CHAPITRE 15 : INTÉGRALES À PARAMÈTRE

Plan du chapitre

1 Domaine de définition **1**

2 Continuité sous le signe intégral **1**

2.A Théorème de continuité 1

2.B Passage par une domination locale 2

3 Dérivabilité sous le signe intégral **3**

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux intégrales du type $\int_J f(x,t)dt$ où $f : I \times J \to \mathbb{R}$.

On appelle une telle intégrale, une intégrale à paramètres et on notera $g(x) = \int_J f(x,t)dt$ pour $x \in I$.

1 - Domaine de définition

On note $\mathscr{D}_g$ l'ensemble de définition de la fonction $g : x \longmapsto \int_J f(x,t)dt$.

$\mathscr{D}_g$ est l'ensemble des réels $x \in I$ tels que l'intégrale $\int_J f(x,t)dt$ existe.

Exercice 1

Déterminer les ensembles de définition des fonctions :

$$g_1 : x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t+x}dt \quad ; \quad g_2 : x \longmapsto \int_0^1 \frac{dt}{t^2+x^2}$$

2 - Continuité sous le signe intégral

Exercice 2

Pour $x \geqslant 0$, on pose $g(x) = \int_0^{+\infty} xe^{-xt}dt$.

1. Calculer $g(0)$ puis calculer $g(x)$ pour $x > 0$.
2. Étudier la continuité de g en 0.

2.A - *Théorème de continuité*

Soit $x \in I \longmapsto g(x) = \int_J f(x,y)dt$ où I, J sont des intervalles réels.

Théorème 3: Continuité sous le signe intégral

Soient I, J des intervalles réels et f une fonction réelle ou complexe définie sur $I \times J$ tels que :
- Pour tout $t \in J$, $x \longmapsto f(x,t)$ est continue sur I.
- Pour tout $x \in I$, $t \longmapsto f(x,t)$ est continue sur J.
- Il existe une fonction $\varphi : J \longrightarrow \mathbb{R}_+$ positive, continue et intégrable sur J telle que :

$$\forall (x,t) \in I \times J, |f(x,t)| \leqslant \varphi(t) \text{ (hypothèse de domination).}$$

Alors la fonction $g : x \longmapsto \int_J f(x,t)dt$ est continue sur I.

Remarques

- La fonction φ ne dépend pas de x.
- L'hypothèse de domination assure l'existence de l'intégrale $\int_J f(x,t)dt$ pour tout $x \in I$.

Exercice 4

Soit $g : x \longmapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} \sin(xt) dt$. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$ et calculer $\lim_{x \to 0} g(x)$.

Exercice 5

Montrer que la fonction $g : x \longmapsto \int_{-1}^{1} \arctan(xt) dt$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6

1. Montrer que la fonction $g : x \longmapsto \int_0^1 \frac{\cos(xt)}{1+t^2} dt$ est continue sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire $\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{n \cos u}{1 + n^2 u^2} du$.

2.B - *Passage par une domination locale*

Il n'est pas toujours possible de vérifier **l'hypothèse de domination** sur tout l'intervalle I.
On passe alors par une **domination locale**, guidée dans chaque exercice.
La domination est parfois effectuée sur un segment $K = [c, d] \subset I$ ou un intervalle $K = [a; +\infty[\subset I$ etc.
On conclut alors que $g : x \longmapsto \int_J f(x, t) dt$ est continue sur toute partie $K \subset I$ de la forme précédente.
Si $x_0 \in I$, on peut trouver un intervalle $K \subset I$ contenant x_0.
Conclusion : g est alors continue en tout x_0 de I i.e. g est continue sur I.

Exercice 7

On pose $I = \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x \in I$, on pose $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t + x} dt$.

1. Montrer que g est continue sur tout intervalle du type $[a; +\infty[\subset I$ avec $a > 0$.
2. Que peut-on en déduire ?

Exercice 8

1. On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}} dt$. Montrer que F est continue sur tout intervalle $[a; +\infty[$ avec $a > 0$.
2. Que peut-on en conclure ?

Exercice 9

Montrer que la fonction $x \mapsto g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{(1 + t^2)(x^2 + t^2)} dt$ est continue sur tout intervalle du type $[a, +\infty[$ avec $a > 0$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 10

Pour x réel, on pose :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1 + t^2)} dt.$$

Montrer que F est continue sur tout intervalle du type $[-a; a]$ avec $a > 0$. Conclusion ?

3 - Dérivabilité sous le signe intégral

Théorème 11: Dérivabilité sous le signe intégral

Soient I et J des intervalles réels et f une fonction réelle ou complexe définie sur $I \times J$ tels que :
- Pour tout $t \in J$ fixé, $x \longmapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.
- Pour tout $x \in I$ fixé, $t \longmapsto f(x,t)$ est intégrable sur J et $t \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur J.
- Il existe une fonction $\varphi : J \to \mathbb{R}_+$ positive, continue et intégrable sur J telle que :

$$\forall (x,t) \in I \times J, \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t) \text{ } \textbf{(hypothèse de domination)}.$$

Alors la fonction $g : x \longmapsto \displaystyle\int_J f(x,t)dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et :

$$\forall x \in I, g'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt.$$

Exercice 12

1. Soit $g : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin(xt)dt$. Montrer que g est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que g est dérivable et calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On laissera le résultat sous forme d'une intégrale.
3. Montrer que la fonction $g : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin(xt)dt$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Remarques

Comme pour le théorème de continuité, on appliquera parfois le théorème sur un segment $[c,d] \subset I$ ou un intervalle $[a;+\infty[$ (etc.) avant de conclure.

Exercice 13

1. On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}}dt$. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout intervalle $[a;+\infty[$ avec $a > 0$.
2. Que peut-on en conclure ?

Exercice 14

Pour x réel, on pose :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}dt.$$

1. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire une expression de $F(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.