Chapitre 6 : Réduction

Plan du chapitre

0 Trois exemples

Exercice 1

On note $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $\det(\lambda id_E - f) = 0$.
   On notera $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ les scalaires obtenus.
2. Déterminer $E_{\lambda_i}(f) = \ker(f - \lambda_i id_E)$ pour $i \in [\![1, 3]\!]$. Montrer que $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{3} E_{\lambda_i}(f)$.
3. On note $E_{\lambda_i}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) : AX = \lambda_i X\}$. Montrer que $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{3} E_{\lambda_i}(A)$
4. En déduire une base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ dans laquelle la matrice de f est une matrice diagonale notée D..
   Exprimer $f(e'_1)$, $f'(e'_2)$ et $f(e'_3)$ dans la base $\mathcal{B}'$.
   Justifier que les droites $Vect(e'_i)$ sont stables par f.
   Que peut-on dire des droites $Vect(e_i)$?
5. On note $P = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$. Calculer $P^{-1}AP$. Que constate-t-on ?
6. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
7. Justifier que A est inversible. Exprimer A^{-1} en utilisant les matrices P et D.

Exercice 2

Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur d'un espace de dimension finie.

Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de p s'écrit $\begin{pmatrix} 1 & & & & & (0) \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ (0) & & & & & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 3

1. Soit $s \in \mathscr{L}(E)$ une symétrie vectorielle. Montrer que $\det(s) \in \{-1; 1\}$.
2. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de s s'écrit $\begin{pmatrix} 1 & & & & & (0) \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ (0) & & & & & -1 \end{pmatrix}$
   et préciser le résultat de la question précédente.
3. Calculer le déterminant de l'application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, définie par $f(A) = {}^tA$.

L'objectif de ce chapitre est de généraliser ce qui précède : déterminer une base dans laquelle la matrice d'un endomorphisme est simple, en l'occurence diagonale lorsque c'est possible.

1 - Éléments propres

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E.

1.A - Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres

Définition 4: Valeurs propres, vecteurs propres

— On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de f s'il existe un vecteur **non nul** x tel que $f(x) = \lambda x$.
— On appelle alors $x \in E$ un **vecteur propre** associé à la valeur propre λ.
— Si E est de dimension finie, on appelle spectre de f, et on note $Sp(f)$, l'ensemble des valeurs propres de f.

Remarques

— x est vecteur propre de f si et seulement si la droite $Vect(x)$ est stable par f.
— x est un **vecteur propre** de f associé à la valeur propre λ
$\iff f(x) = \lambda x \iff f(x) - \lambda x = 0_E$
$\iff (f - \lambda id_E)(x) = 0$
$\iff x \in \ker(f - \lambda id_E)$.
— λ est une **valeur propre** de f
$\iff \exists x \neq 0_E, f(x) = \lambda x$
$\iff \ker(f - \lambda id_E) \neq \{0_E\}$
$\iff f - \lambda id_E$ n'est pas injective.
— Si E est de dimension finie, on note $\mathcal{B}$ une base de E et $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$, $X = Mat_{\mathcal{B}}(x)$.
x est un vecteur propre de f associé à la valeur propre $\lambda \iff AX = \lambda X$.
— Toujours si E est de dimension finie, $\lambda \in Sp(f) \iff \det(f - \lambda id_E) = 0$.

Exemple

Décrire $Sp(p), Sp(s), Sp(f)$ dans les trois exemples traités en introduction.

Définition 5

Soit λ une valeur propre de f.
On appelle sous-espace propre associé à λ le sous-espace vectoriel $E_\lambda(f) = \ker(f - \lambda id_E)$.

Remarques

Si λ n'est pas une valeur propre de f alors $\ker(f - \lambda id_E) = \{0_E\}$.

Proposition 6: deux s.e.p. en somme directe

La somme de deux s.e.p. E_λ et E_μ associés à des valeurs propres **distinctes** est directe :

$$\lambda \neq \mu \Longrightarrow \ker(f - \lambda id_E) \cap \ker(f - \mu id_E) = \{0_E\} \Longrightarrow E_\lambda + E_\mu = E_\lambda \oplus E_\mu.$$

Démonstration. Soit $x \in E_\lambda \cap E_\mu$.
— $x \in E_\lambda \iff f(x) = \lambda x$.
— $x \in E_\mu \iff f(x) = \mu x$.
Ainsi, $\lambda x = \mu x \iff (\lambda - \mu)x = 0_E$. Puisque $\lambda - \mu \neq 0$ on obtient $x = 0_E$. □

Théorème 7: n s.e.p. en somme directe

Une somme finie de sous-espaces propres associés à des valeurs propres **distinctes** est directe.

Démonstration. On rappelle qu'une somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ de p espaces est directe s'il y a unicité de la décomposition du vecteur nul dans suivant cette somme.

On raisonne par récurrence sur $p \geqslant 1$.

— Si $p = 1$ la somme $\sum_{i=1}^{1} F_i = F_1$ est directe clairement.
— Si $p = 2$ la somme $F_1 + F_2$ est directe par la proposition précédente.
— On suppose la propriété vérifiée au rang $p \in \mathbb{N}^*$.
On considère alors $p+1$ s.e.p. $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_{p+1}}$ associés à des valeurs propres distinctes.
Soient $(x_1, \dots, x_{p+1}) \in E_{\lambda_1} \times \cdots \times E_{\lambda_{p+1}}$ tels que :

$$x_1 + \cdots + x_p + x_{p+1} = 0_E \quad (*).$$

On applique l'endomorphisme f à cette relation et on obtient

$$\begin{aligned} f(x_1 + \cdots + x_p + x_{p+1}) = f(0_E) &\iff f(x_1) + \cdots + f(x_p) + f(x_{p+1}) = 0_E \\ &\iff \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p + \lambda_{p+1} x_{p+1} = 0_E \quad (**). \end{aligned}$$

On multiplie $(*)$ par λ_{p+1} et on retranche le résultat à $(**)$:

$$\begin{aligned} &(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p + \lambda_{p+1} x_{p+1}) - (\lambda_{p+1} x_1 + \cdots + \lambda_{p+1} x_p + \lambda_{p+1} x_{p+1}) = 0_E \\ \iff &(\lambda_1 - \lambda_{p+1}) x_1 + \cdots + (\lambda_p - \lambda_{p+1}) x_p = 0_E \end{aligned}$$

Par hypothèses, les p s.e.p. $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_p}$ sont en somme directe.
On obtient donc $(\lambda_1 - \lambda_{p+1}) x_1 = \cdots = (\lambda_p - \lambda_{p+1}) x_{p+1} = 0_E$.
Les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \lambda_{p+1}$ étant distinctes, on obtient $x_1 = \cdots = x_p = 0_E$.
Enfin, $(*)$ devient $x_{p+1} = 0_E$ ce qui nous permet de conclure : $x_1 = \cdots = x_p = x_{p+1} = 0_E$.
La somme $\sum_{i=1}^{p+1} E_{\lambda_i} = \bigoplus_{i=1}^{p+1} E_{\lambda_i}$ est directe ce qui achève la récurrence.

□

Corollaire 8

— Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
— Si E est de **dimension finie**, un endomorphisme admet au plus $n = \dim(E)$ valeurs propres distinctes.

Démonstration. — Soit $(x_1, \dots, x_p)$ une famille finie de p vecteurs propres associés à des valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ distinctes.
Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ des scalaires tels que $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_p x_p = 0_E$.
La somme $E_{\lambda_1} + \cdots + E_{\lambda_p} = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}$ est directe donc $\alpha_1 x_1 = \cdots = \alpha_p x_p = 0_E$.
Les vecteurs $x_1, \dots, x_p$ sont propres pour f donc en particulier sont non nuls.
On en déduit que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = 0$: la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est libre.
— Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille infinie, on montre comme ci-dessus que toute sous-famille $(x_j)_{j \in J}$ avec $J \subset I$ finie est libre.
— Si E est de dimension finie n alors toute famille libre possède au plus n vecteurs ce qui achève la preuve car une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre par ce qui précède.

□

Exercice 9

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est $Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Déterminer toutes les valeurs propres de f de deux méthodes différentes.

Solution. — **Première méthode :**
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

La forme de la matrice A indique que $f(e_1) = e_1$, $f(e_2) = 2e_2$ et $f(e_3) = 3e_3$.
Les vecteurs e_1, e_2, e_3 sont non nuls donc ce sont des vecteurs propres respectivement associés aux valeurs propres $1, 2, 3$.
$\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ donc f possède au plus 3 valeurs propres distinctes donc finalement exactement les valeurs propres $1, 2, 3$.

— **Seconde méthode :**
$\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de $f \iff \ker(f - \lambda id_{\mathbb{R}^3}) \neq \{(0,0,0)\} \iff \det(f - \lambda id_{\mathbb{R}^3}) = 0$.
Or $\det(f - \lambda id_{\mathbb{R}^3}) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$.
Ainsi $Sp(f) = \{1, 2, 3\}$.

□

Exercice 10

1. Soit $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}[X])$ défini par $\varphi(P) = P'$. Déterminer les valeurs propres de φ.
2. Soit $\varphi \in \mathscr{L}(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}))$ défini par $\varphi(f) = f'$. Déterminer les valeurs propres de φ.

Solution. 1. λ est une valeur propre de φ si et seulement s'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul tel que $\varphi(P) = \lambda P$.
$\varphi(P) = \lambda P \iff P' = \lambda P \iff \lambda = 0$ et P est constant.
L'unique valeur propre de f est 0 et $E_0(f) = \mathbb{R}_0[X] = Vect(1)$.

2. λ est une valeur propre de φ si et seulement s'il existe $f \in \mathbb{R}[X]$ non nulle telle que $\varphi(f) = \lambda f$.
$\varphi(f) = \lambda f \iff f' = \lambda f \iff \exists K \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = Ke^{\lambda x}$.
Ainsi,
— l'ensemble des valeurs propres de f est $\mathbb{R}$ tout entier
— pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $E_\lambda(f) = Vect(x \mapsto e^{\lambda x})$.

□

1.B - Polynôme caractéristique d'un endomorphisme en dimension finie

Commençons par étendre les définitions précédentes aux matrices représentatives des endomorphismes en dimension finie.

Définition 11: éléments propres d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
— On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de A s'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ **non nul** tel que $AX = \lambda$.
— On note alors $E_\lambda(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) : AX = \lambda X\}$.
— On note $Sp(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A.

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et $\mathcal{B}$ une base de E.
On formalise ce que nous avons déjà noté :

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ est valeur propre de } f &\iff \exists x \in E, x \neq 0_E, f(x) = \lambda x \\
&\iff \ker(f - \lambda id_E) \neq \{0_E\} \\
&\iff f - \lambda id_E \text{ non injective} \\
&\iff f - \lambda id_E \text{ non bijective} \\
&\iff \det(f - \lambda id_E) = 0 \\
&\iff \det(\lambda id_E - f) = 0 \\
&\iff \det(\lambda I_n - A) = 0 \text{ (avec } A = Mat_{\mathcal{B}}(f)).
\end{aligned}$$

Définition 12

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.
On appelle **polynôme caractéristique** de f la fonction polynomiale $\lambda \mapsto \chi_f(\lambda) = \det(\lambda id_E - f)$.
De même le polynôme caractéristique d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la fonction polynomiale $\lambda \mapsto \det(\lambda I_n - A)$.

Remarques

Le déterminant d'un endomorphisme est invariant par changement de base.
Le polynôme caractéristique ne dépend donc pas de la base choisie.
De manière équivalente, deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

Listons les propriétés du polynôme caractéristique et son intérêt :

Théorème 13: propriétés du polynôme caractéristique

- L'application $\lambda \mapsto \det(\lambda id_E - f)$ est polynomiale de degré n et de coefficient dominant 1.
- Les valeurs propres de f sont les racines du polynôme caractéristique χ_f.

Démonstration. — On note $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$ la matrice de f dans une base $\mathcal{B}$ de E et $n = \dim(E)$.
On a $\chi_f(\lambda) = \det(\lambda id_E - f) = \det(\lambda I_n - A) = \det(\lambda C_1 + D_1|\dots|\lambda C_n + D_n)$ où :
C_i, respectivement D_i, est la i-ème colonne de I_n, respectivement $-A$.
Par multilinéarité du déterminant par rapport aux colonnes :

$$\begin{aligned}\chi_f(\lambda) &= \det(\lambda C_1 + D_1|\dots|\lambda C_n + D_n)\\ &= \lambda^n \det(C_1|\dots|C_n) + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda^i \sum_{\substack{I\subset[\![1,n]\!]\\ \mathrm{Card}(I)=i}} \sum_{j\in I} \det(A_j) + \det(D_1|\dots|D_n)\end{aligned}$$

où $A_j, j \in I \subset [\![1,n]\!](\mathrm{Card}(I) = i)$ est l'une des $\binom{n}{i}$ matrices constituées de i colonnes C_k et de $n-i$ colonnes D_k.
Puisque $C_1, \dots, C_n$ sont les colonnes de la matrice I_n, on a $\det(C_1|\dots|C_n) = 1$ et la conclusion en découle : $\chi_f(\lambda) = \det(\lambda id_E - f)$ est un polynôme unitaire de degré de n.
— $\chi_f(\lambda) = 0 \iff \det(\lambda id_E - f) = 0 \iff \det(f - \lambda id_E) = 0 \iff \ker(f - \lambda id_E) \neq \{0_E\}$
$\chi_f(\lambda) = 0 \iff \exists x \in E, x \neq 0_E, f(x) = \lambda x \iff \lambda \in Sp(f)$.

□

Remarques

La démonstration précédente montre que le coefficient constant de χ_f est :
$\det(D_1|\dots|D_n) = \det(-A) = (-1)^n \det(A)$.

Exercice 14

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme défini par $f(x,y,z) = (3x - y - z; x + 2y - 2z; x - y + z)$.

1. Écrire sa matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et calculer son polynôme caractéristique.
2. Déterminer une base des espaces propres de f et montrer que la concaténation $\mathcal{B}'$ de ses bases est une base de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la matrice de f dans cette base ?

Solution. 1. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\chi_f(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 1 & 1 \\ -1 & \lambda - 2 & 2 \\ -1 & 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & 1 \\ \lambda - 1 & \lambda - 2 & 2 \\ \lambda - 1 & 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$

$$\chi_f(\lambda)=(\lambda-1)\begin{vmatrix}1&1&1\\1&\lambda-2&2\\1&1&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&\lambda-3&1\\0&0&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3).$$

2. Les racines du polynôme caractéristique de f sont les réels $1,2,3$: $Sp(f)=\{1,2,3\}$.

— $(x,y,z)\in E_1(f)\iff f(x,y,z)=(x,y,z)\iff AX=X\iff(A-I_3)X=0$

On a noté $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

On échelonne la matrice $A-I_3=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\1&1&-2\\1&-1&0\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}2&-1&-1\\0&3&-3\\0&-1&1\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}2&-1&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$.

Ainsi, $AX=X$ équivaut à $\left\{\begin{array}{rcrcrcl}2x&-&y&-&z&=&0\\&&y&-&z&=&0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{lcl}x&=&z\\y&=&z\end{array}\right.$

Ainsi, $E_1(f)=Vect((1,1,1))$.

— On obtient en échelonnant la matrice $A-2I_3$ que $E_2(f)=Vect((2,1,1))$

— En échelonnant la matrice $A-3I_3$: $E_3(f)=Vect((1,-1,1))$.

La famille $\mathcal{B}'=((1,1,1),(2,1,1),(1,-1,1))$ est libre. En effet :

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')=\begin{vmatrix}1&2&1\\1&1&-1\\1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&1\\0&-1&-2\\0&-1&0\end{vmatrix}=-2\neq0.$$

$\mathcal{B}'$ est composée de 3 vecteurs, il s'agit donc d'une base de $\mathbb{R}^3$.

On en déduit que $\mathbb{R}^3=E_1(f)\oplus E_2(f)\oplus E_3(f)$.

La matrice relativement à la base de vecteurs propres $\mathcal{B}'$ adaptée à cette décomposition en somme directe est :

$$Mat_{\mathcal{B}'}(f)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

chacun des vecteurs composant $\mathcal{B}'$ engendrant une droite vectorielle stable

□

Définition 15: ordre de multiplicité d'une valeur propre

On appelle ordre de multiplicité de la valeur propre $\lambda\in Sp(f)$, l'ordre de multiplicité de λ comme racine de χ_f.
On notera $m(\lambda)$ l'ordre de multiplicité de $\lambda\in Sp(f)$.

Remarques

1. $m(\lambda)=p\iff(X-\lambda)^p|\chi_f$ et $(X-\lambda)^{p+1}\not|\chi_f$
   $m(\lambda)=p\iff\exists Q\in\mathbb{K}[X],\chi_f(X)=(X-\lambda)^pQ(X)$ et $Q(\lambda)\neq0$
   $m(\lambda)=p\iff\chi_f(\lambda)=\chi'_f(\lambda)=\cdots=\chi_f^{(p-1)}(\lambda)=0$ et $\chi_f^{(p)}(\lambda)\neq0$.
2. Un endomorphisme admet donc au plus n valeurs propres comptées avec multiplicité ; exactement n valeurs propres complexes.
3. On notera $Sp_{\mathbb{R}}(A)$ et $Sp_{\mathbb{C}}(A)$ l'ensemble des valeurs propres réelles ou complexes d'une matrice $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exemple

$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$: $\chi_f(X)=\begin{vmatrix}X&-1&0\\-1&X&0\\0&0&X-1\end{vmatrix}=(X-1)(X^2+1)$.

Ainsi, $Sp_{\mathbb{R}}(A)=\{1\}$ et $Sp_{\mathbb{C}}(A)=\{1;i;-i\}$.

Un premier résultat très important :

Théorème 16: dimension s.e.p et multiplicité

La dimension d'un sous-espace propre associé à une valeur propres λ est au plus égal à $m(\lambda)$.
On a donc : $1 \leqslant \dim E_\lambda(f) = \dim \ker(f - \lambda id_E) \leqslant m(\lambda)$.
En particulier, si $m(\lambda) = 1$ alors $\dim E_\lambda(f) = 1$.

Démonstration. — Soit λ une valeur propre de f. Il existe $x \in E$ non nul tel que $f(x) = \lambda x$.
Ainsi, $Vect(x) \subset E_\lambda(f)$. En particulier $\dim(E_\lambda(f)) \geqslant \dim Vect(x) = 1$.

— Notons $p = \dim E_\lambda(f)$ et fixons une base $(e_1, \ldots, e_p)$ de $E_\lambda(f)$ que l'on complète en une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ de E.
Les vecteurs $e_1, \ldots, e_p$ sont des vecteurs propres de f associés à la valeur propre λ.
Ainsi, $f(e_1) = \lambda e_1, \ldots, f(e_p) = \lambda e_p$.
La matrice A de f dans $\mathcal{B}$ a donc la forme suivante :

$$A = Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda & & (0) & * & \ldots & * \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ (0) & & \lambda & & & \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & (0) & & & & \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & & & * & \ldots & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda I_p & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \quad (B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K}), C \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})).$$

Ainsi, $\chi_f(X) = \det(XI_n - A) = \begin{vmatrix} (X-\lambda)I_p & -B \\ 0 & XI_{n-p} - C \end{vmatrix} = (X-\lambda)^p \det(XI_{n-p} - C)$ en développant par rapport à la première, deuxième,..., p-ième colonne.
On en déduit que $(X-\lambda)^p | \chi_f$ et par suite λ est une racine d'ordre multiplicité au moins p.

□

Exemple

On a vu que le spectre de $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ défini par $f(x, y, z) = (3x - y - z; x + 2y - 2z; x - y + z)$ est $Sp(f) = \{1, 2, -4\}$ et qu'on a $\chi_f(X) = (X-1)(X-2)(X-3)$.
Les espaces propres $E_1(f), E_2(f), E_3(f)$ sont chacun de dimension 1.

2 - Endomorphismes et matrices diagonalisables

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

Définition 17: diagonalisabilité d'un endomorphisme en dimension finie

On dit que f est diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Dans une telle base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, la matrice de f est de la forme

$$Mat_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ et } \forall i \in [\![1, n]\!], f(e_i) = \lambda_i e_i.$$

Cela signifie que $\mathscr{B}$ est une base constituée de vecteurs propres associés aux valeurs propres λ_i.

Exemple

- Une homothétie est diagonalisable. En particulier id_E est diagonalisable.
- Un projecteur est diagonalisable.
- Une symétrie vectorielle est diagonalisable.
- L'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ défini par $f(x,y,z) = (3x-y-z; x+2y-2z; x-y+z)$ est diagonalisable car $\mathscr{B}' = ((1,1,1),(2,1,1),(1,-1,1))$ est une base constituée de vecteurs propres :

$$D = Mat_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Dans la base canonique $\mathscr{B}$, $A = Mat_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Les matrices A et D sont donc semblables $A = PDP^{-1}$ avec $P = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$.

Définition 18: Diagonalisabilité d'une matrice

Une matrice est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

Remarques

Deux matrices semblables ont la même trace et le même déterminant.
Elles ont également le même polynôme caractéristique donc les mêmes valeurs propres.

Remarques

Toutes les matrices ne sont pas diagonalisables.

- La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.
  En effet, $\chi_A(X) = (X-1)^2$: $Sp(A) = \{1\}$ un seule valeur propre d'ordre de multiplicité $m(1) = 2$.
  Si A était diagonalisable, A serait semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$.
  Il existerait alors $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $A = PI_2P^{-1} = I_2$ ce qui n'est pas.
  Ainsi, $\dim E_1(f) = 1 < 2 = m(1)$.
- De même la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable car $B \neq 0$.

Théorème 19: Premier critère de diagonalisabilité

L'endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si $E = \displaystyle\bigoplus_{\lambda\in Sp(f)} E_\lambda(f)$.

Démonstration. $\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose que f est diagonalisable.
Il existe donc une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs propres.
Tout vecteur $x \in E$ s'écrit donc $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ combinaison linéaire des vecteurs propres e_i.
Ainsi $E = \displaystyle\sum_{\lambda\in Sp(f)} E_\lambda(f)$.
Les vecteurs $\lambda_i e_i$ sont éléments des sous-espaces propres E_{λ_i} qui sont en somme directe.
La décomposition $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in \sum_{\lambda\in Sp(f)} E_\lambda(f) = \bigoplus_{\lambda\in Sp(f)} E_\lambda(f)$ est donc unique.

On conclut : $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} E_\lambda(f)$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Réciproquement supposons $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} E_\lambda(f)$.

La concaténation de bases des espaces propres $E_\lambda(f), \lambda \in Sp(f)$ est donc une base de E.
On a donc construit une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ constituée de vecteurs propres pour f.

La matrice de f dans cette base est donc de la forme $Mat_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

avec $\lambda_i, i \in [\![1, n]\!]$ valeur propre de f : $f(e_i) = \lambda_i e_i$ □

Corollaire 20

L'endomorphisme est diagonalisable si et seulement si $\dim E = \sum_{\lambda \in Sp(f)} \dim E_\lambda(f)$.

Théorème 21

Un endomorphisme de E est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique χ_f est scindé et si la multiplicité de chaque valeur valeur propre est égale à le dimension du sous-espace propre associé :
f est diagonalisable si et seulement si $\chi_f = \prod_{\lambda \in Sp(f)} (X - \lambda)^{m(\lambda)}$ et $\forall \lambda \in Sp(f),\ \dim E_\lambda(f) = m(\lambda)$.

Démonstration. $\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose f diagonalisable et on note $\mathscr{B} = \bigcup_{\lambda \in Sp(\lambda)} \mathscr{B}_\lambda$ une base de vecteurs propres, concaténation de bases des espaces propres E_λ.

Dans cette base, la matrice de f a la forme :

$$A = Mat_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & (0) \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \lambda_p & & \\ & & & & & \ddots & \\ (0) & & & & & & \lambda_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_p I_{m_p} \end{pmatrix} \quad \text{avec } m_i = \dim E_{\lambda_i}.$$

Alors $\chi_f(X) = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{m_i}$ est scindé.

De plus pour tout $\lambda \in Sp(f)$, $A - \lambda I_n = \begin{pmatrix} (\lambda_1 - \lambda) I_{m_1} & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & (\lambda_p - \lambda) I_{m_p} \end{pmatrix}$

Ainsi, $\dim E_\lambda(f) = \dim \ker(f - \lambda id_E) = \mathrm{Card}(\mathscr{B}_\lambda) = m(\lambda)$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose réciproquement que le polynôme caractéristique est scindé et que pour tout $\lambda \in Sp(f)$, on a $\dim E_\lambda(f) = m(\lambda)$.

Par conséquent, $\sum_{\lambda \in Sp(f)} \dim E_\lambda(f) = \sum_{\lambda \in Sp(f)} m(\lambda) = n = \dim(E)$ car le polynôme caractéristique est de degré n et est scindé par hypothèse.

Par conséquent, $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} E_\lambda(f)$ et f est donc diagonalisable. □

Exemple

La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ mais pas sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
En effet $\chi_A(X) = X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$.

Un corollaire important

Corollaire 22: Condition suffisante de diagonalisabilité, non-diagonalisabilité

— Si χ_f est scindé et n'admet que des racines simples $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ alors f est diagonalisable.
Il existe alors une base dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$

— Si χ_f n'est pas scindé alors f n'est pas diagonalisable.

Démonstration. — On suppose χ_f scindé à racines simples.
Alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, puisque $1 = m(\lambda_i) \geqslant \dim E_{\lambda_i}(f) \geqslant 1$, on a $\dim E_{\lambda_i}(f) = m(\lambda_i)$.

— f est diagonalisable si et seulement si χ_f est scindé et $\forall \lambda \in Sp(f) \dim E_\lambda(f) = m(\lambda)$
Si χ_f n'est pas scindé, f n'est donc pas diagonalisable. □

Exemple

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 2 \\ 7 & 0 & 2 \\ -18 & 3 & -4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

— $\chi_A(X) = (X - 2)(X - 4)(X - 6)$ scindé à racines simples : A est diagonalisable.
— $\chi_B(X) = (X - 2)(X - 1)^2$ mais $\dim E_1 = 1$ donc B n'est pas diagonalisable.
— $\chi_C(X) = (X - 1)^2(X - 3)$ est scindé.
De plus $\dim E_1 = 2 = m(1)$ et $\dim E_3 = 1 = m(3)$ donc C est diagonalisable.
— $\chi_D(X) = X(X^2 + 2) = X(X - \sqrt{2}i)(X + \sqrt{2}i)$: D est donc diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ ($\chi_D(X)$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}[X]$) mais pas dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ($\chi_D(X)$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}[X]$).

Remarques

Le théorème du rang donne $\dim E_\lambda(f) = n - rg(f - \lambda id_E) = n - rg(A - \lambda I_n)$.
On peut donc rapidement étudier la diagonalisabilité de f une fois χ_f calculé sans même déterminer une base de chaque espace propre (simplement en échelonnant les matrices $A - \lambda I_n, \lambda \in Sp(A)$).
En revanche si l'on souhaite diagonaliser la matrice/l'endomorphisme étudié, il faut déterminer une base des espaces propres en résolvant les équations $AX = \lambda X, \lambda \in Sp(A)$ et en réunissant les bases obtenues.

Exercice 23

Donner une base de vecteurs propres pour les matrices diagonalisables étudiées dans l'exemple précédent.

3 - Endomorphismes et matrices trigonalisables

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Définition 24: Trigonalisabilité

- Un endomorphisme f est dit trigonalisable s'il existe une base dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure.
- Une matrice est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Remarques

Attention à la confusion.
L'idée n'est pas d'appliquer la méthode du pivot de Gauss pour échelonner la matrice afin d'obtenir une matrice réduite triangulaire.
Mais on cherche $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PTP^{-1}$.

Théorème 25: critère de trigonalisabilité

f est trigonalisable si et seulement si χ_f est scindé.
Dans ce cas, dans toute base de trigonalisation $\mathscr{B}$, la matrice de f a la forme :

$$T = Mat_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ où } \lambda_1, \ldots, \lambda_n \text{ sont les valeurs propres de } f.$$

Démonstration. (Hors programme)

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons f trigonalisable.
Dans une certaine base $\mathscr{B}$, la matrice de f est donc de la forme

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

La polynôme caractéristique de f est donc le même que celui de T :
$\chi_T(X) = (X - \lambda_1) \ldots (X - \lambda_n)$.
$\chi_f = \chi_T$ est donc scindé et ses racines sont les scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
Les coefficients diagonaux de T sont donc les valeurs propres de f.

$\boxed{\Longleftarrow}$ On raisonne par récurrence sur $n = \dim(E)$:
Tout endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique est scindé est trigonalisable.

- Si $n = 1$ la matrice de f dans toute base est constituée d'un seul coefficient.
La propriété est vraie dans ce cas.
- On suppose la propriété vraie au rang $n-1$ avec $n \geqslant 2$ et on montre qu'elle est encore vraie au rang n.
La polynôme χ_f étant scindé, il possède au moins une racine $\lambda \in \mathbb{K}$: λ est donc une valeur propre de f et on note e_1 un vecteur propre associé : $f(e_1) = \lambda e_1$.
On complète (e_1) en une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E.
Dans cette base la matrice de f est de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & A' \end{pmatrix} \text{ avec } A' \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{K}).$$

La matrice $A' \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ est la matrice représentative d'un endomorphisme g sur un espace de dimension $n-1$.
De plus, $\chi_g(X) = \chi_A(X) = (X - \lambda)\chi_{A'}(X)$. Par conséquent χ_g est scindé.
Par hypothèse de récurrence, l'endomorphisme g est trigonalisable.
Ainsi, A' est trigonalisable.
On note $P' \in GL_{n-1}(\mathbb{K})$ telle que $A' = P'T'(P')^{-1} \Longleftrightarrow T' = (P')^{-1}A'P'$.
On définit ensuite $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix}$:

— En développant par rapport à la première colonne : $\det(P) = \det(P') \neq 0$ car P' est inversible. Ainsi, P est inversible.

— On a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (P')^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P'(P')^{-1} \end{pmatrix} = I_n$ donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (P')^{-1} \end{pmatrix}$.

On calcule alors :

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (P')^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & A' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & (P')^{-1}A' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & *' \\ 0 & (P')^{-1}A'P' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & *' \\ 0 & T' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a donc prouvé que dans une certaine base $\mathscr{B}'$, la matrice de f est triangulaire :

$$T = Mat_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\chi_f = (X - \lambda_1) \ldots (X - \lambda_n)$: les valeurs propres de f sont sur la diagonale de T. □

Corollaire 26

Sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ toutes les matrices sont trigonalisables.

Exemple

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

— $\chi_A(X) = X^2 + 1$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}[X]$.
  A n'est pas trigonalisable sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

— En revanche, $\chi_A(X) = (X - i)(X + i)$ est scindé sur $\mathbb{C}[X]$: A est trigonalisable sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

  — Un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = i$ est $X_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$:

  $AX_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix} = iX_1$.

  — On complète en une base de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{C})$: $\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

  $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

  Ainsi, A est semblable à la matrice triangulaire : $\begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.

Notons que l'on peut faire beaucoup mieux sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$: A possède deux valeurs propres distinctes donc est diagonalisable.

Une base de vecteurs propres est donnée par (X_1, X_2) avec $X_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$.

Proposition 27

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé. Alors

$$\operatorname{Tr}(f) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \quad \text{et} \quad \det(f) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

où l'on a noté $\lambda_i, i \in [\![1, n]\!]$ les valeurs propres de f comptées avec leur multiplicité.

Démonstration. χ_f est scindé. Dans une base de trigonalisation $\mathscr{B}$, la matrice de f est triangulaire :

$$T = Mat_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ et } \chi_f(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i).$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres (non nécessairement distinctes) de f. On obtient :

$$\mathrm{Tr}(f) = Tr(T) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \text{ et } \det(f) = \det(T) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

□

Remarques

— On peut modifier l'énoncé précédent comme suit : la trace (resp. le déterminant) d'un endomorphisme est la somme (resp. le produit) de ses valeurs propres complexes.

— En développant le polynôme caractéristique scindé (éventuellement sur $\mathbb{C}[X]$) :

$$\begin{aligned}(X - \lambda_1)\dots(X - \lambda_n) &= X^n - (\lambda_1 + \dots + \lambda_n)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \lambda_1 \dots \lambda_n \\ &= X^n - tr(f)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(f).\end{aligned}$$

— Si $n = 2$, on a en particulier

$$\chi_f(X) = X^2 - \mathrm{Tr}(f)X + \det(f).$$

— Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\chi_A(X) = X^2 - (a+d)X + (ad - bc)$.

Exercice 28

Réduire la matrice $A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 2 \\ 7 & 0 & 2 \\ -18 & 3 & -4 \end{pmatrix}$.

Solution. On note f l'endomorphisme canonique associé à A.

On détermine les éléments propres de A.

— $\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-8 & 1 & -2 \\ -7 & X & -2 \\ 18 & -3 & X+4 \end{vmatrix} = (X-8)\begin{vmatrix} X & -2 \\ -3 & X+4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -7 & -2 \\ 18 & X+4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -7 & X \\ 18 & -3 \end{vmatrix}$

$\chi_A(X) = (X-8)[X(X+4) - 6] - [-7(X+4) + 36] - 2[21 - 18X]$

$\chi_A(X) = X^3 + X^2(4-8) + X(-6 - 32 + 7 + 36) + (48 + 28 - 36 - 42)$

$\chi_A(X) = X^3 - 4X^2 + 5X - 2 = (X-1)^2(X-2)$.

— La matrice A possède deux valeurs propres : $Sp(A) = \{1, 2\}$ et $m(1) = 2$, $m(2) = 1$.

— $E_1(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) : AX = X\}$.

La résolution de l'équation $AX = X$ donne $E_1(A) = Vect\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

— $E_2(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) : AX = 2X\}$.

La résolution de l'équation $AX = 2X$ donne $E_2(A) = Vect\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

— La matrice A n'est pas diagonalisable car $m(1) = 2 > \dim E_1(A)$.

En revanche, $\chi_A(X)$ étant scindé, la matrice A est trigonalisable.

On complète les bases des espaces propres obtenus en une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ en une base (X_1, X_2, X_3) de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ avec

$X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (c'est une base car $det_{\mathscr{B}_c}(X_1, X_2, X_3) = -1 \neq 0$ où $\mathscr{B}_c$ est la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$).

— On note (e_1, e_2, e_3) la base correspondante de $\mathbb{R}^3$.

— On a $AX_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ -18 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $\alpha = 3, \beta = 1, \gamma = 1$.

Ainsi, $AX_3 = 3X_1 + X_2 + X_3$ c'est-à-dire : $f(e_3) = 3e_1 + e_2 + e_3$.

Dans la base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ la matrice de f est triangulaire $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Par conséquent, A est semblable à la matrice triangulaire T car elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes.

On a $A = PTP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -5 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

□