CHAPITRE 5 : DÉTERMINANTS

Plan du chapitre

1 - Déterminant en dimension 2

1.A - *Définition géométrique*

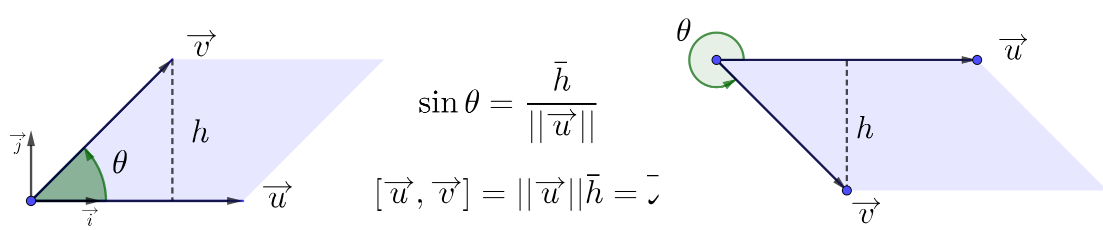
La plan euclidien est muni d'une base orthonormée directe $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$
Tout vecteur $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^2$ se décompose de manière unique $\overrightarrow{u} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}$.
On appelle déterminant de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ le nombre :

$$\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \begin{cases} ||\overrightarrow{u}||\,||\overrightarrow{v}||\,\sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) & \text{si} \quad \overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0} \text{ et } \overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0} \\ 0 & \text{si} \quad \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \text{ ou } \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \end{cases}$$

Exemple

$\det(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}) = 1$, $\det(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{i}) = -1$.

On l'appelle également produit mixte des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, noté $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]$.
Interprétation géométrique :
$\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est l'aire orientée du parallélogramme engendré par les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.



L'aire orientée du parallélogramme est nulle si et seulement s'il est aplati.
Ainsi, $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0 \iff \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

Exemple

$\det(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i}) = \det(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{j}) = 0$.

Plus généralement :

Théorème 1

La famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est libre dans $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \neq 0$.
Par conséquent, $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \neq 0$.

1.B - *Définition algébrique et propriétés*

Théorème 2: Expression dans une base orthonormée directe

Dans une base orthonormée directe $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ de $\mathbb{R}^2$, le déterminant $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ des vecteurs $\overrightarrow{u} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v} = x'\,\overrightarrow{i} + y'\,\overrightarrow{j}$ se calcule ainsi :

$$\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'.$$

Proposition 3: Bilinéarité et antisymétrie

Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

— Le déterminant est **bilinéaire**.
  * Linéaire à gauche : $\det(\lambda\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \lambda \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}) + \det(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$.
  * Linéaire à droite : $\det(\overrightarrow{u}, \lambda\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \lambda \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})$.

— Le déterminant est **antisymétrique** : $\det(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}) = -\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Démonstration. — **Bilinéairité**.
On note $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{v} = x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{w} = x''\overrightarrow{i} + y''\overrightarrow{j}$.
Alors $\lambda\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (\lambda x + x')\overrightarrow{i} + (\lambda y + y')\overrightarrow{j}$ et

$$\begin{aligned}\det(\lambda\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) &= \begin{vmatrix} \lambda x + x' & x'' \\ \lambda y + y' & y'' \end{vmatrix} \\ &= (\lambda x + x')y'' - x''(\lambda y + y') \\ &= \lambda(xy'' - x''y) + (x'y'' - x''y') \\ &= \lambda \begin{vmatrix} x & x'' \\ y & y'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} = \lambda \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}) + \det(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}).\end{aligned}$$

On obtient de même $\det(\overrightarrow{u}, \lambda\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \lambda \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})$.

— **Antisymétrie**.

$$\det(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}) = \begin{vmatrix} x' & x \\ y' & y \end{vmatrix} = x'y - y'x = -(xy' - yx') = -\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = -\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}).$$

□

1.C - Déterminant d'une matrice carrée de taile 2

Définition 4: Déterminant d'une matrice carrée

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice carrée.
On appelle déterminant de la matrice A, le nombre noté $\det(A)$:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Remarques

Il s'agit du déterminant des vecteurs $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{i} + c\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v} = b\overrightarrow{i} + d\overrightarrow{j}$.
Les propriétés de bilinéarité et d'antisymétrie sont donc également vérifiées pour les déterminant de matrices.
On dit également qu'il s'agit du déterminant des vecteurs colonnes $C_1 = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ et $C_2 = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$:
$\det(A) = \det(C_1|C_2)$.
On retrouve alors que l'échange de deux colonnes a pour effet de multiplier le déterminant par -1 :

$$\det(C_1|C_2) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = -(bc - ad) = -\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = -\det(C_2|C_1)$$

Exemple

$\det(I_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$
Plus généralement, le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix} = ad = \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Théorème 5

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $\det(A) = ad - bc \neq 0$.

Démonstration. — **Première preuve.**
Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A.
Les colonnes de la matrice A s'interprètent alors comme les coordonnées des vecteurs :
$\overrightarrow{u} = f(e_1) = ae_1 + ce_2$ et $\overrightarrow{v} = f(e_2) = be_1 + de_2$.
A est inversible $\iff$ f est un automorphisme $\iff$ f est surjective $\iff$ $\mathrm{im}(f) = \mathbb{R}^2$
(car $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie).
Ainsi A est inversible si et seulement si la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ engendre un espace de dimension 2 ; il suffit donc que la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ soit libre (et donc une base).
Finalement A est inversible si et seulement si $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = ad - bc \neq 0$.

— **Seconde preuve.**
On calcule le produit matriciel :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \quad (*).$$

— Si $ad - bc \neq 0$ alors $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = I_2 = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ Dans ce cas $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

— Si $ad - bc = 0$ alors A n'est pas inversible.
Sinon, en multipliant $(*)$ par A^{-1} à gauche, on obtient
$A^{-1}A \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = A^{-1}0 = 0.$
On obtiendrait $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = 0$ i.e. $a = b = c = d = 0$ et par conséquent $A = 0$ ce qui contredit l'inversibilité de la matrice A.

□

2 - Déterminant en dimension 3

2.A - *Définition géométrique*

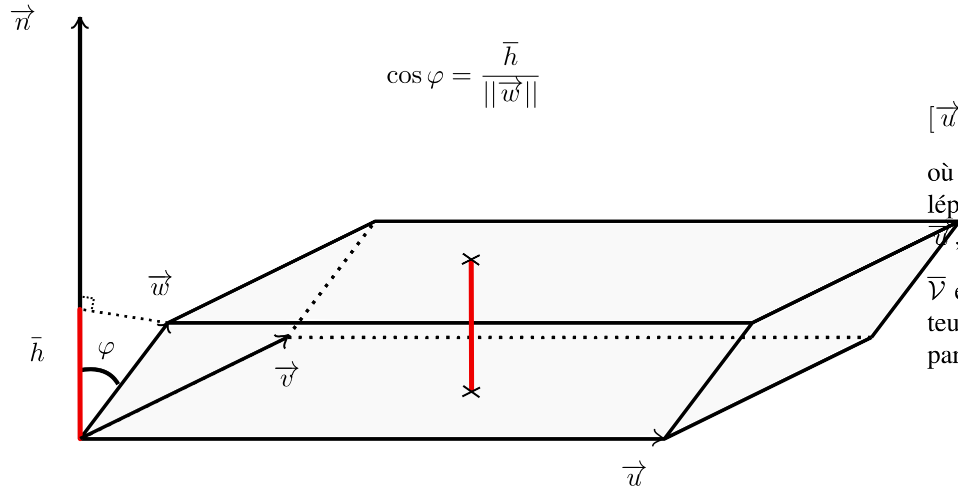
On suppose l'espace euclidien muni d'une base orthonormée directe $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
Le **produit vectoriel** $u \wedge v$ de deux vecteurs **non colinéaires** est le vecteur $\overrightarrow{n}$ tel que :
— $\overrightarrow{n}$ est de norme :
$||\overrightarrow{n}|| = ||\overrightarrow{u}|| \, ||\overrightarrow{v}|| \, |\sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})| = \mathcal{A}$ aire non orienté du parallélogramme engendré par $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$
— $\overrightarrow{n}$ est orthogonal au plan $Vect(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$
— et tel que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{n})$ est une base directe.
Si $\overrightarrow{n}_1$ est de norme 1 et directement orthogonal au plan $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on a donc

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}|| \, ||\overrightarrow{v}|| \, |\sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})| \overrightarrow{n}_1.$$

Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **colinéaires**, on définit $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.
Soit $\overrightarrow{w}$ un troisième vecteur de $\mathbb{R}^3$.
On note $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ le **produit mixte** :

$$\begin{aligned}[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] &= (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w} = ||\overrightarrow{u}||\,||\overrightarrow{v}||\,|\sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})|\overrightarrow{n}_1 \cdot \overrightarrow{w} \\ &= \mathcal{A}||\overrightarrow{n_1}||\,||\overrightarrow{w}||\cos(\varphi) = \mathcal{A}||\overrightarrow{w}||\cos(\varphi)\end{aligned}$$

où $\varphi = (\overrightarrow{w}, \overrightarrow{n})$ est l'angle formé par les vecteurs $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ et $\mathcal{A}$ l'aire non orientée du parallélogramme engendré par $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$.



$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = \mathcal{A}\bar{h} = \overline{\mathcal{V}}$

où $\overline{\mathcal{V}}$ est l'aire orientée du parallélépipède engendré par les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$.

$\overline{\mathcal{V}}$ est nul si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires : le parallélépipède est alors aplati.

Théorème 6

La famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est libre dans $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \neq 0$.
Par conséquent, $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \neq 0$.

2.B - *Définition algébrique*

Théorème 7: Expression dans une base orthonormée directe

Dans une base orthonormée directe $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ de $\mathbb{R}^3$, le déterminant $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ des vecteurs
$\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$
$\overrightarrow{v} = x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j} + z'\overrightarrow{k}$
$\overrightarrow{w} = x''\overrightarrow{i} + y''\overrightarrow{j} + z''\overrightarrow{k}$
se calcule ainsi :

$$\begin{aligned}\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} &= x(y'z'' - z'y'') - x'(yz'' - zy'') + x''(yz' - zy') \\ &= xy'z'' + x'y''z + x''yz' - x''y'z - y''z'x - z''x'y\end{aligned}$$

Proposition 8: Trilinéarité et antisymétrie

Le déterminant est :
- **trilinéaire :** l'application est linéaire par rapport à chacune des variables.
- **antisymétrique** : échanger deux vecteurs a pour effet de multiplier le déterminant par -1.

Exemple

— $\det(u, v + \lambda v', w) = \det(u, v, w) + \lambda \det(u, v', w)$.
— $\det(w, v, u) = -\det(u, v, w)$.

2.C - *Déterminant d'une matrice carrée de taille 3*

Définition 9

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Appelle déterminant de la matrice A, le nombre $\det(A)$:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

Remarques

A nouveau il s'agit du déterminant des vecteurs colonnes de la matrice A.
On le note souvent $\det(C_1|C_2|C_3)$.

Exemple

$\det(I_3) = 1$.

Théorème 10

$A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

3 - Déterminant en dimension finie $n \geqslant 2$

Dans ce qui suit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et n est un entier naturel $n \geqslant 2$.
On notera $C_1, \dots, C_n$ les colonnes d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

3.A - *Déterminant d'une matrice carrée carrée*

Théorème 11: Déterminant d'une matrice

On admet qu'il existe une unique application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, appelée déterminant, telle que :
— L'application $\det$ est linéaire par rapport à chacune des colonnes ;
— l'échange de deux colonnes a pour effet de multiplier le déterminant par -1 ;
— $\det(I_n) = 1$.

Proposition 12

— Le déterminant d'une matrice ayant deux colonnes égales est nul.
— Le déterminant d'une matrice dont les colonnes sont liées est nul.

Démonstration. — On suppose que $C_i = C_j$ alors :

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(C_1|\dots|C_i|\dots|C_j|\dots|C_n) \\ &= -\det(C_1|\dots|C_j|\dots|C_i|\dots|C_n) = -\det(C_1|\dots|C_i|\dots|C_j|\dots|C_n) = -\det(A), \end{aligned}$$

après échange des colonnes identiques (qui a pour effet de multiplier le déterminant par -1).
Ainsi, $2\det(A) = 0 \iff \det(A) = 0$.

— On suppose que $C_{j_0} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j_0}}^{n} \lambda_k C_k$ est combinaison linéaire des autres colonnes. Alors :

$$\det(A) = \det(C_1|\dots|C_{j_0}|\dots|C_n) = \det\left(C_1|\dots|\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j_0}}^{n} \lambda_k C_k|\dots|C_n\right)$$
$$= \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j_0}}^{n} \lambda_k \underbrace{\det(C_1|\dots|C_k|\dots|C_n)}_{=0} = 0 \text{ car } C_k \text{ est l'une des colonnes } C_1, \dots, C_n.$$

□

3.B - Déterminant et opérations sur les matrices

Proposition 13

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

Démonstration.
$\det(\lambda A) = \det(\lambda C_1|\lambda C_2|\dots|\lambda C_n) = \lambda \det(C_1|\lambda C_2|\dots|\lambda C_n)$
$\det(\lambda A) = \lambda^2 \det(C_1|C_2|\dots|\lambda C_n) = \cdots = \lambda^n \det(C_1|C_2|\dots|C_n) = \lambda^n \det(A)$,
en utilisant la linéarité du déterminant par rapport à chacune des colonnes. □

Exemple

$$\det(3I_2) = 3^2 \det(I_2) = 9 = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}.$$
$$\det(2I_3) = 2^3 \det(I_3) = 8 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Proposition 14: Effet d'un échange de colonne, d'une dilatation, d'une transvetion

— L'échange $(C_i \leftrightarrow C_j)$ de deux colonnes a pour effet de multiplier le déterminant par -1.
— La multiplication $(C_j \leftarrow \lambda C_j)$ **d'une** colonne par $\lambda \in \mathbb{K}$ a pour effet de multiplier le déterminant par λ :

$$\det(C_1|\dots|\lambda C_j|\dots|C_n) = \lambda \det(C_1|\dots|C_j|\dots|C_n).$$

— La transvection $(C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i, i \neq j)$ n'a pas d'effet sur le déterminant :

$$\det(C_1|\dots|C_j + \lambda C_i|\dots|C_n) = \det(C_1|\dots|C_j|\dots|C_n).$$

Démonstration. Les deux premiers points découlent de la définition du déterminant.
Le troisième s'obtient comme suit :

$$\begin{aligned}\det(C_1|\dots|C_j + \lambda C_i|\dots|C_n) &= \det(C_1|\dots|C_j|\dots|C_n) + \lambda \det(C_1|\dots|C_i|\dots|C_n) \\ &= \det(C_1|\dots|C_j + \lambda C_i|\dots|C_n),\end{aligned}$$

car $\det(C_1|\dots|C_i|\dots|C_n) = 0$: c'est le déterminant d'une matrice dont deux colonnes (C_i en position i, j) sont identiques. □

Exemple

$*\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$ et $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

$*\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = -4 = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

$*\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} : C_1 \leftarrow C_1 - C_2.$

Théorème 15: déterminant d'un produit, de la transposée

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Le déterminant du produit est le produit des déterminants : $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
- Le déterminant est invariant par transposition : $\det({}^tA) = \det(A)$.

Exemple

$\det\left(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 8 & 12 \end{pmatrix} = 24 - 72 = -48.$

$\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 8 \times (-6) = -48.$

Exemple

$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = -2$

$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^\top = \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = -2.$

Remarques

Les opérations sur les colonnes décrites ci-dessus vérifient donc les mêmes propriétés lorsqu'on les applique sur les lignes de la matrice.

Théorème 16: inversibilité d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.
Dans ce cas $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

Démonstration. A est inversible $\iff rg(A) = n \iff \text{Im}(f) = \mathbb{K}^n$,
où f est l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A.
$\text{Im}(f) = \mathbb{K}^n \iff (C_1, \ldots, C_n)$ est libre $\iff \det(A) = \det(C_1, \ldots, C_n) \neq 0$,
où C_i désigne la i-ème colonne de A.
Ainsi, A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Dans ce cas :
$AA^{-1} = I_n$ donc $1 = \det(I_n) = \det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}) : \det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$. $\square$

Théorème 17: Matrices semblables

Deux matrices semblables ont le même déterminant.

Démonstration. On note $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$. Alors :

$$\det(A) = \det(PBP^{-1}) = \det(PB)\det(P^{-1}) = \det(P)\det(B)\frac{1}{\det(P)} = \det(B)\frac{\det(P)}{\det(P)} = \det(B).$$

□

3.C - Développement par rapport à une ligne, une colonne

Notation 18

Soit $A = (a_{ij})_{i,j \in [\![1,n]\!]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On note $\Delta_{i,j}$ le déterminant de la matrice obtenue en supprimant de A : la ligne i et la colonne j.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Alors : $\Delta_{1,1} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -3, \quad \Delta_{2,3} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -6.$

Théorème 19: Développement par rapport à une ligne, une colonne

— $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\det(A) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{i,j}$ (développement par rapport à la ligne i).

— $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $\det(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{i,j}$ (développement par rapport à la colonne j).

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
En raison du nombre de 0 sur la deuxième ligne, on développe par rapport à cette ligne :

$$\det(A) = (-1)^{2+2} 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2(-1)^{3+3} 3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 6,$$

en développant le déterminant de taille 3 obtenu, par rapport à la troisième ligne.

Proposition 20: Déterminant d'une matrice triangulaire

Soit $T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire supérieure.

Alors $\det(T) = a_{11}a_{22}\dots a_{nn} = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Démonstration. On développe par rapport à la première colonne, puis la deuxième, et ainsi de suite :

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} &= (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{1+1} a_{11} (-1)^{2+2} a_{22} \dots (-1)^{n+n} a_{nn} \\
&= \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.
\end{aligned}$$

□

Remarques

La transposée d'une matrice triangulaire supérieure est une matrice triangulaire inférieure.
De plus, $\det({}^tT) = \det(T)$.
On en déduit que le déterminant d'une matrice triangulaire inférieure est également le produit de ses coefficients diagonaux.

Le calcul du déterminant d'une matrice triangulaire est donc très simple.

L'objectif sera donc (en général) de se ramener au calcul du déterminant d'une matrice triangulaire en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes (ou les colonnes) d'une matrice, comme on le fait pour échelonner un système linéaire, une matrice.

Attention aux effets des opérations sur le déterminant :
— L'échange $L_i \leftrightarrow L_j$ multiplie le déterminant par -1.
— La multiplication $L_i \leftarrow \lambda L_i$ **d'une** ligne par $\lambda \in \mathbb{K}$, multiplie le déterminant par λ.
— L'opération $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j, i \neq j$ n'a pas d'effet sur le déterminant.

Exercice 21

Calculons $\det(B)$ avec $B = \begin{pmatrix} 2 & -8 & 6 & 8 \\ 3 & -9 & 5 & 10 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Solution.

$$\begin{vmatrix} 2 & -8 & 6 & 8 \\ 3 & -9 & 5 & 10 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 0 & 6 \end{vmatrix} \underset{(L_1 \leftrightarrow L_4)}{=} - \begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 & 6 \\ 3 & -9 & 5 & 10 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & -8 & 6 & 8 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 5 & -8 \\ 0 & -12 & 1 & 16 \\ 0 & 0 & 6 & -4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 5 & -8 \\ 0 & 0 & 21 & -16 \\ 0 & 0 & 6 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 5 & -8 \\ 0 & 0 & 21 & -16 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 5 & -8 \\ 0 & 0 & 21 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & -2 + \frac{16}{7} \end{vmatrix} = -2 \times 3 \times \times 21 \times \frac{2}{7} = -36.$$

□

4 - Déterminant d'une famille de vecteurs, d'un endomorphisme

On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition 22: Déterminant d'un endomorphisme

On appelle déterminant d'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$, et on note $\det(f)$, le déterminant de la matrice de f dans une base quelconque.

Remarques

Cette définition est correcte par les propriétés du changement de base.
En effet, notons $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$ la matrice de f dans une base $\mathcal{B}$ et $B = Mat_{\mathcal{B}'}(f)$ la matrice dans une autre base $\mathcal{B}'$.
Soit $P = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
Alors $A = PBP^{-1}$ et les matrices semblables A, B ont même déterminant : $\det(A) = \det(B)$.
Le déterminant de f ne dépend donc pas de la base dans laquelle on écrit sa matrice représentative.

Les propriétés du déterminant d'une matrice se traduisent en termes d'endomorphismes :

Théorème 23: Caractérisation des automorphismes

— $\det(\mathrm{id}_E) = 1$
— $\det(f \circ g) = \det(f)\det(g)$ pour tous endomorphismes $f, g \in \mathcal{L}(E)$.
— $f \in GL(E)$ est un automorphisme si et seulement si $\det(f) \neq 0$.

Définition 24: Déterminant d'une famille de vecteurs

Soient $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de n vecteurs. Soit $\mathcal{B}$ une base de E.
On appelle déterminant de la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$, et on note $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n)$, le déterminant de la matrice représentative de la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$

Théorème 25: Caractérisation des bases

— $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille liée si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n) = 0$.
— $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille libre si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$
Par conséquent, puisque $\dim(E) = n$:
$(x_1, \ldots, x_n)$ est une base de E si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$.

Démonstration.
La famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre $\iff \dim Vect(x_1, \ldots, x_n) = n \iff rg(x_1, \ldots, x_n) = n$.
$(x_1, \ldots, x_n)$ est libre $\iff rg\,(Mat_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n)) = n \iff Mat_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n)$ est inversible.
En conclusion, $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre si et seulement si $\det(Mat_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n)) \neq 0$.
La caractérisation d'une famille liée s'obtient par contraposition. □