CHAPITRE 4 : SÉRIES ENTIÈRES

Introduction et motivations du chapitre
Extrait du problème de Mathématiques C - Banque PT 2016

" La troisième partie de ce problème développe des résultats liés au nombres de Catalan qui sont couramment utilisés en modélisation numérique (éléments finis). Le domaine géométrique auquel on s'intéresse est discrétisé et peut être approché par une surface polygonale par morceaux.
Pour obtenir une bonne approximation géométrique, on divise chaque polygone en triangle. Le nombre de configurations possibles pour trianguler un polygone convexe à $n+2$ sommets est donné par le nombre de Catalan d'ordre n."

Dans ce problème on montre que les nombres de Catalan décrits ci-dessus sont les coefficients du développement en série entière de la fonction définie par $\dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n$.

Plan du chapitre

1 - Rayon de convergence

1.A - Définitions, propriétés et premiers exemples

Exercice 1

1. Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des nombres réels $x \in \mathbb{R}$ tels que la série $\sum x^n$ converge.
2. Même question avec la série $\sum e^n x^n$.
3. Même question avec la série $\sum \frac{x^n}{n}$.
4. Même question avec la série $\sum \cos(n) x^n$.

1. Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que la série $\sum z^n$ converge.
2. Même question avec la série $\sum e^n z^n$.
3. Même question avec la série $\sum \frac{z^n}{n}$.
4. Même question avec la série $\sum \cos(n) z^n$.

Définition 2: série entière

— On appelle série entière à variable réelle ou complexe z une série $\sum a_n z^n$ avec $a_n \in \mathbb{K}$.
— Les termes de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont appelés coefficients de la série entière.

Lemme 3: Lemme d'Abel

Si la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Démonstration. — Notons que $z_0 = 0$ n'est pas un cas intéressant à traiter : la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire en 0 donc bornée et il n'existe pas de nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < z_0 = 0$.
Notons maintenant $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|a_n z_0^n| \leqslant M$ avec $z_0 \neq 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $|z| < |z_0|$:

$$|a_n z^n| = \left| a_n z_0^n \left(\frac{z}{z_0}\right)^n \right| \leqslant M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n.$$

— La série $\sum a_n z^n$ est donc absolument convergente par comparaison avec la série géométrique $\sum \left(\frac{z}{z_0}\right)$ absolument convergente car $|z| < |z_0| \iff \left|\frac{z}{z_0}\right| < 1$.

□

Définition 4: Rayon de convergence

On appelle rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ la borne supérieure $R \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$:

$$R = \sup\{r \geqslant 0 : (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée } \}.$$

Exemple

— $\sum z^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$. Notons que les coefficients $a_n = 1$ valent tous 1.
En effet, l'ensemble $\mathcal{A} = \{r \geqslant 0 : (1 \times r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$ est :
  * non vide car contient $r = 0$.
  * majoré par 1 car si $r > 1$ alors la suite $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

$R = 1$ est la borne supérieure de $\mathcal{A}$: il s'agit ici du maximum car $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
Attention : pour autant, la série entière $\sum R^n = \sum 1$ diverge.

— La série $\sum \frac{z^n}{n}$ a pour rayon de convergence $R = 1$.

En effet, l'ensemble $\mathcal{A} = \left\{ r \geqslant 0 : \left(\dfrac{r^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est bornée} \right\}$ est :

* non vide car contient $r = 0$.
* majoré par 1 car si $r > 1$ alors la suite $(\frac{r^n}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

$R = 1$ est la borne supérieure de $\mathcal{A}$: il s'agit ici du maximum car $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Attention : pour autant, la série entière $\sum \dfrac{R^n}{n} = \sum \dfrac{1}{n}$ diverge.

Théorème 5

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

— Si $|z| < R$ alors la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.

— Si $|z| > R$ alors la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

— Si $|z| = R$, on ne peut pas conclure.

Exemple

On a montré que la série $\sum \dfrac{z^n}{n}$ a pour rayon de convergence 1. On constate qu' effectivement :

— Si $|z| < 1$ alors la série $\sum \dfrac{z^n}{n}$ converge absolument.

— Si $|z| > 1$ alors la série $\sum \dfrac{z^n}{n}$ diverge grossièrement.

— Si $|z| = 1$, on ne peut pas conclure, notons par exemple que :

* La série $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge.
* La série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge.

Démonstration. (du Théorème 5)

— Supposons $|z| < R$ et fixons $r > 0$ tel que $|z| < r < R$: la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée. Puisque $|z| < r$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente par le lemme d'Abel.

— Supposons $|z| > R$.
La suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc non bornée et ne converge donc pas vers 0.
La série $\sum a_n z^n$ est donc grossièrement divergente.

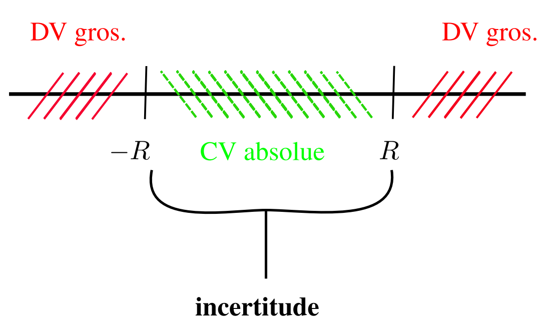
$\square$

Remarques

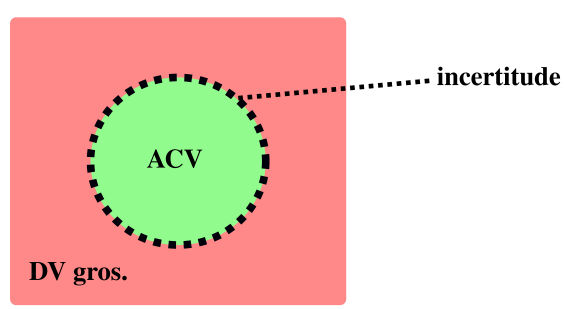
Nous avons démontré que

$$R = \sup\{r \geqslant 0 : (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\} = \sup\left\{r \geqslant 0 : \sum a_n r^n \text{ CVA}\right\} = \sup\left\{r \geqslant 0 : \sum a_n r^n \text{ est convergente}\right\}.$$

Dans $\mathbb{R}$:



Dans $\mathbb{C}$:



Définition 6: intervalle et disque ouvert de CV

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $]-R; R[$ est appelé intervalle ouvert de convergence.
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $D(0; R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ est appelé disque ouvert de convergence.

1.B - *Détermination du rayon de convergence*

1.B.1) *Encadrement du rayon de convergence*

Proposition 7: encadrement du rayon de convergence

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.
- Si $\sum a_n z_0^n$ converge pour un nombre $z_0 \in \mathbb{C}$ alors $R \geqslant |z_0|$.
- Si $\sum a_n z_0^n$ diverge pour un nombre $z_0 \in \mathbb{C}$ alors $R \leqslant |z_0|$.
- Si $\sum a_n z_0^n$ est convergente mais pas absolument convergente, alors $|z_0| = R$.

Démonstration. On a montré les implications suivantes :
- $|z| < R \Longrightarrow \sum a_n z^n$ CV.
- $|z| > R \Longrightarrow \sum a_n z^n$ DV.

qui admettent respectivement pour contraposées :
- $\sum a_n z_0^n$ DV $\Longrightarrow R \leqslant |z_0|$.
- $\sum a_n z_0^n$ CV $\Longrightarrow R \geqslant |z_0|$.

$\square$

Exemple

La série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge donc $R \geqslant 1$. La série $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge donc $R \leqslant 1$. Ainsi, $R = 1$.
On peut conclure plus rapidement : la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ est convergente mais pas absolument convergente. Donc $R = 1$.

Exercice 8

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière qui converge pour $z = \sqrt{2}i$ et qui diverge pour $z = 1 + i$.
Déterminer son rayon de convergence.

1.B.2) *Comparaison de séries entières*

Proposition 9

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectif R_a et R_b.
Si $|a_n| \leqslant |b_n|$ à partir d'un certain rang alors $R_a \geqslant R_b$.

Démonstration. On a bien sûr pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$, $|a_n z^n| \leqslant |b_n z^n|$. Ainsi,

$$\begin{aligned} |z| < R_b &\Longrightarrow \sum |b_n z_n| \text{ CV} \\ &\Longrightarrow \sum |a_n z^n| \text{ CV par comparaison de séries à termes positifs} \\ &\Longrightarrow \sum a_n z^n \text{ CV} \\ &\Longrightarrow |z| \leqslant R_a \end{aligned}$$

On en déduit que $R_b \leqslant R_a$. □

Exemple

La série entière $\sum \sin(n) z^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$. En effet,

- $\forall n \in \mathbb{N}, |\sin(n)| \leqslant 1$ et la série $\sum z^n$ a pour rayon de convergence $R' = 1$ donc $R \geqslant R' = 1$.
- De plus, la série $\sum \sin(n) 1^n$ diverge grossièrement donc $R \leqslant 1$.

Exercice 10

Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum e^{\cos(n)} z^n$.

Solution. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e^{-1} \leqslant e^{\cos(n)} \leqslant e^1$.
Les séries entières $\sum e^{-1} z^n$ et $\sum e z^n$ ont toutes deux pour rayon de convergence $R' = 1$ donc

$$R \geqslant R' = 1 \geqslant R \text{ i.e. } R = 1.$$

□

1.B.3) *Termes généraux équivalents*

Proposition 11

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières telles que $|a_n| \underset{n \to +\infty}{\sim} |b_n|$.
Alors elles ont le même rayon de convergence.

Démonstration. En effet pour tout $z \in \mathbb{C}$, les séries $\sum |a_n z^n|$ et $\sum |b_n z^n|$ sont de même nature. □

Exemple

La série $\sum \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(n)\right) z^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$.
En effet, $\left|\frac{\pi}{2} - \arctan(n)\right| = \left|\arctan \frac{1}{n}\right| \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Ainsi, la série entière $\sum \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(n)\right) z^n$ a le même rayon de convergence que la série $\sum \frac{z^n}{n}$ c'est-à-dire $R = 1$.

Exercice 12

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{e^{in}}{1 + ni} z^n$.

Solution. $\left|\frac{e^{in}}{1 + ni}\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + n^2}} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ ainsi $\sum \frac{e^{in}}{1 + ni} z^n$ a le même rayon rayon de convergence $R = 1$ que la série $\sum \frac{z^n}{n}$. □

1.B.4) *Règle de d'Alembert*

Exemple

Déterminons à nouveau le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{z^n}{n}$.
Pour $z \neq 0$, on applique la règle de d'Alembert à la série $\sum \left|\frac{z^n}{n}\right|$ de terme général $u_n = \left|\frac{z^n}{n}\right|$:

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{z^{n+1}}{n+1}\frac{n}{z^n}\right| = |z|.$$

— Si $|z| < 1$ (même nul), la série $\sum \frac{z^n}{n}$ converge (absolument) : $R \geqslant 1$.
— Si $|z| > 1$, la série $\sum \frac{z^n}{n}$ diverge $R \leqslant 1$.

Exercice 13

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$.
2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum n^n z^n$.

Démonstration. 1. La série $\sum \frac{z^n}{n!}$ a pour rayon de convergence $R = +\infty$.
En effet, soit $z \neq 0$:

$$\left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{z^n}\right| = \frac{|z|}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1.$$

Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente, et également pour $z = 0$.
On en déduit que $\forall z \in \mathbb{C}, R \geqslant |z|$. Conclusion : $R = +\infty$.

2. Pour tout $z \neq 0$,

$$\left|\frac{(n+1)^{n+1}z^{n+1}}{n^n z^n}\right| = (n+1)\underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n |z|}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e|z|} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Ainsi, la série $\sum n^n z^n$ diverge pour tout $z \in \mathbb{C}^*$.
On en déduit que $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $R \leqslant |z|$. Conclusion $R = 0$.

□

Exemple

La série $\sum \frac{x^{2n}}{n}$ peut se comprendre comme une série entière $\sum a_n x^n$ avec $a_{2p} = \frac{1}{p}$ et $a_{2p+1} = 0$.
Attention : on ne peut pas appliquer la règle de d'Alembert aux termes a_n : une infinité de coefficients a_n est nulle.
On utilise la règle de d'Alembert **sur la série numérique** $\sum \frac{x^{2n}}{n}$, pour $x \neq 0$:

$$\left|\frac{x^{2(n+1)}}{n+1}\frac{n}{x^{2n}}\right| = \frac{n}{n+1}x^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x^2.$$

— Si $x^2 < 1 \iff |x| < 1$ la série $\sum \frac{x^{2n}}{n}$ est absolument convergente.

— Si $x^2 > 1 \iff |x| > 1$ la série $\sum \frac{x^{2n}}{n}$ est divergente.

On en déduit que $R = 1$.

Théorème 14

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la série $\sum n^\alpha x^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$.

Démonstration. Il suffit, par exemple, d'appliquer la règle de d'Alembert :

$$\left|\frac{(n+1)^\alpha x^{n+1}}{n^\alpha x^n}\right| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha |x| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |x|.$$

□

1.B.5) *Rayon de convergence de $\sum na_n z^n$.*

Théorème 15

Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum na_n z^n$ ont le même rayon de convergence.

Démonstration. Il est possible de faire une preuve directe, mais on verra cette propriété comme conséquence de la primitivation d'une série entière. □

Exemple

La série entière $\sum \frac{z^n}{n}$ a le même rayon de convergence que la série entière $\sum n\frac{z^n}{n} = \sum z^n$ c'est-à-dire $R = 1$.

Exercice 16

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{(-1)^n}{n(n-1)} z^n$.

Solution. Dans un premier temps, utilisons un équivalent : $\left|\frac{(-1)^n}{n(n-1)}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$.

Ainsi, les série $\sum \frac{(-1)^n}{n(n-1)} z^n$ et $\sum \frac{1}{n^2} z^n$ ont le même rayon de convergence.

Mais $\sum \frac{1}{n^2} z^n$, $\sum \frac{n}{n^2} z^n$ et $\sum \frac{n^2}{n^2} z^n$ ont le même rayon de convergence.

Cette dernière série n'est autre que $\sum z^n$ dont le rayon de convergence est $R = 1$. □

1.C - Somme et produit de Cauchy de séries entières

Proposition 17: Combinaisons linéaires de séries entières

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a, R_b.

1. Le rayon de convergence R de la série entière somme $\sum (a_n + b_n) z^n$ vérifie :

$$\begin{cases} R = \min(R_a, R_b) & \text{si } R_a \neq R_b \\ R \geqslant R_a = R_b & \text{si } R_a = R_b \end{cases}$$

2. Si $\lambda \in \mathbb{C}^*$ alors la série entière $\sum \lambda a_n z^n$ a pour rayon de convergence R_a.

Démonstration. — Supposons dans un premier temps $R_a < R_b$. On note R le rayon de CV de $\sum(a_n + b_n)z^n$.

* Pour tout $|z_0| < R_a < R_b$ les séries $\sum a_n z_0^n$ et $\sum b_n z_0^n$ convergent donc la somme $(a_n + b_n)z_0^n$ converge également. Ainsi $R \geqslant R_a$.
* D'autre part, si $R_a < |z_0| < R_b$ alors $\sum a_n z_0^n$ diverge et $\sum b_n z_0^n$ converge. La somme $\sum(a_n + b_n)z_0^n$ est donc divergente donc $R \leqslant R_a$. En définitive, $R = R_a$.

— Le cas $R_b < R_a$ se traite de même.

— Supposons maintenant que $R_a = R_b$.

* Pour tout $|z_0| < R_a = R_b$ alors les deux séries $\sum a_n z_0^n$ et $\sum b_n z_0^n$ convergent donc la somme $\sum(a_n + b_n)z_0^n$ converge.
  On en déduit que $R \geqslant R_a = R_b$. Et on ne peut pas dire mieux, en effet :
* Si $|z_0| > R_a = R_b$, les deux séries $\sum a_n z_0^n$ et $\sum b_n z_0^n$ divergent donc on ne peut pas conclure quant à la nature de la somme $\sum(a_n + b_n)z_0^n$.

□

Théorème 18: Produit de Cauchy de séries entières

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectifs R_a, R_b.

La produit de Cauchy des deux séries est de la forme $\sum c_n z^n$ avec $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Le rayon de convergence du produit de Cauchy R vérifie $R \geqslant \min(R_a, R_b)$.
De plus, si $|z| < \min(R_a, R_b)$ alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right).$$

Démonstration. — Pour tout $|z| < \min(R_a, R_b)$ alors les deux séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont absolument convergentes donc le produit de Cauchy $\sum c_n z^n$ est absolument convergent par les résultats généraux sur les séries numériques.
On en déduit que $R \geqslant \min(R_a, R_b)$.

— Si $|z| < \min(R_a, R_b)$ le produit de Cauchy des séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ absolument convergentes vérifie :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k z^k b_{n-k} z^{n-k}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n.$$

□

Exemple

La série entière $\sum z^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$ et pour tout $|z| < 1$, $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.
Le produit de Cauchy de cette série de rayonde convergence $R = 1$ par elle même donne pour $|z| < 1 = \min(1, 1)$:

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \frac{1}{1-z}\frac{1}{1-z} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} 1 \times 1\right) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^n.$$

On obtient une série entière de rayon de convergence précisément $R = 1$ ici.
En effet, $(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ et la série entière $\sum n z^n$ a le même rayon de convergence que la série entière $\sum z^n$.
Attention : en général on a seulement $R \geqslant \min(R_a, R_b)$.

Exercice 19

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels non nuls tels que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
On note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum a_n$.
Pour $x \in]-1;1[$, on note $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n$.
Après avoir justifié leur existence, déterminer une relation entre $f(x)$ et $g(x)$.

Solution. — Soit $|z| < 1$. On applique la règle de d'Alembert, pour $z \neq 0$:

$$\frac{|a_{n+1} z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |z|.$$

- ∗ Pour tout $|z| < 1$, la série entière $\sum a_n z^n$ est donc absolument convergente : $R \geqslant 1$.
- ∗ Pour tout $|z| > 1$, la série entière $\sum a_n z^n$ est donc divergente : $R \leqslant 1$.

Ainsi, $R = 1$. En particulier pour tout $|x| < 1$, la série $\sum a_n x^n$ est absolument convergente donc $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ existe.

— Maintenant on interprète $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n$ comme le produit de Cauchy des séries entières de rayon de convergence $R_a = R_b = 1$, $\sum a_n x^n$ par $\sum x^n$.
Ce produit est absolument convergent pour tout x tel que $|x| < \min(1,1) = 1$ avec

$$\frac{f(x)}{1-x} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k \times 1\right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n = g(x).$$

□

2 - Somme d'une série entière d'une variable réelle

Dans cette partie, on considère uniquement des séries entières $\sum a_n x^n$ d'une variable réelle de rayon de CV $R > 0$.

Définition 20: fonction somme

On appelle fonction somme de la série entière $\sum a_n x^n$ la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Cette fonction est définie *au moins* sur $]-R;R[$.
L'étude en $-R$ et $+R$ est particulière à chaque fonction somme d'une série entière.

Exemple

La fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ est définie sur $[-1;1[=]-1;1[\cup\{-1\}$.

Théorème 21: Continuité de la fonction somme

La fonction somme d'une série entière réelle est continue sur son **ensemble de définition**.

Exemple

La fonction $f : x \longmapsto \sum x^n$ est continue sur $]-1;1[$.
La fonction $f : x \longmapsto \sum \frac{(-1)^n x^n}{n}$ est continue sur $]-1;1]$.
La fonction $f : x \longmapsto \sum \frac{x^n}{n}$ est continue sur $[-1;1[$.

Théorème 22: Dérivation terme à terme

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière réelle de rayon de convergence $R > 0$.

La fonction somme $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est dérivable sur **l'intervalle ouvert de convergence** $]-R;R[$ et

$$\forall x \in]-R;R[,\ f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

De plus, la série entière $\sum n a_n x^{n-1}$ a pour rayon de convergence R.

En dérivant successivement f et ses dérivées successives $f^{(p)}$, on obtient que $f \in \mathscr{C}^\infty(]-R;R[)$:

Corollaire 23: Classe $\mathscr{C}^\infty$ de la fonction somme sur $]-R;R[$

La fonction somme d'une série entière réelle $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R:R[$ et

$$\begin{aligned}\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in]-R;R[,\ f^{(p)}(x) &= \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1) a_n x^{n-p} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+p)(n+p-1)\dots(n+1) a_{n+p} x^n.\end{aligned}$$

En particulier, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_p = \frac{f^{(p)}(0)}{p!}$.

Exercice 24

Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n$.

Démonstration. — La série entière $\sum x^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$.

Par le théorème de dérivation terme à terme, la fonction somme $x \longmapsto f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ est dérivable sur $]-1;1[$ et

$$\forall x \in]-1;1[,\ f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1},$$

série entière de rayon de convergence $R = 1$.

— D'autre part, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ donc : $\forall x \in]-1;1[,\ f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$.

On en déduit que

$$\forall x \in]-1;1[,\ \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

En conclusion, la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n$ a le même rayon de convergence $R = 1$ que la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$ et pour tout $x \in]-1;1[$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = x \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

□

Théorème 25: intégration terme à terme

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

On note $f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sa fonction somme et F une primitive de la fonction $f \in \mathscr{C}^0(]-R;R[)$.

La série entière $\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ est une série entière de rayon de convergence R et

$$\forall x \in]-R,R[,\ F(x) = F(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Autrement dit, pour pour tout $x \in]-R;R[$,

$$F(x) - F(0) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

Exercice 26

Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum \frac{x^n}{n}$.

Étudier alors la nature et donner la somme de la série numérique $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Démonstration. La série entière $\sum x^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$.

De plus, pour tout $x \in]-1;1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

On note $x \longmapsto F(x) = -\ln(1-x)$ une primitive de $\frac{1}{1-x}$ sur $]-1;1[$.
Par le théorème d'intégration terme à terme, on a

$$F(x) = -\ln(1-x) = -\ln(1) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n},$$

série entière de même rayon de convergence $R = 1$.

La série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est une série alternée convergente car $\frac{1}{n} \geqslant 0$ décroit vers 0. On en déduit que la fonction F est continue en -1 :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = F(-1) = \lim_{x \to -1} F(x) = \lim_{x \to -1} (-\ln(1-x)) = -\ln(2).$$

□

3 - Fonction développable en série entière

3.A - *Définition et premières propriétés*

Théorème 27: Rappels : formules de Taylor à l'ordre n

1. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $I \subset \mathbb{R}$ contenant 0
   — Formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n entre 0 et $x \in I$:
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$
   — Inégalité de Taylor-Lagrange entre 0 et $x \in I$:
$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) \right| \leqslant M \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \text{ avec } M = \sup_{I_{0,x}} |f^{(n+1)}|$$
   avec $I(0;x) = [0;x]$ si $0 \leqslant x$ et $[x;0]$ sinon.
2. Soit f de classe $\mathscr{C}^n$ sur $I \subset \mathbb{R}$ contenant 0.
   Formule de Taylor-Young à l'ordre n au voisinage de 0 :
$$f(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + o(x^n).$$

Définition 28: Fonction développable en série entière

Une fonction est développable au voisinage de 0 sur $]-r;r[$, s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergenve $R \geqslant r$ telle que :
$$\forall x \in]-r;r[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Théorème 29: Condition nécessaire de développement en série entière

Si f admet un développement en série entière sur $]-r;r[$ alors f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r;r[$, son développement en série entière est unique et est donné par sa série de Taylor $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Démonstration. Soient $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R tel qu'il existe $r \leqslant R$:
$$\forall x \in]-r;r[, f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$
Alors f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r;r[$ par le corollaire du théorème de dérivation terme à terme.

De plus, on obtient par récurrence
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]-r;r[, f^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1)a_n x^{n-p},$$

la partie hérédité suivant les arguments suivants :

$$f^{(p+1)}(x) = (f^{(p)})'(x) = \left(\sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1)a_n x^{n-p}\right)' = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1)(n-p)a_n x^{n-p-1}$$
$$= \sum_{n=p+1}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-(p+1)-1)a_n x^{n-(p+1)}.$$

En particulier pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f^{(p)}(0) = p!a_p$: le développement en série entière de f au voisinage de 0 coïncide bien avec la série de Taylor en 0. □

Remarques

— Si f est développable en série entière alors f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un intervalle ouvert.
— En particulier f admet des développements limités à n'importe quel ordre n.
Les coefficients du DL sont donnés, par la formule de Taylor-Young, précisément par les coefficients du développement en série entière jusqu'au rang n.
— La réciproque est fausse : une fonction peut-être de classe C^∞ sans être développable en série entière au voisinage de 0 :

Exercice 30

Montrer que la fonction suivante est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas développable en série entière.

$$f : x \mapsto \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Démonstration. — La continuité est vérifiée car $\lim_0 f = 0 = f(0)$.

— On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x \neq 0$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-\frac{1}{x^2}}$.
L'initialisation est claire et l'hérédité découle des calculs suivants :

$$\forall x \neq 0,\ f^{(n+1)}(x) = \frac{2}{x^3}\frac{P_n(x)}{x^{3n}}e^{-\frac{1}{x^2}} + e^{-\frac{1}{x^2}}\frac{P_n'(x)x^{3n} - 3nx^{3n-1}P_n(x)}{x^{6n}}$$
$$= \frac{2P_n(x) + x^3P_n'(x) - 3nx^2P_n(x)}{x^{3(n+1)}}e^{-\frac{1}{x^2}}$$

— Or pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^k}{x^{3n}}e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{X\to+\infty} \dfrac{1}{X^k}X^{3n}e^{-X^2} = 0$ par croissances comparées.
On en déduit que $f^{(n)}$ est dérivable en 0 et que $f^{(n)}(0) = 0$.
— On a donc démontré que f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ainsi, f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
— En revanche, f n'est développable en série entière sur aucun voisinage $]-r;r[$ de 0.
Sinon sur $]-r;r[$ le développement en série entière coïnciderait avec le développement de Taylor :

$$\forall x \in]-r;r[, f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = 0 \text{ car } f^{(k)}(0) = 0 \text{ pour tout } k.$$

On obtiendrait une contradiction car f n'est identiquement nulle sur aucun voisinage ouvert de 0.

□

Corollaire 31: unicité du développement en série entière

Si f est développable en série entière au voisinage de 0 alors ce développement est unique.

Autrement dit, si pour tout $x \in]-r;r[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = b_n$.

Remarques

— Si f est paire et développable en série entière sur $]-r;r[$ alors pour tout $x \in]-r;r[$:

$$\begin{aligned} f(-x) = f(x) &\iff \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(-x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &\implies \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p+1}x^{2p+1} = -\sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p+1}x^{2p+1} \\ &\implies \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p+1}x^{2p+1} = 0 \implies \forall p \in \mathbb{N}, a_{2p+1} = 0 \end{aligned}$$

par unicité du développement en série entière de la fonction nulle.

— Ainsi, le développement en série entière d'une fonction paire ne contient que des termes de degré pair.

— De manière analogue, le développement en série entière d'une fonction impaire ne contient que des termes de degré impair.

— Si f est pair, f' est impair.

— Si f est impair, f' est pair.

3.B - *Développements usuels*

3.B.1) *Fonctions exponentielles*

Théorème 32: développement en série entière de $\exp$

La fonction $\exp$ est dérivable en série entière sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Démonstration. La fonction exponentielle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $k \in \mathbb{N} \exp^{(k)}(0) = 1$.

On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n sur $I(0;x) = [0;x]$ si $x > 0$ et $[x;0]$ sinon :

$$\left|\exp(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\exp^{(k)}(0)\right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{I(0;x)} |\exp^{(n+1)}| \quad \text{soit} \quad \left|\exp(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|},$$

car pour tout $t \in I(0;x)$ $e^t \leqslant e^x$ si $x > 0$ et $e^t \leqslant e^{|x|}$ si $x < 0$

(on peut aussi majorer par $\max(e^0; e^x)$).

Par croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x$. □

Théorème 33: fonctions ch, sh

Les fonctions ch et sh sont développables en séries entières sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Démonstration. — pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

La fonction $\exp$ est développable en série entière, et $\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

On obtient $e^{-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$. Puis par somme de séries entières convergentes sur $\mathbb{R}$, on obtient d'une part pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}\right) \\ &= \frac{2}{2}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!}.\end{aligned}$$

et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\mathrm{sh}(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}\right) \\ &= \frac{2}{2}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}.\end{aligned}$$

□

Définition 34: exponentielle complexe

On définit l'exponentielle complexe $\exp(z)$ d'un nombre complexe $z = x + iy \in \mathbb{C}$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ comme suit :

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y)).$$

Nous aurons besoin des développements en séries entières des fonctions $\cos$ et $\sin$.

Théorème 35

Les fonction $\cos$ et $\sin$ sont développables en séries entières sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Démonstration. — La fonction $\cos$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \cos^{(n)}(x) = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$. Ainsi :

$$\cos^{(n)}(0) = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} \cos(2p\frac{\pi}{2}) = \cos(p\pi) = (-1)^p & \text{si p est pair} \quad n = 2p \\ \cos((2p+1)\frac{\pi}{2}) = \cos(p\pi + \frac{\pi}{2}) = -\sin(p\pi) = 0 & \text{si p est impair} \quad n = 2p+1. \end{cases}$$

On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange sur $I(0;x)$ à l'ordre $2n$:

$$\left|\cos(x) - \sum_{k=0}^{2n} \frac{\cos^{(k)}(0)}{k!} x^k\right| \leqslant \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \sup_{I(0;x)} |\cos^{(2n+1)}| \implies \left|\cos(x) - \sum_{k=0}^{2n} \frac{\cos(\frac{k\pi}{2})}{k!} x^k\right| \leqslant \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\implies \left|\cos(x) - \sum_{p=0}^{n} \frac{\cos(\frac{2p\pi}{2})}{(2p)!} x^{2p} - \underbrace{\sum_{p=0}^{n-1} \frac{\cos(\frac{(2p+1)\pi}{2})}{(2p+1)!} x^{2p+1}}_{=0}\right| \leqslant \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!} x^{2p}$.

— Les calculs pour la fonction sinus sont analogues :

$$\left| \sin(x) - \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p+1} \right| \leqslant \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

Théorème 36: exponentielle complexe et série entière

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ est convergente et $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Démonstration. — On écrit $z = x + iy$ sous forme algébrique avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$.

— Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ est absolument convergente et $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

— On montre avec la formule de Taylor que que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $e^{iy} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iy)^n}{n!}$ la convergence de la série étant absolue.

— On calcule alors le produit de Cauchy des deux séries complexes absolument convergentes :

$$e^z = e^x e^{iy} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iy)^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(iy)^k}{k!} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^{n-k} (iy)^k$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+iy)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

□

Par produit de cauchy des séries complexes $\sum \frac{z^n}{n!}$ et $\sum \frac{z'^n}{n!}$ on obtient :

Proposition 37: équation fonctionnelle

Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2, \exp(z + z') = \exp(z)\exp(z')$ i.e. $e^{z+z'} = e^z \cdot e^{z'}$.

3.B.2) *Séries géométriques et fonction logarithme*

Théorème 38: sommes des séries géométriques réelles et complexes

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \text{ et } \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n.$$

En particulier pour tout nombre réel $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \in]-1; 1[$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}.$$

Dans le cas réel, on en déduit les développements en séries entières des fonctions $x \mapsto \ln(1 + x)$ et $x \mapsto \ln(1 - x)$.

Théorème 39: développement en série entière de $\ln(1+x)$

La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est développable en série entière sur $]-1;1[$ et pour tout $x \in]-1;1[$,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n.$$

Démonstration. La série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$.

Pour tout $x \in]-1;1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$.

On intègre terme à terme sur $]-1;1[$ et on obtient d'une part pour tout $x \in]-1;1[$,

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^x (-1)^n t^n dt \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n,$$

et d'autre part,

$$\int_0^x \frac{1}{1+t} dt = [\ln(1+t)]_0^x = \ln(1+x) - \ln(1) = \ln(1+x).$$

□

On en déduit alors pour tout $x \in]-1;1[$,

$$\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (-x)^n \iff \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$

3.B.3) *Fonction* $(1+x)^\alpha$

Théorème 40

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est développable en série entière sur $]-1;1[$ et

$$\forall x \in]-1;1[,\ (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

Démonstration. — Notons tout d'abord que si $\alpha \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est polynomiale donc est développable en série entière via la formule du binôme de Newton.
Le rayon de convergence $R = +\infty$: la suite des coefficients est stationnaire en 0.

— On suppose maintenant que $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.
On peut raisonner de plusieurs manières :
  * Utiliser les formules de Taylor.
  * Utiliser une équation différentielle.

On exploite cette seconde idée pour illustrer cette technique importante dans ce chapitre.
Notons $f : x \mapsto f(x) = (1+x)^\alpha$ définie sur $]-1;+\infty[$.
La fonction f est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et pour tout $x > -1$, $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$.
Ainsi, f est solution de l'équation différentielle

$$(E) : (1+x)y'(x) = \alpha y(x)$$

f est même l'unique solution du problème de Cauchy sur $]-1;1[$ intervalle sur lequel $1+x \neq 0$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (1+x)y'(x) & = & \alpha y(x) \\ y(0) & = & 1 \end{array} \right.$$

Déterminons les solutions de l'équation (E) développable en série entière et vérifiant $y(0) = 1$.

Analyse.

Supposons qu'il existe y une fonction :

— développable en série entière sur un voisinage $]-r; r[$ de 0

— solution de (E) vérifiant $y(0) = 1$.

Soit $x \in]-r; r[$.

On a $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Par le théorème de dérivation terme à terme, on obtient $y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$.

Ainsi, y est solution de (E) si et seulement si :

$$
\begin{aligned}
&(1+x)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
\iff &\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha a_n x^n. \\
\iff &\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha a_n x^n. \\
\iff &a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} ((n+1)a_{n+1} + n a_n) x^n = \alpha a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha a_n x^n.
\end{aligned}
$$

Par unicité du développement en série entière, y est solution de (E) si et seulement si

$$
\begin{cases} a_1 = \alpha a_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} = \dfrac{\alpha - n}{n+1} a_n \end{cases} \iff \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{\alpha - n}{n+1} a_n.
$$

On montre alors (exercice) par récurrence que

$$
\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} a_0.
$$

Ainsi, pour tout $x \in]-r; r[$:

$$
y(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.
$$

Puisque $y(0) = 1$, on a $a_0 = 1$.

Synthèse.

On pose $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec

$$
a_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}.
$$

On détermine maintenant le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$.

On utilise la règle de d'Alembert : pour tout $x \neq 0$,

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| &= \left|\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{(n+1)!} \frac{n!}{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}\right| \left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\right| \\
&= \left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right| |x| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |x|.
\end{aligned}
$$

— Pour tout $|x| < 1$ la série entière est absolument convergente : $R \geqslant 1$.
— Pour tout $|x| > 1$ la série entière est divergente : $R \leqslant 1$.
On en déduit que $R = 1$.
On a montré :
— y est développable en série entière sur $]-1;1[$
— $y(0) = 1$
— y est solution de (E) d'après les équivalences écrites dans la partie analyse.

Conclusion.
Les fonctions $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$ et $x \mapsto \sum a_n x^n$ sont toutes deux solution du problème de Cauchy sur $]-1;1[$:

$$\begin{cases} (1+x)y'(x) & = & \alpha y(x) \\ y(0) & = & 1 \end{cases}$$

Elles coïncident par unicité de la solution au problème de Cauchy.
f est donc développable en série entière sur $]-1;1[$ et pour tout $x \in]-1;1[$:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

□

3.C - Développement en série entière

3.C.1) *Utilisation des développements usuels et des opérations sur les séries entières : sommes et produit de Cauchy*

Exemple

1. Développement en série entière de ch, sh à partir de celui de $\exp$.
2. Équation fonctionnelle $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2, \exp(z+z') = \exp(z)\exp(z')$.

3.C.2) *Dérivation et intégration terme à terme*

Exemple

1. Développement en série entière de $x \longmapsto \ln(1+x)$ à partir de celui de celui de $\dfrac{1}{1+x}$.
2. Développement en série entière de $x \longmapsto -\dfrac{1}{(1+x)^2}$ à partir de celui de celui de $\dfrac{1}{1+x}$.

3.C.3) *Formules de Taylor*

Exemple

Développement en série entière de $x \mapsto e^x$, $x \mapsto \cos(x)$, $x \mapsto \sin(x)$.

3.C.4) *Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle*

Exemple

$\forall x \in]-\min(2,3);\min(2;3)[=]-2;2[$

$$\frac{1}{x^2-5x+6} = -\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\dfrac{x}{2}} - \frac{1}{3}\frac{1}{1-\dfrac{x}{3}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n - \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)x^n.$$

3.C.5) *Équation différentielle*

Exemple

Développement en série entière de $x \longmapsto (1+x)^\alpha$ comme solution du problème de Cauchy : $(1+x)y'(x) = \alpha y(x)$.