derivada de e^x $\Rightarrow$ $y = e^x$ $\quad y' = e^x$

derivada de polinômio $\Rightarrow$ $y = x^2 + x$ $\quad y' = 2x + 1$

regra do produto $\Rightarrow$ $y = x \cdot e^x$

$$y' = x \cdot (e^x)' + e^x \cdot (x)'$$

$$y' = x \cdot e^x + e^x \cdot 1$$

$$y' = e^x \cdot (x+1)$$

regra do quociente $\Rightarrow$ $y = \dfrac{x+3}{2x-5}$

$$y' = \frac{(2x-5)\cdot(x+3)' - (x+3)\cdot(2x-5)'}{(2x-5)^2}$$

$$y' = \frac{(2x-5)\cdot 1 - (x+3)\cdot 2}{(2x-5)^2}$$

$$y' = \frac{2x-5-2x-6}{(2x-5)^2}$$

$$y' = -\frac{11}{(2x-5)^2}$$

FUNÇÃO COMPOSTA

Considere as funções:

$f(x) = 2x$

$h(x)= f(g(x)) = 2g(x) = 2(x^2 + 1) = 2x^2 + 2$

$g(x) = x^2 + 1$

$h(x) = 2x^2 + 2$

Podemos afirmar que $h(x) = f(g(x))$ é uma função composta.

A função $f(g(x))$ também pode ser representada por $f \circ g$.

Exemplo: $h(x) = e^{(x-3)}$ é uma função composta. Nesse caso, teremos que:

I) a função de dentro seria $g(x) = x - 3$

II) a função de fora seria $f(x) = e^x$

FUNÇÃO COMPOSTA

$$f(x) = e^{5x-6}$$

Função de dentro: g = $5x - 6$

Função de fora: f = e^x

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 9}$$

Função de dentro: g = $x^2 - 9$

Função de fora: f = $\sqrt[3]{x}$

REGRA DA CADEIA

Suponha que você precise derivar a função

$$F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

As fórmulas de derivação que você aprendeu nas seções precedentes deste capítulo não lhe permitem calcular $F'(x)$.

Observe que F é uma função composta. Na realidade, se assumirmos $y = f(u) = \sqrt{u}$ e $u = g(x) = x^2 + 1$, então poderemos escrever $y = F(x) = f(g(x))$, ou seja, $F = f \circ g$. Sabemos como derivar ambas, f e g, então seria útil ter uma regra que nos dissesse como achar a derivada de $F = f \circ g$ em termos das derivadas de f e g.

O resultado é que a derivada da função composta $f \circ g$ é o produto das derivadas de f e g.

A Regra da Cadeia Se g for derivável em x e f for derivável em $g(x)$, então a função composta $F = f \circ g$ definida por $F(x) = f(g(x))$ é derivável em x e F' é dada pelo produto

$$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Na notação de Leibniz, se $y = f(u)$ e $u = g(x)$ forem funções deriváveis, então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

REGRA DA CADEIA

A Regra da Cadeia pode ser escrita na notação linha

2 $$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

ou, se $y = f(u)$ e $u = g(x)$, na notação de Leibniz:

3 $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

OBSERVAÇÃO Ao usarmos a Regra da Cadeia, trabalharemos de fora para dentro. A Fórmula 2 diz que *derivamos a função f de fora* [*na função de dentro* $g(x)$] *e, então, que multiplicamos pela derivada da função de dentro*.

$$\frac{d}{dx}\underbrace{f}_{\substack{\text{função}\\ \text{de fora}}}\underbrace{(g(x))}_{\substack{\text{avaliada}\\ \text{na função}\\ \text{de dentro}}} = \underbrace{f'}_{\substack{\text{derivada}\\ \text{da função}\\ \text{de fora}}}\underbrace{(g(x))}_{\substack{\text{avaliada}\\ \text{na função}\\ \text{de dentro}}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\substack{\text{derivada}\\ \text{da função}\\ \text{de dentro}}}$$

Na notação linha, podemos ainda escrever:

$[f(g(x))]' = [f(u)]' = f'(u) \cdot u'$, onde $u = g(x)$.

REGRA DA CADEIA

Regra da Cadeia

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$y' = [f(u)]' \cdot u'$$

$$y = e^{5x-6}$$

$$u = 5x - 6 \Rightarrow u' = 5$$

$$y = e^{u} \Rightarrow y' = (e^{u})' \cdot u'$$

$$y' = e^{u} \cdot 5$$

$$y' = 5 \cdot e^{5x-6}$$

Exemplo 1 Encontre y' se $y = \sqrt{x^2+1}$.

$u = x^2 + 1 \Rightarrow u' = 2x$

$y = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$

$\frac{1}{2} - \frac{1}{1} = \frac{1-2}{2} = -\frac{1}{2}$

usando a regra da cadeia:

$y' = (u^{\frac{1}{2}})' \cdot u'$

$y' = \frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}-1} \cdot 2x \Rightarrow y' = \frac{1}{2} \cdot (x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x$

$y' = x \cdot (x^2+1)^{-\frac{1}{2}}$ ou $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Exemplo 2 Derive $y = e^{x^2}$.

$u = x^2 \Rightarrow u' = 2x$

$y = e^u \Rightarrow y' = (e^u)' \cdot u'$

$y' = e^u \cdot 2x$

$y' = 2x \cdot e^{x^2}$

REGRA DA CADEIA

Exemplo 3 Derive $y = (x^3 - 1)^{100}$.

$u = x^3 - 1 \quad \Rightarrow \quad u' = 3x^2$

$y = u^{100} \quad \Rightarrow \quad y' = (u^{100})' \cdot u'$

$y' = 100 \cdot u^{99} \cdot 3x^2$

$y' = 300x^2 \cdot (x^3 - 1)^{99}$

REGRA DA CADEIA

Exemplo 4 Derive $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+x+1}}$

$u = x^2 + x + 1 \Rightarrow u' = 2x + 1$

$y = \frac{1}{\sqrt[3]{u}} = \frac{1}{u^{\frac{1}{3}}} = u^{-\frac{1}{3}}$

Regra da cadeia

$-\frac{1}{3} - \frac{1}{1} = \frac{-1-3}{3}$

$y' = \left(u^{-\frac{1}{3}}\right)' \cdot u'$

$y' = -\frac{1}{3} u^{-\frac{1}{3}-1} \cdot (2x+1)$

$y' = -\frac{1}{3} \cdot u^{-\frac{4}{3}} \cdot (2x+1)$

$y' = -\frac{1}{3} \cdot (x^2+x+1)^{-\frac{4}{3}} \cdot (2x+1)$

Exemplo 5 Derive $y = \left(\frac{x-2}{2x+1}\right)^9$.

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{g \cdot f' - f \cdot g'}{g^2}$$

$$u = \frac{x-2}{2x+1} \xrightarrow{\text{regra do quociente}} u' = \frac{(2x+1)\cdot(x-2)' - (x-2)\cdot(2x+1)'}{(2x+1)^2}$$

$$u' = \frac{(2x+1)\cdot 1 - (x-2)\cdot 2}{(2x+1)^2} = \frac{\cancel{2x}+1-\cancel{2x}+4}{(2x+1)^2} = \frac{5}{(2x+1)^2}$$

$$y = u^9 \xrightarrow{\text{regra da cadeia}} y' = (u^9)' \cdot u'$$

$$y' = 9 \cdot u^8 \cdot \frac{5}{(2x+1)^2} \Rightarrow y' = \frac{45}{(2x+1)^2} \cdot \left(\frac{x-2}{2x+1}\right)^8$$

$$y' = \frac{45 \cdot (x-2)^8}{(2x+1)^{10}}$$

REGRA DA CADEIA

Exemplo 5 Derive $y = \left(\frac{x-2}{2x+1}\right)^9$.

Exemplo 6 Derive $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$.

PROBLEMAS PROPOSTOS

Encontre a derivada da função.

7. $F(x) = (x^4 + 3x^2 - 2)^5$

8. $F(x) = (4x - x^2)^{100}$

9. $F(x) = \sqrt[4]{1 + 2x + x^3}$

10. $f(x) = (1 + x^4)^{2/3}$

11. $g(t) = \dfrac{1}{(t^4 + 1)^3}$

13. $y = \cos(a^3 + x^3)$

Onde a é uma constante.

15. $y = xe^{-kx}$

17. $f(x) = (2x - 3)^4(x^2 + x + 1)^5$

18. $g(x) = (x^2 + 1)^3(x^2 + 2)^6$

19. $h(t) = (t + 1)^{2/3}(2t^2 - 1)^3$

20. $F(t) = (3t - 1)^4(2t + 1)^{-3}$

21. $y = \left(\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)^3$

22. $f(s) = \sqrt{\dfrac{s^2 + 1}{s^2 + 4}}$

Observação:
(cos x)’ = - sen x