Partie I

Soient λ et μ deux réels tels que $\mu \neq 0$ et $\lambda^2 - \mu < 0$. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 2\lambda x + \mu)^{n+1}}$$

1. Montrer qu'il existe deux réels α, β que l'on exprimera en fonction de λ et μ tels que pour tout réel x : $x^2 + 2\lambda x + \mu = \alpha(1 + \beta^2(x+\lambda)^2)$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, étudier la convergence de l'intégrale I_n puis calculer I_0.
3. Dans ce qui suit, on suppose que $\lambda = 0$ et $\mu = 1$.
   (a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $I_n = \dfrac{(2n-1)I_{n-1}}{2n}$
   (b) Pour tout entier naturel n, exprimer I_n en fonction de l'entier n.
   On donnera la réponse à l'aide de factorielles.

Partie II

1. Soit x un réel tel que $|x| \leqslant \frac{1}{4}$. Exprimer, en fonction de x, les deux solutions X_1 et X_2 de l'équation d'inconnue X suivante : $X^2 - X + x = 0$.
2. Donner le domaine de définition I_X de la fonction f qui à tout réel x de I_X associe :
$$\frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2}.$$
3. Pour tout réel $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, rappeler le développement en série entière de la fonction qui, à tout réel $x \in]-1; 1[$, associe $(1+x)^\alpha$.
4. En déduire le développement en série entière de la fonction f, en l'écrivant sous la forme :
$$\forall x \in \mathscr{D}_S,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n$$
où $\mathscr{D}_S$ est un domaine de $\mathbb{R}$ à préciser. On donnera la valeur de S_0 et on exprimera les coefficients $S_n, n \in \mathbb{N}^*$, en fonction de n sous forme de produit.
5. On propose de retrouver le résultat de la question précédente à l'aide d'une équation différentielle.
   (a) Montrer que f est solution de l'équation différentielle :
   $$\mathscr{E} : (1-4x)y' + 2y = 1.$$
   (b) On suppose qu'il existe une fonction y solution de $\mathscr{E}$ et développable en série entière sur un intervalle $]-r; r[$. On note pour tout $x \in]-r; r[$, $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
   Montrer que $a_1 = 1 - 2a_0$ et pour tout $n \geqslant 2$, $a_n = \dfrac{2(2n-3)}{n} a_{n-1}$.
   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{1}{2} \dfrac{(2n)!}{(2n-1)(n!)^2} a_1$.
   (d) Déterminer le rayon de convergence de la série entières $\sum a_n x^n$.
   (e) Expliquer comment retrouver le développement en série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n$ de la fonction f.
6. Rappeler la formule donnant le produit de Cauchy de deux séries entières.
   Que peut-on dire du rayon de convergence de la série produit ?
7. À l'aide de la question 1. de cette Partie II, montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$:
$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} S_k S_{n-k} \quad (*).$$
8. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$: $S_n = \dfrac{1}{n}\dbinom{2n-2}{n-1}$.
9. Étudier la convergence de la série numérique $\sum S_n$.
10. On appelle **mot de Dyck** une chaîne de $2n$ caractères, $n \in \mathbb{N}^*$, formée de n lettres A et de n lettres B telle que lorsque l'on dénombre les lettres de gauche à droite, en s'arrêtant à une lettre du mot, le nombre de A soit toujours supérieur ou égal au nombre de B. Ainsi, le seul mot de Dyck de longueur 2 est : AB. Les mots de Dyck de longueur 4 sont $AABB$ et $ABAB$. Les chaînes $ABAABB$ et $AAABBB$ sont des mots de Dyck alors que BA ou $AABBBA$ n'en sont pas.
    Pour tout entier $n \geqslant 1$, on désigne par C_n le nombre de mots de Dyck de $2n$ lettres.
    (a) Calculer C_1, C_2, C_3.
    (b) On pose $C_0 = 1$ (on considère donc que le mot vide est un mot de Dyck).
    Justifier succinctement qu'un mot de Dyck de longueur $2n$ est de la forme AD_1BD_2 avec D_1, D_2 des mots de Dyck (éventuellement vides) de longueurs respectives $2k$ et $2(n-1-k)$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$.
    (c) En déduire que pour tout $n \geqslant 1$, $C_n = \sum_{k=1}^{n} C_{k-1}C_{n-k}$.
    (d) Montrer que pour tout entier naturel n, $C_n = S_{n+1}$.
    En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre de mots de Dyck de longueur $2n$.
11. Proposer une démarche permettant d'obtenir tous les mots de Dyck de longueur $2n$ à l'aide de Python.