LIMITES INFINITOS E LIMITES NO INFINITO

Limites infinitos

Seja a função f definida por $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ para todo x real e $x \neq 1$.

Atribuindo a x valores próximos de 1, à esquerda de 1, temos:

x	0	0,5	0,75	0,9	0,99	0,999
f(x)	1	4	16	100	10 000	1 000 000

e atribuindo a x valores próximos de 1, à direita de 1, temos:

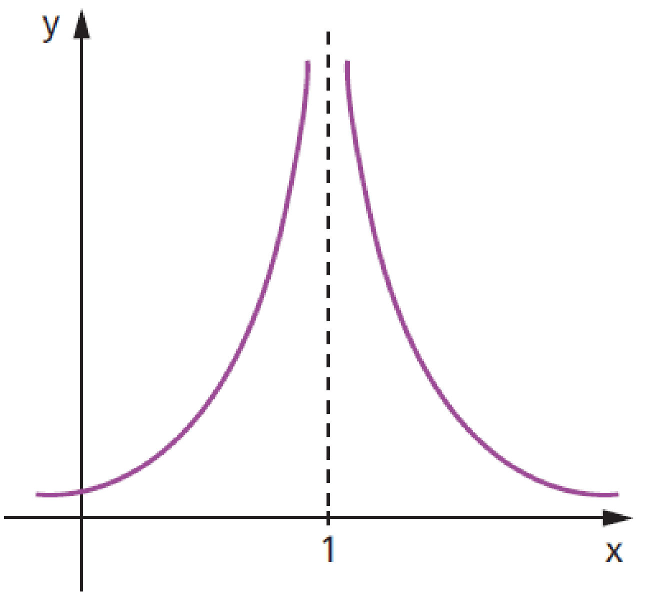
x	2	1,5	1,25	1,1	1,01	1,001
f(x)	1	4	16	100	10 000	1 000 000

LIMITES INFINITOS E LIMITES NO INFINITO

Observamos nas duas tabelas que os valores da função são cada vez maiores, à medida que x se aproxima de 1. Em outras palavras, podemos tornar f(x) tão grande quanto desejarmos, isto é, maior que qualquer número positivo, tomando valores para x bastante próximos de 1, e escrevemos:

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

em que o símbolo "$+\infty$" lê-se "mais infinito" ou "infinito positivo"



LIMITES INFINITOS E LIMITES NO INFINITO

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{(1-1)^2} = \frac{1}{0} \begin{cases} \rightarrow \nexists \\ \rightarrow +\infty \\ \rightarrow -\infty \end{cases}$$

		1		
	+		+	1
	+		+	$(x-1)^2$
	+		+	$f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$

são iguais

LIMITES INFINITOS E LIMITES NO INFINITO

$$\lim_{x \to 1} \frac{(-10)}{x-1} = \nexists$$

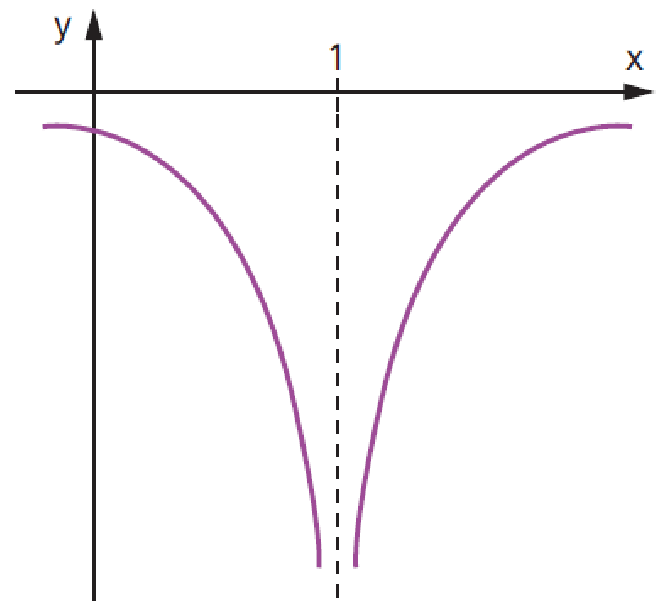
	$x<1$	$x>1$
-10	$-$	$-$
$x-1$	$-$	$+$
$f(x)$	$+$	$-$

são diferentes

LIMITES INFINITOS E LIMITES NO INFINITO

47. Tomemos agora a função g como sendo o oposto da função f, isto é, $g(x) = -f(x) = \dfrac{-1}{(x-1)^2}$ definida para todo x real e $x \neq 1$.

Os valores da função g são opostos dos valores da função f. Assim, para a função g, quando x se aproxima de 1, os valores de $g(x)$ decrescem ilimitadamente. Em outras palavras, podemos tornar os valores de $g(x)$ tanto menores quanto desejarmos, isto é, menores que qualquer número negativo, tomando valores de x bastante próximos de 1, e escrevemos:



$$\lim_{x \to 1} \frac{-1}{(x-1)^2} = -\infty$$

o símbolo "$-\infty$" lê-se "menos infinito" ou "infinito negativo".

LIMITES INFINITOS E LIMITES NO INFINITO

Consideremos agora a função *h* definida por $h(x) = \dfrac{1}{x - 1}$ para todo *x* real e $x \neq 1$.

Atribuindo a *x* valores próximos de 1, porém menores que 1, temos:

x	0	0,5	0,75	0,9	0,99	0,999
h(x)	−1	−2	−4	−10	−100	−1 000

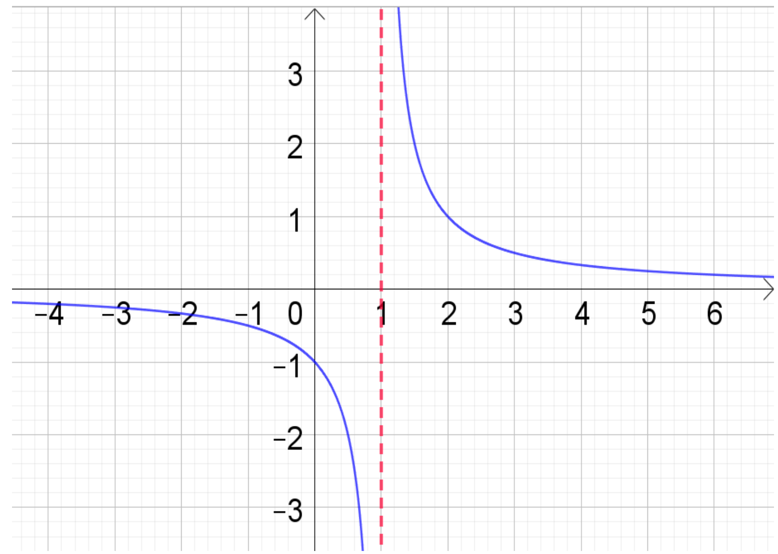
e atribuindo a *x* valores próximos de 1, porém maiores que 1, temos:

x	2	1,5	1,25	1,1	1,01	1,001
h(x)	1	2	4	10	100	1 000

LIMITES INFINITOS E LIMITES NO INFINITO

Observemos que se x assume valores próximos de 1, à esquerda de 1, os valores da função decrescem ilimitadamente e se x assume valores próximos de 1, à direita de 1, então os valores da função crescem ilimitadamente. Estamos considerando os limites laterais que são "infinitos" e escrevemos:

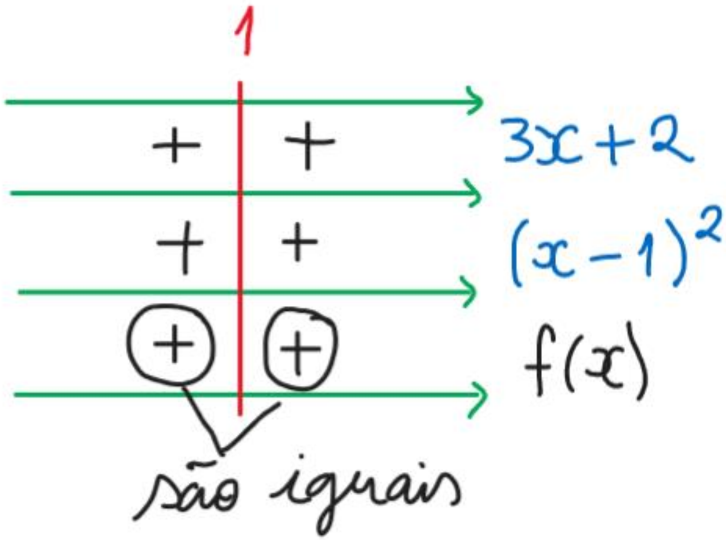
$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty \text{ e } \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$$



EXERCÍCIOS

1 Calcule, se existir, cada limite a seguir:

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x+2}{(x-1)^2} = \frac{3.1+2}{(1-1)^2} = \frac{5}{0} \begin{cases} \to \nexists \\ \to +\infty \\ \to -\infty \end{cases}$$



$$\lim_{x\to 1}\frac{3x+2}{(x-1)^2} = +\infty$$

EXERCÍCIOS

1 Calcule, se existir, cada limite a seguir:

$$\lim_{x\to 2}\frac{1-x}{(x-2)^2} = \frac{1-2}{(2-2)^2} = \frac{-1}{0} \begin{cases} \to \nexists \\ \to +\infty \\ \to -\infty \end{cases}$$

$1-2{,}1 = -1{,}1$

$1-1{,}9 = -0{,}9$

	$x<2$	$x>2$
$1-x$	$-$	$-$
$(x-2)^2$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	$-$

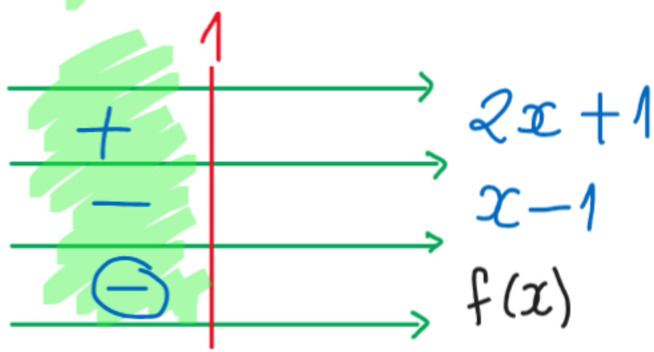
são iguais

$$\lim_{x\to 2}\frac{1-x}{(x-2)^2} = -\infty$$

EXERCÍCIOS

1 Calcule, se existir, cada limite a seguir:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{2x+1}{x-1} = \frac{2\cdot 1+1}{1-1} = \frac{3}{0} = -\infty$$



EXERCÍCIOS

1 Calcule, se existir, cada limite a seguir:

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - x - 2}{(x-1)^2} = \frac{3 \cdot 1^2 - 1 - 2}{(1-1)^2} = \frac{3-1-2}{0^2} = \frac{0}{0} = \,?$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - x - 2}{(x-1)^2} = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)} \cdot (3x+2)}{\cancel{(x-1)} \cdot (x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{3x+2}{x-1} = \frac{3 \cdot 1 + 2}{1-1} = \frac{5}{0} \begin{cases} \to +\infty \\ \to -\infty \end{cases} \nexists$$

	$x < 1$	$x > 1$
$3x+2$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$+$
	$-$	$+$

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x+2}{x-1} = \nexists$$

EXERCÍCIOS

2 Calcule:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x - 4}{(x - 2)^2}$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x + 3}{(x - 1)^2}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - 3x}{(x - 1)^2}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^2 - 5x + 2}{x^2}$

e) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{5x + 2}{|x + 1|}$

f) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{2x^2 + 5x - 3}{|x + 2|}$

3 Calcule:

a) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{2x + 1}{x - 1}$

b) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2x + 1}{x - 1}$

LIMITES INFINITOS E LIMITES NO INFINITO

Limites no infinito

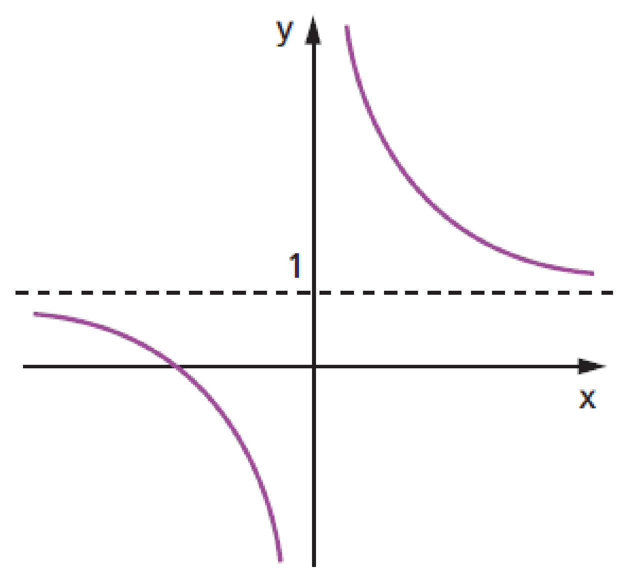
Seja a função *f* definida por $f(x) = \dfrac{x + 2}{x}$ para todo *x* real e $x \neq 0$. Atribuindo a *x* os valores 1, 5, 10, 100, 1 000, 10 000 e assim por diante, de tal forma que *x* cresça ilimitadamente, temos:

x	1	5	10	100	1 000	10 000
f(x)	3	1,4	1,2	1,02	1,002	1,0002

Observamos que, à medida que *x* cresce através de valores positivos, os valores da função *f* se aproximam cada vez mais de 1, isto é, podemos tornar f(x) tão próximo de 1 quanto desejarmos, se atribuirmos a *x* valores cada vez maiores.

Escrevemos, então:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + 2}{x} = 1$$



LIMITES INFINITOS E LIMITES NO INFINITO

Consideremos novamente a função $f(x) = \dfrac{x + 2}{x}$. Atribuindo a x os valores -1, -5, -10, -100, $-1\,000$, $-10\,000$ e assim por diante, de tal forma que x decresça ilimitadamente, temos:

x	-1	-5	-10	-100	-1000	$-10\,000$
f(x)	-1	0,6	0,8	0,98	0,998	0,9998

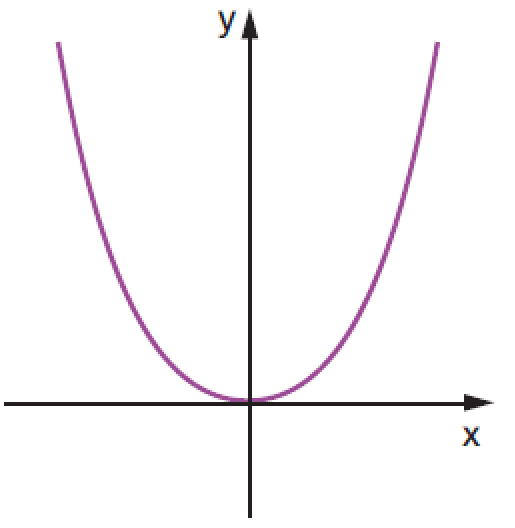
Observamos que, à medida que x decresce com valores negativos, os valores da função se aproximam cada vez mais de 1, isto é, podemos tornar $f(x)$ tão próximo de 1 quanto desejarmos, se atribuirmos a x valores cada vez menores. Escrevemos, então:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x + 2}{x} = 1$$

LIMITES INFINITOS E LIMITES NO INFINITO

Seja a função $f(x) = x^2$, definida para todo x real.

Atribuindo a x os valores 1, 5, 10, 100, 1 000 e assim sucessivamente, de tal forma que x cresça ilimitadamente, temos:



x	1	5	10	100	1 000
f(x)	1	25	100	10 000	1 000 000

Observamos que, à medida que x cresce através de valores positivos, os valores da função também crescem ilimitadamente. Em outras palavras, dizemos que podemos tornar $f(x)$ tão grande quanto desejarmos, isto é, maior que qualquer número positivo, tomando para x valores suficientemente grandes, e escrevemos:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

EXERCÍCIOS

1 Encontre:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (4x^2 - 7x + 3)$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-3x^3 + 2x^2 - 5x + 3)$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} (5x^3 - 4x^2 - 3x + 2)$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} (3x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 5x - 4)$

2 Encontre:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x + 2}{5x - 1}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5 - 4x}{2x - 3}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^2 - 4x + 3}{3x + 2}$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x - 1}{3x^2 + 5x - 2}$

3 Encontre:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3 - 2x}{5x + 1}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x - 3}{3x + 2}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 4}{x + 1}$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 3x + 4}{3x^3 + 5x^2 - 6x + 2}$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 + 4}{8x^3 - 1}$

2 Encontre:

a) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{3x+2}{5x-1} = \dfrac{3\cdot(+\infty)+2}{5\cdot(+\infty)-1} = \dfrac{+\infty}{+\infty} = ?$

$$\frac{3x+2}{5x-1} = \frac{\frac{3x}{x}+\frac{2}{x}}{\frac{5x}{x}-\frac{1}{x}} = \frac{3+\frac{2}{x}}{5-\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3+\frac{2}{x}}{5-\frac{1}{x}} = \frac{3+0}{5-0} = \frac{3}{5}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = \frac{2}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

c) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^2 - 4x + 3}{3x + 2} = \frac{+\infty}{+\infty} = ?$$

$$\frac{5x^2 - 4x + 3}{3x + 2} = \frac{\frac{5x^2}{x} - \frac{4x}{x} + \frac{3}{x}}{\frac{3x}{x} + \frac{2}{x}} = \frac{5x - 4 + \frac{3}{x}}{3 + \frac{2}{x}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5x - 4 + \frac{3}{x}}{3 + \frac{2}{x}} = \frac{+\infty - 4 + 0}{3 + 0} = \frac{+\infty}{3} = +\infty$$

MACETE : $$\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^2}{3x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{5x}{3} = \frac{5.(+\infty)}{3} = +\infty$$