DEVOIR SURVEILLÉ n°7

Durée : 4 heures

L'usage de calculatrices est interdit

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, **la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Problème d'analyse

L'objectif de cet exercice est de démontrer la convergence de l'intégrale de Dirichlet :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

et de calculer sa valeur. On considère la fonction $f : [0, +\infty[\times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, t) \in [0, +\infty[\times]0, +\infty[, \quad f(x, t) = \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt}.$$

On définit également la fonction $u : [0, +\infty[\times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall (x, t) \in [0, +\infty[\times]0, +\infty[, \quad u(x, t) = -\frac{x\sin(t) + \cos(t)}{1 + x^2} e^{-xt}.$$

Partie I - Préliminaires

1. Démontrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\sin(t)| \leqslant 1$.
2. Soit $x > 0$. Montrer que la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
3. En utilisant par exemple une intégration par parties, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est convergente si et seulement si l'intégrale suivante est convergente :

$$\int_1^{+\infty} \frac{-\cos(t)}{t^2} dt.$$

En déduire que l'intégrale I converge.

4. Soit $x \geq 0$. Montrer que $t \mapsto u(x, t)$ est une primitive de la fonction $t \mapsto \sin(t)e^{-xt}$ sur $]0, +\infty[$.

Dans la suite de l'exercice, on définit la fonction $F : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad F(x) = \int_0^{+\infty} f(x, t) dt.$$

Partie II - Calcul de F sur $]0,+\infty[$

4. Montrer que $|F(x)| \leq \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$. En déduire la limite de F en $+\infty$.
5. Soit $a > 0$. Montrer que la fonction F est dérivable sur $[a,+\infty[$ et que l'on a :

$$\forall x \in [a,+\infty[, \quad F'(x) = -\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-xt}dt.$$

6. En déduire que la fonction F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et déterminer une expression de $F'(x)$ pour tout $x \in]0,+\infty[$ sans signe intégral.
7. Conclure que :

$$\forall x > 0, \quad F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x).$$

Partie III - Conclusion

On considère les fonctions $F_1 : [0,1] \to \mathbb{R}$ et $F_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$ définies par :

$$\forall x \in [0,1], \quad F_1(x) = \int_0^1 f(x,t)dt \text{ et } F_2(x) = \int_1^{+\infty} f(x,t)dt.$$

7. Montrer que la fonction F_1 est continue sur $[0,1]$.
8. Soit $x \in [0,1]$. Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{u(x,t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ et que :

$$F_2(x) = \frac{x\sin(1) + \cos(1)}{1+x^2}e^{-x} + \int_1^{+\infty} \frac{u(x,t)}{t^2}dt.$$

9. Montrer que la fonction F_2 est continue sur $[0,1]$.
10. En déduire que la fonction F est continue en 0, puis déterminer la valeur de l'intégrale I.

Problème de géométrie

Notations

Dans tout le sujet, l'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On note $E = \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ et $F = \mathscr{C}^0(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$. Pour toute fonction f de E, on note ∇f son gradient. On définit la fonction φ sur E par : $\forall f \in E, \varphi(f) = \nabla f$.

Partie I

1. Démontrer que $\varphi : f \mapsto \nabla f$ est une application linéaire sur E à valeurs dans F.
2. (a) Soit $f \in E$ solution du système d'équations aux dérivées partielles :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 0; \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 0; \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0.$$

   Montrer que f est constante sur $\mathbb{R}^3$.

   (b) Déterminer le noyau de φ. φ est-elle injective ?

3. (a) Énoncer le théorème de Schwarz pour les fonctions $f : (x,y,z) \mapsto f(x,y,z)$ à 3 variables.
   (b) Soit $V : (x,y,z) \mapsto (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ appartenant à l'image de φ. Démontrer que :
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}.$$
4. On pose, pour tout (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$, $V(x,y,z) = (1 + y^2 + y^2z^2, xy(1+z^2), xy^2z)$.
   (a) Justifier qu'il n'existe pas de fonction f telle que $\nabla f = V$.
   Qu'en déduit-on pour la fonction φ ?
   (b) Déterminer toutes les fonctions f telles que $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \nabla f(x,y,z) = xV(x,y,z)$.

Partie II

Dans cette partie, $\vec{u} = (1,1,1)$ désigne toujours le vecteur $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

Soit f une fonction non nulle de E. On note S la surface d'équation $f(x,y,z) = 0$. On suppose que les fonctions f choisies dans la suite sont telles que la surface S est non vide et qu'au moins un point de S est régulier. En un tel point, on rappelle que le gradient est normal au plan tangent à S en ce point.

Nous allons nous intéresser à quelques fonctions f de E telles que en tout point régulier M de S, le vecteur normal au plan tangent à S en M est orthogonal au vecteur $\vec{u}$.

1. (a) Donner la définition d'un point régulier M_0 de S puis donner une équation du plan tangent à S en ce point M_0. On notera (x_0, y_0, z_0) les coordonnées de M_0.
   (b) Lorsque f est définie par $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - z^2 - 2$ et M_0 est le point de coordonnées $(1,-1,1)$, donner une équation du plan tangent à S au point M_0.
   Cette fonction f répond-t-elle au problème ?
2. (a) Soit F_1 la fonction définie par $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, F_1(x,y,z) = (y-z)^2 - \alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.
   La fonction $f = F_1$ répond-elle au problème ?
   Montrer que la surface $F_1 = 0$ est la réunion de deux plans.
   (b) Soit g une fonction non nulle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Vérifier que la fonction f, définie par $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = g(x-y, x-z)$ répond au problème.
   (c) La fonction F_1 est-elle de la forme précédente ?
3. Soit S la surface paramétrée par : $\varphi(\lambda, t) = (\cos t + \lambda, \sin t + \lambda, \lambda)$.
   (a) Justifier que la normale au plan tangent en un point régulier de S est orthogonale à $\vec{u}$.
   (b) Démontrer qu'une équation cartésienne de S est : $(x-z)^2 + (y-z)^2 = 1$.
   (c) Donner la nature et les éléments caractéristiques de l'intersection de S avec le plan Π_a d'équation $z = a$ où $a \in \mathbb{R}$.
   (d) Soit $\Gamma_1 = S \cap \Pi$ où Π est le plan d'équation $x + y + z = 0$.
   On considère les vecteurs $\vec{e_3} = \dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$, $\vec{e_1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{k} - \vec{i})$, et $\vec{e_2} = \vec{e_3} \wedge \vec{e_1}$. On note P la matrice de passage de $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ à $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$.

i. Sans calcul, donner la nature de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à P.
On ne demande pas les éléments caractéristiques.

ii. Démontrer qu'un système d'équations de la courbe Γ_1 dans le repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ est $\begin{cases} 5X^2 + 2\sqrt{3}XY + 3Y^2 = 2 \\ Z = 0 \end{cases}$ où (X, Y, Z) désignent les coordonnées d'un point M dans le repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$.

iii. Faire rapidement l'étude de Γ_1 et préciser sa nature.

iv. Tracer Γ_1 dans le repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.
On prendra une unité égale à 6cm.

Partie III

Dans cette partie, $\vec{u} = (2, 1, 0)$ désigne le vecteur de $\mathbb{R}^3$ égal à $2\vec{i} + \vec{j}$.

1. Déterminer tous les plans P dont la normale est orthogonale au vecteur $\vec{u}$. On donnera une équation cartésienne de ces plans.

   Dans la suite de cette partie, g est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et S est la surface d'équation $z = g(x, y)$ i.e. $z - g(x, y) = 0$.
   L'objectif de cette partie est de déterminer les fonctions g telles que en tout point régulier de S, la normale à S est orthogonale au vecteur $\vec{u}$ puis on s'intéressera à l'une de ces fonctions en particulier.

2. Démontrer que tous les points de S sont réguliers.
3. Démontrer que si h est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, alors la fonction g définie par $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $g(x, y) = h(x - 2y)$ est solution du problème.
4. (a) Démontrer que si une fonction g répond au problème alors g est solution de l'équation aux dérivées partielles :
$$(Eq_1) : 2\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = 0.$$
   (b) On considère la fonction δ définie de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$ par :
   $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \delta(x, y) = (x_1, y_1) = (x - 2y, y)$.
   Démontrer que δ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Justifier que δ et δ^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
   (c) Soit g une solution au problème posé. Justifiez qu'il existe une fonction g_1 de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ telle que $g = g_1 \circ \delta$.
   (d) Calculer les dérivées partielles de g en fonction de celles de g_1.
   (e) Démontrer que g est solution de (Eq_1) si et seulement si g_1 est solution d'une équation aux dérivées partielles simple (Eq_2) à préciser.
   (f) Résoudre (Eq_2) puis (Eq_1).