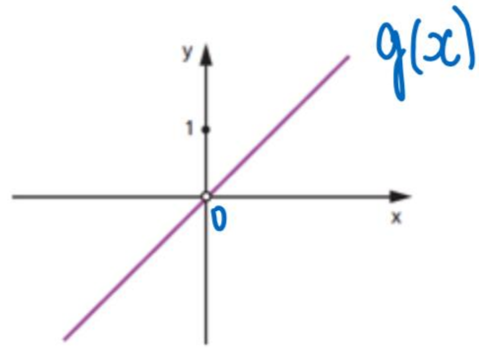
LIMITE DE UMA FUNÇÃO

Na matemática, o limite de uma função é um conceito fundamental em cálculo, onde é feita uma análise sobre o comportamento desta função quando próxima de um valor particular de sua variável independente.

$f(0) = 1$

$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$

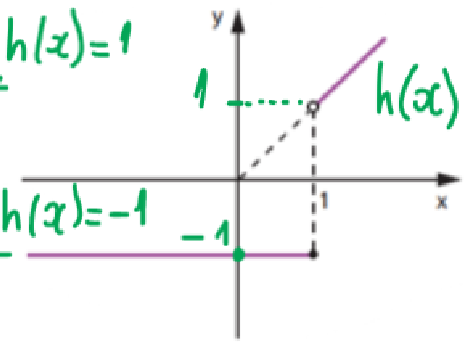


$g(0) = 1$

$\lim_{x \to 0} g(x) = 0$

$\lim_{x \to 1^+} h(x) = 1$

$\lim_{x \to 1^-} h(x) = -1$



$h(1) = -1$

$\lim_{x \to 1} h(x) = \nexists$

pois seus limites laterais são distintos.

LIMITE DE UMA FUNÇÃO

$\boxed{1}$ **Definição** Suponha que $f(x)$ seja definido quando está próximo ao número a. (Isso significa que f é definido em algum intervalo aberto que contenha a, exceto possivelmente no próprio a.) Então escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

e dizemos "o limite de $f(x)$, quando x tende a a, é igual a L"

se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L (tão próximos de L quanto quisermos), tornando x suficientemente próximo de a (por ambos os lados de a), mas não igual a a.

LIMITE DE UMA FUNÇÃO

1º Exemplo: Dada a função $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$, calcule o $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$.

Resposta:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x+1}{x+2} = \frac{0+1}{0+2} = \frac{1}{2}$$

2º Exemplo: Dada a função $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$, calcule o $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{x^2-1}\right)$.

Resposta:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1-1}{1^2-1} = \frac{0}{0} = ?$$

Reescrever a função:

$$\frac{x-1}{x^2-1} = \frac{\cancel{x-1}}{(x+1)\cdot\cancel{(x-1)}} = \frac{1}{x+1}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$(x+a)^2 = x^2 + 2x\cdot a + a^2$$

$$(x+a)\cdot(x-a) = x^2 - a^2$$

$$x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$$

$$x^2 - 25 = (x+5)(x-5)$$

$$x^2 - 11 = (x+\sqrt{11})\cdot(x-\sqrt{11})$$

EXERCÍCIO

Calcule os limites abaixo:

a) $\lim_{x \to 3} \left(\frac{x+1}{x-2} \right) = \frac{3+1}{3-2} = \frac{4}{1} = 4$

b) $\lim_{x \to -2} \left(\frac{x^2-4}{x+2} \right) = \frac{(-2)^2-4}{-2+2} = \frac{4-4}{0} = \frac{0}{0} = ?$

$$\frac{x^2-4}{x+2} = \frac{\cancel{(x+2)}(x-2)}{\cancel{x+2}} = x-2$$

$$\lim_{x \to -2} \left(\frac{x^2-4}{x+2} \right) = \lim_{x \to -2} (x-2) = -2-2 = -4$$

$x \to 1 \quad (\quad x - 1 \quad)$

EXERCÍCIO

Calcule os limites abaixo:

$\Delta = B^2 - 4 \cdot A \cdot C$

$x = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2A}$

$A \cdot (x - x') \cdot (x - x'')$

c) $\lim_{x \to 3} \left(\frac{x^2 - x - 6}{x - 3} \right) = \frac{3^2 - 3 - 6}{3 - 3} = \frac{9 - 3 - 6}{0} = \frac{0}{0} = ?$

$x^2 - x - 6 = 0$

$A = 1 \quad B = -1 \quad C = -6$

$\Delta = B^2 - 4AC$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)$

$\Delta = 1 + 24 = 25$

$x = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2A}$

$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 5}{2}$

$\rightarrow x' = \frac{1+5}{2} = 3$

$\rightarrow x'' = \frac{1-5}{2} = -\frac{4}{2} = -2$

$A(x - x') \cdot (x - x'') = 1 \cdot (x - 3) \cdot (x + 2)$

Vamos reescrever a função:

$\frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \frac{1\cancel{(x-3)}(x+2)}{\cancel{x-3}} = x + 2$

$\lim_{x \to 3} \left(\frac{x^2 - x - 6}{x - 3} \right) = \lim_{x \to 3} (x + 2) = 3 + 2 = 5$

EXERCÍCIO

Calcule os limites abaixo:

e) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2+5x-6}{x-1}\right) = \frac{1^2+5\cdot 1-6}{1-1} = \frac{1+5-6}{0} = \frac{0}{0} = ?$

$x^2+5x-6=0$

$\Delta = 25+24 = 49$

$x' = \frac{-5+7}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$x'' = \frac{-5-7}{2} = -\frac{12}{2} = -6$

Reescrever a função:

$$\frac{x^2+5x-6}{x-1} = \frac{1.\cancel{(x-1)}(x+6)}{\cancel{x-1}} = x+6$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+5x-6}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+6) = 1+6 = 7$$

EXERCÍCIO

22. $\lim\limits_{u\to 2} \dfrac{\sqrt{4u+1}-3}{u-2} = \dfrac{\sqrt{4\cdot 2+1}-3}{2-2} = \dfrac{\sqrt{9}-3}{0} = \dfrac{3-3}{0} = \dfrac{0}{0} = ?$

Vamos reescrever a função: $\quad (x+a)\cdot(x-a) = x^2 - a^2$

$$\frac{\sqrt{4u+1}-3}{u-2} \cdot \frac{\sqrt{4u+1}+3}{\sqrt{4u+1}+3} = \frac{(\cancel{\sqrt{\ }}\sqrt{4u+1})^{\cancel{2}} - 3^2}{(u-2)\cdot(\sqrt{4u+1}+3)} = \frac{4u+1-9}{(u-2)(\sqrt{4u+1}+3)} =$$

$$= \frac{4u-8}{(u-2)\cdot(\sqrt{4u+1}+3)} = \frac{4\cdot\cancel{(u-2)}}{\cancel{(u-2)}\cdot(\sqrt{4u+1}+3)} = \frac{4}{\sqrt{4u+1}+3}$$

Voltando ao limite:

$$\lim_{u\to 2} \frac{\sqrt{4u+1}-3}{u-2} = \lim_{u\to 2} \frac{4}{\sqrt{4u+1}+3} = \frac{4}{\sqrt{4\cdot 2+1}+3} = \frac{4}{\sqrt{9}+3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

PROBLEMAS PROPOSTOS

Exercício 1 Calcule o limite, se existir.

11. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$

12. $\lim_{x \to -4} \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 3x - 4}$

13. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x + 6}{x - 2}$

14. $\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 3x - 4}$

15. $\lim_{t \to -3} \frac{t^2 - 9}{2t^2 + 7t + 3}$

16. $\lim_{x \to -1} \frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 2x - 3}$

17. $\lim_{h \to 0} \frac{(-5 + h)^2 - 25}{h}$

18. $\lim_{h \to 0} \frac{(2 + h)^3 - 8}{h}$

19. $\lim_{x \to -2} \frac{x + 2}{x^3 + 8}$

20. $\lim_{t \to 1} \frac{t^4 - 1}{t^3 - 1}$

21. $\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{9 + h} - 3}{h}$

22. $\lim_{u \to 2} \frac{\sqrt{4u + 1} - 3}{u - 2}$

23. $\lim_{x \to -4} \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{x}}{4 + x}$

24. $\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^4 - 1}$