FUNÇÃO QUADRÁTICA OU FUNÇÃO DO 2º GRAU

Chama-se **função quadrática**, ou **função polinomial do 2º grau**, qualquer **função** f de IR em IR dada por uma lei da forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

onde a, b e c são números reais e $a \neq 0$.

Vejamos alguns exemplos de **funções quadráticas**:

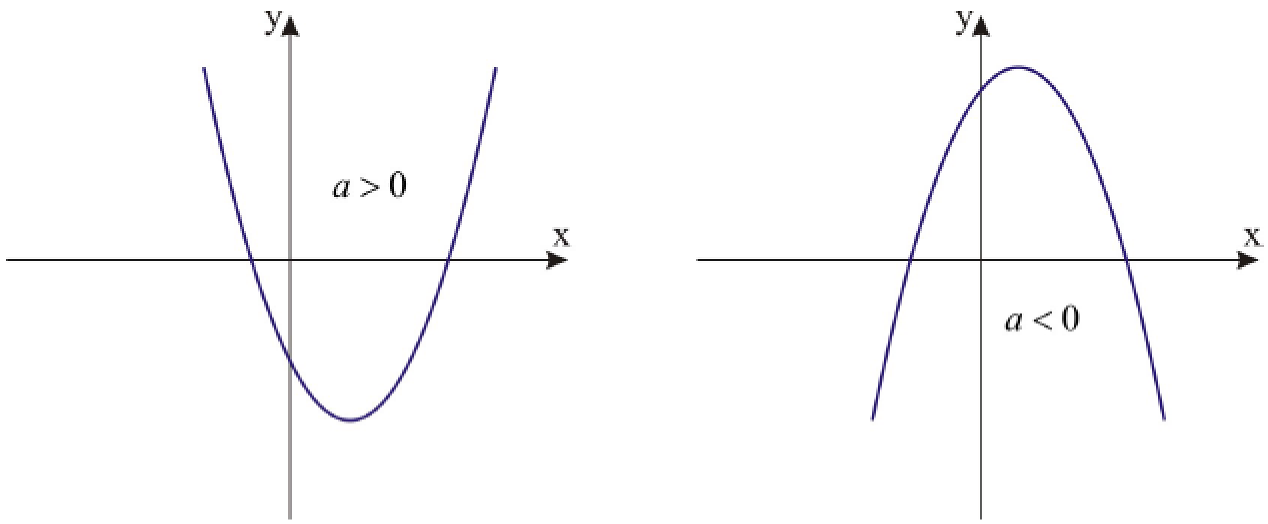
a) $f(x) = -x^2 - 4x + 2$, onde $a = -1$, $b = -4$ e $c = 2$.

b) $f(x) = 2x^2 + x$, onde $a = 2$, $b = 1$ e $c = 0$.

c) $f(x) = 3x^2$, onde $a = 3$, $b = 0$ e $c = 0$.

CONCAVIDADE DA PARÁBOLA

O gráfico da função quadrática é uma parábola. Esta parábola poderá ter sua concavidade voltada para cima ou para baixo, isso dependerá do valor do coeficiente a, ou seja, se a > 0 a concavidade da parábola será voltada para cima, e se a < 0 a concavidade será voltada para baixo.



INTERSEÇÃO COM O EIXO DAS ORDENADAS

Sabe-se que o domínio da função quadrática é o conjunto dos números reais, logo o seu gráfico no plano cartesiano obrigatoriamente intersectará o eixo das ordenadas 0y no ponto em que x = 0. Assim, o ponto de intersecção com o eixo 0y será (0, f (0)).

Efetuando os cálculos tem-se:

$f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \quad \Rightarrow \quad f(0) = c$

Desta maneira, o gráfico da função quadrática sempre intersectará o eixo 0y no ponto (0,c).

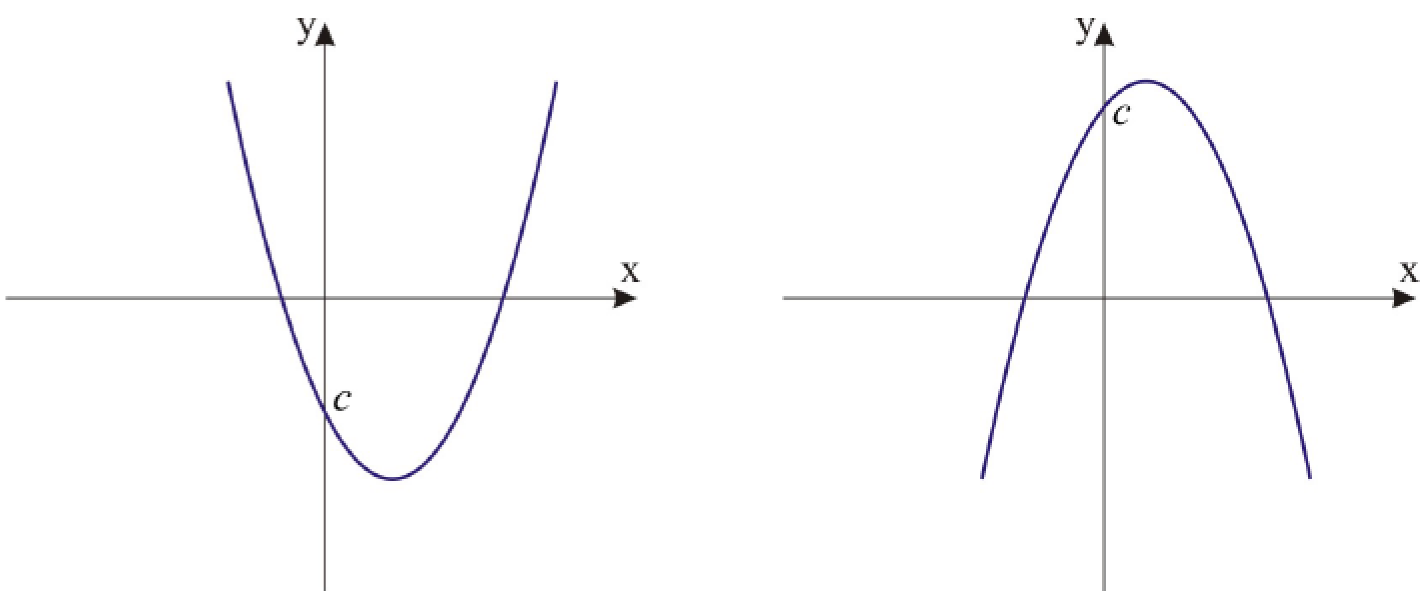


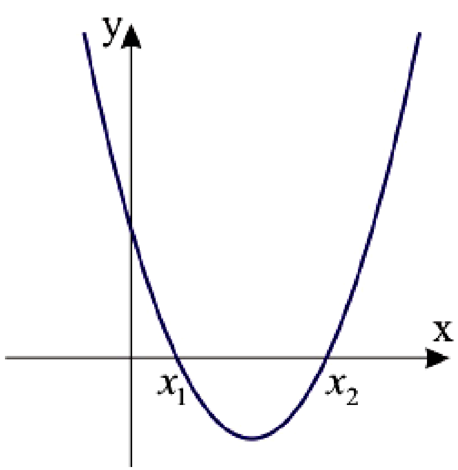
Figura 1.2: *Intersecção com o eixo 0y.*

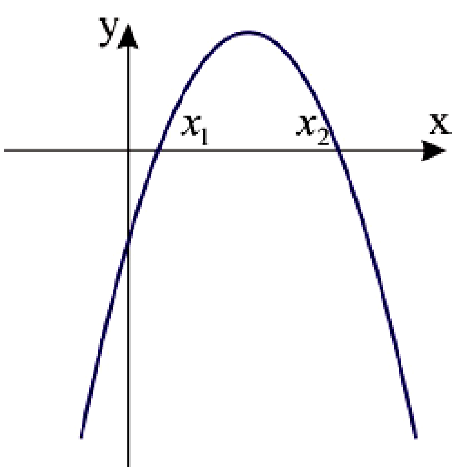
INTERSEÇÃO COM O EIXO DAS ABSCISSAS

Se a função possuir valores para os quais y = 0, ou seja, valores que anulam a função, então ela intersectará o eixo das abscissas nestes valores. Logo, os pontos procurados são obtidos através dos zeros da função.

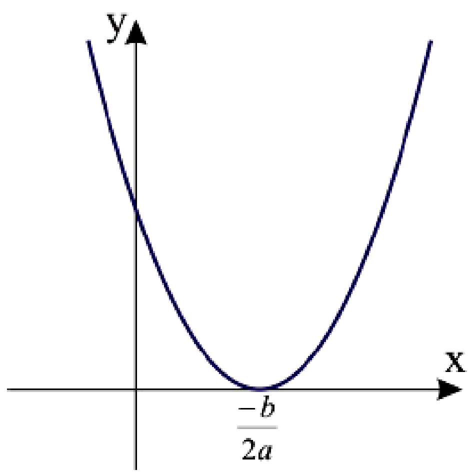
Fazendo uma análise dos possíveis valores para o discriminante e sua relação com os zeros da função, teremos:

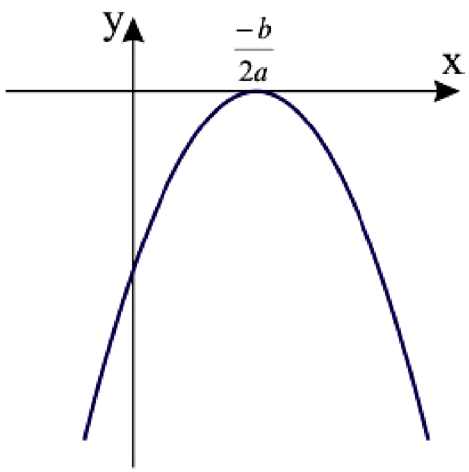
- Se $\Delta > 0$, duas raízes reais distintas, ou seja, $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$;



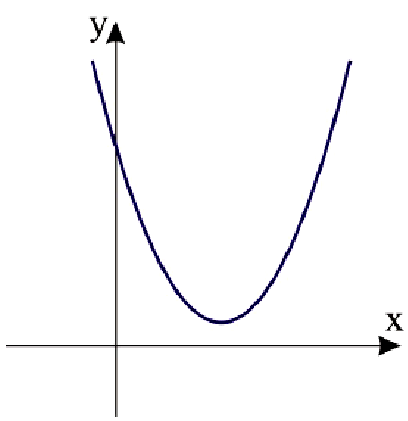


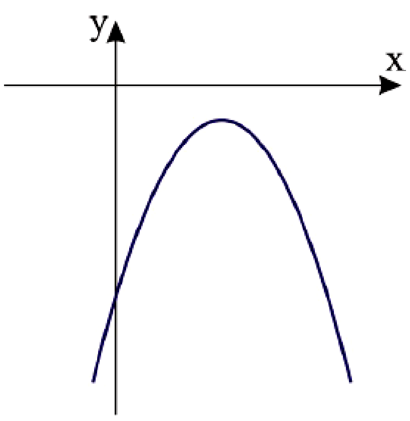
- Se $\Delta = 0$, duas raízes reais iguais, ou seja, $x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a}$;





- Se $\Delta < 0$, não haverá nenhuma raiz real.





Exemplo: Zeros reais da função:

$$y = -3x^2 + x + 4$$

I) zeros reais da função:

$$-3x^2 + x + 4 = 0$$

$A = -3 \quad B = 1 \quad C = 4$

$$\Delta = B^2 - 4 \cdot A \cdot C$$
$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 4$$
$$\Delta = 1 + 48$$
$$\Delta = 49$$

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot A}$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot (-3)} = \frac{-1 \pm 7}{-6}$$
$$x' = \frac{-1 + 7}{-6} = \frac{6}{-6} = -1$$
$$x'' = \frac{-1 - 7}{-6} = \frac{-8^{:2}}{-6_{:2}} = \frac{4}{3}$$

II) Vértice: $V(x_v, y_v)$ $\quad y = -3x^2 + x + 4$

$$x_v = -\frac{B}{2A} = -\frac{1}{2 \cdot (-3)} = -\frac{1}{-6} = \frac{1}{6}$$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4 \cdot A} = -\frac{49}{4 \cdot (-3)} = -\frac{49}{-12} = \frac{49}{12}$$

$$V\left(\frac{1}{6}, \frac{49}{12}\right)$$

$$y = x^2 + 3$$

I) zeros reais: NÃO EXISTE

$A = 1 \quad B = 0 \quad C = 3$

$$\Delta = B^2 - 4 \cdot A \cdot C$$
$$\Delta = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3$$
$$\Delta = 0 - 12$$
$$\Delta = -12$$

não corta o eixo x

II) Vértice: $y = x^2 + 3$

$$x_v = -\frac{B}{2A} = -\frac{0}{2 \cdot 1} = 0$$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4A} = -\frac{(-12)}{4 \cdot 1} = \frac{12}{4} = 3$$

$$V(0, 3)$$

Exemplo: Dada a função $y = x^2 - 10x + 21$, obtenha:

a) as coordenadas de seu vértice;

b) os pontos de interseção com os eixos coordenados;

c) o esboço do gráfico dessa função.

a) $x_V = -\frac{B}{2A} = -\frac{(-10)}{2 \cdot 1} = \frac{10}{2} = 5$ $\quad V(5,-4)$

$y_V = f(5) = 5^2 - 10 \cdot 5 + 21 = 25 - 50 + 21 = 46 - 50 = -4$

b) interseção com o eixo das ordenadas no ponto $(0,21)$

interseções com o eixo das abscissas nos pontos $(7,0)$ e $(3,0)$

$y = x^2 - 10x + 21$

$A = 1 \quad B = -10 \quad C = 21$

$\Delta = B^2 - 4AC$

$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 21$

$\Delta = 100 - 84$

$\Delta = 16$

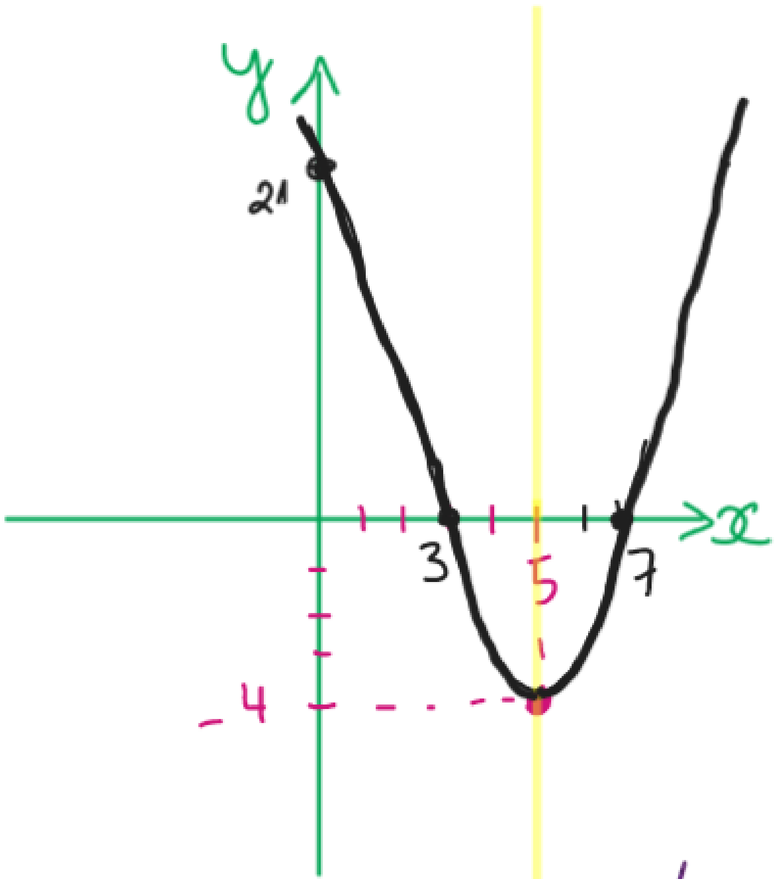
$x = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot A}$

$x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1}$

$x' = \frac{10+4}{2} = \frac{14}{2} = 7$

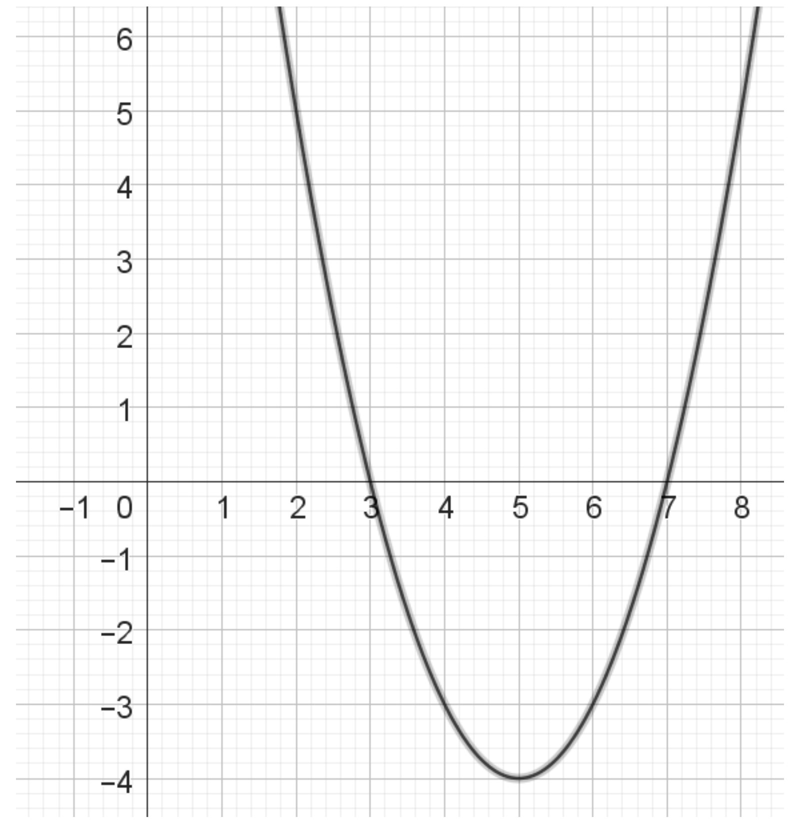
$x'' = \frac{10-4}{2} = \frac{6}{2} = 3$

Realidade:



eixo de simetria é a reta $x = 5$.

Expectativa:



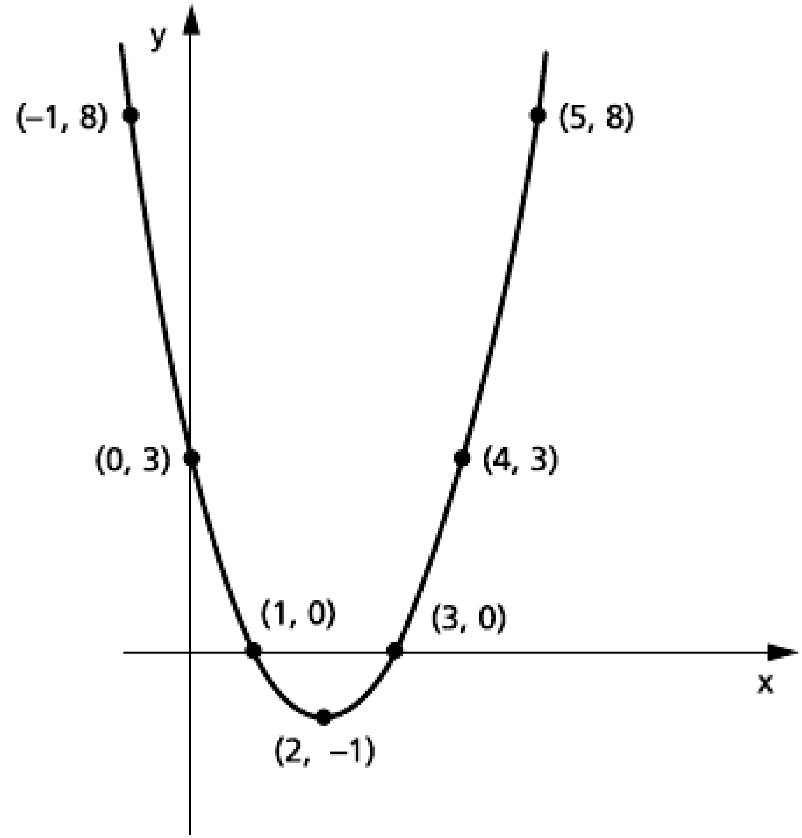
https://www.geogebra.org/m/awapu66e

https://wordwall.net/pt/resource/35702073

Interpretando geometricamente, dizemos que os zeros da função quadrática são as abscissas dos pontos onde a parábola corta o eixo dos *x*.

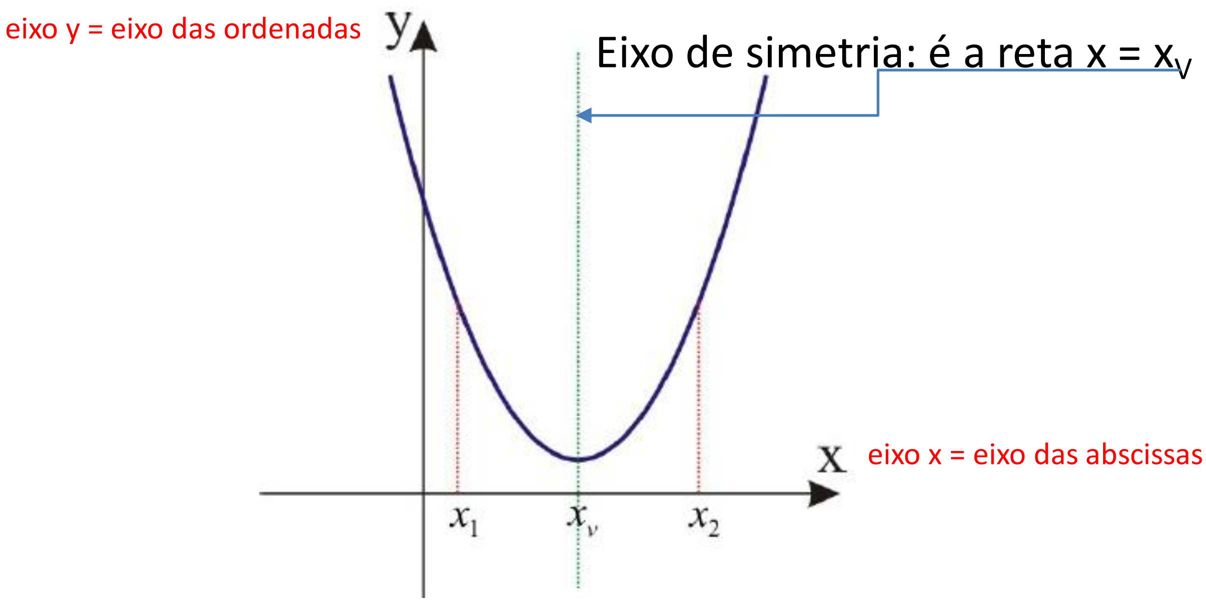
Exemplo:

Construindo o gráfico da função $y = x^2 - 4x + 3$ podemos notar que a parábola corta o eixo dos *x* nos pontos de abscissas 1 e 3, que são as raízes da equação $x^2 - 4x + 3 = 0$.



SIMETRIA

Sejam x_1 e x_2 pontos equidistantes de x_v, ou seja, o vértice é o ponto médio deles.



VÉRTICE DA PARÁBOLA

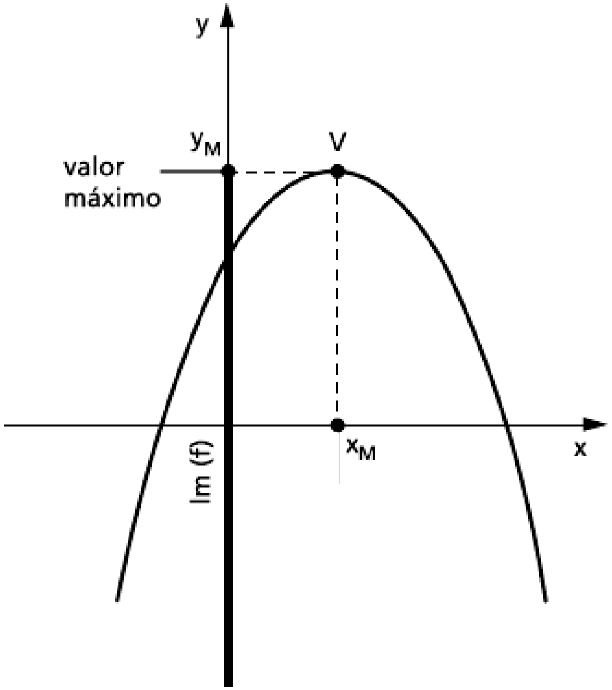
O vértice da parábola é o ponto $V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$.

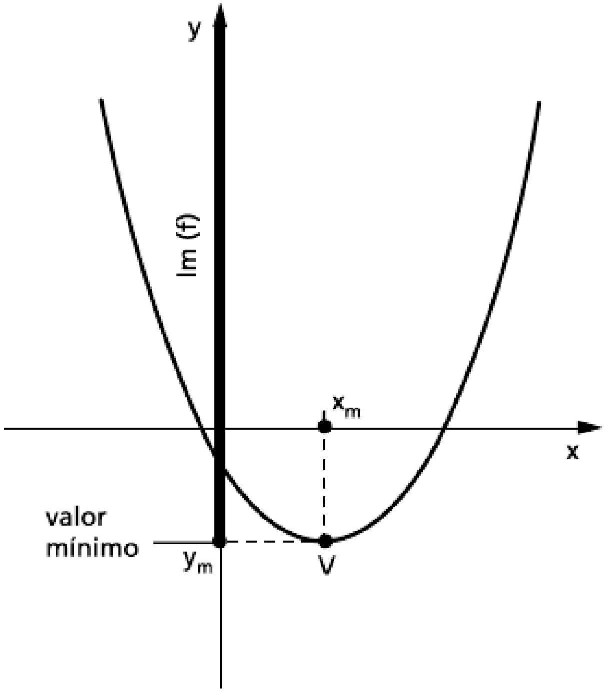
MÁXIMOS E MÍNIMOS

Teorema:

I) Se $a < 0$, a função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ admite o valor máximo $y_M = -\dfrac{\Delta}{4a}$ para $x_M = -\dfrac{b}{2a}$.

II) Se $a > 0$, a função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ admite o valor mínimo $y_m = -\dfrac{\Delta}{4a}$ para $x_m = -\dfrac{b}{2a}$.





Exemplo:

Seja $y = -x^2 + 5x - 1$. Dado que x varia no intervalo fechado $[0, 6]$, determine o maior (y_M) e o menor (y_m) valor que y assume.

PROBLEMAS PROPOSTOS

1. Em relação ao gráfico da função $f(x) = -x^2 + 2x + 6$, assinale V para Verdadeira e F para falsa nas afirmativas abaixo:

( ) é uma parábola de concavidade voltada para cima.

( ) seu vértice é o ponto V(1, 5).

( ) intercepta o eixo das abscissas num único ponto.

( ) o seu eixo de simetria é a reta $x = 2$.

( ) intercepta o eixo das ordenadas em R(0, 6).

2. O gráfico da função $y = f(x) = -\frac{1}{200}x^2 + \frac{1}{5}x$, representado na figura abaixo, descreve a trajetória de um projétil, lançado a partir da origem.

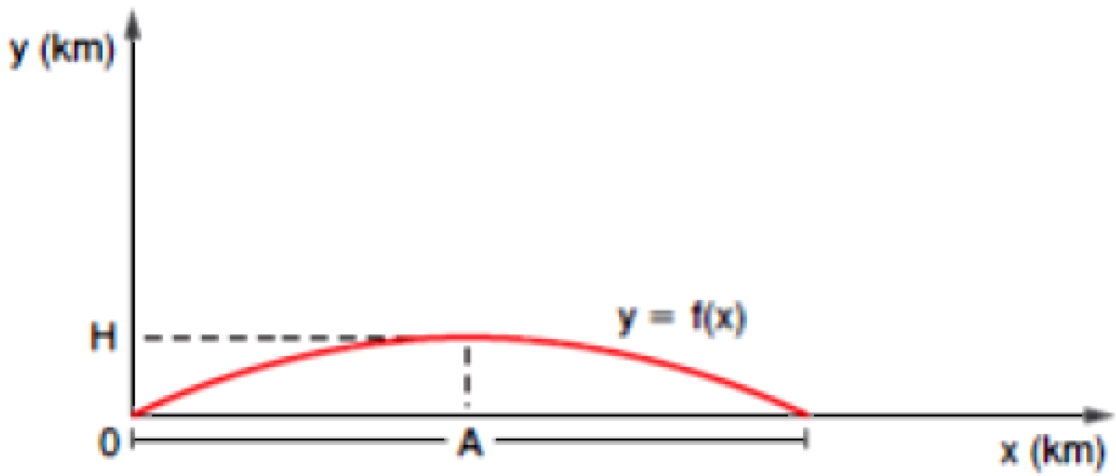
Sabendo-se que x e y são dados em quilômetros, a altura máxima H e o alcance A do projétil são, respectivamente:

(A) 2 km e 40 km

(B) 40 km e 2 km

(C) 10 km e 2 km

(D) 2 km e 20 km



3. Considere a função f definida por $f(x) = 2x^2 - 6x - 8$ para todo x real.

Assinale V ou F nas afirmativas a seguir:

(   ) o vértice do gráfico da função f é $(3, -8)$.

(   ) a função f é negativa para todos os valores de x pertencentes ao intervalo $]-1, 3[$.

(   ) a imagem da função f é o intervalo $[-4, 3[$.

(   ) a interseção da reta de equação $y = x - 4$ com o gráfico de f são os pontos $(-1,0)$ e $(4, 0)$.

(   ) todas as raízes da função f são números inteiros.

4. Uma indústria de refrigerantes tem sua produção diária P, em garrafas, variando com o número de operadores em serviço n, de acordo com a função $P(n) = n^2 + 50n + 20.000$. Calcule:

a) a produção se o número de operadores for 40.

b) o número de operadores necessário para produzir 25.400 garrafas de refrigerantes.

5. Um foguete é atirado para cima de modo que sua altura h, em relação ao solo, é dada, em função do tempo, pela função

$$h(t) = 10 + 120t - 5t^2,$$

em que o tempo é dado em segundos e a altura é dada em metros. Calcule :

a) a altura do foguete 2 segundos depois de lançado.

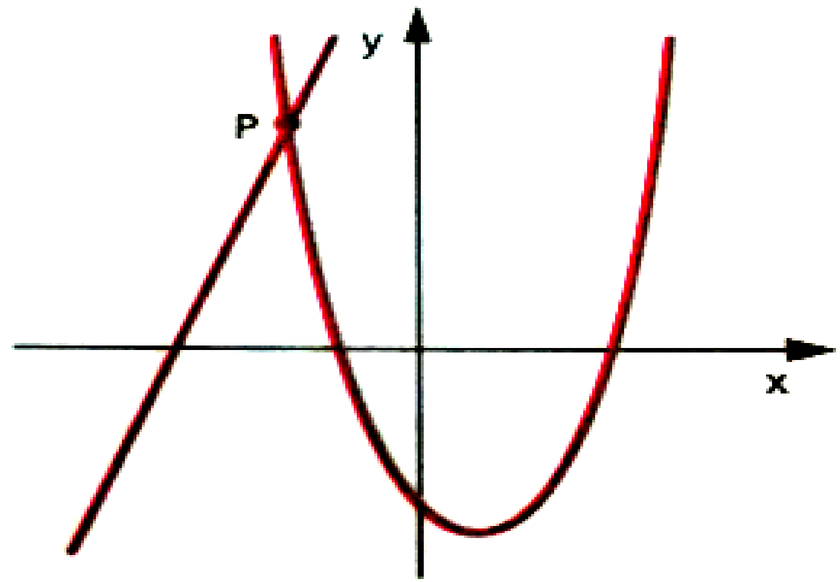
b) o tempo necessário para o foguete atingir a altura máxima.

6. Na figura, estão representados os gráficos das funções

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 \quad \text{e} \quad g(x) = 3x + 11.$$

A soma da abscissa do ponto P com o valor mínimo de ***f(x)*** é:

a) - 2
b) - 4
c) - 5
d) - 6
e) 7



PROBLEMAS PROPOSTOS

1. Construir os gráficos das funções definidas em R:

a) $y = x^2$
b) $y = -x^2$
c) $y = 2x^2$
d) $y = -2x^2$
e) $y = x^2 - 2x$
f) $y = -2x^2 - 4x$
g) $y = -3x^2 - 3$
h) $y = x^2 - 2x + 4$

2. Determinar os zeros reais das funções:

a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$
b) $f(x) = -x^2 + 7x - 12$
c) $f(x) = 3x^2 - 7x + 2$
d) $f(x) = x^2 - 2x + 2$
e) $f(x) = x^2 + 4x + 4$
f) $f(x) = -x^2 + \frac{3}{2}x + 1$
g) $f(x) = x^2 - 2x - 1$
h) $f(x) = -x^2 + 3x - 4$
i) $f(x) = x^2 - \sqrt{2}x + \frac{1}{2}$
j) $f(x) = x^2 + (1 - \sqrt{3})x - \sqrt{3}$
k) $f(x) = 2x^2 - 4x$
l) $f(x) = -3x^2 + 6$
m) $f(x) = 4x^2 + 3$
n) $f(x) = -5x^2$

3. Determinar os valores de m para que a equação $x^2 + (3m + 2)x + (m^2 + m + 2) = 0$ tenha raízes reais.

4. Determinar o valor máximo ou o valor mínimo, e o ponto de máximo ou o ponto de mínimo das funções abaixo, definidas em R.

a) $y = 2x^2 + 5x$
b) $y = -3x^2 + 12x$
c) $y = 4x^2 - 8x + 4$
d) $y = x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{5}{2}$
e) $y = -x^2 + 5x - 7$
f) $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{1}{2}$

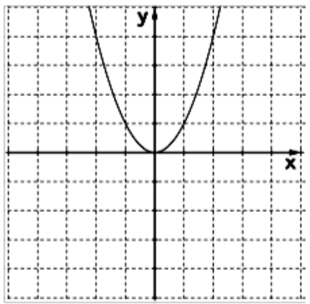
5. Construir o gráfico cartesiano das funções definidas em $\mathbb{R}$:

a) $y = x^2 - 2x - 3$
b) $y = 4x^2 - 10x + 4$
c) $y = -x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
d) $y = -3x^2 + 6x - 3$
e) $y = x^2 - 3x + \frac{9}{4}$
f) $y = 3x^2 - 4x + 2$
g) $y = -x^2 + x - 1$
h) $y = -\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$

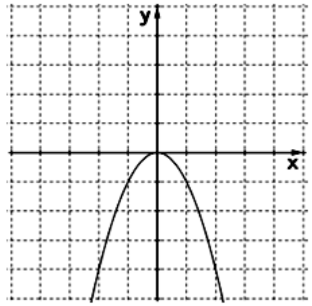
RESPOSTAS DOS PROBLEMAS PROPOSTOS

1.

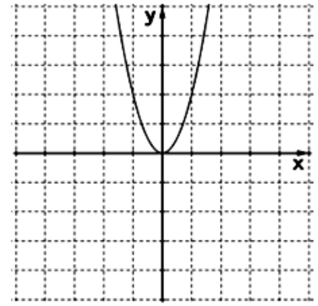
a)



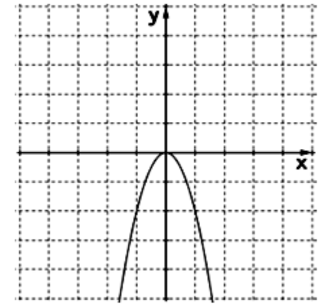
b)



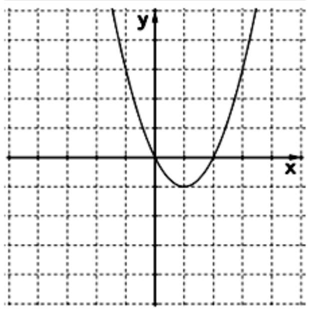
c)



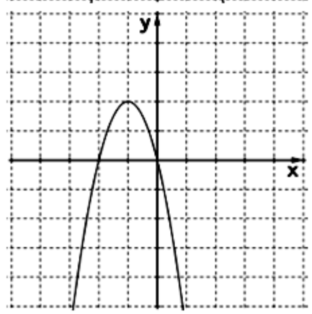
d)



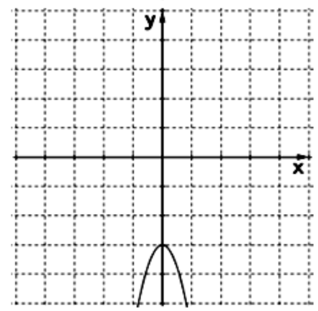
e)



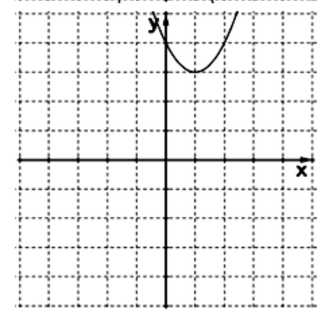
f)



g)



h)



2. a) $x = 1 \ ou \ x = 2$ b) $x = 3 \ ou \ x = 4$ c) $x = 2 \ ou \ x = \frac{1}{3}$ d) $\nexists \ x \in \mathbb{R}$

e) $x = -2$ f) $x = -\frac{1}{2} \ ou \ x = 2$ g) $x = 1 + \sqrt{2} \ ou \ x = 1 - \sqrt{2}$ h) $\nexists \ x \in \mathbb{R}$

i) $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ j) $x = -1 \ ou \ x = \sqrt{3}$ k) $x = 0 \ ou \ x = 2$

l) $x = \sqrt{2} \ ou \ x = -\sqrt{2}$ m) $\nexists \ x \in \mathbb{R}$ n) $x = 0$

3. $m = -2 \ ou \ m = \frac{2}{5}$

RESPOSTAS DOS PROBLEMAS PROPOSTOS

4. a) $valor\ mínimo = -\frac{25}{8}$ $\quad ponto\ de\ mínimo = \left(-\frac{5}{4}, -\frac{25}{8}\right)$

b) $valor\ máximo = 12$ $\quad ponto\ de\ máximo = (2,12)$

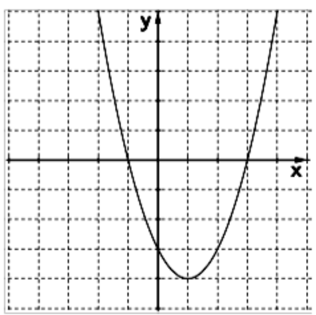
c) $valor\ mínimo = 0$ $\quad ponto\ de\ mínimo = (1,0)$

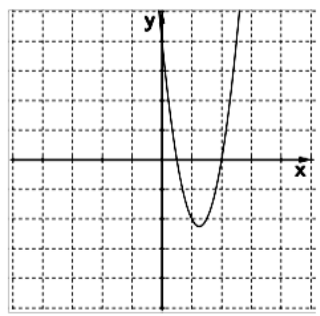
d) $valor\ mínimo = -\frac{9}{16}$ $\quad ponto\ de\ mínimo = \left(\frac{7}{4}, -\frac{9}{16}\right)$

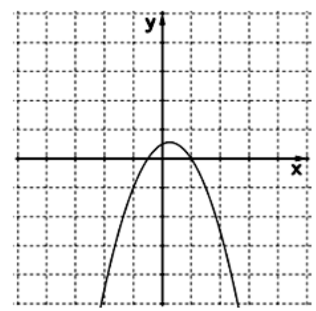
e) $valor\ máximo = -\frac{3}{4}$ $\quad ponto\ de\ máximo = \left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{4}\right)$

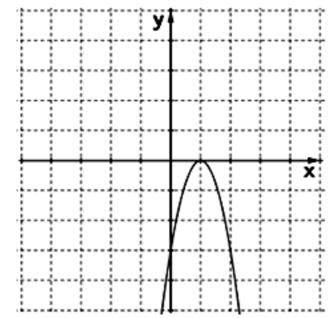
f) $valor\ máximo = \frac{7}{18}$ $\quad ponto\ de\ máximo = \left(\frac{4}{3}, \frac{7}{18}\right)$

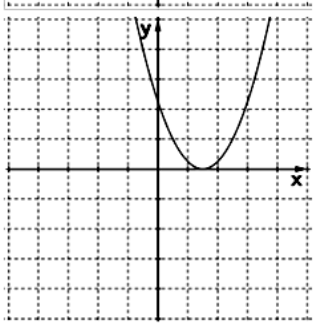
5.

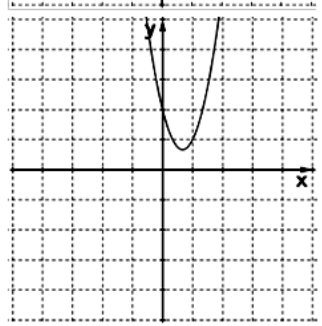
a)


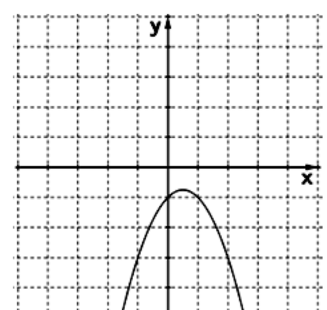
b)


c)


d)


e)


f)


g)


h)