DEVOIR MAISON n°9

**Synthèse - Python**

**Exercice 1: (Solution)**

Deux joueurs $A$ et $B$ lancent à tour de rôle un dé équilibré. Les lancers sont supposés indépendants. Le joueur $A$ commence. Le premier qui obtient 6 remporte la partie. On note :

- $A$ : "$A$ remporte la partie". $B$ : "$B$ remporte la partie".
- $F_n$ : "la partie est remportée lors du $n$-ième lancer".
- $S_n$ : "le 6 sort lors du $n$-ième lancer".
- $T_n$ : "le 6 ne sort à aucun des $n$ premiers lancers".
- $I$ : "Le jeu ne s'arrête pas".

1. Exprimer $I$ à l'aide des événements $T_n$ puis calculer $P(I)$.
2. Exprimer les événements $A$ et $B$ en fonction des événements $F_n$ dans un premier temps puis en fonction des événements $S_n$ dans un second temps.
3. Calculer $P(F_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Calculer alors $P(A)$ et $P(B)$.
5. Que peut-on dire de la famille d'événements $(A, B, I)$ ? Retrouver le résultat de la Q1.
6. Écrire une fonction `jeu()` simulant une partie du jeu précédent et renvoyant le rang du premier 6. Calculer le nombre moyen de victoire du joueur $A$ à l'issue de $10^6$ parties. Commenter.

**Exercice 2: (Solution)**

1. Rappeler la nature de la série numérique $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ en fonction de la valeur du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. On suppose que $\alpha > 1$, on note $S_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ la somme partielle de la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$.

   On note $R_n(\alpha) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ le reste de rang $n$ de la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ et $S(\alpha)$ sa somme.

   (a) Justifier que $\forall k \geqslant 1, \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt$ puis que $|R_n| \leqslant \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

   (b) En utilisant la question précédente, et en justifiant, écrire une fonction `approximation(alpha,epsilon)` donnant une valeur approchée de $S(\alpha)$ à $\varepsilon$ près.
3. On suppose dans la suite que $\alpha \in ]1;2[$.

   (a) Montrer que $\rho_n = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$ est un équivalent du reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

   (b) On note $T_n = S_n + \rho_n$.
   A l'aide des encadrements obtenus à la question précédente montrer que

$$\forall n \geqslant 1, 0 \leqslant T_n - S \leqslant \frac{1}{n^\alpha}.$$

(c) Écrire une fonction `approximation2(alpha,epsilon)` améliorant la vitesse de convergence de la fonction `approximation(alpha,epsilon)`.

**Exercice 3: (Solution)**

1. Après avoir justifié la convergence, calculer pour tout $k \geqslant 1$,

$$I_k = \int_0^1 t^{k-1} \ln(t) dt.$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$.

   Exprimer $R_n$ à l'aide d'une intégrale.

3. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} R_n$.

4. Donner une approximation de $\sum_{n=0}^{+\infty} R_n$ avec `Python`.

**Exercice 4: (Solution)**

Soient $(a_{n-1}, \dots, a_0) \in \mathbb{R}^n$ et $P(X) = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \dots - a_1 X - a_0$ et

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 0 & 1 \\ a_0 & \dots & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

1. (a) Écrire une fonction `matrice(L)` qui renvoie pour $L = [a_{n-1}, \dots, a_0]$ la matrice $M$.

   (b) Calculer le polynôme caractéristique de $M$ pour des listes $L$ de 8 entiers aléatoires compris entre 0 et 9 : on utilisera la fonction `numpy` : `np.poly(M)`. Conjecture ?

   (c) Caluler, à la main, $\chi_M$ dans le cas général.

2. (a) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$. Montrer que $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in E_\lambda(M)$ est vecteur propre si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall i \in [\![2, n]\!], x_i = \lambda^{i-1} x_1 \\ (a_0 + \lambda a_1 + \dots + \lambda^{n-1} a_{n-1}) x_1 = \lambda^n x_1 \end{cases}$$

   (b) En déduire que $\lambda$ est valeur propre pour $M$ si et seulement si $P(\lambda) = 0$.

   (c) Vérifier que les espaces propres de $M$ sont tous des droites vectorielles.

   (d) En déduire enfin que $M$ est diagonalisable sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ si et seulement si $P$ est scindé et à racines simples.

   (e) L'équivalence précédente est-elle vraie pour toute matrice $A$ ?

**Exercice 5: (Solution)**

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dont les valeurs propres complexes vérifient : $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geqslant \cdots \geqslant |\lambda_n| \quad (*)$.
   Montrer que $\dfrac{\mathrm{Tr}(A^{k+1})}{\mathrm{Tr}(A^k)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda_1$. (on pourra trigonaliser la matrice $A$).
2. Écrire une fonction `VPModuleMax(A)` donnant une valeur approchée de la valeur propre de plus grand module d'une matrice $M$ vérifiant $(*)$.

**Exercice 6: (Solution)**

On considère la cardioïde $f(t) = \begin{pmatrix} (1+\cos(t))\cos(t) \\ (1+\cos(t))\sin(t) \end{pmatrix}$. On note $M(t)$ les points de la cardioïde.

1. Réduire l'intervalle d'étude. Dresser le tableau des variations des fonctions coordonnées. Déterminer le ou les points singuliers et préciser leur nature.
2. Tracer la courbe à l'aide de `Python`.
3. Déterminer le repère de Frenet $(M(t), \overrightarrow{T}, \overrightarrow{N})$ en tout point de paramètre $t \in ]-\pi;\pi[$.
4. On considère la famille de droites $(D_t)_{t\in]-\pi;\pi[}$ où $D_t = M(t) + \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{N(t)}\right)$.
   (a) Écrire une fonction `droite(vecteur,point)` créant le tracer de la droite passant par le `point` et dirigée par le `vecteur` entrés en paramètres. Cette fonction ne renvoie rien.
   (b) Avec `Python`, tracer pour $t$ variant dans `linspace(-m.pi,m.pi,101)` les droites $D_t$.
   (c) Donner une équation cartésienne de $D_t$.
   (d) Déterminer un paramétrage de l'enveloppe de la famille de droites $(D_t)_{t\in]-\pi;\pi[}$ et la tracer avec `Python`. Quelle est cette courbe pour la cardioïde initiale ?
5. Retrouver la développée en utilisant la définition (comme ensemble des centres de courbure).
6. Justifier que la développée de la cardioïde s'obtient en appliquant la composée d'une homothétie vectorielle et d'une translation sur la cardioïde initiale.