TRAVAUX DIRIGÉS : Suites et séries numériques

1 Quelques suites numériques

Exercice 1: suite récurrente (Solution)

Étudier la convergence et donner la limite le cas échéant des suites de terme général suivant (où $x \in \mathbb{R}$ est fixé) :

1. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$. 2. $u_n = \displaystyle\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$. 3. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}^{-1}$.

Exercice 2: suite récurrente (Solution)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 \in]0;\pi[\quad \text{et } u_{n+1} = \sin u_n.$$

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0;\pi[$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   En déduire qu'elle converge et donner sa limite.
3. Montrer que $u_n - \sin(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{u_n^3}{6}$ puis que $u_n^2 - u_{n+1}^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{u_n^2 u_{n+1}^2}{3}$.
4. **Lemme de Cesaro**. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.
   Montrer que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ alors $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
5. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2}$.
   Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{1}{3}$ puis que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n u_{n+1}^2 = 3$.
   En déduire un équivalent de u_n lorsque $n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Exercice 3: suite définie implicitement (Solution)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : x \mapsto x^n + x - 1$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution $u_n \in]0,1[$.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
   En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.
3. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n = 1 - u_n$.
   Montrer que $n\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln \alpha_n$.
4. Montrer qu'il existe un rang à partir duquel $\alpha_n > \frac{1}{n}$.
   En déduire que $\dfrac{\ln(-\ln \alpha_n)}{\ln n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
5. Montrer que $\ln \alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln n$.
   (*Indications : On pourra montrer que* $\dfrac{\ln \alpha_n + \ln n}{-\ln n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$).
   En déduire que $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}$.

Exercice 4: Équivalents (Solution)

Déterminer un équivalent simple du terme général :

1. $u_n = \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$.
2. $u_n = \sin\left(\dfrac{n^2+n+1}{n+1}\pi\right)$.
3. $u_n = e - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.
4. $d_n = \sqrt{n + (-1)^n} - \sqrt{n}$.

Exercice 5: développement asymptotique $I_n = u_n + o(1/n^2)$ (Solution)

A l'aide d'une double intégration par parties, déterminer un développement asymptotique à la précision $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ de l'intégrale :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx.$$

2 Nature de certaines séries numériques

Exercice 6: d'Alembert et comparaison (Solution)

Déterminer la nature de la série numérique dont le terme général est :

1. $u_n = \frac{n!}{n^n}$
2. $u_n = \frac{2^n n!}{n^n}$
3. $u_n = \frac{4^n n!}{n^n}$
4. $u_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$
5. $u_n = \ln\left(\frac{n^4+3n^2+n}{n^4+2n^2-n+1}\right)$
6. $u_n = n\sin(\frac{1}{n})$
7. $u_n = \ln\left(1 - \frac{(-1)^n}{n^2}\right)$
8. $u_n = \sin(e^{-3n})$
9. $u_n = \frac{(n+2)^{\frac{4}{3}}}{(n+1)(n+3)^{\frac{3}{2}}}$
10. $u_n = \frac{4^n - n}{5^n + 3^n}$
11. $u_n = \frac{\ln n}{n\sqrt{n}}$
12. $u_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$
13. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}\cos^2(n)}$
14. $u_n = \frac{e^{in}}{n^2+i}$

Exercice 7: plus difficile (Solution)

Déterminer la nature de la série numérique dont le terme général est :

1. $u_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$
2. $u_n = \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$
3. $u_n = e^{-\sqrt{\ln n}}$
4. $u_n = \sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n}$
5. $u_n = \arccos \frac{n}{n+1}$
6. $u_n = \frac{1}{n \ln n}$

Exercice 8: Séries à paramètres (Solution)

Déterminer la nature des séries en fonction de la valeur du paramètre :

1. $u_n = \dfrac{\ln^2 n}{n^\alpha}$
2. $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha \ln^3 n}$
3. $u_n = \dfrac{\pi}{2} - \arctan(n^\alpha)$
   Indication :
   $\forall x > 0, \arctan \frac{1}{x} + \arctan x = \frac{\pi}{2}$.
4. $u_n = \dfrac{a^n}{n!}$
5. $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} n \ln^2 k$
6. $u_n = \dfrac{n^n}{a^n n!}, a > 0$.
   (Cas $a = e$ difficile)

Exercice 9: (Solution)

1. On considère la série de terme général $u_n = \sin((2-\sqrt{3})^n \pi)$.
   Montrer qu'elle est à termes positifs puis étudier sa convergence.
2. On pose $A_n = (2-\sqrt{3})^n + (2+\sqrt{3})^n$.
   Montrer que A_n est un entier pair.
3. En déduire la nature de la série de terme général $v_n = \sin((2+\sqrt{3})^n \pi)$.

Exercice 10: série définie par récurrence (Solution)

On considère une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant :

$$u_0 \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1+u_n^2}{2}.$$

1. Déterminer en fonction de u_0 la limite de u_n quand $n \to +\infty$.
2. Dans cette question, on suppose que $u_0 \in]-1;1[$ et on pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}, w_n = 1 - u_n$.
   (a) Écrire la relation de récurrence vérifiée par la suite $(w_n)_{n\geqslant 0}$.
   En déduire que la série $\sum w_n^2$ converge.
   (b) Déterminer la nature de la série $\sum \ln\left(\dfrac{w_{n+1}}{w_n}\right)$.
   En déduire la nature de la série $\sum w_n$.

3 Calcul de sommes

Exercice 11: décomposition en éléments simples (Solution)

1. Calculer en justifiant la convergence $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.
2. Calculer en justifiant la convergence $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)}$.
3. (a) Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que pour tout $x \neq -1$:
   $$\frac{1}{x^3+1} = \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta x + \gamma}{x^2 - x + 1}.$$
   (b) Montrer que pour tout $n \geqslant 0$:
   $$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{3k+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^3}dt - \int_0^1 \frac{(-t^3)^{n+1}}{1+t^3}dt,$$
   puis en déduire la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Exercice 12: série géométrie et dérivée (Solution)

1. Calculer pour $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$.
2. En déduire pour $x \in]-1;1[$, la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$.
3. En déduire la convergence et la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n-(-1)^n)3^{-n}$.

Exercice 13: (Solution)

1. Vérifier que pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}\frac{1}{n+1}} = \dfrac{1}{n^2+n+1}$.
2. En déduire que $\arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right) = \arctan\left(\frac{1}{n}\right) - \arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)$ pour tout $n \geqslant 1$.
3. Montrer la convergence et déterminer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$.

4 Comparaison série-intégral

Exercice 14: (Solution)

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant 2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}).$$
2. En déduire que la série $\displaystyle\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge (en utilisant le résultat de la question précédente).
3. On considère la **suite** de terme général $v_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ pour $n \geqslant 1$.

   Étudier la nature de la **suite** $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et le cas échéant donner sa limite.

Exercice 15: Série de Bertrand (Solution)

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ pour que la série suivante converge :
$$\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}.$$

Exercice 16: Somme d'une série alternée (Solution)

1. **Convergence de** $\displaystyle\sum (-1)^n \frac{\ln n}{n}$. On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{\ln k}{k}$.
   (a) Montrer que la série $\displaystyle\sum (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ converge.
   (b) Montrer que la série $\displaystyle\sum (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ n'est pas absolument convergente.
2. **Développement asymptotique de** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. On note $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.
   (a) Déterminer la nature de la série $\sum (u_{n+1}-u_n)$.
   (b) En déduire qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$.
3. On note $S = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ et pour $n \geqslant 3$,
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n; \quad S_n = \sum_{k=2}^{n} (-1)^k \frac{\ln k}{k}; \quad t_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln k}{k}; \quad a_n = t_n - \frac{\ln^2 n}{2}.$$
   (a) Montrer que pour $n \geqslant 3$:
$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\ln t}{t} dt \leqslant \frac{\ln n}{n}.$$
   (b) En déduire que la suite $(a_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante et convergente.
   (c) Montrer que pour tout $n \geqslant 3$:
$$S_{2n} = t_n - t_{2n} + \ln 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$
   En déduire une expression de S_{2n} en fonction de a_n, a_{2n}, u_n.
   (d) Calculer et exprimer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_{2n}$ en fonction de γ.
   En déduire la somme de $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k}$.

Exercice 17: Équivalent et somme partielle divergente (Solution)

Déterminer un équivalent lorsque $n \to +\infty$ de $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln k}{k}$.

Exercice 18: Accélération de la convergence (Solution)

1. Justifier que la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$ converge et encadrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ son reste de rang n comme suit :
$$\frac{2}{\sqrt{n+1}} \leqslant R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{n}}.$$
2. Écrire un programme `Python` qui calcule une valeur approchée de
$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}} \text{ à } 10^{-6} \text{ près.}$$
3. Déterminer un équivalent ρ_n de R_n.
4. **Accélération de la convergence.**

   On pose $S'_n = S_n + \rho_n$ où S_n est la somme partielle $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$.

   Montrer que pour tout $n \geqslant 1$,
$$0 \leqslant S'_n - S \leqslant \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$
5. Écrire une amélioration du programme précédent et comparer les temps de calcul avec le package `import time`.

5 Séries alternées

Exercice 19: Une série alternée très classique ! (Solution)

1. Montrer que $\forall (x, n) \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \times \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k + \frac{(-x)^n}{1+x}$.
2. Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x} dx = 0$.
3. Avec le cours, justifier que la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge.

   Déduire de la Q1 que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$.
4. Exprimer le reste $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ en fonction de $\displaystyle\int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x} dx$.
5. En déduire que la série $\sum R_n$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} R_n = -\int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} dx$.

Exercice 20: convergence des séries alternées (Solution)

Soit $\sum (-1)^n \alpha_n$ une série telle que $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **positive, décroissante et de limite nulle**. On rappelle qu'une telle série $\sum (-1)^n \alpha_n$ est dite alternée.

On note $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum (-1)^n \alpha_n$.

1. **Question de cours.**
   Montrer que les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.
   En déduire que la série $\sum (-1)^n \alpha_n$ est convergente. On note S sa somme.
2. Montrer que la suite des restes $R_n = S - S_n$ vérifie $|R_n| \leqslant \alpha_{n+1}$ en distinguant les cas n pair et n impair.
3. Avec ce qui précède, montrer que la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge et que $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$ est une approximation de sa somme à $\frac{1}{n+1}$ près.
4. Écrire une fonction python `alterne2(n)` fournissant une approximation de S à 10^{-n} près.

Dans les exercices suivants, on peut utiliser les résultats de l'Exercice 20

Exercice 21: Applications (Solution)

Déterminer la nature de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$.
En cas de convergence, préciser si elle est absolue.

Exercice 22: Applications (Solution)

1. Déterminer la nature de la série $\sum \ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right)$.
2. Déterminer la nature de la série $\sum \ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.
3. Déterminer la nature de la série $\sum \ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$.
4. Déterminer la nature de la série $\sum \ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$.

En cas de convergence, préciser si elle est absolue.

Exercice 23: Applications (Solution)

1. Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$.
2. Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.
3. Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha+(-1)^n}$ en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$.
4. Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha+(-1)^n n^\beta}$ en fonction des paramètres $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Exercice 24: Sommes de séries alternées (Solution)

1. Étudier la convergence et calculer $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$.

   Indication : On pourra calculer la limite des sommes partielles de rang impair.
2. Étudier la convergence et calculer $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$.

   Indication : On pourra calculer la limite des sommes partielles de rang impair et utiliser le développement asymptotique

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n)+\gamma+o(1).$$

Exercice 25: (Solution)

1. Déterminer la nature de la série de terme général $\sin\left(\frac{n^2}{n+1}\pi\right)$
2. Déterminer la nature de la série de terme général $\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.
3. Déterminer la nature de la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n\ln(n)+(-1)^n}$.

Exercice 26: Convergence de la somme des restes alternés (Solution)

1. Justifier que la série $\sum \dfrac{(-1)^k}{k}$ converge. On pose $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.
2. Montrer que $R_n + R_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$.
3. Calculer $R_n - R_{n+1}$ puis déterminer un équivalent de R_n.
4. Déterminer la nature de la série de terme général R_n.

Exercice 27: (Solution)

Recommencer l'exercice précédent avec la série $\sum \dfrac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$.

SOLUTIONS TRAVAUX DIRIGÉS : Suites et séries numériques

Solution Exercice 1.

1. On procède par encadrement. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\frac{n}{n^2+n} \leqslant \frac{n}{n^2+k} \leqslant \frac{n}{n^2+1}$. Ainsi,

$$\frac{n^2+1}{n^2} \leqslant u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k} \leqslant \frac{n^2}{n^2+1}.$$

Par le théorème des gendarmes, on en déduit

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k} = 1.$$

2. On rappelle que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\lfloor y \rfloor \leqslant y < \lfloor y \rfloor + 1$.
De manière équivalent : $y - 1 < \lfloor y \rfloor \leqslant y$.
Ainsi, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$kx - 1 < \lfloor kx \rfloor \leqslant kx$$

donc

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(kx-1) < \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\lfloor kx \rfloor \leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} kx$$

c'est-à-dire :

$$\frac{1}{n^2}\left(\frac{n(n+1)x}{2} - n\right) < \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\lfloor kx \rfloor \leqslant \frac{n(n+1)x}{2}.$$

Par le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\lfloor kx \rfloor = \frac{x}{2}.$$

3. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \in \mathbb{N}^*$ donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^{-1} &= \sum_{k=0}^{n}\frac{k!(n-k)!}{n!} = 1 + \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{n-2}\frac{k!(n-k)!}{n!} + \frac{1}{n} + 1 \\ &= 2 + \frac{2}{n} + \sum_{k=2}^{n-2}\frac{k!(n-k)!}{n!} = 2 + \frac{2}{n} + \underbrace{\frac{1}{n(n-1)}\underbrace{\sum_{k=2}^{n-2}\frac{k!(n-k)!}{(n-2)!}}_{\leqslant (n-3)\times 1}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.}\end{aligned}$$

Ainsi, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^{-1} = 2.$

□

Solution Exercice 2.

1. • Pour tout $x \geqslant 0$, $\sin(x) \leqslant x$.
En effet la fonction $g : x \mapsto x - \sin(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ avec $g'(x) = 1 - \cos(x) \geqslant 0$.
g est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$ et en particulier pour tout $x \geqslant 0$:

$$0 = g(0) \leqslant g(x) = x - \sin(x) \iff \sin(x) \leqslant x.$$

• $u_0 \in]0; \pi[$ et si $0 < u_n < \pi$ alors $0 < \sin(u_n) \leqslant u_n < \pi$ par ce qui précède. On conclut par récurrence.

2. L'inégalité $\forall x \geqslant 0, \sin(x) \leqslant x$ implique immédiatement $u_{n+1} = \sin(u_n) \leqslant u_n$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0, elle converge vers un réel $\ell \in [0; \pi]$.
La continuité de la fonction sin en ℓ implique

$$\sin(\ell) = \lim_{n\to+\infty}\sin(u_n) = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell.$$

L'étude de la fonction g, à la question 1., montre que g admet un unique 0. Autrement, dit f admet un unique point fixe $\ell = f(\ell) \iff \ell = 0$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

3. $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc le développement limité $x - \sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - (x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3))$ donne :

$$u_n - \sin(u_n) = \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{u_n^3}{6}.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}u_n^2 - u_{n+1}^2 = (u_n - u_{n+1})(u_n + u_{n+1}) &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{u_n^3}{6}(u_n + u_{n+1}) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{u_n^3}{6}(2u_n) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{u_n^4}{3}\end{aligned}$$

D'autre part : $u_{n+1} = \sin(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$ donc

$$\frac{u_n^2 u_{n+1}^2}{3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{u_n^4}{3}.$$

4. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N_0 \Longrightarrow |x_n - \ell| \leqslant \varepsilon).$$

Soit $n > N_0$:

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) - \ell = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\ell) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_0-1}(x_k-\ell) + \frac{1}{n}\sum_{k=N_0}^{n}(x_k-\ell)$$
$$= \frac{K_0}{n} + \frac{1}{n}\sum_{k=N_0}^{n}(x_k-\ell).$$

avec $K_0 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_0-1}(x_k-\ell)$ constant.
Ainsi, chaque terme $x_k-\ell$ de la seconde somme étant majoré en valeur absolue par ε car $k \geqslant N_0$, on obtient par l'inégalité triangulaire :

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k - \ell\right| \leqslant \frac{|K_0|}{n} + \frac{(n-N_0+1)\epsilon}{n} \leqslant \frac{|K_0|}{n} + \varepsilon.$$

Soit $N_1 \geqslant N_0$ tel que pour tout $n \geqslant N_1$ on ait $\frac{|K_0|}{n} \leqslant \varepsilon$.
Pour tout $n \geqslant N_1$, on obtient

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k - \ell\right| \leqslant 2\epsilon.$$

5. On a
$$v_n = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{u_n^2-u_{n+1}^2}{u_{n+1}^2u_n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{u_n^2u_{n+1}^2}{3u_n^2u_{n+1}^2} = \frac{1}{3}.$$
Ainsi, $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}$ et par le lemme de Cesaro, on en déduit que
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} v_k = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_1^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3} \Longrightarrow nu_{n+1}^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 3.$$
Puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et est positive, on en déduit que
$$nu_{n+1}^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} nu_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 3 \Longrightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}.$$

□

Solution Exercice 3.

1. La fonction f_n est continue sur $]0;1[$.
f_n est strictement croissante car $f_n'(x) = nx^{n-1}+1 > 0$.
La fonction f_n réalise une bijection de $]0;1[$ sur $]f_n(0);f_n(1)[=]-1;1[$.
En particulier, il existe un unique réel $u_n \in]0;1[$ tel que $f_n(u_n) = 0$.

2. Pour tout $x \in]0;1[$, $x^{n+1} \leqslant x^n$ donc
$$f_{n+1}(x) = x^{n+1}+x-1 \leqslant x^n+x-1 = f_n(x).$$
Ainsi, $f_{n+1}(u_n) \leqslant f_n(u_n) = 0$ et $u_{n+1} \in [u_n;1[$ c'est-à-dire $u_{n+1} \leqslant u_n$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante et majorée par 1 donc converge vers $\ell \in [u_1;1] = [\frac{1}{2};1]$.
Montrons que $\ell = 1$. Sinon $\ell \in]0;1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant \ell < 1$.
On obtient par croissance de f_n :
$$0 = f_n(u_n) \leqslant f_n(\ell) = \ell^n + \ell - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell - 1 < 0$$
On a obtenu $0 < 0$ d'où la contradiction. Ainsi, $\ell = 1$.

3. On a $f_n(u_n) = u_n^n + u_n - 1 = 0 \Longleftrightarrow u_n^n = 1 - u_n$.
Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n = 1 - u_n = u_n^n = \exp(n\ln u_n) = \exp(n\ln(1-\alpha_n))$.
Donc $\ln\alpha_n = n\ln(1-\alpha_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -n\alpha_n$ car $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
En conclusion : $n\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln\alpha_n$.

4. On a montré que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1^-$ donc $\alpha_n = 1 - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0^+$.
Par conséquent $\ln\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ i.e. $-\ln\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Or $-\ln\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\alpha_n$ donc $n\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Ainsi, à partir d'un certain rang $N_0 \in \mathbb{N}$, $n\alpha_n > 1 \Longleftrightarrow \alpha_n > \frac{1}{n}$.
Par conséquent à partir de ce rang $\ln\alpha_n > \ln\frac{1}{n}$:
$$0 < \frac{\ln(-\ln\alpha_n)}{\ln n} \leqslant \frac{\ln(-\ln\frac{1}{n})}{\ln n} = \frac{\ln(\ln n)}{\ln n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

5. Montrons que $\ln\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln n$
$$\frac{\ln\alpha_n + \ln n}{-\ln n} = \frac{\ln(n\alpha_n)}{-\ln n} = \frac{\ln\left((n\alpha_n)\left(\frac{-\ln\alpha_n}{-\ln\alpha_n}\right)\right)}{-\ln n}$$
$$= \frac{\ln\left(\frac{n\alpha_n}{-\ln\alpha_n}\right) + \ln(-\ln\alpha_n)}{-\ln n}$$
Or :
— On a $\dfrac{n\alpha_n}{-\ln\alpha_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ car $n\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln\alpha$.
Donc $\ln\left(\dfrac{n\alpha_n}{-\ln\alpha_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et par suite $\dfrac{\ln\left(\frac{n\alpha_n}{-\ln\alpha_n}\right)}{-\ln n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
— On a montré ci-dessus : $\dfrac{\ln(-\ln\alpha_n)}{-\ln n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On en déduit que :

$$\frac{\ln \alpha_n + \ln n}{-\ln n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ mais } \frac{\ln n}{-\ln n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1 \text{ donc } \frac{\ln \alpha_n}{-\ln n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

En conclusion : $-\ln n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln \alpha_n$.

Mais on a montré à la question 3. $\ln \alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -n\alpha_n$ donc $-n\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln n$

Au final : $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}$.

□

Solution Exercice 4.

1. On utilise le développement limité $\ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$:

$$\begin{aligned} u_n = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n &= \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \\ &= \exp\left(n\left[-\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]\right) \\ &= \exp\left(-\sqrt{n} - \frac{1}{2} + o(1)\right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{u_n}{\exp\left(-\sqrt{n} - \frac{1}{2}\right)} = \exp(o(1)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Conclusion $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \exp\left(-\sqrt{n}\right) e^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{\exp(-\sqrt{n})}{\sqrt{e}}$.

2. On utilise le développement limité $\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 + o(x^2)$.

$$\begin{aligned} u_n &= \sin\left(\frac{n^2+n+1}{n+1}\pi\right) = \sin\left(\pi + \frac{n^2}{n+1}\pi\right) = -\sin\left(\frac{n^2}{n+1}\pi\right) \\ &= -\sin\left(\frac{n\pi}{1+\frac{1}{n}}\right) = -\sin\left(n\pi\left[1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\right) \\ &= -\sin\left(n\pi - \pi + \frac{\pi}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = -\sin\left((n-1)\pi + \frac{\pi}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= -(-1)^{n-1}\sin\left(\frac{\pi}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n\pi}{n}. \end{aligned}$$

3. On utilise les développements limités $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ et $\exp(x) \underset{n\to+\infty}{=} 1 + x + o(x)$:

$$\begin{aligned} e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= e - \exp\left(n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \\ &= e - \exp\left(n\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\right) \\ &= e - \exp\left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= e - \exp(1)\exp\left(-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= e\left[1 - \exp\left(-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right] \\ &= e\left[1 - \left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right] \\ &= \frac{e}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e}{2n}. \end{aligned}$$

4. On utilise l'équivalent $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$:

$$\begin{aligned} d_n &= \sqrt{n + (-1)^n} - \sqrt{n} \\ &= \sqrt{n}\left(\sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{n}} - 1\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{2n} = \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} \end{aligned}$$

□

Solution Exercice 5. Une première I.P.P. :

$$\begin{cases} u(x) = \dfrac{1}{1+x} & \Longrightarrow \quad u'(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2} \\ v'(x) = x^n & \Longrightarrow \quad v(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \end{cases}$$

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx = \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}dx$$

Une seconde I.P.P. :

$$\begin{cases} u(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2} & \Longrightarrow \quad u'(x) = -\dfrac{2}{(1+x)^3} \\ v'(x) = x^{n+1} & \Longrightarrow \quad v(x) = \dfrac{x^{n+2}}{n+2} \end{cases}$$

Ainsi,

$$I_n = \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{4(n+1)(n+2)} + \frac{2}{(n+1)(n+2)} \underbrace{\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x)^3} dx}_{o(1):(*)}$$
$$= \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{4(n+1)(n+2)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

$(*) : 0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x} dx \leqslant \int_0^1 x^{n+2} dx = \frac{1}{n+3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ □

Solution Exercice 6.

1. La série $\sum \frac{n!}{n^n}$ est à termes positifs. On utilise la règle de d'Alembert :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!}$$
$$= \frac{(n+1)!}{n!} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$$
$$= (n+1) \times \frac{1}{n+1} \times \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$
$$= \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\right).$$
Or puisque $\frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a $n \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1$.
Ainsi, $\exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1} = \frac{1}{e} < 1$.
D'après la règle de d'Alembert, la série $\sum \frac{n!}{n^n}$ est convergente.

2. La série $\sum u_n = \frac{2^n n!}{n^n}$ est à termes positifs. On utilise la règle de d'Alembert :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{2^n n!} = \frac{2(n+1)}{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$
$$= 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2e^{-1} < 1.$$
D'où la convergence $\sum u_n = \frac{2^n n!}{n^n}$.

3. La série $\sum \frac{4^n n!}{n^n}$ est à termes positifs. On utilise la règle de d'Alembert :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{4^n n!} = \frac{4(n+1)}{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$
$$= 4\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{4}{e} > 1.$$
La série $\sum \frac{4^n n!}{n^n}$ est donc divergente.

4. Le signe des termes de la série $\sum \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)$ est moins facile à prévoir que dans les questions précédentes.
On détermine un équivalent qui nous fournira le signe et la nature de la série par comparaison.
On a $\sin(x) \underset{x\to0}{=} x + o(x^2)$ et $\ln(1-x) \underset{x\to0}{=} -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ d'où le développement limité :
$$\sin(x) + \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) \underset{x\to0}{=} -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$$
puis le développement asymptotique car $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$:
$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
$$\underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2} < 0.$$
Ainsi la série $\sum \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)$ est à termes négatifs, donc de signe constant, à partir d'un certain rang.
Par comparaison à la série de Riemann convergente $\sum \frac{1}{n^2}$, on obtient la convergence de la série $\sum \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)$.

5. On commence par déterminer un équivalent du terme général de la série $\sum \ln\left(\frac{n^4+3n^2+n}{n^4+2n^2-n+1}\right)$.
Pour cela, on utilise le développement limité $\ln(1+x) \underset{x\to0}{=} x + o(x)$, qui donne puisque $\varepsilon_n = \frac{3n^2+n}{n^4} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$:
$$\ln(n^4+3n^2+n) = \ln\left(n^4\left(1 + \frac{3n^2+n}{n^4}\right)\right) = \ln(n^4) + \ln\left(1 + \frac{3n^2+n}{n^4}\right)$$
$$= \ln(n^4) + \ln(1+\varepsilon_n) \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n^4) + \varepsilon_n + o(\varepsilon_n)$$
et puisque $\varepsilon'_n = \frac{2n^2-n+1}{n^4} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$:
$$\ln(n^4+2n^2-n+1) = \ln(n^4) + \ln(1+\varepsilon'_n) \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n^4) + \varepsilon'_n + o(\varepsilon'_n).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{n^4+3n^2+n}{n^4+2n^2-n+1}\right) &= (\ln(n^4)+\varepsilon_n+o(\varepsilon_n)) - (\ln(n^4)+\varepsilon'_n+o(\varepsilon'_n))\\ &= \frac{3n^2+n}{n^4} - \frac{2n^2-n+1}{n^4} + o\left(\frac{3n^2+n}{n^4}\right) + o\left(\frac{2n^2-n+1}{n^4}\right)\\ &= \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} > 0.\end{aligned}$$

On en déduit la convergence de la série $\sum \ln\left(\frac{n^4+3n^2+n}{n^4+2n^2-n+1}\right)$ par comparaison à la série de Riemann convergente $\sum \frac{1}{n^2}$.

6. La série $\sum n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ est grossièrement divergente car $n\sin(\frac{1}{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1 \neq 0$.

7. La série $\sum \ln\left(1-\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$ est absolument convergente par comparaison à la série de Riemann convergente $\sum \frac{1}{n^2}$:

$$\left|\ln\left(1-\frac{(-1)^n}{n^2}\right)\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$

8. La série $\sum \sin\left(e^{-3n}\right)$ est à termes positifs et puisque $e^{-3n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$:

$$\sin(e^{-3n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-3n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

d'où la convergence de la série $\sum \sin(e^{-3n})$.

9. La série $\sum \frac{(n+2)^{\frac{4}{3}}}{(n+1)(n+3)^{\frac{3}{2}}}$ est à termes positifs et :

$$\frac{(n+2)^{\frac{4}{3}}}{(n+1)(n+3)^{\frac{3}{2}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{\frac{4}{3}}}{n^{1+\frac{3}{2}}} = \frac{1}{n^{\frac{7}{6}}}.$$

D'où la convergence de la série $\sum \frac{(n+2)^{\frac{4}{3}}}{(n+1)(n+3)^{\frac{3}{2}}}$ par comparaison à la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{\frac{7}{6}}}$ convergente car $\frac{7}{6} > 1$.

10. La série $\sum \frac{4^n-n}{5^n+3^n}$ est à termes positifs et

$$\frac{4^n-n}{5^n+3^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

car $n \underset{n\to+\infty}{=} o(4^n)$ et $3^n \underset{n\to+\infty}{=} o(5^n)$.

D'où la convergence de la série $\sum \frac{4^n-n}{5^n+3^n}$ par comparaison à la série géométrique $\sum \left(\frac{4}{5}\right)^n$ qui converge car $\frac{4}{5} \in]-1;1[$.

11. La série $\sum \frac{\ln n}{n\sqrt{n}}$ est à termes positifs et

$$\frac{\ln n}{n\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{n^{1,2}}\right) \text{ car } \frac{n^{1,2}\ln(n)}{n\sqrt{n}} = \frac{\ln(n)}{n^{0,3}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

> **Remarques**
>
> En fait tout réel $\alpha \in]1;1,5[$ vérifie : $\frac{\ln n}{n\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$.

On en déduit donc la convergence de la série $\sum \frac{\ln n}{n\sqrt{n}}$ par comparaison à la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{1,2}}$ qui converge car $1,2 > 1$.

12. On commence par déterminer un équivalent du terme général de la série $\sum \frac{1}{\sqrt[3]{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$ via un développement asymptotique :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}} &= (n^2-1)^{-\frac{1}{3}} - (n^2+1)^{-\frac{1}{3}}\\ &= n^{-\frac{2}{3}}\left(\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{-\frac{1}{3}} - \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{-\frac{1}{3}}\right)\\ &= n^{-\frac{2}{3}}\left[\left(1+\frac{1}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(1-\frac{1}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right]\\ &= n^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{2}{3}\frac{1}{n^{\frac{8}{3}}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{8}{3}}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{3}\frac{1}{n^{\frac{8}{3}}} > 0.\end{aligned}$$

D'où la convergence de la série $\sum \frac{1}{\sqrt[3]{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$ par comparaison à la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{\frac{8}{3}}}$ qui converge car $\frac{8}{3} > 1$.

13. La série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}\cos^2(n)}$ est à termes positifs et

$$\frac{1}{n^{0,75}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{n}\cos^2(n)}\right) \text{ car } 0 \leqslant \frac{\cos^2(n)\sqrt{n}}{n^{0,75}} = \frac{\cos^2(n)}{n^{0,25}} \leqslant \frac{1}{n^{0,25}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'où la divergence de la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}\cos^2(n)}$ par comparaison à la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{0,75}}$ qui diverge car $0,75 < 1$.

14. La série $\sum \frac{e^{in}}{n^2+i}$ est absolument convergente car :

$$\left|\frac{e^{in}}{n^2+i}\right| = \frac{1}{\sqrt{n^4+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2},$$

d'où l'absolue convergence de par comparaison à la série de Riemann convergente $\sum \frac{1}{n^2}$.

$\square$

Solution Exercice 7.

1. La série $\sum \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ est à termes positifs. On transforme l'expression du terme général pour tout $n \geqslant 2$:

$$\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} = \frac{1}{\exp(\ln n \ln(\ln n))} = \frac{1}{\left(e^{\ln n}\right)^{\ln(\ln n)}} = \frac{1}{n^{\ln(\ln n)}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

d'où la convergence par comparaison à la série de Riemann convergente $\sum \frac{1}{n^2}$.

2. La série $\sum \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$ est à termes positifs ($n \geqslant 2$ pour assurer que le terme général est bien défini).
Pour tout $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} n^2\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n} &= \frac{n^{2+\ln(n)}}{(\ln n)^n} = \frac{e^{(2+\ln n)\ln n}}{e^{n\ln(\ln n)}} \\ &= \exp(2\ln n + \ln^2 n - n\ln(\ln n)). \end{aligned}$$

Or :
— $\ln(n) \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$ et $n \underset{n\to+\infty}{=} o(n\ln(\ln n))$
donc $2\ln n \underset{n\to+\infty}{=} o(-n\ln(\ln n))$.
— De même $\ln^2 n \underset{n\to+\infty}{=} o(-n\ln(\ln n))$.
On en déduit que $2\ln n + \ln^2 n - n\ln(\ln n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -n\ln(\ln n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$. Par conséquent $n^2\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et on en conclut que

$$\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On en déduit la convergence de la série $\sum \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$ par comparaison à la série de Riemann convergente $\sum \frac{1}{n^2}$.

3. La série $\sum e^{-\sqrt{\ln n}}$ est à termes positifs.
Montrons que $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(e^{-\sqrt{\ln n}}\right)$.
Il s'agit donc de démontrer que $\frac{e^{\sqrt{\ln n}}}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Mais :

$$\frac{e^{\sqrt{\ln n}}}{n} = \frac{e^{\sqrt{\ln n}}}{e^{\ln n}} = e^{\sqrt{\ln n}-\ln n} = e^{\sqrt{\ln n}(1-\sqrt{\ln n})} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

La série de Riemann $\sum \frac{1}{n}$ étant divergente, on en déduit que la série $\sum e^{-\sqrt{\ln n}}$ est également divergente.

4. La série $\sum \left(n^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n+1}}\right)$ est à termes positifs car pour tout entier $n > 0$, et tous réels $A > a > 0$, on a $n^A > n^a$.

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n} &= e^{\frac{1}{n}\ln n} - e^{\frac{1}{n+1}\ln n} \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \left(1 + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right) - \left(1 + \frac{\ln n}{n+1} + o\left(\frac{\ln n}{n+1}\right)\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n(n+1)} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n^2} = o\left(\frac{1}{n^{1,5}}\right). \end{aligned}$$

5. Notons que $\frac{n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc $\arccos\frac{n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \arccos(1) = 0$ par valeur supérieure, par continuité de la fonction arccos en 1. La série $\sum \arccos\frac{n}{n+1}$ est donc à termes positifs.
On obtient ainsi,

$$\begin{aligned} \arccos\frac{n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sin(\arccos\frac{n}{n+1}) &= \sqrt{1-\cos^2\arccos\frac{n}{n+1}} \\ &= \sqrt{1-\frac{n^2}{(n+1)^2}}. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\arccos\frac{n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2n+1}}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

La série $\sum \arccos \dfrac{n}{n+1}$ diverge par comparaison à la série de Riemann divergente $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

6. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)}$ est positive, continue et décroissante sur $[2;+\infty[$ car dérivable sur cet intervalle avec

$$\forall x \geqslant 2, f'(x) = -\frac{\ln(x)+1}{x\ln(x)^2} < 0.$$

La série à termes positifs $\sum \dfrac{1}{n\ln(n)}$ et l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln(x)}$ sont de même nature. Soit $A \geqslant 2$:

$$\int_2^A \frac{1}{x\ln(x)}dx = \int_2^A \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)} = [\ln(\ln(x))]_2^A = \ln(\ln(A)) - \ln(\ln(2)) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

La série $\sum \dfrac{1}{n\ln(n)}$ est donc divergente.

□

Solution Exercice 8.

1. La série $\sum \dfrac{\ln^2 n}{n^\alpha}$ est à termes positifs.
   — Si $\alpha \leqslant 0$, $\dfrac{\ln^2 n}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
   La série $\sum \dfrac{\ln^2 n}{n^\alpha}$ est grossièrement divergente.
   — Si $\alpha \in [0;1]$ on a :
   $$\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{\ln^2 n}{n^\alpha}\right) \text{ car } \frac{1}{n^{1-\alpha}\ln^2 n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
   La série $\sum \dfrac{\ln^2 n}{n^\alpha}$ diverge par comparaison à la série de Riemann divergente $\sum \dfrac{1}{n}$. La série $\sum \dfrac{\ln^2 n}{n}$ diverge par comparaison à la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n}$.
   — Si $\alpha > 1$, il existe $\beta \in]1;\alpha[$ et on a :
   $$\frac{\ln^2 n}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\beta}\right) \text{ car } \frac{\ln^2 n}{n^{\alpha-\beta}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
2. La série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha \ln^3 n}$ est à termes positifs.
   — Si $\alpha < 0$, $\dfrac{1}{n^\alpha \ln^3 n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, la série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha \ln^3 n}$ est grossièrement divergente.
   — Si $\alpha = 0$, $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{\ln^3 n}\right)$ car $\dfrac{\ln^3 n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   La série $\sum \dfrac{1}{\ln^3 n}$ est donc divergente.
   — Si $\alpha \in]0;1[$, il existe $\beta \in]\alpha;1[$ et on a :
   $$\frac{1}{n^\beta} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\alpha \ln^3 n}\right) \text{ car } \frac{\ln^3 n}{n^{\beta-\alpha}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
   — Si $\alpha = 1$, on compare la série $\sum \dfrac{1}{n\ln^3 n}$ à l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln^3 x}dx$ de la fonction continue, positive et décroissante $f : [2;+\infty[, x \mapsto \dfrac{1}{x\ln^3 x}$.
   Pour tout $A > 2$:
   $$\begin{aligned}\int_2^A \frac{1}{x\ln^3 x}dx &= \int_2^A \frac{1}{x}\ln^{-3}(x)dx \\ &= \left[\frac{1}{-3+1}\ln^{-3+1}(x)\right]_2^A \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\ln(A)^2} - \frac{1}{\ln(2)^2}\right) \\ &\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2\ln(2)^2}.\end{aligned}$$
   La série $\sum \dfrac{1}{n\ln^3 n}$ et l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln^3 x}dx$ convergent.
   — Si $\alpha > 1$, il existe $\beta \in]1;\alpha[$ et on a :
   $$\frac{1}{n^\alpha \ln^3 n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\beta}\right) \text{ car } \frac{1}{n^{\alpha-\beta}\ln^3 n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
3. — si $\alpha \leqslant 0$, la série $\sum \dfrac{\pi}{2} - \arctan(n^\alpha)$ est grossièrement divergente car $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{\pi}{2} - \arctan(n^\alpha)\right) \neq 0$.
   — On suppose dans la suite $\alpha > 0$.
   • Montons la relation fonctionnelle $\forall x > 0, \arctan \frac{1}{x} + \arctan x = \frac{\pi}{2}$:
   $$\forall x > 0, -\frac{1}{x^2}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} + \frac{1}{1+x^2} = -\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} = 0.$$
   Ainsi, la fonction $f : x \mapsto \arctan \frac{1}{x} + \arctan x$ est constante sur $\mathbb{R}_+$ et $\lim\limits_{+\infty} f = \dfrac{\pi}{2}$, d'où la relation fonctionnelle.
   • La série $\sum \left(\dfrac{\pi}{2} - \arctan(n^\alpha)\right)$ est donc de terme général
   $$\frac{\pi}{2} - \arctan n^\alpha = \arctan \frac{1}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^\alpha} > 0.$$

$\sum \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(n^\alpha)\right)$ converge donc si et seulement si $\alpha > 1$ par comparaison à la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$.

4. On démontre que la série $\sum \frac{a^n}{n!}$ converge absolument pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$\frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{|a|^n} = \frac{|a|}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1.$$

La règle de d'Alembert permet de conclure.

5. La série $\sum \frac{n^n}{a^n n!}$ est à termes positifs et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{a^{n+1}(n+1)!}\frac{a^n n!}{n^n} = \frac{1}{a}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{e}{a}.$$

— Si $a > e \iff \frac{e}{a} < 1$, la série $\sum \frac{n^n}{a^n n!}$ converge d'après la règle de d'Alembert.
— Si $a < e \iff \frac{e}{a} > 1$, la série $\sum \frac{n^n}{a^n n!}$ diverge d'après la règle de d'Alembert.
— Il reste à traiter le cas $a = e$. Dans ce cas

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{1}{e}\exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= \frac{1}{e}\exp\left(n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)\\ &= \frac{1}{e}\exp\left(1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= \exp\left(-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= 1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

On considère la série de terme général $v_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}$. On a

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-\frac{3}{4}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{3}{4}} = 1-\frac{3}{4n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Les développements asymptotiques de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et de $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ donnent l'existence d'un rang $N \in \mathbb{N}$ à partir duquel :

$$\forall n \geqslant N,\ \frac{v_{n+1}}{v_n} = 1-\frac{3}{4n}+o\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant 1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

On en déduit ainsi les inégalités suivantes, pour $n \geqslant N+1$:

$$\frac{v_{N+1}}{v_N} \leqslant \frac{u_{N+1}}{u_n} \quad ; \quad \frac{v_{N+2}}{v_{N+1}} \leqslant \frac{u_{N+2}}{u_{N+1}} \quad ; \quad \ldots \quad ; \quad \frac{v_n}{v_{n-1}} \leqslant \frac{u_n}{u_{n-1}} :$$

qui donnent par produit :

$$\frac{v_{N+1}}{v_N}\frac{v_{N+2}}{v_{N+1}}\cdots\frac{v_n}{v_{n-1}} \leqslant \frac{u_{N+1}}{u_N}\frac{u_{N+2}}{u_{N+1}}\cdots\frac{u_n}{u_{n-1}}$$

c'est-à-dire :

$$\frac{v_n}{v_N} \leqslant \frac{u_n}{u_N} \iff v_n \leqslant \frac{v_N}{u_N}u_n.$$

On en déduit que $v_n \underset{n\to+\infty}{=} O(u_n)$. La divergence de la série $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}$ entraîne celle de $\sum u_n$.

6. La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}\sum_{k=1}^{n} n\ln^2(k)$ est à terme général $u_n = \frac{1}{n^\alpha}\sum_{k=1}^n n\ln^2 k$ positif. Notons que

$$\frac{\ln^2 2}{n^{\alpha-2}} \leqslant u_n = \frac{1}{n^{\alpha-1}}\sum_{k=1}^{n}\ln^2 k \leqslant \frac{\ln^2 n}{n^{\alpha-2}}.$$

— Si $\alpha - 2 > 1 \iff \alpha > 3$, il existe $\beta \in]1;\alpha-2[$ et on a

$$\frac{\ln^2 n}{n^{\alpha-2}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\beta}\right) \text{ car } \frac{\ln^2 n}{n^{\alpha-2-\beta}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par comparaisons, la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\beta}$ étant convergente, on en déduit la convergence des séries $\sum \frac{\ln^2 n}{n^{\alpha-2}}$ et $\sum u_n$.
— Si $\alpha - 2 = 1 \iff \alpha = 3$, on a

$$\frac{\ln^2 n}{n} \leqslant u_n.$$

La fonction $f : x \mapsto \frac{\ln^2 x}{x}$ est décroissante sur $I = [e^2;+\infty[$ car dérivable sur I et

$$\forall x \in I, f'(x) = -\frac{\ln^2 x}{x^2} + 2\frac{\ln x}{x^2} = \frac{1}{x^2}\ln(x)(2-\ln x) \leqslant 0.$$

Ainsi, f est positive, continue et décroissante sur I. La série $\sum \frac{\ln^2 n}{n}$ et l'intégrale $\int_{e^2}^{+\infty} f(t)dt$ sont de même nature. Soit $A > e^2$:

$$\int_{e^2}^{A} \frac{\ln^2 t}{t}dt = \left[\frac{1}{3}\ln^3 t\right]_{e^2}^{A} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

La série $\sum u_n$ est donc divergente.

— Si $\alpha - 2 < 1 \iff \alpha < 3$, il existe $\beta \in]\alpha-2;1[$ et on a

$$\frac{1}{n^\beta} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{\ln^2 2}{n^{\alpha-2}}\right) \text{ car } \frac{\ln^2 2}{n^{\beta-(\alpha-2)}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

Solution Exercice 9.

1. La série $\sum \sin((2-\sqrt{3})^n\pi)$ est à termes positifs car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < (2-\sqrt{3})^n < 1$ donc $0 < (2-\sqrt{3})^n\pi < \pi$.
   De plus, $(2-\sqrt{3})^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\sin((2-\sqrt{3})^n\pi) \underset{n\to+\infty}{\sim} (2-\sqrt{3})^n\pi$.
   La série géométrique $\sum \sin((2-\sqrt{3})^n\pi)$ étant convergente, on en déduit la convergence de la série $\sum \sin((2-\sqrt{3})^n\pi)$.
2. On développe avec la formule du binôme de Newton en simplifiant les termes de degré impair :

$$A_n = (2-\sqrt{3})^n + (2+\sqrt{3})^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\sqrt{3}^k 2^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sqrt{3}^k 2^{n-k}$$
$$= 2\sum_{0\leqslant 2p\leqslant n}\binom{n}{2p}\sqrt{3}^{2p}2^{n-2p} = 2\sum_{0\leqslant 2p\leqslant n}\binom{n}{2p}3^p 2^{n-2p} \in 2\mathbb{N}.$$

   A_n est un entier naturel pair ; on le note $A_n = 2B_n$.
3. On a $A_n = 2B_n = (2-\sqrt{3})^n + (2+\sqrt{3})^n \iff (2+\sqrt{3})^n = 2B_n - (2-\sqrt{3})^n$. Ainsi,

$$\sin\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^n\pi\right) = \sin\left(2B_n\pi - \left(2-\sqrt{3}\right)^n\pi\right) = -\sin\left(\left(2-\sqrt{3}\right)^n\pi\right)$$
$$\underset{n\to+\infty}{\sim} -(2-\sqrt{3})^n\pi < 0.$$

   La série $\sin((2+\sqrt{3})^n\pi)$ est donc de signe constant à partir d'un certain rang : elle converge par comparaison à la série géométrique $\sum(2-\sqrt{3})^n$.

□

Solution Exercice 10.

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \frac{1+x^2}{2}$ expression polynomiale bien définie sur $\mathbb{R}$ dont l'unique point fixe est $x = 1$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1+u_n^2-2u_n}{2} = \frac{(u_n-1)^2}{2} \geqslant 0$.
   La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est donc croissante.
   — Si $u_0 > 1$ alors pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} \geqslant u_n > 1$: la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et non majorée donc divergente vers $+\infty$. En effet, si elle était majorée, elle serait convergente vers $\ell \in \mathbb{R}$ vérifiant par continuité de la fonction f : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(\ell) = f(u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \iff \ell = 1$. Asburde.
   — Si $u_0 < -1$ alors $u_1 = \frac{1+u_0^2}{2} > 1$ et le raisonnement précédent s'applique à la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$: la série diverge vers $+\infty$.
   — Si $u_0 \in [-1;1]$ alors puisque pour tout $x \in [-1;1]$, $f(x) = \frac{1+x^2}{2} \in [0;1]$, on obtient que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 1 donc converge vers $\ell = f(\ell) \iff \ell = 1$.
2. $w_{n+1} = 1 - u_{n+1} = 1 - \frac{1+u_n^2}{2} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1-w_n)^2 = w_n - w_n^2$. La série de terme général w_n^2 est donc télescopique : $\sum(w_n - w_{n+1})$. qui converge car la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $1 - \lim u_n = 1 - 1 = 0$.
   La somme de $\sum w_n^2$ est égale à w_0.
3. • La série $\sum \ln \dfrac{w_{n+1}}{w_n}$ est télescopique, divergente car la suite $\ln w_n$ diverge vers $-\infty$.
   • On a $\ln \frac{w_{n+1}}{w_n} = \ln(1-w_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n = 1 - u_n \geqslant 0$ donc la série $\sum w_n$ diverge de même que $\sum \ln \dfrac{w_{n+1}}{w_n}$.

□

Solution Exercice 11.

1. On note S_n la somme partielle de la série $\sum \dfrac{1}{n(n+1)}$:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}$$
$$= 1 - \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

   On en déduit la convergence de la série $\sum \dfrac{1}{n(n+1)}$ et sa somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

2. Pour tout $n \geqslant 1$,

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\frac{1}{n+2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right),$$

donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

3. (a) On procède par analyse-synthèse.
Si $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ existe alors pour tout $x\neq -1$:

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{\alpha}{x+1}+\frac{\beta x+\gamma}{x^2-x+1}=\frac{\alpha(x^2-x+1)+(\beta x+\gamma)(x+1)}{x^3+1}$$

$$\iff \frac{1}{x^3+1}=\frac{x^2(\alpha+\beta)+x(-\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha+\gamma)}{x^3+1}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl}
\alpha & + & \beta & & & = & 0\\
-\alpha & + & \beta & + & \gamma & = & 0\\
\alpha & + & & & \gamma & = & 1
\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl}
\alpha & + & \beta & & & = & 0\\
-\alpha & + & \beta & + & \gamma & = & 0\\
\alpha & + & & & \gamma & = & 1
\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrcl}
\alpha & & & = & \frac{1}{3}\\
 & \beta & & = & -\frac{1}{3}\\
 & & \gamma & = & \frac{2}{3}
\end{array}\right.$$

La partie synthèse consiste à vérifier que l'on a pour tout $x\neq -1$:

$$\frac{1}{3}\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3}\frac{-x+2}{x^2-x+1}=\frac{1}{x^3+1}.$$

(b) On transforme les sommes partielles de la série $\sum\frac{(-1)^n}{3n+1}$ pour faire apparaître une intégrale :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{3k+1} &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^1 t^{3k}dt=\int_0^1\sum_{k=0}^{n}(-t^3)^k dt=\int_0^1\frac{1-(-t^3)^{n+1}}{1-(-t^3)}dt\\
&= \int_0^1\frac{1}{1+t^3}dt-\int_0^1\frac{(-t^3)^{n+1}}{1+t^3}dt.
\end{aligned}$$

— On a $\displaystyle\int_0^1\frac{(-t^3)^{n+1}}{1+t^3}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$; en effet :

$$\left|\int_0^1\frac{(-t^3)^{n+1}}{1+t^3}\right|\leqslant\int_0^1 t^{3(n+1)}dt=\frac{1}{3n+4}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

— On en déduit que la série $\sum\frac{(-1)^n}{3n+1}$ converge et a pour somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}=\int_0^1\frac{1}{1+t^3}dt.=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{1}{1+t}dt+\frac{1}{3}\int_0^1\frac{-t+2}{t^2-t+1}dt.$$

- D'une part : $\displaystyle\frac{1}{3}\int_0^1\frac{1}{t+1}dt=\frac{\ln(2)}{3}$.
- D'autre part :

$$\begin{aligned}
\int_0^1\frac{-t+2}{t^2-t+1}dt &= -\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2t-4}{t^2-t+1}dt\\
&= -\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2t-1}{t^2-t+1}dt+\frac{3}{2}\int_0^1\frac{1}{t^2-t+1}dt\\
&= -\frac{1}{2}\left[\ln t^2-t+1\right]_0^1+\frac{3}{2}\int_0^1\frac{1}{(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dt\\
&= \frac{3}{2}\frac{4}{3}\int_0^1\frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(t-\frac{1}{2})\right)^2+1}dt\\
&\underset{\left[u=\frac{2}{\sqrt{3}}(t-\frac{1}{2})\right]}{=} 2\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\frac{1}{u^2+1}\frac{\sqrt{3}du}{2}\\
&= \sqrt{3}\left[\arctan(t)\right]_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}=\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\\
&= \frac{\sqrt{3}\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\displaystyle\frac{1}{3}\int_0^1\frac{-t+2}{t^2-t+1}dt=\frac{\sqrt{3}\pi}{9}$.
Au final :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}=\frac{\sqrt{3}\pi}{9}+\frac{\ln(2)}{3}.$$

□

Solution Exercice 12.

1. — Si $x=1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}x^k=n+1$.
   — Si $x\neq 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}x^k=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

2. On dérive la relation précédente pour tout $x \in]-1;1[$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} &= \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{(n+1)x^n(1-x) - (-1)x^{n+1}}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{(n+1)x^n - (n+1)x^{n+1} + x^{n+1}}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{(n+1)x^n - nx^{n+1}}{(1-x)^2}.\end{aligned}$$

Les croissances comparées donnent :

$$(n+1)x^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ et } nx^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ car } x \in]-1;1[.$$

La série $\sum nx^{n-1}$ converge et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

3. On note S_n la somme partielle $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k-(-1)^k)3^{-k}$:

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=0}^{n} k\left(\frac{1}{3}\right)^k - \sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} - \sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^k \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} - \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{3}\frac{9}{4} - \frac{3}{4} = 0.\end{aligned}$$

La série $\sum(n-(-1)^n)3^{-n}$ converge et a une somme nulle.

□

Solution Exercice 13.

1. Simple calcul.
2. On utilise la formule $\arctan(x) - \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$ valable pour tout $x, y > 0$ et qui s'obtient immédiatement à partir de $\tan(a-b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$ avec $a = \arctan(x)$ et $b = \arctan(y)$.
3. Attention au cas où $k = 0$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) &= \arctan(1) + \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k}\right) - \arctan\left(\frac{1}{k+1}\right) \\ &= 2\arctan(1) - \arctan\left(\frac{1}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

□

Solution Exercice 14.

1. Soit $n \geqslant 2$.
La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est décroissante sur $[1;+\infty[$. Ainsi,
   — Pour tout $t \in [n-1, n]$: $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{t}}$.
   — Pour tout $t \in [n, n+1]$: $\dfrac{1}{\sqrt{t}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
En intégrant ces inégalités on obtient
$$\int_n^{n+1} \frac{1}{\sqrt{t}}dt \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}dt = \frac{1}{\sqrt{n}} = \int_n^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}dt \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{1}{\sqrt{t}}dt.$$
On en déduit que
$$\left[2\sqrt{t}\right]_n^{n+1} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \left[2\sqrt{t}\right]_{n-1}^{n}$$
c'est-à-dire :
$$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$$
encadrement encore valable pour $n = 1$.
2. On somme l'inégalité $2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}}$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ et on obtient par télescopie :
$$2\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \text{ i.e. } 2(\sqrt{n+1} - 1) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}.$$
On en déduit par comparaison que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} = +\infty$.
La série $\displaystyle\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.
3. On somme l'encadrement obtenu à la question 1. pour $k \in [\![1, n]\!]$ avec $n \geqslant 2$. On obtient par télescopie
$$2(\sqrt{n+1} - 1) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant 2(\sqrt{n} - 0)$$
puis en divisant par $\sqrt{n}$:
$$\frac{2(\sqrt{n+1} - 1)}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant \frac{2(\sqrt{n} - 0)}{\sqrt{n}}.$$
Le théorème des gendarmes permet de conclure que :
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} = 2.$$

$\square$

Solution Exercice 15. La série $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ est à termes positifs ($n \geqslant 2$).

— Si $\alpha > 1$, il existe $\gamma \in]1; \alpha[$ et on a :

$$\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\gamma}\right) \text{ car } \frac{1}{n^{\alpha-\gamma} \ln^\beta n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On en déduit la convergence de la série de Bertrand $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ par comparaison à la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\gamma}$ qui converge car $\gamma > 1$.

— Si $\alpha < 1$, il existe $\gamma \in]\alpha; 1[$ et on a :

$$\frac{1}{n^\gamma} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}\right) \text{ car } \frac{\ln^\beta n}{n^{\gamma-\alpha}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On en déduit la divergence de la série de Bertrand $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ par comparaison à la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\gamma}$ qui diverge car $\gamma < 1$.

— Il reste à traiter le cas $\alpha = 1$. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x \ln^\beta x}$ est dérivable sur $[2; +\infty[$ et

$$\forall x \geqslant 2, f'(x) = -\frac{\ln^\beta x + x\beta \frac{1}{x} \ln^{\beta-1}(x)}{x^2 \ln^{2\beta} x} = -\frac{\ln^{\beta-1}(x)(\beta + \ln x)}{x^2 \ln^{2\beta} x}.$$

Ainsi, $f'(x) \leqslant 0$ si $x \geqslant e^{-\beta}$.

La série $\sum \frac{1}{n \ln^\beta n}$ et l'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t \ln^\beta t} dt$ ont la même nature (avec $a \geqslant \max(2, e^{-\beta})$).

- Si $\beta \neq 1$ alors pour tout $A > a$:

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{t \ln^\beta t} dt = \left[\frac{1}{-\beta+1} \ln^{-\beta+1} t\right]_a^A \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} -\dfrac{\ln^{-\beta+1}(a)}{-\beta+1} & \text{si } \beta > 1 \\ +\infty & \text{si } \beta < 1. \end{cases}$$

— Si $\beta = 1$

$$\int_a^A \frac{1}{\ln t} dt = [\ln(\ln t)]_a^A \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

On a montré que si $\alpha = 1$, la série converge si et seulement si $\beta > 1$.

Une condition nécessaire et suffisante sur $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$ de convergence de la série de Bertrand $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ est :

$$\alpha > 1 \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)$$

$\square$

Solution Exercice 16.

1. (a) Notons que la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ est décroissante sur $[e; +\infty[$ car dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec

$$\forall x > 0, f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} \text{ donc } f'(x) \leqslant 0 \text{ si } x \geqslant e.$$

— $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante

$$\begin{aligned} S_{2n+2} - S_{2n} &= (-1)^{2n+2}\frac{\ln(2n+2)}{2n+2} + (-1)^{2n+1}\frac{\ln(2n+1)}{2n+1} \\ &= \frac{\ln(2n+2)}{2n+2} - \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} \leqslant 0. \end{aligned}$$

— $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

$$\begin{aligned} S_{2n+3} - S_{2n+1} &= (-1)^{2n+3}\frac{\ln(2n+3)}{2n+3} + (-1)^{2n+2}\frac{\ln(2n+2)}{2n+2} \\ &= -\frac{\ln(2n+3)}{2n+3} + \frac{\ln(2n+2)}{2n+2} \geqslant 0. \end{aligned}$$

— Enfin,

$$S_{2n+1} - S_{2n} = (-1)^{2n+1}\frac{\ln(2n+1)}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ par croissances comparées.}$$

(b) Les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes donc convergent vers une limite commune. On en déduit que la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente : la série $\sum(-1)^n \frac{\ln n}{n}$ est donc convergente.

(c) La série $\sum(-1)^n \frac{\ln n}{n}$ n'est pas absolument convergente. En effet,

$$\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\left|(-1)^n \frac{\ln n}{n}\right|\right) \text{ car } \frac{n}{n \ln n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2. (a) On utilise le développement limité $\ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

On obtient pour tout $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}. \end{aligned}$$

On en déduit que la série $\sum(u_{n+1}-u_n)$ est convergente.

Ainsi les sommes partielles $S_{n-1}=\sum_{k=1}(u_{k+1}-u_k)=u_n-u_1$ admettent une limite γ lorsque $n\to+\infty$.

On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge ; on note γ sa limite :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\gamma\iff\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)-\gamma\underset{n\to+\infty}{=}o(1)$$

3. (a) La fonction $x\mapsto\dfrac{\ln x}{x}$ est décroissante sur $[3;+\infty[\subset[e;+\infty[$.

Soit $n\geqslant 3$. La fonction f est décroissante sur $[n;n+1]$ donc pour tout $t\in[n,n+1]$:

$$f(n+1)\leqslant f(t)\leqslant f(n).$$

En intégrant cet encadrement sur $[n;n+1]$: on obtient

$$f(n+1)=\int_n^{n+1}f(n+1)dt\leqslant\int_n^{n+1}f(t)dt\leqslant\int_n^{n+1}f(n)dt=f(n)$$

(b) On a montré que pour tout $n\geqslant 3$:

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1}\leqslant\int_n^{n+1}\frac{\ln t}{t}dt\leqslant\frac{\ln n}{n}.$$

On en déduit :

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1}\leqslant\left[\frac{1}{2}\ln^2 t\right]_n^{n+1}\leqslant\frac{\ln n}{n}$$
$$\iff\frac{\ln(n+1)}{n+1}\underset{(*)}{\leqslant}\frac{\ln^2(n+1)}{2}-\frac{\ln^2(n)}{2}\underset{(**)}{\leqslant}\frac{\ln n}{n}.$$

• Montrons que la suite $(a_n)_{n\geqslant 3}$ définie par $a_n=\sum_{k=2}^{n}\frac{\ln k}{k}-\frac{\ln^2 n}{2}$ est décroissante :

$$a_{n+1}-a_n=\frac{\ln(n+1)}{n+1}-\left(\frac{\ln^2(n+1)}{2}-\frac{\ln^2 n}{2}\right)\leqslant 0\text{ par }(*).$$

• Montrons que la suite $(a_n)_{n\geqslant 3}$ est minorée. On somme l'inégalité $(**)$ pour $k\in[\![2,n]\!]$:

$$\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{\ln^2(k+1)}{2}-\frac{\ln^2(k)}{2}\right)\leqslant\sum_{k=2}^{n}\frac{\ln k}{k}\iff\frac{\ln^2(n+1)}{2}-\frac{\ln^2(2)}{2}\leqslant\sum_{k=2}^{n}\frac{\ln k}{k}.$$

On obtient

$$-\frac{\ln^2(2)}{2}\leqslant\frac{\ln^2(n+1)}{2}-\frac{\ln^2(n)}{2}-\frac{\ln^2(2)}{2}\leqslant\sum_{k=2}^{n}\frac{\ln k}{k}-\frac{\ln^2 n}{2}=a_n.$$

Ainsi, la suite $(a_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante et minorée par $-\frac{\ln^2(2)}{2}$ donc converge.

(c)

$$\begin{aligned}S_{2n}&=\sum_{k=2}^{2n}(-1)^k\frac{\ln k}{k}=\sum_{p=1}^{n}(-1)^{2p}\frac{\ln(2p)}{2p}+\sum_{p=1}^{n-1}(-1)^{2p+1}\frac{\ln(2p+1)}{2p+1}\\&=\sum_{p=1}^{n}\frac{\ln(2p)}{2p}-\sum_{p=1}^{n-1}\frac{\ln(2p+1)}{2p+1}\\&=\sum_{p=1}^{n}\frac{\ln(2p)}{2p}-\left(\sum_{k=2}^{2n}\frac{\ln k}{k}-\sum_{p=1}^{n}\frac{\ln(2p)}{2p}\right)\\&=\sum_{p=1}^{n}\frac{\ln(2p)}{p}-t_{2n}=\sum_{p=1}^{n}\frac{\ln(2)+\ln(p)}{p}-t_{2n}\\&=\ln(2)\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}+\sum_{p=1}^{n}\frac{\ln(p)}{p}-t_{2n}\\&=\ln(2)\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}+t_n-t_{2n}\end{aligned}$$

Exprimons maintenant S_{2n} en fonction de

— $a_n=t_n-\dfrac{\ln^2 n}{2}$

— $a_{2n}=t_{2n}-\dfrac{\ln^2(2n)}{2}=t_{2n}-\dfrac{\ln^2(2)+2\ln(2)\ln(n)+\ln^2 n}{2}$

$a_{2n}=t_{2n}-\dfrac{\ln^2(2)}{2}-\ln(2)\ln(n)-\dfrac{\ln^2 n}{2}$

— $u_n=\sum_{k=2}^{n}\dfrac{\ln k}{k}-\ln n.$

On obtient

$$\begin{aligned}S_{2n}&=\ln(2)(u_n+\ln n)+(a_n+\frac{\ln^2 n}{2})-(a_{2n}+\ln 2\ln n+\frac{\ln^2 2}{2}+\frac{\ln^2 n}{2})\\&=\ln(2)u_n+a_n-a_{2n}-\frac{\ln^2 2}{2}.\end{aligned}$$

(d) • La suite $(a_n)_{n\geqslant 2}$ converge donc $(a_{2n})_{n\geqslant 2}$ converge également, vers la même limite.

• D'autre part,

$$\ln(2)u_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln 2(\gamma+o(1)) = \ln(2)\gamma+o(1).$$

• On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = \ln(2)\gamma - \frac{\ln^2 2}{2}.$$

On rappelle que la série $\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{\ln(n)}{n}$ converge donc la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\geqslant 2}$ admet la même limite que sa suite extraite $(S_{2n})_{n\geqslant 2}$.
Il s'agit également de la somme de la série étudiée

$$\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{\ln(n)}{n} = \ln(2)\gamma - \frac{\ln^2 2}{2}.$$

□

Solution Exercice 17. On utilise une comparaison série-intégrale : la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ est décroissante sur $I = [e; +\infty[$ car dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec

$$\forall x>0, f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2} \leqslant 0 \iff x \geqslant e.$$

Soit $k \geqslant 4$ (de telle sorte que $k-1 \geqslant 3 > e$).

• Pour tout $t \in [k-1;k]$, $\frac{\ln(k)}{k} \leqslant \frac{\ln(t)}{t}$ par décroissance de f sur $[3;+\infty[$ donc :

$$\frac{\ln(k)}{k} = \int_{k-1}^{k}\frac{\ln(k)}{k}dt \leqslant \int_{k-1}^{k}\frac{\ln t}{t}dt$$

• Pour tout $t \in [k;k+1]$, $\frac{\ln(t)}{t} \leqslant \frac{\ln(k)}{k}$ donc

$$\int_k^{k+1}\frac{\ln(t)}{t}dt \leqslant \int_k^{k+1}\frac{\ln k}{k}dt = \frac{\ln(k)}{k}.$$

On a donc obtenu :

$$\forall k \geqslant 4, \int_k^{k+1}\frac{\ln t}{t}dt \leqslant \frac{\ln k}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k}\frac{\ln t}{t}dt$$

et après intégration :

$$\left[\frac{\ln^2 t}{2}\right]_k^{k+1} \leqslant \frac{\ln k}{k} \leqslant \left[\frac{\ln^2 t}{2}\right]_{k-1}^{k}$$

qui donne

$$\frac{1}{2}(\ln^2(k+1)-\ln^2 k) \leqslant \frac{\ln k}{k} \leqslant \frac{1}{2}(\ln^2 k - \ln^2(k-1))$$

que l'on somme pour $k \in [\![4,n]\!]$ avec $n \geqslant 4$:

$$\frac{1}{2}(\ln^2(n+1)-\ln^2 4) \leqslant \sum_{k=4}^{n}\frac{\ln k}{k} \leqslant \frac{1}{2}(\ln^2 n - \ln^2 3)$$

puis

$$\frac{\ln^2(n+1)}{2} - \frac{\ln^2 4}{2} + \frac{\ln(3)}{3} + \frac{\ln 2}{2} \leqslant \sum_{k=3}^{n}\frac{\ln k}{k} \leqslant \frac{\ln^2 n}{2} - \frac{\ln^2 3}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \frac{\ln 2}{2}.$$

On obtient $\sum_{k=2}^{n}\frac{\ln k}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln^2 n}{2}$. □

Solution Exercice 18.

1. La série de Riemann $\sum \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$ est convergente car $\frac{3}{2} > 1$.
   On encadre ses restes en utilisant une comparaison série-intégrale.
   La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ est décroissante sur $[1;+\infty[$.
   Soit $k \geqslant 2$ (de telle sorte que $k-1 \geqslant 1$), on a par décroissance de la fonction f sur $[1;+\infty[$

$$\int_k^{k+1}\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}dt \leqslant \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}} \leqslant \int_{k-1}^{k}\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}dt \quad \text{et si } 1 \leqslant n < N :$$

$$\implies \sum_{k=n+1}^{N}\int_k^{k+1}\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}dt \leqslant \sum_{k=n+1}^{N}\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}dt$$

$$\implies \int_{n+1}^{N+1}\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N}\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}} \leqslant \int_n^N \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}dt$$

$$\implies \left[\frac{1}{-\frac{3}{2}+1}t^{-\frac{3}{2}+1}\right]_{n+1}^{N+1} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N}\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}} \leqslant \left[\frac{1}{-\frac{3}{2}+1}t^{-\frac{3}{2}+1}\right]_n^N$$

$$\implies -2\left(\frac{1}{\sqrt{N+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \leqslant \sum_{k=n+1}^{N}\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}} \leqslant -2\left(\frac{1}{\sqrt{N}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\underset{(N\to+\infty)}{\implies} \frac{2}{\sqrt{n+1}} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N}\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{n}}$$

2. Pour obtenir une approximation de $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$ à 10^{-3} près, on calcule la somme partielle $S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$ de telle sorte que l'erreur $R_n = S - S_n$ soit inférieure à 10^{-3}.

Il suffit que

$$0 \leqslant R_n = S - S_n \leqslant \frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant 10^{-3}.$$

On calcule les termes successifs de la somme partielle tant que $\dfrac{2}{\sqrt{n}} \leqslant 10^{-3}$.

3. L'encadrement obtenu à la question 2., fournit un équivalent ρ_n de R_n :

$$R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{\sqrt{n}} = \rho_n.$$

4. On pose $S'_n = S_n + \rho_n$. Pour tout $n \geqslant 1$,

$$S'_n - S = S_n + \rho_n - S = -R_n + \rho_n.$$

On utilise alors l'encadrement de la question 1.

$$\frac{2}{\sqrt{n+1}} \leqslant R_n \leqslant \frac{2}{\sqrt{n}} \iff -\frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant -R_n \leqslant -\frac{2}{\sqrt{n+1}}.$$

On obtient :

$$0 \leqslant -R_n + \rho_n \leqslant \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}} = \frac{2}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leqslant \frac{2}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}\frac{1}{2\sqrt{n}}$$

par l'inégalité des accroissements finis appliqué à la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ continue sur $[n, n+1]$, dérivable sur $]n, n+1[$ dont la dérivée $\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ est majorée par $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$. On en conclut que

$$0 \leqslant S'_n - S \leqslant \frac{1}{n\sqrt{n+1}} \leqslant \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

```python
from math import sqrt,exp,log
import time
S=0
n=1
tps=time.time()
while 2/sqrt(n)>10**(-3):
    S+=1/n**(3/2)
    n+=1
print(time.time()-tps) # 2.5217010974884033


S=0
n=1
tps=time.time()
while 1/(n**(3/2))>10**(-3):
    S+=1/n**(3/2)
    n+=1
print(time.time()-tps) # 0.0001270771026611328
```

Algorithme 1 : approximation à 10^{-n} près. Le nombre d'itérations nécessaires est le premier entier k tel que

$$\frac{2}{\sqrt{k}} \leqslant 10^{-n} \iff \sqrt{k} \geqslant 2 \times 10^n \iff k \geqslant 4 \times 10^{2n} = 4\exp(2n\ln 10) = 4 \times 100^n.$$

La complexité temporelle de cet algorithme est exponentielle $O(100^n)$.

Algorithme 2 : approximation à 10^{-n} près. Le nombre d'itérations nécessaires est le premier entier k tel que

$$\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}} \leqslant 10^{-n} \iff k^{\frac{3}{2}} \geqslant 10^n \iff \frac{3}{2}\ln k \geqslant n\ln 10 \iff k \geqslant \exp\left(\frac{2n}{3}\ln 10\right) = \left(10^{\frac{2}{3}}\right)^n.$$

La complexité de cet algorithme est exponentielle $O(a^n)$ avec $a = 10^{\frac{2}{3}} \approx 4,6$ mais néanmoins plus efficace que le premier.

Remarques

Attention cependant, même avec le second algorithme, si $n > 20, 100, 1000$ le temps d'exécution se compte en minutes, années, siècles !

□

Solution Exercice 19.

1. Puisque $x \neq -1$, on a $-x \neq 1$ donc

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-x)^k = \frac{1-(-x)^n}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x} - \frac{(-x)^n}{1+x}$$

2. Pour tout $x \in [0;1]$, $\left|\frac{(-x)^n}{1+x}\right| = \frac{|x|^n}{1+x} \leqslant |x|^n = x^n$. On obtient par comparaison :

$$\left|\int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x}\right| \leqslant \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

3. On intègre la relation obtenue à la question 1. :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1(-x)^k dx=\int_0^1\frac{dx}{1+x}-\int_0^1\frac{(-x)^n}{1+x}dx$$
$$\iff\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k+1}=\ln(2)-\int_0^1\frac{(-x)^n}{1+x}dx$$
$$\iff-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{k+1}=\ln(2)-\int_0^1\frac{(-x)^n}{1+x}dx$$
$$\iff-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}=\ln(2)-\int_0^1\frac{(-x)^n}{1+x}dx$$
$$\iff\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}=-\ln(2)+\int_0^1\frac{(-x)^n}{1+x}dx.$$

On obtient donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}=-\ln(2)+\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{(-x)^n}{1+x}dx=-\ln(2).$

4. On note $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}$ et $R_n=S-S_n$ le reste de rang n.

On a montré à la question précédente que

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}=-\ln(2)+\int_0^1\frac{(-x)^n}{1+x}dx,\text{ ce qui donne : }S_n=S+\int_0^1\frac{(-x)^n}{1+x}.$$

Ainsi, $R_n=S-S_n=-\displaystyle\int_0^1\frac{(-x)^n}{1+x}dx.$

5. On détermine la limite des sommes partielles $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}R_k=-\sum_{k=0}^{n}\int_0^1\frac{(-x)^n}{1+x}dx$:

$$\sum_{k=0}^{n}R_k=-\int_0^1\frac{1}{1+x}\left(\sum_{k=0}^{n}(-x)^k\right)dx$$
$$\underset{(x\neq-1)}{=}-\int_0^1\frac{1}{1+x}\left(\frac{1-(-x)^{n+1}}{1-(-x)}\right)dx$$
$$=-\int_0^1\frac{dx}{(1+x)^2}+\int_0^1\frac{(-x)^{n+1}}{1+x}dx.$$

On obtient $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}R_k=-\int_0^1\frac{dx}{(1+x)^2}$ car $\displaystyle\int_0^1\frac{(-x)^{n+1}}{1+x}dx\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ d'après la question 2.

$\square$

Solution Exercice 20. Soit $\sum(-1)^n\alpha_n$ une série telle que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **positive, décroissante et de limite nulle**.

On note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum(-1)^n\alpha_n$.

1. Les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. En effet,
   — $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante :
   $$\begin{aligned}S_{2(n+1)}-S_{2n}=S_{2n+2}-S_{2n}&=(-1)^{2n+2}\alpha_{2n+2}+(-1)^{2n+1}\alpha_{2n+1}\\&=\alpha_{2n+2}-\alpha_{2n+1}\leqslant 0\end{aligned}$$
   car $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante : $\alpha_{2n+2}\leqslant\alpha_{2n+1}$.
   — $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante :
   $$\begin{aligned}S_{2(n+1)}-S_{2n+1}=S_{2n+3}-S_{2n+1}&=(-1)^{2n+3}\alpha_{2n+3}+(-1)^{2n+2}\alpha_{2n+2}\\&=-\alpha_{2n+3}+\alpha_{2n+2}\geqslant 0\end{aligned}$$
   — $S_{2n+1}-S_{2n}=(-1)^{2n+1}\alpha_{2n+1}=-\alpha_{2n+1}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ par hypothèse.
2. Les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes donc convergent vers une même limite. On en déduit que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ elle-même est convergente et par conséquent la série $\sum(-1)^n\alpha_n$ converge.
3. La suite $(S_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers S et la suite $(S_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge vers S. Ainsi,
   $$\forall p\in\mathbb{N}, S_{2p+1}\leqslant S\leqslant S_{2p}\text{ ou encore }-S_{2p}\leqslant S\leqslant -S_{2p+1}.$$
   1^e **cas :** n **pair.** Dans ce cas il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que $n=2p$.
   On obtient dans ce cas :
   $$|R_{2p}|=|S-S_{2p}|=S_{2p}-S\leqslant S_{2p}-S_{2p+1}=-(-1)^{2p+1}\alpha_{2p+1}=\alpha_{2p+1}.$$
   1^e **cas :** n **impair.** Dans ce cas il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que $n=2p+1$.
   On obtient dans ce cas :
   $$|R_{2p+1}|=|S-S_{2p+1}|=S-S_{2p+1}\leqslant S_{2p+2}-S_{2p+1}=(-1)^{2p+2}\alpha_{2p+2}=\alpha_{2p+2}.$$
   On a montré pour n pair et impair que $|R_n|\leqslant\alpha_{n+1}$.
4. La série $\sum\frac{(-1)^n}{n}$ est du type étudié dans les questions précédentes. En effet, la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est :
   — positive,
   — décroissante : $\dfrac{1}{n+1}\leqslant\dfrac{1}{n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,
   — de limite nulle : $\dfrac{1}{n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$.

Par conséquent, les résultats des questions précédentes donne la convergence de la série $\frac{(-1)^n}{n}$ et la majoration du reste :

$$|R_n| = |S - S_n| \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Par exemple : S_9 vérifie :

$$|R_9| = |S - S_9| \leqslant \frac{1}{9+1} = \frac{1}{10}.$$

S_9 est donc une approximation de S avec une erreur $|R_9| = |S - S_9| \leqslant \frac{1}{10} = 0,1$.

5. Ci-dessous :

```
import math as m
def alterne2(n):
    S=0
    k=1
    while 1/(k+1)>10**(-n):
        S+=(-1)**k/k
        k+=1
    return S,-m.log(2),abs(-m.log(2)-S)
```

□

Solution Exercice 21.

— Si $\alpha \leqslant 0$ le terme général $\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ ne converge pas vers 0 : la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est grossièrement divergente.

— Si $\alpha \in]0;1]$, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est du type $\sum (-1)^n \alpha_n$ avec $\alpha_n = \frac{1}{n^\alpha}$ positive, décroissante et de limite nulle. Ainsi, par les résultats de l'Exercice 20, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge.

La convergence n'est pas absolue : la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge car $\alpha \leqslant 1$.

— Si $\alpha > 1$, alors $\left|\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right| = \frac{1}{n^\alpha}$: la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente donc $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est absolument convergente.

□

Solution Exercice 22.

1. La série $\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^2}\right)$ est absolument convergente par comparaison à la série de Riemann $\frac{1}{n^2}$ convergente :

$$\left|\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^2}\right)\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$$

car $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$ et $\frac{(-1)^n}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

2. La série $\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ est divergente.

En effet, $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. Ainsi, puisque $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,

$$\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2}\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

— La série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente car du type $\sum (-1)^n \alpha_n$ avec pour $n \geqslant 1$, $\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ positive, décroissante, de limite nulle. Les résultats de l'Exercice 20 donnent la convergence de cette série alternée.

— La série de terme général, de signe constant, $-\frac{1}{2}\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}$ est divergente.

La série $\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ est donc divergente comme somme d'une série convergente et d'une série divergente : sinon, si elle convergeait, la série de terme général $\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = -\frac{1}{2}\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ serait convergente ce qui n'est pas.

Remarques
On a : $\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ mais les séries $\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ et $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ ne sont pas de même nature. Ce constat vient du fait que les termes généraux ne sont pas de signes constants.

3. La série $\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$ est convergente.

En effet, $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. Ainsi, puisque $\frac{(-1)^n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,

$$\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

— Les résultats de l'Exercice 20, donnent la convergence de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$.

— La série de terme général, de signe constant, $-\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge par comparaison à la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$.

Par somme de deux séries convergentes, on en déduit la convergence de la série $\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$.

La convergence n'est pas absolue par comparaison à la série de Riemann divergente $\sum \frac{1}{n}$:

$$\left|\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

4. — Si $\alpha \leqslant 0$, le terme général $\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ n'est pas défini pour une infinité de termes de rang impair. Ce cas est écarté.
   — Dans la suite $\alpha > 0$. Dans ce cas $\frac{(-1)^n}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et en utilisant le développement limité $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, on obtient :

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{2n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right).$$

- Les résultats de l'exercice 20 donnent la convergence de la série $\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$.
- La série de terme général, de signe constant, $-\frac{1}{2n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^{2\alpha}}$ converge si et seulement si $2\alpha > 1 \iff \alpha > \frac{1}{2}$.

Ainsi, la série $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ est la somme de :

- deux séries convergentes si $\alpha > \frac{1}{2}$.
- d'une série convergente et d'une série divergente si $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$.

On en déduit que $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ CV si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$:

— Si $\alpha > \frac{1}{2}$, $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ CV par somme de deux séries convergentes.

— Si $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$, on applique le même raisonnement par l'absurde que précédemment. Si la série $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ convergeait, alors par somme la série de terme général $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) - \frac{(-1)^n}{n^\alpha} = -\frac{1}{2n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$ convergerait ce qui n'est pas.

La convergence est absolue si et seulement si $\alpha > 1$ par comparaison à la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, convergente si et seulement si $\alpha > 1$:

$$\left|\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^\alpha}$$

□

Solution Exercice 23.

1. La série $\sum \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$ n'est pas du type $(-1)^n\alpha_n$ étudié dans l'Exercice 20 : $\alpha_n = \frac{1}{n+(-1)^n}$ n'est pas décroissante.

   On utilise le développement limité, $\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + o(x)$ et on obtient puisque $\frac{(-1)^n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$:

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} &= \frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{n}}\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n}\left(1-\frac{(-1)^n}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

   La série $\sum \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$ converge comme somme de deux séries convergentes :
   — La série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente par les résultats de l'Exercice 20.
   — La série de terme général, de signe constant, $-\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$ converge par comparaison à la série de Riemann convergente $\sum \frac{1}{n^2}$.

2. La série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ est divergente.

   On utilise le développement limité : $\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + o(x)$ et puisque $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

3. — Si $\alpha < 0$, le terme général ne converge pas vers 0 et la série est grossièrement divergente.
   — Si $\alpha = 0$, le terme général n'est défini pour aucun terme de rang impair. Ce cas est écarté.

— On suppose dans la suite $\alpha > 0$. La série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$ converge si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$.
En effet, on utilise le développement limité $\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + o(x)$ et on obtient, puisque $\frac{(-1)^n}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $\alpha > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n} &= \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\left(\frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\left(1 - \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) \end{aligned}$$

— Si $2\alpha > 1 \iff \alpha > \frac{1}{2}$ la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$ converge comme somme de deux séries convergentes :
- $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est une série alternée convergente.
- $\sum \left(-\dfrac{1}{n^{2\alpha}} + o\left(\dfrac{1}{n^{2\alpha}}\right)\right)$ est une série dont les termes sont de signes constants vérifiant $-\dfrac{1}{n^{2\alpha}} + o\left(\dfrac{1}{n^{2\alpha}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n^{2\alpha}}$, et par comparaison à la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^{2\alpha}}$ converge car $2\alpha > 1$.

— Si $2\alpha \leqslant 1 \iff \alpha \leqslant \frac{1}{2}$ la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$ est divergente.
En effet, cette série est la somme des séries :
- $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$: série alternée convergente.
- $\sum \left(-\dfrac{1}{n^{2\alpha}} + o\left(\dfrac{1}{n^{2\alpha}}\right)\right)$: série divergente par comparaison à la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^{2\alpha}}$ qui diverge car $2\alpha < 1$.

Si la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$ convergeait alors la différence $\sum \left(\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n} - \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ serait convergente ce qui n'est pas, car de terme général équivalent à $-\frac{1}{n^{2\alpha}}$.

Conclusion : la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$ est converge si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$.

4. — Si $\alpha = \beta$ la série n'est définie en aucun rang impair.
On écarte ce cas et on suppose $\alpha \neq \beta$ pour la suite.

— Supposons dans un premier temps $\alpha > \beta$. Pour tout $n \geqslant 2$,

$$\frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n n^\beta} = \frac{(-1)^n}{n^\alpha(1 + (-1)^n n^{\beta-\alpha})}$$

- Si $\alpha > 1$, la série est absolument convergente.
- Si $\alpha \leqslant 0$, la série est grossièrement divergente.
- Si $\alpha \in]0;1]$ la série est convergente si et seulement si $\alpha - 2\beta > 1$ en suivant les mêmes arguments que dans les question précédentes :

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n n^\beta} &= \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\left(\frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{n^{\alpha-\beta}}}\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{n^{2\alpha-\beta}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha-\beta}}\right). \end{aligned}$$

La série alternée $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est convergente car $\alpha > 0$.

Ainsi, la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n n^\beta}$ converge si et seulement si la série de terme général, de signe constant, $-\frac{1}{n^{2\alpha-\beta}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha-\beta}}\right)$ est convergente.
Or $-\frac{1}{n^{2\alpha-\beta}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha-\beta}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^{2\alpha-\beta}}$ d'où la convergence si et seulement si $2\alpha - \beta > 1$.

— Supposons maintenant $\beta > \alpha$. On obtient un équivalent de signe constant :

$$\frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n n^\beta} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^\beta}$$

d'où la convergence (qui est absolue) si et seulement si $\beta > 1$.

Conclusion : la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n n^\beta}$ converge si et seulement si
— $\alpha < \beta$ et $\beta > 1$ (la convergence est absolue dans ce cas).
— ou $\alpha > \beta$ et $2\alpha - \beta > 1$ (ce qui est automatique si $\alpha > 1$ et la convergence est absolue dans ce cas).

□

Solution Exercice 24.

1. On utilise le développement limité $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

On obtient, puisque $\dfrac{(-1)^n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

$$\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

d'où la convergence par somme de deux séries convergentes.

Pour déterminer la somme de cette série convergennte, on utilise les sommes partielles de rang impair S_{2n+1} que l'on découpe en deux sommes : l'une suivant les indices paires, l'autre suivant les indices pairs. On obtient :

$$\begin{aligned} S_{2n+1} &= \sum_{k=2}^{2n+1} \ln\left(1+\frac{(-1)^k}{k}\right) \\ &= \sum_{p=1}^{n} \left(\ln\left(1+\frac{1}{2p}\right) + \ln\left(1-\frac{1}{2p+1}\right)\right) \\ &= \sum_{p=1}^{n} \left(\ln\left(\frac{2p+1}{2p}\right) + \ln\left(\frac{2p}{2p+1}\right)\right) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, la suite $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 donc la suite (convergente) $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

La série $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$ converge donc et a pour somme 0.

2. La série $\sum \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$ converge par somme de séries convergentes :

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} &= \frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{n}}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n}\left(1-\frac{(-1)^n}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

On utilise les sommes partielles de rang impair pour calculer la somme :

$$\begin{aligned} S_{2n+1} &= \sum_{k=2}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k+(-1)^k} = \sum_{p=1}^{n}\left(\frac{1}{2p+1} - \frac{1}{2p+1-1}\right) \\ &= \sum_{p=1}^{n}\left(\frac{1}{2p+1} - \frac{1}{2p+1-1}\right) = -\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p} + \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{2p+1} \\ &= -\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{2p} + \sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{k} - 1 - \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{2p} \\ &= -\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p} + \sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{k} - 1 \\ &\underset{n\to+\infty}{=} -(\ln(n)+\gamma+o(1)) + (\ln(2n+1)+\gamma+o(1)) - 1 \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \ln\left(\frac{2n+1}{n}\right) + o(1) \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(2) - 1 \end{aligned}$$

□

Solution Exercice 25.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_n &= \sin\left(\frac{n^2}{n+1}\pi\right) = \sin\left(\frac{n^2-1+1}{n+1}\pi\right) \\ &= \sin\left(\frac{(n-1)(n+1)}{n+1}\pi + \frac{\pi}{n+1}\right) \\ &= \sin\left((n-1)\pi + \frac{\pi}{n+1}\right) = (-1)^{n-1}\sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right) \end{aligned}$$

La suite $\left(\sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, décroissante et de limite nulle. Par les résultats de l'Exercice 20 : la série $\sum(-1)^{n-1}\sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$ converge.

2. Pour tout $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right) &= \sin\left(\pi n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right) = \sin\left(n\pi\left(1+\frac{1}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} (-1)^n\sin\left(\frac{\pi}{2n}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} (-1)^n\left(\frac{\pi}{2n}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} (-1)^n\frac{\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \end{aligned}$$

La série $\sum \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$ est donc convergente comme somme de deux séries convergentes.

3. La série $\sum \frac{(-1)^n}{n\ln(n)+(-1)^n}$ est convergente comme somme de deux séries convergentes :

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^n}{n\ln(n)+(-1)^n} &= \frac{(-1)^n}{n\ln(n)}\left(\frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{n\ln(n)}}\right)\\ &= \frac{(-1)^n}{n\ln(n)}\left(1-\frac{(-1)^n}{n\ln(n)}+o\left(\frac{1}{n\ln(n)}\right)\right)\\ &= \frac{(-1)^n}{n\ln(n)}-\frac{1}{n^2\ln(n)}+o\left(\frac{1}{n^2\ln^2(n)}\right).\end{aligned}$$

□

Solution Exercice 26.

1. La série $\sum \frac{(-1)^k}{k}$ est alternée : la suite $(\frac{1}{k})_{k\geqslant 1}$ est positive, décroissante, de limite nulle. La série converge par les résultats de l'Exercice 20.
2. On calcule la somme de deux restes consécutifs :

$$\begin{aligned}R_n+R_{n+1} &= \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}+\sum_{k=n+2}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}\\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}+\sum_{\ell=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{\ell+1}}{\ell+1}\\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k(k+1)}.\end{aligned}$$

3. La différence de deux termes consécutifs donne :

$$R_n-R_{n+1}=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}-\sum_{k=n+2}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}=\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$$

On fait la somme des égalités obtenues aux deux questions précédentes, on trouve :

$$2R_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}+\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k(k+1)}.$$

Le reste $\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k(k+1)}$ de la série alternée $\sum\frac{(-1)^k}{k(k+1)}$ est majoré en valeur absolue par (cf. résultats de l'Exercice 20) :

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k(k+1)}\right|\leqslant\frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Ainsi, $\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k(k+1)}\underset{n\to+\infty}{=}O\left(\frac{1}{n^2}\right)\underset{n\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Par conséquent, $R_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{(-1)^{n+1}}{2n}$.

4. La série $\sum R_n$ n'est pas à termes de signe constant, l'équivalent précédent ne permet pas de conclure.
On reprend le développement :

$$R_n\underset{n\to+\infty}{=}\frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ainsi, $\sum R_n$ converge pas sommes de séries convergentes.

□

Solution Exercice 27.

1. La série $\sum\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ est alternée : la suite $(\frac{1}{\sqrt{k}})_{k\geqslant 1}$ est positive, décroissante, de limite nulle. La série converge par les résultats de l'Exercice 20.
2. On calcule la somme de deux restes consécutifs :

$$\begin{aligned}R_n+R_{n+1} &= \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}+\sum_{k=n+2}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}+\sum_{\ell=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{\ell+1}}{\sqrt{\ell+1}}\\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)\\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k(k+1)}(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})}.\end{aligned}$$

3. La différence de deux termes consécutifs donne :

$$R_n-R_{n+1}=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}-\sum_{k=n+2}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}=\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$$

On fait la somme des égalités obtenues aux deux questions précédentes, on trouve :

$$2R_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k(k+1)}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}.$$

Le reste $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k(k+1)}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}$ de cette série alternée est majoré en valeur absolue par (cf. résultats de l'Exercice 20) :

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k(k+1)}(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2})}.$$

Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k(k+1)}(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Par conséquent, $R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^{n+1}}{2\sqrt{n+1}}$.

4. La série $\sum R_n$ n'est pas à termes de signe constant, l'équivalent précédent ne permet pas de conclure.
   On reprend le développement :

$$R_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^{n+1}}{2\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).$$

   Ainsi, $\sum R_n$ converge pas sommes de séries convergentes.

$\square$