TRAVAUX DIRIGÉS : Intégrales dépendant d'un paramètre

Exercice 1: (Solution)

Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose :

$$g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} dt \text{ et } h(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

1. Montrer que g et h sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et calculer leurs dérivées.
2. Montrer que $x \longmapsto g(x^2) + h^2(x)$ est une fonction constante sur $\mathbb{R}_+$.
   Déterminer cette constante.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a : $0 \leqslant g(x^2) \leqslant e^{-x^2}$.
   En déduire la convergence et la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

Exercice 2: (Solution)

Pour $x > -1$, on pose :

$$g(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + x\sin^2 t) dt.$$

1. Montrer que g est continue sur $]-1; +\infty[$.
2. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1; +\infty[$ et exprimer $g'(x)$ sous forme d'une intégrale.
3. Pour $x > -1$, calculer $g'(x)$ à l'aide du changement de variable $u = \tan t$.
4. En déduire une expression explicite de $g(x)$ pour $x > -1$.

Exercice 3: (Solution)

Soit Γ la fonction définie par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$.

1. Montrer que Γ est définie sur $]0; +\infty[$.
2. Montrer que Γ est continue sur $]0; +\infty[$.
3. Montrer que Γ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0; +\infty[$ et que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x > 0, \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} \ln^k t e^{-t} t^{x-1} dt.$$

4. Montrer que la fonction Γ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.
5. Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
6. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.
7. Démontrer que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.
8. On pose pour tout $x > 1$, $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.
   Montrer que pour tout $x > 1$,

$$\Gamma(x)\zeta(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt.$$

Exercice 4: (Solution)

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt.$$

1. Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est paire.
2. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer $g'(x)$ sous forme d'une intégrale.
3. Montrer que g est solution de l'équation différentielle : $y' + \frac{x}{2} y = 0$.
4. En déduire une expression de g en utilisant l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Exercice 5: (Solution)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. On pose :

$$\widehat{f} : x \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ixt} dt.$$

1. Montrer que $\widehat{f}$ est définie, continue et bornée sur $\mathbb{R}$.
2. On considère dans tout ce qui suit $f : t \longmapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$.
   Montrer que $\widehat{f}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer $\widehat{f}'$ et en déduire la valeur de $\widehat{f}$.
   (on pourra utiliser les résultats des exercices précédents).

Exercice 6: (Solution)

Soit f une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$.

On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)dt$. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction F est-elle de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ en général ?

Exercice 7: (Solution)

Soit g la fonction définie par $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt$.

1. Déterminer le domaine de définition de g.
2. Étudier la continuité.
3. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
4. Calculer g' puis en déduire g.

Exercice 8: (Solution)

Pour x convenable, on pose :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2 + x^2} dt.$$

1. Donner le domaine de définition D de F.
2. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D.
3. Exprimer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2 + x^2} dt$ en fonction de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1 + t^2 x^2} dt$.
4. En déduire la valeur de F en 1.
5. Exprimer $F(x)$ en fonction de $x \in D$.

Exercice 9: (Solution)

1. Justifier que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1 + t^2} dt$ converge.
2. En posant $u = \dfrac{1}{t}$ calculer I.
3. Pour $x > 0$, on pose :

$$I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{(1 + t^2)(x^2 + t^2)} dt.$$

   (a) Justifier que l'intégrale $I(x)$ converge.
   (b) Calculer $I(x)$ pour $x \neq 1$.
   (c) En déduire $I(1)$.

Exercice 10: (Solution)

Pour x réel, on pose :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1 + t^2)} dt.$$

1. Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$.
3. En déduire une expression de $F(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

SOLUTIONS TRAVAUX DIRIGÉS : Intégrales dépendant d'un paramètre

Solution Exercice 1. Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose :

$$g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} dt \text{ et } h(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

1. • On pose $I = \mathbb{R}_+$, $J = [0,1]$ et $f(x,t) = \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}$.
   Notons que $J = [0,1]$ est un segment de $\mathbb{R}$.
   La fonction $f : (x,t) \longmapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I \times J = I \times [0,1]$ par composition et quotient, le dénominateur ne s'annulant pas.
   On en déduit que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I = \mathbb{R}_+$.
   On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) dt = \int_0^1 -e^{-x(1+t^2)} dt \\ &= -e^{-x} \int_0^1 e^{-xt^2} dt \end{aligned}$$

   • La fonction $t \longmapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
   Par conséquent la fonction $h : x \longmapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$ est une primitive de la fonction $t \longmapsto e^{-t^2}$ sur $\mathbb{R}$.
   h est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (donc sur $\mathbb{R}_+$).
   On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $h'(x) = e^{-x^2}$.
2. Montrons que $F : x \longmapsto g(x^2) + h^2(x)$ est une fonction constante sur $\mathbb{R}_+$.
   La fonction $F : x \longmapsto g(x^2) + h^2(x)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ par somme de telles fonctions.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $F'(x) = 2xg'(x^2) + 2h'(x)h(x)$.
   Pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= -2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2t^2} dt + 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt \\ &\underset{u=xt}{=} -2xe^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} \frac{du}{x} + 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt \\ &= -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} du + 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

   Si $x = 0$ on a $F'(0) = 2 \times 0g'(0^2) + 2h'(0) \underbrace{h(0)}_{=0} = 0$.
   Par conséquent pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $F'(x) = 0$.
   La fonction F est donc constante sur $\mathbb{R}_+$.
   Il vient pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$F(x) = F(0) = g(0) + h^2(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = [\arctan t]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

3. Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a : $0 \leqslant g(x) \leqslant e^{-x^2}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g(x^2) = e^{-x^2} \int_0^1 \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$ avec $0 \leqslant \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} \leqslant 1$.
   Par croissance de l'intégrale il vient $0 \leqslant \int_0^1 \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt \leqslant 1$ puis :

$$0 \leqslant g(x^2) \leqslant e^{-x^2}.$$

   On en déduit par le théorème des gendarmes que $\lim_{x \to +\infty} g(x^2) = 0$.
   D'après la question précédente, on a :

$$g(x^2) + h(x)^2 = \frac{\pi}{4} \text{ donc } \lim_{x \to +\infty} h(x)^2 = \frac{\pi}{4}.$$

   Puisque $h(x) \geqslant 0$ pour tout $x \geqslant 0$ on obtient : $\lim_{x \to +\infty} h(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
   Conclusion : $\lim_{x \to +\infty} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$:

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

□

Solution Exercice 2. Pour $x > -1$, on pose :

$$g(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + x\sin^2 t) dt.$$

1. Montrons que g est continue sur $]-1; +\infty[$.
   On pose $J = [0; \frac{\pi}{2}]$. J est un segment de $\mathbb{R}$.
   La fonction $f : (x,t) \longmapsto \ln(1 + x\sin^2 t)$ est continue sur le produit cartésien $I \times J =]-1; +\infty[\times [0; \frac{\pi}{2}]$ par composition.
   En effet :
   — la fonction $(x,t) \longmapsto 1 + x\sin^2 t$ est continue et strictement positive sur $I \times J$: $\sin^2 t \geqslant 0$ donc $(x > -1 \Longrightarrow x\sin^2 t > -\sin^2 t \geqslant -1)$.
   — la fonction $\ln$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   On en déduit que la fonction g est continue sur $]-1; +\infty[$.

2. Par composition, la fonction $(x,t) \longmapsto \ln(1+x\sin^2 t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I \times J =]-1;+\infty[\times[0;\frac{\pi}{2}]$.
On en déduit que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1;+\infty[$ et pour tout $x>-1$:
$$g'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t}{1+x\sin^2 t}dt.$$

3. Si $x=0$ on calcule directement :
$$g'(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2}dt = \frac{1}{2}\left[t - \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$
Pour $x>-1, x\neq 0$, calculons $g'(x)$ à l'aide du changement de variable $u=\tan t$.
La fonction $t \longmapsto \tan t$ est de classe $\mathscr{C}^1$, strictement croissante sur $[0;\frac{\pi}{2}]$ et réalise une bijection de $[0;\frac{\pi}{2}]$ sur $[0;+\infty[$.
L'intégrale obtenue après changement de variable a la même nature que l'intégrale initiale, c'est-à-dire convergente.
On a $du = (1+\tan^2 t)dt = (1+u^2)dt$.
En remarquant que $\sin^2 = \cos^2\tan^2 = \frac{\tan^2}{1+\tan^2} = \frac{u^2}{1+u^2}$, il vient :
$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t}{1+x\sin^2 t}dt &= \int_0^{+\infty} \frac{\frac{u^2}{1+u^2}}{1+x\frac{u^2}{1+u^2}}\frac{du}{1+u^2}\\ &= \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{1+u^2}\frac{du}{1+u^2+u^2x}\\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1+u^2} - \frac{1}{1+u^2(x+1)}\right)du.\end{aligned}$$

• On a $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}du = \lim_{A\to+\infty} [\arctan u]_0^A = \frac{\pi}{2}$.
• On calcule l'autre intégrale à l'aide du changement de variable $v = u\sqrt{(x+1)}$: $dv = \sqrt{x+1}du$.
La fonction $u \longmapsto u\sqrt{(x+1)}$ est de classe $\mathscr{C}^1$, strictement croissante sur $[0;+\infty[$ et réalise une bijection de $[0;+\infty[$ sur $[0;+\infty[$.
L'intégrale obtenue après changement de variable est de même nature que l'intégrale initiale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2(x+1)}du$ donc convergente (on a $\frac{1}{1+u^2(x+1)} \underset{u\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(x+1)u^2}$).
On obtient :
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2(x+1)}du = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+v^2}\frac{dv}{\sqrt{x+1}} = \frac{\pi}{2\sqrt{x+1}}.$$

Il vient :
$$\forall x>0, g'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t}{1+x\sin^2 t}dt = \frac{\pi}{2x} - \frac{\pi}{2x\sqrt{x+1}}.$$
Notons que $\displaystyle\lim_{x\to 0} g'(x) = \frac{\pi}{4} = g'(0)$ car :
$$\frac{\pi}{2x} - \frac{\pi}{2x\sqrt{x+1}} = \frac{\pi}{2x}\left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}}\right) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\pi}{2x}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}.$$
Cet équivalent était attendu puisque la fonction g' est continue sur $\mathbb{R}_+$ (car g y est de classe $\mathscr{C}^1$).

4. On a $\displaystyle g(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+0\sin^2 t)dt = 0$.
Par conséquent, $\displaystyle\int_0^x g'(t)dt = g(x)-g(0) = g(x)$.
Or $\forall x>0$, $g'(x) = \frac{\pi}{2x} - \frac{\pi}{2x\sqrt{x+1}} = \frac{\pi}{2x}\left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}}\right)$.
Ainsi, pour tout $x>0$:
$$\begin{aligned}g(x) &= \frac{\pi}{2}\int_0^x \frac{1}{t}\frac{\sqrt{t+1}-1}{\sqrt{t+1}}dt\\ &\underset{u=\sqrt{t+1}}{=} \frac{\pi}{2}\int_1^{\sqrt{x+1}} \frac{1}{u^2-1}\frac{u-1}{u}2udu\\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^{\sqrt{x+1}} \frac{1}{u+1}du\\ &= \frac{\pi}{2}\left(\ln(\sqrt{x+1}+1) - \ln(2)\right).\end{aligned}$$

□

Solution Exercice 3. Soit Γ la fonction définie par $\displaystyle\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$.

1. Voir cours.
2. Voir cours.
3. Montrons que Γ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0;+\infty[$ et que :
$$\forall k\in\mathbb{N}, \forall x>0, \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} \ln^k t e^{-t}t^{x-1}dt.$$
On pose $HR(k)$:
"$f \in \mathscr{C}^k(]0;+\infty[)$ et $\forall x>0, \Gamma^{(k)}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln^k(t)e^{-t}t^{x-1}dt$".

On a démontré en cours que Γ est continue et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Les propriétés $HR(0), HR(1)$ sont donc vérifiées.
On suppose $HR(k)$ vérifiée et on pose $h = g^{(k)}$.
On pose $h = \Gamma^{(k)}$ et $f(x,t) = \ln^k te^{-t}t^{x-1}$.
On pose $K = [c,d] \subset I =]0;+\infty[$.

— Pour tout $t \in J =]0;+\infty[$, la fonction $x \longmapsto \ln^k te^{-t}t^{x-1}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur K par produit et par composition.
— Pour tout $x \in K$:
  * la fonction $t \longmapsto \ln^k te^{-t}t^{x-1}$ est intégrable sur $J =]0;+\infty[$ par hypothèse de récurrence.
  * la fonction $t \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \ln^{k+1} te^{-t}t^{x-1}$ est continue sur $J =]0;+\infty[$.
— **hypothèse de domination.**
Soit $x \in K = [c,d]$. Notons que :
  * si $t \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
c \leqslant x \leqslant d &\Longrightarrow c\ln t \leqslant x\ln t \leqslant d\ln t\\
&\Longrightarrow t^c \leqslant t^x \leqslant t^d\\
&\Longrightarrow |\ln t|^{k+1}e^{-t}t^c \leqslant |\ln t|^{k+1}e^{-t}t^x \leqslant |\ln t|^{k+1}e^{-t}t^d\\
&\Longrightarrow |\ln t|^{k+1}e^{-t}t^{c-1} \leqslant |\ln t|^{k+1}e^{-t}t^{x-1} \leqslant |\ln t|^{k+1}e^{-t}t^{d-1}\\
&\Longrightarrow |\ln t|^{k+1}e^{-t}t^{c-1} \leqslant |f(x,t)| \leqslant |\ln t|^{k+1}e^{-t}t^{d-1}
\end{aligned}$$

  * si $t < 1$,

$$\begin{aligned}
c \leqslant x \leqslant d &\Longrightarrow c\ln t \geqslant x\ln t \geqslant d\ln t\\
&\Longrightarrow t^c \geqslant t^x \geqslant t^d\\
&\Longrightarrow |\ln t|^{k+1}e^{-t}t^c \geqslant |\ln t|^{k+1}e^{-t}t^x \geqslant |\ln t|^{k+1}e^{-t}t^d\\
&\Longrightarrow |\ln t|^{k+1}e^{-t}t^{c-1} \geqslant |\ln t|^{k+1}e^{-t}t^{x-1} \geqslant |\ln t|^{k+1}e^{-t}t^{d-1}\\
&\Longrightarrow |\ln t|^{k+1}e^{-t}t^{c-1} \geqslant |f(x,t)| \geqslant |\ln t|^{k+1}e^{-t}t^{d-1}
\end{aligned}$$

On pose $\psi(t) = \begin{cases} |\ln t|^{k+1}e^{-t}t^{c-1} & \text{si} \quad t \in]0;1[\\ |\ln t|^{k+1}e^{-t}t^{d-1} & \text{si} \quad t \geqslant 1\end{cases}$
La fonction ψ est continue et positive sur $J =]0;+\infty[$.
La fonction ψ est intégrable sur $J =]0;+\infty[$. En effet,

$$\psi(t) \underset{t\to 0}{=} o\left(\frac{1}{t^{1-\frac{c}{2}}}\right) \text{ avec } 1 - \frac{c}{2} < 1$$

$$\psi(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

On a de plus pour tout $t \in]0;+\infty[$, $|f(x,t)| \leqslant \psi(t)$: l'hypothèse de domination est vérifiée.

On en déduit que la fonction $h = \Gamma^{(k)}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $K = [c,d]$ et que pour tout $x \in [c,d]$:

$$\Gamma^{(k+1)}(x) = h'(x) = \int_0^{+\infty} \ln^{k+1} te^{-t}t^{x-1}dt.$$

On en déduit que la fonction Γ est de classe $\mathscr{C}^{k+1}$ sur $K = [c,d]$.
Puisque $[c,d]$ est un segment quelconque de $\mathbb{R}_+^*$ on en déduit que Γ est de classe $\mathscr{C}^{k+1}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
La récurrence est achevée.

4. La fonction Γ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$:

$$\Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} \ln^2(t)e^{-t}t^{x-1}dt.$$

L'intégrande $\ln^2(t)e^{-t}t^{x-1}$ est positive pour tout $t > 0$ donc l'intégrale est positive.
On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \Gamma''(x) \geqslant 0$ donc Γ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

5. Soit $x > 0$.

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^x dt$$

On intègre par parties. On pose :

$$\begin{cases} u(t) & = & t^x\\ v'(t) & = & e^{-t}\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(t) & = & xt^{x-1}\\ v(t) & = & -e^{-t}\end{cases}$$

Ainsi, définies les fonctions u, v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
De plus, le produit $u(t)v(t) = -e^{-t}t^x = -e^{-t}e^{x\ln t} = -e^{-t+x\ln t}$ a pour limites :

$$\lim_{t\to 0} -e^{-t}e^{x\ln t} = 0 \text{ et } \lim_{t\to+\infty} -e^{\overbrace{-t+x\ln t}^{\underset{t\to+\infty}{\sim} -t}} = 0$$

L'intégrale obtenue après intégration par parties est donc convergente de même que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}t^x dt$.
Il vient :

$$\begin{aligned}
\Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t}t^x dt\\
&= \left(\lim_{+\infty} uv - \lim_{0} uv\right) + x\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt\\
&= x\Gamma(x).
\end{aligned}$$

6. On démontre la propriété par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
   On a $\Gamma(0+1) = \Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$. La propriété est initialisée.
   De plus si $\Gamma(n+1) = n!$ pour un entier $n \in \mathbb{N}$ alors le résultat de la question précédente montre que :
   $$\Gamma(n+2) = \Gamma(n+1+1) = (n+1)\Gamma(n+1) = (n+1)n = (n+1)!$$
7. Montrons que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} = \sqrt{\pi}$.
   On effectue le changement de variable $u = \sqrt{t}$. La fonction $t \longmapsto \sqrt{t}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0; +\infty[$, strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et réalise une bijection de $]0; +\infty[$ sur $]0; +\infty[$.
   L'intégrale obtenue après changement de variable est donc de même nature que l'intégrale initiale, convergente.
   On a $u = \sqrt{t}$ donc $du = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2u} dt$ soit $dt = 2udu$:
   $$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{u} 2udu \\ &= 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = 2\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}\end{aligned}$$
   d'après les résultats de l'Exercice 1.

□

Solution Exercice 4. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose :
$$g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt.$$

1. Montrons que g est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est paire.
   On pose $f : (x,t) \longmapsto e^{-t^2} \cos(xt)$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé.
   La fonction $t \longmapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
   L'intégrale définissant $g(x)$ est donc impropre en $+\infty$.
   Mais $|e^{-t^2} \cos(xt)| \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.
   On en déduit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt$ est absolument convergente donc convergente
   (notons qu'on vient de démontrer que la fonction $t \longmapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$).
   Puisque x est quelconque dans $\mathbb{R}$ on en déduit que g est définie sur $\mathbb{R}$.
   Soit maintenant $x \in \mathbb{R}$.
   La parité de cos donne la parité de g :
   $$g(-x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(-xt) dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt = g(x)$$
2. Montrons que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimons $g'(x)$ sous forme d'une intégrale.
   — Pour tout $t \in J = [0; +\infty[$, la fonction $x \longmapsto f(x,t) = e^{-t^2} \cos(xt)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I = \mathbb{R}$.
   — Pour tout $x \in I = \mathbb{R}$:
     ∗ la fonction $t \longmapsto f(x,t)$ est intégrable sur $J = [0; +\infty[$ (on l'a montré à la question précédente).
     ∗ la fonction $t \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -te^{-t^2} \sin(xt)$ est continue sur $J = [0; +\infty[$.
   — **Hypothèse de domination**.
     Soit $x \in I = \mathbb{R}$ quelconque. On a pour tout $t \in J = [0; +\infty[$:
     $$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \left|-te^{-t^2} \sin(xt)\right| \leqslant te^{-t^2}.$$
     La fonction $\varphi : t \longmapsto te^{-t^2}$ est positive, continue et intégrable sur $J = [0; +\infty[$.

   On en déduit que la fonction g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \int_0^{+\infty} -te^{-t^2} \sin(xt) dt.$$
3. Montrons que g est solution de l'équation différentielle : $y' + \frac{x}{2} y = 0$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$. On intègre par parties l'intégrale définissant $g'(x)$.
   On pose :
   $$\left\{\begin{array}{lcl} u(t) & = & \sin(xt) \\ v'(t) & = & -te^{-t^2} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} u(t) & = & x\cos(xt) \\ v(t) & = & \frac{1}{2} e^{-t^2} \end{array}\right.$$
   Les fonctions u, v ainsi définies sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. Le produit uv admet des limites finies en 0 et $+\infty$, il vient :
   $$g'(x) = \int_0^{+\infty} -te^{-t^2} \sin(xt) dt = \left(\lim_{+\infty} uv - \lim_{0} uv\right) - \frac{x}{2} \int_0^{+\infty} \cos(xt) e^{-t^2} dt$$
   $$= -\frac{x}{2} g$$
   Il vient : $g'(x) + \frac{x}{2} g(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. On a $g'(x) = -\frac{x}{2} g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc il existe $K \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$
   $$g(x) = Ke^{-\frac{x^2}{4}}.$$
   De plus $g(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ donc $K = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
   On obtient finalement :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{x^2}{4}}.$$

$\square$

Solution Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. On pose :

$$\widehat{f} : x \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt}dt.$$

1. Montrons que $\widehat{f}$ est définie, continue et bornée sur $\mathbb{R}$.
   — La fonction $t \longmapsto f(t)e^{-ixt}$ est continue sur $\mathbb{R}$ par produit de telles fonctions.
   De plus $|f(t)e^{-ixt}| = |f(t)|$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   La fonction f étant par hypothèse intégrable sur $\mathbb{R}$, on en déduit que la fonction $t \longmapsto f(t)e^{-ixt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
   Par conséquent $\widehat{f}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.
   — ∗ Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \longmapsto f(t)e^{-ixt}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
   ∗ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \longmapsto f(t)e^{-ixt}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
   ∗ **Hypothèse de domination.**
   Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :
   $$\left|f(t)e^{-ixt}\right| = |f(t)|.$$
   La fonction $\varphi : t \longmapsto |f(t)|$ est positive, continue, intégrable sur $\mathbb{R}$.
   On en déduit que $\widehat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
   — Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
   $$\left|\widehat{f}(x)\right| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt}dt\right| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt.$$
   Cette dernière intégrale converge car f est intégrable sur $\mathbb{R}$.
   On en déduit que $\widehat{f}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.
2. On considère $f : t \longmapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$. Notons tout de suite que $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$.
   Montrons que $\widehat{f}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
   On définit pour tout $k \in \mathbb{N}$:
   $HR(k)$: "$\widehat{f} \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R})$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \widehat{f}^{(k)}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (-it)^k f(t)e^{-ixt}dt$".
   Le résultat de la question précédente montre que $HR(0)$ est vérifiée.
   On suppose que $HR(k)$ est vraie pour un entier $k \in \mathbb{N}$.
   On pose $h = \widehat{f}^{(k)}$ et $u(x,t) = (-it)^k f(t)e^{-ixt}$.
   — Pour tout $t \in J = \mathbb{R}$, la fonction $x \longmapsto u(x,t) = -(it)^k e^{-itx} f(t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   — Pour tout $x \in I = \mathbb{R}$:
   ∗ la fonction $t \longmapsto u(x,t) = (-it)^k f(t)e^{-ixt}$ est intégrable sur $J = \mathbb{R}$ car continue et de module $|f(t)|$ (fonction intégrable sur $\mathbb{R}$).
   ∗ la fonction $t \longmapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = (-it)^{k+1} f(t)e^{-ixt}$ est continue sur $\mathbb{R}$ par produit.
   — **Hypothèse de domination.**
   Soit $x \in I = \mathbb{R}$. Pour tout $t \in J = \mathbb{R}$ on a :
   $$\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right| = |f(t)|.$$
   La fonction $\varphi : t \longmapsto |f(t)|$ est positive, continue et intégrable sur $\mathbb{R}$.
   On en déduit que h est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et
   $$h'(x) = \widehat{f}^{(k+1)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-it)^{k+1} f(t)e^{-ixt}dt.$$
   La fonction $\widehat{f}$ est donc de classe $\mathscr{C}^{k+1}$ sur $\mathbb{R}$, la récurrence s'achève.
3. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\begin{aligned}\widehat{f}'(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (-it)e^{-t^2}e^{-ixt}dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (-it)e^{-t^2}(\cos(-xt) + i\sin(-xt))dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} -ite^{-t^2}\cos(xt)dt - \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2}\sin(xt)dt.\end{aligned}$$

   - La fonction $t \longmapsto te^{-t^2}\cos(xt)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et impaire donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2}\cos(xt)dt = 0$ (exercice classique).
   - La fonction $t \longmapsto te^{-t^2}\sin(xt)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et paire donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2}\sin(xt)dt = 2\int_0^{+\infty} te^{-t^2}\sin(xt)dt$ (classique aussi).

   On intègre cette dernière intégrale par parties
$$\left\{\begin{array}{rcl} u(t) &=& \sin(xt) \\ v'(t) &=& te^{-t^2}\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} u'(t) &=& x\cos(xt) \\ v(t) &=& -\frac{1}{2}e^{-t^2}\end{array}\right.$$
   et il vient :
$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} te^{-t^2}\sin(xt)dt &= \frac{x}{2}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)dt \\ &= \frac{x}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{x^2}{4}}\end{aligned}$$
   par l'exercice précédent.

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\widehat{f}'(x) = -2\int_0^{+\infty} te^{-t^2}\sin(xt)dt = -\frac{\sqrt{\pi}x}{2}e^{-\frac{x^2}{4}}.$$

On intègre cette égalité entre 0 et $x \in \mathbb{R}$ (la fonction $\widehat{f}'$ est continue sur $\mathbb{R}$) il vient :

$$\begin{aligned}\widehat{f}(x) - \widehat{f}(0) &= \int_0^x \widehat{f}'(t)dt = -\sqrt{\pi}\int_0^x \frac{t}{2}e^{-\frac{t^2}{4}}dt \\ &= -\sqrt{\pi}\left[-e^{-\frac{t^2}{4}}\right]_0^x = \sqrt{\pi}e^{-\frac{x^2}{4}} - \sqrt{\pi}\end{aligned}$$

avec $\widehat{f}(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = 2\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$.

On en déduit que $\widehat{f}(x) = \sqrt{\pi}e^{-\frac{x^2}{4}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$\square$

Solution Exercice 6. Soit f une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$.

On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}f(t)dt$.

Montrons que F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour cela, on montre que f est continue sur tout intervalle du type $K = [c;+\infty[$ avec $c > 0$.

On définit pour tout $k \in \mathbb{N}$, la propriété :

$HR(k)$: "la fonction F est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $K = [c;+\infty[$ et pour tout $x \in [c;+\infty[$,

$$F^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (-t)^k e^{-xt}f(t)dt."$$

Initialisation.

Montrons que F est continue sur $[c;+\infty[$. On pose $u : (x,t) \longmapsto e^{-xt}f(t)$.

— Pour tout $t \in J = \mathbb{R}_+$, la fonction $x \longmapsto u(x,t) = e^{-xt}f(t)$ est continue sur $K = [c;+\infty[$ car la fonction exp est continue sur $\mathbb{R}$.

— Pour tout $x \in K = [c;+\infty[$, la fonction $t \longmapsto u(x,t) = e^{-xt}f(t)dt$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ car la fonction exp est continue sur $\mathbb{R}$.

— **Hypothèse de domination.**

Soit $x \in K = [c,+\infty[\subset I = \mathbb{R}_+$.

Pour tout $t \in J = \mathbb{R}_+$ on a ($x \geqslant c \Longrightarrow -xt \leqslant -ct \Longrightarrow e^{-xt} \leqslant e^{-ct}$) et par conséquent :

$$\left|e^{-xt}f(t)\right| \leqslant Me^{-ct}$$

avec $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $|f(t)| \leqslant M$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ (f est bornée sur $\mathbb{R}_+$).

La fonction $t \longmapsto Me^{-ct}$ est positive, continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

On en déduit que F est continue sur $[c;+\infty[$.

Hérédité.

On suppose que $F \in \mathscr{C}^k([c;+\infty[)$ avec :

$$\forall x \in [c;+\infty[, F^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (-t)^k e^{-xt}f(t)dt.$$

Posons $h = F^{(k)}$ et $u : (x,t) \longmapsto (-t)^k e^{-xt}f(t)$ et montrons que h est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[c;+\infty[$.

— Pour tout $t \in J = [0;+\infty[$ la fonction $x \longmapsto (-t)^k e^{-xt}f(t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[c;+\infty[$ car exp est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

— Pour tout $x \in [c;+\infty[$:

  * la fonction $t \longmapsto (-t)^k e^{-xt}f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $(-t)^k e^{-xt}f(t) \underset{t\to+\infty}{=} O\left(t^k e^{-ct}\right)$.
  * la fonction $t \longmapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = (-t)^{k+1}e^{-xt}f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$

— **Hypothèse de domination.**

Soit $x \in [c,+\infty[$. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right| = t^{k+1}e^{-xt}f(t) \leqslant t^{k+1}e^{-ct}f(t).$$

La fonction $t \longmapsto t^{k+1}e^{-ct}f(t)$ est positive, continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

On en déduit que $h = F^{(k)}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[c;+\infty[$ et

$$\forall x \in [c;+\infty[, h'(x) = F^{(k+1)}(x) = \int_0^{+\infty} (-t)^{k+1}e^{-xt}f(t)dt.$$

La récurrence s'achève.

On a finalement prouvé que F est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $[c;+\infty[$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ et pour tout réel $c \in \mathbb{R}_+^*$.

Par conséquent F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. En effet :

$$\begin{aligned}\left(F \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*)\right) &\Longleftrightarrow (F \text{ est } k \text{ fois dérivable sur } \mathbb{R}_+^*) \\ &\Longleftrightarrow (F \text{ est } k \text{ fois dérivable en tout point de } \mathbb{R}_+^*).\end{aligned}$$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $k \in \mathbb{N}$.

F est k fois dérivable sur tout segment $[c,+\infty[$, $c > 0$.

Il existe $c > 0$ tel que $x_0 \in [c,+\infty[$, intervalle sur lequel F est k fois dérivable.

Il s'en suit que F est k fois dérivable en tout $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Étude en 0.

En général F n'est pas de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$.

Considérons la fonction sin continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$ (comme requis dans l'énoncé).

Pourtant F n'est même pas définie en 0 : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin(t)dt$ diverge. $\square$

Solution Exercice 7. Soit g la fonction définie par $g(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{t}e^{-t}dt$.

1. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, la fonction $t\longmapsto \frac{\sin(xt)}{t}e^{-t}$ est continue sur $]0;+\infty[$.

   L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{t}e^{-t}dt$ est donc impropre en 0 et en $+\infty$.

   — En 0 : $\frac{\sin(xt)}{t}e^{-t}\underset{t\to 0}{\sim}\frac{xt}{t}=x$.
   La fonction $t\longmapsto\frac{\sin(xt)}{t}e^{-t}$ est donc prolongeable par continuité en 0.
   L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{t}e^{-t}dt$ est faussement impropre en 0.

   — En $+\infty$: $\frac{\sin(xt)}{t}e^{-t}\underset{t\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.
   D'où la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{t}e^{-t}dt$.

   On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{t}e^{-t}dt$ converge pour tout $x\in\mathbb{R}$.
   Par conséquent g est définie sur $\mathscr{D}_g=\mathbb{R}$.

2. **Continuité**
   Montrons que g est continue sur tout segment du type $[-a;a]$, $a>0$.
   On pose $f:(x,t)\longmapsto\begin{cases}\frac{\sin(xt)}{t}e^{-t} & \text{si}\quad (x,t)\in[-a;a]\times\mathbb{R}_+^*\\ x & \text{si}\quad (x,t)\in[-a;a]\times\{0\}\end{cases}$.

   — Pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, la fonction $x\longmapsto f(x,t)$ est continue sur $[-a;a]$:
   si $t=0$ il s'agit de la fonction linéaire, $x\longmapsto x$.
   si $t\neq 0$, la fonction sin étant continue sur $\mathbb{R}_+$, la conclusion suit.

   — Pour tout $x\in[-a;a]$, la fonction $t\longmapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$: en effet, $t\longmapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ et $\lim\limits_{t\to 0}f(x,t)=x=f(x,0)$.

   — **Hypothèse de domination.**
   Soit $x\in[-a;a]$ fixé dans la suite de cette question.
   Pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$,

$$|f(x,t)|=\left|\frac{\sin(xt)}{t}e^{-t}\right|\leqslant\frac{|xt|}{t}e^{-t}=|x|e^{-t}\leqslant ae^{-t}.$$

   (on a utilisé l'inégalité classique $|\sin(u)|\leqslant|u|$).
   On pose $\varphi:t\longmapsto\begin{cases}ae^{-t} & \text{si}\quad t>0\\ a & \text{si}\quad t=0.\end{cases}$
   Alors φ est positive, continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $t\in\mathbb{R}_+$:

$$|f(x,t)|\leqslant\varphi(t).$$

   On en déduit que $g:x\longmapsto\int_0^{+\infty}f(x,t)dt$ est continue sur $[-a;a]$.

   Dérivabilité.
   On montre que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-a;a]$.

   — Pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, la fonction $x\longmapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-a;a]$:
   si $t=0$ il s'agit de la fonction linéaire $x\longmapsto x$.
   Si $t\neq 0$ il s'agit de la fonction $x\longmapsto\frac{\sin(xt)}{t}e^{-t}$ qui est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-a;a]$.

   — Pour tout $x\in[-a;a]$:
     * la fonction $t\longmapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (cf. question 1.)
     * la fonction $t\longmapsto\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)=\begin{cases}1 & \text{si}\quad t=0\\ \cos(xt)e^{-t} & \text{si}\quad t\neq 0\end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

   — **Hypothèse de domination.**
   Soit $x\in[-a;a]$. On pose $\psi(t)=e^{-t}$ et on obtient pour tout $t\in\mathbb{R}_+$:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|\leqslant e^{-t}=\psi(t).$$

   On en déduit que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-a;a]$ et

$$\forall x\in[-a;a],\ g'(x)=\int_0^{+\infty}\cos(xt)e^{-t}dt.$$

   Puisque a est quelconque dans $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ et que sa dérivée y est continue.
   En effet, pour tout $x_0\in\mathbb{R}$, il existe $a>0$ tel que $x_0\in[-a;a]$ segment sur lequel g de classe $\mathscr{C}^1$.

3. Soit $x\in\mathbb{R}$, on a $g'(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos(xt)e^{-t}dt=\mathrm{Re}\int_0^{+\infty}e^{ixt}e^{-t}dt$.

   Soit $A>0$. On a :

$$\begin{aligned}\int_0^A e^{ixt-t}dt&=\int_0^A e^{t(ix-1)}dt\\&=\frac{1}{ix-1}\left[e^{t(ix-1)}\right]_0^A\\&=\frac{1}{ix-1}\left(e^{A(ix-1)}-1\right)\\&=\frac{e^{Aix}e^{-A}}{ix-1}-\frac{1}{ix-1}\end{aligned}$$

   Or : $\left|e^{Aix}e^{-A}\right|=e^{-A}\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow}0$.
   Ainsi : $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{t(ix-1)}dt=-\frac{1}{ix-1}=\frac{1}{1-ix}=\frac{1+ix}{|1-ix|^2}=\frac{1}{1+x^2}+i\frac{x}{1+x^2}$.
   Par conséquent :

$$\int_0^{+\infty}\cos(xt)e^{-t}=\frac{1}{1+x^2}.$$

On obtient alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ (g' est continue sur $\mathbb{R}$) :

$$g(x) - g(0) = \int_0^x g'(t)dt = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \arctan(x).$$

Notons enfin que $g(0) = \int_0^{+\infty} 0dt = 0$.
Finalement, $g(x) = \arctan(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$\square$