TAXA DE VARIAÇÃO

Taxa de variação média

Dada uma função $f(x)$, sua taxa de variação média pode ser calculada pela razão:

$$TVM = \frac{variação\ em\ y}{variação\ em\ x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Taxa de variação média em um intervalo

Dada uma função $f(x)$ com $a \leq x \leq b$, sua taxa de variação média nesse intervalo pode ser calculada pela razão:

$$TVM = \frac{variação\ em\ y}{variação\ em\ x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Observe que a taxa de variação média é obtida pela divisão de duas grandezas que, na prática, têm unidades de medida, então a taxa de variação média também tem unidade de medida que será dada pela divisão das duas unidades de medida envolvidas.

TAXA DE VARIAÇÃO MÉDIA

1º Exemplo: Em uma indústria química, considerou-se a produção de detergente como função do capital investido em equipamentos e estabeleceu-se $P(q) = 3q^2$, onde a produção P é dada em milhares de litros e o capital investido q é dado em milhares de reais.

Determine a taxa de variação média da produção para o intervalo $3 \leq q \leq 5$.

$$TVM = \frac{\Delta P}{\Delta q} = \frac{P(5) - P(3)}{5 - 3} = \frac{3 \cdot 5^2 - 3 \cdot 3^2}{2} = \frac{75 - 27}{2} = \frac{48}{2} = 24$$

TVM = 24 litros/real

TAXA DE VARIAÇÃO MÉDIA

1º Exemplo: Em uma indústria química, considerou-se a produção de detergente como função do capital investido em equipamentos e estabeleceu-se $P(q) = 3q^2$, onde a produção P é dada em milhares de litros e o capital investido q é dado em milhares de reais.

Determine a taxa de variação média da produção para o intervalo $3 \leq q \leq 5$.

$$TVM = \frac{\Delta P}{\Delta q} = \frac{P(5) - P(3)}{5 - 3} = \frac{3 \cdot 5^2 - 3 \cdot 3^2}{2} = \frac{75 - 27}{2} = \frac{48}{2} = 24$$

TVM = 24 litros/real

TAXA DE VARIAÇÃO MÉDIA

2º *Exemplo:* O custo C para se beneficiar uma quantidade q de trigo é dado por $C(q) = q^2 + 400$, onde C é dado em reais e q é dado em toneladas.

Determine a taxa de variação média do custo para o intervalo $1 \leq q \leq 6$.

$C(6) = 6^2 + 400 = 36 + 400 = 436$

$C(1) = 1^2 + 400 = 1 + 400 = 401$

$$TVM = \frac{\Delta C}{\Delta q} = \frac{C(6) - C(1)}{6 - 1} = \frac{436 - 401}{5} = \frac{35}{5} = 7$$

$TVM = 7$ reais/tonelada

TAXA DE VARIAÇÃO INSTANTÂNEA

Para calcularmos a taxa de variação instantânea vamos exemplificar para facilitar sua compreensão.

3º Exemplo: Em uma indústria de alimentos, considerou-se a produção de alimentos como função do tempo e estabeleceu-se $P(t) = t^2$, onde a produção P é dada em toneladas e o tempo t é dado em horas.

Qual é a taxa de variação da produção às 3 horas?

Para responder a essa pergunta vamos calcular várias taxas de variação médias para intervalos de tempos muito pequenos:

Para $3 \leq t \leq 3{,}1$, teremos:

$$TVM = \frac{P(3{,}1) - P(3)}{3{,}1 - 3} = \frac{(3{,}1)^2 - (3)^2}{0{,}1} = \frac{9{,}61 - 9}{0{,}1} = \frac{0{,}61}{0{,}1} = 6{,}1 \text{ toneladas/hora}$$

Para $3 \leq t \leq 3{,}01$, teremos:

$$TVM = \frac{P(3{,}01) - P(3)}{3{,}01 - 3} = \frac{(3{,}01)^2 - (3)^2}{0{,}01} = \frac{9{,}0601 - 9}{0{,}01} = \frac{0{,}0601}{0{,}01} = 6{,}01 \text{ toneladas/hora}$$

Para $3 \leq t \leq 3{,}001$, teremos:

$$TVM = \frac{P(3{,}001) - P(3)}{3{,}001 - 3} = \frac{(3{,}001)^2 - (3)^2}{0{,}001} = \frac{9{,}006001 - 9}{0{,}001} = \frac{0{,}006001}{0{,}001} = 6{,}001 \text{ toneladas/hora}$$

TAXA DE VARIAÇÃO INSTANTÂNEA

Assim calculamos as taxas de variação médias para intervalos de "3 até um instante pouco maior que 3" e notamos que tal taxa cada vez mais se "aproxima" do valor 6.

Vamos agora calcular as taxas de variação médias para intervalos de "um instante pouco menor que 3 até o instante 3" e verificar se, nesses casos, a taxa também vai se "aproximar" do valor 6.

Para $2{,}9 \leq t \leq 3$, teremos:

$$TVM = \frac{P(3)-P(2{,}9)}{3-2{,}9} = \frac{(3)^2-(2{,}9)^2}{0{,}1} = \frac{9-8{,}41}{0{,}1} = \frac{0{,}59}{0{,}1} = 5{,}9 \text{ toneladas/hora}$$

Para $2{,}99 \leq t \leq 3$, teremos:

$$TVM = \frac{P(3)-P(2{,}99)}{3-2{,}99} = \frac{(3)^2-(2{,}99)^2}{0{,}01} = \frac{9-8{,}9401}{0{,}01} = \frac{0{,}0599}{0{,}01} = 5{,}99 \text{ toneladas/hora}$$

Para $2{,}999 \leq t \leq 3$, teremos:

$$TVM = \frac{P(3)-P(2{,}999)}{3-2{,}999} = \frac{(3)^2-(2{,}999)^2}{0{,}001} = \frac{9-8{,}994001}{0{,}001} = \frac{0{,}005999}{0{,}001} = 5{,}999 \text{ toneladas/hora}$$

Por esses últimos cálculos podemos ver que a taxa de variação média para intervalos de "um instante pouco menor que 3 até o instante 3" também se "aproxima" do valor 6.

Tal resultado permite dizer que, às 3:00 horas, a produção é de 6 toneladas/hora.

TAXA DE VARIAÇÃO INSTANTÂNEA

Note que em cada taxa de variação média que calculamos neste exemplo os denominadores das razões são cada vez mais próximos de zero. Assim sendo, vamos definir agora a taxa de variação instantânea de $f(x)$ em $x = a$ usando limite:

$$TVI = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Voltando ao nosso exemplo para calcularmos a taxa de variação no instante $t = 3$ usando esse limite:

$$TVI = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$a = 3$ horas

$P(t) = t^2$

$P(3) = 3^2 = 9$

$P(3+h) = (3+h)^2$

$(3+h)^2 = (3+h)(3+h)$

$9 + 3h + 3h + h^2$

$9 + 6h + h^2$

$$TVI = \lim_{h \to 0} \frac{P(3+h) - P(3)}{h}$$

$$TVI = \lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 - 9}{h}$$

$$TVI = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{9} + 6h + h^2 - \cancel{9}}{h}$$

$$TVI = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h} \cdot (6+h)}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0} (6+h) = 6 + 0 = 6 \text{ toneladas/hora.}$$

TAXA DE VARIAÇÃO INSTANTÂNEA COMO LIMITE

4º Exemplo: Em uma empresa, considerou-se a produção de computadores como função do tempo e estabeleceu-se

$$P(t) = 2t^2 + 10,$$

onde a produção P é dada em unidades de computadores e o tempo t em horas.

Qual é a taxa de variação instantânea da produção às 2 horas?

$a = 2$

$P(t) = 2t^2 + 10$

$P(2) = 2 \cdot 2^2 + 10 = 18$

$P(2+h) = 2 \cdot (2+h)^2 + 10$

$(2+h)(2+h) = 4 + 2h + 2h + h^2$

$$TVI = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$TVI = \lim_{h \to 0} \frac{P(2+h) - P(2)}{h}$$

$$TVI = \lim_{h \to 0} \frac{2 \cdot (4 + 4h + h^2) + 10 - 18}{h}$$

$$TVI = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{8} + 8h + 2h^2 \cancel{+10} \cancel{-18}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(8 + 2h)}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0} (8 + 2h)$$

$TVI = 8 + 2 \cdot 0 = 8$ computadores/hora f: $y = 2x^2 + 10$

$A = (2, 18)$

g: $-4x + 0.5y = 1$

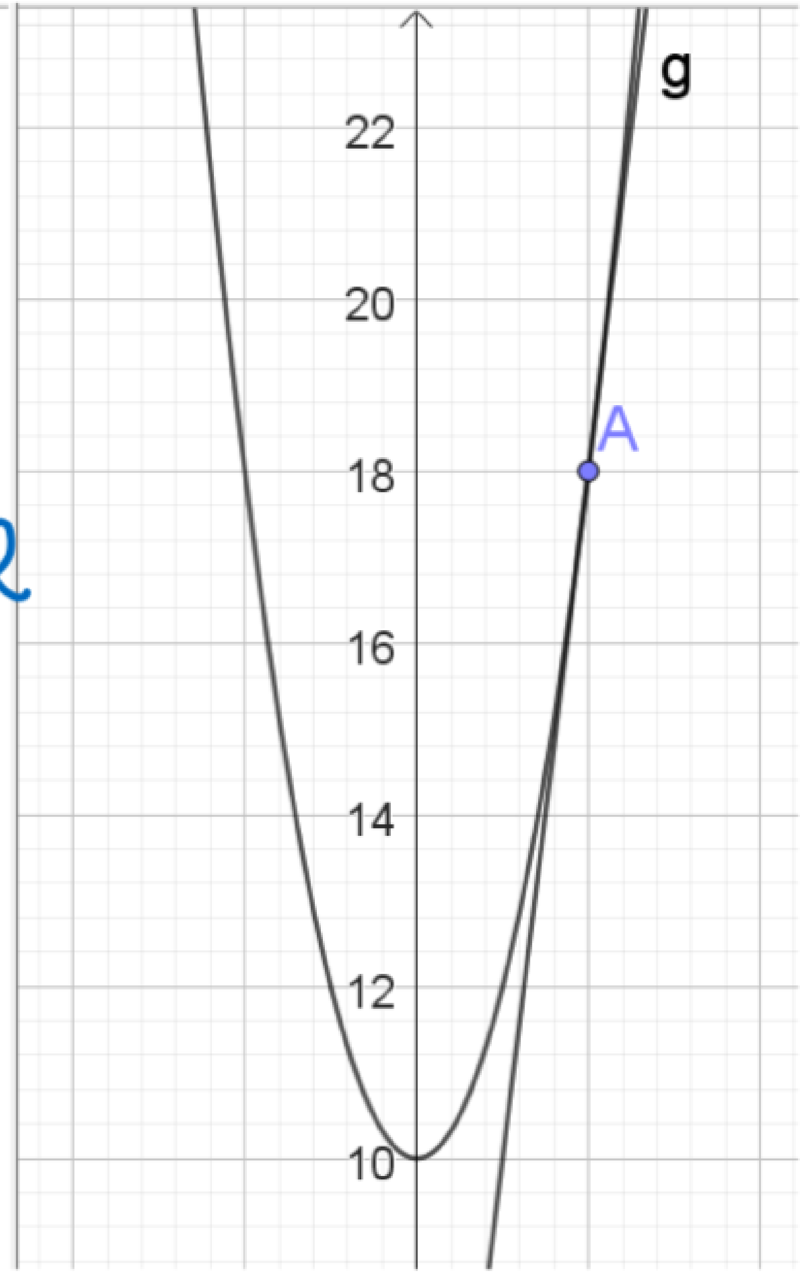
reta tangente

$-4x + 0{,}5y = 1 \quad \cdot 2$

$-8x + y = 2$

$y = 8x + 2$

$m = 8$



TAXA DE VARIAÇÃO INSTANTÂNEA = DERIVADA NO PONTO

A taxa de variação instantânea da função produção no instante $x = 3$ é muito importante e também recebe o nome ***derivada da função*** produção ***no ponto*** $x = 3$. Simbolizamos a taxa de variação instantânea, ou ***derivada***, no ponto $x = 3$ por $f'(3)$.

Assim, de modo geral, a derivada de uma função em um ponto é a taxa de variação instantânea da função no ponto:

$f'(a)$	=	Derivada da função $f(x)$ no ponto $x = a$	=	Taxa de variação instantânea de $f(x)$ em $x = a$	=	$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Logo, a derivada de uma função $f(x)$ no ponto $x = a$ é dada por:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Devemos lembrar que tal limite só existe, ou seja, a derivada no ponto só existe, se os limites laterais resultarem em um mesmo número. Caso isso não ocorra, o limite no $x = a$ não existe e, por consequência, a derivada não existe.

TAXA DE VARIAÇÃO INSTANTÂNEA = DERIVADA NO PONTO

5º Exemplo: Obtenha o coeficiente angular da reta tangente à curva $y = x^2$ no ponto A(2,4).

f: y = x²

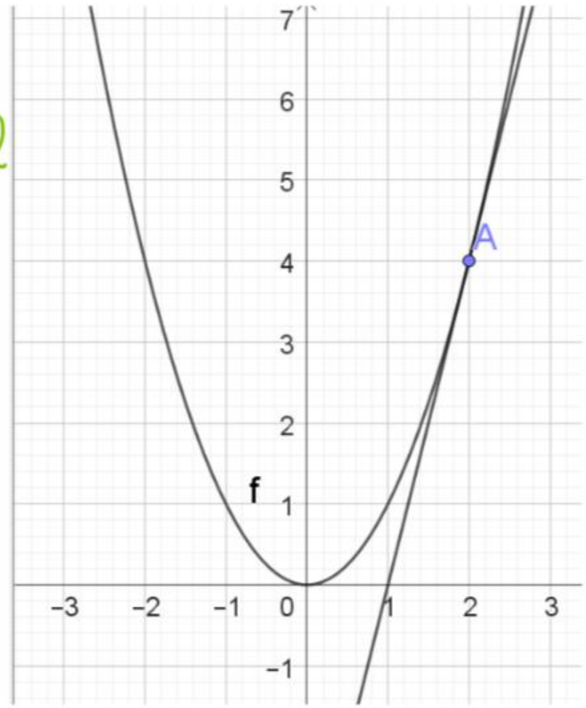
A = (2, 4)

g: -2x + 0.5y = -2 $\cdot 2$

$-4x + y = -4$

$y = 4x - 4$

$m = 4$



$$TVI = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

$$TVI = \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2 - f(2)}{h}$$

$$TVI = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{4} + 4h + h^2 - \cancel{4}}{h}$$

$$TVI = \lim_{h \to 0} (4+h) = 4 + 0 = 4$$

TAXA DE VARIAÇÃO INSTANTÂNEA = DERIVADA NO PONTO

3º Exemplo: Calcule a taxa de variação instantânea da função $y = x^2$ no ponto $A(3,9)$.

DERIVADA NO PONTO

4º Exemplo: Calcule a derivada de $f(x) = x^2 + x$ no ponto $P(2,6)$.