DEVOIR SUR TABLE n°1

Durée : 4 heures

L'usage de calculatrices est interdit

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, **la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Quelques questions de cours

Répondre par **Vrai** ou **Faux** aux assertions suivantes en justifiant rapidement.

1. Il existe des valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquelles l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ est convergente.
2. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 e^{-\frac{1}{t}} dt$ est faussement impropre.
3. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$ est faussement impropre.
4. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$ est convergente.
5. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente.
6. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$ est convergente.

Problème

Dans ce problème, on met en oeuvre des techniques d'analyse classique permettant de calculer, par plusieurs méthodes, l'intégrale de Dirichlet $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ *et d'autres intégrales analogues* $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t} dt$, $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$, *qui interviennent, notamment, dans l'étude des phénomènes ondulatoires.*

Les parties I, II, III sont indépendantes

Préambule

On considère deux réels a, b tels que $a < b$ et une fonction f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$.

1. Montrer qu'il existe une constante positive M telle que pour tout réel $t \in [a, b]$:
$$|f'(t)| \leqslant M.$$
2. Que vaut : $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k}\int_a^b f'(t)e^{ikt}dt$?
3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :
$$\lim_{k\to+\infty} \int_a^b f(t)e^{ikt}dt = 0.$$

Partie I

Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2nt)}{\tan t}dt \quad , \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2nt)}{t}dt.$$

1. (a) i. Déterminer :
$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\sin(2nt)}{\tan t}$$
   ii. Déterminer :
$$\lim_{t\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin(2nt)}{\tan t}$$
   iii. Étudier, pour tout entier naturel non nul n, la convergence de l'intégrale I_n.

   (b) Montrer que $I_1 = \frac{\pi}{2}$.

   (c) Exprimer, pour tout réel t de $[0, \frac{\pi}{2}]$, et tout entier naturel non n, la quantité
$$\sin((2n+2)t) - \sin(2nt)$$
   en fonction de $\cos((2n+1)t)$ et $\sin t$.

   (d) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante (on précisera cette constante).
2. Étudier la convergence des intégrales $J_n, n \in \mathbb{N}^*$ et de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t}dt$.
3. (a) Rappeler ou retrouver le développement limité en 0 à l'ordre 3 de la fonction tan.

   (b) Montrer que la fonction φ qui, à tout réel t de $]0; \frac{\pi}{2}[$ associe :
$$\varphi(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{\tan t}$$
   est prolongeable en une fonction Φ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ avec $\Phi'(0) = \frac{1}{3}$ et $\Phi'(\frac{\pi}{2}) = 1 - \dfrac{4}{\pi^2}$.
4. Que vaut : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(J_n - I_n)$? On pensera à utiliser le préambule.

5. (a) Montrer que l'intégrale $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est convergente

   (on pourra effectuer une intégration par parties).

   (b) Montrer que :
$$\lim_{n\to+\infty} J_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$$

   (on pourra utiliser un changement de variables)

   (c) Que vaut :
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \quad ?$$

Partie II

1. Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$:
$$\sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\cos t}{t^2} dt = -\int_{\pi}^{n\pi} \frac{\sin t}{t} dt + \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} - \frac{1}{\pi}.$$

2. Étudier la convergence absolue de la série $\sum_{k\geqslant 1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\cos t}{t^2} dt$.

3. En déduire que la suite $\left(\int_{\pi}^{n\pi} \frac{\sin t}{t}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

   On note $L = \lim_{n\to+\infty} \int_{\pi}^{n\pi} \frac{\sin(t)}{t} dt$ ***sa limite. (On ne demande pas de la calculer).***

4. On note $G : X \longmapsto \int_{\pi}^{X} \frac{\sin t}{t}$.

   Justifier que G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\pi; +\infty[$ et donner $G'(x)$ pour tout $x \geqslant \pi$.

5. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Justifier qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_0$, $|G(n\pi) - L| \leqslant \varepsilon$.

6. Soit $n \geqslant N_0$ et soit $X \in [n\pi, (n+1)\pi[$. Montrer qu'il existe un réel $c \in]n\pi, X[$ tel que :
$$|G(X) - G(n\pi)| \leqslant |(n+1)\pi - n\pi||G'(c)|.$$

   En déduire que :
$$|G(X) - L| \leqslant \frac{1}{n} + |G(n\pi) - L|.$$

7. En déduire enfin la convergence de l'intégrale ci-dessous et qu'on a l'égalité :
$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = L.$$

Partie III

On considère une suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ décroissante et de limite nulle.

1. On note pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$.
   Vérifier que les suites $(S_{2n})_{n\geqslant 0}$ et $(S_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ sont adjacentes. Quel théorème a-t-on re-démontré ?
2. On note $S = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n}$.
3. On note $R_n = S - S_n$ le reste d'odre de $n \in \mathbb{N}$ de la série $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n a_n$.
   Montrer qu'on a pour tout $p \in \mathbb{N}$, $|R_{2p}| \leqslant a_{2p+1}$ et $|R_{2p+1}| \leqslant a_{2p+2}$.
4. Étudier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!}$. Est-elle absolue ?
5. Écrire une fonction Python `approximation(epsilon)` d'argument un nombre réel `epsilon` > 0 et renvoyant une valeur approchée de la somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!}$ avec une précision au moins `epsilon`.

Partie IV

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant le cours, donner directement $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.
2. Soit $y \in \mathbb{R}$. Étudier la convergence absolue de la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(iy)^n}{n!}$.

   Pour la suite on admet, et on pourra utiliser le fait que : $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(iy)^n}{n!} = e^{iy}$.
3. Pour $z \in \mathbb{C}$ écrit sous forme algébrique $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on note $e^z = e^x e^{iy}$.
   A l'aide d'un produit de Cauchy, montrer que $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.
4. Soit $t \in \mathbb{R}$. Exprimer $\sin(t)$ en fonction de e^{it} et de e^{-it}.
5. En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$,
   $$\sin(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p t^{2p+1}}{(2p+1)!}.$$
6. En déduire que $\forall t \neq 0$, $\frac{\sin(t)}{t} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p t^{2p}}{(2p+1)!}$ et vérifier que l'on peut prolonger l'égalité en $t = 0$.
7. On pose $I =]0;1]$, $f(t) = \frac{\sin(t)}{t}$ et $f_p(t) = \frac{(-1)^p t^{2p}}{(2p+1)!}$.
   En appliquant un théorème de cours, montrer que l'intégrale ci-dessous converge et qu'on a :
   $$\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t} dt = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)(2p+1)!}.$$