Banque PT 2014 – Épreuve A

Partie I : Étude d'une projection orthogonale

Dans cette partie, on travaille dans l'espace euclidien orienté $\mathbb{R}^3$*, muni du produit scalaire usuel, noté* $\langle\ ,\ \rangle$*. On désigne par* $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ *la base orthonormée directe canonique de* $\mathbb{R}^3$*. On considère le vecteur*

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\imath} + \vec{k})\,.$$

On désigne par D *la droite vectorielle engendrée par* $\vec{n}$ *et* F *le plan vectoriel orthogonal à* D*.*

1. On note p_D la projection orthogonale sur D et A sa matrice dans la base canonique.
   (a) Que vaut A^2 ?
   (b) Que vaut, pour tout $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$, $\langle\, \vec{u} - p_D(\vec{u}), \vec{n}\,\rangle$?
   (c) En déduire que, pour tout $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$, $p_D(\vec{u}) = \langle\, \vec{u}, \vec{n}\,\rangle\, \vec{n}$.
   (d) Calculer $p_D(\vec{n})$.
   (e) Rappeler la définition d'un vecteur propre.
   (f) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de p_D.
   (g) L'endomorphisme p_D est-il diagonalisable ?
   (h) Vérifier que
   $$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$
2. Reprendre les mêmes questions pour p_F, projection orthogonale sur F, et déterminer sa matrice B dans la base canonique (on pourra, dans un premier temps exprimer p_F en fonction de p_D).

Partie II : Une formule de changement de base

On considère toujours l'espace euclidien orienté $\mathbb{R}^3$*, rapporté au repère orthonormé direct* $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$*, et on reprend les notations de la partie I. Soit* $\vec{n} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\imath} + \vec{k})$*, on note* D *la droite engendrée par* $\vec{n}$ *et* F *le plan orthogonal à* D*, et on note* p_D *(resp.* p_F*) la projection orthogonale sur* D *(resp. sur* F*).*

1. On pose $\vec{I} = \dfrac{p_F(\vec{k})}{\left\|p_F(\vec{k})\right\|}$, et on définit le vecteur $\vec{J}$ de sorte que $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{n})$ soit une base orthonormée indirecte de $\mathbb{R}^3$. Sans calculer les coordonnées de $\vec{I}$ et $\vec{J}$, montrer que
$$\vec{J} \in F \cap \operatorname{Vect}(\vec{\imath}, \vec{\jmath})\,.$$

2. On note P la matrice de passage de la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ vers la base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{n})$. Après avoir rappelé ce que représentent les colonnes de P, donner l'expression de P.
3. En déduire les expressions de $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ en fonction de $\vec{I}$, $\vec{J}$ et $\vec{n}$, puis celles de $p_F(\vec{\imath}), p_F(\vec{\jmath}), p_F(\vec{k})$ en fonction de $\vec{I}$ et $\vec{J}$.
4. Soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées (x, y, z) dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Son image par p_F a pour coordonnées (X, Y) dans la base $(\vec{I}, \vec{J})$ de F. Donner l'expression de X et Y en fonction de x, y et z.

Partie III : Projections orthogonales de l'hélice

On se place désormais dans l'espace affine euclidien orienté $\mathbb{R}^3$, rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On considère dans cet espace l'hélice circulaire (H), dont une représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{2}\,\cos t \\ y(t) = \sqrt{2}\,\sin t \\ z(t) = 2\sqrt{2}\,t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

On reprend les notations de la partie précédente : $\vec{n} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{\imath} + \vec{k}\right)$; on désigne par p la projection affine orthogonale sur le plan passant par l'origine et de vecteur normal $\vec{n}$. On note (C) l'image de (H) par la projection p.

1. On rappelle que D est la droite vectorielle engendrée par $\vec{n}$, F est le plan vectoriel orthogonal à D, et p_D et p_F sont les projections orthogonales sur D et F respectivement. On définit les vecteurs $\vec{I}$ et $\vec{J}$ comme dans la partie précédente.
   (a) Montrer qu'une représentation paramétrique de la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$ est donnée par
   $$\begin{cases} X(t) = 2\,t - \cos t \\ Y(t) = \sqrt{2}\sin t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$
   (b) Montrer que tous les points de la courbe (C) sont réguliers.
   (c) Montrer que l'on peut réduire l'intervalle d'étude à $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
   Comment se déduit alors le reste de la courbe à partir de cette restriction ?
   (d) Étudier les variations de X et Y pour $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
   (e) Tracer sur le document-réponse joint la courbe (C) pour $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2} + 3\pi\right]$. La courbe devra être tracée à l'échelle 1.

Partie IV : Caractérisations des projecteurs orthogonaux

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On travaille maintenant dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel, noté toujours $\langle\ ,\ \rangle$. On désigne par $||\ \ ||$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$. On note $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On appelle projecteur un endomorphisme p de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $p \circ p = p$.

1. Soit p un projecteur orthogonal. En écrivant, pour tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^n$, $\vec{u} = p(\vec{u}) + (\vec{u} - p(\vec{u}))$, montrer que
$$\forall\, \vec{u} \in \mathbb{R}^n , \quad ||p(\vec{u})|| \leq ||\vec{u}|| \; .$$

2. Soit p un projecteur de $\mathbb{R}^n$.
   (a) Montrer que
   $$\mathbb{R}^n = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p\,.$$
   (b) Montrer que p est la projection sur Im p parallèlement à Ker p.
3. Soit p un projecteur de $\mathbb{R}^n$ vérifiant
   $$\forall\, \vec{u} \in \mathbb{R}^n\,, \quad ||p(\vec{u})|| \leq ||\vec{u}||\ .$$
   (a) Soit $\vec{x} \in$ Im p et $\vec{y} \in$ Ker p. En considérant le vecteur $\vec{u} = \vec{x} + \lambda\,\vec{y}\,,\ \lambda \in \mathbb{R}\,$, montrer que
   $$\forall\, \lambda \in \mathbb{R}\,, \quad \lambda^2\,||\vec{y}||^2 + 2\lambda\,\langle\,\vec{x}, \vec{y}\,\rangle \geq 0\,.$$
   En déduire que $\langle\,\vec{x}, \vec{y}\,\rangle = 0$.
   (b) Montrer que p est un projecteur orthogonal.
4. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. On définit l'application f^* par
   $$\forall\, \vec{x} \in \mathbb{R}^n\,, \quad f^*(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \langle\, f(\vec{e}_i), \vec{x}\,\rangle\, \vec{e}_i\,.$$
   (a) Vérifier que f^* est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.
   (b) En exprimant $\vec{x}$ dans la base $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$, montrer que, pour tout $(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,
   $$\langle\, f(\vec{x}), \vec{y}\,\rangle = \langle\,\vec{x}, f^*(\vec{y})\,\rangle\ .$$
   (c) Soit g un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ vérifiant
   $$\forall\,(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\,, \quad \langle\, f(\vec{x}), \vec{y}\,\rangle = \langle\,\vec{x}, g(\vec{y})\,\rangle\ .$$
   Montrer que $g = f^*$.
5. Soit p un projecteur orthogonal.
   (a) Montrer que, pour tous $(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\langle\, p(\vec{x}), \vec{y}\,\rangle = \langle\, p(\vec{x}), p(\vec{y})\,\rangle$.
   (b) En déduire que $p = p^*$.
6. Soit p un projecteur.
   (a) Montrer que Im $p^* \subset$ (Ker $p)^\perp$.
   (b) Soit $\vec{y} \in$ (Ker $p)^\perp$. Montrer que, pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\langle\,\vec{x} - p(\vec{x}), \vec{y}\,\rangle = 0$.
   En déduire que $\vec{y} = p^*(\vec{y})$ puis que (Ker $p)^\perp \subset$ Im p^*.
   (c) Montrer que si $p = p^*$, alors p est un projecteur orthogonal.