**TRAVAUX DIRIGÉS : Espaces préhilbertiens**

# 1 Produits scalaires et inégalité de Cauchy-Schwarz

**Exercice 1: (Solution)**

Montrer que les applications suivantes définissent un produit scalaire sur $E$ et écrire l'inégalité de Cauchy-Schwartz dans chaque cas :

1. $(P,Q) \longmapsto \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0)$ avec $E = \mathbb{R}_n[X]$.
2. $(f,g) \longmapsto \int_0^1 f(t)g(t)(1-t^2)dt$ avec $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.
3. $(f,g) \longmapsto f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$ avec $E = \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$.

**Exercice 2: (Solution)**

Soient $E$ un espace préhilbertien et $(e_1,\dots,e_n)$ une famille de vecteurs de $E$ tels que :

$$\begin{cases} \forall k \in [\![1,n]\!], ||e_k|| = 1 \\ \forall x \in E, \sum_{k=1}^{n} (x|e_k)^2 = ||x||^2. \end{cases}$$

Démontrer que $(e_1,\dots,e_n)$ est une base orthonormale de $E$.

# 2 Projection orthogonale

**Exercice 3: (Solution)**

Dans l'espace euclidien canonique $\mathbb{R}^3$, on pose

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x+y\}.$$

Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur $F$ dans la base canonique.

**Exercice 4: (Solution)**

On munit $\mathbb{R}^4$ du produit scalaire usuel et on considère le sous-espace vectoriel $F$de $\mathbb{R}^4$ défini par les équations :

$$\begin{cases} x+y+z+t &= 0 \\ x+2y+3z+4t &= 0 \end{cases}$$

1. Déterminer une base orthonormale de $F$.
2. Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur $F$.
3. Calculer $d(u,F)$ pour tout $u \in \mathbb{R}^4$.

**Exercice 5: (Solution)**

Soient $E$ un espace préhilbertien réel et deux vecteurs $a, x \in E$ avec $a \neq 0_E$. On considère la droite vectorielle $D = \mathrm{Vect}(a)$ et son orthogonal $H = D^\perp$.
Exprimer $d(x,D)$ et $d(x,H)$ en fonction de $||x||$ et de $(x|a)$.

**Exercice 6: (Solution)**

1. Montrer que la formule $(P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$ définit un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}[X]$.
2. Déterminer une base orthonormée de $F = \mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.
3. Déterminer la projection orthogonale de $X^3$ sur $F$ puis calculer $d(X^3,F)$.

# 3 Problèmes de minimisation

**Exercice 7: (Solution)**

1. Soit $\varnothing \neq A \subset \mathbb{R}_+$. Montrer que $\inf_{a\in A} a^2 = \left(\inf_{a\in A} a\right)^2$.
2. Soit $E$ un espace préhilbertien réel et $F$ un sous-espace vectoriel de dimension finie. Soit $x \in E$. Montrer que $\inf_{u\in F} ||x-u||^2 = d(x,F)^2$.

On pourra se servir directement du résultat de l'exercice précédent dans les suivants.

**Exercice 8: (Solution)**

On cherche à calculer $I = \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (e^{-t} - at - b)^2 dt$.

On pose $E = \mathscr{C}^0([0;1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$.

1. Montrer que $I = d(\varphi, F)^2$ avec $\varphi \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ à préciser et $F$ un sous-espace de $E$ à préciser.
2. Déterminer le projeté orhogonal de $\varphi$ sur $F$.
3. En déduire $I$.

**Exercice 9: (Solution)**

1. Calculer $\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^\pi (a\sin t + b\cos t - t)^2 dt$.
2. Calculer $\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_0^{+\infty} (t^3 + at^2 + bt + c)^2 e^{-2t} dt$.

**Exercice 10: (Solution)**

On définit une application sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par $(A|B) = \mathrm{Tr}({}^tAB)$.
On note respectivement $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ les espaces des matrices symétriques et antisymétriques.

1. Montrer que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire.
2. Montrer que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ et que la somme directe est orthogonale.
3. Déterminer la projection orthogonale de $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.
4. Montrer que $d(A, \mathscr{S}_n(\mathbb{R})) = \frac{1}{2}||A - {}^tA||$ pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
5. Calculer $d(A, \mathscr{A}_n(\mathbb{R}))$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

**Exercice 11: (Solution)**

On considère un espace préhilbertien réel $E$ et $p$ un projecteur de $E$ sur un sous-espace de dimension finie.

1. Montrer que si $p$ est un projecteur orthogonal alors
$$\forall x \in E : ||p(x)|| \leqslant ||x|| \quad (*).$$
2. Réciproquement, on suppose que $(*)$ est vérifiée.
   (a) Soit $(y,z) \in \mathrm{Im}(p) \times \ker(p)$.
   En considérant $x = y + \lambda z, \lambda \in \mathbb{R}$, montrer que $(y|z) = 0$.
   (b) En déduire que $p$ est un projecteur orthogonal.

## 4 Exercices de synthèse

**Exercice 12: Polynômes de Legendre (Solution)**

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire :
$$(P,Q) \longmapsto \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt = (P|Q).$$

1. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on définit les polynômes $U_k(X) = (X^2-1)^k$ et $P_k(X) = U_k^{(k)}(X) = \left[(X^2-1)^k\right]^{(k)}$.
   (a) Déterminer le degré de $P_k$.
   (b) Montrer que la famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base orthogonale de $E$.
   On pourra montrer que pour $k > \ell$
$$\int_{-1}^1 \left[(t^2-1)^k\right]^{(k)} \left[(t^2-1)^\ell\right]^{(\ell)} dt = (-1)^k \int_{-1}^1 (t^2-1)^k \left[(t^2-1)^\ell\right]^{(\ell+k)} dt$$
2. (a) Montrer que $U_k$ vérifie l'équation différentielle :
$$(X^2-1)U_k'' - 2X(k-1)U_k' - 2kU_k = 0.$$
   (b) En déduire que que $P_k$ vérifie l'équation différentielle :
$$(X^2-1)P_k'' + 2XP_k' - k(k+1)P_k = 0.$$
3. Calculer $||P_k||^2$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$.
4. Soit $\mathscr{E}_n$ l'ensemble des polynômes de degré $n$ de coefficient dominant 1.
   Calculer $\inf_{P\in\mathscr{E}_n} \int_{-1}^1 P(t)^2 dt$.

## Exercice 13: Polynômes de Tchebytchev (Solution)

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que
$$\forall x \in [0, \pi], T_n(\cos x) = \cos(nx).$$
On pourra procéder par récurrence et vérifier que $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$.
2. Déterminer le degré et le coefficient dominant de $T_n$.
3. Soit $E = \mathscr{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$.
   (a) Montrer que la formule $(f|g) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$ définit un produit scalaire sur $E$.
   (b) On pose $P_0 = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$ et pour $n > 0$, $P_n = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}T_n$.
   Montrer que la famille $(P_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (c) Pour $f \in E$ et $n \in \mathbb{N}$, on note $p_F(f) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k T_k$ la projection orthogonale de $f$ sur $F = \mathbb{R}_n[X]$.
   Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} a_n^2$ converge.

## Exercice 14: Résolution approchée d'un système linéaire (Solution)

Soit $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{R})$.
On considère l'équation $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{R})$.
Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ l'application linéaire canoniquement associée à $A$ et $b$ le vecteur canoniquement associé à $B$.

1. Si $b \in \operatorname{Im}(f)$ que peut-on dire de $\inf\limits_{x \in \mathbb{R}^p} ||f(x) - b||$ ?
2. Dans ce qui suit on suppose que $b \notin \operatorname{Im}(f)$.
   (a) Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^p$ tel que les deux conditions suivantes sont réalisées :
   (1) $||f(x_0) - b|| = \inf\limits_{x \in \mathbb{R}^p} ||f(x) - b||$
   (2) $f(x_0) - b \in \operatorname{Im}(f)^{\perp}$.
   (b) Montrer que $f(x_0) - b \in \operatorname{Im}(f)^{\perp} \iff {}^tAAX_0 = {}^tAB$.
   (c) Montrer que la matrice $tAA$ est inversible si et seulement si $f$ est injective.
   Trouver une expression de $X_0$ dans ce cas.
3. Déterminer une solution approchée du système :
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 3 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$$

## Exercice 15: Méthode des moindres carrés (Solution)

Soient $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $x = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.
On cherche une droite d'équation réduite $\mathscr{D} : y = ax + b$ telle que les points $(x_i, y_i), i \in [\![1, n]\!]$ soient proches de $\mathscr{D}$. On appelle $\mathscr{D}$ la droite de régression.

On propose de déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |y_i - (ax_i + b)|^2$ soit minimal.

1. Montrer qu'il s'agit de déterminer $d(y, F)^2$ avec $F$ un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ à déterminer.
2. Montrer que la droite $\mathscr{D}$ a pour équation $\mathscr{D} : y = ax + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ solution du système :
$$\begin{cases} a\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$
3. Écrire les fonctions suivantes en Python :
   ❶ `scalaire(x,y)` qui calcule le produit scalaire euclidien de deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
   ❷ `moindre(x,y)` qui détermine la droite de régression associée aux points $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, représente graphiquement ces points et la droite de régression.

## SOLUTIONS TRAVAUX DIRIGÉS : Espaces préhilbertiens

***Solution Exercice** 1.* Montrons que les applications suivantes définissent un produit scalaire sur $E$ :

1. $(P,Q) \longmapsto \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0)$ avec $E = \mathbb{R}_n[X]$.

   L'application définie par $(P|Q) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0)$ est bien définie et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

   — L'application $(\cdot|\cdot)$ est symétrique car pour tout $(P,Q) \in E^2$ :
   $(Q|P) = \sum_{k=0}^{n} Q^{(k)}(0)P^{(k)}(0) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0) = (P|Q)$.

   — $(\cdot|\cdot)$ est bilinéaire.
   En effet $(\cdot|\cdot)$ est linéaire à gauche : pour tout $P,Q,R \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned}
(\lambda P + Q|R) &= \sum_{k=0}^{n} (\lambda P + Q)^{(k)}(0)R^{(k)}(0) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\lambda P^{(k)}(0) + Q^{(k)}(0)\right) R^{(k)}(0) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \lambda P^{(k)}(0)R^{(k)}(0) + \sum_{k=0}^{n} Q^{(k)}(0)R^{(k)}(0) \\
&= \lambda(P|R) + (Q|R)
\end{aligned}$$

   d'où la linéarité à gauche. La linéarité à droite s'en suit par symétrie.

   — L'application $(\cdot|\cdot)$ est positive car pour tout $P \in E$,

$$(P|P) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0)^2 \geqslant 0.$$

   — L'application $(\cdot|\cdot)$ est définie car pour tout $P \in E = \mathbb{R}_n[X]$ :

$$\begin{aligned}
(P|P) = 0 &\iff \sum_{k=0}^{n} \left(P^{(k)}(0)\right)^2 = 0 \\
&\iff \forall k \in [\![0,n]\!], P^{(k)}(0) = 0 \\
&\iff P(0) = P'(0) = \cdots = P^{(n)}(0) = 0 \\
&\iff 0 \text{ est racine de multiplicité au moins } n+1 \\
&\iff X^{n+1} | P(X).
\end{aligned}$$

   Puisque $P(X)$ est de degré au plus $n$, on en déduit que $P(X) = 0$ est le polynôme nul.

   L'application $(\cdot|\cdot)$ est donc un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2. L'application $(\cdot|\cdot)$ définie par $(f,g) \longmapsto (f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)(1-t^2)dt$ est bien définie sur $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.
   En effet, si $f,g \in E$ alors la fonction $t \longmapsto f(t)g(t)(1-t^2)$ est continue sur $[0,1]$ donc l'intégrale sur le segment $[0,1]$ existe.

   — L'application $(\cdot|\cdot)$ est symétrique.
   En effet, pour tout $(f,g) \in E^2$ :

$$(g|f) = \int_0^1 g(t)f(t)(1-t^2)dt = \int_0^1 f(t)g(t)(1-t^2)dt = (f|g).$$

   — L'application $(\cdot|\cdot)$ est bilinéaire. En effet pour tout $f,g,h \in E$ :

$$\begin{aligned}
(\lambda f + g|h) &= \int_0^1 (\lambda f + g)(t)h(t)(1-t^2)dt \\
&= \int_0^1 \lambda f(t)h(t)(1-t^2)dt + \int_0^1 g(t)h(t)(1-t^2)dt \\
&= (\lambda f|h) + (g|h)
\end{aligned}$$

   d'où la linéarité à gauche. La linéarité à droite découle de la symétrie.

   — L'application $(\cdot|\cdot)$ est positive.
   En effet pour tout $f \in E$ et $t \in [0,1]$, on a : $f(t)^2(1-t^2) \geqslant 0$. Ainsi :

$$(f|f) = \int_0^1 f(t)^2(1-t^2)dt \geqslant 0$$

   par positivité de l'intégrale d'une fonction positive sur le segment $[0,1]$.

   — L'application $(\cdot|\cdot)$ est définie :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(t)^2(1-t^2)dt = 0 &\underset{\substack{(f(t)^2(1-t^2)\geqslant 0) \\ \forall t\in[0,1]}}{\iff} \forall t \in [0,1], f^2(t)(1-t^2) = 0 \\
&\iff \forall t \in [0,1[, f^2(t) = f(t) = 0
\end{aligned}$$

   car $1-t^2 \neq 0$ pour tout $t \in [0,1[$.
   On a donc obtenue que pour tout $t \in [0,1[$, $f(t)$.
   Puisque $f$ est continue sur $[0,1]$ on a $\lim_{t\to 1^-} f(t) = f(1)$.
   Puisque $f(t) = 0$ pour $t < 1$, on a donc $\lim_{t\to 1^-} f(t) = 0$.
   Ainsi, $f(1) = 0$ et on en déduit que :

$$(f|f) = 0 \iff f = 0.$$

3. On considère l'application $(f,g) \longmapsto (f|g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$ avec $E = \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$.
   Cette application est bien définie car si $f,g \in E$ alors $f,g$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$.
   En particulier $f', g'$ sont continues sur $[0,1]$ et l'intégrale $\int_0^1 f'(t)g'(t)dt$ existe.
   - La bilinéarité et la symétrie ne posent pas de problème et sont laissées au lecteur.
   - Soit $f \in E$. Alors $(f|f) = f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2 dt \geqslant 0$ comme l'intégrale d'une fonction positive sur un segment.
   - Soit $f \in E$ telle que $(f|f) = 0$.
     Alors la somme de termes positifs étant nulle, on a
     $$(f|f) = 0 \Longleftrightarrow f(0)^2 = 0 = \int_0^1 f'(t)^2 dt.$$
     Puisque $\int_0^1 f'(t)^2 dt = 0$ on a $\forall t \in [0,1], f'(t)^2 = f'(t) = 0$. La fonction $f$ est donc constante sur $[0,1]$.
     Mais $f(0) = 0$ donc la fonction $f$ est nulle sur $[0,1]$.

□

***Solution Exercice 2.*** On note $F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$.

Ainsi défini, $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

Montrons dans un premier temps que la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de $F$. Il s'agit par définition d'une famille génératrice de $F$.

- La famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est composée de vecteurs unitaires car $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $||e_k|| = 1$ par l'énoncé.
  En particulier les vecteurs $e_k$ sont non nuls.
- De plus, la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est orthogonale.
  Pour le démontrer, on utilise la deuxième condition donnée dans l'énoncé : $\forall x \in E, \sum_{k=1}^n (x|e_k)^2 = ||x||^2$ avec $x = e_\ell$ où $\ell \in [\![1,n]\!]$ est fixé.
  On obtient
  $$\sum_{k=1}^n (e_\ell|e_k)^2 = ||e_\ell||^2 \Longleftrightarrow (e_\ell|e_1)^2 + \cdots + \underbrace{(e_\ell|e_\ell)^2}_{||e_\ell||^2} + \cdots + (e_\ell|e_n)^2 = ||e_\ell||^2$$
  $$\Longleftrightarrow \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq \ell}}^n (e_\ell|e_k)^2 = 0$$
  $$\Longleftrightarrow \forall k \in [\![1,n]\!], (k \neq \ell \Longrightarrow (e_\ell|e_k)^2 = (e_\ell|e_k) = 0).$$
  La famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est donc orthonormée. Elle est en particulier libre. Puisqu'elle est également génératrice de $F$ c'en est une base, orthonormée.
- Montrons maintenant que c'est une base orthonormée de $E$.
  Il suffit pour cela de montrer qu'elle est génératrice de $E$ (car on sait déjà qu'elle est orthonormée et donc libre).
  Soit $x \in E$. La projection orthogonale sur $F$ de $x$ s'écrit :
  $$p_F(x) = \sum_{k=1}^n (x|e_k)e_k.$$
  Par le théorème de Pythagore, les vecteurs $e_k$ étant orthogonaux, on a :
  $$||p_F(x)||^2 = \sum_{k=1}^n ||(x|e_k)e_k||^2 = \sum_{k=1}^n (x|e_k)^2 \underbrace{||e_k||^2}_{=1} = \sum_{k=1}^n (x|e_k)^2 \quad (*).$$
  Par le théorème de pythagore, puisque $p_F(x) \in F$ et $x - p_F(x) \in F^\perp$, on a :
  $$||x||^2 = ||p_F(x) + x - p_F(x)||^2 = ||p_F(x)||^2 + ||x - P_F(x)||^2.$$
  Mais par l'énoncé, on a
  $$||x||^2 = \sum_{k=1}^n (x|e_k)^2 \underset{(*)}{=} ||p_F(x)||^2.$$
  On en déduit que $||x - p_F(x)||^2 = 0$ donc $x = p_F(x) = \sum_{k=1}^n (x|e_k)e_k$.
  Par conséquent, $E = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n) = F$. cqfd.

  > **Remarques**
  >
  > Nous avons au passage montré que $p_F = \mathrm{id}_E$.
  > Cela qui traduit bien sûr l'égalité $E = F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$.

□

***Solution Exercice 3.*** Une base de $F = \{(x,y,z) : z = x+y\} = \{(x,y,x+y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}((1,0,1),(0,1,1))$ est donnée par $((1,0,1),(0,1,1))$.

On note $p_F$ la projection orthogonale sur $F$.

Pour calculer $p_F(a,b,c)$ on utilise la caractérisation :

$$\begin{cases} p_F(a,b,c) \in F \\ (a,b,c) - p_F(a,b,c) \in F^\perp \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} p_F(a,b,c) = \alpha(1,0,1) + \beta(0,1,1) \\ (a,b,c) - \alpha(1,0,1) - \beta(0,1,1) \in F^\perp \end{cases}$$

- Avec $(a,b,c) = (1,0,0)$ on utilise la nullité des produits scalaires du vecteur $(1,0,0) - \alpha(1,0,1) - \beta(0,1,1) = (1-\alpha, -\beta, -\alpha-\beta)$ avec les vecteurs $(1,0,1),(0,1,1)$ constituant une base de $F$. On obtient le système :
  $$\begin{cases} 1 - \alpha - \alpha - \beta &= 0 \\ -\beta - \alpha - \beta &= 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha &= \frac{2}{3} \\ \beta &= -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Ainsi $p_F(1,0,0) = \frac{2}{3}(1,0,1) - \frac{1}{3}(0,1,1) = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

— On détermine de même $p_F(0,1,0) = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ et $p_F(0,0,1) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

La matrice de la projection orthogonale sur $F$ dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

**Deuxième méthode.**

On peut également déterminer une base orthonormée $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ de $F$ avec l'algorithme de Gram-Schmidt.

Puis on utilise la décomposition :

$$p_F(a,b,c) = ((a,b,c)|\varepsilon_1)\varepsilon_1 + ((a,b,c)|\varepsilon_2)\varepsilon_2.$$

On pose $\varepsilon_1 = \dfrac{(1,0,1)}{||(1,0,1)||} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$.

Ensuite, $e_2 = (0,1,1) - ((0,1,1)|\varepsilon_1)\varepsilon_1 = (0,1,1) - \frac{1}{2}(1,0,1) = (-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$.

On normalise $e_2$ : $\varepsilon_2 = \dfrac{e_2}{||e_2||} = \dfrac{2}{\sqrt{6}}(-\dfrac{1}{2}, 1, \dfrac{1}{2})$.

On obtient une base orthonormée $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ de $F$. Alors :

— $p_F(1,0,0) = ((1,0,0)|\varepsilon_1)\varepsilon_1 + ((1,0,0)|\varepsilon_2)\varepsilon_2 = \frac{1}{2}(1,0,1) + \frac{4}{6}(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$
$p_F(1,0,0) = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

— On retrouve $p_F(0,1,0), p_F(0,0,1)$ également.

**Troisième méthode.**

Une base de $F$ est $((1,0,1)(0,1,1))$.

Une base de $F^\perp$ est $(1,1,-1)$ (on sait que le vecteur $(1,1,-1)$ est normal au plan d'équation $x+y-z=0 \iff x+y=z$ et que $F^\perp$ est de dimension $\dim \mathbb{R}^3 - \dim F = 3-2=1$).

Par le cours $\mathbb{R}^3 = F \oplus F^\perp$ donc la concaténation des bases ci-dessus donne une base $\mathscr{B} = ((1,0,1),(0,1,1),(1,1,-1))$ dans laquelle la matrice de $p_F$ est très simple ($\ker p_F = F^\perp$, $\mathrm{Im}(p_F) = F = \ker(p_F - \mathrm{id})$) :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On pose $P = P_{\mathscr{B}_c, P}$ la matrice de changement de base de la base canonique $\mathscr{B}_c$ à $\mathscr{B}$ :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit la matrice de $p_F$ dans la base canonique par changement de base :

$$A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

**Remarques**

Le problème de cette dernière méthode est le calcul de $P^{-1}$ souvent fastidieux.

En orthonormalisant la base $\mathscr{B}$ on obtient la base orthonormée
$\mathscr{B}' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1), \frac{2}{\sqrt{6}}(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)\right)$
(on a simplement normalisé le troisième vecteur puisqu'il est déjà orthogonal au deux premiers)

Dans ce cas, on verra que la matrice de passage $P_{\mathscr{B}_c \to \mathscr{B}'}$ entre ces deux bases orthonormée est simple à inverser : $P^{-1} = {}^tP$.

(on dira que la matrice $P$ est orthogonale).

□

***Solution Exercice 4.*** On munit $\mathbb{R}^4$ du produit scalaire usuel et on considère le sous-espace vectoriel $F$ de $\mathbb{R}^4$ défini par les équations :

$$\begin{cases} x+y+z+t &= 0 \\ x+2y+3z+4t &= 0 \end{cases}$$

1. On échelonne le système d'équation définissant l'espace $F$ :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + 2y + 3z + 4t = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x + y + z + t = 0 & (L_1) \\ y + 2z + 3t = 0 & (L_2 - L_1) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x = z + 2t \\ y = -2z - 3t \end{cases}$$

Ainsi, $F = \mathrm{Vect}((1,-2,1,0),(2,-3,0,1))$.

On pose $\varepsilon_1 = \dfrac{(1,-2,1,0)}{||(1,-2,1,0)||} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1,0)$.

Ensuite $e_2 = (2,-3,0,1) - ((2,-3,0,1)|\varepsilon_1)\varepsilon_1$ :

$$\begin{aligned} e_2 &= (2,-3,0,1) - \frac{1}{6} \times 8 \times (1,-2,1,0) \\ &= \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, 1\right) \end{aligned}$$

On normalise : $\varepsilon_2 = \dfrac{e_2}{||e_2||} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}\left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}, -\dfrac{4}{3}, 1\right)$

La famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une base orthonormée de $F$.

2. Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur $F$.

3. On note $p$ la projection orthogonale sur $F$.
   On projette chacun des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ sur $F$ :
   — $p(1,0,0,0) = ((1,0,0,0)|\varepsilon_1)\varepsilon_1 + ((1,0,0,0)|\varepsilon_2)\varepsilon_2$
   $p(1,0,0,0) = \frac{1}{6}(1,-2,1,0) + \frac{3}{10}(\frac{2}{3})(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{4}{3},1)$
   $p(1,0,0,0) = \left(\frac{3}{10},-\frac{2}{5},-\frac{1}{10},\frac{1}{5}\right)$
   — On détermine de même :
   $p(0,1,0,0) = \left(-\frac{2}{5},\frac{7}{10},-\frac{1}{5},-\frac{1}{10}\right)$
   $p(0,0,1,0) = \left(-\frac{1}{10},-\frac{1}{5},\frac{7}{10},-\frac{2}{5}\right)$
   $p(0,0,0,1) = \left(\frac{1}{5},-\frac{1}{10},-\frac{2}{5},\frac{3}{10}\right)$
   On en déduit la matrice de la projection orthogonale sur $F$ dans la base canonique :
$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{7}{10} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{5} & \frac{7}{10} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{10} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}.$$
4. Soit $u = (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$.
   Les coordonnées de la projection orthogonale de $u$ sur $F$ sont données par :
$$\begin{pmatrix} \frac{3}{10} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{7}{10} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{5} & \frac{7}{10} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{10} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3a-4b-c+2d}{10} \\ \frac{-4a+7b-2c-d}{10} \\ \frac{-a-2b+7c-4d}{10} \\ \frac{2a-b-4c+3d}{10} \end{pmatrix}$$
   et la distance de $u$ à $F$ est donnée par la norme $||u - Au|| = ||u - p_F(u)||$ du vecteur
$$u - p_F(u) = \begin{pmatrix} \frac{7a+4b+c-2d}{10} \\ \frac{4a+3b+2c+d}{10} \\ \frac{+a+2b+3c+4d}{10} \\ \frac{-2a+b+4c+7d}{10} \end{pmatrix}.$$
$\square$

***Solution Exercice 5.*** La droite $D = \mathrm{Vect}(a)$ est un sous-espace de dimension finie de l'espace préhilbertien $E$.
Ainsi, $E = D \oplus D^\perp = D \oplus H$.

Tout vecteur $x \in E$ s'écrit donc de manière unique $x = x_D + x_H$ avec $x_D \in D$ et $x_H \in H$.
Notons que $x_D = p_D(x)$ et $x_H = p_H(x)$ où $p_D, p_H$ sont les projections orthogonales respectives sur $D, H$.

**Distance de $x$ à $D$.**
Le vecteur $u = \frac{a}{||a||}$ est un vecteur unitaire dirigeant $D$
(ce vecteur est bien défini car $a \neq 0_E$).
On a pour tout $x \in E$, $p_D(x) = \left(x \,\middle|\, \frac{a}{||a||}\right) \frac{a}{||a||} = \frac{(x|a)}{||a||^2} a$.
Ainsi, $d(x,D)^2 = ||x - p_D(x)||^2$.
Par le théorème de Pythagore, puisque $p_D(x) \in D$ et $x - p_D(x) \in D^\perp$, on a :
$$||x||^2 = ||p_D(x)||^2 + ||x - p_D(x)||^2 \Longrightarrow d(x,D)^2 = ||x - p_D(x)||^2 = ||x||^2 - ||p_D(x)||^2.$$
Ainsi, $d(x,D)^2 = ||x||^2 - (x|a)^2$ : $d(x,D) = \sqrt{||x||^2 - (x|a)^2}$.
(notons que cette quantité est bien définie par l'inégalité de Bessel).

**Distance de $x$ à $D^\perp = H$.**
On a montré que pour tout $x \in E$, $x = p_D(x) + p_H(x)$ qui découle directement de la décomposition $E = D \oplus H$ (qui entraîne $\mathrm{id}_E = p_D + p_H$).
Ainsi, $p_H(x) = x - p_D(x)$.
Par conséquent :
$$d(x,H) = ||x - p_H(x)|| = ||x - (x - p_D(x))|| = ||p_D(x)|| = \frac{(x|a)}{||a||^2}.$$
$\square$

***Solution Exercice 6.***

1. La bilinéarité et la symétrie ne posent pas de difficultés.
   Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $(P|P) = \displaystyle\int_0^1 P(t)^2 dt \geqslant 0$.
   De plus, $(P|P) = 0 \Longleftrightarrow \forall t \in [0,1], P(t)^2 = P(t) = 0$.
   Ainsi, $(P|P) = 0$ si et seulement si $P$ possède une infinité de racines : $P = 0$.
2. On applique l'algorithme de Gram-Schmidt pour obtenir une base orthonormée $(Q_1, Q_2, Q_3)$ à partir de la base $(1, X, X^2)$ de $F = \mathbb{R}_2[X]$.
   — $(1|1) = \displaystyle\int_0^1 1^2 dt = 1$. Ainsi, $Q_1 = \frac{1}{||1||} = 1$.
   — On pose $R_2 = X - (X|Q_1)Q_1 = X - \left(\displaystyle\int_0^1 t\,dt\right) Q_1 = X - \frac{1}{2}$.
   On normalise : $Q_2 = \dfrac{R_2}{||R_2||}$ avec
$$||R_2||^2 = (R_2|R_2) = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 dt = \left[\frac{1}{3}\left(t - \frac{1}{2}\right)^3\right]_0^1 = \frac{1}{12}.$$
   On obtient $Q_2 = \sqrt{12}\left(X - \frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3}(X - \frac{1}{2})$.

— On pose $R_3 = X^2 - (X^2|Q_1)Q_1 - (X^2|Q_2)Q_2$.
On trouve $R_3 = X^2 - \frac{1}{3}Q_1 - \frac{2\sqrt{3}}{12}Q_2 = X^2 - X + \frac{1}{6}$.
On normalise : $Q_3 = \dfrac{R_3}{||R_3||} = 6\sqrt{5}\left(X^2 - X + \dfrac{1}{6}\right)$ car

$$||R_3||^2 = \int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)^2 dt = \frac{1}{180}.$$

3. On dispose d'une base orthonormée de $F = \mathbb{R}_2[X]$. On projette $X^3$ sur $F$ grâce à la décomposition :

$$\begin{aligned} p_F(X^3) &= (X^3|Q_1)Q_1 + (X^3|Q_2)Q_2 + (X^3|Q_3)Q_3 \\ &= \int_0^1 t^3 dt \\ &\quad + 12\int_0^1 t^3\left(t - \frac{1}{2}\right)dt\left(X - \frac{1}{2}\right) \\ &\quad + 180\int_0^1 t^3\left(t^2 - t + \frac{1}{6}dt\right)\left(X^2 - X + \frac{1}{6}\right) \\ &= \frac{3}{2}X^2 - \frac{3}{5}X + \frac{1}{20}. \end{aligned}$$

La distance $d(X^3, F)$ est alors donnée par $||X^3 - p_F(X^3)|| = \frac{\sqrt{7}}{140}$.

□

***Solution Exercice 7.***

1. Soit $A \subset \mathbb{R}_+$. Montrons que $\inf\limits_{a\in A}(a^2) = \left(\inf\limits_{a\in A} a\right)^2$.
On note $b = \inf(A)$. Cette quantité est bien définie car par définition $A$ est non vide est minorée par 0 (car $A \subset \mathbb{R}_+$).
Par définition de la borne inférieure, $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : b \leqslant a \leqslant b + \varepsilon$.
Par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$, on obtient :
$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : b^2 \leqslant a^2 \leqslant (b+\varepsilon)^2 = b^2 + \varepsilon(2b + \varepsilon)$.
Ainsi, $\forall \varepsilon' > 0, \exists c \in C : b^2 \leqslant c \leqslant b^2 + \varepsilon'$ où $C = \{a^2 : a \in A\}$.
Par conséquent, $\inf C = b^2$ c'est-à-dire : $\inf\limits_{a\in A}(a^2) = (\inf\limits_{a\in A} a)^2$.

2. On note $A = \{||x - u|| : u \in F\} \subset \mathbb{R}_+$.
Par la question précédente (on note $p_F$ la projection orthogonale sur $F$) :

$$\inf_{u\in F} ||x - u||^2 = \left(\inf_{u\in F} ||x - u||\right)^2 \underset{\text{(cours.)}}{=} (d(x, F))^2 \underset{\text{(cours.)}}{=} ||x - p_F(x)||^2$$

□

***Solution Exercice 8.***

1. On note $\varphi : t \mapsto e^{-t}$ et $F = \mathbb{R}_1[X]$.

   Sur $E$, on a pour tout $\psi \in E$, $||\psi||^2 = \displaystyle\int_0^1 \psi(t)^2 dt$.

   Ainsi $d(\varphi, F)^2 = \inf\limits_{P\in\mathbb{R}_1[X]} ||\varphi - P||^2 = \inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \displaystyle\int_0^1 (e^{-t} - at - b)^2 dt$.

2. On détermine une base orthonormée $(\psi_1, \psi_2)$ de $F = \mathbb{R}_1[X]$.

   On note $f_1 : t \mapsto 1, f_2 : t \mapsto t$ et on applique l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la famille $(f_1, f_2)$.

   — On pose $\psi = f_1$ : vecteur unitaire
   — On pose $g_2 = f_2 - (f_2|\psi_1)\psi_1$.
   On trouve $g_2(t) = t - \frac{1}{2}$ puis $\psi_2(t) = \frac{g_2}{||g_2||} = 2\sqrt{3}(t - \frac{1}{2})$.

   Ainsi, $(\psi_1, \psi_2)$ est une base orthonormée de $F$.

   On projette $\varphi$ sur $F$ :

$$\begin{aligned} p_F(\varphi) &= (\varphi|\psi_1)\psi_1 + (\varphi|\psi_2)\psi_2 \\ &= \int_0^1 e^{-t}dt + \left(\int_0^1 e^{-t}\left(t - \frac{1}{2}\right)dt\right)\psi_2 \end{aligned}$$

   On intègre par parties la second intégrale :

$$\begin{aligned} p_F(\varphi) &= (1 - e^{-1}) + \left[\left[-\left(t - \frac{1}{2}\right)e^{-t}\right]_0^1 + \int_0^1 e^{-t}dt\right]\psi_2 \\ &= (1 - e^{-1}) + \left(\frac{1}{2} - \frac{3e^{-1}}{2}\right)\psi_2 \end{aligned}$$

   Ainsi, $p_F(\varphi)$ est la fonction $p_F(\varphi) : t \mapsto (1 - e^{-1}) + \left(\frac{1}{2} - \frac{3e^{-1}}{2}\right)\underbrace{2\sqrt{3}\left(t - \frac{1}{2}\right)}_{\psi_2}$

3. Par le cours : $d(\varphi, F) = ||\varphi - p_F(\varphi)||$ où $p_F$ est l'application de projection orthogonale sur $F$.

Ainsi, par le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned}
&\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_0^1 (e^{-t}-at-b)^2dt = ||\varphi - p_F(\varphi)||^2\\
&= ||\varphi||^2 - ||p_F(\varphi)||^2\\
&= ||\varphi||^2 - \left(1-e^{-1}\right)^2\underbrace{||\psi_1||^2}_{=1} - \left(\frac{1}{2}-\frac{3e^{-1}}{2}\right)^2\underbrace{||\psi_2||^2}_{=1}\\
&= \int_0^1 e^{-2t}dt - (1-e^{-1})^2 - \left(\frac{1}{2}-\frac{3e^{-1}}{2}\right)^2\\
&= \frac{1}{2}\left(1-e^{-2}\right) - (1-e^{-1})^2 - \left(\frac{1}{2}-\frac{3e^{-1}}{2}\right)^2.
\end{aligned}$$

□

***Solution Exercice** 9.*

1. Calculons $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_0^\pi (a\sin t + b\cos t - t)^2dt$.

   On considère l'espace $E = \mathscr{C}^0([0,\pi],\mathbb{R})$.

   On munit $E$ du produit scalaire $(f|g) = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)dt$.

   On a $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_0^\pi (a\sin t + b\cos t - t)^2dt = \inf_{\psi\in F}||\varphi-\psi||^2 = d(\varphi,F)^2$ où $\varphi : t\mapsto t$ et $F = \mathrm{Vect}(\cos,\sin)$.

   On détermine une base orthonormée de $F$.

   On constate que la famille $(\cos,\sin)$ est déjà orthogonale ; en effet :

$$\int_0^\pi \cos(t)\sin(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin(2t)dt = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(2t)}{2}\right]_0^\pi = 0.$$

   Il suffit donc de normaliser :

$$\begin{aligned}
||\cos||^2 &= \int_0^\pi \cos^2(t)dt = \int_0^\pi \frac{1+\cos 2t}{2}dt\\
&= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\left[\sin 2t\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

   On pose $\psi_1 = \frac{\cos}{||\cos||} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos$.

   De manière analogue :

$$||\sin||^2 = \int_0^\pi \sin^2(t)dt = \int_0^\pi \frac{1-\cos(2t)}{2}dt = \frac{\pi}{2}.$$

   On pose $\psi_2 = \frac{\sin}{||\sin||} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin$.

   La famille $(\psi_1,\psi_2)$ est une base orthonormée de $F = \mathrm{Vect}(\cos,\sin)$.

   Il reste à projeter $\varphi : t\mapsto t$ sur $F$ :

$$\begin{aligned}
p_F(\varphi) &= (\varphi|\psi_1)\psi_1 + (\varphi|\psi_2)\psi_2\\
&= \frac{2}{\pi}\underbrace{\left(\int_0^\pi t\cos t dt\right)}_{=-2}\cos + \frac{2}{\pi}\underbrace{\left(\int_0^\pi t\sin(t)dt\right)}_{=\pi}\sin\\
&= -\frac{4}{\pi}\cos + 2\sin.
\end{aligned}$$

   On en déduit par le théorème de Pythagore :

$$d(\varphi,F)^2 = ||\varphi - p_F(\varphi)||^2 = ||\varphi||^2 - ||p_F(\varphi)||^2$$

   et puisque $\cos,\sin$ sont orthogonaux :

$$\begin{aligned}
d(\varphi,F)^2 &= \int_0^\pi t^2dt - \frac{16}{\pi^2}||\cos||^2 - 4||\sin||^2\\
&= \frac{\pi^3}{3} - \frac{8}{\pi} - 2\pi
\end{aligned}$$

2. Calculons $\displaystyle\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3}\int_0^{+\infty}(t^3+at^2+bt+c)^2e^{-2t}dt$.

   On munit $E = \mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $(P|Q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-2t}dt$

   (on en laisse en exercice la vérification qu'il s'agit bien d'un produit scalaire).

   Alors

$$\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3}\int_0^{+\infty}(t^3+at^2+bt+c)^2e^{-2t}dt = \inf_{P\in\mathbb{R}_2[X]}||\varphi-P||^2 = d(\varphi,\mathbb{R}_2[X])^2$$

   avec $\varphi : t\mapsto t^3$

   On applique l'algorithme de Gram-Schmidt à la famille $(1,X,X^2)$.

   — Soit $R_1 = 1$. On a $||R_1||^2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2t}dt = \frac{1}{2}$. On pose $Q_1 = \sqrt{2}R_1 = \sqrt{2}$.

   — On pose $R_2 = X - (X|Q_1)Q_1 = X - 2\underbrace{\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-2t}dt\right)}_{=1/4} = X - \frac{1}{2}$.

   On normalise : on pose $Q_2 = \frac{R_2}{||R_2||} = 2\sqrt{2}(X-\frac{1}{2})$ car

$$\begin{aligned}||R_2||^2 &= \int_0^{+\infty}\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 e^{-2t}dt\\ &= \underbrace{\lim_{A\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 e^{-2t}\right]_0^A}_{=\frac{1}{8}} + \underbrace{\int_0^{+\infty}\left(t-\frac{1}{2}\right)e^{-2t}dt}_{=0}\end{aligned}$$

— On pose $R_3 = X^2 - (X^2|Q_1)Q_1 - (X^2|Q_2)Q_2$.
$R_3 = X^2 - 2\underbrace{(X^2|1)}_{=\frac{1}{4}}1 - 8\underbrace{\left(X^2\,\middle|\,X-\frac{1}{2}\right)}_{=\frac{1}{4}}(X-\frac{1}{2}) = X^2 - 2X + \frac{1}{2}$.
On normalise $Q_3 = \frac{R_3}{||R_3||} = 2\sqrt{2}(X^2 - 2X + \frac{1}{2})$.

On projette $\varphi : t \mapsto t^3$ sur $F = \mathbb{R}_2[X]$ :

$$\begin{aligned}p_F(\varphi) &= (\varphi|Q_1)Q_1 + (\varphi|Q_2)Q_2 + (\varphi|Q_3)Q_3\\ &= \frac{9}{2}X^2 - \frac{9}{2}X + \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

On obtient par le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned}d(\varphi, F)^2 &= ||\varphi||^2 - ||p_F(\varphi)||^2\\ &= \int_0^{+\infty} t^6 e^{-2t}dt - (\varphi|Q_1)^2 - (\varphi|Q_2)^2 - (\varphi|Q_3)^2\\ &= -\frac{159}{32}.\end{aligned}$$

**Deuxième version.**

On note $p_F(\varphi)$ la projection orthogonale de $\varphi : t \mapsto t^3$ sur $F = \mathbb{R}_2[X]$.

On a : $p_F(\varphi) \in F$ et $\varphi - p_F(\varphi) \in F^\perp$.

On écrit $p_F(\varphi) = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$ avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ à déterminer.

On traduit la nullité des produits scalaires $(\varphi - p_F(\varphi)|Q)$ avec $Q$ vecteurs d'une base de $F$. On choisit la base canonique $Q = 1, Q = X, Q = X^2$ :

$$0 = (\varphi - p_F(\varphi)|1) = \int_0^{+\infty}(t^3 - \alpha t^2 - \beta t - \gamma)e^{-2t}dt$$

$$\iff 0 \underset{(1)}{=} \int_0^{+\infty} t^3 e^{-2t}dt - \alpha\int_0^{+\infty} t^2 e^{-2t}dt - \beta\int_0^{+\infty} te^{-2t}dt - \gamma\int_0^{+\infty} e^{-2t}dt$$

$$0 = (\varphi - p_F(\varphi)|X) = \int_0^{+\infty}(t^3 - \alpha t^2 - \beta t - \gamma)te^{-2t}dt$$

$$\iff 0 \underset{(2)}{=} \int_0^{+\infty} t^4 e^{-2t}dt - \alpha\int_0^{+\infty} t^3 e^{-2t}dt - \beta\int_0^{+\infty} t^2e^{-2t}dt - \gamma\int_0^{+\infty} te^{-2t}dt$$

$$0 = (\varphi - p_F(\varphi)|X^2) = \int_0^{+\infty}(t^3 - \alpha t^2 - \beta t - \gamma)t^2e^{-2t}dt$$

$$\iff 0 \underset{(3)}{=} \int_0^{+\infty} t^5 e^{-2t}dt - \alpha\int_0^{+\infty} t^4 e^{-2t}dt - \beta\int_0^{+\infty} t^3e^{-2t}dt - \gamma\int_0^{+\infty} t^2e^{-2t}dt$$

Il apparait des intégrales du type $I_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-2t}dt$, $k \in \mathbb{N}$.

Une intégration par parties permet de montrer que

$$I_k = \frac{k}{2}I_{k-1} = \cdots = \frac{k!}{2^k}I_0 = \frac{k!}{2^k}\int_0^{+\infty} e^{-2t}dt = \frac{k!}{2^{k+1}}.$$

Les relations $(1), (2), (3)$ donnent alors le système :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \frac{a}{4} & + & \frac{b}{4} & + & \frac{c}{2} & = & \frac{3}{8}\\ \frac{3a}{8} & + & \frac{b}{4} & + & \frac{c}{4} & = & \frac{3}{4}\\ \frac{3a}{4} & + & \frac{3b}{8} & + & \frac{c}{4} & = & \frac{15}{8}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} 2a & + & 2b & + & 4c & = & 3\\ 3a & + & 2b & + & 2c & = & 6\\ 6a & + & 3b & + & 2c & = & 15\end{array}\right.$$

On trouve $a = \frac{9}{2}; b = -\frac{9}{2}; c = \frac{3}{4}$ et par conséquent, $p_F(\varphi) = \frac{9}{2}X^2 - \frac{9}{2}X + \frac{3}{4}$.
Par le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned}||\varphi||^2 &= ||\underbrace{p_F(\varphi)}_{\in F} + \underbrace{\varphi - p_F(\varphi)}_{\in F^\perp}||^2\\ &= ||p_F(\varphi)||^2 + ||\varphi - p_F(\varphi)||^2\end{aligned}$$

Ainsi $||\varphi - p_F(\varphi)||^2 = ||\varphi||^2 - ||p_F(\varphi)||^2$ avec :

— $||\varphi||^2 = (X^3|X^3) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^6 e^{-2t}dt = \frac{6!}{2^7} = \frac{45}{8}$

— $||p_F(\varphi)||^2 = \displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{9}{2}t^2 - \frac{9}{2}t + \frac{3}{4}\right)^2 e^{-2t}dt = \frac{171}{32}$

On retrouve

$$d(\varphi, F)^2 = \inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3}\int_0^{+\infty}(t^3 + at^2 + bt + c)^2dt = \frac{9}{32}.$$

□

***Solution Exercice 10.*** On définit une application sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par $(A|B) = \mathrm{Tr}({}^tAB)$.

On note respectivement $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ les espaces des matrices symétriques et antisymétriques.

1. $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire : voir le cours.
2. On montre par analyse-synthèse que $A$ s'écrit de manière comme la somme :

$$A = \frac{1}{2}\left(A + {}^tA\right) + \frac{1}{2}\left(A - {}^tA\right)$$

avec $S = \frac{1}{2}\left(A + {}^tA\right) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{2}\left(A - {}^tA\right) \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.
La somme $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ est donc directe.
On montre que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont des espaces orthogonaux.
Pour cela, on se donne $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{B} \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.
Puisque ${}^tA = A$, ${}^tB = -B$ et puisque le produit scalaire est symétrique :

$$(A|B) = \mathrm{Tr}({}^tAB) = \mathrm{Tr}(AB)$$
$$(A|B) = (B|A) = \mathrm{Tr}({}^tBA) = \mathrm{Tr}(-BA) = -\mathrm{Tr}(BA).$$

On obtient $\mathrm{Tr}(AB) = -\mathrm{Tr}(BA) = -\mathrm{Tr}(AB) \iff \mathrm{Tr}(AB) = 0$.
On en déduit que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \subset \mathscr{A}_n(\mathbb{R})^\perp$ (et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \subset \mathscr{S}_n(\mathbb{R})^\perp$).
Les propriétés d'une somme directe donnent :

$$\dim \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) = \dim \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) - \dim \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$$

et d'autre part, la relation $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{R})^\perp$ donne :

$$\dim \mathscr{A}_n(\mathbb{R})^\perp = \dim \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) - \dim \mathscr{A}_n(\mathbb{R}).$$

Il vient $\dim \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) = \dim \mathscr{A}_n(\mathbb{R})^\perp$.
Combinée avec l'inclusion $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \subset \mathscr{A}_n(\mathbb{R})^\perp$, l'égalité des dimension montre :

$$\mathscr{A}_n(\mathbb{R})^\perp = \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$$

3. On a $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{A}_n(\mathbb{R})^\perp \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.
La projection orthogonale de $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ est égale à $\frac{1}{2}\left(A - {}^tA\right)$.
4. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On a $d(A, \mathscr{S}_n(\mathbb{R})) = ||A - p_{\mathscr{S}_n(\mathbb{R})}(A)|| = ||p_{\mathscr{A}_n(\mathbb{R})}(A)|| = \frac{1}{2}||A - {}^tA||$
(on a noté $p_{\mathscr{S}_n(\mathbb{R})}$ et $p_{\mathscr{A}_n(\mathbb{R})}$ les projections orthogonales respectives sur $\mathscr{A}_n(\mathbb{R}), \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$)
5. $d(A, \mathscr{A}_n(\mathbb{R})) = ||A - p_{\mathscr{A}_n(\mathbb{R})}(A)|| = ||p_{\mathscr{S}_n(\mathbb{R})}(A)|| = \frac{1}{2}||A + {}^tA||$.
On a $A + {}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$.
On note $S = \frac{1}{2}(A + {}^tA) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
Ainsi, $||S|| = \mathrm{Tr}({}^tSS) = \mathrm{Tr}(S^2) = \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} = 8$.

□

***Solution Exercice 11.*** On considère un espace préhilbertien réel $E$ et $p$ un projecteur de $E$ sur un sous-espace de dimension finie.

Montrons que $p$ est un projecteur orthogonal si et seulement si

$$\forall x \in E : ||p(x)|| \leqslant x$$

1. On suppose que $p$ est un projecteur orthogonal sur un sous-espace de dimension finie $F$.
Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $p(x) \in F$ et $x - p(x) \in F^\perp$.
Ainsi, $||x||^2 = ||p(x)||^2 + ||x - p(x)||^2 \geqslant ||p(x)||$ par le théorème de Pythagore.
La conclusion s'en suit en composant par la racine carrée $0 \leqslant ||p(x)|| \leqslant ||x||$.
2. On suppose réciproquement $\forall x \in E, ||p(x)|| \leqslant ||x|| \quad (*)$.
   (a) Soit $(y, z) \in \mathrm{Im}(p) \times \ker(p)$.
   On pose $x = y + \lambda z, \lambda \in \mathbb{R}$.
   Par définition d'un projecteur, on a $p(x) = y \in F$. Alors :
   $||x||^2 = (y + \lambda z, y + \lambda z) = ||y||^2 + 2\lambda(y|z) + \lambda^2||z||^2 \underset{(*)}{\geqslant} ||p(x)||^2 = ||y||^2$.
   Par conséquent, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$2\lambda(y|z) + \lambda^2||z||^2 = \lambda(2(y|z) + \lambda||z||^2) \geqslant 0 \quad (**).$$

   Si $(y|z) \neq 0$ alors le trinôme $\lambda(2(y|z) + \lambda||z||^2)$ possède deux racines réelles ($0$ et $-2(y|z)/||z||^2$) donc change de signe et contredit $(**)$.
   Ainsi, $(y|z) = 0$.
   On en déduit que les espaces $\mathrm{Im}(p)$ et $\ker(p)$ sont orthogonaux : on a donc $\mathrm{Im}(p) \subset \ker(p)^\perp$ et $\ker(p) \subset \mathrm{Im}(p)^\perp$.
   (b) Montrons que $G = \ker(p) = \mathrm{Im}(p)^\perp = F^\perp$.
   On a déjà démontré à la question précédente que $\ker(p) \subset \mathrm{Im}(p)^\perp$.
   Montrons qu'on a également, $\mathrm{Im}(p)^\perp \subset \ker(p)$.
   On se donne $x \in \mathrm{Im}(p)^\perp$ et on montre que $x \in \ker(p)$ c'est-à-dire : $p(x) = 0_E$.

Puisque $p$ est un projecteur de $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \ker(p)$ sur $\mathrm{Im}(p)$ il existe un unique couple $(y,z) \in \mathrm{Im}(p) \times \ker(p)$ tel que $x = y + z$ et $p(x) = y$.
Alors $(y|y) = (y|x-z) = (y|x) - (y|z) = 0$ car
— $x \in \mathrm{Im}(p)^{\perp}$ et $y \in \mathrm{Im}(p)$.
— $(y|z) = 0$ par la question précédente.
On en déduit que $y = 0_E$ donc $p(x) = y = 0_E$.
Finalement on a bien par double inclusion $\ker(p) = \mathrm{Im}(p)^{\perp}$.
Par conséquent $p$ est un projecteur orthogonal sur $F = \mathrm{Im}(p)$ (parallèlement à $G = \mathrm{Im}(p)^{\perp} = \ker(p)$.)

□

***Solution Exercice 12.*** Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire :

$$(P,Q) \longmapsto \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt = (P|Q).$$

1. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on définit le polynôme $P_k(X) = \left[(X^2-1)^k\right]^{(k)}$.
   (a) $P_0 = ((X^2-1)^0)^{(0)} = 1$ est de degré 0.
   $P_1 = ((X^2-1)^1)' = 2X$ est de degré 1.
   Plus généralement

$$P_k = \left[(X^2-1)^k\right]^{(k)} = \left[X^{2k} + R(X)\right]^{(k)}$$

   avec $R(X) = \sum_{\ell=0}^{k-1} \binom{k}{\ell} (-1)^{k-\ell} X^{2\ell} \in \mathbb{R}_{2k-2}$.
   Ainsi,

$$\begin{aligned} P_k &= \left[X^{2k} + R(X)\right]^{(k)} = (X^{2k})^{(k)} + R^{(k)}(X) \\ &= 2k(2k-1)\dots(k+1)X^k + R^{(k)}(X) \end{aligned}$$

   avec $R^{(k)}$ de degré au plus $k-2$.
   Ainsi, $\deg(P_k) = k$.
   (b) La famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une famille de $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$ polynômes non nuls échelonnée en degrés : c'est donc une base de $E$.
   Montrons qu'elle est orthogonale : soit $k > \ell$ dans $[\![0,n]\!]$.
   Alors en intégrant par parties on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \left[(t^2-1)^k\right]^{(k)} \left[(t^2-1)^\ell\right]^{(\ell)} dt &= \left[\left((t^2-1)^k\right)^{(k-1)} \left((t^2-1)^\ell\right)^{(\ell)}\right]_{-1}^{1} \\ &\quad - \int_{-1}^{1} \left[(t^2-1)^k\right]^{(k-1)} \left[(t^2-1)^\ell\right]^{(\ell+1)} dt \end{aligned}$$

   Les nombres $\lambda = 1, \mu = -1$ sont des racines du polynôme $(X^2-1)^k$ de multiplicité $k$.
   Les polynômes dérivés $(X^2-1)^{(p)}$ avec $p \in [\![0, k-1]\!]$ admettent donc $\lambda = 1, \mu = -1$ pour racines.
   Par conséquent le crochet dans l'intégration par partie est nulle :

$$\left[\underbrace{\left((t^2-1)^k\right)^{(k-1)}}_{\pm 1 \text{ sont racines}} \left((t^2-1)^\ell\right)^{(\ell)}\right]_{-1}^{1} = 0.$$

   Par conséquent, en itérant $k$ fois cette intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \left[(t^2-1)^k\right]^{(k)} \left[(t^2-1)^\ell\right]^{(\ell)} dt &= -\int_{-1}^{1} \left[(t^2-1)^k\right]^{(k-1)} \left[(t^2-1)^\ell\right]^{(\ell+1)} dt \\ &= \cdots = \\ &= (-1)^k \int_{-1}^{1} \left[(t^2-1)^k\right]^{(0)} \left[(t^2-1)^\ell\right]^{(\ell+k)} dt \\ &= (-1)^k \int_{-1}^{1} (t^2-1)^k \left[(t^2-1)^\ell\right]^{(\ell+k)} dt \end{aligned}$$

   Le polynôme $(X^2-1)^\ell$ étant de degré $2\ell$, sa dérivée d'ordre $k+\ell > 2\ell$ est nulle.
   On obtient $(P_k|P_\ell) = 0$ pour tout $k > \ell$.
   Si $k < \ell$, la symétrie du produit scalaire donne $(P_k|P_\ell) = (P_\ell|P_k)$.
   Mais $(P_\ell|P_k) = 0$ en échangeant les noms des indices dans le raisonnement précédent.
   La famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est donc orthogonale.
2. (a) Montrons que $U_k$ vérifie l'équation différentielle :

$$(X^2-1)U_k'' - 2X(k-1)U_k' - 2kU_k = 0.$$

   — $U_k = (X^2-1)^k$.
   — $U_k' = 2kX(X^2-1)^{k-1}$.
   — $U_k'' = 2k(X^2-1)^{k-1} + 2kX \cdot (k-1)2X(X^2-1)^{k-2}$. Donc :
   $(X^2-1)U_k'' = 2k(X^2-1)^k + 2kX \cdot (k-1)2X(X^2-1)^{k-1}$
   $(X^2-1)U_k'' = 2kU_k + 2(k-1)X \cdot 2kX(X^2-1)^{k-1}$
   $(X^2-1)U_k'' = 2kU_k + 2(k-1)X \cdot U_k'$
   Par conséquent :

$$(X^2-1)U_k'' - 2X(k-1)U_k' - 2kU_k = 0 \quad (*).$$

   (b) On dérive $k$ fois chaque terme composant $(*)$ :

— On commence par dériver $k$ fois : $(X^2-1)U_k''$ par la formule de Leibniz :

$$\begin{aligned}\left[(X^2-1)U_k''\right]^{(k)} &= \sum_{\ell=0}^{k}\binom{k}{\ell}(X^2-1)^{(l)}(U_k'')^{(k-\ell)}\\ &= \sum_{\ell=0}^{2}\binom{k}{\ell}(X^2-1)^{(l)}U_k^{(k-\ell+2)}\\ &= \binom{k}{0}(X^2-1)U_k^{(k+2)}+\binom{k}{1}(2X)U_k^{(k+1)}+\frac{k(k-1)}{2}\cdot 2\cdot U_k^{(k)}\\ &= (X^2-1)P_k''+2kXP_k'+k(k-1)P_k\end{aligned}$$

— On recommence avec $2X(k-1)U_k'$ :

$$\begin{aligned}&[2X(k-1)U_k']^{(k)}\\ &= 2(k-1)XU_k^{(k+1)}+2k(k-1)U_k^{(k)}\\ &= 2(k-1)XP_k'+2k(k-1)P_k\end{aligned}$$

— Et bien-sûr : $(2kU_k)^{(k)}=2kP_k$.

Puisque le polynôme $(X^2-1)U_k''-2X(k-1)U_k'-2kU_k=0$ est nul, sa dérivée d'ordre $k$ est nulle et on en déduit :

$$\begin{aligned}&(X^2-1)P_k''+2kXP_k'+k(k-1)P_k+\\ &\quad -2(k-1)XP_k'-2k(k-1)P_k+\\ &\quad -2kP_k=0\\ &\iff (X^2-1)P_k''+2XP_k'+(-k^2-k)P_k=0.\end{aligned}$$

On en déduit que $P_k$ vérifie l'équation différentielle :

$$(X^2-1)P_k''+2XP_k'-k(k+1)P_k=0.$$

**Remarques**

On peut démontrer que $P_k$ est la seule solution sur $\mathbb{R}$, à un facteur près, de l'équation $(x^2-1)y''+2xy'-k(k+1)y=0$.

3. Calculons $||P_k||^2$ pour tout $k\in[\![0,n]\!]$.

Il s'agit de calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1}P_k(t)^2dt$.

On reprend les calculs de la question 1.$(b)$ dans le cas $k=\ell$. On obtient :

$$||P_k||^2=\int_{-1}^{1}P_k(t)^2dt=(-1)^k\int_{-1}^{1}(t^2-1)^k\left[(t^2-1)^k\right]^{(k+k)}dt$$

On a $\left[(t^2-1)^k\right]^{(2k)}=(2k)!$ donc :

$$\begin{aligned}||P_k||^2 &= (-1)^k(2k)!\int_{-1}^{1}(t^2-1)^kdt\\ &= (2k)!\int_{-1}^{1}(1-t^2)^kdt\\ &= (2k)!\int_{-1}^{1}(1-t)^k(1+t)^kdt\end{aligned}$$

On intègre par parties :

$$\begin{cases}u(t)=(1-t)^k\\ v'(t)=(1+t)^k\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}u'(t)=-k(1-t)^{k-1}\\ v(t)=\dfrac{(1+t)^{k+1}}{k+1}\end{cases}$$

Le crochet de cette intégration par parties est nul :

$$\begin{aligned}||P_k||^2 &= (2k)!\frac{k}{k+1}\int_{-1}^{1}(1-t)^{k-1}(1+t)^{k+1}dt\\ &=\dots=\\ &= (2k)!\frac{k(k-1)\dots 1}{(k+1)(k+2)\dots(2n)}\int_{-1}^{1}(1+t)^{2k}dt\\ &= \frac{(2k)!(k!)^2}{(2k)!}\frac{2^{2k+1}}{2k+1}\\ &= 2^{2k}(k!)^2\frac{2}{2k+1}\end{aligned}$$

4. Soit $\mathscr{E}_n$ l'ensemble des polynômes de degré $n$ de coefficient dominant 1.

La borne inférieure suivante $\displaystyle\inf_{P\in\mathscr{E}_n}\int_{-1}^{1}P(t)^2dt$ est bien définie car $A=\{||P||:P\in\mathscr{E}_n\}$ est non vide et minoré par 0.

Cette borne inférieure est même un minimum, atteint en $P_n=[(X^2-1)^n]^{(n)}$.

En effet, si $P(X)\in\mathscr{E}_n$ est de coefficient dominant 1 alors il existe des scalaires $\alpha_k$ tels que :

$$P(X)=\frac{n!}{(2n)!}P_n+\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_kP_k$$

car $\left(P_0,P_1,\dots,\dfrac{n!}{(2n)!}P_n\right)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\dfrac{n!}{(2n)!}P_n$ est de coefficient dominant 1.

Cette base est orthogonale donc par le théorème de Pythagore :

$$||P||^2 = \frac{n!^2}{(2n)!^2}||P_n||^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k^2 ||P_k||^2 \geqslant \frac{n!^2}{(2n)!^2}||P_n||^2.$$

Ainsi, $||\frac{n!}{(2n)!}P_n||^2 = \frac{n!^2}{(2n)!^2}2^{2n}n!^2\frac{2}{2n+1}$ minore tous les éléments de $\mathscr{E}_n$ (et est un élément de $\mathscr{E}_n$).
Conclusion :

$$\inf_{P\in\mathscr{E}_n} \int_{-1}^{1} P(t)^2 dt = ||P_n||^2 = 2^{2n}\frac{n!^4}{(2n)!^2}\frac{2}{2n+1}.$$

□

***Solution Exercice** 13.*

1. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall x \in [0, \pi], T_n(\cos x) = \cos(nx).$$

— Le polynôme $T_0(X) = 1$ vérifie $\forall x \in [0;\pi], T_0(\cos x) = \cos(0 \cdot x) = 1$.
— Le polynôme $T_1(X) = X$ vérifie $\forall x \in [0;\pi], T_1(\cos x) = \cos x$.
— On a $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$.
Le polynôme $T_2(X) = 2X^2 - 1$ vérifie $\forall x \in \mathbb{R}, T_2(\cos(x)) = \cos(2x)$.

On suppose que pour un entier $n \in \mathbb{N}$, il existe $T_n, T_{n+1} \in \mathbb{R}[X]$ tels que $T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$ et $T_{n+1}(x) = \cos((n+1)x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Alors

$$\begin{aligned}\cos((n+2)x) &= \cos((n+1)x + x) = \cos((n+1)x)\cos(x) - \sin((n+1)x)\sin(x)\\ &= T_{n+1}(\cos x)T_1(\cos x) - \frac{1}{2}\left(\cos(nx) - \cos((n+2)x)\right)\end{aligned}$$

(on a utilisé $\cos(a-b) - \cos(a+b) = 2\sin(a)\sin(b)$)
On obtient

$$\cos((n+2)x) = 2T_{n+1}(\cos(x))T_1(\cos(x)) - \cos(nx).$$

Ainsi $T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X)$ est un polynôme vérifiant $T_{n+2}(\cos x) = \cos((n+2)x)$ ce qui achève la récurrence.

2. On démontre par récurrence que $\det(T_n) = n$ et que le coefficient de $T_n$ est $2^{n-1}$ pour $n \geqslant 1$.
3. Soit $E = \mathscr{C}^0([-1,1], \mathbb{R})$.

(a) Montrons que la formule $(f|g) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$ définit un produit scalaire sur $E$.

— L'application $(f,g) \in \mathscr{C}^0([-1;1],\mathbb{R})^2 \longmapsto \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$ est bien définie.
En effet, les intégrales $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$ et $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$ convergent.
Ces intégrales sont impropres en $-1, 1$.
— En $1^-$ : on pose $t = 1-h$ avec $h \to 0^+$.
On a : $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-(1-2h+h^2)}} = \dfrac{1}{\sqrt{2h-h^2}} \underset{h\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2h}}$.
L'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{h}}dh$ converge donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$ converge.
— On montre de manière analogue que l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$ converge.

(b) On pose $P_0 = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$ et pour $n > 0$, $P_n = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}T_n$.
Montrons que la famille $(P_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.
Soit $k \neq \ell$.
On pose $t = \cos\theta$ : $dt = -\sin(\theta)d\theta$ on a $\sqrt{1-t^2} = |\sin\theta| = \sin\theta$ car $\theta \in [0;\pi]$ ; le changement de variable étant $\mathscr{C}^1$ :

$$\begin{aligned}(T_k|T_\ell) &= \int_{-1}^{1} \frac{T_k(t)T_\ell(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt\\ &= \int_{\pi}^{0} \frac{T_k(\cos\theta)T_\ell(\cos\theta)}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}(-\sin\theta)d\theta\\ &= \int_0^{\pi} T_k(\cos\theta)T_\ell(\cos\theta)d\theta\\ &= \int_0^{\pi} \cos(k\theta)\cos(\ell\theta)d\theta\\ &= \left[\frac{1}{k+\ell}\sin((k+\ell)\theta)\right]_0^{\pi}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Si $k = \ell = 0$, on a

$$||T_0||^2 = \int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^{\pi} d\theta = \pi.$$

Si $k \neq 0$ :

$$\begin{aligned} ||T_k||^2 &= \int_{-1}^{1} T_k^2(t)dt = \int_0^{\pi} T_k(\cos\theta)^2 d\theta = \int_0^{\pi} \cos(k\theta)^2 d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \frac{1+\cos(2k\theta)}{2} d\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2k\theta)}{2k}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Finalement $||T_0|| = \sqrt{\pi}$ et $T_k = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.
Par ce qui précède : la famille $(T_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est orthogonale et composée de polynômes non nuls, donc libre, et composée de $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$ vecteurs non nuls : c'est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

On pose $P_0 = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$ et pour $n > 0$, $P_n = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} T_n$ : les calculs précédents montrent que la base $(P_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est orthonormale.

(c) Pour $f \in E$ et $n \in \mathbb{N}$, on note $p_F(f) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k T_k$ la projection orthogonale de $f$ sur $\mathbb{R}_n[X]$.
Montrons que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n^2$ converge.

On a $p_F(f) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (f|P_k)P_k = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{2}{\pi}(f|T_k)}_{=a_k} T_k$.

Par le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} ||p_F(f)||^2 &= \sum_{k=0}^{n} \frac{4}{\pi^2}(f|T_k)^2 ||T_k||^2 = \sum_{k=0}^{n} \frac{4}{\pi^2}(f|T_k)^2 \frac{\pi}{2} = \sum_{k=0}^{n} a_k^2 \frac{\pi}{2} \\ &\leqslant ||f||^2, \end{aligned}$$

par l'inégalité de Bessel.

Les sommes partielles $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k^2 \leqslant \frac{2}{\pi}||f||^2$ sont majorées.

La séries à termes positifs $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} a_k^2$ est donc convergente.

□

***Solution Exercice 14.*** Soit $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{R})$.
On considère l'équation $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{R})$.
Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ l'application linéaire canoniquement associée à $A$ et $b$ le vecteur canoniquement associé à $B$.

1. Si $b \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $x_0 \in \mathbb{R}^p$ tel que $b = f(x_0)$.
   Dans ce cas, $\displaystyle\inf_{x\in\mathbb{R}^p} ||f(x) - b|| = ||f(x_0) - b|| = 0$.
2. Dans ce qui suit on suppose que $b \notin \mathrm{Im}(f)$.

(a) On considère le sous-espace vectoriel $F = \mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}^n$ (de dimension finie) et la projection orthogonale $p : \mathbb{R}^n \to \mathrm{Im}(f)$.
On note alors $y_0 = p(b) \in \mathrm{Im}(f)$ : ce vecteur minimise la distance de $b \in \mathbb{R}^n$ à $F$ :

$$d(b, \mathrm{Im}(f)) = \inf_{y\in\mathrm{Im}(f)} ||y - b|| = ||p(b) - b|| = ||y_0 - b||.$$

Il existe donc au moins vecteur (si $f$ n'est pas injective, il peut y en avoir plusieurs) $x_0 \in \mathbb{R}^p$ tel que $y_0 = f(x_0)$.
Ainsi $d(b, \mathrm{Im}(f)) = ||f(x_0) - b||$.
Par le cours, le vecteur $b - p(b)$ est orthogonal à $\mathrm{Im}(f)$. Ainsi,

$$p(b) - b = f(x_0) - b \in \mathrm{Im}(f)^{\perp}.$$

(b) Par le cours, $f(x_0) - b$ est orthogonal à $\mathrm{Im}(f)$ si et seulement s'il est orthogonal à chaque vecteur formant une base de $\mathrm{Im}(f)$.
C'est le cas *a fortiori* si $f(x_0) - b$ est orthogonal à une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_p))$. Ainsi :

$$f(x_0) - b \in \mathrm{Im}(f)^{\perp} \iff \forall i \in [\![1,p]\!], (f(x_0) - b|f(e_i)) = 0.$$

En notant pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $C_i$ le $i$-ième vecteur colonne de la matrice de $f$ (c'est-à-dire les coordonnées de $f(e_i)$) :

$$A = \begin{pmatrix} C_1 & | & \ldots & | & C_p \end{pmatrix}$$

on obtient :

$$\begin{aligned} f(x_0) - b \in \mathrm{Im}(f)^{\perp} &\iff \forall i \in [\![1,p]\!],\ {}^tC_i(AX_0 - B) = 0_{\mathbb{R}} \\ &\iff {}^tA(AX_0 - B) = 0_{\mathbb{R}^n} \end{aligned}$$

On en déduit que $f(x_0) - b \in \mathrm{Im}(f)^{\perp} \iff {}^tAAX_0 = {}^tAB$.

(c) $\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose que la matrice ${}^tAA$ est inversible. Montrons que $f$ est injective, c'est-à-dire que $\ker(f) = \{0\}$.
Soit $x \in \ker(f)$ : $f(x) = 0$. Matriciellement, $f(x) = 0$ donne $AX = 0$.

En multipliant par ${}^tA$ on obtient : ${}^tAAX = 0$.
Puis en composant par $({}^tAA)^{-1}$ on obtient $X = 0$ i.e. $x = 0$.

$\boxed{\Longleftarrow}$

On suppose que $f$ est injective. Montrons que la matrice ${}^tAA \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ est inversible.
Soit $X \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ tel que ${}^tAAX = 0$.
Puisque ${}^tAAX = 0$, on obtient :
$0 = (X|{}^tAAX) = {}^tX({}^tAAX) = {}^t(AX)AX = (AX|AX) = ||AX||^2$.
On en déduit que $AX = 0$. Mais l'application $f$ est injective donc $X = 0$.
On en déduit que la matrice ${}^tAA$ est inversible (l'endomorphisme de $\mathbb{R}^p$ est un automorphisme car injectif).

**Remarques**

On a montré que ${}^tAA$ et $A$ ont le même rang (les applications linéaires canonique associées ont le même noyau).

**Conclusion :** $f$ est injective si et seulement si ${}^tAA$ est inversible
Dans ce cas, la relation ${}^tAAX_0 = {}^tAB$ donne

$$X_0 = \left({}^tAA\right)^{-1}{}^tAB.$$

3. Déterminons une solution approchée du système :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1 \\ x & - & y & = & 3 \\ 2x & + & y & = & 2 \end{array}\right.$$

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Alors ${}^tAA = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible.

On obtient une solution approchée $X_0 = ({}^tAA)^{-1}\,{}^tA \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12}{7} \\ -\frac{8}{7} \end{pmatrix}$.

**Remarques**

— La résolution explicite du système conduit à des équations incompatibles.
Ce signifie que $b = (1, 3, 2) \notin \operatorname{Im}(f)$ avec $f$ l'application canonique associée à $A$.
— En injectant $x = \frac{12}{7}, y = -\frac{8}{7}$ dans le système on trouve $x + y \simeq 0,6$, $x - y \simeq 2,8$, $2x + y \simeq 2,3$.

$\square$

***Solution Exercice 15.*** Soient $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $x = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.
On cherche une droite d'équation réduite $\mathscr{D} : y = ax + b$ telle que les points $(x_i, y_i), i \in [\![1, n]\!]$ soient proches de $\mathscr{D}$. On appelle $\mathscr{D}$ la droite de régression.

On propose de déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^n |y_i - (ax_i + b)|^2$ soit minimal.

1. On note $F = \operatorname{Vect}((x_1, \ldots, x_n), (1, \ldots, 1))$. Ainsi :

$$\begin{aligned} F &= \{a(x_1, \ldots, x_n) + b(1, \ldots, 1) : (a, b) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(ax_1 + b, \ldots, ax_n + b) : (a, b) \in \mathbb{R}^2\}. \end{aligned}$$

On a pour tout $u = (ax_1+b, \ldots, ax_n+b) \in F : ||y-u||^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^n |y_i-(ax_i+b)|^2$ et en notant $p_F$ la projection orthogonale sur $F$ :

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^n |y_i - (ax_i + b)|^2 = ||y - p_F(y)||^2 = d(y, F)^2.$$

2. On utilise la caractérisation de la projection orthogonale

$$\left\{\begin{array}{c} y - p_F(y) \in F^\perp \\ p_F(y) \in F \end{array}\right.$$

On note $p_F(y) = a(x_1, \ldots, x_n) + b(1, \ldots, 1)$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ à déterminer.
On note $y - p_F(y) = (y_1 - (ax_1 + b), \ldots, y_n - (ax_n + b))$.
On a $y - p_F(y) \in F^\perp$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{c} (y - p_F(y)|(1, \ldots, 1)) = 0 \\ (y - p_F(y)|(x_1, \ldots, x_n)) = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b) = 0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b)x_i = 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} a\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i + nb & = & \displaystyle\sum_{i=1}^n y_i \\ a\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2 + b\sum_{i=1}^n x_i & = & \displaystyle\sum_{i=1}^n x_iy_i \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} aS + nb & = & T \\ a||x||^2 + bS & = & (x|y) \end{array}\right.$$

avec $S = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i$ et $T = \displaystyle\sum_{i=1}^n y_i$.

3. Ci-dessous un script implémentant la méthode des moindres carrés.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def scalaire(x,y):
    s=0
    for val1,val2 in zip(x,y):
        s+=val1*val2
    return s

def moindre(x,y):
    n=len(x)#longueur des listes x,y
    S,T=0,0
    for val in x:
        S+=val
    for val in y:
        T+=val
    #Matrice du systeme, second membre
    A=np.array([[scalaire(x,x),S],[S,n]])
    b=np.array([[scalaire(x,y)],[T]])
    #resolution
    a=np.linalg.solve(A,b)[0,0]
    b=np.linalg.solve(A,b)[1,0]
    #representation graphique
    alpha,beta=min(x),max(x)
    intervalle=np.linspace(alpha, beta, 50)
    image=[]
    for val in intervalle:
        image.append(a*val+b)
    plt.plot(x,y,'ro')
    plt.plot(intervalle,image)
    return plt.show()
```

□