CHAPITRE 3 : COMPLÉMENTS D'ALGÈBRE LINÉAIRE

Plan du chapitre

1 - Espaces vectoriels

1.A - Espaces vectoriels fondamentaux

Les exemples suivants sont à connaître : structure, opérations, types de vecteurs, vecteur nul.

Exemple : Espaces vectoriels fondamentaux

— $\mathbb{R}, \mathbb{C}$; $\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^2$ et plus généralement $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$.
— $\mathbb{K}[X]$ l'espace des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
— $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'espace des matrices de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$.
— $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'espace des fonctions réelles d'une variable réelle.
— $\mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ l'espace des suites à valeurs réelles ou complexes.

1.B - Sous-espace vectoriel

On note E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Théorème 1

F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :
— $0_E \in F$
— $\forall x, y \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda x + y \in F$: F est stable par combinaisons linéaires.

La définition et le théorème précédents permettent donc de montrer qu'un ensemble F, inclus dans l'un des espaces vectoriels fondamentaux de la partie précédente, est un espace vectoriel.

Les exemples suivant sont des exercices à traiter.

Exemple

$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exemple

$F = \{(-y - z, y, z) : (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exemple : Espaces de fonctions

Les inclusions ensemblistes : $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \subset \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sont des inclusions de sous-espaces vectoriels dans l'espace $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de toutes les fonctions réelles d'une variable.

Exemple : Espaces de polynômes

L'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré au plus $n \in \mathbb{N}$ à coefficients réels est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

Exemple : Sous-espace de matrices

— $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} : (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
— Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $F = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) : AM = MD \right\}$.
F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Exemple : Matrices symétriques et antisymétriques

— L'ensemble $S_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) : {}^tM = M\}$ des matrices symétriques est un SEV de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
— L'ensemble $A_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) : {}^tM = -M\}$ des matrices antisymétriques est un SEV de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exemple : Sous-espaces de suites

— L'ensemble F des suites réelles bornées est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
— L'ensemble des suites réelles convergentes est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
— L'ensemble des suites arithmétiques réelles est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
— Si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ est fixé, $E_{a,b} = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^N : \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 2

L'ensemble des suites géométriques réelles est-il un espace vectoriel ?

Proposition 3: Intersection de deux sous-espaces vectoriels

L'intersection $F \cap G$ de deux sous-espaces vectoriels F et G de E est un sous-espace vectoriel de E

1.C - Famille de vecteurs

Théorème 4

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E.
Alors $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n) = \left\{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i : (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n\right\}$. est un sous-espace vectoriel de E

Exemple

— Soit $F = \{(x,y,z)\mathbb{R}^3 : x+y+z = 0\} = \mathrm{Vect}((-1,1,0),(-1,0,1))$ est un SEV de $\mathbb{R}^3$.
— Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] : P(0) = P(1) = 0\} = \mathrm{Vect}(X(X-1), X^2(X-1))$ est un SEV de $\mathbb{R}_3[X]$
— Soit $F = \left\{\begin{pmatrix} a+b & c-a \\ b & a \end{pmatrix} : (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$.
F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Définition 5: Famille génératrice

Une famille $(x_1, \dots, x_n)$ de vecteurs de E est dite génératrice de E si tout vecteur de E s'écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs $x_1, \dots, x_n$:

$$\forall x \in E, \exists(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n : x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i.$$

On dit alors que E est engendré par la famille $(x_1, \dots, x_n)$ et on a $E = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$.
On retient : tout vecteur de E est une combinaison des vecteurs $x_1, \dots, x_n$.

Définition 6: Famille libre

Une famille $(x_1, \dots, x_n)$ de vecteurs de E est dite libre si

$$\forall(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, (\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0_E \Longrightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0).$$

On dit que les vecteurs $x_1, \dots, x_n$ sont linéairement indépendants.
Une famille qui n'est pas libre est dite liée.

Proposition 7

— Une famille contenant le vecteur nul est liée.
— Une famille (x_1) composée d'un seul vecteur est libre si et seulement si $x \neq 0_E$.
— Une famille (x_1, x_2) composée de deux vecteurs est libre si et seulement s'ils ne sont pas colinéaires.

Théorème 8: Caractérisation des familles liées

La famille $(x_1, \dots, x_n)$ est liée si et seulement si l'un (au moins) des vecteurs est combinaison linéaire des autres.

Exemple

- La famille $(1+X, 2+2X)$ est liée.
- La famille $(1+X, X+X^2)$ est libre.

Théorème 9: Caractérisation des familles libres

La famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre si et seulement si

$$\forall x \in \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n) : \exists !(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n.$$

On retient : tout vecteur de $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ *s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs* $x_1, \dots, x_n$

Proposition 10

- Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
- Toute famille contenant une famille liée est liée.

Dans $\mathbb{K}[X]$, on dispose d'une condition suffisante dans $\mathbb{K}[X]$ pour qu'une famille soit libre : il suffit qu'elle soit échelonnée c'est-à-dire que les polynômes la composant soient de degré distincts deux à deux.

Proposition 11

Une famille $(P_1, \dots, P_n)$ de polynômes non nuls échelonnée en degrés est libre.

Exemple

- La famille $(1, X, X^2)$ est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$ car échelonnée en degrés.
- Attention, la proposition précédente fournit uniquement une condition suffisante et pas nécessaire pour qu'une famille de polynômes soit libre.
  En effet, la famille (X^2, X^2-1, X^2-X) est libre bien qu'elle ne soit pas échelonnée.

Définition 12: Base

Une base d'un espace vectoriel est une famille libre et génératrice.

Théorème 13

Une famille $(x_1, \dots, x_n)$ est une base si et seulement si tout vecteur de E se décompose de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs $x_1, \dots, x_n$ c'est-à-dire :

$$\forall x \in E, \exists !(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n : x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n.$$

Exemple

- $((1,0),(0,1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$ appelée base canonique.
- Plus généralement $(e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ avec $e_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\text{position } i}, 0, \dots, 0)$ est une base de $\mathbb{K}^n$, appelée base canonique.
- $(1, X, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ appelée base canonique.
- $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ appelée base canonique.

— Plus généralement $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ avec

$$E_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & 0 & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ avec le coefficient 1 en position } (i,j).$$

Définition 14: Espace vectoriel de dimension finie

Un espace vectoriel E est dit de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie, c'est-à-dire composée d'un nombre fini de vecteurs.

Théorème 15: Théorème de la base extraite

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{G} = (x_1, \dots, x_p)$ une famille génératrice finie.
La famille $\mathcal{G}$ contient une base de E.

Exercice 16

Déterminer une base de l'espace $E = \text{Vect}((1,1,2),(3,0,1),(5,2,5))$.

Théorème 17: Théorème de la base incomplète

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{F}$ une famille libre de vecteurs de E.
On peut compléter $\mathscr{F}$ en une base de E.

Exercice 18

Compléter la famille (X^2, X^2+1) en une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Théorème 19

— Si $\mathscr{F}$ est une famille libre et si $\mathcal{G}$ est une famille génératrice de E alors $\text{Card}(\mathscr{F}) \leqslant \text{Card}(\mathcal{G})$
— Si E est de dimension finie, toutes les bases de E ont le même cardinal.

Définition 20: dimension d'un espace vectoriel de dimension finie

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Le cardinal commun des bases de E est appelé dimension de E et noté $\dim E \in \mathbb{N}$.
Par convention $\dim(\{0_E\}) = 0$.

Théorème 21

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.

1. – Toute famille libre possède au plus n vecteurs.
   – Toute famille libre de n vecteurs de E est une base.
   – Une famille de $p > n$ vecteurs est liée.
2. – Toute famille génératrice possède au moins n vecteurs.
   – Toute famille génératrice de n vecteurs de E est une base.
   – Une famille de $p < n$ vecteurs n'est pas génératrice.

Remarques

En pratique si l'on connait *a priori* la dimension de l'espace vectoriel E et que $\mathscr{B}$ est une famille de vecteurs E, alors :

$$\begin{aligned}\mathscr{B} \text{ est une base de } E &\iff \mathscr{B} \text{ est libre et composée de } n \text{ vecteurs.}\\ &\iff \mathscr{B} \text{ est génératrice et composée de } n \text{ vecteurs.}\end{aligned}$$

Exercice 22

1. Montrer que $\mathscr{B} = ((1,2,3,4),(1,1,2,3),(1,1,1,2),(1,1,1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
2. Montrer que $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ n'est pas une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Exemple : dimension des espaces vectoriels fondamentaux

— $\dim \mathbb{K}^n = n$
— $\dim \mathbb{K}_n[X] = n+1$
— $\dim \mathscr{M}_n[X] = n^2$

Attention, si l'on ne connaît pas *a priori* la dimension de l'espace vectoriel, pour montrer qu'une famille de vecteurs de E est une base, on doit montrer qu'elle est libre ET génératrice.

Exercice 23

1. Déterminer une base de $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & a & a \\ 0 & b & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} : (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$ et en déduire $\dim F$.
2. Déterminer une base de $F = \{P \in \mathbb{R}_4[X] : P(2) = P(4) = 0\}$ et en déduire $\dim F$.

Définition 24

Un espace de dimension 1 est appelé droite vectorielle, et de dimension 2 un plan vectoriel.

Exercice 25

1. Montrer que $D = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n\}$ est une droite vectorielle.
2. Montrer que $P = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n\}$ est un plan vectoriel.

Théorème 26: dimension d'un s.e.v

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie.
Alors F est de dimension finie avec égalité $\dim F = \dim E$ si et seulement si $E = F$.

Remarques : Attention

— $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \mathbb{R}_2[X]$ mais $\mathbb{R}^3 \neq \mathbb{R}_2[X]$.
— $\dim \mathbb{R}^2 \leqslant \dim \mathbb{R}_2[X]$ mais $\mathbb{R}^2$ n'est pas un s.e.v. de $\mathbb{R}_2[X]$.

Théorème 27

Soient F et G des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Alors $F \times G = \{(x, y) : x \in F, y \in G\}$ est un sous-espace vectoriel de E.
Si F et G sont de dimensions finies alors on a :

$$\dim(F \times G) = \dim(F) + \dim(G).$$

Démonstration.

— On commence par montrer que $F \times G$ est un sous-espace vectoriel de E.
En effet, $(0_E, 0_E) \in F \times G$ car F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
De plus, si $(x_1, y_1) \in F \times G$ et $(x_2, y_2) \in F \times G$ alors

$$\lambda(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2) \in F \times G.$$

— On suppose maintenant que F est dimension finie n et que G est de dimension finie p. On note $(f_1, \dots, f_n)$ une base de F et $(g_1, \dots, g_p)$ une base de G. Alors $\mathscr{B} = ((f_1, 0_E), \dots, (f_n, 0_E), (0_E, g_1), \dots, (0_E, g_p))$ est une base de $F \times G$.

— En effet, si $x \in F \times G$ alors $x = (f, g)$ avec $f \in F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ et $g \in G = \mathrm{Vect}(g_1, \dots, g_p)$.
Il existe donc $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ et $(\mu_1, \dots, \mu_p) \in \mathbb{K}^p$ tels que :

$$\begin{aligned}(f, g) &= (\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n, \mu_1 f_1 + \cdots + \mu_p f_p) \\ &= \lambda_1(e_1, 0_E) + \cdots + \lambda_n(e_n, 0_E) + \mu_1(0_E, f_1) + \dots, \mu_p(0_E, f_p).\end{aligned}$$

La famille $\mathscr{B}$ est donc une famille génératrice de $F \times G$.

— Par ailleurs, si $\lambda_1(e_1, 0_E) + \cdots + \lambda_n(e_n, 0_E) + \mu_1(0_E, f_1) + \dots, \mu_p(0_E, f_p) = 0_{F \times G} = (0_E, 0_E)$ alors

$$(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n, \mu_1 f_1 + \cdots + \mu_p f_p) = (0_E, 0_E)$$

ce qui implique $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0 = \mu_1 = \cdots = \mu_p$ car les familles $(e_1, \dots, e_n)$ et $(f_1, \dots, f_p)$ sont libres. La famille $\mathscr{B}$ est donc libre.

C'est donc une base de $F \times G$ et par conséquent,

$$\dim F \times G = \mathrm{Card}(\mathscr{B}) = n + p = \dim F + \dim G.$$

□

1.D - Matrice d'une famille de vecteurs et changement de base

Définition 28

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $x \in E$.
Il existe un unique n-uplet $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$.
Les scalaires $x_1, \dots, x_n$ sont appelés coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$ et on note

$$Mat_{\mathscr{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

la matrice du vecteur x dans la base $\mathscr{B}$.

Exemple

— $\mathscr{B} = ((1, 0), (0, 1))$ est une base $\mathbb{R}^2$ (la base canonique) ; $Mat_{\mathscr{B}}((2, 1)) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

— $\mathscr{B}' = ((1, 1), (0, 1))$; $Mat_{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

— La matrice des coordonnées dépend de la base choisie.

Définition 29

Soient $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases d'un espace vectoriel de dimension n.
On appelle matrice de passage $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice carrée des coordonnées des vecteurs de $\mathscr{B}'$ relativement à la base $\mathscr{B}$:

$$P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} e'_1 & \dots & e'_j & \dots & e'_n \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ \\ e_i \\ \\ e_n \end{array} & \begin{pmatrix} p_{11} & \dots & p_{1j} & \dots & p_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{i1} & \dots & p_{ij} & \dots & p_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \dots & p_{nj} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix} \end{array} \text{ avec } e'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i.$$

Théorème 30: Propriétés de la matrice de passage : inversibilité, formule de passage

— La matrice $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$ est inversible et $P^{-1}_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} = P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}}$.
— Soit $x \in E$. On pose $X = Mat_{\mathscr{B}}(x)$, $X' = Mat_{\mathscr{B}'}(x)$ et $P = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$.
Alors $X = PX'$

Démonstration. — La matrice $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$ est la matrice de l'application identité id_E de E (muni de la base $\mathscr{B}'$) dans E (muni de $\mathscr{B}$) : id_E est un isomorphisme donc sa matrice $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$ est inversible.
L'isomorphisme réciproque est l'application id_E : sa matrice relativement aux bases $\mathscr{B}$ (au départ cette fois) et $\mathscr{B}'$ (à l'arrivée) est la matrice $P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}}$. Ainsi, $P^{-1}_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} = P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}}$.

— On décompose x dans la base $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$: $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x'_j e'_j$.

On décompose les vecteurs e'_j de $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$: $e'_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i$. En combinant :

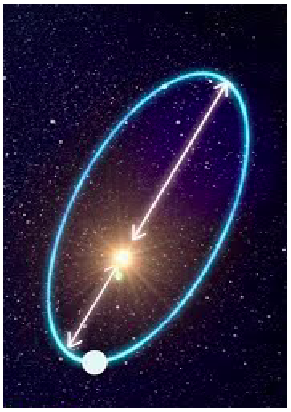
$$x = \sum_{i=1}^{n} x'_j \left(\sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij} x'_j \right) e_i.$$

Ainsi,

$$X = Mat_{\mathscr{B}}(x) = \begin{array}{cc} & x \\ \begin{array}{c} e_1 \\ \\ e_i \\ \\ e_n \end{array} & \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} p_{1j} x'_j \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_{ij} x'_j \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_{nj} x'_j \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} p_{11} & \dots & p_{1j} & \dots & p_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{j1} & \dots & p_{ij} & \dots & p_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \dots & p_{nj} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_j \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = PX' = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} Mat_{\mathscr{B}'}(x).$$

$\square$

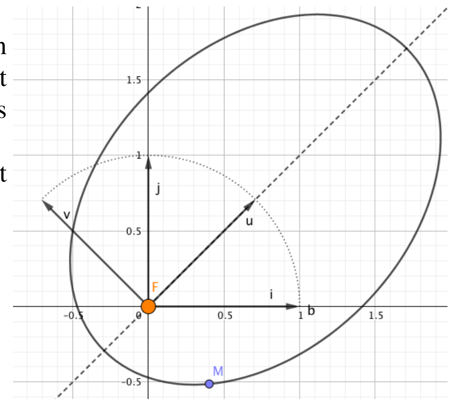
Exercice 31



L'orbite d'une planète autour de son étoile a la trajectoire d'une ellipse dont dont l'étoile occupe l'un des foyers (pas le centre).
Dans le repère (F, u, v) cette orbite est paramétrée par

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos(t) + 1 \\ \sin(t) \end{pmatrix}, t \in [0, 2\pi]$$

Quel est le paramétrage dans (F, i, j) ?



Définition 32: rang d'une famille de vecteurs

Soit $\mathscr{F} = (x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs de E.
On appelle rang de $\mathscr{F}$, la dimension du sous-espace vectoriel engendré par $\mathscr{F}$, c'est-à-dire $\dim \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p)$.
On le note $rg(x_1, \dots, x_p) = \dim \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p)$.

Théorème 33

Soit $(x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs de E et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base quelconque de E.
Alors le rang de la famille $\mathscr{F} = (x_1, \dots, x_p)$ est égal au rang de la matrice de $\mathscr{F}$ relativement à la base $\mathscr{B}$:

$$\dim \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p) = rg(x_1, \dots, x_p) = rg(Mat_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_p)).$$

En particulier si $p = n$ alors la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de E si et seulement si $rg(x_1, \dots, x_n) = n$.

Exercice 34

Soit $\mathcal{C} = (1 + 2X + 3X^2, 2 + X + 3X^2, 3 + 2X + X^2)$.
Déterminer $Mat_{\mathscr{B}}(\mathcal{C})$ où $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ puis le rang de cette matrice.
En déduire que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Théorème 35

Le rang d'une matrice est invariant par multiplication par une matrice inversible.

1.E - Somme de sous-espaces vectoriels

1.E.1) *Somme de deux sous-espaces*

Définition 36

Soient F, G des s.e.v. d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension quelconque.
On appelle somme de F et G l'ensemble :

$$F + G = \{y + z : y \in F, z \in G\}.$$

Proposition 37

$F + G$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient F et G.

Tout vecteur de $F+G$ s'écrit donc comme une somme $y+z$ avec $y \in F$ et $z \in G$. Si cette écriture est unique, on dit que la somme est directe :

Définition 38: somme directe

On dit que la somme $F+G$ est directe si tout vecteur de $F+G$ s'écrit de **manière unique** comme somme $y+z$ avec $y \in F, z \in G$.
On note dans ce cas $F+G = F \oplus G$

Proposition 39: Caractérisation d'une somme directe

F et G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$.

Définition 40: Espaces supplémentaires

On dit que F et G sont **supplémentaires** dans E si $E = F+G$ et $F \cap G = \{0_E\}$.
On note alors $E = F \oplus G$. De manière équivalente $E = F \oplus G$ si et seulement si

$$\forall x \in E, \exists!(y,z) \in F \times G : x = y+z$$

Théorème 41: Existence d'un supplémentaire en dimension finie

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E.
Alors F possède au moins un supplémentaire dans E.

Démonstration. On exploite le théorème de la base incomplète. Soit $(x_1, \dots, x_p)$ une base de F.
On note $n = \dim E$.
On se donne $(x_{p+1}, \dots, x_n)$ vecteurs de E tels que $(x_1, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_n)$ est une base de E.
On note alors $G = \text{Vect}(x_{p+1}, \dots, x_n)$ et on montre que $E = F \oplus G$.

— $(x_1, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_n)$ étant une base de E, donc famille génératrice, tout vecteur de E s'écrit

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i + \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i x_i \in F+G \text{ où } \lambda_1, \dots, \lambda_p, \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}.$$

— De plus si $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = \sum_{i=p+1}^{n} \mu_i x_i$ on obtient $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i - \sum_{i=p+1}^{n} \mu_i x_i = 0_E$ et puisque la famille $(x_1, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_n)$ est libre : $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = \mu_{p+1} = \dots = \mu_n = 0$.
Finalement, $F \cap G = \{0_E\}$.

— En conclusion $E = F \oplus G$: on a construit au moins un supplémentaire de F dans E.

□

Remarques

— Le théorème précédent prouve, **en dimension finie**, l'existence **d'un** supplémentaire d'un s.e.v. d'un espace vectoriel de dimension finie.
Ce supplémentaire n'est en général **pas unique**.
Considérer par exemple $F = \text{Vect}((1,0))$ dans $\mathbb{R}^2$. Alors $G_1 = \text{Vect}((0,1))$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^2$. Mais $G_2 = \text{Vect}((1,1))$ est également un supplémentaire de F.
En fait tout vecteur non colinéaire à $(1,0)$ engendre une droite supplémentaire à F.

— On a construit un supplémentaire de F à l'aide du théorème de la base incomplète.
Par construction : $\dim G = \dim E - \dim F$ soit $\boldsymbol{\dim E = \dim F + \dim G}$.

Théorème 42

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie. Soit F et G des sous-espaces vectoriels de E.
Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. $E = F \oplus G$
2. $E = F + G$ et $F \cap G = \{0_E\}$.
3. $E = F + G$ et $\dim E = \dim F + \dim G$.
4. $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim E = \dim F + \dim G$.

Attention, en général si la somme $F+G$ n'est pas directe, la dimension de la somme $F+G$ n'est pas égale à la somme des dimensions :

Théorème 43: Formule de Grassman

$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$

En dimension finie, on peut ajouter une dernière caractérisation aux s.e.v. supplémentaires (déjà rencontrée dans la preuve de l'existence d'un supplémentaire en dimension finie) :

Théorème 44: Base adaptée

Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de **dimension finie** et F, G des s.e.v. de E.
On note $(e_1, \ldots, e_p)$ et $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ des bases respectivement de F et de G.
Alors $E = F \oplus G$ si et seulement si $(e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ est une base de E, appelée base adaptée.

Exercice 45

Soient $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}((1, 2, 3))$.
Montrer que F est G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 46

Soient $F = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x & - & y & + & & & t & = & 0 \\ 2x & & & + & z & & & = & 0 \end{array} \right. \right\}$
et $G = \{\lambda(1, 1, 2, 0) + \mu(2, 0, 1, 1) : (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.
Déterminer une base de F et un système d'équations vérifiées par les éléments de G.
F et G sont ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

Exercice 47

Soit $E = \mathbb{R}_4[X]$ et $F = \{P \in E : P(0) = P'(0) = P'(1) = 0\}$.
Montrer que F et un s.e.v. de E, en déterminer une base et donner sa dimension.
Montrer que $G = \mathrm{Vect}(1, X, 1 + X + X^2)$ est un espace supplémentaire de F dans E.

Exercice 48

Montrer que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$
Donner la dimension de chacun des espaces $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$.

1.E.2) *Cas d'un nombre $p \geqslant 2$ de sous-espaces vectoriels*

Soient $p \geqslant 2$ s.e.v. $F_1, \ldots, F_p$ d'un $\mathbb{K}$ e.v. E de dimension quelconque.

Définition 49: somme de $p \geqslant 2$ s.e.v.

La somme $F_1 + \cdots + F_p$ est l'espace

$$\sum_{i=1}^{p} F_i = \{x_1 + \cdots + x_p : (x_1, \ldots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p\}.$$

Définition 50

La somme $F_1 + \cdots + F_p$ est dite directe si tout vecteur $x \in F_1 + \cdots + F_p$ se décompose de manière unique comme somme de vecteurs des sous-espaces F_i.

On note alors $F_1 + \cdots + F_p = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} F_i$:

$$\forall x \in F_1 + \cdots + F_p : \exists!(x_1, \ldots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p : x = x_1 + \cdots + x_p.$$

Proposition 51: Caractérisation de la somme directe

Les sous-espaces $F_1, \ldots, F_p$ sont en somme directe si et seulement si le vecteur nul s'écrit de manière unique comme somme de vecteurs des sous-espaces F_i :

$$\forall (x_1, \ldots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p : (x_1 + \cdots + x_p = 0_E \Longrightarrow x_1 = \cdots = x_p = 0_E.)$$

Démonstration. — Si la somme $F_1 + \cdots + F_p = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$ est directe alors tout vecteur se décompose de manière unique suivant $F_1 + \cdots + F_p$. Le vecteur nul s'écrit donc de manière unique $0_E = 0_E + \cdots + 0_E \in F_1 + \cdots + F_p$.

— Réciproquement, on suppose que le vecteur nul se décompose de manière unique relativement à la somme $F_1 + \cdots + F_p$.
On considère alors deux décompositions d'un vecteurs $x \in E$:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + \cdots + x_p = x'_1 + \cdots + x'_p \in F_1 + \cdots + F_p \\ &\Longrightarrow (x_1 - x'_1) + \cdots + (x_p - x'_p) = 0_E \end{aligned}$$

On obtient par hypothèse : $\forall i \in [\![1, p]\!], x_i - x'_i = 0 i.e. x_i = x'_i$.

□

Remarques

Si la somme $F_1 + \cdots + F_p$ est directe alors toute famille $(y_1, \ldots, y_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p$ constituée de vecteurs non nuls est libre.

Exercice 52

Soit $E = \mathcal{C}^0([-1; 1], \mathbb{R})$. On note :
— F l'ensemble des fonctions constantes de E.
— G l'ensemble des fonctions nulles sur $[-1; 0]$.
— H l'ensemble des fonctions nulles sur $[0; 1]$.
Montrer que $E = F \oplus G \oplus H$.

Exercice 53

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice relativement à la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est

$$M = Mat_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker(f - id_{\mathbb{R}^3}) \oplus \ker(f - 2id_{\mathbb{R}^3}) \oplus \ker(f + 4id_{\mathbb{R}^3})$.

Théorème 54

— Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F_1, \dots, F_p$ des s.e.v. tels que $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$.
On note $\mathscr{B}_1, \dots, \mathscr{B}_p$ des bases de $F_1, \dots, F_p$.
Alors la concaténation $\mathscr{B}_1 \cup \cdots \cup \mathscr{B}_p$ est une base de E dite adaptée à la décomposition en somme directe.

— Réciproquement, si la concaténation $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \cup \cdots \cup \mathscr{B}_p$ de bases des espaces $F_1, \dots, F_p$ est une base de E alors $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$.

2 - Applications linéaires

2.A - *Définitions et premières propriétés*

Définition 55

Soit $f : E \to F$ une application.
On dit que f est linéaire et on note $f \in \mathscr{L}(E; F)$ si

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y).$$

Exemple

L'application $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + y - z, 2x + z) \end{array} \right.$ est linéaire.
En effet, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$, et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(\lambda(x, y, z) + (x', y', z')) &= f(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z') \\ &= ((\lambda x + x') + (\lambda y + y') - (\lambda z + z'), 2(\lambda x + x') + (\lambda z + z')) \\ &= (\lambda(x + y - z) + (x' + y' - z'), \lambda(2x + z) + (2x' + z')) \\ &= \lambda(x + y - z, 2x + z) + (x' + y' - z', 2x' + z') \\ &= \lambda f(x, y, z) + f(x', y', z'). \end{aligned}$$

Exemple

L'application $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P(X) & \longmapsto & XP'(X) - 2P(X) \end{array} \right.$ est linéaire.
En effet, pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$f(\lambda P + X) = X(\lambda P + Q)' - 2(\lambda P + Q) = \lambda(XP' - 2P) + (XQ' - 2Q') = \lambda f(P) + f(Q).$$

Proposition 56: Propriété des applications linéaires

- Si $f : E \to F$ est linéaire alors $f(0_E) = 0_F$.
- Si $f, g : E \to F$ sont linéaires alors $\lambda f + g$ est linéaire pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.
- Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont linéaires alors $g \circ f$ est linéaire.
- Si $f : E \to F$ est linéaire et bijective alors $f^{-1} : F \to E$ est également linéaire et

$$f^{-1} \circ f = id_E \text{ et } f \circ f^{-1} = id_F.$$

Théorème 57

Soient E, F des $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- L'ensemble $\mathscr{L}(E, F)$ des applications linéaires de E vers F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- Si E et F sont de dimension finie, on $\dim \mathscr{L}(E, F) = \dim(E) \times \dim(F)$.

idée de preuve. L'idée est de montrer que l'application qui à toute application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$ associe sa matrice $Mat_{\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_E}(\mathbb{K})$ (relativement à des bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$) est un isomorphisme. □

Définition 58: Vocabulaire

- Une application **linéaire** de E dans **lui même** est appelée **endomorphisme**
- Une application linéaire $f : E \to F$ **bijective** est appelée **isomorphisme**.
- Un **endomorphisme bijectif** est appelé **automorphisme**.
  On note $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.
- Une **forme linéaire** est une application linéaire à **valeurs dans** $\mathbb{K}$.

Remarques

- L'ensemble des automorphismes est noté $GL(E)$
  Il s'agit d'une structure algébrique appelée groupe : $GL(E)$ est appelé Groupe Linéaire.
- Un groupe est un ensemble muni d'une loi de composition interne associative.
  Dans le cas de $GL(E)$, la loi interne est la composition d'automorphismes : si f est g sont des automorphismes de E alors $f \circ g$ est encore un automorphisme de E.
  On a $f \circ id_E = f$: on dit que id_E est l'élément neutre du groupe $GL(E)$.
  Chaque automorphisme $f \in GL(E)$ possède un élément symétrique noté f^{-1}, c'est-à-dire $f \circ f^{-1} = id_E = f^{-1} \circ f$.
- Attention, $GL(E)$ n'est pas un espace vectoriel.
  (considérer par exemple $f - f = 0$ avec f un automorphisme).

Exemple

- L'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x, y, z) = 2x + y - z$ est une forme linéaire.
- L'application $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}, P(X) \mapsto P(0)$ est une forme linéaire.

2.B - *Noyau et image d'une application linéaire*

On considère une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$

2.B.1) *Noyau et injectivité*

Définition 59: Noyau

On appelle noyau de f, l'ensemble

$$\ker(f) = \{x \in E : f(x) = 0_F\} = f^{-1}(\{0_F\}).$$

Le noyau de f est donc l'ensemble des vecteurs dont l'image est nul par f : $x \in \ker(f) \iff f(x) = 0_F$.

Théorème 60

- $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.
- f est injective si et seulement si $\ker(f) = \{0_E\}$.
- f est l'application nulle si et seulement si $\ker(f) = E$.

Exercice 61

1. Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x+z, -2x+y+z, 2y+3z)$ est linéaire, déterminer son noyau et dire si elle est injective.
2. Montrer que l'application g définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par $g(P) = XP' - P$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$, déterminer son noyau, et dire si elle injective.

2.B.2) *Image, rang et surjectivité*

Définition 62

On appelle image de f et on note $Im(f)$ l'ensemble :

$$Im(f) = f(E) = \{y \in F : \exists x \in E, y = f(x)\} = \{f(x) : x \in E\}.$$

Théorème 63

- $Im(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.
- L'application f est surjective si et seulement si $Im(f) = F$.
- L'application f est nulle si et seulement si $Im(f) = \{0_F\}$.

Théorème 64: famille génératrice de $Im(f)$

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
Alors $Im(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1) \dots, f(e_n))$.

Exemple

Soit $n \geqslant 1$ et $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}[X]$, définie par $f(P) = P'$.

$$\begin{aligned} Im(f) &= \mathrm{Vect}(f(1), f(X), f(X^2), \dots, f(X^n)) = \mathrm{Vect}(0, 1, 2X, \dots, nX^{n-1}) = \mathrm{Vect}(1, 2X, \dots, nX^{n-1}) \\ &= \mathrm{Vect}(1, X, \dots, X^{n-1}) = \mathbb{R}_{n-1}[X]. \end{aligned}$$

Définition 65: rang d'une application linéaire

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ une application linéaire.
On a $Im(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$ avec $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
Alors $Im(f)$ est de dimension finie et on note $rg(f) = \dim Im(f) \leqslant n$.

Corollaire 66: surjectivité en dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Alors $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est surjective si et seulement si $rg(f) = \dim(F)$.

Exercice 67

1. Déterminer le rang de l'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$:
$$f : (x, y, z) \mapsto (x + z, -2x + y + z, 2y + 3z)$$
et dire s'il est surjective.
2. Même question avec l'endomorphisme $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X])$: $g : P \mapsto XP' - P$.

2.B.3) *Théorème du rang et conséquences*

Théorème 68: Théorème du rang

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
Alors $\dim E = \dim \ker(f) + rg(f) = \dim \ker(f) + \dim Im(f)$.

Démonstration. On note $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de $\ker(f)$.
On la complète en une base $(e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ de E.
On a $Im(f) = \text{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_p), f(e_{p+1}), \ldots, f(e_n)) = \text{Vect}(f(e_{p+1}), \ldots, f(e_n))$.
Montrons que la famille $\text{Vect}(f(e_{p+1}), \ldots, f(e_n))$ est libre.
Ceci prouvera que $rg(f) = n - p$ et démontrera le théorème.

Soient $\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\displaystyle\sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i f(e_i) = 0_F$.

Par linéarité de f, cela donne $f\left(\displaystyle\sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i e_i\right) = 0_F$ et on obtient $\displaystyle\sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i e_i \in \ker(f)$.
Puisque $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base de $\ker(f)$, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tel que
$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i e_i \iff \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p - \lambda_{p+1} e_{p+1} - \cdots - \lambda_n e_n = 0_E.$$
La famille $(e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ étant une base de E, on en déduit $\forall i \in [\![1, p]\!], \lambda_i = 0$.
Ce qui précède prouve que la famille $(f(e_{p+1}), \ldots, f(e_n))$ est libre.
Elle est également génératrice de $Im(f) = \text{Vect}(f(e_{p+1}), \ldots, f(e_n))$.
C'est donc une base de $Im(f)$.
En conclusion $rg(f) = \dim Im(f) = n - p$ et on obtient :
$$\dim \ker(f) + rg(f) = p + (n - p) = n = \dim E.$$
$\square$

Corollaire 69: espaces isomorphes et dimension

Deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F sont isomorphes si et seulement si $\dim(E) = \dim(F)$.

Théorème 70: bijectivité en dimension finie

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E **de dimension finie**. Alors
$$f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective}$$

Démonstration. Le théorème du rang donne $\dim E = \dim \ker(f) + rg(f) = \dim \ker(f) + \dim Im(f)$ donc :
$$\begin{aligned} f \text{ est injective } &\iff \ker(f) = \{0_E\} \iff \dim \ker(f) = 0 \\ &\iff \dim(E) = \dim Im(f) \underset{(Im(f) \subset E)}{\iff} Im(f) = E \iff f \text{ surjective.} \end{aligned}$$
$\square$

En dimension finie, un endomorphisme est bijectif si et seulement s'il est injectif **ou** surjectif.

Le résultat reste vrai si l'on suppose que f est une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$ avec E, F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de même dimension finie.

Attention, cette propriété n'est plus vérifiée si E est de dimension infinie.

Exemple

1. L'application $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X], P \mapsto P'$ est surjective mais pas injective : $\ker(f) = \mathbb{R}_0[X] \neq \{0\}$.
2. Les applications $\varphi, \psi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^N)$ définies par

$$\varphi((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } \psi((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

avec $v_0 = 0$ et $v_n = u_{n-1}$ pour tout $n \geqslant 1$ vérifient

$$\varphi \circ \psi = id_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$$

mais ne sont pas des isomorphismes : $\psi \circ \varphi \neq id_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$.

Théorème 71: isomorphisme en dimension finie

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $\mathscr{B}$ une base de E.
Alors f est un isomorphisme si et seulement si $f(\mathscr{B})$ est une base de F.

Démonstration. $\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $f : E \to F$ est un isomorphisme.
En particulier, f est surjective et $Im(f) = F$.
On note $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
Alors $F = Im(f) = \text{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n)) = \text{Vect}(f(\mathscr{B}))$ donc $f(\mathscr{B})$ engendre F.
De plus, $\dim F = \dim E$ donc $(f(e_1), \ldots, f(e_n)) = f(\mathscr{B})$ est composée de $n = \dim F$ vecteurs.
$f(\mathscr{B})$ est donc une base de F.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $f(\mathscr{B}) = (f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une base de F.

— Alors f est injective. En effet, soit $x \in \ker(f) : f(x) = 0_E$.
Il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \lambda_1 e_1 + \ldots \lambda_n e_n$.
On obtient par linéarité de f, $0_E = f(x) = \lambda_1 f(e_1) + \cdots + \lambda_n f(e_n)$.
Mais $f(\mathscr{B})$ est libre car c'est une base de F donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.
Ainsi, $x = 0_E$ et par conséquent $\ker(f) = \{0_E\}$.

— f est surjective car $f(\mathscr{B})$ est une base de $F = \text{Vect}(f(\mathscr{B})) = \text{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n)) = Im(f)$.

□

Exercice 72

Soit F l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = -u_{n+2} + 17u_{n+1} - 15u_n$.

1. Montrer que F est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Déterminer les suites géométriques qui appartiennent à F.
3. Montrer qu'une suite de F est complètement déterminée par ses trois premiers termes.
4. En déduire un isomorphisme entre $\mathbb{R}^3$ et F.
5. Donner alors $\dim(F)$ et une base de F.
6. Déterminer $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$ vérifiant $u_0 = 1, u_1 = 2, u_2 = 3$.

2.C - *Matrice d'une application linéaire*

Dans ce paragraphe, on considère deux espaces vectoriels de dimensions finies.

2.C.1) *Trace d'une matrice*

Définition 73: Trace d'une matrice carrée

On appelle trace d'une matrice carrée $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ le nombre $\operatorname{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Exemple

$\operatorname{Tr}(I_n) = n$.

Proposition 74

— Pour toutes matrices $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$, et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\operatorname{Tr}(\lambda A + B) = \lambda \operatorname{Tr}(A) + \operatorname{Tr}(B)$.
— Pour toutes matrices $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$.

Démonstration. — On note $A = (a_{i,j})_{i,j \in [\![1,n]\!]}$, $B = (b_{ij})_{i,j \in [\![1,n]\!]}$.
Alors $\lambda A + B = (\lambda a_{i,j} + b_{ij})_{i,j \in [\![1,n]\!]}$ donc

$$\operatorname{Tr}(\lambda A + B) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_{ii} + b_{ii}) = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \lambda \operatorname{Tr}(A) + \operatorname{Tr}(B).$$

— On note $A = (a_{i,j})_{i,j \in [\![1,n]\!]}$, $B = (b_{ij})_{i,j \in [\![1,n]\!]}$.
Alors $AB = (c_{ij})_{i,j \in [\![1,n]\!]}$ avec $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$ et $BA = (d_{ij})_{i,j \in [\![1,n]\!]}$ avec $d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj}$.
Alors

$$\operatorname{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki}$$

$$\operatorname{Tr}(BA) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{ki} \underset{\text{(indices muets)}}{=} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ki} a_{ik} \underset{\text{(interversion)}}{=} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki}.$$

D'où l'égalité $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$.

□

Exercice 75

On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $D = P^{-1}AP$ puis donner $\operatorname{Tr}(D)$.
2. Comparer $\operatorname{Tr}(D)$ et $\operatorname{Tr}(A)$.
3. Retrouver le résultat autrement.

Exercice 76

Déterminer la dimension de l'espace $H = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) : \operatorname{Tr}(A) = 0\}$.

Démonstration. Deux méthodes :
— **Première méthode.**
L'application $\operatorname{Tr} : \mathscr{M}_n(C) \to \mathbb{C}$ est une forme linéaire non nulle donc par le théorème du rang $\dim \ker(\operatorname{Tr}) = \dim \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) - \dim \mathbb{C} = n^2 - 1$.
Or $\ker(\operatorname{Tr}) = H$ donc H est de dimension 1.

— **Seconde méthode.**
Soit $A \in H$. On note $A = (a_{ij})_{i,j\in[\![1,n]\!]}$.
$\mathrm{Tr}(A) = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 0 \iff a_{nn} = -\sum_{i=1}^{n-1} a_{ii}$.
Ainsi, $A = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}E_{ij} + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}E_{ij} + \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(E_{ii} - E_{nn})$.
La famille $\mathscr{B} = (E_{ij})_{1\leqslant i<j\leqslant n} \cup (E_{ij})_{1\leqslant j<i\leqslant n} \cup (E_{ii} - E_{nn})_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille de matrices de traces nulles, donc dans H, génératrice de H.
Elles forment une famille libre, classiquement.
$\mathscr{B}$ est donc une base de H.
En conclusion : $\dim H = \mathrm{Card}(B) = 2\dfrac{n(n-1)}{2} + (n-1) = (n-1)(n+1) = n^2 - 1$.

□

2.C.2) *Matrice d'une application linéaire*

Soient E, F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.
On note $\mathscr{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathscr{B}_F = (f_1, \dots, f_n)$ des bases respectivement de E et F.
Une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est complètement déterminée par l'image des vecteurs de $\mathscr{B}_E$.
En effet, si $x \in E$, il existe un unique $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$, $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p$.
Alors puisque f est linéaire $f(x) = \lambda_1 f(e_1) + \cdots + \lambda_p f(e_p)$.
On note pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, $f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i$.

Définition 77

On appelle matrice de $f \in \mathscr{L}(E, F)$ relativement aux bases $\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F$,
la matrice $Mat_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} \in \mathscr{M}_{n,p}$ avec $f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i$:

$$Mat_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ \\ e_i \\ \\ e_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} f(e_1) & & f(e_j) & & f(e_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array}$$

Si $E = F$ et $\mathscr{B}_E = \mathscr{B}_F$, on note simplement $Mat_{\mathscr{B}_E}(f)$.

Exemple

Pour tout base $\mathscr{B}$ de E de dimension n, $Mat_{\mathscr{B}}(id_E) = I_n$.

Exercice 78

1. On note $\mathscr{B} = ((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1))$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$
   et $\mathscr{B}' = ((1,0,0), (1,1,0), (1,1,1))$.
   On note $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par $f(x,y,z) = (x+z, -2x+y+z, 2y+3z)$.
   (a) Vérifier que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Donner $Mat_{\mathscr{B}}(f)$, $Mat_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(f)$, $Mat_{\mathscr{B}'}(f)$ et $Mat_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$.
2. Déterminer, relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, la matrice de l'endomorphisme
   $g : \mathbb{R}_2[X] \mapsto XP' - P$.

Proposition 79: Calcul matriciel et vectoriel

Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels munis de bases $\mathscr{B}_E$, $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$.

— Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $x \in E$.
Alors $Mat_{\mathscr{B}_F}(f(x)) = Mat_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(f) Mat_{\mathscr{B}_E}(x)$.

En notant $Y = Mat_{\mathscr{B}_F}(f(x))$, $M = Mat_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(f)$ et $X = Mat_{\mathscr{B}_E}(x)$:

$$y = f(x) \Longleftrightarrow Y = MX.$$

— Si $E = F$, $\mathscr{B}_E = \mathscr{B}_F = \mathscr{B}$ et $f, g \in \mathscr{L}(E)$. Alors

$$Mat_{\mathscr{B}}(g \circ f) = Mat_{\mathscr{B}}(g) Mat_{\mathscr{B}}(f) \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ Mat_{\mathscr{B}}(f^n) = Mat_{\mathscr{B}}(f)^n$$

— Si $E = F$, $\mathscr{B}_E = \mathscr{B}_F = \mathscr{B}$
Alors $f \in GL(E)$ est **bijectif** si et seulement si $Mat_{\mathscr{B}_E}(f) \in GL_n(\mathbb{K})$ est **inversible** donc si et seulement si $\boldsymbol{rg(Mat_{\mathscr{B}_E)}(f) = n = \dim E}$.
Dans ce cas

$$Mat_{\mathscr{B}_E}(f^{-1}) = Mat_{\mathscr{B}_E}(f)^{-1}.$$

Exemple

On reprend l'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ défini par $f(x, y, z) = (x + z, -2x + y + z, 2y + 3z)$.
On a $f(1, -1, 2) = (3, -1, 4)$.
On peut retrouver ce résultat avec les matrices de l'endomorphisme f relativement aux différentes bases, notamment $\mathscr{B} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ et $\mathscr{B}' = ((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$.
$*$ **Avec** $Mat_{\mathscr{B}}(f)$
C'est le plus simple

$$Mat_{\mathscr{B}}(f(1, -1, 2)) = Mat_{\mathscr{B}}(f) Mat_{\mathscr{B}}((1, -1, 2)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$Mat_{\mathscr{B}}(f(1, -1, 2)) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ signifie $f(1, -1, 2) = 3(1, 0, 0) - (0, 1, 0) + 4(0, 0, 1) = (3, -1, 4)$.
$*$ **Avec** $Mat_{\mathcal{B}'}(f)$
On a $(1, -1, 2) = 2(1, 0, 0) - 3(1, 1, 0) + 2(1, 1, 1)$ donc

$$Mat_{\mathcal{B}'}(f(1, -1, 2)) = Mat_{\mathcal{B}'}(f) Mat_{\mathcal{B}'}((1, -1, 2)) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$Mat_{\mathscr{B}'}(f(1, -1, 2)) = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ signifie $f(1, -1, 2) = 4(1, 0, 0) - 5(1, 1, 0) + 4(1, 1, 1) = (3, -1, 4)$.
$*$ **Avec** $Mat_{\mathcal{B}', \mathscr{B}}(f)$
On a $(1, -1, 2) = 2(1, 0, 0) - 3(1, 1, 0) + 2(1, 1, 1)$ donc

$$Mat_{\mathscr{B}}(f(1, -1, 2)) = Mat_{\mathcal{B}', \mathscr{B}}(f) Mat_{\mathcal{B}'}((1, -1, 2)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$Mat_{\mathscr{B}}(f(1, -1, 2)) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ signifie $f(1, -1, 2) = 3(1, 0, 0) - (0, 1, 0) + 4(0, 0, 1) = (3, -1, 4)$.

$*$ **Avec** $Mat_{\mathscr{B}, \mathscr{B}'}(f)$

$$Mat_{\mathcal{B}'}(f(1,-1,2)) = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)Mat_{\mathcal{B}}((1,-1,2)) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$Mat_{\mathscr{B}'}(f(1,-1,2)) = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ signifie $f(1,-1,2) = 4(1,0,0) - 5(1,1,0) + 4(1,1,1) = (3,-1,4)$.

2.D - Matrice de passage, changement de base, matrices semblables

Soient $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ deux bases d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$.
On note $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$ la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.
On rappelle qu'il s'agit de la matrice $Mat_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$, des coordonnées de la base $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$.
On rappelle que $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} \in GL_n(\mathbb{R})$ et $P^{-1}_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} = P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}}$.

Théorème 80: Formules de passage

On note $P = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.
- Soit $x \in E$. On note $X = Mat_{\mathscr{B}}(x)$ et $X' = Mat_{\mathscr{B}'}(x')$.
  Alors $X = PX' \iff X' = P^{-1}X$.
- On note $M = Mat_{\mathscr{B}}(f)$ et $M' = Mat_{\mathscr{B}'}(f)$.
  Alors $M = PM'P^{-1} \iff M' = P^{-1}MP$.

Exemple

On reprend l'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par $f(x,y,z) = (x+z, -2x+y+z, 2y+3z)$.
On note $\mathscr{B} = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ et $\mathscr{B}' = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$.
Matrices de passage : $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}} = P^{-1}_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
$M = Mat_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $M' = Mat_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.
On vérifie par le calcul

$$PM'P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = M.$$

Définition 81

Deux matrices M, M' sont dites semblables s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $M' = P^{-1}MP$.

Proposition 82

Si M et M' sont semblables alors : $\mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Tr}(M')$ et $rg(M) = rg(M')$.

Définition 83

- On appelle trace d'un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$, la trace de la matrice $Mat_{\mathscr{B}}$ de f dans n'importe quelle base $\mathscr{B}$ de E. On note $\mathrm{Tr}(f)$.
- On appelle rang d'un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$, le rang de la matrice $Mat_{\mathscr{B}}$ de f dans n'importe quelle base $\mathscr{B}$ de E. On note $rg(f)$.

Synthétisons les notions de rang :

Théorème 84

Soient E, F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finies et $\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F$ des bases de E, F.
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $M = Mat_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(f)$ et $\mathcal{S}$ le système linéaire homogène associé à M.
Alors

$$rg(S) = rg(M) = rg\, Mat_{\mathscr{B}_F}(f(\mathscr{B}_E)) = rg(f) = \dim \operatorname{Im} f$$

où $rg(M)$ (ou $rg(\mathcal{S})$) se déterminent en comptant le nombre de pivots de la matrice réduite échelonnée par lignes.
De plus $x \in \operatorname{Im} f$ si et seulement si $X \in \operatorname{Vect}(C_1, \ldots, C_p)$ où C_i est la i-ième colonne de $Mat_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(f)$.

Exercice 85

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par $f(x, y, z) = (x - z, x + y + z, x - z)$.

1. Déterminer $\operatorname{Im} f$ et sa dimension.
2. Déterminer le rang de $Mat_{\mathscr{B}}(f)$ où $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Le précédent théorème fait le lien entre la dimension de $\operatorname{Im}(f)$ et le rang de $Mat_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(f)$.
On peut également faire le lien entre le noyau de f et la calcul matriciel :

Théorème 86

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F$ des bases de E, F. On note $M = Mat_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(f)$.
Alors $x \in \ker(f) \iff MX = 0$.

Exercice 87

Déterminer le noyau de l'endomorphisme $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X])$ définie par $g(P) = XP' - P$ en utilisant la matrice de g dans la base canonique $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
Donner ensuite $\operatorname{Im}(g)$.

2.E - *Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel*

2.E.1) *Homothétie*

Définition 88: homothétie

On appelle **homothétie de rapport** λ, l'application linéaire h définie par

$$\forall x \in E, h(x) = \lambda x \text{ c'est-à-dire } h = \lambda id_E.$$

Si E est de dimension finie n, pour toute base $\mathscr{B}$ de E, on a $Mat_{\mathscr{B}}(h) = \lambda I_n$.

Exercice 89

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Déterminer l'ensemble des endomorphismes $h \in \mathscr{L}(E)$ tels que pour tout $x \in E$, $(x, h(x))$ est une famille liée.

2.E.2) *Projecteur vectoriel*

Définition 90

Soit $E = F \oplus G$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel somme directe de deux sous-espaces vectoriels F, G.
On appelle projection de E sur F parallèlement à G l'application p :

$$p : \left| \begin{array}{ccccc} E & = & F \oplus G & \longrightarrow & F \\ x & = & y+z & \longmapsto & y. \end{array} \right.$$

Proposition 91: propriétés des projecteurs

- p est une application linéaire.
- $Im(p) = F$.
- $\ker(p) = G$.
- $p \circ p = p$.
- $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \ker(p)$ et p est la projection de E sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$.
- $x \in \mathrm{Im}(p) \iff p(x) = x$.

Théorème 92: Caractérisation d'un projecteur

Soit $p \in \mathscr{L}(E)$.
p est la projection de E sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$ si et seulement si $p \circ p = p$.

Exercice 93

Soit $p \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ l'endomorphisme dont la matrice relativement à la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^2$ est

$$M = Mat_{\mathscr{B}}(p) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que p est un projecteur et déterminer ses éléments caractéristiques : $F = \mathrm{Im}(p), G = \ker(p)$.
2. Déterminer la matrice de p dans $\mathscr{B}' = \mathscr{B}_F \cup \mathscr{B}_G$.

Plus généralement que dans cet exercice,
si $E = F \oplus G$ et p le projecteur sur $F = \mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $G = \ker(p)$
alors dans une base adaptée $\mathscr{B} = (\underbrace{e_1, \ldots, e_p}_{\mathrm{Im}(p)}, \underbrace{e_{p+1}, \ldots, e_n}_{\ker(p)})$ à $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \ker(p)$

la matrice de p est :

$$Mat_{\mathscr{B}}(p) = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ \\ e_p \\ e_{p+1} \\ \\ e_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} p(e_1) & & p(e_p) & p(e_{p+1}) & & p(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exercice 94

Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur.

1. Montrer que $q = id_E - p$ est le projecteur sur $\ker(p)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(p)$.
2. Montrer que $p + q = id_E$ et $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

2.E.3) *Symétrie vectorielle*

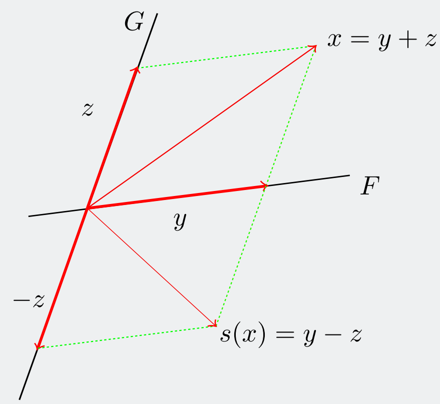
Définition 95: symétrie vectorielle

Soit $E = F \oplus G$ un espace vectoriel somme directe de deux sous-espaces F, G supplémentaires.
On appelle symétrie par rapport à F, parallèlement à G l'application s définie par

$$s : \left| \begin{array}{ccccc} E & = & F \oplus G & \longrightarrow & E \\ x & = & y+z & \longmapsto & y-z. \end{array} \right.$$

Proposition 96: propriétés des symétries vectorielles

- s est une application linéaire.
- $F = \ker(s - id_E)$.
- $G = \ker(s + id_E)$.
- $s \circ s = id_E$.
- $E = \ker(s - id_E) \oplus \ker(s + id_E)$
  s est la symétrie de E
  par rapport à $F = \ker(s - id_E)$
  parallèlement à $G = \ker(s + id_E)$.
- $x \in \ker(s - id_E) \iff s(x) = x$.
- $x \in \ker(s + id_E) \iff s(x) = -x$.



Théorème 97: Caractérisations des symétries

Soit $s \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E.
s est une symétrie vectorielle de E par rapport à $\ker(s - id_E)$ parallèlement à $\ker(s + id_E)$ si et seulement si $s \circ s = id_E$.

Exercice 98

Soit s l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}$ est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que s est une symétrie vectorielle et préciser ses éléments caractéristiques $F = \ker(s - id_E)$ et $G = \ker(s + id_E)$. Déterminer une base adaptée $\mathscr{B}'$ à $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$ et donner la matrice de s dans la base $\mathscr{B}'$.

Plus généralement, que dans cet exercice,
si $E = F \oplus G$ et s la symétrie par rapport à $F = \ker(s - id_E)$ parallèlement à $G = \ker(s + id_E)$
alors dans une base adaptée $\mathscr{B} = (\underbrace{e_1, \dots, e_d}_{\ker(s-id_E)}, \underbrace{e_{d+1}, \dots, e_n}_{\ker(s+id_E)})$ à $E = \ker(s - id_E) \oplus \ker(s + id_E)$

la matrice de s est :

$$Mat_{\mathscr{B}}(s) = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ \\ e_d \\ e_{d+1} \\ \\ e_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} s(e_1) & & s(e_d) & s(e_{d+1}) & & s(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exercice 99

Déterminer la trace et le rang des endomorphismes remarquables étudiés dans les précédents paragraphes : homothétie, projecteur, symétrie.
Préciser s'il s'agit d'automorphismes.

Solution.

Homothétie.
$*$ Si $\lambda = 0$, l'homothétie $f = 0id_E$ est l'endomorphisme nul, de trace et de rang nuls.
$*$ Si $\lambda \neq 0$, l'homothétie admet pour matrice dans toute base $\mathscr{B}$ de E, $Mat_{\mathscr{B}}(f) = \lambda I_n$.
λI_n est de rang n et de trace λn.
Si $\lambda \neq 0$, $f = \lambda id_E$ est un automorphisme car $Mat_{\mathscr{B}}(\lambda I_n)$ est inversible (d'inverse $\frac{1}{\lambda} I_n$).

Projecteur
La matrice de p dans une base adaptée $\mathscr{B}$ à $E = F \oplus G$ $\mathscr{B} = (\underbrace{e_1, \dots, e_d}_{\mathrm{Im}(p)}, \underbrace{e_{d+1}, \dots, e_n}_{\ker(p)})$ est

$$Mat_{\mathscr{B}}(p) = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ \\ e_d \\ e_{d+1} \\ \\ e_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} p(e_1) & & p(e_d) & p(e_{d+1}) & & p(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

On obtient $rg(p) = \mathrm{Tr}(p) = d = \dim F$.
$p \in \mathscr{L}$ est un automorphisme si et seulement $Mat_{\mathscr{B}}(p) \in GL_n(\mathbb{K})$ donc si et seulement si $d = n$.
Le seul projecteur bijectif est donc l'identité ($F = E$, $G = \{0_E\}$).

Symétrie
La matrice de s dans une base adaptée $\mathscr{B}$ à $E = F \oplus G$ $\mathscr{B} = (\underbrace{e_1, \dots, e_d}_{\ker(s - id_E)}, \underbrace{e_{p+1}, \dots, e_n}_{\ker(s + id_E)})$ est

$$Mat_{\mathscr{B}}(s) = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ \\ e_d \\ e_{d+1} \\ \\ e_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} p(e_1) & & p(e_d) & p(e_{d+1}) & & p(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

On obtient $rg(s) = n$
s est donc un automorphisme : la bijection réciproque est s lui-même car $s \circ s = id_E$.
On a $\mathrm{Tr}(s) = \mathrm{Tr}(Mat_{\mathscr{B}}(s)) = d - (n - d) = 2d - n$. □

3 - Sous-espaces stables

Définition 100

On dit qu'un sous-espace vectoriel $F \subset E$ est stable par un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ si $f(F) \subset F$:

$$\forall x \in F, f(x) \in F.$$

Exemple

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par $f(x, y, z) = (x - y, x + y, 2z)$.
On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $F = \text{Vect}(e_1, e_2)$.
Alors F est stable par f.
En effet, soit $x \in F$: $\exists(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $x = ae_1 + be_2 = (a, b, 0)$.
Alors, $f(x) = f(a, b, 0) = (a - b, a + b, 0) = (a - b)(1, 0, 0) + (a + b)(0, 1, 0) = (a - b)e_1 + (a + b)e_2 \in F$.
De même $G = \text{Vect}(e_3)$ est stable par f.

Définition 101: endomorphisme induit

Soit E un espace vectoriel, $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E et F un sous-espace stable par f.
Pour tout $x \in F$, $f(x) \in F$ donc l'application restreinte $f_{|F} : F \to F \subset E$ est :
- définie sur F,
- linéaire,
- à valeurs dans F.

Il s'agit donc d'une endomorphisme de F appelé **endomorphisme induit** par f sur F.

Exemple : endomorphisme induit et matrice

On reprend l'application $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par $f(x, y, z) = (x - y, x + y, 2z)$.
On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
$F = \text{Vect}(e_1, e_2)$ est stable par f. On peut donc considérer l'endomorphisme induit $f_{|F} : F \to F$ défini pour tout $x = ae_1 + be_2 = (a, b, 0) \in F$ par

$$f_{|F}(x) = f_{|F}(a, b, 0) = f(a, b, 0) = (a - b, a + b, 0) = ae_1 + be_2 \in F.$$

$\mathscr{B}_F = (e_1, e_2)$ est une base de F.
La matrice $Mat_{\mathscr{B}_F}(f_{|F}) \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est égale à :

$$Mat(f_{|F}) = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f(e_1) & f(e_2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

On complète $\mathscr{B}_F$ en une base $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, \varepsilon_3)$ de $\mathbb{R}^3$ avec $\text{Vect}(\varepsilon_3)$ un **supplémentaire quelconque** de F dans $\mathbb{R}^3$.
On obtient sans calcul que dans la base adaptée à $\mathbb{R}^3 = F \oplus \text{Vect}(\varepsilon_3)$:

$$Mat_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ \varepsilon_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(\varepsilon_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & * \\ 1 & 1 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{Mat(f_{|F})} & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

Cette forme est intéressante et suffira parfois.
En revanche, il est simple et plus intéressant ici de compléter $\mathscr{B}_F$ en la base canonique (e_1, e_2, e_3) car on fait alors apparaitre un **supplémentaire stable par** f : $G = \text{Vect}(e_3)$.
Dans la base $\mathscr{B}(e_1, e_2, e_3)$ adaptée à $\mathbb{R}^3 + F \oplus \text{Vect}(e_3)$ on a

$$Mat_{\mathscr{B}}(e_1, e_2, e_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Plus généralement, supposons que $F \subset E$ est stable par f.
On note $\mathscr{B}_F = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de F.
Si E est de dimension finie, on complète $\mathscr{B}_F$ en une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ de E.

On obtient un supplémentaire $G = \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$ de F dans E.
La matrice de f dans $\mathscr{B} = \mathscr{B}_F \cup \mathscr{B}_G$ s'écrit alors dans cette base adaptée :

$$Mat_{\mathscr{B}}(f) = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ \vdots \\ e_p \\ e_{p+1} \\ \vdots \\ e_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} f(e_1) & \dots & f(e_p) & f(e_{p+1}) & \dots & f(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} & & & * & \dots & * \\ & Mat(f_{|_F}) & & \vdots & & \vdots \\ & & & * & \dots & * \\ & & & * & \dots & * \\ & 0_{n-p,p} & & \vdots & & \vdots \\ & & & * & \dots & * \end{pmatrix} \end{array}$$

On suppose de plus que le **supplémentaire** G de F dans E construit est **stable** par f.
On obtient dans une base adaptée $\mathscr{B} = \mathscr{B}_F \cup \mathscr{B}_G$:

$$Mat_{\mathscr{B}}(f) = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ \vdots \\ e_p \\ e_{p+1} \\ \vdots \\ e_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} f(e_1) & \dots & f(e_p) & f(e_{p+1}) & \dots & f(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} & & & & & \\ & Mat(f_{|_F}) & & & 0_{p,n-p} & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & 0_{n-p,p} & & & Mat(f_{|_G}) & \\ & & & & & \end{pmatrix} \end{array}$$

Exercice 102

1. On considère l'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^4)$ définie par $f(x, y, z, t) = (x - y, x + y, z + t, z - t)$.
   Déterminer deux sous-espaces F, G stables par f et supplémentaires dans E.
   Construire la matrice de f dans une base adaptée à $E = F \oplus G$.
2. On considère l'endomorphisme $f \in \mathbb{R}_4[X]$ de matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$:
   $$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Déterminer tous les sous-espaces stables par f que l'on peut lire sur sa matrice.

4 - Hyperplans en dimension finie

Définition 103: hyperplan

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
On dit que H est un **hyperplan** de E si H est un sous-espace vectoriel de E admettant une **droite vectorielle comme supplémentaire** :

$$\exists u \neq 0_E, E = H \oplus \text{Vect}(u).$$

Théorème 104: caractérisation d'un hyperplan (dimension)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.
Alors H est un hyperplan si et seulement si $\dim H = n - 1$.

Démonstration. $\boxed{\Longrightarrow}$ Si H est un hyperplan de E, il existe $u \in E$, $u \neq 0$ tel que $E = H \oplus \text{Vect}(u)$.
Alors $\dim E = \dim H + \dim \text{Vect}(u) \Longrightarrow \dim H = \dim E - \dim \text{Vect}(u) = n - 1$.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Réciproquement si H est de dimension $n-1$, on note $\mathscr{B}_H = (e_1, \dots, e_{n-1})$ une base de H que l'on complète en une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_{n-1}, e_n)$ de E qui est de dimension n.
Alors $D = \text{Vect}(e_n)$ est un supplémentaire de H. C'est une droite vectorielle car $e_n \neq 0$ (famille libre) donc H est bien un hyperplan de E. □

Exemple

- Dans $\mathbb{R}^2$ les hyperplans sont donc les droites vectorielles.
  Une droite vectorielle D du plan est définie par une équation linéaire $ax + by = 0$ (ici $(-b, a) \in \mathbb{R}^2$ est un vecteur directeur (une base) de la droite vectorielle).
  On peut également voir D comme le noyau de la forme linéaire $\varphi : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto ax + by$.
- Dans $\mathbb{R}^3$ les hyperplans sont les plans vectoriels.
  Un plan vectoriel P est défini par une équation linéaire $ax + by + cz = 0$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
  On peut également voir P comme le noyau de la forme linéaire
  $\varphi : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto ax + by + cz$.

Théorème 105: caractérisation d'un hyperplan (équation linéaire)

H est un hyperplan de E si et seulement si H est le noyau d'une forme linéaire **non nulle** $\varphi \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$.

Démonstration. $\boxed{\Longrightarrow}$ Si H est un hyperplan, on se donne $u \neq 0$ tel que $E = H \oplus \text{Vect}(u)$.
On définit correctement $\varphi : E \to \mathbb{K}$ sur $E = H \oplus \text{Vect}(u)$ comme suit :

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccccccc} E & = & H & \oplus & \text{Vect}(u) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & = & h & + & \lambda u & \longmapsto & \lambda. \end{array} \right.$$

- φ est linéaire : pour tout $x = h + \lambda u \in E$ et $x' = h' + \lambda' u \in E$ et $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$\varphi(\alpha x + x') = \varphi((\alpha h + h') + (\alpha\lambda + \lambda')u) = \alpha\lambda + \lambda' = \lambda\varphi(x) + \varphi(x')$$

- φ est à valeurs dans $\mathbb{K}$, clairement. φ est une forme linéaire.
- φ est non nulle car $\varphi(u) = \varphi(0_E + 1u) = 1 \neq 0_{\mathbb{K}}$.
- Soit $x = h + \lambda u \in E$. Alors $x \in \ker(\varphi) \Longleftrightarrow \varphi(x) = 0_{\mathbb{K}} \Longleftrightarrow \lambda = 0_{\mathbb{K}} \Longleftrightarrow x = h \in H$. Ainsi, $\ker(\varphi) = H$. □

Puisque $\varphi \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$, en notant $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, on a pour tout $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$, $\varphi(x) = \varphi(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n) = \varphi(e_1) x_1 + \cdots + \varphi(e_n) x_n$. Ainsi :

$$x \in H \Longleftrightarrow \varphi(e_1) x_1 + \cdots + \varphi(e_n) x_n = 0.$$

Corollaire 106

H est un hyperplan si et seulement s'il existe des scalaires $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$
tels que pour tout $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$:

$$x \in H \Longleftrightarrow a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0.$$

Un hyperplan est donc défini par une équation linéaire homogène.
Une intersection d'hyperplans est donc définie par un système d'équations linéaires homogène.

Théorème 107: Intersection d'hyperplans, système d'équations linéaires

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $p \in [\![1, n]\!]$

1. L'intersection de p hyperplans de E est un sous-espace vectoriel de dimension au moins $n - p$.
2. Un espace de dimension $n - p$ est l'intersection de p hyperplans de E.

Démonstration. 1. On démontre par récurrence que l'intersection de p hyperplans de E est de dimension au moins $n-p$.
C'est évidement vrai pour $p=1$ car un hyperplan *est* de dimension $n-1$.
Soient alors $p+1$ hyperplans $H_1, \dots, H_p, H_{p+1}$ de E.
Par la formule de Grassman :

$$\begin{aligned}\dim(H_1 \cap \cdots \cap H_p \cap H_{p+1}) &= \dim(H_1 \cap \cdots \cap H_p) + \dim(H_{p+1}) - \dim((H_1 \cap \cdots \cap H_p) + H_{p+1}) \\ &\geqslant (n-p) + (n-1) - n = n - (p+1)\end{aligned}$$

par récurrence sur p et car $(H_1 \cap \cdots \cap H_p) + H_{p+1} \subset E$ étant de dimension au plus n on a

$$-\dim((H_1 \cap \cdots \cap H_p) + H_{p+1}) \geqslant -n.$$

2. Soit F un sous-espace de E de dimension $n-p$ et $\mathscr{B}_F = (e_{p+1}, \dots, e_n)$ une base de F.
On complète $\mathscr{B}_F$ en une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ de E.
On note pour $i \in [\![1, p]\!]$. $H_i = \mathrm{Vect}(e_k : k \in [\![1, n]\!] \setminus \{i\})$.
Les p sous-espaces $H_i \subset E$ sont de dimension $n-1$.
En effet, chacun est engendré par une famille de $n-1$ vecteurs linéairement indépendants puisqu'extraits d'une base.
On a donc construit p hyperplans de E.
Notons enfin que $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{p} H_i = F$.
En effet, si $x \in F$ alors x est combinaison linéaire des vecteurs $e_{p+1}, \dots, e_n$; chacun de ses vecteurs est dans H_i pour tout $i \in [\![1, p]\!]$ donc $x \in \displaystyle\bigcap_{i=1}^{p} H_i$. Ainsi, $F \subset \displaystyle\bigcap_{i=1}^{p} H_i$.
Réciproquement, si $x \in E$ n'est pas un vecteur de F, il possède nécessairement une composante non nulle suivant l'un des vecteurs de base $e_1, \dots, e_p$: disons e_{i_0}.
Mais alors $x \notin H_{i_0}$ donc $x \notin \displaystyle\bigcap_{i=1}^{p} H_i$. D'où finalement, $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{p} H_i \subset F$ puis l'égalité.

□