TRAVAUX DIRIGÉS : Intégrales généralisées

1 Intégrales sur un segment

Exercice 1: Intégrales sur un segment (Solution)

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x+1}{x^2+4x+5}dx.$
2. $I_2 = \displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x+2}{x^2-4x+4}dx.$
3. $I_3 = \displaystyle\int_{0}^{1} \frac{3x+2}{x^2+3x+2}dx.$
4. $I_4 = \displaystyle\int_{-2}^{1} \frac{-x^3-2x^2+4x+9}{x^2+4x+7}dx$
5. $I_5 = \displaystyle\int_{2}^{3} \frac{x^7}{(x^4-1)^2}dx \ (u=x^4)$
6. $I_6 = \displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2(x)}$
7. $I_7 = \displaystyle\int_{1}^{2} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx$
8. $I_8 = \displaystyle\int_{0}^{1} t\arctan(t)dt$
9. $I_9 = \displaystyle\int_{0}^{1} (x-1)\sqrt{3+2x-x^2}dx$
10. $I_{10} = \displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{4x}\sin(5x)dx$
11. $I_{11} = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{2+e^x+e^{-x}}$
12. $I_{12} = \displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin^3 t\cos t}{1+\cos^2 2t}dt$ ($u=\cos(2t)$). Donner le résultat :
    Avec $(\alpha,\beta)=(0,\frac{\pi}{2})$.
    Puis $(\alpha,\beta)=(0,\pi)$.
13. $I_{13} = \displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\ln(1+\cos x)dx.$
14. $I_{14} = \displaystyle\int_{0}^{\pi} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt \ (u=\cos t).$
15. $I_{15} = \displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x} \ (u=\tan\frac{x}{2}).$
16. $I_{16} = \displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\sqrt{2+x}}{1+x}dx \ (x=u^2-2).$

Exercice 2: Primitives (Solution)

Déterminer une primitive des fonctions f données par leur expression $f(x)$.
Préciser le ou les intervalles de validité.

1. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4+x^2}}$
2. $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$
3. $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{5+x^3}}$
4. $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt[4]{(x^3+1)^7}}$
5. $f(x) = \dfrac{x}{\cos^2(x)}$
6. $f(x) = \arctan(x)$
7. $f(x) = \arcsin(x)$
8. $f(x) = \ln(1+x^2)$
9. $f(x) = \sin^2(x)$
10. $f(x) = \cos^2(x)$
11. $f(x) = \sin^2(x)\cos^3(x)$
12. $f(x) = \sin^4(x)\cos^2(x)$
13. $f(x) = \sin(\ln x)$
14. $f(x) = \cos(\ln x)$
15. $f(x) = \sin(2x)\ln(\tan x)$

Exercice 3: Deux intégrales (Solution)

Soient $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos^2 x}{\cos 2x}dx$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 x}{\cos 2x}dx$.

1. Calculer $I-J$ et $I+J$ (on pourra poser $u=\tan(x)$).
2. En déduire les valeurs de I et J.

Exercice 4: Sommes de Riemann (Solution)

Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$ avec :

1. $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}$
2. $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2\sqrt{n^3+k^3}}$
3. $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}\sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$
4. $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$

Exercice 5: Lemme de Riemann-Lebesgue (Solution)

Soit $f \in \mathscr{C}^1([a;b],\mathbb{R})$. A l'aide d'une I.P.P., montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(nt)dt = 0$.

Exercice 6: Suite d'intégrales (Solution)

Soit $n\in\mathbb{N}$. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^{-x}dx$.

1. (a) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}, 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
   (b) En déduire que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.
2. (a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_n = \dfrac{1}{(n+1)e} + \dfrac{I_{n+1}}{n+1}$.
   (b) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n - \dfrac{1}{(n+1)e} \leqslant \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$.
   (c) En déduire, enfin, un équivalent de I_n lorsque $n\to+\infty$.

Exercice 7: Suite d'intégrales (Solution)

On considère pour tout $n\in\mathbb{N}$, $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{e^x+1}dx$.

1. Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx$.

Exprimer J_0 en fonction de I et en déduire la valeur de J_0.

2. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $0 \leqslant J_n \leqslant \dfrac{1}{n}$.
   En déduire la limite de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. Montrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   En déduire sans calcul supplémentaire que :
$$\frac{1}{2}(J_n + J_{n+1}) \leqslant J_n \leqslant \frac{1}{2}(J_{n-1} + J_n).$$
4. Calculer $J_n + J_{n+1}$ en fonction de n.
5. En déduire la limite de la suite $(nJ_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et un équivalent de J_n.

Exercice 8: Encadrement d'une intégrale (Solution)

Montrer que
$$\frac{\pi^2}{16} \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1+\sin(x)}dx \leqslant \frac{\pi^2}{8}.$$

2 Intégrales sur un intervalle quelconque

Exercice 9: Intégrales impropres (Solution)

Étudier la nature et calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{(1+t)^2}dt$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}dt$ $(t = \cos^2\theta)$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}dt$ $(u = \frac{1}{t})$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)(t+2)(t+3)}$
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}dt$ $(u = \sqrt{t})$
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{e^t+1}}$ $(u = \sqrt{e^t+1})$
7. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt$
8. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{1+t^8}dt$ $(u = t^4)$
9. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}dt$

Exercice 10: Intégrales impropres (Solution)

Étudier la nature des intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t-\sqrt{t}}$.
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t+a}dt$ $(a \geqslant 0)$.
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\sin(t)}{1+t^2}dt$.
4. $\displaystyle\int_1^{+\infty} (\sqrt{1+t^2}-t)dt$.
5. $\displaystyle\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right)dt$.
6. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{t^3+t+1}}dt$.
7. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(t+1-\sqrt{t^2+2t}\right)dt$.
8. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{e^t-\cos(t)}$.
9. $\displaystyle\int_0^{+\infty} (t+2-\sqrt{t^2+4t+1})dt$.
10. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt$.
11. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt[n]{1-t^n}}$ $(n \geqslant 1)$.
12. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{|t^\alpha - 1|^\beta}$.
13. $\displaystyle\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \ln\left(\cos\frac{1}{t}\right)dt$.

Exercice 11: Suites d'intégrales impropres (Solution)

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}dt$.

1. Montrer que l'intégrale I_n converge et trouver une relation liant I_n et I_{n+1}.
2. En déduire I_n en fonction de n. Exprimer le résultat à l'aide de factorielles.

Exercice 12: Intégrales impropres et équivalents (Solution)

1. Montrer que pour tout $\alpha \in]0;1]$, l'intégrale $I_\alpha = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}dt$ est convergente.
2. Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)\sin\left(\frac{1}{t}\right)dx$.
3. Déterminer un équivalent de $\ln\left(1+\dfrac{\sin t}{\sqrt{t}}\right)$ lorsque $t \to +\infty$.
   Quelle est la nature d'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right)dt$?

Exercice 13: Intégrales de Bertrand (Solution)

Soit $a > 1$.
Déterminer les couples $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquels l'intégrale de Bertrand $I_{\alpha,\beta} = \int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha \ln^\beta t} dt$ est convergente.

Exercice 14: Intégrales impropres et primitives (Solution)

Soient $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ avec $a < b$ et $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que la fonction $G : x \mapsto \int_a^b \frac{e^{-xt}}{t} dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G'(x) = \int_a^b -e^{-xt} dt$.
2. Montrer que $\int_a^b \frac{e^{-xt}}{t} dt = \ln \frac{b}{a} + \int_0^x \frac{e^{-bu} - e^{-au}}{u} du$.
3. En déduire la convergence et la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-bu} - e^{-au}}{u} du$.

Exercice 15: Intégrations par parties (Solution)

Questions indépendantes

1. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$.
2. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2} dt$ converge et déterminer sa valeur.

Exercice 16: Changement de variables (Solution)

Calculer les intégrales

1. $I = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} dt$.
2. $J = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - 2\cos x}{5 - 4\cos x} dx$.
   (On pourra poser $u = \tan \frac{x}{2}$)
3. $K = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{(2t-1)\sqrt{t^2-1}}$.
   (on pourra poser $t = \frac{1}{\cos\theta}$ ...
   ... puis $u = \tan \frac{\theta}{2}$)

Exercice 17: Suites d'intégrales (Solution)

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} dt$.

1. Justifier que l'intégrale I_n est faussement impropre.
2. Calculer $I_{n+1} - I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire I_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 18: Intégrales conjointes (Solution)

On considère les intégrales $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t) dt$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t) dt$.

1. Justifier que les intégrales I et J sont convergentes et égales.
2. Calculer $I + J$ et en déduire la valeur de I et J.

Exercice 19: Intégrale et I.P.P. (Solution)

On considère la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t} - \arctan \frac{1}{t}$.

1. Déterminer un équivalent de $f(t)$ lorsque $t \to +\infty$.
2. En déduire la nature de l'intégrale $I = \int_1^{+\infty} f(t) dt$.
3. Calculer I.

Exercice 20: Intégrale de Dirichlet (Solution)

1. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est convergente.
   On pourra utiliser une intégration par parties.
2. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t} dt$ est divergente.
   On pourra minorer $|\sin(t)|$ par $\sin^2(t)$.

Exercice 21: Fonction des bornes (Solution)

On pose pour tout $x > 0$, $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt$.

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que la limite $\lim_{x \to 0^+} (f(x) + \ln x)$ existe et est finie.
3. A l'aide d'une double intégration par parties, montrer que

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{=} \frac{\cos x}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}\right)$$

3 Intégration terme à terme

Exercice 22: Intégration terme à terme (Solution)

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $t > 0$. Justifier la convergence et calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} t^p e^{-nt}$.
2. Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On note $I_{n,p} = \int_0^{+\infty} t^p e^{-nt} dt$.
   (a) Montrer que l'intégrale $I_{p,n}$ converge.
   (b) Établir une relation entre $I_{p+1,n}$ et $I_{p,n}$ et en déduire la valeur de $I_{p,n}$ en fonction de p et n.
3. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{t^p}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p!}{n^{p+1}}$.

Exercice 23: Intégration terme à terme (Solution)

Soient $a, b > 0$. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{te^{-at}}{1 - e^{-bt}} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a+bn)^2}$.

Exercice 24: Intégration terme à terme (Solution)

Soit $x > 0$. Montrer que :

$$\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(x+n)}.$$

Exercice 25: Intégration terme à terme (Solution)

On donne $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Étudier la convergence et calculer l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t^2} dt.$$

Exercice 26: Intégration terme à terme (Solution)

On pose pour $n \geqslant 1$:

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}.$$

1. Montrer la convergence des intégrales I_n et trouver une relation entre I_{n+1} et I_n.
2. Déterminer un réel α tel que la suite de terme général $u_n = \ln(n^\alpha I_n)$ converge.
3. En déduire la convergence de la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n} I_n$ et exprimer sa somme à l'aide d'une intégrale.

   On pourra utiliser le fait que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$ *pour tout* $x \in]-1;1[$.

Exercice 27: Intégration terme à terme (Solution)

1. Après avoir justifié la convergence, calculer pour tout $k \geqslant 1$,

$$I_k = \int_0^1 t^{k-1} \ln(t) dt.$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$.

   Exprimer R_n à l'aide d'une intégrale.
3. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} R_n$.

SOLUTIONS TRAVAUX DIRIGÉS : Intégrales généralisées

Solution Exercice 1.

1. $I_1 = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x+1}{x^2+4x+5}dx.$

   La fonction $x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2+4x+5}$ est continue sur le segment $[-1;1]$ par quotient, le dénominateur x^2+4x+5 ne s'annulant pas (trinôme de discriminant $\Delta = -4 < 0$).
   On transforme l'expression de l'intégrande.
   Pour tout $x \in [-1;1]$,

$$\frac{x+1}{x^2+4x+5} = \frac{1}{2}\frac{2x+4}{x^2+4x+5} - \frac{1}{x^2+4x+5} = \frac{1}{2}\frac{2x+4}{x^2+4x+5} - \frac{1}{(x+2)^2+1}$$

   On reconnaît alors des expressions usuelles :

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{x+1}{x^2+4x+5}dx &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{2x+4}{x^2+4x+5}dx - \int_{-1}^{1} \frac{1}{(x+2)^2+1}dx \\
&\underset{(u=x+2)}{=} \frac{1}{2}\left[\ln|x^2+4x+5|\right]_{-1}^{1} - \int_{1}^{3} \frac{1}{1+u^2}du \\
&= \frac{1}{2}\ln(5) - [\arctan(u)]_1^3 \\
&= \frac{1}{2}\ln(5) - \arctan(3) + \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

2. $I_2 = \displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x+2}{x^2-4x+4}dx.$

   La fonction $x \mapsto \dfrac{x+2}{x^2-4x+4}$ est continue sur $[0;1]$ par quotient car le trinôme $x^2-4x+4 = (x-2)^2$ s'annule en $x=2$ et ne s'annule donc pas sur $[0;1]$.
   On transforme l'expression de l'intégrande. Pour tout $x \in [0;1]$,

$$\frac{x+2}{x^2-4x+4} = \frac{1}{2}\frac{2x-4}{x^2-4x+4} + \frac{4}{x^2-4x+4} = \frac{1}{2}\frac{2x-4}{x^2-4x+4} + \frac{4}{(x-2)^2}$$

   On reconnaît alors des expressions usuelles :

$$\begin{aligned}
I_2 = \int_{0}^{1} \frac{x+2}{x^2-4x+4}dx &= \frac{1}{2}\int_{0}^{1} \frac{2x-4}{x^2-4x+4}dx + 4\int_{0}^{1} \frac{dx}{(x-2)^2} \\
&= \frac{1}{2}\left[\ln|x^2-4x+4|\right]_0^1 + 4\left[-\frac{1}{(x-2)}\right]_0^1
\end{aligned}$$

   On obtient

$$I_2 = \frac{1}{2}(\ln(1)-\ln(4)) + 4\left(1-\frac{1}{2}\right) = -\ln(2) + 2$$

3. $I_3 = \displaystyle\int_{0}^{1} \frac{3x+2}{x^2+3x+2}dx.$

   La fonction $x \mapsto \dfrac{3x+2}{x^2+3x+2}$ est continue sur $[0;1]$ par quotient le dénominateur ne s'annulant pas (trinôme dont les racines sont $-1,-2$).
   On transforme l'intégrande. Pour tout $x \in [0;1]$:

$$\begin{aligned}
\frac{3x+2}{x^2+3x+2} &= \frac{3}{2}\frac{2x+3}{x^2+3x+2} - \frac{5}{2}\frac{1}{x^2+3x+2} \\
&= \frac{3}{2}\frac{2x+3}{x^2+3x+2} - \frac{5}{2}\frac{1}{(x+\frac{3}{2})^2-\frac{1}{4}} \\
&= \frac{3}{2}\frac{2x+3}{x^2+3x+2} - \frac{5}{2}\frac{4}{(2x+3)^2-1}
\end{aligned}$$

   On reconnaît alors des expressions usuelles :

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{1} \frac{3x+2}{x^2+3x+2}dx &= \frac{3}{2}\int_{0}^{1} \frac{2x+3}{x^2+3x+2}dx - 10\int_{0}^{1} \frac{dx}{(2x+3)^2-1} \\
&\underset{(u=2x+3;du=2dx)}{=} \frac{3}{2}\left[\ln|x^2+3x+2|\right]_0^1 - 10\int_{3}^{5} \frac{1}{2}\frac{du}{u^2-1} \\
&= \frac{3}{2}(\ln 6 - \ln 2) - \frac{10}{4}\int_{3}^{5}\left(\frac{1}{1-u} - \frac{1}{1+u}\right)du \\
&= \frac{3}{2}(\ln 6 - \ln 2) - \frac{10}{4}\left[\ln(1-u) - \ln(1+u)\right]_3^5 \\
&= 4\ln 3 - 5\ln 2
\end{aligned}$$

4. $I_4 = \displaystyle\int_{-2}^{1} \frac{-x^3-2x^2+4x+9}{x^2+4x+7}dx.$

   La fonction $x \mapsto \dfrac{-x^3-2x^2+4x+9}{x^2+4x+7}$ est continue sur $[-2;1]$ par quotient, le dénominateur ne s'annulant pas sur $[-2;1]$ (trinôme de discriminant $\Delta = -12 < 0$).
   La division euclidienne de $-x^3-2x^2+4x+9$ par x^2+4x+7 donne

$$-x^3-2x^2+4x+9 = (x^2+4x+7)(-x+2) + (3x-5)$$

   on obtient par conséquent pour tout $x \in [-2;1]$:

$$\frac{-x^3-2x^2+4x+9}{x^2+4x+7} = -x+2+\frac{3x-5}{x^2+4x+7}$$

donc

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{1}\frac{-x^3-2x^2+4x+9}{x^2+4x+7}dx &= \int_{-2}^{1}(-x+2)dx+\int_{-2}^{1}\frac{3x-5}{x^2+4x+7}dx\\ &= \left[-\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-2}^{1}+J_4\\ &= \frac{3}{2}+6=\frac{15}{2}+J_4\end{aligned}$$

avec $J_4=\displaystyle\int_{-2}^{1}\frac{3x-5}{x^2+4x+7}dx$.

On transforme l'intégrande de cette dernière intégrale. Pour tout $x\in[-2;1]$,

$$\begin{aligned}\frac{3x-5}{x^2+4x+7} &= \frac{3}{2}\frac{2x+4}{x^2+4x+7}-\frac{11}{x^2+4x+7}\\ &= \frac{3}{2}\frac{2x+4}{x^2+4x+7}-\frac{11}{(x+2)^2+3}\\ &= \frac{3}{2}\frac{2x+4}{x^2+4x+7}-\frac{11/3}{\left(\frac{x+2}{\sqrt{3}}\right)^2+1}.\end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}J_4 &= \frac{3}{2}\left[\ln|x^2+4x+7|\right]_{-2}^{1}-\frac{11}{3}\int_{-2}^{1}\frac{dx}{\left(\frac{x+2}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\\ &\underset{(u=\frac{x+2}{\sqrt{3}};du=\frac{dx}{\sqrt{3}})}{=} \frac{3}{2}\left[\ln|x^2+4x+7|\right]_{0}^{\sqrt{3}}-\frac{11}{3}\int_{-2}^{1}\frac{\sqrt{3}du}{1+u^2}\\ &= \frac{3}{2}(\ln 12-\ln 3)-\frac{11}{\sqrt{3}}\left[\arctan(t)\right]_{0}^{\sqrt{3}}\\ &= 3\ln 2-\frac{11}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

Au final, $I_4=\dfrac{15}{2}+3\ln 2-\dfrac{11\pi}{3\sqrt{3}}$.

5. $I_5=\displaystyle\int_{2}^{3}\frac{x^7}{(x^4-1)^2}dx\ (u=x^4)$

La fonction $x\mapsto\dfrac{x^7}{(x^4-1)^2}$ est continue sur $[2;3]$ par quotient, le dénominateur ne s'annulant pas sur $[2;3]$ (x^4-1 s'annule en $x=1$ uniquement).

On pose $u=x^4$, $du=4x^3dx$. Alors $udu=4x^7dx$.

On obtient

$$\begin{aligned}\int_{2}^{3}\frac{x^7dx}{(x^4-1)^2} &= \frac{1}{4}\int_{16}^{81}\frac{udu}{(u-1)^2}\\ &= \frac{1}{4}\int_{16}^{81}\frac{u-1}{(u-1)^2}du+\frac{1}{4}\int_{16}^{81}\frac{1}{(u-1)^2}du\\ &= \frac{1}{4}\int_{16}^{81}\frac{1}{u-1}du+\frac{1}{4}\left[-\frac{1}{u-1}\right]_{16}^{81}\\ &= \frac{1}{4}\left[\ln|u-1|\right]_{16}^{81}+\frac{1}{4}\left[-\frac{1}{u-1}\right]_{16}^{81}\\ &= -\frac{\ln 3}{4}+\frac{13}{960}+\ln 2.\end{aligned}$$

6. $I_6=\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\cos^2(x)}$.

La fonction $x\mapsto\frac{1}{\cos^2 x}$ est continue car $\cos^2 x\neq 0$ pour tout $x\in[0,\frac{\pi}{3}]$.

On reconnait sous le signe intégral, la dérivée de la fonction tangente : $\tan'(x)=1+\tan^2(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$.

Ainsi, $I_6=[\tan x]_0^{\frac{\pi}{3}}=\sqrt{3}$.

7. $I_7=\displaystyle\int_{1}^{2}\frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx$.

La fonction $x\mapsto\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}$ est continue sur $[1;2]$ par quotient.

En effet, le dénominateur ne s'annule pas et $4-x^2\geqslant 0$ pour tout $x\in[1,2]$.

$$I_7=\int_{1}^{2}\frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx=2\int_{1}^{2}\frac{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}{x^2}dx.$$

On pose $x=2\cos(\theta)$.

La fonction $\varphi:\theta\mapsto\cos(\theta)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;\frac{\pi}{3}]$: $dx=-2\sin(\theta)d\theta$.

θ	0	$\frac{\pi}{3}$
$\varphi(\theta)=x$	2	1

$$\begin{aligned}I_7 &= 2\int_{\frac{\pi}{3}}^{0}\frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{4\cos^2\theta}(-2\sin\theta d\theta)\\ &= 4\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\tan^2\theta d\theta\ \text{ car }\sin\theta\geqslant 0.\end{aligned}$$

Or $\tan'=1+\tan^2\iff\tan^2=\tan'-1$.

Une primitive de $\tan^2$ sur $[0;\frac{\pi}{3}]$ est donc $x\mapsto\tan(\theta)-\theta$.

Ainsi, $I_7=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$.

8. $I_8=\displaystyle\int_{0}^{1}t\arctan(t)dt$.

On intègre par parties.

$$\left\{\begin{array}{rcl} f(t) & = & \arctan t \\ g'(t) & = & t \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} f'(t) & = & \dfrac{1}{1+t^2} \\ \\ g(t) & = & \dfrac{t^2}{2} \end{array}\right.$$

Les fonctions f, g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$.

On obtient

$$\begin{aligned}\int_0^1 t\arctan t dt &= \left[\frac{t^2\arctan t}{2}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}dt \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1+t^2-1}{1+t^2}dt \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}[\arctan t]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

9. $I_9 = \displaystyle\int_0^1 (x-1)\sqrt{3+2x-x^2}dx.$

   La fonction $x \mapsto (x-1)\sqrt{3+2x-x^2}$ est continue sur $[0;1]$ car le trinôme $-x^2+2x+3$ est positif sur $[0;1]$ (trinôme dont les racines sont $-1, 3$).

   Pour tout $x \in [0;1]$, $-x^2+2x+3 = (x+1)(3-x)$.

   On pose $u = x-1$: $du = dx$.

   Alors $x+1 = u+2$ et $3-x = 2-u$.

   On obtient

$$\begin{aligned} I_9 &= \int_{-1}^0 u\sqrt{(u+2)(2-u)}du = \int_{-1}^0 u\sqrt{4-u^2}du \\ &= -\frac{1}{2}\int_{-1}^0 (-2u)(4-u^2)^{\frac{1}{2}}du = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\frac{3}{2}}\left(4-u^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^0 \\ &= -\frac{1}{3}\left(4^{\frac{3}{2}} - 3^{\frac{3}{2}}\right) = \sqrt{3} - \frac{8}{3}.\end{aligned}$$

10. $I_{10} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{4x}\sin(5x)dx.$

   La fonction $x \mapsto e^{4x}\sin(5x)$ est continue sur $[0;\frac{\pi}{2}]$ par produit.

   On a $e^{4x}\sin(5x) = e^{4x}\dfrac{e^{5ix}-e^{-5ix}}{2i} = \dfrac{e^{(5i+4)x}-e^{(-5i+4)x}}{2i} = \mathrm{Im}\left(e^{4+5i}\right)$

   Ainsi,

$$\begin{aligned} I_{10} = \mathrm{Im}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{(4+5i)x}dx &= \mathrm{Im}\left[\frac{1}{4+5i}e^{(4+5i)x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \mathrm{Im}\left(\frac{1}{4+5i}\left[e^{(4+5i)\frac{\pi}{2}}-1\right]\right) \\ &= \mathrm{Im}\left(\frac{1}{4+5i}\left[e^{2\pi}i-1\right]\right)\end{aligned}$$

   Or

$$\begin{aligned}\frac{-1+e^{2\pi}i}{4+5i} &= \frac{(-1+e^{2\pi}i)(4-5i)}{41} \\ &= \frac{-4+5e^{2\pi}}{41} + i\frac{5+4e^{2\pi}}{41}.\end{aligned}$$

   Au final $I_{10} = \dfrac{5+4e^{2\pi}}{41}$.

11. $I_{11} = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{2+e^x+e^{-x}}.$

   La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2+e^x+e^{-x}}$ est continue car $2+e^x+e^{-x} > 0$ pour tout $x \in [-1;1]$.

   On pose $u = e^x$.

   La fonction $\varphi : x \mapsto e^x = u$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-1;1]$: $du = e^x dx = udx$.

x	-1	1
$\varphi(x) = u$	e^{-1}	$\nearrow$ e

$$\begin{aligned} I_{11} &= \int_{e^{-1}}^e \frac{\frac{du}{u}}{2+u+\frac{1}{u}} \\ &= \int_{e^{-1}}^e \frac{du}{u^2+2u+1}\end{aligned}$$

   Ainsi,

$$I_{11} = \int_{e^{-1}}^e \frac{1}{(u+1)^2}du = \left[-\frac{1}{1+u}\right]_{e^{-1}}^e = \frac{1}{1+e^{-1}} - \frac{1}{1+e}.$$

12. $I_{12} = \displaystyle\int_\alpha^\beta \frac{\sin^3 t\cos t}{1+\cos^2 2t}dt$ $(u = \cos(2t))$.

   On transforme l'expression sous le signe intégrale pour faire apparaître la formule du changement de variable $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(u)du.$

   On pose $u = \cos(2t)$.

La fonction $\varphi : t \mapsto \cos(2t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$:

$du = -2\sin(2t)dt = -4\sin(t)\cos(t)dt$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\frac{\sin^3(t)\cos(t)}{1+\cos^2(2t)}dt &= \frac{\sin^2(t)}{1+\cos^2(2t)}(\sin(t)\cos(t)dt)\\
&= \frac{\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)}{1+\cos^2 2t}(\sin(t)\cos(t)dt)\\
&= -\frac{1}{4}\frac{1-\cos 2t}{2(1+\cos^2 2t)}(-4\sin(t)\cos(t)dt)\\
&= -\frac{1}{4}\frac{1-\cos 2t}{2(1+\cos^2 2t)}(\varphi'(t)dt)\\
&= -\frac{1-u}{8(1+u^2)}du
\end{aligned}$$

Ainsi

$$I_{\alpha,\beta} = \int_\alpha^\beta \frac{\sin^3 t\cos t}{1+\cos^2 2t}dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(u)du.$$

— Avec $(\alpha,\beta) = (0,\frac{\pi}{2})$, on a $\varphi(0) = 1$ et $\varphi(\frac{\pi}{2}) = -1$. On obtient :

$$\begin{aligned}
I_{0,\frac{\pi}{2}} &= -\frac{1}{8}\int_1^{-1}\frac{du}{1+u^2} + \frac{1}{8}\int_1^{-1}\frac{u}{1+u^2}du\\
&= \frac{1}{8}[\arctan(t)]_{-1}^1 - \frac{1}{8}\frac{1}{2}\left[\ln 1+u^2\right]_{-1}^1\\
&= \frac{\pi}{16}.
\end{aligned}$$

— Avec $(\alpha,\beta) = (0,\pi)$, $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 1$.
Ainsi, $I_{0,\pi} = 0$.

Remarques

Attention à ne pas aller trop vite dans l'application du théorème de changement de variable.
Par exemple $\displaystyle\int_0^\pi \cos^2(2t)dt \neq 0$.
En effet, la fonction positive $t \mapsto \cos^2(2t)$ n'est pas identiquement nulle sur $[0;\pi]$.
Pourtant si l'on pose $u = \cos^2(2t)$:
- Pour $t = 0$, $u = 1$
- Pour $t = \pi$, $u = 1$.

Mais pour appliquer le théorème du changement de variable, il faut tenir compte de la relation

$$du = -2\sin(2t)\cos(2t)dt$$

Mais on ne peut pas écrire :

$$\int_0^\pi \cos^2(2t)dt = \int_1^1 u^2\frac{du}{-2\sqrt{1-u^2}u}$$

pour deux raisons :
- $\sin(2t)$ n'est pas positif sur tout l'intervalle $[0;\pi]$ et ne s'écrit donc pas toujours $\sqrt{1-u^2}$ (mais plutôt $\pm\sqrt{1-u^2}$...) : il faut découper l'intégrale en deux morceaux.
- $-2\sin(2t)\cos(2t)$ s'annule sur $[0;\pi]$: la division $\dfrac{du}{-2\sqrt{1-u^2}u}$ n'est donc pas toujours licite.

Dans l'exercice précédent, le calcul de $I_{0,\pi}$ est correct car le changement de variable est valable sur tout l'intervalle $[0;\pi]$ et on a pu exprimer du en fonction de dt sans division illicite.

13. $I_{13} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\ln(1+\cos x)dx$.

La fonction $x \mapsto \cos(x)\ln(1+\cos x)$ est continue sur $[0;\frac{\pi}{2}]$ par produit et car $1+\cos(x) \geqslant 1 > 0$ pour tout $x \in [0;\frac{\pi}{2}]$.

On intègre par parties :

$$\left\{\begin{array}{rcl} f(t) &=& \ln(1+\cos(x))\\ g'(t) &=& \cos(x)\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} f'(t) &=& -\dfrac{\sin(x)}{1+\cos(x)}\\ g(t) &=& \sin(x)\end{array}\right.$$

Les fonctions f, g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;\frac{\pi}{2}]$.

On obtient

$$\begin{aligned} I_{13} &= [\sin(x)\ln(1+\cos x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(x)}{1+\cos(x)}dx \\ &= 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos^2(x)}{1+\cos(x)}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos(x))dx \\ &= \frac{\pi}{2} - 1. \end{aligned}$$

14. $I_{14} = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt.$

    La fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)}{1+\cos^2(t)}$ est continue sur $[0;\pi]$ par quotient, le dénominateur ne s'annulant pas.
    On pose $u = \cos(t)$. La fonction $\varphi : t \mapsto \cos(t) = u$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;\pi]$.
    $du = \varphi'(t)dt = -\sin(t)dt$.

t	0	π
$\varphi(t) = u$	$1 \searrow$	-1

    $$I_{14} = \int_1^{-1} \frac{-du}{1+u^2} = \int_{-1}^{1} \frac{du}{1+u^2}$$

    On obtient $I_{14} = [\arctan(u)]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{4} - (-\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{2}$.

15. $I_{15} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x}$ $(u = \tan\frac{x}{2})$.

    La fonction $x \mapsto \frac{1}{1+\sin(x)}$ est continue sur $[0;\frac{\pi}{2}]$ par quotient, le dénominateur $1+\sin(x) \geqslant 1$ ne s'annulant pas.
    On pose $u = \tan\frac{x}{2}$.
    La fonction $x \mapsto \tan\frac{x}{2} = u$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;\frac{\pi}{2}]$ car $\frac{x}{2} \in [0;\frac{\pi}{4}]$ pour tout $x \in [0;\frac{\pi}{2}]$ et la fonction $\tan$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;\frac{\pi}{4}] \subset]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$.
    On a $du = \varphi'(x)dx = \frac{1}{2}(1+\tan^2\frac{x}{2})dx = \dfrac{1}{2\cos^2(\frac{x}{2})}dx$.

    On obtient

    $$\begin{aligned} I_{15} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin(x)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin\left(2\frac{x}{2}\right)} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx/2\cos^2(\frac{x}{2})}{\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}+\tan\frac{x}{2}} = \int_0^1 \frac{du}{\frac{1}{2}(1+u^2)+u} \\ &= 2\int_0^1 \frac{du}{u^2+2u+1} = 2\int_0^1 \frac{du}{(u+1)^2} \end{aligned}$$

    On obtient

    $$I_{15} = 2\left[-\frac{1}{u+1}\right]_0^1 = -1+2 = 1.$$

16. $I_{16} = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{2+x}}{1+x}dx$ $(x = u^2-2)$.

    La fonction $x \mapsto \frac{\sqrt{2+x}}{1+x}$ est continue sur $[0;1]$ par quotient, le dénominateur ne s'annulant pas.
    On pose $x = u^2-2$: $dx = 2udu$.
    On obtient

    $$\begin{aligned} I_{16} &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{u^2}}{u^2-1}2udu \\ &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{2u^2}{u^2-1}du \\ &= 2\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{u^2-1}{u^2-1}du + 2\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{u^2-1}du \\ &= 2(\sqrt{3}-\sqrt{2}) + [\ln(u-1)-\ln(u+1)]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \\ &= 2(\sqrt{3}-\sqrt{2}) - \ln(\sqrt{2}-1) + \ln(1+\sqrt{2}) + \ln(\sqrt{3}-1) - \ln(1+\sqrt{3}) \end{aligned}$$

□

Solution Exercice 2.

1. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4+x^2}}$.

   La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ par quotient le dénominateur étant bien défini car $(4+x^2 > 0)$ et ne s'annulant pas.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{4+x^2}} = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ avec $u(x) = 4+x^2$.
   Ainsi, une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est donnée par $F(x) = \sqrt{u(x)} = \sqrt{4+x^2}$.

2. $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = 2\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$.

   La fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par quotient et composition.
   Pour tout $x > 0$, $f(x) = 2u'(x)e^{u(x)}$ avec $u(x) = \sqrt{x}$.
   Ainsi, une primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$ est donnée par $F(x) = 2e^{\sqrt{x}}$.

3. $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{5+x^3}}$.

   La fonction f est continue sur $I =]-\sqrt[3]{5};+\infty[$.
   Pour tout $x \in I$, $f(x) = \dfrac{2}{3}\dfrac{3x^2}{2\sqrt{5+x^3}} = \dfrac{2}{3}\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.
   Une primitive de f sur I est donc donnée par $F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{5+x^3}$.

4. $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt[4]{(x^3+1)^7}}$

   La fonction f est définie pour tout x tel que $x^3+1>0 \Longleftrightarrow x>-1$.

   Pour tout $x \in]-1;+\infty[$,

   $f(x) = x^2(x^3+1)^{-7/4} = \frac{1}{3}3x^2(x^3+1)^{-7/4} = \frac{1}{3}u'(x)(x^3+1)^{-7/4}$.

   Une primitive de f sur $]-1;+\infty[$ est donc donnée par

   $F(x) = \dfrac{1}{3}\dfrac{(x^3+1)^{-7/4+1}}{-7/4+1} = -\dfrac{4}{9}\dfrac{1}{(x^3+1)^{\frac{3}{4}}}$

5. $f(x) = \dfrac{x}{\cos^2(x)}$.

   La fonction f est continue sur la réunion des intervalle $]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi[$ avec $k\in\mathbb{Z}$ par quotient, le dénominateur s'annulant précisément en chaque réel $\frac{\pi}{2}+k\pi$.

   On détermine une primitive de f sur chacun de ces intervalles.

   On pose $a = k\pi \in]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi[$ et on détermine l'unique primitive $x\mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ de f sur $]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi[$ s'annulant en $a=k\pi$.

   On intègre par parties :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u(t) & = & t \\ v'(t) & = & \frac{1}{\cos^2(t)} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} u'(t) & = & 1 \\ v(t) & = & \tan(t) \end{array}\right. .$$

   On obtient

$$\begin{aligned} F(x) = \int_{k\pi}^x \frac{t}{\cos^2(t)}dt &= [t\tan(t)]_{k\pi}^x - \int_{k\pi}^x \tan(t)dt \\ &= (x\tan(x) - k\pi\tan(k\pi)) + \int_{k\pi}^x -\frac{\sin(t)}{\cos(t)}dt \\ &= x\tan(x) + [\ln|\cos(t)|]_{k\pi}^x \\ &= x\tan(x) + \ln|\cos(x)|, \end{aligned}$$

   car $\ln|\cos(k\pi)| = \ln((-1)^k) = \ln(1) = 0$.

6. $f(x) = \arctan(x)$

   La fonction $f : x\mapsto \arctan(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

   On cherche l'unique primitive de $\arctan$ sur $\mathbb{R}$, s'annulant en 0 : $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \arctan(t)dt$.

   On intègre par parties,

$$\left\{\begin{array}{rcl} u(t) & = & \arctan(t) \\ v'(t) & = & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} u'(t) & = & \frac{1}{1+t^2} \\ v(t) & = & t \end{array}\right. .$$

   On obtient pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \int_0^x \arctan(t)dt &= [t\arctan(t)]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2}dt \\ &= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{2t}{1+t^2}dt \\ &= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\left[\ln|1+t^2)\right]_0^x \end{aligned}$$

   L'unique primitive de f s'annulant en 0 est donc donnée par

   $F(x) = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

7. $f(x) = \arcsin(x)$

   La fonction $f : x\mapsto \arcsin(x)$ est définie et continue sur $]-1;1[$.

   On cherche l'unique primitive de $\arcsin$ sur $]-1;1[$, s'annulant en 0 :

   $F : x\mapsto \displaystyle\int_0^x \arcsin(t)dt$.

   On intègre par parties,

$$\left\{\begin{array}{rcl} u(t) & = & \arcsin(t) \\ v'(t) & = & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} u'(t) & = & \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \\ v(t) & = & t \end{array}\right. .$$

   On obtient pour tout $x\in]-1;1[$

$$\begin{aligned} \int_0^x \arcsin(t)dt &= [t\arcsin(t)]_0^x - \int_0^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt \\ &= x\arcsin(x) + \int_0^x \frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}}dt \\ &= x\arcsin(x) + \left[\sqrt{1-t^2}\right]_0^x \end{aligned}$$

   L'unique primitive de f sur $]-1;1[$ s'annulant en 0 est donc donnée par

   $F(x) = x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} - 1$.

8. $f(x) = \ln(1+x^2)$

   La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

   On cherche l'unique primitive de f s'annulant en 0 :

   $F : x\mapsto \displaystyle\int_0^x \ln(1+t^2)dt$.

   On intègre par parties,

$$\left\{\begin{array}{rcl} u(t) & = & \ln(1+t^2) \\ v'(t) & = & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} u'(t) & = & \frac{2t}{1+t^2} \\ v(t) & = & t \end{array}\right. .$$

On obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\int_0^x \ln(1+t^2)dt &= \left[t\ln(1+t^2)\right]_0^x - \int_0^x \frac{2t^2}{1+t^2}dt\\ &= x\ln(1+x^2) - 2\int_0^x \frac{1+t^2-1}{1+t^2}dt\\ &= x\ln(1+x^2) - 2\int_0^x \frac{1+t^2}{1+t^2}dt + 2\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt\\ &= x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan(x).\end{aligned}$$

9. $f(x) = \sin^2(x)$.

   La fonction $f : x \mapsto \sin^2 x$ est continue sur $\mathbb{R}$.

   Soit F l'unique primitive de f sur $\mathbb{R}$ s'annulant en 0 : $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \sin^2 t dt$.

   On introduit de même $G : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \cos^2(t)dt$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

   * $F(x) + G(x) = \displaystyle\int_0^x (\cos^2(t) + \sin^2(t))dt = x$
   * $F(x) - G(x) = \displaystyle\int_0^x (\cos^2(t) - \sin^2(t))dt = \int_0^x -\cos(2t)dt = \left[-\frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^x$

     $F(x) - G(x) = -\dfrac{\sin(2x)}{2}$.

   On obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}$.

10. $f(x) = \cos^2(x)$.

    On note G l'unique primitive de f sur $\mathbb{R}$ s'annulant en 0.

    Le calcul de la question précédente donne $G(x) = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}$.

11. $f(x) = \sin^2(x)\cos^3(x)$.

    La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

    On linéarise l'expression avec les formules d'Euler-Moivre :

$$\begin{aligned}f(x) = \sin^2 x\cos^3 x &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3\\ &= \left(\frac{e^{2ix}-2+e^{-2ix}}{-4}\right)\left(\frac{e^{3ix}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-3ix}}{8}\right)\\ &= -\frac{1}{32}\left[\left(e^{5ix}+e^{-5ix}\right)+\left(e^{3ix}+e^{-3ix}\right)-2\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\right]\\ &= -\frac{1}{16}(\cos(5x)+\cos(3x)-2\cos(x))\end{aligned}$$

On peut alors déterminer l'unique primitive F de f sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}F(x) &= -\frac{1}{16}\int_0^x \cos(5t)dt - \frac{1}{16}\int_0^x \cos(3t)dt + \frac{2}{16}\int_0^x \cos(t)dt\\ &= -\frac{1}{80}\sin(5x) - \frac{1}{48}\sin(3x) + \frac{1}{8}\sin(x).\end{aligned}$$

12. $f(x) = \sin^4(x)\cos^2(x)$.

    La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

    On linéarise l'expression avec les formules d'Euler-Moivre :

$$\begin{aligned}\sin^4(x)\cos^2(x) &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^4\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2\\ &= \left(\frac{e^{4ix}-4e^{2ix}+6-4e^{-2ix}+e^{-4ix}}{16}\right)\left(\frac{e^{2ix}+2+e^{-2ix}}{4}\right)\\ &= \frac{1}{64}\left[\left(e^{6ix}+e^{-6ix}\right)-2\left(e^{4ix}+e^{-4ix}\right)-\left(e^{2ix}+e^{-2ix}\right)+4\right]\\ &= \frac{1}{32}\left(\cos(6x)-2\cos(4x)-\cos(2x)+2\right).\end{aligned}$$

On peut déterminer alors l'unique primitive de f sur $\mathbb{R}$ s'annulant en 0,

$$\begin{aligned}F(x) &= \frac{1}{32}\int_0^x \cos(6t)dt - \frac{2}{32}\int_0^x \cos(4t)dt - \frac{1}{32}\int_0^x \cos(2t)dt + \frac{2}{32}\int_0^x dt\\ &= \frac{1}{192}\sin(6x) - \frac{1}{64}\sin(4x) - \frac{1}{64}\sin(2x) + \frac{x}{16}\end{aligned}$$

13. $f(x) = \sin(\ln x)$.

    La fonction f est continue sur $]0;+\infty[$ par composition.

    On détermine l'unique primitive F de f sur $\mathbb{R}_+^*$ s'annulant en 1 :

    $\forall x > 0, F(x) = \displaystyle\int_1^x \sin(\ln(t))dt$.

    On pose $u = \ln(t)$.

    La fonction $\varphi : t \mapsto \ln(t) = u$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$.

    $du = \varphi'(t)dt = \dfrac{1}{t}dt$.

    Ainsi, $dt = tdu = e^u du$.

On obtient par changement de variable, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_0^{\ln(x)} \sin(u)e^u du = \frac{1}{2i}\int_0^{\ln(x)} (e^{iu} - e^{-iu})e^u du \\
&= \frac{1}{2i}\int_0^{\ln(x)} (e^{(1+i)u} - e^{(1-i)u})du \\
&= \frac{1}{2i}\frac{1}{1+i}\left(e^{(1+i)\ln(x)} - 1\right) - \frac{1}{2i}\frac{1}{1-i}\left(e^{(1-i)\ln(x)} - 1\right) \\
&= \frac{2i}{2i}\mathrm{Im}\left(\frac{e^{(1+i)\ln(x)}}{1+i} - \frac{1}{1+i}\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{1-i}{2}e^{\ln(x)}e^{i\ln(x)} - \frac{1-i}{2}\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{1-i}{2}e^{\ln(x)}\left(\cos(\ln x) + i\sin(\ln x)\right) - \frac{1-i}{2}\right) \\
&= \frac{x}{2}\sin(\ln x) - \frac{x}{2}\cos(\ln x) + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

14. $f(x) = \cos(\ln x)$.
La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
On peut appliquer la même méthode qu'à la question précédente.
On peut également utiliser une double intégration par parties pour déterminer l'unique primitive F de f sur $\mathbb{R}_+^*$ s'annulant en 1.

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(t) &=& \cos(\ln t) \\ g'(t) &=& 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} f'(t) &=& -\dfrac{\sin(\ln t)}{t} \\ g(t) &=& t \end{array}\right.$$

On obtient

$$\int_1^x \cos(\ln t)dt = [t\cos(\ln t)]_1^x + \int_1^x \sin(\ln t)dt$$

On recommence :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(t) &=& \sin(\ln t) \\ g'(t) &=& 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} f'(t) &=& \dfrac{\cos(\ln t)}{t} \\ g(t) &=& t \end{array}\right.$$

On obtient :

$$\int_1^x \cos(\ln t)dt = (x\cos(\ln x) - 1) + [t\sin(\ln t)]_1^x - \int_1^x \cos(\ln t)dt$$

Finalement pour tout $x > 0$,

$$\int_1^x \cos(\ln t)dt = \frac{x}{2}\left(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)\right) - \frac{1}{2}$$

15. $f(x) = \sin(2x)\ln(\tan x)$.
La fonction f est continue sur la réunion des intervalles $]k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[$.
On pose $a = k\pi + \frac{\pi}{4}$ et on détermine l'unique primitive F de f sur $]k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[$ s'annulant en a.
Pour tout $x \in]k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[, F(x) = \int_a^x \sin(2t)\ln(\tan t)dt$.
On intègre par parties :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(t) &=& \ln(\tan t) \\ g'(t) &=& \sin(2t) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} f'(t) &=& \frac{1}{\cos^2(t)\tan(t)} \\ g(t) &=& -\frac{\cos(2t)}{2} \end{array}\right.$$

On obtient

$$\begin{aligned}
\int_a^x \sin(2t)\ln(\tan t)dt &= \left[-\frac{\ln(\tan t)\cos(2t)}{2}\right]_a^x + \frac{1}{2}\int_a^x \frac{\cos(2t)}{\frac{2\sin(t)\cos(t)}{2}}dt \\
&= -\frac{\ln(\tan x)\cos(2x)}{2} + \frac{1}{2}\int_a^x \frac{\cos(2t)}{\sin(2t)}dt \\
&= -\frac{\ln(\tan x)\cos(2x)}{2} + \frac{1}{2}\ln|\sin(2x)| \\
&= -\frac{1}{2}\ln(\tan x)\cos(2x) + \frac{1}{2}\ln(\sin(2x))
\end{aligned}$$

On a utilisé le fait que
$\ln(\tan a) = \ln(\tan(\frac{\pi}{4})) = \ln(1) = 0$ par π-périodicité de $\tan$ et
$\ln|\sin(2a)| = \ln|\sin(2k\pi + \frac{\pi}{2})| = \ln(\sin(\frac{\pi}{2})) = \ln(1) = 0$.

□

Solution Exercice 3. Soient $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos^2 x}{\cos 2x}dx$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 x}{\cos 2x}dx$.

1. La fonction $x \mapsto \cos^2 x \cos 2x$ est continue sur $[0; \frac{\pi}{6}]$ par quotient, le dénominateur ne s'annulant pas car $x \in [0; \frac{\pi}{6}] \iff 2x \in [0; \frac{\pi}{3}]$.
   — On commence par calculer la différence :
   $$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos 2x}dx$$
   $$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} dx = \frac{\pi}{6}.$$
   — Puis la somme :
   $$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos 2x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^2 x - \sin^2 x}dx$$
   $$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2\cos^2 x - 1}dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2 - \frac{1}{\cos^2 x}}\frac{dx}{\cos^2 x}$$
   $$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2 - (1 + \tan^2 x)}\frac{dx}{\cos^2 x}$$

On pose $u = \tan(x)$.
La fonction $x \mapsto \varphi(x) = \tan(x) = u$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0; \frac{\pi}{6}]$.
$du = (1 + \tan^2 x)dx = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$.
On obtient
$I + J = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{2 - (1 + u^2)} du = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{1 - u^2} du.$
On transforme classiquement
$\dfrac{1}{1 - u^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1 - u} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1 + u}$ et on trouve
$I + J = \frac{1}{2} \left[- \ln(1 - u)\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} + \frac{1}{2} \left[\ln(1 + u)\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$
$I + J = -\frac{1}{2} \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
$I + J = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{4+2\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2} \ln(2 + \sqrt{3})$.

2. $I - J = \frac{\pi}{6}$ et $I + J = \frac{\ln(2+\sqrt{3})}{2}$ donc
$2I = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\ln(2 + \sqrt{3})}{2} \iff I = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\ln(2 + \sqrt{3})}{4}$
et $J = -\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\ln(2 + \sqrt{3})}{4}$.

$\square$

Solution Exercice 4. On rappelle le théorème sur les sommes de Riemann.

Si $f \in \mathscr{C}^0([a; b])$ alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{b - a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b - a}{n}\right) = \int_a^b f(t)dt.$

En particulier si $a = 0, b = 1$ alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)dt.$

1. $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n + k}{n^2 + k^2} = \frac{n}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1 + \frac{k}{n}}{1 + \frac{k^2}{n^2}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$
Ainsi, S_n est une somme de Riemann associée à la fonction continue sur $[0; 1]$, $x \mapsto f(x) = \dfrac{1 + x}{1 + x^2}$.
Par conséquent,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} S_n &= \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{1 + x}{1 + x^2}dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}dx + \int_0^1 \frac{x}{1 + x^2}dx \\ &= \left[\arctan(x)\right]_0^1 + \frac{1}{2}\left[\ln(1 + x^2)\right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2}.\end{aligned}$$

2. $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2\sqrt{n^3 + k^3}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k/n)^2}{n^{3/2}\sqrt{1 + (k/n)^3}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{(k/n)^2}{\sqrt{1 + (k/n)^3}}$
$S_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \underbrace{\dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)}_{T_n}.$
T_n est une somme de Riemann associée à la fonction continue sur $[0; 1]$, $x \mapsto \dfrac{x^2}{\sqrt{1 + x^2}}$.
Ainsi, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} T_n = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1 + x^3}}dx \in \mathbb{R}$.
Par conséquent, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} T_n = 0$ par produit.
Calculons, pour être complet, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} T_n = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1 + x^3}}dx$.

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1 + x^3}}dx = \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{3x^2}{2\sqrt{1 + x^3}}dx = \frac{2}{3}\left[\sqrt{1 + x^3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}(\sqrt{2} - 1).$$

3. $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \sin\left(\frac{k\pi}{n + 1}\right) = \frac{(n + 1)^2}{n^2}\frac{1}{n + 1} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n + 1} \sin\left(\frac{k}{n + 1}\pi\right)$

$$S_n = \frac{(n + 1)^2}{n^2} \underbrace{\frac{1}{n + 1}\left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{n + 1} \sin\left(\frac{k}{n + 1}\pi\right) - \underbrace{\frac{n + 1}{n + 1} \sin\left(\frac{n + 1}{n + 1}\pi\right)}_{=0}\right)}_{T_{n+1}}$$

T_{n+1} est une somme de Riemann associée à la fonction $x \mapsto x\sin(\pi x)$.
Ainsi, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} T_{n+1} = \int_0^1 x\sin(\pi x)dx$.
On intègre par parties :

$$\left\{\begin{array}{rcl} f(x) &=& x \\ g'(x) &=& \sin(\pi x) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} f'(x) &=& 1 \\ g(x) &=& -\frac{\cos(\pi x)}{\pi} \end{array}\right.$$

On obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\sin(\pi x)dx &= \left[-\frac{x\cos(\pi x)}{\pi}\right]_0^1 + \frac{1}{\pi}\int_0^1 \cos(\pi x)dx \\ &= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi^2}\left[\sin(\pi x)\right]_0^1 = \frac{1}{\pi}.\end{aligned}$$

4. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$

$$S_n = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{n+1}{k} \sin\left(\frac{k}{n+1}\pi\right) - \frac{n+1}{n+1}\underbrace{\sin\left(\frac{n+1}{n+1}\pi\right)}_{=0}\right)$$

Ainsi, S_n est une somme de Riemann (au rang $n+1$) associée à la fonction f : $x \mapsto \frac{\sin(\pi x)}{x}$ continue sur $]0;1]$ et prolongeable par continuité en 0 : $\frac{\sin(\pi x)}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\pi x}{x} = \pi$.

Par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{x} dx$.

□

Solution Exercice 5. On intègre par parties :

$$\begin{cases} u(t) &= f(t) \\ v'(t) &= \sin(nt) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(t) &= f'(t) \\ v(t) &= -\frac{\cos(nt)}{n} \end{cases}$$

Les fonctions u, v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$. On obtient :

$$\int_a^b f(t)\sin(nt)dt = \left[-\frac{\cos(nt)f(t)}{n}\right]_a^b + \frac{1}{n}\int_a^b \cos(nt)f'(t)dt$$

On note $M = \max\limits_{[a;b]} |f'|$. Ce max existe car f est de classe $\mathscr{C}^1$ donc f est continue sur $[a;b]$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(t)\sin(nt)dt\right| &\leqslant \left|\frac{-\cos(nb)f(b)}{n} + \frac{\cos(na)f(a)}{n}\right| + \frac{1}{n}\int_a^b |\cos(nt)f'(t)|\, dt \\ &\leqslant \frac{|f(b)|+|f(a)|}{n} + \frac{1}{n}\int_a^b M dt \\ &\leqslant \frac{|f(b)|+|f(a)|}{n} + M\frac{b-a}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin(nt)dt = 0$.

□

Solution Exercice 6. $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$.

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$,
La fonction $x \mapsto x^n e^{-x}$ est continue et positive sur $[0;1]$.
L'intégrale I_n est donc positive.
De plus, pour tout $x \in [0;1]$, $e^{-x} \leqslant e^0 = 1$.
Par croissance de l'intégrale, on obtient
$0 \leqslant I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx \leqslant \int_0^1 x^n dx \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.
En conclusion : $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.
(b) Par le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$.
On intègre par parties : parties

$$\begin{cases} f(x) &= e^{-x} \\ g'(x) &= x^n \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(x) &= -e^{-x} \\ g(x) &= \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{cases}$$

On obtient

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^n e^{-x} dx &= \left[\frac{e^{-x}x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 + \frac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}e^{-x}dx \\ &= \frac{1}{e(n+1)} + \frac{I_{n+1}}{n+1}\end{aligned}$$

(b) On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$0 \leqslant I_n - \frac{1}{(n+1)e} \leqslant \frac{I_{n+1}}{n+1} \leqslant \frac{1}{(n+1)(n+2)}$
par l'inégalité $I_{n+1} \leqslant \frac{1}{n+2}$ obtenue à la question $1.(a)$
(c) On déduit de ce qui précède que
$0 \leqslant (n+1)eI_n - 1 \leqslant \frac{(n+1)e}{(n+1)(n+2)} = \frac{e}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Ainsi,
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{I_n}{\frac{1}{(n+1)e}} = 1$ et donc $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(n+1)e}$.

□

Solution Exercice 7. $J_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{e^x+1} dx$.

1. — On calcule $I = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1} dx$.
On pose $u = e^x$.
La fonction $x \mapsto \varphi(x) = e^x = u$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$: $du = e^x dx$.
Par changement de variable :
$I = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1} dx = \int_1^e \frac{du}{1+u} = [\ln(1+u)]_1^e = \ln(1+e) - \ln(2)$.

— On en déduit que
$J_0 = \int_0^1 \frac{1}{e^x+1}dx = \int_0^1 \frac{e^x+1-e^x}{e^x+1}dx$
$J_0 = 1 - I = 1 + \ln(2) - \ln(1+e)$.

2. Soit $n \geqslant 1$.
La fonction $x \mapsto \frac{e^{-nx}}{e^x+1}$ est continue et positive sur $[0;1]$.
Ainsi, l'intégrale J_n est positive.
De plus pour tout $x \in [0;1]$, $\frac{e^{-nx}}{e^x+1} \leqslant e^{-nx}$ car $e^x + 1 \geqslant 1$.
Par croissance de l'intégrale :
$0 \leqslant J_n \leqslant \int_0^1 e^{-nx}dx = \left[-\frac{1}{n}e^{-nx}\right]_0^1 = \frac{1}{n} - \frac{1}{e^n} \leqslant \frac{1}{n}$.
On en déduit par le théorème des gendarmes que $\lim_{n\to+\infty} J_n = 0$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.
Pour tout $x \in [0;1]$, $nx \leqslant (n+1)x$ donc $-(n+1)x \leqslant -nx$ et par croissance de la fonction $\exp$ sur $\mathbb{R}$, on obtient $e^{-(n+1)x} \leqslant e^{-nx}$.
Par conséquent, pour tout $x \in [0;1]$,
$\frac{e^{-(n+1)x}}{e^x+1} \leqslant \frac{e^{-nx}}{e^x+1}$
Par croissance de l'intégrale, on obtient donc
$$J_{n+1} \leqslant \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{e^x+1}dx \leqslant \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{e^x+1}dx \leqslant J_n.$$
On en déduit alors
$$\frac{1}{2}(J_n + J_{n+1}) = \frac{1}{2}J_n + \frac{1}{2}J_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}J_n + \frac{1}{2}J_n = J_n$$
et de même,
$$\frac{1}{2}(J_{n-1} + J_n) \geqslant \frac{1}{2}J_{n-1} + \frac{1}{2}J_n \geqslant \frac{1}{2}J_n + \frac{1}{2}J_n = J_n.$$

4. $J_n + J_{n+1} = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{e^x+1}\left(1+e^{-x}\right)dx = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{e^x+1}\frac{(e^x+1)}{e^x} = \int_0^1 e^{-(n+1)x}dx$
$J_n + J_{n+1} = \left[-\frac{1}{(n+1)}e^{-(n+1)x}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)e^{n+1}}$
$J_n + J_{n+1} = \frac{1}{(n+1)}\left(1 - \frac{1}{e^{n+1}}\right)$.

5. On utilise l'encadrement obtenu à la question 3., on trouve :
$$\frac{n}{2}(J_n + J_{n+1}) \leqslant nJ_n \leqslant \frac{n}{2}(J_{n-1} + J_n)$$
et par le résultat obtenu à la question 4.
$$\frac{n}{2(n+1)}\left(1 - \frac{1}{e^{n+1}}\right) \leqslant nJ_n \leqslant \frac{n}{2n}\left(1 - \frac{1}{e^n}\right)$$
Par le théorème des gendarmes, on obtient $\lim_{n\to+\infty} nJ_n = \frac{1}{2}$
et par conséquent, $J_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$.

□

Solution Exercice 8. On encadre $\frac{x}{1+\sin(x)}$ pour tout $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$:
$1 = 1 + \sin(0) \leqslant 1 + \sin(x) \leqslant 1 + \sin(\frac{\pi}{2}) = 2$ par croissance de la fonction $\sin$.
On obtient alors
$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{1+\sin(x)} \leqslant 1 \text{ puis } \frac{x}{2} \leqslant \frac{x}{1+\sin(x)} \leqslant x.$$
En intégrant sur $[0; \frac{\pi}{2}]$, on trouve :
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{2}dx \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1+\sin(x)}dx \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx$$
et finalement,
$$\frac{\pi^2}{16} \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1+\sin(x)}dx \leqslant \frac{\pi^2}{8}.$$

□

Solution Exercice 9.

1. $I = \int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{(1+t)^2}dt$.
La fonction $t \mapsto \frac{\ln(1-t)}{(1+t)^2}$ est continue sur $[0;1[$.
L'intégrale I est impropre en 1.
Elle est convergente car :
— $\sqrt{1-t}\ln(1-t) \underset{t\to1}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparées.
Ainsi, $\ln(1-t) \underset{t\to1}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$.
— $\int_0^a \frac{1}{\sqrt{1-t}}dt = \left[-2\sqrt{1-t}\right]_0^a \underset{a\to1}{\longrightarrow} 2$.
Par comparaison avec la fonction intégrable $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$,
la fonction $t \mapsto \ln(1-t)$ est donc intégrable sur $[0;1]$.
Pour calculer I, on intègre par parties sur $[0;a]$ et on fait tendre a vers 1.

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(t) & = & \ln(1-t) \\ g'(t) & = & \dfrac{1}{(1+t)^2} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} f'(t) & = & -\dfrac{1}{1-t} \\ g(t) & = & -\dfrac{1}{1+t} \end{array}\right.$$

Les fonctions f, g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0; a]$.

On obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^a \frac{\ln(1-t)}{(1+t)^2}dt &= \left[-\frac{\ln(1-t)}{1+t}\right]_0^a - \int_0^a \frac{1}{(1-t)(1+t)}dt \\
&= -\frac{\ln(1-a)}{1+a} - \frac{1}{2}\left(\int_0^a \frac{dt}{1-t} + \int_0^a \frac{dt}{1+t}\right) \\
&= -\frac{\ln(1-a)}{1+a} - \frac{1}{2}\left[-\ln(1-t)\right]_0^a - \frac{1}{2}\left[\ln(1+t)\right]_0^a \\
&= -\frac{\ln(1-a)}{1+a} + \frac{\ln(1-a)}{2} - \frac{\ln(1+a)}{2} \\
&= \ln(1-a)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+a}\right) - \frac{\ln(1+a)}{2} \\
&= \ln(1-a)\frac{1+a-2}{2(a+1)} - \frac{\ln(1+a)}{2} \\
&= \ln(1-a)\frac{a-1}{2(a+1)} - \frac{\ln(1+a)}{2}
\end{aligned}$$

Par croissances comparées, $\lim\limits_{a\to 1^-} \ln(1-a)(a-1) = \lim\limits_{u\to 0^+} -u\ln(u) = 0$.

Ainsi, $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{1+t^2}dt = \lim_{a\to 1^-}\int_0^a \frac{\ln(1-t)}{1+t^2}dt = -\frac{\ln 2}{2}$.

2. $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}dt$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}$ est continue sur $]0; 1[$.

L'intégrale I est impropre en 0 et en 1.

De plus,

— $0 \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{t(1-t)}} \underset{t\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}dt$ est donc convergente par comparaison, l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{t}}dt$ étant convergente.

— $0 \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{t(1-t)}} \underset{t\to 1^-}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$.

L'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}dt$ est donc convergente par comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}}dt$ étant convergente : par changement de variable, on se ramène à l'intégrale de Riemann convergente précédente.

Pour calculer I, on procède à un changement de variable.

On pose $t = \cos^2\theta$.

La fonction $\varphi : \theta \mapsto \cos^2\theta = t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement décroissante sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ et réalise donc une bijection de $[0; \frac{\pi}{2}]$ sur $[\varphi(\frac{\pi}{2}); \varphi(0)]$.

θ	0	$\frac{\pi}{2}$
$\varphi(\theta) = t$	1 ↘	0

$dt = \varphi'(\theta)d\theta = -2\sin\theta\cos\theta d\theta$.

L'intégrale obtenue après changement de variable est de même nature que I, donc convergente, et a la même valeur que I :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}dt &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{1}{\sqrt{\cos^2\theta(1-\cos^2\theta)}}(-2\sin\theta\cos\theta)d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta\sin\theta} = \pi.
\end{aligned}$$

3. $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}dt$.

La fonction $f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{1+t^2}$ est continue sur $]0; +\infty[$.

L'intégrale I est impropre en 0 et $+\infty$.

— $\dfrac{\ln(t)}{1+t^2} \underset{t\to 0^+}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ par croissances comparées.

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ étant intégrable sur $[0; 1]$, la fonction f est intégrable sur $[0; 1]$.

— $\dfrac{\ln(t)}{1+t^2} \underset{t\to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)$ par croissances comparées :

$\dfrac{t^{\frac{3}{2}}\ln(t)}{1+t^2} \underset{t\to +\infty}{\sim} \dfrac{\ln(t)}{\sqrt{t}} \underset{t\to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$ étant intégrable sur $[1; +\infty[$, la fonction f est intégrable sur $[1; +\infty[$.

En conclusion f est intégrable sur $[0; +\infty[$ et l'intégrale I est convergente.

Pour calculer I, on procède à un changement de variable.

On pose $u = \dfrac{1}{t}$.

La fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{t} = u$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ et strictement décroissante sur $]0;+\infty[$ donc réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur $]\lim\limits_{+\infty}\varphi;\lim\limits_{0^+}\varphi[=]0;+\infty[$.

t	$0 \qquad\qquad +\infty$
$\varphi(t) = u$	$+\infty \searrow 0$

$$du = \varphi'(t)dt = -\frac{1}{t^2}dt.$$

$$dt = -t^2 du = -\frac{1}{u^2}du$$

L'intégrale obtenue après changement de variable est de même nature que I, donc convergente, et a la même valeur que I :

$$\begin{aligned} I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt &= \int_{+\infty}^{0} \frac{\ln\left(\frac{1}{u}\right)}{1+\frac{1}{u^2}}\left(-\frac{du}{u^2}\right) \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{-\ln(u)}{1+u^2}du = -I. \end{aligned}$$

Finalement, $2I = 0 \iff I = 0$.

4. $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)(t+2)(t+3)}$.

La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{(t+1)(t+2)(t+3)}$ est continue sur $[0;+\infty[$.

L'intégrale I est impropre en $+\infty$.

Mais $0 \leqslant f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^3}$.

L'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3}dt$ est convergente donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge.

Par conséquent $I = \int_0^{+\infty} f(t)dt$ est convergente.

On cherche $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\dfrac{1}{(t+1)(t+2)(t+3)} = \dfrac{a}{t+1} + \dfrac{b}{t+2} + \dfrac{c}{t+3}$.

On trouve $a = \dfrac{1}{2}$, $b = -1$, $c = \dfrac{1}{2}$.

Soit $A > 0$.

$I(A) = \displaystyle\int_0^{A} \frac{dt}{(t+1)(t+2)(t+3)} = \frac{1}{2}\left[\ln(t+1)\right]_0^A - \left[\ln(t+2)\right]_0^A + \frac{1}{2}\left[\ln(t+3)\right]_0^A$

$I(A) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{(A+1)(A+3)}{(A+2)^2}\right) - \dfrac{\ln(1)}{2} + \ln(2) - \dfrac{\ln(3)}{2} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \ln 2 - \dfrac{\ln 3}{2}$.

Ainsi, $I = \ln 2 - \dfrac{\ln 3}{2}$.

5. $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}dt$.

La fonction $t \mapsto e^{-\sqrt{t}}$ est continue sur $[0;+\infty[$.

L'intégrale I est impropre en $+\infty$.

De plus, $0 \leqslant e^{-\sqrt{t}} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées : $t^2 e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}$ est convergente donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}dt$ également.

Par conséquent $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}dt$ converge.

On procède à un changement de variable : $u = \sqrt{t}$.

La fonction $\varphi : t \mapsto \sqrt{t} = u$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;+\infty[$, strictement croissante et réalise donc une bijection de $[0;+\infty[$ sur $[0;+\infty[$.

t	$0 \qquad\qquad +\infty$
$\varphi(t) = u$	$0 \nearrow +\infty$

$$du = \varphi'(t)dt = \frac{1}{2\sqrt{t}}dt$$

$$dt = 2\sqrt{t}dt = 2udu$$

L'intégrale obtenue après changement de variable est de même nature que I, donc convergente et a la même valeur que I

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}dt = \int_0^{+\infty} e^{-u}2udu.$$

On intègre par parties :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(u) & = & u \\ g'(u) & = & e^{-u} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} f'(u) & = & 1 \\ g(u) & = & -e^{-u} \end{array}\right.$$

On obtient pour tout $A > 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^{A} 2ue^{-u}du &= 2\left[-ue^{-u}\right]_0^A + 2\int_0^A e^{-u}du \\ &= -2Ae^{-A} + 2\left[-e^{-u}\right]_0^A \\ &= -2Ae^{-A} + 2 - e^{-A}. \end{aligned}$$

Par croissances comparées, on a $\lim\limits_{A\to+\infty} Ae^{-A} = 0$ donc

$$I = \int_0^{+\infty} 2ue^{-u}du = 2 = \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}dt.$$

6. $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{e^t+1}}$

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{e^t+1}}$ est continue sur $[0; +\infty[$.

L'intégrale I est impropre en $+\infty$.

De plus, $0 \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{e^t+1}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{e^t}} = e^{-\frac{t}{2}} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

Par comparaison, l'intégrale I converge.

On procède à un changement de variable. On pose $u = \dfrac{1}{\sqrt{e^t+1}}$.

La fonction $t \mapsto \varphi(t) = \sqrt{e^t+1} = u$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0; +\infty[$ et strictement croissante.

φ réalise donc une bijection de $[0; +\infty[$ sur $[\sqrt{2}; +\infty[$.

t	$0 \qquad\qquad +\infty$
$\varphi(t) = u$	$\sqrt{2} \nearrow +\infty$

$$du = \varphi'(t)dt = \frac{e^t}{2\sqrt{e^t+1}}dt = \frac{u^2-1}{2u}dt$$

$$dt = \frac{2u}{u^2-1}du$$

L'intégrale obtenue après changement de variable est de même nature que I donc convergente et a la même valeur que I :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{e^t+1}} = \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{1}{u}\frac{2u}{u^2-1}du = \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{2}{u^2-1}du \\ &= \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right) du \end{aligned}$$

Pour terminer le calcul, on se donne $A \geqslant \sqrt{2}$ et on a

$$I = \lim_{A\to+\infty} \int_{\sqrt{2}}^{A} \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right) du = \lim_{A\to+\infty} \left[\ln\left(\frac{u-1}{u+1}\right)\right]_{\sqrt{2}}^{A} = \ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right).$$

7. $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt.$

La fonction $t \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)$ est continue sur $]0; +\infty[$.

L'intégrale I est impropre en 0 et $+\infty$.

On a $0 \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \underset{t\to0}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ et $\ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$.

Par comparaison avec les intégrales de Riemann usuelles convergentes, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}$, on obtient la convergence de I.

On intègre par parties.

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(t) &=& \ln(1+\frac{1}{t^2}) \\ g'(t) &=& 1 \end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{lcl} f'(t) &=& -\dfrac{2}{t^3}\dfrac{1}{1+\frac{1}{t^2}} \\ g(t) &=& t \end{array}\right.$$

Soient $a < A$ des réels positifs. On obtient :

$$\int_a^A \ln(1+\frac{1}{t^2})dt = \left[t\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\right]_a^A + 2\int_a^A \frac{dt}{1+t^2}$$

On a :

— $A\ln\left(1+\frac{1}{A^2}\right) \underset{A\to+\infty}{\sim} \dfrac{A}{A^2} = \dfrac{1}{A} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

— $a\ln(1+\frac{1}{a^2}) = a\ln(1+a^2) - a\ln(a^2)$.
Or $a\ln(1+a^2) \underset{a\to0}{\sim} a \times a^2 = a^3 \underset{a\to0}{\longrightarrow} 0$ et $a\ln(a^2) \underset{a\to0}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées.

Ainsi,

$$\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt = 2\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{A\to+\infty} \arctan(A) - \arctan(0) = 2\frac{\pi}{2} = \pi.$$

8. $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{1+t^8}dt.$

La fonction $t \mapsto \dfrac{t^3}{1+t^8}$ est continue sur $[0; +\infty[$.

L'intégrale I est donc impropre en $+\infty$.

Mais $0 \leqslant \dfrac{t^3}{1+t^8} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^5}$.

Par comparaison avec l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^5}dt$ convergente, on en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^5}dt$ converge et par suite $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{1+t^8}dt$ converge.

On procède à un changement de variable.

On pose $u = t^4$.

La fonction $\varphi : t \mapsto t^4 = u$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0; +\infty[$ et strictement croissante donc réalise une bijection de $[0; +\infty[$ sur $[0; +\infty[$.

t	$0 \qquad\qquad +\infty$
$\varphi(t) = u$	$0 \nearrow +\infty$

$$du = \varphi'(t)dt = 4t^3dt.$$

L'intégrale obtenue après changement de variable est de même nature que l'intégrale I donc convergente et a la même valeur que I :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{t^3}{1+t^8}dt = \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{4}\lim_{A\to+\infty} \arctan(A) - \frac{1}{4}\arctan(0) = \frac{\pi}{8}.$$

9. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}dt$.

La fonction $t \mapsto \dfrac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $[0;1[$.

L'intégrale I est impropre en 1. On intègre par parties sur $[0;a]$ avec $a \in [0;1[$.

$$\left\{\begin{array}{rcl} f(t) & = & t^2 \\ g'(t) & = & \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} f'(t) & = & 2t \\ g(t) & = & -\sqrt{1-t^2} \end{array}\right.$$

On obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^a \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}dt &= \left[-t^2\sqrt{1-t^2}\right]_0^a + \int_0^a 2t\sqrt{1-t^2}dt \\ &= \left[-t^2\sqrt{1-t^2}\right]_0^a + \left[-\frac{2}{3}(1-t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a.\end{aligned}$$

En faisant tendre $a \to 1$, on obtient :

$$\int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}dt = \frac{2}{3}.$$

□

***Solution Exercice** 10.*

1. $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t-\sqrt{t}}$.

La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t-\sqrt{t}}$ est continue sur $]0;1[$.

L'intégrale I est impropre en 0 et 1.

— $\left|\dfrac{1}{t-\sqrt{t}}\right| \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$.

L'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{t}}dt$ est convergente donc $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt$ converge.

— $\dfrac{1}{t-\sqrt{t}} = \dfrac{1}{\sqrt{t}}\dfrac{1}{\sqrt{t}-1} \underset{t\to 1^-}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}-1}$. On pose $h = 1-t$.

$\dfrac{1}{\sqrt{t}-1} \underset{h\to 0^+}{=} \dfrac{1}{\sqrt{1-h}-1} \underset{h\to 0^+}{=} \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}h+o(h)-1} \underset{h\to 0^+}{\sim} -\dfrac{2}{h} \underset{t\to 1^-}{\sim} \dfrac{2}{t-1}$.

L'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{1-t}$ est divergente comme le montre le changement de variable $u = 1-t$ qui ramène à l'intégrale de même nature $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{u}du$ divergente.

En conclusion l'intégrale I est divergente.

2. $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t+a}dt$ $(a \geqslant 0)$.

— Si $a > 0$ la fonction $f : t \mapsto \frac{e^{-t}}{t+a}$ est continue sur $[0;+\infty[$.

L'intégrale I est impropre en $+\infty$ uniquement.

De plus, $\dfrac{e^{-t}}{t+a} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc la fonction f est intégrable sur $[1;+\infty[$ car l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ converge.

L'intégrale I est donc convergente.

— Si $a = 0$, la fonction $f : t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $]0;+\infty[$.

Dans ce cas, l'intégrale I est impropre en 0 et $+\infty$.

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ est convergente comme dans le cas précédent.

En revanche, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t}}{t}dt$ converge par comparaison :

$0 \leqslant \dfrac{e^{-t}}{t} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}dt$ étant divergente.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt$ est donc divergente.

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\sin(t)}{1+t^2}dt$.

On intègre par parties. Soit $A > 0$.

$$\left\{\begin{array}{rcl} f(t) & = & \dfrac{t}{1+t^2} \\ g'(t) & = & \sin(t) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} f'(t) & = & \dfrac{1-t^2}{(1+t^2)^2} \\ g(t) & = & -\cos(t) \end{array}\right.$$

On obtient

$$\begin{aligned}\int_0^A \frac{t\sin(t)}{1+t^2}dt &= \left[-\frac{t\cos(t)}{1+t^2}\right]_0^A + \int_0^A \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}\cos(t)dt \\ &= -\frac{A\cos(A)}{1+A^2} + \int_0^A \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}\cos(t)dt.\end{aligned}$$

— $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} -\frac{A\cos(A)}{1+A^2} = 0$.

— L'intégrale $\displaystyle\int_0^A \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}dt\cos(t)dt$ converge car impropre en $+\infty$ et $\left|\dfrac{1-t^2}{(1+t^2)}\cos(t)\right| \leqslant \dfrac{|1-t^2|}{(1+t^2)^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$ et l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ est convergente.

On en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\sin(t)}{1+t^2}dt$ converge.

4. $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} (\sqrt{1+t^2} - t)dt.$

   La fonction $t \mapsto \sqrt{1+t^2} - t$ est continue sur $[1;+\infty[$.
   L'intégrale I est impropre en $+\infty$.
   $t\left(\sqrt{1+\frac{1}{t^2}} - 1\right) \underset{t\to+\infty}{=} t\left(1+\frac{1}{2t^2} - 1 + o\left(\frac{1}{t^2}\right)\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2t}.$

   L'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}dt$ étant divergente, on en déduit que I est divergente.

5. $I = \displaystyle\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt.$

   La fonction $t \mapsto \sin\left(\frac{1}{t}\right)$ est continue sur $]0;1]$. I est impropre en 0
   De plus, $\left|\sin\dfrac{1}{t}\right| \underset{t\to 0}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ car $\left|\sqrt{t}\sin\frac{1}{t}\right| \leqslant \sqrt{t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$.
   La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $[0;1]$ donc $t \mapsto \sin\frac{1}{t}$ est intégrable sur $[0;1]$.
   L'intégrale I est donc convergente.

6. $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{t^3+t+1}}dt.$

   La fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{\sqrt{t^3+t+1}}$ est continue sur $[1;+\infty[$.
   L'intégrale I est impropre en $+\infty$.
   Pour $t \geqslant 1$, $\dfrac{\ln t}{\sqrt{t^3+t+1}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^{1,2}}\right)$ par croissances comparées :
   $\dfrac{t^{1,2}\ln t}{\sqrt{t^3+t+1}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln t}{t^{1,5-1,2}} = \dfrac{\ln t}{t^{0,3}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

   On en déduit par comparaison à l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{1,2}}dt$ convergente que I converge.

7. $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \left(t+1-\sqrt{t^2+2t}\right) dt.$

   La fonction $t :\mapsto t+1-\sqrt{t^2+2t}$ est continue sur $[1;+\infty[$.
   L'intégrale I est impropre en $+\infty$. Pour tout $t > 0$,
   $0 \leqslant t+1-\sqrt{t^2+2t} = t+1-t\sqrt{1+\frac{2}{t}} = \underset{t\to+\infty}{=} t+1-t\left(1+\frac{1}{t} - \frac{1}{2}\frac{1}{t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right)\right)$
   $0 \leqslant t+1-\sqrt{t^2+2t} \underset{t\to+\infty}{=} \dfrac{1}{2t} + o\left(\dfrac{1}{t}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2t}.$

   L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}dt$ est divergente donc I diverge.

8. $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{e^t - \cos(t)}.$

   La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{e^t - \cos(t)}$ est continue sur $]0;1]$ par quotient, le dénominateur ne s'annulant pas sur $]0;1]$ car $\cos(t) \leqslant 1 < e^t$ pour tout $t \in]0;1]$.
   $e^t - \cos(t) \underset{t\to 0}{=} (1+t+o(t)) - (1+o(t)) = t + o(t) \underset{t\to 0}{\sim} t.$
   Ainsi, $0 \leqslant \dfrac{1}{e^t - \cos(t)} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t}.$

   Par comparaison, l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}dt$ étant divergente, on en déduit que I est divergente.

9. $\displaystyle\int_0^{+\infty} (t+2-\sqrt{t^2+4t+1})dt.$

   La fonction $f : t \mapsto t+2-\sqrt{t^2+4t+1}$ est continue sur $[0,+\infty[$.
   L'intégrale I est impropre en $+\infty$.
   La fonction f est positive car pour tout $t \geqslant 0$,
   $t^2+4t+1 = (t+2)^2 - 3 \leqslant (t+2)^2$ donc $\sqrt{t^2+4t+1} \leqslant \sqrt{(t+2)^2} = t+2$.
   De plus,

$$\begin{aligned} f(t) = t+2-\sqrt{t^2+4t+1} &= t+2-t\sqrt{1+\frac{4}{t}+\frac{1}{t^2}} \\ &\underset{t\to+\infty}{=} t+2-t\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{4}{t}+\frac{1}{t^2}\right) - \frac{1}{8}\frac{16}{t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right)\right] \\ &\underset{t\to+\infty}{=} \frac{3}{2}\frac{1}{t} + o\left(\frac{1}{t}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3}{2t}. \end{aligned}$$

   L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}dt$ est divergente.

   Par comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)dt$ est donc divergente.

10. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt.$

    La fonction $f : t \mapsto \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)$ est continue sur $]0;+\infty[$.
    L'intégrale I est impropre en 0 et en $+\infty$
    — En 0.
      $0 \leqslant \ln\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ par croissances comparées :
      $\sqrt{t}\ln\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right) = \sqrt{t}\ln(t^2+1) - \sqrt{t}\ln(t^2) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0.$
      L'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt$ est convergente donc $\displaystyle\int_0^1 \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt$ converge.

— En $+\infty$.
$\ln\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$.
L'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ est convergente donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt$ converge.

En conclusion, I est convergente.

11. $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt[n]{1-t^n}}$.

La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt[n]{1-t^n}} = \dfrac{1}{(1-t^n)^{\frac{1}{n}}}$ est continue sur $[0;1[$.

L'intégrale I_n est impropre en 1.

— Si $n=1$, $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-t}dt$. Soit $a \in [0;1[$.
$\displaystyle\int_0^a \frac{1}{1-t}dt = [-\ln(1-t)]_0^a = -\ln(1-a) \underset{a\to1^-}{\longrightarrow} +\infty$.
L'intégrale I_1 est divergente.

— Soit maintenant $n \geqslant 2$. On étudie la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{(1-t^n)^{\frac{1}{n}}}dt$.

On procède à un changement de variable.
On pose $u = 1-t^n \iff t = (1-u)^{\frac{1}{n}}$.
La fonction $\varphi : t \mapsto 1-t^n = u$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\frac{1}{2};1[$, strictement décroissante et réalise donc une bijection de $[\frac{1}{2};1[$ sur $]0;1-\frac{1}{2^n}]$.

t	$\frac{1}{2}$	1
$\varphi(t) = u$	$1-\frac{1}{2^n}$ $\searrow$	0

$du = \varphi'(t)dt = -nt^{n-1}dt$.

$dt = -\dfrac{1}{n}\dfrac{1}{(1-u)^{\frac{n-1}{n}}}du$

L'intégrale I' obtenue après changement de variable est de même nature que I, et en cas de convergence $I = I'$. On trouve l'intégrale I' impropre en 0 :

$$I' = \int_{1-\frac{1}{2^n}}^0 -\frac{1}{n}\frac{1}{u^{\frac{1}{n}}}\frac{1}{(1-u)^{\frac{n-1}{n}}}du.$$

On a $-\dfrac{1}{n}\dfrac{1}{u^{\frac{1}{n}}}\dfrac{1}{(1-u)^{\frac{n-1}{n}}} \underset{u\to0}{\sim} -\dfrac{1}{n}\dfrac{1}{u^{\frac{1}{n}}}$.

La fonction $u \mapsto -\dfrac{1}{n}\dfrac{1}{u^{\frac{1}{n}}}$ est de signe constant sur $]0;1-\frac{1}{2^n}]$.

L'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^{1-\frac{1}{2^n}} \frac{1}{u^{\frac{1}{n}}}du$ est convergente car $\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{2} < 1$.

On en déduit, par comparaison, la convergence de I' puis de $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{(1-t^n)^{\frac{1}{n}}}dt$ et enfin de I car l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(1-t^n)^{\frac{1}{n}}}dt$ existe comme intégrale d'une fonction continue sur un segment.

12. $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{|t^\alpha-1|^\beta}$.

On traite le cas $\alpha \neq 0$.

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{|t^\alpha-1|^\beta}$ est continue sur $]1;+\infty[$.

L'intégrale I est impropre en 1 et en $+\infty$.

On étudie la nature des intégrales $K = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{|t^\alpha-1|^\beta}dt$ et $J = \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{|t^\alpha-1|^\beta}dt$.

— En $+\infty$.
  * Si $\alpha < 0$, $\dfrac{1}{|t^\alpha-1|^\beta} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{(-1)^\beta}$ donc l'intégrale I est divergente.
  * Si $\alpha > 0$, $\dfrac{1}{|t^\alpha-1|^\beta} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{\alpha\beta}}$.

    L'intégrale $J = \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{|t^\alpha-1|^\beta}dt$ converge si et seulement si $\alpha\beta > 1$.

— En 1. On écrit $t = 1+h$ avec $h \to 0^+$.
$\dfrac{1}{|t^\alpha-1|^\beta} = \dfrac{1}{|(1+h)^\alpha-1|^\beta} \underset{h\to0^+}{=} \dfrac{1}{(1+\alpha h+o(h)-1)^\beta} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\alpha^\beta}\dfrac{1}{h^\beta}$
$\dfrac{1}{|t^\alpha-1|^\beta} \underset{t\to1^+}{\sim} \dfrac{1}{\alpha^\beta}\dfrac{1}{(t-1)^\beta}$.

Après changement de variable $u = t-1$, on obtient l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\alpha^\beta}\frac{1}{u^\beta}du$ de même nature que $K = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{|t^\alpha-1|^\beta}dt$ qui converge si seulement si $\beta < 1$.

En conclusion, l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{|t^\alpha-1|^\beta} = J+K$ converge si et seulement si

$$\beta < 1 \text{ et } \alpha\beta > 1.$$

13. $I = \displaystyle\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \ln\left(\cos\frac{1}{t}\right)dt$.

La fonction $f : t \mapsto \ln\left(\cos\frac{1}{t}\right)$ est continue sur $]\frac{2}{\pi};+\infty[$ par composition.
En effet, pour tout $t > \frac{2}{\pi}$, $\frac{1}{t} \in]0;\frac{\pi}{2}[$ intervalle sur lequel la fonction $\cos$ est strictement positive.
L'intégrale I est donc impropre en $\frac{2}{\pi}$ et en $+\infty$.

On étudie la nature des intégrales $J = \displaystyle\int_{\frac{2}{\pi}}^1 \ln\left(\cos\frac{1}{t}\right)dt$ et $K = \displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(\cos\frac{1}{t}\right)dt$.

— En $\frac{2}{\pi}$.

On a $\left|\ln\left(\cos\frac{1}{t}\right)\right| \underset{t\to\frac{2}{\pi}}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{\cos\frac{1}{t}}}\right)$ par croissances comparées :

$$\lim_{t\to\frac{2}{\pi}^-}\sqrt{\cos\frac{1}{t}}\ln\left(\cos\frac{1}{t}\right) = \lim_{u\to 0^+}\sqrt{u}\ln(u) = 0.$$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{\cos\frac{1}{t}}}$ est intégrable sur $\left[\frac{2}{\pi};1\right]$, en effet l'intégrale $\int_{\frac{2}{\pi}}^{1}\frac{1}{\sqrt{\cos\frac{1}{t}}}dt$ converge.

Pour le démontrer, on procède à un changement de variable $u = \cos\frac{1}{t}$.

La fonction $\varphi : t \mapsto \cos\frac{1}{t}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement croissante sur $]\frac{2}{\pi};1]$ (par composition de fonctions strictement décroissantes).
φ réalise donc une bijection de $]\frac{2}{\pi};1]$ sur $]0;\cos(1)]$.
$u = \cos\frac{1}{t} \iff \frac{1}{t} = \arccos(u)$

t	$\frac{2}{\pi}$	1
$\varphi(t) = u$	0 ↗	$\cos(1)$

$$du = \varphi'(t)dt = \frac{1}{t^2}\sin\frac{1}{t}dt.$$
$$du = \arccos^2(u)\sqrt{1-u^2}dt$$

L'intégrale J' obtenue après changement de variable est de même nature que $\int_{\frac{2}{\pi}}^{1}\frac{1}{\sqrt{\cos\frac{1}{t}}}dt$ et a la même valeur en cas de convergence.

On trouve $J' = \int_0^{\cos(1)}\frac{1}{\sqrt{u}}\frac{1}{\arccos^2(u)\sqrt{1-u^2}}du$ impropre en 0.

On $\frac{1}{\sqrt{u}\arccos^2(u)\sqrt{1-u^2}} \underset{u\to 0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{u}}$.

L'intégrale de Riemann $\int_0^{\cos(1)}\frac{1}{\sqrt{u}}du$ est convergente donc J' converge également.

Par suite, l'intégrale $\int_{\frac{2}{\pi}}^{1}\frac{1}{\sqrt{\cos\frac{1}{t}}}dt$ converge.

On en déduit que $t \mapsto \ln\left(\cos\frac{1}{t}\right)$ est intégrable sur $[\frac{2}{\pi};1]$: en particulier, l'intégrale J est convergente.

— En $+\infty$.

On a $\ln\cos\frac{1}{t} \underset{t\to+\infty}{=} \ln\left(1-\frac{1}{2t^2}+o\left(\frac{1}{t^2}\right)\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2t^2}$.

L'intégrale $K = \int_1^{+\infty}\ln\left(\cos\frac{1}{t}\right)dt$ est donc convergente par comparaison à l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}$.

Ainsi, $I = J + K$ est convergente.

$\square$

Solution Exercice 11.

1. $I_n = \int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t^2)^n}dt$.

   La fonction $t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n}$ est continue sur $[0;+\infty[$.

   L'intégrale I_n est impropre en $+\infty$.

   On a $0 \leqslant \frac{1}{(1+t^2)^n} \leqslant \frac{1}{1+t^2}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et $t \geqslant 0$.

   Or l'intégrale suivante converge et $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2}$.

   Par comparaison, l'intégrale I_n est donc convergente.

   Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
I_{n+1} - I_n &= \int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t^2)^n}\left(\frac{1}{1+t^2}-1\right)dt \\
&= \int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t^2)^n}\frac{-t^2}{1+t^2}dt \\
&= \int_0^{+\infty}\frac{-t^2}{(1+t^2)^{n+1}}dt
\end{aligned}$$

   On intègre par parties sur $[0;A]$ avec $A > 0$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(t) &=& -t \\ g'(t) &=& \frac{t}{(1+t^2)^{n+1}} = t(1+t^2)^{-(n+1)} \end{array}\right.$$
$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} f'(t) &=& -1 \\ g(t) &=& \frac{1}{2(-(n+1)+1)}(1+t^2)^{-(n+1)+1} = -\frac{1}{2n}\frac{1}{(1+t^2)^n} \end{array}\right.$$

On obtient

$$I_{n+1} - I_n = \lim_{A\to+\infty}\left(\left[\frac{t}{2n(1+t^2)^n}\right]_0^A - \frac{1}{2n}\int_0^A \frac{1}{(1+t^2)^n}dt\right)$$
$$= -\frac{1}{2n}I_n$$

car $\dfrac{A}{2n(1+A^2)^n} \underset{A\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2nA^{2n-1}} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Au final, $I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2n}I_n = \frac{2n-1}{2n}I_n$.

2. On calcule :

$$I_n = \frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1} = \frac{(2n-3)(2n-5)}{(2n-2)(2n-4)}I_{n-2} = \cdots = \frac{(2n-3)(2n-5)\dots 1}{(2n-2)(2n-4)\dots 2}I_1$$
$$= \frac{(2n-2)!}{2^{2(n-1)}(n-1)!^2}\frac{\pi}{2}.$$

□

Solution Exercice 12.

1. La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\sin t}{t^\alpha}$ est continue sur $]0;+\infty[$.
   L'intégrale I_α est donc impropre en 0 et $+\infty$.
   — En 0.
   $\dfrac{\sin(t)}{t^\alpha} \underset{t\to0^+}{\sim} \dfrac{t}{t^\alpha} = t^{1-\alpha}$ avec $1-\alpha \geqslant 0$.
   La fonction f est donc prolongeable par continuité en 0 : $\lim\limits_0 f = 0$.
   L'intégrale I_α est faussement impropre en 0 donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t^\alpha}$ converge.
   — En $+\infty$.
   On intègre par parties sur $[1;A]$:

$$\begin{cases} f(t) &= \sin t \\ g'(t) &= \dfrac{1}{t^\alpha}\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(t) &= \cos t \\ g(t) &= -\dfrac{\alpha}{t^{\alpha+1}}\end{cases}$$

   On obtient

$$\int_1^A \frac{\sin t}{t^\alpha}dt = \left[-\frac{\alpha\sin t}{t^{\alpha+1}}\right]_1^A + \alpha\int_1^A \frac{\sin t}{t^{\alpha+1}}dt$$

   * Lorsque $A\to+\infty$, $\dfrac{\alpha\sin(A)}{A^{\alpha+1}}$ tend vers 0 car $|\sin| \leqslant 1$ et $\alpha+1>1>0$.
   * $\left|\dfrac{\sin t}{t^{\alpha+1}}\right| \leqslant \dfrac{1}{t^{\alpha+1}}$.
   L'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha+1}}dt$ converge car $\alpha\in]0;1]$ ce qui donne $\alpha+1\in]1;2]$.
   La fonction $t\mapsto \dfrac{\sin t}{t^{\alpha+1}}$ est donc intégrable sur $[1;+\infty[$ par comparaison.
   En particulier, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^{\alpha+1}}$ converge.
   Au final la limite $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_1^A \frac{\sin t}{t^\alpha}dt$ existe et est finie.
   L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^\alpha}dt$ converge.
   L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t^\alpha}dt$ est donc convergente pour tout $\alpha\in]0;1]$.
2. La fonction $t\mapsto \sin t\sin\frac{1}{t}$ est continue sur $]0;+\infty[$.
   L'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty}\sin t\sin\frac{1}{t}dt$ est impropre en 0 et $+\infty$.
   — En 0.
   Pour tout $t\in]0;1]$, $|\sin t\sin\frac{1}{t}| \leqslant 1$.
   Par comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \sin t\sin\frac{1}{t}dt$ converge.
   — En $+\infty$.
   On intègre par parties sur $[1;A]$ avec $A\geqslant 1$.

$$\begin{cases} f(t) &= \sin t \\ g'(t) &= \sin\dfrac{1}{t}\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(t) &= \cos t \\ g(t) &= -\dfrac{1}{t^2}\cos\dfrac{1}{t}\end{cases}$$

   On obtient

$$\int_1^A \sin t\sin\frac{1}{t}dt = \left[-\frac{1}{t^2}\sin t\cos\frac{1}{t}\right]_1^A + \int_1^A \frac{1}{t^2}\cos t\cos\frac{1}{t}dt$$

   — $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} -\frac{1}{A^2}\sin A\cos\frac{1}{A} = 0$
   — $\displaystyle\int_1^A \frac{1}{t^2}\cos t\cos\frac{1}{t}dt$ est une intégrale convergente par comparaison à une intégrale de Riemann :
   $\left|-\dfrac{1}{t^2}\cos t\cos\dfrac{1}{t}\right| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$.
   L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\sin t\sin\frac{1}{t}dt$ est donc convergente
   Au final l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin t\sin\frac{1}{t}dt$ est convergente.

Remarques

En $+\infty$, $\sin t \sin \frac{1}{t} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\sin t}{t}$.

Par la question 1., l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge.

Mais on ne peut pas en conclure directement que $\int_1^{+\infty} \sin t \sin \frac{1}{t} dt$ est convergente.

En effet, les théorèmes de comparaison ne s'appliquent qu'aux fonctions de signe constant au voisinage de l'impropreté ce qui n'est pas le cas de la fonction $t \mapsto \sin t \sin \frac{1}{t}$.

Il est parfois possible d'y remédier en comparant les valeurs absolues $\left|\sin t \sin \frac{1}{t}\right| \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{|\sin(t)|}{t}$.

Mais cet argument ne fonctionne pas ici, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t} dt$ ne converge pas (traité dans un exercice de ce TD !)

Il n'était pas possible d'échapper à un argument moins direct tel l'intégration par parties que nous avons effectuée.

3. $\left|\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{t}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\ln\left(1+\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}$.

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$ converge par la question 1.

Mais on ne peut pas conclure directement quant à la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right) dt$ car la fonction $t \mapsto \ln\left(1+\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right)$ n'est pas de signe constant au voisinage de $+\infty$.

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right) dt$ est divergente.

En effet $\ln\left(1+\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right) = \frac{\sin t}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2}\frac{\sin^2 t}{t} + o\left(\frac{\sin^2 t}{t}\right) = f(t) + g(t)$

avec

— $\int_1^{+\infty} f(t)dt = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}$ convergente par la question 1.

— et $g(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2}\frac{\sin^2(t)}{t}$ fonction de signe constant au voisinage de $+\infty$.

L'intégrale $\int_1^{+\infty} g(t)dt$ et $\int_1^{+\infty} -\frac{1}{2}\frac{\sin^2(t)}{t} dt$ ont la même nature : divergente.

En effet, $\frac{\sin^2 t}{t} = \frac{1-\cos(2t)}{t}$:

* l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ diverge et
* l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{t} dt$ converge (intégration par parties comme à la question 1.)

Par somme l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t} dt$ est divergente, sinon l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t} + \frac{\cos 2t}{t} dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ convergerait ce qui n'est pas.

Par suite, l'intégrale $\int_1^{+\infty} g(t)dt$ diverge et par somme (même raisonnement que ci-dessus) l'intégrale $\int_1^{+\infty} (f(t)+g(t))dt$ diverge.

□

Solution Exercice 13.

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha \ln^\beta t}$ est continue sur $[a;+\infty[$ car $a > 1$.

L'intégrale $I_{\alpha,\beta}$ est impropre en $+\infty$.

— Si $\alpha > 1$ l'intégrale $I_{\alpha,\beta}$ est convergente quel que soit $\beta \in \mathbb{R}$.

En effet, dans ce cas il existe un réel $\gamma \in]1;\alpha[$.

Et on a $0 \leqslant \frac{1}{t^\alpha \ln^\beta t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^\gamma}\right)$ par croissances comparées :

$\frac{t^\gamma}{t^\alpha \ln^\beta t} = \frac{1}{t^{\alpha-\gamma} \ln^\beta t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $\alpha - \gamma > 0$.

La fonction $\frac{1}{t^\alpha \ln^\beta t}$ est donc intégrable sur $[1;+\infty[$ par comparaison et en particulier, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha \ln^\beta t} dt$ converge.

— Si $\alpha < 1$, l'intégrale $I_{\alpha,\beta}$ est divergente.

En effet, dans ce cas il existe un réel $\gamma \in]\alpha,1[$.

Et on a $\frac{1}{t^\gamma} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^\alpha \ln^\beta t}\right)$ par croissances comparées :

$\frac{t^\alpha \ln^\beta t}{t^\gamma} = \frac{\ln^\beta t}{t^{\gamma-\alpha}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $\gamma - \alpha > 0$.

— On traite maintenant le cas $\alpha = 1$.

On fixe $A > 1$ et on intègre sur le segment $[1;A]$.

$$\int_1^A \frac{1}{t\ln^\beta t} dt = \int_1^A \frac{1}{t}\ln^{-\beta} t dt = \begin{cases} \left[\frac{1}{-\beta+1}\ln^{-\beta+1}\right]_1^A & \text{si } \beta \neq 1 \\ [\ln(\ln(t))]_1^A & \text{si } \beta = 1. \end{cases}$$

En faisant tendre $A \to +\infty$, on obtient que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\ln^\beta t} dt$ converge si et seulement si $\beta > 1$.

En conclusion, $I_{\alpha,\beta}$ converge si et seulement si

$$\alpha > 1 \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1).$$

□

Solution Exercice 14.

1. Montrons que la fonction $G : x \mapsto \displaystyle\int_a^b \frac{e^{-xt}}{t}dt$ est dérivable et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G'(x) = \displaystyle\int_a^b -e^{-xt}dt$.
   On revient à la définition via le taux d'accroissement. Soit $h \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned}\frac{G(x+h)-G(x)}{h} - \int_a^b -e^{-xt}dt &= \int_a^b \frac{1}{ht}(e^{-(x+h)t} - e^{-xt} + hte^{-xt})dt \\ &= \int_a^b \frac{e^{-xt}}{ht}(e^{-ht} - 1 + ht)dt\end{aligned}$$

   La fonction $\varphi : u \mapsto \exp(-u)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
   L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 sur appliquée entre 0 et ht donne

$$|\varphi(ht) - \varphi(0) - (ht)\varphi'(0)| \leqslant \frac{(ht)^2}{2}\max_I |\varphi^{(2)}|$$

$$|e^{-ht} - 1 + ht| \leqslant \frac{h^2t^2}{2}M$$

   où M est le maximum de la fonction continue $|\varphi^{(2)}|$ sur l'intervalle I d'extrémités 0 et ht.
   On obtient

$$\begin{aligned}\left|\frac{G(x+h)-G(x)}{h} - \int_a^b -e^{-xt}dt\right| &\leqslant \int_a^b \frac{e^{-xt}}{ht}\frac{h^2t^2}{2}Mdt \\ &\leqslant |h|\int_a^b \frac{e^{-xt}tM}{2}dt\end{aligned}$$

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé, on note $I = \displaystyle\int_a^b \frac{e^{-xt}tM}{2}dt$ l'intégrale de la fonction continue $t \mapsto \dfrac{e^{-xt}tM}{2}$ sur le segment $[a;b]$.
   On a donc montré que pour tout $h \neq 0$,

$$\left|\frac{G(x+h)-G(x)}{h} - \int_a^b -e^{-xt}dt\right| \leqslant |h|I \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

   En conclusion G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$G'(x) = \int_a^b -e^{-xt}dt.$$

2. — On a montré que la fonction $G : x \mapsto \displaystyle\int_a^b \frac{e^{-xt}}{t}dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G'(x) = \int_a^b -e^{-xt}dt$..
   * $G'(0) = \int_a^b(-1)dt = a - b$.
   * Si $x \neq 0$, $G'(x) = \left[\dfrac{1}{x}e^{-xt}\right]_a^b = \dfrac{e^{-xb} - e^{-xa}}{x}$.

   — La fonction $u \mapsto \dfrac{e^{-bu} - e^{-au}}{u}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ et se prolonge par continuité en 0 car
   $\dfrac{e^{-ub} - e^{-ua}}{u} = \dfrac{(1 - ub + o(u)) - (1 - ua + o(u))}{u} = a - b + o(1) \underset{u\to 0}{\sim} a - b$.
   La fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{e^{-bu} - e^{-au}}{u}du$ est donc l'unique primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction continue sur $\mathbb{R}$, $u \mapsto \begin{cases} \dfrac{e^{-bu} - e^{-au}}{u} & \text{si} \quad u \neq 0 \\ a - b & \text{si} \quad u = 0 \end{cases}$ s'annulant en 0.
   Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = \dfrac{e^{-bx} - e^{-ax}}{x}$.
   Ainsi, F, G sont des primitives de la même fonction.
   F et G ne diffèrent donc sur $\mathbb{R}$ que d'une constante K, $G = K + F$.
   $K + F(0) = K + F(0) = G(0) = \displaystyle\int_a^b \frac{1}{t}dt = \ln\frac{b}{a}$.
   Au final, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G(x) = \ln\frac{b}{a} + F(x)$ c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_a^b \frac{e^{-xt}}{t}dt = \ln\frac{b}{a} + \int_0^x \frac{e^{-bu} - e^{-au}}{u}du$$

   .

   — Si $x > 0$, $t \mapsto \dfrac{e^{-xt}}{t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (dérivée $-\frac{(xt+1)e^{-xt}}{t^2} < 0$).
   Ainsi pour tout $t \in [a;b]$, $\displaystyle\int_a^b \frac{e^{-xt}}{t}dt \leqslant \int_a^b \frac{e^{-ax}}{a}dt = \frac{b-a}{a}e^{-ax} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   On en déduit la convergence et la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-bu} - e^{-au}}{u}du = -\ln\frac{b}{a} = \ln\frac{a}{b}.$$

□

Solution Exercice 15.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale est convergente $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt$.
   En effet, $t \mapsto t^n e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. L'intégrale I_n est impropre en $+\infty$.
   De plus $0 \leqslant t^n e^{-t} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées :

$t^{n+2}e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On intègre par parties sur $[0;A]$ pour $A \geqslant 0$.

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(t) &=& e^{-t} \\ g'(t) &=& t^n \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} f'(t) &=& -e^{-t} \\ g(t) &=& \frac{1}{n+1}t^{n+1} \end{array}\right.$$

On obtient

$$\int_0^A t^n e^{-t}dt = \left[\frac{e^{-t}t^{n+1}}{n+1}\right]_0^A + \frac{1}{n+1}\int_0^A t^{n+1}e^{-t}dt$$

En faisant tendre $A \to +\infty$, on obtient par croissances comparées, $e^{-A}A^{n+1} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi,

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt = \frac{1}{n+1}I_{n+1}.$$

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = (n+1)I_n$.

On montre alors par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = n!I_0 = n!$.

2. On intègre par parties sur $[a;b] \subset]0;1[$.

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(t) &=& \ln(1-t^2) \\ g'(t) &=& \dfrac{1}{t^2} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} f'(t) &=& -\dfrac{2t}{1-t^2} \\ g(t) &=& -\dfrac{1}{t} \end{array}\right.$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{\ln(1-t^2)}{t^2} &= \left[-\frac{\ln(1-t^2)}{t}\right]_a^b - \int_a^b \frac{2}{1-t^2}dt \\
&= -\frac{\ln(1-b^2)}{b} + \frac{\ln(1-a^2)}{a} - \int_a^b \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right)dt \\
&= -\frac{\ln(1-b^2)}{b} + \frac{\ln(1-a^2)}{a} + [\ln(1-t)]_a^b - [\ln(1+t)]_a^b \\
&= \ln(1-b)\left(-\frac{1}{b}+1\right) - \frac{\ln(1+b)}{b} + \frac{\ln(1-a^2)}{a} - \ln(1-a) - \ln\frac{1+b}{1+a} \\
&= \ln(1-b)\left(\frac{b-1}{b}\right) - \frac{\ln(1+b)}{b} + \frac{\ln(1-a^2)}{a} - \ln(1-a) - \ln\frac{1+b}{1+a}
\end{aligned}$$

En faisant tendre $a \to 0^+$ et $b \to 1^-$, on obtient par croissances comparées $u\ln(u) \underset{u\to+0^+}{\longrightarrow} 0$:

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}dt = -2\ln 2.$$

□

Solution Exercice 16.

1. $I = \displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}dt$. La fonction $t \mapsto \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$ est continue sur $]-1;1]$.

   L'intégrale I est impropre en -1.

   On pose $t = \cos\theta$.

   La fonction $\varphi : \theta \mapsto \cos(\theta)$ est de classe $\mathscr{C}^1$, strictement décroissante sur $[0;\pi[$ et réalise une bijection de $[0;\pi[$ sur $]-1;1]$.

θ	0	π
$\varphi(\theta) = t$	1 ↘	-1

$$dt = \varphi'(\theta)d\theta = -\sin\theta d\theta.$$

   L'intégrale I' obtenue après changement a la même nature que I et en cas de convergence $I = I'$. On obtient l'intégrale impropre en π :

$$I' = \int_\pi^0 \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}(-\sin(\theta)d\theta) = \int_0^\pi \sqrt{\frac{1-\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}}{1+\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}}(2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}d\theta)$$

$$I' = \int_0^\pi \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}(2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}d\theta) = \int_0^\pi 2\sin^2\frac{\theta}{2}d\theta = \int_0^\pi (1-\cos\theta)d\theta = \pi = I.$$

2. $J = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-2\cos x}{5-4\cos x}dx.$

   La fonction $x \mapsto \dfrac{1-2\cos x}{5-4\cos x}$ est continue sur $[-\pi;\pi]$ par quotient le dénominateur ne s'annulant par car $|4\cos x| \leqslant 4 < 5$.

   Le changement de variable $y = -x$ donne :

$$\int_{-\pi}^0 \frac{1-2\cos(x)}{5-4\cos(x)}dx = \int_\pi^0 \frac{1-2\cos(-y)}{5-4\cos(-y)}(-dy) = \int_0^\pi \frac{1-2\cos(y)}{5-4\cos(y)}dy.$$

   Ainsi,

$$J = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-2\cos(x)}{5-4\cos(x)}dx = \int_{-\pi}^0 \frac{1-2\cos(x)}{5-4\cos(x)}dx + \int_0^\pi \frac{1-2\cos(x)}{5-4\cos(x)}dx$$

$$J = 2\int_0^\pi \frac{1-2\cos(x)}{5-4\cos(x)}dx.$$

   Calculons $K = \displaystyle\int_0^\pi \frac{1-2\cos(x)}{5-4\cos(x)}dx = \int_0^\pi \frac{1-2(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2})}{5-4(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2})}dx.$

   On pose $u = \tan\frac{x}{2}$.

   L'application $\varphi : x \mapsto \tan\frac{x}{2}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;\pi[$, strictement croissante donc réalise une bijection de $[0;\pi[$ sur $[0;+\infty[$.

x	0 $\quad$ π
$\varphi(x)=u$	$0 \nearrow +\infty$

$$du=\varphi'(x)dx=\frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)dx.$$

$$dx=\frac{2}{1+u^2}du.$$

Rappelons que $1+\tan^2\frac{x}{2}=\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}$.
L'intégrale obtenue après changement de variable a la même nature que K, convergente, et a la même valeur que K :

$$\begin{aligned}
K&=\int_0^{\pi}\frac{1-2\cos^2\frac{x}{2}(1-\tan^2\frac{x}{2})}{5-4\cos^2\frac{x}{2}(1-\tan^2\frac{x}{2})}dx\\
&=\int_0^{+\infty}\frac{1-\frac{2}{1+u^2}(1-u^2)}{5-\frac{4}{1+u^2}(1-u^2)}\frac{2}{1+u^2}du\\
&=\int_0^{+\infty}\frac{-1+3u^2}{1+9u^2}\frac{2}{1+u^2}du\\
&=\int_0^{+\infty}\frac{-2+6u^2}{(1+9u^2)(1+u^2)}du
\end{aligned}$$

On détermine alors $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que
$\dfrac{-2+6u^2}{(1+u^2)(1+9u^2)}=\dfrac{\alpha}{1+u^2}+\dfrac{\beta}{1+9u^2}$.
On trouve $\alpha=1$ et $\beta=-3$.
Par convergence des intégrales que l'on somme on obtient

$$\begin{aligned}
K&=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+u^2}-3\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+(3u)^2}du\\
&=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+u^2}-3\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+v^2}\frac{dv}{3}
\end{aligned}$$

après changement de variable $v=3u$ dans la seconde intégrale ($du=\frac{dv}{3}$).
On obtient finalement, $K=0$ et $J=2K=0$.

3. $K=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dt}{(2t-1)\sqrt{t^2-1}}$.
   La fonction $t\mapsto\dfrac{1}{(2t-1)\sqrt{t^2-1}}$ est continue sur $]1;+\infty[$.
   L'intégrale est impropre en 1 et $+\infty$.
   On étudie séparément la nature des intégrales $\displaystyle\int_1^2\frac{1}{(2t-1)\sqrt{t^2-1}}dt$ et $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{(2t-1)\sqrt{t^2-1}}dt$.
   — En $+\infty$.
   $\dfrac{1}{(2t-1)\sqrt{t^2-1}}\underset{t\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{2t^2}$.
   L'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt$ converge donc par comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{(2t-1)\sqrt{t^2-1}}dt$ est convergente.
   — En 1.
   On procède à un changement de variable. On pose $u=t-1$.
   La fonction $\varphi:t\mapsto t-1=u$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1;2]$, strictement croissante donc réalise une bijection de $]1;2]$ sur $]0;1]$.
   L'intégrale $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{(2u+1)\sqrt{2u+u^2}}du$ obtenue après changement de variable est de même nature que $\displaystyle\int_1^2\frac{1}{(2t-1)\sqrt{t^2-1}}dt$ convergente car
   $\dfrac{1}{(2u+1)\sqrt{2u+u^2}}\underset{u\to0}{\sim}\dfrac{1}{\sqrt{2u}}$.
   L'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{u}}du$ converge donc $\displaystyle\int_1^2\frac{1}{(2t-1)\sqrt{t^2-1}}dt$ converge également.

Pour calculer $K=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{(2t-1)\sqrt{t^2-1}}dt$ on procède à un premier changement de variable : $t=\dfrac{1}{\cos\theta}$.
La fonction $\varphi:\theta\mapsto\dfrac{1}{\cos\theta}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;\frac{\pi}{2}[$, et strictement décroissante donc réalise une bijection de $[0;\frac{\pi}{2}[$ sur $[1;+\infty[$.

θ	0 $\quad$ $\frac{\pi}{2}$
$\varphi(\theta)=t$	$1 \nearrow +\infty$

$$dt=\varphi'(\theta)d\theta=\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}d\theta$$

L'intégrale obtenue après changement de variable est de même nature que K, donc convergente et égale à K :

$$\begin{aligned}
K&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\left(\frac{2}{\cos\theta}-1\right)\sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta}-1}}\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}d\theta\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\left(\frac{2-\cos\theta}{\cos\theta}\right)\sqrt{\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}}}\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}d\theta\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{2-\cos\theta},
\end{aligned}$$

après simplification $\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sin\theta$ car $\theta\in[0;\frac{\pi}{2}]$ et $\sqrt{\cos^2\theta}=\cos\theta$.

On pose maintenant $u=\tan\frac{\theta}{2}$.

La fonction $\varphi:\theta\mapsto\tan\frac{\theta}{2}=u$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;\frac{\pi}{2}[$, strictement croissante donc réalise une bijection de $[0;\frac{\pi}{2}[$ sur $[0;1[$.

θ	0	$\frac{\pi}{2}$
$\varphi(\theta)=u$	0 $\nearrow$	1

$$du=\varphi'(\theta)d\theta=\frac{1}{2}\frac{d\theta}{\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\frac{d\theta}{\cos^2\frac{\theta}{2}}=2du.$$

L'intégrale obtenue après changement de variable est de même nature que K, convergente, et égale à K.

Notons que :

$2-\cos\theta=2-\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}=\cos^2\frac{\theta}{2}+3\sin^2\frac{\theta}{2}=\cos^2\frac{\theta}{2}(1+3\tan^2\frac{\theta}{2})$.

Ainsi,

$\dfrac{d\theta}{2-\cos\theta}=\dfrac{1}{1+3\tan^2\frac{\theta}{2}}\dfrac{d\theta}{\cos^2\frac{\theta}{2}}=\dfrac{2du}{1+3u^2}$ et on obtient après changement de variable :

$$K=\int_0^1\frac{2du}{1+3u^2}=2\int_0^1\frac{du}{1+(\sqrt{3}u)^2}=2\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dv}{1+v^2}\frac{dv}{\sqrt{3}}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}},$$

avec le dernier changement de variable $v=\sqrt{3}u$, $du=\frac{dv}{\sqrt{3}}$.

$\square$

Solution Exercice 17. $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}dt.$

1. La fonction $f:t\mapsto\frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}$ est continue sur $]0;\frac{\pi}{2}]$ par quotient de fonctions continues, dont le dénominateur ne s'annule pas.

   On a $f(t)\underset{t\to0}{\sim}\frac{(2n+1)t}{t}=(2n+1)$.

   La fonction f est prolongeable par continuité en 0.

   Ainsi, I_n est faussement impropre.

2. Soit $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
I_{n+1}-I_n&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin((2n+3)t)-\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}dt\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin((2n+1)t+2t)-\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}dt\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin((2n+1)t)\cos(2t)+\sin(2t)\cos((2n+1)t)-\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}dt\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin((2n+1)t)(-2\sin^2(t))+2\sin(t)\cos(t)\cos((2n+1)t)}{\sin(t)}dt\\
&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos((2n+1)t)\cos(t)-\sin((2n+1)t)\sin(t))dt\\
&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos((2n+2)t)dt=2\left[\frac{\sin((2n+2)t)}{2n+2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&=\frac{1}{n+1}(\sin((n+1)\pi)-\sin(0))=0.
\end{aligned}$$

3. La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à son terme initial $I_0=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt=\frac{\pi}{2}$.

> **Remarques**
>
> En appliquant la formule $\sin(a)-\sin(b)=\dfrac{1}{2}\sin(a-b)\cos(a+b)$ on obtient le résultat immédiatement

$\square$

Solution Exercice 18. On considère les intégrales $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin t)dt$ et $J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos t)dt$.

1. — La fonction $t\mapsto\ln\sin(t)$ est continue sur $]0;\frac{\pi}{2}]$.
   L'intégrale I est impropre en 0.
   Mais $\sqrt{t}|\ln\sin(t)|\leqslant\sqrt{t}\ln t\underset{t\to0}{\longrightarrow}0$ donc $\ln\sin(t)\underset{t\to0}{=}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$.
   On en déduit que la fonction $t\mapsto\ln\sin(t)$ est intégrable sur $[0;\frac{\pi}{2}]$ car l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{t}}dt$ converge.

   — L'intégrale $J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos(t)dt$ est également convergente.
   En effet, la fonction $t\mapsto\ln\cos(t)$ est continue sur $[0,\frac{\pi}{2}[$.
   On procède au changement de variable $u=\frac{\pi}{2}-t$.

On obtient $J = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \ln\cos\left(u - \frac{\pi}{2}\right)(-du) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin(u)du = I$.

2. On calcule la somme des deux intégrales :
$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t \sin t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin(2t)}{2}\right)dt$
$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin(2t)dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln 2dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin(2t)dt - \frac{\pi}{2}\ln 2.$
$I + J = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln\sin(u)du - \frac{\pi}{2}\ln 2 \qquad (u = 2t)$
$I + J = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin(u)du + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln\sin(u)du - \frac{\pi}{2}\ln 2$
$I + J = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin(u)du + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin\left(v + \frac{\pi}{2}\right)dv - \frac{\pi}{2}\ln 2 \qquad \left(v = u - \frac{\pi}{2}\right)$
$I + J = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin(u)du + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos(v)dv - \frac{\pi}{2}\ln 2$
On en déduit que :
$I + J = \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}J - \frac{\pi}{2}\ln 2$ donc $\frac{1}{2}(I + J) = -\frac{\pi}{2}\ln 2$.
Au final $I = \frac{1}{2}(I + I) = \frac{1}{2}(I + J) = -\frac{\pi}{2}\ln 2 = J$ car $I = J$.

□

Solution Exercice 19.

1. On utilise un développement limité de la fonction à l'ordre 3.
On rappelle que $\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.
Ainsi,
$f(t) \underset{t\to+\infty}{=} \frac{1}{t} - \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{3t^3} + o\left(\frac{1}{t^3}\right)\right) = \frac{1}{3t^3} + o\left(\frac{1}{t^3}\right)$.
La fonction f est donc positive au voisinage de $+\infty$ et $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3t^3}$.
2. On en déduit que l'intégrale I est convergente par comparaison avec l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3}dt$ convergente.
En déduire la nature de l'intégrale $I = \int_1^{+\infty} f(t)dt$.
3. Pour calculer I, on intègre par parties sur $[1; A]$ avec $A \geqslant 1$.

$$\begin{cases} f(t) &= \frac{1}{t} - \arctan\frac{1}{t} \\ g'(t) &= 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(t) &= -\frac{1}{t^2} - \frac{-\frac{1}{t^2}}{1 + \left(\frac{1}{t^2}\right)} \\ g(t) &= t \end{cases}$$

On obtient :

$$\int_1^A f(t)dt = \left[1 - t\arctan\frac{1}{t}\right]_1^A - \int_1^A \left(-\frac{1}{t} + \frac{t}{1 + t^2}\right)dt$$
$$= -A\arctan\frac{1}{A} + \arctan 1 + [\ln(t)]_1^A - \left[\frac{1}{2}\ln(1 + t^2)\right]_1^A$$
$$= -A\arctan\frac{1}{A} + \arctan 1 + \ln\left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + 1}}\right) + \frac{1}{2}\ln 2$$

Au final,

$$I = \int_1^{+\infty} = -1 + \frac{\pi}{4} + \ln\sqrt{2}$$

car

* $A\arctan\frac{1}{A} \underset{A\to+\infty}{\sim} \frac{A}{A} = 1$
* $\frac{A}{\sqrt{A^2 + 1}} \underset{A\to+\infty}{\sim} = \frac{A}{\sqrt{A^2}} \underset{A\to+\infty}{\sim} 1$ donc $\ln\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+1}}\right) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

□

Solution Exercice 20.

1. La fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $[1; +\infty[$.
L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ est impropre en $+\infty$.
On intègre par parties sur $[1; A]$ avec $A \geqslant 1$:

$$\begin{cases} f(t) &= \frac{1}{t} \\ g'(t) &= \sin(t) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(t) &= -\frac{1}{t^2} \\ g(t) &= -\cos(t) \end{cases}$$

On obtient

$$\int_1^A \frac{\sin(t)}{t}dt = \left[-\frac{\cos(t)}{t}\right]_1^A - \int_1^A \frac{\cos(t)}{t^2}dt.$$

Le crochet $\left[-\frac{\cos(t)}{t}\right]_1^A$ possède une limite finie lorsque $A \to +\infty$ car $\left|\frac{\cos(A)}{A}\right| \leqslant \frac{1}{A} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
D'autre part, l'intégrale $\int_1^A \frac{\cos(t)}{t^2}dt$ converge par comparaison :

$\left|\dfrac{\cos(t)}{t^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$: la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ étant intégrale sur $[1;+\infty[$, on en déduit l'intégrabilité de la fonction $t \mapsto \dfrac{\cos(t)}{t^2}$ puis en particulier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}dt$.

Au final, la limite $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_1^A \frac{\sin(t)}{t}$ existe et est finie.

Conclusion $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ converge.

2. Puisque pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\sin(t)| \in [0;1]$, on a $|\sin(t)|^2 \leqslant |\sin(t)|$.
   On en déduit par croissance de l'intégrale, que pour tout $A \geqslant 1$,
   $\displaystyle\int_1^A \frac{|\sin(t)|}{t}dt \geqslant \int_1^A \frac{\sin^2(t)}{t}dt$.
   Montrons que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t}dt$ diverge ce qui démontrera que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t}dt$ diverge.
   Pour tout $A \geqslant 1$,
   $\displaystyle\int_1^A \frac{\sin^2 t}{t}dt = \int_1^A \frac{1-\cos(2t)}{2t}dt = \frac{1}{2}\int_1^A \frac{1}{t}dt - \frac{1}{2}\int_1^A \frac{\cos(2t)}{t}dt$
   À l'aide d'une intégration par parties, on montre comme à la question 1. que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{t}dt$ converge.
   L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}dt$ étant divergente, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t}dt$ est nécessairement divergente :
   sinon, par somme des intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t}dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{2t}dt$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}dt$ serait convergente, ce qui n'est pas.
   Conclusion : les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t}dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t}dt$ divergent

□

Solution Exercice 21. On pose pour tout $x > 0$, $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}dt$.

1. La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
   En effet, la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t^2}$ est continue sur $[x;+\infty[\subset]0;\infty[$.
   L'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}dt$ est donc impropre en $+\infty$.
   De plus, pour tout $t \geqslant x$, $\left|\dfrac{\sin t}{t^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$.
   L'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{1}{t^2}$ étant convergente, on en déduit par comparaison que l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}dt$ est convergente.
   Ainsi, f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. On intègre par parties sur $[x;A]$ avec $A \geqslant x$.

$$\begin{cases} f(t) &= \dfrac{\sin t}{t} \\ g'(t) &= \dfrac{1}{t} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(t) &= \dfrac{t\cos t - \sin t}{t^2} \\ g(t) &= \ln t \end{cases}$$

On obtient

$$\int_x^A \frac{\sin(t)}{t^2}dt = \left[\frac{\sin(t)}{t}\ln(t)\right]_x^A - \int_x^A \frac{t\cos(t)-\sin(t)}{t^2}\ln t\,dt$$

— L'intégrale $\displaystyle\int_x^A \frac{\sin(t)}{t^2}dt$ est convergente.
— Le crochet $\left[\dfrac{\ln t \sin t}{t}\right]_x^A$ admet une limite finie lorsque $A \to +\infty$ car $\left|\dfrac{\ln(A)\sin(A)}{A}\right| \leqslant \dfrac{\ln A}{A} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
— Par conséquent, l'intégrale $J(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{t\cos(t)-\sin(t)}{t^2}\ln(t)dt$ est convergente.

On obtient pour tout $x > 0$:

$$f(x) + \ln(x)\frac{\sin(x)}{x} = J(x).$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{t\cos(t)-\sin(t)}{t^2}\ln(t)$ est continue sur $]0;+\infty[$ et en 0, on a

$$\frac{t\cos(t)-\sin(t)}{t^2}\ln(t) \underset{t\to0}{=} \frac{t\left(1-\frac{1}{2}t^2+o(t^3)\right)-\left(t-\frac{1}{6}t^3+o(t^3)\right)}{t^2}\ln(t)$$
$$\underset{t\to0}{\sim} -\frac{1}{3}\frac{t^3\ln(t)}{t^2} = -\frac{t\ln(t)}{3}$$

Ainsi,

$$\lim_{t\to0^+}\frac{t\cos(t)-\sin(t)}{t^2}\ln(t) = \lim_{t\to0^+} -\frac{t\ln(t)}{3} = 0$$

par croissances comparées.
On peut par conséquent prolonger la fonction $t \mapsto \frac{t\cos(t)-\sin(t)}{t^2}\ln(t)$ par continuité en 0.
Combiné aux observations précédentes, on en déduit que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{t\cos(t)-\sin(t)}{t^2}\ln(t)dt$$

est convergente ce qui signifie que la fonction $x \mapsto J(x)$ possède une limite finie lorsque $x \to 0^+$.

Par suite, la limite $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) + \ln(x)\dfrac{\sin(x)}{x}$ existe et est finie. On note ℓ cette limite.
On obtient alors pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned}
f(x)+\ln(x) &= f(x)+\ln(x)\frac{\sin(x)}{x} - \ln(x)\frac{\sin(x)}{x} + \ln(x)\\
&= f(x)+\ln(x)\frac{\sin(x)}{x} + \ln(x)\left(1-\frac{\sin(x)}{x}\right)\\
&= f(x)+\ln(x)\frac{\sin(x)}{x} + \ln(x)\left(\frac{x-\sin(x)}{x}\right),
\end{aligned}$$

avec $\dfrac{x-\sin(x)}{x} \underset{x\to 0}{=} \dfrac{x-x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{x} \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x^2}{6}$.
Par croissances comparées, on a

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x)\left(\frac{x-\sin(x)}{x}\right) = 0$$

et finalement,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)+\ln(x) = \ell + 0 = \ell.$$

3. On intègre par partie sur $[x;A]$ avec $A \geqslant x$:

$$\begin{cases} f(t) &= \dfrac{1}{t^2} \\ g'(t) &= \sin(t) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(t) &= -\dfrac{2}{t^3} \\ g(t) &= -\cos(t) \end{cases}$$

On obtient :

$$\int_x^A \frac{\sin(t)}{t^2}dt = \left[-\frac{\cos(t)}{t^2}\right]_x^A - 2\int_x^A \frac{\cos(t)}{t^3}dt$$

On recommence :

$$\begin{cases} f(t) &= \dfrac{1}{t^3} \\ g'(t) &= \cos(t) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(t) &= -\dfrac{3}{t^4} \\ g(t) &= \sin(t) \end{cases}$$

On obtient :

$$\int_x^A \frac{\sin(t)}{t^2}dt = \left[-\frac{\cos(t)}{t^2}\right]_x^A - 2\left(\left[\frac{\sin(t)}{t^3}\right]_x^A + 3\int_x^A \frac{\sin(t)}{t^4}dt\right)$$

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{\cos x}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}\right)$$

En faisant tendre $A \to +\infty$, on obtient :

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}dt = \frac{\cos(x)}{x^2} + \underbrace{\left(2\frac{\sin(x)}{x^3} - 6\int_x^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t^4}dt\right)}_{\underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^{2,5}}\right) \quad (*)}$$

$(*)$: en effet
— $\left|x^{2,5}\frac{\sin(x)}{x^3}\right| \leqslant \frac{1}{x^{0.5}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
— $\left|x^{2,5}\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t^4}dt\right| \leqslant x^{2,5}\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{1}{x^{2,5}}\frac{1}{t^{1,5}}dt = \displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{1}{t^{1,5}}dt$
car $t \geqslant x > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{t^{2,5}} \leqslant \dfrac{1}{x^{2,5}}$.
L'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{1}{t^{1,5}}dt$ est absolument convergente et si l'on note G une primitive de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^{1,5}}$ continue sur $[x;+\infty[$, on a

$$\int_x^{+\infty}\frac{1}{t^{1,5}}dt = \lim_{+\infty} G - G(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par conséquent

$$\int_x^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t^2}dt = \frac{\cos(x)}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^{2,5}}\right).$$

4. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
En effet, en notant F une primitive de la fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t^2}$ continue sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $f(x) = \lim\limits_{+\infty} F - F(x)$ donc f est de classe $\mathscr{C}^1$ et pour tout $x > 0$, $f'(x) = -F'(x) = -\dfrac{\sin(x)}{x^2}$.
On intègre par parties sur $[a;b] \subset]0;+\infty[$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} u(t) & = & f(t) \\ v'(t) & = & t \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} u'(t) & = & -\dfrac{\sin(t)}{t^2} \\ v(t) & = & \dfrac{t^2}{2} \end{array}\right.$$

On obtient

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)dt &= \left[\frac{t^2 f(t)}{2}\right]_a^b + \frac{1}{2}\int_a^b \sin(t)dt \\ &= \frac{1}{2}\left(b^2 f(b) - a^2 f(a)\right) + \frac{1}{2}(\cos(a) - \cos(b))\end{aligned}$$

— D'une part,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}b^2 f(b) - \frac{1}{2}\cos(b) &\underset{b\to+\infty}{=} \frac{b^2}{2}\left(\frac{\cos(b)}{b^2} + o\left(\frac{1}{b^{2,5}}\right)\right) - \frac{1}{2}\cos(b) \\ &\underset{b\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{b^{0,5}}\right).\end{aligned}$$

En particulier, $\frac{1}{2}b^2 f(b) - \frac{1}{2}\cos(b) \underset{b\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

— D'autre part, $f(a) + \ln(a) \underset{a\to0^+}{\longrightarrow} \ell$ par la question 2.
Ainsi, $a^2 f(a) + a^2\ln(a) \underset{a\to0^+}{\longrightarrow} 0$.
Puisque $a^2\ln(a) \underset{a\to0^+}{\longrightarrow} 0$ on en déduit :
$a^2 f(a) = (a^2 f(a) + a^2\ln(a)) - (a^2\ln(a)) \underset{a\to0^+}{\longrightarrow} 0$.
On en déduit que $\lim\limits_{a\to0^+}\left(-\frac{1}{2}a^2 f(a) + \frac{1}{2}\cos(a)\right) = \frac{1}{2}$.

Au final, en faisant tendre $a \to 0^+$ et $b \to +\infty$, on trouve :

$$\int_0^{+\infty} t f(t)dt = \frac{1}{2}.$$

□

Solution Exercice 22.

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $t > 0$. On reconnaît une série géométrique au facteur t^p près :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} t^p e^{-nt} = t^p \sum_{n=1}^{+\infty}\left(e^{-t}\right)^n = t^p \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} = \frac{t^p}{e^t - 1}$$

la convergence est assurée car la raison $x = e^{-t} \in]0;1[\in]-1;1[$ car $t > 0$.

2. Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On note $I_{n,p} = \int_0^{+\infty} t^p e^{-nt}dt$.

(a) Montrons que l'intégrale $I_{p,n}$ converge. On note $f_n(t) = t^p e^{-nt}$. La fonction f_n est continue sur $[0;+\infty[$, l'intégrale $I_{n,p}$ est donc impropre en $+\infty$.
On a $f_n(t) = t^p e^{-nt} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées. L'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt$ converge donc l'intégrale $I_{n,p}$ converge en $+\infty$ donc converge.
Enfin, f_n est positive donc l'intégrale $I_{n,p}$ converge absolument.

(b) On effectue une intégration par parties pour déterminer une relation entre $I_{p+1,n} = \int_0^{+\infty} t^{p+1}e^{-nt}dt$ et $I_{p,n} = \int_0^{+\infty} t^p e^{-nt}dt$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} u(t) = t^{p+1} & \Longrightarrow & u'(t) = (p+1)t^p \\ v'(t) = e^{-nt} & \Longrightarrow & v(t) = -\frac{1}{n}e^{-nt}\end{array}\right.$$

Par croissances comparées,

$$\lim_{t\to+\infty} -\frac{1}{n}e^{-nt}t^{p+1} = 0$$

donc $\left[-\frac{1}{n}e^{-nt}t^{p+1}\right]_0^{+\infty} = 0$. On en déduit :

$$I_{p+1,n} = -\int_0^{+\infty} -\frac{(p+1)}{n}e^{-nt}t^p dt = \frac{p+1}{n}I_{n,p}.$$

Il vient alors :

$$I_{p,n} = \frac{p}{n}I_{p-1,n} = \frac{p(p-1)}{n^2}I_{p-2,n} = \ldots = \frac{p!}{n^p}I_{1,n}$$

avec $I_{1,n} = \int_0^{+\infty} te^{-nt}dt = \left[-\frac{t}{n}e^{-nt}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-nt}dt = \frac{1}{n}$.

3. On applique le théorème d'intégration terme à terme pour montrer que $\int_0^{+\infty}\frac{t^p}{e^t-1}dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{p!}{n^{p+1}}$.

∗ La fonction $t \mapsto S(t) = \frac{t^p}{e^t - 1}$ est continue sur $I =]0;+\infty[$.

∗ Les fonctions $t \mapsto f_n(t) = t^p e^{-nt}$ sont intégrables sur $I =]0;+\infty[$ (Q2a).
On a $\forall t > 0, S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)$ d'après la question 1.

* La série $\sum_{n\geqslant 1}\int_0^{+\infty}|f_n(t)|$ converge car :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}|f_n(t)|dt=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}f_n(t)dt=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}t^pe^{-nt}dt$$
$$=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{p!}{n^{p+1}}.$$

On reconnait au facteur $p!$ près, une série de Riemann $\sum\frac{1}{n^{p+1}}$ convergente car $p+1\geqslant 2>1$.

On en déduit que l'intégrale suivante converge :

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^p}{e^t-1}dt=\int_0^{+\infty}S(t)dt=\int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(t)dt$$
$$=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}f_n(t)dt=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{p!}{n^{p+1}}.$$

□

Solution Exercice 23. Soient $a,b>0$.

Montrons que $\int_0^{+\infty}\frac{te^{-at}}{1-e^{-bt}}dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(a+bn)^2}$.

On pose $I=]0;+\infty[$.

* On pose pour $t>0$, $S(t)=te^{-at}\frac{1}{1-e^{-bt}}=te^{-at}\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-bnt}$ la convergence de la série géométrique étant assurée car la raison $e^{-bt}\in]0;1[$. La fonction S est continue sur $]0;+\infty[$.
* On pose pour $t>0$ et $n\in\mathbb{N}$, $f_n(t)=te^{-(a+bn)t}$. La fonction f_n est continue sur $[0;+\infty[$ et également intégrable car $f_n(t)\underset{t\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. On a de plus :

$$\int_0^{+\infty}f_n(t)dt=\int_0^{+\infty}te^{-(a+bn)t}dt$$
$$=\left[-\frac{t}{a+bn}e^{-(a+bn)t}\right]_0^{+\infty}+\frac{1}{a+bn}\int_0^{+\infty}e^{-(a+bn)t}dt$$
$$=\frac{1}{(a+bn)^2}.$$

* La série $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|f_n(t)|dt$ converge car :

$$\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|f_n(t)|dt=\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}f_n(t)dt=\frac{1}{(a+bn)^2}.$$

On en déduit la convergence de l'intégrale suivante et :

$$\int_0^{+\infty}\frac{te^{-at}}{1-e^{-bt}}dt=\int_0^{+\infty}S(t)dt$$
$$=\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(t)dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}f_n(t)dt$$
$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(a+bn)^2}.$$

□

Solution Exercice 24. Soit $x>0$. Montrons que :

$$\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,(x+n)}.$$

* On pose $I=]0;1]$. Pour tout $t\in I$, on note $S(t)=t^{x-1}e^{-t}$.
  La fonction S est continue sur I.
* Pour tout $t\in I$:

$$S(t)=t^{x-1}e^{-t}=t^{x-1}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}t^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}t^{x+n-1}$$

  en utilisant la somme de la série exponentielle.
  On pose pour $n\geqslant 0$, $f_n(t)=\frac{(-1)^nt^{x+n-1}}{n!}$.
  Pour $n\geqslant 1$, $n+x-1\geqslant x>0$ donc la fonction f_n est continue sur $[0;1]$ donc intégrable sur I.
  Si $n=0$, la fonction $f_0:t\mapsto t^{x-1}$ est intégrable sur $I=]0;1]$ car on reconnaît une intégrale de Riemann :

$$t^{x-1}=\frac{1}{t^{1-x}}\ \text{ avec } 1-x<1 \text{ car } x>0.$$

* La série $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1|f_n(t)|dt$ converge. En effet, :

$$\int_0^1|f_n(t)|dt=\int_0^1\frac{t^{x+n-1}}{n!}dt=\frac{1}{n!}\left[\frac{1}{x+n}t^{x+n}\right]_0^1=\frac{1}{n!(n+x)}\leqslant\frac{1}{n!}.$$

La série $\sum \frac{1}{n!}$ converge donc $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1 |f_n(t)|dt$ converge.

En déduit la convergence de l'intégrale suivante et :

$$\int_0^1 S(t)dt = \int_0^1 t^{x-1}e^{-t} = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{x+n-1}}{n!}dt$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 t^{x+n-1}dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(x+n)}.$$

□

Solution Exercice 25.

On pose $I =]0;1[$, $S(t) = \dfrac{\ln(t)}{1-t^2}$.

* La fonction S est continue sur $]0;1[$.
* On a $\forall t \in]0;1[$, $S(t) = \ln(t) \times \dfrac{1}{1-t^2} = \ln(t)\sum_{n=1}^{+\infty}\left(t^2\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\ln(t)t^{2n}$.

  On pose pour $n \geqslant 1$, $f_n(t) = \ln(t)t^{2n}$ continue sur I et également intégrable car $\ln(t)t^{2n} \underset{t\to 0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt$ converge.
* La série $\sum_{n\geqslant 1}\int_0^1 |f_n(t)|dt$ converge. En effet une IPP donne :

$$\int_0^1 -\ln(t)t^{2n}dt = \left[-\ln(t)\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1 + \frac{1}{2n+1}\int_0^1 t^{2n}dt = +\frac{1}{(2n+1)^2}$$

avec :

$$\begin{cases} u(t) = \ln(t) & \Longrightarrow \quad u'(t) = \dfrac{1}{t} \\ v'(t) = t^{2n} & \Longrightarrow \quad v(t) = \dfrac{t^{2n+1}}{2n+1} \end{cases}$$

On en déduit alors que l'intégrale suivante converge et :

$$\int_0^1 S(t)dt = \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 f_n(t)dt$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 \ln(t)t^{2n}dt$$
$$= -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = -\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2}\right)$$
$$= -\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\right) = -\left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24}\right) = -\frac{3\pi^2}{24}$$

□

Solution Exercice 26. On pose pour $n \geqslant 1$:

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}.$$

1. L'intégrale est impropre en $+\infty$ car $t \mapsto \frac{1}{(1+t^3)^n}$ est continue sur $[0;+\infty[$.

$$\frac{1}{(1+t^3)^n} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{3n}}.$$

   Ainsi, l'intégrale converge en $+\infty$ par comparaison à l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^{3n}}dt$ avec $3n \geqslant 3 > 1$.

   Par ailleurs, une IPP donne :

$$I_{n+1} = \int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t^3)^{n+1}}dt = \int_0^{+\infty}\frac{1+t^3-t^3}{(1+t^3)^{n+1}}dt$$
$$= I_n - \frac{1}{3}\int_0^{+\infty} t\times(3t^2)(1+t^3)^{-(n+1)}dt$$
$$= I_n - \frac{1}{3}\left(\left[\frac{t(1+t^3)^{-(n+1)+1}}{-(n+1)+1}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\frac{-1}{n}\frac{dt}{(1+t^3)^n}\right)$$
$$= I_n - \frac{1}{3n}I_n = \frac{3n-1}{3n}I_n.$$

2. Déterminons $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que la suite de terme général $u_n = \ln\left(n^\alpha I_n\right)$ converge.

   Afin d'utiliser la relation obtenue à la question précédente, on utilise le théorème sur les séries télescopiques. La suite (u_n) converge si et seulement si la série $\sum (u_{n+1}-u_n)$ converge :

$$u_{n+1}-u_n = \ln\left((n+1)^\alpha I_{n+1}\right) - \ln\left(n^\alpha I_n\right)$$
$$= \alpha\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{I_{n+1}}{I_n}\right)$$
$$= \frac{\alpha-\frac{1}{3}}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

   Par conséquent, la série $\sum (u_{n+1}-u_n)$ converge si et seulement si $\alpha = \frac{1}{3}$ et cette condition est également celle assurant la convergence de la suite (u_n).

3. On peut en déduire la convergence de la série $\sum \frac{1}{n}I_n$ et exprimer sa somme à l'aide d'une intégrale.

En effet, la suite de terme général $u_n = \ln\left(n^{\frac{1}{3}} I_n\right)$ converge vers un réel ℓ donc $n^{\frac{1}{3}} I_n$ converge vers e^{ℓ} et par conséquent :

$$\frac{I_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{-\frac{1}{3}}e^{\ell}}{n} = \frac{e^{\ell}}{n^{\frac{4}{3}}}.$$

Par comparaison à la série de Riemann avec $\alpha = 4/3$, on en déduit que $\sum \frac{I_n}{n} = \sum \int_0^{+\infty} \frac{dt}{n(1+t^3)^n}$ converge.

* $*$ On définit sur $I = [0;+\infty[$ pour tout $n \geqslant 1$, $t \mapsto f_n(t) = \dfrac{1}{n(1+t^3)^n}$ fonction continue sur I et intégrable sur I.
  De plus pour tout $t \geqslant 0$ $\frac{1}{(1+t^3)^n} \in]0;1[$ donc avec l'indication de l'énoncé :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+t^3)^n} = -\ln\left(1 - \frac{1}{1+t^3}\right) = S(t)$$

  Ainsi définie la fonction S est continue sur $]0;+\infty[$.

* $*$ Enfin, la série $\sum \int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,dt = \sum \frac{I_n}{n}$ converge.

On en déduit que :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_n}{n} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{n(1+t^3)^n}\\ &= \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+t^3)^n}\right) dt\\ &= \int_0^{+\infty} \left(-\ln\left(1 - \frac{1}{1+t^3}\right)\right) dt\end{aligned}$$

Une IPP donne

$$\int_0^{+\infty} \left(-\ln\left(1-\frac{1}{1+t^3}\right)\right) dt = 3\underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3}}_{I},$$

on a noté $I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3}$.

Une décomposition en élément simple donne :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+t^3} &= \frac{\frac{1}{3}}{t+1} + \frac{-\frac{1}{3}t + \frac{2}{3}}{t^2 - t + 1}\\ &= \frac{1}{3}\frac{1}{t+1} - \frac{1}{2\cdot 3}\frac{2t-1}{t^2-t+1} + \frac{3}{6}\frac{1}{t^2-t+1}\\ &= \frac{1}{3}\frac{1}{t+1} - \frac{1}{2\cdot 3}\frac{2t-1}{t^2-t+1} + \frac{3}{6}\frac{1}{(t-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}\\ &= \frac{1}{3}\frac{1}{t+1} - \frac{1}{2\cdot 3}\frac{2t-1}{t^2-t+1} + \frac{3}{6}\frac{1}{\frac{3}{4}}\frac{1}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}(t-\frac{1}{2})\right]^2 + 1}\end{aligned}$$

On intègre alors sur $[0;A]$:

$$\begin{aligned}\int_0^A \frac{dt}{1+t^3} &= \left[\frac{1}{3}\ln|t+1|\right]_0^A - \frac{1}{6}\left[\ln|t^2-t+1|\right]_0^A + \frac{2}{3}\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}(A-\frac{1}{2})} \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{du}{1+u^2}\\ &= \frac{1}{3}\left[\ln\left|\frac{t+1}{\sqrt{t^2-t+1}}\right|\right]_0^A + \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\arctan u\right]_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}(A-\frac{1}{2})}\end{aligned}$$

En faisant tendre $A \to +\infty$, on obtient :

$$I = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

Au final, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_n}{n} = 3I = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

□

Solution Exercice 27.

1. L'intégrale $I_k = \int_0^1 t^{k-1}\ln(t)dt$ est impropre en 0 car la fonction $f : t \mapsto t^{k-1}\ln(t)$ est continue sur $I =]0;1]$. Mais $t^{k-1}\ln(t) \underset{t\to 0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ par croissances comparées. Par comparaison, on obtient $f \in L^1(]0;1])$.
   Une IPP donne :

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^{k-1}\ln(t)dt &= \left[\frac{t^k}{k}\ln(t)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^k}{kt}dt\\ &= -\frac{1}{k}\int_0^1 t^{k-1}dt = -\frac{1}{k^2}.\end{aligned}$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$.

Notons qu'il s'agit du reste d'ordre n d'une série alternée convergente car la suite $\left(\frac{1}{k^2}\right)_{k\geqslant 1}$ décroit vers 0.
D'après ce qui précède :

$$\begin{aligned} R_n &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \int_0^1 \ln(t) t^{k-1} dt \end{aligned}$$

* On pose pour $k \geqslant 1$, $f_k(t) = (-1)^k \ln(t) t^{k-1}$. La fonction f_k est continue et intégrable sur $I =]0;1[$ car $|f_k(t)| \underset{t\to 0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$.
De plus pour tout $t \in]0;1[$,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \ln(t) t^{k-1} = -\ln(t) \sum_{k=n}^{+\infty} (-t)^k = -\frac{(-1)^n \ln(t) t^n}{1+t} = S(t).$$

* La fonction S est continue sur $]0;1] \supset I$.
* La série $\sum_{k\geqslant n+1} \int_0^1 |f_k(t)| dt$ converge car

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_0^1 |f_k(t)| dt = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_0^1 -\ln(t) t^{k-1} dt = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

Les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées, on a :

$$\begin{aligned} R_n &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^k \ln(t) t^{k-1} dt = \int_0^1 \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \ln(t) t^{k-1} dt \\ &= -\int_0^1 \frac{(-1)^n \ln(t) t^n}{1+t} dt. \end{aligned}$$

3. Calculons $\sum_{n=0}^{+\infty} R_n$.
On applique une fois encore le théorème d'intégration terme à terme :
* Pour tout $t \in]0;1[$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{(-1)^n \ln(t) t^n}{1+t} = \frac{-\ln(t)}{(1+t)^2} = S(t)$$

La fonction S est continue sur $]0;1[$.
* les fonctions $t \mapsto f_n(t) = -(-1)^n \ln(t) t^n$ sont continues et intégrable sur $]0;1] \supset I =]0;1[$ car $f_n(t) \underset{t\to 0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ et on a $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) = S(t)$ pour tout $t \in]0;1[$.
* La série $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^1 |f_n(t)| dt$ converge par comparaison à une série de Riemann :

$$\int_0^1 |f_n(t)| dt = \int_0^1 \frac{|\ln(t)| t^n}{1+t} dt \leqslant \int_0^1 \ln(t) t^n = \frac{1}{n^2}.$$

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} R_n &= -\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n \ln(t) t^n}{1+t} dt = -\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln(t) t^n}{1+t} dt \\ &= -\int_0^1 \frac{\ln(t)}{(1+t)^2} dt. \end{aligned}$$

On intègre par parties sur le segment $[a;1]$ avec $0 < a < 1$:

$$\begin{aligned} \int_a^1 \frac{\ln(t)}{(1+t)^2} dt &= \left(\left[-\frac{\ln(t)}{1+t} \right]_a^1 + \int_a^1 \frac{dt}{t(t+1)} \right) \\ &= \frac{\ln(a)}{a+1} + [\ln(t) - \ln(t+1)]_a^1 \\ &= \frac{\ln(a)}{a+1} + (\ln(1) - \ln(2) - \ln(a) + \ln(a+1)) \\ &= -\ln(2) + \frac{1}{a+1} [\ln(a) - (a+1)\ln(a)] - \ln(2) + \ln(a+1) \\ &= -\ln(2) + \frac{1}{a+1} [-a\ln(a)] - \ln(2) + \ln(a+1). \end{aligned}$$

En faisant tendre a vers 0, on obtient :

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt = -\ln(2)$$

puis

$$\sum_{n=0}^{+\infty} R_n = \ln(2).$$

□