TRAVAUX DIRIGÉS : Variables aléatoires réelles discrètes

1 Variables aléatoires finies

Exercice 1: Loi et fonction de variable (Solution)

Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée dans le tableau :

x_i	-4	-2	1	2	3
$P(X = x_i)$	$0,10$	$0,35$	$0,15$		$0,15$

1. Compléter la loi de X. Tracer l'histogramme de X.
2. Calculer $P(X < 0)$, $P(X > -1)$, $P(-3,5 < X \leqslant -2)$ et $P(-3,5 < X < -2)$.
3. Donner le tableau de la loi des variables suivantes : $|X|$, $X^2 + X - 2$, $\min(1, X)$, $\max(X, -X^2)$.

Exercice 2: Loi de probabilité : définition (Solution)

Soient $(n, \lambda) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+$. On considère une variable X à valeurs dans $\{1, \ldots, n\}$ telle que : $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$, $P(X = k) = \lambda k$.
Déterminer λ puis calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 3: Loi de probabilité (Solution)

On tire simultanément deux pièces dans un lot de dix dont trois sont défectueuses. On note N le nombre de pièces défectueuses obtenues.
Déterminer la loi de N, son espérance et sa variance.

Exercice 4: B.T.(Solution)

On lance un dé N fois. Déterminer le nombre de lancers N pour que la fréquence d'apparition du 6 diffère de $\frac{1}{6}$ d'au plus $\frac{1}{100}$ avec un risque inférieur à 5%.
On pourra utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev.

Exercice 5: Loi de probabilité (Solution)

Une urne contient m boules numérotées de 0 à $m-1$ où $m \geqslant 2$. Une pièce donne Pile avec la probabilité p et Face avec probabilité $q = 1 - p$ où $p \in]0, 1[$.
On tire une boule dans l'urne de manière équiprobable puis on lance la pièce indépendamment du tirage. On note X la v.a.r. qui vaut le numéro de la boule tirée si la pièce a donné Pile et l'opposé de ce numéro si la pièce a donné Face.
Déterminer la loi de X ainsi que son espérance.

Exercice 6: Loi du max et du min (Solution)

On lance deux dés équilibrés discernables à 6 faces de manière indépendante.

1. Décrire l'univers Ω de cette expérience et donner son cardinal.
2. On note X_1 le numéro du premier dé et X_2 celui du second.
   On note $X = \max(X_1, X_2)$ le plus grand numéro obtenu.
   On note $Y = \min(X_1, X_2)$ le plus petit numéro obtenu.
   (a) Décrire les événements $[X = 1]$ et $X^{-1}(\{3\})$.
   (b) Que peut-on dire de la famille d'événements suivante ? :
   $$([X = 1], [X = 2], [X = 3], [X = 4], [X = 5], [X = 6]).$$
   (c) A l'aide des variables X_1 et X_2, calculer $P(X \leqslant k)$ pour $k \in [\![1, 6]\!]$.
   En déduire la loi de X.
   (d) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
   (e) Déterminer $P(Y > x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   En déduire la loi de Y.
   (f) Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.

Exercice 7: Loi de probabilité (Solution)

On dispose de N urnes contenant chacune n jetons numérotées de 1 à n.
On tire indépendamment un jeton dans chaque urne et on note X le plus grand numéro obtenu.

1. Calculer $P(X \leqslant k)$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.
2. En déduire le loi de X.
3. Calculer $E(X)$ puis la limite de $\dfrac{E(X)}{n}$ lorsque $n \to +\infty$.
   En déduire un équivalent de $E(X)$ lorsque $n \to +\infty$ (à N fixé).
4. Déterminer la limite de $E(X)$ lorsque $N \to +\infty$ (à n fixé). Commenter.

Exercice 8: Lois usuelles(Solution)

Dans les expériences suivantes, reconnaître la loi de X :

1. On place 10 boules dans 3 boites numérotées $1, 2, 3$.

X est le nombre d'objet dans la boite 1.

2. Une urne contient 5 boules numérotées 1, 5 boules numérotées 2 et 5 boules numérotées 3.
   On tire une boule et on note X le numéro de cette boule.
3. On tire avec remise et successivement les cartes d'un jeu de 32 cartes. On note X le rang d'apparition de la première dame.
4. On prend un jeu de 32 cartes mélangées. On retourne une par une les cartes jusqu'à l'apparition de l'as de coeur.
   X : est le nombre de cartes que l'on a retournées.
5. On suppose que les probabilités de naissance d'une fille et d'un garçon sont identiques. X est le nombre de garçons dans une famille de 3 enfants.
6. On suppose que 1% des candidats aux concours n'aiment pas les probabilités. Un examinateur interroge 100 candidats. X est le nombre de candidat n'appréciant pas les probabilités.

Exercice 9: Loi de probabilité (Solution)

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. Soit k un entier entre 1 et n. On tire de l'urne une poignée de k boules et on appelle X le plus grand nombre obtenu. Déterminer la loi de X.

Exercice 10: Loi du max et du min (Solution)

Une urne contient 10 boules numérotée de 1 à 10. On effectue deux tirages successifs d'une boule avec remise et on note X le plus grand Y le plus petit des numéros obtenus.

1. Déterminer la loi et l'espérance de X
2. Recommencer pour Y.
3. On pose $Z = X - Y$. Déterminer la loi de Z et son espérance.

Exercice 11: Loi de probabilité (Solution)

On dispose de deux boites A et B. La boite A contient 4 boules rouges et 7 vertes. La boite B contient 6 rouges et 5 vertes.
On choisit une boite au hasard puis une poignée de 3 boules dans celle-ci.
Soit X le nombre de boules rouges obtenues. Déterminer la loi de X et son espérance.

Exercice 12: Loi de probabilité (Solution)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0;1[$. On considère une variable $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$.
Calculer l'espérance de $\dfrac{1}{X+1}$.

Exercice 13: Loi de probabilité (Solution)

On cherche à dépister une maladie grâce à des analyses de sang. On considère une population de n individus. On veut comparer deux méthodes.

- La première consiste à analyser individuellement tous les prélèvements.
- La seconde consiste à mélanger les n prélèvements et à effectuer une analyse du mélange (le résultat est alors positif dès que l'une des personnes est atteinte). Si le résultat est positif, on effectue alors une analyse individuelle des n prélèvements.

On note $p = \frac{1}{20000}$ la probabilité, pour un individu, d'être malade. On note X_n le nombre d'analyses nécessaires pour la deuxième méthode.

1. Déterminer la loi de X_n puis calculer $E(X_n)$.
2. Déterminer l'économie moyenne réalisée par personne.
   Pour quelles valeurs de n est-elle maximale ?

2 Variables aléatoires discrètes

Exercice 14: Loi de probabilité (Solution)

Déterminer la valeur de λ pour laquelle les suites suivantes définissent la loi de probabilité d'une variable discrète notée X :

1. $X(\Omega) = [\![2, +\infty[\![$ et $p_n = \dfrac{\lambda}{n^2-1}$ pour $n \geqslant 2$.
2. $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $p_n = \dfrac{\lambda n}{2^n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 15: Loi géométrique (Solution)

Une urne contient a boules blanches et b noires. On effectue des tirages successifs en remettant à chaque fois la boule tirée.

1. Soit X_1 la variable aléatoire égale au rang de tirage de la première boule blanche.
   Reconnaître la loi de X_1 et donner sans calcul $E(X_1)$ et $V(X_1)$.
2. Soit X_2 la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la deuxième boule blanche. Déterminer la loi de X_2 et calculer son espérance.

3. Comparer $E(X_1)$ et $E(X_2)$.

Exercice 16: Fonction génératrice (Solution)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la fonction génératrice est :

$$\forall s \in \left]-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right[, \; g(s) = \frac{s}{2-s^2}.$$

1. Déterminer la loi de X.
2. Reconnaître la loi de $Y = \frac{1}{2}(X+1)$ et en déduire $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 17: Fonctions de répartition (Solution)

1. Soient $p \in]0;1[$ et $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$.
   (a) Calculer $P(X \leqslant n)$ pour tout $n \in X(\Omega)$.
   (b) Retrouver le fait que la loi géométrique est sans mémoire.
2. Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(Y \leqslant n) = \frac{1}{n!}\int_{\lambda}^{+\infty} e^{-t}t^n dt.$$

Exercice 18: Poisson pair et impair (Solution)

Le nombre N de client entrant dans un magasin en une journée suit une loi de Poisson de paramètre λ.
Deux employés A et B parient : A parie qu'à la fin de la journée, il y aura eu un nombre pair de clients, B parie que ce nombre sera impair
Qui croire ?

Exercice 19: Poisson (ou non) (Solution)

Soient a, λ, μ des réels strictement positifs.
On pose pour $k \in \mathbb{N}$, $p_k = a\dfrac{\lambda^k + \mu^k}{k!}$.

1. Déterminer a en fonction de λ et μ de telle sorte que $(p_n)_{n\geqslant 0}$ définisse une loi de probabilité d'une variable X à valeurs dans $\mathbb{N}$.
2. La variable peut-elle suivre une loi de poisson ?

Exercice 20: Espérance limite (Solution)

On dispose de n pièces équilibrées numérotées $1, \ldots, n$.
On procède à X lancers : au k-ième lancer, on lance les k permières pièces.
On s'arrête dès qu'on obtient au moins un pile ou après les n lancers.

1. Donner la loi de X.
2. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k(k-1)}{2}}$.

Exercice 21: Somme de Poisson (Solution)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ.
Déterminer la loi de X sachant $(X+Y=n)$.

Exercice 22: Transfert (Solution)

Soient $p \in]0;1[$ et $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$. On pose $Y = \frac{1}{X}$. Calculer $E(Y)$.

Exercice 23: Fonction génératrice (Solution)

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On suppose que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et qu'il existe $\lambda > 0$, $a \in \mathbb{R}$:

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(X=k) = ak^2\frac{\lambda^k}{k!}$$

1. On suppose qu'une telle loi de probabilité existe. Donner sa fonction génératrice.
2. En déduire la valeur de a pour qu'une telle loi existe.
3. Calculer l'espérance de X.

Exercice 24: Poisson et ? (Solution)

Le nombre de clients quotidiens d'un magasin suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Chaque client a une probabilité p d'acheter. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'achats effectués sur un jour.
Déterminer la loi et l'espérance de X.

Exercice 25: Fonctions génératrices (Solution)

Soient $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ des variables indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
On pose $Z = XY$ et G_X, G_Y, G_Z.

1. Donner G_Y.
2. Montrer que $G_Z = G_Y \circ G_X$.
3. En déduire $E(Z)$ et $V(Z)$.

Exercice 26: Loi conditionnelle (Solution)

Un urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On les tire un à un, successivement avec remise. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirages pour obtenir pour la première fois deux numéros distincts.

1. (a) On note A_i : "le numéro i apparait au premier tirage".
   Calculer $P(X = k|A_i)$ pour $i \in [\![1, n]\!]$.
   (b) En déduire la loi de X à l'aide de la formule des probabilités totales.
2. Donner la loi de $Y = X - 1$.
   En déduire $E(X)$ et $V(X)$.

3 Vecteurs aléatoires

Exercice 27: Couple (Solution)

On considère le couple aléatoire (X, Y) tel que $X(\Omega) = [\![1, 3]\!]$, $Y(\Omega) = [\![0, 3]\!]$ et :

$$P((X, Y) = (i, j)) = \frac{i + 2j}{60}.$$

1. Construire la tableau de probabilité de ce couple.
2. Déterminer les lois marginales de X et Y.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
5. Déterminer les lois conditionnelles de X sachant $(Y = 0)$ et de Y sachant $(X = 1)$.
6. Soit $U = XY$ et $V = \min(X, Y)$. Déterminer la loi conjointe de U et V.
7. Déterminer les lois de U et V. Les variables U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 28: Corrélation (Solution)

Une urne contient a boules blanches et b boules noires $(a + b \geqslant 3)$.
On tire successivement 3 boules sans remise. Soient X, Y, Z les variables respectivement égales à 1 si la première, resp. la deuxième, resp. la troisième boule tirée est blanche et 0 sinon.

1. Déterminer la loi conjointe du couple (Y, Z).
2. En déduire les lois de Y et de Z.
3. Calculer $\text{cov}(Y, Z)$.

Exercice 29: Loi de la somme et perturbation (Solution)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Deux personnes A et B tapent indépendamment l'une de l'autre sur une machine à calculer un nombre au hasard entre 0 et n.
Soit S la variable égale à la somme des deux nombres tapés.

1. Déterminer la loi de S et calculer son espérance.
2. On suppose dans cette question que la machine a une capacité de calcul limitée. Si la somme des nombres obtenus par A et B est exactement $2n$ elle affiche un résultat au hasard entre 0 et $2n - 1$. Les autres résultats sont fidèles.
   Soit T la variable aléatoire égale au nombre affiché pour la somme. Déterminer la loi de T et donner son espérance.

Exercice 30: décorrélées mais pas indépendantes (Solution)

Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes de même loi $\mathscr{B}(3, \frac{1}{2})$. Soit $Z = X - Y$.

1. Déterminer la loi de $Z = X - Y$.
2. Les variables Z et X sont-elles indépendantes ?
3. Calculer $\text{cov}(X, Z)$.

Exercice 31: Loi conjointe (Solution)

On lance deux dés équilibrés. Soit T la somme des points obtenus. Soit X le reste de la division de T par 2 et Y le reste de la division de T par 5.

1. Donner la loi conjointe de (X, Y).
2. Donner les lois marginales de X et de Y. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 32: Loi du couple et loi conditionnelle (Solution)

Une urne U_1 contient n boules numérotées de 1 à n. Une urne U_2 contient des boules rouges en proportion p. On tire une boule au hasard dans U_1 et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée. Si $X = k$, on tire k fois une boule dans U_2 avec remise et on appelle Y le nombre de boules rouges tirées.

1. Donner la loi de X, son espérance et sa variance.
2. Déterminer la loi de Y sachant $X = k$.
3. Déterminer la loi du couple (X, Y).

Exercice 33: Loi du couple et loi conditionnelle (Solution)

On lance $n \geqslant 6$ dés équilibrés.
Pour tout $i \in [\![1, 6]\!]$, on note X_i la variable égale à 1 si la face i est apparue au moins une fois et 0 sinon.
Soit X le nombre de faces différentes obtenues.

1. Déterminer la loi de X_i.
2. Calculer l'espérance de X.

Exercice 34: Loi du couple (Solution)

On dispose de n boites numérotées de 1 à n. La boite k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard une boite, puis une boule dans cette boite. Soit X le numéro de la boite et Y le numéro de la boule.

1. Donner la loi de (X, Y).
2. Calculer $P(X = Y)$.
3. Donner la loi de Y et son espérance.

Exercice 35: Loi du couple (Solution)

On dispose au hasard n boules dans N tiroirs. Y désigne le nombre de boules dans un tiroir T donné. X est le nombre de tiroirs vides.

1. Donner la loi de Y.
2. Calculer l'espérance de X dans le cas général (sans déterminer sa loi). On pourra introduire la variable X_i qui vaut 1 si le tiroir i est vide et 0 sinon.

Exercice 36: Loi du $\max$ (Solution)

Soient $X_1, \dots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

On note $Y = \max(X_1, \dots, X_n)$.

1. Déterminer la loi de Y.
2. Montrer que $E(Y) = n - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^n$.

Exercice 37: Somme de lois géométriques (Solution)

Soient X, Y, Z trois variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique $\mathscr{G}(p)$.

1. Déterminer la loi de $S = X + Y$.
2. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $(S = k)$.
3. Pour $n \in S(\Omega)$, déterminer $P(S \geqslant n)$.
4. Déterminer $P(S \geqslant Z), P(S \leqslant Z)$ et $P(S = Z)$.

Exercice 38: Somme de lois géométriques (Solution)

Soient $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p_1)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{G}(p_2)$ des variables indépendantes.
Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

Exercice 39: Poisson etc. (Solution)

Soient X, Y des variables entières positives ou nulles vérifiant pour tout couple d'entiers naturels (i, j) :

$$P(X = i, Y = j) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^i e^{-\lambda} a^j (1-a)^{i-j}}{j!(i-j)!} & \text{si} \quad 0 \leqslant j \leqslant i \\ 0 & \text{si} \quad 0 \leqslant i < j. \end{cases}$$

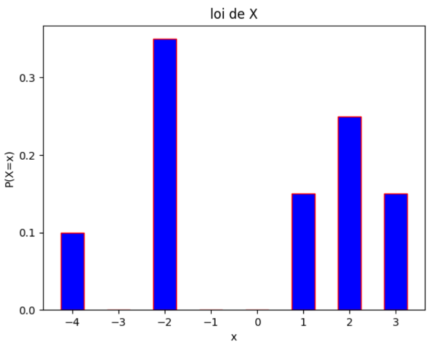
où a et λ sont des constantes fixées telles que $0 < a < 1$ et $\lambda > 0$.

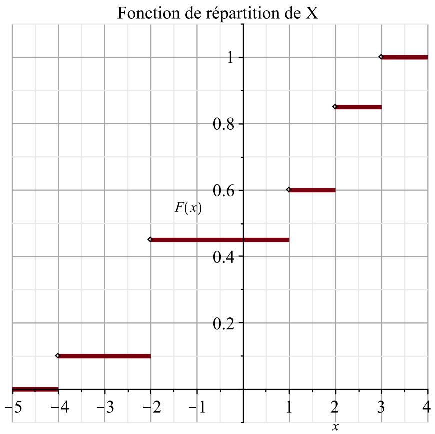
1. Déterminer les lois de X et de Y.
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3. On pose $Z = X - Y$. Déterminer la loi de Z.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   Calculer la probabilité conditionnelle $P(Y = j | Z = n)$.
5. Que peut-on en déduire pour les variables Y et Z ?
6. On suppose que le nombre d'enfants d'une famille française est une variable aléatoire de loi de poisson de paramètre $2,2$.
   On admet que la probabilité d'avoir un garçon est égale à $1/2$ et que les naissances successives sont indépendantes. Trouver la probabilité que cette famille ait i enfants dont j garçons.

SOLUTIONS TRAVAUX DIRIGÉS : Variables aléatoires réelles discrètes

Solution Exercice 1.

1.





2. $*$ $P(X<0) = P(X=-4) + P(X=-2) = 0,45$.
   $*$ $P(X>-1) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 0,15 + 0,25 + 0,15 = 0,55$
   $*$ $P(-3,5 < X \leqslant -2) = P(X=-2) = 0,35$.
   Notons que $P(-3,5 < X \leqslant -2) = F_X(-2) - F_X(-3,5) = 0,45 - 0,10 = 0,35$.
   $*$ $P(-3,5 < X < -2) = 0$ car $(-3,5 < X < -2) = \varnothing$.

3. $*$ $|X|(\Omega) = \{1,2,3,4\}$.

x_i	1	2	3	4
$P(\lvert X\rvert = x_i)$	0, 15	0, 60	0, 15	0, 10

   $*$ On note $X_1 = X^2 + X - 2$. $X_1(\Omega) = \{0, 4, 10\}$.

x_i	0	4	10
$P(X_1 = x_i)$	0, 45	0, 25	0, 25

— On note $X_2 = \min(1, X)$. $X_2(\Omega) = \{-4, -2, 1\}$.

x_i	-4	-2	1
$P(X_2 = x_i)$	0, 10	0, 35	0, 55

— On note $X_3 = \max(X, -X^2)$. $X_3(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 16\}$.

x_i	1	2	3	4	16
$P(X_3 = x_i)$	0, 15	0, 25	0, 15	0, 35	0, 10

$\square$

Solution Exercice 2. Soient $(n, \lambda) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+$. On considère une variable X à valeurs dans $\{1, \dots, n\}$ telle que :
$\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $P(X=k) = \lambda k$.
La suite $(P(X=k))_{k\in\{1,\dots,n\}} = (\lambda k)_{k\in\{1,\dots,n\}}$ définit une loi de probabilité si et seulement si :

— $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $\lambda k \geqslant 0$ i.e. $\lambda \geqslant 0$.
— $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda k = 1$ i.e. $\lambda = \frac{2}{n(n+1)}$.

On calcule les moments de X :

— $E(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kP(X=k)$

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k^2}{n(n+1)} = \frac{2}{n(n+1)} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n+1}{3}.$$

— La formule de Koenig-Huygens permet de calculer la variance de X :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 P(X=k) - \left(\frac{2n+1}{3}\right)^2$$

$$V(X) = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k^3 - \left(\frac{2n+1}{3}\right)^2$$

$$V(X) = \frac{2}{n(n+1)} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{2n+1}{3}\right)^2$$

$$V(X) = \frac{n(n+1)}{2} - \left(\frac{2n+1}{3}\right)^2 = \frac{(n+2)(n-1)}{18}.$$

$\square$

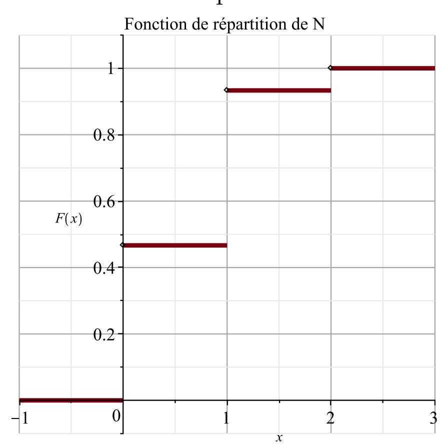
Solution Exercice 3. On tire au hasard deux pièces dans un lot de dis dont trois sont défectueuses. On note N le nombre de pièces défectueuses obtenues.

$N(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

$$P(N=0) = \frac{\binom{7}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{7}{15}$$

$$P(N=1) = \frac{\binom{7}{1}\binom{3}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{7}{15}$$

$$P(N=2) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{1}{15}$$



— $E(N) = 0 \times P(N=0) + 1 \times P(N=1) + 2 \times P(N=2) = \frac{7}{15} + \frac{2}{15} = \frac{9}{15}$.
— $V(N) = E(N^2) - E(N)^2 = 0^2 P(N=1) + 1^2 P(N=1) + 2^2 P(N=2) - \left(\frac{9}{15}\right)^2$

$V(N) = \frac{7}{15} + \frac{4}{15} - \left(\frac{9}{15}\right)^2 = \frac{28}{75}$.

□

Solution Exercice 4. On lance un dé N fois. Déterminer le nombre de lancers N pour que la fréquence d'apparition du 6 diffère de $\frac{1}{6}$ d'au plus $\frac{1}{100}$ avec un risque inférieur à 5%. On veut donc majorer la probabilité suivante par $\frac{5}{100}$:

$$P\left(\left|\frac{X}{N} - \frac{1}{6}\right| \geqslant \frac{1}{100}\right) = P\left(\left|X - \frac{N}{6}\right| \geqslant \frac{N}{100}\right) = P\left(|X - E(X)| \geqslant \frac{N}{100}\right)$$

On utilise l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev appliquée à la variable $X \hookrightarrow \mathscr{B}(N, \frac{1}{6})$:

$$P\left(|X - E(X)| \geqslant \frac{N}{100}\right) \leqslant \frac{V(X)}{\left(\frac{N}{100}\right)^2} = \frac{\frac{5N}{36}}{\frac{N^2}{10^4}}$$

Pour que la fréquence du 6 diffère d'au plus $\frac{1}{100}$ de $\frac{1}{6}$, avec un risque d'au plus 5% **il suffit** que :

$$\frac{\frac{5N}{36}}{\frac{N^2}{10^4}} \leqslant \frac{5}{100} \Longrightarrow N \geqslant \frac{10^6}{36}. \quad N = 27778 \text{ convient.}$$

□

Solution Exercice 5. Une urne contient m boules numérotées de 0 à $m-1$ où $m \geqslant 2$. Une pièce donne Pile avec la probabilité p et Face avec probabilité $q = 1 - p$ où $p \in]0, 1[$.

On tire une boule dans l'urne de manière équiprobable puis on lance la pièce indépendamment du tirage. On note X la v.a.r. qui vaut le numéro de la boule tirée si la pièce a donné Pile et l'opposé de ce numéro si la pièce a donné Face.

$X(\Omega) = \{-(m-1), \ldots, -1, 0, 1, \ldots, m-1\}$. Soit $k \in X(\Omega)$.

On note B_k : "on pioche la boule k" et A "la pièce donne Pile". @

— Si $k > 0$: $P(X = k) = P(B_k \cap A) = P(B_k)P(A) = \frac{1}{2m}$ par indépendance.

— Si $k = 0$: $P(X = 0) = P(B_0 \cap A) + P(B_0 \cap \overline{A}) = \frac{1}{m}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) = \frac{1}{m}$.

— Si $k < 0$: $P(X = k) = P(B_{-k} \cap \overline{A}) = \frac{1}{2m}$.

On calcul alors :

$$E(X) = \sum_{k=-(m-1)}^{(m-1)} kP(X = k) = \sum_{\substack{k=-(m-1)\\k\neq 0}}^{(m-1)} k\frac{1}{2m} + 0P(X = 0)$$

$$= \sum_{\substack{k=-(m-1)\\k\neq 0}}^{(m-1)} k\frac{1}{2m}$$

$$= \frac{1}{2m}\left(\sum_{k=1}^{(m-1)} k - \sum_{k=1}^{(m-1)} k\right) = 0.$$

□

Solution Exercice 6. On lance deux dés équilibrés à 6 faces. On note X_1, X_2 les numéros respectifs du dé 1 et 2.

- On note $X = \max(X_1, X_2)$ le plus grand numéro obtenu.

1. $X(\Omega) = [\![1, 6]\!]$.

   On détermine la fonction de répartition de X en utilisant l'indépendance.
   $F_X(1) = P(X \leqslant 1) = P(X_1 \leqslant 1 \cap X_2 \leqslant 1) = P(X_1 \leqslant 1)P(X_2 \leqslant 1) = \frac{1}{36}$.
   $F_X(2) = P(X \leqslant 2) = P(X_1 \leqslant 2 \cap X_2 \leqslant 2) = P(X_1 \leqslant 2)P(X_2 \leqslant 2) = \frac{4}{36}$.
   $F_X(3) = \frac{9}{36}$.
   $F_X(4) = \frac{16}{36}$.
   $F_X(5) = \frac{25}{36}$.
   $F_X(6) = 1$.

   On en déduit la loi de X :

   — $P(X = 1) = \frac{1}{36}$.
   — $P(X = 2) = F_X(2) - F_X(1) = \frac{4}{36} - \frac{1}{36} = \frac{3}{36}$.
   — $P(X = 3) = F_X(3) - F_X(2) = \frac{9}{36} - \frac{4}{36} = \frac{5}{36}$.
   — $P(X = 4) = F_X(4) - F_X(3) = \frac{16}{36} - \frac{9}{36} = \frac{7}{36}$.
   — $P(X = 5) = F_X(5) - F_X(4) = \frac{25}{36} - \frac{16}{36} = \frac{9}{36}$.
   — $P(X = 6) = F_X(6) - F_X(5) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$.

   - On note $Y = \min(X_1, X_2)$ le plus petit numéro obtenu.

   $Y(\Omega) = [\![1, 6]\!]$.

   On détermine la fonction de survie : $r_X(x) = P(X > x)$ de Y.
   $r_Y(1) = P(Y > 1) = P(X_1 > 1 \cap X_2 > 1) = P(X_1 > 1)P(X_2 > 1) = \frac{25}{36}$ donc $F_Y(1) = \frac{11}{36}$.
   $r_Y(2) = P(Y > 2) = P(X_1 > 2 \cap X_2 > 2) = P(X_1 > 2)P(X_2 > 2) = \frac{16}{36}$ donc $F_Y(2) = \frac{20}{36}$.
   $r_Y(3) = \frac{9}{36}$ donc $F_Y(3) = \frac{27}{36}$.
   $r_Y(4) = \frac{4}{36}$ donc $F_Y(4) = \frac{32}{36}$.
   $r_Y(5) = \frac{1}{36}$ donc $F_Y(5) = \frac{35}{36}$.
   $r_Y(6) = 0$ donc $F_Y(6) = 1$.

   On en déduit la loi de Y :

   — $P(Y = 1) = F_Y(1) = \frac{11}{36}$.
   — $P(Y = 2) = F_Y(2) - F_Y(1) = \frac{20}{36} - \frac{9}{36} = \frac{9}{36}$.
   — $P(Y = 3) = F_Y(3) - F_Y(2) = \frac{27}{36} - \frac{20}{36} = \frac{7}{36}$.
   — $P(Y = 4) = F_Y(4) - F_Y(3) = \frac{32}{36} - \frac{27}{36} = \frac{5}{36}$.
   — $P(Y = 5) = F_Y(5) - F_Y(4) = \frac{35}{36} - \frac{32}{36} = \frac{3}{36}$.
   — $P(Y = 6) = F_Y(6) - F_Y(5) = 1 - \frac{35}{36} = \frac{1}{36}$.

2. Calculer $E(X) = \frac{161}{36}$ et $E(Y) = \frac{91}{36}$.
3. Calculer $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ et $V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2$.

□

Solution Exercice 7. On dispose de N urnes contenant chacune n jetons numérotées de 1 à n. On note $X_1, \dots, X_N$ le numéro obtenu dans l'urne $1, \dots, N$.

Ainsi $X = \max(X_1, \dots, X_N)$.

1. $F_X(1) = P(X \leqslant 1) = P(X_1 \leqslant 1 \cap \dots X_N \leqslant 1)$
   $F_X(1) = P(X_1 \leqslant 1) \dots P(X_N \leqslant 1)$ par indépendance.
   Il vient $F_X(1) = \left(\frac{1}{n}\right)^N$.
   $F_X(2) = P(X \leqslant 2) = P(X_1 \leqslant 2) \dots P(X_N) \leqslant 2) = \left(\frac{2}{n}\right)^N$.
   Et plus généralement, $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $F_X(k) = \left(\frac{k}{n}\right)^N$.
2. $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$ et pour tout $k \in [\![1, N]\!]$:
$$P(X = k) = F_X(k) - F_X(k-1) = \left(\frac{k}{n}\right)^N - \left(\frac{k-1}{n}\right)^N.$$
3. On a :
$$\begin{aligned} E(X) = \sum_{k=1}^{n} kP(X = k) &= \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{k}{n}\right)^N - k\left(\frac{k-1}{n}\right)^N \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left[k\left(\frac{k}{n}\right)^N - (k-1)\left(\frac{k-1}{n}\right)^N\right] - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k-1}{n}\right)^N \\ &= n - \frac{1}{n^N}\sum_{\ell=0}^{n-1}\ell^N. \end{aligned}$$
   On en déduit en reconnaissant une somme de Riemann :
$$\frac{E(X)}{n} = 1 - \frac{1}{n}\sum_{\ell=0}^{n-1}\left(\frac{\ell}{n}\right)^N \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - \int_0^1 t^N dt = 1 - \frac{1}{N+1}$$
   Ainsi $E(X) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\left(1 - \frac{1}{N+1}\right)$.
4. On a $E(X) = n - \frac{1}{n^N}\sum_{\ell=0}^{n-1}\ell^N$. Or :
$$0 \leqslant \frac{1}{n^N}\sum_{\ell=0}^{n-1}\ell^N \leqslant \frac{n(n-1)^N}{n^N} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
   car $\frac{n-1}{n} \in]0;1[$. Par encadrement $\lim\limits_{N\to+\infty}\frac{1}{n^N}\sum_{\ell=0}^{n-1}\ell^N = 0$ et finalement :
$$E(X) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} n.$$
   Ce résultat n'est pas surprenant : si le nombre d'urne N est grand avec un nombre de boules n fixé, il n'est pas surprenant que la moyenne du plus grand numéro obtenu soit n.

□

Solution Exercice 8. Dans les expériences suivantes, reconnaître la loi de X :

1. On place 10 boules dans 3 boites numérotées $1, 2, 3$.
   X est le nombre d'objet dans la boite 1 : $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(10, \frac{1}{3}\right)$.
2. Une urne contient 5 boules numérotées 1, 5 boules numérotées 2 et 5 boules numérotées 3.
   On tire une boule et on note X le numéro de cette boule : $X \hookrightarrow \mathscr{U}(\{0, 1, 2\})$.
3. On tire avec remise et successivement les cartes d'un jeu de 32 cartes. On note X le rang d'apparition de la première dame : $X \hookrightarrow \mathscr{G}(\frac{1}{8})$
4. On prend un jeu de 32 cartes mélangées. On retourne une par une les cartes jusqu'à l'apparition de l'as de coeur.
   X : est le nombre de cartes que l'on a retournées.
$$X(\Omega) = [\![1, 32]\!] \text{ et } \forall k \in [\![1, 32]\!], P(X = k) = \frac{1}{32}.$$
5. On suppose que les probabilités de naissance d'une fille et d'un garçon sont identiques.
   X est le nombre de garçons dans une famille de 3 enfants : $X \hookrightarrow \mathscr{B}(3, \frac{1}{2})$.
6. On suppose que 1% des candidats aux concours n'aiment pas les probabilités. Un examinateur interroge 100 candidats. X est le nombre de candidat n'appréciant pas les probabilités $X \hookrightarrow \mathscr{B}(100, \frac{1}{100})$.

□

Solution Exercice 9. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. Soit k un entier entre 1 et n. On tire de l'urne une poignée de k boules et on appelle X le plus grand nombre obtenu.

$X(\Omega) = [\![k, n]\!]$. Pour $\ell \in [\![k, n]\!]$, l'événement $(X = \ell)$ signifie que le plus grand numéro obtenu est ℓ et les $k-1$ autres boules de la poignée sont sélectionnées parmi les $\ell - 1$ boules de numéro $< \ell$: il y a donc $\mathrm{Card}(X = \ell) = \binom{\ell-1}{k-1}$ poignées de k boules dont le plus grand numéro est k. Ainsi :
$$\forall \ell \in [\![k, n]\!] : P(X = \ell) = \frac{\binom{\ell-1}{k-1}}{\binom{n}{k}}.$$

□

Solution Exercice 10. Une urne contient 10 boules numérotée de 1 à 10. On effectue deux tirages successifs d'une boule avec remise et on note X le plus grand Y le plus petit des numéros obtenus.

1. $X(\Omega) = [\![1, 10]\!]$.

   On détermine la fonction de répartition de X en utilisant l'indépendance de tirages.

   $F_X(1) = P(X \leqslant 1) = P(X_1 \leqslant 1 \cap X_2 \leqslant 1) = P(X_1 \leqslant 1)P(X_2 \leqslant 1) = \frac{1}{100}$.

   $F_X(2) = P(X \leqslant 2) = P(X_1 \leqslant 2 \cap X_2 \leqslant 2) = P(X_1 \leqslant 2)P(X_2 \leqslant 2) = \frac{4}{100}$.

   $F_X(3) = \frac{9}{100}$.

   $F_X(4) = \frac{16}{100}$.

   $F_X(5) = \frac{25}{100}$.

   $F_X(6) = \frac{36}{100}$.

   $F_X(7) = \frac{49}{100}$.

   $F_X(8) = \frac{64}{100}$.

   $F_X(9) = \frac{81}{100}$.

   $F_X(10) = 1$.

   On en déduit la loi de X :

   — $P(X = 1) = \frac{1}{100}$.
   — $P(X = 2) = F_X(2) - F_X(1) = \frac{4}{100} - \frac{1}{100} = \frac{3}{100}$.
   — $P(X = 3) = F_X(3) - F_X(2) = \frac{9}{100} - \frac{4}{100} = \frac{5}{100}$.
   — $P(X = 4) = F_X(4) - F_X(3) = \frac{16}{100} - \frac{9}{100} = \frac{7}{100}$.
   — $P(X = 5) = F_X(5) - F_X(4) = \frac{25}{100} - \frac{16}{36} = \frac{9}{100}$.
   — $P(X = 6) = F_X(6) - F_X(5) = \frac{36}{100} - \frac{25}{100} = \frac{11}{100}$.
   — $P(X = 7) = F_X(7) - F_X(6) = \frac{49}{100} - \frac{36}{100} = \frac{13}{100}$.
   — $P(X = 8) = F_X(8) - F_X(7) = \frac{64}{100} - \frac{49}{100} = \frac{15}{100}$.
   — $P(X = 9) = F_X(9) - F_X(8) = \frac{81}{100} - \frac{64}{100} = \frac{17}{100}$.
   — $P(X = 10) = F_X(10) - F_X(9) = 1 - \frac{81}{100} = \frac{19}{100}$.

   On en déduit $E(X) = \frac{143}{20}$.

2. On trouve de manière analogue :

   — $P(Y = 1) = \frac{19}{100}$.
   — $P(Y = 2) = \frac{17}{100}$.
   — $P(Y = 3) = \frac{15}{100}$.
   — $P(Y = 4) = \frac{13}{100}$.
   — $P(Y = 5) = \frac{11}{100}$.
   — $P(Y = 6) = \frac{9}{100}$.
   — $P(Y = 7) = \frac{7}{100}$.
   — $P(Y = 8) = \frac{5}{100}$.
   — $P(Y = 9) = \frac{3}{100}$.
   — $P(Y = 10) = \frac{1}{100}$.

   On trouve $E(Y) = \frac{77}{20}$.

3. On pose $Z = X - Y$. On a $Z(\Omega) = [\![0, 9]\!]$:

$$P(Z = 0) = P\left(\bigcup_{k=1}^{10} X = k \cap Y = k\right) = \sum_{k=1}^{10} P(X = k \cap Y = k) \quad \text{par additivité}$$
$$= \sum_{k=1}^{10} P(X = k)P(Y = k) \quad \text{par indépendance}$$

$$P(Z = 1) = \sum_{k=1}^{9} P(X = k + 1)P(Y = k).$$

   Et plus généralement,

$$P(Z = \ell) = \sum_{k=1}^{10-\ell} P(X = k + \ell)P(Y = k).$$

   D'autre part, $E(Z) = E(X) - E(Y)$.

□

Solution Exercice 11. On dispose de deux boites A et B. La boite A contient 4 boules rouges et 7 vertes. La boite B contient 6 rouges et 5 vertes.

On choisit une boite au hasard puis une poignée de 3 boules dans celle-ci.

- $P(X = 0) = P(A \cap X = 0) + P(B \cap X = 0)$
  $P(X = 0) = P(A)P_A(X = 0) + P(B)P_B(X = 0)$
  $P(X = 0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\binom{7}{3}}{\binom{11}{3}} + \frac{\binom{5}{3}}{\binom{11}{3}}\right)$
- $P(X = 1) = P(A \cap X = 1) + P(B \cap X = 1)$
  $P(X = 1) = \frac{1}{2}\left(\frac{\binom{4}{1}\binom{7}{2}}{\binom{11}{3}} + \frac{\binom{6}{1}\binom{5}{2}}{\binom{11}{3}}\right)$
- $P(X = 2) = P(A \cap X = 2) + P(B \cap X = 2)$
  $P(X = 2) = \frac{1}{2}\left(\frac{\binom{4}{2}\binom{7}{1}}{\binom{11}{3}} + \frac{\binom{6}{2}\binom{5}{1}}{\binom{11}{3}}\right)$
- $P(X = 3) = P(A \cap X = 3) + P(B \cap X = 3)$
  $P(X = 3) = \frac{1}{2}\left(\frac{\binom{4}{3}}{\binom{11}{3}} + \frac{\binom{6}{3}}{\binom{11}{3}}\right)$

On calcule classiquement $E(X) = 0P(X = 0) + P(X = 1) + 2P(X = 2) + 3P(X = 3)$. □

Solution Exercice 12. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0; 1[$. On considère une variable $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$. Calculer l'espérance de $\dfrac{1}{X + 1}$.

On note $q = 1 - p$.

On applique le théorème de transfert. La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x+1}$ est bien définie sur $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$:

$$\begin{aligned}
E\left(\frac{1}{X+1}\right) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}}_{\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}} p^k q^{n-k} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} p^k q^{n-k} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n+1}{\ell} p^{\ell-1} q^{n-(\ell-1)} \\
&= \frac{1}{p(n+1)} \left(\sum_{\ell=0}^{n+1} \binom{n+1}{\ell} p^{\ell} q^{n+1-\ell} - q^{n+1} \right) \\
&= \frac{1}{p(n+1)} \left((p+q)^{n+1} - q^{n+1} \right) \\
&= \frac{1 - q^{n+1}}{p(n+1)}.
\end{aligned}$$

□

Solution Exercice 13. On cherche à dépister une maladie grâce à des analyses de sang. On considère une population de n individus. On veut comparer deux méthodes.

— La première consiste à analyser individuellement tous les prélèvements.

— La seconde consiste à mélanger les n prélèvements et à effectuer une analyse du mélange (le résultat est alors positif dès que l'une des personnes est atteinte).

Si le résultat est positif, on effectue alors une analyse individuelle des n prélèvements.

On note p la probabilité, pour un individu, d'être malade.

On note X_n le nombre d'analyses nécessaires pour la deuxième méthode.

1. $X_n(\Omega) = \{1, n+1\}$
   On note M_i : "la i-ième personne est malade".
   $P(X_n = 1) = P(\overline{M_1} \cap \cdots \cap \overline{M_n}) = (1-p)^n = q^n$
   $P(X_n = n+1) = 1 - P(X_n = 1) = 1 - q^n$.
   On a :
   $E(X_n) = P(X_n = 1) + (n+1)P(X_n = n+1) = q^n + (n+1)(1 - q^n)$.
2. Le nombre Y_n d'analyses effectuées par la première méthode est constant $Y_n = n$.
   L'économie moyenne est donc $E(Y_n - X_n) = E(Y_n) - E(X_n) = n - E(X_n)$.
   On obtient : $n - E(X_n) = n - q^n - (n+1)(1 - q^n) = nq^n - 1$.
   On étudie la fonction $f : x \longmapsto xq^x - 1$ sur $[1; +\infty[$.
   $f(x) = x\exp(x \ln q) - 1$ donc $f'(x) = q^x + (x \ln q) q^x = q^x(1 + x \ln q)$.
   Ainsi, $f'(x) \geqslant 0 \iff 1 + x\ln q \geqslant 0 \iff x \leqslant -\frac{1}{\ln q}$ (notez que $\ln q < 0$).
   La fonction f est croissante sur $[1, -\frac{1}{\ln q}]$ et décroissante sur $[-\frac{1}{\ln q}; +\infty[$ (avec limite -1 en $+\infty$).
   f atteint son maximum en $x = -\frac{1}{\ln q}$.
   On obtient que l'économie est maximale pour $n \in \{19999, 20000\}$.

□

Solution Exercice 14. Une suite (p_n) définit une loi de probabilité si et seulement si :

— pour tout n, $p_n \geqslant 0$,

— la série $\sum p_n$ converge et a pour somme 1.

1. $X(\Omega) = [\![2, +\infty[\![$ est dénombrable
   $p_n = \dfrac{\lambda}{n^2 - 1} \geqslant 0$ pour $n \geqslant 2$.
   D'autre part :
   $$\begin{aligned}
   \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^2-1} = \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{(n-1)(n+1)} &= \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) \\
   &= \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
   &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{N}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{N+1}\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{4}.
   \end{aligned}$$
   Ainsi, $\lambda = \frac{4}{3}$.
2. $X(\Omega) = \mathbb{N}$. On a bien $p_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   La série $\sum \dfrac{n}{2^n}$ converge à l'instar de la série géométrique dérivée de raison $x = \frac{1}{2} \in]-1; 1[$.
   On a :
   $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}\right)'_{|x=1/2} = \frac{1}{2}\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = 2.$$
   Ainsi, $\lambda = \frac{1}{2}$.

□

Solution Exercice 15. Une urne contient a boules blanches et b noires. On effectue des tirages successifs en remettant à chaque fois la boule tirée.

On note $p = \frac{a}{a+b}$ et $q = 1 - p = \frac{b}{a+b}$.

1. $X_1 \hookrightarrow \mathscr{G}(\frac{a}{a+b})$, $E(X_1) = \frac{a+b}{a}$, $V(X_1) = \frac{\frac{b}{a+b}}{\left(\frac{a}{a+b}\right)^2} = \frac{b}{a+b}\frac{(a+b)^2}{a^2} = \frac{b(a+b)}{a^2}$.
2. $X_2(\Omega) = [\![2, +\infty[\![$ et pour tout $\ell \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}
P(X_2 = \ell) &= \sum_{k=1}^{\ell-1} P(X_1 = k) P_{X_1=k}(X_2 = \ell) \\
&= \sum_{k=1}^{\ell-1} q^{k-1} p q^{\ell-1-(k+1)+1} p \\
&= \sum_{k=1}^{\ell-1} q^{k-1} p^2 q^{\ell-k-1} = \sum_{k=1}^{\ell-1} q^{\ell-2} p^2 \\
&= (\ell-1) q^{\ell-2} p^2.
\end{aligned}$$

3. — $E(X_1) = \frac{a+b}{a}$
   — D'autre part :

$$\begin{aligned}
E(X_2) &= \sum_{\ell=2}^{+\infty} \ell P(X = \ell) \\
&= \sum_{\ell=2}^{+\infty} \ell(\ell-1) q^{\ell-2} p^2 = p^2 \sum_{\ell=2}^{+\infty} \ell(\ell-1) q^{\ell-2} \\
&= p^2 \left(\frac{1}{1-x}\right)''_{|x=q} = \frac{2p^2}{(1-q)^3} = \frac{2}{p}.
\end{aligned}$$

□

***Solution Exercice** 16.* Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la fonction génératrice est :

$$\forall s \in \left]-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right[, \; g(s) = \frac{s}{2-s^2}.$$

1. On détermine le D.S.E. de g :

$$\begin{aligned}
g(s) &= \frac{s}{2-s^2} = \frac{s}{2} \frac{1}{1 - \left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2} \\
&= \frac{s}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{s^{2n+1}}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) s^n
\end{aligned}$$

   la dernière égalité étant la définition de la fonction génératrice.
   — $P(X = 2n) = 0$,
   — $P(X = 2n+1) = \dfrac{1}{2^{n+1}}$.
2. X est à valeurs dans $\{1, 3, 5, \dots, \}$.
   Ainsi, $Y = \frac{1}{2}(X+1)$ est à valeurs dans $\{1, 2, 3, \dots, \} = \mathbb{N}$.
   Pour $n \in \mathbb{N}$, $Y = n \iff \frac{1}{2}(X+1) = n \iff X = 2n-1$.
   Il vient : $P(Y = n) = P(X = 2n-1) = \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \frac{1}{2}$.
   Ainsi, $Y \hookrightarrow \mathscr{G}(\frac{1}{2})$ donc $E(Y) = 2$ et $V(Y) = 2$.
   On a $X = 2Y - 1$.
   Ainsi, $E(X) = E(2Y-1) = 2E(Y) - 1 = 4 - 1 = 3$.
   On a $V(X) = 2^2 V(Y) = 8$.

□

***Solution Exercice** 17.*

1. Soient $p \in]0; 1[$ et $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$F_X(n) = \sum_{k=1}^{n} P(X = k) = \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} p = p \sum_{k=0}^{n-1} q^k = p \frac{1-q^n}{1-q} = 1 - q^n.$$

   (b) La fonction de survie vérifie $P(X > n) = 1 - P(X \leqslant n) = q^n$ donc

$$\begin{aligned}
P_{X>n}(X > n+k) &= \frac{P(X > n \cap X > n+k)}{P(X > n)} \\
&= \frac{P(X > n+k)}{P(X > n)} \\
&= \frac{q^{n+k}}{q^n} = q^k = P(X > k).
\end{aligned}$$

2. Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$. Montrons par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(Y \leqslant n) = \frac{1}{n!} \int_{\lambda}^{+\infty} e^{-t} t^n dt.$$

   — $n = 0$: $P(Y \leqslant 0) = P(Y = 0) = e^{-\lambda}$.
   D'autre part, $\frac{1}{0!} \int_{\lambda}^{+\infty} e^{-t} t^0 dt = \int_{\lambda}^{+\infty} e^{-t} dt = \lim_{A \to +\infty} \left[-e^{-t}\right]_{\lambda}^{A} = e^{-\lambda}$.
   — Si l'égalité est vérifiée au rang n alors en intégrant par parties :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u(t) & = & t^{n+1} \\ v'(t) & = & e^{-t} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} u'(t) & = & (n+1)t^n \\ v(t) & = & -e^{-t} \end{array}\right.$$

$(u, v \in \mathscr{C}^1([\lambda, A]))$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(n+1)!}\int_\lambda^A e^{-t}t^{n+1}dt &= \frac{1}{(n+1)!}\left[-e^{-t}t^{n+1}\right]_\lambda^A + \frac{n+1}{(n+1)!}\int_\lambda^A e^{-t}t^n dt\\ &\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{1}{n!}\int_\lambda^{+\infty} e^{-t}t^n dt\\ &= P(Y=n+1) + P(Y \leqslant n)\end{aligned}$$

par croissances comparées, par hypothèse de récurrence et par définition de la loi de Poisson.

$\square$

Solution Exercice 18. On note $N \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$: $P(N=n) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}$.

On veut comparer $P\left(\bigcup_{p=0}^{+\infty} X = 2p\right)$ et $P\left(\bigcup_{p=0}^{+\infty} X = 2p+1\right)$

Par σ-additivité les réunions étant disjointes, on calcule donc :

$$S = \sum_{p=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{2p}}{(2p)!} = e^{-\lambda}\cosh(\lambda) \text{ et } T = \sum_{p=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{2p+1}}{(2p+1)!} = e^{-\lambda}\sinh(\lambda).$$

On en déduit $S = \frac{1+e^{-2\lambda}}{2} > T = \frac{1-e^{-2\lambda}}{2}$. On croira avec profit A. $\square$

Solution Exercice 19. Soient a, λ, μ des réels et pour $k \in \mathbb{N}$, $p_k = a\dfrac{\lambda^k + \mu^k}{k!}$.

1. La suite $(p_k)_{k\geqslant 0}$ définit une loi de probabilité si et seulement si $p_k \geqslant 0$ et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a\frac{\lambda^k+\mu^k}{k!} = 1 \iff a(e^\lambda + e^\mu) = 1 \iff a = \frac{1}{e^\lambda + e^\mu}.$$

2. Si $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\nu)$ alors pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$e^{-\nu}\frac{\nu^k}{k!} = \frac{1}{e^\lambda + e^\mu}\frac{\lambda^k+\mu^k}{k!} \iff e^{-\nu}\nu^k = \frac{\lambda^k+\mu^k}{e^\lambda+e^\mu} \iff \frac{e^\lambda + e^\mu}{e^\nu} = \frac{\lambda^k+\mu^k}{\nu^k} (*).$$

— Si $\lambda = \mu$ alors $(*)$ devient

$$\forall k \in \mathbb{N}, \frac{2e^\lambda}{e^\nu} = 2\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^k$$

ce qui implique nécessairement que $\lambda = \nu$ (sinon on a une contradiction lorsque $k \to +\infty$).
Réciproquement, si $\lambda = \mu$ réel strictement positif quelconque, on a bien : $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$.

— Si $\lambda \neq \mu$, alors $\lambda > \nu$ ou $\lambda < \nu$.
On traite le cas $\lambda > \mu$ l'autre cas étant similaire.
Dans ce cas, $(*)$ implique :

$$\frac{e^\lambda + e^\mu}{e^\nu} = \frac{\lambda^k+\mu^k}{\nu^k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^k.$$

On a alors nécessairement $\lambda = \nu$ (sinon on a une contradiction en calculant la limite de chaque membre de l'équivalent ci-dessus).
Il vient finalement, $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$: ainsi, $P(X=k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$ et par conséquent $\mu = 0$ ce qui contredit l'hypothèse $\mu > 0$.

Conclusion : X suit une loi de poisson si et seulement si $\lambda = \mu$.

$\square$

Solution Exercice 20. On dispose de n pièces équilibrées. On procède à X lancers : au k-ième lancer, on lance k pièces. On s'arrête dès qu'on obtient au moins un pile ou après les n lancers.

On note F_i : "au i-ème lancer on n'obtient que des faces".

1. $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$.

$$\begin{aligned}P(X=k) &= P(F_1 \dots F_{k-1}P_k) = P(F_1)\dots P(F_{k-1})P(\overline{F_k})\\ &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2 \dots \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right]\end{aligned}$$

2. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n kP(X=k) &= \sum_{k=1}^n \left[k\left(\frac{1}{2}\right)^{\sum_{\ell=1}^{k-1}\ell} - k\left(\frac{1}{2}\right)^{\sum_{\ell=1}^{k}\ell}\right]\\ &= \sum_{k=1}^n \left[k\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k(k-1)}{2}} - k\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k(k+1)}{2}}\right]\\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k(k-1)}{2}} + \sum_{k=1}^n \underbrace{(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k(k-1)}{2}}}_{u_{k-1}} - \underbrace{k\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k(k+1)}{2}}}_{u_k}\\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k(k-1)}{2}} + u_0 - u_n \quad \text{télescopage}\\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k(k-1)}{2}} - n\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}\end{aligned}$$

Pour $n \geqslant 3$, $\dfrac{n(n-1)}{2} \geqslant n$ donc $0 \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}} \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}$ $(*)$.

La série $\sum \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ est convergente par comparaison à la série géométrique de raison $\frac{1}{2} \in]-1;1[$.
En utilisant à nouveau la majoration $(*)$, on a :

$$0 \leqslant n\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}} \leqslant n\left(\frac{1}{2}\right)^{n}.$$

Par croissances comparées $n\frac{1}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et par encadrement, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}} = 0.$$

Finalement :

$$\lim_{n\to+\infty} E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k(k-1)}{2}}.$$

□

Solution Exercice 21. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ.
On sait que $X+Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda+\mu)$ car les variables X et Y sont indépendantes.
Soit $k \in [\![0,n]\!]$:

$$\begin{aligned}
P_{(X+Y=n)}(X=k) &= \frac{P(X+Y=n \cap X=k)}{P(X+Y=n)}\\
&= \frac{P(X=k \cap Y=n-k)}{P(X+Y=n)}\\
&= \frac{P(X=k)P(Y=n-k)}{P(X+Y=n)} \qquad \text{par indépendance}\\
&= \frac{e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\mu}\frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-(\lambda+\mu)}\frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}}\\
&= \frac{\frac{\lambda^k}{k!}\frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}}{\frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-k}\\
&= \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{n-k}
\end{aligned}$$

Ainsi la loi de X sachant $(X+Y=n)$ est binomiale $\mathscr{B}\left(n, \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$ □

Solution Exercice 22. Soient $p \in]0;1[$ et $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$. On pose $Y = \frac{1}{X}$.
Sous réserve de convergence, le théorème de transfert donne :

$$E\left(\frac{1}{X}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}pq^{k-1} = \frac{p}{q}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{q^k}{k} = -\frac{p}{q}\ln(1-q).$$

□

Solution Exercice 23. Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On suppose que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et qu'il existe $\lambda > 0$, $a \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(X=k) = ak^2\frac{\lambda^k}{k!}$$

1. La série génératrice de X a un rayon de convergence $R = +\infty$ à l'instar de la série exponentielle.

$$\begin{aligned}
G_X(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)t^k\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} ak^2\frac{\lambda^k}{k!}t^k = \sum_{k=0}^{+\infty} ak(k-1)\frac{(t\lambda)^k}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} ak\frac{(t\lambda)^k}{k!}\\
&= \sum_{k=2}^{+\infty} a\frac{(t\lambda)^k}{(k-2)!} + \sum_{k=1}^{+\infty} a\frac{(t\lambda)^k}{(k-1)!}\\
&= a(t\lambda)^2\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!} + at\lambda\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\\
&= a(t\lambda)^2e^{\lambda} + at\lambda e^{\lambda}\\
&= at\lambda e^{\lambda}(t\lambda+1)
\end{aligned}$$

2. $(X=n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements :
$$1 = G_X(1) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) = a\lambda e^{\lambda}(\lambda+1) \Longrightarrow a = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda(\lambda+1)}.$$
Pour que X existe il faut donc que $a = \dfrac{e^{-\lambda}}{\lambda(\lambda+1)}$.
Réciproquement si $a = \dfrac{e^{-\lambda}}{\lambda(\lambda+1)}$ la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)$ converge et a pour somme 1.
3. $G_X(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $G_X'(t) = 2at\lambda^2e^{\lambda} + a\lambda e^{\lambda}$.
$G_X'(1) = a\lambda e^{\lambda}(2\lambda+1) = \frac{2\lambda+1}{\lambda+1}$.

□

Solution Exercice 24. Le nombre de clients quotidiens d'un magasin suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Chaque client a une probabilité p d'acheter. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'achats effectués sur un jour.

$X(\Omega) = \mathbb{N}$. On note Y le nombre de clients sur une journée : $Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$.

$$\begin{aligned}
P(X=k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} P(Y=n)P_{(Y=n)}(X=k) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\binom{n}{k}p^k q^{n-k} = e^{-\lambda}\left(\frac{p}{q}\right)^k \frac{1}{k!}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{(\lambda q)^n}{(n-k)!} \\
&= e^{-\lambda}\left(\frac{p}{q}\right)^k \frac{1}{k!}(\lambda q)^k \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\lambda q)^n}{n!} = \frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda(1-q)} \\
&= \frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda p} : X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda p), E(X) = \lambda p
\end{aligned}$$

□

Solution Exercice 25.

Soient $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ des variables indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

On pose $Z = XY$ et G_X, G_Y, G_Z.

1. $G_Y(t) = P(X=0)t^0 + P(X=1)t = q + pt$.
2. On a :

$$\begin{aligned}
G_Z(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(Z=n)t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} P(XY=n)t^n \\
&= P(Z=0) + \sum_{n=1}^{+\infty} P(Z=n)t^n \\
&= P(Y=0 \cap \bigcup_{n=0}^{+\infty} X=n) + P(Y=1 \cap X=0) + \sum_{n=1}^{+\infty} P(Y=1 \cap X=n)t^n \\
&= P(Y=0) + P(Y=1 \cap X=0) + \sum_{n=1}^{+\infty} P(Y=1 \cap X=n)t^n \\
&= q + pe^{-\lambda} + \sum_{n=1}^{+\infty} pe^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}t^n = q + \sum_{n=0}^{+\infty} pe^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}t^n \\
&= q + pe^{-\lambda}e^{\lambda t} = q + pe^{\lambda(t-1)} \\
&= G_Y \circ G_X(t)
\end{aligned}$$

car $G_Y(y) = q + px$ et $G_X(x) = e^{\lambda(t-1)}$.

3. • $G'_Z(t) = G'_X(t)G'_Y(G_X(t))$.

On a :
— $G'_X(1) = E(X) = \lambda$.
— $G_X(1) = 1$ donc $G'_Y(G_X(1)) = G'_Y(1) = E(Y) = p$.

Ainsi, $G'_Z(1) = E(Z) = E(X)E(Y) = \lambda p$.

•
$V(X) = E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2 = G''_Z(1) + .G'_Z(1) - (G'_Z(1))^2$
$V(X) = p\lambda^2 + p\lambda - (p\lambda)^2 = p\lambda(\lambda + 1 - p\lambda)$

□

Solution Exercice 26. Un urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On les tire un à un, successivement avec remise. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirages pour obtenir pour la première fois deux numéros distincts.

1. (a) On note A_i : "le numéro i apparait au premier tirage".
On suppose A_i réalisé. On a donc :

$$P(X=k|A_i) = \left(\frac{1}{n}\right)^{k-2}\frac{n-1}{n} = \frac{n-1}{n^{k-1}}$$

car il s'agit de d'obtenir le numéro i lors des $k-2$ tirages $2, 3, \dots, k-1$ et un numéro quelconque autre que i lors du k-ième tirage.

(b) La famille $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est un s.c.e.
La formule des probabilités totales donne :

$$\begin{aligned}
P(X=k) &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(X=k|A_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^{k-2}\frac{n-1}{n} \\
&= \frac{n-1}{n^{k-1}}
\end{aligned}$$

2. $X(\Omega) = [\![2, +\infty[\![$ donc $Y = X-1$ est à valeurs dans $[\![1, +\infty[\![$.
Soit $k \geqslant 1$, on a

$$P(Y=k) = P(X-1=k) = P(X=k+1) = \frac{n-1}{n^k} = \frac{1}{n^{k-1}}\frac{n-1}{n}.$$

On en déduit que $Y \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\frac{n-1}{n}\right)$.
Ainsi $E(Y) = \frac{n-1}{n}$ donc $E(X) = E(Y+1) = \frac{2n-1}{n-1}$.
Enfin, $V(X) = V(Y) = \frac{\frac{1}{n}}{\left(\frac{n-1}{n}\right)^2} = \frac{n}{(n-1)^2}$.

□

Solution Exercice 27.

1.

X/Y	0	1	2	3
1	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{7}{60}$
2	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{15}$
3	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{7}{60}$	$\frac{3}{20}$

2. $X(\Omega) = [\![1,3]\!]$. On remplit en sommant sur les lignes pour trouver la loi de X :
   — $P(X=1) = \frac{1}{60} + \frac{1}{20} + \frac{1}{12} + \frac{7}{60}$
   — etc.
   $Y(\Omega) = [\![0,3]\!]$. On remplit le tableau en sommant sur les colonnes :
   — $P(Y=0) = \frac{1}{60} + \frac{1}{30} + \frac{1}{20}$
   — etc.

X/Y	0	1	2	3	Loi de X
1	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{7}{60}$	$\frac{4}{15}$
2	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{7}{60}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{2}{5}$
Loi de Y	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	

3. Les variables X et Y ne sont pas indépendantes car (par exemple) :
$$P(X=1\cap Y=0) = \frac{1}{60} \neq \frac{4}{150} = P(X=1)P(Y=0).$$
4. On a $E(X) = 1\times\frac{4}{15} + 2\times\frac{1}{3} + 3\times\frac{2}{5} = \frac{32}{15}$
   et $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{26}{5} - \left(\frac{32}{15}\right)^2 = \frac{146}{225}$.
5. — Loi de X sachant $(Y=0)$:
   * $P_{(Y=0)}(X=1) = \dfrac{P(Y=0\cap X=1)}{P(Y=0)} = \dfrac{\frac{1}{60}}{\frac{1}{10}} = \dfrac{1}{6}$
   * $P_{(Y=0)}(X=2) = \dfrac{P(Y=0\cap X=2)}{P(Y=0)} = \dfrac{\frac{1}{30}}{\frac{1}{10}} = \dfrac{1}{3}$
   * $P_{(Y=0)}(X=3) = \dfrac{P(Y=0\cap X=3)}{P(Y=0)} = \dfrac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{10}} = \dfrac{1}{2}$

   — Loi de Y sachant $(X=1)$.
   * $P_{(X=1)}(Y=0) = \dfrac{P(Y=0\cap X=1)}{P(X=1)} = \dfrac{\frac{1}{60}}{\frac{4}{15}} = \dfrac{1}{16}$
   * $P_{(X=1)}(Y=1) = \dfrac{P(Y=1\cap X=1)}{P(X=1)} = \dfrac{\frac{1}{20}}{\frac{4}{15}} = \dfrac{3}{16}$
   * $P_{(X=1)}(Y=2) = \dfrac{P(Y=2\cap X=1)}{P(X=1)} = \dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{4}{15}} = \dfrac{5}{16}$
   * $P_{(X=1)}(Y=3) = \dfrac{P(Y=3\cap X=1)}{P(X=1)} = \dfrac{\frac{7}{60}}{\frac{4}{15}} = \dfrac{7}{16}$

6. 7. Soit $U = XY$ et $V = \min(X,Y)$. Déterminons la loi conjointe de U et V.
   On a $U(\Omega) = \{0,1,2,3,4,6,9\}$ et $V(\Omega) = \{0,1,2,3\}$.

U/V	0	1	2	3	Loi de U
0	$\frac{1}{10}$	0	0	0	$\frac{1}{10}$
1	0	$\frac{1}{20}$	0	0	$\frac{1}{20}$
2	0	$\frac{3}{20}$	0	0	$\frac{3}{20}$
3	0	$\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$
4	0	0	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{1}{10}$
6	0	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
9	0	0	0	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$
Loi de V	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{3}{20}$	

En effet :
— $(U,V) = (0,0) \iff (XY=0)$ et $\min(X,Y) = 0$
  $(U,V) = (0,0) \iff X \in \{1,2,3\}$ et $Y=0$.
  Ainsi $P((U,V) = (0,0)) = P(Y=0) = \frac{1}{10}$.
— $(U,V) = (0,1) \iff (XY=0)$ et $\min(X,Y) = 1$
  $(U,V) = (0,1) \iff Y=0$ et $\min(X,Y) = 1$ donc $(U,V) = \varnothing$
  $P((U,V) = (0,1)) = 0$.
— $((U,V) = (0,2)) = \varnothing$ donc $P((U,V) = (0,2)) = 0$.
— De même $P((U,V) = (0,3)) = 0$.
— $(U,V) = (1,0) = \varnothing$ donc $P((U,V) = (1,0)) = 0$
— $(U,V) = (1,1) \iff X = Y = 1$ donc $P((U,V) = (1,1)) = \frac{1}{20}$.
— $(U,V) = (1,2) \iff XY = 1$ et $\min(X,Y) = 2$.
  Ainsi, $((U,V) = (1,2)) = \varnothing$ et $P((U,V) = (1,2)) = 0$.
— $(U,V) = (1,3) \iff XY = 1$ et $\min(X,Y) = 3$.
  Ainsi, $((U,V) = (1,3)) = \varnothing$ et $P((U,V) = (1,3)) = 0$.
— $((U,V) = (2,0)) = \varnothing$.
— $((U,V) = (2,1)) = [(X,Y) = (1,2) \cup (X,Y) = (2,1)]$.
  Ainsi, $P((U,V) = (2,1)) = \frac{1}{15} + \frac{1}{12} = \frac{3}{20}$
— $((U,V) = (2,2)) = \varnothing$
— $((U,V) = (2,3)) = \varnothing$.
— $((U,V) = (3,0)) = \varnothing$.
— $((U,V) = (3,1)) = [(X,Y) = (1,3) \cup (X,Y) = (3,1)]$
  Ainsi, $P((U,V) = (3,1)) = \frac{1}{12} + \frac{7}{60} = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$.
— $((U,V) = (3,2)) = \varnothing$.
— $((U,V) = (3,3)) = \varnothing$.

— $((U,V)=(4,0))=\varnothing$.
— $((U,V)=(4,1))=\varnothing$.
— $((U,V)=(4,2))=[(X,Y)=(2,2)]$ donc $P((U,V)=(4,2))=\frac{1}{10}$.
— $((U,V)=(4,3))=\varnothing$.
— etc.

Les variables U et V ne sont pas indépendantes car, par exemple :

$$P(U=0\cap V=0)=\frac{1}{10}\neq\frac{1}{100}=P(U=0)P(V=0).$$

□

Solution Exercice *28.* Une urne contient a boules blanches et b boules noires ($a+b\geqslant 3$).

On tire successivement 3 boules sans remise. Soient X,Y,Z les variables respectivement égales à 1 si la première, resp. la deuxième, resp. la troisième boule tirée est blanche et 0 sinon.

1.2.

Y/Z	0	1	Loi de Y
0	$\frac{b(b-1)}{(a+b)(a+b-1)}$	$\frac{ab}{(a+b)(a+b-1)}$	$\frac{b}{a+b}$
1	$\frac{ab}{(a+b)(a+b-1)}$	$\frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}$	$\frac{a}{a+b}$
Loi de Z	$\frac{b}{a+b}$	$\frac{a}{a+b}$	

En effet :

—

$$\begin{aligned}
&P((Y,Z)=(0,0))=P(Y=0\cap Y=0)\\
&=P(X=0\cap Y=0\cap Z=0)+P(X=1\cap Y=0\cap Z=0)\\
&=P(X=0)P_{Y=0}(X=0)P_{X=0\cap Y=0}(Z=0)+\\
&\quad+P(X=1)P_{Y=0}(X=1)P_{X=1\cap Y=0}(Z=0)\\
&=\frac{b}{a+b}\frac{b-1}{a+b-1}\frac{b-2}{a+b-2}+\frac{a}{a+b}\frac{b}{a+b-1}\frac{b-1}{a+b-2}
\end{aligned}$$

—

$$P((Y,Z)=(0,1))=\frac{a}{a+b}\frac{b}{a+b-1}\frac{a-1}{a+b-2}+\frac{b}{a+b}\frac{b-1}{a+b-1}\frac{a}{a+b-2}$$

—

$$P((Y,Z)=(1,0))=\frac{a}{a+b}\frac{a-1}{a+b-1}\frac{b}{a+b-2}+\frac{b}{a+b}\frac{a}{a+b-1}\frac{b-1}{a+b-2}$$

—

$$P((Y,Z)=(1,1))=\frac{a}{a+b}\frac{a-1}{a+b-1}\frac{a-2}{a+b-2}+\frac{b}{a+b}\frac{a}{a+b-1}\frac{a-1}{a+b-2}$$

3. On a $\operatorname{cov}(X,Y)=E(YZ)-E(Y)E(Z)$.

— $E(Y)=\frac{a}{a+b}$
— $E(Z)=\frac{a}{a+b}$
— On a : $(YZ)(\Omega)=\{0;1\}$.
L'espérance de YZ est donc égale à

$$E(YZ)=0P(YZ=0)+1P(YZ=1)=P(YZ=1).$$

Mais $YZ=1\iff Y=1$ et $Z=1$.
Donc $E(YZ)=P(YZ=1)=\frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}$.

On en déduit $\operatorname{cov}(Y,Z)=\frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}-\frac{a}{a+b}\frac{a}{a+b}=-\frac{ab}{(a+b-1)(a+b)^2}$.

Enfin, $\rho(Y,Z)=\frac{\operatorname{cov}(Y,Z)}{\sigma(Y)\sigma(Z)}$.

Puisque Y est à valeurs dans $\{0;1\}$, on a :

$$E(Y^2)=0^2P(Y=0)+1^2P(Y=1)=P(Y=1)=E(Y)=\frac{a}{a+b}$$

et :

$$V(Y)=E(Y^2)-E(Y)^2=\frac{a}{a+b}\left(1-\frac{a}{a+b}\right)=\frac{ab}{a+b}$$

De même $V(Z)=\frac{ab}{a+b}$.

On obtient $\sigma(Y)\sigma(Z)=\sqrt{\frac{ab}{a+b}}^2=\frac{ab}{a+b}$:

$$\rho(Y,Z)=\frac{-\frac{ab}{(a+b-1)(a+b)^2}}{\frac{ab}{a+b}}=-\frac{1}{(a+b)(a+b-1)}$$

□

Solution Exercice *29.* Soit $n\in\mathbb{N}$. Deux personnes A et B tapent indépendamment l'une de l'autre sur une machine à calculer un nombre au hasard entre 0 et n. Soit S la variable égale à la somme des deux nombres tapés.

1. On note $X\hookrightarrow\mathscr{U}(\llbracket 0,n\rrbracket)$ le nombre tapé par A et $Y\hookrightarrow\mathscr{U}(\llbracket 0,n\rrbracket)$ le nombre tapé par B.
   La fonction génératrice de la somme $S=X+Y$ de deux variables indépendantes est égale au produit des fonction génératrices de X et Y : $G_S(t)=G_{X+Y}(t)=G_X(t)G_Y(t)$:

$$\begin{aligned}
G_S(t)&=\sum_{k=0}^{n}P(X=k)t^k\sum_{\ell=0}^{n}P(Y=\ell)t^\ell=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}t^k\times\frac{1}{n+1}\sum_{\ell=0}^{n}t^\ell\\
&=\frac{1}{(n+1)^2}\sum_{p=0}^{2n}\left(\sum_{k+\ell=p}1\right)t^p
\end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $p \in [\![0, 2n]\!]$:

$$P(X+Y=p) = \frac{\displaystyle\sum_{k+\ell=p} 1}{(n+1)^2} = \frac{1}{(n+1)^2}\begin{cases} p+1 & \text{si} \quad p \in [\![0, n-1]\!] \\ n+1 & \text{si} \quad p = n \\ 2n+1-p & \text{si} \quad p = [\![n+1, 2n]\!] \end{cases}$$

On calcule :

$$G_S'(t) = \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{p=0}^{2n}\left(\sum_{k+\ell=p} 1\right) pt^{p-1}$$

donc

$$E(S) = G_S'(1) = \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{p=0}^{2n}\left(\sum_{k+\ell=p} 1\right) p$$

ce qui revient au calcul suivant :

$$\begin{aligned} E(S) &= \sum_{p=0}^{2n} pP(S=p) \\ &= \sum_{p=0}^{n-1} p\frac{(p+1)}{(n+1)^2} + n\frac{(n+1)}{(n+1)^2} + \sum_{p=n+1}^{2n} p\frac{2n+1-p}{(n+1)^2} \\ &= \frac{1}{(n+1)^2}\left(\sum_{p=0}^{n-1} p^2 + \sum_{p=0}^{n-1} p + n(n+1) + \sum_{q=1}^{n}(q+n)(n+1-q)\right) \\ &= n = E(X)+E(Y) \quad \text{(utiliser la linéarité de } E \text{ était plus simple!)} \end{aligned}$$

2. On suppose dans cette question que la machine a une capacité de calcul limitée. Si la somme des nombres obtenus par A et B est exactement $2n$ elle affiche un résultat au hasard entre 0 et $2n-1$. Les autres résultats sont fidèles.

   Soit T la variable aléatoire égale au nombre affiché pour la somme.

   La variable T est à valeurs dans $[\![0, 2n-1]\!]$.

   Pour $p \in [\![0, 2n-1]\!]$:

$$\begin{aligned} P(T=p) &= P(S=p)P_{S=p}(T=p) + P(S=2n)P_{S=2n}(T=p) \\ &= P(S=p)\times 1 + \frac{1}{2n}P(S=2n). \end{aligned}$$

   et on a :

$$\begin{aligned} E(T) &= \sum_{p=0}^{2n-1} p\left(P(S=p) + \frac{1}{2n}P(S=2n)\right) \\ &= \sum_{p=0}^{2n-1} pP(S=p) + \frac{P(S=2n)}{2n}\sum_{p=0}^{2n-1} p \\ &= (E(S) - 2nP(S=2n)) + \frac{1}{(n+1)^2(2n)}\frac{(2n-1)2n}{2} \\ &= n - \frac{2n}{(n+1)^2} + \frac{2n-1}{2(n+1)^2} = -\frac{2n+1}{2(n+1)^2} \end{aligned}$$

□

Solution Exercice 30. Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes de même loi $\mathscr{B}(3, \frac{1}{2})$. Soit $Z = X - Y$.

1. Les variables X et Y sont indépendantes donc :
   — $P(X-Y=-3) = P(X=0\cap Y=3) = P(X=0)P(Y=3) = \frac{1}{2^3}\frac{1}{2^3} = \frac{1}{2^6}$
   — $P(X-Y=-2) = P(X=0\cap Y=2) + P(X=1\cap Y=3)$
   $P(X-Y=-2) = \frac{1}{2^3}\times\binom{3}{2}\frac{1}{2^3} + \binom{3}{1}\frac{1}{2^3}\times\frac{1}{2^3}$
   $P(X-Y=-2) = \frac{1}{2^3}\frac{3}{2^3} + \frac{3}{2^3}\frac{1}{2^3} = \frac{6}{2^6}$
   — $P(X-Y=-1) = P(X=0\cap Y=1) + P(X=1\cap Y=2) + P(X=2\cap Y=3)$
   $P(X-Y=-1) = \frac{1}{2^3}\frac{3}{2^3} + \frac{3}{2^3}\frac{3}{2^3} + \frac{3}{2^3}\frac{1}{2^3} = \frac{15}{2^6}$
   — $P(X-Y=0) = P(X=0\cap Y=0) + P(X=1\cap Y=1) + P(X=2\cap Y=2) + P(X=3\cap Y=3)$
   $P(X-Y=0) = \frac{1}{2^3}\frac{1}{2^3} + \frac{3}{2^3}\frac{3}{2^3} + \frac{3}{2^3}\frac{3}{2^3} + \frac{1}{2^3}\frac{1}{2^3} = \frac{20}{2^6}$
   — $P(X-Y=1) = P(X=1\cap Y=0) + P(X=2\cap Y=1) + P(X=3\cap Y=2)$
   $P(X-Y=1) = \frac{3}{2^3}\frac{1}{2^3} + \frac{3}{2^3}\frac{3}{2^3} + \frac{1}{2^3}\frac{3}{2^3} = \frac{15}{2^6}$
   — $P(X-Y=2) = \frac{1}{2^3}\frac{3}{2^3} + \frac{3}{2^3}\frac{1}{2^3} = \frac{6}{2^6}$
   — $P(X-Y=3) = \frac{1}{2^3}\frac{1}{2^3} = \frac{1}{2^6}$.
2. Les variables X et Z ne sont pas indépendantes :

$$\begin{aligned} P(Z=0\cap X=0) = P(X-Y=0\cap X=0) &= P(Y=0\cap X=0) \\ &= P(Y=0)P(X=0) = \frac{1}{2^3}\frac{1}{2^3} \\ &\neq \frac{20}{2^3}\frac{1}{2^3} = P(Z=0)P(X=0). \end{aligned}$$

3. On a $\operatorname{cov}(X,Z) = E(XZ) - E(X)E(Z)$.
   Loi de XZ : $XZ(\Omega) = \{-9, -6, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 6, 9\}$

$XZ(\Omega)$	-9	-6	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	6	9
$P(XZ=k)$	0	0	0	0	$\frac{9}{2^6}$	$\frac{9}{2^6}$	$(*)$	$\frac{3}{2^6}$	$\frac{9}{2^6}$	0	0	0	0

Ainsi, $E(XZ) = 0$. De plus $E(Z) = 0$ (par le calcul) donc $\text{cov}(X, Z) = 0$ pourtant X et Z ne sont pas indépendantes.

□

Solution Exercice 31. On lance deux dés équilibrés. Soit T la somme des points obtenus. Soit X le reste de la division de T par 2 et Y le reste de la division de T par 5.

1. On note X_1 le résultat du premier dé, X_2 celui du second.
   - $(X, Y) = (0, 0) \iff S = 10 \iff (X_1, X_2) = (6, 4)$ ou $(X_1, X_2) = (5, 5)$ ou $(X_1, X_2) = (4, 6)$
   - $(X, Y) = (0, 1) \iff S = 6 \iff (X_1, X_2) = (1, 5))$ ou $(X_1, X_2) = (2, 4)$ ou $(X_1, X_2) = (3, 3)$ ou $(X_1, X_2) = (4, 2)$ ou $(X_1, X_2) = (5, 1)$
   - $(X, Y) = (0, 2) \iff S = 2$ ou $S = 12 \iff (X_1, X_2) = (1, 1)$ ou $(X_1, X_2) = (6, 6)$
   - $(X, Y) = (0, 3) \iff S = 8 \iff (X_1, X_2) = (2, 6)$ ou $(X_1, X_2) = (3, 5)$ ou $(X_1, X_2) = (4, 4)$ ou $(X_1, X_2) = (5, 3)$ ou $(X_1, X_2) = (6, 2)$
   - $(X, Y) = (0, 4) \iff S = 4 \iff (X_1, X_2) = (1, 3)$ ou $(X_1, X_2) = (2, 2)$ ou $(X_1, X_2) = (3, 1)$
   - $(X, Y) = (1, 0) \iff S = 5 \iff (X_1, X_2) = (1, 4)$ ou $(X_1, X_2) = (2, 3)$ ou $(X_1, X_2) = (3, 2)$ ou $(X_1, X_2) = (4, 1)$
   - $(X, Y) = (1, 1) \iff S = 11 \iff (X_1, X_2) = (5, 6)$ ou $(X_1, X_2) = (6, 5)$
   - $(X, Y) = (1, 2) \iff S = 7 \iff (X_1, X_2) = (1, 6)$ ou $(X_1, X_2) = (2, 5)$ ou $(X_1, X_2) = (3, 4)$ ou $(X_1, X_2) = (4, 3)$ ou $(X_1, X_2) = (5, 2)$ ou $(X_1, X_2) = (6, 1)$
   - $(X, Y) = (1, 3) \iff S = 3 \iff (X_1, X_2) = (1, 2)$ ou $(X_1, X_2) = (2, 1)$
   - $(X, Y) = (1, 4) \iff S = 9 \iff (X_1, X_2) = (4, 5)$ ou $(X_1, X_2) = (5, 4)$ ou $(X_1, X_2) = (3, 6)$ ou $(X_1, X_2) = (6, 3)$

X/Y	0	1	2	3	4	Loi de X
0	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{1}{2}$
Loi de$Y$	$\frac{7}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{7}{36}$	

2. Les lois marginale de X et Y figurent dans le tableau ci-dessus.
   Les variables X et Y ne sont pas indépendantes en effet (par exemple) :
   $$P(X = 0 \cap Y = 0) = \frac{3}{36} \neq \frac{7}{72} = P(X = 0)P(Y = 0).$$

□

Solution Exercice 32. Une urne U_1 contient n boules numérotées de 1 à n. Une urne U_2 contient des boules rouges en proportion p. On tire une boule au hasard dans U_1 et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée. Si $X = k$, on tire k fois une boule dans U_2 avec remise et on appelle Y le nombre de boules rouges tirées.

1. $X \hookrightarrow \mathscr{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.
   $E(X) = \frac{n+1}{2}$ et $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$.
2. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ fixé. Soit $\ell \in \llbracket 1, k \rrbracket$:
   $$P(Y = \ell | X = k) = \binom{k}{\ell} p^\ell q^{k-\ell}$$
   La loi de Y sachant $(X = k)$ est binomiale $\mathscr{B}(k, p)$.
3. Soient $(k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 0, n \rrbracket$:
   - $P((X, Y) = (k, \ell)) = 0$ si $\ell > k$.
   - $P((X, Y) = (k, \ell)) = P(X = k \cap Y = \ell) = P(X = k)P(Y = \ell | X = k)$
     $P((X, Y) = (k, \ell)) = P(X = k \cap Y = \ell) = P(X = k)P(Y = \ell | X = k)$
     $P((X, Y) = (k, \ell)) = \dfrac{\binom{k}{\ell} p^\ell q^{k-\ell}}{n}$

□

Solution Exercice 33. On lance n dés équilibrés.

Pour tout $i \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$, on note X_i la variable égale à 1 si la face i est apparue au moins une fois et 0 sinon.

Soit X le nombre de faces différentes obtenues.

1. $P(X_i = 0) = \left(\frac{5}{6}\right)^n$ et $P(X_i = 1) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$.
   Ainsi, $X_i \hookrightarrow \mathscr{B}\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)$.
2. On a $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6$.
   Donc $E(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{6} E(X_i) = 6\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)$.

   Remarques

   $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(6, 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)$

□

Solution Exercice 34. On dispose de n boites numérotées de 1 à n. La boite k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard une boite, puis une boule dans cette boite. Soit X le numéro de la boite et Y le numéro de la boule.

1. Soient $(k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$.
   - $P((X, Y) = (k, \ell)) = 0$ si $\ell > k$.
   - Si $\ell \leqslant k$,
     $P((X, Y) = (k, \ell)) = P(X = k \cap Y = \ell) = P(X = k)P_{(X=k)}(Y = \ell)$
     $P((X, Y) = (k, \ell)) = \frac{1}{n}\frac{1}{k}$.

2. La formule des probabilités totales donne :

$$P(X=Y)=\sum_{i=1}^{n}P(X=i\cap Y=i)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{ni}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}.$$

3. $Y(\Omega)=[\![1,n]\!]$. La formule des probabilités totales donne :

$$\begin{aligned}P(Y=\ell)&=\sum_{k=1}^{n}P(X=k\cap Y=\ell)\\&=\sum_{k=\ell}^{n}P(X=k\cap Y=\ell)\\&=\sum_{k=\ell}^{n}\frac{1}{nk}\end{aligned}$$

Il vient :

$$\begin{aligned}E(Y)&=\sum_{\ell=1}^{n}\ell P(Y=\ell)=\sum_{\ell=1}^{n}\ell\sum_{k=\ell}^{n}\frac{1}{nk}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sum_{\ell=1}^{k}\ell\\&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\frac{k(k+1)}{2}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+1)}{2}\\&=\frac{1}{2n}\sum_{k=2}^{n+1}k\\&=\frac{1}{2n}\times n\times\frac{2+(n+1)}{2}\\&=\frac{n+3}{4}.\end{aligned}$$

□

Solution Exercice 35. On dispose simultanément n boules dans N tiroirs.

Y désigne le nombre de boules dans un tiroir T donné.

X est le nombre de tiroirs vides.

1. $Y(\Omega)=[\![0,n]\!]$.

   $P(Y=k)=\binom{n}{k}\frac{1}{N^k}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-k}$.

2. $E(X)=\sum_{i=1}^{N}E(X_i)=\sum_{i=1}^{N}P(X_i=1)=\sum_{i=1}^{N}\binom{n}{0}\frac{1}{N^0}\left(1-\frac{1}{N}\right)^n$

   $E(X)=N\left(1-\frac{1}{N}\right)^n$

□

Solution Exercice 36. Soient $X_1,\dots,X_n$, n variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.

On note $Y=\max(X_1,\dots,X_n)$.

1. $F_Y(k)=P(X\leqslant k)=P(X_1\leqslant k\cap\dots\cap X_n\leqslant k)=\left(\frac{k}{n}\right)^n$

   Donc $P(Y=k)=\left(\frac{k}{n}\right)^n-\left(\frac{k-1}{n}\right)^n$.

2. On :

$$\begin{aligned}E(Y)&=\sum_{k=1}^{n}kP(Y=k)=\sum_{k=1}^{n}k\left(\left(\frac{k}{n}\right)^n-\left(\frac{k-1}{n}\right)^n\right)\\&=\sum_{k=1}^{n}kP(Y=k)=\sum_{k=1}^{n}k\left(\frac{k}{n}\right)^n-(k-1)\left(\frac{k-1}{n}\right)^n-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k-1}{n}\right)^n\\&=n-\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^n\end{aligned}$$

□

Solution Exercice 37. Soient X,Y,Z trois variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique $\mathscr{G}(p)$.

1. Soit $n\in[\![2,+\infty[\![$.

$$\begin{aligned}P(S=n)=P(X+Y=n)&=\sum_{k=1}^{n-2}P(X=k\cap Y=n-k)\\&=\sum_{k=1}^{n-1}P(X=k)P(Y=n-k)\text{par indépendance}\\&=\sum_{k=1}^{n-1}pq^{k-1}pq^{n-k-1}\\&=p^2q^{n-2}\sum_{k=1}^{n-1}=(n-1)p^2q^{n-2}.\end{aligned}$$

2. Soit $k\geqslant 2$ et $\ell\in[\![1,k-1]\!]$

$$\begin{aligned}P_{S=k}(X=\ell)&=\frac{P(X=\ell\cap S=k)}{P(S=k)}=\frac{P(X=\ell\cap Y=k-\ell)}{P(S=k)}=\frac{pq^{\ell-1}pq^{k-\ell-1}}{(k-1)p^2q^{k-2}}\\&=\frac{1}{k-1}.\end{aligned}$$

3. Soit $n \in S(\Omega)$ i.e. $n \geqslant 2$. En utilisant les résultats sur les séries géométriques, et leurs dérivées, de raison $q \in]-1;1[$:

$$\begin{aligned}
P(S \geqslant n) &= \sum_{k=n}^{+\infty} P(S=k) \\
&= \sum_{k=n}^{+\infty} (k-1)p^2 q^{k-2} \\
&= p^2 \sum_{k=n-1}^{+\infty} kq^{k-1} \\
&= p^2 \left(\sum_{k=n-1}^{+\infty} q^k \right)' \\
&= p^2 \left(\frac{q^{n-1}}{1-q} \right)' \\
&= p^2 \frac{(n-1)q^{n-2}(1-q)+q^{n-1}}{(1-q)^2} \\
&= (n-1)q^{n-2}(1-q)+q^{n-1} \\
&= q^{n-2}((n-1)(1-q)+q) \\
&= q^{n-2}((n-1)+q(1-n+1)) \\
&= q^{n-2}((n-1)+(2-n)q)
\end{aligned}$$

4. Les variables $X+Y$ et Z sont indépendantes donc :

$$\begin{aligned}
P(S \geqslant Z) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(Z=n \cap S \geqslant n) \\
&= P(Z=1)P(S \geqslant 1) + \sum_{n=2}^{+\infty} P(Z=n \cap S \geqslant n) \\
&= p + \sum_{n=2}^{+\infty} P(Z=n)P(S \geqslant n) \\
&= p + \sum_{n=2}^{+\infty} pq^{n-1}q^{n-2}((n-1)+(2-n)q) \\
&= \frac{2q+1}{(q+1)^2}
\end{aligned}$$

On obtient de manière analogue :

$$\begin{aligned}
P(S \leqslant Z) &= \sum_{k=2}^{+\infty} P(Z=k)P(S \leqslant k) \\
&= \sum_{k=2}^{+\infty} P(Z=k)(1-P(S>k)) \\
&= \sum_{k=2}^{+\infty} P(Z=k)(1-P(S \geqslant k+1)) \\
&= \sum_{k=2}^{+\infty} P(Z=k) - \sum_{k=2}^{+\infty} P(Z=k)P(S \geqslant k+1)) \\
&= (1-p) - \sum_{k=2}^{+\infty} pq^{k-1}q^{k-1}(k+(1-k)q) \\
&= \frac{q}{(q+1)^2}.
\end{aligned}$$

Et enfin :

$$\begin{aligned}
P(S=Z) = P(S \leqslant Z) - P(S<Z) &= P(S \leqslant Z) - (1-P(Z \leqslant S)) \\
&= \frac{q}{(q+1)^2} + \frac{2q+1}{(q+1)^2} - 1 = \frac{qp}{(1+q)^2}.
\end{aligned}$$

□

Solution Exercice 38. Soient $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p_1)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{G}(p_2)$ des variables indépendantes.

Soit $n \geqslant 2$. Par indépendance :

$$\begin{aligned}
P(Z=n) &= \sum_{k=1}^{n-1} P(X=k\cap Y=n-k)\\
&= \sum_{k=1}^{n-1} P(X=k)P(Y=n-k)\\
&= \sum_{k=1}^{n-1} q_1^{k-1}p_1q_2^{n-k-1}p_2\\
&= \frac{p_1p_2q_2^{n-1}}{q_1}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{q_1}{q_2}\right)^k\\
&= \frac{p_1p_2q_2^{n-1}}{q_1}\frac{q_1}{q_2}\frac{1-\left(\frac{q_1}{q_2}\right)^{n-1}}{1-\frac{q_1}{q_2}}\\
&= p_1p_2\frac{q_2^{n-1}-q_1^{n-1}}{q_2-q_1}.
\end{aligned}$$

$\square$

***Solution Exercice** 39*. Soient X, Y des variables entières positives ou nulles vérifiant pour tout couple d'entiers naturels (i, j) :

$$P(X=i, Y=j) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^i e^{-\lambda}a^j(1-a)^{i-j}}{j!(i-j)!} & \text{si} \quad 0\leqslant j\leqslant i\\ 0 & \text{si} \quad 0\leqslant i<j.\end{cases}$$

où a et λ sont des constantes fixées telles que $0<a<1$ et $\lambda>0$.

1. Soit $j\in\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
P(Y=j) = \sum_{i=j}^{+\infty} P(X=i, Y=j) &= \frac{e^{-\lambda}}{j!}a^j\sum_{i=j}^{+\infty}\lambda^i\frac{(1-a)^{i-j}}{(i-j)!}\\
&= \frac{e^{-\lambda}}{j!}a^j\sum_{\ell=0}^{+\infty}\lambda^{\ell+j}\frac{(1-a)^\ell}{\ell!}\\
&= \frac{e^{-\lambda}}{j!}a^j\lambda^j\sum_{\ell=0}^{+\infty}\lambda^{\ell}\frac{(1-a)^\ell}{\ell!}\\
&= \frac{e^{-\lambda}}{j!}a^j\lambda^j e^{(1-a)\lambda} = \frac{e^{-a\lambda}(\lambda a)^j}{j!}
\end{aligned}$$

Donc $Y\hookrightarrow\mathscr{P}(\lambda a)$.

On détermine maintenant

$$\begin{aligned}
P(X=i) &= \sum_{j=0}^{i}\frac{\lambda^i e^{-\lambda}a^j(1-a)^{i-j}}{j!(i-j)!}\\
&= \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}\sum_{j=0}^{i}\frac{i!}{j!(i-j)!}a^j(1-a)^{i-j}\\
&= \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}(a+(1-a))^i\\
&= \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}
\end{aligned}$$

Ainsi, $X\hookrightarrow\mathscr{P}(\lambda)$.

2. Les variables X et Y ne sont pas indépendantes. En effet, on peut par exemple remarquer que

$$P(X=0\cap Y=0) = e^{-\lambda}\neq e^{-\lambda}e^{-\lambda a} = P(X=0)P(Y=0).$$

3. On pose $Z=X-Y$. $Z(\Omega)\subset\mathbb{Z}$.
   - Si $k<0$, $Z=k\implies Z<0\implies X<Y$. Mais $P(X=i\cap Y=j)=0$ si $i<j$ donc $P(Z=k)=0$ pour $k<0$.
   - Si $k\geqslant 0$, $Z=k\iff X=Y+k$.

   Ainsi par σ-additivité :

$$\begin{aligned}
P(Z=k) &= P(X-Y=k) = P(X=Y+k)\\
&= P\left(\bigcup_{\ell=0}^{+\infty} Y=\ell\cap X=k+\ell\right)\\
&= \sum_{\ell=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{k+\ell}e^{-\lambda}a^\ell(1-a)^{k+\ell-\ell}}{\ell!(k+\ell-\ell)!}\\
&= e^{-\lambda}\frac{(1-a)^k\lambda^k}{k!}\sum_{\ell=0}^{+\infty}\frac{(a\lambda)^\ell}{\ell!}\\
&= e^{-\lambda}\frac{(\lambda(1-a))^k}{k!}e^{\lambda a}\\
&= e^{-\lambda(1-a)}\frac{(\lambda(1-a))^k}{k!}.
\end{aligned}$$

   Ainsi, $Z\hookrightarrow\mathscr{P}(\lambda(1-a))$.

4. Soit $n\in\mathbb{N}$.

On calcule :

$$P(Y=j|Z=n)=\frac{P(Y=j\cap Z=n)}{P(Z=n)}=\frac{P(Y=j\cap X=n+j)}{P(Z=n)}$$
$$=\frac{\lambda^j a^j}{j}e^{-\lambda a}=P(Y=j).$$

5. Les variables Y, Z sont donc indépendantes :

$$P(Z=n\cap Y=j)=P(Y=j|Z=n)P(Z=n)=P(Y=j)P(Z=n).$$

6. Soit $X\hookrightarrow\mathscr{P}(2,2)$. Soit $j\leqslant i$:

$$P(X=i\cap Y=j)=P(X=i)P_{X=i}(Y=j)=\frac{e^{-2,2}(2,2)^i}{i!}\binom{i}{j}\frac{1}{2^j}\frac{1}{2^{i-j}}$$
$$=\frac{e^{-2,2}(2,2)^i\frac{1}{2^i}\frac{1}{2^{i-j}}}{i!(i-j)!}$$

car la loi de Y sachant $X=i$ est binomiale de paramètres $(i,\frac{1}{2})$ les naissances étant indépendantes.

$\square$