Programme de khôlle semaines 9 et 10

Concernant le **Chapitre 5 sur les déterminants**, aucune démonstration de cours n'est demandée mais il faudra connaître les techniques classiques de calculs de déterminants :

Questions de cours

❶ Opérations sur les lignes/colonnes d'un déterminant ; effet sur le déterminant d'une transposition, dilatation, transvection.
❷ Déterminant triangulaire supérieur/inférieur.
❸ Développement par rapport à une ligne/une colonne.
❺ Combinaisons linéaires simples (la somme par exemple) sur les lignes/colonnes pour "sortir" un facteur du déterminant.
❻ Déterminant et inverse d'une matrice carrée de taille 2.
❼ Inversibilité d'une matrice/bijectivité d'un endomorphisme en dimension finie et caractérisation par le déterminant non nul.
❽ Liberté d'une famille de vecteurs en dimension finie et caractérisation par par le déterminant non nul.
❹ Déterminants tri-diagonaux avec étude d'une suite récurrente.
❽ Déterminants classiques : circulants, Vandermonde, etc. vus en TD.

La colle commence par l'énoncé précis d'une définition et/ou d'un résultat ci-dessous :

Questions de cours: Savoir énoncer avec précision les def/thm suivants

Chapitre 6 : réduction

- Valeurs propres, vecteurs propres, espace propres d'une matrice/d'un endomorphisme.
- Spectre d'une matrice/d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie.
- polynôme caractéristique : définition. Propriétés : c'est un polynôme de degré n (**admis**), coefficient dominant 1 (**admis**)
- Ordre de multiplicité $m(\lambda)$ d'une valeur propre λ et encadrement : $1 \leqslant \dim E_\lambda(f) \leqslant m(\lambda)$ (**avec preuve**)
- Définition d'une matrice/d'un endomorphisme diagonalisable.
- Définition d'une matrice/d'un endomorphisme trigonalisable.

Elle se poursuit par la démonstration d'un des résultats suivants :

Questions de cours: Savoir démontrer les résultats suivants

- Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.
- La somme de deux espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est directe. La somme de $n \geqslant 2$ sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est directe.
- Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
  Conséquence : si E est de dimension finie $n = \dim E$ alors tout endomorphisme de E possède au plus n valeurs propres distinctes.
  En dimension finie :
- Les racines du polynôme caractéristique sont exactement les valeurs propres de l'endomorphisme/de la matrice.
- f est diagonalisable si et seulement si $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} E_\lambda(f)$.
- f est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé et si $m(\lambda) = \dim E_\lambda$ pour tout $\lambda \in Sp(f)$.
- Condition **suffisante** de diagonalisabilité.
  Si χ_f est scindé et à racines simples **alors** f est diagonalisable.
- La trace d'une matrice est la somme de ses valeurs propres complexes (comptées avec multiplicité).
  Le déterminant d'une matrice est le produit de ses valeurs propres complexes (comptées avec multiplicité).

La colle se poursuit alors par un ou plusieurs exercices sur l'un des thèmes :

- Réduction d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie/d'une matrice et application au calcul des puissances d'une matrice. Application à l'étude d'une suite récurrente linéaire d'ordre $p \geqslant 2$.
- Éléments propres d'un endomorphisme d'un espace de polynômes : recherche de polynômes propres et de valeurs propres.
  Application de la résolution d'une équation différentielle à le recherche de polynômes propres.
- Éléments propres d'un endomorphisme d'un espace de fonctions.
- Les exercices du chapitre précédent sur les déterminants sont encore au programme.