TRAVAUX DIRIGÉS : Équations différentielles

1 Équations différentielles linéaire scalaire d'ordre 1

Exercice 1: (Solution)

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + y = \sin(t)$.
2. $\cos(t)y' + \sin(t)y = t$.
3. $y' - \cos(t)y = \sin(2t)$.
4. $2ty' + y = 1 + t$.
5. $y' - 2y = \sin(2t)e^t$.
6. $t(1-t)y' + y = t$ (sur $I =]1; +\infty[$).

Exercice 2: (Solution)

Résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} (1+t)^3y' + 2(1+t)^2y &= 1 \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

Construire la courbe intégrale correspondante.

Exercice 3: (Solution)

Déterminer un développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de la fonction f vérifiant $f(0) = 0$ et solution de l'équation différentielle :

$$2(t-1)y' + y = \sin(2t) + t^2.$$

Exercice 4: (Solution)

On considère l'équation différentielle :

$$(\mathscr{E}) : |t|y' - y = t^2.$$

1. Résoudre l'équation $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.
2. Résoudre l'équation $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5: (Solution)

Déterminer l'ensemble des fonctions $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - \int_0^x tf(t)dt = 1.$$

Exercice 6: (Solution)

Résoudre sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ le problème différentiel :

$$\begin{cases} \cos(t)y' + \sin(t)y &= 1 \\ y(0) &= 2 \end{cases}$$

2 Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2

Exercice 7: (Solution)

Résoudre les équations différentielles :

1. $y'' + y' + y = t^2e^t + t$.
2. $y'' + 4y' + 4y = \sin(t)$.
3. $y'' - 3y' + 2y = \text{sh}(2t)$.
4. $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2t}}{1+t^2}$.
5. $y'' + 2my' + y = e^{-t}$: $m \in \mathbb{R}$.
6. $y'' - 2y' + y = e^{mt}$: $m \in \mathbb{R}$.
7. $y'' - 2my' + (m^2+1)y = e^t \sin(t)$: $m \in \mathbb{R}$.

Exercice 8: (Solution)

On considère l'équation

$$(1+t^2)y'' + ty' - y = 0 \quad (\mathscr{E}).$$

1. Déterminer une solution polynomiale.
2. Déterminer la solution générale de $(\mathscr{E})$.
3. Construire la courbe intégrale passant par le point $A(0,1)$ et présentant une tangente parallèle à la première bissectrice en ce point.

Exercice 9: (Solution)

Résoudre le problème de Cauchy suivant en utilisant un développement en séries entières :

$$\begin{cases} y''-2xy'-2y &= 0 \\ y(0)=1; y'(0) &= 0 \end{cases}$$

Exercice 10: (Solution)

Résoudre l'équation différentielle $(1+t^2)y''+ty'-y=0$ en posant $t=\mathrm{sh}(x)$.

Exercice 11: (Solution)

Déterminer les fonctions développables en série entière solutions de l'équation différentielle : $4ty''+2y'-y=0$.

Exercice 12: (Solution)

On considère l'équation différentielle :

$$(2x+1)y''+(4x-2)y'-8y=0 : (\mathscr{E}).$$

1. Déterminer les solutions polynomiales de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les solutions du type $t \longmapsto e^{\alpha t}$ sur $\mathbb{R}$.
3. Résoudre $(\mathscr{E})$ sur un intervalle ne contenant par $-\dfrac{1}{2}$.

Exercice 13: (Solution)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère sur $]-1;1[$ l'équation différentielle :

$$(1-t^2)y''-\alpha ty'+\alpha y=0 : (\mathscr{E}_\alpha).$$

1. On suppose que $\alpha=2$.
   Déterminer les solutions de $(\mathscr{E}_2)$ développables en série entière.
   En déterminer une expression explicite.
   A-t-on toutes les solutions de $(\mathscr{E}_2)$?
2. On suppose que $\alpha=3$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 3$.
   Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ on définit
   $$\varphi(P)=(1-X^2)P''-3XP'.$$
   (a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (c) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?
   En déduire toutes les solutions polynomiales de $(\mathscr{E}_3)$.
3. On suppose que $\alpha=1$.
   Résoudre l'équation différentielle $(\mathscr{E}_1)$ en utilisant le changement de variable $t=\sin(x)$.

Exercice 14: (Solution)

Résoudre l'équation différentielle $(\mathscr{E}) : t^2y''+4yy'+(2-t^2)y=1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ en posant $z(t)=t^2y(t)$.
Étudier le recollement en 0.

SOLUTIONS TRAVAUX DIRIGÉS : Équations différentielles

Solution Exercice 1.

1. $(\mathscr{E}) : y' + y = \sin(t)$; $(\mathscr{H}) : y' + y = 0$. On résout sur $\mathbb{R}$.
   L'équation $(\mathscr{H}) : y' + y = 0$ a pour solution générale $y(t) = Ke^{-t} : K \in \mathbb{R}$.
   On cherche une solution particulière de l'équation $(\mathscr{E}_\mathbb{C}) : y' + y = e^{it}$.
   On prendra la partie imaginaire de celle-ci pour obtenir une solution particulière de $(\mathscr{E})$.
   On cherche une solution de $(\mathscr{E}_\mathbb{C})$ sous la forme $y(t) = \lambda e^{it} : y'(t) = \lambda i e^{it}$.
   On injecte dans $(\mathscr{E}_\mathbb{C})$ et on trouve :

$$\lambda i e^{it} + \lambda e^{it} = e^{it} \iff \lambda(1+i) = 1$$
$$\iff \lambda = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2}.$$

   La fonction $t \mapsto y(t) = \frac{1-i}{2} e^{it}$ est solution de $(\mathscr{E}_\mathbb{C})$.
   La fonction $t \mapsto y_p(t) = \frac{1}{2}(-\cos(t) + \sin(t))$ est solution particulière de $(\mathscr{E})$.
   La solution générale de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}$ est donc

$$y : t \mapsto \frac{1}{2}(-\cos(t) + \sin(t)) + Ke^{-t} : K \in \mathbb{R}.$$

2. $(\mathscr{E}) : \cos(t)y' + \sin(t)y = t$; $(\mathscr{H}) : \cos(t)y' + \sin(t)y = 0$.
   On résout sur chaque intervalle $I_k =]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[, k \in \mathbb{Z}$ sur lequel la fonction cos ne s'annule pas.
   Sur I_k, $(\mathscr{E})$ équivaut à $y' + \tan(t)y = \frac{t}{\cos(t)}$ et $(\mathscr{H}) : y' + \tan(t)y = 0$.
   La solution générale de $(\mathscr{H})$ sur I_k : $y(t) = Ke^{\ln|\cos(t)|} = K|\cos(t)| : K \in \mathbb{R}$.
   On cherche une solution particulière de $(\mathscr{E})$ en appliquant la méthode de la variation de la constante.
   On écrit $y_p(t) = K(t)|\cos(t)|$.
   Si k est pair, la fonction cos est positive sur I_k. Si k est impair, la fonction cos est négative sur I_k.
   On traite le cas pair
   Alors $y_p(t) = K(t)\cos(t)$ et $y_p(t) = K'(t)\cos(t) - K(t)\sin(t)$.
   En injectant dans $(\mathscr{E})$, il vient

$$K'(t)\cos(t) - K(t)\sin(t) + \tan(t)K(t)\cos(t) = \frac{t}{\cos(t)} \iff K'(t) = \frac{t}{\cos^2(t)}$$

   Pour déterminer une primitive de K' on intègre par parties $(a, t \in I_k)$:

$$\begin{cases} f(u) &= u \\ g'(u) &= 1 + \tan^2 u \end{cases} \implies \begin{cases} f'(u) &= 1 \\ g(u) &= \tan(u) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_a^t \frac{u}{\cos^2(u)} du &= \int_a^t u(1 + \tan^2(u)) du \\ &= [u\tan(u)]_a^t - \int_a^t \tan(u) du \\ &= [u\tan(u)]_a^t + [\ln|\cos(u)|]_a^t. \end{aligned}$$

   Sur I_k, une primitive de K' est donnée par $K(t) = t\tan(t) + \ln|\cos(t)|$.
   Sur I_k une solution particulière de $(\mathscr{E})$ est donc
   $y_p(t) = K(t)|\cos(t)| = K(t)\cos(t) = t\cos(t)\tan(t) + \cos(t)\ln|\cos(t)|$.
   (**dans le cas impair**, on obtient :
   $K'(t) = -\frac{t}{\cos^2(t)}$, $K(t) = -t\tan(t) - \ln|\cos(t)|$ et finalement,
   $y_p(t) = K(t)|\cos(t)| = -K(t)\cos(t) = t\cos(t)\tan(t) + \cos(t)\ln|\cos(t)|$
   une solution particulière a donc la même expression dans ce cas également).
   La solution générale de $(\mathscr{E})$ sur I_k est donc

$$y : t \mapsto y(t) = K|\cos(t)| + t\cos(t)\tan(t) + \cos(t)\ln|\cos(t)| : K \in \mathbb{R}.$$

3. $(\mathscr{E}) : y' - \cos(t)y = \sin(2t)$; $(\mathscr{H}) : y' - \cos(t)y = 0$. On résout sur $\mathbb{R}$
   La solution générale de $(\mathscr{H}) : y' = \cos(t)y$ est $y(t) = Ke^{\sin(t)} : K \in \mathbb{R}$.
   Pour déterminer une solution particulière on fait varier la constante.
   On note $y_p(t) = K(t)e^{\sin(t)}$. On injecte dans $(\mathscr{E})$ et on trouve

$$K'(t)e^{\sin(t)} + \cos(t)K(t)e^{\sin(t)} - \cos(t)K(t)e^{\sin(t)} = \sin(2t)$$
$$\iff K'(t) = e^{-\sin(t)}\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)e^{-\sin(t)}.$$

   On intègre par parties pour déterminer une primitive :

$$\begin{cases} f(u) &= 2\sin(u) \\ g'(u) &= \cos(u)e^{-\sin(u)} \end{cases} \implies \begin{cases} f'(u) &= 2\cos(u) \\ g(u) &= -e^{-\sin(u)} \end{cases}$$

   On obtient :

$$\begin{aligned} \int_a^t K'(u)du &= \left[-2\sin(u)e^{-\sin(u)}\right]_a^t + \int_a^t 2\cos(u)e^{-\sin(u)} du \\ &= \left[-2\sin(u)e^{-\sin(u)}\right]_a^t + 2\left[-e^{-\sin(u)}\right]_a^t. \end{aligned}$$

Une primitive de K' est donc donnée par $K(t) = -2\sin(t)e^{-\sin(t)} - 2e^{-\sin(t)}$.
Une solution particulière est donc $y_p(t) = K(t)e^{\sin(t)} = -2\sin(t) - 2$.
La solution générale de $(\mathscr{E})$ est donc :

$$y : t \mapsto -2\sin(t) - 2 + Ke^{\sin(t)} : K \in \mathbb{R}.$$

4. $(\mathscr{E}) : 2ty' + y = 1 + t$; $(\mathscr{H}) : 2ty' + y = 0$.
On résout sur $I =]0; +\infty[$ ou $I =]-\infty; 0[$.
L'équation homogène est équivalente sur I à $y' = -\frac{1}{2t}y$ dont la solution générale s'écrit $y(t) = Ke^{-\frac{1}{2}\ln|t|} = \dfrac{K}{\sqrt{|t|}}$.
On cherche une solution particulière sous forme polynomiale $y_p(t) = q(t)$.
On injecte dans $(\mathscr{E})$, on obtient

$$2tq'(t) + q(t) = 1 + t \quad \text{ainsi } \deg(q) = 1 \quad q(t) = at + b.$$

On obtient $2t(a) + (at + b) = 1 + t$ donc $a = \dfrac{1}{3}, b = 1$.
Une solution particulière de $(\mathscr{E})$ est donc $y_p(t) = \frac{t}{3}+1$ et la solution générale :

$$y : t \longmapsto \frac{t}{3} + 1 + \frac{K}{\sqrt{|t|}}.$$

5. $(\mathscr{E}) : y' - 2y = \sin(2t)e^t$; $(\mathscr{H}) : y' - 2y = 0$.
On résout sur $\mathbb{R}$. L'équation homogène a pour solution générale $y(t) = Ke^{2t}$: $K \in \mathbb{R}$.
On cherche une solution particulière de $(\mathscr{E}_\mathbb{C}) : y' - 2y = e^{(2i+1)t}$ et on prendra la partie imaginaire.
On cherche une solution de $(\mathscr{E}_\mathbb{C})$ sous la forme $y(t) = \lambda e^{(2i+1)t}$.
Alors $y'(t) = (2i+1)\lambda e^{(2i+1)t}$. On injecte dans $(\mathscr{E})$ est on obtient (on simplifie par $e^{(2i+1)t} \neq 0$) :

$$(2i + 1)\lambda - 2\lambda = 1 \iff \lambda = \frac{1}{-1 + 2i} = \frac{-1 - 2i}{5}$$

Ainsi, $y(t) = \frac{-1-2i}{5}e^{(2i+1)t}$ est solution de $(\mathscr{E}_\mathbb{C})$.
Par conséquent $y_p(t) = -\dfrac{1}{5}e^t\sin(2t) - \dfrac{2}{5}e^t\cos(2t)$.
La solution générale de $(\mathscr{E})$ est donc

$$y : t \mapsto -\frac{1}{5}e^t\sin(2t) - \frac{2}{5}e^t\cos(2t) + Ke^{2t} : K \in \mathbb{R}.$$

6. $(\mathscr{E}) : t(1 - t)y' + y = t$; $(\mathscr{H}) : t(1 - t)y' + y = 0$.
On résout sur $I =]-\infty; 0[$, $I =]0; 1[$, $I =]1; +\infty[$.
Sur chacun des ces intervalles, $(\mathscr{H}) \Leftrightarrow y' = \dfrac{1}{t(t-1)}y = \left(\dfrac{1}{t-1} - \dfrac{1}{t}\right)y$.
La solution générale de $(\mathscr{H})$ est $y(t) = Ke^{\ln|t-1| - \ln|t|} = K\dfrac{|t-1|}{|t|} : K \in \mathbb{R}$.
On cherche une solution y_p particulière sur $I =]1; +\infty[$.
On fait varier la constante, on écrit $y_p(t) = K(t)\dfrac{t-1}{t}$.
On a $y_p'(t) = K'(t)\frac{t-1}{t} + \frac{K(t)}{t^2}$ et en injectant dans $(\mathscr{E})$, il vient

$$t(1-t)K'(t)\frac{t-1}{t} + \underbrace{t(1-t)\frac{K(t)}{t^2} + K(t)\frac{t-1}{t}}_{=0} = t$$

$$\iff K'(t) = -\frac{t}{(1-t)^2} \iff K'(t) = \frac{1-t-1}{(1-t)^2}$$

$$\iff K'(t) = \frac{1}{1-t} - \frac{1}{(1-t)^2}$$

$$\iff K(t) = -\ln(|1-t|) - \frac{1}{1-t} + C$$

On en déduit qu'une solution particulière de $(\mathscr{E})$ est donnée sur $I =]1; +\infty[$ par

$$y_p(t) = \frac{t-1}{t}\left(-\ln(t-1) - \frac{1}{1-t}\right) = \frac{1-t}{t}\ln(t-1) + \frac{1}{t}$$

La solution générale sur $I =]1; +\infty[$ est donc

$$y(t) = \frac{1-t}{t}\ln(t-1) + \frac{1}{t} + K\frac{t-1}{t} : K \in \mathbb{R}.$$

Les techniques sont similaires sur $I =]0; 1[$ et $I =]-\infty; 0[$.

□

Solution Exercice 2.
On considère le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} (1+t)^3y' + 2(1+t)^2y & = & 1 \\ y(0) & = & 0 \end{cases}$$

On résout sur $I =]-1; +\infty[$.
Sur cet intervalle la fonction $t \mapsto (1+t)^3$ ne s'annule pas, ce problème possède donc une unique solution s'annulant en 0. On la notera f.
L'équation homogène $(1+t)^3y' + 2(1+t)^2y = 0$ est équivalente sur I à

$y' = -\dfrac{2}{1+t}y \Longleftrightarrow y(t) = Ke^{-2\ln(1+t)} = \dfrac{K}{(1+t)^2} : K \in \mathbb{R}$.

Pour déterminer la solution du problème de Cauchy, on fait varier la constante.

On note $y_p(t) = \dfrac{K(t)}{(1+t)^2}$. Pour tout $t > -1$, on a $y_p'(t) = \dfrac{K'(t)}{(1+t)^2} - \dfrac{2K(t)}{(1+t)^3}$.

On injecte dans l'équation différentielle, on obtient :

$$(1+t)K'(t) - 2K(t) + 2K(t) = 1 \Longleftrightarrow K'(t) = \frac{1}{1+t} \Longleftrightarrow K(t) = \ln(1+t) + C$$

On obtient donc les solutions particulières : $y_p(t) = \dfrac{\ln(1+t)}{(1+t)^2} + \dfrac{C}{(1+t)^2}, C \in \mathbb{R}$.

La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\ln(1+t)}{(1+t)^2}$ (avec $C = 0$) s'annule en 0.

C'est la solution du problème de Cauchy.

La fonction f est dérivable sur $]-1;+\infty[$ (car solution de l'équa. diff.).

On obtient aisément la dérivée de f en utilisant l'équation différentielle.

Pour tout $t > -1$:

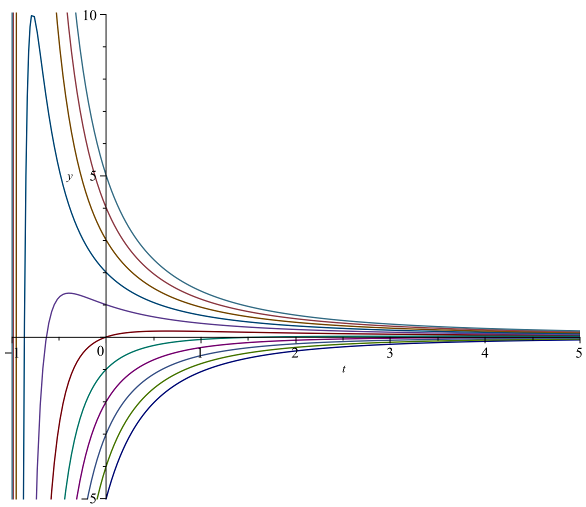
$$f'(t) = \frac{1}{(1+t)^3} - \frac{2}{(1+t)}f(t) = \frac{1}{(1+t)^3} - \frac{2}{(1+t)}\frac{\ln(1+t)}{(1+t)^2} = \frac{1-2\ln(1+t)}{(1+t)^3}$$

$f'(t) \geqslant 0 \Longleftrightarrow t \leqslant \sqrt{e} - 1$.

La fonction f est strictement croissante sur $]-\infty;\sqrt{e}-1]$.

La fonction f est strictement décroissante sur $[\sqrt{e}-1;+\infty[$.

On a $\lim\limits_{t\to -1^+} f(t) = -\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$.



La courbe intégrale du problème de Cauchy est celle passant par 0. On a dessiné d'autres courbes pour certaines valeurs de C. $\square$

Solution Exercice 3. La fonction f est l'unique solution sur $]-\infty;1[$ du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} 2(t-1)y' + y &= \sin(2t) + t^2 \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

On montre par récurrence que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-\infty;1[$.

La formule de Taylor-Young en 0 à l'ordre 5 donne ($f(0) = 0$) :

$$\begin{cases} f(t) \underset{t\to0}{=} at + bt^2 + ct^3 + dt^4 + et^5 + o(t^5) \\ f'(t) \underset{t\to0}{=} a + 2bt + 3ct^2 + 4dt^3 + 5et^4 + o(t^4). \end{cases}$$

On obtient donc le $DL_4(0)$:

$$2(t-1)f'(t) + f(t) \underset{t\to0}{=} -2a + (3a-4b)t + (5b-6c)t^2 + (7c-8d)t^3 + (9d-10e)t^4 + o(t^4).$$

On identifie avec le $DL_4(0)$:

$$\begin{aligned} \sin(2t) + t^2 &\underset{t\to0}{=} (2t) - \frac{(2t)^3}{3!} + o(t^4) + t^2 \\ &\underset{t\to0}{=} 2t + t^2 - \frac{4t^3}{3} + o(t^4). \end{aligned}$$

On obtient alors successivement

$$a = 0, b = -\frac{1}{2}, c = -\frac{7}{12}, d = -\frac{11}{32}, e = -\frac{99}{320}.$$

$\square$

Solution Exercice 4. On considère l'équation différentielle :

$$(\mathscr{E}) : |t|y' - y = t^2.$$

1. — On résout sur $I =]0;+\infty[$.

   Sur cet intervalle, l'équation $(\mathscr{E})$ est équivalente à $y' - \dfrac{1}{t}y = t$.

   L'équation homogène associée $y' - \dfrac{1}{t}y = 0$ a pour solution générale

   $$y(t) = Kt : K \in \mathbb{R}.$$

   La fonction $t \longmapsto y_p(t) = t^2$ est solution particulière évidente sur $\mathbb{R}_+^*$.

   La solution générale sur $\mathbb{R}_+^*$ est donc $y(t) = t^2 + Kt : K \in \mathbb{R}$.

   — On résout sur $I =]-\infty;0[$.

   Sur cet intervalle, l'équation $(\mathscr{E})$ est équivalente à $y' + \dfrac{1}{t}y = -t$.

   L'équation homogène associée a pour solution générale $y(t) = \dfrac{K}{t} : K \in \mathbb{R}$.

On fait varier la constante pour déterminer une solution particulière : $y_p(t) = \dfrac{K(t)}{t}$: $y_p'(t) = \dfrac{K'(t)}{t} - \dfrac{K(t)}{t^2}$
On injecte dans $(\mathscr{E})$ et on obtient :

$$K'(t) = -t^2 \iff K(t) = -\frac{t^3}{3} + C.$$

Une solution particulière est donc $y_p(t) = -\dfrac{t^2}{3}$ et la solution générale de $(\mathscr{E})$ sur $I =]-\infty; 0[$ est :

$$y : t \mapsto -\frac{t^2}{3} + \frac{K}{t}.$$

2. On suppose qu'une fonction y est solution de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}$.
Il existe alors des constantes K_+ et K_- telles que
— $\forall t > 0$, $y(t) = t^2 + K_+ t$.
— $\forall t < 0$, $y(t) = -\dfrac{t^2}{3} + \dfrac{K_-}{t}$.
La continuité de la fonction y en 0 donne $\lim\limits_{t\to 0^-} = \lim\limits_{t\to 0^+} y(t)$.
Mais $\lim_{t\to 0^+} y(t) = 0$ donc nécessairement $K_- = 0$. On obtient au passage que $y(0) = \lim\limits_{0} y = 0$.
Mais la fonction y doit être dérivable en 0 dont

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{y(t)-y(0)}{t-0} = \lim_{t\to 0^+} \frac{y(t)}{t} = \lim_{t\to 0^+} (t + K_+) = K_+ = \lim_{t\to 0^-} \frac{y(t)-y(0)}{t-0}$$

avec

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{y(t)-y(0)}{t-0} = \lim_{t\to 0^-} -\frac{t}{3} = 0$$

On obtient donc $K_+ = 0$.
Finalement, si y est solution de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}$ alors

$$y(t) = \begin{cases} t^2 & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t = 0, \\ -\frac{t^2}{3} & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

On vérifie enfin que y est solution bien solution sur $\mathbb{R}$.
(car solution sur $\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{R}_-^*$ et l'équation est vérifiée en $t = 0$ car $y(0) = 0$).

□

Solution Exercice 5. Si $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - \int_0^x tf(t)dt = 1.$$

alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x tf(t)dt$.

La fonction $t \mapsto tf(t)$ étant continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $t \mapsto 1 + \displaystyle\int_0^x tf(t)dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

On obtient $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = xf(x)$. De plus $f(0) = 1 + \displaystyle\int_0^0 tf(t)dt = 1$.

L'équation différentielle $y = ty$ a pour solution générale $y(t) = Ke^{\frac{t^2}{2}}$: $K \in \mathbb{R}$.

Avec la condition supplémentaire $f(0) = 1$, il vient $K = 1$: $f(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$.

Réciproquement la fonction $f : x \mapsto e^{\frac{x^2}{2}} - 1$ vérifie :

$$\int_0^x tf(t)dt = \int_0^x te^{\frac{t^2}{2}}dt = \left[e^{\frac{t^2}{2}}\right]_0^x = e^{\frac{x^2}{2}} - 1 = f(x) - 1.$$

□

Solution Exercice 6. La problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \cos(t)y' + \sin(t)y &= 1 \\ y(0) &= 2 \end{cases}$$

possède sur $I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ une unique solution car la fonction cos ne s'annule pas sur cet intervalle ($\cos > 0$ sur I).
Sur I l'équation différentielle de ce problème est équivalente à

$$y' + \tan(t)y = \frac{1}{\cos(t)}.$$

L'équation homogène associée $y' + \tan(t)y = 0$ a pour solution générale $y(t) = Ke^{\ln|\cos(t)|} = K|\cos(t)| = K\cos(t)$: $K \in \mathbb{R}$.
On remarque (ou bien on fait varier la constante) que la fonction $t \mapsto y_p(t) = \sin(t)$ est solution particulière de $(\mathscr{E})$.
On en déduit que la solution générale de $(\mathscr{E})$: $\cos(t)y' + \sin(t)y = 1$ est

$$y : t \longmapsto \sin(t) + K\cos(t) : K \in \mathbb{R}.$$

La condition supplémentaire $y(0) = 2$ donne par le théorème de Cauchy-Lipschitz l'unicité de la solution du problème de Cauchy :

$$y : t \longmapsto \sin(t) + 2\cos(t).$$

□

Solution Exercice 7.

1. $(\mathscr{E}) : y'' + y' + y = t^2 e^t + t$; $(\mathscr{H}) : y'' + y' + y = 0$.
L'équation homogène a pour équation caractéristique $X^2 + X + 1 = 0$ dont les solutions sont les nombres complexes conjugués $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $\overline{j}$.

Toute solution de $(\mathscr{H})$ s'écrit $y(t) = e^{-\frac{t}{2}}\left(A\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t)+B\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)\right)$: $(A,B)\in\mathbb{R}^2$.

On détermine une solution particulière à l'aide du principe de superposition des solutions.

— La fonction $y_1(t) = t-1$ est une solution particulière de l'équation $(\mathscr{E}_1)$: $y''+y'+y=t$.

— On cherche une solution particulière y_2 de l'équation $(\mathscr{E}_2) : y''+y'+y=t^2e^t$ sous la forme $y_2(t) = (at^2+bt+c)e^t$ car $m=1$ n'est pas racine de l'équation caractéristique.
On a $y_2'(t) = (at^2+(2a+b)t+(b+c))e^t$ et $y_2''(t) = (at^2+(4a+b)t+(2a+2b+c))e^t$.
On injecte dans $(\mathscr{E}_2)$: y_2 est solution si et seulement si (on simplifie par $e^t\neq 0$)

$$2at^2+t(2a+b)+(2a+b+c)=t^2$$

Il vient $a=\frac{1}{3}$, $b=-\frac{2}{3}$, $c=\frac{4}{9}$.
La fonction $y_2(t)=\frac{t^2}{3}-\frac{2t}{3}+\frac{4}{9}$ est solution particulière de $(\mathscr{E}_2)$.

Finalement, $y_p(t) = y_1(t)+y_2(t)$ est solution particulière de $(\mathscr{E})$.

On en déduit la solution générale de $(\mathscr{E})$:

$$y : t\mapsto (t-1)+\left(\frac{t^2}{3}-\frac{2t}{3}+\frac{4}{9}\right)+e^{-\frac{t}{2}}\left(A\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+B\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) : (A,B)\in\mathbb{R}^2.$$

2. $(\mathscr{E}) : y''+4y'+4y=\sin(t)$; $(\mathscr{H}) : y''+4y'+4y=0$.
L'équation caractéristique de l'équation homogène $X^2+4X+4=0 \iff (X+2)^2=0$ possède une unique solution réelle double $r=-2$.
Ainsi, toute solution de $(\mathscr{H})$ s'écrit $y(t)=(A+Bt)e^{-2t}$: $(A,B)\in\mathbb{R}^2$.
On cherche une solution particulière de $(\mathscr{E}_\mathbb{C})$: $y''+4y'+4y=e^{it}$.
On la cherche sous la forme $\lambda e^{it}, \lambda\in\mathbb{C}$ car $m=i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique.
On écrit $y_p(t)=\lambda e^{it}$, $y_p'(t)=\lambda i e^{it}$, $y_p''(t)=-\lambda e^{it}$.
On injecte dans $(\mathscr{E}_\mathbb{C})$ et on trouve (en simplifiant par $e^{it}\neq 0$) :

$$-\lambda+4\lambda i+4\lambda=1 \iff \lambda=\frac{3-4i}{25}.$$

Une solution particulière de $(\mathscr{E}_\mathbb{C})$ est donc

$$y : t\longmapsto y(t)=\frac{3-4i}{25}e^{it}.$$

Une solution particulière de $(\mathscr{E})$ est donc

$$y_p : t\longmapsto \frac{3}{25}\sin(t)-\frac{4}{25}\cos(t).$$

La solution générale de $(\mathscr{E})$ est donc

$$y : t\longmapsto \frac{3}{25}\sin(t)-\frac{4}{25}\cos(t)+(A+Bt)e^{-2t} : (A,B)\in\mathbb{R}^2.$$

3. $(\mathscr{E}) : y''-3y'+2y=\mathrm{sh}(2t)$; $(\mathscr{H}) : y''-3y'+2y=0$.
L'équation caractéristique de l'équation homogène $(\mathscr{H})$, $X^2-3X+2=0 \iff (X-1)(X-2)=0$ admet pour solutions $1,2$.
Toute solution de $(\mathscr{H})$ s'écrit donc $y(t)=Ae^t+Be^{2t}$: $(A,B)\in\mathbb{R}^2$.
On applique la principe de superposition pour trouver une solution particulière de l'équation $(\mathscr{E}) : y''-3y'+2y=\mathrm{sh}(2t)=\dfrac{e^{2t}}{2}+\dfrac{e^{-2t}}{2}$.

— $(\mathscr{E}_1) : y''-3y'+2y=\dfrac{e^{2t}}{2}$.
On cherche une solution y_1 sous la forme $y_1(t)=(at+b)e^{2t}$ car $m=2$ est racine simple de $(\mathscr{E}_1)$.
$y_1'(t)=ae^{2t}+(2at+2b)e^{2t}=e^{2t}(2at+a+2b)$.
$y_1''(t)=e^{2t}(4at+2a+4b+2a)=e^{2t}(4at+4a+4b)=4e^{2t}(at+a+b)$.
On injecte dans $(\mathscr{E}_1)$ et on obtient (en simplifiant par $e^{2t}\neq 0$) :

$$(4at+4a+4b)-(6at+3a+6b)+(2at+2b)=\frac{1}{2}$$
$$\iff a=\frac{1}{2}, b\in\mathbb{R}$$

Ainsi, la fonction $t\longmapsto y_1(t)=\dfrac{t}{2}e^{2t}$ est solution de $(\mathscr{E}_1)$.

— On cherche une solution de $(\mathscr{E}_2)$: $y''-3y'+2y=\dfrac{e^{-2t}}{2}$ sous la forme $y_2(t)=\lambda e^{-2t}$ car $m=-2$ n'est pas solution de l'équation caractéristique.
$y_2'(t)=-2\lambda e^{-2t}$ et $y''(t)=4\lambda e^{-2t}$.
On injecte dans $(\mathscr{E}_2)$: on obtient $\lambda=\frac{1}{24}$.
Ainsi, la fonction $t\longmapsto y_2(t)=\dfrac{1}{24}e^{-2t}$ est solution de $(\mathscr{E}_2)$.

Au final la fonction $y_p : t\longmapsto y_1(t)+y_2(t)$ est solution particulière de $(\mathscr{E})$.
La solution générale de $(\mathscr{E})$ est :

$$y : t\longmapsto \frac{t}{2}e^{2t}+\frac{1}{24}e^{-2t}+Ae^t+Be^{2t} : (A,B)\in\mathbb{R}^2.$$

4. $(\mathscr{E}) : y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2t}}{1+t^2}$; $(\mathscr{H}) : y'' + 4y' + 4y = 0$.
On résout sur $\mathbb{R}$.
L'équation caractéristique de $(\mathscr{H})$: $X^2 + 4X + 4 = 0$ possèdes une unique racine double $r = -2$.
Toute solution de $(\mathscr{H})$ s'écrit donc $y(t) = (A + Bt)e^{-2t} : (A, B) \in \mathbb{R}^2$.
Pour déterminer les solutions de $(\mathscr{E})$ un utilise la méthode de factorisation par une solution de l'équation homogène.
On cherche la solution de $(\mathscr{E})$ sous la forme $y(t) = \lambda(t)\varphi(t)$ où $\varphi(t) = e^{-2t}$ est solution de l'équation $(\mathscr{H})$ $(A = 1, B = 0)$.
$y'(t) = \lambda'(t)e^{-2t} - 2\lambda(t)e^{-2t} = (\lambda'(t) - 2\lambda(t))e^{-2t}$.
$y''(t) = (\lambda''(t) - 4\lambda'(t) + 4\lambda(t))e^{-2t}$.
On injecte dans $(\mathscr{E})$ et on obtient
(on simplifie par $e^{-2t} \neq 0$) :
$$\lambda''(t) = \frac{1}{1+t^2}.$$
On obtient
$$\lambda'(t) = \arctan(t) + C$$
puis via une intégration par parties :
$$\lambda(t) = t\arctan(t) - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + Ct + D.$$
Au final la solution générale de $(\mathscr{E})$ est donnée par
$$y : t \longmapsto \underbrace{e^{-2t}t\arctan(t) - \frac{e^{-2t}}{2}\ln(1+t^2)}_{\text{solution part.}} + \underbrace{(Ct + D)e^{-2t}}_{\in S_{\mathscr{H}}}.$$

5. $(\mathscr{E}) : y'' + 2my' + y = e^{-t} : m \in \mathbb{R}$: $(\mathscr{H}) : y'' + 2my' + y = 0$.
L'équation caractéristique de $(\mathscr{H})$: $X^2 + 2mX + 1 = 0$ a pour discriminant $\Delta = 4m^2 - 4 = 4(m-1)(m+1)$.
   — **Premier cas.**
   Si $m \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ alors $\Delta > 0$ et l'équation caractéristique possède deux solutions réelles distinctes notées
$$r_1 = -m - \sqrt{(m-1)(m+1)}, r_2 = -m + \sqrt{(m-1)(m+1)}.$$
   Toute solution de $(\mathscr{H})$ est donc de la forme $y(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
   — Si $m > 1$ alors clairement $r_1 < -1$ clairement et
$$\begin{aligned} r_2 > -1 &\iff -m + \sqrt{(m-1)(m+1)} > -1 \\ &\iff \sqrt{(m-1)(m+1)} > m - 1 \ (> 0) \\ &\iff (m-1)(m+1) > (m-1)^2 \\ &\iff m^2 - 1 > m^2 - 2m + 1 \\ &\iff -1 > -2m + 1 \\ &\iff m > 1 \end{aligned}$$
   — Si $m < -1$, on montre aisément que $r_1 \geqslant 0 > -1$ et $r_2 > 1$.
   Une solution particulière de $(\mathscr{E})$ est donc de la forme λe^{-t} avec $\lambda \in \mathbb{R}$ car -1 n'est pas racine de l'équation caractéristique.
   On injecte $y'(t) = -\lambda e^{-t}$ et $y''(t) = \lambda e^{-t}$ dans $(\mathscr{E})$:
   (on simplifie par $e^{-t} \neq 0$) :
$$\lambda - 2m\lambda + \lambda = 1 \iff \lambda = \frac{1}{2(1-m)}$$
   Ainsi, $y_p : t \longmapsto \frac{1}{2(1-m)}e^{-t}$ est solution particulière de $(\mathscr{E})$.
   La solution générale dans le cas $m \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ est donc
$$y : t \longmapsto \frac{1}{2(1-m)}e^{-t} + (Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}) : (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$
   — **Deuxième cas.**
   On suppose que $m = 1$. Dans ce cas l'équation caractéristique de $(\mathscr{H})$ possède une unique racine double $r = -1$.
   Toute solution de $(\mathscr{H})$ s'écrit donc $y(t) = (A + Bt)e^{-t} : (A, B) \in \mathbb{R}^2$.
   Puisque -1 est racine double de l'équation caractéristique, il existe une solution particulière de $y_p(t) = q(t)e^{-t}$ avec q fonction polynomiale de degré $\deg(q) = \deg(1) + 2 = 2$.
   On écrit $q(t) = at^2 + bt + c$ et
   $y_p(t) = (at^2 + bt + c)e^{-t}$.
   On a $y_p'(t) = (-at^2 + (2a - b)t + (b - c))e^{-t}$ et
$$\begin{aligned} y_p''(t) &= (at^2 - (2a - b)t - (b - c) - 2at + (2a - b))e^{-t} \\ &= (at^2 - (4a - b)t + (2a - 2b + c))e^{-t} \end{aligned}$$
   On injecte dans $(\mathscr{E})$ et on obtient :
   (on simplifie par $e^{-t} \neq 0$)

$$2a = 1 \iff a = \frac{1}{2}. \text{ Ainsi : } y(t) = \frac{t^2}{2}e^{-t}.$$

La solution générale $y : t \longmapsto \frac{t^2}{2}e^{-t} + (A+Bt)e^{-t} : (A,B) \in \mathbb{R}^2$

— **Troisième cas.**
On suppose que $m = -1$. Dans ce cas l'équation caractéristique de $(\mathscr{H})$ possède une unique racine double $r = 1$.
Toute solution de $(\mathscr{H})$ est donc de la forme $(A+Bt)e^t$.
Puisque -1 n'est pas racine de l'équation caractéristique, il existe une solution de $(\mathscr{E}) : y'' - 2y' + y = e^{-t}$ sous la forme $y_p^(t)\lambda e^{-t}$.
On trouve en injectant dans $(\mathscr{E})$, $\lambda = \frac{1}{4}$ et $y_p(t) = \dfrac{1}{4}e^{-t}$.
Au final la solution générale de $(\mathscr{E})$ dans le cas $m = -1$ est

$$y : t \longmapsto \frac{e^{-t}}{4} + (A+Bt)e^t : (A,B) \in \mathbb{R}^2.$$

— **Quatrième cas.**
On suppose que $m \in]-1;1[$.
Dans ce cas $\Delta < 0$ et l'équation caractéristique possède deux racines complexes conjuguées,

$$r_1 = -m - i\sqrt{(1-m)(m+1)} \text{ et } r_2 = -m + i\sqrt{(1-m)(m+1)}$$

Toute solution de $(\mathscr{H})$ s'écrit donc

$$y(t) = e^{-mt}\left[A\cos\left(t\sqrt{(1-m)(m+1)}\right) + B\sin\left(t\sqrt{(1-m)(m+1)}\right)\right]$$

avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$.
Puisque -1 n'est pas solution de l'équation caractéristique (les solutions sont complexes, non réelles) on cherche une solution particulière de $(\mathscr{E})$: $y'' + 2my' + y = e^{-t}$ sous la forme $y_p(t) = \lambda e^{-t}, \lambda \in \mathbb{R}$.
On trouve $y_p(t) = \frac{1}{2(1-m)}e^{-t}$.
La solution générale de $(\mathscr{E})$ dans le cas $m \in]-1;1[$ est donnée par :

$$\frac{e^{-t}}{2(1-m)} + e^{-mt}\left[A\cos\left(t\sqrt{(1-m)(m+1)}\right) + B\sin\left(t\sqrt{(1-m)(m+1)}\right)\right]$$

avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$.

6. $(\mathscr{E}) : y'' - 2y' + y = e^{mt} : (\mathscr{H}) : y'' - 2y' + y = 0$.
L'équation homogène $(\mathscr{H})$ admet pour équation caractéristique
$X^2 - 2X + 1 = 0 \iff (X-1)^2 = 0$.
L'équation caractéristique possède donc une racine double $r = 1$.
Par conséquent, toute solution de $(\mathscr{H})$ s'écrit $y(t) = (A+Bt)e^t$.

— **Premier cas.**
Si $m \neq 1$, alors m n'est pas racine de l'équation caractéristique donc une solution particulière de $(\mathscr{E})$ est de la forme $y_p(t) = \lambda e^{mt}$.
On injecte dans $(\mathscr{E})$ et on trouve $\lambda = \frac{1}{(m-1)^2}$ puis $y_p(t) = \frac{1}{(\lambda-1)^2}$.
Au final dans le cas $m \neq 1$, la solution générale de $(\mathscr{E})$ est :

$$y : t \longmapsto \frac{e^{mt}}{(\lambda-1)^2} + (A+Bt)e^t : (A,B) \in \mathbb{R}^2.$$

— **Deuxième cas.**
On suppose $m = 1$.
Dans ce cas $m = 1$ est racine double de l'équation caractéristique.
La solution générale de $(\mathscr{H})$ est $y(t) = (A+Bt)e^t$.
On cherche donc une solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + y = e^t$ sous la forme $y_p(t) = q(t)e^t$ avec $\deg(q) = \deg(1) + 2 = 2$.
On écrit $q(t) = (at^2 + bt + c)$
et $y_p(t) = (at^2 + bt + c)e^t$.
En injectant y_p et ses dérivées dans $(\mathscr{E})$ on trouve $a = \frac{1}{2}$ et $y_p(t) = \frac{t^2}{2}$ est solution paticulière de $(\mathscr{E})$..
Au final, la solution générale de $(\mathscr{E})$ dans le cas $m = 1$ est :

$$t \longmapsto y(t) = \frac{t^2e^t}{2} + (A+Bt)e^t : (A,B) \in \mathbb{R}^2.$$

7. $(\mathscr{E}) : y'' - 2my' + (m^2+1)y = e^t\sin(t) : (\mathscr{H}) : y'' - 2my' + (m^2+1)y = 0$.
L'équation caractéristique de $(\mathscr{H})$ $X^2 - 2mX + (m^2+1) = 0$ a pour discriminant $\Delta = -4 = (2i)^2$.
Par conséquent l'équation caractéristique possède deux solutions complexes conjuguées : $r_1 = m + i$ et $r_2 = \overline{r_1} = m - i$.
Toute solution de $(\mathscr{H})$ est donc de la forme $y(t) = e^{mt}(A\cos(t) + B\sin(t))$ avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$.
On cherche une solution y de l'équation $(\mathscr{E}_{\mathbb{C}}) : y'' - 2my' + (m^2+1)y = e^{(1+i)t}$ et on prendra la partie imaginaire pour obtenir une solution particulière de l'équation initiale $(\mathscr{E})$.
On cherche y sous la forme $y(t) = q(t)e^{(1+i)t}$ avec q une fonction polynomiale à coefficients complexes.

— **Premier cas.**
Si $(1+i)$ est solution (simple) de l'équation caractéristique, alors q est de degré 1.
Ce cas apparaît lorsque $m + i = 1 + i \iff m = 1$ (l'autre cas $m + i = 1 - i \iff m = 1 + 2i$ est impossible car $m \in \mathbb{R}$).
On a $y'(t) = (q' + (1+i)q)e^{(1+i)t}$ et $y''(t) = (2(1+i)q' + (1+i)^2q)e^{(1+i)t}$.
Ainsi, y est solution de $(\mathscr{E}_{\mathbb{C}})$ si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}$,

(on simplifie par $e^{(1+i)t} \neq 0$) :

$$\begin{aligned}&(2(1+i)q'+2iq)-2m(q'+(1+i)q)+(m^2+1)q=1\\ \underset{(m=1)}{\iff}\ &(2(1+i)q'+2iq)-2(q'+(1+i)q)+2q=1\\ \iff\ &2iq'=1 \iff 2ia=1, b\in\mathbb{C} \iff a=\frac{1}{2i}=-\frac{i}{2}, b\in\mathbb{C}.\end{aligned}$$

Ainsi, $y(t)=-\frac{i}{2}te^{(1+i)t}$ est solution particulière de $(\mathscr{E}_\mathbb{C})$.
Par suite, $y_p(t)=-\frac{te^t}{2}\cos(t)$ est solution particulière de $(\mathscr{E})$.
La solution générale de $(\mathscr{E})$:

$$y : t \longmapsto -\frac{t}{2}e^t\cos(t)+e^t(A\cos(t)+B\sin(t)) : (A,B)\in\mathbb{R}^2$$

— **Second cas.**
Si $m \neq 1$ alors $1+i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique par ce qui précède.
On cherche une solution particulière de $(\mathscr{E}_\mathbb{C})$ sous la forme $y(t) = \lambda e^{(1+i)t}, \lambda\in\mathbb{C}$.
On injecte dans $(\mathscr{E}_\mathbb{C})$ et on obtient :
(après simplification par $e^{(1+i)t} \neq 0$

$$\begin{aligned}2i\lambda-2m\lambda(1+i)+(m^2+1)\lambda=1 &\iff \lambda(m-1)(m-(1+2i))=1\\ &\iff \lambda=\frac{1}{(m-1)(m-1-2i)}.\end{aligned}$$

Ainsi, $y(t)=\dfrac{m-1+2i}{(m^2-2m+5)(m-1)}e^{(1+i)t}$ est solution de $(\mathscr{E}_\mathbb{C})$.
Par conséquent,
$y_p(t)=\dfrac{m-1}{(m^2-2m+5)(m-1)}e^t\sin(t)+\dfrac{2}{(m^2-2m+5)(m-1)}e^t\cos(t)$
est solution particulière de $(\mathscr{E})$.
Au final la solution générale de $(\mathscr{E})$ est

$$y : t\longmapsto y_p(t)+e^{mt}(A\cos(t)+B\sin(t)) : (A,B)\in\mathbb{R}^2.$$

□

Solution Exercice 8.

1. On cherche une solution polynomiale à l'équation $(1+t^2)y''+ty'-y=0 \quad (\mathscr{E})$.
   On note $P(X)=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$ avec $n=\deg(P) : a_n\neq 0$.
   On injectant dans $(\mathscr{E})$: le coefficient devant t^n est
   $$n(n-1)a_n+na_n-a_n=0 \underset{(a_n\neq 0)}{\iff} n(n-1)+n-1=0 \iff n=1.$$
   On cherche P sous la forme : $P(t)=at+b : (a,b)\in\mathbb{C}^2$.
   On injecte P dans l'équation $(\mathscr{E})$. Alors P est solution de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $ta-(at)+b=0 \iff b=0$.
   Avec $a=1$, on obtient alors que $P(t)=t$ est solution.
2. • On factorise par une solution de l'équation (qui est déjà homogène).
   On cherche la solution générale sous la forme : $y(t)=\lambda(t)p(t)=t\lambda(t)$ avec $t\longmapsto\lambda(t)$ deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
   On a :
   $y'(t)=t\lambda'(t)+\lambda(t)$
   $y''(t)=t\lambda''(t)+2\lambda'(t)$.
   • On injecte dans $(\mathscr{E})$ et on obtient que y est solution de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $t\in\mathbb{R}$,
   $$\begin{aligned}&(1+t^2)[t\lambda''(t)+2\lambda'(t)]+t[t\lambda'(t)+\lambda(t)]-t\lambda(t)=0\\ \iff\ &(t^3+t)\lambda''(t)+(3t^2+2)\lambda'(t)=0 : (\mathscr{E}').\end{aligned}$$
   • On résout sur $\mathbb{R}_+^*$. On pose $z(t)=\lambda'(t)$.
   Ainsi λ' est solution de $(\mathscr{E}')$ sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si pour tout $t>0$:
   $$\begin{aligned}z'(t)&=-\frac{3t^2+2}{t(t^2+1)}z(t)=-\left(\frac{3(t^2+1)}{t(t^2+1)}-\frac{1}{t(t^2+1)}\right)z(t)\\ &=\left(\frac{1}{t(t^2+1)}-\frac{3}{t}\right)z(t)=\left(\frac{1}{t}-\frac{t}{t^2+1}-\frac{3}{t}\right)z(t)\\ &=\left(-\frac{2}{t}-\frac{t}{t^2+1}\right)z(t)\end{aligned}$$
   Ainsi, pour tout $t>0$, $z(t)=Ke^{-2\ln(t)-\frac{1}{2}\ln(1+t^2)}=\dfrac{K}{t^2\sqrt{1+t^2}} : K\in\mathbb{R}$.
   • On cherche maintenant les primitives de $z=\lambda'$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   On change la variable $t=\tan(u)>0\,(u\in]0;\frac{\pi}{2}[)$.
   $dt=(1+\tan^2(u))du$. Alors $(a>0)$:
   $$\begin{aligned}\int_a^x\frac{1}{t^2\sqrt{1+t^2}}dt&=\int_{\arctan(a)}^{\arctan(x)}\frac{1+\tan^2u}{\tan^2u\sqrt{1+\tan^2u}}du=\int_{\arctan(a)}^{\arctan(x)}\frac{\sqrt{1+\tan^2u}}{\tan^2u}du\\ &=\int_{\arctan(a)}^{\arctan(x)}\sqrt{\frac{1}{\cos^2u}}\frac{1}{\tan^2u}du\underset{(u\in]0;\frac{\pi}{2}[)}{=}\int_{\arctan(a)}^{\arctan(x)}\frac{\cos u\,du}{\sin^2u}\\ &\underset{(v=\sin u)}{=}\int_{\sin\arctan(a)}^{\sin\arctan(x)}\frac{dv}{v^2}=\left[-\frac{1}{v}\right]_{\sin\arctan(a)}^{\sin\arctan(x)}.\end{aligned}$$

Les primitives de $z = \lambda'$ sur $\mathbb{R}_+^*$ sont donc données par

$$-\frac{K}{\sin\arctan(x)} + K' = -\frac{1}{\tan\arctan(x)\cos\arctan(x)}$$
$$= -\frac{K}{x}\sqrt{1+\tan^2\arctan x} + K'$$
$$= -K\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + K' : (K, K') \in \mathbb{R}^2.$$

- Au final, toute solution de $(\mathscr{E}')$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est donnée par

$$\lambda : t \longmapsto -K\frac{\sqrt{1+t^2}}{t} + K' : (K, K') \in \mathbb{R}^2.$$

- On en déduit que toute solution de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est donnée par :

$$y : t \longmapsto y(t) = t\lambda(t) = K_1\sqrt{1+t^2} + K_2 t : (K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Les fonctions y ainsi définies le sont sur $\mathbb{R}$ tout entier, dérivables et vérifient l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$.

L'espace $S_{\mathscr{E}}$ des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 $(\mathscr{E})$ est de dimension 2.

On en déduit que $(t \mapsto \sqrt{1+t^2}, t \mapsto t)$ est une base de $S_{\mathscr{E}}$ (car libre et de cardinal 2).

3. Construisons la courbe intégrale de la fonction y, passant par le point $A(0,1)$ et présentant une tangente parallèle à la première bissectrice en ce point.

   Ces conditions imposent $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$.

   On obtient $K_1 = K_2 = 1$.

   Ainsi, $\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = \sqrt{1+t^2} + t : y'(t) = \frac{\sqrt{1+t^2}+t}{\sqrt{1+t^2}} > \frac{|t|+t}{\sqrt{1+t^2}} \geqslant 0$.

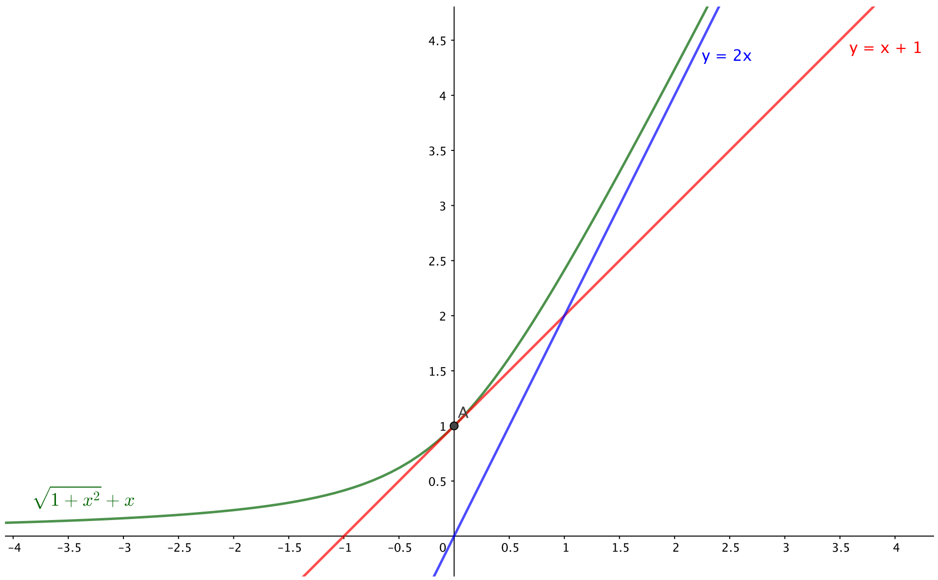
   La fonction y est croissante sur $\mathbb{R}$.

   On connait la tangente en 0 : $T : T(t) = y'(0)t + y(0) = t + 1$.

   Branches infinies :

   — En $-\infty$. Soit $t < 0$:
   $y(t) = \sqrt{t^2\left(1+\frac{1}{t^2}\right)} + t = t\left(-\sqrt{1+\frac{1}{t^2}} + 1\right)$
   $y(t) \underset{t\to-\infty}{=} t\left(-1 - \frac{1}{2t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right) + 1\right)$
   Ainsi, $y(t) \underset{t\to-\infty}{\sim} -\frac{1}{2t}$.
   On en déduit que $\lim\limits_{-\infty} y = 0$.
   La courbe intégrale présente une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

   — En $+\infty$. Soit $t > 0$:
   * $\lim\limits_{+\infty} y = +\infty$.
   * $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{y(t)}{t} = 2$.
   * $y(t) - 2t = \sqrt{1+t^2} - t = t\left(\sqrt{1+\frac{1}{t^2}} - 1\right) = t\left(1 + \frac{1}{2t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right) - 1\right)$
   $y(t) - 2t \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2t}$
   Ainsi $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) - 2t \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   On en déduit que la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe intégrale lorsque $t \to +\infty$.



□

Solution Exercice 9. Le problème de Cauchy suivant possède une unique solution que l'on notera f.

$$\begin{cases} y'' - 2xy' - 2y &= 0 \\ y(0) = 1; y'(0) &= 0 \end{cases}$$

— **Analyse.**
Supposons qu'il existe une fonction y solution du problème de Cauchy et développable en série entière.
On note R le rayon de convergence de cette série ; on suppose $R > 0$.
Pour tout $x \in]-R; R[: y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
Par le théorème de dérivation terme à terme on a
$y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$

$y''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$.

En injectant dans l'équation du problème de Cauchy, on obtient que y est solution du problème de Cauchy si et seulement si pour tout $x \in]-R;R[$:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$
$$\iff \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n - 2\sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

Par unicité du développement en série entière :
- ∗ Si $n = 0$, $2a_2 - 2a_0 = 0 \iff a_2 = a_0$.
- ∗ Pour tout $n \geqslant 1$:

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} - 2na_n - 2a_n = 0 \iff a_{n+2} = \frac{2(n+1)}{(n+1)(n+2)}a_n = \frac{2}{n+2}a_n.$$

— Puisque $y'(0) = 0$, on a $a_1 = 0$.
  Par récurrence, $a_{2p+3} = a_{(2p+1)+2} = \frac{2}{2p+3}a_{2p+1} = 0$.

— On traite maintenant le cas des entiers pairs.
  On a $y(0) = 1 = a_0$.

$$a_{2p} = \frac{2}{2p}a_{2p-2} = \frac{1}{p}a_{2p-2} = \frac{1}{p!}a_0 = \frac{1}{p!}.$$

  On en déduit que $y(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!}x^{2p} = e^{x^2}$.

— **Synthèse.**
  La série entière $y : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!} = e^{x^2}$ a un rayon de convergence infini et est solution de l'équation différentielle par les équivalences écrites dans la partie analyse.

— On en déduit que la fonction f, unique solution du problème de Cauchy, est développable en série entière et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{x^2}.$$

□

Solution Exercice 10. On pose $t = \mathrm{sh}(x)$.
La fonction $\varphi : x \longmapsto \varphi(x) = \mathrm{sh}(x) = t$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

L'expression de la bijection réciproque s'obtient en posant $X = e^x > 0$ et en résolvant l'équation

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = t \iff e^{2x} - 2te^x - 1 \iff X^2 - 2tX - 1 = 0.$$

On trouve $e^x = t + \sqrt{t^2+1} \iff x = \ln(t + \sqrt{t^2+1}) = \varphi^{-1}(t)$.
Cette expression définit une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
On pose alors $z(x) = y(\mathrm{sh}(x)) = y(t)$.
On a $z'(x) = \mathrm{ch}(x)y'(\mathrm{sh}(x)$ et $z''(x) = \mathrm{ch}^2(x)y''(\mathrm{sh}(x)) + \mathrm{sh}(x)y'(\mathrm{sh}(x))$.
La fonction $t \longmapsto y(t)$ est solution de l'équation sur $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(1 + \mathrm{sh}^2(x))y''(\mathrm{sh}(x)) + \mathrm{sh}(x)y'(\mathrm{sh}(x)) - y(\mathrm{sh}(x)) = 0$$
$$\iff \mathrm{ch}^2(x)y''(\mathrm{sh}(x)) + \mathrm{sh}(x)y'(\mathrm{sh}(x)) - y(\mathrm{sh}(x)) = 0$$
$$\iff z''(x) - z(x) = 0.$$

L'équation $z'' - z = 0$ a pour solution générale $z : x \longmapsto Ae^x + Be^{-x} : (A,B) \in \mathbb{R}^2$.
On obtient via le changement de variable
$t = \varphi(x) = \mathrm{sh}(x) \iff x = \varphi^{-1}(t) = \ln(t + \sqrt{1+t^2})$,
que la fonction y est solution de l'équation initiale si et seulement si :

$$y : t \longmapsto Ae^{\ln(t+\sqrt{t^2+1})} + Be^{-\ln(t+\sqrt{1+t^2})} = A\left(t + \sqrt{1+t^2}\right) + \frac{B}{t+\sqrt{1+t^2}}.$$

avec $(A;B) \in \mathbb{R}^2$.
On a obtenu une famille libre de fonctions dans l'espace $S_{\mathscr{E}}$ des solutions de l'équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 de cardinal $2 = \dim S_{\mathscr{E}}$: il s'agit d'une base de $S_{\mathscr{E}}$.
On a donc décrit ci-dessus la solution générale de l'équation initiale. □

Solution Exercice 11.
Analyse.
On suppose que y est développable en série entière sur $]-R;R[$ et est solution de l'équation différentielle $4ty'' + 2y' - y = 0$.
On note $y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$.
Par le théorème de dérivation terme à terme, on obtient

$$\begin{aligned}&4t\sum_{n\geqslant 2}n(n-1)a_nt^{n-2}+2\sum_{n\geq 1}na_nt^{n-1}-\sum_{n\geqslant 0}a_nt^n=0\\ \iff& 4\sum_{n\geqslant 2}n(n-1)a_nt^{n-1}+2\sum_{n\geq 1}na_nt^{n-1}-\sum_{n\geqslant 0}a_nt^n=0\\ \iff& 4\sum_{n\geqslant 1}n(n+1)a_{n+1}t^n+2\sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}t^n-\sum_{n\geqslant 0}a_nt^n=0\end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière on obtient :

— $2a_1=a_0$

— $\forall n\geqslant 1,\ a_{n+1}=\dfrac{a_n}{(n+1)(4n+2)}=\dfrac{a_n}{(2n+1)(2n+2)}$

Ainsi $\forall n\geqslant 0,\ a_n=\dfrac{1}{2n(2n-1)}a_{n-1}=\cdots=\dfrac{a_0}{(2n)!}$.

On obtient $y(t)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_0}{(2n)!}t^n\ (a_0\in\mathbb{R})$.

Synthèse.

La règle de d'Alembert montre que le rayon de convergence de la série entière $f(t)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_0}{(2n)!}t^n$ est égal à $R=+\infty$.

Les équivalences écrites dans la partie analyse montre que la fonction f est solution de l'équation différentielle $4ty''+2y'-y=0$. □

***Solution Exercice** 12.* On considère l'équation différentielle :

$$(2t+1)y''+(4t-2)y'-8y=0:(\mathscr{E}).$$

1. On suppose qu'une fonction polynomiale P est solution de $(\mathscr{E})$.

   On écrit $P(X)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$ avec $a_n\neq 0: n=\deg(P)$.

   On injecte P dans $(\mathscr{E})$.

   Le coefficient de t^n du polynôme obtenu vérifie $4na_n-8a_n=0\iff n=2$.

   On cherche P sous la forme : $P(t)=at^2+bt+c:(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$.

   Alors P est solution si et seulement si

$$\begin{aligned}&(2t+1)(2a)+(4t-2)(2at+b)-8(at^2+bt+c)=0\\ \iff& t^2(8a-8a)+t(4a+4b-4a-8b)+(2a-2b-8c)=0\\ \iff& b=0\,;a=4c\end{aligned}$$

   Ainsi, $P(t)=c(4t^2+1):c\in\mathbb{R}$ est solution de $(\mathscr{E})$.

2. La fonction $t\longmapsto e^{\alpha t}$ est solution de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $t\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}&(2t+1)\alpha^2e^{\alpha t}+(4t-2)\alpha e^{\alpha t}-8e^{\alpha t}=0\\ \iff& \alpha(\alpha+2)=0 \text{ et } \alpha^2-2\alpha-8=0\\ \iff& \alpha(\alpha+2)=0 \text{ et } (\alpha+2)(\alpha-4)=0\\ \iff& \alpha=-2.\end{aligned}$$

3. Résoudre$(\mathscr{E})$ sur un intervalle ne contenant par $-\dfrac{1}{2}$.

   Ainsi, $t\longmapsto e^{-2t}$ est solution de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}$.

4. Soit $I\subset\mathbb{R}$ un intervalle de $\mathbb{R}$ ne contenant pas $-\frac{1}{2}$.

   La famille $\mathscr{B}=(t\longmapsto e^{-2t},4t^2+1)$ est une famille libre (exercice) de l'espace $S_{\mathscr{E}}$ des solutions de l'équation différentielle $\mathscr{E}$.

   On a $\dim S_{\mathscr{E}}=2$ car $t\longmapsto a(t)=2t+1$ ne s'annule pas sur I.

   Ainsi $\mathscr{B}$ est une base de E.

   Au final la solution générale de $\mathscr{E}$ est :

$$y:t\longmapsto Ae^{-2t}+B(4t^2+1):(A,B)\in\mathbb{R}^2.$$

□

***Solution Exercice** 13.* On considère sur $]-1;1[$ l'équation différentielle :

$$(1-t^2)y''-\alpha ty'+\alpha y=0:(\mathscr{E}_\alpha).$$

1. On suppose que $\alpha=2$.

   Analyse.

   On suppose qu'il existe une fonction y développable en série entière.

   On note R sont rayon de convergence.

   On note pour tout $t\in]-R;R[$, $y(t)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nt^n$.

   Par le théorème de dérivation terme à terme, on a

   $y'(t)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}na_nt^{n-1}$ et $y''(t)=\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nt^{n-2}$.

   On injecte dans $(\mathscr{E}_2)$ et on obtient que y est solution de $(\mathscr{E}_2)$ si et seulement si pour tout $t \in]-R;R[$:

$$(1-t^2)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} - 2t\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}t^n - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^n - 2\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}t^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n t^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n t^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = 0$$

L'unicité du développement en série entière de la fonction y donne pour tout $n \geqslant 0$:

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} = (n+2)(n-1)a_n \Longleftrightarrow a_{n+2} = \frac{n-1}{n+1}a_n \quad (*).$$

Cas n pair.

$$\begin{aligned} a_{2p} &= \frac{2p-3}{2p-1}a_{2p-2} = \cdots = \frac{(2p-3)(2p-5)\dots(1)}{(2p-1)(2p-3)\dots(3)}a_2 \\ &= \frac{1}{2p-1}a_2. \end{aligned}$$

Avec $n=0$ dans $(*)$, on trouve :

$$a_2 = \frac{0-1}{0+1}a_0 = -a_0.$$

Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $a_{2p} = -\frac{1}{2p-1}a_0$ (formule également valable si $p=0$).

Cas n impair.

$$a_{2p+1} = \frac{2p-2}{2p}a_{2p-1} = \cdots = \frac{(2p-2)(2p-4)\dots(0)}{2p(2p-2)\dots(2)}a_1$$

Ainsi pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $a_{2p+1} = 0 \times a_1 = 0$.

Conclusion.

Pour tout $t \in]-R;R[$,

$$y(t) = a_1 t + a_0\left(1 - \sum_{p\geqslant 1}\frac{1}{2p-1}t^{2p}\right)$$

$$y(t) = a_1 t - a_0\sum_{p\geqslant 0}\frac{1}{2p-1}t^{2p}.$$

Synthèse.

La série entière $\sum \frac{1}{2p-1}t^{2p}$ a pour rayon de convergence $R=1$.

En effet,

$$\left|\frac{t^{2p+2}}{2p+1}\frac{2p-1}{t^{2p}}\right| = |t|^2\frac{2p+1}{2p-1} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} |t|^2.$$

- Si $|t|<1$, la série entière converge : $R \geqslant 1$.
- Si $|t|>1$, la série entière diverge : $R \leqslant 1$.
- Ainsi, $R=1$ comme annoncé.

La fonction $y : t \longmapsto a_1 t - a_0\sum_{p\geqslant 0}\frac{t^{2p}}{2p-1}$: $(a_0,a_1)\in\mathbb{R}^2$ est donc développable en série entière sur $]-1;1[$ et la partie analyse montre qu'elle est solution de l'équation différentielle.

Déterminons une expression explicite des solutions ainsi obtenues.

Il s'agit de calculer pour tout $t \in]-1;1[$, la somme de la série entière : $\sum_{p\geqslant 0}\frac{t^{2p}}{2p-1}$ en utilisant le théorème d'intégration terme à terme on obtient pour tout $t\in]-1;1[$:

$$\begin{aligned} \sum_{p\geqslant 0}\frac{t^{2p}}{2p-1} &= -1 + t\sum_{p\geqslant 1}\frac{t^{2p-1}}{2p-1} = -1 + t\sum_{p\geqslant 1}\int_0^t u^{2p-2}du \\ &= -1 + t\int_0^t \sum_{p\geqslant 1}u^{2p-2}du = -1 + t\int_0^t\sum_{p\geqslant 0}u^{2p}du \\ &= -1 + t\int_0^t\frac{du}{1-u^2} = -1 + \int_0^t\left(\frac{1}{2}\frac{1}{1-u} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+u}\right)du \\ &= -1 + t\left[\ln\sqrt{\frac{1+u}{1-u}}\right]_0^t \\ &= -1 + t\ln\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}. \end{aligned}$$

Au final, on a montré que toute solution de l'équation différentielle $(\mathscr{E}_2)$: $(1-t^2)y'' - \alpha t y' + \alpha y = 0$: $(\mathscr{E}_\alpha)$ développable en série entière s'écrit

$$y : t \longmapsto C_1 t + C_2\left(-1 + t\ln\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\right).$$

La famille $(y_1,y_2) = \left(t\mapsto t, t\mapsto \left(-1+t\ln\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\right)\right.$ est une famille de fonctions deux fois dérivable sur $]-1;1[$ (car (par exemple) développable en série entière pour la seconde) solution de $(\mathscr{E}_2)$.

Cette famille est libre car si $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ sont tels que $C_1y_1 + C_2y_2 = 0$ alors :
— Avec $t = 0$, $-C_2 = 0 \iff C_2 = 0$
— Il vient alors directement que $C_1 = 0$.
La famille (y_1, y_2) est donc une base de l'espace des solutions $S_{\mathscr{E}_2}$ (car il et de dimension 2) : on a donc trouvé toutes les solutions de $(\mathscr{E}_2)$.

2. On suppose que $\alpha = 3$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 3$.
Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ on définie

$$\varphi(P) = (1 - X^2)P'' - 3XP'.$$

(a) — φ est une application linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ car pour tout $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P + Q) &= (1 - X^2)(\lambda P + Q)'' - 3X(\lambda P + Q)' \\ &= (1 - X)^2(\lambda P'' + Q'') - 3X(\lambda P' + Q') \\ &= \lambda((1 - X)^2 P'' - 3XP') + (1 - X^2)Q'' - 3XQ' \\ &= \lambda\varphi(P) + \varphi(Q).\end{aligned}$$

— φ est à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$ en effet si $\deg(P) = d \leqslant n$ alors le degré de $\varphi(P)$ est au plus $\max(d - 2 + 2; d - 1 + 1) = d \leqslant n$ par somme de polynômes de degré au plus d.

(b) On calcule :
— $\varphi(1) = 0$
— $\varphi(X) = -3$.
— Pour tout $k \geqslant 2$, $\varphi(X^k) = k(k-1)X^{k-2} - k(k+2)X^k$. On en déduit alors que la matrice de φ dans la base canonique est triangulaire supérieur.

(c) La matrice de φ dans la base canonique étant triangulaire supérieure, on trouve facilement $\chi_\varphi(X) = X(X+3)(X+8)\dots(X + n(n+2))$.
Ainsi, $Sp(\varphi) = \{0, -3, -8, \dots, -n(n+2)\}$ ce qui montre que φ est diagonalisable.
Dans un base de vecteurs propres, la matrice de φ est

$$D = \begin{pmatrix} 0 & & & & (0) \\ & -3 & & & \\ & & -8 & & \\ & & & \ddots & \\ (0) & & & & -n(n+2) \end{pmatrix}$$

Toute fonction polynomiale solution de $(\mathscr{E}_3)$ vérifie $\varphi(P) = -3P$.
Autrement dit, toute solution polynomiale de $(\mathscr{E}_3)$ est un vecteur propre de φ associé à la valeur propre -3.
La matrice D montre que $E_{-3}(\varphi)$ est un espace de dimension 1.
La matrice de φ dans la base canonique montre que $X \in \ker(\varphi + 3\,\mathrm{id}) = E_{-3}(\varphi)$.
Au final les seules solutions polynomiales (de degré au plus $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 3$ quelconque) sont les fonctions $P : t \longmapsto Kt : K \in \mathbb{R}$.

3. On suppose que $\alpha = 1$.
On résout l'équation différentielle $(\mathscr{E}_1) : (1 - t^2)y'' - ty' + y = 0$.
en utilisant le changement de variable $t = \sin(x)$.
La fonction $\varphi : x \longmapsto \sin(x) = t$ réalise une bijection de classe $\mathscr{C}^2$ de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ sur $]-1; 1[$.
La bijection réciproque $\varphi^{-1} : t \longmapsto \arcsin(t) = x$ est également de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]-1; 1[$ à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.
On pose $z(x) = y(\sin(x)) = y(t)$.
On a $z'(x) = \cos(x)y'(\sin(x))$ et $z''(x) = \cos^2(x)y''(\sin(x)) - \sin(x)y'(\sin(x))$ pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.
Ainsi, y est solution de $(\mathscr{E}_1)$ sur $]-1; 1[$ si et seulement si pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$:

$$\begin{aligned}&(1 - \sin^2(x))y''(\sin(x)) - \sin(x)y'(\sin(x)) + y(\sin(x)) = 0 \\ \iff &[\cos^2(x)y''(\sin(x) - \sin(x)y'(\sin(x))] + y(\sin(x)) = 0 \\ &z''(x) + z(x) = 0.\end{aligned}$$

L'équation différentielle $z'' + z = 0$ a pour équation caractéristique $X^2 + 1 = 0$ dont les racines sont $0 \pm i$.
Ainsi, toute solution de $z'' + z = 0$ s'écrit

$$z : x \longmapsto A\cos(x) + B\sin(x) : (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

On en déduit alors toutes les solutions de $(\mathscr{E})$ via le changement de variable $y(t) = z(x) = z(\varphi^{-1}(t)) = z(\arcsin(t))$.
On trouve :

$$\begin{aligned}y : t \longmapsto &A\cos(\arcsin(t)) + B\sin(\arcsin(t)) \\ y : t \longmapsto &A\sqrt{1 - t^2} + Bt : (A, B) \in \mathbb{R}^2\end{aligned}$$

car $\cos(\arcsin(t)) > 0$ puisque $t \in]-1; 1[\iff \arcsin(t) \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

□

Solution Exercice 14. On considère $(\mathscr{E}) : t^2y'' + 4yy' + (2 - t^2)y = 1$.
On résout $(\mathscr{E})$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$ ou $I = \mathbb{R}_-^*$.
On pose pour tout $t \in I$, $z(t) = t^2y(t)$.
On a $z'(t) = 2ty(t) + t^2y'(t)$ et $z''(t) = 2y(t) + 4ty'(t) + t^2y''(t)$.

Ainsi, y est solution de $(\mathscr{E})$ sur I si et seulement si pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned} & t^2 y''(t) + 4ty'(t) + (2-t^2)y(t) = 1 \\ \iff & z''(t) - z(t) = 1. \end{aligned}$$

L'équation homogène $z'' - z = 0$ a pour solution générale

$$z : t \longmapsto Ae^t + Be^{-t} : (A,B) \in \mathbb{R}^2.$$

La fonction $t \longmapsto z_p(t) = -1$ est solution particulière sur I : $z_p'' - z_p = 1$.
Ainsi toute solution de $z'' - z = 1$ s'écrit

$$z : t \in I \longmapsto -1 + Ae^t + Be^{-t} : (A,B) \in \mathbb{R}^2.$$

Par conséquent, toute solution sur I de $(\mathscr{E})$ s'écrit :

$$y = \frac{z}{t^2} : t \in I \longmapsto -\frac{1}{t^2} + \frac{Ae^t}{t^2} + \frac{Be^{-t}}{t^2}.$$

Recollement en 0.
Supposons qu'une fonction y soit solution de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}$.
Il existe alors (A_+, B_+) et (A_-, B_-) des couples de réels tels que :
— $\forall t > 0$, $y(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{A_+ e^t}{t^2} + \frac{B_+ e^{-t}}{t^2}$
— $\forall t < 0$, $y(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{A_- e^t}{t^2} + \frac{B_- e^{-t}}{t^2}$
En utilisant la continuité de y en 0, les limites en 0 existent, sont finies, égales (à gauche et à droite).
On écrit :
— Pour $t > 0$:
$$y(t) \underset{t\to 0^+}{=} -\frac{1}{t^2} + \frac{A_+}{t^2}\left(1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right) + \frac{B_+}{t^2}\left(1 - t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right)$$
$$y(t) \underset{t\to 0^+}{=} \frac{(A_+ + B_+) - 1}{t^2} + \frac{A_+ - B_+}{t} + \frac{A_+ + B_+}{2} + o(1)$$
L'existence de la limite en 0 impose $A_+ + B_+ = 1$ et $A_+ - B_+ = 0$.
On obtient donc $A_+ = B_+ = \frac{1}{2}$.
— La limite en 0^- donne de manière analogue : $A_- = B_- = \frac{1}{2}$.
— On a obtenu en particulier $y(0) = \frac{1}{2}$.
On a montré que si y est solution sur $\mathbb{R}$ alors :

$$y : t \longmapsto \begin{cases} -\frac{1}{t^2} + \frac{\mathrm{ch}(t)}{t^2} & \text{si} \quad t > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad t = 0 \\ -\frac{1}{t^2} + \frac{\mathrm{ch}(t)}{t^2} & \text{si} \quad t < 0 \end{cases}$$

On vérifie ainsi définie que y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est solution de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}$. □

Solution Exercice 15.

1. $\mathcal{S}_1 : \begin{cases} x' = 3x - y + 2 \\ y' = x + y + 2 \end{cases}$

• On constate que la fonction constante $X_p : t \longmapsto \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est solution particulière de $\mathcal{S}_1$.
• Résolvons le système homogène associé $\mathcal{S}_h$:
$X'(t) = AX(t)$ où $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.
• On détermine les éléments propres de A.
$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-3 & 1 \\ -1 & X-1 \end{vmatrix} = (X-3)(X-1) - 1 = X^2 - 4X + 2 = (X-2)^2.$
Ainsi, $Sp(A) = \{2\}$.
$X \in E_2(A) \iff AX = 2X \iff (A - 2I_2)X = 0.$
On a $A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
Ainsi, $E_2(A) = Vect\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
• La matrice A n'est donc pas diagonalisable car $\dim E_2(A) = 1 < 2 = m(2)$.
• On complète $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en une base de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ avec $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
On calcule $AX_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = X_1 + 2X_2$.
La matrice A est donc semblable à $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$: $A = PTP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
• On change de variable : $Y = P^{-1}X$.
L'équation $X' = AX \iff X' = PTP^{-1}X \iff Y' = TY$.
On obtient le système différentiel triangulaire suivant :

$$\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1 + y_1(t) \\ y_1'(t) = 2y_1(t) \end{cases} \iff \begin{cases} x_1'(t) = 2x_1 + K_1 e^{2t} \\ y_1(t) = K_1 e^{2t} \end{cases} : K_1 \in \mathbb{R}$$

• Résolvons enfin l'équation $(\mathscr{E}_1) : x_1' = 2x_1 + K_1 e^{2t}$.
L'équation homogène $x_1' = 2x_1$ a pour solution générale $x_1(t) = K_2 e^{2t}$.
L'équation $x_1' = 2x_1 + K_1 e^{2t}$ est de la forme $x_1' + \alpha x_1 = p(t)e^{mt}$ avec $m = 2 = -\alpha$ et $p(t) = K_1$.
On cherche donc une solution particulière sous la forme $q(t)e^{2t}$ avec q une fonction polynomiale de degré $1 = \deg(p) + 1$.
On trouve $q(t) = K_1 t$ c'est-à-dire $x_p(t) = K_1 t e^{2t}$ est solution particulière.

Finalement, la solution générale de $(\mathscr{E}_1)$: $x_1(t) = K_1te^{2t} + K_2e^{2t}$.
Le système triangulaire obtenu ci-dessus a donc pour solution générale
$Y(t) = \begin{pmatrix} K_1te^{2t} + K_2e^{2t} \\ K_1e^{2t} \end{pmatrix} = e^{2t}\begin{pmatrix} K_1t + K_2 \\ K_1 \end{pmatrix} : (K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2$.
On obtient alors la solution générale du système homogène $\mathcal{S}_h : X' = AX$:
$X(t) = PY(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} K_1t + K_2 \\ K_1 \end{pmatrix} = e^{2t}\begin{pmatrix} K_1(t+1) + K_2 \\ K_1t + K_2 \end{pmatrix}$
avec $(K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2$.
En conclusion les solutions su système initial $\mathscr{S}_1$ sont

$$X : t \longmapsto \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{2t}\begin{pmatrix} K_1(t+1) + K_2 \\ K_1t + K_2 \end{pmatrix} : (K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2.$$

2. $\mathcal{S}_2 : \begin{cases} x' = 5x - 2y + e^t \\ y' = -x + 6y + t \end{cases}$
Le système différentiel $\mathcal{S}_2$ s'écrit $X'(t) = AX(t) + B(t)$
avec $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$; $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$; $B(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix}$
• On détermine les éléments propres de A :
$\chi_A(X) = (X-4)(X-7)$.
$(A - 4I_2) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ donc $E_4(A) = Vect\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
$(A - 7I_2) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ donc $E_7(A) = Vect\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
La matrice A est diagonalisable et $A = PDP^{-1}$ où
$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$; $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
• On change de variable : $Y = P^{-1}X$.
Le système devient :
$Y' = DY + P^{-1}B \iff \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ y_1'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1(t) \\ 7y_1(t) \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} e^t + t \\ -e^t + 2t \end{pmatrix}$.

— La solution de l'équation homogène $x_1' = 4x_1$ associée à l'équation $x_1' = 4x_1 + \frac{1}{3}(e^t + t)$ a pour solution $x_1(t) = K_1e^{4t} : K_1 \in \mathbb{R}$.
On cherche une solution particulière via le principe de superposition.
• On cherche une solution particulière de l'équation $x_1' = 4x_1 + \frac{e^t}{3} : (\mathscr{E}_1)$ sous la forme λe^t.
On injecte dans $(\mathscr{E}_1)$ et on trouve $\lambda = -\frac{1}{9}$.
Une solution particulière de $(\mathscr{E}_1)$ est donc donnée par $t \longmapsto -\frac{1}{9}e^t$.
• On cherche une solution particulière de l'équation $x_1' = 4x_1 + \frac{t}{3} : (\mathscr{E}_2)$ sous la forme $at + b : (a, b) \in \mathbb{R}^2$.
On injecte dans $(\mathscr{E}_2)$ et on trouve $a = -\dfrac{1}{12}; b = -\dfrac{1}{48}$.
Une solution particulière de $(\mathscr{E}_2)$ est donc donnée par $t \longmapsto -\dfrac{t}{12} - \dfrac{1}{48}$.
L'équation $x_1' = 4x_1 + \frac{1}{3}(e^t + t)$ a donc pour solution générale

$$x_1 : t \longmapsto -\frac{t}{12} - \frac{1}{48} - \frac{e^t}{9} + K_1e^{4t} : K_1 \in \mathbb{R}.$$

— On raisonne de même pour déterminer la solution générale de l'équation $y_1' = 7y_1 + \dfrac{1}{3}(-e^t + 2t)$.
On trouve :

$$y_1 : t \longmapsto -\frac{2t}{21} - \frac{2}{147} + \frac{e^t}{18} + K_2e^{7t} : K_2 \in \mathbb{R}.$$

Au final la solution générale du système initiale $\mathcal{S}_2$ est donnée par

$$X = PY : t \longmapsto \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{t}{12} - \frac{1}{48} - \frac{e^t}{9} + K_1e^{4t} \\ -\frac{2t}{21} - \frac{2}{147} + \frac{e^t}{18} + K_2e^{7t} \end{pmatrix}$$

On trouve après calcul(s) :

$$X(t) = \begin{pmatrix} 2K_1e^{4t} - K_2e^{7t} - \frac{5}{18}e^t - \frac{t}{14} - \frac{11}{392} \\ K_1e^{4t} + K_2e^{7t} - \frac{e^t}{18} - \frac{5t}{28} - \frac{27}{784} \end{pmatrix} : (K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2.$$

3. $\mathcal{S}_3 : \begin{cases} x' = 2x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z + 1 \\ y' = x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z + 1 \\ z' = -x + \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}z + 1 \end{cases}$

• On constate que la fonction $X_p : t \longmapsto \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est une solution particulière de $\mathcal{S}_3$.
• On résout le sytème homogène associé $X' = AX$ où
$A = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
• On a $\chi_A(X) = (X-2)(X-1)^2 : Sp(A) = \{2, 1\}$.
• On résout les équations $AX = X$ et $AX = 2X$ et on trouve :
$E_1(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ et $E_2(A) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On pose $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On a $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

• On change de variable $Y(t) = P^{-1}X(t)$ et on obtient le système $Y'(t) = DY(t)$.
Le système diagonal obtenu se résout aisément :

$$Y(t) = \begin{pmatrix} K_1e^t \\ K_2e^t \\ K_3e^{2t} \end{pmatrix} : (K_1, K_2, K_3) \in \mathbb{R}^3.$$

• On obtient la solution de l'équation homogène $X' = AX$:

$$X : t \longmapsto X(t) = PY(t) = K_1e^tX_1 + K_2e^tX_2 + K_3e^{2t}X_3$$

où X_1, X_2, X_3 désignent les vecteurs colonnes de P.

4. $\mathcal{S}_4 : \begin{cases} x' &= x + z \\ y' &= -y - z \\ z' &= 2y + z. \end{cases}$

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Le système $\mathcal{S}_4$ s'écrit alors $X' = AX$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Par le cours l'espace des solutions de $\mathscr{S}_4$ est de dimension 3.
• Éléments propres de A :

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-1 & 0 & -1 \\ 0 & X+1 & 1 \\ 0 & -2 & X-1 \end{vmatrix}$$
$$= (X-1)[(X+1)(X-1)+2] = (X-1)(X^2+1)$$

Ainsi, $Sp(A) = \{1, i, -i\}$.
• La matrice A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ car elle possède trois valeurs propres distinctes (dont deux sont complexes conjuguées).
• $A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ donc $E_1(A) = Vect \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

• $A - iI_3 = \begin{pmatrix} 1-i & 0 & 1 \\ 0 & -1-i & -1 \\ 0 & 2 & 1-i \end{pmatrix}$.

On trouve $E_i(A) = Vect \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1+i \end{pmatrix}$.

• On conjugue et on trouve : $E_{-i}(A) = Vect \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1-i \end{pmatrix}$.

• La famille (Φ_1, Φ_2, Φ_3) avec
— $\Phi_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
— $\Phi_2(t) = e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1+i \end{pmatrix}$
— $\Phi_3(t) = e^{-it} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -i \end{pmatrix} = \overline{\Phi_3(t)}$.

est une base de fonctions complexes $X : t \to \mathbb{K}$ solutions du système $(\mathcal{S}_4)$.
• Toute combinaison linéaire des fonctions solutions est encore une solution du système.
On considère les combinaisons linéaires suivantes :

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}(\Phi_2(t) + \Phi_3(t)) = \mathrm{Re}(\Phi_2(t)) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ -\cos(t) - \sin(t) \end{pmatrix}$$

$$\psi(t) = \frac{1}{2i}(\Phi_2(t) - \Phi_3(t)) = \mathrm{Im}(\Phi_2(t)) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \\ -\sin(t) + \cos(t) \end{pmatrix}.$$

La famille (Φ_1, φ, ψ) est libre car

$$\det_{(\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3)}(\Phi_1, \varphi, \psi) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2i} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2i} \neq 0.$$

C'est donc une base de l'espace (de dimension 3) des solutions du système $X' = AX$.
Toute solution du système $X' = AX$ s'écrit donc

$$X : t \longmapsto C_1\Phi_1(t) + C_2\varphi(t) + C_3\psi(t) : (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3.$$

□

Solution Exercice 16.
On considère le problème différentiel :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x' & = & 5x & + & y & - & z \\ y' & = & 2x & + & 4y & - & 2z \\ z' & = & x & - & y & + & 3z \end{array}\right. \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On pose $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.
On calcule $\chi_A(X) = (X-2)(X-4)(X-6)$.
La matrice A est diagonalisable, car elle possède trois valeurs propres distinctes
A est semblable à la matrices diagonalises $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.
On détermine les espaces propres :
$E_2(A) = Vect \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$E_4(A) = Vect \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$E_6(A) = Vect \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
On pose $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et on obtient $A = PDP^{-1}$.
On obtient par le cours (ou l'on suit la méthode classique décrite dans l'exercice précédent) que toute solution du système différentiel : $X' = AX$ s'écrit

$$X : t \longmapsto C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{6t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Il existe une unique solution au problème de Cauchy déterminée par la condition initiale $X(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ qui conduit au système

$$C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (C_1, C_2, C_3) = (3/2, -3/2, 1/2).$$

□

Solution Exercice 17. On considère le système différentiel :

$$\mathcal{S} : \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x' & = & 4x & - & 3y & + & 2z \\ y' & = & 6x & - & 5y & + & 4z \\ z' & = & 4x & - & 4y & + & 4z \end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3.
On pose $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 6 & -5 & 4 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$. Le système $\mathcal{S}$ se récrit $X' = AX$.
On a $\det(A) = 0$ donc la matrice est non inversible.
Il existe donc une combinaison linéaire nulle, non triviale, de ses lignes :

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0,0,0\} : aL_1 + bL_2 + cL_3 = 0.$$

La relation $X' = AX$ donne

$$x' = L_1 X; y' = L_2 X; z' = L_3 X.$$

Par conséquent $ax' + by' + cz' = (aL_1 + bL_2 + cL_3)X = 0$.
On en déduit que $(ax + by + cz)' = 0$.
La fonction $t \mapsto ax(t) + by(t) + cz(t)$ est donc constante sur $\mathbb{R}$:
$\exists K \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, ax(t) + by(t) + cz(t) = K$.
La courbe $t \longmapsto (x(t), y(t), z(t))$ est donc contenue dans l'ensemble

$$P : ax + by + cz = K.$$

P un plan car $(a,b,c) \neq (0,0,0)$. □

Solution Exercice 18.

1. $\mathcal{S} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x'' & = & x & + & 8y & - & 2 \\ y'' & = & 2x & + & y & + & 1 \end{array}\right.$
   On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   On déterminer les éléments propres de A.
   $\chi_A(X) = (X-1)^2 - 16 = (X-1-4)(X-1+4) = (X-5)(X+3)$.
   On détermine alors les espaces propres :
   $E_5(A) = Vect \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $E_{-3}(A) = Vect \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   On en déduit que A est diagonalisable.
   On pose $P = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   Alors $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.
   Le système $\mathcal{S}$ est équivalent à $X'' = AX + B$.

On obtient $X''(t) = PDP^{-1}X(t) + B \iff P^{-1}X''(t) = DP^{-1}X(t) + P^{-1}B$.

On change de variable $Y = P^{-1}X = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$.

On obtient $Y'' = DY + P^{-1}B = \begin{pmatrix} 5x_1 \\ -3y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On obtient un système diagonal :

— $x_1'' = 5x_1 \iff x_1(t) = Ae^{\sqrt{5}t} + Be^{-\sqrt{5}t} : (A,B) \in \mathbb{R}^2$

— $y_1'' = -3y_1 + 1 \iff y_1(t) = \frac{1}{3} + C\cos\sqrt{3}t + D\sin\sqrt{3}t : (C,D) \in \mathbb{R}^2$

Finalement, la solution générale du système $\mathcal{S}$ est

$$X(t) = PY(t) : t \longmapsto \begin{pmatrix} 2x_1(t) - 2y_1(t) \\ x_1(t) + y_1(t) \end{pmatrix}.$$

2. $\mathcal{S} : \left\{\begin{array}{ccccccccc} x' & = & x & - & y & - & z & + & t \\ y' & = & -x & + & y & - & z & + & t \\ z' & = & -x & - & y & + & z & + & t \end{array}\right.$

On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\mathcal{S} \iff X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

On montre, classiquement, que A est diagonalisable et que A est semblable à la matrice $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On a $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Toute solution du système homogène $X'(t) = AX(t)$ s'écrit :

$$X : t \longmapsto C_1e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2e^{2t}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3e^{2t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3.$$

La fonction $X_p : t \longmapsto \begin{pmatrix} t-1 \\ t-1 \\ t-1 \end{pmatrix}$ est une solution particulière.

Toute solution de $\mathscr{S}$ s'écrit $X + X_p$ avec X écrit ci-dessus.

$\square$