Chapitre 16 : Courbes et surfaces de l’espace

Plan du chapitre

1 Courbes et surfaces paramétrées

1.A Courbes paramétrées

On munit $\mathbb{R}^3$ d'un repère orthonormé direct (O, i, j, k).

Définition 1

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : t \to M(t)$ une fonction définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}^3$.
L'ensemble $\Gamma = \{M(t) : t \in I\}$ est appelé courbe de l'espace paramétrée par la fonction f.

Si l'on note $f(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ les coordonnées du point $M(t) \in \mathbb{R}^3$, on dit que Γ admet pour représentation paramétrique $\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & x(t) \\ y & = & y(t) \\ z & = & z(t) \end{array} \right.$

On dit que la courbe Γ est plane si elle est contenue dans un plan et gauche sinon.

Exemple

La droite passant par le point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u} = (a, b, c)$ admet pour représentation paramétrique :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & x_0 + ta \\ y & = & y_0 + tb \\ z & = & z_0 + tc \end{array} \right. \quad ; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Définition 2: Point régulier

Soit $f \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R}^3)$, $f : t \longmapsto M(t)$.

On dit que le point $M(t_0)$ est régulier si $f'(t_0) = \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \\ z'(t_0) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Il est dit stationnaire dans le cas contraire.

Proposition 3: Tangente en un point régulier

Si $M(t_0)$ est régulier alors la tangente à Γ en $M(t_0)$ est dirigée par $f'(t_0) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t_0)$.

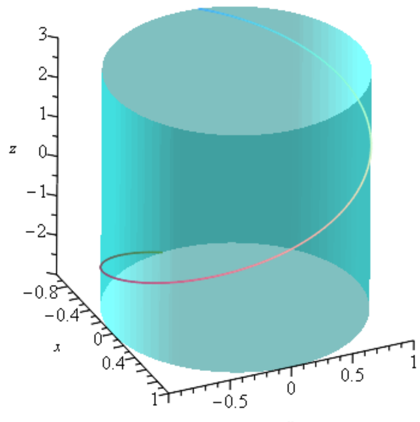
Remarques

Au point $M(t_0) \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \\ z(t_0) \end{pmatrix}$ la tangente a pour représentation paramétrique : $\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & x(t_0) + \lambda x'(t_0) \\ y & = & y(t_0) + \lambda y'(t_0) \\ z & = & z(t_0) + \lambda z'(t_0) \end{array} \right. , \lambda \in \mathbb{R}$

Exercice 4

Soit $\mathscr{H}$ la courbe de l'espace paramétrée par $f : t \longmapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}$.

1. Donner l'allure du support de la courbe $\mathscr{H}$. La courbe $\mathscr{H}$ est-elle plane ?
2. La courbe $\mathscr{H}$ possède-t-elle des points singuliers ?
3. Déterminer les projections orthogonales sur les plans (xOy) et (xOz).
4. Déterminer une équation cartésienne et la nature d'une surface contenant la courbe $\mathscr{H}$.



1.B Surfaces paramétrées de l'espace

Définition 5: surface paramétrée

Soit $f : (u,v) \longmapsto M(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$ fonction de classe $\mathscr{C}^k$ ($k \geqslant 1$) définie sur un ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^2$. On appelle surface paramétrée par f l'ensemble des points de l'espace

$$\mathscr{S} = \left\{ \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} : (u,v) \in \mathscr{U} \right\}.$$

Remarques

— Si l'on fixe $v = v_0$ alors l'application $u \longmapsto M(u, v_0)$ est une courbe paramétrée dont tous les points sont situés sur la surface $\mathscr{S}$. (De même si l'on fixe $u = u_0$).

— Plus généralement si $t \longmapsto (u(t), v(t))$ est à valeurs dans $\mathscr{U}$ alors $t \longmapsto f(u(t), v(t))$ est une courbe paramétrée tracée sur $\mathscr{S}$.

Exercice 6

Donner une paramétrisation du plan $\Pi = M\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \right)$.

Remarques

Si $v = v_0$ est fixé alors $t \longmapsto \begin{pmatrix} (x_0 + v_0 a') + ua \\ (x_0 + v_0 b') + ub \\ (x_0 + v_0 c') + uc \end{pmatrix}$ est une paramétrisation de la droite contenue dans Π, passant par le point $\begin{pmatrix} x_0 + v_0 a' \\ x_0 + v_0 b' \\ x_0 + v_0 c' \end{pmatrix} \in \Pi$ et dirigée par (a, b, c).

Définition 7: Point régulier singulier

Un point $M_0(u_0, v_0) \in \mathscr{S}$ est dit régulier si la famille $\left(\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)\right)$ est libre.
Sinon le point est dit singulier (ou stationnaire).

Définition 8: Plan tangent

Le plan tangent en un point régulier d'une surface $\mathscr{S}$ est la réunion des tangentes aux courbes régulières tracées sur $\mathscr{S}$ passant par ce point.

Théorème 9: Plan tangent en un point régulier

Si $M_0(u_0, v_0) \in \mathscr{S}$ est un point régulier alors $\mathscr{S}$ admet en $M_0(u_0, v_0)$ un plan tangent dirigé par les vecteurs

$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial u}(u_0, v_0) = \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial v}(u_0, v_0) = \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0).$$

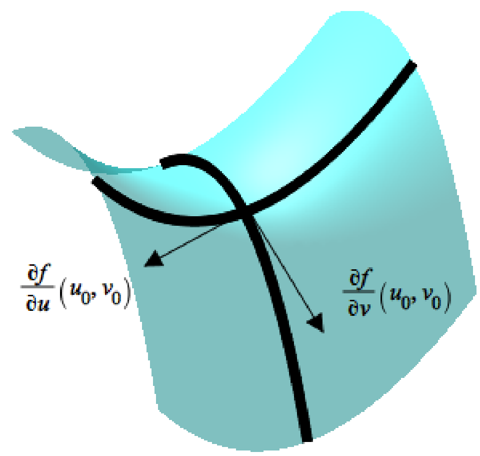
— Un vecteur normal au plan tangent Π est

$$\vec{n} = \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) = (a, b, c).$$

Équation cartésienne de Π : $ax + by + cz + d = 0$
(on détermine d avec les coordonnées de $M_0(u_0, v_0)$).

— Un point M appartient au plan Π si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{M_0M} \in \Pi &\iff \left(\overrightarrow{M_0M}, \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)\right) \text{ famille liée} \\
&\iff \det\left(\overrightarrow{M_0M}, \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)\right) = 0 \\
&\iff \begin{vmatrix} x - x(u_0, v_0) & \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \\ y - y(u_0, v_0) & \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \\ z - z(u_0, v_0) & \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0.
\end{aligned}$$



Exercice 10

On considère la surface $\mathscr{S}$ paramétrée par $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \longmapsto & (\sqrt{u}\cos(v), \sqrt{u}\sin(v), u) \end{array} \right.$.

1. Montrer que le point $M_0(u_0, v_0)$ de paramètre $(u_0, v_0) = (1, \frac{\pi}{4})$ est régulier.
2. (a) Déterminer un paramétrage du plan tangent Π en $(u_0, v_0) = (1, \frac{\pi}{4})$ à la surface paramétrée par le fonction f.
   (b) Donner une équation cartésienne de Π de deux méthodes différentes.

Corollaire 11

Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert $\mathscr{U} \subset \mathbb{R}^2$.
On note $\mathscr{S} = \{(x, y, g(x, y)) : (x, y) \in \mathscr{U}\}$.

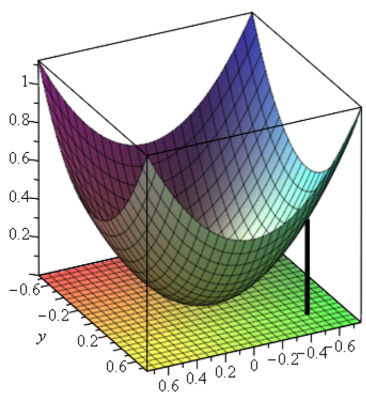
— Le plan tangent à la surface $\mathscr{S}$ au point $(x_0, y_0, g(x_0, y_0))$ est dirigé par les vecteurs :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

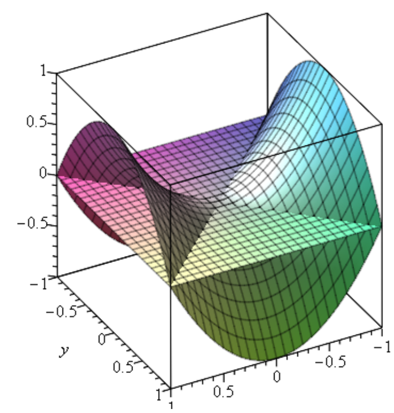
— Une équation cartésienne du plan tangent est alors :

$$z = g(x_0, y_0) + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

— On suppose maintenant $g \in \mathscr{C}^2(\mathscr{U})$. Soit $(x_0, y_0, z_0) = (x_0, y_0, g(x_0, y_0)) \in \mathscr{S}$.
Si $(x_0, y_0) \in \mathscr{U}$ est un point critique de g alors la position relative du plan tangent et de la surface est donnée le déterminant de la matrice Hessienne A de g au point (x_0, y_0) :
  * Si $\det A > 0$ la surface reste, au voisinage de $(x_0, y_0, g(x_0, y_0))$, du même coté du plan tangent.
  * Si $\det A < 0$ le plan tangent traverse la surface.



Extremum, plan tangent et différence d'altitude



Point col, plan tangent traversant

2 Surface définie par une équation cartésienne

Définition 12

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^k$ $(k \geqslant 1)$. On appelle surface d'équation cartésienne $f(x, y, z) = 0$ l'ensemble des points de $\mathbb{R}^3$ dont les coordonnées vérifient $f(x, y, z) = 0$.

Exemple

— $f(x, y, z) = ax + by + cz + d$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.
$\mathscr{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = 0\}$ est un plan.

— $f(x, y, z) = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - R^2$.
$\mathscr{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = 0\}$ est une sphère.

Définition 13

On dit que (x_0, y_0, z_0) est un point critique de f si $\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \overrightarrow{0}$.
Le point (x_0, y_0, z_0) est un point régulier de $\mathscr{S}$ sinon : $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq \overrightarrow{0}$.

Théorème 14: Plan tangent en un point régulier

Si $M_0(x_0, y_0, z_0)$ est un point régulier de $\mathscr{S}$ alors $\mathscr{S}$ admet un plan tangent au point M_0 dont un vecteur normal est $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$. Son équation est alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

3 Intersections de surfaces, projections des courbes

3.A Intersections de surfaces

L'intersection de deux surfaces peut :
- être vide : c'est le cas par exemple de l'intersection de deux plans parallèles.
- être réduite à un point : c'est le cas par exemple de $\mathscr{S}_1 \cap \mathscr{S}_2$ avec

$$\mathscr{S}_1 = \{(x, y, x^2 + y^2) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \text{ et } \mathscr{S}_2 = \{(x, y, -x^2 - y^2) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

- être une surface : c'est le cas de l'intersection d'un plan avec lui même (!)
- être une courbe. C'est le cas que l'on traitera principalement dans ce paragraphe.

Exemple

- L'intersection de deux plans distincts non parallèles est une droite.
- L'intersection du plan $z = 0$ et de la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ est le cercle unité.
- ...

Théorème 15: Tangente à l'intersection de deux surfaces

Soit $\mathscr{S}_1$ et $\mathscr{S}_2$ deux surfaces telles que l'intersection $\mathscr{S}_1 \cap \mathscr{S}_2 = \Gamma$ est une courbe.
Soit M_0 un point de Γ tel que :
- M_0 est un point régulier de $\mathscr{S}_1$ et $\mathscr{S}_2$.
- les plans tangents aux surfaces $\mathscr{S}_1, \mathscr{S}_2$ en M_0 sont distincts.

Alors :
* M_0 est un point régulier de Γ.
* La tangente à Γ en M_0 est l'intersection des plans tangents en M_0 à $\mathscr{S}_1$ et $\mathscr{S}_2$.
* Si $\mathscr{S}_1, \mathscr{S}_2$ sont définies par les équations cartésiennes :

$$\mathscr{S}_1 : f(x, y, z) = 0 \quad ; \quad \mathscr{S}_2 : g(x, y, z) = 0$$

alors la tangente en $M_0(x_0, y_0, z_0)$ est dirigée par

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \wedge \nabla g(x_0, y_0, z_0).$$

Exemple

Soient P, Q deux plans non parallèles d'équations : $\begin{cases} ax & + & by & + & cz & + & d & = & 0 \\ a'x & + & b'y & + & c'z & + & d' & = & 0 \end{cases}$
(P, Q non parallèles) est équivalent à la non colinéarité des vecteurs normaux $(a, b, c), (a', b', c')$.
L'intersection $P \cap Q$ est une droite dirigée par le vecteurs $(a, b, c) \wedge (a', b', c')$.

3.B Projection orthogonale d'une courbe sur un plan de coordonnées

Exemple

Si la courbe admet une représentation paramétrique $\begin{cases} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{cases}$ alors la projection orthogonale sur le plan xOy d'équation $z = 0$ admet une représentation paramétrique : $\begin{cases} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= 0 \end{cases}$

Exemple

Soit Γ l'intersection de deux surfaces d'équations $\begin{cases} f(x,y,z) &= 0 \\ g(x,y,z) &= 0 \end{cases}$ dont on cherche la projection orthogonale sur xOy. Soit $M(x,y,0)$ un point sur le plan d'équation $z = 0$. Alors :

$$\begin{aligned} M(x,y,0) \in \Gamma &\iff M(x,y,0) \text{ est le projeté orthogonale sur } xOy \text{ d'un point de } \Gamma \\ &\iff \exists z_0 \in \mathbb{R}, \begin{cases} f(x,y,z_0) &= 0\,(1) \\ g(x,y,z_0) &= 0\,(2) \end{cases} \end{aligned}$$

Soit $H(x,y,0)$ le projeté orthogonal de $(x,y,z) \in \Gamma$ sur xOy.
Une équation cartésienne $h(x,y) = 0$ de Γ est donc la condition d'élimination de z_0 dans les équations $(1),(2)$.
Les coordonnées de H vérifient alors : $\begin{cases} h(x,y) &= 0 \\ z &= 0 \end{cases}$.

Exercice 16

Soit Γ : $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 &= 1 \\ x-y+z &= 1 \end{cases}$.

1. Préciser la nature de la courbe Γ et ses éléments géométriques.
2. Déterminer une équation cartésienne de la projection orthogonale $\mathscr{E}$ de Γ sur le plan xOy.
3. Etudier la courbe $\mathscr{E}$.

3.C Passage équation cartésienne/paramétrisation d'une surface

On traite deux exemples. Le cas général est hors-programme (et difficile).

Exemple

Soit $\varphi : (u,v) \longmapsto M(u,v) = \begin{pmatrix} u-v \\ 2u^2-3uv \\ v \end{pmatrix}$ une paramétrisation d'une surface $\mathscr{S}$.

— Soit $(x,y,z) \in \mathscr{S}$. Il existe alors $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(x,y,z) = (u-v, 2u^2-3uv, v)$.
On a $z = v$ et $x = u - v \iff u = x + v = x + z$.
Il vient : $y = 2u^2 - 3uv = 2(x+z)^2 - 3(x+z)z = 3x^2 - z^2 + xz$.
Tout point (x,y,z) de $\mathscr{S}$ vérifie donc $y = 3x^2 - z^2 + xz$.

— Réciproquement si $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ vérifie cette équation, on pose $v = z$, $u = x + z$.
On obtient $2u^2 - 3uv = 3x^2 - z^2 + xz = y$. Ainsi, $(x,y,z) \in \mathscr{S}$.

Exemple

Soit $\varphi : (u,v) \longmapsto (u\cos v, u, 1+\sin v)$.
- Soit $(x,y,z) \in \mathscr{S}$: il existe $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(x,y,z) = (u\cos v, u, 1+\sin v)$.
  On a $y = u$.
  - Si $y \neq 0$ alors $\frac{x}{y} = \cos v$ et $z - 1 = \sin v$.

    Tout point $(x,y,z) \in \mathscr{S}$ avec $y \neq 0$ vérifie l'équation $\left(\frac{x}{y}\right)^2 + (z-1)^2 = 1$ ou encore $x^2 + y^2(z-1)^2 = y^2$ $(*)$.
  - Tout point $(x,0,z) \in \mathscr{S}$ $(y = 0)$ vérifie également l'équation $(*)$.
    En effet, dans ce cas $(x,0,z) = (u\cos v, u, 1+\sin v) \Longrightarrow (x,0,z) = (0,0,1+\sin v)$.
    En particulier $x = y = 0$ et $(*)$ est bien vérifiée.
    (notons que tout point $(0,0,z)$ situé sur l'axe (Oz) vérifie également l'équation $(*)$.
- Réciproquement si $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ vérifie l'équation $(*)$:
  - si $y \neq 0$ on pose $u = y$ et dans ce cas $(*)$ donne $\left(\frac{x}{y}\right)^2 + (z-1)^2 = 1$.
    Il existe donc $v \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{x}{y} = \cos v$ et $z - 1 = \sin v$.
    On obtient $(x,y,z) = (u\cos v, u, 1+\sin v) \in \mathscr{S}$.
  - Si $y = 0$ alors l'équation $(*)$ donne $x = 0$ et on obtient $(x,y,z) = (0,0,z) \in (Oz)$.

  L'ensemble des points vérifiant l'équation $(*)$ est donc la réunion $\mathscr{S} \cup (Oz)$.

4 Surfaces particulières

4.A Surfaces réglées

Définition 17: Surfaces réglées

Soit I un intervalle réel et une famille de droites $(\mathscr{D}_t)_{t\in I}$ indexée par I.
- On appelle surface réglée engendrée par la famille $(\mathscr{D}_t)_{t\in I}$ la réunion des droites $\mathscr{D}_t$.
- Les droites $\mathscr{D}_t$ sont appelées génératrices de la surface.

Si $\mathscr{D}_t$ est dirigée par le vecteur $u(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{pmatrix}$ et passe par le point $A(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix}$ alors la surface réglée $\mathscr{S}$ admet une représentation paramétrique du type :

$$A(t) + \lambda u(t) = \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \alpha(t) + \lambda a(t) \\ y & = & \beta(t) + \lambda b(t) \\ z & = & \gamma(t) + \lambda c(t) \end{array} \right. \qquad ((t,\lambda) \in I \times \mathbb{R}).$$

Exemple

Soit $(\mathscr{D}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ la famille de droites passant par le point $A_t(t,0,t^2)$ et dirigée par $u_t(1,1,2t)$.
Notons $\mathscr{S}$ la surface réglée engendrée par cette famille de droites :

$$M \in \mathscr{S} \Longleftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, M \in \mathscr{D}_t \Longleftrightarrow \exists(\lambda,t) \in \mathbb{R}^2 : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & t + \lambda \\ y & = & \lambda \\ z & = & t^2 + 2\lambda t \end{array} \right.$$

Un point $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ appartient à $\mathscr{S}$ si et seulement s'il existe $(t,\lambda) \in I \times \mathbb{R}$ tel que :

$$(x,y,z) = (t+\lambda, \lambda, t^2 + 2\lambda t).$$

Il vient $y = \lambda$, $t = x - \lambda = x - y$ puis $z = (x-y)^2 + 2y(x-y) = x^2 - y^2$.
Tout point (x,y,z) de $\mathscr{S}$ vérifie donc l'équation $z = x^2 - y^2$.
Réciproquement soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant $z = x^2 - y^2$.

En posant $y = \lambda$ et $t = x - y$ il vient en remontant les calculs précédents :

$$t^2 + 2\lambda t = (x-y)^2 + 2y(x-y) = x^2 - y^2 = z \text{ i.e.} (x, y, z) \in \mathscr{S}.$$

Ci-dessous la "selle de cheval" et quelques génératrices (vues de 3/4 et du dessus).

Théorème 18

Le plan tangent en un point régulier $M(t_0, \lambda_0)$ d'une surface réglée contient la génératrice passant par ce point.

Exercice 19

Soit Γ une courbe de l'espace et $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul.
On appelle cylindre de direction $\overrightarrow{u}$ et de directrice Γ, la surface engendrée par toutes les droites dirigées par $\overrightarrow{u}$ et passant par un point de Γ. Soit $\mathscr{C}$ un tel cylindre.

1. Montrer que toutes les génératrices de $\mathscr{C}$ sont parallèles.
2. On suppose Γ définie par un paramétrage $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, $t \longmapsto (x(t), y(t), z(t))$, régulier.
   Donner un paramétrage de $\mathscr{C}$.
3. Caractériser les points réguliers du cylindre.
   Donner un paramétrage du plan tangent à $\mathscr{C}$ en chacun de ses points.
4. On suppose ici que Γ est définie par les équations $\left\{ \begin{array}{ccc} f(x,y) & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array} \right.$ et que $\overrightarrow{u} = (0, 0, 1)$.
   Déterminer une équation cartésienne du cylindre de directrice Γ.

4.B Surface de révolution

Définition 20: Surface de révolution

On appelle surface de révolution une surface $\mathscr{S}$ obtenue par rotation d'une courbe Γ autour d'une droite Δ.
- La droite Δ est appelée axe de $\mathscr{S}$.
- On appelle parallèle de $\mathscr{S}$ un cercle obtenu par intersection de $\mathscr{S}$ et d'un plan orthogonal à l'axe Δ.
- On appelle plan méridien un plan contenant l'axe Δ.
- On appelle méridienne l'intersection de $\mathscr{S}$ et d'un plan méridien.

Exemple

La rotation d'une droite $\mathscr{D}$ autour d'un axe Δ produit une surface :
- Π : un plan si $\mathscr{D} \perp \Delta$.
- $\mathscr{C}$: un cylindre de révolution si $\mathscr{D} // \Delta$.
- $\mathscr{C}'$: un cône de révolution sinon.

Détermination d'un paramétrage ou d'une équation cartésienne.

Soit Δ une droite dont on donne un vecteur directeur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Soit Γ la courbe paramétrée par $\begin{cases} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{cases}$ $(t \in I)$ ou définie par les équations $\begin{cases} f(x,y,z) &= 0 \\ g(x,y,z) &= 0 \end{cases}$.

Soit $\mathscr{S}$ la surface de révolution engendrée par la rotation de la demi-méridienne Γ autour de Δ.

❶ Soit $M(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Soit $A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ un point par lequel passe l'axe Δ. Alors :

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{S} &\iff \exists M_0 \in \Gamma : \begin{cases} M \text{ appartient au plan orthogonal à } \Delta \text{ passant par } M_0 \\ \left\|\overrightarrow{AM_0}\right\| = \left\|\overrightarrow{AM}\right\| \end{cases} \\ &\iff \exists t_0 \in I : \begin{cases} ax+by+cz = ax(t_0)+by(t_0)+cz(t_0) \\ (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2 = (x(t_0)-\alpha)^2+(y(t_0)-\beta)^2+(z(t_0)-\gamma)^2 \end{cases} \end{aligned}$$

On élimine ensuite le paramètre t_0 afin de déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{S}$.

❷ Soit $M(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Alors :

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{S} &\iff \exists B \in \Delta, \exists M_0 \in \Gamma : \begin{cases} B, M, M_0 \text{ appartiennent au même plan orthogonal à } \Delta \\ \left\|\overrightarrow{BM_0}\right\| = \left\|\overrightarrow{BM}\right\| \end{cases} \\ &\iff \exists B \in \Delta, \exists t_0 \in I : \begin{cases} (\overrightarrow{BM_0}|\overrightarrow{u}) = 0 \\ (\overrightarrow{BM}|\overrightarrow{u}) = 0 \\ (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2 \\ \quad = (x(t_0)-\alpha)^2+(y(t_0)-\beta)^2+(z(t_0)-\gamma)^2 \end{cases} \end{aligned}$$

❸ **Cas particulier** $\Delta = (Oz)$.
Si $\mathscr{S}$ est une surface de révolution d'axe $\Delta = (Oz)$ obtenue par rotation d'une courbe Γ admettant pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{cases} \qquad (t \in I)$$

alors $\mathscr{S}$ admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x &= \cos\theta x(t) - \sin\theta y(t) \\ y &= \sin\theta x(t) + \sin\theta y(t) \\ z &= z(t) \end{cases} \qquad (t,\theta) \in I \times [0; 2\pi].$$

Exercice 21

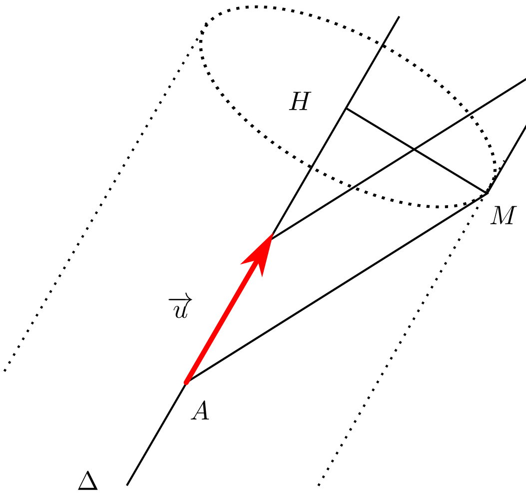
Soit $\mathscr{S}$ la surface de révolution engendrée par la rotation de la droite $\Gamma : \begin{cases} x &= 1 \\ y &= z \end{cases}$ autour de la droite $\Delta = (Oz)$.
Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{S}$ puis la méridienne obtenue en intersectant $\mathscr{S}$ et le plan d'équation $x = 0$.

Exercice 22

1. Déterminer l'équation cartésienne d'un cylindre de révolution de rayon R et d'axe Δ passant par le point A et dirigé par $\overrightarrow{u}$.
2. Déterminer l'équation cartésienne d'un cône de révolution de sommet S contenu dans l'axe Δ dirigé par $\overrightarrow{u}$ et de demi-angle au sommet $\theta \in]0; \frac{\pi}{2}[$.

Solution. 1. On note $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$. Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un point du cylindre.

La distance de M à Δ est constante égale à R.



L'aire du parallélogramme engendré par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ est égale à

$$\mathscr{A} = ||\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{AM}||.$$

Cette aire vaut également

$$\mathscr{A} = ||\overrightarrow{u}||HM.$$

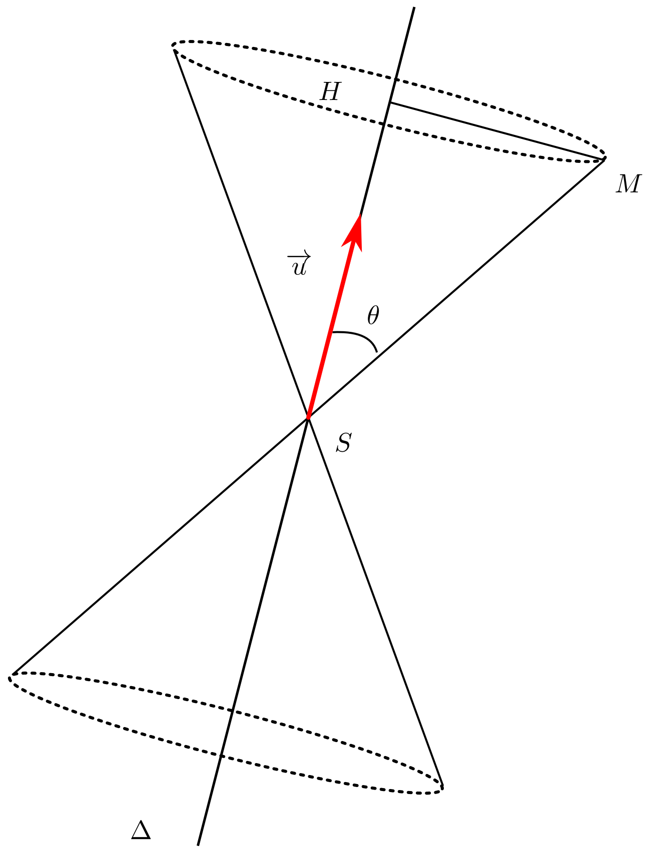
Il vient $HM^2 = \dfrac{||\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{AM}||^2}{||\overrightarrow{u}||^2}$.

En traduisant cette égalité avec les coordonnées des points en jeu dans le repère orthonormé direct usuel de $\mathbb{R}^3$ on trouve :

$$R^2 = \frac{1}{a^2+b^2+c^2}\left|\left|\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x-\alpha \\ y-\beta \\ z-\gamma \end{pmatrix}\right|\right|^2 \iff (a^2+b^2+c^2)R^2 = \left|\left|\begin{pmatrix} b(z-\gamma)-c(y-\beta) \\ c(x-\alpha)-a(z-\gamma) \\ a(y-\beta)-b(x-\alpha) \end{pmatrix}\right|\right|^2$$

$$\begin{aligned}
\iff (a^2+b^2+c^2)R^2 &= (z-\gamma)^2(a^2+b^2)+(y-\beta)^2(a^2+c^2)+(x-\alpha)^2(b^2+c^2) \\
&\quad -2bc(z-\gamma)(y-\beta)-2ac(x-\alpha)(z-\gamma)-2ab(x-\alpha)(y-\beta) \\
\iff (a^2+b^2+c^2)R^2 &= (a^2+b^2+c^2)\left[(z-\gamma)^2+(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2\right]-\left[a(x-\alpha)+b(y-\beta)+c(z-\gamma)\right]^2 \\
\iff &\boxed{R^2 = \left[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2\right]-\frac{\left[a(x-\alpha)+b(y-\beta)+c(z-\gamma)\right]^2}{a^2+b^2+c^2}.}
\end{aligned}$$

2. Soit $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $S \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ le sommet et $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un point du cône.



L'aire du parallélogramme engendré par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{SM}$ est égale à

$$\mathscr{A} = ||\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{SM}||.$$

Cette aire vaut également

$$\mathscr{A} = ||\overrightarrow{u}||HM.$$

Il vient $HM^2 = \dfrac{||\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{SM}||^2}{||\overrightarrow{u}||^2}$.
D'autre part, $\sin^2\theta = \dfrac{HM^2}{SM^2}$
On égalise et il vient :

$$HM^2 = SM^2 \sin^2\theta = \frac{||\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{SM}||^2}{||\overrightarrow{u}||^2}$$

En exprimant avec les coordonnées cette égalité en utilisant les coordonnées des points en jeu dans le repère orthonormé direct usuel de $\mathbb{R}^3$ on trouve (avec un calcul analogue à la Q.1.) :

$$\begin{aligned} &\left((x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2\right)\sin^2\theta \\ &= \frac{1}{a^2+b^2+c^2}\left((a^2+b^2+c^2)\left[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2\right] - \left[a(x-\alpha)+b(y-\beta)+c(z-\gamma)\right]^2\right). \end{aligned}$$

Il vient :

$$\begin{aligned} &\frac{\left[a(x-\alpha)+b(y-\beta)+c(z-\gamma)\right]^2}{a^2+b^2+c^2} = \left[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2\right]\left(1-\sin^2\theta\right) \\ \iff &\frac{\left[a(x-\alpha)+b(y-\beta)+c(z-\gamma)\right]^2}{a^2+b^2+c^2} = \left[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2\right]\cos^2\theta \end{aligned}$$

Autre version

On peut utiliser le produit scalaire au lieu du produit vectoriel.
On a $\left|\left(\overrightarrow{u}|\overrightarrow{SM}\right)\right|^2 = ||\overrightarrow{u}||^2\,||\overrightarrow{SM}||^2\,|\cos\theta|^2$ car $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{SM}}) = \theta$ ou $\pi - \theta$.
On retrouve directement la relation établie ci-dessus.

□