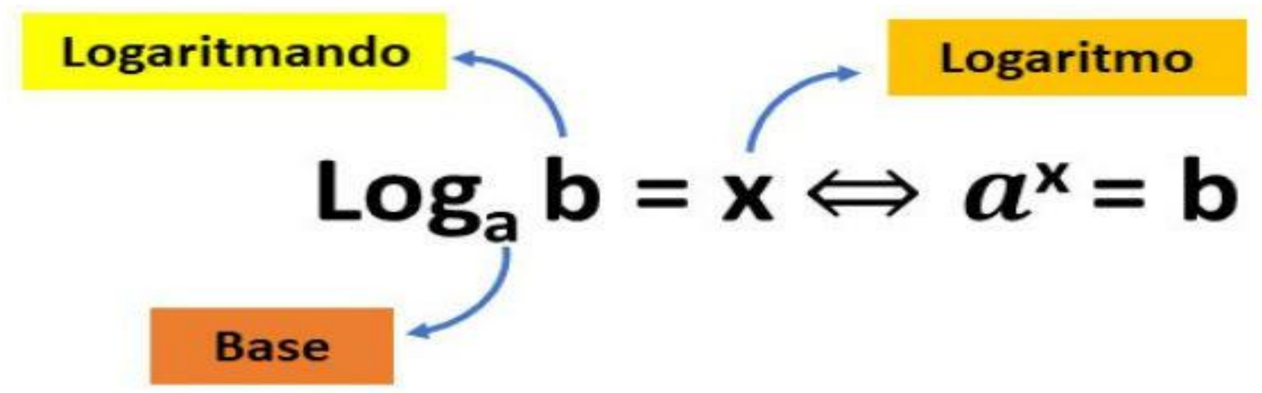
LOGARITMO

Definição de logaritmo:



Lê-se logaritmo de b na base a.

Condição de existência :

$a > 0$ $\quad\quad$ $a \neq 1$ $\quad\quad$ $b > 0$

Quando a base de um logaritmo for omitida, significa que seu valor é igual a 10. Este tipo de logaritmo é chamado de logaritmo decimal.

LOGARITMO

1º Exemplo: Calcule os logaritmos abaixo.

a) $\log_5 125 = x \Rightarrow 5^x = 125 \Rightarrow \cancel{5}^x = \cancel{5}^3 \Rightarrow x = 3$

b) $\log_9 243 = x \Rightarrow 9^x = 243 \Rightarrow (3^2)^x = 3^5 \Rightarrow \cancel{3}^{2x} = \cancel{3}^5 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$

c) $\log_2(1/16) = x \Rightarrow 2^x = \frac{1}{16} \Rightarrow 2^x = \left(\frac{16}{1}\right)^{-1} \Rightarrow 2^x = (2^4)^{-1} \Rightarrow \cancel{2}^x = \cancel{2}^{-4} \Rightarrow x = -4$

d) $\log_8 2 = x \Rightarrow 8^x = 2 \Rightarrow (\cancel{2}^3)^x = \cancel{2}^1 \Rightarrow 3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

e) $\log_{10} 100 = x \Rightarrow 10^x = 100 \Rightarrow x = 2$

$$\begin{array}{r|l} 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 243 & 3 \\ 81 & 3 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

L O G A R I T M O: propriedades

LOGARITMO DO PRODUTO	$\log_a b \cdot c = \log_a b + \log_a c$
LOGARITMO DO QUOCIENTE	$\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$
LOGARITMO DA POTÊNCIA	$\log_a b^c = c \cdot \log_a b$

L O G A R I T M O: propriedades

$$\log_a b \cdot c = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

$$\log_a b^c = c \cdot \log_a b$$

produto

$$\log_3 3\cdot\sqrt{3} = \log_3 3 + \log_3 \sqrt{3} =$$

$$= 1 + \log_3 3^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} = 1 + 0{,}5 = 1{,}5$$

$$\log_2 \frac{\sqrt{2}}{8} = \log_2 \sqrt{2} - \log_2 8 = \log_2 2^{\frac{1}{2}} - \log_2 2^3 = \frac{1}{2} - 3 = -2{,}5$$

L O G A R I T M O: propriedades

Exercício 1. Calcule:

(a) $\log_2 16$ (b) $\log_3 81$ (c) $\log_5 125$ (d) $\log_6 1296$ (e) $\log_{12} 1728$ (f) $\log_2 4096$ (g) $\log_{28} 1$
(h) $\log_5 625$ (i) $\log_2 \sqrt{2}$ (j) $\log 100$ (k) $\log_2 1024$ (l) $\log_\pi \pi$ (m) $\log_4 16$ (n) $\log_3 \left(\frac{1}{9}\right)$
(o) $\log_{81} 3$ (p) $\log_{\frac{1}{2}} 8$ (q) $\log_7 \left(\frac{1}{7}\right)$ (r) $\log_{125} 5$ (s) $\log_{\frac{1}{2}} 32$ (t) $\log_9 \left(\frac{1}{27}\right)$ (u) $\log_{27} 81$
(v) $\log_{\sqrt{8}} \sqrt{32}$

t) $\log_9 \left(\frac{1}{27}\right) = x$

$9^x = \frac{1}{27}$

$(3^2)^x = 27^{-1}$

$3^{2x} = (3^3)^{-1}$

$\cancel{3}^{2x} = \cancel{3}^{-3}$

$2x = -3$

$x = -\frac{3}{2}$

t) $\log_9 \left(\frac{1}{27}\right) = \log_{3^2} (27)^{-1} = \cancel{\log_{3^2}} 3^{-3} = -\frac{3}{2}$

v) $\log_{\sqrt{8}} \sqrt{32} = \log_{\sqrt[2]{2^3}} \sqrt[2]{2^5} = \cancel{\log_{2^{\frac{3}{2}}}} 2^{\frac{5}{2}} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{3}{2}} =$

$= \frac{5}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{3} = \frac{5}{3}$


LOGARITMO
Beduka
Consequências da definição
$Log_a 1 = 0 \longrightarrow a^0 = 1$
$Log_a a = 1 \longrightarrow a^1 = a$
$Log_a a^m = m \longrightarrow a^m = a^m$
$Log_a b = log_a c \longrightarrow b = c$
Log de um produto
$Log_a (b.c) \longrightarrow Log_a b + Log_a c$
Log decimal
$Log_{10} b = Log\ b$
Mudança de base
$Log_a b \longrightarrow \frac{Log_c b}{Log_c a}$
Potência com expoente de log
$a^{Log_a b} = b$
Log de logaritmo com potência
$Log_a b^m = m \longrightarrow m \,.\, Log_a b$
Colog ou Log Negativo
$Colog_a b = -Log_a B$
Logaritmo de base com potência
$Log_{a^m} b \longrightarrow \frac{1}{m} . Log_a b$
Log de um quociente
$Log_a \left(\frac{b}{c}\right) \longrightarrow Log_a b - Log_a c$
Log de raiz
$Log_a \sqrt{b} \longrightarrow \frac{1}{2} . Log_a b$
Log natural ou Neperiano
$Log_e b = ln\ b$

L O G A R I T M O: propriedades

Exemplo: Reescreva as funções usando propriedades dos logaritmos:

a) $y = \ln\left(\frac{x+2}{2x-3}\right)$ $\Rightarrow y = \ln(x+2) - \ln(2x-3)$

b) $y = \ln\left(\frac{1}{x^3}\right) = \ln x^{-3}$ $\Rightarrow y = -3 \cdot \ln x$

c) $y = \ln(x \cdot e^x)$ $\Rightarrow y = \ln x + \cancel{\ln e}^x \Rightarrow y = \ln x + x$

d) $y = \ln\left(\frac{x+1}{x+4}\right)^{10}$ $\Rightarrow y = 10 \cdot \ln\left(\frac{x+1}{x+4}\right) \Rightarrow y = 10 \cdot [\ln(x+1) - \ln(x+4)]$

e) $y = \cancel{e}^{\cancel{\ln} x^2}$ $\Rightarrow y = x^2$

$y = \cancel{2}^{\cancel{\log_2} 8} = 2^3 = 8$

EXERCÍCIOS ENVOLVENDO DERIVADA DE UMA FUNÇÃO

Com a regra da potência, calcular as derivadas:

(a) $f(x) = x^3$

(b) $f(x) = x^{3/2}$

(c) $f(x) = x^8$

(d) $f(x) = x^{1/2}$

(e) $f(x) = x^{-2}$

(f) $f(x) = x^{-5}$

(g) $f(x) = x^9$

(h) $f(x) = x^{3/4}$

(i) $f(x) = x^{-1/3}$

Respostas:

a) $f'(x) = 3x^2$

b) $f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$

c) $f'(x) = 8x^7$

d) $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

e) $f'(x) = -2x^{-3}$

g) $f'(x) = -5x^{-6}$

g) $f'(x) = 9x^8$

h) $f'(x) = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}$

i) $f'(x) = -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}$

$\frac{3}{2} - 1 = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}$

$-\frac{1}{3} - \frac{1}{1} = \frac{-1-3}{3} = -\frac{4}{3}$

$\frac{3}{4} - \frac{1}{1} = \frac{3-4}{4} = -\frac{1}{4}$

EXERCÍCIOS ENVOLVENDO DERIVADA DE UMA FUNÇÃO

Usando a *regra da cadeia*, calcular as derivadas das funções:

(a) $f(x) = (x^2+1)^2$

(b) $f(x) = (x^3+x^2+4)^3$

(d) $f(x) = (x^2+1)^{-1}$

(e) $f(x) = (x^3+x^2+4)^{-2}$

a) $u = x^2 + 1$

$f(u) = u^2$

$f'(x) = f'(u) \cdot u'$

$f'(x) = 2u \cdot 2x$

$f'(x) = 4x \cdot (x^2 + 1)$

b) $u = x^3 + x^2 + 4$

$f(u) = u^3$

$f'(x) = f'(u) \cdot u'$

$f'(x) = 3u^2 \cdot (3x^2 + 2x)$

$f'(x) = 3 \cdot (x^3 + x^2 + 4)^2 \cdot (3x^2 + 2x)$

EXERCÍCIOS ENVOLVENDO DERIVADA DE UMA FUNÇÃO

A segunda derivada de f, denotada por $f'' = f''(x)$, é a derivada *da derivada* f' de $f = f(x)$. Obter a segunda derivada para cada função:

(a) $f(x) = x^2$

(b) $f(x) = 5x + 8$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

(d) $f(x) = x^2$

(e) $f(x) = -4x - 4$

(f) $f(x) = \dfrac{1}{x}$