TAXA DE VARIAÇÃO INSTANTÂNEA = DERIVADA NO PONTO

A taxa de variação instantânea da função produção no instante $x = 3$ é muito importante e também recebe o nome ***derivada da função*** produção ***no ponto*** $x = 3$. Simbolizamos a taxa de variação instantânea, ou ***derivada***, no ponto $x = 3$ por $f'(3)$.

Assim, de modo geral, a derivada de uma função em um ponto é a taxa de variação instantânea da função no ponto:

$f'(a)$	$=$	Derivada da função $f(x)$ no ponto $x = a$	$=$	Taxa de variação instantânea de $f(x)$ em $x = a$	$=$	$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Logo, a derivada de uma função $f(x)$ no ponto $x = a$ é dada por:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Devemos lembrar que tal limite só existe, ou seja, a derivada no ponto só existe, se os limites laterais resultarem em um mesmo número. Caso isso não ocorra, o limite no $x = a$ não existe e, por consequência, a derivada não existe.

6º Exemplo: Calcule a taxa de variação instantânea da função $y = x^2$ no ponto A(3,9).

$$TVI = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

$$f(x) = x^2$$

$$f(3) = 3^2 = 9$$

$$f(3+h) = (3+h)^2$$

$$f(3+h) = 9 + 6h + h^2$$

$$TVI = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{9} + 6h + h^2 \cancel{- 9}}{h}$$

$$TVI = \lim_{h \to 0} (6 + h) = 6 + 0 = 6$$

DERIVADA NO PONTO

7º Exemplo: Calcule a derivada da função $y = x^2 + x$ no ponto A(2,6).

$$y'(2) = TVI = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

$$f(x) = x^2 + x$$

$$f(2) = 2^2 + 2 = 6$$

$$f(2+h) = (2+h)^2 + 2 + h$$

$$f(2+h) = 4 + 4h + h^2 + 2 + h$$

$$f(2+h) = 6 + 5h + h^2$$

$$y'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{6} + 5h + h^2 \cancel{- 6}}{h}$$

$$y'(2) = \lim_{h \to 0} (5 + h) = 5 + 0 = 5$$

DERIVADA COMO UMA FUNÇÃO

Na seção precedente consideramos a derivada de uma função f em um número fixo a:

1 $$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Aqui mudamos nosso ponto de vista e deixamos o número a variar. Se substituirmos a na Equação 1 por uma variável x, obtemos

2 $$\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}}$$

Dado qualquer número x para o qual esse limite exista, atribuímos a x o número $f'(x)$. Assim, podemos considerar f' como uma nova função, chamada **derivada de f** e definida pela Equação 2. Sabemos que o valor de f' em x, $f'(x)$, pode ser interpretado geometricamente como a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x, f(x))$.

DERIVADA COMO UMA FUNÇÃO

I) Função constante

Derivada de função constante = zero.

$$f(x) = 2023$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$f(x) = 2023$

$f(x+h) = 2023$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{2023 - 2023}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

II) Função potência : $y = x^n$

Exemplo: $f(x) = x$ então $f(x+h) = x+h$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x} + h - \cancel{x}}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1$$

Exemplo: $f(x)=x^2$ então $f(x+h)=(x+h)^2=x^2+2xh+h^2$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^2}+2xh+h^2\cancel{-x^2}}{h}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}}=\lim_{h\to 0}(2x+h)$$

$$f'(x)=2x+0=2x$$

Exemplo: $f(x)=x^3$ então $f(x+h)=(x+h)^3=x^3+3x^2\cdot h+3\cdot x\cdot h^2+h^3$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^3}+3x^2h+3xh^2+h^3\cancel{-x^3}}{h}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2)=3x^2+3x\cdot 0+0^2=3x^2$$

Derivada de função potência

A derivada de $y=x^n$ é $y'=n\cdot x^{n-1}$.

$y = x^{-2}$ $\qquad$ $y' = -2\cdot x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$

$y = \frac{1}{x} \Rightarrow y = x^{-1}$ $\qquad$ $y' = -1\,x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

$\frac{1}{3}$

$y = \sqrt[3]{x^2} \Rightarrow y = x^{\frac{2}{3}}$ $\qquad$ $y' = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

$\frac{2}{3} - \frac{1}{1} = \frac{2-3}{3} = -\frac{1}{3}$

Exemplo: Calcule a derivada de f(x) = 1/x no ponto P(3,1/3).

$$f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{1} = x^{-1} \qquad y = x^{n} \Rightarrow y' = n \cdot x^{n-1}$$

$$f'(x) = -x^{-2} \Rightarrow f'(3) = -3^{-2} = -\left(\frac{1}{3}\right)^{2} = -\frac{1}{9}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^{2}} \Rightarrow f'(3) = -\frac{1}{3^{2}} = -\frac{1}{9}$$

Exemplo: Calcule a derivada de:

a) $y = 6x^2$ $\Rightarrow y' = 6 \cdot 2x = 12x$

$(x^2)' = 2x$

$y = 4x^2 + 2x^2$

$y' = 4 \cdot 2x + 2 \cdot 2x$

$y' = 8x + 4x$

$y' = 12x$

b) $y = -3x^7$ $\Rightarrow y' = -3 \cdot 7x^6 = -21x^6$

$(x^7)' = 7x^6$