TRAVAUX DIRIGÉS : courbes planes

1 Etudes de courbes paramétrées

Exercice 1: (Solution)

Étudier et tracer les courbes données par leur paramétrage.

1. $f(t) = \begin{pmatrix} t\ln(t) \\ \dfrac{\ln(t)}{t} \end{pmatrix}$
2. $f(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{\ln(t)}{t-1} \\ \ln\left(t+\dfrac{1}{t}\right) \end{pmatrix}$
3. $(*)$ $f(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{\ln|t|}{t-1} \\ \ln\left|t+\dfrac{1}{t}\right| \end{pmatrix}$
4. $f(t) = \begin{pmatrix} \cos(3t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}$
5. $f(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{t^2+1}{2t} \\ \dfrac{2t-1}{t^2} \end{pmatrix}$
6. $f(t) = \begin{pmatrix} \tan(t)+\sin(t) \\ \dfrac{1}{\cos(t)} \end{pmatrix}$
7. $f(t) = \begin{pmatrix} t^2+t \\ 2t-\dfrac{1}{t} \end{pmatrix}$
8. $f(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{t}{1+t^3} \\ \dfrac{t^2}{1+t^3} \end{pmatrix}$
9. $f(t) = \begin{pmatrix} t-\dfrac{1}{t} \\ \exp\left(\dfrac{1}{t}\right) \end{pmatrix}$
10. $f(t) = \begin{pmatrix} \cos\left(\dfrac{3t}{2}\right) \\ 2\sin(t)+\cos(2t) \end{pmatrix}$

Exercice 2: (Solution)

Tracer les courbes d'équation cartésienne en utilisant un faisceau de droites :

1. $x^3+y^3-xy=0$. $D_t : y = tx$
2. $x^3+x^2-y^2=0$. $D_t : y = tx$
3. $x^2-6x-y^2+8=0$. $D_t : y = t(x-4)$.

Exercice 3: (Solution)

1. Etudier l'astroïde pour $a>0$ et la tracer pour $a=1$:
   $f(t) = \begin{pmatrix} a\cos^3(t) \\ a\sin^3(t) \end{pmatrix}$.
2. Déterminer l'ensemble des points du plan par lesquels passent deux tangentes de l'astroïde orthogonales entre elles.

Exercice 4: (Solution)

1. Construire la strophoïde $\mathscr{C}$ paramétrée par $t \mapsto f(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ \dfrac{t(1-t^2)}{1+t^2} \end{pmatrix}$.
2. Que représente le paramètre t ?
   Déterminer une équation cartésienne implicite de la courbe $\mathscr{C}$.
3. $(*)$ Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les réels t_1, t_2, t_3 pour que trois points distincts $M(t_i) \in \mathscr{C}$ soient alignés.

Exercice 5: (Solution)

1. Etudier la cardioïde : $t \mapsto f(t) = \begin{pmatrix} a(1+\cos(t))\cos(t) \\ a(1+\cos(t))\sin(t) \end{pmatrix}$.
   La tracer pour $a=1$.
2. $(*)$ Déterminer le lieu géométrique de l'ensemble des projections orthogonales de l'origine O sur les tangentes de $\mathscr{C}$.

Exercice 6: (Solution)

Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ paramétrée par : $t \mapsto f(t) = \begin{pmatrix} (t+1)e^t \\ t^2e^t \end{pmatrix}$ admet un seul point singulier et donner l'allure de $\mathscr{C}$ au voisinage de ce point.

2 Propriétés métriques des courbes

Exercice 7: (Solution)

Calculer la longueur L de la courbe paramétrée par
$t \mapsto f(t) = \begin{pmatrix} \cos^2(t)+\ln\sin(t) \\ \sin(t)\cos(t) \end{pmatrix}$ entre les deux points de rebroussements.

Exercice 8: (Solution)

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et la cycloïde paramétrée par $t \mapsto f(t) = a\begin{pmatrix} t-\sin(t) \\ 1-\cos(t) \end{pmatrix}$.

Calculer la longueur L d'une arche de la cycloïde.

Exercice 9: (Solution)

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

On considère la spirale $\mathscr{C}$ paramétrée par $t \mapsto f(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t}\cos(t) \\ e^{\lambda t}\sin(t) \end{pmatrix}$.

1. Déterminer l'abscisse curviligne d'origine 0 de f.
2. Déterminer le repère de Frenet en tout point $M(t)$ de $\mathscr{C}$.
3. Calculer la courbure en tout point $M(t)$ de $\mathscr{C}$.
4. Déterminer la développée de f et l'interpréter géométriquement

Exercice 10: (Solution)

On considère la courbe paramétrée par $t \mapsto f(t) = \begin{pmatrix} t+\sin(t) \\ 1+\cos(t) \end{pmatrix}$.

1. Appliquer le théorème de relèvement et calculer la courbure en tout point régulier de paramètre t.
2. Calculer directement la courbure sans utiliser le théorème de relèvement.

Exercice 11: (Solution)

Soit $\alpha > 0$. On considère la fonction : $t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \begin{pmatrix} t \\ t^\alpha \end{pmatrix}$.

1. Montrer que cette fonction ce prolonge par continuité en 0.
   On note ce prolongement f. Donner $f(0)$.
2. Déterminer une équation cartésienne du support de f.
3. Montrer que la courbe possède une tangente au point de paramètre 0 dont on déterminera un vecteur directeur.
   A quelle condition cette tangente est-elle dirigée par $(1;0)$?
   Dans la suite, on suppose cette condition vérifiée.
4. Calculer la courbure de f sur $\mathbb{R}_+^*$ puis son rayon de courbure $R(t)$.
   Calculer $\lim\limits_{t\to 0} R(t)$ et interpréter cette limite.

Exercice 12: (Solution)

On considère la courbe $\mathscr{C}$ paramétrée par $t \mapsto f(t) =$
$$\begin{pmatrix} t+\sin(t)-4\sin(\frac{t}{2}) \\ \\ 3+\cos(t)-4\cos(\frac{t}{2}) \end{pmatrix}.$$

1. Construire la courbe $\mathscr{C}$.
2. Calculer la longueur totale de $\mathscr{C}$.
3. Pour $t \in]0;4\pi[$ préciser le repère de Frenet et le rayon de courbure de $\mathscr{C}$ au point de paramètre t.
4. Construire la développée de $\mathscr{C}$.

Exercice 13: (Solution)

$(*)$ Tracer la développée de l'ellipse paramétrée par $t \mapsto f(t) = \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ b\sin(t) \end{pmatrix}$.

Exercice 14: (Solution)

Construire la courbe paramétrée par $t \mapsto f(t) = \begin{pmatrix} (1+\cos^2(t))\sin(t) \\ \sin^2(t)\cos(t) \end{pmatrix}$ puis sa développée.

Exercice 15: (Solution)

On considère la néphroïde paramétrée par $t \mapsto f(t) = \begin{pmatrix} 3\cos(t)-\cos(3t) \\ 3\sin(t)-\sin(3t) \end{pmatrix}$.
Constuire la néphroïde et montrer qu'il est possible d'obtenir sa développée par composition d'une rotation et d'une homothétie.

Exercice 16: (Solution)

Déterminer l'ensembles des centres de courbure au point O des courbes intégrales de l'équation différentielle : $(1-t^2)y''-ty'-2y=1$ telles que $y(0)=0$.

3 Enveloppe d'une famille de droites

Exercice 17: (Solution)

Déterminer l'enveloppe des droites (AB) où $[AB]$ est un segment de longueur $a>0$ avec $A \in (\mathcal{O}_x)$ et $B \in (\mathcal{O}_y)$.

Exercice 18: (Solution)

Soit $\mathcal{H}$ l'hyperbole d'équation $xy=1$.
Soient A, B deux points de $\mathcal{H}$ s'abscisse double l'une de l'autre.
Déterminer l'enveloppe des droites (AB).

Exercice 19: (Solution)

Soit $t \in \mathbb{R}$ et $P=(\cos(t);0)$, $Q=(0;\sin(t))$.
Déterminer l'enveloppe de la médiatrice de $[PQ]$.

Exercice 20: (Solution)

Déterminer l'enveloppe de la famille des droites $(D_t)_{t\in\mathbb{R}}$ et $(\Delta_t)_{t\in\mathbb{R}}$ dont on donne une équation cartésienne :

1. $D_t : (1-t^2)x+2ty-(1+t^2)=0$.
2. $\Delta_t : (t-2)x+(3t-2t^2)y+t^3=0$.

Exercice 21: (Solution)

Soit $\mathcal{P}$ une parabole d'équation $y^2=2px$.
Montrer que le cercle de courbure en un point M de $\mathcal{P}$ autre que son sommet recoupe $\mathcal{P}$ en un point Q.
Caractériser l'enveloppe de la droite (MQ).

SOLUTIONS TRAVAUX DIRIGÉS : courbes planes

Solution Exercice 1.

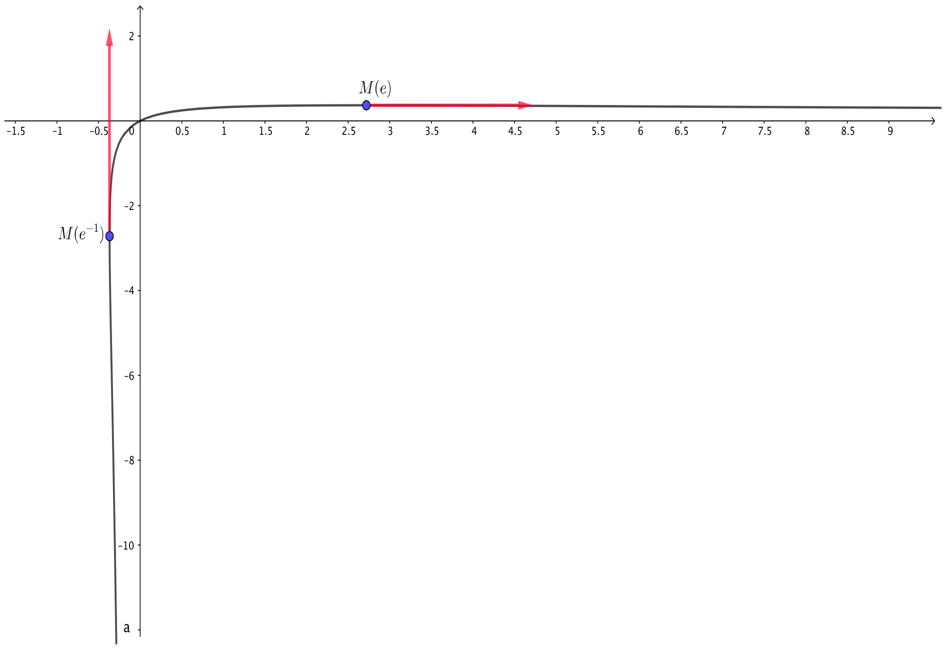
1. $f(t)=\begin{pmatrix} t\ln(t) \\ \dfrac{\ln(t)}{t} \end{pmatrix}$

   $D_f=]0;+\infty[$. $f \in \mathscr{C}^1(D_f)$.
   Pas de symétries apparentes.
   Variations des coordonnées :
   $\forall t>0, f'(t)=\begin{pmatrix} \ln(t)+1 \\ \frac{1-\ln(t)}{t^2} \end{pmatrix} \neq 0$. Tous les points sont réguliers.
   $x'(t) \geqslant 0 \iff t \geqslant e^{-1}=\frac{1}{e}$.
   $y'(t) \geqslant 0 \iff t \leqslant e$.

t	0		e^{-1}		1		e		$+\infty$
$x'(t)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x(t)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$y(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-e$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

   Branches infinies :
   — On a $\lim\limits_{0^+} x=0$ et $\lim\limits_{0^+} y=-\infty$.
   L'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe lorsque $t \to 0^+$.
   — On a $\lim\limits_{+\infty} x=+\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} y=0$ par croissances comparées.
   L'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe lorsque $t \to +\infty$.
   Tangentes : La courbe est régulière. Deux tangentes à préciser néanmoins, portée par les vecteurs dérivés :

$$f'(e)=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f'(e^{-1})=\begin{pmatrix} 0 \\ 2e^2 \end{pmatrix}$$



Support de la courbe paramétrée par $f(t) = \left(t\ln(t); \frac{\ln(t)}{t}\right)$

2. $f(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{\ln(t)}{t-1} \\ \ln\left(t + \dfrac{1}{t}\right) \end{pmatrix}$

$D_f =]0;+\infty[\setminus\{1\}$. $f \in \mathscr{C}^1(D_f)$.

x est prolongeable par continuité en 1 car en posant $t = 1+h$,

$$\frac{\ln(t)}{t-1} = \frac{\ln(1+h)}{h} \underset{h\to 0}{\sim} 1.$$

Ainsi prolongée, x est dérivable en 1 car

$$\frac{x(t)-x(1)}{t-1} = \frac{\frac{\ln(t)}{t-1} - 1}{t-1} = \frac{\ln(t)-(t-1)}{(t-1)^2} = \frac{\ln(1+h)-h}{h^2} \underset{h\to 0}{\sim} -\frac{1}{2}h$$

Pas de symétries apparentes.

Variations des fonctions coordonnées.

$$\forall t \in]0;+\infty[\setminus\{1\},\ f'(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{\frac{1}{t}(t-1)-\ln(t)}{(t-1)^2} \\ \dfrac{1-\frac{1}{t^2}}{t+\frac{1}{t}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{t-1-t\ln(t)}{t(t-1)^2} \\ \dfrac{t^2-1}{t\left(t^2+1\right)} \end{pmatrix}.$$

- $x'(t) \geqslant 0 \iff t-1-t\ln(t) \geqslant 0$.

On note $a(t) = t-1-t\ln(t)$. $a'(t) = 1-\ln(t)-1 = -\ln(t) \geqslant 0 \iff t \leqslant 1$. Ainsi a est croissante sur $]0;1]$ avec $a(1)=0$. Par conséquent a est négative sur $]0;+\infty[$ et x est décroissante sur $]0;+\infty[$.

- $y'(t) \geqslant 0 \iff t \geqslant 1$.

t	0		1		$+\infty$
$x'(t)$	‖	$-$	‖	$-$	
$x(t)$	‖ $+\infty$	↘	1	↘	0
$y'(t)$	‖	$-$	0	$+$	
$y(t)$	‖ $+\infty$	↘	$\ln(2)$	↗	$+\infty$

Branches infinies :

- $\lim\limits_{+\infty} x = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} y = +\infty$ donc l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe lorsque $t \to +\infty$.
- $\lim\limits_{0^+} x = \lim\limits_{0^+} y = +\infty$. On poursuit l'étude :

$$\frac{\ln\left(t+\frac{1}{t}\right)}{\frac{\ln(t)}{t-1}} = (t-1)\frac{\ln(1+t^2)-\ln(t)}{\ln(t)} = \frac{(t-1)\ln(1+t^2)}{\ln(t)} - (t-1),$$

On obtient : $\lim\limits_{0^+} \dfrac{y}{x} = 1$.

Enfin,

$$y(t)-x(t) = \ln\left(t+\frac{1}{t}\right) - \frac{\ln(t)}{t-1} = \ln(t^2+1) - \ln(t) - \frac{\ln(t)}{t-1}$$

$$= \ln(t^2+1) - \ln(t)\left(1+\frac{1}{t-1}\right) = \underbrace{\ln(t^2+1)}_{\underset{t\to 0^+}{\sim} t^2 = o(t\ln(t))} - \frac{t\ln(t)}{t-1} \underset{t\to 0^+}{\sim} t\ln(t).$$

Ainsi, $\lim\limits_{t\to 0^+} y(t)-x(t)=0$. La droite d'équation $y=x$ est asymptote à la courbe lorsque $t\to 0^+$.
De plus $y(t)-x(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} t\ln(t)<0$ pour tout $t>0$. Donc la courbe est située sous son asymptote.
Tangentes : Pas de points singuliers mais une étude à approfondir en $t=1$.
On écrit un $DL_2(1)$:

$$f(t) \underset{t\to 1}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ \ln(2) \end{pmatrix} + (t-1)\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + (t-1)^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o((t-1)^2) \\ o((t-1)^2) \end{pmatrix}$$

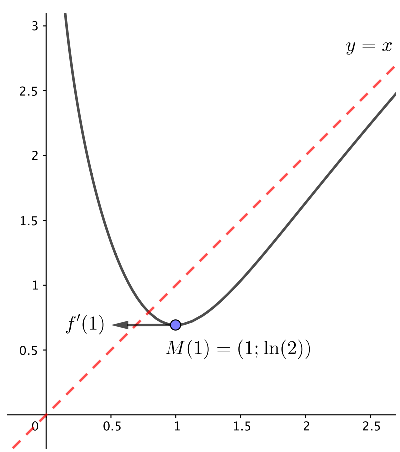
car avec $t=1+h$

$$x(t) \underset{h\to 0}{=} \frac{\ln(1+h)}{h} = \frac{h-\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{3}+o(h^3)}{h} \underset{h\to 0}{=} 1-\frac{h}{2}+\frac{h^2}{3}+o(h^2)$$

et

$$\begin{aligned} y(t) &\underset{t\to 1}{=} \ln(1+t^2)-\ln(t) \underset{h\to 0}{=} \ln(1+(1+h)^2)-\ln(1+h) \\ &= \ln\left(2\left(1+h+\frac{h^2}{2}\right)\right)-\ln(1+h) \\ &= \ln(2)+\left(h+\frac{h^2}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(h+\frac{h^2}{2}\right)^2+o\left(\underbrace{\left(h+\frac{h^2}{2}\right)^2}_{\underset{h\to 0}{\sim} h^2}\right)-\left(h-\frac{h^2}{2}+o(h^2)\right) \\ &= \ln(2)+\frac{h^2}{2}+o(h^2) \end{aligned}$$

Le point $M(1)$ est donc un point ordinaire $(p=1, q=2)$.



3. $f(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{\ln(|t|)}{t-1} \\ \ln\left|t+\dfrac{1}{t}\right| \end{pmatrix}$

La fonction y est paire mais x ne présente pas de parité. On étudie la fonction sur $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$. $f\in\mathscr{C}^1(D_f)$.

Variations des fonctions coordonnées

Comme à la question précédente, on peut prolonger x en 1. Le prolongement, encore noté x, est dérivable en 1.

On obtient le tableau de variations de y sur D_f par symétrie.

On étudie x sur $\mathbb{R}_-^*$: $x(t)=\frac{\ln|t|}{t-1} \Longrightarrow x'(t)=\frac{\frac{1}{t}(t-1)-\ln|t|}{(t-1)^2}=\frac{t-1-\ln|t|}{t(t-1)^2}$.

On détermine le signe de $a(t)=t-1-t\ln|t|$: $a'(t)=-\ln|t|\geqslant\Longleftrightarrow t\leqslant -1$.

a est donc décroissante sur $]-\infty;-1]$ avec $\lim\limits_{t\to-\infty} a=+\infty$, $a(-1)=-2$, croissante sur $[-1;0[$ avec $\lim\limits_{0^-} a=-1$.

Un algorithme de dichotomie, par exemple, fournit pour $t\in\mathbb{R}_-^*$, $a(t)=0 \Longleftrightarrow t=\alpha$ avec $\alpha\simeq -3,5$ et $x(\alpha)\simeq -0,3$. La fonction a est positive sur $]-\infty;\alpha]$ et négative sur $[\alpha;0[$. On donne $y(\alpha)\simeq 1,4$ et $y'(\alpha)\simeq -0,2$.

Le signe de $x'(t)=\frac{a(t)}{t(t-1)^2}$ est l'opposé de celui de a sur $\mathbb{R}_-^*$ donc x est décroissante sur $]-\infty;\alpha]$ et croissante sur $[\alpha;0[$.

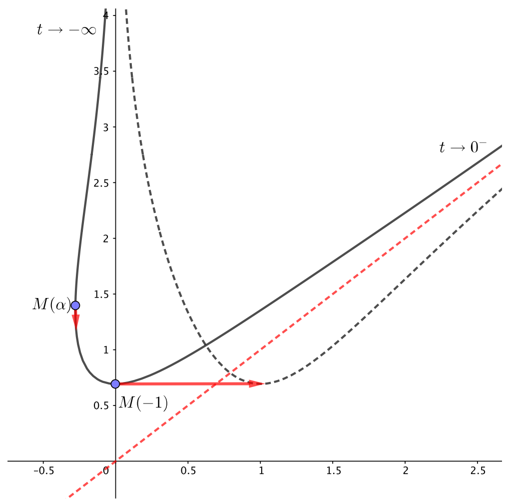
t	$-\infty$		α		-1		0
$x'(t)$		$-$	0		$+$		‖
$x(t)$	0	↘	$x(\alpha)$	↗	0	↗	$+\infty$ ‖
$y'(t)$			$-$		0	$+$	‖
$y(t)$	$+\infty$	↘	$y(\alpha)$	↘	$\ln(2)$	↗	$+\infty$ ‖

Branches infinies

$\lim\limits_{-\infty} x=0$ et $\lim\limits_{-\infty} y=+\infty$ donc l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe lorsque $t\to-\infty$ avec $x<0, y>0$ au voisinage de $-\infty$.

• On obtient comme en 0^+ que $\lim\limits_{0^-}\frac{y}{x}=1$ et $\lim\limits_{0^-} y(t)-x(t) \underset{t\to 0^-}{\sim} t\ln(t)>0$: la droite d'équation $y=x$ est asymptote à la courbe lorsque $t\to 0^-$, la courbe étant située au dessus de son asymptote.

Tangentes : pas de points singuliers mais une tangente horizontale et une tangente verticale respectivement aux points de paramètres $t=-1$ et $t=\alpha$.



4. $f(t)=\begin{pmatrix}\cos(3t)\\ \sin(2t)\end{pmatrix}$.

$D_f=\mathbb{R}$, $f\in\mathscr{C}^1(D_f)$.

Symétries : • f est 2π périodique. On restreint l'étude à $[-\pi;\pi]$.

• De plus x est paire, y est impaire donc on restreint l'étude à $[0;\pi]$ et on complète par réflexion d'axe $(\mathcal{O}_x)$.

• Enfin, $\forall t\in[0;\frac{\pi}{2}]$,

$$x(\pi-t)=\cos(3(\pi-t))=\cos(\pi+2\pi-3t)=\cos(\pi-3t)=-\cos(-3t)=-\cos(3t)=-x(t)$$

$$y(\pi-t)=\sin(2(\pi-t))=\sin(-2t)=-\sin(2t)=-y(t).$$

Ainsi, on restreint l'étude à $[0;\frac{\pi}{2}]$ et on complète par symétrie centrale de centre l'origine du repère.

Variations des fonctions coordonnées

Notons que $t\in[0;\frac{\pi}{2}]\Longrightarrow 3t\in[0;\frac{3\pi}{2}]$ et $2t\in[0;\pi]$.

$\forall t\in[0;\frac{\pi}{2}]$, $x'(t)=-3\sin(3t)\geqslant 0$

$$x'(t)\geqslant 0\iff \sin(3t)\leq 0\iff 3t\in[\pi;\frac{3\pi}{2}]\iff t\in[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}].$$

$\forall t\in[0;\frac{\pi}{2}], y'(t)=2\cos(2t)$

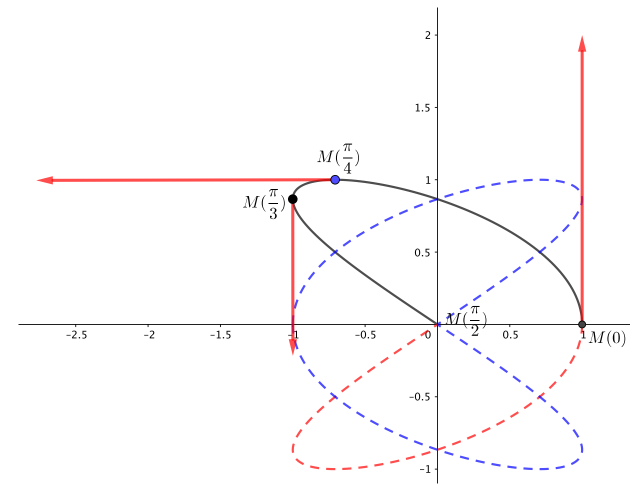
$$y'(t)\geqslant 0\iff 2t\in[0;\frac{\pi}{2}]\iff t\in[0;\frac{\pi}{4}].$$

On en déduit les variations conjointes de x et y :

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	0		$-$		0	$+$	
$x(t)$	1	$\searrow$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0
$y'(t)$		$+$	0		$-$		
$y(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0

Branches infinies : La courbe est bornée, il n'y a pas de branches infinies.

Tangentes : la courbe est régulière mais il y a deux tangentes verticales aux points $M(0), M(\frac{\pi}{3})$ et une tangente horizontale au point $M(\frac{\pi}{4})$.



5. $f(t)=\begin{pmatrix}\dfrac{t^2+1}{2t}\\ \dfrac{2t-1}{t^2}\end{pmatrix}$.

$D_f=\mathbb{R}$. $f\in\mathscr{C}^1(D_f)$.

Pas de symétries apparentes. On étudie la fonction f sur $\mathbb{R}^*$.

Variations des fonctions coordonnées

$x'(t)=\frac{4t^2-2(t^2+1)}{(4t^2)}=\frac{2(t^2-1)}{4t^2}\geqslant 0\iff t\in]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[$.

$y'(t)=\frac{2t^2-4t^2+2t}{t^4}=\frac{-2t(t-1)}{t^4}=\frac{2(1-t)}{t^3}\geqslant 0\iff t\in]0;1]$.

t	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$x(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$ $-\infty$	‖	$+\infty$ $\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$-$		$-$	‖	$+$	0	$-$	
$y(t)$	0	$\searrow$	-3	$\searrow$ $-\infty$	‖	$-\infty$ $\nearrow$	1	$\searrow$	0

Branches infinies :

• $\lim\limits_{-\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{-\infty} y = 0$. Donc l'axe des abscisses est asymptote à la courbe lorsque $t \to -\infty$.

• $\lim\limits_{+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} y = 0$. Donc l'axe des abscisses est asymptote à la courbe lorsque $t \to +\infty$.

• $\lim\limits_{0^+} x = +\infty$ et $\lim\limits_{0^+} y = -\infty$. On poursuit l'étude :

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{2t-1}{t^2}\,\frac{2t}{t^2+1} = \frac{2(2t-1)}{t(t^2+1)} \underset{t\to 0^+}{\sim} -\frac{2}{t} \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} -\infty.$$

Ainsi, la courbe présente une branche parabolique de direction verticale lorsque $t \to 0^+$.

• Résultat et raisonnement analogue en 0^-.

Tangentes :

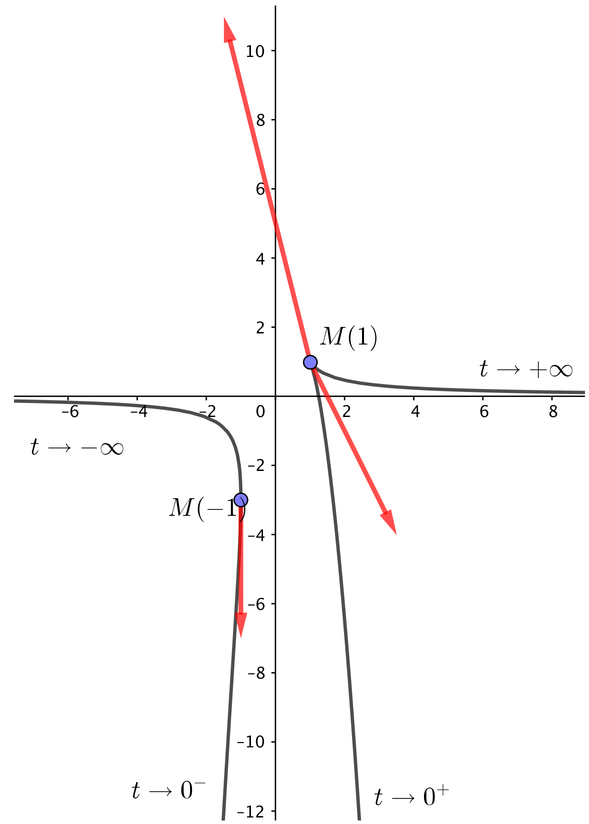
• Une tangente verticale au point $M(-1) = (-1;3)$ portée par le vecteur $(0;-4)$.

• Le point $M(1)$ est singulier (ou stationnaire) car $f'(1) = (0;0)$. On écrit un développement limité, avec $t = 1+h$: $x(t) = \frac{2+2h+h^2}{2(1+h)}$ et $y(t) = \frac{1+2h}{1+2h+h^2}$

$$\begin{aligned}
f(t) &\underset{h\to 0}{=} \begin{pmatrix} \left(1+h+\frac{h^2}{2}\right)\left(1-h+h^2-h^3+o(h^3)\right) \\ (1+2h)\left[1-(2h+h^2)+(2h+h^2)^2-(2h+h^2)^3+o((2h+h^2)^3)\right] \end{pmatrix} \\
&\underset{h\to 0}{=} \begin{pmatrix} 1+\frac{1}{2}h^2-\frac{1}{2}h^3+o(h^3) \\ (1+2h)\left[1-2h-h^2+(4h^2+4h^3)-8h^3+o(h^3)\right] \end{pmatrix} \\
&\underset{h\to 0}{=} \begin{pmatrix} 1+\frac{1}{2}h^2-\frac{1}{2}h^3+o(h^3) \\ 1-h^2+2h^3+o(h^3) \end{pmatrix} \\
&\underset{h\to 0}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + h^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} + h^3 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o(h^3) \\ o(h^3) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

On remarque que les vecteurs $T_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$ et $T_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires. Le point $M(1)$ est donc un point de rebroussement de première espèce.

• Tous les autres points sont réguliers.



Les vecteurs T_2, T_3 ont été multipliés par 5

6. $f(t) = \begin{pmatrix} \tan(t)+\sin(t) \\ \dfrac{1}{\cos(t)} \end{pmatrix}$.

$D_f = \left\{t \in \mathbb{R} : t \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]\right\}$. $f \in \mathscr{C}^1(D_f)$.

Symétries : • les fonctions x et y sont 2π-périodiques. On restreint l'étude à $[-\pi;\pi] \cap D_f = [-\pi; -\frac{3\pi}{2}[\cup] - \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2};\pi]$.

• La fonction x est impaire et la fonction y est paire. On restreint l'étude à $[0; \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}; \pi]$ et on complète par réflexion d'axe $(\mathcal{O}_y)$.

Variations des fonctions coordonnées

$x'(t) = \frac{1}{\cos^2(t)} + \cos(t) = \frac{1+\cos^3(t)}{\cos^2(t)} \geqslant 0$.

$y'(t) = \frac{\sin(t)}{\cos^2(t)} \geqslant 0$ car $\sin \geqslant 0$ sur D_f.

t	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$x'(t)$		$+$	‖	$+$	0
$x(t)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	0
$y'(t)$	0	$+$	‖	$+$	0
$y(t)$	1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	-1

Branches infinies : • $\lim\limits_{\frac{\pi}{2}^+} x = \lim\limits_{\frac{\pi}{2}^+} y = -\infty$. On poursuit l'étude :

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{1}{\cos(t)} \frac{1}{\tan(t) + \sin(t)} = \frac{1}{\sin(t)(1+\cos(t))} \underset{t \to \frac{\pi}{2}^+}{\longrightarrow} 1.$$

Enfin, en posant $t = \frac{\pi}{2} + h$, avec $h \to 0^+$:

$$\begin{aligned}
y(t) - x(t) &= \frac{1}{\cos(t)} - \tan(t) - \sin(t) = \frac{1-\sin(t)}{\cos(t)} - \sin(t) \\
&= \frac{1-\sin(h+\frac{\pi}{2})}{\cos(h+\frac{\pi}{2})} - \sin(h+\frac{\pi}{2}) = \frac{1-\cos(h)}{-\sin(h)} - \cos(h) \\
&= \frac{1-\cos(h)+\sin(h)\cos(h)}{-\sin(h)} \\
&= \frac{1-(1+o(h))+(h+o(h))(1+o(h))}{-\sin(h)} \\
&= \frac{h+o(h)}{-\sin(h)} \underset{h\to 0^+}{\sim} \frac{h}{-h} = -1.
\end{aligned}$$

Par conséquent $\lim\limits_{\frac{\pi}{2}^+} y - (x-1) = 0$ et la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe lorsque $t \to \frac{\pi}{2}^+$.

On poursuit le développement limité pour déterminer la position relative

$$\begin{aligned}
y(t) - x(t) + 1 &\underset{h\to 0^+}{=} \frac{1-\cos(h)+\sin(h)\cos(h)}{-\sin(h)} + 1 \\
&\underset{h\to 0^+}{=} \frac{1-(\cos(h)+\sin(h))+\sin(h)\cos(h)}{-\sin(h)} \\
&\underset{h\to 0^+}{=} \frac{1-(1+h-\frac{h^2}{2}+o(h^2))+(h+o(h^2))(1-\frac{h^2}{2}+o(h^2))}{-\sin(h)} \\
&\underset{h\to 0^+}{=} \frac{1-(1+h-\frac{h^2}{2}+o(h^2))+(h+o(h^2))(1-\frac{h^2}{2}+o(h^2))}{-\sin(h)} \\
&\underset{h\to 0^+}{=} \frac{\frac{h^2}{2}+o(h^2)}{-\sin(h)} \underset{h\to 0^+}{\sim} -\frac{h}{2} < 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, la courbe est située sous son asymptote si $t \to \frac{\pi}{2}^+$.

• Les calculs et raisonnements sont identiques lorsque $t \to \frac{\pi}{2}^-$ en posant $t = \frac{\pi}{2} + h$ avec $h \to 0^-$. La conclusion est différente : la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe; la courbe est située au dessus de son asymptote.

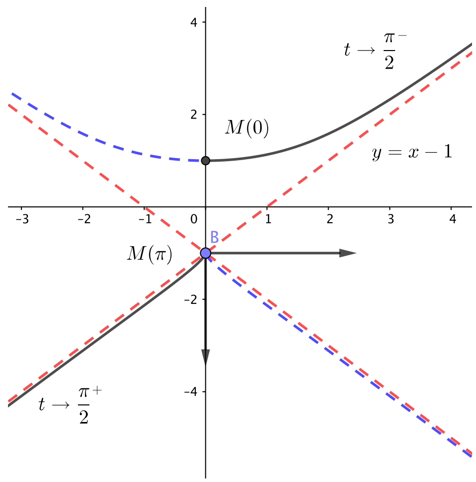
Tangentes : • Une tangente horizontale au point $M(0) = (0; 1)$.

• Le point $M(\pi)$ est singulier car $f'(t) = (0; 0)$. On écrit un développement limité pour déterminer le comportement local de la courbe. On note $t = \pi - h$ avec $h \to 0^-$. On obtient

$$\begin{aligned}
f(t) &= \begin{pmatrix} \tan(t)+\sin(t) \\ \dfrac{1}{\cos(t)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tan(\pi+h)+\sin(\pi+h) \\ \dfrac{1}{\cos(\pi+h)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \tan(h)-\sin(h) \\ -\dfrac{1}{\cos(h)} \end{pmatrix} \underset{h\to 0}{=} \begin{pmatrix} (h+\frac{h^3}{3}+o(h^3))-(h-\frac{h^3}{6}+o(h^3)) \\ -\dfrac{1}{1-\frac{h^2}{2}+o(h^3)} \end{pmatrix} \\
&\underset{h\to 0}{=} \begin{pmatrix} \frac{h^3}{2}+o(h^3) \\ -(1+\frac{h^2}{2}+o(h^3)) \end{pmatrix} \\
&\underset{h\to 0}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + h^2 \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + h^3 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o(h^3) \\ o(h^3) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

On constate que les vecteurs $T_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $T_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires donc $M(\pi)$ est un point de rebroussement de première espèce.

• Les autres points sont réguliers.



7. $f(t) = \begin{pmatrix} t^2+t \\ 2t - \dfrac{1}{t} \end{pmatrix}$.

$D_f = \mathbb{R}^*$. $f \in \mathscr{C}^1(D_f)$.
Pas de symétries apparentes.
Variations des fonctions coordonnées.
$x'(t) = 2t+1 \geqslant 0 \Longleftrightarrow t \geqslant -\frac{1}{2}$.
$y'(t) = 2 + \frac{1}{t^2} > 0$ pour tout $t \in D_f$.

t	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
$x'(t)$	$-$	0	$+$	
$x(t)$	$+\infty$ ↘	$-\frac{1}{4}$	↗ 0 ↗	$+\infty$
$y'(t)$	$+$		‖	$+$
$y(t)$	$-\infty$ ↗	1 ↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$ ↗	$+\infty$

Branches infinies :

• $\lim\limits_{0^-} y = +\infty$ et $\lim\limits_{0^-} x = 0$ donc l'axe des abscisses est asymptote à la courbe lorsque $t \to 0^-$.

• $\lim\limits_{0^+} y = -\infty$ et $\lim\limits_{0^+} x = 0$ donc l'axe des abscisses est asymptote à la courbe lorsque $t \to 0^+$.

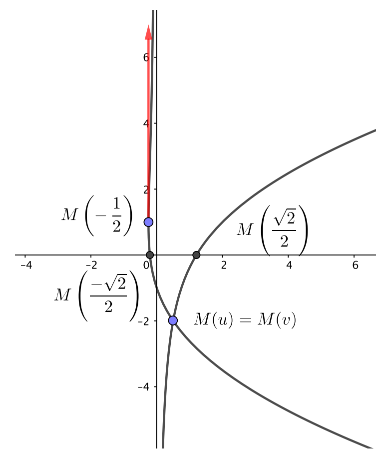
• $\lim\limits_{+\infty} x = \lim\limits_{+\infty} y = +\infty$. On poursuit l'étude :

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{2t^2-1}{t(t^2+t)} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{2}{t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

La courbe présente une branche parabolique de direction horizontale lorsque $t \to +\infty$.

• Raisonnements et conclusions analogues lorsque $t \to -\infty$.

Tangentes : Tous les points de la courbes sont réguliers. Une tangente verticale au point $M(-\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{4}; 1)$ portée par le vecteur $f'(-\frac{1}{2}) = (0; 6)$.



Une remarque utile pour le tracer de la courbe.

Le système $\begin{cases} u^2+u &= t^2+t \\ 2u - \frac{1}{u} &= 2v - \frac{1}{v} \end{cases}$ admet un unique couple solution $(u,v) = (\frac{-1+\sqrt{3}}{2}; \frac{-1-\sqrt{3}}{2})$.

La courbe possède un unique point double $M(u) = M(v)$ atteint en $u = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ et $v = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$.

8. $f(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{t}{1+t^3} \\ \dfrac{t^2}{1+t^3} \end{pmatrix}$.

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. $f \in \mathscr{C}^1(D_f)$.
Symétries : Pas de parité ni de périodicité. En revanche, il est possible de réduire considérablement l'étude en notant que

$$t \in]-1;1[\Longleftrightarrow \frac{1}{t} \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$$

et

$$x\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\frac{1}{t}}{1+\frac{1}{t^3}} = \frac{t^2}{1+t^3} = y(t) \text{ et } y\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\frac{1}{t^2}}{1+\frac{1}{t^3}} = \frac{t}{1+t^3} = y(t).$$

Ainsi, on étudie la courbe sur $]-1;1[$ et on complète par symétrie d'axe la première bissectrice : $y = x$.

Variations des fonctions coordonnées

$x'(t) = \frac{1+t^3-3t^3}{(1+t^3)^2} = \frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2} \geqslant 0 \iff t \leqslant \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$. On note $a = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.

$y'(t) = \frac{2t(1+t^3)-3t^4}{(1+t^3)^2} = \frac{t(2-t^3)}{(1+t^3)^2} \geqslant 0 \iff t \geqslant 0$.

t	-1		0		$\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$		1
$x'(t)$	$\Vert$	$+$		$+$	0	$-$	
$x(t)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$x(a)$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$
$y'(t)$	$\Vert$	$-$	0	$+$		$+$	
$y(t)$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$y(a)$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$

On a $x(a) \simeq 0,53$ et $y(a) \simeq 0,42$.

Branches paraboliques

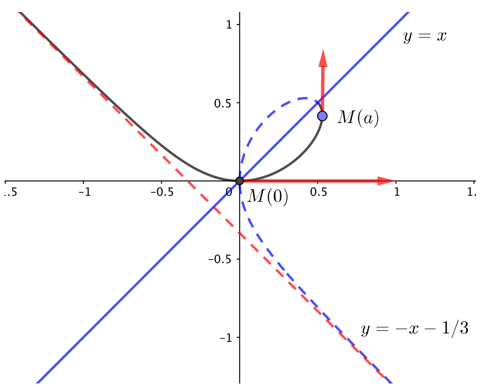
$\lim\limits_{-1^+} x = -\infty$ et $\lim\limits_{-1^+} y = +\infty$. On poursuit l'étude.

$$\lim_{t \to -1^+} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \to -1^+} \frac{\frac{t^2}{1+t^3}}{\frac{t}{1+t^3}} = -1$$

et $\lim_{t \to -1^+} y(t) - (-1)x(t) = \lim_{t \to -1^+} \frac{t^2+t}{1+t^3} = \lim_{1 \to -1^+} \frac{t}{1-t+t^2} = -\frac{1}{3}$, car $1+t^3 = (1+t)(1-t+t^2)$.

La droite d'équation $y = -x - \frac{1}{3}$ est asymptote à la courbe lorsque $t \to -1^+$.

Tangentes : Tous les points sont réguliers. Une tangente horizontale en $M(0)$ et une tangente verticale en $M(a)$.



9. $f(t) = \begin{pmatrix} t - \frac{1}{t} \\ \exp\left(\frac{1}{t}\right) \end{pmatrix}$.

$D_f = \mathbb{R}^*$. $f \in \mathscr{C}^1(D_f)$.

Variations des fonctions coordonnées

$x'(t) = 1 + \frac{1}{t^2} > 0$.

$y'(t) = -\frac{1}{t^2} \exp\left(\frac{1}{t}\right) < 0$.

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	$\Vert$	$+$	
$x(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ $\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$-$	$\Vert$	$-$	
$y(t)$	1	$\searrow$	0 $\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	1

La courbe coupe l'axe des ordonnées aux deux points de coordonnées $t = -1$ et $t = 1$ aux points $M(-1) = (0; \frac{1}{e})$ et $M(1) = (0; e)$; y ne s'annule pas.

Branches infinies

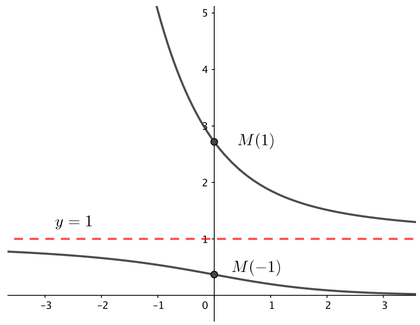
- $\lim\limits_{-\infty} x = -\infty$ et $\lim_{-\infty} y = 1$ donc la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe lorsque $t \to -\infty$.
- $\lim\limits_{0^-} x = +\infty$ et $\lim_{0^-} y = 0$ donc l'axe des abscisses est asymptote à la courbe lorsque $t \to 0^-$.
- $\lim\limits_{0^+} x = -\infty$ et $\lim\limits_{0^+} y = +\infty$. On poursuit l'étude.

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{\exp\left(\frac{1}{t}\right)}{t - \frac{1}{t}} = \frac{t\exp(\frac{1}{t})}{t^2 - 1} \underset{t \to 0^+}{\longrightarrow} -\infty.$$

La courbe présente une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

- $\lim\limits_{+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} y = 1$, la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe lorsque $t \to +\infty$.

Tangentes : pas de tangentes particulières.



10. $f(t) = \begin{pmatrix} \cos\left(\dfrac{3t}{2}\right) \\ 2\sin(t) + \cos(2t) \end{pmatrix}$.

$D_f = \mathbb{R}$. $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.

Symétries : pas de symétries apparentes mais les fonctions coordonnées sont 4π-périodiques. On restreint l'étude à $[0; 4\pi]$.

On a, pour tout $t \in [0; 2\pi]$, $x(t + 2\pi) = -x(t)$ et $y(t + 2\pi) = y(t)$.

On restreint l'étude à $[0; 2\pi]$ et on complète par la réflexion d'axe $(\mathcal{O}_y)$.

Variations des fonctions coordonnées

On a $t \in [0; 2\pi] \iff \frac{3t}{2} \in [0; 3\pi]$.

$$x'(t) = -\frac{3}{2}\sin\left(\frac{3t}{2}\right) \geqslant 0 \iff \frac{3t}{2} \in [\pi; 2\pi] \iff t \in \left[\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right]$$

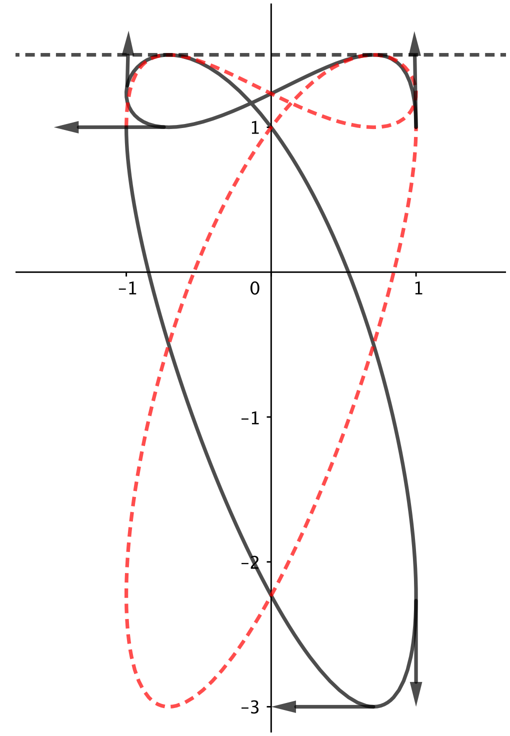
$$y'(t) = 2\cos(t) - 2\sin(2t) = 2\cos(t)(1 - 2\sin(t))$$

$$y'(t) \geqslant 0 \iff t \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right].$$

t	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{4\pi}{3}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$x'(t)$				$-$			0		$+$		0		$-$		
$x(t)$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	-1
$y'(t)$		$+$	0	$-$	0		$+$		0		$-$		0	$+$	
$y(t)$	1	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$\sqrt{3} - \frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	$-\sqrt{3} - \frac{1}{2}$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1

Branches infinies : la courbe est bornée, il n'y a pas de branches infinies.

Tangentes : tous les points de la courbe sont réguliers.



□

Solution Exercice 2.

1. Déterminons une représentation paramétrique de la courbe d'équation cartésienne $x^3 + y^3 - xy = 0$.

   On détermine les points d'intersection de la droite $D_t : y = tx$ et de la courbe.

   On injecte $y = tx$ dans l'équation cartéisienne, on obtient

   $$x^3 + t^3x^3 - tx^2 = 0 \iff (1 + t^3)x^3 - tx^2 = 0.$$

   $x_1(t) = 0$ est une solution de cette équation, l'autre $x_2(t) = \frac{t}{1+t^3}$.

   On en déduit les deux points d'intersection :

   $$(x_1(t); y_1(t)) = (0; 0) \quad \text{et} \quad (x_2(t); y_2(t)) = \left(\frac{t}{1+t^3}; \frac{t^2}{1+t^3}\right).$$

   On obtient une paramétrisation du follium de Descartes, déjà étudié dans l'Exercice 1 (question 8.).

2. Déterminons une représentation paramétrique de la courbe d'équation cartésienne $x^3 + x^2 - y^2 = 0$.
On détermine les points d'intersection de la droite $D_t : y = tx$ et de la courbe. On injecte $y = tx$ dans l'équation cartésienne, on obtient :

$$x^3 + x^2 - t^2x^2 = 0 \Longleftrightarrow x^2(x + 1 - t^2) = 0.$$

Les deux solutions de cette équation d'inconnue x sont

$$x_1(t) = t^2 - 1 \quad \text{et} \quad x_2(t) = 0$$

et les ordonnées correspondantes :

$$y_1(t) = t(t^2 - 1) \quad \text{et} \quad y_2(t) = 0.$$

On en déduit une représentation paramétrique de la courbe d'équation cartésienne $x^3 + x^2 - y^2 = 0$:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \begin{pmatrix} t^2 - 1 \\ t(t^2 - 1) \end{pmatrix}.$$

$D_f = \mathbb{R}$. $f \in \mathscr{C}^1(D_f)$.
Symétries : la fonction x est paire, la fonction y est impaire. On étudie la courbe sur $\mathbb{R}_+$ et on complète par réflexion d'axe $(\mathcal{O}_x)$.
Variations des fonctions coordonnées
• $x'(t) = 2t \geqslant 0 \Longleftrightarrow t \geqslant 0$.
• $y'(t) = t^2 - 1 + 2t^2 = 3t^2 - 1 \geqslant 0 \Longleftrightarrow t \geqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$.

t	0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$x'(t)$	0		$+$		
$x(t)$	-1	$\nearrow$	$-\frac{2}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$-$	0	$+$	
$y(t)$	0	$\searrow$	$-\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\nearrow$	$+\infty$

Branches infinies : $\lim\limits_{+\infty} x = \lim\limits_{+\infty} y = +\infty$. On poursuit l'étude.

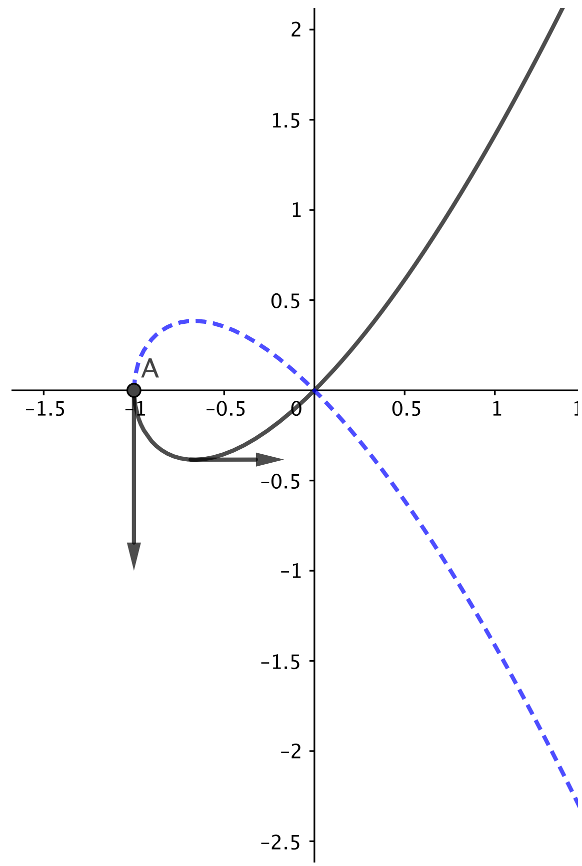
$$\lim_{t \to +\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \to +\infty} \frac{t(t^2 - 1)}{t^2 - 1} = +\infty.$$

La courbe présente une branche parabolique verticale (de direction $(\mathcal{O}_y)$).

Tangentes : tous les points de la courbe sont réguliers.

Une tangente verticale au point $M(0) = (-1; 0)$, une tangente horizontale au point $M(\frac{1}{\sqrt{3}}) = (-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3\sqrt{3}})$.

Ci-dessous la cubique nodale



3. Déterminons une représentation paramétrique de l'hyperbole d'équation cartésienne : $x^2 - 6x + y^2 + 8 = 0$.

On détermine les points d'intersection de la droite $D_t : y = t(x - 4)$ et de cette hyperbole. L'intersection contient au moins le point $(4; 0)$. Il s'agit de déterminer l'autre point d'intersection. On injecte $y = t(x-4)$ dans l'équation cartésienne de l'hyperbole, on obtient :

$$x^2 - 6x - t^2(x - 4)^2 + 8 = 0 \Longleftrightarrow x^2(1 - t^2) + x(-6 + 8t^2) + (8 - 16t^2) = 0.$$

On détermine les solutions de cette équation d'inconnue x et de discriminant :

$$\begin{aligned}\Delta &= (-6+8t^2)^2 - 4(1-t^2)\times(8-16t^2)\\ &= 4 + t^2(-96+64+32) + t^4(64-64) = 4 > 0.\end{aligned}$$

On obtient les deux racines réelles distinctes :

$$x_1(t) = \frac{6-8t^2-2}{2(1-t^2)} = \frac{2(1-2t^2)}{1-t^2} \quad \text{et} \quad x_2(t) = 4,$$

qui donnent les deux ordonnées :

$$y_1(t) = t(x_1(t)-4) = \frac{-2t}{1-t^2} \quad \text{et} \quad y_2(t) = 0.$$

On a obtenu une paramétrisation de l'hyperbole, privée de l'un de ses sommets $S=(4;0)$. On étudie la courbe :

$$f : \mathbb{R}\setminus\{-1;1\} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{pmatrix} \dfrac{2(1-2t^2)}{1-t^2} \\ \\ \dfrac{-2t}{1-t^2} \end{pmatrix}.$$

$D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$. $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$.

Symétries : La fonction x est paire, la fonction y est impaire. On effectue l'étude sur $D_f \cap \mathbb{R}_+$ et on complète par symétrie d'axe $(\mathcal{O}_x)$.

Variations des fonctions coordonnées :

• $x'(t) = \dfrac{-8t(1-t^2)+2t(2(1-2t^2))}{(1-t^2)^2} = \dfrac{-4t}{(1-t^2)^2} \leqslant 0$ si $t \in [0;1[\cup]1;+\infty[$.

• $y'(t) = \dfrac{-2(1-t^2)+2t(-2t)}{(1-t^2)^2} = \dfrac{-2(1+t^2)}{(1-t^2)^2} \leqslant 0$ si $t \in [0;1[\cup]1;+\infty[$.

t	0		1		$+\infty$
$x'(t)$	0	$-$	‖	$-$	
$x(t)$	2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4
$y'(t)$		$-$	‖	$-$	
$y(t)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

Branches infinies

• $\lim_{1^+} x = \lim_{1^+} y = +\infty$. On poursuit l'étude.

$$\lim_{t\to1^+} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to1^+} \frac{-t}{1-2t^2} = 1$$

et

$$\begin{aligned} y(t)-x(t) &= \frac{-2t}{1-t^2} - \frac{2(1-2t^2)}{1-t^2} = \frac{2(2t^2-t-1)}{1-t^2}\\ &= \frac{4(t-1)(t+\frac{1}{2})}{(1-t)(1+t)} = -\frac{4(t+\frac{1}{2})}{(1+t)} \underset{t\to1^+}{\longrightarrow} -3\end{aligned}$$

puis $\lim_{t\to1^+} y(t)-(x(t)-3) = 0$. La droite d'équation $y = x-3$ est asymptote à la courbe lorsque $t \to 1^+$.

La position relative est donnée par le signe pour $t>1$ de :

$$y(t)-x(t)+3 = \frac{-4t-2+3+3t}{1+t} = \frac{1-t}{1+t} < 0.$$

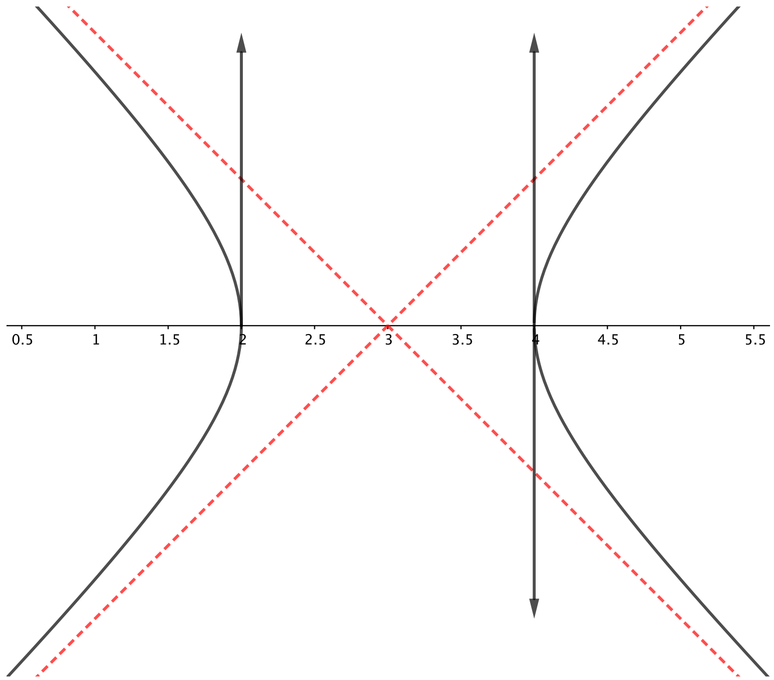
La courbe est sous son asymptote.

• En 1^- on obtient les mêmes résultats hormis la position relative : la courbe est au-dessus de son asymptote.

Tangentes : Une tangente verticale au point $(2;0)$.

Lorsque $t\to+\infty$, la pente de la tangente tend vers

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{y'(t)}{x'(t)} = +\infty.$$



$\square$

Solution Exercice 3.

1. $f(t) = \begin{pmatrix} a\cos^3(t) \\ a\sin^3(t) \end{pmatrix}$.

   $D_f = \mathbb{R}$. $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.

   Symétries : Les fonctions x et y sont 2π périodiques, on effectue l'étude sur $[-\pi;\pi]$.

   la fonction x est paire, la fonction y est impaire. On restreint l'étude à $[0;\pi]$ et on complète par réflexion d'axe $(\mathcal{O}_x)$.

   Enfin, $x(\pi - t) = -x(t)$ et $y(\pi - t) = y(t)$. On effectue l'étude sur $[0;\frac{\pi}{2}]$ et on complète par réflexion d'axe $(\mathcal{O}_y)$.

   Variations des fonctions coordonnées

   $x'(t) = -3a\sin(t)\cos^2(t) \leqslant 0$ pour tout $t \in [0;\frac{\pi}{2}]$.

   $y'(t) = 3a\cos(t)\sin^2(t) \geqslant 0$ pour tout $t \in [0;\frac{\pi}{2}]$.

t	0		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	0	$-$	0
$x(t)$	a	$\searrow$	0
$y'(t)$	0	$+$	0
$y(t)$	0	$\nearrow$	a

Branches infinies : la courbe est bornée, il n'y a pas de branches infinies.

Tangentes : Il y a deux points singuliers $M(0) = (1;0)$ et $M(\frac{\pi}{2}) = (0;1)$.

• En $t \to 0$:

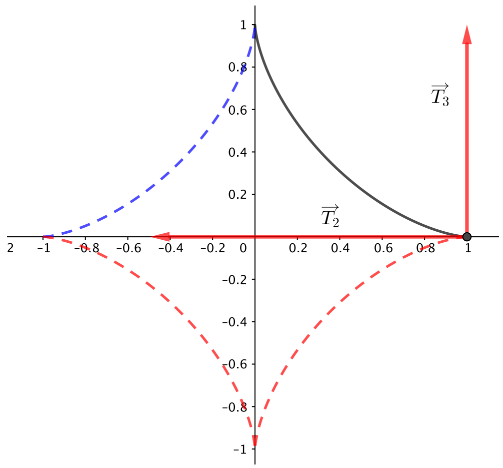
$$f(t) \underset{t\to 0}{=} a \begin{pmatrix} (1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3))^3 \\ \\ (t - \frac{t^3}{3!} + o(t^3))^3 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 - \frac{3t^2}{2} + o(t^3) \\ \\ t^3 + o(t^3) \end{pmatrix}$$
$$= a \begin{pmatrix} 1 \\ \\ 0 \end{pmatrix} + at^2 \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \\ 0 \end{pmatrix} + at^3 \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o(t^3) \\ \\ o(t^3) \end{pmatrix}.$$

On constate que les vecteurs $\overrightarrow{T_2} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{T_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont non colinéaires, donc le point $M(0)$ est un point de rebroussement de première espèce.

• En $t \to \frac{\pi}{2}$, on note $t = \frac{\pi}{2} + h$ avec $h \to 0$:

$$f(t) = a \begin{pmatrix} a\cos^3(\frac{\pi}{2} + h) \\ a\sin^3(\frac{\pi}{2} + h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a\sin^3(h) \\ a\cos^3(h) \end{pmatrix}.$$

Avec les calculs effectués au voisinage de 0, on obtient que les vecteurs $\overrightarrow{U_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{U_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont non colinéaires. Le point $M(\frac{\pi}{2})$ est également un point de rebroussement de première espèce.



2. • Les tangentes aux point d'abscisse $M(0)$ (ou $M(\pi)$) et $M(\frac{\pi}{2})$ (ou $M(\frac{3\pi}{2})$) sont orthogonales et sécantes en l'origine O du repère.
   • Déterminons les points d'intersection des tangentes en des points réguliers de la courbe. Soit $t \not\equiv 0, \frac{\pi}{2}[\pi]$. La tangente à l'astroïde au point $M(t)$ est portée par le vecteur

$$\begin{pmatrix} -3a\sin(t)\cos^2(t) \\ 3a\cos(t)\sin^2(t) \end{pmatrix} = \underbrace{3a\sin(t)\cos(t)}_{\neq 0}\begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Un vecteur directeur de la tangente au point $M(t)$ est donc $\begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$.

Deux tangentes T_t et T_u sont orthogonales si et seulement si leurs vecteur directeurs le sont :

$$\begin{aligned}\left\langle \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\cos(u) \\ \sin(u) \end{pmatrix} \right\rangle = 0 &\iff \cos(t)\cos(u) + \sin(t)\sin(u) = 0 \\ &\iff \cos(u-t) = 0 \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, u = t + \frac{\pi}{2} + k\pi.\end{aligned}$$

On détermine l'intersection $T_t \cap T_{t+\frac{\pi}{2}}$.

La tangente T_t admet pour vecteur directeur $\begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ donc admet pour vecteur normal $\begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$ et une équation cartésienne :

$$T_t : \sin(t)x + \cos(t)y - c = 0 \text{ avec } c = \underbrace{a\sin(t)\cos^3(t) + a\cos(t)\sin^3(t)}_{=a\sin(t)\cos(t)}$$

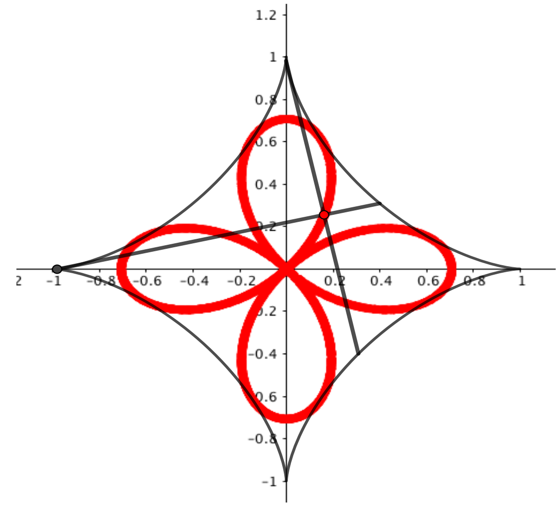
Ainsi :

$$T_{t+\frac{\pi}{2}} : \cos(t)x - \sin(t)y = -a\sin(t)\cos(t).$$

Et le point $(x, y) \in T_t \cap T_{t+\frac{\pi}{2}}$ si et seulement si :

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \sin(t) & \cos(t) \\ \cos(t) & -\sin(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\sin(t)\cos(t) \\ -a\sin(t)\cos(t) \end{pmatrix} \\ \iff &\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -\sin(t) & -\cos(t) \\ -\cos(t) & \sin(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\sin(t)\cos(t) \\ -a\sin(t)\cos(t) \end{pmatrix} \\ \iff &\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\sin(t)\cos(t)(\sin(t)-\cos(t)) \\ a\sin(t)\cos(t)(\cos(t)+\sin(t)) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

L'orthoptique (i.e. le point de concours de ses tangentes orthogonales) de l'astroïde est le quadrifolium paramétré par la fonction de t ci-dessus.



□

Solution Exercice 4.

1. $t \mapsto f(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ \dfrac{t(1-t^2)}{1+t^2} \end{pmatrix}$.

   $D_f = \mathbb{R}$. $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.

   Symétries : la fonction x est paire et la fonction y est impaire. On restreint l'étude à $\mathbb{R}_+$ et on complète par symétrie d'axe $(\mathcal{O}_x)$.

   Variations des fonctions coordonnées :

   • $x'(t) = \frac{-2t(1+t^2)-2t(1-t^2)}{(1+t^2)^2} = \frac{-4t}{(t^2+1)^2} \leqslant 0$ pour tout $t \geqslant 0$.

   • $y'(t) = \frac{(1-3t^2)(1+t^2)-2t^2(1-t^2)}{(1+t^2)^2} = \frac{-t^4-4t^2+1}{(1+t^2)^2} = -\frac{t^4+4t^2-1}{(1+t^2)^2}$.

On note $T = t^2$. Le polynôme $-T^2 - 4T + 1$ a pour discriminant $\Delta = 16 + 4 = 20$ et admet deux racines réelles distinctes :

$$T_1 = \frac{4 - 2\sqrt{5}}{-2} = -2 + \sqrt{5} > 0 \quad \text{et} \quad T_2 = \frac{4 + 2\sqrt{5}}{-2} = -2 - \sqrt{5} < 0.$$

On en déduit que le polynôme $-t^4 - 4t^2 + 1$ possède deux racines réelles distinctes :

$$\beta = -\sqrt{-2 + \sqrt{5}} \quad \text{et} \quad \alpha = \sqrt{-2 + \sqrt{5}},$$

et deux racines complexes conjuguées.

On en déduit que $y'(t) \geqslant 0 \Longleftrightarrow t \in [0; \alpha]$.

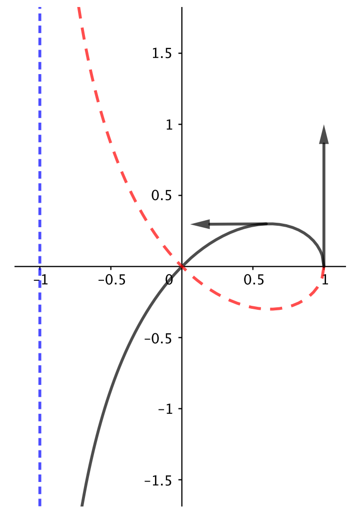
t	0		α		1		$+\infty$
$x'(t)$	0			$-$			
$x(t)$	1	$\searrow$	$x(\alpha)$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1
$y'(t)$		$+$	0		$-$		
$y(t)$	0	$\nearrow$	$y(\alpha)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

On donne $x(\alpha) \simeq 0,6$; $y(\alpha) \simeq 0,3$.

Branches infinies :

• $\lim\limits_{+\infty} x = -1$ et $\lim\limits_{+\infty} y = -\infty$ donc la droite d'équation $x = -1$ est asymptote à la courbe lorsque $t \to +\infty$.

Tangentes : tous les points de la courbes sont réguliers. Une tangente verticale au point $M(0)$ et une tangente horizontale au point $M(\alpha)$.



2. Le paramètre t vérifie $y(t) = tx(t)$ donc t représente la pente de la droite portée par le vecteur $\overrightarrow{OM}(t)$.
   • Soit $(x; y)$ un point de paramètre t avec $x \neq 0$ c'est à dire $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$. On injecte $t = \frac{y}{x}$ dans la représentation paramétrique de x, on obtient :
   $$(**) \quad x = \frac{1 - \frac{y^2}{x^2}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \Longleftrightarrow x = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$
   $$\Longleftrightarrow x^3 + xy^2 = x^2 - y^2$$
   $$\Longleftrightarrow x^2(x-1) + y^2(x+1) = 0$$
   Les points de la courbe d'abscisse nulle (ceux de paramètres $t = 1$ et $t = -1$) vérifient également l'équation $x^2(x-1) + y^2(x+1) = 0(*)$.
   • Réciproquement, soit $(x; y)$ vérifiant $(*)$ avec $x \neq 0$. On pose $t = \frac{y}{x}$ et l'on obtient avec $(**)$
   $$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad \text{et} \quad y = tx = \frac{t(1 - t^2)}{1 + t^2}.$$
   La point $(0; 0)$, vérifiant l'équation $(*)$, est également paramétré avec $t = -1$ ou $t = 1$.
   D'où une équation cartésienne implicite de la courbe.
3. Les points $M(t_1), M(t_2), M(t_3)$ sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{M(t_1)M(t_2)}$ et $\overrightarrow{M(t_1)M(t_3)}$ sont colinéaires ce qui fournit une condition nécessaire et suffisante d'alignement via la nullité du déterminant. Cette condition est difficilement exploitable. Procédons autrement.

• Trois points $M(t_i)$ sont alignés si et seulement s'ils appartiennent à une même droite.

• Un point $M(t) \in \mathscr{C}$ appartient à une droite d'équation cartésienne : $ux + vy + w = 0$ si et seulement si

$$\begin{aligned} u\frac{1-t^2}{1+t^2} + vt\frac{1-t^2}{1+t^2} + w = 0 &\iff u(1-t^2) + vt(1-t^2) + w(1+t^2) = 0 \\ &\iff -vt^3 + t^2(-u+w) + vt + (u+w) = 0 \\ &\iff vt^3 + t^2(u-w) - vt - (u+w) = 0 (*). \end{aligned}$$

• Soit $\Delta : ux + vy + w = 0$ une droite non verticale : $v \neq 0$. On note t_1, t_2, t_3 les trois solutions de l'équation de degré 3 $(*)$:

$$vt^3 + t^2(u-w) - vt - (u+w) = v(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3).$$

Les relations coefficients racines du trinôme de degré 3 donnent (puisque $v \neq 0$) :

$$\left\{ \begin{array}{c} v = v \\ (u-w) = -v(t_1+t_2+t_3) \\ -v = v(t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3) \\ -(u+v) = -t_1t_2t_3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \frac{u-w}{v} = t_1 + t_2 + t_3 \\ \boldsymbol{-1 = t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3} \quad \textbf{(indép. de } \Delta\textbf{)} \\ u + v = t_1t_2t_3 \end{array} \right.$$

• Supposons $M(t_1), M(t_2), M(t_3)$ alignés sur une même droite non verticale. D'après ce qui précède, **nécessairement**, $t_1t_2 + t_1t_3 + t_1t_2 = -1$.

• **Réciproquement**, supposons que les trois points distincts $M(t_1), M(t_2), M(t_3)$ sont paramétrés par t_1, t_2, t_3 vérifiant $t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3 = -1$ et tels que $M(t_1), M(t_2)$ soient situés sur la droite $\Delta : ux + vy + w = 0$.

D'après ce qui précède, les paramètres des points d'intersection $\mathscr{C} \cap \Delta$ sont solution de l'équation polynomiale de degré 3, $vt^3 + t^2(u-w) - vt - (u+w) = 0$ qui possède les deux solution t_1, t_2 par hypothèse et une troisième solution réelle τ (réelle car les deux autres solutions le sont).

Montrons que $\tau = t_3$.

On a

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} t_1t_2 & + & t_1t_3 & + & t_2t_3 & = & -1 \quad (L_1) \\ t_1t_2 & + & t_1\tau & + & t_2\tau & = & -1 \quad (L_2) \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} t_1t_2 & + & t_1t_3 & + & t_2t_3 & = & -1 \qquad (L_1) \\ & & t_1(\tau - t_3) & + & t_2(\tau - t_3)\tau & = & 0 \qquad (L_2 - L_1) \end{array} \right.$$

On obtient $(t_1 + t_2)(\tau - t_3) = 0$.

Si $t_1 = -t_2$ alors les points $M(t_1)$ et $M(-t_1)$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses ce qui implique que Δ est verticale, ce qui n'est pas. Donc $t_3 = \tau$ et on en déduit donc, sous l'hypothèse $t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3 = -1$ que les poins $M(t_1), M(t_2), M(t_3)$ sont alignés sur une même droite non verticale.

• Notons enfin qu'une droite verticale $\Delta : ux + w = 0$ coupe la strophoïde uniquement en deux points au plus (éventuellement confondus en l'origine). En effet l'équation d'inconnue t suivante possède au plus deux solutions réelles :

$$u\frac{1-t^2}{1+t^2} + w = 0 \iff u(1-t^2) + (1+t^2)w = 0 \iff t^2(w-u) + (u+w) = 0$$

Conclusion : $M(t_1), M(t_2), M(t_3)$ sont alignés si et seulement si $t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3 = -1$. De plus, ces points sont alignés sur une droite qui n'est pas verticale.

$\square$

Solution Exercice 5.

1. $f(t) = \begin{pmatrix} a(1+\cos(t))\cos(t) \\ a(1+\cos(t))\sin(t) \end{pmatrix}$.

$D_f = \mathbb{R}$. $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.

Symétries : x et y sont 2π-périodiques, on étudie la courbe sur $[-\pi; \pi]$. La fonction x est paire, la fonction y est impaire. On restreint l'étude à $[0; \pi]$ et on complète l'étude par réflexion d'axe $(\mathcal{O}_x)$.

Variations des fonctions coordonnées :

• $x'(t) = a\left[-\sin(t)\cos(t) - \sin(t)(1+\cos(t))\right] = -a\sin(t)(1+2\cos(t))$.

Ainsi, $x'(t) \geqslant 0 \iff 1 + 2\cos(t) \leqslant 0 \iff t \in [\frac{2\pi}{3}; \pi]$.

• $y'(t) = a\left[-\sin^2(t) + \cos^2(t) + \cos(t)\right] = a(\cos(2t) + \cos(t))$.

Ainsi,

$$y'(t) = 2a\cos\left(\frac{3t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right) \geqslant 0 \iff \cos\left(\frac{3t}{2}\right) \geqslant 0 \iff t \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right] \cup \{\pi\}.$$

t	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$x'(t)$	0		$-$		0	$+$	0
$x(t)$	$2a$	↘	$\frac{3a}{4}$	↘	$-\frac{a}{4}$	↗	0
$y'(t)$		$+$	0		$-$		0
$y(t)$	0	↗	$\frac{3a\sqrt{3}}{4}$	↘	$\frac{a\sqrt{3}}{4}$	↘	0

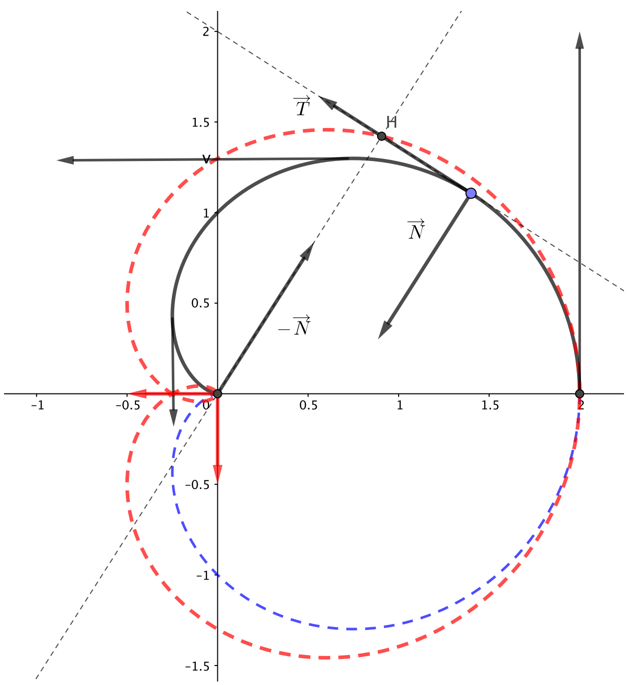
Branches infinies : la courbe est bornée donc il n'y a pas de branches infinies.

Tangentes : • Il y a des tangentes verticales aux points $M(0), M(\frac{2\pi}{3})$ et une tangente horizontale au point $M(\frac{\pi}{3})$.

• Le point $M(\pi)$ est singulier. On pose $t = \pi + h$ avec $h \to 0$.

$$\begin{aligned}
f(t) &= a\begin{pmatrix} (1+\cos(\pi+h))\cos(\pi+h) \\ (1+\cos(\pi+h))\sin(\pi+h) \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} -(1-\cos(h))\cos(h) \\ -(1-\cos(h))\sin(h) \end{pmatrix} \\
&= a\begin{pmatrix} -\left(\frac{h^2}{2}+o(h^3)\right)\left(1-\frac{h^2}{2}+o(h^3)\right) \\ -\left(\frac{h^2}{2}+o(h^3)\right)\left(h-\frac{h^3}{3!}+o(h^3)\right) \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} -\frac{h^2}{2}+o(h^3) \\ -\frac{h^3}{2}+o(h^3) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + h^2\begin{pmatrix} -\frac{a}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + h^3\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{a}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o(h^3) \\ o(h^3) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{T_2} = \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{T_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{a}{2} \end{pmatrix}$ sont non colinéaires. Le point $M(\pi)$ est un point de rebroussement de première espèce.



2. Traitons le cas $a = 1$. Notons H le projeté orthogonal recherché.
   • La tangente en l'unique point stationnaire $M(\pi)$ est l'axe des abscisses contenant le point O qui se projette sur lui-même.

Première méthode

Le projeté orthogonal H de O sur la tangente T_t est l'intersection de T_t avec la droite D_O orthogonale à T_t passant par O.

Un vecteur directeur de la tangente en un point régulier $M(t)$ $(t \neq \pi)$ est le vecteur $f'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \neq 0$ qui est donc un vecteur normal à

$$D_O : x'(t)x + y'(t)y = 0.$$

Un vecteur normal à T_t est $\begin{pmatrix} -y'(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$ donc une équation cartésienne de T_t :

$$-y'(t)x + x'(t)y - c = 0 \quad \text{avec } c = -y'(t)x(t) + x'(t)y(t) = \begin{vmatrix} x'(t) & x(t) \\ y'(t) & y(t) \end{vmatrix}.$$

On résout alors le système

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} x'(t) & -y'(t) \\ y'(t) & x'(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} \\
\iff &\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{x'(t)^2 + y'(t)^2}\begin{pmatrix} x'(t) & -y'(t) \\ y'(t) & x'(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
x'(t)^2 + y'(t)^2 &= \sin^2(t)(1+2\cos(t))^2 + (\cos(t)+\cos(2t))^2 \\
&= \sin^2(t) + 4\sin^2(t)\cos(t) + 4\sin^2(t)\cos^2(t) \\
&\quad + \cos^2(t) + 2\cos(t)\cos(2t) + \cos^2(2t) \\
&= 1 + 2\cos(t)[2\sin^2(t) + \cos^2(t) - \sin^2(t)] + \\
&\quad 4(1-\cos^2(t))\cos^2(t) + (2\cos^2(t)-1)^2 \\
&= 1 + 2\cos(t) + 4\cos^2(t) - 4\cos^4(t) + 4\cos^4(t) + \\
&\quad - 4\cos^2(t) + 1 \\
&= 2(1+\cos(t)).
\end{aligned}$$

et

$$c=\begin{vmatrix} x'(t) & x(t)\\ y'(t) & y(t)\end{vmatrix}$$
$$= -\sin(t)(1+2\cos(t))(1+\cos(t))\sin(t)-(\cos(t)+\cos(2t))(1+\cos(t))\cos(t)$$
$$= (1+\cos(t))\left[-\sin^2(t)-2\sin^2(t)\cos(t)-\cos^2(t)-\cos(t)\cos(2t)\right]$$
$$= -(1+\cos(t))(1+2\sin^2(t)\cos(t)+\cos(t)(\cos^2(t)-\sin^2(t))$$
$$= -(1+\cos(t))[1+\cos(t)(2\sin^2(t)+\cos^2(t)-\sin^2(t))]$$
$$= -(1+\cos(t))^2$$

On en déduit une paramétrisation du lieu géométrique des projetés orthogonaux (valable en $M(\pi)$ également)

$$t\mapsto \frac{1+\cos(t)}{2}\begin{pmatrix}\cos(t)+\cos(2t)\\ \sin(t)(1+2\cos(t))\end{pmatrix}.$$

Seconde méthode

• Une équation cartésienne de T_t :

$$-y'(t)x+x'(t)y-c=0 \quad \text{avec } c=-y'(t)x(t)+x'(t)y(t)=\begin{vmatrix} x'(t) & x(t)\\ y'(t) & y(t)\end{vmatrix}.$$

La distance δ de O à T_t se calcule classiquement :

$$\delta=\frac{|-0\times y'(t)+0\times x'(t)-c|}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}}=\frac{\left|\left|\begin{matrix} x'(t) & x(t)\\ y'(t) & y(t)\end{matrix}\right|\right|}{\sqrt{(-y'(t))^2+x'(t)^2}}=\frac{\left|\left|\begin{matrix} x'(t) & x(t)\\ y'(t) & y(t)\end{matrix}\right|\right|}{||f'(t)||}$$
$$=|\det(\overrightarrow{T},\overrightarrow{OM})|$$

où $\overrightarrow{T}$ est le vecteur unitaire tangent du repère de Frenet au point $M(t)$.

• Le projeté H vérifie donc $\overrightarrow{OH}=\delta\overrightarrow{u}$ avec $\overrightarrow{u}$ un vecteur unitaire (à déterminer) dirigeant la perpendiculaire à T_t passant par O. Ainsi, $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{N}$ ou $\overrightarrow{u}=-\overrightarrow{N}$ avec $\overrightarrow{N}$ le vecteur unitaire normal du repère de Frenet au point $M(t)$.

La demi-droite $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+\lambda\overrightarrow{N}=\lambda\frac{1}{||f'(t)||}\begin{pmatrix}-y'(t)\\ x'(t)\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\lambda>0}$ ne rencontre pas la tangente $T_t : -y'(t)x+x'(t)y-\begin{vmatrix} x'(t) & x(t)\\ y'(t) & y(t)\end{vmatrix}=0$. En effet,

— D'une part, $-y'(t)(-\lambda y'(t))+x'(t)(\lambda x'(t))=+\lambda y'(t)^2+\lambda x'(t)^2>0$.

— D'autre part, $\begin{vmatrix} x'(t) & x(t)\\ y'(t) & y(t)\end{vmatrix}=-(1+\cos(t))^2<0$.

Ainsi, $\overrightarrow{OH}=-\delta\overrightarrow{N}$ donc

$$\overrightarrow{OH}=-|\det(\overrightarrow{T},\overrightarrow{OM})|\overrightarrow{N}=-\frac{\left|\left|\begin{matrix} x'(t) & x(t)\\ y'(t) & y(t)\end{matrix}\right|\right|}{||f'(t)||}\times\frac{1}{|f'(t)||}\begin{pmatrix}-y'(t)\\ x'(t)\end{pmatrix}$$
$$=\frac{(1+\cos(t))^2}{x'(t)^2+y'(t)^2}\begin{pmatrix}y'(t)\\ -x'(t)\end{pmatrix}.$$

On retrouve la même paramétrisation de la podaire vue du point O (i.e. lieu des projetés orthogonaux de l'origine sur les tangentes à la courbe).

□

Solution Exercice 6. $f(t)=\begin{pmatrix}(t+1)e^t\\ t^2e^t\end{pmatrix}$.

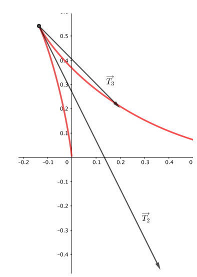
$D_f=\mathbb{R}$. $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.

$f'(t)=\begin{pmatrix}e^t(t+2)\\ te^t(t+2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\iff t=-2.$

$M(-2)=(-e^{-2};4e^{-2})$ est l'unique point singulier de la courbe. On pose $t=-2+h\iff h=t+2$ avec $h\to 0$:

$$f(t)=\begin{pmatrix}(h-1)e^{-2+h}\\ (-2+h)^2e^{-2+h}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{-2}(h-1)[1+h+\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{3!}+o(h^3)]\\ e^{-2}(-2+h)^2[1+h+\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{3!}+o(h^3)]\end{pmatrix}$$
$$\underset{h\to 0}{=} e^{-2}\begin{pmatrix}-1+\frac{1}{2}h^2+(-\frac{1}{6}+\frac{1}{2})h^3+o(h^3)\\ 4+h^2(2-4+1)+h^3(\frac{4}{6}-2+1)+o(h^3)\end{pmatrix}$$
$$\underset{h\to 0}{=} e^{-2}\begin{pmatrix}-1+\frac{1}{2}h^2+\frac{1}{3}h^3+o(h^3)\\ 4-h^2-\frac{1}{3}h^3+o(h^3)\end{pmatrix}$$
$$\underset{h\to 0}{=} e^{-2}\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}+e^{-2}h^2\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}+e^{-2}h^3\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}o(h^3)\\o(h^3)\end{pmatrix}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{T_2}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{T_3}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires donc $M(-2)$ est un point de rebroussement de première espèce.



□

Solution Exercice 7. $f(t)=\begin{pmatrix}\cos^2(t)+\ln(\sin(t))\\ \sin(t)\cos(t)\end{pmatrix}$

$D_f = \{t \in \mathbb{R} : \exists \theta \in]0;\pi[: t \equiv \theta [2\pi]\}$. $f \in \mathscr{C}^1(D_f)$.

Symétries : Les fonctions x et y sont 2π-périodiques, il suffit donc de restreindre l'étude $[-\pi;\pi] \cap D_f =]0;\pi[$.

De plus pour tout $t \in]0; \frac{\pi}{2}[$, $x(\pi - t) = x(t)$ et $y(\pi - t) = -y(t)$. On restreint l'étude à $]0; \frac{\pi}{2}]$ et on complète par réflexion d'axe $(\mathcal{O}_x)$.

$$\begin{aligned} f'(t) &= \begin{pmatrix} -2\sin(t)\cos(t) + \frac{\cos(t)}{\sin(t)} \\ \cos^2(t) - \sin^2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\cos(t)}{\sin(t)}(-2\sin^2(t) + 1) \\ \cos(2t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\cos(t)}{\sin(t)}(-2\sin^2(t) + \cos^2(t) + \sin^2(t)) \\ \cos(2t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\cos(t)}{\sin(t)}\cos(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sur $]0; \frac{\pi}{2}]$ le seul point singulier est celui de paramètre $t = \frac{\pi}{4}$.

Les deux points singuliers de la courbe sont donc les points $M(\frac{\pi}{4})$ et $M(\frac{3\pi}{4})$.

• Ce sont des points de rebroussement de première espèce : on pose $t = h + \frac{\pi}{4}$ avec $h \to 0$,

$$\begin{aligned} f(t) &= \begin{pmatrix} \cos^2(h + \frac{\pi}{4}) + \ln\sin(h + \frac{\pi}{4}) \\ \sin(h + \frac{\pi}{4})\cos(h + \frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\cos(h) - \sin(h))^2 + \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin(h) + \cos(h))\right) \\ \frac{1}{2}(\sin(h) + \cos(h))(\cos(h) - \sin(h)) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

avec

— $\cos(h) - \sin(h) \underset{h\to 0}{=} 1 - h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + o(h^3)$,

— $(\cos(h) - \sin(h))^2 \underset{h\to 0}{=} 1 - 2h + \frac{4}{3}h^3 + o(h^3)$n

— $\sin(h) + \cos(h) \underset{h\to 0}{=} 1 + h - \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{6} + o(h^3)$,

— $(\sin(h) + \cos(h))(\cos(h) - \sin(h)) \underset{h\to 0}{=} 1 - 2h^2 + o(h^3)$,

— et enfin :

$$\begin{aligned} \ln(\sin(h) + \cos(h)) &\underset{h\to 0}{=} \ln\left(1 + h - \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{6} + o(h^3)\right) \\ &\underset{h\to 0}{=} (h - \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{6}) - \frac{1}{2}(h^2 - h^3) + \frac{1}{3}h^3 + o(h^3) \\ &\underset{h\to 0}{=} h - h^2 + \frac{4}{6}h^3 + o(h^3) \\ &\underset{h\to 0}{=} h - h^2 + \frac{2}{3}h^3 + o(h^3) \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} f(t) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\cos(h) - \sin(h))^2 + \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin(h) + \cos(h))\right) \\ \frac{1}{2}(\sin(h) + \cos(h))(\cos(h) - \sin(h)) \end{pmatrix} \\ &\underset{h\to 0}{=} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \ln(\frac{\sqrt{2}}{2}) - h^2 + \frac{4}{3}h^3 + o(h^3) \\ \frac{1}{2} - h^2 + o(h^3) \end{pmatrix} \\ &\underset{h\to 0}{=} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \ln(\frac{\sqrt{2}}{2}) \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + h^2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + h^3 \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o(h^3) \\ o(h^3) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{T_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{T_3} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires. On en déduit que $M(\frac{\pi}{4})$ est un point de rebroussement de première espèce.

• On cherche donc la longueur L de la courbe entre les points $M(\frac{\pi}{4})$ et $M(\frac{3\pi}{4})$ c'est-à-dire (avec $\frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4}$) :

$$\begin{aligned} L &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} ||f'(t)||dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sqrt{\frac{\cos^2(t)}{\sin^2(t)}\cos^2(2t) + \cos^2(2t)}dt \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sqrt{\cos^2(2t)\left(1 + \frac{\cos^2(t)}{\sin^2(t)}\right)}dt \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sqrt{\frac{\cos^2(2t)}{\sin^2(t)}}dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{|\cos(2t)|}{\sin(t)}dt. \end{aligned}$$

Or $t \in [\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}]$ donc $2t \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$ et par conséquent $|\cos(2t)| = -\cos(2t)$.

Ainsi,

$$L = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{-\cos(2t)}{\sin(t)}dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{-\cos^2(t)}{\sin(t)}dt + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin(t)dt = L_1 + L_2$$

avec $L_2 = [-\cos(t)]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2}$ et avec le changement de variable de classe $\mathscr{C}^1$ et bijectif sur $[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}]$, $u = \cos(t) \Rightarrow du = -\sin(t)dt$ dans L_1 :

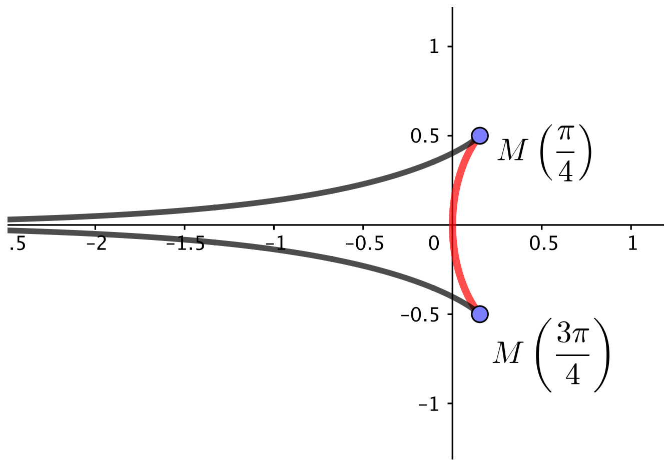
$$L_1 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\cos^2(t)}{\sin^2(t)}(-\sin(t)dt) = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{u^2}{1 - u^2}du = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{-u^2}{1 - u^2}du$$

On note que $\frac{-u^2}{1-u^2} = 1 - \frac{1}{1-u^2} = 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{1+u} - \frac{1}{2}\frac{1}{1-u}$.

On obtient :

$$\begin{aligned} L_1 &= \sqrt{2} - \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right)\right]_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\ &= \sqrt{2} - \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) - \ln\left(\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)\right) \\ &= \sqrt{2} - \ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right). \end{aligned}$$

Conclusion : $L = L_1 + L_2 = 2\sqrt{2} - \ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$.



$\square$

Solution Exercice 8. $f(t) = a\begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}$.

On fait l'étude dans le cas $a = 1$. Dans le cas général, la longueur cherchée est multipliée par $|a|$.

$D_f = \mathbb{R}$. $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.

Symétries :

- La fonction x est impaire, la fonction y est paire. On étudie la courbe sur $\mathbb{R}_+$ et on complète par réflexion d'axe $(\mathcal{O}_y)$.
- La fonction y est 2π-périodique et $\forall t \in \mathbb{R}, x(t+\pi) = 2\pi + x(t)$. On étudie la courbe sur $[0;\pi]$ et on complète l'étude par translations de vecteur $2\pi\overrightarrow{i}$.

Variations des fonctions coordonnées

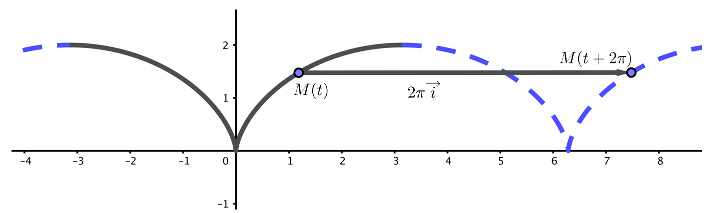
$x'(t) = 1 - \cos(t) \geqslant 0$ pour tout $t \in [0;\pi]$.

$y'(t) = \sin(t) \geqslant 0$ pour tout $t \in [0;\pi]$.

t	0		π
$x'(t)$	0	$+$	
$x(t)$	0	$\nearrow$	π
$y'(t)$	0	$+$	0
$y(t)$	0	$\nearrow$	2

$$\begin{aligned} f(t) &\underset{t\to 0}{=} \begin{pmatrix} \frac{t^3}{6} + o(t^3) \\ \frac{t^2}{2} + o(t^3) \end{pmatrix} \\ &\underset{t\to 0}{=} t^2\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + t^3\begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o(t^3) \\ o(t^3) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, $M(0)$ est un point de rebroussement de première espèce.
A noter également : une tangente horizontale au point $M(\pi)$.



- On calcule la longueur de courbe L entre les points $M(0)$ et $M(2\pi)$ (avec $0 < 2\pi$).

On a $||f'(t)||^2 = (1-\cos(t))^2 + \sin(t)^2 = 2(1-\cos(t))$. Ainsi,

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos(t)}dt = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}dt \\ &= 2\int_0^{2\pi}\sqrt{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}dt = 2\int_0^{2\pi}\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|dt = 2\int_0^{2\pi}\sin\left(\frac{t}{2}\right)dt \quad \left(\text{ car } \frac{t}{2} \in [0;\pi]\right) \\ &= 4\left[-\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{2\pi} = 8. \end{aligned}$$

$\square$

Solution Exercice 9.

1. $f(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t}\cos(t) \\ e^{\lambda t}\sin(t) \end{pmatrix}$. $D_f = \mathbb{R}$. $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$.
   - $x'(t) = e^{\lambda t}(\lambda\cos(t) - \sin(t))$.
   - $y'(t) = e^{\lambda t}(\lambda\sin(t) + \cos(t))$.
   - $||f'(t)|| = e^{\lambda t}\sqrt{(\lambda\cos(t)-\sin(t))^2 + (\lambda\sin(t)+\cos(t))^2} = e^{\lambda t}\sqrt{\lambda^2+1} \neq 0$.

   La courbe est donc régulière.

   On note $t \mapsto s(t)$ l'abscisse curviligne d'origine 0 ; il s'agit de l'unique primitive de $t \mapsto ||f'(t)||$ s'annulant en 0 :

$$s(t) = \int_0^t ||f'(\tau)||d\tau = \int_0^t e^{\lambda\tau}\sqrt{\lambda^2+1}d\tau = \frac{\sqrt{\lambda^2+1}}{\lambda}(e^{\lambda t}-1).$$

2. Repère de Frenet $\mathcal{R}_t = (M(t), \overrightarrow{T}(t), \overrightarrow{N}(t))$ avec
   — $\overrightarrow{T}(t) = \dfrac{f'(t)}{||f'(t)||} = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda^2+1}}\begin{pmatrix} \lambda\cos(t)-\sin(t) \\ \lambda\sin(t)+\cos(t)\end{pmatrix}$.
   — $\overrightarrow{N}(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2+1}}\begin{pmatrix} -\lambda\sin(t)-\cos(t) \\ \lambda\cos(t)-\sin(t)\end{pmatrix}$.
3. *Une première expression de* $\frac{d\overrightarrow{T}}{dt}(t)$ *:*

   On dérive $\overrightarrow{T}(t)$: $\dfrac{d\overrightarrow{T}(t)}{dt} = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda^2+1}}\begin{pmatrix} -\lambda\sin(t)-\cos(t) \\ \lambda\cos(t)-\sin(t)\end{pmatrix} = \mathbf{1}\times\overrightarrow{N}(t)$

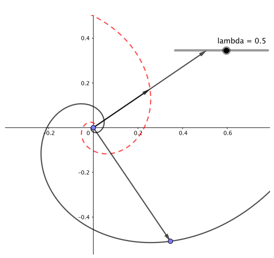
   Une seconde expression de $\frac{d\overrightarrow{T}}{dt}(t)$ *:*

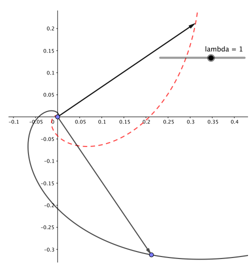
$$\frac{d\overrightarrow{T}}{dt} = \frac{ds}{dt}\frac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \boldsymbol{||f'(t)||\gamma(t)}\overrightarrow{N}(t).$$

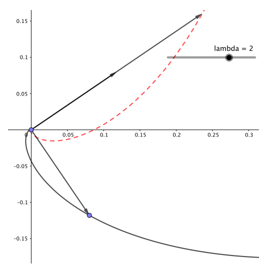
   Ainsi, $\gamma(t) = \dfrac{1}{||f'(t)||} = \dfrac{dt}{ds}$ et le rayon de courbure $R(t) = ||f'(t)|| = \frac{ds}{dt}$.
4. La développée est l'ensemble des centres de courbure :

$$\begin{aligned} &t \mapsto M(t) + ||f'(t)||\overrightarrow{N}(t) \\ &t \mapsto \begin{pmatrix} e^{\lambda t}\cos(t) \\ e^{\lambda t}\sin(t)\end{pmatrix} + e^{\lambda t}\sqrt{\lambda^2+1}\frac{1}{\sqrt{\lambda^2+1}}\begin{pmatrix} -\lambda\sin(t)-\cos(t) \\ \lambda\cos(t)-\sin(t)\end{pmatrix} \\ &t \mapsto \begin{pmatrix} -\lambda e^{\lambda t}\sin(t) \\ \lambda e^{\lambda t}\cos(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\lambda t}\cos(t) \\ e^{\lambda t}\sin(t)\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

   La développée est donc la courbe obtenue en appliquant aux points de la spirale $M(t)$ la composée commutative de l'homothétie vectorielle de rapport λ et de la rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{2}$.







□

***Solution Exercice** 10.*

1. On étudie la courbe $\mathscr{C}$ paramétrée par $t \mapsto f(t) = \begin{pmatrix} t+\sin(t) \\ 1+\cos(t)\end{pmatrix}$.

   $D_f = \mathbb{R}$. $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$.

   Symétries : les propriétés de la courbe, sur tout intervalle $[-\pi+2k\pi, \pi+2k\pi], k \in \mathbb{Z}$ se déduisent des propriétés obtenues sur $[-\pi;\pi]$ par translation de vecteur $2k\pi\overrightarrow{i}$. On effectue l'étude sur $[-\pi;\pi]$.

   • **Vecteur dérivé :** $f'(t) = \begin{pmatrix} 1+\cos(t) \\ -\sin(t)\end{pmatrix}$.

   Ainsi, les points $M(-\pi)$ et $M(\pi)$ sont singuliers.

   Dans la suite on restreint l'étude aux points réguliers de paramètre $t \in]-\pi;\pi[$.

   • **Vecteur unitaire tangent :**

$$\begin{aligned}\overrightarrow{T}(t) &= \frac{f'(t)}{||f'(t)||} = \frac{1}{\sqrt{2(1+\cos(t))}}\begin{pmatrix} 1+\cos(t) \\ -\sin(t)\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}\begin{pmatrix} 2\cos^2(\frac{t}{2}) \\ -2\sin(\frac{t}{2})\cos(\frac{t}{2})\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\frac{t}{2}) \\ -\sin(\frac{t}{2})\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\frac{t}{2}) \\ \sin(-\frac{t}{2})\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

   On a obtenu $||f'(t)|| = 2\sqrt{\cos^2(\frac{t}{2})} = 2\left|\cos(\frac{t}{2})\right| = 2\cos(\frac{t}{2}) > 0$ car $t \in]-\pi;\pi[$.

   Ainsi, la fonction α de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\pi;\pi[, \alpha : t \mapsto \alpha(t) = -\frac{t}{2}$ vérifie :

$$\overrightarrow{T}(t) = \begin{pmatrix} \cos(-\frac{t}{2}) \\ \sin(-\frac{t}{2})\end{pmatrix}$$

   • **Calcul de la courbure :** Les formules de Frenet donnent, en notant s une abscisse curviligne de la courbe :

$$\gamma(t) = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{dt}{ds}\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{1}{s'(t)} = -\frac{1}{2||f'(t)||} = -\frac{1}{4\cos\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

2. Retrouvons la courbure directement.

   • **Vecteur unitaire tangent :** $\overrightarrow{T}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{t}{2}) \\ -\sin(\frac{t}{2})\end{pmatrix}$.

   • **Vecteur unitaire normal :** $\overrightarrow{N}(t) = \begin{pmatrix} \sin(\frac{t}{2}) \\ \cos(\frac{t}{2})\end{pmatrix}$.

   • **Deux expressions de** $\frac{d\overrightarrow{T}}{dt}$

   Une première expression : On dérive

$$\frac{d\overrightarrow{T}}{dt} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sin(\frac{t}{2}) \\ -\cos(\frac{t}{2})\end{pmatrix} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\overrightarrow{N}.$$

Une seconde expression :

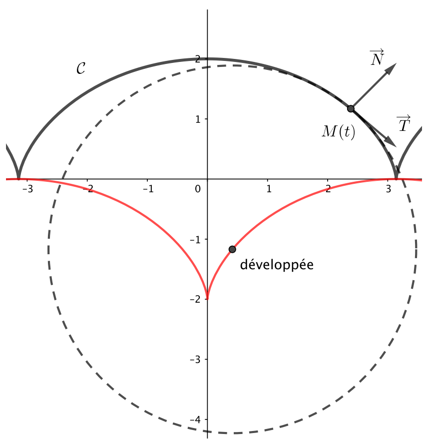
$$\frac{d\overrightarrow{T}}{dt} = \frac{ds}{dt}\frac{d\overrightarrow{T}}{ds} = ||\boldsymbol{f'(t)}||\boldsymbol{\gamma}\overrightarrow{N}.$$

On en déduit :

$$\gamma(t) = -\frac{1}{2||f'(t)||} = -\frac{1}{4\cos\left(\frac{t}{2}\right)},$$

ce qui correspond bien à l'expression de la courbure obtenu via le théorème de relèvement.

Ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$, sa développée, les vecteurs tangent et normal en un point $M(t)$ et le cercle de courbure. Notez que la courbure est négative en tout point régulier : la courbe "s'éloigne" du sens donné par le vecteur normal.



$\square$

Solution Exercice *11.*

1. $\lim\limits_{0^+} x = 0$ et $\lim\limits_{0^+} y = 0$ car $\forall t > 0, t^\alpha = e^{\alpha\ln(t)}$ est de limite nulle en 0^+. On prolonge la fonction f par continuité en 0 en posant $f(0) = (0;0)$.
2. Le support de f est l'ensemble des points $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$ tels que $y - x^\alpha = 0$.
3. Pour tout $t > 0$, le taux $\frac{f(t)-f(0)}{||f(t)-f(0)||} = \frac{(t,t^\alpha)}{\sqrt{t^2+t^{2\alpha}}} = \frac{(t,t^\alpha)}{t\sqrt{1+t^{2(\alpha-1)}}} = \frac{(1,t^{\alpha-1})}{\sqrt{1+t^{2(\alpha-1)}}}$ admet une limite lorsque $t \to 0^+$:
   — Si $\alpha > 1$ cette limite est $(1;0)$.
   — Si $\alpha = 1$ cette limite est $(1;1)$.
   — Si $\alpha \in]0;1[$, cette limite est $(0;1)$ car

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^{2\alpha-1}}} \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{t^{\alpha-1}} = t^{1-\alpha} \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad \frac{t^{\alpha-1}}{\sqrt{1+t^{2\alpha-1}}} \underset{0^+}{\sim} \frac{t^\alpha - 1}{t^{\alpha-1}} = 1.$$

4. Soit $\alpha > 1$.
   $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}_+^*)$.
   • **Vecteur unitaire tangent**
   $\overrightarrow{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+y'(t)^2}}\begin{pmatrix} 1 \\ y'(t)\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2 t^{2(\alpha-1)}}}\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha t^{\alpha-1}\end{pmatrix}$
   • **Vecteur unitaire normal**
   $\overrightarrow{N}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+y'(t)^2}}\begin{pmatrix} -y'(t) \\ 1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2 t^{2(\alpha-1)}}}\begin{pmatrix} -\alpha t^{\alpha-1} \\ 1\end{pmatrix}$
   • **Deux expressions de** $\frac{d\overrightarrow{T}}{dt}$. On fait les calculs en général avec les fonctions coordonnées $x = t$ et $y = y(t)$.
   Une première expression :
   On dérive le vecteur $\overrightarrow{T}(t)$:

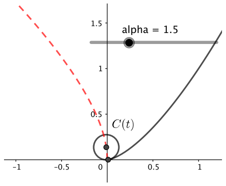
$$\begin{aligned}
\frac{d\overrightarrow{T}}{dt} &= \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+y'(t)^2}} \\ \frac{y'(t)}{\sqrt{1+y'(t)^2}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\times 2\times y''(t)y'(t)\left(1+y'(t)^2\right)^{-\frac{3}{2}} \\ y''(t)\left(1+y'(t)^2\right)^{-\frac{1}{2}} + y'(t)\times(-\frac{1}{2})\times 2\times y''(t)y'(t)\left(1+y'(t)^2\right)^{-\frac{3}{2}} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{(1+y'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}\begin{pmatrix} -y''(t)y'(t) \\ y''(t)(1+y'(t)^2) - y'(t)^2 y''(t) \end{pmatrix} \\
&= \frac{y''(t)}{(1+y'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}\begin{pmatrix} -y'(t) \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{y''(t)}{1+y'(t)^2}\overrightarrow{N}.
\end{aligned}$$

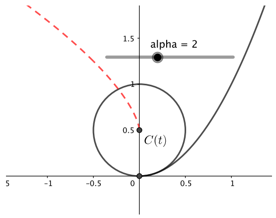
   Une seconde expression : $\frac{d\overrightarrow{T}}{dt} = \frac{ds}{dt}\frac{d\overrightarrow{T}}{ds} = ||f'(t)||\gamma\overrightarrow{N}$.
   On obtient la courbure

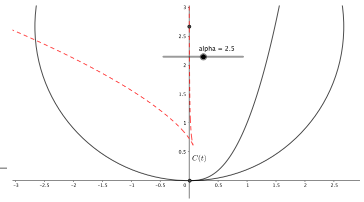
$$\gamma(t) = \frac{1}{||f'(t)||}\frac{y''(t)}{1+y'(t)^2} = \frac{y''(t)}{(1+y'(t)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}}{\left(1+\alpha^2 t^{2(\alpha-1)}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

   et le rayon de courbure :

$$R(t) = \frac{\left(1+\alpha^2 t^{2(\alpha-1)}\right)^{\frac{3}{2}}}{\alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}} \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \in]1;2[, \\ \frac{1}{\alpha(\alpha-1)} = \frac{1}{2} & \text{si } \alpha = 2, \\ +\infty & \text{si } \alpha > 2. \end{cases}$$







□

Solution Exercice 12.

1. $f(t) = \begin{pmatrix} t + \sin(t) - 4\sin\left(\frac{t}{2}\right) \\ 3 + \cos(t) - 4\cos\left(\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix}$.

   $D_f = \mathbb{R}$. $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.

   Symétries :

   • La fonction x est impaire, la fonction y est paire. On restreint l'étude à $\mathbb{R}_+$ et on complète l'étude par réflexion d'axe $(\mathcal{O}_y)$.

   • La fonction y est 4π-périodique et $x(t+4\pi) = 4\pi + x(t)$. Il suffit donc d'étudier la courbe sur un intervalle de longueur 4π et de compléter l'étude par translation de vecteurs $4\pi\overrightarrow{i}$.

   Compte tenu des propriétés des fonctions coordonnées, on étudie la courbe sur $[0; 2\pi]$ et on complète par réflexion d'axe $(\mathcal{O}_y)$ et translations de vecteurs $4\pi\overrightarrow{i}$.

   Variations des fonctions coordonnées.

$$x'(t) = 1 + \cos(t) - 2\cos\left(\frac{t}{2}\right) = 1 + \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) - 2\cos\left(\frac{t}{2}\right)$$
$$= 2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\underbrace{\left(\cos\left(\frac{t}{2}\right) - 1\right)}_{\leqslant 0} \geqslant 0 \iff t \in [\pi; 2\pi].$$

$$y'(t) = -\sin(t) + 2\sin\left(\frac{t}{2}\right) = -2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)$$
$$= 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\left(1 - \cos\left(\frac{t}{2}\right)\right) \geqslant 0.$$

t	0		π		2π
$x'(t)$	0	$-$	0	$+$	
$x(t)$	0	$\searrow$	$\pi - 4$	$\nearrow$	2π
$y'(t)$	0		$+$		0
$y(t)$	0	$\nearrow$	2	$\nearrow$	8

Tangentes : Une tangente horizontale au point $M(2\pi)$.
Une tangente verticale au point $M(\pi)$.
Le point $M(0)$ est singulier (ou stationnaire). On poursuit l'étude :

$$f(t) = \begin{pmatrix} t + t - \frac{t^3}{6} - 4\frac{t}{2} + 4\frac{t^3}{48} + o(t^3) \\ 3 + 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - 4 + 4\frac{t^2}{8} - 4\frac{t^4}{4!\times 16} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{12}t^3 + o(t^4) \\ \frac{1}{32}t^4 + o(t^4) \end{pmatrix}$$
$$= M(0) + t^3\begin{pmatrix} -\frac{1}{12} \\ 0 \end{pmatrix} + t^4\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{32} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o(t^4) \\ o(t^4) \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{T_3} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{12} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{T_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{32} \end{pmatrix}$ sont non colinéaires.

$M(0)$ est un point ordinaire.

2. On détermine l'abscisse curviligne d'origine 0 :

$$s(t) = \int_0^t ||f'(\tau)||d\tau = \int_0^t \sqrt{x'(\tau)^2 + y'(\tau)^2}dt$$
$$= \int_0^t \sqrt{4\left(1 - \cos\left(\frac{\tau}{2}\right)\right)^2} = \int_0^t 2\left(1 - \cos\left(\frac{\tau}{2}\right)\right)d\tau$$
$$= 2\left(t - 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right).$$

   — Ainsi, l'intégrale $\int_0^{+\infty} ||f'(t)||dt$ diverge car $\lim\limits_{A\to+\infty} s(A) = +\infty$. A fortiori, l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} ||f'(t)||dt$ diverge. La longueur totale de la courbe est infinie.

   — La longueur de la courbe sur $[0; 4\pi]$, est égale à $s(4\pi) = 8$.

3. Soit $t \in]0; 4\pi[$.

   Déterminons le repère de Frenet $\mathcal{R}_t = (M(t), \overrightarrow{T}(t), \overrightarrow{N}(t))$ au point régulier de paramètre t.

• **Vecteur unitaire tangent**

$$\overrightarrow{T}(t)=\frac{1}{||f'(t)||}f'(t)=\frac{2(1-\cos\left(\frac{t}{2}\right))}{2(1-\cos\left(\frac{t}{2}\right))}\begin{pmatrix}-\cos(\frac{t}{2})\\ \sin(\frac{t}{2})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\cos(\frac{t}{2})\\ \sin(\frac{t}{2})\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\cos(\pi-\frac{t}{2})\\ \sin(\pi-\frac{t}{2})\end{pmatrix}$$

• **Vecteur unitaire normal**
$\overrightarrow{N}(t)=\begin{pmatrix}-\sin(\frac{t}{2})\\ -\cos(\frac{t}{2})\end{pmatrix}$

• La fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$. On utilise le théorème de relèvement : la fonction $\alpha : t\in]0;4\pi[\mapsto \pi-\frac{t}{2}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifie :

$$\overrightarrow{T}(t)=\begin{pmatrix}\cos(\alpha(t))\\ \sin(\alpha(t))\end{pmatrix}$$

Courbure : on utilise les formules de Frenet :

$$\gamma(t)=\frac{d\alpha}{ds}=\frac{dt}{ds}\frac{d\alpha}{dt}=-\frac{1}{2}\frac{1}{||f'(t)||}=-\frac{1}{4(1-\cos(\frac{t}{2}))}\neq 0.$$

On en déduit le rayon de courbure au point birégulier $M(t)$:

$$R(t)=-4\left(1-\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right).$$

4. La développée de la courbe est l'ensemble de ses centres de courbure aux points réguliers :

$$g : t\mapsto C(t)=M(t)+R(t)\overrightarrow{N}(t)$$
$$=\begin{pmatrix}t+\sin(t)-4\sin\left(\frac{t}{2}\right)\\ 3+\cos(t)-4\cos\left(\frac{t}{2}\right)\end{pmatrix}-4\left(1-\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)\begin{pmatrix}-\sin(\frac{t}{2})\\ -\cos(\frac{t}{2})\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}t-\sin(t)\\ 2\sin^2(\frac{t}{2})\end{pmatrix}.$$

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$.

Symétries

• La fonction y est 2π-périodique, et $\forall t\in\mathbb{R}, x(t+2\pi)=2\pi+x(t)$. Ainsi, on restreint l'étude à un intervalle de longueur 2π et on complète l'étude par translations de vecteur $2\pi\,\overrightarrow{i}$.

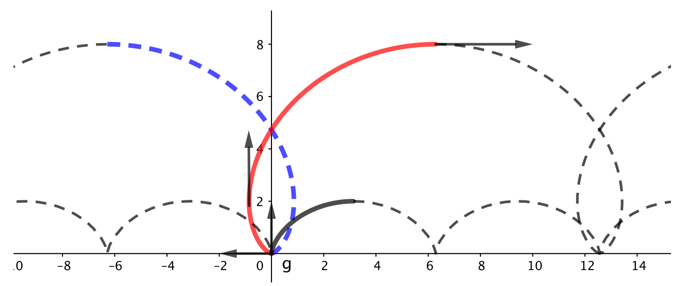
• La fonction x est impaire, la fonction y est paire. On restreint l'étude à $\mathbb{R}_+$ et on complète l'étude par réflexion d'axe $(\mathcal{O}_y)$.

Compte tenu des propriétés des fonctions coordonnées x, y, on restreint l'étude à l'intervalle $[0;\pi]$ et on complète l'étude par réflexion d'axe $(\mathcal{O}_y)$ et translations de vecteur $2\pi\,\overrightarrow{i}$.

Variations des fonctions coordonnées :
$x'(t)=1-\cos(t)\geqslant 0$.
$y'(t)=2\cos(\frac{t}{2})\sin(\frac{t}{2})\geqslant 0$.

t	0		π
$x'(t)$	0	$+$	
$x(t)$	0	$\nearrow$	π
$y'(t)$	0	$+$	0
$y(t)$	0	$\nearrow$	2

Tangentes :
$M(0)$ est un point singulier :
$f(t)\underset{t\to 0}{=}\begin{pmatrix}\frac{t^3}{6}+o(t^3)\\ \frac{t^2}{2}+o(t^3)\end{pmatrix}$.
$M(0)$ est un point de rebroussement de première espèce.



□

Solution Exercice 13. $f(t)=\begin{pmatrix}a\cos(t)\\ b\sin(t)\end{pmatrix}$. $D_f=\mathbb{R}$. $f\in\mathscr{C}^2(\mathbb{R})$.

• **Vecteur unitaire tangent**
$\overrightarrow{T}(t)=\frac{1}{\sqrt{a^2\sin^2(t)+b^2\cos^2(t)}}\begin{pmatrix}-a\sin(t)\\ b\cos(t)\end{pmatrix}$.

• **Vecteur unitaire normal**
$\overrightarrow{N}(t)=\frac{1}{\sqrt{a^2\sin^2(t)+b^2\cos^2(t)}}\begin{pmatrix}-b\cos(t)\\ -a\sin(t)\end{pmatrix}$.

• **Deux expressions de** $\frac{d\overrightarrow{T}}{dt}$

Une première expression :

$$\frac{d\overrightarrow{T}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{-a\cos(t)}{\sqrt{a^2\sin^2(t)+b^2\cos^2(t)}} + (-a\sin(t))\frac{-(2a^2\sin(t)\cos(t)-2b^2\sin(t)\cos(t))}{2(a^2\sin^2(t)+b^2\cos^2(t))^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{-b\sin(t)}{\sqrt{a^2\sin^2(t)+b^2\cos^2(t)}} + (b\cos(t))\frac{-(2a^2\sin(t)\cos(t)-2b^2\sin(t)\cos(t))}{2(a^2\sin^2(t)+b^2\cos^2(t))^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a\left[\frac{-\cos(t)}{\sqrt{a^2\sin^2(t)+b^2\cos^2(t)}} + \sin(t)\frac{\sin(t)\cos(t)(a^2-b^2)}{(a^2\sin^2(t)+b^2\cos^2(t))^{\frac{3}{2}}}\right] \\ b\left[\frac{-\sin(t)}{\sqrt{a^2\sin^2(t)+b^2\cos^2(t)}} - \cos(t)\frac{\sin(t)\cos(t)(a^2-b^2)}{(a^2\sin^2(t)+b^2\cos^2(t))^{\frac{3}{2}}}\right] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-ab^2\cos(t)}{(a^2\sin^2(t)+b^2\cos^2(t))^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{-a^2b\sin(t)}{(a^2\sin^2(t)+b^2\cos^2(t))^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\frac{ab}{a^2\sin^2(t)+b^2\cos^2(t)}}\overrightarrow{N}.$$

Une seconde expression :

$$\frac{d\overrightarrow{T}}{dt} = \frac{ds}{dt}\frac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \boldsymbol{||f'(t)||}\gamma\overrightarrow{N}$$

On obtient

$$\gamma(t) = \frac{ab}{\left(a^2\sin^2(t)+b^2\cos^2(t)\right)^{\frac{3}{2}}}$$

puis une paramétrisation de la développée :

$$t \mapsto C(t) = \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ b\sin(t) \end{pmatrix} + \frac{\left(a^2\sin^2(t)+b^2\cos^2(t)\right)^{\frac{3}{2}}}{ab}\overrightarrow{N}(t)$$

$$= \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ b\sin(t) \end{pmatrix} + \frac{\left(a^2\sin^2(t)+b^2\cos^2(t)\right)}{ab}\begin{pmatrix} -b\cos(t) \\ -a\sin(t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{(a^2-b^2)}{a}\cos^3(t) \\ \frac{(b^2-a^2)}{b}\sin^3(t) \end{pmatrix}$$

Les fonctions $x : t \mapsto \cos^3(t)$ et $y : t \mapsto \sin^3(t)$ sont 2π-périodiques, x est paire, y impaire. De plus $x(\pi - t) = -x(t)$ et $y(\pi - t) = y(t)$. On restreint l'étude à $I = [0; \frac{\pi}{2}]$ et on complète par réflexions d'axe $(\mathcal{O}_x)$ et $(\mathcal{O}_y)$.

La fonction x est décroissante, la fonction y est croissante sur I. Les points $M(0)$ et $M(\frac{\pi}{2})$ sont singuliers.

$$x(t) = \cos^3(t) \underset{t\to 0}{=} 1 - \frac{3t^2}{2} + o(t^3)$$

$$y(t) = \sin^3(t) \underset{t\to 0}{=} t^3 + o(t^3).$$

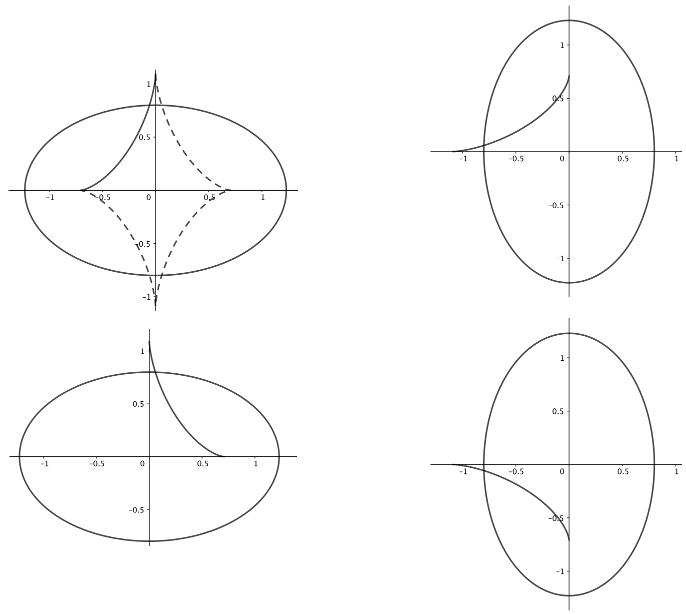
Le point $M(0)$ est un point de rebroussement de première espèce de même que $M(\frac{\pi}{2})$ car $x(t+\frac{\pi}{2}) = -y(t)$ et $y(t+\frac{\pi}{2}) = x(t)$ donc

$$x(t+\frac{\pi}{2}) \underset{t\to\frac{\pi}{2}}{=} -y(t) \underset{t\to\frac{\pi}{2}}{=} -(t-\frac{\pi}{2})^3 + o((t-\frac{\pi}{2})^3).$$

et

$$y(t+\frac{\pi}{2}) \underset{t\to\frac{\pi}{2}}{=} x(t) \underset{t\to\frac{\pi}{2}}{=} 1 - \frac{3(t-\frac{\pi}{2})^2}{2} + o((t-\frac{\pi}{2})^3).$$

Quatre situations possibles suivant le signe de a, de b et la relation d'ordre $|a| \leqslant b$ ou $|a| \geqslant |b|$.



□

Solution Exercice 14. $f(t) = \begin{pmatrix} (1+\cos^2(t))\sin(t) \\ \sin^2(t)\cos(t) \end{pmatrix}$. $D_f = \mathbb{R}$. $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$.

Symétries : • Les fonctions x et y sont impaires. On restreint l'étude à $\mathbb{R}_+$ et on complète par symétrie centrale de centre O.

• Les fonctions x et y sont 2π périodiques, on restreint l'étude à $\mathbb{R}_+ \cap [-\pi; \pi] = [0; \pi]$.

• Enfin, pour tout $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $x(\pi - t) = x(t)$ et $y(\pi - t) = -y(t)$ donc on restreint l'étude à $[0; \frac{\pi}{2}]$ et on complète l'étude par réflexion d'axe $(\mathcal{O}_x)$.

Variations des fonctions coordonnées

$$\begin{aligned}
x'(t) &= (1+\cos^2(t))\cos(t) - 2\sin^2(t)\cos(t) = \cos(t)(1+\cos^2(t) - 2\sin^2(t)) \\
&= \cos(t)(1+\cos^2(t) - 2 + 2\cos^2(t)) = \cos(t)(3\cos^2(t) - 1) \\
&\geqslant 0 \iff t \in [0; \arccos(\frac{1}{\sqrt{3}})].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y'(t) &= 2\sin(t)\cos^2(t) - \sin^3(t) = \sin(t)(3\cos^2(t) - 1) \\
&\geqslant 0 \iff t \in [0; \arccos(\frac{1}{\sqrt{3}})].
\end{aligned}$$

On note $\alpha = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$: $\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\sin(\alpha) = \sqrt{1-\cos^2(\alpha)} = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

t	0		α		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$		$+$	0	$-$	0
$x(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\searrow$	1
$y'(t)$	0	$+$	0	$-$	
$y(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	0

Tangentes : • Une tangente horizontale au point $M(0)$, une tangente verticale au point $M(\frac{\pi}{2})$.

• Le point $M(\alpha)$ est singulier. On poursuit l'étude.

$$\begin{aligned}
x''(t) &= -\sin(t)(3\cos^2(t) - 1) + \cos(t)(-6\cos(t)\sin(t)) \\
&= \sin(t)(1 - 9\cos^2(t)) \\
&\Longrightarrow x''(\alpha) = -2\sqrt{\frac{2}{3}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y''(t) &= \cos(t)(3\cos^2(t) - 1) + \sin(t)(-6\cos(t)\sin(t)) \\
&= \cos(t)(3\cos^2(t) - 1 - 6\sin^2(t)) = \cos(t)(9\cos^2(t) - 7) \\
&\Longrightarrow y''(\alpha) = -\frac{4}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x^{(3)}(t) &= \cos(t)(1 - 9\cos^2(t)) + \sin(t)(18\sin(t)\cos(t)) \\
&= \cos(t)(1 - 9\cos^2(t) + 18(1-\cos^2(t))) \\
&= \cos(t)(19 - 27\cos^2(t)) \\
&\Longrightarrow x^{(3)}(\alpha) = \frac{10}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y^{(3)}(t) &= -\sin(t)(9\cos^2(t) - 7) + \cos(t)(-18\sin(t)\cos(t)) \\
&= \sin(t)(7 - 9\cos^2(t) - 18\cos^2(t)) \\
&= \sin(t)(7 - 27\cos^2(t)) \\
&\Longrightarrow y^{(3)}(\alpha) = -2\sqrt{\frac{2}{3}}
\end{aligned}$$

Les vecteurs $\sqrt{3}f^{(2)} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\sqrt{3}f^{(3)} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix}$ sont non colinéaires. Ainsi, $M(\alpha)$ est un point de rebroussement de première espèce.

• **Vecteur unitaire tangent** Soit $t \in [0; 2\pi]$.

$$\begin{aligned}
||f'(t)|| &= \sqrt{\cos^2(t)(3\cos^2(t) - 1)^2 + \sin^2(t)(3\cos^2(t) - 1)^2} \\
&= |3\cos(t)^2 - 1|
\end{aligned}$$

On évite les points singuliers $M(\alpha)$, $M(\pi - \alpha)$, $M(\alpha + \pi)$ et $M(2\pi - \alpha)$. Ainsi,

$$\overrightarrow{T}(t) = \frac{1}{|3\cos^2(t) - 1|}\begin{pmatrix} \cos(t)(3\cos^2(t) - 1) \\ \sin(t)(3\cos^2(t) - 1) \end{pmatrix}$$

• On mène l'étude sur $[0; \alpha; \alpha[$. L'étude sur $]\alpha; \pi - \alpha[$, $]\pi - \alpha; \alpha + \pi[$, $]\alpha + \pi; 2\pi - \alpha[$, $]2\pi - \alpha; 2\pi]$ est analogue.

Dans ce cas, $t \in [0; \alpha[$,

$$\overrightarrow{T}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

et

$$\frac{d\overrightarrow{T}}{dt} = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(t + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_1(t)) \\ \sin(\alpha_1(t)) \end{pmatrix},$$

avec α_1 la fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0; \alpha[$, $\alpha_1 : t \mapsto t + \frac{\pi}{2}$.

• **Courbure :** les formules de Frenet donnent :

$$\gamma(t) = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{dt}{ds}\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{||f'(t)||} = \frac{1}{3\cos^2(t) - 1} \neq 0.$$

On obtient le rayon de courbure $R(t) = 3\cos^2(t) - 1$.

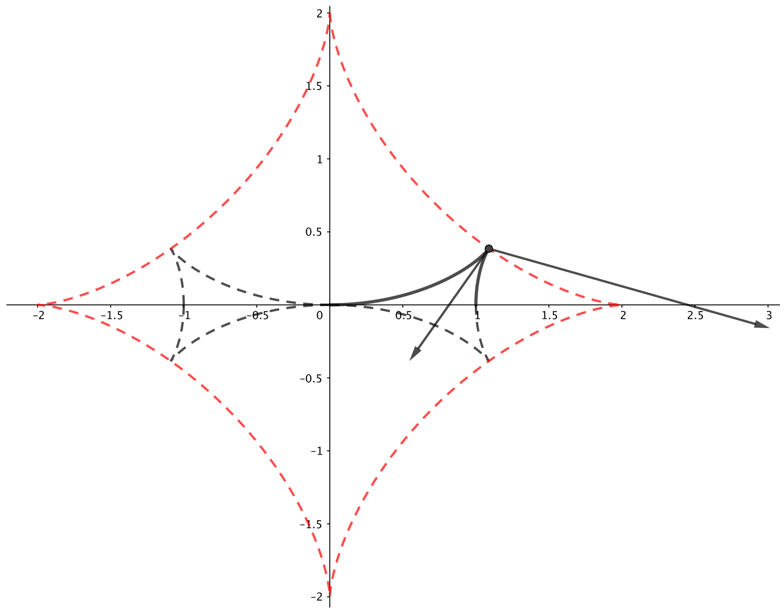
• **Développée**

On en déduit une paramétrisation de la développée sur $[0;\alpha[$:

$$t \mapsto M(t) + R(t)\overrightarrow{N}(t) = \begin{pmatrix} (1+\cos^2(t))\sin(t) \\ \sin^2(t)\cos(t) \end{pmatrix} + (3\cos^2(t)-1)\begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$
$$\mapsto \begin{pmatrix} 2\sin^3(t) \\ 2\cos^3(t) \end{pmatrix}$$

Il s'agit en fait d'une paramétrisation valable en tout point birégulier, comme on le constate en déterminant des relèvements sur chacun des intervalles précédents.

La développée recherchée est donc une astroïde déjà étudiée à L'Exercice 3.



□

Solution Exercice *15.* $f(t) = \begin{pmatrix} 3\cos(t) - \cos(3t) \\ 3\sin(t) - \sin(3t) \end{pmatrix}$. $D_f = \mathbb{R}$. $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$.

Symétries :

• La fonction x est paire, la fonction y est impaire.

On restreint l'étude à $\mathbb{R}_+$ et on complète par réflexion d'axe $(\mathcal{O}_x)$.

• Les fonction x est y sont 2π-périodiques.

On restreint l'étude à $[-\pi;\pi] \cap \mathbb{R}_+ = [0,\pi]$.

• Enfin pour tout $t \in [0;\frac{\pi}{2}]$, $x(\pi - t) = -x(t)$ et $y(\pi - t) = y(t)$. On restreint l'étude à $[0;\frac{\pi}{2}]$ et on complète par réflexion d'axe $(\mathcal{O}_y)$.

Variations des fonctions coordonnées

En utilisant les formules trigonométriques de factorisation :

$$x'(t) = -3\sin(t) + 3\sin(3t) = 3(\sin(3t) - \sin(t))$$
$$= 6\sin(t)\cos(2t) \geqslant 0 \iff t \in [0;\frac{\pi}{4}].$$

$$y'(t) = -3(\cos(3t) - \cos(t)) = 6\sin(2t)\sin(t) \geqslant 0 \text{ pour tout } t \in [0;\frac{\pi}{2}].$$

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	0	$+$	0	$-$	
$x(t)$	0	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	0
$y'(t)$	0		$+$		0
$y(t)$	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	4

Tangentes :

• Le point $M(0)$ est un point singulier. On poursuit l'étude :

$$f(t) \underset{t\to 0}{=} \begin{pmatrix} 2 + \frac{t^2}{2}(-3+9) + o(t^3) \\ \frac{t^3}{6}(-3+27) + o(t^3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 3t^2 + o(t^3) \\ 4t^3 + o(t^3) \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $M(0)$ est un point de rebroussement de première espèce.

• Une tangente verticale au point $M(\frac{\pi}{4})$, une tangente horizontale au point $M(\frac{\pi}{2})$.

• **Vecteur unitaire tangent :**

Soit $M(t)$ un point régulier : $t \in [0;2\pi] \setminus \{0,\pi\}$.

$||f'(t)|| = \sqrt{36\sin^2(t)\cos^2(2t) + 36\sin^2(2t)\sin^2(t)} = 6|\sin(t)|$.

$$\overrightarrow{T}(t) = \frac{6\sin(t)}{6|\sin(t)|}\begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}$$

• **Vecteur unitaire normal**

$$\overrightarrow{N}(t) = \frac{6\sin(t)}{6|\sin(t)|}\begin{pmatrix} -\sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix}.$$

• **Deux expressions de** $\frac{d\overrightarrow{T}}{dt}$

Une première expression
Sur $]0;\pi[$, $\overrightarrow{T}(t)=\begin{pmatrix}\cos(2t)\\ \sin(2t)\end{pmatrix}$ donc $\frac{d\overrightarrow{T}}{dt}=2\overrightarrow{N}(t)$.
Sur $]\pi;2\pi[$ on obtient également $\frac{d\overrightarrow{T}}{dt}=2\overrightarrow{N}(t)$.
Une seconde expression :

$$\frac{d\overrightarrow{T}}{dt}=\frac{ds}{dt}\frac{d\overrightarrow{T}}{ds}=||f'(t)||\gamma(t)\overrightarrow{N}(t).$$

On obtient

$$0\neq\gamma(t)=\frac{2}{||f'(t)||}=\begin{cases}\frac{1}{3\sin(t)} & \text{si } t\in]0;\pi[\\ -\frac{1}{3\sin(t)} & \text{si } t\in]\pi;2\pi[.\end{cases}$$

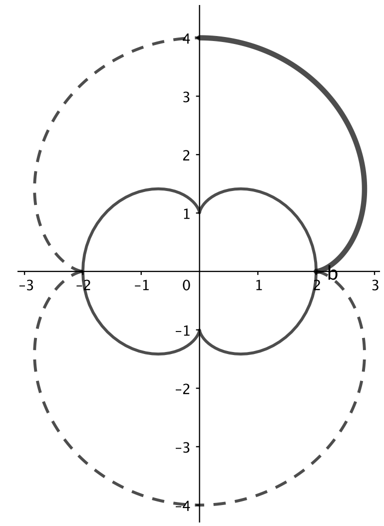
Développée : En tout point birégulier $M(t), t\neq 0,\pi$, en utilisant les formules de trigonométriques de factorisation :

$$\begin{aligned} g:t\mapsto & \begin{pmatrix}3\cos(t)-\cos(3t)\\ 3\sin(t)-\sin(3t)\end{pmatrix}+3\sin(t)\begin{pmatrix}-\sin(2t)\\ \cos(2t)\end{pmatrix}\\ \mapsto & \frac{1}{2}\begin{pmatrix}3\cos(t)+\cos(3t)\\ 3\sin(t)+\sin(3t)\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Ainsi, en tout point birégulier $M(t)$, on a

$$g(t+\frac{\pi}{2})=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}f(t).$$

Il est donc possible d'obtenir la développée de la néphroïde via la composée commutative de l'homothétie de rapport $\frac{1}{2}$ et de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.



□

Solution Exercice 16. On ne demande pas de résoudre l'équation différentielle ordinaire.

On note $M(t)=(t;y(t)), t\in]-1;1[$ le point d'abscisse t du graphe d'une solution $y\in\mathscr{C}^2(]-1;1[)$ de l'équation différentielle sur $]-1;1[$; on note I cet intervalle contenant 0 sur lequel $1-t^2$ ne s'annule pas.

Cette équation différentielle possède une une infinité de solutions y puisqu'une seule condition initiale est fixée : $y(0)=0$.

On va déterminer au point $M(0)=(0,y(0))=O$ la courbure $\gamma(0)$ de la courbe paramétrée par $t\mapsto\begin{pmatrix}t\\ y(t)\end{pmatrix}$ pour toute solution y telle que $y(0)=0$.

On en déduira le centre de courbure $C(0)=M(0)+R(0)\overrightarrow{N}(0)=O+\frac{1}{\gamma(0)}\overrightarrow{N}(0)$.

- **Vecteur dérivé :**
$f'(t)=\begin{pmatrix}1\\ y'(t)\end{pmatrix}$ donc $||f'(t)||=\sqrt{1+y'(t)^2}\neq 0$ pour tout $t\in I$.
- **Vecteur unitaire tangent :**
$\overrightarrow{T}(t)=\frac{1}{||f'(t)||}f'(t)=\frac{1}{\sqrt{1+y'(t)^2}}\begin{pmatrix}1\\ y'(t)\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{T}(0)=\frac{1}{\sqrt{1+y'(0)^2}}\begin{pmatrix}1\\ y'(0)\end{pmatrix}$

Vecteur unitaire normal :
$\overrightarrow{N}(0)=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\overrightarrow{T}(0)=\frac{1}{\sqrt{1+y'(0)^2}}\begin{pmatrix}-y'(0)\\ 1\end{pmatrix}$.

- **Deux expressions de $\frac{d\overrightarrow{T}}{dt}(0)$:**

Une première expression : On dérive pour tout $t \in I$:

$$\begin{aligned}
\frac{d\overrightarrow{T}}{dt}(t) &= \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+y'(t)^2}} \\ \frac{y'(t)}{\sqrt{1+y'(t)^2}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\times 2\times y''(t)y'(t)\left(1+y'(t)^2\right)^{-\frac{3}{2}} \\ y''(t)\left(1+y'(t)^2\right)^{-\frac{1}{2}} + y'(t)\times(-\frac{1}{2})\times 2\times y''(t)y'(t)\left(1+y'(t)^2\right)^{-\frac{3}{2}} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{(1+y'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}\begin{pmatrix} -y''(t)y'(t) \\ y''(t)(1+y'(t)^2) - y'(t)^2y''(t) \end{pmatrix} \\
&= \frac{y''(t)}{(1+y'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}\begin{pmatrix} -y'(t) \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{d\overrightarrow{T}}{dt}(0) = \frac{y''(0)}{(1+y'(0)^2)^{\frac{3}{2}}}\begin{pmatrix} -y'(0) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

y est solution de l'équation différentielle donc $(1-0^2)y''(0)-2\times 0y'(0)-2y(0)=1$ donne $y''(0)=1$. Ainsi,

$$\frac{d\overrightarrow{T}}{dt}(0) = \frac{1}{1+y'(0)^2}\overrightarrow{N}(0).$$

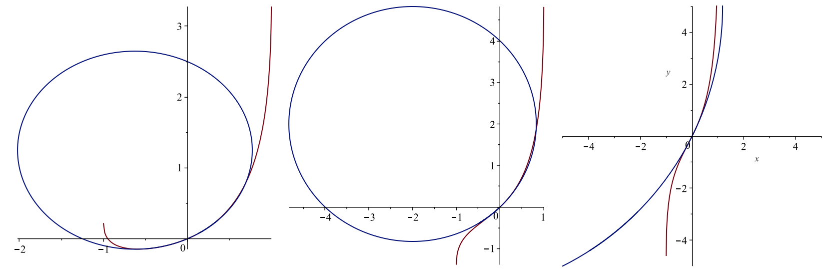
Une seconde expression :
$\frac{d\overrightarrow{T}}{dt}(0) = \frac{dT}{ds}(0)\frac{ds}{dt}(0) = ||f'(0)||\gamma(0)\overrightarrow{N}(0) = \sqrt{1+y'(0)^2}\gamma(0)\overrightarrow{N}(0)$.
D'où la courbure et le rayon de courbure ; les points sont tous biréguliers :

$$\gamma(0) = \frac{1}{(1+y'(0)^2)^{\frac{3}{2}}} \neq 0 \quad \text{et} \quad R(0) = \frac{1}{\gamma(0)} = (1+y'(0)^2)^{\frac{3}{2}}.$$

• **Centre de courbure au point O :**

$$\begin{aligned}
C(0) = M(0) + R(0)\boldsymbol{\overrightarrow{N}(0)} &= O + (1+y'(0)^2)^{\frac{3}{2}} \times \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1}+\boldsymbol{y'(0)^2}}}\begin{pmatrix} -y'(0) \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= (1+y'(0)^2)\begin{pmatrix} -y'(0) \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ci-dessous, les courbes intégrales et les cercles de courbure au point $O=(0;0)$ pour $y'(0)\in\{-\frac{1}{2};1;2\}$



$\square$

Solution Exercice 17. • Si A est l'extrémité du segment $[AB]$ situé sur l'axe des abscisses alors ses coordonnées sont de la forme $(t,0)$ avec $t\in[-a;a]$ et $B(0;y_B(t))$ vérifie $a^2 = AB^2 = AO^2+OB^2 = t^2+y_B(t)^2$ i.e.

$$y_B(t)^2 = a^2 - t^2.$$

• Ainsi, deux possibilités pour B ; les deux points symétriques par rapport à $(\mathcal{O}_x)$: $(0,\sqrt{a^2-t^2})$ et $(0;-\sqrt{a^2-t^2})$. On fait l'étude uniquement dans le cas $B(t)=(0;\sqrt{a^2-t^2})$: le support de l'enveloppe des droites (AB) est la réunion de la courbe Γ obtenue dans ce cas et de la courbe symétrique obtenue par réflexion d'axe $(\mathcal{O}_x)$.

• On note $A(t)=(t;0)$, $B(t)=(0;\sqrt{a^2-t^2})$ et le vecteur dirigeant la droite (AB) : $\overrightarrow{u}(t) = \overrightarrow{A(t)B(t)} = (-t;\sqrt{a^2-t^2})$.

• Les fonctions $t\mapsto A(t)$ et $t\mapsto\overrightarrow{u}(t)$ sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]-a;a[$.
Notons Γ si elle existe, l'enveloppe des droites (AB).
Un point régulier M appartient à l'enveloppe Γ si et seulement si :

— $\exists t\in]-a;a[, \exists\lambda(t)\in\mathbb{R} : M(t) = A(t)+\lambda(t)\overrightarrow{u}(t)$

— $(A(t)B(t))$ est la tangente à Γ au point $M(t)$ i.e. $\overrightarrow{u}(t)$ et $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ sont colinéaires.

Notons que les vecteurs $\overrightarrow{u}(t) = \left(-t;\sqrt{a^2-t^2}\right)$ et $\overrightarrow{u}'(t) = \left(-1;\frac{-t}{\sqrt{a^2-t^2}}\right)$ ne sont pas colinéaires :

$$\begin{vmatrix} -t & -1 \\ \sqrt{a^2-t^2} & \frac{-t}{\sqrt{a^2-t^2}} \end{vmatrix} = \frac{t^2}{\sqrt{a^2-t^2}} + \sqrt{a^2-t^2} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2-t^2}} \neq 0$$

La seconde condition équivaut à

$$\det\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt};u(t)\right)=0 \iff \det(A'(t)+\lambda'(t)\overrightarrow{u}(t)+\lambda(t)\overrightarrow{u}'(t),\overrightarrow{u}(t))=0$$

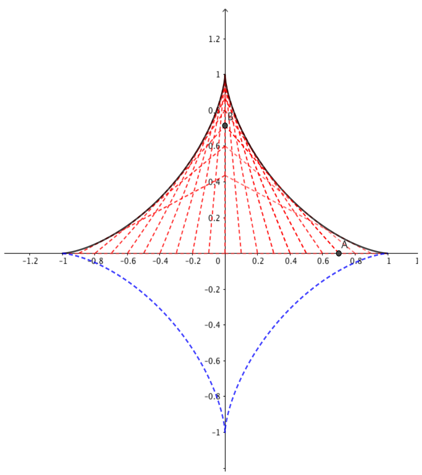
$$\iff \lambda(t)=\frac{\det(A'(t),\overrightarrow{u}(t))}{\det(\overrightarrow{u}(t);\overrightarrow{u}'(t))}$$

$$\iff \lambda(t)=\frac{\begin{vmatrix}1 & -t\\ 0 & \sqrt{a^2-t^2}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-t & -1\\ \sqrt{a^2-t^2} & \frac{-t}{\sqrt{a^2-t^2}}\end{vmatrix}}$$

$$\iff \lambda(t)=\frac{\sqrt{a^2-t^2}}{\frac{a^2}{\sqrt{a^2-t^2}}}=\frac{a^2-t^2}{a^2}.$$

Ainsi, définie $\lambda\in\mathscr{C}^1(]-a;a[)$ vérifie les deux conditions ci-dessus et l'enveloppe de la famille des droites (AB) est la courbe Γ paramétrée par

$$t\mapsto A(t)+\lambda(t)\overrightarrow{u}(t)=\begin{pmatrix}t\\0\end{pmatrix}+\frac{a^2-t^2}{a^2}\begin{pmatrix}-t\\ \sqrt{a^2-t^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{t^3}{a^2}\\ \frac{(a^2-t^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2}\end{pmatrix}$$



et $t\mapsto\begin{pmatrix}\frac{t^3}{a^2}\\ -\frac{(a^2-t^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2}\end{pmatrix}$.

Ci-contre l'astroïde pour $a=1$.

□

Solution Exercice 18.

On note $A(t)=(t,\frac{1}{t})$, $B(t)=(2t;\frac{1}{2t})$ pour $t\neq 0$.

On note $\overrightarrow{u}(t)=\overrightarrow{A(t)B(t)}=(t;-\frac{1}{2t})$ un vecteur directeur de $(A(t)B(t))$.

Les fonctions de t ainsi définies sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^*$.

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u}'$ ne sont pas colinéaires car

$$\begin{vmatrix}t & 1\\ -\frac{1}{2t} & \frac{1}{2t^2}\end{vmatrix}=\frac{1}{t}\neq 0.$$

• On note $\mathscr{C}$ l'enveloppe, si elle existe, de la famille de droites (AB) paramétrée par une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, $f:t\mapsto M(t)$. Ainsi, en un point régulier de $\mathscr{C}$:

— Pour tout $t\neq 0$, $\exists\lambda(t)\in\mathbb{R}, M(t)=A(t)+\lambda(t)\overrightarrow{u}(t)\in\mathscr{C}\cap(A(t)B(t))$

— Pour tout $t\neq 0$, $\det(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt};\overrightarrow{u}(t))=0$.

On obtient

$$0=\det\left(A'(t)+\lambda'(t)\overrightarrow{u}(t)+\lambda(t)\overrightarrow{u}'(t);\overrightarrow{u}(t)\right)\iff\lambda(t)=\frac{\det(A'(t),u(t))}{\det(u(t),u'(t))}.$$

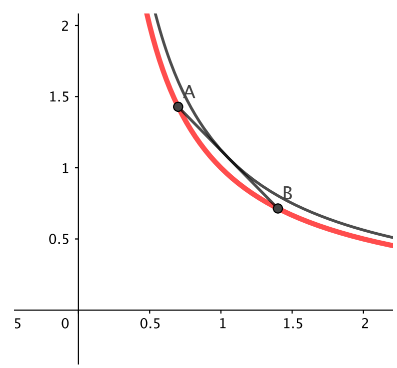
On obtient

$$\lambda(t)=t\begin{vmatrix}1 & t\\ -\frac{1}{t^2} & -\frac{1}{2t}\end{vmatrix}=\frac{1}{2}.$$

On en déduit que l'enveloppe, si elle existe, des droites (AB) est paramétrée par :

$$t\mapsto f(t)=\begin{pmatrix}t\\ \frac{1}{t}\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}t\\ -\frac{1}{2t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}t\\ \frac{3}{4t}\end{pmatrix}.$$

La courbe obtenue est régulière sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$; les tangentes au point $M(t)$ sont donc bien dirigées par le vecteur dérivé $f'(t)$ colinéaire à $\overrightarrow{u}(t)$: il s'agit bien de l'enveloppe cherchée : c'est une hyperbole dont une équation cartésienne : $xy=\frac{9}{8}$.



□

Solution Exercice 19. On note $A(t)=(\frac{\cos(t)}{2};\frac{\sin(t)}{2})$ le milieu de $[PQ]$.

$\overrightarrow{n}(t)=(-\cos(t);\sin(t))$ un vecteur normal à la médiatrice.

$\overrightarrow{u}(t)=(\sin(t),\cos(t))$ un vecteur directeur de la médiatrice.

Ainsi définies les fonctions $\overrightarrow{u}, A$ sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

L'enveloppe $\mathscr{C}$ de la médiatrice est, si elle existe, paramétrée par l'application $f : t \mapsto M(t)$:

$$f : t \mapsto M(t) = A(t) + \lambda(t)\overrightarrow{u}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\cos(t)}{2} \\ \frac{\sin(t)}{2} \end{pmatrix} + \lambda(t)\begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \in \mathscr{C} \cap (PQ)$$

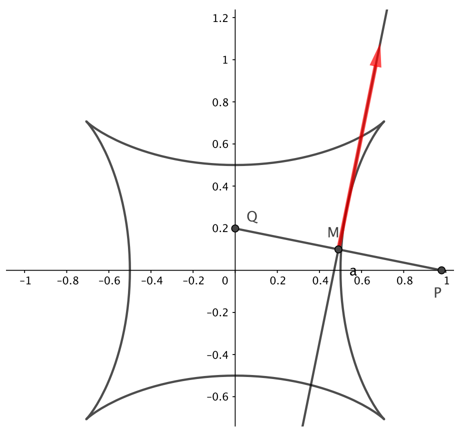
avec $\lambda(t)$ tel qu'en un point régulier de $\mathscr{C}$, on ait $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ et $\overrightarrow{u}(t)$ sont colinéaires.

On obtient la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}')$ étant libre :

$$\lambda(t) = \frac{\det(A'(t), \overrightarrow{u}(t))}{\det(\overrightarrow{u}(t), \overrightarrow{u}'(t))} = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{\sin(t)}{2} & \sin(t) \\ \frac{\cos(t)}{2} & \cos(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sin(t) & \cos(t) \\ \cos(t) & -\sin(t) \end{vmatrix}}$$
$$= \sin(t)\cos(t).$$

On en déduit que l'enveloppe des médiatrices de $[PQ]$ est la courbe régulière sauf en $M(\frac{\pi}{4})$, $M(\frac{3\pi}{4})$, $M(\frac{5\pi}{4})$, $M(\frac{7\pi}{4})$.

$$f : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t)(\frac{1}{2} + \sin^2(t)) \\ \sin(t)(\frac{1}{2} + \cos^2(t)) \end{pmatrix}$$



□

Solution Exercice 20.

1. $D_t : (1-t^2)x + 2ty - (1+t^2) = 0$. Un vecteur normal à D_t est $(1-t^2, 2t)$ donc un vecteur directeur est $(-2t, 1-t^2)$.

   De plus si $t \neq 0$ $A(t) = (0; \frac{1+t^2}{2t}) \in D_t$.

L'enveloppe $\mathscr{C}$, si elle existe, est paramétrée par l'application $f : t \mapsto M(t)$ telle que

$$f(t) = A(t) + \lambda(t)\overrightarrow{u}(t) \in \mathscr{C} \cap D_t$$

avec

$$\det(\overrightarrow{u}(t), \overrightarrow{u}'(t)) = \begin{vmatrix} -2t & -2 \\ 1-t^2 & -2t \end{vmatrix} = 2(t^2+1) \neq 0$$

et en un point régulier de $\mathscr{C}$:

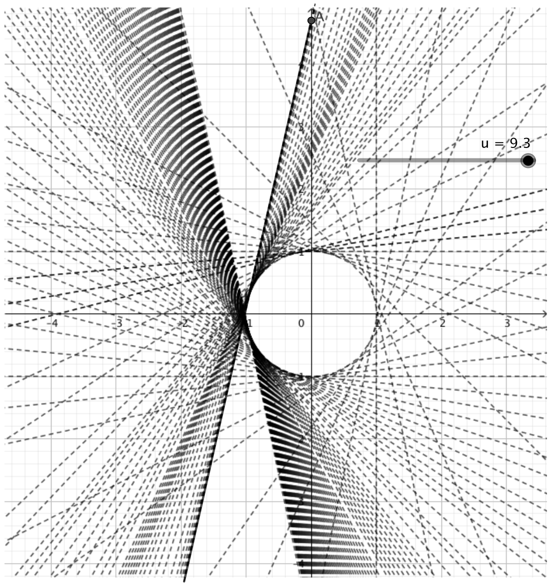
$$\lambda(t) = \frac{\det(A'(t), \overrightarrow{u}(t))}{\det(\overrightarrow{u}(t), \overrightarrow{u}'(t))} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -2t \\ \frac{4t^2-2(1+t^2)}{4t^2} & 1-t^2 \end{vmatrix}}{2(t^2+1)}$$
$$= \frac{\frac{t^2-1}{2t^2} \times 2t}{2(t^2+1)} = \frac{t^2-1}{2t(t^2+1)}$$

Ainsi, la courbe paramétrée sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f : t \in \mathbb{R}^* \mapsto M(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1+t^2}{2t} \end{pmatrix} + \frac{t^2-1}{2t(t^2+1)}\begin{pmatrix} -2t \\ 1-t^2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \frac{(t^2+1)^2-(t^2-1)^2}{2t(t^2+1)} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \frac{4t^2}{2t(t^2+1)} \end{pmatrix}.$$

Il s'agit du cercle de centre O et de rayon 1, privé du point $(1;0)$.

L'enveloppe de D_t est le cercle complet D_1 est tangente en $(1;0)$.



2. $\Delta_t : (t-2)x + (3t-2t^2)y + t^3 = 0$.

   Le vecteur $(t-2, 3t-2t^2)$ est un vecteur normal donc le vecteur $(2t^2-3t, t-2)$ est un vecteur directeur de la droite Δ_t.

   Si $t \neq 2$ alors le point $A(t) = (-\frac{t^3}{t-2}; 0)$ appartient à Δ_t.

   $\overrightarrow{u}'(t) = (4t-3; 1)$ donc pour tout $t \neq 1, 3$:

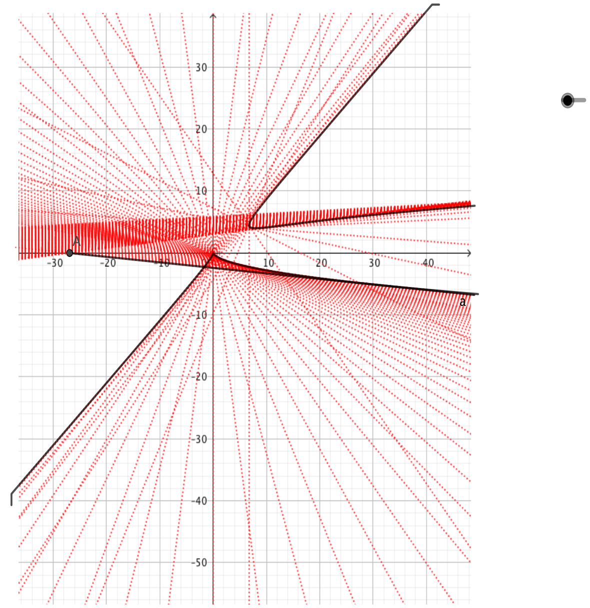
$$\det(\overrightarrow{u}(t), \overrightarrow{u}'(t)) = \begin{vmatrix} 2t^2-3t & 4t-3 \\ t-2 & 1 \end{vmatrix} = -2(t-1)(t-3) \neq 0$$

   et

$$\det(A'(t), \overrightarrow{u}(t)) = \begin{vmatrix} \frac{-2t^2(t-3)}{(t-2)^2} & 2t^2-3t \\ 0 & t-2 \end{vmatrix} = -\frac{2t^2(t-3)}{t-2}.$$

   On obtient une paramétrisation de l'enveloppe

$$f : t \neq 1,2,3 \mapsto M(t) = \begin{pmatrix} -\frac{t^3}{t-2} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{(t-1)(t-2)} \begin{pmatrix} 2t^2-3t \\ t-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t^3}{t-1} \\ \frac{t^2}{t-1} \end{pmatrix}$$



tel qu'en chaque point régulier de la courbe qu'elle paramètre, une droite D_t est la tangente au point $M(t)$. □

Solution Exercice 21. Un paramétrage de la parabole est donné par la fonction

$$f : t \mapsto M(t) = \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2p} \\ t \end{pmatrix} \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}).$$

Vecteur unitaire tangent :

$$\overrightarrow{T}(t) = \frac{p}{\sqrt{t^2+p^2}} \begin{pmatrix} \frac{t}{p} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vecteur normal :
$\overrightarrow{N}(t) = \frac{p}{\sqrt{t^2+p^2}} \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{t}{p} \end{pmatrix}$.

Deux expressions de $\frac{d\overrightarrow{T}}{dt}$

- *Une première expression*

$$\frac{d\overrightarrow{T}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{p^2}{(t^2+p^2)^{\frac{3}{2}}} \\ -\frac{pt}{(t^2+p^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix} = -\frac{p}{t^2+p^2}\overrightarrow{N}(t)$$

- *Une seconde expression*

$$\frac{d\overrightarrow{T}}{dt} = \frac{ds}{dt}\frac{d\overrightarrow{T}}{ds} = ||f'(t)||\gamma(t)\overrightarrow{N}(t).$$

Courbure : on obtient

$$\gamma(t) = -\frac{p}{t^2+p^2}\frac{p}{\sqrt{t^2+p^2}} = -\frac{p^2}{(t^2+p^2)^{\frac{3}{2}}} \neq 0$$

et le rayon de courbure :

$$R(t) = -\frac{(t^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}.$$

Ainsi la développée de la parabole est paramétrée par :

$$\begin{aligned} C : t \in \mathbb{R} \mapsto & M(t) + R(t)\overrightarrow{N}(t) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2p} \\ t \end{pmatrix} - \frac{(t^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}\frac{p}{\sqrt{t^2+p^2}}\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{t}{p} \end{pmatrix}. \\ &= \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2p} + \frac{p^2+t^2}{p} \\ -\frac{t^3}{p^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Le cercle de courbure de paramètre $t \neq 0$ admet pour équation cartésienne :

$$\left(x - \frac{3t^2+2p^2}{2p}\right)^2 + \left(y + \frac{t^3}{p^2}\right)^2 = \frac{(t^2+p^2)^3}{p^4}.$$

On cherche $(\frac{u^2}{2p}, u) \in \mathcal{P}$ différent de $(\frac{t^2}{2p}, t)$ (c'est-à-dire $t \neq u$) appartenant à ce cercle. On obtient en injectant $x = \frac{u^2}{2p}$ et $y = t$ dans l'équation du cercle de courbure :

$$\frac{(3t+u)(t-u)^3}{4p^2} = 0 \Longleftrightarrow u = -3t$$

puisque $t \neq u$.

- On note $P(t) = (\frac{t^2}{2p}; t)$, $Q(t) = (\frac{9t^2}{p}, -3t)$.
- $\overrightarrow{u}(t) = \begin{pmatrix} \frac{4t^2}{p} \\ -4t \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u}'(t) = \begin{pmatrix} \frac{8t}{p} \\ -4 \end{pmatrix}$.

  On obtient $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}') = \frac{16t^2}{p}$.

  L'enveloppe de la famille de droite $(P(t)Q(t))$ est donc paramétrée par

$$t \in \mathbb{R}^* \mapsto g(t) = P(t) + \lambda(t)\overrightarrow{u}(t)$$

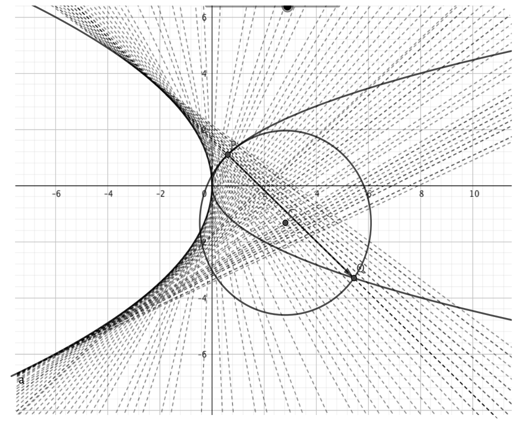
avec

$$\lambda(t) = \frac{\det(P'(t), \overrightarrow{u}(t))}{\det(\overrightarrow{u}(t), \overrightarrow{u}'(t))} = -\frac{1}{2}$$

Par conséquent,

$$g(t) = \begin{pmatrix} -\frac{3t^2}{2p} \\ 3t \end{pmatrix}.$$

Il s'agit de la parabole dont une équation cartésienne est $y^2 = -3x$.



$\square$