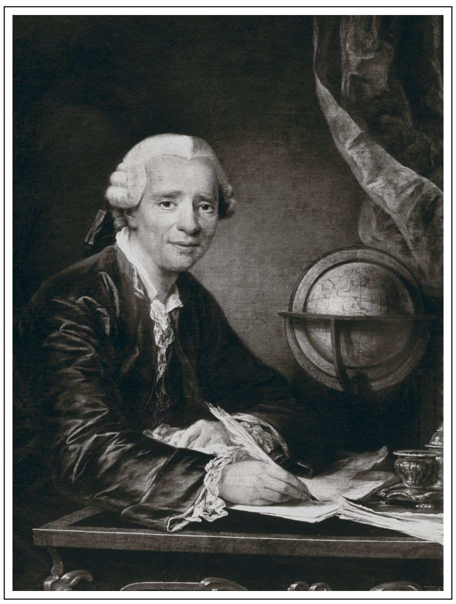
Chapitre 13 : Fonctions de plusieurs variables

Plan du chapitre



Introduction et motivations du chapitre

Jean Le Rond d'Alembert est un mathématicien, physicien, philosophe né en 1717 à Paris. Ses contributions à chacune de ces disciplines sont nombreuses et essentielles. Il a notamment été précurseur dans l'étude des équations aux dérivées partielles lorsqu'il propose, au milieu du 18^e siècle, l'équation d'onde pour une corde tendue :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0.$$

On propose de développer les outils permettant, en particulier, de résoudre cette équation aux dérivées partielles.

1 - Fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$

Dans cette partie on étudie les fonctions de deux ou trois variables à valeurs réelles :

$$f : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^p & \longmapsto & \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_p) & \longmapsto & f(x_1, \ldots, x_p) \end{array} \right.$$

On donne dans un premier temps les définitions et résultats pour une fonction de deux variables.

1.A - *Ensemble de définition, limite et continuité*

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction de deux variables réelles.
L'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f est l'ensemble des couples $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquels $f(x, y)$ existe.

Exemple

— La fonctions $f : (x, y) \longmapsto \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

— La fonction $g : (x, y) \longmapsto \ln(xy)$ est définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2 \cup (\mathbb{R}_-^*)^2$.

— La fonction $h : (x, y) \longmapsto \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ est définie pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $x^2 + y^2 - 1 \geqslant 0$.
L'ensemble $\mathscr{D}_f$ est donc le complémentaire du disque ouvert unité.

On représente graphiquement une fonction $f : x \longmapsto f(x)$ d'une variable réelle par les points $(x, f(x))$.
On obtient alors une courbe dans le plan c'est-à-dire un objet unidimensionnel dans le plan.

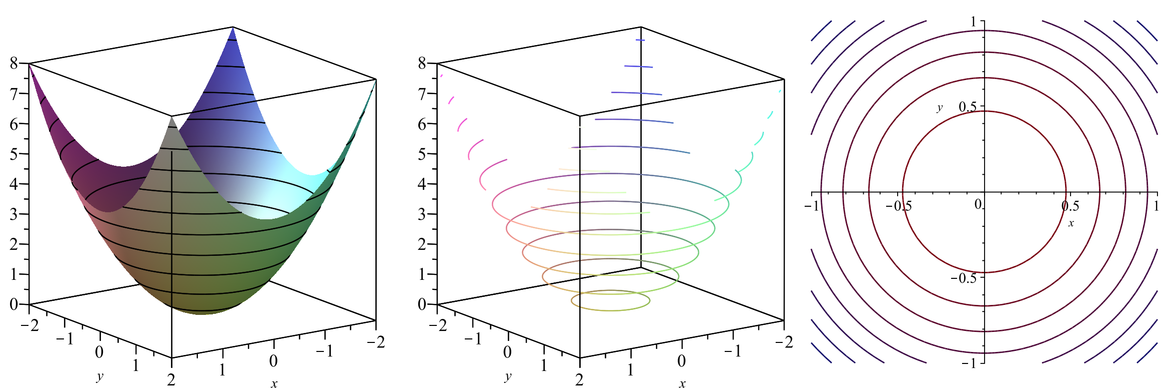
On représentera graphiquement une fonction $f : (x, y) \longmapsto f(x, y)$ de deux variables réelles par les points $(x, y, f(x, y))$ de l'espace. On obtient alors une surface : un objet bidimensionnel dans l'espace.
La cote du triplet $(x, y, f(x, y))$ est donc l'image $z = f(x, y)$ du couple $(x, y) \in \mathscr{D}_f$.
On dira que $z = f(x, y)$ est l'équation de la *surface représentative* de f.

Définition 1: ligne de niveau

On appelle ligne de niveau $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé, la courbe d'équation $f(x, y) = \lambda$.

Exemple

Soit $f : (x, y) \longmapsto x^2 + y^2$. On a $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^2$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_+$.
La surface d'équation $z = f(x, y)$, i.e. l'ensemble des points $(x, y, f(x, y))$, est représentée ci-dessous.
La ligne de niveau $\lambda = f(x, y)$ avec $\lambda > 0$ est un cercle de rayon $\sqrt{\lambda}$ (tracé dans le plan $z = \lambda$).



Définition 2: limite et continuité

On note $||\cdot||$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$: $||(x,y)|| = \sqrt{x^2+y^2}$.

— On dit que f est bornée si :
$$\exists M \geqslant 0, \forall (x,y) \in \mathscr{D}_f : |f(x,y)| \leqslant M.$$

— On dit que f admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ en $(x_0,y_0) \in \mathscr{D}_f$ si :
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall (x,y) \in \mathscr{D}_f, \left(||(x,y)-(x_0,y_0)|| < \alpha \Longrightarrow |f(x,y)-\ell| < \varepsilon\right).$$

— On dit que f est continue en $(x_0,y_0) \in \mathscr{D}_f$ si :
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall (x,y) \in \mathscr{D}_f, \left(||(x,y)-(x_0,y_0)|| < \alpha \Longrightarrow |f(x,y)-f(x_0,y_0)| < \varepsilon\right).$$

Une fonction f est continue sur une partie $\mathscr{U} \subset \mathbb{R}^2$ si f est continue en chacun des points $(x_0,y_0) \in \mathscr{U}$.

Les théorème généraux des opérations sur les fonctions continues valables pour les fonctions d'une variable réelle le restent pour les fonctions de deux (ou trois, etc.) variables : la somme, le produit, la composée, le quotient dont le dénominateur ne s'annule pas de fonctions continues est une fonction continue.

Exemple

— La fonction $f : (x,y) \longmapsto \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par produit et quotient de telles fonctions, le dénominateur ne s'annulant qu'en $(0,0)$.

— La fonction $g : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}\right.$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme ci-dessus.

En revanche, g n'est pas continue en $(0,0)$ car (par exemple) :
$$g(x,x) = \frac{1}{2} \underset{(x,x)\to(0,0)}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \neq 0 = g(0,0).$$

Remarques

On a $g(x,0) = 0 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ mais cela ne suffit donc pas pour assurer la continuité en 0 de la fonction g.

Théorème 3: fonction continue sur un ensemble fermé-borné

Toute fonction $f : A \to \mathbb{R}^2$ continue sur une partie **fermée et bornée** $A \subset \mathbb{R}^2$ est bornée et atteint ses bornes. Dans ce cas f admet un minimum et un maximum global sur A.

1.B - Dérivées partielles premières et plan tangent

Soit f une fonction de deux variables définie sur un ouvert $\mathscr{U} \subset \mathbb{R}^2$.

Les définitions suivantes s'adaptent dans le cas d'une partie quelconque (non nécessairement ouverte) en travaillant en un point intérieur.

Définition 4: dérivées partielles

Soit $a = (x_0,y_0) \in \mathscr{U}$. Sous réserve d'existence on définit les dérivées partielles premières en a :
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x_0,y_0+k)-f(x_0,y_0)}{k}.$$

Notation 5

On notera également $\partial_1 f(a)$, $\partial_2 f(a)$ les dérivées partielles par rapport à la première, seconde variable.

Définition 6: fonction de classe $\mathscr{C}^1$

On dit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert $\mathscr{U} \subset \mathbb{R}^2$ si les dérivées partielles existent et sont continues en tout point de $\mathscr{U}$.

Exemple

La fonction $f : (x, y) \longmapsto x^2 + 5yx^3$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 15yx^2 \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 5x^3.$$

Définition 7: Gradient

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert $\mathscr{U} \subset \mathbb{R}^2$ et $(x_0, y_0) \in \mathscr{U}$.
On appelle gradient de f au point (x_0, y_0) le vecteur

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0); \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right).$$

Théorème 8: Formule de Taylor-Young à l'ordre 1

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^2$. Alors pour tout $(x_0, y_0) \in \mathscr{U}$:

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) &\underset{(h,k)\to(0,0)}{=} f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k + o(||(h,k)||) \\ &\underset{(h,k)\to(0,0)}{=} f(x_0, y_0) + (\nabla f(x_0, y_0)|(h,k)) + o(||(h,k)||). \end{aligned}$$

Remarques

Dans le théorème précédent $(h, k) \to (0, 0)$ signifie que les deux variables h et k tendent vers 0 ce qui est équivalent à $||(h, k)|| = \sqrt{h^2 + k^2} \to 0$.

Théorème 9

Soit $f : \mathscr{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert $\mathscr{U}$ et $(x_0, y_0) \in \mathscr{U}$.

1. Si le gradient $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$ est non nul alors il est orthogonal à la ligne de niveau $f(x, y) = \lambda$ passant par le point $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.
2. De plus la fonction $t \longmapsto f((x_0, y_0) + t\nabla f(x_0, y_0))$ est croissante au voisinage de 0.
   Autrement dit : le gradient est orienté dans le sens des valeurs croissantes de f.

Démonstration. 1. Soit $\mathcal{S}$ la surface représentative d'équation $z = f(x, y)$.
Soit (x_0, y_0, λ) un point sur la courbe de niveau $f(x, y) = \lambda$.
On projette cette courbe dans le plan xOy.
La tangente à la courbe d'équation $f(x, y) = \lambda$ a alors pour équation cartésienne dans ce plan

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

Par conséquent le gradient $\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0); \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$ est normal à la tangente à la courbe de niveau donc orthogonal à cette ligne de niveau.

2. On note $t \longmapsto g(t) = f((x_0, y_0) + t\nabla f(x_0, y_0))$. La fonction g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle centré autour de 0 car la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $\mathscr{U}$ contenant (x_0, y_0).
La formule de Taylor-Young à l'ordre 1 permet d'évaluer l'accroissement suivant autour de (x_0, y_0) :

$$f\left((x_0, y_0) + t\nabla f(x_0, y_0)\right) - f(x_0, y_0) \underset{t\to 0}{=} t(\nabla f(x_0, y_0)|\nabla f(x_0, y_0)) + t||\nabla f(x_0, y_0)||\varepsilon(t)$$
$$\iff \frac{f((x_0, y_0) + t\nabla f(x_0, y_0)) - f(x_0, y_0)}{t} \underset{t\to 0}{=} ||\nabla f(x_0, y_0)||^2 + ||\nabla f(x_0, y_0)||\varepsilon(t).$$

Ainsi $g'(0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f\left((x_0, y_0) + t\nabla f(x_0, y_0)\right) - f(x_0, y_0)}{t} = ||\nabla f(x_0, y_0)||^2 > 0.$
Puisque g est $\mathscr{C}^1$, la dérivée de g reste positive sur un intervalle centré autour de 0.
Par conséquent la fonction $t \longmapsto f((x_0, y_0) + t\nabla f(x_0, y_0))$ est strictement croissante sur un voisinage de 0.
Conclusion : le gradient $\nabla f(x_0, y_0)$ est orienté dans le sens des valeurs croissantes de f.

□

Remarques

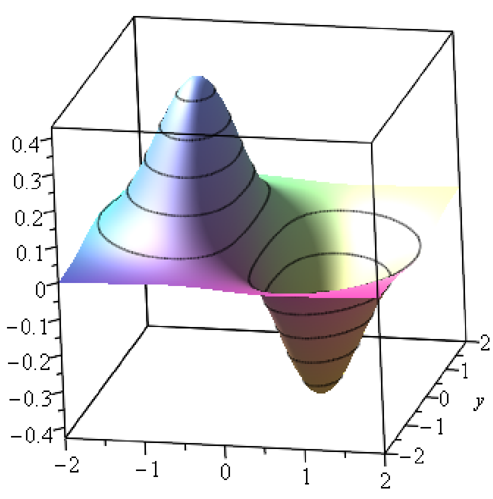
Remarquons que si $v = (h, k)$ est un vecteur unitaire alors la pente sur la surface $\mathcal{S}$ lorsqu'on la suit le long du vecteur v est donnée par :

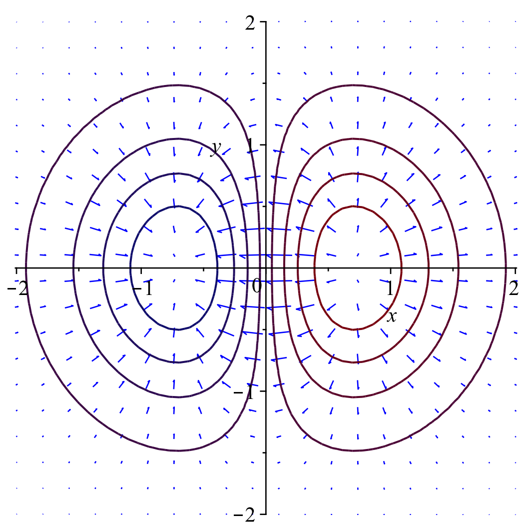
$$\lim_{t\to 0} \frac{f((x_0, y_0) + t(h, k)) - f(x_0, y_0)}{t} = (\nabla f(x_0, y_0)|(h, k)) \underset{\text{(Cauchy-Schwarz)}}{\leqslant} ||\nabla f(x_0, y_0)||\,||(h, k)|| = ||\nabla f(x_0, y_0)||$$

avec égalité si et seulement si (h, k) est colinéaire à $\nabla f(x_0, y_0)$ et dans le même sens : le gradient indique donc la pente maximale lorsqu'on parcourt la surface $\mathcal{S}$ suivant un vecteur donné.

Exemple

Avec la fonction $(x, y) \longmapsto -xe^{-x^2-y^2}$ on obtient les représentations suivantes illustrant les propriétés du gradient démontrées ci-dessus.





1.C - Dérivation des fonctions composées

Définition 10

Soit $\mathscr{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $a = (x_0, y_0) \in \mathscr{U}$.
On appelle dérivée selon le vecteur $u = (d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2$ la limite, si elle existe et est finie :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + hu) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f((x_0, y_0) + h(d_1, d_2)) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{U}$ alors la dérivée directionnelle de f au point $a = (x_0, y_0)$ dans la direction $u = (d_1, d_2)$ est égale à :

$$(\nabla f(a) \mid u).$$

Calcul :

Remarques

Si $u = (1, 0)$ ou $u = (0, 1)$, on retrouve les dérivées partielles premières.

Théorème 11: dérivations en chaîne

Soit $\mathscr{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle réel.
Soient φ et f des fonctions respectivement de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et sur $\mathscr{U}$:

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathscr{U} \\ t & \longmapsto & (x(t), y(t)) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{U} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & f(x, y) \end{array} \right.$$

Alors la composée $f \circ \varphi$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et

$$\begin{aligned} \forall t \in I, (f \circ \varphi)'(t) &= x'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \\ &= (\nabla f(\varphi(t)) \,|\varphi'(t)\,) \end{aligned}$$

Démonstration. C'est une conséquence de la définition précédente avec la direction $u = (x'(t) + o(1), y'(t) + o(1))$ en remarquant que :

$$\begin{aligned} \frac{f(x(t+h), y(t+h)) - f(x(t), y(t))}{h} &= \frac{f[x(t) + hx'(t) + o(h), y(t) + hy'(t) + o(h)] - f(x(t), y(t))}{h} \\ &= \frac{f[x(t) + h(x'(t) + o(1)), y(t) + h(y'(t) + o(1))] - f(x(t), y(t))}{h} \end{aligned}$$

□

Théorème 12: dérivations en chaîne

Soient $f : \begin{array}{|lcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$, $x : \begin{array}{|lcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & x(u,v) \end{array}$ et $y : \begin{array}{|lcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & y(u,v) \end{array}$ des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$

Alors la fonction $F : \begin{array}{|lcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & f(x(u,v),y(u,v)) \end{array}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et :

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v),y(u,v)) + \frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v),y(u,v)).$$

$$\frac{\partial F}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v),y(u,v)) + \frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v),y(u,v)).$$

Démonstration. On traite le cas de la dérivée partielle par rapport à la variable u.

Dans ce cas on fixe la variable v : $v = v_0$ et on note $X(u) = x(u,v_0)$, $Y(u) = y(u,v_0)$.

On note $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : u \longmapsto (X(u),Y(u))$.

La dérivation des fonctions composées du type : $F : u \longmapsto f \circ \varphi(u)$ donne l'existence de la dérivée partielle suivante ainsi que son expression :

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial u}(u,v_0) &= (f\circ\varphi)'(u) = X'(u)\frac{\partial f}{\partial x}(X(u),Y(u)) + Y'(u)\frac{\partial f}{\partial y}(X(u),Y(u)) \\ &= \frac{\partial x}{\partial u}(u,v_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v_0),y(u,v_0)) + \frac{\partial x}{\partial u}(u,v_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v_0),y(u,v_0)).\end{aligned}$$

La dérivée partielle par rapport à v s'obtient de manière analogue.

On obtient des dérivée partielles continues par hypothèse : $F \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$. □

Exercice 13: passage en polaire (à retenir)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. On pose $F : (r,\theta) \longmapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.
Calculer les dérivées partielles de F.

Solution. La fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ par composition et pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

□

1.D - *Dérivées partielles secondes*

Si elles existent, on définit les quatre dérivées partielles secondes suivantes :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Définition 14

Une fonction est dite de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^2$ si ses dérivées partielles secondes existent et sont continues sur $\mathscr{U}$.

Théorème 15: Théorème de Schwarz

Soit $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^2$.
Alors les dérivées partielles suivantes existent et sont égales :

$$\forall (x_0, y_0) \in \mathscr{U}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0).$$

Théorème 16: Formule de Taylor-Young à l'ordre 2

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert $\mathscr{U} \subset \mathbb{R}^2$ alors pour tout $(x_0, y_0) \in \mathscr{U}$:

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) \underset{(h,k)\to(0,0)}{=} & f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k \\ & + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)k^2\right) + o(||(h,k)||^2) \end{aligned}$$

On note $A = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$ et $H = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$.
Cette matrice A est symétrique et la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 devient alors :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) \underset{(h,k)\to(0,0)}{=} f(x_0, y_0) + (\nabla f(x_0, y_0)|H) + \frac{1}{2}{}^tHAH + o(||H||^2).$$

Définition 17: Matrice Hessienne

La matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$ est appelée matrice Hessienne de f en (x_0, y_0).

Exercice 18

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.

1. Déterminer les dérivées partielles premières de la fonction f.
2. Déterminer les points $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$.
3. Écrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 pour la fonction f aux points déterminés à la question précédente.
4. Réduire les matrices Hessiennes en chaque point (x_0, y_0) et récrire la formule de Taylor-Young.
5. Montrer qu'au voisinage de $(1, 1)$ et $(-1, -1)$, f est minorée par $f(1, 1) = f(-1, -1)$.
   Qu'en est-il en $(0, 0)$?

Solution. 1. La fonction f est polynomiale donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 - 4y \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4y^3 - 4x.$$

2. Le gradient en un point (x_0, y_0) est nul si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} y_0 = x_0^3 \\ x_0 = y_0^3 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} y_0 = x_0^3 \\ x_0 = x_0^9 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{r} y_0 = x_0^3 \\ x_0(1 - x_0^8) = 0 \end{array} \right.$$

On obtient trois points où le gradient est nul :

$$(0, 0) \quad ; \quad (-1, -1) \quad ; \quad (1, 1).$$

3. La fonction f est polynomiale donc de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
La formule de Taylor-Young à l'ordre 2 s'applique.
Le gradient étant nul en chacun des trois points déterminés ci-dessus, la partie linéaire du développement limité d'ordre 2 est nulle en chaque point (x_0, y_0).
On calcule les dérivées partielles secondes :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2 \quad ; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -4 \quad ; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12y^2.$$

On obtient :

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) \underset{(h,k)\to(0,0)}{=} \frac{1}{2}\,{}^tHA_{(x_0,y_0)}H + o(||H||^2)$$

avec $A_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad A_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix} \quad ; \quad A_{(-1,-1)} = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}$.

4. $*$ La matrice $A_{(0,0)}$ est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres car symétrique réelle.
On trouve :
— $\chi_A(X) = X^2 - 16 = (X-4)(X+4)$
— $E_4(A) = \text{Vect}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $E_{-4}(A) = \text{Vect}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.
On pose $P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in SO_2(\mathbb{R})$.
On obtient : $A_{(0,0)} = PD\,{}^tP$ avec $D = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.
On pose $H' = \begin{pmatrix} h' \\ k' \end{pmatrix} = {}^tPH$ et la formule de Taylor-Young devient :

$$f((0,0)+(h,k)) - f(0,0) = \frac{1}{2}(-4h'^2 + 4k'^2) + o(||H'||^2).$$

(notons que $P \in SO_2(\mathbb{R})$ est la matrice d'une isométrie donc $||H|| = ||PH'|| = ||H'||$).
$*$ La matrice $B = A_{(1,1)} = A_{(-1,1)}$ est également symétrique réelle.
On trouve $Sp(B) = \{8, 16\}$ et la même matrice orthogonale P que ci-dessus donne :

$$B = P\Delta\,{}^tP \text{ avec } \Delta = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

Il vient :

$$f((x_0,y_0)+(h,k)) - f(x_0,y_0) = \frac{1}{2}(8h'^2 + 16k'^2) + o(||H'||^2).$$

5. $*$ On étudie la situation en $(1,1)$; elle est similaire en $(-1,-1)$.
La formule de Taylor-Young en $(1,1)$ montre que :

$$\begin{aligned} & f((1,1)+(h,k)) - f(1,1) \underset{(h,k)\to(0,0)}{=} 4h'^2 + 8k'^2 + o(||H'||^2) \\ & \Longrightarrow f((1,1)+(h,k)) - f(1,1) \geqslant 4h'^2 + 4k'^2 + o(||H'||^2) = 4||H'||^2 + ||H'||^2\varepsilon(||H||) \\ & \Longrightarrow f((1,1)+(h,k)) - f(1,1) \geqslant ||H'||^2(4 + \varepsilon(||H'||)). \end{aligned}$$

Mais $\varepsilon(||H'||) \underset{||H'||\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc si $||H'|| = ||H||$ est proche de 0 alors $4 + \varepsilon(||H'||)) > 0$.
Par conséquent il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de $(1,1)$ sur lequel pour tout $(h,k) \in \mathcal{V}$ on a $f((1,1)+(h,k)) - f(1,1) > 0$.
La fonction f est minorée sur $\mathcal{V}$ par $f(1,1) = -1$: on dira que la fonction f présente un minimum local en $(1,1)$ et que ce minimum vaut $f(1,1) = -1$.
$*$ Étudions maintenant la situation en $(0,0)$.
Elle est différente car les valeurs propres de la matrice Hessienne sont de signes opposés.
Avec des notations similaires au cas précédent, on montre que pour $||H|| = ||(h,k)||$ proche de 0, on a :

$$f((0,0)+(h,k)) - f(0,0) \underset{(h,k)\to(0,0)}{=} -2h'^2 + 2k'^2 + o(||H'||^2)$$

- Si $k'=0$ alors $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = H = PH' = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h' \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{h'}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_{-4}(A)$ et :

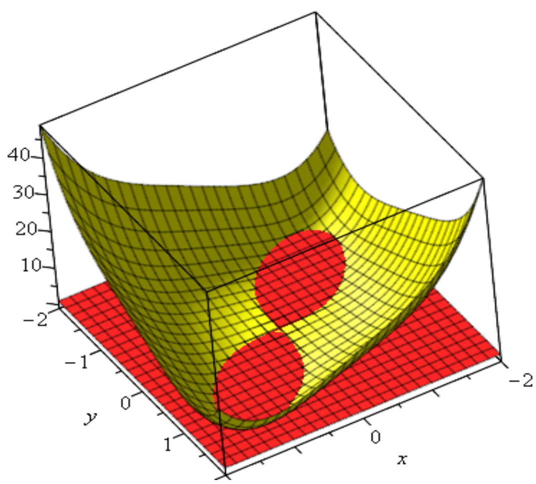
$$f((0,0)+(h,k)) - f(0,0) \underset{(h,k)\to(0,0)}{=} -2h'^2 + h'^2\varepsilon(h') = h'^2(-2+\varepsilon(h')).$$

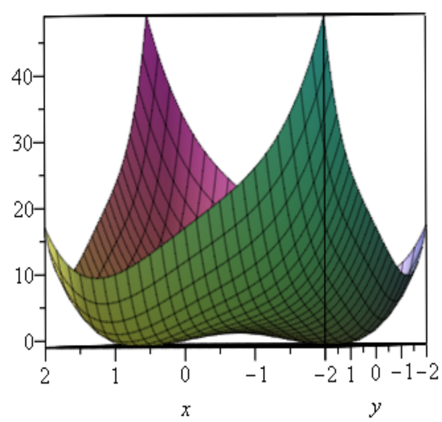
  Puisque $\varepsilon(h') \underset{h'\to 0}{\longrightarrow} 0$ alors $f((0,0)+(h,k)) - f(0,0)$ est négatif pour $h' = ||(h',k')|| = ||H'|| = ||H|| = ||(h,k)||$ proche de 0.
- Si $h'=0$ alors $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = H = PH' = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ k' \end{pmatrix} = \frac{k'}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_{4}(A)$ et :

$$f((0,0)+(h,k)) - f(0,0) \underset{(h,k)\to(0,0)}{=} 2k'^2 + k'^2\varepsilon(k') = k'^2(2+\varepsilon(k')).$$

  Puisque $\varepsilon(k') \underset{k'\to 0}{\longrightarrow} 0$ alors $f((0,0)+(h,k)) - f(0,0)$ est positif pour $k' = ||(h',k')|| = ||H'|| = ||H|| = ||(h,k)||$ proche de 0.

Par conséquent $f((0,0)+(h',k')) - f(0,0)$ change de signe au voisinage de $(0,0)$: il n'y a pas d'extremum local en $(0,0)$: on dira qu'il s'agit d'un point col/selle.





$\square$

1.E - *Extrema d'une fonction de deux variables*

Définition 19: extremum local, global

Soit $f : \mathscr{D}_f \to \mathbb{R}$ et $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$.

— On dit que f admet un minimum local en (x_0,y_0) s'il existe un voisinage $\mathscr{U}$ de (x_0,y_0) tel que :

$$\forall (x,y) \in \mathscr{U}, f(x,y) \geqslant f(x_0,y_0).$$

— On dit que f admet un maximum local en (x_0,y_0) s'il existe un voisinage $\mathscr{U}$ de (x_0,y_0) tel que :

$$\forall (x,y) \in \mathscr{U}, f(x,y) \leqslant f(x_0,y_0).$$

— On dira qu'un maximum (resp. minimum) est global s'il l'inégalité $f(x,y) \leqslant f(x_0,y_0)$ (resp. $f(x,y) \geqslant f(x_0,y_0)$) est valable sur tout $\mathscr{D}_f$.

Définition 20: point critique

Soit $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert $\mathscr{U} \subset \mathbb{R}^2$ et $(x_0, y_0) \in \mathscr{U}$.
On dit que (x_0, y_0) est un point critique de f si :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \text{ i.e. } \nabla f(x_0, y_0) = (0, 0).$$

Théorème 21: condition nécessaire d'existence d'un extremum

Si $(x_0, y_0) \in \mathscr{U}$ est un extremum de la fonction $f \in \mathscr{C}^1(\mathscr{U})$ sur un ouvert $\mathscr{U} \subset \mathbb{R}^2$ alors (x_0, y_0) est un point critique : $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Démonstration. On suppose par l'absurde que $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$.

On traite le cas où $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$, l'autre cas se traite de manière similaire. La formule de Taylor-Young à l'ordre 1 donne au voisinage de (x_0, y_0) :

$$\begin{aligned} f((x_0, y_0) + (h, 0)) &\underset{h \to 0}{=} f(x_0, y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + o(||(h, 0)||) \\ &= f(x_0, y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + o(h) \\ &= f(x_0, y_0) + h\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \varepsilon(h)\right) \text{ avec } \varepsilon(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, $f((x_0, y_0) + (h, 0)) - f(x_0, y_0)$ est du signe de $h\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}_{\neq 0}$ lorsque $h \to 0$.

En particulier, $f((x_0, y_0) + (h, 0)) - f(x_0, y_0)$ change de signe lorsque $h \to 0$ ce qui contredit le fait que f admet un extremum en (x_0, y_0). En conclusion : $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$: (x_0, y_0) est un point critique. $\square$

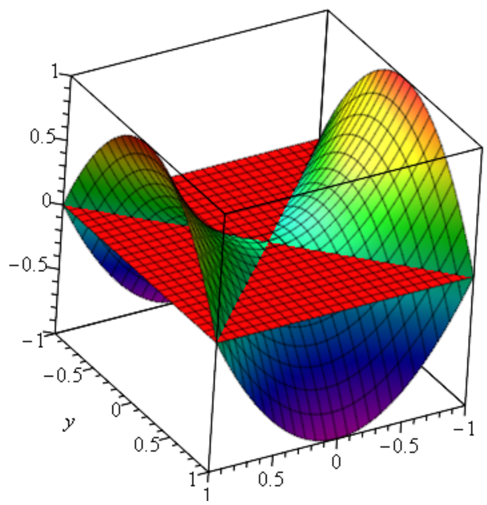
Les extrema locaux sont donc atteints en des points critiques. Mais attention la réciproque est fausse : tout point critique d'une fonction $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert ne correspond pas nécessairement à un extremum.

Exemple

La fonction $f : (x, y) \longmapsto x^2 - y^2$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\nabla f(x, y) = (2x, -2y)$. Ainsi $\nabla f(x, y) = (0, 0) \Longleftrightarrow (x, y) = (0, 0)$.
La seul point critique pour f sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$ est donc le point $(0, 0)$.
En revanche, la fonction f ne possède pas d'extremum en $(0, 0)$.
En effet : $f(0, 0) = 0$ et

$$\forall x \neq 0, f(x, 0) = x^2 > f(0, 0) = 0 \text{ et } \forall y \neq 0, f(0, y) = -y^2 < 0 = f(0, 0).$$

Ainsi, tout voisinage de $(0, 0)$ contient des points $(x, 0)$ et $(0, y)$ pour lesquels : $f(0, y) < f(0, 0) < f(x, 0)$: $f(0, 0)$ n'est donc pas un extremum local.



Si (x_0, y_0) est un point critique pour f supposée de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert $\mathscr{U} \subset \mathbb{R}^2$ alors la formule de Taylor-Young donne :

$$f((x_0, y_0) + (h, k)) \underset{(h,k)\to(0,0)}{=} f(x_0, y_0) + \left(\underbrace{\nabla f(x_0, y_0)}_{=(0,0)} | (h, k) \right) + \frac{1}{2}\, {}^t HAH + o(||(h, k)||^2)$$
$$\underset{(h,k)\to(0,0)}{=} f(x_0, y_0) + \frac{1}{2}\, {}^t HAH + o(||H||^2)$$

où A est la matrice Hessienne de f au point (x_0, y_0) et $H = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$.

Dans le cas où la matrice A est inversible le signe de l'accroissement $f((x_0, y_0) + (h, k)) - f(x_0, y_0)$ est localement celui de la partie quadratique $tHAH$.

Attention :

Si la matrice A n'est pas inversible on ne pourra pas conclure directement quant au signe de l'accroissement $f((x_0, y_0) + (h, k)) - f(x_0, y_0)$ à partir du signe de ${}^t HAH$.

Théorème 22: condition suffisante d'existence d'un extremum

Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathscr{U})$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert $\mathscr{U} \subset \mathbb{R}^2$.
Soit (x_0, y_0) un point critique pour f. On note A la matrice Hessienne de f au point (x_0, y_0).

- Si $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+^*$ alors f admet un minimum local en (x_0, y_0).
- Si $Sp(A) \subset \mathbb{R}_-^*$ alors f admet un maximum local en (x_0, y_0).
- Si A possède une valeur propre strictement négative et une valeur propre strictement positive alors (x_0, y_0) est un point col : f ne présente pas d'extremum local en ce point.
- Si A possède une valeur propre nulle alors on ne peut pas conclure.

Démonstration. La matrice Hessienne A est symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres.

On note $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ses valeurs propres (éventuellement égales) et $P \in SO_2(\mathbb{R})$ telle que

$$A = PD\,{}^tP \text{ avec } D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

La formule de Taylor-Young à l'ordre 2 au point critique (x_0, y_0) donne :

$$\begin{aligned} f((x_0,y_0)+(h,k)) - f(x_0,y_0) &\underset{(h,k)\to(0,0)}{=} \frac{1}{2}\,{}^tHAH + o(||H||^2) \\ &\underset{(h,k)\to(0,0)}{=} {}^tHPD\,{}^tPH + o(||H||^2) \\ &\underset{(h,k)\to(0,0)}{=} {}^t({}^tPH)D({}^tPH) + o(||H||^2) \\ &\underset{(h,k)\to(0,0)}{=} H'DH' + o(||H'||^2) \\ &\underset{(h,k)\to(0,0)}{=} \lambda h'^2 + \mu k'^2 + o(||H'||^2) \end{aligned}$$

où $H' = \begin{pmatrix} h' \\ k' \end{pmatrix}$ a pour norme $||H'|| = ||PH'|| = ||H||$ car P est la matrice d'une isométrie.

On distingue maintenant les cas :

❶ Si $\lambda, \mu > 0$ sont toutes deux strictement positives alors on pose $\nu = \min(\lambda, \mu) > 0$ et on a pour tout (h, k) au voisinage de $(0, 0)$:

$$\begin{aligned} f((x_0,y_0)+(h,k)) - f(x_0,y_0) &\geqslant \nu(h'^2 + k'^2) + o(||H'||^2) \\ f((x_0,y_0)+(h,k)) - f(x_0,y_0) &\geqslant ||H'||^2(\nu + \varepsilon(||H'||) \end{aligned}$$

avec $\varepsilon(||H'||) \underset{||H'||\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc $\nu + \varepsilon(||H'||) > 0$ pour $||H'|| = ||H||$ proche de 0.

On en déduit que localement, $f((x_0,y_0)+(h,k)) > f(x_0,y_0)$ i.e. $f(x_0,y_0)$ est un minimum local pour f.

❷ Si λ, μ sont toutes deux strictement négatives on pose $\nu = \max(\lambda, \mu) < 0$ et on obtient pour tout (h, k) au voisinage de (x_0, y_0) :

$$f((x_0,y_0)+(h,k)) - f(x_0,y_0) \leqslant ||H'||^2(\nu + \varepsilon(||H'||)$$

avec $\varepsilon(||H'||) \underset{||H'||\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc $\nu + \varepsilon(||H'||) < 0$ pour $||H'|| = ||H||$ proche de 0.

On en déduit que localement, $f((x_0,y_0)+(h,k)) < f(x_0,y_0)$ i.e. $f(x_0,y_0)$ est un maximum local pour f.

❸ Si $\lambda > 0$ et $\mu < 0$ (le cas $\lambda < 0, \mu > 0$ se traite de manière analogue) alors :

∗ Si $k' = 0$ on obtient $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} h' \\ 0 \end{pmatrix} \in E_\lambda(A)$
(on suppose que la première colonne de P engendre $E_\lambda(A)$)

et il vient alors pour tout (h,k) assez proche de $(0,0)$:

$$\begin{aligned} f((x_0,y_0)+(h,k))-f(x_0,y_0) &= \lambda h'^2 + o(||(h',0)||^2) \\ &= \lambda h'^2 + o(h'^2) \\ &= h'^2(\lambda+\varepsilon(h')) \end{aligned}$$

avec $\lambda > 0$, $\varepsilon(h') \underset{h'\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc $h'^2(\lambda+\varepsilon(h')) > 0$ pour $h' = ||(h',0)|| = ||(h,k)||$ proche de 0.
Par conséquent pour toute valeur de $(h,k) \in E_\lambda(A)$ assez proche de $(0,0)$ l'accroissement $f((x_0,y_0)+(h,k))-f(x_0,y_0) > 0$ est positif.

$*$ Si $h' = 0$ on montre que pour toute valeur de $(h,k) \in E_\mu(A)$ assez proche de $(0,0)$ l'accroissement $f((x_0,y_0)+(h,k))-f(x_0,y_0) < 0$ est négatif.

Le point (x_0,y_0) est donc un point col (ou selle).

❹ Si A n'est pas inversible c'est-à-dire que 0 est valeur propre alors la partie quadratique $\frac{1}{2}\,{}^tHAH$ est de signe constant mais ce signe n'est pas nécessairement celui de l'accroissement $f((x_0,y_0)+(h,k))-f(x_0,y_0)$.
Considérons deux exemples :

— $f(x,y) = x^2 - y^4$. Alors $\nabla f(0,0) = (0,0)$ et la matrice Hessienne au point critique $(0,0)$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\frac{1}{2}\,{}^tHAH = h^2 \geqslant 0$.
(notons qu'effectivement $0 \in Sp(A)$).
Pourtant $f((0,0)+(h,k)) - f(0,0) = \begin{cases} h^2 & \text{si} \quad k=0 \\ -k^4 & \text{si} \quad h=0 \end{cases}$ donc n'est de signe constant sur aucun voisinage de $(0,0)$: f ne possède pas d'extremum en $(0,0)$.

— A l'inverse la fonction $f(x,y) = x^2 + y^4$ possède clairement un minimum (global) au point critique $(0,0)$ alors que la matrice Hessienne en ce point $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

Comme annoncé, si $A \notin GL_2(\mathbb{R})$ le signe de la partie quadratique $\frac{1}{2}\,{}^tHAH$ ne permet pas de conclure quant la nature du point critique.

$\square$

Exercice 23

Déterminer les points critiques de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^4 + y^4 - (x-y)^2$ puis étudier leur nature.

2 - Fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$

Dans ce paragraphe on étend les définitions données pour les fonctions réelles de deux variables réelles.
On munit $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$ de leur norme euclidienne noté dans les deux cas $||\cdot||$.
Soit $f : \mathscr{U} \subset \mathbb{R}^p \longmapsto \mathbb{R}^n$ définie sur une partie $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^p$:

$$\forall x = (x_1,\ldots,x_p) \in \mathbb{R}^p, f(x) = f(x_1,\ldots,x_p) = (f_1(x),\ldots,f_n(x)).$$

Définition 24: Applications partielles et applications composantes

— On appelle applications partielles de f les applications $x_j \longmapsto f(x)$ pour $j \in [\![1,p]\!]$ (pour $k \neq j$, x_k est fixé).
— On apelle applications composantes les applications $f_i : x \longmapsto f_i(x)$.

Exemple

Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x^2+y^2, \sin xy, e^x) \end{array} \right.$. Alors :

— f possède trois applications composantes :

$$(x,y) \longmapsto f_1(x,y) = x^2+y^2 \quad ; \quad \longmapsto f_2(x,y) = \sin xy \quad ; \quad \longmapsto f_3(x,y) = e^x$$

— f possède deux applications partielles :

$$x \longmapsto g(x) = (x^2+y^2, \sin xy, e^x) \quad ; \quad y \longmapsto h(y) = (x^2+y^2, \sin xy, e^x).$$

Définition 25

Soit $f : \mathscr{U} \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ une fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}^p$.

— On dit que f est bornée sur $\mathscr{U}$ si :

$$\exists M \geqslant 0, \forall x \in \mathscr{U}, ||f(x)|| \leqslant M.$$

— On dit que f tend vers $\ell \in \mathbb{R}^n$ lorsque x tend vers $x_0 \in \mathbb{R}^p$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathscr{U}, (||x - x_0|| \leqslant \alpha \Longrightarrow ||f(x) - \ell|| \leqslant \varepsilon).$$

— On dit que f est continue en $x_0 \in \mathbb{R}^p$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathscr{U}, (||x - x_0|| \leqslant \alpha \Longrightarrow ||f(x) - f(x_0)|| \leqslant \varepsilon).$$

Exemple

Toute fonction polynomiale est continue.
La somme, le produit, la composée de fonctions continues est continue.

Proposition 26: Limite et continuité des applications composantes

— La fonction f admet une limite en x_0 si et seulement si les fonctions composantes f_i admettent des limites en x_0 pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Dans ce cas :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \left(\lim_{x \to x_0} f_1(x), \dots, \lim_{x \to x_0} f_n(x) \right).$$

— La fonction f est continue en x_0 si et seulement si les fonctions composantes f_i sont continues en x_0 pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

Démonstration. $\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose que $f(x)$ tend vers $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_n) \in \mathbb{R}^n$ lorsque $x = (x_1, \dots, x_p)$ tend vers $x_0 = (a_1, \dots, a_p)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe par définition de la limite un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^p$:

$$||x - x_0|| \leqslant \alpha \Longrightarrow ||f(x) - f(x_0)|| \leqslant \varepsilon$$

c'est-à-dire :

$$||x - x_0|| \leqslant \alpha \Longrightarrow \underbrace{||(f_1(x) - f_1(x_0), \dots, f_n(x) - f_n(x_0))||}_{|f_i(x) - f_i(x_0)| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n |f_i(x) - f_i(x_0)|^2}} \leqslant \varepsilon$$

Donc $||x - x_0|| \leqslant \alpha \Longrightarrow |f_i(x) - f_i(y)| \leqslant \varepsilon$: chaque fonction composante f_i est continue en x_0.

$\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose que chaque application composante f_i est continue. Soit $\varepsilon > 0$.

Par définition de la limite il existe pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, un réel $\alpha_i > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^p$:

$$||x - x_0|| \leqslant \alpha_i \Longrightarrow |f_i(x) - f_i(x_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

On note $\alpha = \min\limits_{i=1}^{n} \alpha_i > 0$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^p$:

$$||x - x_0|| < \alpha \Longrightarrow ||f(x) - f(x_0)|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |f_i(x) - f_i(x_0)|^2} \leqslant \sqrt{n\frac{\varepsilon^2}{n}} = \varepsilon.$$

La fonction f est donc continue en x_0. $\square$

Définition 27

Soit $f : \mathscr{U} \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ une fonction définie sur un ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^p$.
On dit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{U}$ si chacune des ses applications composantes est de classe $\mathscr{C}^1$ c'est-à-dire que ses dérivées partielles premières existent et sont continues sur $\mathscr{U}$.

Exemple

La fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x^2 + \cos z, y - z^2 x)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ car les fonctions composantes suivantes sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$:

— $f_1(x, y, z) = x^2 + \cos z$: $\dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) = 2x$, $\dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x, y, z) = 0$, $\dfrac{\partial f_1}{\partial z}(x, y, z) = -\sin z$.

— $f_2(x, y, z) = y - z^2 x$: $\dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x, y, z) = -z^2$, $\dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) = 1$, $\dfrac{\partial f_2}{\partial z}(x, y, z) = -2zx$.

3 - Equations aux dérivées partielles

On donne dans le cours quelques exemples de résolutions d'équations aux dérivées partielles. D'autres seront traités en TD. On notera $\mathscr{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et f une solution de l'EDP sur $\mathscr{U}$.

Exemple

On considère l'équation aux dérivées partielles d'inconnues $f \in \mathscr{C}^1(\mathscr{U})$:

$$(EDP) : \forall (x, y) \in \mathscr{U} : \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0.$$

Cela signifie qu'une fonction solution f est telle que la fonction partielle $x \mapsto f(x, y)$ est constante.
Il existe donc une fonction $y \longmapsto \varphi(y)$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ tel que

$$\forall (x, y) \in \mathscr{U} : f(x, y) = \varphi(y).$$

Réciproquement toute fonction $(x, y) \longmapsto \varphi(y)$ est solution de (EDP).

Exemple

On considère l'équation aux dérivées partielles d'inconnue $f \in \mathscr{C}^1(\mathscr{U})$:

$$(EDP) : \forall (x, y) \in \mathscr{U} : \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = g(x, y).$$

Soit f une solution de (EDP).
On intègre cette équation aux dérivées partielles en la variable x :

$$\forall (x, y) \in \mathscr{U} : f(x, y) = \int_a^x g(t, y)dt + \varphi(y)$$

où φ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.
Réciproquement toute fonction de cette forme est solution de (EDP).

Exemple

On considère l'équation aux dérivées partielles d'inconnue $f \in \mathscr{C}^2(\mathscr{U})$:

$$(EDP) : \forall (x,y) \in \mathscr{U} : \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 0.$$

Soit f une solution de (EDP).
On intègre cette équation aux dérivées partielles en la variable x :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \varphi(y)$$

où φ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
On intègre à nouveau en la variable x :

$$\forall (x,y) \in \mathscr{U} : f(x,y) = \varphi(y)x + \psi(y)$$

où ψ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle $J \subset I$ de $\mathbb{R}$.
Réciproquement, toute fonction de cette forme est solutin de (EDP).

Exemple

On considère l'équation aux dérivées partielles dites des cordes vibrantes d'inconnue $f \in \mathscr{C}^2(\mathscr{U})$:

$$(EDP) : \forall (x,t) \in \mathscr{U} : \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t) = 0.$$

Soit f une fonction solution de (EDP) sur $\mathscr{U}$.
On pose $\left\{ \begin{array}{lcl} u(x,t) & = & x - ct \\ v(x,t) & = & x + ct \end{array} \right.$ et $g(u(x,t), v(x,t)) = f(x,t)$.
On dérive cette expression en chaîne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) &= \frac{\partial g}{\partial u}(u(x,t),v(x,t))\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) + \frac{\partial g}{\partial v}(u(x,t),v(x,t))\frac{\partial v}{\partial x}(x,t) \\ &= \frac{\partial g}{\partial u}(u(x,t),v(x,t)) + \frac{\partial g}{\partial v}(u(x,t),v(x,t)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u(x,t),v(x,t))\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) + \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(u(x,t),v(x,t))\frac{\partial v}{\partial x}(x,t) \right) + \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u(x,t),v(x,t))\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u(x,t),v(x,t))\frac{\partial v}{\partial x}(x,t) \right) \\ &= \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u(x,t),v(x,t)) + 2\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(u(x,t),v(x,t)) + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u(x,t),v(x,t)). \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = -c\frac{\partial g}{\partial u}(u(x,t),v(x,t)) + c\frac{\partial g}{\partial v}(u(x,t),v(x,t))$$

De même :

$$\frac{\partial f^2}{\partial t^2}(x,t) = c^2\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u(x,t),v(x,t)) - 2\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u(x,t),v(x,t)) + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u(x,t),v(x,t)) \right).$$

Par conséquent, f est solution de (EDP) sur $\mathscr{U}$ si et seulement si la fonction g est solution sur $\mathscr{U}'$ (l'image de $\mathscr{U}$ par la fonction $(x,t) \longmapsto (x-ct, x+ct)$) de (EDP') :

$$(EDP') : \forall (u,v) \in \mathscr{U}' : 4\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) = 0 \Longleftrightarrow \forall (u,v) \in \mathscr{U}' : \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) = 0.$$

Par conséquent, $\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \varphi(v)$ et $g(u,v) = \Phi(v) + \psi(u)$ où Φ est une primitive de φ.
On en déduit que toute solution de (EDP) est de la forme :

$$(x,t) \in \mathscr{U} \longmapsto f(x,t) = g(u(x,t), v(x,t)) = A(x-ct) + B(x+ct)$$

où A, B sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathscr{U}$.
Réciproquement, toute fonction définie par

$$\forall (x,t) \in \mathscr{U}, f(x,t) = A(x-ct) + B(x+ct) : A, B \in \mathscr{C}^2(\mathscr{U})$$

est solution de (EDP).
En effet, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = A''(x-ct) + B''(x+ct)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t) = c^2 A''(x-ct) + c^2 B''(x+ct)$
et il vient en effet :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} f(x,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t) = 0.$$