DEVOIR SURVEILLÉ n°5

Durée : 4 heures

L'usage de calculatrices est interdit

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, **la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Problème de géométrie

Question préliminaire

On munit $\mathbb{R}^2$ d'un repère orthonormé direct $\mathscr{R} = \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
On considère une droite $\mathscr{D} : ax + by + c = 0$ et $M_0(x_0, y_0)$ un point du plan.
Montrer que la distance du point $M_0(x_0, y_0)$ à la droite $\mathscr{D}$ est égale à :

$$d(M_0, \mathscr{D}) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Partie I

Le plan euclidien est rapporté au repère orthonormé direct $\mathscr{R} = \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
On considère les points $I(1, 0)$ et $J(0, 1)$.

1. Soit $M(x, y)$ un point du plan. Donner l'expression de la distance $d(M, (OI))$ du point M à la droite (OI), puis la distance $d(M, (OJ))$ du point M à la droite (OJ) et enfin la distance $d(M, (IJ))$ du point M à la droite (IJ).
2. On désigne par $\mathscr{C}$ l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que la somme des carrés des distances du point M aux trois côtés du triangle OIJ soit égale à $\frac{1}{3}$.
   Montrer qu'une équation cartésienne de $\mathscr{C}$ est :
   $$(\mathscr{C}) : \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2 + xy - x - y + \frac{1}{6} = 0$$
3. Donner une équation réduite de $\mathscr{C}$, préciser sa nature.
4. Déterminer les coordonnées du centre de symétrie de $\mathscr{C}$ dans le repère $\mathscr{R}$ et donner des vecteurs directeurs de ses axes de symétrie. On ne demande pas d'équation cartésienne de ces axes.
5. Déterminer les intersections $\mathscr{C} \cap (OI)$ et $\mathscr{C} \cap (OJ)$. En déduire que $\mathscr{C}$ est tangente à (OI)et (OJ).
6. Tracer $\mathscr{C}$.

Partie II

1. Dans le plan euclidien rapporté au repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère les ellipses $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$ d'équations respectives :

$$\mathscr{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{et} \quad \mathscr{E}' : \frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{4b^2} = 1,$$

   où a et b désignent deux réels strictement positifs.
   On considère la représentation paramétrique de $\mathscr{E}$:

$$f(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ b\sin(t) \end{pmatrix}.$$

   et les points N et P de paramètres respectifs t et θ de $\mathscr{E}$.
   (a) Donner un vecteur directeur de la droite tangente à $\mathscr{E}$ au point P.
   (b) Déterminer une relation entre t et θ exprimant que la tangente à $\mathscr{E}$ en P est parallèle à la droite (ON).
   (c) La condition précédente étant vérifiée, déterminer l'aire géométrique non-orientée du triangle NOP.
2. Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ avec $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.
   L'objectif de cette question est de montrer que $\mathscr{D}$ est tangente à $\mathscr{E}$ si et seulement si :

$$(*) : a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 - \gamma^2 = 0.$$

   (a) Déterminer les droites verticales et les droites horizontales tangentes à $\mathscr{E}$.
   La condition $(*)$ est-elle vérifiée pour ces droites ?
   (b) On suppose désormais que $\mathscr{D}$ n'est ni verticale ni horizontale.
      i. Montrer que le système

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

      est équivalent à

$$\begin{cases} y &= \dfrac{-\alpha x - \gamma}{\beta} \\ (a^2\alpha^2 + b^2\beta^2)x^2 + 2a^2\alpha\gamma x + (a^2\gamma^2 - a^2\beta^2 b^2) &= 0 \end{cases}$$

      ii. Calculer le discriminant du trinôme $(a^2\alpha^2 + b^2\beta^2)x^2 + 2a^2\alpha\gamma x + (a^2\gamma^2 - a^2\beta^2 b^2)$.
      iii. Conclure.
3. Soit $U(2a\cos(u), 2b\sin(u))$ et $V(2a\cos(v), 2b\sin(v))$ deux points **distincts** de l'ellipse $\mathscr{E}'$.
   (a) Montrer qu'une équation cartésienne de la droite (UV) est :

$$b(\sin u - \sin v)x + a(\cos v - \cos u)y = 2ab\sin(u - v).$$

(b) Déterminer les racines du trinôme $2X^2 - X - 1$.

(c) Montrer que la droite (UV) est tangente à l'ellipse $\mathscr{E}$ si et seulement si

$$2\cos^2(u-v) - \cos(u-v) - 1 = 0.$$

(d) Quelle relation doivent vérifier u et v pour que la droite (UV) soit tangente à l'ellipse $\mathscr{E}$?

(e) Soient A, B, C trois points distincts de $\mathscr{E}'$ tels que (AB) et (AC) soient tangentes à $\mathscr{E}$. Montrer que (BC) est tangente à $\mathscr{E}$.

Problème d'Algèbre Linéaire

Dans tout le problème, l'espace $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire usuel. Si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, on note $F^\perp$ l'orthogonal de F pour ce produit scalaire.

Si E est un espace vectoriel de dimension n, on appelle hyperplan un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$.

Partie I

Soit A la matrice définie par

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la matrice A est orthogonale.
2. (a) Justifier que A est diagonalisable. Que dire de ses espaces propres ?

   (b) Rappeler quelles sont les valeurs propres réelles possibles d'une matrice orthogonale.

   (c) A l'aide des questions précédentes, déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.
3. Caractériser l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A.

Partie II

Soit $E = \mathbb{R}^n$ et soit u un endomorphisme de E tel que $u \circ u = Id$.
Nous notons $E_u^+ = \operatorname{Ker}(u - Id)$ et $E_u^- = \operatorname{Ker}(u + Id)$.

1. Montrer que u est inversible et préciser son inverse.
2. Pour tout $x \in E$, on pose

$$x_+ = \frac{x + u(x)}{2} \text{ et } x_- = \frac{x - u(x)}{2}.$$

   Montrer que $x_+ \in E_u^+$ et $x_- \in E_u^-$.
3. Montrer que $E = E_u^+ \oplus E_u^-$.
4. Montrer que u est diagonalisable.
5. Montrer que u est une isométrie si et seulement si $E_u^+ \perp E_u^-$.

Partie III

Soit F le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x - y - z + t = 0, 2x - z - t = 0\}.$$

1. Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. Vérifier que $\tilde{u}_1 = (1, 1, 1, 1) \in F$.
   Déterminer une base orthonormale (u_1, u_2) de F où u_1 est un vecteur colinéaire à $\tilde{u}_1$.
3. Vérifier que $\tilde{u}_3 = (1, -1, -1, 1) \in F^\perp$.
   Compléter la base précédente en une base orthonormale (u_1, u_2, u_3, u_4) de $\mathbb{R}^4$ en choisissant u_3 colinéaire à $\tilde{u}_3$.
4. On note s la symétrie orthogonale par rapport à F. Écrire la matrice de s dans la base canonique.
5. On appelle réflexion une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.
   Écrire la symétrie s comme composée de deux réflexions (on pourra se placer dans une base adaptée à s).

Partie IV

Soit $E = \mathbb{R}^n$. Soit f une isométrie de E. On note F_f l'ensemble des points fixes de f soit $F_f = \{x \in E, f(x) = x\}$ et

$$p_f = n - \dim F_f.$$

On veut montrer que par récurrence sur p_f que l'on peut trouver ℓ réflexions $r_1, r_2, ..., r_\ell$ avec $\ell \leqslant p_f$ telles que

$$f = r_1 \circ r_2 ... \circ r_\ell.$$

1. Montrer que le résultat est vrai pour $p_f = 1$.
2. Soit k un entier fixé tel que $2 \leqslant k \leqslant n$ et supposons le résultat vrai si $p_f < k$. Soit g une isométrie telle que $p_g = k$.
   (a) Montrer que $F_g^\perp \neq \{0\}$.
   (b) Soit $x_0 \in F_g^\perp$, $x_0 \neq 0$ et $y_0 = g(x_0)$. Montrer que $y_0 \neq x_0$ et $y_0 \in F_g^\perp$.
   (c) Soit r la réflexion par rapport à $\text{Vect}(x_0 - y_0)^\perp$.
   Montrer que $F_g \subset \text{Vect}(x_0 - y_0)^\perp$. En déduire $F_g \subset F_r$ puis que $F_g \subset F_{r \circ g}$.
   (d) Montrer que $(x_0 - y_0) \perp (x_0 + y_0)$.
   Calculer $r(x_0 - y_0)$ et $r(x_0 + y_0)$. En déduire $r(y_0) = x_0$.
   (e) Montrer que $p_{r \circ g} < p_g$.
   (f) En appliquant l'hypothèse de récurrence, à $r \circ g$, montrer que g peut s'écrire comme composition de ℓ réflexions avec $\ell \leqslant k$.