TRAVAUX DIRIGÉS : Espaces probabilisés

1 Dénombrement et probabilité sur un univers fini

Exercice 1: Combinaisons (Solution)

On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Déterminer la probabilité de tirer :

1. Le valet de trèfle et la dame de coeur.
2. exactement deux rois.
3. exactement deux as et deux rois.
4. une double paire (deux paires de cartes de même valeur (pas la même) et une cinquième carte de valeur différente).
5. trois (pas plus) cartes de même valeur (pas un full, cf. ci-dessous).
6. trois as et deux rois.
7. un full (trois cartes de même valeur et deux autres cartes de même valeur).

Exercice 2: Probabilités totales et suites (Solution)

On dispose de deux pièces : la pièce A donne face avec la probabilité $\frac{1}{2}$, la pièce B donne face avec la probabilité $2/3$.
On choisit une pièce au hasard et on la lance. Si l'on obtient face, on conserve la pièce que l'on vient de lancer, sinon on change de pièce.
On effectue une suite finie de lancers.

1. On note p_n la probabilité de jouer avec la pièce A au n-ième lancer.
   Calculer p_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. En déduire la probabilité d'obtenir face au n-ième lancer.

Exercice 3: Probabilités totales et suites (Solution)

Un chef d'entreprise fait appel à deux fournisseurs A et B.
- S'il commande chez B le jour n alors il commande le jour $n+1$ chez A avec la probabilité $\frac{1}{2}$.
- S'il commande chez A le jour n alors il commande le jour $n+1$ chez A avec probabilité $\frac{1}{4}$.

On note p_n la probabilité de commander chez le fournisseur A le jour n.

1. Calculer p_{n+1} en fonction de p_n puis calculer p_n en fonction de p_1 et de n.
2. Donner la limite de p_n lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 4: Probabilités totales et Bayes (Solution)

Quatre urnes contiennent :
- Urne 1 : 3 rouges, 2 blanches, 3 noires
- Urne 2 : 4 rouges, 3 blanches, 1 noire
- Urne 3 : 2 rouges, 1 blanche, 1 noire
- Urne 4 : 1 rouge, 6 blanches, 2 noires

On choisit au hasard une urne et on tire une boule dans celle-ci.

1. Calculer la probabilité que cette boule ne soit pas blanche.
2. Si la boule est blanche, quelle est la probabilité qu'elle ait été tirée dans l'urne 3 ?

Exercice 5: Triplets (strictement) croissants (Solution)

Une urne contient 8 boules numérotées de 1 à 8. On tire trois fois de suite une boule avec remise. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 nombres :

1. Dans un ordre strictement croissant ?
2. Dans un ordre croissant ?

Exercice 6: Conditionnement (Solution)

Une urne contient 3 boules noires et 7 boules blanches. On tire une boule, Blaise et Pierre regardent la couleur de la boule.
Sans se consulter, Blaise et Pierre annoncent une couleur.
Blaise ment une fois sur 20 et Pierre une fois sur 10.
Blaise annonce que la boule est noire et Pierre qu'elle est blanche. Qui croire ?

Exercice 7: Partition (Solution)

On considère n menteurs $M_1, \ldots, M_n$. Le menteur M_i transmet une information sous forme de "oui" ou "non" à M_{i+1}. M_i transmet la bonne information avec la probabilité $p \in]0;1[$ et la mauvaise avec la probabilité $1-p$.

1. Calculer la probabilité p_n pour que l'information transmise à M_1 soit rendue fidèlement par M_n.
2. Déterminer la limite de p_n lorsque $n \to +\infty$.
3. Écrire une fonction `Moyenne(N,n,p)` dont les arguments sont :
   - le nombre N de messages que l'on fait passer de M_1 à M_n
   - n est le nombre de menteurs
   - p la probabilité de que le message soit correctement transmis par M_i.

Cette fonction renvoie le nombre moyen d'expériences pour lesquelles le message est fidèlement rendue par M_n.

Exercice 8: Formules de Bayes (Solution)

Une urne A contient deux boules rouges et une boule noire.
Une urne B contient une boule rouge et deux boules noires.
Tirage 1 : on tire une boule de l'urne A, on note sa couleur et on la remet dans l'urne A.
Tirages 2 **et** 3 : si la boule tirée lors du tirage 1 est rouge, on effectue deux tirages successifs avec remise dans l'urne A. Si elle est noire, on effectue deux tirages successifs dans l'urne B.

1. Déterminer les probabilités des événements suivants :
   (a) Le tirage 2 donne un boule noire.
   (b) Le tirage 3 donne une boule noire.
   (c) Les tirages 2 et 3 ont donné une boule noire.
2. On suppose que le second tirage a donné une boule noire. Quelle est la probabilité pour que le troisième tirage donne une boule noire.
3. Quelle est la probabilité pour que le premier tirage ait donné une boule noire si les deux derniers ont donné une boule noire ?

Exercice 9: Formules de Bayes (Solution)

Un laboratoire vient de mettre au point un test pour détecter une maladie qui touche en moyenne un individu sur 5000.

— Pour un patient malade, la probabilité d'être positif au test est de $\frac{998}{1000}$
— Pour un patient sain, la probabilité d'être négatif au test est de $\frac{2999}{3000}$.

1. Ce test est-il vraiment fiable pour dépister les individus malades ?
2. Est-il vraiment fiable pour dépister les individus sains ?

Exercice 10: Probabilités totales et matrices (Solution)

Un feu bicolore, lorsqu'il est rouge à un instant donné, passe au vert à l'instant suivant avec la probabilité p et s'il est vert, il passe au rouge avec probabilité q. On suppose que $p, q \in]0; 1[$. On note r_n (resp. v_n) la probabilité que ce feu soit rouge (resp. vert) à l'instant $t = n$. On suppose que $r_0 + v_0 = 1$.

1. Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} r_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} r_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$

2. En déduire r_n et v_n en fonction de n puis calculer leurs limites.

Exercice 11: Indépendance (Solution)

On effectue n tirages avec remise dans une urne contenant le même nombre de boules blanches que de boules rouges. Soit A l'événement "on tire au moins deux rouges" et B l'événement "on tire des boules des deux couleurs".
Montrer que A et B sont indépendants si et seulement si $n = 3$.

Exercice 12: Probabilités composées (Solution)

L'utilisation d'une machine grille son moteur avec une probabilité de $1/1000$.
Trouver le nombre $n \in \mathbb{N}^*$ d'utilisations de la machine pour lequel on est certain, avec une probabilité d'au moins 90%, que le moteur aura grillé au cours de l'une de ces n utilisations.

Exercice 13: Indépendance (Solution)

Un polycopié contient 4 erreurs et est relu par une suite de relecteurs pour correction. À chaque relecture, une faute non corrigée est corrigée avec un probabilité de $1/3$. Les différentes fautes, et leurs corrections, sont indépendantes les unes des autres ; les relectures successives également.

1. Quelle est la probabilité que l'erreur numéro 1 ne soit pas corrigée après n relectures.
2. Combien faut-il de relectures pour que la probabilité qu'il ne subsiste aucune erreur soit supérieure à 90% ?
3. On suppose maintenant le nombre d'erreurs est uniformément réparti sur $[\![0, 4]\!]$.
   Calculer la probabilité que le polycopié soit intégralement corrigé après n relectures.
   Avec un script Python, déterminer le nombre minimum de relecture pour que le polycopié soit intégralement corrigé avec une probabilité 90%.

2 Langage probabiliste sur un univers dénombrable

Exercice 14: Ensemble/Événements (Solution)

Écrire à l'aide des opérations ensemblistes (d'éventuels quantificateurs) et des événements A, B, C et $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ les événements suivants :

1. L'un des événements au moins A ou B se réalise.
2. L'un et seulement l'un des événements A ou B se réalise.
3. A et B se réalisent mais pas C.
4. Tous les événements A_n se réalisent.
5. Il y a une infinité d'événements A_n qui se réalisent.
6. Seul un nombre fini des événements A_n se réalise.
7. Il y a une infinité des événements A_n qui ne se réalisent pas.
8. Tous les événements A_n se réalisent à partir d'un certain rang.

Exercice 15: Fonction de probabilité (Solution)

Les fonctions suivantes définie sur les singletons se prolongent-elle en une fonction de probabilité sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$:

1. $\Omega = \mathbb{N}$, $P(\{k\}) = \frac{1}{2^k}$.
2. $\Omega = \mathbb{N}^*$, $P(\{k\}) = \sin\left(\frac{1}{k}\right)\sqrt{1+k}$.
3. $\Omega = \mathbb{N}^*$, $P(\{k\}) = \frac{1}{k(k+1)}$.

3 Probabilité sur un univers dénombrable

Exercice 16: Continuité décroissante (Solution)

Blaise et Pierre disposent d'une pièce équilibrée et décident de jouer à Pile ou Face avec la règle suivante ; ils lancent la pièce à tour de rôle :

— Si la séquence FF est observée avant la séquence PF alors Blaise gagne.
— Si la séquence PF est observée avant la séquence FF alors Pierre gagne.

1. Justifier que la probabilité que personne ne gagne est nulle.
2. En considérant le résultat des deux premiers lancers, montrer que Pierre a plus de chance de gagner que Blaise.

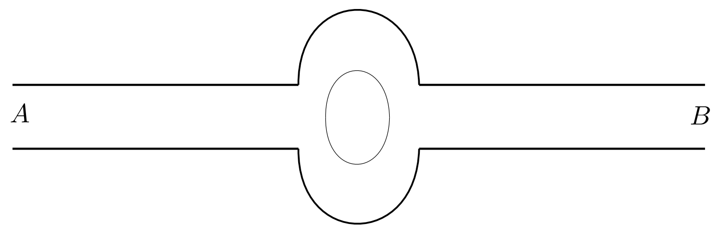
Exercice 17: Incompatibles, indépendants (Solution)

Deux joueurs jouent à un jeu. A chaque tour, le joueur A lance une pièce équilibrée deux fois. Le joueur B lance une fois une pièce donnant Pile avec la probabilité p. Le gagnant est celui qui fait le plus de Face. Tant qu'il y a égalité, ils rejouent. Leurs résultats sont indépendants.

1. Quelle est la probabilité qu'il y ait égalité au premier tour ?
2. Quelle est la probabilité que A gagne le jeu ?
3. Existe-t-il un nombre p pour lequel le jeu est équitable ?

Exercice 18: (σ)-Additivité (Solution)

Un Robot entre dans un circuit au point A. À chaque intersection le robot tourne à droite avec probabilité $\frac{1}{2}$ et à gauche avec probabilité $\frac{1}{2}$.
Quelle est la probabilité qu'il sorte en B ?



Exercice 19: Continuité croissante/décroissante(Solution)

Un joueur joue à Pile ou Face avec une pièce qui retourne Pile avec probabilité $p \in]0;1[$ et avec la règle suivante : s'il obtient au cours du jeu deux Pile de plus que de Face alors il a gagné ; s'il obtient deux Face de plus que de Pile alors il a perdu. Les lancers sont supposés indépendants.

1. Montrer que le jeu se termine nécessairement après un nombre pair de lancers.
2. On note p_n la probabilité de l'événement A_n : "le jeu dure strictement plus de 2n lancers".
   Établir une relation de récurrence vérifiée par la suite $(p_n)_{n\geqslant 0}$ et en déduire p_n en fonction de n.
3. Quelle est la probabilité que le jeu ne se termine pas ?
4. Quelle est la probabilité que le joueur gagne ?

Exercice 20: Probabilités composées/continuité/additivité (Solution)

On effectue des tirages dans une urne contenant initialement a boules blanches et b boules noires. Après chaque tirage, la boule est remise dans l'urne avec $c \in \mathbb{N}^*$ boules de la même couleur.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la probabilité p_n pour que la première boule blanche soit obtenue au n-ième tirage.
2. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{b+kc}{a+b+kc}$.
   (a) Montrer que $p_n = a_{n-1} - a_n$ pour tout $n \geqslant 2$.
   (b) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n$ et en déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} p_n$. Interpréter.

Exercice 21: Bis (Solution)

Deux joueurs A et B lancent à tour de rôle et indépendamment une pièce donnant Face avec la probabilité $p \in]0;1[$. Le joueur A commence et le premier qui obtient Face gagne le jeu, qui s'arrête alors.

1. Quelle est la probabilité pour que A gagne à son n-ième lancer ?
2. Quelle est la probabilité pour que A gagne ?
3. Quelle est la probabilité pour que le jeu ne s'arrête pas ?
4. Existe-t-il une valeur de p pour laquelle le jeu est équitable ?

Exercice 22: Probabilités composées/σ-additivités (Solution)

On lance simultanément deux dés jusqu'à ce qu'une somme de 5 ou 7 apparaisse.

1. Soit E_n l'événement "une somme 5 apparait au n-ième double lancer et sur les $n-1$ premier doubles lancers ni la somme 5 ni celle de 7 n'apparaît". Calculer $P(E_n)$.
2. Calculer la probabilité que le jeu s'arrête sur une somme 5.
3. Calculer la probabilité que le jeu s'arrête sur une somme 7
4. Quelle est la probabilité que le jeu ne s'arrête jamais ?

Exercice 23: Indépendance mutuelle (Solution)

On lance une pièce équilibrée n fois ($n \geqslant 2$) de manière indépendante. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on définit A_k : "on obtient pile au k-ième lancer". On note A_{n+1} : "le nombre de piles obtenus au bout des n lancers est pair".

1. Déterminer les probabilités des événements A_k pour $k \in [\![1,n+1]\!]$.
2. (a) Déterminer la probabilité $P\left(\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n+1} A_k\right)$.
   (b) En déduire que les événements $A_1, \dots, A_{n+1}$ ne sont pas mutuellement indépendants.
3. Montrer que toute sous-famille de n événements choisis parmi $A_1, \dots, A_n, A_{n+1}$ forme une famille d'événements mutuellement indépendants.

Exercice 24: (Solution)

Une urne contient des boules numérotées de 1 et N avec $N \geqslant 3$.
On effectue une suite infinie de tirages avec remise, et on note $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ la liste des numéros successifs obtenus.

1. (a) Déterminer le nombre de n-uplets $(u_1, \dots, u_n)$ d'entiers de $[\![1,N]\!]$ tels que $u_1 \leqslant u_2 \leqslant \dots \leqslant u_n$.
   (b) Soit A_n l'événement "les tirages successifs amènent n premiers numéros dans l'ordre croissant"
   Calculer $v_n = P(A_n)$. On conviendra que $v_1 = 1$.
2. (a) Montrer que $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{N+n}{N(n+1)}$.
   (b) En déduire qu'il existe un rang n_0 tel que :
   $$\forall n \geqslant n_0 : \frac{v_{n+1}}{v_n} \leqslant \frac{2}{N}.$$
   (c) Montrer que la série $\sum v_n$ converge.
3. On pose $w_n = v_n - v_{n-1}$.
   (a) Interpréter w_n comme la probabilité d'un événement fonction de A_n et A_{n+1}.
   (b) Montrer que la série $\sum v_n$ converge et calculer sa somme. Interpréter.

SOLUTIONS TRAVAUX DIRIGÉS : Espaces probabilisés

Solution Exercice 1. On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes.

L'univers Ω est constitué de toutes les combinaisons de 5 éléments parmi les 32 composant le jeu. $\text{Card}(\Omega) = \binom{32}{5}$.

On munit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ de la probabilité uniforme chaque combinaison de 5 cartes ayant la même probabilité d'être tirée.

Déterminons la probabilité de tirer :

1. Le valet de trèfle et la dame de coeur :

$$P(A_1) = \frac{\overbrace{\binom{1}{1}}^{\text{valet t.}}\overbrace{\binom{1}{1}}^{\text{dame c.}}\overbrace{\binom{30}{3}}^{\text{reste 30}}}{\binom{32}{5}}.$$

2. Exactement deux rois :

$$P(A_2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{28}{3}}{\binom{32}{5}}.$$

3. Exactement deux as et deux rois :

$$P(A_3) = \frac{\binom{4}{2}\binom{4}{2}\binom{24}{1}}{\binom{32}{5}}.$$

4. Une double paire.

   On sélectionne les hauteurs (i.e. $7, 8, \ldots, As$) des deux paires, les couleurs pour chaque paire puis une carte parmi les $32 - 4 - 4 = 24$ cartes restantes :

$$P(A_4) = \frac{\overbrace{\binom{8}{2}}^{\text{hauteurs paires}}\overbrace{\binom{4}{2}^2}^{\text{paires}}\overbrace{\binom{24}{1}}^{\text{carte restante}}}{\binom{32}{5}}$$

Remarques

— Si l'on choisit la première hauteur pour une paire, puis la seconde comme suit :

$$\frac{\binom{8}{1}\binom{4}{2}\binom{7}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{2}}{\binom{32}{5}}$$

on compte deux fois les mêmes mains. On a en effet :

$$\binom{8}{1}\binom{7}{1} = 8\times 7 = \frac{8!}{(8-2)!} = A_8^2 \quad \text{(arrangements de deux hauteurs).}$$

Il n'y a pas d'ordre sur les paires, il ne faut pas en créer un, on obtient avec ce calcul $2! = 2$ fois plus de mains : $A_8^2 = 2!\binom{8}{2}$.

— A l'inverse il ne faut pas identifier des mains différentes comme dans le calcul :

$$\frac{\binom{8}{3}\binom{4}{2}^2\binom{4}{1}}{\binom{32}{5}}.$$

Avec ce calcul, on identifie les tirages $\{2\text{As}, 2\text{Roi}, 1\text{Dame}\}$, $\{2\text{As}, 2\text{Dame}, 1\text{Roi}\}$, $\{2\text{Roi}, 2\text{Dame}, 1\text{As}\}$ ce qui n'est pas correct. On obtient avec ce calcul 3 fois moins de mains.

5. Trois (pas plus) cartes de même valeur.

$$P(A_4) = \frac{\binom{8}{1}\binom{4}{3}\binom{7}{2}\binom{4}{1}^2}{\binom{32}{5}}.$$

6. Trois as et deux rois :

$$P(A_5) = \frac{\binom{4}{3}\binom{4}{2}}{\binom{32}{5}}.$$

7. Un full (trois cartes de même valeur et deux autres cartes de même valeur) :

$$P(A_6) = \frac{\binom{8}{1}\binom{4}{3}\binom{7}{1}\binom{4}{2}}{\binom{32}{5}} = \frac{A_8^2\binom{4}{3}\binom{4}{2}}{\binom{32}{5}}.$$

□

Solution Exercice 2. On dispose de deux pièces : la pièce A donne face avec la probabilité $\frac{1}{2}$, la pièce B donne face avec la probabilité $2/3$.

On choisit une pièce au hasard et on la lance. Si l'on obtient face, on conserve la pièce que l'on vient de lancer, sinon on change de pièce.

On effectue une suite finie de lancers.

1. On note p_n la probabilité de joueur avec la pièce A au n-ième lancer.

   Soit $n \geqslant 1$.

On note A_n, l'événement "on joue avec la pièce A au n-ième lancer".
La famille $\left(A_n, \overline{A_n}\right)$ est un système complet d'événements.
Par la formule des probabilités totales, on a pour tout $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= P(A_{n+1}) = P(A_{n+1} \cap A_n) + P(A_{n+1} \cap \overline{A_n}) \\ &= p(A_n) P_{A_n}(A_{n+1}) + P(\overline{A_n}) P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) \\ &= p_n \times \frac{1}{2} + (1 - p_n) \times \frac{1}{3} \end{aligned}$$

car :
— si l'on a joué avec la pièce A au n-ième lancer, la probabilité de rejouer avec la pièce A au $n+1$-ième lancer est précisément la probabilité d'avoir obtenu face avec la pièce A : $\frac{1}{2}$.
— si l'on a joué avec la pièce B au n-ième lancer, la probabilité de jouer avec la pièce A au $n+1$-ième lancer est précisément la probabilité d'avoir obtenu pile avec la pièce B : $\frac{1}{3}$
On en déduit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$p_{n+1} = \frac{1}{6} p_n + \frac{1}{3}.$$

Étude classique de cette suite arithmético-géométrique :
— $c = \frac{1}{6}c + \frac{1}{3} \iff c = \frac{2}{5}$
— $\forall n \geqslant 1,\ p_n - \frac{2}{5} = \frac{1}{6^{n-1}}(p_1 - \frac{2}{5})$ avec $p_1 = \frac{1}{2}$.
— $\boxed{\forall n \geqslant 1, p_n = \frac{1}{10} \times \frac{1}{6^{n-1}} + \frac{2}{5}.}$

2. On note F_n l'événement : "on obtient face au n-ième lancer".

$$\begin{aligned} P(F_n) &= P(F_n \cap A_n) + P(F_n \cap \overline{A_n}) \\ &= P(A_n) P_{A_n}(F_n) + P(\overline{A_n}) P_{\overline{A_n}}(F_n) \\ &= p_n \frac{1}{2} + (1 - p_n) \frac{2}{3} \\ &= \boxed{-\frac{1}{6} p_n + \frac{2}{3}.} \end{aligned}$$

□

Solution Exercice 3. Un chef d'entreprise fait appel à deux fournisseurs A et B.
— S'il commande chez B le jour n alors il commande le jour $n+1$ chez A avec la probabilité $\frac{1}{2}$.
— S'il commande chez A le jour n alors il commande le jour $n+1$ chez A avec probabilité $\frac{1}{4}$.

1. On note A_n : "on commande chez A le jour n."
$(A_n, \overline{A_n})$ est un s.c.e. La formule des probabilités totales donne :

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= P(A_{n+1}) \\ &= P(A_n) P_{A_n}(A_{n+1}) + P(\overline{A_n}) P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) \\ &= p_n \times \frac{1}{4} + (1 - p_n) \times \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{4} p_n + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Calculer p_{n+1} en fonction de p_n puis calculer p_n en fonction de p_1 et de n.
Étude classique de cette suite arithmético-géométrique :
— $c = -\frac{1}{4}c + \frac{1}{2} \iff c = \frac{2}{5}$
— $\forall n \geqslant 1,\ p_n - \frac{2}{5} = \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}(p_1 - \frac{2}{5})$.
— $\boxed{\forall n \geqslant 1, p_n = \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}\left(p_1 - \frac{2}{5}\right) + \frac{2}{5}}$

2. Puisque $\left|-\frac{1}{4}\right| < 1$ on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$ puis $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \frac{2}{5}.}$

□

Solution Exercice 4.
— Urne 1 : 3 rouges, 2 blanches, 3 noires
— Urne 2 : 4 rouges, 3 blanches, 1 noire
— Urne 3 : 2 rouges, 1 blanche, 1 noire
— Urne 4 : 1 rouge, 6 blanches, 2 noires
On choisit au hasard une urne et on tire une boule dans celle-ci.

1. On note U_i : "on tire dans l'urne numéro i" avec $i \in [\![1, 4]\!]$.
On note B : "la boule tirée est blanche".
La famille d'événements (U_1, U_2, U_3, U_4) est un système complet d'événements.
La formule des probabilités totales donne :

$$\begin{aligned} P(B) &= P(U_1) P_{U_1}(B) + P(U_2) P_{U_2}(B) + P(U_3) P_{U_3}(B) + P(U_4) P_{U_4}(B) \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{6}{9}\right) = \frac{37}{96}. \end{aligned}$$

Ainsi, $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = \frac{59}{96}$.

2. Si la boule est blanche, la probabilité qu'elle ait été tirée dans l'urne 3 est égale d'après la formule de Bayes à :

$$\begin{aligned} P_B(U_3) &= \frac{P(B\cap U_3)}{P(B)} = \frac{P(U_3)P_{U_3}(B)}{P(B)} \\ &= \frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}}{\frac{37}{96}} = \frac{6}{37}. \end{aligned}$$

□

Solution Exercice 5. Une urne contient 8 boules numérotées de 1 à 8. On tire trois fois de suite une boule avec remise.

L'univers de cette expérience est l'ensemble des triplets (b_1, b_2, b_3) à valeurs dans $[\![1,8]\!]$: $\Omega = [\![1,8]\!]^3$ et $\mathrm{Card}(\Omega) = 8^3$.

1. Pour construire un triplet (b_1, b_2, b_3) strictement croissant composé d'éléments de $[\![1,8]\!]$:
   - on commence par se donner un arrangement de 3 éléments distincts de $[\![1,8]\!]$: $8\times 7\times 6$ possibilités.
   - on conserve l'unique permutation de ces trois éléments donnant un triplet strictement croissant : il y a $3!$ permutations possibles de ces trois éléments et une seule fournit un triplet strictement croissant.

   Au final il y a $\frac{8\times7\times6}{3!}$ triplets (b_1, b_2, b_3) strictement croissant composé d'éléments de $[\![1,8]\!]$.

   > **Remarques**
   >
   > De manière plus conceptuelle : à un triplet (b_1, b_2, b_3) strictement croissant composé d'éléments de $[\![1,8]\!]$ correspond $3!$ arrangements des trois éléments le constituant. Le nombre N de tels triplets vérifie donc $3!N = A_8^3$.

   On en déduit que le nombre de triplets recherchés est égal à $N = \frac{A_8^3}{3!} = \binom{8}{3}$.
2. Soit (b_1, b_2, b_3) un triplet croissant d'éléments de $[\![1,8]\!]$.

   Le triplet (b_1, b_2+1, b_3+2) est un triplet strictement croissants d'éléments de $[\![1,10]\!]$.

   Réciproquement si (c_1, c_2, c_3) est triplet strictement croissants d'éléments de $[\![1,10]\!]$ alors (c_1, c_2-1, c_3-2) est un triplet croissant d'éléments de $[\![1,8]\!]$.

   Il y a donc autant de triplets croissant de trois éléments de $[\![1,8]\!]$ que de triplets strictement croissants de 3 éléments de $[\![1,10]\!]$ soit $\binom{10}{3}$.

□

Solution Exercice 6. Une urne contient 3 boules noires et 7 boules blanches. On tire une boule, Blaise et Pierre regardent la couleur de la boule.

Sans se consulter, Blaise et Pierre annoncent une couleur.

Blaise ment une fois sur 20 et Pierre une fois sur 10.

Blaise annonce que la boule est noire et Pierre qu'elle est blanche.

On définit les événements suivants :

- B : "la boule est blanche"
- N : "la boule est noire"
- B_n : "Blaise annonce une boule noire"
- P_b : "Pierre annonce une boule blanche"

$$\begin{aligned} P_{B_n}(N) &= \frac{P(N)P_N(B_n)}{P(B_n)} \\ &= \frac{P(N)P_N(B_n)}{P(N)P_N(B_n)+P(B)P_B(B_n)} \\ &= \frac{\frac{3}{10}\frac{19}{20}}{\frac{3}{10}\frac{19}{20}+\frac{7}{10}\frac{1}{20}} \\ &= \frac{57}{64}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{P_b}(B) &= \frac{P(B)P_B(P_b)}{P(P_b)} \\ &= \frac{P(B)P_{P_b}(B)}{P(B)P_B(P_b)+P(N)P_N(P_b)} \\ &= \frac{\frac{7}{10}\frac{9}{10}}{\frac{7}{10}\frac{9}{10}+\frac{3}{10}\frac{1}{10}} \\ &= \frac{21}{22}. \end{aligned}$$

Il faut croire Pierre : $\frac{21}{22} > \frac{57}{64}$. □

Solution Exercice 7. On considère n menteurs $M_1, \ldots, M_n$. Le menteur M_i transmet une information sous forme de "oui" ou "non" à M_{i+1}. M_i transmet la bonne information avec la probabilité $p \in]0;1[$ et la mauvaise avec la probabilité $1-p$.

1. Soit A l'événement "l'information transmise à M_1 est rendue fidèlement par M_n"

   L'événement A est réalisé si et seulement si un nombre pair de personnes ment.

   $A = \bigcup_{0\leqslant 2k\leqslant n} B_k$ réunion disjointe où B_k est l'événement "k personnes parmi les n mentent".

   Si $2k$ est un entier compris dans $[\![0,n]\!]$, il y a $\binom{n}{2k}$ façons de choisir les menteurs parmi les n personnes.

   Il vient :

$$\begin{aligned}P(A) &= \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}\binom{n}{2k}(1-p)^{2k}p^{n-2k}\\ &= p^n\underbrace{\sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}\binom{n}{2k}\left(\frac{1-p}{p}\right)^{2k}}_{U_n}.\end{aligned}$$

On note par ailleurs $T_n = \displaystyle\sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n}\binom{n}{2k+1}\left(\frac{1-p}{p}\right)^{2k+1}$

On a d'une part :

$$\begin{aligned}U_n+T_n &= \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}\binom{n}{2k}\left(\frac{1-p}{p}\right)^{2k}+\sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n}\binom{n}{2k+1}\left(\frac{1-p}{p}\right)^{2k+1}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1-p}{p}\right)^{k}\\ &= \left(1+\frac{1-p}{p}\right)^n=\frac{1}{p^n}.\end{aligned}$$

On a d'autre part :

$$\begin{aligned}&U_n-T_n\\ &= \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}\binom{n}{2k}(-1)^{2k}\left(\frac{1-p}{p}\right)^{2k}+\sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n}\binom{n}{2k+1}(-1)^{2k+1}\left(\frac{1-p}{p}\right)^{2k+1}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\left(\frac{1-p}{p}\right)^{k}\\ &= \left(1-\frac{1-p}{p}\right)^n=\left(\frac{2p-1}{p}\right)^n\end{aligned}$$

Il vient $\begin{pmatrix}U_n\\ V_n\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\frac{1}{p^n}+\left(\frac{2p-1}{p}\right)^n\\ \frac{1}{p^n}-\left(\frac{2p-1}{p}\right)^n\end{pmatrix}$

On en déduit $p_n=p^nU_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(2p-1)^n$.

2. Puisque $p\in]0;1[$ on a $2p-1\in]-1;1[$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(2p-1)^n=0$.

   Finalement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}p_n=\frac{1}{2}$.

□

Solution Exercice 8. Une urne A contient deux boules rouges et une boule noire.

Une urne B contient une boule rouge et deux boules noires.

Tirage 1 : on tire une boule de l'urne A, on note sa couleur et on la remet dans l'urne A.

Tirages 2 **et** 3 : si la boule tirée lors du tirage 1 est rouge, on effectue deux tirages successifs avec remise dans l'urne A. Si elle est noire, on effectue deux tirages successifs dans l'urne B.

On note N_1,N_2,N_3 les événements correspondant à tirer une boule noire au tirage $1,2,3$.

On note R_1,R_2,R_3 les événements correspondant à tirer une boule rouge au tirage $1,2,3$.

1. (a) (R_1,N_1) est un s.c.e. :
   $P(N_2)=P(R_1)P_{R_1}(N_2)+P(N_1)P_{N_1}(N_2)$
   $P(N_2)=\frac{2}{3}\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$.

   (b)

$$\begin{aligned}P(N_3) = {} & P(R_1\cap R_2\cap N_3)+P(R_1\cap N_2\cap N_3)+\\ &+P(N_1\cap R_2\cap N_3)+P(N_1\cap N_2\cap N_3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(N_3) &= P(R_1)P_{R_1}(R_2)P_{R_1\cap R_2}(N_3)+P(R_1)P_{R_1}(N_2)P_{R_1\cap N_2}(N_3)\\ &\quad+P(N_1)P_{N_1}(R_2)P_{N_1\cap R_2}(N_3)+P(N_1)P_{N_1}(N_2)P_{N_1\cap N_2}(N_3)\\ &= \frac{2}{3}\frac{2}{3}\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\frac{1}{3}\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\frac{1}{3}\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\frac{2}{3}\frac{2}{3}=\frac{12}{27}=\frac{4}{9}.\end{aligned}$$

   (c)

$$\begin{aligned}P(N_2\cap N_3) &= P(R_1\cap N_2\cap N_3)+P(N_1\cap N_2\cap N_3)\\ &= P(R_1)P_{R_1}(N_2)P_{R_1\cap N_2}(N_3)+P(N_1)P_{N_1}(N_2)P_{N_1\cap N_2}(N_3)\\ &= \frac{2}{3}\frac{1}{3}\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\frac{2}{3}\frac{2}{3}\\ &= \frac{6}{27}=\frac{2}{9}.\end{aligned}$$

2.

$$P_{N_2}(N_3)=\frac{P(N_2\cap N_3)}{P(N_2)}=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{4}{9}}=\frac{1}{2}.$$

3.

$$P_{N_2\cap N_3}(N_1)=\frac{P(N_1\cap N_2\cap N_3)}{P(N_2\cap N_3)}=\frac{\frac{1}{3}\frac{2}{3}\frac{2}{3}}{\frac{2}{9}}=\frac{2}{3}.$$

□

Solution Exercice 9. Un laboratoire vient de mettre au point un test pour détecter une maladie qui touche en moyenne un individu sur 5000.
— Pour un patient malade, la probabilité d'être positif au test est de $\frac{998}{1000}$
— Pour un patient sain, la probabilité d'être négatif au test est de $\frac{2999}{3000}$.

1. On note M : "patient malade" et T : "test positif".
   Dans cette question, on cherche à évaluer la probabilité d'être malade sachant le test est positif :
$$\begin{aligned}P_T(M) &= \frac{P(M)P_M(T)}{P(T)}\\ &= \frac{P(M)P_M(T)}{P(M)P_M(T)+P(\overline{M})P_{\overline{M}}(T)} \qquad = \frac{\frac{1}{5000}\frac{998}{1000}}{\frac{1}{5000}\frac{998}{1000}+\frac{4999}{5000}\frac{1}{3000}}\\ &\simeq 37\%.\end{aligned}$$
   C'est peu : le test n'est pas fiable pour dépister les individus malades.
2. Dans cette question, on cherche à évaluer la probabilité d'être sain sachant que le test est négatif :
$$\begin{aligned}P_{\overline{T}}(\overline{M}) &= \frac{P(\overline{M})P_{\overline{M}}(\overline{T})}{P(\overline{T})}\\ &= \frac{P(\overline{M})P_{\overline{M}}(\overline{T})}{P(M)P_M(\overline{T})+P(\overline{M})P_{\overline{M}}(\overline{T})}\\ &= \frac{\frac{4999}{5000}\frac{2999}{3000}}{\frac{1}{5000}\frac{2}{1000}+\frac{4999}{5000}\frac{2999}{3000}}\\ &\simeq 100\%.\end{aligned}$$
   La réponse est oui : le test est fiable pour dépister les individus sains.

□

Solution Exercice 10. Un feu bicolore, lorsqu'il est rouge à un instant donné, passe au vert à l'instant suivant avec la probabilité p et s'il est vert, il passe au rouge avec probabilité q.

On suppose que $p, q \in]0;1[$. On note r_n (resp. v_n) la probabilité que ce feu soit rouge (resp. vert) à l'instant $t = n$. On suppose que $r_0 + v_0 = 1$.

1. On note R_n : "le feu est est rouge à l'instant n". On note $V_n = \overline{R_n}$.
   La famille $(R_n, \overline{R_n})$ est un s.c.e. :
$$\begin{aligned}r_{n+1} &= P(R_{n+1}) = P(R_n)P_{R_n}(R_{n+1}) + P(V_n)P_{V_n}(R_{n+1})\\ &= r_n(1-p) + v_n q\end{aligned}$$
   On trouve de même :
$$v_{n+1} = r_n p + v_n(1-q).$$
   On en déduit que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} r_{n+1}\\ v_{n+1}\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1-p & q\\ p & 1-q\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} r_n\\ v_n\end{pmatrix}.$$
2. Il vient par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\begin{pmatrix} r_n\\ v_n\end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix} r_0\\ v_0\end{pmatrix}.$$
   La propriété est vraie au rang $n = 0$ car $A^0 = I_2$.
   Si elle est vraie au rang n alors :
$$\begin{pmatrix} r_{n+1}\\ v_{n+1}\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} r_n\\ v_n\end{pmatrix} = A\times A^n\begin{pmatrix} r_0\\ v_0\end{pmatrix} = A^{n+1}\begin{pmatrix} r_0\\ v_0\end{pmatrix}.$$
   On a $A = I_2 + B$ avec $B = \begin{pmatrix} -p & q\\ p & -q\end{pmatrix}$.
   On a $B^2 = (p+q)\begin{pmatrix} p & -q\\ -p & q\end{pmatrix} = -(p+q)B$.
   On montre alors par récurrence (écrivez-la) que
$$\forall n \geqslant 1, B^n = (-1)^{n-1}(p+q)^{n-1}B.$$
   Les matrices I_2 et B commutent : $I_2B = B = BI_2$. La formule du binôme de Newton donne :
$$\begin{aligned}A^n = (I_2+B)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B^k I_2^{n-k} = \binom{n}{0}B^0 I_2^n + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}B^k\\ &= I_2 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k-1}(p+q)^{k-1}B\\ &= I_2 - \frac{1}{p+q}\left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k(p+q)^k\right)B\\ &= I_2 - \frac{1}{p+q}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k(p+q)^k - \binom{n}{0}(-1)^0(p+q)^0\right)B\\ &= I_2 - \frac{1}{p+q}\left([1-(p+q)]^n - 1\right)B\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} r_n \\ v_n \end{pmatrix} &= A^n \begin{pmatrix} r_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1+\frac{p}{p+q}\left((1-p-q)^n-1\right) & -\frac{q}{p+q}\left((1-p-q)^n-1\right) \\ -\frac{p}{p+q}\left((1-p-q)^n-1\right) & 1+\frac{q}{p+q}\left((1-p-q)^n-1\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{(pr_0-qv_0)(1-p-q)^n+q}{p+q} \\ \frac{(-pr_0+qv_0)(1-p-q)^n+p}{p+q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_n \\ v_n \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Puisque $p, q \in]0;1[$ on a $p+q \in]0;2[$ et par conséquent $1-(p+q) \in]-1;1[$.
On en déduit que : $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-p-q)^n = 0$.

Au final $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = \dfrac{q}{p+q}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{p}{p+q}$.

□

Solution Exercice 11. On effectue n tirages avec remise dans une urne contenant le même nombre de boules blanches que de boules rouges. Soit A l'événement "on tire au moins deux rouges" et B l'événement "on tire des boules des deux couleurs".

Montrons que A et B sont indépendants si et seulement si $n = 3$.

L'univers Ω est constitué des n-listes $(b_1, \dots, b_n)$ avec b_i une boule rouge ou noire. $\mathrm{Card}(\Omega) = 2^n$.

— On suppose $n = 3$.

• $A \cap B$ est l'événement : "on tire au moins deux rouges et on tire des boules des deux couleurs" c'est-à-dire "on tire deux rouges et une blanches".
Il s'agit de dénombrer le nombre de cas favorables à $A \cap B$. Un tirage (b_1, b_2, b_3) est favorable à $A \cap B$ si et seulement si exactement 1 des 3 tirages est blanc (ou de manière équivalent exactement 2 des 3 tirages sont rouges) :

$$P(A\cap B) = \frac{\mathrm{Card}(A\cap B)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{\binom{3}{1}}{2^3} = \frac{\binom{3}{2}}{2^3} = \frac{3}{2^3}.$$

• A est l'événement "on tire au moins deux rouges" c'est-à-dire, "on tire deux rouges ou trois rouges".

$$P(A) = \frac{\binom{3}{2}+\binom{3}{3}}{2^3} = \frac{4}{2^3}.$$

• B est l'événement on tire des boules des deux couleurs" c'est-à-dire "on tire 2rouges/1blanche ou 1blanche/2rouges" :

$$P(B) = \frac{\binom{3}{2}+\binom{3}{1}}{2^3} = \frac{6}{2^3}.$$

• On a

$$P(A)P(B) = \frac{4}{2^3}\frac{6}{2^3} = \frac{1}{2}\frac{3}{2^2} = \frac{3}{2^3} = P(A\cap B).$$

Les événements A et B sont donc indépendants.

— On suppose maintenant que $n \neq 3$.

• $n = 2$: $A \cap B = \varnothing$ est impossible : on ne peut pas tirer à la fois au moins deux rouges et les deux couleurs en seulement deux tirages.
On a par ailleurs $P(A) = \frac{\binom{2}{2}}{2^2} = \frac{1}{4}$ et $P(B) = \frac{\binom{2}{1}}{2^2} = \frac{1}{2}$ donc $P(A)P(B)$.
Finalement, $P(A)P(B) = \frac{1}{8} \neq 0 = P(A\cap B)$.

• $n \geqslant 4$. (Notons que $n-1 \geqslant 3$).

∗ A : "on tire au moins deux rouges". $A = \bigcup\limits_{k=2}^{n} A_k$ réunion disjointe avec A_k : "on tire exactement k rouges" :

$$P(A) = \sum_{k=2}^{n} P(A_k) = \sum_{k=2}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{2^n} = \frac{2^n-1-n}{2^n}$$

∗ B : "on tire les deux couleurs". $B = \bigcup\limits_{k=1}^{n-1} A_k$ réunion disjointe avec A_k : "on tire exactement k rouges" :

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n-1} P(A_k) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\binom{n}{k}}{2^n} = \frac{2^n-1-1}{2^n} = \frac{2^n-2}{2^n}$$

∗ $A\cap B$: "on tire les deux couleurs et au moins deux rouges". $A\cap B = \bigcup\limits_{k=2}^{n-1} A_k$ réunion disjointe avec A_k : "on tire exactement k rouges" :

$$P(A\cap B) = \sum_{k=2}^{n-1} P(A_k) = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{\binom{n}{k}}{2^n} = \frac{2^n-1-1-n}{2^n} = \frac{2^n-2-n}{2^n}$$

On a :

$$P(A)P(B) = (2^n-1-n)(2^n-2) = 4^n + 2^n(-n-3) + 2n + 2.$$

Si l'on avait $P(A)P(B) = P(A\cap B)$ il viendrait $(2^n-1-n)(2^n-2) = 2^n-2-n$, c'est-à-dire :

$$4^n + 2^n(-n-3) + 2n + 2 = 2^n - 2 - n \iff 4^n - (n+4)2^n + 3n + 4 = 0.$$

Mais pour tout $n \geqslant 4$, $n+4 \leqslant 2^n$. Cette inégalité est en effet vraie pour $n=4$ et $n+5 = n+4+1 \leqslant 2^n+1 \leqslant 2^n+2^n = 2^{n+1}$.
On en déduit que $4^n-(n+4)2^n+3n+4 \geqslant 3n+4 > 0$.
Par conséquent, A et B ne sont pas indépendants.

□

***Solution Exercice** 12.* L'utilisation d'une machine grille son moteur avec une probabilité de 1 pour 1000.

Soit $n \geqslant 1$.

Le moteur grille à la n-ième utilisation si et seulement s'il ne grille pas lors des $n-1$ premières utilisations et grille lors de la n-ième utilisation. On note G_i : "le moteur grille à la i-ième utilisation". Notons que les événements G_i sont incompatibles $G_i \cap G_j = \varnothing$ si $i \neq j$.

$$\begin{aligned}P(\overline{G_1} \cap \cdots \cap \overline{G_{n-1}} \cap G_n) &= P(\overline{G_1}) \ldots P_{\overline{G_1} \cap \cdots \cap \overline{G_{n-2}}}(\overline{G_{n-1}}) P_{\overline{G_1} \cap \cdots \cap \overline{G_{n-1}}}(G_n) \\ &= \left(\frac{999}{1000}\right)^{n-1} \frac{1}{1000}\end{aligned}$$

On note $q = \frac{999}{1000}$ et $p = \frac{1}{1000}$: $1-q = p$.
On cherche $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\begin{aligned}P\left(\bigcup_{k=1}^{n} G_k\right) \geqslant 0,9 &\iff \sum_{k=1}^{n} P(G_k) \geqslant 0,9 \\ &\iff \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} p \geqslant 0,9 \\ &\iff p \sum_{k=0}^{n-1} q^k \geqslant 0,9 \\ &\iff \frac{1-q^n}{1-q} \geqslant \frac{0,9}{p} \\ &\iff 1-q^n \geqslant 0,9 \\ &\iff q^n \leqslant 0,1 \\ &\iff n \ln q \leqslant \ln 0,1 \\ &\iff n \underset{(\ln q < 0)}{\geqslant} \frac{\ln 0,1}{\ln q} \simeq 2301,4.\end{aligned}$$

A partir de 2302 utilisations, le moteur aura grillé avec probabilité au moins 90%.

□

***Solution Exercice** 13.*

1. On note A_i : "l'erreur numéro 1 n'est pas corrigée lors de la i-ième relecture.
   On cherche donc la probabilité de l'événement $A_1 \cap \cdots \cap A_n$.
   Par indépendance des relectures :
   $$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i) = \prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$
2. On note B_j : "l'erreur j n'est pas corrigée après n relectures".
   On a comme à la question 1., $P(B_j) = \frac{2^n}{3^n}$ pour $j \in [\![1,4]\!]$.
   Le polycopié est intégralement après n relectures est corrigé si $\bigcap_{j=1}^{4} \overline{B_j}$ est réalisé.
   Les événements $\overline{B_j}$ étant indépendants :
   $$P\left(\bigcap_{j=1}^{4} \overline{B_j}\right) = \left(1-\frac{2^n}{3^n}\right)^4.$$
   Cette probabilité est supérieure à $0,9$ si et seulement si $n \geqslant \frac{\ln\left(1-0,9^{\frac{1}{4}}\right)}{\ln(2/3)}$.
   Pour $n \geqslant 10$, le polycopié sera corrigé avec une probabilité d'au moins 90%.
3. On note N_i les événements : "le polycopié contient i erreurs" pour $i \in [\![0,4]\!]$.
   Le nombre d'erreur étant uniformément réparti sur $[\![0,4]\!]$, on a : $P(N_i) = \frac{1}{5}$.
   On note B l'événement "le polycopié est corrigé après n relectures" :
   $$\begin{aligned}P(B) = \sum_{i=0}^{4} P(N_i) P_{N_i}(B) &= \frac{1}{5} P_{N_0}(B) + \sum_{i=1}^{4} P(N_i) P_{N_i}(B) \\ &= \frac{1}{5} \underbrace{P_{N_0}(B)}_{=1} + \frac{1}{5} \sum_{i=1}^{4} P\left(\bigcap_{j=1}^{i} \overline{B_j}\right) \\ &= \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \sum_{i=1}^{4}\left(1-\frac{2^n}{3^n}\right)^i = \frac{1}{5} \sum_{i=0}^{4}\left(1-\frac{2^n}{3^n}\right)^i \\ &= \frac{1}{5} \frac{1-\left(1-\frac{2^n}{3^n}\right)^5}{1-\left(1-\frac{2^n}{3^n}\right)} \\ &= \frac{1}{5} \frac{3^n}{2^n}\left(1-\left(1-\frac{2^n}{3^n}\right)^5\right)\end{aligned}$$

□

Solution Exercice 14. Écrire à l'aide des opérations ensembles et des événements A, B, C et $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ les événements suivants :

1. L'un des événements au moins A ou B se réalise : $A \cup B$.
2. L'un et seulement l'un des événements A ou B se réalise : $(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$
3. A et B se réalisent mais pas C : $A \cap B \cap \overline{C}$.
4. Tous les événements A_n se réalisent : $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$.
5. Il y a une infinité d'événements A_n qui se réalisent :
   $\exists I \subset \mathbb{N}$, I ensemble infini tel que $\displaystyle\bigcap_{i \in I} A_i$.
6. Seul un nombre fini des événements A_n se réalise :
   $\exists N \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\bigcap_{n \geqslant N} \overline{A_n}$.
7. Il y a une infinité des événements A_n qui ne se réalisent pas :
   $\exists I \subset \mathbb{N}$, I ensemble infini tel que $\displaystyle\bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$.
8. Tous les événements A_n se réalisent à partir d'un certain rang.
   $\exists N \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\bigcap_{n \geqslant N} A_n$.

□

Solution Exercice 15.

Rappel : la suite $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définit une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

— $p_k \geqslant 0$

— la série $\sum p_k$ converge et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1$.

Un résultat similaire s'adapte immédiatement sur $(\mathbb{N}^*, \mathscr{P}(\mathbb{N}^*))$.
La première condition est vérifiée dans les trois exemples qui suivent.
On s'intéresse à la seconde condition.

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \neq 1$.

   Remarques

   Sur $\Omega = \mathbb{N}^*$, $P(\{k\}) = \frac{1}{2^k}$ définit une probabilité car :
   $$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1.$$

2. La série $\sum \sin\left(\frac{1}{k}\right) \sqrt{1+k}$ est divergente par comparaison à la série de Riemann $\sum \frac{1}{\sqrt{k}}$:
   $$0 \leqslant \sin\left(\frac{1}{k}\right) \sqrt{k+1} \underset{k \to +\infty}{\sim} \frac{1}{k} \times \sqrt{k} = \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

3. Soit $N \geqslant 1$:
   $$\sum_{k=1}^{N} p_k = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 1.$$
   Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(\{k\}) = 1$.
   Ainsi, la fonction P se prolonge en une probabilité sur $\Omega = \mathbb{N}^*$. P est définie par :
   $$\forall A \in \mathbb{N}^*, P(A) = \sum_{k \in A} P(\{k\}).$$

□

Solution Exercice 16. Blaise et Pierre disposent d'une pièce équilibrée et décident de jouer à Pile ou Face avec la règle suivante ; ils lancent la pièce à tour de rôle :

— Si la séquence FF est observée avant la séquence PF alors Blaise gagne.

— Si la séquence PF est observée avant la séquence FF alors Pierre gagne.

1. On note D l'événement : "personne ne gagne".
   Personne ne gagne si et seulement si aucune des séquences FF ou PF ne se réalise.
   Seulement séquences infinies réalisent D : $FPP\ldots$ et $PPP\ldots$.
   Notons D_1 et D_2 les événements associés.
   On a $D = D_1 \cup D_2$ la réunion étant disjointe.
   $D_2 = \displaystyle\bigcap_{k=1}^{+\infty} P_k$ où P_k : "les k premiers lancers donnent **tous** Pile".
   Par ailleurs, $P_{k+1} \subset P_k$ pour tout $k \geqslant 21$.
   Par continuité décroissante, il vient :
   $$P\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} P_k\right) = \lim_{k \to +\infty} P(P_k) \underset{(*)}{=} \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{2^k} = 0.$$

$(*)$: P_k consiste à obtenir Pile à chacun des k premiers lancers :

$$P(P_k) = P(T_1 \cap \cdots \cap T_k) = P(T_1)P_{T_1}(T_2)\dots P_{T_1\cap\cdots\cap T_{k-1}}(T_k) = \frac{1}{2^k}.$$

On montre de même que $P(D_1) = 0$.
Finalement, $P(D) = P(D_1) + P(D_2) = 0$.
Le jeu ne donne pas de vainqueur est donc un événement négligeable.
Il est presque certain donc que le jeu se termine.

2. Les deux premiers lancers donnent chacune des séquences FF, PF, FP, PP avec la même probabilité $\frac{1}{4}$; l'assertion à démontrer est donc surprenante. Mais attention à bien décortiquer le jeu.
   On considère les deux premiers lancers
   — Si FF sort, Blaise gagne, mais c'est le seul cas !
   — En effet, si PF sort c'est clairement Pierre qui gagne.
   Mais il en va de même si FP ou PP sortent. En effet, en continuant le jeu (qui se termine avec probabilité 1 comme nous venons de le voir) :
   — chaque fois que P sort le jeu continue
   — dès qu'un F sort le jeu s'arrête car la séquence PF est apparue (et donc Pierre gagne !).
   Finalement Pierre gagne 3 fois sur 4 :

$$\begin{aligned} P(P_G) &= P(P_G \cap D) + P(P_G \cap \overline{D}) \\ &= P(D)P_D(P_G) + P(\overline{D})P_{\overline{D}}(P_G) \\ &= P_{\overline{D}}(P_G) \quad \text{(on sait que PF sortira)} \\ &= P(PP \cup PF \cup FP) = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

   On a $\Omega = P_G \cup D \cup B_G$ réunion disjointe :

$$1 = P(\Omega) = P(P_G) + P(D) + P(B_G) \Longrightarrow P(B_G) = 1 - \frac{3}{4} - 0 = \frac{1}{4}.$$

□

Solution Exercice 17. Deux joueurs jouent à un jeu. A chaque tour, le joueur A lance une pièce équilibrée deux fois. Le joueur B lance une fois une pièce donnant Pile avec la probabilité p indépendamment de A.

Le gagnant est celui qui fait le plus de Face. Tant qu'il y a égalité, ils rejouent.

1. Il y a égalité au premier tour si :
   — A et B n'obtiennent pas Face, c'est-à-dire A obtient PP et B obtient P.
   Ces événements sont indépendants. Probabilité : $\frac{1}{4} \times p$.
   — **OU** A obtient une seule fois face $PF \cup FP$ et B obtient F.
   Les événements précédents sont indépendants.
   Probabilité : $2 \times \left(\frac{1}{4} \times (1-p)\right) = \frac{1}{2}(1-p)$.
   Au total la probabilité d'égalité au premier tirage est égale à $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}p$.
2. A gagne le jeu si l'un des événements suivants se réalise A_n : "le joueur A obtient pour la première fois plus de Face que B au n-ième tour".
   Il y a donc égalité lors des $n-1$ premières manches et au n-ième tirage :
   — A obtient un seul Face : $PF \cup FP$ et B obtient P (aucun Face).
   Probabilité : $\frac{1}{4}p + \frac{1}{4}p = \frac{1}{2}p$
   — **OU** A obtient 2 faces et B obtient Pile ou bien Face :
   probabilité $\frac{1}{4}p + \frac{1}{4}(1-p) = \frac{1}{4}$.
   — Probabilité que A remporte la n-ième manche : $\frac{1}{4} + \frac{1}{2}p$.
   — $P(A_n) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}p\right)^{n-1}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}p\right)$.
   Les événements A_n sont incompatibles.
   Ainsi, A remporte le jeu avec probabilité :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}p\right)^{n-1}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}p\right) = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}p}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}p} = \frac{2p+1}{p+2}$$

3. B gagne avec la probabilité :

$$P(B) = \frac{\frac{1}{4}(1-p)}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}p} = \frac{1-p}{p+2}$$

   Le jeu est équitable si et seulement si :

$$P(A) = P(B) \Longleftrightarrow 1 - p = 2p + 1 \Longleftrightarrow p = 0.$$

   La fonction $f : x \longmapsto \frac{2x+1}{x+2}$ est croissante sur $[0;1]$ et $f(0) = \frac{1}{2}$.
   Le joueur A est donc avantagé quelque soit la valeur de p, d'autant plus que p (la probabilité que B obtienne Pile) est proche de 1.

□

Solution Exercice 18. Un Robot entre dans un circuit au point A. À chaque intersection le robot tourne à droite avec probabilité $\frac{1}{2}$ et à gauche avec probabilité $\frac{1}{2}$.

On note G_n : "le robot tourne à gauche à la n-ième intersection".
On note D_n : "le robot tourne à droite à la n-ième intersection".
Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons B_n le robot sort en B après $2n+2$ intersections.
Notons enfin B : "le robot sort en B".

• Le robot peut sortir en B après deux intersections si l'une des deux séquences D_1D_2 ou G_1G_2 se produit.

On note cet événement $B_0 = D_1D_2 \cup G_1G_2$, et on a $P(B_0) = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

• Soit $n \geqslant 1$. Le robot sort en B après $2n+2$ intersections si et seulement si l'une des séquences $G_{2n+1}D_{2n+2}$ ou $D_{2n+1}G_{2n+2}$ se produit après $2n$ intersections le faisant tourner en rond :

— Si le robot tourne à droite au premier virage alors B_n se réalise si et seulement si la séquence $D_1G_2G_3G_4\dots G_{2n}G_{2n+1}D_{2n+2}$ se réalise.
— Si le robot tourne à gauche au premier virage alors B_n se réalise si et seulement si la séquence $G_1D_2D_3D_4\dots D_{2n}D_{2n+1}G_{2n+2}$ se réalise.

Ces événements sont incompatibles et décrivent complètement B_n.

Ainsi, $P(B_n) = 2\times\dfrac{1}{2^{2n+2}} = \dfrac{1}{2^{2n+1}}$.

Le robot sort en B si l'un des événements incompatibles $B_n, n\in\mathbb{N}$ se réalise :

$$B = \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n.$$

Il vient par σ-additivité :

$$\begin{aligned}
P(B) &= P(B_0) + \sum_{n=1}^{+\infty} P(B_n) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{2n+1}}\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{2n+1}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{4^n}\\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\times\frac{4}{3} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

□

***Solution Exercice** 19.* Un joueur joue à Pile ou Face avec une pièce qui retourne Pile avec probabilité $p\in]0;1[$ et avec la règle suivante : s'il obtient au cours du jeu deux Pile de plus que de Face alors il a gagné ; s'il obtient deux Face de plus que de Pile alors il a perdu.

1. • Notons que si le jeu se termine, c'est nécessairement en un nombre pair de lancer.

   En effet soit N un nombre de lancers tel que le jeu se termine. On note x le nombre de Pile obtenus et y le nombre de Face obtenu. On a $x+y=N$.

   Si le joueur gagne, on a $x = y+2$ et il vient $N = x+y = x+x+2 = 2(x+1)$ pair.

   Si le joueur perd, on a $y = x+2$ et il vient $N = x+y = 2(y+1)$ pair.

   Dans tout les cas le jeu se termine après un nombre pair de lancers.

   • Soit $n\geqslant 1$. Notons A_n : "le jeu dure strictement plus de $2n$ lancers".

   On pose par convention, $p_0 = 1$ (le jeu dure effectivement strictement plus de $2\times 0 = 0$ lancers).

$$\begin{aligned}
p_{n+1} = P(A_{n+1}) &= P(A_n\cap PF) + P(A_n\cap FP)\\
&= 2p_np(1-p)
\end{aligned}$$

   Ainsi, $(p_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite géométrique de raison

   Ainsi, $p_n = (2(1-p))^n p_1$ avec p_0

2. Soit D : "le jeu est infini".

   D se réalise si et seulement si le jeu dure strictement plus de $2n$ lancers pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $D = \bigcap_{n\geqslant 1} A_n$.

   La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. Par continuité décroissante :

$$P(D) = P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n) = \lim_{n\to+\infty}(2p(1-p))^n = 0(*)$$

   En effet, $(*)$: $2p(1-p)\in]0;1/2[\subset]-1;1[$ car classiquement $p(1-p)\leqslant\frac{1}{4}$.

   On en déduit que $P(\overline{D}) = 1$: le jeu ne dure pas indéfiniment presque sûrement.

3. Notons G l'événement le joueur gagne.

   On a $G = PP\cup\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\cap PP$.

   Ainsi :

$$\begin{aligned}
P(G) &= p^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}(2p(1-p)^n)p^2 = p^2\sum_{n=0}^{+\infty}(2p(1-p))^n\\
&= \frac{p^2}{1-2p(1-p)}
\end{aligned}$$

□

***Solution Exercice** 20.* On effectue des tirages dans une urne contenant initialement a boules blanches et b boules noires. Après chaque tirage, la boule est remise dans l'urne avec $c\in\mathbb{N}^*$ boules de la même couleur.

1. On note B_n : "le n-ième tirage donne une blanche" et $N_n = \overline{B_n}$: "le n-ième tirage donne une noire".

   On note A_n : "la première boule blanche sort au n-ième tirage".

   On a : $A_n = N_1\cap\dots\cap N_{n-1}\cap B_n$ donc par le formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}
p_n &= P(A_n) = P(N_1\cap\dots\cap N_{n-1}\cap B_n)\\
&= P(N_1)P_{N_1}(N_2)\dots P_{N_1\cap\dots\cap N_{n-1}}(B_n)\\
&= \frac{b}{a+b}\frac{b+c}{a+b+c}\cdots\frac{b+(n-2)c}{a+b+(n-2)c}\frac{a}{a+b+(n-1)c}\\
&= \frac{a}{a+b+(n-1)c}\prod_{k=0}^{n-2}\frac{b+kc}{a+b+kc}.
\end{aligned}$$

2. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{b+kc}{a+b+kc}$.

   (a) Soit $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned} a_{n-1} - a_n &= \prod_{k=0}^{n-2} \frac{b+kc}{a+b+kc} - \prod_{k=0}^{n-1} \frac{b+kc}{a+b+kc} \\ &= \prod_{k=0}^{n-2} \frac{b+kc}{a+b+kc} \left(1 - \frac{b+(n-1)c}{a+b+(n-1)c}\right) \\ &= \prod_{k=0}^{n-2} \frac{b+kc}{a+b+kc} \left(\frac{a+b+(n-1)c-b-(n-1)c}{a+b+(n-1)c}\right) \\ &= \prod_{k=0}^{n-2} \frac{b+kc}{a+b+kc} \left(\frac{a}{a+b+(n-1)c}\right) \\ &= p_n. \end{aligned}$$

   (b) On a : $\dfrac{b+kc}{a+b+kc} = 1 - \dfrac{a}{a+b+kc}$ donc :

$$\begin{aligned} \ln a_n &= \ln \prod_{k=0}^{n-1} \frac{b+kc}{a+b+kc} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 - \frac{a}{a+b+kc}\right) \end{aligned}$$

   D'autre part, $\ln(1+x) \leqslant x$ pour tout $x > -1$ donc pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$: $\ln\left(1 - \dfrac{a}{a+b+kc}\right) \leqslant -\dfrac{a}{a+b+kc}$.
   Il vient :

$$\ln a_n \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} -\frac{a}{a+b+kc} \qquad (*)$$

   La suite de terme général $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a}{a+b+kc}$ est croissante.
   Elle est non majorée. En effet, si elle l'était cette suite serait convergente ce qui n'est pas le cas : $0 \leqslant \dfrac{a}{a+b+kc} \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{a}{kc}$.
   La série $\sum \dfrac{a}{kc}$ diverge (série de Riemann $\alpha = 1$) donc par comparaison la série $\sum \dfrac{a}{a+b+kc}$ diverge et la suite de ses partielles est donc divergente et n'est donc pas majorée.

   Finalement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a}{a+b+kc} = +\infty$.
   Il vient : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln a_n = -\infty$ par $(*)$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.
   Puisque pour $n \geqslant 2$, $p_n = a_{n-1} - p_n$ alors pour tout $n \geqslant 2$:

$$\sum_{k=2}^{n} p_k = \sum_{k=2}^{n} (a_{k-1} - a_k) = a_1 - a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a_1 = \frac{b}{a+b}.$$

   Donc :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} p_k = \frac{b}{a+b}.$$

   On en déduit :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p_k = p_1 + \frac{b}{a+b} = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = 1.$$

   Les événements A_n étant deux à deux incompatibles, on obtient par σ-additivité :

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1.$$

   Autrement dit, l'événement $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ se réalise avec probabilité 1 : il est donc presque certain qu'un tirage au moins amène une boule blanche.

□

Solution Exercice 21. Deux joueurs A et B lancent à tour de rôle une pièce donnant Face avec la probabilité $p \in]0;1[$. Le joueur A commence et le premier qui obtient Face gagne le jeu, qui s'arrête alors.

1. On note :
   — P_n : "le n-ième lancer donne Pile".
   — $F_n = \overline{P_n}$: "le n-ième lancer donne Face".
   — A_n : "le joueur A gagne à son n-ième lancer".
   $P(A_1) = p$ et pour $n \geqslant 2$:

$$P(A_n) = P(P_1 P_2 \dots P_{2n-2} F_{2n-1}) = (1-p)^{2n-2} p.$$

2. A gagne si et seulement si l'un des événements A_n se réalise : $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$, réunion disjointe. Par σ-additivité :

$$\begin{aligned}
P(A) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) = P(A_1) + \sum_{n=2}^{+\infty} P(A_n) \\
&= p + \sum_{n=2}^{+\infty} (1-p)^{2n-2} p \\
&= p + p\sum_{n=1}^{+\infty} ((1-p)^2)^n \\
&= p\sum_{n=0}^{+\infty} ((1-p)^2)^n \\
&= p\frac{1}{1-(1-p)^2} = \frac{p}{1-1+2p-p^2} \\
&= \frac{p}{p(2-p)} = \frac{1}{2-p}.
\end{aligned}$$

3. On note T_n : "les n premiers lancers donnent Pile".
   On note D : "le jeu ne s'arrête pas".
   D se réalise si et seulement si Face ne sort jamais : $D = \bigcap_{n=1}^{+\infty} T_n$.
   La suite (D_n) est décroissante :

$$\begin{aligned}
P(D) &= P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} T_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(T_n) \\
&= \lim_{n\to+\infty} P(P_1 \cap \dots \cap P_n) \\
&= \lim_{n\to+\infty} (1-p)^n \\
&= 0
\end{aligned}$$

   car $1-p \in]0;1[$.
4. Le jeu est équitable si et seulement si $P(A) = P(B)$.
   Mais on a $P(B) = 1 - P(A)$.
   En effet, on notant l'univers de l'expérience Ω, on a :

$$\Omega = D \cup \overline{D} = D \cup A \cup B \quad (*)$$

   car soit le jeu est infini, soit il se termine en donnant A ou B vainqueur (pas les deux !).
   La réunion $(*)$ est disjointe donc

$$1 = P(\Omega) = P(D) + P(A) + P(B) = 0 + P(A) + P(B)$$

   Ainsi, le jeu est équitable si et seulement si $P(A) = P(B) = 1 - P(A) \iff P(A) = \frac{1}{2}$.
   La fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{2-x}$ est continue sur $[0,1]$ strictement croissante et réalise une bijection de $[0,1]$ sur $[f(0); f(1)] = [\frac{1}{2}; 1]$.
   Ainsi, $P(A) = \frac{1}{2} \iff p = 0$ ce qui est exclus.
   (on pourrait éventuellement admettre que le jeu est équitable s'il n'est pas possible d'obtenir Face si $p = 0$!)

□

***Solution Exercice** 22.* On lance simultanément deux dés jusqu'à ce qu'une somme de 5 ou 7 apparaisse.

1. Soit E_n l'événement "une somme 5 apparait au n-ième double lancer et sur les $n-1$ premier doubles lancers ni la somme 5 ni celle de 7 n'apparaît".
   On note C_i : "la somme vaut 5 au i-ième double lancer".
   On note S_i : "la somme vaut 7 au i-ième double lancer".
   On a $P(C_i \cup S_i) = \frac{4}{36} + \frac{6}{36} = \frac{10}{36}$ donc $P\left(\overline{C_i \cup S_i}\right) = \frac{26}{36}$.
   $E_n = \overline{C_1 \cup S_1} \cap \dots \overline{C_{n-1} \cup S_{n-1}} \cap C_n$.
   Par indépendance des lancers, on obtient :

$$P(E_n) = \left(\frac{26}{36}\right)^{n-1} \times \frac{4}{36}.$$

2. La probabilité que le jeu s'arrête sur une somme 5 (on note C cet événement) est égale à :

$$P(C) = P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(E_n) = \frac{4}{36}\frac{1}{1-\frac{26}{36}} = \frac{2}{5}.$$

3. $F_n = \overline{C_1 \cup S_1} \cap \dots \overline{C_{n-1} \cup S_{n-1}} \cap S_n$.
   La formule des probabilités composées donne :

$$P(F_n) = \left(\frac{26}{36}\right)^{n-1} \times \frac{6}{36}$$

   La probabilité que le jeu s'arrête sur une somme 7 (on note S cet événement) est égale, par σ-additivité, à :

$$P(S) = P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(F_n) = \frac{3}{5}.$$

4. On note D : "le jeu ne s'arrête pas".
$\Omega = D \cup \overline{D} = D \cup C \cup S$ réunion disjointe.
Donc
$$1 = P(D) + P(\overline{D} \cap C) + P(\overline{D} \cap S) = P(D) + \frac{2}{5} + \frac{3}{5}.$$
Ainsi, $P(D) = 0$.

□

***Solution Exercice** 25.* On lance une pièce équilibrée n fois ($n \geqslant 2$) de manière indépendante. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on définit A_k : "on obtient pile au k-ième lancer". On note A_{n+1} : "le nombre de piles obtenus au bout des n lancers est pair".

1. — Soit $k \in [\![1, n]\!]$: $P(A_k) = \frac{1}{2}$ car la pièce est équilibrée.
— $P(A_{n+1}) = \displaystyle\sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \binom{n}{2k} \frac{1}{2^n}$.
On note $U_n = \displaystyle\sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \binom{n}{2k} \frac{1}{2^n}$ et $T_n = \displaystyle\sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant n} \binom{n}{2k+1} \frac{1}{2^n}$
On a :
$$\begin{aligned} U_n + T_n &= \frac{1}{2^n} \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \binom{n}{2k} + \frac{1}{2^n} \sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant n} \binom{n}{2k+1} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 1 \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} U_n - T_n &= \frac{1}{2^n} \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \binom{n}{2k} - \frac{1}{2^n} \sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant n} \binom{n}{2k+1} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} (-1)^{2k} \binom{n}{2k} + \frac{1}{2^n} \sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant n} (-1)^{2k+1} \binom{n}{2k+1} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \\ &= (1-1)^n = 0 \end{aligned}$$
Ainsi, $U_n = T_n$ et $U_n + T_n = 1$ donc $U_n = T_n = \frac{1}{2}$.
$$P(A_{n+1}) = \frac{1}{2}$$

2. (a) $P\left(\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n+1} A_k\right) = \begin{cases} P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = 1/2^n & \text{si} \quad n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si} \quad n \text{ est impair} \end{cases}.$

(b) Les événements $A_1, \ldots, A_{n+1}$ ne sont pas mutuellement indépendants car :
$$P(A_1) \ldots P(A_n) P(A_{n+1}) = \frac{1}{2^{n+1}} \neq P\left(\bigcap_{k=1}^{n+1} A_k\right).$$

3. — Les n événements $A_1, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants par hypothèse.
— On se donne $n-1$ des événements $A_1, \ldots, A_n$. On ne perd pas de généralité en supposant qu'il s'agit de $A_1, \ldots, A_{n-1}$.
Montrons que les événements $A_1, \ldots, A_{n-1}, A_{n+1}$ sont mutuellement indépendants.
$*$ $P(A_1) \ldots P(A_{n-1}) P(A_{n+1}) = \frac{1}{2^n}$.
$*$ L'événement $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k \cap A_{n+1}$ se réalise si et seulement si les $n-1$ premiers lancers donnent pile et si les n lancers amènent un nombre pair de pile.
 - Si n est pair $A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1} \cap A_{n+1}$ se réalise si et seulement si $A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1} \cap A_n$ se réalise : événement de probabilité $\frac{1}{2^n}$.
 - Si n est impair $A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1} \cap A_{n+1}$ se réalise si et seulement si $A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1} \cap \overline{A_n}$ se réalise : événement de probabilité $\frac{1}{2^n}$.

Finalement :
$P\left(\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k \cap A_{n+1}\right) = \frac{1}{2^n} = P(A_1) \ldots P(A_{n-1}) P(A_{n+1})$.

□

***Solution Exercice** 24.*

1. (a) Il y a $(*)$: $\binom{N+n-1}{n}$ n-listes d'entiers de $[\![1, N]\!]$ tels que
$$u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_n.$$
En effet, le nombre de listes $(v_1, \ldots, v_n)$ d'éléments d'un ensemble $[\![1, N']\!]$ (avec $N' \geqslant n$) dans l'ordre strictement croissant est un arrangement dont l'ordre est fixé : il y en a $\frac{A_{N'}^n}{n!} = \binom{N'}{n}$.
L'application $\varphi : (v_1, v_2, \ldots, v_n) \longmapsto (v_1, v_2 + 1 \ldots, v_n + n - 1)$ est une bijection de l'ensemble des liste croissantes de $[\![1, N]\!]$ sur l'ensemble des listes strictement croissantes de $[\![1, N+n-1]\!]$.
D'où $(*)$.

(b) Les n premiers lancers amènent N^n listes de résultats possibles.
On a : $v_n = P(A_n) = \frac{\binom{N+n-1}{n}}{N^n}$: il s'agit en effet de dénombrer le nombre de liste $(u_1, \ldots, u_n)$ croissante réalisant l'événement A_n ce qui a été fait à la question précédente.

2. (a) On obtient immédiatement que $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{N+n}{N(n+1)}$.

(b) On a :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{n+1} + \frac{n}{N(n+1)} \leq \frac{1}{N} + \frac{1}{N} = \frac{2}{N}$$

pour un certain entier n_0 tel que $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N}$ pour tout $n \geq n_0$. (encore plus précisément, $n_0 = N$ convient).

(c) On écrit un produit télescopique :

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{v_n}{v_{n_0}} &= \frac{v_n}{v_{n-1}} \frac{v_{n-1}}{v_{n-2}} \cdots \frac{v_{n_0+1}}{v_{n_0}} \\ &\leq \left(\frac{2}{N}\right)^{n-n_0}. \end{aligned}$$

Il vient :

$$0 \leqslant v_n \leqslant \left(\frac{2}{N}\right)^{n-n_0} v_{n_0}.$$

Par comparaison des séries à termes positifs (la série géométrique de raison $\dfrac{2}{N} < 1$ converge) on en déduit que la série $\sum v_n$ converge.

3. (a) Le nombre :

$$w_n = v_n - v_{n+1} = P(A_n) - P(A_{n+1}) = P(A_n) - P(A_n \cap A_{n+1}) = P(A_n \backslash A_{n+1})$$

est la probabilité de l'événement composé des listes $(v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}, \ldots)$ d'entiers de $[\![1, N]\!]$ telles que :

— $v_1 \leq \cdots \leq v_n$,

— $v_{n+1} < v_n$.

c'est-à-dire : la liste cesse d'être croissante au rang $n+1$.

(b) On a :

$$\sum_{k=1}^{n} w_k = v_1 - v_{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1 - 0 = 1$$

car $\sum v_n$ converge (donc la suite (v_n) converge vers 0).

On en déduit que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} w_n = 1 = P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} [A_n \setminus A_{n+1}]\right)$ par σ-additivité les événements $A_n \setminus A_{n+1}$ étant incompatibles.

L'événement $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} [A_n \setminus A_{n+1}]$ se reformule “la liste n'est pas croissante” : en effet, une liste est dans cet ensemble ssi il existe au moins un instant où la liste cesse d'être croissante.

Cet événement est donc de probabilité 1.

□