Chapitre 7 : Équations et systèmes différentiels

Plan du chapitre

---

1 Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1

On appelle équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1, une équation dont l'inconnue est une fonction y dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, du type :

$$\begin{array}{ll} a(t)y' + b(t)y = c(t) & (\mathscr{E}) \\ a(t)y' + b(t)y = 0 & (\mathscr{H}). \end{array}$$

où $a, b, c : I \to \mathbb{C}$ sont des fonctions continues sur I.

On appelle $(\mathscr{H})$ l'équation différentielle homogène (sans second membre) associée à $(\mathscr{E})$.

Une équation différentielle est dite résolue si elle est sous la forme : $y' + b(t)y = c(t)$ (i.e. $a = 1$).

Théorème 1: Problème de Cauchy

Si la fonction a ne s'annule pas sur I, le problème de Cauchy :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a(t)y' + b(t)y & = & c(t) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array} \right.$$

où $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$, admet une unique solution sur I.

Remarques

Comme dans le théorème précédent on suppose que a ne s'annule pas sur I.

La seule solution y d'une équation homogène $a(t)y' + by = 0$ s'annulant au moins une fois sur I (i.e. telle que $\exists t_0 \in I, y(t_0) = 0$) est donc la fonction identiquement nulle (puisqu'elle est solution).

Théorème 2: Équation différentielle homogène et solution générale

— On considère l'équation homogène résolue $y' + \alpha(t)y = 0 \quad (\mathscr{H})$.
Toute solution de $(\mathscr{H})$ est de la forme $y(t) = Ke^{-A(t)}, K \in \mathbb{R}$ où A est une primitive sur I de la fonction α.

— L'équation $y' + \alpha(t)y = \beta(t) \quad (\mathscr{E})$ admet pour solution générale $y(t) = y_p(t) + Ke^{-A(t)}$ où y_p est une solution particulière de l'équation $(\mathscr{E})$.

Corollaire 3: Structure de l'ensemble des solutions

Lorsque $a : I \to \mathbb{C}$ ne s'annule pas sur l'intervalle I, l'ensemble $S_{\mathscr{H}}$ des solutions de $(\mathscr{H})$ est une droite vectorielle $S_{\mathscr{H}} = Vect(t \mapsto e^{-A(t)})$.

On a alors $S_{\mathscr{E}} = y_p + S_{\mathscr{H}}$: toute solution de $\mathscr{E}$ est la somme d'une solution particulière de $\mathscr{E}$ et d'une solution de l'équation homogène.

1.A Recherche d'une solution particulière

Pour déterminer une solution particulière, plusieurs possibilités sont envisageables :

❶ **Il y a une solution constante évidente :**

Exercice 4

Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle $ty' + y = 1$.

Solution. On résout $(\mathscr{E}) : ty' + y = 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation $(\mathscr{E})$ est équivalent à $y'(t) + \frac{1}{t}y(y) = \frac{1}{t}$.
Équation homogène : $(\mathscr{H}) : y'(t) = -\frac{1}{t}y(t)$.
Toute solution de $(\mathscr{H})$ s'écrit sur $\mathbb{R}_+^*$: $y(t) = Ke^{-\ln(t)} = \frac{K}{t} : K \in \mathbb{R}$.
Solution particulière : la solution $y_p(t) = 1$ constante est solution de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
La solution générale de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est donc $y : t \mapsto 1 + \frac{K_+}{t} : K_+ \in \mathbb{R}$. □

❷ On recherche une solution du même type que le second membre :

∗ Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(\mathscr{E}) : y' + \alpha y = P$ avec $P \in \mathbb{R}[X]$ on cherche y sous la forme $Q \in \mathbb{R}[X]$ ($\deg(Q) = \deg(P)$ si $\alpha \neq 0$, $\deg(Q) = \deg(P) + 1$ si $\alpha = 0$).

Exercice 5

Résoudre l'équation différentielle $y'(t) - y(t) = t^2 - 3t + 1$.

Solution. Toute solution de l'équation homogène s'écrit $y(t) = Ke^t : K \in \mathbb{R}$.
On cherche une solution $y_p(t) = at^2 + bt + c$ polynomiale de $2 = \deg(t^2 - 3t + 1)$ car $\alpha = -1 \neq 0$.
On injecte dans $(\mathscr{E})$ on trouve :

$$(2at + b) - (at^2 + bt + c) = t^2 - 3t + 1 \iff a = -1, b = 1, c = 0$$

Ainsi, $t \mapsto y_p(t) = -t^2 + t$, est solution particulière de $(\mathscr{E})$ et la solution générale de $(\mathscr{E})$ est

$$y : t \mapsto y(t) = -t^2 + t + Ke^t.$$

□

∗ Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(\mathscr{E}) : y' + \alpha y = \lambda e^{\mu t}$, on cherche y sous la forme

$$y(t) = \begin{cases} \nu e^{\mu t} & \text{si} \quad \mu \neq -\alpha \\ \nu t e^{\mu t} & \text{si} \quad \mu = -\alpha \end{cases}$$

Exercice 6

Résoudre l'équation différentielle $y'(t) + 7y(t) = 3e^{4t}$.

Solution. Toute solution de l'équation homogène $y' + 7y = 0$ s'écrit $y(t) = Ke^{-7t} : K \in \mathbb{R}$.
On cherche une solution particulière sous la forme $y_p(t) = \nu e^{4t}$.
Alors y_p est solution de l'équation initiale $(\mathscr{E})$ si et seulement si $4\nu e^{4t} + 7\nu e^{4t} = 3e^{4t}$.
Une solution particulière de $(\mathscr{E})$ est donc $y_p(t) = \frac{3}{11}e^{4t}$ et la solution générale :

$$y : t \mapsto \frac{3}{11}e^{4t} + Ke^{-7t} : K \in \mathbb{R}.$$

□

* Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(\mathscr{E}) : y' + \alpha y = P(t)e^{mt}$ où $P \in \mathbb{R}[X], m \in \mathbb{C}$ on cherche y sous la forme $y(t) = Q(t)e^{mt}$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$.

Exercice 7

Résoudre l'équation différentielle $y'(t) + y(t) = te^{-t}$.

Solution. $y'(t) + y(t) = te^{-t}$.
Équation homogène :
Toute solution de l'équation homogène $y'(t) + y(t) = 0$ s'écrit sur $\mathbb{R}_+^*$: $y(t) = Ke^{-t}$: $K \in \mathbb{R}$.
Solution particulière :
On cherche une solution sous la forme $y_p(t) = Q(t)e^{-t}$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$.
On injecte dans $(\mathscr{E})$ et on obtient que y_p est solution si et seulement si pour tout $t > 0$ (on simplifie par $e^{-t} \neq 0$) :

$$(Q'(t) - Q(t)) + Q(t) = t \iff Q'(t) = t \iff Q(t) = \frac{t^2}{2} + C : C \in \mathbb{R}.$$

Une solution particulière est donc $y_p(t) = \dfrac{t^2}{2}$ et on en déduit la solution générale de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$y : t \mapsto \frac{t^2}{2} + Ke^{-t} : K \in \mathbb{R}.$$

□

* Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(\mathscr{E}) : y' + \alpha y = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$, on cherche y sous la forme

$$y(t) = C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t).$$

Exercice 8

Résoudre l'équation différentielle $y'(t) - 3y(t) = -7\sin(4t)$.

Solution. Toute solution de l'équation homogène $(\mathscr{H}) : y'(t) - 3y(t) = 0$ s'écrit $y(t) = Ke^{3t}, K \in \mathbb{R}$.
On cherche une solution particulière sous la forme $y_p(t) = \lambda\cos(4t) + \mu\sin(4t)$.
y_p est solution de $(\mathscr{E})$ si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}&-4\lambda\sin(4t) + 4\mu\cos(4t) - 3\lambda\cos(4t) - 3\mu\sin(4t) = -7\sin(4t)\\ &\iff \cos(4t)(4\mu - 3\lambda) - (4\lambda + 3\mu)\sin(4t) = -7\sin(4t).\end{aligned}$$

Avec $t = 0$, on trouve $4\mu = 3\lambda$ et si $t = \frac{\pi}{8}$, on trouve $-(4\lambda + 3\mu) = -7 \Leftrightarrow 4\lambda + 3\mu = 7$.
On obtient $\lambda = 28/25$ et $\mu = 21/25$.
La solution générale de $(\mathscr{E})$ est donc

$$y : t \mapsto Ke^{3t} + \frac{28}{25}\cos(4t) + \frac{21}{25}\sin(4t) : K \in \mathbb{R}.$$

□

❸ **Méthode de la variation de la constante.**
Si l'on ne trouve pas de solution particulière simple, on utilise la méthode de la variation de la constante : on cherche y sous la forme $y(t) = \lambda(t)e^{-A(t)}$ où A est une primitive de α sur I.
On écrit que y est solution de $(\mathscr{E}) : y' + \alpha(t)y = \beta(t)$, on obtient :

$$\left(\lambda'(t)e^{-A(t)} - \alpha(t)\lambda(t)e^{-A(t)}\right) + \alpha(t)\left(\lambda(t)e^{-A(t)}\right) = \beta(t) \iff \lambda'(t) = e^{A(t)}\beta(t).$$

On trouve $\lambda(t)$ par la recherche d'une primitive puis on en déduit $y(t) = \lambda(t)e^{-A(t)}$.

Exercice 9

Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle $ty' + y = \ln t$.

Solution. Sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation $(\mathscr{E})$ est équivalente à $y' + \dfrac{1}{t}y = \dfrac{\ln(t)}{t}$
Toute solution de l'équation homogène $y' + \dfrac{1}{t}y = 0$ s'écrit $y(t) = \dfrac{K}{t}$.
On cherche une solution particulière : $y_p(t) = \dfrac{K(t)}{t}$.
On injecte dans $(\mathscr{E})$ et on obtient que y_p est solution si et seulement si pour tout $t > 0$:

$$-\frac{K(t)}{t^2} + \frac{K'(t)}{t} + \frac{1}{t}\frac{K(t)}{t} = \frac{\ln(t)}{t} \iff K'(t) = \ln(t) \iff K(t) = t\ln(t) - t + C : C \in \mathbb{R}.$$

Une solution particulière de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$: est donc $y_p(t) = \ln(t) - 1$.
La solution général de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est donc

$$y : t \longmapsto \ln(t) - 1 + \frac{K}{t} : K \in \mathbb{R}.$$

□

1.B Recollement des solutions

On considère l'équation $a(t)y' + b(t)y = c(t)$ sur un intervalle I où la fonction a ne s'annule pas.
Si $I = \mathbb{R}$ on applique les méthodes exposées ci-dessus.
Sinon, on découpe $\mathbb{R}$ en plusieurs intervalles I sur lesquelles la fonction a ne s'annule pas.
Si $a(t_0) = 0$, **on tente** alors de recoller les solutions déterminées pour $t < t_0$ et $t > t_0$ en une solution y valable en t_0 également, en utilisant :

— la continuité de la solution y en t_0 : $\lim\limits_{t \to t_0^-} y(t) = \ell = \lim\limits_{t \to t_0^+} y(t)$.

— la dérivabilité de la solution y en t_0 :

$$\lim_{t \to t_0^-} \frac{y(t) - \ell}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0^+} \frac{y(t) - \ell}{t - t_0}.$$

Exercice 10

1. Résoudre $ty' + y = 1$ et montrer qu'il existe une unique solution valable sur $\mathbb{R}$.
2. Résoudre $ty'(t) - y(t) = t^2$ et déterminer les solutions valables sur $\mathbb{R}$.
3. Résoudre $ty' + |t|y = t^2e^{-|t|}$ et montrer qu'il existe une unique solution valable sur $\mathbb{R}$.

Solution. 1. — On résout $(\mathscr{E}) : ty' + y = 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation $(\mathscr{E})$ est équivalent à $y'(t) + \frac{1}{t}y(y) = \frac{1}{t}$.

Équation homogène : $(\mathscr{H}) : y'(t) = -\frac{1}{t}y(t)$.

Toute solution de $(\mathscr{H})$ s'écrit sur $\mathbb{R}_+^*$: $y(t) = Ke^{-\ln(t)} = \frac{K}{t} : K \in \mathbb{R}$.

Solution particulière : la solution $y_p(t) = 1$ constante est solution de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

La solution générale de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est donc $y : t \mapsto 1 + \frac{K_+}{t} : K_+ \in \mathbb{R}$.

— Sur $\mathbb{R}_-^*$ la solution générale de $(\mathscr{E})$ est $y : t \mapsto 1 - \frac{K_-}{t} : K_- \in \mathbb{R}$.

Si y est une solution sur $\mathbb{R}$ alors il existe des réels K_+ et K_- tels que

— Pour tout $t > 0$, $y(t) = 1 + \frac{K_+}{t}$.

— Pour tout $t < 0$, $y(t) = 1 - \frac{K_-}{t}$.

La fonction y est continue en 0 donc

$$\lim_{t\to 0^+} y(t) = \lim_{t\to 0^-} y(t).$$

Puisque $\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t} = +\infty$ et $\lim_{t\to 0^-} \frac{1}{t} = -\infty$ on obtient nécessairement $K_+ = K_- = 0$.

Par conséquent, l'unique solution valable sur $\mathbb{R}$ est la fonction constante $t \mapsto y(t) = 1$.

2. — On résout l'équation $(\mathscr{E}) : ty'(t) - y(t) = t^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation $(\mathscr{E})$ est équivalente à $y'(t) - \frac{1}{t}y(t) = t$.

Équation homogène : Toute solution de l'équation homogène $(\mathscr{H}) : y'(t) - \frac{1}{t}y(t) = 0$ s'écrit $Kt, K \in \mathbb{R}$.

Solution particulière : la fonction $t \mapsto y_p(t) = t^2$ est solution particulière sur $\mathbb{R}_+^*$ de $(\mathscr{E})$.

La solution générale de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est donc $t \mapsto y(t) = t^2 + K_+t : K_+ \in \mathbb{R}$.

— Sur $\mathbb{R}_-^*$ la solution générale est $t \mapsto y(t) = t^2 - K_-t : K_- \in \mathbb{R}$.

Si y est une solution valable sur $\mathbb{R}$ alors il existe des réels K_+, K_- tels que

— Pour tout $t > 0$, $y(t) = t^2 + K_+t$

— Pour tout $t < 0$, $y(t) = t^2 - K_-t$

• La fonction y est continue en 0, donc

$$\lim_{t\to 0^-} y(t) = 0 = \lim_{t\to 0^+} y(t).$$

On en déduit que $y(0) = 0$.

• La fonction y est dérivable en 0, donc

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{y(t) - y(0)}{t - 0} = \lim_{t\to 0^-} \frac{y(t)}{t} = \lim_{t\to 0^-} (t - K_-) = -K_- = K_+ = \lim_{t\to 0^+} \frac{y(t) - y(0)}{t - 0}.$$

On obtient donc $K_+ = -K_-$.

On en déduit que les solutions valables sur $\mathbb{R}$ sont de la forme

$$y(t) = \left\{ \begin{array}{lll} t^2+Kt & \text{si} & t>0 \\ 0 & \text{si} & t=0 \\ t^2+Kt & \text{si} & t<0 \end{array} \right\} = t^2+Kt : K \in \mathbb{R}.$$

3. — On résout l'équation $(\mathscr{E}) : ty'(t)+|t|y(t) = t^2 e^{-|t|}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $(\mathscr{E})$ est équivalente à $y'(t)+y(t) = te^{-t}$.
   Équation homogène :
   Toute solution de l'équation homogène $y'(t)+y(t)=0$ s'écrit sur $\mathbb{R}_+^*$: $y(t) = Ke^{-t} : K \in \mathbb{R}$.
   Solution particulière :
   On cherche une solution sous la forme $y_p(t) = Q(t)e^{-t}$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$.
   On injecte dans $(\mathscr{E})$ et on obtient que y_p est solution si et seulement si pour tout $t>0$ (on simplifie par $e^{-t} \neq 0$) :

$$(Q'(t)-Q(t))+Q(t) = t \iff Q'(t) = t \iff Q(t) = \frac{t^2}{2}+C : C \in \mathbb{R}.$$

   Une solution particulière est donc $y_p(t) = \frac{t^2}{2}$ et on en déduit la solution générale de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$y : t \mapsto \frac{t^2}{2}+K_+e^{-t} : K_+ \in \mathbb{R}.$$

   — Sur $\mathbb{R}_-^*$ l'équation $(\mathscr{E})$ est équivalente à $y'(t)-y(t) = te^{t}$.
   Équation homogène :
   Toute solution de l'équation homogène $y'(t)-y(t)=0$ s'écrit $y(t) = Ke^t, K \in \mathbb{R}$.
   Solution particulière :
   On cherche une solution de $(\mathscr{E})$ sous la forme $y_p(t) = Q(t)e^t$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$.
   On injecte dans $(\mathscr{E})$ et on obtient que y_p est solution si et seulement si pour tout $t>0$, (on simplifie par e^t) :

$$(Q'(t)+Q(t))-Q(t) = t \iff Q'(t) = t \iff Q(t) = \frac{t^2}{2}+C$$

   Une solution particulière est $y_p(t) = \dfrac{t^2}{2}$ et la solution générale de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}_-^*$ est

$$y : t \mapsto \frac{t^2}{2}+K_-e^{t} : K_- \in \mathbb{R}.$$

Soit y une solution valable sur $\mathbb{R}$.
Alors y est continue en 0 donc

$$\lim_{t\to 0^-} y(t) = K_- = K_+ = \lim_{t\to 0^+} y(t).$$

On note $K = K_+ = K_-$.
La fonction y est dérivable en 0 donc

$$y'(0) = \lim_{t\to 0^-} \frac{y(t)-K}{t-0} = \lim_{t\to 0^-} \frac{K(e^t-1)}{t} = K$$

et

$$y'(0) = \lim_{t\to 0^+} \frac{y(t)-K}{t-0} = \lim_{t\to 0^-} \frac{K(e^{-t}-1)}{t} = -K$$

On obtient $K = -K \iff K = 0$.

Au final, il existe une unique solution sur $\mathbb{R}$ à l'équation $(\mathscr{E})$: $t \in \mathbb{R} \longmapsto y(t) = \dfrac{t^2}{2}$.

□

2 Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2

On appelle équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2, une équation dont l'inconnue est une fonction y deux fois dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, du type :

$$\begin{array}{ll} a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = d(t) & (\mathscr{E}) \\ a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = 0 & (\mathscr{H}). \end{array}$$

où $a, b, c, d : I \to \mathbb{C}$ sont des fonctions continues sur I.
On appelle $(\mathscr{H})$ l'équation différentielle homogène (sans second membre) associée à $(\mathscr{E})$.
Elle est dite résolue si elle est sous la forme : $y'' + b(t)y + c(t)y = d(t)$ (i.e. $a = 1$).

Théorème 11: Problème de Cauchy

Si a ne s'annule pas sur l'intervalle I, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = d(t) \\ y(t_0) = y_0 \quad ; \quad y'(t_0) = y'_0 \end{cases}$$

où $(t_0, y_0, y'_0) \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ admet une unique solution.

2.A Équation du second ordre à coefficients constants

On considère une équation différentielle
$(\mathscr{E})$: $ay'' + by' + c = d(t)$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ des constantes et $d : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur I.
L'équation homogène associée possède une structure d'espace vectoriel :

Théorème 12: Équation homogène à coefficients constants

On considère l'équation $(\mathscr{H})$: $ay'' + by' + cy = 0$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
On note Δ le discriminant de l'équation caractéristiques $aX^2 + bX + c = 0$.

- Si $\Delta > 0$, on note r_1, r_2 les deux racines réelles distinctes de l'équation caractéristique
  Il existe alors $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
- Si $\Delta = 0$, on note r la racine réelle double de l'équation caractéristique.
  Il existe alors $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y(t) = (A + Bt)e^{rt}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
- Si $\Delta < 0$, on note $\alpha \pm i\beta$ les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.
  Il existe alors $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y(t) = e^{\alpha t}(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 13

Résoudre les équations différentielles :

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \quad ; \quad y'' + 2y' + y = 0 \quad ; \quad y'' + y' + y = 0.$$

Théorème 14: Structure de l'ensemble des solutions

L'ensemble $S_{\mathscr{H}}$ des solutions de l'équation homogène $(\mathscr{H})$ est un plan vectoriel.
On a alors $S_{\mathscr{E}} = y_p + S_{\mathscr{H}}$: les solutions de $\mathscr{E}$ sont somme d'une solution particulière de $\mathscr{E}$ et de la solution générale de l'équation homogène.

Recherche d'une solution particulière dans le cas d'un second membre simple

- Si $t \mapsto d(t) = d$ est constante, on cherche une solution particulière $y_p = k$ constante.
- Si $t \mapsto d(t) = p(t)$ est polynomiale, on cherche une solution polynomiale $y_p(t) = q(t)$ avec :
  - $\deg(q) = \deg(p)$ si 0 n'est pas racine de l'équation caractéristique.
  - $\deg(q) = \deg(p) + 1$ si 0 est racine simple de l'équation caractéristique.
  - $\deg(q) = \deg(p) + 2$ si 0 est racine double de l'équation caractéristique.
- Si $t \mapsto p(t)e^{mt}$, on cherche une solution particulière $y_p = q(t)e^{mt}$ avec :
  - $\deg(q) = \deg(p)$ si m n'est pas racine de l'équation caractéristique.
  - $\deg(q) = \deg(p) + 1$ si m est racine simple de l'équation caractéristique.
  - $\deg(q) = \deg(p) + 2$ si m est racine double de l'équation caractéristique.

Proposition 15: Principe de superposition

Si y_1 est solution de l'équation $ay'' + by' + cy = d_1(t)$ et y_2 de l'équation $ay'' + by' + cy = d_2(t)$ alors $y_1 + y_2$ est solution de l'équation $ay'' + by' + cy = d_1(t) + d_2(t)$.

Exercice 16

1. Résoudre l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = t\,\mathrm{ch}(t)$.
2. Résoudre l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = 2t + 3 + (6t + 1)e^{-t} + e^{t}$.
3. Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = \sin(t)$.

Solution.

1. L'équation homogène associée $(\mathscr{H})$: $y'' + 2y' + y = 0$ a pour équation caractéristique $X^2 + 2X + 1 = (X+1)^2 = 0$ qui possède une unique solution réelle double $r = -1$.

   Toute solution de $(\mathscr{H})$ s'écrit donc $y(t) = (A + Bt)e^{-t}$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

   On détermine alors une solution particulière de $(\mathscr{E})$ en utilisant le principe de superposition : $(\mathscr{E})$: $y'' + 2y' + y = \frac{1}{2}te^{t} + \frac{1}{2}te^{-t}$.

   - On cherche une solution y_1 de $(\mathscr{E}_1)$: $y'' + 2y' + y = \frac{1}{2}te^{t} = p(t)e^{t}$ où $p(t) = \frac{t}{2}$.
     Puisque $m = 1$ n'est pas solution de l'équation caractéristique, on cherche une solution sous la forme $y_1(t) = q(t)e^{t}$ avec q fonction polynomiale de degré $\deg(q) = \deg(p) = \deg(\frac{t}{2}) = 1$.
     On note $q(t) = (at + b)$ et $y_1(t) = (at + b)e^{t}$.
     Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y_1'(t) = ae^{t} + (at + b)e^{t} = (at + a + b)e^{t}$
     et $y_1''(t) = ae^{t} + (at + a + b)e^{t} = (at + 2a + b)e^{t}$.

On injecte dans $(\mathscr{E}_1)$, et on obtient que y_1 est solution de $(\mathscr{E}_1)$ si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}$ (on simplifie par $e^t \neq 0$) :

$$\begin{aligned}(at+2a+b)+2(at+a+b)+(at+b) = \frac{1}{2}t &\iff 4at+(4a+4b)=0 \\ &\iff a=\frac{1}{8}, b=-\frac{1}{8}.\end{aligned}$$

Une solution de $(\mathscr{E}_1)$ est donc $t \mapsto y_1(t) = \frac{t-1}{8}e^t$.

— On cherche une solution y_2 de $(\mathscr{E}_2)$: $y''+2y'+y = \frac{1}{2}te^{-t} = p(t)e^{-t}$ où $p(t) = \frac{t}{2}$.
Puisque $m=-1$ est racine double de l'équation caractéristique, on cherche une solution sous la forme $y_2(t) = q(t)e^{-t}$ avec q polynôme de degré $\deg(q) = \deg(p)+2 = \deg(\frac{t}{2})+2 = 3$.
On note $q(t) = (at^3+bt^2+ct+d)$ et $y_1(t) = q(t)e^{-t}$.
Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y_2'(t) = q'(t)e^{-t} - q(t)e^{-t} = (q'(t)-q(t))e^{-t}$.
et $y_2''(t) = (q''(t)-q'(t))e^{-t} - (q'(t)-q(t))e^{-t} = (q''(t)-2q'(t)+q(t))e^{-t}$.
On injecte dans $(\mathscr{E}_1)$, et on obtient que y_1 est solution de $(\mathscr{E}_1)$ si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}$ (on simplifie par $e^{-t} \neq 0$) :

$$\begin{aligned}q''(t) = \frac{t}{2} &\iff 6at+2b = \frac{t}{2} \\ &\iff a = \frac{1}{12}, b=0.\end{aligned}$$

Une solution de $(\mathscr{E}_2)$ est donc $t \mapsto y_2(t) = \dfrac{t^3}{12}e^{-t}$.

Une solution de $(\mathscr{E})$ est donc $y_p : t \longmapsto \dfrac{t^3}{12}e^{-t} + \dfrac{(t-1)}{8}e^{-t}$ et on en déduit la solution générale de $(\mathscr{E})$:

$$y : t \mapsto (A+Bt)e^{-t} + \frac{t^3}{12}e^{-t} + \frac{(t-1)}{8}e^{-t} : (A,B) \in \mathbb{R}^2.$$

2. L'équation homogène $(\mathscr{H})$: $y''-3y'+2y=0$ admet pour équation caractéristique $X^2-3X+2 = 0 \iff (X-1)(X-2)=0$ qui possède deux racines réelles distinctes $r_1=1, r_2=2$.
Toute solution de $(\mathscr{H})$ s'écrit donc $y(t) = Ae^t + Be^{2t}, (A,B) \in \mathbb{R}^2$.
— On cherche une solution particulière de $(\mathscr{E}_1)$: $y''-3y'+2y = 2t+3$ sous la forme $y_1(t) = q(t)$ avec q une fonction polynomiale de degré $\deg(q) = \deg(p) = 1$ car $m=0$ n'est pas racine de l'équation caractéristique.
On injecte dans $(\mathscr{E}_1)$ et on obtient que y_1 est solution de $(\mathscr{E}_1)$ sur $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$-3a+2(at+b) = 2t+3 \iff a=1, b=3.$$

Une solution de $(\mathscr{E}_1)$ est $y_1 : t \mapsto t+3$.
— On cherche une solution particulière y_2 de $(\mathscr{E}_2)$: $y''-3y'+2y = (6t+1)e^{-t}$ sous la forme $y_2(t) = q(t)e^{-t}$ avec q une fonction polynomiale de degré $\deg(q) = \deg(6t+1) = 1$ car $m=-1$ n'est pas racine de l'équation caractéristique.
On note $q(t) = at+b$.

On a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y_2'(t) = (q'(t) - q(t))e^{-t}$ et $y''(t) = (q''(t) - 2q'(t) + q(t))e^{-t}$.
On injecte dans $(\mathscr{E}_2)$ et on obtient que y_2 est solution de $(\mathscr{E}_2)$ sur $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}$ (on simplifie par $e^{-t} \neq 0$) :

$$\begin{aligned} q''(t) - 5q'(t) + 6q(t) = 6t + 1 &\iff -5a + 6(at + b) = 6t + 1 \\ &\iff a = 1, b = 1. \end{aligned}$$

Une solution de $(\mathscr{E}_2)$ est $y_2 : t \mapsto (t + 1)e^{-t}$.

— On cherche une solution particulière y_3 de $(\mathscr{E}_3) : y'' - 3y' + 2y = e^t$ sous la forme $y_3 = q(t)e^t$ avec q une fonction polynomiale de degré $\deg(q) = \deg(1) + 1 = 1$ car $m = 1$ est racine de l'équation caractéristique.
On écrit $q(t) = at + b$ et $y_3(t) = q(t)e^t$.
On a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y_3'(t) = (q'(t) + q(t))e^t$ et $y_3''(t) = (q''(t) + 2q'(t) + q(t))e^t$.
On injecte dans $(\mathscr{E}_3)$ et y_3 est alors solution de $(\mathscr{E}_3)$ sur $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}$ (on simplifie par $e^t \neq 0$) :

$$q''(t) - q'(t) = 1 \iff -a = 1, b \in \mathbb{R} \iff a = -1, b \in \mathbb{R}.$$

On en déduit qu'une solution de $(\mathscr{E}_3)$ est $y_3(t) = -te^t$ (on a choisi $b = 0$).

Une solution particulière de $(\mathscr{E})$ est donc $y_p : t \mapsto y_1(t) + y_2(t) + y_3(t)$ et la solution générale de $(\mathscr{E})$:

$$y : t \mapsto (t + 3) + (t + 1)e^{-t} - te^t + Ae^t + Be^{2t} : (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

3. L'équation homogène $(\mathscr{H}) : y'' + y = 0$ admet pour équation caractéristique $X^2 + 1 = 0$ et possède deux racines complexes conjuguées $\pm i$.
Toute solution de $(\mathscr{H})$ s'écrit donc $y(t) = A\cos(t) + B\sin(t) : (A, B) \in \mathbb{R}^2$.
On résout l'équation $\mathscr{E}_\mathbb{C} : y'' + y = e^{it}$ et la solution générale de l'équation initiale $\mathscr{E} : y'' + y = \sin(t)$ sera la partie imaginaire de la solution générale de $\mathscr{E}_\mathbb{C}$.
On cherche une solution particulière de $\mathscr{E}_\mathbb{C}$ sous la forme $y_p(t) = q(t)e^{it}$ avec $\deg(q) = \deg(1)+1$ car i est racine simple de l'équation caractéristique.
On note $q(t) = at + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
$y_p'(t) = (q'(t) + iq(t))e^{it}$ et $y_p''(t) = (q''(t) + 2iq'(t) - q(t))e^{it}$.
On injecte dans $(\mathscr{E}_\mathbb{C})$ et alors y_p est solution de $(\mathscr{E}_\mathbb{C})$ si et seulement si (on simplifie par $e^{it} \neq 0$) :

$$q''(t) + 2iq'(t) = 1 \iff 2ia = 1, b \in \mathbb{R} \iff a = -\frac{i}{2}, b \in \mathbb{R}.$$

Une solution particulière de $(\mathscr{E}_\mathbb{C})$ est donc $y_p(t) = -\frac{it}{2}e^{it}$.
La solution générale de $(\mathscr{E}_\mathbb{C})$ sur $\mathbb{R}$ est donc

$$t \mapsto y_\mathbb{C}(t) = -\frac{it}{2}e^{it} + (A\cos(t) + B\sin(t)) : (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

La solution générale de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}$ est donc

$$t \mapsto y(t) = -\frac{t}{2}\cos(t) + (A\cos(t) + B\sin(t)) : (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

□

Variation de la constante

On commence par déterminer une solution φ de $(\mathscr{H}) : ay'' + by' + c = 0$ qui ne s'annule pas sur I.
On cherche alors une solution $y_p(t) = \lambda(t)\varphi(t)$.
En reportant y_p dans $(\mathscr{E})$, on obtient une équation différentielle du premier ordre en $\lambda'(t)$.
On déduit alors $\lambda(t)$ par recherche d'une primitive, puis on trouve $y_p(t) = \lambda(t)\varphi(t)$.

Remarques

Si l'on donne toutes les primitives de λ', on obtient alors la solution générale de $(\mathscr{E})$.

Exercice 17

Résoudre l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = \dfrac{2te^t}{t^2+1}$.

Solution. On résout l'équation $(\mathscr{E}) : y'' - 2y' + y = \dfrac{2te^t}{t^2+1}$ sur $I = \mathbb{R}$.

L'équation caractéristique $X^2 - 2X + 1 = 0$ de l'équation homogène $(\mathscr{H}) : y'' - 2y' + y = 0$ possède une racine double $r = 1$ donc toute solution de $(\mathscr{H})$ s'écrit $(A + Bt)e^t : (A, B) \in \mathbb{R}^2$.

Avec $A = 1$ et $B = 0$, on obtient une solution $\varphi(t) = e^t$ qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

On cherche maintenant la solution générale de $(\mathscr{E})$ sous la forme $y(t) = \lambda(t)\varphi(t) = \lambda(t)e^t$.

— $y'(t) = \lambda'(t)e^t + \lambda(t)e^t$

— $y''(t) = \lambda''(t)e^t + 2\lambda'(t)e^t + \lambda(t)e^t$.

Ainsi, y est solution de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
&(\lambda''(t) + 2\lambda'(t) + \lambda(t))e^t - 2(\lambda'(t) + \lambda(t))e^t + \lambda(t)e^t = \frac{2te^t}{t^2+1} \\
&\iff \lambda''(t) = \frac{2t}{t^2+1} \\
&\iff \lambda'(t) = \ln(t^2+1) + C,\ C \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

On intègre par parties pour obtenir une primitive de $t \mapsto \ln(1+t^2)$:

$$\begin{aligned}
\int_a^t \ln(1+u^2)du &= \Big[u\ln(1+u^2)\Big]_a^t - \int_a^t \frac{2u^2}{1+u^2}du \\
&= (t\ln(1+t^2) - a\ln(1+a^2)) - 2\int_a^t \left(1 - \frac{1}{1+u^2}\right)du \\
&= (t\ln(1+t^2) - a\ln(1+a^2)) - 2(t-a) + 2(\arctan(t) - \arctan(a))
\end{aligned}$$

On obtient pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\lambda(t) = t\ln(1+t^2) - 2t + 2\arctan(t) + Ct + D\,(C, D) \in \mathbb{R}^2$.

Enfin la solution générale de $(\mathscr{E})$ est donnée par $y(t) = \lambda(t)e^t$:

$$y : t \mapsto \underbrace{t\ln(1+t^2)e^t - 2te^t + 2\arctan(t)e^t}_{y_p(t)} + \underbrace{(Ct+D)e^t}_{\in S_{\mathscr{H}}},\ (C, D) \in \mathbb{R}^2.$$

□

2.B Cas général

Il n'y a pas de méthode systématique de résolution d'une équation différentielle dans le cas général : $(\mathscr{E}) : a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = d(t)$ avec $a, b, c, d : I \to \mathbb{K}$ fonctions continues.

En revanche, le théorème de Cauchy linéaire reste valable, ainsi que la structure des ensembles solutions.

Théorème 18: Problème de Cauchy

Si $a : I \to \mathbb{K}$ ne s'annule pas sur I, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = d(t) \\ y(t_0) = y_0; y'(t_0) = y'_0 \end{cases}$$

où $(t_0, y_0, y'_0) \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, admet une unique solution sur I.

Théorème 19

Si $a : I \to \mathbb{K}$ ne s'annule pas sur I alors l'ensemble solution de l'équation homogène $(\mathscr{H})$: $a(t)y'' + b(t)y' + c(t) = 0$ est un plan vectoriel.
Toute solution de $(\mathscr{E}) : a(t)y'' + b(t)y' + c(t) = d(t)$ est la somme d'une solution particulière de $(\mathscr{E})$ et de la solution générale de $(\mathscr{H})$.

En revanche, il existe plusieurs technique pouvant s'appliquer suivant la situation.

Méthode 1 : Recherche de solutions de type polynomiales

Exemple

On considère l'équation différentielle $t(t+1)y'' + (t+2)y' - y = 0$.
On pose $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ avec $n = \deg(P)$: on a donc $a_n \neq 0$.
On injecte dans l'équation et on trouve, si $n \neq 0$, que le coefficient dominant (celui de t^n) est $[n(n-1) + n - 1]a_n = (n^2 - 1)a_n$. Il doit être nul pour P soit solution, ainsi $n = 1$.
(notons que si $n = 0$ on trouve $a_0 = 0$ ce qui contredit l'hypothèse $a_n \neq 0$; d'où l'hypothèse $n \neq 0$)
On écrit donc $P(t) = at + b$ que l'on injecte dans l'équation.
Il vient $(t+2)a - (at+b) = 0 \iff b = 2a$.
On vérifie que $y_p(t) = a(t+2), a \in \mathbb{R}$ est solution.

Méthode 2 : Recherche d'une solution développable en série entière

Exemple

On considère l'équation différentielle $(\mathscr{E}) : (t^2 + t)y'' + (3t+1)y' + y = 0$.
On cherche une solution $y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ développable en série entière au voisinage de 0.

Analyse

On suppose qu'il existe une solution $y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ développable en série entière au voisinage de 0.
On note R le rayon de convergence de cette série entière.
Pour tout $t \in]-R; R[$ en dérivant terme à terme

$$\begin{aligned}
&(t^2+t)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} + (3t+1)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = 0\\
\iff &\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^n + \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-1} + 3\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = 0\\
\iff &\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^n + \sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)n a_{n+1} t^n + 3\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^n + \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1} t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = 0\\
\iff &\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n t^n + \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)n a_{n+1} t^n + 3\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n t^n + \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1} t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = 0.
\end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
&n(n-1)a_n + (n+1)n a_{n+1} + 3n a_n + (n+1)a_{n+1} + a_n = 0\\
\iff &a_n(n^2 - n + 3n + 1) + a_{n+1}(n^2 + n + n + 1) = 0\\
\iff &a_n(n+1)^2 + a_{n+1}(n+1)^2 = 0
\end{aligned}$$

On obtient $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = -a_n = (-1)^n a_0$.
Synthèse
On pose $y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_0(-1)^n t^n$.
Cette série entière a pour rayon de convergence $R = 1$.
De plus, y vérifie bien sur $]-1; 1[$ l'équation $(\mathscr{E})$ d'après les équivalences écrites dans la partie analyse.
Conclusion :
On obtient ici une fonction usuelle : $\forall t \in]-1; 1[$, $y_p(t) = \dfrac{a_0}{1-(-t)} = \dfrac{a_0}{1+t}$ solution particulière de $(\mathscr{E})$.

Les deux techniques ci-dessous permettent, dans certains cas, de déterminer la solution générale.

Méthode 3 : Variation de la constante, factorisation par une solution de l'équation homogène

On considère l'équation différentielle $(\mathscr{E})$: $a(t)y'' + b(t)y' + c(t) = d(t)$ et l'équation homogène associée $(\mathscr{H})$: $a(t)y'' + b(t)y' + c(t) = 0$
On suppose que l'on connait une solution φ de l'équation homogène qui ne s'annule pas sur I.
On cherche une solution sous la forme $y(t) = \lambda(t)\varphi(t)$.
En reportant dans $(\mathscr{E})$ on obtient une équation différentielle du premier ordre en λ'.

On en déduit alors $\lambda(t)$ par recherche d'une primitive, puis on trouve $y(t) = \lambda(t)\varphi(t)$.

Exercice 20

Résoudre sur l'intervalle $I =]0; +\infty[$ l'équation différentielle $(\mathscr{E})$: $t^2y'' - 2y = 3t^2$.
(chercher une solution polynomiale de l'équation homogène).

Solution. Sur $I =]0; +\infty[$ l'équation différentielle homogène $t^2y'' - 2y = 0$ admet pour solution la fonction polynomiale $\varphi(t) = t^2$. (φ est nécessairement de degré 2 en identifiant le coefficient dominant d'un polynôme solution). On pose $y(t) = \lambda(t)\varphi(t) = \lambda(t)t^2$.
— $y'(t) = \lambda'(t)t^2 + 2t\lambda(t)$.
— $y''(t) = \lambda''(t)t^2 + 2t\lambda'(t) + 2\lambda(t) + 2t\lambda'(t) = \lambda''(t)t^2 + 4t\lambda'(t) + 2\lambda(t)$

En injectant dans $(\mathscr{E})$, il vient que y est solution de $(\mathscr{E})$ si et seulement si pour tout $t \in]0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} t^2\left(\lambda''(t)t^2 + 4t\lambda'(t) + 2\lambda(t)\right) - 2\lambda(t)t^2 = 3t^2 &\iff t^4\lambda''(t) + 4t^3\lambda'(t) = 3t^2 \\ &\iff t^2\lambda''(t) + 4t\lambda'(t) = 3 \quad (\mathscr{E}') \end{aligned}$$

On pose $x = \lambda'$: λ' est solution sur I de $(\mathscr{E}')$ si et seulement si x est solution sur I de

$$t^2x' + 4tx = 3 \quad (\mathscr{E}'').$$

Équation homogène : $t^2x' + 4tx = 0 \iff x' = -\dfrac{4}{t}x \iff \exists K \in \mathbb{R}, x(t) = \dfrac{K}{t^4}$.

Solution particulière : On la cherche sous la forme : $x_p(t) = \dfrac{K(t)}{t^4}$. On obtient

$$t^2\left(-\frac{4}{t^5}\right)K(t) + t^2\frac{K'(t)}{t^4} + \frac{4tK(t)}{t^4} = 3 \iff K'(t) = 3t^2 \iff K(t) = t^3 + C, C \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, $x_p(t) = \dfrac{1}{t}$ est une solution particulière de $(\mathscr{E}'')$.
Par conséquent, $\lambda'(t) = \dfrac{K}{t^4} + \dfrac{1}{t}, K \in \mathbb{R}$ donc $\lambda(t) = -\dfrac{K}{3t^3} + \ln t + D, D \in \mathbb{R}$.
Enfin, $y(t) = \lambda(t)t^2$ est la solution générale de l'équation différentielle initiale $(\mathscr{E})$.
La solution général de $(\mathscr{E})$ sur $I =]0; +\infty[$ est donc

$$y : t \mapsto \frac{\alpha}{t} + \beta t^2 + t^2 \ln t, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

□

Méthode 4 : Changement de variable

On considère l'équation différentielle $(\mathscr{E})$: $a(t)y'' + b(t)y'(t) + c(t)y = d(t)$ sur I.
On suppose qu'il existe un changement de variable $\varphi : J \to I, x \longmapsto \varphi(x) = t$ de classe $\mathscr{C}^2$ sur J. et tel que φ^{-1} est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I.
On pose $z(x) = y(\varphi(x)) = y(t)$. On dérive deux fois la fonction z par rapport à x.
On remplace t par $\varphi(x)$ dans $\mathscr{E}$.
On obtient une équation d'inconnue z et on retrouve la solution générale $y(t) = z \circ \varphi^{-1}(t)$.

Exercice 21

Résoudre sur $]-1;1[$ l'équation différentielle $(\mathscr{E}) : (1-t^2)y'' - ty' + y = 0$. Poser $t = \cos(x)$.

Solution. La fonction $\varphi : x \mapsto \cos(x)$ est continue strictement décroissante sur $[0;\pi]$ donc réalise une bijection de $[0;\pi]$ sur $[-1;1]$. φ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0;\pi]$.

La bijection réciproque $\varphi^{-1} : t \mapsto \arccos(t) = x$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]-1;1[$.

On pose pour $x \in]0;\pi[$: $z(x) = y(\varphi(x)) = y(\cos(x)) = y(t)$.

Pour tout $x \in]-1;1[$:

— $z'(x) = -\sin(x)y'(\cos x)$

— $z''(x) = \sin^2(x)y''(\cos x) - \cos(x)y'(\cos x)$

La fonction $t \mapsto y(t)$ est solution sur $]-1;1[$ de $(\mathscr{E})$ si et seulement si pour tout $x \in]0;\pi[$:

$$\underbrace{(1-\cos^2(x))y''(\cos(x)) - \cos(x)y'(\cos(x))}_{=z''(x)} + \underbrace{y(\cos x)}_{=z(x)} = 0.$$

Ainsi, z est solution sur $]0;\pi[$ de l'équation $z'' + z = 0$.

L'équation caractéristique $X^2 + 1 = 0$ a pour racine $X = \pm i = 0 \pm 1 \times i$.

Il existe donc $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z(x) = e^{0x}(A\cos(1\times x) + B\sin(1\times x))$.

La solution générale de $(\mathscr{E})$ sur $]-1;1[$ est alors

$$y(t) = z \circ \varphi^{-1}(t) = A\cos(\arccos(t)) + B\sin(\underbrace{\arccos(t)}_{\in]0;\pi[}) = At + B\sqrt{1-t^2} : (A,B) \in \mathbb{R}^2.$$

□