterminer $\mathscr{S}\cap\mathscr{P}$.

Exercice 6: (Solution)

Soit D la droite passant par $A(3,2,1)$ et dirigée par $\overrightarrow{u}(1,-1,3)$ et D' la droite passant par $B(2,1,-2)$ et dirigée par $\overrightarrow{v}(-1,0,2)$. On pose $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}$.

1. Les droites D et D' sont-elles coplanaires ?
2. Déterminer une équation cartésienne du plan $P : (A,\overrightarrow{u},\overrightarrow{w})$.
3. Déterminer l'intersection C de P et D'.
4. Soit Δ la droite passant par C et dirigée par $\overrightarrow{w}$.
   Montrer que Δ est perpendiculaire à D et D'.

Exercice 7: (Solution)

Soit P_m le plan d'équation $mx-y+(2-m)z+m=4 : (m\in\mathbb{R})$ et P' le plan d'équation $x+y+z=1$. On pose $\Delta_m=P_m\cap P'$.
Montrer que P_m contient une droite fixe et que Δ_m passe par un point fixe à préciser.

Exercice 8: (Solution)

Déterminer les équations de la droite passant par $A(3,2,1)$ parallèle au plan $\mathscr{P}$ d'équation $2x-5y+4z=1$ et coupant la droite $\Delta : \begin{cases} 2x-3y+1=0 \\ z-1=0 \end{cases}$

Exercice 9: (Solution)

1. Déterminer l'angle formé par les plans $\mathscr{P}_1 : 2x+4y-z+5=0$ et $\mathscr{P}_2 : x+y+6z-8=0$.
2. Soit $A(2,1,4)$. Calculer la distance de A à $\mathscr{P}_1\cap\mathscr{P}_2$.

Exercice 10: (Solution)

Déterminer la distance du point M à la droite $\mathscr{D}$ dans les cas suivants :

1. $M(-1,1,3)$ et $\mathscr{D} : \begin{cases} x &= 1+2\lambda \\ y &= 2-\lambda \\ z &= 2+2\lambda \end{cases} \quad (\lambda\in\mathbb{R}).$
2. $M(-1,1,3)$ et $\mathscr{D} : \begin{cases} x+y-2z-1 &= 0 \\ 2x-y+z+1 &= 0 \end{cases}.$

2 Généralités sur les surfaces

Exercice 11: (Solution)

Montrer que la courbe $\mathscr{C}$: $\begin{cases} x(t) = t^2 - 1 \\ y(t) = 2t \\ z(t) = t^2 + t + 1 \end{cases}$ est plane et montrer qu'il s'agit d'une parabole.

Exercice 12: (Solution)

Déterminer l'équation du plan tangent en $A(1,0,0)$ de la nappe paramétrée par :

$$\begin{cases} x(u,v) = u^2 + uv + v^2 \\ y(u,v) = u + v \\ z(u,v) = u^3 + v^3 \end{cases}$$

Exercice 13: (Solution)

Déterminer les plans tangents à la surface d'équation $x - 8zy = 0$ contenant la droite d'équations $\begin{cases} y = 1 \\ x + 4z + 2 = 0 \end{cases}$

Exercice 14: (Solution)

Soit $(\mathscr{S})$ la surface d'équation $(x^2 + y^2)z = x + y$.

1. Déterminer la projection orthogonale de $(\mathscr{S})$ sur le plan (xOy).
2. Déterminer la projection orthogonale de $(\mathscr{S})$ sur le plan (xOz).

Exercice 15: (Solution)

Soit $\mathscr{S}$ la surface d'équation $3x^2 + 4xy + 2yz + 4xz = 0$.
Donner l'équation du plan tangent en un point régulier.

Exercice 16: (Solution)

Soit $\mathscr{S}$ la nappe paramétrée par :

$$\begin{cases} x(u,v) = u + v \\ y(u,v) = u^2 + v^2 \\ z(u,v) = u^2 - v^2 \end{cases}$$

1. Pour $a \in \mathbb{R}$, déterminer l'ensemble des points M de $\mathscr{S}$ tels que la droite $(M, \overrightarrow{d})$ soit tangente à $\mathscr{S}$ en M avec $\overrightarrow{d} = (0,1,a)$.
2. Pour $a \neq -1$ et $a \neq 0$, déterminer la projection de cet ensemble sur le plan (xOy) suivant la direction $\mathbb{R}\overrightarrow{d}$

Exercice 17: (Solution)

Soient $\mathscr{S}_1$ et $\mathscr{S}_2$ les surfaces d'équations $x^2 + y^2 + xy = 1$ et $y^2 + z^2 + yz = 1$.

1. Montrer que $\mathscr{C} = \mathscr{S}_1 \cap \mathscr{S}_2$. est la réunion de deux courbes planes.
2. Déterminer en tout point de $\mathscr{C}$ un vecteur tangent à $\mathscr{C}$.
3. Déterminer la projection orthogonale de $\mathscr{C}$ sur (xOz).

3 Surfaces réglées

Exercice 18: (Solution)

Soit $\mathscr{C}$ la courbe de paramétrage :

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \\ z(t) = t^3 \end{cases}$$

On définit la réunion $\mathscr{S}$ des droites tangentes $\mathscr{T}_t$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point de paramètre $M(t) = f(t)$.

1. Déterminer une paramétrage de la surface $\mathscr{S}$.
2. Déterminer les points stationnaires pour le paramétrage obtenu et déterminer pour les points réguliers une équation du plan tangent à la surface.
3. Montrer que tous les points réguliers d'une même génératrice $\mathscr{T}_t$ ont le même plan tangent.

Exercice 19: (Solution)

1. Soit $\mathscr{C}$ le cercle contenu dans le plan d'équation $y = 1$ de centre $A(0,1,1)$ et de rayon 1.
   Donner une représentation paramétrique de ce cercle.
2. On note $\mathscr{S}'$ la surface réglée engendrée par les droites joignant un point de $\mathscr{C}$ à son projeté orthogonal sur l'axe (Oz).
   Donner une équation cartésienne de la surface $\mathscr{S}$ réunion de $\mathscr{S}'$ et de l'axe (Oz).
3. Nature de la courbe intersection de $\mathscr{S}$ avec un plan parallèle à xOz ?

Exercice 20: (Solution)

Soit $\mathscr{S}$ la surface d'équation $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ avec $a,b,c>0$.

1. Soit $A_t(a\cos t, b\sin t, 0)$ avec avec $t\in[0;2\pi]$. Montrer qu'il existe exactement deux droites passant par A_t et contenus dans $\mathscr{S}$.
   On pourra considérer une vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ dirigeant une telle droite et écrire les conditions nécessaires et suffisantes pour que $A_t+\lambda\overrightarrow{u}\subset\mathscr{S}$
2. Si $x,y,u,v\in\mathbb{R}$ vérifient $x^2+y^2=u^2+v^2$, montrer qu'il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que :
$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & u\cos t - v\sin t \\ y & = & u\sin t + v\cos t \end{array}\right.$$
3. En déduire deux familles de droites engendrant $\mathscr{S}$ puis montrer que toute droite incluse dans $\mathscr{S}$ est dans l'une des deux familles précédentes.

Exercice 21: (Solution)

Montrer que la surface d'équation cartésienne $z=x^3-3xy$ est réglée.

Exercice 22: (Solution)

Soient $\mathscr{S}$ la sphère de centre $A=(a,0,0)$ et de rayon $r\in]0;a[$ et $\mathscr{S}'$ la surface constituée des droites horizontales tangentes à $\mathscr{S}$ et sécantes à (Oz).
Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{S}'$.

Exercice 23: (Solution)

Soient $a>0$. On considère deux droites
$$\mathscr{D}_1:\left\{\begin{array}{lcl} y & = & a \\ z & = & a \end{array}\right. \quad \text{et } \mathscr{D}_2:\left\{\begin{array}{lcl} x & = & a \\ z & = & 0 \end{array}\right.$$
Montrer que l'ensemble des points équidistants de $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ est une surface dont on déterminera une équation. Préciser la nature de cette surface.

Exercice 24: (Solution)

Soit Γ une courbe de l'espace et $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul.
On appelle cylindre de directrice Γ et de direction $\overrightarrow{u}$, la surface engendrée par toutes les droites dirigées par $\overrightarrow{u}$ et passant par un point de Γ.
Donner un paramétrage et une équation du cylindre $\mathscr{S}$ de section droite (=perpendiculaire à la direction $\overrightarrow{u}$) la courbe $\mathscr{C}$ définie par le paramétrage suivant dans le repère orthonormé usuel de l'espace :
$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & t^2 \\ y & = & t+1 \\ z & = & t^2-t+1 \end{array}\right.$$

Exercice 25: (Solution)

Vérifier que la surface $\mathscr{S}$ d'équation $x(y+z)=1$ est un cylindre (au sens de l'exercice précédent) de direction $\overrightarrow{u}=(0,1,-1)$. Donner une section du cylindre et préciser sa nature.

Exercice 26: (Solution)

Soient a,b,c des réels non nuls. On considère la courbe paramétrée par :
$$\mathscr{C}:\left\{\begin{array}{lcl} x & = & at \\ y & = & bt^3 \\ z & = & c(t^2+1) \end{array}\right. \qquad (t\in\mathbb{R}).$$
Soit $\mathscr{S}$ la surface engendrée par les droites parallèles au plan (xOy) et qui rencontrent $\mathscr{C}$ en deux points.

1. Écrire un paramétrage de $\mathscr{S}$ puis une équation cartésienne.
2. Déterminer l'ensemble des points de $\mathscr{S}$ pour lesquels le plan tangent contient O (on décrira cet ensemble à l'aide d'une équation cartésienne).

Exercice 27: (Solution)

Déterminer une équation cartésienne du cylindre de directrice Γ : $\left\{\begin{array}{lcl} x^2+y^2 & = & 1 \\ y+z & = & 1 \end{array}\right.$ et de direction $\overrightarrow{u}(0,1,1)$.

Exercice 28: (Solution)

Déterminer une équation du cylindre de direction $\overrightarrow{u}=(1,2,3)$ et de directrice la courbe d'équations cartésiennes :
$$\left\{\begin{array}{rcl} z & = & 0 \\ (x-2)^2+3y^2 & = & 1 \end{array}\right.$$

Exercice 29: (Solution)

Soit Γ une courbe de l'espace et S un point de l'espace.
On appelle cône de directrice Γ et de sommet S la surface engendrée par les droites passant par un point de Γ et le point S.

1. Déterminer une équation cartésienne du cône :
   — de directrice Γ : $\left\{\begin{array}{rcl} y & = & z \\ x^2+y^2-2x & = & 0 \end{array}\right.$
   — de sommet $S(3,0,3)$.
2. Déterminer une équation cartésienne du cône :
   — de directrice Γ : $\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & t \\ y(t) & = & t^2 \\ z(t) & = & t+1 \end{array}\right.$
   — de sommet $S(1,1,1)$.

4 Surfaces de révolution

Exercice 30: (Solution)

Déterminer une équation de la surface $\mathscr{S}$ engendrée par la rotation autour de l'axe (Oz) de la courbe $\mathscr{C}$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2-y^2-4x+2 & = & 0 \\ x+z & = & 1 \end{array}\right.$$

Exercice 31: (Solution)

Déterminer une équation de la surface de révolution $\mathscr{S}$ engendrée par la rotation autour de l'axe (Oz) de la courbe $\mathscr{C}$ paramétrée par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & \cos^3 t \\ y(t) & = & \sin^3 t \\ z(t) & = & \cos 2t \end{array}\right.$$

Exercice 32: (Solution)

Déterminer l'équation de la surface de révolution obtenue par rotation de la parabole d'équation autour de l'axe (Oz) :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & a \\ y & = & 3z^2+a^2 \end{array}\right. , \quad (a>0).$$

Exercice 33: (Solution)

Montrer que la surface d'équation $(x^2+y^2+z^2)^2 = x^2-y^2-z^2$ est de révolution autour de l'axe (Ox). Tracer une méridienne.

Exercice 34: (Solution)

1. Montrer que $x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$.
2. Montrer que la surface d'équation $x^3+y^3+z^3-3xyz = 1$ est de révolution et préciser son axe et tracer une méridienne.

Exercice 35: (Solution)

1. Déterminer une équation cartésienne du cylindre de révolution de rayon $R>0$ et d'axe D : $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & z+3 \\ y & = & z-1 \end{array}\right.$
   Déterminer R tel que ce cylindre soit tangent à l'axe (Oz).
2. Déterminer une équation cartésienne du cône de révolution d'axe D : $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & y \\ y & = & z \end{array}\right.$, de sommet O et de demi-angle au sommet $\frac{\pi}{6}$.

SOLUTIONS TRAVAUX DIRIGÉS : Courbes et surfaces

***Solution Exercice** 1.* Soient $A(1,4)$, $B(4,1)$ et $C(-1,-2)$ trois points du plan.

Calculons les coordonnées des points suivants :

— Centre de gravité G : intersection des trois médianes.
On en détermine deux $(m_1),(m_2)$.
  ∗ $(m_1)=(AM_1)$ où $M_1(\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$ est le milieu de (BC)
  On note $ax+by=c$ une équation cartésienne de (m_1).
  Un vecteur directeur est $\overrightarrow{AM_1}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{9}{2}\end{pmatrix}$ ou encore $\begin{pmatrix}1\\-9\end{pmatrix}$.
  Un vecteur normal est donc $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}9\\1\end{pmatrix}$: $(m_1):9x+y=c$.
  Puisque $A\in(m_1)$: $9+4=c \iff c=13$: $(m_1):9x+y=13$.
  ∗ $(m_2)=(BM_2)$ où $M_2(0,1)$ est le milieu de (AC)
  On note $ax+by=c$ une équation cartésienne de (m_2).
  Un vecteur directeur est $\overrightarrow{BM_2}\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix}$ ou encore $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.
  Un vecteur normal est donc $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$: $(m_2):y=c$.
  Puisque $B\in(m_1)$: $y=1$: $(m_2):y=1$.
On en déduit les coordonnées du point d'intersection $G\left(\frac{4}{3},1\right)$.

— Orthocentre H : intersection des hauteurs.
On a donc $(\overrightarrow{AH}|\overrightarrow{BC})=0$ et $(\overrightarrow{BH}|\overrightarrow{AC})=0$.
En notant (x,y) les coordonnées de H on trouve qu'elles vérifient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+3y & = & 7\\ 5x+3y & = & 17\end{array}\right. \iff \left\{\ x=\frac{5}{2}y=\frac{3}{2}\right. .$$

Donc H a pour coordonnées $(\frac{5}{2},\frac{3}{2})$.

— Centre du cercle circonscrit : intersection des médiatrices.
On a $\Omega A=\Omega B=\Omega C$.
En traduisant ces égalités avec les coordonnées des points, il vient $x=y=\frac{3}{4}$.
Donc Ω a pour coordonnées $(\frac{3}{4},\frac{3}{4})$.

□

***Solution Exercice** 2.*

1. La distance d'un point $M(x_0,y_0)$ à une droite (D) : $ax+by+c=0$ est donnée par :

$$d(M,D)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

En effet, notons $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et H la projection orthogonale de M sur D.

On a $d(M,\mathscr{D})=HM$.
On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{HM} &= \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_0-x_H\\y_0-y_H\end{pmatrix}\\ &= a(x_0-x_H)+b(y_0-y_H)\\ &= ax_0+by_0-(ax_H+by_H)\\ &= ax_0+by_0-(-c)\\ &= ax_0+by_0+c \text{ car } H\in\mathscr{D}.\end{aligned}$$

D'autre part, $|\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{HM}|=||\overrightarrow{n}||\,||\overrightarrow{HM}||\,|\cos(\overrightarrow{n},\overrightarrow{HM})|=||\overrightarrow{n}||\,||\overrightarrow{HM}||$ car $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{HM}$ sont colinéaires.
On en déduit que :

$$|ax_0+by_0+c|=|\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{HM}|=||\overrightarrow{n}||\,||\overrightarrow{HM}||=\sqrt{a^2+b^2}\,HM$$

Il vient : $d(M,D)=HM=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ comme annoncé.
On note $D_1:4x+3y-6=0$, $D_2:3x-4y-2=0$, $D_3:y=-6$.
Les points équidistants aux droites D_1,D_2,D_3 sont les points M tels que :

$$d(M,D_1)=d(M,D_3) \text{ et } d(M,D_2)=d(M,D_3).$$

On note (x,y) les coordonnées de M.

— $d(M,D_1)=\frac{|4x+3y-6|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{|4x+3y-6|}{5}$ et $d(M,D_3)=|y+6|$.
Ainsi, $d(M,D_1)=d(M,D_3)$ si et seulement si :

$$\begin{aligned}&4x+3y-6=5(y+6) \text{ ou } 4x+3y-6=-5(y+6)\\ \iff &2x-y=18 \text{ ou } x+2y=-6\end{aligned}$$

— $d(M,D_2)=\frac{|3x-4y-2|}{5}$ donc $d(M,D_2)=d(M,D_3)$ si et seulement si :

$$3x-9y=32 \text{ ou } 3x+y=-28.$$

On a obtenu les équations des bissectrices des droites D_1,D_3 et D_2,D_3.
Les points équidistants aux trois droites sont les points d'intersection de ces deux bissectrices.
On obtient quatre points d'intersection donc les coordonnées respectives sont solutions des systèmes :

$$S_1:\left\{\begin{array}{rcrcl} 2x & - & y & = & 18\\ 3x & - & 9y & = & 32\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=\frac{26}{3}\\ y=-\frac{2}{3}\end{array}\right.$$

$$S_2 : \left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & - & y & = & 18 \\ 3x & + & y & = & -28 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = -2 \\ y = -22 \end{array}\right.$$

$$S_3 : \left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & -6 \\ 3x & - & 9y & = & 32 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{10}{3} \end{array}\right.$$

$$S_4 : \left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & -6 \\ 3x & + & y & = & -28 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = -10 \\ y = 2 \end{array}\right.$$

2. Le centre d'un cercle tangent aux trois droites est équidistant des trois droites D_1, D_2, D_3.
   Les points d'intersection de ce cercle et des trois droites sont les projections orthogonales du centre sur les droites (et situés sur un rayon).
   On a donc déterminé les centres $\Omega_i, i \in [\![1,4]\!]$ des quatre cercles tangents aux trois droites à la question précédente.
   Les rayons de ces cercles sont donnés par la distance $d(\Omega_i, D_3)$.
   On trouve $R_1 = 16/3$, $R_2 = 16$, $R_3 = 8/3$, $R_4 = 8$.

□

Solution Exercice 3.

1. Déterminons l'intersection du plan P d'équation $x - 3y + 3z - 1 = 0$ et de la droite D d'équations $\left\{\begin{array}{rcl} x + y - 10 & = & 0 \\ y + z - 6 & = & 0 \end{array}\right.$
   L'intersection de D et P est l'ensemble des points $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ dont les coordonnées vérifient le système linéaire :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x - 3y + 3z & = & 1 \\ x + y & = & 10 \\ y + z & = & 6 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{43}{7} \\ y & = & \frac{27}{7} \\ z & = & \frac{15}{7} \end{array}\right.$$

2. Déterminons le projeté orthogonal de D sur P.
   Soit $M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ un point de l'espace.
   Déterminons son projeté orthogonal $M'(x', y', z')$ sur P.
   Notons $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ un vecteur normal à P.
   Le point M' est déterminé par :

$$\left\{\begin{array}{l} M' \in P \\ \overrightarrow{MM'} \text{ colinéaire } \overrightarrow{n} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x' - 3y' + 3z' = 1 \quad (1) \\ (2)\ \exists \lambda \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{l} x' = x + \lambda \\ y' = y - 3\lambda \\ z' = z + 3\lambda \end{array}\right. \end{array}\right.$$

En injectant les relations (2) dans (1) on trouve :

$$\lambda = \frac{1}{19}\left(1 - (x - 3y + 3z)\right).$$

Le projeté orthogonal de $M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ sur P a pour coordonnées :

$$(3) : \left\{\begin{array}{l} x' = x + \frac{1}{19}\left(1 - (x - 3y + 3z)\right) \\ y' = y - \frac{3}{19}\left(1 - (x - 3y + 3z)\right) \\ z' = z + \frac{3}{19}\left(1 - (x - 3y + 3z)\right) \end{array}\right.$$

On se donne maintenant $M(x, y, z) \in D$:

$$\left\{\begin{array}{l} x + y = 10 \\ y + z = 6 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = 10 - (6 - z) = 4 + z \\ y = 6 - z \end{array}\right.$$

On en déduit une paramétrisation de D puis en injectant dans (3) on trouve une paramétrisation du projeté orthogonal D' sur P :

$$D : \left\{\begin{array}{l} x = 4 + t \\ y = 6 - t \\ z = t \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$D' : \left\{\begin{array}{l} x' = \frac{91}{19} + \frac{12}{19}t \\ y' = \frac{69}{19} + \frac{2}{19}t \\ z' = \frac{45}{19} - \frac{2}{19}t \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R}).$$

□

Solution Exercice 4. Soit P le plan passant par le point $A(1, 2, -3)$ et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u}(1, 0, -1)$ et $\overrightarrow{v}(2, 3, 4)$ et P' le plan d'équation $5x + 6y + 7z + 8 = 0$.

1. Déterminons une équation cartésienne du plan P.
   Un vecteur normal à P est donné par

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

   Un vecteur normal à P est également $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   Une équation de P est donc $x - 2y + z = d$ avec d à déterminer en utilisant $A \in P$:

$$d = 1 - 2(2) - 3 = -6. \quad \text{Conclusion} \quad P : x - 2y + z = -6.$$

2. Soit $(x,y,z)\in P\cap P'$:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & 2y & + & z & = & -6 \\ 5x & + & 6y & + & 7z & = & -8 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & 2y & + & z & = & -6 \\ & & 16y & + & 2z & = & 22 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & 2y & + & z & = & -6 \\ & & 8y & + & z & = & 11 \end{array}\right.$$

Par conséquent $P\cap P'$ est une droite D.
Cette droite passe par le point $(-7,1,3)$ et est dirigée par le vecteur $(10,1,-8)$ (solution du système homogène associé).
Une paramétrisation de D est donc :

$$\left\{\begin{array}{ccc} x & = & -7+10t \\ y & = & 1+t \\ z & = & 3-8t \end{array}\right. \qquad (t\in t)$$

$\square$

Solution Exercice 5. On considère l'ensemble

$$\mathscr{S}=\{M(x,y,z) : x^2+y^2+z^2-2x+2z-2=0\}.$$

1. Montrons que $\mathscr{S}$ est une sphère et déterminer son centre et son rayon.
Soit $(x,y,z)\in\mathscr{S}$:

$$x^2+y^2+z^2-2x+2z-2=0 \iff (x-1)^2-1+y^2+(z+1)^2-1-2=0$$
$$\iff (x-1)^2+y^2+(z+1)^2=2^2$$

Ainsi, $\mathscr{S}$ est la sphère de centre $\Omega(1,0,-1)$ et de rayon $R=2$.

2. Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation : $2x+y+2z-5=0$. Déterminons $\mathscr{S}\cap\mathscr{P}$.
Cette intersection est :
— vide si $d(\Omega,\mathscr{P})>2$.
— réduite à un point si $d(\Omega,\mathscr{P})=2$.
— un cercle si $d(\Omega,\mathscr{P})<2$.
On a $d(\Omega,\mathscr{P})=\frac{|2\times1+0+2\times(-1)-5|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\frac{5}{3}<2=R$.
Ainsi $\mathscr{S}\cap\mathscr{P}$ est un cercle.
Notons que :
— $\overrightarrow{n}=(2,1,2)$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$
— $\overrightarrow{u}=(-1,2,0)$, $\overrightarrow{v}=(-1,0,1)$ dirigent $\mathscr{P}$
Le centre Ω' est le projeté orthogonal de Ω sur $\mathscr{P}$:

$$\left\{\begin{array}{l} \Omega'(x',y',z')\in\mathscr{P} \\ (\overrightarrow{\Omega\Omega'}|\overrightarrow{u})=0 \\ (\overrightarrow{\Omega\Omega'}|\overrightarrow{v})=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 2x'+y'+2z'-5=0 \\ -(x'-1)+2y'=0 \\ -(x'-1)+(z'+1)=0 \end{array}\right.$$

On trouve : $\Omega'\left(\frac{19}{9},\frac{5}{9},\frac{1}{9}\right)$.
Le cercle $\mathscr{S}\cap\mathscr{P}$ a pour rayon $r>0$ vérifiant :

$$r^2=R^2-d(\Omega,\mathscr{P})^2=4-\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{11}{9}.$$

$\square$

Solution Exercice 6. Soit D la droite passant par $A(3,2,1)$ et dirigée par $\overrightarrow{u}(1,-1,3)$ et D' la droite passant par $B(2,1,-2)$ et dirigée par $\overrightarrow{v}(-1,0,2)$. On pose $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}$.

1. Les droites D et D' ne sont pas parallèles car leurs vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires.
Par ailleurs, les droites D et D' ne sont pas sécantes.
Une représentation paramétrique de D et un système d'équations cartésiennes :

$$\left\{\begin{array}{ccc} x & = & 3+t \\ y & = & 2-t \\ z & = & 1+3t \end{array}\right. \quad (t\in\mathbb{R}) \iff \left\{\begin{array}{ccc} x+y & = & 5 \\ 3x-z & = & 8 \end{array}\right.$$

Une représentation paramétrique de D' et un système d'équations cartésiennes :

$$\left\{\begin{array}{ccc} x & = & 2-t \\ y & = & 1 \\ z & = & -2+2t \end{array}\right. \quad (t\in\mathbb{R}) \iff \left\{\begin{array}{ccc} 2x+z & = & 2 \\ y & = & 1 \end{array}\right.$$

En reportant les conditions $y=1$ et $z=2(1-x)$ dans le système définissant D, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{ccc} x+1 & = & 5 \\ 3x-2(1-x) & = & 8 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccc} x & = & 4 \\ x & = & 2 \end{array}\right.$$

Ce système est impossible $D\cap D'=\varnothing$.
Conclusion : les droites D et D' n'étant ni sécantes ni parallèles, elles ne sont pas coplanaires.

2. Le plan P est dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}$ avec :

$$\overrightarrow{w}=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-5\\-1\end{pmatrix}$$

Le plan P admet pour vecteur normal :

$$\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{w}=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-2\\-5\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16\\-5\\-7\end{pmatrix}$$

Une équation est de la forme $16x-5y-7z=d$ et on détermine d en utilisant le fait que $A(3,2,1)\in P : 48-10-7=d \Longleftrightarrow d=32$.

Ainsi, $P : 16x-5y-7z=31$.

3. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ un point d'intersection de D' et P.

   Ses coordonnées vérifient :

$$\begin{cases} 16x-5y-7z=31 \\ \exists t\in\mathbb{R}, \begin{cases} x &= & 2-t \\ y &= & 1 \\ z &= & -2+2t \end{cases} \end{cases}$$

   On trouve $t=\frac{1}{3}$ puis $C(x,y,z)=(\frac{5}{3},1,-\frac{4}{3})$.
   $\mathscr{P}\cap\mathscr{D}'=\{(\frac{5}{3},1,-\frac{4}{3})\}$.

4. Soit Δ la droite passant par C et dirigée par $\overrightarrow{w}$.

   Montrons que Δ est perpendiculaire à D et D'.

   La droite Δ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}$.

   Ce vecteur est par définition orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et à $\overrightarrow{v}$.

   Ces deux derniers vecteurs dirigeant respectivement D et D' on en déduit que $\Delta\perp D$ et $\Delta\perp D'$.

□

Solution Exercice 7. Soit P_m le plan d'équation :

$$P_m : mx-y+(2-m)z+m=4 : (m\in\mathbb{R}).$$

Soit P' le plan d'équation $x+y+z=1$. On pose $\Delta_m=P_m\cap P'$.
Montrons que P_m contient une droite fixe et que Δ_m passe par un point fixe.
• Déterminons l'intersection des plans P_m.
Soit (α,β,γ) un point dans l'intersection $\bigcap\limits_{m\in\mathbb{R}} P_m$.
Alors $\forall m\in\mathbb{R}$, $m\alpha-\beta+(2-m)\gamma+m=4$.
En particulier pour $m=0$, $m=2$ et $m=1$ on obtient :

$$\begin{cases} -\beta+2\gamma=4 \\ 2\alpha-\beta+2=4 \\ \alpha-\beta+\gamma+1=4 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -\beta+2\gamma=4 \\ 2\alpha-\beta=2 \\ \alpha-\beta+\gamma=3 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha-\beta+\gamma=3 \\ -\beta+2\gamma=4 \\ 2\alpha-\beta=2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha-\beta+\gamma=3 \\ -\beta+2\gamma=4 \\ \beta-2\gamma=-4 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha-\beta+\gamma=3 \\ -\beta+2\gamma=4 \end{cases}$$

L'ensemble obtenu est une droite dont une paramétrisation est :

$$D : \begin{cases} x &= & -1+t \\ y &= & -4+2t \\ z &= & t \end{cases}$$

Par conséquent la droite D appartient aux plans P_0,P_1,P_2.
Cette droite est en fait incluse dans tous les plans P_m.
En effet, pour tout $m\in\mathbb{R}$:

$$\forall t\in\mathbb{R}, m(-1+t)-(-4+2t)+(2-m)t+m=4.$$

• $\Delta_m=P_m\cap P'$ est une droite car les plans P_m et P' ne sont pas parallèles : les vecteurs normaux $(m,-1,2-m)$ et $(1,1,1)$ ne sont pas colinéaires.

La droite Δ_m a pour équations : $\Delta_m : \begin{cases} mx-y+(2-m)z+m &= 4 \\ x+y+z &= 1 \end{cases}$

Avec $m=0$ $m=2$ et l'équation de P', on obtient le système :

$$\begin{cases} -y+2z &= & 4 \\ 2x-y+2 &= & 4 \\ x+y+z &= & 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x &= & \frac{1}{2} \\ y &= & -1 \\ z &= & \frac{3}{2} \end{cases}$$

On vérifie que le point $(\frac{1}{2},-1,\frac{3}{2})$ appartient à toutes les droites Δ_m c'est-à-dire à P' et à tous les plans P_m. □

Solution Exercice 8. Déterminons les équations de la droite D passant par $A(3,2,1)$ parallèle au plan $\mathscr{P}$ d'équation $2x-5y+4z=1$ et coupant la droite $\Delta : \begin{cases} 2x-3y+1=0 \\ z-1=0 \end{cases}$

— La droite D est contenue dans un plan $\mathscr{P}'$ parallèle à $\mathscr{P}$.
  Une équation de $\mathscr{P}'$ est donc $\mathscr{P}' : 2x-5y+4z=d$ avec d à déterminer.
  On utilise le fait que $A\in\Delta\subset\mathscr{P} : d=3\times 2-5\times 2+4\times 1=0$.
  Ainsi $\mathscr{P}' : 2x-5y+4z=0$.

— Pour déterminer un vecteur directeur on cherche un point $I\in D$ distinct de A.
  On utilise la seconde hypothèse : les droites D et Δ sont sécantes.
  La droite Δ coupe le plan $\mathscr{P}'$, précisément en I : $\{I\}=\Delta\cap D=\Delta\cap\mathscr{P}'$.
  On note (x,y,z) les coordonnées du point d'intersection de $\mathscr{P}'$ et Δ :

$$\begin{cases} 2x-5y+4z &= & 0 \\ 2x-3y &= & -1 \\ z &= & 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x &= & \frac{7}{4} \\ y &= & \frac{3}{2} \\ z &= & 1 \end{cases}$$

  Un vecteur directeur de D est donc $\overrightarrow{AI}=(-\frac{5}{4},-\frac{1}{2},0)$ ou plus simplement $\overrightarrow{u}=(5,2,0)$.

Ainsi, la droite D admet la représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & 3+5t \\ y & = & 2+2t \\ z & = & 1 \end{array}\right. \quad (t\in\mathbb{R}).$$

La droite D est également donnée par les équations cartésiennes :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x-5y & = & -4 \\ z & = & 1 \end{array}\right. .$$

□

***Solution Exercice** 9.*

1. Déterminons l'angle formé par les plans $\mathscr{P}_1 : 2x+4y-z+5=0$ et $\mathscr{P}_2 : x+y+6z-8=0$.
   Il s'agit de déterminer l'angle entre deux vecteurs normaux aux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.
   On note $\overrightarrow{n}_1=(2,4,-1)$ et $\overrightarrow{n}_2=(1,1,6)$ des vecteurs respectivement normaux à $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.
   On constate que $(\overrightarrow{n}_1|\overrightarrow{n}_2)=0$ donc les plans sont orthogonaux.
   — Avec le produit scalaire on retrouve :
   $$\begin{aligned}(\overrightarrow{n}_1|\overrightarrow{n}_2) &= ||\overrightarrow{n}_1||\,||\overrightarrow{n}_2||\,\cos(\overrightarrow{n}_1,\overrightarrow{n}_2)\\ 0 &= ||\overrightarrow{n}_1||\,||\overrightarrow{n}_2||\cos(\overrightarrow{n}_1,\overrightarrow{n}_2)\end{aligned}$$
   Il vient $\cos(\overrightarrow{n}_1|\overrightarrow{n}_2)=0$ soit $(\overrightarrow{n}_1|\overrightarrow{n}_2)=\frac{\pi}{2}\,[\pi]$.
   — Avec le produit vectoriel :
   $$||\overrightarrow{n}_1\wedge\overrightarrow{n}_2||=||\overrightarrow{n}_1||\,||\overrightarrow{n}_2||\,|\sin(\overrightarrow{n}_1,\overrightarrow{n}_2)|$$
   Après calcul on trouve $||\overrightarrow{n}_1\wedge\overrightarrow{n}_2||=||\overrightarrow{n}_1||\,||\overrightarrow{n}_2||$.
   Il vient $|\sin(\overrightarrow{n}_1,\overrightarrow{n}_2)|=1$ et la même conclusion suit.
2. Soit $A(2,1,4)$. Calculer la distance de A à $\mathscr{P}_1\cap\mathscr{P}_2$.
   L'intersection des plans $\mathscr{P}_1\cap\mathscr{P}_2$ est une droite D donc les équations sont :
   $$D:\left\{\begin{array}{c} 2x+4y-z=-5 \\ x+y+6z=8 \end{array}\right.$$
   On obtient une représentation paramétrique :
   $$\left\{\begin{array}{lll} x & = & \frac{37}{2}-\frac{25}{2}t \\ y & = & -\frac{21}{2}+\frac{13}{2}t \\ z & = & t \end{array}\right. \quad (t\in\mathbb{R}) \text{ soit } \left\{\begin{array}{lll} x & = & \frac{37}{2}-25u \\ y & = & -\frac{21}{2}+13u \\ z & = & 2u \end{array}\right. \quad (u\in\mathbb{R})$$
   Avec $u=\frac{1}{2}$ on obtient un point sur la droite D : $B(6,-4,1)$.
   Un vecteur directeur de $\mathscr{P}_1\cap\mathscr{P}_2$ est donné par $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{n}_1\wedge\overrightarrow{n}_2=(25,-13,-2)$ (on peut lire un vecteur directeur également sur les représentations paramétriques obtenues ci-dessus).
   Le projeté orthogonal H de A sur D vérifie :
   $$AH\times||\overrightarrow{u}||=||\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{BA}||.$$
   (il s'agit de l'aire du parallélogramme engendré par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{BA}$)
   On en déduit :
   $$d(A,\mathscr{P}_1\cap\mathscr{P}_2)=AH=\frac{||\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{BA}||}{||\overrightarrow{u}||}.$$

□

***Solution Exercice** 10.* Déterminer la distance du point M à la droite $\mathscr{D}$ dans les cas suivants :

1. $M(-1,1,3)$ et $\mathscr{D}:\left\{\begin{array}{lll} x & = & 1+2\lambda \\ y & = & 2-\lambda \\ z & = & 2+2\lambda \end{array}\right. \quad (\lambda\in\mathbb{R}).$
   La droite $\mathscr{D}$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}=(2,-1,2)$ et passe par le point $A=(1,2,2)$.
   On obtient la distance $d(M,\mathscr{D})$ en interprétant l'aire $\mathscr{A}$ du parallélogramme engendré par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ de deux manières.
   Notons H le projeté orthogonal de M sur D : $d(M,D)=MH$.
   On a
   $$\mathscr{A}=MH\times||\overrightarrow{u}||=||u\wedge\overrightarrow{AM}||$$
   avec
   $$\overrightarrow{AM}=(2,1,-1)$$
   et
   $$\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{AM}=\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\6\\4\end{pmatrix}$$
   On obtient :
   $$MH=\frac{||\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{AM}||}{||\overrightarrow{u}||}=\frac{\sqrt{53}}{3}$$
2. $M(-1,1,3)$ et $\mathscr{D}:\left\{\begin{array}{lll} x+y-2z-1 & = & 0 \\ 2x-y+z+1 & = & 0 \end{array}\right. .$
   On procède de même en déterminant un point sur $\mathscr{D}$ et un vecteur directeur (on peut déterminer une paramétrisation analogue à celle de la question 1 par exemple).

□

Solution Exercice 11. Montrons que la courbe $\mathscr{C}: \begin{cases} x(t) &= t^2-1 \\ y(t) &= 2t \\ z(t) &= t^2+t+1 \end{cases}$ est plane et que c'est une parabole. Pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x(t)+\frac{1}{2}y(t)-z(t) &= (t^2-1)+\frac{1}{2}(2t)-(t^2+t+1) \\ &= -2 \end{aligned}$$

Par conséquent la courbe $\mathscr{C}$ est plane car contenue dans le plan d'équation

$$\mathscr{P}: x+\frac{1}{2}y-z=-2.$$

Le vecteur $\overrightarrow{n}=\frac{1}{3}(2,1,-2)$ est normal à $\mathscr{P}$.
Ainsi $\overrightarrow{u}=\frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2,0)$ et $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{n}=\frac{1}{3\sqrt{5}}(4,2,5)$ sont directeurs de $\mathscr{P}$.
On pose $\Omega=(-1,0,1)\in\mathscr{C}$ (pour $t=0$).
Dans le repère orthonormé $\mathscr{R}'=(\Omega,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{n})$, les coordonnées $(X(t),Y(t),Z(t))$ des points de $\mathscr{C}$ vérifient

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}}_{\in O_3(\mathbb{R})} \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{pmatrix}$$

soit

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{5}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{5}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \\ t^2+t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{t^2-4t}{\sqrt{5}} \\ \frac{3t^2+3t}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t(t-4)}{\sqrt{5}} \\ \frac{3t(t+1)}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pour $t\neq 0,4$, on a $\frac{Y}{X}=\frac{3(t+1)}{t-4}$ et il vient :

$$t\left(\frac{Y}{X}-3\right)=4\frac{Y}{X}+3 \Longleftrightarrow t=\frac{4Y+3X}{Y-3X}.$$

On injecte cette relation dans l'égalité $Y=\frac{t(t-4)}{\sqrt{5}}$, il vient :

$$\begin{aligned} \sqrt{5}X=t(t-4) &\Longleftrightarrow \sqrt{5}X=\frac{4Y+3X}{Y-3X}\left(\frac{4Y+3X}{Y-3X}-4\right) \\ &\Longleftrightarrow \sqrt{5}X(Y-3X)^2=(4Y+3X)(15X) \\ &\Longleftrightarrow X(\sqrt{5}(Y-3X)^2-15(4Y+3X))=0 \end{aligned}$$

— Pour $t=0$, on a $(X,Y)=(0,0)$, solution de l'équation $\sqrt{5}(Y-3X)^2-15(4Y+3X)=0$.
— Pour $t=4$, on a $(X,Y)=(0,12\sqrt{5})$, solution de l'équation $\sqrt{5}(Y-3X)^2-15(4Y+3X)=0$ est vérifiée.

Ainsi, la courbe $(\mathscr{C})$ a pour équations cartésiennes dans $\mathscr{R}'$:

$$Z=0 \text{ et } \sqrt{5}(Y-3X)^2-15(4Y+3X)=0\,(\mathscr{C}').$$

On réduit l'équation $(\mathscr{C}')$:

$$(\mathscr{C}'): 9X^2-6XY+Y^2-9\sqrt{5}X-12\sqrt{5}Y=0 \Longleftrightarrow {}^tHAH+LH=0$$

avec $A=\begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$; $H=\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$; $L=\begin{pmatrix} -9\sqrt{5} & -12\sqrt{5} \end{pmatrix}$.
On trouve $Sp(A)=\{0;10\}$: $\mathscr{C}$ est du type parabole.
$E_0(A)=\text{Vect}\left(\frac{1}{\sqrt{10}}(1,3)\right)$ et $E_{10}(A)=\text{Vect}\left(\frac{1}{\sqrt{10}}(-3,1)\right)$.
On pose $P=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\in SO_2(\mathbb{R})$ et $D=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$.
L'équation $(\mathscr{C}')$ devient :

$$\begin{aligned} {}^tHPD\,{}^tPH+LH=0 &\Longleftrightarrow {}^t({}^tPH)D\underbrace{({}^tPH)}_{H'}+LPH'=0 \\ &\Longleftrightarrow 10Y_1^2+\frac{15}{\sqrt{2}}(-3X_1+Y_1)=0. \end{aligned}$$

Par conséquent $\mathscr{C}$ est une hyperbole. La forme réduite permet de déterminer le sommet. On dispose déjà des axes de symétries. □

Solution Exercice 12. Déterminons l'équation du plan tangent en $A(1,0,0)$ de la nappe paramétrée par :

$$\begin{cases} x(u,v) &= u^2+uv+v^2 \\ y(u,v) &= u+v \\ z(u,v) &= u^3+v^3 \end{cases}$$

Première version

On note $f(u,v)=\begin{pmatrix} u^2+uv+v^2 \\ u+v \\ u^3+v^3 \end{pmatrix}$. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

On a :

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) = \begin{pmatrix} 2u+v \\ 1 \\ 3u^2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) = \begin{pmatrix} u+2v \\ 1 \\ 3v^2 \end{pmatrix}$$

Le point $A(1,0,0)$ appartient à la nappe paramétrée par f : il s'agit du point de paramètres $(u_0, v_0) = (1,-1)$ (ou $(-1;1)$) est dirigé par les vecteurs :

$$\frac{\partial f}{\partial u}(1,-1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial v}(1,-1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

formant une famille **libre**.
Le vecteur : $\frac{\partial f}{\partial u}(1,-1) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(1,-1)$ est normal au plan tangent :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Le plan tangent Π a pour équation $-6y + 2z = d$ avec $d \in \mathbb{R}$ à déterminer.
Le point $A(1,0,0)$ appartient au plan tangent donc $d = 0$: $\Pi : 3y = z$.

Deuxième version
Le point $M(x,y,z)$ appartient au plan tangent si et seulement si les vecteurs

$$\overrightarrow{AM}, \frac{\partial f}{\partial u}(1,-1), \frac{\partial f}{\partial v}(1,-1)$$

sont coplanaires :

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & -1 \\ y & 1 & 1 \\ z & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ y & 1 & 2 \\ z & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ y & 1 & 1 \\ z & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ z & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff 3y - z = 0.$$

□

Solution Exercice 13. Déterminons les plans tangents à la surface d'équation $\mathscr{S} : x - 8zy = 0$ contenant la droite d'équations $\mathscr{D} : \begin{cases} y &= 1 \\ x + 4z + 2 &= 0 \end{cases}$

Soit $(x_0, y_0, z_0) \in \mathscr{S}$ un point de la surface $x_0 - 8z_0y_0 = 0$.
Soit $\mathscr{P}_0$ le plan tangent à la surface en ce point.
La fonction $f : (x,y,z) \longmapsto x - 8zy$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$.

On calcule les dérivées partielles premières :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -8z \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -8y : \nabla f = \begin{pmatrix} 1 \\ -8z \\ -8y \end{pmatrix}.$$

Le plan tangent au point (x_0, y_0, z_0) a donc pour équation cartésienne :

$$\mathscr{P}_0 : (x - x_0) - 8z_0(y - y_0) - 8y_0(z - z_0) = 0.$$

La droite $\mathscr{D}$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$: $\mathscr{D}$ est en effet l'intersection des deux plans de vecteurs normaux respectifs $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

Cette droite passe (par exemple) par le point B de coordonnées $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Par conséquent, $\mathscr{P}_0$ contient la droite $\mathscr{D}$ si et seulement si
— $\overrightarrow{u}$ et $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ sont orthogonaux et
— $B \in \mathscr{P}_0$
c'est-à-dire :

$$\begin{cases} (\overrightarrow{u} | \nabla f(x_0, y_0, z_0)) &= 0 \\ (-2 - x_0) - 8z_0(1 - y_0) - 8y_0(0 - z_0) &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 4 + 8y_0 &= 0 \\ (-2 - x_0) - 8z_0(1 - y_0) + 8y_0z_0 &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y_0 &= -\frac{1}{2} \\ (-2 - x_0) - 12z_0 - 4z_0 &= 0 \end{cases}$$

Puisque le point $A(x_0, y_0, z_0) = (x_0, -\frac{1}{2}, z_0)$ appartient à la surface $\mathscr{S}$ on a $x_0 - 8z_0y_0 = 0 \iff x_0 + 4z_0 = 0$.
Le système suivant est de Cramer :

$$\begin{cases} y_0 &= -\frac{1}{2} \\ (-2 - x_0) - 12z_0 - 4z_0 &= 0 \\ x_0 + 4z_0 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_0 &= \frac{2}{3} \\ y_0 &= -\frac{1}{2} \\ z_0 &= -\frac{1}{6} \end{cases}$$

Et on obtient un unique plan tangent $\mathscr{P}_0$ contenant la droite $\mathscr{D}$: une équation cartésienne de $\mathscr{P}_0$: $(x - \frac{2}{3}) + \frac{8}{6}(y + \frac{1}{2}) + \frac{8}{2}(z + \frac{1}{6}) = 0$. □

Solution Exercice 14. Soit $(\mathscr{S})$ la surface d'équation $(x^2 + y^2)z = x + y$.

1. Soit $(x, y, 0) \in (xOz)$.
   - Si $x = y = 0$ alors $(0,0,0)$ est le projeté orthogonal du point $(0,0,0) \in \mathscr{S}$.
   - Si x ou y est non nul (voire les deux), alors on pose $z = \frac{x+y}{x^2+y^2}$.

   Le point $M(x, y, z)$ est un point de $\mathscr{S}$ et $H(x, y, 0)$ est le projeté orthogonal de M sur (xOy).

   Finalement, la surface se projette orthogonalement sur la totalité du plan (xOy).
2. Soit $H(x, 0, z) \in (xOz)$.
   Ce point H est le projeté orthogonal d'un point $M(x, y, z) \in \mathscr{S}$ si et seulement s'il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $(x^2 + y^2)z = x + y$ autrement dit si l'équation d'inconnue y : $y^2z - y + (x^2z - x) = 0$ possède une solution réelle au moins c'est-à-dire si et seulement si :
   $$\Delta = 1 - 4z(x^2z - x) \geqslant 0 \Longleftrightarrow 4xz(xz - 1) \leqslant 1.$$
   La fonction trinôme $f : u \longmapsto 4u(u-1) - 1$ est négative entre ses zéros : $u_1 = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ et $u_2 = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$.
   Finalement, la projection orthogonale de $\mathscr{S}$ sur (xOz) est l'ensemble :
   $$\left\{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{1-\sqrt{2}}{2} \leqslant xz \leqslant \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right\}.$$
   Cette projection est la partie du plan $y = 0$ délimitée par les hyperboles $xz = \frac{1\pm\sqrt{2}}{2}$.

□

***Solution Exercice** 15.* Soit $\mathscr{S}$ la surface d'équation $3x^2+4xy+2yz+4xz = 0$.
Donnons l'équation du plan tangent en un point régulier.
La fonction $f : (x, y, z) \longmapsto 3x^2 + 4xy + 2yz + 4xz$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ car polynomiale.
On calcule le gradient :
$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 6x + 4y + 4z \\ 4x + 2z \\ 2y + 4x \end{pmatrix}.$$
Le seul point critique de f est le point $(0,0,0)$ car le système linéaire homogène suivant est de Cramer :
$$\left\{\begin{array}{rcl} 6x + 4y + 4z & = & 0 \\ 4x + 2z & = & 0 \\ 4x + 2y & = & 0 \end{array}\right.$$
Soit $(x_0, y_0, z_0) \neq (0,0,0)$ un point régulier de $\mathscr{S}$.

L'équation du plan tangent à $\mathscr{S}$ en ce point peut s'écrire :
$$(6x_0 + 4y_0 + 4z_0)(x - x_0) + (4x_0 + 2z_0)(y - y_0) + (4x_0 + 2y_0)(z - z_0) = 0$$

□

***Solution Exercice** 16.* Soit $\mathscr{S}$ la nappe paramétrée par :
$$\left\{\begin{array}{rcl} x(u, v) & = & u + v \\ y(u, v) & = & u^2 + v^2 \\ z(u, v) & = & u^2 - v^2 \end{array}\right.$$

1. Pour $a \in \mathbb{R}$, déterminons l'ensemble $\mathscr{E}_a$ des points M de $\mathscr{S}$ tels que la droite $(M, \overrightarrow{d})$ soit tangente à $\mathscr{S}$ en M avec $\overrightarrow{d} = (0, 1, a)$.
   On détermine le plan tangent en un point $M \begin{pmatrix} u+v \\ u^2+v^2 \\ u^2-v^2 \end{pmatrix} \in \mathscr{S}$.
   On calcule les dérivées partielles premières :
   $$\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2u \\ 2u \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2v \\ -2v \end{pmatrix}.$$
   La famille $(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v})$ est liée si et seulement si $(u, v) = (0, 0)$.
   Dans le cas où $(u, v) \neq (0, 0)$, le plan tangent en $M \begin{pmatrix} u+v \\ u^2+v^2 \\ u^2-v^2 \end{pmatrix}$ est engendré par les vecteurs $\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2u \\ 2u \end{pmatrix}$ et $\frac{\partial f}{\partial v}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2v \\ -2v \end{pmatrix}$.
   Un vecteur normal est donc :
   $$\begin{pmatrix} 1 \\ 2u \\ 2u \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 2v \\ -2v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8uv \\ 2(u+v) \\ 2(v-u) \end{pmatrix}.$$
   La droite $(M, \overrightarrow{d})$ est tangente à $\mathscr{S}$ en M si et seulement si :
   $$\begin{pmatrix} -8uv \\ 2(u+v) \\ 2(v-u) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow u(1-a) + v(1+a) = 0$$
   L'ensemble cherché est donc
   $$\mathscr{E}_a = \left\{\begin{pmatrix} u+v \\ u^2+v^2 \\ u^2-v^2 \end{pmatrix} : u(1-a) + v(1+a) = 0.\right\}$$

— Si $a=-1$ il vient $u=0$ et $\mathscr{E}_{-1}=\left\{\begin{pmatrix} v \\ v^2 \\ -v^2\end{pmatrix} : v\in\mathbb{R}\right\}$: c'est une parabole contenue dans le plan d'équation $y+z=0$.

— Si $a\neq -1$, alors $v=\dfrac{a-1}{a+1}u$ et l'ensemble $\mathscr{E}_a$ alors composé des triplets :

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_a &= \left\{(u+v; u^2+v^2, u^2-v^2) : v=\frac{a-1}{a+1}u\right\}\\ &= \left\{\left(\frac{2a}{a+1}u; \frac{2(a^2+1)}{(a+1)^2}u^2; \frac{4a}{(a+1)^2}u^2\right) : u\in\mathbb{R}\right\}.\end{aligned}$$

C'est également une parabole contenue dans le plan $4ay-2(a^2+1)z=0$.

2. Pour $a\neq -1$ et $a\neq 0$, déterminons la projection de cet ensemble sur le plan (xOy) suivant la direction $\mathbb{R}\overrightarrow{d}$.
Soit M un point de $\mathscr{E}_a$. On cherche $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{aligned} M+\lambda\overrightarrow{d} = \begin{pmatrix}\frac{2a}{a+1}u \\ \frac{2(a^2+1)}{(a+1)^2}u^2 \\ \frac{4a}{(a+1)^2}u^2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0\\1\\a\end{pmatrix}\in\Pi_{(xOy)} &\iff \frac{4a}{(a+1)^2}u^2+\lambda a=0\\ &\iff \lambda=-\frac{4u^2}{(a+1)^2}\end{aligned}$$

La projection sur $\Pi_{(xOy)}$ suivant $\mathbb{R}\overrightarrow{d}$ est donc l'ensemble des points paramétrés par :

$$u\longmapsto\begin{pmatrix}\frac{2a}{a+1}u \\ \frac{2(a^2-1)}{(a+1)^2}u^2 \\ 0\end{pmatrix}.$$

C'est une parabole.

□

***Solution Exercice** 17.* Soient $\mathscr{S}_1$ et $\mathscr{S}_2$ les deux surfaces d'équations $x^2+y^2+xy=1$ et $y^2+z^2+yz=1$ et $\mathscr{C}=\mathscr{S}_1\cap\mathscr{S}_2$.

1. Montrons que $\mathscr{C}$ est la réunion de deux courbes planes.
Soit $(x,y,z)\in\mathscr{C}=\mathscr{S}_1\cap\mathscr{S}_2$:

$$\begin{aligned}&\left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2+xy-1 &=& 0\\ y^2+z^2+yz-1 &=& 0\end{array}\right. \underset{L_2\longleftarrow L_1-L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2+xy-1 &=& 0\\ x^2-z^2+y(x-z) &=& 0\end{array}\right.\\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2+xy-1 &=& 0\\ (x-z)(x+y+z) &=& 0\end{array}\right.\\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2+xy-1 &=& 0\\ x-z &=& 0\end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2+xy-1 &=& 0\\ x+y+z &=& 0\end{array}\right.\end{aligned}$$

On obtient la réunion de deux ellipses :

— La première ellipse $\mathscr{E}_1$ tracée dans le plan $\mathscr{P}_1 : x-z=0$.
On pose $\overrightarrow{w}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)\in\mathscr{P}_1^{\perp}$ et $\overrightarrow{u}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$ puis $\overrightarrow{v}=(0,1,0)$
En posant P la matrice de passage de la base canonique à la base (u,v,w) on obtient le système d'équations :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{1}{2}X^2+\frac{1}{\sqrt{2}}XY+Y^2 &=& 1\\ Z &=& 0\end{array}\right.$$

avec

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}.$$

La matrice $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{2}}\\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & 1\end{pmatrix}$ possède deux valeurs propres strictement positives : $\lambda=\frac{3+\sqrt{3}}{4}$ et $\mu=\frac{3-\sqrt{3}}{4}$.
Une rotation d'axe $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{w})$ perpendiculaire au plan $\mathrm{Vect}(u,v)$ permet d'obtenir un système d'équations d'une ellipse dans le plan $Z_1=0$:

$$\mathscr{E}_1 : \left\{\begin{array}{rcl} \lambda X_1^2+\mu Y_1^2 &=& 1\\ Z_1 &=& 0\end{array}\right.$$

— La seconde ellipse $\mathscr{E}_2$ est tracée dans le plan $x+y+z=0$.

2. On a vu que $\mathscr{C}$ est la réunion de ellipses $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$.
Il existe deux points appartenant simultanément à ces deux courbes. En effet les coordonnées (x,y,z) d'un tel point vérifient les équations :

$$\mathscr{E}_1 : \left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2+xy-1 &=& 0\\ x-z &=& 0\end{array}\right. \textbf{ ET } \mathscr{E}_2 : \left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2+xy-1 &=& 0\\ x+y+z &=& 0\end{array}\right.$$

$$\begin{aligned}&\iff\left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2+xy-1 &=& 0\\ x-z &=& 0\\ x+y+z &=& 0\end{array}\right.\\ &\iff\left\{\begin{array}{rcl} x^2+(-2x)^2+x(-2x)-1 &=& 0\\ x &=& z\\ y &=& -2x\end{array}\right.\\ &\iff\left\{\begin{array}{rcl} x &=& \frac{1}{\sqrt{3}}\\ y &=& -\frac{2}{\sqrt{3}}\\ z &=& \frac{1}{\sqrt{3}}\end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ y &=& \frac{2}{\sqrt{3}}\\ z &=& -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{array}\right.\end{aligned}$$

Vecteur tangent en un point de $\mathscr{E}_1$
Soit $(x,y,z)\in\mathscr{E}_1$.
On note $f_1(x,y,z)=x^2+y^2+xy-1$ et $g_1(x,y,z)=x-z$.

Le point (x, y, z) est régulier pour les surfaces $\mathscr{S}_1' : f_1 = 0$ et $\mathscr{S}_2' : g_1 = 0$ car :

$$\nabla f_1(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x+y \\ 2y+x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \notin \mathscr{S}_1'$$

et

$$\nabla g_1(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs normaux aux plans tangents étant distincts, les plans tangents sont également distincts.
Un vecteur directeur de la tangente à $\mathscr{E}_1$ au point (x, y, z) est alors donné par le produit vectoriel :

$$\nabla f_1(x,y,z) \wedge \nabla g_1(x,y,z) = \begin{pmatrix} -(x+2y) \\ 2x+y \\ -(x+2y) \end{pmatrix}$$

Vecteur tangent en un point de $\mathscr{E}_2$
On trouve de même un vecteur directeur de la tangente en un point de $\mathscr{E}_2$:

$$\begin{pmatrix} 2y+x \\ -(2x+y) \\ x-y \end{pmatrix}.$$

Les deux vecteurs conviennent aux points $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ et $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, +\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$

3. Déterminons la projection orthogonale de $\mathscr{C}$ sur (xOz).
Un point $H(x, 0, z)$ est la projection orthogonale de $\mathscr{C}$ sur le plan xOz si et seulement s'il existe $y_0 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} x^2+y_0^2+xy_0-1 &= 0 \\ x &= z \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x^2+y_0^2+xy_0-1 &= 0 \\ y_0 &= -(x+z) \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x^2+y_0^2+xy_0-1 &= 0 \\ x &= z \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x^2+y_0^2+xy_0-1 &= 0 \\ y_0 &= -(x+z) \end{cases}$$

— Il vient du premier système une courbe contenue dans la droite d'équations $\begin{cases} x-z &= 0 \\ y &= 0 \end{cases}$.
Cette projection est formée des points $(x, 0, x)$ tels que l'équation : $x^2 + y_0^2 + xy_0 - 1 = 0$ admette une solution :

$$\Delta = x^2 - 4(x^2-1) = 4 - 3x_0^2 \geqslant 0 \Longleftrightarrow |x| \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Il s'agit donc d'un segment de droite.
— Il vient du second système une courbe contenue dans le plan $y = 0$: $x^2 + (-(x+z))^2 + x(-(x+z)) - 1 = 0 \Longleftrightarrow x^2 + xz + z^2 - 1 = 0$.
Il s'agit d'une ellipse contenue dans le plan $y = 0$.

□

Solution Exercice 18. Soit $\mathscr{C}$ la courbe de paramétrage :

$$\begin{cases} x(t) &= t \\ y(t) &= t^2 \\ z(t) &= t^3 \end{cases}$$

On définit la réunion $\mathscr{S}$ des droites tangentes $\mathscr{T}_t$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point de paramètre $M(t)$.

1. Un paramétrage de la surface $\mathscr{S}$ est :

$$\varphi : (t, \lambda) \longmapsto f(t) + \lambda u(t)$$

avec $u(t)$ un vecteur directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point $f(t)$.
Le vecteur $u(t) = f'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix}$ est non nul donc dirige cette tangente.
Ainsi : $\varphi(t, \lambda) \longmapsto \begin{pmatrix} t+\lambda \\ t^2+2\lambda t \\ t^3+3\lambda t^2 \end{pmatrix}$.

2. Déterminons les points stationnaires pour le paramétrage obtenu.
Un point $\varphi(\lambda, t)$ est stationnaire si et seulement si la famille

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}; \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}\right) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2t+2\lambda \\ 3t^2+6\lambda t \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix}\right) \text{ est liée.}$$

Cette famille est liée si et seulement si $\lambda = 0$.
On se place maintenant en un point régulier de paramètre (t, λ) c'est-à-dire tel que $\lambda \neq 0$.
Les vecteurs $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t+2\lambda \\ 3t^2+6\lambda t \end{pmatrix}$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix}$ engendrent le plan tangent au point $\varphi(t, \lambda)$.

Le produit vectoriel est normal au plan tangent $\Pi_{(t,\lambda)}$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2t+2\lambda \\ 3t^2+6\lambda t \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6t^2(t+\lambda)-6t^2(t+2\lambda) \\ 3t^2+6\lambda t-3t^2 \\ 2t-(2t+2\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6\lambda t^2 \\ 6\lambda t \\ -2\lambda \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\Pi_{(t,\lambda)} : -6\lambda t^2 x + 6\lambda t y - 2\lambda z = d$.
On déterminer d en le fait que $\varphi(t,\lambda) = M(t,\lambda)$ appartient au plan tangent.
On trouve $d = -6\lambda t^2(t+\lambda) + 6\lambda t(t^2+2\lambda t) - 2\lambda(t^3+3\lambda t^2) = -2\lambda t^3$.

3. Montrons que tous les points réguliers d'une même génératrice $\mathscr{T}_t$ ont le même plan tangent.

   On rappelle que le plan tangent en un point régulier contient la génératrice passant par ce point : en deux points réguliers de paramètres (t,λ_1) et (t,λ_2) le plan tangent est engendré par deux vecteurs dont l'un est $u(t)$.

   Attention : cela ne suffit pas à prouver que le plan tangent est le même aux deux points de paramètres (t,λ_1) et (t,λ_2) (que dire du second vecteur directeur).

   En revanche, puisqu'on se place en deux points réguliers, on a $\lambda_1 \neq 0$ et $\lambda_2 \neq 0$:

$$\Pi_{(\lambda_1,t)} : -6\lambda_1 t^2 x + 6\lambda_1 t y - 2\lambda_1 z = -2\lambda_1 t^3 \iff -6t^2 x + 6ty - 2z = -2t^3$$

$$\Pi_{(\lambda_2,t)} : -6\lambda_2 t^2 x + 6\lambda_2 t y - 2\lambda_2 z = -2\lambda_2 t^3 \iff -6t^2 x + 6ty - 2z = -2t^3.$$

   Les deux plans tangents aux points de paramètres (t,λ_1) et (t,λ_2) sont donc identiques.

$\square$

Solution Exercice 19.

1. Soit $\mathscr{C}$ le cercle contenu dans le plan d'équation $y=1$ de centre $A(0,1,1)$ et de rayon 1.

   Une représentation paramétrique de ce cercle est donnée par :

$$f(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 1 \\ 1+\sin(t) \end{pmatrix}.$$

2. On note $\mathscr{S}'$ la surface réglée engendrée par les droites joignant un point de $\mathscr{C}$ à son projeté orthogonal sur l'axe (Oz).

   Soit $f(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 1 \\ 1+\sin(t) \end{pmatrix}$ un point de ce cercle. Son projeté orthogonal sur l'axe (Oz) est le point $g(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1+\sin(t) \end{pmatrix}$.

   Le vecteur $u(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est donc un vecteur directeur de la génératrice de la surface réglée $\mathscr{S}'$:

$$\varphi(t,\lambda) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 1 \\ 1+\sin(t) \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Soit (x,y,z) un point de $\mathscr{S}'$: il existe λ, t tels que

$$x = (1+\lambda)\cos t\,,\ y = 1+\lambda\,,\ z = 1+\sin t.$$

   Il vient $\lambda = y-1$ puis $x = y\cos t$. On a d'autre part $z-1 = \sin t$.
   Si $\lambda \neq -1$ alors $y \neq 0$ et par conséquent, on a :

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 + (z-1)^2 = \cos(t)^2 + \sin(t)^2 = 1 \Longrightarrow x^2 + y^2(z-1)^2 = y^2.$$

   Si $\lambda = -1$ alors $x = y = 0$ et le point $(0,0,z)$ vérifie également l'équation $x^2+y^2(z-1)^2 = y^2$.
   Réciproquement, si un point (x,y,z) de l'espace vérifie l'équation $x^2+y^2(z-1)^2 = y^2$ alors :
   — Si $y=0$, alors $x=0$ et $(x,y,z) = (0,0,z)$ est un point de l'axe (Oz)
   — Si $y \neq 0$, on pose $\lambda = y-1$ et on a $(x/y)^2 + (z-1)^2 = 1$ c'est-à-dire qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{x}{y} = \cos t$ et $z-1 = \sin t$: autrement dit (x,y,z) est un point de la surface $\mathscr{S}'$.

3. Soit $\Pi : y = a$ un plan parallèle à xOz.
   — Si $a=0$, l'intersection du plan Π et de la surface $\mathscr{S}$ est l'ensemble des points $(x,0,z)$ tels que $x^2+0^2(z-1)^2 = 0$ c'est-à-dire $z=0$: il s'agit de l'axe (Oz).
   — Si $a \neq 0$, l'intersection du plan Π est l'ensemble des points (x,y,z) tels que :

$$x^2 + a^2(z-1)^2 = a^2 \iff \left(\frac{x}{a}\right)^2 + (z-1)^2 = 1.$$

   C'est une ellipse de centre $\Omega(0,a,1)$ et demi-axes a et 1.

$\square$

Solution Exercice 20. Soit $\mathscr{S}$ la surface d'équation $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ avec $a,b,c>0$.

1. Soit $A_t(a\cos t, b\sin t, 0)$ avec avec $t\in[0;2\pi]$. Montrons qu'il existe exactement deux droites passant par A_t et contenues dans $\mathscr{S}$.

   Une droite $D_{\overrightarrow{u}}$ passant par A_t est complètement déterminée par un vecteur unitaire $\overrightarrow{u}=(\alpha,\beta,\gamma)$ la dirigeant.

   On détermine les valeurs de α,β,γ telles que $D_{\overrightarrow{u}}\subset\mathscr{S}$.

   On a $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$ car $\overrightarrow{u}$ est unitaire.

   De plus $D_{\overrightarrow{u}}\subset\mathscr{S}$ si et seulement si pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$ $A_t+\lambda\overrightarrow{u}\in\mathscr{S}$ c'est-à-dire pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}&\frac{(a\cos t+\lambda\alpha)^2}{a^2}+\frac{(b\sin t+\lambda\beta)^2}{b^2}-\frac{(\lambda\gamma)^2}{c^2}=1\\ \Longleftrightarrow\ &\frac{2a\lambda\alpha\cos(t)}{a^2}+\frac{2b\lambda\beta\sin(t)}{b^2}+\lambda^2\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}-\frac{\gamma^2}{c^2}\right)=0\end{aligned}$$

   Il vient pour tout $\lambda\neq 0$:

$$\frac{2a\alpha\cos(t)}{a^2}+\frac{2b\beta\sin(t)}{b^2}+\lambda\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}-\frac{\gamma^2}{c^2}\right)=0\quad(*).$$

   Il vient nécessairement

$$\underbrace{\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}-\frac{\gamma^2}{c^2}}_{K}=0$$

   sinon le membre de gauche dans $(*)$ est équivalent à λK et celui de droite est nul : absurde.

   Il vient enfin : $\dfrac{2a\alpha\cos(t)}{a^2}+\dfrac{2b\beta\sin(t)}{b^2}=0.$

   On a montré que si $D_{\overrightarrow{u}}$ est incluse dans $\mathscr{S}$ alors (α,β,γ) est solution du système :

$$(\mathscr{S}):\left\{\begin{array}{rcl}\alpha^2+\beta^2+\gamma^2&=&1\\ \dfrac{\alpha^2}{a^2}+\dfrac{\beta^2}{b^2}-\dfrac{\gamma^2}{c^2}&=&0\\ b\alpha\cos t+a\beta\sin(t)&=&0\end{array}\right.$$

   La réciproque est vraie en remontant les calculs précédents.

   Les nombres $\cos(t)$ et $\sin(t)$ ne peuvent pas être tous les deux nuls, on peut donc exprimer β en fonction de α ou l'inverse. On traite le premier cas $(\sin(t)\neq 0)$:

$$(\mathscr{S})\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}\beta&=&-\frac{b\cos(t)}{a\sin(t)}\alpha\\ \alpha^2\underbrace{\left(1+\dfrac{b^2\cos^2 t}{a^2\sin^2 t}\right)}_{K_1}+\gamma^2&=&1\\ \alpha^2\underbrace{\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{b^2\cos^2 t}{b^2(a^2\sin^2 t)}\right)}_{K_2}-\frac{\gamma^2}{c^2}&=&0\end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}\beta&=&-\frac{b\cos(t)}{a\sin(t)}\alpha\\ K_1\alpha^2+\gamma^2&=&1\\ K_2\alpha^2-\frac{\gamma^2}{c^2}&=&0\end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}\beta&=&-\frac{b\cos(t)}{a\sin(t)}\alpha\\ \left(\frac{K_1}{c^2}+K_2\right)\alpha^2&=&\frac{1}{c^2}\\ \gamma^2&=&c^2K_2\alpha^2\end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}\beta&=&-\frac{b\cos(t)}{a\sin(t)}\alpha\\ \alpha^2&=&\frac{1}{K_1+c^2K_2}\\ \gamma^2&=&c^2K_2\alpha^2\end{array}\right.$$

On obtient quatre vecteurs unitaires $\overrightarrow{u}_i$ tels que $D_{\overrightarrow{u}}\subset\mathscr{S}$:

$$\overrightarrow{u_1}=\left(\sqrt{\frac{1}{K_1+c^2K_2}},-\frac{b\cos t}{a\sin t}\sqrt{\frac{1}{K_1+c^2K_2}},\sqrt{\frac{c^2K_2}{K_1+c^2K_2}}\right)$$

$$\overrightarrow{u_2}=\left(-\sqrt{\frac{1}{K_1+c^2K_2}},\frac{b\cos t}{a\sin t}\sqrt{\frac{1}{K_1+c^2K_2}},\sqrt{\frac{c^2K_2}{K_1+c^2K_2}}\right)$$

$$\overrightarrow{u_3}=\left(\sqrt{\frac{1}{K_1+c^2K_2}},-\frac{b\cos t}{a\sin t}\sqrt{\frac{1}{K_1+c^2K_2}},-\sqrt{\frac{c^2K_2}{K_1+c^2K_2}}\right)$$

$$\overrightarrow{u_4}=\left(-\sqrt{\frac{1}{K_1+c^2K_2}},\frac{b\cos t}{a\sin t}\sqrt{\frac{1}{K_1+c^2K_2}},-\sqrt{\frac{c^2K_2}{K_1+c^2K_2}}\right)$$

On observe que $\overrightarrow{u_4}=-\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_3}=-\overrightarrow{u_2}$: il y a donc deux (pas plus) droites incluses dans $\mathscr{S}$ passant par A_t.

2. On considère quatre réels $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ vérifiant $x^2 + y^2 = u^2 + v^2$. Les points (x, y) et $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ sont donc situés sur le même cercle de rayon $R = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{u^2 + v^2}$. Il existe donc une rotation du plan r telle que $(x, y) = r(u, v)$. On note t l'angle de cette rotation, il vient :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & u\cos t - v\sin t \\ y & = & u\sin t + v\cos t \end{array}\right.$$

3. On en déduit deux familles de droites engendrant $\mathscr{S}$:
   — En effet, soit $(x, y, z) \in \mathscr{S}$: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{z^2}{c^2} = 1^2 + \frac{z^2}{c^2}$.
   D'après la question précédente, il existe un réel t tel que :

$$\begin{pmatrix} \frac{x}{a} \\ \frac{y}{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{z}{c} \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & a\cos t - \frac{a}{c}\sin(t)z \\ y & = & b\sin t + \frac{b}{c}\cos(t)z \end{array}\right.$$

   On en déduit que le point $(x, y, z) \in \mathscr{S}$ est sur la droite passant par le point $A_t(a\cos t, b\sin t, 0) \in \mathscr{S}$ et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}_t = (-\frac{a}{c}\sin t, \frac{b}{c}\cos t, 1)$. Cette droite admet le paramétrage :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & a\cos t - \frac{a}{c}\sin(t)\lambda \\ y & = & b\sin t + \frac{b}{c}\cos(t)\lambda \\ z & = & 0 + \lambda \end{array}\right. \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

   ce qui montre que la surface $\mathscr{S}$ est réglée, et admet le paramétrage :

$$\varphi : (t, \lambda) \longmapsto \begin{pmatrix} a\cos t - \frac{a}{c}\sin(t)\lambda \\ b\sin t + \frac{b}{c}\cos(t)\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$$

   — En tout point $A_t = (a\cos t, b\sin t, 0) \in \mathscr{S}$ passe une autre droite contenue dans $\mathscr{S}$.
   Cette droite est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{v_t} = (\frac{a}{c}\cos t, -\frac{a}{c}\cos t, 1)$ d'après la question 1. (on a permuté les signes sur les premières composantes).
   On en déduit un second paramétrage de la surface :

$$\psi : (t, \lambda) \longmapsto \begin{pmatrix} a\cos t + \frac{a}{c}\sin(t)\lambda \\ b\sin t - \frac{b}{c}\cos(t)\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$$

   Enfin, si D est une droite incluse dans $\mathscr{S}$ alors elle passe par un point $A_t(a\cos t, b\sin t, 0)$ du plan $z = 0$ et est donc l'une des deux droites passant par ce point et dirigée par $\overrightarrow{u_t}$ ou $\overrightarrow{v_t}$.

□

Solution Exercice 21. Montrons que la surface d'équation cartésienne $z = x^3 - 3xy$ est réglée.

Soit $(x, y, z) \in \mathscr{S}$. On pose $t = x$ et $\lambda = y$.
On a donc $z = x^3 - 3xy = t^3 - 3\lambda t$.
Il vient un paramétrage de $\mathscr{S}$:

$$\varphi : (t, \lambda) \longmapsto \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t^3 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3t \end{pmatrix} = A(t) + \lambda\overrightarrow{u(t)}.$$

□

Solution Exercice 22. Soient $\mathscr{S}$ la sphère de centre $A = (a, 0, 0)$ et de rayon $r \in]0; a[$ et $\mathscr{S}'$ la surface constituée des droites horizontales tangentes à $\mathscr{S}$ et sécantes à (Oz).

Déterminons une équation cartésienne de $\mathscr{S}'$.

L'intersection de la sphère et d'un plan horizontal d'équation $\mathscr{P} : z = k$ est :

— vide si $|k| > r$,
— réduite à un point si $|k| = r$,
— un cercle de rayon $r^2 - k^2$ si $k \in]-r; r[$: $\left\{\begin{array}{lcl} (x-a)^2 + y^2 & = & r^2 - k^2 \\ z & = & k \end{array}\right.$

On se place dans le cas $k \in]-r; r[$. Soit $(x_0, y_0, z_0) \in \mathscr{S} \cap \mathscr{P}_k : z_0 = k$.

On a $\left(\frac{x_0 - a}{\sqrt{r^2-k^2}}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{\sqrt{r^2-k^2}}\right)^2 = 1$: il existe donc $t_0 \in [-\pi; \pi]$ tel que :

$$x_0 = a + \sqrt{r^2 - k^2}\cos t_0 \quad ; \quad y_0 = \sqrt{r^2 - k^2}\sin t_0.$$

La tangente à la sphère au point (x_0, y_0, z_0) est dirigée par le vecteur $(-\sin t_0, \cos t_0, 0)$. Une tangente horizontale à la sphère, située dans le plan $z = k$ avec $k \in]-r; r[$, a pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & a + \sqrt{r^2-k^2}\cos(t_0) - \lambda\sin(t_0) \\ y & = & \sqrt{r^2-k^2}\sin(t_0) + \lambda\cos(t_0) \\ z & = & k \end{array}\right.$$

Cette tangente intersecte l'axe (O_z) en un point $(0, 0, z)$ si et seulement s'il existe λ tel que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 0 & = & a + \sqrt{r^2-k^2}\cos(t_0) - \lambda\sin(t_0) \\ 0 & = & \sqrt{r^2-k^2}\sin(t_0) + \lambda\cos(t_0) \end{array}\right.$$

Notons que $\cos(t_0) \neq 0$ car sinon $\cos(t_0) = 0$ et la seconde équation donnerait $\sin(t_0) = 0$ ce qui est absurde.

Si $\sin(t_0) = 0$, on obtiendrait nécessairement $\lambda = 0$ auquel cas $\cos(t_0) = -\frac{a}{\sqrt{r^2-k^2}}$ ce qui est absurde car :

$$\left|\frac{a}{\sqrt{r^2-k^2}}\right| > 1 \iff a^2 > r^2 - k^2 \quad (r \in]0; a[).$$

On reprend. La tangente intersecte l'axe (O_z) en un point $(0,0,z)$ si et seulement s'il existe λ_0 tel que :

$$\left\{\begin{array}{lcl}\lambda_0 &=& \frac{a}{\sin t_0}+\sqrt{r^2-k^2}\frac{\cos(t_0)}{\sin(t_0)}\\ \lambda_0 &=& -\sqrt{r^2-k^2}\tan(t_0)\end{array}\right.$$

$$\iff \sqrt{r^2-k^2}\left(\frac{\cos t_0}{\sin t_0}+\frac{\sin t_0}{\cos t_0}\right)=-\frac{a}{\sin t_0}$$

$$\iff \sqrt{r^2-k^2}=-\frac{a\cos t_0\sin t_0}{\sin t_0}$$

$$\iff \cos t_0=-\frac{\sqrt{r^2-k^2}}{a}$$

$$\iff t_0=+\arccos\left(\underbrace{-\frac{\sqrt{r^2-k^2}}{a}}_{\in]-1;0[}\right)\in\left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$$

$$\text{ou } t_0=-\arccos\left(\underbrace{-\frac{\sqrt{r^2-k^2}}{a}}_{\in]-1;0[}\right)\in\left]-\pi;-\frac{\pi}{2}\right[.$$

Par conséquent il existe deux tangentes d'altitude $z=k$ à la sphère D_{θ_0} et $D_{\theta_0'}$ intersectant l'axe (Oz) :

$$D_{\theta_0}:\left\{\begin{array}{lcl}x&=&a+\sqrt{r^2-k^2}\cos\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{r^2-k^2}}{a}\right)\right)-\lambda\sin\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{r^2-k^2}}{a}\right)\right)\\ y&=&\sqrt{r^2-k^2}\sin\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{r^2-k^2}}{a}\right)\right)+\lambda\cos\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{r^2-k^2}}{a}\right)\right)\\ z&=&k\end{array}\right.$$

$$\iff\left\{\begin{array}{lcl}x&=&a-\frac{r^2-k^2}{a}-\lambda\sqrt{1-\frac{r^2-k^2}{a^2}}\\ y&=&\sqrt{r^2-k^2}\sqrt{1-\frac{r^2-k^2}{a^2}}-\lambda\frac{\sqrt{r^2-k^2}}{a}\\ z&=&k\end{array}\right.,\quad\lambda\in\mathbb{R}$$

$$D_{\theta_0'}:\left\{\begin{array}{lcl}x&=&a+\sqrt{r^2-k^2}\cos\left(-\arccos\left(-\frac{\sqrt{r^2-k^2}}{a}\right)\right)-\lambda\sin\left(-\arccos\left(-\frac{\sqrt{r^2-k^2}}{a}\right)\right)\\ y&=&\sqrt{r^2-k^2}\sin\left(-\arccos\left(-\frac{\sqrt{r^2-k^2}}{a}\right)\right)+\lambda\cos\left(-\arccos\left(-\frac{\sqrt{r^2-k^2}}{a}\right)\right)\\ z&=&k\end{array}\right.$$

$$\iff\left\{\begin{array}{lcl}x&=&a-\frac{r^2-k^2}{a}+\lambda\sqrt{1-\frac{r^2-k^2}{a^2}}\\ y&=&-\sqrt{r^2-k^2}\sqrt{1-\frac{r^2-k^2}{a^2}}-\lambda\frac{\sqrt{r^2-k^2}}{a}\\ z&=&k\end{array}\right.,\quad\lambda\in\mathbb{R}$$

En posant $\mu=-\lambda$ on obtient une autre paramétrisation de la seconde tangente :

$$\left\{\begin{array}{lcl}x&=&a-\frac{r^2-k^2}{a}-\mu\sqrt{1-\frac{r^2-k^2}{a^2}}\\ y&=&-\sqrt{r^2-k^2}\sqrt{1-\frac{r^2-k^2}{a^2}}+\mu\frac{\sqrt{r^2-k^2}}{a}\\ z&=&k\end{array}\right.,\quad\mu\in\mathbb{R}$$

Les points de cette tangente $D_{\theta'}$ sont les symétriques de ceux de la tangente D_θ par rapport au plan d'équation $y=0$.

Notons que pour $|k|=r$ les paramétrisations sont encore valables (droite dans le plan $z=\pm r$ passant par $(\pm a,0,0)$ et coupant l'axe (Oz)).

On en déduit une paramétrisation d'une partie de la surface $\mathscr{S}'$ pour $y>0$

$$\varphi_1:(k,\lambda)\longmapsto\begin{pmatrix}\frac{a^2-(r^2-k^2)}{a}\\ \sqrt{r^2-k^2}\sqrt{1-\frac{r^2-k^2}{a^2}}\\ k\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-\sqrt{1-\frac{r^2-k^2}{a^2}}\\ -\frac{\sqrt{r^2-k^2}}{a}\\ 0\end{pmatrix}$$

ou plus simple :

$$\varphi:(k,\lambda)\longmapsto\begin{pmatrix}\frac{a^2-(r^2-k^2)}{a}\\ \sqrt{r^2-k^2}\sqrt{1-\frac{r^2-k^2}{a^2}}\\ k\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}\sqrt{a^2-(r^2-k^2)}\\ \sqrt{r^2-k^2}\\ 0\end{pmatrix}$$

On obtient une équation cartésienne de $\mathscr{S}'$ en remarquant que tout point $(x,y,z)\in\mathscr{S}'$ avec $y>0$ vérifie $\boxed{k=z}$ et :

$$\frac{x-\frac{a^2-(r^2-k^2)}{a}}{\sqrt{a^2-(r^2-k^2)}}=\lambda=\frac{y-\sqrt{r^2-k^2}\sqrt{1-\frac{r^2-k^2}{a^2}}}{\sqrt{r^2-k^2}}$$

c'est-à-dire :

$$(ax-a^2+(r^2-z^2))\sqrt{r^2-z^2}=\left(y-\sqrt{r^2-z^2}\sqrt{1-\frac{r^2-z^2}{a^2}}\right)\sqrt{a^2-(r^2-z^2)}$$

Le point de $\mathscr{S}'$ symétrique par rapport au plan d'équation $y=0$ vérifie l'équation :

$$(ax-a^2+(r^2-z^2))\sqrt{r^2-z^2}=\left(-y-\sqrt{r^2-z^2}\sqrt{1-\frac{r^2-z^2}{a^2}}\right)\sqrt{a^2-(r^2-z^2)}.$$

Finalement, une équation de la surface $\mathscr{S}'$ est donnée par :

$$(ax-a^2+(r^2-z^2))\sqrt{r^2-z^2}=\left(|y|-\sqrt{r^2-z^2}\sqrt{1-\frac{r^2-z^2}{a^2}}\right)\sqrt{a^2-(r^2-z^2)}$$

□

Solution Exercice 23.

Soient $a > 0$. On considère deux droites

$$\mathscr{D}_1 : \left\{ \begin{array}{lll} y & = & a \\ z & = & a \end{array} \right. \quad \text{et } \mathscr{D}_2 : \left\{ \begin{array}{lll} x & = & a \\ z & = & 0 \end{array} \right.$$

Montrons que l'ensemble des points équidistants de $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ est une surface et donnons une équation de cette surface.

Soit $M(\alpha, \beta, \gamma)$ un point de l'espace.

• Calculons $d(M, \mathscr{D}_1)$.

La droite $\mathscr{D}_1$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u} = (1, 0, 0)$.

On note H le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{D}_1$. On a $d(M, \mathscr{D}_1) = ||\overrightarrow{MH}||$.

On considère le point $A(0, a, a) \in \mathscr{D}_1$.

On note $\mathscr{A}$ l'aire du parallélogramme engendré par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AM}$. L'aire de ce parallélogramme est égale à :

$$\begin{aligned} \mathscr{A} &= ||\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{AM}|| \\ &= ||\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}|| \\ &= ||\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{HM}|| \\ &= ||\overrightarrow{u}|| \, ||\overrightarrow{HM}|| \end{aligned}$$

car $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires et car $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{HM}$ sont orthogonaux.

Ainsi :

$$d(M, \mathscr{D}_1) = ||\overrightarrow{HM}|| = \frac{||\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{AM}||}{||\overrightarrow{u}||} = \sqrt{(a-\gamma)^2 + (a-\beta)^2}.$$

car

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta - a \\ \gamma - a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a - \gamma \\ \beta - a \end{pmatrix}.$$

• Calculons $d(M, \mathscr{D}_2)$.

La droite $\mathscr{D}_2$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{v} = (0, 1, 0)$.

On note K le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{D}_2$. On a $d(M, \mathscr{D}_2) = ||\overrightarrow{MK}||$.

On considère le point $B(a, 0, 0) \in \mathscr{D}_2$.

On note $\mathscr{A}$ l'aire du parallélogramme engendré par $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{BM}$. L'aire de ce parallélogramme est égale à :

$$\begin{aligned} \mathscr{A} &= ||\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{BM}|| \\ &= ||\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{BK} + \overrightarrow{KM}|| \\ &= ||\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{KM}|| \\ &= ||\overrightarrow{v}|| \, ||\overrightarrow{KM}|| \end{aligned}$$

car $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{BK}$ sont colinéaires et car $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{KM}$ sont orthogonaux.

Ainsi :

$$d(M, \mathscr{D}_2) = ||\overrightarrow{KM}|| = \frac{||\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{BM}||}{||\overrightarrow{v}||} = \sqrt{\gamma^2 + (a-\alpha)^2}.$$

car

$$\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{BM} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \alpha - a \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \\ a - \alpha \end{pmatrix}.$$

Le point $M(\alpha, \beta, \gamma)$ est donc équidistant à $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ si et seulement si :

$$\begin{aligned} & \gamma^2 + (a-\alpha)^2 = (a-\gamma)^2 + (a-\beta)^2 \\ \iff & \gamma = (\alpha - \beta) - \frac{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}{2a} + \frac{a}{2} \end{aligned}$$

On pose :

$$\left\{ \begin{array}{lll} t & = & \alpha - \beta \\ \lambda & = & \alpha + \beta \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{lll} \alpha & = & \frac{t+\lambda}{2} \\ \beta & = & \frac{\lambda - t}{2} \end{array} \right.$$

On obtient une paramétrisation de la surface constitués des points équidistants à $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$:

$$\varphi : (t, \lambda) \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{t}{2} \\ -\frac{t}{2} \\ t + \frac{a}{2} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{t}{2a} \end{pmatrix}$$

et l'on reconnait la paramétrisation d'une surface réglée. □

Solution Exercice 24.

On considère le cylindre $(\Gamma, \overrightarrow{u})$ l'ensemble des points de l'espace sur les droites passant par un point $A(t) \in \Gamma$ et dirigées par le même vecteur $\overrightarrow{u}$.

La courbe suivante est contenue dans le plan $\Pi : -x + y + z = 2$:

$$\left\{ \begin{array}{lll} x & = & t^2 \\ y & = & t + 1 \\ z & = & t^2 - t + 1 \end{array} \right.$$

Ce plan est perpendiculaire aux génératrices du cylindre par hypothèse ce qui signifie que le vecteur $\overrightarrow{u} = (-1, 1, 1)$, normal à Π, est directeur des génératrices.

On en déduit une paramétrisation du cylindre :

$$\varphi : (t,\lambda) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t+1 \\ t^2-t+1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminons une équation cartésienne de ce cylindre.
Soit (x,y,z) un point de ce cylindre. Il existe donc $\lambda, t \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\begin{cases} x &= t^2-\lambda \\ y &= t+1+\lambda \\ z &= t^2-t+1+\lambda \end{cases}$$

On a $-x+y+z = 2+3\lambda$ donc $\lambda = \frac{-x+y+z-2}{3}$.
On a $t = y-1-\lambda = y-1-\frac{-x+y+z-2}{3} = \frac{x+2y-z-1}{3}$
On obtient :

$$z = t^2-t+1+\lambda = \left(\frac{x+2y-z-1}{3}\right)^2 - \frac{x+2y-z-1}{3} + 1 + \frac{-x+y+z-2}{3}.$$

□

Solution Exercice 25.
Vérifions que la surface $\mathscr{S}$ d'équation $x(y+z)=1$ est un cylindre (au sens de l'exercice précédent) de direction. $\overrightarrow{u} = (0,1,-1)$
Pour cela, on déterminer un paramétrage de cette surface.
L'équation de $\mathscr{S}$ se réécrit $z = \frac{1}{x} - y$ car x ne peut être nul puisque $x(y+z)=1$. On pose $x = \frac{1}{t}, t \neq 0$ et $y = \lambda$.
On obtient alors directement une paramétrisation de $\mathscr{S}$:

$$\varphi : (t,\lambda) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{t} \\ 0 \\ t \end{pmatrix} + \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{u}}$$

car tout point (x,y,z) paramétré comme ci-dessus appartient bien à la surface :

$$x(y+z) = \frac{1}{t}(\lambda+t-\lambda) = 1.$$

Par conséquent $\mathscr{S}$ est effectivement un cylindre de direction $\overrightarrow{u}$.
On détermine une directrice en intersectant $\mathscr{S}$ avec un plan orthogonal à sa direction, c'est-à-dire au vecteur $\overrightarrow{u} = (0,1,-1)$. Un tel plan a une équation $y-z=d$. On choisit $d=0$ et on obtient la courbe :

$$\begin{cases} x(y+z) &= 1 \\ y &= z \end{cases} \iff \begin{cases} 2xy &= 1 \\ y &= z \end{cases}$$

La courbe directrice est donc une hyperbole. □

Solution Exercice 26. Soient a,b,c des réels non nuls. On considère la courbe paramétrée par :

$$\mathscr{C} : \begin{cases} x &= at \\ y &= bt^3 \\ z &= c(t^2+1) \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Soit $\mathscr{S}$ la surface engendrée par les droites parallèles au plan (xOy) et qui rencontrent $\mathscr{C}$ en deux points.

1. Déterminons un paramétrage de $\mathscr{S}$.
   On cherche l'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et du plan d'équation $z=k$ avec $k \in \mathbb{R}$ fixé.
   Un point (x,y,z) appartient à cette intersection si et seulement s'il existe t tel que le système suivant possède au moins une solution :

$$\begin{cases} x &= at \\ y &= bt^3 \\ z &= c(t^2+1) \\ z &= k \end{cases} \iff \begin{cases} x &= at \\ y &= bt^3 \\ z &= c(t^2+1) \\ t^2 &= \frac{k}{c}-1 \end{cases}$$

   Ce système admet des solutions si et seulement si $|k| \geqslant |c|$ auquel cas on obtient :

$$\begin{cases} x &= a\sqrt{\frac{k}{c}-1} \\ y &= b\sqrt{\frac{k}{c}-1}\left(\frac{k}{c}-1\right) \\ z &= k \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x &= -a\sqrt{\frac{k}{c}-1} \\ y &= -b\sqrt{\frac{k}{c}-1}\left(\frac{k}{c}-1\right) \\ z &= k \end{cases}$$

   puis un paramétrage de $\mathscr{S}$ (on obtient un vecteur directeur par différence des coordonnées des deux points obtenus ci-dessus et en simplifiant par 2) :

$$\varphi : (t,\lambda) \longmapsto \begin{pmatrix} a\sqrt{\frac{t}{c}-1} \\ b\sqrt{\frac{t}{c}-1}\left(\frac{t}{c}-1\right) \\ t \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a\sqrt{\frac{t}{c}-1} \\ b\sqrt{\frac{t}{c}-1}\left(\frac{t}{c}-1\right) \\ 0 \end{pmatrix}, \ |t| \geqslant |c|, \lambda \in \mathbb{R}$$

   On obtient une équation cartésienne (en remarquant que $z=t$ et en exprimant λ en fonction de x, y et $t=z$) :

$$b\sqrt{\frac{z}{c}-1}\left(\frac{z}{c}-1\right)\left(x-a\sqrt{\frac{z}{c}-1}\right) = a\sqrt{\frac{z}{c}-1}\left(y-b\sqrt{\frac{z}{c}-1}\left(\frac{z}{c}-1\right)\right)$$

   c'est-à-dire :

$$b\left(\frac{z}{c}-1\right)^{3/2} x - a\left(\frac{z}{c}-1\right)^{1/2} y = 0.$$

2. Déterminons l'ensemble des points de $\mathscr{S}$ pour lesquels le plan tangent contient O.
On note $f : (x,y,z) \longmapsto b\left(\frac{z}{c}-1\right)^{3/2} x - a\left(\frac{z}{c}-1\right)^{1/2} y$.
La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times]-|c|;|c|[$.
Le plan tangent à $\mathscr{S}$ au point (x_0,y_0,z_0) admet pour vecteur normal le vecteur gradient (s'il est non nul) :

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} b(\frac{z_0}{c}-1)^{3/2} \\ -a(\frac{z_0}{c}-1)^{1/2} \\ \frac{3b(z_0-c)x_0-acy_0}{2c^2\sqrt{\frac{z_0}{c}-1}} \end{pmatrix}$$

ou plus simple (en divisant par $\sqrt{\frac{z_0}{c}-1}$) :

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} b(\frac{z_0}{c}-1) \\ -a \\ \frac{3b(z_0-c)x_0-acy_0}{2c^2(\frac{z_0}{c}-1)} \end{pmatrix}$$

D'où une équation du plan tangent à $\mathscr{S}$ en (x_0,y_0,z_0) :

$$b\left(\frac{z_0}{c}-1\right)(x-x_0) - a(y-y_0) + \frac{3b(z_0-c)x_0-acy_0}{2c^2(\frac{z_0}{c}-1)}(z-z_0) = 0.$$

Ce plan contient l'origine O si et seulement si :

$$-b\left(\frac{z_0}{c}-1\right)x_0 + a - y_0 - \frac{3b(z_0-c)x_0-acy_0}{2c^2(\frac{z_0}{c}-1)}z_0 = 0.$$

□

Solution Exercice 27. Déterminons une équation cartésienne du cylindre de directrice $\Gamma : \begin{cases} x^2+y^2 &= 1 \\ y+z &= 1 \end{cases}$ et de direction $\overrightarrow{u}(0,1,1)$.

Un point (X,Y,Z) appartient au cylindre si et seulement s'il existe $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ et $\lambda\in\mathbb{R}$ tels que :

$$\begin{cases} X &= x \\ Y &= y+\lambda \\ Z &= z+\lambda \\ x^2+y^2 &= 1 \\ y+z &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= X \\ y &= Y-\lambda \\ z &= Z-\lambda \\ (X)^2+(Y-\lambda)^2 &= 1 \\ (Y-\lambda)+(Z-\lambda) &= 1 \end{cases}$$

$$\iff X^2 + \left(Y - \frac{(Y+Z-1)}{2}\right)^2 = 1$$

$$\iff 4x^2 + (Y+Z-1)^2 = 4.$$

□

Solution Exercice 28. Déterminons une équation cartésienne du cylindre de directrice $\Gamma : \begin{cases} z &= 0 \\ (x-2)^2+3y^2 &= 1 \end{cases}$ et de direction $\overrightarrow{u}(1,2,3)$.

Un point (X,Y,Z) appartient au cylindre si et seulement s'il existe $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ et $\lambda\in\mathbb{R}$ tels que :

$$\begin{cases} X &= x+\lambda \\ Y &= y+2\lambda \\ Z &= z+3\lambda \\ (x-2)^2+3y^2 &= 1 \\ z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= X-\lambda \\ y &= \frac{1}{2}(Y-\lambda) \\ z &= \frac{1}{3}(Z-\lambda) \\ (X-\lambda-2)^2+\frac{3}{4}(Y-\lambda)^2 &= 1 \\ Z &= \lambda \end{cases}$$

$$\iff (X-Z-2)^2 + \frac{3}{4}(Y-Z)^2 = 1$$

□

Solution Exercice 29. Soit Γ une courbe de l'espace et S un point de l'espace.

On appelle cône de directrice Γ et de sommet S la surface engendrée par les droites passant par un point de Γ et le point S.

1. Déterminons une équation cartésienne du cône :
   — de directrice $\Gamma : \begin{cases} y &= z \\ x^2+y^2-2x &= 0 \end{cases}$
   — de sommet $S(3,0,3)$.
   Un point $M=(X,Y,Z)$, différent de S, appartient au cône si et seulement s'il existe $\lambda\in\mathbb{R}^*$ tel que $S+\lambda\overrightarrow{SM} = (3+\lambda(X-3), \lambda Y, 3+\lambda(Z-3))\in\Gamma$ c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \lambda Y &= 3+\lambda(Z-3) \\ (3+\lambda(X-3))^2+(\lambda Y)^2-2(3+\lambda(X-3)) &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda = \frac{3}{Y-Z+3} \\ (3+\frac{3}{Y-Z+3}(X-3))^2 + (\frac{3}{Y-Z+3}Y)^2 - 2(3+\frac{3}{Y-Z+3}(X-3)) = 0 \end{cases}$$

$$\iff (3X+3Y-3Z)^2 + 9Y^2 - 2(3X+3Y-3Z)(Y-Z+3) = 0$$

   Un point $M(X,Y,Z)$ appartient au cône $\mathscr{S}$ si et seulement si :

$$M = S(3,0,3)$$

   ou

$$3(X+Y-Z)^2 + 3Y^2 - 2(X+Y-Z)(Y-Z+3) = 0 \text{ et } Y-Z+3 \neq 0.$$

   Le point $S(3,0,3)$ appartient au plan d'équation $\Pi : Y-Z+3=0$ et la courbe Γ n'a aucun point dans ce plan car les points de Γ vérifient, en particulier, $Y=Z$ équation incompatible avec celle de $\Pi : Y-Z+3=0$.

La surface $\mathscr{S}$ contient donc un unique point (son sommet) dans le plan Π.
La surface $\mathscr{S}'$ d'équation $3(X+Y-Z)^2+3Y^2-2(X+Y-Z)=0$ contient la surface $\mathscr{S}$, le point $S(3,0,3)$ et son intersection avec le plan d'équation $Y-Z+3$ est réduite au sommet $S(3,0,3)$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} Y-Z & = & -3 \\ 3(X-3)^2+3Y^2 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} X & = & 3 \\ Y & = & 0 \\ Z & = & 3. \end{array}\right.$$

Ainsi, $\mathscr{S}'=\mathscr{S}$ et l'équation cherchée est celle de $\mathscr{S}'$:

$$\mathscr{S}:3(X+Y-Z)^2+3Y^2-2(X+Y-Z)(Y-Z+3)=0$$

2. Déterminer une équation cartésienne du cône :
— de directrice Γ : $\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & t \\ y(t) & = & t^2 \\ z(t) & = & t+1 \end{array}\right.$
— de sommet $S(1,1,1)$.
Un point $M(X,Y,Z)$ différent de $S(1,1,1)$ appartient au cône si et seulement s'il existe $\lambda\in\mathbb{R}^*$ tel que $S+\lambda\overrightarrow{SM}=(1+\lambda(X-1),1+\lambda(Y-1),1+\lambda(Z-1))\in\Gamma$ c'est-à-dire si et seulement si :

$$\exists\lambda\neq 0,\exists t\in\mathbb{R}:\left\{\begin{array}{rcl} 1+\lambda(X-1) & = & t \\ 1+\lambda(Y-1) & = & t^2 \\ 1+\lambda(Z-1) & = & t+1 \end{array}\right.$$

$$\iff\left\{\begin{array}{rcl} t-1 & = & \lambda(X-1) \\ \lambda(Y-1) & = & t^2-1 \\ \lambda(Z-1) & = & t \end{array}\right.$$

$$\iff\left\{\begin{array}{rcl} t-1 & = & \lambda(X-1) \\ \lambda(Y-1) & = & (t-1)(t+1)=(\lambda(X-1))(\lambda(Z-1)+1) \\ \lambda(Z-1) & = & \lambda(X-1)+1 \end{array}\right.$$

$$\iff\left\{\begin{array}{rcl} t-1 & = & \lambda(X-1) \\ \dfrac{\frac{Y-1}{X-1}}{Z-1}-\dfrac{1}{Z-1} & = & \lambda \\ \lambda(Z-1) & = & \lambda(X-1)+1 \end{array}\right.$$

$$\iff\left\{\begin{array}{rcl} t-1 & = & \lambda(X-1) \\ \lambda & = & \frac{Y-X}{(X-1)(Z-1)} \\ \lambda(Z-1) & = & \lambda(X-1)+1 \end{array}\right.$$

$$\iff (Z-X)(Y-X)=(X-1)(Z-1) \text{ avec } (X,Y,Z)\neq(1,1,1).$$

Le sommet $S(1,1,1)$ vérifie également l'équation $(Z-X)(Y-X)=(X-1)(Z-1)$ qui est donc une équation cartésienne du cône.

□

Solution Exercice 30.
Déterminons une équation de la surface $\mathscr{S}$ engendrée par la rotation autour de l'axe (Oz) de la courbe $\mathscr{C}$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2-y^2-4x+2 & = & 0 \\ x+z & = & 1 \end{array}\right.$$

Notons que l'origine $O(0,0,0)$ appartient à l'axe de la révolution.
Soit $M(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.
Ce point M appartient à $\mathscr{S}$ si et seulement s'il existe $M_0\in\Gamma$ tel que :

$$||\overrightarrow{OM_0}||=||\overrightarrow{OM}|| \text{ et } M\in\mathscr{P}_k \quad (*)$$

où $\mathscr{P}_k:z=k$ est le plan orthogonal à (Oz) contenant $M_0(x_0,y_0,k)$.
Les coordonnées de M_0 vérifient donc :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_0^2-y_0^2-4x_0+2 & = & 0 \\ x_0 & = & 1-k \end{array}\right.$$
$$\iff\left\{\begin{array}{rcl} (1-k)^2-y_0^2-4x_0+2 & = & 0 \\ x_0 & = & 1-k \end{array}\right.$$
$$\iff\left\{\begin{array}{rcl} (1-k)^2-4(1-k)+2 & = & y_0^2 \\ x_0 & = & 1-k \end{array}\right..$$

Le trinôme :

$$\begin{aligned}(1-k)^2-4(1-k)+2&=1-2k+k^2-4+4k+2\\&=k^2+2k-1\\&=\left(k-(-1-\sqrt{2})\right)\left(k-(\sqrt{2}-1)\right)\end{aligned}$$

est positif ou nul pour $k\leqslant -1-\sqrt{2}$ et $k\geqslant\sqrt{2}-1$.
Dans ce cas, la courbe $\mathscr{C}$ et le plan $\mathscr{P}_k$ se rencontrent en deux points, en particulier au point $(1-k,\sqrt{k^2+2k-1},k)$.
On utilise maintenant les CNS $(*)$ d'appartenance à $\mathscr{S}$.
Le plan $\mathscr{P}_k$ contient $M(x,y,z)\in\mathscr{S}$ si et seulement si $z=k$.
D'autre part,

$$\begin{aligned}&||\overrightarrow{OM_0}||^2=||\overrightarrow{OM}||^2\\&\iff x^2+y^2=(1-k)^2+(k^2+2k-1)=2k^2.\end{aligned}$$

La surface de révolution est donc contenue dans la surface d'équation $x^2+y^2=2z^2$ (les points (x,y,z) de la surface de révolution $\mathscr{S}$ ont des altitudes $z\leqslant -1-\sqrt{2}$ et $z\geqslant -1+\sqrt{2}$). □

***Solution Exercice** 31.* Déterminons une équation de la surface de révolution $\mathscr{S}$ engendrée par la rotation autour de l'axe (Oz) de la courbe $\mathscr{C}$ paramétrée par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & \cos^3 t \\ y(t) & = & \sin^3 t \\ z(t) & = & \cos 2t \end{array}\right.$$

Première solution :

On note $\overrightarrow{u}=(0,0,1)$ un vecteur directeur de l'axe $\Delta=(Oz)$ de la révolution.

Un point $M(x,y,z)$ appartient à $\mathscr{S}$ si et seulement si :

$$M\in\mathscr{S} \iff \exists B\in(Oz), \exists M_0\in\Gamma, \left\{\begin{array}{rcl} ||\overrightarrow{BM}|| & = & ||\overrightarrow{BM_0}|| \\ (\overrightarrow{u}|\overrightarrow{BM}) & = & 0 \\ (\overrightarrow{u}|\overrightarrow{BM_0}) & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \exists\lambda\in\mathbb{R}, \exists t_0\in\mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} ||(x,y,z-\lambda)|| & = & ||(\cos^3 t_0, \sin^3 t_0, \cos 2t_0-\lambda)|| \\ z-\lambda & = & 0 \\ \cos 2t_0-\lambda & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \exists\lambda\in\mathbb{R}, \exists t_0\in\mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2 & = & \cos^6 t_0+\sin^6 t_0 \\ z & = & \lambda \\ \cos 2t_0 & = & \lambda \end{array}\right.$$

$$\iff \exists\lambda\in\mathbb{R}, \exists t_0\in\mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2 & = & \left(\frac{1+\cos 2t_0}{2}\right)^3+\left(\frac{1-\cos 2t_0}{2}\right)^3 \\ z & = & \lambda \\ \cos 2t_0 & = & \lambda \end{array}\right.$$

$$\iff \exists\lambda\in\mathbb{R}, \exists t_0\in\mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} 8x^2+8y^2 & = & (1+z)^3+(1-z)^3 \\ z & = & \lambda \\ \cos 2t_0 & = & \lambda \end{array}\right.$$

$$\iff 8x^2+8y^2=(1+z)^3+(1-z)^3=6z^2+2 \text{ avec } z\in[-1;1].$$

Deuxième solution

Un point $M(x,y,z)$ appartient à $\mathscr{S}$ si et seulement si c'est l'image d'un point $(\cos^3 t_0, \sin^3 t_0, \cos 2t_0)\in\Gamma$ par la rotation d'axe (Oz) et d'un certain angle $\theta\in[0;2\pi]$.

Une paramétrisation de $\mathscr{S}$ est donc donnée par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & \cos\theta\cos^3 t_0-\sin\theta\sin^2 t_0 \\ y & = & \sin\theta\cos^3 t_0+\cos\theta\sin^3 t_0 \\ z & = & \cos 2t_0 \end{array}\right. , \quad t_0\in\mathbb{R}, \theta\in[0;2\pi].$$

On en déduit que les coordonnées de $M(x,y,z)\in\mathscr{S}$ vérifient l'équation :

$$x^2+y^2=\cos^6 t_0+\sin^6 t_0=6z^2+2 \text{ avec } z\in[-1;1].$$

$\square$

***Solution Exercice** 32.* Soit a un réel strictement positif.

Déterminer l'équation de la surface de révolution $\mathscr{S}$ obtenue par rotation, autour de l'axe (Oz), de la parabole d'équation :

$$\mathscr{P}:\left\{\begin{array}{rcl} x & = & a \\ y & = & 3z^2+a^2 \end{array}\right.$$

Notons que $O(0,0,0)$ appartient à l'axe de la révolution.

$M(x,y,z)$ appartient à la surface de révolution $\mathscr{S}$ si et seulement si :

$$\exists M_0(x_0,y_0,z_0)\in\mathscr{P}, \left\{\begin{array}{l} M, M_0 \text{ appartiennent au même plan orthogonal à } (Oz) \\ ||\overrightarrow{OM}||=||\overrightarrow{OM_0}|| \end{array}\right.$$

$$\iff \exists(x_0,y_0,z_0), \exists k\in\mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} z_0 & = & k \\ z & = & k \\ x^2+y^2+k^2 & = & x_0^2+y_0^2+k^2 \\ x_0 & = & a \\ y_0 & = & 3k^2+a^2 \end{array}\right.$$

$$\iff \exists(x_0,y_0,z_0), \exists k\in\mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} z_0 & = & k \\ z & = & k \\ x^2+y^2 & = & a^2+(3k^2+a^2)^2 \\ x_0 & = & a \\ y_0 & = & 3k^2+a^2 \end{array}\right.$$

On obtient une équation cartésienne de la surface de révolution :

$$x^2+y^2=a^2+(3z^2+a^2)^2.$$

$\square$

***Solution Exercice** 33.*

Montrons que la surface $\mathscr{S}$ d'équation $(x^2+y^2+z^2)^2=x^2-y^2-z^2$ est de révolution.

L'intersection de $\mathscr{S}$ et du plan d'équation $z=0$ est la courbe :

$$\mathscr{C}:\left\{\begin{array}{rcl} (x^2+y^2)^2 & = & x^2-y^2 \\ z & = & 0 \end{array}\right.$$

Montrons que la surface $\mathscr{S}'$ de révolution de $\mathscr{C}$ autour de l'axe (Ox) est $\mathscr{S}$.

Notons que (Ox) contient le point $O(0,0,0)$.

Un point $M(x,y,z)$ appartient à $\mathscr{S}'$ et seulement si :

$$\exists M_0\in\mathscr{C} : \begin{cases} M, M_0 \text{ appartiennent au même plan orthogonal à } (Ox) \\ ||\overrightarrow{OM}|| = ||\overrightarrow{OM_0}|| \end{cases}$$

$$\iff \exists(x_0,y_0,z_0), \exists k\in\mathbb{R}, \begin{cases} x_0 &= k \\ x &= k \\ (x_0^2+y_0^2)^2 &= x_0^2-y_0^2 \\ z_0 &= 0 \\ x^2+y^2+z^2 &= x_0^2+y_0^2+z_0^2 \end{cases}$$

$$\iff \exists(x_0,y_0,z_0), \exists k\in\mathbb{R}, \begin{cases} x_0 &= k \\ x &= k \\ (k^2+y_0^2)^2 &= k^2-y_0^2 \\ z_0 &= 0 \\ k^2+y^2+z^2 &= k^2+y_0^2 \end{cases}$$

$$\iff \exists(x_0,y_0,z_0), \exists |k|\leqslant|x_0|, \begin{cases} x_0 &= k \\ x &= k \\ (k^2+y_0^2)^2 &= k^2-y_0^2 \\ z_0 &= 0 \\ y^2+z^2 &= y_0^2 \end{cases}$$

L'équation $(k^2+y_0^2)^2 = k^2-y_0^2$ d'inconnue y_0^2 est équivalente à :

$$\begin{aligned} k^4+2k^2y_0^2+y_0^4-k^2+y_0^2=0 &\iff y_0^4+y_0^2(2k^2+1)+k^2(k^2-1)=0 \\ &\iff y_0^2 = -k^2-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{8k^2+1}\geqslant 0 \end{aligned}$$

On obtient une équation de la surface $\mathscr{S}'$:

$$\begin{aligned} &\underbrace{y^2+z^2}_{y_0^2} = -x^2-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{8x^2+1} \\ &\iff (x^2+y^2+z^2)^2 = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{8x^2+1}}{2}+2x^2 \\ &\iff (x^2+y^2+z^2)^2 = \underbrace{\left(x^2+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{8x^2+1}}{2}\right)}_{-y_0^2=-y^2-z^2}+x^2 \\ &\iff (x^2+y^2+z^2)^2 = x^2-y^2-z^2. \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathscr{S}=\mathscr{S}'$ est une surface de révolution d'axe (Ox) et une méridienne, obtenue par intersection de $\mathscr{S}$ et du plan d'équation $z=0$ est la courbe :

$$\mathscr{C} : \begin{cases} (x^2+y^2)^2 = x^2-y^2 \\ z=0 \end{cases}$$

On passe aux coordonnées polaires dans le plan xOy, $x=r\cos t$ et $y=r\sin t$ et il on obtient le paramètre r en fonction de t :

$$r^4 = r^2(\cos^2 t-\sin^2 t) = r^2\cos 2t \iff r^2=\cos(2t).$$

D'où une paramétrisation de la lemniscate de Bernoulli :

$$x(t)=\cos t\sqrt{\cos 2t} \quad ; \quad y(t)=\sin t\sqrt{\cos 2t}.$$

□

Solution Exercice 34.

1. Il suffit de développer : $x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$.
2. Montrons que la surface $\mathscr{S}$ d'équation $x^3+y^3+z^3-3xyz=1$ est de révolution.

   La question précédente nous invite à considérer le plan d'équation

   $$x+y+z=0.$$

   Un vecteur normal à ce plan est $\overrightarrow{u}=(1,1,1)$.

   On se propose de montrer que $\mathscr{S}$ est une surface de révolution autour de l'axe $\Delta=\text{Vect}(1,1,1)$. Notons que $O(0,0,0)\in\Delta$.

   On intersecte $\mathscr{S}$ avec le plan $\Pi : x-y=0$ contenant Δ et on obtient (future méridienne) la courbe :

   $$\mathscr{C} : \begin{cases} x^3+y^3+z^3-3xyz &= 1 \\ x &= y \end{cases} \iff \begin{cases} 2x^3+z^3-3x^2z &= 1 \\ x &= y \end{cases}$$

On note $\mathscr{S}'$ la surface obtenue par révolution de $\mathscr{C}$ autour de l'axe Δ.
Un point $M(x,y,z)$ appartient à $\mathscr{S}$ si et seulement si :

$$\exists M_0\in\mathscr{C} : \begin{cases} M, M_0 \text{ appartiennent au même plan orthogonal à } (\Delta) \\ ||\overrightarrow{OM}|| = ||\overrightarrow{OM_0}|| \end{cases}$$

$$\iff \exists(x_0,y_0,z_0), \exists k\in\mathbb{R}, \begin{cases} x+y+z &= k \\ x_0+y_0+z_0 &= k \\ 2x_0^3+z_0^3-3x_0^2z_0 &= 1 \\ x_0 &= y_0 \\ x^2+y^2+z^2 &= x_0^2+y_0^2+z_0^2 \end{cases}$$

On cherche à déterminer $x_0^2+y_0^2+z_0^2$ en fonction de x,y,z.
On note $A=x_0^2+y_0^2+z_0^2$ et $B=x_0y_0+x_0z_0+y_0z_0$.

On a montré à a question 1. que :

$$\begin{aligned} x_0^3+y_0^3+z_0^3-3x_0y_0z_0 &= (x_0+y_0+z_0)(x_0^2+y_0^2+z_0^2-x_0y_0-y_0z_0-z_0x_0) \\ &= k(x_0^2+y_0^2+z_0^2-x_0y_0-y_0z_0-z_0x_0) \end{aligned}$$

Puisque $(x_0,y_0,z_0)\in\mathscr{S}$, on a :

$$x_0^3+y_0^3+z_0^3-3x_0y_0z_0 = \underbrace{(x_0+y_0+z_0)}_{=k}(\underbrace{x_0^2+y_0^2+z_0^2}_{=A}-x_0y_0-y_0z_0-z_0x_0)=1$$

donc $k=x_0+y_0=z_0\neq 0$.
On en déduit que :

$$\begin{aligned} & x_0^2+y_0^2+z_0^2-x_0y_0-y_0z_0-z_0x_0=\frac{1}{k} \\ \Longleftrightarrow\ & \boxed{A-B=\frac{1}{k}.} \end{aligned}$$

D'autre part, $k^2=(x_0+y_0+z_0)^2=(x_0^2+y_0^2+z_0^2)+2(x_0y_0+x_0z_0+y_0z_0)$:

$$\boxed{A+2B=k^2.}$$

On obtient $3B=k^2-\frac{1}{k}\Longleftrightarrow B=\frac{1}{3}\left(k^2-\frac{1}{k}\right)$ et $A=B+\frac{1}{k}=\frac{2}{3k}+\frac{k^2}{3}$.
Une équation de $\mathscr{S}$:

$$\begin{aligned} & x^2+y^2+z^2=A=\frac{2}{3(x+y+z)}+\frac{(x+y+z)^2}{3} \\ \Longleftrightarrow\ & x^3+y^3+z^3-3xyz=1. \end{aligned}$$

□

Solution Exercice 35.

1. Déterminons une équation cartésienne du cylindre de révolution de rayon $R>0$ et d'axe D : $\begin{cases} x &= z+3 \\ y &= z-1 \end{cases}$

   L'axe D est dirigé par le vecteur $\overrightarrow{u}=(1,1,1)$ et passe par le point $A(3,-1,0)$.
   Soit $M(x,y,z)$ un point du cylindre. La distance de M à l'axe D est constante, égale au rayon R. On note H le projeté orthogonal de M sur R. On a donc $||\overrightarrow{HM}||=R$. La norme de $||\overrightarrow{HM}||$ est la distance du point M à l'axe D. On peut exprimer cette distance à l'aide du produit vectoriel :

   $$||\overrightarrow{HM}||=R=d(M,D)=\frac{||\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{AM}||}{||\overrightarrow{u}||}$$

   On calcule :

   $$\begin{aligned} \overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{AM} &= \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}x-3\\y+1\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z-(y+1)\\(x-3)-z\\(y+1)-(x-3)\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}z-y-1\\x-z-3\\-x+y+4\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

   On en déduit que :

   $$\begin{aligned} & R^2=\frac{||\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{AM}||^2}{||\overrightarrow{u}||^2} \\ \Longleftrightarrow\ & R^2=\frac{1}{3}\left((z-y-1)^2+(x-z-3)^2+(-x+y+4)^2\right). \end{aligned}$$

   Déterminons R tel que ce cylindre soit tangent à l'axe (Oz).
   Le cylindre $\mathscr{S}$ est tangent à l'axe (Oz) en un point $(0,0,z)$ appartenant au cylindre si et seulement si l'intersection $\mathscr{S}\cap(Oz)$ et réduite à un point $(0,0,z)$ vérifiant :

   $$3R^2=(z-1)^2+(z+3)^2+16.$$

   Ce trinôme possède une racine double si et seulement si son discriminant $\Delta=6R^2-48$ est nul i.e. $R=2\sqrt{2}>0$ (et le point de contact $\mathscr{S}\cap(Oz)$ est le point $(0,0,-1)$.)

2. Déterminons une équation cartésienne du cône de révolution d'axe D : $\begin{cases} x &= y \\ y &= z \end{cases}$, de sommet O et de demi-angle au sommet $\frac{\pi}{6}$.

   On note $\overrightarrow{u}=(1,1,1)$ un vecteur directeur de D.
   On peut utiliser le produit vectoriel comme à la question précédente (voir le cours) ou utiliser le produit scalaire :

   $$\begin{aligned} & (\overrightarrow{u}|\overrightarrow{OM})^2=||\overrightarrow{u}||^2||OM||^2\underbrace{\cos(\overrightarrow{u},\overrightarrow{SM})^2}_{\cos^2(\frac{\pi}{6})=\cos^2(\pi-\frac{\pi}{6})=\frac{3}{4}} \\ \Longleftrightarrow\ & (x+y+z)^2=\frac{3}{4}\times 3\times(x^2+y^2+z^2) \end{aligned}$$

□