TRAVAUX DIRIGÉS : Fonctions de plusieurs variables

Exercice 1: (Solution)

Représenter les ensembles suivants et indiquer s'ils sont ouverts, fermés, bornés.

$$A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}; \quad B = (\mathbb{R}^*)^2; \quad C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 < 1\};$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leqslant 1 \text{ et } |y| \leqslant 1\}; \quad E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 2\};$$

$$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < |x-1| \leqslant 2\}; \quad G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy < 1 \text{ et } 1 < x < 2\};$$

$$H = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 : \theta \in [0, 2\pi]; r \in [0; 2]\};$$

$$I = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4\}$$

$$J = \{(r\cos\theta, r\sin\theta, z) \in \mathbb{R}^3 : r \in [0,1], \theta \in [0; \frac{\pi}{2}], z \geqslant 0\}.$$

Exercice 2: (Solution)

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions :

$$f : (x,y) \longmapsto \ln(x) + \ln(y) \quad ; \quad g : (x,y) \longmapsto \ln(xy).$$

Exercice 3: (Solution)

Étudier la continuité des fonctions suivantes :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{x}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

Exercice 4: (Solution)

1. Soit f la fonction définie par $f(x,y) = xy + x^2y - xy^2$.
   (a) Déterminer le $DL_1((1,1))$ de f.
   (b) Déterminer les points $(x_0; y_0) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\nabla f(x_0, y_0) = (0,0)$. Un tel point est dit **critique**.
   Que donne le DL_1 de f en ces points critiques ?
2. Soit f la fonction définie par $f(x,y) = (x-y)e^{xy}$.
   Déterminer les points critiques de f.

Exercice 5: (Solution)

Soit f la fonction définie par $f(x,y,z) = \sin^2 x + \cos^2 y + z^2$.

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 1 de f en un point $A(x_0, y_0, z_0)$.

Exercice 6: (Solution)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \arctan(2x + y).$$

Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles d'ordre 2.

Exercice 7: (Solution)

1. Soit f définie par $f(x,y) = e^{xy} + x^2y$ et $\varphi(t) = (t, \ln t)$.
   Montrer $F = f \circ \varphi$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer F'.
2. Soit f définie par $f(x,y) = x^2 + y^2$ et $\varphi(u,v) = (uv, \frac{u}{v})$.
   Montrer que $F = f \circ \varphi$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ et déterminer les dérivées partielles premières de F.

Exercice 8: (Solution)

Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $F(x,y) = f(x + \varphi(y))$.
Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ puis établir l'égalité suivante :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

Exercice 9: (Solution)

Soit f la fonction définie par

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

1. Étudier la continuité de f et celles de ces dérivées partielles premières.
2. Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$ et conclure.

Exercice 10: (Solution)

Déterminer toutes les fonctions $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$ telles que :

$$\textbf{EDP}: \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2: \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y.$$

Exercice 11: (Solution)

On considère sur $\mathbb{R}^2$ l'équation aux dérivées partielles :

$$\textbf{EDP}: \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, 2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$$

1. Montrer que l'application $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ définie par $h(x,y)=(x+2y,x)$ est une bijection et déterminer $h^{-1}(u,v)$ pour tout $(u,v)\in\mathbb{R}^2$.
   Justifier que h et h^{-1} sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. On pose $g=f\circ h^{-1}$. Justifier que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et donner ses dérivées partielles premières en fonction de celles de f.
3. Montrer que f est solution de **EDP** sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si g est solution sur $\mathbb{R}^2$ de **EDP'** :
$$\textbf{EDP'}: \forall(u,v)\in\mathbb{R}^2, \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)=0.$$
4. En déduire alors les solutions de **EDP'** sur $\mathbb{R}^2$ puis celles de **EDP**.
5. Retrouver le résultat de la question 3. en utilisant la relation $f=g\circ h$ et en exprimant les dérivées partielles de f en fonction de celles de g.

Exercice 12: (Solution)

Déterminer toutes les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{U}=\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ telles qu'en tout point de $\mathscr{U}$ on ait :

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Exercice 13: (Solution)

A l'aide du changement de variable défini par $u=xy$ et $v=\frac{x}{y}$ déterminer toutes les fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)-y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=0.$$

Exercice 14: (Solution)

Déterminer les points critiques, et leur nature, des fonctions définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

1. $f(x,y)=x^4+y^4-(x-y)^2$.
2. $f(x,y)=x^2+xy+y^2+2x+3y$.
3. $f(x,y)=x^3+y^3$.
4. $f(x,y)=x^2+y^2+x^3$.

Exercice 15: (Solution)

Soit $\mathscr{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geqslant 0, y\geqslant 0, x+y\leqslant 1\}$.

1. Montrer que $\mathscr{D}$ est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$ et que la fonction f définie par
$$f(x,y)=x^ay^b(1-x-y)^c, \text{ avec } a,b,c>0$$
   est continue sur $\mathscr{D}$.
2. Déterminer $\displaystyle\sup_{(x,y)\in\mathscr{D}} f(x,y)$.

Exercice 16: (Solution)

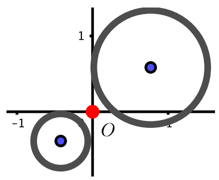
Déterminer :

$$\sup_{(x,y)\in]0;+\infty[^2}\frac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)} \quad ; \quad \sup_{(x,y)\in[0;\frac{\pi}{2}]^2}\sin(x)\sin(y)\sin(x+y).$$

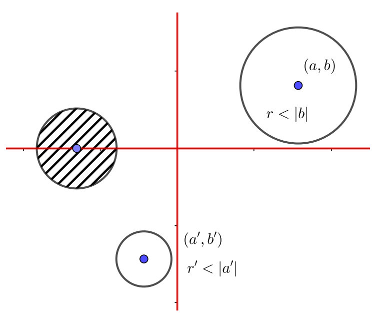
SOLUTIONS TRAVAUX DIRIGÉS : Fonctions de plusieurs variables

***Solution Exercice** 1.*

1. $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : a \neq 0 \text{ ou } b \neq 0\}$.
   A est l'ensemble $\mathbb{R}^2$ privé de l'origine $(0,0)$.
   Il est ouvert car toute boule $B((a,b),r)$ centré en $(a,b) \neq (0,0)$ de rayon $r > 0$ assez petit ($r < ||(a,b)||$) est incluse dans A.
   Il n'est pas fermé car son complémentaire $\{(0,0)\}$ n'est pas ouvert (aucune boule ouverte de rayon $r > 0$ centrée en $(0,0)$ n'est incluse dans $\{(0,0)\}$).
   Cette partie n'est pas bornée car contient toute les éléments $(n,0) \in \mathbb{N}^2$ de norme $n \in \mathbb{N}$ arbitrairement grande.



2. $B = (\mathbb{R}^*)^2 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : a \neq 0 \text{ et } b \neq 0\}$.
   B est l'ensemble $\mathbb{R}^2$ privé des deux droites d'équations $x = 0$ et $y = 0$.
   B est ouvert car toute boule $B((a,b),r)$ de rayon $r > 0$ assez petit ($r < |a|$ et $r < |b|$) est incluse dans B.
   B n'est pas ouvert car son complémentaire, la réunion des deux droites $(x = 0) \cup (y = 0)$, n'est pas ouvert.
   B n'est pas borné car il contient les éléments $(n,n), n \in \mathbb{N}^*$ de norme $\sqrt{2}n$ arbitrairement grande.



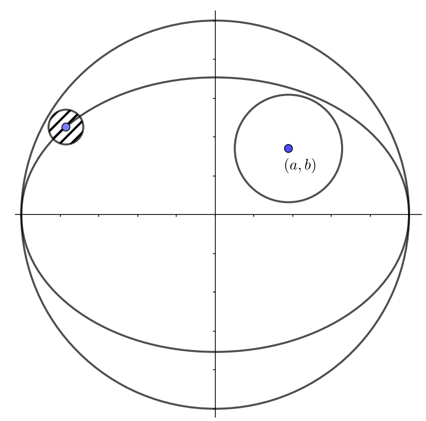
3. $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 < 1\}$ est l'intérieur de l'ellipse de centre $O(0,0)$ et de demi-axes $a = 1, b = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
   C est donc ouvert mais n'est pas fermé car son complémentaire n'est pas ouvert (toute boule centrée en un point de l'ellipse n'est pas incluse dans le complémentaire).
   C est bornée car incluse dans la boule de centre $O(0,0)$ et de rayon $r = 1$.

   Remarques

   Si l'on note $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \longmapsto x^2 + 2y^2$ alors $C = f^{-1}(]-\infty;1[)$.
   La fonction f est continue et $]-\infty;1[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. Par conséquent C est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
   En effet, soit $(a,b) \in C$.
   Ainsi $f(a,b) \in]-\infty;1[$. Mais $]-\infty;1[$ étant ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]f(a,b) - \epsilon, f(a,b) + \epsilon[\subset]-\infty;1[$.
   Par continuité de la fonction f il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

   $$||(x,y) - (a,b)|| \leqslant \alpha \Longrightarrow |f(x,y) - f(a,b)| \leqslant \varepsilon.$$

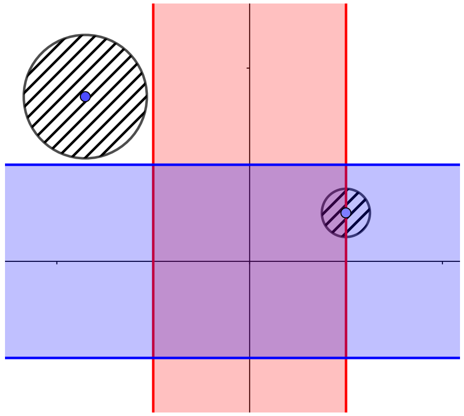
   Par conséquent, $B((a,b),\alpha) \subset C$.



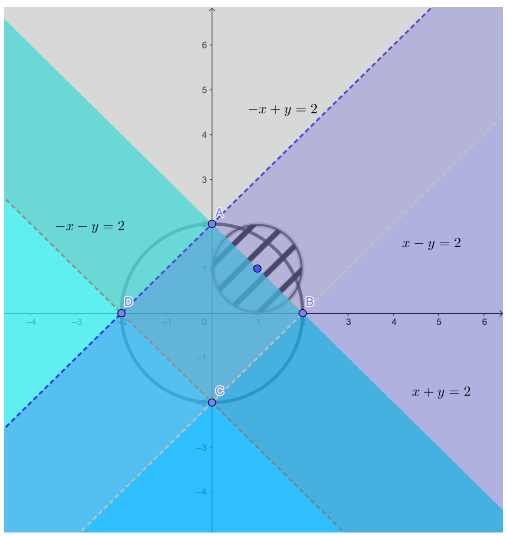
4. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leqslant 1 \text{ et } |y| \leqslant 1\}$ est le carré de centre $(0,0)$ et de coté 2.
   D est fermé car son complémentaire est ouvert

   $$\overline{D} = f^{-1}(]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[) \cup g^{-1}(]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[)$$

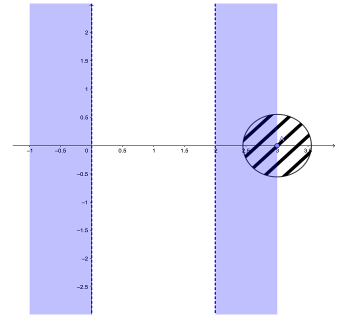
   où $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \longmapsto |x|$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \longmapsto |y|$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.
   D n'est pas ouvert car toute boule centrée en un coté du carré n'est pas incluse dans le carré.
   D est borné car D est inclus dans la boule de centre $O(0,0)$ et de rayon $\sqrt{2}$.



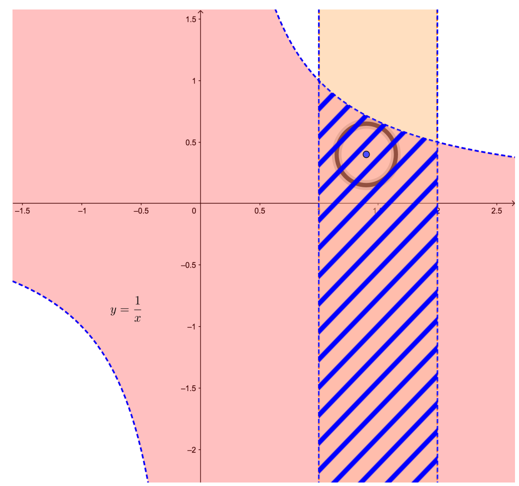
5. $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 2\}$;
   E est ensemble ouvert : voir le dessin ci-dessous.
   On peut également remarquer que $E = f^{-1}(] - \infty; 2[)$ où $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \longmapsto |x| + |y|$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. $] - \infty; 2[$.
   E n'est pas fermé car son complémentaire n'est pas ouvert : en effet toute boule centrée en un coté du carré $ABCD$ n'est pas incluse dans $\overline{E}$.
   E est borné car contenu dans la boule de centre $O(0,0)$ et de rayon 2.



6. $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < |x-1| \leqslant 2\}$ n'est ni ouvert ni fermé.
   En effet le point $(3,0) \in F$ mais toute boule $B((3,0),\varepsilon)$ n'est pas incluse dans F.
   De manière analogue $\overline{F} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x-1| \leqslant 1 \text{ ou } |x-1| > 2\}$ n'est pas ouvert donc F n'est pas fermé.
   F n'est pas borné car contient les points $(3,n)$ de norme $\sqrt{3+n^2}$ arbitrairement grande.



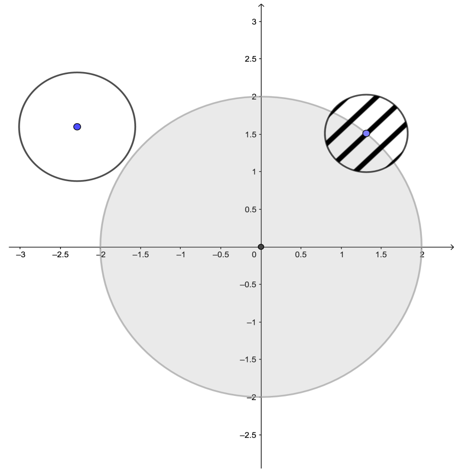
7. $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy < 1 \text{ et } 1 < x < 2\} = f^{-1}(] - \infty; 1[) \cap g^{-1}(]1; 2[)$ est l'intersection (finie) de deux ouverts donc est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
   En effet les fonctions $f : (x,y) \longmapsto xy$ et $g : (x,y) \longmapsto x$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$ et $] - \infty; 1[$ et $]1; 2[$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$.
   Le complémentaire
   $$\overline{G} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \leqslant 1 \text{ ou } x \leqslant 1 \text{ ou } x \geqslant 2\}$$
   n'est pas ouvert donc G n'est pas fermé.
   G est n'est pas borné car G contient les points $(\frac{3}{2}, -n), n \in \mathbb{N}$ de norme $\sqrt{n^2 + \frac{9}{4}}$ arbitrairement grande.



8. $H = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 : \theta \in [0, 2\pi]; r \in [0; 2]\}$ est le disque fermé de centre $O(0,0)$ et de rayon $r = 2$.
   Il est fermé car son complémentaire est ouvert.

Il n'est pas ouvert car toute boule centrée en un point du cercle de centre $O(0,0)$ et de rayon 2 n'est pas incluse dans H.

H est borné car tout élément de $(a,b)\in H$ a une norme $||(a,b)||\leqslant 2$.

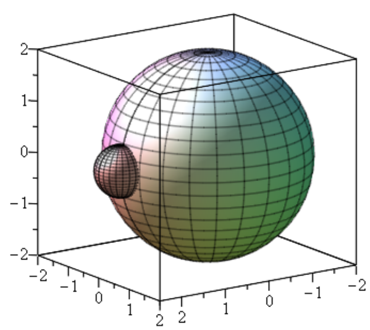


9. $I=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\leqslant 4\}$ est la sphère de centre $O(0,0,0)$ et de rayon 2.

   I est fermé car son complémentaire est ouvert.

   I n'est pas ouvert car toute boule centrée en un point de la frontière de la sphère n'est pas incluse dans la sphère.

   I est borné car tout éléments $(a,b,c)\in I$ a une norme $||(a,b,c)||\leqslant 4$.



10. $J=\{(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\in\mathbb{R}^3 : r\in[0,1], \theta\in[0;\frac{\pi}{2}], z\geqslant 0\}$ est quart de cylindre fermé généré par les quart de disques centrés sur la demi-droite d'équation $\left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \\ z\geqslant 9\end{array}\right.$, de rayon 1.

    J est fermé mais n'est pas ouvert.

    J n'est pas borné car contient les éléments $(0,0,n)$ de norme n arbitrairement grande.

$\square$

Solution Exercice 2.

— La fonction $f:(x,y)\longmapsto \ln(x)+\ln(y)$ est définie sur l'ensemble des couples $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tels que $x>0$ et $y>0$.
  Ainsi, $\mathscr{D}_f=(\mathbb{R}_+^*)^2$.

— La fonction $g:(x,y)\longmapsto \ln(xy)$ est définie sur l'ensemble des couples $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tels que

$$xy>0 \Longleftrightarrow (x>0 \text{ et } y>0) \text{ ou } (x<0 \text{ et } y<0)$$

  Ainsi, $\mathscr{D}_g=(\mathbb{R}_+^*)^2\cup(\mathbb{R}_-^*)^2$.

$\square$

Solution Exercice 3.

1. La fonction

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \left\{\begin{array}{lll} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{sinon} & \end{array}\right.\end{array}$$

   est continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ par quotient de telles fonctions le dénominateur ne s'annulant qu'en $(0,0)$.

   Étude en $(0,0)$

   Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ on a $x^2+y^2\geqslant x^2>0$ donc :

$$|f(x,y)|\leqslant\frac{x^2|y|}{x^2}=|y|\underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow}0=f(0).$$

   Par conséquent f est continue en $(0,0)$ et finalement, f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. La fonction

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \left\{\begin{array}{lll} \frac{x}{x^2+y^2} & \text{si} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{sinon} & \end{array}\right.\end{array}$$

   est continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ par quotient de telles fonctions le dénominateur ne s'annulant qu'en $(0,0)$.

   Étude en $(0,0)$

   On a $(x,x)\underset{x\to0}{\longrightarrow}(0,0)$ mais :

$$g(x,x)=\frac{x}{2x^2}=\frac{1}{2x}\underset{x\to0}{\longrightarrow}\infty\neq g(0,0).$$

   Par conséquent g n'est pas continue en $(0,0)$ (elle n'est même pas bornée).

3. La fonction

$$h : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par quotient de telles fonctions le dénominateur ne s'annulant qu'en $(0,0)$.

Étude en $(0,0)$

$h(x,x) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \neq h(0,0)$.

Par conséquent h n'est pas continue en $(0,0)$.

Remarques

— Notons que $h(x,-x) = -\frac{x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{2} \neq \frac{1}{2}$.
Il n'est donc pas possible de prolonger par continuité la fonction $(x,y) \longmapsto \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

— Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $(x-y)^2 \geqslant 0$.
Il vient $x^2 - 2xy + y^2 \geqslant 0$ soit $xy \leqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)$.
Ainsi :

$$|h(x,y)| \leqslant \frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}$$

La fonction h est bornée sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

□

***Solution Exercice** 5.* Soit f la fonction définie par $f(x,y,z) = \sin^2 x + \cos^2 y + z^2$.

1. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ par somme et composition de telles fonctions.

2. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ donc la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 s'applique :

$$f(x_0+h, y_0+k) \underset{(h,k)\to(0,0)}{=} f(x_0,y_0) + (\nabla f(x_0,y_0)|(h,k)) + o(||(h,k)||).$$

Le gradient de f au point (x_0,y_0) est donné par :

$$\nabla f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} 2\sin x \cos x \\ -2\cos y \sin y \\ 2z \end{pmatrix}$$

d'où

$$f(x_0+h, y_0+k, z_0+\ell) \underset{(h,k,\ell)\to(0,0,0)}{=} f(x_0,y_0,z_0) + 2h\sin x\cos x - 2k\cos y \sin y + 2z\ell + o(||(h,k,\ell)||).$$

□

***Solution Exercice** 6.* On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \arctan(2x+y).$$

La fonction $t \longmapsto \arctan t$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et la fonction $(x,y) \longmapsto 2x+y$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ car polynomial.

Par composition la fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

— $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{2}{1+(2x+y)^2}$

— $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{1}{1+(2x+y)^2}$

— $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\dfrac{2(2\times 2(2x+y))}{(1+(2x+y)^2)^2} = -\dfrac{8(2x+y)}{(1+(2x+y)^2)^2}$

— $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -\dfrac{2(2x+y)}{(1+(2x+y)^2)^2}$

— La fonction f étant de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, le théorème de Schwarz donne :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -\frac{4(2x+y)}{(1+(2x+y)^2)^2}.$$

□

***Solution Exercice** 8.* La fonction $F : (x,y) \longmapsto f(x+\varphi(y)) = f(h(x,y))$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ par composition : en effet la fonction $h : (x,y) \longmapsto x+\varphi(y)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ par somme et la fonction $t \longmapsto f(t)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Montrons que :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

— On calcule $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial h}{\partial x}(x,y) f'(h(x,y)) = 1 \times f'(h(x,y)) = f'(x+\varphi(y)).$$

— On calcule $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)$:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) f'(h(x,y)) = \varphi'(y) \times f'(h(x,y)) = \varphi'(y) f'(x+\varphi(y)).$$

— On calcule $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)(x,y)$.
On a $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = f'(x+\varphi(y)) = f'(h(x,y))$ donc :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial h}{\partial x}(x,y) f''(h(x,y)) = f''(x+\varphi(y)).$$

— On calcule $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)(x,y)$.
On a $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \varphi'(y)f'(x+\varphi(y)) = \varphi'(y)f'(h(x,y))$ donc :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y) &= \varphi'(y)\frac{\partial h(x,y)}{\partial x} f''(h(x,y)) \\ &= \varphi'(y)f''(x+\varphi(y)).\end{aligned}$$

Il vient :

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial F}{\partial x} \\ &= f''(x+\varphi(y)) \times \varphi'(y)f'(x+\varphi(y)) - \varphi'(y)f''(x+\varphi(y)) \times f'(x+\varphi(y)) \\ &= 0.\end{aligned}$$

□

Solution Exercice 9. Soit f la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ (et même $\mathscr{C}^2$) sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0\}$ par quotient de fonctions polynomiales, le dénominateur ne s'annulant que $(0,0)$.
On a de plus pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{3x^2y(x^2+y^2) - 2x(x^3y)}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{x^4y + 3x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{x^2y(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{x^3(x^2+y^2) - 2y(x^3y)}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{x^5 - x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{x^3(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.\end{aligned}$$

Étude en $(0,0)$

— La fonction f est continue en $(0,0)$. En effet, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$|f(x,y)| \leqslant \frac{|x^3y|}{x^2} = |xy| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0 = f(0,0)$$

— On a $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. En effet pour tout $h \neq 0$:

$$\frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \frac{f(h,0)}{h} = 0 \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

— La dérivée partielle première $(x,y) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x^2y(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}$ est continue en $(0,0)$.
En effet, on a : $x^2+3y^2 \leqslant 3x^2+3y^2$ donc : $\dfrac{x^2+3y^2}{(x^2+y^2)^2} \leqslant \dfrac{3(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$ et par conséquent pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leqslant \frac{3x^2|y|(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{3|x^3y|}{(x^2+y^2)} \leqslant \frac{3|x^3y|}{x^2} = 3|xy| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

— On a $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. En effet pour tout $k \neq 0$:

$$\frac{f(0,0+k) - f(0,0)}{k} = \frac{f(0,k)}{k} = 0 \underset{k\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

— La dérivée partielle première $(x,y) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^3(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$ est continue en $(0,0)$. En effet, on a : $|x^3(x^2-y^2)| \leqslant |x|^3(x^2+y^2)$ donc

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| = \left|\frac{x^3(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right| \leqslant \frac{|x|^3(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} \leqslant \frac{|x|^3}{x^2+y^2} \leqslant \frac{|x|^3}{x^2} = |x|$$

et par conséquent pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

On en déduit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

— Pour tout $k\neq 0$, on a :

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,k)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{k}=\frac{0^2k(0^2+3k^2)}{(0^2+k^2)^2}=0\underset{k\to 0}{\longrightarrow}0$$

Ainsi, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=0$.

— Pour tout $h\neq 0$, on a :

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h}=\frac{1}{h}\frac{h^3(h^2-0^2)}{(h^2+0^2)^2}=1\underset{h\to 0}{\longrightarrow}1$$

Ainsi, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=1$.

On en déduit que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)\neq\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0).$$

Par conséquent, le théorème de Schwarz montre que la fonction f n'est pas de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

□

Solution Exercice 10. Déterminons toutes les fonctions $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$ telles que :

$$(EDP):\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2:\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y.$$

Analyse

On suppose que $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$ est solution de (EDP).

— $\frac{\partial f}{\partial x}=0\Longrightarrow\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2:f(x,y)=\varphi(y)$ où φ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ de la variable y.

— $\frac{\partial f}{\partial y}=2y\Longrightarrow\varphi'(y)=2y\Longrightarrow\varphi(y)=y^2+K, K\in\mathbb{R}$.

Synthèse

On considère la fonction $f:(x,y)\longmapsto y^2+K$ où $K\in\mathbb{R}$.

Alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et est solution de (EDP) sur $\mathbb{R}^2$:

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2:\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y.$$

□

Solution Exercice 11. Déterminons toutes les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et telles que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

$$(EDP):2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0.$$

Analyse.

On propose d'effectuer un changement de variable linéaire.

On pose donc :

$$\begin{cases}u(x,y) & = & ax+by\\ v(x,y) & = & cx+dy\end{cases} \quad \text{et} \quad g(u(x,y),v(x,y))=f(x,y)$$

Ce changement de variable $\varphi:(x,y)\longmapsto(ax+by,cx+dy)$ est bijectif si et seulement si $ad-bc\neq 0$ auquel cas on a simplement défini $g=f\circ\varphi^{-1}$.

On calcule les dérivées partielles en dérivant en chaînes :

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial v}=a\frac{\partial g}{\partial u}+c\frac{\partial g}{\partial v}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial v}=b\frac{\partial g}{\partial u}+d\frac{\partial g}{\partial v}.$$

Par conséquent $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$ est solution de (EDP) sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $g\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$ est solution sur $\mathbb{R}^2$ de (EDP') :

$$2a\frac{\partial g}{\partial u}+2c\frac{\partial g}{\partial v}-b\frac{\partial g}{\partial u}-d\frac{\partial g}{\partial v}=0\Longleftrightarrow(2a-b)\frac{\partial g}{\partial u}+(2c-d)\frac{\partial g}{\partial v}=0.$$

Avec $a=1,b=2,c=1,d=0$ le changement de variable $\varphi(x,y)=(x+2y,x)$ simplifie le problème.

f est solution de (EDP) sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si g est solution de (EDP') :

$$\forall(u,v)\in\mathbb{R}^2:\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)=0.$$

Il vient $g(u,v)=\varphi(u)$ avec φ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Synthèse

On définit $f:(x,y)\longmapsto\varphi(x+2y)$ avec φ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ par composition.

De plus :

$$2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2\varphi'(x+2y)-2\varphi'(x+2y)=0.$$

Ainsi, f est solution de (EDP) sur $\mathbb{R}^2$. □

Solution Exercice 12. Déterminons toutes les fonctions $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})$ solution de :

$$(EDP) : x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Analyse

On effectue le changement de variable en coordonnées polaires :

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (r,\theta) & \longmapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta) = (x,y) \end{array} \right.$$

$$g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = f(x,y).$$

Ce changement de variables $\varphi : (r,\theta) \longmapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^* \times]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ sur $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

Notons que $\varphi^-1 : (x,y) \longmapsto \left(\sqrt{x^2+y^2}, 2\arctan\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right) = (r,\theta)$.

En effet :

— $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = \sqrt{r^2} = r > 0$

— les formules de bissection de l'angle donnent :

$$\begin{aligned} 2\arctan\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}} &= 2\arctan\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta + r} \\ &= 2\arctan\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} \\ &= 2\arctan\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{1+\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}} \\ &= 2\arctan\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} \\ &= 2\arctan\tan\frac{\theta}{2} = \theta. \end{aligned}$$

> **Remarques**
>
> Les formules donnant θ sont valides car $x + \sqrt{x^2+y^2} > 0$ car $x > 0$.
> Il suffirait en fait que $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\})$.

On calcule les dérivées partielles de g en fonction de celles de f :

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}$$

Puisque $r > 0$, la matrice $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$ est de déterminant $\det(A) = r \neq 0$ donc inversible.

On en déduit que

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\theta & -\sin\theta \\ r\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial r} \\ \frac{\partial g}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

Alors :

$$\begin{aligned} & x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2+y^2} \\ \iff & \frac{r\cos\theta}{r}\left(r\cos\theta\frac{\partial g}{\partial r} - \sin\theta\frac{\partial g}{\partial \theta}\right) + \frac{r\sin\theta}{r}\left(r\sin\theta\frac{\partial g}{\partial x} + \cos\theta\frac{\partial g}{\partial \theta}\right) = r \end{aligned}$$

Par conséquent f est solution de (EDP) sur $\mathscr{U} = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ si et seulement si g est solution sur $\mathbb{R}_+^* \times [0; 2\pi[$ de

$$(EDP') : \frac{\partial g}{\partial r} = 1.$$

On obtient : $g(r,\theta) = r + \varphi(\theta)$.

Synthèse.

On pose $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + \varphi\left(2\arctan\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{U} = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par quotient et composition de telles fonctions : notons en particulier que $x^2 + y^2 > 0$ car $x > 0$ donc la composée $(x,y) \longmapsto \sqrt{x^2+y^2}$ est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{U}$.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ & = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \\ & \quad + \left(\frac{-2y\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}{(x+\sqrt{x^2+y^2})^2}\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\right)\varphi'\left(2\arctan\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right) \\ & = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \\ & \quad + \left(\frac{-2y\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}{(x+\sqrt{x^2+y^2})^2+y^2}\right)\varphi'\left(2\arctan\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$
$$= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} +$$
$$+2\left(\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}-\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{(x+\sqrt{x^2+y^2})^2}\right)\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\varphi'\left(2\arctan\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$
$$= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} +$$
$$+2\left(\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}-\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{(x+\sqrt{x^2+y^2})^2+y^2}\right)\varphi'\left(2\arctan\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$
$$= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} +$$
$$+2\left(\frac{x+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{(x+\sqrt{x^2+y^2})^2+y^2}\right)\varphi'\left(2\arctan\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

On vérife alors aisément que :

$$\forall (x,y)\in\mathscr{U} : x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

c'est-à-dire que f est solution de (EDP) sur $\mathscr{U}$. □

Solution Exercice 13. A l'aide du changement de variable défini par $u=xy$ et $v=\frac{x}{y}$ déterminons toutes les fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$(EDP) : x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)-y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=0.$$

Le changement de variable $\varphi:(x,y)\longmapsto\left(xy,\frac{x}{y}\right)=(u,v)$ est une bijection de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ sur lui même. En effet :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u & = & xy\\ v & = & \frac{x}{y}\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & \sqrt{uv}\\ y & = & \sqrt{\frac{u}{v}}\end{array}\right.$$

On définit alors g sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ par :

$$g(u,v)=f\circ\varphi^{-1}(u,v)\Longleftrightarrow f(x,y)=g(u(x,y),v(x,y)) \text{ avec } \left\{\begin{array}{lcl} u(x,y) & = & xy\\ v(x,y) & = & \frac{x}{y}.\end{array}\right.$$

Analyse.

On suppose que $f\in\mathscr{C}^2(\mathbb{R}_+^*)^2$ est solution de (EDP).

La fonction g définie ci-dessus est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ par somme et composition de telles fonctions.

On a

— $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial v}=y\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{1}{y}\frac{\partial g}{\partial v}$

— $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=y(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 g}{\partial v\partial u})+\frac{1}{y}(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2})$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=y(y\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}+\frac{1}{y}\frac{\partial^2 g}{\partial v\partial u})+\frac{1}{y}(y\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}+\frac{1}{y}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2})$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=y^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial v\partial u}+\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}+\frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=y^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 g}{\partial v\partial u}+\frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$ par le théorème de Schwarz.

— $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial v}=x\frac{\partial g}{\partial u}-\frac{x}{y^2}\frac{\partial g}{\partial v}$

— ...

□

Solution Exercice 14.

1. $f(x,y)=x^4+y^4-(x-y)^2$.

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}4x^3-2(x-y)\\4y^3+2(x-y)\end{pmatrix}=0\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{lcl} x-y & = & 2x^3\\ x-y & = & -2y^3\end{array}\right.$$

$$\nabla f(x,y)=0\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{lcl} x-y & = & 2x^3\\ x^3 & = & -y^3\end{array}\right.\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{lcl} x-y & = & 2x^3\\ x & = & -y\end{array}\right.$$

$$\nabla f(x,y)=0\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{lcl} 2x & = & 2x^3\\ x & = & -y\end{array}\right.\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{lcl} x(x^2-1) & = & 0\\ x & = & -y\end{array}\right.$$

$$\nabla f(x,y)=0\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 0\\ y & = & 0\end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1\\ y & = & -1\end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -1\\ y & = & 1\end{array}\right.$$

La fonction f possède donc trois points critiques sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$: $O(0,0), A(-1,1), B(1,-1)$.

Étude en $(0,0)$

Soit $x\neq 0$.

$f(x,-x)-f(0,0)=2x^4-(2x)^2=2x^2(x^2-2)$ est du signe de x^2-2.

$f(x,x)-f(0,0)=2x^4$ est du signe de x^4.

Ainsi, $f(x,y)-f(0,0)$ n'est de signe constant sur aucun voisinage de $(0,0)$.

Ainsi, $(0,0)$ est un point col.

Étude en $(-1,1)$

La matrice Hessienne de f en (x,y) est la matrice

$$A_{(x,y)}=\begin{pmatrix}12x^2-2 & 2\\ 2 & 12y^2-2\end{pmatrix}.$$

Au point $(x,y)=(-1,1)$ on obtient : $A_{(-1,1)}=\begin{pmatrix}10 & 2\\ 2 & 10\end{pmatrix}$.

La matrice A est symétrique donc diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres.

On a $\det(A) = 96 > 0$; les valeurs propres de A sont de même signe et non nul.

La fonction f présente donc un extremum local au point $(-1, 1)$.

On a $\mathrm{Tr}(A) = 20 > 0$ donc les valeurs propres de A sont strictement positives.

On conclut : la fonction f présente un minimum local au point $(-1, 1)$. Ce minimum est égal à $f(-1, 1) = -2$.

Étude au point $(1, -1)$

Même étude que ci-dessus : la fonction f présente un minimum local au point $(1, -1)$ égal à $f(1, -1) = -2$.

On peut démontrer que ce minimum est global en utilisant l'inégalité classique $-2xy \leqslant x^2 + y^2$.

2. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$.

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + y + 2 \\ x + 2y + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

La fonction f possède donc un unique point critique sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$: $(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3})$.

La matrice Hessienne au point (x, y) est égale à :

$$A_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On a $\det(A) = 3 > 0$ donc les valeurs propres de A sont non nulles et de même signe.

De plus, $\mathrm{Tr}(A) = 4 > 0$ donc les valeurs propres de A sont strictement positives.

On en déduit la fonction f présente un minimum local en $(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3})$ égal à $f(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3})$.

On peut montrer que ce minimum est global en déterminant la nature de la conique qui apparait comme ligne de niveau $f(x, y = \lambda$ (vide pour $\lambda < -\frac{7}{3}$).

3. $f(x, y) = x^3 + y^3$.

$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 \\ 3y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

La fonction f possède donc un unique point critique sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$: $(0, 0)$.

La matrice Hessienne au point (x, y) est égal à

$$A_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$$

donc au point $(0, 0)$:

$$A_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On ne peut pas conclure directement car $\det(A) = 0$.

Mais on remarque que

$$f(x, x) - f(0, 0) = 2x^3$$

et que

$$f(-x, -x) - f(0, 0) = -2x^3.$$

Par conséquent $f(x, y) - f(0, 0)$ change de signe sur tout voisinage de $(0, 0)$: la fonction f ne présente pas d'extremum en $(0, 0)$. $(0, 0)$ est un point col.

4. $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^3$.

$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + 3x^2 \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x(3x + 2) & = & 0 \\ y & = & 0 \end{cases}$

On en déduit que f présente deux points critiques sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$: $(0, 0)$ et $(-\frac{2}{3}, 0)$.

La matrice Hessienne de f au point (x, y) est égal à

$$A_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 6x + 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Étude en $(0, 0)$

$A_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$

La matrice $A_{(0,0)}$ admet deux valeurs propres strictement positives donc $(0, 0)$ admet un minimum local en $(0, 0)$.

Étude en $(-\frac{2}{3}, 0)$

On a $A_{(-\frac{2}{3},0)} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ donc $A_{(-\frac{2}{3},0)}$ admet deux valeurs propres non nulles de signes opposés.

Par conséquent, le point $(-\frac{2}{3}, 0)$ est un point col : la fonction $(-\frac{2}{3}, 0)$ ne présente pas d'extremum en ce point.

$\square$

***Solution Exercice** 15.* Soit $\mathscr{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0, y \geqslant 0, x + y \leqslant 1\}$.

1. Montrons que $\mathscr{D}$ est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$ et que la fonction f définie par

$$f(x, y) = x^a y^b (1 - x - y)^c, \text{ avec } a, b, c > 0$$

est continue sur $\mathscr{D}$.

— La partie $\mathscr{D}$ a pour complémentaire :

$$\overline{\mathscr{D}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y > 1\}.$$

L'ensemble $\overline{\mathscr{D}}$ est ouvert comme réunion d'ensembles ouverts.
En effet les fonctions $f : (x,y) \longmapsto x$, $g : (x,y) \longmapsto y$, $h : (x,y) \longmapsto x+y$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$, on a

$$\overline{\mathscr{D}} = f^{-1}(]-\infty, 0[) \cup g^{-1}(]-\infty; 0[) \cup h^{-1}(]1; +\infty[)$$

et les ensembles : $]-\infty; 0[$ et $]1; +\infty[$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$.
Par conséquent, $\mathscr{D}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

— La fonction f est continue sur $\mathscr{D}$ par produit de fonctions continues :
  * $(x,y) \longmapsto x^a$ est continue sur $\mathscr{D}$ car $x \geqslant 0$
  * $(x,y) \longmapsto y^b$ est continue sur $\mathscr{D}$ car $y \geqslant 0$
  * $(x,y) \longmapsto (1-x-y)^c = (1-(x+y))^c$ est continue sur $\mathscr{D}$ car $x+y \leqslant 1$

2. Déterminons $\sup\limits_{(x,y)\in\mathscr{D}} f(x,y)$.

Notons dans un premier temps que f est bornée sur $\mathscr{D}$ car f est continue sur l'ensemble fermé et borné $\mathscr{D}$.

Remarquons au passage de $\forall (x,y) \in \mathscr{D}, 0 \leqslant f(x,y) \leqslant 1$.

Les extrema de f peuvent-être atteints sur la frontière ou sur l'intérieur de $\mathscr{D}$.

On commence par étudier f sur la frontière $\partial\mathscr{D}$ de $\mathscr{D}$:

$$\partial\mathscr{D} = ([0;1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0;1]) \cup \{(x, 1-x) : x \in [0;1]\} = D_1 \cup D_2 \cup D_3.$$

— Sur D_1.
Pour tout $x \in [0,1]$, $f(x,0) = x^a \times 0^b \times (1-x)^c = 0$.
Par conséquent f atteint son minimum global en chaque point de D_1 (on avait déjà remarqué que f est positive sur $\mathscr{D}$).

— Sur D_2.
Pour tout $y \in [0;1]$, $f(0,y) = 0^a \times y^b \times (1-y)^c = 0$ donc f atteint son minimum global en chaque point de D_2.

— Sur D_3 le constat est le même : f est nulle sur D_3.

En conclusion f est nulle sur toute la frontière de $\mathscr{D}$ et en chaque point de la frontière, la fonction f atteint son minimum global.

Puisque f est bornée, elle est également majorée et c'est nécessairement sur l'intérieur de $\mathscr{D}$ que le maximum est atteint

(par ce qui précède la fonction est nulle sur la frontière donc n'y atteint pas son maximum).

Si f admet un extremum sur l'intérieur de $\mathscr{D}' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, x+y < 1\}$ de $\mathscr{D}$ c'est nécessairement en un point critique car $\mathscr{D}'$ est ouvert.

On a :

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} ax^{a-1}y^b(1-x-y)^c - cx^a y^b (1-x-y)^{c-1} \\ x^a b y^{b-1}(1-x-y)^c - cx^a y^b (1-x-y)^{c-1} \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a(1-x-y) - cx \\ b(1-x-y) - cy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

car $x \neq 0, y \neq 0, x+y \neq 1$ sur l'intérieur $\mathscr{D}'$.
On obtient :

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x(a+c) + ay & = & a \\ bx + y(b+c) & = & b \end{array} \right.$$
$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \frac{a}{a+b+c} \\ y & = & \frac{b}{a+b+c} \end{array} \right.$$

On en déduit que f admet son maximum en $\left(\frac{a}{a+b+c}, \frac{b}{a+b+c}\right)$ et qu'il vaut $f\left(\frac{a}{a+b+c}, \frac{b}{a+b+c}\right)$.

Remarques

Inutile d'utiliser la matrice Hessienne de f : on savait déjà que f est bornée et que le maximum est atteint en l'unique point critique.

□

Solution Exercice 16.

1. Déterminons :

$$\sup_{(x,y)\in]0;+\infty[^2} \frac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$$

Pour cela on définit la fonction g sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ par $g(x,y) = \ln f(x,y)$.

Par stricte croissance de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$, f atteint un maximum en (a,b) si et seulement si g atteint un maximum en ce même point (a,b).

Un extremum est nécessairement atteint en un point critique car $(\mathbb{R}_+^*)^2$ est ouvert.

La fonction g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ par composition.

— $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{x+y}$.
— $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{1}{y} - \frac{1}{1+y} - \frac{1}{x+y}$.
— $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(x+y)^2}$.
— $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -\frac{1}{y^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(x+y)^2}$.

— $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{1}{(x+y)^2}$.

On obtient $\nabla g(x,y) = (0,0) \iff (x,y) = (1,1)$ et la matrice Hessienne de g au point $(1,1)$:

$$A_{(1,1)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

On a $\det(A_{(1,1)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16} > 0$ et $\mathrm{Tr}(A_{(1,1)}) = -1 < 0$.

La fonction g présente donc un maximum local en $(1,1)$.

Ainsi, $f(1,1) = \frac{1}{8}$ est un maximum local de f.

Justifions enfin que ce maximum est global.

Remarquons que la fonction f est continue et bornée sur $[0;8]^2$.

La fonction f atteint donc ses bornes sur le fermé borné $[0;8]^2$.

On note M le maximum.

(le minimum est $f(0,0) = 0$).

On a $M \geqslant \frac{1}{8} = f(1,1)$ car $(1,1) \in [0;8]^2$.

De plus si $x > 8$ ou $y > 8$ (alors (x,y) est extérieur à $[0;8]^2$) :

$$0 \leqslant f(x,y) = \frac{x}{1+x}\frac{y}{1+y}\frac{1}{x+y} < 1 \times 1 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \leqslant M.$$

Par conséquent M est un majorant de f sur $(\mathbb{R}_+)^2$: puisqu'il est atteint c'est un maximum global.

Ce maximum n'est pas atteint en un point $(a,0)$ ou $(0,b)$ car en un tel point f est égale à $0 < \frac{1}{8}$).

Il est donc atteint sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ et donc en l'unique point critique de f sur l'ouvert de $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

Conclusion : $f(1,1) = \frac{1}{8}$ est donc un maximum global de f sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

2. Déterminons

$$\sup_{(x,y)\in[0;\frac{\pi}{2}]^2} \sin(x)\sin(y)\sin(x+y).$$

La fonction $f : (x,y) \longmapsto \sin(x)\sin(y)\sin(x+y)$ est continue sur le fermé borné $[0;\frac{\pi}{2}]^2$.

Ainsi f est bornée et atteint ses bornes sur cet ensemble.

Notons que $f(0,0) = 0 \leqslant f(x,y)$ pour tout $(x,y) \in [0;\frac{\pi}{2}]^2$: $f(0,0) = 0$ est le minimum global de f sur $[0;\frac{\pi}{2}]^2$.

Puisque $f(0,0) = f(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) = 0$ le maximum est atteint sur l'ouvert $]0;\frac{\pi}{2}[^2$.

Le maximum global est donc atteint en un point critique $(x,y) \in]0;\frac{\pi}{2}[^2$:

$$\begin{aligned}
\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}
&\iff \begin{pmatrix} \sin y(\cos x\sin(x+y) + \sin x\cos(x+y)) \\ \sin x(\cos y\sin(x+y) + \sin y\cos(x+y)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} \cos x\sin(x+y) + \sin x\cos(x+y) \\ \cos y\sin(x+y) + \sin y\cos(x+y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ car } \sin x, \sin y \neq 0 \\
&\iff \begin{pmatrix} \sin(2x+y) \\ \sin(x+2y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Puisque $(x,y) \in]0;\frac{\pi}{2}[^2$ il vient : $2x+y, x+2y \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{3}[$.

Ainsi, l'unique point critique est atteint en (x,y) solution du système

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ \pi \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{3} \\ \frac{\pi}{3} \end{pmatrix}.$$

Ce point critique correspond donc au maximum de f sur $[0;\frac{\pi}{2}]^2$:

$$f(\frac{pi}{3}, \frac{\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

□