Programme de khôlle semaines 3 et 4

Questions de cours

La khôlle commence par l'énoncé d'un des résultats suivants, suivi de la démonstration ou d'un ou plusieurs exemples d'application :

❶ Convergence des sommes de Riemann d'une fonction continue sur un segment $[a, b]$ (sans démonstration). Applications.

❷ Théorème du changement de variable dans le cas d'une intégrale généralisée (sans démonstration).

Application à l'étude de la nature et au calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$.

❸ Pratique de l'intégration par parties pour le calcul d'une intégrale généralisée en se ramenant à l'intégrale sur un segment avant de passer à la limite. Application au calcul des intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt\,(n \in \mathbb{N})$ et des intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}\,(n \in \mathbb{N}^*)$

❹ Intégrales généralisées de référence : nature des intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$, $\displaystyle\int_0^1 \ln(t) dt$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ (avec démonstration pour une ou plusieurs intégrales de référence).

❺ Application de l'intégration par parties pour étudier la nature des intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t} dt$.

❻ Énoncé du théorème d'intégration terme à terme.
Application avec l'exercice ci-dessous :

1. Étudier pour $n \geqslant 1$, la nature de l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}$ et déterminer une relation entre I_{n+1} et I_n.
2. Déterminer un réel α tel que la **suite** de terme général $u_n = \ln(n^\alpha I_n)$ converge.
3. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{I_n}{n}$ converge et calculer sa somme.

   On utilisera **sans démonstration** le fait que $\forall x \in]-1; 1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x).$$

La khôlle se poursuivra par la résolution d'un ou plusieurs exercices d'application directe du cours :

- Calcul de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment
- Détermination des primitives d'une fonction continue sur un intervalle
- Nature d'une intégrale généralisée (en utilisant les théorèmes de comparaison). Étude de la convergence / convergence absolue.
- Valeur d'une intégrale généralisée en cas de convergence (utilisation d'une primitive, IPP, changement de variable)

La khôlle se poursuit enfin par un ou plusieurs exercices sur les thèmes suivants :

- Calcul intégral :
  - Encadrement d'une intégrale (généralisée ou non)
  - Étude d'une suite d'intégrales (généralisées ou non)
- Études locales et asymptotiques de fonctions : (révisions de sup)
  - Étude du prolongement d'une fonction en un point (prolongement continu, dérivable, $\mathscr{C}^1$,...)
  - Étude de fonctions : variations, extrema, branches infinies.