CHAPITRE 2 : INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

Introduction et motivations du chapitre

Extrait du problème de Mathématiques C - Banque PT 2017.

" La partie I étudie les propriétés de la fonction Gamma d'Euler, qui est notamment très utilisée en traitement du signal, par l'intermédiaire des lois de probabilités appelées loi Gamma. Ces lois sont aussi utilisées en ingénierie, pour l'analyse de la fiabilité des systèmes."

Dans ce problème on étudie la fonction $\Gamma : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$: le problème propose en particulier d'étudier ses variations, d'en déterminer la limite en $+\infty$ et de tracer son graphe.
Ce chapitre nous permettra de montrer que la fonction Γ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
Il faudra attendre le dernier chapitre de l'année pour démontrer simplement que cette fonction est continue, dérivable et même de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Plan du chapitre

Rappels des résultats de PTSI

Théorème 1: Existence de primitives et intégrale sur un segment

— Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.
Si f est continue sur I alors $x \longmapsto \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f s'annulant en $a \in I$.

— Si F est une primitive de $f \in \mathscr{C}^0([a;b])$ alors $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) = [f(t)]_a^b$.

1. Puissances, exponentielle, trigonométrie hyperbolique

f ou $f(x)$	F	Intervalle
$x^\alpha, \alpha \neq -1$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$u'u^\alpha, \alpha \neq -1$	$\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$	

f ou $f(x)$	F	Intervalle
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\text{ch}(x)$	$\text{sh}(x)$	$\mathbb{R}$
$\text{sh}(x)$	$\text{ch}(x)$	$\mathbb{R}$

2. trigonométrie, fractions

f ou $f(x)$	F	I
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$-\ln\lvert\cos(x)\rvert$	$]-\pi/2+k\pi, \pi/2+k\pi[$

f ou $f(x)$	F	I
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\dfrac{1}{2}\ln\left\lvert\dfrac{1+x}{1-x}\right\rvert$	$J\ (*)$

$(*)$ $J =]-\infty;-1[$ ou $J =]-1;1[$ ou $J =]1;+\infty[$.

3. Radicaux, fractions rationnelles

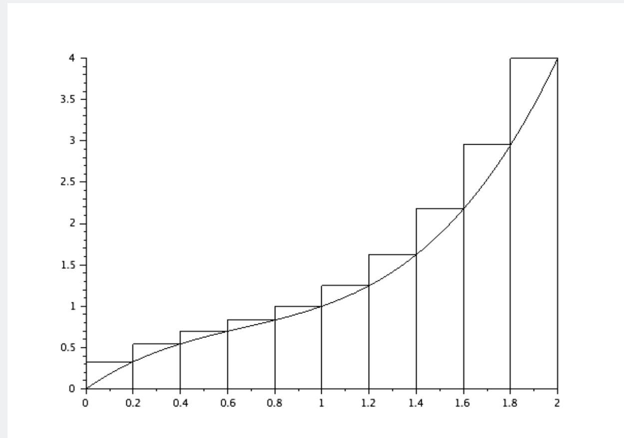
f ou $f(x)$	F	I
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$]-1;1[$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\pm\ln\left(\pm x+\sqrt{x^2-1}\right)$	$]-\infty;-1[/]1;+\infty[$ (à retrouver)
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$	$\mathbb{R}$ (à retrouver)

Théorème 2: Sommes de Riemann

Si f est continue sur le segment $[a;b]$ alors les suites S_n et T_n ci-dessous convergent et on a :

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)dt.$$

$$T_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)dt.$$



Interprétation géométrique

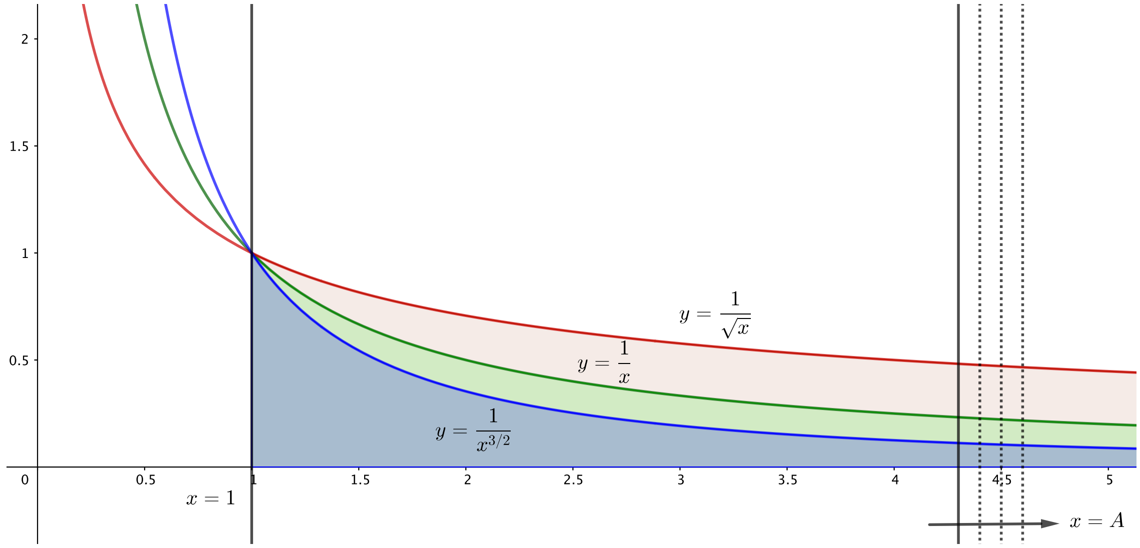
Lorsque le pas $\frac{b-a}{n}$ tend vers 0, la somme des aires des rectangles de coté $\frac{b-a}{n}$ et de longueur $f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$ converge vers l'intégrale de f sur le segment $[a;b]$.

L'intégrale d'une fonction continue sur un segment $[a;b]$ s'interprète comme l'aire délimitée par
— La courbe représentative de f
— L'axe des abscisses
— Les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

L'objectif de ce chapitre est de donner un sens à l'intégrale :
— d'une fonction continue sur un intervalle non borné $[a;+\infty[$, $]-\infty;a]$, $\mathbb{R}$ ou
— d'une fonction continue non bornée sur un intervalle borné $]a;b]$, $[a;b[$, $]a;b[$.

1 - Intégrales impropres

1^{ers} **Exemples : fonctions continues sur** $[1;+\infty[$

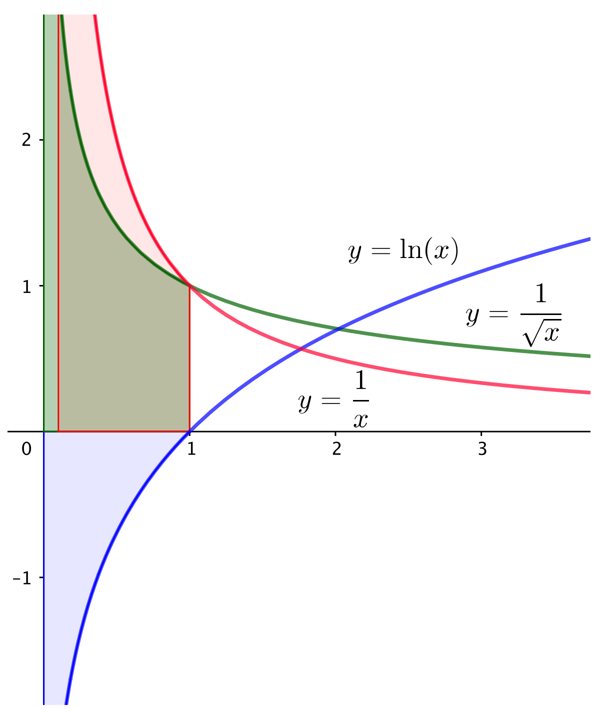


— Soit $A \geqslant 1$. $\displaystyle\int_1^A \frac{dt}{t} = [\ln(t)]_1^A = \ln(A) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

— Soit $A \geqslant 1$. $\displaystyle\int_1^A \frac{dt}{\sqrt{t}} = \left[2\sqrt{t}\right]_1^A = \sqrt{A} - 1 \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

— Soit $A \geqslant 1$. $\displaystyle\int_1^A \frac{dt}{t^{3/2}} = \left[\frac{1}{-\frac{3}{2}+1} t^{-\frac{3}{2}+1}\right]_1^A = -2\left(\frac{1}{\sqrt{A}} - 1\right) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 2$.

2^{ds} **Exemples : fonctions continues sur** $]0;1]$



— Soit $a \in]0;1]$. $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)dt = [t\ln(t) - t]_a^1 \underset{a\to0^+}{\longrightarrow} -1$.

— Soit $a \in]0;1]$. $\displaystyle\int_a^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \left[2\sqrt{t}\right]_a^1 \underset{a\to0^+}{\longrightarrow} 2$.

— Soit $a \in]0;1]$. $\displaystyle\int_a^1 \frac{dt}{t} = [\ln(t)]_a^1 = \underset{a\to0^+}{\longrightarrow} +\infty$.

1.A - Définitions, exemples, propriétés

1.A.1) *Intégrales généralisées sur* $[a;b[$ *ou* $]a;b]$

Définition 3

Soit f une fonction continue sur $[a;b[$ avec $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$.

L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est dite impropre en b.

Si $\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ admet une limite finie lorsque $x \to b^-$, on dit que l'intégrale impropre converge.

On note alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)dt$.

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ diverge.

Remarques

Deux types d'intégrales impropres sur $[a;b[$ avec $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$. L'intégrale :

- d'une fonction non bornée sur un intervalle borné. Par exemple, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx$.
- d'une fonction continue sur un intervalle non borné $[a;+\infty[$. Par exemple, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$.
- La définition précédent s'adapte directement au cas d'une fonction continue sur $]a;b]$ avec $a \in \mathbb{R}$ ou $a = -\infty$: existence, ou non, d'une limite finie de $\displaystyle\int_x^b f(t)dt$ lorsque $x \to a^+$.
- Si l'on connaît une primitive F de f sur $I = [a;b[$, il suffit donc de tester la limite de F en b.
  De même sur $]a;b]$.

Proposition 4: Intégrale faussement impropre

Si $f \in \mathscr{C}^0([a;b[)$ avec $b \in \mathbb{R}$ se prolonge par continuité en b, on note $g \in \mathscr{C}^0([a,b])$ le prolongement continu.

L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est alors convergente et vaut $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$.

Démonstration. Soit G, primitive de g sur $[a;b]$. G coïncide avec une primitive F de f sur $[a;b[$.

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a) = G(x) - G(a) \underset{x\to b^-}{\longrightarrow} G(b) - G(a). \qquad \square$$

Exemple

L'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}dt$ converge car :

- La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $]0;1]$.
- f se prolonge par continuité en 0 : $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$.

Attention : on a obtenu la nature de l'intégrale I mais pas sa valeur. Cela sera souvent le cas.

1.A.2) *Intégrales de référence*

Théorème 5: Intégrales de référence

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.
3. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} \ln(t) dt$ converge.
4. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

Démonstration.

1. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est continue sur $[1; +\infty[$. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ est impropre en $+\infty$.
   - Si $\alpha = 1$, alors pour tout $A \geqslant 1$, $\displaystyle\int_1^{A} \frac{1}{t} dt = [\ln(t)]_1^A = \ln(A) \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
   - Si $\alpha \neq 1$, alors pour tout $A \geqslant 1$
   $$\int_1^{A} \frac{1}{t^\alpha} dt = \left[\frac{1}{-\alpha+1} t^{-\alpha+1}\right]_1^A = \frac{1}{1-\alpha}\left(A^{1-\alpha} - 1\right) \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad \alpha < 1 \\ \dfrac{1}{\alpha - 1} & \text{si} \quad \alpha > 1 \end{cases}$$
   - L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ est donc convergente si et seulement si $\alpha > 1$.
2. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est continue sur $]0; 1]$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{t^\alpha} dt$ est impropre en 0.
   - Si $\alpha = 1$, alors pour tout $a \in]0; 1]$, $\displaystyle\int_a^{1} \frac{1}{t} dt = [\ln(t)]_a^1 = -\ln(a) \underset{a \to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$.
   - Si $\alpha \neq 1$, alors pour tout $a \in]0; 1]$
   $$\int_a^{1} \frac{1}{t^\alpha} dt = \left[\frac{1}{-\alpha+1} t^{-\alpha+1}\right]_a^1 = \frac{1}{1-\alpha}\left(1 - a^{1-\alpha}\right) \underset{a \to 0^+}{\longrightarrow} \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} & \text{si} \quad \alpha < 1 \\ +\infty & \text{si} \quad \alpha > 1 \end{cases}$$
   - L'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{t^\alpha} dt$ est donc convergente si et seulement si $\alpha < 1$.
3. La fonction $t \mapsto \ln(t)$ est continue sur $]0; 1]$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} \ln(t) dt$ est impropre en 0.
   $$\forall a \in]0; 1], \int_a^{1} \ln(t) dt = [t\ln(t) - t]_a^1 = -1 - a\ln(a) + a \underset{a \to 0^+}{\longrightarrow} -1 \text{ par croissances comparées.}$$
4. La fonction $t \mapsto e^{-\alpha t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ est impropre en $+\infty$.
   - Si $\alpha = 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} dt$ diverge.
   - Si $\alpha \neq 0$, alors pour tout $A \geqslant 1$,
   $$\int_0^{A} e^{-\alpha t} dt = \left[-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t}\right]_0^A = -\frac{1}{\alpha}\left(e^{-\alpha A} - 1\right) \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad \alpha < 0 \\ \frac{1}{\alpha} & \text{si} \quad \alpha > 0 \end{cases}$$
   - L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ est donc convergente si et seulement si $\alpha > 0$.

□

Remarques

Les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt$ sont appelées intégrales de Riemann.

1.A.3) *Intégrale impropre sur* $]a;b[$

Définition 6

Soit f une fonction continue sur $]a;b[$.
On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement si les intégrales $\displaystyle\int_a^c f(t)dt$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)dt$ convergent quel que soit $c \in]a;b[$.

Il suffit en fait que les intégrales convergent pour **un** $c \in]a;b[$.

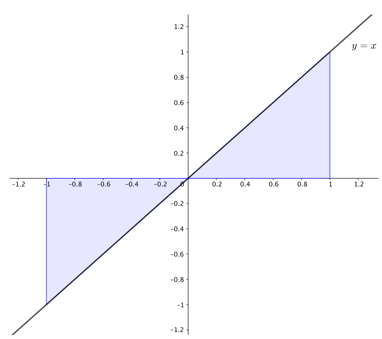
Exemple

La fonction $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t-1}$ est continue sur $]0;1[$.
L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1}dt$ est donc impropre en 0 et 1.
L'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln(t)}{t-1}dt$ converge car faussement impropre : $\displaystyle\lim_{t\to 1}\frac{\ln(t)}{t-1} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h} = 1$.
L'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(t)}{t-1}dt$ converge (nous le verrons plus tard : comparaison à une intégrale de Riemann).

Exemple

Attention, dans le cas d'une intégrale impropre $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)dt$, il ne suffit pas de vérifier que $\displaystyle\lim_{x\to a}\int_{-x}^x f(t)dt$ existe et est finie.

On a : $\displaystyle\int_{-x}^x tdt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_{-x}^x = 0 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
mais $\displaystyle\int_0^x tdt = \frac{x^2}{2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tdt$ est donc divergente.



Exemple

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt$ est divergente pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

1.B - Propriétés des intégrales convergentes

Proposition 7: Linéarité de l'intégrale

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Si $\displaystyle\int_I f(t)dt$ et $\displaystyle\int_I g(t)dt$ convergent alors $\displaystyle\int_I (\lambda f(t) + g(t))dt$ converge et

$$\int_I (\lambda f(t) + g(t))dt = \lambda \int_I f(t)dt + \int_I g(t)dt.$$

Exemple

— L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t^2} + e^{-t}\right) dt$ est convergente par somme d'intégrales convergentes.

— L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{t} + \ln(t)\right) dt$ diverge.

En effet sinon, par somme l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{t} + \ln(t) - \ln(t)\right) dt$ serait convergente.

— L'intégrale $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{dt}{t^2 - 3t + 2}$ converge.

En effet, pour $x \geqslant 3$, $\displaystyle\int_3^x \frac{dt}{t^2 - 3t + 2} = \int_3^x \left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t-1}\right) dt = \left[\ln \frac{t-2}{t-1}\right]_3^x \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ln(2)$.

Pourtant, les intégrales $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{1}{t-1} dt$ et $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{1}{t-2} dt$ divergent !

Proposition 8: Fonction à valeurs complexes

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes.
L'intégrale $\displaystyle\int_I f(t)dt$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_I \operatorname{Re} f(t)dt$ et $\displaystyle\int_I \operatorname{Im} f(t)dt$ convergent

Proposition 9: Relation de Chasles

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\int_I f(t)dt$ converge. Alors pour tout $c \in I$,

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt \qquad \text{avec } a = \inf I,\ b = \sup I.$$

Proposition 10: Définie positivité

Soit f une fonction **positive** et **continue** sur I et telle que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ **converge**.

Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = 0 \iff f$ est identiquement nulle sur $[a;b] \iff \forall t \in I, f(t) = 0$.

Démonstration. On fait la démonstration dans le cas $I = [a; b[$. On suppose que $\displaystyle\int_I f(t)dt = 0$.

On note F la primitive de f sur $I = [a; b[$ s'annulant a.
F est croissante sur I car $F' = f \geqslant 0$.
Pour tout $x \in [a, b[$, $0 \leqslant \displaystyle\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a) = F(x) \leqslant \lim_{x \to b} F(x) = 0$.
Ainsi, $\displaystyle\int_a^x f(t)dt = 0$ pour tout $x \in [a; b[$, en dérivant, on obtient $f(x) = 0$ pour tout $x \in [a; b[$.
La fonction f est donc identiquement nulle sur $[a; b[$.
La réciproque est claire. □

1.C - Intégrales des fonctions positives

Dans ce paragraphe, on donne des outils permettant d'étudier la nature d'une intégrale par comparaison à une intégrale de référence. On développe le cas des intégrales $\int_a^b f(t)dt$ impropres en $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Les résultats s'étendent sans difficulté aux intégrales impropres en $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Proposition 11

Soit $f : [a; b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et positive et $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ l'unique primitive de f s'annulant en a.
Alors $\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement si F est majorée : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in [a; b[, \int_a^x f(t)dt \leqslant M$.

Démonstration. La fonction F est croissante car $F' = f \geqslant 0$.
Par le théorème de la limite monotone, si F est majorée alors $\lim\limits_{x\to b^-} F(x) = \lim\limits_{x\to b^-} \int_a^x f(t)dt$ existe et est finie.

Si F n'est pas majorée alors $\lim\limits_{x\to b^-} F(x) = \lim\limits_{x\to b^-} \int_a^x f(t)dt = +\infty$. □

Théorème 12: Théorèmes de comparaison

Soient f, g des fonctions continues et positives sur $[a; b[$.
- Si $\forall t \in [a; b[, f(t) \leqslant g(t)$ et si $\int_a^b g(t)dt$ converge alors $\int_a^b f(t)dt$ converge.
- Si $\forall t \in [a; b[, f(t) \leqslant g(t)$ et si $\int_a^b f(t)dt$ diverge alors $\int_a^b g(t)dt$ diverge.
- Si $f(t) \underset{t\to b^-}{\sim} g(t)$ alors les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature.

Démonstration. — Par croissance de l'intégrale, pour tout $x \in [a; b[$, $\int_a^x f(t)dt \leqslant \int_a^x g(t)dt$. L'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ converge donc il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\int_a^x f(t)dt \leqslant \int_a^x g(t)dt \leqslant M$. Par conséquent $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est donc majorée donc admet une limite lorsque $x \to b^-$.
— La contraposée de l'assertion précédente est (si $\int_a^b f(t)dt$ diverge alors $\int_a^b g(t)dt$ diverge).
— Si $f(t) \underset{t\to b^-}{\sim} g(t)$ alors au voisinage de b, on a $\frac{1}{2}g(t) \leqslant f(t) \leqslant \frac{3}{2}g(t)$.
Les assertions précédentes permettent de conclure.

□

Exemple

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2(t)}{t^2}$ converge.

En effet, la fonction $t \mapsto \frac{\cos^2(t)}{t^2}$ est continue, positive sur $[1; +\infty[$ et pour tout $t \geqslant 1$, $\frac{\cos^2(t)}{t^2} \leqslant \frac{1}{t^2}$.

L'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ est convergente d'où la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2(t)}{t^2}$.

Exemple

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t}{2+t^3}dt$ converge.
En effet, la fonction $t \mapsto \dfrac{t}{2+t^3}$ est continue et positive sur $[1;+\infty[$.
De plus, $\dfrac{t}{2+t^3} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$.
On conclut par comparaison avec l'intégrale de Riemann convergente $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}$.

Exercice 13

Déterminer la nature des intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t}dt$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin \sqrt{t}}{t}dt$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t^2}{t}dt$.

Solution. On note $\alpha \in \{1/2;1;2\}$.
L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t^\alpha}{t}dt$ est impropre en 0. En effet,
la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t^\alpha}{t}$ est continue et positive sur $]0;1]$ car $t^\alpha \in]0;1]$ pour tout $t \in]0;1]$
et $\sin\theta \in [0;1]$ pour tout $\theta \in [0;1] \subset [0;\pi]$.
Or $\dfrac{\sin(t^\alpha)}{t} \underset{t\to 0}{\sim} t^{\alpha-1} = \dfrac{1}{t^{1-\alpha}}$.
Par comparaison aux intégrales de Riemann $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\beta}dt$,
l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t^\alpha}{t}dt$ converge si et seulement si $1-\alpha < 1 \iff \alpha > 0$.
Les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t}dt$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin \sqrt{t}}{t}dt$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t^2}{t}dt$ sont donc convergentes. □

Proposition 14: Convergence absolue

Soit f une fonction continue sur $[a;b[$.
Si $\displaystyle\int_a^b |f(t)|dt$ converge alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge.

Démonstration. On note : $f^+ = \dfrac{|f|+f}{2}$ et $f^- = \dfrac{|f|-f}{2}$. On a : $0 \leqslant f^+, f^- \leqslant |f|$.
Par comparaison, la convergence de $\displaystyle\int_a^b |f(t)|dt$ entraîne la convergence des intégrales
$\displaystyle\int_a^b f^+(t)dt$ et $\displaystyle\int_a^b f^-(t)dt$. Mais $f = f^+ - f^-$ donc par somme $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge. □

Remarques

Si $\displaystyle\int_a^b |f(t)|dt$ converge, on dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge absolument.

Exemple

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\cos(t)|}{t^2}dt$ converge car $\dfrac{|\cos(t)|}{t^2} \leqslant \dfrac{1}{t^2}$.

Exercice 15

1. Montrer à l'aide d'une I.P.P. sur un segment que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ converge.
2. Montrer, en minorant $|\sin(t)|$ par $\sin^2(t)$, que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t}dt$ diverge.

Solution. 1. Soit $A \geqslant 1$. $\displaystyle\int_1^A \frac{\sin(t)}{t}dt = \left[\frac{-\cos(t)}{t}\right]_1^A - \int_1^A \frac{\cos(t)}{t^2}dt$

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}$ converge par l'exemple précédent. De plus, $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\left[-\frac{\cos(t)}{t}\right]_1^A = \cos(1)$.

Ainsi, la limite $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_1^A \frac{\sin(t)}{t}dt$ existe et est finie d'où la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt$.

2. On a $|\sin(t)| \geqslant \sin^2(t)$ car $|\sin(t)|, \sin^2(t) \in [0;1]$.

Or $\sin^2(t) = \dfrac{1-\cos(2t)}{2}$.

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{2t}dt$ diverge et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos(2t)}{2t}dt$ converge comme le montre une intégration par parties similaires à celle menée à la question 1.

Par somme, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2(t)}{t}dt$ diverge et par comparaison, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{|\sin(t)|}{t}dt$ diverge.

□

Remarques

On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt$ est semi-convergente.

2 - Intégration par parties et changement de variable sur un intervalle quelconque

2.A - *Intégration par parties*

Théorème 16: Intégration par parties

Soient $f, g :]a;b[\to \mathbb{R}$ des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a;b[$.

Si les limites $\displaystyle\lim_{x\to a^+} f(t)g(t)$ et $\displaystyle\lim_{x\to b-} f(t)g(t)$ existent alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)g'(t)dt$ et $\displaystyle\int_a^b f'(t)g(t)dt$ sont de même nature. En cas de convergence,

$$\int_a^b f(t)g'(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)dt$$

où $[f(t)g(t)]_a^b = \lim\limits_{b^-}(fg) - \lim\limits_{a^+}(fg)$.

En pratique, on intègre par parties sur $[x,y]$ avec $x,\ y \in]a;b[$ et on fait tendre $x \to a^+$, $y \to b^-$.

Exercice 17

- Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}dt$ converge et donner sa valeur.
- Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2e^{-t}dt$ converge et donner sa valeur.

2.B - *Changement de variable*

Théorème 18: Changement de variable sur un segment

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $\varphi : J \to I$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $\varphi(J) \subset I$. Alors pour tout $(\alpha, \beta) \in J^2$:

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)du.$$

Remarques

En pratique, on pose $t = \varphi(u)$ et $dt = \varphi'(u)du$.

Exemple

$\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt = \frac{\pi}{4}$.
En effet, la fonction $t \mapsto \sqrt{1-t^2}$ est continue sur $[0;1]$.
On pose $t = \sin(u) = \varphi(u)$.
La fonction $u \mapsto \varphi(u) = \sin(u) = t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0; \frac{\pi}{2}]$: $dt = \cos(u)du$.

Par changement de variable :

u	0	$\frac{\pi}{2}$
$\varphi(u) = t$	0 $\nearrow$	1

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt &= \int_{\varphi(0)}^{\varphi(\frac{\pi}{2})} \sqrt{1-t^2}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(u)}\cos(u)du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos(u)|\cos(u)du \underset{(\cos(u)\geqslant 0)}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(u)^2du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2u)}{2}dt = \frac{\pi}{4} + \left[\frac{\sin(2u)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Exemple

$J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(1+\tan(x))}{\cos^2 x}dx = 2\ln(2) - 1$.
En effet, la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(1+\tan(x))}{\cos^2 x}$ est continue sur $[0; \frac{\pi}{4}]$ par quotient.
On pose $y = 1 + \tan(x)$.
La fonction $\varphi : x \mapsto \varphi(x) = 1 + \tan(x) = y$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0; \frac{\pi}{4}]$: $dy = (1+\tan^2(x))dx = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$.
Par changement de variable :

x	0	$\frac{\pi}{4}$
$\varphi(x) = y$	1 $\nearrow$	2

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(1+\tan(x))}{\cos^2 x}dx = \int_1^2 \ln(y)dy = [u\ln(u) - u]_1^2 = 2\ln(2) - 1$$

Sur un intervalle quelconque, on impose la bijectivité du changement de variable φ :

Théorème 19: Changement de variable sur un intervalle quelconque

Soient f une fonction continue sur $]a;b[$ et $\varphi :]\alpha;\beta[\to]a,b[$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ **bijective et strictement croissante**.

Alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)du$ sont de même nature.

En cas de convergence :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)du.$$

Remarques

Si φ est strictement décroissante sur $]\alpha:\beta[$, la formule du changement de variable s'écrit :

$$\int_a^b f(t)dt = -\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)du.$$

Exercice 20

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$ converge et la calculer.

Solution. On pose $t=\cos(u)^2$. La fonction $\varphi : u \mapsto \varphi(u) = \cos^2(u) = t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;\frac{\pi}{2}]$, strictement décroissante, continue sur $[0;\frac{\pi}{2}]$ donc réalise une bijection de $[0;\frac{\pi}{2}]$ sur $[\varphi(\frac{\pi}{2});\varphi(0)] = [0;1]$. Puisque $t=\cos^2(u)$, on a $dt = \varphi'(u)du = -2\sin(u)\cos(u)du$.

u	0	$\frac{\pi}{2}$
$\varphi(u) = \cos^2(u)$	1 $\searrow$	0

Par changement de variable, les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$ et $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{-2\sin(u)\cos(u)}{\sqrt{\cos^2(u)(1-\cos^2(u))}}du$ sont de même nature.

Pour tout $u\in[0;\frac{\pi}{2}]$, $\cos(u),\sin(u)\geqslant 0$ donc :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin(u)\cos(u)}{\sqrt{\cos^2(u)\sin^2(u)}}du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin(u)\cos(u)}{\cos(u)\sin(u)}du = \pi = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}.$$

□

3 - Fonctions intégrables

3.A - *Définition et structure d'espace vectoriel*

Définition 21

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On dit que f est intégrable sur I si l'intégrale $\displaystyle\int_I |f(t)|dt$ converge.

Remarques

En particulier, si f est intégrable sur I alors $\displaystyle\int_I f(t)dt$ converge.

Théorème 22

Si $f : I \to \mathbb{K}$ est continue et intégrable sur I alors : $\left|\int_I f(t)dt\right| \leqslant \int_I |f(t)|dt$.

Proposition 23

L'ensemble des fonctions continues et intégrables sur I est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel noté $L^1(I, \mathbb{K})$.
On notera alors $f \in L^1(I, \mathbb{K})$ si f et intégrable sur I.

Démonstration. La fonction nulle est intégrable sur I. De plus, si $f, g : I \to \mathbb{K}$ sont intégrables sur I alors $\lambda f + g$ est intégrable sur I par comparaison : $|\lambda f + g| \leqslant |\lambda||f| + |g|$ et on a

$$\int_I |\lambda f + g|(t)dt \leqslant |\lambda| \int_I |f(t)|dt + \int_I |g(t)|dt.$$

$\square$

Remarques

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

On dira que $f \in \mathscr{C}^0([a, b[)$ est **intégrable en** b si $\int_a^b f(t)dt$ CVA.

On dira que $f \in \mathscr{C}^0(]a, b])$ est **intégrable en** a si $\int_a^b f(t)dt$ CVA.

Théorème 24

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

— La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$.
— La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable en 0^+ si et seulement si $\alpha < 1$.
— La fonction $t \mapsto \ln(t)$ est intégrable en 0^+.
— La fonction $t \mapsto \exp(-\alpha t)$ est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 0$.

3.B - *Théorèmes de comparaison*

Théorème 25: Relation d'ordre

Soient $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur I et g une fonction intégrable sur I
telles que pour tout $t \in I, |f(t)| \leqslant |g(t)|$.
Alors f est intégrale sur I.

Démonstration. Par comparaison de fonctions positives, $\int_I |g| \Longrightarrow \int_I |f|$ CV. $\square$

Théorème 26: règle du o et du O

Soient $f, g : [a; b[\to \mathbb{R}$ des fonctions continues sur $[a; b[$ telles que g est **intégrable** sur $[a; b[$.

— Si $f(t) \underset{t \to b^-}{=} o(g(t))$ alors f est intégrable sur $[a; b[$.
— Si $f(t) \underset{t \to b^-}{=} O(g(t))$ alors f est intégrable sur $[a; b[$.

Démonstration. • Si $f(t) \underset{t\to b^-}{=} o(g(t))$ alors $\dfrac{f(t)}{g(t)} \underset{t\to b^-}{\longrightarrow} 0$.

Il existe donc $c \in [a;b[$ tel que pour tout $t \in [c;b[$, $\left|\dfrac{f(t)}{g(t)}\right| \leqslant 1$: $\forall t \in [c;b[$, $|f(t)| \leqslant |g(t)|$.

Or $\displaystyle\int_c^b |g(t)|dt$ CV donc $\displaystyle\int_c^b |f(t)|dt$ CV et finalement $\displaystyle\int_a^b |f(t)|dt$ CV.

• Si $f(t) \underset{t\to b^-}{=} O(g(t))$ il existe $c \in [a;b[$, et $M \in \mathbb{R}_+$ tels que $\forall t \in [c;b[$, $|f(t)| \leqslant M|g(t)|$ □

Remarques

Le résultat et la démonstration sont similaires en cas d'impropreté en $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Théorème 27

Soient $f, g \in \mathscr{C}^0([a,b[)$ telles que $f(x) \underset{x\to b^-}{\sim} g(x)$.
Alors l'intégrabilité de f sur $[a,b[$ est équivalente à celle de g sur $[a,b[$.

Proposition 28

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{|t-b|^\alpha}$ est intégrable en b si et seulement si $\alpha < 1$.

Démonstration. Le changement de variable $u = t - b$ permet de se ramener à l'étude de l'intégrabilité de la fonction $u \mapsto \frac{1}{|u|^\alpha}$. □

Remarques

Plus généralement, l'intégrabilité de $t \mapsto f(t)$ en a^+ peut s'obtenir à partir de l'intégrabilité de $u \mapsto f(u+a)$ en 0^+.
De même, l'intégrabilité de $t \mapsto f(t)$ en b^- peut s'obtenir à partir de l'intégrabilité de $u \mapsto f(b-u)$ en 0^+.

Exemple

L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}dt$ est convergente.

4 - Intégration terme à terme [$*$]

Théorème 29

Soient $S : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle qu'il existe des fonctions f_n intégrables sur I et vérifiant $\forall t \in I$, $S(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$. Si la série $\displaystyle\sum \int_I |f_n(t)|dt$ est convergente alors S est intégrable sur I et :

$$\int_I S(t)dt = \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)dt.$$

Exercice 30

On pose $I =]0; +\infty[$.

1. Rappeler la nature des séries de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ en fonction du paramètre et la nature des séries géométriques $\sum x^n$ en fonction du paramètre x (donner la somme en cas de convergence).
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : t \mapsto t\exp(-nt)$ est intégrable sur I et calculer l'intégrale $\int_0^{+\infty} te^{-nt}dt$.
3. Pour tout $t \in I$, calculer $S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)$ après avoir justifié la convergence.
4. Montrer enfin que $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1}dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Solution. 1. La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

La série géométrique $\sum x^n$ converge si et seulement si $x \in]-1; 1[$. En cas de convergence, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \text{ et plus généralement } \sum_{n=n_0}^{+\infty} x^n = \frac{x^{n_0}}{1-x}.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions $t \mapsto f_n(t) = te^{-nt}$ sont continues sur $[0; +\infty[$ et intégrables en $+\infty$ par croissances comparées $te^{-nt} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Une I.P.P donne :

$$\int_0^{+\infty} te^{-nt} = \frac{1}{n^2}.$$

3. Pour $t \in I =]0; +\infty[$ la série $\sum te^{-nt}dt$ converge (absolument) d'après les résultats sur les série géométriques de raisons $q = e^{-t} \in]-1; 1[$ et on a :

$$S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} te^{-nt} = t\sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{-t}\right)^n = \frac{te^{-t}}{1-e^{-t}} = \frac{t}{e^t-1}.$$

4. Appliquons le théorème d'intégration terme à terme.

$*$ La fonction $S : t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t) = \frac{t}{e^t-1}$ est continue sur $I =]0; +\infty[$.

$*$ Les fonctions f_n sont intégrables sur I.

$*$ La série $\sum_{n\geqslant 1} \int_I |f_n(t)|\, dt = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente

On peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1}dt = \int_0^{+\infty} S(t)dt = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)dt = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} te^{-nt}dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} te^{-nt}dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

$\square$