2. Transition Systems

José Proença
(slides mainly from Nelma Moreira)

Concurrent programming (CC3040) 2025/2026

CISTER – U.Porto, Porto, Portugal

https://fm-dcc.github.io/cp2526

U.PORTO
FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO

CISTER - Research Centre in
Real-Time & Embedded
Computing Systems

Sistemas de Transição

Constituintes de um processo

- Um conjunto de estados
- Um conjunto de transições entre estados
- Um estado inicial
- Cada transição é etiquetada por uma ação que acciona a mudança de estado.

Estados

- Cor actual de um semáforo de trânsito 

Estados

- Cor actual de um semáforo de trânsito
- Valor corrente das variáveis de um programa e do contador de programa

Estados

- Cor actual de um semáforo de trânsito
- Valor corrente das variáveis de um programa e do contador de programa
- A avião a voar

Estados

- Cor actual de um semáforo de trânsito
- Valor corrente das variáveis de um programa e do contador de programa
- A avião a voar
- Valor da conta bancária

Estados

- Cor actual de um semáforo de trânsito
- Valor corrente das variáveis de um programa e do contador de programa
- A avião a voar
- Valor da conta bancária

Estados

- Cor actual de um semáforo de trânsito
- Valor corrente das variáveis de um programa e do contador de programa
- A avião a voar
- Valor da conta bancária

Transições

- Passagem de um semáforo de trânsito de vermelho para verde

Estados

- Cor actual de um semáforo de trânsito
- Valor corrente das variáveis de um programa e do contador de programa
- A avião a voar
- Valor da conta bancária

Transições

- Passagem de um semáforo de trânsito de vermelho para verde
- Execução de um comando num programa

Estados

- Cor actual de um semáforo de trânsito
- Valor corrente das variáveis de um programa e do contador de programa
- A avião a voar
- Valor da conta bancária

Transições

- Passagem de um semáforo de trânsito de vermelho para verde
- Execução de um comando num programa
- Aterragem de um avião

Estados

- Cor actual de um semáforo de trânsito
- Valor corrente das variáveis de um programa e do contador de programa
- A avião a voar
- Valor da conta bancária

Transições

- Passagem de um semáforo de trânsito de vermelho para verde
- Execução de um comando num programa
- Aterragem de um avião
- Depositar dinheiro numa conta bancária

Definição

Um sistema etiquetado de transições (LTS) sobre Act é um triplo $(S, \longrightarrow, s_0)$

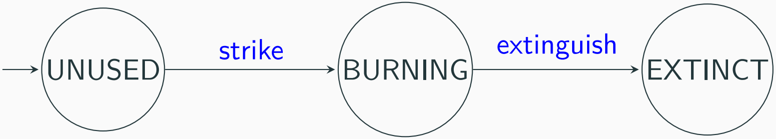
- S *conjunto de estados*
- $\longrightarrow \subseteq S \times Act \times S$ *a relação de transição*
- $s_0 \in S$ *estado inicial*

Definição

Um sistema etiquetado de transições (LTS) sobre Act é um triplo $(S, \longrightarrow, s_0)$

- S *conjunto de estados*
- $\longrightarrow \subseteq S \times Act \times S$ *a relação de transição*
- $s_0 \in S$ *estado inicial*

Um Fósforo...

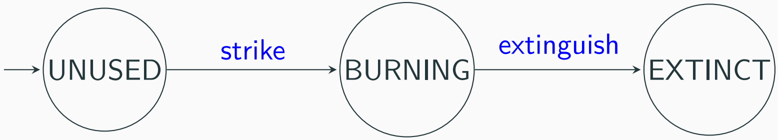


Definição

Um sistema etiquetado de transições (LTS) sobre Act é um triplo $(S, \longrightarrow, s_0)$

- S *conjunto de estados*
- $\longrightarrow \subseteq S \times Act \times S$ *a relação de transição*
- $s_0 \in S$ *estado inicial*

Um Fósforo...



- $S = \{UNUSED, BURNING, EXTINCT\}$

Sucessores

Em vez de $(s, \alpha, s') \in \longrightarrow$ escrevemos $s \xrightarrow{\alpha} s'$ e dizemos que s' é um sucessor de s, sendo $\alpha \in \mathit{Act}$ uma ação.

- $\mathit{Post}(s, \alpha) = \{\ s' \in S \mid s \xrightarrow{\alpha} s'\ \}$

Sucessores

Em vez de $(s, \alpha, s') \in \longrightarrow$ escrevemos $s \xrightarrow{\alpha} s'$ e dizemos que s' é um sucessor de s, sendo $\alpha \in Act$ uma ação.

- $Post(s, \alpha) = \{\ s' \in S \mid s \xrightarrow{\alpha} s'\ \}$
- $Post(s, A) = \bigcup_{\alpha \in A} Post(s, \alpha)$, $A \subseteq Act$

Sucessores

Em vez de $(s, \alpha, s') \in \longrightarrow$ escrevemos $s \xrightarrow{\alpha} s'$ e dizemos que s' é um sucessor de s, sendo $\alpha \in Act$ uma ação.

- $Post(s, \alpha) = \{\ s' \in S \mid s \xrightarrow{\alpha} s'\ \}$
- $Post(s, A) = \bigcup_{\alpha \in A} Post(s, \alpha)$, $A \subseteq Act$
- $Post(s) = Post(s, Act)$

Sucessores

Em vez de $(s, \alpha, s') \in \longrightarrow$ escrevemos $s \xrightarrow{\alpha} s'$ e dizemos que s' é um sucessor de s, sendo $\alpha \in Act$ uma ação.

- $Post(s, \alpha) = \{ \ s' \in S \mid s \xrightarrow{\alpha} s' \ \}$
- $Post(s, A) = \bigcup_{\alpha \in A} Post(s, \alpha), \ A \subseteq Act$
- $Post(s) = Post(s, Act)$
- $Post(C, \alpha) = \bigcup_{s \in C} Post(s, \alpha), \ C \subseteq S$

Sucessores

Em vez de $(s, \alpha, s') \in \longrightarrow$ escrevemos $s \xrightarrow{\alpha} s'$ e dizemos que s' é um sucessor de s, sendo $\alpha \in Act$ uma ação.

- $Post(s, \alpha) = \{\ s' \in S \mid s \xrightarrow{\alpha} s'\ \}$
- $Post(s, A) = \bigcup_{\alpha \in A} Post(s, \alpha),\ A \subseteq Act$
- $Post(s) = Post(s, Act)$
- $Post(C, \alpha) = \bigcup_{s \in C} Post(s, \alpha),\ C \subseteq S$
- $Post(C, A) = \bigcup_{s \in C} \bigcup_{\alpha \in A} Post(s, \alpha),\ C \subseteq S,\ A \subseteq Act$

Sucessores

Em vez de $(s, \alpha, s') \in \longrightarrow$ escrevemos $s \xrightarrow{\alpha} s'$ e dizemos que s' é um sucessor de s, sendo $\alpha \in Act$ uma ação.

- $Post(s, \alpha) = \{\, s' \in S \mid s \xrightarrow{\alpha} s' \,\}$
- $Post(s, A) = \bigcup_{\alpha \in A} Post(s, \alpha),\ A \subseteq Act$
- $Post(s) = Post(s, Act)$
- $Post(C, \alpha) = \bigcup_{s \in C} Post(s, \alpha),\ C \subseteq S$
- $Post(C, A) = \bigcup_{s \in C} \bigcup_{\alpha \in A} Post(s, \alpha),\ C \subseteq S,\ A \subseteq Act$
- Ações que ocorrem no estado s

$$Act(s) = \{\alpha \in Act \mid \exists s' : s \xrightarrow{\alpha} s'\}$$

Sucessores

Em vez de $(s, \alpha, s') \in \longrightarrow$ escrevemos $s \xrightarrow{\alpha} s'$ e dizemos que s' é um sucessor de s, sendo $\alpha \in Act$ uma ação.

- $Post(s, \alpha) = \{ s' \in S \mid s \xrightarrow{\alpha} s' \}$
- $Post(s, A) = \bigcup_{\alpha \in A} Post(s, \alpha),\ A \subseteq Act$
- $Post(s) = Post(s, Act)$
- $Post(C, \alpha) = \bigcup_{s \in C} Post(s, \alpha),\ C \subseteq S$
- $Post(C, A) = \bigcup_{s \in C} \bigcup_{\alpha \in A} Post(s, \alpha),\ C \subseteq S,\ A \subseteq Act$
- Ações que ocorrem no estado s

$$Act(s) = \{\alpha \in Act \mid \exists s' : s \xrightarrow{\alpha} s'\}$$

- Ações que podem ser observadas no estado s

$$Com(s) = \{\alpha \in Com \mid \exists s' : s \xrightarrow{\alpha} s'\}$$

Sucessores

Em vez de $(s, \alpha, s') \in \longrightarrow$ escrevemos $s \xrightarrow{\alpha} s'$ e dizemos que s' é um sucessor de s, sendo $\alpha \in Act$ uma ação.

- $Post(s, \alpha) = \{\ s' \in S \mid s \xrightarrow{\alpha} s'\ \}$
- $Post(s, A) = \bigcup_{\alpha \in A} Post(s, \alpha)$, $A \subseteq Act$
- $Post(s) = Post(s, Act)$
- $Post(C, \alpha) = \bigcup_{s \in C} Post(s, \alpha)$, $C \subseteq S$
- $Post(C, A) = \bigcup_{s \in C} \bigcup_{\alpha \in A} Post(s, \alpha)$, $C \subseteq S$, $A \subseteq Act$
- Ações que ocorrem no estado s

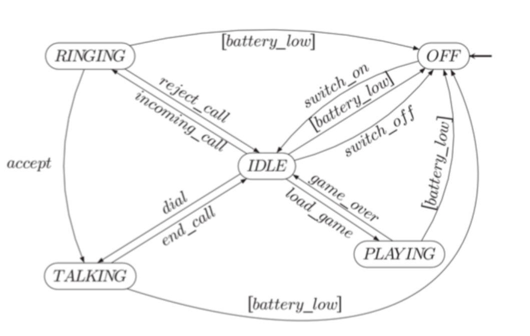
$$Act(s) = \{\alpha \in Act \mid \exists s' : s \xrightarrow{\alpha} s'\}$$

- Ações que podem ser observadas no estado s

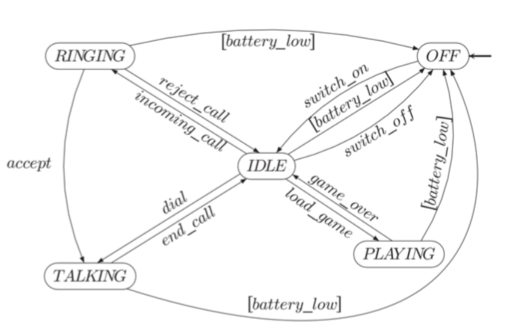
$$Com(s) = \{\alpha \in Com \mid \exists s' : s \xrightarrow{\alpha} s'\}$$

- Análogo para $Int(s)$

Um Telefone

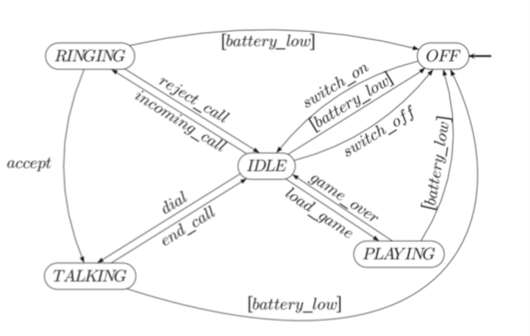


- Descreve o sistema de transições $(S, \longrightarrow, s_0)$ e $Act = Com \cup Int$.

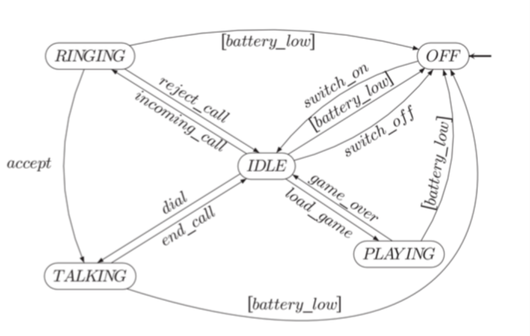


- Descreve o sistema de transições $(S, \longrightarrow, s_0)$ e $Act = Com \cup Int$.
- Alguns exemplos: $Post(RINGING, Act) =$

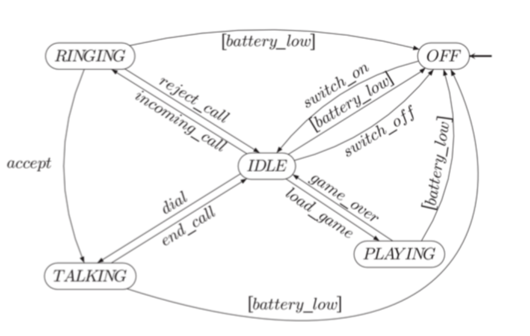
Um Telefone



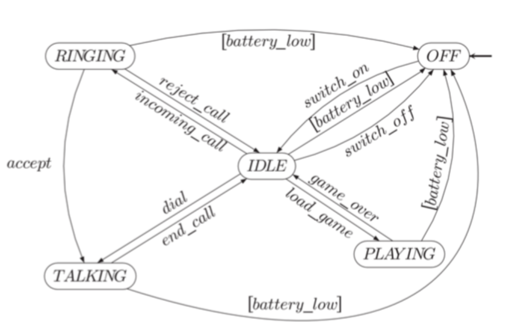
- Descreve o sistema de transições $(S, \longrightarrow, s_0)$ e $Act = Com \cup Int$.
- Alguns exemplos: $Post(RINGING, Act) =$



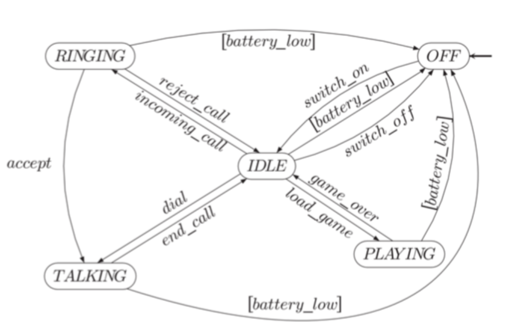
- Descreve o sistema de transições $(S, \longrightarrow, s_0)$ e $Act = Com \cup Int$.
- Alguns exemplos: $Post(RINGING, Act) = \{TALKING, IDLE, OFF\}$
- $Post(Post(RINGING, Act), Int) =$



- Descreve o sistema de transições $(S, \longrightarrow, s_0)$ e $Act = Com \cup Int$.
- Alguns exemplos: $Post(RINGING, Act) = \{TALKING, IDLE, OFF\}$
- $Post(Post(RINGING, Act), Int) =$

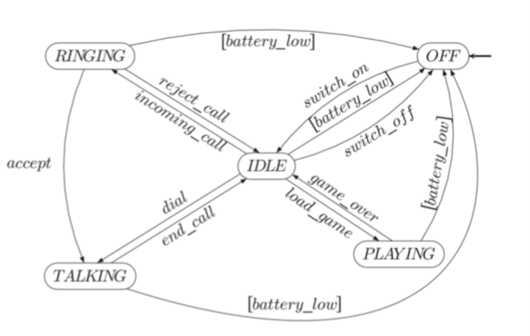


- Descreve o sistema de transições $(S, \longrightarrow, s_0)$ e $Act = Com \cup Int$.
- Alguns exemplos: $Post(RINGING, Act) = \{TALKING, IDLE, OFF\}$
- $Post(Post(RINGING, Act), Int) = \{OFF\}$
- $Com(RINGING) =$



- Descreve o sistema de transições $(S, \longrightarrow, s_0)$ e $Act = Com \cup Int$.
- Alguns exemplos: $Post(RINGING, Act) = \{TALKING, IDLE, OFF\}$
- $Post(Post(RINGING, Act), Int) = \{OFF\}$
- $Com(RINGING) =$

Um Telefone



- Descreve o sistema de transições $(S, \longrightarrow, s_0)$ e $Act = Com \cup Int$.
- Alguns exemplos: $Post(RINGING, Act) = \{TALKING, IDLE, OFF\}$
- $Post(Post(RINGING, Act), Int) = \{OFF\}$
- $Com(RINGING) = \{accept, reject\_call\}$

Estados atingíveis

- Seja $TS = (S, \longrightarrow, s_0)$ um LTS.
- Um estado $s' \in S$ é atingível de s se $s' = s$ ou

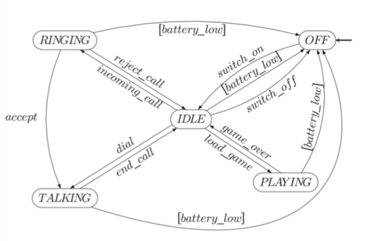
  $\exists n \geq 0$ e estados $s_1, s_2, \ldots, s_n$ tal que $s \xrightarrow{\alpha_1} s_1 \xrightarrow{\alpha_2} s_2 \cdots \xrightarrow{\alpha_n} s_n$ e $s_n = s'$.
- neste caso diz-se que existe um caminho de tamanho n entre s e s'
- um caminho é acíclico se $s_i \neq s_j$ para todo $i \neq j$; caso contrário diz-se cíclico.
- $Reach(s)$ conjunto de estados atingíveis de s
- $Reach(TS) = Reach(s_0)$

Sendo $\longrightarrow^\star \subseteq S \times Act^\star \times S$ o fecho reflexivo e transitivo de $\longrightarrow$, então $s \xrightarrow{\omega}^\star s'$ se e só se $s' \in Reach(s)$, onde $\omega = \alpha_1 \cdots \alpha_n$ para alguns $\alpha_i \in Act$.

Não-determinismo

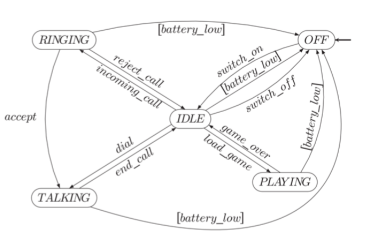
Não-determinismo

- Permite descrever o comportamento de sistemas reais



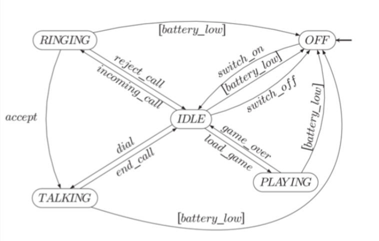
Não-determinismo

- Permite descrever o comportamento de sistemas reais
- Abstração de detalhes dos sistemas



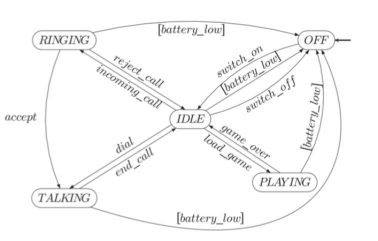
Não-determinismo

- Permite descrever o comportamento de sistemas reais
- Abstração de detalhes dos sistemas
    - não é necessária uma descrição completa

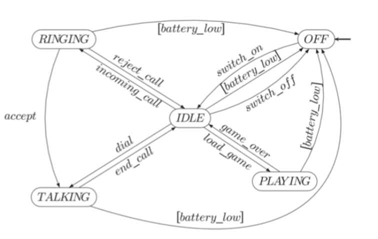


Não-determinismo

- Permite descrever o comportamento de sistemas reais
- Abstração de detalhes dos sistemas
  - não é necessária uma descrição completa
  - os sistemas podem ser muito complexos

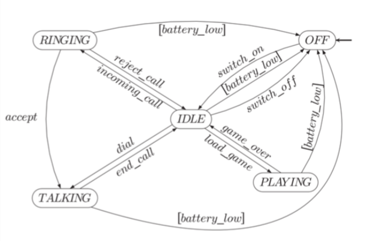


- Permite descrever o comportamento de sistemas reais
- Abstração de detalhes dos sistemas
  - não é necessária uma descrição completa
  - os sistemas podem ser muito complexos
  - alguns parâmetros são desconhecidos

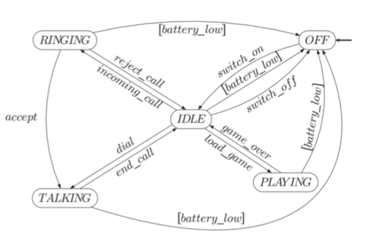


Não-determinismo

- Permite descrever o comportamento de sistemas reais
- Abstração de detalhes dos sistemas
  - não é necessária uma descrição completa
  - os sistemas podem ser muito complexos
  - alguns parâmetros são desconhecidos
- existem várias maneiras de interagir



- Permite descrever o comportamento de sistemas reais
- Abstração de detalhes dos sistemas
  - não é necessária uma descrição completa
  - os sistemas podem ser muito complexos
  - alguns parâmetros são desconhecidos
- existem várias maneiras de interagir
- a noção é mais geral que em Linguagens Formais



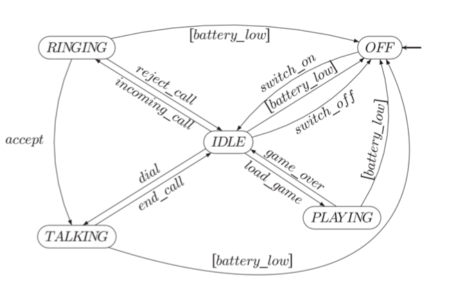
- Seja $TS = (S, \longrightarrow, s_0)$ um LTS.

- Seja $TS = (S, \longrightarrow, s_0)$ um LTS.
- TS é determinístico se e só se para todo $s \in S$

- Seja $TS = (S, \longrightarrow, s_0)$ um LTS.
- TS é determinístico se e só se para todo $s \in S$
- $|Post(s)| \leq 1$ e $|Act(s)| \leq 1$

- Seja $TS = (S, \longrightarrow, s_0)$ um LTS.
- TS é determinístico se e só se para todo $s \in S$
- $|Post(s)| \leq 1$ e $|Act(s)| \leq 1$
- senão é não-determinístico

Um sistema é não determinístico se tem um estado com duas ou mais transições mas não sabemos qual irá acontecer.



Não-determinismo interno e externo

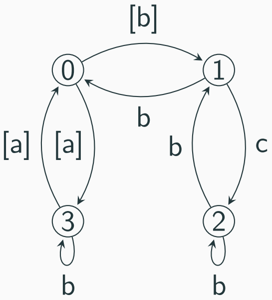
Um estado s é

- não-determinístico externo sse $|Com(s)| > 1$

Não-determinismo interno e externo

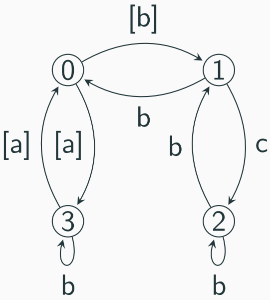
Um estado s é

- não-determinístico externo sse $|Com(s)| > 1$
- não-determinístico interno sse $|Post(s, Int)| > 1$ ou $|Post(s, a)| > 1$ para algum $a \in Com(s)$



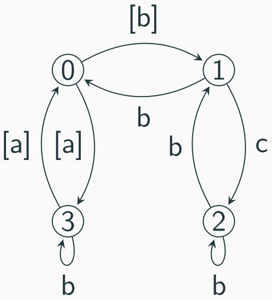
- 1 é não-determisnístico externo

Não-determinismo interno e externo



- 1 é não-determisnístico externo
- 0 e 2 são não-determisnísticos internos.

Não-determinismo interno e externo

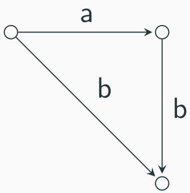


- 1 é não-determisnístico externo
- 0 e 2 são não-determisnísticos internos.
- 3 é não-determisnístico mas nem interno nem externo.

Tipo de Sistemas de Transição

Seja $TS = (S, \longrightarrow, s_0)$ com ações em Act

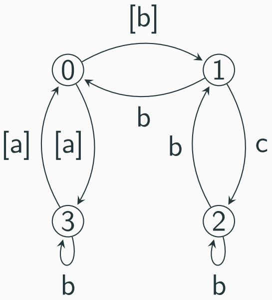
- Finito Se o grafo é acíclico e S e Act finitos



Tipo de Sistemas de Transição

Seja $TS = (S, \longrightarrow, s_0)$ com ações em Act

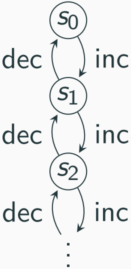
- Finito Se o grafo é acíclico e S e Act finitos
- Finito por estados Se S e Act são conjuntos finitos



Tipo de Sistemas de Transição

Seja $TS = (S, \longrightarrow, s_0)$ com ações em Act

- Finito Se o grafo é acíclico e S e Act finitos
- Finito por estados Se S e Act são conjuntos finitos
- Ramificação-limitada $(\exists k \geq 0)(\forall s \in S)(|Post(s)| \leq k)$



s_n guarda o valor n que pode ser incrementado ou decrementado de 1. Tem grau de ramificação 2. Não é finito por estados

Tipo de Sistemas de Transição

Seja $TS = (S, \longrightarrow, s_0)$ com ações em Act

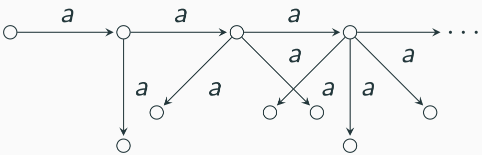
- Finito Se o grafo é acíclico e S e Act finitos
- Finito por estados Se S e Act são conjuntos finitos
- Ramificação-limitada $(\exists k \geq 0)(\forall s \in S)(|Post(s)| \leq k)$
- Finitamente Ramificado $(\forall s \in S)(|Post(s)| \leq \infty)$. Caso contrário é infinitamente ramificado

  $$\circ \xrightarrow{a_i,\ i \geq 1} \circ$$

  É infinitamente ramificado

Seja $TS = (S, \longrightarrow, s_0)$ com ações em Act

- Finito Se o grafo é acíclico e S e Act finitos
- Finito por estados Se S e Act são conjuntos finitos
- Ramificação-limitada $(\exists k \geq 0)(\forall s \in S)(|Post(s)| \leq k)$
- Finitamente Ramificado $(\forall s \in S)(|Post(s)| \leq \infty)$. Caso contrário é infinitamente ramificado



Não é de ramificação limitada

Equivalência de LTSs (I)

- Uma questão fulcral é a de decidir quando dois LTSs são equivalentes.
- Em princípio serão quando um observador não os consegue distinguir.
- Mas como definir isso? Podemos obrigar a que
  - os LTS são isomorfos como grafos (Isomorfismo)
  - ou os LTS tenham os mesmos caminhos (Equivalência por traços (linguagens))
  - ou ...
  - iremos deixar isto para mais tarde

Modelação de Processos Concorrentes

Processos Concorrentes

- Cada processo é representado por um sistema de transições (LTS)

Processos Concorrentes

- Cada processo é representado por um sistema de transições (LTS)
- Neste caso, o tempo avança quando se muda de estado por uma transição (execução de um programa sequencial)

Processos Concorrentes

- Cada processo é representado por um sistema de transições (LTS)
- Neste caso, o tempo avança quando se muda de estado por uma transição (execução de um programa sequencial)
- O que acontece se executam concorrentemente?

Processos Concorrentes

- Cada processo é representado por um sistema de transições (LTS)
- Neste caso, o tempo avança quando se muda de estado por uma transição (execução de um programa sequencial)
- O que acontece se executam concorrentemente?
- Assumimos que:

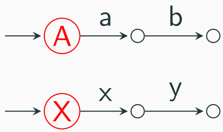
- Cada processo é representado por um sistema de transições (LTS)
- Neste caso, o tempo avança quando se muda de estado por uma transição (execução de um programa sequencial)
- O que acontece se executam concorrentemente?
- Assumimos que:
  - O tempo só é considerado de forma relativa (um processo p ocorre antes do processo q)

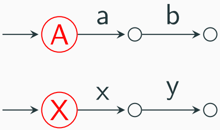
Processos Concorrentes

- Cada processo é representado por um sistema de transições (LTS)
- Neste caso, o tempo avança quando se muda de estado por uma transição (execução de um programa sequencial)
- O que acontece se executam concorrentemente?
- Assumimos que:
  - O tempo só é considerado de forma relativa (um processo p ocorre antes do processo q)
  - A ações são atómicas e instantâneas

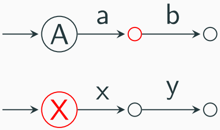
- Cada processo é representado por um sistema de transições (LTS)
- Neste caso, o tempo avança quando se muda de estado por uma transição (execução de um programa sequencial)
- O que acontece se executam concorrentemente?
- Assumimos que:
  - O tempo só é considerado de forma relativa (um processo p ocorre antes do processo q)
  - A ações são atómicas e instantâneas
  - Os processos concorrentes executam independentemente excepto se explicitamente comunicarem (coordenação)

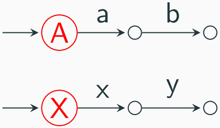
Processos concorrentes A e X



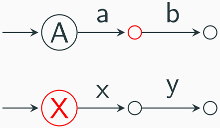


se A executa a

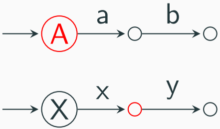


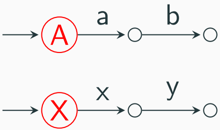


se A executa a

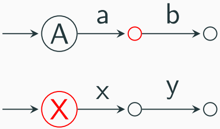


se X executa x

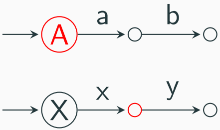




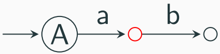
se A executa a



se X executa x

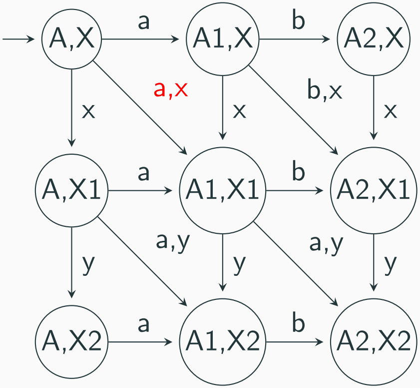


se A e X executam x e a

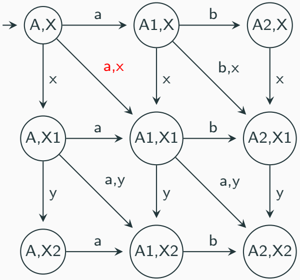


Produto de LTS

A execução de dois processos é um novo processo (LTS)!

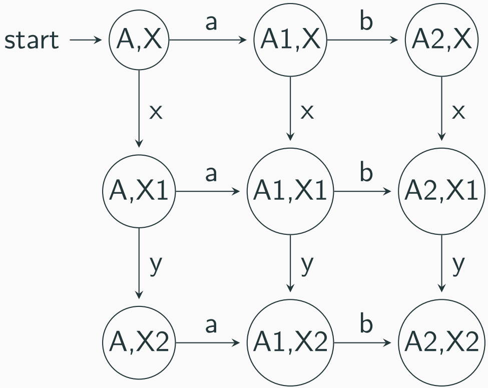


- As diagonais têm conjuntos de ações (!)
- Mas como observar que duas ações independentes ocorrem ao mesmo tempo?
- O seu efeito corresponde a ser primeiro uma e depois outra não interessando a ordem
- Sendo não determinístico, podemos ignorar essas transições.
- Não são observáveis



Produto de LTS: sem *diagonais*

Os estados atingíveis são os mesmos. As ações podem ocorrer por qualquer ordem (não determinismo).



Modelo de Concorrência

Dados dois processos independentes a concorrência é a intercalagem (*interleaving/shuffle*) não-determinística de todas as ações dos dois processos.

O Diamante de intercalagem é o seguinte: