

PDF Method in Raytracing

黄烨威

July 2025

1 Introduction

在光线追踪的 book1 和 book2 中，我们利用光路可逆的原理，从摄像机向各个角度发射光线并处理光线的反射、折射，从而获得一个像素的颜色。

在严格的镜面反射和折射中，这样做不会产生问题。然而在漫反射中，如果光源过远或者较小，就会由于我们漫反射的实现是简单的均匀随机分布而导致光线难以被反射到光源上，进而导致本应被照亮的地方却呈现得较暗，即形成了噪点。

为了解决这个问题，我们引入了 PDF (probability density function) method, 提高重要的方向（例如光源）采样的概率，既能提高渲染的效率又能减少噪点的出现。

2 PDF 及相关的函数

PDF 是用于描述一个连续型随机变量的输出值在某个确定的取值点附近的可能性的函数 (在下小莫 [2022])。假设一个随机变量 r 的 PDF 是 $p(r)$ ，那么就有：

$$Probability(a \leq r \leq b) = \int_a^b p(r)dr$$

同时我们还可以引入 CDF (cumulative distribution function) 函数，它是概率密度函数的积分，能完整描述一个实随机变量的概率分布。可以看出 CDF 的值域是 $[0, 1]$ 。

以及 ICD (inversion of CDF) 函数，即 CDF 的逆函数。于是 ICD 的定义域是 $[0, 1]$ ，在 $[0, 1]$ 上均匀随机生成一个 r ，那么得到的 $ICD(r)$ 就是原随机变量的分布。

3 Monte Carlo Integration

蒙特卡洛积分是一种以频率估计概率的方法，通过随机采样来逼近积分的真实值。

考虑一个简单的一维定积分：

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

在积分区间 $[a, b]$ 内，我们均匀随机地抽取 N 个样本点 X_1, X_2, \dots, X_N 。

我们计算这些样本点上函数值的算术平均值，以此作为对真实平均值 \bar{f} 的近似，并将这个近似的平均值代入，我们就得到了对积分 I 的蒙特卡洛估计：

$$I \approx (b-a) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(X_i)$$

当采样数量 N 趋向于无穷大时，这个估计值会收敛到积分的真实值 I 。

4 PDF Method

有了 PDF 和 Monte Carlo Integration，我们就可以将二者结合到一起成为 PDF Method。

假设我们要求一个积分值 I ，满足

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

运用 Monte Carlo Integration，并结合 PDF（即 p ），

$$I \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{f(X_i)}{p(X_i)}$$

而 X_i 的生成方式如下：在 $[0, 1]$ 上均匀随机生成一个 x_i ，那么 $X_i = \text{ICD}(x_i)$ 。 $p(X_i)$ 越大，我们越容易取到对应的 x_i 。这样的过程也被称作 importance sampling，类似于人为地给随机变量增加重要程度，越重要的越容易被采样到。

可以看出在第三节中介绍的估计就是其 PDF 函数 $p(x) = \frac{1}{b-a}$ 的一种特殊情况。

对于不同的 $p(x)$ ，当 N 充分大时，这个估计值总会收敛到真实值，唯一的问题就是收敛的速度，即足够接近真实值所需要的 N ：我们需要取一个足够好

的 PDF 函数，使得我们能取更多的更重要的 X_i ，从而尽快地逼近真实的结果。

5 光线追踪中的 PDF Method

以下的讨论都是在漫反射中。

我们在光线追踪中本质上是求的这样一个公式 (Peter Shirley [2025]):

$$\text{Color}_o(\mathbf{x}, \omega_o, \lambda) = \int_{\omega_i} A(\mathbf{x}, \omega_i, \omega_o, \lambda) \cdot \text{pScatter}(\mathbf{x}, \omega_i, \omega_o, \lambda) \cdot \text{Color}_i(\mathbf{x}, \omega_i, \lambda)$$

其中 A 是反射率， pScatter 是反射方向的 PDF， Color 函数是颜色。

运用 Monte Carlo Integration，我们实际上求的是

$$\text{Color}_o(\mathbf{x}, \omega_o, \lambda) \approx \frac{1}{N} \sum \frac{A(\mathbf{x}, \omega_i, \omega_o, \lambda) \cdot \text{pScatter}(\mathbf{x}, \omega_i, \omega_o, \lambda) \cdot \text{Color}_i(\mathbf{x}, \omega_i, \lambda)}{p(\mathbf{x}, \omega_i, \omega_o, \lambda)}$$

其中 p 是我们选择的关于 ω_i 的 pdf。在 book1 和 book2 中，我们直接取 $p = \text{pScatter} = \frac{\cos \alpha}{\pi}$ ，其中 α 是反射点的法向量与反射光线的角度，这样二者可以直接抵消。然而，正如在 Introduction 中介绍的，这种做法会产生黑色噪点。

于是我们首先考虑一个仅关心更重要（相比于其它不发光的物体）的光源的 PDF，这样就不会产生黑色的噪点。

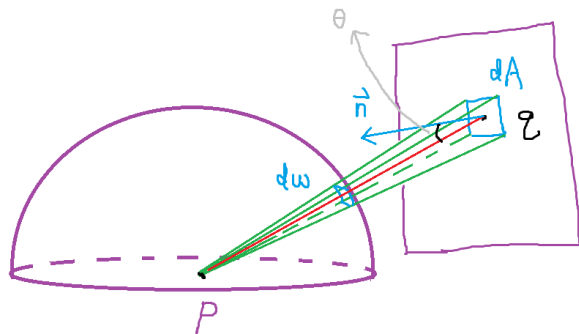


Figure 1: 示意图

考虑一个面积为 A 的平行四边形光源。假设这个光源发出的光是均匀的，那么在光源表面采样的 PDF 就是均匀的 $\frac{1}{A}$ 。在光源上一点 q 附近取一面积微

元 dA ，考虑它对一个点 p 的贡献，也就是要求出 dA 在以 p 为球心的单位球面上的贡献。利用投影和相似，可以得到它在球面上的投影：

$$d\omega = \frac{dA \cos \theta}{||pq||^2}$$

其中 θ 是 pq 和光源平面法线的夹角，如 Figure 1. 所示。

又知道 $p(\omega)d\omega = \frac{1}{A}dA$ （这两块的采样概率相同），因此，其 PDF 满足：

$$p(\omega) = \frac{||pq||^2}{\cos \theta A}$$

其中 ω 是 pq 与半球的交点。

而如果单纯运用上述 PDF，又会导致我们只关心光源而不关心材料本身，看起来不够真实。因此，我们可以对不同的 PDF 进行加权处理，形成 mixture PDF，例如将原本的 p_{Scatter} 与上文我们得到的 p 进行平均，得到新的 PDF 函数 $p' = 0.5p_{\text{Scatter}} + 0.5p$ ，这样会更加符合现实情况。

6 总结

PDF Method 不仅是一种能对更重要的光源进行快速采样的方法，也是一种理解场景中光照分布的有效途径。该方法是计算机图形学中应用概率论的一个典范。

然而，PDF Method 仍然是一种基于概率的方法，其结果可能理想，也可能不理想。我们（在朴素的实现中）直接朝向光源采样光线，而没有考虑遮挡和反射的影响。因此，输出的图像仍会带有一些随机噪点。

通过更审慎地选择 PDF，可以对其进行改进，例如，可以采用更复杂的 mixture PDF 等。

References

Steve Hollasch Peter Shirley, Trevor David Black. Ray tracing: The rest of your life, April 2025. URL <https://raytracing.github.io/books/RayTracingTheRestOfYourLife.html>.
<https://raytracing.github.io/books/RayTracingTheRestOfYourLife.html>.

在下小莫. 理解概率论中pdf、pmf和cdf的关系，看这一篇就够了，2022. URL <https://zhuanlan.zhihu.com/p/587516468>.