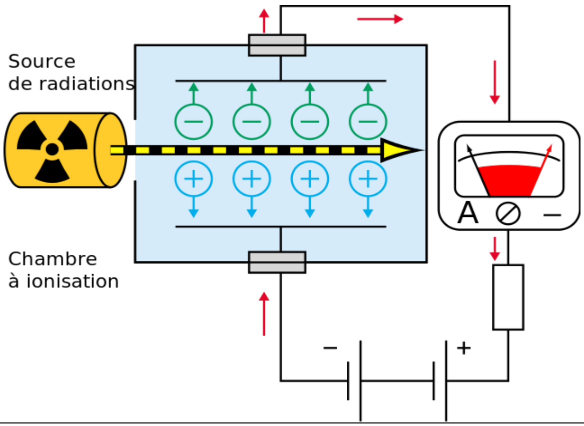
Chapitre 14 : Variables aléatoires discrètes

Introduction et motivations du chapitre : compteur Geiger



Une source radioactive est placée devant un compteur Geiger et ce dernier indique 1,5Bq.
On admet que le nombre de désintégrations observées par seconde suit une loi de Poisson.
Quelle est la probabilité d'observer une désintégration au moins, sur un intervalle de temps d'une seconde ?

Plan du chapitre

1 Généralités et première définitions

A garder à l'esprit : *Les variables aléatoires réelles sont aux probabilités ce que sont les fonctions à l'analyse.*

1.A Définition

On procède à deux tirages successifs avec remise d'une boule dans une urne contenant des boules numérotées de 1 à 10. On note X la somme des numéros obtenus, Y le maximum et Z le minimum des numéros obtenus.

— Univers : $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) : \omega_i \in [\![1, 10]\!]\} = [\![1, 10]\!]^2$
— X prend toutes les valeurs entières entre 2 et 20
— Y prend toutes les valeurs entières entre 1 et 10
— Z prend toutes les valeurs entières entre 1 et 10

X, Y, Z sont des fonctions définies sur Ω respectivement à valeurs dans $X(\Omega) = [\![2, 20]\!]$, $Y(\Omega) = [\![1, 10]\!]$, $Z(\Omega) = [\![1, 10]\!]$.

$$X : \left| \begin{array}{rcl} \Omega & \longrightarrow & [\![2, 20]\!] \\ \omega = (\omega_1, \omega_2) & \longmapsto & X(\omega) = \omega_1 + \omega_2. \end{array} \right.$$ Par exemple $X((7, 3)) = 10$

$$Y : \left| \begin{array}{rcl} \Omega & \longrightarrow & [\![1, 10]\!] \\ \omega = (\omega_1, \omega_2) & \longmapsto & Y(\omega) = \max(\omega_1, \omega_2). \end{array} \right.$$ Par exemple $Y((7, 3)) = 7$

$$Z : \left| \begin{array}{rcl} \Omega & \longrightarrow & [\![1, 10]\!] \\ \omega = (\omega_1, \omega_2) & \longmapsto & Z(\omega) = \min(\omega_1, \omega_2). \end{array} \right.$$ Par exemple $Z((7, 3)) = 3$

On note :
— A : "la somme des numéros obtenus vaut 4".
On a : $A = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$ et $P(A) = P(X = 4) = P(X^{-1}(\{4\})) = \frac{3}{100}$.
— B : "le plus grand des deux numéros obtenus vaut 3".
On a $B = \{(1, 3), (2, 3), (3, 3), (3, 2), (3, 1)\}$ et $P(B) = P(Y = 3) = P(Y^{-1}(\{4\})) = \frac{5}{100}$.

Définition 1: Variable aléatoire réelle discrète

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable. On appelle variable aléatoire réelle discrète toute application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que :
— $X(\Omega)$ est un ensemble fini ou dénombrable.
— Pour tout $x \in X(\Omega)$ alors $X^{-1}(\{x\}) = (X = x)$ est un événement, c'est-à-dire :

$$\forall x \in X(\Omega) : X^{-1}(\{x\}) \in \mathscr{A}.$$

Remarques

— $X(\Omega)$ est **l'image directe** de Ω par X. Si Ω est fini, $X(\Omega)$ est fini. Si Ω est dénombrable alors $(X\Omega)$ est dénombrable.
— Si $A \subset \mathbb{R}$ alors $X^{-1}(A)$ est **l'image réciproque** de A par X :

$$X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}.$$

On ne présuppose bien entendu rien quant à la bijectivité de l'application X.

On rappelle que si $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ est une fonction définie sur $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$ et si $A \subset \mathbb{R}$ alors

$$f^{-1}(A) = \{x \in \mathscr{D} : f(x) \in A\}.$$

Exemple

On considère $f(x) = e^x$ et $g(x) = \ln(x)$.
Déterminer $f^{-1}(]0;1[)$, $f^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$, $f^{-1}(\{-1\})$.
Déterminer $g^{-1}(]0;1])$, $g^{-1}(\mathbb{R}_+)$.

Notation 2

Soit X un variable aléatoire réelle discrète, $x \in \mathbb{R}$ et $A \subset \mathbb{R}$:

$$(X \in A) = X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}$$

$$(X = x) = X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$$

$$(X \leqslant x) = X^{-1}(]-\infty; x]) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leqslant x\}$$

$$(X < x) = X^{-1}(]-\infty; x[) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\}$$

$$(X \geqslant x) = X^{-1}([x; +\infty[) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \geqslant x\}$$

$$(X > x) = X^{-1}(]x; +\infty[) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) > x\}$$

Exercice 3

On tire une boule successivement deux fois avec remise dans une urne contenant 10 boules numérotées de 1 à 10.
On note X la somme des numéros obtenus et Y le plus grand nombre obtenu.
Décrire $(X > 10)$; $(X \leqslant 8)$; $(X = 5)$; $(Y = 4)$; $(Y \in \{1, 2\})$.

Solution. $(X > 10) = \{(1,10), (10,1), (2,9), (9,2), (2,10), (10,2), \ldots\}$.
$(X \leqslant 8) = \{(1,1), (1,2), (2,1), \ldots, (4,4)\}$.
$(X = 5) = \{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\}$.
$(Y = 4) = \{(1,4), (2,4), (3,4), (4,4), (4,3), (4,2), (4,1)\}$.
$(Y \in \{1,2\}) = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$. □

Proposition 4

Soient $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable et X une variable aléatoire réelle discrète définie sur cet espace. Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Alors $X^{-1}(A) = (X \in A)$ est un événement.

Démonstration. Par définition, d'une variable aléatoire réelle discrète, $X(\Omega)$ est au plus dénombrable. Par conséquent $X(\Omega) = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ peut-être indexé par $\mathbb{N}$.
On note $X^{-1}(A) = \{x \in \Omega : X(\omega) \in A\} = \{x_n : n \in I\} \subset X(\Omega)$ avec $I \subset \mathbb{N}$.
Par conséquent $X^{-1}(A) = \bigcup_{n \in I} (X = x_n) \in \mathscr{A}$ par union dénombrable d'événements. □

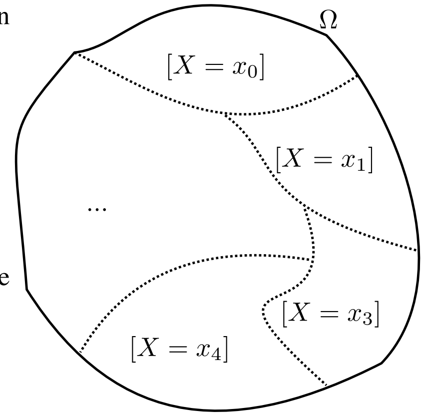
Théorème 5

La famille $([X = x_n])_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements.

Démonstration.

• Pour $i \neq j$, on a : $[X = x_i] \cap [X = x_j] = \varnothing$.
En effet sinon il existerait $\omega \in [X = x_i] \cap [X = x_j]$ c'est-à-dire un élément de Ω tel que $X(\omega) = x_i$ et $X(\omega) = x_j$.
On obtiendrait donc $x_i = x_j$ ce qui est absurde car $i \neq j$.

• On a $\bigcup_{n=0}^{+\infty} [X = x_n] = \Omega$.
L'inclusion $\bigcup_{n=0}^{+\infty} [X = x_n] \subset \Omega$ est clair.
De plus, si $\omega \in \Omega$ alors $X(\omega) \in X(\Omega) = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$: il existe donc $i \in \mathbb{N}$ tel que $X(\omega) = x_i$.
On obtient $\omega \in [X = x_i] \subset \bigcup_{n=0}^{+\infty} [X = x_n]$.



□

Exercice 6

On lance successivement deux fois un dé. On note X le résultat du premier lancer et Y celui du second. On note $Z = |X - Y|$. Donner le système complet d'événement associé à Z.

Solution. $Z(\Omega) = [\![0, 5]\!]$. Donc $((Z = 0), (Z = 1), (Z = 2), (Z = 3), (Z = 4), (Z = 5))$ est un s.c.e. □

1.B Loi d'une variable aléatoire

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle discrète.

Définition 7

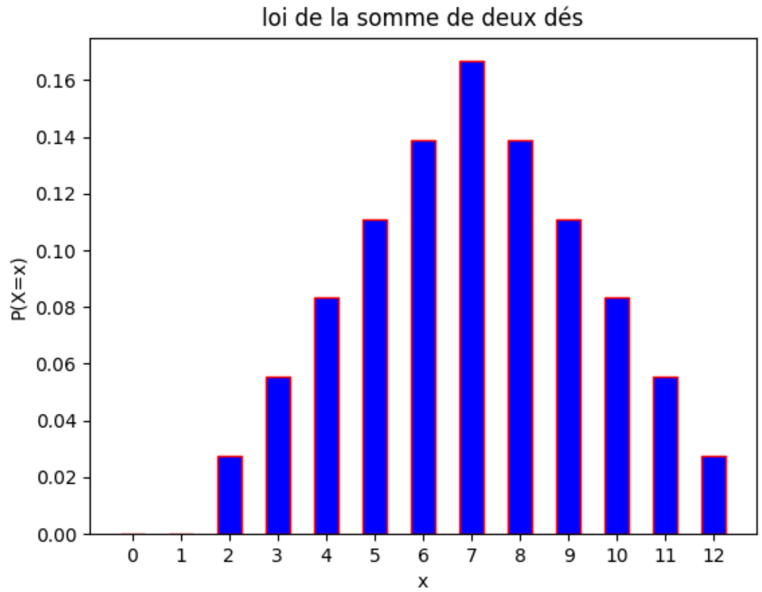
La loi de X est l'application :

$$P_X : \left| \begin{array}{rcl} X(\Omega) & \longrightarrow & [0;1] \\ x & \longmapsto & P(X = x) \end{array} \right.$$

Exemple

On lance deux dés équilibrés simultanément. On note X la somme obtenue.

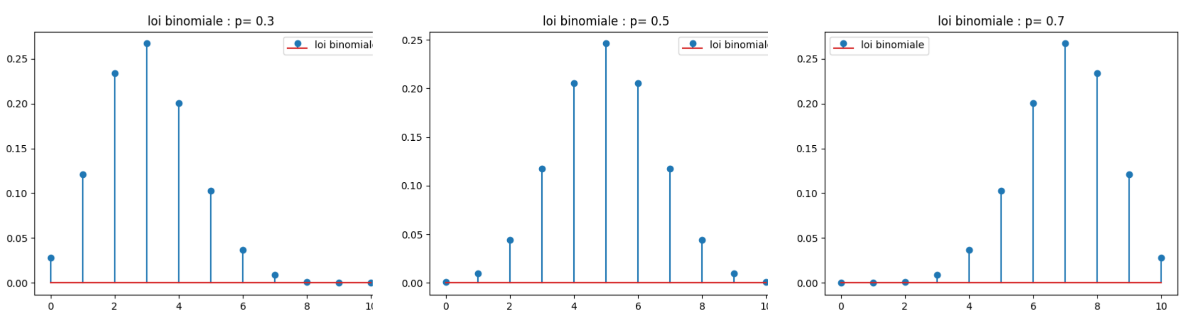
$X(\Omega)$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x)$											



Exercice 8: (Loi binomiale)

On lance n fois consécutivement une pièce donnant Pile avec probabilité $p \in]0;1[$.
On note X le nombre de Pile obtenus. Donner la loi de X.

Solution. $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$. $P(X = k) = \underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{instants Piles}} p^k(1-p)^{n-k}$. □



Remarques

Deux variables peuvent avoir la même loi sans être égales : considérer X le nombre de Pile obtenus lors du lancer de 2 pièces équilibrées et Y le nombre de Face.

Théorème 9

Soient $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ un ensemble dénombrable et $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de réels positifs telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$.

Il existe dans ce cas une variable aléatoire réelle discrète X sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ à valeurs dans $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, P(X = x_n) = p_n$.

Exercice 10

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère $p_n = \alpha \dfrac{\lambda^n}{n!}$.
Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ de telle sorte que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définisse une loi de probabilité.

1.C Fonction de répartition

Définition 11: Fonction de répartition

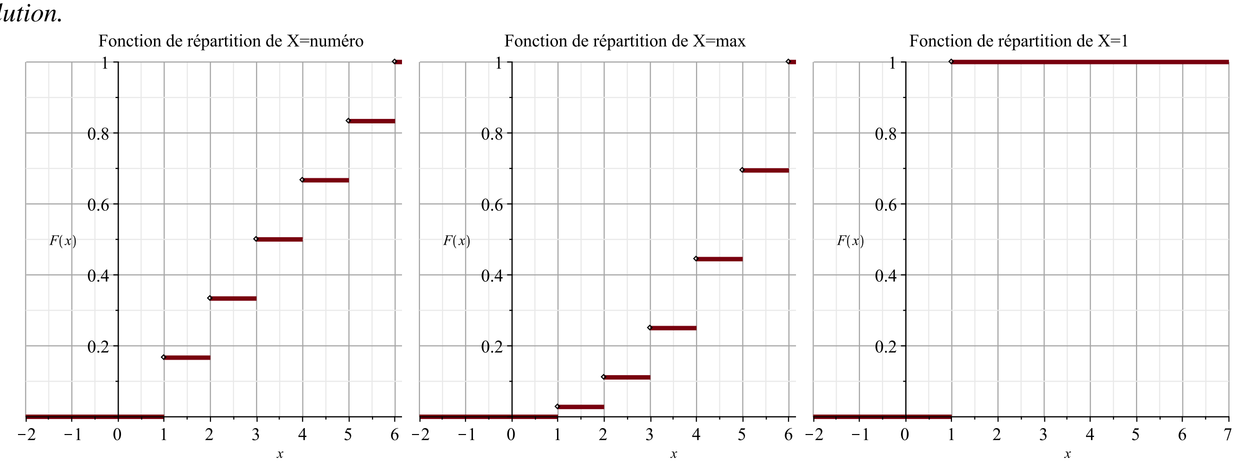
On appelle fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète X l'application :

$$F_X : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & F_X(x) = P(X \leqslant x). \end{array} \right.$$

Exercice 12

1. Déterminer la fonction de répartition du numéro obtenu lors du lancer d'un dé équilibré.
2. Déterminer la fonction de répartition du maximum obtenu lors du lancer de deux dés.
3. Déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire constante.

Solution.



□

Proposition 13

Soit X la variable aléatoire réelle discrète.

❶ La fonction F_X est croissante.

❷ $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$.

Démonstration. ❶ Soient $x \leqslant y$. Alors $(X \leqslant x) \subset (X \leqslant y)$.
Par croissance de l'application probabilité $P(X \leqslant x) \leqslant P(X \leqslant y)$.

❷ L'application F_X est croissante et majorée par 1 donc admet une limite en $+\infty$.
On a $\Omega = \displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} (X \leqslant n)$, la réunion étant croissante.
Par continuité croissante : $1 = P(\Omega) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(X \leqslant n) = \lim\limits_{n\to+\infty} F_X(n)$.
Cette dernière limite est égale à $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x)$.

□

Théorème 14: Caractérisation de la loi d'une v.a.r.

Soit X une variable aléatoire réelle discrète. On note $X(\Omega) = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ et l'on suppose que $x_0 < x_1 < \cdots < x_n < \dots$.

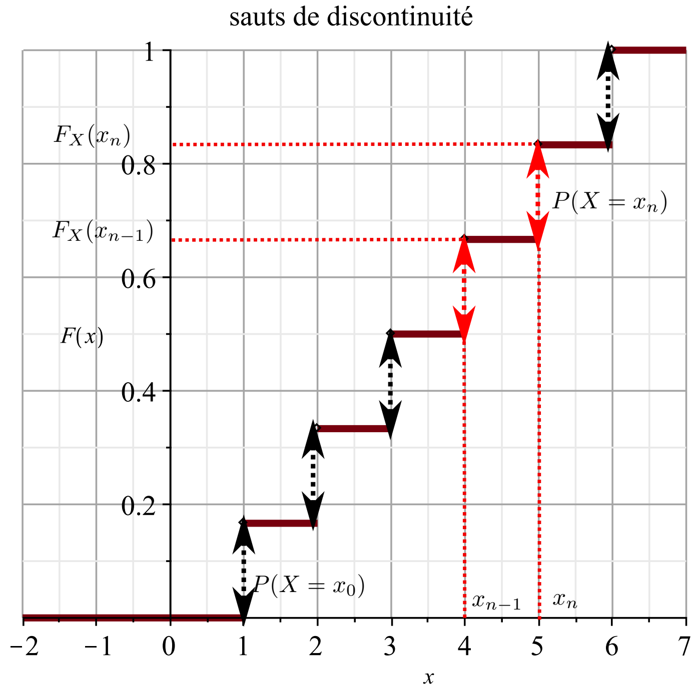
❶ $P(X = x_0) = F_X(x_0)$.

❷ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = x_n) = F_X(x_n) - F_X(x_{n-1})$.

Solution.

❶ $F_X(x_0) = P(X \leqslant x_0) = P(X = x_0)$.

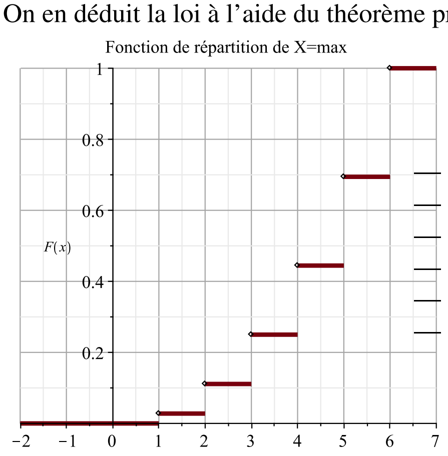
❷ Soit $n \in \mathbb{N}^*$: $(X \leqslant x_n) = (X < x_n) \cup (X = x_n) = (X \leqslant x_{n-1}) \cup (X = x_n)$ la réunion étant disjointe. Ainsi, $P(X = x_n) = P(X \leqslant x_n) - P(X \leqslant x_{n-1}) = F_X(x_n) - F_X(x_{n-1})$. □



Exercice 15: (Loi du maximum)

Déterminer la loi du maximum de deux lancers d'un dé équilibré.

Solution. On a déjà déterminé la fonction de répartition du maximum de deux lancers.
On en déduit la loi à l'aide du théorème précédent.



- $P(X = 1) = F_X(1) = \frac{1}{36}$
- $P(X = 2) = F_X(2) - F_X(1) = \frac{4}{36} - \frac{1}{36} = \frac{3}{36}$.
- $P(X = 3) = F_X(3) - F_X(2) = \frac{9}{36} - \frac{4}{36} = \frac{5}{36}$.
- $P(X = 4) = \frac{16}{36} - \frac{9}{36} = \frac{7}{36}$.
- $P(X = 5) = \frac{25}{36} - \frac{16}{36} = \frac{9}{36}$.
- $P(X = 6) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$.

□

➜$_{TD}$ **Applications :** Exercice 6.

2 Espérance, variance et loi faible des grands nombres

2.A Espérance d'une variable aléatoire réelle discrète

Définition 16

— Soit X une variable aléatoire finie. On note $X(\Omega)=\{x_1,\dots,x_n\}$.
L'espérance de X est égale à :

$$E(X)=\sum_{x\in X(\Omega)} xP(X=x)=\sum_{i=1}^{n} x_iP(X=x_i).$$

— Soit X une variable aléatoire réelle discrète. On note $X(\Omega)=\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$.
On dit que X est d'espérance finie si la série $\sum\limits_{x\in X(\Omega)} xP(X=x)$ est absolument convergente.
Dans ce cas l'espérance de X est égale à :

$$E(X)=\sum_{x\in X(\Omega)} xP(X=x)=\sum_{n=0}^{+\infty} x_nP(X=x_n).$$

Remarques

— Si $X(\Omega)$ est fini, l'espérance existe toujours : c'est une somme finie que l'on interprète comme la moyenne des valeurs prises par X pondérées par leur probabilité d'apparition.
— Si $X(\Omega)$ est infini dénombrable, il existe une bijection entre $X(\Omega)$ et $\mathbb{N}$: il existe en fait une infinité de bijections entre $X(\Omega)$ et $\mathbb{N}$.
Chaque choix d'une bijection modifie l'ordre d'énumération de $X(\Omega)$. La définition précédente ne tient pas compte de ce choix. On peut montrer qu'en cas de convergence absolue l'ordre de sommation ne modifie ni la nature, ni la somme de la série $\sum\limits_{x\in X(\Omega)} xP(X=x)$.

Exercice 17

1. Soit X le numéro obtenu lors du lancer d'un dé équilibré. Donner l'espérance de X.
2. On lance deux dés équilibrés et on note X la somme des deux dés. Calculer $E(X)$.
3. Une urne contient initialement une boule rouge et on procède à une succession de tirages comme suit. On tire une boule. Si la boule est rouge, on la remet dans l'urne, on ajoute une boule bleue et procède à un nouveau tirage, ainsi de suite. Si elle est bleue le jeu s'arrête. On note X le rang de la première boule bleue.
   (a) Déterminer la probabilité que le jeu ne s'arrête pas.
   (b) Calculer $P(X\geqslant n)$ et en déduire la loi de X.
   (c) Montrer que X possède une espérance finie et la calculer.

Solution. 1. $E(X)=\sum\limits_{k=1}^{6} kP(X=k)=\dfrac{1}{6}\dfrac{6\times 7}{2}=\dfrac{7}{2}$.

2. $E(X)=\sum\limits_{k=2}^{12} kP(X=k)=\sum\limits_{k=2}^{12} kP(X=k)=\sum\limits_{k=2}^{7} k\dfrac{k-1}{36}+\sum\limits_{k=8}^{12} k\dfrac{12-k+1}{36}=7$.

3. (a) On note A : "le jeu est infini". On a $A=\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$ avec A_n : "les n premiers tirages donnent une boule rouge".

La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. Par continuité décroissante il vient :

$$P(A) = P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n) \underset{(*)}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n!} = 0$$

$(*)$: $P(A_n) = P(R_1 \cap \cdots \cap R_n) = P(R_1)P_{R_1}(R_2)\dots P_{R_1\cap\cdots\cap R_{n-1}}(R_n) = 1 \times \frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n!}$.
On a donc $X(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.

(b) On a $[X \geqslant n] = A_{n-1}$. Donc $P(X \geqslant n) = P(A_{n-1}) = \dfrac{1}{(n-1)!}$.
On en déduit que $F_X(n) = P(X \leqslant n) = 1 - P(X > n) = 1 - P(X \geqslant n+1) = 1 - \frac{1}{n!}$.
On peut décrire la loi de X : on a $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} P(X = n) = F_X(n) - F_X(n-1) &= \left(1 - \frac{1}{n!}\right) - \left(1 - \frac{1}{(n-1)!}\right) \\ &= \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{n-1}{n!}. \end{aligned}$$

> **Remarques**
>
> On a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e - (e-1) = 1.$

(c) La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} nP(X = n)$ a pour terme général :

$$0 \leqslant n \times \frac{n-1}{n!} = \frac{n(n-1)}{n!} = \frac{1}{(n-2)!} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc converge absolument par comparaison à la série de Riemann $\displaystyle\sum \frac{1}{n^2}$.
La variable X est donc d'espérance finie et

$$E(X) = \sum_{n=2}^{+\infty} nP(X = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{n!} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

□

Dans le cas d'une variable à valeurs dans $\mathbb{N}$, on dispose d'une autre formule pour calculer l'espérance d'une variable discrète.

Théorème 18

Soit X une variable à valeurs dans $\mathbb{N}$: $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$. Si X admet une espérance finie alors :

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n).$$

Démonstration. On justifie la convergence de la série et on calcule sa somme en passant par les sommes partielles :

$$\sum_{n=1}^{N} P(X \geqslant n) = \sum_{n=1}^{N} (n-(n-1))P(X \geqslant n)$$

$$\sum_{n=1}^{N} P(X \geqslant n) = \sum_{n=1}^{N} nP(X \geqslant n) - \sum_{n=1}^{N} (n-1)P(X \geqslant n)$$

$$\sum_{n=1}^{N} P(X \geqslant n) = \sum_{n=1}^{N} nP(X \geqslant n) - \sum_{n=0}^{N-1} nP(X \geqslant n+1)$$

$$\sum_{n=1}^{N} P(X \geqslant n) = NP(X \geqslant N) + \sum_{n=1}^{N-1} n \left[\underbrace{P(X \geqslant n) - P(X \geqslant n+1)}_{P(X\geqslant n)-P(X\geqslant n+1 \cap X\geqslant n)}\right]$$

$$\sum_{n=1}^{N} P(X \geqslant n) = NP(X \geqslant N) + \sum_{n=1}^{N-1} n\,\underbrace{P\left(X \geqslant n \cap \overline{X \geqslant n+1}\right)}_{P(X=n)}$$

$$\sum_{n=1}^{N} P(X \geqslant n) \underset{(*)}{=} NP(X \geqslant N) + \sum_{n=0}^{N-1} nP(X = n).$$

Par hypothèse la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} nP(X=n)$ est absolument convergente car X est d'espérance finie.

La suite de ses restes $R_N = \sum\limits_{n=N}^{+\infty} nP(X=n)$ converge donc vers 0.

On a $NP(X \geqslant N) = \sum\limits_{n=N}^{+\infty} \underbrace{NP(X=n)}_{\leqslant nP(X=n)}$. Par comparaison, il vient :

$$0 \leqslant NP(X \geqslant N) \leqslant \sum_{n=N}^{+\infty} nP(X=n) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En passant à la limite $N \to +\infty$ dans l'égalité $(*)$ on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n) = \sum_{n=0}^{+\infty} nP(X=n) = E(X).$$

□

Théorème 19

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes d'espérances finies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

❶ L'espérance est linéaire. Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda X + \mu Y$ est d'espérance finie et on a : $E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y)$.

❷ L'espérance est positive sur les variables positives. Si $X \geqslant 0$ alors $E(X) \geqslant 0$.

❸ L'espérance est croissante. Si $X \leqslant Y$ alors $E(X) \leqslant E(Y)$.

Remarques

— Si X est **positive et d'espérance nulle** alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n) = 0$.
Par positivité on obtient $P(X = x_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \neq 0$.
Il vient : $P(X = 0) = 1$.

— Si X est d'espérance est finie alors $X^* = X - E(X)$ est d'espérance nulle par linéarité.
On dit que X^* est centrée et que l'on a centré X.

2.B Théorème de transfert, variance et écart type

Exemple

Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \{-1; 0; 1\}$.
On suppose que $P(X = -1) = \frac{1}{4}$, $P(X = 0) = \frac{1}{3}$, $P(X = 1) = \frac{5}{12}$.
Alors $X^2(\Omega) = \{0; 1\}$ et :
- $P(X^2 = 0) = P(X = 0) = \frac{1}{3}$,
- $P(X^2 = 1) = P(X = -1) + P(X = 1) = \frac{1}{4} + \frac{5}{12} = \frac{8}{12}$.

Exercice 20

Soit X une variable discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
On suppose que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $P(X = k) = \dfrac{\alpha}{k(k+1)(k+2)}$ pour tout $k \geqslant 1$.

1. On pose $u_k = \dfrac{1}{2k} - \dfrac{1}{2(k+1)}$ pour $k \geqslant 1$. Montrer que
$$u_k - u_{k+1} = \frac{1}{k(k+1)(k+2)}.$$
En déduire la valeur de α.
2. Montrer que $Y = X + 1$ est une variable aléatoire réelle discrète et donnée sa loi.
3. Montrer que $Z = X^2 - 4X + 4$ est une variable aléatoire réelle discrète et donner sa loi.

Solution. 1. On calcule :
$$\begin{aligned} u_k - u_{k+1} &= \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2(k+1)}\right) - \left(\frac{1}{2(k+1)} - \frac{1}{2(k+2)}\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{(k+1)(k+2) - 2k(k+2) + k(k+1)}{k(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{1}{2}\frac{2}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k(k+1)(k+2)} \end{aligned}$$
La suite $\left(\dfrac{\alpha}{k(k+1)(k+2)}\right)_{k\geqslant 1}$ définit une loi de probabilité si et seulement si $\alpha \geqslant 0$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) = 1$.
$$\sum_{k=1}^{N} P(X = k) = \alpha \sum_{k=1}^{N} (u_k - u_{k+1}) = \alpha\,(u_1 - u_{N+1}) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha u_1 = \frac{\alpha}{4}.$$
Il vient $\alpha = 4$.

2. $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ donc $Y(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Ainsi, $Y(\Omega)$ est dénombrable.
De plus pour $k \geqslant 2$, $Y = k$ si et seulement si $X = k - 1$.
L'ensemble $(Y = k) \in \mathscr{A}$ est donc un événement et :
$$P(Y = k) = P(X = k - 1) = \frac{4}{(k-1)k(k+1)}.$$
3. La fonction $f : x \longmapsto x^2 - 4x + 4$ est décroissante sur $[1; 2]$ et croissante sur $[1; +\infty[$ avec $f(2) = 0$. Ainsi, f est positive sur $[1; +\infty[$.
$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ donc $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}$ par ce qui précède et par conséquent $Z(\Omega)$ est dénombrable.
De plus, $Z = k \iff X^2 - 4X + 4 = k \iff (X - 2)^2 = k$.
Si k n'est pas le carré d'un nombre entier naturel alors $(Z = k)$ est vide.
Si $k = 0$ alors $Z = 0 \iff X = 2$.

Si $k = 1$ alors $Z = 1 \iff (X-2)^2 = 1 \iff X - 2 = -1$ ou $X - 2 = 1$ i.e. $X = 1$ ou $X = 3$.
Si $k = p^2$ avec $p \geqslant 2$ alors $Z = k \iff X = 2 + p$ car $X = 2 - p$ est alors impossible ($X > 0$).
On a donc $Z(\Omega) = \{p^2 : p \in \mathbb{N}\}$ avec

— $P(Z = 0) = P(X = 2) = \frac{4}{2\times 3\times 4}$
— $P(Z = 1) = P(X = 1) + P(X = 3) = \frac{4}{1\times 2\times 3} + \frac{4}{3\times 4\times 5}$
— $P(Z = p^2) = P(X = 2 + p) = \frac{4}{(2+p)(3+p)(4+p)}$.

□

Plus généralement, si f est une fonction définie sur $X(\Omega)$, on pourra considérer la variable aléatoire réelle $f(X)$ et déterminer sa loi comme nous venons de le faire.

L'objectif consistera parfois uniquement à déterminer l'espérance $E(f(X))$ de $f(X)$: il est dans ce cas inutile de déterminer explicitement la loi de $f(X)$; celle de X suffit d'après le théorème suivant.

Théorème 21: Théorème de transfert

Soient X une variable aléatoire réelle discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Soit $f : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $X(\Omega) = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.
La variable $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n)P(X = x_n)$ est absolument convergente et dans ce cas :

$$E(f(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n)P(X = x_n).$$

➜$_{TD}$: **Applications :** Exercices 12, 22.

Définition 22: Moment d'ordre p

Soit X une variable aléatoire réelle discrète et $p \in \mathbb{N}^*$.
Si X^p admet une espérance finie, on appelle $E(X^p)$ le moment d'ordre p de X.

Exercice 23

Justifier l'existence et calculer le moment d'ordre 2 de la variable X de l'Exercice 17 question 3. : rang de la première boule bleue.

Théorème 24: Variance

Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ admettant un moment d'ordre 2. Alors $(X - E(X))^2$ est d'espérance finie, on l'appelle variance et on la note :

$$V(X) = E\left[(X - E(X))^2\right] = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - E(X))^2 P(X = x).$$

On appelle écart type de X et on note $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Démonstration. Par hypothèse, X admet un moment d'ordre 2. Montrons que cela implique que X admet un moment d'ordre 1.

On a $|x_n| \leqslant \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |x_n| \leqslant 1 \\ |x_n|^2 & \text{si} \quad |x_n| \geqslant 1 \end{cases}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n| \leqslant 1 + |x_n|^2$ et on a donc :

$$|x_n|P(X = x_n) \leqslant P(X = x_n) + x_n^2 P(X = x_n).$$

La série $\sum_{n\geqslant 0} P(X = x_n)$ converge (de somme 1) et $\sum_{n\geqslant 0} x_n^2 P(X = x_n)$ converge absolument car par hypothèse, X possède un moment d'ordre 2. Par somme la série $\sum_{n\geqslant 0} (1 + x_n^2)P(X = x_n)$ converge.

Par comparaison la série $\sum_{n\geqslant 0} |x_n|P(X=x_n)$ converge : X admet bien un moment d'ordre 1.

La variable $(X-E(X))^2 = X^2 - 2E(X)X + E(X)^2$ est donc d'espérance finie par somme de telles variables. Elle est de plus positive, donc son espérance est positive. L'écart type $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ est donc bien défini. □

Remarques

- La variance est la moyenne du carré de la distance entre les valeurs que prend X et la valeur moyenne $E(X)$: la variance mesure donc la dispersion de X autour de sa valeur moyenne. L'écart type est également un mesure de cette dispersion homogène à X.
- Si $E(X)=0$ et $V(X)=1$ on dit que la variable est centrée et réduite.

En général on n'appliquera pas la définition de la variance pour la calculer mais le résultats suivant :

Théorème 25: Formule de Koenig-Huygens

Soit X une variable aléatoire réelle discrète admettant un moment d'ordre 2. Alors :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Démonstration. Par linéarité de l'espérance, on a :

$$\begin{aligned} V(X) &= E((X-E(X))^2) = E(X^2 - 2E(X)X + E(X)^2) = E(X^2) - 2E(X)^2 + E(X)^2 \\ &= E(X^2) - E(X)^2. \end{aligned}$$

□

Exercice 26

1. Déterminer la variance du maximum de deux dés.
2. La variable à valeurs dans $X(\Omega) = N^*$ définie par $P(X=k) = \frac{4}{k(k+1)(k+2)}$ admet-elle une variance ?

Solution.

1.

$X(\Omega)$	1	2	3	4	5	6
$P(X=k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$
$kP(X=k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{28}{36}$	$\frac{45}{36}$	$\frac{66}{36}$
$k^2P(X=k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{45}{36}$	$\frac{112}{36}$	$\frac{225}{36}$	$\frac{396}{36}$

$E(X) = \sum_{k=1}^{6} kP(X=k) = \dfrac{161}{36}$
$E(X^2) = \frac{791}{36}$
$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$
$V(X) = \frac{796}{36} - \left(\frac{161}{36}\right)^2 \simeq 2,11.$

2. Cette variable X n'admet pas de moment d'ordre 2 car la série $\sum k^2P(X=k)$ diverge par comparaison à la série de Riemann divergente $\sum \frac{1}{k}$:

$$0 \leqslant k^2P(X=k) = \frac{4k^2}{k(k+1)(k+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4}{k}.$$

□

Proposition 27

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et X une variable admettant un moment d'ordre 2. Alors :

$$V(aX+b) = a^2V(X).$$

Démonstration. On utilise la formule de Koenig-Huygens et la linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} V(aX+b) &= E((aX+b)^2) - E(aX+b)^2 = E(a^2X^2 + 2abX + b^2) - (aE(x)+b)^2 \\ &= a^2E(X^2) + 2abE(X) + b^2 - \left(a^2E(X)^2 + 2abE(X) + b^2\right) \\ &= a^2\left(E(X^2) - E(X)^2\right) = a^2V(X) \end{aligned}$$

□

Remarques

Si $V(X) \neq 0$ alors la variable $\frac{X}{\sigma(X)}$ est a une variance égale à 1 : cette variable est dite réduite.
Si $V(X) \neq 0$ alors la variable $X^* = \frac{X-E(X)}{\sigma(X)}$ a une espérance nulle et une variance égale à 1. On dit que cette variable est centrée et réduite.

➜$_{TD}$ **Applications :** Exercices 3, 6, 26, 27, 32.

2.C Inégalités classiques et loi faible des grands nombres

Proposition 28: Inégalité de Markov

Soit X un variable aléatoire réelle discrète **positive** sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ d'espérance finie. Alors :

$$\forall a > 0, P(X \geqslant a) \leqslant \frac{E(X)}{a}.$$

Démonstration. On note $X(\Omega) = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. On note $I, J \subset \mathbb{N}$ sous-ensembles de $\mathbb{N}$ tels que :
— $I \cup J = \mathbb{N}$
— $\forall n \in I, x_n < a$
— $\forall n \in J, x_n \geqslant a$

Par définition : $E(X) = \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} xP(X=x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_nP(X=x_n)$:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{n \in I} x_nP(X=x_n) + \sum_{n \in J} x_nP(X=x_n) \\ &\geqslant \sum_{n \in J} x_nP(X=x_n) \text{ car } X \text{ est positive.} \\ &\geqslant a\sum_{n \in J} P(X=x_n) = aP(X \geqslant a). \end{aligned}$$

□

Proposition 29: Inégalité de Bienaymé-Tchebytchev

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ admettant un moment d'ordre 2. Alors :

$$\forall \varepsilon > 0, P(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

Démonstration. On applique l'inégalité de Markov à la variable positive $Y = |X - E(X)|^2 \geqslant 0$.
Remarquons que $|X - E(X)| \geqslant \varepsilon \iff |X - E(X)|^2 \geqslant \varepsilon^2 \iff Y^2 \geqslant \varepsilon^2$.
L'inégalité de Markov donne : $P\left(Y^2 \geqslant \varepsilon^2\right) \leqslant \dfrac{E(Y^2)}{\varepsilon^2}$.
En remarquant que $E(Y^2) = E((X - E(X))^2) = V(X)$ on obtient :

$$P(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon) = P(|X - E(X)|^2 \geqslant \varepsilon^2) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

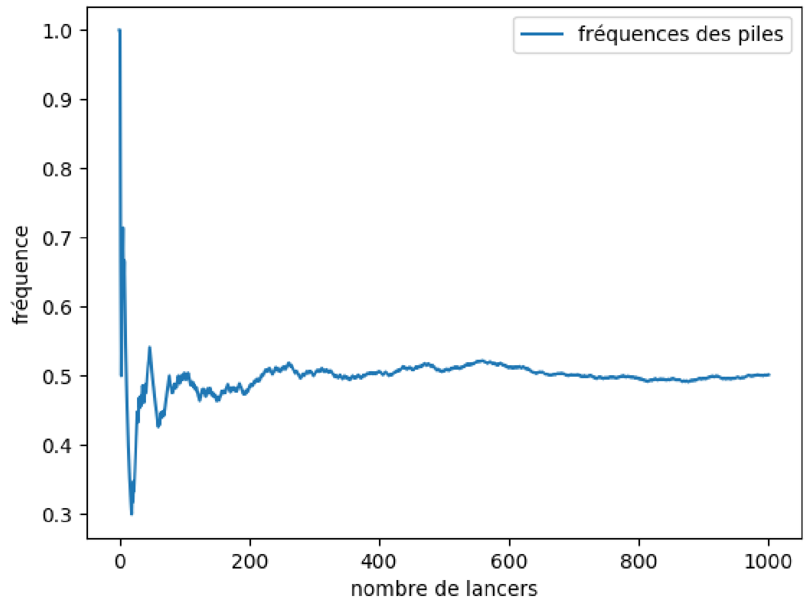
□

➜$_{TD}$ **Applications :** Exercice 4.

On lance une pièce équilibrée plusieurs fois. En procédant à un grand nombre de lancers, il est naturel de penser que le nombre de Pile et de Face soient proches et donc que la fréquence des Pile (ou des Face) soit proche de $\frac{1}{2}$. On simule avec Python des lancers successifs à l'aide de la fonction `randint` de la bibliothèque `random`. On code Pile par 1 et Face par 0.

```python
import random as rd
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

N=10**3
Abs=np.linspace(1,N,N)
Ord=[]
S=0
for k in range(1,N+1):
    d=rd.randint(0,1)
    if d==1:
        S+=1
    moyenne=S/k
    Ord.append(moyenne)
plt.plot(Abs,Ord)
plt.show()
```



On précise et on généralise les observations effectuées ci-dessus : on considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables de même loi et on définit la moyenne empirique des n premiers résultats $M_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$.

Exemple

Si X_i est le résultat du i-ième lancer d'une pièce équilibrée : $X_i = \begin{cases} 1 & \text{si Pile sort} \\ 0 & \text{si Face sort} \end{cases}$

On va montrer que la probabilité que cette moyenne empirique (la fréquence de Pile) s'éloigne de la moyenne théorique (l'espérance) tend vers 0.

Exemple

Dans le cas du lancer d'une pièce cette espérance est égale à $\frac{1}{2}$.
Il n'est donc pas surprenant que la fréquence semble converger vers $\frac{1}{2}$.

Définition 30

— n v.a.r. $X_1, \dots, X_n$ définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ sont dites indépendantes si :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega), P([X = x_1] \cap \cdots \cap [X_n = x_n]) = P(X_1 = x_1) \dots P(X_n = x_n)$$

— En particulier, deux v.a.r. aléatoires discrètes X, Y définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ sont dites indépendantes si :

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), P([X = x] \cap [Y = y]) = P(X = x)P(Y = y).$$

On note dans ce cas $X \perp\!\!\!\perp Y$.

— On dit qu'une $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **i.i.d.** si les variables aléatoires X_n sont indépendantes et identiquement distribuées c'est-à-dire qu'elles ont la même loi.

Théorème 31: Variance d'une somme de variables indépendantes

Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes **indépendantes** définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ admettant un **moment d'ordre** 2. Alors $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.

Remarques

Le résultat se généralise au cas de n v.a.r. aléatoires discrètes indépendantes.

Théorème 32: Loi faible des grands nombres

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. On suppose que les variables admettent une espérance m et une variance σ^2. On note $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Alors :

$$\forall \varepsilon > 0, P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Démonstration. On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev :

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) = P\left(|S_n - nm| \geqslant n\varepsilon\right) = P\left(|S_n - E(S_n)| \geqslant n\varepsilon\right) \leqslant \frac{V(S_n)}{n^2\varepsilon^2} = \frac{n\sigma^2}{n^2\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

3 Lois usuelles

3.A Loi certaine

Définition 33

Une loi certaine est une variable aléatoire constante.

Proposition 34

Soit X une loi certaine, constante égale à $a \in \mathbb{R}$: $X(\Omega) = \{a\}$.

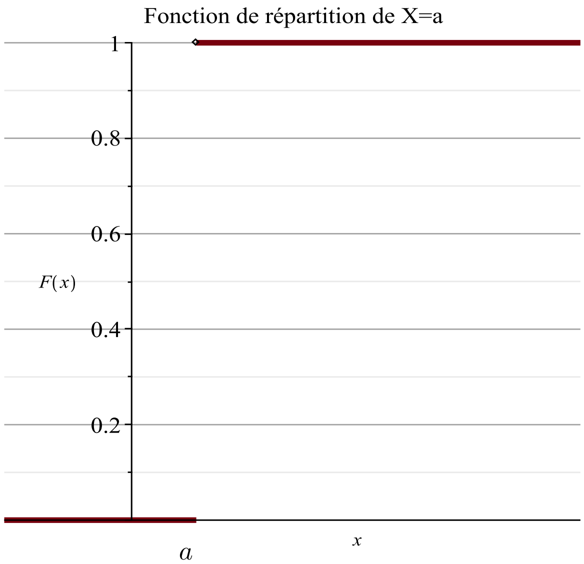
- $P(X = a) = 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}, P(X = x) = 0$
- $E(X) = a$ et $V(X) = 0$.

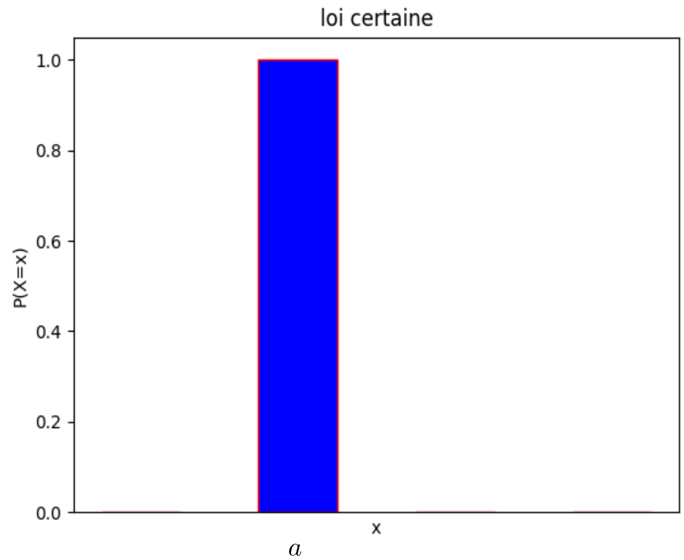
Démonstration. — L'événement $(X = a)$ est l'événement certain Ω : $P(X = a) = P(\Omega) = 1$. L'événement $(X = x)$ est vide si $x \neq a$ et dans ce cas $P(X = x) = 0$.

— $E(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} xP(X = x) = aP(X = a) = a$.

— $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = a^2P(X^2 = a^2) - a^2 = a^2 - a^2 = 0$.

□





Remarques

Si X est une v.a.r. discrète admettant une variance nulle alors pour tout $\varepsilon > 0$:

$$P(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2} = 0.$$

La suite d'événements $\left(|X - E(X)| \geqslant \frac{1}{n}\right)_{n \geqslant 1}$ est croissante donc par limite monotone :

$$P\left(|X - E(X)| > 0\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} |X - E(X)| \geqslant \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to +\infty} \underbrace{P\left(|X - E(X)| \geqslant \frac{1}{n}\right)}_{=0} = 0$$

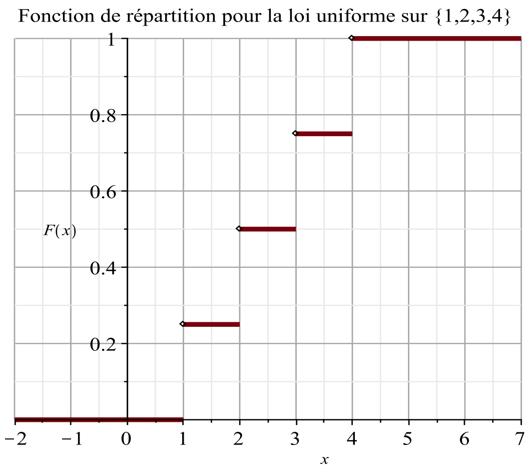
On en déduit que $X = E(X)$ avec probabilité 1 : on dit que X est presque ou quasi-certaine (X peut éventuellement prendre d'autres valeurs que a, mais avec probabilité 0).

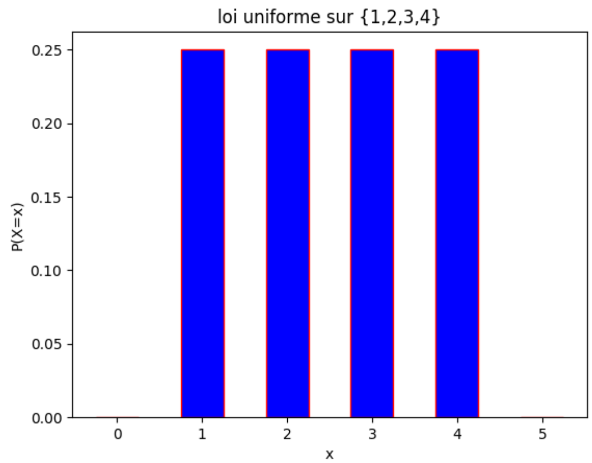
3.B Loi uniforme : lancer d'un dé équilibré, tirage dans une urne

Définition 35

On dit que X suit une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ et on note $X \sim \mathscr{U}([\![1, n]\!])$ si
- $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$
- $\forall k \in [\![1, n]\!], P(X = k) = \dfrac{1}{n}$.

On dit que X suit une loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$ avec $a < b$ entiers, et on note $X \sim \mathscr{U}([\![a, b]\!])$, si
- $X(\Omega) = [\![a, b]\!]$
- $\forall k \in [\![a, b]\!], P(X = k) = \dfrac{1}{b - a + 1}$.





Proposition 36

Soit $X \sim \mathscr{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$. Alors $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$ et $V(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$.

Démonstration. $E(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kP(X=k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$.

D'après la formule de Koenig-Huygens : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$. Par le théorème de transfert :

$$V(X) = \sum_{k=1}^{n} k^2 P(X=k) - E(X)^2 = \frac{1}{n}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$
$$= \frac{n+1}{2}\left(\frac{2n+1}{3} - \frac{n+1}{2}\right) = \frac{n+1}{2}\left(\frac{n-1}{6}\right) = \frac{n^2-1}{12}.$$

□

Exercice 37

Soit $X \sim \mathscr{U}(\llbracket a, b \rrbracket)$. Montrer que $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$ et $V(X) = \dfrac{(b-a+1)^2-1}{12}$.
On posera $Y = X - a + 1$.

➜$_{TD}$ **Applications :** Exercice 36.

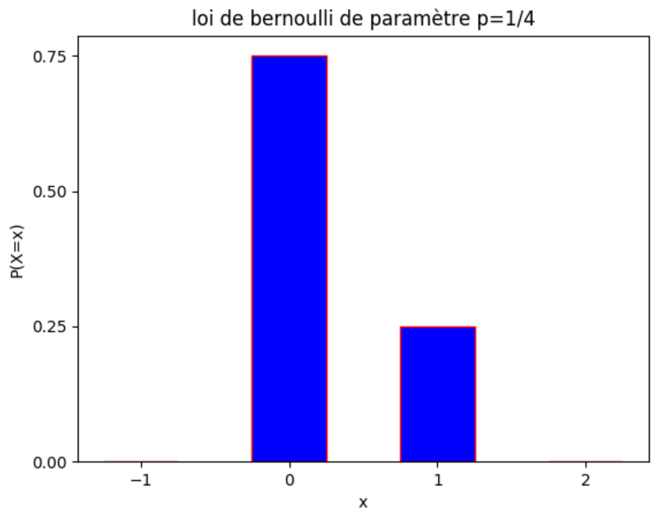
3.C Loi de Bernoulli

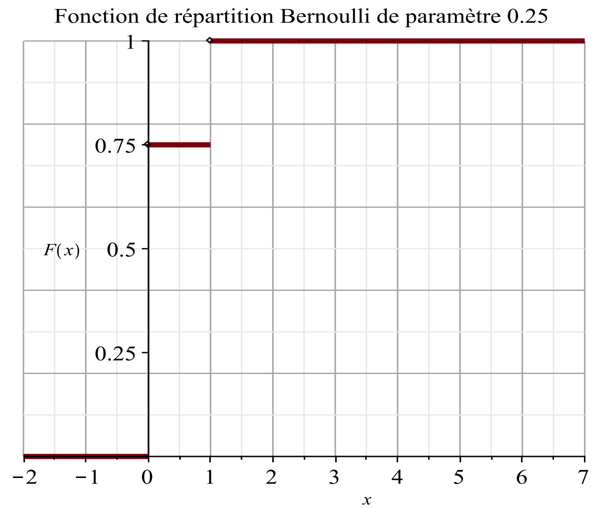
Définition 38: Loi de Bernoulli

On dit que la variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0;1[$ et on note $X \sim \mathscr{B}(p)$ si :
- $X(\Omega) = [0;1]$.
- $P(X=1) = p$ et $P(X=0) = 1-p$.

Exemple

La loi de Bernoulli est adaptée aux situations suivantes (liste non exhaustive) :
- lancer d'une pièce donnant Pile avec probabilité $p \in]0;1[$: $X \sim \mathscr{B}(p)$.
  $(X=1)$ est l'événement "obtenir Pile".
- tirage d'une boule dans une urne contenant une proportion $p \in]0;1[$ de boules blanches et une proportion $q = 1-p$ de boules noires : $X \sim \mathscr{B}(p)$. $(X=1)$ est l'événement "obtenir une blanche".





Proposition 39

Soit $X \sim \mathscr{B}(p)$. Alors $E(X) = p$ et $V(X) = pq$.

Démonstration. — $E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) = P(X = 1)$.
— $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 0^2 P(X = 0) + 1^2 P(X = 1) - p^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$.

□

3.D Loi binomiale

Définition 40

On dit que X suit une loi binomiale de paramètres $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times]0; 1[$ et on note $X \sim \mathscr{B}(n, p)$ si :
- — $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$
- — $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

Remarques

❶ Une variable suivant une loi binomiale modélise le nombre de succès obtenus lors de la réalisation successive de n épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre $p \in]0; 1[$.
L'événement $(X = k)$ pour $k \in [\![0, n]\!]$:
- — signifie que k épreuves conduisent à un succès : il y a $\binom{n}{k}$ façons de sélectionner les épreuves réussies,
- — chaque suite d'épreuves conduisant à k succès a une probabilité $p^k(1-p)^{n-k}$ d'apparaître,
- — on a a donc $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

❷ On a $X = X_1 + \cdots + X_n \sim \mathscr{B}(n, p)$ avec $X_i \sim \mathscr{B}(p)$ le résultat de la i-ème épreuve de Bernoulli.

❸ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(X = k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1.$
La suite de nombre positifs $(P(X = k))_{k \in [\![0,n]\!]}$ définit bien une loi de probabilité.

❹ Si $n = 1$, on retrouve une loi de Bernoulli.

Exemple

La loi binomiale est adaptée aux situations suivantes :
- — nombre de Pile obtenus après n lancers successifs d'une pièce donnant Pile avec $p \in]0; 1[$
- — nombre de boules blanches obtenus après n tirages successifs avec remise dans une urne contenant une proposition $p = \frac{b}{b+n}$ de boules blanches et une proportion $q = \frac{n}{b+n}$ de noires.

Proposition 41

Si $X \sim \mathscr{B}(n,p)$ alors $E(X) = np$ et $V(X) = npq$.

Démonstration. $X = X_1 + \cdots + X_n$ avec $X_1, \ldots, X_n$, n variables indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p. On a $E(X_i) = p$ et $V(X_i) = pq$.

— $E(X) = E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = np$ par linéarité de l'espérance.

— $V(X) = V\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) = np$ par indépendance des variables $X_1, \ldots, X_n$.

□

[**Distribution de la loi binomiale** Voir Exercice 8]

➜$_{TD}$ **Application :** Exercice 12, 32.

3.E Loi géométrique

Définition 42: Loi géométrique

Soit $p \in]0;1[$. On dit que X suit une loi géométrique de paramètre p, et on note $X \sim \mathscr{G}(p)$, si :

— $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$,

— $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X = k) = q^{k-1}p$ avec $q = 1 - p$.

Remarques

❶ La loi géométrique peut être interprétée comme le **rang du premier succès** dans une **suite illimitée** d'épreuves de **Bernoulli indépendantes** et de même paramètre p.

L'événement $(X = k)$:

— signifie que les $k-1$ premières épreuves sont un échec (événements notés E_i) et la k-ième est un succès (événement noté S_k).
$(X = k) = E_1 \cap \cdots \cap E_{k-1} \cap S_k$.

— Par indépendance des lancers $P(X = k) = q^{k-1}p$.

❷ $\sum_{k=1}^{+\infty} \underbrace{P(X = k)}_{\geqslant 0} = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) = p \sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{p}{1-q} = 1$. On a bien défini une loi de probabilité.

Exemple

La loi géométrique est adaptée aux situations suivantes :

— On lance indéfiniment une pièce de monnaie donnant Pile avec probabilité $p \in]0;1[$.
X est le rang d'apparition du premier Pile.

— rang du tirage de la première boule blanche lors de tirages successifs illimités avec remise dans une urne contenant une proportion $p = \frac{b}{b+n}$ de blanches et $q = \frac{n}{b+n}$ noires.

Remarques

Si X est le rang du premier Pile lors d'une suite illimitée de lancers successifs d'une pièce donnant Pille avec probabilité $p \in]0;1[$, l'événement "on obtient Face à tous les lancers" n'est pas impossible.
Mais cet événement est de probabilité nulle. On peut donc supposer que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

Proposition 43

Soit $X \sim \mathscr{G}(p)$ alors X admet une espérance et une variance finies et :

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{q}{p^2}.$$

Démonstration. — La série entière $\sum_{n \geqslant 0} x^n$ a un rayon de convergence $R = 1$ et

$$\forall x \in]-1;1[, \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

De plus, le théorème de dérivation terme à terme donne successivement :

$$\forall x \in]-1;1[, \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \text{ et } \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

— La série $\sum_{n=1}^{+\infty} n q^{n-1} p$ est donc absolument convergente car $q \in]0;1[\subset]-1;1[$. Ainsi, X admet une espérance finie et :

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} n q^{n-1} p = p \sum_{n=1}^{+\infty} n q^{n-1} = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}.$$

— Sous réserve d'existence : $E(X^2) = E(X(X-1)) + E(X)$.
La série $\sum_{n \geqslant 2} n(n-1) q^{n-1} p$ converge absolument car $q \in]0;1[\subset]-1;1[$. Par le théorème de transfert, on a :

$$E(X(X-1)) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) q^{n-1} p = pq \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) q^{n-2} = \frac{2pq}{(1-q)^3} = \frac{2q}{p^2}.$$

Par le théorème de Koenig-Huygens, on trouve par somme de séries convergentes :

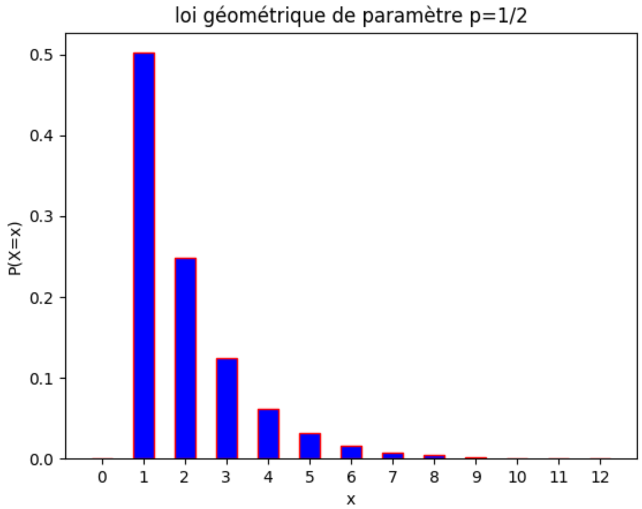
$$\begin{aligned} V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2 &= \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} \\ = \frac{2q + p - 1}{p^2} = \frac{2(1-p) + p - 1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2} &= \frac{q}{p^2}. \end{aligned}$$

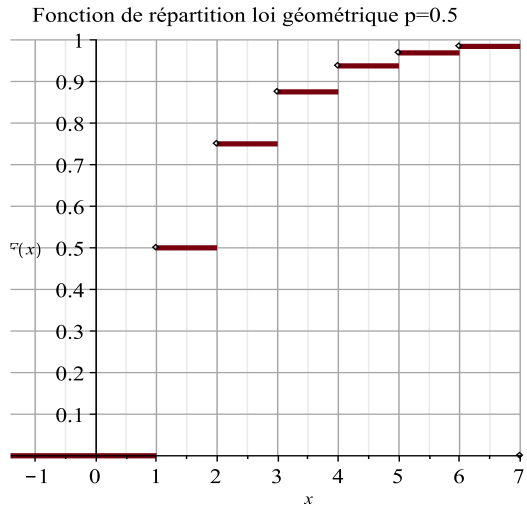
□

Remarques

— Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $F_X(k) = P(X \leqslant k) = \sum_{\ell=1}^{k} p q^{\ell-1} = p \sum_{\ell=0}^{k-1} q^\ell = p \frac{1-q^k}{1-q} = 1 - q^k$.

— On a $P(X > \ell) = 1 - P(X \leqslant \ell) = 1 - (1 - q^\ell) = q^\ell$.





Exercice 44

Soient $X_1, X_2 \sim \mathscr{G}(p)$ des variables indépendantes de même loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$.

1. Déterminer la loi de $X = \min(X_1, X_2)$.
2. Déterminer la loi de $Y = \max(X_1, X_2)$.
3. Justifier l'existence et donner l'espérance des variables aléatoires X et Y.

Exercice 45

Analyser et commenter les scripts ci-dessous :

```
p=1/2
q=1-p
N=10**6
L=3

S=0
for i in range(1,N+1):
    if geometrique(p)>L:
        S+=1
print('frequence de (X>l) : ',S/N)
print('probabilité P(X>l)=',q**L)
```

frequence empririque de (X>L) : 0.125106
probabilité théorique P(X>L)= 0.125

```
Ncond,K=0,2
T=0

for i in range(1,N+1):
    X=geometrique(p)
    if X>K:
        Ncond+=1
        if X>K+L:
            T+=1
print('fréquence de (X>K+L) sachant 
    (X>K)',T/Ncond)
```

fréquence de X>K+L sachant X>K
0.1242295855150086

Solution. A chaque itération $i \in [\![1, N]\!]$ de la boucle `for`, on note X le résultat de la simulation de la loi géométrique `geometrique(p)` et Y_i la variable aléatoire réelle qui vaut 1 si $X > L$ et 0 sinon. Ainsi, Y_i est à valeurs dans $\{0, 1\}$ et $P(Y_i = 1) = P(X > L) = q^L$ donc $Y_i \sim \mathscr{B}(q^L)$.

La suite $(Y_N)_{N\geqslant 1}$ est une suite de v.a.r. discrètes (car finies) indépendantes de même loi admettant une variance. La probabilité que la moyenne $\dfrac{S_N}{N} = \dfrac{Y_1 + \cdots + Y_N}{N}$ s'éloigne de l'espérance $m = E(Y_i) = q^L$ tend vers 0 :

$$\forall \varepsilon > 0, P\left(\left|\frac{S_N}{N} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ soit, ici } P\left(\left|\frac{S_N}{N} - q^L\right| \geqslant \varepsilon\right) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Pour N grand (ici $N = 10^6$) il n'est donc pas surprenant que la fréquence des succès $(X > L)$, soit proche de la probabilité $P(X > L) = q^L$.

• Dans le second script : on détermine la fréquence de réalisation l'événement $(X > K + L)$ **sachant que l'événement** $(X > K)$ **est réalisé** (d'où l'introduction de `Ncond`).

Il semble que la fréquence de $(X > K + L)$ sachant $(X > L)$ soit très proche de celle de $(X > L)$ ce qui suggère que
$$P_{(X>K)}(X > K + L) = P(X > L).$$
Si l'on commence son observation au temps K, la probabilité que le temps d'attente du premier succès soit supérieur strict à L est la même que si l'on commence l'observation au temps 0. $\square$

Théorème 46: Caractérisation de la loi géométrique comme loi sans mémoire

Soit X une variable aléatoire réelle discrète à valeurs dans $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
Alors X suit une loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ si et seulement si :
$$\forall (k, \ell) \in \mathbb{N}^2 : P_{(X>k)}(X > k + \ell) = P(X > \ell)$$

Solution. $\boxed{\Longrightarrow}$ $P(X > m) = q^m$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ donc :
$$P_{(X>k)}(X > k + \ell) = \frac{P(X > k + \ell \cap X > k)}{P(X > k)} = \frac{P(X > k + \ell)}{P(X > k)} = \frac{q^{k+\ell}}{q^k} = q^\ell = P(X > l).$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose que $P_{(X>k)}(X > k + \ell) = P(X > \ell)$ pour tout $k, \ell \in \mathbb{N}$.
En particulier pour $k = 1$ et $\ell \in \mathbb{N}$: $P_{(X>1)}(X > \ell + 1) = P(X > \ell)$ i.e.
$$\frac{P(X > \ell + 1)}{P(X > 1)} = P(X > \ell) : P(X > \ell + 1) = P(X > 1)P(X > \ell).$$

La suite $(P(X > \ell))_{\ell \geqslant 0}$ est donc géométrique de raison notée que q (on note $p = 1 - q$) :
$$q = P(X > 1) = 1 - P(X \leqslant 1) = 1 - P(X = 1) = 1 - p \text{ car } X(\Omega) = \mathbb{N}^*.$$

Ainsi, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, $P(X > \ell) = q^\ell P(X > 0) = q^\ell$ car $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
On en déduit la fonction de répartition de X aux valeurs entières : $F_X(\ell) = 1 - q^\ell$ puis la loi de X. Pour $\ell \in \mathbb{N}^*$:
$$P(X = \ell) = P(X \leqslant \ell) - P(X \leqslant \ell - 1) = (1 - q^\ell) - (1 - q^{\ell-1}) = q^{\ell-1}(1 - q) = pq^{\ell-1} : X \sim \mathscr{G}(p).$$

$\square$

➜$_{TD}$ **Applications :** Exercices 15, 17 (Q.1), 37.

Remarques

Attention ! Lorsqu'on définit la loi géométrique comme le rang d'apparition du premier succès lors de la réalisation d'un nombre **indéfini** d'épreuves de Bernoulli **indépendantes** de paramètre $p \in]0; 1[$, tous les mots sont importants, en particulier :

❶ **L'indépendance :** considérons l'expérience suivante. Une urne contient initialement une boule rouge et une boule verte. On effectue des tirages successifs dans l'urne avec le protocole suivant : on tire une boule ; si elle est rouge on la remet dans l'urne et on ajoute une verte, on procède au tirage suivant et ainsi de suite. Si elle est verte, l'expérience s'arrête. On note X le rang d'apparition de la première boule verte.
Alors $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $P(X = k) = \frac{k}{(k+1)!}$. On a $E(X) = e - 1$.

❷ **Le nombre indéfini d'épreuves :** considérons l'expérience suivante. On dispose de n flèches que l'on tire sur une cible. Les tirs sont supposés indépendants et ont chacun une probabilité $p \in]0; 1[$ d'atteindre le centre de la cible. On note X le rang de la première flèche atteignant le centre de la cible. On note $X = 0$ si l'on n'atteint pas le centre de la cible.
Alors $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et $P(X = k) = q^{k-1}p$ et $P(X = 0) = q^n$. $E(X) = \frac{1}{p} - \frac{(1-p)^n(1+np)}{p}$.

3.F Loi de Poisson

Soit $\lambda > 0$ et $X_n \sim \mathscr{B}(n, p_n)$ tel que $np_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda$: pour fixer les idées on prendra $p_n = \dfrac{\lambda}{n}$.

Alors :

$$P(X_n = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{\lambda^k}{n^k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$

$$= \frac{\overbrace{n(n-1)\dots(n-k+1)}^{\underset{n\to+\infty}{\sim} n^k}}{k!}\frac{\lambda^k}{n^k}\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}_{\exp\left(n\ln 1-\frac{\lambda}{n}\right)}\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Définition 47: Loi de Poisson

On dit que X suit un loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et on note $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$ si :

— $X(\Omega) = \mathbb{N}$

— $\forall n \in \mathbb{N}, P(X = n) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}$.

Remarques

❶ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\underbrace{P(X = n)}_{\geqslant 0} = e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1$. On a bien défini une loi de probabilité.

❷ La loi de Poisson est également appelée loi des événements rares car on peut l'interpréter comme loi "limite" d'une loi binomiale de paramètres n grand et de probabilité $p_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n}$ faible. On résume dans le théorème suivant :

Théorème 48: Approximation Binomiale-Poisson

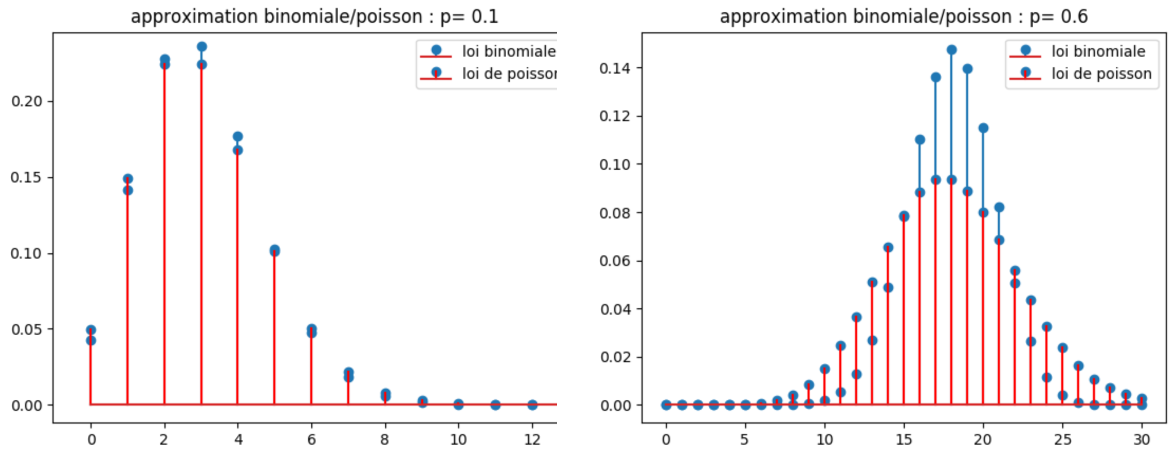
Si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \sim \mathscr{B}(n, p_n)$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = \lambda$ alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Remarques

— On a l'équivalent $np_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda$. L'espérance de la loi binomiale $X_n \sim \mathscr{B}(n, p_n)$ est égale à $E(X_n) = np_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda$. Le paramètre λ peut donc être interprété comme le nombre moyen de succès via l'approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson.

— En pratique l'approximation binomiale/poisson est satisfaisante pour $n \geqslant 30$ et $p \leqslant 0,1$: la loi $\mathscr{B}(n, p)$ est proche de celle de $\mathscr{P}(np)$ dans ces situations.
La qualité de l'approximation se dégrade si la probabilité de succès est trop importante.
Ci-dessous les lois $\mathscr{B}(30, 0.1)$ et $\mathscr{P}(3)$ d'une part et $\mathscr{B}(30, 0.6)$ et $\mathscr{P}(18)$ d'autre part.



Théorème 49: Espérance et variance d'une loi de Poisson

Soit $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$. Alors X admet une variance et une espérance :

$$E(X) = \lambda \quad \text{et} \quad V(X) = \lambda.$$

Démonstration. — La série $\sum_{n \geqslant 0} n\lambda^n \frac{e^{-\lambda}}{n!}$ est absolument convergente à l'instar de la série exponentielle $\sum_{n \geqslant 0} \frac{\lambda^n}{n!}$.

De plus : $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} ne^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{(n-1)!} = e^{-\lambda}\lambda\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{n!} = \lambda.$

— Sous réserve d'existence $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2$.

La série $\sum_{n \geqslant 0} n(n-1)e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$ est absolument convergente et par le théorème de transfert, on a

$$E(X(X-1)) = e^{-\lambda}\lambda^2\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n(n-1)\lambda^{n-2}}{n!} = e^{-\lambda}\lambda^2\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!} = e^{-\lambda}\lambda^2 e^{\lambda} = \lambda^2.$$

Finalement, le théorème de Koenig-Huygens donne :

$$V(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

□

Exercice 50

Résoudre l'exercice donné en introduction.

4 Couples et fonctions de variables aléatoires discrètes

4.A Définitions

Définition 51

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisable. On appelle couple de variables aléatoires discrètes toute application :

$$Z : \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \omega & \longmapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{array} \right.$$

avec X et Y des variables aléatoires réelles discrètes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On note $Z = (X, Y)$ ce couple.
Le variable Z est à valeurs vectorielles : $Z(\Omega) = \{(X(\omega), Y(\omega)) : \omega \in \Omega\} \subset X(\Omega) \times Y(\Omega) \subset \mathbb{R}^2$.
On note $(Z = z)$ l'événement $(X = x_i) \cap (Y = y_j)$ avec $z = (x_i, y_j)$.

Remarques

L'événement $(X = x_i) \cap (Y = y_k)$ est aussi noté $((X, Y) = (x_i, y_j))$. On note aussi $(X = x_i, Y = y_j)$.

Exemple

On lance deux dés. On note X le maximum des deux numéros obtenus, Y la valeur du deuxième dé et $Z = (X, Y)$.
Déterminer $X(\Omega), Y(\Omega), X(\Omega) \times Y(\omega), Z(\Omega)$.

Solution. — $X(\Omega) = [\![1, 6]\!] = Y(\Omega)$ et $X(\Omega) \times Y(\Omega) = [\![1, 6]\!]^2$
— $Z(\Omega) = \{(i, j) : i \in [\![1, 6]\!], j \in [\![1, i]\!]\} \subsetneq X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

□

Remarques

Si X, Y sont des variables aléatoires réelles discrètes sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$ alors
- — $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont au plus dénombrables donc $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ aussi et finalement, $Z(\Omega)$ est également au plus dénombrable.
- — Pour tout $z = (x, y) \in (X, Y)(\Omega) : (Z = z) = (X = x) \cap (Y = y) \in \mathscr{A}$ est un événement car intersection de deux événements.

Conclusion $Z = (X, Y)$ est une variable aléatoire réelle discrète à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

Proposition 52

Soient X, Y deux variables aléatoires réelles discrètes.
On note $X(\Omega) = \{x_i : i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j : j \in J\}$.
Alors la famille d'événements $(Z = (x_i, y_j))_{(i,j) \in I \times J} = (X = x_i \cap Y = y_j)_{(i,j) \in I \times J}$ est un système complet d'événements.

Définition 53: Loi conjointe

Soit (X, Y) un couple de variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
On appelle loi conjointe de X et de Y la loi du couple (X, Y) définie par :

$$\mathscr{L}_{(X,Y)} : \left| \begin{array}{ccc} X(\Omega) \times Y(\Omega) & \longrightarrow & [0, 1] \\ (x, y) & \longmapsto & P((X = x) \cap (Y = y)). \end{array} \right.$$

Exemple

On jette deux dés équilibrés. On note X_1 le résultat du premier dé et X_2 celui du second.
On note $Y = \max(X_1, X_2)$ et $Z = (X_1, Y)$.
On cherche la loi conjointe de X_1 et Y c'est-à-dire la loi du couple $Z = (X_1, Y)$.

X_1/Y	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
2	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
3	0	0	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
4	0	0	0	$\frac{4}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
5	0	0	0	0	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{36}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{6}{36}$

On vérifie que $\displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![1,6]\!]^2} P(X = i \cap Y = j) = 1$, la famille $(X = i \cap Y = j)_{i,j}$ formant un s.c.e.

Exercice 54

On effectue une succession de Pile ou Face avec un pièce donnant Pile avec probabilité $p \in]0;1[$. On note X le rang d'apparition du premier Pile et Y le rang du second.
Déterminer la la conjointe de (X, Y) et vérifier que la somme des probabilités vaut 1.

Solution. — $X \sim \mathscr{G}(p)$: $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $P(X = k) = q^{k-1}p$ pour $k \geqslant 1$.

— Soient $(k, \ell) \in (\mathbb{N}^*)^2$.
  * Si $\ell \leqslant k$, $P(X = k \cap Y = \ell) = 0$.
  * Si $\ell > k$, $P(X = k \cap Y = \ell) = P(X = k)P_{X=k}(Y = \ell) = q^{k-1}p \times q^{(\ell-1)-(k+1)+1}p = p^2q^{\ell-2}$

— On calcule $\displaystyle\sum_{(k,l)\in(\mathbb{N}^*)^2} P(X = k \cap Y = \ell)$:

$$\sum_{(k,\ell)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} P(X = k, Y = \ell) = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{\ell=k+1}^{+\infty} P(X = k \cap Y = \ell) = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{\ell=k+1}^{+\infty} p^2q^{\ell-2}$$
$$= p^2\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{\ell=k-1}^{+\infty} q^\ell = p^2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{q^{k-1}}{1-q} = \frac{p^2}{1-q}\sum_{0}^{+\infty} q^k = \frac{p^2}{1-q}\frac{1}{1-q} = \frac{p^2}{p^2} = 1.$$

□

Définition 55: Lois marginales

Soient (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
On appelle 1^{re} loi marginale de (X, Y) la loi de X et 2^e loi marginale de (X, Y) la loi de Y.

Théorème 56: Lois marginales à partir de la loi conjointe

— Pour tout $i \in I$, $P(X = x_i) = \displaystyle\sum_{j\in J} P(X = x_i \cap Y = y_j)$

— Pour tout $j \in I$, $P(Y = y_j) = \displaystyle\sum_{i\in I} P(X = x_i \cap Y = y_j)$

Exemple

On jette deux dés équilibrés. On note X_1 le résultat du premier dé et X_2 celui du second.
On note $Y = \max(X_1, X_2)$ et $Z = (X_1, Y)$.
On rappelle la loi conjointe de (X_1, Y) ci-dessous :

X_1/Y	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
2	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
3	0	0	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
4	0	0	0	$\frac{4}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
5	0	0	0	0	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{36}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{6}{36}$

On trouve $P(X_1 = 1) = \cdots = P(X_1 = 6) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ (ce qui n'est pas surprenant).
On trouve :
$P(Y = 1) = \frac{1}{36}, P(Y = 2) = \frac{3}{36}, P(Y = 3) = \frac{5}{36},$
$P(Y = 4) = \frac{7}{36}, P(Y = 5) = \frac{9}{36}, P(Y = 6) = \frac{11}{36}$
[**Loi du maximum :** On retrouve le résultat de l'Exercice 15]

Exercice 57

On effectue une succession de Pile ou Face avec un pièce donnant Pile avec probabilité $p \in]0;1[$. On note X le rang d'apparition du premier Pile et Y le rang du second.
Déterminer les lois marginales du couple (X, Y).

Démonstration. — La loi du couple (X, Y) est donnée par $P(X = k \cap Y = \ell) = \begin{cases} p^2 q^{\ell-2} & \text{si} \quad k < \ell \\ 0 & \text{si} \quad \ell \leqslant k \end{cases}$

— $P(X = k) = \displaystyle\sum_{\ell=1}^{+\infty} P(X = k \cap Y = \ell) = \sum_{\ell=k+1}^{+\infty} p^2 q^{\ell-2} = \frac{p^2}{q} \sum_{\ell=k}^{+\infty} q^\ell = \frac{p^2}{q} \frac{q^k}{1-q} = pq^{k-1}.$
  On retrouve bien $X \sim \mathscr{G}(p)$.

— $P(Y = \ell) = 0$ si $\ell = 1$.
  Si $\ell \geqslant 2$, $P(Y = \ell) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k \cap Y = \ell) = \sum_{k=1}^{\ell-1} p^2 q^{\ell-2} = (\ell-1)p^2 q^{\ell-2}.$
  On remarque que $P(Y = \ell) = \binom{\ell-1}{1} q^{\ell-2} p \times p$: l'un des $\ell - 1$ premiers instants est un succès, les $\ell - 2$ autres instants (de rangs $\leqslant \ell - 1$) sont des échecs et le dernier instant (celui de rang ℓ) est un succès (le second).

□

4.B Indépendance, loi conditionnelle et fonctions de variables aléatoires

Définition 58

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

❶ On appelle loi conditionnelle de X sachant $(Y = y)$ l'application :

$$P_{(Y=y)}(X = \bullet) : \left| \begin{array}{ccl} X(\Omega) & \longrightarrow & [0;1] \\ x & \longmapsto & \dfrac{P(X = x \cap Y = y)}{P(Y = y)} = P_{(Y=y)}(X = x) \end{array} \right. \quad \text{avec } P(Y = y) \neq 0.$$

❷ On appelle loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$ l'application :

$$P_{(X=x)}(Y=\bullet) : \left| \begin{array}{ccl} Y(\Omega) & \longrightarrow & [0;1] \\ y & \longmapsto & \dfrac{P(X=x\cap Y=y)}{P(X=x)} = P_{(X=x)}(Y=y) \end{array} \right. \quad \text{avec } P(X=x)\neq 0.$$

Exercice 59

Une banque possède m guichets.
Chaque client entrant dans la banque se dirige uniformément vers l'un des guichets.
On suppose que le nombre Y de clients lors d'une journée suit une loi de Poisson : $Y \sim \mathscr{P}(\lambda)$.
On note X_1 le nombre de clients se dirigeant vers le guichet 1 sur une journée.
Déterminer la loi de X_1 conditionnellement à $(Y = n)$.

Solution. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $P_{(Y=n)}(X_1 = k) = \binom{n}{k}\left(\dfrac{1}{m}\right)^k\left(1-\dfrac{1}{m}\right)^{n-k}$: la loi de X_1 conditionnellement à $(Y = n)$ est binomiale de paramètres $\left(n, \frac{1}{m}\right)$. □

On rappelle que deux variables sont **indépendantes** si pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$:

$$P(X = x \cap Y = y) = P(X = x)P(Y = y).$$

Notation 60

On note $X \perp\!\!\!\perp Y$ si X et Y sont indépendantes

Proposition 61

Soient deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Si X et Y sont **indépendantes** alors pour toute parties $A \subset X(\Omega), B \subset Y(\Omega)$, on a :

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B).$$

On définit de manière analogue la notion de n variables indépendantes et la proposition précédente reste valable.

Proposition 62

Soient X et Y des v.a.r. discrètes indépendantes.
Soient $f : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ et $g : Y(\Omega) \to \mathbb{R}$. Alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont également indépendantes.
Autrement dit $X \perp\!\!\!\perp Y \implies f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$.

Remarques

Le résultat s'étend au cas de plus de deux variables aléaoires.

Théorème 63: Lemme des coalitions

Si les variables aléatoires $X_1, ..., X_n$ sont indépendantes, alors les variables aléatoires $f(X_1, ..., X_m)$ et $g(X_{m+1}, ..., X_n)$ le sont aussi.

Remarques

Le résultats s'étend au cas de plus de deux coalitions.

Exercice 64

Soient X, Y des variables aléatoires respectivement de lois de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$ et $\mathscr{P}(\mu)$.
Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

Démonstration. On a $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall k \geqslant 0, P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, P(Y = k) = e^{-\mu}\frac{\mu^k}{k!}$.
Par conséquent $(X+Y)(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P(X+Y=n) = \sum_{k+\ell=n} P(X = k \cap Y = \ell) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k \cap Y = n-k)$$

Par indépendance, il vient :

$$P(X+Y=n) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k)P(Y=n-k).$$

Finalement, $X + Y \sim \mathscr{P}(\lambda + \mu)$:

$$P(X+Y=n) = \sum_{k=0}^{n} e^{-(\lambda+\mu)}\frac{\lambda^k\mu^{n-k}}{k!(n-k)!} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda^k\mu^{n-k} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!}(\lambda+\mu)^n$$

□

Exercice 65

Soient $X \sim \mathscr{B}(n, p)$ et $Y \sim \mathscr{B}(m, p)$ des variables indépendantes. Déterminer la loi de $X + Y$.
On utilisera la formule de Vandermonde démontrée en exercice au Chapitre 9 (Exercice 24).

Solution. $(X+Y)(\Omega) = [\![0, m+n]\!]$.

$$\begin{aligned} P(X+Y=k) &= \sum_{i+j=k} P(X=i \cap Y=j) \underset{\text{(indep)}}{=} \sum_{i+j=k} P(X=i)P(Y=j) \\ &= \sum_{\ell=0}^{k} P(X=\ell)P(Y=k-\ell) \\ &= \sum_{\ell=0}^{k} \binom{n}{\ell} p^\ell (1-p)^{n-\ell} \binom{m}{k-\ell} p^{k-\ell}(1-p)^{m-(k-\ell)} \\ &= p^k(1-p)^{m+n-k}\sum_{\ell=0}^{k}\binom{n}{\ell}\binom{m}{k-\ell} = p^k(1-p)^{m+n-\ell}\binom{m+n}{k} \end{aligned}$$

□

Exercice 66

Une urne contient deux boules blanches numérotées et $n \in \mathbb{N}^*$ boules noires numérotées.
On vide complètement l'urne en piochant une boule successivement, sans remise.
On note X le rang de tirage de la 1^e blanche et Y celui de la 2^{de} blanche.
Déterminer la loi du couple (X, Y), les lois marginales de X et Y et la loi de $Y - X$.

4.C Espérance, variance et covariance

4.C.1 Quelques exemples

Exercice 67

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire successivement deux boules avec remise. On note X le numéro de la $1^{\text{ère}}$ boule et Y celui de la seconde. On note $Z = \max(X, Y)$.
Déterminer $E(Z)$.

Solution. On a $X(\Omega) = Y(\Omega) = Z(\Omega) = [\![1,n]\!]$ avec $X, Y \sim \mathscr{U}([\![1,n]\!])$ indépendantes. Alors :

$$\begin{aligned}
E(Z) &= \sum_{k=1}^{n} kP(\max(X_1, X_2) = k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} kP(\{X_1 = k \cap X_2 < k\} \cup \{X_1 < k \cap X_2 = k\} \cup \{X_1 = k \cap X_2 = k\}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\left[P(X_1 = k)P(X_2 < k) + P(X_1 < k)P(X_2 = k) + P(X_1 = k)P(X_2 = k)\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\left[\frac{1}{n}\frac{k-1}{n} + \frac{k-1}{n}\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right] \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(2k(k-1)+k) = \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k^2 - \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k = \frac{2}{n^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+1)(4n-1)}{6n}
\end{aligned}$$

□

Remarques

Le théorème de transfert valable s'étand pour les fonctions deux (ou plus) variables aléatoires. Si $Z = g(X,Y)$ (on note $X(\Omega) = \{x_i : i \in I\}, Y(\Omega) = \{y_j : j \in J\}$) :

$$E(Z) = \sum_{(i,j)\in I\times J} g(x_i, y_j)P(X = x_i \cap Y = y_j).$$

Exemple

1. Retrouver le résultat de l'exercice précédent en utilisant cette formule.
2. Déterminer la moyenne de la somme obtenue en tirant indépendamment deux nombres au hasard dans $[\![1,n]\!]$.

4.C.2 Covariance d'un couple de variables discrètes

Théorème 68: Covariance d'un couple

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Si X et Y admettant un moment d'ordre 2 alors la variable aléatoire $(X-E(X))(Y-E(Y))$ admet une espérance.
On appelle **covariance** de X et Y le réel noté $\operatorname{cov}(X,Y)$ défini par :

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E((X-E(X))(Y-E(Y)).$$

Remarques

— En cas d'existence, on a $\operatorname{cov}(X,Y) = \sum_{(i,j)\in I\times J}(x_i - E(X))(y_j - E(Y))P(X = x_i \cap Y = y_j)$.

— La covariance est l'espérance du produit des variables centrées.

Théorème 69: Formule de Koenig-Huygens

En cas d'existence :

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Démonstration. Par le calcul, les espérances étant finies :

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X,Y) &= E((X-E(X))(Y-E(Y))) = E(XY - XE(Y) - YE(X) + E(X)E(Y))\\ &= E(XY) - 2E(X)E(Y) + E(X)E(Y) = E(XY) - E(X)E(Y).\end{aligned}$$

□

Exercice 70

On jette deux dés équilibrés. On note X_1 le résultat du premier dé et X_2 celui du second.
On note $Y = \max(X_1, X_2)$ et $Z = (X_1, Y)$.
Déterminer $\operatorname{cov}(X_1, Y)$.

Solution. $\operatorname{cov}(X_1,Y) = E(X_1Y) - E(X_1)E(Y) = E(X_1Y) - \frac{7}{2} \times \frac{161}{36}$.
De plus $(X_1Y)(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 9, 15, 18, 16, 20, 24, 25, 30, 36\}$ avec

$$\begin{aligned}
&P(X_1Y=1)=\frac{1}{36}, \quad P(X_1Y=2)=\frac{1}{36}, \quad P(X_1Y=3)=\frac{1}{36}\\
&P(X_1Y=4)=\frac{3}{36}, \quad P(X_1Y=5)=\frac{1}{36}, \quad P(X_1Y=6)=\frac{2}{36}\\
&P(X_1Y=8)=\frac{1}{36}, \quad P(X_1Y=10)=\frac{1}{36}, \quad P(X_1Y=12)=\frac{2}{36}\\
&P(X_1Y=9)=\frac{3}{36}, \quad P(X_1Y=15)=\frac{1}{36}, \quad P(X_1Y=18)=\frac{1}{36}\\
&P(X_1Y=16)=\frac{4}{36}, \quad P(X_1Y=20)=\frac{1}{36}, \quad P(X_1Y=24)=\frac{1}{36}\\
&P(X_1Y=25)=\frac{5}{36}, \quad P(X_1Y=30)=\frac{1}{36}, \quad P(X_1Y=36)=\frac{6}{36}
\end{aligned}$$

On obtient

$$E(X_1Y) = \frac{154}{9} \text{ et } \operatorname{cov}(X_1,Y) = \frac{154}{9} - \frac{7}{2}\frac{161}{36} = \frac{35}{24}.$$

□

Remarques

On peut calculer $E(X_1Y)$ à l'aide du théorème de transfert pour une fonction de deux variables aléatoires :

$$\begin{aligned}E(X_1Y) = 1P(X_1 = 1 \cap Y = 1) &+ \cdots + 6P(X_1 = 1 \cap Y = 6)\\
&+ 4P(X_1 = 2 \cap Y = 2) + \cdots + 12P(X_1 = 2 \cap Y = 6)\\
&+ 9P(X_1 = 3 \cap Y = 3) + \cdots + 18P(X_1 = 3 \cap Y = 6)\\
&+ 16P(X_1 = 4 \cap Y = 4) + 20P(X_1 = 4 \cap Y = 5) + 24P(X_1 = 4 \cap Y = 6)\\
&+ 25P(X_1 = 5 \cap Y = 5) + 30P(X_1 = 5 \cap Y = 6)\\
&+ 36P(X_1 = 6 \cap Y = 6) = \frac{154}{9}.\end{aligned}$$

Proposition 71

Soient X, Y, Z des variables admettant des moments d'ordre 2. Alors :

❶ $\operatorname{cov}(X,X) = V(X)$
❷ $\operatorname{cov}(X,Y) = \operatorname{cov}(Y,X)$
❸ $\operatorname{cov}(aX+bY, Z) = a\operatorname{cov}(X,Z) + b\operatorname{cov}(Y,Z)$ pour tous $(a,b) \in \mathbb{R}^2$
❸ $\operatorname{cov}(aX+b, cY+d) = ac\operatorname{cov}(X,Y)$ pour tous $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$.

Proposition 72

Soient X, Y deux variables aléatoires réelles discrètes admettant des moments d'ordre 2. Alors pour tout $a, b \in \mathbb{R}$:

$$V(aX + bY) = a^2 V(X) + b^2 V(Y) + 2ab \operatorname{cov}(X, Y).$$

En particulier $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\operatorname{cov}(X, Y)$.

Démonstration. On utilise les propriétés de la variance et de la covariance :

$$\begin{aligned} V(aX+bY) &= \operatorname{cov}(aX+bY, aX+bY) = a^2 \operatorname{cov}(X,X) + 2ab\operatorname{cov}(X,Y) + b^2\operatorname{cov}(Y,Y) \\ &= a^2V(X) + 2ab\operatorname{cov}(X,Y) + b^2V(Y). \end{aligned}$$

□

Théorème 73

Soient X, Y deux variables discrètes admettant un moment d'ordre 2 et **indépendantes** alors :

❶ $E(XY) = E(X)E(Y)$.

❷ $\operatorname{cov}(X, Y) = 0$. Deux variables de covariance nulle sont dites **décorrélées**.

❸ $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.

Remarques

Si deux variables sont indépendantes alors leur covariance est nulle (elles sont décorrélées). **Réciproque fausse.**
Soient $X \sim \mathscr{U}(\{1, 2\})$ et $Y \sim \mathscr{U}(\{-1; 1\})$ indépendantes (on peut tirer simultanément une boule dans deux urnes : l'une contient deux boules numérotées $1, 2$ l'autre des boules numérotées $-1, 1$).
Alors $\operatorname{cov}(X, XY) = E(X^2Y) - E(X)E(XY)$
Mais X, Y étant indépendantes, on a $E(XY) = E(X)E(Y)$.
Puisque X et Y sont indépendantes alors X^2 et Y aussi donc $E(X^2Y) = E(X^2)E(Y)$.
Mais $E(Y) = -P(Y=-1) + P(Y=1) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$.
Finalement, $\operatorname{cov}(X, XY) = 0$.
Pourtant X et XY ne sont pas indépendantes (!) :

— $P(X = 2 \cap XY = -1) = 0$ car $(X = 2 \cap XY = -1) = \varnothing$
— $P(X = 2) = \frac{1}{2}$ et $P(XY = -1) = P(X = 1 \cap Y = -1) = \frac{1}{4}$ par indépendance.
— $P(X = 2 \cap XY = -1) = 0 \neq \frac{1}{4} = P(X = 2)P(XY = -1)$.

Un cas très particulier ou l'équivalence est valable :

Exercice 74

Montrer que deux variables de Bernoulli sont indépendantes si et seulement si leur covariance est nulle.

Solution. $\boxed{\Longrightarrow}$ Si $X \sim \mathscr{B}(p_1)$ et $Y \sim \mathscr{B}(p_2)$ sont indépendantes alors leur covariance est nulle par le Théorème 68.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Réciproquement supposons que la covariance de X et Y est nulle.
Alors les événements $(X = 1)$ et $(Y = 1)$ sont indépendants :

$$P(X = 1 \cap Y = 1) \underset{(*)}{=} P(XY = 1) = E(XY) \underset{(\operatorname{cov}(X,Y)=0)}{=} E(X)E(Y) = P(X = 1)P(Y = 1)$$

$(*)$: en effet, X et Y sont à valeurs dans $\{0; 1\}$: $XY = 1$ si et seulement si $X = 1$ et $Y = 1$.
Les événements $A = (X = 1), B = (Y = 1)$ étant indépendants, on en déduit que $A = (X = 1), \overline{B} = \overline{(Y = 1)}$ sont indépendants et en répétant l'argument, on conclut que X, Y sont des variables indépendantes.

□

4.C.3 Inégalité de Cauchy-Schwartz

Si X admet un moment d'ordre 2, sa variance vérifie $V(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E(X)^2$.
Son écart type est défini par $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Théorème 75

On suppose que X^2 et Y^2 et XY sont d'espérances finies. Alors :

$$E(XY)^2 \leqslant E(X^2)E(Y^2).$$

Démonstration. Pour tout λ, l'espérance d'une variable aléatoire positive étant positive, on a :

$$E\left[(\lambda X + Y)^2\right] \geqslant 0.$$

En développant, on trouve :

$$E\left[(\lambda X + Y)^2\right] = \lambda^2 E(X^2) + 2\lambda E(XY) + E(Y^2) \geqslant 0.$$

Ce polynôme, d'indéterminée λ, est positif sur $\mathbb{R}$ donc son discriminant est négatif ce qui donne :

$$E(XY)^2 \leqslant E(X^2)E(Y^2).$$

□

5 Fonctions génératrices des variables à valeurs entières

Dans toute cette partie, on suppose que les variables aléatoires sont **à valeurs dans $\mathbb{N}$.**

Définition 76: Fonction génératrice

La fonction génératrice de la variable X est définie par :

$$G_X : t \longmapsto E(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)t^n.$$

On appelle série génératrice la série entière associée à cette fonction.

La fonction G est définie sur un intervalle ouvert $]-R; R[$, fermé $[-R; R]$ ou semi-ouvert $]-R; R]$ ou $[-R; R[$ avec R le rayon de convergence de la série entière des coefficients $P(X = n)$.

Cette série entière converge pour $t = 1$ car $G_X(1) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) = 1$ car $(X = n)_{n \geqslant 0}$ forme un s.c.e. :

Proposition 77

Le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} P(X = n)t^n$ vérifie $R \geqslant 1$.

Exemple

— $X \sim \mathscr{B}(p) : G_X(t) = P(X = 0)t^0 + P(X = 1)t^1 = q + pt$. $R = +\infty$.

— $X \sim \mathscr{B}(n, p) : G_X(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(X = k)t^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} t^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pt)^k q^{n-k} = (q + pt)^n$.
$R = +\infty$.

— $X \sim \mathscr{U}([\![1, n]\!]) : G_X(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{t^k}{n}$ et pour $t \neq 1$, $G_X(t) = \dfrac{t}{n} \dfrac{1 - t^n}{1 - t}$. $R = +\infty$.

— $X \sim \mathscr{G}(p) : G_X(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1}t^k = \frac{p}{q}\sum_{k=1}^{+\infty}(tq)^k = \frac{p}{q}\frac{tq}{1-tq} = \frac{pt}{1-qt}$. $R = 1/q$.
(note : G_X est définie sur $[-1;1] \subset]-1/q;1/q[$).

— $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$, $G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{(t\lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{t\lambda} = e^{\lambda(t-1)}$. $R = +\infty$.

Remarques

Comme toute fonction somme d'une série entière, $t \longmapsto G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)t^n$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence $]R;R[$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(X=n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}.$$

Il suffit donc de connaître la fonction génératrice pour connaître la loi de X : on dit que la loi de X est caractérisée par sa fonction génératrice.

Proposition 78: Fonction génératrice et moments

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$.
❶ La variable X admet une espérance finie $E(X)$ si et seulement si G_X est dérivable en 1.
Dans ce cas, $E(X) = G'_X(1)$.
❷ La variable X admet une variance finie si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1.
Dans ce cas, $V(X) = E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2 = G''_X(1) + G'_X(1) - (G_X(1)')^2$

Démonstration. On admet les équivalences et on vérifie les égalités souhaitées dans le cas $R > 1$.
Par le théorème de dérivation terme à terme :

$$G'_X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP(X=n)t^{n-1} \text{ donc si } t = 1 \in]-R;R[\text{: } G'_X(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP(X=n) = E(X).$$

De même :

$$G''_X(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)P(X=n)t^{n-2} : G''_X(1) = \sum_{n=2}^{+\infty} X(X-1)P(X=n) = E(X(X-1)).$$

□

Théorème 79: Série génératrice de la somme de deux variables indépendantes

Soient X, Y des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Soient G_X, G_Y leurs séries génératrices de rayon de convergence respectifs R_X, R_Y.
Si X et Y sont indépendantes la fonction génératrice de G_{X+Y} de $X+Y$ a un rayon de convergence $R_{X+Y} \geqslant \min(R_X, R_Y)$ et :

$$\forall t \in]-R;R[, G_{X+Y}(t) = E(t^{X+Y}) = E(t^X)E(t^Y) = G_X(t)G_Y(t).$$

Démonstration. Le produit de Cauchy de G_X et G_Y a un rayon de convergence R supérieur au minimum des rayons de convergence de G_X et G_Y et :

$$\begin{aligned}\forall t \in]-R;R[, G_X(t)G_Y(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)t^n \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y=n)t^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} P(X=k)t^k P(Y=n-k)t^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} P(X=k)P(Y=n-k)}_{=P(X+Y=n) \quad (*)} t^n\end{aligned}$$

$(*)$: $P(X+Y=n) = P\left(\bigcup_{k=0}^{n} P(X=k) \cap P(Y=n-k)\right) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k \cap Y=n-k)$ par additivité, la réunion étant disjointe.

Il vient par indépendance des variables X, Y :$P(X+Y=n) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k)P(Y=n-k)$ □

Exemple

Soient $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathscr{P}(\mu)$.
Alors $\forall t \in \mathbb{R}, G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t) = e^{\lambda(t-1)}e^{\mu(t-1)} = e^{(\lambda+\mu)(t-1)}$ donc $X+Y \sim \mathscr{P}(\lambda+\mu)$.

Exercice 80

Déterminer la fonction génératrice d'une variable suivant une loi de Bernoulli.
En déduire celle d'une variable suivant une loi binomiale.

Démonstration. Soit $X \sim \mathscr{B}(p)$. $G_X(t) = q + pt$ définie sur $\mathbb{R}$.

Soit $S \sim \mathscr{B}(n,p)$ alors $S = X_1 + \cdots + X_n$ avec $X_1, \ldots, X_n$ des variables indépendantes de même loi $\mathscr{B}(p)$.

Il vient $\forall t \in \mathbb{R}$, $G_S(t) = G_{X_1+\cdots+X_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} G_{X_i}(t) = (q+pt)^n$.

□