Epreuve de Mathématiques B

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Dans cette épreuve, les candidats sont invités à illustrer, s'ils le jugent nécessaire, leurs réponses avec un dessin.

Les 3 parties du sujet sont indépendantes.

À rendre en fin d'épreuve avec la copie une feuille de papier millimétré

Tournez la page S.V.P.

Première Partie.

Dans cette partie, l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne usuelle. Sa base canonique sera notée (e_1, e_2).
Pour tout nombre complexe z, on note $\mathrm{Re}(z)$ ou z_r sa partie réelle, $\mathrm{Im}(z)$ ou z_i sa partie imaginaire, $|z|$ son module et $\overline{z}$ son conjugué. On désigne par i le nombre complexe de module 1 et dont un argument est $\frac{\pi}{2}$.
Soient a et b deux nombres complexes. On considère la fonction $f_{a,b}$ définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ f_{a,b}(z) = az + b\overline{z}.$$

ainsi que la fonction $g_{a,b}$ qui à tout vecteur u de $\mathbb{R}^2$ d'affixe complexe $\mathrm{Aff}(u) = z$ associe le vecteur v de $\mathbb{R}^2$ d'affixe complexe $f_{a,b}(z)$.

1. Soient u_1 et u_2 deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ d'affixes complexes respectives z_1 et z_2. Dans chacun des cas suivants, dire si la famille (u_1, u_2) est une base de $\mathbb{R}^2$. Justifier la réponse.
   (a) $(z_1, z_2) = (-4i, 0)$. (b) $(z_1, z_2) = (3 - i, i(3 - i))$.
   (c) $(z_1, z_2) = (3 + i, i - 3)$. (d) $(z_1, z_2) = \left(\frac{1}{1+i}, -3e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)$.
2. Démontrer que $g_{a,b}$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
3. On note $G = \{g_{a,b}; (a, b) \in \mathbb{C}^2\}$.
   (a) Démontrer que G est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
   (b) Démontrer que $G = \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ où $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ est l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$. On pourra s'intéresser à la famille $(g_{1,0}, g_{i,0}, g_{0,1}, g_{0,i})$.
4. (a) Reconnaître (on ne demande pas de justification) $g_{a,b}$ lorsque
   (i) $a \in \mathbb{R}^\star$ et $b = 0$. (ii) $a = e^{i\theta}$ et $b = 0$ où $\theta \in \mathbb{R}$.
   (iii) $(a, b) = (0, 1)$.
   (b) En déduire que pour $(a, b) = (e^{i\theta}, 0)$ et $(a', b') = (0, 1)$, $g_{a,b} \circ g_{a',b'}$ est une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^2$. Est-elle positive (ou directe) ? Donner sa nature et ses éléments caractéristiques.
5. (a) Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, E_1 et E_2 deux espaces vectoriels supplémentaires dans E, s la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2 et p la projection sur E_1 parallèlement à E_2. Rappeler quelle est la relation entre s, p et l'application identité notée id.
   (b) En déduire un couple de complexes (a, b) pour lequel $g_{a,b}$ est la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur u_α d'affixe complexe $e^{i\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.
6. Ecrire la matrice $G_{a,b}$ de $g_{a,b}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
7. On suppose dans cette question uniquement que $a \in \mathbb{R}$. La matrice $G_{a,b}$ est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$? Que dire de plus sur ses sous-espaces propres ?
8. (a) Déterminer le polynôme caractéristique de $G_{a,b}$.
   (b) On suppose que $|b|^2 \neq (\mathrm{Im}(a))^2$. La matrice $G_{a,b}$ est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$? Est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$? Discuter en fonction de a et b.
   (c) On suppose que $|b|^2 = (\mathrm{Im}(a))^2$. Démontrer que $G_{a,b}$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si $a \in \mathbb{R}$ et $b = 0$.
   (d) A quelle(s) condition(s), $g_{a,b}$ est-elle diagonalisable ?