TRAVAUX DIRIGÉS : Réduction

1 Réduction matricielle

Exercice 1: (Solution)

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ l'endomorphisme tel que :

$$E_2 = Vect(1,2) \quad ; \quad E_{-3} = Vect(1,1) \quad \text{où } E_\lambda = \ker(f - \lambda\, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}).$$

1. Montrer que f est diagonalisable et que f est un automorphisme.
2. Donner la trace, le déterminant et le polynôme caractéristique de f.
3. Calculer $f(2,3)$.
4. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de deux méthodes différentes.

Exercice 2: (Solution)

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que :

$$(f - 3\,\mathrm{id}_E) \circ (f + 2\,\mathrm{id}_E) = 0.$$

Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 3: (Solution)

Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4: (Solution)

Réduire les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \; ; \quad B = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 2 \\ 7 & 0 & 2 \\ -18 & 3 & -4 \end{pmatrix} \; ; \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5: (Solution)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & c & 2 & 0 \\ d & e & f & 2 \end{pmatrix}$ avec $(a,b,c,d,e,f) \in \mathbb{C}^5$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (a,b,c,d,e,f) pour que A soit diagonalisable.

Exercice 6: (Solution)

On note $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On souhaite montrer que A est diagonalisable.

1. On note $\chi_n(X) = \det(XI_n - A)$ le polynôme caractéristique de A (il s'agit donc d'un déterminant d'ordre n).
   Montrer que $\chi_n = (X-2)\chi_{n-1} - \chi_{n-2}$.
2. Calculer $\chi_n(2(1+\cos(\theta))$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ à l'aide de l'étude d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
3. Montrer alors que A possède n valeurs propres distinctes et conclure.

Exercice 7: (Solution)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $A_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & \frac{n+2}{n} & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer sans calculer son polynôme caractéristique que 1 et $1 + \frac{1}{n}$ sont des valeurs propres de A_n.
2. La matrice A_n est-elle diagonalisable ? inversible ?
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $B_n = A_1 A_2 \dots A_n$.
   La matrice B_n est-elle diagonalisable ? Inversible ?
   Si oui, déterminer B_n^{-1}.

Exercice 8: (Solution)

Soient $A, B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ telles que $B^2 = A$.

1. Montrer que (B diagonalisable $\Longrightarrow$ A diagonalisable).
   Le réciproque est-elle vraie ?
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & -5 \\ -5 & 3 & 3 \\ -5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.
   On cherche les matrices $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ vérifiant $B^2 = A$.
   (a) Montrer que A est diagonalisable.
   On note D une matrice diagonale semblable à A.
   (b) Donner quatre matrices $C \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $C^2 = D$.
   Le but de ce qui suit est de montrer que ces quatre matrices $C \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ sont les seules matrices vérifiant $C^2 = D$.
   (c) Soit $C \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $C^2 = D$.
      i. Montrer que $CD = DC$.
      ii. En déduire que C est diagonale.
      iii. Conclure.
   (d) En déduire toutes les matrices $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $B^2 = A$.

Exercice 9: (Solution)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par ses coefficients :

$$a_{i,j} = 1 \text{ si } i + j = n + 1 \text{ et } a_{i,j} = 0 \text{ sinon.}$$

1. Écrire la matrice A et calculer A^2.
2. Montrer que si $\lambda \in Sp(A)$ alors $\lambda^2 = 1$.
   En déduire que $Sp(A) \subset \{-1; 1\}$.
   Déterminer les espaces propres $E_{-1}(A)$ et $E_1(A)$.
3. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 10: (Solution)

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Calculer A^2, A^3.
   Montrer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A alors $\lambda^3 = 1$.
   En déduire un ensemble contenant $Sp(A)$.
2. Déterminer les valeurs propres de A ainsi que les espaces propres associés.
3. Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$.
   Diagonaliser la matrice $M = \begin{pmatrix} c & b & a \\ a & c & b \\ b & a & c \end{pmatrix}$.

Exercice 11: (Solution)

Soient $u, v, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = -2, v_0 = 1, w_0 = 5$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & 4u_n - 3v_n - 3w_n \\ v_{n+1} & = & 3_n - 2v_n - 3w_n \\ w_{n+1} & = & 3u_n - 3v_n - 2w_n \end{array} \right.$$

Déterminer le terme général u_n, v_n, w_n en fonction de n.

Exercice 12: (Solution)

Déterminer l'ensemble des suites u, v, w telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & v_n + w_n \\ v_{n+1} & = & u_n + w_n \\ w_{n+1} & = & u_n + v_n. \end{array} \right.$$

Exercice 13: (Solution)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = u_1 = u_2 = 1$ et

$$u_{n+3} = 45u_n - 39u_{n+1} + 11u_{n+2}.$$

On pose $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $U_{n+1} = AU_n$.
   Exprimer U_n en fonction de A et U_0.
2. Déterminer les valeurs propres et les espace propres de la matrice A.
   Est-elle diagonalisable ?
3. Montrer que A est semblable à la matrice triangulaire $T = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
4. Déterminer u_n en fonction de n.

Exercice 14: (Solution)

Soient $p, q \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $A = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix}$.

1. Déterminer deux matrices $A, B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $A = B + (1-p-q)C$ et $B + C = I_2$.
2. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. On a programmé une intelligence artificielle IA pour qu'elle dialogue avec deux symboles : 0 et 1.

   Mais le réseau neuronale de IA lui a permis de développer d'autres symboles par elle-même, que l'on ne sait pas interpréter.

   Lorsqu'à l'instant n l'intelligence IA affiche 0, alors IA affiche 1 à l'instant $n+1$ avec probabilité $p \in]0;1[$

   Lorsqu'à l'instant n l'intelligence IA affiche 1, alors IA affiche 0 à l'instant $n+1$ avec probabilité $q \in]0;1[$.

   On note u_n (resp. v_n) la probabilité qu'à l'instant n, l'intelligence IA affiche 0 (resp. 1).

   Quelle est la probabilité qu'à l'instant n, l'intelligence IA affiche autre chose que 0 ou 1 ?
4. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Exercice 15: (Solution)

On considère deux urnes.
Initialement, il y a deux boules blanches dans U_1 et deux noires dans U_2.
A chaque tirage, on prend de manière indépendante une boule dans U_1, une boule dans U_2 et on les échange.
On note X_k le nombre de boules blanches dans U_1 après le k-ième tirage.
On pose $X_0 = 2$.

1. Déterminer $X_k(\Omega)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

   On justifiera rigoureusement que $[X_k = x] \neq \varnothing$ pour tout $x \in X_k(\Omega)$.
2. On pose $Y_k = \begin{pmatrix} P(X_k = 0) \\ P(X_k = 1) \\ P(X_k = 2) \end{pmatrix}$.

   Déterminer une matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}, Y_{k+1} = AY_k$

   En déduire l'espérance de X_k.
3. Déterminer trois vecteurs propres de A notés Z_1, Z_2, Z_3, linéairement indépendants puis décomposer Y_0 dans cette base.
4. Montrer que $Y_k = A^k Y_0$. En déduire la loi de X_k.

Exercice 16: (Solution)

Soient A, B des matrices carrées à coefficients réels d'ordre n à coefficients réels.
On note f, g les endomorphismes canoniquement associés aux matrices A, B.
On suppose que A possède n valeurs propres réelles distinctes et que A et B commutent : $AB = BA$.

1. Montrer que tout vecteur propre de f est vecteur propre de g.

   En déduire qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ de vecteurs propres communs à f et g.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   Déterminer toutes les matrices $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $2M^2 + 5M = 3A$.

2 Réduction d'endomorphismes

Exercice 17: (Solution)

Soit $E = \mathbb{R}[X]$.
Pour tout $P \in E$, on pose $f(P) = (X+1)(X-3)P' - XP$.

1. Montrer que $f \in \mathscr{L}(E)$.
2. Montrer que si P est un polynôme propre pour f alors P est de degré 1.

   Déterminer alors les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

Exercice 18: (Solution)

Soit $E = \mathbb{R}[X]$
Pour tout $P \in E$, on pose $f(P) = (X-1)(X-2)P' - 2XP$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Montrer que si P est un polynôme propre pour f alors $\deg(P) = 2$.
3. Déterminer les éléments propres de φ.

Exercice 19: (Solution)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour tout $P \in E$, on pose $f(P) = X(1-X)P' + nXP$.

1. Montrer que $f \in \mathscr{L}(E)$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

   Résoudre l'équation différentielle $x(1-x)y'(x) + nxy(x) = \lambda y(x)$.
3. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

4. f est-elle diagonalisable ?

Exercice 20: (Solution)

On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}_n[X]$, $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$f(P) = nXP - (X^2 - 1)P'.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que la famille $(1, X-1, \dots, (X-1)^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
   Déterminer la matrice de f dans cette base.
3. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 21: (Solution)

Soient $A = \begin{pmatrix} 5 & -17 & 25 \\ 2 & -9 & 16 \\ 1 & -5 & 9 \end{pmatrix}$ et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associé à A.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A et montrer que A n'est pas diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.
2. Le but de ce qui suit est de trigonaliser la matrice A.
   (a) Soit $u_1 \in E_1(f)$ et $u_2 \in E_2(f)$ non nuls.
   Déterminer un vecteur u_3 de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ telle que $\mathscr{B} = (u_1, u_2, u_3)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$.
   Déterminer alors $Mat_{\mathscr{B}}(f)$.
   (b) Soit $v_1 \in E_2(A)$ et $v_3 \in E_1(A)$ non nuls.
   Déterminer $v_2 \in \mathbb{R}^3$ tel que $\mathscr{C} = (v_1, v_2, v_3)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$ telle que $Mat_{\mathscr{C}}(f)$ soit de la forme

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 22: (Solution)

On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On note $E = \{aI_3 + bA + CA^2 : (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et que $A^3 \in E$.
   Montrer que $\mathscr{B} = (I_3, A, A^2)$ est une base de E.
2. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
3. Sans calculer ses valeurs propres, dire si A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
4. Même question dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.
5. On définit Φ_A en posant $\forall M \in E, \Phi_A(M) = AM$.
   Montrer que Φ_A est un endomorphisme de E.
   Donner sa matrice dans $\mathscr{B}$.
6. On souhaite montrer que Φ_A n'est pas diagonalisable. On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe une base $\mathscr{B}'$ de E dans laquelle la matrice de Φ_A est une matrice diagonale D.
   (a) Justifier que les coefficients diagonaux de D sont réels.
   (b) En déduire une contradiction.

Exercice 23: (Solution)

Pour $k \in [\![0, 4]\!]$ soit la fonction réelle d'une variable réelle $f_k : x \mapsto e^{kx}$.

1. On note $E = Vect(f_0, f_1, f_2, f_3, f_4)$. Déterminer la dimension de E.
2. Soit $\varphi : f \mapsto f'' - 3f' + 2f$. Vérifier que $\varphi \in \mathscr{L}(E)$ et déterminer les éléments propres de φ.

Exercice 24: (Solution)

Soit $E = \mathscr{C}^0([0;1], \mathbb{R})$. Pour tout $f \in E$, on définie la fonction g par

$$\forall x \in [0;1], g(x) = \int_0^1 \inf(x,t) f(t) dt.$$

On note enfin T l'application définie sur E par $T(f) = g$.

1. Montrer que T est un endomorphisme de E.
2. Soit $f \in E$. Montrer que si $T(f) = 0$ alors $\displaystyle\int_x^1 f(t)dt = 0$.
   En déduire que f est nulle et que 0 n'est pas valeur propre pour T.
3. Soit $\lambda \neq 0$ et soit $f \in E$ tel que $T(f) = \lambda f$.
   Montrer que f est solution de l'équation différentielle du second ordre :

$$\lambda y''(x) + y(x) = 0.$$

   Montrer que $f(0) = 0$ et $f'(1) = 0$.
4. Montrer que $\lambda < 0$ n'est jamais valeur propre.
5. Déterminer les valeurs propres de T et les vecteurs propres associés.

SOLUTIONS TRAVAUX DIRIGÉS : Réduction

Solution Exercice 1.

1. On a $\dim \mathbb{R}^2 = 2 = \dim E_2 + \dim E_{-3}$.
   Par le cours on en déduit que $\mathbb{R}^2 = E_2 \oplus E_{-3}$.
   Par conséquent, f est diagonalisable et $Sp(f) = \{2, -3\}$.
   La matrice de f dans la base de diagonalisation $\mathscr{B} = ((1,2),(1,1))$ est diagonale : $Mat_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.
   De plus, 0 n'est pas valeur propre donc $\ker(f) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$: f est donc injective donc bijective car $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie : $f \in GL(\mathbb{R}^2)$ est un automorphisme.
2. La trace est la somme des valeurs propres $\mathrm{Tr}(f) = 2 - 3 = -1$.
   Le déterminant est le produit des valeurs propres : $\det(f) = -6$.
   Le polynôme caractéristique :
   $\chi_f(X) = X^2 - \mathrm{Tr}(f)X + (-1)^2 \det(f) = X^2 + X - 6 = (X-2)(X+3)$.
   On peut également le retrouver avec la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$:
   $\chi_f(X) = \begin{vmatrix} X-2 & 0 \\ 0 & X+3 \end{vmatrix} = (X-2)(X+3)$.
3. $\mathscr{B} = ((1,2),(1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
   Il existe un unique $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(2,3) = x(1,2)+y(1,1) = (x+y, 2x+y)$.
   On trouve $x = y = 1$.
   Ainsi, $f(2,3) = f((1,2)+(1,1)) = f(1,2)+f(1,1) = 2(1,2) - 3(1,1) = (-1,1)$.
4. **Première méthode.**
   On note $\mathscr{B}_c = ((1,0),(0,1))$.
   On calcule
   — $f(1,0) = f(-(1,2)+2(1,1)) = -f(1,2)+2f(1,1) = -2(1,2)+2(-3(1,1))$
   $f(1,0) = (-8,-10)$
   — $f(0,1) = f((1,2)-(1,1)) = f(1,2) - f(1,1) = 2(1,2) - (-3(1,1))$
   $f(0,1) = (5,7)$.
   Ainsi, $Mat_{\mathscr{B}_c}(f) = \begin{pmatrix} -8 & 5 \\ -10 & 7 \end{pmatrix}$.
   Seconde méthode.
   On utilise la formule du changement de base.
   La matrice de passage $P = P_{\mathscr{B}_c \to \mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $P^{-1} = -\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.
   On a $A = PDP^{-1}$ avec $A = Mat_{\mathscr{B}_c}(f)$ et $D = Mat_{\mathscr{B}}(f)$.
   On en déduit :
$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -8 & 5 \\ -10 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

Solution Exercice 2. Montrons que $E = \ker(f - 2\,\mathrm{id}_E) \oplus \ker(f + 3\,\mathrm{id}_E)$.

— $\ker(f - 2\,\mathrm{id}_E) \cap \ker(f + 3\,\mathrm{id}_E) = \{0_E\}$.
En effet, si $x \in \ker(f - 2\,\mathrm{id}_E) \cap \ker(f + 3\,\mathrm{id}_E)$ alors $f(x) = 2x$ et $f(x) = -3x$ donc $2x = -3x \iff 5x = 0_E \iff x = 0_E$.
— Tout vecteur $x \in E$ s'écrit
$$x = \frac{1}{5}\underbrace{(f(x)+2x)}_{\in \ker(f-3id_E)} - \frac{1}{5}\underbrace{(f(x)-3x)}_{\in\ker(f+2id_E)}$$
car
∗ $(f - 3id_E)(f(x)+2x) = (f - 3id_E) \circ (f + 2id_E)(x) = 0$
∗ $(f + 2id_E)(f(x)-3x) = (f + 2id_E) \circ (f - 3id_E)(x) = 0$

On en déduit que $E = \ker(f - 2\,\mathrm{id}_E) \oplus \ker(f + 3\,\mathrm{id}_E)$: par conséquent f est diagonalisable.

Il existe une base de vecteurs propres $\mathscr{B}$ dans laquelle la matrice de f est de la forme :
$$\begin{pmatrix} -2 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & -2 & & & \\ & & & 3 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 3 \end{pmatrix}.$$

On note $\chi_f(X) = (X+2)^{m(-2)}(X-3)^{m(3)}$: $m(3) + m(-2) = n$.

Le nombre de valeurs propres -2 est égal à la dimension de E_{-2} et puisque f est diagonalisable $\dim E_{-2} = m(-2)$.

De même, le nombre de coefficients 3 est égal à $\dim E_3 = m(3)$. □

Solution Exercice 3.

— $\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-1 & 0 & -1 \\ 0 & X-1 & 0 \\ -1 & 0 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)\begin{vmatrix} X-1 & -1 \\ -1 & X-1 \end{vmatrix}$
$\chi_A(X) = (X-1)[(X-1)^2 - 1] = X(X-1)(X-2)$.

— $Sp(A)=\{1,2,3\}$.
A est la matrice représentative de $\mathbb{R}^3$, $\dim(\mathbb{R}^3)=3$ et f possède 3 valeurs propres distinctes.
Ainsi, f (donc A) est diagonalisable.
La matrice A est donc semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et chaque espace propre est précisément de dimension 1.

— On détermine maintenant les espaces propres de A.
  * $E_0(f)=\ker(f)$. Pour cela, on résout l'équation $AX=0$. On constante que $X=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est solution.

    Au final, l'espace propre de dimension 1 : $E_0(A)=Vect\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $E_0(f)=\ker(f)=Vect(-1,0,1)$.
  * On trouve de même $E_1(f)=Vect(0,1,0)$.
  * $E_2(f)=Vect(1,0,1)$.

En conclusion $A=PDP^{-1}$ avec :

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

□

Solution Exercice 4.

1. $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

— $\chi_A(X)=\begin{vmatrix} X-5 & -1 & 1 \\ -2 & X-4 & 2 \\ -1 & 1 & X-3 \end{vmatrix}$

$$\chi_A(X)=\begin{vmatrix} X-5 & -1 & X-4 \\ -2 & X-4 & 0 \\ -1 & 1 & X-4 \end{vmatrix} (C_3 \leftarrow C_3+C_1)$$

$$\chi_A(X)=(X-4)\begin{vmatrix} X-5 & -1 & 1 \\ -2 & X-4 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(X-4)\begin{vmatrix} X-5 & -1 & 1 \\ -2 & X-4 & 0 \\ -X+4 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\chi_A(X)=(X-4)\begin{vmatrix} -2 & X-4 \\ -X+4 & 2 \end{vmatrix}=(X-4)\begin{vmatrix} -2 & X-2 \\ -X+4 & X-2 \end{vmatrix}$$

$$\chi_A(X)=(X-4)(X-2)\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4-X & 1 \end{vmatrix}=(X-4)(X-2)\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4-X & 1 \end{vmatrix}$$

$$\chi_A(X)=(X-2)(X-4)\begin{vmatrix} X-6 & 0 \\ 4-X & 1 \end{vmatrix}=(X-2)(X-4)(X-6).$$

On a donc $Sp(A)=\{2,4,6\}$.

La matrice A est diagonalisable car elle possède trois valeurs propres distinctes. A est semblable à la matrice $D=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Déterminons la matrice de passage $P=P_{\mathscr{B}_c\to\mathscr{B}}$ de la base canonique une base de vecteurs propres $\mathscr{B}$.

— $E_2(A)=\{X\in\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) : AX=2X\}$ est de dimension 1.
On échelonne la matrice $A-2I_2=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
On en déduit que $E_2(A)=Vect\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

— On trouve de même $E_4(A)=Vect\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ car $A-4I_3=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

— $E_6(A)=Vect\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ car $A-6I_3=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

On en déduit que $A=PDP^{-1}$ avec
$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Remarques

Si l'on note f l'endomorphisme canoniquement associé à A on vient de montrer qu'une base de vecteurs propres pour f est donnée par $\mathscr{B}=((0,1,1),(1,0,1),(1,1,0))$ et que
— $\ker(f-2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})=Vect(0,1,1) : f(0,1,1)=2(0,1,1)$.
— $\ker(f-4\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})=Vect(1,0,1) : f(1,0,1)=4(1,0,1)$.
— $\ker(f-6\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})=Vect(1,1,0) : f(1,1,0)=6(1,1,0)$.

2. $B=\begin{pmatrix} 8 & -1 & 2 \\ 7 & 0 & 2 \\ -18 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

— $\chi_B(X) = \begin{vmatrix} X-8 & 1 & -2 \\ -7 & X & -2 \\ 18 & -3 & X+4 \end{vmatrix}$

$\chi_B(X) = \begin{vmatrix} X-9 & 1 & -2 \\ X-9 & X & -2 \\ X+19 & -3 & X+4 \end{vmatrix} (C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3)$

$\chi_B(X) = \begin{vmatrix} X-9 & 1 & -2 \\ 0 & X-1 & 0 \\ X+19 & -3 & X+4 \end{vmatrix} (L_2 \leftarrow L_2 - L_1)$

$\chi_B(X) = (X-1)\begin{vmatrix} X-9 & -2 \\ X+19 & X+4 \end{vmatrix}$

$\chi_B(X) = (X-1)[(X-9)(X+4) + 2(X+19)]$

$\chi_B(X) = (X-1)(X^2 - 3X + 2) = (X-1)^2(X-2)$.

— $E_1(B) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) : BX = X\}$

On échelonne $B - I_3 = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 \\ 7 & -1 & 2 \\ -18 & 3 & -5 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -18 & 3 & -5 \end{pmatrix}$.

L'équation $B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est donc équivalente à

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcll} 7x & - & y & + & 2z & = & 0 & (L_1) \\ -18x & + & 3y & - & 5z & = & 0 & (L_2) \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 7x & - & y & + & 2z & = & 0 & (L_1) \\ & & 3y & + & z & = & 0 & (7L_2 + 18L_1) \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} 7x & = & -2z - \frac{z}{3} & (L_1) \\ y & = & -\frac{z}{3} & (7L_2 + 18L_1) \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -\frac{z}{3} \\ y & = & -\frac{z}{3} \end{array}\right.$$

On en déduit que $E_1(B) = Vect\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

On a $m(1) = 2 > \dim E_1(B)$ donc B n'est pas diagonalisable.

En revanche, χ_B est scindé donc B est trigonalisable sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

— $E_2(B) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) : BX = 2X\}$.

Puisque $m(2) = 1$ on a $\dim E_2(B) = 1$. On cherche donc un seul vecteur propre de B associé à la valeur propre 2.

On résout pour cela l'équation $BX = 2X$.

On échelonne la matrice $B - 2I_3 = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 7 & -2 & 2 \\ -18 & 3 & -6 \end{pmatrix}$:

$$B - 2I_2 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 7 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (L_3 + 3L_1) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'équation $BX = 2X$ est donc équivalente à

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 6x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ & - & 5y & - & 2z & = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -\frac{2z}{5} \\ y & = & -\frac{2z}{5} \end{array}\right.$$

Par conséquent $E_2(B) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

3. On pose $X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et on complète pour obtenir une base (X_1, X_2, X_3) de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ avec $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   On note (e_1, e_2, e_3) les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ correspondants.

   On a $BX_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ -18 \end{pmatrix} = 3X_1 + X_2 + X_3$.

   Si l'on note g l'endomorphisme canonique associé à B, on a donc $g(e_3) = 3e_1 + e_2 + e_3$.

   Dans la base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ on a donc

$$Mat_{\mathscr{B}}(g) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

   — $\chi_C(X) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ 1 & X & -1 \\ 0 & 1 & X \end{vmatrix} = X\begin{vmatrix} X & -1 \\ 1 & X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & X \end{vmatrix}$

   $\chi_C(X) = X(X^2+1) + X = X(X^2+2)$.

   — χ_C n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ donc C n'est pas trigonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ donc a fortiori n'est pas diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

   — En revanche, χ_C est scindé sur $\mathbb{C}$: $\chi_C(X) = X(X - \sqrt{2}i)(X + \sqrt{2}i)$ et à racines simples.

   Par conséquent, C possède trois valeurs propres complexes distinctes donc C est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

   — Chaque espace propre est de dimension 1.

$\ast$ $E_0(C) = Vect\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\ast$ $E_{i\sqrt{2}}(C) = Vect\begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$.

En effet, $A - i\sqrt{2}I_3 = \begin{pmatrix} -i\sqrt{2} & 1 & 0 \\ -1 & -i\sqrt{2} & 1 \\ 0 & -1 & -i\sqrt{2} \end{pmatrix}$ donc

$(A - i\sqrt{2}I_3)\begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

— De manière analogue, $E_{-i\sqrt{2}} = Vect\begin{pmatrix} -1 \\ i\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

On en déduit que $C = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & i\sqrt{2} & i\sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -i\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

□

Solution Exercice 5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & c & 2 & 0 \\ d & e & f & 2 \end{pmatrix}$.

Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(X) = (X-1)^2(X-2)^2$.
La matrice A est diagonalisable si et seulement si $\dim E_1(A) = \dim E_2(A) = 2$.
Notons f l'endomorphisme canoniquement associé à A.
On a $E_1(f) = \ker(f - id_{\mathbb{R}^4})$ et $E_2(f) = \ker(f - 2id_{\mathbb{R}^4})$.
Par conséquent A est diagonalisable $\iff \mathrm{rg}(A - I_4) = \mathrm{rg}(A - 2I_4) = 2$.

— On a $A - I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 1 & 0 \\ d & e & f & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{rg}(A - I_2) = \mathrm{rg}({}^t(A - I_2))$.

Or la matrice ${}^t(A - I_4) = \begin{pmatrix} 0 & a & b & d \\ 0 & 0 & c & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est échelonnée.

Elle est de rang 2 si et seulement si $a = b = c = d = e = 0$.

— $A - 2I_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 \\ d & e & f & 0 \end{pmatrix}$.

Or ${}^t(A-2I_4) = \begin{pmatrix} -1 & a & b & d \\ 0 & -1 & c & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 2 si et seulement si $f = 0$.

Au final A est diagonalisable si et seulement si $a = b = c = d = e = f = 0$. □

Solution Exercice 6. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 2 \end{pmatrix}$

— $\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-2 & -1 & & (0) \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ (0) & & -1 & X-2 \end{vmatrix}_{[n]}$.

On note $A = A_n \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et χ_n le polynôme caractéristique de cette matrice.
On développe par rapport à la première colonne :

$$\chi_n(X) = (X-2)\begin{vmatrix} X-2 & -1 & & (0) \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ (0) & & -1 & X-2 \end{vmatrix}_{[n-1]}$$

$$+ \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & \dots & & 0 \\ -1 & X-2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & X-2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & & & -1 & X-2 \end{vmatrix}_{[n-1]}$$

$$= (X-2)\chi_{n-1} - \chi_{n-2}$$

Ainsi, $\chi_n = (X-2)\chi_{n-1} - \chi_{n-2}$.

— On calcule $\chi_n(2(1+\cos\theta))$. Notons $u_n = \chi_n(2(1+\cos\theta))$.
Ainsi, $u_{n+2} = (2(1+\cos\theta) - 2)u_{n+1} - u_n = 2\cos\theta u_{n+1} - u_n$.
L'équation caractéristique $r^2 - 2\cos\theta r + 1 = 0$ a pour discriminant
$\Delta = 4(\cos^2\theta - 1) = -4\sin^2\theta = (2i\sin\theta)^2$.
Les solutions de l'équation caractéristique sont
$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ et $\cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}$ de même module égale à 1.
On en déduit qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \geqslant 1$:

$$u_n = \alpha\cos n\theta + \beta\sin n\theta.$$

On a

* $u_1 = 2(1+\cos\theta) - 2 = 2\cos\theta$ et
* $u_2 = \begin{vmatrix} 2(1+\cos\theta)-2 & -1 \\ -1 & 2(1+\cos\theta)-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & -1 \\ -1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}$

  $u_2 = 4\cos^2\theta - 1$.

Par conséquent,

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \alpha\cos\theta & + & \beta\sin\theta & = & 2\cos\theta \\ \alpha\cos 2\theta & + & \beta\sin 2\theta & = & 4\cos^2\theta - 1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{cccccl} \alpha\cos\theta & + & \beta\sin\theta & = & 2\cos\theta & (L_1) \\ \alpha\cos 2\theta & + & 2\beta\sin\theta\cos\theta & = & 4\cos^2\theta - 1 & (L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{cccccl} \alpha\cos\theta & + & \beta\sin\theta & = & 2\cos\theta & (L_1) \\ \alpha\cos 2\theta & + & 2\beta\sin\theta\cos\theta & = & 4\cos^2\theta - 1 & (L_2 - 2\cos\theta L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccc} \alpha\cos\theta & + & \beta\sin\theta & = & 2\cos\theta \\ \alpha(\cos 2\theta - 2\cos^2\theta) & & & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccc} \alpha\cos\theta & + & \beta\sin\theta & = & 2\cos\theta \\ -\alpha & & & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccc} \cos\theta & + & \beta\sin\theta & = & 2\cos\theta \\ \alpha & & & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccc} \beta\sin\theta & = & \cos\theta \\ \alpha & = & 1 \end{array}\right.$$

Si $\theta = 0[\pi]$ alors $u_n = (-1)^n$. On suppose maintenant $\theta \neq 0[\pi]$.

On obtient donc $(\alpha,\beta) = \left(1, \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$

Par conséquent, $u_n = \cos n\theta + \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\sin n\theta = \dfrac{\sin n\theta\cos\theta + \sin\theta\cos n\theta}{\sin\theta}$.

Par conséquent, $\forall n \geqslant 1, u_n = \dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}$.

— $\lambda = 2(1+\cos\theta)$ est valeur propre de $A = A_n$ si et seulement si $\chi_n(\lambda) = 0$ c'est-à-dire :

$$\frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta} = 0.$$

En posant pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\theta_k = \dfrac{k\pi}{n+1} \in]0;\pi[$, on obtient

$$\chi_n(2(1+\theta_k)) = \frac{\sin\left((n+1)\frac{k\pi}{n+1}\right)}{\sin\theta_k} = 0.$$

Les scalaires $\lambda_k = 2(1+\cos\frac{k\pi}{n+1})$ sont distincts et sont tous des valeurs propres de A.

Par conséquent $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ possède exactement n valeurs propres distinctes : A est donc diagonalisable.

□

Solution Exercice 7. On considère $A_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & \frac{n+2}{n} & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. **Première version.**

   — $A_n - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1/n & 1/n \\ -1/n & 2/n & 1/n \\ 1/n & -1/n & 0 \end{pmatrix}$.

   En effectuant l'opération $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 - C_3$ on obtient la matrice : $\begin{pmatrix} 0 & 1/n & 1/n \\ 0 & 2/n & 1/n \\ 0 & -1/n & 0 \end{pmatrix}$ qui n'est pas inversible car de rang 2.

   (les deux colonnes non nulles de la matrice obtenue ne sont pas proportionnelles).

   Ainsi, $A - I_3$ n'est pas inversible et par conséquent, $\lambda = 1$ est une valeur propre de A.

   Puisque $\mathrm{rg}(A - I_3) = 2$ on en déduit par le théorème du rang que $\dim E_1(A) = 3 - 2 = 1$.

   — $A - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) I_3 = \begin{pmatrix} -1/n & 1/n & 1/n \\ -1/n & 1/n & 1/n \\ 1/n & -1/n & -1/n \end{pmatrix}$.

   En effectuant les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ on obtient la matrice :

   $\begin{pmatrix} -1/n & 1/n & 1/n \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Ainsi $\mathrm{rg}\left(A - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) I_3\right) = 1$.

   En particulier $A - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) I_3$ est non inversible donc $\lambda = 1 + \frac{1}{n}$ est une valeur propres de A.

   Puisque $\mathrm{rg}\left(A - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) I_3\right) = 1$ on en déduit que $\dim E_{1+\frac{1}{n}} = 2$.

   Seconde version.

   — On pose $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Alors $A_nX_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1/n & 1/n \\ -1/n & (n+2)/n & 1/n \\ 1/n & -1/n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1/n \\ 1+1/n \\ 0 \end{pmatrix}$

$A_nX_1 = \left(1+\dfrac{1}{n}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right) X_1.$

— On pose maintenant $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Alors $A_nX_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1/n & 1/n \\ -1/n & (n+2)/n & 1/n \\ 1/n & -1/n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1/n \\ 0 \\ 1+1/n \end{pmatrix}$

$A_nX_2 = \left(1+\dfrac{1}{n}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right) X_2.$

— On note enfin $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Alors $A_nX_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1/n & 1/n \\ -1/n & (n+2)/n & 1/n \\ 1/n & -1/n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$A_nX_3 = X_3.$

2. D'après ce qui précède, $\dim E_1(A) + \dim E_{1+\frac{1}{n}} = 1+2 = 3$ donc $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est diagonalisable.

   De plus 0 n'est pas valeur propre donc $\{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) : AX = 0\} = \{0\}$.

   Par conséquent A est inversible.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $B_n = A_1A_2 \dots A_n$.

   Chacune des matrices $A_1, \dots, A_n$ est diagonalisable via la même matrice de changement de base $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\forall k \in [\![1,n]\!], A_k = PD_kP^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k+1}{k} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k+1}{k} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

   En effet, les valeurs propres de A_k sont 1 et $1 + \frac{1}{k} = \frac{k+1}{k}$.

   On en déduit que

$$\begin{aligned} B_n &= A_1A_2\dots A_n = (PD_1P^{-1})(PD_2P^{-1})\dots(PD_nP^{-1}) \\ &= PD_1D_2\dots D_nP^{-1} \\ &= P \prod_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k+1}{k} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k+1}{k} \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k} & 0 \\ 0 & 0 & \prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k} \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & n+1 & 0 \\ 0 & 0 & n+1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n & n \\ -n & 2n+1 & n \\ n & -n & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

   La matrice B_n est inversible par produit de matrices inversibles.
   On trouve

$$\begin{aligned} B_n^{-1} &= \left(P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & n+1 & 0 \\ 0 & 0 & n+1 \end{pmatrix} P^{-1} \right)^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1+\frac{1}{n+1} & -1+\frac{1}{n+1} \\ 1-\frac{1}{n+1} & -1+\frac{2}{n+1} & -1+\frac{1}{n+1} \\ -1+\frac{1}{n+1} & 1-\frac{1}{n+1} & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

Solution Exercice 8. Soient $A, B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ telles que $B^2 = A$.

1. L'équivalence A diagonalisable $\iff$ B diagonalisable est-elle vraie ?
   — Si B est diagonalisable alors il existe une matrice $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $B = P\Delta P^{-1}$ avec Δ diagonale.
   Alors $A = B^2 = (P\Delta P^{-1})^2 = P\Delta^2P^{-1}$.
   La matrice $D = \Delta^2$ est diagonale.
   Ainsi, $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale : A est diagonalisable.
   On en déduit que (B diagonalisable $\Longrightarrow A = B^2$ est diagonalisable).
   — La matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable car $\chi_B(X) = X^3$ mais $E_0(B)$ est de dimension $2 < 3 = m(3)$.

En revanche $A = B^2 = 0$ est diagonalisable (diagonale).
Donc B^2 diagonalisable n'implique pas que B soit diagonalisable.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & -5 \\ -5 & 3 & 3 \\ -5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

On cherche les matrices $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ vérifiant $B^2 = A$.

(a) Montrons que A est diagonalisable.

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-11 & 5 & 5 \\ 5 & X-3 & -3 \\ 5 & -3 & X-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-1 & 5 & 5 \\ X-1 & X-3 & -3 \\ X-1 & -3 & X-3 \end{vmatrix}$$

où nous avons effectué l'opération $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$.

Ainsi :

$$\chi_A(X) = (X-1)\begin{vmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 1 & X-3 & -3 \\ 1 & -3 & X-3 \end{vmatrix} = (X-1)\begin{vmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 0 & X-8 & -8 \\ 0 & -8 & X-8 \end{vmatrix}$$

$\chi_A(X) = (X-1)[(X-8)^2 - 64] = (X-1)[(X-8-8)(X-8+8)]$

$\chi_A(X) = X(X-1)(X-16)$.

$Sp(A) = \{0, 1, 16\}$: la matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ possède donc 3 valeurs propres distinctes.

Par conséquent A est diagonalisable semblable à la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$.

(b) Les quatre matrices $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 4\epsilon' \end{pmatrix}$ avec $\epsilon, \epsilon' = \pm 1$ conviennent.

(c) Soit $C \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $C^2 = D$.

i. On a $CD = CC^2 = C^3 = C^2C = DC$.

ii. On note $C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$.

On calcule

$$CD = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b & 16c \\ 0 & e & 16f \\ 0 & h & 16i \end{pmatrix}$$

$$DC = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ 16g & 16h & 16i \end{pmatrix}.$$

Puisque $CD = DC$, par identification des coefficients, on trouve $b = c = d = f = g = h = 0$: la matrice C est donc diagonale.

iii. Les seules matrices $C \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $C^2 = D$ sont donc diagonales et les coefficients diagonaux vérifient $c_{ii}^2 = d_{ii}$.

Ainsi $c_{11} = 0$, $c_{22} = \pm 1$ et $c_{33} = \pm 4$.

Les seules matrices vérifiant $C^2 = D$ sont donc les matrices décrites à la question 2(b).

(d) Déduisons-en toutes les matrices $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $B^2 = A$.

Si B convient alors $B^2 = A = PDP^{-1} \iff D = P^{-1}B^2P = (P^{-1}BP)^2$.

Par conséquent $P^{-1}BP$ est l'une des quatre matrices $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 4 \end{pmatrix}$.

Au final, B est l'une des quatre matrices : $P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 4 \end{pmatrix}P^{-1}$.

Les espaces propres de A :

* $E_0(A) = Vect\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,
* $E_1(A) = Vect\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,
* $E_4(A) = Vect\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

donnent la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient les quatre matrices $P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 4 \end{pmatrix}P^{-1}$:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 & -5 & -5 \\ -5 & 1 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -7 & 5 & 5 \\ 5 & -1 & -1 \\ 5 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

□

Solution Exercice 9.

1. $A = \begin{pmatrix} (0) & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & (0) \end{pmatrix}$.

   Notons f l'endomorphisme canoniquement associé à f c'est-à-dire : $A = Mat_{\mathscr{B}}(f)$ car $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

   La matrice A donne pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $f(e_k) = e_{n-(k-1)}$.

   Ainsi, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\begin{aligned} f^2(e_k) &= f \circ f(e_k) = f(f(e_k)) \\ &= f(e_{n-(k-1)}) = e_{n-[(n-(k-1))-1]} = e_k \end{aligned}$$

   Par conséquent $f^2 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ donc $A^2 = I_n$.

2. — Soit $\lambda \in Sp(A)$. Il existe $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$.
   Alors $X = I_n X = A^2 X = A(AX) = \lambda AX = \lambda^2 X$.
   On obtient $(\lambda^2 - 1)X = 0$.
   Puisque $X \neq 0$ on obtient $\lambda^2 - 1 = 0$ c'est-à-dire : $\lambda = \pm 1$.
   On en déduit que $Sp(A) \subset \{-1; 1\}$.

   — Déterminons les espaces propres $E_{-1}(A)$ et $E_1(A)$.

   * $E_1(A) = \{X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) : AX = X\}$.

     On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

$$AX = X \iff \begin{cases} x_n &= x_1 \\ x_{n-1} &= x_2 \\ & \vdots \\ x_1 &= x_n \end{cases}$$

     — Si n est pair, on obtient un espace de dimension $n/2$:

$$E_1(A) = Vect \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

     — Si n est impair, on obtient un espace de dimension $\frac{n-1}{2} + 1 = \frac{n+1}{2}$:

$$E_1(A) = Vect \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   * $E_{-1}(A) = \{X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) : AX = -X\}$.

     On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

$$AX = -X \iff \begin{cases} x_n &= -x_1 \\ x_{n-1} &= -x_2 \\ & \vdots \\ x_1 &= -x_n \end{cases}$$

     — Si n est pair, on obtient un espace de dimension $\frac{n}{2}$:

$$E_{-1}(A) = Vect \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

     — Si n est impair, on obtient un espace de dimension $\frac{n-1}{2}$:

$$E_{-1}(A) = Vect \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. La matrice A est diagonalisable car
   — Si n est pair $\dim E_1(A) + \dim E_{-1}(A) = \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$.
   — Si n est impair, $\dim E_1(A) + \dim E_{-1}(A) = \frac{n+1}{2} + \frac{n-1}{2} = n$.
   Dans les deux cas, $\dim E_1(A) + \dim E_{-1}(A) = n$ donc A est diagonalisable.

□

Solution Exercice 10. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3 = I_3$.
   Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A : il existe $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$. ($X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$).
   On a $AX = \lambda X$ donc $A^2X = \lambda AX = \lambda^2 X$ et $A^3X = \lambda^3 X$.
   Mais $A^3 = I_3$ donc $X = \lambda^3 X \iff (\lambda^3 - 1)X = 0 \iff \lambda^3 = 1$ car $X \neq 0$.
   Par conséquent si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de A alors λ est une racine 3-ième de l'unité.
   On en déduit que $Sp(A) \subset \{1, j, j^2\}$.
2. — $AX = X \iff \left\{\begin{array}{rcl} x_3 &=& x_1 \\ x_1 &=& x_2 \\ x_2 &=& x_3 \end{array}\right.$. Ainsi, $E_1(A) = Vect \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   — $AX = jX \iff \left\{\begin{array}{rcl} x_3 &=& jx_1 \\ x_1 &=& jx_2 \\ x_2 &=& jx_3 \end{array}\right.$. Ainsi, $E_j(A) = Vect \begin{pmatrix} j^2 \\ j \\ 1 \end{pmatrix}$.
   — $AX = j^2X \iff \left\{\begin{array}{rcl} x_3 &=& j^2x_1 \\ x_1 &=& j^2x_2 \\ x_2 &=& j^2x_3 \end{array}\right.$. Ainsi, $E_{j^2}(A) = Vect \begin{pmatrix} j \\ j^2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   Par conséquent $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ possède 3 valeurs propres complexes distinctes : A est donc diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.
   On note $A = PDP^{-1}$ avec
   $$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{C}).$$
3. Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$.
   On constante que $M = \begin{pmatrix} c & b & a \\ a & c & b \\ b & a & c \end{pmatrix} = aA + bA^2 + cA^3 = aA + bA^2 + cI_3$.
   Or $A = PDP^{-1}$ donc $A^2 = (PDP^{-1})^2 = PD^2P^{-1}$.
   On obtient $M = aPDP^{-1} + bPD^2P^{-1} + cPP^{-1}$.
   Par suite,
   $M = P(aD + bD^2 + cI_3)P^{-1}$
   $M = P\left(a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j^2 & 0 \\ 0 & 0 & j \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)P^{-1}$

   Finalement,
   $$M = P\begin{pmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 0 & aj + bj^2 + c & 0 \\ 0 & 0 & aj^2 + bj + c \end{pmatrix}P^{-1}.$$

□

Solution Exercice 11. $u_0 = -2, v_0 = 1, w_0 = 5$ et
$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\{\begin{array}{rcl} u_{n+1} &=& 4u_n - 3v_n - 3w_n \\ v_{n+1} &=& 3_n - 2v_n - 3w_n \\ w_{n+1} &=& 3u_n - 3v_n - 2w_n \end{array}\right.$$

On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ vérifie la relation de récurrence :
$$X_{n+1} = AX_n \qquad \text{avec } A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 3 & -2 & -3 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

On obtient alors par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^nX_0$.
On réduit la matrice A pour déterminer A^n.

— $\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-4 & 3 & 3 \\ -3 & X+2 & 3 \\ -3 & 3 & X+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X+2 & 3 & 3 \\ X+2 & X+2 & 3 \\ X+2 & 3 & X+2 \end{vmatrix}$
  $(C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3)$
  $\chi_A(X) = (X+2)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & X+2 & 3 \\ 1 & 3 & X+2 \end{vmatrix} = (X+2)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & X-1 & 0 \\ 0 & 0 & X-1 \end{vmatrix}$
  $\chi_A(X) = (X+2)(X-1)^2$.
  Ainsi, $Sp(A) = \{1; 2\}$ avec $m(1) = 2$ et $m(-2) = 1$.
  — $E_1(X) = \{X \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) : AX = X\}$.
    On vérifie facilement que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_1(A)$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_1(A)$.
    Puisque $1 \leqslant \dim E_1(A) \leqslant 2 = m(1)$ on en déduit que $E_1(A)$ est de dimension 2.
    Une base est donnée par (X_1, X_2) où X_1, X_2 sont les vecteurs propres non colinéaires $X_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. $E_1(A) = Vect(X_1, X_2)$.
  — On sait que $\dim E_{-2}(A)$ est de dimension 1 car $m(-2) = 1$.

De plus $AX = -2X$ avec $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi $E_{-2}(A) = Vect \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On note $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

— La famille (X_1, X_2, X_3) est donc une base de vecteurs propres de $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui est donc diagonalisable.
Ainsi, $A = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

— On en déduit alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = A^n X_0 = (PDP^{-1})^n X_0 \underset{(*)}{=} PD^n P^{-1} X_0 \quad [(*) \text{ récurrence.}]$$

Ainsi,
$X_n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix} P^{-1} X_0.$
Notons qu'il est inutile de calculer P^{-1}. Il suffit de poser $Y_n = P^{-1} X_n$.
Puisqu'on a $P^{-1} X_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix} P^{-1} X_0$, on obtient
$P^{-1} X_n = Y_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix} Y_0$ puis $X_n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix} Y_0$.
Il reste à calculer $Y_0 = P^{-1} X_0 \iff X_0 = PY_0$.
En notant $Y_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ on trouve puisque $X_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} a & + & b & + & c & = & -2 \\ a & & & + & c & = & 1 \\ & & b & + & c & = & 5 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ccccc} a & & & = & -7 \\ & b & & = & -3 \\ & & c & = & 8 \end{array} \right. : Y_0 = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} X_n &= P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix} Y_0 = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} \\ &= P \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 8(-2)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 8(-2)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Au final, $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 + 8(-2)^n \\ -7 + 8(-2)^n \\ -3 + 8(-2)^n \end{pmatrix}$.

□

Solution Exercice 12.

On note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

Alors

$$\left\{ \begin{array}{ccc} u_{n+1} & = & v_n + w_n \\ v_{n+1} & = & u_n + w_n \\ w_{n+1} & = & u_n + v_n. \end{array} \right. \iff AX_{n+1} = X_n \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient par récurrence $X_n = A^n X_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On trouve $\chi_A(X) = (X+1)^2(X-2)$.
• En résolvant $AX = -X$ on trouve
$E_{-1}(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.
Ainsi, $\dim E_{-1}(A) = 2 = m(-1)$.

• En résolvant $AX = 2X$ on trouve $E_2(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Ainsi, A est diagonalisable :

$$A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que
$X_n = P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^n P^{-1} X_0$
$X_n = P \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} P^{-1} X_0.$
En posant $Y_n = P^{-1} X_n$ on obtient $Y_n = D^n Y_0$.
En notant $Y_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$, on trouve

$$Y_n = \begin{pmatrix} \alpha 2^n \\ \beta(-1)^n \\ \gamma(-1)^n \end{pmatrix}.$$

Enfin, $X_n = PY_n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} Y_n = \begin{pmatrix} \alpha 2^n - \beta(-1)^n - \gamma(-1)^n \\ \alpha 2^n + \gamma(-1)^n \\ \alpha 2^n + \beta(-1)^n \end{pmatrix}$

Puisque P^{-1} est inversible, on en déduit que $Y_0 = P^{-1}X_0$ est un quelconque vecteur de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Ainsi, les suites u, v, w satisfaisant à la relation de récurrence $X_{n+1} = AX_n$ vérifient qu'il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$u_n = \alpha 2^n - (\beta + \gamma)(-1)^n$
$v_n = \alpha 2^n + \gamma(-1)^n$
$w_n = \alpha 2^n + \beta(-1)^n$ $\square$

Solution Exercice 13.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = u_1 = u_2 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+3} = 45u_n - 39u_{n+1} + 11u_{n+2}$.

   On note $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

   Alors $U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 11 & -39 & 45 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

   On montre alors par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^n U_0$.

2. $\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-11 & 39 & -45 \\ -1 & X & 0 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} = X[X(X-11)+39] - 45$

   $\chi_A(X) = X^3 - 11X^2 + 39X - 45 = X^3 - (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)X^2 + 39X - \lambda_1\lambda_2\lambda_3$ où $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont les racines (éventuellement complexes) de χ_A.

   On teste si χ_A possède une racine double : $\chi_A'(X) = 3X^2 - 22X + 39$: 3 est racine.

   Mais on vérifie que 3 est également racine de χ_A.

   Ainsi, $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ est racine double de χ_A.

   La division euclidienne de $\chi_A(X)$ par $(X-3)^2$ donne :

   $\chi_A(X) = (X-3)^2(X-5)$.

   Ainsi $Sp(A) = \{3, 5\}$ et $m(3) = 2$, $m(5) = 1$.

   — On résout l'équation $AX = 3X$:

   $$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 11x & - & 39y & + & 45z & = & 3x \\ x & & & & & = & 3y \\ & & y & & & = & 3z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 9z \\ y & = & 3z \end{array}\right.$$

   Ainsi, $E_3(A) = Vect\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   — On résout l'équation $AX = 5X$:

   $$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 11x & - & 39y & + & 45z & = & 5x \\ x & & & & & = & 5y \\ & & y & & & = & 5z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 25z \\ y & = & 5z \end{array}\right.$$

   Ainsi, $E_5(A) = Vect\begin{pmatrix} 25 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   On a $m(3) = 2 > 1 = \dim E_3(A)$.

   Par conséquent, la matrice A n'est pas diagonalisable.

3. On pose $e_1 = (25, 5, 1)$; $e_2 = (9, 3, 1)$ et f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A.

   On cherche à compléter en une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est

   $$T = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

   On note (α, β, γ) les coordonnées de e_3 dans la base canonique.

   On exprime les coordonnées de $f(e_3)$ de deux manières différentes :

   — Avec la matrice T, on a :
   $f(e_3) = e_2 + 3e_3 = (9, 3, 1) + 3(\alpha, \beta, \gamma)$.

   — Avec la matrice A, on a :
   $f(e_3) = (11\alpha - 39\beta + 45\gamma, \alpha, \beta)$.

   Par conséquent, (α, β, γ) est solution du système :

   $$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 8\alpha & - & 39\beta & + & 45\gamma & = & 9 \\ \alpha & - & 3\beta & & & = & 3 \\ & & \beta & - & 3\gamma & = & 1 \end{array}\right.$$

   On constate aisément que $(6, 1, 0)$ est solution de ce système.

   Ainsi, $e_3 = (6, 1, 0)$ complète la base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $T = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

   Matriciellement, cela se traduit par la relation $A = PTP^{-1}$ avec $P = P_{\mathscr{B}_c \to \mathscr{B}}$ la matrice de passage de la base canonique à la base de trigonalisation (e_1, e_2, e_3).

4. On a montré à la question 1. que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^n U_0$.
De plus, on montre classiquement par récurrence que $A^n = PT^nP^{-1}$.
Ainsi, $U_n = PT^nP^{-1}U_0$.
Calculons les T^n avec la formule du binôme. En effet, $T = D + N$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et } N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et les matrices D, N commutent : $DN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = ND$.

On obtient puisque $N^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$

$$\begin{aligned} T^n &= D^n + \binom{n}{1} D^{n-1}T \\ &= \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 5^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 3^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On trouve donc $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = A^n U_0 = PT^nP^{-1}U_0$.
A ce stade, inutile de calculer P^{-1}.
En effet, $U_n = \underbrace{\begin{pmatrix} 25 & 9 & 6 \\ 5 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}}_{PT^n} \underbrace{V_0}_{P^{-1}U_0}$

On trouve $U_n = \begin{pmatrix} 5^{n+2} & 3^{n+2} & 3^{n+1}(n+2) \\ 5^{n+1} & 3^{n+1} & 3^n(n+1) \\ 5^n & 3^n & n3^{n-1} \end{pmatrix} V_0$.

Il reste à déterminer $V_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = P^{-1}U_0 \iff PV_0 = U_0$.

Ainsi, (α, β, γ) est l'unique (P est inversible) solution du système

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} 25\alpha & + & 9\beta & + & 6\gamma & = & 1 \\ 5\alpha & + & 3\beta & + & \gamma & = & 1 \\ \alpha & + & \beta & & & = & 1 \end{array} \right.$$

On trouve $V_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$.

En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = U_n = PT^nV_0 = \begin{pmatrix} * \\ * \\ 5^n - 4n3^{n-1} \end{pmatrix} \text{ i.e. } u_n = 5^n - 4n3^{n-1}.$$

□

Solution Exercice 14. Soient $p, q \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $A = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix}$.

1. Déterminons deux matrices $A, B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $A = B + (1-p-q)C$ et $B + C = I_2$.
Analyse. Si B, C existent alors $A = \underbrace{B + C}_{=I_2} - (p+q)C = -(p+q)C$.
On obtient ($p, q \in \mathbb{R}_+^*$) :
$C = -\frac{1}{p+q}(A - I_2) = \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} p & -q \\ -p & q \end{pmatrix}$
et $B = I_2 - C = \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} q & q \\ p & p \end{pmatrix}$.
Synthèse. On vérifie sans difficulté que $A = B + (1-p-q)C$ et $B + C = I_2$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour calculer A^n, on utilise la relation $A = B + (1-p-q)C$ et on note que les matrice B, C commutent.
Précisément :

$$BC = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} = CB.$$

La formule du binôme s'applique et donne :

$$\begin{aligned} A^n = (B + (1-p-q)C)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k + ((1-p-q)C)^{n-k} \\ &= \binom{n}{0} B^0((1-p-q)C)^n \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} B^k((1-p-q)C)^{n-k} \quad (*) \\ &\quad + \binom{n}{n} B^n((1-p-q)C)^0 \\ &= (1-p-q)^n C^n + B^n. \end{aligned}$$

$(*)$ pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $B^kC^{n-k} = B \times \cdots \times \underbrace{BC}_{=0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}} \times \cdots \times C = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$.

Il suffit donc de calculer B^n et C^n.

Le calcul des premières puissances permet de conjecturer que $B^n = B$ et $C^n = C$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ ce que l'on démontre sans difficulté par récurrence.

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A^n = (1-p-q)^n C + B = \frac{1}{p+q}\begin{pmatrix} p(1-p-q)^n + q & -q(1-p-q)^n + q \\ -p(1-p-q)^n + p & q(1-p-q)^n + p \end{pmatrix}.$$

Notons au passage que la formule est valable pour $n = 0$.

3. Notons A_n : "IA affiche 0 à l'instant n" et B_n : "IA affiche 1 à l'instant n".
Par la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements $(A_n, B_n) = (A_n, \overline{A_n})$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} = P(A_{n+1}) &= P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) \\ &= u_n(1-p) + v_n q. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{n+1} = P(B_{n+1}) &= P(A_n)P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(B_{n+1}) \\ &= u_n p + v_n(1-q). \end{aligned}$$

On en déduit que $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ vérifie la relation de récurrence $X_{n+1} = AX_n$.

On montre alors classiquement par récurrence que $X_n = A^n X_0$ et on obtient :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \frac{1}{p+q}\begin{pmatrix} (1-p-q)^n(pu_0 - qv_0) + q(u_0+v_0) \\ (1-p-q)^n(-pu_0 + qv_0) + p(u_0+v_0) \end{pmatrix}.$$

Notons que $u_n + v_n = (p+q)(u_0+v_0)$.

La probabilité que IA affiche autre chose qu'un 0 ou un 1 est donc égale à

$$w_n = 1 - (u_n + v_n) = 1 - (p+q)(u_0+v_0).$$

4. Puisque $p, q \in]0;1[$ alors $0 < p+q < 2$ et par conséquent, $-1 < 1-(p+a) < 1$
On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-p-q)^n = 0$.
En conclusion :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{q(u_0+v_0)}{p+q}$$

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{p(u_0+v_0)}{p+q}$$

□

Solution Exercice 15.

1. Par hypothèse $X_0(\Omega) = \{2\}$.
Clairement, $X_1(\Omega) = \{1\}$.
En effet, au premier tirage, on retire une boule blanche de l'urne U_1 que l'on remplace par une boule noire venant de l'urne U_2.
Le nombre de blanche dans U_1 après le premier tirage est donc nécessairement $X_1 = 1$.
Il est clair que pour tout $k \geqslant 2$, $X_k(\Omega) \subset \{0,1,2\}$.
Montrons par récurrence que $X_k(\Omega) = \{0,1,2\}$ pour tout $k \geqslant 2$.
Notons pour tout $k \geqslant 1$:
B_k^1 : "on tire une blanche au k-ième tirage dans U_1
B_k^2 : "on tire une blanche k-ième tirage dans U_2"
Initialisation :
$[X_2 = 0] = B_2^1 \cap \overline{B_2^2}$ est un événement possible ($[X_2 = 0] \neq \varnothing$).
$[X_2 = 1] = (B_2^1 \cap B_2^2) \cup (\overline{B_2^1} \cap \overline{B_2^2})$ est un événement possible.
$[X_2 = 2] = \overline{B_2^1} \cap B_2^2$ est un événement possible.
Hérédité :
On suppose que $X_k(\Omega) = \{0,1,2\}$. Alors
$[X_{k+1} = 0] = [X_k = 1] \cap (B_k^1 \cap \overline{B_k^2})$ est un événement possible,
$[X_{k+1} = 1] = \Big([X_k = 0] \cap (\overline{B_k^1} \cap B_k^2)\Big) \cup \Big([X_k = 2] \cap (B_k^1 \cap \overline{B_k^2})\Big)$ est un événement possible,
$[X_{k+1} = 2] = [X_k = 1] \cap (\overline{B_k^1} \cap B_k^2)$ est un événement possible.
On conclut par récurrence que pour tout $k \geqslant 2$, $X_k(\Omega) = \{0,1,2\}$.

2. On pose $Y_k = \begin{pmatrix} P(X_k = 0) \\ P(X_k = 1) \\ P(X_k = 2) \end{pmatrix}$.
— On applique la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(X_{k+1} = 0) = P(X_k = 0)\, &\underbrace{P_{[X_k=0]}(X_{k+1} = 0)}_{=0} \\ &+ P(X_k = 1)P_{[X_k=1]}(X_{k+1} = 0) \\ &+ P(X_k = 2)\,\underbrace{P_{[X_k=2]}(X_{k+1} = 0)}_{=0} \\ = \frac{1}{4}P(X_k = 1) \end{aligned}$$

car il s'agit de tirer une blanche dans U_1 et une noire dans U_2 : probabilité 1/2 pour chacun de ses événement indépendants.

— De même :

$$\begin{aligned}P(X_{k+1}=1) &= P(X_k=0)P_{[X_k=0]}(X_{k+1}=1)\\ &\quad + P(X_k=1)P_{[X_k=1]}(X_{k+1}=1)\\ &\quad + P(X_k=2)P_{[X_k=2]}(X_{k+1}=1)\\ &= P(X_k=0)+\frac{1}{2}P(X_k=1)+P(X_k=2)\end{aligned}$$

car

— si $X_k=0$ ou $X_k=2$ alors nécessairement, après le $k+1$-ième tirage il y aura une boule blanche et une boule noire dans chaque urne.

— si $X_k=1$ alors il s'agit soit :

  * d'échanger les boules blanches que contiennent U_1, U_2 : proba. 1/4.
  * d'échanger les boules noires que contiennent U_1, U_2 : proba. 1/4.

— Et enfin :

$$\begin{aligned}P(X_{k+1}=2) &= P(X_k=0)\underbrace{P_{[X_k=0]}(X_{k+1}=2)}_{=0}\\ &\quad + P(X_k=1)P_{[X_k=1]}(X_{k+1}=2)\\ &\quad + P(X_k=2)\underbrace{P_{[X_k=2]}(X_{k+1}=2)}_{=0}\\ &= \frac{1}{4}P(X_k=1)\end{aligned}$$

car il s'agit de tirer une noire dans l'urne U_1 et une blanche dans U_2 : probabilité 1/4.

On en déduit que $\forall k\in\mathbb{N}, Y_{k+1}=AY_k$ avec :

$$A=\begin{pmatrix}0 & \frac14 & 0\\ 1 & \frac12 & 1\\ 0 & \frac14 & 0\end{pmatrix}.$$

En particulier pour tout $k\in\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}E(X_{k+1}) &= 0P(X_{k+1}=0)+P(X_{k+1}=1)+2P(X_{k+1}=2)\\ &= \left(P(X_k=0)+\frac12 P(X_k=1)+P(X_k=2)\right)+\frac24 P(X_k=1)\\ &= P(X_k=0)+P(X_k=1)+P(X_k=2)=1.\end{aligned}$$

Par conséquent $\forall k\geqslant, E(X_k)=1$.

Note : $E(X_0)=2$.

3. — $\chi_A(X)=\begin{vmatrix}X & -\frac14 & 0\\ -1 & X-\frac12 & -1\\ 0 & -\frac14 & X\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}X-1 & X-1 & X-1\\ -1 & X-\frac12 & -1\\ 0 & -\frac14 & X\end{vmatrix}$

(où nous avons effectué $L_1\leftarrow L_1+L_2+L_3$)

$\chi_A(X)=(X-1)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & X-\frac12 & -1\\ 0 & -\frac14 & X\end{vmatrix}=(X-1)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & X+\frac12 & 0\\ 0 & -\frac14 & X\end{vmatrix}$

(où nous avons effectué $C_2\leftarrow C_2-C_1$, $C_3\leftarrow C_3-C_1$).

$\chi_A(X)=X(X-1)(X+\frac12)$.

On en déduit que $Sp(A)=\{0,1,-\frac12\}$.

— On résout l'équation $AX=0$.

On constate que $X=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ est solution.

Puisque $m(0)=1$ on a $\dim E_0(A)=1$.

Ainsi, $E_0(A)=Vect\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

— On résout l'équation $AX=X$.

On constate que $X=\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}$ est solution.

Puisque $m(1)=1$ on a $\dim E_1(A)=1$.

Ainsi, $E_1(A)=Vect\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}$.

— On résout $AX=-\frac12 X$.

On constate que $X=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ est solution.

Puisque $m(-\frac12)=1$ on a $\dim E_{-\frac12}(A)=1$.

Ainsi, $E_{-\frac12}(A)=Vect\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$.

4. On montre par récurrence que $Y_k=A^kY_0$.
Au rang $k=0$, on a effectivement $A^0Y_0=I_3Y_0=Y_0$.
Si $Y_k=A^kY_0$ alors $Y_{k+1}=AY_k=AA^kY_0=A^{k+1}Y_0$.
La propriété est donc vraie pour tout $k\in\mathbb{N}$ par principe de récurrence.
On a montré que $Z_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, $Z_2=\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}$ et $Z_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres $0,1,-\frac12$.
Les espaces propres étant en somme directe, on en déduit que la famille (Z_1,Z_2,Z_3) est libre : c'est donc une base $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ (constituée de vecteurs propres de A).
Il existe donc un unique triplet $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ tel que $Y_0=\alpha Z_1+\beta Z_2+\gamma Z_3$.

Puisque $P(X_0=0)=P(X_0=1)=0$ et $P(X_0=2)=1$ (la variable X_0 est constante égale à 2), on a :

$Y_0=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\alpha Z_1+\beta Z_2+\gamma Z_3.$

On trouve $\alpha=-\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{1}{6}$, $\gamma=\frac{1}{3}$: $Y_0=-\frac{1}{2}Z_1+\frac{1}{6}Z_2+\frac{1}{3}Z_3$.

On en déduit que $AY_0=-\frac{1}{2}AZ_1+\frac{1}{6}AZ_2+\frac{1}{3}AZ_3$.

Les vecteurs Z_1,Z_2,Z_3 étant des vecteurs propres pour A, associés aux valeurs propres $0,1,-\frac{1}{2}$ on obtient

$AY_0=0Z_1+\frac{1}{6}Z_2+\left(\frac{1}{3}\right)(-\frac{1}{2})Z_3.$

En multipliant à nouveau par A à gauche, on obtient :

$A^2Y_0=\frac{1}{6}AZ_2+\left(\frac{1}{3}\right)(-\frac{1}{2})AZ_3=\frac{1}{6}Z_2+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^2Z_3.$

On montre alors aisément par récurrence que pour tout $k\geqslant 1$

$A^kY_0=\frac{1}{6}Z_2+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^kZ_3.$

Enfin pour tout $k\in\mathbb{N}^*$:

$\begin{pmatrix}P(X_k=0)\\P(X_k=1)\\P(X_k=2)\end{pmatrix}=Y_k=A^kY_0=\frac{1}{6}Z_2+\frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^kZ_3$

$\begin{pmatrix}P(X_k=0)\\P(X_k=1)\\P(X_k=2)\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^k\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{6}+\frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^k\\\frac{2}{3}-\frac{2}{3}(-\frac{1}{2})^k\\\frac{1}{6}+\frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^k\end{pmatrix}.$

Ceci nous donne bien la loi de X.

□

Solution Exercice 16.

1. — Notons en préliminaire que f est diagonalisable car f possède n valeurs propres distinctes, chaque espace propre étant de dimension 1 (ce sont des droites vectorielles).
   — Soit $x\neq 0_E$ un vecteur propre de f associé à la valeur propre $\lambda\in\mathbb{R}$: $f(x)=\lambda x$.
   Notons que $E_\lambda(f)=Vect(x)$ car $E_\lambda(f)$ est une droite vectorielle et $x\neq_0 E$.
   — La relation $f(x)=\lambda x$ donne puisque f et g commutent :
   $f(g(x))=g(f(x))=g(\lambda x)=\lambda g(x)$.
   On en déduit que $g(x)\in E_\lambda(f)=Vect(x)$.
   Par conséquent, il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $g(x)=\alpha x$.
   On en déduit comme annoncé que x est un vecteur propre pour g.
   — Soit $(x_1,\dots,x_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres pour f. Ce sont également des vecteurs propres pour g par ce qui précède.
   — La base $(x_1,\dots,x_n)$ est donc une base de vecteurs propres communs aux endomorphismes f et g (qui ne possèdent pas nécessairement les mêmes valeurs propres en revanche).
2. Soit $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.
   — Déterminons toutes les matrices $M\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $2M^2+5M=3A$.
   Si M convient alors :
   $MA=M\left(\frac{1}{3}\right)(2M^2+5M)=\left(\frac{1}{3}\right)(2M^2+5M)M=AM.$
   Toute matrice vérifiant $2M^2+5M=3A$ commute donc avec A.
   — Déterminons les éléments propres de A.
   $\chi_A(X)=\begin{vmatrix}X-1&-1&1\\-1&X-1&-1\\-1&-1&X-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}X-1&0&1\\-1&X-2&-1\\-1&X-2&X-1\end{vmatrix}$
   (on a effectué l'opération : $C_2\leftarrow C_2+C_3$).
   $\chi_A(X)=\begin{vmatrix}X-1&0&1\\X-2&X-2&0\\X-2&X-2&X\end{vmatrix}$
   (on a effectué les opérations : $L_2\leftarrow L_2+L_1$,$L_3\leftarrow L_3+L_1$).
   $\chi_A(X)=X(X-1)(X-2)$ en développant par rapport à la troisième colonne.
   On obtient $Sp(A)=\{0,1,2\}$: $A\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ possède trois valeurs propres distinctes donc est diagonalisable.
   — On résout l'équation $AX=0$.
   Le vecteur $X=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ convient.
   Puisque $m(0)=1$, on a $\dim E_0(A)=1$ donc $E_0(A)=Vect\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$.
   — On résout l'équation $AX=X$.
   Le vecteur $X=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ convient.
   Puisque $m(1)=1$, on a $\dim E_1(A)=1$ donc $E_1(A)=Vect\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.
   — On résout l'équation $AX=2X$.
   Le vecteur $X=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ convient.
   Puisque $m(2)=1$, on a $\dim E_2(A)=1$ donc $E_2(A)=Vect\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

   Par la question précédente, les matrices A et M commutant, toute base de vecteurs propres pour A est également une base de vecteurs propres pour M.

On note $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique à une base de diagonalisation commune aux matrices A, M.
Ainsi, $A = PDP^{-1}$ et $M = P\Delta P^{-1}$ où

— $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

— $\Delta = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale semblable à M.

En multipliant la relation $2M^2 + 5M = 3A$ par P^{-1} à gauche et P à droite : $2P^{-1}M^2P + 5P^{-1}MP = 3P^{-1}AP$ soit $2(P^{-1}MP)^2 + 5P^{-1}MP = 3D$.
Il vient $2\Delta^2 + 5\Delta = 3D \quad (*)$ c'est-à-dire :

$$(*) \begin{pmatrix} 2x^2+5x & 0 & 0 \\ 0 & 2y^2+5y & 0 \\ 0 & 0 & 2z^2+5z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

On obtient

$$\begin{cases} x(2x+5) &= 0 \\ y(2y+5) &= 3 \\ z(2z+5) &= 6 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= 0 \text{ ou } -\frac{5}{2} \\ y &= -3 \text{ ou } \frac{1}{2} \\ z &= -\frac{5}{4} + \frac{\sqrt{73}}{4} \text{ ou } -\frac{5}{4} - \frac{\sqrt{73}}{4} \end{cases}$$

On obtient donc 6 matrices Δ semblables à $M = P\Delta P^{-1}$ satisfaisant à l'équation $2M^2 + 5M = 3A$:

$$M = P\Delta P^{-1} = \begin{pmatrix} y & -x+y & x-y \\ -y+z & x-y+z & -x+y \\ -y+z & -y+z & y \end{pmatrix}.$$

□

Solution Exercice 17.

1. Si $P \in \mathbb{R}[X]$ alors $f(P) = (X+1)(X-3)P'(X) - XP(X)$ est un polynôme à coefficients réels : $\mathrm{Im}(P) \subset \mathbb{R}[X]$.
Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

$$\begin{aligned} f(\lambda P + Q) &= (X+1)(X-3)(\lambda P + Q)' - X(\lambda P + Q) \\ &= [\lambda(X+1)(X-3)P' - \lambda XP] + [(X+1)(X-3)Q' - XQ] \\ &= \lambda[(X+1)(X-3)P' - XP] + [(X+1)(X_3)Q' - XQ] \\ &= \lambda f(P) + f(Q). \end{aligned}$$

Par conséquent f est linéaire de E dans E : $f \in \mathscr{L}(E)$ est un endomorphisme de E.

2. Soit λ une valeur propre de f et $P \neq 0$ un vecteur propre associé. Alors :
$f(P) = \lambda P \iff (X+1)(X-3)P'(X) - XP(X) = \lambda P(X)$.
$f(P) = \lambda P \iff (X+1)(X-3)P'(X) = (X+\lambda)P(X) \quad (*)$.
Le polynôme P n'est pas constant, sinon la relation $(*)$ donnerait $0 = (X+\lambda)P(X)$ ce qui conduirait à $P(X) = 0$ et contredirait le fait que P est propre pour f.
On note $P(X) = a_dX^d + \sum_{k=0}^{d-1} a_kX^k$ avec $d = \deg(P) \geqslant 1$: $a_d \neq 0$.
La relation $(*)$ donne :
$(X+1)(X-3)(da_dX^{d-1} + R'(X)) = (X+\lambda)(a_dX^d + R(X))$
où l'on a noté $R(X) = \sum_{k=0}^{d-1} a_kX^k$.
On identifie alors les coefficients des monômes de plus haut degré $(d+1)$: $da_d = a_d$. Puisque $a_d \neq 0$, on obtient $d = 1$.
Un polynôme propre est donc nécessairement de degré 1.
Supposons que $P(X)$ soit un tel polynôme propre.
On note $P(X) = \alpha X + \beta$ avec $\alpha \neq 0$.
La relation $(*)$ donne :
$\alpha(X+1)(X-3) = (\alpha X + \beta)(X+\lambda)$
$\iff \alpha X^2 - 2\alpha X - 3\alpha = \alpha X^2 + (\alpha\lambda + \beta)X + \beta\lambda$

$$\iff \begin{cases} -2\alpha &= \alpha\lambda + \beta \\ -3\alpha &= \beta\lambda. \end{cases} \iff \begin{cases} -2\alpha &= \alpha\lambda + \beta \\ \alpha &= -\frac{\beta\lambda}{3} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2\left(-\frac{\beta\lambda}{3}\right) &= -\frac{\beta\lambda}{3}\lambda + \beta \\ \alpha &= -\frac{\beta\lambda}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} \beta\lambda^2 + 2\beta\lambda - 3\beta &= 0 \\ \alpha &= -\frac{\beta\lambda}{3} \end{cases}$$

Le trinôme $\beta\lambda^2 + 2\beta\lambda - 3\beta$, d'indéterminée λ admet pour discriminant $\Delta = 4\beta^2 + 12\beta^2 = 16\beta^2 = (4\beta)^2$.
Notons que $\beta \neq 0$, sinon $\alpha = -\frac{\beta\lambda}{3} = 0$.
Le trinôme $\beta\lambda^2 + 2\beta\lambda - 3\beta$ possède donc deux racines réelles distinctes :
$\dfrac{-2\beta + 4\beta}{2\beta} = 1$ et $\dfrac{-2\beta - 4\beta}{2\beta} = -3$.
Si $\lambda = 1$, on obtient la relation $\beta = -3\alpha$.
Si $\lambda = -3$, on obtient la relation $\beta = \alpha$.
On vérifie alors sans peine que les polynômes $P(X) = \alpha(X+1), \alpha \in \mathbb{R}$ sont propres associés à la valeur propre $\lambda = -3$.
On vérifie alors sans peine que les polynômes $P(X) = \alpha(X-3), \beta \in \mathbb{R}$ sont propres associés à la valeur propre $\lambda = 1$.
$Sp(f) = \{1, -3\}$ et $E_1(f) = Vect(X-3)$ et $E_{-3}(f) = Vect(X+1)$.

□

Solution Exercice 18.

1. Si $P \in \mathbb{R}[X]$ alors $f(P) = (X-1)(X-2)P' - 2XP$ est également un polynôme à coefficients réels : $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}[X]$.
   Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :
   $$\begin{aligned} f(\lambda P + Q) &= (X-1)(X-2)(\lambda P + Q)' - 2X(\lambda P + Q) \\ &= \lambda((X-1)(X-2)P' - 2XP) + (X-1)(X-2)Q' - 2XQ \\ &= \lambda f(P) + f(Q). \end{aligned}$$
   Par conséquent f est une application linéaire de $\mathbb{R}[X]$ dans lui même : $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}[X])$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit P un polynôme propre pour f associé à une valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$: $f(P) = \lambda P$.
   Cette relation donne :
   $(X-1)(X-2)P'(X) - 2XP(X) = \lambda P(X)$
   $\iff (X-1)(X-2)P' = (2X+\lambda)P(X) \quad (*)$.
   P n'est pas un polynôme constant, sinon on obtiendrait : $(2X+\lambda)P(X) = 0$ ce qui conduirait à $P(X) = 0$ et contredirait le fait que P est un polynôme propre.
   On note $P(X) = a_d X^d + \sum_{k=0}^{d-1} a_k X^k$ avec $d \geqslant 1$ et $a_d \neq 0$.
   En injectant dans la relation $(*)$ et en identifiant les coefficients de plus haut degré dans chaque membre on trouve :
   $$da_d = 2a_d \iff d = 2 \text{ car } a_d \neq 0.$$
   Un polynôme propre de f est donc nécessairement de degré 2.
3. Soit $P(X) = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$ un polynôme de degré 2 : $\alpha \neq 0$.
   La relation $(*)$ donne
   $$\begin{aligned} &(X-1)(X-2)(2\alpha X + \beta) = (2X+\lambda)(\alpha X^2 + \beta X + \gamma) \\ &\iff X^2(-\alpha\lambda - 6\alpha - \beta) + X(-\beta\lambda + 4\alpha - 3\beta - 2\gamma) + (2\beta - \lambda\gamma) = 0 \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} \beta &=& -\alpha(\lambda+6) \\ \beta(\lambda+3) &=& 4\alpha - 2\gamma \quad (*) \\ 2\beta &=& \lambda\gamma \end{array} \right. \end{aligned}$$
   Notons que $\lambda \neq 0$ sinon $\beta = \alpha = \gamma = 0$ ce qui donnerait $P(X) = 0$ et contredirait le fait que P est propre.
   On trouve alors $\gamma = \frac{2\beta}{\lambda} = -\frac{2\alpha(\lambda+6)}{\lambda}$.
   En injectant dans $(*)$ on trouve :
   $$\begin{aligned} -\alpha(\lambda+6)(\lambda+3) = 4\alpha - 2\left(\frac{2\beta}{\lambda}\right) &\iff -\alpha(\lambda+6)(\lambda+3) = 4\alpha - \frac{4}{\lambda}(-\alpha(\lambda+6)) \\ &\iff -\alpha\lambda(\lambda+6)(\lambda+3) = 4\lambda\alpha + 4\alpha(\lambda+6) \end{aligned}$$
   Puisque $\alpha \neq 0$ (P est de degré 2), on en déduit que toute valeur propre de f est solution de l'équation $-\lambda(\lambda+3)(\lambda+6) = 4\lambda + 4(\lambda+6)$.
   On obtient $\lambda \in \{-2, -3, -4\}$.
   — Si $\lambda = -2$, alors $\beta = -4\alpha$ et $\gamma = 4\alpha$.
     On vérifie que les polynômes $P(X) = \alpha(X^2 - 4X + 4), \alpha \in \mathbb{R}$ sont propres pour f, associés à la valeur propre $\lambda = -2$.
     $E_{-2}(f) = Vect(X^2 - 4X + 4)$.
   — Si $\lambda = -3$, alors $\beta = -3\alpha$ et $\gamma = 2\alpha$.
     On vérifie que les polynômes $P(X) = \alpha(X^2 - 3X + 2)$ sont propres pour f, associés à la valeur propre $\lambda = -3$.
     $E_{-3}(f) = Vect(X^2 - 3X + 2)$.
   — Si $\lambda = -4$, alors $\beta = -2\alpha$ et $\gamma = \alpha$.
     On vérifie que les polynômes $P(X) = \alpha(X^2 - 2X + 1)$ sont propre pour f, associés à la valeur propre $\lambda = -4$.
     $E_{-4}(f) = Vect(X^2 - 2X + 1)$.

□

Solution Exercice 19. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$.
Pour tout $P \in E$, on pose $f(P) = X(1-X)P' + nXP$.

1. Soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ est un polynôme à coefficients réels de degré $d \leqslant n$.
   Si $d \leqslant n-1$ alors $f(P) = X(1-X)P' + nXP$ est de degré au plus $d+1 \leqslant n$ par somme de tels polynômes.
   Si $d = n$ alors
   $$\begin{aligned} f(P) &= X(1-X)\sum_{k=1}^{n} ka_k X^{k-1} + nX\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \\ &= -na_n X^{n+1} + na_n X^n + X(1-X)\sum_{k=1}^{n-1} ka_k X^{k-1} \\ &\quad + na_n X^{n+1} + nX\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k. \\ &= na_n X^n + X(1-X)\sum_{k=1}^{n-1} ka_k X^{k-1} + nX\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k. \end{aligned}$$

Ainsi, $f(P)$ est de degré au plus n.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
   Résolvons l'équation différentielle $x(1-x)y'(x) + nxy(x) = \lambda y(x)$.
   On commence par résoudre l'équation sur chacun des intervalle $I =]-\infty; 0[$, $I =]0; 1[$ et $I =]1; +\infty[$.
   Sur chacun de ces intervalles l'équation devient :
   $y'(x) = \dfrac{nx-\lambda}{x(x-1)} y(x)$.
   Ainsi, $y(x) = Ke^{F(x)}, K_I \in \mathbb{R}$ où F est une primitive sur I de :
   $f : x \mapsto \dfrac{nx-\lambda}{x(x-1)} = \dfrac{n}{x-1} - \lambda\left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{n-\lambda}{x-1} + \dfrac{\lambda}{x}$.
   Sur chacun des intervalle I, une primitive convenable est donnée par :
   $F(x) = (n-\lambda)\ln|x-1| + \lambda \ln|x| = \ln(|x-1|^{n-\lambda}|x|^{\lambda})$
   Donc sur chacun des intervalles I, on trouve $y(x) = K_I|x-1|^{n-\lambda}|x|^{\lambda}, K_I \in \mathbb{R}$.
3. Si $\lambda = k \in [\![0, n]\!]$, les $n+1$ polynômes $P_k(X) = (X-1)^{n-k}X^k$ sont solutions, sur $\mathbb{R}$, de l'équation différentielle $x(1-x)y'(x) + nxy(x) = ky(x)$.
   ($\lambda = k$ étant entier, on obtient une solution bien définie sur chaque intervalle, quelque soit le signe des monômes sur ces intervalles).
   On obtient pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $f(P_k) = kP_k$.
   Ainsi, $Sp(f) = [\![0, n]\!]$ chaque espace propre est de dimension 1 : $E_k(f) = Vect\left((X-1)^{n-k}X^k\right)$.
4. $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X])$ possède $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$ valeurs propres distinctes donc f est diagonalisable.

□

Solution Exercice 20. On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}_n[X]$, $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$f(P) = nXP - (X^2-1)P'.$$

1. La linéarité de f ne pose pas de difficulté particulière.
   Il faut vérifier que si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ alors $f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.
   — Si P est de degré $d \leqslant n-1$ alors $f(P)$ est de degré au plus $d+1 \leqslant n$.
   — Si P est de degré n alors $f(P)$ est de degré au plus n car le coefficient a_{n+1} de X^{n+1} est égal à
   $$a_{n+1} = na_n - na_n = 0.$$
2. La famille $\mathscr{B} = (1, X-1, \ldots, (X-1)^n)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$ car composée de polynômes non nuls échelonnés en degrés.
   De plus, $\mathrm{Card}(\mathscr{B}) = n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$.
   Ainsi, $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
   Déterminons la matrice de f dans cette base.
   — $f(1) = nX = n(X-1) + n$
   — Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,
   $f((X-1)^k) = nX(X-1)^k - k(X^2-1)(X-1)^{k-1}$
   $f((X-1)^k) = (X-1)^k\left(nX - k(X+1)\right) = (X-1)^k((n-k)X - k)$
   $f((X-1)^k) = (X-1)^k\left((n-k)(X-1) + (n-k) - k\right)$
   $f((X-1)^k) = (n-k)(X-1)^{k+1} + (n-2k)(X-1)^k$.
   Notons que pour $k = n$ le premier terme est nul.
   La matrice f dans la base $\mathscr{B}$ est donc triangulaire inférieure.
3. Les coefficients diagonaux de la matrice de f dans $\mathscr{B}$ sont les $n+1$ nombres entiers $n-2k, k \in [\![0, n]\!]$.
   Par conséquent $\chi_f(X) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n}(X - (n-2k))$.
   χ_f est scindé, à racines simples donc $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X])$ possède $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$ valeurs propres disctinctes.
   f est diagonalisable.

□

Solution Exercice 21. Soient $A = \begin{pmatrix} 5 & -17 & 25 \\ 2 & -9 & 16 \\ 1 & -5 & 9 \end{pmatrix}$ et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associé à A.

1. — $\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-5 & 17 & -25 \\ -2 & X+9 & -16 \\ -1 & 5 & X-9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-5 & 17 & -25 \\ 0 & X-1 & -2(X-1) \\ -1 & 5 & X-9 \end{vmatrix}$
   (on a effectué l'opération $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3$.)
   $\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-5 & 17 & 9 \\ 0 & X-1 & 0 \\ -1 & 5 & X+1 \end{vmatrix}$
   (on a effectué l'opération $C_3 \leftarrow C_3 + 2C_2$.)
   $\chi_A(X) = (X-1)[(X-5)(X+1) + 9] = (X-1)(X^2 - 4X + 4)$
   $\chi_A(X) = (X-1)(X-2)^2$.
   — $Sp(A) = \{1; 2\}$.
   — On $m(1) = 1$ et $m(2) = 2$.
   Le but de cette question étant de montrer que A n'est pas diagonalisable il s'agit donc de montrer que $\dim E_2(A) = 1 < 2$.
   — On résout l'équation $AX = 2X$. On trouve $E_2(A) = Vect\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   La conclusion s'en suit.
   — Déterminons au passage $E_1(A)$.
   On résout l'équation $AX = X$. On trouve $E_1(A) = Vect\begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2. Le but de ce qui suit est de trigonaliser la matrice A.

(a) Soit $u_1=(11,7,3)\in E_1(f)$ et $u_2=(3,2,1)\in E_2(f)$ non nuls.
Soit $u_3=(1,0,0)$.
On a $\begin{vmatrix} 11 & 3 & 1\\ 7 & 2 & 0\\ 3 & 1 & 0\end{vmatrix}=1\neq 0$. La famille $\mathscr{B}=(u_1,u_2,u_3)$ est donc libre et constitue donc une base de $\mathbb{R}^3$.
Pour déterminer $Mat_{\mathscr{B}}(f)$ deux possibilités :

— Utiliser la matrice de passage $P=\begin{pmatrix} 11 & 3 & 1\\ 7 & 2 & 0\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}$ de la base canonique à la base $\mathscr{B}$.
On trouve alors
$$\begin{aligned} Mat_{\mathscr{B}}(f) &= P^{-1}Mat_{\mathscr{B}_c}(f)P\\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

— Mieux, on déterminer les images $f(u_1)$, $f(u_2)$, $f(u_3)$ dans la base (u_1,u_2,u_3).
Puisque u_1 et u_2 sont des vecteurs propres associés respectivement aux valeurs propres 1 et 2, on a $f(u_1)=u_2$ et $f(u_2)=2u_2$.
De plus, $f(u_3)=(5,2,1)=0(11,7,3)+1(3,2,1)+2(1,0,0)$.
On retrouve $Mat_{\mathscr{B}}(f)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

Note :

Avec $u_3=(0,1,0)$ on trouve la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

Avec $u_3=(0,0,1)$ on trouve la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

La première matrice est plus agréable à manipuler.

On tente dans la question suivante de systématiser la rechercher d'une matrice de cette forme.

(b) Soit $v_1=(3,2,1)\in E_2(A)$ et $v_3=(11,7,3)\in E_1(A)$ non nuls.
On détermine $v_2=(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ tel que $\mathscr{C}=(v_1,v_2,v_3)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$ telle que $f(v_2)=v_1+2v_2$.

On résout le système :
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 5\alpha & - & 17\beta & + & 25\gamma & = & 3+2\alpha\\ 2\alpha & - & 9\beta & + & 16\gamma & = & 2+2\beta\\ \alpha & - & 5\beta & + & 9\gamma & = & 1+2\gamma\end{array}\right.$$
$$\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3\alpha & - & 17\beta & + & 25\gamma & = & 3\\ 2\alpha & - & 11\beta & + & 16\gamma & = & 2\\ \alpha & - & 5\beta & + & 7\gamma & = & 1\end{array}\right.$$
$$\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl} \alpha & - & 5\beta & + & 7\gamma & = & 1\\ 3\alpha & - & 17\beta & + & 25\gamma & = & 3\\ 2\alpha & - & 11\beta & + & 16\gamma & = & 2\end{array}\right.$$
$$\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl} \alpha & - & 5\beta & + & 7\gamma & = & 1\\ & & \beta & + & 2\gamma & = & 0\end{array}\right.$$

Avec $\gamma=0$ on trouve $\beta=0$ et $\alpha=1$.
Dans cette la base (v_1,v_2,v_3) avec $v_2=(1,0,0)$ la matrice de f a la forme souhaitée.

$\square$

Solution Exercice 22. On note $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\\ 1/3 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

On note $E=\{aI_3+bA+CA^2:(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\}$.

1. $E=Vect(I_3,A,A^2)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
On a $A^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3\\ 1 & 0 & 3\\ \frac13 & \frac13 & 1\end{pmatrix}$.
On vérifie sans peine que la famille (I_3,A,A^2) est libre.
Ainsi, (I_3,A,A^2) est une base de E qui est de dimension 3.
On $A^3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3\\ 1 & 1 & 3\\ \frac13 & \frac13 & 2\end{pmatrix}=I_3+A^2\in E$

2. Il suffit de déterminer le polynôme caractéristique de A : $\chi_A(x)=x^3-x^2-1$.
Les valeurs propres de A sont précisément les racines de χ_A c'est-à-dire solution de l'équation $x^3-x^2-1=0$.

3. La fonction $x\mapsto x^3-x^2-1$ est
— strictement croissante sur $]-\infty;0]$ (et on a $f(0)=-1<0$),
— strictement décroissante sur $[0;\frac23]$ (f ne s'annule pas sur ce segment car $f(\frac23)<0<-1$),
— strictement croissante sur $[\frac23;+\infty[$.
On a de plus $f(1)=1-1-1=-1<0$.
Donc f s'annule ($\lim\limits_{+\infty} f=+\infty$) une unique fois sur $[1;+\infty[$.

On en déduit que A possède une unique valeur propre réelle λ.
Si A était diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, il existerait $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \lambda I_3$.
Il viendrait $A = \lambda I_3$ ce qui n'est pas.

4. Dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$, A est diagonalisable car A possède une valeur propre réelle et deux valeurs propres complexes conjuguées : au total A possède donc $3 = \dim \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ valeurs propres complexes distinctes.
   A est donc diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
5. On définit Φ_A en posant $\forall M \in E, \Phi_A(M) = AM$.
   Montrons que Φ_A est un endomorphisme de E.
   — Φ_A est linéaire car pour tout $M, M' \in E$, et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a
   $$\Phi_A(\lambda M + M') = A(\lambda M + M') = \lambda AM + AM' = \lambda\Phi_A(M) + \Phi_A(M').$$
   — $\operatorname{Im}(\Phi_A) \subset E$.
   En effet, $\Phi_A(I_3) = A \in E$, $\Phi_A(A) = A^2 \in E$, et $\Phi_A(A^2) = A^3 \in E$ d'après la question 1.
   Puisque (I_3, A, A^2) est une base de E, on en déduit que $\operatorname{Im}(\Phi_A) = \Phi_A(E) \subset E$.
   Par conséquent, Φ_A est un endomorphisme de E.
   Pour donner sa matrice dans $\mathscr{B}$ il suffit d'exprimer l'image des vecteurs de la base $\mathscr{B} = (I_3, A, A^2)$ dans cette même base :
   $$Mat_{\mathscr{B}}(\Phi_A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
   car $\Phi_A(I_3) = A, \Phi_A(A) = A^2, \Phi_A(A^2) = I_3 + A^2$.
   On calcule $\chi_{\Phi_A}(x) = x^3 - x^2 - 1 = \chi_A(x)$.
   Φ_A n'est donc pas diagonalisable : sinon sa matrice D dans une base $\mathscr{B}' = (M_1, M_2, M_3)$ de vecteurs propres de $E \subset \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ serait diagonale.
   Les coefficients diagonaux de D sont des valeurs propres.
   Les valeurs propres λ_i apparaissant sur la diagonale sont nécessairement réelles car M_i est une matrice à coefficients réels et Φ_A est à valeurs dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, $\underbrace{\Phi_A(M_i)}_{\in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})} = \lambda_i \underbrace{M_i}_{\in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$: λ_i ne peut pas être complexe.
   On en déduit que $D = \lambda I_3$ avec λ l'unique valeur propre réelle de Φ_A c'est-à-dire l'unique racine réelle λ de $\chi_{\Phi_A} = \chi_A$.
   En notant P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ cela donnerait :
   $$Mat_{\mathscr{B}}(\Phi_A) = PMat_{\mathscr{B}'}(f)P^{-1} = P(\lambda I_3)P^{-1} = \lambda I_3$$
   ce qui n'est pas le cas.
   Conclusion : Φ_A n'est pas diagonalisable.

□

Solution Exercice 23.
On considère pour tout $k \in [\![0, 4]\!]$ la fonction $f_k : x \mapsto e^{kx}$.
On note $E = Vect(f_0, f_1, f_2, f_3, f_4)$.

1. On a $\dim E = 5$.
   En effet, par définition la famille $(f_i, i \in [\![0, 4]\!])$ est génératrice de E.
   Elle est également libre.
   En effet, soient $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ des scalaires tels que $\sum_{k=0}^{4} \lambda_k f_k = 0$ c'est-à-dire
   $$\forall x \in \mathbb{R}, e^{kx} = 0 \quad (*).$$
   Le but est alors de montrer que $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$.
   Pour cela, plusieurs possibilités :
   — Une première possibilité est d'écrire la relation $(*)$ pour 5 nombres réels x et de résoudre le système carré obtenu.
   On choisit (arbitrairement) $x = 0, 1, 2, 3, 4$ et on obtient l'équation
   $$AX = 0 \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e & e^2 & e^3 & e^4 \\ 1 & e^2 & e^4 & e^6 & e^8 \\ 1 & e^3 & e^6 & e^9 & e^{12} \\ 1 & e^4 & e^8 & e^{12} & e^{16} \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix}.$$
   La matrice A admet pour déterminant, le Vandermonde :
   $$V(1, e, e^2, e^3, e^4) = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant 4}^{4} (e^j - e^i) \neq 0.$$
   La matrice A est donc inversible et l'équation $AX = 0$ admet une unique solution $X = 0$: $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$.
   — Une autre possibilité est de dériver la relation $(*)$, k fois $k \in [\![0, 4]\!]$ et de calculer en 0.
   On obtient :
   — Pour $i = 0$: $\sum_{i=0}^{4} \lambda_i = 0$.
   — Pour $i = 0$: $\sum_{i=0}^{4} i\lambda_i = 0$.
   — Pour $i = 0$: $\sum_{i=0}^{4} i^2\lambda_i = 0$.
   — Pour $i = 0$: $\sum_{i=0}^{4} i^3\lambda_i = 0$.

— Pour $i=0$: $\displaystyle\sum_{i=0}^{4} i^4\lambda_i = 0$.

On obtient l'équation $BX=0$ avec $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0^2 & 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 0^3 & 1^3 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \\ 0^4 & 1^4 & 2^4 & 3^4 & 4^4 \end{pmatrix}$.

$\det(B) = V(0,1,2,3,4) \neq 0$. La conclusion est similaire à celle du premier point.

2. Soit $\varphi : f \mapsto f'' - 3f' + 2f$.
   Il est clair que les dérivées de tous ordres des fonctions dans E sont encore de E car $f_k^{(p)} = k^p f_k \in E$.
   Ainsi, $\forall f \in E, \varphi(f) \in E$.
   La linéarité découle de la linéarité de la dérivation (d'ordre $0,1,2$).
3. On écrit la matrice de φ dans la base $\mathscr{B} = (f_i : i \in [\![0,4]\!])$ de E.
   Notons que $f_k' = kf_k$ et $f_k'' = k^2 f_k$. On obtient :
   — $\varphi(f_0) = 2f_0$.
   — $\varphi(f_1) = 0$.
   — $\varphi(f_2) = 4f_2 - 6f_2 + 2f_2 = 0$.
   — $\varphi(f_3) = 9f_3 - 9f_3 + 2f_3 = 2f_3$.
   — $\varphi(f_4) = 16f_4 - 12f_4 + 2f_4 = 6f_4$.
   Ainsi,
   $$Mat_{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$
   Ainsi, $Sp(\varphi) = \{0,2,6\}$ avec
   — $E_0(\varphi) = Vect(f_1, f_2)$.
   — $E_2(\varphi) = Vect(f_0, f_3)$.
   — $E_6(\varphi) = Vect(f_4)$.

□

***Solution Exercice** 24*. Soit $E = \mathscr{C}^0([0;1],\mathbb{R})$. Pour tout $f \in E$, on définie la fonction g par
$$\forall x \in E, g(x) = \int_0^x \inf(x,t) f(t)dt.$$

On note enfin T l'application définie sur E par $T(f) = g$.

1. La linéarité est claire par linéarité de l'intégrale.
   Montrons que T est à valeurs dans E, autrement dit montrons que si $f \in E$ est continue sur $[0;1]$ alors $T(f) = g$ est continue sur $[0;1]$.
   On peut écrire pour tout $x \in [0;1]$, $g(x) = \displaystyle\int_0^x tf(t)dt + x\int_x^1 f(t)dt$.
   Il apparaît alors que g est continue (et même dérivable) sur $[0;1]$ par le théorème fondamental de l'intégration.
2. Déterminons les éléments propres de E.
   Soit $f \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $T(f) = \lambda f$.
   Si $\lambda = 0$, on obtient $\displaystyle\int_0^x tf(t)dt + x\int_x^1 f(t)dt = 0$.
   En dérivant, il vient $xf(x) + \int_x^1 f(t)dt - xf(x) = 0$.
   En dérivant à nouveau il vient $f(x) = 0$ pour tout $x \in [0;1]$. Ainsi, $f=0$ et $\lambda = 0$ n'est pas valeur propre.
3. On suppose maintenant $\lambda \neq 0$.
   La relation $T(f)(0) = \lambda f(0)$ donne $f(0) = 0$.
   La relation $T(f) = \lambda f$ montre également que λf est dérivable et que pour tout $x \in [0;1]$, $\displaystyle\int_x^1 f(t)dt = \lambda f'(x)$.
   En particulier $f'(1) = 0$.
   En dérivant encore, il vient $\lambda f''(x) + f(x) = 0$.
   — Premier cas : $\lambda < 0$.
   L'équation caractéristique $\lambda X^2 + 1 = 0 \iff X = \pm\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}$ possède deux racines réelles distinctes.
   Il existe donc $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x) = A\exp\frac{x}{\sqrt{\lambda}} + B\exp\frac{-x}{\sqrt{\lambda}}$.
   Avec $f(0) = 0$, il vient $B = -A$ et finalement $f(x) = A\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{\sqrt{-\lambda}}$.
   Puisque $f'(1) = 0$ on obtient $0 = \frac{A}{\sqrt{-\lambda}}\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{\sqrt{-\lambda}}$ puis $A = 0$.
   On obtient à nouveau $f = 0$ donc $\lambda < 0$ n'est pas valeur propre.
   — Deuxième cas : $\lambda > 0$.
   L'équation caractéristique $\lambda X^2 + 1 = 0 \iff X = \pm\frac{i}{\sqrt{\lambda}}$ possède deux racines réelles conjuguées.
   Avec $f(0) = 0$, il vient $f(x) = A\sin\frac{x}{\sqrt{\lambda}}$.
   f est vecteur propre de T (associé à la valeur propre $\lambda > 0$) si et seulement si $f \neq 0$ si et seulement si $A \neq 0$.
   La condition $f'(1) = 0$ donne $0 = \frac{A}{\sqrt{\lambda}}\cos\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$.
   Ainsi, f est vecteur propre de T associé à la valeur propre λ si et seulement si
   $$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \iff \lambda = \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}+k\pi}\right)^2, k \in \mathbb{N}.$$
   Par conséquent $\lambda_k = \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}+k\pi}\right)^2$ est valeur propre de T et $E_{\lambda_k} = Vect\left(x \mapsto \sin\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)$.

□