TD informatique : Méthode d'Euler

L'objectif de cette séance est de résoudre des équations différentielles, telles que celles rencontrées dans le cours de physique, par une méthode numérique. La méthode présentée est la méthode d'Euler, adaptée aux équations d'ordre 1 avec une condition initiale.

Principe de la méthode

On considère le problème suivant pour lequel on cherche la fonction $t \mapsto y(t)$ sur un intervalle $[t_0; t_0 + T]$:

$$\begin{cases} \forall t \in [t_0; t_0 + T], & y'(t) = f(t, y(t)) \\ & y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

avec f une fonction de deux variables.

S'agissant d'une méthode numérique (et non analytique), la solution sera évaluée sur une ensemble de N points, appartenant à l'intervalle $[t_0; t_0+T]$. Ces points sont régulièrement répartis sur l'intervalle et la distance entre deux points est appelée le pas de la résolution, on le note $h = \dfrac{T}{N} > 0$.

Le principe est le suivant :

— Au point t_0, on dispose de deux informations :

$$\begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = f(t_0, y(t_0)) = f(t_0, y_0) \end{cases}$$

— Sur l'intervalle $[t_0; t_0 + h]$, on approche la fonction y par sa tangente en t_0, dont l'équation est donnée par la formule :

$$\forall t \in [t_0; t_0 + h], \qquad z(t) = y_0 + (t - t_0) \cdot y'(t_0) = y_0 + (t - t_0) \cdot f(t_0, y_0)$$

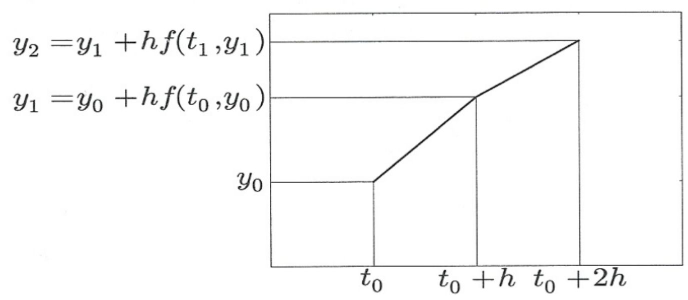
— On en déduit que $y(t_0 + h) \approx z(t_0 + h) = y_1$

— Sur l'intervalle $[t_0 + h; t_0 + 2h]$, on répète l'opération, en partant du point (t_1, y_1) au lieu de partir du point (t_0, y_0), avec $t_1 = t_0 + h$. On approche donc y par une nouvelle fonction z :

$$\forall t \in [t_1; t_1 + h], \qquad z(t) = y_1 + (t - (t_1)) \cdot f(t_1, y_1)$$

— On en déduit que $y(t_0 + 2h) \approx z(t_0 + 2h) = z(t_1 + h) = y_2$.

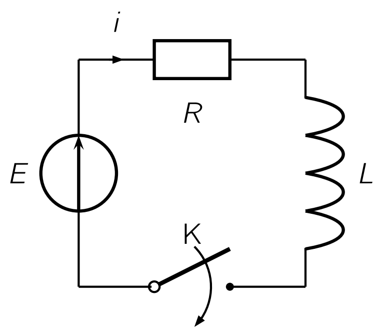
— Par récurrence, on construit les listes des t_i et y_i avec $i \in [\![0, N]\!]$.



Exercice 1 : Courant dans un circuit RL

Réponse à un échelon de tension

On considère le circuit suivant :



On rappelle que l'intensité i dans ce circuit obéit à l'équation différentielle suivante, avec $\tau = \frac{L}{R}$:

$$\tau \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + i = \frac{E}{R}$$

On utilisera les valeurs numériques suivantes : $L = 50$ mH, $R = 1{,}3\,\mathrm{k\Omega}$ et $E = 10$ V. L'interrupteur K est fermé à l'instant $t = 0$.

1. Calculer le pas `h` qui permettra permettra de résoudre l'équation différentielle sur 50 points entre $[0; 0{,}3\,\mathrm{ms}]$.
2. Définir une fonction `f` qui prend comme arguments un temps t et l'intensité $i(t)$ et renvoie $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t)$.
3. Définir une fonction `Euler` qui :
   — prend comme arguments une fonction `f`, un couple de conditions initiales `(t0,y0)`, un flottant `T` donnant la taille de l'intervalle de résolution et un flottant `h` représentant le pas de la résolution,
   — renvoie les listes `(les_t, les_y)` telles que `les_t` = $[t_0, t_1, t_2, \ldots, t_N]$ et `les_y` = $[y_0, y_1, y_2, \ldots, y_N]$ construites avec la méthode présentée.
4. Tracer `les_y` en fonction de `les_t`
5. Calculer une liste `les_i` avec la solution exacte de l'équation différentielle.
6. Ajouter `les_i` sur le graphique précédent.
7. Calculer une liste `er` comportant l'erreur, c'est-à-dire la valeur absolue de la différence entre la solution exacte et la solution approchée.
8. Représenter l'erreur en fonction du temps.
9. Résoudre de nouveau, avec $N = 1000$.

Réponse à un signal créneau

10. Définir une liste de 5000 points `les_E` qui représente un signal créneau, de fréquence 2 kHz, d'amplitude 10 V et de durée 1,5 ms.
11. Résoudre l'équation différentielle en remplaçant E constante par le signal précédent (résoudre sur la même durée et le même nombre de points).
12. Représenter la solution numérique et le signal d'entrée sur le même graphique.

Exercice 2 : pendule simple

On rappelle que l'équation différentielle vérifiée par le pendule simple est la suivante :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0 \qquad \text{avec } \omega_0^2 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

. Il s'agit d'une équation différentielle d'ordre 2, non linéaire. En général, cette équation est linéarisée, c'est-à-dire qu'on se place dans l'approximation des petits angles, de sorte que $\sin(\theta) \approx \theta$. La résolution numérique va permettre d'évaluer la pertinence de cette approximation. On utilisera les valeurs numériques suivantes : $g = 9{,}81$ m/s et $l = 90$ cm. La résolution se fera entre $t = 0$ et $t = 2{,}5$ s.

Linéarisation

Dans le cas d'une équation différentielle d'ordre 2, la méthode d'Euler est généralisable en prenant une fonction Y vectorielle : $Y(t) = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{pmatrix}$

1. Définir une fonction `f1` qui prend comme argument un temps t et un vecteur $(\theta(t), \dot{\theta}(t))$ et qui renvoie un vecteur $(\dot{\theta}(t), \ddot{\theta}(t))$ en utilisant la forme linéarisée de l'équation différentielle du pendule simple.
2. Adapter si nécessaire la fonction `Euler` pour utiliser `f1` et résoudre l'équation linéarisée sur 500 points, en utilisant comme conditions initiales : $\theta(0) = 10°$ et $\dot{\theta}(0) = 0$.
3. Tracer l'évolution de θ en fonction du temps.

Résolution directe

4. Définir une fonction `f2` qui prend comme argument un temps t et un vecteur $(\theta(t), \dot{\theta}(t))$ et qui renvoie un vecteur $(\dot{\theta}(t), \ddot{\theta}(t))$ en utilisant la forme non-linéarisée de l'équation différentielle du pendule simple.
5. Utiliser `Euler` pour résoudre l'équation, dans les mêmes conditions que précédemment.
6. Représenter sur le même graphique l'évolution de θ dans le cas linéarisé et dans le cas général.

Validité de la linéarisation

7. Calculer la différence entre les deux cas pour $\theta(0) = 10°$, ainsi que pour $\theta(0) = 30°$ et pour $\theta(0) = 50°$ en gardant 500 points pour chaque simulation
8. Représenter l'évolution de l'erreur en fonction du temps pour les différentes conditions initiales.