Die thomaesche Funktion (auch "Popcorn-Funktion" genannt) ist ein klassisches Beispiel in der Analysis. Um ihre Riemann-Integrierbarkeit ohne Maßtheorie zu beweisen, nutzen wir das Riemannsche Integrabilitätskriterium.

1 Definition der Funktion

Die thomaesche Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ist definiert als: $f(x) = \frac{1}{q}$, wenn $x = \frac{p}{q}$ ein gekürzter Bruch mit $p, q \in \mathbb{N}$ ist (für $x = 0$ setzen wir $f(0) = 1$). $f(x) = 0$, wenn x irrational ist.

2 Das Ziel

Eine Funktion ist auf $[a, b]$ Riemann-integrierbar, wenn für jedes $\epsilon > 0$ eine Partition P existiert, so dass die Differenz zwischen Obersumme $U(f, P)$ und Untersumme $L(f, P)$ kleiner als ϵ ist:

$$U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$$

3 Schritt 1: Die Untersumme $L(f, P)$

In jedem noch so kleinen Teilintervall $[x_{i-1}, x_i]$ einer Partition P liegen (aufgrund der Dichtheit der irrationalen Zahlen) stets irrationale Zahlen. Da $f(x) = 0$ für alle irrationalen x gilt, ist das Infimum der Funktionswerte in jedem Intervall:

$$m_i = \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} = 0$$

Daraus folgt für jede beliebige Partition P:

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = 0$$

4 Schritt 2: Die Obersumme $U(f, P)$ kontrollieren

Wir müssen zeigen, dass wir für jedes $\epsilon > 0$ eine Partition finden, bei der die Obersumme $U(f, P) < \epsilon$ wird.Die Kernidee: Es gibt nur endlich viele Stellen, an denen die Funktion "große" Werte annimmt.Sei ein beliebiges $\epsilon > 0$ gegeben.Wir betrachten die Menge S aller Punkte $x \in [0, 1]$, für die $f(x) \geq \frac{\epsilon}{2}$ gilt.Damit $f(x) = \frac{1}{q} \geq \frac{\epsilon}{2}$ gilt, muss $q \leq \frac{2}{\epsilon}$ sein.Da q eine natürliche Zahl ist, gibt es nur endlich viele solcher Nenner q.Für jeden Nenner q gibt es nur endlich viele Zähler p, so dass $0 \leq \frac{p}{q} \leq 1$.Folglich ist die Menge S endlich. Sei N die Anzahl der Elemente in S.

5 Schritt 3: Konstruktion der Partition

Wir konstruieren eine Partition P, indem wir die N "problematischen" Punkte aus S in sehr kleine Intervalle einschließen.Wir wählen N Intervalle um die Punkte in S mit einer Gesamtlänge von weniger als $\frac{\epsilon}{2}$.In diesen "schlechten" Intervallen ist das Supremum $M_i \leq 1$ (da der maximale Wert der Funktion 1 ist). Ihr Beitrag zur Obersumme ist also:

$$\sum_{schlecht} M_i \Delta x_i \leq 1 \cdot (Gesamtlaenge) < \frac{\epsilon}{2}$$

In allen anderen ("guten") Intervallen liegen keine Punkte aus S. Das bedeutet, für alle x in diesen Intervallen gilt $f(x) < \frac{\epsilon}{2}$. Ihr Beitrag zur Obersumme ist:

$$\sum_{gut} M_i \Delta x_i < \frac{\epsilon}{2} \cdot (Restlaenge) \leq \frac{\epsilon}{2} \cdot 1 = \frac{\epsilon}{2}$$

6 6. Fazit

Addieren wir beide Teile, erhalten wir für die Obersumme:

$$U(f,P) = \sum_{schlecht} M_i \Delta x_i + \sum_{gut} M_i \Delta x_i < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Da $L(f,P) = 0$ und $U(f,P) < \epsilon$ für eine geeignete Partition gilt, ist die thomaesche Funktion Riemann-integrierbar. Das Integral ist:

$$\int_0^1 f(x)\, dx = 0$$