



نام برگزار کننده

مدت زمان آزمون: --

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: فرمول ها و قوانین احتمال

تاریخ برگزاری: ۱۴۰۰/۱۱/۱۵

۱) اگر $P(B|A') = \frac{1}{2}$ و $P(A'|B) = \frac{3}{4}$ ، $P(B) = \frac{5}{9}$ کدام است؟

$\frac{1}{2}$ (۲)
 $\frac{2}{3}$ (۴)

$\frac{1}{3}$ (۱)
 $\frac{2}{9}$ (۳)

پاسخ: گزینه ۱

گزینه‌ی «۱»

طبق رابطه احتمال شرطی داریم:

$$\begin{aligned} P(A'|B) &= \frac{P(A' \cap B)}{P(B)} \\ \Rightarrow P(A' \cap B) &= P(A'|B) \times P(B) = \frac{3}{4} \times \frac{5}{9} = \frac{1}{2} \\ P(B|A') &= \frac{P(B \cap A')}{P(A')} \\ \Rightarrow \frac{1}{2} &= \frac{\frac{1}{2}}{P(A')} \Rightarrow P(A') = \frac{1}{3} \Rightarrow P(A) = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

۲) برای دو پیشامد مستقل A و B، اگر $P(A \cap B) = 0/6$ و $P(A \cap B') = 0/2$ باشد، حاصل ('B) P کدام است؟

۰/۷ (۱)
۰/۷۵ (۲)
۰/۸۵ (۳)
۰/۹ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

گزینه‌ی «۳»

اگر A و B دو پیشامد مستقل از یکدیگر باشند، آن‌گاه دو پیشامد A و B' نیز مستقل از هم هستند و داریم:

$$\begin{cases} P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0/6 \\ P(A \cap B') = P(A) \cdot P(B') = 0/2 \\ \Rightarrow P(A)(P(B) + P(B')) = 0/6 + 0/2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{P(B)+P(B')=1} P(A) = 0/8 \Rightarrow P(B') = 0/25$$

$$\begin{aligned} P(A \cup B') &= P(A) + P(B') - P(A \cap B') \\ &= 0/8 + 0/25 - 0/2 = 0/85 \end{aligned}$$

اگر $P(A \cup B) = \frac{1}{6}$ و $P(A|B) = \frac{3}{10}$, $P(B|A) = \frac{2}{5}$ کدام است؟ (۳)

$\frac{5}{6}$ (۲)
 $\frac{29}{30}$ (۴)

$\frac{4}{5}$ (۱)
 $\frac{9}{10}$ (۳)

پاسخ: گزینه ۴

«گزینه ۴»

$$P(B|A) = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{2}{5} \Rightarrow P(A) = \frac{5}{2} P(A \cap B)$$

$$P(A|B) = \frac{3}{10} \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{3}{10} \Rightarrow P(B) = \frac{10}{3} P(A \cap B)$$

$$P(B) - P(A) = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{10}{3} P(A \cap B) - \frac{5}{2} P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{2} P(A \cap B) = \frac{1}{6} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{5}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{5}{2} P(A \cap B) + \frac{10}{3} P(A \cap B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{29}{6} P(A \cap B) = \frac{29}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{29}{30}$$

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشد، $P(A' \cup B') = ۰/۲۷$ و $P(A - B) = ۰/۳۳$ ، $P(A \cup B) = ۰/۷۸$ کدام است؟ (۴)

۰/۸۶ (۴)

۰/۸۴ (۳)

۰/۸۲ (۲)

۰/۸۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

طبق قوانین احتمال داریم:

$$P(A - B) + P(B - A)$$

$$= (P(A) - P(A \cap B)) + (P(B) - P(A \cap B))$$

$$= (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow P(A - B) + P(B - A) = P(A \cup B) - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow ۰/۳۳ + ۰/۲۷ = ۰/۷۸ - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = ۰/۱۸$$

$$P(A' \cup B') = P[(A \cap B)'] = 1 - P(A \cap B) = ۰/۸۲$$

۵) گر A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند، بیشترین مقدار $\frac{P(B)}{P(A)}$ کدام است؟

$\frac{۲۲}{۲۹}$ (۲)
 $\frac{۱۸}{۲۵}$ (۴)

$\frac{۱۴}{۱۵}$ (۱)
 $\frac{۱۷}{۳۰}$ (۳)

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

طبق قوانین احتمال می‌دانیم:

$$\begin{cases} P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \\ P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) \end{cases}$$

$$\frac{P(B)}{P(A)} = \frac{P(B-A)+P(A \cap B)}{P(A-B)+P(A \cap B)}$$

با توجه به رابطه به دست آمده، حاصل $\frac{P(B)}{P(A)}$ زمانی ماکزیمم است که بیشترین مقدار خود را داشته باشد. با توجه به اینکه سه پیشامد (A - B)، (B - A) و (A ∩ B) دو ناسازگار هستند، داریم:

$$(A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B) = A \cup B$$

$$\Rightarrow P(A - B) + P(B - A) + P(A \cap B) = P(A \cup B) \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۶} + P(A \cap B) \leq 1 \Rightarrow P(A \cap B) \leq 1 - \left(\frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۶} \right) = \frac{۱۳}{۳۰}$$

بنابراین بیشترین مقدار $\frac{P(B)}{P(A)}$ برابر است با:

$$\frac{\frac{۱}{۵} + \frac{۱۳}{۳۰}}{\frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۶}} = \frac{\frac{۱۸}{۳۰}}{\frac{۱۱}{۳۰}} = \frac{۱۸}{۱۱}$$

تذکر: اگر $x > y$ و $a > b$ با استفاده از اثبات بازگشتی به راحتی می‌توان نوشت:

$$\frac{x+a}{y+a} > \frac{x+b}{y+b}$$

۶) اگر A و B دو پیشامد دلخواه از فضای نمونه S باشند، کدام یک از روابط زیر همواره درست است؟

$$P(A \cup B) = P(A) + P(A - B) \quad (۲)$$

$$P(A \cup B) = P(A - B) + P(A \cap B) \quad (۴)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad (۱)$$

$$P(A \cup B) = P(A - B) + P(B) \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$$(A - B) \cap B = (A \cap B') \cap B = A \cap (B' \cap B) = \emptyset$$

$$(A - B) \cup B = (A \cap B') \cup B = (A \cup B) \cap (B' \cup B) = A \cup B$$

U

بنابراین $(A - B) \cup B$ دو پیشامد ناسازگار هستند که اجتماع آنان برابر $A \cup B$ است، پس داریم:

$$P(A \cup B) = P[(A - B) \cup B] = P(A - B) + P(B)$$

اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، $P(A - B)$ همواره برابر کدام است؟ (۷)

$$P(A \cap B) \quad (۲)$$

$$P(A) \quad (۴)$$

$$P(A) - P(B) \quad (۱)$$

$$P(A \cup B) \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه ۴

« ۴ »

اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، آنگاه $A \cap B = \emptyset$ و $P(A \cap B) = 0$ است. بنابراین داریم:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A)$$

◦

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند، حاصل $P(B') + P(A \cap B)$ کدام است؟ (۸)

$$P(A \cup B') \quad (۲)$$

$$P(B - A) \quad (۴)$$

$$P(A' \cup B) \quad (۱)$$

$$P(A - B) \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه ۲

« ۲ »

$$P(B') + P(A \cap B) = 1 - P(B) + P(A \cap B)$$

$$= 1 - (P(B) - P(A \cap B)) = 1 - P(B - A)$$

$$= P[(B - A)'] = P[(B \cap A')'] = P(A \cup B')$$

اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، آنگاه $P(A' \cup B') - P(A - B)$ حاصل همواره برابر کدام است؟ (۹)

$$P(A) \quad (۴)$$

$$P(A') \quad (۳)$$

$$P(B') \quad (۲)$$

$$P(B) \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۳

« ۳ »

دلیل انتخاب: قوانین و قضایای مرتبط با احتمال در کتاب آمار و احتمال و همچنین کتاب ریاضی دهم به طور مفصل مورد اشاره قرار گرفته و حل این دسته از مسائل نیاز به تسلط نسبی بر قوانین جبر مجموعه‌ها دارد. همچنین در این سؤال مفهوم ناسازگار بودن دو پیشامد نیز مورد استفاده قرار گرفته است.

اگر دو پیشامد A و B ناسازگار باشند، آنگاه $A \cap B = \emptyset$ و $P(A \cap B) = 0$ است، بنابراین داریم:

$$P(A' \cup B') - P(A - B) = P[(A \cap B)'] - P(A - B)$$

$$= (1 - P(A \cap B)) - (P(A) - P(A \cap B))$$

◦ ◦

$$= 1 - P(A) = P(A')$$

اگر $P(A - B) = \frac{1}{5}$ و $P(B') = \frac{3}{4}$, $P(A) = \frac{1}{3}$ کدام است؟ (۱۰)

$\frac{1}{6}$ (۱)

$\frac{3}{20}$ (۲)

$\frac{7}{60}$ (۳)

$\frac{1}{15}$ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

طبق قضیه‌های مرتبط با احتمال داریم:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \Rightarrow \frac{1}{5} = \frac{1}{3} - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$$

$$P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} - \frac{2}{15} = \frac{7}{60}$$

پیشامد «A رخ ندهد یا B رخ ندهد» به کدام صورت زیر نوشته می‌شود؟ (۱۱)

$(A - B) \cup (B - A)$ (۱)

$A' \cup B'$ (۲)

$(A \cup B)'$ (۳)

$(A' \cap B)'$ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

می‌دانیم که پیشامد «A رخ ندهد» همان A' است. بنابراین:

$$(A \text{ رخ ندهد}) \text{ یا } (A' \text{ رخ ندهد}) \rightarrow A' \cup B'$$

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند، به‌طوری که آنگاه $P(A' \cap B) = 0/5$, $P(B) = 0/7$, $P(A) = 0/6$ و $P(A \cap B') = 0/2$ کدام است؟ (۱۲)

$0/5$ (۱)

$0/4$ (۲)

$0/3$ (۳)

$0/1$ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

$$P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow 0/2 = 0/6 - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = 0/4$$

$$P(A' \cap B) = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$$

$$= 0/7 - 0/4 = 0/3$$

۱۲) اگر $P(A \cap B) = 0/۴$ و $P(B) = 0/۲$ باشد، آنگاه $P(A|B')$ کدام است؟

2 | 3

三
（μ

12

1

پاسخ: گزینه ۴

گزینہ

$$P(B) = o/\mathfrak{f} \Rightarrow P(B') = 1 - o/\mathfrak{f} = s/\mathfrak{f}$$

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= (P(A) - P(A \cap B)) + P(B) \end{aligned}$$

$$= P(A - B) + P(B) = \circ/\gamma + \circ/\varphi = \circ/\xi$$

$$P(A' \cap B') = P[(A \cup B)'] = 1 - P(A \cup B) = 0.1$$

$$P(A'|B') = \frac{P(A' \cap B')}{P(B')} = \frac{\circ/\text{f}}{\circ/\text{x}} = \frac{2}{3}$$

۱۴) اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند، به طوری که $A \subseteq B$ و $P(B|A) = \frac{3}{4}$ ، آن‌گاه $(B|A)P$ کدام است؟

一
四

۱۳

یاسخ:

با توجه به قوانین احتماً، و فرموا، احتماً، شرط، داریم:

$$A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) = \frac{1}{2}$$

$$P(B|A') = \frac{P(B \cap A')}{P(A')} = \frac{P(B-A)}{1-P(A)}$$

$$= \frac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}}$$

$$\Rightarrow P(B|A') = \frac{\frac{q-p}{1-p}}{\frac{p}{1-p}} = \frac{q-p}{p} = \frac{q}{p}$$

۱۵) اگر A و B دو پیشامد مستقل از یکدیگر، آنگاه $P(A \cap B') = 0/3$ و $P(A \cap B) = 0/2$ کدام است؟

۰/۷ (۴)

۰/۶ (۳)

۰/۵ (۲)

۰/۴ (۱)

گزینه ۴ پاسخ:

دو پیشامد A و B مستقل از یکدیگرند، پس پیشامدهای A و B نیز مستقل از هم بوده و در نتیجه داریم:

$$P(A \cap B) = 0/2 \Rightarrow P(A)P(B) = 0/2 \quad (1)$$

$$P(A \cap B') = 0/3 \Rightarrow P(A)P(B') = 0/3 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} P(A)P(B) + P(A)P(B') = 0/5$$

$$\Rightarrow P(A)(P(B) + P(B')) = 0/5 \Rightarrow P(A) = 0/5$$

۱

$$P(A)P(B) = 0/2 \Rightarrow 0/5 \times P(B) = 0/2 \Rightarrow P(B) = 0/4$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0/5 + 0/4 - 0/2 = 0/7$$

۱۶) اگر S = {a,b,c,d,e,f} فضای نمونه یک آزمایش تصادفی و C = {a,c,f}, A = {a,b,c} و B = {a,c} سه پیشامد باشند به طوری که آنگاه احتمال پیشامد D = {d,e} کدام است؟ $P(C) = \frac{3}{6}$, $P(B) = \frac{1}{4}$, $P(A) = \frac{5}{12}$

۳/۸ (۴)

۵/۲۴ (۳)

۱/۶ (۲)

۱۱/۲۴ (۱)

گزینه ۱ پاسخ:

$$P(f) = P(\{a, c, f\}) - P(\{a, c\}) = P(C) - P(B) = \frac{3}{6} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$P(S) = 1 \Rightarrow P(a) + P(b) + P(c) + P(d) + P(e) + P(f) = 1$$

$$P(A) = \frac{5}{12} \qquad \qquad \qquad \frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow P(d) + P(e) = 1 - \frac{5}{12} - \frac{1}{12} = \frac{11}{12} \Rightarrow P(D) = \frac{11}{24}$$

۱۷) اگر A و B دو پیشامد مستقل از یکدیگر و $P(A \cup B) = 2P(B) = 0/4$ باشد، حاصل $(A' - B)$ کدام است؟

۰/۲۵ (۴)

۰/۲ (۳)

۰/۱۵ (۲)

۰/۱ (۱)

گزینه ۲ پاسخ:

A و B دو پیشامد مستقل‌اند، پس $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ و داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$

$$\Rightarrow 0/4 = P(A) + 0/2 - 0/2P(A) \Rightarrow P(A) = 0/25$$

از آنجا که A و B دو پیشامد مستقل هستند، A' و B هم مستقل می‌باشند و داریم:

$$P(A' - B) = P(B \cap A') = P(B)P(A')$$

$$= P(B)(1 - P(A)) = 0/2 \times 0/75 = 0/15$$

(۱۸) اگر $P(A|B) = 0.25$ و $P(B|A) = 0.2$ ، $P(A \cap B) = 0.36$ کدام است؟ $\frac{17}{21}$ (۴) $\frac{13}{25}$ (۳) $\frac{19}{21}$ (۲) $\frac{12}{17}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(B) = 4 P(A \cap B)$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A) = 2 P(A \cap B)$$

$$P(A) + P(B) = 0.36 \Rightarrow 2 P(A \cap B) + P(A \cap B) = 0.36$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = 0.12 \Rightarrow \begin{cases} P(A) = 2 \times 0.12 = 0.2 \\ P(B) = 4 \times 0.12 = 0.48 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P(A'|B') &= \frac{P(A' \cap B')}{P(B')} = \frac{P[(A \cup B)']}{P(B')} = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(B)} \\ &= \frac{1 - (0.2 + 0.48)}{1 - 0.48} = \frac{0.32}{0.52} = \frac{17}{25} \end{aligned}$$

(۱۹) اگر $P(a) = 4 P(b) = 8 P(c) = 2 P(d)$ و $S = \{a, b, c, d\}$ کدام است؟ $\frac{4}{15}$ (۴) $\frac{1}{5}$ (۳) $\frac{2}{15}$ (۲) $\frac{1}{15}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

اگر $x = P(b)$ فرض شود، آن‌گاه $P(d) = 2x$ و $P(c) = x$ و $P(a) = 4x$ است. در این صورت داریم:

$$P(a) + P(b) + P(c) + P(d) = 1 \Rightarrow 4x + x + x + 2x = 1$$

$$\Rightarrow \frac{10x}{15} = 1 \Rightarrow P(b) = x = \frac{3}{10}$$

(۲۰) اگر $S = \{a, b, c, d, e\}$ فضای نمونه یک آزمایش تصادفی، $A = \{a, b\}$ و $B = \{a, c\}$ و $C = \{a, d, e\}$ پیشامدهایی از این فضای نمونه باشد، آن‌گاه $P(A' \cap B') = \frac{3}{5}$ و $P(B) = \frac{2}{5}$ کدام است؟ $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{11}{30}$ (۳) $\frac{4}{15}$ (۲) $\frac{13}{30}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

$$A \cup B = \{a, b, c\} \Rightarrow A' \cap B' = (A \cup B)' = \{d, e\}$$

$$P(A) + P(B) + P(C) = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow 3P(a) + P(b) + P(c) + P(d) + P(e) = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow 2P(a) + P(\{a, b, c, d, e\}) = \frac{4}{3} \Rightarrow 2P(a) = \frac{1}{3} \Rightarrow P(a) = \frac{1}{6}$$

$$P(A' \cap B') = P(\{d, e\}) = P(\{a, d, e\}) - P(a) = \frac{3}{5} - \frac{1}{6} = \frac{13}{30}$$

(۲۱) اگر $P(A \cup B \cup C) = 2P(A \cup C) = \frac{3}{4}P(B \cup C) = \frac{1}{3}$ باشد، آنگاه حاصل $P(A \cup B)$ کدام است؟

$\frac{13}{18}$ (۱)

$\frac{13}{24}$ (۲)

$\frac{6}{13}$ (۳)

$\frac{13}{11}$ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

$$P(A \cup B) = 2P(A \cup C) = \frac{3}{4}P(B \cup C) = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow P(A \cup C) = \frac{1}{4}, \quad P(B \cup C) = \frac{1}{3}, \quad P(A \cup B) = \frac{1}{2}$$

اگر X و Y دو پیشامد ناسازگار باشند، آنگاه $P(X \cup Y) = P(X) + P(Y)$ است. در نتیجه داریم:

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cup B) = \frac{1}{2} = P(A) + P(B) \\ P(A \cup C) = \frac{1}{4} = P(A) + P(C) \\ P(B \cup C) = \frac{1}{3} = P(B) + P(C) \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{جمع طرفین سه رابطه}}$$

$$2P(A) + 2P(B) + 2P(C) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 2(P(A) + P(B) + P(C)) = \frac{13}{12}$$

$$\Rightarrow P(A) + P(B) + P(C) = \frac{13}{24} \Rightarrow P(A \cup B \cup C) = \frac{13}{24}$$

(۲۲) اگر $P(A - B) = 0/\lambda$ و $P(A) = ۳P(B) = ۴P(A \cap B)$ باشد، حاصل $P(A \cup B)$ کدام است؟

$\frac{35}{60}$ (۱)

$\frac{33}{60}$ (۲)

$\frac{28}{60}$ (۳)

$\frac{24}{60}$ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = ۰/\lambda$$

$$\Rightarrow 4P(A \cap B) + \frac{1}{\lambda}P(A \cap B) - P(A \cap B) = ۰/\lambda$$

$$\Rightarrow \frac{13}{\lambda}P(A \cap B) = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{13}$$

حال برای محاسبه $P(A - B)$ داریم:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 4P(A \cap B) - P(A \cap B)$$

$$= 3P(A \cap B) = 3 \times \frac{1}{13} = \frac{3}{13}$$

۲۳) اگر $S = \{a, b, c, d\}$ کدام است؟ فضای نمونه یک آزمایش تصادفی، آنگاه $P(a) = \frac{1}{4}$ و $P(\{a, b, c\}) = \frac{3}{4}$

۱۸) (۴)

۱۸) (۳)

۱۲) (۵)

۱) (۴)

پاسخ: گزینه ۱

$$P(\{a, b, c\}) = \frac{3}{4} \Rightarrow P(d) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$P(a) = \frac{1}{4} \Rightarrow P(\{b, c, d\}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$P(\{d\} | \{b, c, d\}) = \frac{P(\{d\} \cap \{b, c, d\})}{P(\{b, c, d\})} = \frac{P(d)}{P(\{b, c, d\})}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

۲۴) در دو پیشامد مستقل A و B ، آنگاه $P(A \cup B') = 0/2$ و $P(A \cap B) = 0/6$ کدام است؟

۰/۹) (۴)

۰/۸۵) (۳)

۰/۷۵) (۲)

۰/۷) (۱)

پاسخ: گزینه ۳

اگر دو پیشامد A و B مستقل باشند، آنگاه دو پیشامد A و B' نیز مستقل از یکدیگرند و داریم:

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A \cap B')} = \frac{0/6}{0/2} \Rightarrow \frac{P(A)P(B)}{P(A)P(B')} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{1-P(B')}{P(B')} = 3 \Rightarrow 3P(B') = 1 - P(B')$$

$$\Rightarrow P(B') = \frac{1}{4} = 0/25$$

$$P(A)P(B') = 0/2 \Rightarrow P(A) \times 0/25 = 0/2 \Rightarrow P(A) = 0/8$$

$$P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A \cap B')$$

$$= 0/8 + 0/25 - 0/2 = 0/85$$

۲۵) اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه S ، $P(B) = 0/8$ و $P(A) = 0/25$ باشد، اختلاف کمترین و بیشترین مقدار ممکن برای $P(A \cap B)$ کدام است؟

۰/۴) (۴)

۰/۳) (۳)

۰/۲) (۲)

۰/۱) (۱)

پاسخ: گزینه ۲

می‌دانیم $P(A \cap B) \leq P(A) \leq P(B)$ و $P(A \cap B) \geq P(A) - P(B)$ باشد، حداکثر مقدار $P(A \cap B)$ برابر با $0/25$ و $P(A \cap B) \leq P(B) = 0/8$ بنا براین در صورتی که $A \subseteq B$ باشد.

برای محاسبه حداقل $P(A \cap B)$ داریم:

$$P(A \cup B) \leq 1 \Rightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1$$

$$\Rightarrow 0/25 + 0/8 - P(A \cap B) \leq 1 \Rightarrow P(A \cap B) \geq 0/05$$

بنابراین اختلاف حداقل و حداکثر $P(A \cap B)$ برابر است با:

$$0/25 - 0/05 = 0/2$$

۲۶ اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشد، اختلاف کمترین و بیشترین مقدار ممکن برای $P(A \cap B)$ کدام است؟

۰/۴ (۱)

۰/۳ (۲)

۰/۲ (۳)

۰/۱ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

می‌دانیم $P(A) = ۰/۲۵$ و $P(B) = ۰/۸$ باشد، حداکثر مقدار $P(A \cap B)$ برابر با $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B) = ۰/۳۵$ است (حالی که $A \subseteq B$ باشد)

برای محاسبه حداقل $P(A \cap B)$ داریم:

$$P(A \cup B) \leq 1 \Rightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1$$

$$\Rightarrow ۰/۲۵ + ۰/۸ - P(A \cap B) \leq 1$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) \geq ۰/۰۵$$

بنابراین اختلاف حداقل و حداکثر $P(A \cap B)$ برابر است با:

$$۰/۳۵ - ۰/۰۵ = ۰/۲$$

۲۷ در یک آزمایش تصادفی، فضای نمونه $S = \{a, b, c, d\}$ است. اگر $P(a), P(b), P(c)$ و $P(d)$ به ترتیب از راست به چپ، یک دنباله هندسی با قدر نسبت $\frac{1}{3}$ تشکیل دهند، مقدار $P(\{a, d\})$ کدام است؟

۰/۸ (۱)

۰/۷ (۲)

۰/۶ (۳)

۰/۵ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

اگر فرض $x = P(a)$ کنیم باشد، آنگاه داریم:

$$P(a) + P(b) + P(c) + P(d) = 1$$

$$\Rightarrow x + \frac{x}{3} + \frac{x}{9} + \frac{x}{27} = 1 \Rightarrow \frac{۳۰x}{۲۷} = 1 \Rightarrow x = \frac{۲۷}{۳۰}$$

$$P(\{a, d\}) = P(a) + P(d) = \frac{۲۷}{۳۰} + \frac{۱}{۳۰} = \frac{۲۸}{۳۰} = ۰/۹$$

۲۸ یک فضای نمونه متشکل از ۵ برآمد a, b, c, d و e است. اگر $P(\{a, b, c\}) = \frac{۲}{۳}$ و $P(a) = \frac{۱}{۴}$ باشد، احتمال $P(\{b, c, e\} | \{a, b, c\})$ کدام است؟

۳/۴ (۱)

۵/۸ (۲)

۵/۱۲ (۳)

۳/۸ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

$$P(\{b, c\}) = P(\{a, b, c\}) - P(a) = \frac{۲}{۳} - \frac{۱}{۴} = \frac{۵}{۱۲}$$

$$P(\{b, c, e\} | \{a, b, c\}) = \frac{P(\{b, c\})}{P(\{a, b, c\})} = \frac{\frac{۵}{۱۲}}{\frac{۲}{۳}} = \frac{۱۵}{۲۴} = \frac{۵}{۸}$$

۳۹) در پرتاب دو تاس با هم، اگر A پیشامد مجموع دو تاس کمتر از ۶، B پیشامد هر دو تاس فرد و C پیشامد رو شدن عدد ادر حداقل یکی از تاسها باشد، آن‌گاه کدام رابطه زیر درست است؟

$$A \cap B \subseteq C \quad (۱)$$

$$A \cap C \subseteq B \quad (۲)$$

$$B \cap C \subseteq A \quad (۳)$$

$$A \cap B = A \cap C \quad (۴)$$

گزینه ۳: پاسخ:

$$A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), \\ (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$$

$$B = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), \\ (5, 1), (5, 3), (5, 5)\}$$

$$C = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), \\ (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1)\}$$

$$A \cap B = \{(1, 1), (1, 3), (3, 1)\}$$

$$A \cap C = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 1), (4, 1)\}$$

$$B \cap C = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (5, 1)\}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود $A \cap B \subseteq C$ است ولی سایر روابط درست نیستند.

۴۰) اگر $P(A \cup B) = ۰/۸$ و $P(B - A) = P(A)$ باشد، احتمال متمم پیشامد A کدام است؟

$$۰/۷ \quad (۱)$$

$$۰/۶ \quad (۲)$$

$$۰/۵ \quad (۳)$$

$$۰/۴ \quad (۴)$$

گزینه ۳: پاسخ:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ P(B - A) &= P(B) - P(A \cap B) \end{aligned} \quad \}$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B - A) \Rightarrow ۰/۸ = P(A) + P(A)$$

$$\Rightarrow ۲P(A) = ۰/۸ \Rightarrow P(A) = ۰/۴$$

$$\Rightarrow P(A') = ۱ - P(A) = ۱ - ۰/۴ = ۰/۶$$

۴۱) اگر $P(B - A) = \frac{۲}{۹}$ و $P(A - B) = \frac{۱}{۵}$ باشد، در این صورت مقدار $P(A) - P(B)$ کدام است؟

$$-\frac{۱۹}{۴۵} \quad (۱)$$

$$\frac{۱۹}{۴۵} \quad (۲)$$

$$\frac{۱}{۴۵} \quad (۳)$$

$$-\frac{۱}{۴۵} \quad (۴)$$

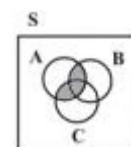
گزینه ۱: پاسخ:

$$P(A) - P(B) = P(A) - P(A \cap B) + P(A \cap B) - P(B)$$

$$= (P(A) - P(A \cap B)) - (P(B) - P(A \cap B))$$

$$= P(A - B) - P(B - A) = \frac{۱}{۵} - \frac{۲}{۹} = \frac{۹-۱۰}{۴۵} = -\frac{۱}{۴۵}$$

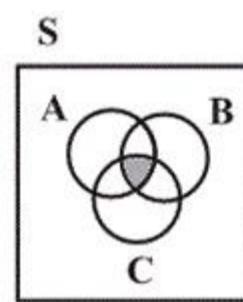
۳۲) اگر A، B و C سه پیشامد از فضای نمونه S باشند، آن‌گاه قسمت هاشورخورده در نمودار ون زیر معادل کدام پیشامد است؟



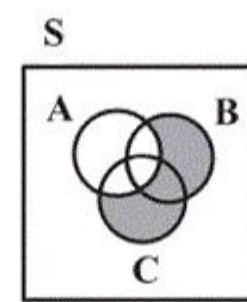
- (۱) A با هم رخ دهند یا A و C با هم رخ دهند.
- (۲) سه پیشامد A، B و C با هم رخ دهند.
- (۳) B یا C رخ دهد ولی A رخ ندهد.
- (۴) حداقل دو پیشامد از میان پیشامدهای A، B و C رخ دهد.

پاسخ: گزینه ۱

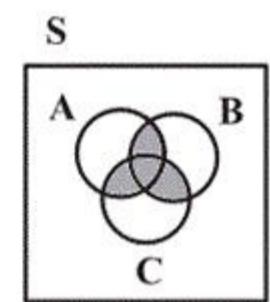
پیشامد آن‌که A و B با هم رخ دهند یا A و C با هم رخ دهند، همان پیشامد $A \cap B \cup (A \cap C)$ است که دقیقاً معادل قسمت هاشورخورده در نمودار صورت سوال است. نمودار ون معادل سایر گزینه‌ها به صورت زیر است:



گزینه «۲»



گزینه «۳»



گزینه «۴»

۳۳) اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند، حاصل عبارت $P(A' \cup B') - P(A' \cap B)$ همواره برابر کدام است؟

$P(B')$ (۱)

$P(A')$ (۲)

$P(B)$ (۳)

$P(A)$ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

با توجه به قوانین جبر مجموعه‌ها و قضایای احتمال داریم:

$$\begin{aligned} P(A' \cup B') - P(A' \cap B) &= P[(A \cap B)'] - P(B - A) \\ &= (1 - P(A \cap B)) - (P(B) - P(A \cap B)) \\ &= 1 - P(A \cap B) - P(B) + P(A \cap B) = 1 - P(B) = P(B') \end{aligned}$$

۳۴ خانوادهای دارای سه فرزند است. در فضای نمونه فرزندان این خانواده، پیشامدهای A، B و C به ترتیب به صورت «جنسیت فرزند اول و دوم متفاوت باشد»، «حداقل دو فرزند دختر باشند» و «فرزند اول پسر باشد»، تعریف شده‌اند. کدام دو پیشامد ناسازگار هستند؟

۴) هیچ کدام

A و B - C (۳)

B و C - A (۲)

C و A - B (۱)

گزینه ۲ پاسخ:

ابتدا اعضای پیشامدهای A، B و C و سپس پیشامدهای A - B، C - A و C - B را می‌نویسیم:

$$A = \{(d, p, d), (p, p, d), (d, d, p), (p, d, p)\}$$

$$B = \{(d, d, p), (d, p, d), (p, d, d), (d, d, d)\}$$

$$C = \{(d, d, p), (d, p, p), (p, d, p), (p, p, p)\}$$

$$A - B = \{(p, p, d), (p, d, p)\}$$

$$C - A = \{(d, p, p), (p, p, p)\}$$

$$B - C = \{(d, p, d), (p, d, d), (d, d, d)\}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود اشتراک پیشامدهای B - A و C - A ناتهی است ولی اشتراک پیشامدهای A - C و B - C تهی بوده و این دو پیشامد ناسازگار هستند.

۳۵ در آزمایش پرتاب دو تاس، اگر A پیشامد فرد بودن مجموع دو تاس، B پیشامد فرد بودن حداقل یکی از تاس‌ها و C پیشامد رو شدن عدد ۴ در حداقل یکی از تاس‌ها باشد، کدام نادرست است؟

$$B \cap C \subseteq A \quad (۲)$$

$$A \cap C = B \cap C \quad (۴)$$

$$A \subseteq B \quad (۱)$$

$$A \cap C = \emptyset \quad (۳)$$

گزینه ۳ پاسخ:

ابتدا پیشامدها را توصیف می‌کنیم:

$$A = \{(f, z) \text{ یا } (z, f) \rightarrow \text{مجموع دو تاس فرد باشد}\}$$

$$B = \{(f, f) \text{ یا } (f, z) \text{ یا } (z, f) \rightarrow \text{حداقل یکی از تاس‌ها فرد باشد}\}$$

$$C = \{(f, 1), (f, 3), (f, 5), (1, f), (3, f), (5, f)\} \rightarrow \text{حداقل یکی از تاس‌ها ۴ باشد}$$

گزینه «۱»: حالت‌های مربوط به پیشامد A، همگی در B وجود دارند. بنابراین $A \subseteq B$.

گزینه «۲»:

$$B \cap C = \{(f, 1), (f, 3), (f, 5), (1, f), (3, f), (5, f)\}$$

در تمامی این زوج‌های مرتب، یکی از مؤلفه‌ها زوج و دیگری فرد است در نتیجه: $B \cap C \subseteq A$.

گزینه «۳»: زوج مرتب (۱, ۴) را در نظر بگیرید. این زوج مرتب در C وجود دارد و چون A شامل زوج‌های مرتبی به شکل (f, z) است، زوج مرتب (۱, ۴) در A هم هست. بنابراین: $A \cap C \neq \emptyset$.

گزینه «۴»: توجه کنید که:

$$A \cap C = \{(f, 1), (f, 3), (f, 5), (1, f), (3, f), (5, f)\}$$

و این همان $B \cap C$ است که در گزینه «۲» به دست آوردیم.

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند، به طوری که $P(A \cap B) = 0/6$ و $P(B) = 0/2$ و $P(A) = 0/4$ باشند، آنگاه $P(A' \cap B)$ کدام است؟

۰/۵ (۱)

۰/۴ (۲)

۰/۳ (۳)

۰/۱ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

$$P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = 0/6 - 0/4 = 0/2$$

$$\Rightarrow P(A' \cap B) = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = 0/3$$

اگر A و B دو پیشامد مستقل از یکدیگر، آنگاه $P(A|B) = \frac{1}{4}$ و $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$ باشد، آنگاه $P(A|B)$ کدام است؟

۱/۴ (۱)

۷/۱۵ (۲)

۵/۱۲ (۳)

۷/۲۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

دو پیشامد A و B مستقل از یکدیگرند، پس $P(A) = P(A|B) = \frac{1}{4}$ است. از طرفی برای دو پیشامد مستقل A و B، رابطه $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ برقرار است، بنابراین داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{1}{4} + P(B) - \frac{1}{4}P(B)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}P(B) = \frac{3}{5} - \frac{1}{4} = \frac{7}{20} \Rightarrow P(B) = \frac{7}{20} \times \frac{4}{3} = \frac{7}{15}$$

اگر A و B دو پیشامد مستقل از یکدیگر باشند به طوری که $P(A \cup B) / P(A \cap B')$ کدام است؟

۲/۳ (۱)

۱/۲ (۲)

۷/۵ (۳)

۱/۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

دو پیشامد A و B مستقل از یکدیگرند، پس دو پیشامد A و B نیز مستقل از هم هستند و داریم:

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A \cap B')} = \frac{0/1}{0/4} \Rightarrow \frac{P(A)P(B)}{P(A)P(B')} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{P(B)}{1-P(B)} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 4P(B) = 1 - P(B) \Rightarrow 5P(B) = 1 \Rightarrow P(B) = 0/2$$

$$\Rightarrow P(B') = 0/1$$

$$\begin{aligned} \frac{P(A \cup B)}{P(A \cup B')} &= \frac{(P(A)-P(A \cap B))+P(B)}{(P(A)-P(A \cap B'))+P(B')} \\ &= \frac{P(A-B)+P(B)}{P(A \cap B)+P(B')} \\ &= \frac{0/4+0/2}{0/1+0/1} = \frac{0/6}{0/2} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

۳۹) سکه‌ای همگن را ۳ بار پرتاب می‌کنیم. اگر A پیشامد آمدن «رو» در هر دو پرتاب اول، B پیشامد آمدن «پشت» در پرتاب سوم و C پیشامد آمدن دقیقاً دو «پشت» در سه پرتاب باشد، آنگاه کدام گزینه درست است؟

- ۱) پیشامدهای A و B مستقل‌اند، ولی پیشامدهای B و C وابسته‌اند.
- ۲) هم پیشامدهای A و B و هم پیشامدهای B و C مستقل‌اند.
- ۳) پیشامدهای A و B وابسته‌اند، ولی پیشامدهای B و C مستقل‌اند.
- ۴) هم پیشامدهای A و B و هم پیشامدهای B و C وابسته‌اند.

پاسخ: گزینه ۱

احتمال پیشامدهای A، B و C برابر است با:

$$P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

رو در پرتاب دوم و در پرتاب اول

$$P(B) = \frac{1}{2}$$

پشت در پرتاب سوم

$$P(C) = \frac{\binom{3}{2}}{2^3} = \frac{3}{8}$$

اشتراك دو پیشامد A و B آن است که دو پرتاب اول «رو» و پرتاب سوم «پشت» بیاید. داریم:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

اشتراك دو پیشامد B و C آن است که پرتاب سوم «پشت» و دقیقاً یکی از دو پرتاب اول «پشت» بیاید. داریم:

$$P(B \cap C) = \frac{\binom{2}{1}}{2^2} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{16} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B) \Rightarrow A \text{ و } B \text{ مستقل‌اند}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \Rightarrow P(B \cap C) = P(B)P(C) \Rightarrow B \text{ و } C \text{ وابسته‌اند}$$

۴۰) برای دو پیشامد A و B، اگر $P(A|B) = 0/8$ و $P(B) = 0/6$ کدام است؟

۰/۵ (۴)

۰/۴ (۳)

۰/۳ (۲)

۰/۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = 0/8 \times 0/6 = 0/48$$

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) = 0/6 - 0/48 = 0/12$$

$$P(A|B') = \frac{P(A \cap B')}{P(B')} = \frac{0/12}{1 - 0/6} = 0/18$$

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند، به طوری که $A \subseteq B$ ، آنگاه $P(B|A') = \frac{1}{3}$ و $P(A) = \frac{1}{4}$ کدام است؟ (۴۱)

$\frac{5}{8}$ (۱)

$\frac{7}{12}$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۳)

$\frac{3}{8}$ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$$P(B - A) = P(B) - P(B \cap A) = P(B) - P(A)$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(B|A') = \frac{P(B \cap A')}{P(A')} = \frac{P(B-A)}{1-P(A)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$$

اگر $P(A \cup B) = 0.8$ باشد، حاصل $P(A - B) = ?$ کدام است؟ (۴۲)

$\frac{3}{5}$ (۱)

$\frac{3}{5}$ (۲)

$\frac{2}{5}$ (۳)

$\frac{2}{5}$ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.8$$

$$\Rightarrow 0.8 = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5} P(A \cap B) = \frac{1}{10} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{5}$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0.8 - \frac{1}{5}$$

$$= 0.6 = \frac{3}{5}$$

دو پیشامد A و B مستقل و هم‌شانس هستند. اگر $P(A \cup B) = \frac{5}{9}$ باشد، مقدار $P(A')$ کدام است؟ (۴۳)

$\frac{1}{9}$ (۱)

$\frac{1}{3}$ (۲)

$\frac{2}{3}$ (۳)

$\frac{1}{3}$ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

برای دو پیشامد مستقل، رابطه $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ برقرار است، پس داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

اگر $P(A) = P(B) = x$ فرض شود، آنگاه داریم:

$$\frac{5}{9} = x + x - x \cdot x = 2x - x^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + \frac{5}{9} = 0 \Rightarrow (x - \frac{5}{9})(x - \frac{1}{9}) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = P(A) = \frac{1}{9} \Rightarrow P(A') = \frac{8}{9} \\ x = P(A) = \frac{5}{9} \end{cases}$$

اگر $S = \{a, b, c, d, e\}$ فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی، $C = \{a, d, e\}$ ، $B = \{a, c\}$ ، $A = \{a, b\}$ پیشامدهایی از این فضای نمونه و آنگاه $P(A' \cap B') = \frac{3}{5}$ باشد، $P(C) = \frac{3}{5}$ و $P(B) = \frac{2}{5}$ ، $P(A) = \frac{1}{3}$ کدام است؟ (۴۴)

(۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{11}{30}$ (۳) $\frac{4}{15}$ (۴) $\frac{13}{30}$

پاسخ: گزینه ۱

$$A \cup B = \{a, b, c\} \Rightarrow A' \cap B' = (A \cup B)' = \{d, e\}$$

$$P(A) + P(B) + P(C) = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow 3P(a) + P(b) + P(c) + P(d) + P(e) = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow (P(a) + P(b) + P(c) + P(d) + P(e)) + 2P(a) = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow 2P(a) = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3} \Rightarrow P(a) = \frac{1}{6}$$

$$P(\{d, e\}) = P(\{a, d, e\}) - P(a) = \frac{3}{5} - \frac{1}{6} = \frac{13}{30}$$

اگر A و B دو پیشامد ناتهی و ناسازگار باشند، آنگاه چه تعداد از گزاره‌های زیر صحیح است؟ (۴۵)

الف) پیشامدهای A و B' ناسازگارند.

ب) پیشامدهای A و B' مستقل‌اند.

پ) پیشامدهای A' و B' ممکن است مستقل باشند.

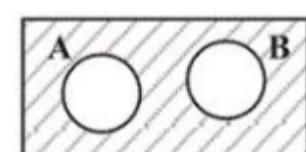
(۱) ۳

(۲) ۲

(۳) ۱

(۴) هیچ

پاسخ: گزینه ۱



$A \cap B' = A$ ، $A \neq \emptyset \Rightarrow A$ و B' سازگار می‌باشند.

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0$$

از طرفی $0 \neq P(A) \times P(B)$ ، پس A و B مستقل نیستند و در نتیجه A' و B' نیز مستقل نمی‌باشند.

۴۶ در پرتاب دو تاس، A پیشامد آمدن مجموع ۷، B پیشامد آمدن مجموع ۶ و C پیشامد آن است که عدد تاس دوم ۴ باشد. کدام پیشامدها مستقل‌اند؟

۴) همگی دو به دو وابسته‌اند.

C و B (۳)

C و A (۲)

B و A (۱)

گزینه ۲ پاسخ:

اعضای پیشامدها را می‌نویسیم:

$$A = \{(1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3)\}$$

$$B = \{(1, 5), (5, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 3)\}$$

$$C = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 4), (5, 4), (6, 4)\}$$

در نتیجه:

$$A \cap B = \emptyset, A \cap C = \{(3, 4)\}, B \cap C = \{(2, 4)\}$$

بنابراین:

$P(A \cap B) = 0 \neq P(A) \times P(B) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{36} \rightarrow$ A و B مستقل‌اند

$P(A \cap C) = \frac{1}{36} = P(A) \times P(C) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \rightarrow$ A و C مستقل‌اند

$P(B \cap C) = \frac{1}{36} \neq P(B) \times P(C) = \frac{5}{36} \times \frac{1}{6} \rightarrow$ B و C مستقل‌اند

اگر $P(A) = \frac{1}{3}$ ، $P(B|A') = \frac{1}{2}$ و $P(A|B) = \frac{1}{4}$ باشد، (B) کدام است؟

$\frac{3}{4}$ (۴)

$\frac{2}{3}$ (۳)

$\frac{1}{4}$ (۲)

$\frac{4}{9}$ (۱)

گزینه ۱ پاسخ:

$$P(A) = \frac{1}{3} \Rightarrow P(A') = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$P(B|A') = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{P(B \cap A')}{P(A')} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{P(B \cap A')}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow P(B \cap A') = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$P(A|B) = \frac{1}{4} \Rightarrow P(A'|B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{P(A' \cap B)}{P(B)} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{\frac{1}{3}}{P(B)} = \frac{3}{4} \Rightarrow P(B) = \frac{4}{9}$$

اگر A و B دو پیشامد ناتهی از فضای نمونه‌ای S باشند، کدام رابطه صحیح نیست؟ (اشتراک A و B ناتهی است). (۴۸)

$$\frac{P(A|B)}{P(B|A)} = \frac{P(A)}{P(B)} \quad (1)$$

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A|B)} = P(A) \quad (2)$$

$$P(A|A) = 1 \quad (3)$$

$$P(A|S) = P(A) \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۲

رابطه گزینه «۲» نادرست است، زیرا داریم:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A|B)}$$

کدام یک از گزینه‌های زیر، قانون ضرب احتمال برای سه پیشامد غیرتنهی A_1, A_2, A_3 را به درستی نشان می‌دهد؟ (۴۹)

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_2|A_1)P(A_3|(A_1 \cap A_2)) \quad (1)$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|(A_1 \cap A_2)) \quad (2)$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_1|A_2)P(A_3|(A_1 \cap A_2)) \quad (3)$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۱

طبق قانون ضرب احتمال اگر A و B دو پیشامد به شرط \circ (A) باشند، آنگاه:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

حال برای محاسبه $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ دو بار از قانون ضرب احتمال استفاده می‌کنیم.

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P((A_1 \cap A_2) \cap A_3)$$

$$= P(A_1 \cap A_2)P(A_3|(A_1 \cap A_2))$$

$$= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|(A_1 \cap A_2))$$

(۵۰) در آزمایش تصادفی یک بار پرتاب یک تاس سالم، کدام دو پیشامد مستقل از هم هستند؟

$$B = \{2, 3, 5\} \text{ و } A = \{1, 2\} \quad (۲)$$

$$B = \{2, 3, 6\} \text{ و } A = \{1, 2, 3\} \quad (۴)$$

$$B = \{2, 3\} \text{ و } A = \{1, 2\} \quad (۱)$$

$$B = \{4, 5\} \text{ و } A = \{2, 3\} \quad (۳)$$

گزینه ۲ پاسخ:

دو پیشامد A و B مستقل اند اگر و فقط اگر داشته باشیم:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

در گزینه «۲» داریم:

$$A = \{1, 2\}, \quad B = \{2, 3, 5\} \Rightarrow A \cap B = \{2\}$$

$$\left. \begin{array}{l} P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\ P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\ P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{1}{6} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \Rightarrow \quad \quad \quad A \text{ و } B \text{ مستقل اند.}$$

در سایر گزینه‌ها به راحتی می‌توان نشان داد که $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$ ، پس دو پیشامد A و B مستقل نیستند.

(۵۱) اگر برای دو پیشامد مستقل A و B، $P(A'|B) = ۰/۲$ و $P(A|B') = ۰/۶$ باشد، حاصل ('A ∪ B') کدام است؟

$$۰/۸۸ \quad (۴)$$

$$۰/۸۴ \quad (۳)$$

$$۰/۸ \quad (۲)$$

$$۰/۷۶ \quad (۱)$$

گزینه ۲ پاسخ:

می‌دانیم که اگر دو پیشامد A و B مستقل باشند، پیشامدهای 'A و 'B، A و 'B و همچنین 'A و 'B نیز مستقل اند. همچنین اگر دو پیشامد A و B مستقل از یکدیگر باشند، آن‌گاه $P(A|B) = P(A)$ است. بنابراین داریم:

$$P(A'|B) = P(A') = ۰/۶ \Rightarrow P(A) = ۰/۴$$

$$P(B|A) = P(B) = ۰/۲ \Rightarrow P(B') = ۰/۸$$

$$P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A)P(B')$$

$$= ۰/۴ + ۰/۸ - ۰/۳۲ = ۰/۸۸$$

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشد، حاصل کدام است؟ (۵۲)

$\frac{1}{4}$ (۴)

$\frac{2}{3}$ (۳)

۳ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

اگر x فرض شود، داریم:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow \frac{2}{4} = \frac{x}{P(A)} \Rightarrow P(A) = \frac{4}{2}x$$

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A-B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)-P(A \cap B)} = \frac{x}{\frac{4}{2}x-x} = \frac{x}{\frac{1}{2}x} = 2$$

اگر $S = \{a, b, c, d\}$ فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی و $C = \{b, c, d\}$ سه پیشامد روی این فضای نمونه‌ای باشند، به طوری که آنگاه مقدار $P(C)$ کدام است؟ (۵۳)

۰/۹ (۴)

۰/۳ (۳)

۰/۷ (۲)

۰/۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

$$A \cup B = \{a, b, c, d\} = S \Rightarrow P(A \cup B) = 1$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow 1 = 0/3 + 0/4 - P(a) \Rightarrow P(a) = 0/1$$

$$C' = \{a\} \Rightarrow P(C') = P(a) = 0/1$$

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، حاصل $1 + P(B) - P(A) - P(B - A)$ ۱ همواره برابر کدام است؟ (۵۴)

$P(A \cup B')$ (۴)

$P(A' \cap B)$ (۳)

$P(A \cap B')$ (۲)

$P(A' \cup B)$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

$$\begin{aligned} 1 + P(B) - P(A) - P(B - A) \\ = 1 + P(B) - P(A) - P(B) + P(A \cap B) \\ = 1 - (P(A) - P(A \cap B)) = 1 - P(A - B) \\ = P[(A - B)'] = P[(A \cap B')'] = P(A' \cup B) \end{aligned}$$

در یک آزمایش تصادفی ۵۵ کدام $P(a) \times P(b)$ باشد، حاصل است؟ اگر $S = \{a, b, c\}$ فضای نمونه‌ای است. اگر $P(\{a, c\}) = \frac{3}{4}$ و $P(\{a, b\}) = \frac{5}{12}$

(۱) $\frac{1}{12}$ (۲) $\frac{7}{12}$ (۳) $\frac{7}{18}$ (۴) $\frac{1}{24}$

پاسخ: گزینه ۱

$$P(\{a, b\}) = P(a) + P(b) = \frac{5}{12}$$

$$P(\{a, c\}) = P(a) + P(c) = \frac{3}{4}$$

$$\xrightarrow{P(a)+P(b)+P(c)=1} P(b) = \frac{1}{4}$$

$$\xrightarrow{P(a)+P(b)=\frac{5}{12}} P(a) = \frac{5}{12} - \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow P(a) \times P(b) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$$

اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، حاصل $P(A \cup B) - P(A - B) + P(A \cup B')$ کدام است؟ ۵۶

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) $P(B')$ (۴) $P(A')$

پاسخ: گزینه ۳

با توجه به قوانین احتمال داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B') = P[(A' \cap B)'] = 1 - P(A' \cap B) = 1 - P(B - A)$$

$$= 1 - (P(B) - P(A \cap B)) = 1 - P(B) + P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) - P(A - B) + P(A \cup B')$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B) - P(A) + P(A \cap B)$$

$$+ 1 - P(B) + P(A \cap B) = 1 + P(A \cap B) \quad \text{nasazgarند } B \text{ و } A \quad ۱$$

اگر A و B دو پیشامد مستقل از هم، $P(A \cap B) = 0/3$ و $P(B - A) = 0/2$ کدام است؟ ۵۷

۰/۱ (۴)

۰/۲ (۳)

۰/۳ (۲)

۰/۴ (۱)

گزینه ۳ پاسخ:

$$P(B - A) = P(B \cap A') = P(B)P(A')$$

$$\Rightarrow P(B)P(A') = 0/2 (۱)$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \Rightarrow P(A)P(B) = 0/3 (۲)$$

$$(۱), (۲) \Rightarrow \frac{P(B)P(A')}{P(B)P(A)} = \frac{0/2}{0/3} \Rightarrow \frac{1-P(A)}{P(A)} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 2P(A) = 3 - 3P(A) \Rightarrow P(A) = \frac{3}{5} = 0/6 \xrightarrow{(۲)} P(B) = 0/4$$

$$P(A' \cap B') = P(A') \times P(B') = 0/4 \times 0/5 = 0/2$$

اگر $P(C - B) = [(A \cup B) - A'] \cup [B' \cap (A \cup B)]$ آنگاه C کدام است؟ ۵۸

۰/۸ (۴)

۰/۶ (۳)

۰/۴ (۲)

۰/۲ (۱)

گزینه ۲ پاسخ:

ابتدا مجموعه C را ساده می‌کنیم:

$$C = [(A \cup B) - A'] \cup [B' \cap (A \cup B)]$$

$$= [(A \cup B) \cap A] \cup \left[(B' \cap A) \cup (B' \cap B) \right] = A \cup (A \cap B')$$

$$\xrightarrow[A \cap B' \subseteq A]{} C = A$$

$$P(A) = 3P(A \cap B) = 0/6 \Rightarrow P(A) = 0/6, P(A \cap B) = 0/2$$

$$P(C - B) = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$= 0/6 - 0/2 = 0/4$$

هرگاه $P(A) = 0/2$ و $P(B) = 0/3$ و پیشامدهای A و B مستقل باشند، حاصل $P(B - A)$ کدام است؟ ۵۹

۰/۱ (۴)

۰/۱۲ (۳)

۰/۲ (۲)

۰/۲۴ (۱)

گزینه ۱ پاسخ:

چون A و B مستقل هستند، A' و B' نیز مستقل هستند. داریم:

$$P(B - A) = P(B \cap A') = P(B) \times P(A') =$$

$$P(B) \times (1 - P(A)) = 0/3 \times 0/8 = 0/24$$

اگر $A' \subseteq B'$ و $P(B) = 1 - x$ ، $P(A) = x - \frac{1}{3}$ (۶۰) آن‌گاه حدود ممکن برای x کدام است؟

$$\frac{3}{4} \leq x \leq 1 \quad (۱)$$

$$\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{3} \leq x \leq 1 \quad (۳)$$

$$0 \leq x \leq 1 \quad (۴)$$

گزینه پاسخ:

احتمال هر پیشامد عددی بین صفر و یک است.

(۱)

$$0 \leq P(A) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x - \frac{1}{3} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{4}{3}$$

(۲)

$$0 \leq P(B) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 1 - x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$$

$$A' \subseteq B' \Rightarrow B \subseteq A \Rightarrow P(B) \leq P(A)$$

(۳)

$$\Rightarrow 1 - x \leq x - \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{4}{3} \leq 2x \Rightarrow \frac{2}{3} \leq x$$

از اشتراک (۱)، (۲) و (۳) داریم:

$$\frac{1}{3} \leq x \leq 1$$

اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، $P(A' \cap B) = 0/5$ و $P(B) = 0/3$ ، حاصل $P(A' \cup B)$ کدام است؟ (۶۱)

$$0/8 \quad (۱)$$

$$0/7 \quad (۲)$$

$$0/9 \quad (۳)$$

$$0/6 \quad (۴)$$

گزینه پاسخ:

چون دو پیشامد A و B مستقل از یکدیگرند، پس A' و B نیز مستقل از هم هستند و داریم:

$$P(A' \cap B) = P(A') \cdot P(B) \Rightarrow 0/3 = P(A') \times 0/5$$

$$\Rightarrow P(A') = 0/6$$

$$P(A' \cup B) = P(A') + P(B) - P(A' \cap B)$$

$$= 0/6 + 0/5 - 0/3 = 0/8$$

۶۲) اگر دو پیشامد A و B ، مستقل از یکدیگر و $P(A|B) = \frac{1}{4}$ و $P(A - B) = \frac{1}{4}$ حاصل چقدر است؟

$\frac{3}{8}$ (۴)

$\frac{7}{24}$ (۳)

$\frac{1}{6}$ (۲)

$\frac{5}{24}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

می‌دانیم اگر دو پیشامد A و B ، مستقل از یکدیگر باشند، آن‌گاه $P(A|B) = P(A)$ است. همچنین در صورتی که دو پیشامد A و B مستقل از هم باشند، پیشامدهای A و B' و نیز پیشامدهای A' و B ، مستقل از هم هستند. در نتیجه داریم:

$$P(A - B) = P(A \cap B') = \frac{1}{4} \Rightarrow P(A)P(B') = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} \times P(B') = \frac{1}{4} \Rightarrow P(B') = \frac{3}{8}$$

بنابراین $P(B) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$ و $P(A') = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ است و داریم:

$$P(B - A) = P(B \cap A') = P(B)P(A') = \frac{5}{8} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{24}$$

۶۳) اگر دو پیشامد A و B ، مستقل از هم باشند به طوری که $P(A \cup B) = ۰/۱$ و $P(A \cap B) = ۰/۳$ و $P(B \cap A') = ۰/۱$ حاصل () کدام است؟

$\frac{7}{10}$ (۴)

$\frac{3}{4}$ (۳)

$\frac{4}{5}$ (۲)

$\frac{17}{20}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = ۰/۳$$

$$P(B \cap A') = P(B)(1 - P(A)) = ۰/۱$$

$$\Rightarrow P(B) - P(B)P(A) = ۰/۱ \Rightarrow P(B) = ۰/۴ \Rightarrow P(A) = \frac{3}{4}$$

$۰/۳$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = \frac{3}{4} + \frac{4}{10} - \frac{3}{10} = \frac{17}{20}$$

۶۴) فضای نمونه‌ای یک آزمایش شامل سه عضو a ، b و c است و داریم: $P(a) = ۲P(b) = ۳P(c)$. احتمال رخدادن پیشامد c کدام است؟

$\frac{1}{2}$ (۴)

$\frac{1}{3}$ (۳)

$\frac{9}{11}$ (۲)

$\frac{2}{11}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$P(a) + P(b) + P(c) = ۱$$

$$\Rightarrow ۳P(c) + \frac{3}{2}P(c) + P(c) = ۱$$

$$\Rightarrow \frac{11}{2}P(c) = ۱ \Rightarrow P(c) = \frac{2}{11}$$

$$P(c') = ۱ - \frac{2}{11} = \frac{9}{11}$$

اگر $P(A|B) = \frac{P(A-B)}{P(B-A)}$ باشد، در این صورت حاصل کدام است؟ (۶۵)

- $\frac{9}{8}$ (۲)
 $\frac{40}{61}$ (۴)

- $\frac{21}{20}$ (۱)
 $\frac{42}{61}$ (۳)

پاسخ: گزینه ۲

فرض کنیم $P(A \cap B) = x$ باشد، در این صورت داریم:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{x}{\frac{4}{5}x} \Rightarrow P(B) = \frac{4}{5}x$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{x}{\frac{9}{8}x} \Rightarrow P(A) = \frac{8}{9}x$$

$$\frac{P(A-B)}{P(B-A)} = \frac{P(A)-P(A \cap B)}{P(B)-P(A \cap B)}$$

$$= \frac{\frac{8}{9}x-x}{\frac{4}{5}x-x} = \frac{\frac{8}{9}x}{\frac{1}{5}x} = \frac{40}{9} = \frac{9}{8}$$

چه تعداد از گزاره‌های زیر صحیح است؟ (۶۶)

(الف) $P(A' \cup B') = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cup B)$

(ب) $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$

(پ) $P(A \cup B) \geq P(B)$

(ت) $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$

- ۲ (۲)
۴ (۴)

- ۱ (۱)
۳ (۳)

پاسخ: گزینه ۲

(الف) $P(A' \cup B') = P(A \cap B)' = 1 - P(A \cap B)$

$= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cup B)$

(ب) $P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

(پ) $B \subseteq (A \cup B) \Rightarrow P(B) \leq P(A \cup B)$

(ت) $P(A \cup B) \leq 1 \Rightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1$

$\Rightarrow P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$

۶۷) اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، به طوری که $P(A \cap B) = P(A')P(B') = 0/2$ کدام است؟

۰/۲۸ (۱)

۰/۷۲ (۳)

۰/۹۸ (۲)

۰/۰۲ (۴)

گزینه ۳ پاسخ:

$$P(A') = P(B') = 0/2 \Rightarrow \begin{cases} P(A') = 0/2 \\ P(B') = 0/1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(A) = 1 - P(A') = 1 - 0/2 = 0/1 \\ P(B) = 1 - P(B') = 1 - 0/1 = 0/9 \end{cases}$$

چون A و B دو پیشامد مستقل‌اند، پس:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \Rightarrow P(A \cap B) = 0/1 \times 0/9 = 0/09$$

۶۸) اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، $P(A \cup B) - 1$ برابر است با:

P(A) × P(B) (۱)

P(A') × P(B') (۲)

P(A') × P(B) (۳)

P(A) × P(B') (۴)

گزینه ۱ پاسخ:

گزینه‌ی «۱»

$$P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$\xrightarrow{\text{مستقل } B, A} P(A \cap B') = P(A) - P(A) \times P(B)$$

$$= P(A)(1 - P(B)) = P(A) \times P(B')$$

حال داریم:

$$1 - P(A \cup B') = 1 - (P(A) + P(B') - P(A \cap B'))$$

$$= 1 - P(A) - P(B') + P(A) \times P(B')$$

$$= (1 - P(A)) - P(B')(1 - P(A))$$

$$= (1 - P(A))(1 - P(B')) = P(A') \times P(B')$$

(۶۹) گر برای دو پیشامد A و B، روابط $P(A'|B) + P(B|A) = \frac{1}{f}$ و $P(B'|A) = \frac{1}{\Delta}$ چقدر است؟

$\frac{۳۱}{۲۰} (۴)$

$\frac{۲۱}{۲۰} (۳)$

$\frac{۱۹}{۲۰} (۲)$

$\frac{۲۹}{۲۰} (۱)$

پاسخ: گزینه ۴

$$P(A'|B) = \frac{P(A' \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 1 - \frac{1}{f} = \frac{۳}{f}$$

$$P(B'|A) = \frac{P(B' \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$= 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{\Delta} \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 1 - \frac{1}{\Delta} = \frac{۳}{\Delta}$$

$$P(A|B) + P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$= \frac{۳}{f} + \frac{۳}{\Delta} = \frac{۱۵+۱۶}{۲۰} = \frac{۳۱}{۲۰}$$

(۷۰) در یک تاس ناسالم، $P(۳) = P(۴) = ۲P(\Delta) = \frac{۱}{۱۶}$ و $P(۱) = P(۲) = \frac{۱}{\lambda}$ چقدر است؟

$\frac{۲۵}{۳۲} (۲)$
 $\frac{۱۸}{۳۲} (۴)$

$\frac{۱۷}{۳۲} (۱)$
 $\frac{۱۶}{۳۲} (۳)$

پاسخ: گزینه ۴

$$S = \{1, 2, 3, 4, \Delta, ۶\}$$

$$P(\xi) = 1 - P(1) - P(2) - P(3) - P(4) - P(\Delta)$$

$$= 1 - \frac{۱}{\lambda} - \frac{۱}{\lambda} - \frac{۱}{۱۶} - \frac{۱}{۱۶} = \frac{۱۹}{۳۲}$$

$$A = \{2, 4, \xi\} \Rightarrow P(A) = P(2) + P(4) + P(\xi)$$

$$= \frac{۱}{\lambda} + \frac{۱}{\lambda} + \frac{۱۹}{۳۲} = \frac{۲۵}{۳۲}$$

(۷۱) اگر A و B دو پیشامد مستقل و غیر تهی باشند و $P(A) = ۴P(A \cap B) = ۳P(B)$ رخدید چقدر است؟

$\frac{۳}{۴} (۲)$
 $\frac{۹}{۱۶} (۴)$

$\frac{۱}{۴} (۱)$
 $\frac{۵}{۸} (۳)$

پاسخ: گزینه ۴

$$P(A) = ۴P(A \cap B)P(A) \xrightarrow[P(A) \neq 0]{\text{مستقل هستند}} = ۴P(A) \times P(B)$$

$$\xrightarrow{} P(B) = \frac{۱}{f}$$

$$P(A) = ۳P(B) = \frac{۳}{f}, P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{۳}{۱۶}$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{۳}{f} - \frac{۳}{۱۶} = \frac{۹}{۱۶}$$