Programme de khôlle semaines 19 et 20

Questions de cours: Savoir énoncer et démontrer les résultats suivants

- Les sous-espaces propres d'une matrice symétrique réelle sont orthogonaux.
- $M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$ cette somme directe étant orthogonale.
- Le gradient d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert $\mathscr{U} \subset \mathbb{R}^2$, s'il est non nul en $(x_0, y_0) \in \mathscr{U}$, est orthogonal à la ligne de niveau $f(x,y) = \lambda$ passant par le point $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.
- Le gradient est orienté dans le sens des valeurs croissantes de f.

Savoir-faire

- Étude d'une conique via la réduction de la matrice $A \in S_2(\mathbb{R})$ de la partie quadratique de son équation (rotation du repère initial) puis et translation du repère initial.
- Savoir déterminer les axes de symétries (et les relier aux espaces propres de A), les éventuels sommets et centres, les demi-axes pour une ellipse, les asymptotes pour une hyperbole.
- Connaître la classification des coniques, fonction du signe du déterminant de la matrice de la partie quadratique (type ellipse, parabole, hyperbole, incluant les cas dégénérés.)
- Savoir dessiner une conique après étude.
- Savoir déterminer une équation réduite d'une conique définie par directrice et excentricité.

Savoir-faire

- Savoir étudier les limites et la continuité d'une fonction $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ avec $p, n \leqslant 3$ en utilisant la caractérisation via les applications composantes.
- Savoir justifier qu'une fonction $f : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$est de classe $\mathscr{C}^1$, $\mathscr{C}^2$ sur A (utiliser les fonctions composantes, reconnaître des fonctions polynomiales, des composées...).
- Savoir écrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 1 ou 2 pour une fonction de deux variables à valeurs réelles.
- Savoir dériver en chaîne les fonction composées dont les expressions sont :
  - du type : $f(x(t)), y(t))$ avec $f : \mathscr{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
  - du type $f(x(u,v), y(u,v))$ avec $f : \mathscr{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
  - En particulier, avec les coordonnées polaires $F(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ avec $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
- Construire la matrice Hessienne d'une matrice de classe $\mathscr{C}^2$ en un point (x_0, y_0) d'un ouvert.
- Déterminer les points critiques d'une fonction de plusieurs variables à valeurs réelles.
- Étude des extrema locaux sur un ouvert à l'aide de la matrice Hessienne et du signe des valeurs propres.
- Savoir que sur un ouvert, les extrema locaux sont atteints en des points critiques (attention à la réciproque).
- Exemples dans le cas où l'on ne peut pas conclure à l'aide de la matrice Hessienne (si la Hessienne A au point critique n'est pas inversible : $\det(A) = 0$).
- Exemples d'étude des extrema globaux sur un ouvert.
- Exemples d'étude des extrema globaux sur un ensemble quelconque : on distingue ce qui se passe sur l'intérieur (qui est ouvert) de ce qui se passe sur la frontière.
- Savoir qu'une fonction de plusieurs variables à valeurs réelles et continue sur un **fermé-borné** de $\mathbb{R}^n$ est bornée et atteint ses bornes.
- Savoir résoudre des équations aux dérivées partielles par différentes méthodes : intégrations successives, changement de variable.
- Encore un peu de géométrie : savoir déterminer une équation cartésienne de la tangente à une courbe définie par une équation $f(x,y) = 0$ où f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ en un point régulier (x_0, y_0) (voir fin du Chapitre 8 pour la démonstration).

A préparer :

Exercice:

Soit $\mathscr{R}_0 = (O, i, j)$ le repère orthonormé direct usuel. On considère le point $F(1;1)$ et la droite d'équation cartérsienne $(\mathscr{D}) : x_0 - y_0 = 1$ dans $\mathscr{R}_0$.
Dans cet exercice, on étudie l'hyperbole $\mathscr{H}$ de directrice $(\mathscr{D})$, de foyer F et d'excentricité $e = 2$.

1. Donner une équation cartésienne (que l'on ne cherchera pas à réduire) de $\mathscr{H}$ dans $\mathscr{R}_0$.
2. Déterminer un repère $\mathscr{R}_1$ dans lequel la directrice a pour équation cartésienne $x_1 = -d$. Donner une équation cartésienne de $\mathscr{H}$ dans $\mathscr{R}_1$.
3. Déterminer un repère $\mathscr{R}_2 = (\Omega, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ dans lequel l'équation de $\mathscr{H}$ est réduite :
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$
4. Déterminer $X_0(\Omega), X_0(S_i)$ avec $S_i, i \in \{1,2\}$ les deux sommets de $\mathscr{H}$.
5. Déterminer dans $\mathscr{R}_2$ les équation des asymptotes à $\mathscr{H}$.
6. Tracer $\mathscr{H}$.

7. Donner une équation cartésienne des axes de symétrie de $\mathscr{H}$ dans $\mathscr{R}_0$. On demande deux méthodes.

Exercice

Étudier et tracer les coniques dont les équations cartésiennes dans le repère orthonormé direct usuel sont :

1. $x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$. Donner ensuite l'équation dans le repère usuel de l'axe focal et de la directrice puis placer le foyer.
2. $x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 + 16y + 16 = 0$. Donner ensuite l'équation dans le repère usuel de l'axe focal et de la directrice puis placer le foyer.
3. $x^2 + 2xy + y^2 - 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y + 6 = 0$. Donner ensuite l'équation dans le repère usuel de l'axe focal et de la directrice puis placer le foyer.

Exercice

Déterminer les points critiques, et leur nature, des fonctions définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

1. $f(x, y) = x^4 + y^4 - (x - y)^2$.
2. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$.
3. $f(x, y) = x^3 + y^3$.
4. $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^3$.

En cas d'extremum étudier s'il est global ou non.

Exercice

A l'aide du changement de variable défini par $u = xy$ et $v = \frac{x}{y}$ déterminer toutes les fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0.$$