TRAVAIL ESTIVAL

Thèmes

1 Analyse

1.A Calculs de sommes

Exercice 1: Somme classique (Solution)

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S = 1\times 2\times 3 + 2\times 3\times 4 + \cdots + N\times(N+1)\times(N+2)$.

Exercice 2: Sommes doubles (Solution)

1. Calculer :
$$S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \min(i,j).$$
2. En déduire :
$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \max(i,j).$$
3. En déduire :
$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |i-j|.$$

Exercice 3: Deux exemples de télescopie (Solution)

1. En utilisant le fait que pour tout $k \geq 1$, $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$, calculer
$$S = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$
2. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{n} k.k!$.

Exercice 4: Calcul de sommes (Solution)

Dans cet exercice, x est un réel appartenant à $]0,1[$ et n est un entier naturel non nul. On note
$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k \text{ et } T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^k.$$

1. Rappeler la valeur de $S_n(x)$.
2. Le but des questions suivantes est de calculer $T_n(x)$ de 3 manières différentes.
   (a) **Première méthode**
      i. Montrer que $(1-x)T_n(x) = x - (n+1)x^{n+1} + xS_n(x)$.
      Pour cela, on calculera $(1-x)T_n(x)$, on séparera cette expression en deux sommes et on effectuera un changement d'indice $j = k+1$ dans la seconde.
      ii. En déduire que $T_n(x) = \dfrac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2}$.
   (b) **Deuxième méthode**
      i. Que vaut $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} 1$?
      ii. Ecrire $T_n(x)$ sous la forme d'une somme double, intervertir les sommes puis retrouver la valeur de $T_n(x)$.
   (c) **Troisième méthode**
      i. Soit f la fonction
$$f : \begin{array}{rcl}]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & S_n(x) \end{array}$$

En utilisant

d'une part, l'expression $f(x) = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \sum_{k=1}^{n} x^k$

puis d'autre part l'expression rappelée à la question 1., dériver de deux manières la fonction f.

En déduire $\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$.

ii. Retrouver la valeur de $T_n(x)$.

1.B Applications

Exercice 5: Bijection... (Solution)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, où $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

1. Étudier la fonction f et déterminer $\mathrm{Im}(f) = f(\mathbb{R})$.
2. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à préciser. Expliciter f^{-1}.

Exercice 6: Compositions d'applications (Solution)

1. Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Montrer que :
   (a) Si $g \circ f$ est injective alors f est injective.
   (b) Si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.
   (c) Si $g \circ f$ est injective et f est surjective alors g est injective.
2. Soit $f : E \to E$ une application telle que $f \circ f = f$.
   Montrer que :
   (f injective de E dans E ou f surjective de E dans E) $\iff f = id_E$.

1.C Suites

Exercice 7: Suites récurrentes linéaires (Solution)

1. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$.
   Déterminer u_n en fonction de n.
   Étudier le comportement de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $+\infty$.
2. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ telle que : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = -2u_{n+1} - 2u_n$.
   (a) Déterminer u_n en fonction de n.
   (b) Etudier u_{4n} et u_{8n+1}. Conclure quant à la nature de la suite (u_n).

Exercice 8: Suites adjacentes (Solution)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles où $0 < v_0 \leq u_0$ et

$$\forall n \geq 0, u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, \quad v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$$

1. Vérifier que : $\forall n \geq 0$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$.
2. Prouver que : $\forall n \geq 0$, $v_n \leq u_n$ et que les deux suites sont monotones.
3. Montrer que : $\forall n \geq 0$, $u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{1}{2}(u_n - v_n)$.
4. Prouver que (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite $l \in \mathbb{R}$.
5. En étudiant $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $w_n = u_n v_n$, déterminer l.

Exercice 9: Suites adjacentes (Solution)

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n)$ et $v_n = u_n - \frac{1}{n}$.

1. Montrer que pour tout réel $x > -1$, $\ln(1 + x) \leqslant x$.
2. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

Exercice 10: Suite récurrente (Solution)

Soit $u_0 \in \mathbb{R}$, et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.
Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 11: Gendarmes (Solution)

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1 + x) \leqslant x$.
2. En déduire : $\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \dfrac{k}{n^2}\right)$.

Exercice 12: Accroissements finis (Solution)

Soit $f : x \mapsto 1 - \frac{1}{2}xe^{-x}$.

1. Etudier les variations de f.
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet sur $[0,1]$ une unique solution α.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in]0,1[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0,1[$.
   (b) En majorant $|f'|$ sur $[0,1]$, et utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

1.D Dérivabilité et applications

Exercice 13: Rolle etc. (Solution)

1. Rappeler le théorème de Rolle.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$.
   On considère une fonction f continue sur $[a,+\infty[$ et dérivable sur $]a,+\infty[$ vérifiant $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(a)$.
   Le but est de montrer qu'il existe $c \in]a,+\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.
   Pour cela, on considère la fonction $g : \left[\arctan(a), \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ telle que
   $$\forall x \in \left[\arctan(a), \frac{\pi}{2}\right[, g(x) = f \circ \tan(x) \text{ et } g\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(a).$$
   Appliquer soigneusement le théorème de Rolle à la fonction g et conclure.

Exercice 14: Dérivées successives (Solution)

Soit $f :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
Monter que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathscr{C}^n(\mathbb{R})$ et qu'il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x \neq 0$ et $f^{(n)}(0) = 0$.

Exercice 15: Accroissements finis, sommes (Solution)

Soit $\alpha \in]0,1[$.
En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que
$$\forall n \geqslant 1, \frac{\alpha}{(n+1)^{1-\alpha}} \leqslant (n+1)^\alpha - n^\alpha \leq \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}.$$

En déduire la limite de $H_n = \dfrac{1}{n^\alpha}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{1-\alpha}}$ en $+\infty$.

Exercice 16: Dérivabilité, bijection (Solution)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

1. Etudier les variations de f, ses limites à l'infini et tracer l'allure de sa courbe.
2. Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = 1 - f(x)^2$.
3. Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à déterminer.
   Déterminer f^{-1}.
4. Montrer que f^{-1} est dérivable sur J et calculer $(f^{-1})'(x)$ avec $x \in J$ de deux méthodes différentes.

1.E Intégration

Exercice 17: Comparaison série/intégrale (Solution)

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k+1} \leq \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}dt \leqslant \frac{1}{k}$.
2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
   (a) Montrer que $1 + \ln\left(\dfrac{n+1}{2}\right) \leqslant u_n \leq 1 + \ln(n)$ pour tout $n \geq 1$.
   (b) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{\ln(n)} = 1$.
   En particulier que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$?

Exercice 18: Intégration par parties (Solution)

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, les intégrales :
$$I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x^2)dx \text{ et } J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx$$

1. Etude de J_n.

(a) Calculer J_1 et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leqslant J_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

(b) En déduire que (J_n) est convergente et préciser sa limite.

2. Etude de I_n.

(a) Au moyen d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{2}{n+1} J_{n+2}.$$

(b) En déduire que (I_n) est convergente et préciser sa limite.

Exercice 19: Intégrales de Wallis (Solution)

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Soit $n \geq 2$.
   (a) Montrer que $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(t)dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\sin^{n-2}(t)dt$.
   (b) A l'aide d'une intégration par parties et de la question précédente, montrer que $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$.
3. En déduire que pour tout $p \geq 0$,
   — $I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\dfrac{\pi}{2}$
   — $I_{2p+1} = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$.
4. (a) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.
   (b) En déduire que $\forall n \geq 0, I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$ et en déduire un encadrement simple de $\dfrac{I_{n+1}}{I_n}$.
   (c) Justifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{I_{n+1}}{I_n} = 1$.
5. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $nI_nI_{n-1} = \frac{\pi}{2}$.
6. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{2n}{\pi}} I_n = 1$ et donner un équivalent de I_n.

1.F Taylor et applications

Exercice 20: Prolongement (Solution)

Montrer que la fonction f définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ par

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right], f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}$$

admet un prolongement de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 21: Une intégrale classique (Solution)

Soit $x \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}dt$.

1. Soit $A > 0$, montrer qu'il existe un réel M tel que pour tout $u \in [-A, A]$,
$$|e^u - 1 - u| \leqslant Mu^2.$$
2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Montrer que
$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} + \int_0^1 e^{-x(1+t^2)}dt\right) = 0.$$
   (b) En déduire que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = -\int_0^1 e^{-x(1+t^2)}dt.$$
3. (a) Calculer $\varphi(0)$.
   (b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit
$$f(x) = \varphi(x^2) + \left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)^2.$$
   (a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer, à l'aide d'un changement de variable que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^x e^{-t^2}dt = x\int_0^1 e^{-x^2u^2}du.$$
   (c) En déduire que f est constante sur $\mathbb{R}$.
   Quelle est la valeur de cette constante ?
5. En déduire la valeur de $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt$.

1.G Séries

Exercice 22: Série télescopique (Solution)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

1. Montrer que la série télescopique $\sum(v_{n+1} - v_n)$ est convergente à l'aide d'un équivalent du terme général.
   En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
   La limite de cette suite est notée γ, appelée *contante d'Euler*.
2. En déduire que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Exercice 23: Série alternée (Solution)

En écrivant $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2n+1} = \int_0^1 t^{2n}dt$, étudier la nature de la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ et donner sa somme.

Exercice 24: Série/intégrale (Solution)

On considère la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln(n)}$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 2$, et tout $x \in [n, n+1]$
$$\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} \leqslant \frac{1}{x\ln(x)} \leqslant \frac{1}{n\ln(n)}$$
2. Montrer que pour tout $n \geq 3$,
$$\int_n^{n+1} \frac{1}{x\ln(x)} \leqslant \frac{1}{n\ln(n)} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x\ln(x)}dx.$$
3. On fixe maintenant $n \geq 3$. Donner un encadrement de $S_n = \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$.
4. A l'aide du changement de variable $u = \ln(x)$, calculer
$$I_n = \int_2^n \frac{1}{x\ln(x)}dx.$$
5. Donner un équivalent de S_n.
   Que peut-on dire de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln(n)}$?

1.H Équations différentielles

Exercice 25: (Solution)

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + y = \sin(t)$.
2. $t(1-t)y' + y = t$ (sur $I =]1; +\infty[$).

Exercice 26: (Solution)

Déterminer l'ensemble des fonctions $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ telles que
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - \int_0^x tf(t)dt = 1.$$

Exercice 27: (Solution)

Résoudre l'équation différentielle : $y'' + y' + y = 0$ puis $y'' + y' + y = t^2e^t + t$.

2 Algèbre

2.A Nombres complexes et polynômes

Exercice 28: Factorisation (Solution)

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 + z^2 + 1 = 0$.
2. En déduire une factorisation du polynôme $P = X^4 + X^2 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$, puis une factorisation de ce même polynôme P dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 29: Factorisation (Solution)

Soit $P = X^7 - 5X^6 + 8X^5 - 4X^4 - 4X^3 + 8X^2 - 5X + 1 \in \mathbb{C}[X]$.

1. Vérifiez que 1 et -1 sont racines de P.
   Précisez les multiplicités respectives α et β de 1 et -1.

2. En déduire une première factorisation :

$$P = (X-1)^{\alpha}(X+1)^{\beta}P_1$$

où P_1 est un polynôme vérifiant $P_1(1) \neq 0$ et $P_1(-1) \neq 0$ à déterminer.

3. Vérifiez que $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $P_1(z) = 0$ si et seulement si $Z = z + \frac{1}{z}$ est solution d'une équation du second degré à préciser.
4. En déduire la factorisation de P en produits de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 30: Développement (Solution)

Soit $n \geqslant 2$ un entier. On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

1. Montrer que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(X-\omega^k) = \sum_{k=0}^{n-1} X^k$.
2. En déduire que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$.

2.B Calcul matriciel

Exercice 31: Diagonalisation et puissances (Solution)

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -2 & 2 & \frac{1}{2} \\ -2 & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
2. Calculer $D = P^{-1}AP$. Que constate-t-on ?
3. En déduire A^n.
4. On dit qu'une suite de matrices $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si chacune des suites réelles de coefficients de M_n est convergente.
   A partir du calcul de A^n, étudier la convergence de la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 32: Suites récurrentes et puissances (Solution)

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2, exprimer A^2 en fonction de A et I_3.
2. En déduire que A est inversible. Exprimer A^{-1} en fonction de A et I_3.
3. Montrer qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = a_n A + b_n I_3.$$

   Trouver une relation reliant a_{n+1} et b_{n+1} à a_n et b_n.
4. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
   En déduire la valeur de a_n, b_n en fonction de n.
   Enfin, donner l'expression de A^n en fonction de n, A et I_3.

Exercice 33: Matrices nilpotentes (Solution)

On dit que $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est nilpotente s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $M^p = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$.

1. Soit B une matrice nilpotente.
   (a) Montrer que B n'est pas inversible.
   (b) Montrer que $I_n + B$ et $I_n - B$ sont inversibles et donner leurs inverses.
2. Soit A et B deux matrices nilpotentes telles que $AB = BA$.
   Montrer que AB et $A + B$ sont nilpotentes.
3. Soit B une matrice nilpotente et A une matrice inversible.
   On suppose que A est B commutent : $AB = BA$.
   Montrer que $A + B$ est inversible.

2.C Espaces vectoriels et applications linéaires

Exercice 34: Commutant (Solution)

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}(A)$ des matrices qui commutent avec A est un espace vectoriel.
2. Déterminer $\mathcal{C}(A)$ dans le cas où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.
   En donner une famille génératrice.

Exercice 35: Supplémentaires (Solution)

On considère les sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0\} \text{ et } G = \{(-\alpha, 2\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

1. Montrer que F, G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$. On donnera des bases de chacun des espaces F, G.
2. Pour tout vecteur $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on note

$$(a, b, c) = (\alpha, \beta, \gamma) + (\delta, \zeta, \epsilon) \in F \oplus G \text{ où } (\alpha, \beta, \gamma) \in F, (\delta, \zeta, \epsilon) \in G.$$

On appelle projecteur de $\mathbb{R}^3$ sur F parallèlement à G l'application

$$p : \mathbb{R}^3 \to F$$

qui à tout vecteur $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ associe $(\alpha, \beta, \gamma) \in F$.
Déterminer $p(a, b, c)$ pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 36: Famille libre (Solution)

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_k par : $\forall x \in \mathbb{R}, f_k(x) = \cos(kx)$.
Prouver par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exercice 37: Noyau et polynômes (Solution)

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. On considère les applications :

$$\begin{array}{rcl} f : E & \to & E \\ P & \mapsto & (P - P') \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g : E & \to & E \\ P & \mapsto & P + P' + \cdots + P^{(n)} \end{array}$$

1. Montrer que f et g sont des endomorphismes de E.
2. Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$.
   En déduire que f est un automorphisme de E et donner f^{-1}.

Exercice 38: Noyau et polynômes (bis) (Solution)

Soit $f : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[X]$, $P \mapsto P(X + 1) - P(X)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$.
2. Déterminer le noyau de f.

Exercice 39: Noyau, image (Solution)

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. Montrer que $\ker(f) \subset \ker(f^2)$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$.
3. Montrer que $\ker(f) = \ker(f^2) \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) \cap \ker(f) = \{\vec{0}\}$.
4. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2) \Leftrightarrow E = \mathrm{Im}(f) + \ker(f)$.

Exercice 40: Théorème du rang (Solution)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme tel que $f^2 + 3f - 4\,\mathrm{id} = 0$.

1. Montrer que $f^2 + 3f - 4\,\mathrm{id} = (f - \mathrm{id}) \circ (f + 4\,\mathrm{id}) = (f + 4\,\mathrm{id}) \circ (f - \mathrm{id})$.
2. En déduire que si $x \in E$ alors

$$y = f(x) - x \in \ker(f + 4\,\mathrm{id}) \text{ et } z = f(x) + 4x \in \ker(f - \mathrm{id}).$$

3. Montrer que $E = \ker(f - \mathrm{id}) \oplus \ker(f + 4\,\mathrm{id})$.
4. En déduire que $\mathrm{rg}(f - \mathrm{id}) + \mathrm{rg}(f + 4\,\mathrm{id}) = \dim(E)$.

Exercice 41: Changement de base (Solution)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 4.
On se donne $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base de E.
On considère l'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le rang de f, $\mathrm{Im}(f)$ et $\ker(f)$ (donner une base et la dimension de ces espaces).
2. Les espaces $\mathrm{Im}(f)$ et $\ker(f)$ sont-ils supplémentaires dans E ?
3. On note $e'_1 = e_3$, $e'_2 = f(e_3)$, $e'_3 = f^2(e_3)$ et $e'_4 = f^3(e_3)$.
   Montrer que (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4) est une base de E.
4. Donner la matrice de f dans cette base.
5. Montrer que $f^3 \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $f^4 = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

3 Probabilités

3.A Dénombrement

Exercice 42: Propriétés des coefficients binomiaux (Solution)

Démontrer les propriétés suivantes :

1. Pour tous $0 \leqslant p \leqslant n$, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ (complémentaire).
2. **Formule de Pascal :** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![1, \dots, n-1]\!]$
$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}.$$
3. Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![1, n-1]\!]$, $\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$.
4. **Double produit binomial :** Pour tous $0 \leqslant p \leqslant k \leqslant n$:
$$\binom{k}{p}\binom{n}{k} = \binom{n}{p}\binom{n-p}{k-p}.$$
Qu'obtient-on en particulier si $p = 1$? et $p = 2$?

Exercice 43: Identité de Van der Monde (Solution)

Dans cet exercice, on considère $n, m \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0, n+m]\!]$.

1. (a) Combien y-a-t-il de parties $A \subset [\![1, m+n]\!]$ de cardinal p ?
   On notera $\mathscr{A} = \{A \subset [\![1, m+n]\!] : \mathrm{Card}(A) = p\}$.
   (b) Soit $k \in [\![0, p]\!]$. On note $\mathscr{A}_k$ le nombre de parties $A \subset [\![1, m+n]\!]$ telles que k éléments de A sont choisis dans $[\![1, n]\!]$ et $p-k$ dans $[\![n+1, n+m]\!]$.
   Calculer $\mathrm{Card}(\mathcal{A}_k)$ et justifier que $\mathscr{A} = \bigcup_{k=0}^{p} A_k$.
   (c) Déduire des questions précédentes que $\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k} = \binom{m+n}{p}$.
2. L'objectif de cette question est de retrouver cette formule de manière algébrique.
   (a) Calculer $(1+X)^{m+n}$ à l'aide de la formule du binôme de Newton.
   (b) Calculer le produit $(1+X)^m(1+X)^n$ après avoir calculé chacun des facteurs $(1+X)^m$ et $(1+X)^n$ à l'aide de la formule du binôme.
   (c) Conclure.

Exercice 44: Coefficients binomiaux et sommes (Solution)

1. Soient n et p des entiers naturels tels que $p \leqslant n$. Calculer $\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Déterminer $A_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ et $B_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$.
   (b) Déterminer $S_n = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \binom{n}{2k}$ et $T_n = \sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant n} \binom{n}{2k+1}$.

3.B Combinatoire et probabilités

Exercice 45: Combinatoire et urnes (Solution)

Soit n un entier supérieur ou égal à 5.
On dispose d'une urne contenant $4n$ jetons, indiscernables au toucher, numérotés de 1 à $4n$.
Les jetons numérotés de 1 à n sont verts, les jetons numérotés de $n+1$ à $2n$ sont rouges et les jetons numérotés de $2n+1$ à $4n$ sont blancs.
L'urne contient donc n jetons verts, n jetons rouges et $2n$ jetons blancs.
On effectue n tirages successifs d'un jeton sans remise : on ne remet jamais le jeton obtenu dans l'urne après avoir effectué un tirage.
Soit $k \in [\![1, n]\!]$. On note T_k l'événement : "On obtient un jeton vert pour la première fois au tirage numéro k".
On note A l'événement : "On obtient au moins une fois un jeton vert au cours de ces n tirages".

1. Décrire l'univers Ω de cette expérience et justifier que $\mathrm{Card}(\Omega) = \frac{(4n)!}{(3n)!}$.
2. Déterminer la probabilité de l'événement $\overline{A}$ et en déduire $P(A)$.
3. (a) Montrer que $P(T_1) = \frac{1}{4}$.
   (b) Calculer $P(T_n)$.
   (c) Soit $k \in [\![2, n-1]\!]$.
      i. Justifier que $P(T_k) = \frac{n(4n-k)!(3n)!}{(3n-k+1)!(4n)!}$.
      ii. En déduire que $P(T_k) = \frac{\binom{4n-k}{n-1}}{\binom{4n}{n}}$.
      iii. Vérifier que la formule établie à la question précédente est valable pour $k = 1$ et $k = n$.

4. (a) Exprimer l'événement A en fonction des événements $T_1, T_2, \dots, T_n$.
   (b) En déduire que $P(A) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\binom{4n-k}{n-1}}{\binom{4n}{n}}$.
   (c) En déduire finalement que

$$\binom{3n}{n-1} + \binom{3n+1}{n-1} + \cdots + \binom{4n-1}{n-1} = \binom{4n}{n} - \binom{3n}{n}.$$

3.C Calculs de probabilités et variables aléatoires réelles

Exercice 46: Probabilités totales (Solution)

Un élève a le choix entre deux modes de transport pour se rendre au lycée : le bus 6 et le bus 18. Le bus 6 (resp. le bus 18) a une probabilité $a \in]0,1[$ (resp. $b \in]0,1[$) d'être en retard. Le premier jour, il prend au hasard un des deux modes de transport. Par la suite, il utilise le même que la veille si celui-ci était à l'heure. Sinon, il en change.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note S_k l'événement "l'élève prend le bus 6 le k-ième jour.

1. Calculer $P(S_k)$ en fonction de k et de a et b.
   Pour cela, on cherchera une relation liant $P(S_{k+1})$ à $P(S_k)$ à l'aide de la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements $(S_k, \overline{S_k})$.
2. Quelle est la probabilité p_k pour que le bus emprunté le k-ième soit à l'heure ?
3. Que dire de p_k lorsque k tend vers l'infini ?

Exercice 47: Probabilités totales et variable aléatoire réelle (Solution)

Soit X une variable aléatoire finie $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$. Les résultats de X sont affichés par un compteur détraqué :

- Le compteur affiche la valeur correcte de X lorsque X prend une valeur entre 1 et $n-1$.
- Le compteur affiche une valeur au hasard dans $[\![1; n-1]\!]$ lorsque X prend la valeur 0 ou n.

Soit Y la valeur affichée par le compteur.

1. Déterminer la loi de Y.
   Quelle est en moyenne la valeur affichée par le compteur ?
2. Quelle est la probabilité pour que le compteur affiche la valeur de X ?
3. On suppose que n est pair, $n = 2k$.
   Le compteur affiche la valeur k.
   Quelle est la probabilité pour que $[X = k]$ se soit effectivement réalisé ?

Exercice 48: Théorème de transfert (Solution)

Soit X une variable aléatoire de loi binomiale $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$.
Calculer l'espérance de $Y = \frac{1}{X+1}$.

SOLUTIONS TRAVAUX DIRIGÉS : Travail estival

Solution Exercice 1.

Calculons $S = 1\times 2\times 3 + 2\times 3\times 4 + \cdots + N\times(N+1)\times(N+2)$.

On écrit S avec le symbole Σ puis on développe :

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^{N} k(k+1)(k+2)\\
&= \sum_{k=1}^{N}(k^2+k)(k+2) = \sum_{k=1}^{N}(k^3+3k^2+2k)\\
&= \sum_{k=1}^{N} k^3 + 3\sum_{k=1}^{N} k^2 + 2\sum_{k=1}^{N} k\\
&= \left(\frac{N(N+1)}{2}\right)^2 + 3\times\frac{N(N+1)(2N+1)}{6} + 2\times\frac{N(N+1)}{2}\\
&= \frac{[N(N+1)]^2}{4} + \frac{N(N+1)(2N+1)}{2} + N(N+1)\\
&= N(N+1)\left(\frac{N(N+1)}{4} + \frac{(2N+1)}{2} + 1\right)\\
&= N(N+1)\left(\frac{N^2+N+4N+2+4}{4}\right) = \frac{N(N+1)}{4}(N^2+5N+6)\\
&= \frac{N(N+1)(N+2)(N+3)}{4}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{S = \frac{N(N+1)(N+2)(N+3)}{4}.}$$

□

Solution Exercice 2.

1. Calculons : $S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\min(i,j)$. On a

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} j + \sum_{j=i+1}^{n} i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i(i+1)}{2} + (n-i)i\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{i^2}{2} + \left(n+\frac{1}{2}\right)i\right) = -\frac{1}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{2n+1}{2}\frac{n(n+1)}{2}\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{4}\left(-\frac{1}{3}+1\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.
\end{aligned}$$

2. Calculons maintenant : $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\max(i,j)$.

   On a $\min(i,j)+\max(i,j) = i+j$ pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$.

   On a donc

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(\max(i,j)+\min(i,j)) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(i+j).$$

   Mais

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+j) &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} i + \sum_{j=1}^{n} j\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(ni + \frac{n(n+1)}{2}\right)\\
&= n^2(n+1).
\end{aligned}$$

   On en déduit que

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\max(i,j) &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(i+j) - \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\min(i,j)\\
&= n^2(n+1) - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)}{6}(6n-(2n+1))\\
&= \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}.
\end{aligned}$$

3. On en déduit alors : $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}|i-j|$.

   En effet, on a pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $|i-j| = \max(i,j)-\min(i,j)$ donc

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|i-j| &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(\max(i,j)-\min(i,j))\\
&= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\max(i,j) - \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\min(i,j)\\
&= \frac{n(n+1)(4n-1)}{6} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\
&= \frac{n(n+1)}{6}(4n-1-2n-1)\\
&= \frac{2n(n+1)(n-1)}{6} = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}.
\end{aligned}$$

□

Solution Exercice 3.

1. On a pour tout $k \geq 1$, $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$, (mettre sur le même dénominateur pour vérifier) ainsi,

$$
\begin{aligned}
S = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}
\end{aligned}
$$

par un argument de télescopage (ou un changement d'indice).

2. Calculons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k.k!$.

On a pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $k \times k! = (k+1-1)k! = (k+1)k! - k! = (k+1)! - k!$. On en déduit donc que

$$\sum_{k=1^n} kk! = \sum_{k=1}^{n} (k+1)! - \sum_{k=1}^{n} k! = (n+1)! - 1.$$

□

Solution Exercice 4.

1. Pour tout $x \neq 1$, on a $\boxed{S_n(x) = x\dfrac{1-x^n}{1-x}.}$

2. (a) **Première méthode :**

i. On a

$$
\begin{aligned}
(1-x)T_n(x) &= (1-x)\sum_{k=1}^{n} kx^k \\
&= \sum_{k=1}^{n} kx^k - \sum_{k=1}^{n} kx^{k+1} \\
&= \sum_{j=1}^{n} jx^j - \sum_{j=2}^{n+1} (j-1)x^j \\
&= \sum_{j=1}^{n} jx^j - \sum_{j=2}^{n+1} jx^j + \sum_{j=2}^{n} x^j \\
&= x - (n+1)x^{n+1} + \sum_{j=2}^{n+1} x^j \\
&= x - (n+1)x^{n+1} + x\sum_{j=2}^{n+1} x^{j-1} \\
&= x - (n+1)x^{n+1} + x\sum_{k=1}^{n} x^k.
\end{aligned}
$$

On en déduit que $\boxed{(1-x)T_n(x) = x - (n+1)x^{n+1} + xS_n(x).}$

ii. On substitue la valeur de $S_n(x)$ rappelée à la première question dans l'expression obtenue ci-dessus. On obtient :

$$
\begin{aligned}
(1-x)T_n(x) &= x - (n+1)x^{n+1} + x^2\frac{1-x^n}{1-x} \\
&= \frac{x(1-x) - (n+1)(1-x)x^{n+1} + x^2(1-x^n)}{1-x} \\
&= \frac{(n+1-1)x^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{1-x}.
\end{aligned}
$$

On obtient donc $\boxed{T_n(x) = \dfrac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}.}$

(b) **Deuxième méthode :**

i. On a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{\displaystyle\sum_{i=1}^{k} 1 = k.}$

ii. $T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^k = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} x^k$. On en déduit en intervertissant les sommes :

$$\begin{aligned}
T_n(x) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n} x^k = \sum_{i=1}^{n} x^i \frac{1-x^{n-i+1}}{1-x} \\
&= \frac{1}{1-x}\sum_{i=1}^{n} x^i - \frac{x^{n+1}}{1-x}\sum_{i=1}^{n} 1 \\
&= \frac{x(1-x^n)}{(1-x)^2} - \frac{nx^{n+1}}{1-x} \\
&= \frac{x(1-x^n)}{(1-x)^2} - (1-x)\frac{nx^{n+1}}{(1-x)^2}.
\end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{T_n(x) = \dfrac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(1-x)^2}}.$

(c) **Troisième méthode :**

i. On dérive dans un premier temps la fonction f en utilisant l'expression $f(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k$. On obtient

$$f'(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} x^k\right)' = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{1}{x}\sum_{k=1}^{n} kx^k = \frac{T_n(x)}{x}.$$

D'autre part, on a $f(x) = S_n(x) = x\frac{1-x^n}{1-x} = \frac{x-x^{n+1}}{1-x}$. On obtient

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(1-(n+1)x^n)(1-x)+(x-x^{n+1})}{(1-x)^2} \\
&= \frac{1-x-(n+1)x^n+(n+1)x^{n+1}+x-x^{n+1}}{(1-x)^2} \\
&= \frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}.
\end{aligned}$$

En utilisant les deux expression de $f'(x)$, on obtient :

$$\boxed{\frac{T_n(x)}{x} = \frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}}.$$

ii. On obtient par la question précédente que pour tout $x \in]0,1[$, et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{T_n(x) = \frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}}.$$

□

Solution Exercice 5.

1. f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et y est continue sur $\mathbb{R}$ par quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
Déterminons les variations de f.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par quotient de fonctions dérivables, le dénominateur ne s'annulant pas.
On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{e^x(e^x+1)-e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^2} \\
&= \frac{2e^x}{(e^x+1)^2} > 0.
\end{aligned}$$

Par conséquent la fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus :
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ car $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^x}{e^x} = 1$.
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \dfrac{0-1}{0+1} = -1$.

On en déduit que f est à valeurs dans $[-1;1]$.
Mais l'équation $f(x) = 1 \Leftrightarrow e^x - 1 = e^x + 1 \Leftrightarrow -1 = 1$ n'admet pas de solution.
De même l'équation $f(x) = -1 \Leftrightarrow 2e^x = 0$ n'admet pas de solution.
Ainsi, $f(\mathbb{R}) =]-1;1[= \mathrm{Im}(f)$.

2. On a montré à la question précédente que f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Par le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1;1[$.
Déterminons la bijection réciproque f^{-1} de f.
Pour cela, on rappelle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = y \in]-1;1[\Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

Résolvons l'équation en x $f(x) = y$. Cette équation est équivalente à

$$\begin{aligned}
e^x - 1 = y(e^x+1) &\Leftrightarrow e^x(1-y) = 1+y \\
&\Leftrightarrow e^x = \frac{1+y}{1-y}.
\end{aligned}$$

En prenant le logarithme népérien de chaque membre, on obtient

$$x = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right).$$

Ainsi, on a déterminé $f^{-1} :]-1;1[\to \mathbb{R}, y \mapsto \ln\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right)$.

□

Solution Exercice 6.

1. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$.
   (a) On suppose que $g \circ f$ est injective. Montrons que f est injective.
   Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$.
   On en déduit alors que $g(f(x)) = g(f(y))$ et donc par hypothèse $g \circ f$ injective, on obtient $x = y$.
   Par conséquent f est injective.
   (b) On suppose que $g \circ f$ est surjective. Montrons que g est surjective.
   Soit $z \in G$ quelconque.
   Par hypothèse, il existe que $x \in E$ tel que $g \circ f(x) = z$.
   Ainsi $g(f(x)) = z$ et donc en posant $y = f(x) \in F$ on a $g(y) = z$.
   On en déduit que g est surjective.
   (c) On suppose que $g \circ f$ est injective et f est surjective.
   Montrons que g est injective. Soient $y_1, y_2 \in F$ tels que $g(y_1) = g(y_2)$. Puisque f est surjective, il existe $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$.
   On obtient alors que $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$.
   Puisque $g \circ f$ est injective, on en déduit que $x_1 = x_2$.
   Mais alors en appliquant f à chaque membre de cette dernière égalité, on obtient $y_1 = f(x_1) = f(x_2) = y_2$. Ainsi, g est injective.
2. On démontre la double implication.
   $\boxed{\Leftarrow}$ Cette implication est vraie car id_E est bijective et donc est injective **et** surjective.
   Notez qu'on n'a pas utilisé l'hypothèse $f \circ f = f$ dans cette partie de la preuve.
   $\boxed{\Rightarrow}$
   * Supposons que f est injective. Montrons que $f = id_E$.
   Soit $x \in E$ quelconque. On a $f(f(x)) = f(x)$ et donc $f(x) = x$ par injectivité de f. Ainsi $f = id_E$.
   * Supposons maintenant que f est surjective. Soit $y \in E$ quelconque. Puisque f est surjective il existe $x \in E$ tel que $x \in E, y = f(x)$.
   Mais alors, $f(y) = f(f(x)) = f(x) = y$.
   On en déduit donc que $f(y) = y$ pour tout $y \in E$ et donc $f = id_E$.

   On a donc démontré sous l'hypothèse $f \circ f = f$ que si f est injective **ou** si f est surjective alors f est l'application identité.

□

Solution Exercice 7.

1. L'équation caractéristique de cette suite récurrente linéaire d'ordre 2 est $x^2 - 6x + 9$ dont le discriminant vaut $\Delta = 36 - 4 \times 9 = 0$.
   Ainsi, cette équation possède une unique solution $x = \frac{6}{2} = 3$.
   On en déduit qu'il existe des réels A, B tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $u_n = (A + Bn)3^n$.
   On détermine les réels A et B en utilisant les premiers termes de la suite $u_0 = 2, u_1 = 3$.
   On obtient le système :
   $$\left\{\begin{array}{rcl} A & = & 2 \\ 3(A+B) & = & 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} A & = & 2 \\ B & = & -1 \end{array}\right.$$
   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (2-n)3^n = n3^n(\frac{2}{n} - 1)$ donc $\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$ par produit de limites.
2. (a) On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ telle que : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = -2u_{n+1} - 2u_n$.
   L'équation caractéristique est $x^2+2x+2 = 0$ avec $\Delta = 4-8 = -4 = (2i)^2$.
   Les solutions de cette équation sont donc les complexes conjugués :
   $$\lambda = \frac{-2-2i}{2} = -1 - i \text{ et } \bar{\lambda}$$
   dont le module vaut $\sqrt{2}$. On obtient donc $\lambda = \sqrt{2}e^{\frac{5i\pi}{4}}$.
   On en déduit qu'il existe des réels A et B tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$u_n = \sqrt{2}^n \left(A\cos\left(\frac{5n\pi}{4}\right) + B\sin\left(\frac{5n\pi}{4}\right)\right).$$
   On a $u_0 = 0 \Rightarrow A = 0$. De plus, $u_1 = 1 \Rightarrow B = -1$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
   $$\boxed{u_n = \sqrt{2}^n \sin\left(\frac{5n\pi}{4}\right).}$$
   (b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.
   En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$u_{4n} = \sqrt{2}^n \sin(5n\pi) = 0.$$
   D'autre part pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
   $$u_{8n+1} = \sqrt{2}^{8n+1} \sin(10n\pi + \frac{5\pi}{4}) = \sin\left(2(5n)\pi + \frac{5\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$
   Par conséquent la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède deux sous-suites convergentes (car constantes !) vers des limites distinctes $0 \neq -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

□

Solution Exercice 8.

1. L'assertion se prouve par récurrence sur n. La propriété est vraie au rang 0. Si la propriété est vraie au rang n alors clairement u_{n+1} et $v_{n+1} > 0$.
2. L'assertion se prouve par récurrence sur n. La propriété est vraie au rang 0 par définition des suites. On suppose la propriété vraie au rang. Alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} - v_{n+1} &= \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \\ &= \frac{u_n^2 + v_n^2 + 2u_n v_n - 4u_n v_n}{2(u_n + v_n)} \\ &= \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)} \geq 0. \end{aligned}$$

   Par conséquent pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq v_n$.
   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \leqslant \frac{u_n + u_n}{2} = u_n.$$

   La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} - v_n = \frac{2u_n v_n - u_n v_n - v_n^2}{u_n + v_n} = \frac{u_n v_n - v_n^2}{u_n + v_n} \geq \frac{v_n^2 - v_n^2}{u_n + v_n} \geq 0.$$

3. On a $u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)} \leqslant \dfrac{(u_n - v_n)(u_n + v_n)}{2(u_n + v_n)} \leqslant \dfrac{u_n - v_n}{2}$.
4. On déduit (par récurrence, à rédiger) des question précédentes que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n - v_n \leqslant \frac{1}{2^n}(u_0 - v_0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

   On conclut que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes donc convergent vers une même limite $l \in \mathbb{R}$. Notons que $l \geq 0$ car pour tout $n \in \mathbb{N}$,$u_n \geqslant 0$ et $v_n \geqslant 0$.
5. La suite (w_n), $w_n = u_n v_n$ est constante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} = u_n v_n = w_n.$$

   Par conséquent $u_0 v_0 = u_n v_n \to l^2$.
   On en déduit que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes, de même limite $l = \sqrt{u_0 v_0}$.

□

Solution Exercice 9.

1. Pour tout $x > -1$, on a $\ln(1+x) \leqslant x$.
   En effet, posons $f(x) = x - \ln(1+x)$.
   Alors $f : x \mapsto f(x)$ est définie sur $]-1, +\infty[$ et dérivable sur cet intervalle par composition.
   Pour tout $x > -1$, $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} \geq 0 \iff x \geq 0$.
   Ainsi f est décroissante sur $]-1, 0]$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$.
   De plus, $f(0) = 0$ et $\lim_{\substack{x\to-1 \\ x>-1}} f(x) = +\infty = \lim_{x\to+\infty} f(x)$.
   On en conclut que $\forall x \in]-1, +\infty[, f(x) \geq 0$.
2. <u>(u_n) est décroissante :</u> Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned} u_n - u_{n+1} &= -\frac{1}{n+1} - \ln(n) + \ln(n+1) = -\frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= -\frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = -\frac{1}{n+1} - \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right). \end{aligned}$$

   En appliquant l'inégalité $\ln(1+x) \leqslant x$ avec $x = -\dfrac{1}{n+1} > -1$, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n - u_{n+1} \geq 0$.
   $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   <u>(v_n) est croissante :</u>
   En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq 0. \end{aligned}$$

   <u>Etude de $u_n - v_n$:</u>
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n - v_n = \frac{1}{n}$ est positive et tend vers 0.
   Les suites (u_n) et (v_n) sont donc adjacentes et convergent donc vers un même réel $\gamma \in \mathbb{R}$.
   Notons que $v_2 = u_2 - \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} - \ln(2) - \frac{1}{2} = 1 - \ln(2) > 0$.
   Or (v_n) est une suite croissante, donc sa limite $\gamma \geq v_2 > 0$.
   On en déduit que $\gamma > 0$.

□

Solution Exercice 10. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = x(1-x)$.
f est strictement croissante sur $]-\infty, \frac{1}{2}]$, strictement décroissante sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$.
On a $f(]-\infty, 0[) =]-\infty, 0[$, $f([0,1]) = [0, \frac{1}{4}]$ et $f(]1, +\infty[) =]0, +\infty[$.
D'autre part, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leqslant 0$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
La convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dépend du premier terme u_0.

- On suppose $u_0 < 0$.
  On sait que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
  D'autre part, montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non minorée.
  Sinon $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergerait vers un réel $\ell \leqslant u_0 < 0$.
  Mais alors, en passant à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtiendrait par continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}$:
  $$\ell = f(\ell) \iff \ell = \ell - \ell^2 \Leftrightarrow \ell = 0$$
  ce qui est une contradiction car $\ell < 0$.
  Conclusion : si $u_0 < 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et non minorée donc diverge vers $-\infty$.
- Si $u_0 = 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 0.
- Si $u_0 \in]0,1[$ alors (u_n) est strictement décroissante et minorée (par 0) donc converge vers un réel $0 \leqslant \ell < u_0 < 1$.
  Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 unique solution de l'équation $f(\ell) = \ell$.
- Si $u_0 = 1$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire égale à 0 à partir du rang 1.
- Si $u_0 > 1$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n < 0$ car $f(]1, +\infty[) \subset]0, +\infty[$.
  Par conséquent la suite n'est pas minorée, sinon elle convergerait vers un réel $\ell \leqslant u_1 < 0$ (même raisonnement qu'au premier point).
  Dans ce cas, la suite diverge vers $-\infty$.

□

Solution Exercice 11.

1. La fonction $f : x \mapsto x - \ln(1+x)$ est dérivable sur $[0; +\infty[$.
   Pour tout $x \geqslant 0$, on a
   $$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \geq 0 \iff x \geqslant 0.$$
   Ainsi f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
   Or $f(0) = 0$.
   Donc $\forall x \geq 0, f(x) \geq f(0) = 0$ i.e. $x \geq \ln(1+x)$.
   D'autre part $g : x \mapsto \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.
   Pour tout $x \geqslant 0$, on a
   $$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{1}{1+x} - (1-x) = \frac{1 - 1 + x^2}{1+x} = \frac{x^2}{1+x} \geqslant 00.$$
   Par conséquent g est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
   Or $g(0) = 0$ donc $\forall x \geq 0, g(x) \geq g(0) = 0$ i.e.
   $$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x).$$

   Remarques

   On peut procéder autrement (c'est en général cette version que l'on préférera).
   On applique la formule de Taylor avec reste intégrale à l'ordre 2 à la fonction $h : x \mapsto \ln(1+x)$ entre 0 et x (h est de classe $\mathscr{C}^2$ $[0; +\infty[$) :
   $$h(x) = h(0) + xh'(0) + \int_0^x h^{(2)}(t)\frac{(x-t)^2}{2!}dt$$
   $$h(x) = x - \underbrace{\int_0^x \frac{1}{(1+t)^2}\frac{(x-t)^2}{2}dt}_{\geqslant 0} \leqslant x$$
   Si on applique la formule à l'ordre 3 :
   $$h(x) = h(0) + xh'(0) + \frac{x^2}{2}h''(0) + \int_0^x h^{(3)}(t)\frac{(x-t)^3}{3!}dt$$
   $$h(x) = x - \frac{x^2}{2} + \underbrace{\int_0^x \frac{2}{(1+t)^3}\frac{(x-t)^3}{6}dt}_{\geqslant 0} \geqslant x - \frac{x^2}{2}.$$
   On en conclut que pour tout $x \geqslant 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leqslant h(x) \leqslant x$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
   $$\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$$
   ainsi en utilisant la première question :
   $$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4}\right) \leq \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)\right) \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}.$$

On obtient en calculant les sommes des extrémités de l'inégalité précédente :

$$\frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^4} \leq \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right) \leq \frac{n(n+1)}{2}.$$

On a $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^4} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$.
Par le théorème des gendarmes, on en déduit que

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{2}.$$

Puisque la fonction exponentielle est continue en $\frac{1}{2}$, on trouve par composition des limites :

$$\boxed{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right) = \sqrt{e}.}$$

□

***Solution Exercice** 12.*

1. La fonction f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ par produit de telles fonctions.
   On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}x(-e^{-x}) = \frac{1}{2}e^{-x}(x-1)$.
   Par conséquent la fonction f est strictement croissante sur $[1,+\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty,1]$ car $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x-1 \geq 0$ par positivité de la fonction exponentielle.
2. La fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ est continue sur $[0,1]$ par somme de telles fonctions.
   De plus $g(0) = f(0) - 0 = 1 > 0$ et
   $f(1) - 1 = 1 - \frac{1}{2}e^{-1} - 1 = -\frac{1}{2e} < 0$.
   Par conséquent le théorème des valeurs intermédiaires montre qu'il existe une solution à l'équation $g(x) = f(x) - x = 0$ dans $]0,1[$.
   Cette solution est unique car la fonction g est strictement décroissante sur $[0,1]$.
   En effet pour tout x dans cet intervalle, on a $g'(x) = f'(x) - 1$.
   Par conséquent

   $$\begin{aligned} g'(x) < 0 &\Leftrightarrow f'(x) < 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}e^{-x}(x-1) < 1 \\ &\Leftrightarrow (x-1) < 2e^{x}. \end{aligned}$$

   Or puisque $x \in [0,1]$, on a $x - 1 \leq 0$ tandis que $2e^x > 0$.
   Comme annoncé $g'(x) < 0$ pour tout $x \in [0,1]$.
   On en déduit, g étant strictement décroissante, qu'elle admet au plus un zéro dans $[0,1]$.
   Puisqu'elle en admet au moins un, on en déduit que ce zéro est unique !
   On a donc montré que l'équation $f(x) = x$ admet exactement une solution dans $[0,1]$ notée α.
3. (a) La fonction f est strictement décroissante et continue sur $[0,1]$.
   De plus, on a a $f(0) = 1$, $f(1) = 1 - \frac{1}{2e} < 1$.
   Par conséquent, $f(]0,1[) \subset]\frac{1}{2e}, 1[\subset]0,1[$.
   On montre alors aisément par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $u_n \in]0,1[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (b) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)|$.
   Or la fonction f est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$.
   De plus, pour tout $x \in]0,1[$, on a $|f'(x)| = \left|\frac{1}{2}e^{-x}(x-1)\right| \leq \frac{1}{2}$.
   L'inégalité des accroissements finis donne alors pour tout $(a,b) \in]0;1[^2$:

   $$|f(b) - f(a)| \leqslant \frac{1}{2}|b-a|.$$

   On en déduit par l'inégalité des accroissements finis que

   $$|u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|.$$

   Par récurrence immédiate (écrivez-là), on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

   $$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}|u_0 - \alpha|.$$

   Par comparaison, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha$ car la suite $(\frac{1}{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$, en progression géométrique de raison $\frac{1}{2} \in]-1;1[$, converge vers 0.

□

***Solution Exercice** 13.*

1. Soit f une fonction continue sur un segment $[a;b]$ avec $a < b$.
   On suppose que f est dérivable sur $]a;b[$.
   On suppose de plus que $f(a) = f(b)$.
   Alors il existe $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = 0$.
2. • La fonction g est continue sur $\left[\arctan(a), \frac{\pi}{2}\right]$ car :
   — la fonction g est continue sur $\left[\arctan(a), \frac{\pi}{2}\right[$ par composition :
   En effet, la fonction tan est continue sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et on a

   $$\arctan(a) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\quad \text{et} \quad \tan\left(\left[\arctan(a), +\frac{\pi}{2}\right[\right) = [a,+\infty[$$

   et f est continue sur $[\arctan(a);+\infty[$.

— et g est continue en $\frac{\pi}{2}$:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} g(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f\circ\tan(x) = \lim_{X\to+\infty} f(X) = f(a) = g\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

par composition des limites.

• La fonction $g = f\circ\tan$ est dérivable sur $\left]\arctan(a), \frac{\pi}{2}\right[$ par composition de la fonction tan dérivable sur $\left]\arctan(a), +\frac{\pi}{2}\right[$ et de la fonction f dérivable sur $]a, +\infty[$ avec $\tan\left(\left]\arctan(a), +\frac{\pi}{2}\right[\right) \subset]a, +\infty[$.

• Enfin, on a $g(\arctan(a)) = f\circ\tan(\arctan(a)) = f(a)$ et $g(\frac{\pi}{2}) = f(a)$.

Ainsi, par le théorème de Rolle appliqué à la fonction g, il existe $b \in \left]\arctan(a), \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $g'(b) = 0$.

Mais pour tout $x \in]\arctan(a), \frac{\pi}{2}[$, on a

$$g'(x) = \tan'(x)f'(\tan x) = (1+\tan^2(x))f'(\tan(x)),$$

par conséquent $g'(b) = 0 = \underbrace{(1+\tan^2(b))}_{\neq 0} f'(\tan(b))$.

Puisque $b \in]\arctan(a), \frac{\pi}{2}[$ alors $c = \tan(b) \in]a, +\infty[$ vérifie

$$f'(\tan(b)) = f'(c) = 0.$$

D'où le résultat.

□

***Solution Exercice** 14.* On définit la propriété à démontrer par récurrence $HR(n)$: "La fonction est dans $\mathscr{C}^n(\mathbb{R})$ et il existe un polynôme P_n tel que $f^{(n)}(x) = P_n(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}, \forall x \neq 0$ et $f^{(n)}(0) = 0$".

• $HR(0)$ est vraie. En effet, f est continue sur $\mathbb{R}^*$ et $\lim\limits_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0 = f(0)$.

Ainsi f est continue sur $\mathbb{R}$ et $P_0 = 1$ convient.

• $HR(n) \Rightarrow HR(n+1)$: Supposons la propriété vraie pour un certain rang n et montrons qu'elle est encore vraie au rang $n+1$.

Par hypothèse de récurrence, la fonction f est donc de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et il existe un polynôme P_n tel que pour tout $x \neq 0$,

$$f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}} \quad \text{et } f^{(n)}(0) = 0.$$

• La fonction f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}^*$.

En effet, la fonction $f^{(n)}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ par produit et composition de telles fonctions et on a pour tout $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}\right)' = \left(P_n\left(\frac{1}{x}\right)\right)' e^{-\frac{1}{x^2}} + P_n\left(\frac{1}{x}\right)\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}} \\ &= -\frac{1}{x^2}P_n'\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}} + P_n\left(\frac{1}{x}\right)\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}} \\ &= e^{-\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{1}{x^2}P_n'\left(\frac{1}{x}\right) + P_n\left(\frac{1}{x}\right)\frac{2}{x^3}\right). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\forall x \neq 0, f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}$$

en posant $P_{n+1}(X) = -X^2P_n' - 2X^3P_n$.

• La fonction $f^{(n)}$ est dérivable en 0. En effet, pour tout $x \neq 0$:

$$\frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x - 0} = \frac{1}{x}P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}$$

où $P_n(X) \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme dont l'existence est assurée par $HR(n)$.

De plus pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^k}e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{X\to\infty} X^{\frac{k}{2}}e^{-X} = 0$$

par croissances comparées (on a traité les deux cas $x \to 0^+$ et $x \to 0^-$ simultanément).

On en déduit que $f^{(n)}$ est dérivable en 0 et que $f^{(n+1)}(0) = 0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}} = \sum_{i=0}^{d}\alpha_i\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{i+1}}e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

par somme de limites (on a noté $P_n(X) = \sum\limits_{i=0}^{d}\alpha_iX^i$).

• $f^{(n+1)}$ est continue en 0.

On a $\lim\limits_{x\to 0} f^{(n+1)}(x) = 0$ car par croissances comparées comme ci-dessus :

$$\lim_{x\to 0^+} f^{(n+1)}(x) = \lim_{X\to+\infty} P_{n+1}(X)e^{-X^2} = 0,$$

$$\lim_{x\to 0^-} f^{(n+1)}(x) = \lim_{X\to-\infty} P_{n+1}(X)e^{-X^2} = 0.$$

On en déduit que $f^{(n+1)}$ est continue en 0.

Puisque $f^{(n)}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on en conclut que f est de classe $\mathscr{C}^{(n+1)}$.

Par principe de récurrence, on en déduit que f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ avec $f^{(n)}(0) = 0$. □

Solution Exercice 15. Soit $f : x \mapsto x^\alpha$.

La fonction f est continue sur $[n, n+1]$ et dérivable sur $]n, n+1[$.

On a pour tout $x > 0$, $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

Ainsi, pour tout $n \geqslant 1$, le théorème des accroissements finis donne :

$$(n+1)^\alpha - n^\alpha = f(n+1) - f(n) = (n+1-n)f'(c) = \frac{\alpha}{c^{1-\alpha}}$$

pour un certain $c \in]n, n+1[$.

Mais $c \in]n, n+1[\Longrightarrow \dfrac{1}{c^{1-\alpha}} \in \left]\dfrac{1}{(n+1)^{1-\alpha}}, \dfrac{1}{n^{1-\alpha}}\right[$ par décroissance de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^{1-\alpha}}$ sur $\mathbb{R}_+$ ($\alpha \in]0; 1[$).

On obtient

$$\frac{\alpha}{(n+1)^{1-\alpha}} \leq (n+1)^\alpha - n^\alpha \leqslant \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}.$$

On somme la première inégalité pour $n \in [\![1, N-1]\!]$, il vient par télescopie :

$$\sum_{n=1}^{N-1} \frac{\alpha}{(n+1)^{1-\alpha}} \leqslant N^\alpha - 1 \text{ soit } \sum_{n=2}^{N} \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}} \leqslant N^\alpha - 1.$$

En sommant la seconde inégalité pour $n \in [\![1, N]\!]$, il vient :

$$(N+1)^\alpha - 1 \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}.$$

En combinant ces deux inégalités, et en prenant garde d'ajouter le terme d'indice $n = 1$ dans la première inégalité, on trouve :

$$(N+1)^\alpha - 1 \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}} \leqslant N^\alpha - 1 + \alpha$$

On obtient en divisant par N^α :

$$\frac{(N+1)^\alpha - 1}{N^\alpha} \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}} \leqslant \frac{N^\alpha - 1 + \alpha}{N^\alpha}.$$

Chaque extrémité dans cet encadrement converge vers 1, on en déduit

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N^\alpha} \sum_{n=1}^{N} \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}} = 1 \text{ i.e. } \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N^\alpha} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{1-\alpha}} = \frac{1}{\alpha}.$$

□

Solution Exercice 16.

1. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ quotient de telles fonctions dont le dénominateir ne s'annule pas.

   On a de plus pour tout $x \in \mathbb{R}$,

   $$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} \\ &= \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} > 0. \end{aligned}$$

   La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

   On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

   $$f(x) = \frac{e^x}{e^x} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^x}{e^x} = 1.$$

   Ainsi, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

   On trouve de manière analogue : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{-1}{1} = -1$.

2. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$.

   Par ailleurs

   $$\begin{aligned} f(x)^2 &= \frac{(e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} \\ &= \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{e^{2x} + 2 + e^{-2x}} \end{aligned}$$

   Par conséquent

   $$\begin{aligned} 1 - f(x)^2 &= \frac{(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{(e^x + e^{-x})^2} \\ &= \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} = f'(x). \end{aligned}$$

3. f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

   La fonction f réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] - 1, 1[$.

   Déterminons sa bijection réciproque $f^{-1} :] - 1, 1[\to \mathbb{R}$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

   $$y = f(x) \in] - 1, 1[\Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned}
y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\
&\Leftrightarrow (e^x + e^{-x})y = e^x - e^{-x} \\
&\Leftrightarrow e^x(y-1) = -e^{-x}(y+1) \\
&\Leftrightarrow e^{2x} = \frac{1+y}{1-y} \\
&\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}
\end{aligned}$$

Par conséquent, la bijection réciproque de f est la fonction :

$$f^{-1} :]-1,1[\to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

4. **Première méthode :** On a montré que $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$ pour tout $x \in]-1,1[$. Par conséquent f^{-1} est dérivable comme composée de fonction dérivable sur $]-1,1[$ et on a

$$\begin{aligned}
(f^{-1})'(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{(1-x)-(-1)(1+x)}{(1-x)^2}\right)\frac{1-x}{1+x} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{(1-x)^2}\right)\frac{1-x}{1+x} \\
&= \frac{1}{1-x^2}
\end{aligned}$$

Seconde méthode : La fonction f est continue et strictement croissante. De plus, pour tout $x \in]-1,1[$, on a $f'(f^{-1}(x)) = 1 - f^2(f^{-1}(x)) = 1 - x^2$ qui ne s'annule pas sur $]-1,1[$. Par conséquent f^{-1} est dérivable sur $]-1,1[$ et on a pour tout $x \in]-1,1[$:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{1-[f(f^{-1}(x))]^2} = \frac{1}{1-x^2}.$$

□

***Solution Exercice** 17.*

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

Idée (faites un dessin) : L'intégrale $A = \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}dt$ est l'aire sous la courbe de la fonction inverse sur $[k, k+1]$.

Cette aire A est inférieure à l'aire du rectangle de coté 1 et de hauteur $\frac{1}{k}$.
De même A est supérieure à l'aire du rectangle de coté 1 et de hauteur $\frac{1}{k+1}$.
On en déduit que

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}dt \leq \frac{1}{k}.$$

Rigoureusement : la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc sur $[k; k+1]$ donc par croissance de l'intégrale :

$$\begin{aligned}
k \leqslant t \leqslant k+1 &\Longrightarrow \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k} \\
&\Longrightarrow \int_k^{k+1} \frac{dt}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}dt \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{k}.
\end{aligned}$$

On obtient bien :

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}dt \leq \frac{1}{k}.$$

2. (a) On déduit de la double inégalité précédente que pour tout $n \geq 2$ et pour tout $k \in [\![2, n]\!]$,

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t}dt \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}dt$$

Soit $n \geq 2$, on a $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

On somme la double inégalité précédente pour k variant entre 2 et n :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{t}dt \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}dt \\
&\Longrightarrow \int_2^{n+1} \frac{1}{t}dt \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \int_1^{n} \frac{1}{t}dt \\
&\Longrightarrow \ln\left(\frac{n+1}{2}\right) \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n) \\
&\Longrightarrow 1 + \ln\left(\frac{n+1}{2}\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n).
\end{aligned}$$

On obtient pour tout $n \geq 2$:

$$\boxed{1 + \ln\left(\frac{n+1}{2}\right) \leqslant u_n \leq 1 + \ln(n).}$$

Cette double inégalité est également valable pour $n = 1$.

(b) Soit $n \geq 2$. Dans ce cas $\ln(n) > 0$ et il vient en divisant la double inégalité démontrée à la question précédente par $\ln(n)$:

$$\frac{1}{\ln(n)} + \frac{\ln(\frac{n+1}{2})}{\ln(n)} \leqslant \frac{u_n}{\ln(n)} \leqslant \frac{1}{\ln(n)} + 1.$$

On a

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(\frac{n+1}{2})}{\ln(n)} &= \frac{\ln(n+1) - \ln(2)}{\ln(n)} \\
&= \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} - \frac{\ln(2)}{\ln(n)} \\
&= \frac{\ln\left(n(1+\frac{1}{n})\right)}{\ln(n)} - \frac{\ln(2)}{\ln(n)} \\
&= \frac{\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} - \frac{\ln(2)}{\ln(n)} \\
&= 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} - \frac{\ln(2)}{\ln(n)}
\end{aligned}$$

et cette quantité converge vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
On en déduit alors que les deux extrémités de l'inégalité précédente tendent vers 1. Par le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\ln(n)} = 1$: $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(n)$.

Ainsi, la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ diverge vers $+\infty$ de même que $\ln(n)$.

□

Solution Exercice 18.

1. Etude de $J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}$.

(a) La fonction $x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$ est continue donc J_1 existe.

On a $J_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\left[\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\ln(2)}{2}$.

Soit maintenant $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto \dfrac{x^n}{1+x^2}$ est continue et positive sur $[0,1]$.
Donc l'intégrale J_n existe.

Par ailleurs puisque pour tout $x \in [0,1]$, on a $\dfrac{x^n}{1+x^2} \leqslant x^n$.

On obtient par croissance de l'intégrale :

$$0 \leqslant J_n \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}\left[x^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

(b) On obtient par le théorème d'encadrement que $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $x \mapsto x^n \ln(1+x^2)$ est continue sur $[0,1]$ donc l'intégrale I_n existe.
On pose

$$u(x) = \ln(1+x^2), \quad u'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

$$v'(x) = x^n, \quad v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Les fonction u, v ainsi définies sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.
On obtient par intégration par parties que

$$\begin{aligned}
I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x^2)dx &= \left[\frac{\ln(1+x^2)x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\frac{x^{n+1}}{n+1} \\
&= \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{2}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x^2} \\
&= \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{2}{n+1}J_{n+2}.
\end{aligned}$$

La suite (I_n) est donc convergente de limite nulle par somme et produit, car $\lim\limits_{n\to+\infty} J_{n+2} = \lim\limits_{\to+\infty} J_n = 0$.

□

Solution Exercice 19.

1. On pose $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)dt = [-\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

2. On suppose $n \geq 2$, on a

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\sin^{n-2}(t)dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2(t))\sin^{n-2}(t)dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(t)dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\sin^{n-2}(t)dt.
\end{aligned}$$

On effectue une intégration par parties dans la seconde intégrale ci-dessus, on pose :

$$u(t) = \cos(t), u'(t) = -\sin(t)$$

$$v'(t) = \cos(t)\sin^{n-2}(t), v(t) = \frac{1}{n-1}\sin^{n-1}(t)$$

Les fonctions u, v ainsi définies sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
Par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_n &= I_{n-2} - \left(\left[\frac{1}{n-1} \cos(t) \sin^{n-1}(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt \right) \\ &= I_{n-2} - \frac{1}{n-1} I_n. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{n}{n-1} I_n = I_{n-2} \Longrightarrow I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

3. • On commence par traiter le cas où n est pair $n = 2p, p \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned} I_{2p} &= \frac{2p-1}{2p} I_{2p-2} \\ &= \frac{2p-1}{2p} \frac{2p-3}{2p-2} I_{2p-4} \\ &= \cdots = \frac{2p-1}{2p} \frac{2p-3}{2p-2} \cdots \frac{1}{2} I_0 \\ &= \frac{(2p-1)(2p-3)\ldots 1}{2p(2p-2)\ldots 2} \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{2p(2p-1)(2p-2)(2p-3)(2p-4)\ldots 2 \times 1}{[2p(2p-2)\ldots 2][2p(2p-2)\ldots 2]} \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Le calcul précédent peut être justifié de manière plus rigoureuse en faisant un raisonnement pas récurrence (faites-le) pour démontrer cette formule en utilisant la relation de récurrence obtenue à la question 1. ci-dessus. Cette version a l'avantage de proposer une manière de conjecturer la formule donnée dans l'énoncé.

• Si $n = 2p+1, p \in \mathbb{N}$ on obtient

$$\begin{aligned} I_{2p+1} &= \frac{2p}{2p+1} I_{2p-1} \\ &= \frac{2p}{2p+1} \frac{2p-2}{2p-1} I_{2p-3} \\ &= \cdots = \frac{2p}{2p+1} \frac{2p-2}{2p-1} \cdots \frac{2}{1} I_1 \\ &= \frac{2^p p! [2p(2p-2)\ldots 2]}{(2p+1)2p(2p-1)\ldots 1} \\ &= \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}. \end{aligned}$$

On peut faire la même remarque que ci-dessus.

4. On a pour tout $n \geq 0$,

$$I_n - I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^n(t) - \sin^{n+1}(t)) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)(1 - \sin(t)) dt \leq 0$$

comme intégrale d'une fonction négative sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ (borne dans l'ordre croissant).
Par conséquent, la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
Puisque $\sin^n(t) \geqslant 0$ pour tout $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$, on obtient $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt \geqslant 0$.
$(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante et minorée par 0 donc convergente.
On a en outre par croissance que pour tout $n \geq 0$,

$$\frac{n+1}{n+2} = I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n \Rightarrow \frac{I_{n+2}}{I_n} \leqslant \frac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1,$$

donc par le théorème des gendarmes, le quotient $\frac{I_{n+1}}{I_n}$ converge vers 1.

5. On a pour tout $p \geq 1$,

$$\begin{aligned} 2p I_{2p} I_{2p-1} &= 2p \frac{(2p)!}{2^{2p} p!^2} \frac{2^{2(p-1)}(p-1)!^2}{(2p-1)!} \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{1}{4} \frac{(2p)(2p)}{p^2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

De même, on a pour tout $p \geq 0$,

$$\begin{aligned} (2p+1) I_{2p+1} I_{2p} &= (2p+1) \frac{2^{2p} p!^2}{(2p+1)!} \frac{\pi}{2} \frac{(2p)!}{2^{2p} p!^2} \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $n I_n I_{n-1} = \frac{\pi}{2}$ i.e.

$$\frac{2n}{\pi} I_n I_{n-1} = 1.$$

6. Pour conclure, notons que pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2n}{\pi}} I_n &= \sqrt{\frac{2n}{\pi}} \sqrt{I_n} \sqrt{I_n} \sqrt{\frac{I_{n-1}}{I_{n-1}}} \\ &= \sqrt{\frac{2n}{\pi} I_n I_{n-1}} \sqrt{\frac{I_n}{I_{n-1}}} \\ &= \sqrt{\frac{I_n}{I_{n-1}}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1. \end{aligned}$$

On obtient : $I_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

$\square$

Solution Exercice 20. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ comme somme d'inverses de telles fonctions ne s'annulant pas sur cet intervalle.

— **Prolongement continu** : on calcule $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
Pour tout $x \neq 0$:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} = \frac{\sin(x) - x}{x\sin(x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) - x}{x\sin(x)}$$
$$\underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^3}{6x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

On considère alors $g : [0; \frac{\pi}{2}]$ définie par $g(0) = 0$ et $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in]0; \frac{\pi}{2}]$.
Ainsi définie, g est un prolongement continu de f.

— Montrons que g est dérivable en 0. Pour tout $x \neq 0$:

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{1}{x}\left(\frac{\sin(x) - x}{x\sin(x)}\right) = \frac{\sin(x) - x}{x^2\sin(x)}$$
$$\underset{x\to 0}{=} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) - x}{x^2\sin(x)} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^3}{6x^3} = -\frac{1}{6}.$$

On en déduit que g est dérivable en 0 et que $g'(0) = 0$.

— g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0; \frac{\pi}{2}]$ par quotients de telles fonctions, le dénominateur ne s'annulant pas.

— Montrons que $g'(x)$ admet une limite finie en 0 égale à $g'(0) = -\frac{1}{6}$.
On en déduira que g' est continue en 0 et en combinant avec ce qui précède, on conclura que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.
Pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{\cos(x)}{\sin(x^2)} = \frac{x^2\cos(x) - \sin^2(x)}{x^2\sin^2(x)}.$$

On écrit au voisinage de 0,

$$x^2\cos(x) - \sin^2(x) \underset{x\to 0}{=} x^2\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2$$
$$\underset{x\to 0}{=} x^2 - \frac{x^4}{2} - x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^4)$$
$$\underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{6}x^4 + o(x^4) \sim_0 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{6}x^4.$$

De plus, $x^2\sin^2(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^4$ d'où $g'(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{6}$.
Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0} g'(x) = -\dfrac{1}{6}$.
En conclusion : la fonction g est un prolongement de classe $\mathscr{C}^1$ de f sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.

$\square$

Solution Exercice 21. Soit $x \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}dt$.

1. Soit $A > 0$ et $u \in [-A, A]$.
On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 à la fonction exp entre $a = 0$, $b = u$.
La fonction exp est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, u]$ (ou $[u, 0]$ suivant le signe de u)
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$, $\exp^{(k)}(x) = e^x$.
On obtient :
$$|e^u - 1 - u| \leqslant M\frac{(u-0)^2}{2!}$$
où M est un majorant de $t \mapsto |\exp^{(2)}(t)| = e^t$ sur $[0; u]$ (ou $[u; 0]$).
$M = e^A$ convient car $u \in [-A; A]$.
Conclusion : il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $u \in [-A, A]$,
$$|e^u - 1 - u| \leqslant Mu^2.$$

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On a pour tout $h \neq 0$,
$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} + \int_0^1 e^{-x(1+t^2)}dt$$
$$= \int_0^1 \frac{e^{-(x+h)(1+t^2)} - e^{-x(1+t^2)} + h(1+t^2)e^{-x(1+t^2)}}{h(1+t^2)}dt$$
$$= \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{h(1+t^2)}\left(e^{-h(1+t^2)} - 1 + h(1+t^2)\right)dt$$

Si $h \in [-1, 1] \setminus \{0\}$, on a $u = -h(1+t^2) \in [-2, 2]$ pour tout $t \in [0; 1]$.
Par la question précédente (avec $A = 2$) il existe $M \geq 0$ tel que

$$\Delta_h := \left|\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} + \int_0^1 e^{-x(1+t^2)}dt\right|$$
$$\leq \int_0^1 \left|\frac{e^{-x(1+t^2)}}{h(1+t^2)}\right| \left|e^{-h(1+t^2)} - 1 + h(1+t^2)\right| dt$$
$$\leq \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{|h|(1+t^2)} M(-h(1+t^2))^2 dt$$
$$\Delta_h \leqslant M\frac{|h|^2}{|h|}\int_0^1 (1+t^2)e^{-x(1+t^2)}dt = M|h|\int_0^1 (1+t^2)e^{-x(1+t^2)}dt.$$

L'intégrale apparaissant dans la dernière inégalité est l'intégrale d'une fonction continue sur le segment $[0, 1]$ donc existe et est finie.

On note cette intégrale I.
Ainsi, $\lim_{h\to 0} M|h|I = 0$.
Par encadrement, on en déduit que

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} + \int_0^1 e^{-x(1+t^2)}dt\right) = 0,$$

par suite

$$\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} = -\int_0^1 e^{-x(1+t^2)}dt.$$

(b) On déduit de la question précédente que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x\in\mathbb{R}, \varphi'(x) = -\int_0^1 e^{-x(1+t^2)}dt.$$

3. (a) On a $\varphi(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} = [\arctan(t)]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}$.

(b) On a $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x) = 0$: en effet soit $x > 0$ et $t\in[0,1]$.
On a

$$0 \leqslant \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} = e^{-x}\frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} \leqslant e^{-x}$$

car $\forall a \in]-\infty;0], e^a \leq 1$.
On en déduit par croissance (et positivité) de l'intégrale,

$$0 \leq \varphi(x) \leq \int_0^1 e^{-x}dt = e^{-x}.$$

On a $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$.
On obtient par encadrement que $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x) = 0$.

4. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on définit

$$f(x) = \varphi(x^2) + \left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)^2.$$

(a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
En effet, la fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ par la question $2(b)$ donc en composant par la fonction carrée, la fonction $x\mapsto\varphi(x^2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
De plus la fonction $G : x\mapsto \int_0^x e^{-t^2}dt$ est l'unique primitive de la fonction continue $t\mapsto e^{-t^2}$ sur $\mathbb{R}$ s'annulant en 0.
Cette primitive est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
On en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

(b) Soit $x\in\mathbb{R}$.
On effectue le changement de variable affine (linéaire) $t = xu \Longrightarrow dt = xdu$, ce qui donne :

$$\int_0^x e^{-t^2}dt = x\int_0^1 e^{-x^2u^2}du.$$

(c) Calculons la dérivée de la fonction f.
On note comme à la question $4(a)$, G la primitive de la fonction $x\mapsto \int_0^x e^{-t^2}dt : \forall x\in\mathbb{R}, G'(x) = e^{-x^2}$.
On obtient donc pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\varphi'(x^2) + 2G'(x)G(x)\\ &= -2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)} + 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt\\ &= -2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)} + 2e^{-x^2}x\int_0^1 e^{-x^2u^2}du\\ &= -2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)} + 2x\int_0^1 e^{-x^2(1+u^2)}du\\ &= -2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)} + 2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}dt\\ &= 0.\end{aligned}$$

Par conséquent f est constante sur $\mathbb{R}$,

$$\forall x\in\mathbb{R}, f(x) = f(0) = \varphi(0) + 0 = \frac{\pi}{4}.$$

5. On a pour tout $x\in\mathbb{R}_+$,

$$0 \leq \int_0^x e^{-t^2}dt = \sqrt{f(x)-\varphi(x^2)} = \sqrt{\frac{\pi}{4}-\varphi(x^2)}.$$

On a montré que $\lim_{X\to+\infty}\varphi(X) = 0$ donc par composition

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{f(x)-\varphi(x^2)} = \sqrt{\frac{\pi}{4}-0} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

On a donc démontré que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$$

$\square$

Solution Exercice 22.

1. On sait par le cours que la série télescopique $\sum(v_{n+1}-v_n)$, est convergente si et seulement si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
   Etudions la nature de la série $\sum(v_{n+1}-v_n)$ et pour cela on va déterminer un équivalent du terme général $v_{n+1}-v_n$. On a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,
$$\begin{aligned}
v_{n+1}-v_n &= \left(\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}-\ln(n+1)\right)-\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)\right)\\
&= \frac{1}{n+1}-\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\\
&= \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\\
&= \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
&= \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
&= -\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})
\end{aligned}$$
   On a utilisé les développements limités usuels : $\ln(1+u)\underset{u\to 0}{=}u-\frac{u^2}{2}+o(u^2)$ et $\frac{1}{1+u}\underset{u\to 0}{=}1-u+o(u)$.
   Par conséquent $v_{n+1}-v_n\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{1}{2n^2}$.
   Le terme général de la série $\sum(v_{n+1}-v_n)$ est donc de signe constant et est équivalent à $-\dfrac{1}{2n^2}$ lorsque $n\to+\infty$.
   La série de Riemann $\sum\dfrac{1}{n^2}$ étant convergente, on en déduit que la série $\sum(v_{n+1}-v_n)$ converge.
   La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc convergente, de limite notée γ.
2. On a montré que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)\right)=\gamma$ autrement dit
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)\right)-\gamma=0\Leftrightarrow\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)\right)-\gamma\underset{n\to+\infty}{=}o(1).$$
   En conclusion :
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\underset{n\to+\infty}{=}\underbrace{\ln(n)+\gamma+o(1)}_{\text{développement asymptotique}}\underset{n\to+\infty}{\sim}\underbrace{\ln(n)}_{\text{équivalent}}.$$

$\square$

Solution Exercice 23. Soit $n\geq 0$, $\displaystyle\int_0^1 t^{2n}dt=\left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1$, alors
$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1} &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^1 t^{2k}dt\\
&= \int_0^1\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k}dt=\int_0^1\sum_{k=0}^{n}(-t^2)^k dt\\
&= \int_0^1\frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1-(-t^2)}dt=\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}-\int_0^1\frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}dt\\
&= [\arctan(t)]_0^1-\int_0^1\frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}dt\\
&= \frac{\pi}{4}-\int_0^1\frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}dt.
\end{aligned}$$
On en déduit pour tout $n\geq 0$,
$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}-\frac{\pi}{4}\right| &= \left|-\int_0^1\frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}dt\right|=\left|\int_0^1\frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}dt\right|\\
&\leq \int_0^1\left|\frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}\right|dt=\int_0^1\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt\\
&\leq \int_0^1 t^{2n+2}dt=\frac{1}{2n+3}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0.
\end{aligned}$$
On obtient alors la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ et sa somme
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}.$$

$\square$

Solution Exercice 24.

1. La fonction $f:x\mapsto x\ln(x)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[1,+\infty[$ et on a pour tout $x\geq 1$,
$$f'(x)=1+\ln(x)>0.$$
   Cette fonction est donc strictement croissante sur $[1,+\infty[$ et donc si $n\geq 2$ et $x\in[n,n+1]$, on obtient
$$0<n\ln(n)\leq x\ln(x)\leq(n+1)\ln(n+1).$$

Puisque la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que

$$\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} \leq \frac{1}{x\ln(x)} \leq \frac{1}{n\ln(n)}.$$

2. Soit $n \geq 3$, en intégrant l'inégalité $\frac{1}{x\ln(x)} \leq \frac{1}{n\ln(n)}$ entre n et $n+1$, par croissance de l'intégrale

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{x\ln(x)}dx \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{n\ln(n)}dx = ((n+1)-n)\frac{1}{n\ln(n)} = \frac{1}{n\ln(n)}.$$

Notez qu'on peut effectivement calculer l'intégrale $\int_n^{n+1} \frac{1}{x\ln(x)}dx$ car la fonction $x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)}$ est continue sur le segment $[n, n+1]$ comme l'inverse d'une fonction continue qui ne s'y annule pas.
Si $x \in [n-1, n]$ (notez que $n-1 \geq 2$), on obtient en en décalant l'indice d'un rang dans la première inégalité la question précédente,

$$\frac{1}{n\ln(n)} \leq \frac{1}{x\ln(x)}$$

ce qui donne en intégrant entre $n-1$ et n :

$$\frac{1}{n\ln(n)} = (n-(n-1))\frac{1}{n\ln(n)} = \int_{n-1}^{n} \frac{1}{n\ln(n)}dx \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x\ln(x)}dx.$$

D'où la double inégalité souhaitée

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{x\ln(x)}dx \leq \frac{1}{n\ln(n)} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x\ln(x)}dx.$$

3. On somme la double inégalité obtenue à la question précédente :

$$\sum_{k=3}^{n}\int_k^{k+1} \frac{1}{x\ln(x)}dx \leq \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x\ln(x)}dx$$

et par la relation de Chasles, on obtient

$$\int_3^{n+1} \frac{1}{x\ln(x)}dx \leq \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \leq \int_2^{n} \frac{1}{x\ln(x)}dx$$

4. On pose $u = \ln(x)$. La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[2, n]$ et sur $[3, n+1]$. On a $du = \frac{dx}{x}$. On obtient par changement de variable

$$\int_2^{n} \frac{dx}{x\ln(x)} = \int_{\ln(2)}^{\ln(n)} \frac{du}{u} = [\ln(u)]_{\ln(2)}^{\ln(n)} = [\ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2))].$$

De même

$$\int_3^{n+1} \frac{dx}{x\ln(x)} = [\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(3))].$$

5. On déduit de la question précédente que pour tout $n \geq 3$,

$$\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(3)) \leq S_n \leq \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)).$$

Soit $n \geq 3 > e$, on a donc $\ln(n) \geq \ln(3) > \ln(e) = 1$ et donc $\ln(\ln(n)) > 0$.
On divise l'encadrement précédent par $\ln(\ln(n))$.
On obtient

$$\frac{\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(3))}{\ln(\ln(n))} \leq \frac{S_n}{\ln(\ln(n))} \leq \underbrace{\frac{\ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2))}{\ln(\ln(n))}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \quad (*)},$$

$(*)$ car $\ln(\ln(n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

D'autre part,

$$\begin{aligned}\frac{\ln(\ln(n+1))}{\ln(\ln(n))} &= \frac{\ln(\ln(n) + \ln(1+\frac{1}{n}))}{\ln(\ln(n))} \\ &= \frac{\ln\left(\ln(n)\left(1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)}\right)\right)}{\ln(\ln(n))} \\ &= \frac{\ln(\ln(n)) + \ln\left(1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)}\right)}{\ln(\ln(n))} \\ &= 1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)}\right)}{\ln(\ln(n))} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\frac{\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(3))}{\ln(\ln(n))} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

On en déduit par encadrement que

$$\frac{\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}}{\ln(\ln(n))} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1,$$

et donc également en ajoutant le terme initial avec $k=2$

$$\frac{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}}{\ln(\ln(n))} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

On obtient donc que

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n)).$$

Puisque $\lim_{n\to+\infty} \ln(\ln(n)) = +\infty$, on en déduit la divergence de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln(n)}$.

□

Solution Exercice 25.

1. $(\mathscr{E}) : y' + y = \sin(t)\,;\, (\mathscr{H}) : y' + y = 0$. On résout sur $\mathbb{R}$.

   L'équation $(\mathscr{H}) : y' + y = 0$ a pour solution générale $y(t) = Ke^{-t} : K \in \mathbb{R}$.

   On cherche une solution particulière de l'équation $(\mathscr{E}_{\mathbb{C}}) : y' + y = e^{it}$.

   On prendra la partie imaginaire de celle-ci pour obtenir une solution particulière de $(\mathscr{E})$.

   On cherche une solution de $(\mathscr{E}_{\mathbb{C}})$ sous la forme $y(t) = \lambda e^{it} : y'(t) = \lambda i e^{it}$.

   On injecte dans $(\mathscr{E}_{\mathbb{C}})$ et on trouve :

$$\begin{aligned}\lambda i e^{it} + \lambda e^{it} = e^{it} &\iff \lambda(1+i) = 1\\ &\iff \lambda = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2}.\end{aligned}$$

   La fonction $t \mapsto y(t) = \frac{1-i}{2}e^{it}$ est solution de $(\mathscr{E}_{\mathbb{C}})$.

   La fonction $t \mapsto y_p(t) = \frac{1}{2}(-\cos(t) + \sin(t))$ est solution particulière de $(\mathscr{E})$.

   La solution générale de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}$ est donc

$$y : t \mapsto \frac{1}{2}(-\cos(t) + \sin(t)) + Ke^{-t} : K \in \mathbb{R}.$$

2. $(\mathscr{E}) : t(1-t)y' + y = t\,;\, (\mathscr{H}) : t(1-t)y' + y = 0$.

   On résout sur $I =]-\infty; 0[$, $I =]0; 1[$, $I =]1; +\infty[$.

   Sur chacun des ces intervalles, $(\mathscr{H}) \Leftrightarrow y' = \frac{1}{t(t-1)}y = \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}\right)y$.

   La solution générale de $(\mathscr{H})$ est $y(t) = Ke^{\ln|t-1| - \ln|t|} = K\frac{|t-1|}{|t|} : K \in \mathbb{R}$.

   On cherche une solution y_p particulière sur $I =]1; +\infty[$.

   On fait varier la constante, on écrit $y_p(t) = K(t)\frac{t-1}{t}$.

   On a $y_p'(t) = K'(t)\frac{t-1}{t} + \frac{K(t)}{t^2}$ et en injectant dans $(\mathscr{E})$, il vient

$$\begin{aligned}&t(1-t)K'(t)\frac{t-1}{t} + \underbrace{t(1-t)\frac{K(t)}{t^2} + K(t)\frac{t-1}{t}}_{=0} = t\\ &\iff K'(t) = -\frac{t}{(1-t)^2} \iff K'(t) = \frac{1-t-1}{(1-t)^2}\\ &\iff K'(t) = \frac{1}{1-t} - \frac{1}{(1-t)^2}\\ &\iff K(t) = -\ln(|1-t|) - \frac{1}{1-t} + C\end{aligned}$$

   On en déduit qu'une solution particulière de $(\mathscr{E})$ est donnée sur $I =]1; +\infty[$ par

$$y_p(t) = \frac{t-1}{t}\left(-\ln(t-1) - \frac{1}{1-t}\right) = \frac{1-t}{t}\ln(t-1) + \frac{1}{t}$$

   La solution générale sur $I =]1; +\infty[$ est donc

$$y(t) = \frac{1-t}{t}\ln(t-1) + \frac{1}{t} + K\frac{t-1}{t} : K \in \mathbb{R}.$$

   Les techniques sont similaires sur $I =]0; 1[$ et $I =]-\infty; 0[$.

□

Solution Exercice 26. Si $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - \int_0^x tf(t)dt = 1.$$

alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + \int_0^x tf(t)dt$.

La fonction $t \mapsto tf(t)$ étant continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $t \mapsto 1 + \int_0^x tf(t)dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

On obtient $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = xf(x)$. De plus $f(0) = 1 + \int_0^0 tf(t)dt = 1$.

L'équation différentielle $y = ty$ a pour solution générale $y(t) = Ke^{\frac{t^2}{2}} : K \in \mathbb{R}$.

Avec la condition supplémentaire $f(0) = 1$, il vient $K = 1 : f(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$.

Réciproquement la fonction $f : x \mapsto e^{\frac{x^2}{2}} - 1$ vérifie :

$$\int_0^x tf(t)dt = \int_0^x te^{\frac{t^2}{2}}dt = \left[e^{\frac{t^2}{2}}\right]_0^x = e^{\frac{x^2}{2}} - 1 = f(x) - 1.$$

□

Solution Exercice 27. $(\mathscr{E}) : y'' + y' + y = t^2e^t + t\,;\ (\mathscr{H}) : y'' + y' + y = 0$.

L'équation homogène a pour équation caractéristique $X^2 + X + 1 = 0$ dont les solutions sont les nombres complexes conjugués $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $\bar{j}$.

Toute solution de $(\mathscr{H})$ s'écrit $y(t) = e^{-\frac{t}{2}}\left(A\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + B\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)\right)$: $(A,B) \in \mathbb{R}^2$.

On détermine une solution particulière à l'aide du principe de superposition des solutions.

- La fonction $y_1(t) = t - 1$ est une solution particulière de l'équation $(\mathscr{E}_1)$: $y'' + y' + y = t$.
- On cherche une solution particulière y_2 de l'équation $(\mathscr{E}_2) : y'' + y' + y = t^2e^t$ sous la forme $y_2(t) = (at^2 + bt + c)e^t$ car $m = 1$ n'est pas racine de l'équation caractéristique.
  On a $y_2'(t) = (at^2 + (2a+b)t + (b+c))e^t$ et $y_2''(t) = (at^2 + (4a+b)t + (2a+2b+c))e^t$.
  On injecte dans $(\mathscr{E}_2)$: y_2 est solution si et seulement si (on simplifie par $e^t \neq 0$)
  $$2at^2 + t(2a+b) + (2a+b+c) = t^2$$
  Il vient $a = \frac{1}{3}$, $b = -\frac{2}{3}$, $c = \frac{4}{9}$.
  La fonction $y_2(t) = \frac{t^2}{3} - \frac{2t}{3} + \frac{4}{9}$ est solution particulière de $(\mathscr{E}_2)$.

Finalement, $y_p(t) = y_1(t) + y_2(t)$ est solution particulière de $(\mathscr{E})$.

On en déduit la solution générale de $(\mathscr{E})$:

$$y : t \mapsto (t-1) + \left(\frac{t^2}{3} - \frac{2t}{3} + \frac{4}{9}\right) + e^{-\frac{t}{2}}\left(A\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + B\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) : (A,B) \in \mathbb{R}^2.$$

□

Solution Exercice 28.

1. On pose $Z = z^2$.
   On résout l'équation $Z^2 + Z + 1 = 0$ de discriminant $\Delta = -3 = (\sqrt{3}i)^2$.
   On obtient deux racines $Z = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ ou $Z = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$.
   Les racines de $Z^2 + Z + 1 = 0$ sont donc $Z = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et son conjugué $e^{\frac{-2i\pi}{3}}$.
   Puisqu'on a posé $Z = z^2$ dans l'équation : $z^4 + z^2 + 1 = 0$, on obtient :
   $z_1 = e^{\frac{2i\pi}{6}} = e^{\frac{i\pi}{3}}$, $z_2 = e^{\frac{4i\pi}{3}} = e^{-\frac{2i\pi}{3}} = -z_1$ d'une part et
   $z_3 = e^{-\frac{i\pi}{3}}$, $z_4 = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -z_3$.
   (rappel si $z^2 = \rho e^{i\theta}$ alors $z = \sqrt{\rho}e^{i\frac{\theta}{2}}$ ou $z = \sqrt{\rho}e^{i\frac{\theta}{2}+i\pi} = -\sqrt{\rho}e^{i\frac{\theta}{2}}$).
2. On en déduit que P se factorise dans $\mathbb{C}[X]$ comme suit :
   $$P(X) = (X - e^{\frac{i\pi}{3}})(X - e^{\frac{-i\pi}{3}})(X - e^{\frac{2i\pi}{3}})(X - e^{\frac{-2i\pi}{3}}).$$
   Puis on obtient une factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$ en rassemblant les racines complexes conjuguées :
   $$P(X) = (X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)$$

□

Solution Exercice 29.

1. On vérifie que $P(1) = P'(1) = 0$ et $P(-1) = 0 \neq P'(-1)$.
   Donc 1 est une racine de multiplicité $\alpha = 2$ et -1 est un racine de multiplicité $\beta = -1$ pour P.
2. On en déduit qu'il existe $P_1 \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(X) = (X-1)^2(X+1)P_1(X)$.
   Pour déterminer $P_1 \in \mathbb{C}[X]$ on effectue la division euclidienne de P par
   $$(X-1)^2(X+1) = (X^2 - 2X + 1)(X+1) = X^3 - X^2 - X + 1.$$
   On trouve
   $$\boxed{P(X) = (X-1)^2(X+1)(X^4 - 4X^3 + 5X^2 - 4X + 1).}$$
3. On pose pour tout $z \neq 0$, $Z = z + \frac{1}{z} = \frac{z^2+1}{z} = \frac{z^3+z}{z^2}$.
   On a donc $Z^2 = z^2 + 2 + \frac{1}{z^2} = \frac{z^4+2z^2+1}{z^2}$.
   On a :
   $$\begin{aligned} Z^2 - 4Z + 3 &= \frac{z^4 + 2z^2 + 1}{z^2} - 4\frac{z^3+z}{z^2} + 3 \\ &= \frac{z^4 - 4z^3 + 5z^2 - 4z + 1}{z^2}. \end{aligned}$$
   Par conséquent,
   $$\boxed{\forall z \in \mathbb{C}^*, (P_1(z) = 0 \Leftrightarrow Z^2 - 4Z + 3 = 0).}$$
4. On a $Z^2 - 4Z + 3 = (Z-1)(Z-3)$. Par conséquent $P_1(z) = 0$ si et seulement si $z + \frac{1}{z} = 1$ ou $z + \frac{1}{z} = 3$.
   - L'équation $z + \frac{1}{z} = 1$ est équivalente à $z^2 - z + 1 = 0$ donc le discriminant est $\Delta = -3 = (\sqrt{3}i)^2$. On en déduit que les solutions de cette équation sont $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et le conjugué $e^{-\frac{2i\pi}{3}}$.
   - L'équation $z + \frac{1}{z} = 3$ est équivalente à $z^2 - 3z + 1 = 0$ dont le discriminant est $\Delta' = 9 - 4 = 5$. Les solutions de cette équation sont donc $z = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $z = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

On en déduit que la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$ est :

$$\boxed{(X-1)^2(X+1)\left(X-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(X-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)(X-e^{\frac{2i\pi}{3}})(X-e^{-\frac{2i\pi}{3}}).}$$

On obtient une factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ en rassemblant les racines complexes conjuguées :

$$\boxed{P(X)=(X-1)^2(X+1)\left(X-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(X-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)(X^2-X+1).}$$

□

Solution Exercice 30.

1. Pour montrer l'égalité de ces deux polynômes unitaires de degré $n-1$, il suffit de montrer qu'ils ont les mêmes racines c'est à dire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(\omega^\ell)^k=0$ pour tout $\ell\in[\![1,n-1]\!]$:

$$\sum_{k=1}^{n-1}(\omega^\ell)^k=\frac{1-(\omega^\ell)^n}{1-\omega}=\frac{1-(\omega^n)^\ell}{1-\omega}=\frac{1-1}{1-\omega}=0.$$

   Comme annoncé, on en déduit que les polynômes
   $P(X)=\sum_{k=0}^{n-1}X^k$ et
   $Q(X)=\prod_{k=1}^{n-1}(X-\omega^k)$ ont les mêmes racines :
   les nombres complexes $\omega^k, k\in[\![1,n-1]\!]$.

   Par le cours, on peut en particulier écrire $P(X)=S\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(X-\omega^k)$ pour un certain $S\in\mathbb{C}[X]$.
   En fait, S est une constante en comparant les degrés de ces deux membres (ce sont des polynômes de degré $n-1$).
   Par conséquent, $P=\alpha Q$ pour une certaine constante α.
   Mais puisque P et Q sont des polynômes unitaires (le coefficient dominant est 1), on en déduit que $\alpha=1$.

2. On substitue $X=1$ dans l'égalité que nous venons de démontrer et on obtient :

$$\prod_{k=1}^{n-1}(1-\omega^k)=\sum_{k=1}^{n}1.$$

   Le membre de droite vaut n.

   Calculons le membre de gauche (en se rappelant que $\omega=e^{\frac{2i\pi}{n}}$) :

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n-1}(1-\omega^k)&=\prod_{k=1}^{n-1}\left(\omega^{\frac{k}{2}}(\omega^{-\frac{k}{2}}-\omega^{\frac{k}{2}})\right)\\&=\prod_{k=1}^{n-1}\omega^{\frac{k}{2}}\prod_{k=1}^{n-1}\left((-2i)\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)\\&=2^{n-1}(-i)^{n-1}e^{\frac{i\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}k}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\\&=2^{n-1}\left(e^{\frac{3i\pi}{2}}\right)^{n-1}e^{\frac{i(n-1)\pi}{2}}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\\&=2^{n-1}e^{\frac{4i(n-1)\pi}{2}}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\\&=2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).\end{aligned}$$

   On en déduit que

$$\boxed{\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)=\frac{n}{2^{n-1}}.}$$

□

Solution Exercice 31.

1. On utilise la méthode du pivot de Gauss-Jordan :

$$\left(\begin{array}{ccc}1&0&1\\0&1&1\\4&-2&1\end{array}\right)\left|\left(\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right)\right.\underset{(L_3-4L_1)}{\iff}\left(\begin{array}{ccc}1&0&1\\0&1&1\\0&-2&-3\end{array}\right)\left|\left(\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\-4&0&1\end{array}\right)\right.$$

$$\underset{(L_3+2L_1)}{\iff}\left(\begin{array}{ccc}1&0&1\\0&1&1\\0&0&-1\end{array}\right)\left|\left(\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\-4&2&1\end{array}\right)\right.$$

$$\underset{L_1:(L_1+L_3)}{\overset{L_2:(L2+L_3)}{\iff}}\left(\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{array}\right)\left|\left(\begin{array}{ccc}-3&2&1\\-4&3&1\\-4&2&1\end{array}\right)\right.$$

$$\underset{L_3:-L_3}{\iff}\left(\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right)\left|\left(\begin{array}{ccc}-3&2&1\\-4&3&1\\4&-2&-1\end{array}\right)\right.$$

Par conséquent P est inversible, d'inverse

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}.}$$

2. On a

$$\boxed{P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.}$$

Note : on peut également montrer que P est inversible en calculant le déterminant : $\det P = -1 \neq 0$ (mais cela ne donne pas P^{-1}).

3. On a pour tout $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}(P^{-1}AP)^n &= (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\dots(P^{-1}AP) \\ &= (P^{-1}APP^{-1}AP\dots P^{-1}AP) = P^{-1}A^nP.\end{aligned}$$

(remplacer les pointillés par une récurrence rigoureuse).
D'autre part pour tout $n \geq 1$, on a

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{1}{2})^n \end{pmatrix}.$$

On en déduit que pour tout $n \geq 0$,

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} -3+\frac{4}{2^n} & 2-\frac{2}{2^n} & 1-\frac{1}{2^n} \\ -4+\frac{4}{2^n} & 3-\frac{2}{2^n} & 1-\frac{1}{2^n} \\ -4+\frac{4}{2^n} & 2-\frac{2}{2^n} & 2-\frac{1}{2^n} \end{pmatrix}.$$

4. La suite de matrices $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

□

Solution Exercice 32. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. On calcule A^2 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

donc $A^2 = -4I_3 + 5A$.

2. On obtient par la question précédente que

$$-\frac{1}{4}(A^2 - 5A) = I_3 \Longrightarrow -\frac{1}{4}A(A - 5I_3) = I_3 \Longrightarrow \boxed{A^{-1} = \frac{1}{4}(5I_3 - A).}$$

3. On a $A^0 = I_3 = 0 \times A + 1 \times I_3$ donc $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$ conviennent.
De plus, on a $A = A^1 = 1 \times A + 0I_3$ donc $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$ conviennent. Maintenant supposons que pour un certain n il existe a_n et b_n tels que $\boxed{A^n = a_nA + b_nI_3.}$
On obtient alors

$$A^{n+1} = a_nA^2 + b_nA = a_n(-4I_3 + 5A) + b_nA$$

par conséquent $A^{n+1} = (5a_n + b_n)A - 4a_nI_3$.
En posant $\boxed{b_{n+1} = -4a_n}$ et $\boxed{a_{n+1} = 5a_n + b_n}$ on en déduit l'existence de a_{n+1} et b_{n+1}.
Les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont donc construites par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

4. On a par la question précédente que pour tout $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}a_{n+2} &= 5a_{n+1} + b_{n+1} \\ &= 5a_{n+1} - 4a_n.\end{aligned}$$

Par conséquent, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. On applique la méthode du cours pour déterminer l'expression de a_n en fonction de $n \geq 0$.
On commence par résoudre l'équation caractéristique de cette suite récurrente $r^2 - 5r + 4 = 0$ dont le discriminant vaut $\Delta = 25 - 16 = 9 = 3^2$.
On en déduit que l'équation caractéristique possède deux solutions réelles distinctes :

$$\lambda = \frac{5-3}{2} = 1 \text{ et } \mu = \frac{5+3}{2} = 4.$$

Par conséquent il existe un couple $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \geq 0$:

$$a_n = A + B4^n.$$

On détermine A et B en utilisant les valeurs initiales $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$ de la suite a_n.
On obtient donc le système

$$\left\{\begin{array}{ccccc} A & + & B & = & 0 \\ A & + & 4B & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} A & + & B & = & 0 \\ & & 3B & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} A & = & -\frac{1}{3} \\ B & = & \frac{1}{3} \end{array}\right.$$

Donc $A = -\frac{1}{3}$ et $B = \frac{1}{3}$.
On en déduit que pour tout $n \geq 0$, $a_n = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}4^n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$.
On obtient alors que pour tout $n \geq 1$,

$$b_n = -4a_{n-1} = \frac{-4}{3}(4^{n-1} - 1) = \frac{1}{3}(4 - 4^n)$$

et $b_0 = 1$
En conclusion, on obtient l'expression de A^n en fonction de n, A et I_3 :

$$\boxed{\forall n \geq 1, A^n = a_n A + b_n I_3 = \frac{1}{3}\left((4^n - 1)A + (4 - 4^n)I_3\right).}$$

□

Solution Exercice 33.

1. Soit B une matrice nilpotente de taille $n \geq 1$ et d'indice de nilpotence p (cela signifie que $p \in \mathbb{N}$ est le plus petit entier tel que $B^p = 0$).
   (a) Supposons par l'absurde que B est inversible alors il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n = BA$. Alors en élevant cette égalité matricielle à la puissance p, on obtient puisque B commute avec son inverse :
   $$I_n = I_n^p = (AB)^p = A^p B^p = 0$$
   ce qui est absurde. Par conséquent la matrice B n'est pas inversible.
   (b) La matrice $I_n + B$ est inversible en effet, on a
   $$\begin{aligned}(I_n + B)\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k B^k &= \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k B^k + \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k B^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k B^k + \sum_{l=1}^{p}(-1)^{l-1} B^l \\ &= \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k B^k - \sum_{l=1}^{p}(-1)^l B^l \\ &= I_n - (-1)^p B^p = I_n.\end{aligned}$$
   Donc $\boxed{(I_n + B)^{-1} = \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k B^k.}$
   De manière analogue, on a
   $$\begin{aligned}(I_n - B)\sum_{k=0}^{p-1} B^k &= \sum_{k=0}^{p-1} B^k - \sum_{k=0}^{p-1} B^{k+1} \\ &= I_n - B^p = I_n\end{aligned}$$
   donc $\boxed{(I_n - B)^{-1} = \sum_{k=0}^{p-1} B^k.}$
   Note : Il faut penser à l'égalité dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$:
   $$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \iff (1 - x)\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 - x^{n+1}$$
2. Soit p, q les indices de nilpotence respectifs de A et B.
   En posant $r = \min(p, q)$ on a puisque A et B commutent : $(AB)^r = A^r B^r = 0$.
   Pour montrer que la somme de matrices nilpotente est également nilpotente, il suffit d'appliquer la formule du binôme de Newton valables pour les matrices qui commutent.
   On note $r = \max(p, q)$ alors :
   $$(A + B)^{2r} = \sum_{k=0}^{2r}\binom{n}{k} A^k B^{2r-k}.$$
   Alors pour tout $k \in [\![0, r]\!]$, on a $B^{2r-k} = 0$ car $2r - k \geq r \geq q$ dans ce cas.
   D'autre part, pour tout $k \in [\![r + 1, 2r]\!]$, on a $A^k = 0$ car $k \geq r + 1 > r \geq p$ dans ce cas.
   On en déduit dans les deux cas que $(A + B)^{2r} = 0$ par conséquent la matrice $A + B$ est nilpotente d'indice de nilpotence au plus $2r$ avec $r = \max(p, q)$.
3. Soit p l'indice de nilpotence de B et A inversible.
   Montrons que $A + B$ est inversible. On a $A^{-1}(A + B) = I_n + A^{-1}B$.
   D'autre part, puisque $AB = BA$, on a aussi $BA^{-1} = A^{-1}B$ donc B commute avec A^{-1}.
   En calculant la puissance p de $A^{-1}B$, on en déduit que $A^{-1}B$ est nilpotente d'indice de nilpotence au plus p.
   On obtient alors par la question 1.*b* que la matrice $I_n + A^{-1}B$ est inversible.
   En multipliant cette matrice inversible par la matrice inversible A, on en déduit que la matrice $A + B$ est inversible.

□

Solution Exercice 34.

1. — $\mathcal{C}(A) \neq \varnothing$ car $A0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}A$.
   — $\mathcal{C}(A)$ est stable par combinaison linéaire.
   En effet, si B, C commutent avec A et si $\lambda \in \mathbb{R}$, on a
   $$A(\lambda B + C) = A\lambda B + AC = \lambda BA + CA = (\lambda B + C)A.$$
   Donc $\lambda B + C \in \mathcal{C}(A)$

2. Soit $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice qui commute avec A. On a donc $AB = BA$.

   Calculons ces deux produits matriciels :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ -a-c & -b-d \end{pmatrix}$$

   et

$$BA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & 2a-b \\ c-d & 2c-d \end{pmatrix}.$$

   On en déduit que :
   * $a + 2c = a - b \Longrightarrow 2c = -b$
   * $b + 2d = 2a - b \Longrightarrow b + d = a$
   * $-a - c = c - d \Longrightarrow 0 = 2c + a - d$
   * $-b - d = 2c - d \Longrightarrow 2c = -b$

Par conséquent $2c = -b$ et $b + d = a$ i.e.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\frac{b}{2} & a-b \end{pmatrix} \quad \text{avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Une famille génératrice de $\mathcal{C}(A)$ est donc donnée par les deux matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \quad \text{et } C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

□

Solution Exercice 35.

1. On laisse au lecteur le soin de prouver soigneusement que F et G sont des SEV de $\mathbb{R}^3$.

   Montrons que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

   On propose une méthode qui n'est pas la plus efficace (mais qui prépare la question suivante, voir la note à la fin de cette question).

   — $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
   En effet, soit $\overrightarrow{u} \in F \cap G$.
   • Notons que

$$\begin{aligned} F &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0\} \\ &= \{(2y - z, y, z) : (y,z) \in \mathbb{R}^3\}. \end{aligned}$$

   Ainsi, $\overrightarrow{u} \in F \Longrightarrow \exists (y,z) \in \mathbb{R}^2, \overrightarrow{u} = (2y - z, y, z)$.
   • D'autre part, $\overrightarrow{v} \in G \Longrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}, \overrightarrow{v} = (-\alpha, 2\alpha, \alpha)$.
   On obtient donc l'égalité vectorielle qui conduit à :

$$\begin{aligned} (2y - z, y, z) = (-\alpha, 2\alpha, \alpha) &\Longrightarrow (2y - z = -\alpha), (y = 2\alpha), (z = \alpha) \\ &\Longrightarrow (4\alpha - \alpha = -\alpha) \\ &\Longrightarrow \alpha = 0. \end{aligned}$$

   On en déduit que $\overrightarrow{u} = (-\alpha, 2\alpha, \alpha) = (0,0,0)$. Ainsi $F \cap G = \{\overrightarrow{0_{\mathbb{R}^3}}\}$.

   — Montrons maintenant que $F + G = \mathbb{R}^3$, il suffit de montrer que $\mathbb{R}^3 \subset F + G$, l'autre inclusion étant évidente.
   Notons qu'une base de F est donnée par $((2,1,0),(-1,0,1))$.
   Cette famille est génératrice car
   $\overrightarrow{u} \in F \Rightarrow \exists (y,z) \in \mathbb{R}^2, \overrightarrow{u} = (2y - z, y, z) \Rightarrow \overrightarrow{u} = y(2,1,0) + z(-1,0,1)$.
   Cette famille est libre car pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$,

$$\alpha(2,1,0) + \beta(-1,0,1) = \overrightarrow{0_{\mathbb{R}^3}} \Rightarrow (2\alpha - \beta, \alpha, \beta) = (0,0,0) \Rightarrow \alpha = \beta = 0.$$

   Ainsi $F = Vect((2,1,0),(-1,0,1))$.
   D'autre part, $G = Vect((-1,2,1))$: $((-1;2;2))$ est donc une base de G.
   Soit maintenant $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Montrons que (a,b,c) s'écrit comme la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.
   On doit prouver l'existence de $(\lambda, \mu, \alpha) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$(a,b,c) = \lambda(2,1,0) + \mu(-1,0,1) + \alpha(-1,2,1).$$

   On résout le système d'inconnues $(\lambda, \mu, \alpha) \in \mathbb{R}^3$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcll} 2\lambda & - & \mu & - & \alpha & = & a & (L_1) \\ \lambda & + & & & 2\alpha & = & b & (L_2) \\ & & \mu & + & \alpha & = & c & (L_3) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 2\lambda & - & \mu & - & \alpha & = & a & (L_1) \\ & & \mu & + & 5\alpha & = & 2b - a & (2L_2 - L_1) \\ & & \mu & + & \alpha & = & c & (L_3) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcll} 2\lambda & - & \mu & - & \alpha & = & a & (L_1) \\ & & \mu & + & 5\alpha & = & 2b - a & (L_2) \\ & & & - & 4\alpha & = & c + a - 2b & (L_3 - L_2) \end{array}\right.$$

   En appliquant l'algorithme de remontée, on obtient successivement que l'unique solution de ce système est (λ, μ, α) avec

$$\alpha = \frac{2b - a - c}{4},$$

$$\mu = \frac{a + 5c - 2b}{4},$$

$$\lambda = \frac{a + c}{2}.$$

   Par conséquent tout vecteur $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ s'écrit comme somme :

— d'un vecteur de F : $\dfrac{a+c}{2}(2,1,0)+\dfrac{a+5c-2b}{4}(-1,0,1)\in F$

— et d'un vecteur de G : $\dfrac{2b-a-c}{4}(-1,2,1)\in G$.

On a donc montré que $\mathbb{R}^3=F\oplus G$ c'est-à-dire :
$\mathbb{R}^3=Vect((2,1,0),(-1,0,1))\oplus Vect((-1,2,1))$.

Note : Il y a beaucoup plus simple. On montre que $F\cap G=\{0_{\mathbb{R}^3}\}$ et que $\dim F+\dim G=2+1=3=\dim\mathbb{R}^3$ et on conclut par le cours que $\mathbb{R}^3=F\oplus G$.

Mais nous avons préparé la question suivante...

2. Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. Par définition de p :
$p(a,b,c)=\dfrac{a+c}{2}(2,1,0)+\dfrac{a+5c-2b}{4}(-1,0,1)$
(on conserve uniquement la "partie" dans F).
On obtient :

$$p(a,b,c)=\left(\frac{3a+2b-c}{4};\frac{a+c}{2};\frac{a+5c-2b}{4}\right)\in F.$$

□

Solution Exercice 36. La famille (f_0) est libre car $f_0=1\neq 0$.

On suppose que la famille $(f_0,f_1,\dots,f_n)$ est libre pour un certain entier $n\in\mathbb{N}$. Soit $(\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+2}$ tel que

$$\sum_{k=0}^{n+1}\lambda_k f_k=0,$$

c'est à dire que tel que pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\sum_{k=0}^{n+1}\lambda_k\cos(kx)=0.$$

On dérive deux fois cette relation, on trouve pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\sum_{k=0}^{n+1}-k^2\lambda_k\cos(kx)=0\iff\sum_{k=0}^{n+1}k^2\lambda_k\cos(kx)=0=0.$$

En multipliant la relation $\sum_{k=0}^{n+1}\lambda_k\cos(kx)=0$ par $(n+1)^2$:

$$\sum_{k=0}^{n+1}(n+1)^2\lambda_k\cos(kx)=0$$

et en soustrayant la relation

$$\sum_{k=0}^{n+1}k^2\lambda_k\cos(kx)=0,$$

on trouve que pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\sum_{k=0}^{n+1}((n+1)^2-k^2)\lambda_k\cos(kx)=0\Rightarrow\sum_{k=0}^{n}((n+1)^2-k^2)\lambda_k\cos(kx)=0.$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence au rang n, on trouve :

$$\forall k\in[\![0,n]\!],\ ((n+1)^2-k^2)\lambda_k=0\text{ soit }\lambda_k=0.$$

On en déduit que $\lambda_{n+1}\cos((n+1)x)=0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
En faisant $x=0$, on trouve $\lambda_{n+1}=0$.
La récurrence est achevée. □

Solution Exercice 37.

1. Si $P\in\mathbb{R}_n[X]$ alors ses dérivées successives sont de degré au plus $n-1$.
La somme $P+P'+\cdots+P^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}P^{(k)}$ est donc un polynôme de degré au plus n.
De même la différence $P-P'$ est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$.
On en déduit que f et g sont à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$.
Soient $P,Q\in\mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Alors :
— $f(\lambda P+Q)=(\lambda P+Q)-(\lambda P+Q)'=\lambda(P-P')+(Q-Q')=\lambda f(P)+f(Q)$.
— $g(\lambda P+Q)=\sum_{k=0}^{n}(\lambda P+Q)^{(k)}=\lambda\sum_{k=0}^{n}P^{(k)}+\sum_{k=0}^{n}Q^{(k)}=\lambda g(P)+g(Q)$.
Par conséquent f et g sont des endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $P\in\mathbb{R}_n[X]$. On a

$$\begin{aligned}(f\circ g)(P)=f(g(P))=f\left(\sum_{k=0}^{n}P^{(k)}\right)&=\left(\sum_{k=0}^{n}P^{(k)}\right)-\left(\sum_{k=0}^{n}P^{(k)}\right)'\\&=\left(\sum_{k=0}^{n}P^{(k)}\right)-\left(\sum_{k=0}^{n}P^{(k+1)}\right)\\&=\left(\sum_{k=0}^{n}P^{(k)}\right)-\left(\sum_{\ell=1}^{n+1}P^{(\ell)}\right)&&(\ell=k+1)\\&=P^{(0)}-P^{(n+1)}=P\end{aligned}$$

car $P \in \mathbb{R}_n[X]$ est de degré au plus n, les dérivées d'ordre $p \geq n+1$ sont donc nulles.
On a d'autre part,

$$\begin{aligned}(g \circ f)(P) &= \sum_{k=0}^{n} (P - P')^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} (P^{(k)} - P^{(k+1)}) \\ &= \sum_{k=0}^{n} P^{(k)} - \sum_{k=0}^{n} P^{(k+1)} = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)} - \sum_{l=1}^{n+1} P^{(l)} \\ &= P^{(0)} - P^{(n+1)} = P.\end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $g \circ f(P) = id_{\mathbb{R}_n[X]}(P) = f \circ g(P)$.
Ainsi,

$$f \circ g = g \circ f = id_{\mathbb{R}_n[X]}.$$

Par conséquent f et g sont des automorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$: ce sont des isomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$ sur $\mathbb{R}_n[X]$, réciproques l'un de l'autre.
Note : en dimension finie, il suffit de vérifier que $f \circ g = id_E$ par exemple.

□

Solution Exercice 38. On considère
$f : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[X], P(X) \mapsto P(X+1) - P(X)$.

1. Notons tout d'abord que si P est un polynôme à coefficient complexes alors $P(X+1)$ également.
   Ainsi, l'application f est bien à valeurs dans $\mathbb{C}[X]$.
   Soit maintenant $\lambda \in \mathbb{C}$ et $(P, Q) \in \mathbb{C}[X]^2$. Alors

$$\begin{aligned}f(\lambda P + Q) &= (\lambda P + Q)(X+1) - (\lambda P + Q)(X) \\ &= \lambda(P(X+1) - P(X)) + (Q(X+1) - Q(X)) \\ &= \lambda f(P) + f(Q)\end{aligned}$$

   donc f est linéaire de $\mathbb{C}[X]$ dans lui-même : $f \in \mathscr{L}(\mathbb{C}[X])$ est un endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$.
2. Déterminons le noyau de f :
   $f \in \ker(f) \Leftrightarrow P(X+1) - P(X) = 0 \Leftrightarrow P(X+1) = P(X) \quad (*)$.
   Montons que $(*)$ équivaut à l'assertion : P est constant.
   Bien sûr, si $P(X) = \lambda \in \mathbb{C}$ est constant, on a $P(X+1) - P(X) = \lambda - \lambda = 0$.
   Réciproquement si $P(X+1) = P(X)$ on montre alors par récurrence que pour tout $q \in \mathbb{N}$, $P(q) = P(0)$.
   Cette propriété est clairement vraie pour $q = 0$.
   Si elles vraie pour un certain entier $q \in \mathbb{N}$, on a $P(q+1) = P(q) = P(0)$.
   D'où par principe de récurrence, $\forall q \in \mathbb{N}, P(q) = P(0)$.
   Par conséquent, le polynôme $Q(X) := P(X) - P(0)$ possède une infinité de racines (on vient de montrer que les entiers naturels sont tous racines de Q).
   Le seul polynôme possédant une infinité de racines est le polynôme nul.
   Ainsi, $Q(X) = 0$ i.e. $P(X) = P(0)$ est constant.
   En conclusion : $\ker(f) = \{P \in \mathbb{C}[X] : P \text{ constant}\} = \mathbb{R}_0[X]$.

□

Solution Exercice 39.

1. Soit $x \in \ker(f)$. Alors $f^2(x) = f(f(x)) = f(0) = 0$ donc $x \in \ker(f^2)$.
   D'où l'inclusion cherchée.
2. Soit $y \in \operatorname{Im}(f^2)$ alors il existe $x \in E$ tel que $y = f^2(x)$.
   Ainsi $y = f(f(x)) \in \operatorname{Im}(f)$.
3. Supposons $\ker(f) = \ker(f^2)$. Montrons que $Im(f) \cap \ker(f) = \{0_E\}$
   Soit $y \in Im(f) \cap \ker(f)$.
   Alors $y = f(x)$ pour un certain $x \in E$.
   De plus, puisque $y \in \ker(f)$, on a $f(y) = 0 = f^2(x)$.
   Par conséquent $x \in \ker(f^2)$. Par hypothèse, $\ker(f^2) = \ker(f)$.
   On obtient donc $f(x) = 0$ puis $y = f(x) = 0$.
   Réciproquement, supposons $\operatorname{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0_E\}$.
   On sait déjà que $\ker(f) \subset \ker(f^2)$. Montrons que $\ker(f^2) \subset \ker(f)$
   Soit $x \in \ker(f^2)$. On a donc $f^2(x) = f(f(x)) = 0$.
   Par conséquent $f(x) \in \operatorname{Im}(f) \cap \ker(f)$.
   Mais $\operatorname{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0_E\}$ donc $f(x) = 0$.
   On en déduit que $x \in \ker(f)$.
   Par conséquent $\ker(f^2) \subset \ker(f)$
   D'où l'égalité cherchée.
4. Supposons que $E = Im(f) + \ker(f)$. Montrons que $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(f^2)$.
   On sait déjà que $\operatorname{Im}(f^2) \subset \operatorname{Im}(f)$. Montrons l'inclusion inverse.
   Soit $y \in Im(f)$.
   Il existe donc $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
   Mais $x \in E = Im(f) + ker(f)$ s'écrit $x = \underbrace{f(z)}_{\in \operatorname{Im}(f)} + k$ avec $z \in E$ et $k \in \ker(f)$.
   On en déduit donc que $f(x) = f^2(z) + f(k) = f(f(z))$.
   Par suite, $y = f(x) = f^2(z) \in Im(f^2)$.
   On en déduit que $Im(f) \subset Im(f^2)$. Puisque l'autre inclusion est toujours vraie, on a $Im(f) = Im(f^2)$.

   Supposons réciproquement qu'on a l'égalité $Im(f) = Im(f^2)$ et fixons $x \in E$.
   Montrons qu'il existe $a \in Im(f)$ et $b \in \ker(f)$ tel que $x = a + b$.

Puisque $f(x) \in Im(f) = Im(f^2)$, il existe $z \in E$ tel que $f(x) = f^2(z)$.
On écrit alors $x = f(z) + (x - f(z))$ avec :
— $a = f(z) \in Im(f)$ et
— $b = x - f(z) \in \ker(f)$ car $f(b) = f(x) - f^2(z) = f(x) - f(x) = 0$.

□

Solution Exercice 40.

1. Rappelons que f commute avec toutes ses puissances $f^k = f \circ \cdots \circ f$ (composition de l'endormophisme f avec lui-même, k fois).
   En particulier avec $f^0 = \mathrm{id}$.
   On a $(f - \mathrm{id}) \circ (f + 4\,\mathrm{id}) = f \circ f + 4f \circ \mathrm{id} - \mathrm{id} \circ f - 4\,\mathrm{id} \circ \mathrm{id} = f^2 + 3f - 4\,\mathrm{id}$.
   De même $(f + 4id) \circ (f - id) = f^2 + 3f - 4\,\mathrm{id}$.
2. Soit $x \in E$. Posons $y = f(x) - x$.
   Alors
   $$\begin{aligned}(f + 4\,\mathrm{id})(y) &= (f + 4\,\mathrm{id})(f(x) - x)\\ &= (f + 4\,\mathrm{id}) \circ (f - \mathrm{id})(x)\\ &= (f^2 + 3f - 4id)(x) = 0_E.\end{aligned}$$
   Par conséquent, $y \in \ker(f + 4\,\mathrm{id})$.
   De même, si l'on pose $z = f(x) + 4x$ alors :
   $$\begin{aligned}(f - \mathrm{id})(z) &= (f - \mathrm{id})(f(x) + 4x)\\ &= (f - \mathrm{id}) \circ (f + 4\,\mathrm{id})(x)\\ &= (f^2 + 3f - 4\,\mathrm{id})(x) = 0_E.\end{aligned}$$
   Par conséquent, $z \in \ker(f - \mathrm{id})$.
3. Montrons que $E = \ker(f - \mathrm{id}) \oplus \ker(f + 4\,\mathrm{id})$.
   • $E = \ker(f - \mathrm{id}) + \ker(f + 4\,\mathrm{id})$.
   En effet, si $x \in E$, alors par la question précédente :
   $$y = \frac{1}{5}\left(f(x) + 4x\right) \in \ker(f - \mathrm{id})$$
   $$z = -\frac{1}{5}(f(x) - x) \in \ker(f + 4\,\mathrm{id})$$
   et on a $x = y + z$.
   Tout vecteur de E est donc la somme d'un vecteur de $\ker(f - \mathrm{id})$ et d'un vecteur de $\ker(f + \mathrm{id})$.
   • Soit maintenant $x \in \ker(f - \mathrm{id}) \cap \ker(f + 4\,\mathrm{id})$. Alors :
   ∗ $f(x) = x$ car $x \in \ker(f - \mathrm{id})$.
   ∗ $f(x) = -4x$ car $x \in \ker(f + 4\,\mathrm{id})$.
   Ainsi, $x = -4x \Leftrightarrow 5x = 0_E \Leftrightarrow x = 0_E$.
   On en déduit que $\ker(f - \mathrm{id}) \cap \ker(f + 4\,\mathrm{id}_E) = \{0_E\}$.
   En conclusion : $E = \ker(f - id) \oplus \ker(f + 4id)$.
   En particulier, $\dim(E) = \dim(\ker(f - id)) + \dim(\ker(f + 4id)) \quad (*)$.
4. Rappelons le théorème du rang : si $g \in \mathcal{L}(E, F)$ alors
   $$\dim(E) = \dim(\ker(g)) + \mathrm{rg}(g) = \dim(\ker(g)) + \dim(\mathrm{Im}(f)).$$
   On a donc
   $$\dim(E) - \mathrm{rg}(f - id) = \dim(\ker(f - id)),$$
   $$\dim(E) - \mathrm{rg}(f + 4id) = \dim(\ker(f + 4id)).$$
   En introduisant ces égalités dans $(*)$, on obtient
   $$\dim(E) = [\dim(E) - \mathrm{rg}(f - id)] + [\dim(E) - \mathrm{rg}(f + 4id)],$$
   soit
   $$\mathrm{rg}(f - id) + \mathrm{rg}(f + 4id) = \dim(E).$$

□

Solution Exercice 41.

1. Pour déterminer le rang de l'endomorphisme f, on détermine le rang de la matrice $A = Mat_{\mathscr{B}}(f)$.
   Pour cela on peut appliquer la méthode du pivot de Gauss ou encore, déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$ en tentant d'extraire une base d'une famille génératrice.
   Les coordonnées des vecteurs formant une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$ se lisent sur les colonnes de la matrice $A = Mat_{\mathscr{B}}(f)$.
   (les colonnes de cette matrice sont les coordonnées dans $\mathscr{B}$ des images $f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)$).
   Ainsi
   $$\mathrm{Im}(f) = Vect(f_1, f_2, f_3, f_4)$$
   où
   $$Mat_{\mathscr{B}}(f_1) = Mat_{\mathscr{B}}(f(e_1)) = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ i.e. } f_1 = f(e_1) = 3e_1 + 9e_2,$$
   $$Mat_{\mathscr{B}}(f_2) = Mat_{\mathscr{B}}(f(e_2)) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ i.e. } f(e_2) = -e_1 - 3e_2,$$

$$Mat_{\mathscr{B}}(f_3) = Mat_{\mathscr{B}}(f(e_3)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ i.e. } f_3 = f(e_3) = e_1 + 3e_2 + 4e_3 + 2e_4,$$

$$Mat_{\mathscr{B}}(f_3) = Mat_{\mathscr{B}}(f(e_3)) = \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ i.e. } f_4 = f(e_4) = -7e_1 - e_2 - 8e_3 - 4e_4.$$

Cette famille, notons-la $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$, est génératrice de $\mathrm{Im}(f)$, mais n'est pas nécessairement libre.

On remarque d'ailleurs que $f_1 = -3f_2$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) &= Vect(-f_2, f_3, f_4) \\ &= Vect(e_1 + 3e_2, e_1 + 3e_2 + 4e_3 + 2e_4, -7e_1 - e_2 - 8e_3 - 4e_4). \end{aligned}$$

Montrons maintenant que la famille $(-f_2, f_3, f_4)$ est libre.

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ des scalaires tels que

$$\alpha(-f_2) + \beta f_3 + \gamma f_4 = 0_E.$$

Cela donne :

$$e_1(\alpha + \beta - 7\gamma) + e_2(3\alpha + 3\beta - \gamma) + e_3(4\beta - 8\gamma) + e_4(2\beta - 4\gamma) = 0_E.$$

Puisque $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_3)$ est une base de E, donc est une famille libre, on obtient

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} \alpha & + & \beta & - & 7\gamma & = & 0 \\ 3\alpha & + & 3\beta & - & \gamma & = & 0 \\ & & 4\beta & - & 8\gamma & = & 0 \\ & & 2\beta & - & 4\gamma & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Donc la famille $(-f_1, f_3, f_4)$ est une famille de vecteurs libre et génératrice de $\mathrm{Im}(f)$, c'est donc une base de $Im(f)$.

On trouve en particulier immédiatement que $\mathrm{rg}(f) = \dim \mathrm{Im}(f) = 3$.

Par le théorème du rang, on obtient

$$\dim(\ker(f)) = \dim(E) - \dim(Im(f)) = 4 - 3 = 1.$$

$\ker(f)$ est donc une droite vectorielle.

Pour en déterminer une base, on résout l'équation $AX = 0$ qui se traduit par le système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x & - & y & + & z & - & 7t & = & 0 \\ 9x & - & 3y & + & 3z & - & t & = & 0 \\ & & & & 4z & - & 8t & = & 0 \\ & & & & 2z & - & 4t & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} 3x & - & y & + & z & - & 7t & = & 0 & \\ & & & & & & 20t & = & 0 & (L_2 - 3L_1) \\ & & & & z & & & = & 2t & \end{array}\right.$$

On obtient alors :

$$\ker(f) = \left\{ y\left(\frac{1}{3}e_1 + e_2\right) : y \in \mathbb{R} \right\} = Vect(e_1 + 3e_2).$$

2. On a $e_1 + 3e_2 \in \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f)$ donc $Im(f) \cap Ker(f) \neq \{0_E\}$.
   $Im(f) \cap Ker(f)$ se sont donc pas supplémentaires.
3. On donne une expression des vecteurs e_1', e_2', e_3', e_4'.
   — $e_1' = e_3$
   — $e_2' = f(e_3) = e_1 + 3e_2 + 4e_3 + 2e_4$
   —
   $$\begin{aligned} e_3' &= f^2(e_3) = f(f(e_3)) = f(e_2') = f(e_1 + 3e_2 + 4e_3 + 2e_4) \\ &= f(e_1) + 3f(e_2) + 4f(e_3) + 2f(e_4) \\ &= (3e_1 + 9e_2) + 3(-e_1 - 3e_2) + 4(e_1 + 3e_2 + 4e_3 + 2e_4) \\ &\quad + 2(-7e_1 - e_2 - 8e_3 - 4e_4) \\ &= -10e_1 + 10e_2 = 10(-e_1 + e_2) \end{aligned}$$
   —
   $$\begin{aligned} e_4' &= f(f^2(e_3)) = f(e_3') = f(-10e_1 + 10e_2) \\ &= -10f(e_1 + 10f(e_2) \\ &= -10(3e_1 + 9e_2) + 10(-e_1 - 3e_2) = -40e_1 - 120e_2 \\ &= -40(e_1 + 3e_2). \end{aligned}$$

   Par conséquent,

   $$\begin{aligned} Vect(e_1', e_2', e_3', e_4') &= Vect(e_3, -e_1 + e_2, e_1 + 3e_2, e_1 + 3e_2 + 4e_3 + 2e_4) \\ &= Vect(e_3, e_2, e_1, e_4) \end{aligned}$$

   Ainsi (e_1', e_2', e_3', e_4') est une famille génératrice de E et $dim(E) = 4$.
   Il s'agit donc d'une base de E.

4. **Première méthode.**
On a $f(e'_1) = f(e_3) = e'_2$;
$f(e'_2) = f(f(e_3)) = f^2(e_3) = e'_3$;
$f(e'_3) = f^3(e_3) = e'_4$ et enfin
$f(e'_4) = -40(f(e_1) + 3f(e_2)) = -40((3e_1 + 9e_2) + 3(-e_1 - 3e_2)) = 0_E$.
On obtient donc
$$Mat_{(e'_1,e'_2,e'_3,e'_4)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Seconde méthode (beaucoup moins élégante).
On écrit la matrice de passage $P = P_{(e_i)\to(e'_i)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -10 & -40 \\ 0 & 3 & 10 & -120 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
On trouve (les calculs ne sont pas triviaux)
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{40} & \frac{1}{40} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{160} & -\frac{1}{160} & 0 & \frac{1}{80} \end{pmatrix}.$$
Puis par formule de changement de base
$$Mat_{(e'_i)}(f) = P^{-1}Mat_{(e_i)}(f)P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. On pose $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
On a $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
puis $B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et enfin $B^4 = 0_{\mathcal{M}_4(\mathbb{R})}$.
On déduit de la question précédente que $f^3 \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$ (sa matrice, dans toute base, serait la matrice nulle sinon).
En revanche $f^4 = 0_{\mathscr{L}(E)}$ car $B^4 = 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})}$.

□

Solution Exercice 42.

- Pour tous $0 \leqslant p \leqslant n$, on a
$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{n-p}$$
- **Formule de Pascal :** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![1, n-1]\!]$
$$\begin{aligned}\binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} &= \frac{(n-1)!}{p!(n-p-1)!} + \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} \\ &= \frac{(n-p)(n-1)! + p(n-1)!}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{(n-1)!(n-p+p)}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}.\end{aligned}$$
- Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![1, n-1]\!]$,
$$\frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1} = \frac{n}{p}\frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$
- **Double produit binomial :** Pour tous $0 \leqslant p \leqslant k \leqslant n$:
$$\begin{aligned}\binom{n}{p}\binom{n-p}{k-p} &= \frac{n!}{p!(n-p)!}\frac{(n-p)!}{(k-p)!(n-k)!} \\ &= \frac{k!}{k!}\frac{n!}{p!}\frac{1}{(k-p)!(n-k)!} \\ &= \binom{k}{p}\binom{n}{k}\end{aligned}$$

  En particulier,

  - Si $p = 1$, on a $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{p-1}$,
  - Si $p = 2$, on a $\frac{k(k-1)}{2}\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)}{2}\binom{n-2}{k-2}$.

□

Solution Exercice 43.

1. (a) Il y a $\binom{m+n}{p}$ parties de $[\![1, m+n]\!]$ avec p éléments : il s'agit de toutes les combinaisons (=parties=sous-ensembles) de $\{1, \dots, m+n\}$ constituées de p élements.
On notera $\mathscr{A} = \{A \subset [\![1, m+n]\!] : \mathrm{Card}(A) = p\}$.
(on vient de prouver que $\mathrm{card}(\mathscr{A}) = \binom{m+n}{p}$).

(b) Soit $k \in [\![0,p]\!]$. On note $\mathscr{A}_k$ le nombre de parties $A \subset [\![1,m+n]\!]$ telles que k éléments de A sont choisis dans $[\![1,n]\!]$ et $p-k$ dans $[\![n+1,n+m]\!]$.

On a $\mathrm{Card}(\mathscr{A}_k) = \binom{n}{k}\binom{m}{p-k}$:

il s'agit en effet de déterminer toutes les parties de $[\![1,m+n]\!]$:

* constituées d'une partie de $[\![1,n]\!]$ avec k éléments : il y en a $\binom{n}{k}$,
* d'une partie de $[\![n+1,m+n]\!]$ avec $p-k$ éléments : il y en a $\binom{m}{p-k}$.

D'autre part, pour construire une partie de $[\![1,m+n]\!]$ avec p éléments il faut et il suffit d'en sélectionner un certains nombres $k \in [\![0,p]\!]$ dans $\{1,\dots,n\}$ et le reste ($p-k$ éléments restants) dans $\{n+1,\dots,m+n\}$ donc

$$\mathscr{A} = \bigcup_{k=0}^{p} \mathscr{A}_k.$$

Notons que cette réunion est disjointe.

(c) On obtient $\mathrm{card}(\mathcal{A}) = \sum_{k=0}^{p} \mathrm{card}(A_k)$ d'où la formule à démontrer :

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k} = \binom{m+n}{p}$$

(formule de Van der Monde).

2. L'objectif de cette question est de retrouver cette formule de manière algébrique.

(a) $(1+X)^{m+n} = \sum_{p=0}^{m+n} \binom{m+n}{p} X^p$ par la formule du binôme de Newton.

(b) On a

$$\begin{aligned}(1+X)^m(1+X)^n &= \left(\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}X^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{m}{j}X^i\right)\\ &= \sum_{p=0}^{m+n}\left(\sum_{i+j=k}\binom{m}{i}\binom{n}{j}\right)X^p\\ &= \sum_{p=0}^{m+n}\left(\sum_{j=0}^{p}\binom{m}{p-j}\binom{n}{j}\right)X^p.\end{aligned}$$

(c) On en déduit par identification des coefficients des polynômes apparaissant dans l'égalité : $(1+X)^{m+n} = (1+X)^m(1+X)^n$:

$$\sum_{j=0}^{p}\binom{m}{p-j}\binom{n}{j} = \binom{m+n}{p}.$$

□

***Solution Exercice** 44.*

1. Soient n et p des entiers naturels tels que $p \leqslant n$.
   On a pour tout $k \in [\![0,p]\!]$, $\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \binom{n}{p}\binom{p}{k}$.
   Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \sum_{k=0}^{p}\binom{n}{p}\binom{p}{k} = \binom{n}{p}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k} = 2^p\binom{n}{p},$$

   où nous avons utilisé la formule du binôme de Newton à la dernière égalité.

2. (a) Par la formule du binôme de Newton, on a

$$A_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n \text{ et}$$

$$B_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = (1-1)^n = 0.$$

(b) — En distinguant les indices pair et impairs :

$$B_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$$

$$B_n = \sum_{1\leqslant 2k\leqslant n}(-1)^{2k}\binom{n}{2k} + \sum_{1\leqslant 2k+1\leqslant n}(-1)^{2k+1}\binom{n}{2k+1}$$

$$B_n = \sum_{1\leqslant 2k\leqslant n}\binom{n}{2k} - \sum_{1\leqslant 2k+1\leqslant n}\binom{n}{2k+1} = S_n - T_n.$$

On en déduit que $S_n = T_n$ car $B_n = 0$.

— On montre de manière analogue $S_n + T_n = A_n = 2^n$.

On en conclut que $S_n = T_n = 2^{n-1}$.

□

***Solution Exercice** 45.*

1. Dans cet exercice, l'univers est constitué des n-listes $(j_1,\dots,j_n)$ constituées de n éléments (jetons) distincts de $\{1,\dots,4n\}$.
   On dit qu'une telle liste est un arrangement de n éléments de $[\![1,4n]\!]$.
   On a $\mathrm{Card}(\Omega) = (4n)(4n-1)\dots(4n-n+1) = (4n)(4n-1)\dots(4n-n+1)$.

Ainsi, $\text{Card}(\Omega) = \dfrac{(4n)!}{(3n)!}$.

On note ce nombre $A_{4n}^{n} = \dfrac{(4n)!}{(4n-n)!}$.

Dans cet exercice on utilisera la probabilité uniforme, les résultats de l'expérience menée étant équiprobables.

2. L'événement contraire de A est $\bar{A}$:
"On ne tire aucun jeton vert au cours des n tirages".
Une n-liste sans répétition de Ω est un élément de $\bar{A}$ si et seulement si cette n-liste ne contient que des jetons rouges et blancs :
$\bar{A}$ est donc l'ensemble des n-listes d'éléments distincts choisis dans $[\![1, 3n]\!]$.
On a donc
$$P(\bar{A}) = \frac{\frac{(3n)!}{(2n)!}}{\frac{(4n)!}{(3n)!}}.$$
On en déduit que
$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = \frac{\frac{(4n)!}{(3n)!} - \frac{(3n)!}{(2n)!}}{\frac{(4n)!}{(3n)!}}.$$
En divisant numérateur et dénominateur par $n!$, on trouve
$$\boxed{P(A) = \frac{\frac{(4n)!}{n!(3n)!} - \frac{(3n)!}{n!(2n)!}}{\frac{(4n)!}{n!(3n)!}} = \frac{\binom{4n}{n} - \binom{3n}{n}}{\binom{4n}{n}}.}$$

3. (a) L'événement T_1 s'écrit
"On obtient un jeton vert pour la première fois au premier tirage"
c'est-à-dire :
"On tire un jeton vert au premier tirage".
Par conséquent T_1 est l'ensemble des n-listes sans répétition $(j_1, \ldots, j_n)$ où j_1 est l'un des n jeton vert.
Notons ensuite que la liste $(j_2, \ldots, j_n)$ est un arrangement de $n-1$ éléments parmi les $4n-1$ jetons restants. On a donc $\text{Card}(T_1) = n \times A_{4n-1}^{n-1}$ et par suite
$$\boxed{P(T_1) = \frac{nA_{4n-1}^{n-1}}{A_{4n}^{n}}.}$$
Remarque : Cette dernière quantité vaut
$$n \times \frac{(4n-1)!}{((4n-1)-(n-1))!} \times \frac{(4n-n)!}{(4n)!} = n \times \frac{(4n-1)!}{(3n)!} \times \frac{(3n)!}{(4n)!} = \frac{n}{4n} = \frac{1}{4}.$$
On peut obtenir que $P(T_1) = \frac{1}{4}$ immédiatement en notant qu'au début de l'expérience il y a $\frac{1}{4}$ des jetons disponibles qui sont verts.

(b) Une n-liste $(j_1, \ldots, j_n) \in \Omega$ est dans T_n si et seulement si $(j_1, \ldots, j_{n-1})$ est un arrangement de $n-1$ élément parmi les $3n$ jetons blancs et rouges dont on dispose. Le n-ième élément de la liste est alors l'un des n jetons verts. On a donc
$$\text{Card}(T_n) = A_{3n}^{n-1} \times n$$
et
$$\boxed{P(T_n) = \frac{nA_{3n}^{n-1}}{A_{4n}^{n}}.}$$

(c) Soit $k \in [\![2, n-1]\!]$.

i. Une n-liste $(j_1, \ldots, j_n) \in \Omega$ est dans T_k si et seulement si
- $(j_1, \ldots, j_{k-1})$ est un arrangement de $k-1$ éléments parmi les $3n$ jetons rouges est blancs,
- le k-ième élément est l'un des n jetons verts,
- $(j_{k+1}, \ldots, j_n)$ est un arrangement de $n-k$ éléments parmi les $4n-k$ éléments restants.

On en déduit que
$$\begin{aligned} P(T_k) &= \frac{A_{3n}^{k-1} n A_{4n-k}^{n-k}}{A_{4n}^{n}} \\ &= \frac{(3n)! n (4n-k)!}{(3n-k+1)!(3n)!} \frac{(3n)!}{(4n)!} \end{aligned}$$
i.e $\boxed{P(T_k) = \dfrac{n(4n-k)!}{(3n-k+1)!} \dfrac{(3n)!}{(4n)!}.}$

ii. En multipliant numérateur et dénominateur par $(n-1)!$ de l'expression obtenue dans la question précédente, on obtient que
$$\begin{aligned} P(T_k) &= \frac{n(n-1)!(4n-k)!(3n)!}{(3n-k+1)!(n-1)!(4n)!} = \frac{n!(4n-k)!(3n)!}{(3n-k+1)!(n-1)!(4n)!} \\ &= \frac{(4n-k)!}{(3n-k+1)!(n-1)!} \frac{n!(3n)!}{(4n)!} = \frac{\binom{4n-k}{n-1}}{\binom{4n}{n}}. \end{aligned}$$

iii. avec $k = 1$, on obtient que l'expression précédente donne
$$\frac{\binom{4n-1}{n-1}}{\binom{4n}{n}} = \frac{\frac{(4n-1)!}{(n-1)!(3n)!}}{\frac{(4n)!}{n!(3n)!}} = \frac{\frac{(4n-1)!}{(n-1)!}}{\frac{(4n)!}{n!}} = \frac{(4n-1)}{(4n)!} \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n(4n-1)!}{(4n)!}.$$
D'autre part, on a
$$P(T_1) = \frac{\frac{n(4n-1)!}{(3n)!}}{\frac{(4n)!}{(3n)!}} = \frac{n(4n-1)!}{(4n)!},$$

d'où l'égalité annoncée.
En faisant $k = n$ dans l'expression précédente, on trouve

$$\frac{n(3n)!}{(2n+1)!}\frac{(3n)!}{(4n)!} = \frac{n(3n)!^2}{(2n+1)!(4n)!}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} P(T_n) &= \frac{nA_{3n}^{n-1}}{A_{4n}^n} = \frac{\frac{n(3n)!}{(2n+1)!}}{\frac{(4n)!}{(3n)!}} \\ &= \frac{n(3n)!^2}{(2n+1)!(4n)!}, \end{aligned}$$

d'où l'égalité annoncée.

4. (a) L'événement A est la réunion des événements 2 à 2 disjoints $T_1, \dots, T_n$: $A = T_1 \cup \dots \cup T_n$.
   (b) On en déduit que

$$\boxed{P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(T_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\binom{4n-k}{n-1}}{\binom{4n}{n}}.}$$

   (c) En comparant l'égalité obtenue à la question 1. et celle à la question précédente, on obtient deux expression de $P(A)$ et on en déduit que

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \binom{4n-k}{n-1} = \binom{4n}{n} - \binom{3n}{n}},$$

   i.e.

$$\boxed{\binom{3n}{n-1} + \binom{3n+1}{n-1} + \dots + \binom{4n-1}{n-1} = \binom{4n}{n} - \binom{3n}{n}.}$$

□

***Solution Exercice** 46.*

1. Par la formule des probabilités totales, appliquée avec le système complet d'événements $(S_k, \overline{S_k})$:

$$\begin{aligned} P(S_{k+1}) &= P(S_{k+1} \cap S_k) + P(S_{k+1} \cap \overline{S_k}) \\ &= P(S_k)P_{S_k}(S_{k+1}) + P(\overline{S_k})P_{\overline{S_k}}(S_{k+1}) \\ &= P(S_k)(1-a) + (1 - P(S_k))b \\ &= P(S_k)(1-(a+b)) + b. \end{aligned}$$

Ainsi, $(P(S_k))_{k\geq 1}$ est une suite arithmético-géométrique :

$$c = c(1-(a+b)) + b \Leftrightarrow c(1-1+(a+b)) = b \Leftrightarrow c = \frac{b}{a+b}.$$

On montre alors (facilement, c'est du cours) que la suite $(P(S_k) - c)_{k\geqslant 1}$ est géométrique de raison $1-(a+b)$. Ainsi

$$\begin{aligned} &\forall k \geq 1, P(S_k) - c = (1-(a+b))^{k-1} \\ &\implies P(S_k) = P(S_1)(1-(a+b))^{k-1} + \frac{b}{a+b} \\ &\implies P(S_k) = \frac{1}{2}(1-(a+b))^{k-1} + \frac{b}{a+b}. \end{aligned}$$

2. On écrit B_k : "le bus emprunté le jour k est à l'heure".
   Par la formule des probabilités totales, appliquée avec le système complet d'événements $(S_k, \overline{S_k})$:

$$\begin{aligned} p_k &= P(S_k \cap B_k) + P(\overline{S_k} \cap B_k) = (1-a)P(S_k) + (1-b)(1-P(S_k)) \\ &= P(S_k)(1-a-1+b) + (1-b) \\ &= (b-a)P(S_k) + (1-b) \end{aligned}$$

   On a $P(S_k) = \frac{1}{2}(1-(a+b))^{k-1} + \frac{b}{a+b}$ avec $1-(a+b) \in]-1;1[$.
   Donc

$$\lim_{k\to+\infty} P(S_k) = \frac{b}{a+b},$$

   et enfin,

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} p_k = (b-a) \times \frac{b}{a+b} + (1-b) = \frac{a+b-2ab}{a+b}.}$$

□

***Solution Exercice** 47.* Soit X une variable aléatoire finie $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$. Les résultats de X sont affichés par un compteur détraqué :

- Le compteur affiche la valeur correcte de X lorsque X prend une valeur entre 1 et $n-1$.
- Le compteur affiche une valeur au hasard dans $[\![1; n-1]\!]$ lorsque X prend la valeur 0 ou n.

Soit Y la valeur affichée par le compteur.

1. Déterminons la loi de Y.
   Y est à valeurs dans $[\![1, n-1]\!]$.
   On utilise le système complet d'événements $([X=k])_{k\in[\![0,n]\!]}$.

On a pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$:

$$\begin{aligned} P(Y=k) &= P(Y=k \cap X=0) + \sum_{\ell=1}^{n-1} P(Y=k \cap X=\ell) \\ &\quad + P(Y=k \cap X=n) \\ &= P_{[X=0]}(Y=k)P(X=0) + \sum_{\ell=1}^{n-1} \underbrace{P_{[X=\ell]}(Y=k)P(X=\ell)}_{=1 \text{ si } \ell=k,\ 0 \text{ sinon}} \\ &\quad + P_{[X=n]}(Y=k)P(X=n). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} P(Y=k) &= \frac{1}{n-1}\binom{n}{0}p^0q^n + \binom{n}{k}p^kq^{n-k} + \frac{1}{n-1}\binom{n}{n}p^nq^0 \\ &= \frac{p^n+q^n}{n-1} + \binom{n}{k}p^kq^{n-k}. \end{aligned}$$

En moyenne la valeur affichée est

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{k=1}^{n-1} kP(Y=k) \\ &= \frac{p^n+q^n}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}p^kq^{n-k} \\ &= \frac{p^n+q^n}{n-1}\frac{n(n-1)}{2} + \underbrace{np}_{\text{espérance binomiale}} - 0q^n - np^n \\ &= \frac{n(p^n+q^n)}{2} + n(p-p^n) \end{aligned}$$

2. Calculons la probabilité que le compteur affiche la valeur de X, il s'agit de l'événement $[X=Y]$ qui est la réunion disjointe :

$$[X=Y] = \bigcup_{k=1}^{n} P(X=k) \Longrightarrow P(X=y) = \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}p^kq^{n-k} = 1-(p^n+q^n).$$

3. On utilise la formule de Bayes. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$:

$$P_{[Y=k]}(X=k) = \frac{P(X=k \cap Y=k)}{P(Y=k)} = \frac{P(X=k)}{P(Y=k)} = \frac{\binom{2k}{k}p^kq^k}{\frac{p^{2k}+q^{2k}}{2k-1} + \binom{2k}{k}p^kq^k}.$$

$\square$

Solution Exercice 48. On considère $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ et $Y = \frac{1}{X+1}$.

On utilise le théorème de transfert avec la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x+1}$ bien définie sur $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$:

$$\begin{aligned} E(Y) = E\left(\frac{1}{X+1}\right) &= \sum_{k=0}^{n} f(k)P(X=k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}p^kq^{n-k} \qquad (q=1-p) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\frac{n!}{k!(n-k)!}p^kq^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!}p^kq^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1}\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}p^kq^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}p^kq^{n-k} \end{aligned}$$

Après changement d'indice $\ell = k+1$, on trouve :

$$\begin{aligned} E(Y) &= \frac{1}{n+1}\sum_{\ell=1}^{n+1}\binom{n+1}{\ell}p^{\ell-1}q^{n-\ell+1} \\ &= \frac{1}{p(n+1)}\sum_{\ell=1}^{n+1}\binom{n+1}{\ell}p^{\ell}q^{n+1-\ell} \\ &= \frac{1}{p(n+1)}\left(\sum_{\ell=0}^{n+1}\binom{n+1}{\ell}p^{\ell}q^{n+1-\ell} - q^{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{p(n+1)}\left((p+q)^{n+1} - q^{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{p(n+1)}\left(1 - q^{n+1}\right). \end{aligned}$$

$\square$