DM3 : intégrales

Exercice 1: Intégration terme à terme (Solution)

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} t^2 e^{-nt}\right) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^3}$. On justifiera au passage la convergence des séries et intégrales intervenant dans chaque membre de l'égalité à démontrer.

Exercice 2: Intégration terme à terme (Solution)

1. (a) Justifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge.

   (b) Démontrer que l'on a :

   $$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 x^{2n}(1-x)dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}.$$

   (c) Montrer que :

   $$\sum_{n=0}^{N}\int_0^1 x^{2n}(1-x)dx = \sum_{k=1}^{2N+2} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

   (d) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

2. On pose $\displaystyle f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$.

   (a) Déterminer soigneusement l'ensemble de définition de la fonction f. Que vaut $f(1)$?

   (b) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-x}{1+x^2}dx$.

   (c) En calculant de deux façons différentes $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\int_0^1 x^{2n}(1-x)dx\right)$ déterminer la valeur de la somme $\displaystyle S = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$ après en avoir justifié l'existence.

Exercice 3: Intégration terme à terme ? (Solution)

On pose $\displaystyle u_n = (-1)^n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)dt$.

On rappelle que l'on a déjà étudié la série $\sum u_n$ dans le DM1 : on a prouvé sa convergence et calculé sa somme. Dans cet exercice, on propose de montrer que le théorème d'intégration terme à terme ne s'applique pas pour le calcul de $\sum u_n$.

1. (a) A l'aide d'une IPP, déterminer une relation de récurrence entre $|u_{n+2}|$ et $|u_n|$.

   (b) Démontrer par récurrence double que pour tout entier naturel n, on a : $\forall n\in\mathbb{N}, |u_n|\geqslant \dfrac{1}{n+1}$.

   (c) Quelle hypothèse n'est pas vérifiée afin d'appliquer le théorème d'intégration terme à terme pour calculer $\sum u_n$?
   Justifier soigneusement.

2. Une expression explicite des intégrales de Wallis.
   A partir de la relation de récurrence de la question 1., montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$:

   $$|u_{2n}| = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2} \text{ et } |u_{2n+1}| = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}.$$

SOLUTIONS DM1

Solution Exercice **??**.

$\square$

Solution Exercice **??**.

$\square$