Chapitre 9 : Espaces probabilisés

Plan du chapitre

1 Techniques de dénombrement **1**
1.A Cardinal d'un ensemble fini . . . 1
1.B Techniques de dénombrement classiques . . . 3
1.B.1 Listes et uplets . . . 3
1.B.2 Arrangements . . . 3
1.B.3 Permutations . . . 4
1.B.4 Combinaisons . . . 5

2 Espaces probabilisés **8**
2.A Ensembles dénombrables et non dénombrables . . . 8
2.B Espaces probabilisés . . . 9
2.B.1 Expérience aléatoire, univers . . . 9
2.B.2 Tribus et événements . . . 9
2.B.3 Probabilité sur un espace probabilisé . . . 12
2.C Probabilité uniforme sur un univers fini . . . 14
2.D Probabilité sur un univers dénombrable . . . 16
2.E Conditionnement . . . 19
2.E.1 Probabilité conditionnelle . . . 19
2.E.2 Formule des probabilités composées . . . 20
2.E.3 Formule des probabilités totales . . . 21
2.E.4 Formule de Bayes . . . 24
2.F Indépendance . . . 25
2.F.1 Indépendance de deux événements . . . 25
2.F.2 Indépendance d'une famille d'événements. . . . 26

1 - Techniques de dénombrement

1.A - *Cardinal d'un ensemble fini*

Définition 1

Un ensemble E est dit fini s'il est vide ou s'il est en bijection avec un ensemble $[\![1,n]\!]$ où $n \in \mathbb{N}^*$.
L'entier n est appelé cardinal de E, noté $\mathrm{Card}(E)$. On fait la convention $\mathrm{Card}(\varnothing) = 0$.

Le cardinal d'un ensemble fini E est le nombre d'éléments que contient E.
Il existe plusieurs bijections entre E et $[\![1,n]\!]$ (il y a en a $n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1 = n!$).
En revanche, l'entier n est unique.
Si $\varphi : [\![1,n]\!] \to E$ est une bijection, on peut noter $\varphi(i) = x_i$.
On obtient alors une énumération de E : $E = \{\varphi(1), \dots, \varphi(n)\} = \{x_1, \dots, x_n\}$.
La composée de deux bijections est une bijection.
Ainsi $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$ si et seulement s'il existe une bijection de E sur F.

Exercice 2

Déterminer les cardinal des ensembles suivants :

$$E = [\![0,n]\!],\ (n \in \mathbb{N}); \quad E = [\![-n,n]\!]; \quad E = [\![p,q]\!],\ \text{avec } (p,q) \in \mathbb{Z}^2, p \leqslant q.$$

Théorème 3

Si E et F sont des ensembles finis disjoints, c'est-à-dire $E \cap F = \varnothing$ alors $E \cup F$ est fini et :

$$\mathrm{Card}(E \cup F) = \mathrm{Card}(E) + \mathrm{Card}(F).$$

Corollaire 4

Si $E_1, \dots, E_n$ sont des ensembles finis et disjoints deux à deux alors $E_1 \cup \cdots \cup E_n = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ est un ensemble fini et

$$\mathrm{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Card}(E_i).$$

Proposition 5

Soient $F \subset E$ avec E un ensemble fini. Alors F est un ensemble fini et $\mathrm{Card}(F) \leqslant \mathrm{Card}(E)$.
De plus $E = F$ si et seulement si $\mathrm{Card}(F) = \mathrm{Card}(E)$.

Proposition 6

Soient A, B deux parties d'un ensemble fini E. Alors :

- $\mathrm{Card}\left(\overline{A}\right) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(A)$.
- $\mathrm{Card}(A \setminus B) = \mathrm{Card}(A \cap \overline{B}) = \mathrm{Card}(A) - \mathrm{Card}(A \cap B)$.
- $\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B)$.

Exercice 7

❶ Dans une classe 16 étudiants étudient l'anglais, 15 des cours d'espagnols et 8 les deux cours.
Combien y-a-t-il d'étudiants dans la classe sachant qu'un étudiant étudie nécessairement au moins l'une de ces deux langues ?

❷ Dans une classe de 23 étudiants, 13 étudient l'anglais, 14 l'espagnol, 11 l'allemand, 6 suivent les cours d'anglais et d'allemand, 5 d'allemand et d'espagnol et 8 les cours d'anglais et d'espagnol.
Combien d'étudiants étudient les trois langues sachant qu'un étudiant étudie nécessairement au moins l'une de ces trois langues ?

Solution. ❶ $\text{Card}(A \cup E) = \text{Card}(A) + \text{Card}(E) - \text{Card}(A \cap E) = 16 + 15 - 8 = 23$.

❷ $\text{Card}(A \cap E \cap D) = \text{Card}(A \cup E \cup D) - \text{Card}(A) - \text{Card}(E) - \text{Card}(D) + \text{Card}(A \cap E) + \text{Card}(D \cap E) + \text{Card}(A \cap D) = 23 - 13 - 14 - 11 + 6 + 5 + 8 = 4$.

□

Lemme 8: Principe des bergers

Soient $A_1, \dots, A_n$ une partition d'un ensemble fini E :

— $E = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

— $A_i \cap A_j = \varnothing$ pour tout $i \neq j$.

On suppose que tous les ensembles A_i sont de même cardinal $\text{Card}(A_i) = k$.
Alors $\text{Card}(E) = nk$.

Exemple

Un berger connait le nombre de pattes dans son troupeau en comptant le nombre de moutons (qui forment la partition du troupeau).
Réciproquement, il "suffit" de connaître le nombre de pattes pour connaître le nombre de moutons.

Le produit cartésien de deux ensembles E et F est l'ensemble $E \times F = \{(x, y) : x \in E, y \in F\}$.

Proposition 9

On considère deux ensembles finis E et F. Le produit cartésien $E \times F$ est un ensemble fini et :

$$\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F).$$

Corollaire 10

Si $E_1, \dots, E_n$ sont des ensembles finis alors $\prod_{k=1}^{n} E_k$ est une ensemble fini et on a :

$$\text{Card}\left(\prod_{k=1}^{n} E_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \text{Card}(E_k).$$

En particulier $\text{Card}(E^p) = \text{Card}(E)^p$.

Exercice 11

On tire successivement avec remise $p \geqslant 1$ cartes dans un jeu de 32 cartes

1. Combien y-a-t-il de tirages possibles ?
2. $p = 2$. Combien y-a-t-il de tirages donnant un as puis un roi ?
3. $p = 3$. Combien y-a-t-il de tirages donnant un roi, puis une dame, puis un pique ?

Solution. 1. On note E l'ensemble des résultats possibles. On a $E = E_1 \times \cdots \times E_p$ avec E_i le résultat d'un tirage. Il y a 32 possibilités pour chacun des tirages.
Ainsi, $\mathrm{Card}(E) = 32^p$.

2. On note B l'ensemble des tirages (c_1, c_2) donnant un un As puis un Roi. On a $B = A \times R$ avec A l'ensemble des As et R l'ensemble des rois : $B = \{(c_1, c_2) : c_1 \in A,\ c_2 \in R\}$.

$$\mathrm{Card}(B) = 4 \times 4 = 16.$$

3. $\mathrm{Card}(C) = 4 \times 4 \times 8 = 128$.

□

1.B - Techniques de dénombrement classiques

Soit E un ensemble fini E de cardinal n et soit $p \in \mathbb{N}$.

1.B.1) Listes et uplets

Définition 12

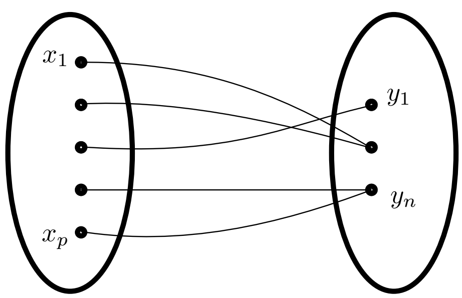
On appelle p-uplet ou p-liste de E tout, c'est-à-dire un élément $(x_1, \ldots, x_p)$ de E^p. On a $\mathrm{Card}(E^p) = n^p$.

Exemple

On tire 5 cartes avec remise dans un jeu de 32 cartes. Il y a 32^5 tirages possibles.

Proposition 13

Il y a n^p applications d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n.



1.B.2) Arrangements

Définition 14

On appelle arrangement de p éléments de E un p-uplet $(x_1, \ldots, x_p)$ constitué d'éléments de E deux à deux distincts, c'est-à-dire :

$$\forall (i, j) \in [\![1, p]\!]^2, (i \neq j \Longrightarrow x_i \neq x_j).$$

Exemple

Les arrangements de $[\![1, 3]\!]$ constitués de 2 éléments sont : $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 1)$, $(2, 3)$, $(3, 1)$, $(3, 2)$.

Théorème 15

Soient $(p,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $p \leqslant n$. Le nombre d'arrangements de E est égal à

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Démonstration. Soit $(x_1, \dots, x_p)$ un tel arrangement. Il y a
- n éléments disponibles pour x_1
- $n-1$ éléments disponibles pour x_2
- $\dots$
- $n-(p-1) = n-p+1$ éléments disponibles pour x_p.
- Au total $n(n-1)\dots(n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.

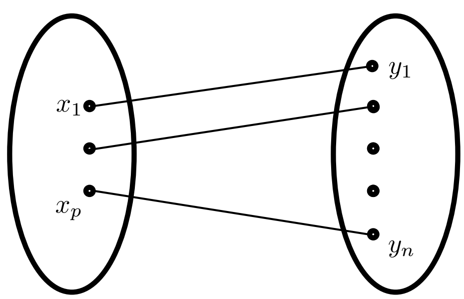
□

Exemple

On tire 5 cartes sans remise dans un jeu de 32 cartes.
Il y a $32 \times (32-1) \times (32-2) \times (32-3) \times (32-4) = \dfrac{32!}{(32-5)!} = A_{32}^5$ tels tirages.

Proposition 16

Le nombre d'applications injectives d'un ensemble E de cardinal p dans un ensemble de cardinal n (avec $p \leqslant n$) est $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.



1.B.3) *Permutations*

Définition 17

Soit E de cardinal n. On appelle permutation de E un arrangement de E à n éléments.

Exemple

Si $E = \{1,2,3\}$ les permutations de E sont $(1,2,3)$, $(1,3,2)$, $(2,1,3)$, $(2,3,1)$, $(3,1,2)$, $(3,2,1)$.

Théorème 18

Le nombre de permutations de E est égal à $A_n^n = n!$.

Proposition 19

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Il y a $n!$ bijections de E dans E.

Exemple

— Il y a $5!$ anagrammes du mot MARIN. Il y a $\dfrac{7!}{2}$ anagrammes du mot VOILIER.

— Il y a $\dfrac{5!}{5} = 4!$ colliers distincts constitué de 5 perles de couleurs différentes.

Remarques

Dans une p-liste, un arrangement, une permutation, l'ordre des éléments compte. Attention à la notation entre parenthèse.

1.B.4) *Combinaisons*

Définition 20

On appelle combinaison de p éléments de E un sous-ensemble (une partie) de E contenant p éléments (nécessairement distincts).

Exemple

Si $E = \{1, 2, 3\}$, les combinaisons de 2 éléments sont $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$.

Remarques

Dans une combinaison l'ordre ne compte pas.

Théorème 21

Soient $(p, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $1 \leqslant p \leqslant n$.

Le nombre de combinaisons de p éléments de E vaut $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

Démonstration. Soit $\{x_1, \dots, x_p\}$ une telle combinaison. On peut permuter les éléments (tous distincts) la composant de $p!$ façons. Une telle combinaison correspond donc à $p!$ arrangements des mêmes éléments $x_1, \dots, x_p$.

On a donc $A_n^p = p!\binom{n}{p}$ i.e. $\binom{n}{p} = \dfrac{A_n^p}{p!} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$. □

Proposition 22

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![1, n]\!]$:

❶ $\displaystyle\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ et $\binom{n}{1} = n$.

❷ $\displaystyle\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

❸ $\displaystyle p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$

❹ $\displaystyle\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$

❺ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Démonstration. 1. Il y a une seule façon de choisir 0 élément (resp. n éléments) d'un ensemble de cardinal n : n'en tirer aucun (resp. tous les prendre).
Il y a n choix possibles lorsqu'on tire un élément parmi n : $\binom{n}{1} = n$.

2. Choisir p éléments d'un ensemble de cardinal n revient à ne pas choisir les $n - p$ autres.

3. Il y a $\binom{n}{p}p$ façons de choisir p éléments parmi n puis un élément parmi ceux-là.
   Cela revient à choisir un élément parmi les n et à compléter par le choix de $p-1$ éléments parmi les $n-1$ restants : $p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$.
4. Il y a $\binom{n}{p}$ façon de choisir p éléments parmi n. On considère l'une de ces combinaisons.
   Le plus grand élément de cette combinaison :
   — peut être n. Il reste donc à choisir $p-1$ éléments parmi les $n-1$ restants : $\binom{n-1}{p-1}$ possibilités.
   — peut être inférieur à $n-1$. On sélectionne les p éléments parmi les éléments inférieurs ou égaux à $n-1$: $\binom{n-1}{p}$.
5. $(1+1)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$.

□

Corollaire 23

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Alors E possède 2^n sous-ensembles :

$$\text{Card}\,(\mathscr{P}(E)) = 2^n.$$

Démonstration. On a $\mathscr{P}(E) = \bigcup_{k=0}^{n}\mathscr{E}_k$ où $\mathscr{E}_k$ est l'ensemble des sous-ensembles de E de cardinal k. Cette réunion est disjointe.

Ainsi, $\text{Card}(\mathscr{P}(E)) = \sum_{k=0}^{n}\text{Card}(E_k) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$. □

Exercice 24

Démontrer la formule de Vandermonde : $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{m}{p-k} = \binom{m+n}{p}$.

Solution. **Première version**

On a $(1+X)^{m+n} = (1+X)^n(1+X)^m$. La formule du binôme donne :

$$\sum_{p=0}^{m+n}\binom{m+n}{p}X^p = \left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k\right]\left[\sum_{\ell=0}^{m}\binom{m}{\ell}X^\ell\right]$$

$$\sum_{p=0}^{m+n}\binom{m+n}{p}X^p = \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ 0\leqslant \ell\leqslant m}}\binom{n}{k}\binom{m}{\ell}X^{k+\ell}$$

$$\sum_{p=0}^{m+n}\binom{m+n}{p}X^p = \sum_{p=0}^{m+n}\left(\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{m}{p-k}\right)X^p$$

En identifiant les coefficients des polynômes, il vient :

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{m}{p-k} = \binom{m+n}{p}.$$

Seconde version

Il y a $\binom{m+n}{p}$ façons de choisir p éléments dans $\{1,\dots,n,n+1,\dots,m+n\}$.

Construire un tel sous-ensemble, revient également à choisir $k \in [\![0,p]\!]$ éléments parmi les n premiers éléments $\{1,\dots,n\}$ et $p-k$ éléments parmi les m derniers éléments $\{n+1,\dots,m+n\}$. Pour chaque entier k, il y a donc $\binom{n}{k}\binom{m}{p-k}$ tels sous-ensembles.

Il y a donc au total $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{m}{p-k}$ tels sous-ensembles.

On retrouve ainsi la formule. □

Exercice 25

Dénombrer les configurations finies dans les cas suivants (les techniques sont à retenir) :

1. (a) Nombre de tirages successifs avec remise de p boules dans une urne de n boules numérotées de 1 à n.
   (b) Nombre de coloriages d'une carte des 28 pays membres de l'union européenne avec 4 couleurs.
2. (a) Nombre de tirages successifs sans remise de p boules dans une urne de n boules numérotées 1 à n.
   (b) Nombre de coloriages d'une carte des 28 pays membres de l'union européenne avec 40 couleurs de sorte que chaque pays ait une couleur différente de celles des autres.
3. (a) Nombre de tirages simultanés de p boules dans une urne de n boules.
   (b) Nombre d'équipes de football dans une classe de 23 étudiants.
4. Nombre de façons de ranger 10 manteaux dans une penderie.
5. On dispose d'une urne de n boules dont n_1 sont noires et n_2 sont blanches. On tire p boules dans cette urne. Dénombrer le nombre de tirages donnant p_1 noires et p_2 blanches tels que $p_1 + p_2 = p$ dans les cas suivants :
   (a) Les boules sont tirées simultanément.
   (b) Les boules sont tirées successivement sans remise.
   (c) Les boules sont tirées successivement et avec remise.
6. Refaire les questions 5.(a),(b),(c) dans le cas où l'on dispose d'une urne avec n boules dont n_1 boules noires, n_2 boules blanches et n_3 boules rouges et qu'on cherche le nombre de tirages donnant p_1 boules noires, p_2 boules blanches et p_3 boules rouges avec $p = p_1 + p_2 + p_3$.

Exercice 26

1. Soient n et p des entiers naturels tels que $p \leq n$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Déterminer $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ et $B_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$ en fonction de n.
   (b) Déterminer $S_n = \displaystyle\sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k}$ et $T_n = \displaystyle\sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1}$ en fonction de n.

Exercice 27

Un sac contient six boules blanches numérotées de 1 à 6, quatre boules rouges numérotées de 1 à 4 et deux boules vertes numérotées de 1 à 2. On tire quatre boules simultanément.

1. Quel est le nombre de tirages possibles ?
2. Quel est le nombre de tirages :
   (a) ne comportant que des chiffres pairs ?
   (b) comportant exactement deux boules blanches et une boule rouge ?
   (c) comportant exactement une boule verte et une boule numérotée 1.

Remarques

Instant de sorties (deux, trois ... couleurs) : voir exercice 11, nombre de succès avec cardinal ou probabilité.

2 - Espaces probabilisés

Dans cette partie on va tenter de comparer le nombre d'éléments d'ensembles infinis

2.A - *Ensembles dénombrables et non dénombrables*

Définition 28

Un ensemble E est dit dénombrable s'il existe une bijection $\varphi : E \to \mathbb{N}$.
On dit que E est *au plus* dénombrable s'il est fini ou en bijection avec $\mathbb{N}$.

Comme pour les ensembles finis, il est possible d'énumérer les éléments d'un ensemble dénombrable :

$$E = \{\varphi(n) : n \in \mathbb{N}\} = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \text{ en posant } x_n = \varphi(n).$$

Proposition 29

L'ensemble $\mathbb{N}^*$ est dénombrable.

Démonstration. L'application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ définie par $\varphi(n) = n + 1$ est bijective. □

Proposition 30

L'ensemble $\mathbb{Z}$ est dénombrable.

Démonstration. L'application $f : \left| \begin{array}{lcll} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{N} & \\ k & \longmapsto & 2k & \text{si} \quad k \geqslant 0 \\ k & \longmapsto & -(2k+1) & \text{si} \quad k < 0 \end{array} \right.$ est bijective. □

Proposition 31

L'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$ un nombre entier naturel. Il existe une unique décomposition en facteurs premiers $n = 2^i p_1 \dots p_r$ où $p_1, \dots, p_r$ sont des facteurs impairs dont le produit est donc impair et que l'on note $p_1, \dots, p_r = 2j + 1$ avec $j \in \mathbb{N}$.

On a donc montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique couple $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n = 2^i(2j + 1)$.

L'application $\varphi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(i, j) \longmapsto 2^i(2j + 1)$ est donc une bijection. □

Remarques

On verra en TP d'informatique comment expliciter une bijection de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$.

Proposition 32

Si E et F sont des ensembles dénombrables, alors le produit cartésien $E \times F$ est dénombrable.

Démonstration. Soit $\varphi_1 : E \to \mathbb{N}$ et $\varphi_2 : F \to \mathbb{N}$ des bijections.

Alors l'application $\varphi : E \times F \to \mathbb{N}^2$ définie par $\varphi(n) = (\varphi_1(n), \varphi_2(n))$ est une bijection.

Par conséquent $E \times F$ est en bijection avec $\mathbb{N}^2$ donc avec $\mathbb{N}$: $E \times F$ est donc dénombrable. □

Remarques

On peut montrer que $\mathbb{Q}$ est dénombrable en construisant une bijection à partir de l'application $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q}$ définie par $(a, b) \longmapsto \dfrac{a}{b}$.

Remarques

Il existe des ensembles infinis non dénombrables : c'est le cas par exemple de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, de l'ensemble des suites de 0 et de 1 $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{(r_1, \dots, r_n, \dots) : r_i \in \{0,1\}\}$, de l'ensemble des suites réelles $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

2.B - Espaces probabilisés

2.B.1) Expérience aléatoire, univers

Définition 33

On appelle **expérience aléatoire** une expérience dont toutes les issues possibles sont connues avant de réaliser l'expérience mais dont le résultat peut varier lorsqu'on la répète.

Exemple

On lance un dé, on tire une boule dans une urne, on joue n fois à pile ou face.

Définition 34

On appelle univers, noté généralement Ω, l'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire. Un résultat possible est également appelé événement élémentaire.
On dit qu'un résultat possible est réalisé s'il est observé au cours d'une expérience donnée.

Exemple

L'univers d'une expérience aléatoire peut être de nature très différente :
- On lance un dé.
  - Si l'on s'intéresse au nombre obtenu : $\Omega = [\![1, 6]\!]$.
  - Si l'on s'intéresse à la parité : $\Omega = \{P, I\}$.
- On lance deux dés discernables et on note le résultat de ces deux dés.
  $\Omega = [\![1, 6]\!]^2 = \{(i, j) : 1 \leqslant i, j \leqslant 6\}$.
- Tirages simultanés de 5 cartes dans un jeu de 32 cartes. Ω est l'ensemble des combinaisons de 5 éléments dans un ensemble composé 32 éléments : $\mathrm{Card}(\Omega) = \binom{32}{5}$.

  Dans les exemples précédents, les univers sont finis. L'univers peut être infini :
- On lance une pièce jusqu'à obtenir Pile : $\Omega = \{P, FP, FFP, \dots, \} \cup \{FFF \dots\}$, univers dénombrable.
- Lancer infini d'une pièce $\Omega = \{P, F\}^{\mathbb{N}} = \{(r_1, \dots, r_n, \dots) : r_i \in \{P, F\}\}$, univers non dénombrable.
- Évolution du cours d'une action $\Omega = \mathbb{R}$, univers non dénombrable.

Remarques

Il peut être délicat de décrire explicitement l'univers d'une expérience.
L'énoncé d'un exercice postulera souvent uniquement son existence sans le décrire.

2.B.2) Tribus et événements

Si $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ est fini, toute partie $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ est appelé événement.
Si $\omega \in \Omega$ alors $\{\omega\} \subset \Omega$ est appelé événement élémentaire.
Tout événement est alors réunion finie d'événements élémentaires.

Exemple

On lance un dé, on obtient 3.
- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ est l'univers des résultats observables = événements élémentaires.
  L'événement élémentaire $\{\omega\} = \{3\}$ est réalisé.
- L'événement $A = \{1, 3, 5\} = \{1\} \cup \{3\} \cup \{5\}$ est réalisé.
  On peut reformuler : A : "on obtient un nombre impair" est réalisé.
- L'événement $B = \{1, 2\} = \{1\} \cup \{2\}$ n'est pas réalisé.
  On peut reformuler B : "on obtient un score au plus égal à 2" n'est pas réalisé.

Langage probabiliste	Langage ensembliste
Résultat possible	$\omega \in \Omega$
événement élémentaire	$\{\omega\} \subset \Omega$
Événement	$A \subset \Omega$
Événement certain	Ω
Événement imposible	$\varnothing$
Événement contraire	$\overline{A}$
Événement "A ou B"	$A \cup B$
Événement "A et B"	$A \cap B$
Événements incompatibles	$A \cap B = \varnothing$

Si Ω est dénombrable on peut énumérer ses éléments $\Omega = \{\omega_n : n \in \mathbb{N}\}$.
Tout événement s'écrit alors comme réunion dénombrable d'événements élémentaires :

Définition 35

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties d'un ensemble Ω. On définit les ensembles $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{\omega \in \Omega : \exists n \in \mathbb{N}, \omega \in A_n\} \quad ; \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{\omega \in \Omega : \forall n \in \mathbb{N}, \omega \in A_n\}.$$

Exemple

On lance une pièce de monnaie jusqu'à obtenir pile : $\Omega = \left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} \underbrace{F\dots F}_{n \text{ Face}} P\right) \cup \{F\cdots F\cdots\}$.
L'événement A_N : "on effectue au moins N lancers avant que l'expérience ne se termine" s'écrit :

$$A_N = \left(\bigcup_{n=N}^{+\infty} \underbrace{F\dots F}_{n \text{ Face}} P\right) \cup \{F\cdots F\cdots\}$$

Proposition 36

Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties d'un ensemble Ω et $B \subset \Omega$. Alors :

$$\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} \quad ; \quad \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}$$

$$B \cap \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (B \cap A_n) \quad ; \quad B \cup \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (B \cup A_n)$$

Exercice 37

1. On jette un dé. Le joueur gagne s'il fait un 6 et rejoue sinon.
   On note A_n le joueur fait 6 pour la première fois au n-ième lancer. Soit A : "le joueur gagne".
   Écrire l'événement A à l'aide des événements $A_n, n \in \mathbb{N}$.
2. On joue à Pile ou face : on jette une pièce, si l'on obtient Face on rejoue, sinon le jeu s'arrête.
   On note F_n : "les n premiers lancers ont donné face".
   Écrire l'événement F : "le jeu dure indéfiniment" à l'aide des événements $F_n, n \in \mathbb{N}$.
3. Une urne contient initialement une boule rouge. On effectue une succession de tirages.
   A chaque tirage, on pioche une boule : si elle n'est pas rouge, le jeu s'arrête. Sinon, on la remet dans l'urne et on ajoute une boule verte.
   On note R_k : "les k premiers tirages ont donné une boule rouge."
   On note I : "la succession de tirage est infinie".
   Écrire I à l'aide des événements $R_k, k \in \mathbb{N}$.

Si Ω n'est pas dénombrable, alors $\mathscr{P}(\Omega)$ est encore l'ensemble de toutes les parties de Ω mais ces parties ne peuvent pas toutes être considérées comme des événements **en vue de définir une "bonne" notion de probabilité**. On recourt à la notion de tribu :

Définition 38

Soit Ω un ensemble non vide. On appelle tribu sur Ω toute partie $\mathscr{A}$ de $\mathscr{P}(\Omega)$ qui vérifie :

1. $\Omega \in \mathscr{A}$.
2. $A \in \mathscr{A} \implies \overline{A} \in \mathscr{A}$ (stabilité par passage au complémentaire).
3. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{A}$ alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$ (stabilité par réunion dénombrable).

Si $\mathscr{A}$ est une tribu sur un univers Ω on dit que $(\Omega, \mathscr{A})$ est un probabilisable. **Tout élément de $\mathscr{A}$ est appelé événement**.

Exercice 39

1. Montrer qu'une tribu est stable par intersection dénombrable.
2. Montrer que si A, B sont des événements alors $B \setminus A$ est aussi un événement.

Exemple

On lance un dé $\Omega = [\![1, 6]\!]$. Plusieurs tribus possibles
- $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$: c'est le numéro obtenu qui nous intéresse.
- $\mathscr{A} = \{\varnothing, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \Omega\}$: c'est la parité de la face obtenue qui nous intéresse ici.

Exemple

1. $\mathscr{A} = \{\varnothing, \Omega\}$ est une tribu, dite grossière.
2. $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$ est une tribu, dite exhaustive.
3. Si A est un événement (non vide et tel que $A \neq \Omega$), alors $\mathscr{A} = \{\varnothing, A, \overline{A}, \Omega\}$ est une tribu, dite engendrée par l'événement A.

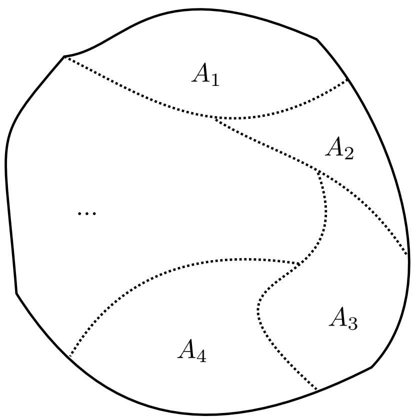
Remarques

- Si Ω est dénombrable on prendre en général $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$.
- Si Ω n'est pas dénombrable, l'énoncé fournira le cadre théorique et postulera souvent uniquement l'existence d'un espace probabilisable.

Définition 40

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable.

1. On appelle **système complet d'événements** toute famille finie ou dénombrable $(A_i)_{i\in I}$ (avec $I = [\![1, n]\!], n \in \mathbb{N}^*$ ou $I = \mathbb{N}$) telle que :
   — pour tout couple $(i, j) \in I^2$ d'éléments distincts : $A_i \cap A_j = \varnothing$.
   — $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega$.
2. On appelle système quasi-complet d'événement toute famille finie ou dénombrable $(A_i)_{i\in I}$ (avec $I = [\![1, n]\!], n \in \mathbb{N}^*$ ou $I = \mathbb{N}$) telle que :
   — pour tout couple $(i, j) \in I^2$ d'éléments distincts : $A_i \cap A_j = \varnothing$.
   — $P\left(\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i\right) = 1$.



— Si A est un événement $(A, \overline{A})$ est un s.c.e
— Si $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ est un événement alors $(\{\omega_1\}, \dots, \{\omega_n\})$ est un s.c.e.
— Si $\Omega = \{\omega_n : n \in \mathbb{N}\}$ est dénombrable alors $(\{\omega_n\} : n \in \mathbb{N})$ est un s.c.e.

Exemple

On lance un dé, une fois. On note A : "on obtient un nombre pair".
Alors $(A, \overline{A})$ est un s.c.e. :
— $A \cup \overline{A} = \Omega$: en effet, A se réalise (on obtient un nombre pair) ou $\overline{A}$ se réalise (on obtient un nombre impair)
— $A \cap \overline{A} = \varnothing$: le nombre obtenu ne peut pas être pair et impair !

Exemple

On lance une pièce une infinité de fois.
On note F_n : "on obtient face au n-ième lancer" ; G_n : "on obtient face pour la première fois au n-ième lancer" et P : "on n'obtient que des piles".
— $(P, F_1, \dots, F_n, \dots)$ n'est pas un s.c.e.
— $(G_1, \dots, G_n, \dots)$ n'est pas un s.c.e.
— $(P, G_1, \dots, G_n, \dots)$ est un s.c.e.

2.B.3) *Probabilité sur un espace probabilisé*

Si Ω est un ensemble fini, une probabilité est une application définie sur $\mathscr{P}(\Omega)$ vérifiant $P(\Omega) = 1$ et $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ dès lors que les événements A, B sont incompatibles.

Dans ce chapitre, on considérera des événements obtenus comme réunion/intersection dénombrables d'événements élémentaires. On impose une condition supplémentaire sur l'application P.

Définition 41

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable.
On appelle probabilité $(\Omega, \mathscr{A})$ toute application $P : \mathscr{A} \to [0,1]$ vérifiant :
- $P(\Omega) = 1$
- Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles :

$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) \quad \text{propriété de } \sigma\text{-additivité.}$$

On dit alors que $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ est un espace probabilisé.

Remarques

- La série $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$ est convergente, de somme : $P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$.
- Si $\varnothing = A_2 = A_3 = \cdots = A_n = \ldots$ alors la propriété de σ-additivité implique que si A_0 et A_1 sont incompatibles on a : $P(A_0 \cup A_1) = P(A_0) + P(A_1)$.
  On retrouve les propriétés classiques d'une probabilité sur un univers fini.

Proposition 42

Soient $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé et $A, B \in \mathscr{A}$.
- $P(\varnothing) = 0$.
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
- Si $A \subset B$ alors $P(A) \leqslant P(B)$.
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Solution. — $\Omega = A \cup \overline{A}$ donc $1 = P(\Omega) = P(A) + P(\overline{A})$. En particulier $P(\varnothing) = 1 - P(\Omega) = 0$.
— $B = A \cup (B \cap \overline{A})$ donc $P(B) = P(A) + P(B \cap \overline{A}) \geqslant P(A)$.
— $A \cup B = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$ donc

$$P(A \cup B) = P(A) - P(A\cap B) + P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

□

Proposition 43

Soient $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé.
- Pour tout s.c.e. fini $(A_1, \ldots, A_n)$ on a $\sum_{k=1}^{n} P(A_k) = 1$.
- Pour tout s.c.e. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la série $\sum P(A_n)$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = 1$.

Exercice 44

On joue avec une pièce équilibrée à pile ou face les tirages étant indépendants.
On définit A_n : "on obtient pile pour la première fois au n-ième lancer"
C : "on n'obtient que des faces".

Montrer que la série $\sum P(A_n)$ converge avec un s.c.e. Exprimer $\sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n)$ en fonction de $P(C)$.

Monter que $P(C) = 0$.

Solution. $((A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, C)$ est un s.c.e.
On pose $u_0 = P(C)$ et $u_n = P(A_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
La série $\sum u_n$ est donc convergente et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 1$$

$$P(C) + \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) = 1.$$

On en déduit que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) = 1 - P(C)$.
Par ailleurs $P(A_n) = P(P_1 \cap \cdots \cap P_n)$ où P_i : "on obtient pile au i-ième tirage.
Les tirages étant indépendants, on a $P(A_n) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} P(P_i) = \frac{1}{2^n}$. On en déduit que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1.$$

Finalement,

$$1 = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) = 1 - P(C) \iff P(C) = 0.$$

> **Remarques**
>
> On a $C = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n$ avec F_n l'événement F_n : "on obtient face lors des n premiers tirages".
> Ce qui précède montre que $P(C) = 0$. On pourra le justifier autrement à l'aide du théorème de la limite monotone.

□

Définition 45

Un événement de probabilité nulle est dit négligeable.
A l'inverse, un événement de probabilité égale à 1 est dit presque-sûr.

2.C - Probabilité uniforme sur un univers fini

> **Exemple**
>
> On jette un dé équilibré. On note $\Omega = [\![1,6]\!]$ l'univers des résultats observables.
> On a $p(\{i\}) = \frac{1}{6}$ pour tout $i \in [\![1,6]\!]$.
> La probabilité d'obtenir un nombre pair est $\frac{1}{2}$.
> En effet, si l'on note $A = \{2,4,6\} = \{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}$ alors $P(A) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Plus généralement, si Ω est un ensemble fini $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, il suffit de connaître la probabilité sur chacun des événements élémentaires pour connaître la probabilité de tout événement :

Théorème 46

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ et $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R}$.
Il existe une probabilité P sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ telle que $P(\{\omega_i\}) = p_i$ si et seulement si :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], p_i \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Dans ce cas pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$: $P(A) = \sum_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ \omega_i \in A}} p_i$.

Exemple

On dé pipé donne 6 avec probabilité $\frac{1}{2}$ et toutes les autres faces avec la mêmes probabilité.
Calculer la probabilité d'obtenir 2.

Définition 47

Soit Ω un ensemble fini. On appelle probabilité uniforme sur Ω l'unique probabilité qui prend la même valeur pour chaque événement élémentaire.
Dans ce cas, pour tout événement $A \in \mathscr{P}(\Omega)$:

$$P(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

Exercice 48

On considère une urne contenant 3 boules noires, 4 blanches et 5 rouges toutes numérotées.

1. On tire une boule dans l'urne. Quelle est la probabilité qu'elle soit noire ? blanche ? rouge ?
2. On tire simultanément 3 boules. Quelle est la probabilité qu'elles soient toutes de la même couleur ? toutes de couleurs différentes ?
3. Reprendre la question précédente lorsque les trois tirages sont successifs et avec remise.
4. Refaire de même lorsque les trois tirages sont successifs et sans remise.

Solution. 1. $P(N) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$. $P(B) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$. $P(R) = \frac{5}{12}$.

2. On tire simultanément 3 boules dans une urne contenant 12 boules.
   Il y a $\binom{12}{3}$ tirages possibles.
   U : "tirage unicolore". D : "tirage tricolore".
   On a $U = N_3 \cup B_3 \cup R_3$ (où N_3 : "on tire 3 noirs", etc.). Les événements N_3, B_3, R_3 sont incompatibles donc :
   $$P(U) = P(N_3) + P(B_3) + P(R_3) = \frac{\binom{3}{3}}{\binom{12}{3}} + \frac{\binom{4}{3}}{\binom{12}{3}} + \frac{\binom{5}{3}}{\binom{12}{3}}.$$
3. $$P(U) = P(N_3) + P(B_3) + P(R_3) = \frac{3^3}{12^3} + \frac{4^3}{12^3} + \frac{5^4}{12^3}.$$
4. $$P(U) = P(N_3) + P(B_3) + P(R_3) = \frac{\frac{3!}{(3-3)!}}{\frac{12!}{(12-3)!}} + \frac{\frac{4!}{(4-3)!}}{\frac{12!}{(12-3)!}} + \frac{\frac{5!}{(5-3)!}}{\frac{12!}{(12-3)!}}.$$

□

2.D - *Probabilité sur un univers dénombrable*

Théorème 49

Soit $\Omega = \{\omega_n : n \in \mathbb{N}\}$ un univers dénombrable et $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.
Il existe une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ donnée par $p(\{\omega_n\}) = p_n$ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, p_n \geqslant 0 \quad ; \quad \text{la série } \sum p_n \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1.$$

Dans ce cas pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$: $P(A) = \displaystyle\sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ \omega_n \in A}} p_n$.

Exemple

On pose $p_n = \frac{1}{2^{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définit une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$ car $p_n \geqslant 0$ et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1.$$

Proposition 50: Continuité monotone

❶ Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'événements : $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}$. Alors :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n).$$

❷ Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante d'événements : $\forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1} \subset A_n$. Alors :

$$P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n).$$

Démonstration. Cas d'une suite croissante.
On note $B_0 = A_0$, $B_1 = A_1 \setminus A_0$ et plus généralement $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$. La suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie :

— $n \neq m \Longrightarrow B_n \cap B_m = \emptyset$.
Sinon, il existe ω tel que $\omega \in B_n$ et $\omega \in B_m$; supposons par exemple que $n < m$.
Dans ce cas $\omega \in A_n \setminus A_{n-1} \subset A_n \subset \cdots \subset A_{m-1}$.
On obtiendrait $\omega \in A_{m-1}$ ce qui contredit $\omega \in B_m = A_m \setminus A_{m-1}$.

— $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$.
On a $B_n \subset A_n$ donc $\boxed{\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.}$ Soit maintenant $\omega \in \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ alors :

- soit $\omega \in A_0$ et dans ce cas $\omega \in A_0 = B_0 \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$.
- soit il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\omega \in A_n$. On note $p = \min\{n \in \mathbb{N}^* : \omega \in A_n\}$. Ainsi, $\omega \in A_p \setminus A_{p-1} = B_p$: on obtient $\omega \in \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$. $\boxed{\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n,}$ d'où l'égalité.

On en déduit que :

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) &= P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B_n) = P(B_0) + \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n \setminus A_{n-1}) \\ &= P(A_0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(P(A_n) - P(A_{n-1} \cap A_n)\right) \\ &= P(A_0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(P(A_n) - P(A_{n-1})\right) \text{ car } A_{n-1} \subset A_n \\ &= P(A_0) + \lim_{n\to+\infty} P(A_n) - P(A_0) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n). \end{aligned}$$

— Si (A_n) est une suite décroissante on applique le résultat précédent à la suite croissante $(\overline{A_n})$.

□

Exercice 51

On considère le jeu de pile ou face infini équilibré les étant lancers indépendants.
Soit $n \geq 1$ et A_n : "les n 1^{ers} lancers donnent Face" ; F_n : "le n^e lancer donne Face".
Montrer que l'événement F : “ obtenir face à chaque lancer ” est négligeable.

Solution. On a $F = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$ avec $\forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1} \subset A_n = F_1 \cap \cdots \cap F_n$. Par continuité décroissante :

$$P(F) = P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(F_1 \cap \cdots \cap F_n\right) \underset{\text{(indep)}}{=} \lim_{n\to+\infty} [P(F_1)\ldots P(F_n)] = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

Remarques

$P(F) = 0$, pourtant F n'est pas l'événement impossible ($F = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n \neq \emptyset$).
De même, sans être égal à Ω, la probabilité d'obtenir au moins un Pile est égale à 1.

□

Exercice 52

Une urne contient initialement une boule rouge. On procède à une succession de tirages dans cette urne, avec le protocole suivant : à chaque tirage, on tire une boule. Si elle n'est pas rouge, on s'arrête. Sinon, on remet la boule rouge tirée, on ajoute une boule verte et on passe au tirage suivant.
Calculer la probabilité que le jeu ne s'arrête pas.

Solution. On note I l'événement : ”le jeu est infini".

On a $I = \bigcap_{n=1}^{+\infty}$ avec R_n : ”les n premiers tirages donnent une boule rouge".

De plus $R_{n+1} \subset R_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Par continuité décroissante (on note T_i : "le i-ième tirage est rouge") :

$$\begin{aligned}
P(I) = P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} R_n\right) &= \lim_{n\to+\infty} P(R_n) = \lim_{n\to+\infty} P(T_1\cap T_2\cap\cdots\cap T_n)\\
&= \lim_{n\to+\infty}\left[P(T_1)P_{T_1}(T_2)\dots P_{T_1\cap\cdots\cap T_{n-1}}(T_n)\right] \quad \text{(probabilités composées)}\\
&= \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{1}\frac{1}{2}\cdots\frac{1}{n}\right]\\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n!}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

La probabilité que le jeu s'arrête est donc de probabilité 1. □

Remarques

Un événement de probabilité nulle est dit **négligeable**.
Un événement de probabilité 1 est dit **presque certain ou presque sûr**.

Corollaire 53

Pour toute suite d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (non nécessairement monotone) :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \text{ et } P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right)$$

Proposition 54: Sous-additivité finie

Soient $A_1,\dots,A_n$ une famille d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},P)$ alors :

$$P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n} P(A_k).$$

Solution. On démontre ce résultat par récurrence.
L'inégalité est vraie au rang $n=0$ (c'est même une égalité).
La propriété est vraie également au rang $n=1$ car

$$P(A_0\cup A_1) = P(A_0)+P(A_1)-P(A_0\cap A_1) \leqslant P(A_0)+P(A_1).$$

Si la propriété est vérifiée pour n événements alors pour $n+1$ événements, $A_1,\dots,A_n,A_{n+1}$:

$$P\left(\bigcup_{k=0}^{n+1} A_k\right) = P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) + P(A_{n+1}) \leqslant \sum_{k=0}^{n} P(A_k) + P(A_{n+1}) = \sum_{k=0}^{n+1} P(A_k).$$

□

Théorème 55: Sous-additivité dénombrable

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},P)$.
Si la série $\sum P(A_n)$ converge alors :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

Démonstration. On pose $B_n = \bigcup_{k=0}^{n} A_k$.

On obtient alors une suite croissante d'événements et on a $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n$.

Il vient par continuité croissante :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(B_n) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right).$$

Puisque $\displaystyle P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n} P(A_k)$, on obtient puisque la série $\sum P(A_n)$ converge :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} P(A_k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

□

2.E - Conditionnement

2.E.1) *Probabilité conditionnelle*

On lance un dé équilibré à 6 faces. $\Omega = [\![1, 6]\!]$.
— La probabilité d'obtenir 6 est $P(S) = \frac{1}{6}$.
— Si l'on sait que le résultat est pair. L'univers a été déformé en $A = \{2, 4, 6\} \subset \Omega$.
La probabilité d'obtenir 6 est alors $\frac{1}{3}$.
— La probabilité d'obtenir 6 sachant que le résultat est pair est égale à :

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Définition 56

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé et A un événement de probabilité non nulle tel que $P(A) \neq 0$. L'application :

$$P_A : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{A} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ B & \longmapsto & \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)} \end{array} \right.$$

est une probabilité sur Ω. On l'appelle probabilité conditionnelle sachant A (ou relative à A).
Pour tout événement B, on note $P_A(B)$ ou $P(B|A)$ la probabilité de B sachant A.

Démonstration. Vérifions que P_A est bien une probabilités sur Ω.
— On a $P_A(\Omega) = \dfrac{P(A\cap\Omega)}{P(A)} = \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1$.
— Soit (B_n) une suite d'événements deux à deux incompatibles :

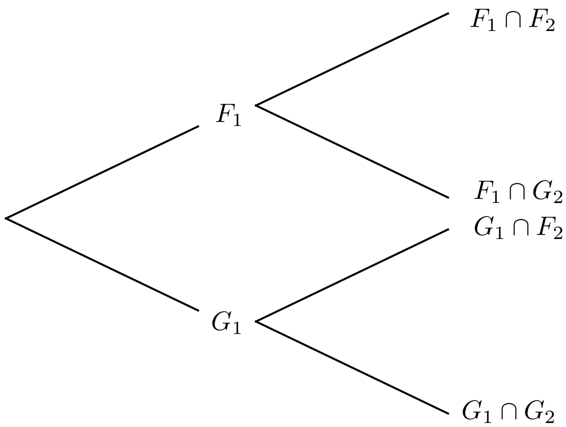
$$P_A\left(A \cap \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \frac{P\left(A \cap \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right)}{P(A)} = \frac{P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A \cap B_n\right)}{P(A)} \underset{(*)}{=} \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} P(A\cap B_n)}{P(A)} = \sum_{n=0}^{+\infty} P_A(B_n),$$

$(*)$: les événements $A \cap B_n$ sont 2 à 2 disjoints : $(A \cap B_n) \cap (A \cap B_m) \subset B_n \cap B_m = \varnothing$ si $m \neq n$. □

Exercice 57

Une famille est composée de deux enfants.
— Quelle est la probabilité que l'un des enfants au moins soit un garçon ?
— Quelle est la probabilité que l'un des enfants au moins soit un garçon sachant qu'on sait que l'un des enfants est une fillle ?

Solution.



G : "un garçon au moins". $G = (G_1 \cap G_2) \cup (G_1 \cap F_2) \cup (F_1 \cap G_2)$ réunion d'événements incompatibles.

$P(G) = P([G_1 \cap G_2] \cup [G_1 \cap F_2] \cup [F_1 \cap G_2]) = P(G_1 \cap G_2) + P(G_1 \cap F_2) + P(F_1 \cap G_2) = \frac{3}{4}$.

On peut aussi remarquer que $G = \overline{F_1 \cap F_2}$ avec $P(F_1 \cap F_2) = \frac{1}{4}$: $P(G) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

On suppose maintenant que l'un des enfants est une fille.
On note F : "une fille au moins" : $P(F) = 1 - P(G_1 \cap G_2) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.
La probabilité que l'un des enfants au moins soit un garçon est alors :

$$P_F(G) = \frac{P(F \cap G)}{P(F)} = \frac{P(F_1 \cap G_2) + P(G_1 \cap F_2)}{\frac{3}{4}} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}.$$

□

2.E.2) *Formule des probabilités composées*

Théorème 58

Soient A, B deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{P})$. Alors, si $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$:

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P_A(B) = P(A)P(B|A) \\ &= P(B)P_B(A) = P(B)P(A|B). \end{aligned}$$

Remarques

En général $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$.

On montre alors par récurrence :

Théorème 59

Soit $A_1, \ldots, A_n$ une famille d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
On suppose que $P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$. Alors :

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2) \ldots P_{A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

Exercice 60

Une urne contient 4 boules blanches et 3 boules noires. On procède à quatre tirages successifs sans remise d'une boule dans l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir deux blanches puis deux noires ?

Exercice 61

Une mobile se déplace sur les sommets d'un triangle équilatéral ABC et sur le centre de gravité O. A l'instant initial $t = 0$, le mobile est en O.
À chaque instant, le mobile se déplace sur l'un des autres points de manière équiprobable.
Si le mobile revient en O, il y reste.

1. Calculer la probabilité que le mobile revienne en O au temps $t = n$.
2. Calculer la probabilité que le mobile revienne en O. Commenter

Solution. On note :
— D_i : "le mobile est en A, B ou C à l'instant i"
— O_i : "le mobile est en O à l'instant i".
— R_i : "le mobile revient en O à l'instant i".

1. $P(R_1) = 0$.
   Pour $n \geqslant 2$:
   $P(R_n) = P(D_1 \cap \cdots \cap D_{n-1} \cap O_n)$
   $P(R_n) = P(D_1)P_{D_1}(D_2)\ldots P_{D_1\cap\cdots\cap D_{n-2}}(D_{n-1})P_{D_1\cap\cdots\cap D_{n-1}}(O_n)$
   $P(R_n) = 1 \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{2}{3}\frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$.
2. On note O : "le mobile revient en O".
   On a $O = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} R_n$ avec $O_n \subset O_{n+1}$. Par σ-additivité, il vient (car $P(O_1) = 0$) :
   $$P(O) = P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} O_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(O_n) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^2 \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$
   $$= \frac{1}{3}\frac{9}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1.$$
   Il est donc presque certain que le mobile revienne en O (et y reste !).

□

2.E.3) *Formule des probabilités totales*

Théorème 62

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé et soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet d'événements tel que $P(A_n) \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Pour tout événement B, la série $\sum P(B \cap A_n)$ est convergente et :

$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B \cap A_n).$$

Démonstration. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements alors pour tout événement B :

$$B = B \cap \Omega = B \cap \left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} B \cap A_n.$$

Par σ-additivité :

$$P(B) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B \cap A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)P_{A_n}(B).$$

□

Corollaire 63

Si (A_n) est un système quasi-complet d'événements non négligeables alors

$$\forall B \in \mathscr{A}, P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) P_{A_n}(B).$$

Démonstration. On note $A = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$. On a $P(A) = 1$ et $P(\overline{A}) = 0$ par hypothèse. Par ailleurs :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = P(A \cap B) \text{ car } 0 \leqslant P(\overline{A} \cap B) \leqslant P(\overline{A}) = 0.$$

On en déduit que :

$$P(B) = P(B \cap A) = P\left(B \cap \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$

Le reste de la preuve suit les mêmes arguments que la précédente. □

Remarques

Un cas particulier très important : $(A, \overline{A})$ un s.c.e. fini.

Exercice 64

Une compagnie d'assurance estime qu'il y a deux catégories de clients :

- Ceux qui présentent un fort risque d'accident : 20% de la population ayant une probabilité d'avoir au moins un accident par an de $0,5$
- Les autres personnes qui présentent un faible risque d'accident : probabilité d'avoir au moins un accident par an : $0,1$.

Quelle est la probabilité de l'événement A_1 "un nouvel assuré a un accident pendant la première année de son contrat" ?
Et pendant les deux premières années de contrat ?

Solution. $\Omega = F_+ \cup F_-$ où
— F_+ est l'ensemble des personnes "à fort risque d'accident".
— $F_- = \overline{F_+}$ les personnes "à faible risque d'accident".
On a $P(F_+) = 0,2$ et donc $P(F_-) = 0,8$.

En appliquant la formule des probabilité totales, on obtient :

$$\begin{aligned} P(A_1) &= P(A_1 \cap F_+) + P(A_1 \cap F_-) = P(F_+)P_{F_+}(A_1) + P(F_-)P_{F_-}(A_1) \\ &= 0,2 \times 0,5 + 0,8 \times 0,1 = 0,18 = 18\%. \end{aligned}$$

Pour la seconde question, on calcule dans un premier temps la probabilité de ne pas avoir d'accident lors des deux premières années de contrat :

$$P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) = P(\overline{A_1}) P_{\overline{A_1}}(\overline{A_2}) = 0,82^2.$$

La probabilité recherchée vaut donc $1 - 0,82^2 \approx 0,33 = 33\%$. □

Exercice 65

On tire dans un premier temps deux boules dans une urne contenant 3 boules noires numérotées et 3 boules blanches numérotées. Si on a tiré une ou plusieurs boules blanches, on les enlève définitivement. Les boules noires, elles, sont remises dans l'urne.
Dans un second temps, on procède au tirage d'une nouvelle boule.
Quell est la probabilité de tirer une boule banche au deuxième tirage ?

Exercice 66

Des boules en nombre infini numérotées $1, 2, \ldots$ sont placées successivement, indépendamment les unes des autres dans trois boites.

1. Pour $k \geqslant 2$, on note l'événement "deux des trois boites sont non vides pour la première fois lorsqu'on place la k-ième boule".

   Calculer $P(A_k)$ puis $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} P(A_k)$. Commenter.

2. Pour $i \geqslant 3$, on note B_i : "les trois boites sont non vides pour la première fois lorsqu'on place la i-ième boule". Calculer $P_{A_k}(B_i)$ pour $k \geqslant 2$ et $i \geqslant 3$.

   En déduire $P(B_i)$ puis $\displaystyle\sum_{i=3}^{+\infty} P(B_i)$. Commenter.

Solution. 1. U_i,(resp. D_i, T_i) : "la boule numéro i est posée dans la boite 1, (resp. $2, 3$)".

$P(A_k) = 3\left[P(U_1 \cap \cdots \cap U_1 \cap D_2) + P(U_1 \cap \cdots \cap U_1 \cap T_3)\right] = 3\left(\frac{1}{3^k} + \frac{1}{3^k}\right) = \dfrac{2}{3^{k-1}}$.

On a : $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} P(A_k) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{2}{3^{k-1}} = 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{3^k} = 2 \times \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}\frac{3}{2} = 1.$

2. $P_{A_k}(B_i) = 0$ si $i \leqslant k$.

   Si $i > k$ (i.e. $k \leqslant i-1$) : $P_{A_k}(B_i) = \left(\frac{2}{3}\right)^{i-k-1}\frac{1}{3}$ car on place les $i-k-1$ boules dans l'une quelconque des deux boites non vides jusqu'à la i-ième que l'on place dans la dernière boite (la vide).

   On en déduit par la formule des probabilités totales avec le s.c.e. $(A_k)_{k\geqslant 2}$:

$$\begin{aligned}
P(B_i) &= \sum_{k=2}^{+\infty} P(B_i \cap A_k) = \sum_{k=2}^{+\infty} P(A_k)P_{A_k}(B_i) = \sum_{k=2}^{i-1} P(A_k)P_{A_k}(B_i)\\
&= \sum_{k=2}^{i-1} \frac{2}{3^{k-1}}\left(\frac{2}{3}\right)^{i-k-1}\frac{1}{3} = \sum_{k=2}^{i-1} \frac{2}{3^k}\left(\frac{2}{3}\right)^{i-k-1}\\
&= 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}\sum_{k=2}^{i-1}\frac{1}{2^k} = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}\frac{1}{4}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{i-2}}{1-\frac{1}{2}}\\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{i-2}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{i-1}
\end{aligned}$$

   On obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=3}^{+\infty} P(B_i) &= \sum_{i=3}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} - 2\sum_{i=3}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{i-1} = \sum_{i=2}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{i} - 2\sum_{i=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{i}\\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^2\frac{1}{1-\frac{2}{3}} - 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\\
&= \frac{4}{9} \times 3 - \frac{2}{9} \times \frac{3}{2} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1.
\end{aligned}$$

Remarques

— Les événements A_n sont deux à deux disjoints. Par σ-additivité, on a :

$$P\left(\bigcup_{n=2}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=2}^{+\infty} P(A_n) = 1.$$

— Les événements B_n sont deux à deux disjoints, par σ-additivité, on a :

$$P\left(\bigcup_{n=3}^{+\infty} B_n\right) = \sum_{n=2}^{+\infty} P(B_n) = 1.$$

Il est donc presque certain que 2 des boites soient non vides au cours de l'expérience et il est également presque certain que les 3 boites soient non vides au cours de l'expérience.

□

2.E.4) *Formule de Bayes*

Proposition 67

Soient $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé et A, B des événements non probabilités non nulles. Alors :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P_A(B)}{P(B).}$$

Théorème 68

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet d'événements de probabilités toutes non nulles. Alors pour tout événement B de probabilité non nulle :

$$\forall k \in \mathbb{N}, P_B(A_k) = \frac{P_{A_k}(B)P(A_k).}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(A_k)P_{A_k}(B)}$$

Remarques

Cas important : $(A, \overline{A})$ est un système complets d'événement (avec $P(A) \in]0, 1[$) :

$$P_B(A) = \frac{P(A)P_A(B)}{P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B)}.$$

Exemple

Une usine manufacture deux types de pièces : 40% d'une pièce A et 60% d'une pièce B.
5% des pièces A présentent un défaut et 3% de pièces B.
On se donne une pièce et on constate qu'elle est défectueuse. On cherche la probabilité qu'il s'agisse d'une pièce A. $(A, B) = (A, \overline{A})$ est un s.c.e. La formule de Bayes donne :

$$\begin{aligned} P_D(A) &= \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(A)P_A(D)}{P(A)P_A(D) + P(B)P_B(D)} \\ &= \frac{\frac{40}{100} \times \frac{5}{100}}{\frac{40}{100} \times \frac{5}{100} + \frac{60}{100} \times \frac{3}{100}} = \frac{10}{19}. \end{aligned}$$

Exercice 69

Une banque possède n guichets. Les clients se répartissent de façon indépendante et équiprobable entre les différentes caisses.

La probabilité qu'il y ait k clients, un jour donné, dans la banque est $p_k = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.
Le guichet numéro 1 a vu passer m clients un jour donné.
Quelle est la probabilité qu'il y ait eu $n \times m$ clients ce jour ?

Solution. Soit X le nombre de clients ce jour et C_1 le nombre de clients qui passent au guichet 1.

$$\begin{aligned}
P_{C_1=m}(X=mn) &= \frac{P(X=mn)P_{X=mn}(C_1=m)}{P(C_1=m)}\\
&= \frac{e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^{mn}}{(mn)!}\times\dfrac{\binom{mn}{m}(n-1)^{mn-m}}{n^{mn}}}{P(C_1=m)}\\
&= \frac{e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^{mn}}{(mn)!}\times\dfrac{\binom{mn}{m}(n-1)^{m(n-1)}}{n^{mn}}}{P(C_1=m)}
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
P(C_1=m) &= \sum_{k=m}^{+\infty} P(X=k)P_{X=k}(C_1=m)\\
&= \sum_{k=m}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\frac{\binom{k}{m}(n-1)^{k-m}}{n^k}\\
&= \frac{e^{-\lambda}}{m!}\sum_{k=m}^{+\infty}\lambda^k\frac{(n-1)^{k-m}}{(k-m)!n^k}\\
&= \frac{e^{-\lambda}\lambda^m}{m!n^m}\sum_{k=m}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-m}}{(k-m)!}\frac{(n-1)^{k-m}}{n^{k-m}}\\
&= \frac{e^{-\lambda}\lambda^m}{m!n^m}\sum_{\ell=0}^{+\infty}\frac{\lambda^\ell}{\ell!}\frac{(n-1)^\ell}{n^\ell}\\
&= \frac{e^{-\lambda}\lambda^m}{m!n^m}e^{\lambda\left(1-\frac{1}{n}\right)}\\
&= \frac{e^{-\frac{\lambda}{n}}\lambda^m}{m!n^m}
\end{aligned}$$

□

2.F - Indépendance

2.F.1) Indépendance de deux événements

Définition 70

Deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ sont dit indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

L'indépendance de deux événements devra être vérifiée par le calcul sauf si l'énoncé stipule clairement l'indépendance d'événements.

Exercice 71

On lance deux dés et on note A : "le premier dé donne donne un numéro supérieur strictement à 3" et B : "la second dé donne un numéro impair".
Montrer que A et B sont des événements indépendants.

Démonstration. On peut faire un tableau.
$P(A) = \frac{3\times 6}{36} = \frac{1}{2}$.
$P(B) = \frac{6\times 3}{36} = \frac{1}{2}$
$P(A\cap B) = \frac{3\times 3}{36} = \frac{1}{4} = P(A)P(B)$. □

Théorème 72

Soient A et B des événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On suppose que $P(B) > 0$.
Alors A et B sont indépendants si et seulement si $P(A) = P_B(A)$.

Exercice 73

Montrer que si A et B sont indépendants alors A et $\overline{B}$, $\overline{A}$ et $\overline{B}$, $\overline{A}$ et B le sont également.

2.F.2) *Indépendance d'une famille d'événements.*

Définition 74

On dit que les événements $A_1, \dots, A_n$ sont deux à deux indépendants si :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, (i \neq j \Longrightarrow P(A_i\cap A_j) = P(A_i)P(A_j)).$$

Définition 75

On dit que les événements $A_1, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants si :

$$\forall I \subset [\![1,n]\!], P\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \prod_{i\in I} P(A_i).$$

L'indépendance mutuelle entraîne l'indépendance deux à deux des événements.
La réciproque est fausse.

Exercice 76

Blaise et Pierre jouent à pile ou face avec une pièce équilibrée. Soient

- A_{12} l'événements "le résultat du deuxième tirage est identique au résultat du premier".
- A_{13} l'événements "le résultat du troisième tirage est identique au résultat du premier".
- A_{23} l'événements "le résultat du troisième tirage est identique au résultat du deuxième".

Calculer $P(A_{12}\cap A_{13})$, $P(A_{23}\cap A_{13})$, $P(A_{12}\cap A_{23})$ et $P(A_{12}\cap A_{13}\cap A_{23})$.
Commenter.

Démonstration. Le modèle est celui du tirage avec remise.
L'univers est constitué des 3-listes avec répétition à valeurs dans $\{P, F\}$.
$\mathrm{Card}(\Omega) = 2^3 = 8$.
On munit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ de la probabilité uniforme, les pièces étant supposées non truquées.
On a :
— $A_{12} = \{PPP, PPF, FFF, FFP\}$

— $A_{13} = \{PPP, PFP, FPF, FFF\}$
— $A_{23} = \{PPP, FPP, PFF, FFF\}$

Ainsi :

$$P(A_{12}) = P(A_{13}) = P(A_{23}) = \frac{1}{2}.$$

D'autre par $A_{12} \cap A_{13} = \{PPP, FFF\}$, donc $P(A_{12} \cap A_{13}) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = P(A_{12}) \times P(A_{13})$.
On montre de même que $P(A_{12} \cap A_{23}) = \frac{1}{4} = P(A_{13} \cap A_{23})$.
Les événements sont donc 2 à 2 indépendants.
Enfin, $A_{12} \cap A_{13} \cap A_{23} = \{PPP, FFF\}$.
On a donc $P(A_{12} \cap A_{13} \cap A_{23}) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(A_{12}) \times P(A_{13}) \times P(A_{23})$.
Les événements ne sont pas mutuellement indépendants. $\square$