Programme de khôlle semaines 5 et 6

Questions de cours

La khôlle commence par l'énoncé précis **et** la démonstration d'un résultat parmi :

❶ Lemme d'Abel et définition du rayon de convergence.

❷ Développement en série entière de la fonction exp à l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange. Rayon de convergence à préciser. En déduire le D.S.E. de $\operatorname{ch}, \operatorname{sh}$.

❸ Développement en série entière des fonctions $\cos, \sin$ à l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange. Rayon de convergence à préciser.

❹ Développement en série entière de la fonction $x \longmapsto (1+x)^\alpha$ lorsque α n'est pas entier naturel avec la technique de l'équation différentielle. Rayon de convergence à préciser.

❺ Développement en série entière de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{1-x}$ avec rayon de convergence à préciser. Applications : développement en séries entières de $x \longmapsto \frac{1}{1+x}$, $x \longmapsto \ln(1-x)$ et $x \longmapsto \ln(1+x)$.

L'examinateur pourra également demander d'énoncer le théorème sur les produits de Cauchy de deux séries entières et proposer un exemple d'application.

La khôlle se poursuivra par la résolution d'une ou plusieurs questions choisies parmi les exercices d'entraînement suivants :

Exercice d'entrainement: Rayon de convergence

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum x^n$
2. $\sum n x^n$
3. $\sum \frac{1}{n^3} x^n$
4. $\sum \cos(n) x^n$
5. $\sum \arctan(n^\alpha) x^n$
6. $\sum n! x^n$
7. $\sum \frac{1}{n!} x^n$
8. $\sum \frac{\operatorname{ch}(n)}{\operatorname{sh}^2(n)} x^n$
9. $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$
10. $\sum n^n x^n$
11. $\sum \frac{\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n} x^n$
12. $\sum a_n x^n$ avec $$a_n = \begin{cases} \left(1-\frac{2}{n}\right)^n & \text{si } n \text{ pair} \\ 3^n & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$
13. $\sum \frac{n+\ln(n)}{n^2+2^n} x^n$
14. $\sum \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2} x^n$

Exercice d'entrainement: Rayon de convergence

Déterminer le rayon de convergence des séries entières :

1. $\sum \frac{\cos n}{n} z^n$
2. $\sum n! z^{2n}$
3. $\sum \frac{z^{n!}}{n!}$
4. $\sum 5^n z^{2n+1}$
5. $\sum a_n z^n$ avec $a_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2+1}$.

Exercice d'entrainement: Rayon de convergence

1. On considère une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$.
   (a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^{2n}$.
   (b) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$.
2. Soit $\sum u_n z^n$ une série entière complexe telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n = a_n + i b_n \text{ avec } (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2.$$
   Comparer le rayon de convergence de la série $\sum u_n z^n$ avec le rayon de convergence des séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$.

La khôlle se poursuivra enfin par un ou plusieurs exercices sur les thèmes suivants :

— Calcul d'une somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ en utilisant les series usuelles (géométriques, exponentielles...).

— Calcul d'une somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ en utilisant le théorème de dérivation ou d'intégration terme à terme.

— Calcul d'une somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n}$ ou $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$ en utilisant un changement de variable ($t = x^2$).

— Développement en série entière d'une fonction via : les développements usuels, un produit de Cauchy, une équation différentielle.

— Utilisation de la **continuité** de la fonction somme **sur son ensemble de définition (théorème d'Abel radial)** pour le calcul de la somme d'une série numérique comme limite de la fonction somme d'une série entière au bord de l'intervalle ouvert de convergence.