Programme de khôlle semaines 13 et 14

Questions de cours: Savoir énoncer avec précision les def/thm suivants

Notions de topologie et généralités sur les fonctions vectorielles :

- Normes euclidiennes sur $\mathbb{R}^p$
- Parties ouvertes et fermées de $\mathbb{R}^p$.
- Une boule ouverte est un ouvert (Proposition 5) (**démonstration**).
  Une boule fermée est un fermé.
- Définition de l'adhérence, l'intérieur, la frontière d'une partie de $\mathbb{R}^p$.
- Définition de limite d'une fonction vectorielle $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$.
  Caractérisation par les fonctions coordonnées (Proposition 11) (**démonstration**).
- Définition de la continuité d'une fonction vectorielle en un point.
  Continuité sur un intervalle.
- Dérivabilité d'une fonction vectorielle en un point.
  Opérations sur les dérivées.
- Développement limité d'une fonction vectorielle.

Questions de cours: Savoirs et Savoir-faire

Courbes planes : généralités

- Connaître les différents modes de représentation d'une courbe plane (équation cartésienne réduite, équation implicite, paramétrage).
- Connaître les techniques de passage d'un mode de représentation à l'autre.
- Exemples de paramétrages fondamentaux : droites, cercles.
- Exemples d'équations implicites fondamentaux : droites (savoir déterminer une équation de droite avec différents types de données (un point sur la droite et un vecteur normal, etc.)
  Équations de cercles.
- Savoir déterminer la distance d'un point à une droite, déterminer le projeté orthogonal d'un point sur une droite.

Questions de cours: Savoirs et Savoir-faire

Étude d'une courbe plane :

- Ensemble de définition. Réduction de l'intervalle d'étude.
  Variations des fonctions coordonnées.
- Tangente en un point régulier : le vecteur dérivée $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ dirige la tangente : savoir déterminer une équation de la tangente en un point régulier.
- Étude en un point singulier : utilisation des développements limités.
  Connaître les différents types de points singuliers : ordinaire, inflexion, rebroussement première/seconde espèce.
  Connaître l'allure de la courbe au voisinage de ces points.
- Étude des branches infinies de $f(t) = (x(t), y(t))$: savoir déduire des limites de $x(t), y(t)$ (de leur quotient...) en $t_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, l'existence d'une asymptote verticale, horizontale, oblique, d'une branche parabolique.
- Longueur d'une courbe régulière entre deux points de paramètres $a < b$.
- **Définition 30** : Abscisse curviligne d'origine $t_0 \in I$: définition, primitive de $t \longmapsto ||f'(t)||$ s'annulant en t_0.
- Paramétrage par l'abscisse curviligne. Vitesse constante dans ce cas. (**démonstration** : voir le développement suivant l'Exercice 31)
- Repère de Frenet en un point d'une courbe paramétrée par $f \in \mathscr{C}^2$.
- Courbure en un point régulier.
- Savoir déterminer la courbure de deux manières : avec ou sans le théorème de relèvement.
- Point birégulier.
  Rayon de courbure et cercle de courbure.
- Savoir déterminer la développée d'une courbe de deux manières : comme l'ensemble des centres de courbure et comme l'enveloppe des normales à la courbe.
- Savoir déterminer l'enveloppe d'une famille de droites.

Exercices à préparer :

Exercice 1

1. Etudier l'astroïde et la tracer :
   $f(t) = \begin{pmatrix} \cos^3(t) \\ \sin^3(t) \end{pmatrix}$.
2. Déterminer l'ensemble des points du plan par lesquels passent deux tangentes de l'astroïde orthogonales entre elles.

Exercice 2

1. Etudier la cardioïde : $t \mapsto f(t) = \begin{pmatrix} (1+\cos(t))\cos(t) \\ (1+\cos(t))\sin(t) \end{pmatrix}$.
2. $(*)$ Déterminer le lieu géométrique de l'ensemble des projections orthogonales de l'origine O sur les tangentes de $\mathscr{C}$.

Exercice 3

Soit $\mathcal{H}$ l'hyperbole d'équation $xy = 1$.
Soient A, B deux points de $\mathcal{H}$ s'abscisse double l'une de l'autre.
Déterminer l'enveloppe des droites (AB).