TRAVAUX DIRIGÉS : Isométries vectorielles

Exercice 1: (Solution)

Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel.

1. On considère F le sous-espace de E défini par le système d'équations $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$
   (a) Déterminer $F^\perp$.
   (b) Soit s la symétrie orthogonale par rapport à F.
   Déterminer la matrice de s dans la base canonique.
2. Soit s la réflexion par rapport au plan d'équation $\Pi : x + 2y + z = 0$.
   (a) Déterminer la projection orthogonale sur Π de tout vecteur $u \in \mathbb{R}^3$.
   (b) En déduire la matrice de s dans la base canonique.
   (c) **Autre méthode :** Déterminer une base orthonormée adaptée à la somme directe $\mathbb{R}^3 = \Pi^\perp \oplus \Pi$ et retrouver la matrice de s dans la base canonique.

Exercice 2: (Solution)

On munit $\mathbb{R}^4$ de son produit scalaire canonique.
Soit p la projection orthogonale sur $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y - z + t = 0\}$.
Déterminer la matrice de p dans la base canonique.
Déterminer la distance de $(1, 0, 1, 1)$ à F.

Exercice 3: (Solution)

On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire usuel. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0, 2x - y = 0\}$.
Déterminer la matrice de s dans la base canonique.

Exercice 4: (Solution)

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 2.

1. Que peut-on dire de la composée de deux rotations ?
2. Que peut-on dire de la composée de deux réflexions ?
3. Que peut-on dire de la composée d'une rotation et d'une réflexion ?
4. Montrer que toute rotation peut s'écrire comme la composée de deux réflexions.
5. Montrer que le résultat précédent est vrai si $\dim E = 3$.

Exercice 5: (Solution)

Déterminer la nature géométrique et préciser les caractéristiques géométriques des endomorphismes canoniquement associés aux matrices :

1. $A = \dfrac{1}{25}\begin{pmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{pmatrix}$
2. $B = \dfrac{1}{16}\begin{pmatrix} -11 & 9 & 3\sqrt{6} \\ 9 & 13 & -\sqrt{6} \\ 3\sqrt{6} & -\sqrt{6} & 14 \end{pmatrix}$
3. $C = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 & 4 & -8 \\ 4 & -7 & -4 \\ -8 & -4 & -1 \end{pmatrix}$
4. $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
5. $E = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{6} & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 1 & 3 \\ -\sqrt{6} & 3 & 1 \end{pmatrix}$
6. $F = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

Pour la matrice F, on pourra montrer que l'endomorphisme canoniquement associé est la composée d'une rotation et d'une réflexion.

Exercice 6: (Solution)

Soit $\mathscr{B}_c = (i, j, k)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ orientant l'espace.

1. Déterminer la matrice de la rotation d'axe orienté par $i - 2j$ et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{6}$ dans la base $\mathscr{B}_c$.
2. Déterminer la matrice de la rotation d'axe orienté par $i + j + k$ et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{4}$ dans la base $\mathscr{B}_c$.

Exercice 7: (Solution)

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$.

1. Pour quelles valeurs de a et b a-t-on $A \in O(3)$?
2. Préciser alors la nature et éléments caractéristiques de l'endomorphisme canoniquement associé à A.

Exercice 8: (Solution)

Soit E un espace euclidien et $a \in E$ un vecteur unitaire.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit φ_α sur E par :

$$\forall x \in E, \varphi_\alpha(x) = x + \alpha(x|a)a.$$

A quelle(s) condition(s) l'endomorphisme φ_α est-il orthogonal ?
Caractériser alors géométriquement φ_α.

Exercice 9: (Solution)

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3 et soit $f \in \mathscr{L}(E)$ non nul.
Montrer que f est une rotation si et seulement si,

$$\forall (u,v) \in E^2 : f(u) \wedge f(v) = f(u \wedge v).$$

Exercice 10: (Solution)

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3.

1. Soit r la rotation d'axe D dirigé et orienté par un vecteur unitaire ω et d'angle θ.
   Montrer que pour tout $x \in E$,
   $$r(x) = \cos\theta x + \sin\theta \omega \wedge x + (1-\cos\theta)(x|\omega)\omega.$$
   Pour cela, on pourra :
   — écrire $x = \alpha\omega + y$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $y \in D^\perp$
   — Si $y \neq 0$, on pourra considérer la B.O.N. directe $\left(\omega, \frac{y}{||y||}, \omega \wedge \frac{y}{||y||}\right)$.
2. Soit $\mathscr{B} = (i,j,k)$ une base orthonormée directe de E.
   Déterminer la matrice dans la base canonique de la rotation d'axe D dirigé et orienté par $i+j+k$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 11: (Solution)

Soient E un espace vectoriel euclidien et $u \in E$ non nul.
On considère $g \in O(E)$ une isométrie de E et on note s la réflexion par rapport à l'hyperplan $\mathrm{Vect}(u)^\perp$. Décrire $g \circ s \circ g^{-1}$.

Exercice 12: (Solution)

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$ et $f \in O(E)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $p_n = \dfrac{1}{n}\left(\mathrm{id}_E + f + f^2 + \cdots + f^{n-1}\right) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f^k$.

1. Montrer que $\ker(f-\mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Im}(f-\mathrm{id}_E)$ sont supplémentaires dans E.
2. Calculer $p_n(x)$ pour tout $x \in \ker(f-\mathrm{id}_E)$.
3. Calculer $p_n(x)$ pour tout $x \in \mathrm{Im}(f-\mathrm{id}_E)$.
4. Soit p la projection orthogonale sur $\ker(f-\mathrm{id}_E)$.
   Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} ||p(x)-p_n(x)|| = 0$ pour tout $x \in E$.

SOLUTIONS TRAVAUX DIRIGÉS : Isoméries vectorielles

Solution Exercice 1. Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel. On considère F le sous-espace de E défini par le système d'équations

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

1. (a) Déterminons $F^\perp$.

On commence par déterminer une base de F. On échelonne le système d'équations :

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{3z}{2} \\ y = -\frac{z}{2} \end{cases}$$

Ainsi, $\mathscr{B}_F = ((-3,-1,2))$ est une base de F et $\dim F = 1$.

On en déduit que $\dim F^\perp = 2$. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

On a $(a,b,c) \in F^\perp \iff ((a,b,c)|(-3,-1,2)) = 0$.

Ainsi, $(a,b,c) \in F^\perp$ si et seulement si (a,b,c) est solution de l'équation : $-3a - b + 2c = 0 \iff 3a = -b + 2c$.

Finalement, $F^\perp = \mathrm{Vect}((-1,3,0),(2,0,3))$ et $\mathscr{B}_{F^\perp} = ((-1,3,0),(2,0,3))$ est une base de $F^\perp$.

(b) On a $\dim F = 1$ et $\dim F^\perp = 2$ donc la symétrie orthogonale s par rapport à F et parallèlement à $F^\perp$ est un retournement (ou demi-tour).

Dans la base $\mathscr{B} = \mathscr{B}_F \cup \mathscr{B}_{F^\perp}$ adaptée à $\mathbb{R}^3 = F \oplus F^\perp$ on a

$$Mat_{\mathscr{B}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathscr{B}_c$ la base canonique et P la matrice de passage de $\mathscr{B}_c$ à $\mathscr{B}$.

Alors $Mat_{\mathscr{B}_c}(s) = P Mat_{\mathscr{B}}(s) P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{6}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \end{pmatrix}$.

Notons (comme prévu par le cours) que la matrice de la symétrie orthogonale $s \in O(\mathbb{R}^3)$ dans la base canonique (qui est orthonormée) est symétrique.

Remarques

Le calcul de P^{-1} n'est pas immédiat.
On peut utiliser l'algorithme de Gram-Schmidt pour orthonormaliser la base $\mathscr{B}$:

— On pose $\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{14}}(-3,-1,2)$.

— Les espaces F et $F^\perp$ étant orthogonaux (!), il suffit d'orthonormaliser la base $\mathscr{B}_{F^\perp}$.
On pose $\varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(-1,3,0)$ puis on pose :

$$\begin{aligned} e_3 &= (2,0,3) - ((2,0,3)|\varepsilon_2)\varepsilon_2 \\ &= (2,0,3) - \frac{1}{10}(-2)(-1,3,0) \\ &= \left(\frac{9}{5}, \frac{3}{5}, 3\right) \text{ et enfin } \varepsilon_3 = \frac{e_3}{||e_3||} = \sqrt{\frac{5}{63}} e_3 \end{aligned}$$

On obtient une base orthonormée $\mathscr{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de $\mathbb{R}^3$.
La matrice de passage Q de $\mathscr{B}_c$ à $\mathscr{B}'$ (entre deux b.o.n.) est donc orthogonale et $Q^{-1} = {}^tQ$. Ainsi,

$$Mat_{\mathscr{B}_c}(s) = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} {}^tQ = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{6}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas l'inverse de la matrice de passage est simple à obtenir par transposition, mais l'orthonormalisation est couteuse en calculs.

Remarques

On peut également poser $\varepsilon_3 = \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{35}}(-3,-1,-5)$.

Remarques

Pour déterminer $Mat_{\mathscr{B}_c}(s)$ on peut également procéder comme suit.
Pour tout $x = x_F + x_{F^\perp} = p_F(x) + (x - p_F(x)) \in F \oplus F^\perp$ on a $s(x) = x_F - x_{F^\perp} = 2p_F(x) - x$ où p_F est la projection orthogonale sur la droite F.
Il suffit donc de calculer l'image des vecteurs de la base canonique :

$$s(e_i) = 2p_F(e_i) - e_i = 2(e_i|\varepsilon)\varepsilon - e_i$$

avec $\varepsilon = \frac{1}{14}(-3,-1,2)$ vecteur unitaire dirigeant F.

2. (a) Pour déterminer la projection orthogonale sur Π, il suffit de remarquer que $\mathbb{R}^3 = \Pi \oplus \Pi^\perp$.
Soit $u \in \mathbb{R}^3$: $u = u_\Pi + u_{\Pi^\perp} = p_\Pi(u) + p_{\Pi^\perp}(u)$.
L'espace $\Pi^\perp$ est une droite dirigée par le vecteur unitaire $n = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)$.
Ainsi, pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, la projection orthogonale sur la droite $\Pi^\perp$ est donnée par
$$p_{\Pi^\perp}(u) = (u|n)n.$$
On en déduit que $p_\Pi(u) = u_\Pi = u - u_{\pi^\perp} = u - (u|n)n$.
La symétrie orthogonale s est donnée pour tout $u \in \mathbb{R}^3$ par
$$s(u) = s(u_\Pi + u_{\Pi^\perp}) = u_\Pi - y_{\Pi^\perp} = u - 2u_{\Pi^\perp} = u - 2(u|n)n$$

(b) On calcule $s(1,0,0), s(0,1,0), s(0,0,1)$ avec la formule précédente et on trouve :
$$Mat_{\mathscr{B}_c}(s) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(c) **Autre méthode :** Déterminer une base orthonormée adaptée à la somme directe $\mathbb{R}^3 = \Pi^\perp \oplus \Pi$ et retrouver la matrice de s dans la base canonique.

$\square$

Solution Exercice 2. On munit $\mathbb{R}^4$ de son produit scalaire canonique.
Soit p la projection orthogonale sur $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x - y - z + t = 0\}$.
Déterminons la matrice de p dans la base canonique.
Pour cela on calcule $p(e_i)$ pour tout vecteur $e_i, i \in [\![1,4]\!]$ de la base canonique.
On utilise la caractérisation suivante :
$$\left\{\begin{array}{l} \forall i \in [\![1,4]\!], p(e_i) \in F \\ \forall i \in [\![1,4]\!], e_i - p(e_i) \in F^\perp \end{array}\right.$$
Déterminons une base de F : $(x,y,z,t) \in F \iff x = y + z - t$.
Ainsi, $F = \mathrm{Vect}((1,1,0,0),(1,0,1,0),(-1,0,0,1))$.

— $p(e_1) = p(1,0,0,0) = (a+b-c, a, b, c) \in F$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ à déterminer.
De plus $e_1 - p(e_1) \in F^\perp$ donc
$$\left\{\begin{array}{l} (e_1 - p(e_1)|(1,1,0,0)) = 0 \\ (e_1 - p(e_1)|(1,0,1,0)) = 0 \\ (e_1 - p(e_1)|(-1,0,0,1)) = 0 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} ((1-a-b+c,-a,-b,-c)|(1,1,0,0)) & = & 0 \\ ((1-a-b+c,-a,-b,-c)|(1,0,1,0)) & = & 0 \\ ((1-a-b+c,-a,-b,-c)|(-1,0,0,1)) & = & 0 \end{array}\right.$$
On en déduit que $e_1 - p(e_1) \in F^\perp$ si et seulement si
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2a & + & b & - & c & = & 1 \\ a & + & 2b & - & c & = & 1 \\ a & + & b & - & 2c & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2a & + & b & - & c & = & 1 \\ & & 3b & - & c & = & 1 \\ & & b & - & 3c & = & 1 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2a & + & b & - & c & = & 1 \\ & & 3b & - & c & = & 1 \\ & & & & c & = & -\frac{2}{8} \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2a & + & b & - & c & = & 1 \\ & & b & & & = & \frac{1}{4} \\ & & & & c & = & -\frac{2}{8} \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rrrcl} a & & & = & \frac{1}{4} \\ & b & & = & \frac{1}{4} \\ & & c & = & -\frac{1}{4} \end{array}\right.$$
Ainsi, $p(e_1) = (\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}(3,1,1,-1)$.

— $p(e_2) = p(0,1,0,0) = (a+b-c, a, b, c) \in F$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ à déterminer.
De plus $e_2 - p(e_2) \in F^\perp$:
$$\left\{\begin{array}{l} (e_2 - p(e_2)|(1,1,0,0)) = 0 \\ (e_2 - p(e_2)|(1,0,1,0)) = 0 \\ (e_2 - p(e_2)|(-1,0,0,1)) = 0 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} ((-a-b+c,1-a,-b,-c)|(1,1,0,0)) & = & 0 \\ ((-a-b+c,1-a,-b,-c)|(1,0,1,0)) & = & 0 \\ ((-a-b+c,1-a,-b,-c)|(-1,0,0,1)) & = & 0 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2a & + & b & - & c & = & 1 \\ a & + & 2b & - & c & = & 0 \\ a & + & b & - & 2c & = & 0 \end{array}\right.$$
On en déduit que $e_2 - p(e_2) \in F^\perp$ si et seulement si
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2a & + & b & - & c & = & 1 \\ a & + & 2b & - & c & = & 0 \\ a & + & b & - & 2c & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2a & + & b & - & c & = & 1 \\ & & 3b & - & c & = & -1 \\ & & b & - & 3c & = & -1 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2a & + & b & - & c & = & 1 \\ & & 3b & - & c & = & -1 \\ & & & & c & = & \frac{2}{8} \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2a & + & b & - & c & = & 1 \\ & & b & & & = & -\frac{1}{4} \\ & & & & c & = & \frac{1}{4} \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rrrcl} a & & & = & \frac{3}{4} \\ & b & & = & -\frac{1}{4} \\ & & c & = & \frac{1}{4} \end{array}\right.$$

Ainsi, $p(e_2)=(\frac{1}{4},\frac{3}{4},-\frac{1}{4},\frac{1}{4})=\frac{1}{4}(1,3,-1,1)$.

— $p(e_3)=p(0,0,1,0)=(a+b-c,a,b,c)\in F$ avec $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ à déterminer.
De plus $e_3-p(e_3)\in F^\perp$:

$$\left\{\begin{array}{r}(e_3-p(e_3)|(1,1,0,0))=0\\(e_3-p(e_3)|(1,0,1,0))=0\\(e_3-p(e_3)|(-1,0,0,1))=0\end{array}\right.$$

$$\iff\left\{\begin{array}{rcl}((-a-b+c,-a,1-b,-c)|(1,1,0,0))&=&0\\((-a-b+c,-a,1-b,-c)|(1,0,1,0))&=&0\\((-a-b+c,-a,1-b,-c)|(-1,0,0,1))&=&0\end{array}\right.$$

$$\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl}2a&+&b&-&c&=&0\\a&+&2b&-&c&=&1\\a&+&b&-&2c&=&0\end{array}\right.$$

On en déduit que $e_3-p(e_3)\in F^\perp$ si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl}2a&+&b&-&c&=&0\\a&+&2b&-&c&=&1\\a&+&b&-&2c&=&0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl}2a&+&b&-&c&=&0\\&&3b&-&c&=&2\\&&b&-&3c&=&0\end{array}\right.$$

$$\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl}2a&+&b&-&c&=&0\\&&3b&-&c&=&2\\&&&&c&=&\frac{2}{8}\end{array}\right.$$

$$\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl}2a&+&b&-&c&=&0\\&&b&&&=&\frac{3}{4}\\&&&&c&=&\frac{1}{4}\end{array}\right.$$

$$\iff\left\{\begin{array}{rrrcl}a&&&=&-\frac{1}{4}\\&b&&=&\frac{3}{4}\\&&c&=&\frac{1}{4}\end{array}\right.$$

Ainsi, $p(e_3)=(\frac{1}{4},-\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{4})=\frac{1}{4}(1,-1,3,1)$.

— On obtient de manière analogue $p(e_4)=\frac{1}{4}(-1,1,1,3)$.

Finalement, la matrice de la projection orthogonale sur F dans la base canonique $\mathscr{B}$ est :

$$Mat_{\mathscr{B}}(p)=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&1&1&-1\\1&3&-1&1\\1&-1&3&1\\-1&1&1&3\end{pmatrix}$$

$\square$

***Solution Exercice** 3.* On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire usuel et on l'oriente par le choix de la base canonique.

Soit s la symétrie orthogonale par rapport à

$$F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+2y-z=0, 2x-y=0\}.$$

Déterminons la matrice de s dans la base canonique.

— On commence par déterminer une base de F.

$$(x,y,z)\in F\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl}x&+&2y&-&z&=&0\\2x&-&y&&&=&0\end{array}\right.$$

$$\iff\left\{\begin{array}{rrcl}&z&=&5x\\y&&=&2x\end{array}\right.$$

Ainsi, $F=\mathrm{Vect}((1,2,5))$ et la symétrie s est un retournement c'est à dire une rotation d'angle π autour de la droite $F=\mathrm{Vect}((1,2,5))$.

— Déterminons une base orthonormée de F et de $F^\perp$.
On pose $v=(2,-1,0)\in F^\perp$ et on normalise les vecteurs u,v.
On pose $\varepsilon_1=\frac{1}{\sqrt{30}}(1,2,5)$ et $\varepsilon_2=\frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1,0)$.
On calcule alors $\varepsilon_3=\varepsilon_1\wedge\varepsilon_2=\frac{1}{5\sqrt{6}}(5,10,-5)=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1)$.

— On en déduit que $\mathscr{B}=\left(\underbrace{\varepsilon_1}_{\mathscr{B}_F},\underbrace{\varepsilon_2,\varepsilon_3}_{\mathscr{B}_{F^\perp}}\right)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

— La matrice de s dans $\mathscr{B}$ est donc :

$$Mat_{\mathscr{B}}(s)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

— La matrice de passage P de la base canonique $\mathscr{B}_c$ de $\mathbb{R}^3$ à $\mathscr{B}$ est orthogonale (car $\mathscr{B}_c$ et $\mathscr{B}$ sont des b.o.n.) donc $P^{-1}={}^tP$.
On obtient donc la formule du changement de base :

$$Mat_{\mathscr{B}_c}(s)=PMat_{\mathscr{B}}(s)P^{-1}=PMat_{\mathscr{B}}(s)\,{}^tP=\frac{1}{15}\begin{pmatrix}-14&2&5\\2&-11&10\\5&10&10\end{pmatrix}.$$

$\square$

***Solution Exercice** 4.*

1. Soit f la composée de deux rotations $r_\theta, r_{\theta'}$.
Dans toute base orthonormée $\mathscr{B}$ directe de E on a

$$\begin{aligned}Mat_{\mathscr{B}}(f)=Mat_{\mathscr{B}}(r_\theta)Mat_{\mathscr{B}}(r'_\theta)&=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta'&-\sin\theta'\\\sin\theta'&\cos\theta'\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\cos\theta+\theta'&-\sin\theta+\theta'\\\sin\theta+\theta'&\cos\theta+\theta'\end{pmatrix}\\&=Mat_{\mathscr{B}}(r'_\theta)Mat_{\mathscr{B}}(r_\theta)\end{aligned}$$

On a montré que la composée $f=r_\theta\circ r_{\theta'}=r_{\theta'}\circ r_\theta$ de deux rotations est une rotation (d'angle $\theta+\theta'$).

> **Remarques**
>
> Le résultat est compatible avec le calcul du déterminant :
> $\det(r_\theta \circ r_{\theta'}) = \det(r_\theta)\det(r_{\theta'}) = 1$: $f = r_\theta \circ r_{\theta'}$ est une isométrie positive.

2. Soit f la composée de deux réflexions s_1, s_2.
   Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E.
   Il existe $\theta, \theta' \in]-\pi;\pi]$ tels que

$$\begin{aligned} Mat_{\mathscr{B}}(f) = Mat_{\mathscr{B}}(s_1)Mat_{\mathscr{B}}(s_2) &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta' & \sin\theta' \\ \sin\theta' & -\cos\theta' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta-\theta' & -\sin\theta-\theta' \\ \sin\theta-\theta' & \cos\theta-\theta' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

> **Remarques**
>
> Le résultat est compatible avec le calcul du déterminant :
> $\det(s_1 \circ s_2) = \det(s_1)\det(s_2) = (-1)^2 = 1$: $f = s_1 \circ s_2$ est une isométrie positive.

3. Soit $f = r_\theta \circ s$ la composée d'une rotation r_θ et d'une réflexion s.
   Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée directe de E.
   Alors il existe $\theta' \in]-\pi;\pi]$ tel que

$$\begin{aligned} Mat_{\mathscr{B}}(f) = Mat_{\mathscr{B}}(r_\theta)Mat_{\mathscr{B}}(s) &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta' & \sin\theta' \\ \sin\theta' & -\cos\theta' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta+\theta' & \sin\theta+\theta' \\ \sin\theta+\theta' & -\cos\theta+\theta' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   Ainsi, $f = r_\theta \circ s$ est une réflexion d'axe $F = \mathrm{Vect}\left(\cos\frac{\theta-\theta'}{2}, \sin\frac{\theta-\theta'}{2}\right)$.

4. Soit $\mathscr{B} = (u, v)$ une base orthonormée directe de E et r_θ la rotation d'angle $\theta \in]-\pi;\pi]$.
   Dans $\mathscr{B}$ (comme dans toute base orthonormée de E) la matrice de r_θ est

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   On en déduit que r_θ est la composée des réflexions d'axes respectifs : $\mathrm{Vect}(\cos\frac{\theta}{2}u + \sin\frac{\theta}{2}v)$ et $\mathrm{Vect}(u)$.

5. Soit r_θ une rotation de E avec $\dim E = 3$.
   Il existe une base orthonormée $\mathscr{B} = (u, v, w)$ de E dans laquelle la matrice de r_θ est

$$Mat_{\mathscr{B}}(r_\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   — La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est la matrice de la réflexion d'hyperplan $P = \mathrm{Vect}(u, v)$ (parallèlement à $D = \mathrm{Vect}(w)$).
   — La matrice $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ est également la matrice d'une réflexion.
   — En effet, $\chi_S(X) = (X-1)^2(X+1)$ et $E_1 = \mathrm{Vect}\left(u, \cos\frac{\theta}{2}v + \sin\frac{\theta}{2}w\right)$ est de dimension 2.
   S est donc la matrice de la réflexion d'hyperplan $P' = \mathrm{Vect}\left(u, \cos\frac{\theta}{2}v + \sin\frac{\theta}{2}w\right)$ (parallèlement à $D' = P'^{\perp}$).

□

Solution Exercice 5. On notera toujours f l'endomorphisme canoniquement associé aux matrices étudiées dans cet exercice.

On suppose les espaces $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ orientés par le choix d'une base orthonormée directe.

1. La matrice $A = \dfrac{1}{25}\begin{pmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{pmatrix}$ est :
   — symétrique : ${}^tA = A$.
   — orthogonale : ${}^tAA = I_2$.
   Par conséquent A est la matrice d'une symétrie orthogonale.
   De plus $\det(A) = -1$ (il suffit de constater qu'il est négatif car A étant orthogonale, on a : $\det(A) \in \{-1; 1\}$).
   L'endomorphisme f canoniquement associé à A est donc une réflexion orthogonale c'est-à-dire une symétrie par rapport à $E_1 = \ker(f - \mathrm{id}) = \mathrm{Vect}(3, 4)$ de dimension 1 : $A - I_2 = \dfrac{1}{25}\begin{pmatrix} -32 & 24 \\ 24 & -18 \end{pmatrix}$.
   (parallèlement à $E_{-1} = E_1^{\perp} = \ker(f + id) = \mathrm{Vect}(-4, 3)$).
   Dans la base $((3, 4)(-4, 3))$ la matrice de s est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2. La matrice $B = \dfrac{1}{16}\begin{pmatrix} -11 & 9 & 3\sqrt{6} \\ 9 & 13 & -\sqrt{6} \\ 3\sqrt{6} & -\sqrt{6} & 14 \end{pmatrix}$ est :
   — symétrique : ${}^tB = B$.

— orthogonale : ${}^tBB = I_3$.
De plus $\det(B) = -1$.
Par conséquent $f \neq -\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ est une réflexion c'est à dire une symétrie orthogonale par rapport au plan $P = \ker(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}((\sqrt{6}, 0, 9), (1, 3, 0))$.
(parallèlement à la droite $P^\perp = \ker(f + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$).
Dans la base $\mathscr{B} = ((\sqrt{6}, 0, 9), (1, 3, 0), (3, -1, -\frac{\sqrt{6}}{3}))$ la matrice de f est

$$Mat_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. La matrice $C = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 & 4 & -8 \\ 4 & -7 & -4 \\ -8 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ est :
   — symétrique : ${}^tC = C$.
   — orthogonale : ${}^tCC = I_3$.
   De plus $\det(C) = 1$.
   Par conséquent $f \neq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ est un retournement c'est-à-dire une rotation d'angle π autour d'un axe, en l'occurence $D = \ker(f - \mathrm{id}) = \mathrm{Vect}(-2, -1, 2)$.
   Dans la base $\mathscr{B} = ((-2, -1, 2), (1, -2, 0), (1, 0, 1))$ la matrice de f est

$$Mat_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. La matrice $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est orthogonale car ses colonnes (ou ses lignes) constituent clairement une base orthonormée de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ (de $\mathscr{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ pour les lignes).
   De plus $\det(D) = 1$ donc D est la matrice d'une rotation $f = r_\theta$.
   Dans une base orthonormée $\mathscr{B} = (u, v, w)$ directe avec u dirigeant l'axe de la rotation, la matrice de f est de la forme :

$$Mat_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

   — On détermine l'axe $E_1(f)$ de la rotation :

$$AX = X \iff X \in \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : E_1(f) = \mathrm{Vect}(1, 1, 1).$$

   — On détermine l'angle $\theta \in]-\pi; \pi]$ de la rotation :
   $0 = \mathrm{Tr}(D) = \mathrm{Tr}(f) = 1 + 2\cos\theta \iff \cos\theta = -\dfrac{1}{2} \iff \theta = \pm\dfrac{2\pi}{3}$.
   — On détermine le signe de $\sin\theta$ en déterminant une base orthonormée $\mathscr{B} = \mathscr{B}_{E_1} \cup \mathscr{B}_{E_1^\perp}$ de $\mathbb{R}^3$.
   On pose $u = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ puis $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0) \in \mathrm{Vect}(u)^\perp$.
   Alors $\left(\underbrace{u}_{\mathscr{B}_{E_1}}, \underbrace{v, u \wedge v}_{\mathscr{B}_{E_1^\perp}}\right)$ est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$.
   On note $w = u \wedge v$.
   Le calcul classique suivant donne $\sin\theta$:

$$[u, v, f(v)] = \det(u, v, f(v)) = (u \wedge v | \cos\theta v + \sin\theta u \wedge v) = \sin\theta ||w||^2 = \sin\theta$$

   car $u \wedge v \perp v$ et $w = u \wedge v$ est unitaire.
   On calcule donc $\det(u, v, f(v))$ avec $f(v) = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$:
   (on développe par rapport à la première ligne)

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\theta.$$

   On en déduit que $\theta = \frac{2\pi}{3}$.
   L'isométrie f est donc une rotation d'angle $\theta = \frac{2\pi}{3}$ et d'axe $E_1(f) = \mathrm{Vect}(1, 1, 1)$.

5. La matrice $E = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{6} & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 1 & 3 \\ -\sqrt{6} & 3 & 1 \end{pmatrix}$ est orthogonale car ses lignes constituent une base orthonormée de $\mathscr{M}_{13}(\mathbb{R})$.
   De plus $\det(F) = 1$ donc l'endomorphisme f est une rotation.
   — On détermine l'axe $E_1(f) = \ker(f - \mathrm{id})$ de la rotation :

$$EX = X \iff X \in \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : E_1(f) = \mathrm{Vect}(0, 1, 1).$$

   — On détermine l'angle $\theta \in]-\pi; \pi]$ de la rotation :
   $0 = \mathrm{Tr}(E) = \mathrm{Tr}(f) = 1 + 2\cos\theta \iff \theta = \pm\frac{2\pi}{3}$.
   On note $u = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)$ un vecteur unitaire dirigeant l'axe $E_1(f)$ de la rotation.
   Soit $v = (1, 0, 0) \in \mathrm{Vect}(u) \perp$ vecteur unitaire orthogonal à u.

On obtient $\sin\theta$ en calculant le produit mixte :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{4} \end{vmatrix} = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\theta.$$

Par conséquent $\theta = -\frac{2\pi}{3}$: f est la rotation d'angle $\theta = -\frac{2\pi}{3}$ et d'axe $E_1(f) = \mathrm{Vect}(0,1,1)$.

6. La matrice $F = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ est orthogonale car ses lignes constituent une base orthonormée de $\mathscr{M}_{13}(\mathbb{R})$.
   De plus, $\det(F) = -1$ donc l'isométrie f est négative.
   Notons que $f \neq -\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ donc f est la composée d'une rotation r_θ d'axe $E_{-1}(f) = \mathrm{Vect}(u)$ et d'une réflexion s par rapport au plan $\mathrm{Vect}(u)^\perp$:

$$f = r_\theta \circ s = s \circ r_\theta.$$

   Dans une base orthonormée $\mathscr{B} = (u, v, w)$ avec u dirigeant la droite $E_{-1}(f)$ (l'axe de la rotation dans la composée $f = r_\theta \circ s$) la matrice de f est :

$$\begin{aligned} Mat_{\mathscr{B}}(f) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

   — On détermine l'axe $E_{-1}(f)$ de la rotation :

$$FX = -X \iff X \in \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} : E_{-1}(f) = \mathrm{Vect}(3,-2,1).$$

   — On détermine l'angle $\theta \in]-\pi;\pi]$ de la rotation dans la composée $f = r_\theta \circ s$.
   On a $1 = \mathrm{Tr}(F) = \mathrm{Tr}(f) = -1 + 2\cos\theta \iff \cos\theta = 1 \iff \theta = 0$.
   Il vient directement que $f = r_0 \circ s = s$: s est donc la réflexion par rapport au plan $\mathrm{Vect}(u)^\perp$ parallèlement à la droite $\mathrm{Vect}(u)$ avec $u = (3,-2,1)$.

□

Solution Exercice 6.

1. Déterminons une base orthonormée directe $\mathscr{B} = \mathscr{B}_D \cup \mathscr{B}_{D^\perp}$ de $\mathbb{R}^3$ avec $D = \mathrm{Vect}(i - 2j)$ l'axe de la rotation $r_{\frac{\pi}{6}}$ étudiée.
   On note $u = \frac{1}{\sqrt{5}}(i - 2j) = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2,0)$.
   On pose ensuite $v = (0,0,1) \in D^\perp$ puis $w = u \wedge v = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,-1,0)$.
   Ainsi, $\mathscr{B} = \Big(\underbrace{u}_{\mathscr{B}_D}, \underbrace{v, w}_{\mathscr{B}_{D^\perp}}\Big)$ est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de $r_{\frac{\pi}{6}}$ est :

$$Mat_{\mathscr{B}}(r_{\frac{\pi}{6}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

   La matrice de passage de la base canonique $\mathscr{B}_c$ à $\mathscr{B}$ est une matrice orthogonale (car $\mathscr{B}_c$ et $\mathscr{B}$ sont orthonormées) donc P est inversible et $P^{-1} = {}^tP$.
   On obtient :

$$Mat_{\mathscr{B}_c}(r_{\frac{\pi}{6}}) = P Mat_{\mathscr{B}}(r_{\frac{\pi}{6}})\, {}^tP = \begin{pmatrix} \frac{1+2\sqrt{3}}{5} & \frac{-2+\sqrt{3}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{-2+\sqrt{3}}{5} & \frac{8+\sqrt{3}}{10} & -\frac{\sqrt{5}}{10} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{10} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

2. Déterminons une base orthonormée directe $\mathscr{B} = \mathscr{B}_D \cup \mathscr{B}_{D^\perp}$ de $\mathbb{R}^3$ avec $D = \mathrm{Vect}(i + j + k)$ l'axe de la rotation $r_{\frac{\pi}{4}}$ étudiée.
   On note $u = \frac{1}{\sqrt{3}}(i + j + k) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$.
   On pose ensuite $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0) \in D^\perp$ puis $w = u \wedge v = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$.
   Ainsi, $\mathscr{B} = \Big(\underbrace{u}_{\mathscr{B}_D}, \underbrace{v, w}_{\mathscr{B}_{D^\perp}}\Big)$ est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de $r_{\frac{\pi}{4}}$ est :

$$Mat_{\mathscr{B}}(r_{\frac{\pi}{4}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

   La matrice de passage de la base canonique $\mathscr{B}_c$ à $\mathscr{B}$ est une matrice orthogonale (car $\mathscr{B}_c$ et $\mathscr{B}$ sont orthonormées) donc P est inversible et $P^{-1} = {}^tP$.
   On obtient :

$$Mat_{\mathscr{B}_c}(r_{\frac{\pi}{4}}) = P Mat_{\mathscr{B}}(r_{\frac{\pi}{4}})\, {}^tP = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{2}}{3} & \frac{2-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6} & \frac{2-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{6} \\ \frac{2-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{6} & \frac{1+\sqrt{2}}{3} & \frac{2-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6} \\ \frac{2-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6} & \frac{2-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{6} & \frac{1+\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}.$$

□

Solution Exercice 7. Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et $A=\begin{pmatrix} a & b & b\\ b & a & b\\ b & b & a\end{pmatrix}$.

1. $A\in O(3) \iff {}^tAA=I_3 \iff \begin{pmatrix} a^2+2b^2 & 2ab+b^2 & 2ab+b^2\\ 2ab+b^2 & a^2+2b^2 & 2ab+b^2\\ 2ab+b^2 & 2ab+b^2 & a^2+2b^2\end{pmatrix}=I_3$.

   Ainsi $A\in O(3)$ si et seulement si $\begin{cases} a^2 + 2b^2 = 1\\ 2ab + b^2 = 0\end{cases}$

   Ainsi :
   - Soit $b=0$ auquel cas $a=\pm1$: alors $A=I_2$ ou $A=-I_2$ qui sont bien des matrices orthogonales canoniquement associées aux isométries $\pm\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$.
   - Soit $b\neq 0$. Dans ce cas la seconde équation donne $2a+b=0$ i.e. $b=-2a$. La première équation donne alors $9a^2=1\iff a=\pm\frac{1}{3}$. On obtient

   $$A=\begin{pmatrix} \frac13 & -\frac23 & -\frac23\\ -\frac23 & \frac13 & -\frac23\\ -\frac23 & -\frac23 & \frac13\end{pmatrix} \text{ ou } A=\begin{pmatrix} -\frac13 & \frac23 & \frac23\\ \frac23 & -\frac13 & \frac23\\ \frac23 & \frac23 & -\frac13\end{pmatrix}$$

   Ces deux matrices sont effectivement orthogonales : ${}^tAA=I_3$.

2. On se limite à traiter le cas des deux matrices orthogonales obtenues ci-dessus $S=\begin{pmatrix} \frac13 & -\frac23 & -\frac23\\ -\frac23 & \frac13 & -\frac23\\ -\frac23 & -\frac23 & \frac13\end{pmatrix}$ et $R=\begin{pmatrix} -\frac13 & \frac23 & \frac23\\ \frac23 & -\frac13 & \frac23\\ \frac23 & \frac23 & -\frac13\end{pmatrix}$ (les isométries $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ et $-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ ne demandent pas d'étude particulière).

   On remarque que les matrices S et R sont orthogonales **et symétriques**.

   Les endomorphismes s,r canoniquement associés sont donc des symétries orthogonales.

   Le calcul donne $\det(S)=-1$ et $\det(R)=\det(-S)=(-1)^3\det(S)=1$.

   Par conséquent :
   - s est une réflexion par rapport au plan $E_1(s)=\ker(s-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ (parallèlement à la droite $E_1(s)^\perp=E_{-1}(s)$).
   - r est un retournement autour de l'axe $E_1(r)=\ker(r-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ (parallèlement au plan $E_1(r)^\perp=E_{-1}(r)$).

   On trouve $E_1(r)=\mathrm{Vect}(1,1,1)$ et $E_{-1}(r)=\mathrm{Vect}((-1,0,1),(-1,1,0))$

   Puisque $s=-r$ alors :
   - $s(x)=x\iff -r(x)=x\iff r(x)=-x$
   - $s(x)=-x\iff -r(x)=-x\iff r(x)=x$.

   Par conséquent $E_1(s)=E_{-1}(r)=\mathrm{Vect}((-1,0,1),(-1,1,0))$ et $E_{-1}(s)=\mathrm{Vect}((1,1,1))$.

□

Solution Exercice 8. Soit E un espace euclidien et $a\in E$ un vecteur unitaire.

Pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$, on définit φ_α sur E par :

$$\forall x\in E, \varphi_\alpha(x)=x+\alpha(x|a)a.$$

1. Il est clair que φ_α est linéaire (vérifiez-le).
   De plus φ_α est orthogonal si et seulement si pour tout $x\in E$, $||\varphi_\alpha(x)||=||x||$.
   Avec $x=\alpha$ cette condition donne

   $$||a||=||\varphi_\alpha(a)||=||(\alpha+1)a||=|\alpha+1|\,||a||.$$

   Si φ_α est orthogonal alors nécessairement $\alpha=0$ ou $\alpha=-2$.
   - Si $\alpha=0$ alors $\varphi_0=\mathrm{id}_E$ est bien sûr orthogonal.
   - Si $\alpha=-2$ alors φ_{-2} est l'application $x\mapsto x-2(x|a)a$.
     Pour tout $(x,y)\in E^2$:

     $$\begin{aligned}(\varphi_{-2}(x)|\varphi_{-2}(y)) &= (x-2(x|a)a|y-2(y|a)a)\\ &= (x|y)-2(y|a)(x|a)-2(x|a)(y|a)+4(x|a)(y|a)\underbrace{(a|a)}_{||a||^2=1}\\ &= (x|y).\end{aligned}$$

     Par conséquent φ_{-2} conserve le produit scalaire donc φ_{-2} est une isométrie vectorielle.

2. On traite le cas $\alpha=-2$; le cas $\alpha=0$ ($\varphi_0=\mathrm{id}_E$ ne nécessite pas d'étude particulière).
   Déterminons $\ker(\varphi_{-2}-\mathrm{id}_E)$:

   $$\varphi_{-2}(x)=x\iff x-2(x|a)a=x\iff (x|a)=0\iff x\in\mathrm{Vect}(a)^\perp.$$

   On en déduit que $E_1(\varphi_{-2})$ est de dimension $\dim\mathrm{Vect}(a)^\perp=\dim E-\dim\mathrm{Vect}(a)=n-1$: $E_1(\varphi_{-2})$ est un hyperplan de E.
   D'autre part $E_{-1}(\varphi_{-2})=\mathrm{Vect}(a)$:

   $$\varphi_{-2}(x)=-x\iff x-2(x|a)a=-x\iff x=(x|a)a\in\mathrm{Vect}(a)^\perp.$$

   Par conséquent φ_{-2} est une réflexion par rapport à l'hyperplan $\mathrm{Vect}(a)^\perp$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(a)$.
   Dans une base $\mathscr{B}$ adaptée à $E=\mathrm{Vect}(a)\oplus\mathrm{Vect}(a)^\perp$ la matrice de φ_{-2} est :

   $$\begin{pmatrix} -1 & & & (0)\\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & 1\end{pmatrix}$$

□

Solution Exercice 9. Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3 et soit $f \in \mathscr{L}(E)$ non nul.

Montrons que f est une rotation si et seulement si,

$$\forall (u,v) \in E^2 : f(u) \wedge f(v) = f(u \wedge v).$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose que f est une rotation et on fixe $\mathscr{B}$ une base orthonormée directe de E. Puisque f est une rotation on a $\det(f) = 1$.

Soient $u, v \in E$ et $w \in E$ quelconques. On a :

$$\begin{aligned}
(f(u) \wedge f(v) | f(w)) &= [f(u), f(v), f(w)] = \det(f(u), f(v), f(w)) \\
&= \det \left(\begin{array}{c|c|c} f(u) & f(v) & f(w) \end{array} \right) \\
&= \det Mat_{\mathscr{B}}(f(u), f(v), f(w)) \\
&= \det \left(Mat_{\mathscr{B}}(f) Mat_{\mathscr{B}}(u, v, w) \right) \\
&= \det(f) \det(u, v, w) \\
&= \det(u, v, w) \text{ car } f \text{ est une rotation.} \\
&= [u, v, w] \\
&= (u \wedge v | w) \\
&= (f(u \wedge v) | f(w))
\end{aligned}$$

car f est une isométrie donc conserve le produit scalaire.

Par conséquent, pour tout $w \in E, (f(u) \wedge f(v) - f(u \wedge v) | f(w)) = 0$.

Puisque f est bijective, on en déduit que le vecteur $f(u) \wedge f(v) - f(u \wedge v) \in E^\perp = \{0_E\}$ est nul.

Ainsi, $f(u \wedge v) = f(u) \wedge f(v)$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Réciproquement on suppose que

$$\forall (u,v) \in E^2, f(u \wedge v) = f(u) \wedge f(v).$$

Soit (i, j, k) une base orthonormée directe de E.

On a $i \wedge j = k$ donc $f(i \wedge j) = f(k)$ i.e. $f(i) \wedge f(j) = f(k)$.

De même $f(k) \wedge f(i) = f(j)$.

Par conséquent, les vecteurs $f(i), f(j), f(k)$ sont orthogonaux deux à deux.

La famille $(f(i), f(j), f(k))$ est donc orthogonale.

On a également $||f(i \wedge j)|| = ||f(k)||$ i.e. $||f(i) \wedge f(j)|| = ||f(k)||$ donc

$$||f(i)|| \, ||f(j)|| \underbrace{\sin(f(i), f(j))}_{\sin \frac{\pi}{2} = 1} = ||f(k)|| \quad (*)$$

On montre également que $||f(k)|| \, ||f(i)|| = ||f(j)|| \quad (**)$.

Il vient : $||f(i)||^2 ||f(k)|| = ||f(k)||$.

Si $f(k) = 0$ alors par $(**)$ il vient $f(j) = 0$.

Puisque $f(j) \wedge f(k) = f(i)$ on obtiendrait aussi $f(i) = 0$.

Dans ce cas f serait l'application nulle ce qui n'est pas.

Ainsi, $f(k) \neq 0$ et par conséquent, on obtient $||f(i)|| = 1$.

On montre de manière analogue que $||f(j)|| = ||f(k)|| = 1$.

Par conséquent $(f(i), f(j), f(k))$ est une base orthonormée.

L'endomorphisme f transforme donc toute base orthonormée $\mathscr{B}$ en une base orthonormée $f(\mathscr{B})$: f est une isométrie.

La base $\mathscr{B}$ est directe par hypothèse.

La base $f(\mathscr{B})$ est également directe car

$$f(i) \wedge f(j) = f(k), \quad f(j) \wedge f(k) = f(i) \text{ et } f(k) \wedge f(i) = f(j).$$

La matrice de f dans $\mathscr{B}$ est donc la matrice de passage

$$P : (i, j, k) \to (f(i), f(j), f(k))$$

entre deux base orthonormées directes : $Mat_{\mathscr{B}}(f) \in SO_3(\mathbb{R})$: $\det(f) = 1$.

En conclusion f est une isométrie directe de E : f est une rotation. □

Solution Exercice 10.

1. Soit r la rotation d'axe D dirigé et orienté par un vecteur unitaire ω et d'angle θ.

   Montrons que pour tout $x \in E$,

   $$r(x) = \cos\theta x + \sin\theta \omega \wedge x + (1 - \cos\theta)(x|\omega)\omega.$$

   — Si $x \in D = E_1(r)$ alors $r(x) = x$ et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $x = \lambda\omega$.
   On calcule :

   $$\cos\theta\lambda\omega + \sin\theta \underbrace{\omega \wedge \lambda\omega}_{=0_E} + (1 - \cos\theta) \underbrace{(\lambda\omega|\omega)}_{\lambda ||\omega||^2 = \lambda} \omega = \lambda\omega = x.$$

   La formule est donc vérifiée pour les vecteurs de D.

   — Soit $x \in E = D \oplus D^\perp$ tel que $x \notin D$: $x = x_D + x_{D^\perp}$ avec $x_D = p_D(x)$ la projection orthogonale de x sur D et $x_{D^\perp} = x - x_D \neq 0_E$.
   Alors $r(x) = r(x_D) + r(x_{D^\perp}) = x_D + r(x_{D^\perp})$ car $x_D \in D = E_1(r)$.
   Pour déterminer $f(x_{D^\perp})$ on travaille dans la base orthonormée directe de E : $\left(\omega, \frac{x_{D^\perp}}{||x_{D^\perp}||}, \omega \wedge \frac{x_{D^\perp}}{||x_{D^\perp}||}\right)$ (notons que $||x_{D^\perp}|| \neq 0$ car $x_{D^\perp} \neq 0_E$).
   L'orientation de D par ω induit alors une orientation sur le plan $D^\perp$: $\mathscr{B}_{D^\perp} = \left(\frac{x_{D^\perp}}{||x_{D^\perp}||}, \omega \wedge \frac{x_{D^\perp}}{||x_{D^\perp}||}\right)$ est une base orthonormée directe de $D^\perp$.
   Dans cette base la matrice de la rotation plane restreinte $r_{|_{D^\perp}}$ (D est stable et donc $D^\perp$ est stable par r) est :

   $$Mat_{\mathscr{B}^\perp}(r_{|_{D^\perp}}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} r(x_{D^\perp}) &= ||x_{D^\perp}|| r\left(\frac{x_{D^\perp}}{||x_{D^\perp}||}\right) \\ &= ||x_{D^\perp}|| \left(\cos\theta \frac{x_{D^\perp}}{||x_{D^\perp}||} + \sin\theta \omega \wedge \frac{x_{D^\perp}}{||x_{D^\perp}||}\right) \\ &= \cos\theta x_{D^\perp} + \sin\theta \omega \wedge x_{D^\perp} \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} r(x) &= x_D + r(x_{D^\perp}) \\ &= (x|\omega)\omega + \cos\theta(x - (x|\omega)\omega) + \sin\theta\omega \wedge (x - (x|\omega)\omega) \\ &= (x|\omega)\omega(1-\cos\theta) + \cos\theta x + \sin\theta \omega \wedge x \end{aligned}$$

2. Soit $\mathscr{B} = (i, j, k)$ une base orthonormée directe de E.
   Déterminons la matrice dans la base canonique de la rotation r d'axe D dirigé et orienté par $i + j + k$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
   Un vecteur unitaire dirigeant D est $\omega = \frac{1}{\sqrt{3}}(i + j + k)$.
   — $r(i) = (i|\omega)\omega(1 - \cos\frac{\pi}{4}) + \cos\frac{\pi}{4} i + \sin\frac{\pi}{4}\omega \wedge i$
   $r(i) = \frac{1}{3}(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})(i + j + k) + \frac{\sqrt{2}}{2} i + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{\sqrt{3}}(j - k)$
   $r(i) = \frac{1+\sqrt{2}}{3} i + \frac{2-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{6} j + \frac{2-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6} k$.
   — Les calculs de $r(j)$ et $r(k)$ sont analogues, on obtient :

$$Mat_{(i,j,k)}(r) = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{2}}{3} & \frac{2-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6} & \frac{2-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{6} \\ \frac{2-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{6} & \frac{1+\sqrt{2}}{3} & \frac{2-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6} \\ \frac{2-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6} & \frac{2-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{6} & \frac{1+\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}$$

□

Solution Exercice 11. Soient E un espace vectoriel euclidien et $u \in E$ non nul.

On considère $g \in O(E)$ une isométrie de E et on note s la réflexion par rapport à l'hyperplan $\mathrm{Vect}(u)^\perp$. Décrivons $g \circ s \circ g^{-1}$.

On a $E_{-1}(s) = \mathrm{Vect}(u)$ et $E_1(s) = \mathrm{Vect}(u)^\perp$.

On pose $\varepsilon_1 = \frac{u}{||u||}$.

On se donne $(\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ une base orthonormée de $E = \mathrm{Vect}(u)^\perp$.

On obtient une base orthonormée de $E = \mathrm{Vect}(u) \oplus \mathrm{Vect}(u)^\perp$: $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$.

L'endomorphisme $s' = g \circ s \circ g^{-1}$ est orthogonal par composition.

— $x \in E_{-1}(s')$ si et seulement si :

$$\begin{aligned} g \circ s \circ g^{-1}(x) = -x &\iff s(g^{-1}(x)) = -g^{-1}(x) \iff g^{-1}(x) \in E_{-1}(s) \\ &\iff g^{-1}(x) \in \mathrm{Vect}(\varepsilon_1) \iff x \in \mathrm{Vect}(g(\varepsilon_1)) \end{aligned}$$

  Ainsi, $E_{-1}(s') = \mathrm{Vect}(g(\varepsilon_1))$.

— On montre de même que $E_1(s) = \mathrm{Vect}(g(\varepsilon_2), \dots, g(\varepsilon_n))$ est un sous-espace de dimension $n - 1$ (g est bijective).

En conclusion : $s' = g \circ s \circ g^{-1}$ est la réflexion d'hyperplan $\mathrm{Vect}(g(u))^\perp$. □

Solution Exercice 12. Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$ et $f \in O(E)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $p_n = \frac{1}{n}\left(\mathrm{id}_E + f + f^2 + \dots + f^{n-1}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f^k$.

1. Montrons que $\ker(f - \mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_E)$ sont supplémentaires dans E.
   — Par le théorème du rang on a $\dim \mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_E) + \dim \ker(f - \mathrm{id}_E) = \dim E$.
   — D'autre part, si $x \in \ker(f - \mathrm{id}_E) \cap \mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_E)$ alors
     ∗ $f(x) = x$ car $x \in \ker(f - \mathrm{id}_E)$.
     ∗ $x = f(y) - y$ pour un certain $y \in E$ car $x \in \mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_E)$.
     Alors

$$||x||^2 = (x|x) = (x|f(y) - y) = (x|f(y)) - (x|y) = (f(x)|f(y)) - (x|y) = 0$$

     car f est une isométrie.
     Ainsi, $x = 0_E$ et $\mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_E) \cap \ker(f - \mathrm{id}_E) = \{0_E\}$.

   On en déduit que $E = \ker(f - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_E)$.

   Remarques

   On peut montrer que $\ker(f - \mathrm{id}_E) = \mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_E)^\perp$.
   En effet, pour tout $x \in \ker(f - \mathrm{id}_E)$:

$$(x|f(y) - y) = (x|f(y)) - (x|y) = (f(x)|f(y)) - (x|y) = 0.$$

   Ainsi, $\ker(f - \mathrm{id}_E) \subset \mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_E)^\perp$ et on conclut par égalité des dimensions.

2. Soit $x \in \ker(f - \mathrm{id}_E)$.

   Alors $\mathrm{id}_E(x) = x, f(x) = x, f^2(x) = f(f(x)) = f(x) = x, \dots, f^k(x) = x$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

   Ainsi, $p_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{f^k(x)}_{=x} = \frac{1}{n} \times nx = x$.

3. Soit $x \in \mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_E)$: $x = f(y) - y$ pour un certain $y \in E$.

Alors

$$
\begin{aligned}
p_n(x) = p_n(f(y) - y) = p_n(f(y)) - p_n(y) &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f^k(f(y)) - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f^k(y) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f^{k+1}(y) - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f^k(y) \\
&= \frac{1}{n}\left(f^n(y) - y\right)
\end{aligned}
$$

4. Soit p la projection orthogonale sur $\ker(f - \mathrm{id}_E)$.
   Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} ||p(x) - p_n(x)|| = 0$ pour tout $x \in E$.
   On décompose $x \in E = \ker(f - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_E)$: $x = x_1 + x_2$ avec :
   — $x_1 \in \ker(f - \mathrm{id}_E)$.
   — $x_2 \in \mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_E)$.
   Alors $p_n(x) = x_1 + \frac{1}{n}(f^n(x_2) - x_2)$.
   Puisque p est la projection sur $\ker(f - \mathrm{id}_E)$, on a $x_1 = p(x_1 + x_2) = p(x)$.
   Ainsi, $p(x) - p_n(x) = \frac{1}{n}(x_2 - f^n(x_2))$.
   L'inégalité triangulaire et le fait que f^n soit une isométrie donnent :

$$
||p(x) - p_n(x)|| \leqslant \frac{1}{n}\left(||x_2|| + ||f^n(x_2)||\right) = \frac{2||x_2||}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.
$$

$\square$