TRAVAUX DIRIGÉS : Déterminants

Exercice 1: Développer ou échelonner (Solution)

Calculer les déterminants suivants :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1+i & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2+3i & 1 & 3 \end{vmatrix} \text{ et } D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & -3 & 9 \\ -1 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Exercice 2: Factoriser (Solution)

Calculer les déterminants suivants et les exprimer sous forme factorisée :

1. $A = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}.$
2. $B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b & b^2 \\ 1 & 0 & c & c^2 \\ 0 & 1 & d & d^2 \end{vmatrix}.$
3. $C = \begin{vmatrix} -a & b & c & d \\ b & -a & d & c \\ c & d & -a & b \\ d & c & b & -a \end{vmatrix}.$

Exercice 3: Déterminant de Vandermonde (un classique) (Solution)

1. Soient $n \geqslant 2$ réels $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.
   On appelle déterminant de Vandermonde :
   $$V(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1}. \end{vmatrix}.$$
   Montrer que $V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$.
2. Soient n réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ distincts.
   Montrer que la famille $(x \mapsto e^{\alpha_i x})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est libre.
3. Montrer qu'il existe un unique polynôme $L \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ prenant des valeurs fixées $y_1, \dots, y_n$ en n points distincts $x_1, \dots, x_n$: $L(x_i) = y_i$.

Exercice 4: Suite de déterminants (tridiagonaux) (Solution)

Soit $A_n = (a_{ij}(n))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice carrée donnée par ses coefficients :

$$a_{ij}(n) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad i = j \\ 1 & \text{si} \quad i = j+1 \\ 1 & \text{si} \quad j = i+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On note Δ_n le déterminant de A_n.

1. Calculer Δ_2, Δ_3.
2. Montrer que $\forall n \geqslant 3, \Delta_n = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$.
3. En déduire Δ_n en fonction de n.

Exercice 5: Déterminants classiques (Solution)

Calculer les déterminants suivants :

1. $A(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ 1 & 2 & 3 & x \end{vmatrix}$
2. $B = \begin{vmatrix} 1 & \cos(x_1) & \cos(2x_1) \\ 1 & \cos(x_2) & \cos(2x_2) \\ 1 & \cos(x_3) & \cos(2x_3) \end{vmatrix}$
3. $C_n = \begin{vmatrix} a & b & \dots & \dots & b \\ b & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a & b \\ b & \dots & \dots & b & a \end{vmatrix}$
4. $D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & ab \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}$
5. $E_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ \vdots & n & \ddots & \ddots & \vdots \\ 3 & \vdots & \ddots & 1 & 2 \\ 2 & 3 & \dots & n & 1 \end{vmatrix}$

Exercice 6: Avec une fonction affine (Solution)

Soit $b \neq c$ et $A(x) = \begin{vmatrix} a_1+x & b+x & \dots & \dots & b+x \\ c+x & a_2+x & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1}+x & b+x \\ c+x & \dots & \dots & c+x & a_n+x \end{vmatrix}$

1. Montrer que $x \mapsto A(x)$ est une fonction affine.

2. Calculer $A(x_1)$ et $A(x_2)$ en deux points $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ bien choisis.
   En déduire $A(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et donner $A(0)$.
3. Que vaut $\begin{vmatrix} a & b & \dots & \dots & b \\ c & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a & b \\ c & \dots & \dots & c & a \end{vmatrix}$?

Exercice 7: Matrice antisymétrique d'ordre impair (Solution)

Calculer le déterminant d'une matrice antisymétrique $A \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{K})$.

Exercice 8: Encore un déterminant classique (Solution)

Calculer le déterminant d'ordre n :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & \lambda_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \lambda_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ \lambda_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Exercice 9: Déterminant circulant (Solution)

Soient $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$, et $J, M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ définies par :

$$M(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{pmatrix} \quad ; \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix} \quad \text{avec } j = e^{\frac{2i\pi}{3}}.$$

On note $\overline{J}$ la matrice dont les coefficients sont les conjugués de ceux de J.

1. Calculer $J\overline{J}$ et $JM\overline{J}$.
2. En déduire la déterminant de M sous forme factorisée.
3. Dans cette question $x, y, z \in \mathbb{R}$.
   Décrire l'ensemble $\mathcal{E} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : M(x, y, z) \text{ non inversible}\}$.

Exercice 10: Déterminants classiques (Solution)

Calculer les déterminants d'ordre n suivants :

$$A_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & n-1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & n-2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \dots & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$B_n = \begin{vmatrix} a_1 & \dots & \dots & \dots & a_1 \\ \vdots & a_2 & \dots & \dots & a_2 \\ \vdots & \vdots & a_3 & \dots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{vmatrix}, \quad C_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & & & 0 \\ x & 1+x^2 & x & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & x & 1+x^2 & x \\ & & & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-1} \\ a & 1 & \ddots & \ddots & \\ a^2 & \ddots & \ddots & \ddots & a^2 \\ & \ddots & \ddots & 1 & a \\ a^{n-1} & & a^2 & a & 1 \end{vmatrix}, \quad E_n = \begin{vmatrix} 2\cos x & 1 & \dots & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 2\cos x \end{vmatrix}.$$

Exercice 11: Base de $\mathbb{K}_n[X]$ (Solution)

Soient $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ des scalaires distincts.
Montrer que la famille $(P_0, \dots, P_n)$ avec $P_i = (X + a_i)^n$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 12: Déterminants classiques (Solution)

Calculer les déterminants d'ordre n :

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & n & \dots & \dots & n \\ n & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & n-1 & n \\ n & \dots & \dots & n & n \end{vmatrix} \quad ; \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & a \\ 1 & 1 & \dots & a & 1 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 1 & a & \dots & 1 & 1 \\ a & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Exercice 13: Points alignés et déterminants (Solution)

Soit $M(x;y)$, $M'(x';y')$ et $M''(x'';y'')$ trois points du plan euclidien muni d'un repère orthonormé direct.
Montrer que les points M, M', M'' sont alignés si et seulement si

$$\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Exercice 14: Famille de polynômes (Solution)

Pour $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré 3, on note Δ le déterminant de la famille (P, XP, P', XP', X^2P') dans la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$.

1. Montrer que $\Delta = 0$ si et seulement s'il existe deux polynômes non nuls $U \in \mathbb{R}_1[X]$ et $V \in \mathbb{R}_2[X]$ tels que $PU = P'V$.
2. Monter que $\Delta = 0$ si et seulement si P admet une racine multiple.
3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le polynôme $P = X^3 + pX + q$ avec $p, q \in \mathbb{R}$ possède au moins une racine multiple.

SOLUTIONS TRAVAUX DIRIGÉS : Déterminants

Solution Exercice 1.

1. $D_1 = \begin{vmatrix} 1+i & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2+3i & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

   On développe par rapport à la troisième colonne :

$$\begin{vmatrix} 1+i & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2+3i & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2+3i & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}3\begin{vmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= 2(1+(2+3i)) + 3(-(1+i)-1) = 3i.$$

2. $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & -3 & 9 \\ -1 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

   On échelonne le déterminant afin de se ramener au calcul d'un déterminant triangulaire.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & -3 & 9 \\ -1 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 11 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 4 & 5 & -7 \end{vmatrix} = \frac{1}{11^2}\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 11 & 0 & -3 \\ 0 & 22 & -11 & 66 \\ 0 & 44 & 55 & -77 \end{vmatrix}$$
$$= \frac{1}{11^2}\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 11 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -11 & 72 \\ 0 & 0 & 55 & -65 \end{vmatrix} = \frac{5}{11^2}\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 11 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -11 & 72 \\ 0 & 0 & 11 & -13 \end{vmatrix}$$
$$= \frac{5}{11^2}\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 11 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -11 & 72 \\ 0 & 0 & 0 & 59 \end{vmatrix} = -\frac{5\times 11^2\times 59}{11^2} = -295.$$

□

Solution Exercice 2.

1. $A = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$.

   On commence par effectuer l'opération : $L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3$, on obtient :

$$A = \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$
$$A = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}.$$

   On effectue ensuite les opérations : $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ et $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$.

   On trouve un déterminant triangulaire :

$$A = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -(a+b+c) & 0 \\ 2c & 0 & -(a+b+c) \end{vmatrix} = (a+b+c)^3.$$

2. $B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b & b^2 \\ 1 & 0 & c & c^2 \\ 0 & 1 & d & d^2 \end{vmatrix}$.

   On effectue les opérations $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - L_2$:

$$B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b & b^2 \\ 0 & 0 & c-a & c^2-a^2 \\ 0 & 0 & d-b & d^2-b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b & b^2 \\ 0 & 0 & c-a & (c-a)(c+a) \\ 0 & 0 & d-b & (d-b)(d+b) \end{vmatrix}.$$

   On développe alors par rapport à la première colonne, puis la seconde, et on trouve :

$$B = 1\begin{vmatrix} 1 & b & b^2 \\ 0 & c-a & (c-a)(c+a) \\ 0 & d-b & (d-b)(d+b) \end{vmatrix} = 1\times 1\times\begin{vmatrix} c-a & (c-a)(c+a) \\ (d-b) & (d-b)(d+b) \end{vmatrix}$$
$$B = (c-a)(d-b)(d+b) - (d-b)(c-a)(c+a) = (c-a)(d-b)(d+b-c-a).$$

3. $C = \begin{vmatrix} -a & b & c & d \\ b & -a & d & c \\ c & d & -a & b \\ d & c & b & -a \end{vmatrix}$.

   On commence par effectuer l'opération : $L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3 + L_4$:

$$C = \begin{vmatrix} -a+b+c+d & -a+b+c+d & -a+b+c+d & -a+b+c+d \\ b & -a & d & c \\ c & d & -a & b \\ d & c & b & -a \end{vmatrix}$$
$$C = (-a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & -a & d & c \\ c & d & -a & b \\ d & c & b & -a \end{vmatrix}$$

   On effectue alors les opérations $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$, $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$, $C_4 \leftarrow C_4 - C_1$

$$C=(-a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & -(a+b) & d-b & c-b \\ c & d-c & -(a+c) & b-c \\ d & c-d & b-d & -(a+d) \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la première colonne :

$$C=(-a+b+c+d)\begin{vmatrix} -(a+b) & d-b & c-b \\ d-c & -(a+c) & b-c \\ c-d & b-d & -(a+d) \end{vmatrix}.$$

On effectue alors l'opération $L_1 \leftarrow L_1+L_2+L_3$:

$$C=(-a+b+c+d)\begin{vmatrix} -(a+b) & -(a+c) & -(a+d) \\ d-c & -(a+c) & b-c \\ c-d & b-d & -(a+d) \end{vmatrix}$$

On effectue l'opération $C_1 \leftarrow C_1+C_2-C_3$:

$$C=(-a+b+c+d)\begin{vmatrix} -a-b-c+d & -(a+c) & -(a+d) \\ -a-b-c+d & -(a+c) & b-c \\ a+b+c-d & b-d & -(a+d) \end{vmatrix}$$

$$C=(-a+b+c+d)(a+b+c-d)\begin{vmatrix} -1 & -(a+c) & -(a+d) \\ -1 & -(a+c) & b-c \\ 1 & b-d & -(a+d) \end{vmatrix}$$

$$C=(-a+b+c+d)(a+b+c-d)\begin{vmatrix} -1 & -(a+c) & -(a+d) \\ 0 & 0 & a+b-c+d \\ 0 & -a+b-c-d & -2(a+d) \end{vmatrix}$$

$$C=-(-a+b+c+d)(a+b+c-d)\begin{vmatrix} 0 & a+b-c+d \\ -a+b-c-d & -2(a+d) \end{vmatrix}$$

$$C=(-a+b+c+d)(a+b+c-d)(-a+b-c-d)(a+b-c+d).$$

□

Solution Exercice 3. On considère pour tout $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, le déterminant de Vandermonde :

$$V(x_1,\dots,x_n)=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1}. \end{vmatrix}.$$

1. Montrons par récurrence que $V(x_1,\dots,x_n)=\displaystyle\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)$.

   — Au rang $n=2$, $V(x_1,x_2)=\begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix}=x_2-x_1$.
   La propriété est vérifiée pour $n=2$.

   — Considérons maintenant $x_1,\dots,x_n,x_{n+1}$, $n+1$ réels et calculons le déterminant

$$V(x_1,\dots,x_n,x_{n+1})=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} & x_n^n \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \dots & x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^n \end{vmatrix}.$$

On commence par effectuer l'opération $C_{n+1}\leftarrow C_{n+1}-x_1C_n$:

$$V(x_1,\dots,x_n,x_{n+1})=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} & 0 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} & x_2^n-x_1x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} & x_n^n-x_1x_n^{n-1} \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \dots & x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^n-x_1x_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} & 0 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} & x_2^{n-1}(x_2-x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} & x_n^{n-1}(x_n-x_1) \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \dots & x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^{n-1}(x_{n+1}-x_1) \end{vmatrix}$$

On effectue alors l'opération : $C_n\leftarrow C_n-x_1C_{n-1}$:

$$V(x_1,\dots,x_n,x_{n+1})$$
$$=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-2}(x_2-x_1) & x_2^{n-1}(x_2-x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-2}(x_n-x_1) & x_n^{n-1}(x_n-x_1) \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \dots & x_{n+1}^{n-2}(x_{n+1}-x_1) & x_{n+1}^{n-1}(x_{n+1}-x_1) \end{vmatrix}$$

et ainsi de suite et effectuant les opérations :
$C_{n-1}-x_1C_{n-2},\dots,C_2-x_1C_1$. On trouve :

$$V(x_1,\dots,x_n,x_{n+1})=$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & x_2-x_1 & x_2(x_2-x_1) & \dots & x_2^{n-2}(x_2-x_1) & x_2^{n-1}(x_2-x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n-x_1 & x_n(x_n-x_1) & \dots & x_n^{n-2}(x_n-x_1) & x_n^{n-1}(x_n-x_1) \\ 1 & x_{n+1}-x_1 & x_{n+1}(x_{n+1}-x_1) & \dots & x_{n+1}^{n-2}(x_{n+1}-x_1) & x_{n+1}^{n-1}(x_{n+1}-x_1) \end{vmatrix}$$

On développant par rapport à la première colonne et en mettant en facteur $\prod_{j=2}^{n}(x_j - x_1)$, on obtient :

$$\begin{aligned} V(x_1,\dots,x_n,x_{n+1}) &= \prod_{j=2}^{n}(x_j-x_1)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} \\ 1 & x_{n+1} & \dots & x_{n+1}^{n-2} & x_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix} \\ &= \prod_{j=2}^{n}(x_j-x_1)V(x_2,\dots,x_{n+1}) \\ &= \prod_{j=2}^{n}(x_j-x_1)\prod_{2\leqslant i<j\leqslant n+1}(x_j-x_i) \quad (*) \\ &= \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}(x_j-x_i) \end{aligned}$$

où l'on a appliqué l'hypothèse de récurrence au rang n en $(*)$.

2. Soient $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ des scalaires tels que $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i = 0$ où $f_i : x \mapsto e^{\alpha_i x}$.

   En dérivant k ($k \in [\![0, n-1]\!]$) fois cette relation et calculant en 0, on obtient :
   - $k = 0$: $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 0$.
   - $k = 1$: $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\alpha_i = 0$.
   - ...
   - $k = n-1$: $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\alpha_i^{n-1} = 0$.

   Les scalaires $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ sont donc solution du système $AX = 0$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \dots & \alpha_n^{n-1}. \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

   La matrice A est inversible.
   En effet, $\det(A) = \det({}^tA) = V(\alpha_1,\dots,\alpha_n) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\alpha_j - \alpha_i) \neq 0$

   car les scalaires $(\alpha_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ sont distincts.

   On en déduit A est inversible, que le système $AX = 0$ est de Cramer, et que son unique solution est $X = A^{-1}AX = A^{-1}0 = 0$.
   Au final $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ et l'on a prouvé que la famille $(x \mapsto e^{\alpha_i x})_{i\in[\![1,n]\!]}$ est libre.

3. Montrons qu'il existe un unique polynôme $L \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ prenant des valeurs fixées $y_1,\dots,y_n$ en n points distincts $x_1,\dots,x_n$: $L(x_i) = y_i$.

   On note $P(X) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j X^j$ le polynôme recherché.

   $P(X)$ répond au problème si et seulement si pour tout $i \in [\![1,n]\!]$,
   $P(x_i) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j x_i^j = y_i$.
   Les coefficients du polynôme recherché vérifient donc le système matriciel $AX = Y$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1}. \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_b \end{pmatrix}$$

   qui possède une unique solution car A est inversible, son déterminant $\det(A) = V(x_1,\dots,x_n) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j - x_i)$ étant non nul car les réels $x_1,\dots,x_n$ sont distincts.
   On en déduit qu'il existe un et un seul polynôme prenant en n réels x_i distincts, des valeurs y_i fixées.

□

Solution Exercice 4.

1. - $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3$.
   - $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\Delta_2 - 2 = 6 - 2 = 4$.
2. Développons Δ_n par rapport à la première ligne.

   On obtient $\Delta_n = 2\Delta_n - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \ddots & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$

en développant ce dernier déterminant par rapport à la première colonne.

3. La suite $(\Delta_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 dont l'équation caractéristique $r^2 = 2r - 1 \iff r^2 - 2r + 1 = 0 \iff (r-1)^2 = 0$ admet une unique solution réelle $r = 1$.

   Il existe donc un couple de réels $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que :
   pour tout $n \geqslant 1$, $\Delta_n = (A + nB)1^n = A + nB$.
   Avec
   — $\Delta_1 = 2$, on trouve $2 = A + B$.
   — $\Delta_2 = 3$, on trouve $3 = A + 2B$.
   — Ainsi, $A = B = 1$.
   Au final, pour tout $n \geqslant 1$, $\Delta_n = 1 + n = n + 1$.

□

Solution Exercice 5.

1. $A(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ 1 & 2 & 3 & x \end{vmatrix}$.

   On effectue l'opération $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4$. On obtient
   $$A(x) = \begin{vmatrix} 6+x & 1 & 2 & 3 \\ 6+x & x & 2 & 3 \\ 6+x & 2 & x & 3 \\ 6+x & 2 & 3 & x \end{vmatrix} = (6+x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ 1 & 2 & 3 & x \end{vmatrix}.$$
   On effectue ensuite les opérations $L_i \leftarrow L_i - L_1$ avec $i \in [\![2, 4]\!]$:
   $$A(x) = (6+x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & x-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x-2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & x-3 \end{vmatrix}.$$
   En développant par rapport à la première colonne, on trouve :
   $$A(x) = (6+x)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 \\ 1 & x-2 & 0 \\ 1 & 1 & x-3 \end{vmatrix} = (x+6)(x-1)(x-2)(x-3).$$

2. $B = \begin{vmatrix} 1 & \cos(x_1) & \cos(2x_1) \\ 1 & \cos(x_2) & \cos(2x_2) \\ 1 & \cos(x_3) & \cos(2x_3) \end{vmatrix}$.

   On effectue les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$:
   $$B = \begin{vmatrix} 1 & \cos(x_1) & \cos(2x_1) \\ 0 & \cos(x_2) - \cos(x_1) & \cos(2x_2) - \cos(2x_1) \\ 0 & \cos(x_3) - \cos(x_1) & \cos(2x_3) - \cos(2x_1) \end{vmatrix},$$
   puis on développe par rapport à la première colonne :
   $$B = \begin{vmatrix} \cos(x_2) - \cos(x_1) & \cos(2x_2) - \cos(2x_1) \\ \cos(x_3) - \cos(x_1) & \cos(2x_3) - \cos(2x_1) \end{vmatrix}$$
   $$\begin{aligned} B = &(\cos(x_2) - \cos(x_1))(\cos(2x_3) - \cos(2x_1)) \\ &- (\cos(x_3) - \cos(x_1))(\cos(2x_2) - \cos(2x_1)). \end{aligned}$$

3. $C_n = \begin{vmatrix} a & b & \dots & \dots & b \\ b & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a & b \\ b & \dots & \dots & b & a \end{vmatrix}$.

   On effectue l'opération $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + \cdots + C_n$:
   $$C_n = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & \dots & \dots & b \\ a+(n-1)b & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a & b \\ a+(n-1)b & b & \dots & b & a \end{vmatrix}$$
   $$C_n = (a+(n-1)b)\begin{vmatrix} 1 & b & \dots & \dots & b \\ 1 & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a & b \\ 1 & b & \dots & b & a \end{vmatrix}.$$
   On effectue ensuite les opérations $L_i \leftarrow L_i - L_1$ avec $i \in [\![2, n]\!]$, on trouve :
   $$C_n = (a+(n-1)b)\begin{vmatrix} 1 & b & \dots & \dots & b \\ 0 & a-b & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a-b & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a-b \end{vmatrix}$$
   $C_n = (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}$.

4. $D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & ab \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}$

   On développe par rapport à la première ligne et on obtient
   $D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$.

La suite $(D_n)_{n\geqslant 1}$ est donc récurrente linéaire d'ordre 2.

L'équation caractéristique $r^2 = (a+b)r - ab \iff r^2 - (a+b)r + ab = 0$ admet pour solutions a et b ($\Delta = (a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2$).

— Si $a \neq b$ il existe $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \geqslant 1$, $\Delta_n = Aa^n + Bb^n$.
Avec $\Delta_1 = a+b$ et $\Delta_2 = a^2+ab+b^2$ on trouve

$$\left\{\begin{array}{rcl} Aa+Bb & = & a+b \\ Aa^2+Bb^2 & = & a^2+ab+b^2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} Aa+Bb & = & a+b \\ Bb(b-a) & = & b^2 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} A & = & \frac{a}{a-b} \\ B & = & \frac{b}{b-a} \end{array}\right.$$

Dans le cas $a = b$, on obtient donc $\forall n \geqslant 1, \Delta_n = \dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$.

— Si $a = b$, il existe $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \geqslant 1$, $\Delta_n = (A+nB)a^n$.
Avec $\Delta_1 = 2a$ et $\Delta_2 = 3a^2$ on trouve :

$$\left\{\begin{array}{rcl} (A+B)a & = & 2a \\ (A+2B)a^2 & = & 3a^2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} A & = & 1 \\ B & = & 1 \end{array}\right. .$$

Dans le cas $a \neq b$, on obtient donc $\forall n \geqslant 1$, $\Delta_n = (n+1)a^n$.

5. $E_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ \vdots & n & \ddots & \ddots & \vdots \\ 3 & \vdots & \ddots & 1 & 2 \\ 2 & 3 & \dots & n & 1 \end{vmatrix}$.

On effectue l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + \cdots + L_n$ et on factorise :

$$E_n = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ n & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ \vdots & n & \ddots & \ddots & \vdots \\ 3 & \vdots & \ddots & 1 & 2 \\ 2 & 3 & \dots & n & 1 \end{vmatrix}.$$

On effectue ensuite successivement (et dans cet ordre) les opérations

$C_n \leftarrow C_n - C_{n-1}, \dots, C_2 \leftarrow C_2 - C_1$:

$$E_n = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n & 1-n & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 3 & \vdots & \ddots & 1-n & 1 \\ 2 & 1 & \dots & 1 & 1-n \end{vmatrix}.$$

On développe alors suivant la première ligne :

$$E_n = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1-n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1-n & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1-n \end{vmatrix}.$$

On effectue l'opération : $C_1 \leftarrow C_1 + \cdots + C_{n-1}$:

$$E_n = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} -1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ -1 & 1-n & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1-n & 1 \\ -1 & 1 & \dots & 1 & 1-n \end{vmatrix}$$

puis les opérations $L_i \leftarrow L_i - L_1$ avec $i \in [\![2,n]\!]$:

$$E_n = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} -1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & -n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & -n & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -n \end{vmatrix}.$$

$$E_n = \frac{n^{n-1}(n+1)}{2}(-1)^{n-1}$$

□

Solution Exercice 6.

Soit $A(x) = \begin{vmatrix} a_1+x & b+x & \dots & \dots & b+x \\ c+x & a_2+x & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1}+x & b+x \\ c+x & \dots & \dots & c+x & a_n+x \end{vmatrix}$

1. Montrons que $x \mapsto A(x)$ est une fonction affine.
On effectue les opérations $C_i \leftarrow C_i - C_1$ pour $i \in [\![2,n]\!]$. On obtient :

$$A(x) = \begin{vmatrix} a_1+x & b-a_1 & \dots & \dots & b-a_1 \\ c+x & a_2-c & b-c & & b-c \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1}-c & b-c \\ c+x & 0 & \dots & 0 & a_n-c \end{vmatrix}.$$

En développant par rapport à la première colonne, on obtient :

$$A(x) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1}(\alpha_i + x)\Delta_{i1}$$

avec :

— $\alpha_1 = a_1$
— $\alpha_i = c$ pour tout $i \in [\![2, n]\!]$
— Δ_{i1} est le déterminant de la matrice obtenue en supprimant de A la première colonne.
Ces n déterminants sont des scalaires, des constantes, car chacune des matrices obtenus ne contient que des constantes (de la variable x).

Par somme de polynômes de degré au plus 1, on en déduit que la fonction $x \mapsto A(x) = \alpha x + \beta$ est affine.

2. — $A(-b) = \prod_{i=1}^{n}(a_i - b)$
comme déterminant d'une matrice triangulaire inférieure.
— $A(-c) = \prod_{i=1}^{n}(a_i - c)$
comme déterminant d'une matrice triangulaire supérieure.

On en déduit que α, β vérifient :
— $A(-b) = \prod_{i=1}^{n}(a_i - b) = -\alpha b + \beta$
— $A(-c) = \prod_{i=1}^{n}(a_i - c) = -\alpha c + \beta$.

Par conséquent :

$$\alpha = \frac{\prod_{i=1}^{n}(a_i - b) - \prod_{i=1}^{n}(a_i - c)}{c - b}$$

$$\beta = \frac{c\prod_{i=1}^{n}(a_i - b) - b\prod_{i=1}^{n}(a_i - c)}{c - b}$$

Par conséquent pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$A(x) = \left(\frac{\prod_{i=1}^{n}(a_i - b) - \prod_{i=1}^{n}(a_i - c)}{c - b}\right)x + \frac{c\prod_{i=1}^{n}(a_i - b) - b\prod_{i=1}^{n}(a_i - c)}{c - b}.$$

En particulier

$$A(0) = \frac{c\prod_{i=1}^{n}(a_i - b) - b\prod_{i=1}^{n}(a_i - c)}{c - b}.$$

3. Calculons $\begin{vmatrix} a & b & \dots & \dots & b \\ c & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a & b \\ c & \dots & \dots & c & a \end{vmatrix}$.

Il s'agit du déterminant $A(0)$ calculé à la question précédente dans le cas où $a_1 = \dots = a_n = a$:

$$A(0) = \begin{vmatrix} a & b & \dots & \dots & b \\ c & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a & b \\ c & \dots & \dots & c & a \end{vmatrix} = \frac{c(a-b)^n - b(a-c)^n}{c - b}$$

□

Solution Exercice 7. La matrice A est antisymétrique donc ${}^tA = -A$.
— Ainsi, $\det({}^tA) = \det(-A) = (-1)^{2n+1}\det(A) = -\det(A)$ par le cours.
— Mais d'autre part, toujours par le cours, $\det({}^tA) = \det(A)$.

On en déduit que $\det(A) = -\det(A) \iff \det(A) = 0$. □

Solution Exercice 8. Calculons $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & \lambda_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \lambda_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ \lambda_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$

On pense au déterminant d'une matrice triangulaire.

Attention, la matrice sous-jacente n'est pas triangulaire (les coefficients sont nuls sous "l'antidiagonale", pas la diagonale).

Le cours ne s'applique pas directement.

En revanche la démonstration effectuée pour les déterminants diagonaux s'applique.

On développe par rapport à la dernière ligne, puis l'avant dernière et ainsi de suite :

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & \lambda_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \lambda_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ \lambda_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} &= (-1)^{n+1}\lambda_n \begin{vmatrix} a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & \lambda_1 \\ a_{22} & \dots & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & \iddots & & \vdots \\ \lambda_{n-1} & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{n+1}(-1)^n\lambda_{n-1}\dots(-1)^2\lambda_1 \\
&= (-1)^{\sum_{k=2}^{n+1}k}\prod_{i=1}^{n}\lambda_i \\
&= (-1)^{\frac{n(n+3)}{2}}\prod_{i=1}^{n}\lambda_i.
\end{aligned}$$

□

Solution Exercice 9. Soient $(x,y,z)\in\mathbb{C}^3$, et $J,M\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ définies par :

$$M(x,y,z)=\begin{pmatrix} x & y & z\\ y & z & x\\ z & x & y\end{pmatrix}\quad ;\quad J=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&j&j^2\\1&j^2&j\end{pmatrix}.$$

On note $\overline{J}$ la matrice dont les coefficients sont les conjugués de ceux de J.

1. Puisque $j^3=1$, on a $j^2=\dfrac{1}{j}=\dfrac{1}{e^{\frac{2i\pi}{3}}}=e^{-\frac{2i\pi}{3}}=\overline{j}$ et $\overline{j^2}=\overline{\overline{j}}=j$.

   De plus, $1+j+j^2=\frac{1-j^3}{1-j}=0$.

$$J\overline{J}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&j&j^2\\1&j^2&j\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&\overline{j}&\overline{j^2}\\1&\overline{j^2}&\overline{j}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&j&j^2\\1&j^2&j\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&j^2&j\\1&j&j^2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}=3I_3.$$

   D'autre part,

$$JM\overline{J}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&j&j^2\\1&j^2&j\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&y&z\\y&z&x\\z&x&y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&j^2&j\\1&j&j^2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}x+y+z & x+y+z & x+y+z\\ x+jy+j^2z & y+jz+j^2x & z+jx+j^2y\\ x+j^2y+jz & y+j^2z+jx & z+j^2x+jy\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&j^2&j\\1&j&j^2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}3(x+y+z)&0&0\\0&0&3(x+jy+j^2z)\\0&3(x+j^2y+jz)&0\end{pmatrix}.$$

2. On a $\det(J\overline{J})=\det(3I_3)=3^3\det(I_3)=27$.

   D'autre part :

   — $\det(JM\overline{J})=\det(J)\det(M)\det(\overline{J})=\det(J\overline{J})\det(M)=27\det(M)$.

   — $\det(JM\overline{J})=\begin{vmatrix}3(x+y+z)&0&0\\0&0&3(x+jy+j^2z)\\0&3(x+j^2y+jz)&0\end{vmatrix}$

   $\det(JM\overline{J})=-\begin{vmatrix}3(x+y+z)&0&0\\0&3(x+j^2y+jz)&0\\0&0&3(x+jy+j^2z)\end{vmatrix}$

   $\det(JM\overline{J})=-27(x+y+z)(x+j^2y+jz)(x+jy+j^2z)$.

   Au final,

   $\det(M)=-(x+y+z)(x+j^2y+jz)(x+jy+j^2z)$.

3. Dans cette question $x,y,z\in\mathbb{R}$.

   Décrivons l'ensemble $\mathcal{E}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : M(x,y,z) \text{ non inversible}\}$.

   La matrice $M(x,y,z)$ est non inversible si et seulement si

   $\det(M)=-(x+y+z)(x+j^2y+jz)(x+jy+j^2z)=0$.

   $\det(M)=0\iff x+y+z=0$ ou $(x+j^2y+jz)=0$ ou $(x+jy+j^2z)=0$.

   L'ensemble $\mathcal{E}$ est donc la réunion :

   — Du plan d'équation $x+y+z=0$ engendré par les vecteurs $((-1;0;1),(0,-1;1))$ et

   — De la droite $Vect(1;1;1)$ intersection des plans $\begin{cases}x-y&=0\\y-z&=0\end{cases}$ que l'on obtient indifféremment avec l'une ou l'autre des équations $x+j^2y+jz=0$ ou $x+jy+j^2z=0$ en identifiant parties réelles et imaginaires de chaque membre dans $x+j^2y+jz=0$.

□

Solution Exercice 10.

1. $A_n=\begin{vmatrix}1&0&0&\dots&0&0&n-1\\0&1&0&\dots&0&0&n-2\\0&0&1&\dots&0&0&n-3\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\dots&1&0&2\\0&0&0&\dots&0&1&1\\n-1&n-2&n-3&\dots&2&1&1\end{vmatrix}$

   On effectue l'opération $L_n-(n-1)L_1$ et on développe par rapport à la première colonne.

   On obtient :

$$A_n=\begin{vmatrix}1&0&\dots&0&0&n-2\\0&1&\dots&0&0&n-3\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\dots&1&0&2\\0&0&\dots&0&1&1\\n-2&n-3&\dots&2&1&1-(n-1)^2\end{vmatrix}.$$

   On recommence en effectuant les opérations $L_{n-1}-(n-2)L_1,\dots,L_3-2L_1$:

$$A_n=\begin{vmatrix}1&1\\1&1-\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1}k^2\end{vmatrix}=-\sum_{k=2}^{n-1}k^2=-\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}+1.$$

2. $B_n = \begin{vmatrix} a_1 & \dots & \dots & \dots & a_1 \\ \vdots & a_2 & \dots & \dots & a_2 \\ \vdots & \vdots & a_3 & \dots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{vmatrix}$.

Notons $B_n(a_1, \dots, a_n)$ ce déterminant et montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$:

$B_n(a_1, \dots, a_n) = a_1(a_2 - a_1) \dots (a_n - a_{n-1})$.

La formule est vraie au rang $n = 1$, $n = 2$ car

$B_1(a_1) = a_1$ et $B_2(a_1, a_2) = a_1 a_2 - a_2^2 = a_1(a_2 - a_1)$.

On la suppose vraie au rang $n - 1$ et on considère $B_n(a_1, \dots, a_n)$.

On effectue les opérations $L_i \leftarrow L_i - L_1$ pour $i \in [\![2, n]\!]$

$$B_n(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} a_1 & \dots & \dots & \dots & a_1 \\ 0 & a_2 - a_1 & \dots & \dots & a_2 - a_1 \\ \vdots & \vdots & a_3 - a_1 & \dots & a_3 - a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \end{vmatrix}$$

et on développe par rapport à la première colonne :

$$B_n(a_1, \dots, a_n) = a_1 \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & \dots & \dots & a_2 - a_1 \\ \vdots & a_3 - a_1 & \dots & a_3 - a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \end{vmatrix}$$

$B_n = a_1 B_{n-1}(a_2 - a_1, a_3 - a_1, \dots, a_n - a_1)$.

On en déduit par hypothèse de récurrence :

$B_n = a_1[(a_2 - a_1)((a_3 - a_1) - (a_2 - a_1)) \dots ((a_n - a_1) - (a_{n-1} - a_1))]$

$B_n = a_1(a_2 - a_1)(a_3 - a_2) \dots (a_n - a_{n-1})$ ce qui achève la récurrence.

3. $C_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & & & 0 \\ x & 1+x^2 & x & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & x & 1+x^2 & x \\ & & & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$.

Si $x = 0$, il vient clairement $D_n = |I_n| = 1$.

Sinon, on développe par rapport à la première ligne.

On obtient :

$$C_n = (1+x^2)C_{n-1} - x \begin{vmatrix} x & x & & & 0 \\ 0 & 1+x^2 & x & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & x & 1+x^2 & x \\ 0 & & & x & 1+x^2 \end{vmatrix}_{[n-1]}$$

$C_n = (1+x^2)C_{n-1} - x^2 C_{n-2}$ en développant le dernier déterminant apparaissant par rapport à la première colonne.

La suite (C_n) est récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique :

$r^2 = (1+x^2)r - x^2 \iff r^2 - (1+x^2)r + x^2 = 0$ avec $\Delta = (1-x^2)^2$.

On obtient les racines réelles $r = x^2$ et $r = 1$ éventuellement égales.

— Si $x^2 \neq 1$, il existe alors $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que :
pour tout $n \geqslant 1$, $C_n = Ax^{2n} + B$.
Comte tenu que $C_1 = 1 + x^2$ et $C_2 = 1 + x^2 + x^4$ on obtient :

$$A = -\frac{x^2}{1-x^2} \text{ et } B = \frac{1}{1-x^2}$$

On obtient pour tout $n \geqslant 1$:
$C_n = \dfrac{x^{2(n+1)} - 1}{x^2 - 1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^{2k} = 1 + x^2 + \dots + x^{2n}$.

— Si $x^2 = 1$, les deux racines de l'équations caractéristique coïncident et il existe donc $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \geqslant 1$, $C_n = (A + Bn)$.
Compte tenu que $C_1 = 2$ et $C_2 = 3$ on trouve $A = B = 1$ et finalement $C_n = n + 1$ pour tout $n \geqslant 1$.

Au final pour tout $x \in \mathbb{R}$, la formule $C_n = 1 + x^2 + \dots + x^{2n}$ est valable.

4. $D_n = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-1} \\ a & 1 & \ddots & \ddots & \\ a^2 & \ddots & \ddots & \ddots & a^2 \\ & \ddots & \ddots & 1 & a \\ a^{n-1} & & a^2 & a & 1 \end{vmatrix}$.

On démontre par récurrence sur $n \geqslant 1$, que $D_n = (1 - a^2)^{n-1}$

La formule est vraie au rang $n = 1$: $D_1 = |1| = 1 = (1 - a^2)^{1-1}$.

Elle est également vraie au rang $n = 2$: $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} = 1 - a^2 = (1 - a^2)^{2-1}$.

On la suppose vraie au rang $n-1$ et on effectue l'opération $L_n \leftarrow L_n - aL_{n-1}$, on obtient :

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-1} \\ a & 1 & \ddots & \ddots & \\ a^2 & \ddots & \ddots & \ddots & a^2 \\ & \ddots & \ddots & 1 & a \\ 0 & & 0 & 0 & 1-a^2 \end{vmatrix}.$$

En développant par rapport à la dernière ligne :

$$D_n = (1-a^2) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-2} \\ a & 1 & \ddots & \ddots & \\ a^2 & \ddots & \ddots & \ddots & a^2 \\ & \ddots & \ddots & 1 & a \\ a^{n-2} & & a^2 & a & 1 \end{vmatrix} = (1-a^2)D_{n-1}$$

$D_n = (1-a^2)(1-a^2)^{n-2}$ par hypothèse de récurrence.

Ainsi, $D_n = (1-a^2)^{n-1}$ ce qui achève la récurrence.

5. $$E_n = \begin{vmatrix} 2\cos x & 1 & \dots & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 2\cos x \end{vmatrix}.$$

On développe par rapport à la première ligne. On obtient classiquement en développant un déterminant tridiagonal :

$E_n = 2\cos x E_{n-1} - E_{n-2}$.

— Le cas $x = 0 \quad [2\pi]$ a déjà été traité à l'Exercice 4 $E_n = (n+1)$.

— Si $x = \pi \quad [2\pi]$, l'équation $r^2 + 2r + 1 = 0$ possède une unique solution $r = -1$. On montre de même $E_n = (-1)^n(n+1)$.

— On suppose $x \neq 0, \pi \quad [2\pi]$.
Dans ce cas l'équation caractéristique $r^2 - 2\cos(x)r + 1 = 0$ admet deux solutions complexes conjuguées $r = e^{ix}$ et $r = e^{-ix}$.
On en déduit qu'il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \geqslant 1$,
$E_n = A\cos(nx) + B\sin(nx)$. Avec $n = 1$ et $n = 2$, on trouve :
$E_1 = 2\cos x = A\cos(x) + B\sin(x)$ et
$E_2 = 4\cos^2 x - 1 = A\cos(2x) + B\sin(2x)$.
Après calcul on trouve $A = 1$ et $B = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$.
Ainsi, $E_n = \cos(nx) + \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\sin(nx) = \frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)}$ pour tout $n \geqslant 1$.

□

Solution Exercice 11. La famille $(P_0, \dots, P_n)$ est composée de $n+1$ polynômes de degrés n.

Puisque $\dim \mathbb{K}_n[X] = n+1$, il suffit de montrer que la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est une famille libre pour montrer qu'il s'agit d'une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i = 0$.

On obtient :

$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_i^k X^{n-k} = 0$ soit $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i^k \right) X^{n-k} = 0$.

Par identification des coefficients, on obtient pour tout $k \in [\![0, n]\!]$:

$\binom{n}{k} \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i^k = 0$ soit $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i^k = 0$.

Le $(n+1)$-uplet $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ est donc solution de l'équation $AX = 0$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_n \\ a_0^2 & a_1^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_0^n & a_1^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

La matrice A est inversible car son déterminant est non nul :
$\det(A) = V_{n+1}(a_0, \dots, a_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i) \neq 0$ (voir Exercice 3) les nombres a_i étant distincts.

Par conséquent l'équation $AX = 0$ admet une unique solution $X = 0$.

Par conséquent, $\lambda_0 = \dots = \lambda_n = 0$: la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est libre.

C'est donc une base de $\mathbb{K}_n[X]$. □

Solution Exercice 12.

1. $$D_n = \begin{vmatrix} 1 & n & \dots & \dots & n \\ n & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & n-1 & n \\ n & \dots & \dots & n & n \end{vmatrix}$$

On effectue les opérations $C_i \leftarrow C_i - C_n$ pour $i \in [\![1, n-1]\!]$:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1-n & 0 & \dots & 0 & n \\ 0 & 2-n & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & n \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} n!$$

2. $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & a \\ 1 & 1 & \dots & a & 1 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 1 & a & \dots & 1 & 1 \\ a & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

   On effectue l'opération $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + \dots + C_n$:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a+(n-1) & 1 & \dots & 1 & a \\ a+(n-1) & 1 & \dots & a & 1 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ a+(n-1) & a & \dots & 1 & 1 \\ a+(n-1) & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a+(n-1)) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & a \\ 1 & 1 & \dots & a & 1 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 1 & a & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

   On effectue alors les opérations $L_i \leftarrow L_i - L_n$ avec $i \in [\![1, n-1]\!]$:

$$\Delta_n = (a+(n-1)) \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & \dots & a-1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a-1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

   On développe par rapport à la première colonne, on obtient :

$$\Delta_n = (a+(n-1))(-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & a-1 \\ 0 & \dots & a-1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ a-1 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_n = (-1)^{n+1}(a+(n-1))(a-1)^{n-1}(-1)^{\frac{n(3+n)}{2}}.$$

□

Solution Exercice 13. Montrons que les points M, M', M'' sont alignés si et seulement si

$$\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Les points M, M', M'' sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{MM'} = (x'-x; y'-y)$ et $\overrightarrow{MM''} = (x''-x; y''-y)$ sont colinéaires ce qui équivaut à

$$\begin{vmatrix} x'-x & x''-x \\ y'-y & y''-y \end{vmatrix} = 0 \iff (x'-x)(y''-y) - (y'-y)(x''-x) = 0.$$

On conclut avec le calcul suivant :

$$\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x'-x & x''-x \\ y & y'-y & y''-y \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (x'-x)(y''-y) - (y'-y)(x''-x).$$

□

Solution Exercice 14. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, polynôme de degré 3, on note Δ le déterminant de (P, XP, P', XP', X^2P') dans la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$.

1. $\Delta = 0$ si et seulement si la famille (P, XP, P', XP', X^2P') est liée c'est-à-dire s'il existe des scalaires $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5$ non tous nuls tels que
   $(aP + bXP) + (cP' + dXP' + eX^2P') = 0$
   $\iff P\underbrace{(a+bX)}_{U \in \mathbb{R}_1[X]} = -P'\underbrace{(x+dX+eX^2)}_{V \in \mathbb{R}_2[X]}$
   On a $(U, V) \neq (0, 0)$ car a, b, c, d, e ne sont pas tous nuls.
   Montrons alors que $U \neq 0$ et $V \neq 0$.
   — Si $U = 0$ on a $P'V = PU = 0$.
     Mais $\deg(P') = 2\,(P' \neq 0)$ donc nécessairement $V = 0$ ce qui est exclu car $(U, V) \neq (0, 0)$
   — Si $V = 0$ alors $PU = P'V = 0$.
     Mais $\deg(P) = 3\,(P \neq 0)$ donc nécessairement $U = 0$ ce qui est exclu car $(U, V) \neq (0, 0)$.
2. — Supposons $\Delta = 0$ et montrons que P admet une racine multiple.
     On suppose par l'absurde que P ne possède que des racines simples.
     On note $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ les trois racines complexes distinctes de P.
     Par hypothèse, $P'(\alpha_i) \neq 0$ pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$ (sinon P admettrait au moins une racine double).
     Puisque $\Delta = 0$, on a $PU = P'V$ avec $U \in \mathbb{R}_1[X]$ et $V \in \mathbb{R}_2[X]$.
     Or $\forall i \in [\![1, 3]\!]$, $P(\alpha_i) = 0, P'(\alpha_i) \neq 0$ donc $V(\alpha_1) = V(\alpha_2) = V(\alpha_3) = 0$.
     Mais V est de degré au plus 2 et possède au moins trois racines distinctes.
     On obtiendrait alors $V = 0$ ce qui est une contradiction.
     Ainsi, P possède au moins une racine multiple.
   — Supposons que P possède au moins une racine multiple a.
     Alors $P(a) = P'(a) = 0$ et par conséquent $X - a | P$, $X - a | P'$.
     Il existe donc deux polynômes $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}[X]$ tels que :
     $$P(X) = (X-a)^2 Q_1(X) \quad \text{et} \quad P'(X) = (X-a)Q_2(X).$$
     Puisque $\deg(P) = 3$, on a $\deg(Q_1) = 1$ et $\deg(Q_2) = 1$.
     Alors $P(X)Q_2(X) = P'(X)(X-a)Q_1(X)$.
     Les polynômes tous deux non nuls $U = Q_2 \in \mathbb{R}_1[X]$ et $V = (X - a)Q_1(X) \in \mathbb{R}_2[X]$ conviennent : $PU = P'V$.
3. Avec $P = X^3 + pX + q$, on obtient :
   — $P = X^3 + pX + q$
   — $XP = X^4 + pX^2 + qX$
   — $P' = 3X^2 + p$
   — $XP' = 3X^3 + pX$
   — $X^2P' = 3X^4 + pX^2$

On développe le déterminant obtenu par rapport à la première ligne :

$$\Delta = \begin{vmatrix} q & 0 & p & 0 & 0 \\ p & q & 0 & p & 0 \\ 0 & p & 3 & 0 & p \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} q \begin{vmatrix} q & 0 & p & 0 \\ p & 3 & 0 & p \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} p & q & p & 0 \\ 0 & p & 0 & p \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3q(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} q & p & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p & q & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & p \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 - C_1)$$

$$= 27q^2 + 2 \begin{vmatrix} p & q & 0 \\ 0 & p & p \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 27q^2 + 4p^3.$$

□