TRAVAUX DIRIGÉS : Matrices symétriques et coniques

1 Matrices symétriques

Exercice 1: (Solution)

Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Exercice 2: (Solution)

Soit E un espace euclidien et s un endomorphisme vérifiant

$$\forall (x,y) \in E^2 : (s(x)|y) = (x|s(y)).$$

1. Montrer que la matrice de s dans toute B.O.N est symétrique.
2. Montrer que $(\ker s)^{\perp} = \mathrm{Im} s$.
3. Théorème spectral.
   (a) Soit F un s.e.v. stable par s. Montrer que $F^{\perp}$ est stable par s.
   (b) Montrer que s possède une valeur propre réelle λ.
   (c) En raisonnant par récurrence, montrer que s est diagonalisable dans une B.O.N composée de vecteurs propres pour s.
   Pour l'hérédité, on pourra considérer $F = \mathrm{Vect}(e_{\lambda})$ et $F^{\perp}$ avec e_{λ} un vecteur propre associé à une valeur propre réelle s.

Exercice 3: (Solution)

Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E vérifiant :

$$\forall x \in E, (f(x)|x) = 0.$$

1. Montrer que f vérifie :
$$\forall (x,y) \in E^2 : (f(x)|y) = -(x|f(y))$$
(on dit que f est un endomorphisme antisymétrique).
2. Montrer que $\ker f = \mathrm{Im}(f)^{\perp}$.
3. Montrer que toute valeur propre de f est nulle.
A quelle condition f est-il diagonalisable ?
4. Montrer que la réunion d'une base orthonormale de $\ker f$ et d'une base orthonormale de $\mathrm{Im} f$ constitue une base orthonormale de E.
Déterminer la matrice de f dans cette base.

Exercice 4: (Solution)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\ker({}^tAA) = \ker(A)$.
2. En déduire que $\mathrm{rg}({}^tAA) = \mathrm{rg}(A)$.

Exercice 5: (Solution)

1. Montrer que si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $A\,{}^tAA = I_n$ alors A est symétrique.
2. Déterminer les matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A\,{}^tAA = I_n$.

Exercice 6: (Solution)

Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme de E.
— u est dit symétrique si : $\forall x, y \in E, (u(x)|y) = (x|u(y))$.
— u est dit positif si $\forall x \in E, (u(x)|x) \geqslant 0$.
— u est dit défini positif si $\forall x \in E, (x \neq 0_E \Longrightarrow (u(x)|x) > 0)$.

1. Montrer que $u \in \mathscr{L}(E)$ est un endomorphisme symétrique si et seulement si sa matrice dans toute base orthonormale est symétrique.
Dans la suite on se donne un endomorphisme symétrique $u \in \mathscr{L}(E)$ et A sa matrice dans une base orthonormée de E.
2. Traduire matriciellement les propriétés définies ci-dessus.
Les matrices correspondantes seront dites positives, définies positives.
3. Montrer les équivalences suivantes :
$$A \text{ positive } \Longleftrightarrow Sp(A) \subset \mathbb{R}_+ \Longleftrightarrow \exists M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) : A = {}^tMM.$$
4. Montrer les équivalences suivantes :
$$A \text{ définie positive } \Longleftrightarrow Sp(A) \subset \mathbb{R}_+^* \Longleftrightarrow \exists M \in GL_n(\mathbb{R}) : A = {}^tMM.$$

Exercice 7: (Solution)

Soit E un espace euclidien de dimension 3 orienté par le choix d'une base orthonormée (e_1, e_2, e_3) directe.

1. Démontrer la formule du double produit vectoriel :
$$x \wedge (y \wedge z) = (x|z)y - (x|y)z.$$
2. Soit $a \in E$ un vecteur non nul.
   On considère l'application $f : x \longmapsto a \wedge (a \wedge x)$
   La définition d'un endomorphisme symétrique a été donnée à l'exercice précédent.
   Montrer que f est un endomorphisme symétrique de E et déterminer ses éléments propres.

2 Coniques

Exercice 8: (Solution)

Soit $\mathscr{R}_0 = (O, i, j)$ le repère orthonormé direct usuel. On considère le point $F(1;1)$ et la droite d'équation cartérsienne $(\mathscr{D}) : x_0 - y_0 = 1$ dans $\mathscr{R}_0$.
Dans cet exercice, on étudie l'ellipse $\mathscr{E}$ de directrice $(\mathscr{D})$, de foyer F et d'excentricité $e = 1/2$.

1. Tracer la droite $(\mathscr{D})$, placer le point F et calculer la distance $d(F, (\mathscr{D}))$ du point F à la droite $(\mathscr{D})$. On notera cette distance d. On demande **deux méthodes.**
2. Donner une équation cartésienne (que l'on ne cherchera pas à réduire) de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{R}_0$.
3. Déterminer un repère $\mathscr{R}_1$ dans lequel la directrice a pour équation cartésienne $x_1 = -d$. Donner une équation cartésienne de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{R}_1$.
4. Rappeler la formule permettant d'exprimer les coordonnées $X_0(M)$ d'un point M dans $\mathscr{R}_0$ en fonction de ses coordonnées $X_1(M)$ dans $\mathscr{R}_1$.
5. Déterminer un repère $(\Omega, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ dans lequel l'équation de $\mathscr{E}$ est réduite :
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$
6. Déterminer $X_0(\Omega), X_0(S_i)$ avec $S_i, i \in \{1, 2, 3, 4\}$ les quatre sommes de $\mathscr{E}$.
7. Tracer $\mathscr{E}$. On donne $a \simeq 0,47$ et $b \simeq 0,41$.
8. Donner une équation cartésienne des axes de symétrie de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{R}_0$. On demande deux méthodes.

Exercice 9: (Solution)

Soit $\mathscr{R}_0 = (O, i, j)$ le repère orthonormé direct usuel. On considère le point $F(1;1)$ et la droite d'équation cartérsienne $(\mathscr{D}) : x_0 - y_0 = 1$ dans $\mathscr{R}_0$.
Dans cet exercice, on étudie l'hyperbole $\mathscr{H}$ de directrice $(\mathscr{D})$, de foyer F et d'excentricité $e = 2$.

1. Donner une équation cartésienne (que l'on ne cherchera pas à réduire) de $\mathscr{H}$ dans $\mathscr{R}_0$.
2. Déterminer un repère $\mathscr{R}_1$ dans lequel la directrice a pour équation cartésienne $x_1 = -d$. Donner une équation cartésienne de $\mathscr{H}$ dans $\mathscr{R}_1$.
3. Déterminer un repère $(\Omega, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ dans lequel l'équation de $\mathscr{H}$ est réduite :
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$
4. Déterminer $X_0(\Omega), X_0(S_i)$ avec $S_i, i \in \{1, 2\}$ les deux sommets de $\mathscr{H}$.
5. Montrer que les droites d'équations $y_2 = \pm\frac{b}{a}x_2$ sont asymptotes à $\mathscr{H}$.
   On pourra utiliser une paramétrisation de la 1/2-hyperbole $\mathscr{H}_+$ située dans le 1/2-plan $x_2 > 0$.
6. Tracer $\mathscr{H}$. On donne $a \simeq 0,86$ et $b \simeq 1,48$.
7. Donner une équation cartésienne des axes de symétrie de $\mathscr{H}$ dans $\mathscr{R}_0$. On demande deux méthodes.

Exercice 10: (Solution)

Déterminer la nature, les éventuelles symétries et sommets des coniques définies par leurs équations cartésiennes dans le repère orthonormé direct usuel $\mathscr{R}_0 = (O, i, j)$, puis les tracer :

1. $4x^2 + y^2 + 4x - 2y - 6 = 0$.
2. $x^2 - y^2 + 4x + 2y + 3 = 0$.
3. $10x^2 + 10x - 3y^2 + 12y - 2 = 0$.
4. $27x^2 - 16y^2 + 18x - 64y - 12 = 0$.
5. $x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$. Donner l'équation dans le repère usuel de l'axe focal et de la directrice puis placer le foyer.
6. $x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 + 16y + 16 = 0$. Donner l'équation dans le repère usuel de l'axe focal et de la directrice puis placer le foyer.
7. $x^2 + 2xy + y^2 - 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y + 6 = 0$. Donner l'équation dans le repère usuel de l'axe focal et de la directrice puis placer le foyer.

Exercice 11: (Solution)

1. Déterminer la nature de la courbe d'équation $3x^2 + 4xy - \sqrt{5}x - 1 = 0$ dans le repère orthonormé direct (O, i, j).
   La tracer.
2. Déterminer une paramétrisation de la courbe précédente.
3. En déduire une équation de la tangente au point de la courbe d'ordonnée $y = \frac{\sqrt{5}}{4}$ et d'abscisse positive.
4. Résoudre la question précédente sans paramétrisation.

Exercice 12: (Solution)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré 3 noté $P(X) = X^3 + \lambda X^2 + \mu X + \delta$.
On considère la courbe $\mathscr{C}$ formée des points $M(x, y)$ du plan dont les coordonnées vérifient $P(y) = P(x)$.
Montrer que $\mathscr{C}$ est soit une droite, soit la réunion d'une droite et d'une conique.

Exercice 13: (Solution)

Soit $A(1, 0)$ le point du plan dont les coordonnées $(1, 0)$ sont données dans un repère orthonormé direct.
On considère la parabole d'équation $(\mathscr{P}) : y^2 + x = 1$ et l'ellipse d'équation $(\mathscr{E}) : x^2 + 2y^2 = 1$.
Pour tout $m \neq 0$ on considère la droite Δ_m d'équation $y = m(1 - x)$.

1. Montrer que Δ_m recoupe la parabole en un point $M \neq A$ et l'ellipse en un point $N \neq A$. Préciser les coordonnées de M et N.
2. Donner une équation de la tangente en M à la parabole $\mathscr{P}$ et une équation de la tangente en N à l'ellipse $\mathscr{E}$.
3. Déterminer le lieu des points d'intersection I de ces deux tangentes lorsque m décrit $\mathbb{R}^*$.

Exercice 14: (Solution)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on considère la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y^2 = 2px$ avec $p > 0$ et soit $A \in \mathscr{P}$ fixé dans tout l'exercice.

1. Déterminer l'équation d'une droite (BC) passant reliant deux points $B, C \in \mathscr{P}$.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $(AB) \perp (AC)$.
   Montrer que toute droite (BC) avec $B, C \in \mathscr{P}$ réalisant cette condition passe un point fixe Q.
3. Déterminer le lieu de Q lorsque A décrit $\mathscr{P}$.

SOLUTIONS TRAVAUX DIRIGÉS : Coniques

Solution Exercice 1. Diagonalisons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

La matrice A est symétrique : ${}^tA = A$.
Il existe donc une base orthonormée de vecteurs propres pour A.
De manière équivalente il existe une matrice orthogonale $P \in O_3(\mathbb{R})$ telle que

$$A = PD\,{}^tP \text{ avec } D \text{ diagonale.}$$

Il est même possible de choisir $P \in SO_3(\mathbb{R})$.

— $\chi_A(X) = (X-1)((X-5)^2-1) = (X-1)(X-4)(X-6)$.

— On lit directement sur la matrice $E_1(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

— On a $A - 4I_3 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$: $E_4(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

— Les espaces propres sont orthogonaux.
On calcule le produit vectoriel $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

On en déduit que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}_{{}^tP = P^{-1}}$.

□

Solution Exercice 2. Soit E un espace euclidien et s un endomorphisme vérifiant

$$\forall (x,y) \in E^2 : (s(x)|y) = (x|s(y)).$$

Montrons que $(\ker s)^\perp = \text{Im}s$.

— Soit $y = s(x_0) \in \text{Im}s$ et montrons que $y \in (\ker s)^\perp$.
Pour cela on se donne $x \in \ker s$ quelconque et on calcule :

$$(y|x) \underset{(y \in \text{Im}s)}{=} (s(x_0)|x) = (x_0|s(x)) \underset{(x \in \ker s)}{=} (x_0|0) = 0.$$

On en déduit que $\text{Im}s \subset (\ker s)^\perp$.
Par le théorème du rang, on a $\dim \text{Im}s = \dim E - \dim\ker s = \dim(\ker s)^\perp$.
L'inclusion et l'égalité des dimensions que nous venons de démontrer impliquent l'égalité $\text{Im}s = (\ker s)^\perp$.

□

Solution Exercice 3. Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E vérifiant :

$$\forall x \in E, (f(x)|x) = 0.$$

1. Montrons que f vérifie :

$$\forall (x,y) \in E^2 : (f(x)|y) = -(x|f(y))$$

Soit $(x,y) \in E^2$. On a par hyppothèse sur f : $(f(x+y)|x+y) = 0$.
En utilisant la linéarité de f et la bilinéarité du produit scalaire, il vient :

$$\begin{aligned} 0 &= (f(x)+f(y)|x+y) \\ &= (f(x)|x) + (f(x)|y) + (f(y)|x) + (y|f(y)) \\ &= (f(x)|y) + (f(y)|x). \end{aligned}$$

En conclusion : $(f(x)|y) = -(x|f(y))$.

2. Montrons que $\ker f = \text{Im}(f)^\perp$.
On commence par montrer que $\ker f \subset \text{Im}(f)^\perp$.
Pour cela on se donne $x \in \ker f$ quelconque et on montre que $x \in \text{Im}(f)^\perp$.
Soit $y \in \text{Im}(f)$: $\exists x_0 \in E, y = f(x_0)$.
On calcule alors :

$$(x|y) = (x|f(x_0)) = -(f(x)|x_0) \underset{(x \in \ker f)}{=} -(0|x_0) = 0.$$

On en déduit que tout vecteur $x \in \ker f$ est orthogonal à $\text{Im}(f)$:

$$\ker f \subset \text{Im}(f)^\perp.$$

De plus $\dim \text{Im}(f)^\perp = \dim E - \dim \text{Im}(f) = \dim\ker f$ par le théorème du rang.
On en déduit que $\ker(f) = \text{Im}(f)^\perp$.

3. Soit $\lambda \in Sp(f)$ et $x \in E$, $x \neq 0_E$ tel que $f(x) = \lambda x$.
Alors $|\lambda|^2||x||^2 = ||\lambda x||^2 = (\lambda x|\lambda x) = \lambda(x|\lambda x) = \lambda(x|f(x)) = 0$.
Ainsi, $\lambda = 0$ car $x \neq 0_E$.
Par conséquent f est diagonalisable si et seulement si $\dim\ker f = \dim E \iff \ker f = E \iff f$ est nulle.

4. Les espaces $F = \text{Im} f$ et $F^\perp$ sont supplémentaires dans E par le cours.
Puisque $F^\perp = \ker f$ on en déduit que $\ker f$ et $\text{Im} f$ sont supplémentaires dans E.
La réunion de toute base de $\text{Im} f$ et de $\ker f$ est donc une base de E.
Elle est orthonormale si les bases de $\text{Im} f$ et de $\ker f$ le sont.

Dans une telle base $\mathscr{B} = (\underbrace{e_1, \dots, e_p}_{\mathrm{Im}(f)}, \underbrace{e_{p+1}, \dots, e_n}_{\ker f})$, la matrice de f est de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1p} & \\ -a_{12} & 0 & \dots & a_{2p} & (0) \\ & & \ddots & a_{p-1,p} & \\ -a_{1p} & \dots & -a_{p-1,p} & 0 & \\ & (0) & & & (0) \end{pmatrix}.$$

En effet, $f(e_{p+1}) = \dots = f(e_n) = 0_E$ et pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$:

$$a_{ij} = (e_i | f(e_j)) = -(f(e_i)|e_j) = -a_{ji}.$$

$\square$

Solution Exercice 4.

1. Montrons que $\ker({}^tAA) = \ker(A)$.
   Il est clair que si $AX = 0$ alors ${}^tAAX = 0$: $\ker(A) \subset \ker {}^tAA$.
   Réciproquement si ${}^tAAX = 0$ alors :
   $$||AX||^2 = {}^t(AX)AX = {}^tX\,{}^t\underbrace{AAX}_{=0} = 0.$$
   Ainsi, $\ker({}^tAA) \subset \ker A$ d'où l'égalité par double inclusion.
2. Pour montrer que $\mathrm{rg}({}^tAA) = \mathrm{rg}(A)$ on applique le théorème du rang :
   $$\mathrm{rg}\,{}^tAA = n - \dim\ker {}^tAA = n - \dim\ker A = \mathrm{rg}\,A.$$

$\square$

Solution Exercice 5.

1. Montrons que si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $A\,{}^tAA = I_n$ alors A est symétrique.
   Soit A une telle matrice.
   On a $A\,{}^tAA = I_n$ donc en transposant ${}^t(A\,{}^tAA) = I_n$ i.e. $\underbrace{{}^tAA}_{A^{-1}}\,{}^tA = I_n$.
   En multipliant à gauche par A, il vient $AA^{-1}\,{}^tA = A$ i.e. ${}^tA = A$.
2. Déterminons les matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A\,{}^tAA = I_n$.
   La première question montre qu'une telle matrice est nécessairement symétrique.
   La relation $A\,{}^tAA = I_n$ devient donc $A^3 = I_n$.
   Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A : $\exists X \neq 0, AX = \lambda X$.
   En multipliant par A, puis encore A, il vient :
   $$A^3X = A^2AX = A^2\lambda X = A\lambda AX = A\lambda^2 X = \lambda^2 AX = \lambda^3 X.$$
   Mais puisque $A^3 = I_n$, on obtient : $A^3X = I_nX = X$ puis $X = \lambda^3 X$.
   Par conséquent, $\lambda^3 = 1$ car $X \neq 0$.
   Ainsi, nécessairement $\lambda \in \{1, j, j^2\}$ avec $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
   La matrice A étant symétrique, elle est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres : $A = PDP^{-1} = PD\,{}^tP$ avec $P \in O_n(\mathbb{R})$.
   La matrice diagonale D est à coefficients réels. L'unique racine 3-ième de l'unité réelle est $\lambda = 1$.
   Par conséquent $D = I_n$ puis $A = PI_n\,{}^tP = I_n$.
   Au final si $A\,{}^tAA = I_n$ alors nécessairement, $A = I_n$.
   La réciproque est claire.

$\square$

Solution Exercice 6. Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme de E.

— u est dit symétrique si : $\forall x, y \in E, (u(x)|y) = (x|u(y))$.
— u est dit positif si $\forall x \in E, (u(x)|x) \geqslant 0$.
— u est dit défini positif si $\forall x \in E, (x \neq 0_E \Longrightarrow (u(x)|x) > 0)$.

1. $\boxed{\Longrightarrow}$ Soit u un endomorphisme symétrique et $\mathscr{B}$ une base orthonormale de E. On note $A = Mat_{\mathscr{B}}(u) = (a_{ij})_{i,j \in [\![1,n]\!]}$.
   Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$: $a_{ij} = (u(e_j)|e_i) = (e_j|u(e_i)) = a_{ji}$.
   Conclusion : ${}^tA = A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$
   $\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose que la matrice de u dans toute base orthonormale est symétrique. Soit A une telle matrice.
   Alors pour tout $x, y \in E$ de coordonnées X, Y dans $\mathscr{B}$ on a (puisque $\mathscr{B}$ est orthonormale) :
   $$(u(x)|y) = {}^t(AX)Y = {}^tX\,{}^tAY = {}^tXAY = (x|u(y)).$$
   Donc u est symétrique.
2. — $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite positive si $\forall X \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{R})$: ${}^tXAX \geqslant 0$.
   — $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite définie positive si $\forall X \neq 0$, ${}^tXAX > 0$.
3. $\boxed{\Longrightarrow_1}$ Supposons A positive et fixons $\lambda \in Sp(A)$.
   Il existe $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$.
   Alors $0 \leqslant {}^tXAX = {}^tX(\lambda X) = \lambda ||X||^2$.
   Ainsi, $\lambda = \dfrac{{}^tXAX}{||X||^2} \geqslant 0$.
   $\boxed{\Longrightarrow_2}$ Supposons $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+$.

La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres :

$$\exists P \in O_n(\mathbb{R}) : A = PD\,{}^tP \text{ avec } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

On a $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i \geqslant 0$ car $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+$.

On pose $\Delta = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$ et on obtient :

$$A = P\Delta^2\,{}^tP = (P\Delta)(\Delta\,{}^tP) = (P\Delta)({}^t\Delta\,{}^tP) = (P\Delta)\,{}^t(P\Delta).$$

On pose $M = {}^t(P\Delta) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et il vient $A = {}^tMM$.

$\boxed{\Longrightarrow_3}$ On suppose qu'il exist $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = {}^tMM$.

Soit $X \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{R})$. Alors

$${}^tXAX = {}^tX\,{}^tMMX = {}^t(MX)MX = ||MX||^2 \geqslant 0.$$

4. $\boxed{\Longrightarrow_1}$ Supposons A définie positive. Alors A est en particulier positive donc $Sp(A) \subset \mathbb{R}^+$.
   Mais s'il existait une valeur propre nulle, il existerait également un vecteur propre $X \neq 0$ tel que $AX = 0$.
   On obtiendrait alors ${}^tXAX = 0$ avec $X \neq 0$ ce qui contredirait alors le fait que A soit définie positive.
   Ainsi, $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+^*$.
   $\boxed{\Longrightarrow_2}$ Supposons $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+^*$.
   Alors en particulier $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+$ et il existe $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = {}^tMM$.
   Mais $\det(A) = \det({}^tMM) = \det({}^tM)\det(M) = \det(M)^2$.
   La matrice A est inversible (sinon $\lambda = 0$ serait valeur propre).
   Donc $\det(M)^2 = \det(A) \neq 0$ et par conséquent $\det(M) \neq 0$: $M \in GL_n(\mathbb{R})$.
   $\boxed{\Longrightarrow_3}$ On suppose qu'il existe $GL_n \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = {}^tMM$.
   Soit $X \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{R})$ non nul. Alors :

$${}^tXAX = {}^tX\,{}^tMMX = {}^t(MX)MX = ||MX||^2 \geqslant 0.$$

   Mais $MX \neq 0$ car $X \neq 0$ et M est inversible.
   Ainsi, $\forall X \neq 0$, ${}^tXAX = ||MX||^2 > 0$.

□

Solution Exercice 7. Soit E un espace euclidien de dimension 3 orienté par le choix d'une base orthonormée (e_1, e_2, e_3) directe.

1. Démontrons la formule du double produit vectoriel :

$$x \wedge (y \wedge z) = (x|z)y - (x|y)z.$$

   Pour cela on travaille avec les coordonnées des vecteurs x, y, z dans la base orthonormée (e_1, e_2, e_3) de E.
   Les calculs ne sont pas difficiles mais il faut les faire soigneusement.
   D'une part :

$$\begin{aligned} x \wedge (y \wedge z) &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \wedge \left[\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} y_2z_3 - y_3z_2 \\ y_3z_1 - y_1z_3 \\ y_1z_2 - y_2z_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_2y_1z_2 - x_2y_2z_1 - x_3y_3z_1 + x_3y_1z_3 \\ x_3y_2z_3 - x_3y_3z_2 - x_1y_1z_2 + x_1y_2z_1 \\ x_1y_3z_1 - x_1y_1z_3 - x_2y_2z_3 + x_2y_3z_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   D'autre part :

$$\begin{aligned} (x|z)y - (x|y)z &= (x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} - (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_2y_1z_2 + x_3y_1z_3 - x_2y_2z_1 - x_3y_3z_1 \\ x_3y_2z_3 - x_3y_3z_2 - x_1y_1z_2 + x_1y_2z_1 \\ x_1y_3z_1 - x_1y_1z_3 - x_2y_2z_3 + x_2y_3z_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   d'où la formule du double produit vectoriel.

2. Soit $a \in E$ un vecteur non nul.
   On considère l'application $f : x \longmapsto a \wedge (a \wedge x)$.
   Soit $(x, y) \in E^2$:

$$(f(x)|y) = (a \wedge (a \wedge x)|y) = ((a|x)a - ||a||^2x|y) = (a|x)(a|y) - ||a||^2(x|y).$$

   La formule est symétrique en x, y, on montre alors aisément que $(f(x)|y) = (x|f(y))$.
   Soit A la matrice de f dans une base orthonormée.
   Les résultats de l'exercice précédent montrent que A est symétrique donc diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres (notons que $Sp(f) = Sp(A) \subset \mathbb{R}$).

— Notons que $f(a)=0$ donc a est un vecteur propre associé à 0.

— Notons que $\mathrm{Vect}(a)^{\perp}$ est de dimension 2.
Soit (u,v) une base orthonormée de $\mathrm{Vect}(a)^{\perp}$.
Alors :

$$f(u)=(a|u)a-||a||^2u=-||a||^2u \text{ et de même } f(v)=-||a||^2v.$$

Par conséquent, $-||a||^2\neq 0$ est une valeur propre de f.
On a $E_{-||a||^2}=\mathrm{Vect}(u,v)$.

Conclusion : si l'on définit $P\in O_3(\mathbb{R})$ la matrice de passage de la base (e_1,e_2,e_3) à la base $(\frac{a}{||a||},u,v)$ alors :

$$Mat_{(e_1,e_2,e_3)}(f)=P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-||a||^2&0\\0&0&-||a||^2\end{pmatrix}{}^tP.$$

□

***Solution Exercice** 10.* Nature et éventuelles symétries des coniques suivantes :

1. $(\mathscr{E}) : 4x^2+y^2+4x-2y-6=0.$
Le terme $2\beta xy$ n'apparait pas, la partie rotation ne s'applique ici.
On met sous forme canonique :

$$\begin{aligned}(\mathscr{E}) &\iff 4(x^2+x)+(y^2-2y)-6=0\\ &\iff 4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-1+(y-1)^2-1-6=0\\ &\iff 4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=8\\ &\iff \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{2}+\frac{(y-1)^2}{8}=1\\ &\iff \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{2}^2}+\frac{(y-1)^2}{(2\sqrt{2})^2}=1\end{aligned}$$

On pose $x'=x+\frac{1}{2}$ et $y'=y-1$. Ce changement de variable induit une translation sur l'origine du repère.
On obtient un repère orthonormé $\mathscr{R}'=(\Omega,i,j)$ dans lequel l'équation $(\mathscr{E})$ s'écrit :

$$\frac{x'^2}{\sqrt{2}^2}+\frac{y'^2}{(2\sqrt{2})^2}=1.$$

Par conséquent, $\mathscr{E}$ est une ellipse de demi-axes $a=\sqrt{2}$ et $b=2\sqrt{2}>a$ et de centre $\Omega\left(-\frac{1}{2};1\right)$ coordonnées dans le repère initial $\mathscr{R}$.
Les droites d'équations $x=-\frac{1}{2}$ et $y=1$ sont les axes de symétrie.
Les points d'intersection des axes de symétrie et de l'ellipse s'obtiennent en notant les que les coordonnées (x',y') dans $\mathscr{R}'$ d'un tel point d'intersection vérifient :

$$(x'=0 \text{ et } (x',y')\in\mathscr{C}) \text{ ou } (y'=0 \text{ et } (x',y')\in\mathscr{C}.$$

Il vient dans $\mathscr{R}'$:

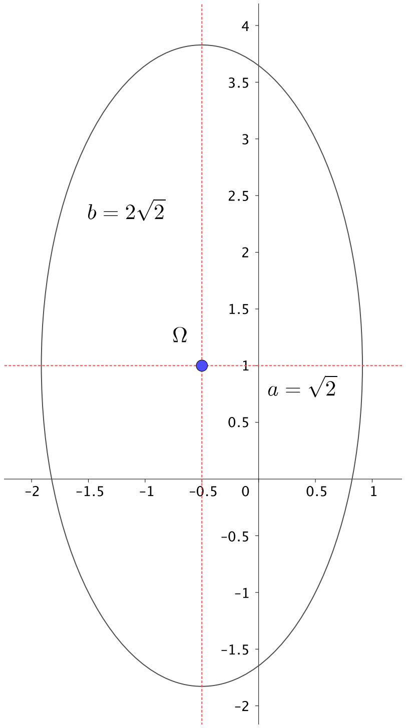
$$x'=0 \text{ et } y'=\pm 2\sqrt{2}$$

$$x'=\pm\sqrt{2} \text{ et } y'=0.$$

Dans le repère initial $\mathscr{R}$:

$$x=-\frac{1}{2} \text{ et } y=1\pm 2\sqrt{2}$$

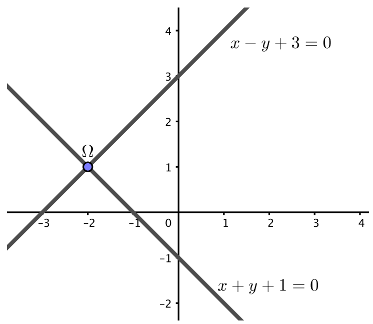
$$x=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{2} \text{ et } y=1.$$



2. $(\mathscr{C}) : x^2 - y^2 + 4x + 2y + 3 = 0$.

$$\begin{aligned}(\mathscr{C}) &\iff (x+2)^2 - 4 - (y-1)^2 + 1 + 3 = 0\\ &\iff (x+2)^2 - 4(y-1)^2 = 0\\ &\iff (x+2+y-1)(x+2-y+1) = 0\\ &\iff (x+y+1)(x-y+3) = 0\end{aligned}$$

Par conséquent, $\mathscr{C}$ est la réunion de deux droites (perpendiculaires ici).
L'unique centre de symétrie est le point de concours $\Omega(-2,1)$ de ces deux droites.



3. $(\mathscr{H}) : 10x^2 + 10x - 3y^2 + 12y - 2 = 0$.
Nature de la conique

$$\begin{aligned}(\mathscr{H}) &\iff 10(x^2+x) - 3(y^2-4y) - 2 = 0\\ &\iff 10\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{2} - 3(y-2)^2 + 12 - 2 = 0\\ &\iff 10\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - 3(y-2)^2 = -\frac{15}{2}\\ &\iff -\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2}{5}(y-2)^2 = 1\\ &\iff -\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{(y-2)^2}{\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2} = 1\end{aligned}$$

On pose $x' = x + \frac{1}{2}$ et $y' = y - 2$.
Ce changement de variable induit une translation de l'origine du repère.

On obtient un nouveau repère orthonormé direct (Ω, i, j) dans lequel l'équation $(\mathscr{H})$ s'écrit :

$$-\frac{x'^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{y'^2}{\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2} = 1.$$

On pose $x'' = y'$ et $y'' = -x'$. On obtient un nouveau repère orthonormé direct $(\Omega, j, -i)$ dans lequel l'équation $\mathscr{H}$ s'écrit

$$\frac{x''^2}{\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2} - \frac{y''^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1.$$

On en déduit que $\mathscr{H}$ est une hyperbole.
Centre
Dans le repère $\mathscr{R}''$, Ω a pour coordonnées $(0,0)$.
Dans le repère $\mathscr{R}'$, Ω a pour coordonnées $(0,0)$.
Dans le repère $\mathscr{R}$, Ω a pour coordonnées $(-\frac{1}{2}; 2)$.
Asymptotes
Dans le repère $\mathscr{R}''$, les asymptotes ont pour équation : $y'' = \pm\frac{b}{a}x''$ avec $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $a = \sqrt{\frac{5}{2}}$: $y'' = \pm\sqrt{\frac{3}{10}}x''$.
Il vient dans le repère $\mathscr{R}'$: $-x' = \pm\sqrt{\frac{3}{10}}y'$ puis dans le repère $\mathscr{R}$ initial :

$$x + \frac{1}{2} = \pm\sqrt{\frac{3}{10}}(y-2).$$

Axes de symétrie
Dans le repère $\mathscr{R}''$ les axes de symétrie ont pour équation $x'' = 0$ et $y'' = 0$ (le second intersecte l'hyperbole).
Dans $\mathscr{R}'$ il vient $y' = 0$ et $-x' = 0$.
Dans $\mathscr{R}$, les deux axes de symétries ont pour équation : $y-2 = 0$ et $x+\frac{1}{2} = 0$.
Sommets : Intersection axe de symétrie/hyperbole
On note $\mathscr{D}$ l'axe intersectant $\mathscr{H}$. Dans $\mathscr{R}''$, l'équation de $\mathscr{D}$: $y'' = 0$

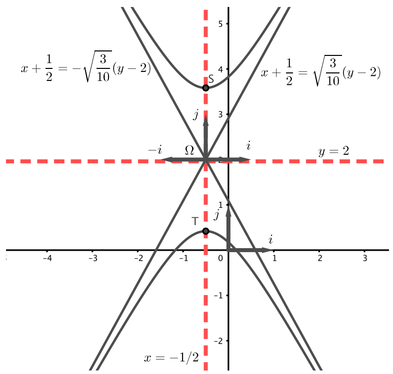
$$\begin{aligned}(x'', y'') \in \mathscr{H} \cap \mathscr{D} &\iff \left(y'' = 0 \text{ et } x''^2 = \left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2\right)\\ &\iff \left(y'' = 0 \text{ et } x'' = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}\right)\end{aligned}$$

Dans le repère $\mathscr{R}'$ il vient : $-x' = 0$ et $y' = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$.

Dans le repère $\mathscr{R}$ on obtient :

$$x+\frac{1}{2}=0 \text{ et } y-2=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}.$$

Les deux sommets de l'hyperbole ont donc pour équation $S(-\frac{1}{2};2+\sqrt{\frac{5}{2}})$ et $T(-\frac{1}{2};2-\sqrt{\frac{5}{2}})$ dans $\mathscr{R}$.



4. $(\mathscr{H}) : 27x^2-16y^2+18x-64y-12=0$.

$$\begin{aligned}
\mathscr{H} &\iff 27\left(x^2+\frac{2}{3}x\right)-16\left(y^2+4y\right)-12=0\\
&\iff 27\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-3-16(y+2)^2+64-12=0\\
&\iff 27\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-16(y+2)^2=-49\\
&\iff -\frac{\left(x+\frac{1}{3}\right)^2}{\left(\frac{7}{3\sqrt{3}}\right)^2}+\frac{(y+2)^2}{\left(\frac{7}{4}\right)^2}=1.
\end{aligned}$$

On pose $x'=x+\frac{1}{3}$ et $y'=y+2$.
Ce changement de variable induit une translation de l'origine du repère.
On obtient un nouveau repère orthonormé direct (Ω, i, j) dans lequel l'équation $(\mathscr{H})$ s'écrit :

$$-\frac{x'^2}{\left(\frac{7}{3\sqrt{3}}\right)^2}+\frac{y'^2}{\left(\frac{7}{4}\right)^2}=1.$$

On pose $x''=y'$ et $y''=-x'$. On obtient un nouveau repère orthonormé direct $(\Omega, j, -i)$ dans lequel l'équation $\mathscr{H}$ s'écrit

$$\frac{x''^2}{\left(\frac{7}{4}\right)^2}-\frac{y''^2}{\left(\frac{7}{3\sqrt{3}}\right)^2}=1.$$

On en déduit que $\mathscr{H}$ est une hyperbole.

Centre

Dans le repère $\mathscr{R}''$, Ω a pour coordonnées $(0,0)$.

Dans le repère $\mathscr{R}'$, Ω a pour coordonnées $(0,0)$.

Dans le repère $\mathscr{R}$, Ω a pour coordonnées $(-\frac{1}{3};-2)$.

Asymptotes

Dans le repère $\mathscr{R}''$, les asymptotes ont pour équation : $y''=\pm\frac{b}{a}x''$ avec $b=\frac{7}{3\sqrt{3}}$ et $a=\frac{7}{4}$: $y''=\pm\frac{4}{3\sqrt{3}}x''$.

Il vient dans le repère $\mathscr{R}'$: $-x'=\pm\frac{4}{3\sqrt{3}}y'$ puis dans le repère $\mathscr{R}$ initial :

$$x+\frac{1}{3}=\pm\frac{4}{3\sqrt{3}}(y+2).$$

Axes de symétrie

Dans le repère $\mathscr{R}''$ les axes de symétrie ont pour équation $x''=0$ et $y''=0$ (le second intersecte l'hyperbole).

Dans $\mathscr{R}'$ il vient $y'=0$ et $-x'=0$.

Dans $\mathscr{R}$, les deux axes de symétries ont pour équation : $y+2=0$ et $x+\frac{1}{3}=0$.

Sommets : Intersection axe de symétrie/hyperbole

On note $\mathscr{D}$ l'axe intersectant $\mathscr{H}$. Dans $\mathscr{R}''$, l'équation de $\mathscr{D}$: $y''=0$

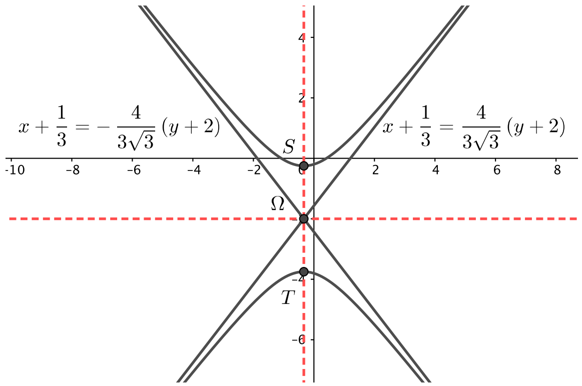
$$(x'',y'')\in\mathscr{H}\cap\mathscr{D}\iff\left(y''=0 \text{ et } x''^2=\left(\frac{7}{4}\right)^2\right)\iff\left(y''=0 \text{ et } x''=\pm\frac{7}{4}\right)$$

Dans le repère $\mathscr{R}'$ il vient : $-x'=0$ et $y'=\pm\frac{7}{4}$.

Dans le repère $\mathscr{R}$ on obtient :

$$x+\frac{1}{3}=0 \text{ et } y+2=\pm\frac{7}{4}.$$

Les deux sommets de l'hyperbole ont donc pour équation $S(-\frac{1}{3};-2+\frac{7}{4})$ et $T(-\frac{1}{3};-2-\frac{7}{4})$ dans $\mathscr{R}$.



5. $(\mathscr{E}) : x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$.

   On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

   L'équation $\mathscr{E}$ devient ${}^tXAX = 1$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

   La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres.
   On note λ, μ ses valeurs propres (éventuellement égales).
   On a $\mathrm{Tr}(A) = 2 = \lambda + \mu$ et $\det(A) = \frac{3}{4} = \lambda\mu$.
   Ainsi, λ, μ sont les racines du trinôme $(X - \lambda)(X - \mu) = X^2 - 2X + \frac{3}{4}$: $\lambda = \frac{3}{2}, \mu = \frac{1}{2}$.
   Les valeurs propres de A sont positives donc $\mathscr{E}$ est du genre ellipse. Précisons.
   $E_{\frac{3}{2}}(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}(u)$ et $E_{\frac{1}{2}} = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = E_{\frac{3}{2}}^{\perp} = \mathrm{Vect}(v)$.
   On pose $P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in SO_2(\mathbb{R})$.
   La matrice P est la matrice (dans la base canonique) de la rotation d'angle $\theta = \frac{\pi}{4}$.
   En appliquant cette rotation sur le repère orthonormée initial on obtient un nouveau repère orthonormé direct $\mathscr{R}' = (O, u, v)$ dans lequel l'équation de $(\mathscr{E})$ devient :

$${}^tXP\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}{}^tPX = 1 \Longleftrightarrow {}^t({}^tPX)D\,{}^tPX = 1 \Longleftrightarrow \frac{3}{2}x'^2 + \frac{1}{2}y'^2 = 1$$

$$\Longleftrightarrow \frac{x'^2}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)} + \frac{y'^2}{\sqrt{2}^2} = 1.$$

   avec $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = {}^tPX = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
   Par conséquent, $\mathscr{E}$ est une ellipse :

   — de demi-axes $a = \sqrt{\frac{2}{3}} < b = \sqrt{2}$,
   — de centre l'origine $O(0,0)$
   — d'axes de symétries les droites perpendiculaires d'équations $x' = x + y = 0$ et $y' = -x + y = 0$.
   (on retrouve bien le centre de symétrie comme intersection des axes de symétrie)
   (on trouve également des vecteurs normaux à ces droites sur les colonnes de la matrice de passage : $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$ est normal à la droite dirigée par $u = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ par exemple).
   — les points d'intersection des axes de symétrie et de l'ellipse s'obtienne par exemple
     * En notant que les coordonnées (x', y') dans le repère $\mathscr{R}'$ d'un tel point d'intersection vérifient :

$$(x' = 0 \text{ et } (x', y') \in \mathscr{E}) \text{ ou } (y' = 0 \text{ et } (x', y') \in \mathscr{E})$$

$$\left(x' = 0 \text{ et } y'^2 = \sqrt{2}^2\right) \text{ ou } \left(y' = 0 \text{ et } x'^2 = \sqrt{\frac{2}{3}}^2\right)$$

$$\left(x' = 0 \text{ et } y' = \pm\sqrt{2}\right) \text{ ou } \left(y' = 0 \text{ et } x' = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

     Dans le repère initial $\mathscr{R}$, on obtient quatre points avec la forme de changement de base $X = PX'$:

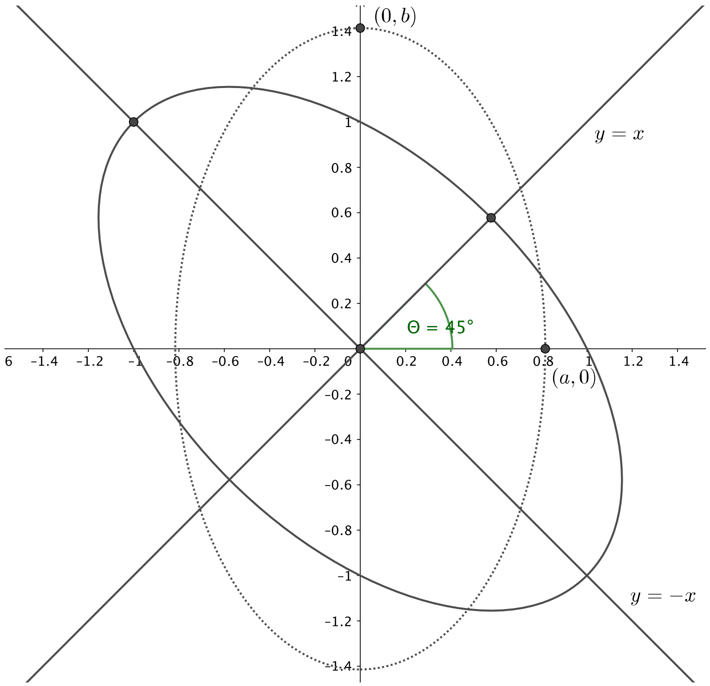
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \pm\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \mp 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \pm\sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

     * En injectant les relations $y = x$ et $y = -x$ dans l'équation de l'ellipse.
     On trouve $3x^2 = 1$ donc $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ en injectant $y = x$
     On trouve $x^2 = 1$ donc $x = \pm 1$ en injectant $y = -x$.
     On obtient quatre points d'intersection

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad (1,-1), \quad (-1,1).$$

     * Une autre méthode consiste à appliquer la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ aux points $(a, 0) = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right)$ et $(0, b) = (0, \sqrt{2})$.
     On trouve $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ et $(-1, 1)$ et on obtient les deux autres points d'intersection par symétrie centrale de centre O.



6. $(\mathscr{H}) : x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 + 16y + 16 = 0$.

Nature de la conique

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$.

L'équation $(\mathscr{H})$ devient ${}^tXAX + 16y + 16 = 0$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres.

On note λ, μ ses valeurs propres (éventuellement égales).

On a $\mathrm{Tr}(A) = \lambda + \mu = 0$ et $\det(A) = -4$.

Les valeurs propres de A sont de signes opposés car $\det(A) < 0$ donc $\mathscr{H}$ est de type hyperbole. Précisons.

On trouve $\lambda = 2$ et $\mu = -2$ et les espaces propres associés :

$E_\lambda(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}(u)$ et

$E_\mu(A) = E_\lambda(A)^\perp = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}(v)$.

On pose $P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \in SO_2(\mathbb{R})$

(matrice, dans la base canonique, de la rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$).

L'équation $(\mathscr{H})$ s'écrit alors :

$$\begin{aligned} &{}^tXPD\,{}^tPX + 16y + 10 = 0 \text{ avec } D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \\ \iff &{}^t(PX)D({}^tPX) + 16y + 16 = 0. \end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{aligned} &X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = {}^tPX = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3}x + y \\ -x + \sqrt{3}y \end{pmatrix} \\ \iff &X = PX' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3}x' - y' \\ x' + \sqrt{3}y' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

L'équation $(\mathscr{H})$ devient après rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$ du repère initial :

$$\begin{aligned} &2x'^2 - 2y'^2 + \frac{16}{2}\left(x' + \sqrt{3}y'\right) + 16 = 0 \\ \iff &x'^2 - y'^2 + 4x' + 4\sqrt{3}y' + 8 = 0 \\ \iff &(x'^2 + 4x') - (y'^2 - 4\sqrt{3}y') + 8 = 0 \\ \iff &(x' + 2)^2 - 4 - (y' - 2\sqrt{3})^2 + 12 + 8 = 0 \\ \iff &(x' + 2)^2 - (y' - 2\sqrt{3})^2 = -16 \\ \iff &\frac{(y' - 2\sqrt{3})^2}{4^2} - \frac{(x' + 2)^2}{4^2} = 1 \end{aligned}$$

Il s'agit d'une équation de $(\mathscr{H})$ dans le rep. orthonormé direct $\mathscr{R}' = (O, u, v)$. En posant $y'' = y' - 2\sqrt{3}$ et $x'' = x' + 2$, on effectue une translation et on obtient un repère orthonormé direct $R'' = (\Omega, u, v)$ dans lequel l'équation $\mathscr{H}$ s'écrit :

$$\frac{y''^2}{4^2} - \frac{x''^2}{4^2} = 1.$$

On en déduit que $\mathscr{H}$ est une hyperbole. $\mathscr{H}$ possède deux axes de symétries :

— la droite d'équation dans $\mathscr{R}''$: $y'' = 0$ ou encore dans $\mathscr{R}'$: $y' = 2\sqrt{3}$.

— la droite (perpendiculaire à la précédente et qui traverse l'hyperbole) d'équation dans $\mathscr{R}''$: $x'' = 0$ ou dans $\mathscr{R}'$: $x' = -2$.

Centre de symétrie

$\mathscr{H}$ possède un centre symétrie Ω dont les coordonnées vérifient :

$$x''_\Omega = 0, y''_\Omega = 0 \text{ dans } \mathscr{R}'' \text{ soit } x'_\Omega = -2, y'_\Omega = 2\sqrt{3} \text{ dans } \mathscr{R}'.$$

On retrouve les coordonnées de Ω dans le repère initial en utilisant les formules de changement de base :

$$\begin{pmatrix} x_\Omega \\ y_\Omega \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x'_\Omega \\ y'_\Omega \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix}$$

Axes de symétrie

On trouve également les équations des axes de symétrie dans le repère initial :

$$y' = 2\sqrt{3} \iff \frac{1}{2}(-x+\sqrt{3}y) = 2\sqrt{3} \iff -x+\sqrt{3}y = 4\sqrt{3}$$

$$x' = -2 \iff \frac{1}{2}(\sqrt{3}x+y) = -2 \iff \sqrt{3}x+y = -4.$$

Asymptotes

Pour déterminer les asymptotes de $\mathscr{H}$ on peut poser $x''' = y''$ et $y''' = -x''$ et l'équation de $\mathscr{H}$ s'écrit alors dans le repère orthonormé direct $\mathscr{R}''' = (\Omega, v, -u)$:

$$\frac{x'''^2}{4^2} - \frac{y'''^2}{4^2} = 1.$$

Dans ce repère, les asymptotes ont pour équation : $y''' = \pm\frac{b}{a}x'''$ avec $a = b = 4$ il vient $-x'' = \pm y''$ soit $x'+2 = \pm(y'-2\sqrt{3})$ dans $\mathscr{R}'$.

Dans $\mathscr{R}$, on trouve :

$$\frac{1}{2}(\sqrt{3}x+y)+2 = \pm\left(\frac{1}{2}\left(-x+\sqrt{3}y\right)-2\sqrt{3}\right)$$

Sommets

Les points d'intersection de $\mathscr{H}$ et de l'axe de symétrie d'équation $y''' = 0$ dans $\mathscr{R}'''$ vérifient $(x''', y''') \in \mathscr{H}$ et $y''' = 0$.

On obtient

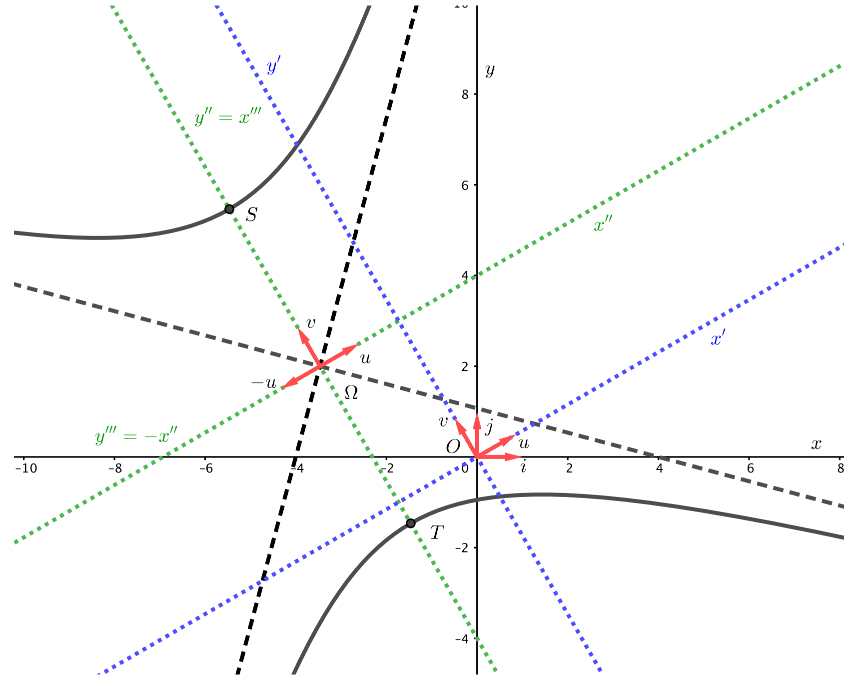
$$\left\{\begin{array}{rcl} x'''^2 & = & 4^2 \\ y''' & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} y''^2 & = & 4^2 \\ -x'' & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} y'' & = & \pm 4 \\ x'' & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} y'-2\sqrt{3} & = & \pm 4 \\ x'+2 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} y' & = & \pm 4+2\sqrt{3} \\ x' & = & -2 \end{array}\right.$$

On obtient les deux sommets S, T de coordonnées dans $\mathscr{R}$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_S \\ y_S \end{pmatrix} &= P\begin{pmatrix} -2 \\ 4+2\sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 4+2\sqrt{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2+\sqrt{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2\sqrt{3}-2 \\ 2\sqrt{3}+2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et l'autre sommet $\begin{pmatrix} x_T \\ y_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{3}+2 \\ -2\sqrt{3}+2 \end{pmatrix}$.



7. $(\mathscr{P}) : x^2+2xy+y^2-2\sqrt{2}x+6\sqrt{2}y+6 = 0$.

   Nature de la conique

   On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. L'équation $(\mathscr{P})$ devient :

   $${}^tXAX + LX + 6 = 0 \text{ avec } X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } L = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} & 6\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

   La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres.

   On note λ, μ ses valeurs propres.

   On a $\mathrm{Tr}(A) = 2 = \lambda+\mu$ et $\det(A) = 0 = \lambda\mu$.

   On trouve : $\lambda = 2$ et $\mu = 0$ et

   $E_0 = \mathrm{Vect}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et enfin $E_2 = \mathrm{Vect}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

   On sait déjà que la conique $\mathscr{P}$ est de type parabole

   On pose $P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in SO_2(\mathbb{R})$ matrice dans la base canonique de la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$.

   On applique cette rotation au repère initial et on obtient l'équation $(\mathscr{P})$ dans ce nouveau repère $\mathscr{R}' = (O, u, v)$:

   $${}^tXPD\,{}^tPX + LX + 6 = 0 \iff {}^t({}^tPX)D({}^tPX) + LX + 6 = 0,$$

avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On pose $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = {}^tPX \iff X = PX'$ et l'équation $(\mathscr{P})$ s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
&{}^tX'DX' + LPX' + 6 = 0 \\
&\iff 2x'^2 + \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} & 6\sqrt{2} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 6 = 0 \\
&\iff 2x'^2 + \begin{pmatrix} -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 6 = 0 \\
&\iff 2x'^2 + \begin{pmatrix} 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 6 = 0 \\
&\iff 2x'^2 + 4x' + 8y' = -6 \\
&\iff x'^2 + 2x' + 4y' = -3 \\
&\iff (x'+1)^2 - 1 + 4y' = -3 \\
&\iff (x'+1)^2 = -4\left(y' + \frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

On pose $x'' = x' + 1$ et $y'' = y' + \frac{1}{2}$.
Ce changement de variable induit une translation sur l'origine du repère. On obtient un nouveau repère orthonormé direct $\mathscr{R}'' = (\Omega, u, v)$ dans lequel l'équation $(\mathscr{P})$ s'écrit :

$$x''^2 = -2py'' \text{ avec } p = 2.$$

On pose $x''' = y''$ et $y''' = -x''$ et on obtient un repère orthonormé direct $\mathscr{R}''' = (\Omega, v, -u)$ dans lequel l'équation $(\mathscr{P})$ s'écrit :

$$y'''^2 = -2px'''.$$

Enfin si l'on pose $x_4 = -x'''$ et $y_4 = -y'''$ on obtient un repère orthonormé direct $\mathscr{R}_4 = (\Omega, -v, u)$ dans lequel l'équation $(\mathscr{P})$ s'écrit :

$$y_4^2 = 2px_4.$$

La conique $\mathscr{P}$ est donc une parabole et ne possède donc pas de centre de symétrie.

Axe de symétrie

Il a pour équation $y_4 = 0$ dans le repère $\mathscr{R}_4$ ce qui donne successivement

$$-y''' = 0 \iff x'' = 0 \iff x' = -1 \underset{X' = {}^tPX}{\iff} \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) = -1 \iff y = -x - \sqrt{2}.$$

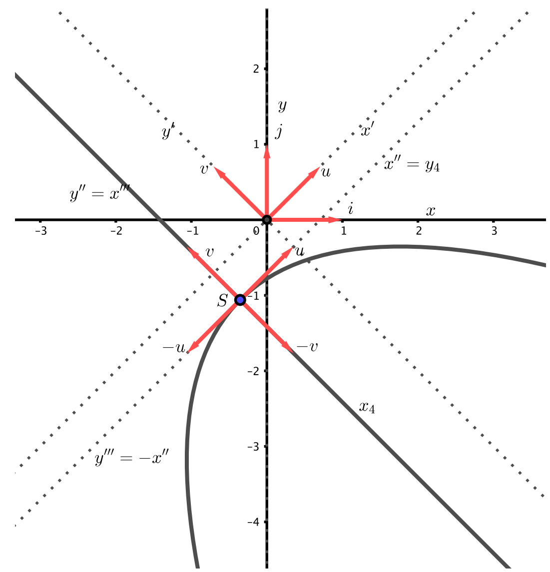
Sommet

Le sommet de la parabole est l'intersection de son axe de symétrie et de la parabole elle-même.
Ses coordonnées $(x_4(S), y_4(S))$ sont nulles dans $\mathscr{R}_4$
On obtient successivement dans les différents repère :

$$\begin{cases} x_4(S) = 0 \\ y_4(S) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x'''(S) = 0 \\ y'''(S) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y''(S) = 0 \\ -x''(S) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y'(S) + \frac{1}{2} = 0 \\ x'(S) + 1 = 0 \end{cases}$$

Dans $\mathscr{R}'$ les coordonnées du centre vérifient donc $x'(S) = -1$ et $y'(S) = -\frac{1}{2}$.
On obtient dans le repère $\mathscr{R}$:

$$\begin{pmatrix} x(S) \\ y(S) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x'(S) \\ y'(S) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$



□

Solution Exercice 11. Déterminons la nature de la courbe d'équation $(\mathscr{H})$: $3x^2 + 4xy - \sqrt{5}x - 1 = 0$. On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

L'équation $(\mathscr{H})$ devient :

$${}^tXAX + LX - \frac{1}{4} = 0 \text{ avec } X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } L = \begin{pmatrix} -\sqrt{5} & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres.

On note λ, μ ses valeurs propres.
On a $\mathrm{Tr}(A) = 3 = \lambda + \mu$ et $\det(A) = \lambda\mu = -4 < 0$.
On trouve $\lambda = 4$ et $\mu = -1$.
Par conséquent, la courbe $\mathscr{H}$ est de type hyperbole. Précisons.
$E_4(A) = \mathrm{Vect}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $E_{-1}(A) = E_4^{\perp} = \mathrm{Vect}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$
On pose $P = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in SO_2(\mathbb{R})$.

On applique cette rotation au repère initial et on obtient un nouveau repère orthonormé direct $\mathscr{R}' = (O, u, v)$ dans lequel l'équation $(\mathscr{H})$ devient :

$$ {}^tX'DX' + LPX' - 1 = 0 \text{ avec } X' = {}^tPX \text{ et } D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. $$

On obtient :

$$ \begin{aligned} & 4x'^2 - y'^2 + \begin{pmatrix} -\sqrt{5} & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 1 \\ \Longleftrightarrow\ & 4x'^2 - y'^2 + \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 1 \\ \Longleftrightarrow\ & 4x'^2 - y'^2 + \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 1 \\ \Longleftrightarrow\ & 4x'^2 - y'^2 - 2x' + y' = 1 \\ \Longleftrightarrow\ & 4\left(x'^2 - \frac{1}{2}x'\right) - (y'^2 - y') = 1 \\ \Longleftrightarrow\ & 4\left(x' - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} - \left(y' - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = 1 \\ \Longleftrightarrow\ & 4\left(x' - \frac{1}{4}\right)^2 - \left(y' - \frac{1}{2}\right)^2 = 1 \\ \Longleftrightarrow\ & \frac{\left(x' - \frac{1}{4}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \left(y' - \frac{1}{2}\right)^2 = 1 \end{aligned} $$

En posant $x'' = x' - \frac{1}{4}$ et $y'' = y' - \frac{1}{2}$ on applique une translation sur le repère $\mathscr{R}'$ et on obtient un repère orthonormé direct $\mathscr{R}'' = (\Omega, u, v)$ dans lequel l'équation $(\mathscr{H})$ devient :

$$ \frac{x''^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} - y''^2 = 1. $$

On en déduit que $\mathscr{H}$ est une hyperbole.

Axes de symétries

Il s'agit des axes d'équation $x'' = 0$ et $y'' = 0$ dans le repère $\mathscr{R}''$.

On obtient les axes d'équations $x' = \frac{1}{4}$ et $y' = \frac{1}{2}$ dans $\mathscr{R}'$.
On a $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = {}^tP\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2x + y \\ -x + 2y \end{pmatrix}$.
On obtient les deux axes de symétrie : $2x + y = \frac{\sqrt{5}}{4}$ et $-x + 2y = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Sommets : intersection d'un axe de symétrie avec l'hyperbole

L'axe de symétrie d'équation $y'' = 0$ dans $\mathscr{R}''$ intersecte l'hyperbole en deux points appelés sommets.
Un point $S(x'', y'')$ est un sommet si et seulement si $y'' = 0$ et $(x'', y'') \in \mathscr{H}$:

$$ \begin{cases} y'' = 0 \\ (x'', y'') \in \mathscr{H} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y'' = 0 \\ x''^2 = \frac{1}{4} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y'' = 0 \\ x'' = \pm\frac{1}{2} \end{cases} $$

On obtient deux points dont les coordonnées vérifient dans le repère $\mathscr{R}$:

$$ \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{5}}(2x + y) & = & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{\sqrt{5}}(-x + 2y) & = & \frac{1}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x & = & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ y & = & \frac{3\sqrt{5}}{20} \end{cases} $$

et

$$ \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{5}}(2x + y) & = & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{\sqrt{5}}(-x + 2y) & = & \frac{1}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x & = & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ y & = & \frac{3\sqrt{5}}{20} \end{cases} $$

Recherche de l'équation d'une tangente

La droite d'équation (dans le repère $\mathscr{R}$) : $y = \frac{\sqrt{5}}{4}$ intersecte l'hyperbole en un unique point d'abscisse positive.
(il suffit d'injecter la relation $y = \frac{\sqrt{5}}{4}$ dans l'équation de $\mathscr{H}$ et de résoudre l'équation du second degré obtenue).
On cherche maintenant une équation de la tangente au point $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}}{4}\right) \in \mathscr{H}$.

Paramétrisation de l'hyperbole

Dans le repère $\mathscr{R}''$: une partie de l'hyperbole admet pour paramétrisation :

$$ f : t \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\operatorname{ch} t \\ \operatorname{sh} t \end{pmatrix}. $$

Dans le repère $\mathscr{R}'$, on obtient :

$$ f : t \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\operatorname{ch} t + \frac{1}{4} \\ \operatorname{sh} t + \frac{1}{2} \end{pmatrix}. $$

Dans le repère initial $\mathscr{R}$ il vient :

$$ f : t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\operatorname{ch} t + \frac{1}{4} \\ \operatorname{sh} t + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t \\ \frac{1}{2}\operatorname{ch} t + 2\operatorname{sh} t + \frac{5}{4} \end{pmatrix}. $$

On résout l'équation $\operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t = \sqrt{\frac{5}{3}}$ $(*)$.
On pose $X = e^t > 0$. L'équation $(*)$ devient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(X + \frac{1}{X}\right) - \frac{1}{2}\left(X - \frac{1}{X}\right) = \sqrt{\frac{5}{3}}\\
&\iff \frac{1}{X} = \sqrt{\frac{5}{3}}\\
&\iff X = \sqrt{\frac{3}{5}}\\
&\iff t = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}.
\end{aligned}$$

(On obtiendrait de même que $\frac{1}{2}\operatorname{ch} t + 2\operatorname{sh} t + \frac{5}{4} = \frac{5}{4} \iff t = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}$).
On calcule pour $t_0 = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}$:

$$f'(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \operatorname{sh} t - \operatorname{ch} t \\ \frac{1}{2}\operatorname{sh} t + 2\operatorname{ch} t \end{pmatrix}.$$

Avec $t_0 = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}$ on a :
* $\frac{1}{\sqrt{5}}(\operatorname{ch} t_0 - \operatorname{sh} t_0) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ donc $\frac{1}{\sqrt{5}}(\operatorname{sh} t_0 - \operatorname{ch} t_0) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.
* après calcul, on trouve

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{2}\operatorname{sh} t_0 + 2\operatorname{ch} t_0\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ainsi, le vecteur $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ dirige la tangente au point $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}}{4}\right)$.

Par conséquent le vecteur $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ est normal à cette tangente dont une équation est donc :

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{\sqrt{3}}y = c$$

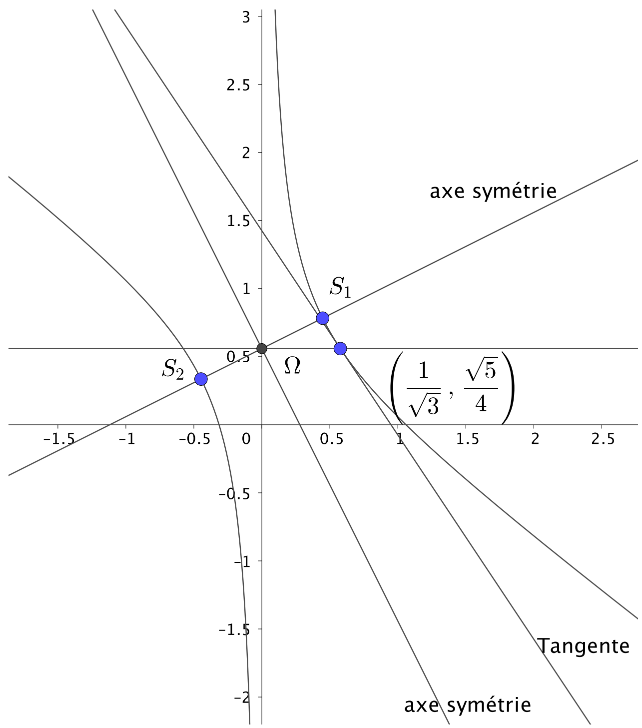
avec

$$c = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{5}}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{3}}.$$

Remarques

On peut également utiliser la formule donnant la tangente à une courbe définie par une équation implicite.
On note $f(x,y) = 3x^2 + 4xy - \sqrt{5}x - 1$.
L'équation de la tangente au point $(x_0, y_0) = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}}{4})$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) = 0\\
&\iff \left(6\frac{1}{\sqrt{3}} + 4\frac{\sqrt{5}}{4} - \sqrt{5}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 4\frac{1}{\sqrt{3}}\left(y - \frac{\sqrt{5}}{4}\right) = 0\\
&\iff \left(6\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 4\frac{1}{\sqrt{3}}\left(y - \frac{\sqrt{5}}{4}\right) = 0\\
&\underset{\times\frac{3}{12}}{\iff} \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{\sqrt{3}}y = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{3}}\\
&\iff \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(y - \frac{\sqrt{5}}{4}\right) = 0
\end{aligned}$$



□

Solution Exercice 12. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré 3 noté $P(X) = X^3 + \lambda X^2 + \mu X + \delta$.

On considère la courbe $\mathscr{C}$ formée des points $M(x, y)$ du plan dont les coordonnées vérifient $P(y) = P(x)$.

Montrons que $\mathscr{C}$ est soit une droite, soit la réunion d'une droite et d'une conique.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\begin{aligned}
(x,y) \in \mathscr{C} &\iff P(x) = P(y) \\
&\iff (x^3 - y^3) + \lambda(x^2 - y^2) + \mu(x - y) = 0 \\
&\iff (x - y)\left(x^2 + xy + y^2 + \lambda x + \lambda y + \mu\right) = 0.
\end{aligned}$$

Par conséquent la droite $\mathscr{D} : y = x$ est une partie de la courbe $\mathscr{C}$.

Étudions la partie quadratique. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

L'équation $x^2 + xy + y^2 + \lambda x + \lambda y + \mu = 0$ s'écrit alors :

$$^tXAX + LX + \mu = 0 \text{ avec } L = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda \end{pmatrix}.$$

La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres. On note λ, μ ses valeurs propres.

On a $\mathrm{Tr}(A) = 2 = \lambda + \mu$ et $\det(A) = \frac{3}{4} = \lambda\mu$. Il vient $\lambda = \frac{3}{2}$ et $\mu = \frac{1}{2}$.

— On trouve $E_{\frac{3}{2}}(A) = \mathrm{Vect}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

— Les s.e.p. de A étant orthogonaux : $E_{\frac{1}{2}}(A) = E_{\frac{3}{2}}(A)^{\perp} = \mathrm{Vect}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

On pose $P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in SO_2(\mathbb{R})$, et on obtient :

$$A = PD\,{}^tP \text{ avec } D = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

On pose $X = PX' \iff X' = {}^tPX$, il vient :

$$\begin{aligned}
{}^tXAX + LX + \mu = 0 &\iff {}^tXPD\,{}^tPX + LPX' + \mu = 0 \\
&\iff {}^t({}^tPX)D({}^tPX) + LPX' + \mu = 0 \\
&\iff {}^tX'DX' + LPX' + \mu = 0 \\
&\iff \frac{3}{2}x'^2 + \frac{1}{2}y'^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \lambda & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \mu = 0 \\
&\iff \frac{3}{2}x'^2 + \frac{1}{2}y'^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \lambda & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' - y' \\ x' + y' \end{pmatrix} + \mu = 0 \\
&\iff \frac{3}{2}x'^2 + \frac{1}{2}y'^2 + \frac{2\lambda}{\sqrt{2}}x' + \mu = 0 \\
&\iff \frac{3}{2}x'^2 + \frac{1}{2}y'^2 + \sqrt{2}\lambda x' + \mu = 0 \\
&\iff \frac{3}{2}\left(x'^2 + \frac{2\sqrt{2}}{3}\lambda x'\right) + \frac{1}{2}y'^2 + \mu = 0 \\
&\iff \frac{3}{2}\left[\left(x' + \frac{\sqrt{2}}{3}\lambda\right)^2 - \frac{2\lambda^2}{9}\right] + \frac{1}{2}y'^2 + \mu = 0 \\
&\iff \frac{3}{2}\left(x' + \frac{\sqrt{2}}{3}\lambda\right)^2 - \frac{\lambda^2}{3} + \frac{1}{2}y'^2 + \mu = 0 \\
&\iff \frac{3}{2}\left(x' + \frac{\sqrt{2}}{3}\lambda\right)^2 + \frac{1}{2}y'^2 = \frac{\lambda^2}{3} - \mu \quad (*).
\end{aligned}$$

Conclusion :

— Si $\lambda^2 < 3\mu$ alors l'équation $(*)$ n'a pas de solution.

— Si $\lambda^2 = 3\mu$ un unique point vérifie l'équation $(*)$:

$$(x', y') = \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\lambda, 0\right)$$

et il vient

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{3}\lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda}{3} \\ -\frac{\lambda}{3} \end{pmatrix}.$$

— Si $\lambda^2 > 3\mu$ alors l'équation $(*)$ est celle d'une ellipse.

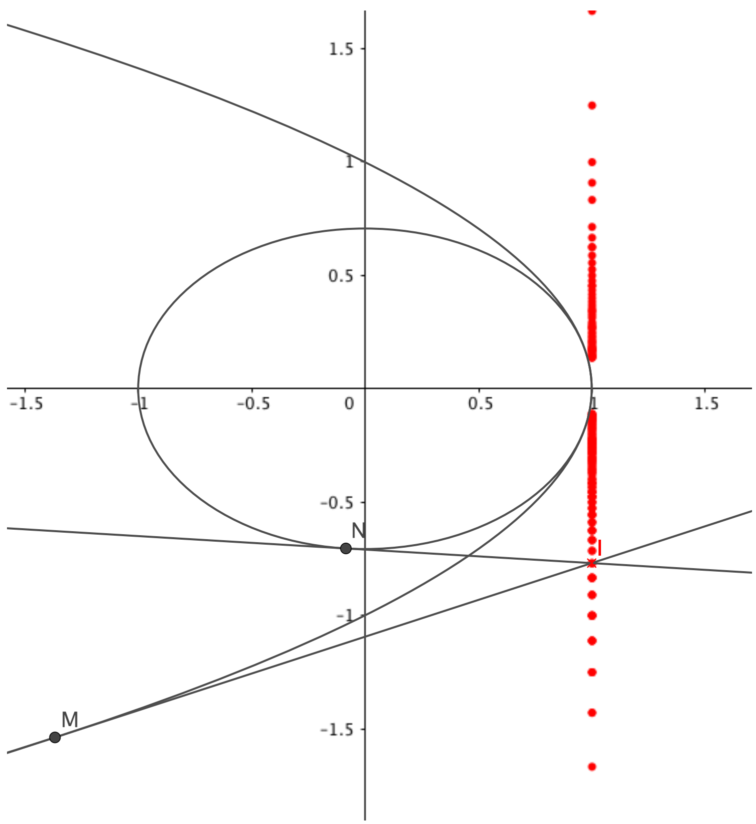
Ainsi, $\mathscr{C}$ est la réunion d'une droite $\mathscr{D} : y = x$ et d'une conique si et seulement si $\lambda^2 > 3\mu$ (dans le cas $\lambda^2 = 3\mu$ le point $(-\frac{\lambda}{3}, -\frac{\lambda}{3}) \in \mathscr{D}$). □

Solution Exercice 13. Soit $A(1, 0)$ le point du plan dont les coordonnées $(1, 0)$ sont données dans un repère orthonormé direct.

On considère la parabole d'équation $(\mathscr{P}) : y^2 + x = 1$ et l'ellipse d'équation $(\mathscr{E}) : x^2 + 2y^2 = 1$.

Pour tout $m \neq 0$ on considère la droite Δ_m d'équation $y = m(1 - x)$.

1. **Intersection de Δ_m et de $\mathscr{P}$**
On injecte la relation $y = m(1-x)$ dans l'équation ($\mathscr{P}$). Il vient :
$$m^2(1-x)^2 + x = 1 \iff m^2x^2 + x(-2m^2+1) + (m^2-1) = 0(*)$$
Le discriminant du trinôme obtenu est égal à
$$\Delta = (1-2m^2)^2 - 4m^2(m^2-1) = 1.$$
On obtient deux solutions à l'équation $(*)$:
$$x = \frac{2m^2-1+1}{2m^2} = 1 \text{ et } x = \frac{2m^2-1-1}{2m^2} = \frac{(m-1)(m+1)}{m^2}.$$
Le point M recherché, différent de A a donc pour abscisse
$$x = \frac{(m-1)(m+1)}{m^2}$$
et pour ordonnée :
$$y = m(1-x) = m\left(1 - \frac{(m-1)(m+1)}{m^2}\right) = m\left(\frac{1}{m^2}\right) = \frac{1}{m}.$$
On en déduit les coordonnées de $M \in \Delta_m \cap \mathscr{P} \setminus \{A\}$: $M\left(\frac{m^2-1}{m^2}, \frac{1}{m}\right)$.
Intersection de Δ_m et de $\mathscr{E}$
On montre de même que $\Delta_m \cap \mathscr{E} = \{A, N\}$ avec $N\left(\frac{2m^2-1}{2m^2+1}, \frac{2m}{2m^2+1}\right)$.
2. **Tangente en M à la parabole $\mathscr{P}$**
On pose $f(x,y) = y^2 + x - 1$. La tangente au point M a pour équation :
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_M, y_M)(x - x_M) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_M, y_M)(y - y_M) = 0$$
$$\iff (x - x_M) + \frac{2}{m}(y - y_M) = 0$$
Tangente en N à l'ellipse $\mathscr{E}$ On pose $g(x,y) = x^2 + 2y^2 - 1$.
La tangente au point N a pour équation :
$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_N, y_N)(x - x_N) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_N, y_N)(y - y_N) = 0$$
$$\iff \frac{2(2m^2-1)}{2m^2+1}(x - x_N) + \frac{8m}{2m^2+1}(y - y_N) = 0$$
$$\iff (2m^2-1)(x - x_N) + 4m(y - y_N) = 0.$$
3. $I(x,y)$ est un point d'intersection des deux tangentes déterminées à la question précédente si et seulement si :
$$\begin{cases} x + \frac{2}{m}y = \frac{m^2-1}{m^2} + \frac{2}{m^2} \\ (2m^2-1)x + 4my = \frac{(2m^2-1)^2}{2m^2+1} + \frac{8m^2}{2m^2+1} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x + \frac{2}{m}y = \frac{m^2+1}{m^2} \\ (2m^2-1)x + 4my = \frac{(2m^2-1)^2}{2m^2+1} + \frac{8m^2}{2m^2+1} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x + \frac{2}{m}y = \frac{m^2+1}{m^2} \\ (2m^2-1)x + 4my = 2m^2+1 \end{cases}$$
La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{m} \\ (2m^2-1) & 4m \end{pmatrix}$ est inversible car $\det(A) = \frac{2}{m} \neq 0$ et
$$A^{-1} = \frac{m}{2}\begin{pmatrix} 4m & -\frac{2}{m} \\ 1-2m^2 & 1 \end{pmatrix}.$$
Il vient
$$I\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2m} \end{pmatrix}.$$
Ainsi, I décrit la droite d'équation $x = 1$ privée du point $(1,0)$ (en effet, la fonction $m \mapsto \frac{1}{2m}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}^*$ sur $\mathbb{R}^*$).



$\square$

Solution Exercice 14. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on considère la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y^2 = 2px$ avec $p > 0$ et soit $A \in \mathscr{P}$.

Dans toutes les questions de cet exercice, on utilisera la paramétrisation suivante de la parabole $\mathscr{P}$:

$$f : t \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2p} \\ t \end{pmatrix}.$$

1. Soient $B\begin{pmatrix} \frac{b^2}{2p} \\ b \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} \frac{c^2}{2p} \\ c \end{pmatrix}$ deux points de $\mathscr{P}$ de paramètres distincts $b, c \in \mathbb{R}$.

   Le vecteur $\begin{pmatrix} \frac{c^2-b^2}{2p} \\ c-b \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (BC).

   Ainsi $\begin{pmatrix} b-c \\ \frac{c^2-b^2}{2p} \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (BC).

   Bien entendu le vecteur $\begin{pmatrix} 2p(b-c) \\ c^2-b^2 \end{pmatrix}$ est également normal à (BC).

   Une équation cartésienne de la droite (BC) est donc :

$$2p(b-c)x + (c^2-b^2)y = \gamma$$

   avec (puisque $B \in (BC)$) :

$$\gamma = 2p(b-c)\frac{b^2}{2p} + (c^2-b^2)b.$$

   Il vient :

$$\begin{aligned}
&(BC) : 2p(b-c)x + (c^2-b^2)y = 2p(b-c)\frac{b^2}{2p} + (c^2-b^2)b \\
&(BC) : 2px - (c+b)y = b^2 - (c+b)b \\
&(BC) : 2px - (c+b)y = -bc
\end{aligned}$$

2. • Déterminons une condition nécessaire et suffisante pour que $(AB) \perp (AC)$.

   Les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires si et seulement si tous vecteurs les dirigeant sont orthogonaux.

   Il vient :

$$\begin{aligned}
(AB) \perp (AC) &\iff \left(\begin{pmatrix} \frac{(b^2-a^2)}{2p} \\ b-a \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \frac{(c^2-a^2)}{2p} \\ c-a \end{pmatrix} \right) = 0 \\
&\iff \frac{1}{4p^2}(b^2-a^2)(c^2-a^2) + (b-a)(c-a) = 0 \\
&\iff (b+a)(c+a) + 4p^2 = 0
\end{aligned}$$

   • Montrons que toute droite (BC) réalisant cette condition passe un point fixe Q.

   La relation $(b+a)(c+a) + 4p^2 = 0$:

   — montre d'une part que $a + b \neq 0$, sinon $4p^2 = 0$ ce qui n'est pas.

   — permet d'autre part d'exprimer c en fonction de a et b (on cherchera ensuite une condition permettant d'éliminer la variable b).

$$a^2 + ab + ac + bc + 4p^2 = 0 \iff c = -\frac{(a^2+ab+4p^2)}{a+b}.$$

   Il vient :

   $*$ $b + c = b - \dfrac{(a^2+ab+4p^2)}{a+b} = \dfrac{b^2-a^2-4p^2}{a+b}$.

   $*$ $bc = -\dfrac{b}{a+b}(a^2+ab+4p^2)$.

L'équation de (BC) devient donc :

$$\begin{aligned}
&(BC) : 2px + \frac{(a^2+4p^2-b^2)}{a+b}y = \frac{b}{a+b}(a^2+ab+4p^2)\\
&(BC) : 2px(a+b) + (a^2+4p^2-b^2)y = ba^2+ab^2+4p^2b\\
&(BC) : 2apx + (a^2+4p^2)y + b(2px-a^2-4p^2) + b^2(-y-a) = 0
\end{aligned}$$

Par conséquent le point $(x,y) = \left(\frac{a^2+4p^2}{2p}, -a\right)$ est sur toute droite (BC) telle que $B, C \in \mathscr{P}$ et $(AB) \perp (AC)$.

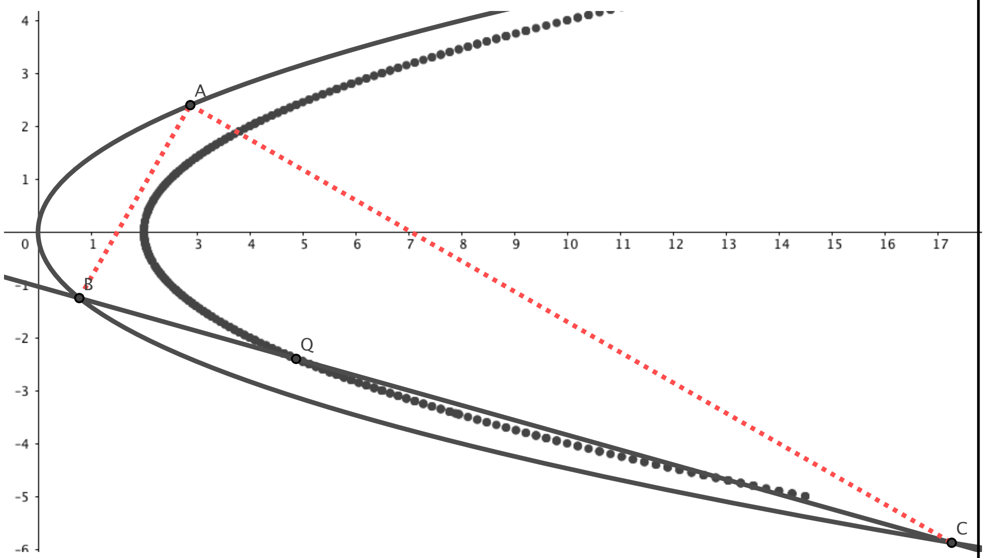
3. Si A varie (son paramètre a varie également) alors le point Q décrit la courbe $\mathscr{Q}$: paramétrée par

$$a \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{a^2}{2p} + 2p \\ -a \end{pmatrix}$$

Une équation cartésienne de $\mathscr{Q}$ est donc :

$$\mathscr{Q} : \frac{y^2}{2p} + 2p = x$$

Par conséquent $\mathscr{Q}$ est une parabole ; c'est la parabole translatée de $\mathscr{P}$ de vecteur $(2p, 0)$.



$\square$