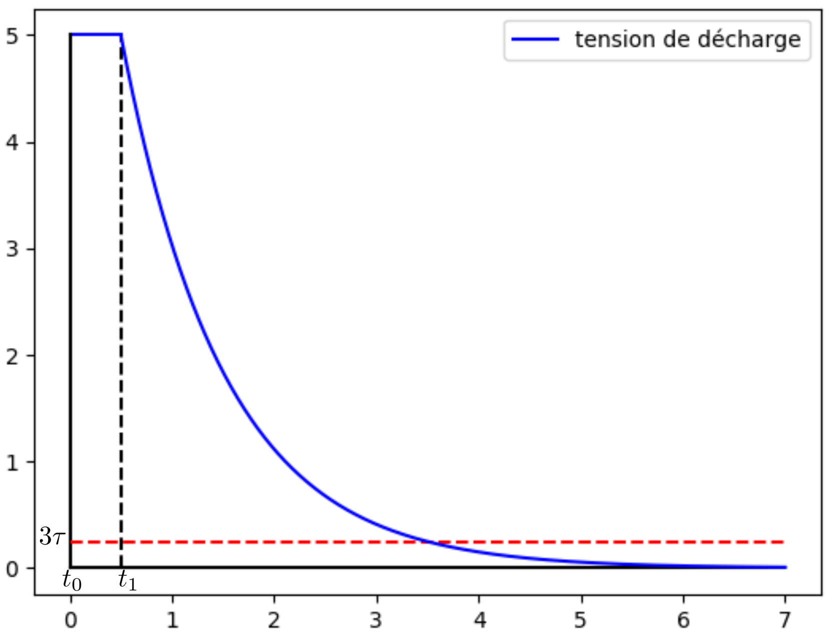
Recherche du zéro d'une fonction

1 Méthode par balayage

1.A Présentation du problème

On considère un condensateur chargé à l'instant initial $t_0 = 0$ ms.
Il se décharge à partir de l'instant $t_1 = 0.5$ ms. On pose $\tau = 1$ms et $E = 5$V.
On souhaite avoir une valeur approchée de l'instant t_* pour lequel on a $u_c(t_*) = \frac{5E}{100}$ c'est-à-dire que le condensateur est déchargé à 95%.



La tension aux bornes du condensateur s'écrit

$$\forall t \geqslant t_1 : u_c(t) = E \cdot \exp\left(-\frac{(t-t_1)}{\tau}\right).$$

1.B Reformulation du problème

On cherche donc un réel t_* tel que $u_c(t_*) = \dfrac{5E}{100} \iff \boxed{u_c(t_*) - \dfrac{5E}{100} = 0.}$

Par conséquent, trouver une valeur approchée de t_* telle que $u_c(t_*) = \frac{5E}{100}$ revient donc à **déterminer un zéro t_*** de la fonction f définie par

$$f(t) = u_c(t) - \frac{5E}{100}.$$

Q1 Justifier à l'aide d'un théorème mathématique que la fonction f s'annule en un unique réel t_* sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$.

1.C Représentation graphique en Python

Q2 Importer dans l'IDLE les module `numpy` et `matplotlib.pyplot` avec les commandes suivantes :

```
import matplotlib.pyplot as plt # pour les graphes
import numpy as np # module d'algèbre linéaire
```

Taper les commandes suivantes dans la console :

— `L1=np.linspace(0,1,11)`.

— `L2=np.linspace(0,10,101)`

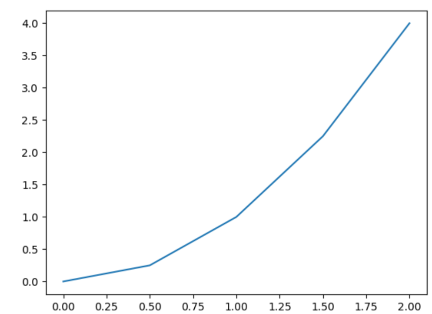
Que contiennent les variables `L1,L2` ?

Q3 Expliquer ce que permet de créer la commande `np.linspace(a,b,N)` avec `a,b` des flottants et `N` un entier.

Q4 Si `lesx=[x0,...,xN]` et `lesy=[y0,... yN]` sont des listes de flottants alors la commande `plt.plot(lesx,lesy)` permet de représenter graphiquement et de relier les points $M_0(x_0, x_0), \dots M_N(x_N, y_N)$.
Tapons, par exemple, les commandes ci-dessous :

```
lesx=np.linspace(0,2,6)

lesy=[]
for x in lesx:
      lesy.append(x**2)
plt.plot(lesx,lesy)
plt.show() # pour afficher
```



Que contiennent les variables `lesx` et `lesy` ? Que représente le graphe ?

Q5 Dans le tracer précédent, la courbe obtenue est une ligne polygonale : elle est composée de segments. Comment améliorer le code précédent pour obtenir un tracer satisfaisant (plus régulier) de la fonction carré $x \mapsto x^2$ sur le segment $[0; 2]$?

1.D Méthode par balayage

Q6 En vous inspirant de l'exemple précédent, taper les commandes permettant l'affichage de la courbe représentative de la fonction $f : t \mapsto E \cdot \exp\left(-\dfrac{(t-t_1)}{\tau}\right) - 0,05E$ sur le segment $[0.5\,;\,7]$.

Q7 Simplement à l'aide de cette représentation graphique, donner en encadrement de t_* tel que $f(t_*) = 0$ entre **deux entiers consécutifs** : $n \leqslant t_* < n+1$.

Q8 On propose d'obtenir une valeur approchée de t_* par une **méthode de balayage** à pas constant ε.

L'idée est la suivante, on pose $u = n$ et on calcule $f(u)$.
Si $f(u) > 0$, on modifie la valeur de $u \leftarrow u + \varepsilon$.
On re-calcule $f(u)$ avec cette nouvelle valeur de u.
Si $f(u) < 0$ on s'arrête. Sinon, on modifie $u \leftarrow u + \varepsilon$. Et ainsi de suite.
On arrête lorsque $f(u) < 0$.
Écrire une fonction `balayage(f,epsilon,n)` d'arguments une fonction f, un flottant `epsilon` et un entier n et renvoyant le zéro $t_* \geqslant n$ de la fonction f avec une précision `epsilon`.

Q9 Donner une valeur approchée du zéro t_* de la fonction

$$\boxed{f : t \mapsto E \cdot \exp\left(-\frac{(t-t_1)}{\tau}\right) - 0,05E} \quad \text{à } 10^{-3} \text{ près sur la valeur de } t_*$$

2 Méthode de Newton

2.A Présentation de la méthode

La méthode de Newton présentée ci-dessous permet également de trouver, sous certaines conditions, un zéro d'une fonction f sur un intervalle I où cette fonction s'annule. On pose pour $t \geqslant t_1$:

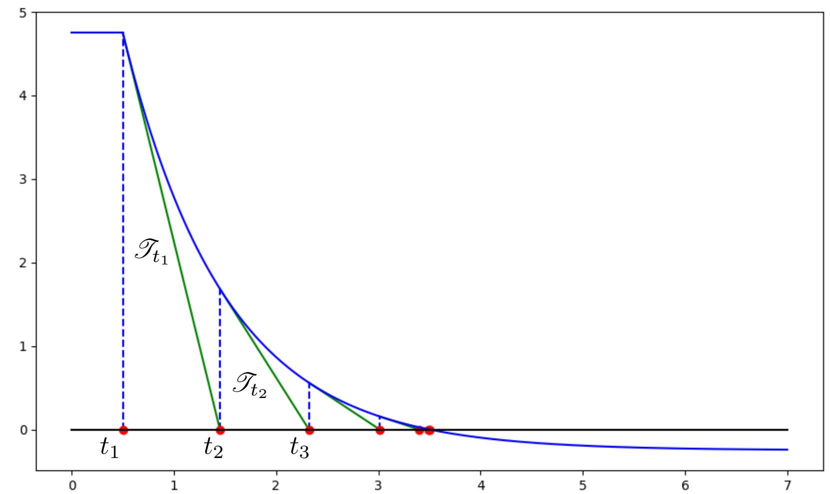
$$\boxed{f(t) = u_c(t) - \frac{5E}{100} = E \cdot \exp\left(-\frac{(t-t_1)}{\tau}\right) - 0,05E.}$$

L'idée est la suivante.
On fixe un élément $t_1 \in I$.
On trace la tangente $\mathscr{T}_{t_1}$ à la courbe de f au point $(t_1, f(t_1))$.
On détermine alors le point d'intersection de $\mathscr{T}_{t_1}$ et de l'axe des abscisses $(\mathscr{O}_x)$.
On note t_2 l'abscisse de ce point d'intersection.

La tangente $\mathscr{T}_{t_1}$ a pour équation $\mathscr{T}_{t_1} : y = f'(t_1)(t - t_1) + f(t_1)$.
L'abscisse du point $(t_2, 0)$ à l'intersection $\mathscr{T}_{t_1} \cap (\mathscr{O}_x)$ est donc solution de l'équation :

$$0 = f'(t_1)(t_2 - t_1) + f(t_1) \iff t_2 = t_1 - \frac{f(t_1)}{f'(t_1)}$$

On recommence la même démarche avec t_2 à la place de t_1 : on détermine la tangente $\mathscr{T}_{t_2}$ au point $(t_2, f(t_2))$ puis le point d'intersection $(t_3, 0)$ de $\mathscr{T}_{t_2} \cap (\mathscr{O}_x)$. Et ainsi de suite.
Ci-dessous une illustration pour la fonction définie par $f(t) = u_c(t) - \frac{5E}{100}$.



On obtient une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifiant la relation de récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, t_{n+1} = t_n - \frac{f(t_n)}{f'(t_n)} \quad (*).}$$

Sous des hypothèses que nous ne détaillons pas ici, on peut montrer que la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers le zéro t_* de la fonction f sur l'intervalle I.

2.B Application de la méthode

Q10 On rappelle que si f est une fonction numérique d'une variable réelle, dérivable en x alors :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Si h est proche de 0, on a donc :

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Écrire une fonction `derive(f,x)` d'argument une fonction numérique f, dérivable en x, et un flottant x et renvoyant une valeur approchée du nombre dérivé $f'(x)$. On pourra prendre une valeur h arbitraire ici ($0 < h < 10^{-3}$).

Q11 Importer les module `numpy` et `matplotlib.pyplot` avec les commandes suivantes :

```python
import matplotlib.pyplot as plt # pour les graphes
import numpy as np # module d'algèbre linéaire
```

Sur un même graphe, tracer avec Python :

— La courbe représentative de f définie sur $[0.5, 7]$ par

$$f(t) = E \cdot \exp\left(-\frac{(t-t_1)}{\tau}\right) - 0.05E.$$

— La tangente de la courbe de f au point d'abscisse $t_1 = 0.5$.

Q12 On rappelle que la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, t_{n+1} = t_n - \frac{f(t_n)}{f'(t_n)}.$$

Écrire une fonction `suivant(a)` d'argument un flottant et renvoyant le terme suivant dans la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Q13 Écrire alors une fonction `Newton(f,t1,n)` dont les arguments sont une fonction f, un flottant t_1 et un entier naturel n. Cette fonction renvoie le n-ième terme de la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par la relation de récurrence dans l'encadré $(*)$ et dont le premier terme est t_1.

Q14 Donner une valeur approchée du zéro de la fonction f sur l'intervalle $[0, 7]$ en utilisant la fonction précédente avec $t_1 = 0.5$ et $n = 4$.

Q15 Écrire une deuxième fonction `Newton1(f,x0,epsilon)` dont les arguments sont une fonction f, un flottant t_1 et une précision ε. Cette fonction renvoie une valeur approchée du zéro de la fonction f avec une précision au moins ε.

On pourra utiliser la condition suivante : t_n est une valeur approchée du zéro de f avec une précision au moins ε si l'on a $|t_n - t_{n-1}| < \varepsilon$.

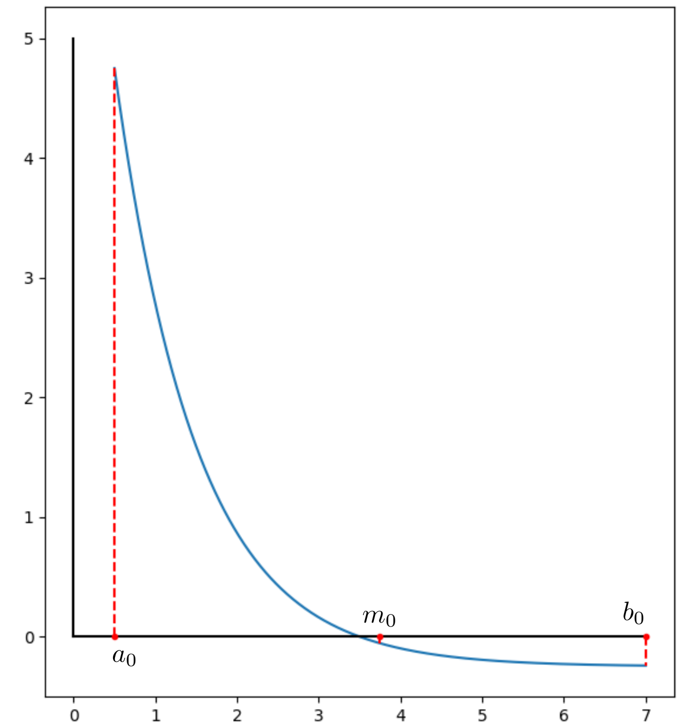
3 Recherche dichotomique

3.A Présentation de la méthode

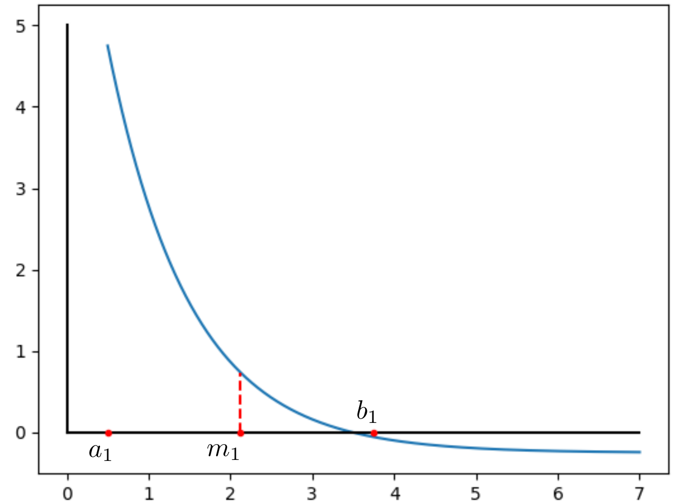
La méthode de recherche du zéro d'une fonction par dichotomie est encore une méthode permettant de trouver le zéro t_* d'une fonction f s'annulant sur un intervalle I. On considère à nouveau la fonction f définie sur $I = [0.5\,;7]$ par : $f(t) = E \cdot \exp\left(-\frac{(t-t_1)}{\tau}\right) - 0.05E$.

L'idée est la suivante. On construit deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\mathbb{N}}$ d'éléments de $I = [0.5\,;7]$ de la manière suivante :

— **Étape 1 :** On pose $a_0 = 0.5$ et $b_0 = 7$.
Graphiquement, ou par le calcul, on constate qu'on a $f(a_0) > 0$ et $f(b_0) < 0$.
Le zéro t_* recherché se trouve entre a_0 et b_0.
On détermine le milieu du segment $[a_0, b_0]$ noté $m_0 = \frac{a_0+b_0}{2} = 3.75$ puis on calcule l'image $f(3.75)$. On constate que $f(m_0) < 0$. Le zéro recherché se trouve donc entre a_0 et m_0.



— **Étape 2 :** On recommence cette fois-ci avec $a_1 = a_0 = 0.5$ et $b_1 = m_0 = 3.75$. On détermine le milieu $m_1 = \frac{a_1+b_1}{2} = 2.125$.
On calcule l'image $f(m_1) = f(2.125)$ et on constate que $f(2.125) > 0$.
Le zéro t_* recherché se trouve donc entre $m_1 = 2.125$ et $b_1 = 3.75$.
On pose alors $a_2 = m_1$ et $b_2 = b_1$.



— **Étapes suivantes :** A chaque étape de l'algorithme de dichotomie, on divise le segment $[a_n, b_n]$ en deux parties : $[a_n, m_n]$ et $[m_n, b_n]$ avec $m_n = \frac{a_n+b_n}{2}$.
Pour passer à l'étape suivante, on calcule $f(m_n)$.

- $*$ si $f(m_n) > 0$ alors le zéro t_* recherché se trouve entre m_n et b_n. On pose $a_{n+1} = m_n$ et $b_{n+1} = b_n$ (valeur inchangée).
- $*$ si $f(m_n) < 0$ alors le zéro t_* recherché se trouve entre a_n et m_n. On pose $a_{n+1} = a_n$ (valeur inchangée) et $b_{n+1} = m_n$.

On peut montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite, t_* l'unique zéro de f sur I (elles sont adjacentes).

3.B Application

Q16 Écrire une fonction `dichotomie(f,a,b,n)` d'arguments une fonction f, deux flottants a, b et un entier n et qui renvoie les valeurs des n-ième termes des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ construites dans la partie précédente.

Q17 Tester avec la fonction définie $f(t) = u_c(t) - 0.05E$, $a = 0.5$ et $b = 7$ et diverses valeurs de n.

Q18 La distance $|a_n - b_n|$ est divisée par 2 à chaque étape de l'algorithme. On peut montrer qu'après n itérations de l'algorithme, on a $|a_n - b_n| = \frac{|a_0-b_0|}{2^n} = \frac{|a-b|}{2^n}$.
Par conséquent, si $\varepsilon > 0$ est un réel strictement positif fixé et qu'on a

$$\frac{|a-b|}{2^n} < \varepsilon$$

alors une valeur approchée de $t_* \in [a_n, b_n]$ est donnée avec une précision ε indifféremment par a_n ou b_n.
En déduire une fonction `dichotomie(f,a,b,epsilon)` renvoyant une valeur approchée de t_* avec une précision ε.