

Sestavljene Bezierove krivulje

1. *Odvod Bezierove krivulje.* Bezierova krivulja je podana s kontrolnimi točkami b_0, b_1, \dots, b_n . Sestavite funkcijo `bezier_der`, ki s pomočjo de Casteljauovega algoritma izračuna tangentni vektor dane Bezierjeve krivulje pri parametru t .
2. *Interpolacija točk s kubičnim C^1 zlepkom.* Dane so delilne točke u_i intervala $[u_0, u_N]$ in zaporedji interpolacijskih točk p_j in pripadajočih tangentnih vektorjev v_j , $j = 0, 1, \dots, N$. Iščemo C^1 zvezni kubični zlepek $s: [u_0, u_N] \rightarrow \mathbb{R}^2$, ki interpolira točke in tangentne vektorje v danih delilnih točkah, natančneje

$$\begin{aligned}s(u_j) &= p_j, \\ s'(u_j) &= v_j,\end{aligned}$$

za $j = 0, 1, \dots, N$.

Naj bo s_i Bezierova krivulja stopnje 3, ki predstavlja i -ti kos sestavljene krivulje. Parametrizirana je na intervalu $[u_i, u_{i+1}]$ in določena s kontrolnimi točkami b_{3i+k} , $k = 0, 1, 2, 3$. Interpolacijski pogoji za točke so izpolnjeni, če velja

$$b_{3i} = p_i \quad \text{in} \quad b_{3i+3} = p_{i+1}.$$

Da krivulja interpolira tangentne vektorje, mora veljati

$$b_{3i+1} = b_{3i} + \frac{\Delta_i}{3} v_i, \quad i = 0, 1, \dots, N-1,$$

$$b_{3i+2} = b_{3i+3} - \frac{\Delta_i}{3} v_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1.$$

NALOGA

Sestavite program `C1CubicSpline`, ki izračuna kontrolne točke iskanega kubičnega zlepka. Skupaj s kontrolnim poligonom narišite dobljeno sestavljeno Bezierovo krivuljo.

3. *Parametrizacija sestavljene krivulje.* Na obliko krivulje, ki poteka skozi interpolacijske točke p_0, p_1, \dots, p_m in je sestavljena iz m kosov, parametriziranih nad delitvijo

$$u_0 < u_1 < \dots < u_m,$$

vpliva izbira parametrov delitve. Če za interpolacijske točke p_j , izberemo delilne točke kot

$$u_j = u_{j-1} + \|p_j - p_{j-1}\|^\alpha,$$

potem pravimo, da smo izbrali α -parametrizacijo. Začetno delilno točko u_0 ponavadi postavimo na 0. Če izberemo $\alpha = 0$, dobimo *enakomerno* parametrizacijo, ki je neodvisna od podatkov. Pri izbiri $\alpha = 1$ dobimo *tetivno* in pri $\alpha = 1/2$ *centripetalno* parametrizacijo.

NALOGA

Sestavite testno skripto, ki preveri obnašanje sestavljene Bezierjeve krivulje pri različnih parametrizacijah. Pri izračunu parametrizacij uporabite interpolacijske točke

$$P_0(1, 1), P_1(2, -2), P_2(3, 4), P_3(4, 6), P_4(2, -5)$$

in pripadajoče tangentne vektorje

$$v_0(1, 1), v_1(1, -1), v_2(1, -3), v_3(1, -1), v_4(-1, 1).$$