Proyecto 1 | Marco teórico | Felipe Lucero

Sea $r_{xy}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n-l) \quad \forall l \in \mathbb{Z}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{correlación} \\ \text{cruzada} \\ \text{entre} \\ x(n) \text{ e } y(n) \end{array} \right.$

a) Dem. que $r_{xy}(l) = r_{yx}(-l)$

$$r_{xy}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\,y(n-l) \overset{\text{por los límites } (-\infty,\infty)}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n+l)\,y(n)$$

Si invertimos $x(n)$ e $y(n)$

$$r_{yx}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n+l)\,x(n) = r_{xy}(-l)$$

b) Sea $w(n) = a\,x(n) + b\,y(n-l) \quad \forall n \quad a, b$ ctes.

La energía entonces es $E_w = \sum_n |w(n)|^2$

Si $x(n)$ y $y(n)$ son reales...

$$\Rightarrow E_w = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [a\,x(n) + b\,y(n-l)]^2$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} a^2 x(n)^2 + 2ab\,x(n)y(n-l) + b^2 y(n-l)^2$$

$$= a^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(n)^2 + 2ab \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(n)y(n-l) + b^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} y(n-l)^2$$

$$E_w = a^2 r_{xx}(0) + b^2 r_{yy}(0) + 2ab\,r_{xy}(l)$$

con

$r_{xx}(0) = E_x$ y $r_{yy}(0) = E_y$, además.

$E_w \geq 0 \Rightarrow a^2 r_{xx}(0) + b^2 r_{yy}(0) + 2ab\,r_{xy}(l) \geq 0$

como $b \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 r_{xx}(0) + 2\frac{a}{b} r_{xy}(l) + r_{yy}(0) \geq 0$

$$r_{xx}(0)\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 2r_{xy}(l)\left(\frac{a}{b}\right) + r_{yy}(0) \geq 0$$

eq cuadrática para $\left(\frac{a}{b}\right)$ y como no es negativa

$\Rightarrow$ el discriminante debe ser negativo

$$\Rightarrow 4\left[r_{xy}^2(l) - r_{xx}(0)r_{yy}(0)\right] \leq 0$$

$$\Rightarrow |r_{xy}(l)| \leq \sqrt{r_{xx}(0)r_{yy}(0)} = \sqrt{E_x E_y}$$

$$\boxed{\Rightarrow |r_{xy}(l)| \leq \sqrt{E_x E_y}}$$

c) Se puede demostrar que...

$$r_{xy}(l) = \sum_k x(k)y(k-l) = \sum_k x(k)y(-(l-k))$$

$\boxed{\text{con } \hat{y}(n) = y(-n)}$

$$\Rightarrow = \sum_k x(k)\hat{y}(l-k) = x(l) * \hat{y}(l)$$

$$\boxed{\Rightarrow r_{xy}(l) = x(l) * y(-l)}$$

$$\Rightarrow r_{yx}(l) = y(l) * x(-l)$$

$$= h(l) * [x(l) * x(-l)]$$

asociatividad de la convolución.

$$\boxed{r_{yx}(l) = h(l) * r_{xx}(l)}$$

también

$$r_{yy}(l) = y(l) * y(-l)$$

$$= h(l) * x(l) * h(-l) * x(-l)$$

conmuta y asocia.

$$r_{yy}(l) = h(l) * h(-l) * x(l) * x(-l)$$

$$\boxed{r_{yy}(l) = r_{hh}(l) * r_{xx}(l)}$$

Felipe Lucero

d) Sea $0 < a < 1$, $x(n) = a^n u(n)$

calcular $r_{xx}(\ell)$ y la energía de la señal.

$$r_{xx}(\ell) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a^n u(n) \cdot a^{n-\ell} u(n-\ell)$$ hay escalones.

$\Rightarrow$ hay distintos casos

si $\ell \geq 0$

$$\Rightarrow r_{xx}(\ell) = \sum_{n=\ell}^{\infty} x(n)\,x(n-\ell) = \sum_{n=\ell}^{\infty} a^n a^{n-\ell} = a^{-\ell} \sum_{n=\ell}^{\infty} (a^2)^n$$

$$a^{-\ell} \sum_{n=\ell}^{\infty} (a^2)^n = a^{-\ell} \left[\frac{1}{1-a^2} - \frac{1-(a^2)^\ell}{1-a^2} \right]$$

$$\boxed{\Rightarrow r_{xx}(\ell) = \frac{a^\ell}{1-a^2}}$$

la energía de la señal, es

$$\boxed{E_x = r_{xx}(0) = \frac{1}{1-a^2}} \quad \ell \geq 0$$

Para $\ell < 0$

$$r_{xx}(\ell) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)\,x(n-\ell) = a^{-\ell} \sum_{n=0}^{\infty} (a^2)^n = \frac{1}{1-a^2} a^{-\ell} \quad \ell < 0$$

cuando $\ell < 0 \Rightarrow a^{-\ell} = a^{|\ell|}$

$$\Rightarrow r_{xx}(\ell) = \frac{1}{1-a^2} \cdot a^{|\ell|} \quad -\infty < \ell < \infty$$

$$\boxed{\Rightarrow E_x = r_{xx}(0) = \frac{1}{1-a^2} \quad \forall \ell \in \mathbb{Z}}$$

$\forall \ell$