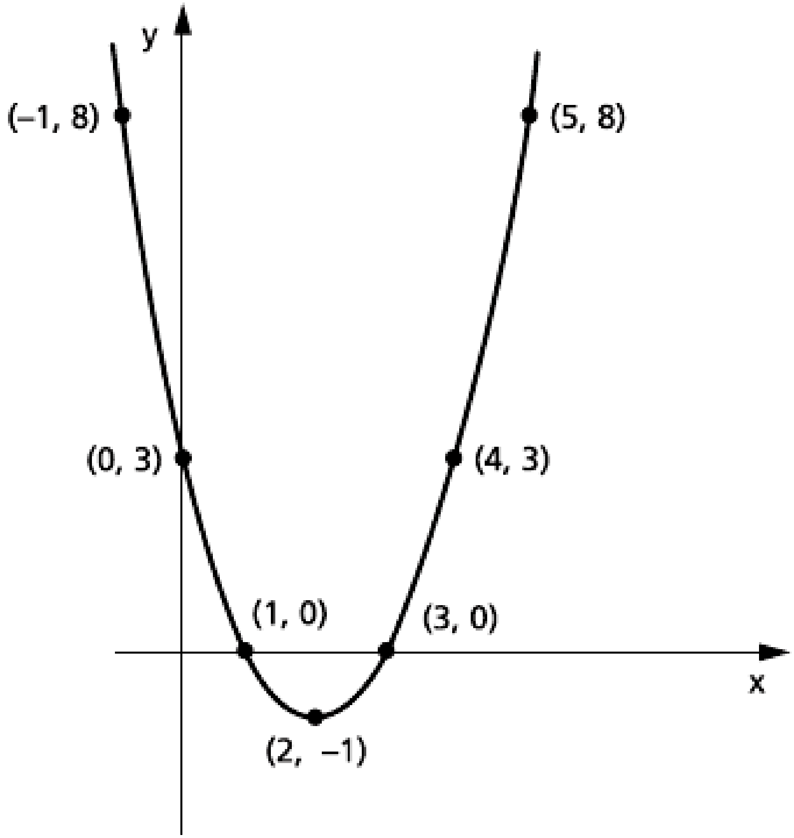
Interpretando geometricamente, dizemos que os zeros da função quadrática são as abscissas dos pontos onde a parábola corta o eixo dos *x*.

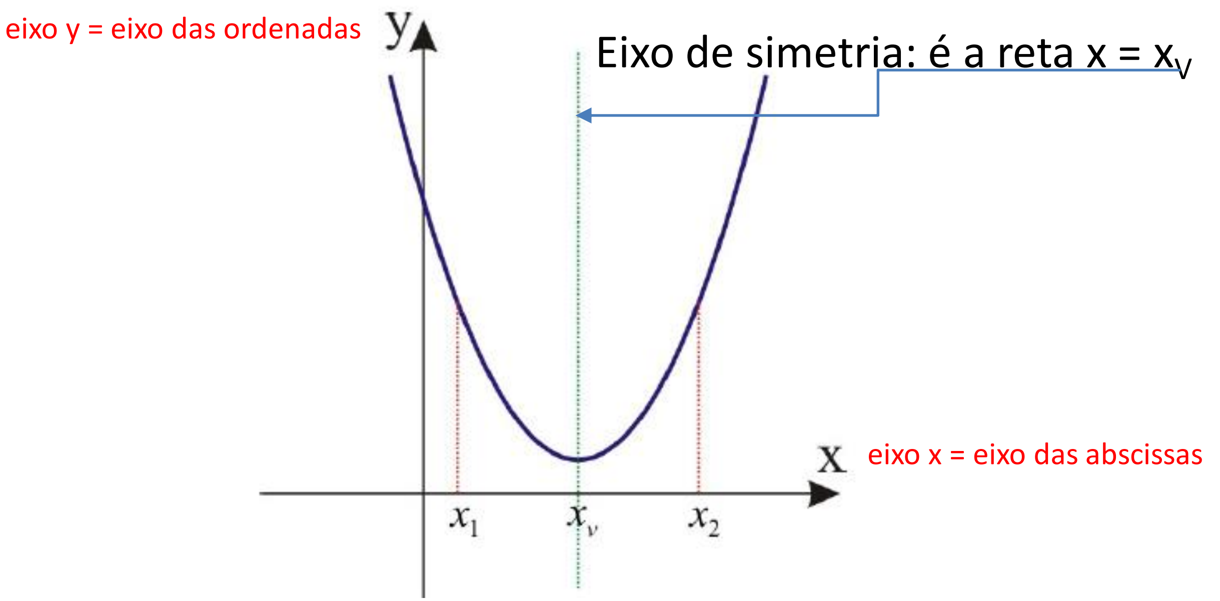
Exemplo:

Construindo o gráfico da função $y = x^2 - 4x + 3$ podemos notar que a parábola corta o eixo dos *x* nos pontos de abscissas 1 e 3, que são as raízes da equação $x^2 - 4x + 3 = 0$.



SIMETRIA

Sejam x_1 e x_2 pontos equidistantes de x_v, ou seja, o vértice é o ponto médio deles.



VÉRTICE DA PARÁBOLA

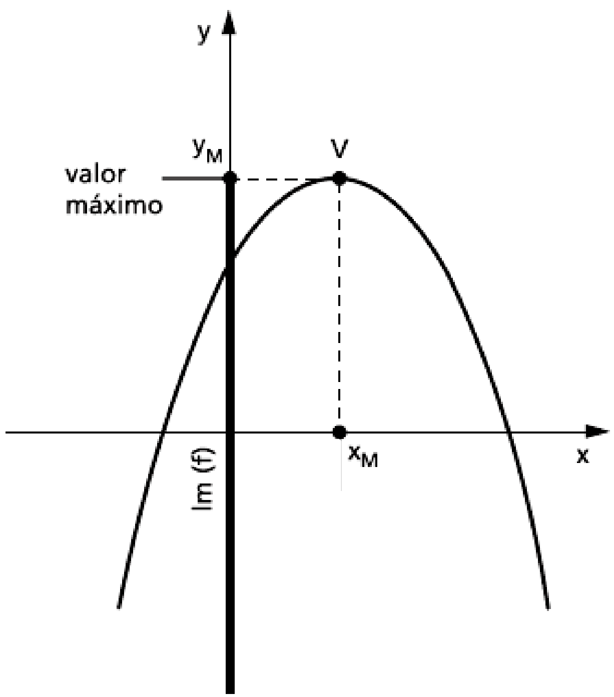
O vértice da parábola é o ponto $V\left(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{-\Delta}{4a}\right)$.

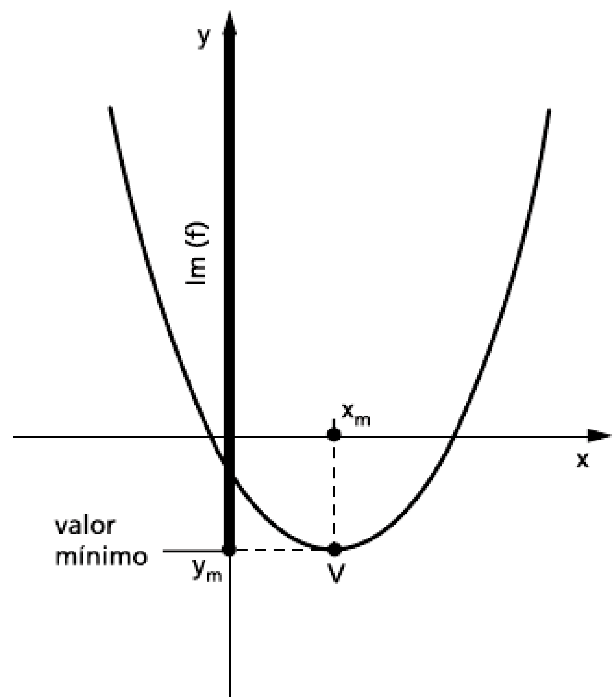
MÁXIMOS E MÍNIMOS

Teorema:

I) Se $a < 0$, a função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ admite o valor máximo $y_M = -\dfrac{\Delta}{4a}$ para $x_M = -\dfrac{b}{2a}$.

II) Se $a > 0$, a função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ admite o valor mínimo $y_m = -\dfrac{\Delta}{4a}$ para $x_m = -\dfrac{b}{2a}$.





Exemplo:

Seja $y = -x^2 + 5x - 1$. Dado que x varia no intervalo fechado [0, 6], determine o maior (y_M) e o menor (y_m) valor que y assume.

Resolução:

Sendo $y = -x^2 + 5x - 1$,

verificamos que:

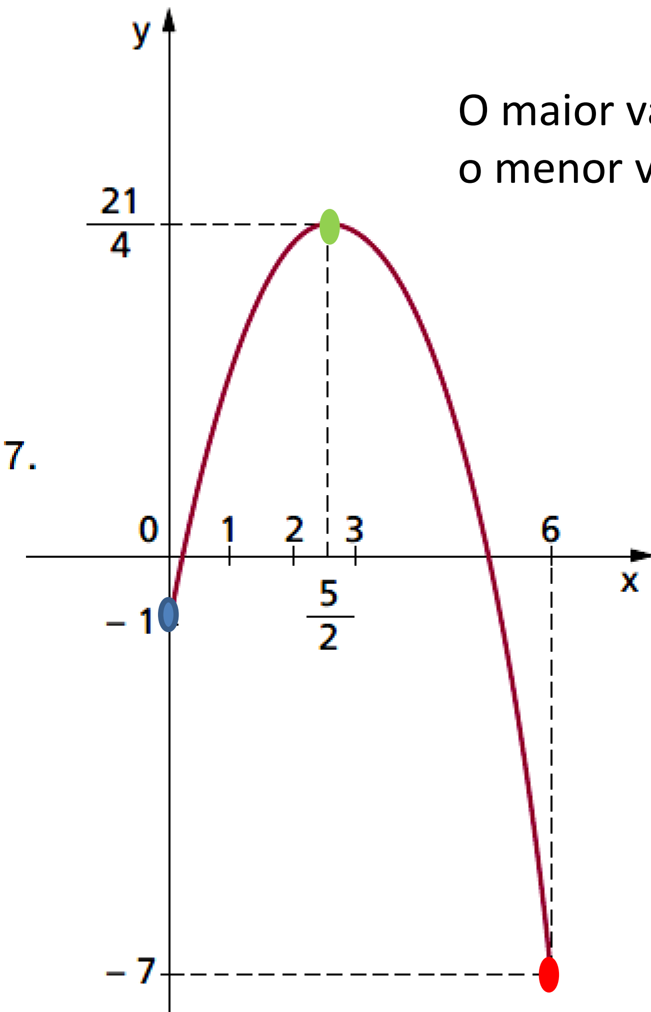
para $x = 0$, $y = -1$

para $x = 6$, $y = -7$

$$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = V\left(\frac{5}{2}, \frac{21}{4}\right)$$

Assim, no intervalo [0, 6],

$$y_M = y_V = \frac{21}{4} \text{ e } y_m = f(6) = -7.$$



O maior valor da função é y = 21/4 e o menor valor é y = - 7.

Exemplo:

Seja $y = -x^2 + 5x - 1$. Dado que x varia no intervalo fechado $[0, 6]$, determine o maior (y_M) e o menor (y_m) valor que y assume.

* Vértice

$$x_v = -\frac{B}{2A} = -\frac{5}{2\cdot(-1)} = \frac{-5}{-2} = 2,5$$

$$\Delta = B^2 - 4 \cdot A C$$
$$\Delta = 5^2 - 4\cdot(-1)\cdot(-1)$$
$$\Delta = 25 - 4 = 21$$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4A} = -\frac{21}{4\cdot(-1)} = \frac{-21}{-4} = 5,25$$

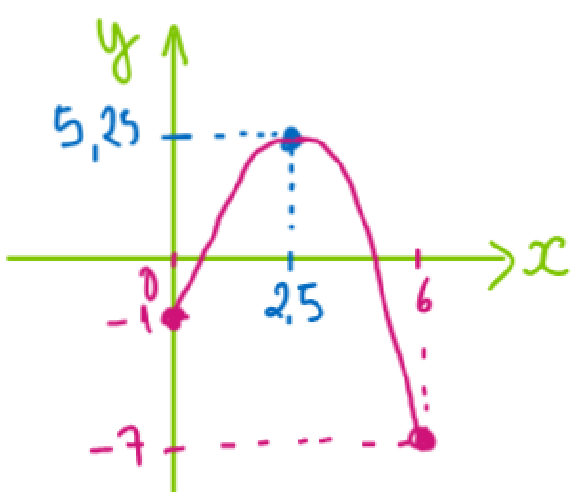
* Valores de y para:

$x = 0 \Rightarrow y = ?$

$$y = -0^2 + 5\cdot 0 - 1 = -1$$

$x = 6 \Rightarrow y = ?$

$$y = -6^2 + 5\cdot 6 - 1$$
$$y = -36 + 30 - 1 = -7$$



Resposta:

$y_M = 5.25$

$y_m = -7$

PROBLEMAS PROPOSTOS

1. Em relação ao gráfico da função $f(x) = -x^2 + 2x + 6$, assinale V para Verdadeira e F para falsa nas afirmativas abaixo:

a. (F) é uma parábola de concavidade voltada para cima. $a = -1 < 0$ $\cap$

b. (F) seu vértice é o ponto V(1, 5). $x_V = -\frac{B}{2A} = -\frac{2}{2\cdot(-1)} = 1$ $y_V = -\frac{\Delta}{4A} = -\frac{28}{4\cdot(-1)} = 7$

c. (F) intercepta o eixo das abscissas num único ponto.

eixo x

$$\Delta = B^2 - 4AC = 2^2 - 4\cdot(-1)\cdot 6$$
$$\Delta = 4 + 24 = 28 > 0$$

d. (F) o seu eixo de simetria é a reta x = 2. $x = x_V \Rightarrow x = 1$

e. (V) intercepta o eixo das ordenadas em R(0, 6).

eixo y

2. O gráfico da função $y = f(x) = -\frac{1}{200}x^2 + \frac{1}{5}x$, representado na figura abaixo, descreve a trajetória de um projétil, lançado a partir da origem.

Sabendo-se que x e y são dados em quilômetros, a altura máxima H e o alcance A do projétil são, respectivamente:

(A) 2 km e 40 km

(B) 40 km e 2 km

(C) 10 km e 2 km

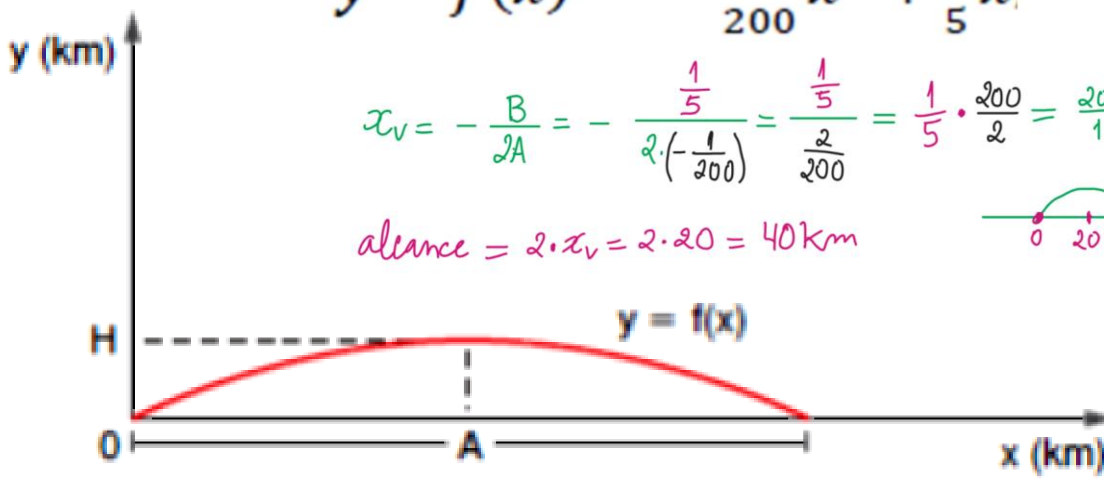
(D) 2 km e 20 km

$$y = f(x) = -\frac{1}{200}x^2 + \frac{1}{5}x$$

$x_V = -\frac{B}{2A} = -\frac{\frac{1}{5}}{2\cdot\left(-\frac{1}{200}\right)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{200}} = \frac{1}{5}\cdot\frac{200}{2} = \frac{200}{10} = 20$

alcance $= 2\cdot x_V = 2\cdot 20 = 40$ km

0 20 40



3. Considere a função f definida por $f(x) = 2x^2 - 6x - 8$ para todo x real.

Assinale V ou F nas afirmativas a seguir:

a. (F) o vértice do gráfico da função f é (3, −8).

b. (V) a função f é negativa para todos os valores de x pertencentes ao intervalo]−1, 3[.

c. (F) a imagem da função f é o intervalo [−4, 3[. → $[-12{,}5 \; ; +\infty[$

d. (F) a interseção da reta de equação y = x − 4 com o gráfico de f são os pontos (− 1,0) e (4, 0). → não pertence à reta

e. (V) todas as raízes da função f são números inteiros.

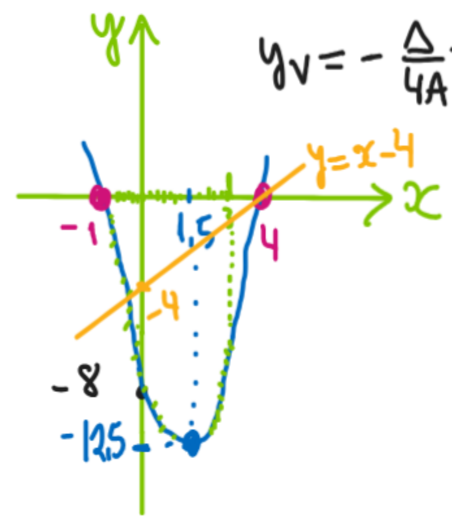
a) $x_v = -\frac{B}{2A} = -\frac{(-6)}{2\cdot 2} = \frac{6}{4} = 1{,}5$

e) $2x^2 - 6x - 8 = 0$

$\Delta = 36 + 64 = 100$

$x' = \frac{6+10}{4} = 4 \qquad x'' = \frac{6-10}{4} = -1$

$y_v = -\frac{\Delta}{4A} = -\frac{100}{4\cdot 2} = -12{,}5$



4. Uma indústria de refrigerantes tem sua produção diária P, em garrafas, variando com o número de operadores em serviço n, de acordo com a função P(n) = n^2 + 50n + 20.000. Calcule:

a) a produção se o número de operadores for 40.

P(40) = $40^2 + 50 \cdot 40 + 20.000 = 23.600$ garrafas

b) o número de operadores necessário para produzir 25.400 garrafas de refrigerantes.

$n^2 + 50n + 20000 = 25400$

$n^2 + 50n - 5400 = 0$

$$n = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-50 \pm \sqrt{50^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5400)}}{2 \cdot 1} = \frac{-50 \pm \sqrt{2500 + 21600}}{2 \cdot 1}$$

$$n = \frac{-50 \pm \sqrt{2500 + 21600}}{2 \cdot 1} = \frac{-50 \pm \sqrt{24100}}{2} \cong \frac{-50 \pm 155}{2}$$

$$n' = \frac{-50 + 155}{2} = \frac{105}{2} = 52{,}5$$

$$n'' = \frac{-50 - 155}{2} = -\frac{205}{2} = -102{,}5$$

P(53) = 25459

P(52) = 25304

Resposta: 53 operadores

5. Um foguete é atirado para cima de modo que sua altura h, em relação ao solo, é dada, em função do tempo, pela função

$$h(t) = 10 + 120t - 5t^2,$$

em que o tempo é dado em segundos e a altura é dada em metros. Calcule :

a) a altura do foguete 2 segundos depois de lançado.

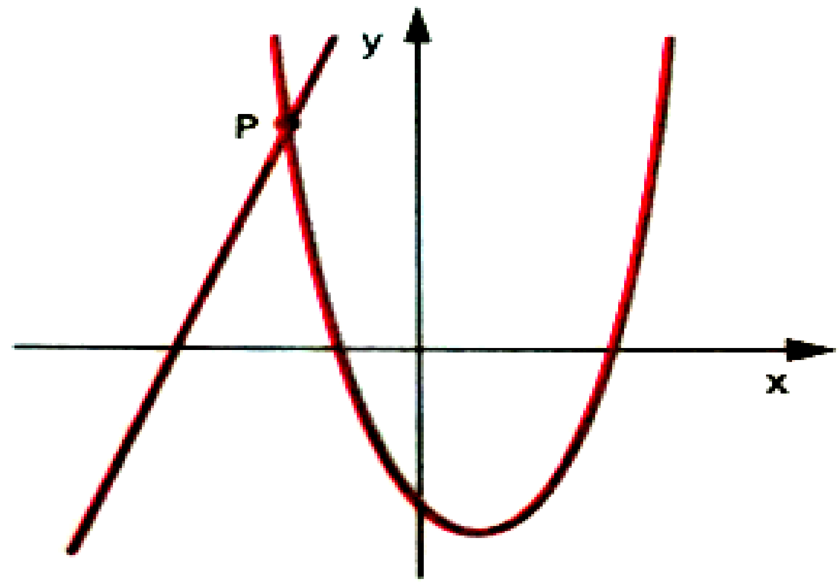
b) o tempo necessário para o foguete atingir a altura máxima.

6. Na figura, estão representados os gráficos das funções

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 \quad \text{e} \quad g(x) = 3x + 11.$$

A soma da abscissa do ponto P com o valor mínimo de ***f(x)*** é:

a) - 2
b) - 4
c) - 5
d) - 6
e) 7



PROBLEMAS PROPOSTOS

1. Construir os gráficos das funções definidas em R:

a) $y = x^2$
b) $y = -x^2$
c) $y = 2x^2$
d) $y = -2x^2$
e) $y = x^2 - 2x$
f) $y = -2x^2 - 4x$
g) $y = -3x^2 - 3$
h) $y = x^2 - 2x + 4$

2. Determinar os zeros reais das funções:

a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$
b) $f(x) = -x^2 + 7x - 12$
c) $f(x) = 3x^2 - 7x + 2$
d) $f(x) = x^2 - 2x + 2$
e) $f(x) = x^2 + 4x + 4$
f) $f(x) = -x^2 + \frac{3}{2}x + 1$
g) $f(x) = x^2 - 2x - 1$
h) $f(x) = -x^2 + 3x - 4$
i) $f(x) = x^2 - \sqrt{2}x + \frac{1}{2}$
j) $f(x) = x^2 + \left(1 - \sqrt{3}\right)x - \sqrt{3}$
k) $f(x) = 2x^2 - 4x$
l) $f(x) = -3x^2 + 6$
m) $f(x) = 4x^2 + 3$
n) $f(x) = -5x^2$

3. Determinar os valores de m para que a equação $x^2 + (3m + 2)x + (m^2 + m + 2) = 0$ tenha raízes reais.

4. Determinar o valor máximo ou o valor mínimo, e o ponto de máximo ou o ponto de mínimo das funções abaixo, definidas em R.

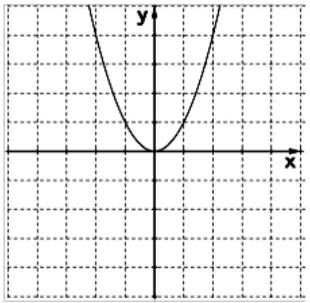
a) $y = 2x^2 + 5x$
b) $y = -3x^2 + 12x$
c) $y = 4x^2 - 8x + 4$
d) $y = x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{5}{2}$
e) $y = -x^2 + 5x - 7$
f) $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{1}{2}$

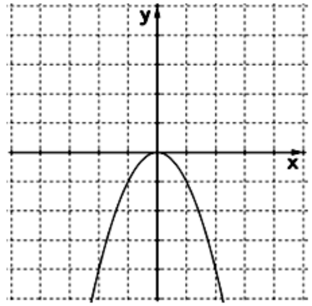
5. Construir o gráfico cartesiano das funções definidas em $\mathbb{R}$:

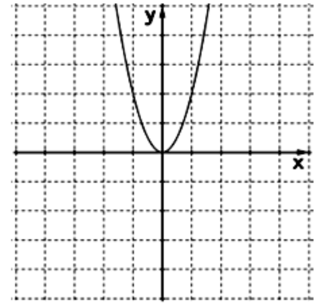
a) $y = x^2 - 2x - 3$
b) $y = 4x^2 - 10x + 4$
c) $y = -x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
d) $y = -3x^2 + 6x - 3$
e) $y = x^2 - 3x + \frac{9}{4}$
f) $y = 3x^2 - 4x + 2$
g) $y = -x^2 + x - 1$
h) $y = -\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$

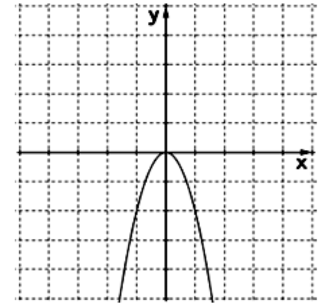
RESPOSTAS DOS PROBLEMAS PROPOSTOS

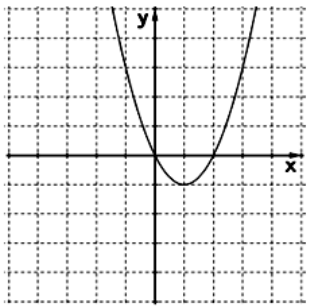
1.

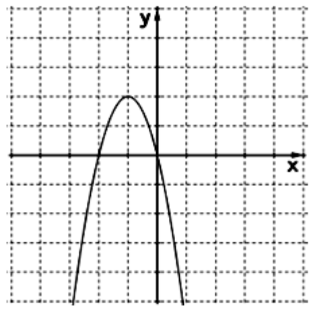
a)


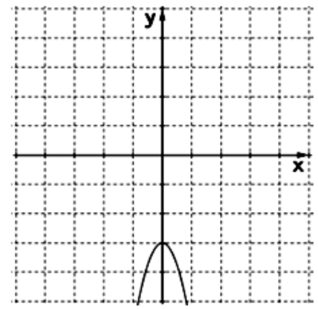
b)


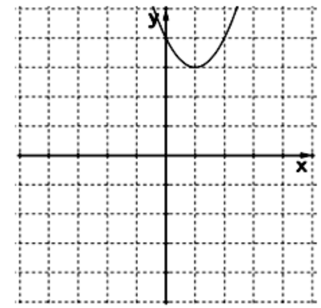
c)


d)


e)


f)


g)


h)


2. a) $x = 1 \; ou \; x = 2$ b) $x = 3 \; ou \; x = 4$ c) $x = 2 \; ou \; x = \frac{1}{3}$ d) $\nexists \, x \in \mathbb{R}$

e) $x = -2$ f) $x = -\frac{1}{2} \; ou \; x = 2$ g) $x = 1 + \sqrt{2} \; ou \; x = 1 - \sqrt{2}$ h) $\nexists \, x \in \mathbb{R}$

i) $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ j) $x = -1 \; ou \; x = \sqrt{3}$ k) $x = 0 \; ou \; x = 2$

l) $x = \sqrt{2} \; ou \; x = -\sqrt{2}$ m) $\nexists \, x \in \mathbb{R}$ n) $x = 0$

3. $m = -2 \; ou \; m = \frac{2}{5}$

RESPOSTAS DOS PROBLEMAS PROPOSTOS

4. a) $valor\ mínimo = -\frac{25}{8}$ $\quad$ $ponto\ de\ mínimo = \left(-\frac{5}{4}, -\frac{25}{8}\right)$

b) $valor\ máximo = 12$ $\quad$ $ponto\ de\ máximo = (2,12)$

c) $valor\ mínimo = 0$ $\quad$ $ponto\ de\ mínimo = (1,0)$

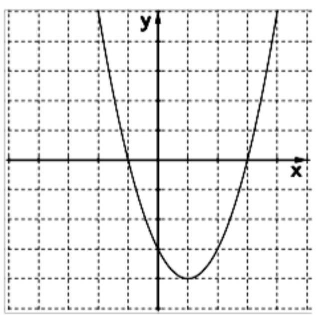
d) $valor\ mínimo = -\frac{9}{16}$ $\quad$ $ponto\ de\ mínimo = \left(\frac{7}{4}, -\frac{9}{16}\right)$

e) $valor\ máximo = -\frac{3}{4}$ $\quad$ $ponto\ de\ máximo = \left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{4}\right)$

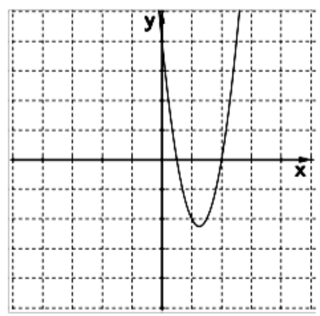
f) $valor\ máximo = \frac{7}{18}$ $\quad$ $ponto\ de\ máximo = \left(\frac{4}{3}, \frac{7}{18}\right)$

5.

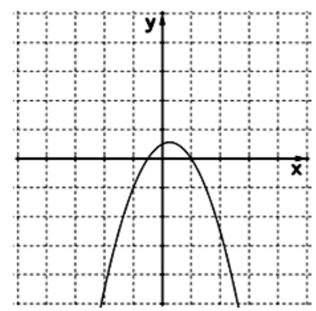
a)



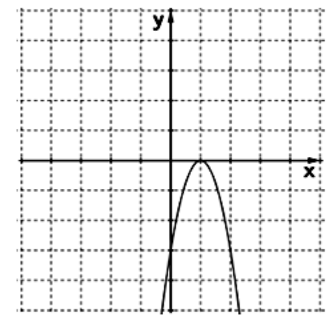
b)



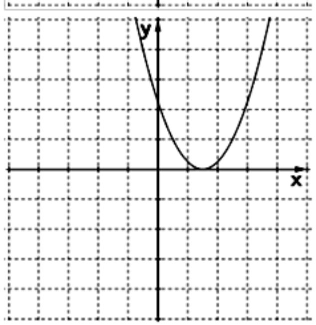
c)



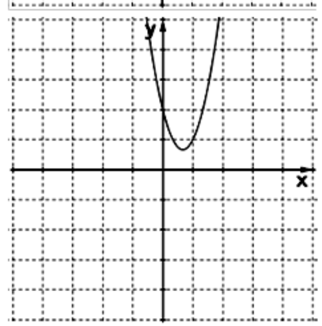
d)



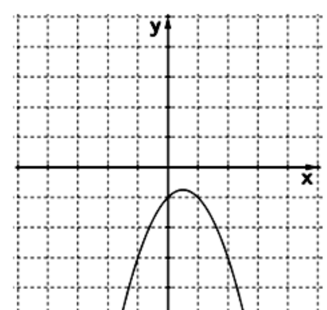
e)



f)



g)



h)