TRAVAUX DIRIGÉS : Séries entières

1 Rayon de convergence

Exercice 1: Rayon de convergence (Solution)

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum x^n$
2. $\sum nx^n$
3. $\sum \frac{1}{n^3}x^n$
4. $\sum \cos(n)x^n$
5. $\sum \sin(n)x^n$
6. $\sum \arctan(n^\alpha)x^n$
7. $\sum n!x^n$
8. $\sum \frac{1}{n!}x^n$
9. $\sum \frac{\mathrm{ch}(n)}{\mathrm{sh}^2(n)}x^n$
10. $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$
11. $\sum n^n x^n$
12. $\sum \frac{\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n}x^n$
13. $\sum a_n x^n$ avec
$$a_n = \begin{cases} \left(1-\frac{2}{n}\right)^n & \text{si } n \text{ pair} \\ 3^n & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$
14. $\sum \frac{n+\ln(n)}{n^2+2^n}x^n$
15. $\sum \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2} x^n$

Exercice 2: Rayon de convergence (Solution)

Déterminer le rayon de convergence des séries entières :

1. $\sum \frac{\cos n}{n}z^n$
2. $\sum n!z^{2n}$
3. $\sum \frac{z^{n!}}{n!}$
4. $\sum 5^n z^{2n+1}$
5. $\sum a_n z^n$ avec $a_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2+1}$.

Exercice 3: Rayon de convergence (Solution)

1. On considère une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$.
   (a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^{2n}$.
   (b) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$.
2. Soit $\sum u_n z^n$ une série entière complexe telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n = a_n + ib_n \text{ avec } (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2.$$
Comparer le rayon de convergence de la série $\sum u_n z^n$ avec le rayon de convergence des séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$.

Exercice 4: Étude au bord (Solution)

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{\ln(n!)}$
2. Étudier la nature de la série entière pour $x = 1$ et $x = -1$.

Exercice 5: Rayon de convergence (Solution)

Déterminer le rayon de convergence des séries entières :

1. $\sum \arccos\left(1-\frac{1}{n^2}\right) z^n$
2. $\sum \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right) z^n$
3. $\sum \left(\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n}\right) z^n$
4. $\sum \frac{\mathrm{ch}(n)}{n} z^n$
5. $\sum \frac{n^2}{3^n+n} z^n$
6. $\sum \left(\frac{1}{1+\sqrt{n}}\right)^n z^n$

2 Calcul de sommes

Exercice 6: Calcul de sommes. Séries géométriques 1. (Solution)

Déterminer le rayon de convergence R de chacune des séries entières suivantes et calculer leur somme pour $x \in]-R; R[$.

1. $\sum_{n\geqslant 0} nx^n$.
2. $\sum_{n\geqslant 0} n^2x^n$.
3. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}x^n$.
4. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^2+n+1}{n}x^n$.
5. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^3+n+1}{n+1}x^n$.
6. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\mathrm{ch}(n)}{n}x^n$.

Exercice 7: Calcul de sommes. Séries géométriques 2. (Solution)

Déterminer le rayon de convergence R de chacune des séries entières suivantes et calculer leur somme pour $x \in]-R; R[$.

1. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^3+n+3}{n+1} x^n$.
2. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2+n+1}{2^n} x^n$.
3. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+2)} x^n$.
4. $(*) \sum_{n\geqslant 0} \frac{2n+1}{2n+3} x^n$.

Exercice 8: Calcul de sommes. Séries exponentielles. (Solution)

Déterminer le rayon de convergence R de chacune des séries entières suivantes et calculer leur somme pour $x \in]-R;R[$.

1. $\sum \frac{n^2+n+3}{n!} x^n$.
2. $\sum \frac{n^2+2n-1}{(n+1)!} x^n$.
3. $(*) \sum \frac{n}{(2n+1)!} x^n$.
4. $\sum \frac{\text{ch}(n)}{n!} x^n$.

Exercice 9: Calcul de sommes. Mélange. (Solution)

Déterminer le rayon de convergence R et calculer la somme des séries entières suivantes.

1. $\sum_{n\geqslant 1} \left(n+\frac{1}{n}\right) x^{2n}$.
2. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$.
   Indication :
   calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(j^k x)^n}{n!}$ où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $k \in [\![0,2]\!]$
3. $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^{n+1} n x^{2n+1}$.
4. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{4n} x^{4n-1}$.
5. $\sum_{n\geqslant 0} \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) x^n$.

Exercice 10: (Solution)

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.
Donner le rayon de convergence et calculer la somme des séries entières :

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n \cos(n\theta)}{n!} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n \sin(n\theta)}{n!}$$

Exercice 11: (Solution)

1. Déterminer un équivalent de $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ lorsque $n \to +\infty$.
2. Déterminer le rayon de convergence ainsi que la somme de la série entière :

$$\sum_{n\geqslant 1} a_n x^n.$$

3 Continuité de la fonction somme

Exercice 12: (Solution)

On considère la série entière $\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$ et on note f sa fonction somme.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière et l'ensemble de définition de f.
2. Calculer $f(x)$ pour tout $x \in]-R;R[$.
3. En déduire la nature et la somme des série numériques :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} \quad \text{et} \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}.$$

Exercice 13: (Solution)

On considère la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n(2n+1)}$ et on note f sa fonction somme.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière et l'ensemble de définition de f.
2. Calculer $f(x)$ pour tout $x \in]-R;R[$.
   On pourra décomposer en éléments simples $\frac{1}{2n(2n+1)}$
3. Calculer $f(1)$ et $f(-1)$.

Exercice 14: Calcul de sommes par changement de variable. (Solution)

On considère la série entière $\sum \frac{x^n}{2n+1}$ et f sa fonction somme.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière et l'ensemble de définition de f.
2. Soit $x \in]0;R[$. Calculer $f(x)$ à l'aide du changement de variable $x = t^2$.

3. Soit $x \in]-R;0[$. Calculer $f(x)$ à l'aide du changment de variable $x=-t^2$.
4. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

4 Développement en série entière

Exercice 15: Somme, produit, dérivation, intégration (Solution)

Déterminer un développement en série entière des fonctions suivantes au voisinage de 0 et préciser de rayon de convergence de la série entière obtenue.

1. $f(x)=\ln(2-x)$
2. $f(x)=\ln\left(\dfrac{1+x}{2-x}\right)$
3. $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$
4. $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$
5. $f(x)=\operatorname{sh}(x)\cos(x)$.
   En déduire les égalités suivantes :
   $$\sum_{k=0}^{2p}(-1)^k\binom{4p+1}{2k+1}=(-1)^p4^p$$
   $$\sum_{k=0}^{2p+1}(-1)^k\binom{4p+3}{2k+1}=2(-1)^p4^p.$$
6. $f(x)=\cos(x)\operatorname{ch}(x)$.
7. $f(x)=\dfrac{\ln(1-x)}{x-1}$
8. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x+1}$
9. $f(x)=\arcsin(x)$.
10. $f(x)=\arctan\left(\dfrac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right)$.
11. $f(x)=\arctan\dfrac{1}{1+x}$.
12. $f(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}dt$
13. $f(x)=\displaystyle\int_0^x \cos(t^2)dt$

Exercice 16: Séries entières et équations différentielles (Solution)

En utilisant la technique de l'équation différentielle, trouver les développements en série entières des fonctions suivantes.

1. $f(x)=\dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.
2. $f(x)=\arcsin^2(x)$.
3. $f(x)=\cos(x)\operatorname{ch}(x)$.
   vérifier que f est solution de l'équation différentielle $y^{(4)}+4y=0$.
4. $f(x)=\cos(\alpha\arcsin x)$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$.
   vérifier que f est solution d'une équation différentielle d'ordre 2.

5 Exercices de synthèse

Exercice 17: Équation différentielle et produit de Cauchy (Solution)

1. Déterminer le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction $f : x \mapsto e^{-x^2}\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt$:
   — via la technique de l'équation différentielle,
   — via un produit de Cauchy.
2. En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$,
   $$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k}\binom{2n}{n}=\frac{4^n}{2n+1}$$

Exercice 18: Prolongement $\mathscr{C}^\infty$ (Solution)

1. Montrer que la fonction $x\mapsto \frac{e^x-1}{x}$ peut-être prolongée en une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les dérivées successives de ce prolongement en 0.

Exercice 19: Théorème de cours ? (Solution)

1. Montrer que pour tout $\alpha>0$,
   $$\int_0^1\frac{dx}{1+x^\alpha}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n\alpha+1}$$
2. En déduire la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{2n+1}$.
3. Montrer que pour tout $\alpha<0$,
   $$\int_0^1\frac{x^\alpha dx}{1+x^\alpha}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{-n\alpha+1}.$$

Exercice 20: (Solution)

Soit $\theta\in\mathbb{R}$ et $x\in]-1;1[$.

1. Montrer que la série entière $\displaystyle\sum\frac{\sin(n\theta)x^n}{n}$ converge.

2. Déterminer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} x^n$.

Exercice 21: Suite récurrente (Solution)

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ \forall n \geqslant 0, a_{n+2} = a_{n+1} + \dfrac{a_n}{n+2}. \end{cases}$$

On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$.

1. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant a_n \leqslant n+2$.
   (b) En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$.
2. On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $g(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n+2} x^{n+2}$.
   (a) Justifier que f et g sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1;1[$.
   (b) Trouver une relation entre f et g.
   (c) Montrer que g est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 que l'on résoudra explicitement.
   (d) Donner une expression de $f(x)$.

Exercice 22: Équation différentielle du second ordre (Solution)

On considère l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre :

$$16(x^2 - x)y'' + (16x - 8)y' - y = 0\,(E).$$

On suppose que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est solution de (E) sur $]0;R[$ où R est le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = \dfrac{(4n-3)(4n-5)}{8n(2n-1)} a_{n-1}$.
2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.
3. On suppose que $a_0 = 1$. Déterminer a_n en fonction de n.
4. En utilisant la formule de Stirling, déterminer un équivalent de a_n lorsque $n \to +\infty$.

SOLUTIONS TRAVAUX DIRIGÉS : Séries entières

Solution Exercice 1. On note R le rayon de convergence à déterminer dans chacune des questions.

1. La série entière $\sum x^n$ converge si et seulement si $x \in]-1;1[$: $R=1$.
2. La série $\sum nx^n$ a le même rayon de convergence que la série x^n par le cours : $R=1$.
3. La série $\sum \frac{1}{n^3}x^n$ a le même rayon de convergence que les séries $\sum \frac{n}{n^3}x^n, \sum \frac{n}{n^2}x^n, \sum \frac{n}{n}x^n$: $R=1$.
4. La série $\sum \cos(n)x^n$ a pour rayon de convergence $R=1$ car
   — pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\cos(n)| \leqslant 1$ donc $R \geqslant 1$ par comparaison car la série $\sum x^n$ qui a pour rayon de convergence $R'=1$.
   — De plus la série diverge grossièrement pour $x=1$ i.e. $\sum \cos(n)1^n$ diverge grossièrement.
   En effet, la suite $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge par vers 0 lorsque $n \to +\infty$
   Sinon on obtiendrait :
   * d'une part $\cos(2n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ comme limite d'une sous-suite.
   * d'autre part $\cos(2n) = 2\cos^2(n) - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1$.

   D'où la contradiction $0=-1$.
   La série $\sum \cos(n)1^n$ étant divergente, on a $R \leqslant 1$.
   En conclusion : $R=1$.
5. La série entière $\sum \sin(n)x^n$ a pour rayon de convergence $R=1$ car
   — $|\sin(n)| \leqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc par comparaison $R \geqslant R' = 1$ où R' est le rayon de convergence de la série entière $\sum 1x^n$.
   — La série entière $\sum \sin(n)1^n$ diverge grossièrement. En effet, la suite $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge par vers 0 lorsque $n \to +\infty$. Sinon on obtiendrait :
   * $\cos(2n) = 1 - 2\sin^2(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, puis
   * $\cos^2(n) = \frac{\cos(2n)+1}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$.
   * $\cos^2(n) = 1 - \sin^2(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

   D'où la contradiction $1 = \frac{1}{2}$.

   La série $\sum \cos(n)1^n$ étant divergente, on a $R \leqslant 1$.
   En conclusion : $R=1$.
6. — Si $\alpha < 0$, $|\arctan(n^\alpha)| \underset{n\to+\infty}{=\sim} |n^\alpha|$ car $n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   Les séries $\sum \arctan(n^\alpha)x^n$ et $\sum n^\alpha x^n$ ont le même rayon de convergence.
   On utilise la règle de d'Alembert ; pour $x \neq 0$:
   $$\left|\frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha}\frac{x^{n+1}}{x^n}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |x|.$$
   — Si $|x|<1$ la série entière $n^\alpha x^n$ est absolument convergente.
   — Si $|x|>1$ la série entière $n^\alpha x^n$ est divergente.
   Ainsi, $R=1$.
   — Si $\alpha = 0$, $\arctan(n^0) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ on obtient la série entière $\sum \frac{\pi}{4}x^n$ qui a pour rayon de convergence $R=1$.
   — Si $\alpha > 0$, on utilise la formule : $\arctan(n^\alpha) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$.
   Les séries $\sum \arctan(n^\alpha)x^n$ et $\sum \frac{\pi}{2}x^n$ ont le même rayon de convergence : $R=1$.
7. La série entière $\sum n!x^n$ a pour rayon de convergence $R=0$.
   En effet, si $x \neq 0$, la règle de d'Alembert s'applique :
   $$\left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right| = (n+1)|x| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$
   La série entière est donc divergente pour tout $x \neq 0$: $\forall x \neq 0, R \leqslant |x|$: $R=0$.
8. La série entière $\sum \frac{x^n}{n!}$ a pour rayon de convergence $R=+\infty$: il s'agit de la série exponentielle convergente sur $\mathbb{R}$.
   On le retrouve via la règle de d'Alembert : pour tout $x \neq 0$:
   $$\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{x^n}\right| = \frac{|x|}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
   Ainsi, la série entière est convergente pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ (également en $x=0$) : $\forall x \neq 0, |x| \leqslant R$: $R=+\infty$.
9. On raisonne par équivalence des valeurs absolues des termes généraux :
   $$\left|\frac{\text{ch}(n)}{\text{sh}^2(n)}\right| = \frac{e^n+e^{-n}}{2}\left(\frac{2}{e^n-e^{-n}}\right)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^n}{2}\frac{4}{e^{2n}} = \frac{2}{e^n}.$$
   La série entière $\sum \frac{\text{ch}(n)}{\text{sh}^2(n)}x^n$ a le même rayon de convergence que la série $\sum \frac{2}{e^n}x^n$.
   On reconnait, au facteur 2 près, la série géométrique $\sum \left(\frac{x}{e}\right)^n$ qui converge si et seulement si $\left|\frac{x}{e}\right| < 1 \iff |x| < e$.
   Ainsi, $R=e$.

10. On utilise la règle de d'Alembert ; pour tout $x \neq 0$,

$$\left|\frac{((n+1)!)^2 x^{n+1}}{(2(n+1))!}\frac{(2n)!}{(n!)^2 x^n}\right| = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}|x| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{|x|}{4}.$$

— Si $\frac{|x|}{4} < 1 \iff |x| < 4$ la série est $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$ est absolument convergente : $R \geqslant 4$.

— Si $\frac{|x|}{4} > 1 \iff |x| > 4$ la série est $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$ est divergente : $R \leqslant 4$.

En conclusion : $R = 4$.

11. On utilise la règle de d'Alembert, pour tout $x \neq 0$,

$$\left|\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\right| = (n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

car $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e$.

Ainsi, la série $\sum n^n x^n$ est divergente pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $R = 0$.

12. On considère la série entière $\sum \frac{\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n}x^n$.

Elle a le même rayon de convergence que la série $\sum \frac{n\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n}x^n$.

— On a $\forall n \in \mathbb{N}, \left|\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right| \leqslant 1$.
Le rayon de convergence R de la série $\sum \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)x^n$ vérifie donc $R \geqslant R' = 1$ où R' est le rayon de convergence de la série entière $\sum x^n$.

— De plus, pour $x = 1$ la série entière $\sum \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)1^n$ est grossièrement divergente car $\left(\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 : en effet, $\cos(4n\frac{\pi}{2}) = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \neq 0$. L'une de ses sous-suites ayant une limite non nulle, la suite $(\cos(n\frac{\pi}{2}))_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut converger vers 0.

13. On revient à la définition : $R = \sup\{r \geqslant 0 : (a_n r^n)_n \text{ est bornée}\}$.
La suite $(a_n r^n)$ est bornée si et seulement si les sous-suites $(a_{2p}r^{2p})$ et $(a_{2p+1}r^{2p+1})$ sont bornées.
On constate que $a_{2p}r^{2p} \underset{p\to+\infty}{\sim} e^{-2}r^{2p}$:
$(a_{2p}r^{2p})_p$ est bornée si et seulement si $r \leqslant 1$.
On constate que $a_{2p+1}r^{2p+1} = (3r)^{2p+1}$:
$(a_{2p+1}r^{2p+1})$ est bornée si et seulement si $3r \leqslant 1 \iff r \leqslant \frac{1}{3}$.
Finalement, on en déduit que $R \leqslant \frac{1}{3}$.
De plus $\frac{1}{3} \in \{r \geqslant 0 : (a_n r^n)_n \text{ est bornée}\}$ donc $R = \max\{r \geqslant : (a_n r^n)_n \text{ est bornée}\} = \frac{1}{3}$.

14. On raisonne par équivalence :

$$\left|\frac{n+\ln(n)}{n^2+2^n}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2^n}.$$

La série entière $\sum \frac{n+\ln(n)}{n^2+2^n}$ a donc le même rayon de convergence que la série entière $\sum \frac{n}{2^n}x^n$ et par multiplication par n, le même rayon de convergence que la série entière $\sum \frac{1}{2^n}x^n$.

On reconnait une série géoémtrique de raison $\frac{x}{2}$ qui a pour rayon de convergence $R = 2$.

15. On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} &= \exp\left[n^2\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right] = \exp\left[n^2\left(-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right] \\ &= \exp\left(-n+o\left(1\right)\right) = e^{-n}e^{o(1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-n}.\end{aligned}$$

La série entière $\sum \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$ a le même rayon de convergence que la série entière $\sum e^{-n}x^n$.

On reconnaît une série géométrique de raison $e^{-1}x$ dont le rayon de convergence est $R = e$.

□

Solution Exercice 2. On note R le rayon de convergence de chacune des séries entières étudiées dans les questions suivantes.

1. La série entière $\sum \frac{\cos(n)}{n}z^n$ a le même rayon de convergence que la série entière $\sum \cos(n)z^n$ par multiplication par n.
La majoration $|\cos(n)| \leqslant 1$ montre que $R \geqslant R' = 1$ où R' est le rayon de convergence de la série géométrique $\sum z^n$.
Pour $z = 1$ la série $\sum \cos(n)1^n$ est grossièrement divergente : $R \leqslant 1$.
En conclusion : $R = 1$.

2. La série $\sum n!z^{2n}$ est la série entière $\sum a_n z^n$ avec $a_{2p} = p!$ et $a_{2p+1} = 0$.
On applique la règle de d'Alembert à la série numérique $\sum n!z^{2n}$: pour tout $z \neq 0$,

$$\left|\frac{(n+1)!z^{2(n+1)}}{n!z^n}\right| = (n+1)|z|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

La série $\sum n!z^{2n}$ est donc divergente pour tout $z \neq 0$ ainsi, le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est nul : $R = 0$.

3. La série $\sum \frac{z^{n!}}{n!}$ est la série entière $\sum a_n z^n$ avec
$$a_0 = 0, a_1 = \frac{1}{1!}, a_2 = \frac{1}{2!}, a_3 = a_4 = a_5 = 0, a_6 = a_{3!} = \frac{1}{3!}, \dots$$
c'est-à-dire en notant $\mathcal{N} = \left\{ \prod_{k=1}^{n} k : n \in \mathbb{N} \right\}$:
$$a_n = \frac{1}{n!} \text{ si } n \in \mathcal{N} \quad \text{et} \quad a_n = 0 \text{ sinon.}$$
On applique la règle de d'Alembert à la série numérique $\sum n!z^{n!}$:
$$\left|\frac{z^{(n+1)!}}{(n+1)!}\frac{n!}{z^{n!}}\right| = \left|\frac{1}{n+1} z^{n!(n+1-1)}\right| = \frac{1}{n+1}|z|^{n(n!)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad |z| > 1 \\ 0 & \text{si} \quad |z| \leqslant 1 \end{cases}$$
On en déduit que $R = 1$.

4. On applique la règle de d'Alembert à la série numérique $\sum 5^n z^{2n+1}$; pour tout $z \neq 0$:
$$\left|\frac{5^{n+1} z^{2n+3}}{5^n z^{2n+1}}\right| = 5|z|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 5|z|^2$$
— Si $5|z|^2 < 1 \iff |z| < \frac{1}{5}$ alors la série $\sum 5^n z^{2n+1}$ converge.
— Si $5|z|^2 > 1 \iff |z| > \frac{1}{5}$ alors la série $\sum 5^n z^{2n+1}$ diverge.
En conclusion : $R = \frac{1}{5}$.

5. On cherche un équivalent de $a_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{1+k^2}$ qui est le reste de rang n de la série numérique $\sum \frac{1}{1+n^2}$ convergente car $\frac{1}{1+n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} > 0$.
La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est décroissante, continue, positive sur $\mathbb{R}_+$ donc la série $\sum f(k)$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ sont de même nature. De plus, pour tout $k \geqslant 1$:
$$\int_k^{k+1} f(t)dt \leqslant \int_k^{k+1} f(k)dt = f(k) = \int_{k-1}^{k} f(k)dt \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)dt$$
ce qui donne après sommation pour $k \geqslant n+1$ avec $n \geqslant 0$, par convergence de la série et des intégrales en jeu :
$$\frac{\pi}{2} - \arctan(n+1) = \int_{n+1}^{+\infty} f(t)dt \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leqslant \int_n^{+\infty} f(t)dt = \frac{\pi}{2} - \arctan(n).$$
Cet encadrement fournit l'équivalent souhaité :
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{1+k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \arctan\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$
Ainsi, $|a_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
La série entière $\sum a_n z^n$ a donc le même rayon de convergence que la série entière $\sum \frac{z^n}{n}$ ou encore par multiplication par n, même rayon de convergence que la série entière $\sum z^n$, c'est à dire $R = 1$.

□

Solution Exercice 3.

1. (a) La série $\sum a_n z^{2n}$ est la série entière $\sum b_n z^n$ avec $b_{2p} = a_p$ et $b_{2p+1} = 0$. Notons R' sont rayon de convergence.
Afin de déterminer le rayon de convergence R' de la série entière $\sum a_n z^{2n}$, on ne peut pas utiliser la règle de d'Alembert les termes de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'étant pas explicites. On revient à la définition :
$$R' = \sup\{r \geqslant 0 : (b_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée}\} = \sup\{r \geqslant 0 : (a_n r^{2n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée}\}.$$
— Si $r \in [0; \sqrt{R}[$ alors $r^2 < R$ donc la suite $(a_n r^{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
Ainsi, $R' \geqslant \sqrt{R}$.
— Si $r > \sqrt{R}$ alors $r^2 > R$ donc la suite $(a_n r^{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée.
Ainsi, $R' \leqslant \sqrt{R}$.
En conclusion : $R' = \sqrt{R}$.

(b) Notons R' le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$.
Soit $r \geqslant 0$. La suite $\left(\frac{a_n}{n!} r^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
En effet pour tout $\rho \in]0; R[$, la suite $(a_n \rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, notons M un majorant :
$$\left|\frac{a_n}{n!} r^n\right| = \left|a_n \rho^n \frac{1}{n!}\left(\frac{r}{\rho}\right)^n\right| = |a_n \rho^n| \times \left|\frac{1}{n!}\left(\frac{r}{\rho}\right)^n\right| \leqslant M \frac{1}{n!}\left(\frac{r}{\rho}\right)^n.$$
La série $\sum \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini. Ainsi,
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{r}{\rho}\right)^n = e^{\frac{r}{\rho}}.$$
La suite $\left(\frac{1}{n!}\left(\frac{r}{\rho}\right)^n\right)$ est donc bornée et par suite $\left(\frac{a_n}{n!} r^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi.
On en déduit que $R' \geqslant r$ pour tout $r \geqslant 0$: $R' = +\infty$.

2. On note R_u le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n z^n$.
   On note également, R_a, R_b les rayons de convergence des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$.
   — On a $|a_n| \leqslant |u_n|$ et $|b_n| \leqslant |u_n|$ donc $R_u \leqslant R_a$ et $R_u \leqslant R_b$.
   Ainsi $R_u \leqslant \min(R_a; R_b)$.
   — Si $|z| < \min(R_a; R_b)$ les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ convergent. Ainsi, la combinaison linéaire $\sum (a_n + ib_n) z^n$ est convergente : la série $\sum u_n a^n$ converge. Ainsi, $R_u \geqslant \min(R_a; R_b)$.
   En conclusion : $R_u = \min(R_a; R_b)$.

□

Solution Exercice 4.

1. On utilise la règle de d'Alembert, pour $x \neq 0$:

$$\left| \frac{x^{n+1}}{\ln((n+1)!)} \frac{\ln(n!)}{x^n} \right| = |x| \frac{\ln(n!)}{\ln((n+1)n!)} = |x| \frac{\ln(n!)}{\ln(n+1) + \ln(n!)} \quad (1)$$
$$= |x| \left(1 - \frac{\ln(n+1)}{\ln(n+1) + \ln(n!)} \right) \quad (2)$$

On a $\ln(n!) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \geqslant (n-1)\ln(2)$ donc $\ln(n+1) = o \ln(n!)$ car

$$0 \leqslant \frac{\ln(n+1)}{\ln(n!)} \leqslant \frac{\ln(n+1)}{(n-1)\ln(2)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On obtient $\left| \frac{x^{n+1}}{\ln((n+1)!)} \frac{\ln(n!)}{x^n} \right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |x|$.
La règle de d'Alembert permet de conclure :
— Si $|x| < 1$ alors la série entière $\sum \frac{x^n}{\ln(n!)}$ converge absolument : $R \geqslant 1$.
— Si $|x| > 1$ alors la série entière $\sum \frac{x^n}{\ln(n!)}$ diverge : $R \leqslant 1$.
En conclusion : $R = 1$.

2. — Pour $x = 1$, la série $\sum \frac{1^n}{\ln(n!)}$ diverge.
   En effet, pour tout $n \geqslant 2$, $\ln(n!) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \leqslant n \ln(n)$.
   Par conséquent, $\frac{1}{\ln(n!)} \geqslant \frac{1}{n \ln(n)}$.
   La série $\sum \frac{1}{n \ln(n)}$ est divergente par comparaison série-intégrale :
   La fonction $x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)}$ est décroissante, continue, positive sur $[2; +\infty[$ (dérivée $f'(x) = -\frac{\ln(x)+1}{x^2 \ln^2(x)} \leqslant 0$).
   L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x \ln(x)} dx$ est divergente. Pour tout $A > 1$:

$$\int_2^A \frac{1}{x \ln(x)} dx = [\ln |\ln(x)|]_2^A \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

   On en déduit qu'effectivement la série $\sum \frac{1}{n \ln(n)}$ diverge et par comparaison de série à termes positifs, la série $\sum \frac{1}{\ln(n!)}$ diverge.
   — Pour $x = -1$, la série $\sum \frac{(-1)^n}{\ln(n!)}$ est convergente par le critère spécial des séries alternées.

□

Solution Exercice 5. On note R le rayon de convergence de chacune des séries entières étudiées dans cet exercice.

1. On détermine un équivalent de la suite des coefficients de la série entière $\sum \arccos\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) z^n$.
   On a $\sin(x) \underset{x\to0}{\sim} x$ et $\arccos\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \arccos(1) = 0$ donc

$$\arccos\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sin \arccos\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \sqrt{1 - \cos^2 \arccos\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)}$$
$$= \sqrt{\frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^4}}$$
$$\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{n}$$

   La série $\sum \arccos\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) z^n$ a donc par équivalence le même rayon de convergence que la série entière $\sum \frac{\sqrt{2}}{n} z^n$; donc par multiplication par n, même rayon de convergence que la série entière $\sum \sqrt{2} z^n$.
   On reconnaît, au facteur $\sqrt{2}$ près, la série géométrique de raison x : $R = 1$.

2. On détermine un équivalent, en moduke, de la suite des coefficients de la série entière $\sum \cos\left(\pi\sqrt{n^2 + n + 1}\right) z^n$.

$$\begin{aligned}
\cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right) &= \cos\left(n\pi\sqrt{1+\frac{n+1}{n^2}}\right)\\
&= \cos\left(n\pi\left[1+\frac{\epsilon_n}{2}-\frac{\epsilon_n^2}{8}+o(\epsilon_n^2)\right]\right)\\
&= \cos\left(n\pi+\frac{n\pi\epsilon_n}{2}-\frac{n\pi\epsilon_n^2}{8}+o(n\epsilon_n^2)\right)
\end{aligned}$$

avec

$$\epsilon_n = \frac{n+1}{n^2} = \frac{1}{n}+\frac{1}{n^2} \Longrightarrow n\epsilon_n = 1+\frac{1}{n}$$

$$\epsilon_n^2 = \frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}+\frac{1}{n^4} \Longrightarrow n\epsilon_n^2 = \frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

On obtient

$$\begin{aligned}
\cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right) &= (-1)^n\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
&= (-1)^{n+1}\sin\left(\frac{3\pi}{8n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)
\end{aligned}$$

On obtient

$$|\cos(\pi\sqrt{n^2+n+1})| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3\pi}{8n}.$$

La série entière $\sum \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right) z^n$ a donc le même rayon de convergence que la série entière $\sum \frac{3\pi}{8n} z^n$ soit, après multiplication par n, le même rayon de convergence que la série entière $\sum \frac{3\pi}{8} z^n$: $R=1$.

3. On déterminer un équivalent, en module, de la suite des coefficients de la série entière $\sum \left(\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n}\right) z^n$.

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n} &= n^{\frac{1}{n}}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}-1\right)\\
&= n^{\frac{1}{n}}\left[\exp\left(\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)-1\right]\\
&= n^{\frac{1}{n}}\left(\exp\left[\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]-1\right)\\
&= n^{\frac{1}{n}}\left[\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]
\end{aligned}$$

Or $n^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n}\ln(n)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ par croissances comparées, on obtient :

$$\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$

La série entière $\sum(\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n})z^n$ a donc le même rayon de convergence que la série entière $\sum \frac{1}{n^2}z^n$ soit, par multiplications successives par n, le même rayon de convergence que les séries entières $\sum \frac{z^n}{n}$ et $\sum z^n$.

En conclusion : $R=1$.

4. La série entière $\sum \frac{\text{ch}(n)}{n}z^n$ a le même rayon de convergence que la série entière $\sum \text{ch}(n)z^n$.

Or $\text{ch}(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^n}{2}$.

La série entière $\sum \frac{\text{ch}(n)}{n}z^n$ a le même rayon de convergence que la série entière $\sum \frac{e^n}{2}z^n$.

On reconnaît au facteur $\frac{1}{2}$ près, la série entière géométrique de raison $\frac{e}{2}$: $\sum(ez)^n$ converge si et seulement si $|ez|<1 \Longleftrightarrow |z|<\frac{1}{e}$.

En conclusion : $R=\frac{1}{e}$.

5. On déterminer un équivalent, en module, de la suite des coefficients de la série entière $\sum \frac{n^2}{3^n+n}z^n$.

$$\frac{n^2}{3^n+n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2}{3^n}.$$

La série entière $\sum \frac{n^2}{3^n+n}z^n$ a donc le même rayon de convergence que la série entière $\sum \frac{n^2}{3^n}z^n$ soit, par divisions successives par n, le même rayon de convergence que la série entière $\sum \frac{1}{3^n}z^n$.

$\sum \frac{1}{3^n}z^n$ converge si et seulement si $\left|\frac{z}{3}\right|<1 \Longleftrightarrow |z|<3$.

En conclusion : $R=3$.

6. Pour tout $z \neq 0$, la règle de d'Alembert donne :

$$\left|\left(\frac{1}{1+\sqrt{n+1}}\right)^{n+1} z^{n+1}\right| \times \left|\frac{(1+\sqrt{n})^n}{z^n}\right| = \frac{|z|}{1+\sqrt{n+1}} \underbrace{\left(\frac{1+\sqrt{n}}{1+\sqrt{n+1}}\right)^n}_{\leqslant 1}$$

$$\leqslant \frac{|z|}{1+\sqrt{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En conclusion : $R = +\infty$.

$\square$

Solution Exercice 6.

1. La série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} nx^n$, par multiplication par n, a le même rayon de convergence que la série entière $\sum x^n$: $R = 1$.

   Pour tout $x \in]-1;1[$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} nx^n = x\sum\limits_{n=0}^{+\infty} nx^{n-1} = x\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$.
   On reconnait la dérivée de la série géométrique de raison $x \in]-1;1[$.
   Par le théorème de dérivation terme à terme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d}{dx}(x^n) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

   On en déduit que pour tout $x \in]-1;1[$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

2. La série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} n^2x^n$, par multiplications successives par n, a le même rayon de convergence que la série entière $\sum x^n$: $R = 1$.
   Pour tout $x \in]-1;1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(n(n-1)+n)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^n + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n}_{\text{CV cf.1.}}$$

$$= x^2\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} + \underbrace{\frac{x}{(1-x)^2}}_{\text{cf. 1.}}$$

   Le premier terme ci-dessus est, au facteur x^2 près, la dérivée seconde la série géométrique de raison x. Par le théorème de dérivation terme à terme, on a

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d^2}{dx^2}(x^n) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d}{dx}(x^n)\right) = \frac{d^2}{dx^2}\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{2}{(1-x)^3}$$

   On en déduit que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2x^n = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2}.$$

3. La série entière $\sum \frac{1}{n}x^n$ a le même rayon de convergence que la série $\sum x^n$: $R = 1$.
   Pour tout $x \in]-1;1[$, par le théorème de primitivation d'une série entière :

$$\sum_{n=1} \frac{1}{n}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^x t^n dt\right) = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} t^n\right) dt = \int_0^x \frac{1}{1-t}dt = [-\ln(1-t)]_0^x = -\ln(1-x).$$

4. La série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{n^2+n+1}{n}x^n$ a le même rayon de convergence que la série $\sum nx^n$ par équivalence : $\frac{n^2+n+1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.
   Par multiplication par n, la série entière $\sum nx^n$ a le même rayon de convergence que la série $\sum x^n$.
   La série entière $\sum \frac{n^2+n+1}{n}x^n$ a donc pour rayon de convergence $R = 1$.
   Soit $x \in]-1;1[$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+n+1}{n}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)x^n + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} = \sum_{n=2}^{+\infty} nx^{n-1} - \ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} - 1 - \ln(1-x) = \frac{1}{(1-x)^2} - 1 - \ln(1-x)$$

5. La série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^3+n+1}{n+1}x^n$ a le même rayon de convergence que la série entière $\sum n^2x^n$ et, par multiplication successive par n, a le même rayon de convergence que la série entière $\sum x^n$: $R=1$.
Soit $x \in]-1;1[$.
Pour calculer la somme de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^3+n+1}{n+1}x^n$, on fait apparaitre les dérivées successives ou les primitives de la série géométrique de raison $x \in]-1;1[$.
La division euclidienne de n^3+n+1 donne :
$$n^3+n+1 = (n^2-n+2)(n+1)-1,$$
donc pour tout $x \in]-1;1[\backslash\{0\}$:
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3+n+1}{n+1}x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n^2-n+2)(n+1)-1}{n+1}x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n^2-n+2)x^n - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty}x^n - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}x^n \\ &= x^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} + 2\sum_{n=0}^{+\infty}x^n - \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1} \\ &= \frac{2x^2}{(1-x)^2} + \frac{2}{1-x} + \frac{1}{x}\ln(1-x)\end{aligned}$$
Pour $x=0$, on trouve $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3+n+1}{n+1}0^n = 1$.

> **Remarques**
>
> En prolongeant la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{x}$ par continuité en 0 (en posant $f(0) = -1$), la formule établie ci-dessus est alors valable pour tout $x \in]-1;1[$.

6. La série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\text{ch}(n)}{n}x^n$ a le même rayon de convergence que la série entière $\sum \frac{e^n}{2}x^n$ par multiplication par n et par équivalence :
$$\text{ch}(n) = \frac{e^n+e^{-n}}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^n}{2}.$$
Au facteur $\frac{1}{2}$ près, on reconnait la série géométrique $\sum(ex)^n$ qui converge si et seulement si $|ex|<1 \iff |x|<\frac{1}{e}$: $R=\frac{1}{e}$.
Pour tout $x \in]-\frac{1}{e};\frac{1}{e}[$: calcul à compléter

□

Solution Exercice 7.

1. La série entière $\sum \frac{n^3+n+3}{n+1}x^n$ a le même rayon de convergence que la série entière $\sum n^2x^n$ par équivalence $\frac{n^3+n+3}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$.
Par multiplications successives par n, la série entière $\sum n^2x^n$ a le même rayon de convergence que la série entière $\sum x^n$: $R=1$.
Soit $x\in]-1;1[$. Pour calculer la somme de la série entière $\sum \frac{n^3+n+3}{n+1}x^n$, on fait apparaitre les dérivées successives et les primitives de la série géométrique de raison x.
La division euclidienne de n^3+n+3 par $n+1$ donne :
$$n^3+n+3 = (n+1)(n^2-n+2)+1.$$
Pour tout $x \in]-1;1[\backslash\{0\}$:
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3+n+3}{n+1}x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n^2-n+2)x^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}x^n \\ &= x^2\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} + \frac{2}{1-x} + \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}\end{aligned}$$
Or :
— par le théorème de dérivation terme à terme :
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{d^2}{dx^2}(x^n) = \frac{d^2}{dx^2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right) \\ &= \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{2}{(1-x)^3}\end{aligned}$$
— Par le théorème de primitivation d'une série entière :
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1} &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^x t^n dt\right) = \int_0^x\left(\sum_{n=0}^{+\infty}t^n\right)dt \\ &= \int_0^x \frac{1}{1-t}dt = -\ln(1-x)\end{aligned}$$

On obtient alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3+n+1}{n+1} x^n = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{2}{1-x} - \frac{1}{x}\ln(1-x).$$

Formule encore valable en $x = 0$ à condition de prolonger la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{x}$ par continuité en $x = 0$, en posant $f(0) = -1$.

2. La série entière $\sum \frac{n^2+n+1}{2^n} x^n$ a le même rayon de convergence que la série entière $\sum \frac{n^2}{2^n} x^n$ par équivalence $\frac{n^2+n+1}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2}{2^n}$.

   Par multiplications successives par n, la série entière $\sum \frac{n^2}{2^n} x^n$ a le même rayon de convergence que la série entière $\sum \frac{1}{2^n} x^n$.

   On reconnait la série géométrique de raison $\frac{x}{2}$ qui est convergente si et seulement si $\left|\frac{x}{2}\right| < 1 \iff |x| < 2$.

   Pour $x \in]-2;2[$, on note $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+n+1}{2^n} x^n$ la fonction somme.

   Soit $x \in]-2;2[$. On note $t = \frac{x}{2}$, et on calcule $f(x) = f(2t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n^2+n+1)t^n$.

   Par le théorème de dérivation terme à terme :

$$\begin{aligned}
f(2t) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n^2+n+1)t^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)t^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} nt^n + \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \\
&= t^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)t^{n-2} + 2t\sum_{n=1}^{+\infty} nt^{n-1} + \frac{1}{1-t} \\
&= t^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{d^2}{dt^2}(t^n) + 2t\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d}{dt}(t^n) + \frac{1}{1-t} \\
&= t^2 \frac{d^2}{dt^2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} t^n\right) + 2t\frac{d}{dt}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} t^n\right) + \frac{1}{1-t} \\
&= t^2 \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{1-t}\right) + 2t\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1-t}\right) + \frac{1}{1-t} \\
&= \frac{2t^2}{(1-t)^3} + \frac{2t}{(1-t)^2} + \frac{1}{1-t}.
\end{aligned}$$

   On obtient, puisque $x = 2t \iff t = \frac{x}{2}$:

$$f(x) = \frac{x^2}{2}\frac{1}{(1-\frac{x}{2})^3} + x\frac{1}{(1-\frac{x}{2})^2} + \frac{1}{1-\frac{x}{2}}.$$

3. La série entière $\sum \frac{1}{n(n+2)} x^n$ a le même rayon de convergence que la série entière $\sum \frac{1}{n^2} x^n$ par équivalence $\frac{1}{n(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$.

   Par multiplications successives, la série entière $\sum \frac{1}{n^2} x^n$ a la même rayon de convergence que la série entière $\sum x^n$: $R = 1$. Soit $x \in]-1;1[\setminus\{0\}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)} x^n &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2(n+2)} x^n \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \frac{1}{2}\sum_{n=3} \frac{1}{n} x^{n-2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \frac{1}{2x^2}\left(\sum_{n=1} \frac{1}{n} x^n - x - \frac{x^2}{2}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\ln(1-x) - \frac{1}{2x^2}(-\ln(1-x) - x - \frac{x^2}{2})
\end{aligned}$$

   Pour $x = 0$, on trouve $\sum_{n=1}^{+\infty} 0^n = 0$.

4. La série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{2n+1}{2n+3} x^n$ a le même rayon de convergence que la série entière $\sum x^n$ par équivalence $\frac{2n+1}{2n+3} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$.

   — Soit $x \in]0;1[$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+1}{2n+3} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+3-2}{2n+3} x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+3} x^n \\
&= \frac{1}{1-x} - \frac{2}{\sqrt{x}^3}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+3} \sqrt{x}^{2n+3} \\
&= \frac{1}{1-x} - \frac{2}{\sqrt{x}^3}\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^{\sqrt{x}} t^{2n+2}\right) dt,
\end{aligned}$$

On en déduit alors le par théorème de primitivation d'une série entière :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2n+1}{2n+3}x^n &= \frac{1}{1-x}-\frac{2}{\sqrt{x}^3}\int_0^{\sqrt{x}}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}t^{2n+2}\right)dt\\ &= \frac{1}{1-x}-\frac{2}{\sqrt{x}^3}\int_0^{\sqrt{x}}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(t^2)^{n+1}\right)dt\\ &= \frac{1}{1-x}-\frac{2}{\sqrt{x}^3}\int_0^{\sqrt{x}}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}(t^2)^{n}\right)dt\\ &= \frac{1}{1-x}-\frac{2}{\sqrt{x}^3}\int_0^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{1-t^2}-1\right)dt\\ &= \frac{1}{1-x}-\frac{2}{\sqrt{x}^3}\int_0^{\sqrt{x}}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)dt+\frac{2}{x}\\ &= \frac{1}{1-x}-\frac{1}{\sqrt{x}^3}\ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)+\frac{2}{x}.\end{aligned}$$

Remarques

On peut expliciter plus encore le changement de variable

$$x=t^2\in]0;1[\iff t=\sqrt{x}\in]0;1[$$

en posant pour tout $x\in]0;1[$,

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2n+1}{2n+3}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2n+1}{2n+3}t^{2n}=f(t^2).$$

Le calcul de $f(t^2)$ se mène alors comme suit :

$$\begin{aligned}f(t^2)&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2n+1}{2n+3}t^{2n}=\sum_{n=0}^{+\infty}t^{2n}-2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{2n}}{2n+3}\\ &=\frac{1}{1-t^2}-\frac{2}{t^3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{2n+3}}{2n+3}=\frac{1}{1-t^2}-\frac{2}{t^3}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^t u^{2n+2}du\\ &=\frac{1}{1-t^2}-\frac{2}{t^3}\int_0^t\sum_{n=0}^{+\infty}(u^2)^{n+1}du=\frac{1}{1-t^2}-\frac{2}{t^3}\int_0^t\sum_{n=1}^{+\infty}(u^2)^{n}du\\ &=\frac{1}{1-t^2}-\frac{2}{t^3}\int_0^t\left(\frac{1}{1-u^2}-1\right)du=\frac{1}{1-t^2}-\frac{1}{t^3}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)+\frac{2}{t^2}\end{aligned}$$

On en déduit, comme ci-dessus, puisque $t=\sqrt{x}\iff x=t^2$:

$$f(x)=f(t^2)=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{\sqrt{x}^3}\ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)+\frac{2}{x}.$$

— Soit maintenant $x\in]-1;0[$, on a $x=-(\sqrt{-x})^2$, donc $x^n=(-1)^n\sqrt{-x}^{2n}$

Remarques

On peut également expliciter plus encore le changement de variable $t=\sqrt{-x}\iff t^2=-x$.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2n+1}{2n+3}x^n&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2n+3-2}{2n+3}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n-2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2n+3}x^n\\ &=\frac{1}{1-x}-2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2n+3}(-1)^n\sqrt{-x}^{2n}\\ &=\frac{1}{1-x}-2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+3}\left(\frac{1}{\sqrt{-x}^3}\right)(\sqrt{-x})^{2n+3}\\ &=\frac{1}{1-x}-\frac{2}{\sqrt{-x}^3}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\int_0^{\sqrt{-x}}t^{2n+2}\right)dt\\ &=\frac{1}{1-x}+\frac{2}{\sqrt{-x}^3}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}\left(\int_0^{\sqrt{-x}}t^{2n+2}\right)dt\end{aligned}$$

On en déduit alors par le théorème de primitivation d'une série entière :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2n+1}{2n+3}x^n&=\frac{1}{1-x}+\frac{2}{\sqrt{-x}^3}\int_0^{\sqrt{-x}}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}t^{2n+2}\right)dt\\ &=\frac{1}{1-x}+\frac{2}{\sqrt{-x}^3}\int_0^{\sqrt{-x}}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-t^2)^{n+1}\right)dt\\ &=\frac{1}{1-x}+\frac{2}{\sqrt{-x}^3}\int_0^{\sqrt{-x}}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}(-t^2)^{n}\right)dt\\ &=\frac{1}{1-x}+\frac{2}{\sqrt{-x}^3}\int_0^{\sqrt{-x}}\left(\frac{1}{1+t^2}-1\right)dt\\ &=\frac{1}{1-x}+\frac{2}{\sqrt{-x}^3}\arctan(\sqrt{-x})+\frac{2}{x}\end{aligned}$$

— Pour $x = 0$ la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+1}{2n+3} 0^n$ est égale à $\frac{1}{3}$.

□

***Solution Exercice** 8.*

1. La série entière $\sum \frac{n^2+n+3}{n!} x^n$ a le même rayon de convergence que la série entière $\sum \frac{n^2}{n!} x^n$ par équivalence

$$\frac{n^2+n+3}{n!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2}{n!}.$$

Par multiplications successives par n, la série entière $\sum \frac{n^2}{n!} x^n$ a le même rayon de convergence que la série exponentielle $\sum \frac{x^n}{n!}$: $R = +\infty$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+n+3}{n!} x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n+1)}{n!} x^n + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{(n-1)!} + 3e^x \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{(n-1)!} x^n + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} + 3e^x \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n-1}{(n-1)!} x^n + 2x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + 3e^x \\
&= x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} x^{n-2} + 2x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} + 3e^x \\
&= x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n + 2x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} + 3e^x \\
&= (x^2+2x+3)e^x.
\end{aligned}$$

2. La série entière $\sum \frac{n^2+2n-1}{(n+1)!} x^n$ a le même rayon de convergence que les séries entières $\sum \frac{n^2}{(n+1)n!} x^n$ et $\sum \frac{n}{n!} x^n$ par équivalence :

$$\frac{n^2+2n-1}{(n+1)!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2}{(n+1)!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{n!}.$$

Par multiplication par n, la série entière $\sum \frac{n}{n!} x^n$ a le même rayon de convergence que la série exponentielle $\sum \frac{x^n}{n!}$: $R = +\infty$. Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+2n-1}{(n+1)!} x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)^2-2}{(n+1)!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!} x^n - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n!} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} - \frac{2}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \\
&= x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + e^x - \frac{2}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} + e^x - \frac{2}{x}(e^x - 1) \\
&= xe^x + e^x - \frac{2}{x}(e^x - 1)
\end{aligned}$$

Pour $x = 0$ la série entière vaut -1.

3. La série entière $\sum \frac{n}{(2n+1)!} x^n$ a le même rayon de convergence que la série $\sum \frac{1}{(2n+1)!} x^n$ par multiplication par n.

De plus, $0 \leqslant \frac{1}{(2n+1)!} \leqslant \frac{1}{n!}$ donc $R \geqslant R'$ où $R' = +\infty$ est le rayon de convergence de la série exponentielle $\sum \frac{x^n}{n!}$: $R = +\infty$.

— Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Par le théorème de dérivation terme à terme :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{nx^n}{(2n+1)!} &= x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d}{dx}\left(\frac{x^n}{(2n+1)!}\right) = x \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n+1)!}\right) \\
&= x \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) = x \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{sh}(\sqrt{x})\right) \\
&= x\left(-\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}} \operatorname{sh}(\sqrt{x}) + \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} \operatorname{ch}(\sqrt{x})\right) \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{x}} \operatorname{sh}(\sqrt{x}) + \frac{1}{2} \operatorname{ch}(\sqrt{x}).
\end{aligned}$$

— Pour $x = 0$, la série entière est nulle.

— Si $x<0$, on a $x=-\sqrt{-x}^2$ donc $x^n=(-1)^n\sqrt{-x}^{2n}$.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{nx^n}{(2n+1)!}&=x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{d}{dx}\left(\frac{x^n}{(2n+1)!}\right)=x\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(2n+1)!}\right)\\&=x\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{-x}^{2n}}{(2n+1)!}\right)=x\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{-x}}\frac{(-1)^n\sqrt{-x}^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\\&=x\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{-x}}\sin(\sqrt{-x})\right)\\&=x\left(\frac{1}{2(-x)^{\frac{3}{2}}}\sin(\sqrt{-x})+\frac{1}{\sqrt{-x}}\frac{-1}{2\sqrt{-x}}\cos(\sqrt{-x})\right)\\&=-\frac{1}{2\sqrt{-x}}\sin(\sqrt{-x})+\frac{1}{2}\cos(\sqrt{-x}).\end{aligned}$$

4. La série entière $\sum\frac{\mathrm{ch}(n)}{n!}x^n$ a le même rayon de convergence que la série entière $\sum\frac{e^n}{2(n!)}x^n$.

   La série entière exponentielle a pour rayon de convergence $R'=+\infty$ ainsi, la série entière $\sum\frac{(ex)^n}{2(n!)}$ converge pour tout $x\in\mathbb{R}$: $R=+\infty$.

   Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{ch}(n)}{n!}x^n&=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(ex)^n}{n!}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(e^{-1}x)^n}{n!}\\&=\frac{1}{2}\left(e^{ex}+e^{e^{-1}x}\right)\end{aligned}$$

$\square$

Solution Exercice 9.

1. La série entière $\sum_{n\geqslant 1}\left(n+\frac{1}{n}\right)x^{2n}$ a le même rayon de convergence que la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{2n}$ par équivalence $\left|n+\frac{1}{n}\right|\underset{n\to+\infty}{\sim}n$.

   Par multiplication par n, la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{2n}$ a le même rayon de convergence que la série géométrique $\sum_{n=1}^{+\infty}(x^2)^n$: $R=1$.

   Soit $x\in]-1;1[$.

   On obtient par convergence des séries entières en jeu :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(n+\frac{1}{n}\right)x^{2n}&=\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{2n}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{n}\\&=x^2\sum_{n=1}^{+\infty}n(x^2)^{n-1}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x^2)^n}{n}\end{aligned}$$

   — On pose $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}n(x^2)^{n-1}$ et $t=x^2\in[0;1[$.

$$\begin{aligned}f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}nt^{n-1}&=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{d}{dt}(t^n)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{d}{dt}(t^n)=\frac{d}{dt}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}t^n\right)\\&=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1-t}\right)=\frac{1}{(1-t)^2}=\frac{1}{(1-x^2)^2}.\end{aligned}$$

   Ainsi,

$$x^2\sum_{n=1}^{+\infty}n(x^2)^{n-1}=\frac{x^2}{(1-x^2)^2}.$$

   — D'autre part,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x^2)^n}{n}=-\ln(1-x^2).$$

   En conclusion, pour tout $x\in]-1;1[$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(n+\frac{1}{n}\right)x^{2n}=\frac{x^2}{(1-x^2)^2}-\ln(1-x^2).$$

2. La série entière $\sum_{n=0}^{+\infty}$ a un rayon de convergence $R=+\infty$ car $\frac{1}{(3n)!}\leqslant\frac{1}{n!}$: $R\geqslant R'=+\infty$ où R' est le rayon de convergence de la série $\sum\frac{(x^3)^n}{n!}$.

   Soit $x\in\mathbb{R}$.

   — Calcul avec $j^0=1$.

$$\begin{aligned}e^x&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{3n+1}}{(3n+1)!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{3n+2}}{(3n+2)!}\end{aligned}$$

— Calcul avec $j^1 = j$ vérifiant $j^3 = 1$:

$$\begin{aligned}
e^{jx} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(jx)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{j^{3n}x^{3n}}{(3n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{j^{3n+1}x^{3n+1}}{(3n+1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{j^{3n+2}x^{3n+2}}{(3n+2)!} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} + j\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+1}}{(3n+1)!} + j^2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+2}}{(3n+2)!}
\end{aligned}$$

— Calcul avec j^2 vérifiant $(j^2)^2 = j^4 = j$:

$$\begin{aligned}
e^{j^2x} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(j^2x)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{j^{6n}x^{3n}}{(3n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{j^{6n+2}x^{3n+1}}{(3n+1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{j^{6n+4}x^{3n+2}}{(3n+2)!} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} + j^2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+1}}{(3n+1)!} + j\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+2}}{(3n+2)!}
\end{aligned}$$

En faisant la somme $e^x + e^{jx} + e^{j^2x}$, compte tenu du fait que $1 + j + j^2 = \frac{1-j^3}{1-j} = 0$, on trouve

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} = \frac{1}{3}\left(e^x + e^{jx} + e^{j^2x}\right).$$

3. La série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^{n+1}nx^{2n+1}$ a le même rayon de convergence que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} x^{2n+1}$ par équivalence et multiplication par n.

La série entière $\sum x^{2n}$ converge si et seulement si $x^2 < 1$. Au facteur x près on obtient le rayon de convergence de la série entière $\sum x^{2n+1}$: $R = 1$.

Soit $x \in]-1;1[$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}nx^{2n+1} = -x\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n nx^{2n}$.

On pose $t = x^2 \in [0;1[$ et on calcule par le théorème de dérivation terme à terme :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n nx^{2n} &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n nt^n = t\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n nt^{n-1} \\
&= t\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{d}{dt}\left((-1)^n t^n\right) \\
&= t\frac{d}{dt}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-t)^n\right) \text{ or } -t \in]-1;1[\\
&= t\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1+t}\right) = -\frac{t}{(1+t)^2} \\
&= -\frac{x^2}{(1+x^2)^2}
\end{aligned}$$

En conclusion : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}nx^{2n+1} = \frac{x^3}{(1+x^2)^2}$.

4. La série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{4n}x^{4n-1}$ a le même rayon de convergence que la série entière $\sum x^{4n}$ par équivalence, multiplication par n, au facteur $\frac{1}{x}$ près : $R = 1$.

Soit $x \in]-1;1[$ non nul : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4n}x^{4n-1} = -\frac{1}{4x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^{4n}$

On pose $t = x^4 \in [0;1[$ et on calcule

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^{4n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}t^n = \ln(1+t) = \ln(1+x^4).$$

Ainsi, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4n}x^{4n-1} = -\frac{1}{4x}\ln(1+x^4)$.

5. La série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)x^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$.

En effet, $\left|\cos\frac{2n\pi}{3}\right| \leqslant 1$ donc $R \geqslant R' = 1$ où R' est le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.

Pour $x = 1$, la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\cos\frac{2n\pi}{3}1^n$ diverge grossièrement car $\cos\left(\frac{2(3n)\pi}{3}\right) = \cos(2n\pi) = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

La suite $\left(\cos\frac{2n\pi}{3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut donc converger vers 0 l'une de ses sous-suites convergeant vers 1.
Ainsi, $R \leqslant 1$ et finalement $R = 1$.
Soit $x \in]-1;1[$.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)x^n &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{\frac{2in\pi}{3}}+e^{\frac{-2in\pi}{3}}\right)x^n\right)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{\frac{2in\pi}{3}}x^n\right)+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{\frac{2in\pi}{3}}x^n\right)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(jx)^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(\bar{j}x)^n\\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{1-jx}+\frac{1}{2}\frac{1}{1-\bar{j}x}\\ &= \frac{1}{2}\frac{1-\bar{j}x+1-jx}{(1-jx)\overline{1-jx}}\\ &= \frac{1}{2}\frac{2+x}{x^2+x+1}\end{aligned}$$

car $|jx|<1$ et

$$\begin{aligned}(1-jx)\overline{1-jx} = |1-jx|^2 &= \left|1-\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)x\right|^2\\ &= \left(1+\frac{x}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x^2\\ &= 1+x+x^2.\end{aligned}$$

□

Solution Exercice 10. On a $|\cos(n\theta)| \leqslant \frac{1}{n!}$ donc le rayon de R de la série entière $\sum\frac{\cos(n\theta)}{n!}x^n$ vérifie $R \geqslant R' = +\infty$ où $R' = +\infty$ est le rayon de convergence de la série exponentielle $\sum\frac{x^n}{n!}$.

De même, la série entière $\sum\frac{\sin(n\theta)}{n!}x^n$ a pour rayon de convergence $R = +\infty$.

La combinaison linéaire $\sum\left(\frac{\cos(n\theta)}{n!}+i\frac{\sin(n\theta)}{n!}\right)x^n$ a un rayon de convergence $R'' \geqslant +\infty$ par le cours : $R'' = R = +\infty$.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\cos(n\theta)}{n!}+i\frac{\sin(n\theta)}{n!}\right)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(e^{i\theta}x\right)^n}{n!} &= e^{e^{i\theta}x} = e^{x\cos\theta+ix\sin\theta}\\ &= e^{x\cos\theta}(\cos(x\sin\theta)+i\sin(x\sin\theta))\end{aligned}$$

Donc $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(n\theta)}{n!}x^n = e^{x\cos\theta}\cos(x\sin\theta)$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin(n\theta)}{n!}x^n = e^{x\cos\theta}\sin(x\sin\theta)$.

□

Solution Exercice 11.

1. On utilise les techniques de comparaisons série-intégrale.

   La fonction $f : t \longmapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $]0;+\infty[$.

   Soit $k \geqslant 2$.

   — Pour tout $t \in [k-1;k]$, $f(k) \leqslant f(t)$ donc $\int_{k-1}^{k} f(k)dt \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)dt$.

     Ainsi, $\frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k}\frac{1}{t}dt$.

   — Pour tout $t \in [k,k+1]$, $f(t) \leqslant f(k)$ donc $\int_{k}^{k+1} f(t)dt \leqslant \int_{k}^{k+1} f(k)dt$.

     Ainsi $\int_{k}^{k+1}\frac{1}{t}dt \leqslant \frac{1}{k}$.

   On somme cet encadrement pour tout $k \in [\![2,n]\!]$ avec $n \geqslant 2$. On trouve :

$$\ln(n+1)-\ln(2)\int_{2}^{n+1}\frac{1}{t}dt \leqslant \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} \leqslant \int_{1}^{n}\frac{1}{t}dt\,\ln(n).$$

   En conclusion :

$$\ln(n+1)+1-\ln(2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leqslant \ln(n)+1 \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).$$

2. — Notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$.

     D'une part, la série entière $\sum a_n x^n$ a le même rayon de convergence que la série entière $\sum\ln(n)x^n$ par équivalence :

$$|a_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).$$

     D'autre part, pour tout $n \geqslant 3$, $1 \leqslant \ln(n) \leqslant n$ donc $R' \geqslant R \geqslant R''$ où R', R'' désignent les rayons de convergence des séries entières $\sum x^n$, $\sum nx^n$.
     Classiquement, $R' = R" = 1$ donc $R = 1$.

   — Soit $x \in]-1;1[$.

     La série entière $\sum_{n\geqslant 1}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)x^n$ est donc absolument convergente.

On reconnait le produit de Cauchy des séries entières absolument convergentes : $\sum_{p\geqslant 1}\frac{1}{p}x^p$ et $\sum_{q\geqslant 0}x^q$:

$$\left(\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p}x^p\right)\left(\sum_{q=0}^{+\infty}x^q\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{p+q=n}\frac{1}{p}\right)x^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}\right)x^n.$$

— En conclusion : $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)x^n=\left(\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p}x^p\right)\left(\sum_{q=0}^{+\infty}x^q\right)=-\frac{\ln(1-x)}{1-x}.$

Remarques

Ne pas omettre l'indice $q=0$ dans la somme $\sum_{q=0}^{+\infty}x^q$.

Attention, en général, aux indices dans les produits de Cauchy :

$$\begin{aligned}\left(\sum_{p=1}^{+\infty}a_p\right)\left(\sum_{q=0}^{+\infty}b_q\right)&=(a_1+a_2+a_3+\dots)(b_0+b_1+b_2+\dots)\\&=\underbrace{(a_1b_0)}_{n=1}+\underbrace{(a_1b_1+a_2b_0)}_{n=2}+\underbrace{(a_1b_2+a_2b_1+a_3b_0)}_{n=3}+\dots\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n-k}\right)\end{aligned}$$

tandis que

$$\begin{aligned}\left(\sum_{p=1}^{+\infty}a_p\right)\left(\sum_{q=1}^{+\infty}b_q\right)&=(a_1+a_2+a_3+\dots)(b_1+b_1+b_2+\dots)\\&=\underbrace{(a_1b_1)}_{n=2}+\underbrace{(a_1b_2+a_2b_1)}_{n=3}+\underbrace{(a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1)}_{n=4}+\dots\\&=\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1}a_kb_{n-k}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n-k+1}\right)\end{aligned}$$

Pour éviter les erreurs, on peut poser $a_0=0$ et calculer le produit de Cauchy classique $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\sum_{n=0}^{+\infty}b_n$

□

Solution Exercice 12.

1. La série entière $\sum_{n\geqslant 2}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}x^n$ à le même rayon de convergence que la série entière $\sum\frac{x^n}{n^2}$ par équivalence :

$$\left|\frac{(-1)^n}{n(n-1)}\right|\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n^2}.$$

Par multiplications successives par n, la série entière $\sum\frac{(-1)^n}{n^2}x^n$ a le même rayon de convergence que la série géométrique $\sum x^n$: $R=1$.
La fonction somme est définie en $x=1$ et $x=-1$ car les séries numériques :

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{2n(2n+1)}\text{ et }\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n(2n+1)}$$

convergent absolument. Ainsi $\mathscr{D}_f=[-1;1]$.

2. Soit $x\in]-1;1[$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}x^n&=\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^nx^n\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^nx^n}{n-1}-\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^nx^n}{n}\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{n}-\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^nx^n}{n}+x\right)\\&=x\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}x^n-x\\&=(x+1)\ln(1+x)-x.\end{aligned}$$

3. La fonction f est continue sur son ensemble de définition $[-1;1]$. Ainsi, en $x=1$:

$$f(1)=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}=\lim_{x\to1}f(x)=2\ln(2)-1.$$

En $x=-1$:

$$f(-1)=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(n-1)}=\lim_{x\to-1}f(x)=1\text{ par c.c}$$

□

Solution Exercice 13.

1. La série entière $\sum_{n\geqslant 1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n(2n+1)}$ a le même rayon de convergence que la série entière $\sum_{n\geqslant 1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{4n^2}$ par équivalence : $\frac{1}{2n(2n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4n^2}$.

   Par multiplications successives par n, la série entière $\sum_{n\geqslant 1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{4n^2}$ a le même rayon de convergence que la série entière $\sum_{n\geqslant 1}^{+\infty} x^{2n+1}$.

   Au facteur x près, on reconnait la série géométrique $\sum (x^2)^n$ de raison x^2 qui converge si et seulement si $x^2 < 1$: $R = 1$.
   La fonction f est définie en -1 et en 1 car les séries numériques :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n(2n+1)} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n(2n+1)}$$
   convergent absolument : $\mathscr{D}_f = [-1; 1]$.

2. Soit $x \in]-1; 1[$.
   Par convergence des séries entières apparaissant dans le calcul, on a :
$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n(2n+1)} &= \sum_{n=1}^{+\infty} x^{2n+1}\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\
&= \frac{x}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x^2)^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x t^{2n}\,dt \\
&= -\frac{x}{2}\ln(1-x^2) - \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{+\infty} t^{2n}\right) dt \\
&= -\frac{x}{2}\ln(1-x^2) - \int_0^x \left(\frac{1}{1-t^2} - 1\right) dt \\
&= -\frac{x}{2}\ln(1-x^2) - \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,dt + x
\end{aligned}$$
   où l'on a appliqué le théorème de primitivation d'une série entière.

   On intègre $\int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt$ en décomposant :
$$\int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt = \int_0^x \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right) dt = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$$
   En conclusion
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n(2n+1)} = x - \frac{x}{2}\ln(1-x^2) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

3. Les séries numériques $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{2n(2n+1)}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{2n(2n+1)}$ sont absolument convergentes par comparaison à une série de Riemann :
$$\frac{1}{2n(2n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4n^2}.$$
   Remarquons au passage, que la somme de l'une est l'opposée de l'autre.

   Par le cours, on sait que la fonction somme $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n(2n+1)}$ d'une série entière est continue sur son ensemble de définition, ici $[-1; 1]$.
   $*$ En $x = 1$, on obtient :
$$f(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n(2n+1)} = \lim_{x\to 1} f(x).$$
   Or : $\forall x \in]-1; 1[$:
$$\begin{aligned}
f(x) &= -\frac{x}{2}\ln(1-x^2) + x - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \\
&= x - \frac{x}{2}\ln(1-x) - \frac{x}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{2}\ln(1+x) + \frac{1}{2}\ln(1-x) \\
&= x + \ln(1-x)\left(-\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right) + \ln(1+x)\left(-\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) \\
&= x - \frac{1}{2}(x-1)\ln(1-x) - \frac{1}{2}(x+1)\ln(1+x) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 1 - \ln(2) \text{ par c.c.}
\end{aligned}$$
   $*$ En $x = -1$ on trouve :
$$f(-1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{2n(2n+1)} = -f(1) = -1 + \ln(2).$$

$\square$

Solution Exercice 14.

1. La série entière $\sum \frac{x^n}{2n+1}$ a le même rayon de convergence R que la série entière $\sum \frac{x^n}{2n}$ par équivalence $\frac{1}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$.

   Par multiplication par n, et au facteur $\frac{1}{2}$ près, la série entière $\sum \frac{x^n}{2n}$ a le même rayon de convergence que la série entière $\sum x^n$: $R = 1$.
   De plus
   — la série numérique $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{2n+1}$ diverge par comparaison à une série de Riemann : $\frac{1}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\frac{1}{n} \geqslant 0$.
   — la série numérique $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge par le critère spécial des séries alternées car $\frac{1}{2n+1} \geqslant 0$ décroit vers 0.

2. Soit $x \in]0;1[$. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2n+1} = f(t^2)$ via le changement de variable $x = t^2 \in]0;1[\Longleftrightarrow t = \sqrt{x} \in]0;1[$.
   On calcule $f(t^2)$ pour t $\in]0;1[$.
   — **Première méthode :** Par le théorème de primitivation d'une série entière :

$$\begin{aligned} f(t^2) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{t}\frac{t^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{t}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^t u^{2n}du = \frac{1}{t}\int_0^t \left(\sum_{n=0}^{+\infty}(u^2)^n\right)du \\ &= \frac{1}{t}\int_0^t \frac{1}{1-u^2}du = \frac{1}{t}\frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u}du \\ &= \frac{1}{2t}\ln|1+t| - \ln|1-t| = \frac{1}{2t}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) \end{aligned}$$

   On obtient, puisque $t = \sqrt{x}$:

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)$$

   — **Seconde méthode :** Par le théorème de dérivation terme à terme.
   On a pour tout $t \in]0;1[$,

$$tf(t^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \text{ donc } \frac{d}{dt}(tf(t^2)) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n} = \frac{1}{1-t^2},$$

   car $t^2 \in]0;1[\subset]-1;1[$.

   On intègre cette égalité sur $[0;t]$, compte tenu du fait que la fonction $tf(t^2)$ est nulle en 0, on obtient :

$$tf(t^2) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$$

   On retrouve alors

$$f(x) = f(t^2) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)$$

   — Si $x = 0$, on obtient $f(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1}x^0 = 1$.

3. Soit $x \in]-1;0[$. On pose $x = -t^2 \in]-1;0[\Longleftrightarrow t = -\sqrt{-x}$.
   On obtient par le théorème de primitivation d'une série entière :

$$\begin{aligned} f(x) = f(-t^2) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-t^2)^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2n+1} \\ &= \frac{1}{t}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{t}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^t u^{2n}du \\ &= \frac{1}{t}\int_0^t \left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-u^2)^n\right)du = \frac{1}{t}\int_0^t \frac{1}{1+u^2}du \end{aligned}$$

   car $-u^2 \in]-1;1[$. On obtient

$$\begin{aligned} f(x) = f(-t^2) &= \frac{1}{t}\arctan(t) = \frac{1}{-\sqrt{-x}}\arctan(-\sqrt{-x}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{-x}}\arctan(\sqrt{-x}), \end{aligned}$$

   par imparité de la fonction arctan.

4. La fonction f est continue sur son ensemble de définition $[-1;1[$. En particulier en $x = -1$, on a :

$$f(-1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{x\to-1} f(x) = \lim_{x\to-1} \frac{1}{\sqrt{-x}}\arctan\sqrt{-x} = \frac{\pi}{4}$$

□

Solution Exercice 15.

1. – La fonction $x \mapsto f(x) = \ln(2-x)$ est définie sur $]-\infty;2[$.
   On cherche un développement en série entière sur un voisinage ouvert centré en 0.
   Soit $x \in]-2;2[$.

$$\ln(2-x) = \ln(2) + \ln\left(1 - \frac{x}{2}\right) = \ln(2) - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n n}$$

car $\left|\frac{x}{2}\right| < 1$.

– Cette série entière a pour rayon de convergence $R = 2$.

En effet, la série entière $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n n}$ a le même rayon de convergence que la série entière $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n}$ par multiplication par n.

La série géométrique $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n$ a converge si et seulement si $\left|\frac{x}{2}\right| < 1 \iff |x| < 2$.

2. La fonction $x \mapsto f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{2-x}\right)$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que

$$(1 + x > 0 \text{ et } 2 - x > 0) \iff x > -1 \text{ et } x < 2 \iff x \in]-1;2[$$

et

$$(1 + x < 0 \text{ et } 2 - x < 0) \iff x < -1 \text{ et } x > 2 \text{ ensemble vide}$$

Ainsi, f est définie sur $]-1;2[$.

On cherche un développement en série entière sur un voisinage ouvert centré en 0.

Soit $x \in]-1;1[$.

$$\begin{aligned} f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{2-x}\right) &= \ln(1+x) - \ln(2-x) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} - \ln(2) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n n} \\ &= -\ln(2) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} + 2^{-n}}{n} x^n \end{aligned}$$

Cette série entière a pour rayon de convergence $1 = \min(R_1; R_2)$ par somme de séries entières de rayon de convergence $R_1 = 1 \neq R_2 = 2$

3. La fonction $x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.

On cherche un développement en série entière sur un voisinage ouvert centré en 0.

Soit $x \in]-1;1[$. Par le théorème de dérivation terme à terme.

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$$

– Cette série entière a pour rayon de convergence $R = 1$ par multiplication par n de la série géométrique $\sum x^n$.

4. – La fonction $x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$.

On cherche un développement en série entière sur un voisinage ouvert centré en 0.

Soit $x \in]-1;1[$.

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)} &= \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} \\ &= -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}} + \frac{1}{1-x} \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} x^n. \end{aligned}$$

– Cette série entière a pour rayon de convergence $1 = \min(R_1, R_2)$ avec $R_1 = 2$, $R_2 = 1$ rayons de convergence respectifs des séries entières $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.

5. La fonction $x \mapsto f(x) = \text{sh}(x)\cos(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(x) = \text{sh}(x)\cos(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{(i+1)x} + e^{(1-i)x} - e^{x(i-1)} - e^{-(i+1)x}\right) \\ &= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1+i)^n + (1-i)^n - (-1+i)^n - (-1-i)^n}{n!} x^n \end{aligned}$$

Or $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$; $\quad 1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$; $\quad -1+i = \sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}$; $\quad -1-i = \sqrt{2}e^{-\frac{3i\pi}{4}}$.

On obtient :

$$
\begin{aligned}
&(1+i)^n+(1-i)^n-(-1+i)^n-(-1-i)^n\\
&=\sqrt{2}^n\left[\left(e^{\frac{in\pi}{4}}+e^{\frac{-in\pi}{4}}\right)-\left(e^{\frac{3in\pi}{4}}+e^{-\frac{3in\pi}{4}}\right)\right]\\
&=2\sqrt{2}^n\left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right)\right)\\
&=\begin{cases} 2\sqrt{2}^{4p}\left((-1)^p-(-1)^{3p}\right) & \text{si } n=4p\\ 2\sqrt{2}^{4p+1}\left((-1)^p\sqrt{2}\right) & \text{si } n=4p+1\\ 2\sqrt{2}^{4p+2}\left(-\sin(p\pi)-\sin(3p\pi)\right) & \text{si } n=4p+2\\ 2\sqrt{2}^{4p+3}\left((-1)^p(-\sqrt{2})\right) & \text{si } n=4p+3\end{cases}\\
&=\begin{cases} 0 & \text{si } n=4p\\ (-1)^p4\sqrt{2}^{4p} & \text{si } n=4p+1\\ 0 & \text{si } n=4p+2\\ (-1)^{p+1}8\sqrt{2}^{4p} & \text{si } n=4p+3\end{cases}\\
&=\begin{cases} 0 & \text{si } n=4p\\ (-1)^p4^{p+1} & \text{si } n=4p+1\\ 0 & \text{si } n=4p+2\\ 2(-1)^{p+1}4^{p+1} & \text{si } n=4p+3\end{cases}
\end{aligned}
$$

En conclusion :

$$
\begin{aligned}
f(x)&=\frac{1}{4}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p4^{p+1}}{(4p+1)!}x^{4p+1}+\frac{1}{4}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{2(-1)^{p+1}4^{p+1}}{(4p+3)!}x^{4p+3}\\
&=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p4^p}{(4p+1)!}x^{4p+1}+\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{2(-1)^{p+1}4^p}{(4p+3)!}x^{4p+3}
\end{aligned}
$$

La règle de d'Alembert donne un rayon de convergence infini : $R=+\infty$.

Remarques

Par produit de Cauchy de séries entières absolument convergentes sur leurs intervalles ouverts de convergence :

$$
\begin{aligned}
f(x)=\operatorname{sh}(x)\cos(x)&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}\\
&=x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}\\
&=x\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k}}{(2k+1)!}\frac{(-1)^{n-k}}{(2(n-k))!}x^{2(n-k)}\right)\\
&=x\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k+1)!}\frac{(-1)^{n-k}}{(2(n-k))!}\right)x^{2n}\\
&=x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n)!}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}}{2n+1}\binom{2n+1}{2k+1}\right)x^{2n}\\
&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{2k+1}\right)x^{2n+1}
\end{aligned}
$$

On en déduit que

— Si $n=2p$, par unicité du développement en série entière :

$$
\begin{aligned}
&\frac{(-1)^{2p}}{(4p+1)!}\sum_{k=0}^{2p}(-1)^k\binom{4p+1}{2k+1}=\frac{(-1)^p4^p}{(4p+1)!}\\
\iff&\sum_{k=0}^{2p}(-1)^k\binom{4p+1}{2k+1}=(-1)^p4^p
\end{aligned}
$$

— Si $n=2p+1$, par unicité du développement en série entière :

$$
\begin{aligned}
&\frac{(-1)^{2p+1}}{(4p+3)!}\sum_{k=0}^{2p+1}(-1)^k\binom{4p+3}{2k+1}=\frac{2(-1)^{p+1}4^p}{(4p+3)!}\\
\iff&\sum_{k=0}^{2p+1}(-1)^k\binom{4p+3}{2k+1}=2(-1)^p4^p.
\end{aligned}
$$

6. La fonction $x\mapsto f(x)=\cos(x)\operatorname{ch}(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\frac{e^{x}+e^{-x}}{2} \\ &= \frac{e^{x(1+i)}+e^{(-1+i)x}+e^{x(1-i)}+e^{x(-1-i)}}{4} \\ &= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(1+i)^n+(-1+i)^n+(1-i)^n+(-1-i)^n}{n!}x^n \\ &= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sqrt{2}^n}{n!}\left(\left(e^{\frac{in\pi}{4}}+e^{-\frac{in\pi}{4}}\right)+\left(e^{\frac{3in\pi}{4}}+e^{-\frac{3in\pi}{4}}\right)\right)x^n \\ &= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}2\frac{\sqrt{2}^n}{n!}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+\cos\frac{3n\pi}{4}\right)x^n, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} &\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right) \\ &= \begin{cases} 2(-1)^p & \text{si } n=4p \\ 0 & \text{si } n=4p+1 \\ 0 & \text{si } n=4p+2 \\ 0 & \text{si } n=4p+3 \end{cases} \end{aligned}$$

En conclusion :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{4}\sum_{p=0}^{+\infty}2\frac{\sqrt{2}^{4p}}{(4p)!}\left(2(-1)^p\right)x^{4p} \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p4^p}{(4p)!}x^{4p} \end{aligned}$$

La règle de d'Alembert donne un rayon de convergence $R=+\infty$.

7. La fonction $x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{1-x}$ est définie sur $]-\infty;1[$.
On cherche un développement en série entière sur un voisinage ouvert centré en 0.
Soit $x \in]-1;1[$. Par produit de Cauchy de séries entières absolument convergentes sur leurs intervalles ouverts de convergence :

$$f(x) = -\frac{\ln(1-x)}{1-x} = \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\times 1\right)x^n,$$

avec $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Puisque pour $n \geqslant 3$, $1 \leqslant \ln(n) \leqslant n$ on obtient que $1 \leqslant R \leqslant 1$: la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)x^n$ a un rayon de convergence $R=1$.

8. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+x+1} = \dfrac{1}{(x-j)(x-\overline{j})}$ avec $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
Ainsi, f est définie sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{3}i(x-j)}-\frac{1}{\sqrt{3}i(x-\overline{j})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}i}\left(-\frac{1}{j}\frac{1}{1-\frac{x}{j}}+\frac{1}{\overline{j}}\frac{1}{1-\frac{x}{\overline{j}}}\right) \end{aligned}$$

La série entière $\sum z^n$ converge si et seulement si $|z|<1$.

Ainsi, pour $|x|<1 \Longrightarrow \left|\frac{x}{j}\right|<1$, on trouve :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{3}i}\left(-\frac{1}{j}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{j^n}+\frac{1}{\overline{j}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{\overline{j}^n}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}i}\left(-\frac{1}{j}+\frac{1}{\overline{j}}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}x^{3n} \\ &\quad+\left(-\frac{1}{j^2}+\frac{1}{\overline{j}^2}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}x^{3n+1} \\ &\quad+\left(-\frac{1}{j^3}+\frac{1}{\overline{j}^3}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}x^{3n+2} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}x^{3n}-\sum_{n=0}^{+\infty}x^{3n+1} \end{aligned}$$

car

$$-\frac{1}{j}+\frac{1}{\overline{j}} = \frac{j-\overline{j}}{j\overline{j}} = \sqrt{3}i$$

$$-\frac{1}{j^2}+\frac{1}{\overline{j}^2} = \frac{j^2-\overline{j}^2}{j^2\overline{j}^2} = \overline{j}-j = -\sqrt{3}i$$

$$-\frac{1}{j^3}+\frac{1}{\overline{j}^3} = -1+1 = 0.$$

Remarques

On retrouve plus rapidement le résultat en remarquant que pour tout $x \in]-1;1[$:

$$\begin{aligned}1-x^3=(1-x)(1+x+x^2) &\Longrightarrow \frac{1}{1+x+x^2}=\frac{1-x}{1-x^3}\\ &\Longrightarrow \frac{1}{1+x+x^2}=(1-x)\sum_{n=0}^{+\infty}x^{3n}\\ &\Longrightarrow \frac{1}{1+x+x^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}x^{3n}-\sum_{n=0}^{+\infty}x^{3n+1}.\end{aligned}$$

Chaque calcul donne un rayon de convergence $R \geqslant 1$ par somme de séries entières de même de rayon de convergence $R'=R''=1$.

On montre que $R=1$ en revenant à la définition du rayon de convergence.

La série entière $\sum x^{3n}-\sum x^{3n+1}$ s'écrit $\sum a_n x^n$ avec

$$a_{3n}=1; \quad a_{3n+1}=-1; \quad a_{3n+2}=0.$$

Ainsi, $1 \leqslant R=\sup\{r \geqslant 0 : (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\} \leqslant 1$ car si $r>1$ la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée. Il suffit, pour s'en convaincre de considérer par exemple la sous suite $(a_{3n}r^{3n})_{n\in\mathbb{N}}=(r^{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ qui diverge vers $+\infty$.

9. La fonction $f(x)=\arcsin(x)$ est définie sur $[-1;1]$ à valeurs dans $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$.

   On utilise le théorème de primitivation d'une série entière après avoir développé en série entière sur $]-1;1[$, la dérivée de la fonction $\arcsin$.

   Soit $x \in]-1;1[$. Puisque $x^2 \in [0;1[\subset]-1;1[$.

$$\begin{aligned}\arcsin'(x)&=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\\ &=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\dots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}(-x^2)^n\\ &=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{2^n}\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\dots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}(-x^2)^n\\ &=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)(-1-2)\dots(-1-2(n-1))}{2^n n!}(-x^2)^n\\ &=1+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{2n}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\dots\cdot(2n-1)}{2^n n!}(x^2)^n\end{aligned}$$

En intégrant sur $[0;x]$, compte tenu du fait que $\arcsin(0)=0$:

$$\begin{aligned}\arcsin(x)&=x+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\dots\cdot(2n-1)}{2^n n!}\int_0^x t^{2n}dt\\ &=x+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\dots\cdot(2n-1)}{2^n n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\end{aligned}$$

On "complète" au numérateur avec les facteurs pairs pour obtenir une expression plus compacte :

$$\begin{aligned}\arcsin(x)&=x+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\dots\cdot(2n-1)(2n)}{[2\cdot4\cdot\ldots(2n)](2^n n!)}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\\ &=x+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\\ &=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\end{aligned}$$

Pour $x\neq0$, on applique la règle de d'Alembert :

$$\begin{aligned}&\left|\frac{(2(n+1))!}{2^{2(n+1)}(n+1)!^2}\frac{x^{2(n+1)+1}}{2(n+1)+1}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\frac{2n+1}{x^{2n+1}}\right|\\ &=\frac{(2n+2)(2n+2)}{2^2(n+1)^2}\frac{2n+1}{2n+3}|x|^2 \underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{8n^3}{8n^3}|x|^2\end{aligned}$$

— Si $|x|<1$, la série entière est absolument convergente : $R\geqslant1$.
— Si $|x|>1$, la série entière est divergente : $R\leqslant1$.

En conclusion $R=1$.

10. La fonction $x\mapsto f(x)=\arctan\left(\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right)$ est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$.

    Soit $x\in]-1;1[$.

$$f'(x)=\frac{\frac{\sqrt{2}(1-x^2)+2\sqrt{2}x^2}{(1-x^2)^2}}{1+\left(\frac{2x^2}{(1-x^2)^2}\right)}=\frac{\sqrt{2}\left((1-x^2)+2x^2\right)}{(1-x^2)^2+2x^2}=\frac{\sqrt{2}(1+x^2)}{1+x^4}$$

Puisque $x^4\in[0;1[\subset]-1;1[$, on a

$$\frac{1}{1+x^4}=\frac{1}{1+x^4}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{4n},$$

donc par somme de séries convergentes :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \sqrt{2}(1+x^2)\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{4n} \\
&= \sqrt{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{4n} + \sqrt{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{4n+2}.
\end{aligned}$$

Par théorème intégration terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^x f'(t)dt &= \sqrt{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \int_0^x t^{4n}dt + \sqrt{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \int_0^x t^{4n+2}dt \\
f(x) - f(0) &= \sqrt{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{4n+1}}{4n+1} + \sqrt{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{4n+3}}{4n+3} \\
f(x) - \arctan(0) &= \sqrt{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{4n+1}}{4n+1} + \sqrt{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{4n+3}}{4n+3} \\
f(x) &= \sqrt{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{4n+1}}{4n+1} + \sqrt{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{4n+3}}{4n+3}
\end{aligned}$$

Notons R le rayon de convergence de la série entière obtenue : c'est la somme de deux séries entières de rayon de convergence $R' = R'' = 1$ (classiquement : à un facteur près ce sont des primitives de séries géométriques de raison x^4).
On en déduit que $R \geqslant 1 = R' = R''$.
Notons la série entière obtenue $\sum a_n x^n$ avec

$$a_{4n} = 0; \quad a_{4n+1} = \frac{\sqrt{2}(-1)^n}{4n+1}; \quad a_{4n+2} = 0; \quad a_{4n+3} = \frac{\sqrt{2}(-1)^n}{4n+3};$$

.
De plus si $r > 1$, la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée : considérer par exemple la sous-suite $(a_{4n+1}r^{4n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ qui diverge vers $-\infty$.

11. La fonction $f(x) = \arctan\dfrac{1}{1+x}$ est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Soit $x \in]-1;1[$. On détermine le développement en série entière de $f'(x)$ et on intègre :

$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}\frac{1}{1+\frac{1}{(1+x)^2}} = -\frac{1}{2+2x+x^2} = -\frac{1}{(x-a)(x-b)}$$

avec $a = -1+i$; $b = -1-i$.

On obtient

$$f'(x) = -\left(\frac{1}{a-b}\frac{1}{x-a} + \frac{1}{b-a}\frac{1}{x-b}\right) = \frac{1}{a-b}\frac{1}{a-x} + \frac{1}{b-a}\frac{1}{b-x}$$

soit

$$f'(x) = \frac{1}{2ia}\frac{1}{1-\frac{x}{a}} - \frac{1}{2ib}\frac{1}{1-\frac{x}{b}}$$

Puisque $|x| < 1$ et $|a| = |b| = |-1+i| = \sqrt{2}$, on a $\left|\frac{x}{a}\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{b}\right| < 1$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2ia}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{a^n} - \frac{1}{2ib}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{b^n} \\
&= \frac{a}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{a^n} + \frac{b}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{b^n} \\
&= \frac{a+b}{4} + \frac{x}{4}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{a^{n-1}} + \frac{1}{b^{n-1}}\right)x^{n-1}\right) \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{x}{4}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n}\right)x^n\right) \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{x}{4}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{\sqrt{2}^n}\cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right)x^n\right) \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2}^n}\cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right)x^{n+1}\right) \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2}^{n-1}}\cos\left(\frac{3(n-1)\pi}{4}\right)x^n\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2}^{n-1}}\cos\left(\frac{3(n-1)\pi}{4}\right)x^n \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2}^n}\cos\left(\frac{3(n-1)\pi}{4}\right)x^n
\end{aligned}$$

En intégrant, compte tenu que $f(0) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, on obtient par intégration terme à terme :

$$f(x) - \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2}^n}\cos\left(\frac{3(n-1)\pi}{4}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

La série entière $\sum \frac{1}{\sqrt{2}^n}\cos\left(\frac{3(n-1)\pi}{4}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1}$ a le même rayon de convergence R que la série entière $\sum \frac{1}{\sqrt{2}^n}\cos\left(\frac{3(n-1)\pi}{4}\right)x^{n+1}$ par conservation du rayon de convergence par multiplication par n et l'équivalence $\frac{n}{n+1}\underset{n\to+\infty}{\sim}1$.
De plus la majoration :

$$\left|\frac{1}{\sqrt{2}^n}\cos\left(\frac{3(n-1)\pi}{4}\right)\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}^n}$$

implique $R\geqslant R'=\sqrt{2}$ où R' est le rayon de convergence de la série géométrique $\sum\frac{x^n}{\sqrt{2}^n}$ qui converge si et seulement si $\left|\frac{x}{\sqrt{2}}\right|<1\iff|x|<\sqrt{2}$.
Notons enfin que la série entière $\sum\frac{1}{\sqrt{2}^n}\cos\left(\frac{3(n-1)\pi}{4}\right)\sqrt{2}^n$, pour $x=\sqrt{2}$ est la série $\sum\cos\left(\frac{3(n-1)\pi}{4}\right)$ qui diverge grossièrement : considérer par exemple la sous-suite $\left(\cos\left(\frac{3(4n+1-1)\pi}{4}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}=((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0. Ainsi, $R\leqslant\sqrt{2}$.
En conclusion $R=\sqrt{2}$.

12. La fonction $g:t\mapsto\frac{\sin(t)}{t}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et $g(t)\underset{t\to0}{\sim}\frac{t}{t}=1$.
On prolonge par continuité la fonction g en 0 : $g(0)=1$.
La fonction $f:x\mapsto\int_0^x\frac{\sin(t)}{t}$ est donc définie sur $\mathbb{R}$.
D'autre part pour tout $t\in\mathbb{R}^*$,

$$g(t)=\frac{1}{t}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}t^{2n+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}t^{2n}$$

Formule encore valable en $t=0$: $g(0)=0$.
Cette série entière a pour rayon de convergence $R=+\infty$.
Le théorème de primitivation d'une série entière donne pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$f(x)=\int_0^x g(t)dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

La série entière obtenue a le même rayon de convergence que la série entière dérivée déterminée précédemment : $R=+\infty$.

13. La fonction $f:x\mapsto\int_0^x\cos(t^2)dt$ est définie sur $\mathbb{R}$.
Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$\cos(t^2)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}t^{4n}$$

série entière de rayon de convergence $R=+\infty$.
Par le théorème de primitivation d'une série entière, on obtient

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\int_0^x t^{4n}dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$$

□

Solution Exercice 16.

1. La fonction $f:x\mapsto\frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est dérivable sur $]-1;1[$ et pour tout $x\in]-1;1[$,

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{1}{1-x^2}+\arcsin(x)\frac{\frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}\\&=\frac{1}{1-x^2}+\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\arcsin(x)\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x\in]-1;1[$:

$$f'(x)=\frac{1}{1-x^2}+\frac{x}{1-x^2}f(x)\iff(1-x^2)f'(x)-xf(x)=1.$$

Ainsi, f est solution de l'équation différentielle (E) : $(1-x^2)y'(x)-xy(x)=1$.
C'est même l'unique solution sur $]-1;1[$ du problème de Cauchy :

$$\begin{cases}(1-x^2)y'(x)-xy(x)=1\\y(0)=0\end{cases}$$

Analyse.
Supposons qu'il existe une fonction y :
— développable en série entière sur un intervalle ouvert $]-r;r[$ centré en 0,
— solution de (E) et telle que $y(0)=0$.
Soit $x\in]-r;r[$. On a $y(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$.

Par le théorème de dérivation terme à terme, on a $y'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}$.

Ainsi, y est solution de (E) sur $]-1;1[$ si et seulement si

$$\begin{aligned}
&(1-x^2)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = 1 + x\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\\
\iff &\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1}\\
\iff &\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - \sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)a_{n-1}x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n
\end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière, y est solution de (E) sur $]-1;1[$ si et seulement si

— $\forall n \geqslant 2, (n+1)a_{n+1} - (n-1)a_{n-1} = a_{n-1} \iff a_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}a_{n-1}(*)$.

— Pour $n = 0$: $(0+1)a_{0+1} = 1 \iff a_1 = 1$.

— Pour $n = 1$: $(1+1)a_{1+1} = a_{1-1} \iff 2a_2 = a_0$.

On montre alors par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n} = 0$.

Cette propriété est vraie au rang $n = 0$ car $y(0) = 0$ (et au rang 2 car $2a_2 = a_0 = 0$).

Si $a_{2n} = 0$ pour un certain entier naturel n, on obtient alors par $(*)$

$$a_{2(n+1)} = a_{2n+2} = a_{(2n+1)+1} = \frac{2n+1}{(2n+1)+1}a_{(2n+1)-1} = \frac{2n}{2n+1}a_{2n} = 0.$$

On conclut par récurrence.

On détermine explicitement les coefficients a_{2n+1} de rangs impairs.

On commence par conjecturer la formule grâce à $(*)$:

$$\begin{aligned}
a_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1}a_{2n-1} = \frac{2n}{2n+1}\frac{2n-2}{2n-1}a_{2n-3}\\
&= \text{... conjecture}\\
&= \frac{2n}{2n+1}\frac{2n-2}{2n-1}\cdots\frac{2}{3}a_1\\
&= \frac{[(2n)(2n-2)\dots 2]^2}{(2n+1)(2n)(2n-1)\dots(4)(3)(2)}\\
&= \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!},
\end{aligned}$$

que l'on démontre par récurrence.

Elle est vraie au rang $n = 0$ car $a_1 = 1$.

Si $a_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$ alors par $(*)$

$$a_{2n+3} = a_{(2n+2)+1} = \frac{2n+2}{2n+3}a_{2n+1} = \frac{2n+2}{2n+3}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

On obtient bien en multipliant numérateur et dénominateur par $2n+2$:

$$a_{2n+3} = \frac{2^{2(n+1)}((n+1)!)^2}{(2n+3)!}.$$

On en déduit que pour tout $x \in]-r;r[$,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$$

Synthèse. On pose $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}x^{2n+1}$.

On détermine le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$ avec la règle de d'Alembert. Pour tout $x \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\left|\frac{2^{2(n+1)}((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{x^{2n+3}}{x^{2n+1}}\right| = \frac{2^2(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}|x|^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} |x|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |x|^2$$

Ainsi,

— Si $|x| < 1$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ converge absolument : $R \geqslant 1$.

— Si $|x| > 1$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ diverge grossièrement. : $R \leqslant 1$.

En conclusion $R = 1$.

On a montré :

— y est développable en série entière sur $]-1;1[$

— $y(0) = 0$

— y est solution de (E) d'après les équivalences écrites dans la partie analyse.

Conclusion.

Les fonctions $f : x \mapsto \dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ et $y : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ sont toutes deux solution sur $]-1;1[$ du problème de Cauchy :

$$\left\{\begin{array}{rcl}(1-x^2)y(x) - xy(x) &=& 1\\ y(0) = 0 && \end{array}\right.$$

Par unicité de la solution ce problème de Cauchy sur $]-1;1[$, intervalle où $1-x^2 \neq 0$, on en déduit que f et y coïncident.

On en déduit que f est développable en série entière sur le voisinage ouvert $]-1;1[$ de 0 et que

$$\forall x \in]-1;1[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$$

2. La fonction $f : x \mapsto \arcsin^2(x)$ est dérivable sur $]-1;1[$ et pour tout $x \in]-1;1[$: $f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin(x)$.

   Au facteur 2 près, on a obtenu le développement en série entière de la fonction f' sur $]-1;1[$ à la question précédente :

$$f'(x) = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

   Par le théorème de primitivation d'une série entière, on en déduit, compte tenu que $f(0) = 0$; que pour tout $x \in]-1;1[$:

$$\begin{aligned}
f(x) - f(0) &= \int_0^x f'(t)dt = \int_0^x 2\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} t^{2n+1}\right) dt \\
f(x) &= 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \int_0^x t^{2n+1} dt \\
f(x) &= 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \frac{x^{2n+2}}{2n+1} \\
f(x) &= 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+2)!} x^{2n+2} \\
f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+2)!} x^{2n+2}
\end{aligned}$$

3. La fonction $f : x \mapsto \cos(x)\operatorname{ch}(x)$ est quatre fois dérivable sur $\mathbb{R}$ avec, par la formule de Leibniz

$$\begin{aligned}
f^{(4)}(x) &= \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} \cos^{(k)}(x)\operatorname{ch}^{(4-k)}(x) \\
&= \cos(x)\operatorname{ch}(x) - 4\sin(x)\operatorname{sh}(x) - 6\cos(x)\operatorname{ch}(x) \\
&\quad + 4\sin(x)\operatorname{sh}(x) + \cos(x)\operatorname{ch}(x)
\end{aligned}$$

   Ainsi, $f^{(4)} + 4f = 0$.

   La fonction f est donc solution de l'équation différentielle $(E) : y^{(4)} + 4y = 0$.

C'est même l'unique solution du problème de Cauchy sur $\mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{l}
\begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ y''' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ y''' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{array}\right.$$

Analyse.

On suppose qu'il existe une fonction y :

— développable en série entière sur un voisinage $]-r;r[$ de 0,

— solution de (E) et vérifiant $y(0) = 1$, $y^{(i)} = 0$ pour $i \in [\![1,3]\!]$.

Soit $x \in]-r;r[$. Par le théorème de dérivation terme à terme, on a

$$y^{(4)}(x) = \sum_{n=4}^{+\infty} n(n-1)(n-2)(n-3)a_n x^{n-4}$$

Ainsi, y est solution de (E) si et seulement si

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)a_{n+4}x^n + 4\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0.$$

On obtient par unicité du développement en série entière pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
&(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)a_{n+4} + 4a_n = 0 \\
\iff &a_{n+4} = -\frac{4}{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)} a_n
\end{aligned}$$

On obtient par récurrence que $a_{4p+1} = a_1 = 0, a_{4p+2} = 0, a_{4p+3} = 0$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$a_{4p} = \frac{(-1)^p 4^p}{(4p)!}$$

Ainsi, pour tout $x \in]-r:r[$,

$$y(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p 4^p}{(4p)!} x^{4p}.$$

Synthèse.

On détermine le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{(-1)^p 4^p}{(4p)!} x^{4p}$.

On utilise la règle de d'Alembert, pour $x \neq 0$:

$$\left|\frac{(-1)^{p+1}4^{p+1}}{(4(p+1))!}\frac{(4p)!}{(-1)^p4^p}\frac{x^{4(p+1)}}{x^{4p}}\right| = \frac{4}{(4p+4)(4p+3)(4p+2)(4p+1)}|x|^4 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

On en déduit que la série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$, $R = +\infty$.

On a montré :

— y est développable en série entière sur $\mathbb{R}$

— $y(0) = 1, y^{(i)}(0) = 0$ pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$

— y est solution de (E) d'après les équivalences écrites dans la partie analyse.

Conclusion.

Les fonctions $f : x \mapsto \cos(x)\operatorname{ch}(x)$ et $y : x \mapsto \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p4^p}{(4p)!}x^{4p}$ sont toutes deux solution sur $]-1; 1[$ du même problème de Cauchy.

Par unicité de la solution de ce problème de Cauchy sur $\mathbb{R}$, on en déduit que f et y coïncident.

On en déduit que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p4^p}{(4p)!}x^{4p}.$$

4. La fonction $f : x \mapsto \cos(\alpha\arcsin(x))$ est dérivable deux fois sur $]-1; 1[$.

   Pour tout $x \in]-1; 1[$:

$$f'(x) = -\frac{\alpha}{\sqrt{1-x^2}}\sin(\alpha\arcsin(x)) = -\alpha(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\sin(\alpha\arcsin(x))$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-\alpha(-\frac{1}{2})(-2x)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\sin(\alpha\arcsin(x)) - \frac{\alpha^2}{1-x^2}\cos(\alpha\arcsin(x)) \\ &= \frac{xf'(x)}{1-x^2} - \frac{\alpha^2}{1-x^2}f(x) \end{aligned}$$

   Ainsi, f est solution de l'équation différentielle $(E) : (1-x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0$.

   C'est même l'unique solution sur $]-1; 1[$ du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} (1-x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

   car $f(0) = \cos(\alpha\arcsin(0)) = \cos(0) = 1$ et $f'(0) = -\dfrac{\alpha\sin(\alpha\arcsin(0))}{\sqrt{1-0^2}} = 0$.

   Analyse.

   On suppose qu'il existe une fonction y :

   — développable en série entière sur un intervalle ouvert $]-r; r[$ centré en 0,

   — solution de (E) et telle que $y(0) = 1, y'(0) = 0$.

   Soit $x \in]-r; r[$.

   On a $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

   Par le théorème de dérivation terme à terme, $y'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1}$,

   et $y''(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$.

   Ainsi, y est solution de (E) sur $]-1; 1[$ si et seulement si

$$\begin{aligned} &(1-x^2)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - x\sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} + \alpha^2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 \\ \iff &\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^n + \alpha^2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 \\ \iff &\sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n \\ &- \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^n + \alpha^2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 \end{aligned}$$

   On obtient par unicité du développement en série entière (de la série nulle) :

   — Pour $n = 0$: $(0+2)(0+1)a_{0+2} + \alpha^2 a_0 = 0 \iff a_2 = -\alpha^2 a_0$

   — Pour $n = 1$: $(1+2)(1+1)a_{1+2} - 1a_1 + \alpha^2 a_1 = 0 \iff 6a_3 = (1-\alpha^2)a_1$

   — Pour $n \geqslant 2$: $(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - na_n + \alpha^2 a_n = 0$ ou encore :

$$a_{n+2} = \frac{n^2 - \alpha^2}{(n+2)(n+1)}a_n$$

   On a $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$ car $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

   Il vient par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}$: $a_{2p+1} = 0$ d'une part et d'autre part :

$$\begin{aligned} a_{2p} &= \frac{4p^2 - \alpha^2}{(2p)(2p-1)}a_{2p-2} \\ &= \frac{(2p)^2 - \alpha^2}{(2p)(2p-1)}\frac{(2p-2)^2 - \alpha^2}{(2p-2)(2p-3)} \\ &= \dots \\ &= \frac{((2p)^2 - \alpha^2)\dots(2^2 - \alpha^2)}{(2p)!}. \end{aligned}$$

Synthèse. On pose $y(x)=\sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p}x^{2p}$.

On détermine le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_{2p}x^{2p}$

— Si α est un entier pair, les termes a_{2p} sont nuls à partir d'un certain rang : la série a donc un rayon de convergence infini (il s'agit d'un polynôme).
— Si α n'est pas un entier pair, on utilise la règle de d'Alembert.
Pour tout $x\neq 0$ et $p\in\mathbb{N}$:

$$\left|\frac{(2(p+1))^2-\alpha^2)(2p)^2-\alpha^2)\dots(2^2-\alpha^2)}{(2(p+1))!}\frac{(2p)!}{((2p)^2-\alpha^2)\dots(2^2-\alpha^2)}.\frac{x^{2p+3}}{x^{2p+1}}\right|$$
$$=\frac{(2(p+1))^2-\alpha^2}{(2p+2)(2p+1)}|x|^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4p^2}{4p^2}|x|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |x|^2$$

Ainsi,
— Si $|x|<1$, $\sum a_{2p}x^{2p}$ converge absolument : $R\geqslant 1$.
— Si $|x|>1$, $\sum a_{2p}x^{2p}$ diverge grossièrement. : $R\leqslant 1$.
En conclusion $R=1$.

Dans les deux cas, la série entière converge pour tout $x\in]-1;1[$.

On a montré :
— y est développable en série entière sur $]-1;1[$
— $y(0)=1$, $y'(0)=0$.
— y est solution de (E) d'après les équivalences écrites dans la partie analyse.

Conclusion.

Les fonctions $f:x\mapsto\cos(\alpha\arcsin(x))$ et $y:x\mapsto\sum_{p=0}^{+\infty}a_{2p}x^{2p}$ sont toutes deux solution sur $]-1;1[$ du problème de Cauchy :

$$\begin{cases}(1-x^2)y''-xy'+\alpha^2y=0\\ y(0)=1\\ y'(0)=0\end{cases}$$

Par unicité de la solution ce problème de Cauchy sur $]-1;1[$, intervalle où $1-x^2\neq 0$, on en déduit que f et y coïncident.
On en déduit que f est développable en série entière sur le voisinage ouvert $]-1;1[$ de 0 et que

$$\forall x\in]-1;1[,\ f(x)=\sum_{p=0}^{+\infty}a_{2p}x^{2p}.$$

$\square$

Solution Exercice 17.

1. **Première méthode : équation différentielle.**

La fonction $f:x\mapsto e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$ par produit de telles fonctions.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}f'(x)&=-2xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt+e^{x^2}e^{-x^2}\\&=-2xf(x)+1.\end{aligned}$$

La fonction f est donc solution de l'équation différentielle

$$(E):y'=-2xy+1.$$

C'est même l'unique solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases}y'=-2xy+1\\ y(0)=0\end{cases}$$

Analyse.
Supposons qu'il existe une fonction y :
— développable en série entière sur un voisinage $]-r;r[$ ouvert centré en 0,
— solution de l'équation différentielle (E) et telle que $y(0)=0$.
Soit $x\in]-r;r[$.

On a $y(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$.

Par le théorème de dérivation terme à terme $y'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}$.

Ainsi, y est solution de (E) si et seulement si

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}=-2x\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n+1\\ \iff&\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n=-2\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^{n+1}+1\\ \iff&\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n=-2\sum_{n=1}^{+\infty}a_{n-1}x^n+1.\end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière, la fonction y est solution de (E) si et seulement si
— Pour $n=0$, $(0+1)a_{0+1}=1\iff a_1=1$.
— Pour $n\geqslant 1$, $(n+1)a_{n+1}=-2a_{n-1}$

Il vient alors par récurrence : pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$a_{2p} = a_0 = 0 \text{ car } y(0) = 0$$

et

$$\begin{aligned} a_{2p+1} &= -\frac{2}{2p+1} a_{2p-1} \\ &= \left(-\frac{2}{2p+1}\right)\left(-\frac{2}{2p-1}\right) a_{2p-3} \\ &= \dots \\ &= \frac{(-2)^p}{(2p+1)(2p-1)\dots(3)(1)} a_1 \\ &= \frac{(-2)^p 2^p p!}{(2p+1)!} \\ &= \frac{(-1)^p 4^p p!}{(2p+1)!} \end{aligned}$$

car $a_1 = y'(0) = 1$. On en déduit que pour tout $x \in]-r;r[$,

$$y(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p 4^p p!}{(2p+1)!} x^{2p+1}.$$

Synthèse.

On pose $y(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p 4^p p!}{(2p+1)!} x^{2p+1}$.

La série entière $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p 4^p p!}{(2p+1)!} x^{2p+1}$ a pour rayon de convergence $R = +\infty$ par la règle de d'Alembert ; pour tout $x \neq 0$

$$\begin{aligned} &\left| \frac{(-1)^{p+1} 4^{p+1} (p+1)!}{(2p+3)!} \frac{(2p+1)!}{(-1)^p 4^p p!} \frac{x^{2p+3}}{x^{2p+1}} \right| \\ &= \left| \frac{4(p+1)}{(2p+3)(2p+2)} \right| |x|^2 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Ainsi, la série entière $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p 4^p p!}{(2p+1)!} x^{2p+1}$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.
En conclusion : $R = +\infty$.
On a montré :
— y est développable en série entière sur $\mathbb{R}$
— $y(0) = 0$
— y est solution de (E) d'après les équivalences écrites dans la partie analyse.

Conclusion.

Les fonctions f et $x \mapsto \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p 4^p p!}{(2p+1)!} x^{2p+1}$ sont solution du même problème de Cauchy. Par unicité de la solution d'un tel problème, on en déduit que ces fonctions coïncident :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p 4^p p!}{(2p+1)!} x^{2p+1}.$$

Seconde méthode

$x \mapsto f(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$ est le produit de deux fonctions que l'on peut développer en série entière sur $\mathbb{R}$, via le théorème de primitivation d'une série entière et par produit de Cauchy :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} \times \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(t^2)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \int_0^x t^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\ &= x \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} \frac{1}{k!(2k+1)} \right) x^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} \frac{1}{k!(2k+1)} \right) x^{2n+1} \end{aligned}$$

2. Par unicité du développement en série entière de la fonction f, on en déduit que

pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} \frac{1}{k!(2k+1)} = \frac{(-1)^n 4^n n!}{(2n+1)!} \\
\iff &\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k}}{(n-k)!} \frac{1}{k!(2k+1)} = \frac{4^n n!}{(2n)!(2n+1)} \\
\iff &\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k}}{(2k+1)} \frac{1}{(n-k)!k!} \frac{(2n)!}{n!} = \frac{4^n}{2n+1} \\
\iff &\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k}}{(2k+1)} \frac{n!}{(n-k)!k!} \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{4^n}{2n+1} \\
\iff &\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k}}{2k+1} \binom{n}{k} \binom{2n}{n} = \frac{4^n}{2n+1}
\end{aligned}$$

□

***Solution Exercice** 18.*

1. – La fonction $x \mapsto \frac{e^x-1}{x}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ par quotient de telles fonctions, le dénominateur ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}^*$.
   – On peut prolonger la fonction f par continuité en 0, car $f(x) = \frac{e^x-1}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{x} = 1$.
   On pose $g(x) = f(x)$ pour x non nul et $g(0) = 1$.
   – Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
   $$g(x) = \frac{1}{x}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} - 1\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!},$$
   formule encore valable si $x = 0$.
   Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}.$$
   La fonction g est donc développable en série entière sur $\mathbb{R}$ donc en particulier est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ par le théorème de dérivation terme à terme.
2. La fonction g est dérivable en série entière sur $\mathbb{R}$.
   Le développement en série entière de la fonction g sur $\mathbb{R}$ coïncide avec la série de Taylor en 0 :
   $$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!} x^n.$$
   On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$g^{(n)}(0) = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}.$$

□

***Solution Exercice** 19.*

1. Pour tout $N \in \mathbb{N}$:
   $$\sum_{n=0}^{N} (-1)^n x^{\alpha n} = \sum_{n=0}^{N} (-x^\alpha)^n = \frac{1-(-x^\alpha)^{N+1}}{1+x^\alpha}$$
   On intègre sur $[0;1]$, ce qui est licite puisque $\alpha > 0$, on obtient :
   $$\begin{aligned}
   &\sum_{n=0}^{N} (-1)^n \int_0^1 t^{\alpha n} dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^\alpha} dt - \int_0^1 \frac{(-t^\alpha)^{N+1}}{1+t^\alpha} dt \\
   \iff &\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{1+n\alpha} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^\alpha} dt - \int_0^1 \frac{(-t^\alpha)^{N+1}}{1+t^\alpha} dt
   \end{aligned}$$
   Or :
   $$\left|\int_0^1 \frac{(-t^\alpha)^{N+1}}{1+t^\alpha} dt\right| \leqslant \int_0^1 t^{\alpha(N+1)} dt = \frac{1}{\alpha(N+1)+1} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
   On en conclut que
   $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\alpha+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^\alpha} dt.$$
2. On obtient pour $\alpha = 2$:
   $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = [\arctan(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$
3. Soit $\alpha < 0$.
   Pour tout $N \in \mathbb{N}$:
   $$\sum_{n=0}^{N} (-1)^n x^{-\alpha n} = \sum_{n=0}^{N} (-x^{-\alpha})^n = \frac{1-(-x^{-\alpha})^{N+1}}{1+x^{-\alpha}}$$
   On intègre sur $[0;1]$ ce qui est licite car $\alpha < 0$, on obtient
   $$\begin{aligned}
   &\sum_{n=0}^{N} (-1)^n \int_0^1 t^{-\alpha n} dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^{-\alpha}} dt - \int_0^1 \frac{(-t^{-\alpha})^{N+1}}{1+t^{-\alpha}} dt \\
   \iff &\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{-\alpha n+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^{-\alpha}} dt - \int_0^1 \frac{(-t^{-\alpha})^{N+1}}{1+t^{\alpha}} dt
   \end{aligned}$$

Or :

$$\left|\int_0^1 \frac{(-t^{-\alpha})^{N+1}}{1+t^{-\alpha}}dt\right| \leqslant \int_0^1 t^{-\alpha(N+1)}dt = \frac{1}{-\alpha(N+1)+1} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On en conclut que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{-n\alpha+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^{-\alpha}}dt = \int_0^1 \frac{t^\alpha}{1+t^\alpha}dt.$$

□

Solution Exercice 20.

1. La série entière $\sum \frac{\sin(n\theta)}{n}x^n$ a le même rayon de convergence R que la série entière $\sum \sin(n\theta)x^n$ par multiplication par n.
   De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\sin(n\theta)| \leqslant 1$ donc $R \geqslant R' = 1$ où R' est le rayon de convergence de la série géométrique $\sum x^n$.
   Ainsi pour tout $x \in]-1;1[$, et $\theta \in \mathbb{R}$, la série $\sum \frac{\sin(n\theta)}{n}x^n$ converge absolument.
2. Notons $x \mapsto f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n}x^n$, la fonction somme.
   Si $\theta \in \pi\mathbb{Z}$, $f(x) = 0$ car $\sin(n\theta) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Dans la suite, on suppose que $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$
   Pour tout $x \in]-1;1[\backslash\{0\}$, le théorème de dérivation terme à terme donne

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n}\sin(n\theta)x^{n-1} = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty} \sin(n\theta)x^n = \frac{1}{x}\,\mathrm{Im}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} e^{in\theta}x^n\right).$$

La convergence de la dernière série est assurée car $|e^{i\theta}x| = |x| < 1$.
Calculons dans un premier temps

$$\mathrm{Im}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{in\theta}x^n\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{1-e^{i\theta}x}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{1-e^{-i\theta}x}{(1-x\cos\theta)^2+x^2\sin^2\theta}\right)$$
$$= \frac{x\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}$$

On en déduit :

$$\forall x \in]-1;1[\backslash\{0\}, f'(x) = \frac{\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}$$

Notons qu'on a aussi obtenu $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n}\sin(n\theta)x^{n-1}$ donc $f'(0) = \sin(\theta)$.

Finalement, pour tout $x \in]-1;1[$,

$$f'(x) = \frac{\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}.$$

On intègre sur entre 0 et $x \in]-1;1[$, on obtient compte tenu du fait que $f(0) = 0$

$$\begin{aligned}
f(x) - f(0) &= \int_0^x \frac{\sin\theta}{1-2t\cos\theta+t^2} \\
f(x) &= \int_0^x \frac{\sin\theta}{(t-\cos\theta)^2+\sin^2\theta}d\theta \\
f(x) &= \int_{-\cos\theta}^{x-\cos\theta} \frac{\sin\theta}{(u)^2+\sin^2\theta}du \qquad u = t-\cos\theta \\
f(x) &= \int_{-\cos\theta}^{x-\cos\theta} \frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{\left(\frac{u}{\sin\theta}\right)^2+1}du \\
&= \left[\arctan\frac{u}{\sin\theta}\right]_{-\cos\theta}^{x-\cos\theta} \\
&= \arctan\frac{x-\cos\theta}{\sin\theta} - \arctan\frac{-\cos\theta}{\sin\theta}
\end{aligned}$$

□

Solution Exercice 21.

1. (a) On montre par récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant a_n \leqslant n+2$.
   Cet encadrement est vrai aux rangs 0 et 1 car $1 \leqslant a_0 = 1 \leqslant 0+2 = 2$ et $1 \leqslant a_1 = 1 \leqslant 1+2 = 3$.
   Si $1 \leqslant a_n \leqslant n+2$ et $1 \leqslant a_{n+1} \leqslant n+3$ alors

$$1 \leqslant a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{a_n}{n+2} \leqslant n+3+\frac{n+2}{n+2} = n+4$$

   (b) Puisque pour tout $n \geqslant 0$, $a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{a_n}{n+2} \geqslant a_{n+1} + \frac{1}{n+2} \geqslant a_{n+1}$, on en déduit que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
   Mais $a_0 = a_1 = 1$ donc la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   De plus les séries entières $\sum x^n$ et $\sum(n+2)x^n$ on le même rayon de convergence $R' = 1$.
   L'encadrement $1 \leqslant a_n \leqslant n+2$ donne $1 = R' \geqslant R \geqslant R' = 1$ où R est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.
   Ainsi, $R = 1$.
2. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $g(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n+2}x^{n+2}$.

(a) Les fonctions f et g sont les sommes de séries entières de séries entières de même rayon de convergence $R = 1$.

Elles sont donc en particulier de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence $]-1;1[$ par le théorème de dérivation terme à terme.

(b) Par le théorème de dérivation terme à terme, on a pour tout $x \in]-1;1[$:

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+2} x^{n+2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = xf(x).$$

(c) – En utilisant la relation de récurrence vérifiée par la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on trouve

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+2} x^{n+2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_{n+2} - a_{n+1}) x^{n+2} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2} x^{n+2} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} x^{n+2} \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^{n+1} = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n x^n - x\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n \\ &= (f(x) - a_0 - a_1 x) - x(f(x) - a_0) \\ &= f(x) - 1 - x - xf(x) + x \qquad (a_0 = a_1 = 1) \\ &= f(x)(1-x) - 1 \end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $x \in]-1;1[\setminus\{0\}$,

$$\begin{aligned} g(x) = \frac{xf(x)}{x}(1-x) - 1 &\iff xg(x) = g'(x)(1-x) - x \\ &\iff g'(x) = \frac{x}{1-x} g(x) + \frac{x}{1-x}, \end{aligned}$$

formule encore valable en 0 car $g'(0) = 0f(0) = 0$.

– Résolvons l'équation différentielle du premier ordre :

$$(E) : y'(x) = \frac{x}{1-x} y(x) + \frac{x}{1-x}.$$

– L'équation homogène associée $(H) : y'(x) = \frac{x}{1-x} y(x)$ admet pour solutions l'ensemble des fonctions $Ke^{\int_0^x \frac{t}{1-t}dt}$ avec $K \in \mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{t}{1-t} dt &= \int_0^x \left(-1 + \frac{1}{1-t}\right) dt \\ &= -x - \ln(1-x) \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation homogène (H) est décrit par

$$Ke^{-x-\ln(1-x)} = Ke^{-x}e^{-\ln(1-x)} = \frac{Ke^{-x}}{1-x}, K \in \mathbb{R}.$$

– La fonction constante $x \mapsto -1$ est solution particulière de l'équation différentielle (E) :

$$y'(x) = \frac{x}{1-x} y(x) + \frac{x}{1-x}.$$

– L'ensemble des fonctions solution de (E) est donc décrit par

$$y(x) = \frac{Ke^{-x}}{1-x} - 1, K \in \mathbb{R}$$

et puisque $g(0) = 1$ le problème de Cauchy sur $]-1;1[$:

$$y'(x) = \frac{x}{1-x} y(x) + \frac{x}{1-x}; \quad y(0) = 0$$

admet pour unique solution la fonction g, ce qui nous permet de déterminer la valeur de la constante K dans ce cas :

$$g(0) = 0 \iff K = 1.$$

Au final $g(x) = \dfrac{e^{-x}}{1-x} - 1$ pour tout $x \in]-1;1[$.

(d) On a montré que $g'(x) = xf(x)$ ainsi, pour tout $x \in]-1;1[$, puisque g est solution de (E) (inutile donc de re-calculer $g'(x)$...)

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{g'(x)}{x} &= \frac{1}{x}\left[\frac{x}{1-x}\left(\frac{e^{-x}}{1-x} - 1\right) + \frac{x}{1-x}\right] \\ &= \frac{1}{x}\frac{xe^{-x}}{(1-x)^2} \\ &= \frac{e^{-x}}{(1-x)^2}, \end{aligned}$$

Formule encore valable en 0 car $f(0) = a_0 = 1$.

□

Solution Exercice 22.

1. On suppose que la série entière $y(x) = \sum a_n x^n$ est solution de l'équation différentielle $16(x^2 - x)y'' + (16x - 8)y' - y = 0\,(E)$ sur $]0;R[$.

   Soit $x \in]0;R[$. $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

   Par le théorème de dérivation terme à terme,

$y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$
$y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$
Ainsi, y est solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si

$$\begin{aligned}
&16(x^2-x)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + (16x-8)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0\\
\iff & 16\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 16\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + 16\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n\\
&- 8\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0\\
\iff & 16\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 16\sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1} x^n + 16\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n\\
&- 8\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0
\end{aligned}$$

donc si et seulement si
— Pour $n=0$: $-8(0+1)a_{0+1} - a_0 = 0 \iff -8a_1 = a_0$
— Pour $n=1$: $-16(1)(1+1)a_{1+1} + 16(1)a_1 - 8(1+1)a_{1+1} - a_1 = 0$
soit $-48a_2 + 15a_1 = 0 \iff a_2 = \frac{5}{16}a_1$.
— Pour tout $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}
&16n(n-1)a_n - 16n(n+1)a_{n+1} + 16na_n - 8(n+1)a_{n+1} - a_n = 0\\
\iff & a_{n+1} = \frac{(4n-1)(4n+1)}{8(n+1)(2n+1)} a_n,
\end{aligned}$$

formule encore valable pour $n=0, n=1$.
On obtient en décalant l'indice n, pour tout $n \geqslant 1$,

$$a_n = \frac{(4n-3)(4n-5)}{8n(2n-1)} a_{n-1}.$$

2. La règle de d'Alembert donne pour tout $x \neq 0$,

$$\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right| \frac{x^n}{x^{n-1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{16n^2}{16n^2}|x| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |x|.$$

Notons que si $a_n = 0$ pour un entier n alors tous les termes sont nuls à partir d'un certain rang (et en fait tous les termes sont nuls) : dans ce cas la fonction somme est identiquement nulle.
On s'intéresse dans la suite au cas où f est non identiquement nulle.
On obtient classiquement $R = 1$.

3. On itère la relation démontrée à la question précédente :

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{(4n-3)(4n-5)}{4(2n)(2n-1)} \frac{(4n-7)(4n-9)}{4(2n-2)(2n-3)} \cdots \frac{(4\cdot 2-3)(4\cdot 2-5)}{4(2\cdot 2)(2\cdot 2-1)} a_1\\
&= \frac{(4n-3)(4n-5)}{4(2n)(2n-1)} \frac{(4n-7)(4n-9)}{4(2n-2)(2n-3)} \cdots \frac{(4\cdot 2-3)(4\cdot 2-5)}{4(2\cdot 2)(2\cdot 2-1)} \frac{-1}{8} a_0\\
&= \frac{(4n-3)(4n-5)}{4(2n)(2n-1)} \frac{(4n-7)(4n-9)}{4(2n-2)(2n-3)} \cdots \frac{5\cdot 3}{4(2\cdot 2)(2\cdot 2-1)} \frac{-1}{4\cdot 2}\\
&= \frac{-1}{4^n(2n)!}(4n-3)(4n-5)(4n-7)(4n-9)\ldots(5)(3)\\
&= \frac{-[4n]\{4n-1\}}{4^n(2n)!} \frac{[4n-2][4n-3][4n-4](4n-5)\ldots[6](5)[4](3)[2]}{[4n]\{4n-1\}[4n-2][4n-4]\ldots[6][4][2]}\\
&= -\frac{(4n)!}{(4n-1)4^n(2n)!} \frac{1}{2^{2n}(2n)!}\\
&= -\frac{(4n)!}{(4n-1)4^n(2n)!} \frac{1}{2^{2n}(2n)!}\\
&= -\frac{(4n)!}{(4n-1)4^{2n}(2n)!^2}
\end{aligned}$$

4. En utilisant la formule de Stirling, $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, on trouve

$$\begin{aligned}
a_n &\underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{(4n-1)4^{2n}} \sqrt{8n\pi}\left(\frac{4n}{e}\right)^{4n} \frac{1}{\left(\sqrt{4n\pi}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\right)^2}\\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{(4n-1)4^{2n}} \frac{1}{\sqrt{2n\pi}} \left(\frac{4n}{2n}\right)^{4n}\\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{(4n-1)4^{2n}} \frac{1}{\sqrt{2n\pi}} 2^{4n}\\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{(4n-1)\sqrt{2n\pi}}\\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{4n\sqrt{2n\pi}}.
\end{aligned}$$

□