DM2 : séries numériques

Exercice 1: Série alternée - semi-convergence et somme

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)dt$.

1. (a) Montrer que la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   (b) Donner un équivalent simple de $\cos(x) - 1$ et de $\ln(1+u)$ en 0.
   (c) Montrer que $n \ln\left(\cos n^{-\frac{1}{4}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2}\sqrt{n}$ et en déduire la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\cos n^{-\frac{1}{4}}\right)^n$.
   (d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   $$\int_0^{n^{-\frac{1}{4}}} \cos^n(t) \leqslant n^{-\frac{1}{4}}.$$
   (e) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   $$\int_{n^{-\frac{1}{4}}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)dt \leqslant \frac{\pi}{2}\left(\cos n^{-\frac{1}{4}}\right)^n.$$
   (f) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0$.
   (g) Montrer, enfin, que la série $\sum u_n$ est convergente.
2. (a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\cos n^{-\frac{2}{3}}\right)^n = 1$.
   (b) Montrer que $|u_n| \geqslant \int_0^{n^{-\frac{2}{3}}} \cos^n(t)dt \geqslant n^{-\frac{2}{3}} \left(\cos n^{-\frac{2}{3}}\right)^n$.
   (c) La série $\sum u_n$ est-elle absolument convergente ?
3. (a) Montrer que pour tout $t \in]-\pi;\pi[$:
   $$1 + \cos t = \frac{2}{1 + \tan^2 \frac{t}{2}}.$$
   (b) A l'aide du changement de variable $u = \tan \frac{t}{2}$, montrer que
   $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+\cos t} = 1.$$
   (c) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:
   $$\sum_{k=0}^{n} u_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+\cos t} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-\cos t)^{n+1}}{1+\cos t} dt.$$
   (d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$\left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-\cos t)^{n+1}}{1+\cos t} dt \right| \leqslant |u_{n+1}|.$$
   (e) En déduire la somme de la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} u_k$.

Exercice 2: Restes - diverses séries

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels. Si la série numérique de terme général u_n converge, on dit qu'elle converge à l'ordre 1 et on note alors $(R_{1,n})_{n\geqslant 0}$ la suite des restes de cette série, autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_{1,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Si à nouveau la série de terme général $R_{1,n}$ converge, on dit que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge à l'ordre 2 et note $(R_{2,n})_{n\geqslant 0}$ la suite des restes de cette série, autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_{2,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{1,k}.$$

Plus généralement, pour tout entier $p \geqslant 2$, si la série de terme général $R_{p-1,n}$ converge, on dit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge à l'ordre p et on note alors $(R_{p,n})_{n\geqslant 0}$ la suite des restes de cette série :

$$R_{p,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{p-1,k}.$$

On peut noter : pour tout $n \in \mathbb{N}, R_{0,n} = u_n$. Le but de cet exercice est d'étudier, sur certains exemples, l'ordre de la convergence de la série de terme général u_n.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère, dans cette question uniquement, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$.

(a) Rappeler la condition nécessaire est suffisante sous laquelle $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge. **On se place désormais sous cette condition**.

(b) Pour tout entier $k \geqslant 2$, justifier que :

$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$

(c) En déduire que pour tout $n \geqslant 1$:

$$\frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant R_{1,n} \leqslant \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

(d) En déduire que :

$$R_{1,n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

(e) Sous quelle condition nécessaire et suffisante sur α, la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge-t-elle à l'ordre 2 ?

(f) Conjecturer à quel ordre la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

2. On considère, dans cette question uniquement, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \dfrac{1}{n^n}$.

(a) Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

(b) Montrer que, pour tout $k \geqslant 3, u_k \leqslant \dfrac{1}{3^k}$, puis en déduire que, pour tout $n \geqslant 2$:

$$0 \leqslant R_{1,n} \leqslant \frac{1}{2.3^n}.$$

(c) En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge à l'ordre 2, et que, pour tout $n \geqslant 1$:

$$0 \leqslant R_{2,n} \leqslant \frac{1}{4.3^n}$$

(d) Montrer que, pour tout $p \geqslant 1$, la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge à l'ordre p et que pour tout $n \geqslant 1$:

$$0 \leqslant R_{p,n} \leqslant \frac{1}{2^p \cdot 3^n}$$

(e) La série $\sum_{n\geqslant 1} R_{n,n}$ converge-t-elle ?

3. On considère, dans cette question uniquement, que pour tout

$$n \in \mathbb{N} : u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

(a) Justifier que la série $\sum u_n$ est convergente.

(b) Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t = 0$$

(c) Soit $N \in \mathbb{N}$. En remarquant que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{k+1} = \displaystyle\int_0^1 t^k\,\mathrm{d}t$, montrer que :

$$\sum_{n=0}^{N} u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} - \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

(d) Prouver, autrement qu'en 3(a), le fait la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

Montrer de plus que, pour tout $n \geqslant 0$:

$$R_{1,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

(e) Montrer par récurrence que, pour tout entier $p \geqslant 1$, la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge à l'ordre p et que pour tout $n \geqslant 0$:

$$R_{p,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+p}}{(1+t)^p}\,\mathrm{d}t$$